

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2024 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Введение в математический анализ**
по направлению подготовки: **03.03.01 «Прикладная математика и физика»**
физтех-школа: **физики и исследований им. Ландау**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 1

лекции — 60 часов
практические (семинарские)
занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
теор. курс — 120 часов

Программу составил

д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 11 апреля 2024 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Аксимумы действительных чисел. Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу). Принцип Архимеда.
2. Предел числовой последовательности. Единственность предела. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями и неравенствами. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Принцип вложенных отрезков (теорема Кантора).
3. Подпоследовательности, частичные пределы. Верхний и нижний пределы числовой последовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости числовой последовательности. Открытые и замкнутые множества. Счётные и несчётные множества.
4. Предел функции одной переменной. Определения по Гейне и по Коши, их эквивалентность. Свойства пределов функции. Критерий Коши существования конечного предела функции. Предел по множеству, односторонние пределы. Существование односторонних пределов у монотонной функции.
5. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва, их классификация. Односторонняя непрерывность. Теоремы о пределе и непрерывности сложной функции.
6. Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижение точных верхней и нижней граней, компактность множества значений. Теоремы о промежуточных значениях для функции, непрерывной на отрезке, и для функции, непрерывной на числовом промежутке. Теорема об обратной функции.
7. Непрерывность элементарных функций. Определение экспоненты, ее свойства. Показательная, логарифмическая и степенная функции. Тригонометрические функции. Замечательные пределы, следствия из них.
8. Классы эквивалентности. Сравнение функций (символы o , O , \sim). Вычисление пределов при помощи выделения главной части в числителе и знаменателе дроби.
9. Производная функции одной переменной. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменной. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Дифференцируемость параметрически заданной функции.

10. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n -й производной произведения. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменной. Дифференциалы высших порядков.
11. Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума). Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа. Разложения основных элементарных функций по формуле Тейлора. Правила Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.
12. Применение производной к исследованию функций. Необходимые и достаточные условия монотонности, достаточные условия локального экстремума в терминах первой производной. Достаточные условия локального экстремума в терминах второй и высших производных. Выпуклость, точки перегиба. Построение графиков функций — асимптоты, исследование интервалов монотонности и точек локального экстремума, интервалов выпуклости и точек перегиба.
13. Линейное, евклидово, нормированное и метрическое пространства, пространство \mathbb{R}^n . Открытые и замкнутые и компактные множества. Полнота и компактность метрических пространств. Лемма Гейне–Бореля. Предел, непрерывность и равномерная непрерывность функций в метрических пространствах. Свойства непрерывных функций в метрических пространствах. Предел и непрерывность функций нескольких переменных.
14. Элементы дифференциальной геометрии. Вектор функции: предел, непрерывность, производная, формула Тейлора. Теорема Лагранжа для вектор-функций. Кривые в \mathbb{R}^n . Длина кривой. Гладкие кривые, касательная к гладкой кривой. Производная переменной длины дуги. Натуральный параметр. Кривизна кривой, формулы для ее вычисления. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой.
15. Комплексные числа. Модуль и аргумент, тригонометрическая форма. Арифметические операции с комплексными числами. Извлечение корня. Экспонента с комплексным показателем. Формула Эйлера. Формула Муавра. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и неприводимые квадратичные множители. Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей.
16. Первообразная и неопределенный интеграл. Линейность неопределенного интеграла, интегрирование подстановкой и по частям. Интегрирова-

ние рациональных функций. Основные приемы интегрирования иррациональных и трансцендентных функций.

Литература

Основная

1. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : МФТИ, 2019.
2. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу, ЛФИ. Ч. 1. mipt.ru/institute-departments/kafedra-vysshey-matematiki/study_docs/books_lections
3. *Зорич В. А.* Математический анализ. Т 1, 2. — Москва : МЦНМО, 2012.
4. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа (в трёх томах). Т 1, 2. — Москва : Дрофа, 2004.

Дополнительная

5. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : Физматлит, 2004.
6. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2000.
7. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : Физматлит, 2014.
8. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. Введение в математический анализ. — Москва : МФТИ, 2017.
9. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — Москва : МФТИ, 2007.
10. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Т 1, 2. — Москва : Наука-Физматлит, 1998.
11. *Фиштенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т 1. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.
12. *Рудин У.* Основы математического анализа. — Москва : Мир, 1976.
13. *Ульянов П. Л., Бахвалов А. Н., Дьяченко М. И., Казарян К. С., Сифуэнтес П.* Действительный анализ в задачах (топология и мощность множеств). — Москва : Физматлит, 2005.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Т.1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — **С1**)
2. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — **С2**)
3. Сборник задач по математическому анализу. Т.3. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — **С3**)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 7–12 октября)

I. Производная

C1, §13: 32; 67; 106; 149.

T.1. Найти производную функции (ответ не упрощать)

$$y = \left(\frac{\operatorname{tg} \sqrt{1 - \log_3 2x}}{\operatorname{cth}(x^3 + 3e^{x^4})} \right)^{\arccos 2x^2}.$$

II. Неопределенный интеграл

C2, §1: 2(15, 16); 12(2); 17(4); 23(5); 24(3).

III. Последовательности. Предел последовательности

C1, §7: 275(3); 276(7); 279(2); 300(2).

C1, §8: 2(4)(по определению); 13(1); 15(1); 17(1, 2); 25(1); 27; 29(1)*;
46(1, 2, 4).

T.2. Найдите предел последовательности, заданной как отношение многочленов

$$x_n = \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \dots + b_0} \quad (a_p \neq 0, b_q \neq 0)$$

в зависимости от степеней p, q и коэффициентов a_i, b_j этих многочленов.

C1, §8: 91; 53(1); 7; 60(для всех $a > 0$); 67; 71(1); 74(1).

C1, §8: 116(1); 117(2); 121; 136; 143(3); 146; 147(4); 158; 164(1); 220*;
246(1, 2, 3*).

T.3*. (Теорема Штольца.) Пусть

1) $y_{n+1} > y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$;

3) существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = C \in \mathbb{R}$.

Докажите, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

IV. Топология и мощность множеств

Т.4. Для множества $A = (-1; 0] \cup ([1; 2] \cap \mathbb{Q}) \cup \{3\}$, $A \subset \mathbb{R}$ найдите:

а) все внутренние точки; б) все точки прикосновения; в) все граничные точки; г) все предельные точки; д) все изолированные точки.

Т.5. Для множества $A = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n} \right) \right) \cup \left\{ \frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ найдите:

а) все внутренние точки; б) все точки прикосновения; в) все граничные точки; г) все предельные точки; д) все изолированные точки.

Т.6. Докажите равномощность множеств

а) \mathbb{R} и $(0, 1)$;

б) $[0, 1]$ и $(0, 1)$.

Т.7*. Докажите неравномощность множеств A и 2^A для любого непустого множества A . (2^A – множество всех подмножеств множества A .)

Т.8*. Докажите, что всякое непустое ограниченное открытое множество $A \subset \mathbb{R}$ является объединением конечного или счётного набора попарно непересекающихся интервалов.

Т.9*. Докажите, что если множество A действительных чисел состоит только из изолированных точек, то оно не более, чем счетно.

V. Функции. Предел функции. Непрерывность

С1, §7: 218(5); 219(2).

С1, §9: 1(1); 8(1); 16; 19(2); 25(5); 26(2); 29(2, 5); 33(1); 35(4); 61.

С1, §10: 14; 22; 23; 40; 41(1); 44; 47*; 66*; 76.

Т.10. Пусть функция $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ непрерывна. Докажите, что существует точка $x \in [a, b]$ такая, что $f(x) = x$.

Т.11*. Пусть функция $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и $f(0) = f(1)$. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется точка $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ такая, что $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$. Верно ли, что найдется точка $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ такая, что $f(x + \frac{2}{3}) = f(x)$?

Т.12. Пусть функция f непрерывна на луче $[0, +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$. Верно ли, что выполнено одно из соотношений $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ или $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$?

Т.13*. Может ли непрерывная функция отобразить полуинтервал в интервал?

Рекомендации по решению

первого домашнего задания по неделям

1 неделя	С1, §13: 32; 67; 106; 149; Т.1. С2, §1: 2(<u>15</u> , 16); <u>12</u> (2); 17(4); 23(5); <u>24</u> (3). С1, §7: 275(3); 276(7); 279(2); 300(2).
2 неделя	С1, §8: 2(4); 13(1); 15(1); 17(1, 2); 25(1); 27; 29(1)*; 46(1, 2, 4). Т.2. С1, §8: 91; 53(1); 7; 60; 67; 71(1); 74(1); 116(1); 117(2); 121.
3 неделя	С1, §8: 136; 143(3); 146; 147(4); 158. С1, §8: 164(1); 220*; 246(1, 2, 3*); Т.3*. Т.4; Т.5; Т.6; Т.7*; Т.8*; Т.9*.
4 неделя	С1, §7: 218(5); 219(2). С1, §9: 1(1); 8(1); 16; 19(2); 25(5); 26(2); 29(2, 5). С1, §9: 33(1); 35(4); 61.
5 неделя	С1, §10: 14; 22; 23; 40; 41(1); 44; 47*; 66*; 76. Т.10; Т.11*; Т.12; Т.13*.

68 + 10*

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 11–16 ноября)

I. Сравнение функций

С1, §9: 50(1); 51(1).

Т.1. Докажите, что если при $x \rightarrow 0$ верно $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) \sim h(x)$, то $f(x) = o(h(x))$ при $x \rightarrow 0$.

Т.2. Для каких $x_0 \in \mathbb{R}$ выполнено $x^2 - 4x + 4 = o(x^2 - 3x + 2)$ при $x \rightarrow x_0$?

II. Дифференцируемость. Дифференциал

С1, §13: 197(2, 3); 201(3, 7); 213(1); 173; 179(1).

С1, §14: 10(3).

III. Производные и дифференциалы высших порядков

С1, §15: 9(4); 13(2); 14(4); 22(3); 24(13, 14); 25(3, 6, 9); 26(2).

IV. Теоремы о среднем

С1, §16: 5; 15(2, 3); 19; 30; 33; 20*.

V. Формулы Маклорена и Тейлора

Т.3. Представьте формулой Маклорена с точностью до $o(x^5)$ функцию $f(x) = (x + x^2 - 2x^3 + x^4)^3$.

C1, §18: 2(9); 3(5, 9); 4(7); 5(3); 14(3); 20(6); 30(1); 39(5).

T.4. Представьте формулой Маклорена с точностью до $o(x^4)$ функции

а) $y = \arcsin x$; б) $y = \operatorname{th} x$.

T.5. Представьте формулой Маклорена с точностью до $o(x^6)$ функции

а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{arctg} x$.

VI. Вычисление пределов с помощью правил Лопиталья

C1, §17: 39; 49; 64; 76(1); 80.

VII. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

C1, §19: 7(2); 8(6); 14(5); 21(4); 30(4); 47(1)*; 58(3)*.

VIII. Исследование функций

C1, §20: 20(2); 23(1); 35*; 39(5).

T.6. Докажите неравенство $e^{(x+y)/2} \leq \frac{e^x + e^y}{2}$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$.

IX. Построение графиков функций

C1, §21: 5(2, 3); 9(3); 10(2); 12(1); 13(11); 15(7); 23(1)*; 31(1)*.

Рекомендации по решению

второго домашнего задания по неделям

1 неделя	C1, §9: 50(1); 51(1); T.1; T.2. C1, §13: 197(2, 3); 201(3, 7); 213(1); 173; 179(1). C1, §14: 10(3). C1, §15: 9(4); 13(2); 14(4); 22(3).
2 неделя	C1, §15: 24(13, 14); 25(3, 6, 9); 26(2). C1, §16: 5; 15(2, 3); 19; 30; 33; 20*; T.3. C1, §18: 2(9); 3(5, 9); 4(7); 5(3); 14(3); 20(6); 30(1); 39(5). T.4; T.5.
3 неделя	C1, §17: 39; 49; 64; 76; 80. C1, §19: 7(2); 8(6); 14(5); 21(4); 30(4); 47(1)*; 58(3)*.
4 неделя	C1, §20: 20(2); 23(1); 35*; 39(5); T.6. C1, §21: 5(2, 3); 9(3); 10(2); 12(1); 13(11); 15(7); 23(1)*; 31(1)*.

61 + 6*

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 9–14 декабря)

I. Множества в конечномерных евклидовых пространствах

C3, §2: 9 а), б), г) (3, 4).

T.1. Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Докажите, что для любого $C \in \mathbb{R}$ множество всех решений неравенства $f(x) < C$ является открытым, а множество всех решений неравенства $f(x) \leq C$ – замкнутым.

C3, §1: 15; 18; 37; 38.

T.2. Является ли множество

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : e^{x_1^2 + x_2^2} < 1 + x_3^2\}$$

в пространстве \mathbb{R}^3 :

а) открытым; б) замкнутым; в) областью?

T.3. Верно ли, что из любого покрытия отрезка $[0; 1]$ отрезками можно выделить конечное подпокрытие?

T.4*. Докажите, что из всякого покрытия отрезка $[0; 1]$ интервалами можно выбрать подпокрытие, которое накрывает каждую точку отрезка не более, чем два раза.

II. Кривые

C1, §24: 50; 78(2); 80(1); 81(3); 109(1, 3); 122(3); 14*.

C1, §24: 67* (определение стереографической проекции сформулировано перед задачей 67); 69*.

