Воробьев Александр Семёнович
vendas@list.ru
+79272348364

староста

- чистая доска
- Трелка

чат в тг с объявлениями

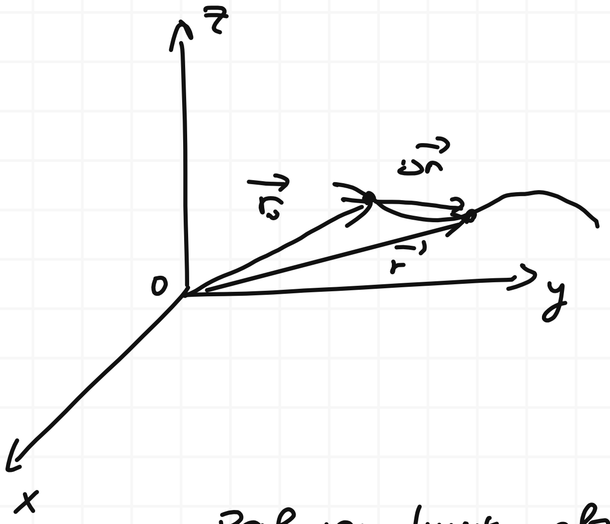
- ходить обязательно
- сайт общ. физ. 1 сем
- Сивухин – чтение на протях. семестра
- Кириченко, Крымский
- Овчинкин – задачник, который выдали

$$\underbrace{1\ \ 2}_{\text{неуд}}\ \ \underbrace{3\ \ 4}_{\text{уд}}\ \ \underbrace{5\ \ 6\ \ 7}_{\text{хор}}\ \ \underbrace{8\ \ 9\ \ 10}_{\text{отл}}$$

I. КИНЕМАТИКА

Механическое движение

Система отсчета → отсчет времени



$$\vec{\Delta r} = \vec{r} - \vec{r_0}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

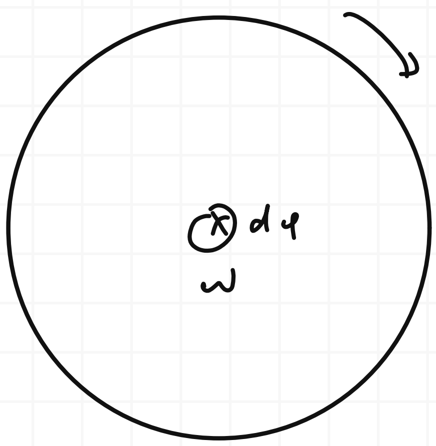
Равномерное движение $\vec{v} = const$

Равноускоренное движение $\vec{a} = const$

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}t \qquad v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \qquad x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

равномерное движение по окр-ти



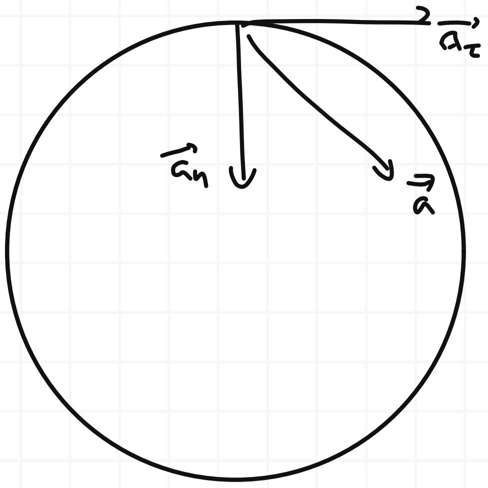
$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

правило буравчика

а если неравномерно?

криволинейная траектория — в каждый момент движется по дуге какой-то окр-ти



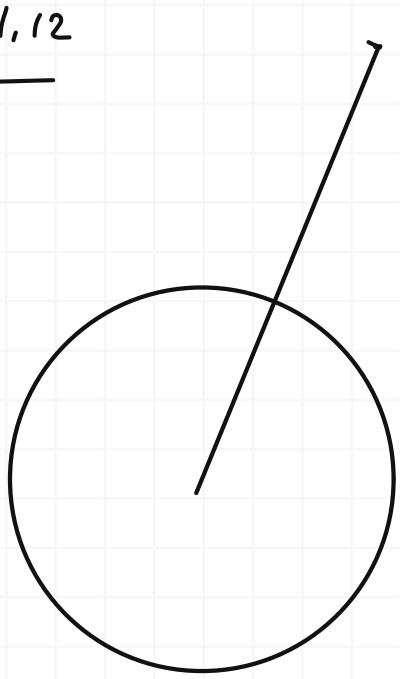
$$\vec{a} = \vec{a_\tau} + \vec{a_n}$$

Как найти $R_{кр}$ в пр. случае

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

1,12 1,3. 1. 13

N1,12



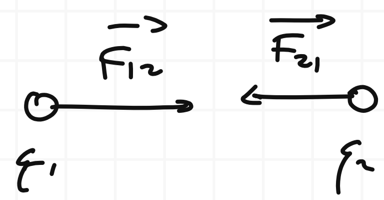
Динамика МТ

Законы Ньютона

I. $\exists$ такие системы отсчета, относительно которых МТ находится в состоянии покоя или равномерн. прямолинейного движения, если на тело не действуют никакие внешние силы, или их действия скомпенсир.

II. $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

III. МТ взаимодействуют между собой



- напр. вдоль одной прямой
- равны по модулю $\quad F_{12} = F_{21}$
- противоположны по направлению $\quad \vec{F_{12}} = -\vec{F_{21}}$
- одинаковой природы

Вспоминаем диффуры

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2} x = 0$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

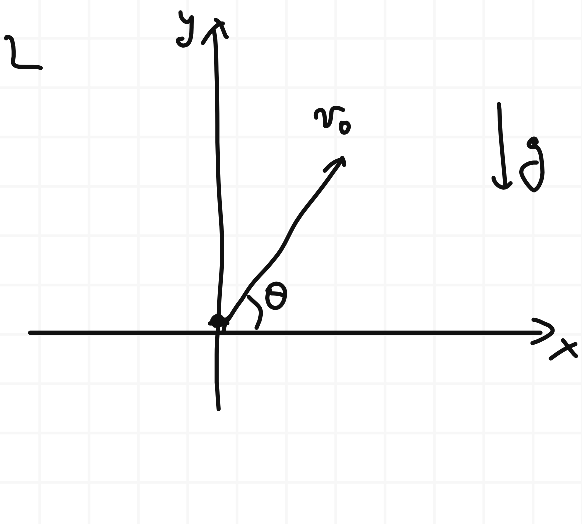
2.68

m, θ, β, v_0, L

$L = x(t) - ?$

$t - ?$

(подъема)



если пренебречь $F_{сопр}$

$$t_{под.} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

$$H_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

с учётом сопротивления:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{d\vec{t}} = m\vec{g} - \beta\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{\beta}{m}\vec{v}$$

$$\begin{cases} \dot{v}_x = -\frac{\beta}{m}v_x \\ \dot{v}_y = g - \frac{\beta}{m}v_y \end{cases} \quad \begin{cases} \int\limits_{v_{0x}}^{v_x}\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{\beta}{m}\int\limits_0^t dt \\ \int\limits_{v_{0y}}^{v_y}\frac{d(v_y - \frac{m}{\beta}g)}{v_y - \frac{m}{\beta}g} = -\frac{\beta}{m}\int\limits_0^t dt \end{cases} \quad \begin{cases} \ln\frac{v_x}{v_{0x}} = -\frac{\beta}{m}t \\ \ln\frac{v_y - \frac{m}{\beta}g}{v_{y0} - \frac{m}{\beta}g} \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(t) = v_0\cos\theta e^{-\frac{\beta}{m}t} \\ v_y(t) = \frac{m}{\beta}g + \\ + (v_0\sin\theta - \frac{m}{\beta}g)e^{-\frac{\beta}{m}t} \end{cases}$$

момент подъема: $v_y(t) = 0$

$$0 = \frac{m}{\beta}g + (v_0\sin\theta - \frac{m}{\beta}g)e^{-\frac{\beta}{m}t} \qquad \Big| : \frac{m}{\beta}g$$

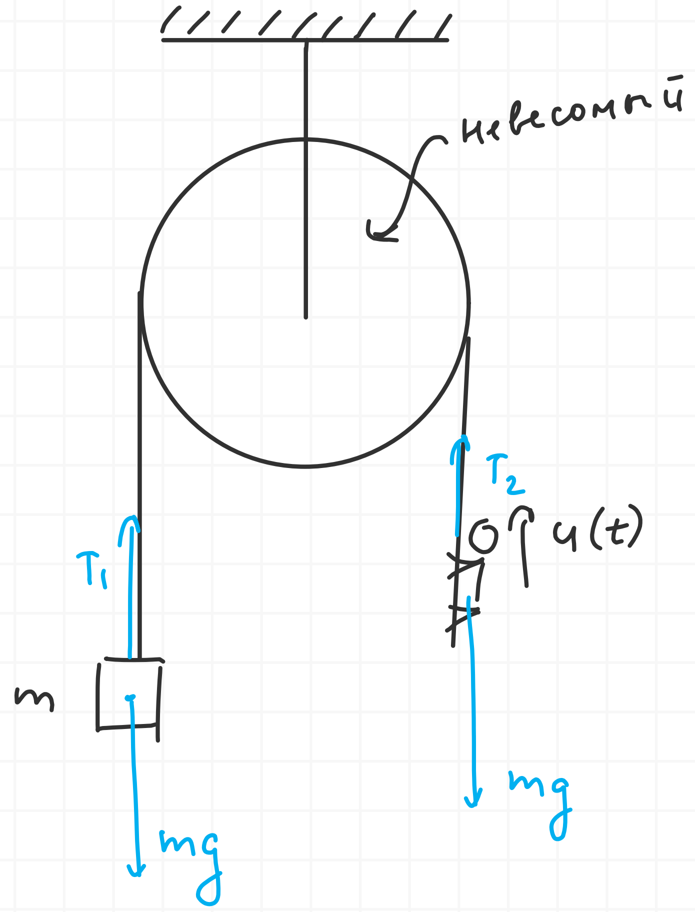
$$e^{\frac{\beta}{m}t} = \left(1 - \frac{\beta v_0\sin\theta}{mg}\right) \qquad \Big| \ln$$

$$\frac{\beta}{m}t = \ln\left(1 - \frac{\beta v_0\sin\theta}{mg}\right)$$

$$t = \frac{m}{\beta}\ln\left(1 - \frac{\beta v_0\sin\theta}{mg}\right)$$

$$x(t) = \int\limits_0^t v_x(t)\,dt = \int\limits_0^t v_0\cos\theta e^{-\frac{\beta}{m}t}dt = v_0\cos\theta\int\limits_0^t\left(-\frac{m}{\beta}\right)e^{-\frac{\beta}{m}}d\left(-\frac{\beta}{m}t\right) =$$

$$= -\frac{m}{\beta}v_0\cos\theta\int\limits_0^{-\frac{\beta}{m}t}e^{u}du = -\frac{m}{\beta}v_0\cos\theta\left(e^{-\frac{\beta}{m}t} - 1\right)$$



1) $T_1 = T_2$ т.к. нить невесома

2) силы, кот. действ. на обезьяну в $\forall$ момент времени, такие же, как и силы, д. на груз

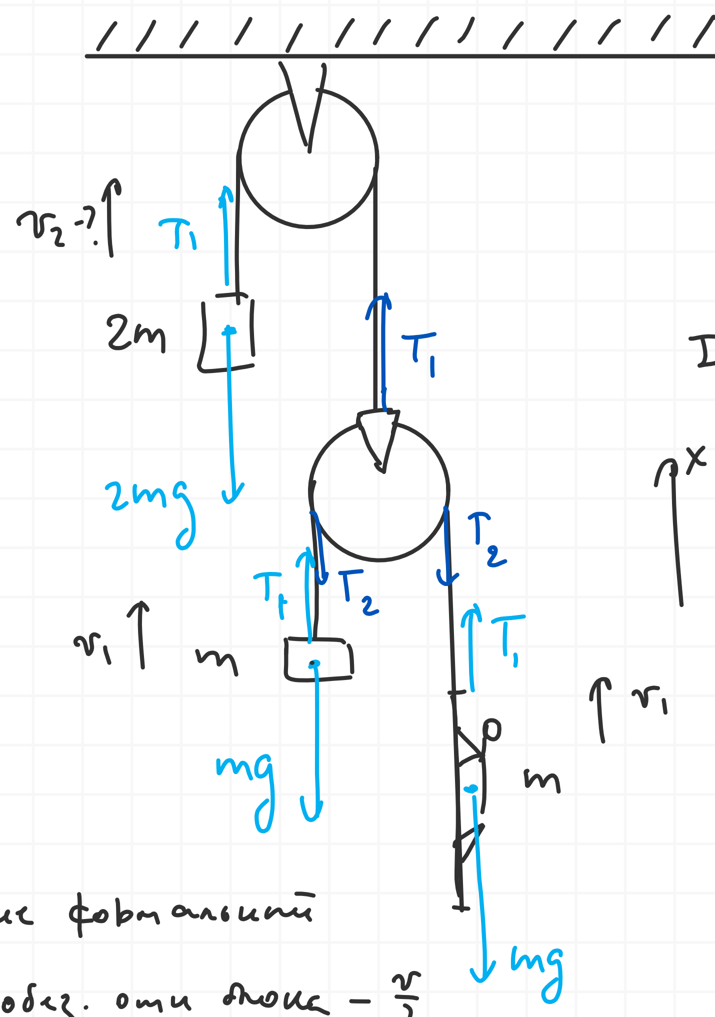
$\Downarrow$

ур-е движения груза и обезьяны такие же

2.17

m, v

$v_2 - ?$



в ИСО об: $(-v_1)$

$v_{об} = 0$

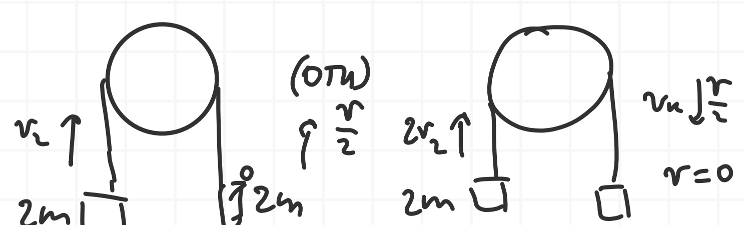
$v'_{1x} = 2v_1 = v'_к = v$

$v_1 = \frac{1}{2} v$

I способ:

Объединим подвижный блок и груз массой m в систему. Её центр масс $\uparrow \frac{v}{2}$.

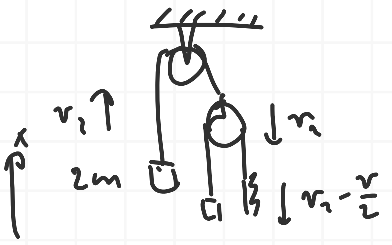
Система ведет себя, как обезьянка, кот. поднимается по канату с относ. скор. $\frac{v}{2}$.



$v_2 = \frac{v}{4}$

II способ, более формальный

(ЗИИ) скор. обез. отн блока $- \frac{v}{2}$
п. груза $-$

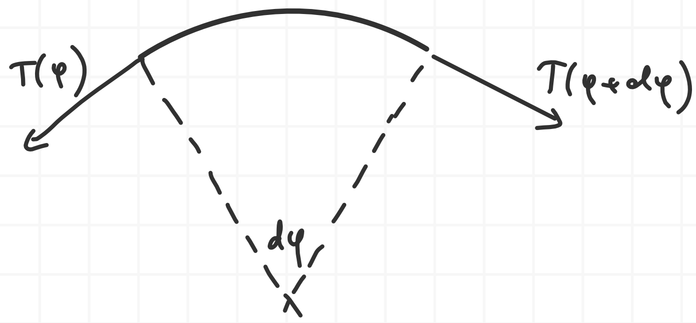


$\cancel{2m} v_2 = \cancel{2m}\left(\frac{v}{2} - v_2\right)$

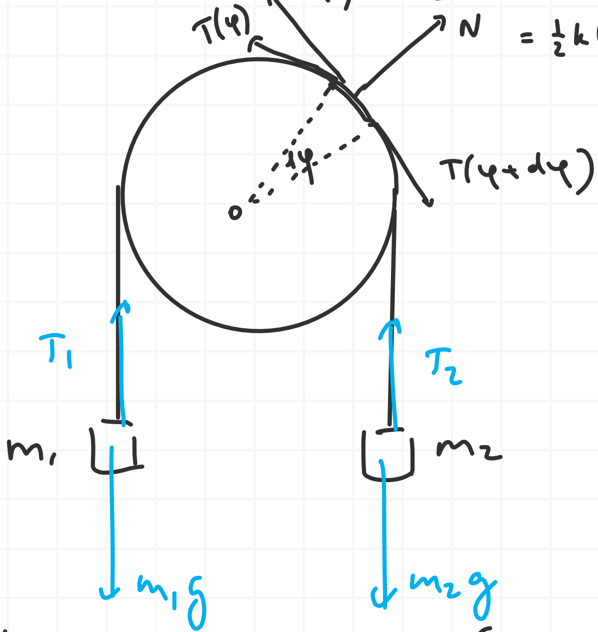
$v_2 = \frac{v}{4}$

изм. импульса с двух сторон одинаково

2.57 (Формула Эйлера)



$$F_{тр}(\varphi) = kN = \tfrac{1}{2}k\,T(\varphi) + T(\varphi+d\varphi)\,d\varphi = \tfrac{1}{2}k\left(2T(\varphi)+dT(\varphi)\right)d\varphi$$



$$dF_{тр} = \tfrac{1}{2}k(2T+dT)\,d\varphi = kT\,d\varphi$$

II з.Н. $\quad F_i = \underset{(\text{целиком})}{m_i\omega^2 R} = 0 = (T+dT)\tfrac{1}{2}d\varphi + \tfrac{1}{2}T\,d\varphi - N_i = \left(T+\tfrac{1}{2}dT\right)d\varphi - N_i$

$$dN = N_i = \left(T+\tfrac{1}{2}dT\right)d\varphi = T\,d\varphi \quad ; \quad dN = T\,d\varphi$$

$$dT = T(\varphi+d\varphi) - T(\varphi) = dF_{тр}$$

$$dF_{тр} = dT = kT\,d\varphi \ ; \quad \int\frac{dT}{T} = k\int d\varphi \ ; \quad \ln\frac{T_2}{T_1} = k\pi \ ; \quad \frac{T_2}{T_1} = e^{k\pi}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \; ; \; \vec{p} = \sum m_i \vec{v_i} \; ; \; \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum m_i \vec{a_i} = \sum_i \vec{F}_{внеш} + \cancel{\sum_i \vec{F}_{внутр}}^{\,0}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{внеш}$$

