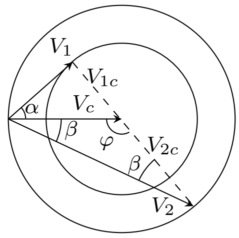
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 26 октября 2024 г.

1А. $\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{v_m^2}\right)$, $\ln\frac{v_m+v}{v_m-v} = \frac{2g}{v_m}t \approx 2{,}0$, $v = v_m\frac{1-e^{-2gt/v_m}}{1+e^{-2gt/v_m}} \approx 9{,}8\cdot\frac{1-e^{-2}}{1+e^{-2}} \approx \boxed{7{,}5\text{ м/с}}$.

2А. По ЗСМИ (ЗСИ не выполняется из-за реакции в подвесе!) имеем $L = mvh = I\omega$, где $I = Mh^2 + M(2h)^2 = 5Mh^2$. Из ЗСЭ после удара $\frac{I\omega^2}{2} = 2Mgx_c(1-\cos\varphi)$, $x_c = \frac{3}{2}h$, находим $1-\cos\varphi \approx \frac{\varphi^2}{2} = \frac{(mvh)^2}{2\cdot 5Mh^2\cdot 3Mgh} = \frac{1}{15}\left(\frac{m}{M}\right)^2\frac{v^2}{gh}$, откуда угол $\varphi = \frac{1}{\sqrt{15}}\frac{m}{M}\frac{v}{\sqrt{gh}} \approx 0{,}0175$ рад $\approx\boxed{1^\circ}$.

3А. На векторной диаграмме использованы следующие обозначения: V_1 и V_2 – скорости, с которыми после столкновения стали двигаться налетающая и неподвижная частицы в лабораторной системе отсчета, V_{1c} и V_{2c} — скорости этих частиц в системе их центра масс, а V_c — скорость центра масс. Поскольку угол между векторами V_1 и V_{1c} прямой, то $\varphi = \alpha + \frac{\pi}{2}$, откуда $\beta = \frac{\pi-\varphi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\alpha$, и угол разлёта $\alpha + \beta = \boxed{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\alpha}$.



4А. Снаряд попадёт в пушку, если период его обращения будет равен $T = 24$ ч. Начальная скорость на экваторе $v_0 = \frac{2\pi}{T}R \approx 0{,}5$ км/с. Период обращения по низколежащей круговой орбите $T_0 = \frac{2\pi R}{V} \approx 85$ мин, откуда по 3-му закону Кеплера $a = R\left(\frac{T}{T_0}\right)^{2/3} \approx 6{,}6R$. Из ЗСЭ и формулы для большой полуоси $\varepsilon = \frac{(v+v_0)^2}{2} - \frac{\gamma}{R} = -\frac{\gamma}{2a}$, откуда $v = V\sqrt{2-\frac{R}{a}} - v_0 \approx 1{,}36V - v_0 \approx \boxed{10{,}2\text{ км/с}}$. *Альтернативно*: к этому же ответу можно прийти, применяя ЗСЭ и ЗСМИ к перигею и апогею: $\frac{(v+v_0)^2}{2} - \frac{\gamma}{R} = \frac{u^2}{2} - \frac{\gamma}{2a-R}$, $(v+v_0)R = u(2a-R)$.

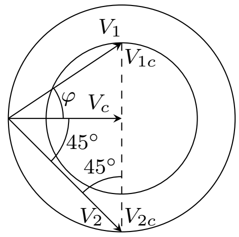
5А. Поскольку $v \ll u$, поток массы на тележку равен $\mu = \rho uS = 3$ г/с. Уравнение движения тележки найдём из закона изменения импульса (в системе отсчёта земли): $(m+dm)(v+dv) + \frac{1}{2}\mu dtv = mv$, где $dm = \frac{1}{2}\mu t$. Получим $m\frac{dv}{dt} = -\mu v$, где $m = m_0 + \frac{1}{2}\mu t$. Интегрируя, находим $\frac{dv}{v} = -\frac{\mu dt}{m_0+\frac{1}{2}\mu t}$, $\ln\frac{v_0}{v} = 2\ln\frac{m_0+\frac{1}{2}\mu t}{m_0}$, $v = \frac{v_0}{\left(1+\frac{\mu t}{2m_0}\right)^2}$. Пройденное расстояние $L = \int v\,dt = \frac{v_0 t}{1+\frac{\mu t}{2m_0}}$. При $t\to\infty$ имеем $L \to \frac{2m_0v_0}{\mu} = \frac{2\cdot 300\cdot 1}{3} = \boxed{200\text{ м}}$.

6А. По определению кривизны $\kappa = \frac{d\alpha}{dl}$. По условию $\kappa = \beta l$. Тогда угол поворота $\Delta\alpha = \int\kappa dl = \frac{1}{2}\beta l^2 = \frac{1}{2}\kappa l$, $l = 2\Delta\alpha/\kappa$. Чтобы автомобиль удержался в повороте, необходимо $ma_n \leqslant \mu mg$, где нормальное ускорение $a_n = \kappa v^2$, то есть $\kappa v^2 \leqslant \mu g$. Отсюда минимальная длина участка $l \geqslant \frac{2\Delta\alpha v^2}{\mu g} \approx \frac{\pi\cdot 30^2}{0{,}5\cdot 3\cdot 9.8} \approx \boxed{190\text{ м}}$.

1Б. $\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{v_m^2}\right)$, $\ln\frac{v_m+v}{v_m-v} = \frac{2g}{v_m}t \approx 1{,}0$, $v = v_m\frac{1-e^{-2gt/v_m}}{1+e^{-2gt/v_m}} \approx 220\cdot\frac{1-e^{-1}}{1+e^{-1}} \approx \boxed{100\text{ км/ч}}$.

2Б. $\varphi = \frac{2}{\sqrt{15}}\frac{m}{M}\frac{v}{\sqrt{gh}} \approx 0{,}035$ рад $\approx \boxed{2^\circ}$.

3Б. В обозначениях решения задачи 3А, $V_C = m_1V/(m_1+m_2)$ и $V_{1c} = m_2V/(m_1+m_2)$, где V — скорость частицы 1 до столкновения. Поскольку, после рассеяния, угол между V_c и V_{1c} прямой, то искомый угол рассеяния α удовлетворяет соотношению $\operatorname{tg}\alpha = V_{1c}/V_C \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\alpha = m_2/m_1}$, при этом отношение масс может быть любым.



4Б. Ядро может залететь обратно в дуло, если период обращения будет равен $T = 12$ ч. Период обращение на низкой круговой орбите $T_0 = \frac{2\pi R}{V} \approx 85$ мин. По 3-му закону Кеплера $a = R\left(\frac{T}{T_0}\right)^{2/3} \approx 4{,}2R$. Апогей будет над противоположным полюсом на расстоянии $R_{\max} = 2a - R = 7{,}2R$ от центра, высота $\boxed{h_{\max} = 6{,}2R}$. Из ЗСЭ и формулы для большой полуоси имеем $\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\gamma}{R} = -\frac{\gamma}{2a}$, где $\gamma/R = V^2$, откуда $v = V\sqrt{2-\frac{R}{a}} \approx 1{,}33V \approx\boxed{10{,}5\text{ км/с}}$.

5Б. Поскольку $v \ll u$, поток массы на тележку равен $\mu = \rho u S = 30$ г/с. Вертикальная сила реакции: $N = \mu u + mg \approx 1{,}2mg$. Уравнение движения тележки найдём из закона изменения импульса (в системе отсчёта земли): $m(v+dv) + \mu dt v = mv - kN\,dt$, откуда $m\frac{dv}{dt} = -\mu v - kN$, $\frac{dv}{v+kN/\mu} = -\frac{\mu}{m}dt$ и интегрируя находим $t = \frac{m}{\mu}\ln\left(\frac{v_0}{k(u+mg/\mu)}+1\right) \approx 5\cdot\ln\left(\frac{1}{0.01\cdot(10+150\cdot 10/30)}+1\right) \approx 5\ln 2{,}7 \approx \boxed{5\text{ с}}$.

6Б. Аналогично 6А, $t = \frac{l}{v} \geqslant \frac{2\Delta\alpha v}{\mu g} \approx \frac{\pi\cdot 20}{0{,}5\cdot 9.8} \approx \boxed{13\text{ с}}$.