선형대수-행렬분해

5. 행렬 분해 (matrix decomposition)

1. 고유값과 고유벡터 (eigen vector, eigen value)

$$Av = \lambda v$$

고유벡터 (0이 아님) 고유 값.

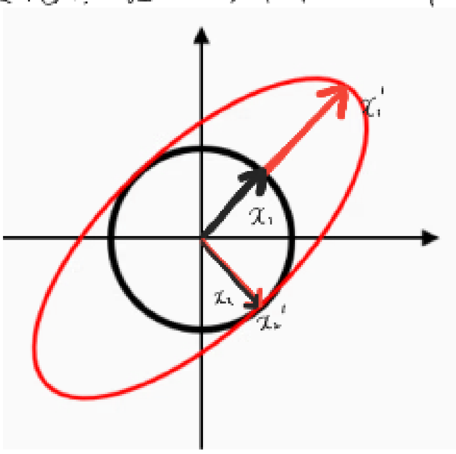
$m \times m$ 행렬은 최대 m개의 고유 값과 고유 행렬을 가짐.

고유 값과 고유 벡터는 고유값의 크기에 순서대로

$(\lambda_1, v_1), (\lambda_2, v_2), \ldots, (\lambda_m, v_m)$ 로 표현.

이때 A 행렬은 역행렬을 가지며 A^TA는 양의 정부호 대칭 행렬

* 고유값, 고유 벡터의 기하학적 의미.



결과 타원의 정 가운데 벡터가 변하지 않는 벡터는 x_1, x_2 이다.

* 고유 벡터, 고유 값 구하기.

① 고유 값.

$$Ax = \lambda x.$$

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\therefore \det(A - \lambda I) = 0$$

$$(a_1 - \lambda)(a_4 - \lambda) - (a_2 \times a_3) = 0.$$

② 고유 벡터 구하기.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$$

☆ 연립 방정식:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = \lambda x_1 \\ a_3x_1 + a_4x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

2. 고유값 분해.

고유값, 고유 벡터를 가진 정사각 행렬 A는 다음과 같이 분해됨

고유 값은 대각선에 배치.

$$A = Q \Lambda Q^{-1}$$

고유벡터를 행이 열에 배치.

3. 특이값 분해. (singular value decomposition)

특이값 분해는 정사각 행렬이 아니어도 수행가능!

ex) $A \in R^{n \times m}$

AA^T의 고유값의 제곱근을 대각선에 배치한 대각행렬. $n \times m$.

$$A = U \Sigma V^T$$

오른쪽 특이 행렬.
A^TA의 고유벡터를 열에 배치한 $m \times m$ 행렬

왼쪽 특이 행렬
$A \cdot A^T$를 열에 배치한 $n \times n$ 행렬.