Уравнение Мещерского:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \mu\vec{u} = \vec{F} + \vec{u}\frac{dm}{dt}$$

Ур-е Циолковского:

$$v = u \ln \frac{M_0}{M_к}$$

1) $\vec{F} = 0$: $m\,dv = u\,dm$

$$\frac{dm}{m} = \frac{1}{u}dv$$

$$\ln\frac{M_0}{M_к} = \frac{1}{u}(v_к - v_0)$$

центр масс

центр тяжести

) совпадают в однородном поле F тяжести

теорема о движении

<u>3.11</u>

μ, m_0, v_0

1) дворник - бездельник

(ЗСИ на гориз. напр): $m_0 v_0 = m(t)v(t) =$

$= (m_0 + \mu t)v(t)$

$$v(t) = v_x(t) = \frac{m_0 v_0}{m_0 + \mu t}$$

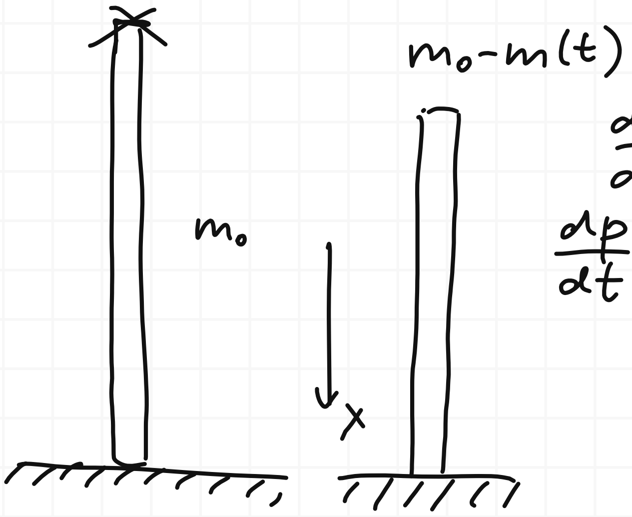
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} \; ; \; (m_0 + \mu t)\frac{dv}{dt} = \mu v \; ; \int \frac{dv}{v} = \int \frac{\frac{\mu}{m_0}dt}{1 + \frac{\mu}{m_0}t} = \int \frac{d\left(\frac{\mu}{m_0}t\right)}{1 + \left(\frac{\mu}{m_0}t\right)}$$

$$\ln|v|\Big|_{v_0}^{v} = \ln\left|1 + \frac{\mu}{m_0}t\right|\Big|_0^t \; ; \; \ln\frac{v}{v_0} = \ln\left|1 + \frac{\mu}{m_0}t\right|$$

где-то минус потерялся

24.09.2024

4.55



$$\frac{dp}{dt} = (m_0 - m(t))g - N(t)$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{m\,dv}{dt} + \frac{v\,dm}{dt} = (m_0 - m(t))g + \frac{v\,dm}{dt} =$$

$$a = \frac{dv}{dt} = g$$

$$v = gt$$

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

$$m(t) = \frac{x(t)}{l} m_0$$

$$l = g\frac{\tau^2}{2} \; ; \; \tau^2 = \frac{2m_0}{g}$$

$$x(t) = l = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{g} \cdot \frac{\cancel{2}m_0}{\cancel{g}}$$

4.25

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

Def Элементарная работа

$$d\vec{A} = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Теорема об изменении кинетич. энергии.

Потенциальная энергия

Теорема об изменении потенц. энергии

$$\Delta E_p = -\sum A_{ip}$$

Когда импульс сохраняется?

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F_{внеш}}$$

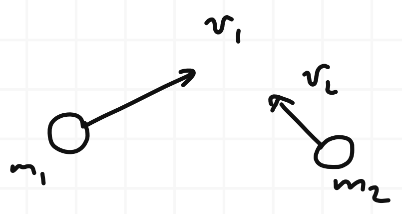
$$\Downarrow$$

$$d\vec{p} = \vec{F_{внеш}}\, dt$$

1) $\vec{F_{внеш}} = 0 \Rightarrow \vec{p} = const$

2) $F_{внеш_x} = 0 \Rightarrow p_x = const$

3) $dt \to 0 \Rightarrow \vec{p} \approx const$



$$\vec{v_c} = \frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v_{1c}} = \vec{v_1} + \vec{v_c} = m v.$$

$$E_{кс} = \frac{m_1 v_{1c}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2c}^2}{2} = \frac{\mu v_{отн}^2}{2}$$

$$v_{12} = v_{21} = v_{отн}$$

$$E_{12} = v_{21} = v_{отн}$$

$$E =$$

про камаз и легковушку

Тяжесть столкновения зависит от отн. скор. - формально

4.80

$F = kx^{\frac{3}{2}}$

$m, \frac{m}{3}$

$v_1 - v_0$

$x_{max} - ?$

2024.10.15

Теорема Кёнига $K_{лсо} = K_{ц.м} + K_{сцм}$

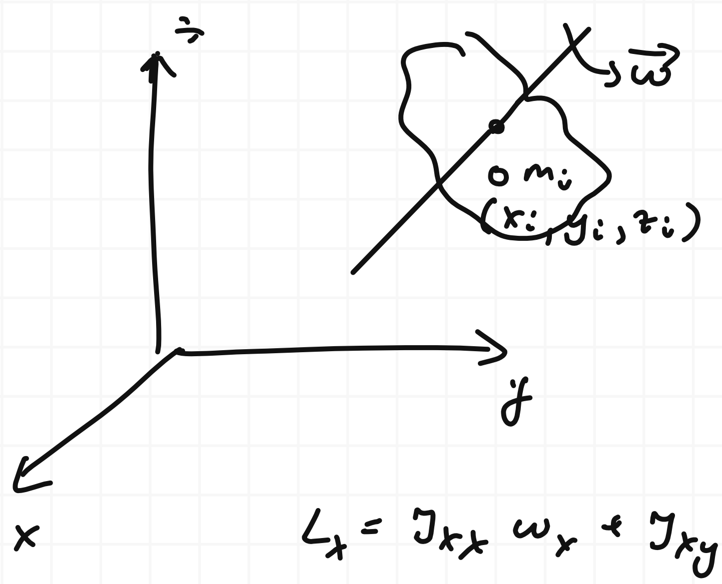
$$\vec{L}_{лсо} = \vec{R} \times M\vec{v}_c + \vec{L}_{сцм}$$

плоское движение = поступ. + вращ.

большая полуось

$$a = -\frac{\alpha m M}{2E}$$

22.10.2024



$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}}_{\text{тензор инерции}} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$\vec{L} = \hat{J}\vec{\omega}$ тензор?

$$L_x = J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z$$

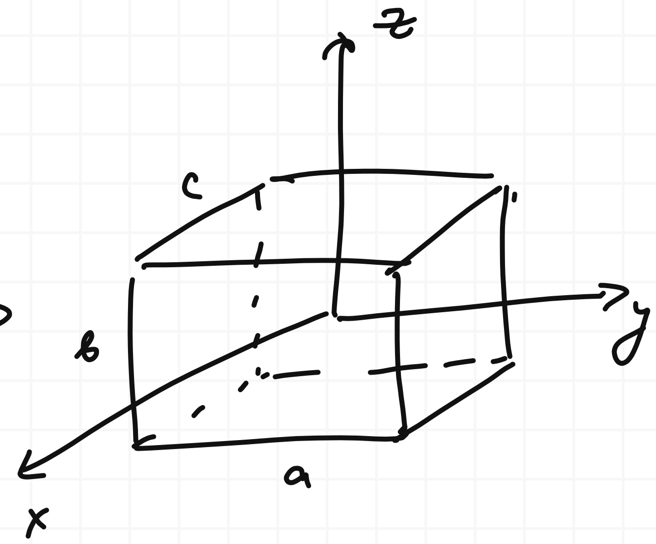
$$J_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

$$J_{xy} = J_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i$$

// главные оси инерции

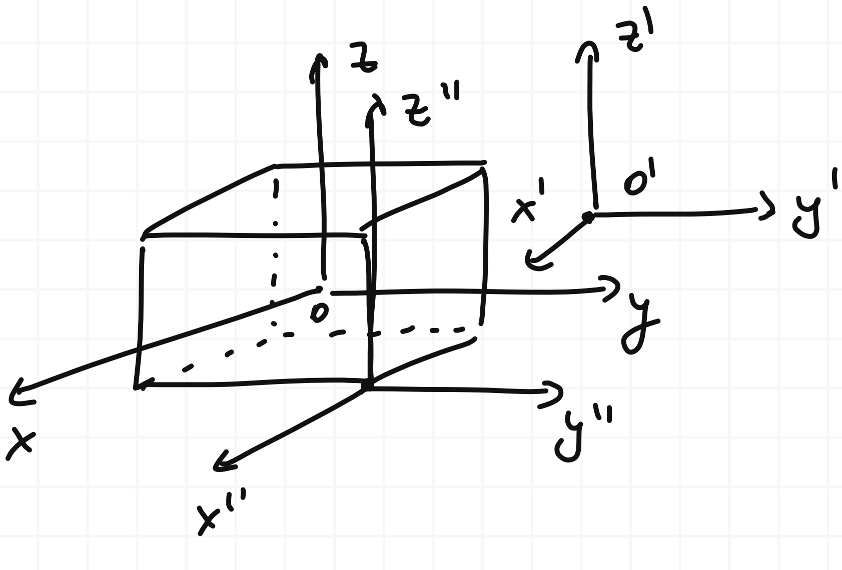
// однозначен ли их выбор? →

// какая-то теорема, что можно свести к диагональной матрице



$$\begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}m(a^2+b^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(b^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m(a^2+c^2) \end{pmatrix}$$



$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & & \\ & J_{yy} & \\ & & J_{zz} \end{pmatrix}$$

Th. Гюйгенса-Штейнера

$$\hat{J}' = \begin{pmatrix} J_{xx} + m(OO')^2 & & \\ & J_{yy} & \\ & & J_{zz} + m(OO')^2 \end{pmatrix}$$

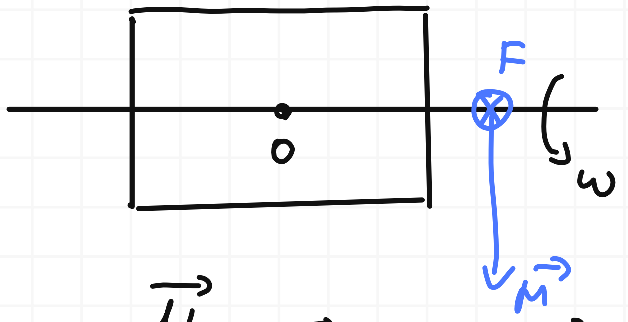
$\hat{J}''$

Свободные оси вращения — хорошо вращ, не кувыркается

Устойчивые (неустойчивые) оси вращения

Приближенная теория гироскопа

// лаба 1.2.5



действуем на ось с силой, направ. на нас

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \Rightarrow d\vec{L} = \vec{M}dt$$

пытаемся повернуть ось на нас, а она двигается перпендикулярно вниз

контринтуитивно

это явление — регулярная вынужденная прецессия

тело — гироскоп

// механические гироскопы раньше использовались в навигации (ракеты самолеты)
сейчас — лазерные //

Что мне нужно уметь к письменной к/р?

min

понимать теорию

чувствовать применимость законов

просмотреть старые решения

max

решать все задачи из задания

отлично понимать теорию

кинематика
- формулы К, L
- движение с Fсопр
- колебания

динамика МТ з-ны Ньютона
- прав. палки
- нерастяж + невесом

реактивн. движение
- ф-лы выписать — между углом
- вспомнить, как решать

ц. масс
- ф-лы
- удары

ЗСИ ЗСЭ ЗСМИ
- понимать применимость

Энерг в поле ц. сил
- задача двух тел
- * энергия парабола гипербола
- какой-то факт с данным через энергию

момент импульса
- выписать изв. I
- факт
- понимать, когда отн. оси, а когда — точки

тв. движ
- задачи

Консультация от Лёши Свищуцкого

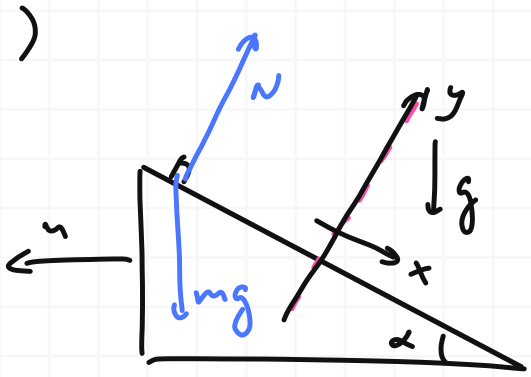
№1 (КР 2021)

$\alpha = 30^\circ$

$u = 10$ м/с

$g = 10$ м/с^2

ρ_{min} — ?



$$m_{сист}\vec{a}_c = \sum \vec{F}_i^{\,внеш}$$

на перпендикул. пов-ти клина ось ускорения и скорости клина и шайбы должны быть одинаковы

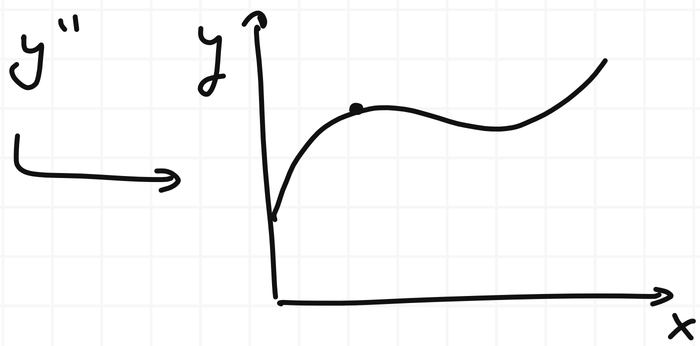
$a_{кл} = 0$ (массивный)

значит шайба разгоняется вдоль клина

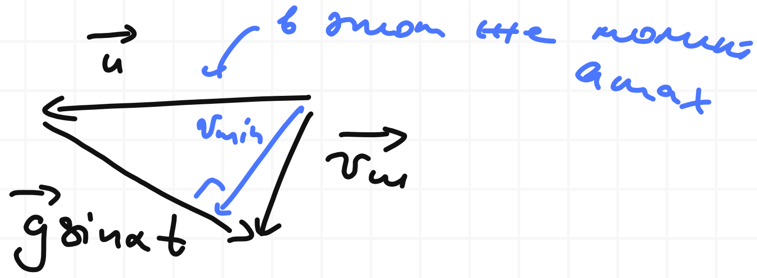
$a_{шy} = 0 \qquad a_ш = a_{шx} = g\sin\alpha = const$

радиус кривизны: $\rho = \dfrac{v^2}{a_n}$

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$



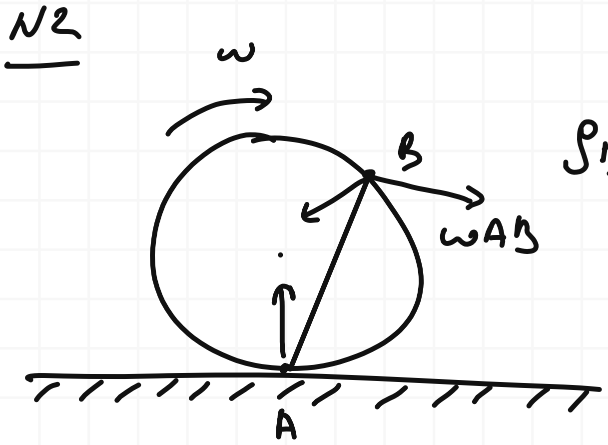
$$\vec{v}_ш = \vec{u} + \vec{a}_ш t$$



ρ_{min} когда v^2 min, a_n max в один момент

$$\rho_{min} = \frac{u^2\sin^2\alpha}{g\sin\alpha} = \frac{u^2}{g}\sin\alpha = 5 м$$

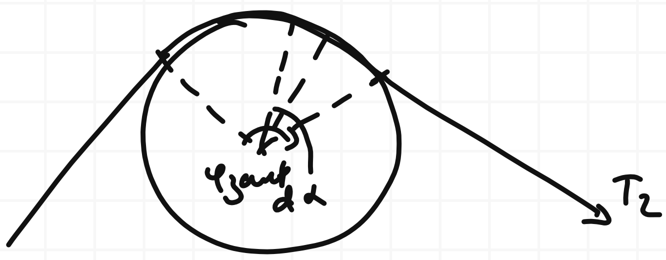
№2



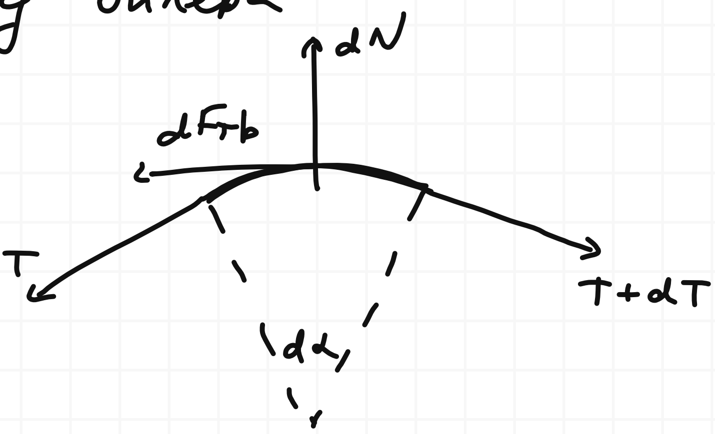
$\rho_B = 2AB$

не путать радиус кривизны и МЦС

N3 Выведите формулу Эйлера



$\varphi_{зацеп}$ может быть $> 2\pi$



$$(T+dT)\cos\frac{d\alpha}{2} - T\cos\frac{d\alpha}{2} - dF_{тр} = 0$$

$$dN = (T+T+dT)\sin\frac{d\alpha}{2} = (2T+dT)\frac{d\alpha}{2}$$

$$dN = T\,d\alpha$$

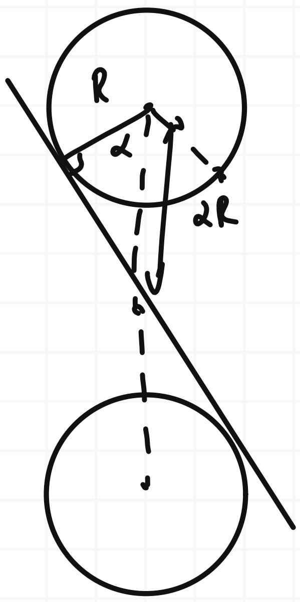
$$dF_{тр} = \mu\,dN = \mu T\,d\alpha = dT$$

$$\frac{dT}{T} = \mu\,d\alpha \; ; \quad \int\frac{dT}{T} = \mu\int d\alpha ;$$

$$\ln T\Big|_{T_1}^{T_2} = \mu\varphi_{зацеп}$$

$$T_2 = T_1 e^{\mu\varphi_{зацеп}}.$$

N4



$$\cos\alpha = \frac{1}{2} ; \; \alpha = \frac{\pi}{3}$$

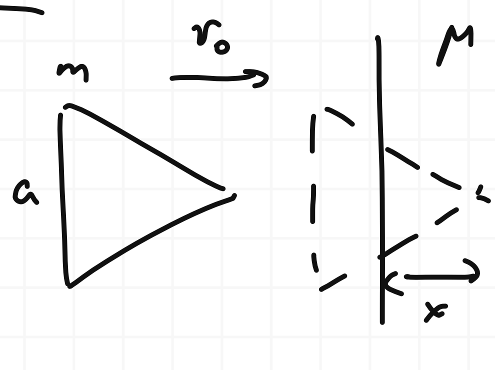
$2\pi - 2\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ — угол нал. на 1 бревно

$$\varphi = \frac{4\pi}{3}\cdot 2\cdot 3{,}5 = \frac{4\cdot 7}{3}\pi = \frac{28}{3}\pi$$

$$\frac{F}{f} = e^{\frac{28}{3}\pi\mu}$$

$$f = Fe^{-\frac{28}{3}\pi\mu} = 1100\,Н\cdot e^{-\frac{28}{3}\pi\cdot 0{,}16} = 10{,}1\,Н$$

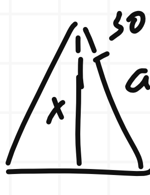
N6



$$\frac{16\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{m}{a^2}g$$

$$F_{тр}(x) = \mu N(x) = \mu\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\cdot\sigma$$

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{m}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{3}{4}} = \frac{16\sqrt{3}}{9}\cdot\frac{m}{a^2}$$



$$a^*\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^* = x$$

$$S = \frac{1}{2}xa^* = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$F_{тр}(x) = \frac{\cancel{16}\sqrt{3}}{\cancel{8}\,3}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{4}}\,\mu m g\,\frac{1}{a^2}x^2 = \frac{4}{3}\,\frac{\mu m g}{a^2}x^2$$

$$A_{тр} = \int F_{тр}(x)\,dx = \frac{4}{\sqrt{3}}\,\frac{\mu m g}{\cancel{a^2}}\cdot\frac{\cancel{3\sqrt{3}}}{\cancel{8}\,2}a^{\cancel{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\mu m g a$$

$x_{конеч} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}v_0^2 = \frac{\cancel{4}}{2\sqrt{3}}\mu \cancel{m} g a$$

$$\mu = \frac{\sqrt{3}\,v_0^2}{ga}$$

$\delta K = A_{всех\ сил}$

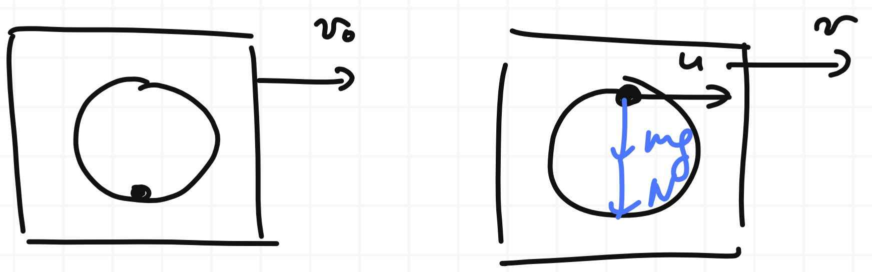
внеш, внутр

$\delta(K+П) = A_{неконс}$

№7

$m = \frac{M}{2}$

ЗСИ: $dp_{сист} = \left(\sum \vec{F}_i^{\,внеш}\right)dt$



$mg + N = ma_n = m\frac{u^2}{R_{кр}}$

$N \to 0$ (в гран. сл.)

радиус кривиз. ≠ ≠ рад. лунки

сложно пересчет в СО куба

$$\begin{cases} Mv_0 = Mv + mu \\ \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mu^2 + mg2R \\ N = 0 \text{ (граничная ситуация)} \end{cases}$$

$$mg = \frac{m v_{отн}^2}{R} = \frac{m(u-v)^2}{R}$$ ← уже лучше

$$\begin{cases} 2v_0 = 2v + u \\ 2v_0^2 = 2v^2 + u^2 + 4gR \\ v^2 + u^2 - 2uv = gR \end{cases}$$ ← эта система руками не решится

Решим в СЦМ

т. Кёнига: $K_{сист} = K_{ц.м} + K_{отн\ ц.м}$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)}{2}\left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1+m_2}\right)^2 + K_{отн}.$$

. . .

$$K_{отн}^{цм} = \frac{\mu v_{отн}^2}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{\mu v_0^2}{2} = \frac{\mu v_{отн}^2}{2} + 2mgR \\ v_{отн}^2 = gR \end{cases}$$

II з.Н. $N=0$

$$\mu = \frac{2m^2}{3m} = \frac{2m}{3}$$

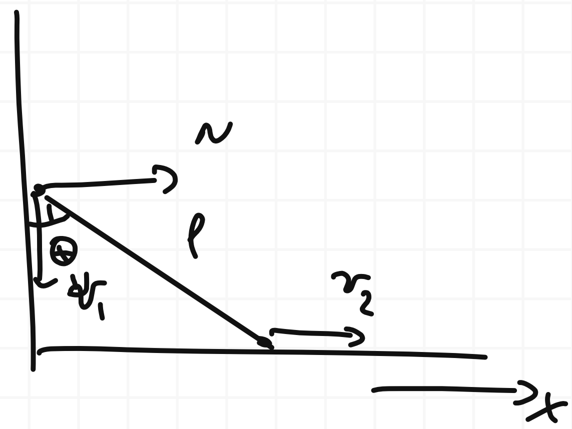
$$\frac{m v_0^2}{3} = \frac{m \overset{gR}{v_{отн}^2}}{3} + 2mgR$$

$$\underline{v_0^2 = 7gR}$$

no pain
no gain

Если есть массивное, для записи ЗСЭ переходим в СО массивного

№9



$W_1 = mgl$ $\qquad$ $W_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgl\cos\Theta$

после отрыва ($N=0$) вдоль x не останется сил, действующих на систему $\Rightarrow$ имп. сохр

$$mv_2 = mv_{1x}' + mv_2'$$

кин. связь:

$$v_1\cos\Theta = v_2\sin\Theta$$

$$\begin{cases} v_1^2 + v_2^2 = 2gl(1-\cos\Theta) \\ v_1\cos\Theta = v_2\sin\Theta \\ N=0 \Rightarrow a_{cx}=0 \Rightarrow v_{cx} = const \end{cases}$$

v_2 в момент отрыва максимальна

$$v_2^2(1+tg^2\Theta) = 2gl(1-\cos\Theta)$$

$$\frac{v_2^2}{\cos^2\Theta} = 2gl(1-\cos\Theta)$$

$$v_2^2 = 2gl(1-\cos\Theta)\cos^2\Theta$$

$$(\cos^2\Theta - \cos^3\Theta)' = -2\cos\Theta\sin\Theta + 3\cos^2\Theta\sin\Theta = 0$$

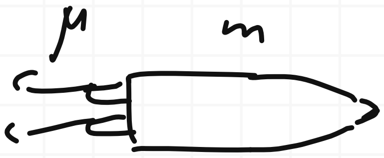
$$\sin\Theta\cos\Theta(3\cos\Theta - 2) = 0$$

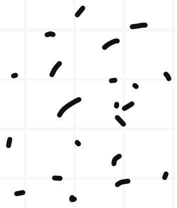
$$\left[\begin{array}{l} \sin\Theta = 0 \\ \cos\Theta = 0 \\ \cos\Theta = 2/3 \end{array}\right.$$

) не подх. $\qquad$ $\underline{\Theta = \arccos 2/3}$

// Кирилл Клименок

Реактивное движение



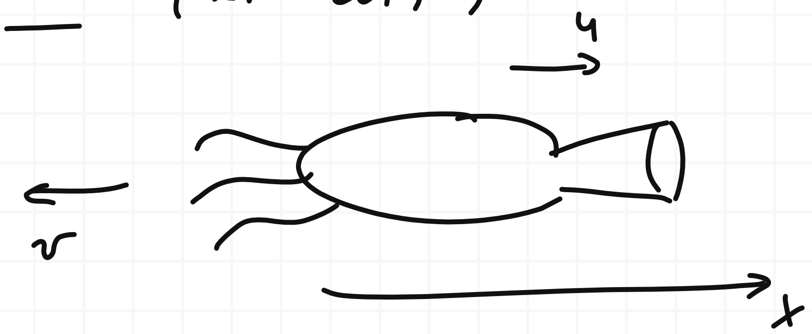


$$\mu_{утв} = -\frac{dm}{dt}$$

$$m_p \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{внеш} - \mu_{утв}\,\vec{u}_{\substack{утв\\ отн.\\ ракеты}} + \overset{0}{\mu_{пост}}\,\vec{u}_{пост}\ отн.\ ракеты$$

не зависит от выбора ИСО

№10 (КР 2017)



решим задачу в ИСО, где вода стоит

$m, \mu, v, u_\infty, \quad t_{0\to\frac{u_\infty}{2}}$ — ?

$$m\frac{du}{dt} = -ku^2 - \mu(-v-u) + \mu(-u) = -ku^2 + \underset{\substack{\parallel\\ const}}{\mu v}$$

в уст. режиме

$$ku_\infty^2 = \mu v$$

$$k = \frac{\mu v}{u_\infty^2}$$

$$\frac{m\,du}{dt} = -ku^2 + \mu v = -\frac{\mu v}{u_\infty^2}u^2 + \mu v =$$

$$\frac{m u_\infty^2}{\mu v}\cdot\frac{du}{dt} = -u^2 + u_\infty^2$$

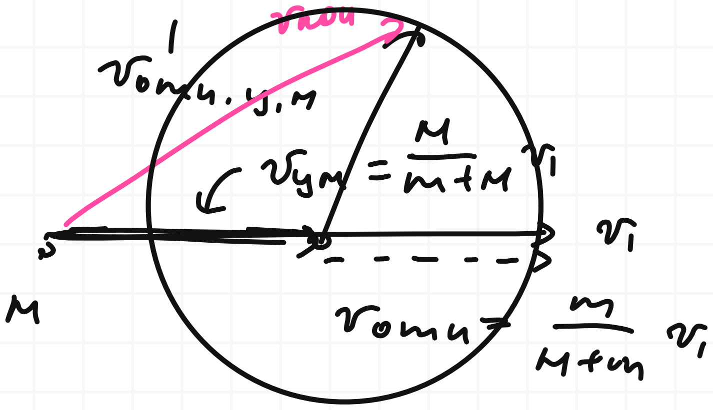
$$\frac{\mu v}{m u_\infty^2}\,dt = \frac{du}{u_\infty^2 - u^2} = \frac{du}{u_\infty^2\left(1-\frac{u^2}{u_\infty^2}\right)} = \frac{\cancel{u_\infty}\, d\left(\frac{u}{u_\infty}\right)}{u_\infty^2\left(1-\left(\frac{u}{u_\infty}\right)^2\right)}, \quad \frac{u}{u_\infty} = \xi$$

$$\frac{\mu v}{m u_\infty}\tau = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{d\xi}{1-\xi^2} = \frac{1}{2}\left(\int\frac{d\xi}{1-\xi} + \int\frac{d\xi}{1+\xi}\right) = \frac{1}{2}\ \ldots$$

Метод векторных диаграмм

M $\;\; \vec{v}_1$ $\qquad\qquad$ m $\;\; v=0$

ЗСИ, ЗСЭ $\Rightarrow$ $p_M^{цм} = const$, $p_m^{цм} = const$



$M < m$ (рассеивание легкой частицы на тяжелой)

$\Downarrow$

$v_{отн\,ц.м} < v_{ц.м.}$

№11 (2012)

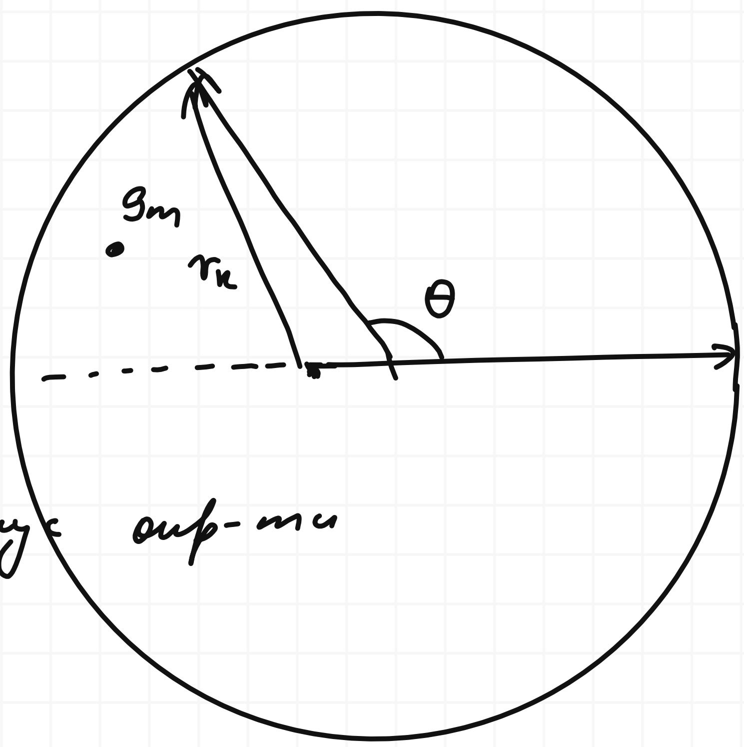
$m_2 = 9m_1$

$\theta = 120°$ в ЦМ

m $\;\; \vec{v}_0$

$v_c = \frac{mv_0}{10m} = \frac{1}{10} v_0$

$v_{отн\,ц.м} = \frac{9}{10} v_0$ – радиус окр-ти



теряет энергию, отдавая ее другому шарику

$$v_к^2 = \frac{81}{100} v_0^2 + \frac{1}{100} v_0^2 - \cancel{2}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10} v_0^2 \cancel{\cos(\pi-\theta)}^{\frac{1}{2}} = \frac{73}{100} v_0^2$$

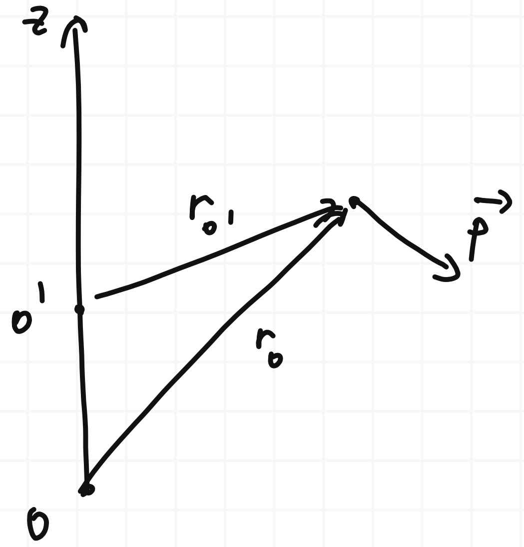
$$\Delta W = \frac{1}{2} m \left(\frac{73}{100} - 1\right) v_0^2 = -\frac{27}{200} m v_0^2$$

$$\frac{\frac{27}{200}\cancel{mv_0^2}}{\frac{1}{2}\cancel{mv_0^2}} = 0{,}27 \qquad \underline{27\%}$$

Момент импульса

$\vec{L} := [\vec{r}, \vec{p}]$

- ось, на котор. проецируем
- полюс, отн. кот. считаем

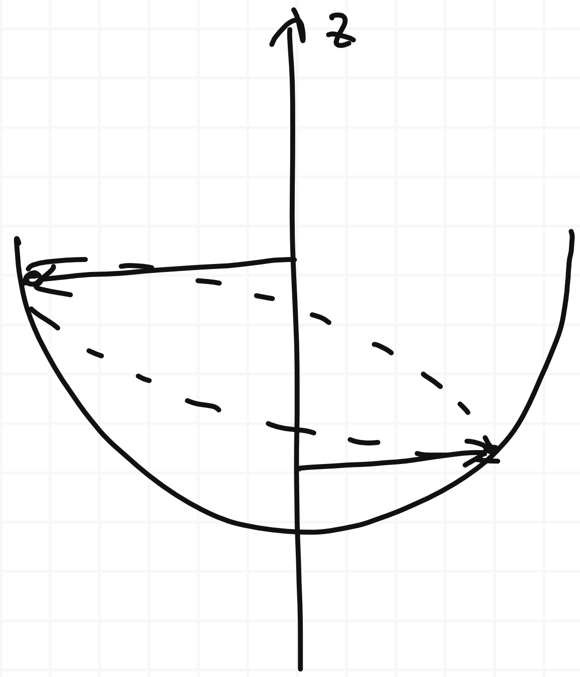


$$\vec{L}_{oz} = \vec{L}_{o'z}$$

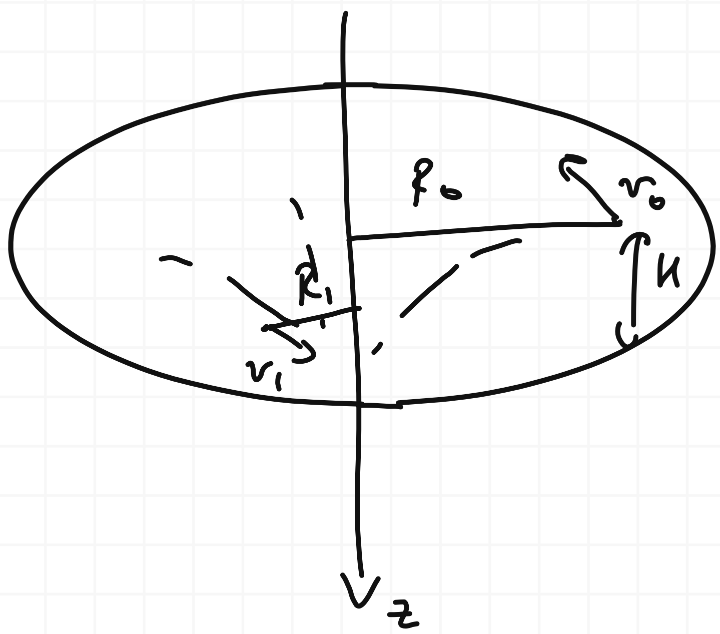
$$[\vec{r_o}, \vec{p}] = [\vec{r_{o'}}, \vec{p}]$$

$$\vec{L_o} - \vec{L_{o'}} = [\underbrace{\vec{r_o} - \vec{r_{o'}}}_{\parallel OO'}, \vec{p}] \perp z$$

q.e.d.



