

Семинар 4. Работа и энергия. Столкновения.

Клименок Кирилл Леонидович

22.09.2022

1 Теоретическая часть

1.1 Работа и энергия.

Мы ввели понятие энергии и работы, просто скалярно домножив второй закон Ньютона на \vec{v} :

$$m d\vec{v} = \vec{F} dt \Rightarrow m(\vec{v} \cdot d\vec{v}) = (\vec{F} \cdot \vec{v} dt) \Rightarrow d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA$$

Причем, вот тут важно отметить кое-что принципиально новое, а именно, что делать, если у нас есть система, где есть внутренние силы. в общем случае работа внутренних сил может не быть равной нулю, так как элементы системы могут сдвигаться друг относительно друга, что приведет как раз к ненулевой работе.

Естественно, записывать работу всех сил может быть неудобно и мы попытаемся упростить себе жизнь, введя консервативные (или потенциальные) силы. Что это за силы такие? Это такие силы, величина которых зависит от координат и все: $\vec{F}(\vec{r})$. Кажется, что ничего интересного они из себя не представляют, но на самом деле, они очень хорошо подходят для определения работы и введения понятия потенциальной энергии. Оказывается, для таких сил можно ввести понятие потенциала $\Pi(x, y, z)$ так, что:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$

Здесь обозначение $\partial \Pi / \partial x$ означает частную производную, то есть производную, когда все переменные кроме дифференцируемой являются константами.

Теперь можно посмотреть что будет с работой такой силы при перемещении из положения 1 в положение 2:

$$A = \int_1^2 (\vec{F} d\vec{r}) = \int_1^2 F_x dx + \int_1^2 F_y dy + \int_1^2 F_z dz = - \int_1^2 \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx - \int_1^2 \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy - \int_1^2 \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz = \Pi(1) - \Pi(2)$$

То есть получается, что работа не зависит от пути по которому эта сила перемещает тело, а также оказывается, что работа по замкнутому контуру равна нулю. Еще имеет смысл отметить, что потенциал оказывается определен с точностью до константы, то есть нам становится интересно смотреть не само значение потенциала в точке, а его изменение между точками. Примеры таких потенциальных сил вы наверняка знаете, а именно: сила тяжести $F = mg \Rightarrow \Delta \Pi = mgh$ и сила упругости $F = kx \Rightarrow \Delta \Pi = kx^2/2$

Это позволяет записать закон изменения энергии полноценно:

$$\Delta (K + \Pi) = A_{\text{НК}}$$

НК — неконсервативные силы.

1.2 Столкновения и метод векторных диаграмм

Рассмотрим для начала теорему Кенига о преобразовании кинетической энергии при переходе из одной Системы отсчета в другую. В общем виде она будет выглядеть:

$$K = K' + \frac{MV^2}{2} + (\vec{P} \cdot \vec{V})$$

Здесь штрихом обозначена энергия в движущейся системе, V — переносная скорость, P — суммарный импульс в системы в движущейся системе отсчета. Для перехода в СЦИ формула упрощается, уходит суммарный импульс (он 0 в СЦИ) и остается только:

$$K = K' + \frac{MV^2}{2}$$

Абсолютная энергия это относительная энергия плюс энергия системы как целого.

Как вы понимаете, мы рассмотрели переход в СЦИ неспроста. Он нам очень пригодится для описания столкновений. Все столкновения мы разделили на упругие (с сохранением полной механической энергии) и неупругие (когда механическая энергия не сохраняется).

Для упругих можно записать законы сохранения импульса и энергии как в ЛСО, так и в СЦИ и заметить несколько важных особенностей. Первая:

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 - \vec{V}_c = \vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \Rightarrow \vec{p}_{1c} = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \mu\vec{v}_{\text{отн}} \\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \vec{V}_c = \vec{v}_2 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \Rightarrow \vec{p}_{2c} = -\mu\vec{v}_{\text{отн}}\end{aligned}$$

То есть в СЦИ импульсы равны по модулю и противоположны по направлению для состояния до удара.

Вторая особенность для случая сохранения энергии:

$$\begin{cases} \vec{p}_{1c} + \vec{p}_{2c} = \vec{p}_{3c} + \vec{p}_{4c} = 0 \\ \frac{\vec{p}_{1c}^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_{2c}^2}{2m_2} = \frac{\vec{p}_{3c}^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_{4c}^2}{2m_2} \end{cases} \Rightarrow p_{1c} = p_{2c} = p_{3c} = p_{4c}$$

То есть в СЦИ импульсы сохраняются по модулю до и после соударения.

Этот факт дает нам возможность нарисовать векторную диаграмму. Ее идея предельно проста:

- Нарисуй горизонтальный вектор u_1
- Его можно представить как сумму вектора V_c и u_1
- Вектор u_1 не меняется по длине, но может изменить направление, что означает что вектор u_3 может заканчиваться только на окружности с радиусом u_1 и центром в начале этого вектора

- Соедини конец вектора u_3 с началом вектора V_c и результатом будет скорость после удара в ЛСО

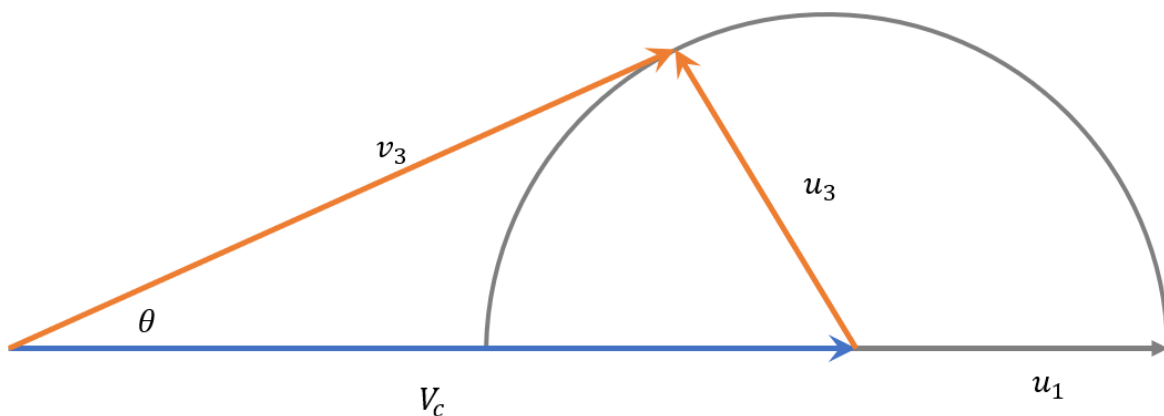


Рис. 1: Пример векторной диаграммы

Отдельно можно рассмотреть случай налета массивной частицы на менее массивную. Из векторной диаграммы однозначно следует, что у такого движения будет максимальный угол разлета, такой что $\sin \theta = m/M$

Теперь рассмотрим случай неупругих ударов. Для них не будет сохраняться кинетическая энергия в СЦИ, это означает что скорость в СЦИ после удара просто уменьшится и окружность станет меньшего радиуса. Но равенство импульсов в СЦИ отдельно до и отдельно после удара сохранится.

Также в неупругих столкновениях обычно рассматривают задачу о пороговой энергии и энергии реакции. Идея пороговой энергии хорошо понимается, если включить простую механическую аналогию. У нас есть шарик и подвижная горка, способная двигаться без трения. Горка стоит, шарик пнул и он едет. Потенциальная энергия, которую надо затратить шарiku, чтобы взобраться на вершину горки, и будет энергией реакции, а кинетическая энергия шарика на старте будет пороговой. Если энергии не хватит — шарик просто вернется обратно и не сможет ее преодолеть (реакция не произойдет).



Рис. 2: Аналогия для понимания пороговой энергии

Тогда можно записать законы сохранения импульса и энергии с учетом потерь в предельном случае:

$$\frac{p_1^2}{2m} = Q + \frac{p_3^2}{m+M}; p_1 = p_3 \Rightarrow K_{\text{пор}} = Q + K_{\text{пор}} \frac{m}{m+M} \Rightarrow K_{\text{пор}} = Q \left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

2 Практическая часть

2.1 Задача 0.7

Условие Потенциальная энергия взаимодействия двух неполярных молекул может быть приближённо описана формулой $U(r) = U_0 \left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - \left(\frac{a}{r}\right)^6 \right]$ (потенциал Леннард-Джонса), где $U_0 > 0$, $a = 4$ нм, r — расстояние между молекулами. Найти расстояние r_0 , при котором сила взаимодействия молекул равна нулю.

Решение Здесь от нас хотят, чтобы мы воспользовались определением силы через потенциал. Напомню, что проекция силы — производная от потенциала по соответствующей координате. У нас здесь всего 1 координата, что позволяет нам просто посчитать производную по r :

$$F(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} = U_0 \left[12 \frac{a^{12}}{r^{13}} - 6 \frac{a^6}{r^7} \right] = 12U_0 \frac{a^{12}}{r^{13}} \left[1 - \frac{(ar)^6}{2} \right]$$

Тогда равновесие будет там, где сила равна нулю, то есть:

$$r_0 = 2^{1/6} a \approx 4.5 \text{ нм}$$

2.2 Задача 4.80

Условие По теории, разработанной Г. Герцем (1882 г.), при столкновении упругих шаров сила взаимодействия пропорциональна деформации в степени $3/2$, т. е. $F = kx^{3/2}$. Рассмотреть лобовое столкновение шаров одинакового радиуса с одинаковой упругой константой k , но разными массами m и $m/3$. Начальные скорости v_0 и v_0 . Определить величину максимальной деформации шаров x_{max} .

