Семинар 7. Распределение Максвелла

Клименок Кирилл Леонидович

17.03.2022

1 Теоретическая часть

1.1 Смысл распределения Максвелла

Мы переходим ко второму заданию будем рассматривать элементы статистической физики. На лекциях мы договорились о терминах вероятности и плотности распределения, чем мы и будем пользоваться.

Рассмотрим задачу о распределении числа частиц по скоростям. То есть мы хотим найти какая доля частиц попадает в интервал скоростей $(v_x \div v_x + dv_x; v_y \div v_y + dv_y; v_z \div v_z + dv_z)$. в силу изотропности пространства и независимости направлений получаем вот такую функцию распределения для проекции скорости:

$$dw(v_x) = \varphi(v_x)dv_x = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left[-\frac{mv_x^2}{2kT}\right] dv_x$$

Аналогично можно записать функции распределения и для других направлений. Тогда для трехмерного случая в силу для скорости в заданном диапазоне нужно перемножать 3 эти функции:

$$dw(v) = f(\vec{v})dv_x dv_y dv_z = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right] dv_x dv_y dv_z$$

Для распределения по модулю скорости надо дополнительно умножить функцию распределения на объем, который занимает данная скорость в пространстве скоростей (для 2d — это кольцо, для 3d — сферический слой):

$$F(v)dv = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right] dv$$

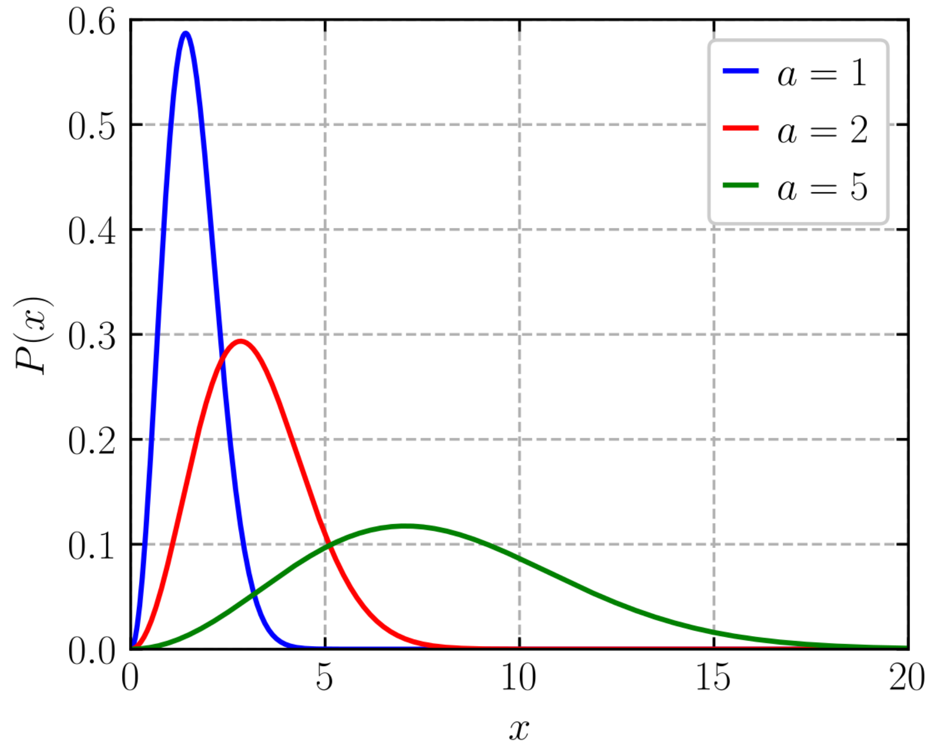

Рис. 1: Распределения Максвелла для модуля скорости для разных температур

Далее мы рассмотрели основные характеристики для распределения, среди них были следующие скорости: наивероятнейшая, средняя и средне квадратичная,. а также идеи из которых они получаются:

$$F'(v) = 0 \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$\langle v \rangle = \int\limits_0^{+\infty} vF(v)dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$\left\langle v^2 \right\rangle = \int\limits_0^{+\infty} v^2 F(v)dv = \frac{3kT}{m}$$

И отдельно мы перешли к рассмотрению распределения по энергии, где менялась не только сама функция распределения, но и ширина рассматриваемой области:

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} \Rightarrow dv = \frac{dE}{\sqrt{2mE}} \Rightarrow F^*(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi (kT)^3}} \exp\left[-\frac{E}{kT}\right] dE$$

и после этого мы вывели более точно поток частиц в сторону единичной площадки, учитывая распределение Максвелла (или любое другое изотропное распределение скоростей):

$$j(v) = \frac{1}{4} nv; \langle j \rangle = \frac{1}{4} n \langle v \rangle$$

2 Практическая часть

2.1 Задача 0.19

Условие Скорости частиц с равной вероятностью принимают все значения от 0 до v_0. Определить среднюю и среднеквадратичную скорости частиц, а также абсолютную и относительную среднеквадратичные флуктуации скорости.

Решение В этой задаче мы просто учимся работать с распределениями и тем, что из них можно извлечь. Напомню основную идею: функция распределения, домноженная на малый диапазон, соответствует вероятности для нашей случайной величины в этот диапазон попасть. Тогда, чтобы посчитать средние значения надо:

$$\langle v \rangle = \int vF(v)dv$$

$$\left\langle v^2 \right\rangle = \int v^2 F(v)dv$$

$$\left\langle \Delta v^2 \right\rangle = \left\langle v^2 \right\rangle - \langle \Delta v \rangle^2$$

В нашем случае величина распределена равномерно, т.е. функция распределения это константа. Найдем ее из условия нормировки:

$$\int\limits_0^{v_0} Adv = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{v_0}$$

а теперь просто делаем расчеты по соответствующим формулам:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{v_0}\int\limits_0^{v_0} vdv = \frac{v_0}{2}$$

$$\left\langle v^2 \right\rangle = \frac{1}{v_0}\int\limits_0^{v_0} v^2dv = \frac{v_0^2}{3}; \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \frac{v_0}{\sqrt{3}}$$

$$\left\langle \Delta v^2 \right\rangle = \left\langle v^2 \right\rangle - \langle \Delta v \rangle^2 = \frac{v_0^2}{3} - \frac{v_0^2}{4} = \frac{v_0^2}{12}; \sqrt{\langle \Delta v^2 \rangle} = \frac{v}{2\sqrt{3}}$$

2.2 Задача 7.14

Условие В диоде электроны, эмитируемые накаленным катодом, попадают в задерживающее поле анода. До анода доходят лишь достаточно быстрые электроны. Считая, что тепловые скорости эмитируемых (вышедших из катода) электронов распределены по закону Максвелла с температурой T = 1150 К, определить долю электронов, преодолевающих задерживающий потенциал: 1) V = 0.2 В; 2) V = 0.4 В. Катодом является тонкая прямолинейная нить, натянутая по оси цилиндрического анода.

Решение Первое, что имеет смысл уяснить здесь, это размерность задачи. В нашем случае у нас есть нитка, которая испускает электроны изотропно, что означает, что распределение по скоростям будет двухмерным, поэтому будем использовать функцию распределения для модуля скорости:

$$dw(v) = \frac{mv}{kT}\exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right]dv = \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right]d\left(\frac{mv^2}{2kT}\right) = \exp(-x)dx$$

Определять скорости, необходимые нам для нашей задачи будем из простого сохранения энергии, без дополнительных предположений о направлении куда и что будет лететь:

$$\frac{mv^2}{2} = eV$$

А теперь считаем долю интересных нам частиц, пользуясь стандартными идеями, а именно посчитаем через интеграл все частицы от нужной скорости до бесконечности и разделим на интеграл по всем скоростям от нуля:

$$\alpha = \frac{\int\limits_{eV/kT}^{\infty}\exp(-x)dx}{\int\limits_{0}^{\infty}\exp(-x)dx} = \exp\left(-\frac{eV}{kT}\right)$$

Дальнейшие расчеты для данных задачи дают в первом случае около 0.13 и 0.018 соответственно.

2.3 Задача 7.18

Условие В центре сферы радиусом R в некоторый момент времени создается N молекул газа, скорости которых имеют максвелловское распределение, соответствующее температуре T. Затем молекулы разлетаются без столкновений и оседают на стенках сферы. Найти плотность j потока молекул вблизи поверхности сферы как функцию времени. Определить момент времени t_0, когда поток максимален, и найти скорость молекул v_0, подлетающих к стенке в этот момент.