N12 (2014)



$z = z_0 + \frac{A}{r^2}$

$R_0 = 50$ см

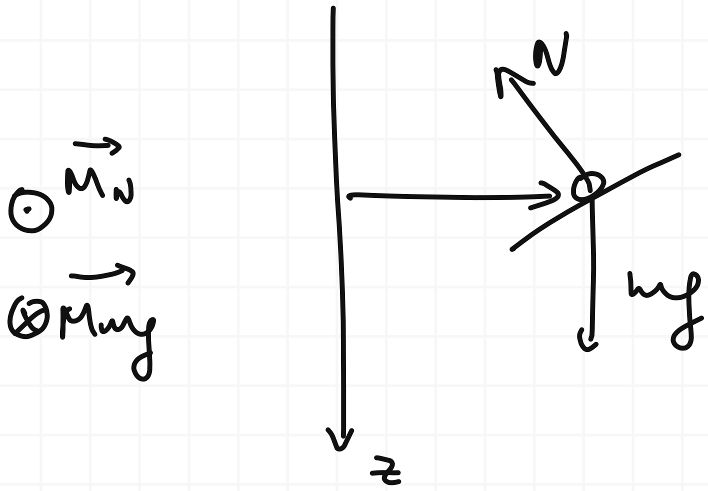
$v_0 = 5$ см

$\frac{v_z}{v_r} = \frac{dz}{dr} \ll 1$

$r = 10$ см

// ЗСМИ $\longrightarrow$ $M_z^{\Sigma} = 0 \Rightarrow L_z = const$

нет ударных сил $\searrow$ $\int_0^{\tau} M_z \, dt \underset{\tau \to 0}{\to} 0 \Rightarrow L_z \approx const$ //



M_N, M_{mg} – в горизонтальной плоскости

$\Rightarrow M^z_{внеш} = 0$

$L_z = const$

$m v_0 R_0 = m v r$ – ЗСМИ

$$\frac{1}{2} m v_r^2 + \frac{1}{2} m v_\varphi^2 + \cancel{\frac{1}{2} m v_z^2}^{\,0} - \frac{1}{2} m v_0^2 = mg\Delta z$$

$$\parallel$$

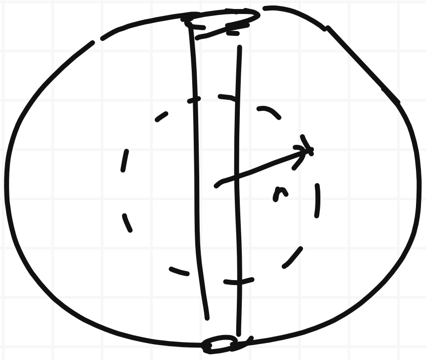
$$\frac{A}{r^2} - \frac{A}{R_0^2}$$

$$v_r^2 + v_\varphi^2 - v_0^2 = 2A\left(\frac{R_0^2 - r^2}{R_0^2 r^2}\right)$$

Теорема Гаусса

N13

$$\rho(r) = \frac{A}{r} \qquad \Phi = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$



$$\left.\begin{aligned} &\vec{E} \sim -\vec{g} \\ &q \sim m \\ &\varepsilon_0 \leftrightarrow \frac{1}{4\pi G} \end{aligned}\right\} \to \Phi_g = -4\pi G m_{внутр}$$

$$4\pi G \cdot \int_0^r \rho(x)\, 4\pi x^2 dx \overset{4\pi G}{=} \int \frac{A}{\cancel{x}} 4\pi x^{\cancel{2}} dx \overset{4\pi G}{=} \int 4\pi A x\, dx$$

Законы Кеплера

1 з.к. планета движется по эллипсу в 1 из F нах Солнце

2 з.к. $\sigma = const$

$$\left[\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right| = = \frac{[\vec{r}, d\vec{r}]}{dt} = 2\sigma = \ell$$

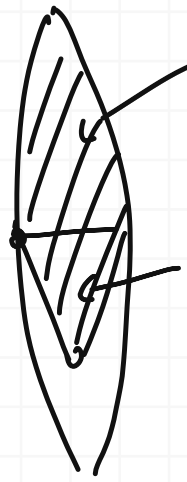
планета в време $\Rightarrow$ II з.к.

3 з.к. $\frac{T^2}{a^3} = const = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$

Космич. скорости

$v_I = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ $v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

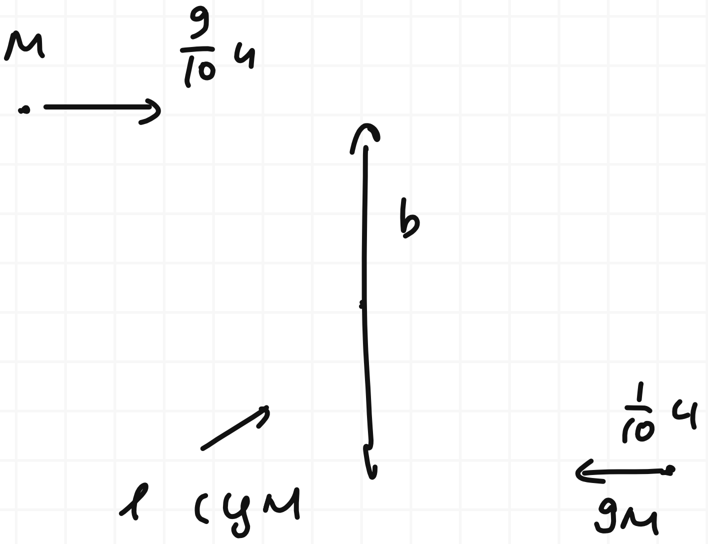
$2a = -\frac{GMm}{E}$



$S_{всего} = \pi ab$

↑

$T_I = 84$ мин

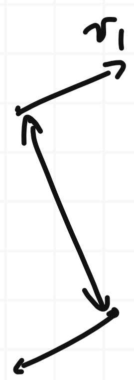


в цм

$\frac{Mv_1 - 9Mv_2}{10M} = 0$

$v_1 = 9v_2$

$W_1 = \frac{1}{2}M\frac{81}{100}u^2 + \frac{1}{2}9M\frac{1}{100}u^2 = \frac{9}{20}Mu^2$



$R_p = 40$ а.е.

$W_1 = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}9Mv_2^2 - \frac{GM\cdot 9M}{R_p^2}$

$L_1 = M\cdot\frac{9}{10}u\cdot\frac{1}{2}b + 9M\cdot\frac{1}{10}u\cdot\frac{1}{2}b$

$L_2 = Mv_{1\varphi}\frac{1}{2}R_p + 9Mv_{2\varphi}\frac{1}{2}R_p$

причём точка, вокруг которой отн. ц. масс

$W_1 = W_2 \quad , \quad L_1 = L_2$

$$\cancel{m}\frac{9}{10}u\cancel{\tfrac{1}{2}}b + 9\cancel{m}\frac{1}{10}u\cdot\cancel{\tfrac{1}{2}}b = \cancel{m}v_{1\varphi}\cancel{\tfrac{1}{2}}R_p + 9\cancel{m}v_{2\varphi}\cancel{\tfrac{1}{2}}R_p$$

$$\frac{9}{5}ub = (v_{1\varphi} + 9v_{2\varphi})R_p$$

12:20 Вт
Отарше

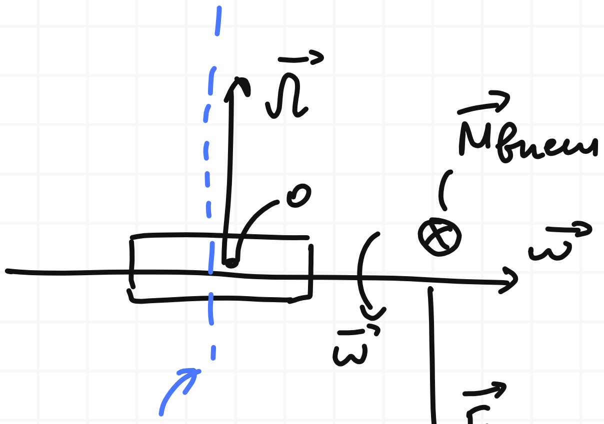
$$\frac{9}{20}u^2 = \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}9v_2^2 - \frac{9GM^2}{R_p^2}$$

$$\cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{R_0}} = \frac{G\cancel{m}M}{R_0^{\cancel{2}}} \qquad v^2R_0 = \underline{\underline{GM}}$$

$$b\cdot u = R_p\cdot v_{\text{отн}}$$

29.10.2024

Приближенная теория гироскопа



мы не делали к $\vec{L}$ добавку относ. этой оси, поэтому „приближенная“

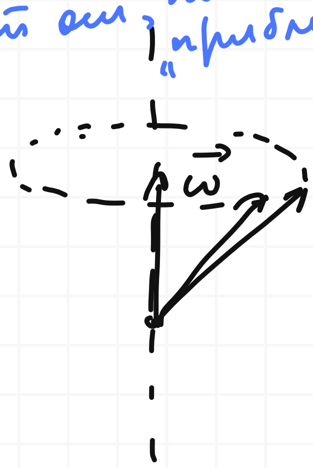
$\omega \gg \Omega$

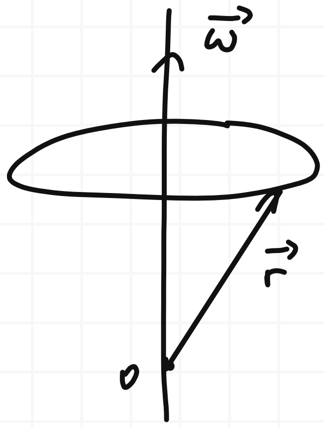
$|\vec{L}_{\parallel}| \gg |\vec{L}_{\Omega}|$

$\vec{L} = J\vec{\omega}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{внеш}$$

$d\vec{L} = \vec{M}_{внеш}\,dt$





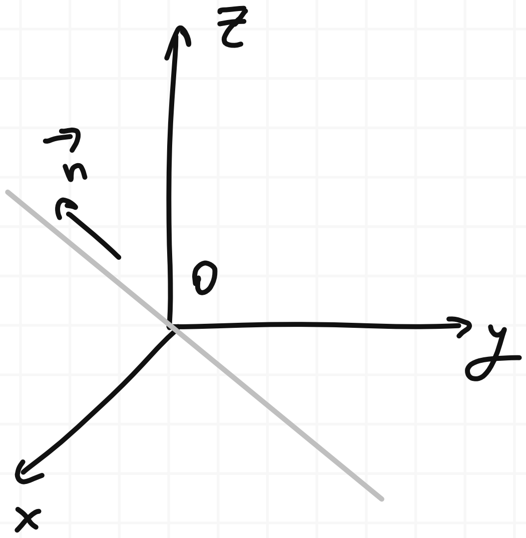
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{\vec{A}} = \vec{\omega} \times \vec{A}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \\ \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{внеш} \end{cases} \Rightarrow \vec{M}_{внеш} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

// прецессия $\overset{?}{=}$ вращение вектора момента импульса



относит. произв. оси, прох. через (·)0

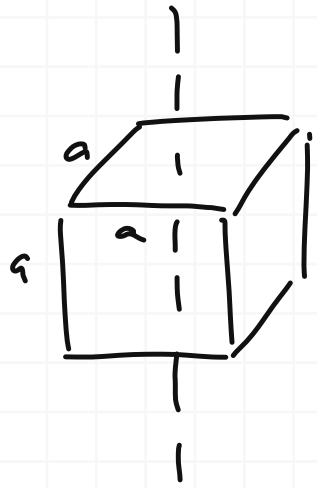
$$J_0 = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma$$

эллипсоид инерции (вращения)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$x = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{J_0}};\quad y = \frac{\cos\beta}{\sqrt{J_0}};\quad z = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{J_0}}$$

$$a = 1/\sqrt{J_x};\quad b = 1/\sqrt{J_y};\quad c = 1/\sqrt{J_z}$$



эллипсоид вращения куба — сфера

//можно взять вопрос по выбору про китайский волчок
объяснить почему крутится и переворачивается
сделать колич. оценку (ω можно по виду определять) //

1) $$\hat{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}Mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}Mr^2+MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}Mr^2+MR^2 \end{pmatrix}$$

2) $\vec{L} = \hat{J}\vec{\omega_z}$ $\quad \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \hat{J}\begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}$

$$\vec{L} = -\vec{i}\,\frac{1}{2}Mr^2\omega + \vec{k}\left(\frac{1}{4}Mr^2 + MR^2\right)$$

// $\dot{\vec{i}} = \vec{\Omega} \times \vec{i}$

$$\dot{\vec{L}} = -\frac{1}{2}Mr^2\omega R\vec{j} = mg\dot{R}$$

2024-11-01

$$d\vec r = d\vec\varphi \times \vec r$$

$$\vec v = \vec v_c + \vec\omega \times \vec r$$

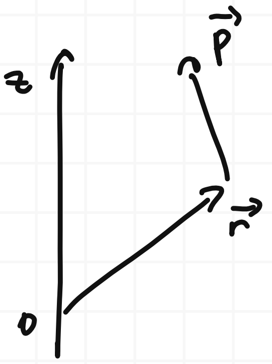
вектор угловой скорости не зависит от выбора начала отсчета

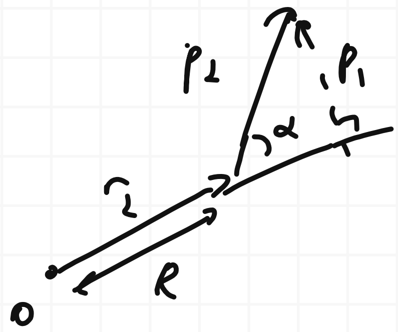
§9.3. Момент импульса и момент инерции $\underbrace{\text{относительно оси}}_{\text{проекц. } \vec L \text{ на эту ось}}$

$$\vec L = \vec r \times \vec p$$

$$\vec r = \vec r_\parallel + \vec r_\perp$$

$$\vec p = \vec p_\parallel + \vec p_\perp$$





$$\vec L = \vec r \times \vec p = \cancel{r_\parallel \times p_\parallel}_{\to 0} + \underbrace{r_\parallel \times p_\perp}_{\perp z} + \underbrace{r_\perp \times p_\parallel}_{\perp z} + r_\perp \times p_\perp$$

$\vec L_0 = \vec r_\perp \times \vec p_\perp$ (отн. оси)

$$L_z = (\vec r_\perp \times \vec p_\perp)_z = r_\perp p_\perp \sin\alpha = m|r_\perp| v_\perp \sin\alpha = mRv_\perp \sin\alpha$$

$\underbrace{\vec p_\perp}_{}= m\vec v_\perp$ $\qquad |\vec p_1| = p_\perp \sin\alpha = m v_\perp \sin\alpha$

составляющая $p_\perp$, $\perp$ радиус-вектору

$v_1 = v_\perp \sin\alpha$ описывает вращение точки вокруг оси по окружности радиуса R, так что $v_1 = \omega R$

и $|p_1| = m v_\perp \sin\alpha = m\omega R$

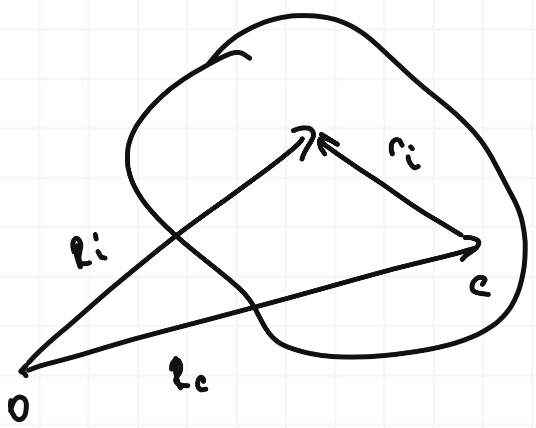
$$L_z = mR^2\omega$$

9.3.4. центральный момент инерции

$$I_x = \int (y^2 + z^2)\,dm$$
$$I_y = \int (x^2 + z^2)\,dm \qquad I_x + I_y + I_z = 2\int (x^2 + y^2 + z^2)\,dm = 2 I_0$$
$$I_z = \int (x^2 + z^2)\,dm$$

9.3.5 $\quad I = I_c + mR^2$

9.6. Момент импульса относительно произвольной точки



$$\vec{R_i} = \vec{R_c} + \vec{r_i}$$
$$\vec{V} = \vec{V_c} + \vec{v_i}$$

$$\vec{L_0} = \sum m_i \vec{R_i} \times \vec{V_i} = \sum m_i \vec{R_c} \times \vec{V_i} + \sum m_i \vec{r_i} \times \vec{V_i} =$$
$$= \vec{R_c} \times \left(\sum_i m_i \vec{V_i}\right) + \underbrace{\sum m_i \vec{r_i} \times \vec{v_i}}_{= \vec{L'}} + \sum m_i \vec{r_i} \times \vec{V_c} =$$

$$\left[\sum_i m_i \vec{r_i} = 0 \text{ по def ц. масс}\right]$$

момент импульса тела относит. ц. масс

$$= m \vec{R_c} \times \vec{V_c} + \vec{L'}$$

$$\vec{L_0} = \vec{R_c} \times \vec{P_c} + \vec{L'} \; ; \quad \vec{P_c} = m\vec{V_c}$$

аналог. т. Кёнига

9.7. Момент импульса тела (общий случай)

9.7.1. Тензор инерции

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r_i} \times \vec{v_i} \quad \text{— мом. имп. отн. ц масс}$$

при вращ. тела отн. неподвижной точки: $\vec{v_i} = \vec{\omega} \times \vec{r_i}$

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r_i} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_i}) = \sum_i m_i \vec{\omega} \underbrace{(\vec{r_i}, \vec{r_i})}_{= r_i^2} - \sum_i m_i \vec{r_i} (\vec{\omega}, \vec{r_i}) =$$
$$= \sum_i m_i \left(\vec{\omega}\, r_i^2 - \vec{r_i}(\vec{\omega}, \vec{r_i})\right)$$

В прямоуг. координатах:

$$L_x \overset{?}{=} \sum_i m_i\left((x_i^2+y_i^2+z_i^2)\omega_x-(x_i\omega_x+y_i\omega_y+z_i\omega_z)x_i\right)=$$
$$=\left(\sum_i m_i(y_i^2+z_i^2)\right)\omega_x+\left(\sum_i m_i(-m_ix_iy_i)\right)\omega_y+\left(\sum_i(-mx_iz_i)\right)\omega_z$$

Так,

$$L_x=\left(\sum m_i(y_i^2+z_i^2)\right)\omega_x+\left(-\sum m_ix_iy_i\right)\omega_y+\left(-\sum m_ix_iz_i\right)\omega_z$$
$$L_y=\left(-\sum m_iy_ix_i\right)\omega_x+\left(\sum_i m_i(z_i^2+x_i^2)\right)\omega_y+\left(-\sum m_iy_iz_i\right)\omega_z$$
$$L_z=\left(-\sum m_iz_ix_i\right)\omega_x+\left(-\sum_i m_iz_iy_i\right)\omega_y+\left(\sum m_i(x_i^2+y_i^2)\right)\omega_z$$

$$L_x=I_{xx}\omega_x+I_{xy}\omega_y+I_{xz}\omega_z$$
$$L_y=I_{yx}\omega_x+I_{yy}\omega_y+I_{yz}\omega_z$$
$$L_z=I_{zx}\omega_x+I_{zy}\omega_y+I_{zz}\omega_z$$

$$\begin{pmatrix}L_x\\L_y\\L_z\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}I_{xx}&I_{xy}&I_{xz}\\I_{yx}&I_{yy}&I_{yz}\\I_{zx}&I_{zy}&I_{zz}\end{pmatrix}}_{\hat{I}}\begin{pmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{pmatrix}$$

$\vec{L}=\hat{I}\vec{\omega}$ $\qquad$ $\hat{I}$ – тензор инерции

I_{ii} – момент инерции отн. оси i

недиагональные моменты инерции := центробежные моменты инерции

$I_{ik}=I_{ki}$ т.е. тензор инерции симметричен.

9.7.2. Момент импульса относит. произвольной оси

$\vec{\omega}=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$

$\vec{L}=\hat{J}\vec{\omega}$

$L_o=(\hat{I}\vec{\omega})_o \quad = \quad L_o=\dfrac{\vec{\omega}\vec{L}}{\omega}=I_o\omega$

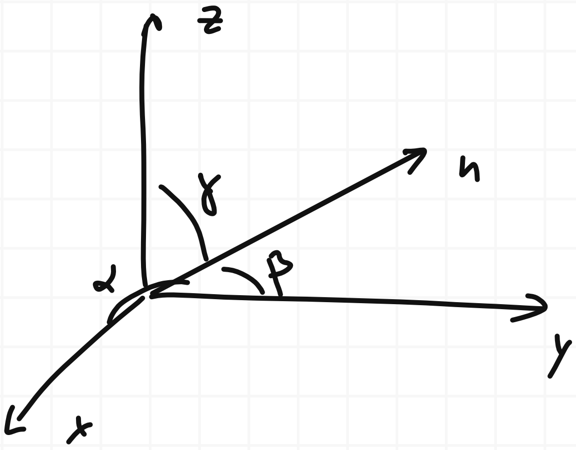
$I_o=\dfrac{\vec{\omega}\vec{L}}{\vec{\omega}^2}=\dfrac{1}{\omega^2}(\vec{\omega},\hat{I}\vec{\omega})$ $\qquad$ Л $\vec{n}:=\dfrac{\vec{\omega}}{\omega}$

$I_o=(\vec{n},\hat{I}\vec{n})$

$$I_0 = (n, \hat{I} n) = \underbrace{(n_x, n_y, n_z)} \begin{pmatrix} I_{xx} n_x + I_{xy} n_y + I_{xz} n_z \\ I_{yx} n_y + I_{yy} n_y + I_{yz} n_z \\ I_{zx} n_x + I_{zy} n_y + I_{zz} n_z \end{pmatrix} =$$

почему
1×3, а не 3×1

$$= I_{xx} n_x^2 + I_{yy} n_y^2 + I_{zz} n_z^2 + 2 I_{xy} n_x n_y + 2 I_{yz} n_y n_z + 2 I_{zx} n_z n_x$$



$n_x = n\cos\alpha = \cos\alpha$

$n_y = \cos\beta$

$n_z = \cos\gamma$

$n^2 = 1 \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$$I_0 = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma + 2 I_{xy}\cos\alpha\cos\beta + 2 I_{yz}\cos\beta\cos\gamma + 2 I_{zx}\cos\gamma\cos\alpha$$

9.7.3. Эллипсоид инерции. Главные оси инерции

$\rho = \frac{n}{\sqrt{I_0}}$ $\quad I_0$ — отн. оси O; ось $O \uparrow\uparrow \vec{n}$

$$I_{xx}\rho_x^2 + I_{yy}\rho_y^2 + I_{zz}\rho_z^2 + 2 I_{xy}\rho_x\rho_y + 2 I_{yz}\rho_y\rho_z + 2 I_{zx}\rho_z\rho_x$$

Симметричная матрица средствами подходящего ортогонального преобразования может быть приведена к диагональному виду

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

оси данной специальной системы координат наз-ся главными осями инерции

$I_{xx} = I_x \quad I_{yy} = I_y \quad I_{zz} = I_z$

$I_x\rho_x^2 + I_y\rho_y^2 + I_z\rho_z^2 = 1$ ур-е эллипсоида

$\rho^2 = \frac{n^2}{I_0}$; $I_0 = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma$

? Таким образом, вращ. св-ва твердого тела полностью характеризуются тремя главными моментами инерции.

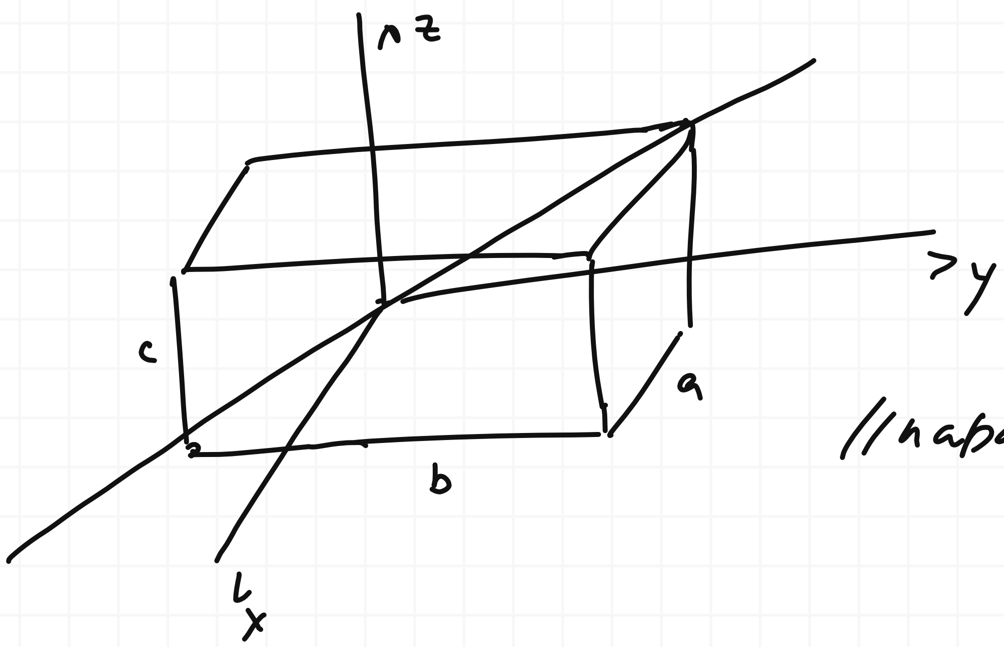
$$\vec{L} = \vec{i} I_x \omega_x + \vec{j} I_y \omega + \vec{k} I_z \omega$$

$I_1 = I_2 = I_3$ — шаровой волчок

$I_1 = I_2 \neq I_3$ — симметрич. волчок

$I_1 = I_2,\ I_3 = 0$ — ротатор

$I_1 \neq I_2 \neq I_3$ — ассиметричный волчок



?

$$I_x = \frac{m}{12}(b^2+c^2)$$
$$I_y = \frac{m}{12}(a^2+c^2)$$
$$I_z = \frac{m}{12}(a^2+b^2)$$

?

// параллелепипед не понял

$$\cos\alpha = \frac{a}{d};\ \cos\beta = \frac{b}{d};\ \cos\gamma = \frac{c}{d};\ d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$I_0 = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma =$$
$$= \frac{m}{12d^2}\left(a^2(b^2+c^2) + b^2(a^2+c^2) + c^2(a^2+b^2)\right) = \frac{m}{c}\,\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

9.8. Кинетическая энергия вращения

$$K_{n.c.} = \frac{1}{2}m v_c^2 + K$$

$$\vec{v_i} = \vec{\omega} \times \vec{r_i}$$

$$K = \sum \frac{m_i}{2}(\vec{\omega} \times \vec{r_i})^2$$

$$(\vec{\omega} \times \vec{r_i})^2 = \omega^2 r_i^2 \sin^2\varphi = \omega^2 r_i^2(1-\cos^2\varphi) = \omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega};\vec{r_i})^2$$

$$K = \sum \frac{m_i}{2}\left(\omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega};\vec{r_i})^2\right) = \frac{1}{2}\vec{\omega}\sum m_i\left(\vec{\omega} r_i^2 - (\vec{\omega};\vec{r_i})\vec{r_i}\right) = \frac{1}{2}(\vec{\omega};\vec{L})$$

$$\vec L = \sum m_i\left(\vec\omega r_i^2 - (\omega \vec r_i)\vec r_i\right) = \sum m_i \vec r \times [\vec\omega \times \vec r_i] = \sum m_i [\vec r \times \vec v_i]$$

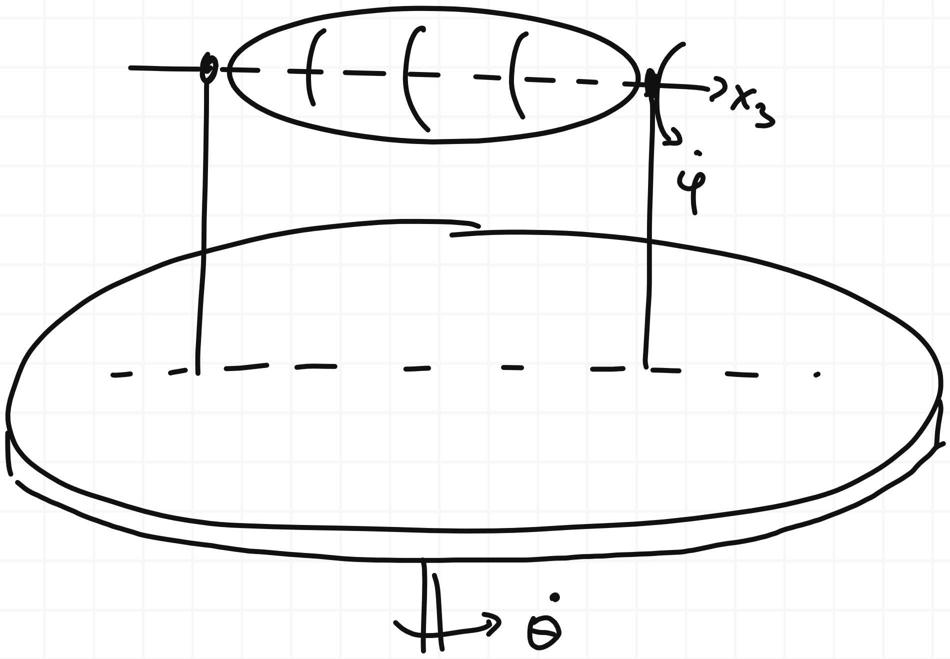
$$k = \frac{1}{2}(\vec\omega, \hat I \vec\omega)$$

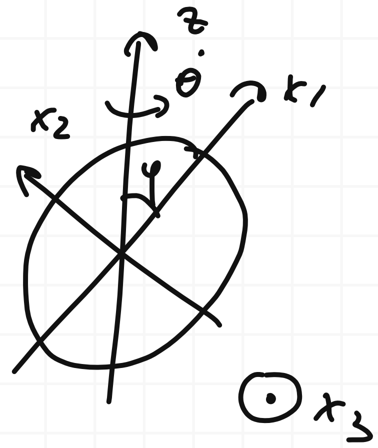
если x, y, z – главные оси инерции

$$k = \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2)$$

В общем случае при вращении тела его главные оси также совершают поворот в пространстве.

Пример:





x_1, x_2, x_3 – главные оси инерции

$\omega_1 = \dot\theta\cos\varphi \qquad \omega_2 = \dot\theta\sin\varphi \qquad \omega_3 = \dot\varphi$

$$k = \frac{1}{2}(I_1\cos^2\varphi + I_2\sin^2\varphi)\dot\theta^2 + \frac{1}{2}I_3\dot\varphi^2$$

9.9. Регулярная прецессия симметричного волчка

пусть на некоторое вращ. тело не действуют никакие внешние силы

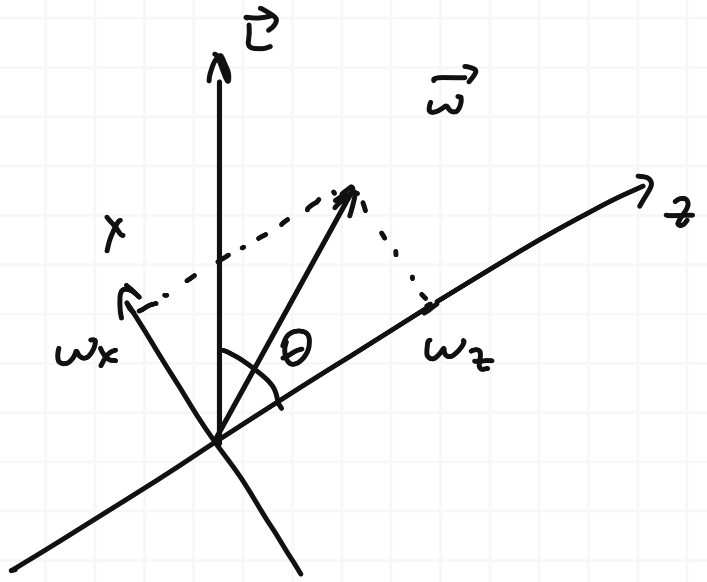
x, y, z – гл. оси инерции
z – ось симметрии
$\Rightarrow I_x = I_y \neq I_z$

x, y можно выбрать произв. в пл-ти $\perp z$

? Если вращение не совершается относит. одной из главных осей, то векторы момента импульса $\vec{L}$ и угловой скорости $\vec{\omega}$ не параллельны

$$\vec{L} = const \quad (\Sigma \vec{F}^{ext} = \vec{0}, \text{ ЗСМИ})$$

$\vec{\omega}$ совершает движение вокруг $\vec{L}$, поскольку точки тела (или и главные оси) поворачиваются вокруг $\vec{\omega}$



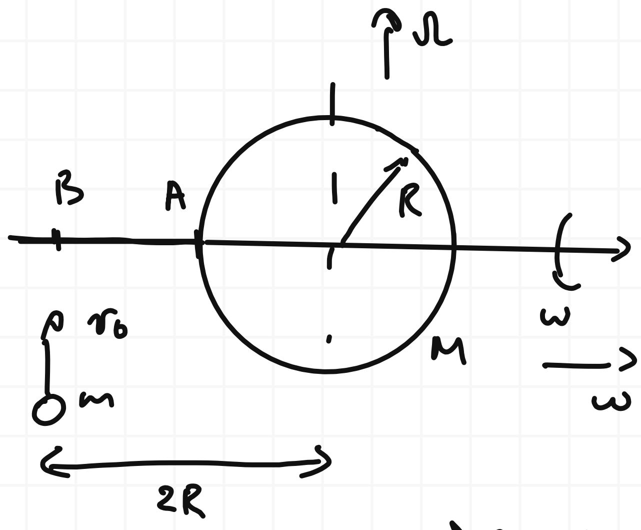
$$L_x = I_x \omega_x \qquad L_y = I_y \omega_y \qquad L_z = I_z \omega_z$$

О 11.

Гироскоп.

2753349AES

11.20



новая угл. скорость, вращ. отн. другой оси

ЗСИ: $mv_0 = Mu$

ЗСМИ: $mv_0 \cdot \cancel{2R} = \frac{\cancel{2}}{5}MR^2\Omega$

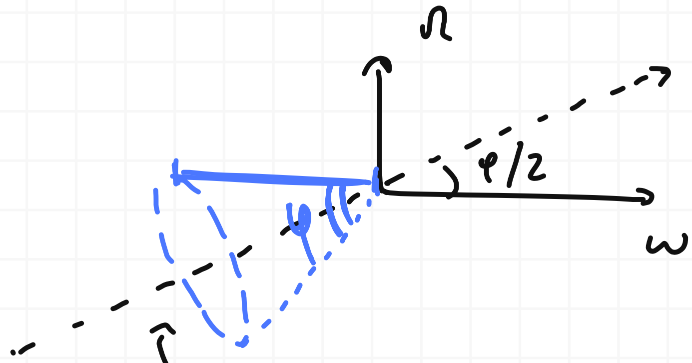
ЗСЭ: $\cancel{\frac{1}{2}}mv_0^2 + \cancel{\frac{1}{2}}\frac{2}{5}MR^2\omega^2 = \cancel{\frac{1}{2}}Mu^2 + \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{5}MR^2(\omega^2+\Omega^2)$

$u = \frac{m}{M}v_0$; $\Omega = \frac{5m}{M}\cdot\frac{v_0}{R}$

$m\cancel{v_0^2} + \cancel{\frac{2}{5}MR^2\omega^2} = \cancel{M}\cdot\frac{m^2}{M^2}\cancel{v_0^2} + \cancel{\frac{2}{5}MR^2\omega^2} + \frac{2}{5}\cancel{MR^2}\cdot\frac{25m^2}{M^2}\frac{\cancel{v_0^2}}{\cancel{R^2}}$

$\cancel{m} = \frac{m}{M}\cancel{m} + 10\frac{m}{M}\cancel{m}$

$1 = 11\frac{m}{M}$; $\underline{M = 11m}$; $\Omega = \frac{5\cancel{m}}{11\cancel{m}}\frac{v_0}{R} = \frac{5}{11}\frac{v_0}{R}$

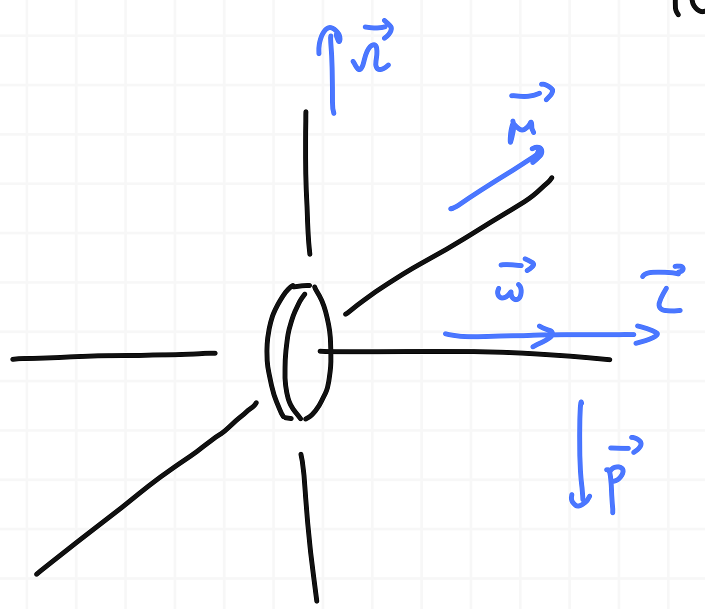


$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{5v_0}{11\omega R} = \frac{2}{11\cdot\cancel{8}010} = \frac{1}{110}$

