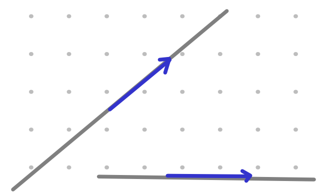
6. Найти расстояние между прямыми $\frac{x+5}{6} = \frac{y+3}{3} = \frac{3-z}{2}$ и $\frac{x-2}{3} = 5 - y = \frac{z-8}{4}$.

1) $l_1: \vec a = (6, 3, -2)$

$l_2: \vec b = (3, -1, 4)$

$$\vec n = [\vec a, \vec b] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 10\vec i - 30\vec j - 15\vec k = (10, -30, -15)$$



2) $M_2(2, 5, 8) \in l_2$

3) $\pi: 10x - 30y - 15z + D = 0$

$M_1 \in \pi \Rightarrow l_2 \subset \pi$ (т.к. $l_2 \parallel \pi$): $20 - 150 - 120 + D = 0 \Rightarrow D = 250$

$\pi: 10x - 30y - 15z + 250 = 0 \Leftrightarrow 2x - 6y - 3z + 50 = 0$

4) $M_1(-5, -3, 3) \in l_1$

5) $$\rho(l_1, l_2) = \rho(M_1, \pi) = \frac{|-10 + 18 - 9 + 50|}{\sqrt{4 + 36 + 9}} = \frac{49}{7} = 7$$

1. Найти угол между касательными к $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ и $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$ в точках их пересечения, имеющие положительные координаты.

$l_1: \frac{xx_0}{20} + \frac{yy_0}{5} = 1$

$l_2: \frac{xx_0}{12} - \frac{yy_0}{3} = 1$

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{20} + \frac{y_0^2}{5} = 1 \quad |\cdot 20 \to x_0^2 + 4y_0^2 = 20 \quad (1) \\ \frac{x_0^2}{12} - \frac{y_0^2}{3} = 1 \quad |\cdot 12 \to x_0^2 - 4y_0^2 = 12 \quad (2) \end{cases}$$

$(1) + (2): 2x_0^2 = 32 \to x_0 = \pm 4 \to x_0 = 4$

$(1) - (2): 8y_0^2 = 8 \to y_0 = \pm 1 \xrightarrow{\text{из усл.}} y_0 = 1$

$l_1: \frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1 \to x + y = 5 \to \vec n_1(1, 1)$

$l_2: \frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 1 \to x - y = 3 \to \vec n_2(1, -1)$

$$\to \cos\varphi = \left|\frac{(\vec n_1, \vec n_2)}{|\vec n_1||\vec n_2|}\right| = \left|\frac{0}{5}\right| = 0$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$

10. Найти аффинное преобразование, переводящее точку (0; 0) в (0; 1), (0; 1) в (1; 1), (1; 1) в (0; 0). Найти неподвижную точку.

$(0;0) \mapsto (0;1)$

$(0;1) \mapsto (1;1)$

$(1;1) \mapsto (0;0)$

$\rightarrow \begin{cases} x^* = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y^* = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = c_1 \\ 1 = c_2 \\ 1 = b_1 + c_1 \Rightarrow b_1 = 1 \\ 1 = b_2 + c_2 \Rightarrow b_2 = 0 \\ 0 = a_1 + b_1 + c_1 \Rightarrow a_1 = -1 \\ 0 = a_2 + b_2 + c_2 \Rightarrow a_2 = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^* = -x + y \\ y^* = -x + 1 \end{cases}$ неподв. точка → убираем звёздочки → $\begin{cases} x = -x + y \quad (1) \\ y = -x + 1 \quad (2) \end{cases}$

(2) → (1): $x = -x - x + 1 \rightarrow x = \frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3}$

2. Составить уравнение всех общих касательных к $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ и $y^2 = 4x$.

L_1: $\frac{x x_0}{3} - \frac{y y_0}{2} = 1 \quad | \cdot 6$

L_2: $y y_0 = 2(x + x_0)$

$\begin{cases} \frac{x_0^2}{3} - \frac{y_0^2}{2} = 1 \quad (1) \\ y_0^2 = 4x_0 \quad (2) \end{cases}$

(2) → (1): $\frac{x_0^2}{3} - 2x_0^2 = 1$

$-\frac{5}{6} x_0^2 = 1$

$\varnothing$

L_1: $2x x_0 - 3y y_0 = 6 \rightarrow 3y y_0 = 2x x_0 - 6 \rightarrow y = \frac{2x_0}{3y_0} x - \frac{2}{y_0}$

L_2: $y = \frac{2}{y_0} x + 2\frac{x_0}{y_0}$

$\rightarrow \begin{cases} \frac{2x_0}{3y_0} = \frac{2}{y_0} \Rightarrow x_0 = 3 \\ -\frac{2}{y_0} = 2\frac{x_0}{y_0} \Rightarrow x_0 = -1 \end{cases}$

общих касательных нет

3. Найти плоскость, проходящую через точку $M(-7; 4; -3)$ и прямую $\begin{cases} x + 2y - 2z = 9 & l_1 \\ x - 2y - 2z = -3 & l_2 \end{cases}$.

I)

l_1: $\vec{n}_1 = (1; 2; -2)$

l_2: $\vec{n}_2 = (1; -2; -2)$

$\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - 4\vec{k} = (-8; 0; -4)$

...

II) Пучок плоскостей: $\alpha(x+2y-2z-9)+\beta(x-2y-2z+3)=0$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$

Подставим $M(-7;4;-3) \to \alpha(-7+8+6-9)+\beta(-7-8+6+3)=0 \to -2\alpha-6\beta=0$

$\alpha=-3\beta$

$\to -3x-6y+6z+27+x-2y-2z+3=0 \to -2x-8y+4z+30=0 \mid :-2$

$x+4y-2z-15=0$

4. В каких точках касательная к $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{32}=1$ перпендикулярна $x-4y+3=0$

l_1: $\frac{xx_0}{2}+\frac{yy_0}{32}=1 \to \vec{n}_1=\left(\frac{x_0}{2};\frac{y_0}{32}\right)$

$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2)=0 \Rightarrow \frac{x_0}{2}-\frac{y_0}{8}=0$

l_2: $x-4y+3=0 \to \vec{n}_2=(1;-4)$

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{2}+\frac{y_0^2}{32}=1 \\ y_0=4x_0 \end{cases} \to \frac{x_0^2}{2}+\frac{x_0^2}{2}=1 \to x_0=\pm 1, \; y_0=\pm 4$$

$x_0=\pm 1$, $y_0=\pm 4$

5. Составить уравнение плоскости параллельной $\underset{\underset{A}{\parallel}}{3}x+\underset{\underset{B}{\parallel}}{6}y+\underset{\underset{C}{\parallel}}{4}z-1=0$ и на расстоянии 2 от т.$M(1;1;1)$.

$$\rho(M,\alpha)=2=\frac{|A+B+C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|13+D|}{\sqrt{9+36+16}}=\frac{|13+D|}{\sqrt{61}} \to 2\sqrt{61}=|13+D|$$

$D_1=2\sqrt{61}-13$

$D_2=-2\sqrt{61}-13$

7. Прямая l проходит через $M_0(\overline{r_0})$ и параллельна прямой $\begin{cases}(\overline{r};\overline{n_1})=D_1\\(\overline{r};\overline{n_2})=D_2\end{cases}$, найти радиус-вектор точки пересечения l и плоскости $(\overline{r}-\overline{r_1};\overline{n})=0$.

(*)

1) $\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$

2) $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$

3) Подставим в (*): $(\vec{r}_0 + \vec{a}t_0 - \vec{r}_1; \vec{n}) = 0$

4) $(\vec{a}t_0; \vec{n}) + (\vec{r}_0 - \vec{r}_1; \vec{n}) = 0 \to t_0 = \dfrac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0; \vec{n})}{([\vec{n}_1, \vec{n}_2]; \vec{n})}$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0; \vec{n})}{\underbrace{([\vec{n}_1, \vec{n}_2]; \vec{n})}_{(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n})}} \cdot [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$$

8. Найти плоскость проходящую через $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ x + 3y - z + 2 = 0 \end{cases}$ и равноотстоящую от т.$M(0;0;1)$ и т.$N(0,0,2)$.

1) Знаем, что т., лежащая на середине MN $\in$ всем плоскостям, равноотст. от т. M и т. N.

$P\left(0; 0; \frac{3}{2}\right)$ (1)

2) Пучок плоскостей: $\alpha(x - y + z - 1) + \beta(x + 3y - z + 2) = 0$

$(1) \to \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 0 \to \alpha = -\beta \to$

$\to -x + y - z + 1 + x + 3y - z + 2 = 0 \to 4y - 2z + 3 = 0$

$4y - 2z + 3 = 0$

9. Найти на гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ точку, для которой расстояние от левого фокуса вдвое больше, чем от правого.

