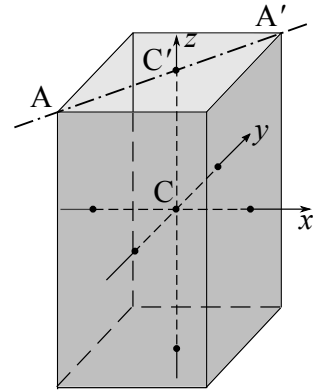


**1А.** Уравнение моментов относительно центра одного колеса:  $J_C \dot{\omega} = Fr$ , где  $r\dot{\omega} = a$ ,  $J_C = \frac{1}{2}mr^2$ . Уравнение движения тележки  $Ma = Mg \sin \alpha - 4F$ , откуда  $Ma = g \sin \alpha - 2ma$  и  $a = \frac{M}{M+2m}g \sin \alpha = \boxed{\frac{5}{12}g}$ .

**2А.** ( $c = 1$ ) В системе центра инерции ЗСЭ + ЗСИ:  $m_1 = E'_2 + E'_\gamma$ ,  $\sqrt{E'^2_2 - m^2_2} = E'_\gamma$ , откуда  $(m_1 - E'_\gamma)^2 - m^2_2 = E'^2_\gamma$ ,  $E'_\gamma = \frac{m^2_1 - m^2_2}{2m_1} = \Delta m \left(1 - \frac{\Delta m}{2m_1}\right) \approx \boxed{75 \text{ МэВ}}$ . В лабораторной системе:  $\gamma m_1 = E_2 + E_\gamma$ ,  $\gamma \beta m_1 = \pm \sqrt{E'^2_2 - m^2_2} + E_\gamma$ , откуда  $E_\gamma = \frac{m^2_1 - m^2_2}{2\gamma(1-\beta)m_1} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} E'_\gamma = 2E'_\gamma = \boxed{150 \text{ МэВ}}$ . Этот же результат можно получить из преобразования Лоренца для энергии или формулы для эффекта Доплера:  $E_\gamma = \Gamma(E'_\gamma + \beta p'_\gamma) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} E'_\gamma$ .

**3А.** Сечение центрального эллипсоида инерции горизонтальной плоскостью, проходящей через центр масс призмы, является окружностью. Поэтому момент инерции  $J_C$  относительно всех осей, лежащих в этой плоскости и проходящих через центр масс, одинаков, а значит, равен моменту инерции относительно горизонтальной оси  $x$ , перпендикулярной боковой грани призмы. Пусть  $m$  — масса пластины,  $M = 4m$  — полная масса призмы. Момент инерции двух граней, пересекаемых осью  $x$ :  $2 \cdot m \left(\frac{a^2}{12} + \frac{h^2}{12}\right) = \frac{5}{6}ma^2$ . Момент инерции двух боковых граней, параллельных  $x$ , находим с помощью теоремы Штейнера:  $2 \cdot m \cdot \left(\frac{h^2}{12} + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = \frac{7}{6}ma^2$ . Отсюда  $J_C = 2ma^2$ , и момент инерции относительно оси  $AA'$  —  $J_A = 2ma^2 + Ma^2 = 6ma^2$ . Период малых колебаний  $T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{Mg}} = \boxed{2\pi \sqrt{\frac{3a}{2g}}}$ .



**4А.** Напряжение на расстоянии  $y$  от оси вращения, обусловленное силой тяжести:  $\sigma_1(y) = \rho g(y - l)$ , что даёт деформацию стержня на  $\Delta l_1 = \int_0^l \frac{\sigma_1(y)}{E} dy = -\frac{\rho g l^2}{2E}$ . Из-за центробежной силы возникает напряжение  $\sigma_2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2(l^2 - y^2)$ , что растягивает стержень на  $\Delta l_2 = \int_0^l \frac{\sigma_2(y)}{E} dy = \frac{\rho\omega^2 l^3}{3E}$ . Так как длина стержня не изменяется, то  $\Delta l_1 + \Delta l_2 = 0$ , откуда  $\omega^2 = \frac{3g}{2l}$ , и сила реакции в оси равна  $N = -S \cdot (\sigma_1(0) + \sigma_2(0)) = \rho g l S \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{4}mg}$ .

**5А.** Момент инерции газа в баллоне:  $J_r = m \left(\frac{\ell^2}{12} + \frac{r^2}{4}\right) = \frac{1}{9}m\ell^2$ . Закон сохранения момента импульса относительно оси вращения для 2-х близких моментов времени:  $J\omega = (J + dJ)(\omega + d\omega) + (-dm) \cdot R \cdot (\omega R - u)$ , где  $J = J_0 + J_r$ ,  $R = \ell/2$ . Оставляя величины 1-го порядка малости, с учетом  $dJ = \frac{1}{9}\ell^2 dm$ , получаем:

$$\left(J_0 + \frac{1}{9}m\ell^2\right) d\omega = -\left(\frac{1}{2}u\ell - \frac{5}{36}\omega\ell^2\right) dm.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\int_0^\omega \frac{d\omega}{\frac{1}{2}u\ell - \frac{5}{36}\omega\ell^2} = -\int_{m_0}^0 \frac{dm}{J_0 + \frac{1}{9}m\ell^2} \rightarrow -\frac{36}{5} \ln \left(1 - \frac{5\omega\ell}{18u}\right) = 9 \ln \left(1 + \frac{m\ell^2}{9J_0}\right),$$

откуда  $\boxed{\omega = \frac{18u}{5\ell} \left(1 - \left(1 + \frac{m_0\ell^2}{9J_0}\right)^{-5/4}\right)}$ .

1Б. Аналогично 1А ускорение  $a = \frac{M+2m}{M+3m}g \sin \alpha = \frac{5}{14}g$ , полная кинетическая энергия по теореме Кёнига  $K = 2 \cdot \frac{1}{2}(J_C \omega^2 + mV^2) + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}(M + 3m)V^2 = = \frac{1}{2}14 \cdot 10^3 \cdot (\frac{5}{14} \cdot 9,8 \cdot 10)^2 \approx [8,6 \cdot 10^6 \text{ Дж}]$ , где  $V = at$ ,  $J_C = \frac{1}{2}mR^2$ .

2Б. ( $c = 1$ ) ЗСЭ + ЗСИ в лабораторной системе:  $E_0 = E_1 + E_2$ ,  $\sqrt{E_0^2 - m_0^2} = E_1 - E_2$ , откуда  $E_2 = \frac{m_0^2}{4E_1} = [33,8 \text{ МэВ}]$ ,  $E_0 = \frac{5}{4}m_0$ ,  $\gamma_0 = \frac{5}{4}$ ,  $\beta_0 = \sqrt{1 - \gamma_0^{-2}} = [\frac{3}{5}]$ .

3Б. Аналогично 3А: момент инерции боковых граней, пересекаемых осью  $x$ , —  $2m \frac{a^2}{6} = \frac{ma^2}{3}$ ; для боковых граней, параллельных оси  $x$ , —  $2 \cdot m \left( \frac{a^2}{12} + (\frac{a}{2})^2 \right) = \frac{2}{3}ma^2$ ; для верхнего и нижнего оснований —  $2 \cdot 2m \left( \frac{a^2}{12} + (\frac{a}{2})^2 \right) = \frac{4}{3}ma^2$ . Отсюда  $J_C = \frac{7ma^2}{3}$ , и момент инерции относительно оси  $AA'$  —  $J_A = \frac{7ma^2}{3} + M(\frac{a}{2})^2 = \frac{13ma^2}{3}$ , где  $M = 8m$ . Частота малых колебаний  $\omega = \sqrt{\frac{Mg \frac{a}{2}}{J_A}} = \sqrt{\frac{12g}{13a}}$ .

4Б. Удлинение стержня под действием центробежной силы  $\Delta l_2 = \frac{m\omega^2 l^2}{3SE}$  (см. зад. 4А). Так как величина центробежной силы равна  $N - mg = mg$ , то  $\omega^2 = \frac{2g}{l}$ , и  $\Delta l_2 = \frac{2mgl}{3SE}$ . Удлинение стержня под действием силы тяжести  $\Delta l_1 = \frac{mgl}{2SE}$ , поэтому его результирующее относительное удлинение  $\varepsilon = \frac{7mgl}{6SE}$ .

