Семинар 1. Кинематика

Клименок Кирилл Леонидович

01.09.2022

Disclaimer

Перед тем как мы начнем говорить по теме несколько важных дисклеймеров.

- Чем мы будем заниматься? Мы будем решать задачи по разным темам из раздела «Механика» и параллельно учимся использовать производные и интегралы в них, чтобы к концу семестра у вас сложилось нормальное представление об этом математическом аппарате и о физике, которая работает есть в этом разделе.
- Кто я и какой у меня бэкграунд? Меня зовут Клименок Кирилл, я закончил магистратуру ФМХФ МФТИ (ныне ФЭФМ) в 2014 году и с тех пор работаю на кафедре общей физики. Стал кандидатом физ.-мат. наук в 2018 по направлению математического моделирования. С 2010 года я сотрудничаю в разных формах с московским научным центром нефтесервисной компании Schlumberger.
- Почему семинары предзаписаны? Мне кажется, что время в учебных аудиториях можно потратить куда продуктивнее, чем просто выслушивать мой монотонный бубнеж у доски, где я разбираю задачки. Плюс у вас как обычно будет мой нормально выглядящий конспект и запись, к которой всегда можно будет вернуться.
- В этом семестре я читаю лекционный курс по механике на ФПМИ, что приводит к тому, что на теоретическую часть я буду отводить несколько меньше времени, останавливаясь на основных понятиях и формулах пропуская некоторые выводы.

1 Теоретическая часть

1.1 Философские рассуждения и аксиоматика

Для начала надо бы ответить на вопрос о том, чем общая физика отличается от других естественных наук и курсов, которые вы могли видеть в расписании у ваших старших коллег. Первая часть этого вопроса довольно понятна: физика изучает наиболее общие законы природы, материю, её структуру, движение и правила трансформации, в то время как другие естественные науки, такие как химия и биология изучают естественные процессы на других уровнях. При этом поскольку наука естественная, то мы считаем что есть некоторая реальность, которая существует независимо от наших желаний и именно к ней мы и можем обращаться с вопросами-экспериментами. Отличие же общей физики от теоретической заключается в том, что мы говорим об экспериментальных фактах, как об основе нашего знания, на основе которого строится все остальное. Теоретические же науки за основу берут некоторую математическую аксиоматику и на ее основе чисто математически выводят все явления и процессы. Возможно, кому-то это подход покажется ближе, но начинать глубокое изучение физики, на мой взгляд, следует именно с эмпирических вещей, чтобы нагляднее представлять себе как это работает в реальной жизни.

В дополнении к всему вышесказанному, надо бы добавить пару слов об измеряемых величинах. Так как эксперимент для нас является основным, то то как мы его проводим и что измеряем в нем становится крайне важным вопросом. Как вы наверняка знаете, большая часть измеряемых единиц имеет размерность, которая собирается из 3 базовых: длины, времени и массы. В этом семестре мы будем использовать стандартную систему единиц СИ (кг, м, с). Есть и другие системы, например СГС (г, см, с), но они нужны для специфичных областей.

Теперь стоит пару слов сказать о моделях. В мире физики мы оперируем именно моделями, которые описывают реальность и критерием того, что модель хороша, является то, насколько она хорошо предсказывает те или иные вещи. Естественно, мы можем строить очень сложные и глубокие модели, но для наших целей в этом семестре все будет максимально просто и часть из используемых нами моделей вы уже видели в школе.

1.2 Производные и интегралы

Любой семестр общей физики так или иначе связан с некоторыми областями математики и определенным языком, на котором и буду решаться наши задачи. Самый первый семестр заточен на то, чтобы вы научились пользоваться дифференцированием и интегрированием.

Начнем с производной, так как про нее говорят в школе. Строгое производная функции определяется через предел отношения приращения функции к приращению аргумента.

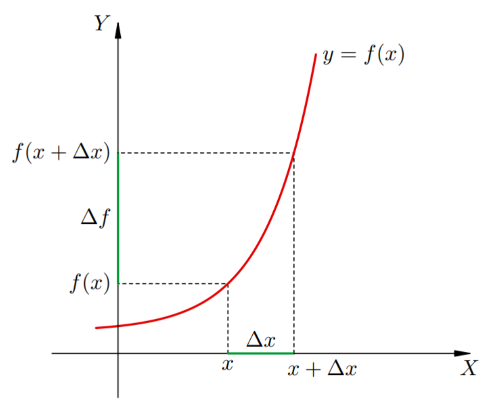

Рис. 1: Приращение функции и аргумента

И сама формула

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

То есть относится на первом этапе к этому можно как к обычной дроби, в числителе которое стоит разность значений функции, а в знаменателе разность аргументов. Поэтому представление как df/dx для нас станет основным, а также мы будем говорить о законности «домножения на знаменатель»: $df = f'(x)dx$. А вторую производную можно будет записать:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

И еще момент, иногда в нашем курсе бы будем использовать ньютоновскую нотацию и записывать производную по времени как точку над величиной, от которой берем производную: $dx/dt = \dot{x}$

Геометрический и физический смысл производной, вам, как я надеюсь хорошо известен — это наклон касательной или мгновенная скорость.

Теперь поговорим об интеграле. Это просто действие обратное дифференцированию — мы находим такую функцию, которая при дифференцировании дает нам исходную функцию. воспользовавшись нашем представлением производной мы можем записать это так:

$$f(x_2) - f(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} df = \int\limits_{x_1}^{x_2} f'(x)dx$$

А теперь посмотрим подынтегральное выражение. Там стоит производная искомой функции, умноженная на бесконечно малое изменение аргумента, то есть по суть берем нашу производную в нескольких точках и умножаем ее на расстояние между ними, а затем устремляем количество точек нашего разбиения к бесконечности. То есть мы просто считаем площадь под нашей функцией.

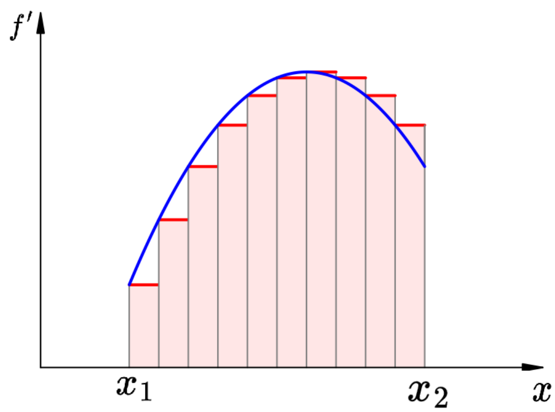

Рис. 2: Геометрический смысл интеграла

И вот теперь мы можем перейти непосредственно к теме сегодняшнего семинара — к кинематике материальной точки.

1.3 Кинематика материальной точки

Начнем с описания того, что скажем, что материальная точки, по своей сути является точкой геометрической, которая перемещается в нашем евклидовом трехмерном пространстве со временем, а с точки зрения физики, это просто модель объекта, размеры которого для нас не важны в рамках данной задачи. Уже из этого следует, что для описания движения этой точки нам надо ввести оси в нашем трехмерном пространстве и включить часы, тем самым мы соберем себе систему отсчета. Как описать в ней положение точки? С помощью радиус-вектора, который соединяет начало координат и текущее положение точки, и который зависит от времени.

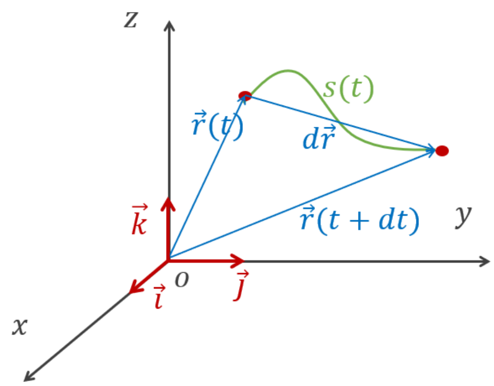

Рис. 3: Перемещение точки в трехмерной декартовой системе координат

Теперь включаем математику. Для определения радиус-вектора мы просто зададим его через координаты, потому что с 3 скалярными функциями работать проще:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Дальше определяем скорость, как перемещение за определенное время и видим, что это ни что иное как производная:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x(t)} \\ \dot{y(t)} \\ \dot{z(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

