§22.

Вынужденные колебания с затуханием под действием синусоидальной затухающей силы.
Резонанс.

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + F_0\cos\Omega t$$

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = f_0\cos\Omega t$$

Будем искать реш-е в виде суперпозиции собств. и вынужденных колебаний осциллятора

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2\gamma = f_0\cos\Omega t \qquad z = x + iy$$

$$z(t) = z_s(t) + z_f(t)$$

$$z_s'' + 2\gamma\dot{z}_s + \omega_0^2 z_s = 0$$

$$\ddot{z}_f + 2\gamma z_f' + \omega_0^2 z_f = f_0 e^{i\Omega t}$$

- $z_s(t) = z_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi_1)$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

  если $\gamma \neq 0$, то со временем затухнут

- $z_f(t)$ подбираем так, чтобы $f_0 \to 0$ $z_f(t) \to 0$

$$z_f(t) = z_0 e^{i\Omega t} \qquad \dot{z}_f = i\Omega z_0 e^{i\Omega t} \qquad \ddot{z} = -\Omega^2 z_0 e^{i\Omega t}$$

$$z_0 \cancel{e^{i\Omega t}}(-\Omega^2 + 2\gamma\Omega i + \omega_0^2) = f_0\cancel{e^{i\Omega t}}$$

$$z_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\gamma\Omega i}$$ – частотная хар-ка осциллятора

$$x_f(t) = \mathrm{Re}\, z_f(t) = \mathrm{Re}\,(z_0 e^{i\Omega t}) = \mathrm{Re}\left(\frac{f_0 e^{i\Omega t}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\gamma\Omega t}\right)$$

$$\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega = R\cdot e^{-i\varphi_0}$$

$$R = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\gamma\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

$$z_f = \frac{f_0}{R} e^{i\Omega t - i\varphi_0}$$

$$x_f = \operatorname{Re} z_f = \frac{f_0}{R} \cos(\Omega t + \varphi_0)$$

$$A = \frac{f_0}{R} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}$$

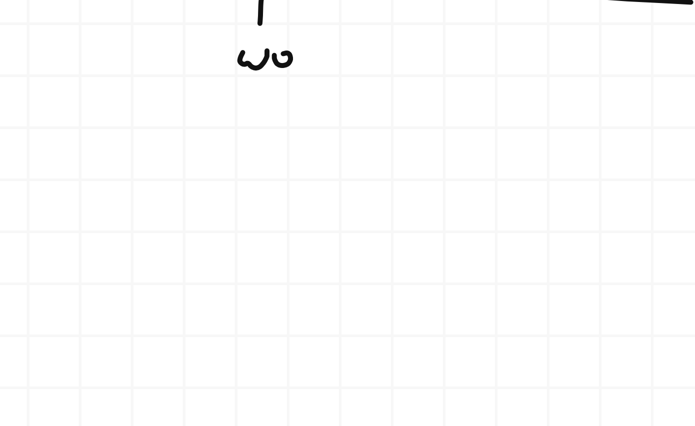
Резонанс

если $\gamma = 0$

$$A = \frac{f_0}{|\omega_0^2 - \Omega^2|} \qquad \Omega_m = \omega_0$$

$\gamma \neq 0$

$$\Omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$



$$A_{max} \approx \frac{f}{2\gamma\omega_0}$$

$$A_{ст} \approx \frac{f_0}{\omega_0}$$