Неделя 1

I. ПРОИЗВОДНАЯ　　　　cl. §13

32

$$f(x) = \log_x 2^x \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = (\log_x 2^x)' = (x \log_x 2)' = \log_x 2 + x\left(\frac{\ln 2}{\ln x}\right)' = \log_x 2 + x \ln 2 \left(\frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x}\right) =$$

$$= \frac{\ln 2}{\ln x} - \frac{\ln 2}{\ln^2 x} = \frac{\ln 2 (\ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

67

$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x \neq 0$$

$$f'(x) = -\sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot (-1)\, x^{-2} = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$

106

$$f(x) = 3^{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \left(3^{\cos^2 x}\right)' = 3^{\cos^2 x} \cdot \ln 3 \, (\cos^2 x)' = \ln(3) \cdot 3^{\cos^2 x} \cdot 2\cos x(-\sin x) =$$

$$= -2\sin x \cos x \cdot 3^{\cos^2 x} \cdot \ln 3 = -\sin 2x \cdot 3^{\cos^2 x} \cdot \ln 3$$

149

$$f(x) = x^{x^x}$$

$$// \ (x^x)' = (e^{x\ln x})'_x = e^{x \ln x}(x \ln x)'_x = e^{x\ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1) \ //$$

$$f'(x) = \left(e^{\ln x \cdot (x^x)}\right)'_x = e^{x^x \ln x}(x^x \cdot \ln x)'_x = e^{x^x \ln x}\left(x^{x-1} + \ln x \cdot x^x(\ln x + 1)\right) =$$

$$= x^{x^x}\left(x^x \cdot \frac{1}{x} + x^x \cdot \ln x(\ln x + 1)\right) = x^{x^x} x^x \left(\frac{1}{x} + \ln x(\ln x + 1)\right)$$

T.1

$$y = \left(\frac{\operatorname{tg}\sqrt{1 - \log_3 2x}}{\operatorname{cth}(x^3 + 3e^{x^7})}\right)^{\arccos 2x^2} = \left[\begin{array}{l} f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{1-\log_3 2x} \\ g(x) = \operatorname{cth}(x^3 + 3e^{x^7}) \\ h(x) = \arccos 2x^2 \end{array}\right] = \left(\frac{f}{g}\right)^h$$

$$y' = \left(\left(\frac{f}{g}\right)^h\right)' = h\left(\frac{f}{g}\right)^{h-1}\left(\frac{f}{g}\right)' =$$

$$= h\left(\frac{f}{g}\right)^{h-1}\left(\frac{f'g - g'f}{g^2}\right)$$

$$// \ f'(x) = \frac{\left(\sqrt{1-\log_3 2x}\right)'}{\cos^2\sqrt{1-\log_3 2x}} = \frac{-(\log_3 2x)'}{2\cos^2\left(\sqrt{1-\log_3 2x}\right) \cdot \sqrt{1-\log_3 2x}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-\log_3 2x}\,\cos^2\left(\sqrt{1-\log_3 2x}\right)} \cdot \frac{\cancel{2}}{(\cancel{2}x)\ln 3} \ //$$

// $f'(x) \dfrac{1}{2x\ln 3\sqrt{1-\log_3 2x}\cos^2\sqrt{1-\log_3 2x}}$

$$g'(x) = -\frac{3x^2+3(e^{x^4})'}{sh^2(x^3+3e^{x^4})} = -\frac{3x^2+3e^{x^4}\cdot 4x^3}{sh^2(x^3+3e^{x^4})} = -\frac{3x^2+12x^3e^{x^4}}{sh(x^3-3e^{x^4})}$$

$$h'(x) = -\frac{2\cdot 2x}{\sqrt{1-(2x^2)^2}} = -\frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2)^2}}$$

//

ответ, где $\underbrace{f, g, h}_{\text{см. пред. стр.}}$, f', g', h'

II. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ С2, §1

2.15

$$\int \sin^2\frac{x}{2}dx = \int\frac{1-\cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int\cos x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C$$

2.16

$$\int ctg^2 x\,dx = \int\frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -ctg\,x - x + C$$

12.2

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = \begin{bmatrix} t = 1+x \\ x = t-1\end{bmatrix} = \int(t-1)\sqrt{t}\,dt = \int t\sqrt{t}\,dt - \int\sqrt{t}\,dt = \frac{t^{5/2}}{5/2} - \frac{t^{3/2}}{3/2} + C =$$

$$= \frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$$

17.4

$$\int x\ln x\,dx = \int\underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{x\,dx}_{dv} = \begin{bmatrix} \int dv = \int x\,dx \\ v = \frac{x^2}{2}+c\end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x\,dx}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 + C = \frac{1}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C$$

23.5

$$\int\arcsin^2 x\,dx = \begin{bmatrix} x = \sin t \\ \arcsin x = t \\ dx = \cos t\,dt\end{bmatrix} = \int t^2\cdot\underbrace{\cos t\,dt}_{d(\sin t)} = t^2\sin t - \int\sin t\cdot 2t\,dt =$$

$$= t^2\sin t + 2\int t\,d(\cos t) = t^2\sin t + 2\left(t\cos t - \int\cos t\,dt\right) =$$

$$= t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t + C$$

24.3

$$I=\int \underbrace{e^{ax}}_{u}\underbrace{\sin bx\,dx}_{dv} = \left[\begin{aligned} &\sin bx\,\frac{d(bx)}{b} = \\ &= \frac{1}{b}\sin bx\, d(bx) = \\ &= -\frac{1}{b}\,d(\cos bx)\end{aligned}\right] = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \int +\frac{a}{b}e^{ax}\underbrace{\cos bx\,dx}_{\frac{1}{b}d(\sin bx\, d(bx))} =$$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\Big(e^{ax}\cdot\frac{1}{b}\sin bx - \frac{a}{b}\underbrace{\int e^{ax}\sin bx\,dx}_{I}\Big)$$

$$I = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}I$$

$$I\left(\frac{a^2+b^2}{b^{\cancel{2}}}\right) = \frac{1}{\cancel{b}}e^{ax}\left(\frac{a}{b}\sin bx - \cos bx\right)$$

$$I = \frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\left(\frac{a}{b}\sin bx - \cos bx\right)$$

III. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ПОС-ТИ

Cl. §7

275.3

$$\left\{\frac{n+(-1)^n}{3n-1}\right\}$$

сверху

$$\frac{n+(-1)^n}{3n-1} \le \frac{n+1}{3n-1} < \frac{n-1}{3(n-1)} + \frac{2}{3(n-1)} = \frac{1}{3} + \underbrace{\frac{2}{3(n-1)}}_{\substack{n\to+\infty\\ \downarrow \\ 0}} < 1$$

снизу:

$$\frac{n+(-1)^n}{3n-1} \ge \frac{n-1}{3n-1} > \frac{n+1}{3(n+1)} - \frac{2}{3(n+1)} = \frac{1}{3} - \underbrace{\frac{2}{3(n+1)}}_{\substack{n\to+\infty\\ \downarrow \\ 0}} > 0$$

276.7

$$\left\{\frac{n^3}{n^2+1}\right\}$$

$$n\frac{n^2}{n^2+1} = n\left(\frac{n^2+1}{n^2+1} - \frac{1}{n^2+1}\right) = \underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{n}\Big(\underbrace{1-\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{1}{n^2+1}}}\Big) \to \infty$$

279.2

$$x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}, \quad n\in\mathbb{N}$$

$$x_n \ ?\ x_{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1} \ ?\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1} + \frac{1}{4(n+1)^2-1}$$

$$0 \ ?\ \frac{1}{4(n+1)^2-1}$$

точка смены знака:

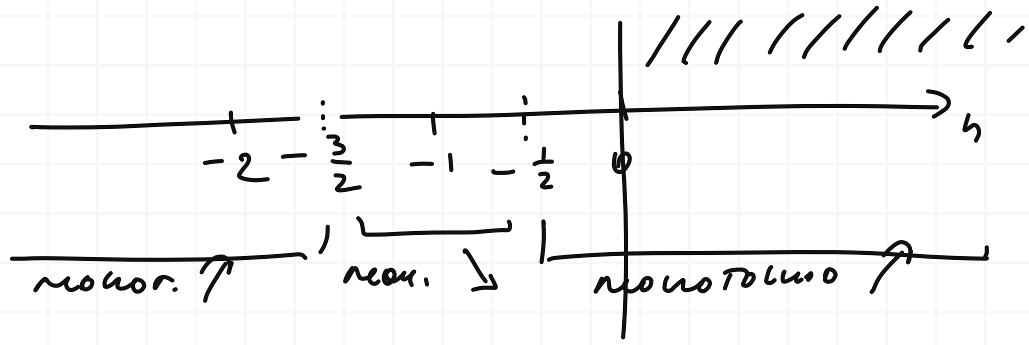
$4(n+1)^2-1=0$

$(n+1)^2=\frac{1}{4}$

$n+1=\pm\frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} n=-\frac{3}{2} \\ n=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

как ведет себя последоват-ть?



но $n\in\mathbb{N}$, а значит посл-ть монотонно ↗

(очевидно, огр. снизу самым первым эл-том)

$\inf(x_n)=x_1=\frac{1}{4-1}=\frac{1}{3}$

Найдем $\sup(x_n)$.

$$\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right);\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{5}}-\ldots+\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{\to 0}\right)\to\frac{1}{2}$$

$\sup(x_n)=\frac{1}{2}$

300.2

$\{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\}$

$\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} \quad ? \quad \sqrt{(n+1)+2}-\sqrt{(n+1)+1}$

$\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} \quad ? \quad \sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}$

$\underset{\vee 0}{2\sqrt{n+2}} \quad ? \quad \underbrace{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}_{\vee 0} \qquad |\_^2$

$\overset{2n+4}{\cancel{4n+8}} \quad ? \quad \cancel{n+1}+\cancel{n+3}+2\sqrt{(n+1)(n+3)}$

$\underbrace{n+2}_{\text{с } n>-2} \xrightarrow{} 0 \quad ? \quad \underset{\vee 0}{\sqrt{(n+1)(n+3)}} \qquad |\_^2$

$\cancel{n^2}+\cancel{4n}+4 \quad ? \quad \cancel{n^2}+\cancel{4n}+3$

$4>3$

с $n>-2$ эта последовательность монотонно ↘

Неделя 2.

III. С1. §8

2(4)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2-n}{2+n} \overset{?}{=} -1$$

$$\forall \varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbb{N}: \forall n\in\mathbb{N}: n\geq N \overset{?}{\hookrightarrow} |x_n+1|<\varepsilon$$

$$|x_n+1| = \frac{2-n}{2+n}+1 = \frac{2-\cancel{n}+2+\cancel{n}}{2+n} = \frac{4}{2+n} < \varepsilon$$

$4<(2+n)\varepsilon$

$\frac{4}{\varepsilon}<2+n$

$\frac{4}{\varepsilon} - 2 < n$; $n > 2-\frac{4}{\varepsilon}$

$N = 3-\frac{4}{\varepsilon}$ подойдет

13(1)

$x_n=(-1)^n$ $\overset{?}{-}$ расходится

$\forall a\in\mathbb{R}\ \exists\varepsilon>0: \forall N\in\mathbb{N} \hookrightarrow \exists n\geq N\ \ |x_n-a|\geq\varepsilon$

if $a\neq\pm1$, то возьмем такое ε, чтобы $\pm1\notin U_\varepsilon(a)$ (можем сделать по т. о непересек. окр-тях)

$x_n=\pm1$, соотв. $|x_n-a|\geq\varepsilon$

else, т.е. если $a=\pm1$, возьмем $\varepsilon=1$ и $n: x_n=\mp1$, выполн.

q.e.d.

15(1)

$x_n=(-1)^n n$ $\overset{?}{-}$ расх., т.е. [не имеет предела / имеет беск. пр.

д-м, что не имеет предела. От противного.

] $\exists a: \forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n\geq N \hookrightarrow |x_n-a|<\varepsilon$

Возьмем $\varepsilon=1$.

$n=2k$: $x_{2k}=(-1)^{2k}n=n$; $x_n\in(a-1,a+1)$

$n=2k+1$: $x_{2k+1}=(-1)^{2k+1}n=-n$; $x_n\in(-a-1,-a+1)$

Эти интервалы не пересекаются, или для достат. больших значениях n x_n им не принадлежит. Против-е.