Тогда, чтобы найти перемещение, надо просто проинтегрировать скорость, для каждой из координат, а чтобы найти длину траектории, необходимо проинтегрировать модуль скорости:

$$\vec{\Delta r} = \int_{t_1}^{t_2} v(\vec{t})dt$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |v(\vec{t})|dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(v(\vec{t}); v(\vec{t}))}dt$$

еще один объект, который представляет интерес для характеристики движения — это ускорение. С ним все тоже достаточно просто, надо лишь посмотреть как меняется скорость со временем (продифференцировать ее):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x(t)} \\ \ddot{y(t)} \\ \ddot{z(t)} \end{pmatrix}$$

1.4 Радиус кривизны траектории

Иногда, нам не будет везти и наш радиус-вектор из прошлого раздела будет задаваться не как зависимость от времени, а иначе. Самый частый и самые естественный случай — это задать радиус-вектор как параметр расстояния, которое прошло тело по траектории. Это пройденное расстояние также является скалярным параметром, который неявно зависит от времени. Давайте попробуем посмотреть что будет со скоростью и ускорением, если мы будем использовать такое представление. Начнем со скорости и воспользуемся производной сложной функции:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{\tau}|\vec{v}| = v\vec{\tau}$$

Здесь мы увидели, что появился вектор $\vec{\tau}$ — касательный к траектории и вектор скорости всегда направлен вдоль него. Теперь возьмемся за ускорение и продифференцируем скорость еще раз по времени. Тут воспользуемся правилом производной произведения:

$$\vec{a} = \frac{v\vec{\tau}}{dt} = \dot{v}\vec{\tau} + v^2\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \dot{v}\vec{\tau} + v^2\vec{n}\frac{d\alpha}{ds} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

Здесь появилось изменение угла, на которое повернулась наша точка при движении, так как траектория криволинейная, а вектор $\vec{n} = d\vec{\tau}/d\alpha$ всегда оказывается перпендикулярен к траектории, а получившийся в итоге R — это радиус кривизны траектории.

Как мы видим итоговое ускорение складывается из 2: тангенциального (изменяет модуль скорости) и нормального (меняет направление)

Иногда в ваших задачах будет встречаться необходимость посчитать это радиус кривизны. Идейно по физике надо просто найти скорость и нормальную компоненту ускорения, этого хватит. Если же использовать математику, то для радиуса кривизны функции $y(x)$ есть формула:

$$R = \frac{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}}{y''}$$

1.5 Другие системы координат

Естественно, обычная декартова система не является единственно возможной. В общем случае для описания положения точки в пространстве нам необходимо 3 независимых параметра, а в плоскости 2. Что означает независимость в строгом смысле, мы пока опустим. Например для плоскости можно ввести полярные координаты: расстояние от точки отсчета и угол поворота от заранее заданного направления (как это делалось для комплексных чисел). Для трехмерной геометрии мы можем ввести сферические координаты: расстояние от точки отсчета (радиус), а также 2 угла — широту и долготу, или цилиндрические: смесь полярных координат и оси z. Естественно есть формулы перевода из одной системы координат в другие, но мы с ними будем знакомиться по мере решения задач.

2 Практическая часть

2.1 Задача 1.3

Условие Велосипедист движется по траектории, задаваемой в декартовых координатах уравнением $y = kx^2$ (k — постоянная), причем его ускорение параллельно оси y и равно a. Определить радиус кривизны траектории велосипедиста как функцию времени.

