Chap 2. Divide-and-Conquer

1. **Binary Search**
2. **Mergesort**
3. **The Divide-and-Conquer Approach**
4. **Quicksort (Partition Exchange Sort)**
5. **Strassen's Matrix Multiplication Algorithm**
8. **When Not to Use Divide-and-Conquer**

This material is prepared by Prof. Jaeyoung Choi, Soongsil University.

Strategy of Divide-and-Conquer

- 분할 (*Divide*)
  - 해결하기 쉽도록 문제를 여러 개의 작은 부분으로 나눈다.
- 정복 (*Conquer* – Solve)
  - 나눈 작은 문제를 각각 해결한다.
- 통합 (*Combine* – Obtain the solution)
  - (필요하다면) 해결된 해답을 모은다.

☞ **Top-down (하향식)** approach

Binary Search

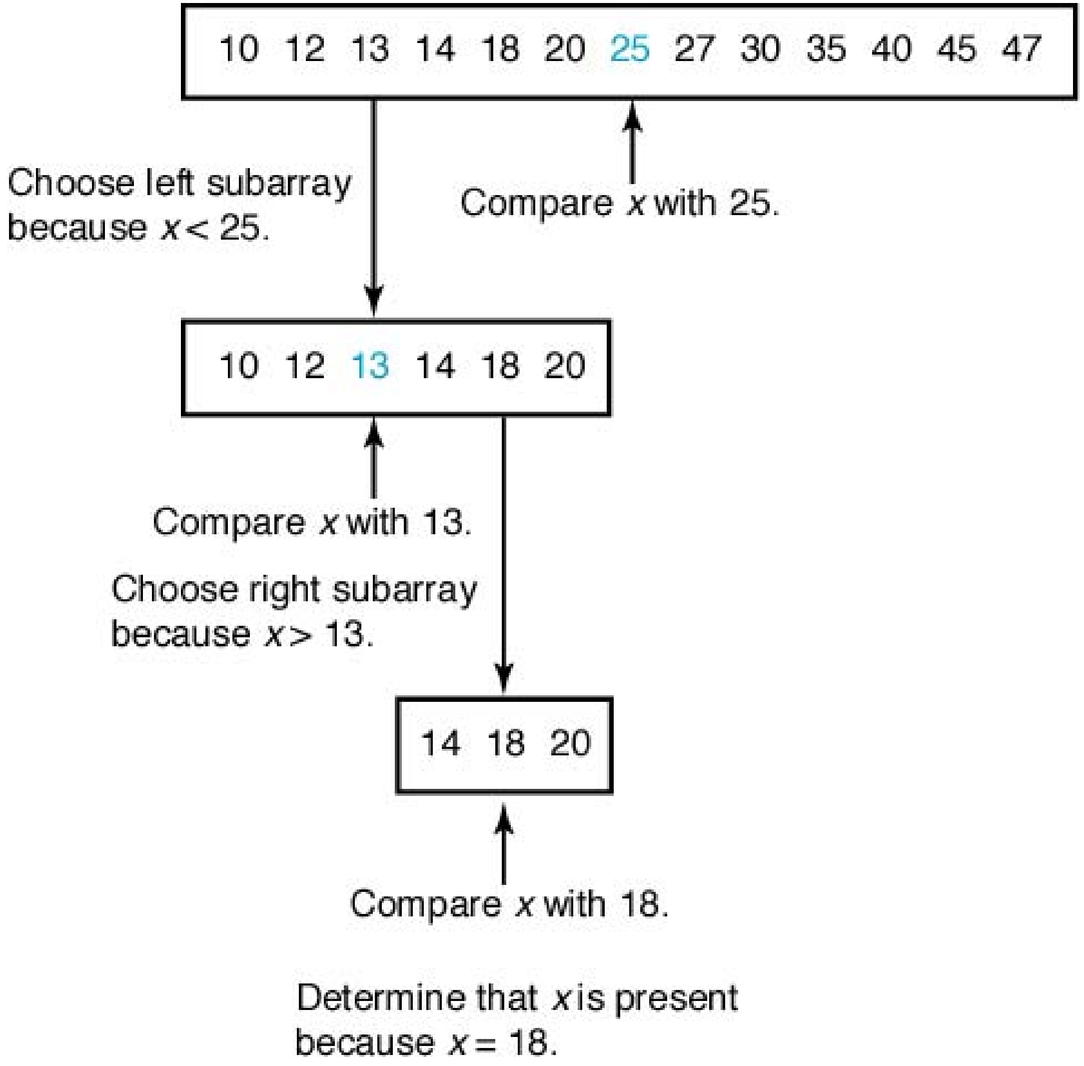
- 재귀 알고리즘

  - 문제: 크기가 *n*인 정렬된 배열 *S*에 *x*가 있는지를 결정하라.
    - 입력: 자연수 *n*, 비내림차순으로 정렬된 배열 *S*[1..n], 찾고자 하는 항목 *x*
    - 출력: *locationout* - *x*가 *S*의 어디에 있는지의 위치. 만약 *x*가 *S*에 없다면 0

  - 설계전략:
    - *x*가 배열의 중간에 위치하고 있는 항목과 같으면, "빙고", 찾았다!

      그렇지 않으면:
    - *Divide* (분할): 배열을 반으로 나누어서
      *x*가 중앙에 위치한 항목보다 작으면 왼쪽 배열 반쪽을 선택,
      그렇지 않으면 오른쪽 배열 반쪽을 선택한다.
    - *Conquer* (정복): 선택된 반쪽 배열에서 *x*를 찾는다.
    - *Obtain the solution* (or *Combine* 통합): (필요 없음)

Binary Search



Binary Search

```
index location (index low, index high) {
   index mid;

   if (low > high)
      return 0;                                     // 찾지 못했음
   else {
      mid = ⌊(low + high) / 2⌋;                     // 정수 나눗셈 (나머지 버림)
      if (x == S[mid])
         return mid;                                //  찾았음
      else if (x < S[mid])
            return location(low, mid-1);            // 왼쪽 반을 선택함
      else
            return location(mid+1, high);           // 오른쪽 반을 선택함
   }
}
...
locationout = location(1, n);          // evoke location
...
```

Notice

- *Why n, S, x are not parameters to function location ?*
  - ☞ they remain unchanged in each recursive call
  - ☞ the variables, whose values can change in the recursive calls, are made parameters to recursive calls

- 2 reasons
  - Make the expression of recursive routines less cluttered
  - A new copy of any variable passed to the routine is made in each recursive call
    - It a variable's value doesn't change, the copy is unnecessary
    - → Pass the value by address

      (an array is automatically passed by address in C/C++)

Notice

- The recursive version of Binary Search employs tail-recursion
  - *tail-recursion* – no operations are done after the recursive call
  - So, it is straightforward to produce an iterative version
  - It is advantageous in C++ to replace tail-recursion by iteration
    - A substantial amount of memory can be saved by eliminating the stack
      - Use stack to save the first routine's pending results
    - The iterative algorithm will execute faster
      - Only by a constant multiplication factor
      - No stack needs to be maintained
  - Most modern LISP dialects compile tail-recursion to iterative code

Worst-Case Time Complexity Analysis

- Binary Search, Recursive
  - Basic operation: the comparison of *x* with *S[mid]*
  - Input size: n (= *high* - *low* + 1), the number of items in the array
  - 알고리즘을 살펴보면 단위연산으로 설정한 조건문을 while루프 내부에서 2번 수행하지만, 사실상 비교는 한번 이루어진다고 봐도 된다. 그 이유는:

    (1) 어셈블리 언어로는 하나의 조건 명령으로 충분히 구현할 수 있기 때문이기도 하고;

    (2) *x*를 찾기 전까지는 항상 2개의 조건 문을 수행하므로 하나로 묶어서 한 단위로 취급을 해도 되기 때문이기도 하다.

    - 이와 같이 단위연산은 최대한 효율적으로(빠르게) 구현된다고 일반적으로 가정하여, 1 단위로 취급을 해도 된다.

