Семинар 13. Упругие деформации

Клименок Кирилл Леонидович

24.11.2022

1 Теоретическая часть

1.1 Закон Гука

Классический закон Гука известен нам по школьному курсу физики и показывает зависимость силы F от изменения длины упругого тела δl в зависимости от коэффициента жесткости k:

$$F = k\delta l$$

Теперь рассмотрим стержень длиной l и площадью поперечного сечения S, который также растягивается или сжимается. Тогда закон Гука можно преобразовать к виду:

$$\frac{F}{S} = \frac{kl}{S}\frac{\delta l}{l}$$

Или же для более короткой записи

$$\sigma = E\varepsilon$$

Здесь $\sigma = \frac{F}{S}$ – упругое напряжение (по размерности совпадает с давлением), $E = \frac{kl}{S}$ – модуль Юнга, $\varepsilon = \frac{\delta l}{l}$ – относительное изменение длины. Эта формула оказывается предпочтительнее, так как позволяет работать с локальными характеристиками и описывать все возможные виды деформаций.

Энергия деформации. Рассмотрим какую работу надо совершить, чтобы растянуть стержень, подчиняющийся закону Гука на ε:

$$A = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 \cdot V$$

Здесь V – объем тела. Величину $\frac{1}{2}E\varepsilon^2$ называют объемной плотностью энергии деформации.

Коэффициент Пуассона связывает продольные и поперечные деформации тела. Пусть стержень с продольным размером l изменяют на δl, а поперечный размер тела a изменяется на δa. Тогда коэффициент Пуассона:

$$\mu = -\frac{\delta a/a}{\delta l/l}$$

Различные сжатие. Когда тело с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона μ сжимают со всех сторон с одинаковым напряжением σ, относительное изменение размеров вдоль произвольной оси будет:

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}\left(1 - 2\mu\right)$$

Тогда относительное изменение объема:

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\frac{\delta l}{l} = 3\frac{\sigma}{E}\left(1 - 2\mu\right)$$

И можно записать модуль всестороннего сжатия

$$K = \frac{E}{3\left(1 - 2\mu\right)}$$

А объемная плотность энергии при всестороннем сжатии будет:

$$U = \frac{\sigma^2}{2K}$$

Когда тело с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона μ деформируют вдоль оси x, а остальные размеры остаются неизменными. Тогда связь напряжений вдоль этих осей:

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{\mu}{1 - \mu}\sigma_x$$

А относительное изменение длины тела вдоль оси x будет:

$$\frac{\delta x}{x} = \frac{\sigma_x}{E}\left(1 - \frac{2\mu^2}{1 - \mu}\right)$$

И можно ввести модуль одностороннего сжатия:

$$E' = E\frac{1 - \mu}{\left(1 + \mu\right)\left(1 - 2\mu\right)}$$

Выделяют и другие деформации, которые можно свести к сжатиям и растяжениям вдоль различных осей. Примеры это сдвиг, кручение, изгиб и другие.

1.2 Продольные возмущения в стержне. Скорость звука.

Рассматривая процесс распространения возмущения вдоль длинного стержня можно получить формулу для скорости звука в нем:

$$c_{\text{зв}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Здесь E – модуль Юнга, ρ – плотность материала стержня

Рассматривая деформацию малого кусочка стержня, записав и преобразовав второй закон Ньютона, для него можно получить волновой уравнение:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Здесь переменная ξ показывает смещение данной точки стержня от положения равновесия, x – координата стержня. Также его можно переписать через скорость звука:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_{\text{зв}}^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Общий вид решения волнового уравнения — это функция вида:

$$\xi\left(x,\ t\right) = \xi_1\left(\frac{x}{v} + t\right) + \xi_2\left(\frac{x}{v} - t\right)$$

Что соответствует возмущениям, бегущим вдоль стержня в разных направлениях вдоль оси.

Монохроматические волны Особое место в рассмотрении решений волнового уравнения занимают функции следующего вида:

$$\xi\left(x,\ t\right) = A\cos\left(\omega(t - \frac{x}{v})\right) = A\cos\left(\omega t - kx\right)$$

Это гармоническая волна с частотой ω и волновым вектором k. В гармонической волне можно выделить 2 периода: временной $T = 2\pi/\omega$ и пространственный, который называют длиной волны $\lambda = 2\pi/k$. Ее исключительность связана с тем, что любое периодическое возмущение можно разложить на сумму гармонических волн с различными амплитудами и кратными частотами.

Если рассмотреть 2 монохроматические волны с одинаковой частотой бегущие на стержне в разных направлениях, то мы получим стоячую волну:

$$\xi = A\cos\left(\omega t - kx\right) + A\cos\left(\omega t - kx\right) = 2A\cos\omega t\ \cos kx$$

Как видно из выражения временная и пространственная часть волны разделились и появятся точки в пространстве, где амплитуда колебаний будет равна нулю – углы стоячей волны. Точки же, где амплитуда максимальна будут пучностями.

Получить стоячую волну можно на произвольном стержне, если возбудить колебания одного из его концов и подобрав его длину или силу натяжения таким образом, чтобы при отражении волны от другого конца волны суммировались синфазно. Отражение может происходить как от закрепленного конца, так и от свободного. В случае закрепленного конца амплитуда колебаний в нем должна быть равна нулю, а в случае свободного она должна быть максимальна

Эффект Доплера Рассматриваем точечный источник волн, находящийся в среде и приемник волн, также находящийся в ней. Пусть источник движется со скоростью v и излучает волну со скоростью u, а приемник покоится. Угол между направлением движения и направлением на источник Тогда Приемник будет детектировать не истинную частоту источника ω_0, а измененную:

$$\omega = \omega_0 \frac{1}{1 - \frac{v}{u}\cos\theta}$$

В случае, если же наоборот источник покоится, а приемник движется со скоростью v, то детектируемая частота также изменится:

$$\omega = \omega_0\left(1 + \frac{v}{u}\cos\theta\right)$$

В случае со световой волной таких отличий для эффекта Доплера нет, так как при рассмотрении упругих волн имеет значение среда в которой происходят колебания и здесь принципиально перемещается источник или приемник, а в случае световых волн среды нет и согласно принципу относительности Эйнштейна, все физические законы эквиваленты в любой инерциальной системе отсчета, что убирает разницу в перемещении источника и приемника

2 Практическая часть

2.1 Задача 13.17

Условие На вертикально расположенный резиновый жгут диаметром d_0 насажено легкое стальное кольцо слегка меньшего диаметра $d < d_0$. Считая известным модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ для резины, определить с каким усилием F нужно растягивать жгут, чтобы кольцо с него соскочило. В расчетах весом резинового жгута пренебречь.

Решение Пусть жгут длиной a под действием силы F будет растянут на величину Δa. Тогда мы можем записать закон Гука:

$$\frac{F}{\frac{\pi d_0^2}{4}} = E\frac{\Delta a}{a}$$

Но, как мы знаем из теории при продольном удлинении жгута за счет упругих свойств будет сжиматься его диаметр. Эти деформации связаны коэффициентом Пуассона:

$$\mu = -\frac{(d-d_0)/d_0}{\Delta a/a}$$

Отсюда и находим наименьшую необходимую силу:

$$F = \frac{\pi d_0^2}{4}E\frac{\Delta a}{a} = \frac{\pi d_0^2}{4}E\frac{d_0 - d}{d_0\mu} = \frac{\pi E d_0\,(d_0-d)}{4\mu}$$

2.2 Задача 13.0

Условие Найти растяжение стержня длиной l и плотностью ρ, подвешенного вертикально, под действием собственного веса. Модуль Юнга материала стержня E, поперечными деформациями пренебречь.

