

ФИО \_\_\_\_\_

группа \_\_\_\_\_

1А	2А	3А	4А	5А	6А	Оценка

1 зад.	2 зад.	Σ баллов

Подпись преп. \_\_\_\_\_

## ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО МЕХАНИКЕ

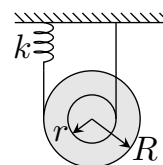
10 января 2022 г.

Вариант А

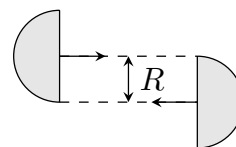
**1А.** (1,5) Из артиллерийского орудия с расстояния 50 км совершают выстрел в северный полюс Земли. Это расстояние составляет максимальную для данного орудия дальность. Оцените боковое смещение, на которое снаряд отклонится от цели из-за суточного вращения планеты, если ствол орудия направлен строго вдоль меридиана. Сопротивление воздуха не учитывать.

**2А.** (1,5)  $B^+$ -мезон с энергией покоя  $Mc^2 = 5,3$  ГэВ и собственным временем жизни  $\tau_0 = 1,6 \cdot 10^{-12}$  с движется внутри детектора, регистрирующего точки рождения и распада частиц. Частица может быть надежно зарегистрирована, если расстояние между точками рождения и распада превышает  $L = 1,0$  мм в лабораторной системе. Каким должен быть импульс  $B^+$ -мезона, чтобы он мог быть зарегистрирован? Ответ можно дать в ГэВ/с.

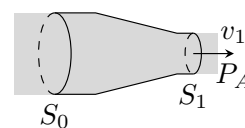
**3А.** (2,0) Дифференциальный блок состоит из двух сваренных шкивов радиусами  $r$  и  $R$ , имеет массу  $m$  и момент инерции  $I$  (относительно оси блока). На шкивы намотаны в противоположных направлениях невесомые и нерастяжимые нити, причем конец одной закреплён на опоре непосредственно, а второй — через упругую пружину жёсткости  $k$ . Найдите период малых вертикальных колебаний системы.



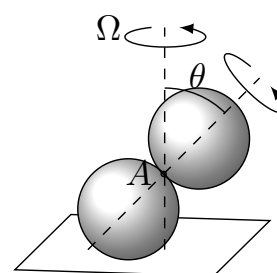
**4А.** (2,0) Два одинаковых тонких полудиска скользят по гладкой горизонтальной поверхности поступательно с одинаковыми скоростями навстречу друг другу. Центры полудисков смещены в поперечном направлении на расстояние, равное их радиусам (см. рис.). В результате удара полудиски слипаются. Какая доля  $\Delta K/K_0$  их начальной кинетической энергии перейдёт в тепло?



**5А.** (2,5) Вода вытекает из трубы через сужающуюся к выходу коническую «насадку», площадь сечения которой меняется от  $S_0 = 10$  см<sup>2</sup> до  $S_1 = 5$  см<sup>2</sup>. Скорость истечения воды  $v_1 = 10$  м/с. Определите а) приращение давления в трубе перед насадкой по сравнению с атмосферным, и б) силу, действующую на насадку в месте её крепления к трубе. Вязкостью пренебречь.



**6А.** (2,5) Два одинаковых шарика, спаянных между собой в точке  $A$  (см. рис.), лежат на шероховатой горизонтальной поверхности. Если закрутить шарики вокруг вертикальной оси с достаточно большой угловой скоростью, то один из шариков отрывается от поверхности, и через некоторое время движение системы будет суммой двух вращений: вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс  $A$ , и вокруг оси, проходящей через центры шаров. При этом нижний шарик катается по поверхности без проскальзывания, описывая окружность, а угол  $\theta$  между вертикалью и линией, соединяющей центры шаров, остаётся постоянным (эффект «шарики-торнадо»). Найдите установившуюся угловую скорость  $\Omega$  вращения шариков вокруг вертикальной оси, если  $\theta = \arccos \frac{1}{5} = 78,4^\circ$ . Шарики сплошные и однородные, их радиусы  $r = 1$  см.



ФИО \_\_\_\_\_

группа \_\_\_\_\_

1Б	2Б	3Б	4Б	5Б	6Б	Оценка

1 зад.	2 зад.	Σ баллов

Подпись преп. \_\_\_\_\_

## ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО МЕХАНИКЕ

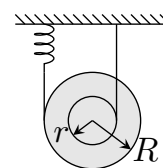
10 января 2022 г.