Worst-Case Time Complexity Analysis

- Case 1: n is a power of 2

시간복잡도를 나타내 주는 재현식(recurrence)은 다음과 같다.

$$W(n) = W(\tfrac{n}{2}) + 1 \quad \text{for } n > 1, n \text{ a power of 2}$$

$$W(1) = 1$$

이 식의 해는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$W(1) = 1$$
$$W(2) = W(1) + 1 = 2$$
$$W(4) = W(2) + 1 = 3$$
$$W(8) = W(4) + 1 = 4$$
$$W(16) = W(8) + 1 = 5$$
$$\cdots$$
$$W(2^k) = k + 1$$
$$\cdots$$
$$W(n) = \lg n + 1$$

Worst-Case Time Complexity Analysis

- Case 2: n is not restricted to being a power of 2,

  $\lfloor y \rfloor$ 란 y보다 작거나 같은 최대 정수를 나타낸다고 할 때,

  n에 대해서 가운데 첨자는 mid = $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$가 되는데,

  이 때 각 부분배열의 크기는 다음과 같다.

n	왼쪽 부분배열의 크기	mid	오른쪽 부분배열의 크기
짝수	n/2 - 1	1	n/2
홀수	(n-1)/2	1	(n-1)/2

위의 표에 의하면 알고리즘이 다음 단계에 찾아야 할 항목의 개수는 기껏해야 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$개가 된다. 따라서 다음과 같은 점화식으로 표현할 수 있다.

$$W(n) = 1 + W(\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor) \quad n > 1\text{일때}$$

$$W(1) = 1$$

Worst-Case Time Complexity Analysis

- 이 점화식의 해가 $W(n)=\lfloor \lg n \rfloor+1$ 이 됨을 n에 대한 수학적귀납법으로 증명한다.

  증명: 수학적 귀납법

  귀납출발점: $n = 1$이면, 다음이 성립한다.

  $$\lfloor \lg n \rfloor+1=\lfloor \lg 1 \rfloor+1=0+1=1=W(1)$$

  귀납가정: $n > 0$이고, $0 < k < n$인 모든 k에 대해서, $W(k)=\lfloor \lg k \rfloor+1$ 이 성립한다고 가정한다.

  귀납단계: n이 짝수이면 (즉, $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}$),

$$\begin{aligned}
W(n) &= 1+W(\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor) && \text{재현식에 의해서}\\
&= 1+\lfloor \lg \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor \rfloor+1 && \text{귀납가정에 의해서}\\
&= 2+\lfloor \lg \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor \rfloor\\
&= 2+\lfloor \lg \tfrac{n}{2} \rfloor && n\text{이 짝수이므로}\\
&= 2+\lfloor \lg n-1 \rfloor\\
&= 2+\lfloor \lg n \rfloor-1\\
&= 1+\lfloor \lg n \rfloor
\end{aligned}$$

Worst-Case Time Complexity Analysis

- n이 홀수이면 (즉 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$),

$$
\begin{aligned}
W(n) &= 1 + W\left(\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor\right) && \text{재현식에 의해서} \\
&= 1 + \left\lfloor \lg \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \right\rfloor + 1 && \text{귀납가정에 의해서} \\
&= 2 + \left\lfloor \lg \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \right\rfloor && \\
&= 2 + \left\lfloor \lg \tfrac{n-1}{2} \right\rfloor && n\text{이 홀수이므로} \\
&= 2 + \left\lfloor \lg(n-1) - 1 \right\rfloor && \\
&= 2 + \left\lfloor \lg(n-1) \right\rfloor - 1 && \\
&= 1 + \left\lfloor \lg(n-1) \right\rfloor && \\
&= 1 + \left\lfloor \lg n \right\rfloor && n\text{이 홀수이므로}
\end{aligned}
$$

따라서, $W(n) = \left\lfloor \lg n \right\rfloor + 1 \in \Theta(\lg n)$.

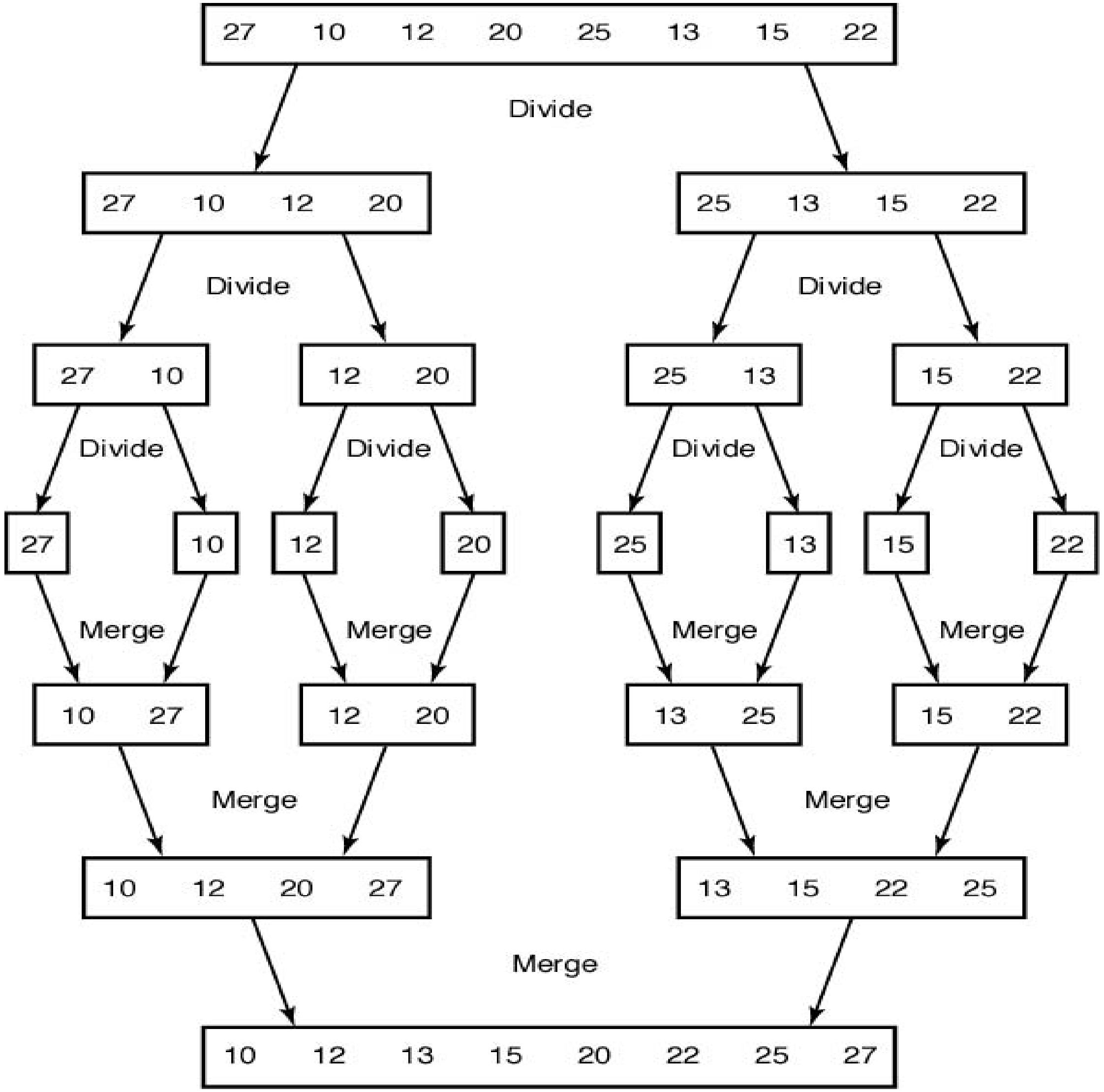
Mergesort

- Mergesort – 합병정렬

- Problem: Sort n keys in nondecreasing sequence
    - Inputs: positive integer n, array of keys S indexed from 1 to n
    - Outputs: the array S containing the keys in nondecreasing order

- 보기: 27, 10, 12, 20, 25, 13, 15, 22

Mergesort



27 10 12 20 25 13 15 22

Divide

27 10 12 20

25 13 15 22

Divide

Divide

27 10

12 20

25 13

15 22

Divide

Divide

Divide

Divide

27

10

12

20

25

13

15

22

Merge

Merge

Merge

Merge

10 27

12 20

13 25

15 22

Merge

Merge

10 12 20 27

13 15 22 25

Merge

10 12 13 15 20 22 25 27

Mergesort

- Mergesort
  - Two-way merging
  - Combine 2 sorted arrays into 1 sorted array
- Algorithm

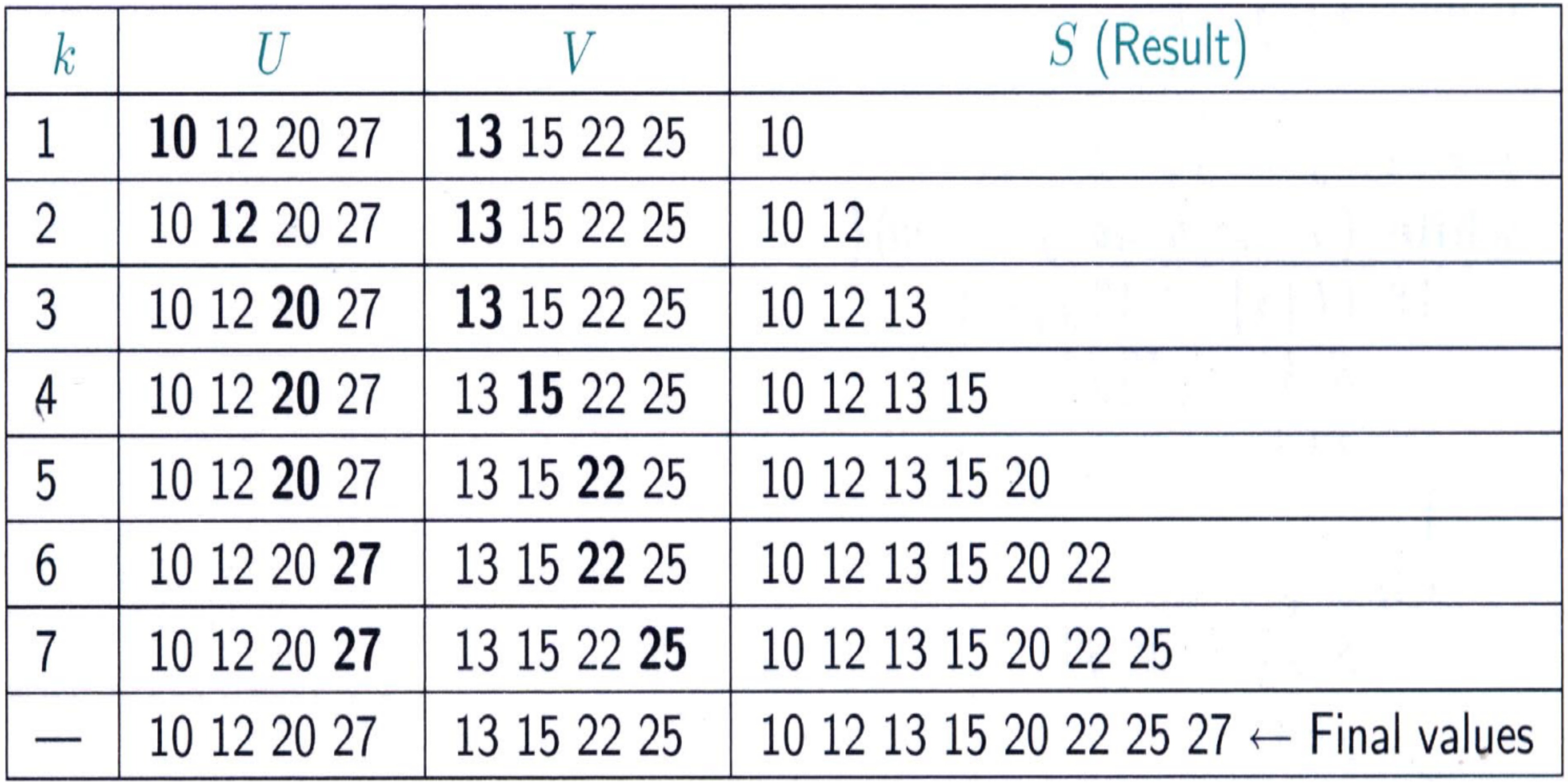
```
void mergesort (int n, keytype S[]) {
     if (n > 1) {
            const int h = ⌊n/2⌋, m = n - h;
            keytype U[1..h], V[1..m];

            copy S[1] through S[h] to U[1] through U[h];
            copy S[h+1] through S[n] to V[1] through V[m];
            mergesort(h, U);
            mergesort(m, V);
            merge(h, m, U, V, S);
     }
}
```

Merge

- Problem: Merge 2 sorted arrays into one sorted array
  - Inputs: (1) positive intergers *h* and *m*,
    (2) array of sorted keys *U[1..h]*, *V[1..m]*
  - Outputs: an array *S[1..h+m]* containing keys in *U* and *V*
    in a single sorted array

Merge



k	U	V	S (Result)
1	**10** 12 20 27	**13** 15 22 25	10
2	10 **12** 20 27	**13** 15 22 25	10 12
3	10 12 **20** 27	**13** 15 22 25	10 12 13
4	10 12 **20** 27	13 **15** 22 25	10 12 13 15
5	10 12 **20** 27	13 15 **22** 25	10 12 13 15 20
6	10 12 20 **27**	13 15 **22** 25	10 12 13 15 20 22
7	10 12 20 **27**	13 15 22 **25**	10 12 13 15 20 22 25
—	10 12 20 27	13 15 22 25	10 12 13 15 20 22 25 27 ← Final values

Merge Algorithm

```
void merge(int h, int m, const keytype U[], const keytype V[],
               keytype S[]) {
    index i, j, k;
    i = 1; j = 1; k = 1;
    while (i <= h && j <= m) {
        if (U[i] < V[j]) {
             S[k] = U[i];
             i++;
        }
        else {
             S[k] = V[j];
             j++;
        }
             k++;
   }
   if (i > h)
        copy V[j] through V[m] to S[k] through S[h+m];
   else
        copy U[i] through U[h] to S[k] through S[h+m];
}
```

Worst-Case Time Complexity (Mergesort)

- Worst-Case Time Complexity Analysis of Merge Algorithm
  - Basic Analysis: the comparison of *U[i]* with *V[j]*
  - Input Size: *h* and *m*, the number of items in each of the 2 input arrays
  - Analysis:
    - The worst case occurs when the loop is exited,
      because *i* has reached *h+1*
      whereas the other index *j* has reached *m* , 1 less then the exit point
    - For example, this can occur when the first *m* – 1 items in *V*
      are placed first in S, followed by all h items in *U*,
      at which time the loop is exited because *i* equals *h+1*,
    - Therefore, $W(h,m) = h + m - 1$

Worst-Case Time Complexity (Mergesort)

- Worst-Case Time Complexity Analysis of Mergesort
  - Basic Operation: the comparison that takes place in *merge*
  - Input size: n, the number of items in the array S
  - Analysis:
    - 최악의 경우 수행시간은 $W(h+m) = W(h) + W(m) + h + m - 1$
      여기서 $W(h)$는 U를 정렬하는데 걸리는 시간,
      $W(m)$은 V를 정렬하는데 걸리는 시간,
      그리고 $h + m - 1$은 합병하는데 걸리는 시간이다.

Worst-Case Time Complexity (Mergesort)

- Case 1: n is a power of 2

In this case

$$h = \lfloor n/2 \rfloor = n/2,$$

$$m = n - h = n - n/2 = n/2,$$

$$h + m = n/2 + n/2 = n$$

W(n) becomes

$$W(n) = 2\,W(n/2) + n - 1 \quad \text{for } n>1,\ n \text{ a power of 2}$$

$$W(1) = 0$$

From Example B.19 in Appendix B,

$$W(n) \in \Theta(n\, lg\, n)$$

Worst-Case Time Complexity (Mergesort)

$T(n) = 2\,T(n/2) + n - 1$ (for $n>1$, n a power of 2, $T(1) = 0$)

Let $n = 2^k$, So $T(2^k) = 2 \cdot T(2^{k-1}) + 2^k - 1$

$$
\begin{aligned}
t_k &= 2 \cdot t_{k-1} + 2^k - 1 \\
&= 2 \cdot (2 \cdot t_{k-2} + 2^{k-1} - 1) + 2^k - 1 \\
&= 2^2 \cdot t_{k-2} + 2 \cdot 2^k - (1 + 2) \\
&= 2^2 \cdot (2 \cdot t_{k-3} + 2^{k-2} - 1) + 2 \cdot 2^k - (1 + 2) \\
&= 2^3 \cdot t_{k-3} + 3 \cdot 2^k - \sum_{(i=0\,\sim\,2)} 2^i \\
&= \;\ldots\ldots \\
&= 2^k \cdot t_0 + k \cdot 2^k - (2^k - 1)
\end{aligned}
$$

$T(n) = n \cdot T(1) + n \lg n - (n - 1)$

Therefore, $W(n) \in \Theta(n \lg n)$

Worst-Case Time Complexity (Mergesort)

- Case 2: n is not a power of 2

$$W(n) = W(\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor) + W(\lceil \tfrac{n}{2} \rceil) + n - 1 \qquad n > 1\text{일 때}$$

$$W(1) = 0$$

이 재현식의 정확한 해를 구하기는 복잡하다.
그러나 앞의 이분검색 알고리즘의 분석에서도 보았듯이,
$n = 2^k$라고 가정해서 해를 구하면, 이 재현식의 해와 같은
카테고리의 시간복잡도를 얻게 된다.

따라서 앞으로 이와 비슷한 재현식의 해를 구할 때,
$n = 2^k$라고 가정해서 구해도 점근적으로는 같은 해를 얻게 된다.

$$W(n) \in \Theta(n \lg n)$$

Space Complexity (Mergesort)

- ***in-place sort* (제자리정렬) 알고리즘**
  - Doesn't use any extra space beyond that needed to store the input
  - 합병정렬 알고리즘은 제자리정렬 알고리즘이 아니다. 왜냐하면 입력인 배열 *S*이외에 *U*와 *V*를 추가로 만들어서 사용하기 때문이다.

- 그러면 얼마만큼의 추가적인 저장장소가 필요할까?
  - 재귀호출할 때마다 크기가 ***S***의 반이 되는 ***U***와 ***V***가 추가적으로 필요

    merge 알고리즘에서는 *U*와 *V*가 주소로 전달이 되어 그냥 사용되므로 추가적인 저장장소를 만들지 않는다. 따라서 mergesort를 재귀호출할 때마다 얼마만큼의 추가적인 저장장소가 만들어져야 하는지를 계산해 보면 된다.
    - 처음 *S*의 크기가 n이면, 추가적으로 필요한 *U*와 *V*의 저장장소 크기의 합은 n이 된다.
    - 다음 재귀 호출에는 $n/2$의 추가적으로 필요
    - 결국 총 저장장소의 크기는 $n + n/2 + n/4 + \ldots\ldots = 2n$ 이다.
  - 결론적으로 이 알고리즘의 공간복잡도는 $2n \in \Theta(n)$ 이라고 할 수 있다.

Space Complexity (Mergesort)

- 추가적으로 필요한 저장장소가 n이 되도록,
  즉 공간복잡도가 n이 되도록 알고리즘을 향상시킬 수 있다
  (다음 절의 알고리즘).
  그러나 합병정렬 알고리즘이 제자리정렬 알고리즘이 될 수는 없다.

Mergesort2

- Reduce the amount of extra space to only one array containing n items
- Problem: Sort *n* keys in nondecreasing sequence
  - Inputs: Positive Integer *n*, array of keys *S[1..n]*
  - Outputs: the array *S* containing keys in nondecreasing order
- Algorithm:

```
void mergesort2 (index low, index high) {
    index mid;
    if (low < high) {
         mid = ⌊(low + high)/2⌋;
         mergesort2(low, mid);
         mergesort2(mid+1, high);
         merge2(low, mid, high);
    }
}
...
...
mergesort2(1, n);
```

Mergesort2

- Merge
  - Problem: Merge the 2 sorted subarrays of *S* created in Mergesort 2
    - Inputs: (1) indices *low*, *mid*, *high*,
      (2) the subarray of *S[low..high]*,
      where keys in *S[low..mid]* and *S[mid+1..high]* are already sorted in nondecreasing order
    - Outputs: keys in *S[1..high]* in nondecreasing order
  - Mergesort2 에서 기억공간을 사용하지 않음.

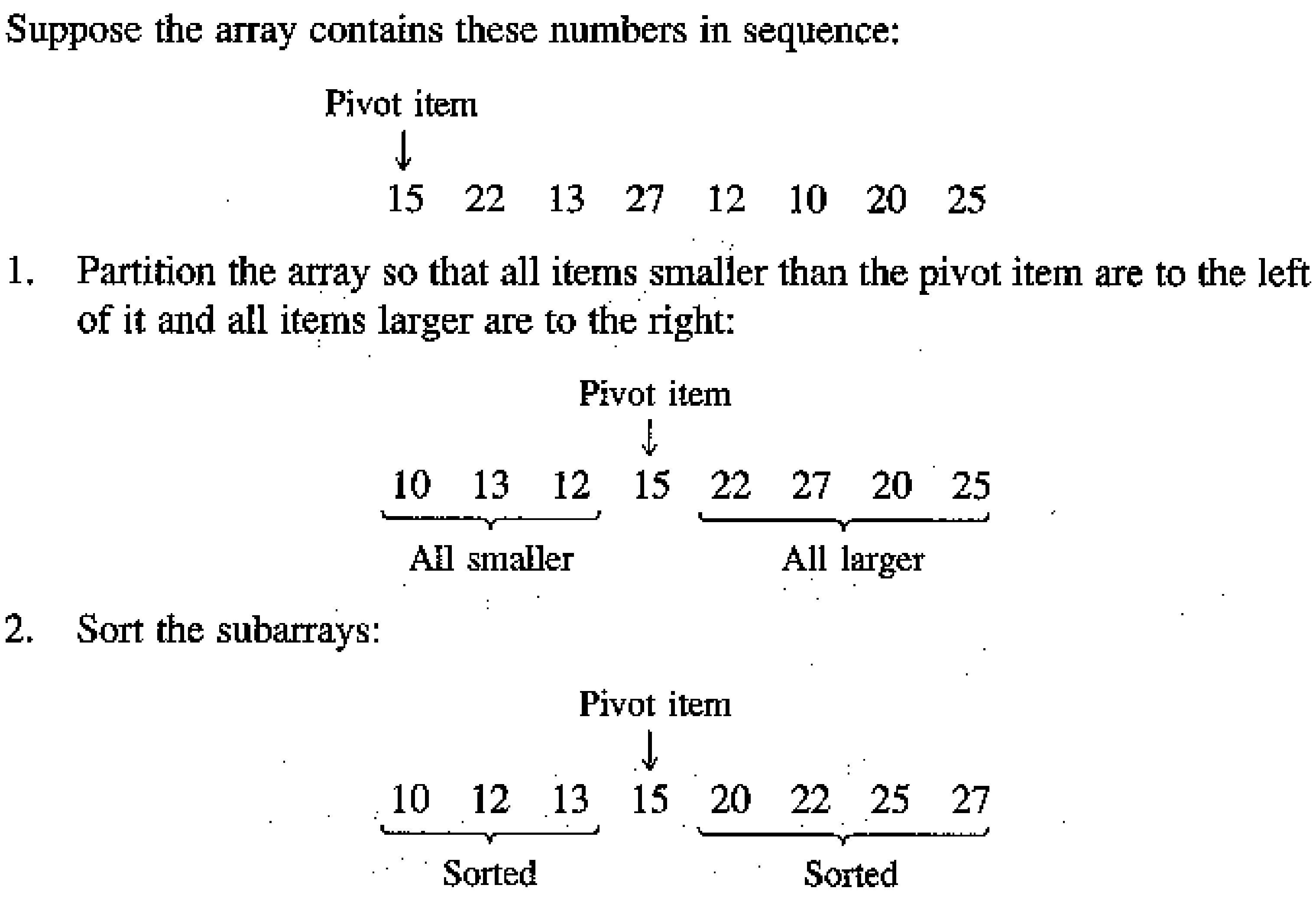
공간복잡도가 향상된 합병 (Merge) 알고리즘

```
void merge2(index low, index mid, index high) {
     index i, j, k;
     keytype U[low..high];                   // 합병하는데 필요한 지역 배열
     i = low; j = mid + 1; k = low;
     while (i <= mid && j <= high) {
          if (S[i] < S[j]) {
              U[k] = S[i];
              i++;
          }
          else {
              U[k] = S[j];
              j++;
          }
          k++;
     }
     if (i > mid)
          move S[j] through S[high] to U[k] through U[high];
     else
          move S[i] through S[mid] to U[k] through U[high];
     move U[low] through U[high] to S[low] through S[high];
}
```

Quicksort (Partition Exchange Sort)

- Quicksort
  - Developed by Hoare (1962)
  - Similar to Mergesort
    - The sort is accomplished by dividing the array into 2 partitions
    - Then sorting each partition recursively
  - But the array is partitioned by a pivot item
    - Divide all items into 2 arrays, smaller/larger than the pivot item
  - Quicksort이란 이름이 오해의 여지가 있음.
    - 사실 절대적으로 가장 빠른 정렬 알고리즘이라고 할 수 없음
    - "Partition Exchange Sort (분할교환정렬)"라고 부르는 게 타당
- 보기: 15 22 13 27 12 10 20 25

Quicksort (Partition Exchange Sort)



Suppose the array contains these numbers in sequence:

Pivot item
↓

15 22 13 27 12 10 20 25

1. Partition the array so that all items smaller than the pivot item are to the left of it and all items larger are to the right:

