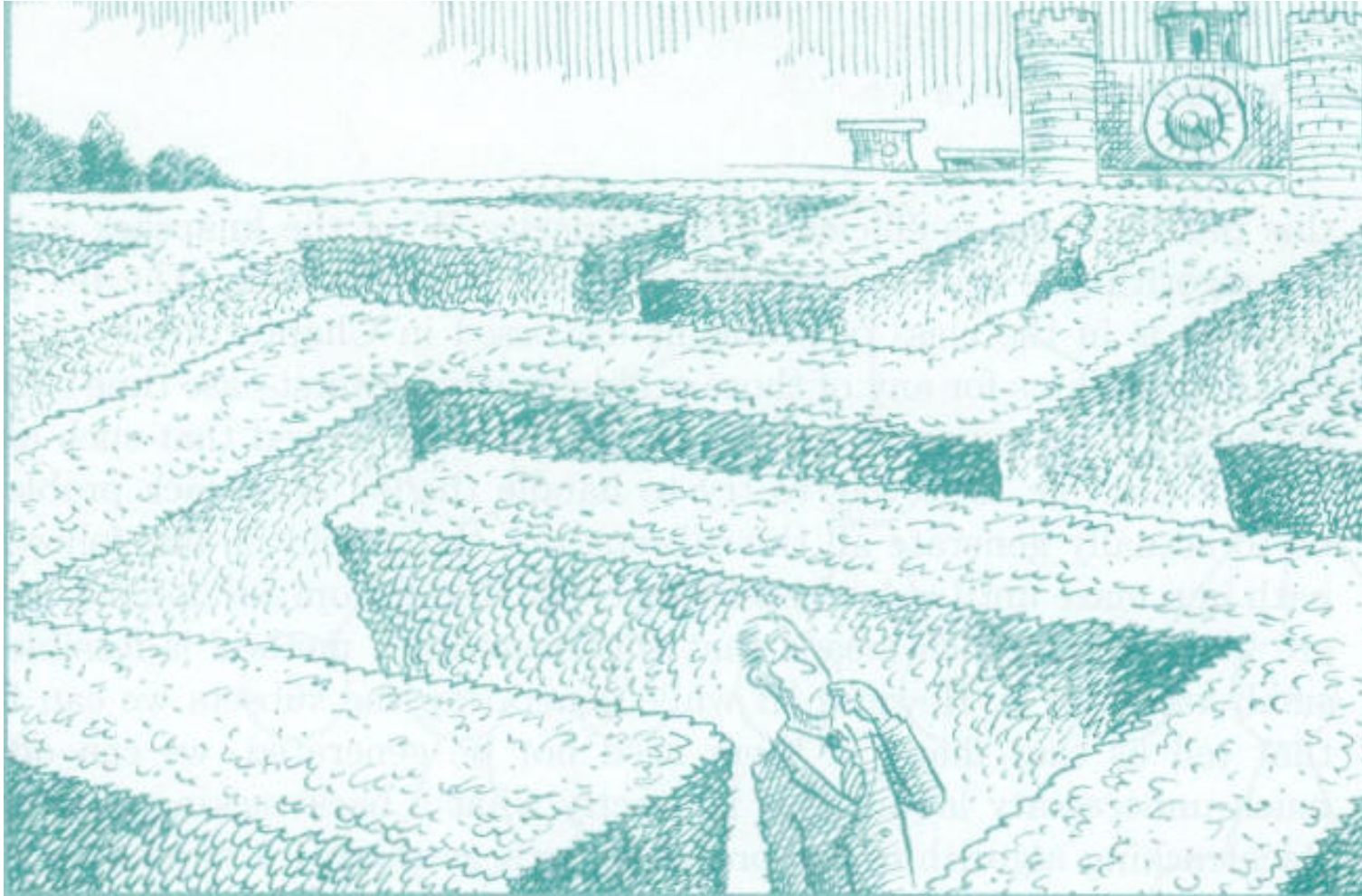


Chap 5. Backtracking

1. The Backtracking Technique
2. The n-Queens Problems
3. Using a Monte Carlo Algorithm
4. The Sum-of-Subsets Problem
5. Graph Coloring
6. The Hamiltonian Circuits Problem
7. The 0-1 Knapsack Problem

This material is prepared by Prof. Jaeyoung Choi, Soongsil University.

Backtracking

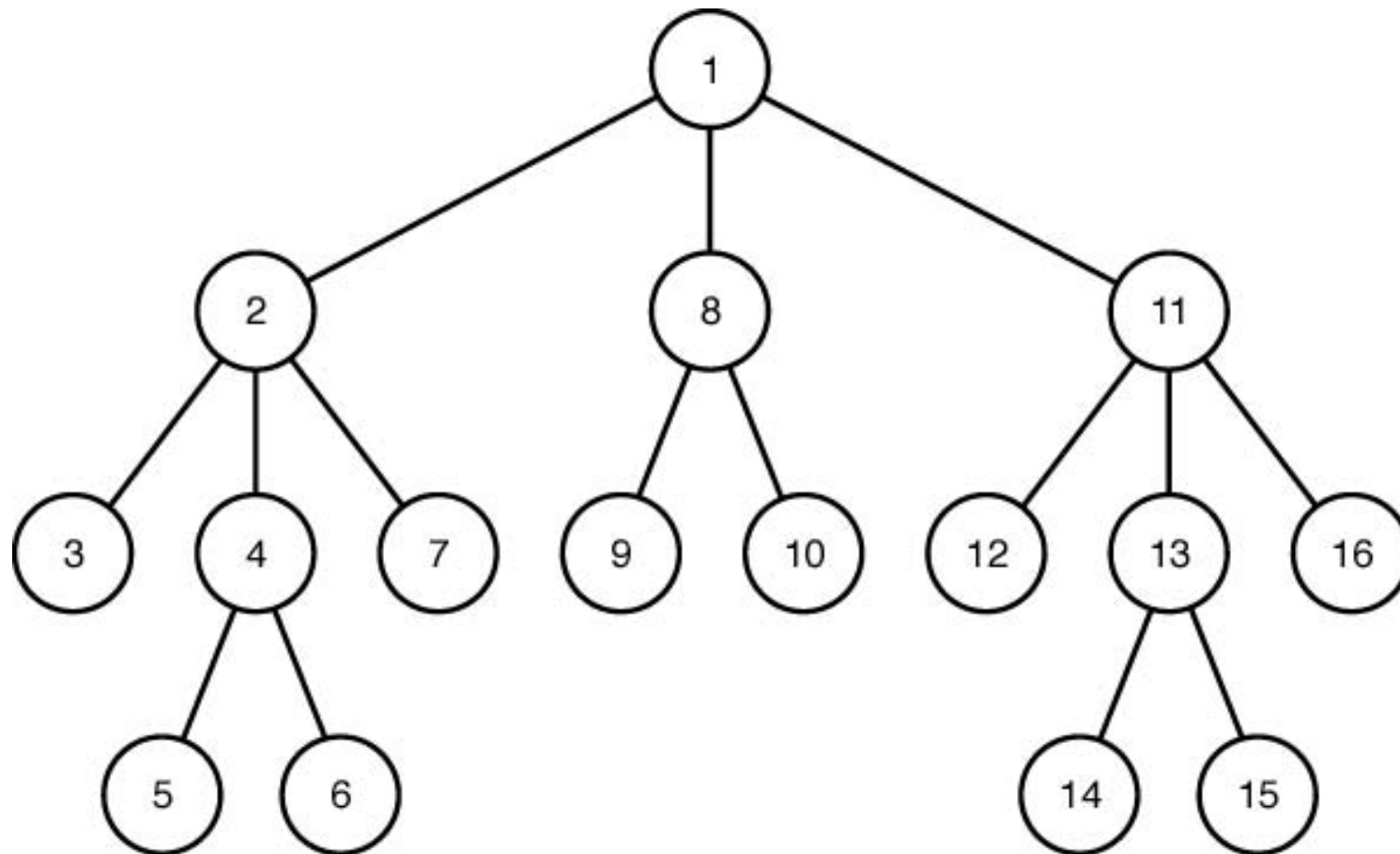


Depth-First Search (깊이우선검색)

- 뿌리노드(root)가 되는 노드(node)를 먼저 방문한 뒤, 그 노드의 모든 후손노드(descendant)들을 차례로 (보통 왼쪽에서 오른쪽으로) 방문한다.
(= preorder tree traversal)

```
void depth_first_tree_search (node v) {  
    node u;  
  
    visit v;  
    for (each child u of v)  
        depth_first_tree_search(u)  
}
```

Depth-First Search



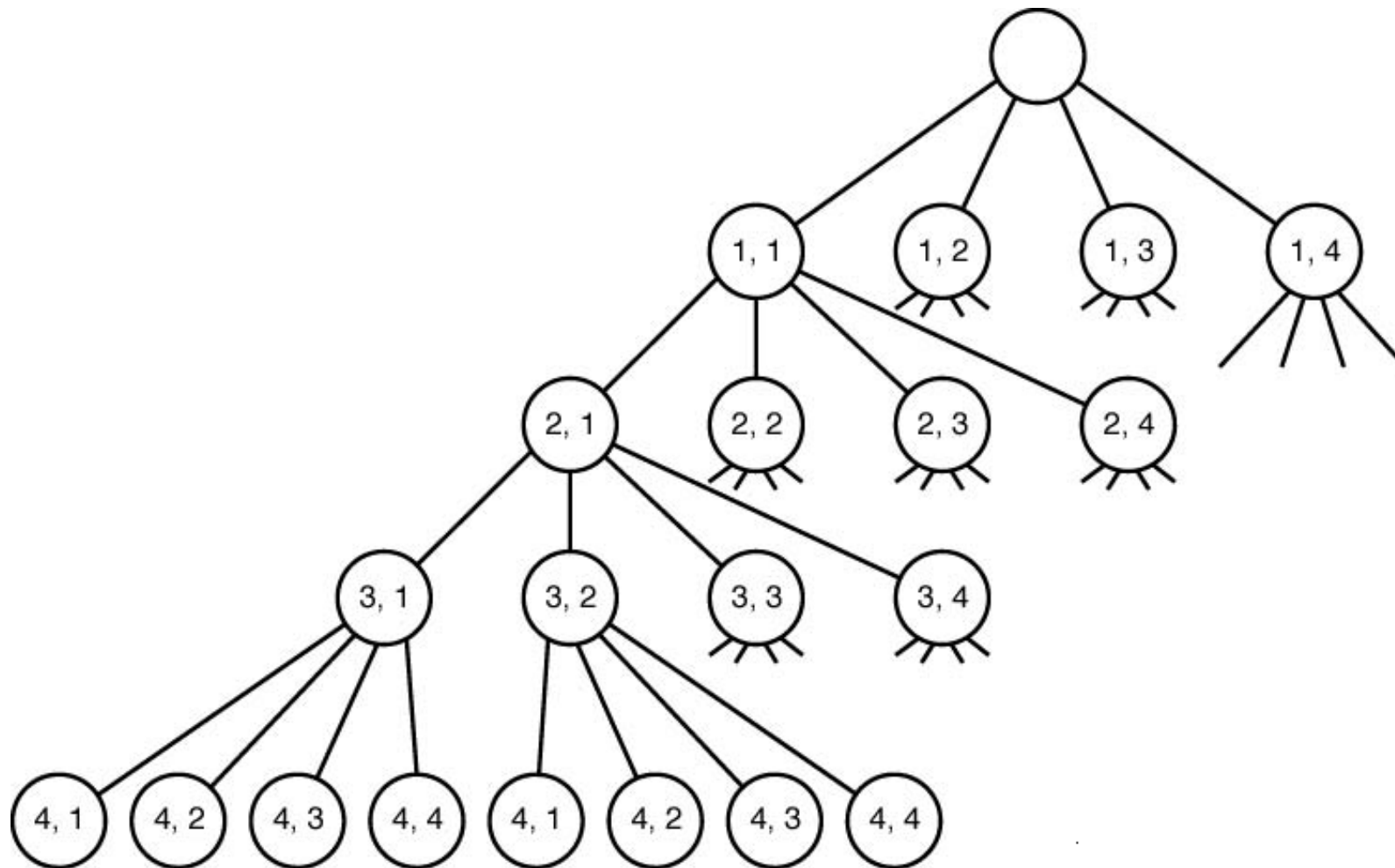
4-Queens Problem

□ n-Queens Problem

- 4(=n)개의 Queen을 서로 상대방을 위협하지 않도록 4×4 서양장기(chess)판에 위치시키는 문제이다.
- 서로 상대방을 위협하지 않기 위해서는 같은 행이나, 같은 열이나, 같은 대각선 상에 위치하지 않아야 한다.
- 무작정 알고리즘
 - 각 Queen을 각각 다른 행에 할당한 후에, 어떤 열에 위치하면 해답은 얻을 수 있는지를 차례대로 점검해 보면 된다.
 - 이때, 각 Queen은 4개의 열 중에서 한 열에 위치할 수 있기 때문에, 해답을 얻기 위해서 점검해 보아야 하는 모든 경우의 수는 $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ 가지가 된다.

4-Queens Problem

- 4-Queens 문제의 상태공간트리



4-Queens Problem

□ State Space Tree (상태 공간 트리)

- 뿌리노드에서 잎노드(leaf)까지의 경로가
해답후보(candidate solution)가 되는데,
깊이우선검색을 하여 그 해답후보 중에서 해답을 찾을 수 있다.
- 이 Tree를 State Space Tree (상태공간트리)라고 한다.
- 그러나 이 방법을 사용하면 해답이 될 가능성이 전혀 없는
노드의 후손노드(descendant)들도 모두 검색해야 하므로
비효율적이다.

Back Tracking

□ 정의: **promising**

- 전혀 해답이 나올 가능성이 없는 노드는 유망하지 않다 (non-promising)고 하고,
- 그렇지 않으면 유망하다(promising)고 한다.

□ 되추적이란?

- 어떤 노드의 유망성을 점검한 후, 유망하지 않다고 판정되면 그 노드의 부모노드(parent)로 돌아가서(“backtrack”) 다음 후손노드에 대한 검색을 계속 진행하는 과정이다.

Back Tracking

□ 되추적 알고리즘의 개념

- 되추적 알고리즘은 상태공간트리에서 깊이우선검색을 실시하는데,
- 유망하지 않은 노드들은 가지치서(pruning) 검색을 하지 않으며,
- 유망한 노드에 대해서만 그 노드의 자식노드(children)를 검색한다.

□ 진행 절차

1. 상태공간트리의 깊이우선검색을 실시한다.
2. 각 노드가 유망한지를 점검한다.
3. 만일 그 노드가 유망하지 않으면,
그 노드의 부모노드로 돌아가서 검색을 계속한다.

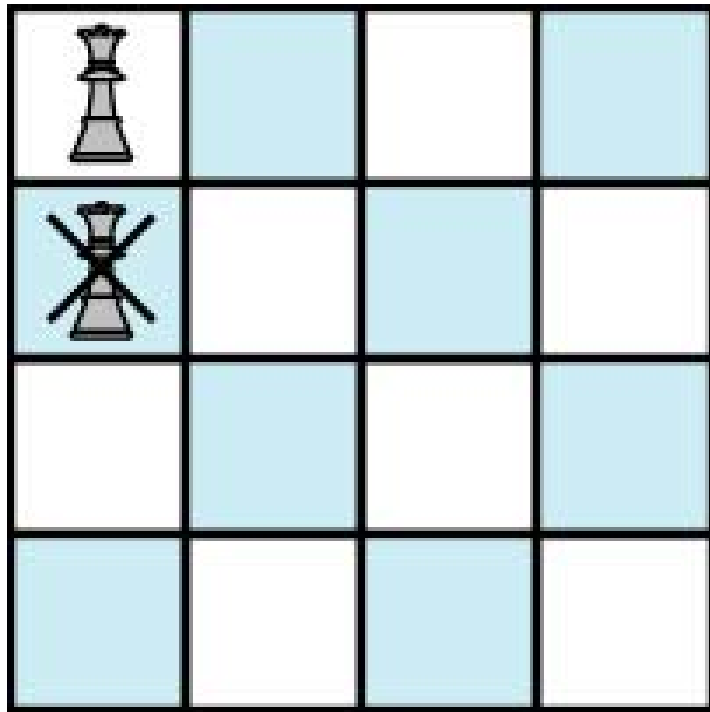
Back Tracking

- 일반 되추적 알고리즘:

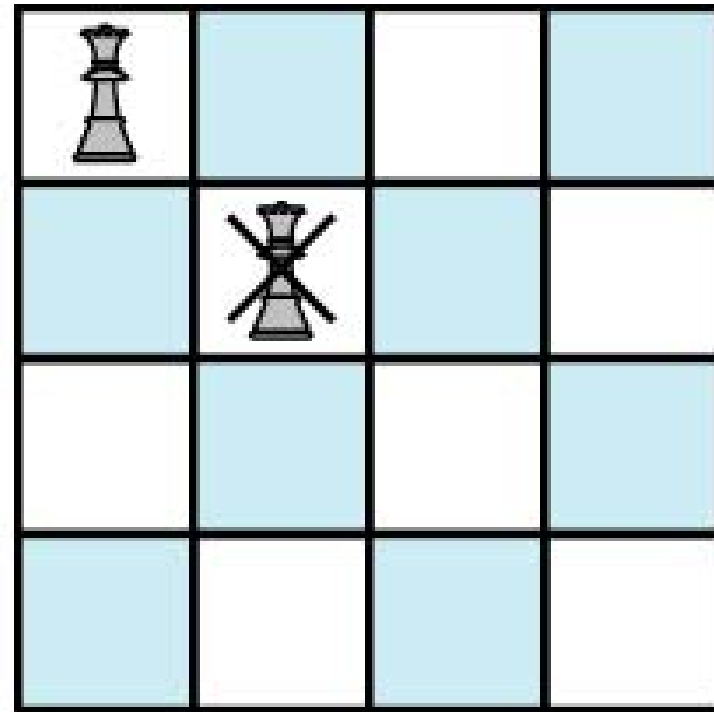
```
void checknode (node v) {  
    node u;  
  
    if (promising(v))  
        if (there is a solution at v)  
            write the solution;  
    else  
        for (each child u of v)  
            checknode(u);  
}
```

- See Example 5.1, page 181-184

Back Tracking



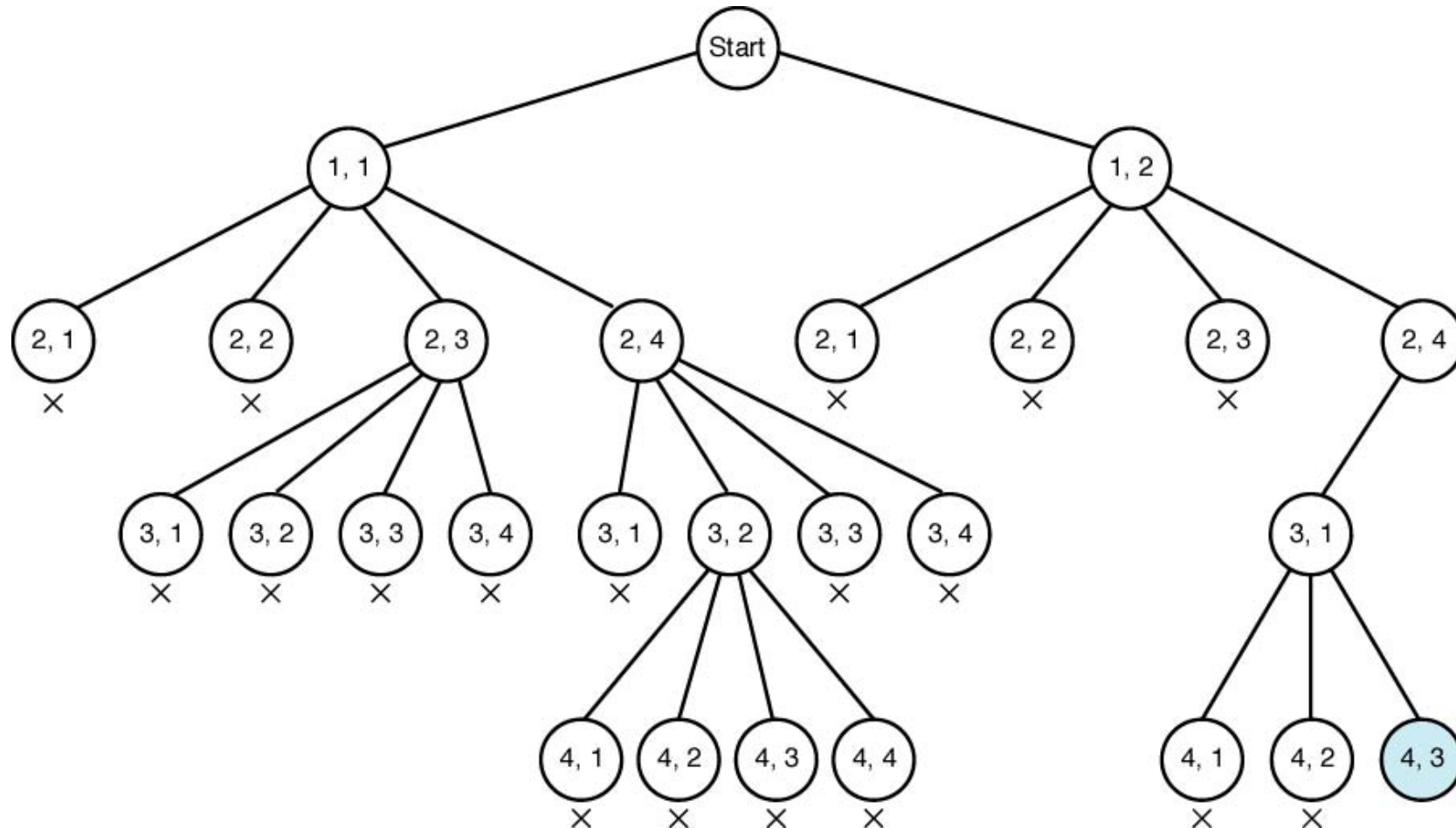
(a)



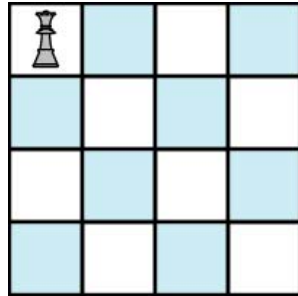
(b)

Back Tracking

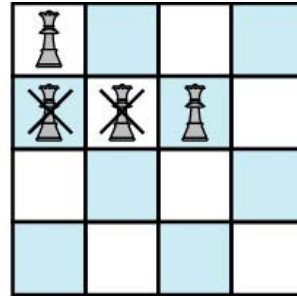
□ 4-Queens 문제의 상태 공간 트리 (되추적)



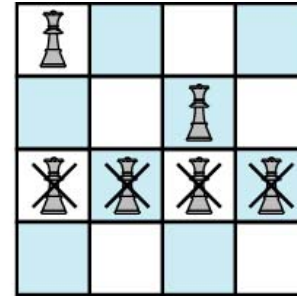
Back Tracking



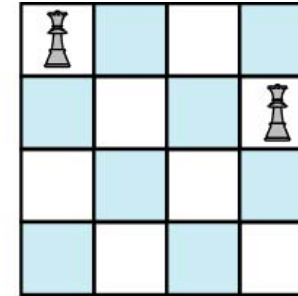
(a)



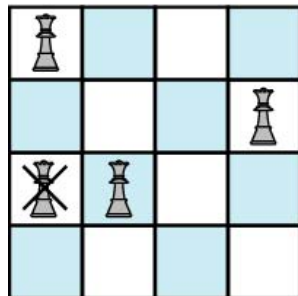
(b)



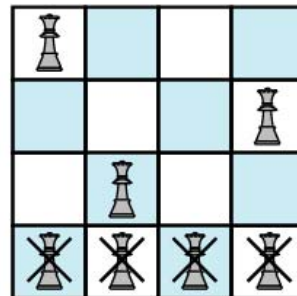
(c)



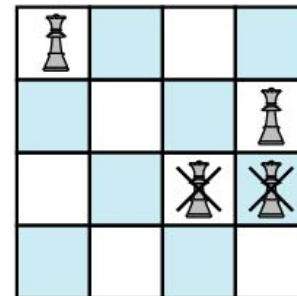
(d)



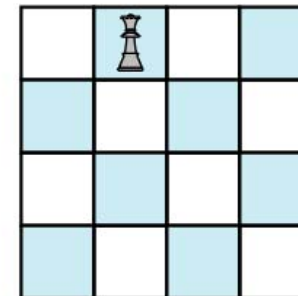
(e)



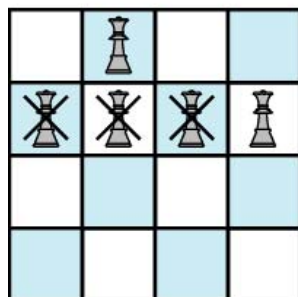
(f)



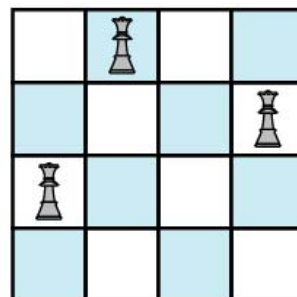
(g)



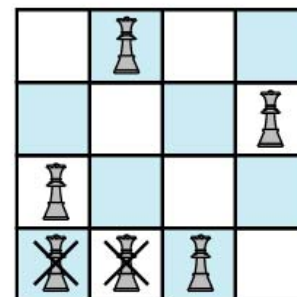
(h)



(i)



(j)



(k)

Back Tracking

- 깊이우선검색 vs 되추적
 - 검색하는 노드 개수의 비교
 - 순수한 깊이우선검색 = 155 노드
 - 되추적 = 27 노드

Back Tracking

- 일반 되추적 알고리즘:

```
void checknode (node v) {  
    node u;  
  
    if (promising(v))  
        if (there is a solution at v)  
            write the solution;  
    else  
        for (each child u of v)  
            checknode(u);  
}
```

- See Example 5.1, page 181-184

Back Tracking

```
void expand (node v) {  
    node u;  
    for (each child u of v)  
        if (promising(u))  
            if (there is a solution at u)  
                write the solution;  
            else  
                expand(u);  
}
```

□ 개선된 되추적 알고리즘

- 노드를 방문하기 전에 유망성 여부의 점검을 실시하므로, 그만큼 방문할 노드의 수가 적어져서 더 효율적이다.
- 그러나 일반 알고리즘이 이해하기는 더 쉽고, 일반 알고리즘을 개량된 알고리즘으로 변환하기는 간단하므로, 앞으로 이 강의에서의 모든 되추적 알고리즘은 일반 알고리즘과 같은 형태로 표현

n -Queens Problem

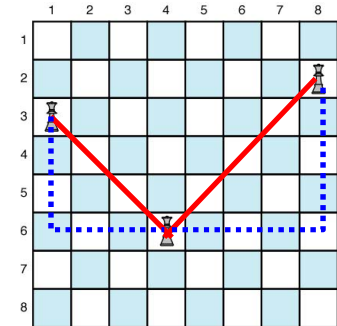
□ n -Queens problem

- n 개의 Queen을 서로 상대방을 위협하지 않도록 $n \times n$ 서양장기(chess) 판에 위치시키는 문제이다.
서로 상대방을 위협하지 않기 위해서는 같은 행이나, 같은 열이나, 같은 대각선 상에 위치하지 않아야 한다.
- n -Queens 문제의 되추적 알고리즘
 - 4-Queens 문제를 n -Queens 문제로 확장시키면 된다.

n-Queens Problem

□ Promising Function

- must check two queens are in the same column or diagonal
- $\text{col}(i)$: the column number where the queens in the i -th row is located.
- How to check whether the queen in k -th row is in the same column?
 - If $(\text{col}(i) == \text{col}(k))$ nonpromising;
- How to check whether the queen in k -th row is in the same diagonal?
 - If $(\text{abs}(\text{col}(i) - \text{col}(k)) == \text{abs}(i - k))$ nonpromising;
 - Ex.[Ref. Figure 5.6, page 186]
 - $\text{abs}(\text{col}(6) - \text{col}(3)) = \text{abs}(4 - 1) = 3 == \text{abs}(6 - 3) \Rightarrow$ nonpromising
 - $\text{abs}(\text{col}(6) - \text{col}(2)) = \text{abs}(4 - 8) = 4 == \text{abs}(6 - 2) \Rightarrow$ nonpromising



n-Queens Problem

□ Algorithm 5.1 (I)

- Problem : Position n queens on a chessboard so that no two are in the same row, column, or diagonal.
- Inputs : n
- Outputs : The position number of each queen can be placed on an $n*n$ chessboard

```
void queens (index i) {  
    index j;  
    if (promising (i))  
        if (i == n)  cout << col[1] through col[n];  
        else  
            for (j=1; j<=n; j++) {  
                col[i+1] = j;  
                queens(i+1);  
            }  
}
```

```
void checknode (node v)  
{  
    if (promising(v))  
        if (there is a solution at v)  
            write the solution;  
    else  
        for (each child u of v)  
            checknode(u);  
}
```

n-Queens Problem

```
bool promising (index i) {  
    index k;  
    bool switch;  
  
    k = 1;  
    switch = TRUE;  
    while (k<i && switch) {  
        if (col[i]==col[k] || abs(col[i]-col[k])==abs(i-k))  
            switch = FALSE;  
        k++;  
    }  
    return switch;  
}
```

n -Queens Problem

□ n -Queens 문제의 분석 I

- 상태공간트리 전체에 있는 노드 (promising test)의 수를 구함으로서, 가지 친 상태공간트리의 노드의 개수의 상한을 구한다.
- 깊이가 i 인 노드의 개수는 n^i 개 이고, 이 트리의 깊이는 n 이므로, 노드의 총 개수는 상한(upper bound)은:

$$1 + n + n^2 + n^3 + \cdots + n^n = \frac{n^{n+1} - 1}{n - 1}$$

- 따라서 $n = 8$ 일 때, $\frac{8^9 - 1}{8 - 1} = 19,173,961$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n r^i &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n \\ &= \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \end{aligned}$$

- 그러나 이 분석은 별 가치가 없다.
왜냐하면 되추적함으로서 점검하는 노드 수를 얼마나 줄였는지 상한값을 구해서는 전혀 알 수 없기 때문이다.

n -Queens Problem

□ n -Queens 문제의 분석 II

- 유망한 노드만 세어서 상한을 구한다.
이 값을 구하기 위해서는 어떤 두 개의 Queen이 같은 열(column)에 위치할 수 없다는 사실을 이용하면 된다.
- 예를 들어 $n = 8$ 일 경우를 생각해 보자.
첫번째 Queen은 어떤 열에도 위치시킬 수 있고,
두 번째는 기껏해야 남은 7열 중에서만 위치시킬 수 있고,
세 번째는 남은 6열 중에서 위치시킬 수 있다.
이런 식으로 계속했을 경우 노드의 수는
 $1 + 8 + 8 \times 7 + 8 \times 7 \times 6 + \dots + 8! = 109,601$ 가 된다.

이 결과를 일반화하면 유망한 노드의 수는

$$1 + n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \dots + n!$$

을 넘지 않는다.

n -Queens Problem

□ 사색

- 위 2가지 분석 방법은 알고리즘의 복잡도를 정확히 얘기해주지 못하고 있다.
- 왜냐하면:
 - 대각선을 점검하는 경우를 고려하지 않았다.
따라서 실제 유망한 노드의 수는 훨씬 더 작을 수 있다.
 - 유망하지 않은 노드를 포함하고 있는데,
실제로 해석의 결과에 포함된 노드 중에서
유망하지 않은 노드가 훨씬 더 많을 수 있다.

n -Queens Problem

□ n -Queens 문제의 분석 III

- 유망한 노드의 개수를 정확하게 구하기 위한 유일한 방법은 실제로 알고리즘을 수행하여 구축된 상태공간트리의 노드의 개수를 세어보는 수 밖에 없다.
- 그러나 이 방법은 진정한 분석 방법이 될 수 없다.
왜냐하면 분석은 알고리즘을 실제로 수행하지 않고 이루어져야 하기 때문이다.

n -Queens Problem

□ 알고리즘의 수행시간 비교

n	알고리즘 1 [†] 로 검사한 마디의 개수	알고리즘 2 [‡] 로 검사한 해답후보의 개수	되추적으로 검사한 마디의 개수	되추적으로 유망함을 알아낸 마디의 개수
4	341	24	61	17
8	19,173,961	40,320	15,721	2057
12	9.73×10^{12}	4.79×10^8	1.01×10^7	8.56×10^5
14	1.20×10^{16}	8.72×10^{10}	3.78×10^8	2.74×10^7

* 해답을 모두 찾는 데 필요한 검사횟수를 나타냄.

† 알고리즘 1은 되추적 없이 상태공간 트리를 깊이우선 검색함.

‡ 알고리즘 2는 각 여왕말을 다른 행과 열에 위치하는 $n!$ 개의 해답후보를 생성함.

A Monte Carlo Algorithm

- Monte Carlo 기법을 사용한 백트래킹 알고리즘의 수행시간 추정
 - Monte Carlo 기법은 어떤 입력이 주어졌을 때 점검하게 되는 상태공간트리의 “전형적인” 경로를 무작위(random)로 생성하여 그 경로 상에 있는 노드의 수를 센다.
이 과정을 여러 번 반복하여 나오는 결과의 평균치를 추정치로 한다.
 - Monte Carlo 기법은 확률적 (probabilistic) 알고리즘
 - 표본 공간의 무작위 표본의 추정치를 가지고
무작위 변수의 기대치를 추정
 - Cf) 결정적 (deterministic) 알고리즘
 - 이 기법을 적용하기 위해서는 다음 두 조건을 반드시 만족하여야 한다.
 - 상태공간트리에서 같은 수준(level)에 있는 모든 노드에서는
같은 유망함수를 사용해야 한다.
 - 상태 공간트리에서 같은 수준에 있는 모든 노드들은
같은 수의 자식노드들을 가지고 있어야 한다.
 - *n*-Queens 문제는 이 두 조건을 만족한다.

A Monte Carlo Algorithm

- Monte Carlo 기법을 사용한 백트래킹 알고리즘의 수행시간 추정 방법
 1. 뿌리노드의 유망한 자식노드의 개수를 m_0 이라고 한다.
 2. 상태공간트리의 수준 1에서 유망한 노드 하나를 무작위로 정하고, 그 노드의 유망한 자식노드의 개수를 m_1 이라고 한다.
 3. 위에서 정한 노드의 유망한 노드 하나를 다시 무작위로 정하고, 그 노드의 유망한 자식노드의 개수를 m_2 라고 한다.
 4. 더 이상 유망한 자식노드가 없을 때까지 이 과정을 반복한다.

- 되추적 알고리즘에 의해서 점검한 노드의 총 개수의 추정치
 - m_i 는 수준 i 에 있는 노드의 유망한 자식노드의 개수의 평균의 추정치
 - t_i 는 수준 i 에 있는 한 노드의 자식노드의 총 개수
 - 따라서 노드의 총 개수의 추정치는

$$1 + t_0 + m_0 t_1 + m_0 m_1 t_2 + \cdots m_0 m_1 \cdots m_{i-1} t_i + \cdots$$

A Monte Carlo Algorithm

□ Algorithm 5.2

- Problem : Monte-Carlo 알고리즘을 사용하여,
되추적 알고리즘의 효율성을 평가하라.
- Inputs : 되추적 알고리즘이 해결하여야 할 문제의 예시
- Outputs : 주어진 예시에 대한 모든 해를 찾기 위하여 주어진
알고리즘이 검사해야 하는 노드의 수

A Monte Carlo Algorithm

```
int estimate() {
    node v;
    int m, mprod, t, numnodes;

    v = root of state space tree;
    numnodes = 1;
    m=1;
    mprod = 1;

    while (m != 0) {
        t = number of children of v;
        mprod = mprod*m;
        numnodes = numnodes + mprod*t;
        m = number of promising children of v;
        if (m != 0)
            v = randomly selected promising child of v;
    }
    return numnodes;
}
```

A Monte Carlo Algorithm

Monte-Carlo Estimate for Algorithm 5.1

```
int estimate_n_queens (int n) {
    index i, j, col[1..n];
    int m, mprod, numnodes;
    set_of_index prom_children;

    i = 0;  numnodes = 1;  m=1;  mprod = 1;
    while (m != 0 && i!=n) {
        mprod = mprod*m;
        numnodes = numnodes + mprod*n;
        i++;  m = 0;  prom_children =  $\Phi$ ;
        for (j=1; j<=n; j++) {
            col[i] = j;
            if (promising(i)) {
                m++;
                prom_children = prom_children  $\cup$  {j};
            }
        }
        if (m != 0) {
            j = random selection from prom_children;
            col[i] = j;
        }
    }
    return numnodes;
}
```

Sum-of-Subsets Problem

□ Sum-of-Subsets Problem

- There are n positive integers w_i and a positive integer W .
- The goal is to find all subsets of integers that sum of W .

Ex 5.2

■ Suppose $n = 5$, $W = 21$

■ $w_1 = 5$; $w_2 = 6$; $w_3 = 10$; $w_4 = 11$; $w_5 = 16$;

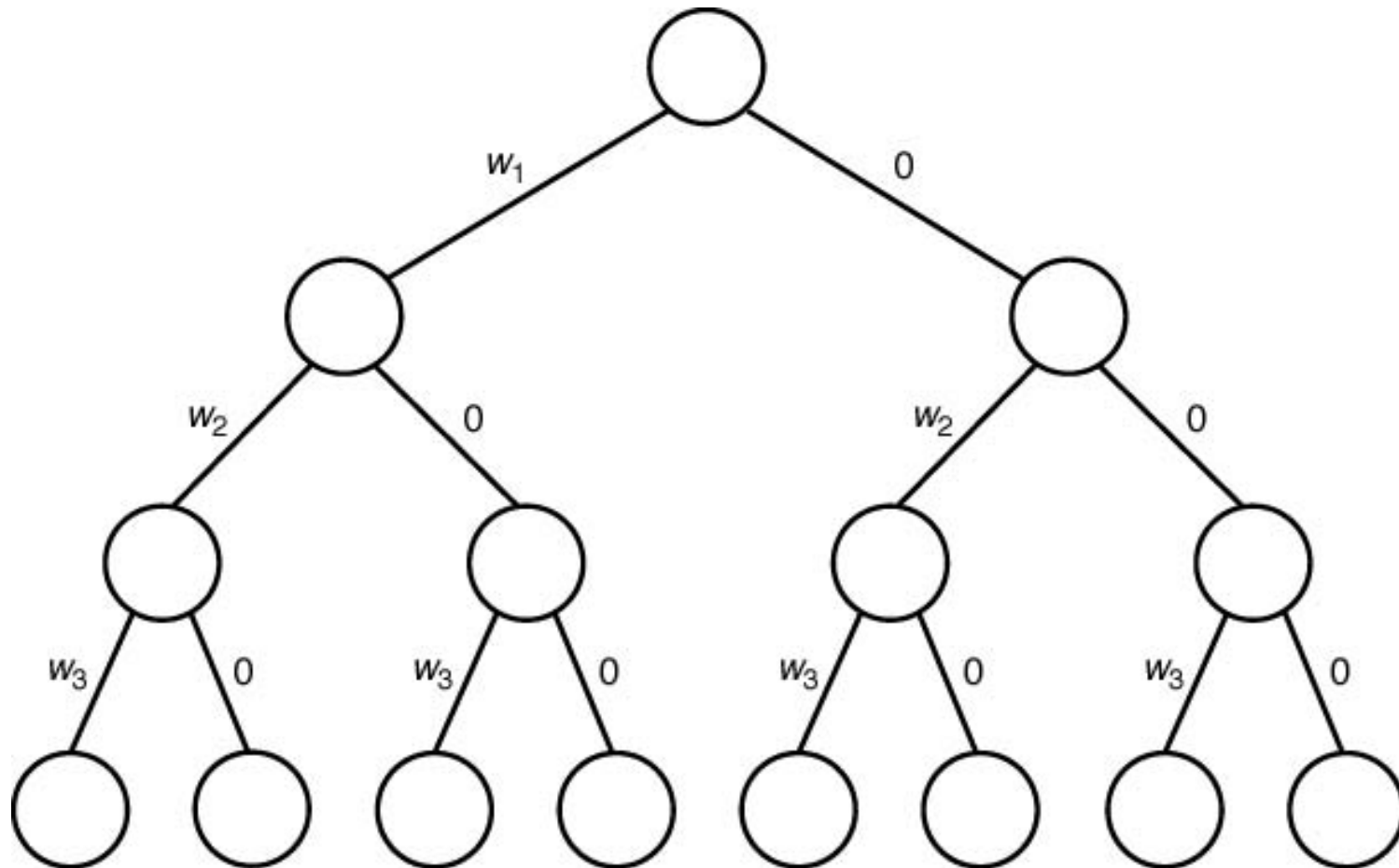
■ Because $w_1 + w_2 + w_3 = 5 + 6 + 10 = 21$