### Вариант Б

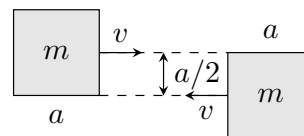
**1Б.** (1,5) Из артиллерийского орудия, расположенного строго на северном полюсе Земли, совершают выстрел в цель, находящуюся на расстоянии 30 км от полюса. Это расстояние составляет максимальную для данного орудия дальность. Оцените боковое смещение, на которое снаряд отклонится от цели, если направлять орудие без учёта суточного вращения планеты. Сопротивление воздуха не учитывать.

**2Б.** (1,5) «Очарованный»  $B_c^-$ -мезон с энергией покоя  $Mc^2 = 6,3$  ГэВ и собственным временем жизни  $\tau_0 = 4,6 \cdot 10^{-13}$  с движется внутри детектора, регистрирующего точки рождения и распада частиц. Частица может быть надёжно зарегистрирована, если расстояние между точками рождения и распада превышает  $L = 1,0$  мм в лабораторной системе. Каким должен быть импульс  $B_c^-$ -мезона, чтобы он мог быть зарегистрирован? Ответ можно дать в ГэВ/с.

**3Б.** (2,0) Дифференциальный блок некоторой массы  $m$  состоит из двух сваренных шкивов радиусами  $r$  и  $R = 2r$  и имеет момент инерции  $I = 3mr^2$  (относительно оси блока). На шкивы намотаны в противоположных направлениях невесомые и нерастяжимые нити, причем конец одной из них закреплён на опоре непосредственно, а второй — через упругую пружину, растяжение которой в положении равновесия составляет  $x = r/4$ . Найдите период малых вертикальных колебаний системы.

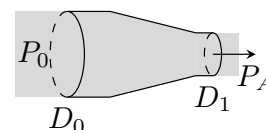


**4Б.** (2,0) Два одинаковых кубика с ребром  $a$  и массами  $m$  скользят по гладкой горизонтальной поверхности поступательно с одинаковыми скоростями  $v$  навстречу друг другу. Центры кубиков смещены в поперечном направлении на расстояние, равное  $a/2$  (см. рис.)

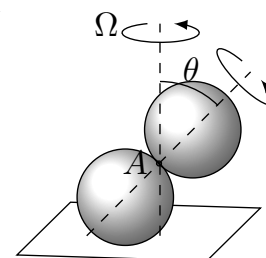


При столкновении кубики слипаются. Определите тепло, выделившееся при ударе.

**5Б.** (2,5) Вода вытекает из пожарного рукава диаметром  $D_0 = 50$  мм через сужающийся конический «ствол», выходной диаметр которого составляет  $D_1 = 13$  мм. Давление воды в рукаве  $P_0$  превышает атмосферное на  $\Delta P = 4$  атм. Определите а) скорость истечения воды из ствола, и б) силу, действующую на «ствол» в месте его крепления к трубе. Вязкостью пренебречь.



**6Б.** (2,5) Два одинаковых шарика, спаянных между собой в точке  $A$  (см. рис.), лежат на шероховатой горизонтальной поверхности. Если закрутить шарики вокруг вертикальной оси с достаточно большой угловой скоростью, то один из шариков отрывается от поверхности, и через некоторое время движение системы будет суммой двух вращений: вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс  $A$ , и вокруг оси, проходящей через центры шаров. При этом нижний шарик катается по поверхности без проскальзывания, описывая окружность, а угол  $\theta$  между вертикалью и линией, соединяющей центры шаров, остаётся постоянным (эффект «шарики-торнадо»). Найдите минимально возможную установившуюся угловую скорость  $\Omega_{\min}$  вращения шариков в таком режиме. Шарики полые и тонкостенные, их радиусы  $r = 1$  см.



1А. Максимальная дальность стрельбы  $L = v_0^2/g$ , время полета  $t = 2v_0 \sin(\pi/4)/g = \sqrt{2L/g}$ . Ускорение снаряда в восточном направлении определяемое силой Кориолиса,  $a_{\perp} = 2\omega v_{\text{гор}} = \omega gt$ , за это время смещение  $\Delta l = a_{\perp} t^2/2 = \sqrt{2}\omega L \sqrt{L/g} = 1.41 \cdot 7.3 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^4 \sqrt{5 \cdot 10^4/9.8} \approx \boxed{368 \text{ м}}$

