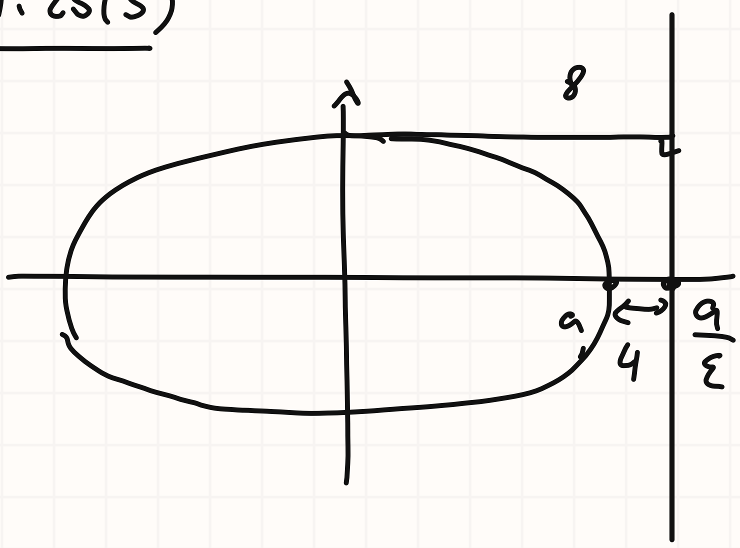
Второе задание
Неделя 1.

I. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

7.25(5)



$$\left|\frac{a}{\varepsilon}-a\right| = \left|\frac{a}{c}\cdot a - a\right| = \frac{a(a-c)}{c} = 4$$

$$\frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{c} = 8; \quad a^2 = 8c$$

$$\begin{cases} a^2 - ac = 4c \\ a^2 = 8c \end{cases}$$

$$4c = ac \quad | \; c \neq 0$$

$a = 4$

$c = \frac{16}{8} = 2$

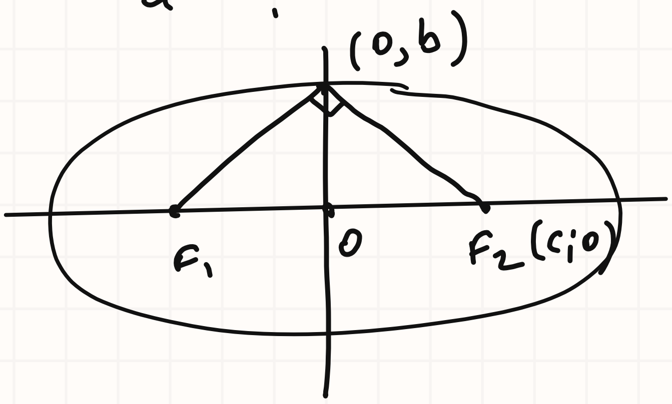
$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$

Ответ:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

7.26(4)

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ — ?



$a^2 = b^2 + c^2$

$(2c)^2 = a^2 + a^2; \quad 4c^2 = 2a^2; \quad a^2 = 2c^2$

$\cancel{2}c^2 = b^2 + \cancel{c^2}; \quad b = c$ (т.к. $b > 0, c > 0$)

$a^2 = 2c^2 \wedge a > 0; \quad a = \sqrt{2}c$

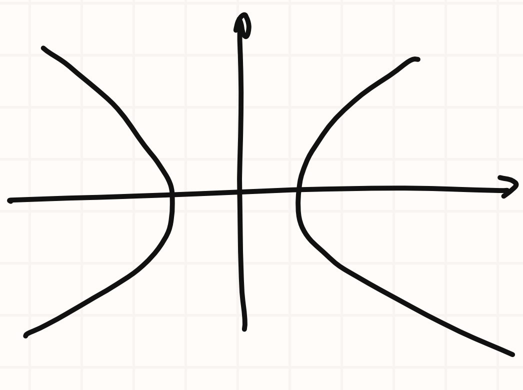
$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{2}c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

7.38(9)

$(-1, 3)$

$y = \pm 2x$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

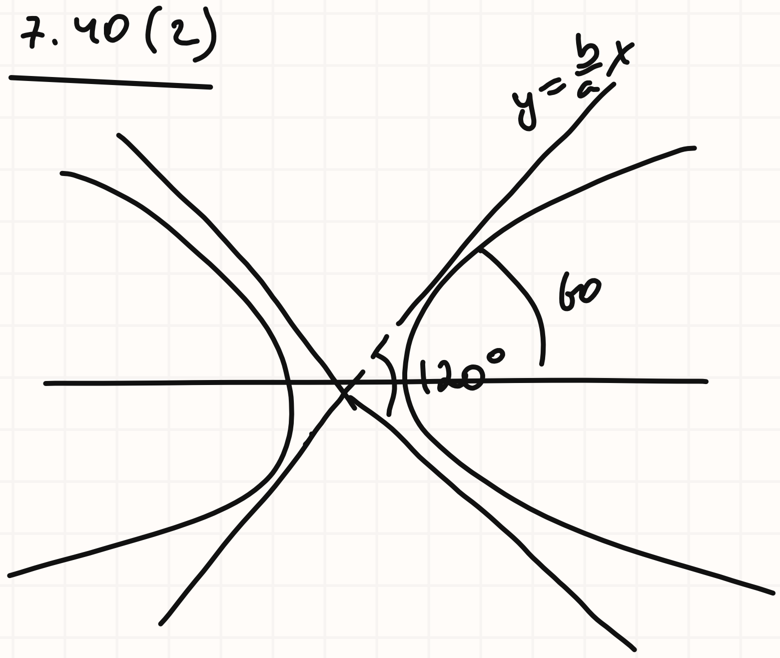


$$\begin{cases} \frac{b}{a} = 2; \quad b = 2a \\ \frac{1}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1 \end{cases}$$

$$a^2 = 1 - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4}$$

нет решений

7.40(2)



$y=\frac{b}{a}x$ $\quad tg\,60° = \frac{y}{x} = \frac{b}{a} = \sqrt{3}$

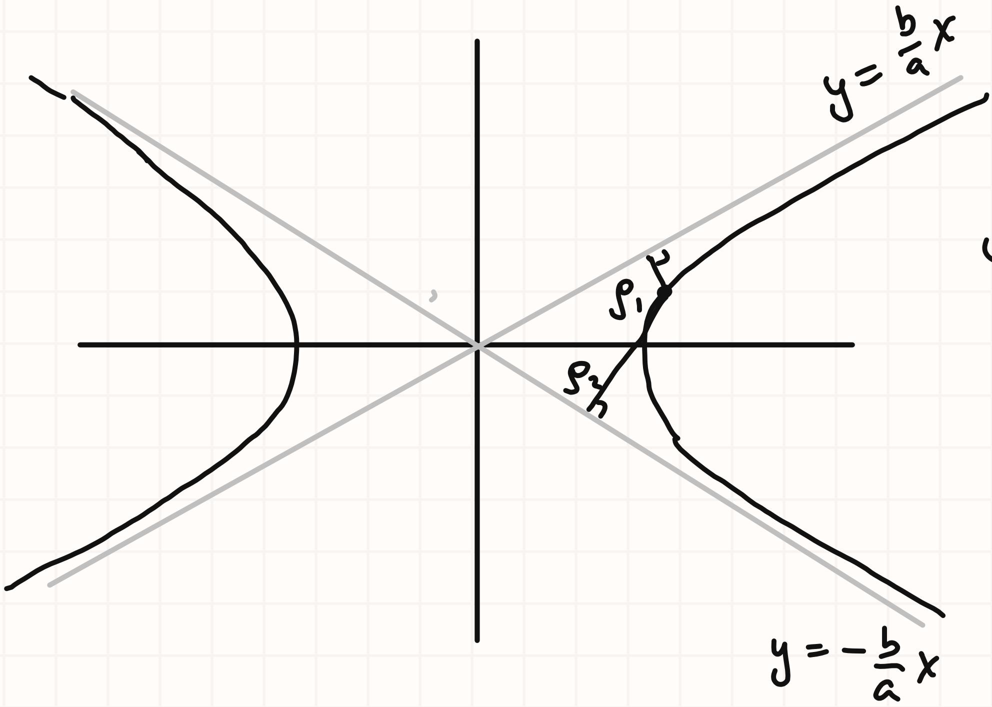
$b = \sqrt{3}a \;;\; b^2 = 3a^2$

$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+3a^2} = 2a$

$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2a}{a} = 2$

7.49(1)

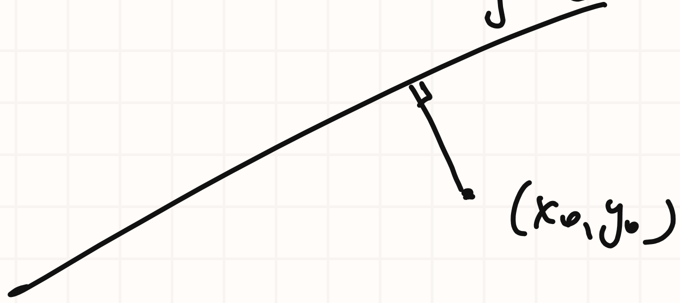
// произв. расстояний от $\forall$ точки гипер. до асимпт. — const



? эллипс ГМТ М:

$\rho(M, y=\frac{b}{a}x)\cdot\rho(M, y=-\frac{b}{a}x) = const$

найдем $\rho(M(x_0,y_0), y=\frac{b}{a}x)$



$ay = bx;\quad bx - ay = 0$

$$\rho_1 = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

— " — $\quad y = -\frac{b}{a}x\;;\quad ay = -bx;\; bx + ay = 0$

$$\rho_2 = \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\rho_1\rho_2 = \frac{|b^2x_0^2 - a^2y_0^2|}{a^2+b^2} = \frac{\left|\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right|(a^2b^2)}{a^2+b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} = const$$

q.e.d.

