Chap 3. Dynamic Programming

1. The Binomial Coefficient
2. Floyd's Algorithm for Shortest Paths
3. Dynamic Programming & Optimization Problems
4. Chained Matrix Multiplication
5. Optimal Binary Search Trees
6. The Traveling Salesperson Problem

This material is prepared by Prof. Jaeyoung Choi, Soongsil University.

Dynamic programming

- Dynamic programming
  - Similar to divide-and-conquer
    - an instance of a problem is divided into smaller instances
  - Solve small instances first, store the results, and later, whenever we need a result, look it up instead of recomputing it
  - Term "Dynamic programming" comes from control theory
    - Programming
      - use of an array (table) in which solution is constructed

- Divide-and-conquer 알고리즘 설계법은 하향식 해결법으로서, 나누어진 부분들 사이에 서로 상관관계가 없는 문제를 해결하는데 적합
  - 피보나찌 알고리즘의 경우에는 나누어진 부분들이 서로 연관이 있다.
  - 즉, divide-and-conquer 방법을 적용하여 알고리즘을 설계하면 같은 항을 한 번 이상 계산하는 결과를 초래하게 되므로 효율적이지 않다. 따라서 이 경우에는 divide-and-conquer 방법은 적합하지 않다.

Dynamic programming

- The steps in the development of Dynamic programming
  - *Establish* a recursive property
    that gives the solution to an instance of the problem
  - Solve an instance of the problem in a *bottom-up* fashion
    by solving smaller instances first

Binomial Coefficient

- 이항계수 구하는 공식

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ for } 0 \le k \le n$$

- 계산량이 많은 $n!$이나 $k!$을 계산하지 않고 이항계수(binomial coefficient)를 구하기 위해서 통상 다음식을 사용한다.

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{if } 0 < k < n \\ 1 & \text{if } k = 0 \text{ or } k = n \end{cases}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$$

$$= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{k(n-1)! + n! - k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Binomial Coefficient

- 알고리즘: Using Divide-and-Conquer
  - 문제: 이항계수를 계산한다.
    - 입력: 음수가 아닌 정수 n과 k, 여기서 $k \le n$
    - 출력: bin, $\binom{n}{k}$
  - 알고리즘:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{if } 0 < k < n \\ 1 & \text{if } k = 0 \text{ or } k = n \end{cases}$$

```
int bin(int n, int k) {
  if (k == 0 || n == k)
      return 1;
  else
      return bin(n-1,k-1) + bin(n-1,k)
}
```

Binomial Coefficient

- 시간복잡도 분석:
  - 분할정복 알고리즘은 작성하기는 간단하지만, 효율적이지 않다.
    - 이유? : 알고리즘을 재귀호출(recursive call)할 때 같은 계산을 반복해서 수행하기 때문이다.
    - 예를 들면, bin(n-1,k-1)과 bin(n-1,k)는 둘 다 bin(n-2,k-1)의 결과가 필요한데, 따로 중복 계산됨
  - $\binom{n}{k}$을 구하기 위해서 이 알고리즘이 계산하는 항(term)의 개수는 $2\binom{n}{k}-1$이다. (증명을 해보자.)

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{if } 0 < k < n \\ 1 & \text{if } k = 0 \text{ or } k = n \end{cases}$$

Binomial Coeff

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{if } 0<k<n \\ 1 & \text{if } k=0 \text{ or } k=n \end{cases}$$

증명: (n에 대한 수학적귀납법으로 증명)

- Induction Basis: **항의 개수** n**이** 1**일 때,** $2\binom{n}{k}-1 = 2\times 1 - 1 = 1$ **이 됨을 보이면 된다.** $\binom{1}{k}$**는** $k = 0$**이나** 1 **일 때,** 1**이므로 항의 개수는 항상** 1**이다.**
- Induction Hypothesis: $\binom{n}{k}$ **을 계산하기 위한 항의 개수는** $2\binom{n}{k}-1$ **이라 가정한다.**
- Induction Step: $\binom{n+1}{k}$ **를 계산하기 위한 항의 개수가** $2\binom{n+1}{k}-1$ **임을 보이면 된다.**
  - **알고리즘에 의해서** $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$**이므로,** $\binom{n+1}{k}$**를 계산하기 위한 항의 총 개수는** $\binom{n}{k-1}$**을 계산하기 위한 총 개수와** $\binom{n}{k}$**를 계산하기 위한 항의 총 개수에, 이 둘을 더하기 위한 항 하나를 더한 수가 된다.**

Binomial Coefficient

- (증명 계속)
  - 그런데, $\binom{n}{k-1}$를 계산하기 위한 항의 개수는 가정에 의해서 $2\binom{n}{k-1}-1$이고, $\binom{n}{k}$ 를 계산하기 위한 항의 개수는 가정에 의해서 $2\binom{n}{k}-1$이다.
  - 따라서 항의 총 개수는 다음과 같이 $2\binom{n+1}{k}-1$로 계산된다.

$$
\begin{aligned}
& 2\binom{n}{k-1}-1+2\binom{n}{k}-1+1 \\
&= 2\left(\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)-1 \\
&= 2\left(\frac{n!(k+n+1-k)}{k!(n+1-k)!}\right)-1 \\
&= 2\left(\frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!}\right)-1 \\
&= 2\left(\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\right)-1 \\
&= 2\binom{n+1}{k}-1
\end{aligned}
$$

Binomial Coefficient

- 동적계획식 알고리즘 설계전략

  1. Establish a recursive property (재귀 관계식을 정립):

     - 2차원 배열 B를 만들고, 각 $B[i][j]$에는 $\binom{i}{j}$값을 저장하도록 하면, 그 값은 다음과 같은 관계식으로 계산할 수 있다.

$$B[i][j] = \begin{cases} B[i-1][j-1] + B[i-1][j] & \text{if } 0 < j < i \\ 1 & \text{if } j = 0 \text{ or } j = i \end{cases}$$

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{if } 0 < k < n \\ 1 & \text{if } k = 0 \text{ or } k = n \end{cases}$$

Binomial Coefficient

2. Solve an instance of the problem in a bottom-up fashion:

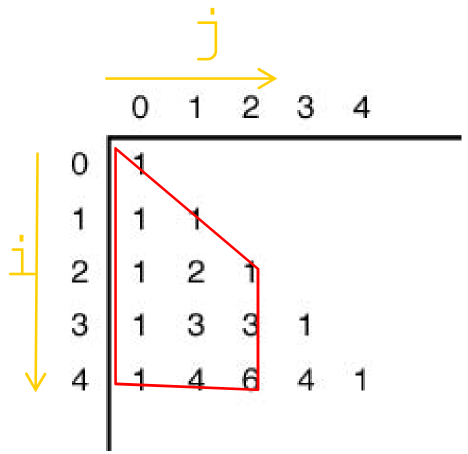
- $\binom{n}{k}$를 구하기 위해서는 다음과 같이 $B[0][0]$부터 시작하여 위에서 아래로 재귀 관계식을 적용하여 배열을 채워 나가면 된다. 결국 값은 $B[n][k]$에 저장된다.

	0	1	2	3	4	j	k
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
i							
n							

$$\begin{tikzcd} B[i-1, j-1] \arrow[dr] & B[i-1, j] \arrow[d] \\ & B[i, j] \end{tikzcd}$$

Binomial Coefficient

- 동적계획 알고리즘
  - 문제: 이항계수를 계산한다.
    - 입력: 음수가 아닌 정수 n과 k, 여기서 $k \le n$
    - 출력: bin, $\binom{n}{k}$
  - 알고리즘 (3-2):




```
int bin2(int n, int k) {
  index i, j;
  int B[0..n][0..k];
  for(i=0; i<=n; i++)
    for(j=0; j <= minimum(i,k); j++)
      if (j==0 || j == i) B[i][j] = 1;
      else B[i][j] = B[i-1][j-1] + B[i-1][j];
  return B[n][k];
}
```

Binomial Coefficient

- 동적계획 알고리즘의 분석
  - 단위연산: for-j 루프 안의 문장
  - 입력의 크기: n, k

$i = 0$일 때 j-루프 수행 횟수 : 1
$i = 1$일 때 j-루프 수행 횟수 : 2
$i = 2$일 때 j-루프 수행 횟수 : 3
…………………
$i = k$-1일 때 j-루프 수행 횟수 : k
$i = k$일 때 j-루프 수행 횟수 : $k + 1$
$i = k$+1일 때 j-루프 수행 횟수 : $k + 1$
…………………
$i = n$일 때 j-루프 수행 횟수 : $k + 1$

따라서 총 수행횟수는:

$$1+2+3+\cdots+k+\overbrace{(k+1)+\cdots+(k+1)}^{n-k+1\text{ times}}=\frac{k(k+1)}{2}+(n-k+1)(k+1)$$

$$=\frac{(2n-k+2)(k+1)}{2}\in\Theta(nk)$$

Binomial Coefficient

- Possible improvement of Algorithm 3.2
  - Create the entire 2-D array
    - Once a row is computed,
      we no longer need the values in the row that precedes it
      ➔ with only 1-D array indexed from 0 to k

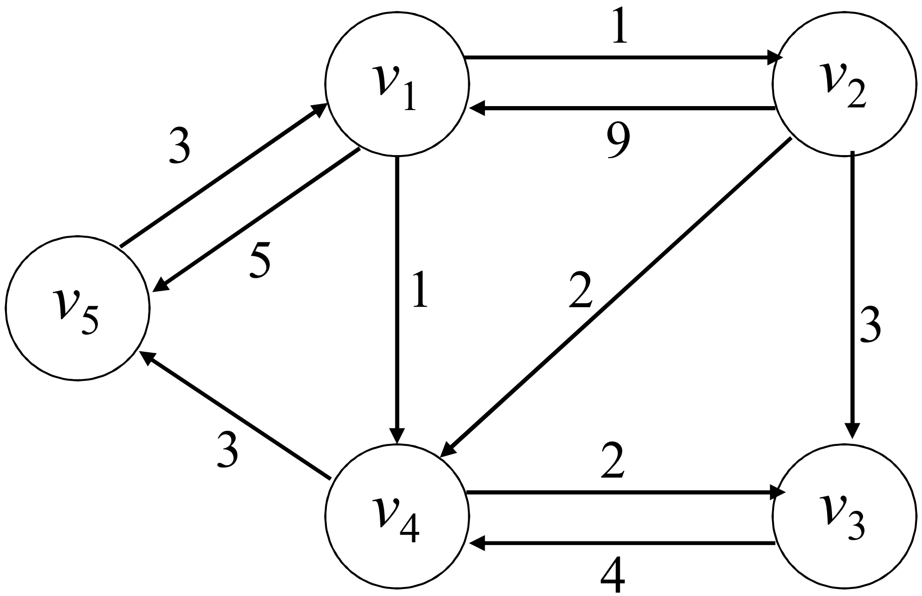
  - Take advantage of the fact that $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

그래프 용어

- 정점(vertex, node), 이음선(edge, arc)
- 방향 그래프(directed graph, or digraph)
- 가중치(weight), 가중치 포함 그래프(weighted graph)
- 경로(path) – 두 정점사이에 edge가 있는 정점들의 나열
- 단순경로(simple path) – 같은 정점을 두 번 지나지 않음
- 순환(cycle) – 한 정점에서 다시 그 정점으로 돌아오는 경로
- 순환 그래프(cyclic graph) vs 비순환 그래프 (acyclic graph)
- 길이(length) : the sum of weights on the path (weighted graph)

  the number of edges on the path (unweighted graph)

가중치 포함 방향 그래프의 예



- weighted digraph
- vertices, edges, weights, path, cycle, length

Shortest Path

- Shortest Path: 한 도시에서 다른 도시로 직항로가 없는 경우 가장 빨리 갈 수 있는 항로를 찾는 문제

- <u>문제</u>: 가중치 포함, 방향성 그래프에서 최단경로 찾기

- Optimization problem (최적화 문제)
  - 주어진 문제에 대하여 하나 이상의 많은 해답이 존재할 때, 이 가운데에서 가장 최적인 해답(optimal solution)을 찾아야 하는 문제를 최적화문제(optimization problem)라고 한다.

