§11.

Движение тел в центральном гравитационном поле.
З-ны Кеплера.
Виды траекторий, критерий (ин)финитности движения.
Первая и вторая косм. скорости.

Законы Кеплера (формулировка)

1. *Планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.*

2. *Радиус-векторы планеты в равные промежутки времени выметают равные площади (секториальная скорость планет постоянна).*

3. *Квадраты времён обращения планет относятся как кубы больших полуосей эллиптических орбит, по которым планеты двигаются вокруг Солнца:*

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \qquad (8.2.1)$$

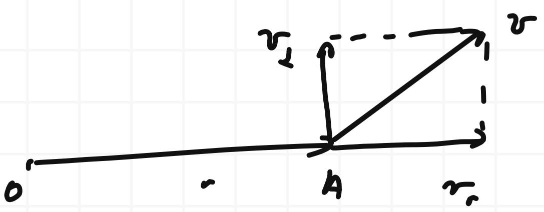
Иначе говоря, отношение $T^2/a^3 = \text{const}$ одинаково для всех планет одной системы.

$$\vec F = -\frac{GMm}{r^2}\vec n, \quad \vec n = \frac{\vec r}{r} \qquad M \gg m$$

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \text{const} \qquad (\text{ЗСЭ})$$

$$\vec L = m[\vec r, \vec v] = \text{const} \qquad (\text{ЗСМИ})$$

$$\vec S = \vec S_0 + \vec V_{сект} t \;; \quad \vec V_{сект} = \frac{\vec L}{2m}$$



$$\vec v = \vec v_r + \vec v_\perp, \quad v_r = \dot r, \quad v_\perp = r\dot\varphi$$

$$\vec L = m[\vec v, \vec r], \quad L = m r v_\perp = m r^2 \dot\varphi = \text{const}$$

$$\dot\varphi = \frac{L}{mr^2}$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v_r^2 + v_\perp^2) = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) = \frac{m\dot r^2}{2} + \frac{\cancel{mr^2}\cdot L^2}{2\,(mr^2)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2}m\dot r^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$E = E_k + U_{эфф}(r) = E_k \underbrace{- \frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}}_{U_{эфф}(r)}$$

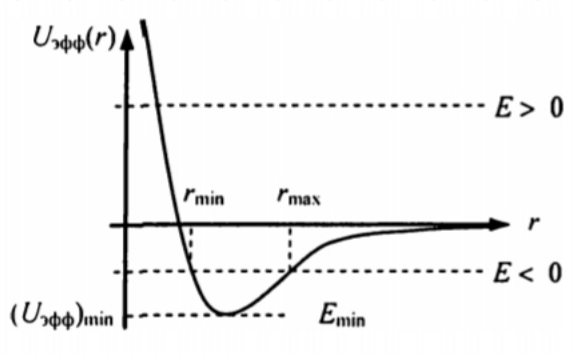


Рис. 8.2.2. График зависимости эффективной потенциальной $U_{эфф}(r)$ энергии от расстояния r до центра

Первый з-н Кеплера

$$E = \frac{m\dot r^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \ ; \qquad \dot\varphi = \frac{L}{mr^2}$$

пусть $u = \frac{1}{r}$; $\dot u = -\frac{\dot r}{r^2}$; $\dot r = -\dot u r^2 = -\frac{\dot u}{u^2}$

$$E = \frac{m\dot u^2}{2u^4} + \frac{L^2u^2}{2m} - GMmu \ ; \qquad \dot\varphi = \frac{Lu^2}{m}$$

Траектория $r = r(\varphi)$ или $u = u(\varphi)$

$$\dot u = \frac{du}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = u'\dot\varphi = u'\cdot\frac{L}{m}u^2 \ ; \qquad \frac{m\dot u^2}{2u^4} = \frac{\cancel{m}u'^2}{2\cancel{u^4}}\cdot\frac{L^2\cancel{u^4}}{m^{\cancel{2}}} = \frac{L^2}{2m}u'^2$$

$$E = \frac{L^2}{2m}(u^2 + u'^2) - GMmu = \mathrm{const} \quad \Big| \frac{d}{d\varphi}$$

$$\frac{L^2}{\cancel{2}m}(\cancel{2}u\cancel{u'} + \cancel{2}\cancel{u'}u'') - GMm\cancel{u'} = 0$$

$$\frac{L}{m}(u'' + u) = GMm$$

$$u'' + u = \frac{GMm^2}{L} \quad \text{— диф. ур-е траектории}$$

$$u = u_0 + \underbrace{c}_{\text{константа интегрирования}}\cos\varphi \ , \qquad u_0 = \frac{GMm^2}{L^2}$$

$$E = \frac{L^2}{2m}\left(u_0^2 + c^2\cos^2\varphi + 2cu_0\cos\varphi + c^2\sin^2\varphi\right) - GMmu =$$

$$= \frac{L^2}{2m}\left(c^2 + u_0^2 + \cancel{2cu_0\cos\varphi} - \frac{2m}{L^2}GMmu_0 - \cancel{\overset{u_0}{\frac{2m}{L^2}GMm}\,c\cos\varphi}\right) =$$

$$= \frac{L^2}{2m}\left(c^2 + u_0^2 - \overset{u_0}{\frac{2GMm^2}{L^2}}u_0\right) = \frac{L^2}{2m}\left(c^2 - u_0^2\right)$$

$$c = \sqrt{u_0^2 + \frac{2mE}{L^2}} = u_0\sqrt{1 + \frac{2\cancel{m}E}{\cancel{L^2}}\cdot\frac{\cancel{L^4}L^2}{G^2M^2m^{\cancel{4}3}}} = u_0\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$$

вернемся к r: $\quad r = \frac{1}{u} = \frac{1}{u_0 + c\cos\varphi} = \frac{\frac{1}{u_0}}{1 + \frac{c}{u_0}\cos\varphi}$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}\ , \text{ где } \quad \underbrace{p = \frac{1}{u_0} = \frac{L^2}{GMm^2}}_{\text{параметр}}\ , \quad \underbrace{e = \frac{c}{u_0} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}}_{\text{эксцентриситет}}$$

при $e<1$ — эллипс, начало коорд. нах-ся в фокусе

Типы орбит в центр-м гравитационном поле

эллипс	$0 \le e < 1$	$E<0$	финитное (в огр. области)
парабола	$e = 1$	$E=0$	инфинитное
гипербола	$e > 1$	$E>0$	инфинитное

при $E = (U_{эфф})_{min} < 0$ $\quad r_{min} = r_{max}$ — круговая траектория

Второй з-н Кеплера

$$\vec{v}_{сект} = \frac{\vec{L}}{2m} = const$$

(очевидно из ЗСМИ)

космические скор-ти

v_I – спутника по круговой орбите

$$\frac{mv_I^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}; \quad v_I = \sqrt{\frac{GM}{R}} \approx 7{,}9 \text{ км/с}$$

v_{II} – min для удаления на бесконечность

$$E = \frac{mv_{II}^2}{2} - \frac{GMm}{R} = 0$$

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 11{,}2 \text{ км/с}$$

v_{III} – покинуть солнечную систему, $\approx 16{,}6$ км/с