III. Предел и непрерывность функций нескольких переменных

T.5. Исследуйте существование предела $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ по совокупности переменных для следующих функций в \mathbb{R}^2

$$\text{а) } f(x, y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases} \quad \text{б) } f(x, y) = \begin{cases} 0, & y \neq x^2, \\ 1, & y = x^2. \end{cases}$$

Найдите также повторные пределы $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ и пределы в точке $(0, 0)$ по всем направлениям.

T.6. Для функции $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ исследуйте существование предела

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ по совокупности переменных. Найдите также повторные пре-

делы $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ и пределы в точке $(0, 0)$ по всем направлениям.

C3, §2: 37(8); 48(6*, 8); 51; 71*.

Т.7. Исследуйте на непрерывность в \mathbb{R}^2 функцию

$$\text{а)} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$\text{б)} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2-y^2)}{x-y}, & x \neq y, \\ x+y, & x = y. \end{cases}$$

Является ли множество точек разрыва функции f открытым или замкнутым в \mathbb{R}^2 ?

IV. Равномерная непрерывность функций одной переменной

С1, §12: 2(2, 4); 7.

Т.8. Пусть функция f дифференцируема на $I = [a, +\infty)$. Докажите следующие утверждения:

- а) если f' ограничена на I , то f равномерно непрерывна на I ;
- б) если f' бесконечно большая при $x \rightarrow +\infty$, то f не является равномерно непрерывной на I ;
- в)* если f' не ограничена, но не является бесконечно большой на I , то f может быть, а может и не быть равномерно непрерывной на I (привести примеры).

С1, §12: 3(4, 9); 9; 20; 23; 25; 4(3, 5, 7*).

V. База. Предел по базе

Т.9*. Семейство \mathcal{B} подмножеств $A \subset X$ множества X будем называть *базой* в множестве X , если выполнены два условия:

- 1) $\forall A \in \mathcal{B} \hookrightarrow A \neq \emptyset$;
- 2) $\forall A_1 \in \mathcal{B} \forall A_2 \in \mathcal{B} \exists A_3 \in \mathcal{B} : A_3 \subset A_1 \cap A_2$.

Являются ли базами в \mathbb{N} следующие семейства:

- \mathcal{B}_1 : система всех множеств вида $A_n^1 = \{n+k : k \in \mathbb{N}\}$, $n \in \mathbb{N}$;
- \mathcal{B}_2 : система всех множеств вида $A_n^2 = \{n^2+k : k \in \mathbb{N}\}$, $n \in \mathbb{N}$;
- \mathcal{B}_3 : система всех множеств вида $A_n^3 = \{n+k^2 : k \in \mathbb{N}\}$, $n \in \mathbb{N}$?

Являются ли базами в \mathbb{R}^2 следующие семейства:

- \mathcal{B}_4 : система ε -окрестностей некоторой точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$;
- \mathcal{B}_5 : система проколотых ε -окрестностей некоторой точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$?

Т.10*. Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ – функция на множестве X , \mathcal{B} – база в X . Число $C \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции f по базе \mathcal{B}* и обозначается $\lim_{\mathcal{B}} f$,

если для любой окрестности $V(C)$ точки C найдётся элемент $A \in \mathcal{B}$ базы, образ которого $f(A)$ содержится в окрестности $V(C)$. На ε -языке это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathcal{B} \forall x \in A \hookrightarrow |f(x) - C| < \varepsilon$. Докажите, что:

- 1) $\lim_{\mathcal{B}_1} f = C \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = C$;
- 2) существование $\lim_{\mathcal{B}_4} f$ равносильно непрерывности f в точке (x_0, y_0) ;
- 3) $\lim_{\mathcal{B}_5} f = C \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = C$.

Базы $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_5$ введены в предыдущей задаче.

Т.11*. Сформулируйте и докажите критерий Коши существования (конечного) предела функции f по базе \mathcal{B} .

Рекомендации по решению

третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	С3, §2: 9(3, 4); Т.1;. С3, §1: 15; 18; 37; 38; Т.2; Т.3; Т.4*. С1, §24: 50; 78(2); 80(1); 81(3); 109(1, 3); 122(3); 14*. С1, §24: 67*; 69*.
2 неделя	Т.5; Т.6;. С3, §2: 37(8); 48(6*, 8); 51; 71*; Т.7.
3 неделя	С1, §12: 2(2, 4); 7; Т.8; 3(4, 9); 9; 20; 23; 25; 4(3, 5, 7*). Т.9*; Т.10*; Т.11*.

34 + 10*

Составитель задания

д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов