I задание (продолжение)

ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

III. МАТРИЦА ЛИНЕЙНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ. ЯДРО, ОБРАЗ

23.24

$\varphi: L \to \tilde{L}$ — лин. отобр.

$\dim L = \dim \tilde{L}$

1) $\varphi(x) = y \ (x \in L)$ разрешимо $\forall y \in \tilde{L}$ $\Longleftrightarrow$ $\varphi(x) = 0$ имеет только нулевое решение

„$\Longrightarrow$"

$\triangleleft$ $\varphi(x) = y \ (x \in L)$ разрешимо $\forall y \in \tilde{L}$ $\Longrightarrow$ φ сюръективно, т.е. $\operatorname{Im} \varphi = \tilde{L}$

по теореме о размерности ядра и образа:

$$\dim L = \dim(\operatorname{Ker} \varphi) + \dim(\operatorname{Im} \varphi) = \dim(\operatorname{Ker} \varphi) + \dim(\tilde{L})$$

$$\dim(\operatorname{Ker} \varphi) = 0$$

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{0\} \quad \square$$

„$\Longleftarrow$"

$\triangleleft$ $\varphi(x) = 0$ имеет только нулевое решение $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$ $\Longrightarrow$ φ инъективно

$\varphi: L \to \tilde{L}$

если $\operatorname{Im} \varphi \neq \tilde{L}$ $(\dim(\operatorname{Im} \varphi) < \dim \tilde{L})$, противоречие с теоремой о размерности ядра и образа

значит, $\operatorname{Im} \varphi = \tilde{L}$, φ сюръективно $\square$

2) $\varphi(x)$ разрешимо $\forall y \in \tilde{L}$ $\Rightarrow$ для каждого y имеет ! решение

$\lhd$ пусть $\exists y_0 \in \tilde{L}$: $\varphi(x_1) = y_0$, $\varphi(x_2) = y_0$
$\Rightarrow$ φ не инъективно $\Leftrightarrow$ $\ker\varphi \neq \{0\}$

из разрешимости: $\operatorname{Im}\varphi = \tilde{L}$

$$\cancel{\dim L = \dim \tilde{L}} + \underset{\overset{\vee}{0}}{\dim(\ker\varphi)} \quad \to \text{противор-е} \quad \square$$

3) $\varphi(x) = y$ разрешимо при некотором y (но не для всех) $\Rightarrow$ его решение не !

$\lhd$ разр. не для всех: $\operatorname{Im}\varphi \neq \tilde{L}$, $\dim(\operatorname{Im}\varphi) < \dim\tilde{L}$

по теореме о разм. ядра и образа:

$$\dim L = \underset{\overset{\wedge}{\dim\tilde{L}}}{\dim(\operatorname{Im}\varphi)} + \dim(\ker\varphi)$$

$\dim(\ker\varphi) > 0$ $\Rightarrow$ φ не инъективно $\square$

<u>23.29(5)</u>

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^5$$

$\ker\varphi = ?$
$\operatorname{Im}\varphi = ?$
инъ. - ?
сюръ. - ?

$$A = A_{420} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

1) $\ker\varphi$ — мн-во значений $x = (x_1\ x_2\ x_3)^T$: $\varphi(x) = 0$

$$\varphi(x) = Ax = \underset{5\times3}{\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{pmatrix}} \underset{3\times1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} = \underset{5\times1}{\begin{pmatrix} -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \\ 6x_1 + 5x_2 - 5x_3 \end{pmatrix}} = 0$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -1{,}5x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0 \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$\operatorname{Ker}\varphi = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 1, \quad \varphi \text{ не инъективно}$$

$\operatorname{Im}\varphi$ = линейная оболочка столбцов матрицы A

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & 4 & 6 \\ -2 & -2 & -2 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im}\varphi = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \dim(\operatorname{Im}\varphi) = 2, \quad \varphi \text{ не сюръективно}$$

23.30(1)

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \xrightarrow{A} \mathbb{R}^3 \qquad \vec{a} = (-1, 0, 1)^T$$

$$A = A_{S13} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Ax = a$$

$$\begin{cases} +x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = +1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & 0 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 11 & 6 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ & 11 & 0 & 7 & 2 \\ & & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 11 & 55 & 44 & 33 & 11 \\ & 55 & 0 & 35 & 10 \\ & & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 11 & 0 & 44 & -2 & 1 \\ & 11 & 0 & 7 & 2 \\ & & 44 & -44 & 44/3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 11 & 0 & 0 & 42 & -41/3 \\ & 11 & 0 & 7 & 2 \\ & & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 42/11 & -41/33 \\ & 1 & 0 & 7/11 & 2/11 \\ & & 1 & -1 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{42}{11} x_4 = -41/33 \\ x_2 + \frac{7}{11} x_4 = 2/11 \\ x_3 - x_4 = 1/3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -42/11\, x_4 - 41/33 \\ x_2 = -7/11\, x_4 + 2/11 \\ x_3 = x_4 + 1/3 \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} -42/11\, t - 41/33 \\ -7/11\, t + 2/11 \\ t + 1/3 \\ t \end{pmatrix}$$

23.40 (1в)

$P^{(m)}$ – лин. пр-во $\mathbb{R}$ многочленов, $\deg \le m$

$D: P^{(m)} \to P^{(m)}$

$D: f(t) \longmapsto f'(t)$

$\ker - ?$

$\operatorname{Im} - ?$ в базисе $\langle 1, \frac{t}{1!}, \dots, \frac{t^m}{m!} \rangle$

$D - ?$

Д-м линейность D.

$\triangleleft$ $D(f(t)+g(t)) = (f(t)+g(t))' = f'(t)+g'(t) = D(f(t)) + D(g(t))$

$D(\lambda f(t)) = (\lambda f(t))' = \lambda f'(t) = \lambda D(f(t))$ $\square$

a. $f'(t) = 0$, $f(t) = const$ $\Rightarrow \ker D = \langle 1 \rangle$

b. $\operatorname{Im} D = P^{(m-1)}$

c. $D - ?$ в базисе $(1, \frac{t}{1!}, \dots, \frac{t^m}{m!})$

	f	$D(f)$	
$e_0 =$	1	0	
$e_1 =$	$\frac{t}{1!}$	1	$= e_0$
$e_2 =$	$\frac{t^2}{2!}$	t	$= e_1$
$e_3 =$	$\frac{t^3}{3!}$	$\frac{3t^2}{2 \cdot 3} = \frac{t^2}{2!}$	$= e_2$
$\vdots$	$\vdots$		
$e_m =$	$\frac{t^m}{m!}$	$\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$	$= e_{m-1}$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & 0 \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

23.62 (3)

A – матрица лин. пр-я φ

S – матрица координат новых базисных векторов

Вычислить матрицу преобразования в новом базисе.

$$A = A_{38} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad S = A_{39} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$A' = S^{-1} A S$

$$S^{-1}: (S|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}}$$

23.70 (1)

$\{e_1, \dots, e_n\}$ $\qquad$ e_i, e_j – swap

$Ae_1, \dots, Ae_n$ $\leftarrow$ i и j столбец swap

в самой записи i и j строки swap

T.7

$\varphi_v: \quad \varphi_v(x) = [v, x] \qquad v = (v_1, v_2, v_3)^T$

Д-те, что $v \mapsto \varphi_v$ – линейный изоморфизм пр-ва $\mathbb{R}^3$ с пр-вом кососимметричных матриц в $M_{3\times3}(\mathbb{R})$

$$\varphi_v(x) = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 x_3 - v_3 x_2 \\ -v_1 x_3 + v_3 x_1 \\ v_1 x_2 - v_2 x_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_v} x$$

$v \mapsto \varphi_v$ изоморфизм:

1) гомоморфизм

$$v + u \longmapsto \varphi_{v+u} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -v_3 - u_3 & v_2 + u_2 \\ v_3 + u_3 & 0 & -v_1 - u_1 \\ -v_2 - u_2 & v_1 + u_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

2) биекция

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \longmapsto v \begin{pmatrix} -c \\ b \\ -a \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -a = v_3 \\ b = v_2 \\ -c = v_1 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

V. АФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

12.28 (1, 2*)

(1) A, B – две разл. неподв. точки афф. преобр-я $\Longrightarrow$ все точки AB неподвижны

$\lhd$ $f(x,y) = (a_{11}x + a_{12}y + b_1,\ a_{21}x + a_{22}y + b_2)$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ – невырожд. матрица преобр-я

$$\begin{cases} x_A = a_{11}x_A + a_{12}y_A + b_1 \\ y_A = a_{21}x_A + a_{22}y_A + b_2 \\ x_B = a_{11}x_B + a_{12}y_B + b_1 \\ y_B = a_{21}x_B + a_{22}y_B + b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B - x_A = a_{11}(x_B - x_A) + a_{12}(y_B - y_A) \\ y_B - y_A = a_{21}(x_B - x_A) + a_{22}(y_B - y_A) \end{cases}$$

$\overrightarrow{AB}$ – собств. вектор лин. преобр-я

Д-м неподвижность всей прямой.

Р-м произв. C на AB:

$$C = \lambda A + (1-\lambda)B \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$f(C) = \lambda f(A) + (1-\lambda)f(B) = \lambda A + (1-\lambda)B = C \qquad \square$$

12.40(1)

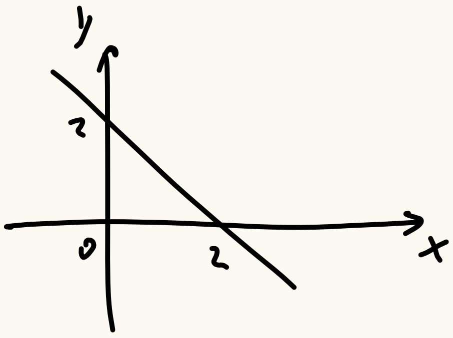
$A(1,0) \to A'(-3,5)$
$B(0,1) \to B'(4,-3)$
$C(1,1) \to C'(0,0)$

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases} \qquad M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3 = a_1 + c_1 \\ 5 = a_2 + c_2 \\ 4 = b_1 + c_1 \\ -3 = b_2 + c_2 \\ 0 = a_1 + b_1 + c_1 \\ 0 = a_2 + b_2 + c_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = -4 \\ b_1 = 3 \\ c_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ b_2 = -5 \\ c_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -4x + 3y + 1 \\ y' = 3x - 5y + 2 \end{cases}$$

12.53 (в)

Сжатие к $x+y-2=0$ с коэф. $1/3$.



$$r' = \lambda r + (1-\lambda) r_0 + (1-\lambda)\frac{(r-r_0, a)}{|a|^2} a$$

$r_0 = (0, 2)$

$a = (1, -1)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} + 2/3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2/3\, \frac{\left(\begin{pmatrix} x \\ y-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1/3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \end{pmatrix} + 1/3\,(x-y+2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = 1/3\, x + 1/3\, x - 1/3\, y + 2/3 = 2/3\, x - 1/3\, y + 2/3 \\ y' = 1/3\, y + 4/3 - 1/3\, x + 1/3\, y - 2/3 = -1/3\, x + 2/3\, y + 2/3 \end{cases}$$

12.51

$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ в себя

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y \\ y' = a_2 x + b_2 y \end{cases}$$

$A(5,4) \longmapsto B(\sqrt{5}, 0)$ $\qquad c_1 = c_2 = 0$ (ц. симм.)

$$\frac{(a_1 x + b_1 y)^2}{5} - \frac{(a_2 x + b_2 y)^2}{4} = 1$$

$$4(a_1^2 x^2 + 2a_1 b_1 xy + b_1^2 y^2) - 5(a_2^2 x^2 + 2a_2 b_2 xy + b_2^2 y^2) = 20$$

$$x^2(4a_1^2 - 5a_2^2) + xy(8a_1 b_1 - 10 a_2 b_2) + y^2(4b_1^2 - 5b_2^2) = 20$$

получ. ур-е должно совпадать с ур-ем гиперболы

$$\begin{cases} \frac{4a_1^2 - 5a_2^2}{20} = \frac{1}{5} \\ 4a_1 b_1 = 5a_2 b_2 \\ \frac{4b_1^2 - 5b_2^2}{20} = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} 4a_1^2 - 5a_2^2 = 4 \\ 4a_1 b_1 = 5a_2 b_2 \\ 5b_2^2 - 4b_1^2 = 5 \end{cases}$$

$\sqrt{5} = 5a_1 + 4b_1 \implies a_1 = \frac{4b_1 - \sqrt{5}}{5}(-1)$

$0 = 5a_2 + 4b_2 \implies a_2 = -\frac{4}{5} b_2$

$$4\,\frac{(4b_1 - \sqrt{5})^2}{25} - 5 \cdot \frac{16}{25} b_2^2 = 4$$

$$(16 b_1^2 - 8\sqrt{5} b_1 + 5) - 20 b_2^2 = 25$$

$-8\sqrt{5} b_1 + 5 = 45$

$b_1 = -\frac{40}{8\sqrt{5}} = -\sqrt{5} \implies a_1 = \sqrt{5}$

$a_1 = \sqrt{5}$ $\qquad b_2^2 = \frac{5+4b_1^2}{5} = 5$, $\quad b_2 = \pm\sqrt{5} \Rightarrow a_2 = \mp\frac{4}{\sqrt{5}}$

$b_1 = -\sqrt{5}$

ответ: $\begin{cases} x' = \sqrt{5}(x-y) \\ y' = \pm\sqrt{5}\left(\frac{4}{5}x - y\right) \end{cases}$

СТРУКТУРА ЛИН. ПРЕОБР-Я

VI. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ, СОБСТВ. ЗНАЧЕНИЯ. ДИАГОНАЛИЗИРУЕМОСТЬ

24.13

$\triangleleft$ Запишем хар. ур-е преобр-я:

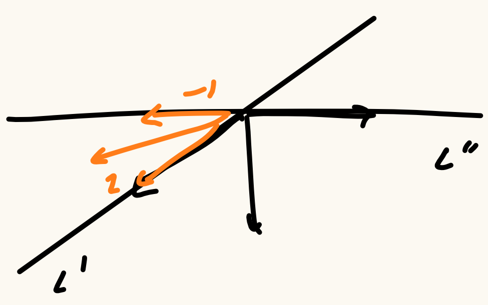
$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^n\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

где $a_n = |A|$

$n = 2k+1$ (нечетное) $\Rightarrow$ имеет ≥ 1 корень $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ $\square$

24.18 (2)

(отражение в подпр-ве L', $\parallel L''$)



матрица φ: $\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\qquad}_{\dim L'} \underbrace{\qquad}_{\dim L''}$

24.20(2)

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

найдем собств. знач:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1/3-\lambda & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3-\lambda & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3-\lambda \end{vmatrix} = (1/3-\lambda)\left((1/3-\lambda)^2 - 1/9\right) -$$

$$-\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3}-\lambda)-\tfrac{1}{9}\right)+\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3}-\lambda)\right)=$$

$$=(\tfrac{1}{3}-\lambda)(-\lambda)(\tfrac{2}{3}-\lambda)-\tfrac{1}{9}(-\lambda)+\tfrac{1}{9}\lambda=\lambda\left(-(\tfrac{1}{3}-\lambda)(\tfrac{2}{3}-\lambda)+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{9}\right)=$$

$$=\lambda\left(-(\lambda^2-\lambda+\cancel{2/9})+\cancel{2/9}\right)=\lambda(-\lambda^2+\lambda)=\lambda^2(-\lambda+1)$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda=0\\ \lambda=1\end{array}\right.$$