- 최단경로 찾기 문제는 최적화문제에 속한다.

Shortest Path

- Brute-force algorithm (무작정 알고리즘)
  - 한 정점에서 다른 정점으로의 모든 경로의 길이를 구한 뒤, 그들 중에서 최소길이를 찾는다.

  - 분석:
    - 그래프가 n개의 정점을 가지고 있고, 모든 정점들 사이에 이음선이 존재한다고 가정하자.
    - 그러면 한 정점 v_i에서 어떤 정점 v_j로 가는 경로들을 다 모아 보면, 그 경로들 중에서 나머지 모든 정점을 한번씩은 꼭 거쳐서 가는 경로들도 포함되어 있는데, 그 경로들의 수만 우선 계산해 보자.
    - v_i에서 출발하여 처음에 도착할 수 있는 정점의 가지 수는 n-2개 이고, 그 중에 하나를 선택하면, 그 다음에 도착할 수 있는 정점의 가지 수는 n-3개 이고, 이렇게 계속하여 계산해 보면, 총 경로의 개수는 $(n-2)(n-3)\ldots 1 = (n-2)!$이 된다.
    - 이 경로의 개수 만 보아도 지수보다 훨씬 크므로, 이 알고리즘은 절대적으로 비효율적이다!

Shortest Path

- 동적계획식 설계전략 - 자료구조
  - 그래프의 인접행렬(adjacent matrix)식 표현: W

$$W[i][j] = \begin{cases} \text{이음선의 가중치} & v_i\text{에서 } v_j\text{로의 이음선이 있다면} \\ \infty & v_i\text{에서 } v_j\text{로의 이음선이 없다면} \\ 0 & i = j \text{ 이면} \end{cases}$$

  - 그래프에서 최단경로의 길이의 표현: $0 \le k \le n$인, $D^{(k)}$

    $D^{(k)}[i][j] : \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ 의 정점들 만을 통해서 v_i에서 v_j로 가는 최단경로의 길이

동적계획식 설계전략 - 자료구조

- 보기:
  - W : 슬라이드 p.16에 있는 그래프의 인접행렬식 표현
  - D : 각 정점들 사이의 최단 거리

$W[i][j]$	1	2	3	4	5
1	0	1	∞	1	5
2	9	0	3	2	∞
3	∞	∞	0	4	∞
4	∞	∞	2	0	3
5	3	∞	∞	∞	0

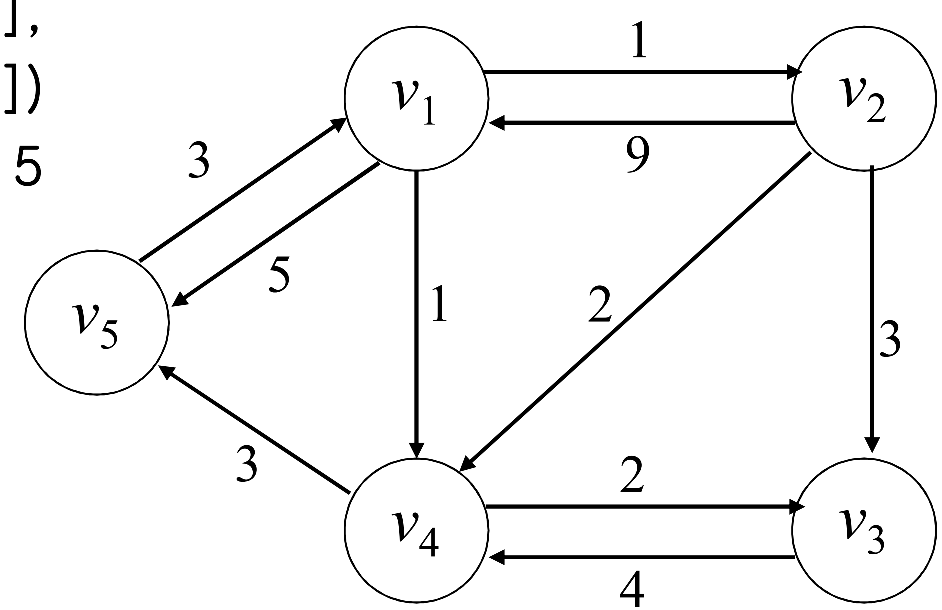
$D[i][j]$	1	2	3	4	5
1	0	1	3	1	4
2	8	0	3	2	5
3	10	11	0	4	7
4	6	7	2	0	3
5	3	4	6	4	0

여기서, $0 \le k \le 5$ 일 때, $D^{(k)}[2][5]$를 구해보자. 예제3.2

- $D^{(0)} = W$이고, $D^{(n)} = D$임은 분명하다. 따라서 D를 구하기 위해서는 $D^{(0)}$를 가지고 $D^{(n)}$을 구할 수 있는 방법을 고안해 내어야 한다.

Example 3.2

- $D^{(0)}[2][5] = \infty$
- $D^{(1)}[2][5] = \min(len[v_2, v_5], len[v_2, v_1, v_5]) = 14$
- $D^{(2)}[2][5] = D^{(1)}[2][5] = 14$
- $D^{(3)}[2][5] = D^{(2)}[2][5] = 14$
- $D^{(4)}[2][5] = \min(len[v_2, v_1, v_5],$
  $len[v_2, v_4, v_5],$
  $len[v_2, v_1, v_4, v_5],$
  $len[v_2, v_3, v_4, v_5])$
  $= \min(14, 5, 13, 10) = 5$
- $D^{(4)}[2][5] = D^{(5)}[2][5] = 5$



동적계획식 설계절차

1. Establish a recursive property

- $D^{(k\text{-}1)}$을 가지고 $D^{(k)}$를 계산할 수 있는 재귀 관계식을 정립

$$D^{(k)}[\mathrm{i}][\mathrm{j}] = minimum(\underbrace{D^{(k-1)}[i][j]}_{\text{경우1}}, \underbrace{D^{(k-1)}[i][k] + D^{(k-1)}[k][j]}_{\text{경우2}})$$

경우 1: $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$의 정점들 만을 통해서 v_i에서 v_j로 가는 최단경로가 <u>v_k를 거치지 않는</u> 경우.
보기: $D^{(5)}[1][3] = D^{(4)}[1][3] = 3$

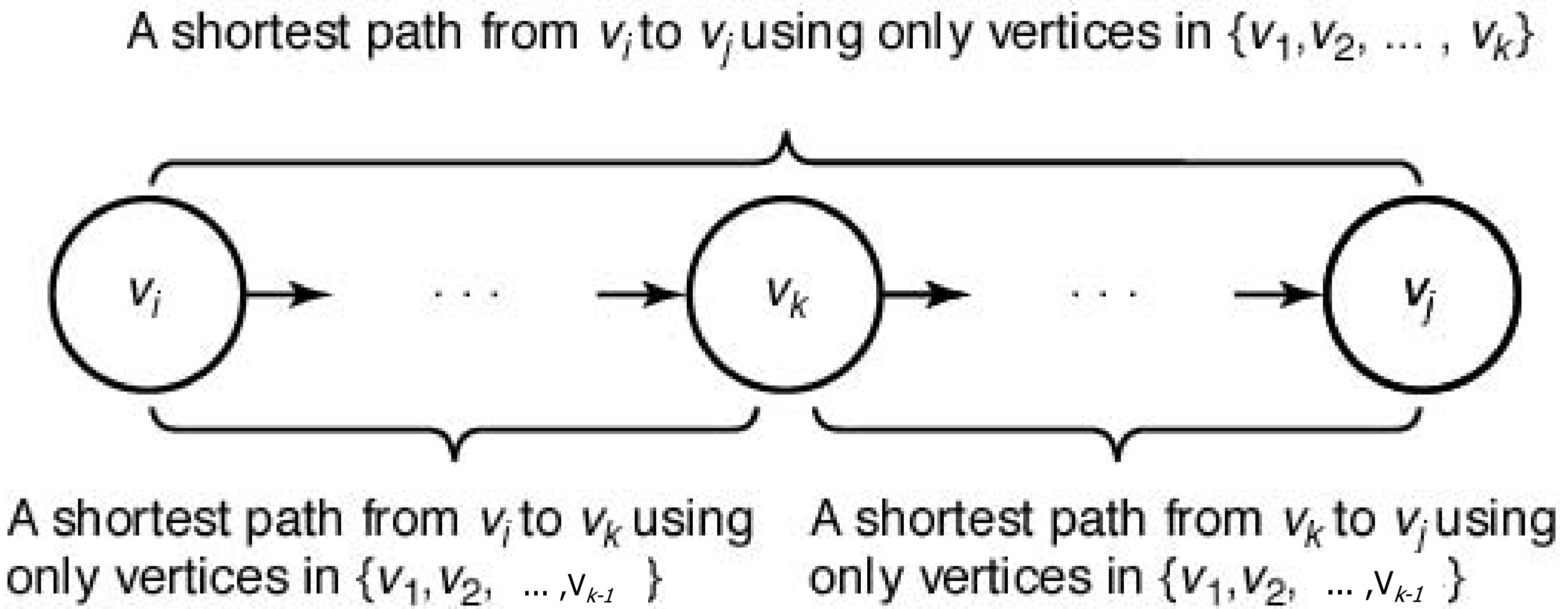
경우 2: $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$의 정점들 만을 통해서 v_i에서 v_j로 가는 최단경로가 <u>v_k를 거치는</u> 경우.
보기: $D^{(2)}[5][3] = D^{(1)}[5][2] + D^{(1)}[2][3] = 4 + 3 = 7$
보기: $D^{(2)}[5][4]$

2. 상향식으로 $k = 1$부터 n까지 다음과 같이 이 과정을 반복하여 해를 구한다.

$$D^{(0)}, D^{(1)}, \ldots\ldots, D^{(n)}$$

동적계획식 설계절차

$$D^{(k)}[i][j] = minimum(\underbrace{D^{(k-1)}[i][j]}_{\text{경우1}}, \underbrace{D^{(k-1)}[i][k] + D^{(k-1)}[k][j]}_{\text{경우2}})$$



Floyd's Algorithm I

- 문제
  - 가중치 포함 그래프의 각 정점에서 다른 모든 정점까지의 최단거리를 계산하라.
  - 입력
    - 가중치 포함, 방향성 그래프 W와 그 그래프에서의 정점의 수 n
  - 출력
    - 최단거리의 길이가 포함된 배열 D

Floyd's Algorithm I

- 알고리즘:

```
void floyd(int n, const number W[][], number D[][]) {
    int i, j, k;
    D = W;
    for(k=1; k <= n; k++)
        for(i=1; i <= n; i++)
            for(j=1; j <= n; j++)
                D[i][j] = minimum(D[i][j], D[i][k]+D[k][j]);
}
```

- 모든 경우를 고려한 분석:
  - ✓ 단위연산: for-j 루프안의 지정문
  - ✓ 입력크기: 그래프에서의 정점의 수 n

$$T(n) = n \times n \times n = n^3 \in \Theta(n^3)$$

Floyd's Algorithm II

- 문제
  - 가중치 포함 그래프의 각 정점에서 다른 모든 정점까지의 최단거리를 계산하고, 각각의 최단경로를 구하라.