Решение Первое, что хочется сделать — это просто подставит условие в формулу для радиуса из теоретической части. Не будем себе отказывать:

$$y = kx^2 \Rightarrow y' = 2kx \Rightarrow y'' = 2k$$
$$R = \frac{1}{2k}\left(1 + 4k^2x^2\right)^{3/2}$$

К сожалению, этого на м не достаточно, так как мы нашли значение радиуса в зависимости от координаты x, а не от времени. Таким образом нам как-то надо найти как от времени зависят наши координаты. Для этого воспользуемся 2 условием, что ускорение направлено только вдоль оси y. По нему мы восстановим что происходит со скоростью и с координатами. Итак:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ v_{y,0} + at \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} x_0 + v_{x,0}t \\ y_0 + v_{y,0}t + \dfrac{at^2}{2} \end{pmatrix}$$

Естественно, у нас вылезло много неизвестных параметров, типа начального положения и начальной скорости. От них мы очень быстро избавимся, если сравним полученный результат с условием. Для этого выразим время из x и подставим в y:

$$y = y_0 + v_{y,0} \cdot \frac{x - x_0}{v_{x,0}} + \frac{a}{2}\left(\frac{x - x_0}{v_{x,0}}\right)^2 \Leftrightarrow y = kx^2$$

Отсюда сразу очевидно, какие параметры и чему равны:

$$x_0 = y_0 = v_{y,0} = 0; \frac{a}{2v_{x,0}^2} = k$$

Таким образом:

$$x(t) = \sqrt{\frac{a}{2k}}t \Rightarrow R = \frac{1}{2k}\left(1 + 2kat^2\right)^{3/2}$$

2.2 Задача 1.12

Условие В открытом море на экваторе стоит высокая вертикальная скала. Как будет двигаться по этой скале тень, отбрасываемая сферической поверхностью Земли при заходе Солнца? Найти ускорение такого движения. Радиус Земли $R = 6400$ км. За какое время тень переместится от основания до вершины скалы, если высота последней $h = 1$ км?

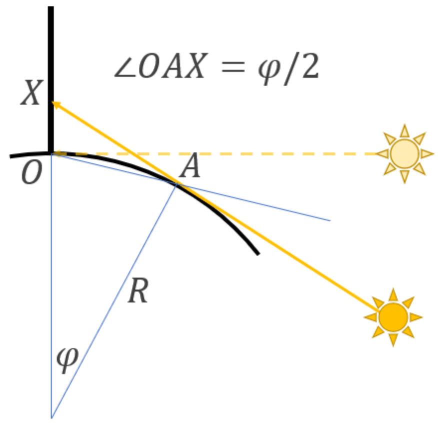

Рис. 4: Задача 1.12

Решение Начнем с того, что по рисунку поймем, что же происходит в задаче и откуда берется тень. По картинке очевидно, что тень получается из-за того, что Земля сферическая, а лучи от Солнца прямые и идут в лучшем случае по касательной, тем самым образуя тень. Теперь, понимая это мы можем взять определенный момент времени, когда планета повернулась на угол φ, что означает что Солнце уже за горизонтом на этот угол. При этом можем воспользоваться тем, что угол мал (а на масштабах высоты 1 км относительно радиуса Земли, так и есть) и записать немного геометрии:

$$OA \approx R\varphi; \angle OAX = \varphi/2; \angle AOX \approx \pi/2 \Rightarrow OX = OA \cdot \tan(\varphi/2) \approx OA \cdot \varphi/2 = R \cdot \varphi^2/2$$

На этом задача в целом заканчивается: надо лишь подставить в полученное выражение как вращается Земля и продифференцировать:

$$\varphi(t) = \omega t \Rightarrow x(t) = OX = R\omega^2 t^2/2 \Rightarrow v(t) = \dot{x(t)} = R\omega^2 t \Rightarrow a(t) = \ddot{x(t)} = r\omega^2 = R\frac{4\pi^2}{T_{\text{сут}}^2} = 3.4\frac{\text{см}^2}{\text{с}}$$

Чтобы найти полное время просто воспользуемся известной формулой, что без начальной скорости $h = at^2/2$. После подстановки, получается что-то около 4 минут

