Третье задание.

I. ЛИНЕЙНЫЕ ПР-ВА

20.3(3,4)

(3) $\mathbb{K}^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \mid \alpha_i \in \mathbb{K}\}$

$U = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \mid \alpha_i \in \mathbb{K} \wedge \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0\}$

Ответ: да

a. р-м $u^1, u^2 \in U$

$u^1 = (u_1^1, \dots u_n^1)^T$; $u^2 = (u_1^2, \dots, u_n^2)^T$

$u^1 + u^2 = (u_1^1 + u_1^2, \dots, u_n^1 + u_n^2)^T$

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i^1 + u_i^2) = \sum_{i=1}^{n} \underset{\substack{\parallel \\ 0 \\ u^1 \in U}}{(u_i^1)} + \sum_{i=1}^{n} \underset{\substack{\parallel \\ 0 \\ u^2 \in U}}{(u_i^2)} = 0$$

р-м $u \in U$, $\alpha \in \mathbb{K}$ $\quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

b. $\alpha u = (\alpha u_1, \dots, \alpha u_n)^T$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha u_i = \alpha \underset{\substack{\parallel \\ 0 \text{ т.к. } u \in U}}{\sum_{i=1}^{n} u_i} = 0$$

c. $\bar{0} = (0, \dots, 0)^T$; $\bar{0} \in U$ $\left(\sum_{i=1}^{n} 0_i = 0\right)$ $\quad (0 \in \mathbb{K})$

ура, получаем, что U — подпр- $\mathbb{K}^n$

(4) $\mathbb{K}^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \mid \alpha_i \in \mathbb{K}\}$

$U = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \mid \alpha_i \in \mathbb{K} \wedge \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\}$

Ответ: нет

a. р-м $u_1, u_2 \in U$

ан-но $u^1 + u^2 = (u_1^1 + u_1^2, \dots, u_n^1 + u_n^2)^T$

b. $\sum_{i=1}^{n} (u_i^1 + u_i^1) = \sum_{i=1}^{n} u_i^1 + \sum u_i^2 = 1 + 1 = 2$

$u^1 + u^2 \notin U$ $\rightarrow$ противор-е!

20.4(2)

U - мн-во векторов ⊥ данной прямой (в $\mathbb{R}^3$)

a. $\vec{a}, \vec{b} \in U$

$\vec{a}, \vec{b} \perp \boxed{\vec{m}}$ ← напр. вектор перп. прямой

$(a, m) = 0$, $(b, m) = 0$

$(a+b, m) = (a, m) + (b, m) = 0 \Rightarrow a+b \perp m$ ✓

b. $\vec{a} \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$(a, m) = 0$

$(\alpha a, m) = \alpha (a, m) = 0$

c. $\vec{0}$ ⊥ любому век., в частн., $\vec{m}$

осталось найти размерность

все векторы лежат в || пл-тях $\Rightarrow \dim U = 2$

20.6 (2,3,5)

(2) в $M_n(\mathbb{K})$

$U = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A$ - диаг. матр.$\}$

ответ: да, n

a, b. очев

c. $$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ очев

найдем dim U.

Р-м систему диаг. матриц порядка n

$$\begin{cases} a_{ij} = 0 & i \neq j \\ a_{ij} = 1 & i = j \end{cases}$$

$A = \alpha_{11} A_1 + \ldots + \alpha_{nn} A_n$

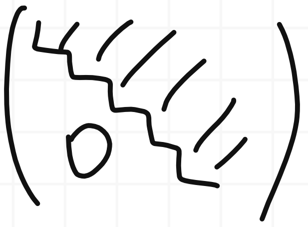
Если ∃ нетрив. лин. комб. $\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n = 0$, то $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$\dim U = n$

(3) в $M_n(\mathbb{K})$

$U = \{A \in M_n \mid A$ - верхнетр.$\}$



a, b - очев

$$\begin{pmatrix} a_{11}^1 + a_{11}^2 & a_{12}^1 + a_{12}^2 & \dots & a_{1n}^1 + a_{1n}^2 \\ 0 & a_{22}^1 + a_{22}^2 & \dots & a_{2n}^1 + a_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^1 + a_{nn}^2 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ 0 & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

c - очев (просто нулевая матрица)

значит, U - лин. подпр. в $M_n(\mathbb{K})$

найдем dim U.

Р-м систему верхнетр. матриц.

кол-во эл-тов: $\frac{1}{2} n(n+1)$

сист. порожд. ($\forall u \in U$ $u = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ & a_{22} & \\ 0 & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$

система ЛНЗ: $\lambda_{11} A_{11} + \dots + \lambda_{nn} A_{nn} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_{nn} = 0$

значит, базис

$\dim U = \frac{n(n+1)}{2}$

(5) в $M_n(\mathbb{K})$

$U = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A$ - кососимм. матрица$\}$

a. $\begin{pmatrix} 0 & a_{12}+b_{12} & & a_{1n}+b_{1n} \\ -a_{12}-b_{1n} & 0 & & \\ & & \ddots & \\ -a_{1n}-b_{1n} & & & 0 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 0 & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ -\alpha a_{12} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\alpha a_{1n} & & & 0 \end{pmatrix}$

c. нулев. матр.

ура, U – лин. подпр. $M_n(\mathbb{K})$

(аналогично)

$\forall A \in U$ $$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{1n} & & & 0 \end{pmatrix}$$ $A = a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} + \dots$

базис

$$\dim U = \frac{n(n-1)}{2}$$

20.8 (1,3)

д-ть, что
$\forall n \in \mathbb{N}$ мн-во A образует конечном. лин. пр-во

найти
размерность
базис

(1) $P^{(n)}[\mathbb{K}]$ (мн-ны степени $\leq n$ над полем $\mathbb{K}$)

р-м $p(x) \in P^{(n)}$; $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

проверим, линейное ли пр-во?

- (замкн) $p_1, p_2 \in P^{(n)}[\mathbb{K}]$

$$p_1 + p_2 = (a_n^1 + a_n^2)x^n + \cdot + (a_1^1 + a_1^2)x + (a_0^1 + a_0^2) \in P^{(n)}[\mathbb{K}]$$

$$\alpha p = \alpha a_n x^n + \dots + \alpha a_1 x + \alpha a_0 \in P^{(n)}[\mathbb{K}]$$

- $p^{(n)}[\mathbb{K}]$ — абелева группа по „+"
- $\bar{1} = 1$ $p \cdot \bar{1} = \bar{1} \cdot p = p$
- $(\lambda\mu)p = \lambda(\mu p)$
- $(\lambda + \mu)p = \lambda p + \mu p$
- $\lambda(p + q) = \lambda p + \lambda q$

ура, все аксиомы вып., а
значит, лин. пр-во

базис

$A = \{x^p \mid p \in \mathbb{N} \cup \{0\} \wedge p \leq n\}$

система полн. и линейно независимая

$\underline{\underline{\dim = n+1}}$

(3) $A = \{P_n[\mathbb{K}] \mid \deg P_n = n \ \wedge\ n \in \mathbb{N}$ − нечет$\}$

проверим, лин. ли пр-о?

- замкн. — очев ✓
- $(P_n, +)$ — абелева ✓
- $\exists\, \bar{1} = 1 : \ \bar{1} \cdot P = P \cdot \bar{1} = P \qquad (\bar{1} = 1 \in \mathbb{K})$
- $(\lambda \cdot \mu) P = \lambda(\mu P)$ ✓
- $(\lambda + \mu) P = \lambda P + \mu P$ ✓
- $\lambda(P_1 + P_2) = \lambda P_1 + \lambda P_2$ ✓

ура, лин. пр-во

базис: $A = \{x^p \mid p \in \mathbb{N}_{2k+1}\}$

$\dim = \frac{n+1}{2}$

$\Big\}$ ответ

$\underline{20.20}$

$\{1, t-\alpha, (t-\alpha)^2, \ldots, (t-\alpha)^n\}$ — базис в $P^{(n)}[\mathbb{K}]$

$\deg p_n(t) \leq n$

сначала д-м, что базис.

$A = \{(t-\alpha)^p \mid p \in \mathbb{N}_0 \wedge p \leq n\}$ — сист. лнз

д-м по индукции: (что система лнз)

база: $\{1\}$ — лнз

инд. предп.: $\{(t-\alpha)^p \mid p \in \mathbb{N}_0 \wedge p \leq k\}$ — лнз

переход: $k \to k+1$

хотим $\{(t-\alpha)^p \mid p \in \mathbb{N}_0 \wedge p \leq k+1\}$ — лнз

пусть P — произвольная линейная комбинация

$\{(t-\alpha)^p \mid p \in \mathbb{N}_0 \wedge p \leq k\}$

$\deg P \leq k$ $\longrightarrow$ ура!

(что система порождающая):

$$\forall P_n \in P^{(n)}[\mathbb{K}] \qquad P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-\alpha)^k p^{(k)}(\alpha)}{k!}$$

ура, эта сист. - базис

и $p_n(t) = \left(\underset{1}{\ldots}, \frac{p_n^{(i)}}{i!}, \underset{n}{\ldots}\right)$

20.29

$e' = e\underbrace{S}$

матрица перехода

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \ldots & \sigma_n^1 \\ \vdots & & \\ \sigma_1^n & & \sigma_n^n \end{pmatrix}, \quad e_i' = \sum_{j=i}^{n} e_i^j e_i \quad i \in \overline{1,n}$$

алгоритм:

1. swap e_i, e_j $\rightsquigarrow$ swap строки i и j матр. S
2. swap e_i', e_j' $\rightsquigarrow$ swap столбцы i и j матр. S
3. расположим в обратном порядке e, e'

$$J = \begin{pmatrix} \sigma_n^n & \ldots & \sigma_1^n \\ \sigma_n^1 & & \sigma_1^1 \end{pmatrix}$$

матрица отражается симм-но

35.10 (а, б, в, г, д)

$\dim V = n$

V - лин. пр-во над полем из q эл-тов $(\mathbb{F}_q)$

а) (число векторов)

$V \to \mathbb{F}_q^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{F}_q\}$

$|V|$ = число разл. упорядоч. наборов из эл-тов $\mathbb{F}_q \Rightarrow |V| = \underline{\underline{q^n}}$

б) (число базисов)

$\exists\, q^n - 1$ способ выбрать $1^й$ базисный вектор (отсекаем нулевой)

$q^n - q$ — $2^й$ (отметает коллинеарные)

$\vdots$

$q^n - q^{n-1}$ — $n^й$

итак, $(q^n-1)(q^n-q)\cdot\ldots\cdot(q^n-q^{n-1})$ ← ответ

б) (невырожд. м. порядка n) $|GL_n(F_q)|$ — ?

∀ 2м базисам соотв. матр. перехода ($\det \neq 0$, обр. n)
и наоборот.