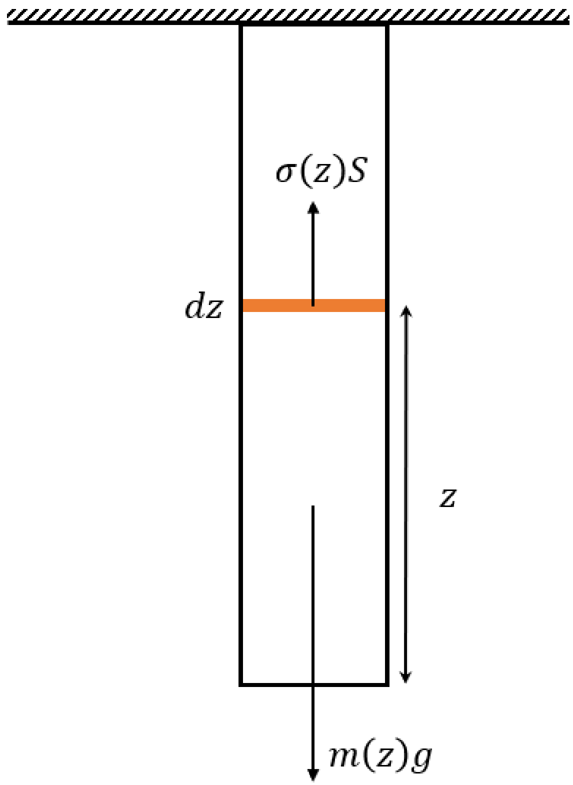

Рис. 1: К задаче 13.0

Решение Так как стержень массивный, то на разные его компоненты будет действовать сила тяжести и под ее действие он будет растягиваться. Введем координату z вдоль стержня, начиная с нижней точки и запишем напряжение в нем в зависимости от координаты:

$$\sigma(z) = \frac{m(z)\,g}{S} = \frac{\rho S z g}{S} = \rho g z$$

Далее выделим бесконечно малый элемент длиной dz. Ввиду малости длины элемента будем считать, что в его пределах напряжения $\sigma(z)$ не изменяется. Тогда мы можем применить закон Гука для этого элемента:

$$\sigma(z) = E\frac{\delta(dz)}{dz}$$

В данной записи $\delta(dz)$ — удлинение того малого элемента длиной dz. Тогда, чтобы найти полное удлинение стержня надо проинтегрировать его по всем возможным dz:

$$\delta l = \int_0^l \frac{\sigma(z)}{E}dz = \int_0^l \frac{\rho g z}{E}dz = \frac{\rho g l^2}{2E}$$

Здесь важно отметить, что мы считаем деформацию достаточно малой, чтобы не учитывать изменение длины стержня из-за нее при интегрировании. В общем случае это не так и выкладки существенно усложняются.

2.3 Задача 13.18

Условие Определить максимальное давление, которое может произвести вода при замерзании. Плотность льда $\rho = 0.917$ г/см^3, модуль Юнга $E = 2.8 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$

Решение Здесь рассматривается процесс замерзания, при котором меняется плотность вещества. Но по условию задачи, мы должны сохранить объем вещества неизменным, чтобы посчитать давление, которое оказывается на стенки сосуда. Тогда речь идет о всестороннем равномерно сжатии. Запишем закон Гука вдоль каждой из трех осей, приняв σ за напряжение вдоль оси, соответствующей ее индексу:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E}$$

$$\frac{\Delta y}{y} = -\mu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E}$$

$$\frac{\Delta z}{z} = -\mu\frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

Так как напряжение вдоль каждого направления одинаковое, то и относительное удлинение будет одинаковым:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta z}{z} = \frac{\sigma}{E}\left(1 - 2\mu\right)$$

Теперь необходимо связать относительное изменение объема с относительным изменение длин вдоль каждого из направлений. Считая изменение малыми можно воспользоваться свойствами производной и получить:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta\left(xyz\right)}{xyz} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$$

Окончательно получаем, что

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3\sigma}{2E}\left(1 - 2\mu\right)$$

Так как масса льда/воды (индексы 1 и 2 соответственно) сохраняется при фазовом переходе, получим связь между относительным изменением объема и плотности:

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{V_2 - V_1}{V_2} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} = \frac{\Delta\rho}{\rho}$$

Теперь можно выразить напряжение, которое эквивалентно максимальному давлению через данные задачи:

$$P = \sigma = \frac{E}{3\left(1 - 2\mu\right)}\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ атм}$$

2.4 Задача 13.42

Условие Кабина лифта массой $m = 1000$ кг равномерно опускается со скоростью $V_0 = 1$ м/с. Когда лифт опустился на расстояние $l = 10$ м, барабан заклинило. Вычислить максимальную силу, действующую на трос, из-за внезапной остановки лифта, если площадь поперечного сечения троса $S = 20$ см^2, а модуль Юнга троса $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па (l – длина недеформированного стержня). Изменением сечения троса пренебречь.