2А. Время жизни мезона в лабораторной системе отсчета  $\tau = \gamma\tau_0$ , тогда скорость  $v = L/\tau = L/\gamma\tau_0$ . Импульс  $p = \gamma mv = mL/\tau_0 = mc^2 L/c^2 = 5.28 \cdot 10^{-3}/(3 \cdot 10^8 \cdot 1.64 \cdot 10^{-12})1/c = \boxed{11.8 \text{ ГэВ}/c}$

3А. При повороте на угол  $\alpha$ , центр масс поднимается на  $\alpha r$ , а пружина укорачивается на  $\alpha(r + R)$ . Тогда полная механическая энергия системы  $E = mg\alpha r + m(r\dot{\alpha}^2)/2 + I\dot{\alpha}^2/2 + k(\Delta x - \alpha(r + R))^2/2$ . Дифференцируя полную энергию получаем  $\ddot{\alpha} + (k(r + R)^2)/(mr^2 + I)\alpha = (-mgr + k(r + R)\Delta x)/(mr^2 + I)$ . Откуда получаем период малых колебаний  $\boxed{T = 2\pi\sqrt{(mr^2 + I)/(k(r + R)^2)}}$

4А. До столкновения  $K_0 = 2mv^2/2 = mv^2$ , где  $m$  — масса полудиска. После столкновения диски будут вращаться вокруг общего центра масс, смещенного от центров на  $h = R/2$ . Кинетическая энергия вращения  $K = L^2/2I$ , где  $L = 2mvh = mvR$  — суммарный момент импульса. Момент инерции половинки диска относительно оси, проходящей через центр диска (точка  $O$ ), равен  $I_O = \frac{1}{2}mR^2$ . Относительно центра масс полудиска:  $I_C = I_O - mx^2$ , где  $x = |OC|$  — расстояние от точки  $O$  до центра масс полудиска  $C$ . Тогда момент инерции двух смещенных на  $h = R/2$  полудисков (см. лаб. работу 1.2.3) по теоремам Штейнера и Пифагора равен:  $I = 2(I_C + m(x^2 + h^2)) = 2(I_O + mh^2) = \frac{3}{2}mR^2$ . Тогда  $K = (mvR)^2/(3mR^2) = \frac{1}{3}mv^2$ , то есть  $\Delta K/K_0 = \boxed{2/3}$  начальной энергии перейдет в тепло.

5А. Записав уравнение неразрывности и Бернулли, найдем зависимость давления от радиуса сечения:  $vS = v_1 S_1$ ;  $\rho v^2/2 + P = \rho v_1^2/2 + P_A$ , откуда  $P(r) = P_A + \rho v_1^2(1 - (r_1/r)^4)/2$ , и приращение давления получается  $\boxed{P_1 - P_A = \frac{1}{2}\rho v_1^2(1 - (S_1/S_0)^2) = 37,5 \text{ кПа}}$ . Найдём силу, проинтегрировав давление по поверхности конуса, пусть  $\alpha$  — угол между касательной конуса к оси конуса, элементарная площадка будет равна  $dS = 2\pi r dr / \sin \alpha$ , сила  $dF = P(r)dS$ , проекция силы на ось  $dF_x = P(r)dS \sin \alpha = 2\pi P(r)r dr$ , аналогичная сила со стороны окружающего воздуха  $dF_{Ax} = -2\pi P_A r dr$  тогда  $F = \int_{r_1}^{r_0} 2\pi(P(r) - P_A)r dr = (\rho v_1^2/2)(S_0 - S_1) + (\rho v_1^2/2)S_1(S_1/S_0 - 1) = \frac{1}{2}\rho v_1^2(S_1 - S_0)^2/S_0 \approx \boxed{+12,5 \text{ Н}}$  (знак "+" означает, что поток пытается сорвать насадку, т.е. её нужно удерживать с такой же силой, направленной против потока).

*Альтернативно.* Силу можно найти как баланс втекающего и вытекающего из насадки импульса. Суммарная «реактивная» сила  $F_p = \rho v_1 S_1 \cdot (v_0 - v_1) = \rho v_1^2 S_1(S_1/S_0 - 1) = -25 \text{ Н}$  (реактивная сила притягивает насадку). При этом разность сил за счёт статического давления  $F_{\text{ст}} = (P_1 - P_A)S_0 = +37,5 \text{ Н}$ . Итого полная сила со стороны потока жидкости  $F = F_{\text{ст}} + F_p = +12,5 \text{ Н}$ .

6А. Точка  $A$  и соприкосновения нижнего шарика и поверхности покоятся, поэтому мгновенная ось вращения проходит через эти точки, из геометрии можно убедиться, что мгновенная ось является биссектрисой угла между вертикальной осью и осью проходящей через центры шариков. Это означает, что угловая скорость вращения вокруг вертикальной оси  $\Omega$ , и вокруг оси проходящей через центры шариков  $\omega$  равны:  $\Omega = \omega$ . Главные оси системы — ось проходящая через центры шариков и перпендикулярная ось, проекции угловых скоростей на эти оси  $\omega_x = \Omega + \Omega \cos \theta$ ,  $\omega_y = \Omega \sin \theta$ . Проекция момента импульса на эти оси  $L_x = 2I_0(\Omega + \Omega \cos \theta)$ ,  $L_y = 2(mr^2 + I_0)\Omega \sin \theta$ , где  $I_0$  — момент инерции относительно оси проходящей через центр массы шарика. Момент импульса прецессирует с  $\vec{\Omega}$ , найдем модуль  $[\vec{\Omega}, \vec{L}]$ :  $|d\vec{L}/dt| = |\Omega \sin \theta 2I_0(\Omega + \Omega \cos \theta) - \Omega \cos \theta 2(mr^2 + I_0)\Omega \sin \theta| = |2(I_0 - mr^2 \cos \theta)\Omega^2 \sin \theta|$ . Момент прецессирует под действием момента силы реакции опоры  $|\vec{M}| = 2mgr \sin \theta$ , из уравнения моментов

находим:  $d\vec{L}/dt = \vec{M}$ ,  $\Omega = \sqrt{mgr/(I_0 - mr^2 \cos \theta)}$ . Для нашей задачи  $\cos \theta = 1/5$ ,  $I_0 = 2mr^2/5$ , получаем  $\Omega = \sqrt{5g/r} = \boxed{71 \text{ рад/с}}$

1Б. Решение аналогично 1А,  $\boxed{221 \text{ м}}$

2Б. Аналогично 2Б импульс  $p = 6.28 \cdot 10^{-3} / (3 \cdot 10^8 \cdot 4.6 \cdot 10^{-13}) 1/c = \boxed{50.0 \text{ ГэВ/с}}$

3Б. Аналогично 3А получаем  $\ddot{\alpha} + (k(r+R)^2)/(mr^2+I)\alpha = (-mgr+k(r+R)\Delta x)/(mr^2+I)$ . Откуда жесткость пружины  $k = mgr/((r+R)\Delta x) = 4mg/3r$ , а период малых колебаний  $T = 2\pi\sqrt{(mr^2+I)/(k(r+R)^2)} = 2\pi\sqrt{(mr^2+3mr^2)/(16kr^2)} = \boxed{(\pi/2)\sqrt{3r/g}}$

4Б. После столкновения кубики будут вращаться. Кинетическая энергия вращения  $L^2/2I$ , где  $L = 2mv(a/4) = mva/2$  - суммарный момент импульса относительно центра масс, а по теореме Гюйгенса-Штейнеа момент инерции  $I = 2(m((a/2)^2 + (a/4)^2) + ma^2/6) = 23ma^2/24$ , тогда кинетическая энергия вращения после столкновения  $E = (mva)^2/(8(23ma^2/24)) = 3mv^2/23$ . Так как начальная кинетическая энергия  $2mv^2/2 = mv^2$ , то в тепло перейдет  $\boxed{20mv^2/23}$

5Б. Записав уравнение неразрывности и Бернулли, найдем зависимость давления от радиуса сечения:  $vS = v_1S_1$ ;  $\rho v^2/2 + P = \rho v_1^2/2 + P_A$ , откуда  $v_1 = P(r) = P_A + \rho v_1^2(1 - (r_1/r)^4)/2$ , и находим скорость истечения  $\boxed{\sqrt{2\Delta P/\rho(1 - S_1^2/S_0^2)} = 30 \text{ м/с}}$  аналогично, находим тогда  $F = \pi\Delta PD_0^2(D_1^2 - D_0^2)/4(D_1^2 + D_0^2) \approx \boxed{690 \text{ Н}}$

6Б. Аналогично 6А:  $\Omega = \sqrt{mgr/(I_0 - mr^2 \cos \theta)}$ . Для задачи  $\cos \theta = 0$ ,  $I_0 = 2mr^2/3$ , получаем  $\Omega = \sqrt{3g/2r} = \boxed{38.7 \text{ рад/с}}$