• ∃ f имеет все ч. производные порядка m в $U_\delta(a)$. Тогда

$\forall x \in U_\delta(a) \hookrightarrow \boxed{f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{m}\frac{d^k f_a(x-a)}{k!}+o(|x-a|^m),\ x\to a}$

ф. Тейлора с ост. членом в форме Пеано

$(dx_{i_k})^m(x-a)\overset{?}{=}(x_{i_k}-a_{i_k})^m$

Пример: $f=\exp(\operatorname{arctg} xy+\sin x)$ Разл. до 2 порядка в $(0,1)$

$f'_x(0,1)=\exp(\operatorname{arctg} xy+\sin x)\cdot\left(\frac{y}{1+x^2y^2}+\cos x\right)=2$

$f'_y(0,1)=\exp(\operatorname{arctg} xy+\sin x)\cdot\left(\frac{x}{1+x^2y^2}\right)=0$

$f''_{xx}(0,1)=\frac{d}{dx}\left(e^{\operatorname{arctg} x+\sin x}\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}+\cos x\right)\right)=e^{\operatorname{arctg} x+\sin x}\left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}-\sin x+\left(\frac{1}{1+x^2}+\cos x\right)\left(\frac{1}{1+x^2}+\cos x\right)\right)=4$

$f''_{yy}(0,1)=\frac{d}{dy}(0)=0$

$f''_{xy}(0,1)=\frac{d}{dy}\left(f'_x(0,y)\right)_{y=1}=\frac{d}{dy}(y+1)|_{y=1}=1$

Ответ: $f(x,y)=1+2(x-0)+0\cdot(y-1)+\frac{1}{2!}\left(4(x-0)^2+2\cdot1\cdot x(y-1)+0\cdot(y-1)^2\right)+o\left(x^2+(y-1)^2\right),\ x\to0,\ y\to1.$

13.02

№72 $f(x,y,z)=\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z-\cos(x+y+z)$

Разложить в $(0,0,0)$ до $o(\rho^2)$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$. $|x|\le\rho\Rightarrow o(x^3)=o(\rho^3)$

$\cos y=1-\frac{y^2}{2}+o(\rho^3)$, $\cos z=1-\frac{z^2}{2}+o(\rho^3)$.

$\cos(x+y+z)=1-\frac{(x+y+z)^2}{2}+o(\rho^3)$ $|x+y+z|\le\underset{\text{const}}{3}\rho$

$\Rightarrow f(x,y,z)=\underbrace{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(1-\frac{y^2}{2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2}\right)}_{1-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)+\underbrace{\frac{x^2y^2}{4}+\frac{x^2z^2}{4}+\frac{y^2z^2}{2}-\frac{x^2y^2z^2}{8}}_{o(\rho^3)}}-1+\underbrace{\frac{(x+y+z)^2}{2}}_{\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+xz}+o(\rho^3)=\underline{xy+yz+xz+o(\rho^2)}$

$\Downarrow$

$f(0,0,0)=0$,

$f'_x=f'_y=f'_z=0$,

$f''_{xy}=f''_{yz}=f''_{xz}=1$, $f''_{xx}=f''_{yy}=f''_{zz}=0$

$f''_{yx}=f''_{zy}=f''_{zx}$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

• 1 переменная ($\exists f^{(m+1)}$ в $U_\delta(x_0)$) $\Rightarrow f(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$, $\left[\begin{array}{l}\xi\in(x,x_0)\\ \xi\in(x_0,x)\end{array}\right.$

• несколько, в т. $a=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$.   ∃ и непрерывны ч.п. $(m+1)$ порядка в $U_\delta(a)$ – достаточно вроде

Необходимо: f $(m+1)$ раз диф-ма в $U_\delta(a)\Leftrightarrow$ все ч.п. m порядка диф-мы на ф-ии n переменных $\forall x\in U_\delta(a)$)

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k f(a)[x-a]}{k!} + \frac{d^{m+1} f(\xi)[x-a]}{(m+1)!}}$$, где $\xi = a + \theta(x-a)$, $\theta \in (0,1)$, $x \to a$

Новая тема

Отображение $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f: \underset{\cup}{U} \to \mathbb{R}^m$ $\Rightarrow f(x_1, \dots x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots x_n) \end{pmatrix}$

Определены частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Матрица из них $f' = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{m \times n}$

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Опр.1. Ф-я f дифф-ма в т.a, если все f_i дифф-мы в т.a.

Опр.2. Отображение $U \to \mathbb{R}^m$ ($U \subset \mathbb{R}^n$, U открыто) - дифф-мо в т.a, если $\exists A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$:

$$\forall x \in U_\delta(a) \hookrightarrow f(x) = f(a) + A_{m\times n} \cdot (x-a)_{n \times 1} + \underbrace{o(|x-a|)}_{m \times 1}, \; x \to a$$

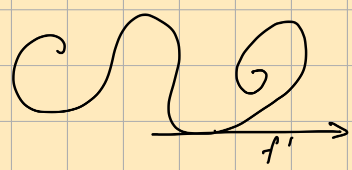
$h(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$h(x) = o(|x|) \Leftrightarrow \left|\frac{h(x)}{|x|}\right| \to 0, \; x \to a.$

f - дифф-ма в т.a $\Rightarrow A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{ij} = f'(a)$ - матрица Якоби, она же производная.

Примеры:

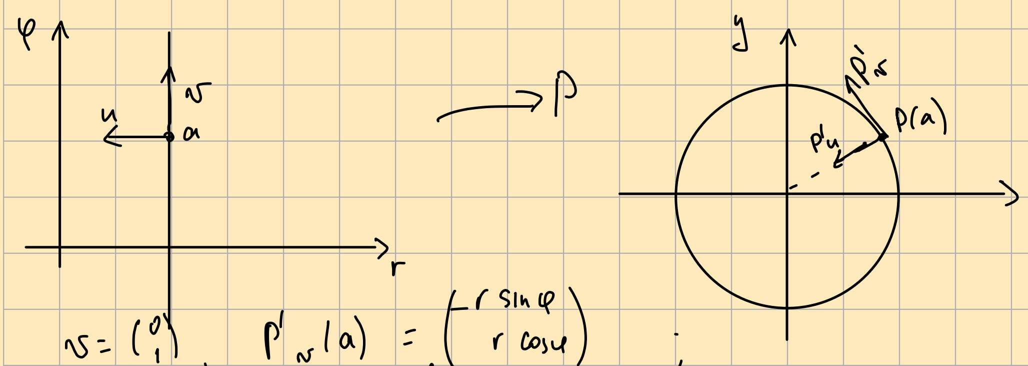
- функция $f(x_1, \dots x_n) \Rightarrow f'(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$
- вектор-функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (кривые) $\Rightarrow f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial t}(a) \end{pmatrix}$



- Замена координат $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

полярные $P: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} P_1(r,\varphi) = x = r\cos\varphi \\ P_2(r,\varphi) = y = r\sin\varphi \end{cases} \quad (r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow P'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$



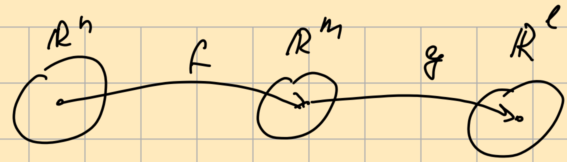
$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P'_v(a) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$;

$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P'_u(a) = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$

Композиция:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$



$$(g\circ f)'(a) = \underbrace{g'(f(a))}_{l\times m} \circ \underbrace{f'(a)}_{m\times n}$$

композиция лин. отображений $\Leftrightarrow$ умножение матриц

Диффеоморфизм класса C^1:

$f: U \to W$ — открытые подмн-ва $\mathbb{R}^n$

1) $f\in C^1(U)$, т.е. непр. дифф-ма на U $\Leftrightarrow$ $\exists$ и непр. $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ на U
2) f — биекция
3) $f^{-1}: W\to U$, $f^{-1}\in C^1(W)$

$\Rightarrow$ f — диффеоморфизм класса C^1.

(биекция, гладкая, туда-сюда)

$f^{-1}\circ f = id: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ (тождественное преобразование)

$id(x)=x \Rightarrow (id)' = E = \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$

$\Downarrow$

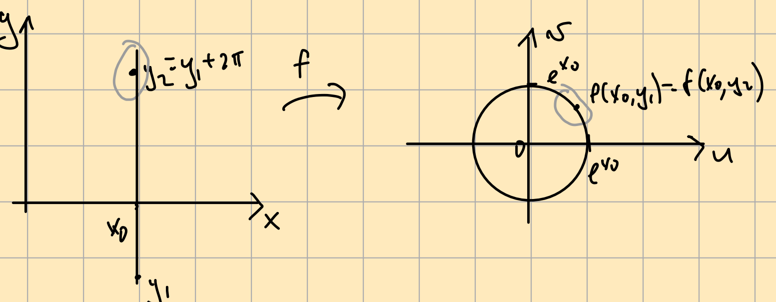
$\boxed{(f^{-1})' = (f')^{-1}}$ — т.е. обратная матрица

($\Rightarrow$ если f дифф-морфизм, то $f'(a)$ невырождена в каждой точке $a \Leftrightarrow J_a(f)\neq 0$. Обратное неверно!)

$\det f'(a) = J_a(f)$ — Якобиан

Т3 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$; $\begin{cases} u(x,y) = e^x\cos y \\ v(x,y) = e^x \sin y\end{cases}$ $Df = f'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x \sin y & e^x\cos y\end{pmatrix}$

$J(f)_{[x,y]} = e^{2x}\cdot\cos^2 y + e^{2x}\sin^2 y = e^{2x} > 0 \quad \forall x \Rightarrow J(f)\neq 0 \quad \forall(x,y)$



$\Rightarrow$ f не инъективно

$\Downarrow$ не биективно

$\Downarrow$

не диффеоморфизм

(но локально — да)

Теорема об обратном отображении

$\exists$ $f\in C^1(U)$ и $f'(a)$ невырождена в нек. т. a. Тогда $\exists\, U_\delta(a)=\tilde U$, что

$f|_{\tilde U}: \tilde U \to f(\tilde U)$ — диффеоморфизм

сужение f на $\tilde U$

Хорошая книжка: Львовский С.М., Лекции по мат. анализу

№78 $f: \begin{cases} x = u+v \\ y = u^2+v^2 \end{cases}$ Найдём du и dv как ф-ии отн. (x,y), где $u \neq v$.

Точка $(u_0, v_0) \to (x_0, y_0) = (u_0+v_0,\ u_0^2+v_0^2)$

$$f' = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}.$$

$f \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$ если $f'(u_0,v_0)$ невырожд., то локально $\exists\, u(x,y),\ v(x,y)$ – непр. дифф.

$\det f' = 2v_0 - 2u_0 \neq 0$ при $v_0 \neq u_0$

$$(f^{-1})' = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2(v-u)} \cdot \begin{pmatrix} 2v & -1 \\ -2u & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u'_x = \frac{v}{v-u},\quad u'_y = \frac{-1}{2(v-u)}$$

$$v'_x = \frac{-u}{v-u},\quad v'_y = \frac{1}{2(v-u)}$$

В (u_0, v_0) $\begin{cases} du = \dfrac{v_0}{v_0-u_0}\,dx - \dfrac{1}{2(v_0-u_0)}\,dy \\ dv = \dfrac{-u_0}{v_0-u_0}\,dx + \dfrac{1}{2(v_0-u_0)}\,dy \end{cases}$

Теорема о неявной функции

задача: локально выразить $y_i = \varphi_i(x)$ – гладкие

$\exists\ f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, т.е. $i \in \overline{1,m}$, $f_i(x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_m) = 0$.

Если 0) $f(x_0, y_0) = 0$

1) $f(x,y)$ – непр. в $U_\delta(x_0,y_0)$

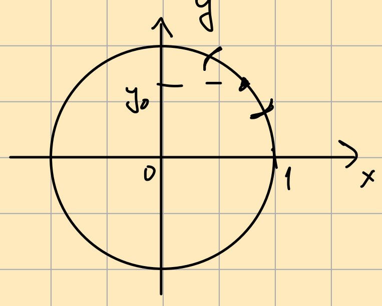
2) $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(x,y)\right)$ – определены в $U_\delta(x_0,y_0)$, непрерывна в (x_0,y_0)

3) $\det\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(x_0,y_0)\right) \neq 0$,

то $\exists\, U_\varepsilon(x_0), U_\delta(y_0)$ и набор функций $\varphi_i(x)$ - непрерывно дифф-мых в т. x_0:

$f(x,y) = 0$ для $(x,y) \in U_\varepsilon(x_0) \times U_\delta(y_0) \iff y_i = \varphi_i(x)$

т.е.
$$f' = \left(\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{matrix} \quad \underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{matrix}}_{\text{невырожд.}} \right)$$



Пример: $f(x,y) = x^2+y^2-1$ (т.е. $x^2+y^2=1$).

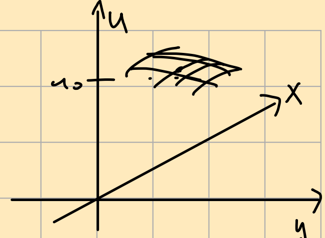
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y \Rightarrow$ если $y_0 \neq 0$, то $\exists\ \varphi(x) = y$

№44. $x+y+u = e^u$, т.е. $f(x,y,u) = x+y+u-e^u = 0$

d^2u - ? $\quad u(x,y)$

1) Проверяем условие: f непрерывна и беск. дифф-ма. Главное: $\dfrac{\partial f}{\partial u} \neq 0$

$\frac{\partial f}{\partial u} = 1 - e^u \neq 0$ при $u_0 \neq 0$



2) если $u_0 \neq 0$: $\frac{df}{dx} = 1 + u'_x - e^u \cdot u'_x = 0$, т.к. $f \equiv 0$

$\Rightarrow u'_x = u'_y = \frac{1}{e^u - 1} = 0.$

3) $u''_{xx} - e^u (u'_x)^2 - e^u \cdot u''_{xx} = 0 \Rightarrow u''_{xx} = \frac{e^u \cdot (u'_x)^2}{1 - e^u} = -\frac{e^u}{(e^u-1)^3}$

$u''_{yy} = -\frac{e^u}{(e^u-1)^3}$; $u''_{xy} - e^u \cdot u'_y \cdot u'_x - e^u \cdot u''_{xy} = 0 \Rightarrow u''_{xy} = \frac{e^u \cdot u'_y \cdot u'_x}{1 - e^u} = u''_{xx}$

4) $\exists\ d^2u = \frac{e^u}{(1-e^u)^3}\left(dx^2 + 2 \cdot dx \cdot dy + dy^2\right)$

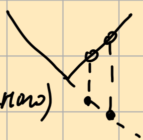
Упр. $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.] $P(x)$ имеет n разл. корней над $\mathbb{R}$.

Д-ть: корни — непр. дифф. ф-ции a_i, т.е. $\begin{cases} x_1 = x_1(a_1, \ldots a_n) \\ \vdots \\ x_n = x_n(a_1, \ldots a_n) \end{cases}$ - непр. дифф.

$\boxed{T2}$ $y^2 = x^2$

1) сколько $\exists$ ф-й $y(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовл. условию

Мн-во функций $|\{\mathbb{R} \to \{\pm 1\}\}| = 2^{|\mathbb{R}|}$ (т.е. беск. много)



2) непрерывных? 4: $\vee$, $\wedge$, $\setminus$ и $/$ Точно есть $(0,0)$

$\Rightarrow$ из т. о пром. значении если $f(x_1) > 0$, то $\forall$ x от 0 до x_1 $f(x_1) > 0$

Поэтому только $2 \cdot 2 = 4$

3) непр, $y(1) = 1$ $\Rightarrow$ 2 варианта: $\vee$ и $/$

4) непр. на $[1, 2]$, $y(1) = 1$., определена только на $[1, 2]$ $\Rightarrow$ только одна

Комплексные числа

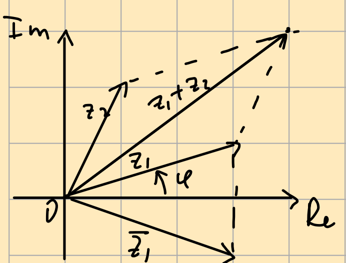
$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

$z(x, y) \leftrightarrow z = x + iy$. Определены операции:

$+ : (x + iy) + (a + ib) := (x + a) + i(y + b)$ сложение векторов

$\cdot : (x + iy)(a + ib) := (xa - yb) + i(xb + ya) \Rightarrow i^2 = -1$

$\bar{z} : \overline{x + iy} := x - iy$ ← отр. отн. оси Re



$+, \bullet$ коммутативны, ассоциативны.
работает дистрибутивность.

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = x + iy$ длина вектора; $|z| \in \mathbb{R}_+$

$\Rightarrow z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow |z \cdot w| = |z| \cdot |w|.$

$(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = (xa - yb)^2 + (xb + ya)^2$

$x^2a^2 + y^2a^2 + x^2b^2 + y^2b^2$

$x^2a^2 + y^2b^2 + x^2b^2 + y^2a^2 - 2xyab + 2xyab$

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$z^{-1} := \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$\mathbb{C}$ — поле, причем алгебраически замкнутое, т.е. любой многочлен имеет корень.

Created by Notein

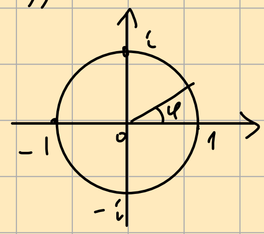
Тригонометрическая форма: $z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$,

$r = |z|$, $\varphi = \arg(z)$

$w = \rho(\cos\psi + i\cdot\sin\psi) \Rightarrow zw = r\rho(\cos(\varphi+\psi) + i\cdot\sin(\varphi+\psi))$

Показательная форма: $z = r\cdot e^{i\varphi}$ $(r = |z|, \varphi = \arg(z))$

$\Rightarrow zw = r\rho\cdot e^{i(\varphi+\psi)}$

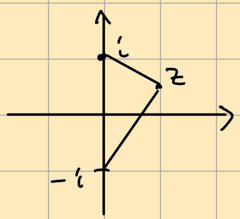


Свойства: · $|e^{i\varphi}| = 1$, т.е. она отвечает за поворот

· $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$

· $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$

№15(г) $|z-i| < |z+i|$, $z \in \mathbb{C}$



$\Updownarrow$

$|z-i|^2 < |z+i|^2$

$(z-i)\underbrace{\overline{(z-i)}}_{\bar z + i} < (z+i)\cdot\underbrace{\overline{(z+i)}}_{\bar z - i}$

$\cancel{z\bar z} - i\bar z + iz \cancel{+1} < \cancel{z\bar z} + i\bar z - iz \cancel{+1}$

$i(z-\bar z) < i(\bar z - z)$ ← справа и слева действительные части!

$z + \bar z = 2\,\mathrm{Re}\,z$, $z - \bar z = i\cdot 2\,\mathrm{Im}\,z$

$i\cdot i\cdot 2\,\mathrm{Im}\,z < -i^2\cdot 2\,\mathrm{Im}\,z$

$-2\,\mathrm{Im}\,z < 2\,\mathrm{Im}\,z \Leftrightarrow \mathrm{Im}\,z > 0 \Leftrightarrow$ верхняя полупл-ть.