1) $r_1 = |a - \varepsilon x|$, $r_2 = |a + \varepsilon x|$

2) $\to$ $r_1 = \varepsilon x - a$ (правый), $r_2 = \varepsilon x + a$ (левый)

3) $\to r_2 = 2r_1 \to \varepsilon x + a = 2\varepsilon x - 2a$

$-\varepsilon x = -3a$

$x = \dfrac{3a}{\varepsilon} = \dfrac{12}{\frac{5}{4}} = \dfrac{48}{5}$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5 \to \varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$

4) $\dfrac{y^2}{9} = \dfrac{x^2}{16} - 1$

$x = \dfrac{48}{5}$, $y = \pm\dfrac{3\sqrt{119}}{5}$

11. Найти угол между прямолинейными образующими поверхности $4x^2 - y^2 = 16z$, пересекающимися в точке $Q(2, 0, 1)$.

1) $\begin{cases} \lambda_1(2x+y) = \mu_1 \\ \mu_1(2x-y) = \lambda_1 16z \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_2(2x-y) = \mu_2 \\ \mu_2(2x+y) = \lambda_2 16z \end{cases}$ $\xrightarrow{Q(2;0;1)}$ 2) $\begin{cases} 4\lambda_1 = \mu_1 \\ 4\mu_1 = 16\lambda_1 \end{cases}$ $\begin{cases} 4\lambda_2 = \mu_2 \\ 4\mu_2 = \lambda_2 \end{cases}$ $\rightarrow$ 3) $l_1: \begin{cases} 2x+y-4=0 \\ 2x-y-4z=0 \end{cases}$ $l_2: \begin{cases} 2x-y-4=0 \\ 2x+y-4z=0 \end{cases}$

4) $\vec{a}_1 = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k} \parallel (1;-2;1)$

$\vec{a}_2 = [\vec{n}_3, \vec{n}_4] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k} \parallel (1;2;1)$

5) $\rightarrow \cos\varphi = \left| \dfrac{(\vec{a}_1;\vec{a}_2)}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|} \right| = \left| \dfrac{1-4+1}{6} \right| = \dfrac{1}{3}$

$\varphi = \arccos\frac{1}{3}$

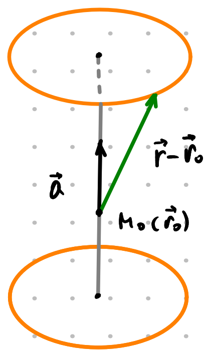
13. Найти уравнение круглого цилиндра, описанного около двух сфер.

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$$

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 25$$

Центры: 1) $O_1(-2;2;-1)$, $O_2(1;0;0)$ $\rightarrow$ 2) $\overrightarrow{O_1O_2} = (3;-2;1) = \vec{a}$

$R = 5$



3) $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$

$\vec{r}_0 = (1;0;0)$

4) $\dfrac{|[\vec{r}-\vec{r}_0, \vec{a}]|}{|\vec{a}|} = R$

5) $|[\vec{r}-\vec{r}_0, \vec{a}]| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-1 & y & z \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right| = |(y+2z; 3z-x+1; -2x+2-3y)| =$

$= (y+2z)^2 + (3z-x+1)^2 + (-2x+2-3y)^2 = 25 \cdot 14$

14. Найти:

$$\left.\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 5 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \end{vmatrix}\right\} n$$

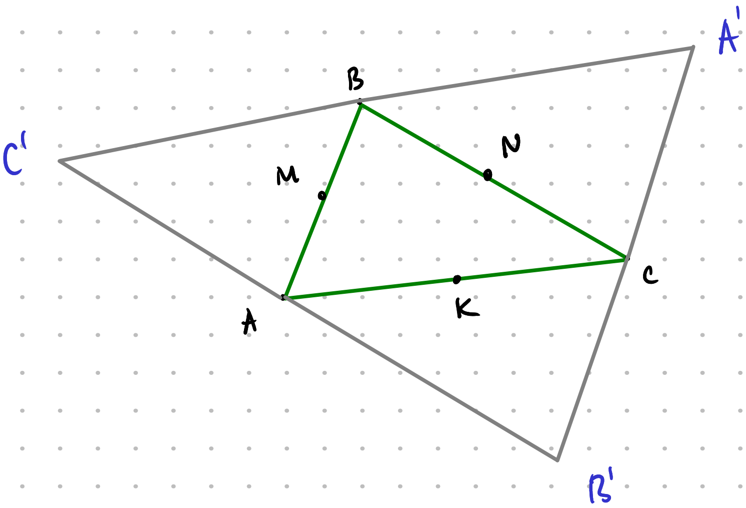
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 5 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{прибавляем к 1ой} - 2,3,\dots} (2n+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 5 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \end{vmatrix} \longrightarrow (2n+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (2n+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