↓

$|$обр. матриц$|$ = $|$базисов$|$ = $(q^n-1)(q^n-q)\ldots(q^n-q^{n-1})$

в) $|$вырожд. матриц над полем $F_q| = |$all$| - |$невырожд$|$ =

$$= \underline{\underline{q^{n^2} - (q^n-1)\ldots(q^n-q^{n-1})}}$$

<u>34.7</u>

пусть V — лин. пр-во над $\mathbb{K}$

$\mathbb{Z} \overset{?}{\not\cong} (V,+)$ (для ∀V)

char $\mathbb{K} \neq 2$

$1 \in \mathbb{K}$: $1+1 = \overset{\neq 0}{2} \in \mathbb{K}$

$2^{-1} = \frac{1}{2} \in \mathbb{K}$

$\forall v \in V\ \exists u = \frac{v}{2} \in V$

$u+u=v \Longleftrightarrow 2u=v$

char $k = 2$

$1 \in \mathbb{K}$ $1+1=0 \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow \forall v \in V$ $v+v = v\overset{=0}{(1+1)} = 0 \in V$

для $\mathbb{Z}$: $1+1 \neq 0 \wedge \left(\begin{matrix}\forall x, y \in \mathbb{Z} \\ 2x \neq 1\end{matrix}\right)$

изоморфизм не построить

q.e.d.

II. РАНГ МАТРИЦЫ

16.18(17)

$$A_{408} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -7 \\ 0 & -39 & -36 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ & 1 & 2/3 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ & 1 & 2/3 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rk}(A_{406}) = 2$$

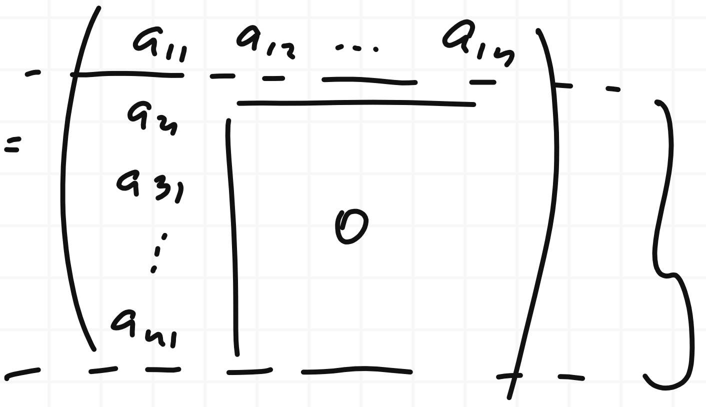
16.19(3)

$$A_{365} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 \\ 0 & (\alpha-1)(\alpha+1) & (\alpha-1)(\alpha+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & \alpha-1 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rk}_{365} = \begin{cases} 1, & \alpha = 1 \\ 2, & \alpha \neq 2 \end{cases}$$

16.22

$A =$



rk этого куска ≤ 1

$\mathrm{rk}\, A \le 2$

16.26(2)

$rk A = 1$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \dots b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & & a_1 b_n \\ & & \\ a_m b_1 & & a_m b_n \end{pmatrix}$$

заметим, что

$$\text{строка}_i = \text{строка}_1 \cdot \frac{a_i}{a_1}$$

Р-м произв. матрицу $m \times n$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

не умаляя общности строка_1 — ненулев. (элемент. преобразованиями умеем переставлять, $rk A \neq 0$)

$rk A = 1 \Rightarrow \forall j \leq m \quad c_i = \lambda_i c_1$

Пусть строка c — это $1^я$ строка, а столбец $(1, \lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$

16.41

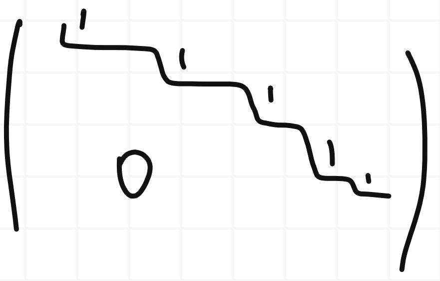
$$rk \begin{pmatrix} A & B \\ 3A & -B \end{pmatrix} = rk \begin{pmatrix} -2A & 2B \\ 4A & 0 \end{pmatrix} = rk \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = rk A + rk B$$

16.33

$rk = r$

приведем матрицу A к ступенчатому виду:
(и упрощ.)

$\underset{m \times n}{A} =$



$\}$ r ненулевых строк

Рассмотрим матрицу $B_i = \begin{pmatrix} 0 \dots \\ 0 \\ \text{строка } i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \dots \end{pmatrix}$ (все кроме i-й нулевые)

$rk B_i = 1$ (очев) $\qquad A = \sum\limits_{i=1}^{r} B_i \qquad$ ура!

16.40

$A\ (n \times n)$ $\qquad$ $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} E & B \\ A & AB \end{pmatrix} \overset{?}{=} n$

$B\ (n \times n)$

$\mathrm{rk}(E\ \ B) = n$

$E = E_n$

$$(A\ \ AB) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \sum_{k=1}^{n} b_{kj} a_{ik} & \dots \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

все строки $(A\ AB)$ — линейные комб. строк $(E\ B)$

$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} E & B \\ A & AB \end{pmatrix} = \mathrm{rk}(E\ B) = n$ $\qquad$ q.e.d.

20.14(9)

$C_{166} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $C_{203} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $C_{204} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $C_{197} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

система $\{C_{166}, C_{197}\}$ ЛНЗ

$C_{203} = 2 \cdot C_{166}$

$C_{204} = 3 \cdot C_{166}$

если в сист есть C_{166}, C_{197} и $\left[\begin{matrix} C_{203} \\ C_{204} \end{matrix}\right.$ — сист. лин.зав.

