Семинар 6. Вращение твердых тел вокруг неподвижной оси

Клименок Кирилл Леонидович

6.10.2022

1 Теоретическая часть

1.1 Твердое тело и угловая скорость

Начнем с определения твердого тела. Это тело, расстояние между любыми точками которого неизменно. Тогда, продифференцировав квадрат расстояния между этими самыми двумя точками, можно получить довольно забавный результат:

$$|\vec{r}_A - \vec{r}_B| = const \Rightarrow \frac{d(\vec{r}_A - \vec{r}_B)^2}{dt} = 2(\vec{r}_A - \vec{r}_B) \cdot (\vec{v}_A - \vec{v}_B) = 0 \Rightarrow \vec{v}_A - \vec{v}_B \perp \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

То есть относительная скорость этих 2 точек перпендикулярна расстоянию между ними. Тогда, если выбрать скорость первой точки за 0, то скорость второй будет по сути описывать элемент окружности вокруг первой. И отсюда и появится такая важная для нас угловая скорость $\vec{\omega}$:

$$V = [\vec{\omega} \times \vec{r}]; |\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}$$

То есть это скорость направлена вдоль оси вращения.

1.2 Момент инерции

В этом семинаре мы рассмотрим ситуацию, когда тело вращается вокруг фиксированной оси. Это существенно упрощает жизнь. Для начала скажем, что в таком случае нас будет интересовать только проекция момента импульса на эту ось, а сам импульс который будет эту проекцию создавать будет направлен по линейной скорости вращения:

$$L_z = \sum m_i v_{\varphi,i} r_{\perp,i} = \sum m_i \omega r_{\perp,i}^2 = I_z \omega$$

Таким образом у нас появилось выражение для момента инерции вокруг оси:

$$I = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm$$

Естественно, через него удобно записать уравнение моментов:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_a$$

И другие выражения, типа кинетической энергии. Важно отметить, что в случае более общего движения твердого тела нельзя сказать, что момент импульса равен произведению момента инерции на угловую скорость, но об этом мы будем говорить позднее.

1.3 Методы расчет моментов инерции

Теорема Гюйгенса-Штейнера Если у нас есть 2 параллельные оси на расстоянии l, одна из которых проходит через центра масс тела массой m, то мы можем рассчитать моменты инерции относительно каждой из них и они будут связаны:

$$I' = I + ml^2$$

Момент инерции относительно точки Если мы рассмотрим момент инерции тела в декартовых координатах, относительно каждой из осей, то получится:

$$\begin{cases} I_x = \int (y^2 + z^2) dm \\ I_y = \int (x^2 + z^2) dm \\ I_z = \int (y^2 + x^2) dm \end{cases} \Rightarrow I_x + I_y + I_z = 2I_{\odot} = 2\int (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

Из этого можно сразу сделать вывод, что для плоского тела ($z = 0$):

$$I_z = I_y + I_x$$

Стержень Ось проходит через конец стержня. Выбираем элемент массой dm на расстоянии x от оси и интегрируем:

$$I = \int x^2 dm = \int_0^l x^2 \frac{mdx}{l} = \frac{ml^2}{3}$$

Если ось проходит через середину стержня, то это просто 2 стрежня половинной длины и они момент инерции

$$I = \frac{ml^2}{12}$$

Кольца Для оси симметрии перпендикулярно плоскости кольца все тривиально:

$$I = mr^2$$

Для произвольной оси симметрии в плоскости кольца воспользуемся тем, что кольцо плоское и получим:

$$I_z = I_y + I_x \Rightarrow mr^2 = 2I \Rightarrow I = \frac{mr^2}{2}$$

Диск Для оси симметрии перпендикулярно плоскости кольца интегрируем по кольцам:

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \frac{2\pi r dr}{\pi r^2} = \frac{mr^2}{2}$$

Для остальных осей симметрии в плоскости как и с кольцом будет в 2 раза меньше

Сфера Тут все симметрично совсем, пользуемся моментом инерции относительно точки:

$$3I = 2I_{\odot} \Rightarrow I = \frac{2}{3} mr^2$$

2 Практическая часть

2.1 Задача 0.12

Условие Высокая и тонкая фабричная труба треснула у основания и стала падать. Найти угловую скорость ω и угловое ускорение ε как функции угла между трубой и вертикалью.

Решение Это наглядное демонстрация того, как применять уравнение моментов и закон сохранения энергии для твердого тела, которое вращается вокруг оси. Ось в нашем случае проходит через основание трубы, поэтому относительно нее и запишем уравнение моментов. Единственный ненулевой момент будет от силы тяжести:

$$I\varepsilon = M_e \Rightarrow \frac{ml^2}{3}\varepsilon = mg\frac{l}{2}\sin\alpha \Rightarrow \varepsilon = \frac{3g}{2l}\sin\alpha$$

Теперь, зная зависимость углового ускорения от угла кажется можно попытаться проинтегрировать данное выражение, но это будет сложно, так как ускорение зависит от угла, который зависит от времени. Все связно. Но можно пойти другим путем и записать закон сохранения энергии. Потенциальная энергия трубы переходит в кинетическую энергию ее вращения:

$$mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha) = \frac{ml^2}{3}\frac{\omega^2}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\alpha)}$$

2.2 Задача 9.1

Условие Вычислить момент инерции I_x кругового конуса, радиус основания которого R, высота L, масса M, относительно оси симметрии OX. Вычислить также момент инерции конуса I_z относительно оси OZ, перпендикулярной OX. Точка O — вершина конуса. Где находится центр масс C этого конуса?

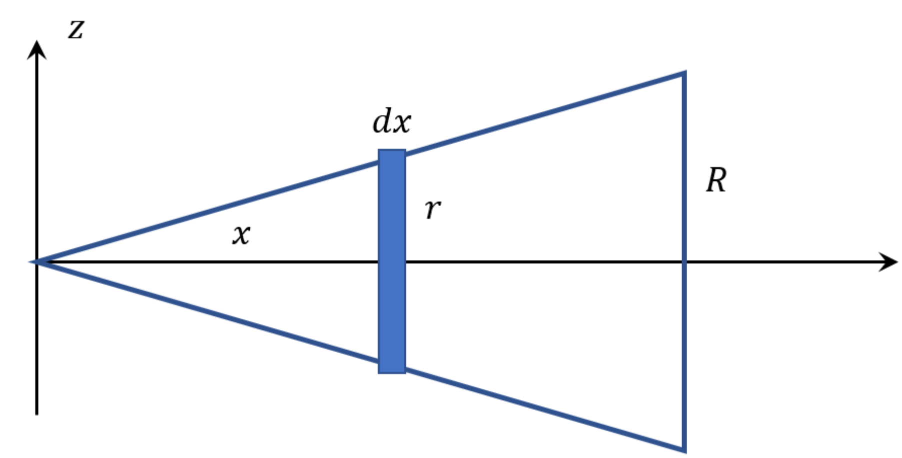

Рис. 1: К задаче 9.1

Решение В этой задаче я разберу только случай оси OZ. Он сложнее, но и более комплексный. Из рисунка понятно, что нам надо интегрировать по элементарным дискам, составляющим наш конус. Тогда выделим диск на расстоянии x от оси, его толщина будет dx, а радиус r. Из геометрии понятно, что $r/x = R/L$. Тогда мы можем записать, чему равна масса этого диска:

$$dm = m\frac{\pi r^2 dx}{V} = m\frac{\pi\frac{R^2}{L^2}}{\frac{1}{3}\pi R^2 L}x^2dx = m\frac{3}{L^3}x^2dx$$

Как же теперь посчитать момент инерции этого диска? Используем теорему Гюйгенса-Штейнера и то, что момент инерции диска через ось симметрии в плоскости равен $mr^2/4$:

$$dI = dmx^2 + \frac{dmr^2}{4} = m\frac{3}{L^3}x^2dx\left(x^2 + \frac{R^2}{4L^2}x^2\right) = \frac{3m}{L^3}\left(1 + \frac{R^2}{4L^2}\right)x^4dx$$