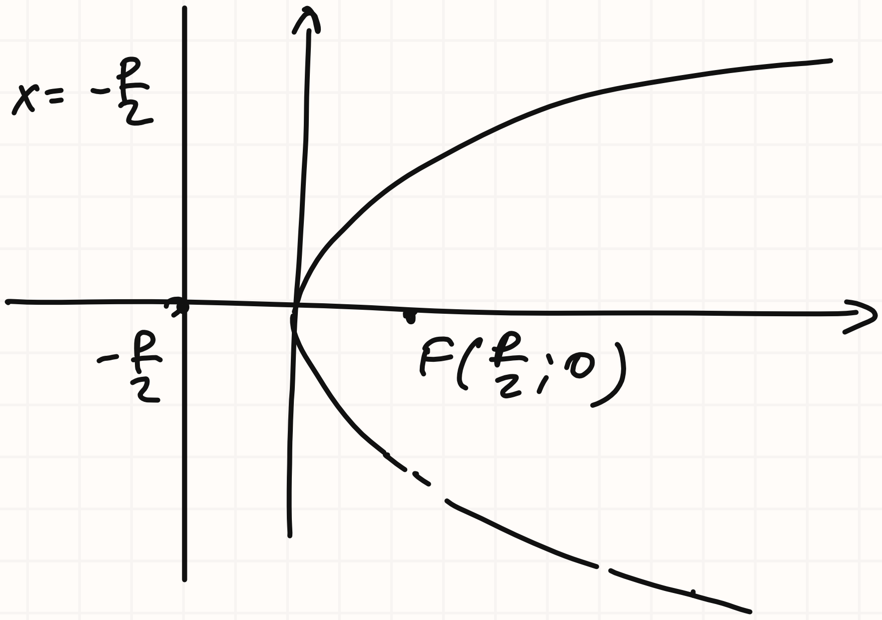
7.54(2)

$\rho(F, \text{дир}) = 12$

$p = 12$

$y^2 = 2px = 24x$

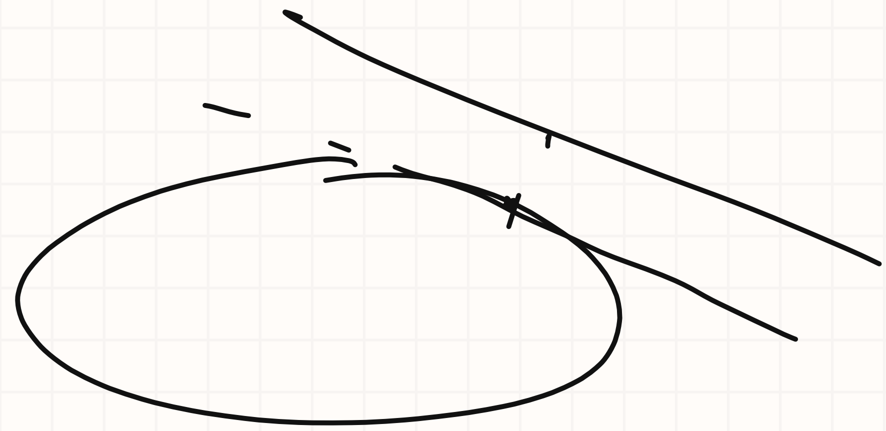
$y^2 = 24x$



7.29*

7.64*

8.9(1)



$$\frac{27}{28}x^2+\frac{9}{7}y^2=1$$

$l:\ 3x+4y+5=0$

если пересекает — точки пересечения
если нет — расстояние до ближ. точки касания прямой $\parallel l$

пересек. ли?

$$4y=-3x-5;\quad y=-\frac{1}{4}(3x+5)$$

$$\frac{27}{28}x^2+\frac{9}{7}\cdot\frac{1}{16}(9x^2+30x+25)=1$$ ← если пересек, это ур-е имеет реш.

$$\left(\frac{27\cdot 4}{\cancel{28}\ \cancel{7\cdot 4}}+\frac{81}{\cancel{7\cdot16}}\right)x^2+\frac{9\cdot 30}{\cancel{7\cdot16}}x+\frac{9\cdot25-7\cdot16}{\cancel{7\cdot16}}=0$$

$$(27\cdot4+81)x^2+9\cdot30x+(9\cdot25-7\cdot16)=0$$

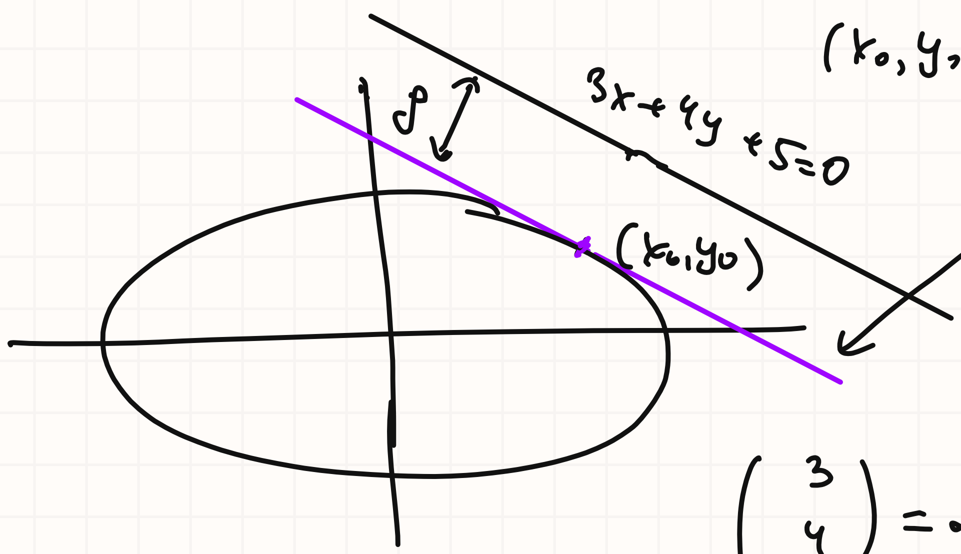
$$D=(9\cdot30)^2-4(27\cdot4+81)(9\cdot25-7\cdot16)$$

270^2 189 225 − 112

113

$\overset{135}{\cancel{270}}\cdot\overset{135}{\cancel{270}}\ \overset{?}{<}\ \cancel{4}\cdot189\cdot113$

$D<0$ — не пересек.



(x_0,y_0) — точка касания эллипса прямой $\parallel l$

$$\frac{27}{28}x_0x+\frac{9}{7}y_0y-1=0$$

$\vec{n}(3;4)$

$$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}\frac{27}{28}x_0\\ \frac{9}{7}y_0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\cancel{3}=\frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{28}\alpha x_0\\ 4=\frac{9}{7}\alpha y_0\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha x_0=\frac{28}{9}\\ \alpha y_0=\frac{28}{9}\end{cases}\ ));\quad x_0=y_0$$

$$0 = \frac{27}{28}x_0^2 + \frac{9}{7}x_0^2 - 1 = \left(\frac{27}{28} + \frac{36}{28}\right)x_0^2 - 1 = \frac{\cancel{63}^{\,9}}{\cancel{28}_{\,4}}x_0^2 - 1 \;; \quad x_0^2 = \frac{4}{9} \;; \quad x_0 = \pm\frac{4}{9}$$

две возм. точки касание: $K_1\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right), K_2\left(-\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}\right)$

$$\rho(K_1, l) = \frac{\left|3 \cdot \frac{4}{9} + 4 \cdot \frac{4}{9} + 5\right|}{5} = \frac{73}{45}$$

$$\rho(K_2, l) = \frac{\left|-3 \cdot \frac{4}{9} - 4 \cdot \frac{4}{9} + 5\right|}{5} = \underline{\frac{17}{45}}$$

Ответ: $\frac{17}{45}$

<u>8. 11(2)</u>

$x + y - 5 = 0 \quad (x_1, y_1) \quad \frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y = 1 \;\Big|\cdot \frac{a^2}{x_1} \;; \quad x + \frac{a^2}{b^2}\frac{y_1}{x_1}y - \frac{a^2}{x_1} = 0$

$x + 4y - 10 = 0 \quad (x_2, y_2) \quad \frac{x_2}{a^2}x + \frac{y_2}{b^2}y = 1 \;\Big|\; \frac{a^2}{x_2} \;; \quad x + \frac{a^2}{b^2}\frac{y_2}{x_2}y - \frac{a^2}{x_2} = 0$

$$\frac{a^2}{b^2}\frac{y_1}{x_1} = 1 \;\wedge\; \frac{a^2}{b^2}\frac{y_2}{x_2} = 4 \;\wedge\; \frac{a^2}{x_1} = 5 \;\wedge\; \frac{a^2}{x_2} = 10$$

$$x_1 = \frac{a^2}{5} \qquad x_2 = \frac{a^2}{10}$$

$$\begin{cases} \frac{\cancel{a^2}}{b^2}\frac{y_1 \cdot 5}{\cancel{a^2}} = 1 \\ \frac{\cancel{a^2}}{b^2} \cdot \frac{y_2 \cdot \cancel{10}^{\,5}}{\cancel{a^2}} = \cancel{4}\,2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5y_1 = b^2 \\ 5y_2 = 2b^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = \frac{b^2}{5} \\ y_2 = \frac{2b^2}{5} \end{cases}$$

$$K_1\left(\frac{a^2}{5}, \frac{b^2}{5}\right) \qquad K_2\left(\frac{a^2}{10}, \frac{2b^2}{5}\right)$$

$$\frac{\cancel{a^4}\,a^2}{25 \cdot \cancel{a^2}} + \frac{\cancel{b^4}\,b^2}{25\cancel{b^2}} = 1 \;; \quad a^2 + b^2 = 25$$

$$\frac{\cancel{a^4}\,a^2}{100\cancel{a^2}} + \frac{4\cancel{b^4}\,b^2}{25\cancel{b^2}} = 1 \;; \quad a^2 + 16b^2 = 100$$

$-\quad \cancel{15}\,b^2 = \cancel{75}^{\,5} \;; \quad b = \sqrt{5}$

$a = \sqrt{20}$

$$\underline{\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1}$$

8.25(1)

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \qquad K(-2;2)$$

$$-\frac{2}{4}x - 2y = 1$$

$$\frac{1}{2}x + 2y + 1 = 0$$

$$\underline{x + 4y + 2 = 0}$$

8.28(6) (общ. касат)

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad ; \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$l: \frac{x_1}{6}x + \frac{y_1}{3}y - 1 = 0 \ ; \quad l: \frac{x_2}{25}x - \frac{y_2}{16}y - 1 = 0$$

$$x + \frac{6}{3}\frac{y_1}{x_1}y - \frac{6}{x_1} = 0 \qquad x - \frac{25}{16}\frac{y_2}{x_2}y - \frac{25}{x_2} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{2y_1}{x_1} = \dfrac{25}{16}\dfrac{y_2}{x_2} \\ \dfrac{6}{x_1} = \dfrac{25}{x_2} \ ; \quad x_2 = \dfrac{25}{6}x_1 \end{cases}$$

$$\frac{2y_1}{\cancel{x_1}} = \frac{\cancel{25}}{\cancel{16}_{8}}\frac{y_2}{\cancel{x_1}}\cdot\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{25}} ;$$

$$2y_1 = \frac{3}{8}y_2 \ ; \quad y_2 = \frac{16}{3}y_1$$

$$K_1(x_1, y_1) \qquad K_2\left(\frac{25}{6}x_1, \frac{16}{3}y_1\right)$$

$$\frac{x_1^2}{6} + \frac{y_1^2}{3} = 1 \qquad \frac{\cancel{625}^{25} x_1^2}{36\cdot\cancel{25}} - \frac{16^{\cancel{2}} y_1^2}{9\,\cancel{16}} = 1 \ ; \quad \frac{25}{36}x_1^2 - \frac{16}{9}y_1^2 = 1$$

$$\frac{6x_1^2}{36} + \frac{3y_1^2}{9} = \frac{25}{36}x_1^2 - \frac{16}{9}y_1^2$$

$$\frac{31}{\cancel{36}_4}x_1^2 = \frac{19}{\cancel{9}}y_1^2 \ ; \quad y_1^2 = \frac{31}{4\cdot 19}x_1^2 = \frac{31}{76}x_1^2 \ ; \quad y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{31}{19}}x_1 = \sqrt{\frac{31}{76}}x_1$$

$$x_1^2 + 2y_1^2 = 6 \qquad x_1^2\left(\frac{38+31}{38}\right) = 6$$

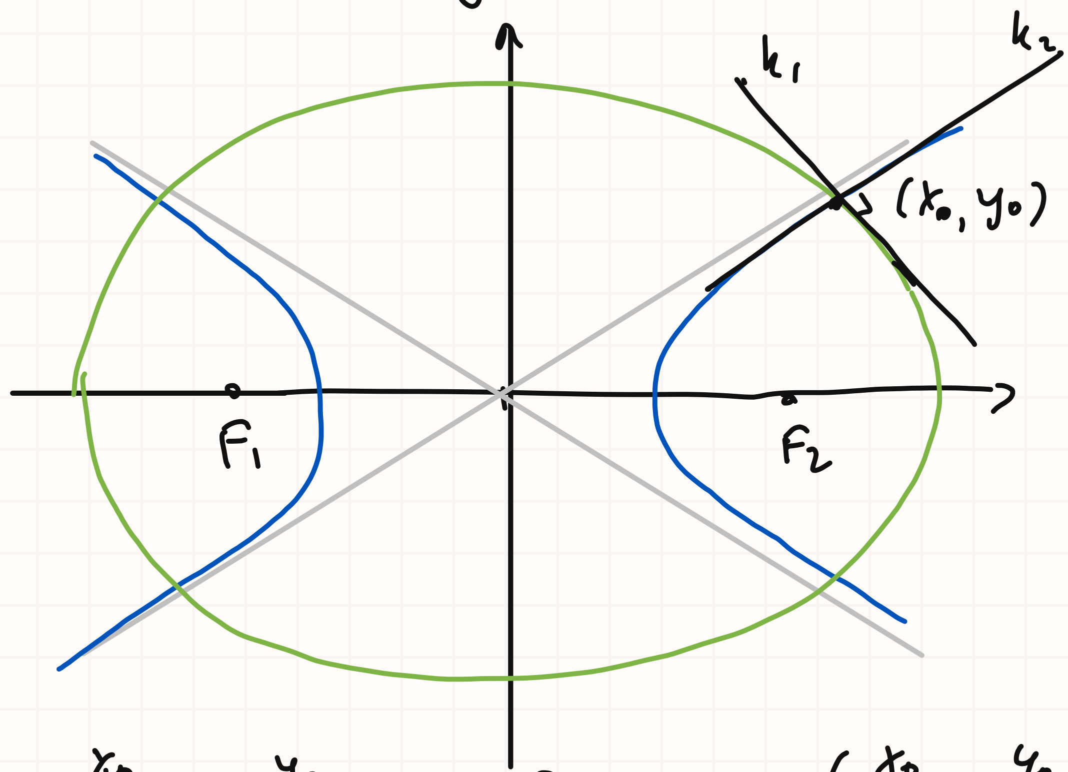
$$x_1^2 + \frac{31}{38}x_1^2 = 6 \qquad \underline{x_1^2} = \frac{\cancel{6}^{2}\cdot 38}{\cancel{69}_{23}} = \underline{\frac{4\cdot 19}{23}} \ ; \quad \underline{y_1^2} = \frac{31}{4\cdot 19}\cdot\frac{4\cdot 19}{23} = \underline{\frac{31}{23}}$$

$$\frac{x_1}{6}x + \frac{y_1}{3}y - 1 = 0$$

$$\frac{2}{6}\sqrt{\frac{19}{23}}x + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{31}{23}}y - 1 = 0$$

$$\sqrt{\frac{19}{23}}x + \sqrt{\frac{31}{23}}y - 3 = 0$$

8.30(1) ? касательные в точках пересечения эллипса и гиперболы, имеющие общ. F, взаимно $\perp$



$$\frac{x_0^2}{a_1^2} + \frac{y_0^2}{b_1^2} = 1$$

$$\frac{x_0^2}{a_2^2} - \frac{y_0^2}{b_2^2} = 1$$

$$c^2 = a_2^2 + b_2^2$$

$$c^2 = a_1^2 - b_1^2$$

$k_1: \ \frac{x_0}{a_1^2}x + \frac{y_0}{b_1^2}y - 1 = 0 \qquad n_1\left(\frac{x_0}{a_1^2}, \frac{y_0}{b_1^2}\right)$

$k_2: \ \frac{x_0}{a_2^2}x - \frac{y_0}{b_2^2}y - 1 = 0 \qquad n_2\left(\frac{x_0}{a_2^2}, -\frac{y_0}{b_2^2}\right)$

$$n_1 \overset{?}{\perp} n_2$$

$$(n_1, n_2) \overset{?}{=} 0; \quad (n_1, n_2) = \frac{x_0^2}{a_1^2 a_2^2} - \frac{y_0^2}{b_1^2 b_2^2} \overset{?}{=} 0; \quad \frac{x_0^2}{y_0^2} \overset{?}{=} \frac{a_1^2 a_2^2}{b_1^2 b_2^2}$$