Pivot item
↓

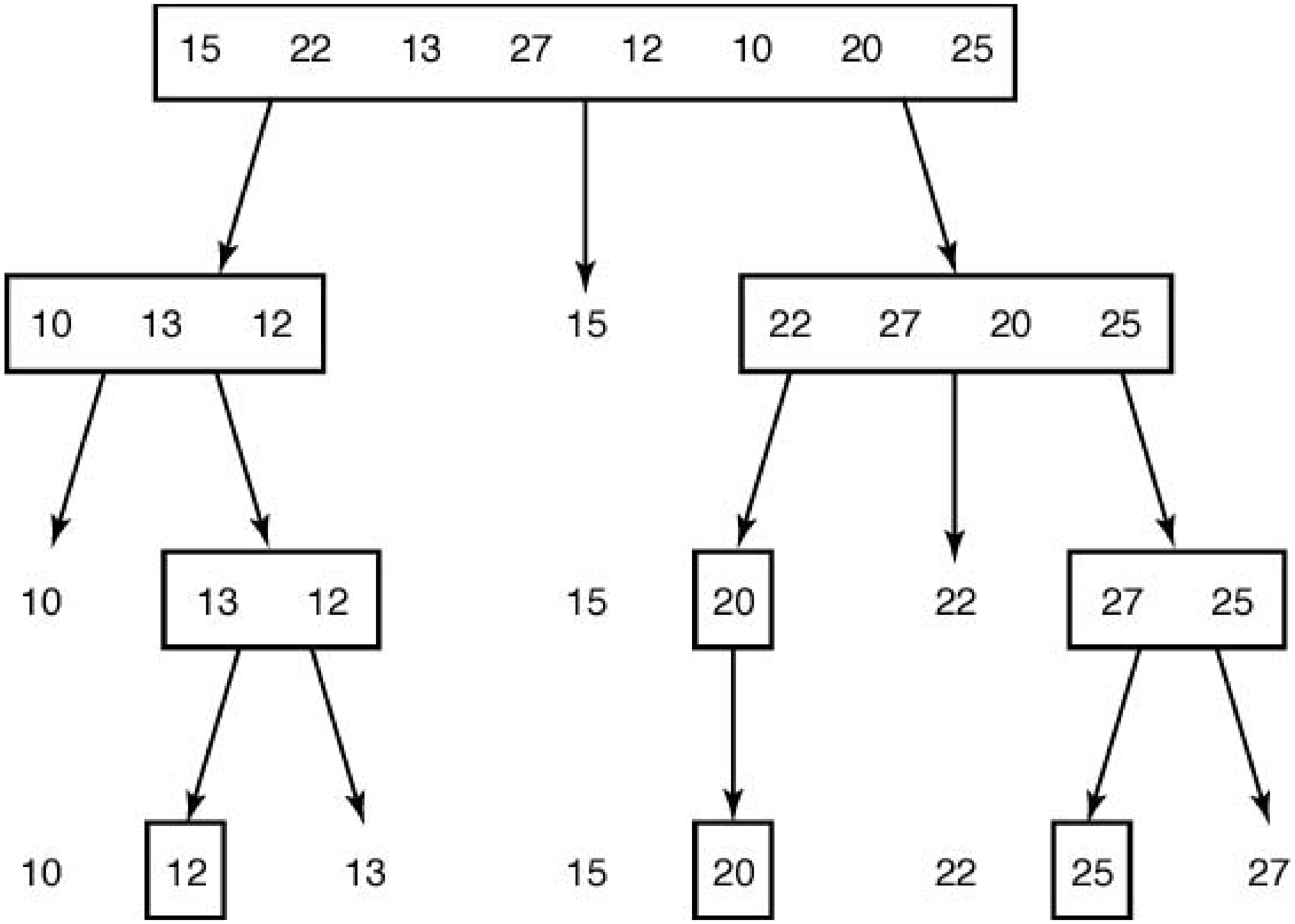
$$\underbrace{10\quad 13\quad 12}_{\text{All smaller}}\quad 15\quad \underbrace{22\quad 27\quad 20\quad 25}_{\text{All larger}}$$

2. Sort the subarrays:

Pivot item
↓

$$\underbrace{10\quad 12\quad 13}_{\text{Sorted}}\quad 15\quad \underbrace{20\quad 22\quad 25\quad 27}_{\text{Sorted}}$$

Quicksort (Partition Exchange Sort)



Quicksort Algorithm

- Problem: Sort *n* keys in nondecreasing order
  - Inputs: positive integer *n*, array of keys *S[1..n]*
  - Outputs: the array *S* containing the keys in nondecreasing order
- Algorithm:

```
void quicksort (index low, index high) {
     index pivotpoint;

     if (high > low) {
            partition(low, high, pivotpoint);
            quicksort(low, pivotpoint-1);
            quicksort(pivotpoint+1, high);
     }
}
```

Partition Algorithm

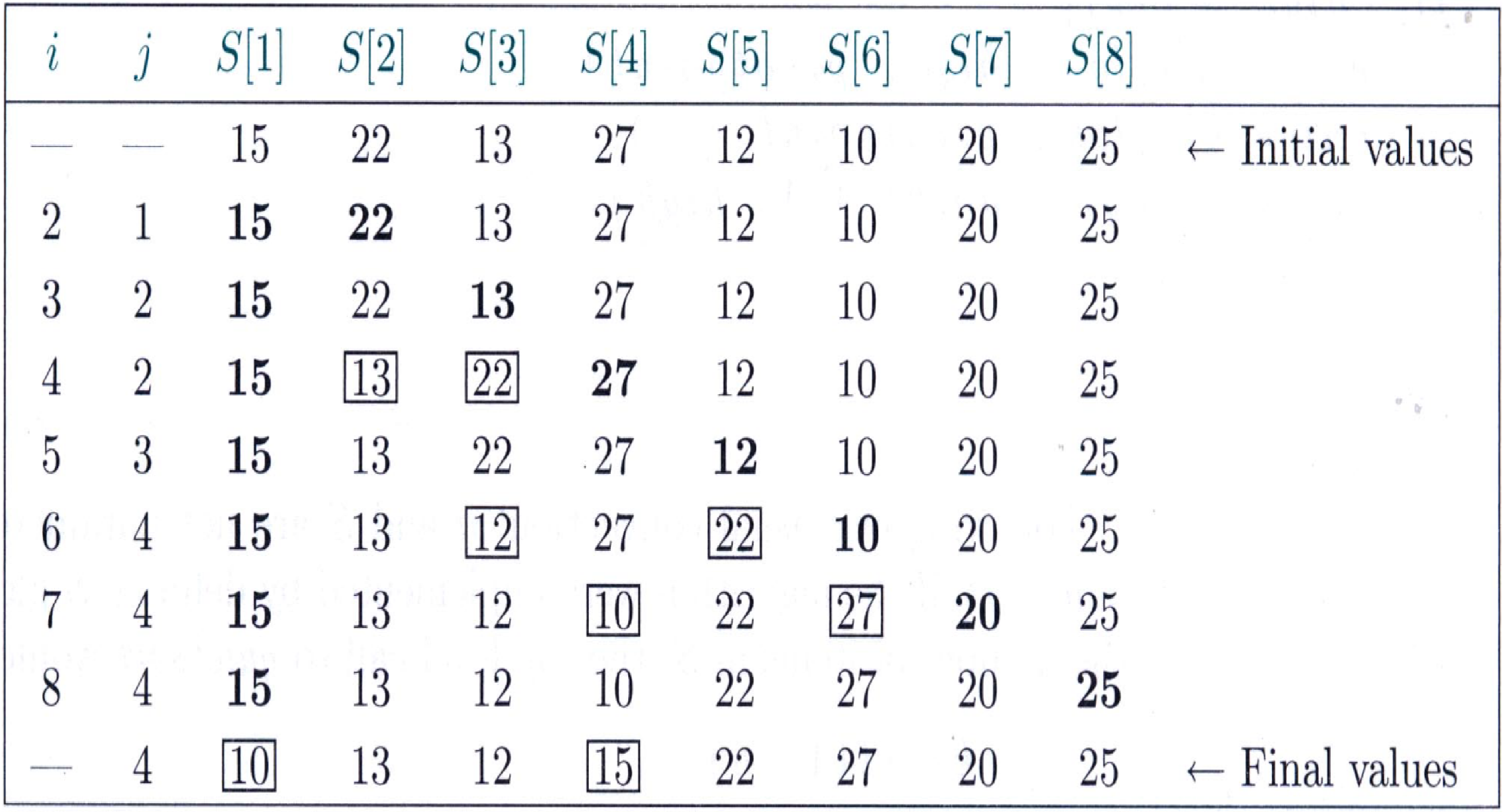
- Problem: Partition the array S for Quicksort
  - Inputs: (1) 2 indices, *low* & *high*, (2) subarray of *S[low..high]*
  - Outputs: *pivotpoints*, the pivot point for the subarray indexed from *low* to *high*

- Algorithm

```
void partition (index low, index high, index& pivotpoint) {
     index i, j;
     keytype pivotitem;

     pivotitem = S[low];         //pivotitem을 위한 첫번째 항목을 고른다
     j = low;
     for(i = low + 1; i <= high; i++)
         if (S[i] < pivotitem) {
             j++;
             exchange S[i] and S[j];
         }
     pivotpoint = j;
     exchange S[low] and S[pivotpoint]; // pivotitem 값을 pivotpoint에
}
```

Partition Algorithm



i	j	$S[1]$	$S[2]$	$S[3]$	$S[4]$	$S[5]$	$S[6]$	$S[7]$	$S[8]$	
—	—	15	22	13	27	12	10	20	25	← Initial values
2	1	**15**	**22**	13	27	12	10	20	25	
3	2	**15**	22	**13**	27	12	10	20	25	
4	2	**15**	$\boxed{13}$	$\boxed{22}$	**27**	12	10	20	25	
5	3	**15**	13	22	27	**12**	10	20	25	
6	4	**15**	13	$\boxed{12}$	27	$\boxed{22}$	**10**	20	25	
7	4	**15**	13	12	$\boxed{10}$	22	$\boxed{27}$	**20**	25	
8	4	**15**	13	12	10	22	27	20	**25**	
—	4	$\boxed{10}$	13	12	$\boxed{15}$	22	27	20	25	← Final values

Analysis of Partition Algorithm

- Analysis of Every-Case Time Complexity (Partition)
  - Basic operation: the comparison of *S[i]* with *pivotitem*
  - Input size: $n = high - low + 1$, the number of items in the subarray
  - Analysis: Because every item except the first is compared,

$$T(n) = n - 1$$

Analysis of Quicksort Algorithm

- Analysis of Worst-Case Time Complexity (Quicksort)
  - Basic operation: the comparison of *S[i]* with *pivotitem* in *partition*
  - Input size: *n*, the number of items in the array *S*
  - Analysis:
    - The worst case: if the array is already sorted in nondecreasing order
      - In the case, no items are less than the first item in the array,
      - When partition is called at the top level, no items are place to the left, and the value of pivotpoint assigned by partition is 1
      - In each recursive call, pivotpoint receives the value of low, therefore the array is repeatedly partitioned into an empty subarray on the left & a subarray with one less item on the right

$$T(n) = T(0) + T(n-1) + n-1$$

    - Because $T(0) = 0$, we have the recurrence

$$T(n) = T(n - 1) + n - 1, \quad \text{for } n > 0,$$
$$T(0) = 0$$

Analysis of Quicksort Algorithm

이 재현식을 풀면,

$$T(n) = T(n - 1) + n - 1$$
$$T(n - 1) = T(n - 2) + n - 2$$
$$T(n - 2) = T(n - 3) + n - 3$$
$$\ldots$$
$$T(2) = T(1) + 1$$
$$T(1) = T(0) + 0$$
$$T(0) = 0$$

$$T(n) = 1 + 2 + \ldots + (n\text{-}1) = n\,(n\text{-}1)/2$$

가 되므로, 이미 정렬이 되어 있는 경우 빠른정렬 알고리즘의 시간복잡도는 $n\,(n\text{-}1)/2$이 된다는 사실을 알았다. 그러면 시간이 더 많이 걸리는 경우가 있을까? 이 경우가 최악이 경우이며, 따라서 이 보다 더 많은 시간이 걸릴 수가 없다는 사실을 수학적으로 엄밀하게 증명해 보자.

Analysis of Quicksort Algorithm

- Show that $W(n) \le n(n-1)/2$ for all n

  Proof: (by using induction)

  Induction base: for $n = 0$, $W(0) = 0 \le 0(0-1)/2$

  Induction hypothesis: Assume that, for $0 \le k < n$, $W(k) \le k(k-1)/2$

  Induction step: We need to show that $W(n) \le n(n-1)/2$

$$W(n) \le W(p-1) + W(n-p) + n - 1$$

pivotpoint 값이 p인 경우

$$\le \frac{(p-1)(p-2)}{2} + \frac{(n-p)(n-p-1)}{2} + n - 1$$

귀납가정에 의해서 재현식에 의해서

$$= \frac{p^2 - 3p + 2 + (n-p)^2 - n + p + 2n - 2}{2}$$

$$= \frac{p^2 + (n-p)^2 + n - 2p}{2}$$

$$= p^2 - (n+1)p + \tfrac{1}{2}(n^2 + n) \qquad = \left(p - \frac{n+1}{2}\right)^2 + \frac{(n+1)(n-1)}{4}$$

여기서 p가 1 혹은 n일 때 최대값을 가진다.

Analysis of Quicksort Algorithm

따라서

$$(p=1\text{일 때})\quad 1-(n+1)+\frac{1}{2}(n^2+n)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

$$(p=n\text{일 때})\quad n^2-(n+1)n+\frac{1}{2}(n^2+n)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

가 되고,

결과적으로

$$W(n)\le\frac{p^2+(n-p)^2+n-2p}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

따라서 최악의 경우 시간복잡도는

$$W(n)\le\frac{n(n-1)}{2}\in\Theta(n^2)$$

Analysis of Quicksort Algorithm

- Analysis of Average-Case Time Complexity (Quicksort)
  - Basic Operation: the comparison of *S[i]* with *pivotitem* in *partition*
  - Input size: *n*, the number of items in the array *S*
  - Analysis:
    - 배열 안에 있는 항목이 어떤 특정 순으로 정렬이 되어 있는 경우는 사실 별로 없다. 그러므로 분할 알고리즘이 주는 기준점 값은 1부터 *n*사이의 어떤 값도 될 수가 있고, 그 확률은 모두 같다고 보아도 된다.
      따라서 평균의 경우를 고려한 시간복잡도 분석을 해도 된다.
    - 기준점이 p가 될 확률은 $1/n$이고, 기준점이 p일 때 두 부분배열을 정렬하는데 걸리는 평균시간은 $[A(p-1)+A(n-p)]$이고, 분할하는데 걸리는 시간은 $n-1$이므로, 평균적인 시간복잡도는 다음과 같이 된다.

$$A(n)=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{n}[A(p-1)+A(n-p)]+n-1$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{p=1}^{n}A(p-1)+n-1;\quad (p-1\text{와 }\; n-p\text{는 대칭이므로 ...})$$

Analysis of Quicksort Algorithm

양변을 n으로 곱하면, $nA(n) = 2\sum_{p=1}^{n} A(p-1) + n(n-1)$ (1)

n대신 n - 1을 대입하면, $(n-1)A(n-1) = 2\sum_{p=1}^{n-1} A(p-1) + (n-1)(n-2)$ (2)

(1)에서 (2)를 빼면, $nA(n) - (n-1)A(n-1) = 2A(n-1) + 2(n-1)$

간단히 정리하면,

$$\frac{A(n)}{n+1} = \frac{A(n-1)}{n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$$

여기서 $a_n = \dfrac{A(n)}{n+1}$ 라고 하면, 다음과 같은 재현식을 얻을 수가 있다.

$$a_n = a_{n-1} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)} \qquad n > 0\text{이면}$$

그러면,

$$a_n = a_{n-1} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)} \qquad a_{n-1} = a_{n-2} + \frac{2(n-2)}{(n-1)n} \quad \cdots \quad a_2 = a_1 + \tfrac{1}{3} \qquad a_1 = a_0 + 0$$

