1A	2A	3A	4A	5A	6A	Оценка

ФИО ____________________

группа ____________________

1 зад.	2 зад.	Σ баллов

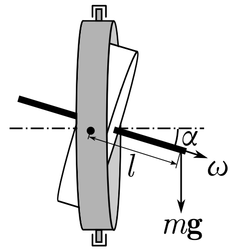
Подпись преп. ______________

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО МЕХАНИКЕ

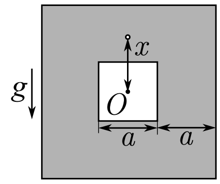
24 декабря 2019 г.

Вариант **A**

1A. (1,5) К оси лабораторного гироскопа, закреплённого на кардановом подвесе в центре масс, подвешен груз массой $m = 306$ г на расстоянии $\ell = 120$ мм от центра. За один оборот регулярной прецессии исходно горизонтальная ось гироскопа опустилась на $\Delta\alpha = 10°$. Определите величину момента силы трения в вертикальной оси крепления подвеса.



2A. (1,5) Однородная плоская квадратная рамка со сторонами внутреннего и внешнего квадратов a и $b = 3a$ висит на тонком гвоздике (см. рис.). На каком расстоянии x от центра масс O подвешена рамка, если период её колебаний на гвоздике минимален?

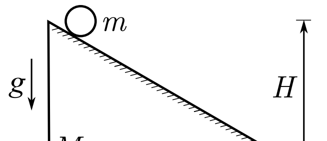


3A. (2) При частотах синусоидальной вынуждающей силы $f_1 = 120$ Гц и $f_2 = 480$ Гц, приложенной к маятнику с вязким трением, амплитуды скоростей вынужденных малых колебаний одинаковы. Полагая амплитуду вынуждающей силы неизменной, найдите частоту f_0, соответствующую максимуму амплитуды скорости (резонансу скоростей).

4A. (2) На Большом адронном коллайдере ядра свинца-208 во встречных пучках имеют в системе их центра инерции кинетическую энергию $K = 2{,}8$ ТэВ на нуклон (протон или нейтрон). Найти продольный размер одного из ядер в системе отсчёта другого. Покоящееся ядро имеет форму шара радиусом $r \approx 7 \cdot 10^{-15}$ м. Массу нуклона внутри ядра принять равной $m = 0{,}93$ ГэВ$/c^2$.

5A. (2) К лёгкому резиновому шнуру с сечением $S_0 = 5$ мм^2 подвесили груз массой $m_1 = 0{,}2$ кг, так что длина шнура увеличилась в полтора раза: $L_1 = 1{,}5L_0$. Найдите модуль Юнга резины E и определите массу m_2 груза, требуемого для растяжения шнура вдвое: $L_2 = 2L_0$. Для конечных деформаций резины предлагается использовать закон Гука в следующей дифференциальной форме: $\frac{dF}{S} = E\frac{dL}{L}$, где dF — приращение силы натяжения, L и S — его текущие длина и площадь сечения, а E не зависит от L и S. Коэффициент Пуассона резины принять равным $\mu \approx 0{,}5$.
Примечание: для конечных деформаций коэффициент Пуассона определяется как $\mu = -\frac{dr/r}{dL/L}$, где r — текущий радиус стержня.

6A. (2) На шероховатой наклонной плоскости клина, находящегося на гладкой горизонтальной поверхности, сначала удерживают небольшой мяч (тонкостенную сферу), а затем отпускают. Система приходит в движение, мяч скатывается по клину без проскальзывания. Угол при вершине клина $\alpha = \pi/4$, отношение массы клина M к массе мяча m равно $n = M/m = 2$. За какое время T мяч скатится с клина высотой $H = 0{,}6$ м?



ФИО ____________________

группа ____________________

1Б	2Б	3Б	4Б	5Б	6Б	Оценка

1 зад.	2 зад.	Σ баллов

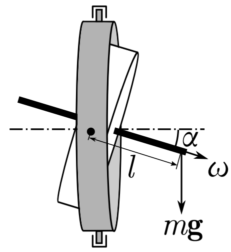
Подпись преп. ____________________

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО МЕХАНИКЕ

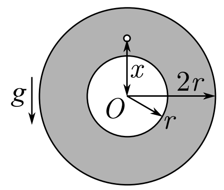
24 декабря 2019 г.

Вариант **Б**

1Б. (1,5) Лабораторный гироскоп закреплён на кардановом подвесе в центре масс. Груз массой $m = 360$ г находится на оси гироскопа на некотором расстоянии от центра. Из-за трения в подвесе за один оборот прецессии ось отклоняется от горизонтали на угол $\Delta\alpha = 12°$. Какую дополнительную силу нужно приложить в точке крепления груза, чтобы при неизменной скорости прецессии ось оставалась в горизонтальной плоскости? Куда направлена эта сила?



2Б. (1,5) Однородное плоское кольцо с внутренним радиусом r и внешним $R = 2r$ висит на тонком гвоздике (см. рис.). На каком расстоянии x от центра масс O подвешено кольцо, если период его колебаний на гвоздике минимален?



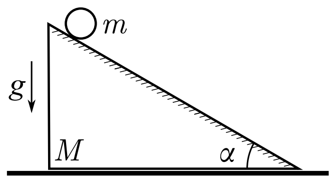
3Б. (2) При угловых частотах синусоидальной вынуждающей силы $\Omega_1 = 300$ рад/с и $\Omega_2 = 400$ рад/с, приложенной к маятнику с вязким трением, амплитуды вынужденных малых колебаний одинаковы. Полагая амплитуду вынуждающей силы неизменной, найдите частоту $\Omega_{\text{р}}$, соответствующую максимуму амплитуды колебаний (резонансу смещений).

4Б. (2) На Большом адронном коллайдере сталкивающиеся во встречных пучках ядра $^{208}\mathrm{Pb}$ имеют настолько большую энергию, что релятивистское сжатие вдоль оси движения для одного из ядер в системе отсчёта другого сравнимо со сжатием железнодорожного состава ($L = 1$ км) до толщины листа бумаги ($h = 0{,}1$ мм). Определите суммарную энергию сталкивающихся ядер в системе их центра инерции. Масса ядра $m \approx 200$ ГэВ$/c^2$.

5Б. (2) К лёгкому резиновому шнуру диаметром $2r_0 = 2{,}5$ мм подвесили груз массой $m_1 = 0{,}2$ кг, из-за чего длина шнура увеличилась в полтора раза: $L_1 = 1{,}5L_0$. Найдите модуль Юнга резины E и определите массу груза m_2, требуемого для растяжения шнура вдвое: $L_2 = 2L_0$. Для конечных деформаций предлагается использовать закон Гука в следующей дифференциальной форме: $d\sigma = E\frac{dL}{L}$, где $d\sigma$ — приращение напряжения в шнуре, L — его текущая длина, а E — константа. Коэффициент Пуассона резины принять равным $\mu \approx 0{,}5$.

Примечание: для конечных деформаций коэффициент Пуассона определяют как $\mu = -\frac{dr/r}{dL/L}$, где r — текущий радиус стержня.

6Б. (2) На шероховатой наклонной плоскости клина, находящегося на гладкой горизонтальной поверхности, сначала удерживают однородный тонкостенный цилиндр, а затем отпускают. Система приходит в движение, цилиндр катится по клину без проскальзывания. Угол при вершине клина $\alpha = \pi/4$, отношение массы клина M к массе цилиндра m равно $n = M/m = 3$. Найдите смещение s клина за время $T = 1{,}5$ с после старта.



РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 24 декабря 2019 г.

1A. Из уравнения $\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$ находим для прецессии под действием груза: $mg\ell = \frac{2\pi}{T}L$ (скорость прецессии не зависит от угла α). Тогда для прецессии под действием силы трения в вертикальной оси получим $M_{\text{тр}} = \frac{\Delta\alpha}{T}L = mg\ell\frac{\Delta\alpha}{2\pi} = 0{,}306 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}120 \cdot \frac{10}{360} \approx \boxed{0{,}01\ \text{Н} \cdot \text{м}}$.

2A. (*Кармазин С.В.*) Пусть $\rho = m/(b^2 - a^2)$ — плотность материала рамки (на единицу площади). Момент инерции рамки относительно центра масс $J = \frac{1}{6}\rho(b^4 - a^4) = \frac{1}{6}m(a^2 + b^2) = \frac{5}{3}ma^2$. Из формулы для периода колебаний $(T/2\pi)^2 = \frac{J+mx^2}{mgx}$ находим, что минимум T достигается при $x = \sqrt{\frac{J}{m}} = \boxed{\sqrt{\frac{5}{3}}a}$.

3A. Амплитуда скорости при вынужденных колебаниях: $v \propto \frac{\Omega}{\sqrt{(\Omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\Omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\Omega_0^2/\Omega-\Omega)^2+4\gamma^2}}$. Максимум $v(\Omega)$ достигается при $\Omega = \Omega_0$, где Ω_0 — собственная частота в отсутствие затухания. Равенство $v(\Omega_1) = v(\Omega_2)$ достигается при $\frac{\Omega_0^2}{\Omega_1} - \Omega_1 = \Omega_2 - \frac{\Omega_0^2}{\Omega_2}$, откуда $\Omega_0 = \sqrt{\Omega_1\Omega_2}$ и $f_0 = \sqrt{f_1 f_2} = \sqrt{120 \cdot 480} = \boxed{240\ \text{рад/с}}$.

4A. В СЦИ $\gamma \approx K/mc^2 \approx 3 \cdot 10^3$, $\beta = \sqrt{1-\gamma^{-2}} = \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}$. В системе одного из ядер по закону сложения скоростей $\beta' = \frac{2\beta}{1+\beta^2} = \frac{\gamma\sqrt{\gamma^2-1}}{\sqrt{2\gamma^2-1}}$, откуда после преобразований находим $\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1+\beta'^2}} = 2\gamma^2 - 1 \approx 2\gamma^2 = 1{,}8 \cdot 10^7$. Размер ядра в этой системе: $r' = r/\gamma' \approx \boxed{4 \cdot 10^{-7}\ \text{фм}}$.

2-й способ. Инвариант энергии-импульса в СЦИ и в системе одной из частиц: $E^2 = (mc^2 + \gamma' mc^2)^2 - p'^2c^2$, где $E = K + 2mc^2$ — полная энергия в СЦИ. Отдельно для одной частицы $p'^2c^2 = (\gamma' mc^2)^2 - (mc^2)^2$. Отсюда $\gamma' = \frac{E^2-2(mc^2)^2}{2(mc^2)^2} \approx 2\left(\frac{K}{mc^2}\right)^2 \approx 2\gamma^2$.

3-й способ. Запишем преобразования Лоренца для энергии второй частицы при переходе из СЦИ в систему первой: $E' = \gamma(E + \beta pc)$. Поскольку $E = \gamma mc^2$, а для ультрарелятивистской частицы $E \approx pc$ и $\beta \approx 1$, немедленно получаем $\gamma' \approx 2\gamma^2$.

5A. Поскольку $\mu = 1/2$, объём резины сохраняется: $SL = \text{const}$. Отсюда получаем $dF = ES\dfrac{dL}{L} = ES_0L_0\dfrac{dL}{L^2}$. Интегрируя, находим $F = ES_0\left(1 - \dfrac{L_0}{L}\right)$. Модуль Юнга: $E = \frac{1}{1-L_0/L_1}\frac{m_1 g}{S_0} = \frac{3 \cdot 0{,}2 \cdot 10}{5 \cdot 10^{-6}} = \boxed{1{,}2\ \text{МПа}}$. Второй груз $m_2 = m_1\frac{1-L_0/L_2}{1-L_0/L_1} = 1{,}5m_1 = \boxed{0{,}3\ \text{кг}}$.

6A. Пусть V — скорость клина в ЛСО, U — скорость центра скатывающегося тела относительно клина. Из сохранения горизонтальной проекции импульса имеем:

$$m(U\cos\alpha + V) + MV = 0, \quad V = -U\frac{\cos\alpha}{n+1}$$

Полная механическая энергия системы сохраняется:

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m\left((U\cos\alpha + V)^2 + (U\sin\alpha)^2\right) + K_{\text{вр}} = mgH.$$

Пусть момент инерции относительно центра масс равен $J = \beta mR^2$, тогда вращательная энергия $K_{\text{вр}} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\beta mU^2$. Из приведённых соотношений после преобразований получим

$$\left(1 + \beta - \frac{\cos\alpha^2}{n+1}\right)U^2 = 2gH \quad \to \quad a_y = \frac{U^2\sin^2\alpha}{2H} = \frac{g\sin^2\alpha}{1+\beta-\frac{\cos^2\alpha}{n+1}}.$$

— вертикальная компонента ускорения относительно клина. Подставляя $\beta = 2/3$, $\alpha = \pi/4$, находим $a_y = \frac{g/2}{1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\frac{1}{3}} = \frac{g}{3}$ и $T = \sqrt{\frac{2H}{a_y}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.6}{10/3}} = \boxed{0{,}6\ \text{с}}$.

2-й способ. В системе клина на мяч действует горизонтальная сила инерции $F = -m\dot{V} = m\frac{\cos\alpha}{n+1}\dot{U}$. С учетом этого уравнение моментов относительно точки касания мяча:

$$(1+\beta)mR^2\dot{\omega} = FR\cos\alpha + mgR\sin\alpha,$$

откуда подставляя $\dot{\omega} = \dot{U}/R$ и $a_y = \dot{U}\sin\alpha$ приходим к полученному выше результату:

$$(1+\beta)\,\dot{U} = \frac{\cos^2\alpha}{n+1}\dot{U} + g\sin\alpha \quad \to \quad a_y = \frac{g\sin^2\alpha}{1+\beta-\frac{\cos\alpha^2}{n+1}}.$$

1Б. $F_{тр} = \frac{M_{тр}}{\ell} = \frac{mg\Delta\alpha}{2\pi} = \frac{0{,}36\cdot 9{,}8\cdot 12}{360} \approx \boxed{0{,}12\ \text{Н}}$, перпендикулярно рисунку по направлению движения оси.

2Б. (*Кармазин С.В.*) Аналогично 2А $J = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2) = \frac{5}{2}mr^2$. Минимум T достигается при $x = \sqrt{J/m} = \boxed{\sqrt{\frac{5}{2}}r}$.

3Б. Амплитуда при вынужденных колебаниях $x \propto \frac{1}{\sqrt{(\Omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\Omega^2}}$ достигает максимума при $-4\Omega(\Omega_0^2 - \Omega^2) + 8\gamma^2\Omega = 0$, то есть $\Omega^2 = \Omega_р^2 = \Omega_0^2 - 2\gamma^2$. Из условия $x(\Omega_1) = x(\Omega_2)$ находим

$$(\Omega_0^2 - \Omega_1^2)^2 + 4\gamma^2\Omega_1^2 = (\Omega_0^2 - \Omega_2^2)^2 + 4\gamma^2\Omega_2^2.$$

Раскрывая скобки, получим $(-2\Omega_0^2 + 4\gamma^2)\Omega_1^2 + \Omega_1^4 = (-2\Omega_0^2 + 4\gamma^2)\Omega_2^2 + \Omega_2^4$, откуда $\Omega_р = \sqrt{\frac{\Omega_1^2+\Omega_2^2}{2}} = 500/\sqrt{2} \approx \boxed{353\ \text{рад/с}}$.

4Б. Аналогично 4А получаем соотношение $\gamma' = 2\gamma^2$. Из условия имеем в системе одного из ядер $\gamma' = L/h = 10^7$, откуда в СЦИ $\gamma = \sqrt{\gamma'/2} \approx 2{,}2\cdot 10^3$. Энергия двух ядер в СЦИ: $Q = 2E = 2\gamma mc^2 \approx \boxed{880\ \text{ТэВ}}$ (2,1 ТэВ/нуклон).

5Б. Площадь сечения $S_0 = \pi r^2 \approx 4{,}9\ \text{мм}^2$. Интегрируя предлагаемый закон, получим $\sigma = E\ln L/L_0$, откуда сила натяжения $F = \sigma S = ES_0\frac{L_0}{L}\ln\frac{L}{L_0}$. Модуль Юнга $E = \frac{F}{S_0\frac{L_0}{L}\ln\frac{L}{L_0}} = \frac{0{,}2\cdot 9.8\cdot 1.5}{4.9\cdot\ln 1.5} \approx \boxed{1{,}5\ \text{МПа}}$. Масса $m_2 = m_1\frac{L_1}{L_2}\frac{\ln(L_2/L_0)}{\ln(L_1/L_0)} \approx 1{,}28m_1 \approx \boxed{0{,}26\ \text{кг}}$.
Примечание: модель варианта А лучше ложится на экспериментальные данные.

6Б. Аналогично 6А с учётом $\beta = 1$ найдём

$$\dot V = -\frac{\cos\alpha}{n+1}\dot U = -\frac{g\sin\alpha\cos\alpha}{(1+\beta)(n+1)-\cos^2\alpha} = -\frac{\frac{1}{2}g}{8-1/2} = -\frac{g}{15}.$$

Смещение клина: $s = \frac{1}{2}\dot V T^2 = -\frac{1}{2}\frac{10}{15}(1.5)^2 = \boxed{-0{,}75\ \text{м}}$.

Инструкция для проверяющих

За каждую задачу выставляется кратное 0,5 число баллов исходя из стоимости задачи (x):

x	$+$	Задача решена верно: приведено *обоснованное* решение и даны ответы на все вопросы задачи. Возможно наличие арифметических ошибок, не влияющих на ход решения и не приводящих к ошибке в порядке или знаке величины.
$x-0{,}5$	$\pm$	Ход решения задачи в целом верен и получены ответы на все вопросы задачи, но решение содержит ошибки, не касающиеся физического содержания: арифметические ошибки, влияющие на порядок или знак величины; ошибки в размерности; вычислительные ошибки в выкладках.
$x-1$	$+/2$	Задача решена частично: дан ответ только на часть вопросов; выкладки не доведены до конца; отсутствуют необходимые промежуточные доказательства; либо решение содержит грубые ошибки (вычислительные, логические), влияющие на ход решения.
$x-1{,}5$	$\mp$	Задача не решена, но есть некоторые подвижки в её решении: сформулированы физические законы, на основе которых задача может быть решена.
0	$-$	Задача не решена: основные физические законы применены с грубыми ошибками, перечислены не полностью или использованы законы, не имеющие отношения к задаче / подход к решению принципиально неверен / решение задачи не соответствует условию / попытки решить задачу не было.

Оценка за письменную работу ставится по сумме баллов за все задачи с округлением в большую сторону (но не более 10 и не менее 1).

Итоговая Σ баллов = оценка за письм. работу + баллы за задания: «отл»: +2 б./задание; «хор»: +1 б./задание; «удовл»: +0 б./задание; не сдано: −3 б./задание. Итоговая сумма Σ определяет *максимальную* оценку на устном экзамене.

Все замечания направлять редактору-составителю контрольной работы Попову П.В. popov.pv@mipt.ru.
Обсуждение замечаний, критериев проверки и результатов — на форуме кафедры board.physics.mipt.ru.

Обсуждение результатов письменного и порядка проведения устного экзаменов состоится 28 декабря в 8:45 в Главной физической ауд.