ФИО ____________________

группа ____________________

1А	2А	3А	4А	5А	6А	Оценка

1 зад.	2 зад.	Σ баллов

Подпись преп. ____________________

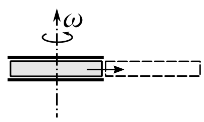
ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО МЕХАНИКЕ

24 декабря 2018 г.

Вариант **А**

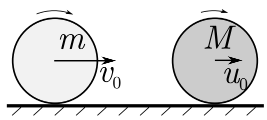
1А. (1,5) Длинный резиновый шнур, имеющий в нерастянутом состоянии диаметр $d_0 = 5$ см, подвешен вертикально в поле тяжести. На шнур надето невесомое тонкое кольцо, причём вблизи точки подвеса зазор между кольцом и шнуром (при осесимметричном расположении) равен $\delta = 0{,}5$ мм. На каком расстоянии от точки подвеса кольцо будет плотно охватывать шнур? Модуль Юнга резины $E = 5$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}4$, плотность $\rho = 1{,}2$ г/см^3.

2А. (1,5) Тонкую трубку длиной $\ell = 12$ см вращают с постоянной угловой скоростью $\omega = 4{,}0$ рад/с вокруг перпендикулярной ей оси, проходящей через её центр. В трубку вставлен однородный стержень массой $m = 500$ г той же длины. В начальный момент стержень покоится относительно трубки. Небольшим толчком стержень выводится из положения равновесия. Найти кинетическую энергию стержня относительно лабораторной системы в момент, когда он покинет трубку. Трением пренебречь.

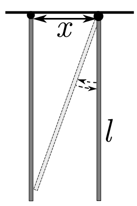


3А. (1,5) В фантастическом сюжете космический корабль, удаляясь от Земли, половину времени по часам корабля двигался со скоростью $v_1 = 0{,}8c$, а оставшуюся половину времени — со скоростью $v_2 = 0{,}6c$. На сколько световых лет удалился корабль от Земли, если по часам диспетчера на Земле полет длился время $T = 1{,}4$ года?

4А. (2) Шар массой m катится без проскальзывания по горизонтальной шероховатой поверхности со скоростью $v_0 = 10$ см/с и догоняет шар массой M, катящийся со скоростью $u_0 = 2$ см/с в том же направлении. Радиусы шаров одинаковы. Удар центральный и упругий, трением между шарами можно пренебречь. При каком отношении масс $x = M/m$ шар m через некоторое время после удара окажется в состоянии покоя?



5А. (2) Два одинаковых тонких стержня длиной $\ell = 1{,}5$ м подвешены рядом к потолку на расстоянии $x = \ell/10$ друг от друга. Одному из них придают начальную угловую скорость $\omega = \pi/5$ рад/с, так что он начинает движение в сторону второго стержня в плоскости рисунка и упруго ударяется о него. Через какое время τ от начала движения первый стержень опять окажется в положении своего равновесия? Каким будет в этот момент угол $\alpha_2(\tau)$ отклонения от вертикали второго стержня? Боковую поверхность стержней считать гладкой и идеально ровной. Углы отклонения считать малыми.



6А. (2,5) Находящийся на круговой околоземной орбите космический корабль включает фотонные двигатели и начинает медленно удаляться от Земли. Вектор тяги двигателей в каждый момент направлен вдоль скорости корабля. По модулю сила тяги мала по сравнению с силой гравитационного притяжения. Оценить, какая доля $\Delta m/m_0$ массы корабля будет превращена в фотоны за время увеличения радиуса круговой орбиты от $r_0 = R_З$ до $r_1 = 16R_З$.

ФИО ____________________

группа ____________________

1Б	2Б	3Б	4Б	5Б	6Б	Оценка

1 зад.	2 зад.	Σ баллов

Подпись преп. ____________________

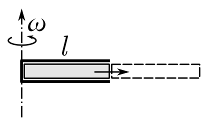
ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО МЕХАНИКЕ

24 декабря 2018 г.

