

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА
по курсу «Введение в математический анализ»
осенний семестр 2024–2025 учебного года
(ЛФИ)

1. Действительные числа. Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу). Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.

2. Предел числовой последовательности. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Единственность предела. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства.

3. Подпоследовательности, частичные пределы. Теорема Больцано– Вейерштрасса. Критерий Коши существования конечного предела последовательности.

4. Определения предела числовой функции одного переменного в терминах окрестностей и в терминах последовательностей, их эквивалентность. Свойства пределов функции. Критерий Коши существования конечного предела функции. Предел сложной функции. Существование односторонних пределов у монотонных функций.

5. Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке. Односторонняя непрерывность. Непрерывность сложной функции. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.

6. Свойства функций, непрерывных на отрезке — ограниченность, достижимость (точных) верхней и нижней граней. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема об обратной функции.

7. Определение и свойства экспоненты, показательной функции, логарифмической и степенной функций. Непрерывность элементарных функций. Второй замечательный предел и его следствия.

8. Производная функции одного переменного. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции.

9. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменного. Функции, заданные параметрически, их дифференцирование.

10. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n -й производной произведения функций. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменного.

11. Теорема Ферма (необходимое условие существования локального экстремума). Теоремы о среднем Роля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа. Основные разложения по формуле Тейлора. Правило Лопиталья для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталья для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.

12. Применение производной к исследованию функций. Необходимые условия и достаточные условия монотонности, достаточные условия существования локального экстремума в терминах первой, второй и высших производных. Выпуклость, точки перегиба. Необходимые условия и достаточные условия выпуклости. Асимптоты.

13. Линейные пространства. Евклидовы пространства. Нормированные пространства. Арифметическое n -мерное пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах, их свойства, связанные с операциями пересечения, объединения и дополнения.

14. Теорема Больцано-Вейерштрасса в \mathbb{R}^n . Компакты, критерий компактности множества в \mathbb{R}^n в терминах ограниченности и замкнутости. Лемма Гейне-Бореля. Критерий компактности множества в \mathbb{R}^n в терминах покрытий. Метрические пространства и свойства непрерывных функций в метрических пространствах. Предел по совокупности, предел по направлению и повторный предел для функции нескольких переменных.

15. Равномерная непрерывность функции. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте в \mathbb{R}^n .

16. Кривые на плоскости и в пространстве. Теорема Лагранжа о среднем для вектор-функции. Гладкая кривая, касательная к гладкой кривой, допустимая замена параметра. Длина кривой. Производная переменной длины дуги. Натуральный параметр. Соприкасающаяся окружность. Кривизна кривой, формулы для ее вычисления. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой.