Chap 1. Algorithms:

Efficiency, Analysis, and Order

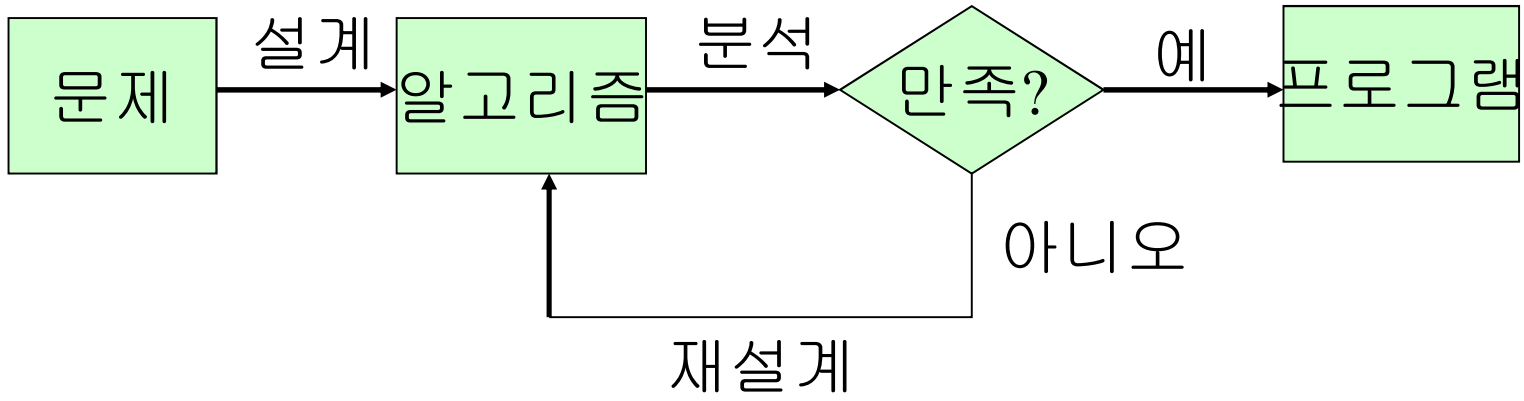
1. **Algorithms**
2. **The Importance of Developing Efficient Algorithms**
3. **Analysis of Algorithms**
4. **Order**

This material is prepared by Prof. Jaeyoung Choi, Soongsil University.

Overview

- **What is an algorithm ?**
  - Techniques for solving problems using a computer
    - Technique – not a programming style or a programming language, but the approach or methodology used to solve a problem
    - Applying a technique to a problem results in a step-by-step procedure
  - Important characteristics - ***efficiency***, ***analysis***, and ***order***

- 프로그램 설계 과정



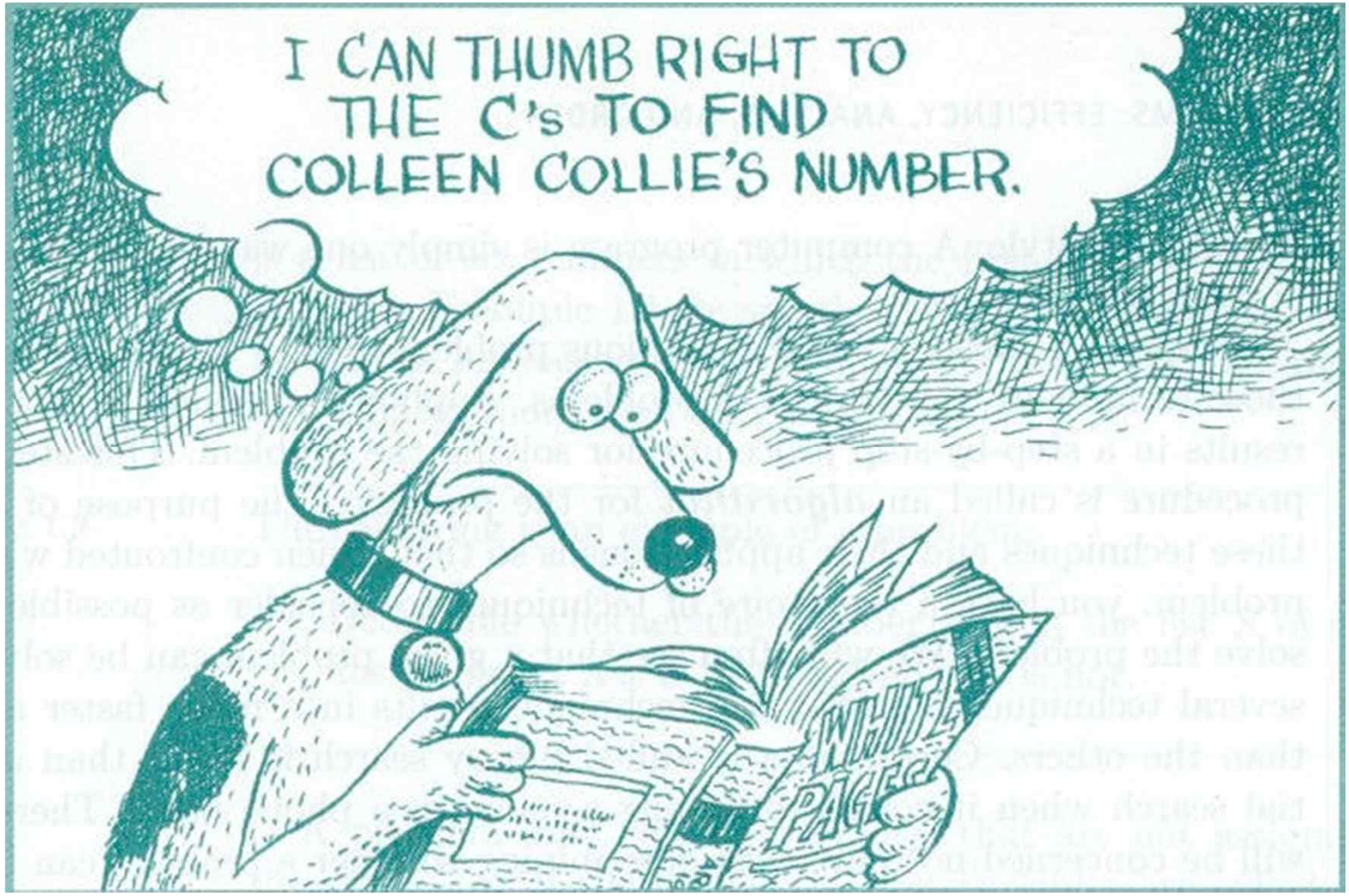
Overview

- **Algorithm**
  - An algorithm is a step-by-step procedure to solve a problem
  - But making sure the developer is using the most efficient algorithm is very crucial no matter how fast computers become or how cheap memory gets
  - How efficiently an algorithm solves a problem?

    ➔ Need to analyze the algorithm

- **Analysis ➔ Computational Complexity** (Order)
  - How efficiently an algorithm solves a problem
  - Order helps group algorithms according to their eventual behavior
  - Time/storage complexity
    - Time – CPU cycles
    - Storage - memory

알고리즘의 예


I CAN THUMB RIGHT TO
THE C's TO FIND
COLLEEN COLLIE'S NUMBER.
WHITE
PAGES

알고리즘의 예

- 문제: 전화번호부에서 "COLLEEN COLLIE"의 전화번호 찾기

- 알고리즘
  - **Sequential Search (순차검색)**
    - 첫 쪽부터 'Colleen Collie'라는 이름이 나올 때까지 순서대로 찾는다.
  - **Modified Binary Search (수정된 이분검색)**
    - 전화번호부는 알파벳 순으로 되어있으므로 먼저 "C"가 있을 만한 곳으로 넘겨본 후 앞뒤로 뒤적여가며 찾는다.

- 분석: 어떤 알고리즘이 더 좋은가?

문제의 표기 방법

- Definition of terms (See Ex.1.1 - 1.5)
  - Problem
    - a question to which we seek an answer
  - List
    - a collection of items arranged in a particular sequence
  - Parameter
    - variables that are not assigned specific values in the statement of the problem
  - Instance
    - specific assignment of values to the parameter
  - Solution
    - the answer to the question as an instance of a problem

문제의 표기 방법 (예: 검색)

- Problem
  - n개의 수로 된 리스트 S 에 x라는 수가 있는지 알아내시오.
    x가 S에 있으면 "예", 없으면 "아니오"로 답하시오.

  - Parameter: S, n, x
  - Inputs: S = [10, 7, 11, 5, 3, 8], n = 6, x = 5
  - Outputs: *"Yes"*

  - How do you find the solution?
    - With intuition -> If n=100?
    - With a procedure (See Ex. 1.5)

알고리즘의 표기

- 자연어: 한글 또는 영어
  - Drawback 1 : difficult to write a complex problem
  - Drawback 2 : difficult to understand the algorithm
  - Drawback 3 : not clear how to create a computer language

- 프로그래밍언어: C, C++, Java, ML 등

- 의사코드 (Pseudo-code)
  - 직접 실행할 수 있는 프로그래밍언어는 아니지만,
    거의 실제 프로그램에 가깝게 계산과정을 표현할 수 있는 언어

- 알고리즘은 보통 의사코드로 표현한다.
- 이 강의/교재에서는 C++에 가까운 의사코드를 사용한다.

C++와 의사코드의 차이점 (1)

- 배열 인덱스의 범위에 제한 없음
  - C++는 반드시 0부터 시작
  - 의사코드는 임의의 값 사용 가능

- 프로시저의 파라미터에 2차원 배열 크기의 가변성 허용
  - 예: `void pname(A[][]) { … }`

- 지역배열에 변수 인덱스 허용
  - 예: `keytype S[low..high];`

C++와 의사코드의 차이점 (2)

- 수학적 표현식 허용
  - `low <= x && x <= high` ⇒ `low ≤ x ≤ high`
  - `temp = x; x = y; y = temp` ⇒ `exchange x and y`

- C++에 없는 타입 사용 가능
  - `index`: 첨자로 사용되는 정수 변수
  - `number`: 정수(int) 또는 실수(float) 모두 사용 가능
  - `bool`: "true"나 "false" 값을 가질 수 있는 변수

C++와 의사코드의 차이점 (3)

- 제어 구조
  - `repeat (n times) { … }`
- 프로시저와 함수
  - 프로시저: `void pname(…) {…}`
  - 함수: `returntype fname (…) {… return x;}`
- 참조 파라미터(reference parameter)를 사용하여 프로시저의 결과값 전달
  - 배열: 참조 파라미터로 전달
  - 기타: 데이터타입 이름 뒤에 &를 붙임
  - const 배열: 전달되는 배열의 값이 불변

Basic Structure

- Definition part
  - Problem, Input, Output에 관한 설명 기술:
- Procedure part

```
ReturnType procedureName(parameters) {

        Body;

}
```

- See Algorithm 1.1, 1.2, 1.3, 1.4

Sequential Search (순차검색)

- 문제: 크기가 n인 배열 S에 x가 있는가?
  - 입력 (파라미터): (1) 양수 n, (2) 배열 $S[1..n]$, (3) 키 x
  - 출력: x가 S의 어디에 있는지의 위치. 만약 없으면 0.

- 알고리즘 (자연어):
  - x와 같은 아이템을 찾을 때까지 S에 있는 모든 아이템을 차례로 검사한다.
  - 만일 x와 같은 아이템을 찾으면 S 안의 위치 값을 전달하고 S를 모두 검사하고도 찾지 못하면 0을 전달한다.

Sequential Search Algorithm

```
void seqsearch(int n,                          // 입력(1)
               const keytype S[],              //     (2)
               keytype x,                      //     (3)
               index& location) {              // 출력
    location = 1;
    while (location <= n && S[location] != x)
        location++;
    if (location > n)
        location = 0;
}
```

- ✓ while-루프: 아직 검사할 항목이 있고, *x*를 찾지 못했나?
- ✓ if-문: 모두 검사하였으나, *x* 를 찾지 못했나?

분석

- 순차검색 알고리즘으로 키를 찾기 위해서 S에 있는 항목을 몇 개나 검색해야 하는가?
  - 키와 같은 항목의 위치에 따라 다름
  - 최악의 경우: n

- 좀 더 빨리 찾을 수는 없는가?
  - S에 있는 항목에 대한 정보가 없는 한 더 빨리 찾을 수 없다.

Binary Search (이분검색)

- 문제: 크기가 n인 정렬된 배열 S에 x가 있는가?
  - 입력: (1) 양수 n, (2) 배열 $S[1..n]$, (3) 키 x
  - 출력: x가 S의 어디에 있는지의 위치. 만약 없으면 0.

Binary Search Algorithm

```
void binsearch(int n,                              // 입력(1)
               const keytype S[],                  //     (2)
               keytype x,                          //     (3)
               index& location) {                  // 출력
    index low, high, mid;
    low = 1; high = n;
    location = 0;

    while (low <= high && location == 0) {
        mid = (low + high) / 2;                    // 정수나눗셈
        if (x == S[mid]) location = mid;
        else if (x < S[mid]) high = mid - 1;
        else low = mid + 1;
    }
}
```

✓ while-루프: 아직 검사할 항목이 있고, *x*를 찾지 못했나?

분석

- 이분검색 알고리즘으로 키를 찾기 위해서 S에 있는 항목을 몇 개나 검색해야 하는가?
  - while 문을 수행할 때마다 검색 대상의 총 크기가 반씩 감소하기 때문에 최악의 경우라도 $\lg n + 1$개만 검사하면 된다. ($\lg = \log_2$)

순차검색 vs 이분검색

* 최악의 경우

Array Size	Number of Comparisons by Sequential Search	Number of Comparisons by Binary Search
128	128	8
1,024	1,024	11
1,048,576	1,048,576	21
4,294,967,296	4,294,967,296	33

Applied problem
: 은행에서 고객에 관한 정보를 효과적으로 저장하고 검색하는 방법은?

Fibonacci Sequence

Definition of Fibonacci Sequence

$$f_0 = 0$$
$$f_1 = 1$$
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad \text{for } n \geq 2$$

예: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …

피보나찌 수 구하기 알고리즘 (Recursive)

- 문제: Find *n-th* term of the Fibonacci sequence
  - 입력: nonnegative integer *n*
  - 출력: *n-th* term of the Fibonacci sequence
- 알고리즘 :

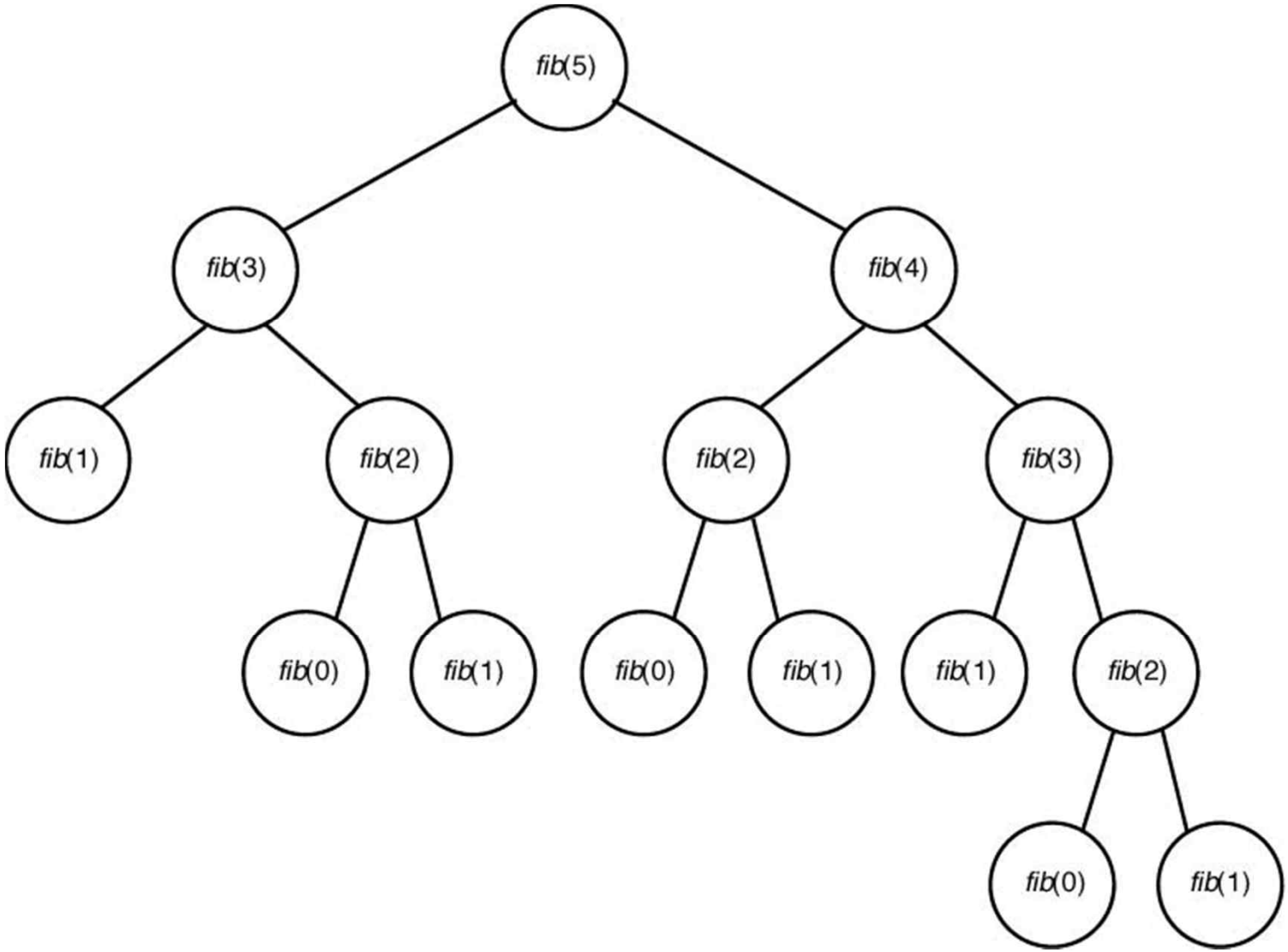
```
int fib (int n) {
    if (n <= 1)
        return n;
    else
        return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

- How does a computer to execute a recursive program?

분석

- 피보나찌 수 구하기 재귀 알고리즘
  - Easy to create and understandable, but extremely inefficient
  - 이유: values are computed over and over again
  - 예: fib(2) is computer 3 times to compute fib(5)
    - fib(5) = fib(4) + fib(3)
    - fib(4) = fib(3) + fib(2); fib(3) = fib(2) + fib(1)
    - fib(3) = fib(2) + fib(1); fib(2) = fib(1) + fib(0); fib(2); fib(1)
    - fib(2) = fib(1) + fib(0); fib(2); fib(2); fib(1)

fib(5)의 재귀 트리


fib(5)
fib(3)
fib(4)
fib(1)
fib(2)
fib(2)
fib(3)
fib(0)
fib(1)
fib(0)
fib(1)
fib(1)
fib(2)
fib(0)
fib(1)

fib(n)의 함수 호출 횟수 계산

$T(n) = fib(n)$을 계산하기 위하여 fib 함수를 호출하는 횟수
즉, 재귀 트리 상의 마디(node)의 개수

$T(0) = 1$

$T(1) = 1$

$T(n) = T(n - 1) + T(n - 2) + 1$ for $n \geq 2$

$> 2 \times T(n - 2)$

$> 2^2 \times T(n - 4)$

$> 2^3 \times T(n - 6)$

… … …

$> 2^{n/2} \times T(0)$

$= 2^{n/2}$

왜냐하면 $T(n - 1) \geq T(n - 2)$

계산한 호출 횟수의 검증

정리: 재귀적 알고리즘으로 구성한 재귀 트리의 마디의 수를 $T(n)$이라고 하면, $n \geq 2$인 모든 n에 대하여 $T(n) > 2^{n/2}$이다.

증명: (n에 대한 수학적 귀납법으로 증명)

귀납출발점: $T(2) = T(1) + T(0) + 1 = 3 > 2 = 2^{2/2}$

$T(3) = T(2) + T(1) + 1 = 5 > 2.83 \approx 2^{3/2}$

귀납가정: $2 \leq m < n$인 모든 m 에 대해서 $T(m) > 2^{m/2}$ 이라 가정

귀납절차: $T(n) > 2^{n/2}$임을 보이면 된다.

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$$
$$> 2^{(n-1)/2} + 2^{(n-2)/2} + 1 \quad \text{[귀납가정에 의하여]}$$
$$> 2^{(n-2)/2} + 2^{(n-2)/2}$$
$$= 2 \times 2^{(n/2)-1}$$
$$= 2^{n/2}$$

피보나찌 수 구하기 알고리즘 (Iterative)

```
int fib2 (int n) {
    index i;
    int f[0..n];

    f[0] = 0;
    if (n > 0) {
       f[1] = 1;
       for (i = 2; i <= n; i++)
          f[i] = f[i-1] + f[i-2];
    }
    return f[n];
}
```

분석

- 반복 알고리즘은 수행속도가 훨씬 더 빠르다.
  - 이유: 중복 계산이 없음

- 계산하는 항의 총 개수
  - $T(n) = n + 1$
  - 즉, $f[0]$부터 $f[n]$까지 한번씩만 계산

두 피보나찌 알고리즘의 비교

n	$n+1$	$2^{n/2}$	Execution Time Using Algorithm 1.7	Lower Bound on Execution Time Using Algorithm 1.6
40	41	1,048,576	41 ns*	1048 $\mu s^{\dagger}$
60	61	1.1×10^9	61 ns	1 s
80	81	1.1×10^{12}	81 ns	18 min
100	101	1.1×10^{15}	101 ns	13 days
120	121	1.2×10^{18}	121 ns	36 years
160	161	1.2×10^{24}	161 ns	3.8×10^7 years
200	201	1.3×10^{30}	201 ns	4×10^{13} years

알고리즘의 분석
(Analysis of Algorithms)

Analysis of Algorithms

- 시간복잡도(Time Complexity) 분석
  - Analyze the algorithm's efficiency
    by determining the number of times some basic operation is done
    as a function of the size of the input

- 표현 척도
  - Input size (입력크기)
    - 배열의 크기, 리스트의 길이, 행렬에서 행과 열의 크기,
      트리에서 마디와 이음선의 수, 그래프에서는 정점과 간선의 수
  - Basic operation (단위연산)
    - 비교 (comparison), 지정 (assignment)

분석 방법의 종류

- Every-case time complexity analysis (모든 경우 분석)
  - T(n) – the number of times the algorithm does the basic operation for an instance of size n
  - 입력크기에만 종속
  - 입력 값과는 무관하게 결과 값은 항상 일정
  - (Ex) Add array members, Exchange sort, Matrix multiplication

- Worst-case time complexity analysis (최악의 경우 분석)
  - W(n) – the maximum number of times the algorithm will ever do its basic operation for an input size of n
  - 입력크기와 입력 값 모두에 종속
  - 단위연산이 수행되는 횟수가 최대인 경우 선택
  - (Ex) Sequential search

분석 방법의 종류

- Average-case time complexity analysis (평균의 경우 분석)
  - A(n) - the average number of times the algorithm does the basic operation for an input size of n
  - 입력크기와 입력 값 모두에 종속
  - 모든 입력에 대해서 단위연산이 수행되는 기대치(평균)
  - 각 입력에 대해서 확률 할당 가능
  - 일반적으로 최악의 경우보다 계산이 복잡
  - (Ex) Sequential search
- Best-case time complexity analysis (최선의 경우 분석)
  - B(n) – the minimum number of times the algorithm will ever do its basic operation for an input size of n
  - 입력크기와 입력 값 모두에 종속
  - 단위연산이 수행되는 횟수가 최소인 경우 선택
  - (Ex) Sequential search

알고리즘: 배열 덧셈

- 문제: 크기가 n인 배열 S의 모든 수를 더하라
  - 입력: 양수 n, 배열 $S[1..n]$
  - 출력: 배열 S에 있는 모든 수의 합

- 알고리즘:

```
number sum (int n, const number S[]) {
    index i;
    number result;

    result = 0;
    for (i = 1; i <= n; i++)
        result = result + S[i];
    return result;
}
```

배열 덧셈 알고리즘의 시간복잡도 분석

- 단위연산: 덧셈
- 입력크기: 배열의 크기 n
- 모든 경우 분석:
  - 배열 내용에 상관없이 for-루프가 n번 반복된다.
  - 각 루프마다 덧셈이 1회 수행된다.
  - 따라서 n에 대해서 덧셈이 수행되는 총 횟수는 $T(n) = n$이다.

알고리즘: 교환정렬

- 문제: 비내림차순(오름차순)으로 n개의 키를 정렬
  - 입력: 양수 n, 배열 $S[1..n]$
  - 출력: 비내림차순으로 정렬된 배열

- 알고리즘:

```
void exchangesort (int n, keytype S[]) {
   index i, j;

   for (i = 1; i <= n-1; i++)
      for (j = i+1; j <= n; j++)
         if (S[j] < S[i])
            exchange S[i] and S[j];
}
```

알고리즘: 교환정렬 시간복잡도 분석 I

- 단위연산: 조건문 ($S[j]$와 $S[i]$의 비교)
- 입력크기: 정렬할 항목의 수 n
- 모든 경우 분석:
  - j-루프가 수행될 때마다 조건문 1번씩 수행
  - 조건문의 총 수행횟수
    - i = 1: j-루프 n-1 번 수행
    - i = 2: j-루프 n-2 번 수행
    - i = 3: j-루프 n-3 번 수행
    - i = n-1: j-루프 1 번 수행
    - 따라서

$$T(n) = (n-1) + (n-2) + \cdots\cdots + 1 = \frac{(n-1)n}{2}$$

알고리즘: 교환정렬 시간복잡도 분석 II

- 단위연산: 교환하는 연산 (exchange S[j] and S[i])
- 입력크기: 정렬할 항목의 수 n
- 최악의 경우 분석:
  - 조건문의 결과에 따라서 교환 연산의 수행여부가 결정된다.
  - 최악의 경우 = 조건문이 항상 참(true)이 되는 경우
    = 입력 배열이 꺼꾸로 정렬되어 있는 경우

$$T(n) = \frac{(n-1)n}{2}$$

알고리즘: 순차검색 시간복잡도 분석 (최악)

- 단위연산: 배열의 아이템과 키 *x*와 비교 연 (S[location] != x)
- 입력크기: 배열 안에 있는 아이템의 수 *n*
- 최악의 경우 분석:
  - *x*가 배열의 마지막 아이템이거나,
    *x*가 배열에 없는 경우,
    단위연산이 *n*번 수행된다.
  - 따라서,

$$W(n) = n$$

¶ 순차검색 알고리즘의 경우 입력배열의 값에 따라서 검색하는 횟수가 달라지므로, 모든 경우 분석은 불가능하다.

알고리즘: 순차검색 시간복잡도 분석 (평균)

- 단위연산: 배열의 아이템과 키 *x*와 비교 연산 (S[location] != x)
- 입력크기: 배열 안에 있는 아이템의 수 n
- 평균의 경우 분석:
  - 배열의 아이템이 모두 다르다고 가정한다.
  - 경우 1: *x*가 배열 *S*안에 있는 경우만 고려
    - $1 \le k \le n$에 대해서 *x*가 배열의 k 번째 있을 확률 = 1/n
    - *x*가 배열의 k 번째 있다면,
      S를 찾기 위해서 수행하는 단위연산의 횟수 =k
    - 따라서,

$$A(n) = \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

(다음 슬라이드에 계속)

알고리즘: 순차검색 시간복잡도 분석 (평균)

- 경우2: x가 배열 S안에 없는 경우도 고려
  - x가 배열 S안에 있을 확률을 p라고 하면,
    - x가 배열의 k번째 있을 확률 $= p/n$
    - x가 배열에 없을 확률 $= 1-p$
  - 따라서,

$$A(n) = \sum_{k=1}^{n} (k \times \frac{p}{n}) + n(1-p)$$

$$= \frac{p}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} + n(1-p)$$

$$= n(1-\frac{p}{2}) + \frac{p}{2}$$

  - $p = 1 \Rightarrow A(n) = (n+1)/2$

    $p = 1/2 \Rightarrow A(n) = 3n/4 + 1/4$

알고리즘: 순차검색 시간복잡도 분석 (최선)

- 단위연산: 배열의 아이템과 키 x와 비교 연산 (S[location] != x)
- 입력크기: 배열 안에 있는 아이템의 수 n
- 최선의 경우 분석:
  - x가 $S[1]$일 때, 입력의 크기에 상관없이 단위연산이 1번만 수행된다.
  - 따라서, $B(n) = 1$

사색

- 최악, 평균, 최선의 경우 분석 방법 중에서
  어떤 분석이 가장 정확한가?
- 최악, 평균, 최선의 경우 분석 방법 중에서
  어떤 분석을 사용할 것인가?

- The best : every-case time complexity
- But, all algorithms don't have the case.
- Useful case
  - Average-case : 일반적인 경우
  - Worst-case : 단 한번의 사고가 중요한 경우

Analysis of Correctness

- Analysis of Correctness
  - 알고리즘이 의도한 대로 수행되는지를 증명하는 절차
  - Cf) Efficiency Analysis

- 정확한 알고리즘이란?
  - 어떠한 입력에 대해서도 답을 출력하면서 멈추는 알고리즘

- 정확하지 않은 알고리즘이란?
  - 어떤 입력에 대해서 멈추지 않거나,
  - 또는 틀린 답을 출력하면서 멈추는 알고리즘

차수 (Order)

Complexity

- O
  - Big O, asymptotic upper bound
- Ω
  - Omega, asymptotic lower bound
- Θ
  - Theta, order, asymptotic tight bound ($O \cap \Omega$)

대표적인 복잡도 카테고리

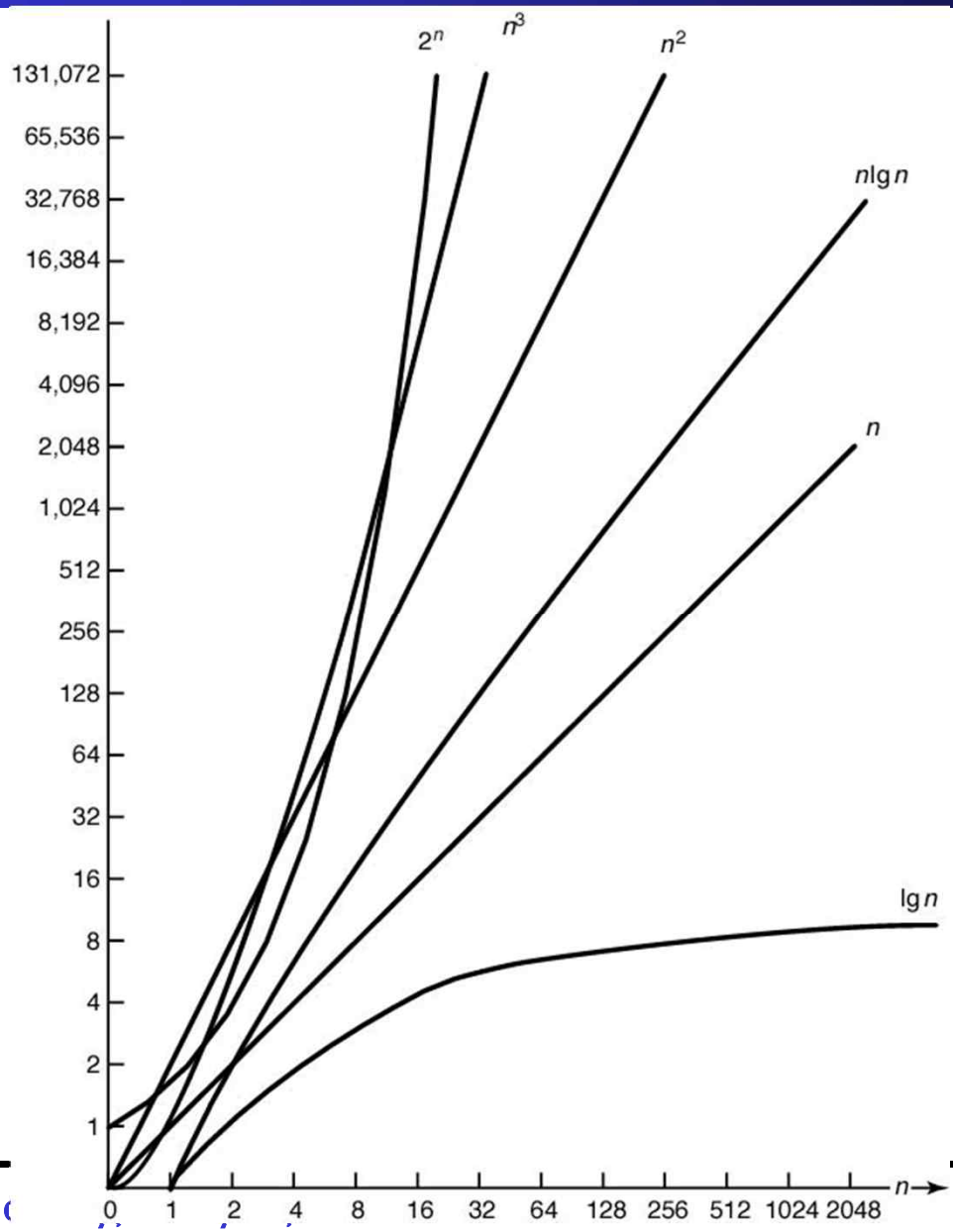
- $\Theta(\lg n)$
- $\Theta(n)$: 1차 (linear time algorithm)
- $\Theta(n \lg n)$
- $\Theta(n^2)$: 2차 (quadratic ")
- $\Theta(n^3)$: 3차 (cubic ")
- $\Theta(2^n)$: 지수 (exponential ")
- $\Theta(n!)$

예제: 2차 항이 궁극적으로 지배한다

n	$0.1n^2$	$0.1n^2+n+100$
10	10	120
20	40	160
50	250	400
100	1,000	1,200
1,000	100,000	101,100

$$g(n) = 5n^2 + 100n + 20 \in \theta(n^2) \equiv order \quad of \quad n^2$$

복잡도 함수의 증가율


2^n
n^3
n^2
$n \lg n$
n
$\lg n$
131,072
65,536
32,768
16,384
8,192
4,096
2,048
1,024
512
256
128
64
32
16
8
4
2
1
0 1 2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024 2048
n

시간복잡도별 실행시간 비교

n	$f(n) = \lg n$	$f(n) = n$	$f(n) = n \lg n$	$f(n) = n^2$	$f(n) = n^3$	$f(n) = 2^n$
10	0.003 μs*	0.01 μs	0.033 μs	0.1 μs	1 μs	1 μs
20	0.004 μs	0.02 μs	0.086 μs	0.4 μs	8 μs	1 ms†
30	0.005 μs	0.03 μs	0.147 μs	0.9 μs	27 μs	1 s
40	0.005 μs	0.04 μs	0.213 μs	1.6 μs	64 μs	18.3 min
50	0.006 μs	0.05 μs	0.282 μs	2.5 μs	125 μs	13 days
10^2	0.007 μs	0.10 μs	0.664 μs	10 μs	1 ms	4×10^{13} years
10^3	0.010 μs	1.00 μs	9.966 μs	1 ms	1 s	
10^4	0.013 μs	10 μs	130 μs	100 ms	16.7 min	
10^5	0.017 μs	0.10 ms	1.67 ms	10 s	11.6 days	
10^6	0.020 μs	1 ms	19.93 ms	16.7 min	31.7 days	
10^7	0.023 μs	0.01 s	0.23 s	1.16 days	31,709 years	
10^8	0.027 μs	0.10 s	2.66 s	115.7 days	3.17×10^7 years	
10^9	0.030 μs	1 s	29.90 s	31.7 days		

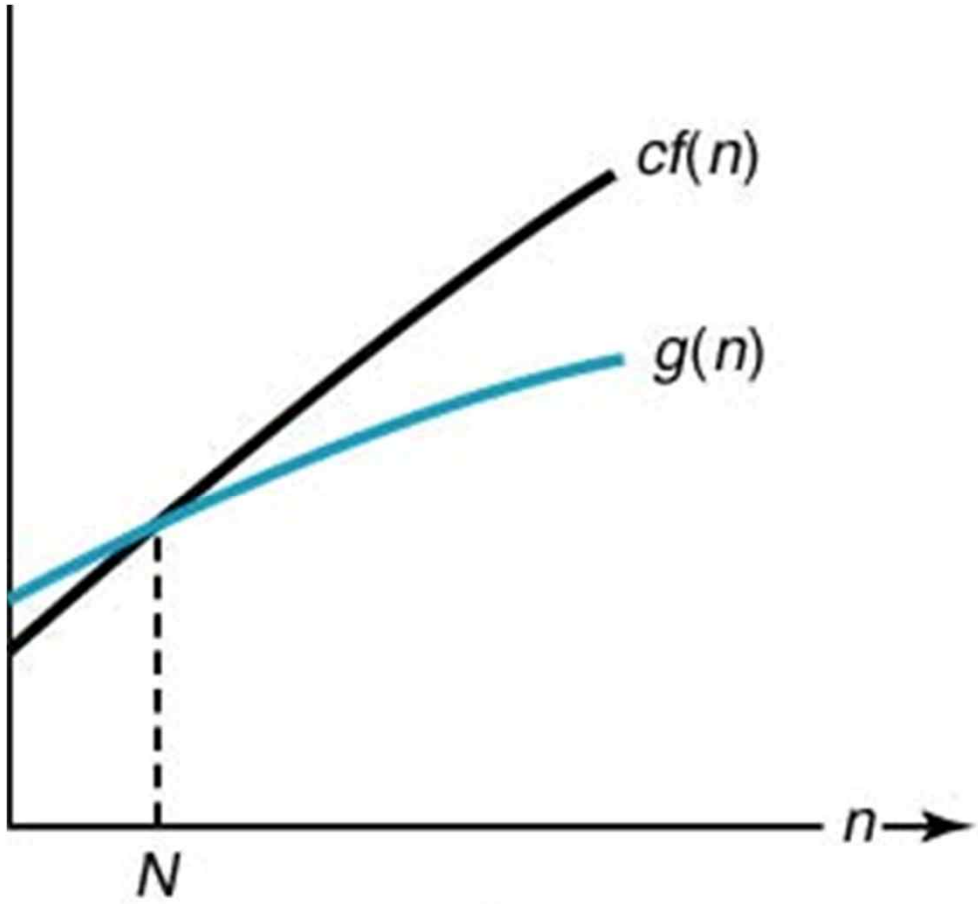
* $1\ \mu s = 10^{-6}$ second
† $1\ ms = 10^{-3}$ second

Big O 표기법

- 정의 : 점근적 상한 **(Asymptotic Upper Bound)**
  - 주어진 복잡도 함수 $f(n)$에 대해서 $g(n) \in O(f(n))$이면 다음을 만족한다 (g(n) : 분석된 결과).
  - $n \geq N$인 모든 정수 n에 대해서 $g(n) \leq c \times f(n)$이 성립하는 실수 $c > 0$와 음이 아닌 정수 N이 존재한다.

- $g(n) \in O(f(n))$ 읽는 방법:
  - $g(n)$은 $f(n)$의 큰 오(big O)

Big O 표기법 (Cont)



(a) $g(n) \in O(f(n))$

Big O 표기법 (Cont)

- 어떤 함수 $g(n)$이 $O(n^2)$에 속한다는 말은
  - 그 함수(g(n))는 궁극에 가서는 (즉, 어떤 임의의 N값보다 큰 값에 대해서는) 어떤 2차 함수 cn^2 보다는 **작은** 값을 가지게 된다는 것을 뜻한다. (그래프 상에서는 **아래**에 위치)
  - 즉 $g(n)$은 어떤 2차 함수 cn^2 보다는 궁극적으로 **좋다**고 (기울기가 **낮다**고) 말할 수 있다.

- 어떤 알고리즘의 시간복잡도가 $O(f(n))$이라면
  - 입력의 크기 n에 대해서 이 알고리즘의 수행시간은 **아무리 늦어도** $f(n)$은 된다 ($f(n)$이 **상한**이다).
  - 다시 말하면, 이 알고리즘의 수행시간은 $f(n)$보다 절대로 더 느릴 수는 없다는 말이다.

Big O 표기법 (예)

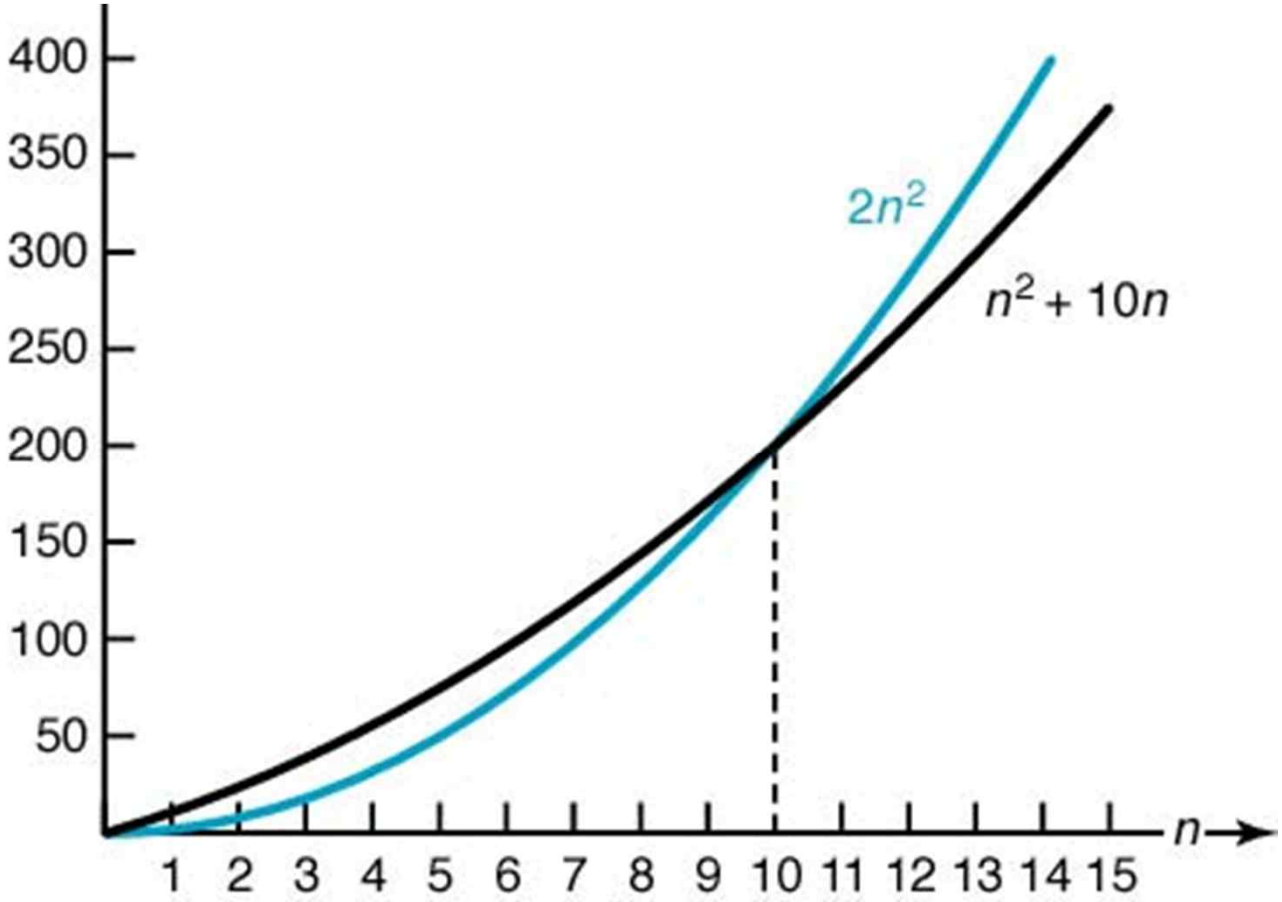
- $n^2+10n \in O(n^2)$?

  (1) $n \geq 10$인 모든 정수 n에 대해서 $n^2+10n \leq 2n^2$ 이 성립한다.
  그러므로 $c = 2$와 $N = 10$을 선택하면, "Big O"의 정의에 의해서
  $n^2+10n \in O(n^2)$이라고 결론지을 수 있다.

  (2) $n \geq 1$인 모든 정수 n에 대해서 $n^2+10n \leq n^2+10n^2 = 11n^2$ 이 성립한다.
  그러므로 $c = 11$와 $N = 1$을 선택하면, "큰 O"의 정의에 의해서
  $n^2+10n \in O(n^2)$이라고 결론지을 수 있다.

Big O 표기법 (예) (Cont)

$2n^2$과 $n^2 + 10n$의 비교



Big O 표기법 (예) (Cont)

- $5n^2 \in O(n^2)$?

  c=5와 N=0을 선택하면, $n \geq 0$인 모든 정수 n에 대해서 $5n^2 \leq 5n^2$이 성립한다.

- $T(n) = n(n-1) / 2$?

  $n \geq 0$인 모든 정수 n에 대해서 $n(n-1)/2 \leq n^2/2$이 성립한다. 그러므로 $c = ½$과 N=0을 선택하면, $T(n) \in O(n^2)$이라고 결론지을 수 있다.

- $n^2 \in O(n^2+10n)$?

  $n \geq 0$인 모든 정수 n에 대해서, $n^2 \leq 1 \times (n^2+10n)$이 성립한다. 그러므로, c=1와 N=0을 선택하면, $n^2 \in O(n^2+10n)$이라고 결론지을 수 있다.

Big O 표기법 (예) (Cont)

- $n \in O(n^2)$?

  $n \geq 1$인 모든 정수 n에 대해서, $n \leq 1 \times n^2$ 이 성립한다.

  그러므로, c=1와 N=1을 선택하면, $n \in O(n^2)$이라고 결론지을 수 있다.

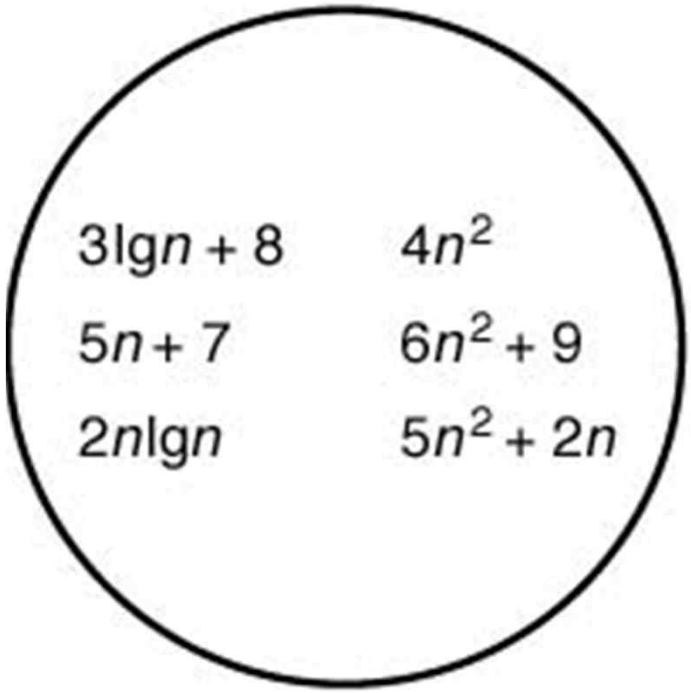
- $n^3 \in O(n^2)$?

  $n \geq N$인 모든 n에 대해서 $n^3 \leq c \times n^2$ 이 성립하는 c와 N값은 존재하지 않는다. 즉, 양변을 n^2으로 나누면, $n \leq c$ 가 되는데, c를 아무리 크게 잡더라도 그 보다 더 큰 n이 존재한다.

  (성립하지 않음)

Big O 표기법 (예) (Cont)

$O(n^2)$



(a) $O(n^2)$

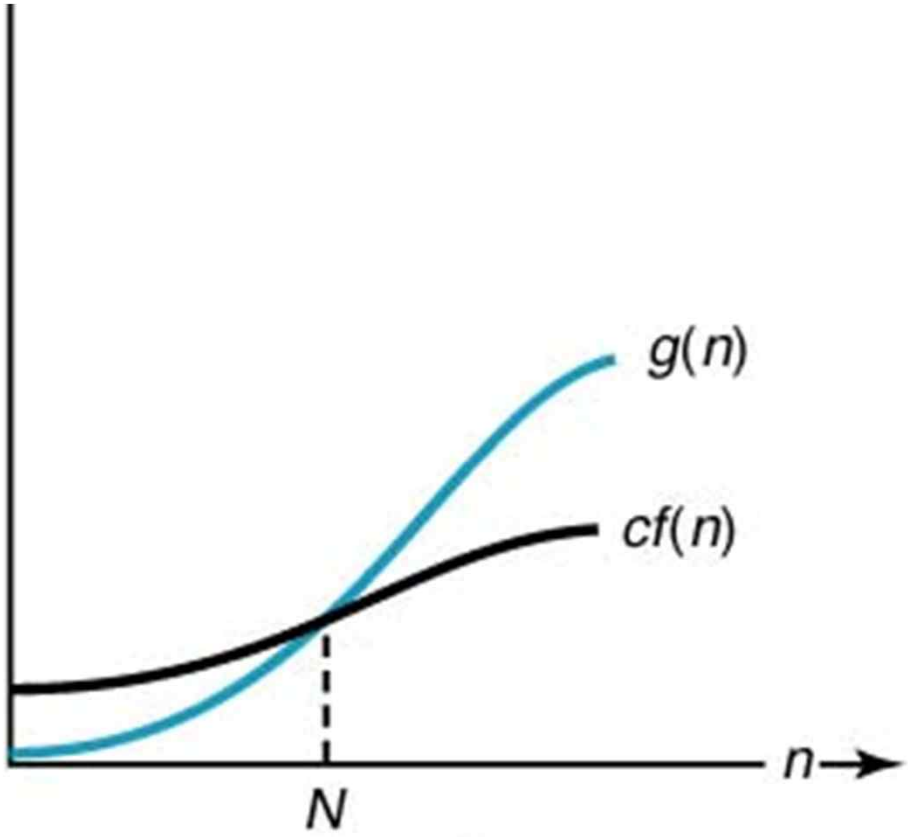
O : asymptotic upper bound
cn^2 보다 적은 값을 가지는 모든 함수.

Ω 표기법

- 정의 : 점근적 하한 **(Asymptotic Lower Bound)**
  - 주어진 복잡도 함수 $f(n)$에 대해서 $g(n) \in \Omega(f(n))$이면 다음을 만족한다 (g(n) : 분석된 결과).
  - $n \geq N$인 모든 정수 n에 대해서 $g(n) \geq c \times f(n)$이 성립하는 실수 $c > 0$와 음이 아닌 정수 N이 존재한다.

- $g(n) \in \Omega(f(n))$ 읽는 방법:
  - $g(n)$은 $f(n)$의 오메가(omega)

Ω 표기법



(b) $g(n) \in \Omega(f(n))$

Ω 표기법

- 어떤 함수 $g(n)$이 $\Omega(n^2)$에 속한다는 말은
  - 그 함수는 궁극에 가서는 (즉 어떤 임의의 N 값보다 큰 값에 대해서는) 어떤 2차 함수 cn^2 의 값보다는 **큰** 값을 가지게 된다는 것을 뜻한다 (그래프 상에서는 **위**에 위치).
  - 즉, 함수 $g(n)$은 어떤 2차 함수 cn^2 보다는 궁극적으로 **나쁘다**고 (기울기가 **높다**고) 말할 수 있다.

- 어떤 알고리즘의 시간복잡도가 $\Omega(f(n))$이라면,
  - 입력의 크기 n에 대해서 이 알고리즘의 수행시간은 **아무리 빨라도** $f(n)$밖에 되지 않는다 ($f(n)$이 **하한**이다).
  - 다시 말하면, 이 알고리즘의 수행시간은 $f(n)$보다 절대로 더 빠를 수는 없다는 말이다.

Ω 표기법 : 예

- $n^2 + 10n \in \Omega(n^2)$?

  $n \geq 0$인 모든 정수 n에 대해서 $n^2+10n \geq n^2$ 이 성립한다.

  그러므로 $c = 1$와 $N = 0$을 선택하면, $n^2+10n \in \Omega(n^2)$이라고 결론지을 수 있다.