Решение Эта задача просто на определение понятия плотности потока какой-либо величины. Запишем это определение:

$$j = \frac{dn}{Sdt}$$

Что нам тут нужно? Вытащить долю частиц из распределения Максвелла, а для площади подставить площадь сферы, через которую они пролетают в данный момент. Так как она завязана на расстояние от источника частиц, то мы можем записать эту связь:

$$v = \frac{R}{t} \Rightarrow dv = -\frac{Rdt}{t^2}$$

А теперь возьмем распределение по модулю для трехмерного случая и подставим его в выражение для потока всех частиц N:

$$j = \frac{dn}{Sdt} = \frac{N}{4\pi R^2}4\pi v^2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right]\frac{dv}{dt} = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right]\frac{R}{t^4}$$

А теперь можно просто через производную найти экстремум этого выражения. С вашего позволения, пропущу это и сразу выпишу то, что просили в задаче:

$$t_{max} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{m}{kT}}; v = R/t_{max}$$

2.4 Задача 7.20

Условие Электроны, движущиеся в тонком поверхностном слое полупроводника, могут рассматриваться как «двумерный» идеальный газ. Вычислить частоту z ударов электронов, приходящихся на единицу длины периметра границы области, в которой заключен этот «газ». Считать при этом заданными температуру T, поверхностную концентрацию частиц n и массу электрона m.

Решение Идея этой задачи полностью повторяет вывод, который мы делали на лекции для произвольного изотропного распределения скоростей, но не в трехмерном, а в двухмерном пространстве. Так что это будет даже проще. Опять нарисуем, что происходит в пространстве скоростей линию постоянной скорости — это будет окружность.

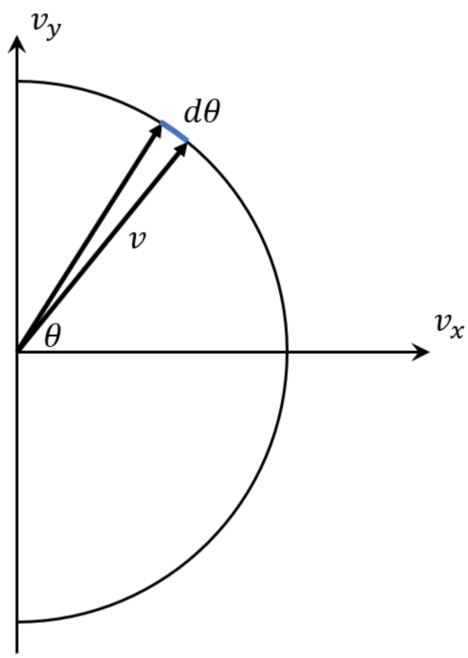

Рис. 2: Рисунок к задаче 7.20

Выделим на ней те участки, которые нас интересуют (дуги окружности с центральным углом $d\theta$) вблизи заданной скорости v и запишем долю тех частиц, которые имеют такую скорость:

$$\frac{dn(v)}{n} = \frac{vd\theta}{2\pi v} = \frac{d\theta}{2\pi}$$

Теперь посчитаем то количество частиц с этой скоростью, которые ударятся о стенку, летя в направлении x:

$$z(v) = \int dz = \int v\cos\theta dn = \frac{n}{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} v\cos\theta d\theta = \frac{nv}{\pi}$$

Далее опять же проводим стандартный финт и говорим, что эта штука линейно зависит от скорости, значит можно усреднить абсолютно все возможные модули скорости и получить выражение для всех ударов:

$$z_{tot} = \frac{n\langle v\rangle_2}{\pi}$$

Остается лишь рассчитать эту среднюю скорость для двухмерного распределения по модулю. Это мы уже сделали для трехмера, тут все аналогично:

$$\langle v\rangle_2 = \langle v\rangle = \int vF_2(v)dv = \int\limits_0^{+\infty} v\cdot 2\pi v\frac{m}{2\pi kT}\exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right]dv = \sqrt{\frac{\pi kT}{2m}}$$

Собираем все вместе и получаем ответ:

$$z_{tot} = n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$$

2.5 Комментарии к задачам из задания

Задача 7.19 Решена на лекции

Задача 7.16 Найти для двумерного распределения по модулю скорости наивероятнейшую и среднеквадратичную скорости по аналогии с нулевками

Задача 7.53 Здесь поможет идея с расчетом потока из задачи 7.18, а потом просто умножаем на вероятности и считаем долю молекул с нужной скоростью

Задача 7.67 Идея аналогична рассмотренной на лекции

Задача 7.70 Диапазон скорости очень маленький, поэтому можно не считать интеграл честно, а просто найти значение и умножить на ширину диапазона. Это и будет нужная доля молекул