2.3 Задачи 1.13-1.17

Условие Колесо радиусом R катится без скольжения по горизонтальной дороге со скоростью v_0. Найти горизонтальную компоненту v_x линейной скорости движения произвольной точки на ободе колеса, вертикальную компоненту v_y этой скорости и модуль полной скорости для этой же точки. Найти значение угла α между вектором полной скорости точек на ободе колеса и направлением поступательного движения его оси. Показать, что направление вектора полной скорости произвольной точки A на ободе колеса всегда перпендикулярно к прямой AB и проходит через высшую точку катящегося колеса. Показать, что для точки A $v = |AB|\omega$. Построить график распределения скоростей для всех точек на вертикальном диаметре (в данный момент времени) катящегося без скольжения колеса. Выразить все искомые величины через v_0, R и угол φ, составленный верхним вертикальным радиусом колеса и радиусом, проведенным из центра колеса O в исследуемую точку его обода A. Найти выражение для радиуса кривизны траектории точки в ее вершине. Найти

координаты x и y произвольной точки A на ободе колеса, выразив их как функции времени t или угла поворота колеса φ, полагая, что при $t = 0, \varphi = 0, x = 0, y = 0$. Пользуясь выражением для полной скорости точек, лежащих на ободе катящегося колеса, найти длину полного пути каждой точки обода колеса между двумя ее последовательными касаниями полотна дороги.
Указание. Движение точек обода колеса можно рассматривать как результат сложения двух движений: поступательного движения со скоростью v_0 оси колеса и вращения вокруг этой оси. Для этих точек при отсутствии скольжения колеса модули векторов скорости поступательного движения и линейной скорости, обусловленной вращением, равны друг другу.

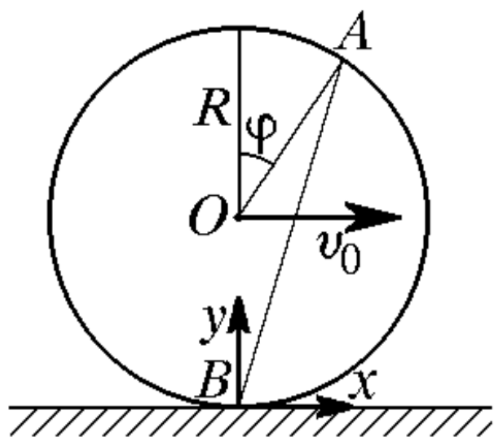

Рис. 5: Задача 1.13

Решение Этот блок задач очень показательный именно поэтому я его и объединил вместе. Начнем с указания, которое по сути и решает ее. Для начала определим, что означает отсутствие проскальзывания — это нулевая скорость точки касания колеса с землей, что позволяет нам сказать, что из-за вращения скорость в нижней точки равна скорости поступательного движения колеса и противоположена по направлению. Так можно нарисовать распределение скоростей из этого указания:

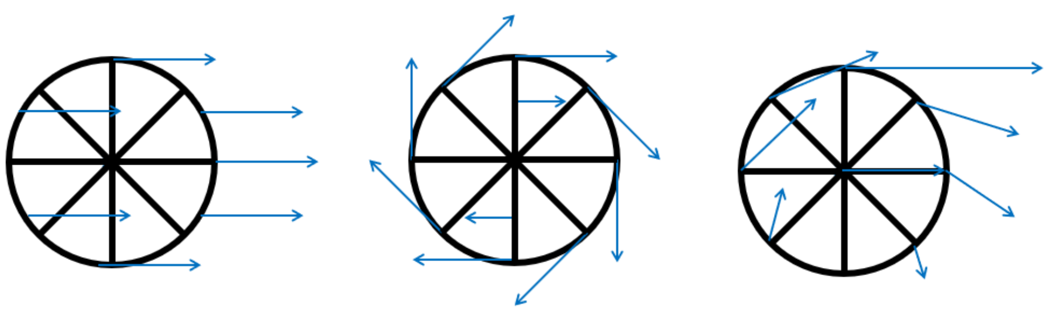

Рис. 6: Слева: распределение поступательной скорости, по центру: распределение скорости вращения вокруг оси, справа: их сумма

Теперь мы можем записать скорость произвольной точки на ободе:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 \cos\varphi \\ -v_0 \sin\varphi \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} 1 + \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Тогда модуль скорости можно найти по теореме Пифагора:

$$|\vec{v}| = v_0\sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + (-\sin\varphi)^2} = 2v_0\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Теперь проверим, что скорость точки A перпендикулярна отрезку AB. Для этого нам надо посчитать скалярное произведение этих векторов:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 1+\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow (\vec{AB}\cdot\vec{v}) = (1+\cos\varphi)\sin\varphi - \sin\varphi\,(1+\cos\varphi) = 0$$

Теперь найдем радиус кривизны траектории в ее верхней точке, где скорость будет $2v_0$ (это соответствует углу $\varphi = 0$). Пойдем в это раз физическим путем. Ускорение у это точки есть только из-за вращения и равно v^2/R. Итоговый радиус кривизны тогда:

$$\rho = \frac{4v^2}{v^2/R} = 4R$$

Можно ли пойти другим путем и попытаться найти уравнение линии, которая описывает точка на ободе колеса? Да, конечно, это будет циклоида. Для нахождения ее уравнения нужно просто проинтегрировать выражение для полной скорости, с учетом начальных условий из задачи, только в них начальное положение точки не в верху колеса а внизу, около точки касания. Тогда скорость: $= \mathrm{v}_0\binom{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} \Rightarrow \vec{r} = v_0\begin{pmatrix} \int\limits_0^t (1-\cos\varphi)\,dt \\ \int\limits_0^t \sin\varphi dt \end{pmatrix} = v_0\begin{pmatrix} \int\limits_0^t (1-\cos\omega t)\,dt \\ \int\limits_0^t \sin\omega t dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 t - \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \\ \frac{v_0}{\omega}(1-\cos\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\omega t - R\sin\omega t \\ R - R\cos\omega t \end{pmatrix}$

Таким образом у нас появилось вполне пристойное уравнение этой кривой, хоть и заданное параметрически (когда обе координаты зависят от третьего параметра)

И теперь ответим на последний вопрос про ее длину от одной точки касания земли ($y = 0$) до другой. Это по сути задача о поиске длины пути по траектории. Из теоретической части нам надо просто взять и посчитать интеграл с модулем скорости. Модуль скорости в зависимости от угла поворота колеса мы нашли, это дает нам право немного поизгаляться над ним и перейти от угла поворота ко времени (нам же по времени интегрировать):

$$v = 2v_0\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2\omega R\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2\frac{d\varphi}{dt}R\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$dS = vdt = 2\frac{d\varphi}{dt}R\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)dt = 2R\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi$$

$$S = 2\int\limits_0^\pi 2R\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi = 8R$$

Коэффициент 2 в интегрировании появился из-за того, что циклоида симметрична и нам достаточно посчитать длину ее половины, а затем умножить на 2, по той же причине в пределах интегрирования стоит на 2π, а π.

2.4 Комментарии к задачам из задания

Нулевки В первой задаче достаточно написать уравнения движение каждого объекта в единой системе отсчета. Во второй – воспользоваться тем, что угловое ускорение, умноженное на радиус должно равняться тангенциальному.

Задача 1.2 Задача на понимание того, что означает с геометрической точки зрения дифференцирование и интегрирование. Надеюсь, что в семинаре удалось донести эту мысль =).

Задача 1.3 Решена

Задача 1.5 Стоит записать уравнение движения тела и уравнение наклонной плоскости. Решив их совместно можно найти точку падения, по которой находим расстояние. Используя производную по углу находим максимум.

Задача 1.11 Задача проще чем кажется, но надо посмотреть, как Земля и Луна вращаются друг относительно друга

Задача 1.12 Решена

Задача 1.13 Решена

Задача 1.17 Решена

Задача 1.21 Идейно повторяет задачу о движении колеса, то здесь вместо одномерного поступательного движения полет под углом к горизонту

Задача 1.24 Задача самая интересная из всех. Несколько подсказок: найдите связь скоростей концевых точек, считая, что «стержень не может разорваться». продифференцировав эту связь вы сможете понять что же за производную вам надо искать из геометрии. То, что скорость точки A постоянна существенно упростит вам задачу.