Решение В начале задача кажется неподъемной, но идейно она очень простая и представляет собой квинтэссенцию этой недели. Начнем с того, что определим момент, когда сжатие будет максимально. Для этого воспользуемся идеей о переходе в СЦИ и преобразованием энергии. Так как максимальная энергия, которая могла перейти на сжатие — это энергия относительного движения шаров в СЦИ, то максимальное сжатие будет, когда они «слиплись» и едут как единое целое (то есть у системы есть энергия движения только центра масс). Найдем тогда потери этой энергии. Для этого найдем скорость центра масс:

$$V_c = \frac{mv + mv/3}{4m/3} = \frac{v}{2}$$

Тогда потери энергии:

$$\Delta E = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{6} - \frac{4m/3 \cdot v^2/4}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

Эта потерянная энергия потратилась на деформацию 2 шаров. Так как сила упругости зависит только от координаты, то можно смело интегрировать ее по x , чтобы найти работу:

$$\frac{mv^2}{2} = 2A = 2 \int_0^{x_{max}} kx^{3/2} dx = \frac{2}{5} kx_{max}^{5/2} \Rightarrow x_{max} = \left(\frac{5}{8} mv^2 \right)^{2/5}$$

2.3 Задача 4.46

Условие Тело массой M через невесомый блок соединено нерастяжимой невесомой нитью с однородной доской массой m и длиной L , лежащей на горизонтальной поверхности (см. рис.). В начальный момент доска лежит на гладкой части поверхности (коэффициент трения $k = 0$) так, что с началом движения она попадает на шероховатую поверхность (коэффициент трения $k = k_0$). Определить скорость доски к тому моменту, когда она целиком окажется на шероховатой поверхности.

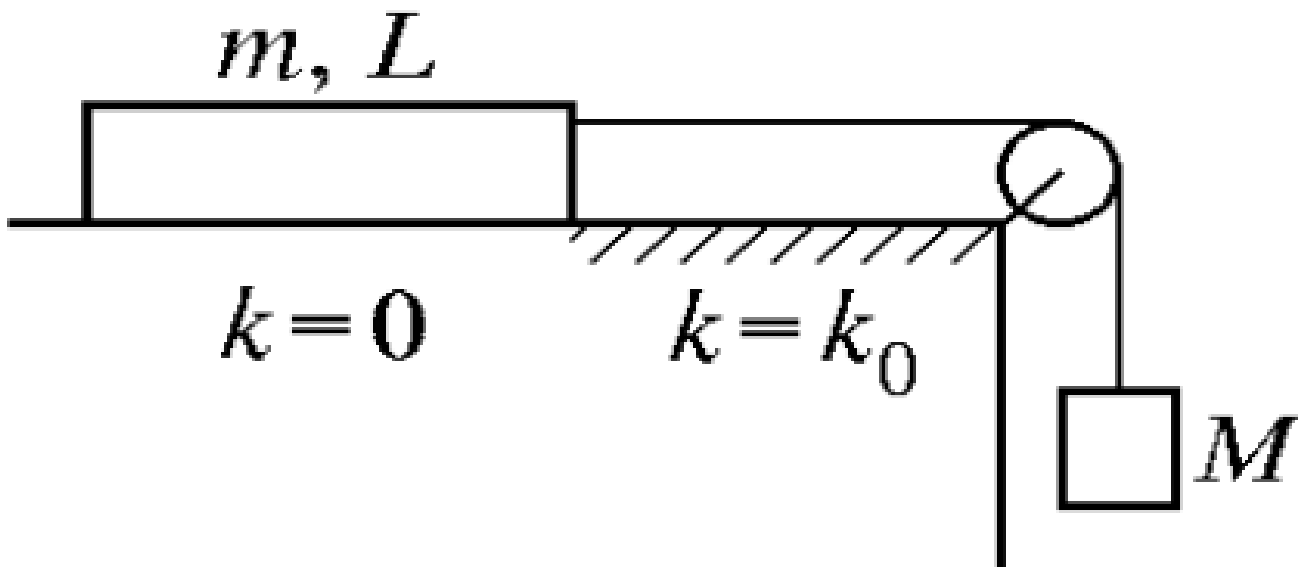


Рис. 3: К задаче 4.46

Решение Здесь надо немного разобраться с тем, как работает эта частично шероховатая поверхность. В школе нас учили, что сила сухого трения не зависит от поверхности, но тут видимо это не работает, иначе бы ее работа писалась тривиально.