$\exists n=\max(2N,|a+1+N|)$

27.

$\exists \lim\limits_{x \to \infty} x_n = a$ — дано. $\left[\begin{array}{l} \exists s \in \mathbb{N}: x_s = \sup(x_n) := m \\ \exists i \in \mathbb{N}: x_i = \inf(x_n) := M \end{array}\right.$ — д-ть

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$

Выберем такой ε, чтобы $\left[\begin{array}{l} m \notin U_\varepsilon(a) \\ M \notin U_\varepsilon(a) \end{array}\right.$. Не умаляя общности будем считать, что $m \notin U_\varepsilon(a)$.

Тогда вне $U_\varepsilon(a)$ — конечное число членов x_n. Т.е. m или достиг., или меньше $\min(x_n \notin U_\varepsilon(a))$. пр-е.

q.e.d.

N25(1)

$\exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$\overset{?}{\exists} \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{x_n} \overset{?}{=} \sqrt{a}$

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{a}} \varepsilon := \tilde{\varepsilon}$$

Ура: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow \left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| < \tilde{\varepsilon}$

N46 (1,2,4) $\qquad \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$: $\quad x_n = \frac{1}{n^2}$; $y_n = \frac{1}{n}$; $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{1} = \frac{1}{n}$

(2) $\lim \frac{x_n}{y_n} = 1$: $\quad x_n = \frac{1}{n}$; $y_n = \frac{1}{n}$; $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{1} = 1$

(3) $\lim \frac{x_n}{y_n} \ \neg\exists$: $\quad x_n = \frac{1}{n}$; $y_n = 0$ $\quad \frac{x_n}{y_n} \ \neg\exists$

17(1) $\quad n, N \in \mathbb{N}$ (здесь и далее)

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \qquad ?\exists \lim |x_n| \overset{?}{=} |a|$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tilde{N}: \forall n \geq \tilde{N} \hookrightarrow |x_n - a| < \tilde{\varepsilon} \qquad x_n - a \geq x_n - |a|$

// $\quad |a| - |b| = |a - b + b| - |b| \leq |a - b|$; $|a| - |b| \leq |a - b|$

ан-но $|b| - |a|$; $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$ //

$\tilde{\varepsilon} > |x_n - a| \geq \big||x_n| - |a|\big|$ (*)

Хотим д-ть:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow \big||x_n| - |a|\big| < \varepsilon$

из (*) видим, что для $N = \tilde{N}$, $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$ уже будет выполняться.

17(2)

$x_n = (-1)^n$ $\qquad$ x_n расх.

$|x_n| = |(-1)^n| = 1$ $\qquad$ $|x_n| \to 1$ $\qquad$ ура!

T.2

$$x_n = \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_0}{b_q n^q + \ldots + b_0} \circledeq \quad (a_p \neq 0,\ b_q \neq 0)$$

$$\circledeq \frac{n^p\left(a_p + a_{p-1}\frac{1}{n} + \ldots + a_0 \cdot \frac{1}{n^p}\right)}{n^q\left(b_q + b_{q-1}\frac{1}{n} + \ldots + b_0 \cdot \frac{1}{n^q}\right)} \boxed{=}$$

I. $p = q$: $\quad \dfrac{a_p + \underbrace{(\ldots)}_{\to 0}}{b_q + \underbrace{(\ldots)}_{\to 0}} \to \dfrac{a_p}{b_q}$; $\quad \lim x_n = \dfrac{a_p}{b_q}$

II. $p > q$: $\quad \dfrac{a_p n^{p-q} + a_{p-1} n^{p-q-1} + \ldots + a_q + \underbrace{(\ldots)}_{\to 0}}{b_q + \underbrace{(\ldots)}_{\to 0}} \to \infty$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

III. $p < q$: ан-но, только $\begin{matrix} \text{числ} \to a_p \\ \text{знам} \to \infty \end{matrix}$ $\longrightarrow 0$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

91

$$x_n - \text{беск. больш} \underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightleftarrows}} x - \text{неогр}$$

$\forall M > 0\ \exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow x_n > M$ $\qquad$ $\forall M > 0\ \exists n: x_n > M$

(1) да, верно

$\forall M > 0\ \exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow x_n > M$. Возьмем $n = N$. Для него услов. неогр. выполн.
q.e.d.

(2) нет, неверно

Контрпример: $\quad x_n = \begin{cases} 0 ; & n \vdots 2 \\ n ; & n \not\vdots 2 \end{cases}$

$\forall M > 0\ \exists n: x_n > M$ — выполн., но $\forall M > 0\ \forall N > 0\ \exists n = 2k \hookrightarrow x_n < M$
(т.к. $= 0$)

53(1)

$x_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$ $\qquad$ Д-м, что $x_n \to 0$.

$$x_n = \frac{(\cancel{n^2}+1) - (\cancel{n^2}-1)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \frac{\overset{\to 2}{2}}{\underbrace{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}_{\to \infty}} \to 0$$

q.e.d. $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

7

$$|q|<1 \overset{?}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

$q=0$ - очевидно

$q>0$: $\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n\ge N \hookrightarrow |q^n| \overset{?}{<} 1$

или $n=2k;\ k\in\mathbb{N}$

$$|q^n| = q^n = \underset{\wedge\atop 1}{q}\cdot\ldots\cdot\underset{\wedge\atop 1}{q} < 1,\ q.e.d.$$

$q<0$: $|q^n| = -|q|^n = -\underbrace{|q|^n}_{\wedge\atop 1} < 1$, q.e.d.

и $n=2k+1$

60 (для всех $a>0$)

Неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n \ge 1+nx \qquad n\in\mathbb{N},\ x>-1$$

$a>0 \qquad ?\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$

I. если $a>1$

$x_n=\sqrt[n]{a}$; $y_n=\sqrt[n]{a}-1$; $\forall n\in\mathbb{N}\ y_n>0$

$a=(1+y_n)^n \ge 1+ny_n > ny_n = n(\sqrt[n]{a}-1)$; $\frac{a}{n}>y_n$

$\forall n\in\mathbb{N} \hookrightarrow 0<y_n<\frac{a}{n}$

$$\underset{\downarrow\atop 0}{0} < y_n < \underset{\downarrow\atop 0}{\frac{a}{n}} \Rightarrow y_n\to 0;\ \underline{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1},\ q.e.d.$$

II если $a=1$, очевидно

III если $0<a<1$ $\qquad a=\frac{1}{b}$; $b>1$

$x_n=\frac{1}{\sqrt[n]{b}}$, $\sqrt[n]{b}\to 1$; $\underline{x_n\to 1}$, q.e.d.

