Семинар 14. Гидродинамика

Клименок Кирилл Леонидович

1.12.2022

1 Теоретическая часть

1.1 Гидростатика

Начнем с того, что опишем условие рассмотрения жидкости как сплошной среды. Мы можем сказать, что если рассматривать элементарный объем, то в нем будем так много молекул, что мы можем рассматривать его как полноценную среду, но при этом его размер будет так мал, чтобы применять дифференциальное исчисление.

Теперь поговорим о гидростатике. Первая идея, заключается в том, что в равновесии под действием внешних сил будет выполняться следующее:

$$\vec{f}_{ext} = \nabla P$$

То есть внешняя сила на единицу объема равна градиенту давления внутри жидкости. Тогда свободная поверхность будет таковой, что она будет перпендикулярна внешней силе в любой точке. Это означает, что если на воду действует только постоянная сила тяжести, то поверхность буде плоскостью, а если стакан вращать, то под действие центробежной силы поверхность будет параболоидом.

1.2 Течения идеальной жидкости

в рамках наших задач мы будем рассматривать только ламинарные течения. Для них существуют и непрерывны линии тока, слои жидкости текут параллельно и не перемешиваются. Помимо этого все скорости стационарны и не зависят от времени.

Для течения вводится понятие плотности потока массы и расхода:

$$q = \frac{dm}{dt \cdot dS} = \rho v; Q = \int \rho v dS$$

В терминах потока закон сохранения массы запишется очень просто: $Q_1 = Q_2$

Также можно ввести закон сохранения энергии для единицы (уравнение Бернулли) объема жидкости:

$$\frac{v^2}{2} + \Pi + \frac{P}{\rho} = const$$

1.3 Вязкая жидкость

Если параллельные плоские тела площадью S каждое, находящиеся на малом расстоянии h, движутся в той же плоскости со скоростью $\vec{v}$ друг относительно друга, а пространство между телами заполнено жидкостью или газом, то на каждое из них действует сила, в простейшем случае пропорциональная относительной скорости $\vec{v}$ и площади S и обратно пропорциональная расстоянию между телами h:

$$F = \eta S \frac{v}{h}$$

Соответственно η — коэффициент вязкости. Для вязкой жидкости мы рассмотрели течение Куэтта и течения Пуазейля. Для Куэтта одна из плоскостей смещается относительно другой и распределение скоростей линейно между ними:

$$v(y) = \frac{v_0}{2}\left(1 + \frac{y}{h}\right)$$

Для течения Пуазейля в трубе под действием постоянного перепада давления:

$$v(r) = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right); \frac{\Delta P}{l} = \frac{2\eta v_0}{r^2}$$

Для такого течения можно посчитать расход, проинтегрировав по всей поперечной площади. Итого получается:

$$Q = \pi R^2 \frac{R^2}{8\eta}\frac{\Delta P}{l}$$

2 Практическая часть

2.1 Задача 14.16/17

Условие Определить форму свободной поверхности жидкости, равномерно вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Z в цилиндрическом сосуде. Найти распределение P давления на дне сосуда вдоль радиуса.

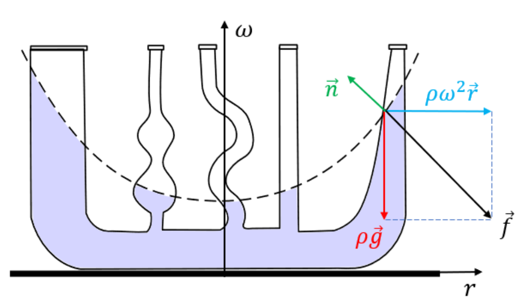

Рис. 1: К задаче 14.16/17

Решение Сила, действующая на элемент поверхности:

$$\vec{f} = \rho\omega^2\vec{r} + \rho\vec{g}$$

Из этого соотношения сил можно найти то, как устроена поверхность:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g} \Rightarrow z(r) = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

Определить z_0 можно из сохранения объема для вращающегося и не вращающегося сосуда:

$$V = H_0 \cdot \pi R^2 = \int_0^R z(r) \cdot 2\pi r dr$$

Теперь о давлении в произвольной точке сосуда на дне будет:

$$P(r) = \rho g z(r) = \rho g z_0 + \frac{\rho \omega^2 r^2}{2}$$

2.2 Задача 14.11

Условие В сосуд налита вода до высоты H. В дне сосуда проделано круглое отверстие радиусом r_0. Найти радиус струи воды $r(y)$, вытекающей из отверстия, в зависимости от расстояния y от дна сосуда.

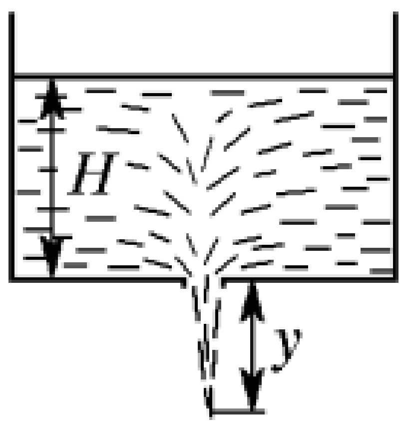

Рис. 2: К задаче 14.11

Решение Наше первое предположение заключается в том, что скорость опускания уровня воды в сосуде незначительна. Тогда можно записать уравнение Бернулли для течения в интересующей нас точке струи:

$$\frac{v^2(y)}{2} = g(H + y)$$

Еще для струй мы можем записать сохранение массы:

$$vr^2 = v_0 r_0^2 = \sqrt{2gH} r_0^2$$

Из этих двух уравнений можно получить необходимую зависимость:

$$r(y) = r_0 \left(\frac{H}{H + y} \right)^{1/4}$$

2.3 Задача 14.27

Условие Однородный по высоте сосуд с площадью сечения $S = 100$ см^2 залит водой до уровня $H = 10$ см. Вблизи дна вода отводится трубочкой диаметром $2r = 2$ мм и длиной $l = 1$ м. Трубочка открывается в атмосферу. По какому закону $h(t)$ вода вытекает из сосуда? Оценить также время, за которое вода вытечет из сосуда. Предполагается известной вязкость воды $\eta = 10^{-3}$ Па $\cdot$ с

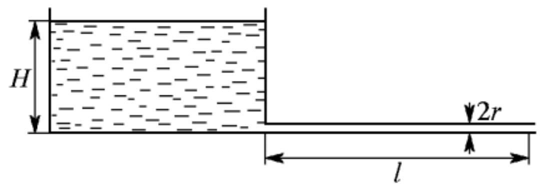

Рис. 3: К задаче 14.27

Решение Идея задачи предельно простая: у нас есть длинная трубка в которой под действием градиента давления появляется течение Пуазейля. Для него мы знаем расход, но так как жидкость вытекает и уровень воды падает, то перепад давления и сам уменьшается. Дальше, как водится надо проинтегрировать и узнать время вытекания. Запишем расход:

$$Q = \frac{\rho g h}{l}\frac{\pi r^4}{8\eta l} = -S\frac{dh}{dt}$$

Интегрирование по времени дает традиционную экспоненту:

$$h(t) = H\exp\left(-t/\tau\right), \text{ где} \tau = \frac{8S\eta h}{\pi\rho g r^4}$$

Естественно, в нашей модели у нас получилось бесконечное время вытекания, но можно гарантированно сказать, что модель перестанет работать, если высота столба жидкости будет сопоставима с радиусом капилляра $h = r$. Тогда после подстановки мы получаем, что $t \approx 3.3$ часа.

2.4 Комментарии к задачам из задания

Задача 14.11 Решена

Задача 14.17 Решена

Задача 14.21 Идея аналогична выводу для распределения скорости в течении Пуазейля

Задача 14.24 Течение в трещине обычное пуазелевское, но двухмерное. Для расхода надо просто проинтегрировать 2 раза по 2 осям

Задача 14.27 Решена

Задача 14.29 Надо аккуратно рассчитать момент сил, которые действуют на диск из условия, что над и под диском будет течение Куэтта, но не в плоскости а по окружностям

Задача 14.42 принцип работы расходомера Вентури основан на законе сохранения массы и уравнении Бернулли

Задача 14.46 Выписать определение числа Рейнольдса и подставить характерные значения из условия