

В.В.Киселев

**Теоретический
базис современной механики**

**Нерелятивистская механика
частиц и полей:
ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И СИММЕТРИИ**

ASPIRA AD OPTIMUM

ББК В31 (22.31) теоретическая физика
ISBN

КИСЕЛЕВ В.В. Теоретический базис современной механики.
НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА ЧАСТИЦ И ПОЛЕЙ:
ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И СИММЕТРИИ. — Москва, 2024. — 325 с.

Излагается фейнмановская формулировка механики с введением действия и амплитуды вероятности траектории. В классическом пределе симметрии действия исследуются на основе теоремы Нётер в лагранжевой механике и введения генераторов бесконечно малых канонических преобразований в гамильтоновой механике. Проводится построение фейнмановского интеграла по траекториям и обсуждается роль квантовой случайности.

Излагаются основы векторного анализа в координатном подходе, включая производную Ли в криволинейных координатах и основы интегрирования по гиперповерхностям в формализме дифференциальных форм.

Рассматривается группа поворотов и проводится квантование спина. Даётся описание тензора энергии-импульса и электромагнитного тока из принципа инвариантности действия относительно сдвигов и калибровочных преобразований.

Проводится рассмотрение классических примеров движения: в кулоновском поле и осциллятор, а также уравнений Максвелла и микроскопических основ термодинамики.

Для логической замкнутости физических построений излагаются некоторые математические вопросы: элементарные основы теории вероятностей, преобразование Фурье и ряд Тейлора.

Изложение начал механики в рамках исследовательского подхода к образованию рассчитано на имеющих познавательный интерес к современному видению законов природы студентов младших и старших курсов, а также аспирантов физических специальностей университетов, преподавателей и научных работников.

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ	6
§а «Математический барьер»	8
ГЛАВА 1. ДИНАМИКА И ДЕЙСТВИЕ	12
(1.А) ТРАЕКТОРИИ И ДЕЙСТВИЕ	12
§а Как механика ставит вопрос?	12
1 Частица: вероятность достоверности траектории	13
2 Тождественные частицы	19
2.1 Амплитуда вероятности	20
2.2 Перестановка тождественных частиц	22
3 Действие	25
3.1 Частица и функция Лагранжа	25
3.2 Поле: локальный лагранжиан	27
4 Принцип наименьшего действия	30
(1.В) СИММЕТРИЯ ДВИЖЕНИЯ	33
5 Теорема Нётер	33
5.1 Однородность пространства	40
5.2 Однородность времени	41
5.3 Изотропность пространства	41
6 Инерциальные системы и функция Лагранжа свободной непрерывистской частицы	43
ГЛАВА 2. ЧАСТИЦЫ	46
(2.А) КВАНТОВЫЕ ПУТИ И КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА	46
7 Амплитуда вероятности и постоянная действия	46
8 Гамильтонова механика	49
8.1 Уравнения Гамильтона–Якоби	49
8.2 Принцип Гюйгенса и гипотеза де Броиля	50
8.3 Уравнения Гамильтона	51
9 Квантовые пути	52
9.1 Флуктуации свободной квантовой частицы	52
9.2 Фейнмановский интеграл по траекториям для свободной частицы	56
§а Scientific fiction: Как Бог играет в кости?	61
9.3 Парадокс Эйнштейна–Подольского–Розена	65
§а Мысленный эксперимент	65
§б Формулировка Дэвида Бома	68
9.4 Неравенства и теорема Белла	71
(2.В) КАНОНИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ ДВИЖЕНИЯ	74
10 Динамика фазового пространства	74
10.1 Скобки Пуассона	74
10.2 Канонические преобразования	75
§а Генераторы бесконечно малых канонических преобразова- ний	76
10.3 Генераторы и коммутаторы: каноническое кванование . .	79
10.4 Метод решения уравнений Гамильтона–Якоби	80

ГЛАВА 3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИЖЕНИЯ	82
(3.А) АКТУАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА В РЕАЛЬНОСТИ	82
11 Сферически симметричный потенциал	82
12 Замкнутые финитные орбиты	84
12.1 Замкнутость любой финитной орбиты ($\ell \neq 0$)	85
§а Бесконечно растущий потенциал: гармонический осциллятор	87
§б Ограниченно растущий потенциал: кулоновский или гравитационный	87
13 Движение в кулоновском поле	89
13.1 Финитное движение (задача Кеплера)	91
13.2 Резерфордовское рассеяние	94
14 Изотропный гармонический осциллятор	98
15 Теорема вириала	99
ГЛАВА 4. ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО И ТЕНЗОРЫ	102
(4.А) ПЛОСКОЕ ПРОСТРАНСТВО	102
§а Координатный подход	102
16 Евклидово пространство	102
16.1 Векторы, ковекторы, тензоры	102
§а Связь координатного и инвариантного подхода	108
§б Метрический тензор	111
17 Тензор Леви-Чивиты	112
§а Зеркальная инверсия пространства	115
(4.В) СИММЕТРИИ МЕТРИКИ	119
18 Изометрии евклидовой метрики	119
19 Волновое уравнение, инвариантная скорость и изометрия	122
§а Действие свободной релятивистской частицы из теоремы Нёттер	127
§б Энергия, импульс, 4-скорость	129
ГЛАВА 5. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ	132
(5.А) ОПЕРАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ	132
20 Градиент, дивергенция, ротор	132
§а Ковекторный оператор ∇	132
§б Дифференцирование в сферических координатах при параллельном переносе	134
21 Дифференцирование в криволинейных координатах	138
§а Производная Ли по направлению	138
§б Ковариантная производная	141
§с Векторы Киллинга	148
22 Ковариантные уравнения Эйлера–Лагранжа и принцип эквивалентности масс	149
23 Тензор Римана	155
§а Принцип относительности Галилея: общековариантная реинкарнация	158

(5.В) ИНВАРИАНТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	160
24 Ориентированное интегрирование	160
24.1 Теорема Гаусса	160
24.2 Теорема Стокса	161
25 Внешний дифференциал	163
§а Дифференциальные формы в координатном подходе и интегрирование	163
25.1 Ориентированная площадь и внешнее произведение	163
25.2 Внешнее дифференцирование	166
§а Теоремы	169
25.3 Ориентированный объем в криволинейных координатах .	169
ГЛАВА 6. ИНСТРУМЕНТЫ ОПИСАНИЯ ДИНАМИКИ ПОЛЕЙ	172
(6.А) ОБЩЕКОВАРИАНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ	172
26 Криволинейная метрика как внешнее поле и закон сохранения энергии-импульса	172
§а Среда нерелятивистских частиц	176
(6.В) ОСНОВЫ КОВАРИАНТНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ	180
27 Уравнения Максвелла	180
27.1 Сила Лоренца, суперпозиция полей	180
27.2 Закон Кулона	180
27.3 Закон сохранения заряда	182
27.4 Закон Био-Савара	182
27.5 Индукция	184
27.6 Магнитные заряды	184
27.7 Ток смещения	184
27.8 Свободные электромагнитные волны: скорость	185
28 Потенциалы ($\mathcal{A}_0, \mathcal{A}$)	186
28.1 Первая пара уравнений Максвелла	186
28.2 Калибровочные преобразования	187
ГЛАВА 7. ГРУППА ПОВОРОТОВ И СПИН	189
(7.А) ТРАНСЛЯЦИИ И ПОВОРОТЫ	189
§а Схема изложения	189
29 Генераторы инфинитезимальных преобразований	190
29.1 Сдвиги \equiv трансляции координат	190
29.2 Группа поворотов	196
29.3 Группа $O(3)$	198
29.4 Общий вид генераторов поворотов и спин	199
(7.В) ГЕНЕРАТОРЫ СПИНА КАК МАТРИЦЫ	202
30 Спин $s = 1$	202
§а Полнота базиса и измерение среднего значения	206
31 Совместный базис двух эрмитовых матриц	208
(7.С) СПИНОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ И СОСТОЯНИЯ	210
32 Квантование спина	210
33 Тензорные поля	214
§а Сферические гармоники	218
34 Разложение приводимых тензоров на неприводимые	218
35 Поперечные векторные и тензорные поля	220
36 Спин $s = 1/2$	221

§а Группы SU(2) и SO(3)	225
36.1 Спинорная метрика	226
§а Сопряженный спинор	226
§б Инвариантное произведение спиноров	228
ГЛАВА 8. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ ДЕЙСТВИЯ	231
(8.А) ТРАНСЛЯЦИОННАЯ И ВРАЩАТЕЛЬНАЯ СИММЕТРИИ	231
37 Тензор энергии-импульса нерелятивистских частиц	231
37.1 Баланс энергии	233
37.2 Баланс импульса	234
38 Тензор орбитального момента	235
(8.В) СИММЕТРИИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО ПОЛЯ	236
39 Скалярное поле амплитуды вероятности траектории	236
39.1 Тензор энергии-импульса	240
39.2 Глобальная калибровочная инвариантность	241
39.3 Локальная калибровочная инвариантность и векторный бозон	242
39.4 Дискретные симметрии P и T	244
(8.С) АДИАБАТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ ДВИЖЕНИЯ	244
40 Квазипериодическое движение в магнитном поле	244
40.1 Периодическое движение	245
§а Инвариантная фазовая площадь	245
§б Поток магнитного поля как инвариант	247
40.2 Теорема Адемолло–Гатто	248
40.3 Переменные «действие–угол»	250
(8.Д) ДИПОЛЬ В ПОЛЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ	251
41 Квазиупругий диполь	251
41.1 Метод преобразования Фурье	253
41.2 Функция Грина классического осциллятора	255
41.3 Ряды Фурье	259
(8.Е) ДИНАМИЧЕСКИЙ ВЕКТОРНЫЙ ИНТЕГРАЛ ДВИЖЕНИЯ	261
42 Симметрия в атоме водорода	261
42.1 Вектор Рунге–Ленца–Лапласа	261
42.2 Скобки Пуассона и симметрия SO(4)	263
(8.Ф) ДИНАМИЧЕСКИЙ ТЕНЗОРНЫЙ ИНТЕГРАЛ ДВИЖЕНИЯ	267
43 Изотропный гармонический осциллятор	267
43.1 Комплексная амплитуда колебаний и группа SU(3)	267
43.2 Тензор Фрадкина	270
ПРИЛОЖЕНИЯ	274
ПРЕДИСЛОВИЕ К ПРИЛОЖЕНИЯМ	275
А. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	276

(A.I) Случайность и вероятность: дискретный случай	276
§а Что такое предел?	277
1А Случайная величина	279
1А.1 Событие и выборка: биномиальное распределение	279
1А.2 Усреднение	281
2А Распределение Пуассона	283
§а Экспонента и натуральный логарифм	284
§б Ряд Тейлора	288
§с Дисперсия по Пуассону	290
(A.II) Теория вероятностей: от дискретного к непрерывному	291
3А Непрерывная случайная величина	291
§а Гауссов интеграл и формула Стирлинга	292
3А.1 Нормальное распределение	296
(A.III) Теория вероятностей: разнообразие событий	299
§а Условная вероятность	299
§б Subjective probability	301
§с Примеры распределений вероятностей	301
§д Неравенства Маркова и Чебышева	302
§е Статистика больших чисел	303
В. Принципы термодинамики	305
(B.I) Основы статистической физики	305
4В. Распределение Гиббса	305
§а Термодинамическое равновесие	305
§б Статистическая сумма и обратная температура	306
§с Энергия и энтропия	308
§d Газ свободных частиц	310
5В. Кванты осциллятора	312
§а Распределение Ферми–Дирака	312
§б Распределение Бозе–Эйнштейна	314
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	315
ЛИТЕРАТУРА	323

Предисловие

Дух познает приходящее,
знания сохраняют уходящее.

Конфуций

Материал данного учебного пособия представляет собой вариант лекций, предлагаемых автором в бакалавриате студентам первого и второго курса Московского физико-технического института (Национального исследовательского университета). Цель дисциплины — показать единый корень классической и квантовой механики так, как это представляется современной науке, а также обозначить единство принципов построения механики частиц и полей, что предполагает использование и соответствующего математического аппарата. Весь подход в целом — это фейнмановская формулировка механики таким образом, как она видится с позиций настоящего времени¹.

Этот тезис предполагает, что вместо эмпирико-эвристического построения мозаики различных аспектов описания механики частиц и полей предлагается пойти по пути более общей идеи, минимизирующей необходимость детализации опытных изысканий и опирающейся на логически ясную и явно указанную базу аксиом, благодаря чему обширное множество эмпирико-эвристических клипов становятся довольно простыми следствиями этой общей идеи. Это можно сравнить с известной притчей о трех мудрецах, которым дали возможность по отдельности прощупать хобот, ногу и хвост слона, а затем спросили, с чем они имеют дело. Понятно, что, расширяя ареал своих эмпирических знаний и эвристических догадок, каждый из мудрецов, в конце концов, даст верный ответ о предмете исследований — слоне. Но все исследование предстанет совсем в другом свете, если опереться на более общую и глубокую идею эволюции видов: это исследование обратится в частный эпизод на древе развития жизни. Нечто подобное автор этого курса считает необходимым проделать и с механикой, а именно, с самого начала оперировать терминами, в которых общая идея механики становится логическим корнем для вывода множества фактов, которые сами прежде казались постулатами.

В основе курса — законы механики [1, 2, 3, 4, 5, 6], сформулированные в таком ракурсе, который позволяет затем их наиболее просто и эффективно применять для описания частиц и полей в классической нерелятивистской механике и подготовить методический инструментарий для логически ясного перехода к релятивистской механике частиц и теории поля, а также к квантовой теории в качестве продолжения данного спецкурса. В такой постановке целей изложения особый упор сделан на обоснование и применение таких понятий как действие, теорема Нёттер и сохраняющиеся величины, пространственно-временные симметрии, гамильтонова механика, движение в кулоновском или гравитационном поле и в поле изотропного осциллятора. Изложение пространственно-временных симметрий предусматривает обучение векторному анализу и, как следствие, введение генераторов пространственных трансляций и поворотов для полей, понятия спина для поля,

¹Более точно следует сказать, что фейнмановская формулировка механики излагается так, как ее понимает автор этой книги, конечно.

а значит, описание всей процедуры «квантования» собственных значений эрмитовых матриц для генераторов группы $SU(2)$. Рассмотрение матричного представления спиновых генераторов поворотов полей позволяет построить неприводимые тензорные представления для полей с собственным моментом $s = 0, 1, 2$, а при рассмотрении неприводимых тензорных произведений единичного радиус-вектора вывести выражения для сферических гармоник скаляра, вектора и тензора второго ранга.

Векторный анализ излагается в научном стиле: если в логике изложения возникает ключевой, хоть и не простой вопрос, то он не откладывается на потом (тогда «потом» растет как снежный ком), а рассматривается сразу, на месте. Как следствие такого подхода, изучается описание в криволинейных координатах, включая производную Ли и ковариантную производную, что позволяет перевести физический принцип эквивалентности инерционной и гравитационной массы в плоскость математического рассмотрения, которое приводит к введению псевдоевклидова пространства-времени Минковского и риманова пространства. Кроме того, пространственно-временной взгляд на движение позволяет провести рассмотрение тензора энергии-импульса для частиц и поля, а также калибровочную симметрию преобразования поля.

В качестве приложений изучения симметрий движений построены сохраняющиеся интегралы движения для траекторий в кулоновском поле и для изотропного осциллятора, а также фазовый инвариант периодического и квазипериодического движения с рассмотрением его физического смысла в случае движения в магнитном поле.

Наконец, излагается метод решения уравнений движения с помощью преобразования Фурье с определением дельта-функции Дирака на примере квазупругого диполя в поле электромагнитной волны, описан метод функции Грина для вынужденных колебаний классического осциллятора, подчеркнуты физические различия для разных прескрипций обхода полюсов в плоскости комплексной частоты и их роль при использовании запаздывающей и причинной функций Грина классического осциллятора.

Таким образом, изложение построено так, чтобы дать единый взгляд как на классическую нерелятивистскую механику частиц и полей, так и на классическую и квантовую механику с их общим генезисом в терминах действия и его симметрий.

Наконец, поскольку фейнмановская формулировки механики использует понятия из теории вероятностей, ее элементарные основы изложены в приложении к базовому тексту книги для полноты картины у тех читателей, кто на момент изучения механики оказался недостаточно знаком с понятиями вероятности и ее ключевыми характеристиками.

Автор выражает признательность своим коллегам Н.Колганову и В.Шмидту, которые вели семинары по спецкурсу, благодаря чему по ходу практических занятий в текст книги были внесены правки, хотя ряд вопросов излагается автором в своей манере, а не так, как это предпочитали делать коллеги на семинарах.

Автор признателен студентам Физтеха П.Лебедеву, М.Князеву, Д.Самоделкину и А.Новохатнему, благодаря которым были исправлены ошибки и опечатки в тексте, а также некоторые формулировки и подходы к изложению материала книги.

Прошу читателей направлять свои замечания и отзывы о книге по электронному адресу

kiselev.vv@phystech.edu

с пометкой «Спецкурс по нерелятивистской механике» или просто «NRMech».

§а «Математический барьер»

В книге используются математические сведения, перечисленные в этом параграфе, что существенно помогает пониманию тех разделов, которые опираются на элементарную математику.

Факториал. $n! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, $n \in \mathbb{N}$; $0! = 1$.

Бином Ньютона. $(a + b)^N = \sum_{k=0}^N C_N^k a^{N-k} b^k$, $C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$, $N \in \mathbb{N}$.

Сумма геометрической прогрессии. $b_n = b_0 q^n$, $n \geq 0$, $S_N = \sum_{n=0}^N b_n$ равна

$$S_N = b_0 \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$

Производная функции. $f'(x) = \frac{df}{dx}$,

$$\frac{df}{dx} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}.$$

Производная экспоненты

$$\frac{de^x}{dx} = e^x.$$

Производная по времени. Символ с точкой $\dot{q}(t) \equiv \frac{dq}{dt}$.

Частная производная — символьная производная. Если в формуле для функции f есть много символов, которые могут играть роль переменных, то дифференцирование проводится по символу в формуле. Например, для функции

$$f = a + v \cdot t$$

легко найти частные производные функции, зависящей от трех аргументов, $f = f(a, v, t)$,

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = t, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = v.$$

Эту же функцию можно рассмотреть как функцию пути $s = v \cdot t$, т.е. $f(a, s) = a + s$, так что

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 1,$$

и в более сложном варианте: так как

$$\frac{\partial s}{\partial t} = v, \quad f\left(a, \frac{\partial s}{\partial t}, t\right) = a + \frac{\partial s}{\partial t} \cdot t,$$

то

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t}, \quad \frac{\partial f}{\partial (\frac{\partial s}{\partial t})} = t,$$

в чем легко убедиться, если опять ввести символическое обозначение $\frac{\partial s}{\partial t} = v$.

Дифференциал — бесконечно малое изменение функции, линейное по дифференциалам аргументов функции. Для $f = f(x, y)$

$$df = \lim_{\substack{dx \rightarrow 0 \\ dy \rightarrow 0}} (f(x + dx, y + dy) - f(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy.$$

Комплексные числа.

Два вещественных числа x и y составляют комплексное

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1,$$

с умножением

$$(a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(ay + bx).$$

Комплексное сопряжение: $z^* = x - iy$. Квадрат модуля комплексного числа $|z|^2 = z^*z = x^2 + y^2$.

Рассмотрим комплексное число с единичным модулем $z = \cos \phi + i \sin \phi$, так как

$$z^*z = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1.$$

Исследуем это комплексное число как функцию угла ϕ , $z = z(\phi)$, а именно, вычислим производную по ϕ

$$\frac{d}{d\phi} z(\phi) = \frac{d}{d\phi} (\cos \phi + i \sin \phi) = -\sin \phi + i \cos \phi = i(\cos \phi + i \sin \phi) = i \cdot z(\phi).$$

Дифференциальное уравнение

$$z'(\phi) = i \cdot z(\phi), \quad \text{при условии } z(0) = 1,$$

элементарно решается, так как для производной экспоненты с аргументом $f(\phi)$ дифференцирование сложной функции дает

$$\frac{d}{d\phi} e^{f(\phi)} = \left(\frac{d}{df} e^{f(\phi)} \right) \cdot \left(\frac{d}{d\phi} f(\phi) \right) = e^{f(\phi)} \cdot f'(\phi),$$

откуда находим, что при $f(\phi) = i\phi$

$$\frac{d}{d\phi} e^{i\phi} = e^{i\phi} \cdot i, \quad \text{при условии } e^{i0} = 1.$$

Поэтому

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi.$$

Отсюда следует тождество Эйлера $e^{i\pi} = -1$. Значения функции

$$z(\phi) = \cos \phi + i \sin \phi$$

— это точки на единичной окружности с центром в начале координат на плоскости комплексной переменной z , т.е. на плоскости с декартовыми координатами (x, y) .

Столбцы, строки, матрицы.

Вектор в декартовых координатах на плоскости

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$$

можно записать в виде столбца, образованного координатными компонентами вектора,

$$\mathbf{r} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

По теореме Пифагора квадрат длины вектора равен сумме квадратов его компонент

$$\mathbf{r}^2 = x^2 + y^2.$$

Эту же формулу можно записать в другом виде, если ввести вектор-строку

$$\mathbf{r}^T \mapsto (x, y),$$

которую получают из столбца операцией, которую называют транспонированием. Заметим, что и столбец можно получить из строки операцией транспонирования.

Матричное умножение строки на столбец задается в виде суммы покомпонентного умножения

$$(a, b) \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd.$$

Поэтому

$$\mathbf{r}^2 = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Если компоненты вектора — это комплексные числа, то введем обозначение для столбца (кет-вектор)

$$|z\rangle \equiv \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

и эрмитово сопряжение \dagger как операцию транспонирования и комплексного сопряжения, которая дает строку (бра-вектор)

$$\langle z | \equiv (z_1^*, z_2^*), \quad \langle z | \equiv (|z\rangle)^\dagger.$$

Тогда матричное умножение бра-вектора на кет-вектор задает квадрат длины

$$\langle z | z \rangle = (z_1^*, z_2^*) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = |z_1|^2 + |z_2|^2.$$

Матрица размером 2×2 — это две двумерных строки или два двумерных столбца:

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}, \quad \hat{G} = \begin{pmatrix} c & c' \\ d & d' \end{pmatrix}.$$

Тогда матричное умножение как умножение каждой строки на каждый столбец приводит к новой матрице

$$\hat{F} \cdot \hat{G} = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & c' \\ d & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + bd & ac' + bd' \\ a'c + b'd & a'c' + b'd' \end{pmatrix}.$$

Эрмитово сопряжение матрицы

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z'_1 & z'_2 \end{pmatrix}$$

получается в результате композиции комплексного сопряжения и транспонирования строк и столбцов:

$$\hat{Z}^\dagger = \begin{pmatrix} z_1^* & z_1'^* \\ z_2^* & z_2'^* \end{pmatrix}.$$

Определенный интеграл по Риману. $x_0 = a, x_N = b,$

$$\int_a^b dx \cdot f(x) = \lim_{\substack{dx_k \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{k=0}^N dx_k \cdot f(x_k).$$

Использование комплексных чисел и матриц позволяет от литературных образов перейти к формулам, без которых невозможны точные науки.

Глава 1

Динамика и действие

Дельного в том, что мы знаем,
может оказаться гораздо больше,
чем это можно доказать.

Richard Feynman,
Нобелевская лекция

(1.A) Траектории и действие

§а Как механика ставит вопрос?

Для того чтобы обозначить проблематику, с позиций которой в этой книге излагается механика, рассмотрим свободную точечную частицу и ее траекторию, исходящую в момент времени t_0 из точки $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ в точку $\mathbf{r}(t)$. Свободное движение означает, что в инерциальной системе отсчета с декартовыми координатами на частицу не действуют никакие силы и частица движется по прямой линии с постоянной скоростью \mathbf{v} : $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} \cdot (t - t_0)$, где $\mathbf{v} = (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0)/(t - t_0)$. Рассмотрим теперь промежуточный момент времени \tilde{t} : $t_0 < \tilde{t} < t$, и точку в пространстве $\mathbf{r}'(\tilde{t}) \neq \mathbf{r}(\tilde{t})$, т. е. точку, которая не лежит на прямой траектории $\mathbf{r}(t)$. Построим траекторию свободной частицы $\mathbf{r}'(t)$, которая исходит в момент времени t_0 из точки $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ в точку $\mathbf{r}'(\tilde{t})$, а затем в момент времени \tilde{t} из точки $\mathbf{r}'(\tilde{t})$ в точку $\mathbf{r}(t)$. По построению траектория $\mathbf{r}'(t)$ — это ломаная, составленная из двух звеньев: см рис. 1.1.

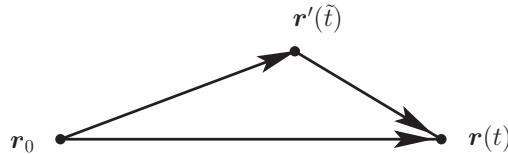


Рис. 1.1: Две траектории свободной частицы из начальной точки в конечную.

Обе траектории $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}'(t)$ удовлетворяют уравнениям движения свободной частицы на каждом из интервалов времени. Спросим себя: возможно ли движение свободной частицы по траектории с изломом? Для ответа на этот вопрос проведем мысленный эксперимент: закроем распространение по траектории без излома $\mathbf{r}(t)$ препятствием в промежуточной точке и включим источник частиц в исходной точке. Реальный опыт показывает, что несмотря на препятствие в конечную точку $\mathbf{r}(t)$ иногда попадают частицы, т. е. движение по ломаной траектории *возможно*, но не для каждой частицы, исходящей из источника, а для некоторых из них или, как говорят, для части событий, когда частицы попадают в точку за препятствием! В физике *реализация нескольких вариантов возможного* описывается теорией вероятностей¹, а огибание

¹См. Приложение А в этой книге на стр. 276.

препятствий называется дифракцией, которая реализуется в теории волн, где имеет место интерференция. Но какие понятия в механике связаны с вероятностью и интерференцией? Что стоит за этими конструкциями в случае движения частиц? Кроме того, если частица приходит в конечную точку по разным траекториям, то и скорость в конечной точке зависит от траектории, скорость может принимать разные значения в конечной точке при том, что траектории составлены из звеньев, где частица движется свободно. Более того, точно также и в начальной точке траектории имеют место различные значения скорости в случае, когда частица из источника попала в конечную точку независимо от того, было препятствие на прямой траектории или его не было. Как описывать подобную неопределенность в значении скорости и вариацию траекторий в механике? Ответ на вопросы такого рода может быть построен логически при экстраординарном напряжении абстрактного мышления с опорой на опыт изучения физических явлений и их математического описания, как это сделали гении 20-го века, в результате чего и появилась *фейнмановская формулировка механики*.

1 Частица: вероятность достоверности траектории

Детерминизм классической механики и начальные данные, траектории с фиксированными концами, динамический функционал на траектории, погрешность измерений и неопределенность траектории, трубка эквивалентных траекторий, функционал вероятности для пучка траекторий и его экстремальность на трубке классической траектории физической системы.

В механике частица представляет собой точку, которая движется в пространстве под воздействием сил. В качестве *наблюдаемой величины* измеряется положение частицы в пространстве, которое задается координатой q , а зависимость координаты от времени называется *эволюцией*, которая определяет траекторию $q(t)$.

Это движение полностью детерминировано, если заданы координата и скорость частицы в начальный момент времени, а также силы во всех точках пространства на протяжении всего времени их действия. В таком понимании силы должны однозначно определять изменение скорости, т. е. ускорение. Подобное описание движения частицы под действием сил представляет собой механистическую формулировку *принципа причинности*: всякая точка на траектории частицы возникает как следствие воздействия на частицу сил в предыдущие моменты времени при заданных начальных данных: положения и скорости в исходный момент времени. Детерминированность математически выражается в виде уравнений движения, которые по начальным данным в момент времени t_0 : координате и скорости, $\{q_0 = q(t_0), \dot{q}_0 = dq(t_0)/dt\}$, — задают единственную траекторию $q(t)$. Эта траектория в момент времени t' проходит через точку $q' = q(t')$. Это означает, что для данной траектории от начальных данных в виде $\{q_0, \dot{q}_0\}$ можно перейти к данным на концах траектории: парам $\{q_0, t_0\}$ и $\{q', t'\}$. Для свободной частицы, т. е. в отсутствие всяких сил, существуют инерциальные системы отсчета с декартовыми координатами, в которых частица движется поступательно и равномерно, т. е. траектория является прямой линией. Для свободной частицы, таким образом, переход от начальных данных к данным на концах траектории является взаимно однозначным. При наличии сил переход к данным на концах траектории

также будет взаимно однозначным, если рассматривать движение на бесконечно малом промежутке времени $t' - t_0 \mapsto dt \rightarrow 0$. На конечных промежутках времени задание конечных точек на траектории может отвечать множеству траекторий с разными значениями скорости в начальный момент времени. В этом случае говорят, что физическая система обладает либо симметрией, либо сингулярными точками. Например, от одного полюса на шаре можно прийти к другому полюсу за одинаковое время, если идти по разным меридианам с одной и той же угловой скоростью, что отвечает симметричной системе². В качестве случая наличия сингулярных точек можно указать систему линз, например, с двумя фокусами, так что траектории фотонов от фокуса до фокуса, по сути, охватывают все множество траекторий с началом в одном из фокусов с одинаковыми оптическими путями³.

Итак, для бесконечно малых сдвигов по времени траектория движения частицы однозначно задается данными на концах траектории. Это справедливо и для траекторий на конечных отрезках времени, если в системе нет сингулярностей или особых симметрий. Все другие «траектории», т. е. функции $q(t)$ с теми же данными на концах не будут удовлетворять уравнениям движения с заданными начальными данными. Траектории, не являющиеся решением уравнений движения, можно трактовать как траектории с другим набором сил, что влечет за собой, конечно, и соответствующие изменения начальных данных, а именно, скорости в исходной точке. В этом смысле, траектория, которая мало отличается от решения уравнений движения в заданной физической системе с фиксированными концами, получается за счет малой флуктуации сил.

Траектории с фиксированными концами можно поставить в соответствие число, равное единице, если эта траектория $q(t)$ — решение уравнений движения в заданной физической системе, и нулю, если траектория $\tilde{q}(t)$ не является решением уравнений движения. Такое отображение траектории на множество чисел в общем случае называется *функционалом*. Сконструированное нами сейчас соответствие можно назвать динамическим функционалом достоверности траектории C : если траектория соответствует динамике системы, то значение динамического функционала достоверности равно единице, $C[q(t)] = 1$, если не соответствует, то нулю, $C[\tilde{q}(t)] = 0$:

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если траектория — решение уравнений движения,} \\ 0, & \text{если траектория не является решением уравнений движения.} \end{cases}$$

Ясно, что при наличии нескольких частиц, которые движутся под воздействием внешних сил⁴, динамический функционал достоверности всей системы

²При наличии симметрии существуют преобразования перемещающие концы траектории в допустимой области значений, сохраняя при этом свойства траекторий. В приведенном примере со сферой в качестве полюсов можно выбрать любую пару противолежащих точек сферы.

³В отличие от случая симметрии в системе, сингулярные точки фиксированы и нет преобразований, перемещающих эти точки в системе без изменения свойств траекторий с концами в сингулярных точках.

⁴В этом случае из системы можно изъять любую из частиц без влияния на траектории оставшихся частиц, а значит, траектории являются независящими друг от друга, они зависят только от внешних сил в системе. Напротив, если частицы влияют на траектории друг друга, т. е., как говорят, взаимодействуют, то очевидно, что имеет смысл рассматривать не траектории отдельных частиц, а совокупность траекторий всех взаимодействующих частиц, и в этом случае понятие изолированной траектории теряет смысл, адекватный самой задаче о движении системы.

частиц является произведением динамических функционалов достоверности для отдельных частиц:

$$\mathcal{C}_{1\dots n} = \prod_{k=1}^n \mathcal{C}_k.$$

Аналогично, для одной частицы динамический функционал достоверности траектории, разбитой на последовательные участки точками на достоверной траектории, является произведением динамических функционалов достоверности для отдельных участков траектории.

Мы рассматриваем координаты и скорости частицы как *непрерывные вещественные величины*, которые в топологическом смысле определяются как множество точек с малыми окрестностями, покрывающими область непрерывности, а в физическом смысле эти окрестности отвечают погрешностям измерения непрерывной величины. В идеале окрестность может считаться бесконечно малой, но ненулевой. Именно наличием погрешности (открытой окрестности) непрерывные величины существенно отличаются от дискретных изолированных величин, счетных по натуральному ряду, поскольку счет даёт абсолютно точное значение дискретной изолированной величины. Если начальные данные для координаты и скорости принимают центральные значения с конечной погрешностью, то траектории из такой малой области начальных данных могут на малых интервалах времени либо мало отличаться от центральной траектории, либо быстро расходиться. В последнем случае говорят, что система находится в состоянии динамической неустойчивости или хаоса. Мы ограничимся рассмотрением систем без хаоса. В этом случае вся описанная нами выше трубка траекторий из исходной области начальных данных является эквивалентной в рамках погрешности измерений, так что для всего пучка динамический функционал достоверности траекторий в пучке равен единице.

Неопределенность траектории может быть связана не только с инструментальной погрешностью приборов измерения наблюдаемых величин, она может иметь и казуальный характер. Само предположение о том, что начальные данные в исходный момент времени (положение и скорость) могут быть заданы с инструментальной погрешностью приборов, базируется на опыте классической механики и, по сути, постулирует, что предел бесконечно малой инструментальной погрешности во всех механических системах достижим, и начальные данные могут задаваться с бесконечно малой неопределенностью, что может оказаться неверным (и оказалось в действительности при изучении этого предела в физике атомов). Вместе с тем, в самой логике построения механики возникают вопросы, которые показывают причинно-следственную проблематику парадигмы абсолютно точных начальных данных в пределе нулевой инструментальной погрешности приборов. Это становится понятно, если поставить задачу не о единичной траектории частицы, однократно зарегистрированной в приборе, а о многократных измерениях, проводимых одинаковыми приборами для частиц с определенными характеристиками, заданными логически замкнуто, по крайней мере, мысленно. Если приборная погрешность связана с регистрацией траектории частицы, то многократная регистрация траекторий вносит в задачу новые характеристики. Так, например, в случае, когда свободная частица движется с некоторой скоростью равномерно и поступательно, т. е. никак не взаимодействует с окружающей средой (приборами), положение центра системы координат в приборе для свободной частицы

никак не выделено и, стало быть, является неопределенным, так как оно с точки зрения взаимодействия частицы с прибором абсолютно произвольно: если в момент регистрации частицы прибором⁵ тем самым поставить в приборе реперную точку, которая будет измерена с инструментальной погрешностью самого прибора, то многократные повторы регистрации дадут некую форму распределения вероятности расположения реперных точек в приборе⁶. Это распределение будет иметь свои погрешности и другие вероятностные характеристики⁷ многократных измерений в зависимости от физики источника свободной частицы. Подобные вероятностные характеристики имеют совершенно иную природу, не связанную с природой погрешностей прибора. (Например, если в качестве источника электронов иметь электронную пушку с малым разбросом импульса электронов по импульсу, то в приборе распределение по координате будет иметь вид широкой полосы в области значений показаний прибора.) Другими словами, распределение положения точки регистрации частицы в приборе, если частица двигалась до этого свободно, без взаимодействия с системой, является распределением случайной величины, значение которой никак казуально не предопределено на каждой отдельной траектории. Неопределенности этой случайной величины — это новый эффект, который требует адекватного описания. С точки зрения проблемы начальных данных следует признать, что для свободной частицы задать её положение в начальный момент времени означает задать исходную точку частицы в приборе, а значит, взаимодействие частицы с прибором должно исходить быть не равно нулю! В этом смысле переход от эволюции системы (в данном случае, речь идет об эволюции свободной частицы) с заданными исходными данными к описанию эволюции с заданными координатами на концах траектории становится логически более замкнутым и обоснованным: измерять координаты частицы действительно можно с любой инструментальной погрешностью⁸.

Далее, напротив, в случае, если частица совершенно точно находится в заданной точке пространства, отсутствуют какие-либо данные о траектории в других точках пространства, т. е. совершенно неопределено, с какой скоростью движется частица, поскольку для определения скорости необходимо получить данные о сдвиге частицы в другую точку⁹. Значит, если на частицу

⁵Речь идет о включении взаимодействия частицы с внешней системой в виде акта изменения положения частицы, после чего сама физическая система уже изменяется и эволюционирует не как свободная частица и прибор по отдельности, а интегрально, в комплексе, что уже представляет собой другую задачу.

⁶Имеется в виду возможность многократного исследования физической системы с идентичными характеристиками, в данном случае, системы свободной частицы, которая попадает в детектор, измеряющий координату частицы в некий момент времени, который причинно не задан с точки зрения взаимодействия частицы с детектором.

⁷Для полноты изложения описание элементарных основ теории вероятностей, включая понятия случайной величины, функции распределения и средних отклонений приводится в Приложении на стр. 276.

⁸Вопрос о возможности точного измерения разных компонент координат частицы также ставится в современной науке: при наличии скрытых динамических связей между координатами, например, в теории суперструн с внешними полями возникает ситуация, когда компоненты координат испытывают флуктуации, и говорят о некоммутативной геометрии пространства.

⁹По сути, речь идет о способе измерения скорости: начальная точка координаты частицы задана в исходный момент времени, $q_0 = q(t_0)$, а по прошествии малого интервала времени $dt \rightarrow 0$ проводится измерение положения частицы q' в момент времени $t_0 + dt$, так что скорость называют величину $\dot{q}_0 = \lim_{dt \rightarrow 0} (q' - q_0)/dt$. Если многократные повторения опыта приводят к одним и тем же значениям q' с инструментальной точностью, которая стремится к нулю, а значит, $q' = q(t_0 + dt)$ лежит на одной и той же траектории, то пре-

начинают действовать внешние силы, т. е. она взаимодействует с окружающей средой, положение частицы уже может быть более определено, поскольку силы изменяют скорость частицы, т. е. от них зависит сравнение характеристик движения в разных точках, но так как это положение еще имеет ненулевую неопределенность, то и значение сил задается неоднозначно, силы при повторных опытах имеют флуктуации, что делает траекторию несколько неопределенной, а не абсолютно точной¹⁰. Мы видим, что неопределенности в значениях скорости и координаты частицы каким-то образом связаны кэуально, но эта связь в области применимости классической механики может быть пренебрежимо малой, она существенна в квантовой механике. Для нас же здесь важно, что неопределенность траектории частицы отвечает пучку траекторий или трубке траекторий возле центрального значения, эквивалентных с точки зрения динамического функционала достоверности траекторий, и этот функционал определяется на траектории с заданными концами.

Несколько иной взгляд на происхождение неопределенностей при движении частицы предлагает *теория скрытых параметров*: если наряду с известными нам наблюдаемыми величинами, определяющими динамику движения частицы, существуют параметры, которые скрыты для нашего наблюдения, то в зависимости от частоты, с которой эти скрытые параметры изменяются в области своего определения, для каждой попытки описать траекторию частицы с некоторой вероятностью возникнут разные траектории возле центральной траектории, для которой скрытые параметры принимают наиболее вероятное значение. Тогда траектория частицы зависит от сил, которые несколько изменяются из-за разных значений скрытых параметров. Вследствие этого возникает распределение вероятности достоверности траектории из-за того, что известные нам начальные данные неполны, к ним необходимо добавить знание скрытых параметров и уравнения движения для этих параметров.

Возвращаясь от замечания о скрытых параметрах к ситуации, когда есть

дел отвечает скорости частицы на этой траектории в начальный момент времени. Однако логически строго утверждать, что при сдвиге по времени опыт будет давать одно и то же значение координаты q' , невозможно, так как само понятие скорости определяется в результате описанного опыта многократных измерений координаты в ходе эволюции. Поэтому мы не можем *a priori* утверждать, что частица с заданной исходной координатой q_0 имеет одно и то же положение в момент времени $t_0 + dt$, так как кэуально фиксация исходной точки никак не задает скорость частицы в этой точке: скорость нужно измерить при смещении по времени в другую точку. Конечно, эксперименты в некоторой области точности измерений убеждают нас, что траектория с начальными данными задается однозначно. Но эксперименты, которые выходят за рамки этого приближения, показали, что точно заданная исходная точка эволюции вовсе не означает, что скорость в этой точке может быть определена точно, без кэуальных неопределенностей.

¹⁰Забегая вперед, скажем, что согласно второму закону Ньютона изменение импульса частицы δp за характерное время δt связано с силой, в частности, с изменением потенциальной энергии δU при изменении координаты δx : $\delta p/\delta t \sim \delta U/\delta x$, – или, другими словами, работа силы $F \sim \delta p/\delta t$ на отрезке δx – это $\delta U \sim F\delta x \sim \delta p\delta x/\delta t$. Отсюда $\delta x \cdot \delta p \sim \delta U \cdot \delta t$. Такое соотношение вариаций динамических величин можно трактовать в следующем смысле: неопределенность в значении импульса δp связана с неопределенностью в значении работы сил, которые действуют на частицу, δU , причем, сами силы и их работа флуктуируют за период времени δt , когда неопределенность в положении частицы составляет δx . Это согласуется со случаем свободной частицы, когда в пределе постоянного импульса $\delta p \rightarrow 0$ и при отсутствии работы внешних для частицы сил $\delta U \rightarrow 0$ неопределенность положения частицы относительно начала отсчета $\delta x \rightarrow \infty$ и время, за которое произойдет изменение энергии, $\delta t \rightarrow \infty$. При этом, величина в виде произведения флуктуаций $\delta x \cdot \delta p \sim \delta U \cdot \delta t$ имеет неопределенность типа «ноль на бесконечность». Как мы увидим, это произведение не может быть бесконечно малым вследствие квантовых эффектов. Другими словами, при стремлении к абсолютной точности измерения непрерывных динамических величин остается неотличимый набор траекторий, отвечающий заданным граничным условиям для движения.

погрешность измерения наблюдаемых характеристик частицы, представим теперь себе ситуацию, когда центральное значение начальных данных немного сдвинуто так, что при заданной погрешности новая область начальных данных лишь наполовину перекрывается с исходной областью начальных данных при той же погрешности. В этом случае динамический функционал достоверности траекторий в половине случаев принимает значение, равное единице, если траектория находится в пересечении двух областей данных, и равное нулю, если траектория находится вне исходной трубы траекторий. В этом случае естественно говорить уже не о динамическом функционале достоверности траектории, а о функционале вероятности достоверности траектории \mathcal{W} , где вероятность понимается как математическое выражение существования возможных вариантов реальности — доля определенных событий в общей бесконечной сумме попыток, а в приведенном примере можно положить эту вероятность равной $\mathcal{W} = \frac{1}{2}$. Конечно, определение вероятности достоверности пучка близких траекторий может быть не столь упрощенным и существенно более формализованным. Например, можно брать N_{in} траекторий в области погрешности определения начальной координаты и начальной скорости и вычислять, сколько из этих траекторий попали в область фиксированных значений координаты и скорости на конце траектории N_{out} за фиксированный интервал времени, и определять вероятность в зависимости от отношения $N_{\text{out}}/N_{\text{in}}$.

Таким образом, в общем случае при наличии ненулевой погрешности измерений координат и скорости следует ввести функционал вероятности достоверности траектории со значениями во всем спектре от нуля до единицы: $\mathcal{W} \in [0, 1]$. Эта вероятность достоверности достигает своего максимума на решении уравнений движения с фиксированными концами траектории в за-

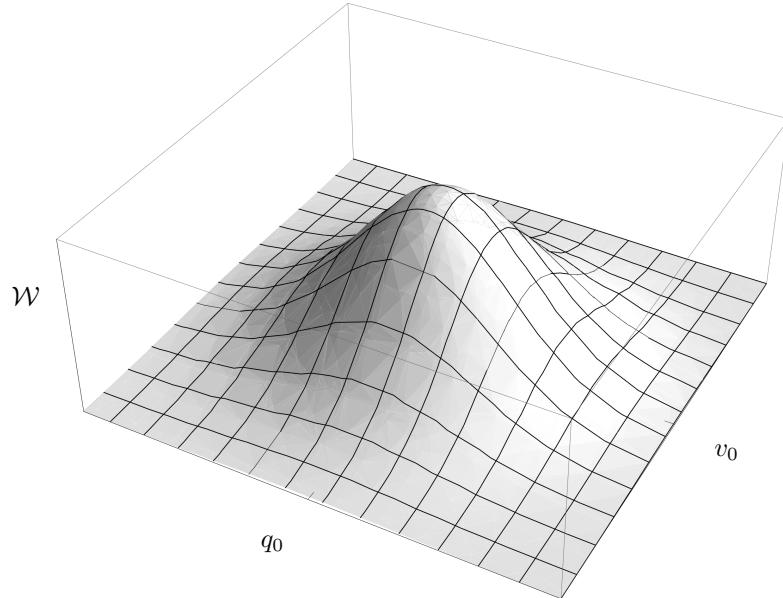


Рис. 1.2: Зависимость вероятности достоверности пучка траекторий при наличии погрешности в определении координат и скорости.

данной физической системе, т. е. \mathcal{W} имеет экстремум на «истинной» или, как говорят, «прямой» траектории (см. рис. 1.2).

Для придиличного читателя специально подчеркнем, что плавная зависимость вероятности возле максимума на рис. 1.2 обусловлена тем, что сама вероятность определения погрешности измерения координаты, например, не имеет резких границ, а сосредоточена возле центрального значения интервала погрешности координаты и плавно спадает за границами этого интервала, что отличается от наивного представления о вероятности погрешности, которая равномерно распределена строго в пределах отрезка погрешности с резкими границами, что приводило бы к линейному спаду перекрытия двух таких отрезков погрешности координаты в зависимости от смещения центров отрезков, а максимум на рис. 1.2 вместо плавного приобрел бы форму вершины в виде угла.

Экстремум функционала означает, что сравнение значения функционала проводится на разных траекториях $q(t)$ и $\tilde{q}(t) = q(t) + \delta q(t)$,

$$\delta\mathcal{W} = \mathcal{W}[\tilde{q}(t)] - \mathcal{W}[q(t)],$$

в пределе произвольного бесконечно малого различия траекторий $\delta q(t) \rightarrow 0$ в случае, когда начало и конец траектории, соответственно, при $t = t_0$ и $t = t'$ фиксированы, получается равным нулю,

$$\delta\mathcal{W} = 0, \quad \text{при } \delta q(t) \rightarrow 0, \quad \delta q(t_0) = \delta q(t') = 0. \quad (1.1)$$

Траекторию можно описывать в разных системах координат, в разных системах отсчета. Значение вероятности достоверности при переходе от одних таких систем к другим не меняется, т. е. остается *инвариантным*.

По построению, функционал вероятности достоверности траекторий вычисляется как произведение вероятностей для независимых подсистем и подтраекторий:

$$\mathcal{W}_{1\dots n} = \prod_{k=1}^n \mathcal{W}_k. \quad (1.2)$$

2 Тождественные частицы

Принцип запрета Паули и введение амплитуды вероятности, операция перестановки траекторий тождественных частиц, фермионы и бозоны.

Рассмотрим, в частности, систему из двух тождественных частиц. Тождественность означает, что частицы имеют *одинаковый спектр (набор) траекторий во всех физических системах*. Если на частицы действуют лишь внешние силы, то для каждой из них можно установить вероятность достоверности $\mathcal{W}_1 \neq 0$ и $\mathcal{W}_2 \neq 0$ для траекторий “1” и “2”, соответственно. При этом можно было бы предположить, что совместная вероятность достоверности двух траекторий $\mathcal{W}_{(1,2)} = \mathcal{W}_1 \cdot \mathcal{W}_2$. При этом для тождественных частиц можно перейти к пределу “2” → “1”, так что $\mathcal{W}_{(1,1)} = \mathcal{W}_1^2$. Однако такое построение противоречит принципу запрета Паули: тождественные траектории для тождественных фермионов запрещены¹¹, т. е. для фермионов $\mathcal{W}_{(1,1)} = 0$, что

¹¹ Важно подчеркнуть, что принцип запрета Паули универсален: он не зависит от природы фермионов и от их взаимодействий!

приводило бы к условию отсутствия прямой траектории и для единственного фермиона, $\mathcal{W}_1 = 0$.

Подчеркнем, что принцип запрета Паули для фермионов является универсальным, т. е. не зависит ни от природы взаимодействий частиц, ни от величины силы взаимодействия, и, в частности, принцип запрета применим и в случае, который мы сейчас рассмотрели, когда частицы движутся под воздействием лишь внешних сил и не взаимодействуют друг с другом. Однако, совершенно ясно, что противоречие вероятностного описания фермионов, полученное нами в частном случае независимых траекторий, является и общим противоречием такого описания в силу универсальности принципа запрета Паули.

Как принцип запрета Паули может сочетаться с вероятностной картиной описания траекторий тождественных фермионов, для которых вероятность тождественных траекторий должна точно обращаться в нуль? Идея разрешения этого парадокса пришла из опыта описания волн. А именно, волны характеризуются интерференцией, которая возникает при сложении амплитуд волн с учетом относительных фаз, причем интенсивность волны в узлах тождественно обращается в нуль. При этом, для описания интерференции амплитуд разной величины с разными фазами наиболее эффективное описание отвечает введению комплексных амплитуд, т. е. модуля амплитуды и ее комплексной фазы для каждой волны. А интенсивность волны тогда будет определяться квадратом модуля суммы комплексных амплитуд при интерференции. Поэтому нулевая вероятность достоверности тождественных траекторий тождественных фермионов может быть представлена как результат деструктивной интерференции комплексных амплитуд вероятности. Но каких амплитуд? Рассмотрим этот вопрос более детально.

2.1 Амплитуда вероятности

Итак, введем вероятность достоверности \mathcal{W} траектории как интенсивность амплитуды вероятности Ψ : $\mathcal{W} = |\Psi|^2$, где амплитуда вероятности может быть, вообще говоря, уже комплексным числом в отличие от вероятности¹², $\Psi \in \mathbb{C}$. В случает, когда в системе с внешними силами лишь одна частица, для траектории частицы “1” амплитуда вероятности траектории номер “1” — $\Psi_1(q'_1)$, для траектории частицы “2” амплитуда вероятности траектории номер “2” — $\Psi_2(q'_2)$. Если же в системе движутся обе частицы, то амплитуда вероятности для двух независимых траекторий — $\Psi_1(q'_1)\Psi_2(q'_2)$. Однако, если частицы тождественны, то их невозможно отличить, и наряду с записанной амплитудой вероятности имеется второй вариант — $\Psi_1(q'_2)\Psi_2(q'_1)$. Какой из вариантов действительно имеет место? Принцип запрета Паули совместно с понятием амплитуды вероятности позволяет сформулировать ответ на этот вопрос: необходимо рассмотреть вполне определенную *интерференцию амплитуд вероятности* (1.3). При интерференции существенны относительные комплексные фазы всех вкладов в суперпозиции: только при определенном значении этих фаз и имеет смысл говорить о суперпозиции. Такая определенность называется условием когерентности амплитуд вероятности, в противном случае говорят о декогерентности, т. е. о невозможности рассматривать суперпозицию ампли-

¹² Ясно, что амплитуды Ψ и $e^{i\alpha}\Psi$ эквивалентны, так как они задают одну и ту же вероятность достоверности траектории, но мы опустим эту тонкость из нашего рассмотрения в рамках этого курса.

туд вероятности. В случае суперпозиции амплитуд для двух тождественных фермионов условие когерентности строго фиксировано относительной фазой, отвечающей знаку минус, что обеспечит деструктивную интерференцию,

$$\Psi_{(1,2)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_{(1,2)} (\Psi_1[q'_1]\Psi_2[q'_2] - \Psi_2[q'_1]\Psi_1[q'_2]), \quad \mathcal{A}_{(1,2)} \neq 0, \quad |\mathcal{A}_{(1,2)}| < \infty, \quad (1.3)$$

где для простоты записи мы указали лишь координаты траектории в момент времени t' , считая, что исходные точки траекторий и интервалы времени эволюции совпадают, а в число координат включили и одинаковые поляризации фермионов. Тогда, конечно, $\mathcal{W}_{(1,1)} = |\Psi_{(1,1)}|^2 \equiv 0$ для фермионов. В случае, когда траектории удовлетворяют уравнениям движения и $|\Psi_{(1,2)}|^2 \neq 0$, коэффициент нормировки $\mathcal{A}_{(1,2)}$ подбирается так, чтобы вероятность достоверности экстремальных траекторий была равна единице.

Чтобы продемонстрировать, что идея об амплитуде вероятности достоверности траекторий тождественных частиц в связи с необходимостью описания принципа запрета Паули для фермионов не зависит от того, как взаимодействуют тождественные частицы, с какой силой они взаимодействуют, являются ли траектории тождественных частиц независимыми друг от друга или изменяются при введении в систему с одной частицей второй, тождественной ей, частицы, запишем амплитуду в системе с двумя тождественными фермионами, у которых все характеристики траекторий совпадают, за исключением конечных точек траекторий: у первой частицы конечная точка траектории q'_1 , у второй — q'_2 . Тогда амплитуда вероятности достоверности траекторий таких двух тождественных фермионов $\Psi_{(1,2)}$ может быть записана либо в виде

$$\Psi[q'_1, q'_2],$$

либо в виде, где аргументы конечных точек траектории переставлены,

$$\Psi[q'_2, q'_1],$$

так как частицы тождественны, и следовательно, нет никакой возможности установить, какая из этих тождественных частиц оказалась в точке q'_1 , а какая — в q'_2 . Идея комплексной амплитуды вероятности заключается в том, что вводится суперпозиция амплитуд, так что

$$\Psi_{(1,2)} = c_1 \Psi[q'_1, q'_2] + c_2 \Psi[q'_2, q'_1], \quad c_{1,2} \in \mathbb{C},$$

и тогда неоднозначность соответствия двух возможных вариантов записи амплитуды для двух тождественных частиц сводится к выбору комплекснозначных коэффициентов в суперпозиции $c_{1,2}$. Однако в силу тождественности частиц существует предел $q'_2 \rightarrow q'_1$, когда оба тождественных фермиона оказываются на одной траектории номер 1, и согласно принципу запрета Паули $\Psi_{(1,1)} \equiv 0$ независимо от того, какое взаимодействие есть у этих фермионов. Это условие автоматически удовлетворяется, если $c_2 = -c_1$, и тогда перестановка концов траекторий $q'_1 \leftrightarrow q'_2$ приводит к амплитуде

$$\Psi_{(2,1)} = c_1 (\Psi[q'_2, q'_1] - \Psi[q'_1, q'_2]) = -\Psi_{(1,2)},$$

а значит, $\mathcal{W}_{(1,2)} = |\Psi_{(1,2)}|^2 = |\Psi_{(2,1)}|^2 = \mathcal{W}_{(2,1)}$, и вероятности совпадают, если переставить местами тождественные частицы, а в пределе одной траектории

для двух тождественных фермионов получится

$$\Psi_{(1,1)} = -\Psi_{(1,1)} \Rightarrow \Psi_{(1,1)} \equiv 0. \quad (1.4)$$

Этот результат не зависит от природы взаимодействия фермионов, он универсален. Подобный итог достигается, если вместо вероятности достоверности траектории ввести комплексную амплитуду вероятности и постулировать принцип суперпозиции амплитуд, а для тождественных фермионов еще и вполне определенный способ деструктивной интерференции. Само введение амплитуды вероятности и принципа суперпозиции амплитуд вероятности является открытием: это позволяет не только описать принцип запрета Паули, но и становится принципом построения механики, который проявляется для всех физических систем и позволяет не только объяснять уже известные явления природы, но и предсказывать новые физические закономерности.

Подчеркнем, что разрешение парадокса нулевой вероятности наблюдать тождественные фермионы на тождественных траекториях привело в открытию пространства комплексных амплитуд вероятности траекторий, и в этом пространстве имеет место принцип суперпозиции амплитуд. Это пространство — фундаментальная основа механики в фейнмановской формулировке.

Отметим, что в теории скрытых параметров, которая может объяснить вероятностный характер движения, совершенно нет возможности описать принцип запрета Паули: тождественность траекторий имеет место только при тождественности скрытых параметров для тождественных частиц, а значит, необходимо потребовать, чтобы вероятность тождественных значений скрытых параметров была равна нулю, а следовательно, вместо объяснения необходимо постулировать запрет Паули и в пространстве скрытых параметров. Однако для не взаимодействующих друг с другом тождественных частиц это совершенно невозможно: независимость движения означала бы произведение вероятностей и в пространстве скрытых параметров, что опять приводило бы к нулевой вероятности наблюдать одну тождественную частицу на фиксированной заданной траектории. В теории же с амплитудой вероятности, когда допускается интерференция амплитуд, подобных проблем нет.

2.2 Перестановка тождественных частиц

В общем случае рассмотрим теперь операцию перестановок траекторий тождественных частиц \mathcal{S}_{12} :

$$\mathcal{S}_{12} \Psi_{(1,2)} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_{(2,1)},$$

причем необязательно фермионов, для которых выполняется принцип запрета Паули. Вероятность достоверности траекторий для тождественных частиц не зависит от того, как мы пронумеровали тождественные частицы, так как они неотличимы, $\mathcal{W}_{(1,2)} = \mathcal{W}_{(2,1)}$, а следовательно, $\Psi_{(2,1)} = \lambda \Psi_{(1,2)}$, где $|\lambda| = 1$, т. е. $\lambda^* \lambda = 1$.

Покажем, что λ — вещественное число. Это можно доказать, если использовать условие, что наборы траекторий для тождественных частиц в любой физической системе идентичны, а значит, имеет место равенство для сумм по некоторому спектру траекторий

$$\sum_{(1,2)} \Psi_{(1,2)}^* \Psi_{(2,1)} = \sum_{(1,2)} \Psi_{(2,1)}^* \Psi_{(1,2)} < \infty, \quad (1.5)$$

так как эти суммы являются записью одной и той же величины с переменной обозначений элементов суммирования из совпадающих множеств траекторий¹³.

Для фермионов, согласно принципу запрета Паули, $\Psi_{(1,1)} \equiv 0$ и $\Psi_{(2,2)} \equiv 0$, так что, если теперь рассмотреть сумму по двум разным траекториям 1 и 2, то исходное равенство (1.5) примет вид

$$\sum_{(1,2)} \Psi_{(1,2)}^* \mathcal{S}_{12} \Psi_{(1,2)} = \sum_{(1,2)} (\mathcal{S}_{12} \Psi_{(1,2)})^* \Psi_{(1,2)}, \Rightarrow$$

$$\sum_{(1,2)} \Psi_{(1,2)}^* \lambda_{(1,2)} \Psi_{(1,2)} = \sum_{(1,2)} \lambda_{(1,2)}^* \Psi_{(1,2)}^* \Psi_{(1,2)},$$

и тождество имеет место для произвольных отличных от нуля амплитуд траекторий, что возможно только при

$$\lambda = \lambda^*,$$

так что с учетом $|\lambda| = 1$ находим

$$\lambda = \pm 1.$$

Для фермионов допустимо только значение $\lambda = -1$, так как равенство

$$\mathcal{S}_{12} \Psi_{(1,2)} = \lambda_{(1,2)} \Psi_{(1,2)} = \Psi_{(2,1)}$$

сводится к

$$-\Psi_{(1,2)} = \Psi_{(2,1)},$$

так что предел совпадения траекторий $2 \rightarrow 1$ при условии, что $\lambda_{(1,2)}$ — это непрерывная функция без скачков, а значит, $\lambda_{(1,2)} = \lambda_{(1,1)} = \lambda = -1$, даст

$$-\Psi_{(1,1)} = \Psi_{(1,1)} \Rightarrow \Psi_{(1,1)} \equiv 0,$$

в силу того, что комплексное число равно самому себе с обратным знаком только в случае, если это число нуль.

Вводя непрерывность собственного значения оператора перестановок, мы поступируем, что фермионы являются фермионами во всех физических системах, то есть на любых траекториях. Это значит, что при перестановке тождественных фермионов амплитуда вероятности меняет знак, $\lambda = -1$.

Если частицы не являются фермионами, то на одной и той же траектории могут находиться тождественные частицы, $\Psi_{(1,1)} \neq 0$, и равенство

$$\mathcal{S}_{12} \Psi_{(1,2)} = \lambda \Psi_{(1,2)} = \Psi_{(2,1)}$$

в пределе совпадения траекторий $2 \rightarrow 1$ при условии непрерывности собственного значения оператора перестановок даст

$$\lambda \Psi_{(1,1)} = \Psi_{(1,1)}, \quad \Psi_{(1,1)} \neq 0 \Rightarrow \lambda = +1.$$

¹³Понятно, что говорить о суммах можно, только если эти суммы конечны. Равенство получается, если переобозначить $(1,2) \mapsto (2',1')$, а потом заметить, что штрихи не имеют значения, так как мы просто нумеруем траектории из одного и того же множества траекторий.

Говорят, что такие тождественные частицы — бозоны. Тогда в сумме по двум траекториям 1 и 2 в исходном равенстве (1.5) можно сократить вклады, когда бозоны находятся на одной и той же траектории, и получить

$$\sum_{(1,2)} \Psi_{(1,2)}^* \mathcal{S}_{12} \Psi_{(1,2)} = \sum_{(1,2)} (\mathcal{S}_{12} \Psi_{(1,2)})^* \Psi_{(1,2)}, \Rightarrow$$

$$\sum_{(1,2)} \Psi_{(1,2)}^* \lambda_{(1,2)} \Psi_{(1,2)} = \sum_{(1,2)} \lambda_{(1,2)}^* \Psi_{(1,2)}^* \Psi_{(1,2)},$$

так что тождество имеет место для произвольных амплитуд траекторий только при

$$\lambda = \lambda^*,$$

и с учетом $|\lambda| = 1$ находим

$$\lambda = \pm 1.$$

Вводя непрерывность собственного значения оператора перестановок, мы постулируем, что бозоны являются бозонами во всех физических системах, то есть на любых траекториях. Это значит, что при перестановке тождественных бозонов амплитуда вероятности не меняет знак, $\lambda = +1$.

Применяя операцию перестановок повторно, найдем

$$\mathcal{S}_{12}^2 \Psi_{(1,2)} = \mathcal{S}_{12} \Psi_{(2,1)} = \Psi_{(1,2)},$$

и если постулировать, что оператор перестановок тождественных частиц — это линейный оператор, который не действует на собственное число λ , то мы придем к тому же результату совсем коротким путем,

$$\mathcal{S}_{12}^2 \Psi_{(1,2)} = \mathcal{S}_{12} \lambda \Psi_{(1,2)} = \lambda \mathcal{S}_{12} \Psi_{(1,2)} = \lambda^2 \Psi_{(1,2)}$$

откуда получаем $\lambda^2 = 1$, а значит,

$$\lambda = \pm 1.$$

Требование о линейности оператора перестановок не случайно, поскольку он действует в пространстве амплитуд вероятности. Поэтому, если потребовать, что свойство суперпозиции амплитуд вероятности имеет место как до действия оператора перестановок на суперпозицию амплитуд, так и для образа суперпозиции с теми же коэффициентами для амплитуд в суперпозиции, то это и означает линейность оператора

Отметим, что рассмотренная сумма (1.5) сводится к

$$\sum_{(1,2)} \Psi_{(1,2)}^* \Psi_{(2,1)} = \lambda \sum_{(1,2)} \Psi_{(1,2)}^* \Psi_{(1,2)} = \lambda \sum_{(1,2)} \mathcal{W}_{(1,2)},$$

причем величина

$$\sum_{(1,2)} \mathcal{W}_{(1,2)}$$

имеет вполне определенный смысл: при соответствующей нормировке это — сумма вероятностей найти систему тождественных частиц на всех существующих в системе траекториях. Конечное значение этой суммы означает, что

любая ограниченная комбинация траекторий имеет, вообще говоря, ненулевую относительную вероятность реализации. В то время, как расходимость суммы означает, что любая ограниченная комбинация траекторий имеет нулевую относительную вероятность реализации, т. е. наблюдаются только системы с конечным значением суммы. Это устанавливает условия квантования. Например, при рассмотрении траекторий с заданной энергией в системе реализуются только те значения энергий, которые принадлежат спектру с конечной суммой вероятностей при фиксированной энергии, а остальные значения энергии вне спектра не могут наблюдаться. Значит, в действительности реализуются только физические системы, для которых сумма по траекториям с необходимостью конечна. Это условие верно не только для рассматриваемого случая двух тождественных частиц, но и для любых физических систем.

Таким образом, поскольку физические наблюдаемые для системы тождественных частиц не изменяются при перестановке траекторий тождественных частиц¹⁴, мир тождественных частиц делится на две части, а именно, траектории бозонов с $\lambda = 1$ и фермионов с $\lambda = -1$: амплитуды вероятности тождественных бозонов симметричны относительно перестановок траекторий бозонов, а амплитуды вероятности тождественных фермионов антисимметричны относительно перестановок траекторий фермионов. Связь статистики, т. е. собственного значения оператора перестановок тождественных частиц, со спином устанавливается в релятивистской квантовой механике свободных частиц: фермионы имеют полуцелый спин, а бозоны — целый. Это обусловлено требованием положительного значения энергии свободной частицы или требованием принципа причинности для релятивистских частиц, т. е. условием, что следствие по сравнению с причиной находится в будущем и возникает не раньше, чем сигнал от точки причины достигнет точки следствия не быстрее максимальной скорости распространения взаимодействий, которая совпадает со скоростью движения безмассовых частиц, в частности, со скоростью света.

Заметим, что введение амплитуды для функционала вероятности достоверности траекторий частиц было подтверждено эмпирически путем исследования неравенств Белла, которые мы здесь не описываем (см. учебники по квантовой механике, например, [7, 8, 9, 10]).

3 Действие

Функционал действия как логарифм амплитуды вероятности, экстремальность действия на «прямой» траектории, переход от механики точки к механике поля, действие в локальной теории поля.

3.1 Частица и функция Лагранжа

Подчеркнем теперь, что амплитуда вероятности достоверности траектории, как и сама вероятность, имеет экстремум на «прямой» траектории. В самом деле, так как вариация вероятности достоверности траектории сводится к вариации функционала амплитуды вероятности,

$$\delta\mathcal{W} = \delta\{\Psi^*\Psi\} = \Psi^*\delta\Psi + \Psi\delta\Psi^*,$$

то экстремум амплитуды означает и экстремум вероятности,

$$\delta\Psi = 0 \Rightarrow \delta\Psi^* = 0, \quad \delta\mathcal{W} = 0.$$

¹⁴В противном случае можно было бы отличить «первую» частицу от «второй».

Если ввести экспоненциальное представление амплитуды в виде

$$\Psi = e^{S/\kappa}, \quad (1.6)$$

где S — это функционал на траектории, а κ — универсальная, независящая от физической системы постоянная, то вариация функционала амплитуды вероятности выразится через вариацию функционала S ,

$$\delta\Psi = e^{S/\kappa} \frac{1}{\kappa} \delta S,$$

и экстремум функционала S приводит к экстремуму амплитуды вероятности.

Значит, и логарифм амплитуды имеет экстремум на «прямой» траектории. Разбивая «прямую» траекторию на подтраектории, в силу мультипликативности для амплитуд вероятности как следствия мультипликативности вероятности для независимых событий (1.2) найдем, что

$$\ln \Psi_{1\dots n} = \sum_{k=1}^n \ln \Psi_k.$$

Введем понятие действия как функционала на траектории, пропорционального логарифму амплитуды вероятности¹⁵:

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \kappa \ln \Psi, \quad S_{1\dots n} = \sum_{k=1}^n S_k. \quad (1.7)$$

Если амплитуда вероятности — это безразмерная величина, то действие может иметь размерность. В этом случае размерность коэффициента κ совпадает с размерностью действия S :

$$[\kappa] = [S].$$

При этом значение κ является универсальным, оно не зависит от физической системы, κ — фундаментальная постоянная. Значение κ мы установим позже, когда проведем описание действия для свободной частицы:

$$\kappa = -i\hbar, \quad (1.8)$$

где i — мнимая единица, а \hbar — постоянная Планка с чертой. Значение постоянной Планка определяется единицами измерения длины, времени, импульса, энергии, как станет понятно при дальнейшем развитии фейнмановской формулировки механики. В частности, единицы измерения величин можно выбрать такими, чтобы было $\hbar \equiv 1$. Как видим, комплексное значение амплитуды вероятности достоверности классической траектории отражается и в комплексом значении постоянной κ .

¹⁵Логарифм положительного числа мы принимаем равным вещественному числу. Однако, имея ввиду то, что амплитуда вероятности может принимать комплексные значения, необходимо учитывать многогранность логарифма как функции комплексного переменного, поскольку $\exp\{2\pi ni\} = 1$, $n \in \mathbb{Z}$. В частности, фиксация значения логарифма от положительного числа означает вполне определенный выбор листа поверхности Римана. Тем не менее, многозначность логарифма, вообще говоря, может отвечать нетривиальным топологическим эффектам в физической системе, когда действие приобретает дополнительные вклады $S_t = \kappa 2\pi ni$.

Из установленных нами свойств вероятности достоверности траектории следует, что функционал действия — это инвариант, который не зависит от того, в каких координатах описывается траектория, действие имеет экстремум на «прямой» траектории. Действие для независимых траекторий равно сумме действий на каждой из траекторий, а действие на прямой траектории равно сумме функционалов действия при разбиении траектории на отдельные участки.

Разбивая бесконечно малый интервал эволюции на два отрезка эволюции $dt_{12} = dt_1 + dt_2$, из (1.7) найдем

$$dS_{12} = dS_1 + dS_2. \quad (1.9)$$

На бесконечно малом интервале действие зависит от одних и тех же значений координаты и скорости $\{q(t), \dot{q}(t)\}$, так что при произвольном разбиении интервала условие (1.9) может быть удовлетворено, только если

$$dS = L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (1.10)$$

где функция Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$ зависит от определения динамических свойств физической системы. В итоге, функционал действия на траектории задается в виде интеграла

$$S[q] = \int_{t_0, q_0}^{t', q'} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (1.11)$$

Мы установили, что *на траектории, удовлетворяющей уравнениям движения, действие экстремально*.

Подчеркнем, что мы рассматриваем физические системы с полным описанием, когда определяется не только движение частицы, но и законы сил, которые действуют на частицу: только в этом случае действие на траектории задает уравнения движения. Если же описание не является полным, то силы моделируются, т. е. какие-то аспекты динамики упускаются из описания, и тогда силы не всегда возможно смоделировать введением подходящего действия, например, при диссипации энергии за счет трения, так как мы опускаем из описания движение частиц в среде, вызывающей диссипацию.

3.2 Поле: локальный лагранжиан

В механике точки измеряется координата частицы q в зависимости от времени, т. е. траектория $q(t)$. В теории поля измеряют¹⁶ локальные характеристики, например, электрического \mathcal{E} или магнитного \mathcal{H} полей, которые мы для общности изложения обозначим символом Φ . Локальность означает введение зависимости поля от его позиции в пространстве $\Phi(\mathbf{r})$, а также производных поля по координатам в точке, т. е. $\partial\Phi/\partial x$ и т.п. Определим стандартное краткое обозначение для производных по независимым переменным согласно

¹⁶ Подчеркнем, что физические характеристики существуют объективно и поэтому измеряются, т. е. познаемы, а не наоборот, когда полагают, что физическая величина приобретает смысл, только когда она измеряется. Физическая характеристика индифферентна к тому, измеряют ее или нет: она движется согласно законам природы, а результат измерения лишь показывает, как движется физическая система.

правилу $\partial\Phi/\partial x = \partial_x\Phi$ с нижним индексом, что по общепринятой договоренности в матричных обозначениях отвечает строке

$$(\partial_x\Phi, \partial_y\Phi, \partial_z\Phi) \equiv \partial\Phi,$$

причем символом $\partial\Phi$ без индекса будем обозначать производные по какой-либо координате пространства. Подобное введение строки частных производных поля согласовано с введением столбца дифференциалов координат

$$d\mathbf{r} \equiv \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

так, что дифференциал поля Φ

$$d\Phi = \partial_x\Phi dx + \partial_y\Phi dy + \partial_z\Phi dz$$

можно записать в терминах матричного умножения строки на столбец:

$$d\Phi = \sum_{\alpha=\{x,y,z\}} \partial_\alpha\Phi dr^\alpha \equiv \partial\Phi \cdot d\mathbf{r}.$$

«Траекторией» поля является набор полевых конфигураций $\Phi(\mathbf{r}, t), \partial\Phi(\mathbf{r}, t)$ и, возможно, производных более высокого порядка, которые мы будем опускать для краткости записи в дальнейшем.

Согласно принципу причинности траектория частицы однозначно определяется начальными данными для координаты $q(t_0)$ и ее производной по времени¹⁷ $\dot{q}(t_0) \equiv \dot{q}(t_0)$ при решении уравнений движения, а сами эти уравнения могут быть получены из принципа экстремального действия S , которое вычисляется по траектории (1.11). Аналогично, действие для поля в бесконечно малой окрестности точки \mathbf{r} будет иметь вид

$$dS[\Phi] = \int dt dL[\Phi, \partial_t\Phi, \partial\Phi, \dots],$$

со своей, полевой функцией Лагранжа dL . В локальной теории полагают, что действие поля в заданной точке зависит только от значений всех полей физической системы в этой же точке, т. е. траектория поля в точке не зависит от

¹⁷ В дальнейшем символ “частной” производной, например, по времени ∂_t мы используем и для полной производной, т. е. для дифференцирования физических величин по времени, если есть зависимость какой-либо функции от времени как явно, так и неявно, так что берется как частная производная явной зависимости, так и производная по времени сложной функции, т. е. полная производная по времени, и этот факт в физике отмечает дополнительной фразой «на уравнениях движения» или «on shell». Это позволяет более содержательно использовать символьную производную частного дифференцирования, которая в математике строго ограничена понятием частной производной явной зависимости функции в теории многих переменных. В теории поля, в отличие от механики частиц, наблюдаемые поля на уравнениях движения зависят не только от времени, но и от независимых от времени координат пространства. А в этом случае было бы неуместно использовать символ полной производной по разным координатным компонентам пространства-времени. Другими словами, в механике использование символа частной производной по времени вместе с фразой «на уравнениях движения» сразу подразумевает, что вычисляется полная производная сложной функции, которая имеет зависимость от времени как явно, так и неявно.

траекторий поля в другой точке. Зависимость полей друг от друга называется взаимодействием полей, и в локальной теории поля взаимодействуют только в общих точках, локально. В механике независимость траекторий отвечает набору не взаимодействующих друг с другом частиц q_k с действием в виде суммы независимых вкладов

$$S = \sum_k S[q_k],$$

что по аналогии дает для локального поля действие в виде суммы по малым областям пространства возле бесконечного дискретного набора точек

$$S = \sum_{\mathbf{r}} dS[\Phi(\mathbf{r})].$$

Рассмотрим теперь бесконечно малый объем dV_{12} возле точки $\mathbf{r} \in dV_{12}$ для поля с действием

$$dS_{12} = \int dt dL_{12}[\Phi(\mathbf{r}, t), \partial\Phi(\mathbf{r}, t)].$$

Разобьем этот объем на две произвольных части $dV_{12} = dV_1 + dV_2$. Действия поля в точках, размещенных в объемах dV_1 и dV_2 будут независимы, т.е. $dS_{12} = dS_1 + dS_2$, но с точностью до малых поправок по размеру области они будут зависеть от значения поля все в той же точке \mathbf{r} , т.е. на одной и той же траектории поля:

$$dS_1 \approx \int dt dL_1[\Phi(\mathbf{r}, t), \partial\Phi(\mathbf{r}, t)], \quad dS_2 \approx \int dt dL_2[\Phi(\mathbf{r}, t), \partial\Phi(\mathbf{r}, t)].$$

Из аддитивности действия в локальной теории поля следует условие для функции Лагранжа $dL_{12} = dL_1 + dL_2$, которое для произвольного разбиения объема может быть выполнено только, если положить

$$dL = \mathcal{L}(\Phi(\mathbf{r}, t), \partial\Phi(\mathbf{r}, t)) dV,$$

где \mathcal{L} — локальная функция поля и его частных производных, которую называют лагранжианом, так как он является плотностью функции Лагранжа поля. Тогда суммирование по разбиению всего пространства на бесконечно малые объемы приводит к действию поля в виде интеграла

$$S[\Phi] = \int dt dV \mathcal{L}(\Phi(\mathbf{r}, t), \partial\Phi(\mathbf{r}, t)). \quad (1.12)$$

В декартовых координатах $dV = dx dy dz = d^3 r$. Мы полагаем, что лагранжиан в явном виде не зависит от координат и времени, т.е. физическая система не содержит внешних источников энергии и импульса, а зависит только от динамических полей, т.е. полей, которые являются решениями уравнений движения, а не заданы в произвольном виде.

Итак, для изучения теории поля нам необходимо знать общие свойства механики в формализме действия.

4 Принцип наименьшего действия

Принцип наименьшего действия в механике, уравнения Эйлера–Лагранжа для частицы и для поля, правило Эйнштейна для суммирования по индексам.

Вариация действия для частицы в первом порядке по отклонению траектории $\delta q(t) = \tilde{q}(t) - q(t)$ с фиксированными концами (см. рис. 1.3), т. е. при $\delta q(t_0) = \delta q(t') = 0$, имеет вид¹⁸

$$\delta S \stackrel{\text{def}}{=} S[q + \delta q] - S[q] = \int_{t_0, q_0}^{t', q'} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right).$$

Поскольку

$$\delta \dot{q} = \dot{\tilde{q}}(t) - \dot{q}(t) = \frac{d}{dt} \tilde{q}(t) - \frac{d}{dt} q(t) = \frac{d}{dt} \delta q,$$

можно проинтегрировать второй член под интегралом по частям, приняв во внимание нулевой вклад граничных членов в силу условия фиксированных концов траектории.

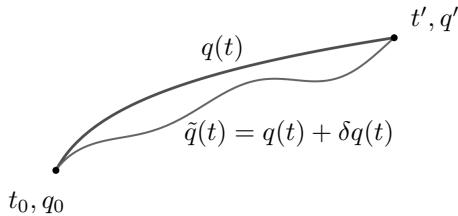


Рис. 1.3: Траектория с фиксированными концами и ее вариация. Малую вариацию экстремальной траектории можно рассматривать как результат решения уравнений движения, в которых немного изменили силы: малая флуктуация сил приводит к малому изменению траектории.

Тогда

$$\delta S = \int_{t_0, q_0}^{t', q'} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q(t).$$

Согласно принципу экстремального действия на траектории частицы $\delta S = 0$ при любых малых δq : $\delta S/\delta q = 0$, $\forall \delta q$, т. е. подынтегральное выражение тождественно равно нулю, а значит, имеет место уравнение Эйлера–Лагранжа (уравнения движения лагранжевой механики)

$$\partial_t \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}. \quad (1.13)$$

¹⁸Заметьте, что при $\delta q \rightarrow 0$

$$L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}.$$

Задача 1. Запишите уравнения Эйлера–Лагранжа для одномерного движения по координате x , если функция Лагранжа задана в виде

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x).$$

Задача 2. Запишите уравнения Эйлера–Лагранжа для движения с обобщенными координатами $\{x, v\}$, если функция Лагранжа задана в рамках формализма первого порядка (производные обобщенных координат по времени входят в функцию Лагранжа только в первой степени) в виде

$$L(x, \dot{x}, v, \dot{v}) = \frac{1}{2}m(2\dot{x}\dot{v} - v^2) - U(x).$$

Покажите, что «уравнения движения» для обобщенной координаты v являются алгебраическими, а не дифференциальными. Исключите переменную v из уравнений движения.

Задача 3. Из принципа наименьшего действия выведите уравнение Эйлера–Лагранжа для поля в двух измерениях

$$S[\Phi] = \int_{t_0}^{t'} dt \int_{x_0}^{x'} dx \mathcal{L}(\Phi, \partial_t \Phi, \partial_x \Phi, t, x),$$

где поле принимает фиксированные значения на границах интегрирования.

Решение. Вариация действия повторяет выкладки для частицы, если добавить вклады из-за зависимости лагранжиана от $\partial_x \Phi$, так как

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi + \delta\Phi, \partial_t \Phi + \partial_t \delta\Phi, \partial_x \Phi + \partial_x \delta\Phi, t, x) - \mathcal{L}(\Phi, \partial_t \Phi, \partial_x \Phi, t, x) &= \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \Phi} \partial_t \delta\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_x \Phi} \partial_x \delta\Phi. \end{aligned}$$

Следовательно, второй и третий члены можно проинтегрировать по частям по t и по x соответственно, и в силу граничных условий $\delta\Phi = 0$ вклады от выражений на границах интегрирования равны нулю, после чего мы получаем вариацию действия

$$\delta S = \int_{t_0}^{t'} dt \int_{x_0}^{x'} dx \delta\Phi \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \Phi} - \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_x \Phi} \right\} = 0.$$

Для любой вариации $\delta\Phi \rightarrow 0$, которая удовлетворяет условиям на концах, следует, что

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \Phi} - \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_x \Phi} = 0.$$

Из вида действия для локального поля Φ в (1.12) сразу получаем полевые уравнения Эйлера–Лагранжа, если учесть, что интегрирование производится не только по времени, но и по координатам пространства, и положить, что порядок частных производных по пространственным координатам не превышает единицы, как это имеет место для производной по времени,

$$\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \Phi} + \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_x \Phi} + \partial_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_y \Phi} + \partial_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_z \Phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}.$$

Введем четырехкомпонентные обозначения для величины с размерностью длины *с верхним индексом*, что по общепринятой договоренности в матричных обозначениях отвечает столбцу,

$$x^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_0 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

где $\mu = \{\overline{0,3}\} = \{0, 1, 2, 3\}$ в декартовых координатах, а c имеет размерность скорости. Эта скорость сокращается при записи полевого уравнения Эйлера–Лагранжа, которое теперь можно переписать в виде

$$\sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}.$$

Определим *правило Эйнштейна для суммирования по индексам*: в выражении может быть пара одинаковых индексов, которые называются немыми, тогда подразумевается, что по немому индексу производится суммирование, а знак суммы опускается. Например, имеет место следующее преобразование записи произведения строки на столбец по этому правилу: $\sum_\mu A_\mu B^\mu \mapsto A_\mu B^\mu$. В итоге, приходим к полевому уравнению движения Эйлера–Лагранжа¹⁹

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}. \quad (1.14)$$

Решение этого уравнения задает экстремум действия относительно вариации поля $\Phi(\mathbf{r}, t)$ с фиксированными значениями поля во всем пространстве во времена t_0 и t' .

Задача 4. Выведите уравнения движения для скалярного комплексного поля ϕ в одномерном пространстве:

$$S = \int d^2x (\partial_0 \phi^* \partial_0 \phi - \partial_x \phi^* \partial_x \phi - m^2 \phi^* \phi),$$

(система единиц $c = 1$).

¹⁹Напомним: производная по столбцу — строка, а производная по строке — столбец.

(1.B) Симметрия движения

5 Теорема Нёттер

Теорема Нёттер, интегралы движения из однородности пространства и времени и из изотропии пространства. Инерциальные системы, преобразования Галилея и вывод импульса и энергии свободной частицы из теоремы Нёттер.

Если задать траекторию $q(t)$ — решение уравнения движения для физической системы с функцией Лагранжа L и ее преобразование в другое решение уравнений $q_a(t_a)$ с той же функцией Лагранжа, зависящее от непрерывного параметра a ,

$$q_a = q_a(a, q(t), t), \quad t_a = t_a(a, q(t), t), \quad (1.15)$$

то можно рассмотреть изменение экстремума действия в зависимости от параметра a с учетом изменения граничных точек траектории. Обычно полагают, что при $a = 0$ преобразование сводится к тождественному, т. е. $q_a = q_a(a, q(t), t)|_{a=0} = q(t)$ и $t_a = t_a(a, q(t), t)|_{a=0} = t$. Но это нисколько не меняет физического содержания теоремы, а только указывает то, что исходная траектория $q(t)$ принадлежит классу однопараметрических преобразований, которые включают в себя тождественное преобразование как раз при $a = 0$. Поэтому обычно рассматривают изменение действия при бесконечно малом преобразовании одной траектории в другую $d_a S$ при $a \rightarrow 0$. Задачу решает теорема Нёттер: при бесконечно малом смещении параметра a дифференциал экстремума действия на «прямых траекториях» вычисляется по формуле

$$d_a S = da \cdot \int_{t_a^{(1)}(a, q_1, t_1)}^{t_a^{(2)}(a, q_2, t_2)} \frac{d}{dt_a} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \left(\frac{\partial q_a}{\partial a} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) + L \frac{\partial t_a}{\partial a} \right\} dt_a. \quad (1.16)$$

Доказательство. Рассмотрим параметрическое преобразование координат и времени, переводящее «прямую» траекторию $q(t)$ в «прямую» траекторию $q_a(t_a)$ согласно (1.15).

Траектория $q_a(t_a)$ является экстремальной для действия с той же функцией Лагранжа

$$S[q_a(t_a)] = \int_{t_a^{(1)}(a, q_1, t_1)}^{t_a^{(2)}(a, q_2, t_2)} dt_a L(q_a(t_a), \dot{q}_a(t_a), t_a), \quad (1.17)$$

в котором от параметра a явно зависят граничные точки траектории, а t_a является независимой переменной интегрирования и переменной эволюции на траектории $q_a(t_a)$. Это значит, что при рассмотрении действия (1.17) параметрическое преобразование траектории $q(t)$ в траекторию $q_a(t_a)$ в формулах (1.15) трактуется как преобразование в обратную сторону: траектория $q_a(t_a)$ преобразуется в траекторию $q(t)$. Тогда говорят, что формулы (1.15) задают такое обратное преобразование в неявном виде. Если в качестве простого примера записать (1.15) как преобразование, которое изменяет начало отсчета времени,

$$q_a = q, \quad t_a = t - a,$$

то обратное преобразование даст

$$q = q_a, \quad t = t_a + a.$$

В этом случае неявная зависимость может быть переписана в явную элементарным образом. В общем же случае приходится использовать запись через дифференциалы. В частности, в рассматриваемом примере дифференциал функции преобразования очевидно дает

$$dq_a = dq, \quad dt_a = dt - da.$$

Если теперь считать, что t_a — это независимый параметр эволюции на траектории $q_a(t_a)$, то значение времени t_a не зависит от того, как меняются переменные a и t , и, следовательно, даже при ненулевых изменениях da и dt значение переменной t_a остается равным заданной величине в данный момент времени t_a , т. е. в дифференциалах это специальное условие²⁰ будет иметь вид

$$d_a t_a \equiv 0 \Rightarrow d_a t - da \equiv 0, \quad d_a t = da,$$

и мы видим, что дифференциал переменной времени t зависит от дифференциала переменной a , что в данном примере и есть выражение неявной зависимости этих переменных при условии, что время t_a является независимым временем эволюции для координаты q_a . Как видим, использование дифференциалов «on shell» (при заданных условиях) позволяет легко находить следствия, которые получаются при неявном преобразовании траектории $q_a(t_a)$ в траекторию $q(t)$.

Те же дифференциалы позволяют описать и то, что на отрезке $[t_a^{(1)}, t_a^{(2)}]$ его начало и конец также преобразуются как функции параметра a .

Рассмотрим эти утверждения более детально в общем случае на основе преобразований «прямых траекторий» (1.15), которые заданы условием теоремы. А именно, запишем эти преобразования в дифференциальной форме, учитывая, что на уравнениях движения $q = q(t)$, а значит,

$$\begin{aligned} dq_a &= \frac{\partial q_a}{\partial a} da + \frac{\partial q_a}{\partial t} dt, \\ dt_a &= \frac{\partial t_a}{\partial a} da + \frac{\partial t_a}{\partial t} dt, \end{aligned} \tag{1.18}$$

где, конечно, полные производные по времени t вычисляются при подстановке траектории $q(t)$ в формулы (1.15):

$$\frac{dq_a}{dt} \equiv \frac{\partial q_a}{\partial q} \frac{dq(t)}{dt} + \frac{\partial q_a}{\partial t}, \quad \frac{dt_a}{dt} \equiv \frac{\partial t_a}{\partial q} \frac{dq(t)}{dt} + \frac{\partial t_a}{\partial t}.$$

Сначала сфокусируем внимание на концах эволюции по времени t_a . Например, в начале эволюции $t = t_1$, т. е. фиксировано время начала эволюции

²⁰Заметьте, что в отличие от случая произвольных и независимых друг от друга дифференциалов dt и da мы ограничиваем их значения или, как говорят, переходим на специальную поверхность «on shell» в пространстве произвольных значений дифференциалов. Вместо громоздкой записи для обозначения этого ограничения $d_{\text{on shell}}$ мы используем более короткое обозначение d_a , имея виду, что дифференциал по времени dt выражается через дифференциал параметра da .

на исходной траектории $q(t)$, и следовательно, $dt_1 = 0$, что при подстановке в (1.18) дает

$$d_a t_a(a, q_1, t_1) \equiv d_a t_a^{(1)} = \frac{\partial t_a^{(1)}}{\partial a} da,$$

и совершенно аналогично на конце отрезка эволюции

$$d_a t_a^{(2)} = \frac{\partial t_a^{(2)}}{\partial a} da.$$

Как видим, нам удалось для концов отрезка эволюции записать дифференциалы в виде, свободном от символов полных производных как по параметру преобразований a , так и по времени t на исходной траектории $q(t)$.

Теперь сфокусируем внимание на времени t_a , которое течет независимо от параметра a , и также проведем выкладки так, чтобы в итоговых выражениях не было полных производных как по параметру преобразований a , так и по времени t на исходной траектории $q(t)$. В силу независимости переменной эволюции t_a от параметра преобразования a

$$d_a t_a = \frac{\partial t_a}{\partial a} da + \frac{dt_a}{dt} d_a t \equiv 0, \quad (1.19)$$

откуда с помощью понятия о неявной функции следует

$$\frac{dt_a}{dt} d_a t = -\frac{\partial t_a}{\partial a} da, \quad (1.20)$$

где мы опять свели выражения к частному дифференцированию по параметру в соотношениях (1.15), исключив неявные зависимости. Кроме того, независимость течения времени t_a от параметра a математически означает теперь перестановочность дифференцирования по независимым переменным

$$d_a \dot{q}_a(t_a) = d_a \left(\frac{dq_a}{dt_a} \right) = \frac{d}{dt_a} d_a q_a.$$

Независимость течения времени t_a от параметра a , выраженная в виде (1.20), означает, что зависимость от параметра a в функции замены переменных (1.15) неявно переносится на зависимость t от a . Тогда согласно (1.19) дифференциал координаты равен

$$d_a q_a = \frac{\partial q_a}{\partial a} da + \frac{dq_a}{dt} d_a t = \frac{\partial q_a}{\partial a} da + \frac{dq_a}{dt_a} \frac{dt_a}{dt} d_a t = \left(\frac{\partial q_a}{\partial a} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) da, \quad (1.21)$$

где мы ввели обычное обозначение для полной производной по времени на траектории посредством точки

$$\frac{dq_a}{dt_a} \equiv \dot{q}_a.$$

Подчеркнем, что (1.21) опять позволяет исключить неявные функциональные зависимости: в выражении остается только скорость на траектории \dot{q}_a и

частные производные, которые вычисляются по исходным формулам преобразований траекторий (1.15) как символьные производные и не имеют никакого произвола, связанного с наложением каких либо условий при дифференцировании.

Теперь мы можем перейти к вычислению производной экстремума действия по параметру. Для этого напомним, как производится дифференцирование определенного интеграла по параметру.

Дифференцирование определенного интеграла по параметру. Формула Ньютона–Лейбница устанавливает, что определенный интеграл от производной функции задается разницей значений этой функции на концах:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{d}{d\tau} F(\tau) = F(\tau_2) - F(\tau_1) = F(\tau) \Big|_{\tau_1}^{\tau_2}.$$

Введение зависимости от параметра a эту формулу никак не изменит,

$$\int_{\tau_1(a)}^{\tau_2(a)} d\tau \frac{d}{d\tau} F(\tau, a) = F(\tau_2(a), a) - F(\tau_1(a), a),$$

так что вычисление дифференциала по параметру a дает

$$\begin{aligned} d_a \left(\int_{\tau_1(a)}^{\tau_2(a)} d\tau \frac{d}{d\tau} F(\tau, a) \right) &= d_a \{F(\tau_2(a), a) - F(\tau_1(a), a)\} = \\ &= \frac{dF(\tau, a)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_2(a)} \frac{\partial \tau_2(a)}{\partial a} da - \frac{dF(\tau, a)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_1(a)} \frac{\partial \tau_1(a)}{\partial a} da + \\ &\quad + d_a F(\tau, a) \Big|_{\tau=\tau_2(a)} - d_a F(\tau, a) \Big|_{\tau=\tau_1(a)}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$f(\tau, a) \equiv \frac{d}{d\tau} F(\tau, a).$$

Тогда

$$\frac{dF(\tau, a)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_2(a)} \frac{\partial \tau_2(a)}{\partial a} - \frac{dF(\tau, a)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_1(a)} \frac{\partial \tau_1(a)}{\partial a} = f(\tau_2(a), a) \frac{\partial \tau_2(a)}{\partial a} - f(\tau_1(a), a) \frac{\partial \tau_1(a)}{\partial a}.$$

Затем

$$d_a F(\tau, a) \Big|_{\tau=\tau_2(a)} - d_a F(\tau, a) \Big|_{\tau=\tau_1(a)} = \int_{\tau_1(a)}^{\tau_2(a)} d\tau \frac{d}{d\tau} (d_a F(\tau, a)),$$

но поскольку переменная интегрирования τ и параметр a являются независимыми, порядок дифференцирования по τ и a можно менять, так что

$$\frac{d}{d\tau} (d_a F(\tau, a)) = d_a \left(\frac{d}{d\tau} F(\tau, a) \right) = d_a f(\tau, a).$$

В итоге, собрав все слагаемые, находим

$$\begin{aligned} d_a \left(\int_{\tau_1(a)}^{\tau_2(a)} d\tau f(\tau, a) \right) &= f(\tau_2(a), a) \frac{\partial \tau_2(a)}{\partial a} da - f(\tau_1(a), a) \frac{\partial \tau_1(a)}{\partial a} da + \int_{\tau_1(a)}^{\tau_2(a)} d\tau d_a f(\tau, a) = \\ &= f(\tau_2(a), a) d_a \tau_2(a) - f(\tau_1(a), a) d_a \tau_1(a) + \int_{\tau_1(a)}^{\tau_2(a)} d\tau d_a f(\tau, a), \end{aligned} \tag{1.22}$$

т. е. дифференциал определенного интеграла по параметру включает в себя следующие члены: подынтегральную функцию на верхнем пределе интегрирования, умноженную на дифференциал верхнего предела по параметру, минус подынтегральную функцию на нижнем пределе интегрирования, умноженную на дифференциал нижнего предела по параметру, а также интеграл от дифференциала подынтегральной функции по параметру.

Для расчета дифференциала действия по параметру a на прямой траектории

$$d_a S = d_a \left(\int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} L(q_a, \dot{q}_a, t_a) dt_a \right)$$

необходимо варьировать, во-первых, пределы интегрирования, а во-вторых, подынтегральную функцию от q_a и \dot{q}_a , которые сами зависят от параметра, в отличие от переменной эволюции на траектории t_a , так что

$$d_a S = da \cdot L \frac{\partial t_a}{\partial a} \Bigg|_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} + \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_a} d_a q_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} d_a \dot{q}_a \right\} dt_a.$$

Далее, во-первых,

$$L \frac{\partial t_a}{\partial a} \Bigg|_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left(L \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) dt_a,$$

во-вторых, уравнение движения

$$\frac{d}{dt_a} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial L}{\partial q_a}$$

дает

$$\int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_a} d_a q_a \right\} dt_a = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left\{ \left(\frac{d}{dt_a} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) d_a q_a \right\} dt_a.$$

Получаем

$$\int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_a} d_a q_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} d_a \dot{q}_a \right\} dt_a = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left\{ \left(\frac{d}{dt_a} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) d_a q_a + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} d_a \dot{q}_a \right\} dt_a.$$

Из перестановочности дифференцирования по параметру a и переменной эволюции t_a запишем

$$d_a \dot{q}_a = \frac{d}{dt_a} d_a q_a$$

откуда в итоге следует, что

$$\int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_a} d_a q_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} d_a \dot{q}_a \right\} dt_a = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} d_a q_a \right) dt_a,$$

так что, собирая все члены, получаем

$$d_a S = \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} d_a q_a + L \frac{\partial t_a}{\partial a} da \right\} dt_a. \quad (1.23)$$

В итоге, подставляя связь (1.21) для $d_a q_a$, находим

$$d_a S = da \cdot \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \left(\frac{\partial q_a}{\partial a} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) + L \frac{\partial t_a}{\partial a} \right\} dt_a, \quad (1.24)$$

что и составляет содержание *теоремы Нёттера*. ■

В случае, когда координата не единственная, следует провести суммирование по координатам в системе:

$$d_a S = da \cdot \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left\{ L \frac{\partial t_a}{\partial a} + \sum_q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \left(\frac{\partial q_a}{\partial a} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) \right\} dt_a, \quad (1.25)$$

а если и число параметров больше одного, то необходимо провести подстановку $a \mapsto a^n$, где n — мультииндекс, и записать теорему через сумму дифференциалов da^n с использованием правила суммирования Эйнштейна по немым индексам:

$$d_a S = da^n \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left\{ L \frac{\partial t_a}{\partial a^n} + \sum_q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \left(\frac{\partial q_a}{\partial a^n} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a^n} \right) \right\} dt_a. \quad (1.26)$$

Непрерывное преобразование называется *симметрией*, если экстремум не зависит от параметра, т. е. $d_a S \equiv 0$, а значит, одному и тому же экстремуму отвечает целое семейство решений уравнений движения. Из наличия симметрии $d_a S = 0$ следует сохранение во времени величины²¹

$$\mathcal{I} \stackrel{\text{def}}{=} L \frac{\partial t}{\partial a} + \sum_q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_t} \left(\frac{\partial q}{\partial a} - \frac{\partial t}{\partial a} \frac{\partial t}{\partial a} \right), \quad (1.27)$$

которую называют интегралом движения: $\mathcal{I}(t') = \mathcal{I}(t_0)$.

²¹Для краткости опустим маркер a у преобразованных величин при записи частных производных по этому параметру, чтобы не загромождать и без того сложные выражения, во-первых, а во-вторых, будем иметь виду предел $a \rightarrow 0$, так что параметрически преобразованные координаты и время становятся равными величинам на исходной траектории. Заметим, что такое бесконечно малое преобразование позволяет получить все значимые физические выводы, если преобразования обратимы и образуют параметрическую группу, когда вычисление дифференциалов возле $a = 0$ и возле другого значения параметра совершенно эквивалентны, что в математике называют термином «изоморфизм».

Подчеркнем, что физическое содержание теоремы Нёттер полностью определяется нетривиальным фактом существования определенных параметрических преобразований в классе решений уравнений движений для заданной системы, т. е. при неизменной функции Лагранжа. Именно этот факт является квинтэссенцией комплиментарного ряда эмпирических данных или теоретических идей и моделей, факт, который, на самом деле, многое говорит о физической системе, а значит, и о функции Лагранжа этой системы, как мы это увидим чуть позже. Сама же теорема обладает безусловной математической красотой, присущей безупречному потоку тождественных преобразований.

Легко написать аналог теоремы Нёттер в теории поля, просто проводя подстановку переменных интегрирования и дифференцирования в (1.24):

$$dt \mapsto dt d^3r = \frac{1}{c} d^4x, \quad \partial_t \mapsto \partial_\nu, \quad \partial t \mapsto \partial x^\nu, \quad L \mapsto \mathcal{L}, \quad q \mapsto \Phi,$$

так что выражение в механике точки (1.23), которое мы запишем в терминах дифференцирования *on shell*, опуская маркер a у параметрических функций, чтобы не загромождать формулы,

$$d_a S = \int dt \partial_t \left\{ L \frac{\partial t_a}{\partial a} da + \sum_q \frac{\partial L}{\partial \partial_t q} d_a q_a \right\}, \quad \text{при } d_a t_a \equiv 0,$$

переходит в

$$d_a S = \frac{1}{c} \int d^4x \partial_\nu \left\{ \mathcal{L} \frac{\partial x_a^\nu}{\partial a} da + \sum_\Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} d_a \Phi_a \right\}, \quad \text{при } d_a x_a^\lambda \equiv 0,$$

где последнее условие означает, что координаты детекторов x_a^λ , которые измеряют значения локального поля в различных точках, и момент времени $t_a = x_a^{(0)}/c$, в который детектируется локальное поле, никак не зависят от изменения параметра a , а эта параметрическая зависимость неявно переносится на дифференциалы исходного момента времени t и координаты x^μ . Для параметрических преобразований полей и координат пространства-времени

$$\Phi_a = \Phi_a(a, \Phi(x), x), \quad x_a^\lambda = x_a^\lambda(a, x)$$

дифференциалы этих преобразований в общем виде вычисляются на траектории $\Phi = \Phi(x)$,

$$d\Phi_a = \frac{\partial \Phi_a}{\partial a} da + dx^\mu \partial_\mu \Phi_a, \quad dx_a^\lambda = \frac{\partial x_a^\lambda}{\partial a} da + dx^\mu \partial_\mu x_a^\lambda.$$

Из независимости переменных интегрирования x_a^λ от параметра a , т. е. из условия, что положения детекторов локального поля в пространстве-времени не зависят от параметра, и, следовательно, «*on shell*» находим

$$d_a x_a^\lambda = \frac{\partial x_a^\lambda}{\partial a} da + d_a x^\mu \partial_\mu x_a^\lambda \equiv 0,$$

откуда следует, что

$$d_a \Phi_a = \frac{\partial \Phi_a}{\partial a} da + d_a x^\mu \frac{\partial x_a^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Phi_a}{\partial x_a^\lambda} = \frac{\partial \Phi_a}{\partial a} da - \frac{\partial x_a^\lambda}{\partial a} da \frac{\partial \Phi_a}{\partial x_a^\lambda}.$$

Опуская для краткости обозначений маркер для явной зависимости преобразованных полей и координат от параметра a , находим полевую теорему Нётер

$$d_a S = da \cdot \frac{1}{c} \int d^4x \partial_\nu \left\{ \mathcal{L} \frac{\partial x^\nu}{\partial a} + \sum_{\Phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a} - \frac{\partial x^\lambda}{\partial a} \partial_\lambda \Phi \right) \right\}. \quad (1.28)$$

В случае инвариантности действия $d_a S \equiv 0$ в произвольно выбранной области пространства в любом интервале времени находим локальный закон сохранения тока

$$\partial_\nu J^\nu = 0, \quad J^\nu \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L} \frac{\partial x^\nu}{\partial a} + \sum_{\Phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a} - \frac{\partial x^\lambda}{\partial a} \partial_\lambda \Phi \right) \text{ — ток Нётер.} \quad (1.29)$$

Важный частный случай — преобразования полей без изменения координат пространства-времени, т. е. при условии

$$\frac{\partial x_a^\nu}{\partial a} \equiv 0.$$

Тогда ток Нётер —

$$J^\nu = \sum_{\Phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial a}. \quad (1.30)$$

Физически содержательные примеры включают в себя законы сохранения электрического тока, тока слабых и сильных взаимодействий.

Полевые законы сохранения мы исследуем позже с использованием тензорных обозначений из векторного анализа. Сейчас же приведем примеры в механике.

5.1 Однородность пространства

Если сдвиг начала отсчета координат не влияет на законы движения в физической системе, т. е. перенос этой системы целиком вместе с источниками сил невозможно установить по движению внутри системы, то говорят, что пространство обладает однородностью или трансляционно инвариантно. Трансляция вдоль оси x задает преобразование траектории

$$x_a = x + a, \quad t_a = t,$$

так что инвариантность действия в однородном пространстве согласно теореме Нётер (1.24) дает инвариант согласно (1.27)

$$p_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

который называют импульсом. Однородность пространства по каждому направлению означает сохранение вектора импульса

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}. \quad (1.31)$$

Импульс сохраняется, если функция Лагранжа не зависит от координат системы явно.

Для пространственных координат по общепринятой договоренности в матричных обозначениях вводят столбец с тремя индексами из начала греческого алфавита:

$$r^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \alpha = \{\bar{1}, \bar{3}\},$$

так что вектор скорости $v^\alpha = \dot{r}^\alpha$ — тоже столбец, а импульс, как частная производная по компонентам столбца, является строкой $p_\alpha = \partial_{v^\alpha} L$.

5.2 Однородность времени

Однородность времени означает, что начало отсчета времени никак не сказывается на динамике физической системы, так что преобразования

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}, \quad t_a = t - a,$$

оставляют инвариантным действие, и по теореме Нёттер (1.24) сохраняется следующий интеграл движения согласно (1.27)

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} - L, \quad (1.32)$$

который называют энергией.

Энергия сохраняется, если функция Лагранжа не зависит от времени явно.

5.3 Изотропность пространства

Изотропность пространства означает эквивалентность всех направлений в пространстве, а значит действие системы инвариантно относительно поворотов в пространстве²²:

$$r_a^\alpha = \mathcal{R}_{\bullet\beta}^\alpha(\mathbf{a}) r^\beta, \quad t_a = t, \quad (1.33)$$

где матрица \mathcal{R} размерностью 3×3 зависит от угла поворота a вокруг некой оси, заданной единичным вектором \mathcal{O} , что определяет вектор $\mathbf{a} = a \mathcal{O}$. В формуле (1.33) мы используем матричное умножение, так что в матрице поворотов необходимо указать порядок следования индексов, и для этого мы в явном виде обозначаем символом \bullet занятое место индекса по порядку, когда индексы матрицы располагаются и сверху, и снизу, чтобы обратить внимание читателя на порядок индексов²³: первый индекс нумерует позицию в столбце, а второй

²²Мы будем отличать понятие преобразований поворотов базиса и координат пространства от понятия вращений, поскольку, вообще говоря, вращение — это процесс, т. е. изменение положения системы при повороте вокруг оси в зависимости от времени. Однако в литературе часто используют и термин «вращение» тогда, когда имеют ввиду преобразование поворота, а не процесс. Наблюдение за этим нюансом оставим в зоне внимания читателя.

²³Мы могли бы вместо \bullet просто оставлять пустое место, но тогда факт определенного порядка индексов при матричном умножении мог бы ускользнуть из фокуса внимания.

позицию в строке. В этой логике столбец r^β тоже можно рассматривать как часть матрицы, у которой нет номера в строке,

$$r^\beta \equiv r^{\beta\bullet}. \quad (1.34)$$

Подчеркнем, что при использовании матричного умножения часто пользуются операцией транспонирования матрицы — перестановкой порядка следования индексов,

$$(\mathcal{R}^T)_{\beta}^{\bullet\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}_{\bullet\beta}^{\alpha}, \quad \text{или} \quad (A^T)_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} A_{\beta\alpha}, \quad (M^T)^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} M^{\beta\alpha}. \quad (1.35)$$

Тогда транспонирование столбца координат согласно (1.34) и (1.35) дает

$$(r^T)^{\bullet\beta} = r^{\beta\bullet}. \quad (1.36)$$

Для примера, при повороте вокруг оси z единичный вектор вдоль оси поворота $\mathcal{O} \mapsto \mathbf{e}_z$, а декартовы координаты преобразуются как

$$x_a = x \cos a - y \sin a, \quad y_a = y \cos a + x \sin a,$$

так что при бесконечно малом угле поворота $a \rightarrow 0$, имеют место преобразования

$$x_a = x - ya, \quad y_a = y + xa, \quad t_a = t,$$

задающие инвариант согласно (1.27)

$$\ell_z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} (-y) + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} x = xp_y - yp_x,$$

т. е. не что иное, как проекцию на ось z момента количества движения

$$\ell_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z.$$

Из изотропности пространства следует сохранение вектора момента количества движения ℓ .

Орбитальный момент импульса сохраняется, если функция Лагранжа не зависит от направлений координат системы явно.

В теории поля возникают полные аналоги рассмотренных законов сохранения, следующих из однородности пространства, времени и изотропии пространства.

Задача 5. Для комплексного скалярного поля в одномерном пространстве (см. задачу 4 на стр. 32) запишите ток Нёттер при симметрии действия относительно преобразований комплексной фазы поля

$$\phi_a = e^{-ia} \phi,$$

где a не зависит от координат и времени, т. е. является глобальным параметром преобразования. Обсудить плотность заряда и поток заряда через границы.

6 Инерциальные системы и функция Лагранжа свободной нерелятивистской частицы

В инерциальных системах свободная частица движется по инерции поступательно, равномерно и прямолинейно. В ньютоновой механике переход из одной инерциальной системы в другую описывается специальным преобразованием Галилея:

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r} + \mathbf{v}_a t, \quad t_a = t, \quad (1.37)$$

где \mathbf{v}_a — скорость движения одной инерциальной системы относительно другой. Законы движения не меняются при переходе от одной инерциальной системы к другой.

Рассмотрим свободную частицу. В силу однородности пространства импульс частицы сохраняется и согласно уравнениям Эйлера–Лагранжа функция Лагранжа свободной частицы не зависит от координат. Аналогично из однородности времени следует, что сохраняется энергия, а функция Лагранжа не зависит явно от времени, т. е. для свободной частицы $L_0 = L(\mathbf{v})$. Из изотропности пространства следует, что вид функции Лагранжа не зависит от направления скорости, т. е. функция Лагранжа свободной частицы зависит только от квадрата скорости $L(\mathbf{v}) \mapsto \tilde{L}(\mathbf{v}^2)$. Более того, для определения явного вида этой функции можно без ограничения общности считать, что частица движется вдоль оси x и специальное преобразование Галилея выполняется также вдоль той же оси.

Тогда по теореме Нётер (1.24) изменение действия при переходе к другой инерциальной системе примет вид

$$d_a S = dv_a^x \cdot \int dt \frac{d}{dt} \{ p_x t \} = dv_a^x \cdot \int dt p_x,$$

где мы учли закон сохранения импульса свободной частицы: $dp_x/dt = 0$.

Уравнения движения при переходе в другую инерциальную систему не меняются. Эти уравнения получаются при вариации действия при фиксированных концах, а значит, уравнения после специального преобразования Галилея останутся прежними, если только изменение dS/dv_a^x сведется к значениям динамических переменных на концах траектории. Это возможно, если подынтегральное выражение есть полная производная по времени, т. е.

$$p_x = \frac{df_x}{dt}.$$

Однако, поскольку импульс свободной частицы является только функцией скорости, как это следует из определения $p_x = \partial L/\partial v^x$ с учетом того, что функция Лагранжа свободной частицы зависит только от квадрата скорости, то функция f_x может зависеть только от координат, так как

$$\frac{df_x}{dt} = \frac{\partial f_x}{\partial t} + \frac{\partial f_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial f_x}{\partial v_x} \dot{v}_x + \dots$$

В этом разложении ненулевыми могут быть только два первых члена, потому что остальные вклады зависят от высших производных скорости, что

исключено, так что f_x может зависеть только от координаты и времени²⁴. Величина $\partial f_x / \partial t$ зависит только от скорости, но сама функция f_x от скорости не зависит, а значит, это постоянная величина. Соответствующую константу полагают тождественно равной нулю, так как ее ненулевое значение отвечало бы величине импульса частицы при нулевой скорости самой частицы, так что ненулевой вектор импульса при нулевой скорости нарушил бы принцип изотропности пространства из-за наличия выделенного направления в изотропном пространстве²⁵. Тогда частная производная $\partial f_x / \partial x$ зависит от координат, но это может быть согласовано с условием зависимости импульса свободной частицы только от скорости, только если эта частная производная — постоянное число, $\partial f_x / \partial x = \text{const}$. Эту постоянную называют инерпетной массой частицы, m , и, при этом, полагают, что эта величина является вещественной и положительной²⁶: выбор положительного, а не отрицательного знака массы является условным и он считается удобным при описании других динамических свойств (см. ниже), а вот вещественность массы имеет принципиальное значение, которое мы подчеркнем при обсуждении вероятности достоверности траектории частицы.

Итак, однородность пространства и времени вместе с изотропией пространства и явным видом специальных преобразований Галилея при переходе от одной инерциальной системы к другой по теореме Нётер однозначно определяют явный вид импульса частицы

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (1.38)$$

а значит, и явный вид функции Лагранжа свободной частицы

$$L_0 = \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2, \quad (1.39)$$

как решения уравнения²⁷ $\partial L_0 / \partial \mathbf{v} = \mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

При введении взаимодействия эквивалентность инерциальных систем требует в простейшем случае, чтобы к функции Лагранжа добавлялись вклады, зависящие только от относительных расстояний и времени в системе, $L_0 \mapsto L = L_0 - U(\mathbf{r} - \mathbf{r}_*, t - t_*)$, где звездочкой помечены параметры источника сил. Функцию U называют потенциалом.

²⁴К тому же выводу можно прийти, если в явном виде записать изменение действия

$$d_a S = dv_a^x \int_{t_1, x_1}^{t_2, x_2} dt \frac{d}{dt} \{f_x\} = dv_a^x (f_x(t_2, x_2) - f_x(t_1, x_1)) \neq dv_a^x (f_x(t_2, x_2, v_2) - f_x(t_1, x_1, v_1)),$$

потребовав, чтобы это изменение выражалось через граничные точки на траектории независимо от отдельности от начального и конечного положения. Это требование возникает из-за того, что в общем случае вариация действия рассматривается при фиксированных значениях координат траектории на заданном интервале времени при произвольных значениях скорости в граничных точках траектории.

²⁵Изотропный вектор тождественно равен нулю.

²⁶Масса не может зависеть от направления движения частицы в силу изотропности пространства.

²⁷Константа интегрирования C_L приведет к изменению действия $\Delta S = C_L \int dt$, что сводится к члену, зависящему только от концов траектории $\Delta S = C_L(t' - t_0)$, и при выводе уравнений движения при вариации траектории с фиксированными концами дает нулевой вклад. Из определения энергии (1.32) следует, что C_L дает сдвиг начала отсчета энергии E , а значит, прескрипция для начала отсчета энергии никак не влияет на уравнения движения в классической нерелятивистской механике.

Заметим, что в частном случае масса может быть равной нулю. Тогда мы видим, что принцип относительности Галилея для инерциальных систем приводил бы к значениям импульса и энергии, тождественно равным нулю для частиц с нулевой массой, т. е. к отсутствию всякого движения безмассовых частиц. Однако в природе существует движение частиц с нулевой массой, например, движение частиц света и переносчиков гравитационного взаимодействия – гравитонов. Это означает, что необходимо ввести принцип относительности, отличный от принципа относительности Галилея, так, чтобы принцип относительности Галилея являлся бы предельным случаем для массивных частиц, т. е. когда вклад в кинетическую энергию и импульс, получаемых из принципа относительности Галилея, являлся бы доминирующим в кинетической энергии и импульсе свободных частиц, значения которых получаются из более общего принципа относительности, имеющего силу и для массивных, и для безмассовых частиц. Этот принцип – постулат релятивистской теории относительности, который находится вне рамок излагаемого сейчас материала²⁸.

²⁸Отметим однако, что при выводе функции Лагранжа свободной частицы мы неявно полагали, что скорость – это величина, которая может принимать различные значения как следствие преобразований Галилея: в различных инерциальных системах отсчета скорость изменяется на относительную скорость движения двух таких систем. Если ввести предположение о том, что существует инвариантная скорость, которая одна и та же для различных инерциальных систем с идентичными линейками и часами, то проведенный вывод становится неприменим, но и само предположение об инвариантной скорости не совместимо с преобразованиями Галилея.

Глава 2

Частицы

(2.А) Квантовые пути и классическая механика

7 Амплитуда вероятности и постоянная действия

Единичная вероятность достоверности пучка экстремальных траекторий и вещественность действия, постоянная Планка, пренебрежимо малая вероятность пучка траекторий возле неэкстремальной траектории, большая величина действия в экстремуме как критерий классического описания движения, связь эйконала геометрической оптики с действием.

Рассмотрим пучок n траекторий в малой окрестности «истинной» траектории, т. е. траектории, удовлетворяющие уравнениям движения с фиксированными концами, заданными с бесконечно малой погрешностью. Мы полагаем, что для траекторий в пучке $q_k(t)$ действие S_k задается с точностью первого порядка по вариации траектории $\delta q_k(t) = q_k(t) - q_{\text{ext.}}(t)$. Это значит, что для траекторий из этого узкого пучка траекторий действие экстремально. Определим вероятность достоверности для траекторий из этого пучка, как интенсивность средней амплитуды вероятности:

$$\mathcal{W} \stackrel{\text{def}}{=} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Psi_k \right|^2 = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp \left\{ \frac{1}{\kappa} S_k \right\} \right|^2,$$

где мы использовали определение действия как логарифма амплитуды вероятности достоверности классической траектории. В силу экстремальности действия и бесконечно малой неопределенности пучка траекторий, действие на каждой такой траектории принимает значение в экстремуме, т. е.

$$S_k = S_{\text{ext.}} + \delta S_k \quad \delta S_k = 0 \quad \Rightarrow \quad S_k = S_{\text{ext.}},$$

а значит,

$$\mathcal{W} = \left| \exp \left\{ \frac{1}{\kappa} S_{\text{ext.}} \right\} \right|^2.$$

По построению, вероятность «прямой» классической траектории равна единице,

$$\mathcal{W} = 1,$$

откуда следует, что аргумент экспоненты в формуле для вероятности является *чисто минимым*. В частности, для свободных частиц действие зависит от одного параметра – массы частицы, так что если принять универсальное условие, что все массы являются вещественными и положительными, то само действие будет вещественным, а экстремальное условие для действия будет

означать, что экстремум — это **минимум** действия¹. При этом постоянная κ будет чисто мнимой величиной. Ясно, что в амплитуду вероятности входит лишь отношение массы к постоянной κ , так что комплексная фаза в определении массы должна быть в точности компенсирована ровно такой же фазой постоянной κ . В итоге, условились считать, что

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} -i\hbar, \quad (1.8)$$

где \hbar — положительная постоянная Планка $h/2\pi$. Численно с хорошей точностью $\hbar c \approx 200$ МэВ·Фм, где c — скорость света, а длина в один ферми равна $\text{Фм} = 10^{-13}$ см, т. е. один ферми отвечает размеру протона².

Определение универсальной, единой для всех физических систем постоянной κ в (1.8) как чисто мнимого числа означает, во-первых, что действие — это вещественная величина, и, следовательно, что массы частиц — это вещественные числа, а во-вторых, все массы должны иметь один и тот же знак, поскольку в физике вводится условие стабильности системы: энергия как системы, так и энергии подсистем должны быть ограничены снизу минимальным значением, так как иначе взаимодействие подсистем приведет к тому, что падение одной из подсистем в область неограниченно низких энергий будет сопровождаться неограниченным ростом энергии другой подсистемы и вся система окажется совершенно нестабильной, т. е. способной самопроизвольно разгоняться до неограниченных скоростей движения, если, например, масса одной частицы положительна, а другой отрицательна. Состояние системы с минимальной энергией называется физическим вакуумом: энергия вакуума не может быть уменьшена. Заметим, что вакуумное состояние не означает отсутствие какого-либо движения, т. е. не означает абсолютную пустоту, и в вакууме может происходить движение вакуумных степеней свободы.

При включении взаимодействий вероятность достоверности «истинной» классической траектории остается равной единице, а следовательно, действие должно всегда оставаться *вещественным*, $S \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим теперь узкий пучок из n траекторий вблизи центральной траектории $q_c(t)$, которая не удовлетворяет принципу наименьшего действия. Это значит, что при усреднении амплитуды вероятности в пучке

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp \left\{ \frac{1}{\kappa} S_k \right\}$$

происходит суммирование комплексных чисел с единичным модулем и хаотически меняющейся фазой, поскольку действие существенно меняется от траектории к траектории в таком пучке, поскольку

$$S_k = S_c + \delta S_k, \quad \delta S_k \neq 0,$$

¹Первая вариация действия на экстремальной траектории равна нулю, в то время как вторая вариация в случае свободной частицы сводится к виду

$$\delta^2 S = \int \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 L_0}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} \delta v^\alpha \delta v^\beta dt = \frac{1}{2} m \int (\delta v)^2 dt > 0.$$

так что малые вариации второго порядка возле экстремума увеличивают значение действия, и экстремум действительно является минимумом.

²Значения кванта действия \hbar зависит от выбора единиц измерения импульса и энергии при фиксированных единицах измерения длины и времени, как мы увидим это дальше по ходу построения гамильтоновой механики. Ясно, что можно выбрать такие единицы измерения импульса и энергии, что в этих единицах получится значение $\hbar = 1$.

а значит,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp \left\{ \frac{1}{\kappa} S_k \right\} = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_c \right\} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \delta S_k \right\} \right).$$

Так как средние значения синуса и косинуса равны нулю и $\exp\{i\alpha\} = \cos \alpha + i \sin \alpha$, мы найдем, что и средняя амплитуда для такого пучка траекторий обращается в нуль, чего и следовало ожидать. Это утверждение справедливо, конечно, если изменение фазы $\alpha_k = \delta S_k / \hbar$ с необходимостью охватывает хотя бы период в 2π , что заведомо будет иметь место, если $|\delta S_k| / \hbar \gg 2\pi$, что и составляет критерий применимости классической механики в приведенном рассмотрении. Кроме того, в общем случае нужно еще рассмотреть ширину трубы траекторий при вариации действия второго порядка малости в сравнении с фазой «квантовой» амплитуды: если квантовые флуктуации существенно меньше ширины трубы за счет погрешности измерений приборов, то динамика вполне может описываться классическими траекториями.

Другими словами, если отклонение действия от экстремального за счет погрешности приборов δS много больше постоянной Планка: $\delta S / \hbar \gg 1$, – то мы наблюдаем только экстремальную траекторию, а значит, классическая механика формально отвечает пределу $\hbar \rightarrow 0$. Однако, нужно иметь ввиду, что при изучении траекторий, которые за счет флуктуаций сил обладают $\delta S / \hbar \sim 1$, с соответствующей точностью измерений мы вступаем в область квантовой механики, причем, для примера, если мы исследуем движение, экстремальная траектория которого, а значит, классическое движение есть просто покой в устойчивом положении, то флуктуации сил с квантовой точностью будут приводить к тому, что в действительности система не покоятся.

Итак, мы установили, что на узких пучках «прямых» траекторий вероятность достоверности классической траектории равна единице, а на пучках не «экстремальных» траекторий вероятность достоверности обращается в нуль.

Отметим, что в приведенном рассмотрении мы предполагали, что возможно выделение достаточно узких пучков траекторий как возле «прямой» классической траектории, так и возле не «экстремальной» траектории. Это отвечает предельному случаю описания траекторий в рамках классической механики. В действительности, общим случаем является квантовая траектория в пучке, которая характеризуется *флуктуацией сил*, причем законы таких флуктуаций описываются амплитудой вероятности в квантовой механике. Стандартный способ сравнения предсказаний квантовой теории с экспериментом обычно использует многократное повторение одной и той же ситуации движения (ансамбль) для вычисления вероятности флуктуаций траектории. Однако, вообще говоря, квантовые флуктуации имеют место и в единичном случае, «без ансамбля». Так, к примеру, у нас нет ансамбля Вселенных, с которыми мы повторяли бы опыты по эволюции, есть только одна Вселенная, а значит, лишь одна реализация флуктуаций ее движения, и, при этом, нам удается верно описать квантовые флуктуации, произошедшие на ранней стадии эволюции Вселенной, которые определили спектр неоднородности распределения вещества, запечатленный в видимой крупномасштабной структуре Вселенной, а также в анизотропии реликтового излучения, дающего «фотоснимок» Вселенной в ее младенческом возрасте около 380 тысяч лет с начала расширения.

Наконец, отдельно подчеркнем, что проведенные рассуждения с точки зре-

ния математического описания, как мы установим несколько позже, отвечают введению векторного пространства квантовых состояний, элементами которого являются амплитуды вероятности Ψ того, что частица находится на некоторой траектории, причем необязательно на единственной «прямой траектории» в классическом понимании, и эти квантовые состояния могут образовывать суперпозиции, которые также являются амплитудами вероятности для таких суперпозиций состояний на нескольких траекториях.

8 Гамильтонова механика

Мне кажется, что дело не в том, чтобы найти самый лучший или самый эффективный способ делать открытия, а в том, чтобы найти хоть какой-нибудь.

Ричард Фейнман, Нобелевская лекция

Гамильтонова механика: уравнения Гамильтона–Якоби, волна де Броиля, уравнения Гамильтона.

8.1 Уравнения Гамильтона–Якоби

Принимая во внимание интегралы движения, которые получаются из теоремы Нётер согласно однородности пространства и времени, т. е. импульс p и энергию E , перейдем от пары лагранжевых переменных $\{\dot{q}, q\}$ к гамильтоновым $\{p, q\}$, а также совершим преобразование Лежандра и введем функцию Гамильтона

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \Big|_{\dot{q}=\dot{q}(p)}, \quad p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad (2.1)$$

или в многомерном случае, когда $p_\alpha = \partial L / \partial \dot{r}^\alpha$,

$$H = p_\alpha \dot{r}^\alpha - L. \quad (2.2)$$

В частности, при

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - U(\mathbf{r}) \quad (2.3)$$

находим

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r}). \quad (2.4)$$

При нулевом потенциале имеется только вклад свободной частицы, который называют кинетической энергией $K = L_0 = \mathbf{p}^2 / 2m$.

Действие можно теперь переписать в виде (при указании пределов интегрирования введем в обозначения штрихи для подынтегральных переменных)

$$\begin{aligned} S = \int L dt &= \int \{p \dot{q} dt - H dt\} = \int_{t_0, q_0}^{t, q} p' dq' - H(q', p', t') dt' \equiv \\ &\equiv \int_{q_0}^q p' dq' - \int_{t_0}^t H(q', p', t') dt', \quad (2.5) \end{aligned}$$

откуда сразу получаем уравнения Гамильтона–Якоби³

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H,$$

или в многомерном случае, когда

$$S = \int_{r_0}^r p_\alpha dr^\alpha - \int_{t_0}^t H dt, \quad (2.6)$$

установим

$$\partial_\alpha S = p_\alpha, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H. \quad (2.7)$$

Итак, уравнения Гамильтона–Якоби — это уравнения в частных производных первого порядка, в которых ищется действие как функция от точек-концов траектории. Подчеркнем, что уравнения Ньютона — это уравнения второго порядка по времени, в которых ищется траектория частицы с заданными начальными условиями. Мы покажем, что из действия, которое является решением уравнений Гамильтона–Якоби, можно найти траекторию с заданными концами.

8.2 Принцип Гюйгенса и гипотеза де Бройля

В теории распространения колебаний установлено, что волны, к примеру, в оптике волны электромагнитного излучения характеризуются частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k} = \epsilon 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны, ϵ — единичный вектор в направлении движения излучения и $\omega = c|\mathbf{k}|$, где c — скорость света. Частота и волновой вектор определяют фазу волны

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} - \omega dt,$$

причем, согласно принципу Гюйгенса, волна задается суперпозицией по разным путям распространения C_n

$$\sum_n \mathcal{A}_n \exp \left\{ i \int_{C_n} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} - \omega dt \right\},$$

а в случае распространения из одной точки в другую амплитуды \mathcal{A}_n нужно положить равными, $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_0$. Интенсивность волны принимает вид

$$|\mathcal{A}_0|^2 \left| \sum_n \exp \left\{ i \int_{C_n} \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} - \omega dt \right\} \right|^2,$$

³Дифференцирование по верхнему пределу интегрирования производится элементарно, в то время как относительно дифференцирования подынтегрального выражения заметим, что оно сводится к вариации действия на траектории, которая удовлетворяет уравнениям движения, а значит, согласно принципу экстремального действия такая вариация равна нулю, и дифференцирование подынтегрального выражения на уравнениях движения дает нуль. Тот же результат получится, если воспользоваться теоремой Нёттер, в которой в качестве параметров дифференцирования действия выбрать координату и время в конечной точке истинной классической траектории.

В пределе геометрической оптики интерференция сводится к учету распространения по лучам, для которых фаза колебаний удовлетворяет условию экстремальности $\delta\varphi = 0$ (принцип Ферма) при варьировании траектории $\delta\mathbf{r}(t)$, так что её экстремальное значение называют эйконалом, и при этом, лучи в геометрической оптике имеют физический смысл траекторий корпукул света, т. е. фотонов, для которых можно записать вероятность достоверности траектории в терминах действия

$$|\Psi|^2 = \left| \frac{1}{n} \sum_n \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{C_n} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} - E dt \right\} \right|^2.$$

Естественно положить, что интенсивность волны в пределе геометрической оптики и вероятность достоверности траекторий пропорциональны друг другу: гипотеза де Бройля —

$$\varphi = \frac{S}{\hbar},$$

откуда сразу следует связь частоты и волнового вектора с энергией и импульсом фотона,

$$E = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \quad (2.8)$$

так что из данных фотоэффекта устанавливается, что \hbar действительно постоянная Планка с чертой.

Заметим, что свободные фотоны обладают ненулевыми значениями кинетической энергии и импульса, закон дисперсии которых, т. е. связь энергии с импульсом, $E^2 = c^2\mathbf{p}^2$, отличается от закона дисперсии свободных нерелятивистских частиц с массой, $E = \mathbf{p}^2/2m$. Это — пример закона дисперсии для частиц с нулевой массой: такие частицы не удовлетворяют принципу относительности Галилея для инерциальных систем.

8.3 Уравнения Гамильтона

Прямое вычисление производных функции Гамильтона дает, во-первых,

$$\partial_\beta H = \partial_\beta \{p_\alpha \dot{r}^\alpha - L\} = -\partial_\beta L = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\beta} = -\dot{p}_\beta,$$

а во-вторых,

$$\frac{\partial H}{\partial p_\beta} = \frac{\partial}{\partial p_\beta} \{p_\alpha \dot{r}^\alpha - L\} = \dot{r}_\beta + p_\alpha \frac{\partial \dot{r}^\alpha}{\partial p_\beta} - \frac{\partial L}{\partial p_\beta},$$

и в силу определения импульса,

$$\frac{\partial L}{\partial p_\beta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\alpha} \frac{\partial \dot{r}^\alpha}{\partial p_\beta} = p_\alpha \frac{\partial \dot{r}^\alpha}{\partial p_\beta}$$

что приводит к уравнениям Гамильтона

$$\frac{\partial H}{\partial p_\beta} = \dot{r}^\beta, \quad \partial_\beta H = -\dot{p}_\beta. \quad (2.9)$$

В случае нерелятивистской функции Лагранжа вида (2.3) получаем функцию Гамильтона (2.4),

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r}),$$

и

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\partial U(\mathbf{r}). \quad (2.10)$$

Уравнения Гамильтона можно получить и при вариации действия (2.6) по траекториям в фазовом пространстве:

$$\delta S = \int_{t_0, \mathbf{r}_0}^{t, \mathbf{r}} \left(\delta p_\alpha \dot{r}^\alpha dt - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha dt \right) + \int_{t_0, \mathbf{r}_0}^{t, \mathbf{r}} \left\{ p_\alpha \delta \dot{r}^\alpha dt - \frac{\partial H}{\partial r^\alpha} \delta r^\alpha dt \right\},$$

где, конечно, в фигурных скобках необходимо проинтегрировать по частям вклад с вариацией скорости движения с учетом условия фиксированных концов траектории по координатам, что приведет к члену с производной импульса по времени. В итоге, принцип экстремального действия при вариации по импульсам (в круглых скобках) и координатам (в фигурных скобках) дает уравнения Гамильтона (2.9).

Решением уравнений Гамильтона является траектория в фазовом пространстве (на фазовой плоскости $\{p, q\}$ в случае одномерного движения).

9 Квантовые пути

Эволюция свободной частицы по траектории и амплитуда вероятности, условия квантовых флюктуаций, уравнение для амплитуды вероятности, суммирование по траекториям. Случайность в механике: скрытые параметры и «квантовые сны», превышение порога для парных корреляторов, распределение вероятностей и гамильтониан физической системы, ЭПР-парадокс, соотношения неопределенностей, мысленный эксперимент, поляризация света, парадигма локального реализма, арифметика неравенств Белла.

9.1 Флуктуации свободной квантовой частицы

В качестве простейшего примера рассмотрим амплитуду вероятности для свободной частицы в одномерном декартовом пространстве, которая за время от t' до t распространяется из точки q' в точку q , так что

$$\Psi(t, q) = A e^{iS(t, q)/\hbar},$$

где действие определяется прямой траекторией при движении с постоянной скоростью $\dot{q} = (q - q')/(t - t')$,

$$S(t, q) = \frac{m\dot{q}^2}{2} \int_{t'}^t dt = \frac{1}{2} m \frac{(q - q')^2}{t - t'},$$

причем строго $t > t'$, а независящую от координат амплитуду A мы ввели для общности рассмотрения. В силу уравнений Гамильтона–Якоби

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \Psi(t, q) = \frac{\partial S(t, q)}{\partial q} \Psi(t, q) = p \Psi(t, q).$$

В случае, когда в силу принципа суперпозиции, т. е. в силу принципа Гюйгенса, амплитуда — это сумма амплитуд для различных траекторий с различными начальными точками, но с одной и той же конечной точкой (t, q) , оператор импульса, который действует на амплитуду вероятности,

$$\hat{p}\Psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \Psi,$$

сводится к сумме импульсов с весами в виде отдельных амплитуд соответствующей траектории. В самом деле, для

$$\Psi(t, q) = \sum_k A_k e^{iS_k(t, q)/\hbar}$$

найдем

$$\hat{p}\Psi(t, q) = \sum_k A_k \hat{p} e^{iS_k(t, q)/\hbar} = \sum_k A_k p_k e^{iS_k(t, q)/\hbar},$$

так что \hat{p} переводит суперпозицию в суперпозицию, и тогда говорят, что \hat{p} — это линейный оператор.

Для комплексно сопряженной амплитуды для свободной частицы

$$(\hat{p}\Psi)^* = \Psi^* p.$$

В рассматриваемом простейшем случае естественно определить среднее значение оператора импульса в виде⁴

$$\langle \hat{p} \rangle = \frac{1}{2} (\Psi^* (\hat{p}\Psi) + (\hat{p}\Psi)^* \Psi) \frac{1}{\Psi^* \Psi}, \quad (2.11)$$

чтобы учесть сокращение произвольной нормировки амплитуды. Элементарная подстановка дает для свободной частицы, конечно,

$$\langle \hat{p} \rangle = m \frac{q - q'}{t - t'} = m \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

⁴ В формализме квантовой механики, когда амплитуда является суперпозицией для многих траекторий, необходимо более строго подходить как к определению среднего значения физических величин, так и к трактовке амплитуды вероятности найти частицу в заданной точке в заданный момент времени. В частности, на единицу нормируют сумму вероятностей найти частицу в какой-либо точке пространства. В нашем изложении мы здесь не касаемся этих принципиальных для квантовой механики вопросов. Отметим лишь, что, если определить для независимых траекторий «вероятности»

$$w_k = |A_k|^2 \frac{1}{\sum_{k'} |A_{k'}|^2}, \quad \sum_k w_k = 1,$$

то естественно ввести среднее значение импульса в виде

$$\langle p \rangle = \sum_k p_k w_k,$$

и в случае, когда есть только одна амплитуда, это выражение сводится к формуле (2.11).

Подчеркнем, что речь идет о траектории с фиксированными концами, а не о траектории с заданным импульсом или энергией.

Далее, определим флуктуацию импульса как среднее значение квадратичного отклонения от среднего значения

$$(\delta p)^2 = \langle (\hat{p} - \langle p \rangle)^2 \rangle.$$

Раскрывая квадрат и учитывая, что среднее значение числа по данному нами определению среднего равно самому числу, найдем

$$(\delta p)^2 = \langle (\hat{p}^2 - 2\hat{p}\langle p \rangle + \langle p \rangle^2) \rangle = \langle \hat{p}^2 \rangle - 2\langle p \rangle^2 + \langle p \rangle^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle p \rangle^2,$$

а значит, флуктуация определяется разностью среднего значения квадрата импульса и квадрата среднего значения. В случае свободной частицы

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Psi^*\Psi} \Psi^*(\hat{p}^2\Psi) &= -\hbar^2 e^{-iS/\hbar} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{(q-q')^2}{t-t'} \right\} = \\ &= -\hbar^2 e^{-iS/\hbar} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{i}{\hbar} m \frac{q-q'}{t-t'} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{(q-q')^2}{t-t'} \right\} \right) = \\ &= \left(m \frac{q-q'}{t-t'} \right)^2 - i \frac{m\hbar}{t-t'}. \end{aligned}$$

Чисто мнимый вклад сокращается при вычислении

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \frac{1}{2} (\Psi^*(\hat{p}^2\Psi) + (\hat{p}^2\Psi)^*\Psi) \frac{1}{\Psi^*\Psi} = \left(m \frac{q-q'}{t-t'} \right)^2 = \left(m \frac{\Delta q'}{\Delta t} \right)^2,$$

так что $(\delta p)^2 \equiv 0$. Однако в более изощренных случаях флуктуация оказывается отличной от нуля: в рассмотренном примере амплитуда была собственной функцией оператора импульса с вещественным собственным значением, которое равно среднему значению импульса, а стало быть, ясно, что в случае, когда амплитуда не является собственной для оператора импульса, флуктуации импульса становятся ненулевыми.

Вместе с тем, интересно отметить, что, во-первых, чисто мнимый вклад формально стремиться к нулю при $\hbar \rightarrow 0$, а во-вторых, если иметь ввиду, что \hbar — это, все-таки, размерная величина, мнимая добавка пренебрежимо мала, когда действие в аргументе экспоненты много больше \hbar ,

$$S = \frac{1}{2} m \frac{(q-q')^2}{t-t'} = \frac{\langle p \rangle^2}{2m} \Delta t \gg \hbar,$$

а стало быть, аргумент амплитуды вероятности, фаза для чисто мнимого аргумента экспоненты много больше единицы. Это же условие можно переписать в терминах энергии,

$$E = \frac{\langle p \rangle^2}{2m} \gg \frac{\hbar}{\Delta t}.$$

В этом выражении значение энергии на классической траектории сравнивается с флуктуацией энергии ΔE , которая выражается через время наблюдения Δt , а именно,

$$\Delta E \sim \frac{\hbar}{\Delta t},$$

если действие становится порядка постоянной Планка,

$$S \sim \hbar.$$

Итак, приближение для амплитуды в виде вклада от единственной прямой траектории для свободной частицы применимо только в пределе длительного отрезка наблюдения, когда величина действия много больше постоянной Планка и флюктуаций пренебрежимо малы. Смысл этого утверждения становится понятней, если вспомнить, что мы рассматриваем траекторию свободной частицы с фиксированными концами, а значит, энергия, в принципе, может в такой постановке задачи, как видим, несколько флюктуировать. При этом, всегда можно указать длительность наблюдения за траекторией, когда флюктуация становится несущественной.

С точки зрения уравнений Гамильтона энергия свободной частицы связана с импульсом как

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

При записи энергии в уравнении Гамильтона–Якоби в виде $E = -\partial S/\partial t$ легко установить и вид оператора, который действует на амплитуду, т. е. на экспоненту от действия

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{iS/\hbar} = -\frac{\partial S}{\partial t} e^{iS/\hbar} = E e^{iS/\hbar},$$

так что

$$\hat{E}\Psi \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi.$$

Тогда следует полагать, что должно выполняться операторное уравнение для свободной частицы

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 \Psi. \quad (2.12)$$

Однако мы выяснили, что действие квадрата импульса приводит к флюктуациям

$$\frac{1}{2m} \hat{p}^2 \Psi = \frac{1}{2m} \left(m \frac{\Delta q}{\Delta t} \right)^2 \Psi - \frac{i\hbar}{2\Delta t} \Psi.$$

Эта флюктуация в операторном уравнении (2.12) в точности сократится, если предэкспоненциальный фактор амплитуды вероятности прямой траектории станет вполне определенным образом зависеть от времени,

$$\Psi(t, q) = A(t) e^{iS(t, q)/\hbar} = \frac{A_0}{\sqrt{t - t'}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} m \frac{(q - q')^2}{t - t'} \right\},$$

так что элементарное дифференцирование произведения экспоненты на фактор $A(t)$ дает

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, q) = \frac{1}{2m} \left(m \frac{\Delta q}{\Delta t} \right)^2 \Psi - \frac{i\hbar}{2\Delta t} \Psi = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 \Psi.$$

Итак, мы убедились, что действие операторов на амплитуду вероятности траекторий может приводить к флюктуациям по сравнению с классическими значениями импульса и энергии. Эти флюктуации скоррелированы так, чтобы в

среднем, если траектория единственная, выполнялись уравнения классической механики на прямой траектории.

Зависимость предэкспоненциального фактора от времени мы получили здесь из условия согласованности классических и операторных уравнений движения. В квантовой механике этот фактор строго вычисляется методом суммирования по всем траекториям с заданными концами, т. е. при расчете фейнмановского интеграла по траекториям.

Проведенное рассмотрение можно обобщить и для частицы, которая движется в потенциале, так что функция Гамильтона

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(q),$$

а уравнение для амплитуды $\Psi(t, q) = \Psi$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \frac{\hat{p}^2}{2m} \Psi + U(q) \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^2} + U(q) \Psi. \quad (2.13)$$

называется уравнением Шрёдингера.

9.2 Фейнмановский интеграл по траекториям для свободной частицы

Для любознательного читателя проведем детальное построение суммы по траекториям в случае свободной нерелятивистской частицы в гамильтоновом подходе, выведем амплитуду вероятности распространения частицы от одной точки до другой за фиксированное время и убедимся в том, что рассмотрение, проведенное нами при описании квантовых флуктуаций в разделе 9.1, имеет под собой глубокие основания.

Гамильтониан свободной частицы при одномерном движении задается импульсом

$$H_0 = \frac{p^2}{2m},$$

а действие с фиксированными концами $q(t'') = q''$ и $q(t') = q'$ равно

$$S_0(q'', t''; q', t') = \int_{q'}^{q''} p(t) dq(t) - \int_{t'}^{t''} \frac{p^2(t)}{2m} dt.$$

Следуя Фейнману, совершим бесконечно малый шаг эволюции по времени: найдем амплитуду вероятности Ψ_1 для частицы с импульсом p_1 , известным с точностью dp_1 , переместиться из точки $q_0 = q'$, где частица начала движение в момент времени $t_0 = t'$, в точку q_1 , где частица окажется в момент времени $t_1 = t_0 + dt_1$ при $dt_1 > 0$ так, что $dt_1 \rightarrow 0$ и $dp_1 \rightarrow 0$. Эта амплитуда по логике фейнмановской формулировки механики равна

$$\Psi_1 = \mathcal{A}(dp_1) e^{\frac{i}{\hbar} S_0(q_1, t_1; q_0, t_0)}, \quad (2.14)$$

где $\mathcal{A}(dp_1)$ — это нормировочный множитель, который, вообще говоря, зависит от точности определения импульса, а действие для бесконечно малого

интервала времени равно

$$S_0(q_1, t_1; q_0, t_0) = p_1(q_1 - q_0) - \frac{p_1^2}{2m}(t_1 - t_0).$$

Подчеркнем, что это действие с фиксированными концами траектории и заданным значением импульса, который принимает произвольное вещественное значение и не равен произведению «скорости» на массу: $m \cdot \dot{q} = m(q_1 - q_0)/(t_1 - t_0)$, поскольку в гамильтоновой механике импульс и координата — это независимые переменные, т. е., другими словами, концы траектории не фиксируют скорость, с которой частица исходит из начальной точки и приходит к конечную. Важно, что уравнения Гамильтона–Якоби дают

$$\frac{\partial S_0}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial S_0}{\partial t_1} = -\frac{p_1^2}{2m} = -H_0(p_1),$$

а это значит, что в этих уравнениях всё соответствует законам движения свободной нерелятивистской частицы для траектории с конечными точками $(q_0, t_0) \mapsto (q_1, t_1)$. В том числе, согласно уравнениям Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{q}(t_1) = \frac{\partial H_0}{\partial p} \Big|_{t=t_1} = \frac{p_1}{m}, \\ \dot{p}(t_1) = \frac{\partial H_0}{\partial q} \Big|_{t=t_1} = 0. \end{cases}$$

Итак, импульс свободной частицы в момент времени t_1 имеет производную по времени, равную нулю, и задает скорость в этот момент времени в полном соответствии с динамикой свободной частицы, так что движение частицы на интервале времени dt_1 с фиксированными концами допускает, что скорость в конечной точке принимает значения, корректно связанные со значениями импульса в этой точке, но отличные от скорости, равной расчетному значению на прямой траектории $(q_1 - q_0)/(t_1 - t_0)$. Вопрос: как часто происходят такие отклонения от «прямых» классических значений? Именно для ответа на этот вопрос необходимо вычислить амплитуду вероятности, суммирующую все возможные варианты реальных траекторий. В частности, импульс p_1 задан не как фиксированная величина, а как величина с некоторой погрешностью, и в самом проведенном построении о распространении между фиксированными точками импульс задан не как интеграл движения, а как параметр, который может принимать различные значения.

Обратим внимание на нормировочный множитель $\mathcal{A}(dp_1)$ в формуле (2.14), а именно, разобьем интервал dp_1 на две бесконечно малые части

$$dp_1 = dp'_1 + dp''_1,$$

и установим, что для двух амплитуд вероятностей Ψ'_1 и Ψ''_1 с такими неопределенностями импульса их сумма равна

$$\Psi'_1 + \Psi''_1 = (\mathcal{A}(dp'_1) + \mathcal{A}(dp''_1)) e^{\frac{i}{\hbar} S_0(q_1, t_1; q_0, t_0)}.$$

Но при бесконечно малых неопределенностях импульса — это амплитуда для той же траектории в фазовом пространстве, что и до разбиения интервала импульса dp_1 на две части. Следовательно,

$$\Psi'_1 + \Psi''_1 = \Psi_1,$$

что возможно только при условии, что

$$\mathcal{A}(\mathrm{d}p'_1) + \mathcal{A}(\mathrm{d}p''_1) = \mathcal{A}(\mathrm{d}p_1),$$

а это имеет место для произвольного разбиения, если нормировочный множитель пропорционален точности задания импульса:

$$\mathcal{A}(\mathrm{d}p) = C \frac{\mathrm{d}p}{2\pi\hbar},$$

где мы ввели нормировочную константу C и специальный знаменатель $2\pi\hbar$ так, чтобы в дальнейших построениях было сподручней проводить вычисления с сокращением возникающих сомножителей.

В результате для бесконечно малого шага эволюции в случае, когда конечная точка q_1 на траектории фиксирована, сумма по траекториям с разными значениями импульса — это интеграл

$$\sum_{p_1} \Psi_1 = C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}p_1}{2\pi\hbar} \exp \left(\frac{i}{\hbar} p_1(q_1 - q_0) - \frac{i}{\hbar} \frac{p_1^2}{2m} (t_1 - t_0) \right).$$

Но если q_1 — это не конечная, а промежуточная точка эволюции, и за первым бесконечно малым шагом эволюции следует второй бесконечно малый шаг по времени, то для q_1 также необходимо указать точность, с которой установлено значение этой координаты на траектории, $\mathrm{d}q_1$, и тогда, повторяя логику рассуждений о зависимости нормировочного множителя от неопределенности переменной фазового пространства на траектории, найдем, что амплитуда вероятности на двух шагах эволюции, которая выражается как произведение амплитуд на каждом из шагов, после суммирования по промежуточным значениям координаты q_1 и импульсам p_1 и p_2 равна

$$\begin{aligned} \sum \Psi_2 \Psi_1 &= C^2 \int \frac{\mathrm{d}p_2}{2\pi\hbar} \int \frac{\mathrm{d}p_1 \mathrm{d}q_1}{2\pi\hbar} \exp \left(\frac{i}{\hbar} p_2(q_2 - q_1) - \frac{i}{\hbar} \frac{p_2^2}{2m} (t_2 - t_1) \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(\frac{i}{\hbar} p_1(q_1 - q_0) - \frac{i}{\hbar} \frac{p_1^2}{2m} (t_1 - t_0) \right). \end{aligned}$$

Эту амплитуду вероятности принято обозначать $U(q_2, t_2; q_0, t_0)$. Она выражается через действие в гамильтоновой механике

$$U(q_2, t_2; q_0, t_0) = C^2 \int \frac{\mathrm{d}p_2}{2\pi\hbar} \int \frac{\mathrm{d}p_1 \mathrm{d}q_1}{2\pi\hbar} \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_0(q_2, t_2; q_0, t_0) \right).$$

На каждом шаге эволюции действие удовлетворяет уравнениям Гамильтона–Якоби! Частица движется по траектории $q(t)$ из исходной точки $q_0 = q(t_0)$ в промежуточную точку $q_1 = q(t_1)$ и затем в точку $q_2 = q(t_2)$, а траектория импульса $p(t)$ задается значениями $p_1 = p(t_1)$ и $p_2 = p(t_2)$, но при этом фиксированы только концы траектории в координатном пространстве, а по остальным параметрам траектории проводится интегрирование.

После N шагов эволюции при $q_N = q''$ и $t_N = t''$ найдем

$$\begin{aligned} U(q'', t''; q', t') &= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ dt_k \rightarrow 0}} C^N \int \frac{dp_N}{2\pi\hbar} \int \prod_{k=1}^{N-1} \frac{dp_k dq_k}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_0(q'', t''; q', t')\right) \equiv \\ &\equiv \int \mathcal{D}p \mathcal{D}q \cdot e^{\frac{i}{\hbar} S}, \quad (2.15) \end{aligned}$$

где мы ввели обозначение для меры интегрирования по траекториям в фазовом пространстве $\mathcal{D}p \mathcal{D}q$ и определили ее как предел счетного числа много-кратных мер, а в конце равенства записали действие общего вида S , имея в виду, что все проведенные нами построения могут быть аналогичным образом проделаны и при наличии потенциала взаимодействия частицы.

В случае свободной нерелятивистской частицы кратные интегралы можно взять в явном виде в терминах дельта-функции Дирака (см. Главу (8.D), раздел 41, где вводится преобразование Фурье и образ единицы) и гауссова интеграла, который рассмотрен в Приложении при описании основных понятий теории вероятностей, (А.П), §а на стр. 295. В самом деле, необходимо «снять интегрирование» по координатам в выражении

$$\begin{aligned} \int \frac{dp_N}{2\pi\hbar} \int \prod_{k=1}^{N-1} \frac{dp_k dq_k}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_N(q'' - q_{N-1}) + \frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^{N-1} p_k(q_k - q_{k-1})\right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p_N^2}{2m}(t'' - t_{N-1}) - \frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{p_k^2}{2m}(t_k - t_{k-1})\right), \quad (2.16) \end{aligned}$$

используя для $k \in \{\overline{1, (N-1)}\}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq_k e^{\frac{i}{\hbar} q_k(p_k - p_{k+1})} = 2\pi\hbar \delta(p_k - p_{k+1}). \quad (2.17)$$

Но тогда все интегралы по импульсам за исключением p_N «снимаются» из-за дельта-функции Дирака и последовательно дают подстановку $p_k \mapsto p_N$ так, что

$$\begin{aligned} U(q'', t''; q', t') &= \left(\lim_{N \rightarrow \infty} C^N \right) \int \frac{dp_N}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} p_N \left(q'' - q_{N-1} + \sum_{k=1}^{N-1} (q_k - q_{k-1}) \right) \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \frac{p_N^2}{2m} \left(t'' - t_{N-1} + \sum_{k=1}^{N-1} (t_k - t_{k-1}) \right) \right\} = \\ &= \left(\lim_{N \rightarrow \infty} C^N \right) \int \frac{dp_N}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} p_N (q'' - q') - \frac{i}{\hbar} \frac{p_N^2}{2m} (t'' - t') \right\}. \quad (2.18) \end{aligned}$$

Отсюда сразу видно, что интеграл по траекториям отличен от нуля и однозначно определен только при $C = 1$, как мы это и будем считать в дальнейшем.

В аргументе же экспоненты в подынтегральном выражении в конце формулы (2.18) выделим полный квадрат,

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} p_N(q'' - q') - \frac{i}{\hbar} \frac{p_N^2}{2m} (t'' - t') &= -\frac{i}{\hbar} \frac{(t'' - t')}{2m} \left(p_N - m \frac{(q'' - q')}{(t'' - t')} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{i}{\hbar} \frac{1}{2m} \left(m \frac{(q'' - q')}{(t'' - t')} \right)^2 (t'' - t'). \end{aligned}$$

Последнее слагаемое не зависит от переменных интегрирования, так что его вклад может быть вынесен из-под знака интеграла. Поэтому

$$U(q'', t''; q', t') = A \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2m} \left(m \frac{(q'' - q')}{(t'' - t')} \right)^2 (t'' - t')} = A \cdot e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}}, \quad (2.19)$$

где в аргументе экспоненты стоит классическое действие S_{cl} для свободной нерелятивистской частицы, которая распространяется по прямой линии между фиксированными точками за заданное время,

$$S_{cl} = \frac{1}{2m} \left(m \frac{(q'' - q')}{(t'' - t')} \right)^2 (t'' - t'),$$

а предэкспоненциальный множитель A после замены переменной интегрирования

$$p = p_N - m \frac{(q'' - q')}{(t'' - t')}$$

имеет вид

$$A = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t'' - t') \right\}.$$

Интеграл сводится к гауссову (см. вывод в Приложении (A.II), §а на стр. 295), если произвести поворот Вика

$$(t'' - t') = -it_E,$$

где формально $t_E > 0$, так что

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \frac{p^2}{2m} t_E \right\} = \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2\pi}{t_E}} \frac{m\hbar}{\hbar} = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i(t'' - t')}}. \quad (2.20)$$

Итак, выражение (2.19) для амплитуды вероятности перехода свободной частицы из одной точки в другую с учетом (2.20) имеет вполне определенное значение и согласуется с качественным рассмотрением в разделе 9.1. В пределе бесконечно малых шагов по времени звенья ломаных линий от точки к точке сливаются в «траектории на фазовой плоскости»: координатная траектория имеет фиксированные концы, а траектория импульсов — свободные концы. При этом, сумма амплитуд по точкам переходит в фейнмановский интеграл по траекториям.

В заключение этого параграфа отметим, что в построенном фейнмановском интеграле по траекториям можно сначала провести интегрирование по

всем промежуточным импульсам тем же методом поворота Вика и вычисления гауссовых интегралов, так что амплитуда примет вид

$$U(q'', t''; q', t') = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ dt_k \rightarrow 0}} \int \prod_{k=1}^{N-1} dq_k \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i dt_k}} \cdot \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{2m} \left(m \frac{q_k - q_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \right)^2 dt_k \right\}.$$

Поэтому, если ввести скорость

$$\dot{q}(t_k) \equiv \frac{q_k - q_{k-1}}{t_k - t_{k-1}},$$

то аргумент экспоненты под интегралом выражается через действие в лагранжевой механике с фиксированными граничными точками:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ dt_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{2m} \left(m \frac{q_k - q_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \right)^2 dt_k = \int \frac{m\dot{q}^2}{2} dt = S(q'', t''; q', t').$$

Вводя обозначение для меры интегрирования по траекториям в лагранжевом формализме

$$\mathcal{D}q \equiv \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ dt_k \rightarrow 0}} \int \prod_{k=1}^{N-1} dq_k \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i dt_k}},$$

представим амплитуду перехода из точки в точку как

$$U(q'', t''; q', t') = \int \mathcal{D}q \cdot e^{\frac{i}{\hbar} S(q'', t''; q', t')}.$$

Итак, для гамильтонианов, квадратичных по импульсам, фейнмановский интеграл по траекториям в фазовом пространстве сводится к интегралу по траекториям в лагранжевой механике.

§а Scientific fiction: Как Бог играет в кости?

Физические соображения помогают иногда генерировать идею о том, как неизвестное может быть связано с известным.

Ричард Фейнман, Нобелевская лекция

Если необходимость вероятностного описания законов природы никем не оспаривается как экспериментальный факт, то о причинах возникновения вероятности были выдвинуты две версии: теория скрытых параметров и квантовая механика.

В теории скрытых параметров вся динамика считается классической и детерминированной, и частицы движутся по гладким траекториям, удовлетворяющим принципу экстремального действия с фиксированными концами на всем интервале времени (без разбиения на произвольные временные подинтервалы, где точки на концах могут сходить с путем следования по гладкой траектории), но при этом постулируется наличие скрытых от измерения микроскопических переменных движения так, что наблюдаемое движение варьируется в зависимости от того, как происходит движение в скрытом от наблюдений секторе. В итоге, возникает ситуация аналогичная макроскопическому

описанию термодинамики с микроскопическими степенями свободы: наблюдаемые макроскопические переменные имеют функции распределения в своем фазовом пространстве, поскольку значения наблюдаемых после многократных повторений измерений в системе зависят от классической микроскопической динамики скрытых параметров.

Известный пример: театральный актер, который играет в Москве и Питере с равной вероятностью, меняясь в каждом из театров ролями с другими актерами-дублерами. Если нам неизвестно его расписание, то вероятность — это все, что доступно для наших измерений, так как истинное расписание вполне классического движения актера существует, но неизвестно зрителю. Если в момент измерения (выхода на сцену театра) актер обнаруживается в Москве, то это вовсе не значит, что актер коллапсировал в Питере: актера по расписанию его выступлений в Питере и не было, просто само расписание не было известно экспериментатору-зрителю. Не вполне вдумчивые зрители ошибаются, когда в рамках квантового описания этой физической системы отождествляют актера и его квантовое состояние, воскликая: «когда зритель увидел актера в московском театре, актер коллапсировал (исчез) в Питере», или более заумно: «волновая функция актера коллапсировала при измерении». В действительности никакого коллапса нет ни в теории скрытых параметров (по построению), ни в квантовой механике, так как актер не тождественен своей волновой функции—амплитуде вероятности, и его появление в Москве никак не влияет на вероятность появления актера то в Москве, то в Питере (в теории вероятностей четко разделяют понятия доли событий в выборке и вероятности события при бесконечном числе событий в выборке: если монета сейчас упала на «орла», то это не значит, что распределение вероятностей «орла» и «решки» коллапсировало, это распределение вероятностей осталось прежним, но в данной выборке монета упала именно на «орла»).

Итак, сторонник теории скрытых параметров Альберт Эйнштейн выразил постулат о движении по расписанию в виде ставшей крылатой фразы: «Бог не играет в кости!»

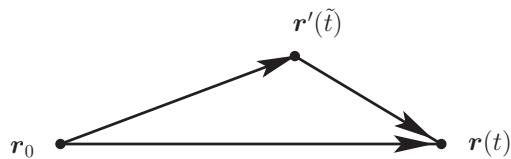
Однако постулат о движении по расписанию приводит к тому, что распределение вероятностей в фазовом пространстве положительно определено, что позволило Беллу сформулировать неравенства для измерения парных величин (корреляторов) в специально подобранных физических системах и показать, что в квантовой механике это неравенство может нарушаться: коррелятор может принимать значения, превышающие порог, который не может быть преодолен в теории скрытых параметров, как бы не была устроена их классическая динамика, т. е. как бы не коррелировали между собой парные измерения наблюдаемых на их фазовой плоскости. Авторы экспериментов по доказательству нарушения неравенств Белла были удостоены Нобелевской премии в 2022 году. Следовательно, экспериментально доказано, что теория скрытых параметров неверна, и вероятность описания физических систем возникает вовсе не вследствие движения по расписанию: «Бог играет в кости!» Но тогда как он в них играет?

В примере с актером представим себе, что часть своей жизни актер может спать и во сне он также является актером, который тоже может спать и во сне быть актером... Тогда движение актера по расписанию и его выход на сцену происходят и в реальности, и во сне. Вопрос: что из всего этого видит зритель? Где сон, а где реальность? Вот тут-то и происходит разделение одного от другого с помощью игры в кости! «Квантовые сны» вычеркиваются

из реальности случайным образом.

Важно, что расписание и во сне, и в реальности формируется по вполне понятным принципам: законам движения, но что из этого расписания попадает в реальность — вопрос случая, т. е. волновая функция удовлетворяет уравнениям движения и описывает возможные варианты реальности. При этом актер и его выход на сцену — это физически наблюдаемые характеристики реальности, а квантовое состояние актера описывает вероятности возможных вариантов реальности.

Если неравенства Белла для своего обсуждения требуют свободного обращения с квантовыми понятиями, т. е. достаточно высокой математической культуры и ее применения в физике, то по вопросу механики, который был поставлен в самом начале этой книги (см. рис. 1.1 на стр. 12 и репродукцию в этом параграфе), о свободной частице, огибающей препятствие, можно сказать следующее.



Со слов частицы она сначала вылетела из источника со скоростью по первому звену ломаной траектории и не попала за препятствие, заснула, проснулась и после сна опять вылетела из источника с другой скоростью; но фактически в реальности всё произошло так, что на первом звене ломаной траектории частица заснула в точке излома, а затем вернулась из сна в реальность в той же точке излома траектории в момент, когда частица вышла из источника уже с другой скоростью, двигалась по второму звену ломаной траектории и попала в финишную точку траектории за препятствием. Действуя процессуально, можно забыть про реальность и сон, игральные кости, и, следуя принципу Гюйгенса для амплитуды вероятности с учетом уравнений Гамильтона–Якоби на каждом интервале времени в реальности, просто решать уравнение для движения квантового состояния физической системы, что и определит все возможные варианты вероятностного описания характеристик системы, т. е. заниматься квантовой механикой.

По поводу неравенств Белла заметим, что их нарушение возникает из-за того, что классический аналог распределения вероятностей на фазовой плоскости для специально подобранных квантовых ситуаций не является положительно определенным, как это имеет место в теории скрытых параметров. Тогда сумма вероятностей по области положительно определенных значений в распределении вероятностей на фазовой плоскости классической частицы превышает единицу, и это превышение компенсируется суммой вероятностей по области отрицательно определенных значений в распределении вероятностей (сумма отрицательных значений называется словом «мана», которое хорошо знакомо любителям фантасмагорических магических компьютерных игр), так как квантовое состояние, которое может описываться матрицей плотности вероятностей, задает полную сумму вероятностей, равную единице. «Мана» на фазовой плоскости отвечает «квантовым снам», так что в реальности парные корреляторы двух величин в области положительных вероятностей начинают превышать свой порог как раз за счет того, что этот порог умножается на

сумму вероятностей, превышающих единицу.

Наконец, отметим, что любые распределения вероятностей для величин, которые не задают фазовую плоскость классической механики, положительно определены и в квантовой механике, так что для парных корреляторов таких величин нарушение неравенств Белла невозможно.

В этом «лирическом» отступлении от научного текста в сторону фантастики мы не обращались от слов к формулам, что, казалось бы, делает этот раздел далеким от того, что обычно называют физической интерпретацией, когда результаты, полученные из постулатов в ходе чисто формальных математических выкладок, могут быть качественно воспроизведены из «понятных» физических принципов, т. е. представлены в виде нескольких элементарных шагов, каждый из которых выглядит разумно обоснованным⁵. Но в действительности, пользуясь случайным разделением реальности и «снов», в которых частица движется строго по законам механики Гамильтона–Якоби, мы устно описали фейнмановскую конструкцию для вычисления амплитуды вероятности как интеграла по траекториям, который учитывает все возможные варианты реальности и определяет вероятности этих вариантов. Тогда «становится понятным», как частицы огибают препятствие, не являясь материальными волнами, и как возникает неопределенность скорости движения свободной частицы в точке пространства, раз возможно попасть в эту точку по разным траекториям. Более того, при движении в потенциале, когда на частицу действуют силы, в точке с заданными координатами у частицы в реальности возможны разные значения импульса, которые не совпадают со значением импульса, которое однозначно вычисляется для «прямой» классической траектории, а это значит, что в реальности возможно проникновение частицы в область за потенциальным барьером, недоступную при классическом движении, где нет случайных «квантовых снов». В итоге, мы получаем «понятную интерпретацию» явлений, которые обычно связаны с термином «виртуальные частицы»: у виртуальных частиц траектории в реальности отличаются от классических, потому что часть их классических траекторий оказались «во снах».

Принципиально важным является вопрос о том, почему одни траектории (или события) оказываются в реальности чаще других. Как сравнивать частоту одних событий с частотой других? Мы уже говорили об этом в терминах действия на траектории, пучков траекторий и амплитуды вероятности для этих пучков, как примеров частных случаев фейнмановской суммы по траекториям. И именно в согласии с такими представлениями в квантовой механике возникает квантование, например, квантование уровней энергии атома водорода: при энергиях в спектре атома водорода электрон часто находится возле протона, а вероятность нахождения электрона на бесконечности равна нулю, и напротив, при энергии вне спектра электрон невозможно обнаружить возле протона, электрон всегда бесконечно удален от протона, т. е. атом водорода

⁵Например, тонкое расщепление уровней в атоме водорода выводится из уравнения Дирака, но физическая интерпретация тонкого расщепления строится довольно понятным образом из учета поправок к энергии движения для релятивистской частицы, сложения энергии при прецессии Лармора и прецессии Томаса для спина и учета границы нерелятивистского описания частицы при локальном взаимодействии с кулоновским полем (дарвиновский вклад). Другой пример — диаграммы Фейнмана, которые описывают амплитуды вероятности квантовых переходов между состояниями. Картинки для этих амплитуд понятны, т. е. они допускают вполне естественное толкование и однозначное соответствие формулам для амплитуд вероятности, которые могут быть выведены в ходе довольно непростых выкладок из общих принципов квантовой теории поля.

в реальности существует только при строго квантованных значениях энергии связи электрона с протоном.

Игра в кости помогает осознать и эту зависимость вероятностей возможных вариантов реальности от физики системы, если спросить: Куда падают кости? Ясно, что бросание костей на плоский стол или на стол с вмятинами и горбами вообще-то приводит к тому, что кости на отличающихся друг от друга столах будут выпадать по-разному, если рассматривать многое попыток. В физике зависимость игры в кости от геометрии стола описывается гамильтонианом системы. Поэтому понятно, что прохождение частиц в эксперименте с одной щелью или двумя, где потенциальные барьеры расположены по-разному, приводит к разным результатам при многих попытках, так как гамильтонианы в этих системах отличаются, а значит, и кости выпадают на разных столах. Подчеркнем, что многократные попытки дают разные результаты в разных системах не потому, что «распределение вероятностей знает» все исходы или, как ошибочно считают, что «частица знает», сколько щелей в эксперименте, и что якобы в квантовой механике все происходит «нелокально». Наоборот, в каждой отдельной попытке имеет место вариант реальности, построенной локально, и только многократное повторение реализации одного и того же квантового состояния позволяет вычислить вероятности, которые получаются при бросании костей на специальный стол, заданный физикой конкретной системы.

Закончим на этом с «метафизикой» и вернемся к науке с формулами.

9.3 Парадокс Эйнштейна–Подольского–Розена

В 1935 году Эйнштейн, Подольский и Розен опубликовали статью, в которой был сформулирован парадокс (ЭПР-парадокс), поставивший под вопрос концептуальные основы квантовой механики как физической теории, удовлетворяющей целому ряду естественных и интуитивно ясных эмпирико-аксиоматических требований, в частности наличию причинно-следственных связей с учетом конечной скорости распространения влияния одного явления на другое (локальный принцип причинности). Из этой работы, по мнению авторов, следовало, что квантовая механика либо несовместима с принципом причинности, либо неспособна дать описание механизма возникновения локальных причинно-следственных связей в предложенном классе явлений, а значит, неполна, т. е. не может быть окончательной, *истинной* физической теорией. На эти две трактовки ЭПР-парадокса принято ссылаться как на альтернативы «квантовой нелокальности» и «локального реализма», причем в последнем случае имеется в виду, что все физические характеристики системы строго определены и детерминированы по времени, но часть из них скрыта от измерений в квантовой механике (теории со скрытыми параметрами).

§а Мысленный эксперимент

Рассмотрим одномерную квантовую систему. Пусть источник излучает две частицы⁶ в противоположные стороны так, что их центр масс покойится, т. е. суммарный импульс P тождественно равен нулю: $P = p_A + p_B \equiv 0$. Относительное движение частиц характеризуется тем, что в момент измерения они находятся на строго заданном расстоянии ℓ друг от друга.

⁶Для простоты массы частиц одинаковы.

Такой выбор наблюдаемых величин неслучаен. Дело в том, что координата и импульс образуют фазовую плоскость, так что в классической теории, когда траектории частиц детерминированы, в заданной точке траектории частица имеет вполне определенный импульс, а в квантовой теории движение может происходить по нескольким путям и, как следствие, в заданной точке частица может обладать разными значениями импульса в зависимости от квантового состояния, которое определяет амплитуды вероятности различных вариантов траектории частицы. Важно, что квантовая механика устанавливает рамки для неопределенностей координаты и импульса при многократном повторении их измерений, т. е. при переборе всех вариантов траекторий в квантовом состоянии⁷. Подчеркнем, что такие соотношения неопределенности устанавливаются для двух физических величин, если первая определяет характеристику системы, а вторая скорость изменения этой характеристики, как в случае координаты и импульса, что естественно, потому что импульс задает движение координаты. Таким образом, в квантовой механике неопределенности значений двух наблюдаемых величин означают, что одна из величин задает движение другой величины: точное значение одной величины в квантовом состоянии с необходимостью означает, что в этом квантовом состоянии есть несколько вариантов траектории с различными значениями второй величины, и это составляет суть соотношений неопределенности для двух таких величин в квантовой механике.

Пусть физические величины первой частицы измеряются приборами наблюдателя A , а второй — B (см. рис. 2.1)⁸. Описанная система обладает следующими свойствами:

- 1) если наблюдатель A измеряет координату первой частицы x_A , то результат измерения наблюдателем B координаты второй частицы строго предопределен⁹: $x_B = x_A + l$;
- 2) если наблюдатель A измеряет импульс первой частицы p_A , то результат измерения наблюдателем B импульса второй частицы строго предопределен: $p_B = -p_A$.

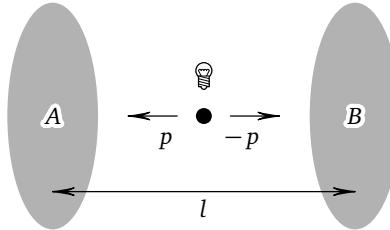


Рис. 2.1: Схема мысленного эксперимента Эйнштейна–Подольского–Розена.

Подобные результаты полностью согласуются с интуитивными ожиданиями.

⁷Статистические неопределенности, т. е. среднеквадратичные отклонения от средних значений, в квантовом состоянии для координаты $\Delta q = \sqrt{\langle(q - \langle q \rangle)^2 \rangle}$ и импульса $\Delta p = \sqrt{\langle(p - \langle p \rangle)^2 \rangle}$ связаны соотношением неопределенностей «координата-импульс»: $\Delta q \cdot \Delta p \geq \hbar/2$.

⁸В западной литературе общепринято давать наблюдателям имена «Алиса» (A) и «Боб» (B).

⁹Суть ситуации, конечно, нисколько не изменится, если поменять местами порядок наблюдателей, т. е. $A \rightleftarrows B$.

ями из локального принципа причинности: частицы образуются с противоположными импульсами, сумма которых сохраняется, так что измерения и должны давать противоположные значения импульсов; то же можно сказать и об относительной координате, значение которой строго фиксировано. При этом не возникает никаких неопределенностей в значениях измеряемых физических величин у второй частицы.

Однако ситуация кардинально меняется, если

1') наблюдатель A измеряет координату первой частицы x_A , а наблюдатель B измеряет импульс второй частицы p_B ;

2') наблюдатель A измеряет импульс первой частицы p_A , а наблюдатель B измеряет координату второй частицы x_B .

Интуитивно согласно принципу локального реализма следовало бы ожидать, что измерение в случае **1'** дает точные значения координаты второй частицы $x_B = x_A + \ell$ и импульса первой частицы $p_A = -p_B$, так как эти величины строго коррелируют друг с другом. Если наблюдатели A и B встречаются после проведения измерений, это могло бы дать способ точного измерения координаты и импульса частицы, что, однако, отрицается принципами квантовой механики: именно, при одном и том же значении измеренной первым наблюдателем координаты x_A многократное повторение измерений импульса второй частицы наблюдателем B привело бы к неопределенности значения p_B , связанной в соответствии с соотношением неопределенностей с погрешностью измерения координаты x_B (в частности, точное значение x_A приводило бы к бесконечной неопределенности в значении p_B). Аналогичные результаты с неопределенностями координата-импульс возникали бы согласно квантовой механике и в случае **2'**.

Допустим, что наблюдатели A и B заранее не договаривались о том, какие характеристики частицы они будут измерять, и объединили результаты своих измерений только после их проведения при встрече. Но тогда различие в результатах измерений в сериях экспериментов **1**, **2** и **1'**, **2'** становится парадоксальным: измерения проводились практически одновременно приборами, разделенными расстоянием порядка ℓ ; выбор наблюдателями A и B приборов для измерения координаты или импульса в одной и той же физической системе проводился независимо друг от друга; каким образом информация о том, какие приборы выбрал для измерения характеристики первой частицы наблюдатель A , сказалась на результатах измерения характеристик второй частицы наблюдателем B , пространственно отделенным от наблюдателя A ? Как информация о процедуре измерения одним наблюдателем может влиять на результаты измерения другим наблюдателем?

По мнению Эйнштейна, Подольского и Розена ответ на эти вопросы может быть только в виде двух альтернатив:

— либо квантовая механика существенно нелокальна, т. е. противоречит принципу локальной причинности¹⁰,

— либо она неполна, т. е. неспособна дать основанного на принципе локальной причинности описания физического механизма возникновения или отсутствия неопределенностей в измерениях в зависимости от выбора приборов пространственно разделенными наблюдателями, а значит, должна существовать теория локального реализма, в которой все физические величины

¹⁰Эйнштейн называл такую ситуацию «spooky action at the distance», что часто переводят как «кошмарное дальнодействие», хотя слово «spook» вернее трактовать как «привидение», т. е. кошмар вполне определенного рода.

строго детерминированы в согласии с принципом причинности в каждой точке траектории, а статистические неопределенности возникают, как и в любой классической статистической теории, вследствие неполного знания параметров траектории и, в частности, всего многообразия начальных данных, т. е. истинная теория, лежащая в основе явлений, описываемых «неполной» квантовой механикой, должна быть теорией со «скрытыми» параметрами.

Подчеркнем, что в принципе авторы ЭПР-парадокса не оппонируют экспериментальному факту наличия неопределенностей типа координата-импульс. Они ставят проблему логического обоснования этих неопределенностей согласно принципу причинности.

§b Формулировка Дэвида Бома

Оригинальная формулировка ЭПР-парадокса оставляет открытыми вопросы о реализации условий мысленного эксперимента, в частности, гамильтониана, описывающего воображаемую ситуацию распространения двух частиц с заданными свойствами. Однако основные характеристики мысленного эксперимента ЭПР, а именно:

- наличие двух сохраняющихся при движении наблюдаемых величин (у ЭПР сумма импульсов и разность расстояний частиц),
- соотношение неопределенностей для этих величин (у ЭПР неопределенность координата-импульс),

позволили Дэвиду Бому указать полный аналог мысленного эксперимента ЭПР, обладающий тем достоинством, что его можно реализовать практически.

Оригинальная работа Д. Бома оперирует понятием спина частицы, которые довольно сложно представить себе школьнику без обращения к ошибочным аналогиям типа врачающегося вокруг своей оси шара. Мы позволим себе использовать вместо спина понятие поляризации, что на примере световых волн доступно для понимания любому человеку: у света есть две поляризации, так что одна из поляризаций проходит через специальные очки от солнца, а вторая нет, и если под руками есть пара таких одинаковых очков, то, поворачивая одни очки относительно других, можно добиться, что обе поляризации не проходят сквозь такую пару очков. Кванты света — фотоны, являясь порциями света, обладают всеми свойствами света только дискретными порциями: порция энергии, порция количества движения, а также порция поляризации. Поэтому мы будем говорить о частицах — квантах света и о их поляризации. Тем более, что эксперименты, удостоенные Нобелевской премии в 2022 году, как раз и имели дело с фотонами и их поляризациями.

Пусть исходная физическая система излучает два фотона так, что по всем законам физики абсолютно точно эти два фотона обладают противоположными поляризациями, так что приборы, расположенные на некотором расстоянии от источника излучения вдоль оси y , регистрируют эти частицы, определяя их поляризацию на заданную ось (см. рис. 2.2). Тогда квантовое состояние поляризации двух фотонов в терминах поляризаций на ось z : поляризация по оси обозначается как $|+\rangle$, а против оси — символом $|-\rangle$, имеет вид суперпозиции двух вариантов реализации исходного требования о том, что поляризации двух фотонов по имени A и B строго противоположны, например,

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |+\rangle_A |-\rangle_B - |-\rangle_A |+\rangle_B \}. \quad (2.21)$$

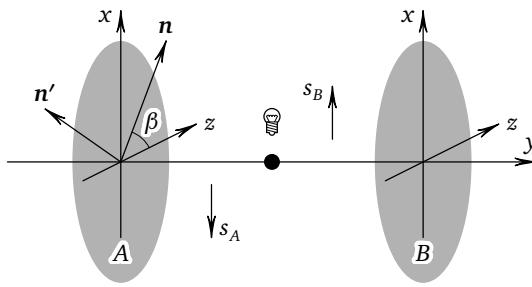


Рис. 2.2: Эксперимент ЭПР с измерением корреляций поляризаций s_A и s_B — формулировка Д. Бома.

В этой записи видно, что каждый вариант равновероятен, так как квадраты модулей каждого из коэффициентов в суперпозиции равны 0.5. Знак минус между амплитудами вероятности двух вариантов реальности здесь записан для иллюстрации, хотя в реальных квантовомеханических формулах в данном случае в действительности стоит именно этот знак. Квантовые состояния, по-добные (2.21), называются зацепленными, потому что суперпозиция задается в виде суммы для двух разных состояний каждой из частиц, строго связанных с двумя разными состояниями другой частицы.

Это квантовое состояние показывает, что

1) если наблюдатель A измеряет положительное значение поляризации первой частицы на ось z , то результат измерения поляризации второй частицы на ось z наблюдателем B строго предопределен и дает отрицательное значение поляризации (закон сохранения), и наоборот. Однако, измерение поляризаций может проводиться не только по оси z , но и по другим осям, которые показаны на рис. 2.2 как n или n' . Для фотонов эти оси всегда ортогональны оси движения фотонов y . Поскольку ось z ничем не выделена, квантовые состояния с поляризациями вдоль осей n или n' записываются совершенно аналогично формуле (2.21), но сами векторы поляризаций в проекциях на разные оси измерения записутся по-разному.

2) Если наблюдатель A измеряет значение поляризации на ось n , равное +1, то результат измерения поляризации второй частицы на ось n наблюдателем B строго предопределен и равен -1.

Однако полагая, что угол поворота β определяет ось n , отличную от оси z , заключаем, что

1') если наблюдатель A измеряет значение поляризации первой частицы на ось n , равное m , то результат измерения поляризации второй частицы на ось z наблюдателем B даст неопределенное значение, поскольку поляризации по двум разным осям в квантовой механике образуют пару наблюдаемых величин, которые задают соотношение неопределенностей для значения поляризаций по разным осям;

2') и аналогично, если наблюдатель A измеряет поляризацию первой частицы на ось z , а наблюдатель B поляризацию второй частицы на ось n , то результаты таких измерений будут находиться в согласии с соотношением неопределенностей.

Здесь опять возникает вопрос о реализации принципа локальной причинности в таких ситуациях: каким образом измерения наблюдаемых величин

испытывают столь различные корреляции в зависимости от выбора пространственно разделенных приборов регистрации их характеристик? Если эти корреляции причинно обусловлены, то либо эта причинная связь является нелокальной и противоречит конечной скорости распространения влияния одних событий на другие, либо квантовая механика не содержит в себе информации об установлении таких причинно-следственных связей путем распространения взаимодействий с конечной скоростью, т. е. неполна, а истинная теория является локально-причинной теорией со скрытыми параметрами.

Заметим однако, что зацепленное квантовое состояние поляризаций двух фотонов никак не зависит от положения этих фотонов в пространстве после того, как эти фотоны были излучены источником. Это значит, что, как бы долго не расходились фотоны друг от друга, измерения их поляризаций никак не зависят от расстояния между фотонами, так что говорить о распространении информации о поляризации двух фотонов довольно бессмысленно, как в известном анекдоте «о квантовой телепортации» носков: в квантовом состоянии есть два носка, один на левую ногу, другой на правую, и если с одной стороны квантового состояния сунуть в него две ноги, то один из носков будет надет на левую или правую ногу, например, на правую, но тогда с другой стороны квантового состояния останется только «левый» носок независимо от того, когда в квантовое состояние сунут две ноги с другой стороны, причем даже тогда, когда одна сторона квантового состояния на Земле, а другая — на Луне, вот вам и «квантовая телепортация»!

Возвращаясь к вопросу о поляризациях, заметим, что точное значение положительной поляризации по оси z по законам квантовой механики означает, что поляризация по оси \mathbf{n} движется, т. е. изменяется и принимает то положительные значения, то отрицательные по отношению к направлению \mathbf{n} . Как часто и какие именно значения? Это воля случая. Но воля в рамках локальности и причинности, конечно. Так, как это может быть, если вариантов реальности несколько.

Парадокс ЭПР вызвал дискуссию об основаниях квантовой механики, что плодотворно сказалось на более детальной разработке и формализации некоторых ее аспектов, особенно связанных с процессом и самим понятием измерения. В частности, было дано обобщенное определение понятию *единичного измерения* как оператора, действующего на квантовое состояние, т. е. амплитуду вероятности.

Понятие амплитуды вероятности, как следует из постулатов квантовой механики, предполагает серию *многократных измерений*, или экспериментов с идентичными квантовыми системами, которые и позволяют определить ее, а значит, квантовое состояние, эмпирически. Нет сомнения, что этот постулат находится в непрекаемом согласии со всем многообразием опытных данных.

Процедура единичных измерений позволяет строго описывать утверждения в рамках квантовой механики, в том числе и в случае парадокса ЭПР, суммировать основные выводы которого можно следующим образом в виде двух взаимоисключающих альтернатив:

Парадигма квантовой механики. Квантовое состояние изначально содержит в себе информацию о *всех возможных способах вероятностного измерения* своих характеристик, так что нелокальная реализация какого-либо из них не означает мгновенного распространения причинно-следственного влияния пространственно разделенных частей измерительного прибора друг на друга, а связана с осуществлением вероятного исхода избранного набора измерений наблюдаемых величин с учетом соотношений неопределенностей

(квантовая нелокальность).

Парадигма локального реализма (теорий со скрытыми параметрами). Все физические величины частиц строго определены локально, в каждой точке детерминированной по временной эволюции траектории, но часть из них скрыта от наблюдения (современными приборами), так что при многократном повторении «идентичных» по отношению к измеряемым величинам опытов вариации начальных данных для скрытых параметров могут приводить к статистическим «неопределенностям» наблюдаемых величин, хотя их истинные значения всегда строго определены и детерминированы в согласии с локальным принципом причинности.

Эти две парадигмы¹¹ оставались действительно альтернативами вплоть до 1964 года, когда Джон Белл сумел формализовать их следствия в виде неравенств для статистических корреляций измеряемых физических величин, которые открыли путь для эмпирического утверждения истинности квантовой механики и отвержения парадигмы теорий со скрытыми параметрами, удовлетворяющим локальному принципу причинности (теорема Белла).

9.4 Неравенства и теорема Белла

Рассмотрим физическую величину некоторой частицы — a , спектр значений которой лежит на отрезке $[-1; 1]$, а среднее значение равно нулю¹². Обозначим значение этой величины, измеренное наблюдателем A как $A(a) \in [-1; 1]$. Введем для той же частицы аналогичную величину a' , которая с точки зрения квантовой механики задает соотношение неопределенностей с a , и обозначим результат ее измерения наблюдателем A , как $A(a')$. Для другой частицы и наблюдателя B построим такую же пару величин b и b' и обозначим результаты их измерения через $B(b)$ и $B(b')$.

Пусть эти частицы излучаются некоторым источником в стороны наблюдателей A и B , которые разделены пространственно, но прежде чем проводить измерения, договорились вести таблицы одновременных измерений, каждый раз произвольно определяя измеряемую каждым из них величину: со штрихом или без штриха. Тогда после многократных опытов при встрече эти наблюдатели могут составить следующие средние величины

$$\langle A(a)B(b) \rangle, \quad \langle A(a)B(b') \rangle, \quad \langle A(a')B(b) \rangle, \quad \langle A(a')B(b') \rangle, \quad (2.22)$$

которые называют корреляторами и часто обозначают символом¹³ $c[A(a)B(b)]$.

Поскольку частицы излучаются единым источником, между корреляторами может существовать причинно-следственная связь. Так, в теориях локального реализма, т. е. в детерминированных теориях со скрытыми параметрами λ на траектории, измеряемые величины принимают точные значения на каждой из траекторий, а корреляторы, как и другие средние, вычисляются

¹¹Эйнштейн настаивал на справедливости принципов локального реализма, считая квантовую механику промежуточным, заведомо внутренне противоречивым этапом на пути к истинной теории. Он выражал свою позицию известным изречением: «Бог не играет в кости».

¹²Этого всегда можно добиться, выбрав подходящее взаимно однозначное отображение некой наблюдаемой на заданный отрезок.

¹³Напомним, что в точном определении коррелятора стоит выражение $c[A(a)B(b)] = \langle A(a)B(b) \rangle - \langle A(a) \rangle \langle B(b) \rangle$, но в нашем случае средние положены равными нулю по условию задачи.

согласно формуле

$$c[A(a)B(b)] = \int_{\Lambda} d\lambda \cdot p(\lambda) A(a, \lambda) B(b, \lambda) - \langle A(a) \rangle \langle B(b) \rangle, \quad (2.23)$$

где $p(\lambda)$ — плотность вероятности найти скрытый параметр со значением λ в области его допустимых значений Λ . Далее полагаем, что средние значения наблюдаемых величин равны нулю.

Составим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= A(a, \lambda)\{B(b, \lambda) + B(b', \lambda)\} + A(a', \lambda)\{B(b, \lambda) - B(b', \lambda)\} \leq \\ &\leq |A(a, \lambda)\{B(b, \lambda) + B(b', \lambda)\}| + |A(a', \lambda)\{B(b, \lambda) - B(b', \lambda)\}| \leq \\ &\leq |B(b, \lambda) + B(b', \lambda)| + |B(b, \lambda) - B(b', \lambda)|, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где мы воспользовались ограничением на спектр наблюдаемых $|A(\cdot)| \leq 1$, $|B(\cdot)| \leq 1$. Далее, для двух вещественных чисел $\{x, y\} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} K &= (|x + y| + |x - y|)^2 = (x + y)^2 + (x - y)^2 + 2|(x + y)(x - y)| = \\ &= 2(x^2 + y^2) + 2|x^2 - y^2|, \end{aligned} \quad (2.25)$$

откуда при $y^2 \leq x^2 \leq 1$ модуль $|x^2 - y^2| = x^2 - y^2$, а

$$K = 4x^2 \leq 4, \quad (2.26)$$

и при $x^2 \leq y^2 \leq 1$ модуль $|x^2 - y^2| = y^2 - x^2$, а

$$K = 4y^2 \leq 4, \quad (2.27)$$

так что из (2.24)–(2.27) следует, что

$$F(\lambda) \leq 2. \quad (2.28)$$

Домножая (2.28) на положительно определенные плотность вероятности $p(\lambda)$ и меру интегрирования $d\lambda$, находим

$$\int_{\Lambda} d\lambda \cdot p(\lambda) F(\lambda) \leq 2 \int_{\Lambda} d\lambda \cdot p(\lambda). \quad (2.29)$$

Согласно нормировке вероятности на единицу

$$\int_{\Lambda} d\lambda \cdot p(\lambda) = 1,$$

а интеграл в левой части неравенства (2.29) сводится к комбинации корреляций

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} d\lambda \cdot p(\lambda) F(\lambda) &= \int_{\Lambda} d\lambda \cdot p(\lambda) A(a, \lambda) B(b, \lambda) + \int_{\Lambda} d\lambda \cdot p(\lambda) A(a, \lambda) B(b', \lambda) + \\ &+ \int_{\Lambda} d\lambda \cdot p(\lambda) A(a', \lambda) B(b, \lambda) - \int_{\Lambda} d\lambda \cdot p(\lambda) A(a', \lambda) B(b', \lambda) = \\ &= c[A(a)B(b)] + c[A(a)B(b')] + c[A(a')B(b)] - c[A(a')B(b')]. \end{aligned}$$

Тогда

$$c[A(a)B(b)] + c[A(a)B(b')] + c[A(a')B(b)] - c[A(a')B(b')] \leq 2. \quad (2.30)$$

Подстановка $a \mapsto -a$, $a' \mapsto -a'$ приводит к неравенству с левой частью противоположного знака:

$$-c[A(a)B(b)] - c[A(a)B(b')] - c[A(a')B(b)] + c[A(a')B(b')] \leq 2, \quad (2.31)$$

так как средние значения линейны по каждой из физических величин, измеряемых разными наблюдателями. Поскольку

$$\begin{cases} x \leq |a|, \\ -x \leq |a| \end{cases} \Leftrightarrow |x| \leq |a|,$$

из (2.30) и (2.31) приходим к неравенству Белла в форме¹⁴ Клаузера–Хорна–Шимони–Холта [Clauser, Horne, Shimony, Holt] (CHSH)

$$|c[A(a)B(b)] + c[A(a)B(b')] + c[A(a')B(b)] - c[A(a')B(b')]| \leq 2. \quad (2.32)$$

Итак, парадигма локального реализма теорий со скрытыми переменными приводит в математическом выражении к ограничению на корреляции измеряемых величин в виде неравенства (2.32).

Теорема Белла. Теории локального реализма со скрытыми параметрами неспособны воспроизвести все предсказания для физических величин, следующие из квантовой механики.

Для доказательства этой теоремы достаточно построить пример квантовой системы, в которой нарушается одно из неравенств Белла, например, в форме (2.32), установленных для теорий со скрытыми параметрами.

Именно такой пример и был реализован в экспериментах с фотонами в запутленном квантовом состоянии, а авторы высокоточных измерений, согласно которым корреляции поляризаций превысили ограничение, следующее из неравенств Белла, с точностью 3-х значащих цифр, были удостоены Нобелевской премии.

Исторический спор Эйнштейна с квантовой механикой завершился триумфом законов для амплитуды вероятности различных вариантов реальности!

¹⁴ В литературе выведен целый класс неравенств, которые по имени их первооткрывателя носят имя Белла. Сам Белл получил в 1964 году оригинальное неравенство, связывающее корреляции для величин, которые принимают значения ± 1 и строго антикоррелируют в случае, если характеристики двух частиц a и b одинаковы, т. е. при $a = b$ имеется строгое равенство $A(a) + B(b) = 0$, откуда $c[A(a)B(a)] = -1$. Собственно неравенство Белла (1964) может быть получено из неравенства Белла (2.32), если в последнем положить сначала $a' = b' = -g$ и учесть линейность коррелятора по каждому из его аргументов, например, $c[A(-a)B(b)] = -c[A(a)B(b)]$, откуда $c[A(a)B(b)] - c[A(a)B(g)] \leq 1 + c[A(g)B(b)]$. Если теперь еще сделать подстановку $b \mapsto -b$, $g \mapsto -g$, то приходим к искомому неравенству $|c[A(a)B(b)] - c[A(a)B(g)]| \leq 1 + c[A(g)B(b)]$.

(2.В) Канонические структуры движения

10 Динамика фазового пространства

Скобки Пуассона, производящая функция канонических преобразований, генераторы бесконечно малых преобразований и симметрии, коммутаторы и каноническое квантование, уравнение Гейзенберга. Метод решения уравнений Гамильтона–Якоби при помощи канонического преобразования и интегралов движения.

10.1 Скобки Пуассона

На «фазовой плоскости» (\mathbf{p}, \mathbf{r}) динамические уравнения для произвольной наблюдаемой $F(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial r^\alpha} \dot{r}^\alpha + \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha,$$

можно преобразовать с помощью уравнений Гамильтона (2.9) к виду

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial r^\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial r^\alpha},$$

так что, если ввести определение скобки Пуассона для двух величин в фазовом пространстве (на фазовой плоскости)

$$\{F, H\}_P \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial r^\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial r^\alpha}, \quad (2.33)$$

то уравнение движения примет вид¹⁵

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}_P. \quad (2.34)$$

Скобка Пуассона координаты и сопряженного к ней импульса $p = \partial L / \partial \dot{q}$ как независимых переменных легко вычисляется и дает единицу:

$$\{q, p\}_P = \frac{\partial q}{\partial q} \frac{\partial p}{\partial p} - \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial q} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1. \quad (2.35)$$

Такая пара, как говорят, обладает каноническими скобками Пуассона, а потому и саму пару называют канонически сопряженными переменными на фазовой плоскости.

Задача 6. С помощью скобок Пуассона на фазовой плоскости (p, q) найдите уравнение движения для величины $x = q - t \cdot p/m$ для свободной частицы. Какой физический смысл имеет этот интеграл движения?

¹⁵Это уравнение движения для физической величины, заданной в фазовом пространстве, послужило Полю Дираку основой для формулировки связи классической механики с матричной квантовой механикой, открытой Вернером Гейзенбергом и разработанной им в соавторстве с Максом Борном и Паскуалем Йорданом в 1925 году. Аналогичное уравнение для эволюции квантовых величин называется уравнением Гейзенберга.

Задача 7. Докажите следующие свойства скобок Пуассона:

1. линейность,

$$\{F, c_1G_1 + c_2G_2\}_P = c_1\{F, G_1\}_P + c_2\{F, G_2\}_P,$$

где $c_{1,2}$ — числа,

2. антисимметричность,

$$\{F, G\}_P = -\{G, F\}_P,$$

3. тождество Якоби (циклическая перестановка)

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}_P\}_P + \{F_2, \{F_3, F_1\}_P\}_P + \{F_3, \{F_1, F_2\}_P\}_P = 0.$$

Заметим, что, если для некоторой линейной оболочки динамических величин $\{F_1(q, p, t), \dots, F_n(q, p, t)\}$ значение скобки Пуассона содержится в этом множестве, то говорят, что имеет место реализации скобки Ли в виде скобки Пуассона, а саму линейную оболочку тогда называют алгеброй Ли.

10.2 Канонические преобразования

Совершим преобразование координат от переменных q к новым величинам $Q = Q(q, t)$ так, чтобы в новых переменных можно было сформулировать гамильтонову механику на фазовой плоскости канонически сопряженных переменных (P, Q) вместо канонически сопряженных переменных (p, q) с прежними траекториями. Это означает, что в новых переменных также имеет место принцип наименьшего действия $S'(t, Q)$, которое связано со старым действием $S(t, q)$ и может отличаться от него лишь граничными членами, которые не дают вклада в уравнения движения, поскольку вариация действия происходит при фиксированных концах, т. е.¹⁶

$$S(t, q) = S'(t, Q) + \int^{t, q, Q} dF(t, q, Q),$$

или, что то же,

$$\int^{t, q} p dq - H dt = \int^{t, Q} P dQ - H' dt + \int^{t, q, Q} dF(t, q, Q). \quad (2.36)$$

Производящая функция канонического преобразования F должна удовлетворять тождеству (2.36), а следовательно,

$$dF = p dq - P dQ + \frac{\partial F}{\partial t} dt, \quad (2.37)$$

¹⁶Мы рассматриваем унивальентные преобразования: в общем случае вариационный принцип в новом и старом фазовом пространствах будет давать одни и те же траектории, если одно действие пропорционально другому с точностью до вкладов на концах траекторий:

$$S(t, q) = \xi \cdot S'(t, Q) + \int^{t, q, Q} dF(t, q, Q),$$

так что наш выбор $\xi = 1$, конечно, никак не оказывается на содержании преобразования, так как из определений импульса и функции Гамильтона следует, что выбор значения ξ , отличного от единицы просто означает переход к другим единицам измерения импульса и энергии, и, соответственно, к другому значению постоянной Планка для новых единиц измерения импульса и энергии при прежних единицах измерения длины и времени.

и, значит,

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}. \quad (2.38)$$

Эти соотношения позволяют неявно исключить старые канонически сопряженные переменные (p, q) и перейти к новым (P, Q) .

Действительно, вычислим скобку Пуассона новых переменных на фазовой плоскости старых переменных,

$$\{Q, P\}_P = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q}.$$

Из (2.38) следует, что

$$dp = \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} dq + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} dQ + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial t} dt, \quad dP = -\frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} dq - \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} dQ - \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial t} dt,$$

откуда легко выразить дифференциалы «новых» переменных через дифференциалы «старых» переменных

$$dQ = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \right)^{-1} \left\{ dp - \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} dq - \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial t} dt \right\},$$

и

$$\begin{aligned} dP = & \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \right)^{-1} \left\{ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} \right)^2 \right) dq - \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} dp + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial t} - \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial t} \right) dt \right\}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = -\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \right)^{-1}, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \right)^{-1},$$

а также

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} \right)^2 \right), \quad \frac{\partial P}{\partial p} = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \right)^{-1} \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2},$$

что, в итоге, дает каноническое значение скобок Пуассона

$$\{Q, P\}_P = 1.$$

Таким образом, новые переменные являются канонически сопряженными и, действительно, задают фазовую плоскость.

§а Генераторы бесконечно малых канонических преобразований

В качестве производящей функции канонических преобразований наряду с $F(q, Q, t)$ можно выбрать и функцию от двух других канонических переменных¹⁷, например, $F \mapsto G(q, P, t) - QP$. Тогда требование отличия действия в

¹⁷При переходе от координаты q к импульсу P необходимо и в выражении для действия в виде

$$S' = \int p dQ - \int H' dt$$

разных координатах в виде полного дифференциала совершенно аналогично проведённому нами выше рассмотрению приведет к условиям:

$$S(t, q) = S'(t, Q) + \int dG(t, q, P) - \int d(QP),$$

а стало быть,

$$dG = p dq + Q dP + \frac{\partial G}{\partial t} dt, \quad (2.39)$$

и, значит,

$$H' = H + \frac{\partial G}{\partial t}, \quad p = \frac{\partial G}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial G}{\partial P}. \quad (2.40)$$

Если

$$G \mapsto G_I = qP,$$

то имеет место тождественное преобразование: $q \mapsto Q = q$, $p \mapsto P = p$.

Рассмотрим бесконечно малое каноническое преобразование, $\epsilon \rightarrow 0$,

$$G(q, P, t) \stackrel{\text{def}}{=} qP + \epsilon \Gamma(q, p, t), \quad (2.41)$$

где *генератор канонического преобразования* $\Gamma(q, p, t)$ в линейном приближении по $\epsilon \rightarrow 0$ можно считать зависящим уже от прежнего импульса, так как согласно каноническому преобразованию

$$p \approx P + \epsilon \frac{\partial \Gamma}{\partial q}, \quad Q \approx q + \epsilon \frac{\partial \Gamma}{\partial p}.$$

Значит, бесконечно малые изменения выражаются в виде скобок Пуассона

$$\delta q = Q - q \approx \epsilon \{q, \Gamma\}_P, \quad \delta p = P - p \approx \epsilon \{p, \Gamma\}_P. \quad (2.42)$$

Отсюда следует, что и любая физическая величина на фазовой плоскости изменяется согласно скобке Пуассона с генератором бесконечно малых канонических преобразований:

$$\delta f(q, p) = \epsilon \{f, \Gamma\}_P. \quad (2.43)$$

Задача 8. Докажите утверждение (2.43).

В частности, канонический импульс — генератор бесконечно малых сдвигов координаты: $\Gamma = p$ дает $P = p$, $Q = q + \epsilon$. Выбор $\Gamma = H(q, p, t)$ дает $\delta f = \epsilon \{f, H\}_P$, т. е. функция Гамильтона — это генератор сдвигов физических величин по времени, другими словами, генератор эволюции. Мы видим связь

перейти к интегрированию по переменной импульса P вместо интегрирования по координате Q с помощью интегрирования по частям

$$\int p dQ = - \int Q dP + \int d(QP),$$

имея в виду, что вклад граничных членов несущественен при выводе уравнений движения по принципу экстремального действия, так как при вариации функционала при фиксированных граничных условиях вклад на концах траектории равен нулю.

генератора канонических преобразований с преобразованиями симметрии физической системы, когда эта симметрия приводит к сохранению генератора со временем: в самом деле, заменяя ϵ на $\delta a \rightarrow 0$ из теоремы Нёттер (1.24), где теперь следует ассоциировать $q_a \cong Q$, находим вид интеграла движения

$$\Gamma = p \frac{\partial q_a}{\partial a} - H \frac{\partial t_a}{\partial a}, \quad \text{при } a \rightarrow 0. \quad (2.44)$$

Тогда отсюда легко найти, что

$$\delta q = \delta a \{q, \Gamma\}_P = \delta a \left(\frac{\partial q_a}{\partial a} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) = \delta a \left(\frac{\partial q_a}{\partial a} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) = d_a q_a,$$

где мы использовали уравнения Гамильтона и связь для выражения в частных производных, установленную при выводе теоремы Нёттер:

$$d_a \left(\frac{\partial q_a}{\partial a} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a} \right) \equiv d_a q_a.$$

Следовательно, для одной и той же функции Лагранжа параметрический переход от одной «прямой» траектории к другой, как это записано в условиях теоремы Нёттер, может быть описан с помощью канонического преобразования с генератором (2.44).

В частности, для трансляций $q_a = q + a$ находим

$$\frac{\partial q_a}{\partial a} = 1, \quad \frac{\partial t_a}{\partial a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma = p.$$

Другой пример: в случае сдвига начала отсчета времени $t_a = t - a$ переменная эволюции не зависит от параметра преобразования,

$$d_a t_a = 0,$$

(см. вывод теоремы Нёттер (1.24)), т. е.

$$d_a t - da = 0,$$

а согласно (2.44) генератор

$$\Gamma = H,$$

а

$$d_a t = da,$$

и, следовательно, величина на фазовой плоскости $f(q, p, t)$ при параметрическом сдвиге начала отсчета времени меняется при каноническом преобразовании с генератором, равным функции Гамильтона, на величину

$$d_a f = d_a t \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + da \cdot \{f, H\}_P = da \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}_P \right).$$

Поэтому

$$\frac{d_a f}{da} = \frac{d_a f}{d_a t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}_P,$$

т. е. эволюция $f(q, p, t)$ – это каноническое преобразование со сдвигом по времени.

Мы установили также, что в случае симметрии действия сохраняющаяся по теореме Нёттер величина является генератором канонического преобразования, тождественного преобразованию симметрии в теореме Нёттер. Более того, скобки Пуассона сохраняющихся величин могут определять алгебру Ли генераторов симметрий физической системы.

Задача 9. Рассмотреть в качестве генератора канонического преобразования проекцию вектора орбитального момента импульса $\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, скажем, на ось z и найти вид бесконечно малых канонических преобразований — поворотов координат и импульса вокруг оси z на угол ϵ .

10.3 Генераторы и коммутаторы: каноническое кванование

Как мы видели, генераторы канонических преобразований могут быть связаны с бесконечно малыми преобразованиями симметрий действия и являться сохраняющимися величинами согласно теореме Нёттер. Исследование подобных симметрий в рамках теории групп и алгебр Ли позволяет получать важные физические выводы. Как мы уже подчеркнули, свойства скобок Пуассона соответствуют определению скобки Ли, а для построения алгебр Ли необходимо ввести векторное пространство, в котором эта скобка Ли действует. Для этих целей в физике вводят операторы и их коммутатор, и в этом параграфе мы установим связь скобок Пуассона с операторами и их коммутаторами, т. е. сформулируем принцип канонического квантования. Это позволит в дальнейшем использовать теорию алгебр Ли и их представлений для описания свойств физических систем.

На примере генератора сдвигов по координате рассмотрим бесконечно малые преобразование наблюдаемой $f(q)$,

$$\delta f = f(q + \epsilon) - f(q) = \epsilon \{f, p\}_P.$$

Но это же преобразование можно записать с помощью операции дифференцирования,

$$\delta f = f(q + \epsilon) - f(q) = \epsilon \partial_q f.$$

Если ввести определение коммутатора¹⁸ величин A и B

$$[A, B] \stackrel{\text{def}}{=} AB - BA,$$

то дифференцирование можно свести к вычислению коммутатора: для этого необходимо, как говорят, подействовать коммутатором на произвольную, но достаточно гладкую функцию F ,

$$[\partial_q, f]F = \partial_q(fF) - f\partial_q F = F\partial_q f + f\partial_q F - f\partial_q F = (\partial_q f)F, \quad \forall F.$$

Отсюда заключаем, что

$$[\partial_q, f] = (\partial_q f).$$

¹⁸По построению коммутатор удовлетворяет всем свойства скобки Пуассона: антисимметричность, линейность, тождество Якоби.

Поскольку дифференцирование — линейная операция, так что константы можно вносить и выносить из под знака коммутатора, запишем каноническое преобразования сдвига координат в виде

$$\delta f = \epsilon \{f, p\}_P = \epsilon \frac{i}{\hbar} [-i\hbar \partial_q, f] = \epsilon \frac{i}{\hbar} [\hat{p}, f],$$

где мы ввели факторы, которые отвечают оператору импульса $\hat{p} = -i\hbar \partial_q$. Используя антисимметрию скобок Пуассона, устанавливаем связь между скобкой Пуассона и коммутатором, которую называют соотношением канонического квантования,

$$[\hat{p}, f] = i\hbar \{p, f\}_P. \quad (2.45)$$

Дирак обобщил эту связь, постулируя, что коммутатору операторных величин \hat{f} и \hat{g} соответствует скобка Пуассона этих величин в классической гамильтоновой механике,

$$[\hat{f}, \hat{g}] = i\hbar \widehat{\{f, g\}}_P, \quad (2.46)$$

причем после вычисления скобки Пуассона необходимо перейти от классических величин к операторным. Подчеркнем, что операторные величины действуют в пространстве амплитуд, которые задают вероятности обнаружить, что частица оказалась в фиксированной конечной точке траектории при условии, что траектории могли исходить, вообще говоря, из разных начальных точек. В таком подходе переход от классического выражения значения скобки Пуассона к операторам может быть неоднозначным, если итоговое выражение для скобки Пуассона включает в себя величины, коммутаторы которых отличны от нуля. Это называют проблемой упорядочивания операторов.

В частности, каноническое квантование при $f \mapsto q$ приводит к коммутатору операторов импульса и координаты, равному

$$[\hat{p}, q] = i\hbar \{p, q\}_P = -i\hbar. \quad (2.47)$$

Каноническое квантование позволило Дираку получить квантовое уравнение Гейзенберга для операторов, действующих на амплитуду вероятности $\Psi(t, q)$, из уравнения для эволюции в механике Гамильтона (2.34) простым умножением на фактор $i\hbar$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}_P \xrightarrow{i\hbar} i\hbar \frac{d\widehat{F}}{dt} = i\hbar \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + [\hat{F}, \hat{H}]. \quad (2.48)$$

10.4 Метод решения уравнений Гамильтона–Якоби

В качестве примера применения канонического преобразования приведем метод решения уравнений Гамильтона–Якоби (2.7). Основной объект этих уравнений — действие — зависит от концов траектории: $S = S(t, q; q_0)$. При изменении интервала эволюции, т. е. t , и конца траектории q , начальные данные, т. е. $q_0 = q(t_0)$ остаются неизменными, а значит, начальное положение траектории эквивалентно набору интегралов движения $I_0 \leftrightarrow q_0$. Следовательно, решение уравнений Гамильтона–Якоби может быть представлено в виде $S = S_I(t, q; I_0)$, а значит, по-прежнему

$$\frac{\partial S_I}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S_I}{\partial t} = -H.$$

Используем S_I в качестве производящей функции канонического преобразования $F = F(q, I_0, t)$ от координат q к координатам I_0 (их число заведомо совпадает по построению). Тогда гамильтониан в координатах I_0 и канонически сопряженных к ним импульсах по общей схеме равен

$$H' = H + \frac{\partial S_I}{\partial t} \equiv 0,$$

т. е. он тождественно равен нулю. Отсюда следует, что импульсы, канонически сопряженные¹⁹ к I_0 , т. е. $\mathcal{P}_0 = -\partial S_I / \partial I_0$ (см. уравнения (2.38)), также являются постоянными в силу уравнений Гамильтона с $H' \equiv 0$,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial S_I}{\partial I_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial S_I}{\partial I_0} = \text{const.}$$

В проведенном изложении ясно, что если интеграл движения совпадает с начальным значением одной из координат частиц, то каноническое преобразование становится тривиальным для этой координаты: оно не содержит в себе никакой новой информации. В самом деле, согласно гамильтоновой механике действие, записанное в интегральной форме (2.5), имеет частные производные

$$\left. \frac{\partial S}{\partial q} \right|_{t=t_0} = p(t) \Big|_{t=t_0} = p_0 = -\frac{\partial S}{\partial q_0},$$

так что исходная информация о действии никак не дополняется каноническим преобразованием, в котором новые координаты — это начальные значения исходных координат. Поэтому сам метод становится эффективным, если известны интегралы движения, отличные от начальных значений координат частиц. А именно, интеграл движения I_0 — это импульс, канонически сопряженный к обобщенной координате w :

$$I_0 = \frac{\partial S}{\partial w}.$$

Проиллюстрируем этот метод решения уравнений Гамильтона—Якоби на движении в сферически симметричном потенциале.

¹⁹Мы можем считать величины I_0 не координатами, а импульсами гамильтоновой системы, но тогда следует пользоваться формулами (2.40), что, как заметит вдумчивый читатель, никак не изменит сделанных нами выводов о функции Гамильтона H' , равной нулю, а также о постоянстве координат, которым сопряжены величины I_0 .

Глава 3

Специальные характеристики движения

(3.А) Актуальные свойства в реальности

11 Сферически симметричный потенциал

Центробежный потенциал в сферически симметричных полях, инкремент угла вращения при движении от перицентра к апоцентру.

Для консервативной системы¹ сферически симметричный потенциал зависит только от модуля расстояния от центра до частицы и не зависит ни от направления радиус-вектора, ни от времени: $U = U(r)$. Это значит, что функция Гамильтона

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(r)$$

обладает симметрией относительно сдвигов по времени и поворотов вокруг центра потенциала. Этой же симметрией обладает и функция Лагранжа, и следовательно, действие. Как мы уже установили ранее, согласно теореме Нётер в такой системе сохраняются энергия E и момент количества движения $\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$.

В терминах момента количества движения кинетическую энергию можно в базисе сферических координат разложить на вращение, ортогонально радиус-вектору \mathbf{r} , и движение по радиус-вектору:

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \frac{m\mathbf{v}_\perp^2}{2} + \frac{mr^2}{2} = \frac{\ell^2}{2mr^2} + \frac{p_r^2}{2m},$$

поскольку $\ell^2 = m^2 r^2 v_\perp^2$. Для определенности направим вектор ℓ вдоль оси z . Тогда при $\ell \neq 0$ движение происходит в плоскости, ортогональной вектору ℓ , т. е. зависят от времени только r и угол ϕ в сферических координатах, так что

$$v_\perp = r\dot{\phi}, \quad \ell_z = mr^2\dot{\phi}, \quad \ell_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{2mr^2} \frac{\partial \ell_z^2}{\partial \dot{\phi}},$$

угол $\theta = \frac{\pi}{2}$, т. е. все движение происходит в плоскости координат (x, y) , поскольку $\ell_{x,y} \equiv 0$, $\dot{\ell}_{x,y} \equiv 0$, и значит, координата z и скорость движения вдоль оси z тождественно равны нулю, если² $\ell_z \neq 0$. Тогда уравнения Гамильтона–Якоби дают законы сохранения, т. е. интегралы движения:

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} = \ell_z = \ell, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -E,$$

¹Если функция Гамильтона не зависит от времени, то система называется консервативной.

²Покажите самостоятельно.

а также выражение для импульса, канонически сопряженного длине радиус-вектора:

$$\frac{\partial S}{\partial r} = p_r,$$

откуда получаем уравнение первого порядка по производной

$$H = \frac{\ell^2}{2mr^2} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + U(r) = E.$$

Потенциал движения по радиусу $V(r)$ включает в себя центробежный потенциал $U_l(r)$,

$$V(r) = U(r) + U_l(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}. \quad (3.1)$$

В итоге, действие как функция времени, угла, радиуса и интегралов движения примет вид

$$S = -E t + \ell \phi + \tilde{S}(r) + S_0, \quad (3.2)$$

где производная $\tilde{S}' = d\tilde{S}/dr$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\tilde{S}' \right)^2 = 2m \left(E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right), \quad (3.3)$$

откуда

$$\tilde{S} = \pm \int dr \sqrt{2m \left(E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}. \quad (3.4)$$

Дифференцирование действия по интегралам движения дает константы,

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \text{const.}, \quad \frac{\partial S}{\partial \ell} = \text{const.},$$

откуда из (3.2)–(3.4)

$$\begin{aligned} -t \pm \int dr \frac{m}{\sqrt{2m \left(E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}} &= \text{const.}, \\ \phi \mp \int dr \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m \left(E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}} &= \text{const.} \end{aligned}$$

Производная этих равенств по времени дает скорости

$$\begin{aligned} 1 &= \pm \dot{r} \frac{m}{\sqrt{2m \left(E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}}, \\ \dot{\phi} &= \pm \dot{r} \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m \left(E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Точки поворота для радиального движения задаются условием $p_r = 0$,

$$E = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}.$$

За время движения от одной точки поворота до другой ($r_+ > r_-$, апоцентр орбиты отвечает r_+ , а перигеум — r_-) инкремент угла вращения составляет

$$\Delta\phi = \int_{r_-}^{r_+} dr \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m \left(E - U(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}}. \quad (3.6)$$

12 Замкнутые финитные орбиты

Инкремент угла вращения от перигея до апоцентра для замкнутой орбиты, бесконечно близкой к круговой, исследование критерия замкнутости любой финитной орбиты, инкремент угла поворота орбиты для бесконечно большой и нулевой энергии, два особых потенциала.

Финитная орбита замкнута, если после счетного числа вращений n от перигея до перигея (от перигея до апоцентра $\Delta\phi$ и от апоцентра до перигея $\Delta\phi$) получится конечное число полных оборотов n' , т. е. при

$$2\Delta\phi \cdot n = 2\pi \cdot n', \quad n, n' \in \mathbb{N}, \quad (3.7)$$

где инкремент угла вращения при движении от перигея к апоцентру (см. рис. 3.1) $\Delta\phi$ составляет, согласно (3.6), величину

$$\Delta\phi = \int_{r_-}^{r_+} dr \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m(E - V(r))}}, \quad V(r) \stackrel{\text{def}}{=} U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}. \quad (3.8)$$

Для круговой орбиты точки поворота становятся идентичными, $r_\pm \rightarrow r_0$, где r_0 — радиус круговой орбиты, для которого потенциал $V(r)$, включающий в себя потенциал центробежных сил, имеет экстремум в виде минимума,

$$V'(r_0) = 0 \Rightarrow U'(r_0) - \frac{\ell^2}{mr_0^3} = 0, \quad (3.9)$$

$$V''(r_0) > 0 \Rightarrow U''(r_0) + 3\frac{\ell^2}{mr_0^4} = U''(r_0) + \frac{3}{r_0} U'(r_0) > 0. \quad (3.10)$$

Для орбиты, бесконечно близкой к круговой, движение по радиусу происходит в параболическом потенциале, который получается при разложении $V(r)$ возле точки минимума потенциала r_0 с точностью до членов второго порядка малости отклонения от положения минимума (см. Приложение, стр. 288, раздел 2A, §b), при $E > V(r_0)$

$$\Delta\phi_{\text{circ}} = \lim_{r_\pm \rightarrow r_0} \int_{r_-}^{r_+} dr \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m \left(E - V(r_0) - \frac{1}{2} V''(r_0)(r - r_0)^2 \right)}}.$$

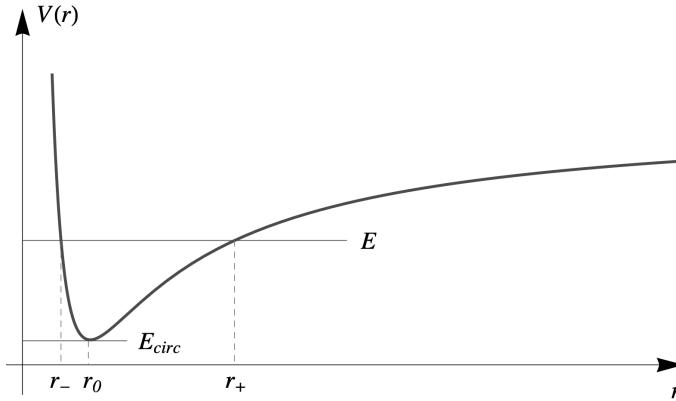


Рис. 3.1: Потенциал радиального движения при фиксированном значении орбитального момента импульса: показаны точки поворота r_{\pm} и радиус круговой орбиты r_0 .

В пределе можно считать $\ell/r^2 \rightarrow \ell/r_0^2$, так что

$$\Delta\phi_{\text{circ}} = \frac{\ell}{r_0^2} \frac{1}{\sqrt{2m(E - V(r_0))}} \lim_{r_{\pm} \rightarrow r_0} \int_{r_-}^{r_+} dr \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{V''(r_0)}{2(E - V(r_0))}(r - r_0)^2\right)}},$$

и подстановка

$$r - r_0 = \sqrt{\frac{2(E - V(r_0))}{V''(r_0)}} \sin x, \quad x \in [-\pi/2, \pi/2],$$

дает

$$\Delta\phi_{\text{circ}} = \frac{\ell}{r_0^2} \frac{1}{\sqrt{mV''(r_0)}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}},$$

и в итоге,

$$\Delta\phi_{\text{circ}} = \frac{\ell}{r_0^2} \frac{\pi}{\sqrt{mV''(r_0)}} = \pi \sqrt{\frac{U'(r_0)}{r_0 U''(r_0) + 3U'(r_0)}}, \quad (3.11)$$

где мы воспользовались тождествами (3.9), (3.10). Последнее выражение не зависит явно от орбитального момента ℓ .

12.1 Замкнутость любой финитной орбиты ($\ell \neq 0$)

Рассмотрим центральные потенциалы консервативных систем, в которых существуют финитные орбиты с $\ell \neq 0$ и все они замкнуты³. В этом случае, в

³В этом разделе мы, по сути, следуем изложению в курсе классической механики В.И. Арнольда [11].

частности, круговая орбита как предел бесконечно близкой к ней орбиты тоже замкнута, так что

$$\Delta\phi_{\text{circ}} = \pi \frac{n'}{n} = \text{const.},$$

и эта величина не зависит от радиуса, так как в противном случае малое изменение радиуса вращения приводило бы к скачку в значениях натуральный чисел n и n' , что означало бы наличие хаоса: бесконечно малое изменение траектории приводило бы к существенному изменению параметров орбиты. Найдем все такие потенциалы с $\Delta\phi_{\text{circ}} = \text{const.}$ Из (3.11) следует

$$U' = C(rU'' + 3U'), \quad C \geq 0,$$

откуда

$$C \frac{dU'}{U'} = (1 - 3C) \frac{dr}{r},$$

а значит,

$$U' = C_0 r^{1/C-3},$$

так что при $C = \frac{1}{2}$

$$U(r) = C_l \ln r, \quad C_l > 0, \quad (3.12)$$

а при $C \neq \frac{1}{2}$

$$U(r) = U_C r^{1/C-2} = U_C r^\varkappa \quad \varkappa \in [-2, +\infty) \cap \varkappa \neq 0. \quad (3.13)$$

Здесь $U_C > 0$ при $\varkappa > 0$ и $U_C < 0$ при $\varkappa < 0$. Поэтому к искомым потенциалам относятся только однородные функции радиуса степени \varkappa , включая нулевую степень однородности, $\varkappa \rightarrow 0$, что отвечает логарифмическому потенциальному. Для таких потенциалов

$$\frac{U'(r_0)}{r_0 U''(r_0) + 3U'(r_0)} = \frac{1}{\varkappa + 2},$$

и согласно (3.11),

$$\Delta\phi_{\text{circ}} = \pi \frac{1}{\sqrt{\varkappa + 2}}, \quad (3.14)$$

что уже сильно ограничивает значения степени однородности потенциала,

$$\varkappa = \left(\frac{n}{n'}\right)^2 - 2,$$

в частности, выпадает $\varkappa = 0$, т. е. логарифмический потенциал⁴.

⁴Корень из двух $\sqrt{2}$ — это иррациональное число.

§а Бесконечно растущий потенциал: гармонический осциллятор

При $\varkappa > 0$ потенциал растет до бесконечности, так что имеет смысл предел $E \rightarrow \infty$. Произведем замену переменных

$$\frac{\ell}{r} = y \frac{\ell}{r_-}, \quad y_- = 1, \quad y_+ = \frac{r_-}{r_+} < 1,$$

так что, согласно (3.6),

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \int_{y_+}^1 dy \frac{\ell}{r_-} \frac{1}{\sqrt{2m \left(E - U(r) - y^2 \frac{\ell^2}{2mr_-^2} \right)}} = \\ &= \int_{y_+}^1 dy \frac{1}{\sqrt{\left(2mE \frac{r_-^2}{\ell^2} - 2m \frac{r_-^2}{\ell^2} U(r) - y^2 \right)}} = \int_{y_+}^1 dy \frac{1}{\sqrt{W(1) - W(y)}}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где

$$W(y) = y^2 + 2m \frac{r_-^2}{\ell^2} U\left(\frac{r_-}{y}\right), \quad W(1) = 2mE \frac{r_-^2}{\ell^2}.$$

При $E \rightarrow \infty$ радиусperiцентра стремится к нулю, $r_- \rightarrow 0$, $U(r_-) \rightarrow 0$, так что

$$W(1) \rightarrow 1, \quad W(y) \rightarrow y^2,$$

и следовательно,

$$\Delta\phi = \lim_{y_+ \rightarrow 0} \int_{y_+}^1 dy \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} = \arcsin y \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Это означает, что среди однородных растущих потенциалов, условию замкнутости всех финитных орбит удовлетворяет только тот, для которого

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa + 2}},$$

т. е. только $\varkappa = 2$. Это потенциал гармонического осциллятора.

§б Ограниченно растущий потенциал: кулоновский или гравитационный

При $\varkappa < 0$ замкнутые орбиты возникают только в потенциале притяжения $U = -|U_C|r^\varkappa$, для которого реализуются орбиты с $E \rightarrow 0$ и $r_+ \rightarrow \infty$. В этом случае (3.15) при $r_- \neq 0$ находим

$$2m \frac{r_-^2}{\ell^2} U(r) = -2m \frac{r_-^2}{\ell^2} |U_C|r_-^\varkappa y^{-\varkappa},$$

и для выражения под корнем в подынтегральном выражении для инкремента угла

$$2mE \frac{r_-^2}{\ell^2} - 2m \frac{r_-^2}{\ell^2} U(r) - y^2 = -(y^2 - y^{-\varkappa}) - y^{-\varkappa} \left(1 - 2m \frac{r_-^2}{\ell^2} |U_C| r_-^\varkappa \right) + 2mE \frac{r_-^2}{\ell^2},$$

что при $E \rightarrow 0$, когда в перицентре r_-

$$E = U(r_-) + \frac{\ell^2}{2mr_-^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2m \frac{r_-^2}{\ell^2} U(r_-) = -1, \quad 2m \frac{r_-^2}{\ell^2} |U_C| r_-^\varkappa = 1.$$

дает

$$\Delta\phi = \int_0^1 dy \frac{1}{\sqrt{\tilde{W}(1) - \tilde{W}(y)}}, \quad (3.16)$$

где⁵

$$\tilde{W}(1) = 0 = 1 - 2m \frac{r_-^2}{\ell^2} |U_C| r_-^\varkappa, \quad \tilde{W}(y) = y^2 - y^{-\varkappa},$$

так что

$$\Delta\phi = \int_0^1 dy \frac{1}{\sqrt{y^{-\varkappa} - y^2}}. \quad (3.17)$$

При $\varkappa = -2$ орбита падает на центр. Если же $-2 < \varkappa < 0$, то (3.17) дает⁶

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{2 + \varkappa},$$

что следует сравнить со значением инкремента угла для орбит, бесконечно близких к круговым:

$$\frac{\pi}{2 + \varkappa} = \frac{\pi}{\sqrt{2 + \varkappa}},$$

откуда $\varkappa = -1$, что отвечает притяжению в поле кулоновского типа.

Таким образом, мы установили, что сферически симметричными потенциалами, для которых все финитные орбиты замкнуты, являются только потенциалы гармонического осциллятора и кулоновский или гравитационный потенциал.

Задача 10. Покажите, что в потенциале притяжения вида $U \sim -1/r^2$ частица падает на центр. При каком условии?

⁵Здесь мы учли, что в точке поворота $E = \frac{\ell^2}{2mr_-^2} - |U_C| r_-^\varkappa$ и предел $E \rightarrow 0$.

⁶Интеграл (3.17) берется с использованием подстановки $y^{2+\varkappa} = \sin^2 z$, так что

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \frac{1}{\sqrt{y^{-\varkappa} - y^2}} &= \int_0^1 dy \frac{y^{\varkappa/2}}{\sqrt{1 - y^{2+\varkappa}}} = \left\langle dy = \frac{2}{2 + \varkappa} y^{-\varkappa/2} \cos z dz; \ dy > 0 \right\rangle = \\ &= \frac{2}{2 + \varkappa} \int_0^{\pi/2} dz \frac{\cos z}{\sqrt{1 - \sin^2 z}} = \frac{\pi}{2 + \varkappa}. \end{aligned}$$

13 Движение в кулоновском поле

Траектория в кулоновском потенциале при ненулевом моменте импульса, эксцентриситет и его значения для эллипса, гиперболы и параболы, задача Кеплера, дифференциальное сечение резерфордовского рассеяния и зеркального рассеяния на непроницаемом шаре.

В кулоновском поле заряда Ze частица с зарядом e имеет потенциальную энергию

$$U(r) = \frac{Ze^2}{r},$$

так что при ненулевом орбитальном моменте импульса⁷, $\ell \neq 0$, общее выражение для связи полярного угла на плоскости с радиусом на траектории принимает вид

$$\phi(r) = \int^r dr \frac{\ell}{r^2} - \frac{1}{\sqrt{2m \left(E - \frac{Ze^2}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}}. \quad (3.18)$$

Поскольку

$$\frac{\ell}{r^2} dr = -d\frac{\ell}{r},$$

введем переменную u ,

$$\frac{\ell}{r} = \frac{u}{A}, \quad A = \text{const.}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \phi(r) &= - \int^u du \frac{1}{A} \frac{1}{\sqrt{2m \left(E - \frac{Ze^2}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}} = \\ &= - \int^u du \frac{1}{\sqrt{2mEA^2 - 2u \frac{Ze^2m}{\ell} A - u^2}}, \end{aligned}$$

так что выражение под корнем можно преобразовать,

$$u^2 + 2u \frac{Ze^2m}{\ell} A - 2mEA^2 = \left(u + \frac{Ze^2m}{\ell} A \right)^2 - A^2 \left(2mE + \frac{Z^2e^4m^2}{\ell^2} \right).$$

Зафиксируем постоянную A так, чтобы получить стандартное выражение для подынтегрального выражения,

$$\left(u + \frac{Ze^2m}{\ell} A \right)^2 - A^2 \left(2mE + \frac{Z^2e^4m^2}{\ell^2} \right) = (u - u_0)^2 - 1,$$

⁷При $\ell = 0$ частица движется только по радиусу.

а значит, положим

$$A^2 \left(2mE + \frac{Z^2 e^4 m^2}{\ell^2} \right) = 1.$$

Следовательно, замена переменных

$$u = \frac{\ell}{r} \frac{1}{\sqrt{2mE + Z^2 m^2 e^4 / \ell^2}},$$

приводит зависимость угла на траектории к виду

$$\phi(r) = - \int^u du \frac{1}{\sqrt{1 - (u - u_0)^2}} = \arccos(u - u_0), \quad u_0 = -\frac{1}{\epsilon} \operatorname{sign}(Z),$$

где

$$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1 + \frac{2mE\ell^2}{Z^2 m^2 e^4}} \quad (3.19)$$

называют эксцентриситетом: в поле отталкивания, $Z > 0$, энергия на траектории положительна и $\epsilon > 1$, а в поле притяжения, $Z < 0$, энергия на траектории может принимать и отрицательные значения, но при этом она ограничена снизу

$$E \geq -\frac{Z^2 m^2 e^4}{2m\ell^2},$$

так что минимальное значение отвечает минимуму эффективного потенциала радиального движения с учетом центробежного потенциала с заданным значением ℓ , т. е. круговой орбите.

В итоге, в общем случае как притяжения так и отталкивания найдем

$$\cos \phi = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\ell^2}{r} \frac{1}{me^2|Z|} + \operatorname{sign}(Z) \right). \quad (3.20)$$

Обычно вводят параметр орбиты размерности расстояния

$$p_{\text{orb}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ell^2}{me^2|Z|} > 0, \quad (3.21)$$

и траектория записывается как

$$r = \frac{p_{\text{orb}}}{\epsilon \cos \phi - \operatorname{sign}(Z)}, \quad (3.22)$$

откуда сразу видно, что траектория симметрична относительно замены знака угла $\phi \leftrightarrow -\phi$, а параметр орбиты имеет смысл расстояния от центра потенциала до частицы, когда $\phi = \pm\pi/2$.

С учетом того, что в плоскости траектории $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, кривую (3.22) можно записать в виде

$$x \frac{\epsilon}{p_{\text{orb}}} - \frac{r}{p_{\text{orb}}} \operatorname{sign} Z = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(x \frac{\epsilon}{p_{\text{orb}}} - 1 \right)^2 = \frac{r^2}{p_{\text{orb}}^2} = \frac{x^2 + y^2}{p_{\text{orb}}^2},$$

что сводится к

$$\frac{1-\epsilon^2}{p_{\text{orb}}^2} \left(x + \frac{\epsilon p_{\text{orb}}}{1-\epsilon^2} \right)^2 + \frac{y^2}{p_{\text{orb}}^2} - \frac{\epsilon^2}{1-\epsilon^2} = 1,$$

т. е.

$$\frac{(1-\epsilon^2)^2}{p_{\text{orb}}^2} \left(x + \frac{\epsilon p_{\text{orb}}}{1-\epsilon^2} \right)^2 + y^2 \frac{1-\epsilon^2}{p_{\text{orb}}^2} = 1. \quad (3.23)$$

В итоге, в координатах

$$\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} x + \frac{\epsilon p_{\text{orb}}}{1-\epsilon^2}, \quad \bar{y} \stackrel{\text{def}}{=} y, \quad (3.24)$$

с центром в точке \bar{O} с $\bar{x} = \bar{y} = 0$ траектория лежит на решениях уравнения (3.23), симметричного относительно зеркальных отражений $\bar{x} \leftrightarrow -\bar{x}$, $\bar{y} \leftrightarrow -\bar{y}$:

$$\bar{x}^2 \frac{(1-\epsilon^2)^2}{p_{\text{orb}}^2} + \bar{y}^2 \frac{1-\epsilon^2}{p_{\text{orb}}^2} = 1. \quad (3.25)$$

Решения квадратичного уравнения (3.23) являются коническими сечениями, т. е. множеством пересечения кругового конуса с плоскостью. Это следует из того, что конус в декартовых координатах представляет собой квадратичную поверхность,

$$\hat{a}^2 \hat{z}^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2,$$

где $\hat{a} = \operatorname{tg}\theta_0$ — тангенс угла раствора конуса с осью вдоль оси \hat{z} , а плоскость — линейная поверхность. Если плоскость пересекает лишь одну из двух полостей конуса и все ее образующие, то коническое сечение — эллипс ($\epsilon < 1$), если плоскость пересекает одну из полостей параллельно касательной к полости, то сечение — парабола ($\epsilon = 1$), а если плоскость пересекает обе полости, то сечение — гипербола ($\epsilon > 1$). В вырожденных случаях получаются точка, луч и пара прямых.

13.1 Финитное движение (задача Кеплера)

В потенциале притяжения $\operatorname{sign}(Z) = -1$ при $E < 0$, а значит, при $\epsilon < 1$

$$r = \frac{p_{\text{orb}}}{\epsilon \cos \phi + 1}, \quad (3.26)$$

и траектория является финитной.

Введем большую полуось как среднее максимального ($\cos \phi = -1$) и минимального ($\cos \phi = 1$) расстояния от центра до частицы

$$a = \frac{1}{2}(r_+ + r_-) = \frac{p_{\text{orb}}}{1-\epsilon^2},$$

а малую полуось как максимальное удаление по оси $y = r \sin \phi$ (экстремум достигается при $\cos \phi = -\epsilon$)

$$b = r \sin \phi|_{\max} = \frac{p_{\text{orb}}}{\sqrt{1-\epsilon^2}}.$$

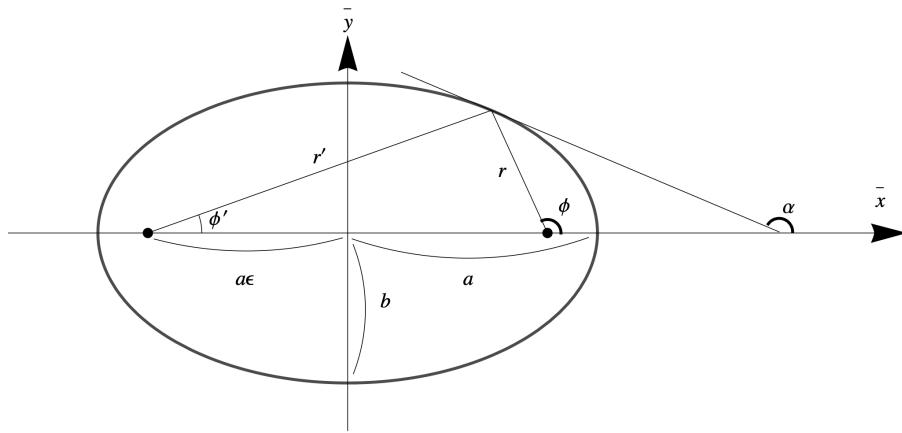


Рис. 3.2: Эллипс: фокусы обозначены точками, показаны касательная под углом α , полуоси a и b , расстояние сдвига фокуса от центра эллипса $a\epsilon$, а также полярные углы в фокусах ϕ и ϕ' .

Центр притяжения \mathcal{O} находится на плоскости с координатами $x = y = 0$. Произведем сдвиг по координате x , так чтобы новый центр координат $\bar{\mathcal{O}}$ находился на одном удалении от точек максимального и минимального удаления от центра притяжения:

$$\bar{x} = x - r_- + a = x + a\epsilon,$$

что в точности совпадает с введением симметричной координаты \bar{x} в предыдущем разделе. Тогда на плоскости с центром в $\bar{\mathcal{O}}$

$$\frac{\bar{x}}{a} = \frac{r \cos \phi}{a} + \epsilon = \frac{\cos \phi + \epsilon}{\epsilon \cos \phi + 1}, \quad \frac{y}{b} = \frac{r \sin \phi}{b} = \frac{\sin \phi}{\epsilon \cos \phi + 1} \sqrt{1 - \epsilon^2},$$

откуда легко находим уравнение эллипса с полуосиями a и b ,

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.27}$$

симметричное относительно отражений $\bar{x} \leftrightarrow -\bar{x}$, $y \leftrightarrow -y$. Это, между прочим, означает, что наряду с центром притяжения \mathcal{O} с координатами $(\bar{x} = a\epsilon, y = 0)$ у эллипса есть второй такой же центр \mathcal{O}' с координатами $(\bar{x} = -a\epsilon, y = 0)$, движение частицы вокруг которого совершенно идентично движению вокруг центра притяжения (см. рис. 3.2). Более того, эти центры притяжения являются фокусами эллипса: любой луч, исходящий из фокуса, после отражения от эллипса проходит через второй фокус⁸.

⁸В этом можно убедиться, если вычислить наклон касательной к эллипсу в точке $(r \cos \phi, r \sin \phi)$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\phi} \sin \phi + r \cos \phi}{\frac{dr}{d\phi} \cos \phi - r \sin \phi} = -\frac{\cos \phi + \epsilon}{\sin \phi},$$

Кроме того, сумма расстояний от точки на траектории до фокусов эллипса остается постоянной величиной:

$$r = \frac{p_{\text{orb}}}{\epsilon \cos \phi + 1}, \quad r' = \sqrt{(x + 2a\epsilon)^2 + y^2} \Rightarrow r + r' = 2a.$$

Это означает, что эллипс представляет собой фигуру, которая получается, если концы нити длиной $2a$ зафиксировать на расстоянии $2a\epsilon$ и объединить положение всех точек единственного излома на этой нити в натянутом состоянии.

Задача 11. Докажите, что любой луч, исходящий из фокуса эллипса, после зеркального отражения от эллипса проходит через второй фокус.

Задача 12. Докажите, что сумма расстояний от точки на траектории до фокусов эллипса остается постоянной величиной. Чему равна эта величина?

В случае гравитационного притяжения получаем законы Кеплера:

I. Планеты движутся вокруг центра притяжения по эллипсам, причем центр притяжения находится в фокусе.

II. Радиус траектории планеты «заметает площадь» с постоянной скоростью $\dot{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$, что является следствием закона сохранения момента импульса $\ell = 2m\dot{\mathcal{S}}$. $\dot{\mathcal{S}}$ называют секторальной скоростью.

III. Квадраты периодов обращения планет T соотносятся как кубы больших полуосей орбит a : $T^2/a^3 = \text{const}$.

В самом деле, площадь эллипса $\mathcal{S} = \pi a b$, что проще всего вывести, взяв интеграл $\mathcal{S} = \int d\bar{x} d\bar{y} = \frac{b}{a} \int d\bar{x} d\frac{a\bar{y}}{b} = \frac{b}{a} \pi a^2$, поскольку после смены масштаба переменной $\bar{y} \mapsto \bar{y}b/a$ уравнение для эллипса переходит в уравнение для окружности радиуса a , внутренняя площадь которого πa^2 . С другой стороны, в силу постоянства секторальной скорости $\mathcal{S} = T\dot{\mathcal{S}} = T\ell/2m$. Значит, $T = 2\pi abm/\ell$. По построению, в поле гравитации объекта с массой M параметр потенциала $Ze^2 = -GMm$, где G постоянная Ньютона, и $a = p_{\text{orb}}/(1 - \epsilon^2) = -GMm/2E$, откуда $mb/\ell = \sqrt{a/GM}$, так что

$$T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Как видим, в механике достаточно знать первый закон Кеплера, чтобы вывести два других.

В вырожденном случае при $E \rightarrow 0$ эксцентриситет $\epsilon = 1$, и полуоси принимают бесконечные значения, второй фокус также уходит на бесконечность, а

так что отраженный луч составит с осью x угол $\phi' = 2\alpha - \phi - \pi$. Вычисляя тангенс этого угла, убеждаемся, что он совпадает с тангенсом угла луча, который исходит из второго фокуса в ту же точку на эллипсе:

$$\operatorname{tg} \phi' = \frac{y}{x + 2a\epsilon},$$

что и доказывает сделанное утверждение: все лучи из одного фокуса сходятся после зеркального отражения от эллипса во втором фокусе.

исходное выражение для траектории (3.22) принимает вид

$$x - r \operatorname{sign}(Z) = p_{\text{orb}} \Rightarrow (x - p_{\text{orb}})^2 = r^2 = x^2 + y^2,$$

откуда находим уравнение для параболы,

$$y^2 = p_{\text{orb}}^2 - 2p_{\text{orb}}x. \quad (3.28)$$

13.2 Резерфордовское рассеяние

При положительном значении энергии $E > 0$ эксцентрикитет $\epsilon > 1$ и общее уравнение для траектории (3.23) преобразуется к виду

$$\frac{(1 - \epsilon^2)^2}{p_{\text{orb}}^2} \left(x + \frac{\epsilon p_{\text{orb}}}{1 - \epsilon^2} \right)^2 - y^2 \left| \frac{\epsilon^2 - 1}{p_{\text{orb}}^2} \right| = 1$$

и имеет решение в виде двух ветвей гиперболы: одна из ветвей отвечает притяжению

$$r = \frac{p_{\text{orb}}}{\epsilon \cos \phi + 1}, \quad \cos \phi \geq -\frac{1}{\epsilon} \quad (3.29)$$

и фокусом в точке $r = r_- = p_{\text{orb}}/(\epsilon + 1)$ при $\cos \phi = 1$, а другая ветвь — отталкиванию,

$$r = \frac{p_{\text{orb}}}{\epsilon \cos \phi - 1}, \quad \cos \phi \geq \frac{1}{\epsilon} \quad (3.30)$$

и фокусом в точке $r = r_+ = p_{\text{orb}}/(\epsilon - 1) > r_-$ при $\cos \phi = 1$.

Лучи, исходящие из фокуса, после зеркального отражения от гиперболы расходятся так, как если бы они исходили из второго фокуса, т. е. их продолжения за линию гиперболы сходятся во втором фокусе (см. рис. 3.3).

Частица, рассеивающаяся на кулоновском поле, приходит из бесконечности к центру потенциала под углом

$$\phi_{\text{in}} = \arccos \left(\frac{1}{\epsilon} \operatorname{sign}(Z) \right).$$

Если бы взаимодействия не было, то частицы ушла бы на бесконечность в противоположном направлении, т. е. под углом

$$\phi_{\text{out}}^{(0)} = \pi + \phi_{\text{in}}.$$

Наличие кулоновского потенциала приводит в действительности к уходу частицы на бесконечность под углом

$$\phi_{\text{out}} = -\phi_{\text{in}},$$

так как $\cos \phi_{\text{in}} = \cos \phi_{\text{out}}$ и при притяжении, и при отталкивании. Значит, угол рассеяния

$$\theta = \phi_{\text{out}}^{(0)} - \phi_{\text{out}} = \pi + 2\phi_{\text{in}}. \quad (3.31)$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = -\operatorname{ctg} \phi_{\text{in}} = -\operatorname{sign}(Z) \frac{1}{\epsilon} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon^2}} \right)^{-1} = -\frac{\operatorname{sign}(Z)}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} = -\frac{Zme^2}{\sqrt{2mE\ell^2}}.$$

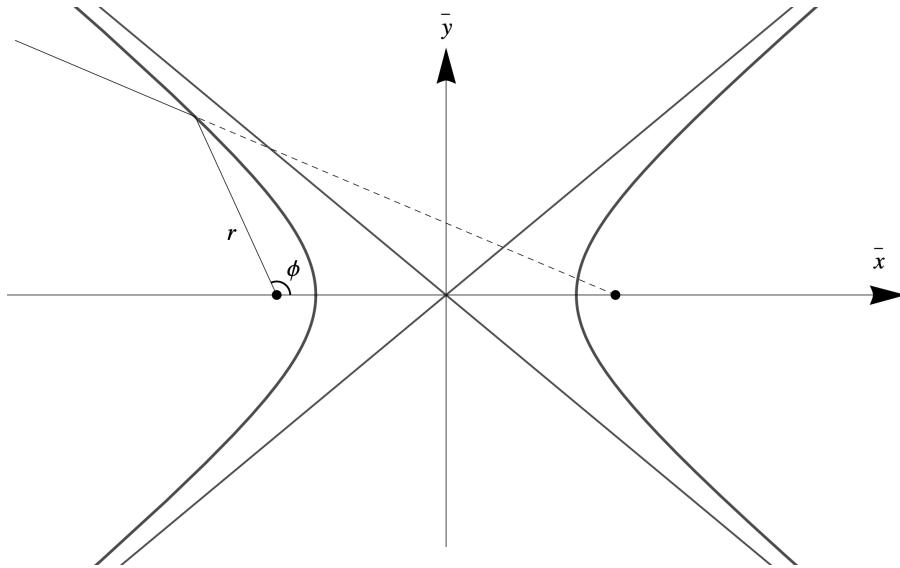


Рис. 3.3: Гиперболы кулоновского рассеяния: фокусы обозначены точками, показаны асимптотики гипербол на бесконечности, полярный угол в фокусе потенциала притяжения ϕ и расстояние до точки на орбите r , а также отраженный от гиперболы луч, продолжение которого исходит из фокуса отталкивания.

Введем импульс p для энергии частицы на бесконечности $E = p^2/2m$ и привильный параметр b для орбитального момента на бесконечности $\ell = pb$. Тогда

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = -\frac{p^2 b}{Zme^2}. \quad (3.32)$$

Для сферически симметричного потенциала поток N частиц на кольцо радиуса $|b|$ и толщиной $|db|$ составляет

$$j = \frac{N}{2\pi|b||db|}$$

Все эти частицы рассеиваются в телесный угол $d\Omega = 2\pi d\cos\theta$, так что дифференциальное сечение рассеяния, определяемое как отношение числа рассеянных частиц в данный телесный угол к падающему на мишень потоку, равно

$$\begin{aligned} d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N}{j} &= 2\pi|b||db| = \frac{2\pi Zme^2}{p^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \frac{Zme^2}{2p^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = \\ &= 2\pi d\cos\theta \frac{Z^2 m^2 e^4}{4p^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

т. е. дифференциальное сечение резерфордовского рассеяния равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{16E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (3.34)$$

Оно расходится при малом угле рассеяния $\theta \rightarrow 0$.

Для сравнения рассмотрим упругое рассеяние точечной частицы на нейтральном неподвижном шаре радиуса R : в этом случае происходит зеркальное отражение то поверхности шара, т. е. угол падения равен углу отражения, если прицельное расстояние меньше радиуса шара $b \leq R$, в противном случае частица движется свободно без какого-либо рассеяния (см. рис. 3.4).

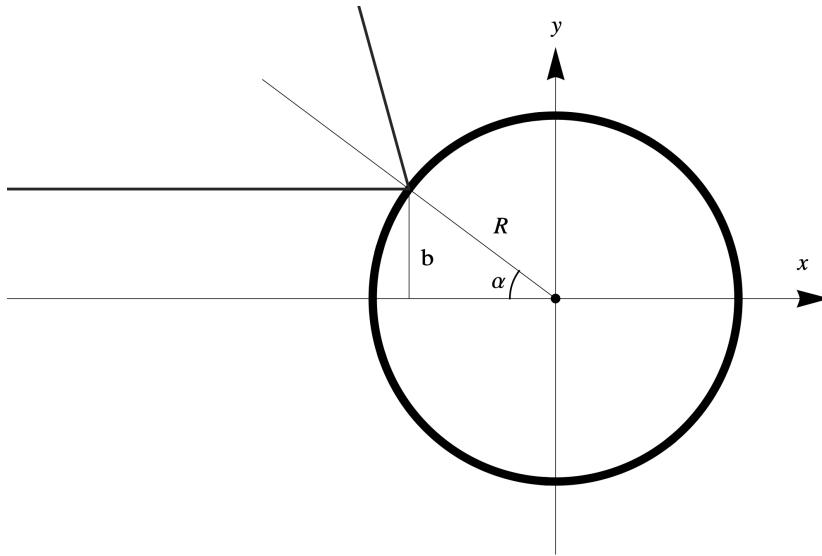


Рис. 3.4: Зеркальное рассеяние на шаре радиуса R : показаны траектория частицы с прицельным параметром b и угол в точке отражения от шара α .

Угол рассеяния при таком упругом отражении

$$\theta_{\text{el}} = \pi - 2\alpha, \quad \sin \alpha = \frac{b}{R} \quad \Rightarrow \quad b = R \cos \frac{\theta}{2},$$

так что дифференциальное сечение

$$d\sigma_{\text{el}} = 2\pi |b| |db| = 2\pi \frac{1}{2} R^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta,$$

т. е.

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} = \frac{1}{4} R^2. \quad (3.35)$$

Итак, дифференциальное сечение упругого рассеяния частицы на шаре является постоянным как функция энергии и изотропным, т. е. не зависит от углов, в отличие от дифференциального сечения кулоновского рассеяния, которое падает с ростом энергии и увеличивается с уменьшением угла рассеяния. Кроме того, у кулоновского рассеяния имеется квадратичная зависимость от заряда рассеивающего центра Z .

Для исследования атомарной структуры Резерфорд поставил опыт рассеяния пучка альфа-частиц, т. е. ядер гелия на пленке из золота. В модели Томсона, считавшейся актуальной в науке того времени, атом представлял из себя в

целом нейтральный шар, строение которого задавалось в виде положительно заряженной тяжелой твердой сферы, внутри которой по орбитам движутся легкие по сравнению с массой сферы отрицательно заряженные электроны⁹. Поэтому положительно заряженные альфа-частицы до встречи с атомом не испытывают на себе никакого воздействия, а при столкновении атом остается неделимым, так что имеет место рассеяние на твердой сфере, причем радиус сферы задается размером атома, т. е. составляет величину около одного ангстрема, $\text{\AA} = 10^{-8}$ см. Если взять атомную массу золота $m_{\text{Au}} \approx 197$ г и разделить ее на плотность массы золота $\rho_{\text{Au}} \approx 19.3 \text{ г/см}^3$ и на число Авогадро $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ на один моль, то можно сосчитать объем, который приходится в золоте на один атом

$$V_{\text{Au}} = \frac{m_{\text{Au}}}{\rho_{\text{Au}} \cdot N_A} \approx 17 \cdot \text{\AA}^3,$$

так что расстояние между атомами составляет величину¹⁰

$$\Delta a \sim \sqrt[3]{V_{\text{Au}}} \approx 2.6 \text{ \AA}.$$

Это значит, что в золоте атомы упакованы довольно плотно, так что, если учесть, что в золотой пленке есть несколько слоев, то в опытах по рассеянию альфа-частиц в модели Томсона лишь малая доля альфа-частиц будет двигаться без столкновений с атомами золота, а для рассеянных альфа-частиц стоит ожидать регистрацию изотропного распределения по углам рассеяния, если оно происходит однократно, а не каскадно.

Эксперимент Резерфорда показал, что в основной своей массе альфа-частицы проходят сквозь пленку без рассеяния или с очень малыми углами рассеяния. Это сразу указывает на то, что масса атома сосредоточена в ядре, малом по своим размерам по сравнению с размерами атома, а не в шаре размером с атом! Но в этом случае размер атома должен задаваться не тяжелым положительно заряженным ядром, а размерами орбит легких отрицательно заряженных электронов, определяющих химические связи между атомами. Тогда при прицельных параметрах, сравнимых с размерами атома, альфа-частицы рассеиваются только в результате столкновений с легкими электронами, что практически приводит к движению альфа-частиц, которое очень мало отличается от свободного, что и составляет основной массив данных по рассеянию в эксперименте Резерфорда. Согласно этим данным ядра в золотой пленке расположены на расстояниях, существенно превышающих размер ядра, так что малые прицельные параметры случаются довольно редко, и тогда, поскольку рассеяние на электронах является несущественным, имеет место кулоновское рассеяние альфа-частицы на положительно заряженном ядре золота, которое в примерно двадцать раз тяжелее альфа-частицы. В этом случае можно наблюдать рассеяние назад и на большие углы, идентифицируя угловую зависимость, которая задается формулами кулоновского взаимодействия. Эти формулы были хорошо знакомы Резерфорду, так как он со своим проектом гравитационного рассеяния планет являлся лауреатом конкурса

⁹ Такое строение атома называют «кексом с изюмом», имея в виду, что твердый керн атома имеет размеры атома, а подвижные изюминки—электроны разбросаны внутри атомного кора.

¹⁰ Сейчас мы понимаем, что это расстояние соответствует расстоянию между узлами решетки из ядер золота.

студенческих работ в Соединенном Королевстве, благодаря чему Резерфорд и получил возможность за счет королевской казны приехать из Новой Зеландии в Кембридж. Ясно, что движение в гравитационном поле при рассеянии по своим угловым характеристикам ничем не отличается от рассеяния в кулоновском поле притяжения, а дифференциальные сечения в кулоновском поле притяжения и в поле отталкивания совпадают.

Опыты Резерфорда вполне обоснованно показали, что атом имеет тяжелое положительно заряженное ядро, существенно меньшее по своим размерам, чем один ангстрем, а электроны движутся в кулоновском поле притяжения к ядру на расстояниях порядка одного ангстрема от ядра.

Задача 13. В гравитационном поле Солнца вычислите малое отклонение луча света, проходящего возле края Солнца (указание: гравитационное ускорение не зависит от массы). Сравните результат с углом отклонения, рассчитанным в общей теории относительности, т. е. с учетом искривления пространства-времени,

$$\delta\phi = \frac{4GM_\odot}{c^2 R_\odot}.$$

14 Изотропный гармонический осциллятор

Параметры эллипса при движении в поле изотропного гармонического осциллятора.

Потенциал изотропного осциллятора с частотой ω имеет сферически симметричный вид

$$U = \frac{m\omega^2}{2} r^2,$$

так что уравнение для орбиты при $\ell \neq 0$

$$\phi(r) = \int^r dr \frac{\ell}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2m \left(E - \frac{m\omega^2}{2} r^2 - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}} \quad (3.36)$$

после замены переменных

$$u = \frac{1}{r^2} \frac{\ell^2}{mE} u_0, \quad u_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 \ell^2}{E^2}}},$$

дает

$$\phi(r) = -\frac{1}{2} \int^u du \frac{1}{\sqrt{1 - (u - u_0)^2}} = \frac{1}{2} \arccos(u - u_0).$$

Значит,

$$\cos 2\phi = \frac{u_0}{r^2} \left(\frac{\ell^2}{mE} - r^2 \right), \quad (3.37)$$

откуда, используя $r^2 \cos 2\phi = r^2 (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) = x^2 - y^2$, найдем

$$x^2 - y^2 = u_0 \left(\frac{\ell^2}{mE} - x^2 - y^2 \right),$$

а следовательно,

$$x^2 \frac{u_0 + 1}{u_0} + y^2 \frac{u_0 - 1}{u_0} = \frac{\ell^2}{mE}. \quad (3.38)$$

В итоге, мы получили уравнение для эллипса с полуосами a и b ,

$$a^2 = \frac{\ell^2}{mE} \frac{u_0}{u_0 + 1}, \quad b^2 = \frac{\ell^2}{mE} \frac{u_0}{u_0 - 1}, \quad (3.39)$$

с эксцентриситетом ϵ :

$$1 - \epsilon^2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} \Rightarrow \epsilon^2 = \frac{2}{u_0 + 1}. \quad (3.40)$$

Центр притяжения находится в центре эллипса.

Круговая орбита отвечает $\epsilon = 0$ и минимуму потенциала радиального движения при фиксированном моменте импульса

$$V(r) = \frac{m\omega^2}{2} r^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2},$$

так что

$$V'(r) = m\omega^2 r - \frac{\ell^2}{mr^3},$$

и

$$V'(r_0) = 0 \Rightarrow r_0^2 = \frac{\ell}{m\omega},$$

что достигается как раз при $E = V(r_0) = \omega\ell$.

При $\omega\ell < E < \infty$ значение $1 < u_0 < \infty$, а значит, $0 < \epsilon < 1$.

Как легко убедиться, период обращения T связан стандартным образом с частотой осциллятора ω ,

$$T = 2\pi ab \frac{m}{\ell} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

15 Теорема вириала

Среднее значение наблюдаемой по времени и ее производной по времени для финитного движения, теорема вириала.

Для финитных и, в частности, периодических движений имеет смысл рассматривать средние значения наблюдаемых величин за долгий интервал эволюции или за период T :

$$\int_0^T dt F(t) = T \cdot \langle F \rangle \Rightarrow \langle F \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt F(t). \quad (3.41)$$

Тогда для произвольной наблюдаемой среднее значение ее производной по времени

$$\left\langle \frac{dF}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{dF}{dt} = \frac{1}{T} \{F(T) - F(0)\}.$$

Для периодического движения $F(T) = F(0)$, а для финитного движения значения наблюдаемой ограничены в том случае, если она построена как функция координат и импульсов и явно не зависит от времени: $F = F(p(t), q(t))$, так что при больших временах $\{F(T) - F(0)\}/T \rightarrow 0$, а значит, имеет место утверждение

$$\left\langle \frac{dF(p, q)}{dt} \right\rangle = 0. \quad (3.42)$$

В частности,

$$\left\langle \frac{d}{dt} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \right\rangle = 0. \quad (3.43)$$

Воспользуемся уравнениями Гамильтона (2.10) и найдем

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\partial U \cdot \mathbf{r} + \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{p}}{m} = -\mathbf{r} \cdot \partial U + 2 \frac{\mathbf{p}^2}{2m}.$$

Значит, согласно уравнениям движения из (3.43) следует теорема вириала¹¹ для финитных движений: удвоенное среднее значение кинетической энергии равно среднему значению скалярного произведения силы на радиус-вектор со знаком минус:

$$2 \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\rangle = \langle \mathbf{r} \cdot \partial U \rangle, \quad \Leftrightarrow \quad 2 \left\langle \frac{\mathbf{p}_k^2}{2m_k} \right\rangle = -\langle \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{F}_k \rangle. \quad (3.44)$$

В случае нескольких частиц имеет место связь

$$\sum_k 2 \left\langle \frac{\mathbf{p}_k^2}{2m_k} \right\rangle = \sum_k \langle \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{F}_k \rangle,$$

которую можно использовать в качестве инструмента изучения сил в системе. Этот метод был использован астрономами в 30-х годах двадцатого века при исследовании сил в скоплениях галактик, которые взаимодействуют гравитационно, когда были измерены относительные скорости галактик и расстояния между галактиками в скоплении. Тогда в качестве параметров в теореме вириала выступают массы галактик, которые определялись по спектральной светимости, позволяющей оценить видимые массы галактик. Данные наблюдений для скоплений галактик указали, что гравитационные массы галактик в десятки раз превосходят их видимые массы. Значит, согласно теореме вириала галактики должны содержать в больших количествах невидимое вещество, которое было названо «темным». Это было исторически первое указание на существование «dark matter». Дальнейшие наблюдения показали, что темное вещество в галактиках не может быть сведено к пыли или межзвездному газу, которые удалось наблюдать в галактиках.

Для сферически симметричных потенциалов¹²

$$\mathbf{r} \cdot \partial U(r) = r \frac{dU(r)}{dr},$$

¹¹От латинского слова *vires*, означающего «сила», введен термин *virial* в смысле «сильный».