67

$$\lim\frac{a^n}{n!}\overset{?}{=}0$$

с какого-то момента это k найдется

$\exists k:\ 2|a|<k+1$; $\frac{|a|}{k+1}<\frac{1}{2}$; ...

$$\underset{\downarrow\atop 0}{0} < \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdot\ldots\cdot\underset{\wedge\atop 1/2}{\frac{|a|}{k}}\cdot\underset{\wedge\atop 1/2}{\frac{|a|}{k+1}}\cdot\ldots\cdot\underset{\wedge\atop 1/2}{\frac{|a|}{n}} < \underbrace{\frac{|a|^k}{k!}}_{const}\underset{\downarrow\atop 0}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}} \to 0$$

по теор. о сжатой п-ти: $\left|\frac{a^n}{n!}\right|\to 0$

ан-но $\qquad -\left|\frac{a^n}{n!}\right|\to 0$

$$\lim\frac{a^n}{n!}=0 \qquad q.e.d.$$

74 (1)

$$x_n = \sqrt[n]{3^n - 2^n} = \underbrace{3 \cdot \sqrt[n]{1 - \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 0}}}_{\to 1} = 3 \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 3$$

71 (1)

$\lim_{n\to\infty} x_n$ - ?

$x_n = \frac{n!}{n^n}$

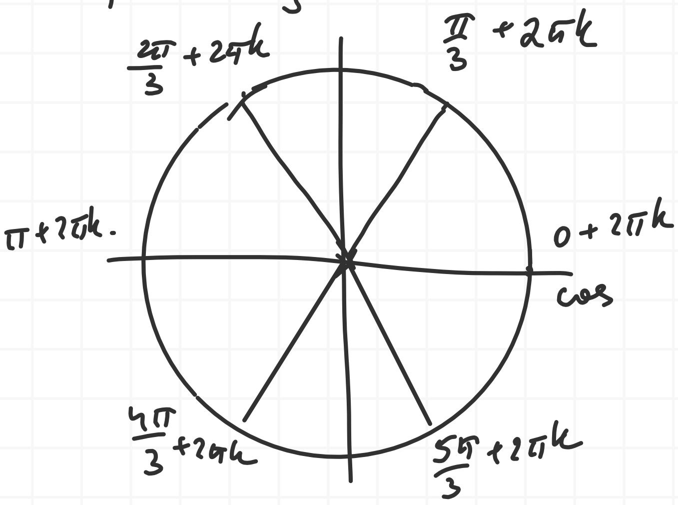
$$\underset{\downarrow\, 0}{0} < \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \le \underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

Неделя 3.

C1, §8   116(1)

$x_n = \cos\frac{\pi n}{3}$



$\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi(n+6k)}{3}\right)$; $k \in \mathbb{N}$

n	$\cos\frac{\pi n}{3}$
$0+6k$	1
$1+6k$	$1/2$
$2+6k$	$-1/2$
$3+6k$	-1
$4+6k$	$-1/2$
$5+6k$	$1/2$

мн-во всех значений, а также ч.п.

∃ мн-во ч.п. — L

$L = \{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$ ответ

$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

117(2)

$x_n = (-1)^n \frac{3n-1}{n+2}$

$n = 2k$; $k \in \mathbb{N}$: $x_n = \frac{3n-1}{n+2}$

$n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$: $x_n = -\frac{3n-1}{n+2} = \frac{1-3n}{n+2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n+2} = \left[\frac{3n-1}{n+2} = \frac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} \to 3\right] = 3$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2k-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-3n}{n+2} = -3$

$\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 3$

$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -3$

$x_{2k} \ ? \ x_{2(k+1)}$

$\frac{3n-1}{n+2} \ ? \ \frac{3(n+1)-1}{(n+1)+2}$

$\frac{3n-1}{n+2}_{>0} \ ? \ \frac{3n+2}{n+3}_{>0}$

$(3n-1)(n+3) \ ? \ (n+2)(3n+2)$

$\cancel{3n^2} \cancel{- n + 9n} \overset{+0}{\cancel{-3}} \ ? \ \cancel{3n^2} \cancel{+6n+2n} \overset{+7}{\cancel{+4}}$

$0 < 7$

$x_{2k} \uparrow$

$\sup x_{2k} = 3$

$\inf x_{2k} = x_2 = \frac{3\cdot 2-1}{2+2} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

$x_{2k-1} \ ? \ x_{2(k+1)-1}$

$\frac{1-3n}{n-2} \ \overset{?}{>} \ \frac{1-3(n+1)}{(n+1)+2}$

(см. ←)

$x_{2k-1} \downarrow$

$\inf x_{2k-1} = -3$

$\sup x_{2k-1} = x_1 = \frac{1-3}{1-2} = \frac{+2}{+1} = 2$

Итак:

$\sup x_n = \max(\sup x_{2k}, \sup x_{2k-1}) = 3$

$\inf x_n = \min(\inf x_{2k}, \inf_{2k-1}) = -3$

121

дано: x_n — неогр

д-ть (x_n — беск. больш) xor ($\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in \mathbb{R}$) = true

1) $\exists\, x_n$ — беск. большая, т.е. $\forall M>0\ \exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow x_n > M$.
Очевидно, что конечных ч.п. $\neg\exists$:

$$\forall a: \exists \varepsilon>0\ \forall N: \exists k \geq N \hookrightarrow |x_{n_k}-a|<\varepsilon \iff \left[\begin{array}{l} x_{n_k}-a<\varepsilon \\ x_{n_k}-a>-\varepsilon \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x_{n_k}<a+\varepsilon \\ x_{n_k}>a-\varepsilon \end{array}\right.$$

$$\exists M > a+\varepsilon: \exists N: \forall n \geq N\ \ x_n > M > a+\varepsilon$$ — против-е!