В этой задаче мы представим, что доска съехала на расстояние x , и только эта ее часть лежит на поверхности с трением. Значит только эта часть и будет участвовать в ее работе. В целом это тоже жизнеспособная модель, хоть и не совсем привычная. Тогда задача решается в 2 строчки: запись закона сохранения энергии с учетом работы силы трения и собственно сама работа силы против заезда на поверхность:

$$\begin{cases} MgL = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} + A_{fr} \\ A_{fr} = - \int_0^x kmg \frac{x}{L} dx = \frac{kmgL}{2} \end{cases} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{gL(2M - km)}{M + m}}$$

2.4 Задача 4.98

Условие Ядерная реакция ${}^7\text{Li} + p \rightarrow {}^7\text{Be} + n$ (литий неподвижен) имеет порог $E = 1.88$ МэВ, т. е. может идти только тогда, когда энергия протона равна или превосходит величину $E_{\text{пор}}$. При

каких энергиях бомбардирующих протонов E_p нейтроны в такой реакции могут лететь назад от литиевой мишени?

Решение Первое, что мы можем сделать — использовать идею из теоретической части и найти из пороговой энергии протонов энергию реакции:

$$E_{\text{пор}} = Q \left(1 + \frac{m_p}{m_{Li}} \right) \Rightarrow Q = \frac{7}{8} E_{\text{пор}}$$

Далее моделируем ситуацию, когда нейтрон летит назад с около нулевым импульсом и записываем законы сохранения:

$$\begin{cases} p_p = p_{Be} - 0 \\ \frac{p_p^2}{2m_p} = \frac{p_{Be}^2}{2m_{Be}} + Q \end{cases} \Rightarrow E_{min} = \frac{E_{min}}{7} + \frac{7}{8} E_{\text{пор}} \Rightarrow E_{min} = \frac{49}{48} E_{\text{пор}}$$

При больших энергиях нейтроны будут лететь назад.

2.5 Задача 4.134

Условие В серии экспериментов по упругому рассеянию тяжелой нерелятивистской частицы на более легкой первоначально покоившейся частице обнаружено, что тяжелые частицы, отклонившиеся в итоге удара от первоначального направления распространения на угол $\theta = \arctg(1/3)$, летят со скоростями v либо $2v$. Найти угол α между импульсом рассеянной тяжелой частицы в лабораторной системе отсчета и ее импульсом в системе отсчета, связанной с центром масс.

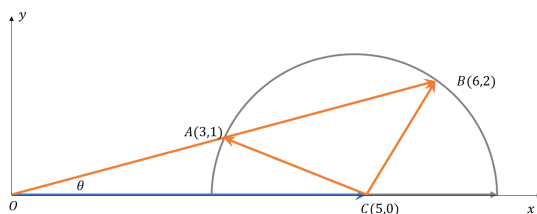


Рис. 4: К задаче 4.134

Решение Кажется, что в этой задаче кроется какая-то страшная физика. На самом деле это задача по геометрии. Как только мы нарисует векторную диаграмму, все станет понятно. У нас есть 2 разных скорости для одного угла. Это дает нам возможность изобразить каждую из них на векторной диаграмме и увидеть какие скорости будут в каждом случае в СЦИ а какие в ЛСО.

а дальше нам просто надо найти углы. Для простоты я поместил векторную диаграмму в систему координат и записал координаты всех точек (да простят меня геометры, но у меня уже ночь и я плохо соображаю). Итого получается, что вектор $\vec{CA} = (1, 2)$ и $\vec{CB} = (-2, 1)$ будут взаимно перпендикулярны, что означает что в треугольнике ABC оба угла которые нас интересуют будут по 45 градусов.

2.6 Комментарии к задачам из задания

Нулевки Одну мы решили, а во второй надо просто записать потенциал эффективной силы, которая действует на груз

Задача 4.41 Тут даже интегрировать не надо, а просто подумать какая сила заставляет полу-сферу двигаться.

Задача 4.47 Очень похожа на 4.47, но надо включить еще закон сохранения импульса.

Задача 4.70 Рассмотрите взаимодействие со стенкой как с объектом конечной массы, а затем устремите ее к бесконечности. Так можно найти и конечную скорость и все остальное

Задача 4.76 Расписать взаимодействие шара и пули, а затем аккуратно проинтегрировать путь шара в воде.

Задача 4.80 Решена

Задача 4.90 Нарисовать векторную диаграмму, а затем увидеть магию геометрии

Задача 4.98 Решена

Задача 4.100 Воспользоваться идеей из теоретической части

Задача 4.125 Аккуратно расписать элементарную работу силы трения как зависимость от угла. Проинтегрировать ее и записать ЗСЭ.

Задача 4.134 Решена