Решение При равномерном движении лифта трос будет растянут на некоторое расстояние x_0 под действием силы тяжести. Тогда, если мы введем коэффициент жесткости для троса k мы получим:

$$mg = kx_0$$

При резкой остановке барабана задача по своей сути сводится к следующей: есть трос на котором висит лифт, у которого есть скорость V_0, направленная вниз. Под действием упругой силы со стороны троса лифт постепенно останавливается, а трос при этом растягивается. Тогда мы можем записать закон сохранения энергии для этих двух состояний:

$$\frac{mV_0^2}{2} + mg\Delta l + \frac{kx_0^2}{2} = \frac{k(x_0 + \Delta l)^2}{2}$$

В этом выражении Δl это то дополнительное удлинение, на которое опустится лифт.

Решая эту систему найдем, что:

$$mV_0^2 = k\Delta l^2$$

Домножив обе части равенства на k и извлекая корень, получим дополнительную силу, которая будет воздействовать на трос при остановке:

$$k\Delta l = \sqrt{kmV_0^2}$$

Тогда итоговая сила будет складываться из нее и силы тяжести. Окончательно

$$F_{max} = k\left(\Delta l + x_0\right) = mg + V_0\sqrt{km}$$

Осталось только связать коэффициент жесткости и модуль Юнга. Для этого запишем закон Гука в двух формах и выразим k через модуль Юнга и другие параметры:

$$F = k\Delta l$$

$$\sigma = \frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l}$$

Таким образом $k = SE/l$

Окончательный ответ:

$$F_{max} = mg + V_0\sqrt{\frac{SE}{l}m} \approx 2.1 \cdot 10^5 \text{ Н}$$

2.5 Задача 13.39

Условие Два одинаковых тонких стальных бруска длиной $l = 10$ см (плотность $\rho = 7.8 \cdot 10^3$ кг/м^3, модуль юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па) сталкиваются торцами. Рассматривая упругие волны, оценить время соударения брусков. При каких скоростях возникнут неупругие явления, если предел упругости составляет $T = 200 \cdot 10^6$ Па

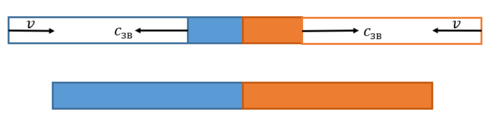

Рис. 2: К задаче 13.39

Решение Рассматривая произвольный момент времени во время удара, можно разделить стержень на 2 части: ту, что уже остановилась и ту, что еще двигается. При этом скорость, с которой будет двигаться граница этих частей будет соответствовать скорости звука. Тогда при ударе стержень сначала будет полностью остановлен, а затем за счет упругих сил он начнет приобретать скорость в обратном направлении. Таким образом за время удара звуковая волна пройдет стержень в прямом и обратном направлении. Тогда время удара:

$$\tau = \frac{2l}{c_{\text{зв}}} = 2l\sqrt{\frac{\rho}{E}} \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ с}$$

Для того, чтобы оценить появление неупругих явлений в стержнях надо записать, чему равно напряжение в стержне при пределе упругости:

$$T = E\frac{\Delta l}{l}$$

Это должно выполняться в произвольный момент времени во время удара. Тогда за промежуток времени dt стержень изменит свою длину на $\Delta l = V dt$, где V — скорость с которой двигался стержень, а расстояние l – это расстояние, на которое успело распространиться возмущение: $l = c_{\text{зв}} dt/$ Подставляя это в формулу получаем:

$$T = E\frac{V dt}{c_{\text{зв}} dt} = E\frac{V}{c_{\text{зв}}}$$

Отсюда скорость:

$$V = \frac{T c_{\text{зв}}}{E} = 5 \text{ м/с}$$

2.6 Комментарии к задачам из задания

Задача 13.7 Это модификация задачи о стержне, который растянут под действием собственного веса

Задача 13.16 Это модификация задачи об одностороннем сжатии

Задача 13.35 Опять модификация задачи о стержне, но не в поле тяжести, а в поле центробежной силы

Задача 13.36 Опять такая же модификация

Задача 13.39 Решена

Задача 13.41 Использовать идею из первых недель о распределении сил в кольце

Задача 13.42 Решена

Задача 13.49 Опять центробежная силы и кольцо