  - 입력
    - 가중치 포함 방향성 그래프 W와 그 그래프에서의 정점의 수 n

  - 출력
    - 최단경로의 길이가 포함된 배열 D, 그리고 다음을 만족하는 배열 P

$$P[i][j] = \begin{cases} v_i\text{에서 } v_j \text{까지 가는 최단경로의 중간에 놓여 있는 정점이 최소한} \\ \text{하나는 있는 경우} \rightarrow \text{그 놓여 있는 정점 중에서 가장 큰 인덱스} \\ \\ \text{최단경로의 중간에 놓여 있는 정점이 없는 경우} \rightarrow 0 \end{cases}$$

Floyd's Algorithm II

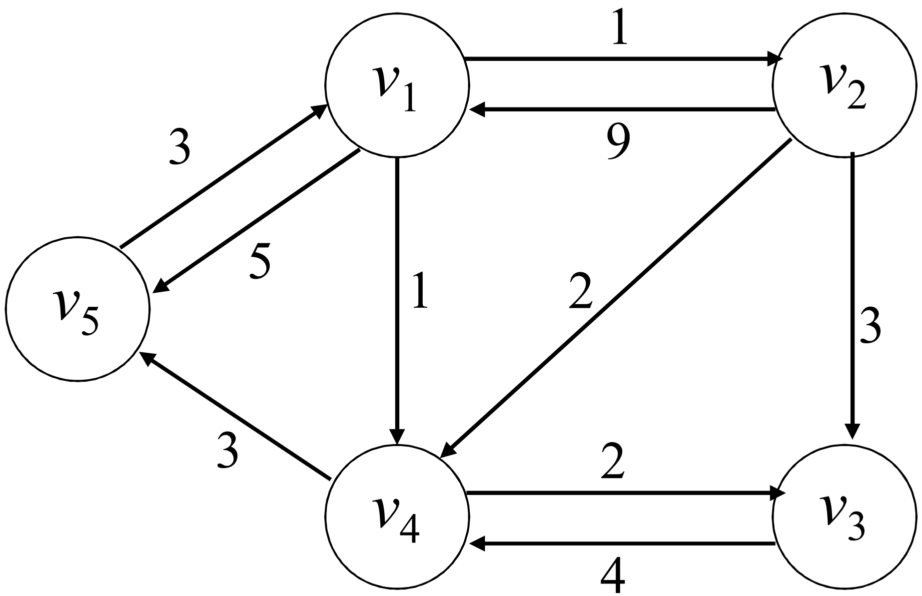
- 알고리즘:

```
void floyd2(int n, const number W[][], number D[][], index P[][]) {
     index i, j, k;
        for(i=1; i <= n; i++)
           for(j=1; j <= n; j++)
               P[i][j] = 0;
        D = W;
        for(k=1; k<= n; k++)
           for(i=1; i <= n; i++)
               for(j=1; j<=n; j++)
                  if (D[i][k] + D[k][j] < D[i][j]) {
                     P[i][j] = k;
                     D[i][j] = D[i][k] + D[k][j];
                  }
}
```

Floyd's Algorithm II

- 앞의 예를 가지고 D와 P를 구해 보시오.

	1	2	3	4	5
1	0	0	4	0	4
2	5	0	0	0	4
3	5	5	0	0	4
4	5	5	0	0	0
5	0	1	4	1	0



최단경로의 출력

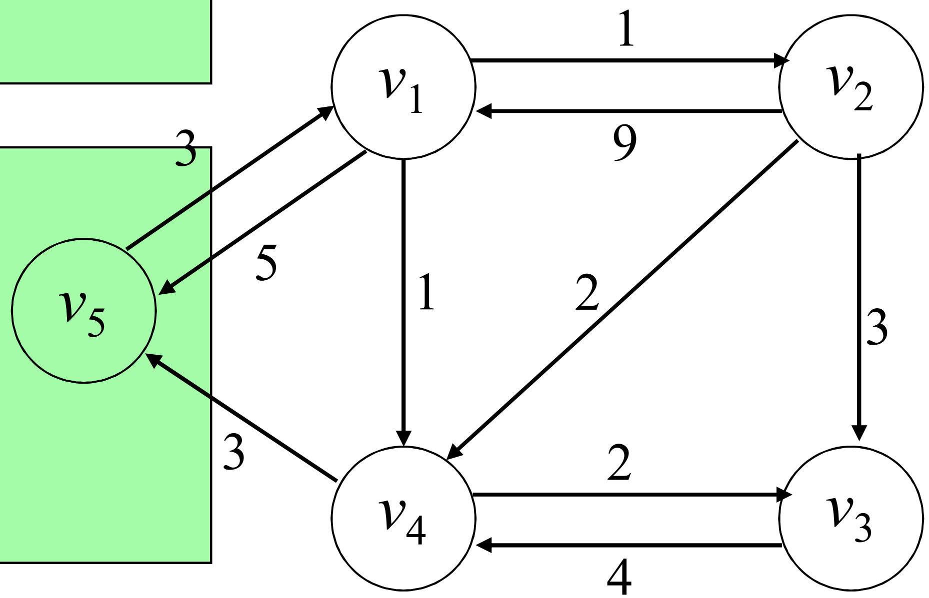
- 문제: 최단경로 상에 놓여 있는 정점을 출력하라.
- 알고리즘:

```
void path(index q,r) {
    if (P[q][r] != 0) {
        path(q,P[q][r]);
        cout << " v" << P[q][r];
        path(P[q][r],r);
    }
}
```

	1	2	3	4	5
1	0	0	4	0	4
2	5	0	0	0	4
3	5	5	0	0	4
4	5	5	0	0	0
5	0	1	4	1	0

- 위의 P를 가지고 path(5,3)을 구해 보시오.

```
path(5,3) = 4
    path(5,4) = 1
        path(5,1) = 0
        v1
        path(1,4) = 0
    v4
    path(4,3) = 0
```



결과: v1 v4.

즉, v_5에서 v_3으로 가는 최단경로는 v_5, v_1, v_4, v_3,이다.

동적계획법에 의한 설계 절차

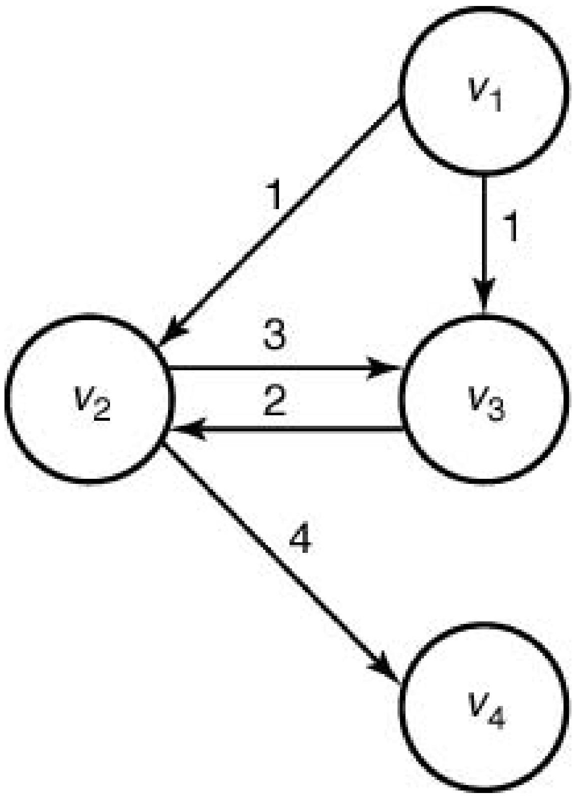
- 문제의 입력에 대해서 최적(optimal)의 해답을 주는 재귀 관계식 (recursive property)을 설정
- 상향적으로 최적의 해답을 계산
- 상향적으로 최적의 해답을 구축

최적의 원칙

- 어떤 문제의 입력에 대한 최적 해가 그 입력을 나누어 쪼갠 여러 부분에 대한 최적 해를 항상 포함하고 있으면, 그 문제는 최적의 원칙(**the principle of optimality**)이 적용된다 라고 한다.

- 보기:
  - 최단경로를 구하는 문제에서, v_k를 v_i에서 v_j로 가는 최적 경로 상의 정점이라고 하면, v_i에서 v_k 로 가는 부분경로와 v_k에서 v_j로 가는 부분경로도 반드시 최적이어야 한다.
  - 이렇게 되면 최적의 원칙을 준수하게 되므로 동적계획법을 사용하여 이 문제를 풀 수 있다.

최적의 원칙이 적용되지 않는 예: 최장경로(Longest Path) 문제



- v_1에서 v_4로의 최장경로는 $[v_1, v_3, v_2, v_4]$가 된다.
- 그러나 이 경로의 부분 경로인 v_1에서 v_3으로의 최장경로는 $[v_1, v_3]$이 아니고, $[v_1, v_2, v_3]$이다.
- 따라서 최적의 원칙이 적용되지 않는다.
- 주의: 여기서는 단순경로(simple path), 즉 순환(cycle)이 없는 경로만 고려한다.

Chained Matrix Multiplication (연쇄 행렬곱셈)

- $i \times j$ 행렬과 $j \times k$행렬을 곱하기 위해서는 일반적으로 $i \times j \times k$번 만큼의 기본적인 곱셈이 필요하다.

- 연쇄적으로 행렬을 곱할 때, 어떤 행렬곱셈을 먼저 수행하느냐에 따라서 필요한 기본적인 곱셈의 횟수가 달라지게 된다.

- 예를 들어서, 다음 연쇄행렬곱셈을 생각해 보자:
  - $A_1 \times A_2 \times A_3$.
  - A_1: 10×100, A_2; 100×5, A_3: 5×50
  - $(A_1 \times A_2) \times A_3$: 기본적인 곱셈의 총 횟수는 **7,500**회
  - $A_1 \times (A_2 \times A_3)$: 기본적인 곱셈의 총 횟수는 **75,000**회
  - 따라서, 연쇄적으로 행렬을 곱할 때 기본적인 곱셈의 횟수가 가장 적게 되는 최적의 순서를 결정하는 알고리즘을 개발하는 것이 목표

Chained Matrix Multiplication

A	$\times$	B	$\times$	C	$\times$	D
20×2		2×30		30×12		12×8

$A(B(CD))$	$30 \times 12 \times 8 +$	$2 \times 30 \times 8 +$	$20 \times 2 \times 8 =$	$3{,}680$
$(AB)(CD)$	$20 \times 2 \times 30 +$	$30 \times 12 \times 8 +$	$20 \times 30 \times 8 =$	$8{,}880$
$A((BC)D)$	$2 \times 30 \times 12 +$	$2 \times 12 \times 8 +$	$20 \times 2 \times 8 =$	$1{,}232$
$((AB)C)D$	$20 \times 2 \times 30 +$	$20 \times 30 \times 12 +$	$20 \times 12 \times 8 =$	$10{,}320$
$(A(BC))D$	$2 \times 30 \times 12 +$	$20 \times 2 \times 12 +$	$20 \times 12 \times 8 =$	$3{,}120$

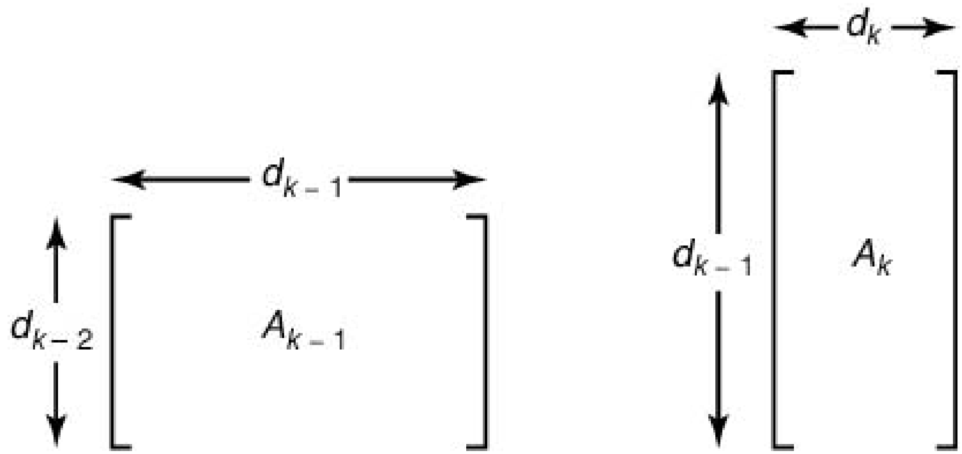
Chained Matrix Multiplication

- 무작정알고리즘: 가능한 모든 순서를 모두 고려해 보고,
  그 가운데에서 가장 최소를 택한다.

- 시간복잡도 분석: 최소한 지수(exponential-time) 시간

- 증명:
  - n개의 행렬($A_1, A_2, \ldots, A_n$)을 곱할 수 있는 모든 순서의 가지 수를 t_n이라고 하자.
  - 만약 A_1이 마지막으로 곱하는 행렬이라고 하면, 행렬 $A_2, \ldots, A_n$을 곱하는 데는 t_{n-1}개의 가지수가 있을 것이다.
  - A_n이 마지막으로 곱하는 행렬이라고 하면, 행렬 $A_1, \ldots, A_{n-1}$을 곱하는 데는 또한 t_{n-1}개의 가지수가 있을 것이다.
  - 그러면, $t_n \geq t_{n-1} + t_{n-1} = 2\, t_{n-1}$이고 $t_2 = 1$이라는 사실은 쉽게 알 수 있다.
  - 따라서 $t_n \geq 2t_{n-1} \geq 2^2 t_{n-2} \geq \ldots \geq 2^{n-2} t_2 = 2^{n-2} = \Theta(2^n)$

Chained Matrix Multiplication



- d_k를 행렬 A_k의 열(column)의 수라고 하자
  - 자연히 A_k의 행(row)의 수는 $d_{k\text{-}1}$; A_1의 행의 수는 d_0라고 하자.
  - For 1≤i≤j≤n, let

    M[i][j] = i < j일 때 A_i부터 A_j까지의 행렬을 곱하는데 필요한 곱셈의 최소 횟수

    $$= minimum_{i \le k \le j-1}(M[i][k] + M[k+1][j] + d_{i-1}d_k d_j)$$

    M[i][i] = 0

Chained Matrix Multiplication

- Ex 3.5

$$\begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ 5\times 2 & 2\times 3 & 3\times 4 & 4\times 6 & 6\times 7 & 7\times 8 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \qquad\qquad A_4(A_5A_6) \qquad\qquad\qquad\qquad (A_4A_5)A_6 \\ M[4][6] &= minimum(M[4][4]+M[5][6]+4\times 6\times 8, M[4][5]+M[6][6]+4\times 7\times 8) \\ &= minimum(0+6\times 7\times 8+4\times 6\times 8, 4\times 6\times 7+0+4\times 7\times 8) \\ &= minimum(528,392) = 392 \end{aligned}$$

$M[i][j]$	1	2	3	4	5	6
1	0	30	64	132	226	348
2		0	24	72	156	268
3			0	72	198	366
4				0	168	392
5					0	336
6						0

Chained Matrix Multiplication

- Ex 3.6
  - For diagonal 0: $M[i][i] = 0$ for $1 \le i \le 6$
  - For diagonal 1: $M[1][2] = \min(M[1][k] + M[k+1][2] + d_0 d_k d_2)$

    $= M[1][1] + M[2][2] + d_0 d_1 d_2 = 30$

    Compute M[2][3], M[3][4], M[4][5], M[5][6]
  - For diagonal 2: $M[1][3] = \min(M[1][k] + M[k+1][3] + d_0 d_k d_3)$

    $= \min(M[1][1] + M[2][3] + d_0 d_1 d_3,$

    $M[1][2] + M[3][3] + d_0 d_2 d_3)$

    $= \min(0+24+5x2x4, 30+0+5x3x4) = 64$

    Compute M[2][4], M[3][5], M[4][6]
  - For diagonal 3: $M[1][4] = \min(M[1][k] + M[k+1][4] + d_0 d_k d_4)$

    $= \min(M[1][1] + M[2][4] + d_0 d_1 d_4,$

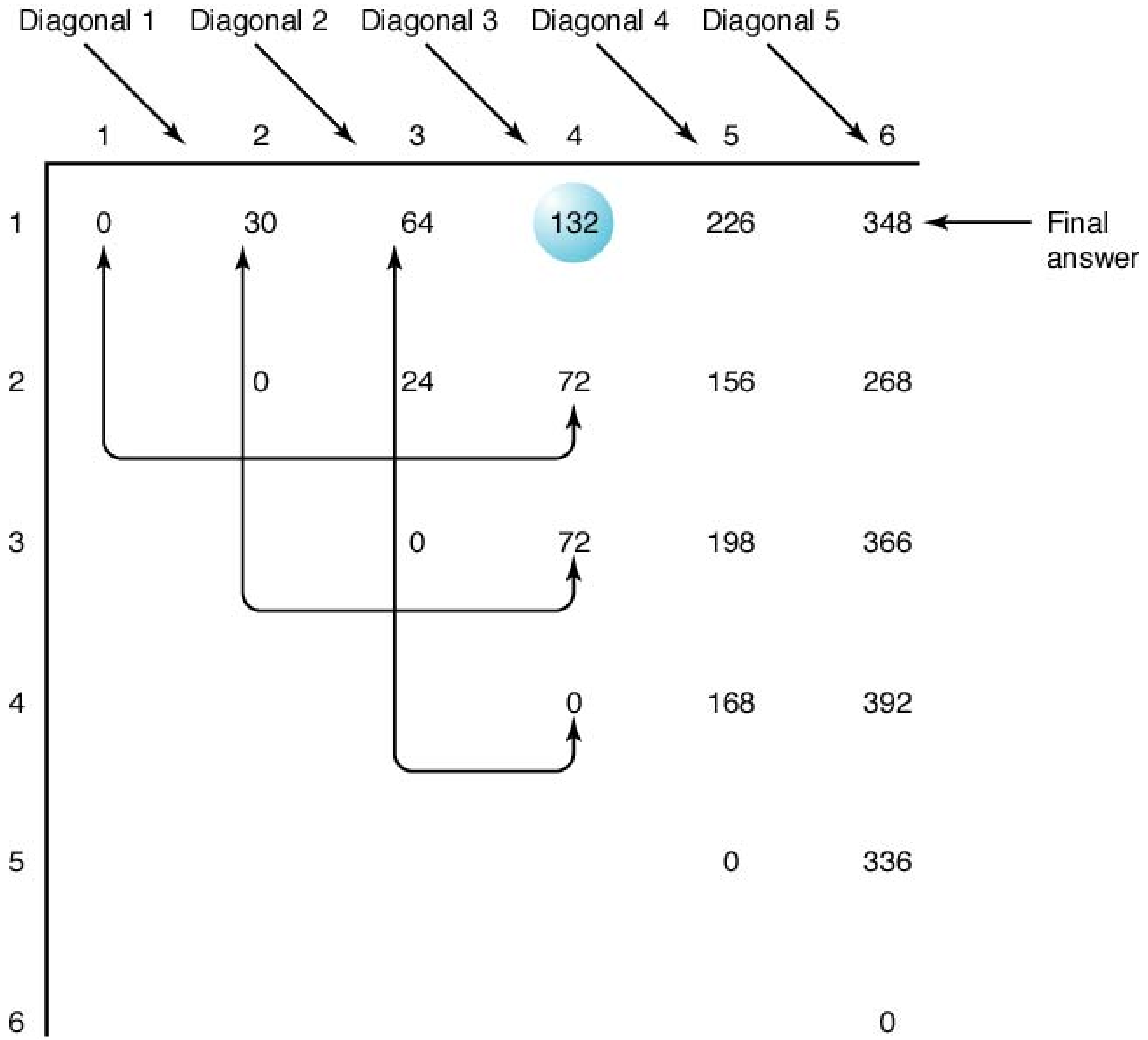
    $M[1][2] + M[3][4] + d_0 d_2 d_4,$

    $M[1][3] + M[4][4] + d_0 d_3 d_4)$

    $= \min(0+72+5x2x6, 30+72+5x3x6,64+0+5x4x6)=132$

    Compute M[2][5], M[3][6]

Chained Matrix Multiplication



Chained Matrix Multiplication

- 최소곱셈(Minimum Multiplication) 알고리즘

  - 문제
    - n개의 행렬을 곱하는데 필요한 기본적인 곱셈의 횟수의 최소치를 결정하고, 그 최소치를 구하는 순서를 결정하라.