2) $\exists\, x_n$ — имеет конеч. ч.п. $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$

$\exists M>a: \forall N\ \exists n \geq N \hookrightarrow x_n > M$, в частн. $\exists \varepsilon: x_{n_k} \notin U_\varepsilon(a)$ — против-е!

3) $\exists\, x_n$ — неогр, но не беск. больш. и не имеет ч.п.

не беск. больш: $\exists M>0\ \forall N: \exists n \geq N \hookrightarrow |x_n| \leq M$
можем составить подпосл-ть из таких n. — x_{n_k}
она огр, а значит у x_{n_k} есть конечный предел.

136

(1) $x_n = \{1, \frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots\}$

(2)

$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{-2}{1}$	...
$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{-2}{2}$	
$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{3}$	

a_n — такие номер, как изобр. слева

x_n — запишем элементы a_n так:
$a_1\ a_2\ a_1\ a_2\ a_3\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \dots$

$x_n = \{0, 1, 0, 1, \frac{1}{2}, \dots\}$

146 $\{x_n\}$ – фунд, т.е:

$\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall m,n \geqslant N \hookrightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon \iff \forall \varepsilon>0\quad \exists n>N \hookrightarrow |x_n - x_N| < \varepsilon$

„$\Rightarrow$" очевидно $m=N$

„$\Leftarrow$" $|x_n - x_N| < \varepsilon$

$$\underbrace{|x_m - x_n| \leqslant}_{\text{нер-во } \Delta} \underset{\varepsilon}{\underset{\wedge}{|x_m - x_N|}} + \underset{\varepsilon}{\underset{\wedge}{|x_n - x_N|}} < 2\varepsilon$$

(V)

143(3)

$x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

докажем сходимость по критерию Коши, воспользуясь равносильной форм. из. 146 (*)

$\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N \hookrightarrow |x_n - x_N| < \varepsilon$

$$|x_n - x_N| = \frac{1}{(n+1)!} + \dots + \frac{1}{N!} \leqslant \frac{N-n}{(n+1)!} \leqslant \frac{N}{(n+1)!} \leqslant \underbrace{\frac{N}{(N+1)!} < \varepsilon}_{\text{подбир. } N \text{ по этому условию}}$$

147(4) Д-м: $\exists \varepsilon>0\ \forall N: \exists n,m>N \hookrightarrow |x_n - x_m| \geqslant \varepsilon$

$\varepsilon = \_\_\_$ $n = \_\_\_$
$m = \_\_\_$

$x_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$

$n = 2k$
$m = 2k+1$

$$|x_n - x_m| = \Bigg|\underset{\underset{e}{\downarrow}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} - \overset{\overset{1}{\vee}}{\underset{\underset{0}{\vee}}{\left(1-\frac{1}{m}\right)^m}}\Bigg| > e$$

q.e.d.

158

$\forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow \lim |x_{n+p} - x_n| = 0$

$$x_n = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \pmod p \\ 1, & n \equiv 1 \pmod p \\ & \vdots \\ p-1, & n \equiv p-1 \pmod p \end{cases}$$

164(1)

$x_1 = 13 \qquad x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}$

Исследуем монотонность $\{x_n\}$:

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{12+x_n} - x_n = \frac{12 + x_n - x_n^2}{\sqrt{12+x_n} + x_n} = -\frac{x_n^2 - x_n - 12}{x_n + \sqrt{12+x_n}} =$$

$$= -\frac{(x_n+3)(x_n-4)}{x_n + \sqrt{12+x_n}}$$

Д-м, что $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n > 4$. По индукции.

База: $x_1 = 13 > 4$

Переход: предположим, $x_n > 4$

$$x_{n+1} = \sqrt{\underbrace{12 + \underset{\vee 4}{x_n}}_{\vee 16}} > 4$$

$$x_{n+1} - x_n = - \frac{\overset{>0}{(x_n+3)}\overset{>0}{(x_n-4)}}{\underset{>0}{x_n + \sqrt{12+x_n}}} < 0$$

получается, $\{x_n\}$ монотонно убывает и огр. слева ($x_i > 4$).
Значит, по т. Вейерштрасса $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$

$a = \sqrt{12+a}$; $a^2 - a - 12 = 0$; $(a+3)(a-4) = 0$; $a = -3$ – не подх.
$a = 4$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$ ← ответ

220.

$x_1 > 0$

$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ $\qquad\qquad \lim x_n - ?$

$a > 0$; $n \in \mathbb{N}$

заметим, что $\forall \alpha > 0$ $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geqslant 2$, т.к. $\alpha^2 + 1 - 2\alpha = (\alpha - 1)^2 \geqslant 0$

д-м, что $\lim x_n = \sqrt{a}$.

$\exists x_n = \alpha\sqrt{a}$, $\alpha > 0$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha\sqrt{a} + \frac{a}{\alpha\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{a}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \geqslant \sqrt{a}$$

$\forall n \geqslant 2$ $\quad x_n \geqslant \sqrt{a}$, $\qquad \exists x_n = k_n\sqrt{a}$; $k_n \geqslant 1$

исследуем на монотонность:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} - x_n\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x_n}(a - x_n^2) = \frac{1}{2}\cdot\overset{>0}{\frac{1}{x_n}}\overset{\leq 0}{(a - \underset{\vee a}{k_n^2 a})} \leq 0$$

$\{x_n\} \searrow$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n > 0 \hookrightarrow \{x_n\}$ огр. снизу

По т. Вейерштр. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b \in \mathbb{R}$

$$b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right); \quad \cancel{2}b = \cancel{b} + \frac{a}{b}; \quad b^2 = a; \quad b = \sqrt{a}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$$

Т.3. (Теорема Штольца)

1) $y_{n+1} > y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$

3) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = C \in \mathbb{R}$

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

246

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ $\quad ?\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n) = 0$

$$\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n) = \underbrace{\frac{x_1}{n}}_{\downarrow\, 0} + \ldots + \underbrace{\frac{x_n}{n}}_{\downarrow\, 0} \to 0 \quad \left(\lim \frac{x_i}{n} \to 0 \text{, т.к. б.малая} \cdot \text{огр.}\right)$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$$\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n) = \frac{1}{n}(x_1-a+x_2-a+\ldots+x_n-a)+a \ \circleddash$$

$\{y_n\}:\ y_n = x_n - a$; y_n – беск. малая

$$\circleddash\ \underbrace{\frac{1}{n}(y_1+y_2+\ldots+y_n)}_{\downarrow\, 0 \text{ (см. п. (1))}} + a \to a$$

q.e.d.

(3) $\{x_n\}$ – расходящ.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)$

$$x_n = \left[\begin{array}{l} 1, \ n \not\vdots\, 2 \\ -1; \ n \vdots 2 \end{array}\right. \qquad \{x_n\} \text{ расход.}$$

$$\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n) = \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{n}(\cancel{1}-\cancel{1}+\cancel{1}-\cancel{1}+\ldots+1) & n=2k+1 \\ \frac{1}{n}(\cancel{1}-\cancel{1}+\ldots+\cancel{1}-\cancel{1}) & n=2k \end{array}\right. = \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{n} & \to 0 \\ 0 & \to 0 \end{array}\right.$$

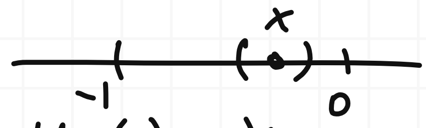
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n) = 0$

ответ

IV. Топология и мощность множеств

Т.4

$A = (-1;0] \cup ([1;2] \cap \mathbb{Q}) \cup \{3\}$



а) $\operatorname{int} A = (-1;0)$ $\quad \forall x \in \operatorname{int} A \ \exists \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_\varepsilon(x) \in X$

возьмем $\varepsilon = \min(x-(-1),\ 0-x)$

б) $\operatorname{cl} A = [-1;0] \cup [1;2] \cup \{3\}$ $\quad \{3\} \cup [-1,0]$ очев, $\forall x \in [1,2]$ в ε-окр найдем $\mathbb{Q}$ число

в) $\partial A = \{-1,0\} \cup [1;2] \cup \{3\}$ $\quad$ гран = т.прик \ внутр. точки

г) $A' = [-1,0] \cup [1;2]$ $\quad \{-1;0\}$ – пос. вида $b \pm \frac{1}{n} \to b$ $\left(\begin{cases} b=-1 \\ b=0 \end{cases}\right)$

$[1;2]$ – $\forall \varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(a)$ найд. $\mathbb{Q}$ число, будем сокращ. окр-ть, построим пос-ть

д) $\{3\}$

Т.5

$$A = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}\right)\right) \cup \left\{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

а) $\operatorname{int} A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{3^n}; \frac{2}{3^n}\right)$ $\quad$ рассуждение совершенно аналогичное Т.4.

б) $\operatorname{cl} A = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{3^n}; \frac{2}{3^n}\right]\right) \cup \left\{\frac{n+1}{n}; n\in\mathbb{N}\right\} \cup \{1\}$

в) $\delta A = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}\right\}\right) \cup \left\{\frac{n+1}{n}; n\in\mathbb{N}\right\} \cup \{1\}$

г) $A' = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{3^n}; \frac{2}{3^n}\right]\right) \cup \{1\}$

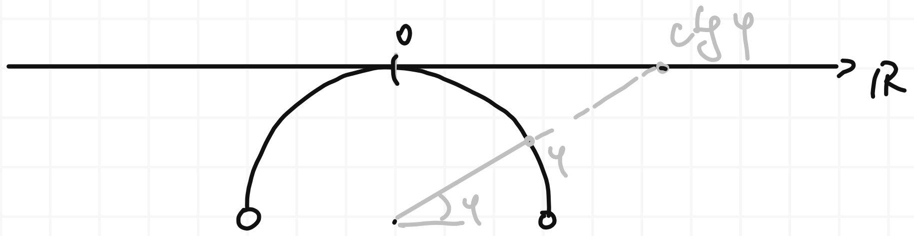
д) изолир. т. $A = \left\{\frac{n+1}{n}; n\in\mathbb{N}\right\}$

Т.6(а)

$\operatorname{card}(0,1) \underset{(1)}{=} \operatorname{card}(0,\pi) \underset{(2)}{=} \operatorname{card} \mathbb{R}$ $\quad (0,\pi)$ — полуокружность единичного радиуса с выколотыми гранич. точк.

(1) биекция $\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ f: x \mapsto \arccos(2x-1)$, $\ x \in (0,1)$, $\ \arccos(2x-1) \in (0;\pi)$

(2) биекция: $\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ f: \varphi \mapsto \operatorname{ctg} \varphi$, $\ \varphi \in (0;\pi)$, $\ \operatorname{ctg}\varphi \in \mathbb{R}$



T.6(б)

$[0,1] \to (0,1)$ построим биекцию

$\exists\ 0 \mapsto \frac{1}{2}$, а все ост. числа переходят в себя

$1 \mapsto \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} \mapsto \frac{1}{8}$

$\frac{1}{4} \mapsto \frac{1}{16}$

$f: \quad [0;1] \to (0,1)$

$x \mapsto f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x=0 \\ \frac{x}{4}, & x = 2^{-k}, k \in \mathbb{N}_0 \\ x, & \text{else} \end{cases}$$

T.7[б].

$\operatorname{card} A \neq \operatorname{card} 2^A$

От противного. Если равномощны, $\exists$ биекция $A \xrightarrow{f} 2^A$.

$f: A \to 2^A$

р-м $X \in 2^A$; $\exists a_X : f(a_0) = X$ — $a_0 \in X$ / $a_0 \notin X$

?

T.8.

Д-ть, что $\forall$ непустое огр. мн-во $A \in \mathbb{R}$ является объединением конечного или счетного набора попарно непересекающихся интервалов.

?

V. ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Ел. §7. 218(5)

$\frac{a^2}{2}$

$f(x) = \sin\frac{1}{x}$

$f'(x) = \cos\frac{1}{x}\cdot(-1)\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$

точки смены монотонности: $f'(x)=0$
(или разрыва)

$\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $\cos$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$

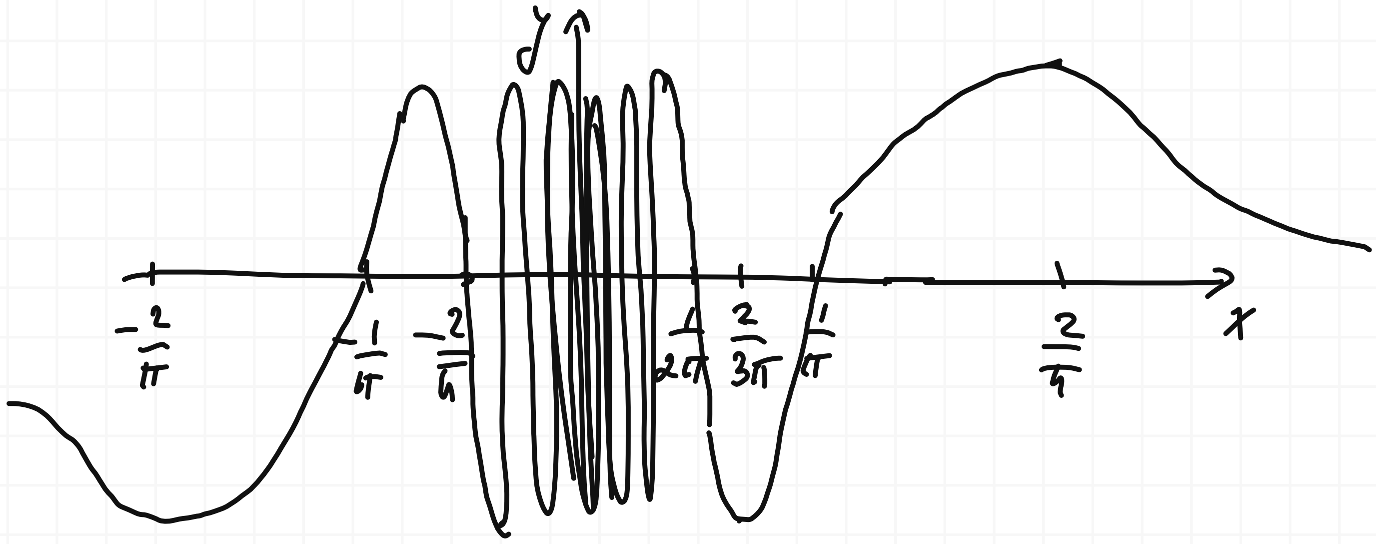
$-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}=0$; $\cos\frac{1}{x}=0$

$\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}+\pi k$; $k\in\mathbb{Z}$ $\wedge$ $x\neq 0$ $\qquad \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{3} =$

$x\neq 0 \wedge x = \frac{2}{\pi+2\pi k} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+2k}$ $\qquad \frac{2}{\pi}\ (k=0)$; $-\frac{2}{\pi}\ (k=-1)$

корни: $f(x)=0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{1}{x}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \pi k$; $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$; $x = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k}$

$\frac{1}{\pi}\ (k=1)$; $\frac{1}{2\pi}\ (k=2)$; $-\frac{1}{\pi}\ (k=-1)$



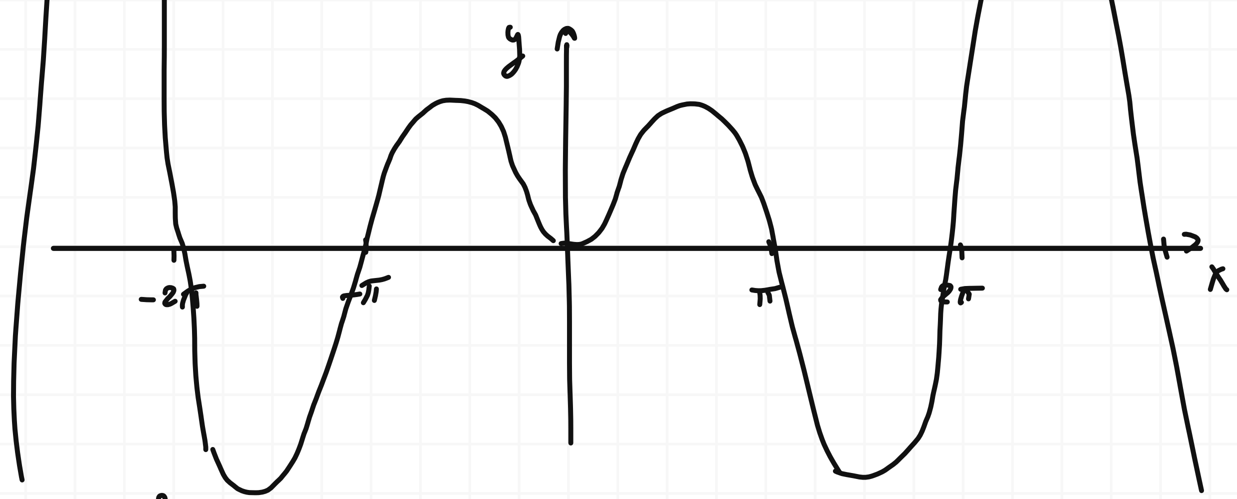
219(2)

$y = x\sin x$

корни: $f(x)=0$ $\quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sin x=0 \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pi k;\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$ $\quad x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

смена монотонности/разрыв: $f'(x)=0$; $f'(x) = x\cos x + \sin x = 0$

$f(-x) = -x\sin(-x) = x\sin x = f(x)$ — четная



Cl. § 9. <u>1(1)</u>

$f(x) = x^2$, $x_0 = 2$, $a = 4$, $\varepsilon = 0{,}001$

$\delta > |x - x_0| > 0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$ $\qquad$ $\delta - ?$

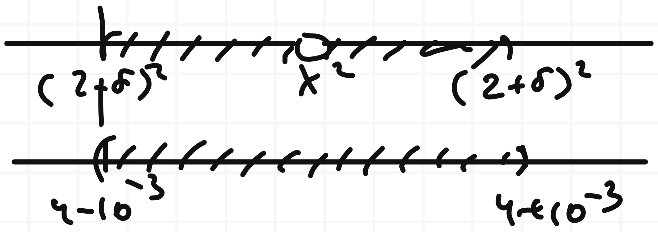
$|x^2 - 4| < 0{,}001$

$x^4 - 8x^2 + 16 - 10^{-6} < 0$

$\frac{D}{4} = 16 - (16 - 10^{-6}) = 10^{-6}$; $\sqrt{\frac{D}{4}} = 10^{-3}$

$x = 4 \pm 10^{-3}$

$x \in (4 - 10^{-3}; 4 + 10^{-3})$



$\begin{cases} \delta + 2 \leq \sqrt{4 + 10^{-3}} \\ \delta - 2 \geq \sqrt{4 - 10^{-3}} \end{cases}$