Вариант **Б**

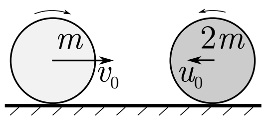
1Б. (1,5) Длинный резиновый шнур, имеющий в нерастянутом состоянии диаметр $d_0 = 4$ см, подвешен вертикально в поле тяжести. На шнур надето невесомое тонкое кольцо, диаметр которого на $\delta = 0{,}2$ мм меньше d_0. На каком расстоянии от нижнего конца шнура кольцо сможет двигаться вдоль него свободно? Плотность резины $\rho = 0{,}9$ г/см^3, модуль Юнга $E = 2$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}45$.

2Б. (1,5) Тонкую трубку длиной $\ell = 10$ см вращают с постоянной угловой скоростью $\omega = 3{,}0$ рад/с вокруг перпендикулярной ей оси, проходящей через один из торцов. В трубку вставлен однородный стержень массой $m = 200$ г той же длины, покоящийся в начальный момент относительно трубки. Найти кинетическую энергию стержня относительно лабораторной системы в момент, когда он покинет трубку. Трением пренебречь.

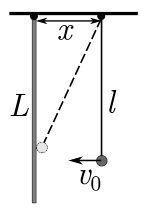


3Б. (1,5) Один из двух одинаковых стержней покоится, а другой движется вдоль него со скоростью $v = 0{,}8c$. Найти скорость системы отсчета, в которой измерение длин стержней даст равные результаты.

4Б. (2) Два шара равных радиусов массами m и $2m$ катятся без проскальзывания навстречу друг другу по горизонтальной шероховатой поверхности. Скорость центра шара m равна $v_0 = 60$ см/с. Происходит центральный упругий удар. Через некоторое время после удара шар m оказывается в состоянии покоя. Найти скорость u_0 центра шара $2m$ до удара. Трением между шарами при ударе пренебречь.



5Б. (2) На расстоянии $x = 1$ см друг от друга к потолку подвешены два маятника равной массы: точечный груз на невесомом стержне длиной $\ell = 20$ см и массивный однородный стержень длиной $L = \sqrt{3}\ell$. Грузу первого маятника сообщают начальную скорость $v_0 = 10$ см/с в сторону второго, после чего происходит их упругое соударение. Найти 1) время τ от начала движения до повторного прохождения первым маятником своего положения равновесия, 2) отклонение от вертикали $\alpha_2(\tau)$ второго маятника в этот момент. Поверхность стержня считать гладкой и идеально ровной. Углы отклонения считать малыми.



6Б. (2,5) Космический корабль Восток–1, на котором Юрий Гагарин совершил первый полёт в космос, имел массу $m = 5$ т и диаметр оболочки $D = 2{,}5$ м. Высота круговой орбиты составляла $h_0 = 200$ км. Зависимость плотности атмосферы от высоты можно приближенно описать законом $\rho(h) = \rho_0 e^{\alpha(h_0 - h)}$, где $\rho_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-10}$ кг/м^3 и $\alpha \approx 0{,}05$ км$^{-1}$. Оценить время, которое пришлось бы провести Гагарину на орбите до попадания в плотные слои атмосферы ($h \to 0$), если бы штатные тормозные двигатели не сработали. Сила сопротивления в разреженной атмосфере определяется неупругими ударами молекул об оболочку корабля. *Указание:* учесть, что высота орбиты много меньше радиуса Земли, $h \ll R_З$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 24 декабря 2018 г.

1А. Пусть d_1 — диаметр шнура в верхней точке, l — длина шнура. Тогда $(d_0 - d_1)/d_0 = \mu\rho g l/E$. В искомой точке $(d_0 - 2\delta)/d_0 = \mu\rho g(l-x)/E$, откуда $x = \dfrac{2E\delta}{\mu\rho g d_0} \approx \boxed{21\text{ м}}$.

2А. Центробежная сила в системе трубки равна $F = \int \omega^2 x dm = m\omega^2 x_C$, то есть определяется положением центра масс. Потенциальная энергия для центробежной силы $\Pi = -\frac{1}{2}m\omega^2 x_C^2$. Тогда кинетическая энергия стержня в момент вылета в системе трубки: $K' = \frac{1}{2}m\omega^2 l^2$. В лабораторной системе по теореме Кёнига имеем $K = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 = K' + \frac{1}{2}m(\omega l)^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2$, где $J_C = \frac{1}{12}ml^2$. Тогда $K = \frac{25}{24}m\omega^2 l^2 = \boxed{0{,}12\text{ Дж}}$.

3А. Пусть t_1 и t_2 — времена, затраченные на преодоление каждой из половин пути по часам диспетчера на Земле. Соответствующие промежутки времени по часам корабля одинаковы: $t_0 = t_1/\gamma_1 = t_2/\gamma_2$. Средняя скорость корабля в системе Земли $V = \frac{t_1 v_1 + t_2 v_2}{t_1 + t_2} = \frac{\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$, откуда получаем: $s = VT = \frac{0.6/0.8 + 0.8/0.6}{1/0.8 + 1/0.6}cT = \frac{5}{7}cT = \boxed{1\text{ св. год}}$.

4А. Скорость левого шара сразу после удара: $v_1 = V_C - \frac{M}{m+M}(v_0 - u_0) = \frac{(m-M)v_0 + 2Mu_0}{m+M} = \frac{1-x}{1+x}v_0 + \frac{2x}{1+x}u_0$. Шар сможет полностью остановиться, если $mv_1R + J\omega_0 = 0$, где $J = \frac{2}{5}mR^2$, $\omega_0 = v_0/R$. Отсюда $v_1 = -\frac{2}{5}v_0$. Тогда $\frac{1-x}{1+x} + \frac{2x}{1+x}\frac{u_0}{v_0} = -\frac{2}{5}$, и $x = \frac{7}{3 - 10u_0/v_0} = \boxed{7}$.

5А. Собственная частота колебаний стержней $\Omega = \sqrt{\frac{mg\ell/2}{m\ell^2/3}} = \sqrt{3g/2\ell} \approx 3{,}14$ рад/с (период $T \approx 2$ с). Закон движения первого стержня: $\alpha_1(t) = \frac{\omega}{\Omega}\sin\Omega t$. Из условия $\alpha_1(t_1) \approx x/\ell$, находим $t_1 = \frac{1}{\Omega}\arcsin\frac{\Omega x}{\omega\ell} = \frac{\pi}{6\Omega} \approx \frac{1}{6}$ с.

Во время столкновения возникают силы реакции $N(t)$, направленные перпендикулярно второму стержню (так как поверхность гладкая). Они вызывают изменение моментов импульса стержней относительно их осей крепления O_1 и O_2. Причём $dL_1 = -Nhdt$, $dL_2 = Nhdt$, где $h = \sqrt{l^2 - x^2}$ — плечо этих сил. Поэтому $dL_1 + dL_2 = 0$ и $L_1 + L_2 = \text{const}$. Данное соотношение отличается от обычного закона сохранения момента импульса тем, что L_1 и L_2 рассматриваются относительно *разных* осей.

С учётом закона сохранения энергии имеем для соударения систему $\omega_1 = \omega_1' + \omega_2'$, $\omega_1^2 = \omega_1'^2 + \omega_2'^2$ откуда по аналогии со соударением одинаковых шаров делаем вывод, что результатом будет остановка 1-го стержня и передача угловой скорости второму: $\omega_1' = 0$, $\omega_2' = \omega_1$. Таким образом, время возврата займёт 1/4 периода. Окончательно: $t = t_1 + \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{1}{\Omega}\left(\arcsin\frac{\Omega x}{\omega\ell} + \frac{\pi}{2}\right) = T/3 \approx \boxed{0{,}67\text{ с}}$.

Отклонение второго стержня будет в этот момент максимально. Из закона сохранения энергии: для первого стержня перед ударом $J\omega_1^2 = J\omega^2 - mgx^2/2\ell$, для второго стержня после удара $J\omega_1^2 = mg\frac{\ell}{2}\alpha_2^2$. Отсюда $\alpha_2 \approx \sqrt{\frac{J\omega^2 - mgx^2/2\ell}{mg\ell/2}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\Omega^2} - \frac{x^2}{\ell^2}} \approx \boxed{0{,}17\text{ рад}}$.

6А. Поскольку первая космическая скорость много меньше скорости света, движение можно считать заведомо нерелятивистским. Реактивная сила по модулю равна $F = -\frac{dm}{dt}c$ (при уменьшении массы корабля на dm фотоны уносят импульс $dp = dE/c = d(mc^2)/c = cdm$). Полагая расход массы малым $\Delta m/m_0 \ll 1$, применим закон изменения полной энергии для ракеты в поле тяготения: $\frac{dE}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$, где на круговой орбите $E = -K$ $(v^2 = GM/r)$, находим $-m_0\dfrac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -\dfrac{dm}{dt}vc$, откуда $-m_0dv = -cdm$ и $\Delta v = c\dfrac{\Delta m}{m_0}$, где $v = v_I\sqrt{\dfrac{r_0}{r}}$. Окончательно $\dfrac{\Delta m}{m} = \dfrac{1/4v_I - v_I}{c} = -\frac{3}{4}\frac{8}{300000} = \boxed{-2\cdot 10^{-5}}$.

Альтернативно. На круговой орбите $v^2 = \text{const}/r$, откуда $2dv/v = -dr/r$. Из закона изменения момента импульса $dL = Frdt$, где $L = m_0vr$, имеем $m_0vdr + m_0rdv = -rcdm$, откуда $m_0dv = cdm$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 24 декабря 2018 г.

1Б. $$x = \frac{E\delta}{\mu\rho g d_0} \approx \boxed{2{,}5\ \text{м}}.$$

2Б. 2А: энергия в системе трубки $K' = \frac{1}{2}m\omega^2((3\ell/2)^2 - (\ell/2)^2) = m\omega^2\ell^2$. В лабораторной системе $K = K' + \frac{1}{2}m(3\omega l/2)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m\ell^2\omega^2$, откуда $K = \frac{13}{6}m\omega^2 l^2 = \boxed{39\ \text{мДж}}$.

3Б. Пусть искомая система отсчёта движется со скоростью V. Скорость одного из стержней в этой системе равна $v_{\text{отн}} = \frac{v-V}{1-vV/c^2}$, а другого $-V$. Равенство длин стержней в искомой системе: $L_0\sqrt{1-V^2/c^2} = L_0\sqrt{1-v_{\text{отн}}^2/c^2}$, откуда $v_{\text{отн}} = V$ и, решив квадратное уравнение $vV^2/c^2 - 2V + v = 0$, получаем ответ: $V = \frac{c^2}{v}(1-\sqrt{1-v^2/c^2}) = \boxed{c/2}$.

4Б. При движении шара по шероховатой поверхности сохраняется момент импульса относительно оси, проходящей через точку касания: $L_A = mvR + J_C\omega = \text{const}$. Условие остановки левого шара: $\frac{2}{5}mR^2\frac{v_0}{R} = mv_1R$, где v_1 — скорость его центра после удара. Отсюда $v_1 = \frac{2}{5}v_0 = 24$ см/с.

Законы сохранения для упругого удара: $v_0 - 2u_0 = -v_1 + 2u_1$, $v_0^2 + 2u_0^2 = v_1^2 + 2u_1^2$, откуда $u_1 + u_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v_1)$ и $u_1 - u_0 = v_0 - v_1$. Тогда находим $u_0 = -\frac{1}{4}v_0 + \frac{3}{4}v_1 = -15 + \frac{3}{4}24 = \boxed{3\ \text{см/с}}$.

5Б. Моменты инерции маятников относительно своих точек подвеса одинаковы: $J = mL^2/3 = m\ell^2$. Тогда аналогично 5А находим, что груз после удара о стержень остановится. Таким образом, время возврата $t = \frac{1}{\Omega}\left(\arcsin\frac{\Omega x}{v_0} + \frac{\pi}{2}\right)$, где

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \approx 7\ \text{рад/с и } \arcsin\frac{\Omega x}{v_0} \approx \arcsin 0{,}7 \approx \pi/4 \text{ и } t \approx \frac{3\pi}{4\Omega} \approx \boxed{0{,}33\ \text{с}}.$$

Для угла отклонения также аналогично 5А имеем $\alpha_2 \approx \sqrt{\frac{m\ell^2\omega^2 - mgx^2/2\ell}{mg\ell/2}} = \sqrt{\frac{(v/\ell)^2}{\Omega^2} - \frac{x^2}{\ell^2}} \approx \boxed{0{,}05\ \text{рад}}$.

6Б. $\frac{dE}{dt} = -\frac{dK}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$, где $\vec{F} = -\rho S v\vec{v}$. Отсюда находим $mvdv = \rho(r)Sv^3dt$. Подставляя $v = v_0\sqrt{\frac{r_0}{r}}$, получим $-\frac{dr}{2\sqrt{r}} = \frac{v_0\sqrt{r_0}\rho(r)S}{m}dt$. Выражаем время:

$$T = \frac{m}{2v_0S\sqrt{r_0}}\int\frac{dr}{\sqrt{r}\rho(r)}.$$

Пользуясь тем, что $r = r_0 + h \approx r_0$, запишем $T \approx \frac{m}{2\rho_0 v_0 r_0 S}\int\limits_0^h e^{\alpha(h-h_0)}dh$. Интегрируя, находим

$$T = \frac{m}{2\alpha v_0 r_0 S}\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right) \approx \frac{m}{2\alpha\rho_0 v_0 r_0 S} \approx \frac{4.7\cdot10^3}{2\cdot0.05\cdot10^{-3}\cdot2.5\cdot10^{-10}\cdot8\cdot10^3\cdot6.6\cdot10^6\cdot3.14\cdot1.2^2} \approx 0.8\cdot10^6\ \text{с} \approx \boxed{9\ \text{сут}}.$$

Инструкция для проверяющих

За каждую задачу выставляется целое число баллов согласно стоимости задачи (x) и следующим критериям:

x	$+$	Задача решена верно: приведено *обоснованное* решение и даны ответы на все вопросы задачи. Возможно наличие арифметических ошибок, не влияющих на ход решения и не приводящих к ошибке в порядке или знаке величины.
$x-0{,}5$	$\pm$	Ход решения задачи в целом верен и получены ответы на все вопросы задачи, но решение содержит ошибки, не касающиеся физического содержания: арифметические ошибки, влияющие на порядок или знак величины; ошибки в размерности; вычислительные ошибки в выкладках.
$x-1$	$\mp$	Задача решена частично: дан ответ только на часть вопросов; выкладки не доведены до конца; отсутствуют необходимые промежуточные доказательства; либо решение содержит грубые ошибки (вычислительные, логические), влияющие на ход решения.
$x-1{,}5$	$-.$	Задача не решена, но есть некоторые подвижки в её решении: сформулированы физические законы, на основе которых задача может быть решена.
0	$-$	Задача не решена: основные физические законы применены с грубыми ошибками, перечислены не полностью или использованы законы, не имеющие отношения к задаче / подход к решению принципиально неверен / решение задачи не соответствует условию / попытки решить задачу не было.

Оценка за письменную работу ставится по сумме баллов за все задачи с округлением в большую сторону (но не более 10 и не менее 1).

Итоговая Σ баллов = оценка за письм. работу + баллы за задания: «отл»: +2 б./задание; «хор»: +1 б./задание; «удовл»: +0 б./задание; не сдано: −3 б./задание.

Итоговая сумма Σ определяет *максимальную* оценку на устном экзамене.

Примеры заполнения:

1А	2А	3А	4А	5А	6А	Оценка	1 зад.	2 зад.	Σ баллов	*Комментарий*
1,5	1,5	1	2	0	1,5	отл(8)	отл(8) +2	отл(9) +2	12	*Оценка на устном может быть повышена до **отл(10)***
1,5	1,5	1,5	1	0	0	хор(6)	хор(5) +1	нет -3	4	*Оценка на устном не может превышать **удовл(4)***
1,5	1	0	0	0	0	удовл(3)	удовл(3) 0	нет -3	0	*Оценка на устном не может превышать **удовл(3)** при условии решения **3 задач** из задания*

Все замечания направлять редактору-составителю контрольной работы Попову П.В. popov.pv@mipt.ru.
Обсуждение замечаний, критериев проверки и результатов — на форуме кафедры board.physics.mipt.ru.

Обсуждение результатов письменного и порядка проведения устного экзаменов состоится 28 декабря в 8:45 в Главной физической ауд.