  - 입력
    - 행렬의 수 n와 배열 $d[0..n]$,
      $d[i\text{-}1] \times d[i]$는 i번째 행렬의 규모를 나타낸다.

  - 출력
    - 기본적인 곱셈의 횟수의 최소치를 나타내는 *minmult*;
      최적의 순서를 얻을 수 있는 배열 P,
      여기서 $P[i][j]$는 행렬 i부터 j까지가 최적의 순서로 갈라지는 기점

Chained Matrix Multiplication

- 알고리즘:

```
int minmult(int n, const int d[], index P[][]) {
  index i, j, k, diagonal;
  int M[1..n, 1..n];
  for(i=1; i <= n; i++)
    M[i][i] = 0;
  for(diagonal = 1; diagonal <= n-1; diagonal++)
    for(i=1; i <= n-diagonal; i++) {
      j = i + diagonal;
      M[i][j] = minimum(M[i][k]+M[k+1][j]+d[i-1]*d[k]*d[j]);
                   i <= k <= j-1
      P[i][j] = 최소치를 주는 k의 값
    }
  return M[1][n];
}
```

Chained Matrix Multiplication

- 최소곱셈 알고리즘의 모든 경우 분석
  - 단위연산: 각 k값에 대하여 실행된 명령문 (instruction), 여기서 최소값인 지를 알아보는 비교문도 포함한다.
  - 입력크기: 곱할 행렬의 수 n
  - 분석: $j = i + diagonal$이므로,
    - i-루프를 수행하는 횟수 = $n - diagonal$
    - k-루프를 수행하는 횟수 =

$$(j-1)-i+1=((i+diagonal)-1)-i+1=diagonal$$

    - 따라서

$$\sum_{diagonal=1}^{n-1}[(n-diagonal)\times diagonal]=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}\in\Theta(n^3)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Chained Matrix Multiplication

- 최적 순서의 구축
  - 최적 순서를 얻기 위해서는 $M[i][j]$를 계산할 때 최소값을 주는 k값을 $P[i][j]$에 기억한다.
  - 예: $P[2][5] = 4$인 경우의 최적 순서는 $(A_2 A_3 A_4)\, A_5$이다.

$P[i][j]$

	1	2	3	4	5	6
1		1	1	1	1	1
2			2	3	4	5
3				3	4	5
4					4	5
5						5

    - $P[1][6] = 1$; $A_1(A_2 A_3 A_4 A_5 A_6)$
    - $P[2][6] = 5$; $A_1((A_2 A_3 A_4 A_5)\, A_6)$
    - 따라서 최적 분해는 $(A_1((((A_2 A_3)\, A_4)\, A_5)\, A_6))$.

Chained Matrix Multiplication

- 최적의 해를 주는 순서의 출력
  - 문제: n개의 행렬을 곱하는 최적의 순서를 출력하시오
    - 입력: n과 P
    - 출력: 최적의 순서
  - 알고리즘:

```
void order(index i, index j) {
    if (i == j) cout << "A" << i;
        else {
              k = P[i][j];
              cout << "(";
              order(i,k);
              order(k+1,j);
              cout << ")";
        }
}
```

Chained Matrix Multiplication

- 최적의 해를 주는 순서의 출력
  - order(i,j)의 의미: $A_i \times \ldots \times A_j$ 의 계산을 수행하는데 기본적인 곱셈의 수가 가장 적게 드는 순서대로 괄호를 쳐서 출력하시오.
  - 분석: $T(n) \in \Theta(n)$. 어떻게?

- Chained matrix multiplication
  - $\Theta(n^3)$ – Godbole (1973)
  - $\Theta(n^2)$ – Yao (1982)
  - $\Theta(n \lg n)$ – Hu and Shing (1982, 1984)

Recursive Algorithm

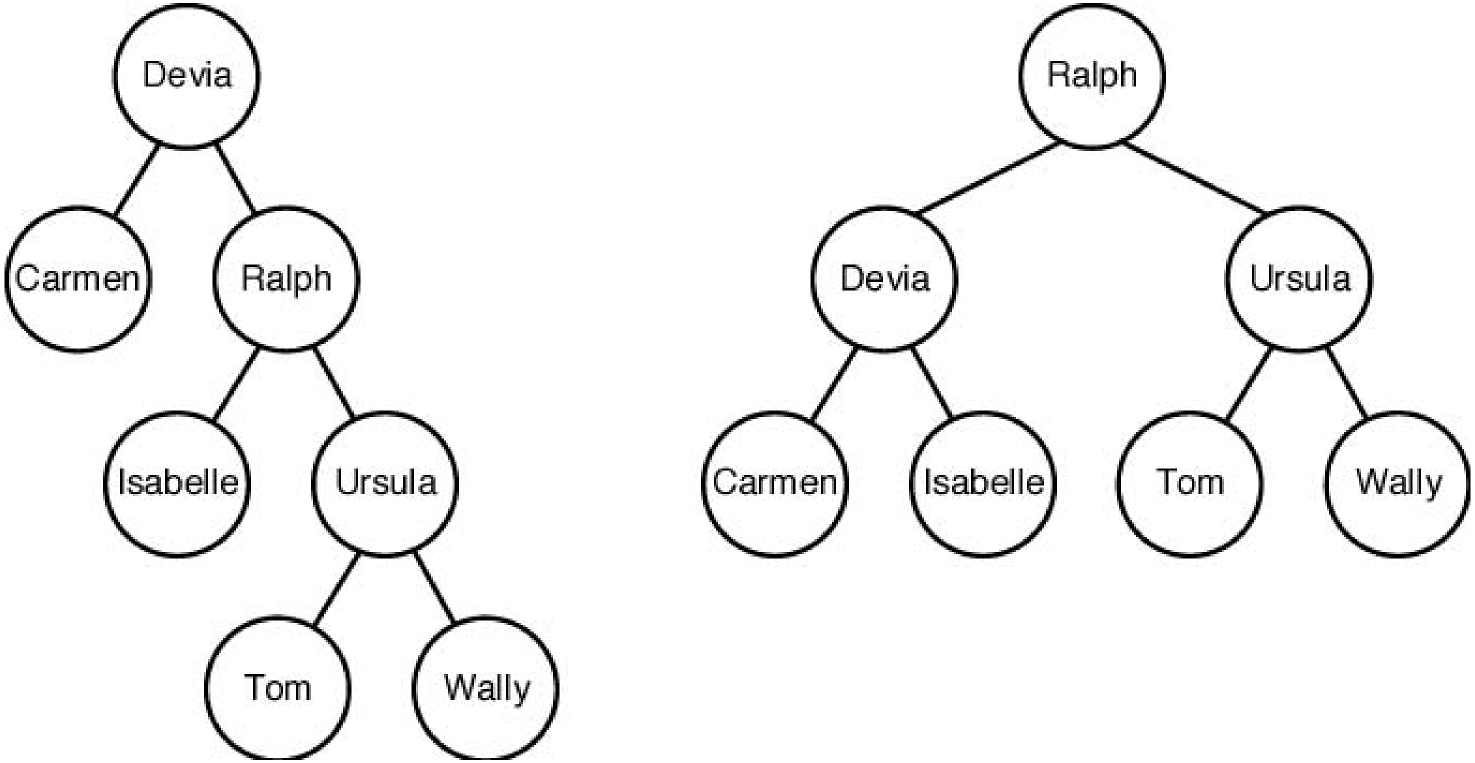
```
rMatrixChain(i, j)
▷ 행렬곱 을 구하는 최소 비용 구하기
{
    if (i = j) then return 0;    ▷ 행렬이 하나뿐인 경우의 비용은 0
    min ← ∞;
    for k ← i to j−1 {
        q ← rMatrixChain(i, k) + rMatrixChain(k+1, j) + p_{i−1}p_k p_j;
        if (q < min) then min ← q;
    }
    return min;
}
```

✓ 엄청난 중복 호출이 발생한다!

Optimal Binary Search Trees

- Definition
  - *binary search tree*
    - A binary tree of items (keys), that come from an ordered set
    - Each node contain one key
    - The keys in the left subtree of a given node are less than or equal to the key in that tree
    - The keys in the right subtree of a given node are greater than or equal to the key in that tree
  - *depth* – number of edges from the root (level of the node)
  - *balanced* – if the depth of the 2 subtrees of every node never differ by more than 1
  - *optimal* –the average time it takes to locate a key is minimized

Optimal Binary Search Trees



Two binary search trees

Optimal Binary Search Trees

- Data types

```
struct nodetype {
        keytype key
        nodetype* left
        nodetype* right
}
Typedef nodetype* node_pointer;
```

Optimal Binary Search Trees

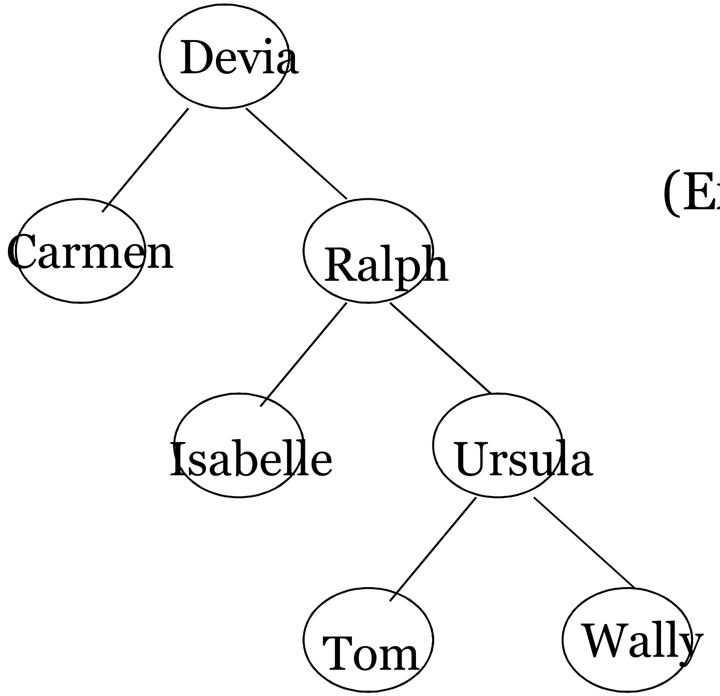
- Problem: determine the node containing a key in a binary search tree (assume that key is in the tree)
  - Inputs: a pointer tree & a key keyin
  - Outputs: a pointer p to the node containing the key

```
void search (node_pointer tree, keytype keyin,
             node_pointer& p) {
   bool found;
   p = tree;
   found = false;
   while (!found)
      if (p->key == keyin)
          found = true;
      else if (keyin < p->key)
          p = p->left;        // Advance to left child
      else
          p = p->right;       // Advance to right child
}
```

Optimal Binary Search Trees

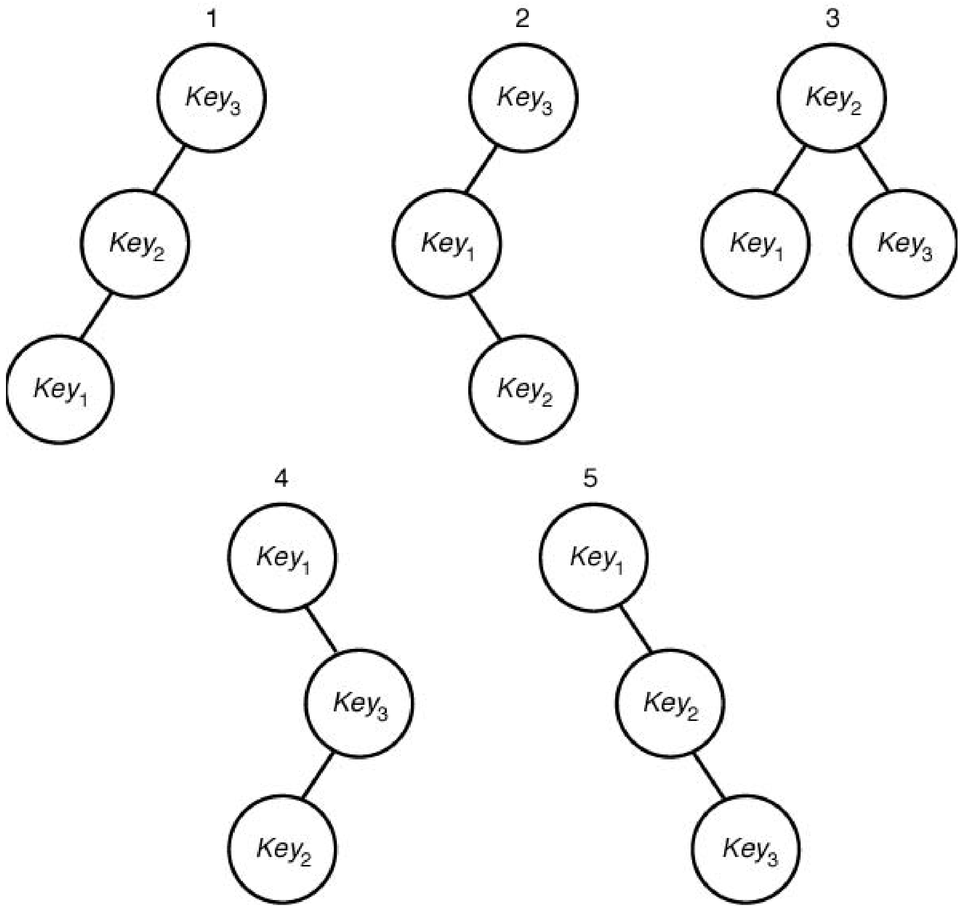
- Analysis
  - Search time – the number of comparisons to locate a key
    - Search time a given key   depth(key) + 1

      where depth(key) is the depth of the node containing the key



(Ex) Search time for “Ursula”
depth(Ursula) + 1 = 2 + 1 = 3

Optimal Binary Search Trees



p_i – the probability that Key_i is the search key

$p_1 = 0.7$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.1$

1) $3(0.7) + 2(0.2) + 1(0.1) = 2.6$

2) $2(0.7) + 3(0.2) + 1(0.1) = 2.1$

3) $2(0.7) + 1(0.2) + 2(0.1) = 1.8$

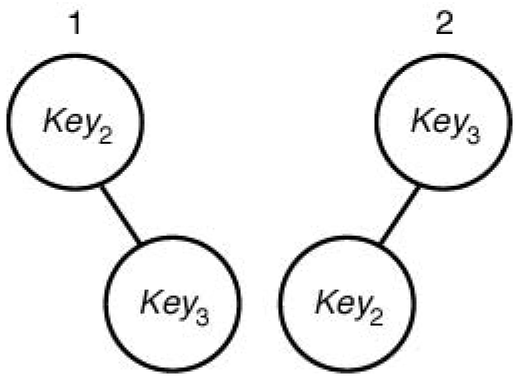
4) $1(0.7) + 3(0.2) + 2(0.1) = 1.5$

5) $1(0.7) + 2(0.2) + 3(0.1) = 1.4$

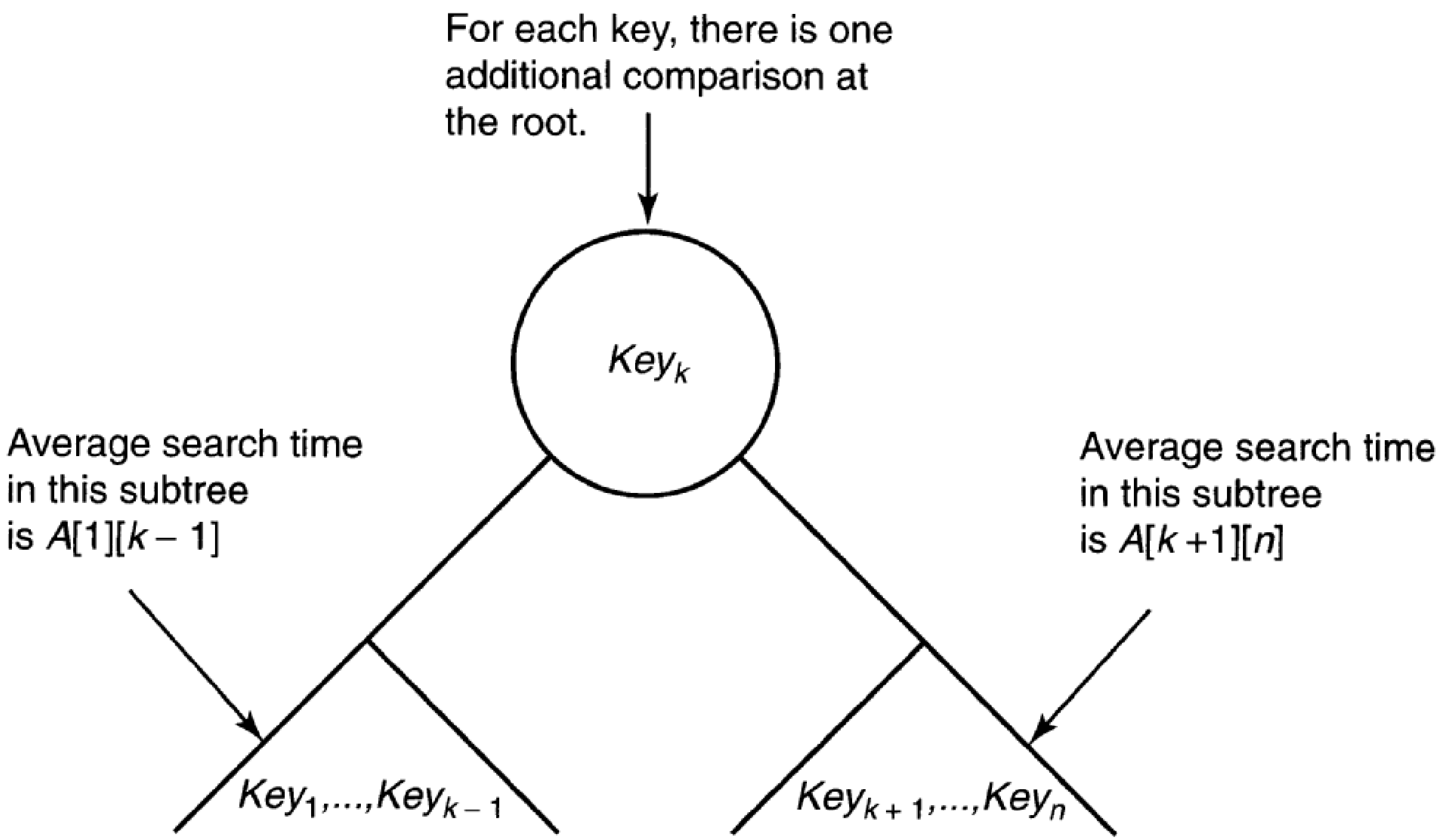
Optimal Binary Search Trees

- Dynamic programming
  - Suppose that Key_i through Key_j are arranged in a tree that minimizes $\sum_{m=i}^{j} c_m p_m$
    - C_m – the number of comparisons needed to locate Key_m in the tree
    - p_m – the probability that Key_m is the search key
  - $A[i][j]$ – the optimal value that minimized the tree
    - $A[i][i] = p_i$

Ex 3.8) Determine $A[2][3]$



Optimal Binary Search Trees



Average time for tree k, $A[1][n]$ =

$$\underbrace{A[1][k-1]}_{\text{Average time in left subtree}} + \underbrace{p_1 + \ldots + p_{k-1}}_{\text{Additional time comparing at root}} + \underbrace{p_k}_{\text{Average time searching at root}} + \underbrace{A[k+1][n]}_{\text{Average time in right subtree}} + \underbrace{p_{k+1} + \ldots + p_n}_{\text{Additional time comparing at root}}$$

Optimal Binary Search Trees

$A[1][k-1] + p_1 + \ldots + p_{k-1} + p_k + A[k+1][n] + p_{k+1} + \ldots + p_n$

$= A[1][k-1] + A[k+1][n] + \sum_{m=1}^{n} p_m$

$$A[1][n] = \underset{1 \le k \le n}{\text{minimun}}(A[1][k-1] + A[k+1][n]) + \sum_{m=1}^{n} p_m$$

$$A[i][j] = \underset{i \le k \le j}{\text{minimun}}(A[i][k-1] + A[k+1][j]) + \sum_{m=i}^{j} p_m \quad (i < j)$$

$$A[i][i] = p_i$$

$$A[i][i-1] = 0 \quad \text{and} \quad A[j+1][j] = 0$$

Optimal Binary Search Trees

- Optimal Binary Search Tree Algorithm

```
void optsearchtree(int n, const float p[], float& minavg,
                    index R[][]) {
   index i, j, k, diagonal;
   float A[1..n+1][0..n];
   for(i=1; i<=n; i++) {
      A[i][i-1] = 0; A[i][i] = p[i]; R[i][i] = i; R[i][i-1] = 0;
   }
   A[n+1][n] = 0; R[n+1][n] = 0;
   for(diagonal=1; diagonal<= n-1; diagonal++)
      for(i=1; i <= n-diagonal; i++) {
          j = i + diagonal;
          A[i][j] = min(A[i][k-1]+A[k+1][j]) + sum_{m=i}^{j} p_m
                   i≤k≤j
         R[i][j] = a value of k that gave the minimum;
      }
      minavg = A[1][n];
}
```

$$A[i][j] = \min_{i \le k \le j}(A[i][k-1]+A[k+1][j]) + \sum_{m=i}^{j} p_m$$

Optimal Binary Search Trees

- Every-case Time Complexity Analysis
  - Basic operation: addition & comparison for each value of k
  - Input size: n, the number of keys

  - 분석: $j = i + diagonal$이므로, (Algorithm 3.6 참조)
    - i-루프를 수행하는 횟수 = $n - diagonal$
    - k-루프를 수행하는 횟수 = j-i+1= (i+diagonal)-i+1=diagonal+1
    - 따라서

$$\sum_{diagonal=1}^{n-1} [(n - diagonal) \times (diagonal + 1)] = \frac{n(n-1)(n+4)}{6} \in \Theta(n^3)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Optimal Binary Search Trees

- Build Binary Search Tree Algorithm

Output: a pointer tree to an optimal binary search tree containing the *n* keys

```
nodepointer tree(index i, j) {
      index k;
      node_pointer p;
      k = R[i][j];
      if(k==0)
          return NULL;
      else{
          p = new nodetype;
          p -> key = key[k];
          p -> left = tree(i, k-1);
          p -> right = tree(k+1, j);
          return p;
      }
}
```

Optimal Binary Search Trees

- Example 3.9
  - Don Isabelle Ralph Wally

    Key[1] Key[2] Key[3] Key[4]

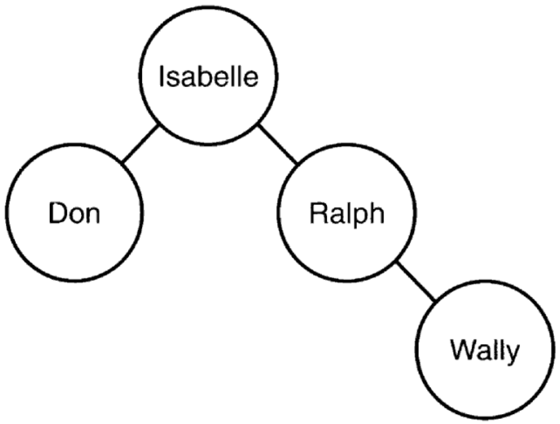
    $p_1=3/8$ $p_2=3/8$ $p_3=1/8$ $p_4=1/8$

	0	1	2	3	4
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{7}{4}$
2		0	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	1
3			0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
4				0	$\frac{1}{8}$
5					0

A

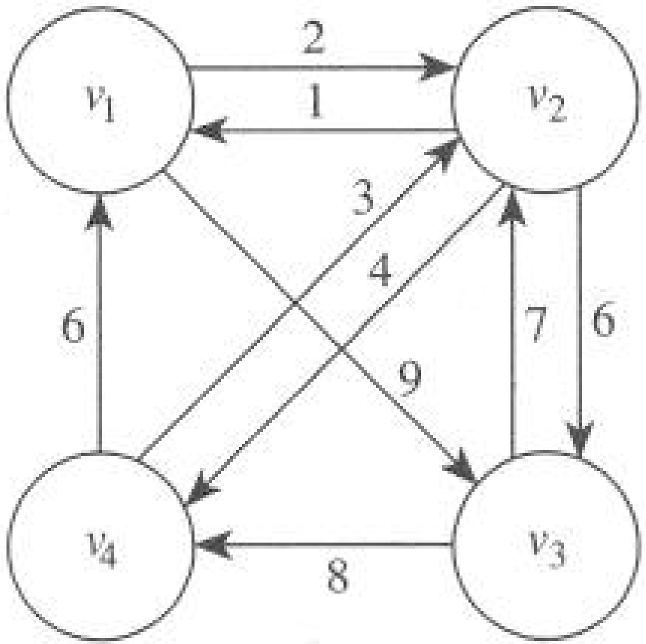
	0	1	2	3	4
1	0	1	1	2	2
2		0	2	2	2
3			0	3	3
4				0	4
5					0

R



The Traveling Salesperson Problem

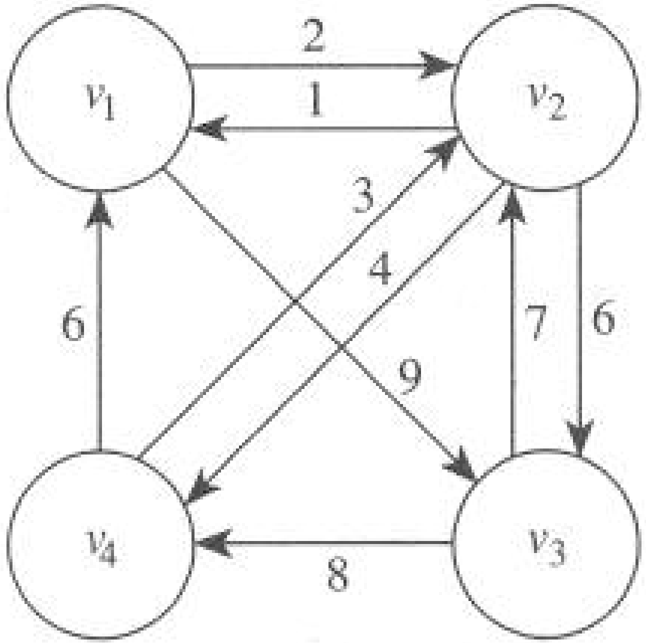
- Problem Definition
  - Determine a shortest route that starts at the salesperson's home city, visits each of the cities once, and ends up at the home city



$$length[v_1, v_2, v_3, v_4, v_1] = 22$$
$$length[v_1, v_3, v_2, v_4, v_1] = 26$$
$$length[v_1, v_3, v_4, v_2, v_1] = 21$$
$$(n - 1)(n - 2) \cdots 1 = (n - 1)!$$

The Traveling Salesperson Problem

- Adjacent matrix W



	1	2	3	4
1	0	2	9	∞
2	1	0	6	4
3	∞	7	0	8
4	6	3	∞	0

- V = set of all the vertices
- A = a subset of V
- $D[v_i][A]$ = length of a shortest path from v_i to v_1 passing through each vertex in A exactly once

The Traveling Salesperson Problem

Ex 3.10

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ...... represent a set
- $[v_1, v_2, v_3, v_4]$ .... represent a path
- If $A = \{v_3\}$, then $D[v_2][A] = \text{length}[v_2, v_3, v_1] = \infty$
- If $A = \{v_3, v_4\}$,

  then $D[v_2][A] = \min(\text{length}[v_2, v_3, v_4, v_1], \text{length}[v_2, v_4, v_3, v_1])$

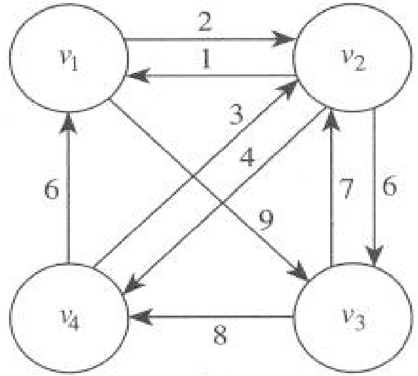
  $= \min(20, \infty) = 20$

- Length of an optimal tour = $\underset{2 \le j \le n}{\text{minimum}}(W[1][j] + D[v_j][V - \{v_1, v_j\}])$
- In general for $i \neq 1$ and i not in A

$$D[v_i][A] = \underset{v_j \in A}{\text{minimum}}(W[i][j] + D[v_j][A - \{v_j\}]) \quad \text{if } A \neq \emptyset$$

$$D[v_i][\emptyset] = W[i][1].$$

The Traveling Salesperson Problem



	1	2	3	4
1	0	2	9	∞
2	1	0	6	4
3	∞	7	0	8
4	6	3	∞	0

- Ex 3.11 Determine an optimal tour in Fig 3.17
  - $D[v_2][\emptyset] = 1$; $D[v_3][\emptyset] = \infty$; $D[v_4][\emptyset] = 6$
  - $D[v_3][\{v_2\}] = \min_{j:v_j \in \{v_2\}} (W[3][j] + D[v_j][\{v_2\}-\{v_j\}])$

    $= W[3][2] + D[v_2][\emptyset] = 7 + 1 = 8$

    $D[v_4][\{v_2\}] = 3+1 = 4$;

    $D[v_2][\{v_3\}] = 6+ \infty = \infty$; $D [v_4][\{v_3\}] = \infty + \infty = \infty$;

    $D[v_2][\{v_4\}] = 4+6 = 10$; $D[v_3][\{v_4\}] = 8+6 = 14$;
  - $D[v_4][\{v_2, v_3\}] =\min_{j:v_j \in \{v_2, v_3\}} (W[4][j] + D[v_j][\{v_2, v_3\}-\{v_j\}])$

    $= \min(W[4][2]+D[v_2][\{v_3\}], W[4][3]+D[v_3][\{v_2\}])$

    $= \min(3+\infty , \infty+8) = \infty$

    $D[v_3][\{v_2, v_4\}] =\min(7+10,8+4) = 12$

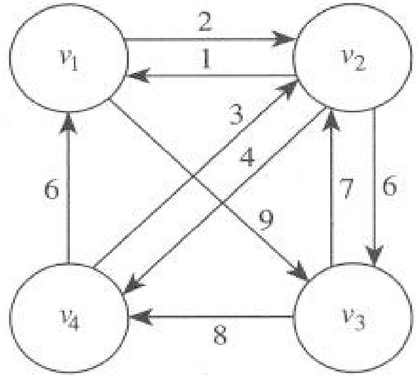
    $D[v_2][\{v_3, v_4\}] = \min(6+14, 4+\infty) = 20$
  - $D[v_1][\{v_2,v_3 ,v_4\}] =\min_{j:v_j \in \{v_2,v_3 ,v_4\}}(W[1][j] + D[v_j][\{v_2,v_3 ,v_4\}-\{v_j\}])$

    $= \min(W[1][2]+D[v_2][\{v_3,v_4\}], W[1][3]+D[v_3][\{v_2,v_4\}], W[1][4]+D[v_4][\{v_2,v_3\}])$

    $= \min(2+20, 9+12, \infty+\infty) = 21$

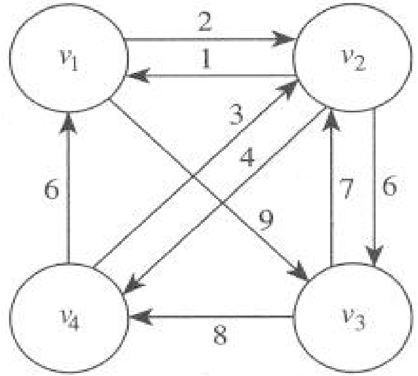
The Traveling Salesperson Problem

- First consider the empty set:
  - $D[v_2][\varnothing] = 1$
    - ②→①
  - $D[v_3][\varnothing] = \infty$
    - ③→①
  - $D[v_4][\varnothing] = 6$
    - ④→①



	1	2	3	4
1	0	2	9	∞
2	1	0	6	4
3	∞	7	0	8
4	6	3	∞	0

The Traveling Salesperson Problem

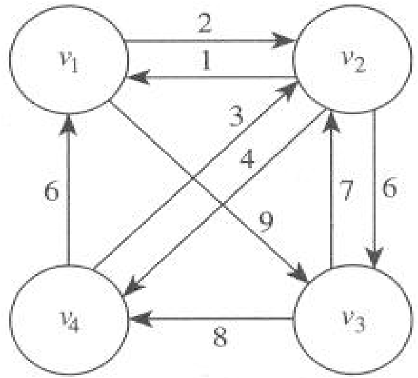


- Next consider all sets containing one element:
  - $D[v_2][\{v_3\}] = 6+\infty = \infty$
    - ②→③→①
  - $D[v_2][\{v_4\}] = 4+6 = 10$
    - ②→④→①
  - $D[v_3][\{v_2\}] = \min_{j:vj \in \{v2\}} (W[3][j] + D[v_j][\{v_2\}-\{v_j\}])$

    $= W[3][2] + D[v_2][\emptyset] = 7 + 1 = 8$
    - ③→②→①
  - $D[v_3][\{v_4\}] = 8+6 = 14$
    - ③→④→①
  - $D[v_4][\{v_2\}] = 3+1 = 4$
    - ④→②→①
  - $D\ [v_4][\{v_3\}] = \infty + \infty = \infty$
    - ④→③→①

	1	2	3	4
1	0	2	9	∞
2	1	0	6	4
3	∞	7	0	8
4	6	3	∞	0

The Traveling Salesperson Problem



- Next consider all sets containing two elements:
  - $D[v_2][\{v_3, v_4\}] = \min(6+14, 4+\infty) = 20$
    - 2→3→4→1
    - 2→4→3→1
  - $D[v_3][\{v_2, v_4\}] = \min(7+10, 8+4) = 12$
    - 3→2→4→1
    - 3→4→2→1
  - $D[v_4][\{v_2, v_3\}] = \min_{j:v_j \in \{v_2, v_3\}} (W[4][j] + D[v_j][\{v_2, v_3\} - \{v_j\}])$

    $= \min(W[4][2]+D[v_2][\{v_3\}], W[4][3]+D[v_3][\{v_2\}])$

    $= \min(3+\infty, \infty+8) = \infty$
    - 4→2→3→1
    - 4→3→2→1

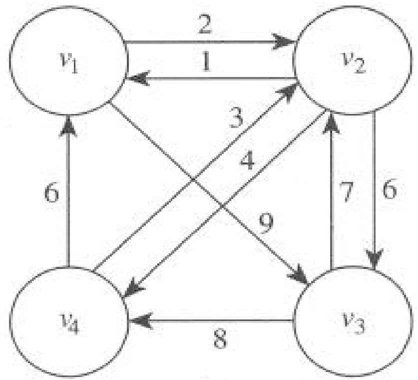
	1	2	3	4
1	0	2	9	∞
2	1	0	6	4
3	∞	7	0	8
4	6	3	∞	0

The Traveling Salesperson Problem

- Finally, compute the length of an optimal tour:
  - $D[v_1][\{v_2,v_3,v_4\}] = \min_{j:v_j \in \{v_2,v_3,v_4\}}(W[1][j] + D[v_j][\{v_2,v_3,v_4\}-\{v_j\}])$

    $= \min(W[1][2]+D[v_2][\{v_3,v_4\}], W[1][3]+D[v_3][\{v_2,v_4\}], W[1][4]+D[v_4][\{v_2,v_3\}])$

    $= \min(2+20, 9+12, \infty+\infty) = 21$
    - ①→②→③→④→①
    - ①→③→④→②→①
    - ①→④→②→③→① or ①→④→③→②→①



  - We don't have to consider the following tours:
    - ①→②→④→③→①
    - ①→③→②→④→①
    - ①→④→②→③→① or ①→④→③→②→①

	1	2	3	4
1	0	2	9	∞
2	1	0	6	4
3	∞	7	0	8
4	6	3	∞	0

The Traveling Salesperson Problem

- Algorithm for the Traveling Salesperson Problem

```
void travel(int n, const number W[], index P[][], number& minlength){
    index i, j, k;
    number D[1..n][subset of V-{v1}];

    for(i=2; i<=n; i++)
        D[i][∅] = W[i][1];

    for(k=1; k<= n-2; k++)
        for(all subsets A⊆V-{v1} containing k vertices)
            for(i such that i≠1 and vi is not in A){
                D[i][A] = min(j:vj∈A)(W[i][j]+D[j][A-{vj}]);
                P[i][A] = value of j that gave the minimum;
            }

        D[1][V-{v1}] = min(2≤j≤n)(W[1][j]+D[j][V-{v1,vj}]);
        P[1][V-{v1}] = value of j that gave the minimum;
        minlength = D[1][V-{v1}]
}
```

The Traveling Salesperson Problem

- Theorem 3.1

  For all n ≥ 1

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

  (Prove it!!)

  (Hint) For all n ≥ 1, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ from $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k$

The Traveling Salesperson Problem

- Every-case Time Complexity Analysis
  - Basic operation: addition for each value of v_j (ignore the first & last loops)
  - Input size: n, the number of vertices in the graph

  - Analysis
    - The number of subsets A of V – {v_1} containing k vertices is $\binom{n-1}{k}$
    - for each set A containing k vertices,

      n-1-k vertices, and k operations for each vertices
    - The total number is

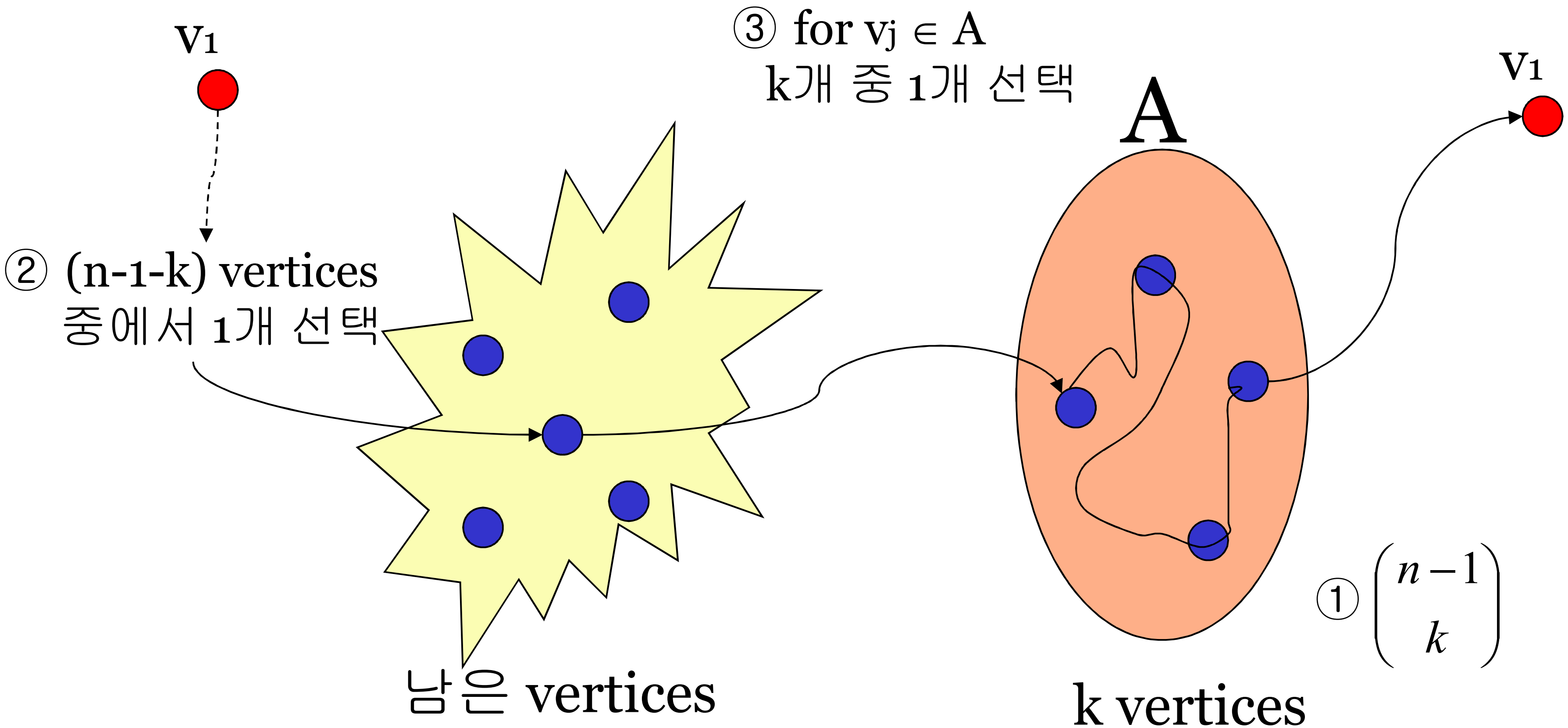
$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-2} (n-1-k) \cdot k \cdot \binom{n-1}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-2} (n-1) \cdot k \cdot \binom{n-2}{k}$$

$$= (n-1) \cdot (n-2) \cdot 2^{n-3} \in \Theta(n^2 2^n)$$

The Traveling Salesperson Problem

- Every-case Time Complexity Analysis



The Traveling Salesperson Problem

- Every-case Space Complexity Analysis
  - Memory to store the arrays $D[v_i][A]$ and $P[v_i][A]$ is dominant
    ➔ determine how large these arrays must be
  - Because $V - \{v_1\}$ contains *n-1* vertices, it has 2^{n-1} subsets A

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}\right)$$

  - The first index of the array D & P ranges in value 1 ~ n
  - Therefore,

$$M(n) = 2 \cdot n2^{n-1} = n2^n \in \Theta(n2^n)$$

The Traveling Salesperson Problem

- Ex 3.12
  - 20-city territory
    - Brute-force algorithm: 19! usecs = 3857 yrs
    - Dynamic programming: (20-1) (20-2) 2^{20-3} usecs = 45 secs

    - $M(n) = 20\ 2^{20}$ = 20,971,529 array slots

The Traveling Salesperson Problem

- Retrieve an optimal tour from array P
  - $P[1][\{v_2, v_3, v_4\}] = 3$
    $P[3][\{v_2, v_4\}] = 4$
    $P[4][\{v_2\}] = 2$
  - Therefore, the optimal tour is $[v_1, v_3, v_4, v_2, v_1]$

- No one has ever found an algorithm for the Traveling Salesperson Problem whose worst-case time complexity is better than exponential. Yet no one has ever proved that such an algorithm is not possible.