¹²Действительно,

$$r^\alpha \frac{\partial U(r)}{\partial r^\alpha} = r^\alpha \frac{dU(r)}{dr} \frac{dr}{dr^2} \frac{\partial r^2}{\partial r^\alpha} = \frac{dU(r)}{dr} \left(\frac{dr^2}{dr} \right)^{-1} \left(x \frac{\partial r^2}{\partial x} + y \frac{\partial r^2}{\partial y} + z \frac{\partial r^2}{\partial z} \right).$$

а для однородных $U(r) = U_0 r^\kappa$,

$$r \frac{dU(r)}{dr} = \kappa U(r),$$

так что по теореме вириала среднее значение кинетической энергии связано со средним значением потенциальной

$$\left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\rangle = \frac{\kappa}{2} \langle U \rangle. \quad (3.45)$$

Для кулоновского потенциала ($\kappa = -1$) и потенциала гармонического осциллятора ($\kappa = 2$) получаем

$$\left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\rangle_{\text{Coul}} = -\frac{1}{2} \langle U \rangle_{\text{Coul}}, \quad \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right\rangle_{\text{osc}} = \langle U \rangle_{\text{osc}}.$$

Отсюда, между прочим, для энергии как суммы кинетической и потенциальной энергий находим

$$E_{\text{Coul}} = \frac{1}{2} \langle U \rangle_{\text{Coul}}, \quad E_{\text{osc}} = 2 \langle U \rangle_{\text{osc}}.$$

Но

$$\frac{dr^2}{dr} = 2r,$$

а, поскольку $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$x \frac{\partial r^2}{\partial x} + y \frac{\partial r^2}{\partial y} + z \frac{\partial r^2}{\partial z} = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2r^2,$$

так что

$$r^\alpha \frac{\partial U(r)}{\partial r^\alpha} = \frac{dU(r)}{dr} \frac{1}{2r} 2r^2 = r \frac{dU(r)}{dr}.$$

Глава 4

Векторное пространство и тензоры

(4.A) Плоское пространство

§а Координатный подход

В векторном анализе мы используем так называемый *координатный подход*, что обусловлено постановкой задач в физике. Для примера, если 3-мерному вектору координат частицы \mathbf{r} ставится в соответствие вещественное число $f(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}$, то в математике говорят, что задана скалярная функция, которую называют также инвариантом. В физике эту функцию называют скалярным полем и ставят вопрос о его измерении. Для этого необходимо, во-первых, задать базис в векторном пространстве для наблюдателя, так что поле становится функцией координат точки в этом базисе $\mathbf{r} = (x, y, z)$, а измерения дают $f(x, y, z) = f(\mathbf{r})$, и, во-вторых, задать другой, шттрихованный базис другого наблюдателя, который получает данные измерения в виде $f'(x', y', z')$. Скалярная функция отвечает равенству этих измерений: $f(x, y, z) = f'(x', y', z')$. Эту связь мы будем записывать в координатной форме $f(\mathbf{r}) = f'(\mathbf{r}')$, хотя в бескоординатном подходе следовало бы писать тавтологию: скалярная функция объекта по имени «вектор» не зависит от выбора базиса вектора $f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$, т. е. значение функции не зависит от наблюдателя¹.

16 Евклидово пространство

Длина, однородность и изотропность евклидова пространства, метрика, векторы, базис, декартовы и сферические координаты, инвариантные линейные функции на векторах и ковекторах, инвариантные полилинейные функции на векторах и тензоры, дифференциал инвариантной функции и законы преобразования векторов и ковекторов, символ Кронекера как инвариантный тензор второго ранга, метрика как ковариантный тензор второго ранга, обратная метрика, поднимание и опускание индексов.

16.1 Векторы, ковекторы, тензоры

Механика частиц формулируется в евклидовом пространстве. Инструментом для описания в этом случае является векторный анализ.

¹Иными словами, физической реальностью являются показания прибора, которые определяют положение детектора и реакцию детектора на величину поля. Именно эти показания приборов и соответствуют вектору координат, например, т. е. определяют понятие точки в пространстве. Эта же точка для другого прибора будет отвечать, вообще говоря, другим показаниям компонент вектора координат, но эти показания связаны определенным законом. Эти же рассуждения справедливы и для показаний, которые задают величину поля (функции от точки в пространстве).

Векторное пространство определяется как множество, в котором заданы сложение двух элементов и умножение элементов на число² [12]. Числа могут быть вещественными или комплексными, а векторное пространство, соответственно, является тоже вещественным или комплексным. Далее будем строить изложение для вещественного векторного пространства.

Векторное пространство конечной размерности можно представить себе как линейную оболочку, натянутую на конечное число независимых базисных векторов. В трехмерном случае в декартовом базисе произвольный вектор координатного пространства

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z.$$

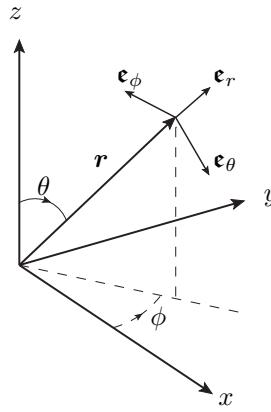


Рис. 4.1: Базис в сферических координатах.

Поскольку базис в разных точках пространства можно выбирать различным способом, принято записывать разложение векторов в бесконечно малой окрестности точки пространства. Поэтому, согласно правилу Эйнштейна, запись для бесконечно малых векторов принимает вид

$$d\mathbf{r} = dr^\alpha \mathbf{e}_\alpha,$$

где dr^α , как и прежде, можно представлять себе как трехмерный столбец:

$$dr^\alpha = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}.$$

В сферических координатах (см. рис. 4.1) базис зависит от точки в пространстве,

$$d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r + rd\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{e}_\phi = dC^\alpha \mathbf{e}_\alpha. \quad (4.1)$$

²Мы полагаем, что читатель знаком со всеми постулатами для операций в векторном пространстве, включая дистрибутивные законы, т.е. обычные правила раскрытия скобок.

В (4.1) мы разложили вектор по единичным векторам базиса, умноженным на длину бесконечно малого вектора, который получается при малом сдвиге по координатам сферического базиса:

$$\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix}.$$

Безусловно можно построить не только бесконечно малые векторы в локальном базисе ϵ_α . Тогда говорят, что такие векторы лежат в касательном пространстве того базиса, который задан в рассматриваемой точке исходного пространства.

Задача 14. Запишите элемент объема d^3V в сферических координатах, пользуясь ортогональностью рёбер кубика, построенного по ортам вектора dr в терминах dC^α .

Векторное пространство называется евклидовым, если

- пространство является метрическим, т. е. для него определен квадрат длины вектора — инвариантная, т. е. не зависящая от выбора базиса в векторном пространстве, положительно определенная квадратичная функция вектора,
- оно однородно и
- изотропно
- в глобальном базисе, т. е. в одном и том же базисе во всех точках пространства.

Квадрат длины, в частности, в декартовых координатах задается выражением

$$dC^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \mapsto g_{\alpha\beta} dr^\alpha dr^\beta = g(dr, dr),$$

где в общем случае положительно определенная симметричная квадратичная форма $g_{\alpha\beta}$, которую называют метрикой, может зависеть от положения точки в пространстве, что приведет, вообще говоря, к метрическому пространству Римана [13]. Однородность и изотропность евклидова пространства глобально означает, что эта квадратичная форма в некотором базисе, который называют декартовыми, может быть приведена к главным осям³ $\|g\| = \text{diag}(1, 1, 1)$ во всем пространстве. А значит, в декартовых координатах метрика — единичная матрица 3×3 :

$$g_{\alpha\beta} = \mathbb{1}_{\alpha\beta}.$$

Метрика задает скалярное произведение двух векторов, поскольку по построению квадрат длины — линейная симметричная функция по каждому из аргументов:

$$g(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = g(\mathbf{a}, \mathbf{a}) + 2g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + g(\mathbf{b}, \mathbf{b}) \quad (4.2)$$

откуда всегда можно найти $g(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ по заданным длинам векторов.

³Набор знаков вещественных диагональных элементов метрики в базисе главных осей называют сигнатурой. В частности, сигнтура евклидовой 3-мерной метрики — это $(+, +, +)$.

Задача 15. Пользуясь положительной определенностью квадратичной формы метрики $g(\mathbf{c}, \mathbf{c}) \geq 0$, введите понятие нормы — длины вектора $\|\mathbf{c}\| = \sqrt{g(\mathbf{c}, \mathbf{c})}$ и сделайте в (4.2) подстановку $\mathbf{b} \mapsto \xi \mathbf{b}$, $\xi \in \mathbb{R}$, а затем рассмотрите равенство как квадратичный трехчлен по ξ . Какое условие следует из положительной определенности трехчлена? Докажите неравенство треугольника,

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|. \quad (4.3)$$

По построению декартов базис является ортонормированным:

$$g(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) = g_{\alpha\beta} = \mathbb{1}_{\alpha\beta}.$$

В сферических координатах базис также ортогональный, и квадрат длины легко вычисляется в виде

$$dC^2 = dr^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.4)$$

т. е. метрика по-прежнему диагональна, как во всяком ортогональном базисе, с ненулевыми элементами⁴

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta.$$

Пусть функция f в векторном пространстве задает вещественное число $f(\mathbf{r})$. Это число зависит от вектора, но не зависит от того, в каком базисе мы запишем сам этот вектор, т. е. значение функции инвариантно относительно замены базиса в векторном пространстве. Такая функция называется скаляром. Примером скаляра служит действие на траектории, которое зависит от конечной точки траектории, но не зависит от того, в какой системе координат описывается эта точка. Время как величина, вообще не зависящая от системы координат в нерелятивистской физике, также является скаляром в евклидовом пространстве.

Среди скаляров выделяют линейные функции:

- $f(c\mathbf{a}) = cf(\mathbf{a})$, $c \in \mathbb{R}$,
- $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$.

Линейная функция полностью задается значениями на базисных векторах векторного пространства

$$f(\mathbf{a}) = f\left(\sum_\alpha a^\alpha \mathbf{e}_\alpha\right) = \sum_\alpha f(a^\alpha \mathbf{e}_\alpha) = \sum_\alpha a^\alpha f(\mathbf{e}_\alpha) = a^\alpha f(\mathbf{e}_\alpha),$$

где для наглядности мы сначала в явном виде указали суммирование по компонентам вектора, а потом записали окончательную формулу по правилу Эйнштейна для «немых» индексов.

⁴Условие приводимости тензора метрики к единичному сразу во всем пространстве сводится к тождественному нулю тензора Римана, что означает перестановочность дифференцирования по двум направлениям любого вектора, зависящего от точки в пространстве. См. стр. 155, раздел 23.

Поскольку значение скалярной функции — *инвариант*, а a^α можно представлять себе как трехмерный столбец, то удобно ввести обозначения для значения линейной функции на базисном векторе $f(\mathbf{e}_\alpha) = f_\alpha$, что можно представлять себе как трехмерную строку, так что

$$f_\alpha a^\alpha = f(\mathbf{a}) \quad (4.5)$$

— число, не зависящее от выбора базиса. В формуле (4.5) использованы тензорные обозначения в индексах с правилом суммирования Эйнштейна по немым индексам. При этом, a^α — это координаты вектора в заданном базисе, а $f(\mathbf{e}_\alpha) = f_\alpha$ — это координаты линейной функции f на том же базисе векторного пространства. В тензорных обозначениях важно следить за тем, какие индексы являются верхними, а какие нижними, а представление о том, какой объект является столбцом, а какой строкой в терминах матричного умножения становится вспомогательным и в ряде простых случаев служит лишь для наглядности восприятия формул тензорного анализа. Как мы сейчас увидим, для тензорных обозначений важным становится то, как координаты объектов преобразуются при смене базиса в векторном пространстве.

Сумма линейных функций является линейной функцией, а линейная функция, умноженная на число, также является линейной функцией. Отсюда следует, что линейные функции на векторном пространстве сами образуют векторное пространство: в нем есть сложение и умножение на число. Такое пространство линейных функций \tilde{V} на векторном пространстве V обычно называют ковариантным или ко-сопряженным (двойственным) к самому векторному пространству, выступающему в качестве аргумента таких функций. Как мы только что видели, размерность ковариантного пространства совпадает с размерностью исходного векторного пространства, которое называют еще контравариантным,

$$\dim \tilde{V} = \dim V.$$

Дифференциал скалярной функции $df = f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - f(\mathbf{r})$ является линейной скалярной функцией над векторным пространством дифференциалов координат $d\mathbf{r}$,

$$df = \frac{\partial f}{\partial r^\alpha} dr^\alpha = \partial_\alpha f dr^\alpha \Rightarrow df(\mathbf{e}_\alpha) = \partial_\alpha f.$$

При замене координат $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(\mathbf{r})$ имеет место замена базиса в каждой точке пространства, причем дифференциалы dr^α преобразуются согласно

$$dr'^\alpha = \frac{\partial r'^\alpha}{\partial r^\beta} dr^\beta,$$

т. е. в терминах матричного умножения как столбец матрицей 3×3 : $\Lambda_{\bullet\beta}^\alpha = \partial r'^\alpha / \partial r^\beta$, так что имеет место *закон преобразования векторов*⁵

$$a'^\alpha = \frac{\partial r'^\alpha}{\partial r^\beta} a^\beta. \quad (4.6)$$

А частные производные скалярной функции преобразуются согласно

$$\partial'_\alpha f = \frac{\partial r^\beta}{\partial r'^\alpha} \partial_\beta f, \quad (4.7)$$

⁵Говорят также о законе преобразования контравариантных векторов.

т. е. в терминах матричного умножения как строка обратной матрицей $(\Lambda^{-1})_{\bullet\alpha}^\beta = \partial r^\beta / \partial r'^\alpha$. Действительно,

$$(\Lambda^{-1} \cdot \Lambda)_{\bullet\alpha}^\beta = (\Lambda^{-1})_{\bullet\gamma}^\beta \Lambda_{\gamma\alpha}^\gamma = \frac{\partial r^\beta}{\partial r'^\gamma} \frac{\partial r'^\gamma}{\partial r^\alpha} = \frac{\partial r^\beta}{\partial r^\alpha}.$$

Производная $\partial r^\beta / \partial r^\alpha$ называется символом Кронекера

$$\delta_\alpha^\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial r^\beta}{\partial r^\alpha} = \partial_\alpha r^\beta = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (4.8)$$

Это не что иное, как элементы единичной матрицы $\delta_\alpha^\beta = \mathbb{1}_\alpha^\beta$, так что $\Lambda^{-1} \cdot \Lambda = \mathbb{1}$. У символа Кронекера при использовании матричного умножения обычно опускают указание на порядок следования индексов, так как отличны от нуля только диагональные элементы и

$$\delta_{\bullet\beta}^\alpha = \delta_{\beta}^{\bullet\alpha} \equiv \delta_\beta^\alpha. \quad (4.9)$$

Итак, частные производные скалярной функции преобразуются при замене координат, т. е. при замене базиса в векторном пространстве, согласно (4.7) или при использовании матричных обозначений как строки, которые умножаются на обратную матрицу преобразования компонент координат векторов. В общем случае говорят, что линейные скалярные функции на векторном пространстве образуют ковекторное пространство, а их значения на базисных векторах преобразуются по *закону преобразования ковекторов*,⁶ т. е. как частные производные скалярной функции:

$$b'_\alpha = \frac{\partial r^\beta}{\partial r'^\alpha} b_\beta. \quad (4.10)$$

Мнемоническое правило для запоминания законов преобразования простое: вектор — верхний индекс, в матрице преобразований штрихи у координат сверху, ковектор — нижний индекс, в матрице преобразований штрихи у координат снизу.

Ковариантным тензором ранга k называется инвариантная функция от k векторов, линейная по каждому из аргументов. Тогда в индексных обозначениях тензор задается своими значениями на базисных векторах:

$$T(\epsilon_{\alpha_1}, \dots, \epsilon_{\alpha_k}) = T_{\alpha_1 \dots \alpha_k},$$

т. е. тензор задается своими проекциями на базисные векторы по каждому аргументу полилинейной функции. Смешанные тензоры ранга $k_1 + k_2$ определяются как линейные функции на k_1 векторах и k_2 ковекторах и имеют k_1 нижних и k_2 верхних индексов. По каждому нижнему индексу тензор преобразуется по закону ковектора, а по верхнему — по закону вектора. Верхние индексы определяются как проекции тензора на базисные векторы \mathfrak{h}^β в ковариантном, дуальном к векторному, пространстве.

Символ Кронекера — смешанный тензор второго ранга. Он является инвариантным тензором, поскольку в любых новых координатах принимает те же значения единичной матрицы.

⁶Говорят также о законе преобразования ковариантных векторов.

§а Связь координатного и инвариантного подхода

Здесь уместно сделать замечание о соответствии между принятым нами координатным подходом с наглядным представлением базиса в векторном пространстве и инвариантным бескоординатным подходом, который часто используется в научной литературе. В координатном подходе основным объектом являются компоненты тензора. Например, компоненты двухвалентного ковариантного тензора $T_{\alpha\beta}$ действуют как билинейная функция в пространстве тензорного произведения двух векторных пространств $V \otimes V$: элементами тензорного произведения пространств являются классы эквивалентности в прямом произведении этих векторных пространств $V \times V$, так что к классу $v \otimes u$ принадлежат все элементы $V \times V$, на которых билинейные инвариантные функции принимают одни и те же значения. Это значит, что эквивалентными являются элементы с одинаковым множителем, $\lambda v \times u \cong v \times \lambda u$, а также элементы, которые отличаются на $0 \times u'$ или $v' \times 0$, поскольку билинейные инвариантные функции принимают одни и те же значения на элементах класса⁷.

Компоненты тензоров преобразуются при смене базиса в векторном пространстве, и мы говорим о законе преобразования тензоров. При этом сам тензорный объект записывается в векторном виде в представлении «базиса со стрелками» (жирный шрифт): вектор $a = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha$, контравариантный тензор второго ранга $U = U^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta$, ковектор $b = b_\beta \mathbf{h}^\beta$, ковариантный тензор второго ранга $T = T_{\alpha\beta} \mathbf{h}^\alpha \otimes \mathbf{h}^\beta$ и проч. По построению пространства линейных функций на векторном пространстве, т. е. при построении пространства, двойственного к этому векторному пространству, базис ковекторного пространства задается соотношением⁸ $\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{h}^\beta = (\mathbf{e}_\alpha)^\gamma (\mathbf{h}^\beta)_\gamma = \delta_\alpha^\beta$.

При пассивных преобразованиях векторного пространства происходит одновременный переход от компонент вектора a^α к штрихованным компонентам

⁷По сути для введения тензорного произведения $V \otimes V$ как векторного пространства необходимо определить операции сложения и умножения на число для элементов этого векторного пространства, т. е. те операции, которые не заданы для прямого (декартова) произведения $V \times V$. Поэтому и возникают классы эквивалентности, а элементы тензорного произведения векторных пространств — это и есть эти классы смежности. В случае умножения на число λ элемента векторного пространства $v \otimes u$ в тензорном произведении возникает элемент $\lambda(v \otimes u)$, а при вычислении любой инвариантной линейной функции $T(v \otimes u) \equiv T(v, u)$ на тензорном произведении число λ выносится из под знака функции $T(\lambda(v \otimes u)) = \lambda T(v \otimes u) = \lambda T(v, u) = T(\lambda v, u) = T(v, \lambda u)$. В итоге, элементы векторного пространства $\lambda(v \otimes u) - (\lambda v) \otimes u \cong \lambda(v \otimes u) - v \otimes (\lambda u) \cong 0 \otimes 0$ входят в класс эквивалентности нулевого элемента тензорного произведения. Аналогично при сложении элементов тензорного произведения $(v \otimes u) + (0 \otimes u')$ или $(v \otimes u) + (v' \otimes 0)$ в силу линейности функции имеем $T(0 \otimes u') = T(0, u') = 0 = T(v', 0) = T(v' \otimes 0) = T(0 \otimes 0)$, так что сложение с такими «нулевыми» элементами также не изменяет значение инвариантной линейной функции и задает еще одно соотношение для класса эквивалентности $0 \otimes 0$, а именно, $(v_1 + v_2) \otimes u - v_1 \otimes u - v_2 \otimes u \cong 0 \otimes 0 \cong v \otimes (u_1 + u_2) - v \otimes u_1 - v \otimes u_2 \cong 0 \otimes 0$. В этих соотношениях сложение определено в отношении элементов базиса тензорного произведения $\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \equiv \mathbf{e}_{\alpha\beta}$. Подчеркнем, что все соотношения для тензорного произведения имеют упорядоченный вид, т. е. порядок следования имеет значение так же, как он имеет значение и при вычислении инвариантной линейной функции от двух векторов, например.

⁸Мы задаем базис ковариантного пространства как ортонормальные инвариантные линейные функции на векторах так, что значения «бетых» функций \mathbf{h}^β равны единице на «бетом» базисном векторе \mathbf{e}_β и нулю на других базисных векторах. Это определение можно записать в виде суммы произведений по компонентам как функции, так и базисного вектора. В самом деле, $\mathbf{h}^\beta(a) = a^\gamma \mathbf{h}^\beta(\mathbf{e}_\gamma) = a^\gamma \mathbf{h}_\gamma^\beta$, но поскольку компоненты базисного вектора $(\mathbf{e}_\alpha)^\gamma = \delta_\alpha^\gamma$, то $\mathbf{h}^\beta(\mathbf{e}_\alpha) = (\mathbf{e}_\alpha)^\gamma \mathbf{h}_\gamma^\beta = \delta_\alpha^\gamma \mathbf{h}_\gamma^\beta = \delta_\alpha^\beta$.

вектора $a'^\alpha = \Lambda_{\bullet\beta}^\alpha a^\beta$ и от базиса \mathbf{e}_α к штрихованному базису $\mathbf{e}'_\alpha = \mathbf{e}_\beta (\Lambda^{-1})_{\bullet\alpha}^\beta$, где, подчеркнем, действует обратная матрица. Ясно, что вектор $\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ остается инвариантным при пассивных преобразованиях. Для ковекторов согласованное с векторами преобразование для базиса — $\mathbf{h}'^\beta = \Lambda_{\bullet\alpha}^\beta \mathbf{h}^\alpha$, для контравариантных компонент — $b'_\beta = b_\alpha (\Lambda^{-1})_\bullet^\alpha$. Формально закон преобразования базиса векторного пространства \mathbf{e}_α тождественно совпадает с законом преобразования частных производных ∂_α , а закон преобразования базиса ковариантного векторного пространства \mathbf{h}^β тождественно совпадает с законом преобразования дифференциалов координат dr^β . Поэтому, если нет необходимости в наглядности, то от базисных векторов со стрелками можно избавиться и использовать вместо базисных векторов объекты с идентичными свойствами преобразования: $\mathbf{e}_\alpha \mapsto \partial_\alpha$ и $\mathbf{h}^\beta \mapsto dr^\beta$. Именно так и поступают в инвариантном подходе. Тогда эквивалентными становятся записи для контравариантного тензора второго ранга, например,

$$\mathbf{U} = U^{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \cong U^{\alpha\beta} \partial_\alpha \otimes \partial_\beta,$$

и для ковариантного тензора второго ранга

$$\mathbf{T} = T_{\alpha\beta} \mathbf{h}^\alpha \otimes \mathbf{h}^\beta \cong T_{\alpha\beta} dr^\alpha \otimes dr^\beta.$$

Если говорят: задан вектор $\mathbf{a} = \partial_x + 2\partial_y$, то в координатном подходе это либо отвечает инвариантному контравариантному объекту со значениями на базисе в ковариантном пространстве: $a(\mathbf{h}^x) = a^x = 1$, $a(\mathbf{h}^y) = a^y = 2$, — либо может трактоваться как инвариантный вектор \mathbf{a} , который в указанном базисе равен $\mathbf{a} = \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y$.

Существует вполне определенная процедура перехода от понятий инвариантного подхода к понятиям координатного подхода. По существу эта процедура повторяет изложенную выше схему построения тензорного исчисления. Введем понятие подстановки вектора \mathbf{a} в ковариантный тензор (в математике наряду с термином «подстановка» используют понятие «внутреннее дифференцирование»), так что подстановка $i_{\mathbf{a}}$ переводит тензор ранга k в тензор ранга $k - 1$ за счет свертки по первому индексу, и на примере тензора второго ранга в инвариантном подходе запишем

$$i_{\mathbf{a}} \mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} i_{\mathbf{a}} T_{\alpha\beta} dr^\alpha \otimes dr^\beta = T_{\alpha\beta} a^\alpha dr^\beta. \quad (4.11)$$

Еще одна подстановка даст

$$i_{\mathbf{b}}(i_{\mathbf{a}} \mathbf{T}) = T_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta,$$

но именно это выражение в координатном подходе мы и обозначали как $T(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — значение инвариантной полилинейной функции на векторах! В частности,

$$i_{\mathbf{e}_\beta}(i_{\mathbf{e}_\alpha} \mathbf{T}) = T_{\alpha\beta} = T(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta),$$

с учетом того, что компоненты базисных векторов — это дельта-символы Кронекера: $(\mathbf{e}_\alpha)^{\alpha'} = \delta_\alpha^{\alpha'}$, так что

$$T_{\alpha'\beta'}(\mathbf{e}_\alpha)^{\alpha'}(\mathbf{e}_\beta)^{\beta'} = T_{\alpha\beta}.$$

Если теперь учесть, как базисные векторы преобразуются при пассивных преобразованиях, то мы в точности получим закон преобразования компонент ковариантного тензора. Аналогичные рассуждения можно провести и для тензоров других рангов с различными ковариантными и контравариантными индексами, имея ввиду, что сверка имеет универсальный характер по отношению к векторам и ковекторам.

Таким образом, мы полностью установили эквивалентность описания тензоров в координатном и инвариантном подходах на уровне формул перехода и ясной интерпретации этих формул путем введения свертки-подстановки. Единственный нюанс — подстановка бесконечно малых векторов, которые задают направляющие ориентированных площадей гиперповерхностей: в этом случае надо иметь ввиду, что в координатном подходе дифференциалы координат возникают не как базис в ковариантном пространстве, а как подстановка вполне определенных бесконечно малых элементов ориентированных гиперповерхностей. На этом вопросе мы более детально остановимся при рассмотрении дифференциальных форм в координатном подходе (см. стр. 163, раздел 25, §а).

В координатном подходе не только есть преимущество наглядности: после определения свойств преобразования компонент объекта формально нет никакого различия в покомпонентной записи так называемых активных и пассивных преобразований. При пассивных преобразованиях происходит смена базиса для описания объекта, а при активных сам объект преобразуется в заданном базисе, но в координатном подходе обе эти схемы приводят просто к функциональной зависимости координат образа от координат оригинала, так что схема никак не оказывается на выкладках. В инвариантном подходе активная схема означает переход от одной инвариантной функции к другой, и в то время как скаляр в координатном подходе — это скаляр при любой схеме преобразований, в инвариантном подходе может возникнуть существенная разница, поскольку инварианты могут переходить в другие инварианты при активной схеме преобразований. К примеру, инвариантные интегралы в координатном подходе — это сумма скаляров, а в инвариантном подходе интегралы могут трактоваться как сумма тензоров.

С точки зрения физики: базис — это наблюдатель со своими линейками (детектором измерения компонент векторов и тензоров), так что пассивные преобразования — это описание одной и той же физической системы в тензорных обозначениях разными наблюдателями (в разных базисах). С другой стороны, переход от одного наблюдателя физической системы к другому можно описать эквивалентным образом: два наблюдателя — это один и тот же наблюдатель за системой, для которого сама система переместилась по отношению к детекторам наблюдателя. Именно поэтому в координатном подходе формулы активных и пассивных преобразований описываются идентичными преобразованиями тензорных величин⁹.

⁹Результат активного преобразования компонент тензорной величины, который совпадает с результатом пассивного преобразования компонент этой величины при одной и той же замене координат, называется параллельным переносом тензора. Вместе с тем, если тензорная величина задана в новой точке при активном преобразовании координат, то это ее значение можно сравнить с результатом параллельного переноса тензора, так что при бесконечно малых преобразованиях в заданном направлении такое сравнение приводит к введению производной Ли тензора по указанному направлению.

§b Метрический тензор

Метрика является ковариантным тензором второго ранга. Она совпадает с единичной матрицей только в декартовых координатах, как мы видели это на примере сравнения сферических и декартовых координат. Это замечание элементарно, поскольку сам декартов базис как раз и определяется как базис, в котором метрика становится единичной во всем евклидовом пространстве.

Для метрики определяют обратную метрику g^{-1} согласно матричному умножению $g^{-1} \cdot g = \mathbb{1}$, записывая индексы обратной матрицы сверху:

$$\|g^{-1}\|^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}, \quad g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha.$$

Из инвариантности единичного тензора Кронекера относительно преобразований координат матрицей Λ , ввиду $\Lambda \cdot \mathbb{1} \cdot \Lambda^{-1} = \mathbb{1}$, следует, что обратная метрика действительно является тензором второго ранга: построим

$$\Lambda_{\bullet\alpha'}^\alpha \Lambda_{\bullet\beta'}^\beta g^{\alpha'\beta'} = g'^{\alpha\beta}, \quad g_{\beta''\gamma''} (\Lambda^{-1})_{\bullet\beta}^{\beta''} (\Lambda^{-1})_{\bullet\gamma}^{\gamma''} = g'_{\beta\gamma},$$

и найдем

$$g'^{\alpha\beta} g'_{\beta\gamma} = \Lambda_{\bullet\alpha'}^\alpha \Lambda_{\bullet\beta'}^\beta g^{\alpha'\beta'} g_{\beta''\gamma''} (\Lambda^{-1})_{\bullet\beta}^{\beta''} (\Lambda^{-1})_{\bullet\gamma}^{\gamma''},$$

но поскольку $\Lambda_{\bullet\beta'}^{\beta} (\Lambda^{-1})_{\bullet\beta}^{\beta''} = \delta_{\beta'}^{\beta''}$, а значит,

$$\Lambda_{\bullet\beta'}^\beta g^{\alpha'\beta'} g_{\beta''\gamma''} (\Lambda^{-1})_{\bullet\beta}^{\beta''} = g^{\alpha'\beta'} g_{\beta'\gamma''} = \delta_{\gamma''}^{\alpha'},$$

получим

$$g'^{\alpha\beta} g'_{\beta\gamma} = \Lambda_{\bullet\alpha'}^\alpha \delta_{\gamma''}^{\alpha'} (\Lambda^{-1})_{\bullet\gamma}^{\gamma''} = \Lambda_{\bullet\alpha'}^\alpha (\Lambda^{-1})_{\bullet\gamma}^{\alpha'} = \delta_\gamma^\alpha,$$

как это и должно быть.

Метрика используется для получения новых тензорных величин путем *поднимания и опускания индексов*: поднимание индекса с помощью обратной метрики переводит ковекторную величину в векторную, $a_\alpha \mapsto a^\alpha = g^{\alpha\beta} a_\beta$, а опускание индекса метрикой переводит вектор в ковектор, $a^\alpha \mapsto a_\alpha = g_{\alpha\beta} a^\beta$. В силу определения тензора обратной метрики как обратной матрицы для ковариантного тензора метрики последовательное поднимание и опускание индекса не меняет тензорную величину.

В декартовых координатах метрика евклидова пространства — единичная матрица, так что поднимание или опускание индекса тензорной величины не меняет эту тензорную величину. Поэтому в *декартовых координатах евклидова пространства не различают верхние и нижние индексы*. Однако это различие существенно как в криволинейных координатах евклидова пространства (см. пример сферических координат выше), так и в случае специальной теории относительности (пространство-время Минковского).

17 Тензор Леви-Чивиты

Смешанное произведение трех векторов, ориентированный объем, тензор Леви-Чивиты, векторное произведение в тензорных обозначениях, детерминант, минор, обратная матрица, дифференциал детерминанта, вектор и тензор площади, зеркальные отражения и пространственная четность.

Рассмотрим ортонормированную правую тройку базисных векторов евклидова пространства, например, $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z \equiv \mathbf{e}_\alpha, \alpha = \{\overline{1,3}\}$. Смешанное произведение $(\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{e}_z = 1$ — объем единичного куба. Линейная по каждому из аргументов величина

$$(\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta) \cdot \mathbf{e}_\gamma \equiv \epsilon_{\alpha\beta\gamma}$$

задает компоненты тензора третьего ранга — символа Леви-Чивиты¹⁰, полностью антисимметричного по перестановкам каждого из двух его аргументов. Как следствие, если хотя бы пара векторов в смешанном произведении совпадает, его значение равно нулю. Физический смысл символа Леви-Чивиты — ориентированный объем куба, натянутого на тройку единичных векторов: на правой тройке объем положительный «+1», на левой — отрицательный «-1», а для плоской или линейной фигуры равен нулю.

Разложение векторов по базису задает смешанное произведение в виде

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (a^\alpha \mathbf{e}_\alpha \times b^\beta \mathbf{e}_\beta) \cdot c^\gamma \mathbf{e}_\gamma = a^\alpha b^\beta c^\gamma (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta) \cdot \mathbf{e}_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a^\alpha b^\beta c^\gamma.$$

Аналогично векторное произведение с компонентой γ

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_\gamma = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a^\alpha b^\beta,$$

откуда заодно заключаем, что компоненты единичного вектора $(\mathbf{e}_\gamma)^\gamma = \delta_\gamma^\gamma$, т.е. единственная единица у столбца \mathbf{e}_γ находится на месте, номер которого равен γ .

Стандартное определение детерминанта квадратной матрицы A размерности 3×3

$$\det A = \sum (-1)^{\sigma(\alpha\beta\gamma)} A_{1\alpha} A_{2\beta} A_{3\gamma},$$

где $\sigma(\alpha\beta\gamma)$ — число перестановок отличных друг от друга индексов в упорядоченную последовательность 123, с помощью тензора Леви-Чивиты принимает вид

$$\det A = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{1\alpha} A_{2\beta} A_{3\gamma}. \quad (4.12)$$

Запишем это же выражение для детерминанта в виде

$$\begin{aligned} \det A &= \epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} A_{1\alpha_1} A_{2\alpha_2} A_{3\alpha_3} = \epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \epsilon_{123} A_{1\alpha_1} A_{2\alpha_2} A_{3\alpha_3} = \\ &= \frac{1}{3!} \epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \epsilon_{\beta_1\beta_2\beta_3} A_{\beta_1\alpha_1} A_{\beta_2\alpha_2} A_{\beta_3\alpha_3}. \end{aligned}$$

Здесь мы заметили, что и для первого индекса матрицы в произведении необходимо записать упорядоченную правую тройку, причем, при перестановке

¹⁰Леви-Чивита — любимый аспирант профессора Риччи. Оба являются выдающимися математиками своего времени, внесшими вклад в создание тензорного исчисления.

порядка любых двух бета-индексов смена знака слагаемого компенсируется сменой знака у бета-символа Леви-Чивиты, а число одинаковых членов равно числу перестановок последовательности 123, т. е. $3!$. Из приведенного выше выражения сразу следует, что детерминант квадратной матрицы и транспонированной к ней матрицы совпадают, поскольку перестановка альфа- и бета-символов Леви-Чивиты не изменяет результат и, как раз, отвечает перестановке альфа- и бета-индексов матрицы, т. е. транспонированию,

$$\begin{aligned} \det A &= \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} A_{1\alpha_1} A_{2\alpha_2} A_{3\alpha_3} = \frac{1}{3!} \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \epsilon_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} A_{\beta_1 \alpha_1} A_{\beta_2 \alpha_2} A_{\beta_3 \alpha_3} = \\ &= \epsilon_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} A_{\beta_1 1} A_{\beta_2 2} A_{\beta_3 3} = \det A^T. \end{aligned}$$

Более того, справедливо равенство

$$\epsilon_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} A_{\beta_1 \alpha_1} A_{\beta_2 \alpha_2} A_{\beta_3 \alpha_3} = \det A \cdot \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}, \quad (4.13)$$

поскольку слева в (4.13) стоит тензор антисимметричный по перестановке любых двух альфа-индексов: перестановка двух альфа-индексов и соответствующих бета-индексов даст тождество, а дополнительная перестановка бета-индексов приведет к знаку «минус».

Равенство (4.13) позволяет сразу вычислить детерминант произведения двух матриц,

$$\begin{aligned} \det(A \cdot B) &= \frac{1}{3!} \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \epsilon_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} (A_{\alpha_1 \gamma_1} B_{\gamma_1 \beta_1}) (A_{\alpha_2 \gamma_2} B_{\gamma_2 \beta_2}) (A_{\alpha_3 \gamma_3} B_{\gamma_3 \beta_3}) \\ &= \frac{1}{3!} \epsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} A_{\alpha_1 \gamma_1} A_{\alpha_2 \gamma_2} A_{\alpha_3 \gamma_3} \epsilon_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} \det B = \\ &= \det A \cdot \det B. \end{aligned}$$

Из (4.12), полагая $A_{1\alpha} \mapsto a^\alpha$, $A_{2\beta} \mapsto b^\beta$, $A_{3\gamma} \mapsto c^\gamma$, сразу получаем

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det \begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & a^{(3)} \\ b^{(1)} & b^{(2)} & b^{(3)} \\ c^{(1)} & c^{(2)} & c^{(3)} \end{pmatrix},$$

и в частности,

$$\epsilon_{\alpha \beta \gamma} = (\mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{e}_\beta) \cdot \mathbf{e}_\gamma = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\alpha^{(1)} & \mathbf{e}_\alpha^{(2)} & \mathbf{e}_\alpha^{(3)} \\ \mathbf{e}_\beta^{(1)} & \mathbf{e}_\beta^{(2)} & \mathbf{e}_\beta^{(3)} \\ \mathbf{e}_\gamma^{(1)} & \mathbf{e}_\gamma^{(2)} & \mathbf{e}_\gamma^{(3)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \delta_\alpha^1 & \delta_\alpha^2 & \delta_\alpha^3 \\ \delta_\beta^1 & \delta_\beta^2 & \delta_\beta^3 \\ \delta_\gamma^1 & \delta_\gamma^2 & \delta_\gamma^3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда можно получить, что произведение тензоров Леви-Чивиты сводится к произведению детерминантов

$$\epsilon_{\alpha \beta \gamma} \epsilon_{\alpha' \beta' \gamma'} = \det \begin{pmatrix} \delta_\alpha^1 & \delta_\alpha^2 & \delta_\alpha^3 \\ \delta_\beta^1 & \delta_\beta^2 & \delta_\beta^3 \\ \delta_\gamma^1 & \delta_\gamma^2 & \delta_\gamma^3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha'}^1 & \delta_{\beta'}^1 & \delta_{\gamma'}^1 \\ \delta_{\alpha'}^2 & \delta_{\beta'}^2 & \delta_{\gamma'}^2 \\ \delta_{\alpha'}^3 & \delta_{\beta'}^3 & \delta_{\gamma'}^3 \end{pmatrix},$$

где во втором множителе мы использовали транспонированную матрицу. Легко заметить, что сумма

$$\delta_{\alpha}^1 \delta_{\alpha'}^1 + \delta_{\alpha}^2 \delta_{\alpha'}^2 + \delta_{\alpha}^3 \delta_{\alpha'}^3 = \epsilon_{\alpha} \cdot \epsilon_{\alpha'} = \delta_{\alpha \alpha'}$$

т. е. отлична от нуля и равна единице, если индексы совпадают. Тогда произведение двух полностью антисимметричных символов сводится к детерминанту

$$\epsilon_{\alpha \beta \gamma} \epsilon_{\alpha' \beta' \gamma'} = \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha \alpha'} & \delta_{\alpha \beta'} & \delta_{\alpha \gamma'} \\ \delta_{\beta \alpha'} & \delta_{\beta \beta'} & \delta_{\beta \gamma'} \\ \delta_{\gamma \alpha'} & \delta_{\gamma \beta'} & \delta_{\gamma \gamma'} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Из этого выражения в качестве упражнения следует получить формулы свертки произведения символов Леви-Чивиты по одному, двум и трем индексам:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha \beta \gamma} \epsilon_{\alpha' \beta' \gamma} &= \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha \alpha'} & \delta_{\alpha \beta'} \\ \delta_{\beta \alpha'} & \delta_{\beta \beta'} \end{pmatrix} = \delta_{\alpha \alpha'} \delta_{\beta \beta'} - \delta_{\alpha \beta'} \delta_{\beta \alpha'}, \\ \epsilon_{\alpha \beta \gamma} \epsilon_{\alpha' \beta \gamma} &= 2 \delta_{\alpha \alpha'}, \\ \epsilon_{\alpha \beta \gamma} \epsilon_{\alpha \beta \gamma} &= 3! = 6. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Для нахождения обратной матрицы A^{-1} , введем понятие минора

$$M_{\alpha \beta} = \frac{1}{2!} \epsilon_{\alpha \alpha_2 \alpha_3} \epsilon_{\beta \beta_2 \beta_3} A_{\beta_2 \alpha_2} A_{\beta_3 \alpha_3}. \quad (4.16)$$

Вычислим

$$\begin{aligned} M_{\alpha \beta} A_{\beta \alpha'} &= \frac{1}{2!} \epsilon_{\alpha \alpha_2 \alpha_3} \epsilon_{\beta \beta_2 \beta_3} A_{\beta \alpha'} A_{\beta_2 \alpha_2} A_{\beta_3 \alpha_3} = \\ &= \frac{1}{2!} \epsilon_{\alpha \alpha_2 \alpha_3} \epsilon_{\alpha' \alpha_2 \alpha_3} \det A = \frac{1}{2!} 2! \delta_{\alpha \alpha'} \det A. \end{aligned}$$

Значит, элементы обратной матрицы¹¹ —

$$(A^{-1})_{\alpha \beta} = \frac{1}{\det A} M_{\alpha \beta} = \frac{1}{2! \det A} \epsilon_{\alpha \alpha_2 \alpha_3} \epsilon_{\beta \beta_2 \beta_3} A_{\beta_2 \alpha_2} A_{\beta_3 \alpha_3}. \quad (4.17)$$

Тогда можно легко записать дифференциал детерминанта

$$d(\det A) = dA_{\beta \alpha} \cdot 3 \frac{1}{3!} \epsilon_{\alpha \alpha_2 \alpha_3} \epsilon_{\beta \beta_2 \beta_3} A_{\beta_2 \alpha_2} A_{\beta_3 \alpha_3} = dA_{\beta \alpha} M_{\alpha \beta} = \det A \cdot (A^{-1})_{\alpha \beta} dA_{\beta \alpha}. \quad (4.18)$$

В частности, для тензора метрики

$$d \det g = \det g \cdot g^{\alpha \beta} dg_{\beta \alpha}. \quad (4.19)$$

¹¹Из проведенных построений видно, что обратная матрица существует, только если $\det A \neq 0$.

Элемент площади $d^2\Sigma$ с образующими da и db — это ковектор, направленный ортогонально плоскости образующих, с длиной, равной площади параллелограмма с образующими ребрами:

$$d^2\Sigma = da \times db.$$

Наряду с таким вектором площади часто вводят антисимметричный тензор

$$d^2\sigma^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} d^2\Sigma_\gamma = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha'\beta'\gamma} da^{\alpha'} db^{\beta'} = da^\alpha db^\beta - da^\beta db^\alpha,$$

для которого используют обозначение с символом внешнего произведения¹²

$$da^\alpha \wedge db^\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (da^\alpha db^\beta - da^\beta db^\alpha),$$

значит,

$$da^\alpha \wedge db^\beta = \frac{1}{2} d^2\sigma^{\alpha\beta}, \quad d^2\Sigma_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} da^\alpha \wedge db^\beta.$$

§а Зеркальная инверсия пространства

Рассмотрим пару векторных координатных пространств V_E и V_P : V_E построено как линейная оболочка на правой тройке базисных векторов декартовых координат $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, а V_P — на левой тройке базисных векторов декартовых координат $\{\mathbf{e}_1^P, \mathbf{e}_2^P, \mathbf{e}_3^P\}$, — и зададим вопрос: как могут быть связаны тензорные величины¹³, определенные на векторах этих пространств? Поскольку законы физики формулируются в терминах тензоров, что называют ковариантным описанием физических систем, ответ на этот вопрос позволяет сравнить V_E и V_P , зеркально сопряженные друг к другу¹⁴. Итак, нас интересует, как тензоры T_E из V_E могут быть связаны с тензорами T_P из V_P . В основу такого сравнения можно положить 4 постулата.

Первый постулат: координаты r_P^α в зеркальном мире V_P связаны с координатами r_E^α в реальном мире V_E соотношением

$$r_P^\alpha = -r_E^\alpha. \quad (4.20)$$

Смысл этого постулата становится понятным, если рассмотреть преобразование зеркальной инверсии в реальном мире V_E , которое определяется заменой исходного базиса на штрихованный

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \xrightarrow{\mathbb{P}} \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\} = \{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\}. \quad (4.21)$$

¹²Символ внешнего произведения \wedge очень удобно использовать в координатном подходе для обозначения антисимметризации по индексам. В инвариантном подходе и при разложении тензорных величин по базису в координатном подходе символ внешнего произведения определяет антисимметризованное тензорное произведение базисных векторов. При вычислении интегралов по гиперповерхностям различной размерности в координатном подходе необходимо делать подстановку вместо базисных векторов элементов бесконечно малых направляющих на заданной гиперповерхности, сохраняя при этом символ антисимметризации так, как мы это сделали на примере 2-мерной поверхности.

¹³Напомним определение тензора: полилинейная, не зависящая от выбора базиса функция на векторах $t(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots)$ называется тензором с компонентами $t_{\alpha,\beta,\dots}$, так что $t(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots) = t_{\alpha,\beta,\dots} a^\alpha b^\beta \dots$, а при смене базиса компоненты тензора преобразуются, поскольку $t_{\alpha,\beta,\dots} = t(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta, \dots)$.

¹⁴Наше рассмотрение этого вопроса опирается на идеи В.Б. Берестецкого.

При этой инверсии штрихованный базис в $V_{\mathbb{E}}$ становится левым. Ясно, что при операции зеркального отражения пространства $V_{\mathbb{E}}$, которую обозначают символом \mathbb{P} , как мы это сделали в (4.21), матрица преобразований координат совпадает со своей обратной и равна

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}^2 = \mathbb{1}, \quad (4.22)$$

так что в зеркальном, штрихованном базисе пространства $V_{\mathbb{E}}$ согласно общему закону преобразования тензорных величин компоненты координат равны

$$r'_{\mathbb{E}}^{\alpha} = \mathcal{P}_{\beta}^{\alpha} r_{\mathbb{E}}^{\beta} = -r_{\mathbb{E}}^{\alpha}. \quad (4.23)$$

Мы определяем координаты точки $r_{\mathbb{P}}^{\alpha}$ в зеркальном базисе $\epsilon_{1,2,3}^{\mathbb{P}}$ зеркального пространства $V_{\mathbb{P}}$ так, чтобы они совпадали с координатами $r'_{\mathbb{E}}^{\alpha}$, которые получаются после перехода от правой тройки базисных векторов к левой в исходном пространстве $V_{\mathbb{E}}$,

$$r_{\mathbb{P}}^{\alpha} = r'_{\mathbb{E}}^{\alpha} = \mathcal{P}_{\beta}^{\alpha} r_{\mathbb{E}}^{\beta} = -r_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \quad (4.24)$$

что также записывают в виде связи компонент контравектора координат в зеркальных пространствах $V_{\mathbb{P}}$ и $V_{\mathbb{E}}$,

$$r_{\mathbb{P}}^{\alpha} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot \mathcal{P}_{\beta}^{\alpha} r_{\mathbb{E}}^{\beta} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot (-1) r_{\mathbb{E}}^{\alpha}, \quad \lambda_{\mathbb{P}} = +1. \quad (4.25)$$

В этом случае говорят, что вектор координат имеет положительную пространственную четность $\lambda_{\mathbb{P}}$, и мы видим, что это значение четности задается по построению.

Второй постулат: ориентированный объем $\text{vol}_{\mathbb{P}}$ на базисной тройке в зеркальном мире $V_{\mathbb{P}}$

$$\text{vol}_{\mathbb{P}}(\epsilon_1^{\mathbb{P}}, \epsilon_2^{\mathbb{P}}, \epsilon_3^{\mathbb{P}}),$$

связан с ориентированным объемом $\text{vol}_{\mathbb{E}}$ на зеркально отраженной базисной тройке исходного пространства $V_{\mathbb{E}}$,

$$\text{vol}_{\mathbb{E}}(\epsilon'_1, \epsilon'_2, \epsilon'_3)$$

соотношением

$$\text{vol}_{\mathbb{P}}(\epsilon_1^{\mathbb{P}}, \epsilon_2^{\mathbb{P}}, \epsilon_3^{\mathbb{P}}) = -\text{vol}_{\mathbb{E}}(\epsilon'_1, \epsilon'_2, \epsilon'_3). \quad (4.26)$$

Смысл этого постулата легко объяснить из самого определения ориентированного объема в пространствах $V_{\mathbb{E}}$ и $V_{\mathbb{P}}$. Ориентация в пространстве задается по правилу «буравчика»: при повороте первого базисного вектора ко второму буравчик движется по третьему базисному вектору. Таким образом, ориентация в пространстве определяется выбором порядка базисных векторов, а ориентированный объем на упорядоченной ортонормированной базисной тройке принимается равным $+1$,

$$\text{vol}_{\mathbb{P}}(\epsilon_1^{\mathbb{P}}, \epsilon_2^{\mathbb{P}}, \epsilon_3^{\mathbb{P}}) = \text{vol}_{\mathbb{E}}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = +1. \quad (4.27)$$

Ясно, что после зеркальной инверсии в пространстве $V_{\mathbb{E}}$, во-первых,

$$\text{vol}_{\mathbb{E}}(\epsilon'_1, \epsilon'_2, \epsilon'_3) = \text{vol}_{\mathbb{E}}(-\epsilon_1, -\epsilon_2, -\epsilon_3) = -\text{vol}_{\mathbb{E}}(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = -1,$$

т. е. на зеркальной ортонормированной тройке векторов в $V_{\mathbb{E}}$ ориентированный объем равен -1 , а во-вторых, движение буравчика для базиса $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ и базиса $\{\mathbf{e}^{\mathbb{P}}_1, \mathbf{e}^{\mathbb{P}}_2, \mathbf{e}^{\mathbb{P}}_3\}$ становятся одинаковыми. Поэтому прямое сравнение ориентированных объемов, определенных согласно упорядочению базисов в пространствах $V_{\mathbb{E}}$ и $V_{\mathbb{P}}$, однозначно дает связь (4.26), которую можно переписать в виде

$$\text{vol}_{\mathbb{P}}(\mathbf{e}^{\mathbb{P}}_1, \mathbf{e}^{\mathbb{P}}_2, \mathbf{e}^{\mathbb{P}}_3) = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot \text{vol}_{\mathbb{E}}(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3). \quad \lambda_{\mathbb{P}} = -1. \quad (4.28)$$

В этом случае говорят, что ориентированный объем имеет отрицательную пространственную четность $\lambda_{\mathbb{P}}$ — четность относительно зеркальной инверсии 3-мерного евклидова пространства. Так как ориентированный объем — это число, инвариантное при замене базиса в пространстве, то он является скаляром с отрицательной пространственной четностью, а такой инвариант называют псевдоскаляром.

Третий постулат: полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{P}}$ в зеркальном мире $V_{\mathbb{P}}$ задается точно так же, как и тензор Леви-Чивиты $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{E}}$ в мире $V_{\mathbb{E}}$, т. е. на упорядоченных базисных тройках в обоих пространствах он полагается равным $+1$, при смене порядка в тройке он меняет знак на -1 , а при совпадении какой-либо пары из индексов, нумерующих тройку, он равен 0 , так что

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{P}} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{E}}. \quad (4.29)$$

Раскроем эту формулировку более подробно.

Данное нами чуть выше определение ориентированного объема можно записать с помощью тензора Леви-Чивиты. В пространстве $V_{\mathbb{P}}$

$$\text{vol}_{\mathbb{P}}(\mathbf{e}^{\mathbb{P}}_1, \mathbf{e}^{\mathbb{P}}_2, \mathbf{e}^{\mathbb{P}}_3) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{P}} (\mathbf{e}^{\mathbb{P}}_1)^{\alpha} (\mathbf{e}^{\mathbb{P}}_2)^{\beta} (\mathbf{e}^{\mathbb{P}}_3)^{\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{P}} \delta_1^{\alpha} \delta_2^{\beta} \delta_3^{\gamma} = \epsilon_{123}^{\mathbb{P}} = +1. \quad (4.30)$$

Точно также в пространстве $V_{\mathbb{E}}$

$$\text{vol}_{\mathbb{E}}(\mathbf{e}_1^{\mathbb{E}}, \mathbf{e}_2^{\mathbb{E}}, \mathbf{e}_3^{\mathbb{E}}) = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{E}} (\mathbf{e}_1^{\mathbb{E}})^{\alpha} (\mathbf{e}_2^{\mathbb{E}})^{\beta} (\mathbf{e}_3^{\mathbb{E}})^{\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{E}} \delta_1^{\alpha} \delta_2^{\beta} \delta_3^{\gamma} = \epsilon_{123}^{\mathbb{E}} = +1. \quad (4.31)$$

В итоге, (4.30) и (4.31) означают, что имеет место постулированное нами тождество (4.29).

Тензор Леви-Чивиты в пространстве $V_{\mathbb{E}}$ при зеркальной инверсии (4.23) преобразуется как

$$\epsilon'_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{E}} = \mathcal{P}_{\alpha}^{\alpha'} \mathcal{P}_{\beta}^{\beta'} \mathcal{P}_{\gamma}^{\gamma'} \epsilon_{\alpha'\beta'\gamma'}^{\mathbb{E}} = (-1)^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{E}}, \quad (4.32)$$

Третий постулат (4.29) означает, что связь тензора Леви-Чивиты $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{P}}$ в зеркальном мире $V_{\mathbb{P}}$ с тензором Леви-Чивиты $\epsilon'_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{E}}$ после зеркальной инверсии в мире $V_{\mathbb{E}}$ имеет вид

$$\epsilon'_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{E}} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{P}}, \quad \lambda_{\mathbb{P}} = -1, \quad (4.33)$$

т. е.

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{P}} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot \mathcal{P}_{\alpha}^{\alpha'} \mathcal{P}_{\beta}^{\beta'} \mathcal{P}_{\gamma}^{\gamma'} \epsilon_{\alpha'\beta'\gamma'}^{\mathbb{E}} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot (-1)^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mathbb{E}}, \quad \lambda_{\mathbb{P}} = -1, \quad (4.34)$$

и мы заключаем, что тензор Леви-Чивиты обладает отрицательной пространственной четностью, или, как говорят, он является псевдотензором 3-его ранга.

Из первых трех постулатов логически следует **четвертый постулат**: из тензоров с определенной пространственной четностью мы можем строить их тензорные произведения, которые также будут обладать определенной пространственной четностью, равной произведению пространственных четностей тензоров в произведении.

Задача 16. Покажите, что частные производные ∂_α обладают положительной пространственной четностью.

Задача 17. Покажите, что символ Кронекера $\delta_\beta^\alpha = \partial_\beta r^\alpha$ — тензор второго ранга с положительной пространственной четностью.

Задача 18. Покажите, что свертка ковариантного индекса тензора с контравариантным индексом этого тензора не меняет пространственную четность.

Например, векторное произведение двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} с положительной пространственной четностью будет обладать отрицательной пространственной четностью, поскольку это тензорное произведение включает в себя еще и тензор Леви-Чивиты с отрицательной пространственной четностью,

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \Leftrightarrow c_{\gamma}^{\mathbb{E}} = \epsilon_{\gamma\alpha\beta}^{\mathbb{E}} a_{\mathbb{E}}^{\alpha} b_{\mathbb{E}}^{\beta}.$$

Значит, \mathbf{c} — это псевдовектор,

$$c_{\gamma}^{\mathbb{P}} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot \mathcal{P}_{\gamma'}^{\gamma} c_{\mathbb{E}}^{\gamma'} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot (-1) c_{\gamma}^{\mathbb{E}}, \quad \lambda_{\mathbb{P}} = -1.$$

Псевдовектор называют также аксиальным вектором.

Еще пример. Скалярное произведение псевдовектора на вектор — это псевдоскаляр, который в случае, когда он принимает вещественные значения, называют также аксионом.

Приведенное нами наблюдение носит общий характер: если тензор ранга k в зеркальном пространстве $V_{\mathbb{P}}$ связан с исходным тензором в пространстве $V_{\mathbb{E}}$ соотношением

$$T_{\mathbb{P}}^{\alpha_1 \cdots \alpha_k} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot \mathcal{P}_{\alpha'_1}^{\alpha_1} \cdots \mathcal{P}_{\alpha'_k}^{\alpha_k} T_{\mathbb{E}}^{\alpha'_1 \cdots \alpha'_k} = \lambda_{\mathbb{P}} \cdot (-1)^k T_{\mathbb{E}}^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}, \quad (4.35)$$

то при $\lambda_{\mathbb{P}} = -1$ говорят, что это — псевдотензор с отрицательной \mathbb{P} -четностью, а при $\lambda_{\mathbb{P}} = +1$, что тензор имеет положительную \mathbb{P} -четность. При введении новой физической величины, свойства которой относительно зеркальной инверсии пространства не определены по её построению из величин с известными пространственными четностями, необходимо указывать пространственную четность новой величины в качестве гипотезы модельного рассмотрения. В электродинамике мы согласуем, например, свойства векторов электрического и магнитного полей с эмпирическими данными о свойствах зеркальной симметрии электродинамики. Фактически мы считаем, что электродинамика инвариантна относительного зеркальной инверсии пространства: естествоиспытатель не сможет определить, видит ли он мир $V_{\mathbb{E}}$ или только его зеркальное изображение $V_{\mathbb{P}}$, так как законы электродинамики не позволяют установить такие различия. В теории слабого взаимодействия токи устроены как разность вектора и псевдовектора, которая в зеркальном мире будет переходить в сумму вектора и псевдовектора. Это значит, что реальный мир и его зеркальное отражение обладают совершенно разными свойствами, или, как говорят, слабое взаимодействие нарушает пространственную четность.

Теперь в качестве примера мы можем сделать ремарки и о физически значимых величинах в евклидовом пространстве в случае нерелятивистской динамики. Мы будем полагать, что в зеркальном мире $V_{\mathbb{P}}$ время идентично времени в реальном мире $V_{\mathbb{E}}$: $t_{\mathbb{P}} = t$, — и, стало быть, время имеет положительную пространственную четность, время — скаляр. Отсюда сразу следует, что скорость $v = dr/dt$ — вектор с положительной Р-четностью, так как скорость построена из дифференциала вектора координат dr и дифференциала времени dt , каждый из которых обладает положительной четностью относительно зеркальной инверсии пространства. Для определения свойств импульса при переходе в зеркальный мир, постулируем, что масса — это скаляр с положительной четностью. Тогда и импульс $\mathbf{p} = mv$ — вектор с положительной Р-четностью. Наконец, момент импульса $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ включает в свое определение тензор Леви-Чивиты с отрицательной пространственной четностью, и, следовательно, момент импульса — псевдовектор.

(4.В) Симметрии метрики

18 Изометрии евклидовой метрики

Преобразования, сохраняющие тензор евклидовой метрики, ортогональные, собственные повороты, трансляции.

Найдем преобразования координат, которые не меняют вид метрики, — изометрии, которые оставляют тензор метрики инвариантным. Для этого сначала запишем закон преобразования метрики при произвольных обратимых заменах координат:

$$dC^2 = g'_{\alpha'\beta'} dr'^{\alpha'} dr'^{\beta'} = g'_{\alpha'\beta'} \Lambda_{\bullet\alpha}^{\alpha'} \Lambda_{\bullet\beta}^{\beta'} dr^\alpha dr^\beta = g_{\alpha\beta} dr^\alpha dr^\beta,$$

где матрица преобразований координат задается частными производными $\Lambda_{\bullet\beta}^{\alpha} = \partial_\beta r^\alpha$. В этом выражении тензор смешанного типа $\Lambda_{\bullet\beta}^{\alpha}$ имеет один контравариантный индекс α , который в матричной записи мы трактуем как столбцовий, и один ковариантный индекс β , который мы трактуем как строчный, так что $\Lambda_{\bullet\beta}^{\alpha}$ — это матрица 3×3 , для которой можно пользоваться обычной операцией матричного умножения, и, при этом, расположение индексов у $\Lambda_{\bullet\beta}^{\alpha}$ однозначно задает законы преобразования тензора по каждому из индексов. Тензор метрики $g_{\alpha\beta}$ имеет 2 ковариантных индекса. Для того, чтобы использовать матричное умножение и при этом однозначно определять закон преобразования при смене базиса в векторном пространстве, введем *операцию транспонирования* так, как мы это уже делали в разделе 5.3. Транспонирование определяется инвариантно в любом базисе как координат, так и представлений группы преобразований и в случае 3-вектора с контравариантным индексом, который в матричных обозначениях нумерует позицию в столбце, переводит его в транспонированный вектор с контравариантным индексом, который нумерует позицию в строке, что мы указываем порядком следования индексов для использования матричного умножения,

$$dx^\alpha \equiv dx^{\alpha\bullet} \mapsto (dx^T)^{\bullet\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} dx^{\alpha\bullet}. \quad (4.36)$$

По построению, транспонированный вектор $(dx^T)^{\bullet\alpha}$ преобразуется транспонированной матрицей Λ^T , если использовать матричные обозначения:

$$dx'^T = dx^T \circ \Lambda^T, \quad (4.37)$$

или в индексах

$$(dx'^T)^{\bullet\alpha} = (dx')^{\alpha\bullet} = \Lambda_{\bullet\beta}^{\alpha} dx^{\beta\bullet} = (dx^T)^{\bullet\beta} (\Lambda^T)_{\beta}^{\bullet\alpha} = (dx^T \circ \Lambda^T)^{\bullet\alpha},$$

где мы воспользовались определением транспонирования матрицы (1.35) в разделе 5.3. Из этих выкладок также ясно видно, что переход к матричному умножению с транспонированием абсолютно сочетается с ковариантными свойствами тензорных величин с соблюдением всех свойств преобразования по ковариантным и контравариантным индексам: например, контревектор преобразуется по закону преобразования контревекторов. Вместе с тем, говорят, что транспонированные тензорные величины (4.36) преобразуются по транспонированному представлению, поскольку в записи с матричным умножением последовательная композиция двух обратимых преобразований сводится к левому умножению матриц в контравариантном пространстве и к правому умножению транспонированных матриц в транспонированном контравариантном пространстве.

После перехода к записи с привычным матричным умножением квадрат длины можно записать в терминах транспонированного контревектора и матрицы метрики,

$$dC^2 = dx^T \circ \hat{g} \circ dx, \quad \hat{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}, \quad (4.38)$$

а преобразование тензора метрики можно переписать в виде умножения матриц,

$$\hat{g} = \Lambda^T \circ \hat{g}' \circ \Lambda, \quad (4.39)$$

Тогда и закон изометрии, когда $\hat{g}' = \hat{g}$,

$$g_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha\beta} \Lambda_{\bullet\alpha'}^{\alpha} \Lambda_{\bullet\beta'}^{\beta} = (\Lambda^T)_{\alpha'}^{\bullet\alpha} g_{\alpha\beta} \Lambda_{\bullet\beta'}^{\beta} \quad (4.40)$$

согласно (4.39) можно записать с матричным умножением как ортогональные преобразования 3-х пространственных координат пространства¹⁵,

$$\hat{g} = \Lambda^T \circ \hat{g} \circ \Lambda, \quad (4.41)$$

откуда сразу следует специальное условие на детерминант матрицы преобразований¹⁶

$$(\det \Lambda)^2 = 1. \quad (4.42)$$

В декартовых координатах метрика — единичная матрица: $\hat{g} = \mathbb{1}$, а изометрия удовлетворяет условию

$$\Lambda^T \circ \Lambda = \mathbb{1}. \quad (4.43)$$

Преобразования, удовлетворяющие условию (4.43) называются ортогональными (символ O), а условию $|\det \Lambda| = 1$ — специальными (символ S), а при $\det \Lambda = 1$ — собственными. Собственные непрерывные изометрии — это повороты пространства, группа поворотов 3-мерного евклидова пространства $SO(3)$, $r'^{\alpha} = \mathcal{R}_{\bullet\beta}^{\alpha}(\phi)r^{\beta}$, т. е. в случае бесконечно малого поворота $r' \approx r + \phi \times r$

¹⁵Это условие символично обозначают как $O(3)$.

¹⁶В обозначениях для матриц символом S указывают на то, что матрица преобразований удовлетворяет специальному условию на значения детерминанта $|\det \Lambda| = 1$.

при $\phi \rightarrow 0$, и пространственные сдвиги $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$, когда соответственно, $\Lambda_{\bullet\beta}^\alpha = \mathcal{R}_{\bullet\beta}^\alpha$ с углом поворота ϕ и $\Lambda_{\bullet\beta}^\alpha = \delta_\beta^\alpha$ при \mathbf{a} , которое не зависит от координат. Зеркальное отражение пространства $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$ (символ \mathbb{P}) или нечетного числа его осей приводит, очевидно, к $\det \Lambda = -1$, а в общем случае подобные (несобственные) преобразования являются комбинацией поворотов с отражением. В итоге, изометрии трехмерного евклидова пространства задаются шестью непрерывными параметрами: три угла поворота вокруг трех независимых осей и три сдвига координат при трансляции вдоль трех независимых осей, неоднородная (inhomogeneous, символ I) группа ISO(3), — а также дискретным преобразованием зеркального отражения \mathbb{P} . Преобразования SO(3) вместе с \mathbb{P} образуют группу O(3).

Поскольку законы механики записываются в евклидовом пространстве во всех декартовых системах отсчета одинаково, преобразование координат при переходе из одной декартовой системы в другую должно быть изометрией евклидовой метрики векторных пространств координат и скоростей, а действие должно быть евклидовым скаляром, т. е. инвариантом, так как иначе по значению действия мы могли бы отличить одну декартову систему от другой, что означало бы нарушение принципов однородности и изотропности евклидова пространства для замкнутой физической системы. При этом время, течение которого не зависит от координат, в такой механике также является скаляром. Отсюда следует, что функции Лагранжа и Гамильтона — скаляры, и следовательно, скорость $d\mathbf{r}^\alpha/dt = v^\alpha$ — это вектор, а импульс $p_\alpha = \partial_\alpha S$ — евклидов ковектор. При этом скорости и координаты при поворотах, очевидно, преобразуются по одному и тому же закону, только если углы поворотов не зависят от времени и координат. Эта эквивалентность преобразований скоростей и координат нарушалась бы, если бы угол поворота зависел от времени или от координат, т. е. если повороты становились бы локальными или ускоренными.

Что касается трансляций, то зависимость сдвига координат от времени приводит к нарушению эквивалентности преобразований скорости и дифференциалов координат. В частности, специальное преобразование Галилея — это трансляция с параметром сдвига $\mathbf{a} = \mathbf{v}_a t$. Допустимость линейной зависимости сдвига координат от времени, как и независимость угла поворота от времени являются, конечно, следствиями галилевского постулата об инерциальных системах.

В специальной теории относительности, во-первых, зависимость параметра трансляции от времени становится недопустимой, что исключает из числа сдвигов специальные преобразования Галилея, но оставляет в силе, конечно, все другие перечисленные нами изометрии евклидова пространства как преобразования, не изменяющие уравнения движения, а во-вторых, само евклидово пространство становится подмножеством более общей структуры — пространства-времени Минковского с более широкой группой изометрий, включающей в себя преобразования Лоренца, которые не только сохраняют уравнения движения, но оставляют инвариантным действие релятивистских частиц и полей.

19 Волновое уравнение, инвариантная скорость и изометрия

Распространение волны, условие инвариантной волновой скорости и псевдоевклидова метрика, конформный фактор, изометрия двумерного пространства-времени Минковского, собственные и ортохронные преобразования $\text{SO}(1,1)$, лоренцев буст, релятивистская частица, 4-импульс.

Бегущая волна — это измеряемая амплитуда, пространственный профиль которой перемещается во времени в некотором направлении со скоростью c . Будем считать, что скорость распространения волны не зависит от направления, а, стало быть, волна распространяется изотропно. Для иллюстрации основных идей и понятий остановимся на одномерном пространстве, т. е. двумерном пространстве-времени (2D). Тогда волна с исходным профилем амплитуды $f(x)$ в момент времени $t = 0$ в другой момент времени будет иметь тот же профиль $f_+ = f(x - ct)$ в случае распространения в положительном направлении по оси x и профиль $f_- = f(x + ct)$ в случае распространения в отрицательном направлении, как это показано на рис. 4.2.

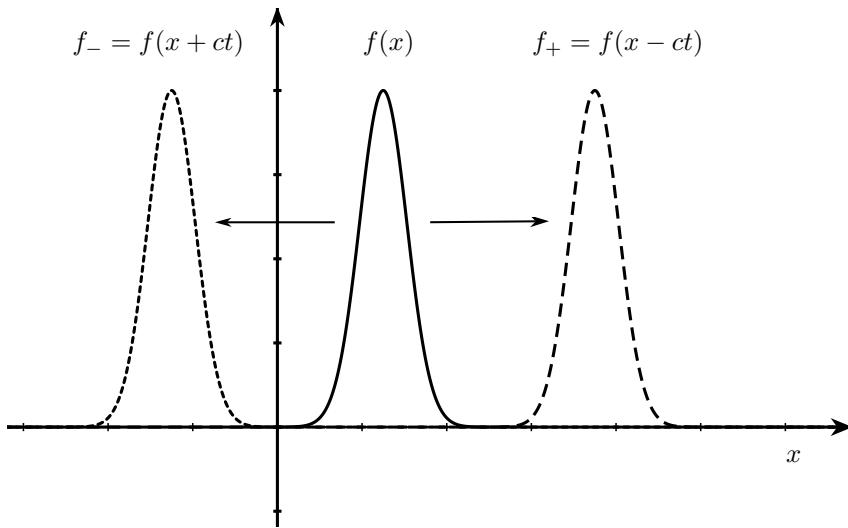


Рис. 4.2: Амплитуда волны: исходный профиль $f(x)$ в момент времени $t = 0$ — сплошная линия; профиль волны, бегущей в положительном направлении, $f_+ = f(x - ct)$ в момент времени $t \neq 0$ — штриховая линия; профиль волны, бегущей в отрицательном направлении, $f_- = f(x + ct)$ в момент времени $t \neq 0$ — пунктирная линия.

Вычислим производные профиля $f_+ = f(x_-)$ по времени при $x_- = x - ct$,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial f_+}{\partial t} = \frac{\partial f(x_-)}{\partial x_-} \frac{1}{c} \frac{\partial x_-}{\partial t} \Big|_{x_- = x - ct} = -f'(x_-),$$

и по координате

$$\frac{\partial f_+}{\partial x} = \left. \frac{\partial f(x_-)}{\partial x_-} \frac{\partial x_-}{\partial x} \right|_{x_- = x - ct} = f'(x_-).$$

Значит,

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) f_+ = 0. \quad (4.44)$$

Аналогично для волны $f_- = f(x + ct) = f(x_+)$, бегущей в отрицательном направлении, найдем

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) f_- = 0. \quad (4.45)$$

Уравнения (4.44) и (4.45) легко записать единообразно, используя произведение дифференциальных операторов так, чтобы обе бегущие волны удовлетворяли одному и тому же уравнению:

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) f_\pm = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f_\pm = 0. \quad (4.46)$$

Все решения *волнового уравнения* (4.46) по построению сводятся в волны, профиль которых распространяется либо в положительном, либо в отрицательном направлениях со скоростью c .

Введем нулевую компоненту координат пространства-времени $x_0 = ct$ в столбце

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix}, \quad \mu = \{\overline{0, 1}\},$$

и запишем волновое уравнение в виде

$$(\partial_0^2 - \partial_1^2) f(x) = 0. \quad (4.47)$$

Уравнение (4.47) допускает запись более общего вида с введением *конформного фактора* $\Omega(x)$:

$$\Omega^2(x)(\partial_0^2 - \partial_1^2) f(x) = 0. \quad (4.48)$$

Формально, в каждой заданной точке x_* , т. е. локально, конформный фактор одинаково изменяет масштаб линейки и, соответственно, единицы отсчета времени, оставляя скорость волны неизменной: $dx^\mu \mapsto dx^\mu / \Omega(x_*)$.

Используя свойство частной производной, которая в декартовых координатах преобразуется как ковектор, запишем волновое уравнение в ковариантном виде:

$$\Omega^2(x) g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu f(x) = 0, \quad g^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1). \quad (4.49)$$

Рассмотрим теперь переход от одной системы часов и линеек K к другой системе часов и линеек K' , причем при условии, что наблюдатели в этих системах используют совершенно идентичные часы и линейки. Спрашивается: какую скорость волны наблюдают в этих двух системах K и K' ? Среди систем сразу выделим те, что эквивалентны совершенно элементарно: если есть отличия только в начале отсчета времени и координаты, то, очевидно, дифференциалы координат пространства-времени никак не меняются, т. е. волновое

уравнение не изменяет вид, и наблюдатели K и K' измеряют одну и ту же скорость волны, раз мы полагали, что волна распространяется изотропно и однородно (скорость не зависит ни от направления, ни от точки в пространстве). Это — глобальная трансляционная инвариантность пространства-времени физической волновой системы.

Что произойдет при других преобразованиях $K \mapsto K'$, зависит от природы волны. Это — вопрос эксперимента.

В случае электромагнитной волны эксперимент Майкельсона—Морли с плечевым интерферометром показал, что ориентация интерферометра относительно скорости движения Земли в пространстве никак не влияет на оптическую длину плеч интерферометра¹⁷, а значит, скорость света является инвариантной¹⁸: волновое уравнение в K и K' имеет инвариантный вид! Это означает, что инвариантом является величина

$$\Omega^2(x) g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \text{inv.} \quad (4.50)$$

Рассмотрим преобразования, при которых используются часы и линейки идентичные во всех точках пространства-времени. Это означает, что конформный фактор, согласно его физическому смыслу, полагается равным единице во всех рассматриваемых системах¹⁹, $\Omega \equiv 1$. Тогда инвариант —

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \text{inv.} \quad (4.51)$$

¹⁷ Оптическая длина плеча интерферометра изменится при наличии внешних гравитационных волн, если чувствительность эксперимента позволяет детектировать столь тонкий эффект.

¹⁸ **Отрицание эфира.** Эксперимент Майкельсона—Морли означал также существенное изменение представлений о физике электромагнитных колебаний. Всякий физик понимал, что колебания происходят в среде, как звук, к примеру, — это колебания воздуха. Поэтому и электромагнитные колебания, существование которых вытекало из уравнений Максвелла и которые были обнаружены экспериментально, предполагали существование специальной материальной среды, которую называли эфиром. Эфир, как и всякая физическая сущность, должен обладать наблюдаемыми характеристиками, которым прежде всего относится его движение как целого по аналогии со всякой другой средой — носителем колебаний. В нашем примере, воздух как среда для звука естественно обладает и собственной энергией, и собственным импульсом вне зависимости от звуковых колебаний, но и характеристики самих звуковых колебаний зависят от собственного движения воздуха. В частности, скорость звука относительно наблюдателя зависит от скорости движения воздуха как целого. В полной аналогии со звуковыми колебаниями эксперимент Майкельсона—Морли установил, что никаких собственных физических характеристик у эфира как носителя электромагнитных волн нет! Конечно, электромагнитные волны сами по себе переносят и энергию, и импульс, но теперь электрические и магнитные поля выступают как самостоятельные физические сущности. При этом, согласно принципу относительности совершенно изменяется понятие о пространстве и времени в связи с переходом от одной инерциальной системы к другой. Пытливый читатель может спросить: Но если пространство-время — это физическая сущность, то и оно может обладать собственными наблюдаемыми характеристиками, в частности, энергией и импульсом, которые относятся к движению этой физической сущности? Положительный ответ на этот вопрос — общая теория относительности, в которой пространство-время обладает собственной динамикой, и, в частности, эта динамика отвечает релятивистской теории гравитации Эйнштейна, а также эта динамика выражается в виде обнаруженных экспериментально гравитационных волн, которые возникают в двойных системах, скажем, черных дыр или нейтронных звезд. А детектор регистрации гравитационных волн — всё тот же интерферометр Майкельсона—Морли, только сверхточный и сверхмощный. Значит ли это, что эфир вернулся вместе с открытием гравитационных волн? Нет. Эфир мыслился как среда для электромагнитных волн, а пространство-время — это физическая сущность, универсальная для всех полей, а не только электромагнитных, что мы и видим по тому, что гравитация — сила, которая порождается всеми полями и действует на все поля!

¹⁹ Естественно, никто не запрещает изучать более общие физические системы, отвечающие конформным факторам, зависящим от точки пространства-времени. На этом пути формулируются конформно инвариантные теории для специфических волн. Преобразования,

Здесь важно подчеркнуть тонкий момент: из эксперимента с волнами следует, что инвариант равен нулю, и возникает вопрос о том, что это ограничивает рассмотрение, как говорят, поверхностью «волнового конуса», а именно, что величина $g^{\mu\nu}$ имеет не универсальный смысл, а применима только «on shell». В действительности этого ограничения нет, поскольку есть еще одно физическое требование: в волновом уравнении зависимость от частных производных $\partial_\mu, \partial_\nu$ указана явно, так что величина $g^{\mu\nu}$ не зависит от частных производных, а стало быть, её трансформационные свойства на самом деле универсальны и имеют место и вне «волнового конуса», «off shell». Отсюда сразу заключаем, что величина $g^{\mu\nu}$ — контравариантный тензор второго ранга по определению тензора как полилинейной инвариантной функции, в данном случае, на векторном пространстве частных производных, так как только в этом случае свертка с двумя ковекторами дает инвариант. Этот тензор остается инвариантным при переходах между системами с идентичными часами и линейками во всех точках пространства-времени, если скорость волны в этих системах также одинакова. Поэтому, когда говорят об инвариантной скорости, имеют ввиду математический факт инвариантности целого тензора $g^{\mu\nu}$!

Обычно изложение далее строится для обратного к $g^{\mu\nu}$ ковариантного тензора $g_{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu'} g_{\nu'\nu} = \delta_\nu^\mu.$$

Этот тензор принято называть метрикой Минковского²⁰, поскольку он определяет инвариант

$$ds^2 \stackrel{\text{def}}{=} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \mu, \nu = \{\overline{0, 3}\}, \quad (4.52)$$

который называют квадратом интервала или, для краткости, просто интервалом. В декартовых координатах интервал имеет вид, аналогичный квадрату длины²¹,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - d\ell^2, \quad ds^2(dt=0) \mapsto -d\ell^2.$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что инвариантное волновое уравнение, т. е. инвариантная скорость волны, означает изометрию метрики Минковского! Следовательно, нам необходимо установить общие свойства преобразований изометрии с постоянной матрицей

$$\Lambda_\bullet^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

таких, что

$$g_{\mu\nu} = \Lambda_\bullet^{\mu'} \Lambda_\bullet^{\nu'} g_{\mu'\nu'}. \quad (4.53)$$

оставляющие инвариантным выражение (4.50), называются конформными. Они включают в себя, в частности, локальные дилатации (изменения масштаба) и специальные конформные преобразования, которые в явном виде нарушают условие однородности и изотропности пространства-времени.

²⁰Подчеркнем, что поднимание и опускание индексов с метрикой Минковского даже в декартовых координатах становится нетривиальным: часть компонент просто меняет знак!

²¹В англоязычной литературе метрикой Минковского называют тензор противоположного знака, так что две одновременные точки пространства-времени, разделенные длиной $d\ell$, имеют интервал $ds^2 \mapsto d\ell^2$, в точности совпадающий с инвариантом евклидовой метрики.

В рассматриваемом случае пространства-времени размерности 2D из (4.53) сразу следует, что

$$g_{00} = (\Lambda_{\bullet 0}^0)^2 g_{00} + (\Lambda_{\bullet 0}^1)^2 g_{11} \Rightarrow 1 = (\Lambda_{\bullet 0}^0)^2 - (\Lambda_{\bullet 0}^1)^2,$$

а значит,

$$(\Lambda_{\bullet 0}^0)^2 \geq 1.$$

Преобразования с $\Lambda_{\bullet 0}^0 \geq 1$ называются ортохронными, поскольку $\Lambda_{\bullet 0}^0$ определяет относительный знак временных компонент в системах K и K' , и при положительном знаке мы можем говорить, что стрела времени в этих системах направлена в одну сторону (нет инверсии стрелы времени). При $\Lambda_{\bullet 0}^0 \leq -1$ говорят об антиортохронных преобразованиях. Группа специальных (символ S, $|\det \Lambda| = 1$) изометрий (символ O в смысле ортогональных матричных преобразований: $\hat{g} = \Lambda^T \cdot \hat{g} \cdot \Lambda$) с трансляциями (символ I = inhomogeneous) в пространстве-времени Минковского с одной пространственной координатой и одной временной координатой обозначается ISO(1,1). Если перейти к ортохронным преобразованиям без трансляций и наложить еще условие, исключающее дискретное преобразование зеркальной инверсии пространственной координаты ($x \mapsto -x$), то говорят о группе $\text{SO}_+^\uparrow(1,1)$.

В итоге, необходимо рассмотреть постоянную матрицу с детерминантом, равным единице, $\det \Lambda = 1$, и $\Lambda_{\bullet 0}^0 \geq 1$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a \geq 1 \quad ad - bc = 1 \quad \Rightarrow \quad abc = a^2 d - a$$

Тогда условие

$$\hat{g} = \Lambda^T \circ \hat{g} \circ \Lambda, \tag{4.41}$$

дает

$$\begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} abc = c^2 d = a^2 d - a, \\ a^2 - c^2 = 1, \\ b^2 - d^2 = -1. \end{cases}$$

Отсюда $d = a$, $b = c$. Значит,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 - b^2 = 1.$$

Это однопараметрическое решение можно записать, например, в виде: $a = \operatorname{ch} \vartheta$, $b = -\operatorname{sh} \vartheta$, так что

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \vartheta & -\operatorname{sh} \vartheta \\ -\operatorname{sh} \vartheta & \operatorname{ch} \vartheta \end{pmatrix}. \tag{4.54}$$

В координатах это преобразование изометрии запишется как

$$x'_0 = \operatorname{ch} \vartheta (x_0 - \operatorname{th} \vartheta x), \tag{4.55}$$

$$x' = \operatorname{ch} \vartheta (x - \operatorname{th} \vartheta x_0). \tag{4.56}$$

Найдем траекторию центра системы K' при переходе (4.56): $x' = 0$,

$$x(t) = \operatorname{th} \vartheta ct.$$

Значит, параметр ϑ можно переписать в терминах скорости движения инерциальной системы отсчета K' относительно исходной системы K согласно замене

$$\operatorname{th} \vartheta = \frac{u}{c} \equiv \beta, \quad (4.57)$$

где u — скорость K' относительно K по оси x . Тогда вводят гамма-фактор

$$\operatorname{ch} \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \gamma.$$

В 2D-мерном пространстве-времени это преобразование имеет вид

$$\begin{cases} x'_0 = \gamma(x_0 - \beta x), \\ x' = \gamma(x - \beta x_0), \end{cases} \quad (4.58)$$

и носит название *лоренцева буста*. Параметр ϑ называют углом гиперповорота.

В пространстве-времени Минковского с тремя пространственными измерениями группа собственных ортохронных преобразований включает в себя бусты по трем пространственным направлениям (3 непрерывных параметра) и обычную группу поворотов в пространстве (3 непрерывных параметра), т. е. группа $\text{SO}_+^\uparrow(3, 1)$ является шестипараметрической.

В этом разделе мы показали насколько мощным является инструмент изометрий в случае инвариантного волнового уравнения: вместо эвристического поиска преобразований лоренцева буста, оставляющих инвариантным волновое уравнение, мы использовали алгоритмическое рассмотрение, автоматически дающее искомый результат.

§а Действие свободной релятивистской частицы из теоремы Нёттер

Если действие на траектории релятивистской частицы не зависит от выбора системы отсчета, т.е если оно скаляр, инвариант, то и уравнения движения релятивистской частицы будут иметь ковариантный вид, а значит, уравнения движения будут записываться в терминах тензорных величин одинаково во всех системах отсчета. Итак, положим, что действие на траектории не зависит от скорости движения одной инерциальной системы относительно другой, u :

$$d_u S \equiv 0,$$

а значит, лоренцевы бусты являются симметрией физической системы.

Для бесконечно малого буста $u \rightarrow 0$ преобразования координаты и времени (4.58) примут вид²²:

$$x_u \approx x - ut, \quad t_u \approx t - \frac{u}{c^2} x.$$

²²Здесь мы используем предел $u \rightarrow 0$. Читатель может проделать те же, но более громоздкие выкладки при конечном значении скорости буста и убедиться, что окончательный результат, а именно, выражение для функции Лагранжа свободной релятивистской частицы, конечно, никак не изменяется.

Тогда из теоремы Нётер (1.24) следует сохранение интеграла движения

$$\mathcal{I} = \frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial x_u}{\partial u} - \left(\frac{\partial L}{\partial v} v - L \right) \frac{\partial t_u}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial v} \left(-t + v \frac{x}{c^2} \right) - L \frac{x}{c^2},$$

на траектории движения свободной частицы $x(t)$. Свободная частица движется прямолинейно и поступательно: $x(t) = x_0 + vt$. Значит, из условия $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}(0)$ прямым дифференцированием

$$\frac{d\mathcal{I}}{dt} \equiv 0,$$

находим дифференциальное уравнение для $L = L(v)$:

$$\frac{\partial L}{\partial v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = -L \frac{v}{c^2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dL}{L} = -\frac{vdv}{c^2 - v^2},$$

которое после интегрирования

$$\int_{L_0}^{L(v)} \frac{dL}{L} = - \int_0^v \frac{v dv}{c^2 - v^2}, \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{L(v)}{L_0} = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right),$$

приводит к

$$L(v) = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (4.59)$$

Физический смысл константы интегрирования L_0 легко установить из нерелятивистского предела $v \ll c$:

$$L(v) \approx L_0 - L_0 \frac{v^2}{2c^2} + \dots$$

так что функция Лагранжа при малых скоростях приобретает стандартное выражение при $L_0 = -mc^2$. В итоге,

$$S = -mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = -mc^2 \int d\tau = -mc \int ds, \quad (4.60)$$

где τ — собственное время частицы, т. е. время отсчитываемое часами в системе, где частица поконится, а s — это интервал на траектории. Отсюда сразу видно, что действие — скаляр²³.

²³Заметим, что требование релятивистской инвариантности уравнений движения частицы, менее строгое по сравнению с требованием релятивистской инвариантности действия частицы, означало бы, что

$$\frac{d\mathcal{I}}{dt} = f(v) = \frac{dF(t, x, v)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} v + \frac{\partial F}{\partial v} \dot{v},$$

так что решения ограничены условиями точно так же, как при рассмотрении лагранжиана свободной нерелятивистской частицы (см. стр. 43)

$$\frac{\partial F}{\partial v} \equiv 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \text{const.}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0,$$

Согласно принципу наименьшего действия траектория частицы отвечает максимальному собственному времени между двумя заданными точками.

Пусть концы траектории — это положения покоящейся частицы в два момента времени в некоторой инерциальной системе отсчета. Тогда собственное время этой частицы, которое отвечает экстремальному значению действия для фиксированных граничных точек, больше собственного времени такой же частицы, которая будет двигаться по любой другой траектории от начальной точки к конечной. Итак, мы нашли, что из двух близнецов старше всегда тот, что покоился в исходной точке в инерциальной системе отсчета, а близнец, совершивший космическое путешествие на релятивистской ракете и вернувшийся к брату, окажется младше. Принцип наименьшего действия разрешает парадокс близнецов, который заключается в следующем: для покоящегося близнеца имеет место растяжения времени относительно движущегося близнеца, но каждый из близнецов может утверждать, что именно он покоился и он должен стать старше. Однако действительно покоился в инерциальной системе лишь один из близнецов, второй же, чтобы вернуться в ту же точку пространства к брату совершил пересадку на космический корабль, возвращающийся к брату, а значит, двигался во время пересадки с ускорением, и кажущаяся эквивалентность рассмотрения обоих братьев тем самым была нарушена.

§b Энергия, импульс, 4-скорость

Проведенный нами вывод функции Лагранжа релятивистской частицы в пространстве-времени с одним пространственным измерением легко обобщается на случай 3-мерного пространства, если положить, что это пространство изотропно и однородно, а значит, движение по всем осям описывается одинаково, и

$$L(\mathbf{v}) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}. \quad (4.61)$$

в силу принципов причинности движения и изотропии пространства (в данном случае эквивалентность движения вдоль оси координаты направо и налево). Тогда решение уравнения для функции Лагранжа приводит вместо (4.59) к

$$\tilde{L} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - E_*,$$

причем физический смысл параметра E_* сводится к калибровке начала отсчета шкалы энергии, так что эта величина никак не влияет на уравнения движения! Таким образом, можно говорить о перенормируемости теории относительно начала отсчета энергии. Однако введение такой ненулевой величины можно согласовать с принципом относительности только в одном случае, когда действие частицы представимо в виде

$$S = \int dt L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \int dt d^3r \frac{dE_*}{dV},$$

где $dE_*/dV = \text{const.}$ — это плотность энергии в пространстве, где нет частиц, т. е. в вакууме. Значит, общее решение задачи о функции Лагранжа свободной релятивистской частицы включает в себя, как говорят, космологическую постоянную, т. е. плотность энергии вакуума, от которой не зависят уравнения движения частиц в пространстве-времени Минковского.

Функция Лагранжа задает импульс

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} \gamma,$$

и энергию

$$E = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = mv^2\gamma + mc^2/\gamma = mc^2\gamma.$$

Эти величины можно связать с компонентами 4-скорости — производной координат по инвариантному собственному времени частицы $d\tau = dt/\gamma$:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad u^\mu u_\mu = \gamma^2 c^2 (1 - v^2/c^2) = c^2.$$

Тогда

$$mu^\mu = \begin{pmatrix} p^{(0)} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad p^{(0)} = \frac{E}{c},$$

т. е. энергия, деленная на скорость света, является временной компонентой вектора 4-импульса, а импульс пространственной компонентой этого контравектора:

$$p^\mu = mu^\mu.$$

Так как $u_\mu u^\mu = c^2$,

$$p_\mu p^\mu = m^2 u_\mu u^\mu = m^2 c^2.$$

Ковариантный 4-импульс получается операцией опускания с метрикой Минковского

$$p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu, \quad p_0 = p^{(0)} = \frac{E}{c}, \quad p_\alpha = -p^\alpha, \quad p_\mu = (p_0, -\mathbf{p}),$$

а значит, инвариантное произведение 4-импульса на 4-вектор дифференциалов координат имеет вид

$$p_\mu dx^\mu = p_0 dx^{(0)} - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} = E dt - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}.$$

Тогда в гамильтоновой формулировке механики действие можно записать в виде

$$S = \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} - p_0 dx^{(0)} = - \int p_\mu dx^\mu.$$

Из проведенного исследования в рамках лагранжевой механики сразу видно, что оно применимо только для массивных частиц: использовался нерелятивистский предел, который имеет место только для массивных частиц. Однако гамильтонова формулировка допускает и описание безмассовых частиц. Для этого необходимо ввести 4-импульс, а траекторию в пространстве времени — рассматривать как параметрическую зависимость $x^\mu(\lambda)$, где λ — это параметр эволюции, который может быть выбран почти что произвольным образом, например $\lambda = t$, за исключением собственного времени τ , так как собственное время неопределено для безмассовой частицы, т. е. для частицы, у которой интервал на траектории равен нулю,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 d\tau^2 = 0.$$

Поскольку для действия релятивистской частицы в гамильтоновой формулировке

$$\partial_\mu S = \frac{\partial S}{\partial x^\mu} = -p_\mu,$$

уравнение массовой поверхности

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = m^2 c^2$$

сводится к уравнению Гамильтона–Якоби

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu S \partial_\nu S = m^2 c^2, \quad (4.62)$$

которое справедливо как для массивных, так и для безмассовых частиц, когда можно положить $m = 0$.

Глава 5

Основы дифференциальной геометрии

(5.А) Операции дифференцирования

20 Градиент, дивергенция, ротор

Ковектор ∇ , градиент, производная скаляра по направлению, дивергенция, ротор, лапласиан в декартовых и сферических координатах, наглядное вычисление изменения базиса сферических координат при малом смещении, сдвиг по модулю радиус-вектора.

§а Ковекторный оператор ∇

Определим ковариантный вектор «набла». Если задан базис разложения бесконечно малой вариации координат, т. е., как говорят, базис в касательном пространстве, так что

$$dr = dC^\alpha \epsilon_\alpha,$$

то в двойственном векторном пространстве линейных функций на векторах касательного векторного пространства для ковекторов вводится базис h^α , который определяется соотношением

$$h^\alpha \cdot \epsilon_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \delta_\beta^\alpha, \quad (5.1)$$

где произведение ковектора с номером «альфа» h^α на вектор с номером «бета» ϵ_β понимается как произведение строки $(h^\alpha)_\mu$ на столбец $(\epsilon_\beta)^\mu$, как это и должно быть при вычислении значения линейной функции на векторе, в данном случае функции h^α на векторе ϵ_β (см. сноску 8 на стр. 108). По определению ковекторный оператор набла задается как

$$\nabla \stackrel{\text{def}}{=} h^\alpha \frac{\partial}{\partial C^\alpha}. \quad (5.2)$$

В случае, когда исходный базис ортонормирован,

$$\epsilon_\alpha \cdot \epsilon_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad (5.3)$$

базис в ковариантном пространстве совпадает с базисом в исходном векторном, контравариантном пространстве:

$$h^\alpha = \delta^{\alpha\beta} \epsilon_\beta,$$

и ковариантный оператор принимает вид

$$\nabla = \epsilon_\beta \delta^{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial C^\alpha} = \epsilon_\alpha \frac{\partial}{\partial C^\alpha}. \quad (5.4)$$

В нашем изложении понятий ротора, градиента и дивергенции мы далее будем использовать только ортонормированные базисы, так что везде будет подразумеваться именно (5.4).

Для примера, в декартовых координатах $d\mathcal{C}^\alpha = dr^\alpha = (dx, dy, dz)^T$ и $\nabla_\alpha = \partial/\partial r^\alpha$,

$$\nabla = \epsilon_x \frac{\partial}{\partial x} + \epsilon_y \frac{\partial}{\partial y} + \epsilon_z \frac{\partial}{\partial z},$$

но, скажем, в базисе сферических координат (4.1) инфинитезимальный вектор длины $d\mathcal{C}^\alpha = (dr, r d\theta, r \sin \theta d\phi)^T$, так что

$$\nabla = \epsilon_r \frac{\partial}{\partial r} + \epsilon_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \epsilon_\phi \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi}.$$

Действие ковектора набла переводит скаляр f в ковектор, который называют градиентом f :

$$\nabla f \stackrel{\text{def}}{=} \text{grad } f, \quad (\nabla f)_\alpha = \nabla_\alpha f. \quad (5.5)$$

Градиент связан с производной функции по направлению \mathbf{u} ($\mathbf{u}^2 = 1$)

$$d_{\mathbf{u}} f \stackrel{\text{def}}{=} f(\mathbf{r} + d\mathcal{C} \mathbf{u}) - f(\mathbf{r}) = d\mathcal{C} \mathbf{u} \cdot \nabla f,$$

так что этот дифференциал максимален в некотором направлении \mathbf{u}_* , и следовательно, градиент указывает направление и скорость максимального роста функции в точке. Направление градиента ортогонально к касательной линии уровня функции \mathbf{u}_{\parallel} , т. е. постоянного значения функции, когда $d_{\mathbf{u}_{\parallel}} f = 0$.

Вычислим $\text{grad } r^2$ в декартовых координатах.

$$\nabla_\alpha r^2 = \partial_\alpha r^\beta r^\beta = 2r^\beta \partial_\alpha r^\beta = 2r^\beta \delta_\alpha^\beta = 2r_\alpha.$$

В векторных обозначениях

$$\text{grad } r^2 = 2\mathbf{r}.$$

Теперь легко вычислить $\text{grad } r$, пользуясь дифференцированием сложной функции,

$$\nabla_\alpha r = \frac{dr}{dr^2} \partial_\alpha r^2 = \left(\frac{dr^2}{dr} \right)^{-1} 2r_\alpha = \frac{1}{2r} 2r_\alpha = \frac{r_\alpha}{r} \Rightarrow \text{grad } r = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Скалярное произведение ковектора набла с вектором называется дивергенцией

$$\text{div } \mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \cdot \mathbf{a} = \nabla_\alpha a^\alpha. \quad (5.6)$$

Вычислим $\text{div } \mathbf{r}$ в декартовых координатах.

$$\text{div } \mathbf{r} = \partial_\alpha r^\alpha = \delta_\alpha^\alpha = 3.$$

В декартовых координатах евклидова пространства (не различаем верхние и нижние индексы) векторное произведение набла с вектором \mathbf{a} образует

вектор ротора¹

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \mathbf{a}, \quad (\operatorname{rot} \mathbf{a})_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\beta a_\gamma. \quad (5.7)$$

Отсюда, например,

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \mathbf{a} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\alpha \nabla_\beta a_\gamma = 0,$$

поскольку свертка антисимметричного тензора с симметричным тождественно равна нулю.

Задача 19. Докажите, что свертка симметричного тензора $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}$ с антисимметричным $t^{\alpha\beta} = -t^{\beta\alpha}$ тождественно равна нулю:

$$s_{\alpha\beta} t^{\alpha\beta} \equiv 0.$$

Вычислим $\operatorname{rot} \mathbf{r}$ в декартовых координатах.

$$(\operatorname{rot} \mathbf{r})_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta r^\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \delta_\beta^\gamma = 0,$$

поскольку в декартовых координатах мы опять имеем свертку антисимметричного и симметричного тензоров по двум немым индексам.

Лапласианом называют скаляр

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \cdot \nabla, \quad (5.8)$$

который в декартовых координатах сводится к $\Delta = \partial_\alpha \partial_\alpha$.

Задача 20. Вычислите в уме, считая вектор \mathbf{k} постоянным:

$$\operatorname{grad} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad \operatorname{div} \{\mathbf{r} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\}, \quad \operatorname{rot} \{\mathbf{r} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\}.$$

Задача 21. Вычислить: $\operatorname{rot} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, где $\boldsymbol{\omega}$ — постоянный вектор.

Задача 22. Вычислить: $(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r}$, $\operatorname{grad} f(r)$, $\operatorname{rot} \mathbf{a}(r)$, где $r = |\mathbf{r}|$.

§b Дифференцирование в сферических координатах при параллельном переносе

В сферических координатах базис зависит от точки пространства, так что необходимо учитывать его изменения, которые легко установить графически, вычисляя проекции вариации базисных векторов на сами базисные орты, что фактически означает параллельный перенос орт в исходную точку:

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\theta d\theta + \mathbf{e}_\phi \sin \theta d\phi, \\ d\mathbf{e}_\theta &= -\mathbf{e}_r d\theta + \mathbf{e}_\phi \cos \theta d\phi, \\ d\mathbf{e}_\phi &= -\mathbf{e}_r \sin \theta d\phi - \mathbf{e}_\theta \cos \theta d\phi. \end{aligned} \quad (5.9)$$

¹ В общем случае ротор определяется для ковектора как преобразование в контравектор: $(\operatorname{rot} \mathbf{a})^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\beta a_\gamma$, — это пример перехода от антисимметричного ковариантного тензора второго ранга $\frac{1}{2}(\nabla_\beta a_\gamma - \nabla_\gamma a_\beta)$ к контравектору в 3-мерном пространстве, причем такая операция называется дуальным преобразованием.

■ В самом деле, при изменении длины радиус вектора dr тройка базисных векторов остается в той же точке на единичной сфере, а значит, она остается без изменений, так что

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial r} = 0.$$

При изменении угла $d\theta$ базисный вектор \mathbf{e}_r описывает на единичной сфере дугу длиной $d\theta$ в направлении \mathbf{e}_θ , т. е.

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta.$$

При изменении угла $d\theta$ базисный вектор \mathbf{e}_θ движется по касательной к единичной сфере, так что его изменение образует дугу $d\theta$, но это изменение направлено к центру сферы, т. е. в направлении против \mathbf{e}_r , поскольку известно, что при движении по окружности скорость направлена по касательной к окружности, а изменение скорости – ускорение – направлено к центру окружности, а значит,

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r.$$

При изменении угла $d\theta$ базисный вектор \mathbf{e}_ϕ остается в той же точке на плоскости (x, y) под тем же углом ϕ к оси x , т. е. этот базисный вектор не изменяется и

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \theta} = 0.$$

При повороте вокруг оси z на угол $d\phi$ изменяется проекция вектора \mathbf{e}_r в плоскости (x, y) , ортогональной оси поворота. Длина этой проекции равна $\sin \theta$, так что изменение \mathbf{e}_r образует дугу $\sin \theta d\phi$ в направлении \mathbf{e}_ϕ :

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} = \sin \theta \mathbf{e}_\phi.$$

Аналогично, при повороте вокруг оси z на угол $d\phi$ изменяется проекция вектора \mathbf{e}_θ в плоскости (x, y) , ортогональной оси поворота. Длина этой проекции равна $\cos \theta$, так что изменение \mathbf{e}_θ образует дугу $\cos \theta d\phi$ в направлении \mathbf{e}_ϕ :

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \phi} = \cos \theta \mathbf{e}_\phi.$$

Длина дуги, которая очерчена концом единичного вектора \mathbf{e}_ϕ при повороте вокруг оси z на угол $d\phi$, составляет величину $d\phi$. Такое изменение вектора \mathbf{e}_ϕ направлено от точки на единичной окружности к её центру в плоскости (x, y) . В декартовых координатах на плоскости (x, y) 3-мерные компоненты единичного радиус-вектора в этой плоскости $\mathbf{e}_{xy} = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$, так что направление от точки на окружности к центру задается вектором $-\mathbf{e}_{xy}$, а значит,

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} = -\mathbf{e}_{xy},$$

причем $\mathbf{e}_{xy} \cdot \mathbf{e}_\phi = 0$. Очевидно, что скалярные произведения вектора \mathbf{e}_{xy} с базисными векторами сферических координат, которые в декартовых координатах имеют компоненты

$$\mathbf{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta),$$

$$\mathbf{e}_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta),$$

$$\mathbf{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0),$$

легко вычисляются в явном виде,

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{xy} \cdot \mathbf{e}_r &= \sin \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \sin \theta, \\ \mathbf{e}_{xy} \cdot \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \cos \theta, \\ \mathbf{e}_{xy} \cdot \mathbf{e}_\phi &= -\cos \phi \sin \phi + \sin \phi \cos \phi = 0.\end{aligned}$$

В итоге,

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} = -\mathbf{e}_{xy} = -\sin \theta \mathbf{e}_r - \cos \theta \mathbf{e}_\theta.$$

Задача 23. Используя выражения для дифференциалов базисных векторов в (5.9), проверьте, что

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\phi) = \frac{\partial}{\partial \phi} (\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\phi) = 0,$$

как это и должно быть для ортонормированного базиса. ■

Тогда, оставляя при дифференцировании в уме только вклады с ненулевыми скалярными произведениями ортонормированных базисных векторов, найдем, что

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \nabla &= \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi} \right\} = \mathbf{e}_r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}, \\ \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} \nabla &= \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} \left\{ \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi} \right\} = \\ &= \mathbf{e}_\theta^2 \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r \partial \theta^2} \right\} = \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2}, \\ \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi} \nabla &= \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi} \left\{ \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{r \sin \theta \partial \phi} \right\} = \\ &= \mathbf{e}_\phi^2 \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \frac{\partial^2}{r \sin \theta \partial \phi^2} \right\} = \\ &= \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{r^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2}{r^2 \sin^2 \theta \partial \phi^2},\end{aligned}$$

и в итоге,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} \quad (5.10)$$

или

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right\}. \quad (5.11)$$

Задача 24. Используя графические построения для изменения базисных векторов в полярных координатах, вычислите оператор Лапласа на плоскости

$$\Delta_{2D} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

Hint: для проверки результата в соотношениях (5.9) зафиксируйте угол $\theta = \pi/2$, $d\theta = 0$ и сравните с явными построениями в начертательной геометрии.

Вводят также оператор сдвига по модулю радиус-вектора

$$\hat{k}_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r},$$

для которого

$$\hat{k}_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

а также угловую часть оператора Лапласа

$$\Delta_{\theta,\phi} f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2},$$

так что

$$\Delta f = \hat{k}_r^2 f + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta,\phi} f. \quad (5.12)$$

Оператор сдвига по радиусу определяется на функциях вида

$$\hat{k}_r \left\{ \frac{1}{r} u(r) \right\} = \frac{1}{r} u'(r).$$

Поэтому, рассматривая экспоненту от оператора как ряд Тейлора² по степеням оператора, найдем

$$e^{\hat{k}_r a} \frac{1}{r} u(r) = \sum_n \frac{1}{n!} a^n \frac{1}{r} u^{(n)}(r) = \frac{1}{r} u(r+a).$$

В частности, функции

$$\Phi_k(r) = \frac{1}{r} e^{ikr}$$

являются собственными для генератора сдвига по радиусу $\hat{p}_r = -i\hat{k}_r$:

$$\hat{p}_r \Phi_k(r) = k \Phi_k(r).$$

Если собственное значение вещественное, $k \in \mathbb{R}$, то собственная функция является ограниченной.

Оператор Лапласа играет важную роль в квантовой механике: как мы знаем, оператор импульса в пространстве амплитуд вероятности Ψ имеет вид $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$, так что кинетическая энергия

$$\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi,$$

и в уравнении Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(t, \mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \Psi(t, \mathbf{r})$$

²Схема возникновения ряда Тейлора функции в малой окрестности заданной точки описана в Приложении на стр. 288 в разделе 2А, §b.

необходимо знать, как лапласиан действует на волновую функцию $\Psi(t, \mathbf{r})$.

В сферических координатах тем же способом действия частных производных на базисные векторы можно вычислить

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} r &= \nabla r = \mathbf{e}_r \frac{\partial r}{\partial r} = \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}, \\ \operatorname{div} \mathbf{r} &= \nabla \cdot (r \mathbf{e}_r) = \mathbf{e}_r^2 \frac{\partial r}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta^2 \frac{1}{r} r + \mathbf{e}_\phi^2 \frac{1}{r \sin \theta} r \sin \theta = 3, \\ \operatorname{rot} \mathbf{r} &= \nabla \times (r \mathbf{e}_r) = \frac{\partial r}{\partial r} \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \times (r \mathbf{e}_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \times (r \sin \theta \mathbf{e}_\phi) = 0.\end{aligned}$$

Полезные упражнения по векторному анализу можно найти в сборнике задач по теоретической физике из заданий МФТИ [14].

Кроме того, здесь уместно заметить, что для более глубокого понимания векторного анализа следует ознакомиться с современным языком рассмотрения интегралов по контурам и поверхностям на языке дифференциальных форм (см. раздел 25 и [13]).

21 Дифференцирование в криволинейных координатах

Аналитический метод дифференцирования в криволинейных координатах, производная Ли и параллельный перенос, коммутатор производных Ли, тождество Якоби и алгебра Ли, связь базисов контр- и ковариантного пространства и производная Ли по направлению базисного вектора, тензор кручения и координатная сетка в пространстве, ковариантная производная с метрической связностью, символы Кристоффеля, ковариантная дивергенция, оператор Бельтрами–Лапласа, коэффициенты Ламе, векторы Киллинга как бесконечно малые сдвиги изометрий.

В криволинейных координатах базисные векторы и метрика зависят от точки пространства. При этом, изменение базисных векторов при бесконечно малом сдвиге для сферических координат мы установили при помощи наглядных геометрических построений в евклидовом пространстве. В общем случае такая наглядность может быть довольно затруднительна, так что имеется необходимость в получении универсального, аналитического инструментария для дифференцирования тензорных величин в криволинейных координатах — дифференциальной геометрии.

Как мы видели на примере преобразования метрики при смене координат, аналитический метод подразумевает введение полилинейных скалярных функций в векторном пространстве, что и позволяет получать величины с тензорными свойствами.

§а Производная Ли по направлению

Рассмотрим инфинитезимальный сдвиг координат векторного пространства

$$r'^\alpha = r^\alpha + \xi^\alpha(\mathbf{r}), \quad \xi^\alpha \rightarrow 0. \quad (5.13)$$

Изменение скаляра по направлению ξ с помощью разложения в ряд Тейлора с точностью до членов первого порядка по ξ запишется в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi f &\stackrel{\text{def}}{=} f(\mathbf{r}') - f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r} + \xi) - f(\mathbf{r}) = \\ &= f(\mathbf{r}) + \xi^\alpha \partial_\alpha f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = \xi^\alpha \partial_\alpha f(\mathbf{r}).\end{aligned}\quad (5.14)$$

В таком случае говорят о производной Ли скаляра по направлению вектора ξ : $\mathcal{L}_\xi f$. Для скалярной функции при смене базиса $f'(\mathbf{r}') = f(\mathbf{r})$, поэтому можно ввести понятие параллельного переноса скаляра как $f_{\parallel}(\mathbf{r}') = f'(\mathbf{r}')$, в то время как при вычислении производной Ли по направлению мы рассматриваем разность значения скаляра в новой точке со штрихом и значением параллельно перенесенного значения скаляра в той же новой точке со штрихом

$$f(\mathbf{r}') - f_{\parallel}(\mathbf{r}') = f(\mathbf{r}') - f(\mathbf{r}).$$

Рассмотрим ковекторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ и построим инвариант³ первого порядка малости

$$\delta F(\mathbf{r}') \stackrel{\text{def}}{=} a_\alpha(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'^\alpha.$$

Используя разложение в ряд Тейлора по ξ для ковекторного поля $a_\alpha(\mathbf{r}')$ и преобразование дифференциалов координат согласно (5.13)

$$\frac{\partial r'^\alpha}{\partial r^\beta} = \delta_\beta^\alpha + \partial_\beta \xi^\alpha, \quad (5.15)$$

в первом порядке по $\xi \rightarrow 0$ найдем

$$\begin{aligned}\delta F(\mathbf{r}') &= (a_\alpha(\mathbf{r}) + \xi^\gamma \partial_\gamma a^\alpha) (\delta_\beta^\alpha + \partial_\beta \xi^\alpha) d\mathbf{r}^\beta = \\ &= a_\alpha(\mathbf{r}) d\mathbf{r}^\alpha + d\mathbf{r}^\alpha \xi^\gamma \partial_\gamma a_\alpha + d\mathbf{r}^\beta a_\alpha(\mathbf{r}) \partial_\beta \xi^\alpha,\end{aligned}\quad (5.16)$$

где есть вклад скаляра

$$\delta F(\mathbf{r}) = a_\alpha(\mathbf{r}) d\mathbf{r}^\alpha.$$

Разность скаляров

$$\delta F(\mathbf{r}') - \delta F(\mathbf{r}) = (\xi^\gamma \partial_\gamma a_\alpha + a_\gamma \partial_\alpha \xi^\gamma) d\mathbf{r}^\alpha$$

является скаляром, а значит, ковектором является величина

$$\mathcal{L}_\xi a_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \xi^\gamma \partial_\gamma a_\alpha + a_\gamma \partial_\alpha \xi^\gamma, \quad (5.17)$$

которую называют производной Ли ковектора \mathbf{a} по направлению ξ , поскольку

$$a_\alpha(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'^\alpha = a_\alpha(\mathbf{r}) d\mathbf{r}^\alpha + \mathcal{L}_\xi a_\alpha d\mathbf{r}^\alpha.$$

Совершенно аналогично, производная Ли вектора \mathbf{a} по направлению ξ может быть получена при рассмотрении инварианта

$$\delta G(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} a^\alpha(\mathbf{r}) \partial_\alpha,$$

³Отметим, что построенный инвариант не является, вообще говоря, полной производной: в общем случае ковектор a_α не является частной производной инварианта по координатам.

так что

$$a^\alpha(\mathbf{r}') \partial'_\alpha = a^\alpha(\mathbf{r}) \partial_\alpha + \mathcal{L}_\xi a^\alpha \partial_\alpha, \quad (5.18)$$

где, с учетом преобразования частных производных при $\xi \rightarrow 0$

$$\partial'_\beta = \left(\frac{\partial r^\alpha}{\partial r'^\beta} \right) \partial_\alpha = (\delta_\beta^\alpha - \partial_\beta \xi^\alpha) \partial_\alpha, \quad (5.19)$$

находим

$$\mathcal{L}_\xi a^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \xi^\gamma \partial_\gamma a^\alpha - a^\gamma \partial_\gamma \xi^\alpha. \quad (5.20)$$

Заметим, что производная Ли вектора ξ по направлению ξ тождественно равна нулю.

Наглядное представление о производной Ли вектора по направлению состоит в следующем: вектор в точке \mathbf{r}' и в точке \mathbf{r} записывается в разных базисах, штрихованном и нештрихованном, соответственно, а значит, он в этих точках при замене базиса преобразуется совершенно разными матрицами, заданными в разных точках, т. е. из векторов в штрихованной и нештрихованной точках посредством операции сложения (вычитания) невозможно составить объект, являющийся тензорной величиной с соответствующим законом преобразования в заданной точке, и поэтому для сравнения векторов необходимо разложить штрихованный базис по исходному, нештрихованному и получить таким образом компоненты вектора в нештрихованном базисе. Такое разложение по исходному базису называют параллельным переносом вектора из штрихованной точки в не штрихованную. Тогда перенесенный параллельно в нештрихованную точку вектор преобразуется по закону вектора в этой точке, но, при этом, результат параллельного переноса не совпадает с исходным вектором в этой точке, и различие определяется производной Ли.

В математике говорят, что параллельный перенос векторного поля $a^\alpha(\mathbf{r})$ вдоль направления $\xi(\mathbf{r})$ в точку $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \xi(\mathbf{r})$ при $\xi(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ дает векторное поле $a_\parallel^\alpha(\mathbf{r}')$, так что по определению $\mathcal{L}_\xi a_\parallel^\alpha = 0$. Это значит, что

$$a_\parallel^\alpha(\mathbf{r}') \partial'_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} a^\alpha(\mathbf{r}) \partial_\alpha, \quad (5.21)$$

т. е. компоненты параллельно перенесенного поля в штрихованном базисе совпадают с компонентами исходного поля в нештрихованном базисе. Поэтому

$$(a^\alpha(\mathbf{r}') - a_\parallel^\alpha(\mathbf{r}')) \partial'_\alpha = \mathcal{L}_\xi a^\alpha \partial_\alpha, \quad (5.22)$$

и следовательно, разница между векторным полем и параллельно перенесенным полем задается производной Ли по направлению переноса. Еще раз подчеркнем, что согласно закону преобразования векторов и ковекторов их свертка является инвариантом, так что

$$a^\alpha(\mathbf{r}) \partial_\alpha = a'^\alpha(\mathbf{r}') \partial'_\alpha,$$

а значит, параллельно перенесенное в точку со штрихом векторное поле совпадает с полем, которое получается согласно закону преобразования векторов, $a_\parallel^\alpha(\mathbf{r}') = a'^\alpha(\mathbf{r}')$, так что при вычислении производной Ли векторного поля по направлению мы, по сути, рассматриваем разность между значением поля в точке со штрихом и значением поля, которое получается в этой точке при

параллельном переносе, а именно это и записано в соотношении (5.22).

Задача 25. Покажите, что коммутатор производных Ли по двум направлениям для скаляра сводится к производной Ли

$$[\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta]f \equiv (\mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta - \mathcal{L}_\eta \mathcal{L}_\xi)f = \mathcal{L}_{[\xi, \eta]}f, \quad \text{где} \quad [\xi, \eta] = \mathcal{L}_\xi \eta.$$

Задача 26. Покажите, что коммутатор производных Ли по двум направлениям для вектора сводится к производной Ли

$$[\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta]a^\gamma = \mathcal{L}_{[\xi, \eta]}a^\gamma.$$

Как видно из задач, производная Ли — это композиция на векторах, т. е. операция, которая коммутатору производных Ли ставит в соответствие производную Ли. По построению эта композиция является антисимметричной по перестановке: $\mathcal{L}_\xi \eta = [\xi, \eta] = -[\eta, \xi] = -\mathcal{L}_\eta \xi$, — и линейной по аргументам: $\mathcal{L}_{\xi+\eta} = \mathcal{L}_\xi + \mathcal{L}_\eta$, $\mathcal{L}_{c\xi} = c\mathcal{L}_\xi$. Кроме того,

$$[\mathcal{L}_\xi, [\mathcal{L}_\eta, \mathcal{L}_\chi]] = \mathcal{L}_{[\xi, [\eta, \chi]]}.$$

Тогда элементарно находим тождество Якоби для циклической перестановки

$$[\mathcal{L}_\xi, [\mathcal{L}_\eta, \mathcal{L}_\chi]] + [\mathcal{L}_\eta, [\mathcal{L}_\chi, \mathcal{L}_\xi]] + [\mathcal{L}_\chi, [\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta]] = 0.$$

Налицо алгебра Ли, построенная на производных Ли: векторное пространство с антисимметричной композицией и верным тождеством Якоби.

Для тензоров вычисление производных Ли сводится к правилам (5.17) и (5.20) по каждому индексу. Так, скажем, для ковариантного тензора второго ранга, например, для метрики эта производная имеет вид

$$\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = \xi^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + g_{\gamma\beta} \partial_\alpha \xi^\gamma + g_{\alpha\gamma} \partial_\beta \xi^\gamma. \quad (5.23)$$

Другой пример — производная Ли символа Кронекера,

$$\mathcal{L}_\xi \delta_\beta^\alpha = \xi^\gamma \partial_\gamma \delta_\beta^\alpha - \delta_\beta^\gamma \partial_\gamma \xi^\alpha + \delta_\gamma^\alpha \partial_\beta \xi^\gamma = 0 - \partial_\beta \xi^\alpha + \partial_\beta (\xi^\gamma \delta_\gamma^\alpha) = 0.$$

Это значит, что инвариантный тензор Кронекера не меняется при сдвиге по любому направлению. Говорят, что тензор Кронекера при параллельном переносе переходит сам в себя.

§b Ковариантная производная

Рассмотрим производную Ли вектора a^α по направлению базисного вектора ϵ_μ , т. е. в выражении (5.20) проведем подстановку⁴ $\xi \mapsto \epsilon_\mu$:

$$\mathcal{L}_\mu a^\alpha = \epsilon_\mu^\gamma \partial_\gamma a^\alpha - a^\beta \partial_\beta \epsilon_\mu^\alpha. \quad (5.24)$$

Как мы видели на примере базиса в сферических координатах, производные базисных векторов при смещении координат $\partial_\gamma \epsilon_\mu^\alpha$, вообще говоря, не равны

⁴Имея ввиду бесконечно малый вектор ξ , можно делать подстановку $\xi \mapsto \epsilon \epsilon_\mu$, где $\epsilon \rightarrow 0$. Скалярный параметр ϵ , независящий от координат, затем можно сократить во всех выражениях, так что мы его не вводим для упрощения формул дальнейшего изложения.

нулю. Для аналитического вычисления таких производных, введем базис в пространстве ковекторов, \mathfrak{h}^ν , согласно условию ортонормированности⁵

$$\mathfrak{e}_\mu^\gamma \mathfrak{h}_\gamma^\nu = \mathfrak{e}_\mu \cdot \mathfrak{h}^\nu = \delta_\mu^\nu. \quad (5.25)$$

Смысл величин \mathfrak{e}_μ^α и \mathfrak{h}_α^ν ясен: это «альфты» координаты «мутого» базисного вектора в самом базисе векторов и «нютого» базисного ковектора в самом базисе ковекторов, соответственно, т. е. это — просто единичные матрицы по указанным индексам.

Компоненты «нютого» базисного вектора преобразуются стандартно согласно закону преобразования векторов⁶

$$\mathfrak{e}_\nu^\alpha(\mathbf{r}) = \mathfrak{e}_\nu^\beta(\mathbf{r}_0) \frac{\partial r^\alpha}{\partial r_0^\beta}, \quad (5.26)$$

где в исходной фиксированной точке \mathbf{r}_0 компоненты базисного вектора, как мы уже говорили выше,

$$\mathfrak{e}_\nu^\beta(\mathbf{r}_0) = \delta_\nu^\beta, \quad (5.27)$$

так что

$$\mathfrak{e}_\nu^\alpha(\mathbf{r}) = \frac{\partial r^\alpha}{\partial r_0^\nu}. \quad (5.28)$$

Аналогично

$$\mathfrak{h}_\alpha^\nu(\mathbf{r}) = \frac{\partial r_0^\nu}{\partial r^\alpha}. \quad (5.29)$$

Выражения для базисных векторов и ковекторов (5.28) и (5.29) можно наглядно интерпретировать в случае, если в пространстве координат вводится координатная сетка. Тогда можно задать касательные векторы к координатным линиям n_ν^α , где ν — это номер координатной линии, так что бесконечно малое смещение координаты вдоль касательной задается выражением

$$dr^\alpha = n_\nu^\alpha dr_0^\nu,$$

откуда сразу следует, что базисный вектор $\mathfrak{e}_\nu^\alpha(\mathbf{r})$, записанный в (5.28), совпадает с касательной «нютой» линией координатной сетки. В тех же терминах координатной сетки выражение (5.29) отвечает градиенту «нютой» координаты,

$$\mathfrak{h}_\alpha^\nu(\mathbf{r}) = \partial_\alpha r_0^\nu.$$

Из (5.28) и (5.29) следует еще одно тождество:

$$\mathfrak{e}_\mu^\alpha \mathfrak{h}_\beta^\mu = \delta_\beta^\alpha. \quad (5.30)$$

⁵По сути задаются линейные функции на векторном пространстве путем указания их значений на базисных векторах \mathfrak{e}_μ . Напомним, что сами эти функции как раз и образуют базис в ковекторном пространстве: число этих, независимых по построению, функций совпадает с размерностью ковекторного пространства, и любая другая линейная функция входит как элемент в состав линейной оболочки функций \mathfrak{h}^ν .

⁶Это соотношение означает, как мы убедимся, что базисные векторы получаются параллельным переносом из фиксированной точки, заданной координатами \mathbf{r}_0 , в точку с координатами \mathbf{r} вдоль координатной линии. Базис в каждой точке может задаваться, вообще говоря, произвольным образом, например, независимым набором векторов в каждой точке пространства вне зависимости от того, есть координатные линии в пространстве или этих линий нет.

Итак, с учетом установленных нами связей между базисными векторами и ковекторами производную Ли (5.24) можно записать в виде

$$\mathcal{L}_\mu a^\alpha = \mathbf{e}_\mu^\gamma \partial_\gamma a^\alpha - \mathbf{e}_\mu^\gamma \mathbf{h}_\gamma^\nu a^\beta \partial_\beta \mathbf{e}_\nu^\alpha = \mathbf{e}_\mu^\gamma (\partial_\gamma a^\alpha - \mathbf{h}_\gamma^\nu a^\beta \partial_\beta \mathbf{e}_\nu^\alpha). \quad (5.31)$$

В итоге, мы получили разложение по базису \mathbf{e}_μ вектора производной Ли по направлению базисного вектора, и следовательно, можно ввести понятие о тензоре ковариантной производной вектора:

$$\nabla_\gamma a^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\gamma a^\alpha - a^\beta \mathbf{h}_\gamma^\nu \partial_\beta \mathbf{e}_\nu^\alpha. \quad (5.32)$$

Мы определили связь производной Ли и ковариантной производной

$$\mathcal{L}_\mu a^\alpha = \mathbf{e}_\mu^\gamma \nabla_\gamma a^\alpha. \quad (5.33)$$

Поскольку

$$\mathbf{h}_\gamma^\nu \partial_\beta \mathbf{e}_\nu^\alpha = \partial_\beta (\mathbf{h}_\gamma^\nu \mathbf{e}_\nu^\alpha) - \mathbf{e}_\nu^\alpha \partial_\beta \mathbf{h}_\gamma^\nu = \partial_\beta (\delta_\gamma^\alpha) - \mathbf{e}_\nu^\alpha \partial_\beta \mathbf{h}_\gamma^\nu = -\mathbf{e}_\nu^\alpha \partial_\beta \mathbf{h}_\gamma^\nu,$$

можно записать, что

$$-\mathbf{h}_\gamma^\nu \partial_\beta \mathbf{e}_\nu^\alpha = \frac{1}{2} \{ \mathbf{e}_\nu^\alpha \partial_\beta \mathbf{h}_\gamma^\nu + \mathbf{e}_\nu^\alpha \partial_\gamma \mathbf{h}_\beta^\nu \} + \frac{1}{2} \{ \mathbf{e}_\nu^\alpha \partial_\beta \mathbf{h}_\gamma^\nu - \mathbf{e}_\nu^\alpha \partial_\gamma \mathbf{h}_\beta^\nu \} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + T_{\beta\gamma}^\alpha, \quad (5.34)$$

где мы выделили симметричную по перестановкам ковариантных индексов часть $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$ и антисимметричную часть $T_{\beta\gamma}^\alpha = -T_{\gamma\beta}^\alpha$, которые называются симметричной связностью и кручением (торсионной связностью), соответственно.

Задача 27. Покажите, что

$$\mathcal{L}_\mu \mathbf{e}_\nu^\alpha - \mathcal{L}_\nu \mathbf{e}_\mu^\alpha = (\mathbf{e}_\mu^\gamma \mathbf{e}_\nu^\beta - \mathbf{e}_\mu^\beta \mathbf{e}_\nu^\gamma)(T_{\beta\gamma}^\alpha - T_{\gamma\beta}^\alpha).$$

Наглядный смысл кручения

$$T_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} \{ \mathbf{e}_\nu^\alpha \partial_\beta \mathbf{h}_\gamma^\nu - \mathbf{e}_\nu^\alpha \partial_\gamma \mathbf{h}_\beta^\nu \}. \quad (5.35)$$

можно выяснить, если ввести в пространстве координатную сетку, так что в ковариантном пространстве базис задается градиентами к линиям координатной сетки с постоянной координатой⁷:

$$\mathbf{h}_\beta^\nu = \partial_\beta X^\nu,$$

где X^ν — это «нютая» функция линии координатной сетки $X^\nu = \text{const.}$, в которой все аргументы, кроме «нютого», принимают значения на поверхности с

⁷Очевидно, что касательная к линии координаты задает направление базисного вектора в векторном пространстве. Линия постоянного значения координаты вблизи заданной реперной точки направлена по касательной к линии другой координаты. Следовательно, градиент к линии постоянного значения исходной координаты задает направление максимально быстрого изменения исходной координаты, которое ортогонально касательной к линии постоянного значения исходной координаты, т.е. ортогонально базисному вектору по другой координате.

фиксированным значением «нютой» координаты, а константа может зависеть от точки в пространстве. Величина

$$\epsilon_1 \epsilon_2 \partial_\beta \mathfrak{h}_\gamma^\nu$$

задает сдвиг координатной сетки сначала по направлению «гамма» базисного вектора с номером «ню» на бесконечно малый шаг ϵ_1 , а затем сдвиг координатной сетки в направлении «бета» на бесконечно малый шаг ϵ_2 . Величина

$$\epsilon_1 \epsilon_2 \partial_\gamma \mathfrak{h}_\beta^\nu$$

задает сдвиг координатной сетки сначала по направлению «бета» базисного вектора с номером «ню» на бесконечно малый шаг ϵ_2 , а затем сдвиг координатной сетки в направлении «гамма» на бесконечно малый шаг ϵ_1 . Если в пространстве действительно можно ввести не только базис в каждой точке, но и координатную сетку, то разность указанных выше величин, равна

$$\epsilon_1 \epsilon_2 (\partial_\beta \partial_\gamma - \partial_\gamma \partial_\beta) X^\nu \equiv 0,$$

так как частное дифференцирование перестановочно. Таким образом, кручение тождественно равно нулю в пространствах, в которых можно ввести координатную сетку, а базисные векторы ковариантного пространства образованы градиентами к линиям постоянных координат этой сетки. Если кручение не равно нулю, то базисные векторы не являются градиентами линий постоянных координат, т. е. градиентами к линиям координатной сетки, а значит, саму эту координатную сетку невозможно ввести: такие геометрические пространства называются неинтегрируемыми, или неголономными.

Задача 28. На евклидовой плоскости найдите базис $\mathfrak{h}^{(1,2)}$ ковариантного пространства, выразив его через базис векторного пространства, который задан в виде

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{e}_x + \frac{1}{2} \mathbf{e}_y.$$

Запишите метрику в заданном базисе векторного пространства. Используйте метод определения ковариантного базиса соотношениями ортонормировки и метод градиента к линии постоянной координаты.

Мы будем исследовать голономные пространства, т. е. пространства с координатной сеткой, а значит, с нулевым кручением. Тогда ковариантная производная вектора может быть записана в терминах симметричной связности:

$$\nabla_\gamma a^\alpha = \partial_\gamma a^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha a^\beta, \quad \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \{ \mathfrak{e}_\nu^\alpha \partial_\beta \mathfrak{h}_\gamma^\nu + \mathfrak{e}_\nu^\alpha \partial_\gamma \mathfrak{h}_\beta^\nu \}. \quad (5.36)$$

Связность можно выразить через метрику пространства. Для этого опустим индекс $\Gamma_{\alpha|\beta\gamma} = g_{\alpha\alpha'} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha'}$ и запишем тождество

$$\Gamma_{\alpha|\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left\{ \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \mathfrak{h}_\gamma^\nu \partial_\beta \left(g_{\alpha\alpha'} \mathfrak{e}_\nu^{\alpha'} \right) + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \mathfrak{h}_\beta^\nu \partial_\gamma \left(g_{\alpha\alpha'} \mathfrak{e}_\nu^{\alpha'} \right) \right\}, \quad (5.37)$$

поскольку, согласно (5.30),

$$g_{\alpha\alpha'} \mathfrak{e}_\mu^{\alpha'} \mathfrak{h}_\beta^\mu = g_{\alpha\alpha'} \delta_\beta^{\alpha'} = g_{\alpha\beta}.$$

Для вычисления производных вида

$$\partial_\gamma \left(g_{\alpha\alpha'} \mathbf{e}_\nu^{\alpha'} \right) = \partial_\gamma \mathbf{e}_{\alpha\nu},$$

воспользуемся тем, что базисы в векторном и ковекторном пространствах относятся к одной и той же координатной сетке, а значит,

$$\mathbf{e}_{\alpha\nu}(\mathbf{r}) = g_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_\nu^{\alpha'}(\mathbf{r}) = g_{\beta\alpha'}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_\nu^{\alpha'}(\mathbf{r}) \delta_\alpha^\beta = g_{\beta\alpha'}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_\nu^{\alpha'}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_{\nu'}^{\beta}(\mathbf{r}) \mathbf{h}_\alpha^{\nu'}(\mathbf{r}). \quad (5.38)$$

Для ковариантного тензора метрики закон преобразования

$$g_{\mu\nu}(\mathbf{r}_0) = g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \frac{\partial r^\alpha}{\partial r_0^\mu} \frac{\partial r^\beta}{\partial r_0^\nu}$$

с помощью связи частных производных с базисным вектором в точке \mathbf{r} , которую мы установили выше

$$\mathbf{e}_\nu^\alpha(\mathbf{r}) = \frac{\partial r^\alpha}{\partial r_0^\nu} \quad (5.28)$$

может быть записан в виде⁸

$$g_{\mu\nu}^{(0)} \equiv g_{\mu\nu}(\mathbf{r}_0) = g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_\mu^\alpha(\mathbf{r}) \mathbf{e}_\nu^\beta(\mathbf{r}).$$

Поэтому цепочка тождеств в (5.38) дает

$$\mathbf{e}_{\alpha\nu}(\mathbf{r}) = g_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_\nu^{\alpha'}(\mathbf{r}) = g_{\beta\alpha'}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_\nu^{\alpha'}(\mathbf{r}) \mathbf{e}_{\nu'}^{\beta}(\mathbf{r}) \mathbf{h}_\alpha^{\nu'}(\mathbf{r}) = g_{\nu\nu'}^{(0)} \mathbf{h}_\alpha^{\nu'}(\mathbf{r}), \quad (5.39)$$

где $g_{\nu\nu'}^{(0)}$ — метрика в фиксированной точке, рассматриваемого пространства, которую можно считать началом отсчета координатной сетки, в отличие от базисных контрат- и ковекторов, которые изменяются при сдвиге координат и имеют ненулевые частные производные, которые мы и хотим найти.

Аналогично, используя базис в ковариантном пространстве, находим, что

$$g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = g_{\mu\nu}(\mathbf{r}_0) \mathbf{h}_\alpha^\mu(\mathbf{r}) \mathbf{h}_\beta^\nu(\mathbf{r}).$$

Это позволяет констатировать, что для базисов в векторном и ковекторном пространствах индексы типа «альфа» опускаются и поднимаются метрическим тензором в точке \mathbf{r} , а индексы типа «ню» опускаются и поднимаются метрическим тензором в фиксированной точке \mathbf{r}_0 .

Независимость $g_{\nu\nu'}^{(0)}$ от сдвигов отвечает тому, что мы разлагаем векторы по фиксированному базису в заданной точке: коэффициенты разложения зависят от сдвига, а базис разложения зафиксирован. Тогда, в силу равенства нулю кручения, можно переставить индексы частной производной и частного дифференцирования:

$$\partial_\gamma \mathbf{e}_{\alpha\nu} = \partial_\gamma \left\{ g_{\nu\nu'}^{(0)} \mathbf{h}_\alpha^{\nu'}(\mathbf{r}) \right\} = g_{\nu\nu'}^{(0)} \partial_\gamma \left\{ \mathbf{h}_\alpha^{\nu'}(\mathbf{r}) \right\} = g_{\nu\nu'}^{(0)} \partial_\alpha \left\{ \mathbf{h}_\gamma^{\nu'}(\mathbf{r}) \right\} = \partial_\alpha \mathbf{e}_{\gamma\nu},$$

⁸Так же, как и в случае параллельного переноса базисных векторов вдоль линий координатной сетки рассматриваемые соотношения для метрики имеют место при параллельном переносе метрического тензора из точки с координатами \mathbf{r}_0 в точку с координатами \mathbf{r} .

так что кручение обращается в нуль и для базиса $\epsilon_{\alpha\nu}$:

$$g_{\nu\nu'}^{(0)} T_{\gamma\alpha}^{\nu'} = \partial_\gamma \epsilon_{\alpha\nu} - \partial_\alpha \epsilon_{\gamma\nu} = 0,$$

и связность записывается в виде

$$\Gamma_{\alpha|\beta\gamma} = \frac{1}{2} \{ \partial_\beta g_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \hbar_\gamma^\nu \partial_\alpha \epsilon_{\beta\nu} - \hbar_\beta^\nu \partial_\alpha \epsilon_{\gamma\nu} \}. \quad (5.40)$$

Поскольку

$$\hbar_\gamma^\nu \epsilon_{\beta\nu} = g_{\gamma\beta},$$

найдем

$$\Gamma_{\alpha|\beta\gamma} = \frac{1}{2} \{ \partial_\beta g_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \epsilon_{\beta\nu} \partial_\alpha \hbar_\gamma^\nu - \hbar_\beta^\nu \partial_\alpha \epsilon_{\gamma\nu} \}. \quad (5.41)$$

Так как базисы связаны согласно (5.38),

$$\epsilon_{\beta\nu} \partial_\alpha \hbar_\gamma^\nu - \hbar_\beta^\nu \partial_\alpha \epsilon_{\gamma\nu} = g_{\nu\nu'}^{(0)} \left\{ \hbar_\beta^{\nu'} \partial_\alpha \hbar_\gamma^\nu - \hbar_\beta^\nu \partial_\alpha \hbar_\gamma^{\nu'} \right\} \equiv 0,$$

где мы учли, что тензор метрики симметричен по перестановке своих индексов, а кручение равно нулю. Поэтому окончательно в случае нулевого кручения находим симметричную связность, которая задается исключительно метрикой пространства, и поэтому называется метрической связностью или символами Кристоффеля,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha|\beta\gamma} &= \frac{1}{2} \{ \partial_\beta g_{\alpha\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \}, \\ \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha &= \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha'} \{ \partial_\beta g_{\alpha'\gamma} + \partial_\gamma g_{\alpha'\beta} - \partial_{\alpha'} g_{\beta\gamma} \}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

а ковариантная производная вектора

$$\nabla_\gamma a^\alpha = \partial_\gamma a^\alpha + a^\beta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha. \quad (5.43)$$

Для ковектора аналогичные выкладки дают ковариантную производную

$$\nabla_\gamma a_\alpha = \partial_\gamma a_\alpha - a_\beta \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta. \quad (5.44)$$

Для тензорных величин вычисление ковариантной производной дает тензорную величину на ранг выше, где связность входит в сумму членов по каждому из индексов также, как и для индекса вектора или ковектора. В частности, для метрики

$$\nabla_\gamma g_{\mu\nu} = \partial_\gamma g_{\mu\nu} - g_{\mu\beta} \Gamma_{\gamma\nu}^\beta - g_{\beta\nu} \Gamma_{\gamma\mu}^\beta, \quad (5.45)$$

и, подставляя символы Кристоффеля, найдем

$$\nabla_\gamma g_{\mu\nu} = \partial_\gamma g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \{ \partial_\nu g_{\mu\gamma} + \partial_\gamma g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\gamma} \} - \frac{1}{2} \{ \partial_\mu g_{\nu\gamma} + \partial_\gamma g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\mu\gamma} \} \equiv 0,$$

т.е. ковариантная производная метрики с метрической связностью тождественно обращается в нуль.

Задача 29. Покажите, что свертка в символе Кристоффеля $\Gamma_{\beta\gamma}^\gamma$ вычисляется как частная производная вида

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\gamma = \frac{1}{2} \partial_\beta \ln g,$$

где g — детерминант метрики, $g = \det \hat{g}$.

Задача 30. Вычислите символы Кристоффеля для евклидовой метрики в сферических координатах.

Задача 31. Найти закон преобразования метрической связности при замене координат. Убедитесь, что симметричная связность не является тензором. Докажите, что кручение — это тензор.

Задача 32. Докажите тождество для ковариантной дивергенции вектора

$$\nabla_\alpha A^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\alpha \{ \sqrt{g} A^\alpha \}$$

где $g = \det g_{\alpha\beta}$, т. е. детерминант метрики, для которого $\delta g = g g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}$.

Задача 33. С помощью задачи 32 докажите, что квадрат оператора ∇ сводится к оператору Бельтрами–Лапласа:

$$g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\alpha \left\{ g^{\alpha\beta} \sqrt{g} \partial_\beta \right\},$$

по крайней мере, при действии на скаляр.

Задача 34. Вычислите оператор Лапласа в сферических координатах из выражения для оператора Бельтрами.

Задача 35. В ортогональной системе координат метрика имеет диагональный вид $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(H_1^2, H_2^2, H_3^2)$, где H_k называют коэффициентами Ламé. Запишите оператор Бельтрами–Лапласа через коэффициенты Ламé.

Рассмотрим теперь производную Ли вдоль направления

$$\xi = dx^\mu \epsilon_\mu.$$

Здесь dx^μ — это бесконечно малые *постоянные* коэффициенты разложения вектора ξ по базисным векторам, так что в силу линейности производной Ли

$$\mathcal{L}_\xi a^\alpha = dx^\mu \epsilon_\mu^\gamma \nabla_\gamma a^\alpha = dr^\gamma \nabla_\gamma a^\alpha,$$

где мы воспользовались разложением по базису ϵ_μ^γ и ввели естественное обозначение $dr^\gamma = \xi^\gamma = r'^\gamma - r^\gamma = dx^\mu \epsilon_\mu^\gamma$. Значит, согласно определению производной Ли (5.18) и связи производной Ли с ковариантной производной (5.33)

$$a^\alpha(\mathbf{r}') \partial'_\alpha = (a^\alpha(\mathbf{r}) + dr^\gamma \nabla_\gamma a^\alpha(\mathbf{r})) \partial_\alpha. \quad (5.46)$$

Это соотношение записывают в упрощенной форме

$$a^\alpha(\mathbf{r}') \mapsto a^\alpha(\mathbf{r}) + dr^\gamma \nabla_\gamma a^\alpha(\mathbf{r}), \quad (5.47)$$

и даже вместо знака перехода от вектора в штрихованном базисе к вектору в исходной базисе « \mapsto » иногда пишут знак равенства « $=$ », что, конечно, является жаргоном. На самом же деле, связь (5.46) по определению параллельного переноса (5.21) означает, что поле $a^\alpha(\mathbf{r}')$ — это параллельный перенос поля $a^\alpha(\mathbf{r}) + dr^\gamma \nabla_\gamma a^\alpha(\mathbf{r})$, причем значения компонент этих двух векторов совпадают.

Задача 36. Выведите бесконечно малые изменения базисных векторов в сферических координатах, используя выражение для параллельного переноса так, что $d\mathbf{e}_\mu^\alpha \equiv dr^\gamma \nabla_\gamma \mathbf{e}_\mu^\alpha$. Здесь $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta + \mathbf{e}_\phi r \sin \theta d\phi$, причем $(d\mathbf{r})^r = dr$, $(d\mathbf{r})^\theta = d\theta$, $(d\mathbf{r})^\phi = d\phi$, откуда отличные от нуля компоненты базисных векторов получаются равными

$$(\mathbf{e}_r)^r = 1, \quad (\mathbf{e}_\theta)^\theta = \frac{1}{r}, \quad (\mathbf{e}_\phi)^\phi = \frac{1}{r \sin \theta}.$$

Используйте выражения для символов Кристоффеля, полученные в задаче 30. Убедитесь, что в итоге получается результат, записанный в (5.9).

Итак, мы ввели ковариантную производную, которая согласована с производной Ли по направлению. Из этого построения ясно, что можно ввести и другие ковариантные производные, определив их в терминах связности $A_{\gamma\beta}^\alpha$, например для вектора

$$\nabla_\gamma a^\alpha(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\gamma a^\alpha + A_{\gamma\beta}^\alpha a^\beta, \quad (5.48)$$

где связность можно записать в виде суммы симметричных символов Кристоффеля $\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$ (связность Леви-Чивиты), кручения $T_{\gamma\beta}^\alpha$ и тензора третьего ранга $A_{\gamma\beta}^\alpha$

$$A_{\gamma\beta}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha + T_{\gamma\beta}^\alpha + A_{\gamma\beta}^\alpha.$$

§c Векторы Киллинга

В выражении для производной Ли метрики по направлению ξ (см. (5.23)) подставим вместо частных производных вектора выражение через ковариантную производную и связность

$$\partial_\alpha \xi^\gamma = \nabla_\alpha \xi^\gamma - \xi^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\gamma,$$

так что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} &= \xi^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + g_{\gamma\beta} \partial_\alpha \xi^\gamma + g_{\alpha\gamma} \partial_\beta \xi^\gamma = \\ &= \xi^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + g_{\gamma\beta} \left\{ \nabla_\alpha \xi^\gamma - \xi^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\gamma \right\} + g_{\alpha\gamma} \left\{ \nabla_\beta \xi^\gamma - \xi^\lambda \Gamma_{\beta\lambda}^\gamma \right\}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Но так как ковариантная производная метрики равна нулю, можно внести метрику под знак ковариантного дифференцирования,

$$g_{\gamma\beta} \nabla_\alpha \xi^\gamma = \nabla_\alpha \{g_{\gamma\beta} \xi^\gamma\} = \nabla_\alpha \xi_\beta,$$

в то время как

$$\begin{aligned} &- g_{\gamma\beta} \xi^\lambda \Gamma_{\alpha\lambda}^\gamma - g_{\gamma\alpha} \xi^\lambda \Gamma_{\beta\lambda}^\gamma = \\ &= -\frac{1}{2} \xi^\lambda \{ \partial_\alpha g_{\beta\lambda} + \partial_\lambda g_{\alpha\beta} - \partial_\beta g_{\alpha\lambda} + \partial_\lambda g_{\beta\alpha} + \partial_\alpha g_{\beta\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta} \} = -\xi^\lambda \partial_\lambda g_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

В итоге, тензор производной Ли для метрики выражается через ковариантные производные вектора направления ξ ,

$$\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha. \quad (5.50)$$

Вектором Киллинга называют вектор сдвига, для которого производная Ли метрики обращается в нуль:

$$\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0. \quad (5.51)$$

Таким образом, вектор Киллинга задает бесконечно малые преобразования координат, относительно которых метрика остается инвариантной, т. е. инфинитезимальные преобразования изометрии. Решения уравнения (5.51) используются для поиска симметрий пространств со сложной метрикой.

Задача 37. Найдите векторы Киллинга для евклидовой метрики трехмерного пространства в декартовых координатах.

22 Ковариантные уравнения Эйлера–Лагранжа и принцип эквивалентности масс

Уравнения Эйлера–Лагранжа в ковариантном виде, принцип эквивалентности инерционной и гравитационной массы, гравитационный потенциал как причина зависимости хода времени от точки в пространстве, гравитационное притяжение и псевдоевклидова сигнатура метрики пространства–времени.

В криволинейных координатах действие нерелятивистской частицы – скаляр – записывается в виде

$$S = \int dt \left\{ \frac{1}{2} m g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) v^\alpha v^\beta - U(\mathbf{r}) \right\}. \quad (5.52)$$

Из-за того, что метрика теперь зависит от координат, производная функции Лагранжа равна

$$\partial_\gamma L = -\partial_\gamma U + \frac{1}{2} m v^\alpha v^\beta \partial_\gamma g_{\alpha\beta},$$

что приведет к уравнениям Эйлера–Лагранжа,

$$m \frac{d}{dt} g_{\gamma\beta} v^\beta = -\partial_\gamma U + \frac{1}{2} m v^\alpha v^\beta \partial_\gamma g_{\alpha\beta}. \quad (5.53)$$

Рассмотрим метрику как функцию координат на траектории⁹ $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}[\mathbf{r}(t)]$, а скорость¹⁰ как $v = v[\mathbf{r}(t), t]$. Тогда

$$\frac{d}{dt} g_{\gamma\beta} v^\beta = \partial_t v_\gamma + \frac{dr^\alpha}{dt} \partial_\alpha \{ g_{\gamma\beta} v^\beta \} = \partial_t v_\gamma + v^\alpha \{ v^\beta \partial_\alpha g_{\gamma\beta} + g_{\gamma\beta} \partial_\alpha v^\beta \}.$$

⁹Мы полагаем, что тензор метрики задан как поле, зависящее от координат, но сами координаты рассматриваем как точку на траектории.

¹⁰Мы считаем, что скорость задана как поле в точке \mathbf{r} в момент времени t , но при этом и сама точка расположена на траектории.

Так как тензор $v^\alpha v^\beta$ симметричен по перестановкам индексов, в его свертку с другим тензором даст вклад только симметричная часть тензора:

$$v^\alpha v^\beta \partial_\alpha g_{\gamma\beta} = v^\alpha v^\beta \frac{1}{2} \{ \partial_\alpha g_{\gamma\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} \}.$$

Собирая все члены с массой, найдем

$$m \partial_t v_\gamma + m v^\alpha \left(g_{\gamma\beta} \partial_\alpha v^\beta + v^\beta \frac{1}{2} \{ \partial_\alpha g_{\gamma\beta} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} \} \right) = -\partial_\gamma U. \quad (5.54)$$

Здесь легко заметить символы Кристоффеля, так что

$$m \partial_t v_\gamma + m v^\alpha (g_{\gamma\beta} \partial_\alpha v^\beta + v^\beta \Gamma_{\gamma|\alpha\beta}) = -\partial_\gamma U, \quad (5.55)$$

т. е.

$$\begin{aligned} m \partial_t v_\gamma + m v^\alpha g_{\gamma\beta} \left(\partial_\alpha v^\beta + v^{\beta'} \Gamma_{\alpha\beta'}^\beta \right) &= -\partial_\gamma U \Rightarrow \\ m \partial_t v_\gamma + m v^\alpha g_{\gamma\beta} \nabla_\alpha v^\beta &= -\partial_\gamma U. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Поскольку ковариантная производная метрики с метрической связностью равна нулю, а частная производная скаляра совпадает с ковариантной производной скаляра, приходим к ковариантным уравнениям Эйлера–Лагранжа для нерелятивистской частицы в криволинейных координатах:

$$m \partial_t v_\gamma + m v^\alpha \nabla_\alpha v_\gamma = -\nabla_\gamma U. \quad (5.57)$$

Принцип эквивалентности инерционной и гравитационной масс означает, что потенциальная энергия частицы в гравитационном поле задается в виде

$$U_{\text{gr}} = m \phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}), \quad (5.58)$$

где m та же масса, что и в определении кинетического импульса частицы, а $\phi_{\text{gr}}(\mathbf{r})$ — это гравитационный потенциал в системе. Тогда уравнения Эйлера–Лагранжа в гравитационном поле не содержат массы:

$$\begin{aligned} \partial_t v_\gamma + v^\alpha \nabla_\alpha v_\gamma &= -\nabla_\gamma \phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}) \Rightarrow \\ \partial_t v_\gamma + v^\alpha \partial_\alpha v_\gamma &= -\nabla_\gamma \phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}) + v^\alpha v_\lambda \Gamma_{\gamma\alpha}^\lambda = -\nabla_\gamma \phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}) + v^\alpha v^\lambda \Gamma_{\lambda|\gamma\alpha}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Заметим теперь, что если, как мы уже делали прежде, ввести столбец в 4-мерном пространстве-времени, $x^\mu = (x^0, \mathbf{r})^T$, где $\mu = \{0, \alpha\}$, $\alpha = \{\bar{1}, \bar{3}\}$, $x^0 = ct$, то, так как

$$v^0 = \frac{d(ct)}{dt} = c,$$

в левой части (5.59) стоит выражение

$$\partial_t v_\gamma + v^\alpha \partial_\alpha v_\gamma = c \partial_0 v_\gamma + v^\alpha \partial_\alpha v_\gamma = v^\mu \partial_\mu v_\gamma,$$

но однако $\partial_\mu v_\gamma$ — это не тензор, тензором является $\nabla_\mu v_\gamma$, а значит, в правой части (5.59) может возникнуть слагаемое вида

$$v^0 v^0 \Gamma_{0|\gamma 0} = c^2 \Gamma_{0|\gamma 0},$$

Подобный член имеет вид, сходный с вкладом гравитационного потенциала. В самом деле, введем метрику в виде двух блоков, временного и пространственного, с временной компонентой g_{00} : $g_{\mu\nu} = (g_{00}, g_{\alpha\beta})$. При этом мы будем считать, что временная компонента, которая задает ход времени, может зависеть от координат, а линейки, которые определяют пространственные компоненты метрики, не зависят от времени, т. е.

$$g_{\mu\nu} = (g_{00}(\mathbf{r}), g_{\alpha\beta}(\mathbf{r})).$$

Зависимость хода времени от координат будем считать бесконечно малой¹¹:

$$g_{00} = \pm \left(1 + \frac{2}{c^2} \phi(\mathbf{r}) \right) \rightarrow \pm 1, \quad \text{при } c^2 \rightarrow \infty, \quad (5.60)$$

а значит, обратная метрика

$$g^{\mu\nu} = (g^{00}, g^{\alpha\beta}), \quad g^{00} \approx \pm \left(1 - \frac{2}{c^2} \phi(\mathbf{r}) \right) \rightarrow \pm 1. \quad (5.61)$$

В пределе (5.60) при реализации знака «плюс» говорят о евклидовой геометрии 4-мерного пространства, а при выборе знака «минус» — о псевдоевклидовой геометрии пространства-времени. Обратите внимание на то, что размерность величины искажения хода времени $\phi(\mathbf{r})$ задана в (5.60) такой же, как и у гравитационного потенциала: это — квадрат скорости,

$$[\phi(\mathbf{r})] = [\phi_{\text{gr}}(\mathbf{r})] = [v]^2.$$

Размерность гравитационного потенциала легко установить, исходя из его связи с потенциальной энергией, так как

$$[E] = [m][\phi_{\text{gr}}] = [m][v]^2.$$

Поэтому предел $c^2 \rightarrow \infty$ имеет смысл малости безразмерной величины

$$\frac{\phi}{c^2} \rightarrow 0.$$

Вычислим теперь

$$v^\mu \nabla_\mu v_\gamma = v^0 (\partial_0 v_\gamma - v_\nu \Gamma_{0\gamma}^\nu) + v^\alpha (\partial_\alpha v_\gamma - v_\nu \Gamma_{\alpha\gamma}^\nu).$$

В этом выражении

$$v^0 \partial_0 v_\gamma [\mathbf{r}, t] \equiv \partial_t v_\gamma,$$

а символы Кристоффеля, отличные от нуля, — это, как и прежде, в криволинейных координатах $\Gamma_{\alpha\gamma}^\beta$ и дополнительно¹²

$$\Gamma_{0\gamma}^0 = \pm \frac{1}{2} \partial_\gamma g_{00} = \frac{1}{c^2} \partial_\gamma \phi.$$

¹¹При $g_{00} \equiv \pm 1$ воспроизводятся обычные уравнения движения в криволинейных координатах.

¹²Самостоятельно покажите, что в сделанных предположениях о статической метрике, имеющей блочный вид: отдельно временные и координатные компоненты, т. е. $g_{0\alpha} \equiv 0$, — компоненты связности с одним временным индексом обращаются в нуль, $\Gamma_{0|\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha|0\beta} \equiv 0$.

В итоге,

$$v^\mu \nabla_\mu v_\gamma = \partial_t v_\gamma - v^0 v_0 \frac{1}{c^2} \partial_\gamma \phi + v^\alpha \nabla_\alpha v_\gamma = \partial_t v_\gamma \mp \partial_\gamma \phi + v^\alpha \nabla_\alpha v_\gamma. \quad (5.62)$$

Следовательно, уравнение в 4-мерном пространстве-времени вида

$$v^\mu \nabla_\mu v_\gamma = 0, \quad (5.63)$$

с

$$\phi(\mathbf{r}) = \mp \phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}),$$

тождественно уравнению движения частицы в гравитационном поле! Введем инвариант — интервал 4-мерного пространства-времени

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\alpha\beta} dr^\alpha r^\beta + g_{00} dx^0 dx^0. \quad (5.64)$$

С учетом закона сохранения энергии при движении в гравитационном поле

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2} v^\alpha v_\alpha + \phi_{\text{gr}}, \quad (5.65)$$

интервал на траектории движения примет вид

$$\begin{aligned} ds_{\text{traj.}}^2 &= dt^2 \left\{ v^\alpha v_\alpha \pm c^2 \left(1 \mp \frac{2}{c^2} \phi_{\text{gr.}} \right) \right\} = \\ &= \pm c^2 dt^2 \left\{ 1 \pm 2 \left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{E}{mc^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Определим инвариантное собственное время

$$d\tau^2 = \pm \frac{1}{c^2} ds^2. \quad (5.67)$$

Собственное время на траектории частицы в гравитационном поле

$$d\tau_{\text{traj.}}^2 = dt^2 \left(1 \pm 2 \left(\frac{v^2}{c^2} - \frac{E}{mc^2} \right) \right). \quad (5.68)$$

В частности, поскольку

$$\frac{E}{mc^2} \leq \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2},$$

заключаем, что при выборе положительного знака у временной компоненты метрики ход времени у движущегося наблюдателя ускоряется, а при выборе отрицательного знака ход времени замедляется. При этом знак можно зафиксировать из физических соображений:

- будем считать, что вдали от центра гравитации поле равно нулю, а значит ход часов совпадает с ходом в пустом пространстве без гравитации,
- гравитация является притяжением, а следовательно, гравитационный потенциал отрицательный и он падает при приближении к центру гравитации, так что при свободном падении скорость частицы возрастает с приближением к центру тяготения.

Сравним собственное время для двух наблюдателей: первый ближе к гравитационному центру, чем второй, $r_1 < r_2$. Пусть у обоих наблюдателей есть световые часы с одинаковым периодом dt . Первый наблюдатель посыпает второму свет из своих часов, а второй измеряет период колебаний пришедшего к нему луча света по своим часам. Сравним показания часов:

$$d\tau_1^2 = \left(1 \mp \frac{2\phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}_1)}{c^2}\right) dt^2, \quad d\tau_2^2 = \left(1 \mp \frac{2\phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}_2)}{c^2}\right) dt^2$$

где dt – собственное время удаленного наблюдателя, т. е.

$$d\tau_1^2 = d\tau_2^2 \frac{1 \mp \frac{2\phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}_1)}{c^2}}{1 \mp \frac{2\phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}_2)}{c^2}}.$$

Но, так как луч по пути от первого наблюдателя ко второму потратил энергию на преодоление силы тяжести, его энергия, а значит, и частота уменьшились, а период стал больше:

$$d\tau_2 > d\tau_1, \quad 0 > \phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}_2) > \phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}_1).$$

В итоге, допустимым является только отрицательный знак:

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2}{c^2} \phi_{\text{gr}}(\mathbf{r})\right). \quad (5.69)$$

Другими словами, если для удаленного от центра тяготения наблюдателя, находящегося в покое, гравитационный потенциал принять равным нулю¹³ $\phi_{\text{gr}}(\infty) = 0$, то собственное время такого наблюдателя $d\tau[\infty] \equiv dt$, а собственное время наблюдателя, покоящегося в гравитационном поле, $d\tau^2[\mathbf{r}] = (1 \mp 2\phi_{\text{gr}}(\mathbf{r})/c^2) dt^2[\infty]$, а значит, для потенциала гравитационного притяжения, когда $\phi_{\text{gr}}(\mathbf{r}) < 0$, ход времени для наблюдателя в гравитационном поле замедляется только в случае псевдоевклидовой метрики пространства-времени.

Если гравитационное поле отсутствует и частица является свободной, то интервал равен

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\alpha\beta} dr^\alpha r^\beta - c^2 dt^2. \quad (5.70)$$

Отсюда следует, что на траектории собственное время имеет смысл только для сигналов, скорость движения которых не превышает предельного значения c :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Rightarrow d\tau^2 = dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \geq 0. \quad (5.71)$$

Исходя из принципа эквивалентности инертной и гравитационной массы, с помощью методов дифференциальной геометрии мы установили, что в заданной точке пространства, вообще говоря, невозможно отличить гравитационное ускорение свободного падения $-\nabla_\gamma \phi_{\text{gr}}(\mathbf{r})$ от ускорения, которое возникает из-за введения криволинейных координат пространства-времени, т. е. метрики, зависящей от координат, и как следствие, ненулевых символов Кристоффеля.

¹³Если гравитационный потенциал бесконечно далеко от центра гравитации принять равным константе, то можно провести замену единиц времени так, чтобы $g_{00}(\infty) = 1$.

Из того факта, что гравитация является притяжением и кинетическая энергия, а значит, и частота уменьшаются при перемещении частицы в область с большим гравитационным потенциалом, следует, что метрика имеет псевдоевклидову сигнатуру: тензор метрики в 4-мерном пространстве-времени в декартовых координатах и бесконечно малых гравитационных полях становится диагональным¹⁴,

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1).$$

Для свободной частицы этот принцип приводит к существованию пространства-времени Минковского! Изометрии метрики Минковского образуют группу Пуанкаре, которая включает в себя и преобразования при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Эти вопросы будут рассматриваться на других спецкурсах.

Задача 38. Запишите уравнение Гамильтона–Якоби для квантов света – безмассовых частиц – и решите его для траектории, которая из бесконечности проходит возле края Солнца при $r = R_\odot$, вычислив угол отклонения от начальной прямой на бесконечности в будущем

$$\delta\phi = \frac{4GM_\odot}{c^2 R_\odot}$$

для метрики Шварцшильда, задающей интервал в сферических координатах

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5.72)$$

где радиус Шварцшильда

$$r_g = \frac{2GM_\odot}{c^2}$$

задает положение горизонта черной дыры с массой M_\odot . Учтите, что движение происходит в статическом сферически симметричном гравитационном поле, так что сохраняются энергия и момент вращения частиц света. Положите, что $r_g/R_\odot \ll 1$. Оцените $\delta\phi$ численно.

Отметим, что итоговое выражение для уравнения движения по инерции

$$v^\mu \nabla_\mu v_\nu = 0 \quad (5.73)$$

при заданной метрике в криволинейных голономных координатах, т. е. при $\nabla_\mu g_{\nu\nu'} = 0$, может быть записано в виде

$$v^\mu \nabla_\mu v^\nu = v^\mu \nabla_\mu (g_{\nu\nu'} v^{\nu'}) = g_{\nu\nu'} v^\mu \nabla_\mu v_{\nu'} = 0. \quad (5.74)$$

Решения уравнения (5.74) называются *геодезическими*, а само уравнение – уравнением геодезических линий.

Задача 39. Рассмотрите нулевую компоненту уравнения геодезических (5.74) при $\nu = 0$ с блочной статической метрикой (5.64) и покажите, что в нерелятивистском пределе $1/c \rightarrow 0$

$$v^\mu \nabla_\mu v^0 = \mathcal{O}\left(\frac{v}{c}\right) \rightarrow 0.$$

¹⁴Под сигнатурой, вообще говоря, понимают набор знаков собственных значений метрики, скажем $(-, +, +, +)$, как это имеет место в случае псевдоевклидовой геометрии.

Задача 40. Перейдите от декартовых координат (x, x_0) с интервалом $ds^2 = dx^2 - dx_0^2$ к координатам равноускоренной системы отсчета (y, x_0) так, что $x = y + at^2/2$, и найдите интервал

$$ds^2 = dy^2 + 2dy dx_0 \frac{ax_0}{c^2} - dx_0^2 \left(1 + 2\frac{a(y-x)}{c^2}\right).$$

Покажите, что уравнения движения в ускоренной системе отсчета отвечают движению с ускорением инерции. Как собственное время ускоренного наблюдателя отличается от времени x_0 ?

Задача 41. Выведите уравнения геодезических для релятивистской частицы с действием

$$S = -m \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu} = -m \int d\tau \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}},$$

исходя из уравнений Эйлера–Лагранжа с релятивистски инвариантным параметром эволюции τ и зависящей от координат метрикой пространства-времени $g_{\mu\nu}(x)$ с сигнатурой $(+, -, -, -)$.

Таким образом, вполне ясный физический принцип эквивалентности инертной и гравитационной масс означает, что с точки зрения уравнений движения точечной частицы гравитационные силы математически совершенно неотличимы от введения криволинейной метрики пространства-времени. В частности, может случиться так, что существуют такие координаты, в которых в данной точке суммарное ускорение частицы в точности будет равно нулю. Однако следует иметь ввиду, что в евклидовом пространстве метрика всюду приводится в декартовых координатах инерциальной системы отсчета к единичной матрице, так что гравитационное ускорение вполне идентифицируемо. Однако можно поставить вопрос и о введении неевклидова пространства.

23 Тензор Римана

Тензор кривизны Римана, параллельный перенос вектора по бесконечно малому замкнутому контуру, тензор Риччи, скалярная кривизна, ковариантная формулировка принципа относительности Галилея.

Если пространство евклидово, то существует декартов базис, в котором метрическая связность обращается в нуль во всех точках пространства и ковариантная производная сводится к частной производной $\nabla_\alpha \mapsto \partial_\alpha$, а значит,

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) a_\gamma \mapsto (\partial_\alpha \partial_\beta - \partial_\beta \partial_\alpha) a_\gamma \equiv 0,$$

поскольку частное дифференцирование перестановочно. Поэтому, для того чтобы узнать, является ли пространство евклидовым в заданных координатах, необходимо просто вычислить действие коммутатора ковариантных производных на вектор, что даст тензор третьего ранга:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a_\gamma \equiv (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) a_\gamma. \quad (5.75)$$

Буквально

$$\nabla_\beta a_\gamma = \partial_\beta a_\gamma - a_\lambda \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda,$$

и вычисление ковариантной производной ковариантного тензора второго ранга $t_{\beta\gamma} = \nabla_\beta a_\gamma$

$$\nabla_\alpha t_{\beta\gamma} = \partial_\alpha t_{\beta\gamma} - t_{\lambda'\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda'} - t_{\beta\lambda'} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda'}$$

сводится к

$$\nabla_\alpha(\nabla_\beta a_\gamma) = \partial_\alpha(\nabla_\beta a_\gamma) - (\nabla_{\lambda'} a_\gamma)\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda'} - (\nabla_\beta a_{\lambda'})\Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda'}$$

и дает

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta a_\gamma = \partial_\alpha(\partial_\beta a_\gamma - a_\lambda\Gamma_{\beta\gamma}^\lambda) - (\partial_{\lambda'} a_\gamma - a_\lambda\Gamma_{\lambda'\gamma}^\lambda)\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda'} - (\partial_\beta a_{\lambda'} - a_\lambda\Gamma_{\beta\lambda'}^\lambda)\Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda'},$$

где в первом слагаемом множитель $\partial_\alpha\partial_\beta a_\gamma$ симметричен по перестановкам индексов $\alpha \leftrightarrow \beta$, во втором слагаемом символ Кристоффеля также симметричен, откуда заключаем, что при вычислении антисимметричной величины $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a_\gamma = \nabla_\alpha\nabla_\beta a_\gamma - \nabla_\beta\nabla_\alpha a_\gamma$ эти вклады сокращаются, и

$$\begin{aligned} [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a_\gamma &= -\partial_\alpha(a_\lambda\Gamma_{\beta\gamma}^\lambda) + \partial_\beta(a_\lambda\Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda) - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda'}\partial_\beta a_{\lambda'} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda'}\partial_\alpha a_{\lambda'} + \\ &\quad + a_\lambda(\Gamma_{\beta\lambda'}^\lambda\Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda'} - \Gamma_{\alpha\lambda'}^\lambda\Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda'}). \end{aligned}$$

В итоге, все члены с частными производными ковектора сокращаются, и

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a_\gamma = a_\lambda(\partial_\beta\Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda - \partial_\alpha\Gamma_{\beta\gamma}^\lambda + \Gamma_{\beta\lambda'}^\lambda\Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda'} - \Gamma_{\alpha\lambda'}^\lambda\Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda'}). \quad (5.76)$$

Тензор четвертого ранга

$$R_{\gamma\alpha\beta}^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\alpha\Gamma_{\beta\gamma}^\lambda - \partial_\beta\Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda + \Gamma_{\alpha\lambda'}^\lambda\Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda'} - \Gamma_{\beta\lambda'}^\lambda\Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda'} \quad (5.77)$$

называют тензором кривизны Римана: в случае метрической связности действие коммутатора ковариантных производных на ковектор выражается через тензор Римана,

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a_\gamma = -a_\lambda R_{\gamma\alpha\beta}^\lambda. \quad (5.78)$$

Аналогично устанавливаем, что в случае вектора

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a^\gamma = a^\lambda R_{\lambda\alpha\beta}^\gamma. \quad (5.79)$$

Задача 42. При наличии кручения следует заменить симметричную связность на

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta}^\lambda = \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda + T_{\alpha\beta}^\lambda.$$

Докажите, что в этом случае коммутатор ковариантных производных включает в себя еще и тензор кручения, так что

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a_\gamma = -a_\lambda R_{\gamma\alpha\beta}^\lambda - T_{\alpha\beta}^\lambda \nabla_\lambda a_\gamma.$$

Как видим, коммутатор ковариантных производных на векторах выражается через ковариантную производную вектора с кручением, но член с тензором кривизны не включает в себя ковариантную производную вектора, как говорят, этот член представляет собой центральный заряд для коммутатора операторов ковариантной производной.

Обычно тензор Римана записывают в ковариантном виде

$$R_{\gamma\lambda\alpha\beta} = g_{\gamma\gamma'} R_{\lambda\alpha\beta}^{\gamma'}.$$

Этот тензор по построению антисимметричен по перестановкам нижних индексов $\alpha \leftrightarrow \beta$. При подстановке метрической связности устанавливается также, что он антисимметричен и относительно перестановки $\gamma \leftrightarrow \lambda$, а также симметричен относительно перестановки пар индексов $\{\gamma\lambda\} \leftrightarrow \{\alpha\beta\}$.

Тензор Риччи задается сверткой тензора Римана

$$R_{\lambda\beta} = R_{\lambda\alpha\beta}^{\alpha} = g^{\gamma\alpha} R_{\gamma\lambda\alpha\beta}, \quad (5.80)$$

а скалярная кривизна

$$R = g^{\lambda\beta} R_{\lambda\beta}. \quad (5.81)$$

Задача 43. На сфере радиуса a (метрика: $dC^2 = a^2 \{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2\}$) вычислите тензоры Римана и Риччи, а также скалярную кривизну.

Итак, в евклидовом пространстве тензор Римана обращается в нуль тождественно, во всех точках. В римановом пространстве этот тензор отличен от тождественного нуля.

Наглядный геометрический смысл тензора кривизны становится виден, если вычислить ковектор, который получается при параллельном переносе следующим образом:

- перенос в точку $\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1$ с точностью до вкладов второго порядка малости¹⁵ дает ковектор

$$a_{\gamma}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1) \mapsto a_{\gamma}(\mathbf{r}) + dr_1^{\beta} \nabla_{\beta} a_{\gamma}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!} dr_1^{\beta} dr_1^{\alpha} \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha} a_{\gamma}(\mathbf{r}),$$

- последующий перенос в точку $[\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1] + d\mathbf{r}_2$ дает ковектор

$$\begin{aligned} a_{\gamma}([\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1] + d\mathbf{r}_2) &\mapsto a_{\gamma}(\mathbf{r}) + dr_1^{\beta} \nabla_{\beta} a_{\gamma}(\mathbf{r}) + dr_2^{\alpha} \nabla_{\alpha} a_{\gamma}(\mathbf{r}) + \\ &+ dr_2^{\alpha} dr_1^{\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} a_{\gamma}(\mathbf{r}) + \mathcal{O}(dr_1^{\alpha} dr_1^{\beta}) + \mathcal{O}(dr_2^{\alpha} dr_2^{\beta}), \end{aligned}$$

где символом $\mathcal{O}(dr^{\alpha} dr^{\beta})$ мы обозначили симметричные квадратичные вклады относительно сдвигов,

- аналогичный двухшаговый параллельный перенос в эту же точку $[\mathbf{r} + d\mathbf{r}_2] + d\mathbf{r}_1$ дает ковектор

$$\begin{aligned} a_{\gamma}([\mathbf{r} + d\mathbf{r}_2] + d\mathbf{r}_1) &\mapsto a_{\gamma}(\mathbf{r}) + dr_1^{\beta} \nabla_{\beta} a_{\gamma}(\mathbf{r}) + dr_2^{\alpha} \nabla_{\alpha} a_{\gamma}(\mathbf{r}) + \\ &+ dr_2^{\alpha} dr_1^{\beta} \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha} a_{\gamma}(\mathbf{r}) + \mathcal{O}(dr_1^{\alpha} dr_1^{\beta}) + \mathcal{O}(dr_2^{\alpha} dr_2^{\beta}), \end{aligned}$$

где симметричные вклады $\mathcal{O}(dr^{\alpha} dr^{\beta})$ в точности повторяют слагаемое в выражении с другим порядком параллельного переноса, так что

¹⁵ Ясно, что сдвиги по одному направлению можно складывать, так как $c_1 dr^{\alpha} \nabla_{\alpha} + c_2 dr^{\alpha} \nabla_{\alpha} = (c_1 + c_2) dr^{\alpha} \nabla_{\alpha}$, а значит, параллельный перенос по заданному направлению F_{\parallel} при действии на ковектор (и любой тензор) имеет свойство $F_{\parallel}(c + dc)a_{\gamma} = F_{\parallel}(dc)F_{\parallel}(c)a_{\gamma} = (1 + dc dr^{\alpha} \nabla_{\alpha})F_{\parallel}(c)a_{\gamma}$. Решение уравнения

$$dF_{\parallel}(c) = F_{\parallel}(c + dc) - F_{\parallel}(c) = dc dr^{\alpha} \nabla_{\alpha} F_{\parallel}(c)$$

при условии $F_{\parallel}(0) = 1$ имеет экспоненциальный вид

$$F_{\parallel}(1) = \exp\{dr^{\alpha} \nabla_{\alpha}\}.$$

- разность ковекторов, полученных переносом в одну и туже точку по разным путям, во втором порядке малости относительно сдвигов равна

$$\begin{aligned}\delta a_\gamma(\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2) \mapsto dr_2^\alpha dr_1^\beta [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] a_\gamma(\mathbf{r}) &= -dr_2^\alpha dr_1^\beta R_{\gamma\alpha\beta}^\lambda a_\lambda(\mathbf{r}) = \\ &= \frac{1}{2} (dr_1^\alpha dr_2^\beta - dr_1^\beta dr_2^\alpha) R_{\gamma\alpha\beta}^\lambda a_\lambda(\mathbf{r}),\end{aligned}$$

т. е. она пропорциональна тензору кривизны Римана и тензору площади ориентированного параллелограмма с образующими гранями, заданными векторами сдвигов,

$$d^2\sigma^{\alpha\beta} = dr_1^\alpha dr_2^\beta - dr_1^\beta dr_2^\alpha.$$

а значит,

$$\delta a_\gamma = \frac{1}{2} d^2\sigma^{\alpha\beta} R_{\gamma\alpha\beta}^\lambda a_\lambda. \quad (5.82)$$

К тому же результату мы придем, если произвести параллельный перенос вектора вдоль этого же параллелограмма в исходную точку: разность векторов до и после переноса задается (5.82). Таким образом, искривленное пространство означает изменение вектора после переноса по бесконечно малому замкнутому пути, причем результат переноса отличается на величину, пропорциональную тензору кривизны Римана и площади петли.

Задача 44. Докажите в общем случае ненулевого кручения, что имеет место следующее равенство для коммутатора производных Ли,

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}_\mu, \mathcal{L}_\nu] a^\alpha &= \frac{1}{2} (\epsilon_\mu^\gamma \epsilon_\nu^\beta - \epsilon_\mu^\beta \epsilon_\nu^\gamma) [\nabla_\gamma, \nabla_\beta] a^\alpha + \nabla_{\alpha'} a^\alpha (\mathcal{L}_\mu \epsilon_\nu^{\alpha'} - \mathcal{L}_\nu \epsilon_\mu^{\alpha'}) = \\ &= \epsilon_\mu^\gamma \epsilon_\nu^\beta [\nabla_\gamma, \nabla_\beta] a^\alpha + \nabla_{\alpha'} a^\alpha (\epsilon_\mu^\gamma \epsilon_\nu^\beta - \epsilon_\mu^\beta \epsilon_\nu^\gamma) (T_{\beta\gamma}^{\alpha'} - T_{\gamma\beta}^{\alpha'}).\end{aligned}$$

В курсе общей теории относительности свойства тензора кривизны исследуются более детально. В частности, устанавливаются тождества Бьянки для ковариантных производных тензора Римана, а также проводится классификация симметричных римановых пространств по Петрову (см. [15]).

§а Принцип относительности Галилея: общековариантная реинкарнация

Принцип эквивалентности законов природы для инерциальных систем теперь может быть сформулирован в наиболее общем виде, независимом от выбора способа измерения расстояний, который на математическом языке выглядит следующим образом:

Существуют инерциальные системы отсчета с идентичным ходом времени, в которых тензор Римана тождественно равен нулю во всем пространстве; законы природы в таких системах, записанные в ковариантной форме, эквивалентны, если изометрии метрики линейно зависят от времени.

Ясно, что равенство нулю тензора Римана означает, что существует переход от криволинейных координат к декартовым сразу во всем пространстве. Мы считаем криволинейные координаты не зависящими от времени, т. е. исключаем из рассмотрения неинерциальные системы отсчета. В декартовых координатах изометрии метрики нам известны, так что обратным преобразованием можно построить и изометрии исходной метрики в криволинейных координатах: изометрии никуда не исчезают при переходе к криволинейным координатам, так что и специальные преобразования Галилея по-прежнему существуют в исходных криволинейных координатах в виде изометрий, линейно зависящих от времени, но функционально имеющие иной явный вид. Этот вид можно установить, вычислив векторы Киллинга для заданной метрики с нулевым тензором Римана, и эта аналитическая задача может решаться в исходных координатах.

(5.B) Инвариантные интегралы

24 Ориентированное интегрирование

Интегрирование векторов по замкнутым путям и поверхностям, теоремы Гаусса и Стокса.

24.1 Теорема Гаусса

Рассмотрим интеграл вектора \mathbf{A} по замкнутой ориентированной поверхности $\Sigma = \partial V$, которая является границей объема V ,

$$\oint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d^2\Sigma.$$

Вектор элемента площади $d^2\Sigma$ ортогонален поверхности и направлен во вне объема.

Этот объем можно заполнить бесконечно малыми кубиками, так что интегралы по соприкасающимся граням кубика будут взаимно сокращаться, поскольку значение вектора на гранях одно и то же, а вектора площади граней направлены в противоположные стороны, и, в итоге, сумма интегралов по поверхности кубиков сводится к сумме по внешним граням, совпадающей с исходным интегралом по поверхности объема. Следовательно, для вычисления всего интеграла достаточно рассмотреть интеграл по поверхности бесконечно малого кубика ∂V_\square .

В точке \mathbf{r} поле имеет значение $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Тогда интеграл по поверхности кубика есть сумма по шести его граням (см. рис. 5.1, где указан порядок суммирования по граням)

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V_\square} \mathbf{A} \cdot d^2\Sigma &= -dx dy \mathcal{A}_z(\mathbf{r}) - dx dz \mathcal{A}_y(\mathbf{r}) - dy dz \mathcal{A}_z(\mathbf{r}) + \\ &\quad + dx dy \mathcal{A}_z(\mathbf{r} + dz \mathbf{e}_z) + dx dz \mathcal{A}_y(\mathbf{r} + dy \mathbf{e}_y) + \\ &\quad + dz dy \mathcal{A}_x(\mathbf{r} + dz \mathbf{e}_x) = \\ &= dx dy dz \{ \partial_x \mathcal{A}_x(\mathbf{r}) + \partial_y \mathcal{A}_y(\mathbf{r}) + \partial_z \mathcal{A}_z(\mathbf{r}) \} \\ &= dx dy dz \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_{V_\square} d^3r \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

В итоге, суммирование по бесконечно малым кубикам приводит к общей теореме Гаусса: поток вектора через замкнутую поверхность равен интегралу дивергенции вектора по объему, который охватывает эта поверхность,

$$\oint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d^2\Sigma = \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{A} = \int_V d^3r \operatorname{div} \mathbf{A}. \quad (5.83)$$

Пример прямого применения теоремы Гаусса мы приводим при рассмотрении уравнений Максвелла в разделе 27.2. С помощью этой теоремы закон Кулона можно записать в интегральной форме.

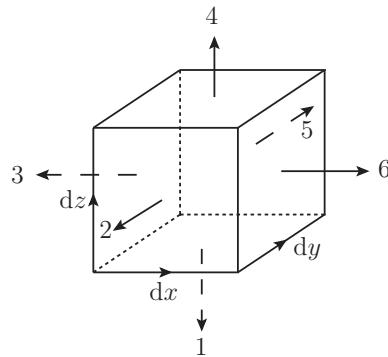


Рис. 5.1: Вычисление интеграла от вектора по поверхности бесконечно малого куба V_{\square} . Показаны члены суммирования 1, 2, 3, 4, 5, 6 с направлениями ориентированных площадей.

24.2 Теорема Стокса

Рассмотрим интеграл вектора \mathbf{A} по замкнутому контуру $C = \partial\Sigma$, который является границей поверхности Σ ,

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{C}.$$

Вектор элемента контура $d\mathbf{C}$ направлен по касательной к контуру.

Разобьем поверхность Σ на бесконечно малые квадраты. Тогда сумма интегралов вектора по границам этих квадратов сводится к исходному контурному интегралу, поскольку, как и в случае с разбиением объема на кубы в предыдущем разделе, интегралы по соприкасающимся ребрам квадратов дают в сумме нуль, так как значение поля на ребрах одинаково, но касательные взаимно противоположны направлена. Значит, достаточно рассмотреть интеграл от вектора по ребрам бесконечно малого квадрата $\partial\Sigma_{\square}$ на плоскости (x, y) с ориентацией контура против часовой стрелки (см. рис. 5.2, где указаны последовательные члены суммы в интеграле):

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Sigma_{\square}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{C} &= +dx \mathcal{A}_x(\mathbf{r}) - dy \mathcal{A}_y(\mathbf{r}) \\ &\quad - dx \mathcal{A}_x(\mathbf{r} + dy\mathbf{e}_y) + dy \mathcal{A}_y(\mathbf{r} + dx\mathbf{e}_x) = \\ &= dx dy \{ \partial_x \mathcal{A}_y(\mathbf{r}) - \partial_y \mathcal{A}_x(\mathbf{r}) \} = \\ &= d^2 \Sigma_z (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}))_z = \int_{\Sigma_{\square}} d^2 \Sigma \cdot \text{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Здесь мы согласовали ориентацию контура и элемента площади поверхности. Ясно, что точно такой же результат получится, если квадрат находится в других плоскостях: (y, z) или (z, x) , лишь бы обход по направляющим контура

образовывал с вектором ориентированной площади правую тройку, так что рассмотрение становится универсальным.

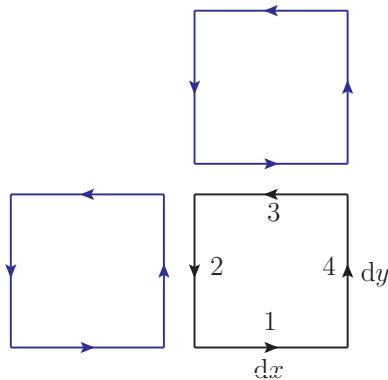


Рис. 5.2: Вычисление интеграла от вектора по контуру бесконечно малого квадрата Σ_{\square} . Показаны члены суммирования 1, 2, 3, 4 и соседние квадраты на поверхности.

А значит, имеет место теорема Стокса: интеграл вектора по замкнутому контуру равен потоку ротора этого вектора через поверхность, границей которой служит контур,

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{C} = \int_{\Sigma} d^2 \Sigma \cdot \text{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (5.84)$$

Пример прямого применения теоремы Стокса мы приводим при рассмотрении уравнений Максвелла в разделе 27.5. С помощью этой теоремы закон Фараdea об индукции можно записать в интегральной форме.

Задача 45. Используя теорему Стокса и полагая векторное поле равным $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{k} f(\mathbf{r})$, где вектор \mathbf{k} — постоянный, не равный нулю, преобразуйте интеграл по контуру в интеграл по поверхности

$$\oint_{\partial\Sigma} f(\mathbf{r}) d\mathbf{C} = - \int_{\Sigma} \text{grad} f(\mathbf{r}) \times d^2 \Sigma.$$

Задача 46. С помощью теоремы Гаусса покажите, что

$$\int_V \nabla f d^3 r = \oint_{\partial V} f d^2 \Sigma, \quad \int_V \text{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) d^3 r = - \oint_{\partial V} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \times d^2 \Sigma.$$

Задача 47. С помощью теоремы Стокса покажите, что

$$\int_S \nabla f \times d^2 \Sigma = - \oint_{\partial S} f d\mathbf{C}, \quad \oint_S (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) \cdot d^2 \Sigma = 0.$$

25 Внешний дифференциал

Дифференциальные формы в евклидовом пространстве, внешнее произведение и внешнее дифференцирование, дивергенция и ротор в терминах дифференциальных форм, замкнутые и точные дифференциальные формы, формула Ньютона–Лейбница для дифференциальных форм, инвариантная запись ориентированного объема в криволинейных координатах,

§а Дифференциальные формы в координатном подходе и интегрирование

При рассмотрении теорем Гаусса и Стокса следует подчеркнуть, что интегральное суммирование проводилось по инвариантам. Особенно это становится очевидно при вычислении потока вектора через ориентированную поверхность: скалярное произведение вектора на вектор бесконечно малого элемента ориентированной площади является инвариантом, а значит, и весь интеграл — скаляр. Инвариантное интегрирование играет ключевую роль в физике, а универсальным инструментом для построения таких инвариантов на основе ориентированных гиперповерхностей является формализм дифференциальных форм.

25.1 Ориентированная площадь и внешнее произведение

Бесконечно малый элемент площади $d^2\Sigma$ ориентированной поверхности в 3-мерном евклидовом пространстве задается как векторное произведение образующих параллелограмма da и db ,

$$d^2\Sigma = da \times db, \quad (5.85)$$

так как модуль этого вектора равен площади параллелограмма

$$|d^2\Sigma| = |da| |db| \sin \theta,$$

где θ — угол между образующими, и вектор площади направлен по нормали к поверхности (см. рис. 5.3). В индексных обозначениях

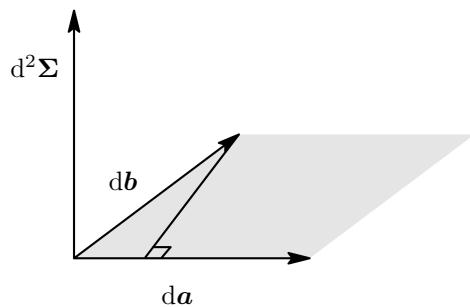


Рис. 5.3: Ориентированная площадь параллелограмма.

$$d^2\Sigma_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} da^\beta db^\gamma.$$

Составим скалярное произведение

$$\omega = \boldsymbol{\omega} \cdot d^2\Sigma = \omega^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma} da^\beta db^\gamma,$$

которое по построению является величиной, инвариантной при замене переменных (оно не зависит от поворотов и т.п.). Это скалярное произведение можно рассматривать как функцию, линейную по двум ее аргументам:

$$\omega = \omega(d\mathbf{a}, d\mathbf{b}).$$

Значения этой функции определяются тензором

$$\tilde{\omega}_{\beta\gamma} = \omega^\alpha \epsilon_{\alpha\beta\gamma},$$

антисимметричным по перестановке своих индексов. Из определения векторного произведения следует, что и ω — антисимметричная скалярная функция,

$$\omega(d\mathbf{a}, d\mathbf{b}) = -\omega(d\mathbf{b}, d\mathbf{a}).$$

Такую функцию $\omega(d\mathbf{a}, d\mathbf{b})$ называют *дифференциальной 2-формой*¹⁶ (по количеству аргументов). Обобщение на случай n -мерного пространства довольно прозрачно: необходимо построить скалярную полилинейную функцию, антисимметричную по своим аргументам; если аргументов $k \leq n$, то эта функция — k -форма. Смысль такой формы очевиден: она представляет собой ориентированную площадь k -мерной поверхности в n -мерном пространстве¹⁷ (объем k -мерного параллелепипеда), скалярно умноженную на тензор ранга $n-k$ (у ориентированной площади $n-k$ индексов, так как она получается при свертке n -мерного тензора Леви-Чивиты с k бесконечно малыми векторами образующих на поверхности).

Итак,

$$\omega(d\mathbf{a}, d\mathbf{b}) = \tilde{\omega}_{\beta\gamma} da^\beta db^\gamma,$$

где в произведение дифференциалов ненулевой вклад дает только антисимметричная часть

$$da^{[\beta} db^{\gamma]} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (da^\beta db^\gamma - da^\gamma db^\beta),$$

для чего вводят *внешнее произведение* векторов:

$$da^{[\beta} db^{\gamma]} \stackrel{\text{def}}{=} da^\beta \wedge db^\gamma, \quad (5.86)$$

так что $da^\beta \wedge db^\gamma = -db^\beta \wedge da^\gamma$, и

$$\omega = \omega(d\mathbf{a}, d\mathbf{b}) = \tilde{\omega}_{\beta\gamma} da^\beta \wedge db^\gamma. \quad (5.87)$$

Интеграл по поверхности Σ от скаляра

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{\omega} \cdot d^2\Sigma$$

¹⁶По построению значение 2-формы на одинаковых образующих равно нулю $\omega(d\mathbf{a}, d\mathbf{a}) = 0$.

¹⁷Ориентированная площадь k -мерной поверхности обращается в нуль, если размерность поверхности меньше k .

в новых обозначениях записывают как

$$\int_{\Sigma} \omega$$

где дифференциалы не указываются в явном виде, так как неявно они стоят в самой дифференциальной форме ω . Этот интеграл является суммой инвариантов, значит, и сам он — инвариант, т. е. его значение не изменяется при замене координат векторного пространства. Как видим, дифференциальные формы вводятся в связи с понятием ориентированной поверхности и интегрированием по поверхностям.

Подчеркнем, что в математической литературе часто используют не координатный подход, а инвариантный, в котором дифференциалы координат dx^α — это базисные векторы ковариантного пространства \mathfrak{h}^α , так что внешнее произведение определяется как антисимметрическая часть тензорного произведения

$$dx^\alpha \wedge dx^\beta = dx^\alpha \otimes dx^\beta - dx^\beta \otimes dx^\alpha, \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq 3,$$

и дифференциальная 2-форма записывается в виде упорядоченной суммы

$$\omega = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 3} \tilde{\omega}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

Опуская вопрос о согласовании нормировок, укажем, что введенная нами 2-форма в координатном представлении (5.87), где суммируются немые индексы без упорядочивания, представляет собой переход к свертке или, как говорят, к подстановке¹⁸ в дифференциальную форму бесконечно малых образующих на гиперплоскости,

$$\omega(d\mathbf{a}, d\mathbf{b}) = \tilde{\omega}_{\beta\gamma} da^\beta \wedge db^\gamma = i_{d\mathbf{b}}(i_{d\mathbf{a}} \omega), \quad (5.88)$$

а это скаляр (инвариант обратимых гладких преобразований координат). Ясно также, что интеграл дифференциальной формы по заданной гиперповерхности предполагает подстановку вместо базиса ковариантного пространства бесконечно малых образующих заданной гиперплощади.

Для полноты картины вводят также понятие 1-формы:

$$\lambda = \boldsymbol{\lambda} \cdot d\mathcal{C},$$

которая представляет собой элемент интеграла вектора по контуру.

¹⁸Согласно формальному определению операция *внутреннего дифференцирования* i_v или подстановка вектора v в k -форму $\omega^{(k)}$ переводит эту форму в $(k-1)$ -форму:

$$i_v \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{(k)} \mathfrak{h}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \mathfrak{h}^{\alpha_k} \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{(k)} v^{\alpha_1} \mathfrak{h}^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \mathfrak{h}^{\alpha_k}.$$

Чтобы подчеркнуть то, что подстановка сохраняет антисимметричность в свертке в координатном подходе уместно использовать все тот же символ внешнего произведения и после подстановки, что в явном виде указывает на антисимметризацию по индексам свертки:

$$i_v \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{(k)} \mathfrak{h}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \mathfrak{h}^{\alpha_k} \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^{(k)} v^{\alpha_1} \wedge \mathfrak{h}^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \mathfrak{h}^{\alpha_k}.$$

Объем. Тройка векторов $d\mathbf{a}$, $d\mathbf{b}$ и $d\mathbf{c}$ в 3-мерном пространстве задает ориентированный объем параллелепипеда

$$d^3V = (d\mathbf{a} \times d\mathbf{b}) \cdot d\mathbf{c} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} da^\alpha db^\beta dc^\gamma.$$

Соответствующую дифференциальную 3-форму можно записать в виде

$$\Omega = \Omega_0 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} da^\alpha \wedge db^\beta \wedge dc^\gamma,$$

где антисимметризованное внешнее произведение получается перестановками

$$da^\alpha \wedge db^\beta \wedge dc^\gamma = \frac{1}{3!} (da^\alpha db^\beta dc^\gamma - da^\beta db^\alpha dc^\gamma - da^\gamma db^\alpha dc^\beta - da^\alpha db^\gamma dc^\beta + da^\beta db^\gamma dc^\alpha + da^\gamma db^\alpha dc^\beta).$$

Интеграл по объему

$$\int \Omega$$

полностью задается скалярной величиной Ω_0 , что остается в силе и для пространства произвольной размерности.

25.2 Внешнее дифференцирование

Внешнее дифференцирование переводит 2-форму ω в 3-форму $d\omega$, так что

$$\omega = \tilde{\omega}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dy^\beta \rightarrow d\omega \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha\beta} \cdot 3 \cdot dz^\gamma \wedge dx^\alpha \wedge dy^\beta = 3 \partial_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dy^\beta \wedge dz^\gamma,$$

где фактор 3 учитывает количество возможностей, которыми можно записать дополнительно появившийся внешний дифференциал¹⁹, и мы дважды переставили дифференциал²⁰ dz^γ . Отличие от обычного частного дифференцирования состоит в том, что внешнее произведение дифференциалов оставляет при свертке только ненулевой вклад от антисимметризованной части производной от тензора, так что

$$d\omega = (\partial_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \tilde{\omega}_{\gamma\beta} - \partial_\beta \tilde{\omega}_{\alpha\gamma}) dx^\alpha \wedge dy^\beta \wedge dz^\gamma,$$

и фактор 3 сократился с фактором антисимметризации производной

$$\partial_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha\beta} \rightarrow \frac{1}{3} (\partial_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \tilde{\omega}_{\gamma\beta} - \partial_\beta \tilde{\omega}_{\alpha\gamma}).$$

Если вспомнить, что 2-форму можно задать вектором, так что $\tilde{\omega}_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma'} \omega^{\gamma'}$, а также учесть, что

$$dx^\alpha \wedge dy^\beta \wedge dz^\gamma = \frac{1}{3!} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} d^3V,$$

¹⁹Этот фактор введен по договоренности для удобства записи последующих формул, что читатель сможет оценить ниже.

²⁰Напомним, что каждая перестановка в силу антисимметрии внешнего произведения дает знак минус.

то внешний дифференциал запишется в виде

$$\begin{aligned} d\omega &= (\partial_\gamma \tilde{\omega}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \tilde{\omega}_{\gamma\beta} - \partial_\beta \tilde{\omega}_{\alpha\gamma}) \frac{1}{3!} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} d^3V = \\ &= 3\epsilon_{\alpha\beta\gamma'} \partial_\gamma \omega^{\gamma'} \frac{1}{3!} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} d^3V = \partial_\gamma \omega^\gamma d^3V. \end{aligned}$$

Поэтому интеграл 2-формы, т. е., интеграл от вектора ω по площади ориентированной поверхности, переходит при действии внешнего дифференцирования в интеграл от дивергенции вектора:

$$\int \omega \xrightarrow{d} \int d\omega \Leftrightarrow \int \omega \cdot d^2\Sigma \xrightarrow{d} \int \operatorname{div} \omega d^3V.$$

Приведенная процедура аналогичным образом справедлива и для форм других рангов. Например, для 1-формы

$$\lambda = \lambda_\alpha dx^\alpha \rightarrow d\lambda = (\partial_\alpha \lambda_\beta - \partial_\beta \lambda_\alpha) dx^\alpha \wedge dy^\beta.$$

Так как

$$dx^\alpha \wedge dy^\beta = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} d^2\Sigma_\gamma,$$

внешний дифференциал 1-формы выражается через ротор вектора, задающего эту 1-форму:

$$d\lambda = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha \lambda_\beta d^2\Sigma_\gamma = \operatorname{rot} \lambda \cdot d^2\Sigma.$$

Если определить 1-форму внешнего дифференцирования

$$D \stackrel{\text{def}}{=} dz^\gamma \partial_\gamma,$$

то внешний дифференциал задает внешнее произведение этой формы на форму ω ,

$$d\omega = D \wedge \omega.$$

Так как процедура антисимметризации не затрагивает свойств производной, внешний дифференциал обладает обычными свойствами дифференцирования, как то

$$d(\omega + \lambda) = d\omega + d\lambda,$$

но имеет место градуированное правило дифференцирования Лейбница,

$$d(\omega \wedge \lambda) = d\omega \wedge \lambda + (-1)^k \omega \wedge d\lambda = d\omega \wedge \lambda + (-1)^{kl} d\lambda \wedge \omega,$$

где внешнее произведение форм ранга k и l соответственно в компонентах имеет вид

$$\omega \wedge \lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(k+l)!}{k! l!} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \lambda_{\beta_1 \dots \beta_l} dx_1^{\alpha_1} \wedge \dots dx_k^{\alpha_k} \wedge dy_1^{\beta_1} \wedge \dots dy_l^{\beta_l},$$

причем фактор дает число возможных перестановок внешних дифференциалов с учетом симметрии по перестановкам, присутствовавшей в изначальных формах ω и λ , а фактор $(-1)^k$ возникает при перестановках внешних

дифференциалов координат. Как и для обычных производных, из-под знака внешнего дифференциала можно выносить постоянный множитель

$$d(c \cdot \omega) = c \cdot d\omega.$$

Если перечисленные выше свойства внешнего дифференциала были очевидными свойствами, присущими производной функции, то антисимметризация приводит и к нетривиальным последствиям.

Нильпотентность: квадрат внешнего дифференциала тождественно равен нулю:

$$d^2\omega \equiv 0. \quad (5.89)$$

В самом деле, для k -формы в компонентах квадрат внешнего дифференциала равен

$$d^2\omega = (k+1)(k+2) \partial_\alpha \partial_\beta \omega_{\gamma_1 \dots \gamma_k} dz^\alpha \wedge dy^\beta \wedge dx_1^{\gamma_1} \wedge \dots \wedge dx_k^{\gamma_k},$$

но частные производные перестановочные

$$\partial_\alpha \partial_\beta - \partial_\beta \partial_\alpha = 0,$$

и значит, антисимметризация приводит к тождественному занулению квадрата дифференциала формы.

Замкнутые и точные формы. Дадим также часто используемые определения.

Дифференциальная форма называется замкнутой, если

$$d\omega = 0.$$

Как мы видели, 2-форма является замкнутой, если определяющий ее вектор имеет нулевую дивергенцию (например, это означает, что вектор тока сохраняется).

Среди замкнутых форм выделяют точные, для которых замкнутость является следствием нильпотентности внешнего дифференциала:

$$\omega = d\lambda.$$

В примере с 2-формой определяющий ее вектор задается ротором вектора, так что дивергенция ротора тождественно зануляется.

В анализе на гладких многообразиях вводят класс эквивалентности замкнутых форм: две замкнутых k -формы принадлежат одному классу, если их разность — точная форма. Классы эквивалентности k -форм на гладком многообразии M составляют когомологию де Рама $H^k(M)$ этого многообразия.

Задача 48. Докажите формулу гомотопии (тождество Кардана) для производной Ли дифференциальной формы ω по направлению ξ

$$\mathcal{L}_\xi \omega = i_\xi d\omega + di_\xi \omega$$

на примере 1-формы. Из тождества Кардана с учетом нильпотентности внешнего дифференциала следует, что производная Ли по направлению и внешнее дифференцирование перестановочны на дифференциальных формах,

$$\mathcal{L}_\xi d\omega = d\mathcal{L}_\xi \omega = di_\xi d\omega.$$

§а Теоремы

Использование внешнего дифференциала позволяет по-новому записать известные теоремы об интегрировании по замкнутым поверхностям или по кривым. Приведем их в случае 3-мерного пространства, воспользовавшись представлением форм в виде векторов, их роторов и дивергенций, описанным выше.

Теорема Стокса. Интеграл вектора по замкнутому контуру C равен интегралу от ротора вектора по поверхности Σ с границей, лежащей на этом контуре $\partial\Sigma = C$ (поток ротора через поверхность):

$$\oint_{C=\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega, \quad (5.90)$$

где ω — 1-форма.

Теорема Гаусса–Остроградского. Интеграл вектора по замкнутой поверхности Σ (поток вектора через поверхность) равен интегралу от дивергенции вектора по объему V , ограниченному этой поверхностью $\partial V = \Sigma$:

$$\oint_{\Sigma=\partial V} \omega = \int_V d\omega, \quad (5.91)$$

где ω — 2-форма.

Для замкнутых форм правые части в тождествах вышеприведенных теорем равны нулю. Для точных форм интегралы в левых частях берутся от полных дифференциалов, так что они вычисляются тривиальным образом. Например, для 1-формы интеграл по контуру

$$\int_{x_0}^{x_1} d\lambda = \lambda(x_1) - \lambda(x_0),$$

и если контур замкнут (нет границы), то интеграл равен нулю.

Как видим, язык дифференциальных форм позволяет единным образом записывать многомерные теоремы о замкнутых гиперповерхностях, что и является достоинством его универсальности, которая становится необходимой для научных исследований на переднем крае науки, т. е. на острие «высоких технологий».

Отметим также, что на языке дифференциальных форм и внешнего дифференциала теоремы Стокса и Гаусса–Остроградского становятся совершенно прозрачными для их понимания, если их читать справа налево: интеграл от полной производной сводится к значению первообразной на границах интегрирования. По существу все эти теоремы — формула Ньютона–Лейбница для интегрирования полной производной.

25.3 Ориентированный объем в криволинейных координатах

Мы записали ориентированный объем в декартовых координатах, когда метрика является единичной матрицей,

$$d^3V = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} dx^\alpha \wedge dy^\beta \wedge dz^\gamma, \quad g_{\alpha\beta} = 1_{\alpha\beta}.$$

При переходе к криволинейным, штрихованным, координатам необходимо провести замену дифференциалов в том же элементе ориентированного объема,

$$\begin{aligned} d^3V = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha_1}} \frac{\partial y^\beta}{\partial y'^{\beta_1}} \frac{\partial z^\gamma}{\partial z'^{\gamma_1}} dx'^{\alpha_1} \wedge dy'^{\beta_1} \wedge dz'^{\gamma_1} = \\ = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \tilde{\Lambda}_{\bullet\alpha_1}^\alpha \tilde{\Lambda}_{\bullet\beta_1}^\beta \tilde{\Lambda}_{\bullet\gamma_1}^\gamma dx'^{\alpha_1} \wedge dy'^{\beta_1} \wedge dz'^{\gamma_1}, \end{aligned}$$

где матрица преобразований $\tilde{\Lambda}$, конечно, одна и та же для всех дифференциалов

$$\tilde{\Lambda}_{\bullet\alpha_1}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha_1}}.$$

Пользуясь известным нам свойством детерминанта

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \tilde{\Lambda}_{\bullet\alpha_1}^\alpha \tilde{\Lambda}_{\bullet\beta_1}^\beta \tilde{\Lambda}_{\bullet\gamma_1}^\gamma = \epsilon_{\alpha_1\beta_1\gamma_1} \det \tilde{\Lambda},$$

в криволинейных координатах ориентированный объем запишем в виде

$$d^3V = \det \tilde{\Lambda} \cdot \epsilon_{\alpha_1\beta_1\gamma_1} dx'^{\alpha_1} \wedge dy'^{\beta_1} \wedge dz'^{\gamma_1} = \det \tilde{\Lambda} \cdot d^3V'.$$

Модуль детерминанта $\det \tilde{\Lambda}$ называют якобианом преобразований координат. При обратимых преобразованиях от декартовых координат к криволинейным якобиан безусловно отличен от нуля. В тех же криволинейных координатах ковариантный тензор метрики, согласно закону преобразований ровно с той же матрицей

$$g'_{\alpha_1\beta_1} = \tilde{\Lambda}_{\bullet\alpha_1}^\alpha \tilde{\Lambda}_{\bullet\beta_1}^\beta g_{\alpha\beta},$$

при переходе от декартовых координат примет вид

$$g'_{\alpha_1\beta_1} = \tilde{\Lambda}_{\bullet\alpha_1}^\alpha \tilde{\Lambda}_{\bullet\beta_1}^\beta \mathbb{1}_{\alpha\beta} = (\tilde{\Lambda}^T)_{\alpha_1}^{\bullet\alpha} \mathbb{1}_{\alpha\beta} \tilde{\Lambda}_{\bullet\beta_1}^\beta,$$

а стало быть

$$\det g' = (\det \tilde{\Lambda})^2.$$

В итоге, ориентированный объем в криволинейных координатах запишется как

$$d^3V = \sqrt{\det g'} d^3V'. \quad (5.92)$$

Иногда делают замечание, что вместо метрики можно выбрать произвольный невырожденный симметричный ковариантный тензор $f_{\alpha\beta}$, детерминант которого не равен нулю, поскольку любой такой тензор преобразуется по тому же закону как и тензор метрики, так что величина $\sqrt{\det f'} d^3V'$ будет иметь те же трансформационные свойства, что и полученный нами ориентированный объем в криволинейных координатах с точностью до скалярного множителя $\Omega(r)$, зависящего от точки, $\Omega = \sqrt{\det f'} / \sqrt{\det g'}$. Но тогда это отвечает случаю, когда подынтегральное выражение просто домножается на скалярное поле Ω . С точки зрения физики такое скалярное поле — это дополнительная степень свободы, для которой также необходимо задать динамику. Кроме того, только

метрика сводится к диагональной единичной матрице в декартовых координатах²¹, и объем становится действительно объемом. Поэтому интегрирование в криволинейных координатах без введения дополнительных степеней свободы всегда записывают в виде (5.92).

Задача 49. Запишите элемент объема в сферических координатах, применяя метод с использованием детерминанта метрики.

²¹Если два ненулевых тензора совпадают в одних координатах, то, как следствие закона преобразования тензоров, они совпадают и во всех других координатах.

Глава 6

Инструменты описания динамики полей

(6.A) Общековариантные преобразования

26 Криволинейная метрика как внешнее поле и закон сохранения энергии-импульса

Закон сохранения тензора энергии-импульса из вариации действия поля материи по внешнему полю метрики, пример тензора для свободных нерелятивистских частиц, каноническая 4-скорость, координатная 4-скорость, плотность потока энергии.

В теории поля метрика пространства-времени псевдоевклидова, $\det g < 0$, так что при переходе от декартовых координат, в которых $\det g = -1$, элемент ориентированного 4-объема в криволинейных координатах записывается как

$$d^4V = \sqrt{-\det g'} d^4V'.$$

Опуская штрихи и вводя стандартное обозначение для детерминанта метрики $\det g \equiv g$, инвариантное действие для поля $\Phi(x)$ в криволинейных координатах записывается в виде

$$S = \int \mathcal{L}(\Phi, \nabla\Phi, g_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4V,$$

причем в силу инвариантности объема лагранжиан, очевидно, является скаляром, а величину $\sqrt{-g}$ называют скалярной плотностью, имея ввиду отличное от тождественного преобразование детерминанта метрики при замене координат.

Обобщая инфинитезимальные сдвиги (5.13)

$$r'^{\alpha} = r^{\alpha} + \xi^{\alpha}(r), \quad \xi^{\alpha} \rightarrow 0,$$

на пространство-время Минковского

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x), \quad \xi^{\mu} \rightarrow 0,$$

используем тот факт, что действие останется инвариантным, т. е. $\delta S = 0$. Имея ввиду, что поля представляют собой тензорные величины в пространстве-времени Минковского, сразу получим, что вариация полей сводится к производной Ли,

$$\delta\Phi = \mathcal{L}_{\xi}\Phi, \quad \delta g_{\mu\nu} = \nabla_{\mu}\xi_{\nu} + \nabla_{\nu}\xi_{\mu}.$$

Подчеркнем, что ни лагранжиан, ни детерминант метрики в явном виде не зависят от координат, т. е. $\partial_{\mu}\{\sqrt{-g}\mathcal{L}\} \equiv 0$, так что их изменение при замене координат сводится именно к вариации за счет изменения полей. Однако элемент объема d^4V построен из дифференциалов, так что

$$\delta d^4V = \xi^{\mu}\partial_{\mu}d^4V.$$

Интегрирование по частям при условии нулевых вкладов на границе приведет к члену

$$-\int d^4V \xi^\mu \partial_\mu \{\sqrt{-g}\mathcal{L}\} = 0,$$

поскольку $\partial_\mu \{\sqrt{-g}\mathcal{L}\} \equiv 0$. Важно подчеркнуть, что это условие означает просто, что лагранжиан в явном виде не зависит от координат, и это есть ключевое положение! Конечно, если взять потом решения уравнений движения полей и подставить их в лагранжиан, то лагранжиан станет зависеть от координат неявно, через поля. Поэтому на уравнениях движения производные по координатам вычисляются именно неявно, т. е. сначала берутся производные по полям, а затем производные полей по координатам! Явная и неявная зависимость от координат имеет место при разных условиях, но обозначается одинаково, как вычисление частных производных ∂_μ , однако всегда нужно обращать внимание на фразу «на уравнениях движения» или на отсутствие этой фразы, так как от этого зависит смысл самих выражений.

Пусть теперь вариация действия вычисляется на уравнениях движения полей Φ при наличии внешнего поля метрики в криволинейных координатах, т. е. метрика рассматривается как заданный источник внешнего воздействия на движение в системе. Это означает, что вариация по полям сводится к тождественному нулю в силу принципа экстремального действия, $\delta S/\delta\Phi = 0$, так что

$$\begin{aligned} \delta S = & \int d^4V \delta g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} \{\sqrt{-g}\mathcal{L}(\Phi, \nabla\Phi, g_{\mu\nu})\} + \\ & + \int d^4V \delta \{\partial_\lambda g_{\mu\nu}\} \frac{\partial}{\partial \partial_\lambda g_{\mu\nu}} \{\sqrt{-g}\mathcal{L}(\Phi, \nabla\Phi, g_{\mu\nu})\}. \end{aligned}$$

Во втором слагаемом вариация производной равна производной вариации,

$$\delta \{\partial_\lambda g_{\mu\nu}\} = \partial_\lambda \delta \{g_{\mu\nu}\},$$

так что, проводя интегрирования по частям с учетом того, что граничные вклады равны нулю по условиям вариации полей на уравнениях движения, найдем

$$\delta S = \int d^4V \delta g_{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} \{\sqrt{-g}\mathcal{L}\} - \partial_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial \partial_\lambda g_{\mu\nu}} \{\sqrt{-g}\mathcal{L}\} \right) \right).$$

Производная метрики может входить только в ковариантные производные полей, так что детерминант можно вынести из под знака дифференцирования по $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$,

$$\partial_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial \partial_\lambda g_{\mu\nu}} \{\sqrt{-g}\mathcal{L}\} \right) = \sqrt{-g} \left\{ \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\lambda g_{\mu\nu}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\lambda g_{\mu\nu}} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda \sqrt{-g} \right\}.$$

Производная детерминанта метрики нам известна, это — минор матрицы,

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = g g^{\mu\nu},$$

так что, если ввести краткое обозначение

$$\frac{\delta \widehat{\mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\lambda g_{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\lambda g_{\mu\nu}} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda \sqrt{-g},$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} \{ \sqrt{-g} \mathcal{L} \} - \partial_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial \partial_\lambda g_{\mu\nu}} \{ \sqrt{-g} \mathcal{L} \} \right) &= \sqrt{-g} \frac{\delta \widehat{\mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} g g^{\mu\nu} \mathcal{L} = \\ &= \sqrt{-g} \left\{ \frac{\delta \widehat{\mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right\}. \end{aligned}$$

Значит, вариация действия при сдвигах в криволинейных координатах на уравнениях движения примет вид

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4V (\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu) \cdot \sqrt{-g} \left\{ \frac{\delta \widehat{\mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right\} = \\ &= \int d^4V 2\sqrt{-g} \left\{ \frac{\delta \widehat{\mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right\} \nabla_\mu \xi_\nu, \end{aligned}$$

где мы воспользовались явной симметрией по перестановкам индексов μ и ν . В силу стандартного правила дифференцирования произведения тензоров запишем

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4V 2\sqrt{-g} \nabla_\mu \left[\left\{ \frac{\delta \widehat{\mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right\} \xi_\nu \right] - \\ &\quad - \int d^4V 2\sqrt{-g} \xi_\nu \nabla_\mu \left\{ \frac{\delta \widehat{\mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right\}. \end{aligned}$$

Воспользуемся установленным нами при рассмотрении ковариантной производной тождеством

$$\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \{ \sqrt{-g} A^\mu \},$$

положив

$$A^\mu = 2 \left\{ \frac{\delta \widehat{\mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right\} \xi_\nu,$$

так что

$$\int d^4V \sqrt{-g} \nabla_\mu A^\mu = \int d^4V \partial_\mu \{ \sqrt{-g} A^\mu \},$$

и в силу теоремы Гаусса этот интеграл от 4-дивергенции сводится к интегралу по поверхности, где мы считаем, что вариация полей и координат сводится к нулю как условие вычисления вариации действия с фиксированными границами и фиксированными полями на границах. В итоге, равенство нулю вариации

действия при сдвигах на уравнениях движения поля при наличии внешнего поля метрики означает, что

$$-\int d^4V 2\sqrt{-g} \xi_\nu \nabla_\mu \left\{ \frac{\delta \widehat{\mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right\} = 0,$$

и в силу произвольного выбора ξ^ν устанавливаем локальный закон сохранения для контр-вариантного тензора второго ранга

$$\nabla_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0, \quad \mathcal{T}^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} -2 \frac{\delta \widehat{\mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (6.1)$$

Этот тензор называют симметричным тензором энергии-импульса.

Физическую интерпретацию $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ мы рассмотрим в другом разделе. Сейчас же упростим изложение, ограничившись декартовыми координатами пространства-времени Минковского, в которых

$$\frac{\delta \widehat{\mathcal{L}}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}}.$$

Поскольку в действие входят частные производные поля, так что лагранжиан строится с использованием обратной метрики, обычно переходят от производной лагранжиана полей по метрике к производной по обратной метрике

$$\frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{\partial g^{\mu_1\nu_1}}{\partial g_{\mu\nu}} \frac{\partial}{\partial g^{\mu_1\nu_1}}$$

Для вычисления этой производной воспользуемся определением обратной метрики,

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu_1} = \delta_\mu^{\nu_1},$$

откуда вариация элементарно дает

$$g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu_1} = -g^{\mu\nu_1} \delta g_{\mu\nu},$$

и умножение на $g^{\mu_1\nu}$ приводит в левой части к результату

$$g^{\mu_1\nu} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu_1} = \delta_\mu^{\mu_1} \delta g^{\mu\nu_1} = \delta g^{\mu_1\nu_1},$$

и, стало быть,

$$\delta g^{\mu_1\nu_1} = -g^{\mu_1\nu} g^{\mu\nu_1} \delta g_{\mu\nu},$$

откуда

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu_1\nu_1}} g^{\mu_1\nu} g^{\mu\nu_1}.$$

Поэтому закон сохранения запишется в виде

$$\nabla_\mu \left\{ 2g^{\mu_1\nu} g^{\mu\nu_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu_1\nu_1}} - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right\} = 0.$$

Домножая на $g_{\nu\nu'}$, а также учитывая, что ковариантная производная метрики равна нулю, если связность является метрической, найдем

$$\nabla^{\nu_1} \left\{ 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\nu'\nu_1}} - g_{\nu'\nu_1} \mathcal{L} \right\} = 0. \quad (6.2)$$

Окончательно, с учетом симметрии по перестановкам индексов тензора метрики, введем симметричный ковариантный тензор энергии-импульса в декартовом пространстве

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (6.3)$$

с ковариантным законом сохранения

$$\nabla^\mu \mathcal{T}_{\mu\nu} = 0. \quad (6.4)$$

Мы установили, что закон сохранения $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ является следствием трёх фактов: действие — скаляр, лагранжиан в явном виде не зависит от координат, метрика — ковариантный тензор второго ранга. При этом тензор энергии-импульса $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ автоматически получается симметричным по перестановкам индексов.

В декартовых координатах евклидова пространства ковариантная производная сводится к частным производным, так что

$$\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0, \quad (6.5)$$

а метрика становится диагональной и постоянной.

§а Среда нерелятивистских частиц

Для примера, чтобы убедиться в том, что сохраняющаяся величина действительно отвечает тензору энергии-импульса, рассмотрим свободную нерелятивистскую частицу с действием

$$S = \int_{r_0}^r \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} - \int_{t_0}^t H(\mathbf{v}) dt = \int m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} - \int \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 dt,$$

так что согласно уравнениям Гамильтона–Якоби введем 4-ковектор канонической скорости (строку)

$$\mathcal{U}_\mu = \frac{1}{m} \partial_\mu S = \left(-\frac{1}{2c} \mathbf{v}^2, \mathbf{v} \right),$$

а также 4-вектор собственной координатной скорости

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} = \left(c, \mathbf{v} \right).$$

Поскольку

$$v^\mu \mathcal{U}_\mu = -\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2,$$

действие можно переписать в виде

$$S = \int mv^\mu \mathcal{U}_\mu dt \mapsto \frac{1}{c} \int d^4V \rho_{(m)} v^\mu \mathcal{U}_\mu,$$

где мы записали массу в виде выражения через плотность массы $\rho_{(m)}$, полагая, конечно, что в системе не точечная масса, а распределение массы,

$$m = \int dm = \int \rho_{(m)} d^3V,$$

а также использовали стандартную связь $dt = dx^{(0)}/c$. Подчеркнем, что полученный нами лагранжиан нерелятивистской частицы записан в пространстве-времени так, что нет никакой метрики и не наблюдается никакой симметрии верхних и нижних компонент собственной координатной скорости v^μ и скорости, определяющей 4-импульс, \mathcal{U}_μ .

Полагая метрику равной $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, найдем

$$\mathcal{U}^\mu = \begin{pmatrix} \mathbf{v}^2 \\ 2c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad v_\mu = (-c, \mathbf{v}).$$

Тогда с учетом симметричности тензора метрики

$$\mathcal{L} = \frac{1}{c} \rho_{(m)} g_{\mu\nu} \frac{1}{2} \{v^\mu \mathcal{U}^\nu + v^\nu \mathcal{U}^\mu\}$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2c} \rho_{(m)} \{v^\mu \mathcal{U}^\nu + v^\nu \mathcal{U}^\mu\},$$

а тензор энергии-импульса

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} \rho_{(m)} \{v^\mu \mathcal{U}^\nu + v^\nu \mathcal{U}^\mu + g^{\mu\nu} v^\lambda \mathcal{U}_\lambda\}.$$

Временная компонента

$$c \mathcal{T}_0^0 = c g_{00} \mathcal{T}^{00} = -c \mathcal{T}^{00} = \frac{1}{2} \rho_{(m)} \mathbf{v}^2$$

представляет собой плотность энергии ϵ для свободной частицы,

$$E = \int_V d^3V \epsilon = \int_V d^3V \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \frac{dm}{d^3V}.$$

Энергия в фиксированном объеме V может изменяться, если через поверхность ∂V , охватывающую объем, проходит ненулевой поток энергии

$$\mathbf{S} = \mathbf{v} \epsilon = \mathbf{v} \frac{1}{2} \rho_{(m)} \mathbf{v}^2.$$

Согласно закону сохранения тензора $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ при $\nu = 0$ найдем, что

$$\partial_0 \mathcal{T}^{00} + \partial_\alpha \mathcal{T}^{\alpha 0} = 0,$$

так что при умножении на c^2 и опускании временного индекса находим

$$\partial_t \epsilon + \operatorname{div} \left\{ \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} \rho_{(m)} \mathbf{v}^2 + \rho_{(m)} c^2 \right) \right\} = 0.$$

Как видим, к потоку кинетической энергии в законе сохранения добавился еще и поток энергии покоя! Эта сюрприз — артефакт симметризации тензора энергии-импульса по перестановке индексов. Заодно мы видим, что выражения следует рассматривать в определенном порядке по скорости c . В этом плане, с одной стороны, можно модифицировать выражение для временной компоненты канонического импульса, введя шляпку над символом,

$$m \mathcal{U}^0 \mapsto m \hat{\mathcal{U}}^0 = m \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + c^2 \right),$$

так что

$$v^\mu \hat{\mathcal{U}}_\mu = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - c^2.$$

С другой стороны, к лагранжиану можно добавить постоянный член, связанный с началом отсчета энергии: в функции Лангранжа и в функции Гамильтона этот член, конечно, имеет противоположные знаки. Если лагранжиан оставить прежним, то его запись с учетом введения энергии покоя во временную компоненту канонической скорости примет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{c} \rho_{(m)} \mathbf{v}^2 = \frac{1}{c} \rho_{(m)} \left\{ v^\mu \hat{\mathcal{U}}_\mu + c^2 \right\} = \frac{1}{c} \rho_{(m)} \left(g_{\mu\nu} \frac{1}{2} \left\{ v^\mu \hat{\mathcal{U}}^\nu + v^\nu \hat{\mathcal{U}}^\mu \right\} + c^2 \right)$$

Тогда

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} \rho_{(m)} \left\{ v^\mu \hat{\mathcal{U}}^\nu + v^\nu \hat{\mathcal{U}}^\mu + g^{\mu\nu} \left(v^\lambda \hat{\mathcal{U}}_\lambda + c^2 \right) \right\},$$

а для баланса энергии

$$\partial_t \epsilon + \operatorname{div} \{ \mathbf{v} \epsilon \} + 2 (\partial_t \rho_{(m)} c^2 + \operatorname{div} \{ \mathbf{v} \rho_{(m)} c^2 \}) = 0,$$

где мы отдельно выписали вклады в разном порядке по c , так что имеет место как баланс кинетической энергии, так и энергии покоя. Странное удвоение плотности энергии покоя связано с тем, что мы слишком вольно обошлись с величиной квадрата скорости, не учитывая, что в ней также входит метрика. Действительно,

$$\mathbf{v}^2 = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu + c^2.$$

Это означает, что

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{U}}^0}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2c} v^\mu v^\nu,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} &= \frac{1}{2c} \rho_{(m)} \left\{ v^\mu \hat{U}^\nu + v^\nu \hat{U}^\mu \right\} + \frac{1}{c} \rho_{(m)} g_{00} v^0 \frac{\partial \hat{U}^0}{\partial g_{\mu\nu}} = \\ &= \frac{1}{2c} \rho_{(m)} \left\{ v^\mu \hat{U}^\nu + v^\nu \hat{U}^\mu - v^\mu v^\nu \right\}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} \rho_{(m)} \left\{ v^\mu \hat{U}^\nu + v^\nu \hat{U}^\mu - v^\mu v^\nu + g^{\mu\nu} \left(v^\lambda \hat{U}_\lambda + c^2 \right) \right\},$$

и уравнение баланса энергии приобретает вид с правильными нормировками вкладов разной степени по скорости c ,

$$\partial_t \epsilon + \operatorname{div} \{ \mathbf{v} \epsilon \} = 0, \quad \partial_t \rho_{(m)} c^2 + \operatorname{div} \{ \mathbf{v} \rho_{(m)} c^2 \} = 0.$$

Совершенно аналогично, при замене индекса ν на α в ковариантном законе сохранения: $\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0 \mapsto \partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\alpha} = 0$, — получим, что

$$\partial_0 \mathcal{T}^{0\alpha} + \partial_\beta \mathcal{T}^{\beta\alpha} = 0,$$

и после умножения на $-c$ найдем, что

$$\partial_t \left\{ \rho_{(m)} \mathbf{v} + \rho_{(m)} \mathbf{v} \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2} \right\}^\alpha + \partial_\beta \left\{ \rho_{(m)} v^\alpha v^\beta + \rho_{(m)} \delta^{\alpha\beta} \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right\} = 0.$$

В нулевом порядке по c заключаем, что

$$-\mathcal{T}^{0\alpha} = \mathcal{P}^\alpha = \rho_{(m)} \mathbf{v}$$

представляет собой плотность импульса, а уравнение устанавливает баланс импульса с учетом потока сил через поверхность объема. Более подробное рассмотрение приводится при изложении в разделе 37, посвященному тензору энергии-импульса. Здесь же отметим, что вклад второго порядка малости по $1/c$ в плотности импульса представляется как разложение релятивистского выражения

$$\frac{\rho_{(m)} \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} \approx \rho_{(m)} \mathbf{v} + \rho_{(m)} \mathbf{v} \frac{\mathbf{v}^2}{2c^2},$$

а дополнительный вклад в поток импульса можно представить в виде

$$\rho_{(m)} \delta^{\alpha\beta} \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \approx \rho_{(m)} c^2 \delta^{\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} - 1 \right\}.$$

Поэтому, скорее всего, этот изотропный вклад возник вследствие превышения точности учета вклада из-за массы покоя, которая в нерелятивистской механике, вообще говоря, не должна давать наблюдаемые вклады. В тоже время, в теории гравитации введение в лагранжиан константы — космологического члена — обусловливает добавление дополнительного источника гравитации, который обладает и плотностью энергии, и давлением. Рудимент этого вклада мы, по-видимому, здесь и обнаруживаем.

(6.В) Основы ковариантной электродинамики

27 Уравнения Maxwella

Суперпозиция электрического и магнитного полей, сила Лоренца, закон Кулона для точечного заряда, поток электрического поля через сферу, теорема Гаусса и закон Кулона в дифференциальной форме. Закон сохранения заряда в локальной форме и в 4-компонентных обозначениях, плотность тока, стационарные токи, закон Био-Савара в интегральной и локальной формах, закон индукции, теорема Стокса и локальная форма закона электромагнитной индукции, магнитные заряды в электродинамике Maxwella, ток смещения и система уравнений Maxwella в вакууме. Волновое уравнение и скорость света.

27.1 Сила Лоренца, суперпозиция полей

Векторы электрического \mathcal{E} и магнитного \mathcal{H} полей в вакууме задают силу Лоренца \mathcal{F} , действующую на частицу с зарядом e и скоростью v , (в Гауссовых единицах):

$$\mathcal{F} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c} v \times \mathcal{H}. \quad (6.6)$$

Сила Лоренца задает уравнение движения как для импульса частицы в электромагнитном поле

$$\frac{dp}{dt} = \mathcal{F} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c} v \times \mathcal{H},$$

так и для энергии

$$\frac{dE}{dt} = v \cdot \mathcal{F} = e\mathcal{E} \cdot v,$$

что задает мощность работы силы Лоренца.

Поля удовлетворяют принципу суперпозиции:

$$\mathcal{E} = \sum_k \mathcal{E}_k, \quad \mathcal{H} = \sum_k \mathcal{H}_k,$$

т. е. поле многих источников получается суммированием полей от каждого из источников. Из этого принципа следует, что законы для электромагнитного поля точечного заряда позволяют записать динамику произвольного распределения зарядов. Таким образом, достаточно изучить эти законы для точечного заряда.

27.2 Закон Кулона

Точечный источник, помещенный в центре координат, т. е. заряд e , создает электрическое поле согласно закону Кулона:

$$\mathcal{E} = \frac{e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (6.7)$$

Вычислим поток электрического поля через сферу радиуса r с элементом площади $d^2\Sigma = r^2 d\Omega$ r/r , где телесный угол $d\Omega$ в сферических координатах $d\Omega = d\phi d\cos\theta$,

$$\oint_{\partial V_r} d^2\Sigma \cdot \mathcal{E} = e \int d\Omega = 4\pi e,$$

так что закон Кулона может быть переписан в интегральной форме

$$\oint_{\partial V_r} d^2 \Sigma \cdot \mathcal{E} = 4\pi \int_V dV \rho, \quad (6.8)$$

где мы ввели плотность заряда ρ . Согласно теореме Гаусса поток вектора через замкнутую поверхность ∂V , являющуюся границей объема V , равен интегралу дивергенции вектора по этому объему

$$\oint_{\partial V} d^2 \Sigma \cdot \mathcal{E} = \int_V dV \operatorname{div} \mathcal{E}, \quad (6.9)$$

откуда

$$\int_V dV \operatorname{div} \mathcal{E} = 4\pi \int_V dV \rho, \quad (6.10)$$

Заметим, что сферу, охватывающую заряд в ее центре, можно «деформировать» в замкнутую фигуру любой формы. В самом деле, если поверхность замкнутая, то интеграл по ее ориентированной поверхности равен нулю¹. Тогда поток электрического поля по поверхности бесконечно малого объема, внутри которого нет заряда, можно представить как интеграл от постоянного значения электрического поля в точке внутри объема плюс поправки второго порядка малости из-за зависимости поля от точки на поверхности (сингулярность возникает, если только заряд внутри объема), а поток постоянного поля по замкнутой поверхности обращается в нуль. Суммирование по таким бесконечно малым объемам, не содержащим заряд, дает конечный объем, произвольной формы, поток электрического поля через поверхность которого равен нулю. Теперь представим себе, например, куб, содержащий сферу с зарядом. Интеграл по поверхности куба и поверхности сферы, обращенной внутрь, равен нулю, поскольку между кубом и сферой нет заряда, т. е. дополнение сферы до куба имеет поверхность, поток электрического поля через поверхность которого равен нулю. Отсюда сразу следует, что поток поля по поверхности куба равен потоку по поверхности сферы, обращенной наружу. Это рассуждение, очевидно, справедливо для произвольных замкнутых поверхностей.

Поскольку выражение (6.8) справедливо для произвольного распределения зарядов вследствие принципа суперпозиции полей, можно записать его для произвольного объема и плотности, $\forall V$, откуда сразу следует, что имеет место локальная форма закона Кулона

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = 4\pi \rho. \quad (6.11)$$

В частности, электрическое поле *единичного* заряда, расположенного в точке \mathbf{r}' ,

$$\mathcal{E}_{\text{unit}}(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (6.12)$$

имеет плотность заряда, которая равна нулю всюду, кроме точки \mathbf{r}' , что обозначают дельта-функцией Дирака:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (6.13)$$

¹Это следует из теоремы Гаусса в случае интеграла по замкнутой поверхности от постоянного ненулевого вектора, имеющего, следовательно, нулевую дивергенцию.

обладающей свойством

$$\int d^3r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\mathbf{r}'). \quad (6.14)$$

Значит, из (6.11) следует, что

$$\operatorname{div} \mathcal{E}_{\text{unit}}(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (6.15)$$

27.3 Закон сохранения заряда

Сохранение электрического заряда означает, что изменение заряда $q = \int dV \rho$ в некотором фиксированном объеме V обусловлено лишь тем, что через поверхность ∂V протекают токи, плотностью $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, где ρ — плотность заряда, а \mathbf{v} — скорость зарядов:

$$\partial_t q = - \oint_{\partial V} d^2\Sigma \cdot \mathbf{j}, \quad \partial_t \int_V dV \rho = - \oint_{\partial V} d^2\Sigma \cdot \mathbf{j},$$

что представляет собой интегральную форму записи закона сохранения заряда. С помощью теоремы Гаусса и произвольной величины объема находим локальный вид закона сохранения заряда

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (6.16)$$

Используя введенные ранее 4-компонентные обозначения $\partial_\mu = (\frac{1}{c}\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$ и 4-компонентную плотность тока $j^\mu = (c\rho, \mathbf{v}\rho)$, запишем закон сохранения тока в форме²

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad j^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt}. \quad (6.17)$$

Поскольку закон сохранения заряда во всех системах отсчета имеет один и тот же вид (6.17), т. е. он является инвариантом при преобразованиях координат и времени, а ∂_μ преобразуется как четырехмерный ковектор в пространственно-временном континууме $x^\mu = (x_0, \mathbf{r})$, мы заключаем, что инвариантность закона сохранения может иметь место только в случае, если j^μ преобразуется как 4-вектор³.

27.4 Закон Био-Савара

В случае стационарных токов возникает магнитное поле, направление и величина которого были установлены эмпирически. По принципу суперпозиции это поле является суммой полей от каждой из частиц тока. Движущаяся

²Вообще говоря знаки ∇_μ и ∂_μ при действии на тензорные величины не являются тождественными в криволинейных координатах, но мы здесь имеем в виду декартовы координаты.

³Для того чтобы сделать такой вывод, нужно, конечно, заметить, что ∂_μ и j^ν — это независимые друг от друга величины. Только тогда мы имеем дело с линейной инвариантной функцией j на ковекторе ∂_μ . Но это условие, естественно, выполнено по самой постановке задачи: j^ν никак не зависит от частных производных, поскольку закон сохранения линеен по частным производным.

частица, проходя центр координат, создает магнитное поле согласно закону Био-Савара

$$\mathcal{H} = \frac{e}{c} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

что можно записать в более общем виде для малого заряда $de = \rho(\mathbf{r}') dV'$ в точке \mathbf{r}' :

$$d\mathcal{H} = \frac{dV' \rho(\mathbf{r}')}{c} \frac{\mathbf{v}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

и с учетом определения плотности тока $v\rho$ поле интегрирования по распределению зарядов, находим магнитное поле *стационарных токов* или интегральную форму записи закона Био-Савара:

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_{V'} dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (6.18)$$

Вычислим ротор магнитного поля стационарных токов, используя равенство для двойного векторного произведения $\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}(\mathbf{r})) = \mathbf{a} \text{div} \mathbf{b}(\mathbf{r}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}(\mathbf{r})$,

$$\text{rot } \mathcal{H} = \frac{1}{c} \int_{V'} dV' \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \text{div} \mathcal{E}_{\text{unit}} - (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \mathcal{E}_{\text{unit}} \right),$$

где

$$\mathcal{E}_{\text{unit}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

— это поле единичного заряда, помещенного в точку \mathbf{r}' . Тогда согласно (6.15)

$$\text{div} \mathcal{E}_{\text{unit}} = 4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

так что

$$\text{rot } \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}) - \frac{1}{c} \int_{V'} dV' (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \mathcal{E}_{\text{unit}},$$

где второе слагаемое можно преобразовать, заметив, что дифференцирование по штрихованным координатам связано с дифференцированием по не штрихованным координатам: $\nabla_\alpha \mathcal{E}_{\text{unit}} = -\nabla'_\alpha \mathcal{E}_{\text{unit}}$, и проведя интегрирование по частям (в случае стационарных токов полагаем, что интеграл по границе объема с замкнутыми токами, т. е. по замкнутой поверхности, по которой токи не текут, равен нулю), так что

$$\int_{V'} dV' (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \mathcal{E}_{\text{unit}} = - \int_{V'} dV' (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla') \mathcal{E}_{\text{unit}} = \int_{V'} dV' \mathcal{E}_{\text{unit}} (\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')) = 0,$$

поскольку для стационарных токов $\partial_t \rho = 0$ и в силу закона сохранения заряда $\text{div} \mathbf{j} = 0$.

В итоге, локальная форма закона Био-Савара для стационарных токов принимает вид

$$\text{rot } \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (6.19)$$

27.5 Индукция

Если поток магнитного поля, проходящий сквозь площадь, ограниченную замкнутым проводником, меняется со временем, то в проводнике возникает электродвижущая сила, т. е. возникает электрическое поле, совершающее работу по закону индукции

$$\oint_{\partial S} d\ell \cdot \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S d^2 \Sigma \cdot \mathcal{H}, \quad (6.20)$$

что представляет собой интегральную форму записи закона индукции. По теореме Стокса

$$\oint_{\partial S} d\ell \cdot \mathcal{E} = \int_S d^2 \Sigma \cdot \operatorname{rot} \mathcal{E}. \quad (6.21)$$

Поскольку контур замкнутого проводника может быть любым, приходим к локальной форме закона индукции

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}. \quad (6.22)$$

27.6 Магнитные заряды

Для магнитного поля стационарных токов можно вычислить дивергенцию

$$\operatorname{div} \mathcal{H} = \frac{1}{c} \int dV' \nabla \cdot (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathcal{E}_{\text{unit}}) = -\frac{1}{c} \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot (\nabla \times \mathcal{E}_{\text{unit}}),$$

где мы поменяли местами векторы в смешанном произведении, причем $\mathcal{E}_{\text{unit}}$ – это электрическое поле покоящегося единичного заряда. Заметим теперь, что ротор электрического поля стационарного точечного заряда, т. е. заряда, который поконится, тождественно обращается в нуль⁴ согласно закону индукции (6.22), поскольку магнитное поля такого заряда тождественно равно нулю: $\operatorname{rot} \mathcal{E}_{\text{unit}} = 0$. Значит,

$$\operatorname{div} \mathcal{H} = 0. \quad (6.23)$$

По аналогии с электрическим полем (см. (6.11)), дивергенция магнитного поля могла бы быть пропорциональна плотности магнитных зарядов. Однако, если магнитное поле создается только при движении электрических зарядов, как следует из закона Био-Савара, то плотность магнитных зарядов тождественно равна нулю: магнитных зарядов в электродинамике Максвелла нет.

27.7 Ток смещения

Для стационарных токов из (6.19) следует, что дивергенция плотности тока обращается в нуль

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathcal{H} = 0,$$

⁴Это можно получить прямым вычислением ротора.

что согласуется, конечно, с законом сохранения заряда (6.17) в случае плотности заряда, постоянной во времени

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

В общем, нестационарном случае

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \left\{ \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right\} = 0,$$

где мы использовали дифференциальную форму закона Кулона (6.11). Величина

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$$

имеет смысл плотности тока, названного Максвеллом током смещения, который возникает в нестационарном случае. Сумма тока электрических зарядов и тока смещение обладает нулевой дивергенцией, что является тождеством, если эта сумма — ротор вектора. В стационарном случае этот вектор — магнитное поле с точностью до численного коэффициента, поэтому естественно было предположить, что и в нестационарном случае при наличии тока смещения следует рассматривать тот же вектор магнитного поля, так что

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \quad (6.24)$$

В итоге, уравнения Максвелла образуют первую и вторую пары, соответственно, без источников и с источниками:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathcal{H} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathcal{E} = 4\pi \rho, \end{cases} \quad (6.25)$$

которые лежат в основе классической электродинамики, включая специальную теорию относительности [15, 16, 17, 18].

27.8 Свободные электромагнитные волны: скорость

Рассмотрим решения для свободных электромагнитных волн, т. е. при $\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$. Например из первой пары уравнений для ротора электрического поля найдем

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H},$$

где мы учли и вторую пару уравнений Максвелла для ротора магнитного поля. Легко показать в рамках векторного анализа, что для любого вектора

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H},$$

но с учетом нулевой дивергенции магнитного поля найдем волновое уравнение для свободного магнитного поля

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} - \Delta \mathcal{H} = 0. \quad (6.26)$$

Точно такое же уравнение можно вывести и для электрического поля.

Плоские волны вдоль оси x зависят только от времени и координаты x , так что волновое уравнение примет вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad (6.27)$$

где символом f мы обозначили любую из компонент электромагнитного поля. Решения уравнения (6.27) легко найти, если переписать его в факторизованном виде

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) f = 0,$$

так что уравнение второго порядка сводится к уравнениям первого порядка

$$\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \text{либо} \quad \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

с общим решением вида

$$f = f(x \pm ct),$$

отвечающим волнам произвольного профиля, распространяющимся со скоростью c по или против оси x .

Итак, волновое уравнение для электромагнитного поля типа (6.26) описывает распространение волн со скоростью света c в виде суперпозиций решений по каждой из пространственных осей.

28 Потенциалы (A_0, \mathcal{A})

Число компонентных уравнений Максвелла и новые полевые переменные 4-потенциалов, первая пара уравнений без источников как следствие определения электрического и магнитного полей через 4-потенциалы, калибровочные преобразования 4-вектора A_μ .

Уравнения Максвелла включают в себя 2 трехкомпонентных уравнения для роторов электрического и магнитного полей и 2 однокомпонентных уравнения для дивергенций этих полей, т. е. итого 8 уравнений в компонентах для 6 компонент поля: 3 для электрического и 3 для магнитного. Как видим, число уравнений при таком подсчете независимых компонент является избыточным.

Для изучения этого вопроса, перейдем от магнитного и электрического полей к новым полевым переменным.

28.1 Первая пара уравнений Максвелла

Уравнение для нулевой плотности магнитных зарядов

$$\operatorname{div} \mathcal{H} = 0$$

тождественно удовлетворяется, если положить

$$\mathcal{H} = \operatorname{rot} \mathcal{A}.$$

Уравнение для индукции

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$$

теперь запишется в виде

$$\text{rot} \left\{ \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t} \right\} = 0.$$

Оно тождественно удовлетворяется, если

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t} = -\nabla \mathcal{A}_0,$$

так как $\text{rot grad } \mathcal{A}_0 \equiv 0$.

Таким образом, можно перейти от двух векторных полей 3-мерного евклидова пространства $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ к одному векторному полю $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ и скаляру \mathcal{A}_0 в том же евклидовом пространстве, как говорят, к векторному и скалярному потенциалам. При этом, вместо 6 компонент поля остается 4 компоненты потенциалов. Исходные электрическое и магнитное поля удовлетворяли первой паре уравнений Максвелла, т. е. одному скалярному и одному векторному уравнениям в 3-мерном евклидовом пространстве. Как мы увидели, эти уравнения автоматически удовлетворяются, если электромагнитное поле задается потенциалами $(\mathcal{A}_0, \boldsymbol{\mathcal{A}})$. В итоге, остается 4 уравнения второй пары уравнений Максвелла для 4 компонент потенциалов поля.

28.2 Калибровочные преобразования

Однако соответствие $\boldsymbol{\mathcal{H}} \leftrightarrow \boldsymbol{\mathcal{A}}$ неоднозначно, поскольку поле⁵ $\boldsymbol{\mathcal{A}}' = \boldsymbol{\mathcal{A}} + \nabla f$ даст то же значение магнитного поля, поскольку $\text{rot grad } f \equiv 0$. Следовательно, одно и то же физическое магнитное поле отвечает целому семейству векторного потенциала $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

Вектор потенциал входит и в связь электрического поля со скалярным и векторным потенциалами, а значит, при преобразовании векторного потенциала наблюдаемое электрическое поле не изменится, если только вместе с векторным потенциалом сделать замену и скалярного потенциала

$$\mathcal{A}'_0 = \mathcal{A}_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{A}_0 - \partial_0 f,$$

которое в точности компенсирует изменение электрического поля за счет преобразования векторного потенциала.

Если прейти к 4-мерным обозначениям пространства-времени Минковского, то можно ввести ковариантные компоненты вектор-потенциала по правилам опускания контравариантных с помощью диагональной метрики,

$$\mathcal{A}_\alpha = g_{\alpha\mu} \mathcal{A}^\mu = g_{\alpha\beta} \mathcal{A}^\beta = -\delta_{\alpha\beta} \mathcal{A}^\beta,$$

и тогда преобразования всех компонент 4-потенциала примут вид

$$\mathcal{A}'_\mu = \mathcal{A}_\mu - \nabla_\mu f. \quad (6.28)$$

⁵Напомним, что мы оперируем тензорными величинами евклидова пространства в декартовых координатах, так что $\mathcal{A}'^\alpha = \mathcal{A}^\alpha + g_E^{\alpha\beta} \nabla_\beta f$, где обратная метрика $g_E^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$, так что ее можно опустить и не следить за балансом верхних и нижних индексов в 3-мерных декартовых евклидовых координатах, а значит, $\boldsymbol{\mathcal{A}}' = \boldsymbol{\mathcal{A}} + \nabla f$. Далее мы систематизируем эти обозначения, когда станет необходимо отличать тензорные величины в евклидовом пространстве и в пространстве-времени Минковского.

Эти преобразования называют *калибровочными* или градиентными. В нашем случае они оставляют инвариантными электрическое и магнитное поля. В (6.28) $\mathcal{A}_\mu = (\mathcal{A}_0, -\mathbf{A})$, а f — евклидов скаляр. Если при этом f — еще и скаляр в 4-мерном пространстве-времени, то естественно предположить, что 4-потенциал \mathcal{A}_μ является 4-вектором, поскольку набла, действуя на скаляр f , дает 4-вектор.

Задача 50. Из действия первого порядка по частным производным

$$S_F = \frac{1}{16\pi c} \int d^4x \left(\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} - 2\mathcal{F}^{\mu\nu} (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu) \right),$$

для антисимметричного тензорного поля $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ и 4-векторного поля \mathcal{A}_μ и уравнений Эйлера–Лагранжа

$$\partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \partial_\lambda \mathcal{F}^{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \mathcal{F}^{\mu\nu}}, \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \mathcal{A}_\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\nu}.$$

выведите уравнения движения в явном виде. Покажите, что для поля $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ уравнения алгебраические, а не дифференциальные, и подставьте выражение для этого поля в уравнения движения для поля \mathcal{A}_μ и в исходное действие. Докажите, что

$$\partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu\mu'\nu'} \mathcal{F}_{\mu'\nu'}) = 0,$$

где тензор Леви–Чивиты в пространстве Минковского определен согласно $\epsilon^{0123} = +1$. Выразите компоненты тензора $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ через электрическое и магнитные поля:

$$\mathcal{F}_{0\alpha} = -g_{\alpha\beta} \mathcal{E}^\beta, \quad \mathcal{F}_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{H}^\gamma,$$

где индексы α и β принимают значения от 1 до 3. Тензор $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ называется тензором напряженностей поля \mathcal{A}_μ . Покажите, что уравнения движения поля \mathcal{A}_μ сводятся ко второй паре уравнений Максвелла для свободного электромагнитного поля, а выражение $\partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu\mu'\nu'} \mathcal{F}_{\mu'\nu'}) = 0$ эквивалентно первой паре уравнений Максвелла.

Задача 51. Добавьте к действию для электромагнитного поля член взаимодействия с 4-током зарядов

$$S_{\text{int}} = -\frac{1}{c^2} \int d^4x j^\mu(x) \mathcal{A}_\mu(x),$$

где компоненты тока выражаются через плотность зарядов ρ и скорость их движения \mathbf{v} :

$$j^0 = c\rho, \quad \mathbf{j} = \mathbf{v}\rho.$$

Убедитесь, что вторая пара уравнений Максвелла получается из уравнений Эйлера–Лагранжа для такого действия поля с током.

Глава 7

Группа поворотов и спин

(7.А) Трансляции и повороты

§а Схема изложения

Общий план изложения вопроса о том, что из себя представляет спин, в этом разделе состоит в следующем:

- [1] Сначала рассматриваются непрерывные изометрии пространства и устанавливаются их групповой характер, причем вводятся понятия бесконечно малых преобразований, так что определяется алгебра генераторов группы Ли, т. е. коммутаторы генераторов. Эта алгебра становится центральным объектом исследования, поскольку классификация всех полей в пространстве — это определение свойств полей относительно преобразований, составляющих изометрии. Именно, базис полей — это поля, реализующие неприводимые представления алгебры группы Ли. В этом смысле поле в базисе полей — это векторное пространство, которое получается как линейная оболочка всех образов действия группы на ненулевой элемент этого векторного пространства. Размерность пространства представления, конечно, в общем случае вовсе не совпадает с размерностью исходного координатного пространства, а в нашем случае с размерностью трёхмерного евклидова пространства, поскольку размерности неприводимых представлений находятся в области допустимых значений, которую задает алгебра Ли. К примеру, тензорное представление спина 2 — это 5-мерное пространство, т. е. тензорное поле имеет пять компонент, каждая из которых зависит от координат 3-мерного евклидова пространства.
- [2] В этом аспекте важно понимать, что определяющее представление группы, т. е. реализация преобразований изометрии координат пространства, после вывода коммутационных соотношений генераторов инфинитезимальных преобразований допускает обобщения, так как разные группы могут обладать изоморфной алгеброй Ли. К примеру, алгебра генераторов поворотов пространства группы специальных ортогональных преобразований вещественных 3-мерных координат $SO(3)$ изоморфна алгебре группы специальных унитарных преобразований двумерных комплекснозначных столбцов $SU(2)$. Поэтому представления алгебры генераторов могут включать в себя представления более общей группы, чем группа изометрии исходного евклидова пространства. Однако, сама возможность существования представления более общей группы еще не означает, что эта возможность реализуется Природой.
- [3] Алгебра группы поворотов задает неприводимые представления, т. е. многокомпонентные поля, так что генераторы поворотов в неприводимом

представлении — это и есть спин поля в заданном неприводимом представлении. Значит, спин задает закон преобразования компонент поля при поворотах, так что, установив все допустимые значения спиновых матриц, мы, тем самым, найдем базис всех полей в 3-мерном евклидовом пространстве и, в частности, опишем поле полуцелого спина.

29 Генераторы инфинитезимальных преобразований

Группа пространственных трансляций, генераторы непрерывных преобразований координат и полей, задача на собственные значения генератора трансляций и волновой вектор плоской волны, коммутатор генераторов, абелевость группы трансляций, повороты и матрицы генераторов поворотов для вектора, некоммутативная алгебра генераторов группы поворотов $\mathfrak{so}(3)$, группа $O(3)$, генератор орбитального поворота на примере скалярного поля, генератор поворота для векторного и тензорного полей.

Для иллюстрации программы данной главы и введения основных понятий начнем не с поворотов, а с трансляций.

29.1 Сдвиги \equiv трансляции координат

Действие трансляций определяется преобразованием

$$r_T^\alpha = r'^\alpha = r^\alpha + a^\alpha, \quad (7.1)$$

где a^α — *глобальный* параметр преобразования, т. е. он не зависит от координат в любой точке пространства

$$\frac{\partial}{\partial r^\beta} a^\alpha \equiv \partial_\beta a^\alpha = 0, \quad \forall \mathbf{r}.$$

Это преобразование можно записать как действие оператора трансляций $\hat{T}(\mathbf{a})$, зависящего от параметра a ,

$$r_T^\alpha = r'^\alpha = \hat{T}(\mathbf{a}) r^\alpha.$$

Очевидны следующие свойства трансляций:

1. Последовательное действие двух трансляций опять является трансляцией. Действительно,

$$\hat{T}(\mathbf{a}) \cdot \hat{T}(\mathbf{b}) r^\alpha = \hat{T}(\mathbf{a}) (r^\alpha + b^\alpha) = r^\alpha + (b + a)^\alpha = \hat{T}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) r^\alpha,$$

или, что то же,

$$\hat{T}(\mathbf{b}) \cdot \hat{T}(\mathbf{a}) = \hat{T}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Более того, последовательное действие трех трансляций в силу

$$\hat{T}(\mathbf{c}) \cdot (\hat{T}(\mathbf{b}) \cdot \hat{T}(\mathbf{a})) = \hat{T}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\hat{T}(\mathbf{c}) \cdot \hat{T}(\mathbf{b})) \cdot \hat{T}(\mathbf{a}),$$

как видим, не зависит от их группировки посредством скобок.

2. Существует тождественное преобразование $\mathbb{1} = \hat{T}(0)$, такое что

$$\hat{T}(0) r^\alpha = r^\alpha,$$

и

$$\hat{T}(\mathbf{a}) \cdot \hat{T}(0) = \hat{T}(0) \cdot \hat{T}(\mathbf{a}) = \hat{T}(\mathbf{a}), \quad \forall a.$$

3. После любого сдвига можно сделать обратное преобразование, сводящее действие двух трансляций к тождественному преобразованию,

$$\hat{T}(\mathbf{a}) \cdot \hat{T}(-\mathbf{a}) = \hat{T}(0) = \mathbb{1}, \quad \forall a.$$

Такие свойства операторов преобразований являются общими и представляют собой математическую конструкцию *группы*, понятие которой, как видим, тесно связано с симметриями физических величин (здесь — пространства).

Определение. Группой называется множество G , обладающее следующими свойствами:

- в ней задана операция композиции (обозначаемая \circ)

$$\forall g_1, g_2 \in G \quad \exists \quad g_1 \circ g_2 = g_3 \in G,$$

обладающая свойством *ассоциативности*¹

$$g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3 \equiv g_1 \circ g_2 \circ g_3,$$

- единичный элемент $\mathbb{1}$

$$\exists \quad \mathbb{1} \in G : \quad \mathbb{1} \circ g = g \circ \mathbb{1} = g, \quad \forall g \in G,$$

- обратный элемент

$$\forall g \in G \quad \exists \quad g^{-1} \in G : \quad g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = \mathbb{1}.$$

Как видим, преобразования трансляций образуют группу.

Представлениями абстрактной группы называют множества операторов со всеми свойствами группы, действующие на пространстве представления. Мы будем исследовать конечномерные векторные пространства (множества с конечномерным линейно независимым базисом для элементов пространства с операцией суммы элементов и умножения на вещественные (комплексные) числа, т. е. линейные оболочки базисных векторов²).

¹ В физических задачах свойство ассоциативности обычно выполняется по построению: преобразования физических величин определяются как последовательное действие соответствующих сложных функций от этих величин, например, $f_3[f_2[f_1(x)]] \equiv f_3 \circ f_2 \circ f_1(x) \equiv (f_3 \circ f_2) \circ f_1(x) \equiv f_3 \circ (f_2 \circ f_1)(x)$. Однако даже для матического умножения обратимых матриц, которое является ассоциативным, можно ввести операцию инверсии: $\mathfrak{Inv} \circ A = A^{-1}$, — так что включение этой операции в композицию обратимых матриц тут же приводит к неассоциативности, поскольку $\mathfrak{Inv} \circ (A \circ B) = B^{-1} \circ A^{-1}$, а $(\mathfrak{Inv} \circ A) \circ B = A^{-1} \circ B \neq B^{-1} \circ A^{-1}$.

² В этом случае представления обычно образованы матрицами, действующими на векторы.

В рассмотренном случае трансляций векторное пространство — декартовы координаты евклидова пространства, а элементы группы — $\hat{T}(\mathbf{a})$. В дальнейшем для ясности и простоты изложения мы будем рассматривать именно представления группы на векторных пространствах без особых оговорок, так что наряду с действием группы на элементы пространства в нем также действуют операции сложения и вычитания. Размерность пространства параметров непрерывных преобразований или попросту число независимых параметров, вообще говоря не совпадает с размерностью координатного пространства. Это видно на примере 3-мерного евклидова пространства: 3 параметра трансляций и 3 угла поворотов в этом евклидовом пространстве, как мы увидим, образуют 6-параметрическую группу, так что число параметров 6 не равно числу координат евклидова пространства 3.

Другая особенность трансляций заключается в том, что они зависят от непрерывного параметра. Группы, элементы которых параметризуются непрерывными величинами, в окрестности каждой точки локально эквивалентными конечномерным областям векторных пространств, называются *группами Ли* (в строгой формулировке определяют свойства функций перехода от одной локальной координатной сетки параметров преобразований к другой в области их перекрытия, а также возможность введения непересекающихся локальных координатных областей для двух различных точек (свойство Хаусдорфа)).

Рассмотрим бесконечно малые (инфinitезимальные) трансляции координат вблизи единичного элемента 1, т. е. в окрестности тождественного преобразования,

$$\hat{T}(\mathbf{a}) \approx \mathbb{1} - i\Gamma_\alpha a^\alpha, \quad \mathbf{a} \rightarrow 0,$$

где мы ввели *генераторы* инфинитезимальных преобразований

$$\Gamma_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} i \lim_{\mathbf{a} \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial a^\alpha} \hat{T}(\mathbf{a}). \quad (7.2)$$

Для закона преобразования скалярной, векторной или тензорной функции, т. е. поля $\Phi(\mathbf{r})$, важно знать

$$\frac{\partial r'^\alpha}{\partial r^\beta} = \frac{\partial(r^\alpha + a^\alpha)}{\partial r^\beta} = \delta_\beta^\alpha,$$

а значит, в законе преобразования тензорных величин ранга n в индексных обозначениях

$$\Phi'^{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\mathbf{r}') = \frac{\partial r'^{\alpha_1}}{\partial r^{\beta_1}} \dots \frac{\partial r'^{\alpha_n}}{\partial r^{\beta_n}} \Phi^{\beta_1 \dots \beta_n}(\mathbf{r}),$$

как для контравариантных, так для ковариантных индексов, все индексы умножаются на символ Кронекера, т. е. не меняются, а значит, тензорные индексы у величин можно опустить, что мы и сделаем при рассмотрении трансляций. Преобразование при трансляциях евклидова пространства теперь можно записать в виде $\hat{T} \circ \Phi(\mathbf{r}) = \Phi_T(\mathbf{r}_T) = \Phi(\mathbf{r})$, т. е.

$$\begin{aligned} \Phi_T(\hat{T}(\mathbf{a})\mathbf{r}) &= \Phi(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \Phi_T(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \Phi(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \Phi_T(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \Phi(T(-\mathbf{a})\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Следовательно, преобразованная функция есть сама функция от аргумента, преобразованного обратной трансляцией. Для бесконечно малых преобразований

$$\Phi_T(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \approx \Phi(\mathbf{r}) - a^\alpha \partial_\alpha \Phi(\mathbf{r}), \quad \Phi_T(\mathbf{r}) = (\mathbb{1} - i\Gamma_\alpha a^\alpha) \Phi(\mathbf{r}) \Rightarrow$$

$$\Gamma_\alpha = -i\partial_\alpha \mapsto \hat{k}_\alpha.$$

Физический смысл генератора трансляций \hat{k}_α становится ясным, если рассмотреть его действие на произвольную функцию $f(\mathbf{r})$. Действительно, ряд Тейлора дает разложение

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r} + \mathbf{a}) &= \sum_n \frac{1}{n!} a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_n} \frac{\partial^n f(\mathbf{r})}{\partial r^{\alpha_1} \dots \partial r^{\alpha_n}} = \sum_n \frac{1}{n!} (\mathbf{a} \cdot \nabla)^n f(\mathbf{r}) \\ &= e^{a^\alpha \partial_\alpha} f(\mathbf{r}) = e^{ia^\alpha \hat{k}_\alpha} f(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

и, в частности, для собственной функции генератора с определенной нормировкой

$$f(\mathbf{a}) = e^{ia^\alpha k_\alpha}, \quad \text{если } f(0) = 1, \quad -i\partial_\alpha f(\mathbf{r}) = \hat{k}_\alpha f(\mathbf{r}) = k_\alpha f(\mathbf{r}).$$

Таким образом, генератор \hat{k}_α задает волновой вектор плоской монохроматической волны. Заметим, что последнее условие — это уравнение на вещественные собственные значения и собственные функции генератора пространственных трансляций, откуда становится ясным введение мнимой единицы в определение генератора трансляций: эта мнимая единица связана с ясным физическим смыслом собственных функций генераторов с вещественными собственными значениями, отвечающими наблюдаемым величинам.

Отметим, что плоская монохроматическая волна отвечает амплитуде вероятности достоверности траектории свободной частицы³ и, согласно гипотезе де Броиля, волновой вектор \mathbf{k} связан с импульсом: $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Таким образом, генератор трансляций после умножения на постоянную Планка с чертой становится оператором импульса, который действует в пространстве амплитуд вероятности Ψ : $-i\hbar\partial_\alpha = \hat{p}_\alpha$. В пространстве амплитуд вероятности достоверности траекторий оператор импульса имеет вещественные собственные значения. Такие операторы называются эрмитовыми. Теория операторов в пространстве амплитуд траекторий относится не к классической, а к квантовой механике, так что мы здесь не будем развивать эту тему.

Вычислим разность действия двух инфинитезимальных операторов

$$(\hat{T}(\mathbf{a}) \cdot \hat{T}(\mathbf{b}) - \hat{T}(\mathbf{b}) \cdot \hat{T}(\mathbf{a})) f(\mathbf{r}) = -a^\alpha b^\beta (\hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta - \hat{k}_\beta \hat{k}_\alpha) f(\mathbf{r}),$$

физический смысл которой заключается в сравнении результатов двух сдвигов в прямом и обратном порядке (см. рис. 7.1).

³ Амплитуда вероятности достоверности траектории Ψ определяется через действие S как $\Psi = \exp\{iS/\hbar\}$, где S удовлетворяет уравнениям Гамильтон–Якоби $\nabla_\alpha S = p_\alpha$, $\partial S / \partial t = -E(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. Отсюда сразу следует утверждение для волны де Броиля, например. При этом для траектории на уравнениях движения вероятность достоверности такой траектории равна $W = |\Psi|^2 = 1$.

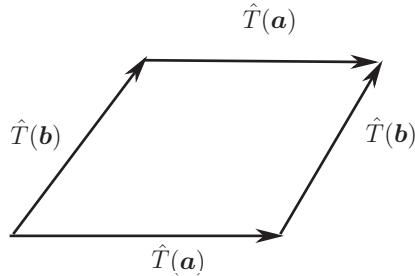


Рис. 7.1: Композиция двух трансляций в прямом и обратном порядке.

