Многочлены

I. Деление с остатком, алгоритм Евклида. Корни.

25.1(а)

$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$

$g(x) = x^2 - 3x + 1$

$$
\begin{array}{rl}
2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 & \big|\ x^2 - 3x + 1 \\
-\ \underline{2x^4 - 6x^3 + 2x^2} & \big|\ \overline{2x^2 + 3x + 11} \\
3x^3 + 2x^2 - 5x & \\
-\ \underline{3x^3 - 9x^2 + 3x} & \\
11x^2 - 8x + 6 & \\
-\ \underline{11x^2 - 33x + 11} & \\
25x - 5 &
\end{array}
$$

$f(x) = (2x^2 + 3x + 11)\,g(x) + (25x - 5)$

25.2(б)

$$(\overset{f}{x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5}\ ;\ \overset{g}{x^5 + x^2 - x + 1})$$

$$
\begin{array}{rl}
x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5 & \big|\ x^5 + x^3 - x + 1 \\
-\ \underline{x^6 + \cancel{x^4} + x^3 - x^2 + x} & \big|\ \overline{x} \\
2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 7x - 5 & \\
\| & \\
r_1 &
\end{array}
$$

$$(2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 7x - 5\ ;\ x^5 + x^3 - x + 1)$$

$$
\begin{array}{rl}
x^5 + x^3 - x + 1 & \big|\ 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 7x - 5 \\
-\ \underline{x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 5x} & \big|\ \overline{\tfrac{1}{2}x + 4} \\
4x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 4x + 1 & \\
-\ \underline{4x^4 - 16x^3 - 8x^2 + 28x - 20} & \\
19x^3 + x^2 - 24x + 21 &
\end{array}
$$

$(x^3+x^2,\ x^2+x+1)$

$$\begin{array}{l|l} x^3+x^2+\cdot+\cdot & x^2+x+1 \\ \underline{x^3+x^2+x} & \overline{x+1} \\ \quad\ x & \\ \quad\ \underline{x+1} & \\ \qquad 1 & \end{array}$$

$(x^2+x+1,\ \ldots)$

$(f,g)=1$ (взаимно прост)

$1 = a(x)f(x) + b(x)g(x)$

$r_1 = r_2(x+1)+1$

$g = (x+1)r_1 + r_2$ $\qquad r_2 = g-(x+1)(f-gx) =$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = g(1+x^2-x)+f(-x-1)$

$f = xg + r_1$ $\qquad r_1 = f-gx$

$r_2 = f(x+1)+g(x^2+x+1)$

$1 = r_1 + r_2(x+1) = f+gx+f(x+1)^2+g(x^2+x+1)(x+1) =$

$= f(\cancel{1}+x^2+\cancel{1}) + g(x+x^3+\cancel{x^2}+\cancel{x}+\cancel{x^2}+\cancel{x}+1) =$

$= f(x^2)+g(x^3+x+1)$

26.4 $a - ?$

$f(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$ имеет $x_0 = -1$ корнем не ниже второй кратности

т.е. $f(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1 = (x+1)^2 g(x)$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - ax^2 - ax + 1 & x^2 + 2x + 1 \\
\underline{x^5 + 2x^4 + x^3} & \overline{x^3 - 2x^2 + 3x} \\
-2x^4 - x^3 - ax^2 & \\
\underline{-2x^4 - 4x^3 - 2x^2} & \\
3x^3 + (2-a)x^2 - ax & \\
\underline{3x^3 + 6x^2 + 3x} & \\
(-a-4)x^2 + (-a-3)x + 1 &
\end{array}
$$

$$\begin{cases} -a-4 = \cancel{2}1 \\ -a-3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1-4 = -\cancel{2}5 \\ a = -2-3 = -5 \end{cases}$$

$a = -5$

27.2(a)

$x^6 + 27 = (x^2)^3 + 3^3 = \underbrace{(x^2+3)\underbrace{(x^4 + \cancel{6}3x^2 + 9)}_{D<0}}_{\text{ответ}}$

$(x^4-4x^3-2x^2+7x-5;\ 19x^3+x^2-24x+21)$

$$\begin{array}{l|l} x^4-4x^3-2x^2+7x-5 & 19x^3+x^2-24x+21 \\ x^4-\frac{1}{19}x^3-\frac{24}{19}x^2+\frac{21}{19}x & \frac{1}{19}x-\frac{75}{19} \\ \hline -\frac{75}{19}x^3-\frac{14}{19}x^2+\frac{112}{19}x-5 & \\ -75 & \end{array}$$

$(2x^4-5x^3-2x^2+7x-5,\ x^5+x^2-x+1)$

$\cancel{2x^4-5x^3-2x^2+7x-5 \mid x^5+x}$

$$\begin{array}{l|l} x^5+\cdot+\cdot+x^2-x+1 & 2x^4-5x^3-2x^2+7x-5 \\ x^5-\frac{5}{2}x^4-x^3+\frac{7}{2}x^2-\frac{5}{2}x & \frac{1}{2}x+\frac{5}{4} \\ \hline \frac{5}{2}x^4+x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{3}{2}x+1 & \\ \frac{5}{2}x^4-\frac{25}{4}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{35}{4}x-\frac{25}{4} & \\ \hline \end{array}$$

$$\underbrace{\frac{29}{4}x^3+\cdot+\cdot-\frac{29}{4}x+\frac{29}{4}}_{r_2}=\frac{29}{4}(x^3-x+1)$$

$(x^3-x+1,\ 2x^4-5x^3-2x^2+7x-5)$

$$\begin{array}{l|l} 2x^4-5x^3-2x^2+7x-5 & x^3+x+1 \\ 2x^4+\cdot-2x^2+2x & 2x-5 \\ \hline -5x^3+\cdot+5x-5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$(x^3-x+1,\ 0)$

Ответ: $\underline{x^3-x+1}$

• deg = 4

$x^4+x^3+x^2+1$ ✗ ($x=1$ – корень)

$x^4+x^3+x^2=x(x^3+x^2+1)$ ✗

x^4+x^3+1 ✓

x^4+x^2+1 ✓

x^4+x+1 ✓

$x^4+x^3=x^3(x+1)$ ✗

$x^4+x^2=x^2(x^2+1)$ ✗

$x^4+x=x(x^3+1)$ ✗

x^4+1 ✗ ($x=1$ – корень)

x^4 ✗

Ответ: x, $x+1$

$\cancel{x^2+1}$, x^2+x+1

x^3+x+1, x^3+x^2+1, $\cancel{x^3+x^2+1}$

$\cancel{x^4+1}$, x^4+x+1, x^4+x^2+1, x^4+x^3+1,

$\cancel{x^4+x^3+x^2+1}$

31.1(г)

Построить м-н степени 4 со старшим коэф 1, имеющий корни

$x_0 = 1, 2, -3, -4$

$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4) =$

$= (x^2-3x+2)(x+3)(x+4) =$

$= (x^3 - \cancel{3x^2} + 2x + \cancel{3x^2} - 9x + 6)(x+4) =$

$= (x^3 - 7x + 6)(x+4) =$

$= (x^4 - 7x^2 + 6x + 4x^3 - 28x + 24) =$

$= \underbrace{x^4 + 4x^3 - 7x - 22x + 24}_{\text{ответ}}$

Т-1

$x^3 - 7x + 2 = 0$ $\qquad x_1, x_2, x_3$ - корни

$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$

$(x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2)(x-x_3) = 0$

$x^3 - (x_1+x_2)x^2 + (x_1x_2)x - x_3x^2 + (x_1+x_2)x_3x - x_1x_2x_3 = 0$

$x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 0 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = -7 \\ x_1x_2x_3 = -2 \end{cases}$$

$(x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2 + 2\underbrace{(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)}_{-7} = 0$

28.22(а)

найти все неприводимые мн-ны степени ≤ 4 над полем $\mathbb{Z}_2$.

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$a, b, c, d, e = \left[\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right.$$

- $\deg = 1$

$x + 1$ ✓

x ✓

а неприводимый т.к. нет делителей за искл. самих себя

не зачеркнуть

- $\deg = 2$

$x^2 + x + 1$ ✓

$x^2 + x = x(x+1)$ — неприв.

$x^2 + 1$ ✗ ($x = 1$ корень)

$x^2 = x \cdot x$

- $\deg = 3$

$x^3 + x^2 + x + 1$ ✗ ($x = 1$ – корень)

$x^3 + x^2 + 1$ ✓

$x^3 + x + 1$ ✓

$x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$ ✗

$x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$ ✗

$x^3 + x = x(x^2 + 1)$ ✗

$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 + x + 1)$ ✗

$x^3 = x \cdot x \cdot x$ ✗

$$x^4-3x^3+x^2+\cdot+4 \;\big|\; x-2$$
$$x^4-2x^3$$
$$-x^3+x^2$$
$$-x^3+2x^2$$
$$-x^2$$
$$-x^2+2x$$
$$-2x+4$$
$$-2x+4$$
$$0$$

Quotient: x^3-x^2-x-2

$$x^3-x^2-x-2 \;\big|\; x-2$$
$$x^3-2x^2$$
$$x^2-x$$
$$x^2-2x$$
$$x-2$$

Quotient: x^2+x+1

$$x^2+x+1 \;\big|\; x-2$$
$$x^2-2x$$
$$3x+1$$
$$3x-6$$
$$7$$

Quotient: $x+3$

~~Отве~~

$$f(x)=(x-2)^3(x^2+x+1)$$

Ответ: третьей кратности

26.1 (a)

$f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8 \qquad x_0 = 1$

$x - x_0 = x - 1$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8 & x - 1 \\
\underline{x^4 - x^3} & \overline{x^3 - x^2 + 3x - 3} \\
\quad -x^3 + 4x^2 & \\
\quad \underline{-x^3 + x^2} & \\
\qquad 3x^2 - 6x & \\
\qquad \underline{3x^2 - 3x} & \\
\qquad\quad -3x + 8 & \\
\qquad\quad \underline{-3x + 3} & \\
\qquad\qquad 5 &
\end{array}
$$

$f(x) = (x^3 - x^2 + 3x - 3)(x - x_0) + 5$

$f(x_0) = 5$

// проверка: $1 - 2 + 4 - 6 + 8 = 5$ ✓ //

26.3 (a)

$f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \qquad x_0 = 2$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 & x - 2 \\
\underline{x^5 - 2x^4} & \overline{x^4 - 3x^3 + x^2 + 4} \\
\quad -3x^4 + 7x^3 & \\
\quad \underline{-3x^4 + 6x^3} & \\
\qquad x^3 - 2x^2 & \\
\qquad \underline{x^3 - 2x^3} & \\
\qquad\quad 0 + 4x - 8 & \\
\qquad\quad \underline{4x - 8} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Теперь найдем линейное выражение НОД, т.е. такие $A(x)$ и $B(x)$, что:

$$x^3 - x + 1 = A(x)f(x) + B(x)g(x)$$

$x^3 - x + 1 = \frac{4}{29} r_2 =$ $\qquad g = \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\right) r_1 + r_2$

$= \frac{4}{29}\left(g - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\right)(f - gx)\right) =$ $\qquad r_2 = g - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\right) r_1$

$= \frac{4}{29}\left(g - \left(\frac{1}{2}x f + \frac{5}{4}f - \frac{1}{2}x^2 g - \frac{5}{4}xg\right)\right) =$ $\qquad f = (x)g + r_1, \; r_1 = f - gx$

$= \frac{4}{29}\left(f\left(-\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + g\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x\right)\right) =$ $\qquad r_2 = g - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\right)(f - gx)$

$$= \underbrace{f\left(\frac{-2}{29}x - \frac{5}{29}\right) + g\left(\frac{2}{29}x^2 + \frac{5}{29}x + \frac{4}{29}\right)}_{\text{ответ}},$$

25.7(г)

$f = x^5 + x^3 + x \qquad g = x^4 + x + 1 \qquad \mathbb{F}_2 \;\; \mathrm{mod}\ 2$

$$\begin{array}{l|l} x^5 + \cdot + x^3 + \cdot + x + \cdot & x^4 + x + 1 \\ \underline{x^5 + \cdot + \cdot + x^2 + x} & \overline{x} \\ \qquad x^3 - x^2 & \end{array}$$

(в поле $\mathbb{F}_2$ сложение и вычит. эквивалентны)

$(\underbrace{x^3 + x^2}_{r_1}, x^4 + x + 1)$

$$\begin{array}{l|l} x^4 + \cdot + \cdot + x + 1 & x^3 + x^2 \\ \underline{x^4 + x^3} & \overline{x + 1} \\ \quad x^3 \qquad + x + 1 & \\ \quad \underline{x^3 + x^2} & \\ \qquad \underbrace{x^2 + x + 1}_{r_2} & \end{array}$$

$(x^2 + x + 1, x^3 - x^2)$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 14$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$$

21.11 Д-ть

$L = P + Q$ — прямая $\Leftrightarrow$ $\exists\, x \in L$ однозначно предст. в виде $x = y + z$, где $y \in P$, $z \in Q$

от противного. пусть $\exists\, x' \in L$:

$$x' = y_1 + z_1 = y_2 + z_2 \qquad y_i \in P \quad z_i \in Q$$

тогда $(y_1 \neq y_2) \wedge (z_1 \neq z_2) = \text{true}$

$$0 = \underbrace{(y_1 - y_2)}_{\in P} + \underbrace{(z_1 - z_2)}_{\in Q}$$

разл. нуля не единств. $\Rightarrow$ не прямая сумма

21.12 (1, 2)

(1) $\dim P + \dim Q > \dim V \overset{?}{\Rightarrow} P \cap Q$ содержит ненулевой вектор

$-\underbrace{\dim(P \cap Q)}_{} = \dim(P + \dim Q) - \underbrace{\dim P}_{p} - \underbrace{\dim Q}_{q}$

$\dim(P + Q) \leq \dim V$ (т.к. подпр-во)

$\cancel{p + q = r}$ $\underbrace{\dim(P + Q)}_{< \dim V - r}$ $= \underbrace{p + q}_{> \dim V} - r > \dim V - r$

$\dim(P + Q) = \underbrace{\dim P + \dim Q}_{>\dim V} - \dim(P \cap Q) \qquad | - \dim V$

$\dim(P+Q) \leq \dim V$

$0 \geq -\dim(P \cap Q) \qquad \dim(P \cap Q) > 0$

21.3(2)*

Дана матр. A из n строк. Д-ть, что n-мерное арифм. пр-во явл. прямой суммой линейной оболочки столбцов A и подпр-ва решений системы линейных ур-й $A^T x = 0$

$$\mathbb{R}^n = \langle a_1, \dots, a_k \rangle \oplus \{x \mid A^T x = 0\}$$

Пусть $b \in \langle a_1, \dots, a_k \rangle \Leftrightarrow b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$

Пусть $b \in \{x \mid A^T x = 0\} \Leftrightarrow b \perp \forall$ линейной комб. a_n $\Rightarrow$

$\Rightarrow b \perp b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow$ эта сумма прямая

$\blacksquare$

21.6(5) (продолж-е)

$$Q + P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$1(-8)\cdot 1 \cdot 2 \neq 0$ $\quad \det \neq 0$

$\Rightarrow \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ — ЛНЗ

$Q \oplus P = \mathbb{R}^4$

$\exists \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2: \ x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$

$Pr_P^{\parallel Q} x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 7 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim$$

б) $V \subseteq U$

$\cancel{V+U} \underset{n}{\Rightarrow}{}^{n}$

$\exists x \in \underbrace{(U \cap V)}_{V} + (U \cap W) = \underset{\underset{x}{\Psi}}{V} + (U \cap W) \overset{?}{=} U \cap (V+W)$

$x \in U \cap (V+W)$

$\underset{u}{\Leftarrow}{}^{u}$

$\exists\, x \in U \cap (V+W) \iff \begin{cases} x \in U \\ x \in V+W \end{cases}$ т.е. $x = \underset{\underset{U}{\Uparrow}\, V}{v} + \underset{W}{w} = \underset{U}{u} + \underset{W}{w}$

$\underset{U}{x} = \underset{U}{u} + w$

$\Rightarrow w \in U \Rightarrow W \subseteq U \Rightarrow$

$\Rightarrow U \cap (V+W) = V+W = (U \cap V) + (U \cap W)$ ∎

T.2

$W = P \cap Q$

$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$A = \left\langle \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & -6 & -5 \\ 3 & 5 & 8 \end{matrix} \right\rangle \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \\ 15 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 23 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

$\dim A = 2$

$\left\langle \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 10 \\ 1 & -5 \\ 3 & 8 \end{matrix} \right\rangle$

(2) $\dim(P+Q) = \dim(P\cap Q)+1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} P\subset Q \\ Q\subset P \end{array}\right.$

$\dim(P+Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P\cap Q)$

$\cancel{2\dim(P\cap Q) + 1 = \dim P + \dim Q}$

$2\dim(P+Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P+Q)+1$

$\underbrace{2\dim(P+Q)}_{\leq\, 2\dim V} = \dim P + \dim Q + 1$

$2\dim(P\cap Q)+1 = \dim P + \dim Q$

если $\begin{cases} P\not\subset Q \\ Q\not\subset P \end{cases}$, то $\dim(P+Q) > \begin{cases} \dim P \\ \dim Q \end{cases}$

~~(не умаляя общности пусть $\dim(P+Q) > \dim P$ (тогда~~

~~$2\dim(P+Q) > \dim P + \dim Q$~~

~~$2\dim P < \dim P + \dim Q + 1$~~

~~$\dim P < \dim Q + 1$~~

$\underbrace{2\dim(P+Q)}_{\geq\, \dim P + \dim Q + 2} = \dim P + \dim Q + 1$ противоречие ☒

35.13(а, б)

U, V, W — подпр-ва вект. пр-ва

а) (?) $U\cap(V+W) = (U\cap V)+(U\cap W)$

неверно. контрпример $U(1,1)$ $V(1,0)$ $W(0,1)$ — базисы

$U\cap(V+W) = U$ $(U\cap V)+(U\cap W) = 0$ ☒

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim P = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim Q = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(P+Q) = 3$

базис: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\dim(P \cap Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P+Q) = 2+2-3 = 1$

Хотим найти пересечение. Ищем $\vec{v}$ вида $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha = 3\gamma + \delta \\ \alpha + 2\beta = \gamma + 4\delta \\ \alpha + 3\beta = \delta \end{cases} \qquad \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$\alpha_1 = -1$
$\alpha_2 = 1$

$$Pr_{P}^{\parallel Q}\, x = \begin{pmatrix} 3-1 \\ -5-1 \\ 7-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

21.7 (5, 7)

(8) Найти dim и базис суммы и пересеч. лин. подпр-в $\mathbb{R}^n$, натян. на $\vec{a_i}$ и $\vec{b_i}$

(5) $n = 3$

$a_1 = e_{60}$ $\quad a_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$ $\quad a_2 = \begin{Vmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}$ $\quad a_3 = \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}$

$a_2 = e_{116}$

$a_3 = e_{145}$ $\quad b_1 = \begin{Vmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix}$ $\quad b_2 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Vmatrix}$ $\quad b_3 = \begin{Vmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{Vmatrix}$

$b_1 = e_{122}$

$b_2 = e_{148}$ $\quad P = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \langle A \rangle$

$b_3 = e_{147}$ $\quad Q = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \langle B \rangle$

$\alpha = 3\gamma + \delta$
$\alpha + 2\beta = \gamma + 4\delta$
$\alpha + 3\beta = \delta$

$\cancel{3\gamma} + \cancel{\delta} + 2\beta = \cancel{\gamma} + \cancel{4\delta}\ 3\delta$ 2γ
$3\gamma + \cancel{\delta} + 3\beta = \cancel{\delta}$

$\alpha = 3\gamma$
$\delta = 0$
$\gamma = -\beta$

$\begin{pmatrix} 3\gamma \\ -\gamma \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ — базис $P \cap Q$

(7) $n = 4$

$a_1 = c_{196}$
$a_2 = c_{200}$
$a_3 = c_{217}$

$a_1 = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \right\|$ $a_2 = \left\| \begin{matrix} -1 \\ 8 \\ -6 \\ 5 \end{matrix} \right\|$ $a_3 = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 10 \\ -5 \\ 8 \end{matrix} \right\|$ $\Big) P$

$b_1 = c_{211}$
$b_2 = c_{218}$
$b_3 = c_{219}$

$b_1 = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{matrix} \right\|$ $b_2 = \left\| \begin{matrix} 3 \\ -2 \\ 6 \\ 3 \end{matrix} \right\|$ $b_3 = \left\| \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{matrix} \right\|$ $\Big) Q$

P: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 8 & -6 & 5 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\dim P = 2$

Q: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -14 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\dim Q = 2$

$P+Q$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -14 & 9 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -14 & 9 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & -5 & 8 \\ 0 & -14 & 9 & -12 \end{pmatrix}$ $\dim(P+Q) = 4$

$\dim P \cap Q = 2 + 2 - 4 = 0$ (см. в т.2)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{|c} \\ 3 \\ 2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & 9 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\alpha = 3\gamma$ $\quad$ $\alpha = -3\beta$ $\quad$ $\alpha = 3\gamma$

$\beta = -\gamma$ $\quad$ $\beta = -\gamma$

$\delta = 0$ $\quad$ $\gamma = \gamma$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\gamma$

$$x = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ + \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 3\gamma + \delta$ $\quad$ $3\gamma + \delta + 2\beta = \gamma + 4\delta$ $\quad$ $2\gamma + 2\beta = 3\delta$

$\alpha + 2\beta = \gamma + 4\delta$ $\quad$ $3\gamma + \delta + 3\beta = \delta$ $\quad$ $\beta = \gamma$

$\alpha + 3\beta = \delta$

$4\beta = 3\delta$ $\quad$ $\beta = \frac{3}{4}\delta$ $\quad$ $\alpha = \frac{13}{3}\beta$ $\quad$ $= \frac{13}{4}\delta$

$\beta = \gamma$ $\quad$ $\beta = \beta$ $\quad$ $= \frac{3}{4}\delta$

$\alpha = 3\beta + \frac{4}{3}\beta = \frac{13}{3}\beta$ $\quad$ $\gamma = \beta$ $\quad$ $= \frac{3}{4}\delta$

$\delta = \frac{4}{3}\beta$

$$x = \frac{13}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/3 \\ 19/3 \\ 22/3 \end{pmatrix}$$

α $\quad$ $\cancel{3\gamma + 2}$ $\quad$ $2\gamma + 2\beta = 3\delta$

$3\gamma + 3\beta = 0$

ПОДПРОСТРАНСТВА и ФАКТОРПРОСТРАНСТВА

II. СУММА и ПЕРЕСЕЧЕНИЕ. ПРЯМАЯ СУММА

21.2

Д-ть, что пр-во мн-нов ~~ст~~ $\deg \leq n$ ($\mathcal{L}$) является прямой суммой подпр-ва четных мн-нов ($\mathcal{L}_{2k}$) $\deg \leq n$ и подпр-ва нечетных мн-нов ($\mathcal{L}_{2k+1}$) $\deg \leq n$.

