Portfolio Optimization

장 연 식

Critical Questions

1. 어떤 전략을 사용해야 하는가?: Profitability Analysis

Absolute Risk Adjusted Return: Sharpe Ratio, Sortino ratio, M-square, Calmar ratio, Sterling ratio, Omega ratio
Relative Risk Adjusted Return: Treynor ratio, Jensen's alpha, Alpha&Sharpe, Treynor Black, Treynor square, Information ratio
Relative Return: Up(Down) capture ratio, Up number ratio, Up percentage ratio
Tail Risk: Value at Risk(VaR), Risk Adjusted Return on Capital(RAROC), Maximum Drawdown(MDD)

2. 여러 전략에 어떻게 돈을 배분해야 하는가?

Portfolio Optimization: Mean-variance, Sharpe ratio ->Max
Risk Factor Model: CAPM, Statistical components (PCA), Style factors (size, value, growth, mom, vol, liq, etc.), Industry factors (Sector, Industry, Sub-Industry), Cluster factors (Unsupervised Machine Learning)

3. 한번의 거래에 얼마나 많은 돈을 투입해야 하는가?:

Trade Sizing: Martingale, Anti-martingale, Equity curve methods, Fixed-fraction, Fixed ratio, Kelly criterion, Leverage space theory

Markowitz Mean-Variance Portfolio Optimization

- Maximizing sharpe ratio **over one period**.
- Expected returns $E(r_i)$ for N stocks: $\mu_i = E(r_i) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_i(t)$, $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} E(r_1) \\ E(r_2) \\ \vdots \\ E(r_N) \end{bmatrix}$
- Expected portfolio return $\mu_p = E(\sum_i w_i r_i) = \sum_i w_i E(r_i)$, $\mu_p = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_N] \begin{bmatrix} E(r_1) \\ E(r_2) \\ \vdots \\ E(r_N) \end{bmatrix} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\mu}$
- Expected covariance $C_{ij} = E[(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)]$
- Expected covariance matrix $\boldsymbol{C} = E[(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\mu})^T]$ (N by T) X (T by N) = (N by N) matrix
- Expected portfolio variance $\boldsymbol{C_p} = E[(\boldsymbol{r_p} - \boldsymbol{\mu_P})(\boldsymbol{r_P} - \boldsymbol{\mu_P})^T] = \sum_i \sum_j w_i w_j C_{ij} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{w}$

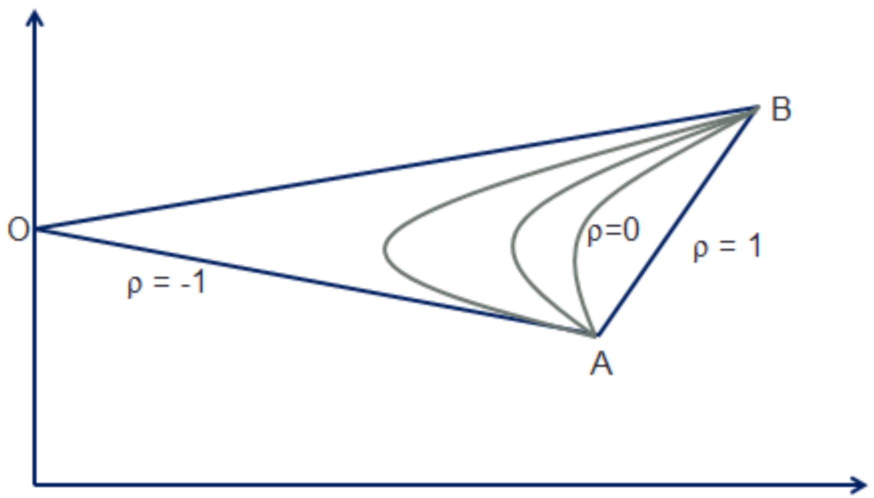
$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & \cdots & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C_p} = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_N] \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & \cdots & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}$$

Markowitz Mean-Variance Portfolio Optimization

Diversification

For a **two asset** portfolio:

- Portfolio return: $\mathrm{E}(R_p) = w_A\,\mathrm{E}(R_A) + w_B\,\mathrm{E}(R_B) = w_A\,\mathrm{E}(R_A) + (1 - w_A)\,\mathrm{E}(R_B).$
- Portfolio variance: $\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}$

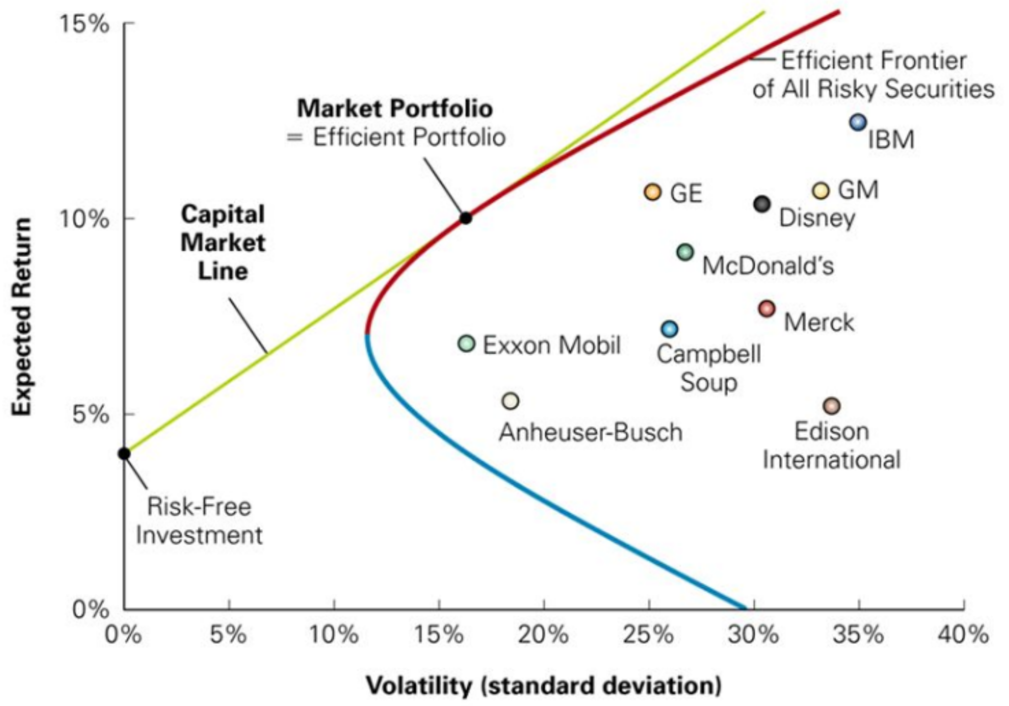


Markowitz Mean-Variance Portfolio Optimization

Diversification

For many assets

- Possible portfolios: 주어진 자산군에서 가능한 포트폴리오들의 조합들을 Monte-Carlo 시뮬레이션으로 얻음
- **Efficient Frontier:** Given expected return에서Expected portfolio variance $\boldsymbol{C_p} = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{w}$를 최소화시키는 weight $\boldsymbol{w}$로 이루어진 포트폴리오를 이은 선
- **Market (Tangency) Portfolio:** Sharpe ratio를 극대화 시키는 Efficient Frontier 상의 포트폴리오
- **Capital Market Line (CML):** 현금과 Market Portfolio의 비중을 변화시켰을 때 생성되는 포트폴리오를 이은 선



Markowitz Mean-Variance Portfolio Optimization

Calculation of Efficient Frontier

Objective: Find optimal weight $\boldsymbol{w}$ s.t. minimizing expected portfolio variance $\boldsymbol{C_p} = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}$

Constraints: $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$ $\mu_p = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\mu}$ $w_i \geq 0$ for all i (when allowed long position only)

Quadratic Programming (QP) problem!

$$L(\boldsymbol{w}, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{w} - \frac{1}{c}\sum_i \log(w_i) - \lambda_1(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{1} - 1) - \lambda_2\left(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu_p}\right)$$

$$L(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{w}) - \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{b})$$

where $f(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{w} - \frac{1}{c}\sum_i \log(w_i)$, $\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 \ 1 \cdots 1 \\ r_1 r_2 \cdots r_N\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1 \\ \mu_p\end{pmatrix}$

Optimization Condition:

(1) $w_i \geq 0$조건이 없다면 Lagrangian은 linear함수이므로 단순히 $\nabla_{\boldsymbol{w}} L(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{0}$ & $\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{0}$

(2) $w_i \geq 0$조건이 있으면 log 함수에 의해 non-linear Lagrangian이 되므로 analytic한 solution은 구할 수 없고 2차 항까지 Taylor-expansion 시킨 후 반복적으로 최적값에 수렴시킴.

$$\nabla_{\boldsymbol{w}} L(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\lambda}) + \nabla_{\boldsymbol{w}}^2 L(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\lambda})\Delta\boldsymbol{w} + \nabla_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{\lambda}}^2 L(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\lambda})\Delta\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\lambda}) + \nabla_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{\lambda}}^2 L(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\lambda})\Delta\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$$

Markowitz Mean-Variance Portfolio Optimization

Calculation of Market Portfolio

Objective: Find optimal weight $\boldsymbol{w}$ within efficient frontier s.t. maximizing Sharpe ratio $SR = \dfrac{\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}}}$

Constraints: $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$

Largrangian: $L(\boldsymbol{w},\lambda) = \log(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\mu}) - \frac{1}{2}\log(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}) - \lambda(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{1} - 1)$ ➡ $\nabla_{\boldsymbol{w}} L(\boldsymbol{w},\lambda) = \boldsymbol{0}$ & $\nabla_{\lambda} L(\boldsymbol{w},\lambda) = \boldsymbol{0}$

➡ $\dfrac{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\mu}} - \dfrac{\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}} = \lambda\boldsymbol{1}$ ➡ $\lambda = 0$ ➡ $\boldsymbol{C}\boldsymbol{w} = \dfrac{(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{w})\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\mu}}$

$\therefore \boldsymbol{w} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}$

Remarks: 1. **Inverse** covariance matrix $\boldsymbol{C}^{-1}$ should exist

- Sample covariance is **singular** if T < N+1
- Off diagonal covariance component is not-out-of-sample unless T≫N
- 상장회사 수 N ~ 2000면 T > 8 yr이어야 non-singular
- Long-lookback not available!
- Should **replace** sample covariance matrix into **risk factor** correlations

2. Markowitz market portfolio is **the same as Kelly allocation** (assumed Gaussian distribution of log returns)

- Compounded growth $g(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}$ ➡ $\nabla_{\boldsymbol{w}} g(\boldsymbol{w}) = 0$에서 $\therefore \boldsymbol{w} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}$

Markowitz Mean-Variance Portfolio Optimization

Assumption & Limitation

1. 단일 기간의 포트폴리오 수익률과 리스크를 고려

➡ infinite horizon에서의 compound growth를 최대화 시키는 것은 Kelly optimal portfolio임.
수학적으로 같은 결과

2. 포트폴리오 리스크는 수익률의 표준편차로 표현됨 (수익률의 정규 분포를 가정)

➡ 주가수익률은 negatively skewed, higher kurtosis, fat tail가짐. 한계점

3. 자산들 사이의 상관관계는 불변임을 가정

➡ Financial Crisis 등 리스크관리가 가장 필요한 시점에 자산들간의 상관관계가 형성되어 함께 melt-down. 한계점

4. 효율적 시장 가설

5. 비용 고려 하지 않음

Value at Risk (VaR) Optimized Portfolio

- Var(α) = -initial price * Quantile(1- α) of cumulative distribution of return
- 의미: 특정 기간 동안 손실이 α 의 확률로 VaR(α)를 넘지 않는다는 뜻. 즉 주어진 신뢰도에서 발생 가능한 손실 한도
- 수익률의 분포함수를 알아야 함 -> 몬테카를로 시뮬레이션을 통해 분포함수 생성
- 여러 종목의 분포함수가 있을때 시뮬레이션으로 생성된 서로 독립인 분포함수를 그대로 쓰면 자산 간 correlation을 무시하게 되므로 원래 데이터의 상관관계를 가지도록 데이터를 변환해줌 (Cholesky Decomposition 사용)

- **손실 금액 (VaR)을 최소화하는 포트폴리오의 최적화 flow**:

1. 수익률 분포함수를 몬테카를로 시뮬레이션으로 생성. 이 때 분포함수를 normal distribution으로 하는 것이 일반적이나, 좀 더 현실에 가깝도록 여러가지 모델을 생각해볼 수 있다(Pareto distribution, Weibull distribution, etc.). 또는 데이터 자체로부터 딥러닝을 이용하여 가상의 주가를 생성할 수도 있다 (GAN)
2. 원래 데이터의 상관관계행렬을 Cholesky decomposition을 사용하여 lower triangular (L), upper triangular matrix (U)로 분해한다.
3. 몬테카를로 시뮬레이션에서 발행된 난수들에 L을 곱하여 가상의 수익률이 원래 수익률간의 상관관계를 가지도록 조정한다.
4. Weight vector를 곱해서 가상의 포트폴리오를 생성한다.
5. 3~4의 과정을 여러 번 반복해서 가상의 포트폴리오 수익률의 분포를 구하고 이 때 VaR을 계산한다.
6. 3~5의 과정에서 서로 다른 weight가 주어졌을 때 VaR을 최소화 시키는 optimized weight를 구한다.

Value at Risk (VaR) Optimized Portfolio

Cholesky Decomposition

- 상관관계가 존재하는 주가를 생성하기 위해 사용함
- Positive-definite Hermitian matrix는 두 삼각행렬로 분해가 가능하다.

If we write out the equation

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} L_{11}^2 & & (\text{symmetric}) \\ L_{21}L_{11} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & \\ L_{31}L_{11} & L_{31}L_{21} + L_{32}L_{22} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{pmatrix},$$

we obtain the following:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \sqrt{A_{11}} & 0 & 0 \\ A_{21}/L_{11} & \sqrt{A_{22} - L_{21}^2} & 0 \\ A_{31}/L_{11} & (A_{32} - L_{31}L_{21})/L_{22} & \sqrt{A_{33} - L_{31}^2 - L_{32}^2} \end{pmatrix}$$

and therefore the following formulas for the entries of **L**:

$$L_{j,j} = \sqrt{A_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{j,k}^2},$$

$$L_{i,j} = \frac{1}{L_{j,j}} \left(A_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{i,k} L_{j,k} \right) \quad \text{for } i > j.$$