базис: $\{C_{166}, C_{197}\}$

$\dim = 2$

20.18

A_5, A_{10}, A_{13}, A_6

$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $A_{10} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad$ $A_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\1&1&0&1\\2&5&1&3\\3&4&5&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\&2&-1&2\\&7&-1&5\\&7&2&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&0\\&2&-1&0\\&&\frac{5}{2}&-2\\&&\frac{3}{2}&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&0\\&1&-\frac{1}{2}&1\\&&\frac{1}{2}&-\frac{2}{5}\\&&\frac{3}{2}&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{2}{5}\\&1&0&\frac{3}{5}\\&&\frac{1}{2}&-\frac{2}{5}\\&&&\frac{2}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\frac{1}{2}&\\&&&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$\mathrm{rk}\,A=4$

иск. стр. ЛНЗ

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 = 0$; $\alpha_1 A_5 + \alpha_2 A_6 + \alpha_3 A_{10} + \alpha_4 A_{13} = 0$

ура, мабр. обр. базис

(2) $A_{26}=\begin{pmatrix}5&14\\6&13\end{pmatrix}$

$$A_{26}=\alpha_1\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1&1\\6&1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}3&4\\5&7\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&3&5\\-1&5&1&4&14\\1&1&0&5&6\\-1&3&1&7&13\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&3&5\\&7&2&7&19\\&-1&-1&2&1\\&5&2&10&18\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&7&7\\&1&1&-2&-1\\&&-5&21&26\\&&-3&20&23\end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&7&7\\&1&1&-2&-1\\&&-1&\frac{20}{3}&\frac{23}{3}\\&&-5&21&26\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\&1&0&\frac{14}{3}&-\frac{20}{3}\\&&1&-\frac{20}{3}&-\frac{23}{3}\\&&&-\frac{37}{3}&-\frac{37}{3}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&&&&-1\\&1&&&2\\&&1&&-1\\&&&1&1\end{array}\right)$$

ответ: $\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}$

T.1

$$A=\begin{pmatrix}2&4&2\\-1&-2&-1\\1&5&3\\8&1&-2\\2&7&4\end{pmatrix}$$

rk=2
ЛНЗ

ЛНЗ

$M_{13}^{13}=\begin{vmatrix}2&2\\1&3\end{vmatrix}=4$

$\{s_1, s_3\}$ – базис. столб

III. УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

15.24(3)

$A^2 - B^2 \overset{?}{=} (A+B)(A-B)$

$(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2 = A^2 - B^2 + BA - AB$

$BA \neq AB$ в общем случае, значит, утв. $\underline{\underline{\text{неверно}}}$

15.22(2)

$f(t) = t^2 - 2t + 1 \qquad A = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$

$t^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$f(t) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 1 \left[\begin{array}{ll} \underline{\underline{\quad \text{det} \quad}} & 1 + 1 = 2 \\ \underline{\underline{\quad E_2 \quad}} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right.$

15.72

// перестановочна $AB = BA$

// E_{ij} – 1 в позиции (i, j) и 0 в других местах

// скалярная: $a_{ij} = \begin{cases} \lambda, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

$A: \qquad AE_{ij} = E_{ij}A$

как выглядит умнож. на E_{ij} ?

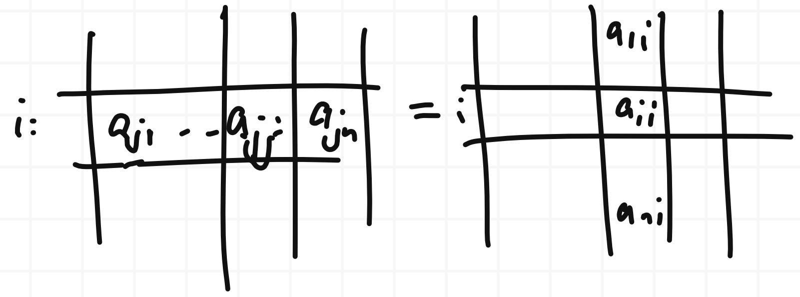
справа:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & & a_{ij} & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \end{array} \begin{vmatrix} \begin{array}{ccc} & j: & \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 1 & \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \cdots 0 & a_{1i} & 0 \cdots 0 \\ \vdots & a_{ii} & \\ & & \\ 0 \cdots 0 & a_{ni} & 0 \cdots 0 \end{vmatrix} \swarrow j \text{ столбец}$$

слева:

$$\begin{array}{c|ccc|} & & j: & \\ & 0 & 0 & 0 \\ i: & 0 & 1 & 0 \\ & & & \\ & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & & \\ & & \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{array}{c|c|} & 0 \; \ldots \; 0 \\ \hline i: & a_{j1} \; a_{j2} \; \ldots \; a_{jn} \\ \hline & 0 \; \ldots \; 0 \\ & 0 \; \ldots \; 0 \end{array}$$

$AE_{ij} = E_{ij}A$:



$$\begin{cases} a_{jj} = a_{ii} \\ a_{jk} = 0 \ ; \quad k \neq j \\ a_{li} = 0 \ ; \quad l \neq i \end{cases}$$

вспомним, что усл-е верно $\forall\, i, j \in \overline{1, n}$

$$\begin{cases} a_{ii} = a_{jj} \\ a_{kl} = 0 \end{cases}$$

матрица скалярна, q.e.d.

Т.2.

а)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = A \cdot A^2 = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

б) $(E_4 + A)^{11}$

$$(E_4 + A)^2 = \underset{\underset{E_4}{\parallel}}{E_4^2} + A^2 + \underset{\underset{A}{\parallel}}{E_4 A} + \underset{\underset{A}{\parallel}}{A E_4} = E_4 + A^2 + 2A = E_4 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'^2$$

$$(E_4 + A)^4 = (E_4 + A')^2 = E_4 + A'^2 + 2A' = E_4 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_4 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A''}$$

$$A''^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \quad A'A''' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 16 \\ & & 4 & 10 \\ & & & 4 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(E_4 + A)^8 = E_4 + 2A'' + A''^2 = E_4 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 \\ & & & 4 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 4 \\ & & 4 & 6 \\ & & & 4 \\ & & & \end{pmatrix} = E_4 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 16 \\ & & 4 & 10 \\ & & & 4 \\ & & & \end{pmatrix}}_{A'''}$$

$$(E_4 + A)^{10} = (E_4 + A''')(E_4 + A') = E_4 + A' + A''' + A'A''' =$$

$$= E_4 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \\ & & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 16 \\ & & 4 & 10 \\ & & & 4 \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 26 \\ & & 0 & 4 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = E_4 + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 5 & 15 & 42 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{\tilde{A}}$$

$$(E_4+A)'' = (E_4+\tilde{A})(E_4+A) = E_4 + A + \tilde{A} + A\tilde{A} \ \textcircled{=}$$

$$A\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&5&12&42\\ 0&0&5&42\\ 0&0&0&5\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&5&42\\ 0&0&0&5\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{=} \begin{pmatrix} 1&&&\\ &1&&\\ &&1&\\ &&&1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&1&&\\ &0&1&\\ &&0&1\\ &&&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&5&15&42\\ &0&5&15\\ &&0&5\\ &&&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&0&5&42\\ &&&5\\ &&&\\ &&& \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1&6&20&84\\ 0&1&6&20\\ 0&0&1&6\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}}}$$

К 55.6 (д, м, к, р*)

// группа: замкнутость, ассоциативность, e, a^{-1}

д) **нет**

$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$

если $\det(A) \vee \det B \neq 1$ замкнутость не выполняется

м) **да**

// верх. унитр. матр. — на гл.д. 1, верхнетр.

замкнутость:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sim & \sim \\ & 1 & \sim \\ 0 & \ddots & \sim \\ & & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \sim & \sim \\ & 1 & \sim \\ 0 & \ddots & \sim \\ & & 1 \end{vmatrix}$$

1 на диаг и 0 под, очев, сохр.
(достаточно рассмотреть определение)

ассоц. для матриц выполняется всегда

e: $e = E_n$, E_n – верхн. унитреуг., подходит

a^{-1}: для верхунитр сущ-ет

к) **да**

// ортогон. матр: $A^TA = E$

замкн.: $(AB)^T(AB) = B^TA^TAB = B^TEB = B^TB = E$ — ✓

ассоц: верно всегда

e: E ; $E^TE = E$

a^{-1}: $A^T = A^{-1}$ ✓

р*) $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ $x, y \in \mathbb{R}$

замкн: $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ -a_1 b_2 - a_2 b_1 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix}$ ✓

ассоц: true

$e = E$, ✓

a^{-1}: $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by & ay + bx \\ -ay - bx & ax - by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} ay + bx = 0 \\ ax - by = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -\frac{b}{a} x \\ ax + \frac{b^2}{a} x = 1 \end{cases}$ $x\left(\frac{a^2 + b^2}{a}\right) = 1$ $\begin{cases} x = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ y = -\frac{b}{a^2 + b^2} \end{cases}$

$\underbrace{a^2 + b^2 \neq 0}_{\text{а это никто не запрещает}}$

Ответ: <u>нет</u>

К 63.2 (в)

? кольцо отн +, ·

в) мн-во верхних тр. матриц порядка $n \geq 2$

// кольцо: замкн, $\underbrace{\text{ассоц, комм „+", 0, −a, дистриб.}}_{\text{always true для матриц. „+" и „·"}}$

замкн: „+" очев., „·" очев. (р-м операции по def)

<u>да, кольцо</u> q.e.d.

К 63.11 (г)

$T_n(\mathbb{R})$ − кольцо

обр. эл-ты → $\{A \in T_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$

делители нуля
нильпот. эл-ты → $\{A \in T_n(\mathbb{R}) \mid \exists B \in T_n(\mathbb{R})\ B \neq 0 \quad A \cdot B = 0\} =$

$= \{A \in T_n(\mathbb{R}) \mid \exists i \in \overline{1, n} : a_{ii} = 0\}$

IV. ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

15.45(2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 2 & -1 & & 1 & \\ -1 & -1 & 1 & & & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & & \\ 0 & 2 & -1 & & 1 & \\ -1 & -1 & 1 & & & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ & -3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ & & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & & 1 & 2 & 2 \\ & & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

15.48 (1,3)

(1) $(A^T)^{-1} \overset{?}{=} (A^{-1})^T$

$A^{T-1} \cdot A^T = E$

$(A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = E^T = E$

(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(AB)(AB)^{-1} = ABB^{-1}A^{-1}$

$E = E$

15.56

$A^m = 0$

$(E-A)^{-1} = E + A + \ldots + A^{m-1}$

$(E + A + \ldots + A^{m-1})(E - A) = E - \cancel{A} + \cancel{A} - \cancel{A^2} + \cancel{A^2} - \ldots + A^{m-1} - A^m = E$

q.e.d.

15.57

$AB = BA$ $\qquad A^{-1}B^{-1} \overset{?}{=} B^{-1}A^{-1}$

$$\left.\begin{aligned} (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \\ (BA)^{-1} &= A^{-1}B^{-1} \end{aligned}\right)\Bigg) \quad \text{q.e.d.}$$

15.59

$S^{-1}AS = B$ $\qquad f(t) = a_n t^n + \ldots + a_0$

$f(t)$ - мн-н $\qquad f(B) = a_n(S^{-1}AS)^n + \ldots + a_0 S^{-1}S = (S^{-1}AS) \ldots (S^{-1}AS) = S^{-1}A^nS$

$f(B) \overset{?}{=} S^{-1}f(A)S$ $\qquad f(B) = S^{-1}a_n A^n S + \ldots + S^{-1}a_1 AS + Sa_0S^{-1}$

q.e.d.

15.64

$$AXC = B$$

$$A^{-1}AXC = XC = A^{-1}B$$

$$XCC^{-1} = X = \underline{\underline{A^{-1}BC^{-1}}}$$

15.65 (1,5)

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 \\ & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & 1 & -2 \\ & 1 & & 1 \end{array}\right)$$

ответ: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $X \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\shortparallel \atop A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}}_{\shortparallel \atop B}$ $\qquad X = BA^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & & \\ 2 & -1 & 2 & & 1 & \\ -1 & 2 & 2 & & & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ & 6 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ & & -5 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ & 1 & 2 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ & & 1 & -1/9 & 2/9 & 2/9 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 2/9 & 2/9 & -1/9 \\ & 1 & & 2/9 & -1/9 & 2/9 \\ & & 1 & -1/9 & 2/9 & 2/9 \end{array}\right)$$

ответ: $\begin{pmatrix} 2/9 & 2/9 & -1/9 \\ 2/9 & -1/9 & 2/9 \\ -1/9 & 2/9 & 2/9 \end{pmatrix}$

$$X = BA^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 27 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

ответ $\overset{\frown}{X}$

15.54(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = A^{-1} = B$$

$UT(n, \mathbb{R})$ - группа, а значит раз $A \in UT(n, \mathbb{R})$, то и $B \in UT(n, \mathbb{R})$

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0\\ \vdots & & & & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1\\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \leftarrow \underline{\underline{\text{отвег}}}$$

т.е. B: $b_{ii}=1 \quad i=\overline{1,n}$

$b_{i\,i+1}=-1 \quad i=\overline{1,n-1}$

else: $b_{ij}=0$

пусть $C=A\cdot B$; $c_{ij}=\sum\limits_{k=0}^{n} a_{ik}b_{kj}$

$$i>j:\ c_{ij}=\sum_{k=0}^{i}\underbrace{\overset{0}{\overset{\|}{a_{ik}}}}\,b_{kj}+\sum_{k=i+1}^{n}a_{ik}\underbrace{\overset{0}{\overset{\|}{b_{kj}}}}=0\ ;\quad C\in T_n(\mathbb{R})$$

$$i=j:\ c_{ij}=\sum_{k=0}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum_{k=0}^{i-1}\underbrace{\overset{0}{\overset{\|}{a_{ik}}}}\,b_{kj}+\sum_{k=i+1}^{n}a_{ik}\underbrace{\overset{0}{\overset{\|}{b_{kj}}}}+a_{ij}\overset{1}{\overset{\|}{b_{ij}}}=1\ ;\quad C\in UT(n,\mathbb{R})$$

$$i=j-1:\ c_{ij}=\underset{\overset{\|}{0}}{\sum_{k=0}^{i-1}\dots}+\underset{\overset{\|}{0}}{\sum_{k=i+2}^{n}\dots}+a_{ij}b_{ij}+a_{jj}b_{jj}=-1+1=0$$

$i<j-1$: ан-но $1-1=0$

итак, $B=A^{-1}$ q.e.d.

<u>Т.З.</u> $\alpha\in\mathbb{K}^*$ не квадрат в $\mathbb{K}$

$$?\ U=\left\{\begin{pmatrix}a & \alpha b\\ b & a\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{K}\right\}\subset\underbrace{\mathrm{Mat}(\mathbb{K})}$$

содержит $\mathbb{K}$ как подполе
явл. 2-м векторным пр-вом
над $\mathbb{K}$

- $(U,+)$ — абелева группа

$$\bar{0}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad -A=\begin{pmatrix}-a & \alpha(-b)\\ b & -a\end{pmatrix}$$

- замкн:

$$\begin{pmatrix}a_1 & \alpha b_1\\ b_1 & a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2 & \alpha b_2\\ b_2 & a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1a_2+\alpha b_1b_2 & \overset{\alpha(a_1b_2+a_2b_1)}{\overset{\|}{\alpha a_1b_2+\alpha a_2b_1}}\\ a_2b_1+a_1b_2 & \alpha b_1b_2+a_1a_2\end{pmatrix}\quad\checkmark$$

- ассоц. умн
- комм-ть умн (св-ва $\mathbb{K}$, симметричность произв)
- $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

- $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2-ab^2} & \frac{-\alpha b}{a^2-\alpha b^2} \\ \frac{-b}{a^2-\alpha b^2} & \frac{a}{a^2-\alpha b^2} \end{pmatrix}$ $a^2-\alpha b^2 \neq 0$

(потому что α не квадрат)

если $a=0$: $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha}{\alpha b} \\ \frac{1}{ab} & 0 \end{pmatrix} \in U^*$

если $b=0$: $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$

- дистр: $(A+B)C = AC+BC$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & \alpha a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & \alpha b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} c_1 & \alpha c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & \alpha(a_2+b_2) \\ \alpha_2+\beta_2 & b_1+a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & \alpha c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1+b_1)c_1 + \alpha c_2(a_2+b_2) & \alpha c_2(a_1+b_1) + \alpha c_1(a_2+b_2) \\ c_1(a_2+b_2) + c_2(a_1+b_2) & \alpha c_2(a_1+b_2) + c_1(a_1+b_2) \end{pmatrix}$$

(4) произв. $k \in \mathbb{K}$ соотв $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

(5) двумерное пр-во над $\mathbb{K}$

$(U,+)$ – абелева группа

$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

$\bar{1} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$; $\bar{1}A = A\bar{1} = A$

$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

р-м базис $e\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

- $\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha\lambda_2 \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

e – лнз сист.

- $\forall u \in U$ $u \in \begin{pmatrix} a & \alpha b \\ b & a \end{pmatrix}$

порожд. сист.

e – базис
$\dim U = 2$

Т.4

$GL_2(\mathbb{Z}_2) \cong S_3$

$b_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $b_3 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$

$A\bar{b}_1 = \bar{b}_2$
$A\bar{b}_2 = \bar{b}_3$
$A\bar{b}_3 = \bar{b}_1$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p\\1\end{pmatrix}$$

воспользуемся перестановкой $\sigma_A = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \varphi(BA) = \varphi(B)\varphi(A) = \sigma_B \sigma_A = \sigma_{BA}$

(гомоморфизм)

осталось д-ть, что биекция, докажем через тривиальность ядра

$\ker = \left\{ E = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \right\}$

Тривиально, группы равномощны
$\Rightarrow$ изоморфизм

V. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

18.1(7,9)

(7) $5x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0$

$4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$

$$\begin{vmatrix} 5 & -8 & 3 & 3 \\ 4 & -6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{7}{2} \end{vmatrix}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} -D \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7/2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7/2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

ответ:
$$\begin{cases} x_1 = h_1 + 5h_2 \\ x_2 = h_1 + \frac{7}{2}h_2 \\ x_3 = h_1 \\ x_4 = h_2 \end{cases}$$

(9)
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{array}{cccc} & E_1 & & D \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} -D \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ответ:
$$\begin{cases} x_1 = -3h_1 - 2h_2 \\ x_2 = h_2 \\ x_3 = h_1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

15.6 (4, 20, 25)

(4) $(A_{239} | C_{67})$

$$A_{239} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_{67} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ & 1 & 2 & 0 \\ & & & 0 \end{array}\right)$$

$\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}(A|b)$ -> совместн.

$$\Phi = \begin{pmatrix} -D \\ \hline E_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} (h_1) + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x_1 = -2h_1 - 1 \\ x_2 = -2h_1 \\ x_3 = h_1 \end{cases}$$

(20) $(A_{511} | C_{74})$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ -5 & 4 & 63 & 29 & 71 \\ 5 & 24 & -7 & -1 & 41 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ -5 & 4 & 63 & 29 & 71 \\ 0 & 28 & 56 & 28 & 112 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ & 14 & 28 & 14 & 56 \\ & 14 & 28 & 14 & 56 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ & 1 & 2 & 1 & 4 \\ & & & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11 & -5 & -11 \\ 6 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right); \qquad \Phi = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}(A|b) \longrightarrow$ совм.

$$x = \Phi h + B = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ответ}$$

(25) $(A_{444} \mid C_{167})$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 8 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ & 1 & -2 & 8 & -1 \\ & & & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 & -3 \\ & 1 & -2 & 8 & -1 \\ & 4 & 0 & -3 & 4 \\ & & & & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 25 & -6 \\ & 1 & -2 & 8 & -1 \\ & & 1 & -35 & 8 \\ & & & & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{25}{8} & -1 \\ & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \\ & & 1 & -35/8 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} -25/8 \\ 3/4 \\ 35/8 \\ 1 \end{pmatrix} (h_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ← ответ

12.13

$\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-r})$ — базис

$\Phi' = (\varphi_1', \dots, \varphi_{n-r}')$ — новый базис

хотим найти невырожд. матр. перехода $C_{(n-r)\times(n-r)}$

т.е. $\forall \Phi' : \Phi' = \Phi C$

д-м, что если такое Φ' удовлетв., то C яв-ся фунд.

$rk\,\Phi' = rk\,\Phi = n-r$

$A\Phi' = A\Phi C = 0C = 0$

$\Rightarrow \Phi'$ — фунд

общ. вид: $\Phi' = \Phi \cdot C$

12.17(4)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 2 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2x_1 - x_2 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & x_4 - 2x_2 + x_1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

19.14

строки $\underset{m\times n}{A}$ ЛНЗ $\Longleftrightarrow$ $A\bar{x}=\bar{b}$ $\forall \bar{b}$ им. реш.

$rk(A|b) \le m$

$rk A = m$ $\Big|$ $\Rightarrow rk(A|b)=m$

$rk(A|b)=rk(A)=m \Rightarrow$ система совместна

19.21

$A_1\bar{x}=\bar{b}_1$
$A_2\bar{x}=\bar{b}_2$

$(A_1|b_1) \sim (A_2|b_2)$ т.е. $\exists$ набор эл. преобразований расшир. м. в другую, а значит и набор экс $A_1 \rightsquigarrow A_2$

$A_1\bar{x}=0 \sim A_2\bar{x}=0$

q.e.d

19.29

1) $A\bar{x}=\bar{0} \sim B\bar{x}=0 \Longleftrightarrow$ ур-я каждой явл. линейной комбин. ур-й другой.

$\Downarrow$

$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\bar{x}=0 \sim A\bar{x}=0$

$$\underbrace{sol\left\{\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\bar{x}=\bar{0}\right\}}_{n-rk\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}} = \underbrace{sol\left\{A\bar{x}=\bar{0}\right\}}_{r-rkA} \leftarrow dim$$

$\Rightarrow rk\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix} = rk A \Leftrightarrow B$ - лин. комб строк A

ан-но в обр. сторону

q.e.d

20.22(3)

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \\ -15 & 5 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{E_1}{\boxed{1}} & \overset{0}{\boxed{-\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}}} \\ & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} -\,0 \\ \hline E_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

базисные столбцы
в пр-ве решений

$\underline{\underline{\dim V}} = n - r = 3 - 1 = \underline{\underline{2}}$

20.23(4)

найдем $A : A\bar{x} = 0$

$c_{166} = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$

$c_{156} = (1 \ 2 \ 1 \ 3)^T$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 2 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 3 & x_4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & x_4 - x_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2x_1 - x_2 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & x_4 - 2x_2 + x_1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \longleftarrow \text{ответ}$$

VI. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ПОРЯДКА n

14.15 определитель верхнетр. матрицы = произв. диаг элементов

по опр. det (все слаг, вкл. в себя не только диаг. эл-ты будут $=0$, т.к. в произв. неизбежно попадет ноль)

14.21 (12)

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & -2 \\ & 6 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & 17 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 & -3 \\ & 6 & 1 & 1 \\ & 6 & -7 & -6 \\ & 3 & 17 & 12 \end{vmatrix} =$$

$$= +\frac{1}{3} \begin{vmatrix} -1 & +2 & +4 & +3 \\ & & +33 & +23 \\ & & +10 & +7 \\ & +3 & 17 & +12 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & 3 \\ & 3 & 17 & 12 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-1}}$$

14.23 (6, 10, 12, 16)

6) $|A_{605}|$

получим диаг. матрицу перестановкой строк

$$\begin{vmatrix} \text{O} & & \lambda_2 & \lambda_1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \lambda_n & & \text{O} & \end{vmatrix}$$

$(n-1)+(n-2)+\ldots+1 = \frac{n(n-1)}{2}$ перестановок

$$\underline{\underline{\det A_{605} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i}} \longleftarrow \text{ответ}$$

(10) $|A_{633}|$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & . & n \\ & & & & \\ -1 & -2 & -3 & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 0 & 2 & 6 & & 2n \\ 0 & 0 & 3 & & 2n \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & n \end{vmatrix} = k!$$

(12) $|A_{676}|$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & \cdots & 5 & 5 \\ 5 & 3 & & & 5 & 5 \\ \vdots & & 3 & & & \\ 5 & 5 & & \ddots & 3 & \\ 5 & 5 & & & & 3 \end{vmatrix} = (-2)^{n-1}(5n-2)$$

по индукции

база: $n=2$ $\quad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9-25 = -16 = (-2)^{2-1}(10-2)$

индукц. шаг:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 5 & \cdots & 5 \\ 5 & 3 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 5 & & & 3 \end{vmatrix}}_{k} = (-2)^{k-1}(5k-2)$$

A_k

переход:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5\,5 \cdots 5\,5 \\ 5 & \\ 5 & \\ \vdots & A_k \\ 5 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2\,0 \cdots 0\,0 \\ 5 & \\ 5 & \\ \vdots & A_k \\ 5 & \\ 5 & \end{vmatrix}$$

(16) $|A_{636}|$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & 0 & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & \vdots \\ & 1 & 2 & 1 & 0 & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & & \\ & 3 & 6 & 3 & & 0 \\ & & & & & \\ 0 & & & & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 3 & 2 & 0 & & \\ & & 4 & 3 & & \\ & & 1 & 2 & 1 & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & & \\ & 3 & 2 & & \\ & & 4 & 3 & \\ & & 4 & 9 & 4 \\ & & & & \ddots \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & n & n+1 \\ 0 & \cdots & & & n & 2n+2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}\cdot 1\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1) = \underline{\underline{n+1}}$$

14.24(7)

$$|A_{6\times n}| = \begin{vmatrix} 1 & & 1 \\ \lambda_1 & & \lambda_n \\ \vdots & & \\ \lambda_1^{n-1} & & \lambda_n^{\cdots} \end{vmatrix} = \ldots \text{ решено в семинарах } = \prod_{1 \le i<j \le k} (\lambda_i - \lambda_j)$$

14.29

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1081 \\ 1 & 4 & 0 & 1403 \\ 2 & 0 & 9 & 2093 \\ 1 & 5 & 4 & 1541 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1081 & 1403 & 2093 & 1541 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 8 & 0 & 9 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= - \left(1081 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1403 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 8 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2093 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1541 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right) \vdots 23$$

14.31 (1,2)

(1) $$\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix}' = (a(t)d(t) - c(t)b(t))' = a'd + ad' - b'c - bc' =$$

$$= \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c' & d' \end{vmatrix}$$

14.36

$A = -A^T$

$\det A = \det A^T$

$\det(-A) = (-1)^n \det A$ $\longmapsto$ $\det(-A^T) = (-1)^n \det A = \det A$

$-\det A = \det A \Rightarrow 2\det A = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\det A = 0}}$

q.e.d.