УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2024 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Аналитическая геометрия**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **физики и исследований им. Ландау**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 1

лекции — 45 часов
практические (семинарские) занятия — 45 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 90

Самостоятельная работа:
теор. курс — 60 часов

Программу составил
к. ф.-м. н., доцент А. В. Ершов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 11 апреля 2024 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Введение

1. Матрицы и детерминанты малых порядков. Системы линейных уравнений. Множества. Отношения эквивалентности. Бинарные операции на множестве. Абелевы группы.

Векторы и декартовы системы координат (ДСК) на плоскости и в пространстве

1. Линейные операции с векторами и их свойства. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Связь между линейной зависимостью, коллинеарностью и компланарностью векторов. Базис, координаты вектора в базисе. Изменение координат при замене базиса.
2. Скалярное произведение, его свойства. Скалярная проекция вектора на ориентированную прямую, векторная проекция вектора на прямую. Выражение скалярного произведения в ортонормированном и произвольном базисе. Вычисление длины вектора и угла между векторами.
3. Левые и правые тройки векторов. Ориентированные плоскость и пространство. Ориентированные площадь параллелограмма на плоскости и объем параллелепипеда в пространстве (смешанное произведение), их свойства. Выражение смешанного произведения в произвольном базисе. Критерий компланарности.
4. Векторное произведение, его свойства, выражение в произвольном и правом ортонормированном базисе. Вычисление площадей, перпендикуляр к паре векторов. Двойное векторное произведение.
5. Общая декартова система координат, прямоугольная система координат. Замена декартовой системы координат, формулы перехода.

Прямые и плоскости. Эллипс, гипербола, парабола. Поверхности

1. Понятие уравнения множества. Алгебраические множества (линии и поверхности); пересечение и объединение алгебраических множеств. Порядок, сохранение порядка при переходе к другой декартовой системе координат. Пересечение алгебраического множества с прямой и с плоскостью.
2. Прямая на плоскости, различные способы задания, их эквивалентность. Линейное неравенство. Пучок прямых. Формула расстояния от точки до прямой.
3. Плоскость в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Взаимное расположение двух и трех плоскостей. Линейное неравенство. Пучок плоскостей. Формула расстояния от точки до плоскости.

4. Прямая в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Взаимное расположение двух прямых. Формулы для расстояния от точки до прямой (в пространстве) и между скрещивающимися прямыми.
5. Эллипс, гипербола, парабола, их канонические уравнения. Теоремы о фокусах и директрисах. Касательные. Оптическое свойство.
6. Цилиндрические, конические поверхности, поверхности вращения. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды. Прямолинейные образующие.

Абстрактные отображения

1. Понятие отображения и преобразования. Примеры. Отношение эквивалентности и разбиение множества на классы эквивалентности. Фактормножество, каноническая проекция (отображение факторизации). Согласованность бинарной операции с отношением эквивалентности.

Группы

1. Определение и примеры групп. Абелевы группы. Аддитивная и мультипликативная формы записи. Порядок конечной группы. Определения гомоморфизма и изоморфизма. Подгруппы. Ядро гомоморфизма, критерий инъективности.
2. Порядок элемента. Циклические группы, их классификация. Количество порождающих элементов в циклической группе порядка n равно $\phi(n)$ (функция Эйлера).
3. Симметрическая группа S_n. Функция $\mathrm{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$ (знак перестановки). Доказательство гомоморфности функции sgn. Знакопеременная группа A_n.
4. Левые смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа, ее следствия: порядок элемента — делитель порядка группы; описание групп простого порядка.

Кольца и поля

1. Определение и примеры колец. Ассоциативные, коммутативные кольца, кольца с 1. Обратимые элементы, делители нуля, нильпотенты. Группа обратимых элементов ассоциативного кольца с 1.
2. Теория делимости в $\mathbb{Z}$. Простые числа. НОД. Алгоритм Евклида, тождество Безу (линейное представление НОД). Разложение на простые множители и его единственность.
3. Арифметика по модулю n. Кольцо $\mathbb{Z}_n$ классов вычетов по модулю n. Кольцо $\mathbb{Z}_n$ — поле тогда и только тогда, когда n — простое. Теоремы Ферма и Эйлера (в теории чисел). Характеристика поля, простое подполе.
4. Поле комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая и показательная запись. Комплексное сопряже-

ние. Умножение и возведение в степень, обращение. Извлечение корней. Группа корней n-й степени из 1.

Линейные (векторные) пространства. Базис и размерность

1. Определение линейного пространства над полем, примеры линейных пространств. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Три леммы о линейной зависимости.
2. Подпространства. Линейная оболочка подмножества линейного пространства. Конечномерные линейные пространства. Базис. Существование базиса в конечномерном линейном пространстве. Лемма Штайница о замене. Размерность конечномерного пространства, корректность её определения. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса.
3. Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты. Изменение координат вектора при изменении базиса. Матрица перехода.
4. Мощность конечного линейного пространства и конечного поля.

Матрицы. Ранг. Элементарные преобразования

1. Линейные операции с матрицами (сложение, умножение на скаляр.) Линейное пространство матриц фиксированного размера $m \times n$, его размерность и стандартный базис в нём. Транспонирование. След матрицы.
2. Элементарные преобразования строк и столбцов. Элементарные матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому и упрощенному виду методом Гаусса.
3. Строчный и столбцовый ранги матрицы. Базисная система строк (столбцов). Невырожденные матрицы. Инвариантность строчного и столбцового рангов матрицы при элементарных преобразованиях строк. Элементарные преобразования строк не меняют линейных зависимостей между столбцами. Совпадение строчного и столбцового рангов матрицы. Оценка ранга суммы матриц.
4. Умножение матриц, его свойства. Кольцо (алгебра) квадратных матриц порядка n.
5. Оценка ранга произведения матриц. Обратимые матрицы. Критерий обратимости-1 (невырожденность=обратимость). Группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью метода Гаусса. Базисный минор (невырожденность подматриц на пересечении системы $r = \operatorname{rk} A$ линейно независимых строк и столбцов).

Системы линейных уравнений

1. Системы линейных уравнений (СЛУ) и разные виды их задания: матричное уравнение, линейная комбинация столбцов, матрица коэффи-

циентов и расширенная матрица. Критерий совместности Кронекера-Капелли.
2. Однородные СЛУ (СЛОУ). Теорема о том, что множество решений СЛОУ является подпространством в пространстве $\mathbb{K}^n$, где n — число неизвестных. Фундаментальная система решений (ФСР). Структура общего решения совместной СЛУ. Алгоритм решения СЛУ методом Гаусса. Теорема о мощности ФСР.
3. Восстановление СЛОУ по фундаментальной матрице. Любое подпространство в $\mathbb{K}^n$ является пространством решений некоторой однородной СЛУ.

Определитель

1. Детерминант (определитель) порядка n как полилинейная и кососимметричная функция строк матриц порядка n, принимающая на единичной матрице значение 1. Существование и единственность определителя. Формула полного разложения определителя.
2. Изменение определителя при элементарных преобразованиях строк (столбцов). Определитель треугольной матрицы. Критерий обратимости матрицы-2 ($\det \neq 0$). Определитель транспонированной матрицы.
3. Определитель произведения матриц. Группа $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Определитель матрицы с углом нулей. Разложение определителя по строке, столбцу.
4. Правило Крамера решения СЛУ (с невырожденной матрицей коэффициентов), формула для обратной матрицы.

Литература

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии илинейной алгебры. — 10-е изд. — Москва : Наука, 2003.
2. *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. — Москва : Факториал, 2002.
3. *Ершов А. В.* Лекции по линейной алгебре. `http://clck.ru/3CUB6P`
4. *Кожевников П.А.* Матрицы и системы линейных уравнений. — Москва : МФТИ, 2011.
5. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1. — Москва : МЦНМО, 2009.
6. *Чехлов В. И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : МФТИ, 2000.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. *Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — 3-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2008. (цитируется — **Б**)
2. *Кострикин А. И.* Сборник задач по алгебре. — Москва : МЦНМО, 2009. (цитируется — **К**)

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 7–12 октября)

Определители 2-го и 3-го порядков. Системы линейных уравнений

I. Определители

Б: 14.4(2, 5); 14.7(1, 3).

II. Матрицы

Б: 15.2(1); 15.5(1, 2); 15.10(1, 2); 15.11(1).

III. Системы линейных уравнений

Б: 17.1(4); 19.1(5)*.

Векторная алгебра

IV. Линейные операции и линейная зависимость

Б: 1.6; 1.11(2, 3); 1.16; 1.17; 1.24(1); 1.37; 1.38*; 1.51*.

V. Замена базиса и системы координат

Б: 4.3; 4.26(1); 4.19.

VI. Скалярное произведение

Б: 2.27(2); 2.35; 2.21, 2.45.

Т.1. Найдите сумму ортогональных проекций вектора $\vec{a}$ на прямые, перпендикулярные

а) сторонам некоторого правильного треугольника (если $\vec{a}$ лежит в плоскости этого треугольника);

б)* граням некоторого правильного тетраэдра.

VII. Векторное и смешанное произведение

Б: 3.1(1); 3.7(2); 3.12; 3.13(1, 2); 3.16; 3.20(1); 3.23; 3.33; 3.28; 3.29 (также вычислите ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах взаимного базиса); 3.31*.

Т.2. Для каждой грани тетраэдра построен вектор, направленный перпендикулярно грани вне тетраэдра и равный по длине площади грани. Докажите, что сумма четырех построенных векторов равна $\vec{0}$.

Аналитическая геометрия – 1. Прямая и плоскость

VIII. Векторные уравнения

Б: 5.4(2).

Б: 6.1(1, 3, 4); 6.3; 6.9(1); 6.10(1, 3, 4); 6.11(3, 4, 8).

IX. Аффинные задачи

Б: 5.15; 5.19.

Б: 6.16(2); 6.29(2); 6.38(2); 6.15*.

X. Метрические задачи

Б: 5.30; 5.35.

Б: 6.49(2); 6.60; 6.61(2); 6.64(1); 6.72(1); 6.73(3); 6.80.

Рекомендации по решению
первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**:** I, II, III, IV.
2 неделя	**:** V, VI, VII (по 3.16).
3 неделя	**:** VII (после 3.16), VIII.
4 неделя	**:** IX, X.

$\boxed{64 + 6^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 4–9 ноября)

Аналитическая геометрия – 2

I. Кривые второго порядка

Б: 7.25(5); 7.26(4); 7.29*; 7.38(9); 7.40(2); 7.49(1); 7.54(2); 7.64*.

Б: 8.9(1); 8.11(2); 8.25(1); 8.28(6); 8.30(1).

Т.1*. Найдите множество точек, получаемых при отражении фокуса параболы относительно ее касательных.

II. Поверхности

Б: 10.38; 10.39; 10.32; 10.40; 10.81.

Абстрактные отображения

III. Отображения и преобразования. Отношения эквивалентности. Бинарные операции

К: 2.3(а, б); 2.4; 2.5(а, б); 2.11(а, б, в).

Т.2. Преобразование $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задано равенством $f(x) = x^3$. Сколько неподвижных точек имеет f? Является ли множество $[2, +\infty)$ инвариантным относительно f? относительно f^{-1}?

Т.3. На множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ рассмотрим следующее отношение: $a \sim b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{Z}$. Проверьте, что это — отношение эквивалентности и постройте биекцию между множеством классов эквивалентности и множеством точек окружности.

Группы

IV. Определение и примеры групп

К: 55.1(г, д, е, з*, и), 55.25(а, б, в, г).

V. Изоморфизмы и гомоморфизмы групп

К: 55.18(б).

Т.4. Разбейте на классы попарно изоморфных групп следующие групы: $(\mathbb{Z}, +)$, $(n\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}_+, \cdot)$.

VI. Порядки элементов и циклические группы

К: 56.7(а, б); 56.11.

Т.5. Найдите порядки элементов и число элементов данного порядка в циклической группе порядка 12.

Т.6. Пусть $g \in G$ — элемент конечного порядка. Докажите, что если $\varphi\colon G \to H$ — гомоморфизм групп, то $\operatorname{ord}(\varphi(g)) \mid \operatorname{ord} g$.

Т.7*. Изоморфны ли мультипликативные группы $\mathbb{R}^*$ и $\mathbb{C}^*$?

Т.8. В группе порядок любого элемента равен 2. Докажите, что эта группа абелева.

Т.9*. Пусть G — группа, $a \in G$ — элемент конечного порядка, $(\operatorname{ord} a,\ n) = 1$. Докажите, что уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G.

Т.10*. Дайте теоретико–групповое доказательство формулы $n = \sum\limits_{d|n} \phi(d)$, где ϕ — функция Эйлера ($n \geqslant 1$).

VII. Перестановки

К: <u>3.1(а, б)</u>; <u>3.6(а, в)</u>; 56.10(а).

Т.11*. Докажите, что группа вращений трехмерного пространства, переводящих правильный тетраэдр в себя, изоморфна A_4.

VIII. Смежные классы

K: 56.37(а, в, д, з*); 56.38; 56.39*.

Т.12. Пусть конечные группы G и H имеют взаимно простые порядки. Докажите, что любой гомоморфизм $\varphi\colon G \to H$ тривиален (то есть $\operatorname{Im}\varphi = \{e\}$).

Кольца и поля

IX. Определение и примеры колец

K: 63.1(б, в, ж, з, д, м) (также выяснить, какие из этих числовых множеств являются полями); 64.38*.

X. Арифметика в кольцах $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_n$

K: 63.11(а, б*); 66.20.

Т.13. а) Решите в целых числах уравнение $21x + 76y = 0$.

б) Решите в целых числах уравнение $21x + 76y = 1$. Сколько решений (x_0, y_0) удовлетворяют условию $0 \leq x_0 \leq 75$?

в) В кольце $\mathbb{Z}_{76}$ вычислите 21^{-1}.

Т.14. Покажите, что группа $\mathbb{Z}_7^*$ циклическая. Какие элементы являются ее порождающими?

XI. Комплексные числа

K: 21.1(д, р, у); 21.2(ж); 21.10; 22.7(л, о); 23.1(а).

Т.15. Докажите, что всякая конечная подгруппа группы $\mathbb{C}^*$ является циклической.

Т.16. Проверьте, что отображение $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $\varphi(x) = \exp(2\pi i x)$, является сюръективным гомоморфизмом групп. На какую подгруппу в $\mathbb{S}^1$ φ отображает подгруппу $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$? Найдите ядро $\ker\varphi$. Убедитесь, что φ индуцирует биекцию между $\mathbb{S}^1$ и множеством смежных классов группы $\mathbb{R}$ по подгруппе $\ker\varphi$.

Рекомендации по решению второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**:** I, II.
2 неделя	**:** III, IV, V.
3 неделя	**:** VI, VII, VIII.
4 неделя	**:** IX, X, XI.

$\boxed{74 + 12^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 9–14 декабря)

Линейные пространства

I. Линейные (векторные) пространства

Б: 20.3(3, 4), 20.4(2), 20.6(2, 3, 5), 20.8(1, 3), 20.20, 20.29.

К: 35.10(а, б, в, г, д); 34.7(а)*.

Матрицы

II. Ранг матрицы

Б: 16.18(17); 16.19(3); 16.22, 16.26(2); 16.41*; 16.33*; 16.40*; 20.14(9); 20.18.

Т.1. Для матрицы из задачи 16.18(17) укажите некоторую систему базисных строк, систему базисных столбцов, некоторый базисный минор.

III. Умножение матриц

Б: 15.24(3); 15.22(2); 15.72; 15.126*; 15.130*.

К: 55.6(д, м, н, р*); 63.2(в); 63.11(г).

Т.2. Вычислите а) A^3, б)* $(E_4 + A)^{11}$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

IV. Обратная матрица

Б: 15.45(2); 15.48(1, 3); 15.56; 15.57; 15.59; 15.64(4); 15.65(1, 5*); 15.54(3)*.

Т.3. Пусть элемент $\alpha \in \mathbb{K}^*$ не является квадратом в поле $\mathbb{K}$. Докажите, что множество матриц $\left\{\begin{pmatrix} a & \alpha b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{K}\right\} \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{K})$ является полем (относительно операций сложения и умножения матриц), содержащим $\mathbb{K}$ в качестве подполя и являющимся 2-мерным векторным пространством над $\mathbb{K}$.

Т.4*. Постройте изоморфизм групп $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2) \to S_3$.

Т.5*. *Правой обратной* для (вообще говоря, прямоугольной) матрицы A с m строками называется такая матрица B, что $AB = E$ (где E — единичная матрица порядка m). Найдите критерии а) существования;

б) существования и единственности

правой обратной матрицы.

Системы линейных уравнений

V. Системы линейных уравнений

Б: 18.1(7, 9), 19.6(4, 20, 25), 18.13, 18.17(4), 19.14, 19.21, 19.29*, 20.22(3), 20.23(4).

Т.6*. Дана прямоугольная таблица, в граничных клетках которой расставлены действительные числа. Докажите, что всегда можно, причем единственным образом, расставить действительные числа во всех внутренних клетках так, чтобы каждое число во внутренней клетке было бы равно среднему арифметическому чисел в клетках, имеющих с ней общую сторону.

Определители

VI. Определители порядка n

Б: 14.15, 14.21(12), 14.23(6, 10, 12, 16); 14.24(7); 14.29*; 14.31(1, 2*); 14.36.

Рекомендации по решению третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	**:** I.
2 неделя	**:** II, III.
3 неделя	**:** IV, V.
4 неделя	**:** VI.

$\boxed{60 + 17^*}$

Задания составили: к. ф.-м. н., доцент А. В. Ершов

к. ф.-м. н., доцент П. А. Кожевников