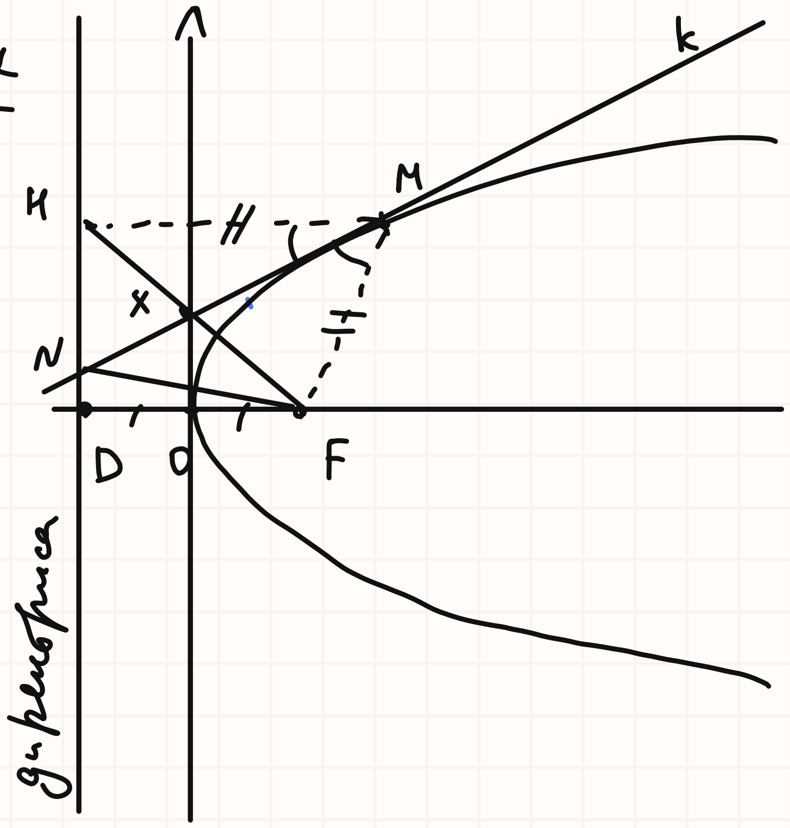
$$\frac{x_0^2}{a_1^2} + \frac{y_0^2}{b_1^2} = \frac{x_0^2}{a_2^2} - \frac{y_0^2}{b_2^2}; \quad x_0^2\left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2}\right) = y_0^2\left(\frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2}\right)$$

$$\frac{x_0^2}{y_0^2} = \frac{b_1^2 + b_2^2}{b_1^2 \cdot b_2^2} \cdot \frac{a_1^2 a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} = \frac{a_1^2 a_2^2}{b_1^2 b_2^2} \cdot \frac{b_1^2 + b_2^2}{a_1^2 - a_2^2} = \frac{a_1^2 a_2^2}{b_1^2 b_2^2}$$

q.e.d.

$$c^2 = a_1^2 - b_1^2 = a_2^2 + b_2^2; \quad a_1^2 - a_2^2 = b_1^2 - b_2^2$$

Т.2



Д-ть, что ГМТ, получаемых при отражении фокуса параболы отн. ее касательных — директриса.

⊲ $M \in$ параболе

MH — перп. на директрису (HD)

$MH = MF$ (def)

$\exists\, k$ — кас. в (·)M ; $k \cap HD = N$

1) $\angle HMN = \angle FMN$ (оптич. св-во параболы)

2) $HM = MF$ (def), в частн. $DO = FO$
($X = HF \cap MN$)

3) (1) и (2) $\overset{def}{\Rightarrow}$ $\triangle HMF$ — р/б $\triangle$, т.е. $HF \perp MN$, $HX = XF$

4) $\left.\begin{array}{l} DO = FO \\ HX = XF \end{array}\right\} \Rightarrow$ $X \in \perp$ к DF через (·)O, т.е. оси ординат

5) $HX = XF$
$\angle HXN = \angle FXN = 90^\circ$ $\Rightarrow \triangle HNF$ — р/б $\triangle \Rightarrow HN = NF$

$X \in k$

H — та самая точка — обр. фокуса отн. k, чтд.

Для пр. случая $M = O$ очев.

II. Поверхности

10.38

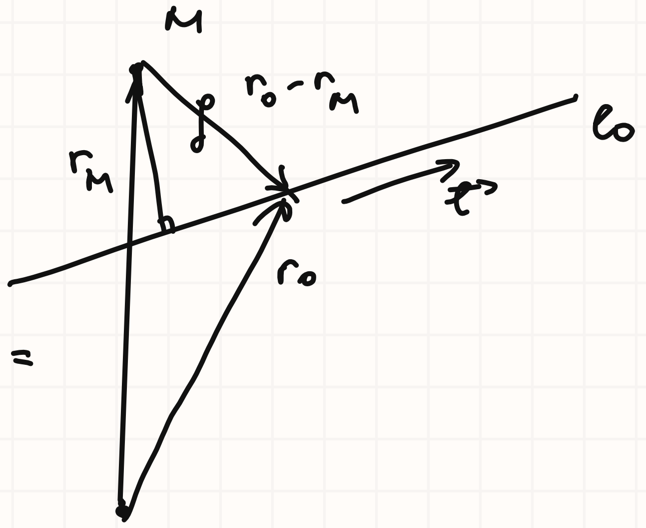
$M(1;1;2)$

$$l_0: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 3+t \end{cases} \qquad r_0(1,2,3) \qquad l(1;1;1) \qquad l_0: \vec{r} = \vec{r_0} + \vec{l}t$$

$A(x_0, y_0, z_0) \in$ цилиндру $\Leftrightarrow \rho(A, l_0) = \rho(M, l_0)$

$$\rho(M, l_0) = \frac{|[r_0 - r_M, l]|}{|l|} =$$

$$= \frac{\left|\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{3}} =$$



$$= \frac{1}{\sqrt{3}} |e_1 \cdot 0 - e_2(-1) + e_3(-1)| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} |e_2 - e_3| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\rho(A, l_0) = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} |[r_A - r_0, l]| \quad ; \quad |[r_A - r_0; l]| = \sqrt{2}$$

$$[r_A - r_0, l] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = e_1(y - 2 - z + 3) - e_2(x - 1 - z + 3) + e_3(x - 1 - y + 2) =$$

$$= e_1(y - z + 1) - e_2(x - z + 2) + e_3(x - y + 1)$$

$$2 = |[r_A - r_0, l]|^2 = (y - z + 1)^2 + (x - z + 2)^2 + (x - y + 1)^2 =$$

$$= y^2 + z^2 - 2yz \cancel{+1} \cancel{+2y} \cancel{-2z} + x^2 + z^2 - 2xz \cancel{+4x} \cancel{-4z} \cancel{+4} + \quad (+6x \; -6z \; +6)$$

$$+ x^2 + y^2 - 2xy \cancel{+1} \cancel{+2x} \cancel{-2y} = 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + xz) +$$

$$+ 6x - 6z + 6$$

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + xz) + 3x - 3z + 2$$

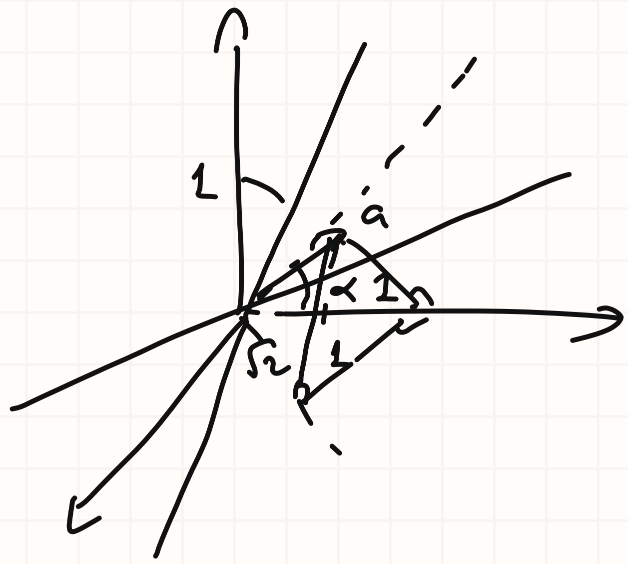
Ответ: $x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + xz) + 3x - 3z + 2 = 0$

10.39

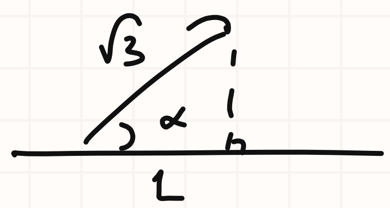
$a(1;1;1)$

$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$O(0;0;0)$ – – вершина



Заметим, что оси OX, OY, OZ составляют с образ. конуса угол



$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\alpha = \varphi$

т.е. OX, OY, OZ – образующие конуса

10.32

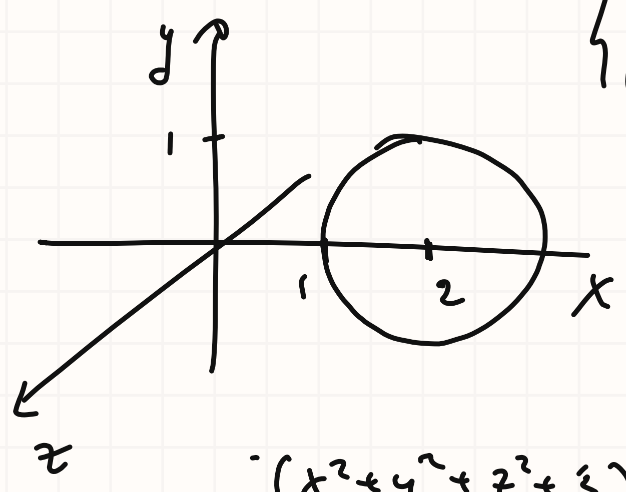
$x^2+y^2-4x+3=0$ вокруг OY

$x^2-4x+4+y^2-1=0$

$(x-2)^2+y^2=1$

$\Phi(x,y)=0 \Rightarrow \Phi(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y)=0$

$$\left[\begin{aligned}&\left(\sqrt{x^2+z^2}-2\right)^2+y^2-1=0\\&\left(-\sqrt{x^2+z^2}-2\right)^2+y^2-1=0\end{aligned}\right.$$