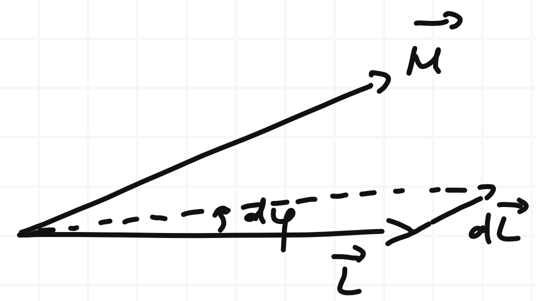
всё будет вращаться отн. этой оси
($\parallel \vec{\omega} + \vec{\Omega}$)

$\underline{\underline{\varphi}} = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{110}\right) = \underline{\underline{1{,}042^\circ \approx 1^\circ}}$

Гироскоп



$\dot{\vec{L}} = \vec{M}$; $d\vec{L} \parallel \vec{M}$

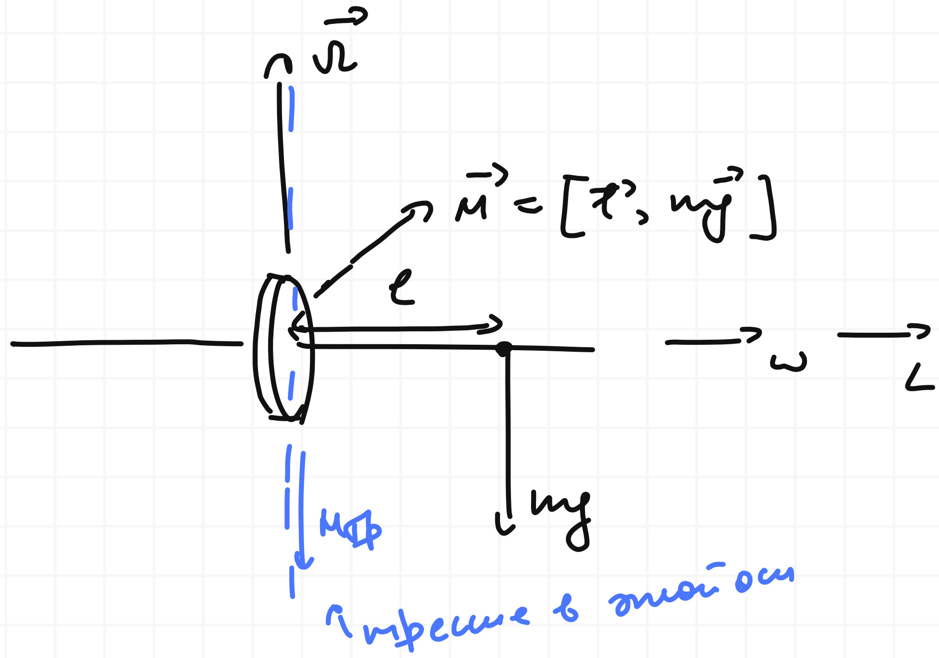


$d\varphi = \frac{dL}{L} = \frac{M\,dt}{L}$; $\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L}$ — угловая скорость прецессии

$\vec{M} = [\vec{\Omega}; \vec{L}]$ — основная формула гироскопа

// нутации – движение, чтобы прийти в уст. состояние.

<u>Т6</u> (с другими числами)



$m = 0{,}36$ кг

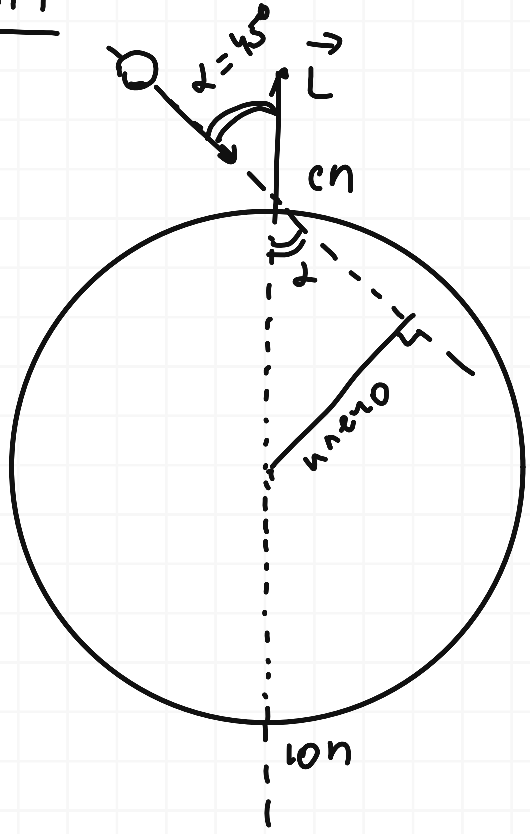
$\ell = 12$ см

$\Delta\varphi = 10^\circ$ 1 об рег пр.

$M_{mg} = mg\ell = \Omega L$; $L = \frac{mg\ell}{\Omega}$

$M_{тр} = \Omega_{тр} L = \frac{\Omega_{тр}}{\Omega} mg\ell = \frac{10^\circ}{360^\circ} \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}12 \ \ldots$

<u>11.7</u>



$m = 1000 т = 10^6$ кг

$v = 20 \frac{км}{с} = 2 \cdot 10^4 \frac{м}{с}$

$M = 6 \cdot 10^{24}$ кг

$\varphi - ?$

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = M_{\substack{удара \\ сила}} = F \cdot R \cdot \sin 45^\circ \\ m \frac{dv}{dt} = F \end{cases}$$

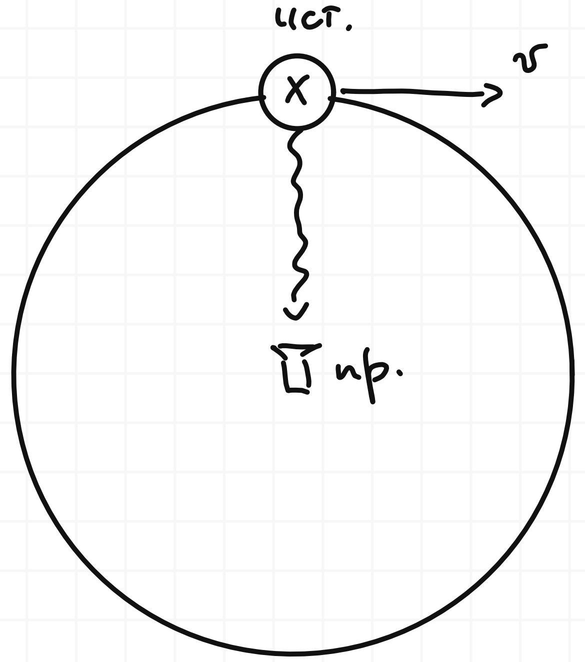
$$\frac{dL}{dt} = m \frac{dv}{dt} R \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} dL = L d\varphi \\ dL = \frac{1}{\sqrt{2}} mR dv \end{cases} \rightarrow \int d\varphi = \frac{mR}{\sqrt{2}L} \int dv \ ; \ \varphi = \frac{mvR}{\sqrt{2}L} = 1{,}3 \cdot 10^{-17} рад$$

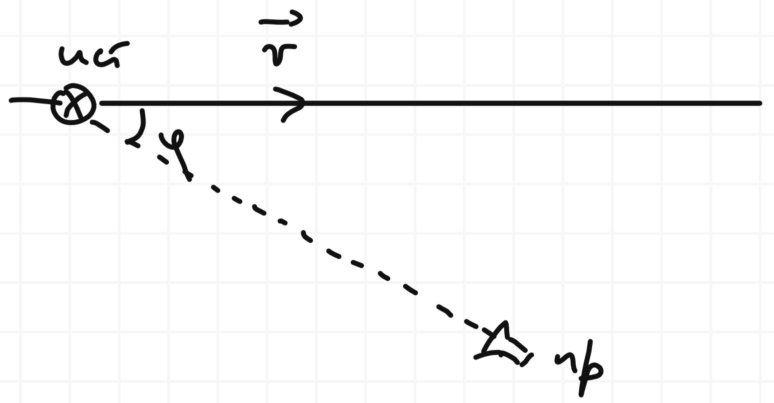
2024-11-12

S.

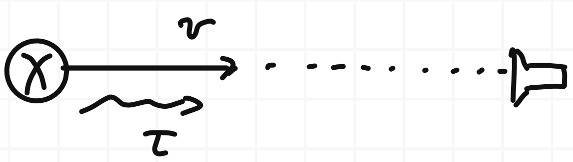
Релятивистский эффект Доплера



$$\omega = \omega_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$



$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v\cos\varphi}{c}}$$



$$t_1 = t_0 + \frac{l}{c}$$

$$t_2 = t_0 + \tau + \frac{l - v\tau}{c}$$

$$\Delta t = \tau\left(1-\frac{v}{c}\right)$$

$$\Delta x = v\tau$$

$$\underbrace{v_к}_{\text{кажущаяся}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v\tau}{\tau\left(1-\frac{v}{c}\right)} = \frac{v}{1-\frac{v}{c}}$$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{v}$$

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Def. ультрарелятивистская частица $E \gg mc^2 \Rightarrow E = pc$

$E_{0e} = m_e c^2 = 0{,}511$ МэВ — энергия покоя электрона

$E_{0p} = m_p c^2 = 937$ МэВ

$x_1 = ct$ $\qquad x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4$

$x_2 = x$ $\qquad \Delta S^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$

$x_3 = y$ $\qquad v_r = \dfrac{dx_\mu}{d\tau} = \left(\dfrac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \dfrac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \dfrac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \dfrac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$

$x_4 = z$

$$dS^2 = c^2 dt^2 - dr^2 = c^2 dt^2 - v^2 dt^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$dS^2 = c^2 d\tau^2 \Rightarrow d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\vec{p} = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \frac{mv_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{mv_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$

// пространство Минковского

// инвариантность сохр. величин

// на к/р и экзамене скорее всего будет что-нибудь на эту тему

<u>8.43</u>

2024-11-26

S

Вынужденные колебания

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F_0\cos\Omega t$$

$$\Big\Downarrow \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2,\quad \frac{\beta}{m} = 2\gamma,\quad \frac{F_0}{m} = f_0$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos\Omega t$$

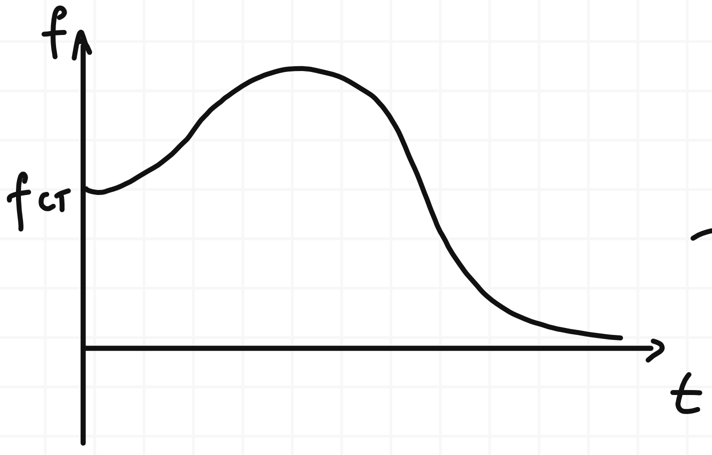
$x_ч = f\cos(\Omega t + \varphi)$ — частное решение

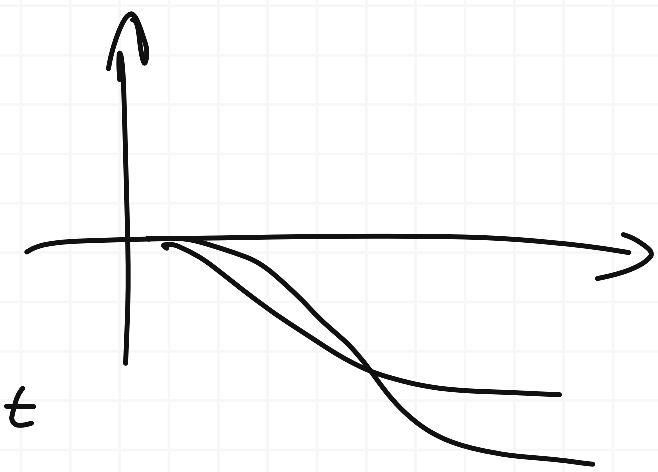
АЧХ — амплитудно-частотная характеристика — $f(\Omega)$

$$f(\Omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}$$

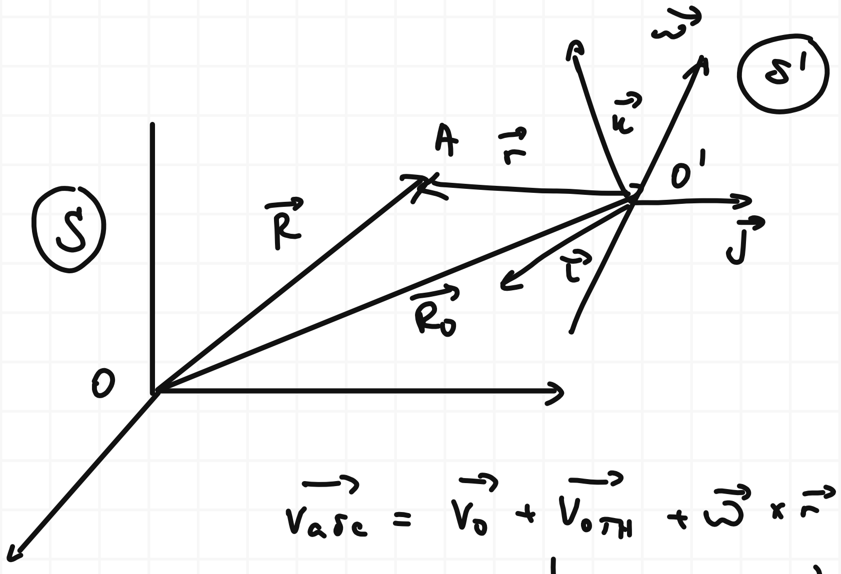
ФЧХ — фаза

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\gamma\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$





НеИСО



$$\vec{R} = \vec{R_0} + \vec{r} = \vec{R_0} + \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$$

$$\vec{V_{абс}} = \vec{V_0} + \dot{\vec{i}}x + \dot{\vec{j}}y + \dot{\vec{k}}z + \vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y} + \vec{k}\dot{z} =$$

$$= \vec{V_0} + \vec{V_{отн}} + x\cdot(\vec{\omega}\times\vec{i}) + y(\vec{\omega}\times\vec{j}) + z(\vec{\omega}\times\vec{k}) =$$

$$= \vec{V_0} + \vec{V_{отн}} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{V_{абс}} = \vec{V_0} + \underbrace{\vec{V_{отн}} + \vec{\omega}\times\vec{r}}_{\vec{V_{пер}}}$$

$v_{абс} = v_{отн} + v_{пер}$

$v_{пер} = v_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{a}_{абс} = a_{отн} + a_{пер} + a_{кор}$

$\vec{a}_{пер} = \vec{a}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$

$\vec{a}_{кор} = 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_{отн}$

$m\vec{a}_{абс} = \vec{F}$

$m\vec{a}_{отн} = \vec{F} + \vec{F}_{пи}$

$F_п = -m\vec{a}_0$

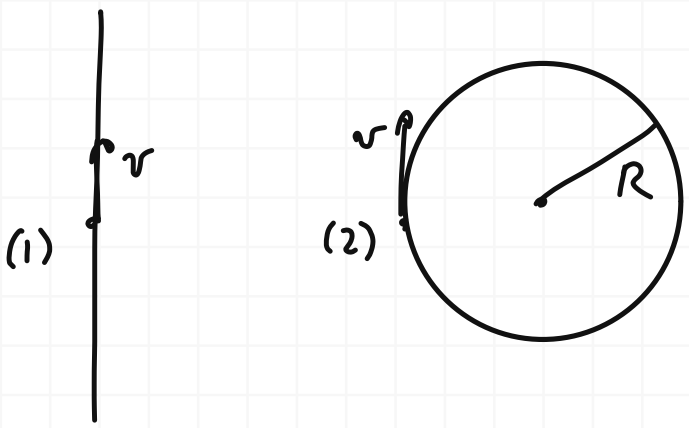
$F_{цб} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m\omega^2 \vec{r}_\perp$ (центробежн. сила инерц.

$F_{кор} = 2m\vec{v}_{отн} \times \vec{\omega}$
(кориолисова сила инерции)

на к/р: СТО, гарм. колеб. (вын. / затух), НИСО, гироскопы

не забывать про настоящие силы!

$\omega = \frac{v}{R}$

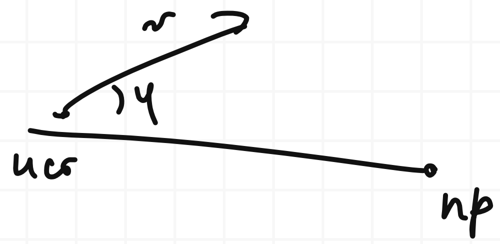


$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

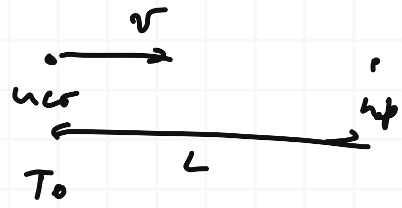
ист. удал. от приемника

приним. сигнал

подаваемый



$$\omega = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}\,\omega_0$$



$$t_1 = t_0 + \frac{L}{v}$$

$$t_2 = t_0 + T_0 + \frac{L - \Delta L}{v}$$

$$t_2 - t_1 = T_0 + \frac{\Delta L}{v} = T_0 +$$

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \quad T_0 +$$

Элементы теории упругости

$\sigma = \frac{F}{S}$ — напряж.

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$ ⟶ $\sigma = \varepsilon E$

$F = k\Delta l$

$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{ES}{l}$

з-н Гука

поперечные деформации

$\varepsilon_\perp = -\mu \varepsilon_\parallel \overset{\text{з-н Гука}}{=\!=\!=} -\mu \frac{\sigma}{E}$

(при малых деф.)

μ — коэф. Пуассона

ур-я трехосного напряжения

$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{\sigma_x}{E}$

$\left(\frac{\Delta l_x}{l_x}\right)_y = \frac{-\mu \sigma_y}{E} \qquad \left(\frac{\Delta l_x}{l_x}\right)_z = -\frac{\mu \sigma_z}{E}$

$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \left(\frac{\Delta l_x}{l_x}\right)_x + \left(\frac{\Delta l_x}{l_x}\right)_y + \left(\frac{\Delta l_x}{l_x}\right)_z$

$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E}$

плотность энергии при упр. деформации

$A = \int_0^{\Delta l} \frac{ES}{l} x\,dx = \frac{ES}{l}\frac{(\Delta l)^2}{2}$

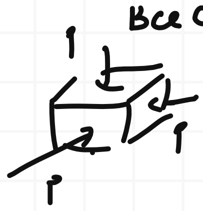
$U = \frac{E\varepsilon^2}{2} V = \frac{E\varepsilon^2}{2} SL$

$\underline{\underline{u}} = \frac{U}{V} = \underline{\underline{\frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}}}$

Всестороннее и одностороннее сжатие

$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

всестороннее сжатие



$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{p}{E}(1-2\mu)$

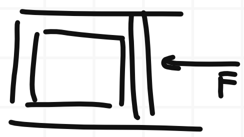
$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{k}$; $k = \frac{E}{3(1-2\mu)}$

если тело несжим., $\Delta V = 0$

$\underline{\underline{\mu = \frac{1}{2}}}$

$\mu \in (0; \frac{1}{2}]$ в обыч. случае

одностор. сжатие



$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$

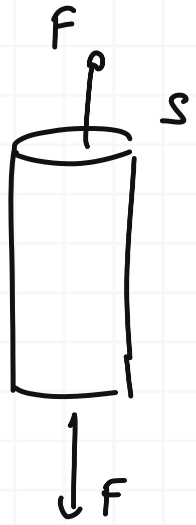
$\varepsilon_y = \ldots = 0$; $\varepsilon_z = \ldots = 0$

$\sigma_y + \sigma_z = \frac{2\mu}{1-\mu}\sigma_x$

$\varepsilon_x = \frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{1-\mu}\frac{\sigma_x}{E}$

6. 1. 2024

Упругость
(семинар Овчинкина)



$\sigma = T = \frac{F}{S}$ $\quad \left[\frac{Н}{м^2} = Па\right]$ напряжение

$F = k\Delta\ell$; $\Delta\ell = \ell - \ell_0$; $\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} \approx \frac{\Delta\ell}{\ell}$

$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{k\Delta\ell}{S}\cdot\frac{\ell}{\ell} = \underbrace{k\frac{\ell}{S}}_{E}\varepsilon$

$\sigma = T = \varepsilon E$

модуль Юнга

$P = -E$

$\frac{\Delta a}{a} = -\mu\frac{\Delta\ell}{\ell} = -\mu\varepsilon = -\mu\frac{\sigma}{E}$

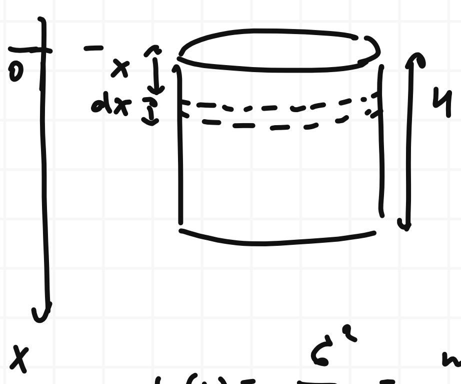
//

13.7

H, ρ, S
(лёс)

u – ?

$\frac{u_2}{u}$ – ?



$dm = \rho dV = \frac{m}{HS}Sdx = \frac{m}{H}dx$

$P = \rho g x = \frac{m}{HS}gx = \frac{mg}{HS}x = \sigma(x)$
(давл.)

$u(x) = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{m^2g^2x^2}{H^2S^2\,2E}$

$U = \int_0^V u\,dV = \int u\,S\,dx = \frac{m^2g^2}{2H^2SE}\int_0^H x^2dx = \frac{P^2}{2ESH^{\cancel{2}}}\cdot\frac{H^3}{3} = \frac{HP^2}{6ES}$

//

$\sigma_2 = \rho g x + \frac{mg}{S} = \frac{mg}{HS}x + \frac{mg}{HS}H = \frac{mg}{HS}(H+x)$

$u_2(x) = \frac{m^2g^2(H+x)^2}{H^2S^2\cdot 2E}$

$U_2 = \int_0^V u_2\,dV = \int_0^H u_2 S\,dx = \frac{m^2g^2}{}$

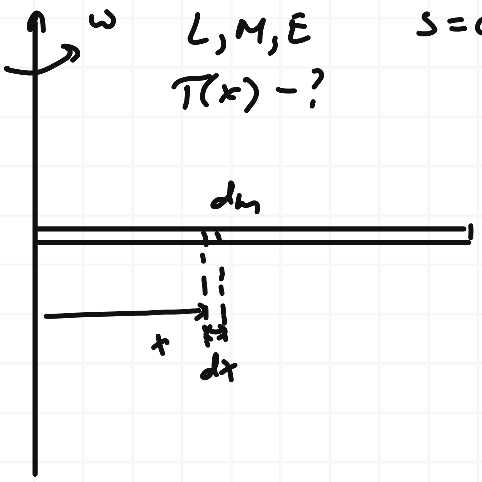
хз, объёс так и делает, он масштаб. цилиндр и вычитает

$$u_1 = \frac{(2m)^2 g^2\, 2H}{6ES} - \frac{m^2 g^2 H}{6ES} = 7u$$

13.33 и 37

L, M, E $\quad$ $S = const$

$T(x) - ?$



$$dF = dm\,\omega^2 x = \omega^2 \frac{M}{L} x\,dx$$

$$F(x) = \frac{M}{L}\omega^2 \int_x^L x\,dx = \frac{M\omega^2}{2L}(L^2 - x^2)$$

почему такие пределы???

$$T(x) = \frac{F(x)}{S} = \frac{M\omega^2}{2LS}(L^2 - x^2) \xrightarrow{M = \rho L S} \frac{\rho L S}{2LS}\omega^2 (L^2 - x^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\rho\omega^2 (L^2 - x^2)$$

осталось найти полное удлинение

$\Delta L - ?$

$$\underbrace{dx}_{\text{недеформ}} \longrightarrow \underbrace{dL}_{\text{удлинение } dx}$$

$$dL = \frac{T(x)}{E}dx$$

$$\Delta L = \int_0^L \frac{T(x)}{E}dx = \frac{\rho\omega^2}{2E}\int (L^2 - x^2)\,dx =$$

$$= \frac{\rho\omega^2}{2E}\left(L^3 - \frac{L^3}{3}\right) = \frac{\rho\omega^2 L^3}{3E}$$

13.34

$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - ?$ (стержень сорвался с оси)

$\Delta L = \frac{\rho\omega^2 L^3}{3E}$ $\qquad$ $\omega = const$ ← th. Эйлера

до обрыва $\varepsilon_1 = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\rho\omega^2 L^2}{3E}$

$$\varepsilon_2 = \frac{\rho\omega^2 \left(\frac{L}{2}\right)^2}{3E}$$

потому что стержень вращ. утла относит. ц. масс и каждая половинка растянут. независимо под действием ω

13.37

$R = 280$ км

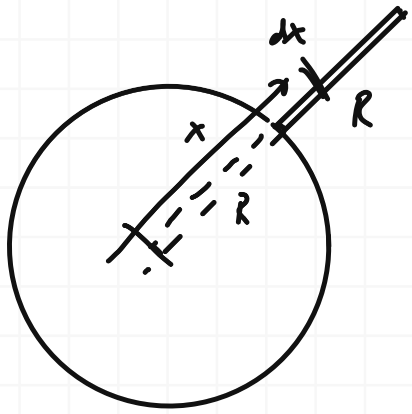
$g_0 = 0,24 \ \frac{м}{с^2}$

из титана

$\rho = 4,5 \ \frac{г}{см^3}$

$E = 1,12 \cdot 10^{11}$ Па

δx – ?



// Ti добывают в России и стабильно поставляют в штаты, несмотря на международные отн. //

$$dF = \frac{\gamma M dm}{x^2} = \frac{g_0 R^2}{x^2} \rho S dx$$

// $dm = \frac{m}{R} dx \frac{S}{S}$ //

$$dT = \frac{dF}{S} = \frac{g_0 R^2}{x^2} \rho dx$$

$$T(x) = g_0 R^2 \rho \int_x^{2R} \frac{dx}{x^2} = g_0 R^2 \rho \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2R} \right) = \rho g_0 \left(\frac{R^2}{x} - \frac{R}{2} \right)$$

какой физический смысл модуля юнга?

$$\frac{\delta(dx)}{dx} = \frac{T(x)}{E} \rightarrow \delta x = \int_R^{2R} \delta(dx) = \frac{g_0 R \rho}{E} \int_R^{2R} \left(\frac{R\,dx}{x} - \frac{dx}{2R} \right) =$$

$$= \frac{g_0 R^2 \rho}{E} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) \approx 146 \text{ м}$$

// мотивашки и титановые лопатки ОМЗ //

13.49

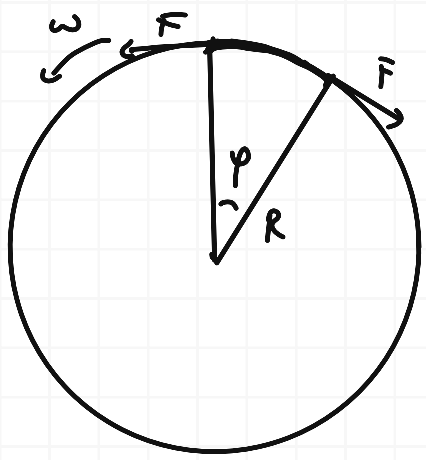
$n = 400 \ \frac{об}{с}$

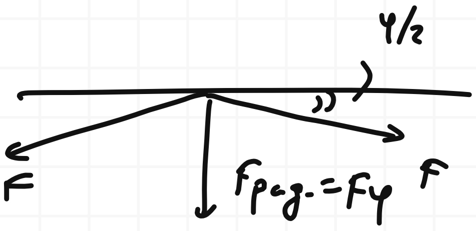
$R = 10$ см

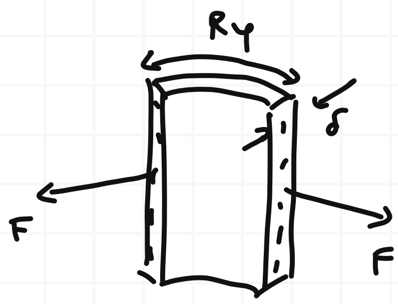
σ_D –?

$E = 2 \cdot 10^{11}$ Па

$\rho = 7,8$ г/см³







$T = \frac{F}{l\delta}$

$F_{рад} = m\omega^2 R$; $m = \rho \cdot R\varphi \cdot l\delta$

$F_{рад} = F\varphi = T \cancel{l\delta} \cancel{\varphi} = (\rho R \cancel{\varphi} \cancel{l\delta}) \omega^2 R$

$T = \rho \omega^2 R^2 = \dots = 4,93 \cdot 10^8$ Па ← пред. прочн.

$T_{пч} > 4,9 \cdot 10^8$ Па

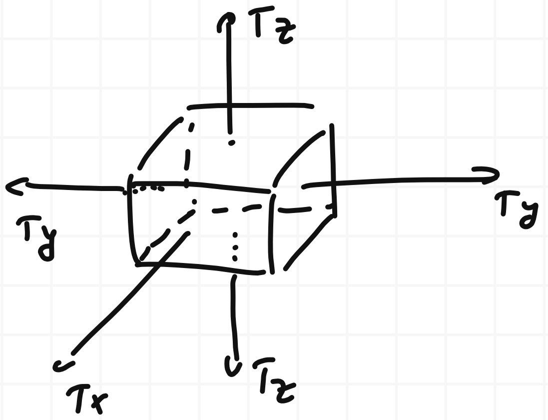
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{2\pi R} = \frac{T}{E} \longrightarrow \Delta l = \frac{2\pi R T}{E}$$

$$l + \Delta l = \pi(D + \Delta D)$$

$$\underline{\Delta D} = \frac{\Delta l}{\pi} = \frac{2RT}{E} = \underline{0{,}49 \text{ мм}}$$

// в сивухине хорошо написано

Всестороннее сжатие



// предел упругости

$$\varepsilon_x = \frac{T_x}{E} - \frac{\mu}{E}(T_y + T_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{T_y}{E} - \frac{\mu}{E}(T_x + T_z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{T_z}{E} - \frac{\mu}{E}(T_x + T_y)$$

сжатие:

(усилие со всех сторон одинаковое)

$$P_x = P_y = P_z = P = -T$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{P}{E}(1 - 2\mu)$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -\frac{3P}{E}(1 - 2\mu)$$

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{P}{k}$$

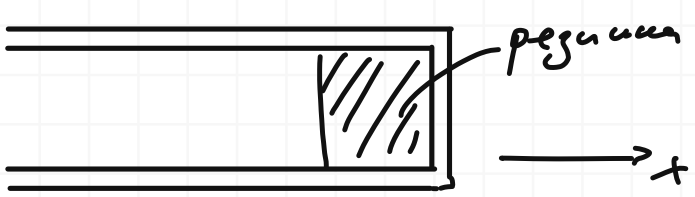
модуль всестор. сжатия

$$\underbrace{k}_{} = -\frac{P}{\Delta V} = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

по опр положит. величина $\Rightarrow \mu < \frac{1}{2}$

Одностороннее сжатие

$$\Delta y = \Delta z = 0$$



$$\begin{cases} T_y - \mu(T_x + T_z) = 0 \\ T_z - \mu(T_x + T_y) = 0 \end{cases} \to \quad T_y = T_x \frac{\mu}{1-\mu} \quad T_z = T_x \frac{\mu}{1-\mu}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{T_x}{E} - \frac{\mu}{E} T_x \frac{2\mu}{1-\mu} = \frac{T_x}{E}\left(1 - \frac{2\mu}{1-\mu}\right) = \frac{T_x}{E} \cdot \frac{1-\mu-2\mu^2}{1-\mu}$$

$E' = E \frac{1-\mu}{1-\mu-2\mu^2}$ – модуль одностороннего сжатия

13.18.

$\rho = 0{,}917\ г/см$

$E = 2{,}8 \cdot 10^{11}$ дин/см^3

$\mu = 0{,}3$

всестороннее сжатие

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{3P}{E}(1-2\mu)$$

$$V_0 = \frac{m}{\rho_0}\ ;\ V = \frac{m}{\rho}\ ;\ \Delta V = m\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) = m\left(\frac{1}{\rho} - 1\right)$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{m(1-\rho)}{\rho}$$

ответ

$P = 1{,}5 \cdot 10^3$ па //дохуя

13.41 (нерадивый студент согнул линейку в кольцо)

$L = 1м$

$b = 6 см$

$d = 1мм$

$E = 2 \cdot 10^{11}$ Па

A - ?

$L + \Delta L = 2\pi(R + x)$

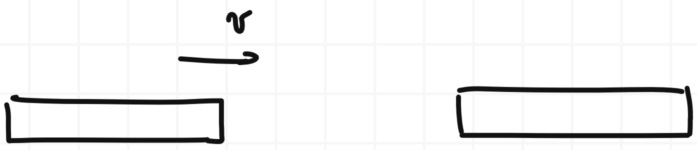
$L = 2\pi R$

$$T(x) = \frac{2\pi x}{L} E$$

$$u(x) = \frac{T^2}{2E} = \frac{4\pi^2 x^2 E^2}{2E L^2} = \frac{2\pi^2 E x^2}{L^2}$$

$$U = 2\int_0^{d/2} \frac{2\pi^2 E}{L^2} x^2 \cdot 2\pi(R+x) b \cdot dx = \frac{4\pi^3 E b}{L^2} \int_0^{d/2} (\underset{R}{\underbrace{R+x}}) x^2 dx \approx \frac{4\pi^3 b E R}{L^2} \int_0^{d/2} x^2 dx$$

$$= \frac{4\pi^3 b E R}{L^2} \cdot \frac{d^3}{2^3 \cdot 3} = \frac{\pi^3 d^3 b R E}{6 L^2}$$



v, ρ, E

ε_{max} – ?

// в момент макс. сжатия движутся как единое целое

$mv = 2mv'$; $v' = \frac{1}{2}v$; $\frac{mv^2}{2} - 3\frac{mv'^2}{2} = \frac{m}{2}\left(v^2 - \frac{3}{4}v^2\right) = \frac{mv^2}{8}$

$\frac{mv^2}{4\cancel{8}} = \frac{E\varepsilon^2}{\cancel{2}}V$

$\varepsilon^2 = \frac{mv^2}{4EV} = \rho\frac{v^2}{4E}$

Элементы гидродинамики

$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$ ур-е непр.

$v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad (\rho_1 = \rho_2)$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh = const$$

$z(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + z_0$ пов-ть жидк.

$F = \eta S \frac{v}{h}$ $\quad \nu = \frac{\eta}{\rho}$ кинематич. вязкость

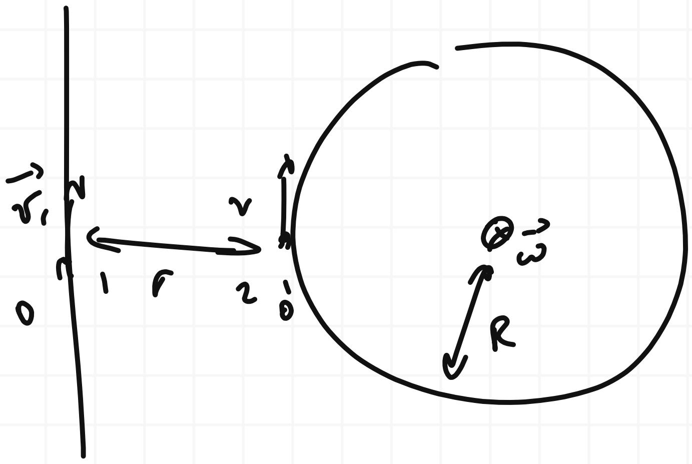
$$v(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{L} (R^2 - r^2)$$

$Q = \pi \rho \frac{p_1 - p_2}{8 \eta L} R^4$ ф-ла пуазейля

$Re = \frac{\rho v l}{\eta} = \frac{v l}{\nu} \sim \frac{E_k}{A_{тр}}$ $\quad v = \frac{Q}{S}$

$\gg 1$ тд.

$\ll 1$ ляди.

