СТО

(пр-я Лоренца)

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \qquad dx' = \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \qquad dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$y' = y \qquad dy' = dy$

$z' = z \qquad dz' = dz$

(инвариантность интервала)

$$dx^2 - c^2dt^2 + dy^2 + dz^2 = const$$

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v\,dt}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v v_x}{c^2}}$$

$$v_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = \frac{v_y\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}{1 - \frac{v v_y}{c^2}}$$

$$v_z' = \frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v v_z}{c^2}}$$

(сокр. длин): $dx' = dx\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2} < dx$

(замедл. времени): $dt' = \frac{dt}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} > dt$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = \gamma m v$$

зависит от v

$$\frac{dp}{dt} = F \iff \frac{d\gamma v}{dt} = \frac{F}{m}$$

~~ma = F~~

$$\frac{dp}{dt} = \gamma m \dot{\vec v} + \gamma^3 \frac{m\vec v(\vec v \dot{\vec v})}{c^2} = F$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = \gamma m c^2$$

сила не сонаправлена с ускорением

$K = E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$

$$\boxed{E^2 - p^2c^2 = m^2c^4} = inv$$

если частица с $m=0$, то $E = pc$, $v = c$

$m = inv$

система ц. инерции (сумм. импульс $= 0$)

$$v_{ц.и.} = \frac{c^2 \Sigma p}{\Sigma E}$$

(пороговая энергия при неупругом соудар.)

преобразуется масса продуктов и исходных, а дефект масс предст. как энергию связи

A налетает на пок-ся B $\to$ C

$E_A + E_{B,0} = E_C$

$E_A^2 + E_{B,0}^2 + 2E_AE_{B,0} = E_C^2$

$E_{A,0}^2 + p_A^2c^2 + E_{B,0}^2 + 2E_AE_{B,0} = E_{C,0}^2 + p_C^2c^2$

$$E_A = \frac{E_{C,0}^2 - E_{A,0}^2 - E_{B,0}^2}{E_{B,0}}$$

общий импульс налет. част. до равен общему импульсу всего облака продуктов после

(Доплер)

$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ (удаляется) красное

$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ (приближ.)

$\nu = \nu_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ (поперечный

Гироскоп

def. $I_x = I_y$, $L_z \gg L_x, L_y$, $L_z \uparrow\uparrow \omega$

прецессирует, сохр. L по модулю (но не по направл.!)

$$\frac{d\vec L}{dt} = \vec N = [\vec\Omega \times \vec L] \qquad (*)$$

ск. прецессии (вращ. момента импульса)

Алгоритм:

1) опр., где собств. вращ.
2) опр., что за сила вызывает прецессию
3) рассчит. прецесс. по (*)

Колебания

(затухание)

$$\ddot x + 2\gamma\dot x + \omega_0^2 x = A\cos\omega t$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$x(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}}$$

$$\omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}\, e^{i\omega t - i\varphi}$$

$\omega_1 - \omega_2 = 2\gamma$

$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$ – добротность

$Q = \frac{\omega_{рез}}{\Delta\omega} = 2\pi\frac{W}{\Delta W_{за\ пер}}$

$$\nu_x = \nu_0\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \beta\cos\varphi}$$

Плоское движ. АТТ

Th. Эйлера: $\exists$ МЦВ

ось A дв. с v_A отн. O (неподвижн.)

$\vec M_A = [(\vec r_O - \vec r_A), \vec F] = \vec M_O - [\vec r_A \times \vec F]$

$\vec L_A = [(\vec r_O - \vec r_A), \vec p] = \vec L_O - [\vec r_A \times \vec p]$

$$\frac{d\vec L_A}{dt} = \frac{d\vec L_O}{dt} - [\vec v_A \times \vec p] - [\vec r_A \times \vec F]$$

$[\vec v_A \times \vec p] = 0 \Rightarrow$ ось должна движ. $\parallel$ с ц. масс тела

Вращ. АТТ вокруг неподв. оси

$v = [\vec\omega \times \vec r]$; $\vec\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

$L_z = \Sigma m_i v_{\varphi,i} r_{\perp,i} = \Sigma m_i \omega r_{\perp,i}^2 = I_z\omega$

$I = \Sigma m_i r_i^2 = \int r^2 dm$

$M_a = I_z\frac{d\omega}{dt}$

$I' = I + ml^2$ (Гюйгенс-Штейнер)

$I_x + I_y + I_z = 2I_{\odot} = 2\int(x^2+y^2+z^2)dm$

$$\begin{cases} I_x = \int(y^2+z^2)dm \\ I_y = \int(x^2+z^2)dm \\ I_z = \int(x^2+y^2)dm \end{cases}$$

для плоского ($z=0$)

$I_z = I_y + I_x$

Плотникова Ася Б02-406

Гидродинамика

$q = \frac{dm}{dt\, dS}$ плотность потока массы

$Q = \int \rho v dS$ расход

$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = const$

S

h

$F = \eta S \frac{v}{h}$

$v_{отн} = v$

Течение Куэтта (одна пл. смещ. отн. другой, распр. скор. линейное)

$v(y) = \frac{v_0}{2}\left(1 + \frac{y}{h}\right)$

Пуазейль (в трубе под действ. пост. перепада давления)

$v(r) = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$

$\frac{\Delta P}{\ell} = \frac{4\eta v_0}{r^2}$

$Q = \pi \rho \frac{R^4}{8\eta} \frac{\Delta P}{\ell}$

(проинтегрировав)

Столкновения

$K = K' + \frac{MV^2}{2} + \underbrace{(\vec{P}, \vec{V})}_{\substack{\text{нмп} \\ \text{в движ. с.о.}}}$ в ЦМ: $K = K' + \frac{MV^2}{2}$

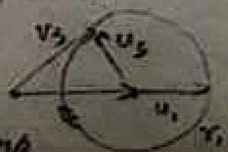
$\vec{v}_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$ $\vec{P}_{1c} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \mu \vec{v}_{отн}$

$\vec{v}_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_1)$; $\vec{P}_{2c} = -\mu \vec{v}_{отн}$

$P_{1c} = P_{2c} = P_{1c}' = P_{2c}'$ (модули)

Векм. диаграммы

1. v_1
2. $\vec{v}_1 = \vec{v}_c + \vec{v}_1'$
3. $\vec{v}_1'$ віз по длине, но может менять напр



Упругость

(Гука) $F = k\delta\ell$

$\underbrace{\frac{F}{S}}_{\sigma = T} = \underbrace{\frac{k\ell}{S}}_{E} \underbrace{\frac{d\ell}{\ell}}_{\varepsilon} = E\varepsilon$

$A = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \cdot V$

(растягиваем на ε)

$u = \frac{1}{2} E \varepsilon^2$

$\frac{\delta a}{a} = -\mu \frac{\delta \ell}{\ell}$

коэф. Пуассона

(всестороннее сжатие)

$\frac{\delta \ell}{\ell} = \frac{\sigma}{E}(1 - 2\mu)$

$\frac{\Delta V}{V} = 3\frac{\delta \ell}{\ell} = 3\frac{\sigma}{E}(1 - 2\mu)$

$k = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$ – модуль всест. сжатия

$u = \frac{\sigma^2}{2k}$

(одностороннее сжатие)

$\sigma_y = \sigma_z = \frac{\mu}{1 - \mu} \sigma_x$

$\frac{\delta x}{x} = \frac{\sigma_x}{E}\left(1 - \frac{2\mu^2}{1 - \mu}\right)$

$E' = E \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}$

(скорость звука)

$c_{зв} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

НеИСО

$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$

$\vec{V} = \underbrace{\vec{V}'}_{V_{отн}} + \underbrace{\vec{V}_{0'} + [\vec{\omega} \times \vec{r}']}_{V_{пер}}$

$\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'\right] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']] + \underbrace{2[\vec{\omega} \times \vec{V}']}_{a_{кор}} + \underbrace{\vec{a}'}_{a_{отн}}$

$a_{пер}$

$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i + \vec{F}_{цб} + \vec{F}_{кор}$

$\vec{F}_{цб} = -m\left(\vec{a}_{0'} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'\right] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']]\right)$

$\vec{F}_{кор} = -2m[\vec{\omega} \times \vec{V}']$

Момент импульса

$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$ $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$

$\vec{M} = \left[\vec{r} \times F(r)\frac{\vec{r}}{r}\right] = 0$

(момент ц. сил $= 0$)

$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2}[\vec{r} \times d\vec{r}] = \frac{L}{2m} = const$

(сектор. ~~плош~~ скорость)

$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi = \vec{r}' = \dot{r} + r\dot{\varphi}$

$E = \frac{1}{2} m (v_r^2 + v_\varphi^2) - \frac{\gamma m M}{r} = const$

$\ell = \frac{L}{m} = r v_\varphi = const$

$J = G\cancel{M}$

$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{mL^2}{2r^2} - \frac{\gamma m M}{r}}_{\Pi'(r)}$

Колебания

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\omega = \frac{k}{m}$

$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

$J_A \ddot{\varphi} = -mg\ell_{ц} \varphi$

$\frac{d}{dt}: \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg\ell(1 - \cos\varphi) = const$

$I\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + mg\ell \sin\varphi \dot{\varphi} = 0$

$I\ddot{\varphi} + mg\ell\varphi = 0$

Кинематика

$R = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{y''}$

Динамика МТ

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ $\vec{v}_c = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$

(Th о движ. ц. масс)

сумм. имп. сист. изменяется только от внешних сил

Реактивное движение

$$\boxed{m_p \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{внеш} - \mu_{убег} \overset{0}{\vec{u}_{\substack{убег \\ отн. рак}}} + \overset{0}{\mu_{доб}} \vec{u}_{\substack{доб \\ отн. рак}}}$$

не зависит от выбора ИСО

((Циолковский) $\vec{F} = 0$

$m\frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt} \overset{0}{u}$

ракета + топливо

$v = u \ln \frac{m_0}{m}$

масса ракеты без топлива

Работа и энергия

$A = -\Delta E_п$ $A = \Delta E_к$

Столкновения