$x^2+z^2+4 \mp 4\sqrt{x^2+z^2}+y^2-1=0$

$x^2+y^2+z^2 = \mp 4\sqrt{x^2+z^2}+3$

$(x^2+y^2+z^2+4\sqrt{x^2+z^2}+3)(x^2+y^2+z^2-4\sqrt{x^2+z^2}+3)=0$

$(x^2+y^2+z^2+3)^2-16x^2-16z^2=0$

ответ

10.40

$x = 1+t$ $\quad r_0(1;3;3)$ $\quad r = r_0 + at$

$y = 3+t$

$z = 3+t$ $\quad a(1;1;1)$ $\quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{1}$

$\Phi(x,y) = 0: \quad (x-y+2)(x-z+2) = 0$

$\varphi(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0 \quad (\sqrt{x^2+y^2} - z + 2)(-\sqrt{x^2+y^2} - z + 2) = 0$

$x^2+y^2 - (z-2)^2 = 0$

$x^2+y^2 - z^2 + 4z - 4 = 0$

10.81

$4x^2 - y^2 = 16z \qquad M(2,0,1)$

семейства прямолинейных образующих параболоида

$l_1: \begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \beta z \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2\alpha \end{cases} \qquad l_2: \begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \beta \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2\alpha z \end{cases} \qquad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 2z \; ; \; a = \sqrt{2}; \; b = 2\sqrt{2}$

подставим $M(2;0;1)$

$l_1: \begin{cases} \alpha\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \beta \\ \beta\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = 2\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{2}\alpha = \beta \\ \cancel{\sqrt{2}}\beta = \cancel{2}\alpha \end{cases} \qquad \beta = \sqrt{2}\alpha$

$l_2: \begin{cases} \sqrt{2}\alpha = \beta \\ \sqrt{2}\beta = 2\alpha \end{cases} \qquad \beta = \sqrt{2}\alpha$

вернёмся к ур-ям образующих

$l_1: \begin{cases} \frac{1}{\cancel{2\sqrt{2}}}(2x+y) = \cancel{\sqrt{2}}^{\,4} z \\ \cancel{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2\sqrt{2}}}(2x-y) = \cancel{2}^{\,4} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y-4z=0 \\ 2x-y-4=0 \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} 2x+y-4z=0 \\ 2x-y-4=0 \end{cases}$

$l_2: \begin{cases} \frac{1}{\cancel{2\sqrt{2}}}(2x+y) = \cancel{\sqrt{2}}^{\,4} \\ \cancel{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2\sqrt{2}}}(2x+y) = \cancel{2}^{\,4} z \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y-4=0 \\ 2x+y-4z=0 \end{cases}$

III. ОТОБРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ. БИНАРНЫЕ ОПЕРАЦИИ

2.3

$f: X \to Y$

а) f – инъективно $\Longleftrightarrow$ $\exists g: Y \to X \hookrightarrow g \circ x = id_X$

„$\Rightarrow$"

$\forall x_1, x_2 \in X \hookrightarrow (x_1 \neq x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$

т.е. $\forall y \in Y \; \exists! \, x \in X : f(x) = y$ (инъекц)

пусть $g: y \longmapsto x$ таким образом. q.e.d

„$\Leftarrow$"

$\exists g: Y \to X \hookrightarrow g \circ f = id_X$

от противного

$\exists \, x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2) = y'$

$$\begin{tikzcd} x_1 \arrow[r, "f"] & y' \\ x_2 \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

$x_1 = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(y')$

$x_2 = (g \circ f)(x_2) = g(f(x_1)) = g(y')$

$$\begin{tikzcd} & x_1 \\ y' \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "g"'] & x_2 \end{tikzcd}$$

g – не отображ. противореч. q.e.d

(б) f – сюръ. $\Longleftrightarrow$ $\exists g: f \circ g = id_Y$

„$\Rightarrow$" $\forall y \in Y \; \exists x \in X \hookrightarrow f(x) = y$ – пусть g сопоставл. $y \longmapsto x$ по такому принципу.

$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y$

q.e.d.

"⇐" $\exists g: f \circ g = id_y$

от противного: $\exists y_0 \in Y \ \forall x \in X \hookrightarrow f(x) \neq y$

$y_0 \xmapsto{g} x_2 \xrightarrow{f}$ не y_0 противор-е q.e.d.

2.4

M — мн-во отобр X в $\{0;1\}$; 2^X $\qquad X \to \{0;1\}$ ✓

$\exists\ x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — эл-ты X, а f — произв. отобр
каждому эл-ту мы можем сопоставить 0 либо 1.

сопоставление: построим подмн-во (эл-т 2^X)

если 0 — этот эл-т $\notin$ подмн-во
1 — $\in$ подмн-во

в обратную сторону:

$\in$ — 1
$\notin$ — 0

мн-ва равномощны, биекц. по постр

2.5

$|X| = m,\ |Y| = n \qquad X \to Y$

а) отображений

$x_1 \to$ n вар
$\vdots$
$x_m \to$ n вар

$\underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{m \text{ раз}} = n^m$

б) инъект. отобр. $\quad$ если $n < m$: 0

$x_1 \quad y_1 \quad$ если $n \geq m$: $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$

$x_m \quad y_n$

2.11

а) $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \binom{n}{n-m}$

б) $\underbrace{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n}$

с точки зрения комбинаторики — мощность мн-ва всевозможных подмн-в X, где $|X| = n$

в) $\underbrace{\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0}$

кол-во подмн-в состоящих из четного числа эл-тов =

= —"— из нечетного —"—

докажем это, построив биекцию

Р-м $X = \{1, 2, \dots, n\}$, $Y \subset X$.

$f: Y \longmapsto \overline{Y}$ т.ч. $\overline{Y} = \begin{cases} Y \cup \{1\}, \text{ если } 1 \in Y \\ Y \setminus \{1\}, \text{ если } 1 \in Y \end{cases}$

Т.2

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto x^3$

неподв. точки:

$f(x_н) = x_н$; $x_н = x_н^3$; $x_н = 0$ <u>1 неподв. точка</u>

// инвариантно — образ содерж. в прообразе //

$f \uparrow$

$[2; +\infty) \longrightarrow [8; +\infty)$

да, является

f^{-1} — не инвариантно

$2 \longmapsto \sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{2} \notin [2; +\infty)$

T.3

$a \sim b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{Z}$

$$x = [x] + \{x\}, \quad \underset{\mathbb{R}}{x} \ni, \ [x] \in \mathbb{Z}, \ \{x\} \in [0;1)$$

$\exists f: \mathbb{R} \to [0;1): \ x \longmapsto \{x\}$

$\exists$ биекция $[0;1)$ в мн-во точек окр-ти, поэтому я позволю себе работать с $[0;1)$, так удобнее.

Осталось д-ть, что f разбивает X на классы экв.

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: \ x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$

Д-ть: $\qquad \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$$\triangleleft \quad x_1 - x_2 = \underbrace{[x_1]}_{\in \mathbb{Z}} + \{x_1\} - \underbrace{[x_2]}_{\in \mathbb{Z}} - \{x_2\} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \{x_1\} - \{x_2\} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

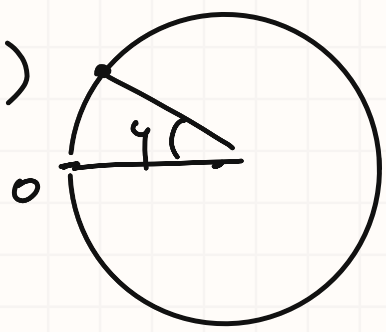
$\Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ // заметим, что $f(x_i) \in [0;1)$, т.е. $f(x_1) - f(x_2) \in (-1;1)$ //

$\Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0$

q.e.d.

Построим биекцию в явном виде.

$A_1 = [0;1)$ $\qquad$ $A_2 = [0;2\pi)$



$A_1 \to A_2$

$x \to 2\pi x$

мн-во классов эквивалентности

IV. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИМЕРЫ ГРУПП

55.1 г д е з и

(г) $(n\mathbb{Z}, +)$, $n \in \mathbb{N}$

1) $na + (nb + nc) = (na + nb) + nc = n(a+b+c)$

2) $\exists e = n \cdot 0 = 0 : \forall na \in n\mathbb{Z} \hookrightarrow na + 0 = 0 + na = 0$

3) $\forall na \in n\mathbb{Z} \ \exists n(-a) \in n\mathbb{Z} \hookrightarrow na + n(-a) = n(-a) + na = 0$

$na - na = 0$

да, группа

(д) $(\{-1; 1\}, \cdot)$

0) $-1 \cdot 1 = -1$; $1 \cdot 1 = -1 \cdot -1 = 1$

1) ассоц, как в $\mathbb{R}$

2) $e = 1$: $-1 \cdot 1 = 1 \cdot -1 = -1$

$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$

3) $a = 1$ $a^{-1} = 1$ $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$

$a = -1$ $a^{-1} = -1$ $-1 \cdot -1 = -1 \cdot -1 = 1$

да, группа

(е) $(a^{\mathbb{Z}}, \cdot)$ $a \in \mathbb{R}$

1) $a^{z_1} \cdot (a^{z_2} \cdot a^{z_3}) = (a^{z_1} \cdot a^{z_2}) \cdot a^{z_3} = a^{z_1 + z_2 + z_3}$

2) $a^0 = 1 = e : \forall a^z : a^z \cdot 1 = 1 \cdot a^z = a^z$

3) $\forall a^z \ \exists a^{-z} : \ a^z \cdot a^{-z} = a^{-z} \cdot a^z = 1 = e$

да, группа

(и) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z_1 \cdot z_2 = r^2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

$= r^2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)) =$

$= r^2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

$|z_1 \cdot z_2| = r^2 \neq r$ операция не задана!
(если $r \neq 1$)

нет, не группа

(3) (мн-во компл. корней всех степеней из 1, $\cdot$)

Немного теории.

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$ формула Муавра

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad k=0,1,\dots,n-1$$

$$\sqrt[n]{1} = \varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

Вернемся к задаче.

0) $$\sqrt[n]{1}\,\sqrt[m]{1} = \left(\cos\frac{2\pi k_1}{n} + i\sin\frac{2\pi k_1}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi k_2}{m} + i\sin\frac{2\pi k_2}{m}\right) =$$

произв. эл-тов $$= \cos\left(2\pi\left(\frac{k_1}{n}+\frac{k_2}{m}\right)\right) + i\sin\left(2\pi\left(\frac{k_1}{n}+\frac{k_2}{m}\right)\right)$$

1, 2) ассоц. очев.; $e = 1$

3) $$z = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

$$\bar z = \cos\left(-\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi k}{n}\right)$$ $z\bar z = 1$

да, конечно!

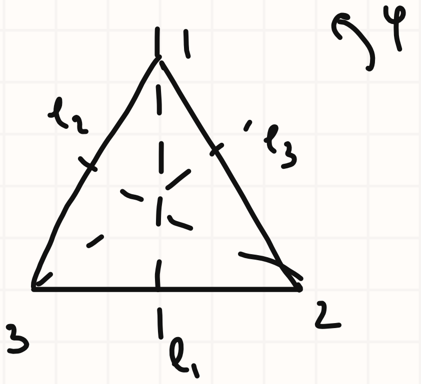
55.25

а) $\mathbb{Z}_2$ отрезок

$[0] \longmapsto$ id

$[1] \longmapsto$ $A \to B$, $B \to A$

б) S_3



123 $\longmapsto$ id

132 $\longmapsto$ симм l_1

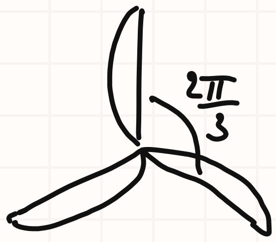
213 $\longmapsto$ $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ и симм l_2

231 $\longmapsto$ $\varphi = \frac{2\pi}{3}$

312 $\longmapsto$ $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ и симм l_3

321 $\longmapsto$ $\varphi = \frac{4\pi}{3}$

б) $\mathbb{Z}_3$



$\bar{0} \longmapsto id$

$\bar{1} \longmapsto \varphi = \frac{2\pi}{3}$

$\bar{2} \longmapsto \varphi = -\frac{2\pi}{3}$

г) V_4

// Теоретическая справка

V_4 – четверная группа Клейна – конечная нециклическая коммутативная группа 4го порядка

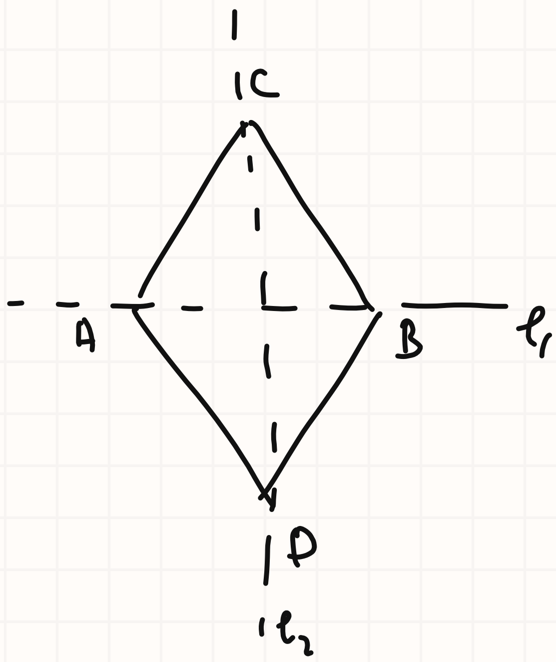
$\cdot$	1	a	b	ab
1	1	a	b	ab
a	a	1	ab	b
b	b	ab	1	a
ab	ab	b	a	1

ord каждого (кроме e) эл-та = 2

$V_4 = C_2 \times C_2$

C_2 – цикл. гр. II порядка

$V_4 \cong$ группа симметрий ромба



$1 \longmapsto id$

$a \longmapsto l_1$ (обр.)

$b \longmapsto l_2$ (обр.)

$ab \longmapsto \varphi = \pi$ (поворот)

55.18 (б)

$f: G \longmapsto G \qquad f(x) = x^{-1}$

$\forall a, b \in G \hookrightarrow \quad f(a*b) = (a*b)^{-1} \overset{?}{=} f(a)*f(b) = a^{-1}*b^{-1} = (b*a)^{-1}$

$(a*b)^{-1} = (b*a)^{-1}$

$a*b = b*a$ $\qquad$ G абелева

Т.4

I	II	III	IV
$(\mathbb{Z},+)$	$(\mathbb{Q},+)$	$(\mathbb{R},+)$	$(\mathbb{R}^*,\cdot)$
$(n\mathbb{Z},+)$		$(\mathbb{R}_+,\cdot)$	
(1)		(2)	

(1) $(\mathbb{Z},+)\cong(n\mathbb{Z},+)$

$\varphi:\mathbb{Z}\to n\mathbb{Z}$ $\qquad \varphi(a+b)=n(a+b)=na+nb=\varphi(a)+\varphi(b)$

$a\mapsto na$ $\qquad \varphi$ – биект.

(2) $(\mathbb{R},+)\cong(\mathbb{R}_+,\cdot)$

$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ $\qquad \varphi(a+b)=e^{a+b}=e^a\cdot e^b=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$

$a\mapsto e^a$ $\qquad \varphi$ – биект.

Осталось доказать, что получившиеся классы изоморфных групп не изоморфны между собой.

$\forall$ из I, II $\not\cong$ $\forall$ из III, IV

счетн. $\qquad$ континуум – биекц. не сущ.

3) $(\mathbb{Z},+)$? $(\mathbb{Q},+)$

Пусть изоморф. отобр. f $\exists$. Тогда

$a\mapsto f(a)$ $\qquad$ гомоморф.

$na=\underbrace{a+\ldots+a}_{n\text{ раз}}\mapsto f(\underbrace{a+\ldots+a}_{na})=nf(a)$

Пусть $f(1)=q$; $1\mapsto q$

$a\mapsto f(a)$

$a\cdot1\mapsto f(a\cdot1)=f(1+\ldots+1)=af(1)=aq$

$f(\mathbb{Z})=kq$, $k\in\mathbb{Z}$) не сюръекция, противоречие

4) $(\mathbb{R}^*,\cdot)$? $(\mathbb{R}_+,\cdot)$

$1\mapsto1$ $\qquad -1\mapsto a$

$f(1)=f(-1\cdot-1)=f(-1)\cdot f(-1)=a^2=1$; $a=1$

$a=-1\notin\mathbb{R}_+$

не инъекция, противоречие

VI. ПОРЯДКИ ЭЛ-ТОВ И ЦИКЛ. ГРУППЫ

56.7 (а, б)

а) x $\quad yxy^{-1}$ одинаковый порядок

пусть k — порядок x, т.е. $e, x^1, x^2, \dots, x^{k-1}$ — различны, $x^k = e$

$$(yxy^{-1})^k = yx\cancel{y^{-1}}\cancel{y}x\cancel{y^{-1}}\dots\cancel{y}xy^{-1} = yx^ky^{-1} = yey^{-1} = yy^{-1} = e$$

q.e.d.

б) $ab \qquad (ab)^k = e$

$$(ba)^k = baba\dots ba = b(ab)^{k-1}a \overset{?}{=} e$$

$$b(ab)^{k-1}ab \overset{?}{=} b$$

$$b(ab)^k = b \overset{?}{=} b$$

q.e.d.

56.11

$\operatorname{ord} x^k - ?$ $\qquad \exists\, d = (n;k)$ (наиб. общ. дел.)

$\operatorname{ord} x = n$ $\qquad n = n_0 d,\ k = k_0 d$

обозначим $\operatorname{ord} x^k$ за m. Найдём m.

$$(x^k)^m = x^{km} = e$$

$$km \,\vdots\, n \ ; \quad km = k_0 d m \,\vdots\, n \ ; \quad m = n_0 = \frac{n}{d} = \frac{n}{(n;k)}$$

Ответ: $\operatorname{ord} x^k = \dfrac{n}{(n;k)}$

Т.5

$\mathbb{Z}_{12} \cong$ цикл. группа порядка 12

ord x	1	2	3	4	6	12
x	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$, $\bar{8}$	$\bar{3}$, $\bar{9}$	$\bar{2}$, $\bar{10}$	$\bar{1}$, $\bar{5}$, $\bar{7}$, $\bar{11}$

T.6

$\varphi : G \longrightarrow H$ — гомоморфизм

$g \in G : \operatorname{ord}(g) \in \mathbb{R}$

? $\operatorname{ord}(\varphi(g)) \mid \operatorname{ord}(g)$

пусть $\operatorname{ord} g = k$; $g^k = e$

$\varphi(g^k) = \varphi(e_G) = e_H = (\varphi(g))^k$

$\operatorname{ord}(\varphi(g)) \mid k = \operatorname{ord}(g)$ q.e.d.

T.8

$\forall g \in G : \ g^2 = e$ $\qquad \forall\, a, b \in G \overset{?}{\Longrightarrow} ab = ba$

$ab \overset{?}{=} ba \quad \mid \cdot ba$

$a(b \cdot b)a \overset{?}{=} baba$

$e \overset{?}{=} (ba)(ba)$

$e = e$

q.e.d.

T.7 $(\mathbb{R}^*, \cdot) \overset{?}{\cong} (\mathbb{C}^*, \cdot)$ $\qquad f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$

д-м, что не изоморфны.

$1 = f(1) = f(i^4) = \underbrace{f(i)^4}_{\in \mathbb{R}^*}$; $f(i) = \pm 1$

если $f(i) = 1$, то не инъективно ($f(1) = 1$)

значит $f(i) = -1$

$1 = f(1) = f((-i)^4) = f(-i)^4 \quad \underbrace{f(-i) = \pm 1}_{\text{а тут уже точно нарушится инъективность}}$

T. 9

G - группа

$a \in G$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\exists x \in G: x^n = a$

$\operatorname{ord} a \in \mathbb{R}$

$(\operatorname{ord} a, n) = 1$

пусть $\operatorname{ord} a = m$.

$x^n = a = a \cdot a^m = a \cdot a^{km} = a^{km+1}$ $k \in \mathbb{N}$

$x = a^{\frac{km+1}{n}}$

хотим д-ть, что $\exists k: km+1 \vdots n$.

это вып. при $(k, n) = 1$. $\exists$ это так.

q.e.d.

T.10 $n \geq 1$, φ — ф-я Эйлера

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

пусть p — простое. Тогда

$$p = \sum_{d|p} \varphi(d) = \varphi(1) + \varphi(p) = 1 + p - 1 = p$$

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} = \sum_{i=1}^{k} p_i \alpha^i = \sum \left(\left(\sum_{d|p_i} \varphi(d) \right)^{\alpha_i} \right)$$

q.e.d.

VII. ПЕРЕСТАНОВКИ

3.1

(а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

3.6

(а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$(2\ 1\ 4\ 3\ 5\ 6\ 7)$ |||

$(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$ ||

нечетная

(в) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

$(6\ 4\ 5\ 3\ 2\ 1\ 7)$ |||

$(5\ 3\ 6\ 4\ 2\ 1\ 7)$ ||

$(3\ 5\ 6\ 4\ 2\ 1\ 7)$ |

четная

56.10(а)

Д-ть, что в S_n порядок нечетной перестановки — четное число.

чет · чет = чет (перестановка)

нечет · нечет = чет (перестановка)

от противного:

$(\text{нечет})^{2k} = (\text{чет})^k = \text{чет}$ (перестановка)

а должна быть нечетная, против-е

VIII. СМЕЖНЫЕ КЛАССЫ

56.36 (а, б, д, з*)

$g \in GL_n(\mathbb{C})$; $H = SL_n(\mathbb{C})$

// Теоретич. справка

$GL_n(\mathbb{R})$ — мн-во всех $n \times n$ матриц с $\mathbb{R}$ коэф и $\det \neq 0$

с бинарной операцией $(A, B) \longmapsto AB$

— полная линейная группа степени n над $\mathbb{R}$

$SL_n(\mathbb{R})$ — подмн-во $GL_n(\mathbb{R})$ с $\det = 1$

— специальная линейная группа степени n над $\mathbb{R}$
унимодулярная группа //

а) $G = (\mathbb{Z}, +)$, $H = (n\mathbb{Z}, +)$, $n \in \mathbb{N}$

пусть $g \in G$, тогда его смежный класс:

$\bar{g} = g + H = \{r + kn;\ k \in \mathbb{Z}\}$
$g \equiv r \pmod{n}$

классы чисел с одинаков. остатками mod n

б) $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$

$\bar{g} = g + H = \{x + k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ класс эл-тов по дробной части

д) $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$

$\bar{g} = gH = \{w \in \mathbb{C} \mid |\vec{w}| = r \neq 0\}$

числа с одинаковым модулем
(конц. окр-ти с центром в нуле)

56.37

$G = GL_n(\mathbb{C})$

$H = SL_n(\mathbb{C})$

пусть $g \in G$. хотим д-ть, что $gH = \{a : a \in GL_n \wedge \det a = \det g\}$

$gH = \{g \cdot h : h \in H \wedge \det h = 1\}$

из св-в det: $|g \cdot h| = |g||h| = |g|$

из def группы: $g \cdot h \in GL_n(\mathbb{C})$

$\Rightarrow \bar{g} = gH = \{g : g \in GL_n(\mathbb{C}) : \det a = \det g\}$

q.e.d.

T.12

$(\operatorname{ord} G, \operatorname{ord} H) = 1$

? $\forall \varphi : G \to H$ (гомоморфизм) $\Rightarrow \operatorname{Im} \varphi = \{e\}$

$\operatorname{Im}(\varphi) = \{\varphi(g) \mid g \in G\}$

$\forall g \in G, h \in H \hookrightarrow (\operatorname{ord} g, \operatorname{ord} h) = 1$ - - -

от противного: $\exists g \in G : \varphi(g) = h \neq e$

$g^{\operatorname{ord} g} = e$

$e_H = \varphi(e_G) = \varphi(g^{\operatorname{ord} g}) = \varphi(g)^{\operatorname{ord} g} = h^{\operatorname{ord} g} \neq e_H$

противор-е

q.e.d.

КОЛЬЦА и ПОЛЯ

IX. ОПРЕДЕЛЕНИЕ и ПРИМЕРЫ КОЛЕЦ

63.1 (б, в, н, з, л, м)

Кольцо ли?

1) абелева группа по „+"
2) ассоциативность по „·"
3) дистрибутивность

б) $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — да

в) $(\mathbb{Z}_+, +, \cdot)$ — нет, нет нейтр. по +

н) $X = \{x \mid x \in \mathbb{Q}\ (x = \frac{m}{n},$ несокр.$):\ n = p^k; k \in \mathbb{N}^*\}$ — да

$$\frac{m_1}{p^{k_1}} + \frac{m_2}{p^{k_2}} = \frac{m_1 p^{k_2} + m_2 p^{k_1}}{p^{k_1+k_2}}$$

после возм. сокращ. знаменатель останется вида степени p — тут

з) $X = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$

$$(a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) = \underbrace{(a_1a_2 + 2b_1b_2)}_{a_{12}} + \sqrt{2}\underbrace{(a_1b_2 + a_2b_1)}_{b_{12}}$$ — да

+, 1, 2, 3 — очев

л) $X = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$ — да

+, 1, 2, 3 — очев

м) $X = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ очев — да

Поле ли?

1) абелева по „+"
2) $X \setminus \{0\}$ абелева по „·"
3) дистриб.

(1), (3), ассоц по „·" — выполн., если кольцо

проверяем $ab = ba$, $\mathbb{1}$, a^{-1}

б) нет — нет обратного

в, н) нет — не кольцо

3) да

$$(x+\sqrt{2}y)^{-1} = \frac{1}{x+\sqrt{2}y}\Big\backslash^{x-\sqrt{2}y} = \frac{x-\sqrt{2}y}{x^2-2y^2}$$

ост. очев

л) нет

$$(1+i)^{-1} = \frac{1}{1+i}\Big\backslash^{1-i} = \frac{1-i}{2} = \underset{\substack{\not\in \\ \mathbb{Z}}}{\frac{1}{2}} - \underset{\substack{\not\in \\ \mathbb{Z}}}{\frac{1}{2}}\, i$$

нет обратного

м) да

$$(a+bi)^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \underset{\substack{\in \\ \mathbb{Q}}}{\frac{a}{a^2+b^2}} + i\,\underset{\substack{\in \\ \mathbb{Q}}}{\frac{-b}{a^2+b^2}}$$

остальное очев.