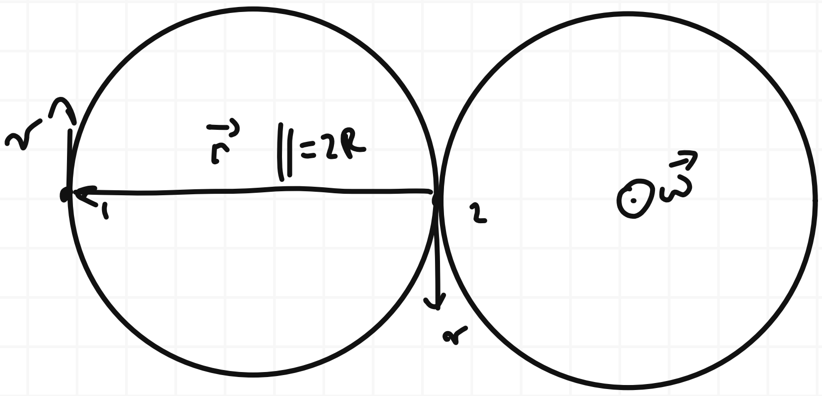


$$v_{абс} = v_0 + v_{отн} + \vec\omega \times \vec r$$

v_1 ИСО; $v_{НИСО}$ НСО; ω НИСО; $\vec{O'O}$

$$\cancel{\vec v} = \cancel{\vec v} + \vec v_{отн} + \vec\omega \times \vec r$$

$$\vec v_{отн} = \vec r \times \vec\omega = r\omega = \frac{rv}{R}$$ (напр. вниз)



$$\vec v_{абс} = \vec v_0 + \vec v_{отн} + \vec\omega \times \vec r$$

$$\vec v_1 = \underbrace{\vec v_1}_{= -\vec v_1} + \vec v_{отн} + \underbrace{\vec\omega \times \vec r}_{\downarrow}$$

$$\vec v_{отн} = 2\vec v_1 + \underbrace{\vec r \times \vec\omega}_{\uparrow}$$

$$\underline{\underline{v_{отн}}} = 2v + 2\cancel{R}\cdot\frac{v}{\cancel{R}} = \underline{\underline{4v}} \uparrow$$

$$\vec a_{абс} = \vec a_{отн} + \vec a_{пер} + \vec a_{кор}$$

$$\cancel{\vec a_{1ИСО}} = \vec a_{отн} + \cancel{\vec a_{1НСО}} + \vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r) + 0 + 2\vec\omega \times \vec v_{отн}$$

$$\vec a_{отн} = -\vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r) + 2\vec v_{отн} \times \vec\omega =$$

$$= -\vec\omega(\underbrace{\cancel{\vec\omega, \vec r}}_{0}) + \vec r(\vec\omega, \vec\omega) + 2\vec v_{отн} \times \vec\omega = 2\frac{v}{R}\cdot 4v - \omega^2 \cdot 2R =$$

$$+\omega^2 \vec r \leftarrow \qquad \longrightarrow$$

$$= 8\frac{v^2}{R} - 2\frac{v^2}{R} = 6\frac{v^2}{R} \longrightarrow$$

7.1.2024

Гидродинамика
(семинар Овчинкина)

$$A_1 = p_1 \cdot S_1 l_1 = p_1 \Delta V_1 = p_1 \frac{\Delta m_1}{\rho_1}$$

$$A_2 = p_2 S_2 l_2 = p_2 \frac{\Delta m_2}{\rho_2}$$

$$A = A_1 - A_2 = p_1 \frac{\Delta m_1}{\rho_1} - p_2 \frac{\Delta m_2}{\rho_2} =$$

$$\underline{\underline{\Delta m = \Delta m_{1,2}}} \quad \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right)\Delta m = \Delta E =$$

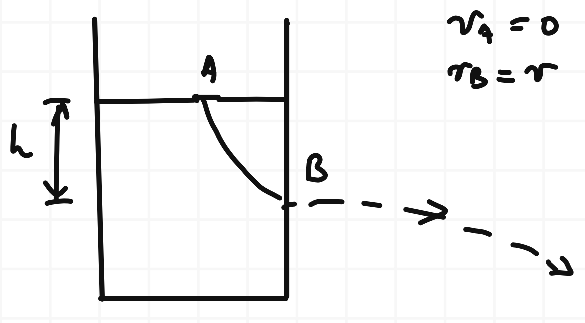
$$= (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\Delta m$$

удельная энерг.

$$\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} + gh + \underbrace{u}_{\text{удельн. внутр. энергия}}$$

$$\frac{v^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = const \quad \text{(ур-е Бернулли)}$$



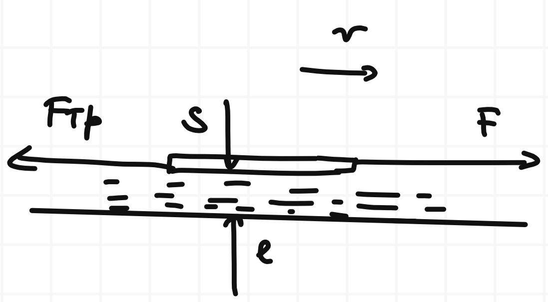
$v_A = 0$
$v_B = v$

$$\cancel{\frac{P_{атм}}{\rho}} + gh = \cancel{\frac{P_{атм}}{\rho}} + 0 + \frac{v^2}{2}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

8.1.2024
03:41

Сила вязкости

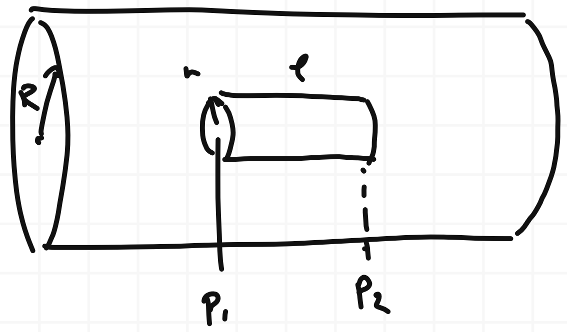


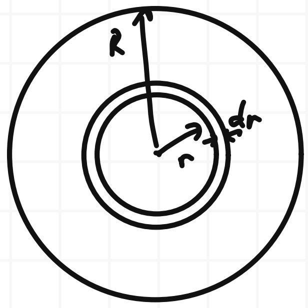
$$F_{тр} = -\underbrace{\eta}_{\text{коэф. динамич. вязкости}} S \frac{v_0}{l}$$

$$F = \eta S \frac{dv_x}{dz}$$ градиент скорости

$$[\eta] = \frac{г}{см \cdot с} = П \quad \text{(пуаз)}$$

$$СИ: \frac{кг}{м \cdot с} = Па \cdot с = 10\, П$$





// $v(\pm R)=0$
$v(0)=v_0$ //

$$F_{тр}(r) = -\eta S\frac{dv}{dr} = -\eta(2\pi r l)\frac{dv}{dt}$$

$$\underbrace{(P_1-P_2)\pi r^2}_{\text{сила давления}} = \underbrace{-\eta\, 2\pi r l\,\frac{dv}{dr}}_{\text{сила трения}}$$

$$-dv = \frac{P_1-P_2}{2\cancel{\pi}\cancel{r} l\eta}\cancel{\pi}r^2 dr = \frac{P_1-P_2}{2\eta l} r\,dr$$

$$\int_{v(r)}^{0} dv = -\frac{P_1-P_2}{2\eta l}\int_r^R r\,dr$$

$$-v(r) = -\frac{P_1-P_2}{4\eta l}(R^2-r^2)$$

$$v(r) = \frac{P_1-P_2}{4\eta l}(R^2-r^2)$$

$$\bar{v} = \frac{v_0}{2}$$

Расход (жидкости через трубу)

$$dQ = v(r)\underbrace{2\pi r\,dr}_{dV}$$

$$Q = 2\pi\frac{P_1-P_2}{2\cancel{l}\eta l}\int_0^R (R^2-r^2)\,r\,dr = \frac{\pi(P_1-P_2)}{2\eta l}\left(\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4}\right) = \frac{\pi(P_1-P_2)R^4}{8\eta l}$$

характер течения жидкости

Рейнольдс

$$Re = \rho\frac{l v_0}{\eta} \qquad [Re]=1$$

кинетическая энергия, переносимая потоком за 1 с.

$$dK = \frac{mv^2}{2} = \frac{\rho dV v^2}{2} = \frac{\rho v^2 S v dt}{2} = \frac{\rho v^2\cdot 2\pi r dr\cdot v dt}{2}$$

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\rho v^2}{2}\cdot\underbrace{\underbrace{2\pi r dr}_{dV}\cdot v}_{dQ} \quad (\text{слой } dr) \quad ; \quad \frac{dk}{dt} = \int\frac{\rho v^2}{2}\ldots \quad (\text{глобально})$$

$$\dot{K} = \int_0^R \frac{\rho v^2}{2}\underbrace{2\pi r v dr}_{dS} = \frac{1}{4}Q v_0^2 = Q\bar{v}^2$$

как?

$$\dot{A} = \frac{P_1-P_2}{\rho}Q \; ; \quad \dot{A}_{тр} = -\dot{A} = -\frac{4\eta v_0 l}{\rho R^2}Q$$

работа, созд. перепадами давления

$$\frac{\dot{K}}{\dot{A}} = \frac{\frac{1}{4}\cancel{\rho} v_0^4}{\frac{4\eta v_0^3 \ell}{\rho R^2}\cancel{\rho}} = \frac{\rho v_0 R^2}{16\eta \ell}$$

$$Re = \frac{\rho \ell v_0}{\eta} \sim \frac{\dot{K}}{\dot{A}}$$

$A_{тр} \ll K$ – Бернулли

$$\frac{v_0 R^2 \rho}{16\eta\ell} \gg 1$$

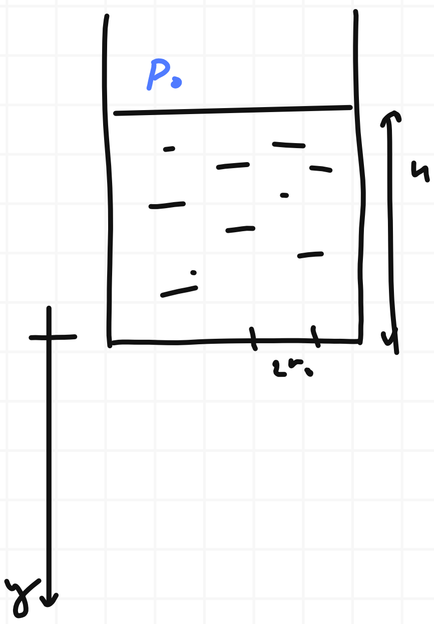
// ℓ – характерный размер, не четкое //

$$Re = \frac{v_0 L_{хар} \rho}{\eta} \quad \underline{\underline{L_{хар} =}} \quad \frac{v_0 R^2 \rho}{16 \eta \ell}$$

14.11

$r(y)$ – ?

(радиус струи воды, вытекающ. из. отверстия в зависимости от расст. от дна сосуда)



$$\cancel{P_0} + gH + 0 = \frac{v^2}{2} + \cancel{P_0} + 0 \; ; \; v = \underline{\underline{\sqrt{2gH}}}$$

$$v_y = \sqrt{2g(H+y)}$$

$$\cancel{\rho} v_0 \cancel{\pi} r_0^2 = \cancel{\rho} v_y \cancel{\pi} r_y^2$$

$$r_y^2 = \frac{v_0}{v_y} r_0^2$$

$$r_y^2 = \sqrt{\frac{\cancel{2g}H}{\cancel{2g}(H+y)}}\, r_0^2 = r_0^2 \sqrt[4]{\frac{H}{H+y}}$$

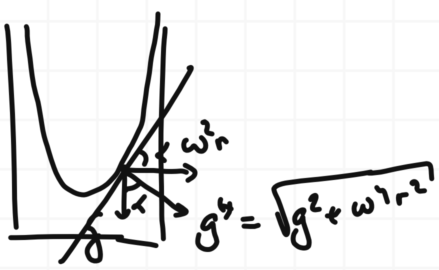
14.17.

$p(r)$ – ?

$n = 4$ об/с

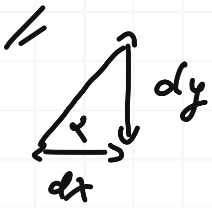
$R = 10$ см

$H = 10$ см



$$tg\,\alpha = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{4\pi^2 n^2}{g} r \qquad \omega = 2\pi n$$

$$p(r) = \rho g h(r)$$

//  $tg\,\alpha = \frac{dy}{dx}$ //

$$dh = tg\,\alpha(r)\,dr = \frac{4\pi^2 n^2}{g} r\,dr$$

$$h - h_0 = \frac{\cancel{4}^{2}\pi^2 n^2}{g} \frac{r^2}{\cancel{2}} = \frac{2\pi^2 n^2}{g} r^2$$

$$dm = \underbrace{2\pi r\, dr}_{dS} \cdot h(r) \cdot \rho = 2\pi\rho \left(\frac{2\pi^2 n^2}{g} r^2 + h_0 \right) r\, dr$$

$$m = \int_0^m dm = \cancel{\rho}\cancel{\pi} R^2 H = 2\cancel{\pi}\cancel{\rho} \int_0^R \left(\frac{2\pi^2 n^2}{g} r^2 + h_0 \right) r\, dr$$

$$\cancel{R^2} H = \cancel{2} \left(\frac{\cancel{2}\pi^2 n^2}{g} \frac{R^{\cancel{4}2}}{\cancel{4}\cancel{2}} + \frac{h_0 \cancel{R^2}}{\cancel{2}} \right)$$

$$H = \frac{\pi^2 n^2}{g} R^2 + h_0$$

$$h_0 = H - \frac{\pi^2 n^2 R^2}{g}$$

ЧИТАЙ условие, пожалуйста! ♡

14.42. (расходомер Вентури)

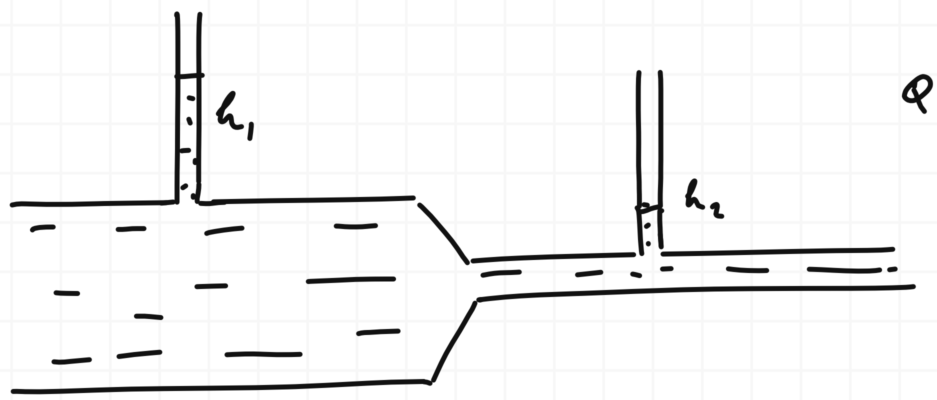
$d_1 = 10$ см

$Q = 10$ л/с

$h_1 = 120$ см

$h_2 = 0$

$d_2 - ?$



$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{S_i v_i\, dt}{dt} = S_i v_i$$

$$Q = \pi \frac{d_1^2}{4} v_1; \quad v_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2}$$

(Бернулли)

(не забывай про атмосф. давление)

$$\rho g h_1 + \cancel{+p_{атм}} + \frac{\rho v_1^2}{2} = \cancel{\rho g h_2}^{\,0} + \cancel{+p_{атм}} + \frac{\rho v_2^2}{2}; \quad v_2^2 = v_1^2 + 2gh_1$$

(несжим.) $v_1 S_1 = v_2 S_2$; $\quad v_1 \cdot \frac{\pi d_1^2}{\cancel{4}} = v_2 \cdot \frac{\pi}{\cancel{4}} d_2^2$; $\quad d_2 = \sqrt{\frac{v_1}{v_2}}\, d_1$

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{v_1^2}{v_1^2 + 2gh_1}$$

1:10 ± длина от объема

14.28

$Q = 1\ см^3/с$

$l = 20\ см$

$h = 5\ см$

$d - ?$

$\eta = 0{,}01\ П$

$$Q = \frac{\Delta P \cdot \pi r^4}{8\eta l} \longrightarrow r = \sqrt[4]{\frac{8Q\eta l}{\pi \Delta P}} = \sqrt[4]{\frac{8Q\eta l}{\pi \rho g h}} = 10^{-1}\ см = 1\ мм$$

$$Q_{своб} = v \cdot S = \sqrt{2gh}\ \pi r^2 = \pi \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{2 \cdot 10^3 \cdot 5} \approx 3\ \frac{см^3}{с}$$

вывод про выбор формулы

14.27

$S = 100\ см^2$

$H = 10\ см$

$2r = 2\ мм$

$l = 1\ м$

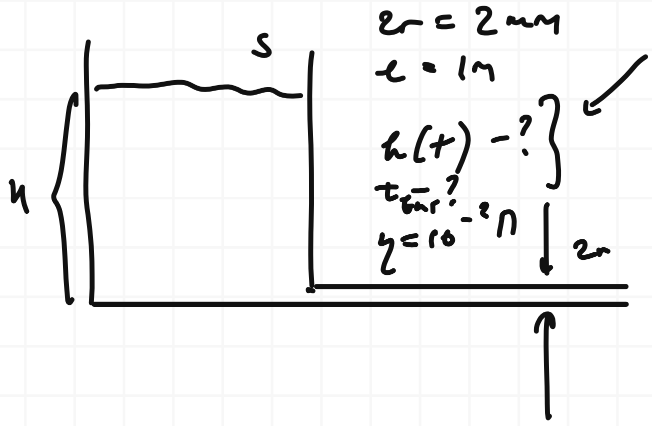
$h(t) - ?$

$t_{выт} - ?$

$\eta = 10^{-2}\ П$

закон, по кот. вода вытекает из сосуда

время истечения



проверка:

если свободное: $v_0 = \sqrt{2gH} = 140\ см/с$

по пуазейлю: $v_0 = \frac{\Delta P r^2}{4\eta l}$

$$\Delta P = \frac{4\eta l v_0}{r^2} = \ldots = 5{,}6 \cdot 10^4\ \frac{дин}{см^2}$$

$$\rho g h = 981 \cdot 10 \approx 10^4\ \frac{дин}{см^2} \ll \Delta P \longrightarrow вязкое$$

?

$$-S\frac{dh}{dt} = Q = \frac{\Delta P \cdot \pi r^4}{8\eta l} = \frac{\rho g h \cdot \pi r^4}{8\eta l} \qquad (1:22)$$

$$h(t) = H e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ где } \underbrace{\tau}_{\text{характерное время}} = \frac{8S\eta l}{\pi r^2 \rho g r^2}$$

$$t_{выт} = \tau \ln \frac{H}{r} =$$

половина функции