а дальше просто интегрируем по x от 0 до L:

$$I = \int\limits_0^L \frac{3m}{L^3}\left(1 + \frac{R^2}{4L^2}\right)x^4dx = \frac{3}{5}mL^2 + \frac{3}{20}mR^2$$

2.3 Задача 9.8

Условие К шкиву креста Обербека прикреплена нить, к которой подвешен груз массой $M = 1$ кг. Груз опускается с высоты $h = 1$ м до нижнего положения, а затем начинает подниматься вверх. В это время происходит «рывок», т. е. увеличение натяжения нити. Найти натяжение нити T при опускании или поднятии груза, а также оценить приближенно натяжение во время рывка T_p. Радиус шкива $r = 3$ см. На кресте укреплены четыре груза с массой $m = 250$ г каждый на расстоянии $R = 30$ см от его оси. Моментом инерции самого креста и шкива пренебречь по сравнению с моментом инерции грузов. Растяжение нити во время рывка не учитывать.

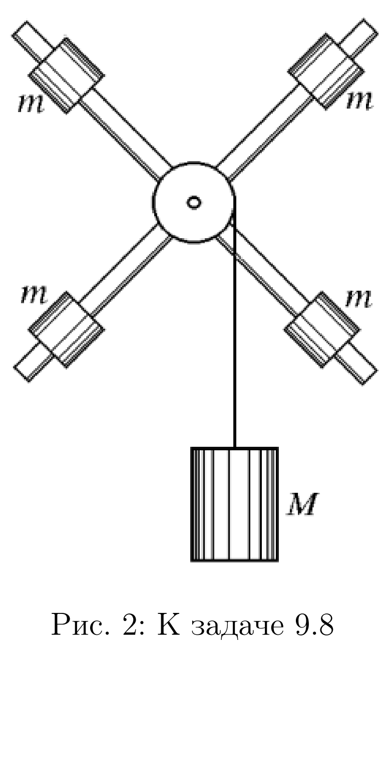

Рис. 2: К задаче 9.8

Решение Первое, что можно записать здесь это уравнение движение груза и уравнение моментов для шкива:

$$\begin{cases} M\dfrac{dV}{dt} = Mg - T \\ I\dfrac{d\omega}{dt} = Tr \\ V = \omega r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{Mg}{M + I/r^2} \\ T = \dfrac{MgI}{I + Mr^2} \end{cases}$$

Естественно, момент инерции $I = 4mR^2$.

Теперь надо бы разобраться с рывком. Для этого определим скорость в нижней точке из кинематики. Это просто $v = \sqrt{2ah}$. Тогда за время рывка скорость меняет знак, но не величину (простое изменение импульса при ударе о стену, только здесь не сила реакции работает, а сила натяжения). Время рывка можно оценить, как время, за которое шкив совершит половину оборота. А так как линейная скорость шкива известна и совпадает со скоростью до непосредственно до рывка мы можем записать закон изменения импульса:

$$(T_p - Mg)\Delta t = 2Mv; \Delta t = \frac{\pi r}{v}$$

Собирая все вместе и поставляя результат первой части задачи окончательно получим:

$$T_p = Mg + \frac{4M^2g^2hr}{\pi(Mr^2 + 4mR^2)}$$

2.4 Задача 9.95

Условие Шарик массой m влетает в спиральный лабиринт и останавливается в его центре. Найти угловую скорость лабиринта после того, как шарик остановится. Начальная скорость шарика равна v, радиус лабиринта — a, его масса — M, момент инерции — I. Размерами шарика пренебречь. Лабиринт может свободно двигаться в пространстве.

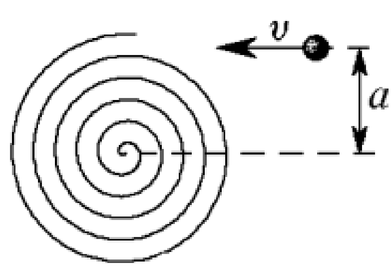

Рис. 3: К задаче 9.95

Решение Первое, что мы можем записать, это естественно закон сохранения импульса и найти скорость центра масс системы. Она будет двигаться горизонтально и будет равна:

$$V_C = \frac{mv}{M + m}$$

По вертикали положение центра масс не меняется, тогда расстояние от исходного положения центра лабиринта до него равно:

$$y_C = \frac{ma}{M + m}$$

Далее, когда шарик останавливается в центре, это означает, что сам лабиринт переместился по вертикали на y_C, а шарик соответственно — на $a - y_C$. Тогда относительно оси, проходящей через центр масс можно записать закон сохранения момента импульса:

$$mv(a - y_C) = I\omega \Rightarrow \omega = \frac{mv(a - y_C)}{I} = \frac{RvmM}{I(M + m)}$$

2.5 Задача 9.131

Условие Оценить, сколько раз перевернется человек, падая по стойке «смирно» с десятиметровой вышки.

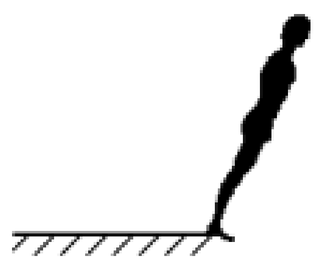

Рис. 4: К задаче 9.131

Решение Начнем с того, что разделим движение на 2: падение до горизонтали, пока ступни касаются вышки и свободное падение + вращение. По первому движению мы можем воспользоваться результатом задачи 0.12 и записать закон сохранения энергии для вертикали и горизонтали:

$$mg\frac{l}{2} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{ml^2\omega^2}{6} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

Что происходит на втором этапе движения? Все просто — центр масс падает в поле силы тяжести, а человек вращается вокруг центра масс. Теперь найдем начальную скорость центра масс. Тут все просто:

$$V_{C,0} = \omega\frac{l}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}gl}$$

И еще найдем время, которое центр масс летел до воды:

$$t = \frac{V_C - V_{C,0}}{g} = \frac{\sqrt{2gH + V_{C,0}^2} - V_{C,0}}{g} = \frac{\sqrt{8gH + 3gl} - \sqrt{3gl}}{2g}$$

А теперь вопрос, с какой угловой скоростью будет вращаться наш человек? Тут все тоже просто: перейдем в систему отсчета с центром масс, когда он находится горизонтально. Тогда его голова имеет скорость в СЦИ /2, направленную вниз, а ноги ту же самую скорость, но направленную вверх. Тогда его угловая скорость вращения будет совпадать с ω. Тогда число оборотов за время t:

$$n = \frac{\omega t}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{3g}{l}}(\sqrt{8gH + 3gl} - \sqrt{3gl})}{4\pi g} = \frac{3}{4\pi}\left(\sqrt{\frac{8H}{9l}} - 1\right)$$

Если подставить характерные размеры человека и высоту вышки, то и один оборот не получится.

2.6 Комментарии к задачам из задания

Нулевки Первую мы сделали в теоретической части, а во второй надо просто воспользоваться определением момента импульса.

Задача 9.1 Решили самое сложное, в остальном просто аккуратно интегрируйте и получите ответ.

Задача 9.8 Решена

Задача 9.90 Записать законы сохранения, которые применимы в этой задаче и посчитать энергию.

Задача 9.95 Решена

Задача 9.105 подумайте, какие законы сохранения можно использовать при ударе шарика о линейку. А затем воспользуйтесь идеями из 0.12 и 9.95

Задача 9.121 Диск при освобождении в нижней точке начнет вращаться. Подумайте как это вращение будет выгладить и что из него можно извлечь при подъеме

Задача 9.126 Записать законы сохранения до и после удара, а затем расписать динамику вращения

Задача 9.131 Решена