ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

по курсу **“Аналитическая геометрия”**

1 курс, осенний семестр, 2024/2025 уч.г. (ЛФИ)

(Поток Ершова А.В.)

I. Векторы и декартовы системы координат (ДСК) на плоскости и в пространстве.

1. Линейные операции с векторами и их свойства. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Связь между линейной зависимостью, коллинеарностью и компланарностью векторов. Базис, координаты вектора в базисе. Матрица перехода. Изменение координат при замене базиса.

2. Скалярное произведение, его свойства. Скалярная проекция вектора на ориентированную прямую, векторная проекция вектора на прямую. Выражение скалярного произведения в ортонормированном и произвольном базисе. Вычисление длины вектора и угла между векторами.

3. Левые и правые тройки векторов. Ориентированные плоскость и пространство. Ориентированные площадь параллелограмма на плоскости и объем параллелепипеда в пространстве (смешанное произведение), их свойства. Выражение смешанного произведения в произвольном базисе. Критерий компланарности.

4. Векторное произведение, его свойства, выражение в произвольном и правом ортонормированном базисе. Вычисление площадей, перпендикуляр к паре векторов. Двойное векторное произведение.

5. Общая декартова система координат, прямоугольная система координат. Замена декартовой системы координат, формулы перехода.

II. Прямые и плоскости. Эллипс, гипербола, парабола. Поверхности.

1. Понятие уравнения множества. Алгебраические множества (линии и поверхности); пересечение и объединение алгебраических множеств. Порядок, сохранение порядка при переходе к другой декартовой системе координат. Пересечение алгебраического множества с прямой и с плоскостью.

2. Прямая на плоскости, различные способы задания, их эквивалентность. Линейное неравенство. Пучок прямых. Формула расстояния от точки до прямой.

3. Плоскость в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Взаимное расположение двух и трех плоскостей. Линейное неравенство. Пучок плоскостей. Формула расстояния от точки до плоскости.

4. Прямая в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Взаимное расположение двух прямых. Формулы для расстояния от точки до прямой (в пространстве) и между скрещивающимися прямыми.

5. Эллипс, гипербола, парабола, их канонические уравнения. Теоремы о фокусах и директрисах. Касательные. Оптическое свойство.

6. Цилиндрические, конические поверхности, поверхности вращения. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды. Прямолинейные образующие.

III. Абстрактные отображения.

1. Множества. Понятие отображения и преобразования. Ассоциативность композиции отображений. Инъективные, сюръективные и биективные отображения.

2. Отношение эквивалентности и разбиение множества на классы эквивалентности. Фактормножество, каноническая проекция (отображение факторизации).

3. Бинарные операции на множестве. Согласованность бинарной операции с отношением эквивалентности.

IV. Группы.

1. Определение и примеры групп. Абелевы группы. Аддитивная и мультипликативная формы записи. Порядок конечной группы. Определения гомоморфизма и изоморфизма. Подгруппы. Ядро гомоморфизма, критерий инъективности.

2. Порядок элемента. Циклические группы, их классификация. Количество порождающих элементов в циклической группе порядка n равно $\phi(n)$ (функция Эйлера).

3. Симметрическая группа S_n. Функция $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$ (знак перестановки). Доказательство гомоморфности функции sgn. Знакопеременная группа A_n.

4. Левые смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа, ее следствия: порядок элемента — делитель порядка группы; описание групп простого порядка.

V. Кольца и поля.

1. Определение и примеры колец. Ассоциативные, коммутативные кольца, кольца с 1. Обратимые элементы, делители нуля, нильпотенты. Группа обратимых элементов ассоциативного кольца с 1.

2. Теория делимости в $\mathbb{Z}$. Простые числа. НОД. Алгоритм Евклида, тождество Безу (линейное представление НОД). Разложение на простые множители и его единственность.

3. Арифметика по модулю n. Кольцо $\mathbb{Z}_n$ классов вычетов по модулю n. Кольцо $\mathbb{Z}_n$ — поле тогда и только тогда, когда n — простое. Теоремы Ферма и Эйлера (в теории чисел). Характеристика поля, простое подполе.

4. Поле комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая и показательная запись. Комплексное сопряжение. Умножение и возведение в степень, обращение. Извлечение корней. Группа корней n-й степени из 1.

VI. Линейные (векторные) пространства. Базис и размерность.

1. Определение линейного пространства над полем, примеры линейных пространств. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Три леммы о линейной зависимости.

2. Подпространства. Линейная оболочка подмножества линейного пространства. Конечномерные линейные пространства. Базис. Существование в конечномерном линейном пространстве. Лемма Штайница о замене. Размерность конечномерного линейного пространства, корректность её определения. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса. Базис как минимальная порождающая и как максимальная линейно независимая система.

3. Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты. Изменение координат вектора при изменении базиса. Матрица перехода, ее невырожденность.

4. Мощность конечного линейного пространства и конечного поля.

VII. Матрицы. Ранг. Элементарные преобразования.

1. Линейные операции с матрицами (сложение, умножение на скаляр.) Линейное пространство матриц фиксированного размера $m \times n$, его размерность и стандартный базис в нём. Транспонирование. След матрицы.

2. Элементарные преобразования строк и столбцов. Элементарные матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому и упрощенному виду методом Гаусса.

3. Строчный и столбцовый ранги матрицы. Базисная система строк (столбцов). Невырожденные матрицы. Инвариантность строчного и столбцового рангов матрицы при элементарных преобразованиях строк. Элементарные преобразования строк не меняют линейных зависимостей между столбцами. Совпадение строчного и столбцового рангов матрицы. Оценка ранга суммы матриц.

4. Умножение матриц, его свойства. Кольцо (алгебра) квадратных матриц порядка n.

5. Оценка ранга произведения матриц. Обратимые матрицы. Критерий обратимости-1 (невырожденность=обратимость). Группа $\mathrm{GL_n}(\mathbb{K})$ обратимых матриц порядка n. Алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью метода Гаусса. Базисный минор (невырожденность подматриц на пересечении системы $r = \operatorname{rk} A$ линейно независимых строк и столбцов).

VIII. Системы линейных уравнений.

1. Системы линейных уравнений (СЛУ) и разные виды их задания: матричное уравнение, линейная комбинация столбцов, матрица коэффициентов и расширенная матрица. Критерий совместности Кронекера-Капелли.

2. Однородные СЛУ (СЛОУ). Теорема о том, что множество решений СЛОУ является подпространством в пространстве $\mathbb{K}^n$, где n — число неизвестных. Фундаментальная система решений (ФСР). Структура общего решения совместной СЛУ. Алгоритм решения СЛУ методом Гаусса. Теорема о мощности ФСР.

3. Восстановление СЛОУ по фундаментальной матрице. Любое подпространство в $\mathbb{K}^n$ является пространством решений некоторой однородной СЛУ.

IX. Определитель.

1. Детерминант (определитель) порядка n как полилинейная и кососимметричная функция строк матриц порядка n, принимающая на единичной матрице значение 1. Существование и единственность определителя. Формула полного разложения определителя.

2. Изменение определителя при элементарных преобразованиях строк (столбцов). Определитель треугольной матрицы. Критерий обратимости матрицы-2 ($\det \neq 0$). Определитель транспонированной матрицы.

3. Определитель произведения матриц. Группа $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Определитель матрицы с углом нулей. Разложение определителя по строке, столбцу.

4. Правило Крамера решения СЛУ (с невырожденной матрицей коэффициентов), формула для обратной матрицы.