5Б. (Момент инерции топлива  $J_T = \frac{2}{5}mR^2$ , корабля  $J_0 = \frac{2}{3}MR^2$ . Далее аналогично 5А имеем  $(\frac{2}{3}M + \frac{2}{5}m)R^2 d\omega = ((1 - \frac{2}{5})\omega R^2 - uR) dm$ , откуда

$$\frac{d\omega}{\frac{3}{5}\omega - \frac{u}{R}} = \frac{dm}{\frac{2}{3}M + \frac{2}{5}m} \rightarrow \frac{5}{3} \ln \frac{\frac{u}{R} - \frac{3}{5}\omega}{\frac{u}{R}} = \frac{5}{2} \ln \frac{\frac{2}{3}M}{\frac{2}{3}M + \frac{2}{5}m_0} \quad (*),$$

откуда  $\omega = \frac{5u}{3R} \left( 1 - \left( 1 + \frac{3m_0}{5M} \right)^{-3/2} \right)$ . Видно, что скорость, заданная в условии, не достижима (максимальная скорость  $\omega_{max} = \frac{5u}{3R}$ ). Считать задачу полностью решенной, если уравнение движения составлено и проинтегрировано (получено соотношение  $(*)$  или следствия из него).

### Инструкция для проверяющих

Максимум за задачу — 1 балл. Каждая задача оценивается согласно таблице:

Символ	Баллы	Критерий оценки
+	<b>1,0</b>	Задача решена верно: приведено <i>обоснованное</i> решение и даны правильные ответы на все вопросы задачи. Возможно наличие арифметических ошибок или описок, не влияющих на ход решения и не приводящих к ошибке в порядке или знаке величины.
+•	<b>0,8</b>	Ход решения верен и получены ответы на все вопросы задачи, но решение содержит существенные недочеты: арифметические ошибки, влияющие на порядок или знак ответа; ошибки в размерности; вычислительные ошибки в выкладках, не влияющие на ход решения.
±	<b>0,5</b>	Задача решена частично: дан ответ только на часть вопросов; выкладки не доведены до конца; отсутствуют необходимые промежуточные доказательства; либо решение содержит грубые ошибки (вычислительные, логические), влияющие на ход решения.
∓	<b>0,2</b>	Задача не решена, но есть некоторые подвижки в её решении: сформулированы <i>все</i> необходимые для решения основные физические законы.
—	<b>0</b>	Задача не решена, при этом основные законы перечислены не полностью или с грубыми ошибками, либо использованы законы, не имеющие отношения к задаче. Решение задачи не соответствует условию. / Попытки решить задачу не было.

**Оценка за письм. работу** = удвоенная сумма по задачам, округленная в сторону ближайшего целого.

Если есть подозрения, что задача списана, рядом с оценкой ставится знак вопроса.

Итоговая  $\Sigma$  баллов = оценка за письм. работу + баллы за задания:

«отл»: +2 б./задание; «хор»: +1 б./задание; «удовл»: +0 б./задание; не сдано: −3 б./задание.

Итоговая сумма  $\Sigma$  определяет *максимальную* оценку на устном экзамене.

Примеры заполнения:

1А	2А	3А	4А	5А	Оценка
1	1	1	0,8	0,5	<b>отл (9)</b>
1	0,8	0,8	0,5	0	<b>хор (6)</b>
1	0,8	0,2	0,2	–	<b>уд (4)</b>
0,5	0,2	0	–	–	<b>неуд (1)</b>

1 зад.	2 зад.	Σ баллов
+2	+2	<b>13</b>
+1	+1	<b>8</b>
+1	0	<b>5</b>
0	–3	<b>–2</b>

Комментарий

Оценка на устном может быть повышена до **отл(10)**.

Оценка на устном может быть повышена до **отл(8)**.

Оценка на устном может быть повышена до **хор(5)**.

Для положит. оценки нужно решить **5 задач** из задания

Все замечания направлять редактору-составителю контрольной работы Попову П.В. [porov.pv@mipt.ru](mailto:porov.pv@mipt.ru).  
Обсуждение замечаний, критериев проверки и результатов — на форуме кафедры [board.physics.mipt.ru](http://board.physics.mipt.ru).

Обсуждение результатов письменного и порядка проведения устного экзаменов  
состоится 29 декабря в 8:45 в Главной физической ауд.