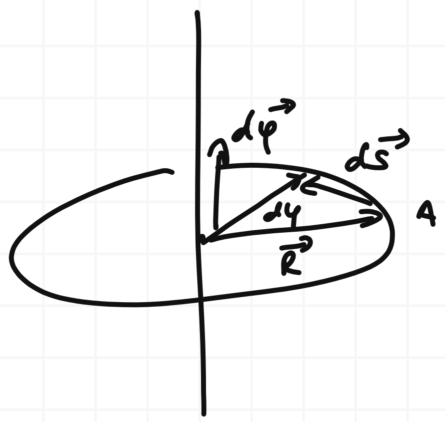
9/14.

Вращ. тверд. тела вокруг fixed оси
Момент инерции
Соотношение Гюйгенса-Штейнера
Вычисление моментов инерции

Вращение ТТ



$os = Roy$

$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$

$v = \omega R$

начало отсчета в произв. точке:

$R = r\sin\theta$

$v = \omega r \sin\theta$

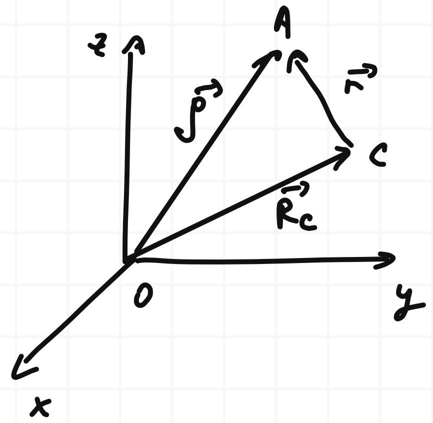
$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$

$(d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}]$

to be used когда ось вращ. меняет полож. в пр-ве

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} = [\vec{\omega}[\vec{\omega}, \vec{r}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{r}) - \vec{r}\omega^2 = -\omega^2\vec{R}$$

движ. ТТ



$\vec{\rho} = \vec{R_c} + \vec{r}$

$d\vec{\rho} = d\vec{R_c} + d\vec{r}$

$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$

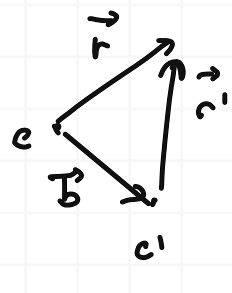
$\vec{v} = \vec{V_c} + [\vec{\omega} \times \vec{r}]$

c – выбранная точка отсчета (не обяз. ц.м.)

$\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega}$ $\quad$ $\frac{d\vec{R_c}}{dt} = \vec{V_c}$

мы определили $\vec{\omega}$ отн. c

д-м, что $\vec{\omega}$ не зависит от выбора начала отсчета в ТТ



$\vec{r} = \vec{b} + \vec{r'}$

$\vec{v} = \vec{V_c} + [\vec{\omega}, \vec{r}]$

$\vec{v} = \vec{V_{c'}} + [\vec{\omega'}, \vec{r'}]$))

$$\vec{V_c} + [\vec{\omega}, \vec{b}] + [\vec{\omega}, \vec{r'}] = \vec{V_{c'}} + [\vec{\omega'}, \vec{r'}]$$

заметим, что $\vec{r}$ может быть выбран произвольно

$$\vec{V_c} + [\vec{\omega}, \vec{b}] = \vec{V_{c'}}$$

$$[\vec{\omega}, \vec{r'}] = [\vec{\omega}', \vec{r}'] \qquad \text{т.е.} \qquad \vec{\omega} = \vec{\omega}' \qquad \text{q.e.d.}$$

Момент инерции относит. оси

$$L_z = \sum_i L_z^{(i)} = \underbrace{\sum_i m_i R_i^2}_{J} \omega = J\omega$$

$$J = \sum_i m_i R_i^2$$

$$J = \int_m R^2 \, dm$$

примеры

1. однородный тонкий стержень (ось через конец) $\qquad J = \frac{1}{3} m l^2$
2. тонкое однородное кольцо $\qquad J = mR^2$
3. однор. тонкий сплошной диск $\qquad J = \frac{1}{2} m R^2$

Центральный момент инерции

$$I_x = \int_m (y^2 + z^2)\, dm$$

$$I_y = \int_m (x^2 + z^2)\, dm$$

$$I_z = \int_m (x^2 + y^2)\, dm$$

$$I_x + I_y + I_z = 2 \underbrace{\int_m r^2 \, dm} = 2 I_0$$

Примеры

4. тонкостенная полая сфера $\qquad J = \frac{2}{3} m R^2$
5. сплошной шар $\qquad J = \frac{2}{5} m R^2$
6. сплошной диск (отн. оси, лежащ. в его плоскости) $\qquad J = \frac{1}{4} m R^2$
7. круговой конус $\qquad J_z = \frac{3}{10} m R^2$

$$J_x = J_y = \frac{3}{5} m \left(\frac{R^2}{4} + h^2 \right)$$

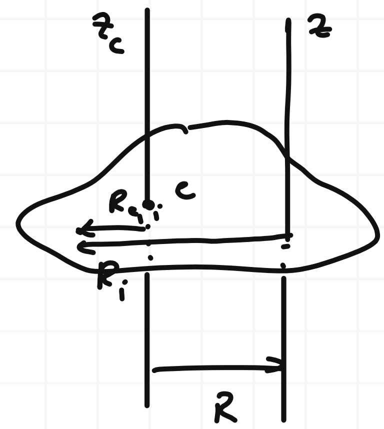
Th. Гюйгенса-Штейнера

$J = J_c + mR^2$

$(z) \quad (z_c)$

$z \parallel \underbrace{z_c}$

прох. через ц. масс



$\vec{R_i} = \vec{R_{ci}} - \vec{R}$

$$J = \sum m_i R_i^2 = \sum m_i R_{ci}^2 + \sum m_i R^2 + \sum m_i (\vec{R_{ci}}, \vec{R}) =$$

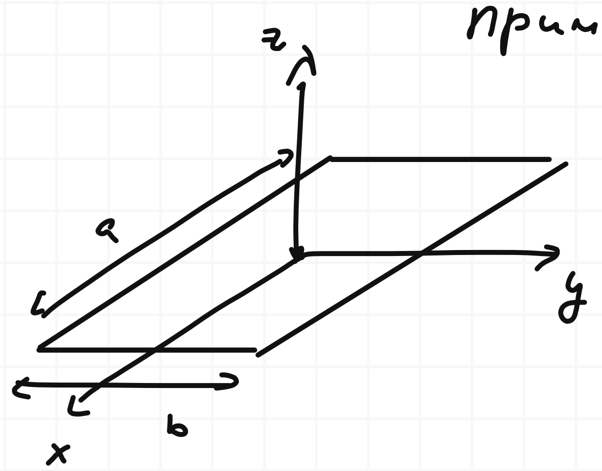
$$= J_c + mR^2 + (\underbrace{\sum m_i \vec{R_{ci}}}_{\vec{0}}, \vec{R})$$

$$= J_c + mR^2 \qquad \text{(т.к. ц. масс)}$$

q.e.d.

пример

8.



$J = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$