- $5n^2 \in \Omega(n^2)$?

  $n \geq 0$인 모든 정수 n에 대해서, $5n^2 \geq 1 \times n^2$ 이 성립한다.

  그러므로, $c=1$와 $N=0$을 선택하면, $5n^2 \in \Omega(n^2)$이라고 결론지을 수 있다.

Ω 표기법 : 예 (계속)

- $T(n) = n(n-1)/2$?

  $n \geq 2$인 모든 n에 대해서 $n-1 \geq n/2$이 성립한다. 그러므로,

  $n \geq 2$인 모든 n에 대해서 $n(n-1)/2 \geq n/2 \times n/2 = \frac{1}{4} n^2$ 이 성립한다.

  따라서 $c = \frac{1}{4}$ 과 $N = 2$를 선택하면, $T(n) \in \Omega(n^2)$ 이라고

  결론지을 수 있다.

- $n^3 \in \Omega(n^2)$?

  $n \geq 1$인 모든 정수 n에 대해서, $n^3 \geq 1 \times n^2$ 이 성립한다.

  그러므로, $c = 1$와 $N = 1$을 선택하면, $n^3 \in \Omega(n^2)$ 이라고

  결론지을 수 있다.

Ω 표기법 : 예 (계속)

- $n \in \Omega(n^2)$? 모순유도에 의한 증명(Proof by contradiction)

  $n \in \Omega(n^2)$ 이라고 가정.

  그러면 $n \geq N$인 모든 정수 n에 대해서, $n \geq c \times n^2$ 이 성립하는

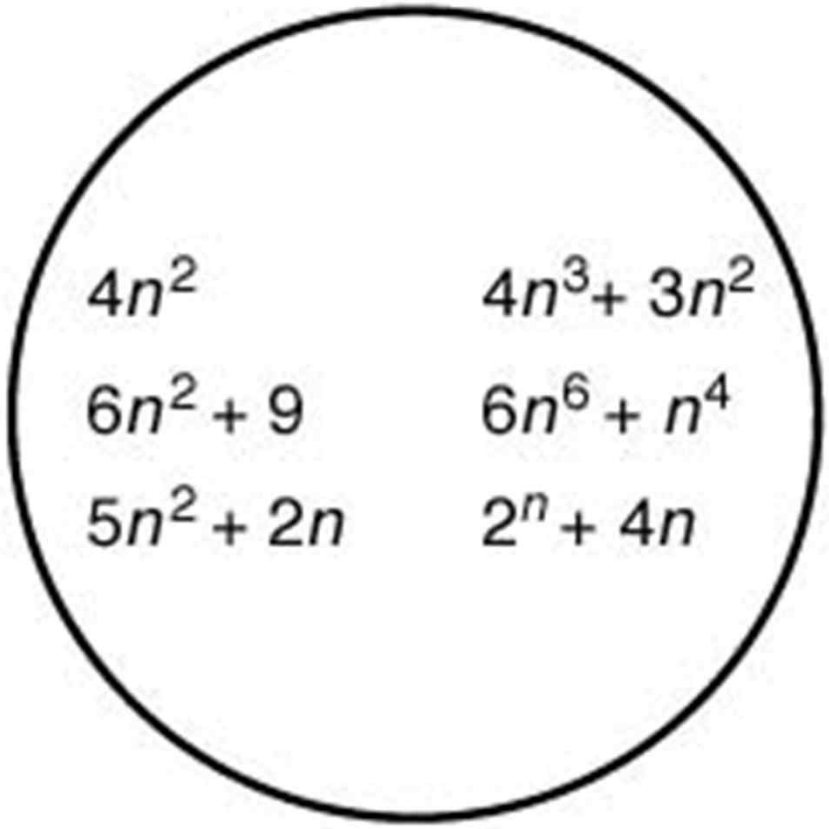
  실수 $c > 0$, 그리고 음이 아닌 정수 N이 존재한다.

  위의 부등식의 양변을 cn으로 나누면 $1/c \geq n$ 이 된다.

  그러나 이 부등식은 절대로 성립할 수 없다.
  따라서 위의 가정은 모순이다.

Ω 표기법 : 예 (계속)

$\Omega(n^2)$



(b) $\Omega(n^2)$

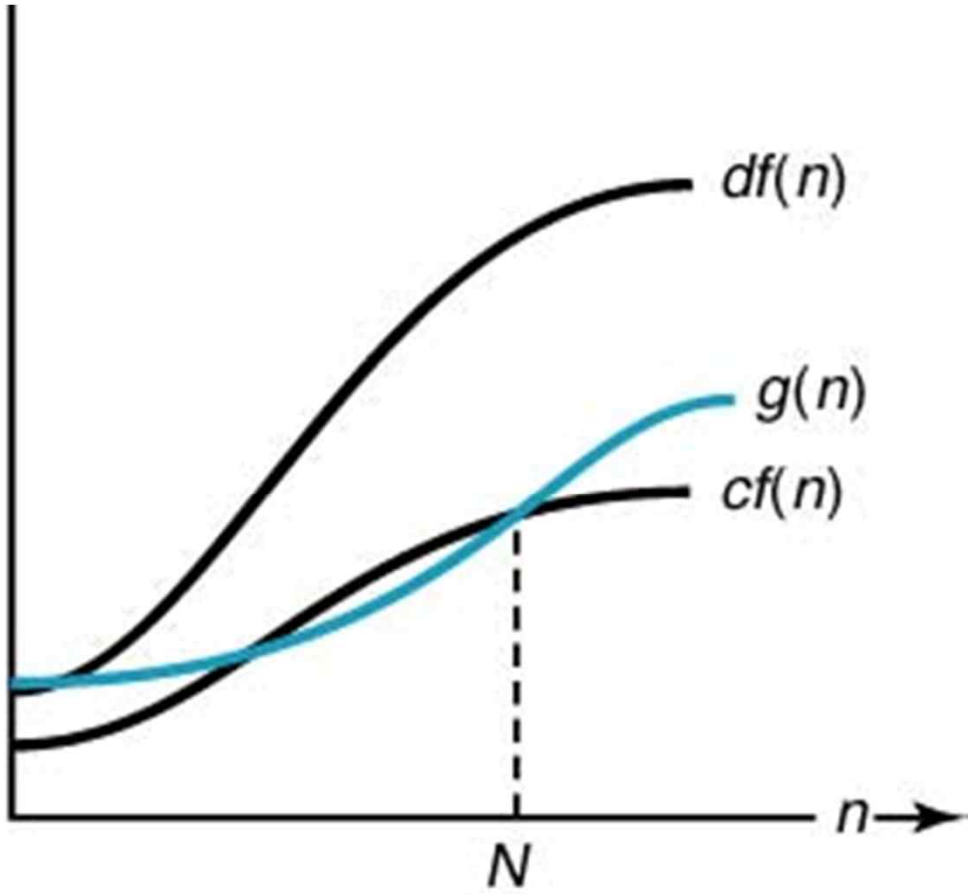
Θ 표기법

- 정의 : **Asymptotic Tight Bound**
  - 복잡도 함수 $f(n)$에 대해서 $\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$
  - 다시 말하면, $\Theta(f(n))$은 다음을 만족하는 복잡도 함수 $g(n)$의 집합이다.
  - 즉, $n \geq N$인 모든 정수 n에 대해서 $c \times f(n) \leq g(n) \leq d \times f(n)$이 성립하는 실수 $c > 0$와 $d > 0$, 그리고 음이 아닌 정수 N이 존재한다.

- 참고: $g(n) \in \Theta(f(n))$ 은 "$g(n)$은 $f(n)$의 차수 (order)"라고 한다.
- 예 : $T(n) = n(n-1)/2$은 $O(n^2)$ 이면서 $\Omega(n^2)$ 이다.

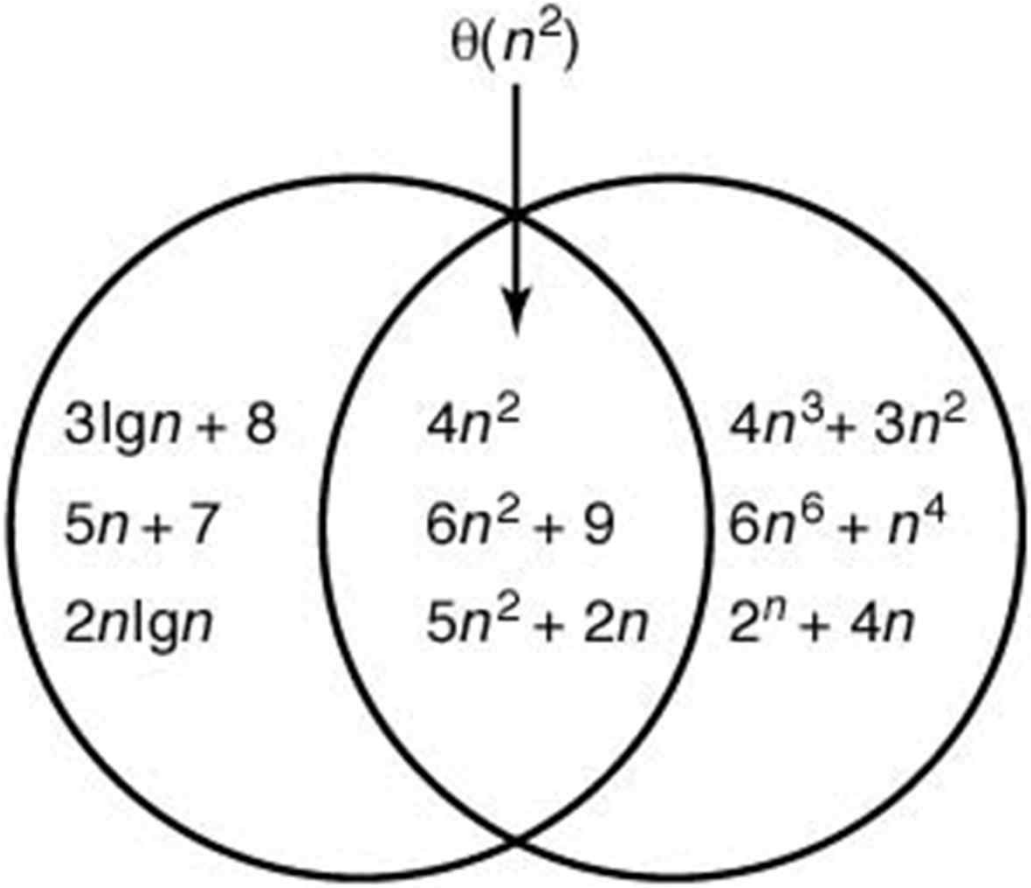
  따라서 $T(n) = \Theta(n^2)$

Θ 표기법



(c) $g(n) \in \theta(f(n))$

$\Theta(n^2)$



(c) $\theta(n^2) = O(n^2) \cap \Omega(n^2)$

작은(Small) o 표기법

- 작은 o는 복잡도 함수 끼리의 관계를 나타내기 위한 표기법이다.

- **정의 : 작은 o**

  주어진 복잡도 함수 $f(n)$에 대해서 $o(f(n))$은 다음을 만족하는
  모든 복잡도 함수 $g(n)$의 집합이다:
  모든 실수 $c > 0$에 대해서 $g(n) \leq c \times f(n)$ (여기서 $n \geq N$인 모든 n에 대해서)
  이 성립하는 음이 아닌 정수 N이 존재한다.

- 참고: $g(n) \in o(f(n))$은 "$g(n)$은 $f(n)$의 작은 오(o)"라고 한다.

큰 O vs 작은 o

- 큰 O와의 차이점
  - 큰 O - 실수 $c > 0$ 중에서 하나만 성립하여도 됨
  - 작은 o - 모든 실수 $c > 0$에 대해서 성립하여야 함

- $g(n) \in O(f(n))$은 쉽게 설명하자면

  $g(n)$이 궁극적으로 $f(n)$보다 훨씬 낫다(좋다)는 의미이다.

작은 o 표기법 : 예

- $n \in o(n^2)$?

  증명:

  $c > 0$이라고 하자. $n \geq N$인 모든 n에 대해서 $n \leq c\,n^2$이 성립하는

  N을 찾아야 한다. 이 부등식의 양변을 $c\,n$으로 나누면 $1/c \leq n$을 얻는다.

  따라서 $N \geq 1/c$ 가 되는 어떤 N을 찾으면 된다.

  여기서 N의 값은 c에 의해 좌우된다.

  예를 들어 만약 c=0.0001이라고 하면, N의 값은 최소한 10,000이 되어야

  한다. 즉 $n \geq 10{,}000$인 모든 n에 대해서 $n \leq 0.0001\,n^2$이 성립한다.

작은 o 표기법 : 예 (계속)

- n이 $o(5n)$?

  모순 유도에 의한 증명: $c = 1/6$이라고 하자.

  $n \in o(5n)$ 이라고 가정하면, $n \geq N$인 모든 정수 n에 대해서,

  $n \leq 1/6 \times 5n \leq 5/6\, n$이 성립하는 음이 아닌 정수 N이 존재해야 한다.

  그러나 그런 N은 절대로 있을 수 없다.

  따라서 위의 가정은 모순이다.

차수의 주요 성질 I

1. $g(n) \in O(f(n))$ iff $f(n) \in \Omega(g(n))$

2. $g(n) \in \Theta(f(n))$ iff $f(n) \in \Theta(g(n))$

3. $b > 1$이고 $a > 1$이면, $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$은 항상 성립.

   다시 말하면 로그(logarithm) 복잡도 함수는 모두 같은 카테고리에 속한다. 따라서 통상 $\Theta(\lg n)$으로 표시한다.

4. $b > a > 0$이면, $a^n \in o(b^n)$. 다시 말하면, 지수(exponential) 복잡도 함수가 모두 같은 카테고리 안에 있는 것은 아니다.

차수의 주요 성질 II

5. $a > 0$인 모든 a에 대해서, $a^n \in o(n!)$.
   다시 말하면, $n!$은 어떤 지수 복잡도 함수보다도 나쁘다.

6. 복잡도 함수를 다음 순으로 나열해 보자.

   $\Theta(\lg n), \Theta(n), \Theta(n \lg n), \Theta(n^2), \Theta(n^j), \Theta(n^k), \Theta(a^n), \Theta(b^n), \Theta(n!)$

   여기서 $k>j>2$이고 $b>a>1$이다. 복잡도 함수 $g(n)$이 $f(n)$을 포함한 카테고리의 왼쪽에 위치한다고 하면, $g(n) \in o(f(n))$

7. $c \geq 0, d > 0, g(n) \in O(f(n))$, 그리고 $h(n) \in \Theta(f(n))$ 이면,

   $c \times g(n) + d \times h(n) \in \Theta(f(n))$

   ex) $5n + 3\lg n + 10 n \lg n + 7n^2 \in \Theta(n^2)$

극한(limit)를 이용하여 차수를 구하는 방법

- 정의 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)}=\begin{cases} c>0 & \text{이면}\quad g(n)\in\Theta(f(n)) \\ 0 & \text{이면}\quad g(n)\in o(f(n)) \\ \infty & \text{이면}\quad f(n)\in o(g(n)) \end{cases}$$

- 예 : 다음이 성립함을 보이시오.
  - $\frac{n^2}{2}\in o(n^3)$ $\quad\lim_{n\to\infty}\frac{n^2/2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$
  - $b>a>0$일 때, $a^n\in o(b^n)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{b^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n=0 \quad \text{왜냐하면,} \quad 0<\frac{a}{b}<1$$

로피탈(L'Hopital)의 법칙

- 정리 : 로피탈**(L'Hopital)**의 법칙

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} g(n) = \infty \text{ 이면}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{g'(n)}{f'(n)} \right) \text{ 이다.}$$

- 예 : 다음이 성립함을 보이시오.

$-\lg n \in o(n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{n\ln 2}}{1} \right) = 0$$

$-\log_a n \in \Theta(\log_b n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{\log_b n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{n\ln a}}{\frac{1}{n\ln b}} \right) = \frac{\log b}{\log a} > 0$$