q13.

Вычисление параметров эллиптических орбит.
Связь длин полуосей орбиты с интегралами движения.
Третий з-н Кеплера для эллиптических орбит.

Вычисление параметров эллиптических орбит

ур-е траектории (вывод в q11)

$$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}, \quad p = \frac{1}{u_0} = \frac{L^2}{GMm^2}, \quad e = \frac{c}{u_0} = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$$

$0 \le e < 1$

$$r_{max} = \frac{p}{1-e} \qquad r_{min} = \frac{p}{1+e}$$

max и min удаление планеты от центра

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}; \qquad r^2 + \frac{GMm}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0$$

$$r = -\frac{GMm}{2E} \pm \sqrt{\frac{G^2M^2m^2}{4E^2} - \frac{L^2}{2mE}}$$

если $E>0$, 1 корень, с „+"

если $E<0$, 2 корня r_{min}, r_{max}
(отвечает финитному движ-ю $r_{min} \le r \le r_{max}$)

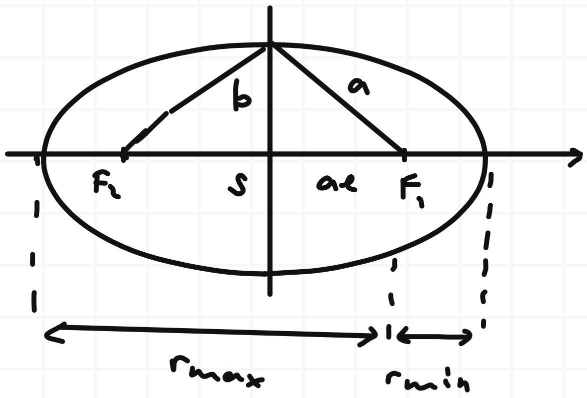
$$e = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max}+r_{min}} = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$$

$$p = \frac{2r_{min}r_{max}}{r_{max}+r_{min}} = \frac{L^2}{GMm^2}$$

Третий з-н Кеплера

$$v_{сект} = \frac{S_{эл}}{T} = \frac{\pi a b}{T} = \frac{L}{2m}, \qquad T = \frac{2\pi m a b}{L}$$

// лирическое отступление про эллиптич. орбиты



$$a = \frac{1}{2}(r_{min} + r_{max}) = -\frac{GMm}{2E}$$

$$b = \sqrt{a^2 - (SF_1)^2} = \sqrt{\left(\frac{r_{max}+r_{min}}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_{max}-r_{min}}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{r_{max} r_{min}} = \frac{L}{\sqrt{-2mE}}$$

//

$$T = \frac{2\pi m a b}{L} = \frac{2\pi m a}{\cancel{L}} \cdot \frac{\cancel{L}}{\sqrt{-2mE}} = a\sqrt{\frac{4\pi^2 m}{-2E}} \overset{E = -\frac{GMm}{2a}}{=\!=\!=} a\sqrt{\frac{4\pi^2 \cancel{m}\, a}{GM\cancel{m}}} = a^{3/2}\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}}$$

q.e.d.

для системы тел сопоставимой массы:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2}$$