$$a_0 = 0$$

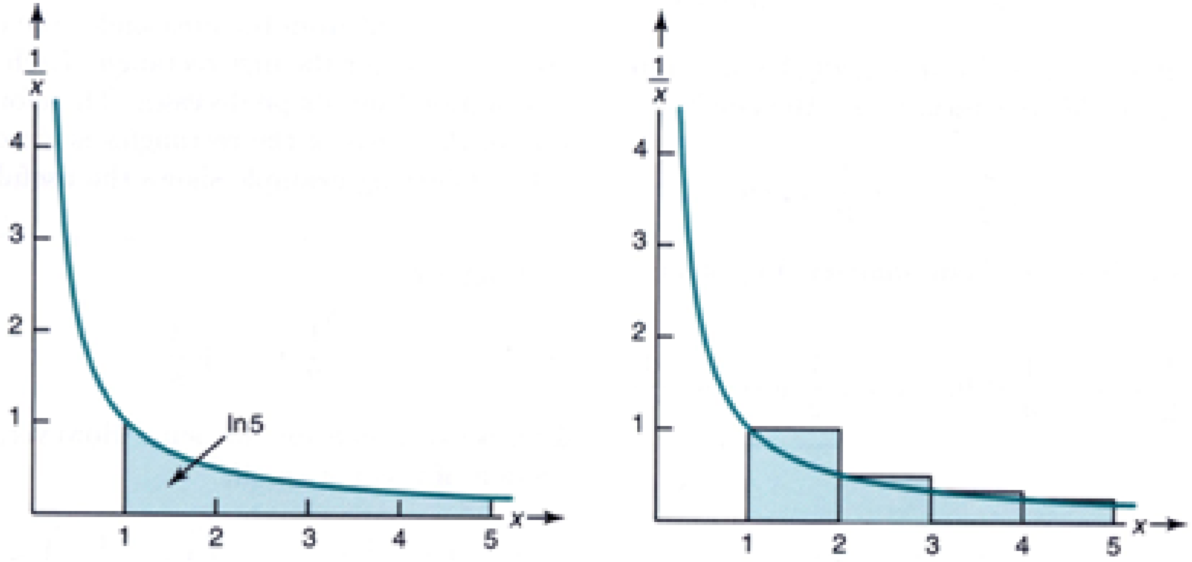
Analysis of Quicksort Algorithm

따라서, 해는 $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(i-1)}{i(i+1)}$

$$= 2\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}\right)$$

여기에서 오른쪽 항은 무시해도 될 만큼 작으므로 무시한다.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \approx \ln n$$



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} < \ln n < 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1}$$

Analysis of Quicksort Algorithm

따라서, 해는

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{2(i-1)}{i(i+1)} \\ &= 2\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}\right) \\ &= 2\ln n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(n) &\approx (n+1)2\ln n \\ &= (n+1)2(\ln 2)(\lg n) \\ &\approx 1.38(n+1)\lg n \\ &\in \Theta(n\lg n) \end{aligned}$$

$$\ln n = \frac{\log_2 n}{\log_2 e} = \frac{\log_2 n}{\log_e e / \log_e 2} = \log_e 2 \log_2 n = \ln 2 \lg n$$

Analysis of Quicksort Algorithm

따라서, 해는

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{2(i-1)}{i(i+1)} \\
&= 2\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}\right) \\
&= 2\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}\right)\right) \\
&= 2\left(2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \\
&= 2(2\ln n - \ln n) \\
&= 2\ln n
\end{aligned}
$$

$$\frac{A(n)}{n+1} = 2\ln n$$

$$\mathrm{A(n)} = (n+1)2\ln n$$

$$\mathrm{A(n)} = \theta(n\ln n)$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{2(i-1)}{i(i+1)} \\
&= 2\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}\right) \\
&= 2\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}\right)\right) \\
&= 2\left(2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) \\
&= 2\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \frac{2n}{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

$$\frac{A(n)}{n+1} = 2\left(\ln n - \frac{2n}{n+1}\right)$$

$$A(n) = (n+1)2\left(\ln n - \frac{2n}{n+1}\right)$$

$$A(n) = (n+1)2\ln n - 4n$$

$$\mathrm{A(n)} = \theta(n\ln n)$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - 1 + \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \frac{n}{n+1}
\end{aligned}
$$

Matrix Multiplication

- Simple Matrix Multiplication Algorithm
  - Problem: Determine the product of 2 $n \times n$ matrices
    - Inputs: an integer n, and 2 $n \times n$ matrices A and B
    - Outputs: the product C of A and B
  - Algorithm:

```
void matrixmult (int n, const number A[][],
                        const number B[][], number C[][]) {
     index i, j, k;
     for (i = 1; i <= n; i++)
         for (j = 1; j <= n; j++) {
              C[i][j] = 0;
              for (k = 1; k <= n; k++)
                    C[i][j] = C[i][j] + A[i][k] * B[k][j];
         }
}
```

Analysis of Matrix Multiplication

- Every-case Time Complexity Analysis I:
  - 단위연산: 가장 안쪽의 루프에 있는 곱셈하는 연산
  - 입력크기: 행과 열의 수, n
  - 모든 경우 시간복잡도 분석: 총 곱셈의 횟수는

$$T(n) = n \times n \times n = n^3 \in \Theta(n^3)$$

- Every-case Time Complexity Analysis II:
  - 단위연산: 가장 안쪽의 루프에 있는 덧셈하는 연산
  - 입력크기: 행과 열의 수, n
  - 모든 경우 시간복잡도 분석: 총 덧셈의 횟수는

$$T(n) = (n-1) \times n \times n = n^3 - n^2 \in \Theta(n^3)$$

Strassen's Matrix Multiplication Algorithm

- 문제: 두 2×2 행렬 A와 B의 곱(product) C, $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

$$\mathbf{c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}}$$
$$\mathbf{c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}}$$
$$\mathbf{c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}}$$
$$\mathbf{c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}}$$

Strassen's Matrix Multiplication Algorithm

- 문제: 두 2 × 2 행렬 *A*와 *B*의 곱(product) *C*, $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$
- Strassen의 해:

$$C = \begin{bmatrix} m_1 + m_4 - m_5 + m_7 & m_3 + m_5 \\ m_2 + m_4 & m_1 + m_3 - m_2 + m_6 \end{bmatrix}$$

여기서

$$\begin{aligned} m_1 &= (a_{11} + a_{22}) \times (b_{11} + b_{22}) \\ m_2 &= (a_{21} + a_{22}) \times b_{11} \\ m_3 &= a_{11} \times (b_{12} - b_{22}) \\ m_4 &= a_{22} \times (b_{21} - b_{11}) \\ m_5 &= (a_{11} + a_{12}) \times b_{22} \\ m_6 &= (a_{21} - a_{11}) \times (b_{11} + b_{12}) \\ m_7 &= (a_{12} - a_{22}) \times (b_{21} + b_{22}) \end{aligned}$$

- 시간복잡도 분석: 단순한 방법은 8번의 곱셈과 4번의 덧셈이 필요한 반면, Strassen의 방법은 7번의 곱셈과 18번의 덧셈/뺄셈을 필요로 한다. 언뜻 봐서는 전혀 좋아지지 않았다! 그러나 행렬의 크기가 커지면 Strassen의 방법의 가치가 들어 난다.

$C_{11} = M_1 + M_4 - M_5 + M_7$

$= (A_{11}+A_{22})(B_{11}+B_{22})+A_{22}(B_{21}-B_{11})-(A_{11}+A_{12})B_{22}+(A_{12}-A_{22})(B_{21}+B_{22})$

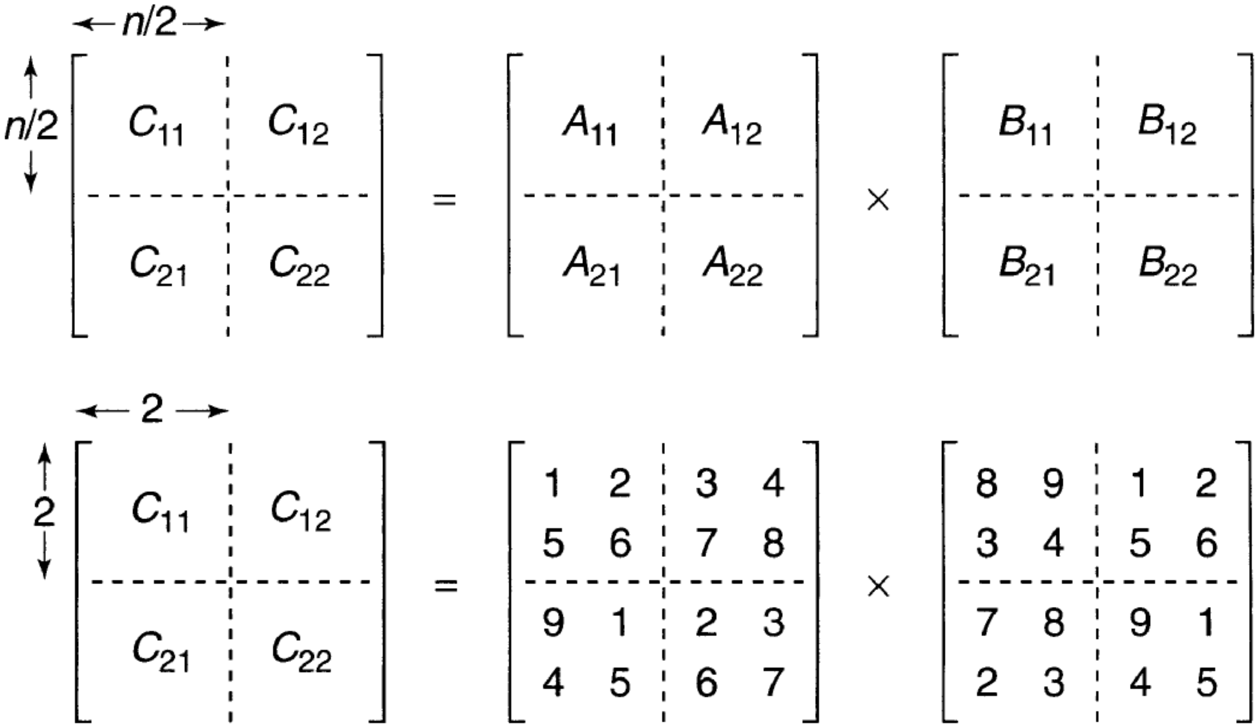
$= A_{11}B_{11}+A_{11}B_{22}+A_{22}B_{11}+A_{22}B_{22}+A_{22}B_{21}-A_{22}B_{11}-A_{11}B_{22}-A_{12}B_{22}+A_{12}B_{21}+A_{12}B_{22}-A_{22}B_{21}-A_{22}B_{22}$

$= A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}$

Strassen's Matrix Multiplication Algorithm

- 문제: n이 2의 거듭제곱이고, 각 행렬을 4개의 부분행렬(submatrix)로 나눈다고 가정 두 $n \times n$ 행렬 A와 B의 곱 C:

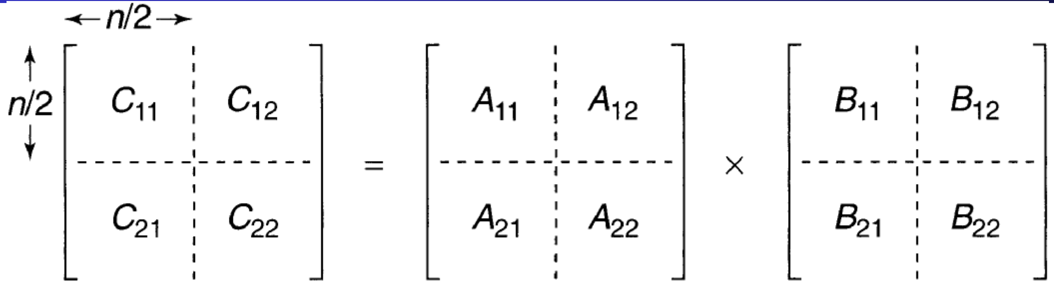
$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$



$$\left[\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{cc|cc} 8 & 9 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right]$$

Strassen's Matrix Multiplication Algorithm



- Strassen의 방법:

$$C = \begin{bmatrix} M_1 + M_4 - M_5 + M_7 & M_3 + M_5 \\ M_2 + M_4 & M_1 + M_3 - M_2 + M_6 \end{bmatrix}$$

여기서

$$M_1 = (A_{11} + A_{22}) \times (B_{11} + B_{22})$$
$$M_2 = (A_{21} + A_{22}) \times B_{11}$$
$$M_3 = A_{11} \times (B_{12} - B_{22})$$
$$M_4 = A_{22} \times (B_{21} - B_{11})$$
$$M_5 = (A_{11} + A_{12}) \times B_{22}$$
$$M_6 = (A_{21} - A_{11}) \times (B_{11} + B_{12})$$
$$M_7 = (A_{12} - A_{22}) \times (B_{21} + B_{22})$$

- See Figure 2.4 & Example 2.5, page 67-68

Strassen's Matrix Multiplication Algorithm

- Problem: Determine the product of 2 $n \times n$ matrices
  - Inputs: an integer n that is a power of 2, and 2 $n \times n$ matrices A and B
  - Outputs: the product C of A and B

- Algorithm:

```
void strassen (int n, n×n_matrix A, n×n_matrix B, n×n_matrix& C) {
   if (n <= threshold)
        compute C = A × B using the standard algorithm;
   else {
        partition A into 4 submatrices $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{21}$, $A_{22}$;
        partition B into 4 submatrices $B_{11}$, $B_{12}$, $B_{21}$, $B_{22}$;
        compute C = A × B using Strassen's method;
        // example recursive call: strassen(n/2, $A_{11}+A_{22}$, $B_{11}+B_{22}$, $M_1$)
   }
}
```

  - The value of threshold is the point at which we feel it is more efficient to use the standard algorithm than it would be to call procedure *strassen* recursively.

Strassen's Matrix Multiplication Algorithm

- Every-case Time Complexity Analysis I (Strassen)
  - Basic operation: one elementary multiplication
  - Input size: *n*, the number of rows and columns in the matrices
  - 모든 경우 시간복잡도 분석: 임계값을 1이라고 하자.
    (임계값은 차수에 전혀 영향을 미치지 않는다.)

재현식은 $T(n) = 7T(\frac{n}{2}) \quad n > 1$이고, $n = 2^k \, (k \geq 1)$

$$T(1) = 1$$

이 식을 전개해 보면, $T(n) = 7 \times 7 \times \cdots\cdots \times 7 \quad (k\text{번})$

$$
\begin{aligned}
&= 7^{\text{k}} \\
&= 7^{\text{lg n}} \\
&= \text{n}^{\text{lg 7}} \\
&= \text{n}^{2.81} \\
&\in \Theta(\text{n}^{2.81})
\end{aligned}
$$

이 결과는 수학적귀납법에 의해서 증명이 가능하다. 증명을 해 보라.

Strassen's Matrix Multiplication Algorithm

- Every-case Time Complexity Analysis II (Strassen)
  - Basic operation: one elementary addition or subtraction
  - Input size: *n*, the number of rows and columns in the matrices
  - 모든 경우 시간복잡도 분석: 위에서와 마찬가지로 임계값을 1이라고 하자. 재현식은

$$T(n) = 7T(\tfrac{n}{2}) + 18(\tfrac{n}{2})^2 \quad n > 1\text{이고}, \ n = 2^k \ (k \geq 1)$$

$$T(1) = 0$$

From Example B.20 in Appendix B,

$$T(n) = \Theta(n^{\lg_2 7}) = \Theta(n^{2.81})$$

마스터 정리Master Theorem

- ☐ $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$와 같은 모양을 가진 점화식은 마스터 정리에 의해 바로 결과를 알 수 있다
- ☐ $n^{\log_b a} = h(n)$이라 하자

① 어떤 양의 상수 ε에 대하여 $\frac{f(n)}{h(n)} = O(\frac{1}{n^{\varepsilon}})$이면, $T(n) = \Theta(h(n))$이다.

② 어떤 양의 상수 ε에 대하여 $\frac{f(n)}{h(n)} = \Omega(n^{\varepsilon})$이고, 어떤 상수 $c(< 1)$와 충분히 큰 모든 n에 대해 $af(\frac{n}{b}) \le cf(n)$이면, $T(n) = \Theta(f(n))$이다.

③ $\frac{f(n)}{h(n)} = \Theta(1)$이면, $T(n) = \Theta(h(n)\log n)$이다.

마스터 정리의 직관적 의미

① h(n)이 더 무거우면 h(n)이 수행시간을 결정한다.

② f(n)이 더 무거우면 f(n)이 수행시간을 결정한다.

③ h(n)과 f(n)이 같은 무게이면 h(n)에 logn을 곱한 것이 수행시간이 된다.

마스터 정리의 적용 예

- $T(n) = 2T(n/3) + c$
  - $a=2, b=3, h(n) = n^{\log_3 2}, f(n) = c$
  - $T(n) = \Theta(n^{\log_3 2})$
- $T(n) = 2T(n/4) + n$
  - $a=2, b=4, h(n) = n^{\log_4 2}, f(n) = n$
  - $T(n) = \Theta(n)$
- $T(n) = 2T(n/2) + n$
  - $a=2, b=2, h(n) = n^{\log_2 2} = n, f(n) = n$
  - $T(n) = \Theta(n \log n)$

Strassen's Matrix Multiplication Algorithm

- 두 개의 행렬을 곱하기 위한 문제에 대해서 시간복잡도가 $\Theta(n^2)$이 되는 알고리즘을 만들어 낸 사람은 아무도 없다.

- 게다가 그러한 알고리즘을 만들 수 없다고 증명한 사람도 아무도 없다.

분할정복을 사용하지 말아야 하는 경우

- 크기가 n인 입력이 2개 이상의 조각으로 분할되며, 분할된 부분들의 크기가 거의 n에 가깝게 되는 경우
  - ☞ 시간복잡도: 지수(exponential) 시간

- 크기가 n인 입력이 거의 n개의 조각으로 분할되며, 분할된 부분의 크기가 n/c인 경우, (여기서 c는 상수)
  - ☞ 시간복잡도: $n^{\Theta(\lg n)}$