$$w_1 + w_5 = 5 + 16 = 21$$

$$w_3 + w_4 = 10 + 11 = 21$$

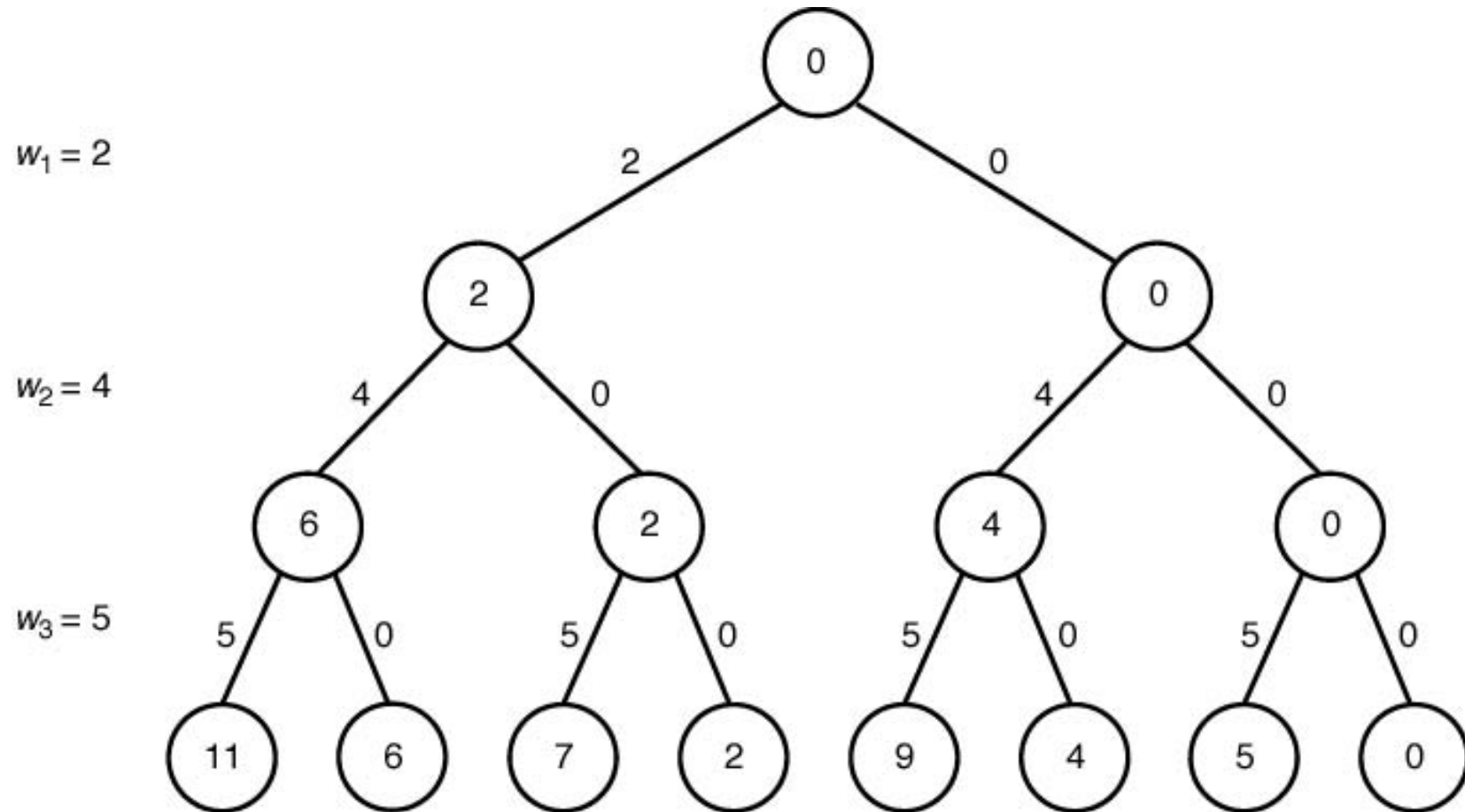
■ Solutions are $\{w_1, w_2, w_3\}$, $\{w_1, w_5\}$, $\{w_3, w_4\}$

Sum-of-Subsets Problem



A state space tree for Sum-of-Subsets ($n=3$)

Sum-of-Subsets Problem



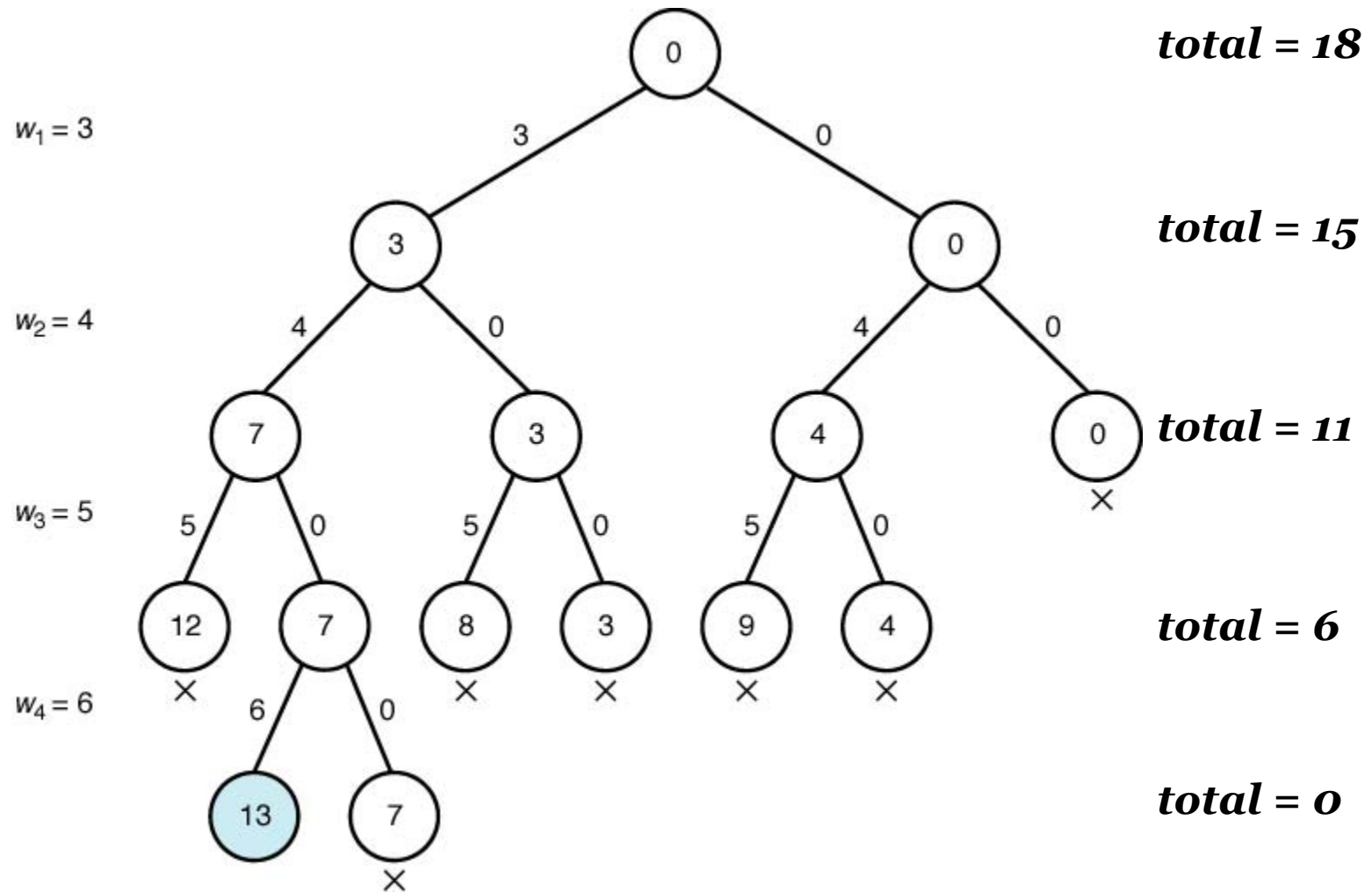
$n=3$, $W=6$ and $w_1 = 2$; $w_2 = 4$; $w_3 = 5$

Sum-of-Subsets Problem

- Backtracking Strategy
 - If we sort the weights in nondecreasing order,
there are obvious signs that a node is nonpromising
 1. *weight* – the sum of the weights that have been included
up to a node at level i
if $weight + w_{i+1} > W \rightarrow$ a node is non-promising
 2. *total* – the total weight of the remaining weights
if $weight + total < W \rightarrow$ a node is non-promising

Sum-of-Subsets Problem

Ex 5.4 $n=4$, $W=13$ and $w_1 = 3$; $w_2 = 4$; $w_3 = 5$; $w_4 = 6$



Sum-of-Subsets Problem

```
void sum_of_subsets (index i, int weight, int total) {
    if (promising(i)) {
        if (weight == W)
            cout << include[1] through include[i];
        else {
            include[i+1] = "yes";
            sum_of_subsets(i+1, weight+w[i+1], total-w[i+1]);
            include[i+1] = "no";
            sum_of_subsets(i+1, weight, total-w[i+1]);
        }
    }
}

bool promising (index i) {
    return (weight+total >= W)
        && (weight == W || weight+w[i+1] <= W);
}
```

Sum-of-Subsets Problem

- The number of nodes in the state space tree searched by Algorithm 5.4 is equal to

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

- If we take

$$\sum_{i=1}^{n-1} w_i < W \qquad w_n = W,$$

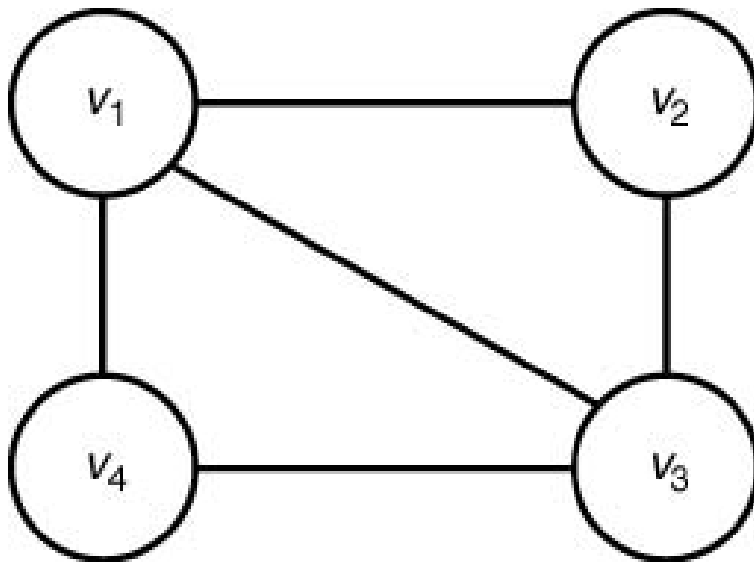
there is only one solution $\{w_n\}$, and it will not be found until an exponentially large number of nodes are visited.

Graph Coloring

□ Graph Coloring Problem

- m -coloring – 지도에 m 가지 색으로 색칠하는 문제
- m 개의 색을 가지고, 인접한 지역이 같은 색이 되지 않도록 지도에 색칠하는 문제

Ex 5.5



이 그래프에서 두가지 색으로 문제를 풀기는 불가능하다.

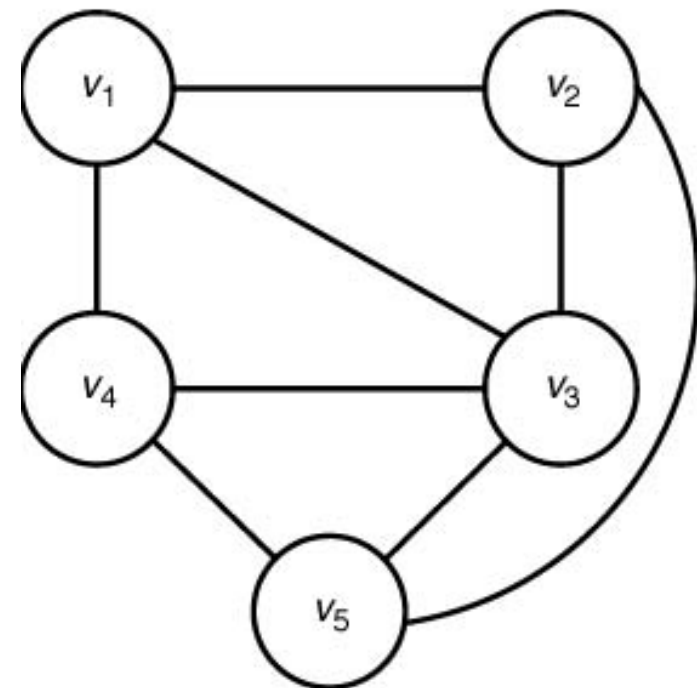
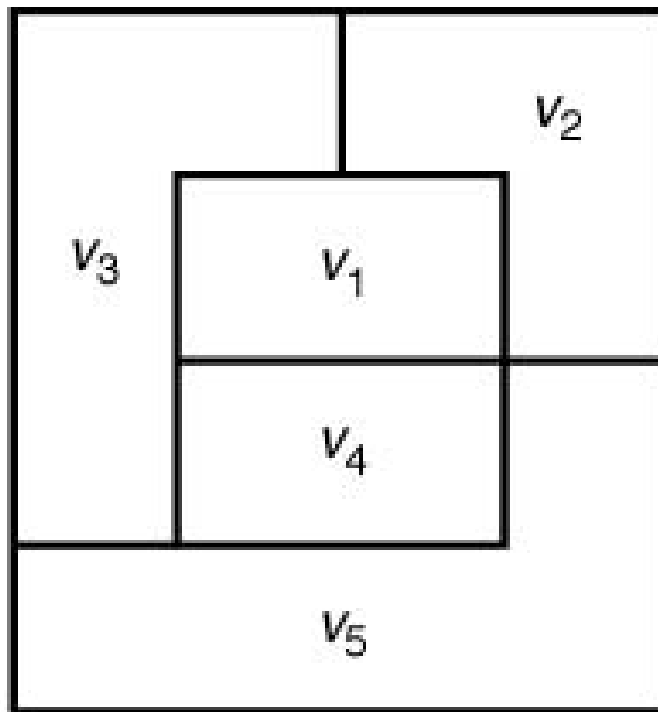
세 가지 색을 사용하면 총 6가지의 해답을 얻을 수 있다.

Graph Coloring

- Coloring of maps
 - An important application of graph coloring
 - A graph is called *planar* (평면) if it can be drawn in a plane in such a way that no two edges cross each other
- Planar Graph (평면그래프)
 - To every map, there corresponds a planar graph
 - 지도에서 각 지역을 그래프의 정점으로 하고,
한 지역이 어떤 다른 지역과 인접해 있으며
그 지역들을 나타내는 정점들 사이에 이음선을 그으면,
모든 지도는 그에 상응하는 평면그래프로 표시할 수 있다.
- m -coloring problem for planar graphs
 - Determine how many ways the map can be colored,
using at most m colors,
so that no 2 adjacent regions are the same color

Graph Coloring

□ 지도와 평면 그래프



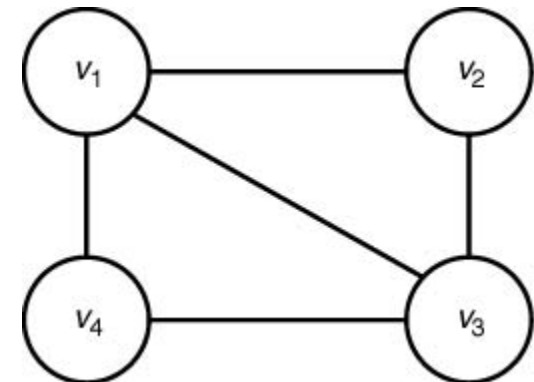
Graph Coloring

□ Strategy of m -coloring problem

- Use state space tree

- Procedure

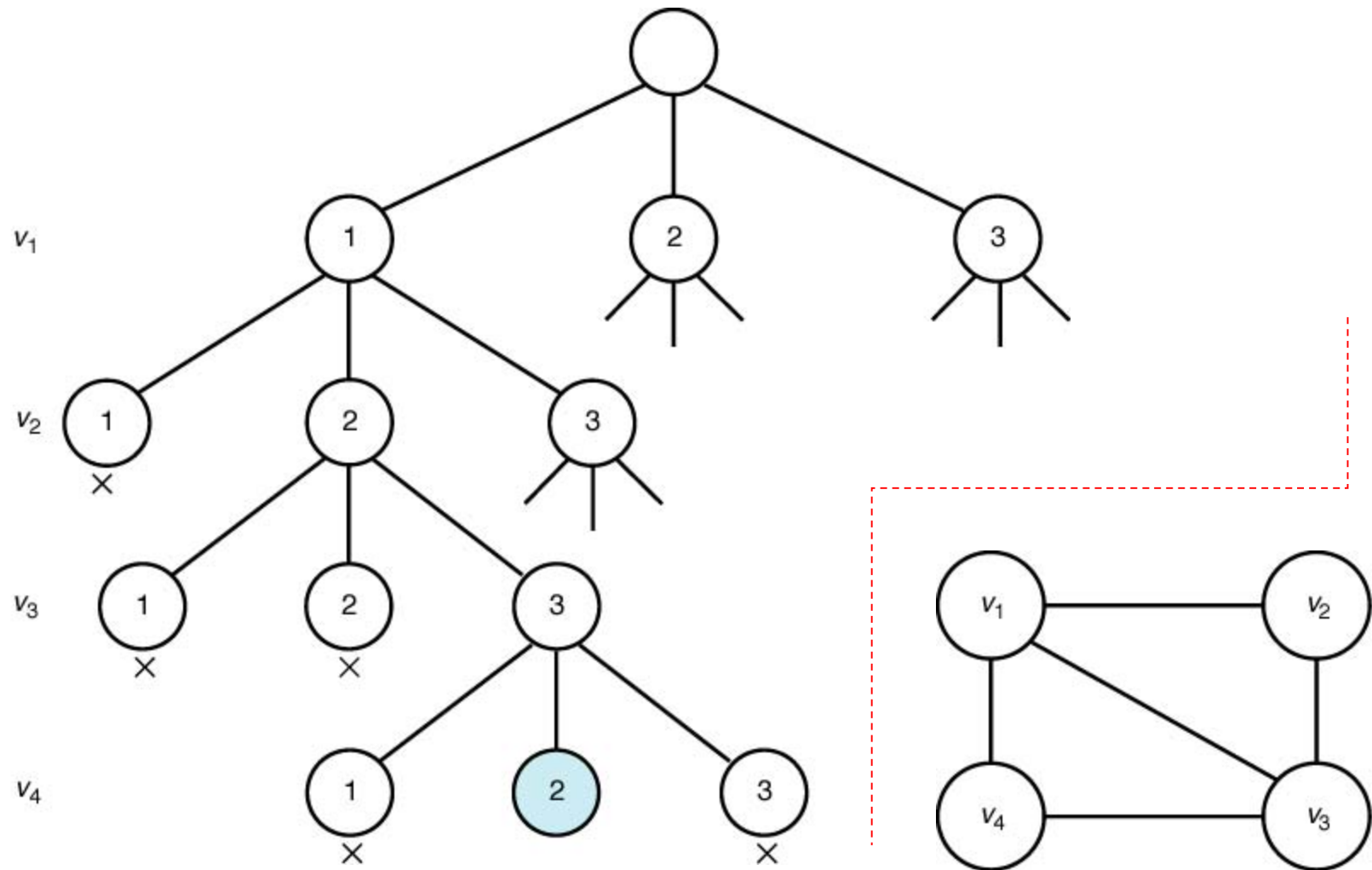
- Each possible color is tried for vertex v_1 at level 1
- Each possible color is tried for vertex v_2 at level 2
-
- Each possible color is tried for vertex v_n at level n



- Each path from the root to a leaf is a candidate solution
 - Check whether a candidate solution is a solution by determining whether any two adjacent vertices are the same color

Graph Coloring

- 그래프 색칠하기 되추적 해법



Graph Coloring

□ Algorithm 5.5 (I)

- Problem : m 개의 색을 사용하여, 그래프의 정점의 색을 할당할 수 있는 모든 방법을 결정하라. 단, 인접한 정점은 서로 같은 색을 가질 수 없다.
- Inputs : n (정점의 수), m (색의 수), $W[1..n][1..n]$ (그래프, $W[i][j]=1(\text{TRUE}) \Rightarrow i$ 정점과 j 정점사이에 간선이 있음)
- Outputs : $\text{vcolor}[1..n]$

Graph Coloring

```
void m_coloring (index i) {
    int color;
    if (promising(i))
        if (i == n)  cout << vcolor[1] through vcolor[n];
        else
            for (color = 1; color<=m; color++) {
                vcolor[i+1] = color;
                m_coloring(i+1);
            }
}

bool promising(index i) {
    int j;      bool switch;
    switch = TRUE;
    j = 1;
    while (j<i && switch) {
        if (W[i][j] && vcolor[i]==vcolor[j]) switch = FALSE;
        j++;
    }
    return switch;
}
```

Graph Coloring

□ 그래프 색칠하기: 분석

- 상태공간트리 상의 노드의 총수는

$$1 + m + m^2 + \cdots + m^n = \frac{m^{n+1} - 1}{m - 1}$$

- If m is only 2, and we take a graph in which v_n has an edge to every other node, and the only other edge is one between v_{n-2} and v_{n-1} , then no solution exists, but almost every node in the state space tree will be visited to determine this.
- 여기서도 Monte Carlo 기법을 사용하여 수행시간을 추정할 수 있다.
- Like the Sum-of-Subsets problem and the 0-1 Knapsack problem, the m -Coloring problem for $m \geq 3$ is in the class of problems discussed in Chapter 9.

The Hamiltonian Circuits Problem

□ Traveling Salesperson Problem (Dynamic Programming)

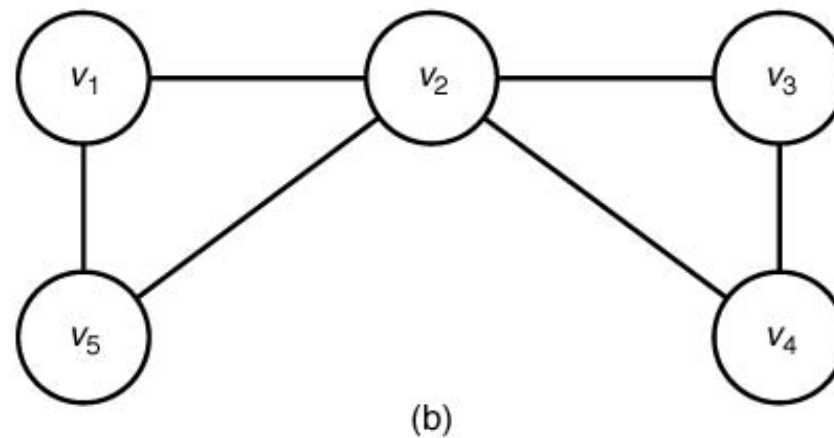
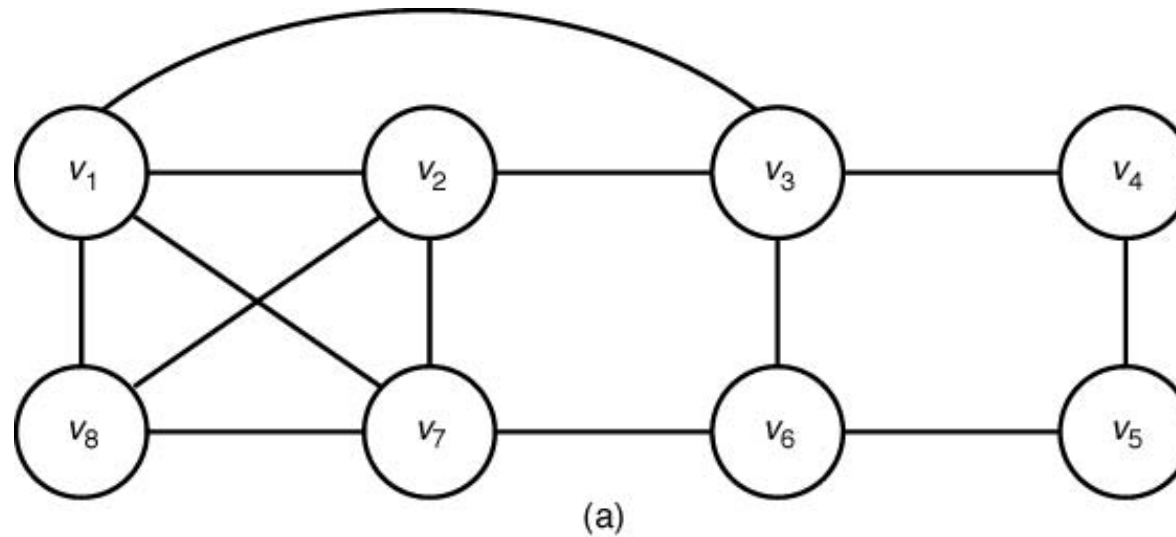
$$T(n) = (n-1)(n-2) \cdot 2^{n-3} \quad \text{cf) Brute-force } T(n) = (n-1)!$$

- if $n=20$, $T(20) = 45$ secs
- if $n=40$, $T(40) = 39 \cdot 38 \cdot 2^{37} = 6.46$ yrs

□ Hamiltonian Circuits Problem

- Not every city is connected to every other city by a road
- For a directed-graph (in TSP) or an undirected graph (in HCP)
(사실 별 상관은 없음)
- **Hamiltonian Circuit** (or Tour)
 - A path that starts at a given vertex,
visits each vertex in the graph exactly once,
and ends at the starting vertex

The Hamiltonian Circuits Problem



The Hamiltonian Circuits Problem

□ Hamiltonian Circuits Problem

- 연결된 비방향성 그래프에서 해밀토니안 회로를 결정하는 문제
- 되추적 방법을 적용하기 위해서 다음 사항을 고려해야 한다.
 - 경로 상의 i 번째 정점은 그 경로 상의 $(i - 1)$ 번째 정점과 반드시 이웃해야 한다.
 - $(n - 1)$ 번째 정점은 반드시 0번째 정점(출발점)과 이웃해야 한다.
 - i 번째 정점은 처음 $i - 1$ 개의 정점이 될 수 없다.
- 상태공간트리 상의 노드 수는

$$1 + (n - 1) + (n - 1)^2 + \cdots + (n - 1)^{(n-1)} = \frac{(n - 1)^n - 1}{n - 2}$$

Cf) dynamic programming – $(n-1)(n-2)2^{n-3}$

The Hamiltonian Circuits Problem

□ Algorithm 5.6

- Problem : 주어진 그래프에서 Hamiltonian 경로를 찾아라.
- Inputs : n (정점의 수), $W[1..n][1..n]$ (그래프, $W[i][j]=1(\text{TRUE}) \Rightarrow$ i 정점과 j 정점사이에 간선이 있음)
- Outputs : $\text{vindex}[1..n]$

```
void hamiltonian(index i) {
    index j;

    if (promising(i))
        if (i == n-1)
            cout << vindex[1] through vindex[n-1];
        else
            for (j = 2; j<=n; j++) { // Try all vertices as
                vindex[i+1] = j;      // next one.
                hamiltonian (i+1);
            }
}
```

The Hamiltonian Circuits Problem

```
bool promising(index i) {
    int j;      bool switch;

    if (i== n-1 && !W[vindex[n-1]][vindex[0]])
        switch = FALSE;
    else if (i>0 && !W[vindex[i-1]][vindex[i]])
        switch = FALSE;
    else {
        switch = TRUE;
        j= 1;
        while (j<i && switch) {
            if (vindex[i] == vindex[j]) switch = FALSE;
            j++;
        }
    }
    return switch;
}
```

- `Vindex[0] =1; hamiltonian(0);`

The Hamiltonian Circuits Problem

- Let the only edge to v_1 be one from v_2 , and let all the vertices other than v_1 have edges to each other.
- There is no Hamiltonian Circuit for the graph, and the algorithm will check **a worse-than-exponential number** of nodes to learn this.

$$1 + (n-1) + (n-1) + (n-2)(n-1) + (n-2)(n-3)(n-1) + \cdots + (n-2)(n-3)\cdots(n-(n-2))(n-1)$$

The 0-1 Knapsack Problem

- Backtracking algorithm for the 0-1 Knapsack Problem
 - 상태공간트리를 구축하여 되추적 기법으로 문제를 푼다.
 - 뿌리마디에서 왼쪽으로 가면 첫번째 아이템을 배낭에 넣는 경우이고, 오른쪽으로 가면 첫번째 아이템을 배낭에 넣지 않는 경우이다.
 - 동일한 방법으로 두 번째 아이템을 넣으면 수준 1의 노드에서 왼쪽으로 가고, 빼면 오른쪽으로 가고
 - 이런 식으로 계속하여 상태공간트리를 구축하면, 뿌리마디로부터 잎마디까지의 모든 경로는 해답후보가 된다.
 - 이 문제는 최적의 해를 찾는 문제(optimization problem)이므로 검색이 완전히 끝나기 전에는 해답을 알 수가 없다. 따라서 검색하는 과정 동안 항상 그 때까지 찾은 최적의 해를 기억해 두어야 한다.

The 0-1 Knapsack Problem

□ A general algorithm

```
void checknode(node v) {  
    node u;  
  
    if (value(v) is better than best)  
        best = value(v);  
    if (promising(v))  
        for (each child u of v)  
            checknode(u);  
}
```

- best : 지금까지 찾은 제일 좋은 해답치
- value(v) : v 마디에서의 해답치

The 0-1 Knapsack Problem

- w_i 와 p_i 를 각각 i 번째 아이템의 무게와 값어치라고 하면, p_i/w_i 의 값이 큰 것부터 내림차순으로 아이템을 정렬한다. (일종의 탐욕적인 방법이 되는 셈이지만, 알고리즘 자체는 탐욕적인 알고리즘은 아니다.)
- 다음 값들을 각 노드에 대해서 계산한다.
 - *profit*: 그 노드에 오기까지 넣었던 아이템 값어치의 합.
 - *weight*: 그 노드에 오기까지 넣었던 아이템 무게의 합.
 - *bound*(최대 이익): 노드가 수준 k 에 있다고 하고, 수준 k 에 있는 노드에서 총 무게가 W 를 넘는다고 하자. 그러면, 다음과 같이 *bound*를 구할 수 있다.

$$bound \rightarrow \left(profit + \sum_{j=i+1}^{k-1} p_j \right) + (W - totweight) \times \frac{p_k}{w_k}$$

아이템 $k-1$ 까지의 이익

아이템 k 을 부분적으로나마 넣을 수 있다고 했을 때의 이익

- *maxprofit*: 지금까지 찾은 최선의 해답이 주는 값어치

The 0-1 Knapsack Problem

- 초기값(루트 노드): $maxprofit := \$0$; $profit := \$0$; $weight := 0$
- 깊이우선순위로 각 노드를 방문하여 다음을 수행한다:
 1. 그 노드의 $profit$ 과 $weight$ 를 계산한다.
 2. 그 노드의 $bound$ 를 계산한다.
 3. ($weight < W$) and ($bound > maxprofit$)이면, 검색을 계속한다;
(무게가 초과하지 않았고, 향후 가치가 최대 가치보다 클 수 있다면)
그렇지 않으면, 되추적한다.
- 상기 과정을 모든 노드를 방문(실제로는 전지(가지치기)가 이뤄지므로, 모든 노드를 방문하지는 않음)할 때까지 수행한다.
- 고찰: 최선이라고 여겼던 노드를 선택했다고 해서 실제로 그 노드로부터 최적해가 항상 나온다는 보장은 없다.

The 0-1 Knapsack Problem

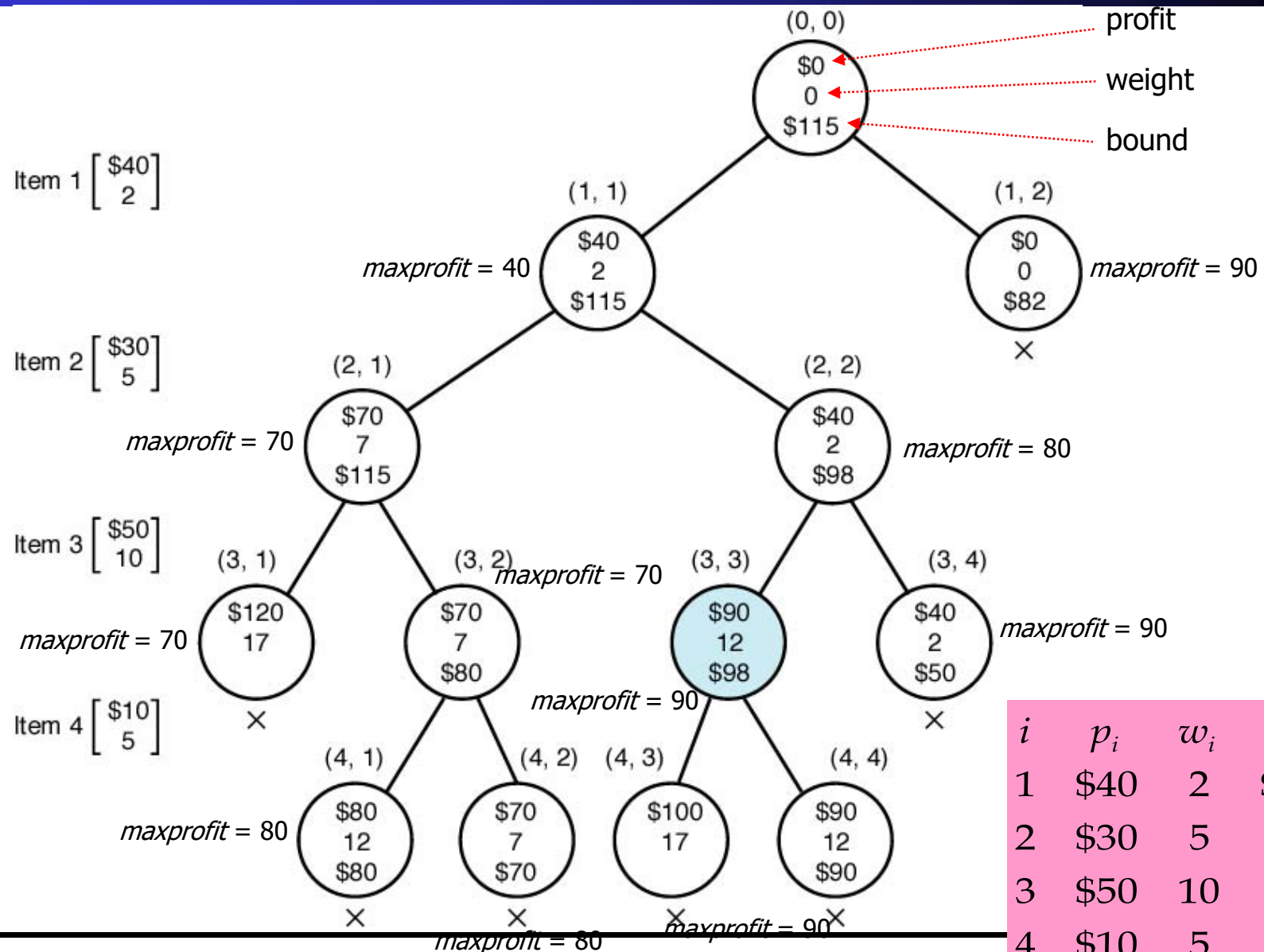
□ Ex 5.6

$n = 4, W = 160$ 이고,

i	p_i	w_i	$\frac{p_i}{w_i}$	일 때,
1	\$40	2	\$20	
2	\$30	5	\$6	
3	\$50	10	\$5	
4	\$10	5	\$2	

되추적을 사용하여 구축되는 가지친 상태공간트리를 그려 보시오.

The 0-1 Knapsack Problem



The 0-1 Knapsack Problem

□ Algorithm

- Problem : Let n items be given, where each item has a *weight* and a *profit*.
Let W be given. Determine a set of items with maximum total profit, under the constraint that the sum of their weights cannot exceed W .
- Inputs : $n, W, w[1..n], p[1..n]$. w and p arrays are containing positive integers sorted in nonincreasing order according to the values of $p[i]/w[i]$.
- Outputs : $bestset[1..n]$.
$$\left(\begin{array}{ll} bestset[i]=YES; & \text{If the } i\text{-th item is included} \\ bestset[i]=NO; & \text{Otherwise.} \end{array} \right)$$

The 0-1 Knapsack Problem

```
void knapsack (index i, int profit, int weight) {
    if (weight <= W  &&  profit > maxprofit) { // best so far
        maxprofit = profit;
        numbest = i;
        bestset = include;
    }

    if (promising(i)) {
        include[i+1] = "YES";           // Include w[i+1]
        knapsack(i+1, profit+p[i+1], weight+w[i+1]);
        include[i+1] = "NO";            // Not include w[i+1]
        knapsack(i+1,  profit,  weight);
    }
}
```

The 0-1 Knapsack Problem

```
bool promising(index i) {
    index j, k;
    int totweight;
    float bound;

    if (weight >= W)    return FALSE;
    else {
        j = i+1;
        bound = profit;
        totweight = weight;
        while ((j <= n) && (totweight +w[j] <= W)) {
            totweight = totweight + w[j];
            bound = bound + p[j];
            j++;
        }

        k=j;
        if (k <= n)
            bound = bound + (W-totweight)*p[k]/w[k];
        return  bound > maxprofit;
    }
}
```

The 0-1 Knapsack Problem

- The state space tree in the 0-1 Knapsack problem is the same as that in the Sum-of-Subsets problem. As shown in Section 5.4, the number of nodes in that tree is

$$2^{n+1} - 1$$

- Algorithm 5.7 checks all nodes in the state space tree for the following instances. For a given n , let $W = n$, and

$$p_i = 1 \quad w_i = 1 \quad \text{for } 1 \leq i \leq n-1$$

$$p_n = n \quad w_n = n.$$

- The optimal solution is to take only the n th item.

The 0-1 Knapsack Problem

□ 분석

- 이 알고리즘이 점검하는 마디의 수는 $\Theta(2^n)$ 이다.
- 위 보기의 경우의 분석: 점검한 마디는 13개이다.
 - 이 알고리즘이 동적계획법으로 설계한 알고리즘 보다 좋은가?
 - 확실하게 대답하기 불가능
 - Dynamic Programming – 최악의 경우 $O(\min(2^n, nW))$
 - Backtracking – 최악의 경우 $\Theta(2^n)$
- Horowitz와 Sahni(1978)는 Monte Carlo 기법을 사용하여
되추적 알고리즘이 동적계획법 알고리즘보다
일반적으로 더 빠르다는 것을 입증하였다.
- Horowitz와 Sahni(1974)가 분할정복과 동적계획법을
적절히 조화하여 개발한 알고리즘은 $O(2^{n/2})$ 의 시간복잡도를 가지는데,
이 알고리즘은 되추적 알고리즘보다 일반적으로 빠르다고 한다.