и т.д., доходя до последнего столбца

$$(-1)^n(2n+3)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \dots & 3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow (-1)^n(-1)^{n-1}(2n+3)\cdot 3\,|\dots| = 3^{n-1}(2n+3)(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

15. т. $A(1;2;-3)$, т. $B(3,2,1)$, т. $C(6,4,4)$ - вершины параллелограмма. Найти координаты четвертой вершины этого параллелограмма и его площадь.



$M(2;2;-1)$

$N\left(\frac{9}{2};3;\frac{5}{2}\right)$

$K\left(\frac{7}{2};3;\frac{1}{2}\right)$

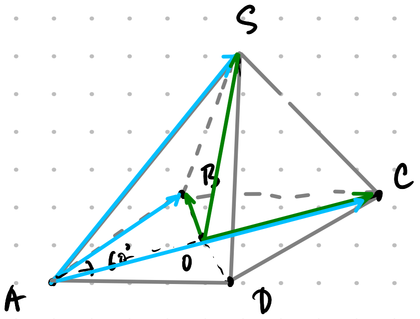
$$\frac{A+A'}{2}=N \longrightarrow A'=2N-A$$

$A'(8;4;8)$

$B'(4;4;0)$

$C'(-2;0;-6)$

32. Основание пирамиды - $SABCD$ ромб с углом $A=60^\circ$, боковые грани пирамиды образуют равные углы с плоскостью основания. Рассматриваются две системы координат: старая $(A,\overline{AB},\overline{AC},\overline{AS})$ и новая $(O,\overline{OB},\overline{OC},\overline{OS})$, где O - точка пересечения диагоналей ромба. Найдите формулы замены координат.



"старая": $(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AS})$

"новая": $(O, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OS})$

1) $e' = e S_{e\to e'} \to$ $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ $\to S_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{AS} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S_{e\to e'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

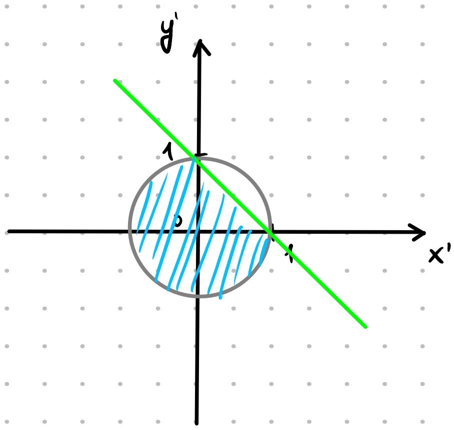
40. (**вспомните аффинные преобразования**) Найдите площадь множества точек заданных системой:

$$\begin{cases} (3x+y+1)^2 + (7x-4y+3)^2 \le 1, \\ 10x - 3y + 3 \le 0. \end{cases}$$

1) $\begin{cases} x' = 3x + y + 1 \\ y' = 7x - 4y + 3 \end{cases} \xrightarrow{f} \begin{cases} x'^2 + y'^2 \le 1 \\ x' + y' - 1 \le 0 \end{cases}$

$(y' = -x + 1)$

2)



3) $S' = \frac{3}{4}\pi^2 + \frac{1}{2}$

4) $\frac{S'}{S} = |\delta|$, $\delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}$

$\to S = \frac{S'}{|\delta|} = \frac{\frac{3}{4}\pi^2 + \frac{1}{2}}{19} = \frac{3}{76}\pi^2 + \frac{1}{38} = \frac{3\pi^2 + 2}{76}$

39. Составьте уравнение поверхности, образованной вращением прямой $\begin{cases} x = 1 + 2t; \\ y = 2 + t; \\ z = t; \end{cases}$ вокруг прямой $\begin{cases} x = 2 - t; \\ y = 3 + t; \\ z = 2t. \end{cases}$

l_1: l_2:

l_2: $\vec{a}_2 = (-1; 1; 2)$