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{2k} \oplus \mathcal{L}_{2k+1} \iff$ однозначность записи нулевого вектора

$0 =$ ~~const~~ $0 + 0$ очев. $\boxtimes$

21.6(5)

Найти проекцию x из n-мерного арифм пр-ва на линейное подпр-во P // линейному подпр-ву Q, где P - лин. об. $a_1, \dots, a_k$, а Q - лин. обол. $b_1, \dots, b_e$

$n = 4$

$x = c_{201}$ $\quad x = \begin{Vmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \\ -2 \end{Vmatrix}$ $\quad a_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$ $\quad a_2 = \begin{Vmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \\ 2 \end{Vmatrix}$

$a_1 = c_{166}$

$a_2 = c_{199}$

$b_1 = c_{197}$ $\quad b_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{Vmatrix}$ $\quad b_2 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{Vmatrix}$

$b_2 = c_{198}$

(to be continued)

Т.3 $V = M_n(\mathbb{R})$

U — кососимм.
W — симм.
W_1 — верхнетреуг.

(?) W, W_1 — разл. прямые дополн. к U в V

(I) $V \overset{?}{=} U \oplus W$

$$\forall A \in V: \quad A = \underbrace{\overset{\in W}{\frac{A+A^T}{2}}}_{\text{симм}} + \underbrace{\overset{\in U}{\frac{A-A^T}{2}}}_{\text{кососимм}} \quad ✓$$

$0 = 0 + 0$ (! образом)

(II) $V \overset{?}{=} U \oplus W'$

$\forall A \in V: \quad A =$ ~~$\frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$~~ верхнетр + кососимм ✓

(возьмем нижнетреуг. ~~...~~ часть матрицы, сделаем кососимм. матрицу с такой же частью (пусть $A^{кос}$), тогда $A - A^{кос}$ — верхнетреугольна

$0 = 0 + 0$ (! образом)

Теперь докажем, что эти прямые дополнения различны. Это очев, т.к. W и W' — разные подпр-ва. ☐

$$A_{233} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_{233} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

T.4 макс. ЛНЗ в $\mathbb{R}^4$ опии СЛОУ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_4 = -x_3$

$x_2 = -x_1 - x_3$

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = -x_1 - x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = -x_3 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, -x_1 - x_3, x_3, -x_3) =$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\{(1, -1, 0, 0)^T, (0, -1, 1, -1)^T\}$

$$B=\left\langle \begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & 8 \end{matrix} \right\rangle \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & 5 \\ 5 & 8 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -14 & 0 \\ -1 & 9 & 0 \\ 5 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B=\left\langle \begin{matrix} 1 & 0 \\ 4 & -14 \\ -1 & 9 \\ 5 & -12 \end{matrix} \right\rangle \qquad \dim B = 2$$

$$(A+B)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 4 & -14 \\ 1 & -5 & -1 & 9 \\ 3 & 8 & 5 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 2 & -14 \\ 1 & -5 & -2 & 9 \\ 3 & 8 & 2 & -12 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(A+B) = 3$

$\dim(A \cap B) = 2+2-3 = 1$

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3$$

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 - \beta_1 b_1 - \beta_2 b_2 - \beta_3 b_3 = 0$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} - \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \beta_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \beta_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -3 & -4 \\ 2 & 8 & 10 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & -6 & -5 & 1 & -6 & -5 \\ 3 & 5 & 8 & -5 & -3 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 0 & -2 & 8 & 6 \\ 1 & -5 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & 8 & 0 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -2 & 8 & 6 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & -2 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 5 & & \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & & & \\ 0 & 5 & & \\ 15 & 0 & 15 & 0 \\ 5 & 3 & -6 & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & & & \\ 0 & 5 & & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \\ 11 & 3 & -2 & \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 11/5 & 3/5 & -2/5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 = 0$

$\alpha_2 = 0$

$\alpha_3 = 0$

$\alpha_4 = \alpha \quad \frac{11}{5}\alpha_1 + \frac{3}{5}\alpha_2 - \frac{2}{5}\alpha_3$