Семинар 11. Колебания

Клименок Кирилл Леонидович

10.11.2022

1 Теоретическая часть

1.1 Свободные колебания

Начнем с определения. Свободные — это такие колебания, которые происходят в системе, на которую не действуют внешние диссипативные силы. Для примера можно взять грузик на пружинке, который может колебаться без трения. Выведя его из положения равновесия, мы получим уравнение колебаний:

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Мы получили дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. В нем мы обозначили $\omega_0 = k/m$ собственную частоту колебаний. Это уравнение имеет решение стандартного вида:

$$x = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

В нем A и φ_0 — это произвольные постоянные для нахождение которых необходимо знать начальные условия. По физическому смыслу это соответственно амплитуда и начальная фаза соответственно.

Абсолютно аналогично можно рассмотреть математический маятник и, представив синус малого угла отклонения как аргумент, получится, что результат не отличается. Аналогично можно записать не второй закон Ньютона для отклоненной массивной точки, уравнение на момент импульса. Результат не изменится. Естественно можно обобщить это и на случай колебания твердого тела, подвешенного за точку A, которая не не совпадает с центром масс. Вот так будет выгладить уравнение колебаний:

$$I_A\ddot{\varphi} = -mgl_{AC}\sin\varphi \approx -mgl_{AC}\varphi$$

Таким образом любое твердое тело можно рассматривать как колебательную систему, а рассчитывать его собственную частоту можно из уравнения моментов.

Альтернативный подход для расчета частоты связан с использованием энергии, которая сохраняется при свободных колебаниях. Мы можем вывести тело из равновесия, а затем записать полную энергию (кинетическую и потенциальную). Дальнейшее действие очевидно: надо дифференцировать по времени. Результат получиться аналогичный динамическому подходу через уравнения движения. Например для того же физического маятника можно записать:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1-\cos\varphi) = const|\frac{d}{dt}$$
$$I\ddot{\varphi}\dot{\varphi} + mgl\sin\varphi\dot{\varphi} = 0$$

То есть мы получили то же самое уравнение колебаний

2 Практическая часть

2.1 Задача 5.43

Условие Найдите частоту малых колебаний шарика массой m, подвешенного на пружине, если сила растяжения пружины пропорциональна квадрату растяжения, т.е. $F = k(l - l_0)^2$, где l_0 — длина пружины в ненагруженном состоянии.

Решение Найдем положение равновесия из условия:

$$mg = kx_1^2$$

где x_1 — деформация пружины. Откуда получаем, что $x_1 = \sqrt{mg/k}$. Теперь выведем тело из положения равновесия и запишем уравнение движения:

$$m\ddot{x} = mg - k(x_1 + x)^2$$

Считая, что колебания малы получим:

$$m\ddot{x} = mg - kx_1^2\left(1 + \frac{x}{x_1}\right)^2 \approx mg - kx_1^2\left(1 + \frac{2x}{x_1}\right) = -2kx_1x$$

Воспользуемся тем фактом, что производная координаты и производная от изменения координаты это одно и тоже получим, что

$$\Delta\ddot{x} + \frac{2kx_1}{m}\Delta x = 0 \to \omega = \sqrt{\frac{2kx_1}{m}} = \sqrt[4]{\frac{4kg}{m}}$$

2.2 Задача 10.47

Условие Однородный диск A массой M и радиусом $2R$ может совершать колебания, катаясь по поверхности неподвижного цилиндра B, имеющего радиус R (см. рис.). Центры цилиндра и диска стянуты стержнем массой m так, что при качении отсутствует проскальзывание. Пренебрегая трением в осях, найти период этих малых колебаний.

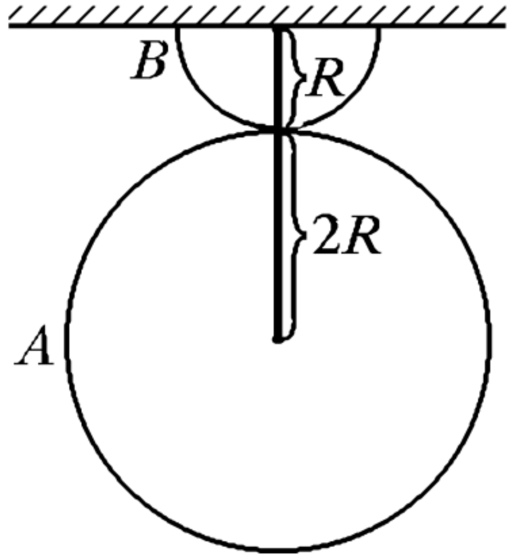

Рис. 1: К задаче 10.47

Решение Почти во всех задачах на колебания твердого тела надо использовать энергетический подход. Выведем систему из равновесия, отклонив стержень на угол φ. Тогда из соотношения радиусов диска и цилиндра и отсутствия проскальзывания получится, что диск повернулся на угол $3\varphi/2$. Запишем теперь кинетическую энергию диска, как сумму кинетической энергии поступательного движения центра масс и вращения вокруг центра:

$$K_d = \frac{M}{2}(3R\dot{\varphi})^2 + \frac{M(2R)^2}{2} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\dot{\varphi}\right)^2}{2}$$

Для стержня все проще — там просто вращение вокруг точки крепления:

$$K_s = \frac{m(3R)^2}{3} \cdot \frac{\dot{\varphi}^2}{2}$$

Теперь потенциальную энергию и для стержня и для диска:

$$\Pi = mg \cdot \frac{3R}{2}(1 - \cos\varphi) + Mg \cdot 3R(1 - \cos\varphi) \approx \frac{\varphi^2}{2} g \left(\frac{3R}{2}m + 3RM\right)$$

Тут мы воспользовались тем, что углы малые и $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$

Окончательно собирая выражение для энергии и дифференцируя его получаем:

$$\omega^2 = \frac{g}{R} \cdot \frac{2M + m}{9M + 2m}$$

2.3 Задача 10.84

Условие Найти период малых колебаний половинки сплошного цилиндра радиусом R, находящейся на горизонтальной поверхности. При колебаниях проскальзывание отсутствует.

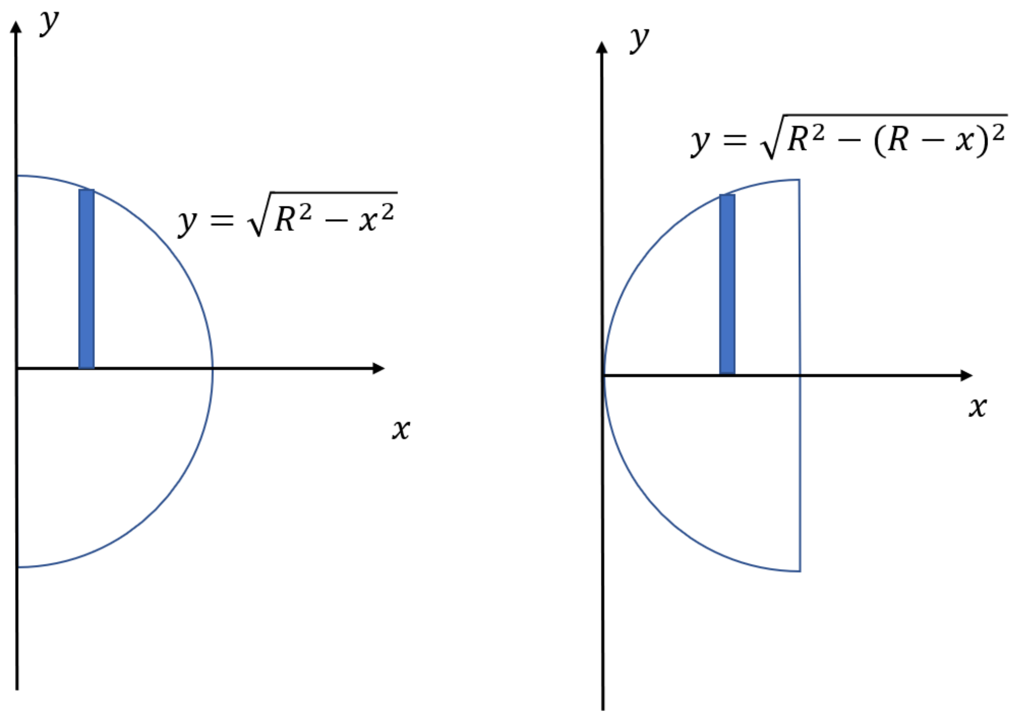

Рис. 2: Расчет центра масс и момента инерции для половины цилиндра

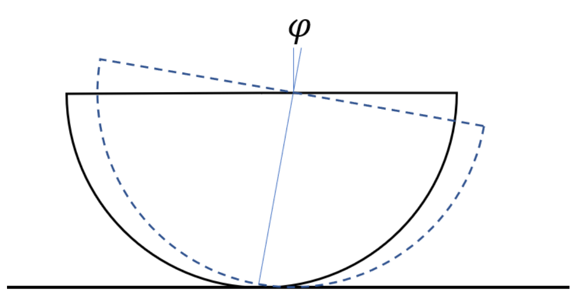

Рис. 3: Колебания половины цилиндра

Решение Для начала найдем центр масс половинки цилиндра. Если делать это честно, то надо воспользоваться двойным интегралом по половинке диска, но мы обойдемся одним. Для этого расположим половинку диска так, чтобы центр диска был в начале координат, а сам он занимал только область положительных x. Далее по определению центра масс:

$$x_C = \frac{4\int\limits_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}dx}{\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$

Далее опять надо воспользоваться энергетическим подходом. Выводим из положения равновесия и видим, что потенциальная энергия опять повысилась:

$$\Pi = mg\frac{4R}{3\pi}(1 - \cos^2\varphi) \approx mg\frac{4R}{3\pi}\frac{\varphi^2}{2}$$

А для кинетической энергии воспользуемся том, что половинка диска, как и целы диск может быть рассмотрена как вращение вокруг неподвижной оси, проходящей через точку касания, причем из-за инвариантности угловой скорости получается, что угловая скорость поворота вокруг центра масс равна угловой скорости поворота вокруг мгновенной оси:

$$K = \frac{I_A \dot{\varphi}^2}{2}$$

Осталось только посчитать момент инерции половины диска относительно мгновенной оси вращения. Опять же это можно сделать через интегрирование, похожее на расчет центра масс:

$$I_A = \frac{4\int\limits_0^R x^2\sqrt{R^2-(R-x)^2}dx}{\pi R^2} = mR^2\frac{15\pi - 32}{12\pi}$$

Окончательно собственная частота колебаний будет:

$$\omega^2 = \frac{16}{15\pi - 32}\frac{g}{R}$$

2.4 Задача 10.53

Условие Найти период крутильных колебаний диска, плотно насаженного на составной стержень, состоящий из двух различных последовательно соединенных стержней. Верхний конец A стержня неподвижно закреплен. Если бы диск был насажен только на первый стержень, то период колебаний был бы равен T_1. Если бы он был насажен только на второй стержень, то период колебаний оказался бы равным T_2.

Решение Тут надо бы поговорить про модуль кручения k — это просто штука, которая переводит угол поворота в момент силы, которая закручивает систему. Тогда крутильные колебания можно записать как:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -k\varphi \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{I}}$$

Теперь разберемся, что будет, если 2 стрежня с известными модулями кручения идут последовательно. Углы поворота складываются, а возвращающий момент постоянен. Тогда:

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \\ k_1\varphi_1 = k_2\varphi_2 = k(\varphi_1+\varphi_2) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Окончательно получается, что для последовательно соединения стержней будет:

$$T^2 = T_1^2 + T_2^2$$

2.5 Комментарии к задачам из задания

Нулевки

Задача 5.22 Использовать энергетический подход, если отвели эту гантель из равновесия

Задача 5.43 Решена

Задача 5.49 Разбить движение на участки чисто поступательного и колебательного сразу после удара.

Задача 10.34 Энергетический подход к вращающемуся цилиндру на пружинах

Задача 10.43 Надо учесть, что при отклонении от равновесия дист тоже поворачивается — его ничего не держит

Задача 10.47 Решена

Задача 10.53 Решена

Задача 10.78 Использовать формулу для колебаний физического маятника и аккуратно посчитать момент инерции

Задача 10.84 Решена