Ответ: $[2 - \sqrt{4 - 10^{-3}}; 2 + \sqrt{4 + 10^{-3}}$

true

$\delta > |x - x_0| > 0$

$\begin{cases} x \neq x_0 \\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \end{cases}$

$x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$

$x \in (2 - \delta; 2) \cup (2; 2 + \delta)$

$\begin{cases} x > 2 - \delta \\ x < 2 + \delta \\ x \neq 2 \end{cases}$ ^{2} $\quad \begin{cases} x^2 > (2-\delta)^2 \\ x^2 < (2+\delta)^2 \\ x^2 \neq 4 \end{cases}$

($\delta < 2$,
$\delta > 2$ – иначе)

<u>8(1)</u>

$f(x) = \cos x$ $\qquad$ Д-ть: $\neg\exists \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

область знач: $[-1; 1]$

$f(x)$ периодична с периодом 2π. Т.о. для сколь угодно большого M $\forall y \in [-1; 1]$ $\exists x$: $f(x) = y$.

Можем составить послед. из элементов $f(x_0), f(x_0 + 2\pi), \ldots, f(x_0 + n\pi)$, получим, что $\forall y \in [-1; 1]$ – частичный предел.

Т.е. частич. предел не ! $\Rightarrow \neg\exists \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

16 сформулировать утверждение

Пусть $f(x)$ определена в X, тогда

1) $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = a$ $\qquad X = (x_0 - \delta_0, x_0)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0; \delta_0): \ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(a)$

2) $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$ $\qquad X = (x_0, x_0 + \delta_0)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0; \delta_0): \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \hookrightarrow f(x) \in (-\infty; -\frac{1}{\varepsilon}) \cup (\frac{1}{\varepsilon}; +\infty)$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad$ " $X = (-\infty, -\frac{1}{\delta_0})$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0; \delta_0): \forall x \in (-\infty; -\frac{1}{\delta}) \hookrightarrow f(x) \in (\frac{1}{\varepsilon}; +\infty)$

4) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ $\qquad X = (-\infty; -\frac{1}{\delta_0}) \cup (\frac{1}{\delta_0}; +\infty)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0; \delta_0): \forall x \in (-\infty; -\frac{1}{\delta}) \cup (\frac{1}{\delta}; +\infty) \hookrightarrow f(x) \in (-\infty; -\frac{1}{\varepsilon})$

19(2) ф-я $f(x)$ не имеет конечного предела в точке x_0

$\neg \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R} \iff \neg(\exists a \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A))$

$\iff \forall a \in \mathbb{R} \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x(\delta) \in X \ \ \delta(\varepsilon) > |x_1 - x_0| > 0 \ \wedge \ f(x_1) \notin U_\varepsilon(A)$

25(5)

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{6 - x} - 1}{3 - \sqrt{4 + x}} = \left[\begin{matrix} y = x - 5 \\ x = y + 5 \end{matrix} \right] = \lim_{y \to 0} \frac{\sqrt{1 - y} - 1}{3 - \sqrt{y + 9}} \ominus$$

"

$$\sqrt{1 - y} = (1 + (-y))^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} y + o(y)$$

$$\sqrt{y + 9} = 3 \left(1 + \frac{y}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = 3 \left(1 + \frac{1}{18} y + o(y)\right) = 3 + \frac{1}{6} y + o(y) \text{ "}$$

$$\ominus \lim_{y \to 0} \frac{\cancel{1} - \frac{1}{2} y - \cancel{1} + o(y)}{\cancel{3} - \cancel{3} - \frac{1}{6} y + o(y)} = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{1}{2} y + o(y)}{\frac{1}{6} y + o(y)} = \underline{3}$$

26(2)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^6 - 1}{\sqrt{x^{12} + 5x^5 - 1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^6}(5 - \frac{1}{x^6})}{\cancel{x^6}\sqrt{1 + 5x^{-7} - x^{-12}}} = \underline{5}$$

29(2,5)

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{4x+o(x)}{x+o(x)} = 4$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+o(x)}{6x-7x+o(x)} = -1$

33(1)

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \left(1-\frac{1}{1+2x}\right)^{x^2} =$

// $\frac{x}{2x+1} = \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}}{2x+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+2x}\right)$ //

$= \lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}}_{\to 0} \underbrace{\underbrace{\left(1+\frac{1}{-(1+2x)}\right)^{-(1+2x)}}_{\to e} {}^{\cdot \frac{x^2}{-(1+2x)}}}_{\to 0} \quad \frac{x^2}{-(1+2x)} \to -\infty \quad = 0$

35(4)

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{7x}-e^{2x}}{\operatorname{tg} x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cancel{1}+\cancel{7x}-\cancel{1}-\cancel{2x}+o(x)}{x+o(x)} = 5$ ($+5x$)

61

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$

$\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$

$\overset{?}{\Rightarrow} \lim\limits_{t\to t_0} f(g(t)) = a$

Ответ: нет, не следует, т.к. $f(g(t))$ не определена для $\forall t$.

Например:

$f(x) = \frac{5(x-1)}{(x-1)}$; $\lim\limits_{x\to x_1} f(x) = 5$

$g(t) = 1$

Тогда $f(g(t)) = f(1)$ не определена!

Cl. §10 $\underline{14}$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \neq 0$

? $\exists\ \delta, c \in \mathbb{R}: \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow |f(x)| \geq c > 0$

пусть f определена в $U_{\delta_0}(x_0)$. Тогда, раз f непрер. в x_0,

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde{\delta} > 0\ \forall x \in U_{\tilde{\delta}}(x_0) \hookrightarrow f(x_0) \in U_\varepsilon(f(x_0))$

$\delta = \tilde{\delta}$ $\qquad |f(x_0) - f(x)| <$