$\lambda=0$:

$$\varphi(a)=\frac{(a,n)}{|n|^2}n=\lambda a=0$$

$\Longrightarrow$ базис V_1: $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$, плоскость $x+y+z=0$

$\lambda=1$:

$$\frac{(a,n)}{|n|^2}n=a=\varphi(a)$$

$$\frac{(a,n)}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=a$$

$$\tfrac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)(e_1+e_2+e_3)=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$$

$\Longrightarrow a_1=a_2=a_3=1 \Longrightarrow$ собств. подпр-во V_2 — прямая $x=y=z$

базис $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

в базисе $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\1&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/3&1/3&1/3\\1&-1&0&0&1&0\\1&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/3&1/3&1/3\\0&1&0&1/3&-2/3&1/3\\0&0&1&1/3&1/3&-2/3\end{array}\right)$$

$$A'=S^{-1}AS=\tfrac{1}{9}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}=\tfrac{1}{9}\begin{pmatrix}3&3&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}=$$

$$=\tfrac{1}{9}\begin{pmatrix}9&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

24.22 (1^+, 2^*)

(1) $A = (a_1, \ldots, a_n)^T (b_1, \ldots, b_n) \neq 0$
$n \times n$ 1

все строки A ЛНЗ $\longrightarrow$ $\mathrm{rank}(A) = 1$

$\det(A - \lambda I) = 0$

Поскольку A имеет ранг 1, то у нее есть только одно ненулевое собств. значение. Найдем его по след матрицы:

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = u^T v$$

$$\lambda_1 = u^T v = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \quad — \quad ! \text{ собств. знач.}$$

Остальные $n-1$ собств. знач. равны нулю.

Собств. векторы: $Ax = \lambda x$

Пусть x лежит в направлении некоторого u, т.е. $x = cu$. Тогда:

$$Ax = A(cu) = c(Au) = c(u^T v)u = \lambda x$$

семейство векторов $\parallel u$ — собств. для λ_1.

+ все векторы, ортогональные u для $\lambda = 0$

24.30 (7, 19, 30)

(7) $A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E| = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda-2) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \end{array} \right.$$

базис V_λ — $\ker(\varphi - \lambda_i E)$

$\lambda_1 = 0:$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ — базис

$\lambda_2 = 0:$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad -x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ — базис

в базисе $S \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ найдем A:

$$S^{-1}: \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right); \quad S^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A' = S^{-1}AS = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

(19) $A_{771} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \\ 4 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)((5-\lambda)(-1-\lambda)+8) - (2(-1-\lambda)+8) - 1(8-4(5-\lambda)) =$$

$$= (4-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) + 2\lambda - 6 + 12 + 4\lambda = (\lambda-3)^2(2-\lambda) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda = 3 \end{array} \right.$$

$\ker(\varphi - \lambda_i E)$

$\lambda_1 = 3:$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\lambda_2 = 2:$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ & 2 & -1 \\ & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

в базисе $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ найдем A':

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ -1 & 0 & 2 & & 1 & \\ 0 & 1 & 4 & & & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & \underbrace{\begin{matrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{matrix}}_{S^{-1}} \\ & & 1 & \end{array}\right)$$

$$A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(30) $A_{283} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & 1 \\ -1 & -3-\lambda & 0 \\ -2 & -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda+1)^3 \Rightarrow \lambda = -1$$

найдем $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda E)$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -3 & -6 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ & 1 & -1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1 \quad$ базис: $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

φ не диагонализируемо, т.к. у $\chi_\varphi(\lambda)$ только 1 корень

24.42(1)

$D : P^n \to P^{n-1}$

$$A: \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & n-1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & & \\ & -\lambda & 2 & & 0 \\ & & -\lambda & 3 & \\ & 0 & & \ddots & n-1 \\ & & & & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^n = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$$ собств. вектор — это свободные члены

24.53

$$\left.\begin{aligned}(\lambda A)^T &= \lambda A^T \\ (A+B)^T &= A^T + B^T\end{aligned}\right| \Rightarrow \tau \text{ — линейное преобр-е}$$

$$\tau^2(A) = (A^T)^T = A \quad \Rightarrow \tau^2 = \varepsilon$$

$$A^T = \lambda A$$

$$\left[\begin{aligned}&\lambda = 1 \Rightarrow \text{симм. матрица} \\ &\lambda = -1 \Rightarrow \text{кососимм. матрица}\end{aligned}\right.$$

∀ матрицу можно представить в виде суммы симм. и кососимм. ⇒ очев.

22.55(1)

$$\varphi(X) = AX \qquad A = A_{\varphi e} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(4+\lambda)(4-\lambda)$$

$$\left[\begin{aligned}&\lambda = -4 \\ &\lambda = 4\end{aligned}\right. \text{ — собств. знач.}$$

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

⇒ базис: $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

матрица преобр-я: $\begin{pmatrix} -4 & & & \\ & -4 & & 0 \\ & 0 & 4 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}$

T-11

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A$$

(а) над $\mathbb{F}_3$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 2) + 1 = -\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$-(\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0$$

$\lambda = -1$ — собств. знач.

$\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 - x_3 = 0$ $\quad$ $x_1 = 1$
$x_2 + x_3 = 0$ $\quad$ $x_2 = -1 = 2$
$x_3 = 1$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ - собств. вектор.

(б) над F_5

$-\lambda^3 + 2\lambda + 1 = -(\lambda+1)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0$ $\quad$ $\left[\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = 3 \end{array}\right.$

$\lambda = -1$: $\quad$ $x_1 = 1$, $\quad x_2 = -1 = 4$, $\quad x_3 = 1$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ - собств. вектор

$\lambda = 3$: $\quad \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - собств. вектор

T-12

$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha & 0 \\ \pm\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \pm\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} \mp\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

$\varphi(e_3) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\operatorname{tr} A = 2\cos\alpha + 1$

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$$

VII. Инвариантные подпространства

24.69 (4)

◁ $v \in \ker p(\varphi)$: $\quad (a_n \varphi^n + \ldots + a_1 \varphi + a_0 I) v = 0$

$\varphi(v)$: $(a_n \varphi^n + \ldots + a_1 \varphi + a_0 I)(\varphi(v)) = (a_n \varphi^{n+1} + \ldots + a_1 \varphi^2 + a_0 \varphi)(v) =$

$= \varphi((a_n \varphi^n + \ldots + a_1 \varphi + a_0 I)(v)) = \varphi(0) = 0 \quad \triangleright$

24.79 (1, 2*)

(1) Матрицу лин. преобр. можно представить в виде блочной матрицы из матриц преобр-я подпространств.

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$$

$$\left[\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C + (-CA^{-1})A & D + (-CA^{-1})B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A|\,|D - CA^{-1}B| \right.$$

24.77

$\checkmark$ прямая $x = ta$ при повороте на $\forall$ угол отн. себя $\to$ в себя

$\checkmark$ пл-ть $\perp$ прямой $(x, a) = 0$ $\to$ себя

ответ

T.16

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}; \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \lambda - \lambda_0 & 1 & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & & \lambda - \lambda_0 \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_0)^n = 0$$

по первому порядку

λ – ! собств. знач.

$$A - \lambda_0 E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rk}(A - \lambda_0 E) = n - 1 \Rightarrow |\text{ФСР}| = 1 \Rightarrow$ инвар. подпр-во – $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

24.70

$\varphi: V \to V$ лин. преобр-е

Д-ть, что любое подпр-во, содержащее $\mathrm{Im}\,\varphi$, инвариантно.

Пусть W - подпр-во, содерж. $\mathrm{Im}\,\varphi$.

$\Rightarrow$ замкнуто отн. лин. операций:

$\forall w_1, w_2 \in W,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \hookrightarrow \alpha w_1 + \beta w_1 \in W$

$w \in W \overset{?}{\Rightarrow} \varphi(w) \in W$

w - эл-т V, может быть записан как лин. комб. базисных векторов

φ(базис) $\in W \xRightarrow{\text{замк.}} \varphi(w) \in W$ $\square$

7.15

Ответ: нет, нельзя

Матрица поворота в трехм. пр. на 90° —
— ортогональная матрица с $\det = \pm 1$.

При этом имеет хотя бы одно чисто мнимое или веществ. собств. знач.

$\forall$ вещ. верхнетр. матрица имеет только вещ. собств. значения.
но матрица поворота имеет вещ. и комплексные.

VIII. Теорема Гамильтона-Кэли. Жорданова нормальная форма. Минимальный многочлен.

зч. 126(5)

$$A_{235} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = A \qquad \operatorname{rank} A = 2$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ линейное преобр. нильпотентно

$e_3 \to e_2 \to e_1 \to 0$ — жорданова цепочка длины 3 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 4 \\ -1 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((2-\lambda)(-1)(3+\lambda)+8) - 2(\cancel{-3}-\lambda\,\overset{+1}{\cancel{+4}}) +$$

$$+ (-\cancel{2}+\cancel{2}-\lambda) = -\lambda^3 \cancel{-\lambda^2} \cancel{-2\lambda} \cancel{+\lambda} \cancel{+\lambda^2} \cancel{+2\lambda} \cancel{-\lambda} = -\lambda^3 \Longrightarrow \lambda = 0$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — жорданова норм. форма

$$B = A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ — ФСР}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ — ФСР}$$

$B^3 = 0 \Rightarrow$ дополним базис вектором $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$Be_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = e_2$$

$$B^2 e_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$$

Базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

24.127(7)

(7) $A_{277} = A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ -3 & 16 & 12 \\ 4 & -20 & -15 \end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 & -4 \\ -3 & 16-\lambda & 12 \\ 4 & -20 & -15-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((16-\lambda)(-15-\lambda)+20\cdot 12) + 5(3(15+\lambda)-48) - 4(60-64+4\lambda) =$$

$$= (2-\lambda)(-16\cdot 15 - \lambda + \lambda^2 + 20\cdot 12) + 5(3\lambda - 3) - 4(4\lambda - 4) =$$
$$= 2\lambda^2 - \lambda^3 - 2\lambda + \lambda^2 + 15\lambda - 15 - 16\lambda + 16 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda-1)^3 \Rightarrow \underline{\lambda = 1}$$

$$B = A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ -3 & 15 & 12 \\ 4 & -20 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ -1 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \dim = 2 \quad \Rightarrow \text{ЖНФ: } \overset{J_2(1)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

пусть $e_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, тогда: $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_1 = Be_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(15) $A = A_{465} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1-\lambda & -1 \\ -3 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1-\lambda & -1 \\ -3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ -3 & -1 & 1-\lambda \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left[(-1-\lambda)((1-\lambda)^2-1) \underbrace{\cancel{-((\lambda-1)+1) - (1+\lambda-1)}}_{0}\right] -$$

$$- \left[(1-\lambda)^2 - 1 - (3(\lambda-1)-3) - (3+3(1-\lambda))\right] - \left[1 + \lambda - 1 + (\lambda+1)(3+3(1-\lambda))\right] =$$

$$= \lambda^3(\lambda\cdot 3) = 0$$

$$\left[\begin{array}{ll} \lambda_1 = 0 & \text{кр. } 3 \\ \lambda_2 = 2 & \text{кр. } 1 \end{array}\right.$$

$\lambda_1 = 0:$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rank}(A - \lambda_1 E) = 2$$

$k = n - \mathrm{rank}\, A = 4 - 2 = 2$

собств. вект.:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -1 & 1 & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= x_3 \\ x_4 &= x_3 - x_2 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \text{найти присоед. вектор}$$

$$\Rightarrow \text{ЖНФ}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \alpha \\ -3 & -1 & 1 & -1 & \alpha + \beta \\ -3 & 1 & -1 & 1 & \beta \end{array}\right) \begin{aligned} &\Rightarrow \beta = -2\alpha \\ &\Rightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\lambda_2 = 2:$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ & -2 & 0 & 0 \\ & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & & \end{pmatrix} \Rightarrow e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(18) $A = A_{482} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 4 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(-\lambda^3 - \lambda) - 3\lambda^2 + 1 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 =$$

$$= (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \lambda_1 = 1 & \text{кр. } 2 \\ \lambda_2 = -1 & \text{кр. } 2 \end{array} \right. \Rightarrow \text{ЖНФ}: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1:$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$(Bx=0)$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ -6 & -8 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{ФСР}$$

$\lambda_2 = -1:$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & \end{pmatrix} \Rightarrow e_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 8 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_4}$$

24.26 (1, 4*)

(1) $|A - \lambda E| = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$

Замена: $\lambda \to (-\lambda)$

$|A + \lambda E| = (\lambda_1 + \lambda) \dots (\lambda_n + \lambda)$

$\Rightarrow$ $|A^2 - \lambda^2 E| = (\lambda_1^2 - \lambda^2) \dots (\lambda_n - \lambda^2)$

пусть $t := \lambda^2$:

$|A^2 - tE| = (\lambda_1^2 - t) \dots (\lambda_n^2 - t)$

Ответ: $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$

41.8

Все хар. числа $= 0$: $|A - \lambda E| = \lambda^n \Rightarrow A^n = 0$

$A^n = 0$: хар. числа: $Av = \lambda v \Rightarrow A^n v = \lambda^n v \Rightarrow \lambda^n v = 0 \quad \forall v \Rightarrow \lambda = 0$

(нильпотентность)

41.18

Д-ть: ∀ матрица подобна транспонир-ой.

// Матрицы A и B подобны, если $\exists S: \; B = S^{-1}AS$ //

Приведем A к ЖНФ: $A = \begin{pmatrix} J^1 & & & 0 \\ & J^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J^k \end{pmatrix}$, рассм. её по жорд. клеткам

При транспонировании матрица отр. симм. отн. гл. diag, и значит базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ меняется на $\{e_n, \dots, e_1\}$.

При таком отображении новая матрица подобна старой просто по def. подобия

$\Rightarrow$ жорд. кл. после транспон. подобны себе до транс.

$\Rightarrow A^T \propto A$ $\square$

T.19 Решено в к/р.

T.20

$\chi(t) = t^2(t-1)^3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} t=0 & \text{кр. } 4 \\ t=1 & \text{кр. } 3 \end{array} \right.$

$\mu(t) = t^2(t-1)^2 \Rightarrow$ max. возможный размер жорд. клетки для $t=0$ — 2
$t=1$ — 2

Возможные разбиения:

$4 = 2+2$ $\qquad$ $3 = 2+1$

$4 = 2+1+1$

$$\left. \begin{array}{l} J = J_2(0) \oplus J_2(0) \oplus J_2(1) \oplus J_1(1) \\ J = J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_2(1) \oplus J_1(1) \end{array} \right\} \text{ответ}$$

T.21. Аналогичная задача решена в к/р