64.38*

X. АРИФМЕТИКА В КОЛЬЦАХ $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_n$

63.11 (а, б*)

найти все обратимые эл-ты
делители нуля
нильпотентные эл-ты

// Теор. справка

Def. $a \in R$ — нильпотентный эл-т $\iff \exists n \in \mathbb{N}: a^n = 0$

$\min(n)$ — индекс нильпотентности //

а) $\mathbb{Z}_n$ — коммутативное кольцо

- $a a^{-1} = \bar{1} = 1 + kn$; $a^{-1} = \dfrac{1+kn}{a}$

a^{-1} (обратное) существует $\iff \underbrace{\exists k \in \mathbb{Z}: \quad a \mid 1+kn}_{\text{выполняется при всех } a:\ (a,n)=1}$

т.к. если $(a,n) = d \neq 1$: $\quad 1 + k\cdot n \,\vdots\, a \implies \underbrace{1 + \underbrace{kn}_{\vdots\, d}}_{\vdots\, d} \,\vdots\, d$

противоречие

- $a, b \not\vdots\, n$; $\quad ab = \bar{0} = \underset{\vdots\, n}{kn}$; $k \in \mathbb{Z}$, значит $(a,n) \neq 1$, $(b,n) \neq 1$

- $a^t = \bar{0} = kn$

$a \,\vdots$ на все простые делители n

Ответ: обратимые $\quad a: (a,n) = 1$
делители нуля $\quad a: \begin{cases} (a,n) \neq 1 \\ (a,n) \neq n \end{cases}$
нильпотентные $\quad a$: на все простые делители n

б) $\mathbb{Z}_{p^n}$

- $(a, p^n) = 1 \iff (a,p) = 1$
- $(a, p^n) \neq 1 \iff (a,p) \neq 1 \iff (a,p) = p$

$\cdot\ a \vdots p$

Ответ: обратимые $(a,p)=1$

делит. нуля $\begin{cases}(a,p)=p\\(a,p^n)\neq p^n\end{cases}$

нильпот. $a \vdots p$

66.20 а) в $\mathbb{Z}_5$ б) в $\mathbb{Z}_7$

$$\begin{cases}3x+y+2z=1\\x+2y+3z=1\\4x+3y+2z=1\end{cases}$$

$x=1-2y-3z$

$+2 \; -5y \; -7z$

$\begin{cases}\cancel{3-6y-9z+y+2z=x}\\ +3 \; -5y \; -10z \\ \cancel{4-8y-12z+3y+2z=x}\end{cases}$ 0

$$\begin{cases}5y+7z=2\\5y+10z=3\end{cases}$$

$$\left|\begin{matrix}3&1&2&1\\1&2&3&1\\4&3&2&1\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}3&1&2&1\\1&2&3&1\\1&2&0&0\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}2&-1&2&1\\0&0&3&1\\1&2&0&0\end{matrix}\right|$$

$x+2y=0$; $x=-2y$; $-2x=4y$

$2x-y+2z=1$; $y=2x+2z$; $5y=2z$

$3z=1$

$$\begin{cases}3z=1\\5y=2z\\x=-2y\end{cases}$$

а) $3z=1+5k=6$; $z=\overline{2}$

$5y=\overline{4}=4+5k$ нет решения

б) $3z=\overline{1}=1+7k=15$; $z=\overline{5}$

$5y=\overline{3}=3+7k=10$; $y=\overline{2}$

$x=-2y=-\overline{4}=\overline{3}$

Ответ:
$$\begin{cases}x=\overline{3}\\y=\overline{2}\\z=\overline{5}\end{cases}$$

T.13

а) $21x+76y=0$ $76=2\cdot2\cdot19$ $(21,76)=1$

$y=-\frac{21}{76}x$ $21=3\cdot7$

Ответ: $\begin{cases}x=76t\\y=-21t\end{cases}$ $t\in\mathbb{Z}$

б) $21x+76y=1$

Найдем частное решение: $(29,-8)$.

$21 \cdot 29 - 76 \cdot 8 = 1$

$$\begin{cases} x = 29 + 76t \\ y = -8 - 21t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

в) $21^{-1} = 29$ из п. б)

<u>Т.14</u> $\mathbb{Z}_7^*$

$\bar{1} \to \bar{1}$

$\bar{2} \to \bar{4} \to \bar{1}$

$\bar{3} \to \bar{2} \to \bar{6} \to \bar{4} \to \bar{5} \to \bar{1}$

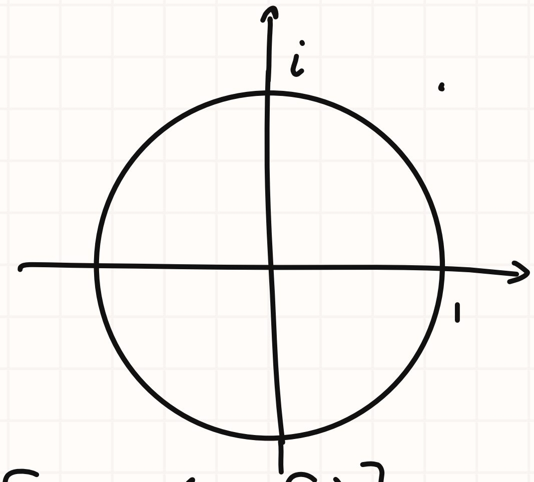
$\bar{4} \to \bar{2} \to \bar{1}$

$\bar{5} \to \bar{4} \to \bar{6} \to \bar{2} \to \bar{3} \to \bar{1}$

$\bar{6} \to \bar{1}$

Ответ: $\bar{3}$ и $\bar{5}$ — порождающие по умножению

XI. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА



21.1 (д, р, у)

д) $1+i = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

р) $2+\sqrt{3}+i =$

$$= \left[r^2 = (2+\sqrt{3})^2+1 = 4+3+4\sqrt{3}+1 = 8+4\sqrt{3} = 4(2+\sqrt{3})\right] =$$

$$= 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\underbrace{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}}_{=\cos\frac{\pi}{12}} + i\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}}_{=\sin\frac{\pi}{12}}\right) = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

у) $\sin\alpha + i\cos\alpha = 1\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$

21.2 (и)

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30} = (\sqrt{2})^{30}\left(\cos\left(\overset{5}{\cancel{30}}\cdot\frac{5}{\underset{2}{\cancel{12}}}\pi\right) + i\sin\left(30\cdot\frac{5}{12}\pi\right)\right) = \underline{\underline{2^{15}i}}$$

// $\frac{(\sqrt{3}+i)(1+i)}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i+\sqrt{3}i-1) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1) + \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)i$

$r^2 = \frac{1}{4}(\overset{+4}{\cancel{3+1}} - \cancel{2\sqrt{3}}) + \frac{1}{4}(\overset{+4}{\cancel{3+1}} + \cancel{2\sqrt{3}}) = 2$; $r = \sqrt{2}$

$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ $\quad\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ $\quad\varphi = 75^\circ = \frac{5}{12}\pi$ //

// $\varphi = \frac{25}{2}\pi = 12\pi + \frac{\pi}{2} \overset{2\pi}{\equiv} \frac{\pi}{2}$; $\cos\varphi = 0$; $\sin\varphi = 1$ //

21.10

? $z + z^{-1} = 2\cos\varphi \Longrightarrow z^n + z^{-n} = 2\cos n\varphi$

пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}\,\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$z + z^{-1} = \cos\varphi\left(r+\frac{1}{r}\right) + i\sin\varphi\left(r-\frac{1}{r}\right) = 2\cos\varphi$$

$r = 1$

$z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ $\qquad$ $z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$

$z^{-1} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ $\qquad$ $z^{-n} = \cos n\varphi - i\sin n\varphi$

$z^n + z^{-n} = 2\cos n\varphi$

q.e.d.

22.7 (а, б)

а) $\sqrt[6]{-27} = \sqrt[6]{27(-1)} = \sqrt{3}\,\sqrt[6]{\cos\pi + i\sin\pi} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{6}\right)$

б) $\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)$

23.1 (а)

$1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots \ \circleddash$

// $(1+i)^n = C_n^0 + C_n^1 i - C_n^2 + \dots$

$Re\left((1+i)^n\right) = 1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots$ //

$\circleddash\ Re\left((1+i)^n\right) = Re\left((\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{\pi n}{4} + i\sin\frac{\pi n}{4}\right)\right) = \underline{\underline{\sqrt{2}^n \cos\frac{\pi n}{4}}}$

T.15

Д-ть, что $\forall$ конечная подгруппа $\mathbb{C}^*$ яв-ся циклической

пусть $H \subset \mathbb{C}^*$ — конечная подгруппа

т.е. $\forall c \in H$ $\operatorname{ord} c \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ c — корень некоторой степени из единицы

Тогда возьмем НОК этих степеней $= N$,
подгруппа корней N-й степени из 1 будет совпадать с H
а она циклическая

ура!

T.16

единичная окружность

$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$

$\varphi(x) = e^{2\pi x i}$

1) гомоморфизм

$$\varphi(a+b) = \underset{\varphi(a)}{e^{2\pi a i}} \cdot \underset{\varphi(b)}{e^{2\pi b i}} = e^{2\pi(a+b)i}$$

2) сюръекция

$\forall z \in S^1 :\quad z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

$2\pi x = \theta \;;\; x = \frac{2\pi}{\theta}$ – прообраз z

$\varphi: \mathbb{Q} \longrightarrow ?$

$\varphi(\frac{m}{n}) = e^{2\pi \frac{m}{n} i}$ группа корней N степеней из 1

$\ker\varphi = \{x \in \mathbb{R} \mid e^{2\pi i x} = 1\}$

$\cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x) = 1$

$$\begin{cases} \cos 2\pi x = 1 \\ \sin 2\pi x = 0 \end{cases} \qquad 2\pi x = 2\pi k;\; k \in \mathbb{Z}$$

решением явл-ся $x \in \mathbb{Z}$

$\ker\varphi = \{x \mid x \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ – мн-во чисел с одинаковой дробной частью

$[0;1) \underset{\cdot\frac{1}{2\pi}}{\overset{\cdot 2\pi}{\rightleftarrows}} \underbrace{[0;2\pi)}_{\text{мн-во точек окр-ти}}$ – биекция

(или $\underbrace{\text{угла}}$ в триг. представлении $\mathbb{C}^*$)

по его знач. и разб. на смежн. классы