В силу группового характера преобразований, произведение операторов в прямом и обратном порядке, вообще говоря, отличается на групповой элемент, т. е., из одной точки пространства можно перейти в другую точку посредством преобразования из группы и $\hat{T}(a) \cdot \hat{T}(b) = \hat{T}(c) \cdot (\hat{T}(b) \cdot \hat{T}(a))$, и для бесконечно малых элементов (разлагая по a , b и c) отсюда легко получить, что разность $\hat{T}(a) \cdot \hat{T}(b) - \hat{T}(b) \cdot \hat{T}(a)$ пропорциональна генератору группы Γ с параметром c второго порядка малости $c \sim \mathcal{O}(ab)$,

$$(-i)^2 a^\alpha b^\beta (\Gamma_\alpha \Gamma_\beta - \Gamma_\beta \Gamma_\alpha) = -ic^\gamma \Gamma_\gamma.$$

Для генераторов трансляций в силу перестановочности частного дифференцирования по различным переменным в декартовых координатах

$$\partial_\alpha \partial_\beta f(\mathbf{r}) = \partial_\beta \partial_\alpha f(\mathbf{r}),$$

следует, что

$$\hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta - \hat{k}_\beta \hat{k}_\alpha = 0,$$

т. е. результат не зависит от порядка преобразований. В общем случае рассматривают следующую математическую конструкцию для генераторов инфинитезимальных преобразований группы Ли.

Определение. Алгеброй Ли Γ называют векторное пространство Γ , в котором определена скобка Ли:

- линейная композиция

$$\forall \Gamma_1, \Gamma_2 \in \Gamma \quad \exists [\Gamma_1, \Gamma_2] \in \Gamma, \quad [\Gamma_1, c_2 \Gamma_2 + c_3 \Gamma_3] = c_2 [\Gamma_1, \Gamma_2] + c_3 [\Gamma_1, \Gamma_3],$$

- антисимметрия

$$[\Gamma_1, \Gamma_2] = -[\Gamma_2, \Gamma_1],$$

- тождество Якоби⁴ (циклическая перестановка элементов в скобке)

$$[[\Gamma_1, \Gamma_2], \Gamma_3] + [[\Gamma_2, \Gamma_3], \Gamma_1] + [[\Gamma_3, \Gamma_1], \Gamma_2] = 0.$$

⁴Следствие ассоциативности для бесконечно малых преобразований группы Ли.

Первые два свойства определяют коммутатор генераторов⁵. Если

$$\forall \Gamma_1, \Gamma_2 \in \Gamma \quad [\Gamma_1, \Gamma_2] = 0,$$

то алгебра называется коммутативной (или абелевой).

Выше мы показали, что

$$\hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta - \hat{k}_\beta \hat{k}_\alpha \equiv [\hat{k}_\alpha, \hat{k}_\beta] = 0,$$

так что *алгебра трансляций коммутативна*, т. е. контур, показанный на рис. 7.1, замкнут.

Если генераторы представлены матрицами в векторном пространстве, то их коммутатор определяется матричным умножением

$$[A, B] = AB - BA,$$

и, так как не всякие матрицы при умножении в прямом и обратном порядке дают одинаковый результат, становится ясно, что существуют и не коммутативные алгебры. Матричное умножение позволяет определить однородные полиномы по генераторам степени k

$$C_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum h^{i_1 \dots i_k} \Gamma_{i_1} \dots \Gamma_{i_k},$$

среди которых особо выделяют операторы Казимира, которые коммутируют со всеми генераторами

$$[C_k, \Gamma_n] = 0, \quad \forall \Gamma_n \in \Gamma.$$

Число линейно независимых операторов Казимира называется *rangом* алгебры или группы, который равен также числу линейно независимых генераторов группы, образующих коммутативную *подалгебру Кармана* H :

$$\forall h_1, h_2 \in H \quad [h_1, h_2] = 0.$$

В случае группы трансляций евклидова пространства все генераторы по трем осям коммутируют, так что сдвиги по каждой из осей можно производить в произвольном порядке и можно говорить о трех независимых абелевых одномерных группах трансляций, каждая из которых имеет ранг, равный 1. Такая одномерная группа называется $U(1)$: собственные функции генераторов группы, как мы видели, сводятся к

$$e^{ika},$$

где k собственное значение генератора абелевой группы, а a — параметр группы (сдвиги координаты).

Рассмотрим случай некоммутативной алгебры на примере поворотов в 3-мерном пространстве Евклида, которые так же, как и трансляции, оставляют инвариантной длину вектора.

⁵Введение коммутатора генераторов групповых преобразований со значением в линейной оболочке генераторов определяется простым требованием для инфинитезимальных преобразований: действие двух преобразований в прямом и обратном порядке отличается на преобразование из той же группы.

29.2 Группа поворотов

Рассмотрим повороты на плоскости, т. е. в 2-мерном евклидовом пространстве (см. рис. 7.2).

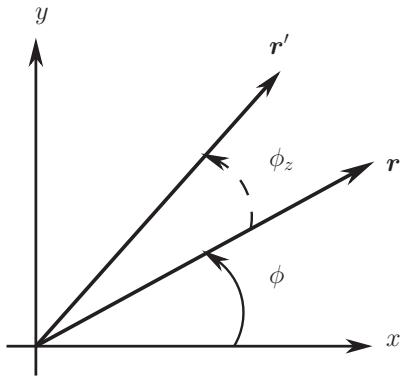


Рис. 7.2: Поворот на плоскости.

Для координат вектора

$$\begin{cases} x = r \cos \phi, \\ y = r \sin \phi, \end{cases}$$

после преобразования получим

$$\begin{cases} x' = r \cos(\phi + \phi_z) = x \cos \phi_z - y \sin \phi_z, \\ y' = r \sin(\phi + \phi_z) = x \sin \phi_z + y \cos \phi_z, \end{cases}$$

где мы использовали обычные тригонометрические равенства:

$$\begin{aligned} \cos(\phi + \phi_z) &= \cos \phi \cos \phi_z - \sin \phi \sin \phi_z, \\ \sin(\phi + \phi_z) &= \cos \phi \sin \phi_z + \sin \phi \cos \phi_z. \end{aligned}$$

В матричных обозначениях для векторов-столбцов этот поворот запишется в виде

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi_z & -\sin \phi_z \\ \sin \phi_z & \cos \phi_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_2(\phi_z) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Вычислим детерминант матрицы 2-мерного поворота

$$\det R_2(\phi_z) = \cos^2 \phi_z + \sin^2 \phi_z = 1.$$

Очевидно, что поворот на нулевой угол является тождественным преобразованием

$$R_2(0) = \mathbb{1},$$

и после каждого поворота можно совершить обратный поворот

$$R_2(\phi_z)R_2(-\phi_z) = \mathbb{1},$$

причем обратная матрица является транспонированной

$$R_2(-\phi_z) = R_2^T = R_2^{-1}(\phi_z).$$

После несложных тригонометрических выкладок находим, что два последовательных поворота есть также поворот на угол, равный сумме углов (*правило сложения углов*),

$$R_2(\phi_1)R_2(\phi_2) = R_2(\phi_1 + \phi_2),$$

и, таким образом, матричное умножение определяет композицию элементов группы поворотов.

Генераторы преобразований определяются дифференцированием по параметрам группы поворотов вблизи тождественного преобразования (см. (7.2)). В частности, изученный нами поворот на плоскости $\{x, y\}$ с осью поворота, направленной по оси z , имеет генератор

$$s_z \stackrel{\text{def}}{=} i \lim_{\phi_z \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \phi_z} R_2(\phi_z) = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

В 3-мерном евклидовом пространстве с *правой тройкой базисных векторов* легко получить обобщение матриц поворотов с осями вдоль базисных векторов. При этом для генераторов, пользуясь правилом циклической перестановки индексов: при повороте в плоскости $\{x, y\}$, т. е. с осью вдоль z , ненулевыми значениями в матрице генератора s_z являются только элементы $(s_z)_{\bullet y}^x = -i$ и $(s_z)_{\bullet x}^y = i$ и далее по циклу, — находим выражения

$$s_z = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— поворот в плоскости } \{x, y\}, \quad (7.4)$$

$$s_y = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— поворот в плоскости } \{z, x\}, \quad (7.5)$$

$$s_x = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— поворот в плоскости } \{y, z\}. \quad (7.6)$$

Другими словами матрица генератора поворотов вокруг альфты оси равна $(s_\alpha)_{\bullet \gamma}^\beta = -i \epsilon_{\alpha \beta \gamma}$, что в матричных обозначениях в точности совпадает с приведенной записью в явном виде.

Рассмотрим, возникает ли различие в преобразовании векторов при смене порядка двух поворотов по разным осям. Для этого вычислим коммутаторы, которые в данном случае определяются умножением матриц (7.4)–(7.6):

$$[s_x, s_y] = i s_z, \quad [s_y, s_z] = i s_x, \quad [s_z, s_x] = i s_y, \quad (7.7)$$

где опять важно заметить циклическую перестановку индексов. Отсюда видим, например, что повороты последовательно сначала вокруг оси y , а потом вокруг оси x , и наоборот — сначала вокруг оси x , а потом вокруг оси y , в

результате не совпадают, а отличаются на поворот вокруг оси z и т.п. Нетрудно убедиться, что тождества Якоби для генераторов группы поворотов справедливы. В итоге, в 3-мерном евклидовом пространстве алгебра генераторов группы поворотов некоммутативна.

С использованием тензора Леви-Чивиты коммутационные соотношения для генераторов группы поворотов (т. е. алгебра генераторов) примут вид

$$[s_\alpha, s_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma. \quad (7.8)$$

Мы видим, что это — некоммутативная алгебра Ли.

В силу свойств матриц поворотов

$$R \cdot R^T = \mathbb{1}, \quad \text{— ортогональность, } O,$$

$$\det R = 1, \quad \text{— специальные преобразования, } S,$$

группа поворотов 3-мерного евклидова пространства обозначается символом $\mathrm{SO}(3)$, а ее алгебра — $\mathfrak{so}(3)$.

Группа $\mathrm{SO}(3)$ имеет единственный оператор Казимира, который на векторах евклидова пространства, т. е. в векторном представлении, принимает значение

$$C_2 = s^2 = (s_\alpha)^\beta_{\bullet\gamma} (s_\alpha)^\gamma_{\bullet\beta'} = (-i)^2 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\alpha\gamma\beta'} = 2\delta_{\beta\beta'} = 2 \cdot \mathbb{1}.$$

Таким образом, непрерывные симметрии 3-мерного пространства без смены ориентации базиса с правой на левую образованы группой трансляций и поворотов.

29.3 Группа $O(3)$

Группа поворотов 3-мерного евклидова пространства состоит из двух связанных непрерывными преобразованиями компонент⁶ с детерминантой, равной ± 1 (собственные и несобственные повороты). Переход же от одной связной компоненты к другой осуществляется с помощью дискретных преобразований зеркального отражения по каждой из осей декартона пространства $\mathbb{P} = \mathbb{P}_x \mathbb{P}_y \mathbb{P}_z$. Так что схематически можно записать:

$$SO_+(3), \quad \det R = +1$$

$$\mathbb{P} \uparrow \downarrow \mathbb{P}$$

$$SO_-(3), \quad \det R = -1$$

Полная же группа изометрии евклидова пространства включает в себя наряду с поворотами $O(3)$ (с учетом отражений) еще и трансляции, так что говорят о неоднородной (inhomogeneous, I) группе $IO(3)$ или, в случае без отражений, о неоднородной группе $ISO(3)$.

⁶Здесь термин связности компонент употребляется в “интуитивном” смысле, в то время как строгая математическая теория вводит понятия гомотопий (классов непрерывных однопараметрических траекторий в группе) и гомотопических групп, которые мы не рассматриваем (см. [13]).

29.4 Общий вид генераторов поворотов и спин

Помимо приведенного нами вида генераторов группы поворотов в матричной форме, когда они действуют как линейные преобразования на вектор координат в декартовой системе, можно написать и общий вид этих генераторов для произвольной скалярной функции от координат \mathbf{r} , т. е. для скалярного поля $\Phi = f(\mathbf{r})$. По определению, значение скалярной функции f не зависит от выбора базиса в векторном пространстве координат⁷ \mathbf{r}

$$f_G(\mathbf{r}_G) = f(\mathbf{r}), \quad (7.9)$$

где G — оператор поворотов, который преобразует и координаты, и функции:

$$\mathbf{r}_G = G \cdot \mathbf{r}, \quad G \circ f(\mathbf{r}) = f_G(\mathbf{r}_G).$$

Для бесконечно малых преобразований

$$\mathbf{r}_G = \mathbf{r} + d_G \mathbf{r} = (1 - i s_\gamma \phi_\gamma) \mathbf{r},$$

где дифференциал зависит от параметров поворота ϕ_α , а генераторы представляют собой рассмотренные нами выше матрицы (7.4)–(7.6). Тогда

$$f(\mathbf{r}) = f_G(\mathbf{r}_G) = f_G(\mathbf{r}) + \frac{\partial f_G}{\partial r^\alpha} d_G r^\alpha = f_G(\mathbf{r}) + \frac{\partial f}{\partial r^\alpha} d_G r^\alpha,$$

где во втором слагаемом мы заменили преобразованную функцию на исходную, потому что эта операция приводит в разнице второго порядка малости, не существенной здесь для нашего рассмотрения, так что согласно (7.9) вариация скалярного поля в точке \mathbf{r}

$$\delta_G f(\mathbf{r}) = f_G(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = - \frac{\partial f}{\partial r^\alpha} d_G r^\alpha. \quad (7.10)$$

Тогда по построению

$$(1 + \delta_G) f(\mathbf{r}) \equiv (1 - i \hat{l}_\gamma \phi_\gamma) f(\mathbf{r}),$$

где уже \hat{l}_β — оператор на функциях, и

$$i \hat{l}_\beta \phi_\beta f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial r^\alpha} d_G r^\alpha.$$

⁷Проще всего это понять с так называемой пассивной точки зрения: значение функции от точки пространства не зависит от выбора базиса в пространстве, а значит, значение функции от координат в исходном базисе совпадает со значением новой функции в новом базисе. Если же функция определяется в касательном пространстве дифференциалов инвариантной функции, то смена базиса в пространстве, например, поворот базиса сохраняет значение полилинейных функций от векторов в касательном пространстве, поскольку речь идет опять же о функции в касательном пространстве той же точки, но при этом, конечно, в силу инвариантности функции ее компоненты должны удовлетворять закону преобразования тензоров. Если теперь формально посмотреть на запись преобразований компонент координат, то, по сути, не имеет значения, как они были получены: в пассивной трактовке, когда преобразуется базис, а точка пространства остается одной и той же, или в активной трактовке, когда считается, что преобразуются компоненты координат точки в исходном базисе, а все остальные величины имеют тензорный закон преобразования, и, в частности, скалярная функция — это инвариант.

В случае поворота в 2-мерном пространстве (вокруг оси z) на угол $\phi \rightarrow 0$

$$f_G(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) \approx -i\hat{l}_z\phi f(\mathbf{r}) = -\left(dy \frac{\partial f}{\partial y} + dx \frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\phi \left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}\right) \Rightarrow \\ i\hat{l}_z = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} = x\partial_y - y\partial_x,$$

и в общем случае (в декартовых координатах нижние и верхние индексы не отличают!)

$$\hat{l}_\alpha = -i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} r_\beta \partial_\gamma = -\frac{i}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (r_\beta \partial_\gamma - r_\gamma \partial_\beta) = -i(\mathbf{r} \times \nabla)_\alpha.$$

Поскольку в пространстве амплитуд вероятности достоверности траекторий величина $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ отвечает оператору импульса, то величина

$$\hat{\ell} = \hbar\hat{l} = -i\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}} \quad (7.11)$$

является орбитальным моментом импульса ℓ .

Легко вычислить коммутаторы генераторов поворотов \hat{l}_α с координатами r_β и с генераторами трансляций $\hat{k}_\beta = -i\partial_\beta$,

$$[\hat{l}_\alpha, r_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} r_\gamma, \quad [\hat{l}_\alpha, \hat{k}_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{k}_\gamma.$$

Отсюда видно, что вектор координат и генератор трансляций поворачиваются по одному и тому же закону, т. е. генераторы трансляций — векторы. Однако напомним, что генераторы трансляций задаются частной производной, т. е. строкой, а не столбцом, как координаты, и соответствующие операторы преобразования являются сопряженными к операторам поворота (простым транспонированием), что при тех же коммутационных соотношениях для r_α и \hat{k}_α с \hat{l}_β приводит к обратному повороту \hat{k}_α по сравнению с r_α : $R(\phi) \approx 1 - is_\alpha\phi_\alpha$, в то время как $R^T(\phi) \approx 1 + is_\alpha\phi_\alpha$, так как $s_\alpha^T = -s_\alpha$ (см. (7.4)–(7.6)).

Кроме того, сами генераторы орбитальных поворотов также являются векторами, поскольку

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{l}_\gamma. \quad (7.12)$$

Итак, мы рассмотрели пример представления группы поворотов в пространстве скалярных функций, т. е. среди однокомпонентных функций, а стало быть, пространство представления имело размерность, равную единице.

Другой пример — векторное поле, у которого 3 компоненты, а значит, представление действия группы поворотов трехмерное. Тогда, если поле — векторная функция, $\Phi \mapsto \mathcal{A}(\mathbf{r})$, то закон преобразования для векторов в общем виде

$$\mathcal{A}'^\alpha(\mathbf{r}') = \frac{\partial r'^\alpha}{\partial r^\beta} \mathcal{A}^\beta(\mathbf{r}),$$

в случае поворотов можно представить в виде действия на нее оператора поворотов

$$G \circ \mathcal{A}(\mathbf{r}) = S(G) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \mathcal{A}_G(\mathbf{r}_G) = S(G) \cdot \mathcal{A}(\mathbf{r}),$$

где $S_{\bullet\beta}^{\alpha}(G) = \partial r'^{\alpha}/\partial r^{\beta}$ — матрица поворотов векторного пространства, которая для инфинитезимальных поворотов равна

$$S(G) = \mathbb{1} - i s_{\gamma} \phi_{\gamma},$$

где \mathbf{s} — это, по-прежнему, 3×3 -матрицы поворотов (7.4)–(7.6). Учитывая это определение и повторяя выкладки для бесконечно малых преобразований координат в аргументе векторного поля точно также, как и в случае скалярной функции

$$\mathcal{A}_G(\mathbf{r}_G) = \mathcal{A}_G(\mathbf{r}) + i \hat{l}_{\gamma} \phi_{\gamma} \mathcal{A}(\mathbf{r}),$$

найдем, что

$$\mathcal{A}_G(\mathbf{r}) \approx (1 + \delta_G) \mathcal{A}(\mathbf{r}) = (1 - i \hat{j}_{\gamma} \phi_{\gamma}) \mathcal{A}(\mathbf{r}), \quad (7.13)$$

где

$$\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{l}} + \mathbf{s},$$

т. е. полный генератор $\hat{\mathbf{j}}$ есть сумма дифференциального оператора орбитальных поворотов $\hat{\mathbf{l}}$ и матрицы *спина* векторного поля \mathbf{s} . Конечно, после умножения на \hbar эти величины приобретают смысл операторов полного момента импульса $\hat{\mathbf{J}} = \hbar \hat{\mathbf{j}}$, орбитального момента импульса $\hat{\mathbf{\ell}} = \hbar \hat{\mathbf{l}}$ и спинового момента собственного вращения $\mathbf{s} = \hbar \mathbf{s}$ в пространстве амплитуд вероятности траекторий Ψ .

В случае тензорного поля ранга k по каждому из индексов тензора α_n , $n = \{\overline{1, k}\}$, при поворотах необходимо ввести действие матрицы спина векторного поля $(\mathbf{s}^{(n)})_{\bullet\beta_n}^{\alpha_n}$, в то время как матрица инфинитезимальных поворотов примет вид

$$S(G) \mapsto \mathbb{1} - i \phi_{\gamma} \sum_{n=1}^k s_{\gamma}^{(n)},$$

где сумма

$$\mathbf{S} = \sum_{n=1}^k \mathbf{s}^{(n)}$$

называется полным спином тензора.

(7.В) Генераторы спина как матрицы**30 Спин $s = 1$**

Транспонирование и эрмитово сопряжение квадратных матриц, бра- и кет-векторы, уравнение на собственные значения, секулярное уравнение, вещественные собственные значения эрмитовых матриц, степень вырождения спектра, ортогональность собственных векторов с разными собственными значениями, собственные вектора и собственные значения матрицы проекция спина на ось z для $s = 1$, сферическая гармоника единичного радиус-вектора, действие повышающих и понижающих матриц для $s = 1$, условие полноты базиса собственных векторов эрмитовой матрицы, операторное представление эрмитовой матрицы, понятие о среднем значении, описание измерительного прибора, математическое представление об амплитуде вероятности собственного значения эрмитовой матрицы.

Для исследования свойств матриц спина векторной частицы напомним ряд определений для квадратных матриц \hat{A} размером $n \times n$, которые действуют на n -мерные столбцы, т. е. в n -мерном комплексном пространстве.

Транспонированная матрица A^T имеет элементы

$$(A^T)_{\beta}^{\bullet\alpha} = A_{\bullet\beta}^{\alpha}. \quad (7.14)$$

Эрмитово сопряженная матрица A^\dagger имеет элементы, комплексно сопряженные элементам транспонированной матрицы:

$$(A^\dagger)_{\beta}^{\bullet\alpha} = (A^*)_{\bullet\beta}^{\alpha}. \quad (7.15)$$

Эрмитово самосопряженная матрица или просто эрмитова матрица совпадает со своей эрмитово сопряженной,

$$A^\dagger = A \Rightarrow A_{\bullet\beta}^{\alpha} = (A^*)_{\beta}^{\bullet\alpha}. \quad (7.16)$$

Из определений матриц спина векторной частицы в формулах (7.4)–(7.6):

$$s_x = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_y = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

следует, что эти матрицы являются эрмитовыми.

Элементы комплексного векторного n -мерного пространства, т. е. столбцы, будем согласно Дираку обозначать символом кет-вектора:

$$|\mathcal{V}\rangle \equiv \mathcal{V} = \sum_{\alpha=1}^n \mathcal{V}^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \mathcal{V}^\alpha \mathbf{e}_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} \mathcal{V}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathcal{V}^{(n)} \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

Например, в трехмерном евклидовом пространстве векторы базиса —

$$|\mathbf{e}_x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{e}_y\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{e}_z\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а вектор

$$|\mathcal{V}\rangle = \begin{pmatrix} \mathcal{V}^x \\ \mathcal{V}^y \\ \mathcal{V}^z \end{pmatrix}.$$

Эрмитово сопряженные ковекторы, т. е. строки с комплексно сопряженными элементами столбца, будем обозначать бра-векторами⁸

$$\langle \mathcal{V}| = (\mathcal{V}^{*(1)}, \dots, \mathcal{V}^{*(n)}). \quad (7.18)$$

Для квадратных матриц ставится задача на собственные значения:

$$A|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle, \quad |\lambda\rangle \neq 0. \quad (7.19)$$

Собственный вектор $|\lambda\rangle$ не равен нулю, что может иметь место лишь, если у матрицы $A - \lambda \cdot \mathbb{1}$ нет обратной, т. е. при условии

$$\det(A - \lambda \cdot \mathbb{1}) = 0, \quad (7.20)$$

поскольку

$$(A - \lambda \cdot \mathbb{1})|\lambda\rangle = 0,$$

и если матрица $(A - \lambda \cdot \mathbb{1})$ имеет обратную, то домножение этого уравнения на обратную матрицу приводило бы к $|\lambda\rangle = 0$, так что условие отсутствие обратной матрицы в виде (7.20) означает существование ненулевого собственного вектора $|\lambda\rangle$. Уравнение (7.20) носит название секулярного уравнения на собственные значения матрицы A . Эрмитово сопряжение секулярного уравнения показывает, что собственные значения эрмитово сопряженной матрицы A^\dagger являются комплексно сопряженными значениями λ^* матрицы A . Отсюда следует, что эрмитовы матрицы, $A^\dagger = A$, имеют вещественные собственные значения, $\lambda^* = \lambda$, так как

$$A|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \Rightarrow \langle\lambda|A|\lambda\rangle = \lambda\langle\lambda|\lambda\rangle$$

и

$$(A|\lambda\rangle)^\dagger = \lambda^*\langle\lambda| = \langle\lambda|A^\dagger = \langle\lambda|A \Rightarrow \langle\lambda|A|\lambda\rangle = \lambda^*\langle\lambda|\lambda\rangle.$$

Секулярное уравнение является полиномом степени n по искомому собственному значению, а значит, оно имеет n решений с учетом степени кратности каждого решения. Спектр собственных значений эрмитовой матрицы может быть невырожден или вырожден, т. е., если одному собственному значению отвечает единственный собственный вектор, то это значение невырождено, если пространство собственных векторов для заданного собственного значения не одномерно, а k -мерно, то говорят о степени вырождения, равной $k > 1$. В базисе собственных векторов эрмитова матрица диагональна: на диагонали стоят собственные значения с учетом кратности их вырождения.

Собственные вектора эрмитовой матрицы с различными собственными значениями ортогональны, поскольку из уравнений

$$A|\lambda_1\rangle = \lambda_1|\lambda_1\rangle, \quad A|\lambda_2\rangle = \lambda_2|\lambda_2\rangle \Rightarrow \langle\lambda_2|A = \langle\lambda_2|\lambda_2,$$

⁸От английского слова «скобка»: bracket = ⟨bra|cket⟩ согласно Дираку.

следует, что после умножения слева на строку бра-вектора

$$\langle \lambda_2 | A | \lambda_1 \rangle = \lambda_1 \langle \lambda_2 | \lambda_1 \rangle, \quad \langle \lambda_1 | A | \lambda_2 \rangle = \lambda_2 \langle \lambda_1 | \lambda_2 \rangle \Rightarrow \langle \lambda_2 | A | \lambda_1 \rangle = \lambda_2 \langle \lambda_2 | \lambda_1 \rangle,$$

что при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ возможно, только если

$$\langle \lambda_1 | \lambda_2 \rangle = 0.$$

Найдем собственные значения эрмитовой матрицы s_z в (7.4), т. е. проекции спина векторной частицы на ось z :

$$\det(s_z - \lambda \cdot \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -i & 0 \\ i & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 1) = 0.$$

Итак, проекция спина имеет три собственных значения $\lambda = \{-1, 0, +1\}$ в трехмерном пространстве, так что спектр собственных значений невырожден. Отнормируем собственные кет-вектора $|\lambda\rangle$ на единицу, так что с точностью до комплексной фазы найдем

$$|+1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.21)$$

В тензорных обозначениях, как мы знаем, значения инвариантной линейной функции A на базисных векторах пространства $\mathcal{A}(\epsilon_\alpha)$ образуют компоненты ковектора \mathcal{A}_α . В квантовых обозначениях это эквивалентно записи $\langle \mathcal{A} | \epsilon_\alpha \rangle = \mathcal{A}_\alpha$, где, подчеркнем, нет комплексного сопряжения, так чтобы было верно $\mathcal{A}(\mathcal{V}^\alpha \epsilon_\alpha) = \mathcal{A}_\alpha \mathcal{V}^\alpha = \langle \mathcal{A} | \mathcal{V} \rangle$. Тогда в терминах компонент декартовых координат собственные состояния задаются полями

$$\mathcal{A}_\pm = \langle \mathcal{A} | \pm 1 \rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{A}_x \pm i \mathcal{A}_y), \quad \mathcal{A}_0 = \langle \mathcal{A} | 0 \rangle = \mathcal{A}_z. \quad (7.22)$$

Например, поле единичного радиус-вектора $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ в переменных сферических координат

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

имеет компоненты с определенными значениями проекции спина на ось z :

$$n_\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (n_x \pm i n_y) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{\pm i \phi}, \quad n_0 = n_z = \cos \theta. \quad (7.23)$$

Наряду с (7.23) вводят сферические гармоники этого вектора $\mathcal{Y}_{1,\pm 1}$ и $\mathcal{Y}_{1,0}$, которые отличаются только нормировкой:

$$\int d\Omega \mathcal{Y}_{1,m}^* \mathcal{Y}_{1,m'} = \delta_{mm'},$$

так что

$$\mathcal{Y}_{1,m} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} n_m, \quad m = \{\pm 1, 0\}.$$

Представление поля в виде сферических гармоник называют стандартным в отличие от покомпонентного представления в декартовых координатах.

Собственные векторы матрицы спина s_z не являются собственными для матриц s_x и s_y . Более того, вводят повышающие и понижающие матрицы

$$s_{\pm} = s_x \pm i s_y, \quad s_+^\dagger = s_-, \quad s_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.24)$$

Легко найти, что повышающий оператор увеличивает значение проекции на единицу,

$$s_+ | +1 \rangle = 0, \quad s_+ | 0 \rangle = \sqrt{2} | +1 \rangle, \quad s_+ | -1 \rangle = \sqrt{2} | 0 \rangle,$$

а понижающий уменьшает на единицу,

$$s_- | +1 \rangle = \sqrt{2} | 0 \rangle, \quad s_- | 0 \rangle = \sqrt{2} | -1 \rangle, \quad s_- | -1 \rangle = 0.$$

При этом состояние $| +1 \rangle$ называется старшим вектором или состоянием старшего веса: при действии повышающего оператора на старший вектор получается нуль, — а $| - \rangle$ называется младшим вектором: при действии понижающего оператора на младший вектор получается нуль.

Задача 52. Рассмотрите генератор группы поворотов на плоскости, описанной в главе 7, (7.А), раздел 29.2. Найдите его собственные векторы. Запишите матрицу конечных поворотов в терминах генератора и единичной матрицы и ее действие на собственные векторы. Убедитесь, что действие группы $\text{SO}(2)$ на собственные векторы с нормой $|\mathbf{r}|$ эквивалентно преобразованию группы $\text{U}(1)$ на комплексных числах z с модулем $|z| = |\mathbf{r}|$ и комплексно сопряженных числах $\bar{z} = z^*$.

Гармоническое движение вектора \mathcal{A} в некоторой точке пространства с заданной частотой ω описывается введением множителя $e^{-i\omega t}$, так что сам вектор в начальный момент времени задает амплитуду гармонических колебаний, а для вещественного вектора рассматривают вещественную часть

$$\Re(\mathcal{A} \cdot e^{-i\omega t}).$$

Тогда декартов базис, как говорят, задает линейные поляризации колебаний поля. Например, состояние $|\mathbf{e}_x\rangle$ описывает колебания вдоль оси x :

$$A_x = \cos(\omega t), \quad A_y = A_z = 0.$$

Интенсивность колебаний W задается как сумма квадратов амплитуд по каждому направлению вектора, так что $W = 1$.

Стандартный спиновый базис определяется как базис собственных векторов матрицы, задающей проекцию спина на ось z . Тогда состояние $| +1 \rangle$, например, описывает колебания

$$A_x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\omega t), \quad A_y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(-\omega t + \pi/2) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\omega t), \quad A_z = 0.$$

Как видим, проекция спина векторного поля на ось z , равная $+1$, задает вращение вектора вокруг оси z против часовой стрелки, что называют правой

поляризацией в отличие от линейной. Интенсивность этих колебаний также равна единице,

$$W = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$

Итак, понятия поляризация векторного поля и спин векторного поля по сути эквивалентны: можно выбрать либо декартов базис линейных поляризаций, либо стандартный спиновый базис круговых поперечных поляризаций и линейной поляризации, если проекция спина равна нулю.

§а Полнота базиса и измерение среднего значения

Разложение вектора по базису собственных векторов матрицы проекции спина на ось z имеет стандартный вид:

$$|\mathcal{A}\rangle = \sum |m\rangle \langle m| \mathcal{A}, \quad (7.25)$$

где берется сумма по значениям проекции $m = \{\pm 1, 0\}$. Смысл этого выражения прост: вычисляется проекция базисного вектора на заданный вектор \mathcal{A} , в наших обозначениях

$$\langle m | \mathcal{A} \rangle = \mathcal{A}_m^*,$$

а затем суммируются это проекции по базисным векторам. В этой связи полнота базиса отвечает условию

$$\sum |m\rangle \langle m| = \mathbb{1}. \quad (7.26)$$

Заметим теперь, что действие матрицы спина s_z на условие полноты базиса дает нам, как говорят, операторное представление для этой матрицы, записанное в терминах бра- и кет-векторов:

$$s_z \left(\sum |m\rangle \langle m| \right) = \left(\sum |m\rangle \langle m| \right) s_z = \sum |m\rangle m \langle m|, \quad (7.27)$$

поскольку матрица эрмитова и ее действие на собственные бра- и кет-векторы дает вещественное собственное значение, равное m .

Если вектор собственный и он имеет единичную нормировку, то

$$\langle m | s_z | m \rangle = m.$$

Если же вектор является суперпозицией

$$|\mathcal{A}\rangle = \sum |m\rangle \mathcal{A}_m^*,$$

то для нормированного на единицу вектора

$$|\mathcal{A}'\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum |m\rangle \mathcal{A}_m^*}{\sqrt{\sum \mathcal{A}_k^* \mathcal{A}_k}},$$

величина

$$\langle \mathcal{A}' | s_z | \mathcal{A}' \rangle = \sum m w_m,$$

где вес собственного значения

$$w_m = \frac{\mathcal{A}_m^* \mathcal{A}_m}{\sum \mathcal{A}_k^* \mathcal{A}_k}, \quad 0 \leq w_m \leq 1,$$

причем сумма весов равна единице

$$\sum w_m = 1.$$

Всем эти построениям следует придать вполне ясный физический смысл:

- соотношение полноты базиса (7.26) описывает идеальный измерительный прибор, который «видит» все компоненты вектора,
- величина

$$\langle s_z \rangle = \langle \mathcal{A} | s_z | \mathcal{A} \rangle \frac{1}{\sum \mathcal{A}_k^* \mathcal{A}_k} \quad (7.28)$$

описывает среднее значение матрицы, в данном случае, проекции спина на ось z ,

- причем каждое измерение проекции спина прибором дает одно из собственных значений заданной матрицы спина⁹:

$$s_z = \sum |m\rangle m \langle m|, \quad (7.29)$$

- каждое собственное значение имеет вероятность

$$w_m = \mathcal{A}'_m^* \mathcal{A}'_m, \quad (7.30)$$

причем для нормированного на единицу вектора \mathcal{A}' проекцию

$$\mathcal{A}'_m = \langle \mathcal{A}' | m \rangle \quad (7.31)$$

называют амплитудой вероятности для значения проекции спина, равной m , при усреднении по вектору \mathcal{A}' .

В случае, когда все эти построения проводятся в базисе, который не является собственным для эрмитовой матрицы, физический смысл проведенных построений не изменяется, хотя операторное представление становится не диагональным. Например, в декартовом базисе

$$\langle \mathbf{e}^\alpha | s_z | \mathbf{e}_\beta \rangle = (s_z)_{\bullet\beta}^\alpha, \quad s_z = \sum |\mathbf{e}_\alpha\rangle (s_z)_{\bullet\beta}^\alpha \langle \mathbf{e}^\beta|.$$

⁹В качестве иллюстрации этого положения сошлемся на опыты Штерна и Герлаха: отклонение частицы при движении сквозь неоднородное аксиально симметричное магнитное поле определяется проекцией магнитного момента на ось, скажем, z , вдоль которой магнитное поле меняет свое значение, сила $\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathcal{H} \mapsto \mu_z \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}$ для аксиального случая, когда единственная компонента магнитного поля, производная которой не равна нулю, — это \mathcal{H}_z . Но проекция магнитного момента $\boldsymbol{\mu}$ задается проекцией спина частицы на ось магнитного поля, так что подобный прибор регистрирует именно проекцию спина по отклонению частицы на некотором фиксированном расстоянии от области прохождения через поле. Эксперимент указывает, что проекция спина принимает строго дискретные значения, отвечающие собственным значениям матрицы проекции спина на ось z в данном случае.

Наконец отметим, что, поскольку для вектора квадрат матрицы спина — это число, $s^2 = 2$, собственные вектора s_z являются собственными и для квадрата спина векторной частицы.

Здесь логично поставить вопрос о том, в каком случае две эрмитовы матрицы могут иметь совместный базис собственных векторов. Такой базис может служить основой для классификации полей по собственным значениям генераторов группы симметрии, в нашем случае, группы поворотов.

31 Совместный базис двух эрмитовых матриц

Нулевой коммутатор эрмитовых матриц и совместный базис собственных векторов, физический смысл коммутаторов генераторов группы вращений.

Пусть две эрмитовы матрицы $A^\dagger = A$, $B^\dagger = B$ имеют совместный базис:

$$A|a, b\rangle = a|a, b\rangle, \quad B|a, b\rangle = b|a, b\rangle.$$

Тогда

$$AB|a, b\rangle = A b|a, b\rangle = b A|a, b\rangle = ba|a, b\rangle,$$

$$BA|a, b\rangle = B a|a, b\rangle = a B|a, b\rangle = ab|a, b\rangle,$$

а значит,

$$(AB - BA)|a, b\rangle = [A, B]|a, b\rangle = 0,$$

для любых базисных векторов, следовательно, коммутатор таких матриц равен нулю:

$$[A, B] = 0.$$

Справедливо и обратное утверждение: если коммутатор двух эрмитовых матриц равен нулю, то может быть выбран совместный базис их собственных векторов. В самом деле, если спектр матрицы A невырожден, $A|a\rangle = a|a\rangle$, то введем

$$|f\rangle = B|a\rangle.$$

Тогда в силу равенства нулю коммутатора

$$A|f\rangle = AB|a\rangle = BA|a\rangle = B a|a\rangle = a B|a\rangle = a|f\rangle,$$

а значит, вектор $|f\rangle$ является собственным для матрицы A со значением a , т. е. в силу невырожденности собственного значения

$$|f\rangle = f|a\rangle, \Rightarrow B|a\rangle = f|a\rangle,$$

и следовательно, f — собственное значение для эрмитовой матрицы B , которое должно быть вещественным, и базисный вектор $|a\rangle$ общий для обеих матриц.

Если собственное значение a вырождено, $A|a, \alpha\rangle = a|a, \alpha\rangle$, со степенью вырождения k , $\alpha = \{\overline{1, K}\}$, то введем

$$|f, \alpha\rangle = B|a, \alpha\rangle,$$

так что

$$A|f, \alpha\rangle = AB|a, \alpha\rangle = BA|a, \alpha\rangle = B a|a, \alpha\rangle = a B|a, \alpha\rangle = a|f, \alpha\rangle,$$

т. е. мы имеем вектор в K -мерном пространстве собственных векторов с собственным значением a , а значит, он разлагается по исходному базису $|a, \alpha\rangle$, который мы считаем ортонормированным,

$$|f, \alpha\rangle = C_{\bullet\beta}^\alpha |a, \beta\rangle = B |a, \alpha\rangle \Rightarrow \langle a, \beta | B |a, \alpha\rangle = C_{\bullet\beta}^\alpha.$$

Здесь квадратная матрица C размерности $K \times K$ является эрмитовой как результат действия в K -мерном пространстве матрицы B в силу эрмитовости матрицы B :

$$\begin{aligned} C_{\bullet\beta}^\alpha &= \langle a, \beta | B |a, \alpha\rangle = (B |a, \beta\rangle)^\dagger |a, \alpha\rangle = \left(C_{\bullet\alpha'}^\beta |a, \alpha'\rangle \right)^\dagger |a, \alpha\rangle = \\ &= (C^*)_{\alpha'}^\beta \langle a, \alpha' | a, \alpha\rangle = (C^*)_{\alpha'}^\beta. \end{aligned}$$

Это означает, что можно перейти от базиса $|a, \alpha\rangle$ к базису собственных векторов матрицы C с вещественными значениями $c_{(\gamma)}$:

$$C |a, \gamma\rangle = c_{(\gamma)} |a, \gamma\rangle, \quad \text{нет суммирования по } \gamma.$$

В этом базисе,

$$B |a, \gamma\rangle = c_{(\gamma)} |a, \gamma\rangle, \quad \text{нет суммирования по } \gamma,$$

а значит, $c_{(\gamma)}$ — собственное значение матрицы B , и мы построили совместный базис собственных векторов для двух коммутирующих эрмитовых матриц.

Итак, для классификации полей по собственным значениям эрмитовых генераторов группы симметрии, в частности, группы поворотов, необходимо выбрать максимальный набор попарно коммутирующих генераторов, для которого можно построить совместный базис собственных векторов. К этим генераторам, образующим подалгебру Картана, необходимо добавить независимые операторы Казимира, число которых совпадает с рангом алгебры генераторов, так, чтобы каждый совместный собственный вектор набора эрмитово самосопряженных наблюдаемых величин был единственным в пространстве состояний, и тогда такой набор эрмитово самосопряженных операторов называют полным набором наблюдаемых для генераторов симметрии.

Проведенное рассмотрение показало физический смысл коммутатора генераторов группы симметрии: собственное значение одного генератора группы не изменяется при действии бесконечно малого преобразования группы с другим генератором, который коммутирует с первым. Если генераторы не коммутируют, то собственные значения генератора меняются при действии преобразования с другим генератором.

О我们将 такое рассмотрение для генераторов спина тензорных полей.

(7.С) Спиновые операторы и состояния**32 Квантование спина**

Общий случай «операторного» квантования матриц спина группы вращений, базис векторов спина s и действие на него понижающих и повышающих матриц, число компонент в базисе спина s .

Пусть \mathbf{s} — эрмитовы матрицы, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям генераторов группы поворотов:

$$[s_\alpha, s_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma. \quad (7.8)$$

Отсюда следует, что в полный набор наблюдаемых можно включить лишь один из генераторов, например, s_z , так как два других генератора не коммутируют с ним и не могут иметь совместного с ним базиса собственных векторов.

Ясно, что нулевой коммутатор у генератора поворотов может быть только с самим собой или со скалярной величиной, которая не преобразуется при поворотах, поскольку собственное значение скалярной величины до поворота и после поворота не изменяется. Из генераторов группы поворотов можно построить лишь один независимый скаляр¹⁰, \mathbf{s}^2 . Вычислим коммутатор

$$[\mathbf{s}^2, s_\alpha] = [s_\beta s_\beta, s_\alpha]$$

с помощью тождества

$$[AB, C] = ABC - CAB = ABC - ACB + ACB - CAB = A[B, C] + [A, C]B,$$

откуда

$$[s_\beta s_\beta, s_\alpha] = s_\beta [s_\beta, s_\alpha] + [s_\beta, s_\alpha] s_\beta = i\epsilon_{\beta\alpha\gamma} (s_\beta s_\gamma + s_\gamma s_\beta).$$

Здесь в круглых скобках — симметричный относительно перестановок индексов β и γ тензор второго ранга — сворачивается с тензором $\epsilon_{\beta\alpha\gamma}$, антисимметричным по перестановкам тех же индексов β и γ , но такая свертка симметричного тензора с антисимметричным всегда тождественно равна нулю. В итоге,

$$[\mathbf{s}^2, s_\alpha] = 0, \quad (7.32)$$

и полный набор наблюдаемых составляют $\{\mathbf{s}^2, s_z\}$.

Базис тензорных полей удовлетворяет уравнениям на собственные значения полного набора наблюдаемых для группы поворотов:

$$\mathbf{s}^2 |\lambda_s, m_s\rangle = \lambda_s |\lambda_s, m_s\rangle, \quad s_z |\lambda_s, m_s\rangle = m_s |\lambda_s, m_s\rangle. \quad (7.33)$$

Будем считать этот базис ортонормированным.

В силу (7.32) повышающий и понижающий генераторы

$$s_\pm = s_x \pm i s_y,$$

коммутируют с квадратом спина:

$$[\mathbf{s}^2, s_\pm] = 0, \quad (7.34)$$

¹⁰Другие скаляры будут функциями скаляра \mathbf{s}^2 .

и это означает, что значение λ_s не меняется при действии бесконечно малых преобразований с генераторами $s_{x,y}$, но при действии тех же преобразований меняется значение m_s , так как в противном случае, эти генераторы коммутировали бы с s_z , что неверно. Такое положение указывает, что одному и тому же значению λ_s отвечают несколько значений m_s , т. е. имеет место вырождение спектра собственных значений λ_s по значениям m_s . Между прочим, мы установили общее условие вырожденности спектра эрмитовой матрицы A : если эрмитова матрица A коммутирует с эрмитовыми матрицами B и C , но сами матрицы B и C не коммутируют между собой, то спектр собственных значений матрицы A вырожден, например, по собственным значениям в совместном базисе с матрицей B .

Найдем действие повышающего и понижающего генератора на совместный базис $|\lambda_s, m_s\rangle$. Для этого сначала вычислим коммутаторы

$$[s_\pm, s_z] = [s_x, s_z] \pm i[s_y, s_z] = -i s_y \pm i i s_x = \mp s_\pm.$$

Тогда

$$s_z s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle = (s_\pm s_z \pm s_\pm) |\lambda_s, m_s\rangle = (m_s \pm 1) s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle.$$

Значит, вектор $s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle$ имеет собственные значения s_z , равные $m_s \pm 1$:

$$\begin{aligned} s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle &= N_\pm(\lambda_s, m_s) |\lambda_s, m_s \pm 1\rangle \Rightarrow \\ (s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle)^\dagger &= \langle \lambda_s, m_s | s_\mp = N_\pm(\lambda_s, m_s) \langle \lambda_s, m_s |, \end{aligned}$$

где мы задали комплексную фазу собственного вектора $|\lambda_s, m_s\rangle$ так, чтобы нормировочный коэффициент был бы вещественным. Найдем нормировочный коэффициент $N_\pm(\lambda_s, m_s)$. Для этого заметим, что

$$s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = s_+ s_- + i[s_x, s_y] + s_z^2 = s_+ s_- - s_z + s_z^2,$$

и аналогично

$$s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = s_- s_+ - i[s_x, s_y] + s_z^2 = s_- s_+ + s_z + s_z^2.$$

Тогда

$$\langle \lambda_s, m_s | s_\mp s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle = (s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle)^\dagger s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle = N_\pm^2(\lambda_s, m_s),$$

т. е.

$$\begin{aligned} N_\pm^2(\lambda_s, m_s) &= \langle \lambda_s, m_s | s_\mp s_\pm |\lambda_s, m_s\rangle = \\ &= \langle \lambda_s, m_s | (s^2 - s_z^2 \mp s_z) |\lambda_s, m_s\rangle = \lambda_s - m_s(m_s \pm 1). \end{aligned}$$

Поскольку нормировка вектора не может быть отрицательной, $N_\pm^2(\lambda_s, m_s) \geq 0$. Это условие может быть выполнено, только если в цепочках многократного действия повышающего и понижающего операторов, во-первых, значения m_s не произвольны, а принимают такие значения, чтобы

$$m_s(m_s \pm 1) \leq \lambda_s,$$

и во-вторых, должны существовать максимальное m_s^{\max} и минимальное m_s^{\min} значения, которые дают в точности нулевые значения нормы вектора после

повышения и понижения, соответственно, так как в противном случае повышение и понижение приводило бы к возникновению векторов с отрицательной нормой, что недопустимо, т. е.

$$m_s^{\max}(m_s^{\max} + 1) = \lambda_s, \quad m_s^{\min}(m_s^{\min} - 1) = \lambda_s.$$

Вместе с тем, действуя многократно на вектор $|\lambda_s, m_s^{\max}\rangle$ понижающим оператором n раз, мы получим $m_s = m_s^{\max} - n$ и в конце концов вектор, в точности равный $|\lambda_s, m_s^{\min}\rangle$, в силу существования минимально допустимого значения m_s , т. е. для некоторого неотрицательного целого значения n верно $m_s^{\min} = m_s^{\max} - n$. Тогда связь минимального и максимального значений проекции спина на ось z с собственным значением квадрата спина λ_s приводит к единственному решению в виде

$$\begin{aligned} m_s^{\max}(m_s^{\max} + 1) - m_s^{\min}(m_s^{\min} - 1) &= 0, \Rightarrow \\ m_s^{\max}(m_s^{\max} + 1) - (m_s^{\max} - n)(m_s^{\max} - n - 1) &= 0, \Rightarrow \\ m_s^{\max} = \frac{n}{2}, \quad m_s^{\min} = -\frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Максимальное значение проекции спина на ось z обозначают символом s , так что

$$s = \frac{n}{2}, \tag{7.35}$$

т. е. допустимые значения проекции спина — это положительные полуцелые и целые значения. Целые значения отвечают полям, которые называют тензорными, а полуцелые — спинорным полям.

Базис полей, таким образом, образуют совместные собственные векторы квадрата спина и его проекции на выбранную ось, так что изменения обозначения путем подстановки $\lambda_s = s(s+1) \mapsto s$ запишем его в виде

$$|s, m_s\rangle, \quad m_s \in \{-s, -s+1, \dots, s-1, s\}. \tag{7.36}$$

Действие повышающей и понижающей матриц спина на базисные вектора строго определено,

$$s_{\pm}|s, m_s\rangle = \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} |s, m_s \pm 1\rangle. \tag{7.37}$$

В частном случае $s = 1$, мы убедились, что соотношения (7.37) являются тождествами согласно проведенной нами процедуре прямого построения матриц спина и собственных векторов для матрицы s_z .

Размерность пространства собственных векторов квадрата спина и его проекции на выбранную ось равна один старший вектор с максимальным значением проекции и n шагов от старшего вектора до младшего, т. е. вектора с минимальным значением проекции, а значит,

$$k = 1 + n = 1 + 2s.$$

Это число компонент называют мультиплетностью неприводимого представления группы поворотов для поля. Неприводимым это представление называют потому, что при поворотах, а значит, при многократном действии генераторов спина, вектор с заданной проекцией спина на ось z перемешивается со

всеми другими векторами базиса с тем же значением квадрата спина, т. е. пространство собственных векторов с заданным квадратом спина не содержит в себе подпространств, вектора которых не смешивались бы друг с другом при действии группы поворотов¹¹.

Для скаляра $s = 0$, и поле имеет одну единственную компоненту, поэтому скаляр называют синглетом и обозначают символом 1. У вектора $s = 1$, и поле имеет три компоненты, это — триплет (символ 3), у спинора $s = \frac{1}{2}$, и поле имеет две компоненты, это — дублет (символ 2).

Напомним, что построенный нами базис называют стандартным, он решает задачу классификации полей по базису собственных векторов генераторов спина.

В физике собственные кет-векторы, образующие базис в векторном подпространстве с заданным значением спина s , называются базисом квантовых состояний для этого спина, а векторы с ограниченной нормой, построенные в виде суперпозиции собственных векторов — состояниями квантовой системы с заданным спином s . Корень «квант» в данном случае означает, что размерная величина собственного момента количества значения кванта поля со спином $S = \hbar s$ включает в себя постоянную Планка, а собственные значения квадрата спина и его проекции дискретны, и интервал между соседними собственными значениями задается постоянной Планка, и кроме того, также учитывается тот факт, что для операторов проекции спина на другие оси эти базисные квантовые состояния не являются собственными.

Задача 53. Найдите преобразование матриц спина векторного поля, которое переводит эти матрицы из базиса декартовых координат к матрицам в стандартном базисе собственных векторов с заданными значениями проекции спина на ось z .

¹¹ В линейном пространстве полей, на котором действует матричное представление группы Ли, можно ввести нетривиальные классы эквивалентности по отношению к действию группы с точностью до линейных суперпозиций: класс ненулевого элемента пространства (поля) образуется линейной оболочкой элементов поля, которые получаются действием всех элементов группы на выбранный элемент. Тогда представление является неприводимым, если в нем есть только один класс эквивалентности (нетривиальный класс включает в себя хотя бы один ненулевой элемент, сам же нулевой элемент обычно не преобразуется, т. е. является инвариантом).

33 Тензорные поля

Тензорные поля как базис полей с целым спином, переход от стандартного представления к индексному в декартовом базисе, спин $s = 2$, неприводимые представления для полей спина s — симметричные бесследовые тензоры ранга s , нулевой спин символов Кронекера и Леви-Чивиты, сферические гармоники $\mathcal{Y}_{l,m}$ как симметричные бесследовые тензоры ранга l в виде тензорного произведения единичных радиус-векторов.

Рассмотрим, как стандартное представление тензорного поля связано с его индексным представлением по компонентам в декартовом базисе евклидова пространства.

Для скалярного поля ответ элементарен, поскольку скалярная функция с $s = 0$ имеет лишь одну единственную компоненту, так что $\langle \Phi | 0, 0 \rangle = \Phi(\mathbf{r})$.

Для векторного поля $s = 1$, и вопрос был уже рассмотрен нами выше:

$$\mathcal{A}_\pm = \langle \mathcal{A} | \pm 1 \rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{A}_x \pm i \mathcal{A}_y), \quad \mathcal{A}_0 = \langle \mathcal{A} | 0 \rangle = \mathcal{A}_z, \quad (7.22)$$

причем было рассмотрено и действие повышающей и поникающей матриц на эти компоненты, которое согласуется с общим выражением (7.37),

$$s_+ \mathcal{A}_+ = 0, \quad s_+ \mathcal{A}_0 = \sqrt{2} \mathcal{A}_+, \quad s_+ \mathcal{A}_- = \sqrt{2} \mathcal{A}_0, \quad (7.38)$$

и

$$s_- \mathcal{A}_+ = \sqrt{2} \mathcal{A}_0, \quad s_- \mathcal{A}_0 = \sqrt{2} \mathcal{A}_-, \quad s_- \mathcal{A}_- = 0. \quad (7.39)$$

Заметим теперь, что любое тензорное поле с заданным значением $s^2 = s(s + 1)$ легко построить, если начать со старшего собственного вектора, действуя поникающей матрицей.

Например, для поля $T_{\alpha\beta}$ с $s = 2$, матрицы спина являются суммой двух матриц по каждому из индексов, $S = s^{(1)} + s^{(2)}$, а значит, старший вектор —

$$\begin{aligned} T_{(+2)} &= \langle T | 2, +2 \rangle = T_{++}, \\ S_+ T_{++} &= (s_+^{(1)} + s_+^{(2)}) T_{++} = 0, \\ S_z T_{++} &= (s_z^{(1)} + s_z^{(2)}) T_{++} = 2 T_{++}, \end{aligned}$$

т. е., проводя замену по каждому индексу также, как и для вектора, найдем

$$T_{++} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (T_{x+} + i T_{y+}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} (T_{xx} + i T_{xy}) - \frac{1}{\sqrt{2}} i (T_{yx} + i T_{yy}) \right),$$

и после приведения подобных членов

$$T_{++} = \frac{1}{2} \{ T_{xx} - T_{yy} + i (T_{xy} + T_{yx}) \}. \quad (7.40)$$

Затем, поскольку

$$S_- |S, M_S\rangle = \sqrt{S(S+1) - M_S(M_S-1)} |S, M_S\rangle,$$

значит,

$$S_- |2, +2\rangle = \sqrt{2 \cdot 3 - 2 \cdot 1} |2, +1\rangle = 2 |2, +1\rangle,$$

и, следовательно, для $T_{(+1)} = \langle T | 2, +1 \rangle$ получим

$$\begin{aligned} T_{(+1)} &= \frac{1}{2} (s_-^{(1)} + s_-^{(2)}) T_{++} = \frac{1}{2} (\sqrt{2} T_{0+} + \sqrt{2} T_{+0}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_{z+} + T_{+z}) = \\ &= -\frac{1}{2} (T_{zx} + i T_{zy} + T_{xz} + i T_{yz}), \end{aligned}$$

т. е.

$$T_{(+1)} = -\frac{1}{2} \{T_{zx} + T_{xz} + i(T_{zy} + T_{yz})\}. \quad (7.41)$$

Далее, $S_- |2, +1\rangle = \sqrt{2 \cdot 3 - 1 \cdot 0} |2, 0\rangle = \sqrt{6} |2, 0\rangle$, а значит,

$$\begin{aligned} T_{(0)} &= \frac{1}{\sqrt{6}} (s_-^{(1)} + s_-^{(2)}) T_{(+1)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} (s_-^{(1)} + s_-^{(2)}) (T_{0+} + T_{+0}) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (\sqrt{2}(T_{-+} + T_{00}) + \sqrt{2}(T_{00} + T_{+-})), \end{aligned}$$

что после несложных арифметических действий дает

$$T_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \{2T_{zz} - T_{xx} - T_{yy}\}. \quad (7.42)$$

Аналогично найдем, что

$$T_{(-2)} = T_{--} = T_{++}^*, \quad T_{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_{z-} + T_{-z}) = -T_{(+1)}^*. \quad (7.43)$$

Итак, тензорное поле с заданным значением спина s можно построить из старшего вектора путем действия поникающей матрицы и, при этом, это тензорное поле имеет $2s + 1$ компонент.

Заметим, что тензорное поле с заданным спином $s = 2$ описывается симметричным вкладом тензора $T_{\alpha\beta}$, что ясно уже из того, что старший вектор является симметричным по перестановке индексов, а поникающая матрица также построена симметрично по перестановке индексов. Отсюда следует, что спин $s = 2$ отвечает симметричным тензорам ранга 2. При этом этот тензор обладает еще и нулевым следом, поскольку след дает нулевой вклад в компоненты стандартного представления для тензорного поля с $s = 2$, что следует из явного вида построенных нами компонент (7.40)–(7.43). Кроме того, если посчитать число степеней свободы, симметричный тензор второго ранга имеет 6 независимых компонент, след тензора является инвариантом и не преобразуется при поворотах, так что требование нулевого следа симметричного тензора второго ранга как раз оставляет пять независимых компонент, как это и должно быть у тензорного поля со спином 2.

В частности, инвариантный тензор Кронекера хоть и обладает рангом, равным 2, дает при подстановке в формулы (7.40)–(7.43) тензорное поле спина 2, тождественно равное нулю, так как, в самом деле, тензор Кронекера не преобразуется при поворотах. т. е. ведет себя как инвариант. Иными словами,

старший вектор стандартного представления $\delta_{++} \equiv 0$, а значит, действием на него понижающей матрицей получаются только нулевые вектора спина 2.

Задача 54. Вычислите все компоненты символа Кронекера в базисе $\{+, -, 0\}$. Ответ: ненулевые компоненты $\delta_{00} = -\delta_{+-} = -\delta_{-+} = 1$.

Теперь, поскольку любой симметричный тензор $T_{\alpha\beta\gamma\dots}$ можно представить в виде суммы тензора с нулевым следом $\tilde{T}_{\alpha\beta\gamma\dots} = T_{\alpha\beta\gamma\dots} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}T'_{\gamma\dots}$ и тензора меньшего ранга $T'_{\gamma\dots} = \delta_{\alpha\beta}T_{\alpha\beta\gamma\dots}$, умноженного на символ Кронекера: $\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}T'_{\gamma\dots}$, можно рассматривать независимо преобразования при поворотах бесследовых тензоров ранга s и тензоров с рангом на две единицы меньше. При этом, вклад тензора $\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}T'_{\gamma\dots}$ в старший вектор спина s равен $\frac{1}{3}\delta_{++}T'_{+\dots} \equiv 0$, а значит, он не дает вклада в спин s . Следовательно, симметричный тензор спина s — бесследовый.

Рассмотрим число степеней свободы такого симметричного бесследового тензора методом математической индукции:

- вектор, т. е. тензор ранга $s = 1$, имеет $2s + 1 = 3$ независимых компоненты, а симметричный бесследовый тензор второго ранга ($s = 2$) имеет $2s + 1 = 5$ компонент, так что стартовые условия в методе математической индукции выполнены.
- Если симметричный бесследовый тензор $T'_{\alpha_1\dots\alpha_s}$ ранга s обладает $2s + 1$ независимыми компонентами, то добавление еще одного индекса к нему, т. е. введение тензора $T_{\alpha_1\dots\alpha_s\beta}$, симметричного и бесследового по первым s индексам, означает, что построен тензор ранга $s + 1$ с числом независимых компонент, равным $(2s + 1) \cdot 3$, т. е. трем независимым наборам с $2s + 1$ независимыми компонентами. Тогда взятие свертки по любому индексу α и индексу β дает симметричный бесследовый тензор ранга $s - 1$

$$\tilde{T}_{\alpha_2\dots\alpha_s} = T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s\beta}\delta^{\alpha_1\beta},$$

у которого $2(s-1)+1 = 2s-1$ независимых компонент, которые представляют компоненты тензора спина $s - 1$. Ясно, что в силу симметричности по перестановкам индексов α взятие свертки по индексу β и любому из индексов α приводит к одному и тому же тензору \tilde{T} . Исключим из числа компонент тензора $T_{\alpha_1\dots\alpha_s\beta}$ компоненты тензора $\tilde{T}_{\alpha_2\dots\alpha_s}$, которые имеют другое значение спина, т. е. положим их равными нулю. Это дает нам $2s - 1$ условий на компоненты тензора $T_{\alpha_1\dots\alpha_s\beta}$: условия бесследовости.

Далее, в тензоре $T_{\alpha_1\dots\alpha_s\beta}$ выделим часть, антисимметричную по перестановкам индексов α и β , т. е. в декартовых координатах построим тензор

$$\tilde{T}'_{\alpha_2\dots\alpha_s\gamma} = \epsilon_{\alpha_1\beta\gamma} T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s\beta}.$$

Этот тензор является бесследовым, поскольку, если взять свертку индекса γ с любым из индексов α , то

$$\tilde{T}'_{\alpha_2\dots\alpha_s\gamma}\delta_{\alpha_2\gamma} = T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s\beta}\cdot\epsilon_{\alpha_1\beta\gamma}\delta_{\alpha_2\gamma} = T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_s\beta}\cdot\epsilon_{\alpha_1\beta\alpha_2} = 0,$$

так как свертка по двум немым индексам симметричного тензора с антисимметричным тензором Леви-Чивиты обращается в нуль. Антисимметричная по перестановкам индекса γ с любым из индексов α часть

тензора \tilde{T}' также равна нулю, поскольку свертка с антисимметричным тензором Леви-Чивиты по двум немым индексам равна

$$\begin{aligned}\tilde{T}'_{\alpha_2 \dots \alpha_s \gamma} \cdot \epsilon_{\alpha_2 \gamma \gamma'} &= T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s \beta} \cdot \epsilon_{\alpha_1 \beta \gamma} \epsilon_{\alpha_2 \gamma \gamma'} = \\ &= T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s \beta} (-\delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\beta \gamma'} + \delta_{\alpha_1 \gamma'} \delta_{\beta \alpha_2}) = \\ &= -T_{\alpha_1 \alpha_1 \dots \alpha_s \gamma'} + T_{\gamma' \alpha_2 \dots \alpha_s \alpha_2} = \\ &= -0 + T_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_s \gamma' \alpha_2} = \tilde{T}_{\alpha_3 \dots \alpha_s \gamma'},\end{aligned}$$

где первое слагаемое обращается в нуль по условию бесследовости по любой паре из первых s индексов тензора $T_{\alpha_1 \dots \alpha_s \beta}$, а последнее слагаемое равно нулю в силу того, что это тензор спина $s - 1$, равенство нулю которого диктуется уже наложенным нами условием бесследовости тензора $T_{\alpha_1 \dots \alpha_s \beta}$ при свертке по индексу β и любому из индексов α . Но тогда тензор $\tilde{T}'_{\alpha_2 \dots \alpha_s \gamma}$ является бесследовым и симметричным по любой паре индексов, а значит, его ранг равен спину s , так что он имеет $2s+1$ независимую компоненту. Таким образом, в рассматриваемом тензоре $T_{\alpha_1 \dots \alpha_s \beta}$ после наложения условия бесследовости его часть, антисимметричная по перестановкам индексов α и β , содержит в себе $2s+1$ независимых компонент. Следовательно, в тензоре $T_{\alpha_1 \dots \alpha_s \beta}$ из $3(2s+1)$ компонент после наложения условий бесследовости и симметричности останется

$$3(2s+1) - (2s-1) - (2s+1) = 2s+3 = 2(s+1)+1$$

независимых компонент, что и требовалось.

- По индукции заключаем, что симметричные бесследовые тензоры ранга s имеют $2s+1$ независимых компонент и отвечают тензорным полям спина s в том случае, когда компонента старшего состояния $T_{++\dots+}$ с максимальной проекцией на ось z отлична от нуля, так как иначе весь тензор оказывается равным нулю.

Например, если исходный тензор был символом Кронекера, то его бесследовая часть тождественно равна нулю, что отвечает нулевому полю со спином 2 для символа Кронекера. Тензор Леви-Чивиты бесследовый и имеет ранг, равный 3, но он антисимметричен, так что его спин равен нулю, и это — инвариантный тензор¹².

Итак, тензорные поля с определенным значением квадрата спина s описываются симметричными тензорами ранга s с нулевым следом по любой паре индексов. Они представляют собой неприводимые представления группы поворотов мультиплетностью $2s+1$.

¹²Умножение тензора на инвариантный тензор с соответствующей сверткой индексов для получения составного тензора, конечно, не меняет спин исходного тензора: это произведение будет преобразовываться при поворотах системы отсчета ровно также, как произведение исходного тензора на тот же инвариантный тензор по определению инвариантного тензора, так как он не меняется при поворотах. Скажем, произведению вектора на символ Леви-Чивиты $\epsilon_{\alpha \beta \gamma} v_\gamma$ соответствует спин $s = 1$.

§а Сферические гармоники

В качестве примера, рассмотрим симметричный бесследовый тензор второго ранга, составленный из единичных радиус-векторов:

$$T_{\alpha\beta} = n_\alpha n_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta}.$$

Его компоненты

$$T_{(\pm 2)} = \frac{1}{2} \sin^2 \theta e^{\pm i 2\phi}, \quad T_{(\pm 1)} = \mp \sin \theta \cos \theta e^{\pm i \phi}, \quad T_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{6}} (3 \cos^2 \theta - 1),$$

пропорциональны сферическим гармоникам $\mathcal{Y}_{2,m} \sim T_{(m)}$, $m = \{\pm 2, \pm 1, 0\}$.

Сферические гармоники $\mathcal{Y}_{l,m}(\theta, \phi)$ строятся из старшего вектора

$$\mathcal{Y}_{l,l} \sim (n_+)^l = \frac{(-1)^l}{\sqrt{2^l}} \sin^l \theta e^{i l \phi}$$

действием понижающего оператора. При этом $\mathcal{Y}_{l,-m} = (-1)^m \mathcal{Y}_{l,m}^*$. Условие нормировки

$$\int d\Omega \mathcal{Y}_{l,m}^*(\theta, \phi) \mathcal{Y}_{l,m'}(\theta, \phi) = \delta_{mm'}$$

приводит к соотношению¹³

$$\mathcal{Y}_{l,l}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{2^l}} \frac{1}{l!} (n_+)^l.$$

Мы видим, что при поворотах компоненты тензора с заданным спином преобразуются друг в друга. В этом случае говорят о неприводимом представлении группы поворотов: для таких тензорных полей с определенным значением спина невозможно выделить подпространство, элементы которого не смешиваются с элементами других подпространств.

34 Разложение приводимых тензоров на неприводимые

Разложение тензора второго ранга в прямую сумму неприводимых слагаемых с $s = 0, 1, 2$, симметричные и антисимметричные вклады.

Рассмотрим тензорное произведение двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , т. е. тензор с компонентами

$$T_{\alpha\beta} = a_\alpha b_\beta.$$

Выделим в этом тензоре симметричный и антисимметричный вклады,

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \{a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha\} + \frac{1}{2} \{a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha\},$$

и запишем отдельно бесследовый симметричный тензор и его след:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left\{ a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \right\} + \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \frac{1}{2} \{a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha\}.$$

¹³Вычислите нормировочный коэффициент самостоятельно.

Бесследовый симметричный тензор

$$u_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left\{ a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \right\}$$

отвечает тензору спина $s = 2$, а значит, его компоненты при поворотах преобразуются друг в друга без наличия инвариантных подмножеств, т. е. это неприводимое представление группы поворотов.

Скалярному вкладу спина $s = 0$ отвечает слагаемое

$$s_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

так как скалярное произведение векторов — это инвариант, также как инвариантом является и символ Кронекера.

Антисимметричный тензор

$$t_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \{ a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha \}$$

как матрица 3×3 имеет на диагонали нули, над диагональю 3 независимых элемента, а под диагональю все элементы являются отражением элементов над диагональю с противоположным знаком, так что этот тензор имеет 3 независимых компоненты, причем все они могут быть записаны с помощью символа Леви-Чивиты в виде

$$t_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_\gamma.$$

Здесь символ Леви-Чивиты — инвариантный тензор, а $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ — вектор, т. е. тензорное поле спина $s = 1$.

В итоге, составной тензор второго ранга, который представляет собой тензорное произведение двух тензоров со спином $s = 1$, $T = 3 \otimes 3$, разложен в прямую сумму тензоров со спином 0, 1 и 2 — синглет, триплет и квинтет:

$$\text{SO}(3) : \quad 3 \otimes 3 = 1 \oplus 3 \oplus 5.$$

Каждый член этой суммы — неприводимый тензор группы поворотов. Таким образом, мы описали пример разложения приводимого тензора по неприводимым, так что для тензора второго ранга это разложение имеет вид

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left\{ T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} T_{\gamma\gamma} \right\} + \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} T_{\gamma\gamma} + \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\alpha'\beta'} T_{\alpha'\beta'}.$$

Изложенная нами в случае прямого произведения векторов схема действий при разложении тензора на неприводимые слагаемые: выделение симметричной бесследовой части, следа и антисимметричной части, — остается в силе и при рассмотрении тензоров высших рангов и при описании прямого произведения неприводимых тензоров, т. е. при произведении тензоров с определенным спином.

Задача 55. Постройте в явном виде результат разложения в сумму неприводимых слагаемых тензорного произведения в задаче $\text{SO}(3) : 5 \otimes 3$.

35 Поперечные векторные и тензорные поля

Проекции спина на ось волнового вектора для свободных поперечных полей спина $s = 1$ и $s = 2$, безмассовые поля.

В релятивистской теории поля могут возникать особые условия, когда не все поляризации спина реализуются в природе.

Например, для свободного электромагнитного поля уравнения Максвелла дают

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathcal{H} = 0,$$

так что для плоской монохроматической волны, скажем, электрического поля с волновым вектором \mathbf{k} ,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad \omega = c k,$$

найдем, что

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = i \mathbf{k} \cdot \mathcal{E} = 0,$$

т. е. поле является поперечным по отношению к волновому вектору в силу уравнений Максвелла. Значит, если в качестве оси z выбрать направление волнового вектора, то нулю должна быть равна компонента вектора с нулевой проекцией спина на ось волнового вектора, а отличными от нуля будут лишь две компоненты: с проекцией спина на ось волнового вектора, равной $+1$ и -1 .

Такая ситуация характерна для теорий с калибровочной инвариантностью, когда, например, электромагнитное поле — это калибровочное поле с массой, равной нулю.

Другой пример — это свободное безмассовое гравитационное поле, которое описывается симметричным бесследовым тензором второго ранга $h_{\mu\nu}$. Оно тоже является поперечным по каждому из индексов,

$$\nabla_\mu h^{\mu\nu} = 0.$$

Значит, опять же рассматривая плоскую монохроматическую волну с волновым вектором, направленным вдоль оси z , мы устанавливаем, что с учетом симметричности тензора

$$h_{zz} = h_{zx} = h_{zy} = h_{xz} = h_{yz} \equiv 0.$$

Кроме того, теперь вследствие бесследовости

$$h_{\gamma\gamma} = h_{xx} + h_{yy} + h_{zz} = 0 \Rightarrow h_{xx} + h_{yy} = 0.$$

Отсюда, согласно общим формулам описания тензора спина $s = 2$ в разделе 32 следует, что равны нулю все компоненты тензора с проекциями спина на ось волнового вектора, равными ± 1 и 0 :

$$h_{(\pm 1)} = h_{(0)} \equiv 0.$$

Таким образом, поперечное безмассовое свободное гравитационное поле отвечает проекциям спина на ось волнового вектора $m_s = \pm 2$.

В релятивистской теории свободных полей доказывается, что безмассовые поля — поперечные, и поэтому для них реализуются только максимальное и минимальное значения проекции спина на ось волнового вектора.

36 Спин $s = 1/2$

Спинор и матрицы Паули, антисимметрический преобразование спинора при поворотах, поворот на угол 2π , гомоморфизм $SU(2) \rightarrow SO(3)$, представления алгебры и накрывающая группа, эквивалентные представления группы поворотов спиноров $SU(2)$, сопряженный спинор, билинейный спинорный инвариант и спинорная метрика, индексы с точками и без точек.

Рассмотрим поле с полуцелым спином $s = 1/2$. В этом случае соответствующая спиновая матрица представляется в виде

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}, \quad (7.44)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули. Найдем явный вид матриц Паули, используя общие выражения для действия матриц спина на базисные поля. Базис спиновых состояний для краткости обозначений записывают как

$$|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle = |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (7.45)$$

причем это — собственные векторы проекции спина

$$s_z |+\rangle = \frac{1}{2} |+\rangle, \quad s_z |-\rangle = -\frac{1}{2} |-\rangle. \quad (7.46)$$

Следовательно, эта матрица в рассматриваемом базисе имеет диагональный вид

$$s_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Согласно (7.37) ненулевые матричные элементы повышающего и понижающего операторов

$$\langle +| s_+ |-\rangle = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - (-1) \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right)} = 1, \quad (7.47)$$

$$\langle -| s_- |+\rangle = (\langle +| s_+ |-\rangle)^\dagger = 1, \quad (7.48)$$

откуда

$$s_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.49)$$

Тогда обратное преобразование $s_\pm \leftrightarrow s_{x,y}$ дает

$$s_x = \frac{1}{2} (s_+ + s_-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.50)$$

и

$$s_y = \frac{1}{2i} (s_+ - s_-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.51)$$

Поэтому сигма-матрицы Паули — это

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.52)$$

Для того чтобы отличать фиксированный набор матриц (7.52) от матриц, которые получаются при проецировании на произвольно заданные оси декартовых координат $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ часто для матриц Паули используют обозначения $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.

Поле со спином $s = 1/2$, которое называют спинором, обладает двумя поляризациями¹⁴

$$|\theta^\alpha\rangle, \quad \alpha = \{1, 2\}, \quad |\theta^{(1)}\rangle = |+\rangle, \quad |\theta^{(2)}\rangle = |-\rangle,$$

поле спинора¹⁵

$$\langle \psi(\mathbf{r}) | \theta^\alpha \rangle = \psi^\alpha(\mathbf{r}) \quad (7.53)$$

— это так называемый двухкомпонентный спинор Паули.

Преобразования спинора при поворотах имеют такой же вид, как и для тензоров:

$$R(\phi) \circ \psi(\mathbf{r}) = \hat{R}_S(\phi) \cdot \psi(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \psi_\phi(\mathbf{r}_\phi) = \hat{R}_S(\phi) \cdot \psi(\mathbf{r}),$$

где $\phi = \phi \mathcal{O}$ — вектор поворота на угол ϕ вокруг оси \mathcal{O} , $R(\phi)$ операция преобразования поля спинора, а $\hat{R}_S(\phi)$ спиновое преобразование компонент спинора, которое при бесконечно малых углах равно

$$\hat{R}_S(\phi) \approx \mathbb{1} - i s_c \phi_c, \quad \phi \rightarrow 0.$$

Поскольку матрицы спина не зависят от угла поворота, можно записать, что

$$\hat{R}_S(\phi + d\phi) = (\mathbb{1} - i \mathbf{s} \cdot d\phi) \cdot \hat{R}_S(\phi),$$

а значит, имеет место дифференциальное уравнение

$$\frac{d\hat{R}_S(\phi)}{d\phi} = -i \mathbf{s} \cdot \hat{R}_S(\phi), \quad (7.54)$$

которое легко интегрируется

$$\hat{R}_S(\phi) = e^{-i \mathbf{s} \cdot \phi}. \quad (7.55)$$

Итак, при поворотах спинор преобразуется согласно

$$\psi_\phi^\alpha(\mathbf{r}_\phi) = \{e^{-i \mathbf{s} \cdot \phi}\}_{\bullet\beta}^\alpha \psi^\beta(\mathbf{r}), \quad (7.56)$$

где мы указали матричные индексы в явном виде.

Для вычисления матричной экспоненты установим два факта:

¹⁴ Далее будем использовать для спинорных индексов греческие буквы в начале алфавита: α, β, \dots , — а для векторных индексов латинские буквы: a, b, \dots

¹⁵ В отличие от векторов, для которых в евклидовом пространстве метрика в декартовых координатах — единичная матрица, так что можно не делать различий между верхними и нижними индексами, для спиноров, как будет ясно ниже верхние и нижние индексы несут разную информацию: метрика для спиноров отличается от единичной матрицы.

1. коммутационные соотношения

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\epsilon_{abc} \sigma_c \quad (7.57)$$

следуют из коммутационных соотношений для момента импульса: $[\frac{1}{2}\sigma_a, \frac{1}{2}\sigma_b] = i\epsilon_{abc} \frac{1}{2}\sigma_c$;

2. антикоммутационные соотношения

$$\{\sigma_a, \sigma_b\} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_a \sigma_b + \sigma_b \sigma_a = 2\delta_{ab} \quad (7.58)$$

устанавливаются прямыми вычислениями произведений матриц Паули (с использованием повышающей и понижающей матриц с учетом их размера 2×2).

В самом деле, двукратное повышение приводит к нулю, поскольку при спине $s=1/2$ допустим только один шаг от младшего вектора к старшему, а последующие шаги уже действуют на нулевой вектор. Значит,

$$\sigma_+^2 = 0 \Rightarrow \sigma_x^2 + i(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x) - \sigma_y^2 = 0,$$

Но с учетом того, что, очевидно, $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$, сразу находим антикоммутатор

$$\{\sigma_x, \sigma_y\} = 0.$$

Точно также, вычисляя значение проекции спина на ось z до и после повышения, устанавливаем, что на базисных векторах

$$\sigma_+ \sigma_z + \sigma_z \sigma_+ = 0 \Rightarrow \{\sigma_x, \sigma_z\} + i\{\sigma_y, \sigma_z\} = 0.$$

Но антикоммутатор сигма-матриц Паули — это эрмитово самосопряженная матрица, так что в последнем равенстве антикоммутаторы независимо обращаются в нуль, что, конечно, завершает доказательство (7.58).

Поскольку

$$\sigma_a \sigma_b = \frac{1}{2} [\sigma_a, \sigma_b] + \frac{1}{2} \{\sigma_a, \sigma_b\},$$

находим

$$\sigma_a \sigma_b = i\epsilon_{abc} \sigma_c + \delta_{ab}. \quad (7.59)$$

Домножая это тождество на векторы A_a и B_b , получаем

$$(A \cdot \sigma) (B \cdot \sigma) = i(A \times B) \cdot \sigma + A \cdot B, \quad (7.60)$$

где $A \times B$ — векторное произведение векторов. В частности,

$$(\phi \cdot \sigma)^2 = \phi^2.$$

Тогда в экспоненте матрицы конечных поворотов

$$\hat{R}_S = e^{-i\mathbf{s} \cdot \phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i^n}{2^n n!} (\phi \cdot \sigma)^n \quad (7.61)$$

четные степени разложения пропорциональны единичной матрице, а нечетные — оператору

$$(\phi \cdot \sigma) = \phi (\sigma \cdot \sigma) = (\phi \cdot \sigma) (\sigma \cdot \sigma),$$

где σ — единичный вектор вдоль оси поворота. Тогда суммирование четных и нечетных степеней дает

$$\hat{R}_S = e^{-i s \cdot \phi} = \cos\left(\frac{1}{2}(\phi \cdot \sigma)\right) - i(\sigma \cdot \sigma) \sin\left(\frac{1}{2}(\phi \cdot \sigma)\right). \quad (7.62)$$

При повороте вокруг оси на угол $2\pi = (\phi \cdot \sigma)$ получаем $r^\phi = r$ и

$$e^{-i s \cdot \phi} \Big|_{2\pi} = -1. \quad (7.63)$$

Значит,

$$\psi^\alpha(r) \Big|_{2\pi} = -\psi^\alpha(r), \quad (7.64)$$

т. е. поле спинора меняет знак после поворота на угол 2π . Это свойство, очевидно, является общим для всех частиц с полуцелым спином, которых называют *фермионами*.

Напомним теперь, что мы стартовали с алгебры группы поворотов 3-мерного евклидова пространства. Как видим, среди представлений этой алгебры имеются спинорные, причем группа поворотов спиноров не совпадает с группой $SO(3)$. В самом деле¹⁶,

$$\det \hat{R}_S = \exp\left\{-\frac{i}{2}\phi \cdot \text{tr } \sigma\right\} = 1,$$

и это специальные преобразования 2-мерных комплексных столбцов, т. е. группы $SU(2)$.

¹⁶Для обратимых матриц вида $M = e^A$ имеет место тождество

$$\det e^A = e^{\text{tr } A}, \quad (7.65)$$

где $\text{tr } A$ означает взятие следа матрицы A . Это утверждение легко доказать, если рассмотреть решение уравнений для матриц $X(\tau) = \exp(\tau A)$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} X(\tau) = A \circ X(\tau)$$

с граничными условиями

$$X(0) = \mathbb{1}, \quad X(1) = M.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \det X(\tau) &= \det X(\tau) (X^{-1}(\tau))^{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} X(\tau)_{\alpha\beta} = \\ &= \det X(\tau) (X^{-1}(\tau))^{\beta\alpha} (A \circ X(\tau))_{\alpha\beta} = \\ &= \det X(\tau) \text{tr} (X^{-1}(\tau) \circ A \circ X(\tau)) = \det X(\tau) \text{tr } A. \end{aligned}$$

Элементарное интегрирование этого уравнения с учетом граничных условий дает

$$\det X(\tau) = e^{\tau \text{tr } A},$$

откуда следует искомое равенство (7.65).

§а Группы $SU(2)$ и $SO(3)$

Существует гомоморфизм $SU(2) \hookrightarrow SO(3)$. Действительно, сигма-матрицы Паули — генераторы группы преобразований спиноров Паули ψ^α , и, следовательно, они переводят спинор в спинор, а значит, имеют матричные индексы $\sigma_{\bullet\alpha}^\beta$, где верхний индекс β относится к столбцам (исходное 2-мерное векторное пространство), которые преобразуются матрицами \hat{R}_S , а нижний индекс α относится к строкам (пространство, сопряженное к исходному 2-мерному пространству столбцов, т. е. ковекторное пространство), которые преобразуются, конечно, обратными матрицами \hat{R}_S^{-1} , а они совпадают с эрмитово сопряженными $\hat{R}_S^\dagger = \hat{R}_S^{-1}$. Это значит, что закон преобразования сигма-матриц в группе $SU(2)$ выглядит следующим образом:

$$\sigma \mapsto \hat{R}_S \sigma \hat{R}_S^\dagger.$$

Рассмотрим теперь 2×2 -матрицу

$$\hat{V} = V_a \sigma^a,$$

где V_a — 3-мерный ковектор. По матрице \hat{V} можно определить вектор

$$V^b = \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\sigma^b \hat{V}),$$

поскольку

$$\operatorname{tr} (\sigma^b \sigma^a) = \operatorname{tr} (\sigma^a \sigma^b) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\sigma^b \sigma^a + \sigma^a \sigma^b) = \frac{1}{2} 2 \delta^{ab} \operatorname{tr} \mathbb{1} = 2 \delta^{ab}.$$

Детерминант матрицы \hat{V} является инвариантом,

$$\det(\hat{R}_S \hat{V} \hat{R}_S^\dagger) = \det(\hat{V} \hat{R}_S^\dagger \hat{R}_S) = \det \hat{V}.$$

Этот инвариант легко вычисляется из явного вида сигма-матриц,

$$\det \hat{V} = \det \begin{pmatrix} V_z & V_x - iV_y \\ V_x + iV_y & -V_z \end{pmatrix} = -(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) = -\mathbf{V}^2,$$

и $(-1) \det \hat{V}$ — это квадрат длины вектора \mathbf{V} , который не меняется при поворотах.

Разложим преобразованную матрицу по матрицам Паули,

$$\hat{V}' = \hat{R}_S \hat{V} \hat{R}_S^\dagger = V'_a \sigma^a,$$

откуда

$$V'^b = \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\sigma^b \hat{V}') = V_a \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\sigma^b \hat{R}_S \sigma^a \hat{R}_S^\dagger).$$

Но это значит, что 3-вектор \mathbf{V} преобразуется 3×3 матрицей

$$V'^b = R_{\bullet a}^b V^a, \quad R_{\bullet a}^b = \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\sigma^b \hat{R}_S \sigma_a \hat{R}_S^\dagger).$$

Покажем, что это — матрица поворотов евклидова пространства. Для этого рассмотрим бесконечно малые преобразования

$$\hat{R}_S \approx \mathbb{1} - \frac{i}{2} \phi^c \sigma_c, \quad \hat{R}_S^\dagger \approx \mathbb{1} + \frac{i}{2} \phi^c \sigma_c.$$

Тогда

$$\begin{aligned} R_a^b &\approx \frac{1}{2} \text{tr} (\sigma^b \sigma_a) - \frac{i}{2} \phi^c \text{tr} (\sigma^b \sigma_c \sigma_a - \sigma^b \sigma_a \sigma_c) = \\ &= \delta_a^b - \frac{i}{2} \phi^c \text{tr} (\sigma^b 2i\epsilon_{caa'} \sigma^{a'}) = \delta_a^b + \epsilon_{\bullet ca}^b \phi^c. \end{aligned}$$

Значит, инфинитезимальное преобразование вектора имеет вид

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{V},$$

и оно действительно представляет собой поворот на угол $\boldsymbol{\phi}$.

В итоге, гомоморфизм $SU(2)$ на $SO(3)$ задается формулой преобразования матриц

$$R_a^b = \frac{1}{2} \text{tr} (\sigma^b \hat{R}_S \sigma_a \hat{R}_S^\dagger). \quad (7.66)$$

Отсюда сразу следует, что матрицы \hat{R}_S и $-\hat{R}_S$ приводят к одной и той же матрице преобразований $SO(3)$, и, в частности, ядро гомоморфизма, т. е. прообраз единицы, нетривиально и это $\pm\mathbb{1}$. Ясно, что группа $SU(2)$ дважды накрывает $SO(3)$. Итак, представления алгебры группы $SO(3)$ дают представления универсальной накрывающей группы $SU(2)$. Термин «универсальная накрывающая» относится к гомотопическим свойствам гладких многообразий, которые мы здесь не рассматриваем (см. [13]).

36.1 Спинорная метрика

Метрика — это билинейная инвариантная функция на контравариантных векторах некоторого векторного пространства, причем имеется ввиду инвариантность относительно обратимых линейных преобразований базиса в рассматриваемом векторном пространстве. Мы изучаем двумерное векторное пространство пространство спиноров, в котором совершаются преобразования поворотов в группе $SU(2)$. Поэтому спинорная метрика задает отображение двух спиноров ψ и χ , линейное по каждому из спиноров, во множество чисел инвариантно относительно $SU(2)$.

§а Сопряженный спинор

Для построения спинорной метрики введем вещественную матрицу $\hat{\epsilon}$,

$$\hat{\epsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2, \quad \hat{\epsilon}^2 = -\mathbb{1}, \quad \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon}^T = -\hat{\epsilon}, \quad (7.67)$$

и определим сопряженный к спинору ψ спинор ψ_C с помощью комплексного сопряжения и матричного умножения,

$$\psi_C \stackrel{\text{def}}{=} -\hat{\epsilon} \psi^* = -i\sigma_2 \psi^*, \quad (7.68)$$

а затем рассмотрим, как как он преобразуется при поворотах,

$$\psi_C^\phi = -\hat{\epsilon} (\hat{R}_S \psi)^* = \hat{\epsilon} \hat{R}_S^* \hat{\epsilon}^{-1} (-\hat{\epsilon} \psi^*). = \hat{\epsilon} \hat{R}_S^* \hat{\epsilon}^{-1} \psi_C,$$

Значит, нам необходимо найти матрицу $\hat{\epsilon} \hat{R}_S^* \hat{\epsilon}^{-1}$. При этом, матрица поворотов спиноров \hat{R}_S имеет вид экспоненты (7.61). В общем случае, так как $\hat{\epsilon} \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \mathbb{1}$, разложение экспоненты от матрицы в ряд Тейлора приводит к

$$\hat{\epsilon} \circ \exp\{A\} \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon} \circ \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \right) \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{ \hat{\epsilon} \circ A \circ \hat{\epsilon}^{-1} \}^n = \exp\{ \hat{\epsilon} \circ A \circ \hat{\epsilon}^{-1} \}.$$

В случае матрицы поворотов

$$\hat{R}_S = \exp\left(-\frac{i}{2}\phi(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}})\right),$$

так что

$$\hat{R}_S^* = \exp\left(\frac{i}{2}\phi(\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}})\right).$$

Для вычисления $\hat{\epsilon} \circ \boldsymbol{\sigma}^* \circ \hat{\epsilon}^{-1}$ заметим, что матрицы σ_x, σ_z симметричные и вещественные, так что

$$\sigma_x^* = \sigma_x^T = \sigma_x, \quad \sigma_z^* = \sigma_z^T = \sigma_z,$$

а матрица σ_y чисто мнимая и антисимметричная, так что

$$\sigma_y^* = \sigma_y^T = -\sigma_y.$$

Поэтому в силу

$$\sigma_x \hat{\epsilon} = -\hat{\epsilon} \sigma_x, \quad \sigma_z \hat{\epsilon} = -\hat{\epsilon} \sigma_z, \quad \sigma_y \hat{\epsilon} = \hat{\epsilon} \sigma_y,$$

получаем

$$\hat{\epsilon} \circ \boldsymbol{\sigma}^* \circ \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon} \circ \boldsymbol{\sigma}^T \circ \hat{\epsilon}^{-1} = -\boldsymbol{\sigma}. \quad (7.69)$$

Значит,

$$\hat{\epsilon} \hat{R}_S^* \hat{\epsilon}^{-1} = \hat{\epsilon} \exp\left(\frac{i}{2}\phi(\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}})\right) \hat{\epsilon}^{-1} = \exp\left(\frac{i}{2}\phi(\hat{\epsilon} \boldsymbol{\sigma}^* \hat{\epsilon}^{-1} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}})\right) = \hat{R}_S, \quad (7.70)$$

и аналогично,

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon} \hat{R}_S^T \hat{\epsilon}^{-1} &= \hat{\epsilon} \exp\left(-\frac{i}{2}\phi(\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}})\right) \hat{\epsilon}^{-1} = \\ &= \exp\left(-\frac{i}{2}\phi(\hat{\epsilon} \boldsymbol{\sigma}^T \hat{\epsilon}^{-1} \cdot \boldsymbol{\mathcal{O}})\right) = \hat{R}_S^\dagger = \hat{R}_S^{-1}. \end{aligned} \quad (7.71)$$

Напомним, что контравариантные спиноры ψ^α , которые при матричной записи можно по договоренности считать столбцами $\psi^\alpha \bullet$, преобразуются матрицами \hat{R}_S , а ковариантные спиноры ψ_α , которые можно считать строками $\psi_{\bullet\alpha}$,

преобразуются обратными матрицами \hat{R}_S^{-1} . При этом, R_S — это унитарная матрица:

$$R_S \cdot R_S^\dagger = \mathbb{1}, \quad R_S^\dagger = R_S^{-1},$$

и поэтому эрмитово сопряженный спинор преобразуется как ковариантный. Говорят, что соотношение (7.71) устанавливает эквивалентность транспонированного представления группы поворотов спиноров эрмитово сопряженному представлению этой группы или, в данном случае, еще и эквивалентность транспонированного контравариантного представления ковариантному, а соотношение (7.70) — эквивалентность комплексно сопряженного представления контравариантному спинорному представлению.

§b Инвариантное произведение спиноров

Итак, при поворотах

$$\psi_C^\phi = \hat{R}_S \psi_C,$$

где мы воспользовались соотношением (7.70). Значит, этот спинор при поворотах преобразуется также, как и сам спинор ψ . Поэтому произведение двух любых спиноров

$$\psi_C^\dagger \chi = (-\hat{\epsilon} \psi^*)^\dagger \chi = \psi^T (-\hat{\epsilon})^\dagger \chi = \psi^T \hat{\epsilon} \chi = \psi^\alpha \hat{\epsilon}_{\alpha\beta} \chi^\beta$$

является скаляром, т. е. инвариантом группы поворотов спиноров. Значит, формула определяет скалярное произведение двух спиноров. Поэтому согласно общему представлению о метрическом тензоре как о квадратичной инвариантной линейной функции $\hat{\epsilon}_{\alpha\beta}$ — полностью антисимметричный ковариантный тензор второго ранга в двумерном пространстве:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}, \quad \epsilon_{12} = 1.$$

В терминах метрики скалярное произведение двух произвольных спиноров ψ и χ

$$\psi \cdot \chi = \epsilon_{\alpha\beta} \psi^\alpha \chi^\beta. \tag{7.72}$$

Метрика определяет ковариантные спиноры с нижними индексами

$$\chi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \chi^\beta,$$

так что скалярное произведение

$$\psi \cdot \chi = \psi^\alpha \chi_\alpha = -\psi_\beta \chi^\beta. \tag{7.73}$$

Обратная метрика $\epsilon^{\alpha\beta}$ определяется согласно

$$\epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha.$$

Очевидно,

$$\epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\beta\alpha}, \quad \epsilon^{12} = -1.$$

Определенный выше спинор ψ_C обозначают также спинором с чертой, который имеет верхний индекс с точкой, так как он преобразуется по представлению, эквивалентному представлению, которое действует в комплексно сопряженном спинорном пространстве:

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \stackrel{\text{def}}{=} (-\hat{\epsilon} \psi^*)^{\dot{\alpha}}. \quad (7.74)$$

Как мы показали, этот спинор при поворотах преобразуется также, как и обычный спинор. Поэтому скаляром будет величина (см. знаки в (7.73))

$$-\chi^\dagger \cdot \psi_C = -\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}},$$

где мы ввели обозначение для спинора с чертой и с нижним индексом с точкой как эрмитово сопряженного к обычному спинору-столбцу:

$$\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = (\chi^\dagger)_{\dot{\alpha}}. \quad (7.75)$$

Элементарно

$$\chi^\dagger = \{\chi^*\}^T = \{\hat{\epsilon} (-\hat{\epsilon} \chi^*)\}^T = \{\hat{\epsilon} \bar{\chi}\}^T = -\bar{\chi}^T \hat{\epsilon}.$$

Поэтому

$$-\bar{\chi} \cdot \bar{\psi} = \bar{\chi}^T \hat{\epsilon} \bar{\psi} = \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}}, \quad \epsilon_{12} = 1,$$

т. е. метрика $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ в спинорных индексах с точкой совпадает с метрикой $\epsilon_{\alpha\beta}$ в спинорных индексах без точек.

Метрика остается инвариантной при поворотах спиноров. Действительно, справедливо соотношение изометрии:

$$\hat{R}_S^T \hat{\epsilon} \hat{R}_S = -\hat{R}_S^T \hat{\epsilon}^{-1} \hat{R}_S = \hat{\epsilon} \left(\hat{\epsilon} \hat{R}_S^T \hat{\epsilon}^{-1} \right) \hat{R}_S = \hat{\epsilon} \hat{R}_S^\dagger \hat{R}_S = \hat{\epsilon},$$

где мы воспользовались тождеством (7.71). Группа инвариантности спинорной метрики с $\det \hat{R}_S = 1$ называется специальной унитарной группой на двухкомпонентных спинорах: SU(2). Это трехпараметрическая группа.

Мы исследовали алгебру генераторов группы при построении поворотов спиноров. Эта алгебра совпадает с алгеброй генераторов группы поворотов трехмерного евклидова пространства SO(3). Тем не менее, сами группы отличаются, так как в SU(2) допустимы и полуцелые собственные значения генератора s_z , а в SO(3) — только целые значения s_z . Это особенно ярко проявляется при проведенном выше рассмотрении поворота на угол 2π : для спиноров этот поворот дает фактор -1 , а для бозонов, полей с целым значением спина, — фактор $+1$. Существование полей с полуцелым спином возможно, но оно не следует, вообще говоря, из группы поворотов евклидова пространства. Факт такого существования — экспериментальный.

Подчеркнем, что спинорная метрика задает инвариант

$$\psi \cdot \psi = \psi^\alpha \epsilon_{\alpha\beta} \psi^\beta = \psi^{(1)} \psi^{(2)} - \psi^{(2)} \psi^{(1)},$$

и это инвариант обратился бы в нуль¹⁷, если бы спиноры описывались обычными комплексными числами! Этот факт напрямую связан с тем, что спиноры

¹⁷Здесь рассматривается случай спиноров, не зависящих от времени и координат, — случай глобальных спиноров.

— частный случай фермионов с полуцелым спином, для которых имеет место принцип запрета Паули. Из принципа запрета Паули, как мы знаем (см. стр. 22, раздел 1), следует, что перестановка наблюдаемых параметров тождественных фермионов, в данном случае, перестановка номеров поляризации (проекции спина на ось z) в амплитуде вероятности должна сопровождаться сменой знака амплитуды. В частности, следует положить, что

$$\psi^{(1)}\psi^{(2)} = -\psi^{(2)}\psi^{(1)},$$

что в математике называют алгеброй Грассмана, а сами числа с такими свойствами — грассмановыми переменными¹⁸. Укажем лишь, что в релятивистской теории устанавливается связь спина со статистикой: собственное значение оператора перестановок тождественных частиц равно +1 для частиц с целым спином (бозонов) и −1 для частиц с полуцелым спином (фермионов).

Тогда становится понятным, почему метрика пространства как инвариантная квадратичная форма на вещественных векторах симметрична, а метрика спинорного пространства на грассмановых спинорах антисимметрична.

¹⁸Мы не будем здесь вдаваться в детали описания алгебры Грассмана, включая интегрирование по грассмановым переменным, отсылая читателя к современным курсам квантовой механики, где этот вопрос рассматривается во всех деталях (см., например, [7, 8, 9, 10]).

Глава 8

Динамические симметрии действия

(8.А) Трансляционная и вращательная симметрии

После того, как мы решили вопрос о базисе локальных полей в евклидовом 3-мерном пространстве, классифицируя их относительно представлений группы поворотов, возникает вопрос об описании составных полей, построенных из базисных полей. В этом вопросе скрыт явный произвол: любое произведение локальных базисных полей является составным полем. Однако в этом море произвольных конструкций могут возникать пути, которые опираются на вполне конструктивные идеи, основанные на соображениях симметрии действия: интерес представляют составные поля, описывающие сохранение или баланс физических величин, которые относятся к инвариантности действия при непрерывных глобальных параметрических преобразованиях. Существенными примерами таких составных полей являются тензор энергии-импульса и ток.

37 Тензор энергии-импульса нерелятивистских частиц

Трансляционная инвариантность в пространстве-времени, 4-ковектор скорости, 4-ток плотности массы и закон сохранения массы в дифференциальной форме, сохранение тензора энергии-импульса и физический смысл компонент тензора: плотность энергии, поток энергии, плотность импульса, давление и напряжение.

Согласно теореме Нётер (1.24) дифференциал действия по параметру преобразования экстремальной траектории в экстремальную траекторию с той же функцией Лагранжа равна

$$d_a S = da^n \int_{t_a^{(1)}}^{t_a^{(2)}} \frac{d}{dt_a} \left\{ L \frac{\partial t_a}{\partial a^n} + \sum_q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \left(\frac{\partial q_a}{\partial a^n} - \dot{q}_a \frac{\partial t_a}{\partial a^n} \right) \right\} dt_a. \quad (1.26)$$

В 4-мерном пространстве, $x^\mu = \{x_0, \mathbf{r}\}$, где $x_0 = ct$, а c имеет размерность скорости, инвариантность действия относительно сдвигов начала отсчета времени и координат,

$$x_a^\mu = x^\mu - a^\mu,$$

означает, что $a^n \mapsto a^\mu$ и $d_a S = 0$, откуда

$$\int dt \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\alpha} \left(\frac{\partial r_a^\alpha}{\partial a^\mu} - \frac{\partial x_a^0}{\partial a^\mu} \partial_0 r^\alpha \right) + L \frac{\partial x_a^0}{c \partial a^\mu} \right\} = 0.$$

Так как $\partial x_a^\nu / \partial a^\mu = -\delta_\mu^\nu$, в частности,

$$\frac{\partial r_a^\alpha}{\partial a^\mu} = -\delta_\mu^\alpha, \quad \frac{\partial x_a^0}{\partial a^\mu} = -\delta_\mu^0,$$

а

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}^\alpha}, \quad \frac{1}{c} E = \frac{1}{c} \{p_\alpha v^\alpha - L\},$$

найдем, что

$$\int dt \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{c} E \delta_\mu^0 - p_\alpha \delta_\mu^\alpha \right\} = 0.$$

Но согласно уравнениям Гамильтона–Якоби

$$\frac{1}{c} E = -\partial_0 S, \quad p_\alpha = \nabla_\alpha S,$$

а действие — скаляр, так что

$$\partial_\mu S = \left(-\frac{1}{c} E, \mathbf{p} \right)$$

является 4-мерным ковектором, который называют 4-импульсом p_μ .

Для свободной нерелятивистской частицы

$$\partial_\mu S = m \left(-\frac{\mathbf{v}^2}{2c}, \mathbf{v} \right),$$

где можно ввести 4-ковектор скорости,

$$\mathcal{U}_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \left(-\frac{\mathbf{v}^2}{2c}, \mathbf{v} \right),$$

так что 4-импульс связан с 4-скоростью $p_\mu = m\mathcal{U}_\mu$. Далее,

$$\int dt m \frac{d}{dt} \{-\mathcal{U}_\mu\} = 0.$$

Рассмотрим 4-скорость как функцию времени и координат на траектории:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{U}_\mu = c\partial_0 \mathcal{U}_\mu + \frac{dr(t)}{dt} \cdot \nabla \mathcal{U}_\mu = c\partial_0 \mathcal{U}_\mu + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{U}_\mu.$$

Если в системе много частиц с плотностью массы $dm/dV = \rho_{(m)}$, то

$$-\int dt dV \rho_{(m)} (c\partial_0 \mathcal{U}_\mu + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{U}_\mu) = 0.$$

Введем 4-ток плотности массы,

$$\mathcal{J}_{(m)}^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \rho_{(m)} c \\ \rho_{(m)} \mathbf{v} \end{pmatrix},$$

для которого имеет место закон сохранения в полной аналогии с законом сохранения заряда

$$\partial_\mu \mathcal{J}_{(m)}^\mu = 0,$$

в любых декартовых системах отсчета, а значит, произведение 4-ковектора ∇_μ на 4-ток плотности массы $\mathcal{J}_{(m)}^\mu$ является инвариантом $\nabla_\mu \mathcal{J}_{(m)}^\mu = \text{inv.}$, откуда следует, что $\mathcal{J}_{(m)}^\mu$ является 4-вектором.

Тогда закон сохранения может быть записан в виде¹

$$-\frac{1}{c} \int d^4x \mathcal{J}_{(m)}^\nu \partial_\nu \mathcal{U}_\mu = 0,$$

но в силу сохранения тока плотности массы, его можно внести под знак производной:

$$\int d^4x \partial_\nu \left\{ -\frac{1}{c} \mathcal{J}_{(m)}^\nu \mathcal{U}_\mu \right\} = 0.$$

Это можно записать, введя тензор энергии-импульса нерелятивистских частиц

$$\mathcal{T}_\mu^\nu(\text{part.}) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{c} \mathcal{J}_{(m)}^\nu \mathcal{U}_\mu, \quad (8.1)$$

так что

$$\int d^4x \partial_\nu \mathcal{T}_\mu^\nu(\text{part.}) = 0. \quad (8.2)$$

Более того, поскольку область интегрирования в пространстве и интервал времени можно считать произвольным, имеет место локальный закон сохранения тензора энергии-импульса:

$$\partial_\nu \mathcal{T}_\mu^\nu(\text{part.}) = 0. \quad (8.3)$$

37.1 Баланс энергии

В (8.2) при $\mu \mapsto 0$ получаем баланс энергии,

$$\int d^3r \mathcal{T}_0^0 \Big|_{t_0}^t + \int d^4x \nabla_\alpha \mathcal{T}_0^\alpha(\text{part.}) = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} \int d^3r \mathcal{T}_0^0 + c \int d^3r \nabla_\alpha \mathcal{T}_0^\alpha(\text{part.}) = 0.$$

Здесь

$$c \mathcal{T}_0^0 = \frac{1}{2} \rho_{(m)} \mathbf{v}^2 = \varepsilon$$

является плотностью энергии, а поскольку по теореме Гаусса

$$\int_V d^3r \nabla_\alpha \mathcal{T}_0^\alpha(\text{part.}) = \oint_{\partial V} d^2\sigma_\alpha \mathcal{T}_0^\alpha(\text{part.}),$$

компоненты

$$S^\alpha = c^2 \mathcal{T}_0^\alpha = v^\alpha \frac{1}{2} \rho_{(m)} \mathbf{v}^2$$

¹Мы учли, конечно, что $dt = dx_0/c$.

представляют собой вектор потока плотности энергии \mathbf{S} ,

$$\frac{d}{dt} \int d^3r \varepsilon + \oint_{\partial V} d^2\Sigma \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (8.4)$$

что есть, конечно, закон сохранения энергии.

37.2 Баланс импульса

В (8.2) при $\mu \mapsto \alpha = \{\bar{1}, \bar{3}\}$ получаем баланс импульса,

$$\frac{d}{dt} \int d^3r \mathcal{T}_\alpha^0 + c \int d^3r \nabla_\beta \mathcal{T}_\alpha^\beta(\text{part.}) = 0.$$

Введем плотность импульса

$$\mathcal{P}_\alpha = -\mathcal{T}_\alpha^0 = \rho_{(m)} v_\alpha,$$

а поскольку по теореме Гаусса

$$\int_V d^3r \nabla_\beta \mathcal{T}_\alpha^\beta(\text{part.}) = \oint_{\partial V} d^2\sigma_\beta \mathcal{T}_\alpha^\beta(\text{part.}),$$

найдем

$$\frac{d}{dt} \int d^3r \mathcal{P}_\alpha = \oint_{\partial V} d^2\sigma_\beta c \mathcal{T}_\alpha^\beta(\text{part.}),$$

компоненты симметричного тензора

$$c \mathcal{T}_\alpha^\beta(\text{part.}) = -\rho_{(m)} v_\alpha v^\beta$$

представляют собой поверхностную плотность сил, действующих на частицы на границе объема V . В частности, диагональные элементы — это поверхностная плотность сил, направленных по нормали к ориентированной площади, т. е. давление на частицы на границе объема, а следовательно, поскольку действие равно противодействию, давление самих частиц p на стенки объема —

$$p_x = -c \mathcal{T}_x^x, \quad p_y = -c \mathcal{T}_y^y, \quad p_z = -c \mathcal{T}_z^z.$$

а значит, вообще говоря, давление в системе частиц не является изотропным. Например, в среднем за интервал времени,

$$p_x = \rho_{(m)} \langle v_x^2 \rangle, \quad p_y = \rho_{(m)} \langle v_y^2 \rangle, \quad p_z = \rho_{(m)} \langle v_z^2 \rangle,$$

и если система большого числа частиц (без структуры, т. е. в случае однотомных частиц) в среднем изотропна, то давление

$$p = \frac{1}{3} \rho_{(m)} \langle \mathbf{v}^2 \rangle.$$

Компоненты \mathcal{T}_y^x и \mathcal{T}_z^x создают усилие на площадку с нормалью, направленной по оси x , в направлении осей y и z , соответственно, т. е. по образующим граням площадки. Поэтому $c \mathcal{T}_\alpha^\beta$ называют тензором напряжений.

Итак, мы установили физический смысл компонент тензора энергии-импульса:

- плотность энергии $\varepsilon = c\mathcal{T}_0^0$,
- плотность импульса $\mathcal{P}_\alpha = -\mathcal{T}_\alpha^0$,
- плотность потока энергии $S^\alpha = c^2\mathcal{T}_0^\alpha$,
- давление в системе p по осям — это взятые с противоположным знаком диагональные элементы симметричного тензора напряжений $c\mathcal{T}_\alpha^\beta$.

Подчеркнем, что для нерелятивистских частиц параметр скорости c в определении нулевой координаты 4-мерного пространства $x_0 = ct$ не входит в физические величины тензора энергии-импульса.

38 Тензор орбитального момента

Вращательная симметрия и тензор орбитального момента частиц, антисимметричный тензор углов поворотов, сохранение тензора момента импульса как следствие симметричности тензора энергии-импульса.

При поворотах на бесконечно малый угол $\phi = \phi \mathcal{O}$ координаты преобразуются по закону

$$\delta\mathbf{r} = \phi \times \mathbf{r}, \quad \delta r_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\phi_\beta r_\gamma.$$

Вместо вектора угла вдоль оси поворота ϕ_γ обычно вводят также антисимметричный тензор второго ранга — угол поворота в плоскости $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$, например, поворот на угол ϕ_z вокруг оси z есть поворот в плоскости (x, y) на угол $\omega_{xy} = \phi_z$, так что

$$\omega_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\phi_\gamma, \quad \phi_\gamma = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\omega_{\alpha\beta}, \quad \delta r_\alpha = \frac{1}{2}\{\omega_{\beta\alpha} - \omega_{\alpha\beta}\}r_\beta.$$

Поскольку время при поворотах не изменяется теорема Нётер приводит к дифференциальному действию на экстремальных траекториях

$$d_\omega S = d\omega_{\alpha\beta} \int dt \frac{d}{dt} \left\{ p_\gamma \frac{\partial r^\gamma}{\partial \omega_{\alpha\beta}} \right\}.$$

Производная

$$\frac{\partial r^\gamma}{\partial \omega_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega_{\alpha\beta}} \{\omega_{\lambda\gamma} - \omega_{\gamma\lambda}\} r_\lambda = \frac{1}{2} \{\delta_{\lambda\alpha}\delta_{\gamma\beta} - \delta_{\lambda\beta}\delta_{\gamma\alpha}\} r_\lambda,$$

где мы аккуратно проследили за тем, чтобы сохранялась антисимметрия по перестановке индексов $\alpha \leftrightarrow \beta$. Значит,

$$2d_\omega S = d\omega_{\alpha\beta} \int dt \frac{d}{dt} \{r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha\}.$$

При наличии вращательной симметрии, когда производная действия по параметрам $\omega_{\alpha\beta}$ обращается в нуль, мы получаем тензорный вид закона сохранения орбитального момента:

$$\frac{d}{dt} \{r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha\} = 0,$$

так что сохраняется тензор

$$l_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha, \quad (8.5)$$

который связан с вектором орбитального момента

$$\ell_\gamma = \frac{1}{2} \epsilon_{\gamma\alpha\beta} l_{\alpha\beta} = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_\gamma.$$

Также, как и в случае рассмотрения тензора энергии-импульса для нерелятивистских частиц с плотностью массы $\rho_{(m)} = dm/dV$ введем 4-вектор плотности потока массы $\mathcal{J}_{(m)}^\nu$ и 4-скорость U_μ . Тогда условие инвариантности относительно поворотов примет вид

$$\partial_\nu \{ r_\alpha T_\beta^\nu - r_\beta T_\alpha^\nu \} = 0, \quad (8.6)$$

т. е. имеет место сохранение тензора орбитального момента

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta}^\nu \stackrel{\text{def}}{=} r_\alpha T_\beta^\nu - r_\beta T_\alpha^\nu. \quad (8.7)$$

Для замкнутой системы тензор момента импульса сохраняется: $\partial_\nu T_\mu^\nu = 0$, так что можно расписать закон сохранения тензора орбитального момента следующим образом:

$$T_\beta^\nu \partial_\nu r_\alpha - T_\alpha^\nu \partial_\nu r_\beta = T_\beta^\nu \delta_{\nu\alpha} - T_\alpha^\nu \delta_{\nu\beta} = T_\beta^\alpha - T_\alpha^\beta = 0.$$

Таким образом, закон сохранения тензора орбитального момента следует из закона сохранения тензора энергии-импульса в том случае, если пространственная часть тензора энергии-импульса является симметричным тензором. Это условие симметричности выполняется для тензора нерелятивистских частиц.

(8.В) Симметрии нерелятивистского поля

39 Скалярное поле амплитуды вероятности траектории

Нерелятивистское поле — амплитуда вероятности траектории и уравнение поля из уравнений Гамильтона–Якоби, уравнение Шрёдингера из принципа наименьшего действия для поля Ψ , тензор энергии-импульса нерелятивистского поля и его компоненты, смысл нормировки поля, глобальная калибровочная инвариантность и электрический 4-ток, закон сохранения вероятности, локальная калибровочная инвариантность и ковариантная производная со связностью, векторный калибровочный бозон, дискретные симметрии зеркальной инверсии пространства и обращения стрелы времени.

В теории поля обычно рассматривают только релятивистские поля. Но есть одно исключение.

Действие нерелятивистской частицы является вещественным скаляром, который зависит от координат точки на конце траектории $S = S(t, \mathbf{r})$. Это

действие экстремально на траектории классической частицы. На всех траекториях в их малых окрестностях действие определяет амплитуду вероятности траектории

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = e^{iS/\hbar},$$

и следовательно, амплитуда является скалярным полем. Уравнения Гамильтона–Якоби для действия

$$\nabla S = \mathbf{p}, \quad -\partial_t S = H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t),$$

для амплитуды вероятности Ψ запишутся в виде

$$-i\hbar\nabla\Psi = \mathbf{p}\Psi, \quad i\hbar\partial_t\Psi = H(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla, t)\Psi. \quad (8.8)$$

Здесь \mathbf{p} – импульс на экстремальной траектории с действием S .

Рассмотрим теперь несколько траекторий, которые приводят в одну и ту же точку в заданный момент времени. По самому смыслу построения амплитуды вероятности в этой ситуации следует ввести суперпозицию амплитуд для разных траекторий $k = \{\overline{1, N}\}$ с разными комплексными коэффициентами² A_k

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N A_k e^{iS_k/\hbar}. \quad (8.9)$$

И тогда уравнения Гамильтона–Якоби запишутся в виде линейных уравнений для функции Ψ с операторами

$$-i\hbar\nabla\Psi = \sum_{k=1}^N A_k \mathbf{p}_k e^{iS_k/\hbar} = \hat{\mathbf{p}}\Psi, \quad i\hbar\partial_t\Psi = H(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla, t)\Psi. \quad (8.10)$$

Эти уравнения: определение оператора импульса $\hat{\mathbf{p}}$ и уравнение эволюции амплитуды вероятности со временем, — основные уравнения квантовой механики, а уравнение эволюции носит имя Шрёдингера, который сформулировал эти уравнения именно в таком виде. Задача эволюции для поля амплитуды отличается от задачи в классической механике и ставится в следующем виде:

- пусть в момент времени $t = t_0$ амплитуда задает распределение вероятности найти частицу возле точки \mathbf{r} : $dW(t_0, \mathbf{r})/d^3r = |\Psi(t_0, \mathbf{r})|^2$,
- решение уравнения эволюции определит амплитуду всех траекторий в момент времени $t = t'$, которые зададут распределение вероятности обнаружить частицу вблизи точки \mathbf{r}' : $dW(t', \mathbf{r}')/d^3r' = |\Psi(t', \mathbf{r}')|^2$.

²По сути речь идет о переходе от принципа экстремального действия для единственной траектории, который в оптике соответствует принципу наименьшего оптического пути луча или, что эквивалентно, принципу Ферма для эйконала $\varphi = S/\hbar = \int \mathbf{k}d\mathbf{r} - \int \omega(\mathbf{k})dt$, где \mathbf{k} и $\omega(\mathbf{k})$ — это волновой вектор и частота, соответственно, к принципу Гюйгенса: амплитуды лучей, пришедших от источников, расположенных в разных точках, складываются в заданной конечной точке эволюции этих лучей при условии когерентности источников. Как мы уже отмечали, условие когерентности означает вполне определенное значение комплексных амплитуд для всех лучей, или траекторий. Без когерентности говорить о суперпозиции вкладов не имеет никакого смысла. В оптике когерентность обеспечивается тем, что фронт волны от единого начального источника является множеством точек, где располагаются когерентные источники для последующей эволюции электромагнитных колебаний согласно принципу Гюйгенса.

Как видим, поле Ψ здесь представляет собой сумму амплитуд достоверности всех траекторий с заданной конечной точкой траектории, в то время как начальная точка может быть распределена в пространстве с некоторой плотностью вероятности.

■

Замечание о сущности квантования на примере квантования энергии с гамильтонианом, не зависящим от времени. Уравнение Шрёдингера, которое описывает сумму амплитуд по траекториям допускает, вообще говоря, решения для произвольных значений энергии. Однако в некотором интервале энергий может оказаться, что все эти решения, скажем, растут на бесконечности так, что невозможна конечная нормировка всех таких решений в указанной области энергий. Физически это означает, что, ограничившись некоторой произвольно выбранной конечной областью пространства, мы найдем, что вероятность нахождения частицы в этой области пространства с заданной энергией равна нулю в пределе, когда нормировка волновой функции стремится к бесконечности. Это означает, что все траектории с заданной энергией имеют вероятность наблюдения, равную нулю. Так оказывается, что отличная от нуля вероятность наблюдения частицы отвечает лишь ограниченной области значений энергий. Например, для гармонического осциллятора это – дискретный спектр энергий. Повторим, что любая траектория осциллятора с энергией, точное значение которой отлично от значений дискретного спектра, имеет относительную вероятность реализации в природе, равную нулю. Важно, что все случаи квантования физических величин соответствуют этому простому правилу: в спектре физической величины отсутствуют все значения, для которых не может быть нормирована волновая функция, а значит, все вероятности наблюдать такие величины в ограниченной области тождественно равны нулю, т. е. физическая система не может находиться в таких состояниях или на таких траекториях.

Отметим также случай единичного измерения: если, скажем, некоторая траектория имеет энергию, допустимую в спектре квантования энергии, то амплитуда вероятности такой отдельной траектории, конечно, тождественно равна единице, поскольку $\Psi = \exp\{iS/\hbar\}$, где действие вещественно, так что вероятность $W = |\Psi|^2 \equiv 1$. Значит, каждое отдельное измерение соответствует измерению с вероятностью, равной единице, и не несет за собой никакого изменения волновой функции, которая отвечает заданному действию на траектории³. Однако, если ставить вопрос об относительной вероятности наблюдать исходы нескольких измерений, то тогда волновая функция такого ансамбля измерений будет уже отвечать сумме по всем траекториям. Если не различать две эти постановки задачи, то тогда и возникает понятие о «коллапсе волновой функции» ансамбля измерений в волновую функцию единичного измерения. Как видим, понятие об амплитуде вероятности для заданной траектории и об амплитуде вероятности для суммы по траекториям полностью снимает какие-либо противоречия между единичным измерением и измерением в ансамбле.

Важно подчеркнуть, что различные траектории с заданной допустимой энергией из спектра системы, которые возникают за счет флюктуаций сил, например, ограничены условием: допустимы только такие флюктуации, которые не могут вывести траекторию в область значений физических величин, вероятность которых равна нулю!

В пределе бесконечно малой квантовой неопределенности, т. е. формально при $\hbar \rightarrow 0$, уравнения (8.8) дают классический предел: амплитуда вероятно-

³ Такое воображаемое изменение волновой функции при единичном измерении называют эпитетажным термином «коллапс волновой функции»

сти в точности совпадает с экспонентой от фазы в виде действия классической частицы на экстремальной траектории. Но этот вопрос подробно рассматривается в курсах квантовой механики (см. [7, 8, 9, 10]). Мы же сфокусируем своё внимание на теории скалярного нерелятивистского поля с массой m без внешних источников, т. е. при

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta.$$

Уравнение на поле

$$i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi,$$

может быть получено из вариационного принципа для действия самого поля $S[\Psi, \Psi^*]$, т. е. в виде уравнений Эйлера–Лагранжа

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}.$$

В самом деле, запишем действие

$$S[\Psi, \Psi^*] = \frac{1}{c} \int d^4x \Psi^* \left\{ i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right\} \Psi, \quad (8.11)$$

и тогда для поля Ψ^* найдем

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Psi^*} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^*} = i\hbar\partial_t\Psi + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi,$$

и мы приходим к заданному уравнению поля.

Действие (8.11) можно переписать так, чтобы в нем были только производные первого порядка, используя интегрирование по частям:

$$S[\Psi, \Psi^*] = \frac{1}{c} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\Psi^* i\hbar\partial_t\Psi - i\hbar\Psi\partial_t\Psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla\Psi^*) \cdot (\nabla\Psi) \right\}. \quad (8.12)$$

В такой записи при вариации по Ψ^* воспроизводится то же уравнение для поля Ψ , а уравнения Эйлера–Лагранжа для поля Ψ

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi},$$

дают уравнение для Ψ^* ,

$$i\hbar\partial_t\Psi^* - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi^* = 0,$$

которое можно, конечно, получить из уравнения движения для Ψ путем комплексного сопряжения.

39.1 Тензор энергии-импульса

Канонический тензор энергии-импульса поля получается из теоремы Нёттер для поля:

$$d_a S = da \cdot \frac{1}{c} \int d^4x \partial_\nu \left\{ \mathcal{L} \frac{\partial x^\nu}{\partial a} + \sum_{\Phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} \left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial a} - \frac{\partial x^\lambda}{\partial a} \partial_\lambda \Phi \right) \right\}, \quad (1.28)$$

если считать, что имеются два поля $\Phi = (\Psi, \Psi^*)$, и произвести сдвиг в 4-мерном пространстве-времени:

$$x_a^\mu = x^\mu - a^\mu, \quad \frac{\partial x^\lambda}{\partial a^\mu} = -\delta_\mu^\lambda,$$

с учетом, что скалярное поле не меняется при сдвигах:

$$\Phi_a(x_a) = \Phi(x), \quad \frac{\partial \Phi_a}{\partial a^\mu} \equiv 0,$$

так что

$$\begin{aligned} d_a S &= da^\mu \cdot \frac{1}{c} \int d^4x \partial_\nu \left\{ \left(\sum_{\Phi=(\Psi,\Psi^*)} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \Phi} \partial_\mu \Phi \right) - \mathcal{L} \delta_\mu^\nu \right\} = \\ &= da^\mu \int d^4x \partial_\nu \mathcal{T}_\mu^\nu[\Psi, \Psi^*], \end{aligned}$$

откуда тензор энергии-импульса комплексного скалярного нерелятивистского поля

$$\begin{aligned} c\mathcal{T}_\mu^\nu[\Psi, \Psi^*] &= \frac{1}{2} \delta_0^\nu i\hbar c (\Psi^* \partial_\mu \Psi - \Psi \partial_\mu \Psi^*) \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{2m} \delta_\alpha^\nu (\nabla_\alpha \Psi^*) (\partial_\mu \Psi) - \frac{\hbar^2}{2m} \delta_\alpha^\nu (\partial_\mu \Psi^*) (\nabla_\alpha \Psi) \\ &\quad - \delta_\mu^\nu \left\{ \frac{1}{2} (\Psi^* i\hbar \partial_t \Psi - i\hbar \Psi \partial_t \Psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \Psi^*) \cdot (\nabla \Psi) \right\}. \end{aligned}$$

Плотность энергии поля —

$$\varepsilon = c\mathcal{T}_0^0 = \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \Psi^*) \cdot (\nabla \Psi),$$

плотность потока энергии поля —

$$\mathbf{s}^\alpha = c^2 \mathcal{T}_0^\alpha = -\frac{\hbar^2}{2m} \{(\nabla_\alpha \Psi^*) (\partial_t \Psi) + (\partial_t \Psi^*) (\nabla_\alpha \Psi)\},$$

плотность импульса поля —

$$P_\alpha = -\mathcal{T}_\alpha^0 = -\frac{i\hbar}{2} (\Psi^* \nabla_\alpha \Psi - \Psi \nabla_\alpha \Psi^*),$$

тензор напряжений

$$c\mathcal{T}_\alpha^\beta = -\frac{\hbar^2}{2m} \{(\nabla_\alpha \Psi^*)(\nabla_\beta \Psi) + (\nabla_\beta \Psi^*)(\nabla_\alpha \Psi)\} - \\ - \delta_\alpha^\beta \left\{ \frac{1}{2} (\Psi^* i\hbar \partial_t \Psi - i\hbar \Psi \partial_t \Psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \Psi^*) \cdot (\nabla \Psi) \right\}$$

является симметричным, и следовательно, он приводит к автоматическому сохранению тензора орбитального момента. Кроме того, давление, например, по оси x

$$p_x = \frac{1}{2} (\Psi^* i\hbar \partial_t \Psi - i\hbar \Psi \partial_t \Psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \Psi^*) \cdot (\nabla \Psi) + \frac{\hbar^2}{m} (\nabla_x \Psi^*)(\nabla_x \Psi).$$

Если в качестве решения уравнения Шредингера взять плоскую монохроматическую волну

$$\Psi = \Psi_0 e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})/\hbar}, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad E = \frac{1}{2}mv^2,$$

и отнормировать ее в конечном объеме V

$$\int_V d^3r \Psi^* \Psi = N, \quad |\Psi_0|^2 = \frac{N}{V},$$

то компоненты тензора энергии-импульса примут значения

$$\varepsilon = \frac{mN}{V} \frac{1}{2} \mathbf{v}^2, \quad \mathbf{S} = \frac{mN}{V} \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \mathbf{v}, \quad \mathbf{P} = \frac{mN}{V} \mathbf{v}, \quad \mathcal{T}_\alpha^\beta = -\frac{mN}{V} v^\beta v_\alpha,$$

откуда видно, что тензор энергии-импульса этого поля в точности совпадает с тензором энергии-импульса нерелятивистских частиц с плотностью массы

$$\rho_{(m)} = m |\Psi_0|^2 = \frac{mN}{V}.$$

Значит, N — это число частиц в системе.

39.2 Глобальная калибровочная инвариантность

Вероятность траектории $W = |\Psi|^2$ не меняется, если произвести преобразование амплитуды в виде изменения ее комплексной фазы:

$$\Psi_u(t, \mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-i u \frac{e}{\hbar c}} \Psi(t, \mathbf{r}). \quad (8.13)$$

Это калибровочное преобразование называют глобальным, если параметр u не зависит ни от времени, ни от координат: $\partial_\mu u \equiv 0$, $\mu = \{0, 3\}$.

Действие (8.12) инвариантно относительно глобальных калибровочных преобразований, так что по теореме Нёттер (1.24) сохраняется ток

$$\frac{1}{c} j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Psi} \frac{\partial \Psi_u}{\partial u} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Psi^*} \frac{\partial \Psi_u^*}{\partial u} \Big|_{u \rightarrow 0}, \quad (8.14)$$

который имеет компоненты

$$j^0 = e c \Psi^* \Psi, \quad j = -e \frac{i\hbar}{2m} \{ \Psi^* (\nabla \Psi) - \Psi (\nabla \Psi^*) \}. \quad (8.15)$$

Для нормированной в объеме V монохроматической волны

$$j^0 = e \frac{N}{V} c, \quad j = e \frac{N}{V} v,$$

что в точности совпадает с электрическим 4-током, если ввести плотность заряда

$$\rho = e |\Psi|^2 = e \frac{N}{V}.$$

Закон сохранения $\frac{1}{e} \partial_\mu j^\mu = 0$ в виде

$$\partial_t |\Psi|^2 + \operatorname{div} j_W = 0,$$

называют законом сохранения вероятности с потоком вероятности

$$j_W = - \frac{i\hbar}{2m} \{ \Psi^* (\nabla \Psi) - \Psi (\nabla \Psi^*) \},$$

поскольку $|\Psi|^2$ является плотностью вероятности найти частицу в объеме V , если $N = 1$. Заряд полевой конфигурации в общем случае

$$Q = \int d^3r j^0 = e \int d^3r |\Psi|^2.$$

39.3 Локальная калибровочная инвариантность и векторный бозон

Если фаза в калибровочном преобразовании (8.13) зависит от времени или координат, то это — локальное преобразование. Действие (8.12) не является калибровочно инвариантным относительно локальных преобразований, так как

$$\partial_\mu \Psi_u = e^{-iu/\hbar c} \left(\partial_\mu - \frac{ie}{\hbar c} \partial_\mu u \right) \Psi.$$

Значит, частная производная поля становится, как говорят, ковариантной производной⁴

$$\mathcal{D}_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu - \frac{ie}{\hbar c} \mathcal{A}_\mu, \quad (8.16)$$

где 4-векторное поле \mathcal{A}_μ называют калибровочным векторным полем или связностью [13], которая зависит от калибровочного параметра u и преобразуется по закону:

$$\mathcal{A}_\mu^u = \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu u. \quad (8.17)$$

⁴Напомним, что для амплитуды вероятности траектории $\Psi = \exp\{iS/\hbar\}$ обобщенный импульс $p_\mu \Psi = -i\hbar \partial_\mu \Psi$, так что

$$-i\hbar \mathcal{D}_\mu \Psi = \left(p_\mu - \frac{e}{c} \mathcal{A}_\mu \right) \Psi,$$

а значит, $-i\hbar \mathcal{D}_\mu$ отвечает кинетическому импульсу tu_μ .

При таком определении

$$\mathcal{D}_\mu^u \Psi_u = e^{-i u \frac{e}{\hbar c}} \mathcal{D}_\mu \Psi,$$

т. е. ковариантная производная преобразуется также, как и поле Ψ , групповым образом: путем введения множителя комплексной фазы — элемента унитарной однопараметрической группы $U(1)$. Отсюда следует, что действие поля, инвариантное относительно глобальных калибровочных преобразований, будет инвариантно и относительно локальных калибровочных преобразований, если в нем частные производные заменить на ковариантные:

$$S[\Psi, \Psi^*, \mathcal{A}_\mu] = \frac{1}{c} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\Psi^* i\hbar \mathcal{D}_t \Psi - i\hbar \Psi (\mathcal{D}_t \Psi)^*) - \right. \\ \left. - \frac{\hbar^2}{2m} (\mathcal{D}\Psi)^* \cdot (\mathcal{D}\Psi) \right\}. \quad (8.18)$$

Это действие можно представить в виде действия свободного поля и действия взаимодействия

$$S[\Psi, \Psi^*, \mathcal{A}_\mu] = S[\Psi, \Psi^*] + S_{\text{int}},$$

где

$$S_{\text{int}} = -\frac{1}{c^2} \int d^4x j^\mu \mathcal{A}_\mu - \frac{e}{2mc^4} \int d^4x j^0 \mathcal{A}^2.$$

Первое слагаемое называют взаимодействием типа «ток-поле», а второе — квадратичный контактный член, который характерен для тензорных полей.

Связность \mathcal{A}_μ может быть чистой калибровкой, т. е. $\mathcal{A}_\mu = \partial_\mu u$. Тогда с помощью калибровочного преобразования ее можно сделать равной нулю во всех точках пространства-времени. Для определения того, является ли связность тривиальной или нет, необходимо построить тензор

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu,$$

который называют тензором напряженности векторного поля. Если тензор напряженности тождественно обращается в нуль, то связность тривиальна. Если же тензор напряженности не равен нулю, то имеет место взаимодействие заряженного скалярного поля с калибровочным векторным полем \mathcal{A}_μ . Это векторное поле может быть внешним, т. е. заданным условием задачи, или динамическим, т. е. само возникать и распространяться вследствие взаимодействия с заряженными источниками. Такая динамическая теория поля — электродинамика [19, 20, 21, 22].

Описанный способ введения взаимодействия с калибровочным полем путем замены частной производной на ковариантную называется минимальным. Неминимальное взаимодействие строится в виде дополнительных, калибровочно инвариантных слагаемых в действии. Например, неминимальным является взаимодействие в виде произведения тензора напряженности поля $F_{\mu\nu}$ с тензором спина вида $s_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}s^\gamma$, оно относится к аномальному магнитному моменту поля.

39.4 Дискретные симметрии P и T

Рассмотрим дискретные преобразования свободного поля.

Преобразование $t \mapsto t_T = -t$ совместно с преобразованием поля

$$\Psi(t, \mathbf{r}) \mapsto \Psi_T(t_T, \mathbf{r}) = \Psi^*(t, \mathbf{r}) \quad (8.19)$$

сохраняет неизменным действие и приводит к полю, которое удовлетворяет уравнениям движения, а также дает для компонент тензора энергии-импульса

$$\mathcal{T}_0^0 \mapsto \mathcal{T}_0^0, \quad \mathcal{T}_0^\alpha \mapsto -\mathcal{T}_0^\alpha, \quad \mathcal{T}_\alpha^0 \mapsto -\mathcal{T}_\alpha^0, \quad \mathcal{T}_\alpha^\beta \mapsto \mathcal{T}_\alpha^\beta, \quad (8.20)$$

т. е. приводит к движению с той же энергией, но в обратном направлении. При этом,

$$j^0 \mapsto j^0, \quad j^\alpha \mapsto -j^\alpha. \quad (8.21)$$

Это преобразование поля отвечает, таким образом, обращению стрелы времени: $t \mapsto -t$.

Преобразование $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}_P = -\mathbf{r}$ совместно с преобразованием поля

$$\Psi(t, \mathbf{r}) \mapsto \Psi_P(t, \mathbf{r}_P) = \Psi(t, \mathbf{r}) \quad (8.22)$$

сохраняет неизменным действие и приводит к полю, которое удовлетворяет уравнениям движения, а также дает для компонент тензора энергии-импульса

$$\mathcal{T}_0^0 \mapsto \mathcal{T}_0^0, \quad \mathcal{T}_0^\alpha \mapsto -\mathcal{T}_0^\alpha, \quad \mathcal{T}_\alpha^0 \mapsto -\mathcal{T}_\alpha^0, \quad \mathcal{T}_\alpha^\beta \mapsto \mathcal{T}_\alpha^\beta, \quad (8.23)$$

т. е. приводит к движению с той же энергией, но в обратном направлении. При этом,

$$j^0 \mapsto j^0, \quad j^\alpha \mapsto -j^\alpha. \quad (8.24)$$

Это преобразование поля отвечает, таким образом, зеркальной инверсии пространства: $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$.

(8.C) Адиабатический интеграл движения

40 Квазипериодическое движение в магнитном поле

Адиабатический инвариант периодического движения, инвариант для частицы в постоянном магнитном поле, поток магнитного поля в площа-ди замкнутой орбиты, точность сохранения адиабатического инварианта при введении малых поправок, нарушающих периодичность. Консервативная система с периодическим движением, каноническое преобразование с адиабатическим инвариантом в качестве обобщенного импульса, постоянная частота вращения периодической координаты.

В однородном магнитном поле движение частицы является периодическим в поперечной плоскости к магнитному полю, так как магнитное поле не совер-шает работы, а уравнения движения

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}$$

имеют решение в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$, где сохраняющаяся продольная компонента скорости $\mathbf{v}_\parallel = \mathbf{h}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{h})$ направлена вдоль единичного вектора $\mathbf{h} = \mathbf{H}/|\mathbf{H}|$, а

поперечная компонента $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel$ получается прямым интегрированием уравнения движения

$$\mathbf{v}_\perp = \omega \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{h}, \quad \omega = \frac{e\mathcal{H}}{mc}. \quad (8.25)$$

Легко связать радиус орбиты с поперечным импульсом, поскольку период движения

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r_\perp}{v_\perp},$$

так что

$$p_\perp = mv_\perp = \frac{e}{c} \mathcal{H} r_\perp. \quad (8.26)$$

В слабо неоднородном поле, например, радиус обращения r_\perp много меньше характерного расстояния, на котором поле меняется существенно, т. е. на величину, порядка самого поля. Поэтому возникает малый параметр отношения радиуса r_\perp к длине неоднородности, и траектория может быть рассмотрена сначала в ведущем приближении как периодическая с последующим учетом поправок первого порядка малости. Следовательно, было бы актуально рассмотреть характерные свойства как периодического движения, так и поправок к нему.

40.1 Периодическое движение

§а Инвариантная фазовая площадь

Рассмотрим периодическое движение механической системы. Пусть T — период движения, тогда периодичность динамической переменной $q(t)$ и сопряженного к ней импульса p означает, что

$$q(t+T) = q(t), \quad p(t+T) = p(t). \quad (8.27)$$

Определим новую переменную, зависящую от параметра a :

$$q_a(t, a) = q(t + aT).$$

Тогда вариация действия

$$\Delta S = \int_0^1 da \frac{dS}{da} = S(1) - S(0),$$

но в силу периодичности движения (8.27)

$$q_a(t, 0) = q_a(t, 1) = q(t),$$

так что действие при $a = 1$ и $a = 0$ вычисляется на одной и той же траектории, и

$$\Delta S \equiv 0.$$

В классической механике согласно теореме Нётер (1.24) дифференциал действия по параметру имеет вид

$$d_a S = da \cdot \int dt \frac{d}{dt} \left(p \frac{\partial q}{\partial a} - H \frac{\partial t}{\partial a} \right),$$

но, поскольку в данном случае время не преобразуется

$$\frac{\partial t_a}{\partial a} = 0,$$

вариация равна

$$\Delta S = \int_0^1 da \frac{d_a S}{da} = \int_0^1 da \int dt \frac{d}{dt} p \frac{\partial q}{\partial a} = \int dt \frac{d}{dt} \int_0^1 p \frac{\partial q}{\partial a} da,$$

в то время как интеграл

$$\mathcal{I} = \int_0^1 p \frac{\partial q}{\partial a} da = \int_0^T p \frac{dq}{d\tau} d\tau, \quad \tau = aT,$$

является интегралом по периоду

$$\mathcal{I} \stackrel{\text{def}}{=} \oint p dq,$$

а нулевое значение изменения действия

$$\Delta S = \int dt \frac{d}{dt} \mathcal{I} = 0$$

означает, что

$$\mathcal{I} = \oint p dq — \text{инвариант.}$$

Этот инвариант называется *адиабатическим*, так как его сохранение связано с неизменностью фазового объема частицы, определяющего энтропию системы, и коль скоро она сохраняется, то и вариация параметров движения является адиабатической.

В самом деле, рассмотрим случай одномерного движения⁵ и введем для переменных фазового объема более привычные обозначения (только в этом разделе!):

$$(p, q) \equiv (x, y),$$

и линейный элемент однопараметрической траектории

$$d\mathcal{C} = (dx, dy).$$

Тогда для вектора F с компонентами

$$F = (F_x, F_y)$$

⁵Если динамических переменных больше, то решение проблемы формулируется совершенно тем же способом, с той лишь разницей, что можно провести суммирование по всем динамическим переменным и сопряженным к ним импульсам, чтобы получить сумму инвариантов, которая обычно имеет определенный физический смысл. Общий же фазовый объем вычисляется как произведение фазовых объемов, соответствующих каждой динамической переменной.

имеет место теорема Стокса:

$$\oint F \, dC = \int dx \, dy \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right), \quad (8.28)$$

где интеграл берется по поверхности, ограниченной замкнутой кривой. В нашем случае, очевидно,

$$F = (F_x, F_y) = (0, p), \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = 1,$$

и

$$\mathcal{I} = \int dp \, dq,$$

т. е., действительно, инвариант — фазовый объем системы, а его логарифм задает энтропию, и сохранение этого инварианта означает “адиабатичность” процесса.

§b Поток магнитного поля как инвариант

Вычислим адиабатический инвариант периодического движения частицы в постоянном магнитном поле:

$$\mathcal{I} = \oint \mathcal{P} \, dr,$$

где \mathcal{P} — сопряженный к координате импульс, т. е. обобщенный импульс заряженной частицы в поле \mathbf{A} :

$$\mathcal{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A},$$

где $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$ — импульс частицы. Подставляя

$$dr = v_\perp dt = \frac{1}{m} p_\perp dt,$$

во-первых, для кинетического вклада с сохраняющимся поперечным импульсом найдем

$$\mathcal{I}_1 = \oint \mathcal{P} \, dr = p_\perp^2 \frac{T}{m},$$

где период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi mc}{e\mathcal{H}},$$

так что

$$\mathcal{I}_1 = 2\pi \frac{cp_\perp^2}{e\mathcal{H}}.$$

Во-вторых, вклад поля

$$\mathcal{I}_2 = \frac{e}{c} \oint \mathbf{A} \, dr = \frac{e}{c} \int \text{rot} \mathbf{A} \, d^2 \Sigma,$$

где элемент площади задается площадью треугольника, заметаемого частицей при движении по окружности:

$$d^2\Sigma = \frac{1}{2} \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{v}_\perp dt = -\frac{1}{2} \mathbf{h} r_\perp v_\perp dt,$$

и с учетом

$$\text{rot } \mathcal{A} = \mathcal{H},$$

найдем вклад, обусловленный полем, а именно, *поток магнитного поля через поверхность, ограниченную орбитой частицы*,

$$\mathcal{I}_2 = -\frac{e}{2c} \mathcal{H} r_\perp v_\perp T,$$

и подставляя

$$r_\perp = \frac{cp_\perp}{e\mathcal{H}},$$

получаем

$$\mathcal{I}_2 = -\frac{e}{2c} \mathcal{H} \frac{cp_\perp}{e\mathcal{H}} \frac{p_\perp}{m} \frac{2\pi mc}{e\mathcal{H}} = -\pi \frac{cp_\perp^2}{e\mathcal{H}} = -\frac{1}{2} \mathcal{I}_1.$$

Суммируя,

$$\mathcal{I} = \pi \frac{cp_\perp^2}{e\mathcal{H}}.$$

Таким образом, адиабатический инвариант периодического движения частицы в плоскости, перпендикулярной постоянному магнитному полю, определяется комбинацией p_\perp^2/\mathcal{H} .

Заметим, что адиабатический инвариант равен взятому с обратным знаком потоку магнитного поля через площадь внутри описываемой зарядом окружности

$$\mathcal{I} = -\frac{e}{c} \int \mathcal{H} d^2\Sigma,$$

так что усиление поля и, следовательно, потока через единичную площадь приводит, в силу сохранения инварианта, к уменьшению площади круга, т. е. к уменьшению радиуса орбиты.

40.2 Теорема Адемолло–Гатто

Рассмотрим вопрос о том, что происходит с адиабатическим инвариантом периодического движения, если эта периодичность слабо нарушается малым возмущением параметров системы. Значение термина «слабо» физически определяется приближением, в котором параметр за время периода движения можно считать постоянным, но он все же существенно изменяется за интервал времени, много больший периода.

Ответом на поставленный вопрос служит теорема Адемолло–Гатто, которая применима не только к адиабатическому инварианту периодического движения, но и, вообще, к инвариантам, построенным при вариации действия по параметру исходной симметрии системы, так что проведенное ниже рассмотрение можно дословно повторить и для упомянутых инвариантов, заменяя термин «периодический» на «инвариантный».

Теорема Адемолло–Гатто. Если к исходному действию S_0 , приводящему к периодическому движению и, следовательно, к адиабатическому инварианту \mathcal{I} , добавлено возмущение с малым параметром λ , так что полное действие

$$S = S_0 + \lambda \int V(q, \dot{q}) dt,$$

то инвариант, по-прежнему, сохраняется с точностью до членов второго порядка малости по λ :

$$\frac{d\mathcal{I}}{dt} = \mathcal{O}(\lambda^2).$$

■ *Ход мысли.* В самом деле, разложим решение уравнения с возмущением λV по малому параметру λ с точностью до членов второго порядка малости:

$$q(t, \lambda) \approx q_0(t) + \lambda \delta\bar{q}_0(t) + \mathcal{O}(\lambda^2),$$

где

$$q_0(t) = q(t, 0), \quad \delta\bar{q}_0(t) = \left. \frac{\partial q(t, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0},$$

и главный вклад $q_0(t)$ берется при $\lambda = 0$, т. е. он является *периодическим*, в отличие от $\delta\bar{q}_0(t)$, который уже может нарушать периодичность. Аналогично можно поступить и с возмущением

$$\lambda V = \lambda V_0 + \mathcal{O}(\lambda^2),$$

так что V_0 зависит только от главного вклада $q_0(t)$, т. е. является *периодической функцией*. Вводя, как и в предыдущем разделе, параметр a на периодической траектории q_0 найдем, что с точностью до членов второго порядка малости действие

$$S = S_0 \Big|_{\lambda=0} + \int \frac{\delta S_0}{\delta q} \Big|_{\lambda=0} \lambda \delta\bar{q}_0 dt + \lambda \int V_0 dt + \mathcal{O}(\lambda^2).$$

Первое слагаемое в точности совпадает с выражением для действия без возмущения, и оно зависит только от *периодических функций*. Второе слагаемое равно нулю в силу уравнений движения при $\lambda = 0$ (вариационный принцип):

$$\left. \frac{\delta S_0}{\delta q} \right|_{\lambda=0} = 0.$$

Третье слагаемое — также *периодическая функция* по a с периодом 1. Поэтому с точностью до членов второго порядка малости по λ

$$\int_0^1 da \frac{dS}{da} = \mathcal{O}(\lambda^2).$$

Повторяя вывод для адиабатического инварианта, теперь заключаем, что он сохраняется с точностью до членов второго порядка малости возмущения. ■

Из приведенного рассуждения ясно, что при введении возмущения, вообще говоря, и динамическая переменная и сопряженный ей импульс становятся функциями, зависящими от параметра возмущения λ , но построенный из них

инвариант — фазовый объем — остается сохраняющейся величиной с точностью до членов второго порядка малости.

В качестве примера, в слабо неоднородном магнитном поле при движении частицы вдоль силовой линии, если эти линии сгущаются и, стало быть, поле увеличивается, сохранение инварианта p_{\perp}^2/\mathcal{H} означает, что увеличивается по-перечный к полю импульс, а радиус орбиты уменьшается, так как сохраняется поток магнитного поля через площадь круга орбиты. При этом импульс частицы в постоянном по времени магнитном поле сохраняется и, следовательно, наступает момент, когда продольная по полю компонента импульса становится равной нулю: частица не проникает в область сильного поля. Более того, в курсах электродинамики показывается, что частица отражается от области сильного магнитного поля, т. е. меняет направление продольной компоненты импульса в этой точке отражения. Этот эффект называется «магнитным зеркалом». Наряду с этим, в слабо неоднородном поле частица испытывает дрейф в направлении, ортогональном как к силовой линии, так и к нормали, направленной к центру кривизны силовой линии.

40.3 Переменные «действие–угол»

При периодическом движении сохраняется адиабатический инвариант, так что принято вводить интеграл движения, пропорциональный этому инварианту

$$\tilde{\mathcal{I}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \oint p \, dq, \quad (8.29)$$

который можно рассматривать в качестве обобщенного импульса P при каноническом преобразовании фазового пространства гамильтоновой системы в переменных (p, q) к переменным $(\tilde{\mathcal{I}}, Q)$. При этом производящей функцией канонического преобразования считают действие, которое записано в переменных q и $\tilde{\mathcal{I}}$, т. е. $S = S(q, \tilde{\mathcal{I}}, t)$. Тогда согласно общим формулам (2.40) для такого рода канонических преобразований функция Гамильтона $H'(\tilde{\mathcal{I}}, \vartheta)$ тождественно обращается в нуль,

$$H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

а новая обобщенная координата Q задается частной производной действия по инварианту $\tilde{\mathcal{I}}$,

$$Q = \frac{\partial S}{\partial \tilde{\mathcal{I}}}.$$

При функции Гамильтона, равной нулю, производная обобщенной координаты по времени обращается в нуль:

$$\dot{Q} = 0.$$

Учтем теперь, что энергия E при рассматриваемом движении сохраняется и является функцией адиабатического инварианта, а значит, $E = E(\tilde{\mathcal{I}})$, и запишем действие в виде

$$S = \int_{q_0}^q p \, dq - \int_{t_0}^t E(\tilde{\mathcal{I}}) \, dt = \int_{q_0}^q p \, dq - E(\tilde{\mathcal{I}})(t - t_0).$$

Поэтому

$$\dot{Q} = 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathcal{I}}} \int_{q_0}^q p dq \right) - \frac{\partial E}{\partial \tilde{\mathcal{I}}}.$$

Переменная угол по определению задается как

$$\vartheta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathcal{I}}} \int_{q_0}^q p dq,$$

так что уравнение движения обобщенной координаты задает вращение с постоянной частотой, зависящей от значения адиабатического инварианта:

$$\dot{\vartheta} = \omega(\tilde{\mathcal{I}}), \quad \omega(\tilde{\mathcal{I}}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial E}{\partial \tilde{\mathcal{I}}}. \quad (8.30)$$

При обороте за время периода инкремент ϑ равен

$$\Delta\vartheta = \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathcal{I}}} \oint p dq = \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathcal{I}}} (2\pi \tilde{\mathcal{I}}) = 2\pi,$$

т. е. происходит полный оборот на 2π .

В переменных действие—угол движение описывается элементарным образом как вращение.

(8.D) Диполь в поле электромагнитной волны

41 Квазиупругий диполь

Уравнения движения нерелятивистского заряда в поле электромагнитной волны, метод преобразования Фурье для решения дифференциальных уравнений, делта-функция Дирака и обратное преобразование Фурье, заряженный гармонический осциллятор с затуханием, спектр и интенсивность вынужденных колебаний, функция Грина классического осциллятора, обход полюсов в комплексной плоскости частоты.

Плоская волна электромагнитных колебаний, падая на покоящийся заряд, вызывает его вынужденные колебания, в результате чего он начинает излучать (см. рис. 8.1).

Рассмотрим уравнение движения свободного покоящегося заряда под воздействием поля электромагнитной волны

$$\frac{dp}{dt} = e \mathcal{E}_0 + \frac{e}{c} v \times \mathcal{H}_0,$$

которое при $v \ll c$ сводится к

$$m \ddot{r} = e \mathcal{E}_0,$$

так что несмотря на то, что электрическое и магнитное поля в волне одинаковы по модулю, можно пренебречь вкладом магнитного поля и проводить нерелятивистское рассмотрение.

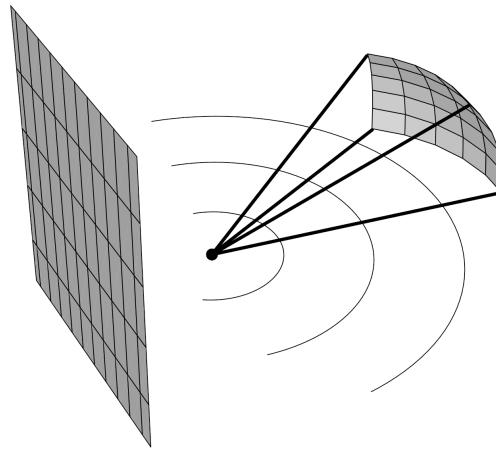


Рис. 8.1: Монохроматическая волна, падающая на мишень, и рассеянная волна из-за вынужденных колебаний зарядов мишени.

Если заряд закрепить с помощью сил упругости, то в свободном виде он будет совершать колебания с собственной частотой ω_0 :

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = 0.$$

В самом деле, величина

$$\mathbf{F}_{\text{elastic}} = -m \omega_0^2 \mathbf{r}$$

есть не что иное как сила упругости, пропорциональная смещению.

Если есть диссипация, т. е. сила трения⁶, то скорость частицы будет экспоненциально затухать:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 e^{-\gamma t},$$

где коэффициент затухания $\gamma > 0$ имеет размерность обратного времени, т. е. частоты.

В итоге, уравнение движения с учетом силы упругости, силы трения и внешней силы электрического поля примет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathcal{E}_0,$$

что представляет собой уравнение для квазиупругого диполя, если поместить неподвижный заряд $-e$ в начало координат⁷.

⁶У нас сила трения пропорциональна скорости.

⁷Другими словами r — относительное расстояние между зарядами. Однако при этом, мы считаем, что внутри системы движение заряда по-прежнему определяется силой упругости, а сила кулоновского притяжения «компенсируется».

Неоднородное дифференциальное уравнение движения с постоянными коэффициентами при наличии источника просто решается, если использовать метод преобразования Фурье.

41.1 Метод преобразования Фурье

Определим Фурье-образ функции $F(t)$

$$\mathcal{F}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt F(t) e^{i\omega t - \alpha^2 t^2}. \quad (8.31)$$

Для сходимости интеграла функция $F(t)$ не должна расти быстрее, чем

$$e^{+\alpha^2 t^2} \Big|_{\alpha \rightarrow +0} \rightarrow \text{const.}$$

Вычислим Фурье-образ единицы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t - \alpha^2 t^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-\alpha^2 (t - \frac{1}{2}i\omega/\alpha^2)^2 - \frac{1}{4}\omega^2/\alpha^2}.$$

Здесь гауссов интеграл по переменной $z = t - \frac{1}{2}i\omega/\alpha^2$ может быть вычислен, если сместить контур интегрирования на вещественную ось, что можно сделать, поскольку при смещении пути интегрирования нет пересечений с особенностями и не возникают бесконечные вклады, так что интегралы совпадут, а значит,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\alpha^2 z^2} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dz_1 e^{-\alpha^2 z_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz_2 e^{-\alpha^2 z_2^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{+\infty} r dr e^{-\alpha^2 r^2} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где мы перешли к интегрированию на плоскости $\{z_1, z_2\}$ от декартовых переменных к полярным $z_1 = r \cos \phi$, $z_2 = r \sin \phi$, так что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\alpha^2 z^2} = \left\{ 2\pi \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}.$$

В итоге, Фурье-образ единицы

$$\mathcal{I}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{1}{4}\omega^2/\alpha^2}. \quad (8.32)$$

Это — четная функция от частоты, которая всюду стремится к нулю, кроме точки $\omega = 0$, где она стремится к бесконечности. Однако при бесконечно малом $\alpha \rightarrow +0$ Фурье-образ единицы вполне определен.

Основным свойством Фурье-образа единицы является значение интеграла этого Фурье-образа с функцией от частоты, которая может быть разложена в ряд возле точки $\omega = 0$,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \mathcal{I}(\omega) f(\omega) &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega) \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{1}{4}\omega^2/\alpha^2} = \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \{f(0) + f'(0)\omega + \dots\} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{1}{4}\omega^2/\alpha^2} = \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(0) e^{-\frac{1}{4}\omega^2/\alpha^2} = \\
 &= f(0) \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \sqrt{4\pi} \alpha = 2\pi f(0).
 \end{aligned} \tag{8.33}$$

Определим дельта-функцию Дирака через Фурье-образ единицы

$$2\pi \delta(\omega) = \mathcal{I}(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t - \alpha^2 t^2}. \tag{8.34}$$

Мы установили, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \delta(\omega) f(\omega) = f(0), \tag{8.35}$$

для достаточно «хорошей» функции $f(\omega)$. В дальнейшем, согласно общей договоренности, принято, что писать всякий раз громоздкое выражение с пределом $\alpha \rightarrow +0$ в явном виде при использовании дельта-функции Дирака не представляется удобным, но этот предел безусловно необходимо иметь в виду для придания строгости математическому формализму выкладок с символом $\delta(\omega)$.

Тогда основная формула метода преобразования Фурье легко доказывается:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \mathcal{F}(\omega) e^{-i\omega t} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{F}(t') e^{i\omega t'} = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{F}(t') \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{F}(t') \delta(t - t') = F(t).
 \end{aligned}$$

Таким образом, Фурье-образ функции позволяет восстановить саму функцию с помощью обратного преобразования Фурье.

К основным свойствам дельта-функции Дирака относят

- смену масштаба:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x),$$

как следствие четности дельта-функции с учетом элементарной замены переменных в интеграле с дельта-функцией $dx = \frac{1}{|a|} d(|a|x)$,

- вычисление Фурье-образа производной: $\dot{F}(t) \mapsto -i\omega \mathcal{F}(\omega)$, — как результирует интегрирования по частям (конечные члены на границах интеграла равны нулю из-за наличия $e^{-\alpha^2 t^2}$) или просто из записи производной по времени для обратного преобразования Фурье:

$$\dot{F}(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \mathcal{F}(\omega) e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} (-i\omega) \mathcal{F}(\omega) e^{-i\omega t}.$$

Отсюда следует, что дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами сводятся к алгебре для Фурье-образа этой функции.

В самом деле, применим преобразование Фурье в задаче о квазиупругом диполе в электрическом поле.

$$\mathbf{r}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \mathbf{r}(\omega), \quad \mathbf{r}^*(\omega) = \mathbf{r}(-\omega).$$

Тогда дифференциальное уравнение становится алгебраическим, поскольку

$$\dot{\mathbf{r}}(t) \longrightarrow -i\omega \mathbf{r}(\omega),$$

так что

$$[(-i\omega)^2 - i\omega \gamma + \omega_0^2] \mathbf{r}(\omega) = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0(\omega).$$

Решение

$$\mathbf{r}(\omega) = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0(\omega) \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

удовлетворяет условию вещественности. Фурье-образ второй производной по времени дипольного момента равен

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = e \ddot{\mathbf{r}}(t) \longrightarrow \ddot{\mathbf{r}}(\omega) = -\frac{e^2}{m} \mathbf{E}_0(\omega) \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}.$$

41.2 Функция Грина классического осциллятора

Рассмотрим общий метод решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений методом функций Грина на примере осциллятора под воздействием внешней силы в полной аналогии с квазиупругим диполем:

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2 + \gamma \partial_t) q(t) = f(t), \quad \gamma \rightarrow +0.$$

Решение представляет собой сумму общего решения однородного уравнения $q_0(t)$, свободных колебаний, и частного решения неоднородного уравнения $\tilde{q}(t)$, вынужденных колебаний,

$$q(t) = q_0(t) + \tilde{q}(t), \quad (\partial_t^2 + \omega_0^2)q_0(t) = 0,$$

При этом, свобода выбора общего решения однородного уравнения позволяет удовлетворить начальным условиям задачи, ограничив эту свободу наложением подходящих граничных данных в зависимости от определения частного решения неоднородного уравнения.

Используя преобразование Фурье,

$$\mathcal{Q}_0(\omega) = \int dt e^{i\omega t} q_0(t),$$

найдем для свободного решения

$$\mathcal{Q}_0(\omega)(\omega_0^2 - \omega^2) = 0 \Rightarrow \mathcal{Q}_0(\omega) = c_+ 2\pi\delta(\omega - \omega_0) + c_- 2\pi\delta(\omega + \omega_0).$$

Коэффициенты положительно- и отрицательночастотных мод колебаний c_{\pm} определяются из граничных условий задачи:

$$q_0(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \mathcal{Q}_0(\omega) = c_+ e^{-i\omega_0 t} + c_- e^{i\omega_0 t}.$$

Аналогично для вынужденных колебаний

$$\tilde{\mathcal{Q}}(\omega) = \frac{\mathcal{F}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}, \quad \gamma \rightarrow +0, \quad (8.36)$$

где $\mathcal{F}(\omega)$ — Фурье-образ внешней силы $f(t)$.

Вычислим в общем виде обратное преобразование Фурье для произведения двух Фурье-образов:

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \mathcal{F}_1(\omega) \mathcal{F}_2(\omega) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int dt_1 e^{i\omega t_1} F_1(t_1) \int dt_2 e^{i\omega t_2} F_2(t_2).$$

Интегрирование по ω дает

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} e^{i\omega t_1} e^{i\omega t_2} = \delta(t_1 + t_2 - t),$$

так что интеграл по t_1 приводит к следующему результату:

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \mathcal{F}_1(\omega) \mathcal{F}_2(\omega) = \int dt_2 F_1(t - t_2) F_2(t_2),$$

т. е. обратное преобразование произведения Фурье-образов $F_1(t)$ и $F_2(t)$ дает, как говорят, свертку этих функций.

Отсюда следует, что, согласно (8.36), вынужденное колебание можно представить в виде

$$\tilde{q}(t) = \int dt' \mathcal{G}(t - t') f(t'), \quad (8.37)$$

где функция Грина

$$\mathcal{G}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}, \quad \gamma \rightarrow +0. \quad (8.38)$$

Заметим, что функция Грина — это частное решение уравнения для вынужденных колебаний при $\mathcal{F}(\omega) \mapsto 1$, т. е. при $f(t) \mapsto \delta(t)$:

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2 + \gamma \partial_t) \mathcal{G}(t)(t) = \delta(t), \quad \gamma \rightarrow +0. \quad (8.39)$$

Интеграл в (8.38) легко взять, если разложить дробь

$$\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} = \frac{1}{2\omega_0} \left\{ \frac{1}{\omega_0 - \omega - i0} + \frac{1}{\omega_0 + \omega + i0} \right\}.$$

Тогда интегрирование по частоте вдоль линии от $-\infty$ до $+\infty$ можно замкнуть при $t > 0$ по полуокружности в нижней полуплоскости комплексной переменной ω (см. рис. 8.2), поскольку в этой полуплоскости $\Im \omega < 0$, а значит, вклад по полуокружности бесконечно мал из-за затухания экспоненты

$$e^{-i\omega t} \mapsto e^{+t\Im \omega} e^{-it\Re \omega} \rightarrow 0, \quad t > 0.$$

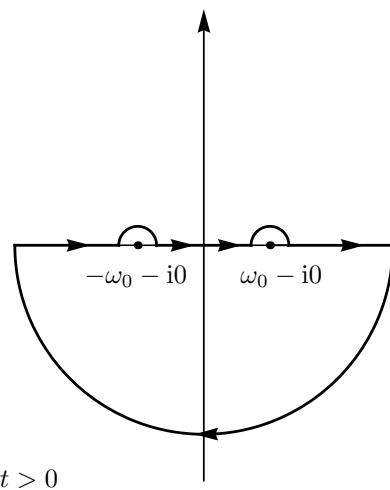


Рис. 8.2: Контур интегрирования по частоте ω при положительном времени для вынужденных колебаний с запаздывающими граничными условиями.

При $t < 0$ контур замыкается в верхней полуплоскости, где нет полюсов подынтегрального выражения, так что по теореме Коши $\mathcal{G}(t < 0) = 0$. При положительных интервалах времени та же теорема Коши с учетом интегрирования по часовой стрелке дает

$$\mathcal{G}(t) = -\vartheta(t) \frac{i}{2\omega_0} \left\{ -e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t} \right\} = \vartheta(t) \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t), \quad (8.40)$$

где $\vartheta(t)$ — ступенька Хевисайда:

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ \frac{1}{2}, & t = 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

В самом деле, дифференцирование дает

$$\partial_t \vartheta(t) = \delta(t), \quad \partial_t^2 \vartheta(t) = \delta'(t),$$

где производная четной дельта-функции Дирака дает нечетную функцию, так что вычисление интегралов по частям даёт

$$\begin{aligned} \int \delta'(t) \sin(\omega_0 t) h(t) dt &= - \int \delta(t) \{ \sin(\omega_0 t) h'(t) + \omega_0 \cos(\omega_0 t) h(t) \} dt = \\ &= - \int \delta(t) \omega_0 h(0) dt = - \int \delta(t) \omega_0 h(t) dt, \end{aligned}$$

а значит, $\delta'(t) \sin(\omega_0 t) = -\omega_0 \delta(t)$, и

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \mathcal{G}(t) &= \frac{1}{\omega_0} \{ -\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) \vartheta(t) + 2\delta(t) \omega_0 \cos(\omega_0 t) + \delta'(t) \sin(\omega_0 t) \} = \\ &= -\omega_0^2 \mathcal{G}(t) + \delta(t), \end{aligned}$$

как и должно быть для функции Грина.

Выбранный порядок обхода полюсов соответствует определению запаздывающей функции Грина, равной нулю в прошлом. Другие способы обхода полюсов приведут к иным функциям Грина и иным частным решениям для вынужденных колебаний. Наряду с полученным нами запаздывающим решением вводят причинную функцию Грина⁸, полюса которой расположены в нижней полуплоскости для положительночастотного решения и в верхней для отрицательночастотного:

$$\mathcal{G}_c(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i0} = \frac{i}{2\omega_0} e^{-i\omega_0|t|}. \quad (8.41)$$

Тогда разность двух частных решений

$$\tilde{q}(t) - \tilde{q}_c(t) = \int dt' \mathcal{G}(t-t') f(t') - \int dt' \mathcal{G}_c(t-t') f(t'), \quad (8.42)$$

удовлетворяет уравнению для свободных колебаний

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2) \{ \tilde{q}(t) - \tilde{q}_c(t) \} = 0,$$

а значит, решения с различными функциями Грина отличаются лишь на решение в виде свободных колебаний, хотя коэффициенты при положительно- и

⁸Вычислите самостоятельно.

отрицательночастотных модах могут быть и комплекснозначными. Этот факт нисколько не изменит вид решения, удовлетворяющего заданным в задаче граничным условиям: функцию Грина можно выбрать любой, важно подобрать затем подходящее решение свободных колебаний для заданных граничных условий — начальных данных. В квантовой теории поля используют причинную функцию Грина, поскольку она задает вынужденные колебания, инвариантные относительно обращения стрелы времени. В классической теории поля с задачами на излучение, когда в прошлом нет свободных колебаний, более удобно пользоваться запаздывающей функцией Грина, так как тогда дополнительный вклад в решении уравнений движений в виде свободных колебаний тривиален, он равен нулю.

41.3 Ряды Фурье

Из интеграла Фурье можно также прийти к рядам Фурье для периодических функций.

Для начала заметим, что рассмотрение функции на конечном отрезке $[t_0, t_1]$ можно формально дополнить зеркальным отражением этой функции в точке t_1 , получая уже периодическую функцию на отрезке $[t_0, t_1 + (t_1 - t_0)]$. Тогда эту периодическую функцию можно непрерывно продолжить на всю числовую ось, так что, в итоге, достаточно будет рассмотреть эту периодическую функцию на отрезе $[0, a]$, где период $a = 2(t_1 - t_0)$.

В качестве наводящего соображения рассмотрим следующее свойство фурье-образа функции $f(x)$ с периодом a :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{ikx} = \int_{-\infty}^{+\infty} d(x+a) f(x+a) e^{ik(x+a)} = \\ &= e^{ika} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{ikx} = e^{ika} \tilde{f}(k). \end{aligned}$$

Из соотношения

$$e^{ika} \tilde{f}(k) = \tilde{f}(k)$$

следует, что

$$\begin{aligned} \text{при } ka \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad &\Rightarrow \quad \tilde{f}(k) = 0, \\ \text{при } \tilde{f}(k) \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad ka = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Это значит, что фурье-образ периодической функции весьма сингулярен: он отличен от нуля в счетном числе точек в пространстве дуальной по Фурье переменной k .

Покажем теперь, что это действительно так и

$$\tilde{f}(k) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{f}_n \delta(ka - 2\pi n)$$

Фурье-образ за счет периодичности сводится к выражению

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{ikx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^a dx f(x) e^{ik(x+na)} = \int_0^a dx f(x) e^{ikx} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (e^{ika})^n.$$

Обозначим

$$z = e^{ika}.$$

Тогда сумму можно представить как

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (e^{ika})^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} z^{-n} + \left(1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} z^n \right),$$

т. е. в виде двух бесконечных сумм геометрических прогрессий. Для их сходимости введем бесконечно малую добавку, чтобы показатель геометрической прогрессии q в каждой из сумм был по модулю меньше единицы. Тогда

$$a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \dots = a_0 \frac{1}{1 - q}.$$

В первом случае

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} [z(1 + \epsilon)]^{-n} = [z(1 + \epsilon)]^{-1} \frac{1}{1 - [z(1 + \epsilon)]^{-1}} = \frac{1}{z(1 + \epsilon) - 1},$$

а во втором

$$1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} [z(1 - \epsilon)]^n = \frac{1}{1 - z(1 - \epsilon)}.$$

Оба вклада имеют сингулярность при $z = 1$. Тогда подставляя определение $z = \cos ka + i \sin ka$ и $ka = 2\pi n + \xi$ при $\xi \rightarrow 0$ получим цепочку пределов

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(1 + \epsilon) - 1} &= \frac{1}{\cos ka - 1 + i \sin ka + \epsilon(\cos ka + i \sin ka)} = \frac{1}{i\xi + \epsilon} = \\ &= -\frac{i}{\xi - i\epsilon} = -i \left(\text{PV} \frac{1}{\xi} + i\pi \delta(\xi) \right), \end{aligned}$$

где мы использовали формулу Сохотского

$$\frac{1}{\xi \pm i0} = \text{PV} \frac{1}{\xi} \mp i\pi \delta(\xi). \quad (8.43)$$

Аналогично

$$-\frac{1}{z(1 - \epsilon) - 1} = -\frac{1}{i\xi - \epsilon} = \frac{i}{\xi + i\epsilon} = i \left(\text{PV} \frac{1}{\xi} - i\pi \delta(\xi) \right),$$

В итоге, вклады в виде главного значения сокращаются, и остается

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (e^{ika})^n = 2\pi \delta(\xi) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(ka - 2\pi n),$$

так что

$$\tilde{f}(k) = \int_0^a dx f(x) e^{ikx} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (e^{ika})^n = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(ka - 2\pi n) \int_0^a dx f(x) e^{i2\pi n x/a}.$$

Обратное преобразование Фурье дает искомую функцию в виде ряда

$$f(x) = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) e^{-ikx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi n x/a} f_n,$$

где

$$f_n = \frac{1}{a} \int_0^a dx f(x) e^{i2\pi n x/a}.$$

В случае вещественной функции, $f^* = f$, возникают упрощения:

$$\Re f_n = \frac{1}{a} \int_0^a dx f(x) \cos(2\pi n x/a), \quad \Im f_n = \frac{1}{a} \int_0^a dx f(x) \sin(2\pi n x/a),$$

и в выражении для $f(x)$ сумма по целым значениям n с использованием свойств четности и нечетности относительно замены $n \leftrightarrow -n$ сводится к сумме по натуральным значениям

$$f(x) = f_0 + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} (\Re f_n \cos(2\pi n x/a) + \Im f_n \sin(2\pi n x/a)).$$

(8.Е) Динамический векторный интеграл движения

К числу систем, обладающих, наряду с физической реалистичностью, дополнительными особыми свойствами, следует отнести движение частиц в потенциалах, для которых *все финитные траектории замкнуты*, а также периодическое или мало отличающееся от периодического движение.

42 Симметрия в атоме водорода

Сохраняющийся вектор от центра кулоновского потенциала до второго фокуса эллипса финитной орбиты, связь генераторов симметрии со скобками Пуассона физических величин, отвечающих собственным значениям этих генераторов на полях амплитуды вероятности траектории, пример скобок Пуассона для момента импульса, скобки Пуассона вектора Рунге–Ленца–Лапласа и $\text{SO}(4)$ симметрия финитных кулоновских орбит.

42.1 Вектор Рунге–Ленца–Лапласа

Для кулоновского потенциала притяжения или в задаче Кеплера движение происходит по эллипсу, в одном из фокусов которого находится центр потенциала. Орбита замкнута, а значит, эллипс сохраняет свое положение со

временем. Это свойство является нетривиальным, поскольку оно позволяет воспользоваться свойствами эллипса и построить дополнительный интеграл движения.

В самом деле, используем тот факт, что любой луч, посланный из фокуса эллипса, после зеркального отражения от кривой эллипса пройдет через второй фокус и сумма длин луча от фокуса до кривой эллипса r до отражения и от кривой до второго фокуса r' после отражения — это постоянная величина $r + r' = 2a$, где a — длина той полуоси эллипса, на линии которого расположены фокусы (см. рис. 3.2 на стр. 92, в дальнейшем мы полагаем, что центр потенциала расположен в правом фокусе). Поскольку определяющая линия зеркального отражения касательная к эллипсу в точке траектории параллельна импульсу, разложим радиус-вектор частицы на ортогональную к импульсу часть \mathbf{r}_\perp и параллельный импульсу вклад \mathbf{r}_\parallel :

$$\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{\mathbf{p}^2}, \quad \mathbf{r}_\parallel = \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{\mathbf{p}^2}.$$

После зеркального отражения поперечная часть сменит знак, а продольный вклад не изменится, т. е. мы получим вектор той же длины r

$$\mathbf{r}'' = -\mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel = \mathbf{r} - 2\mathbf{r}_\perp.$$

Значит, согласно свойствам эллипса единичный вектор, полученный при отражении радиус-вектора, исходящего из правого фокуса в точку на траектории,

$$\frac{\mathbf{r}''}{r}$$

направлен от точки на траектории во второй, левый фокус эллипса. Значит, если умножить этот единичный вектор на величину $2a - r$ и получить вектор

$$\mathbf{r}' = (2a - r) \frac{\mathbf{r}''}{r} = \frac{2a - r}{r} (\mathbf{r} - 2\mathbf{r}_\perp),$$

то сумма длин $r + r' = 2a$, как это должно быть для суммы длин от точки на траектории до двух фокусов эллипса, и, следовательно, вектор \mathbf{r}' в точности соединяет точку на траектории со вторым фокусом эллипса. Поэтому суммарный вектор

$$\mathbf{r} + \mathbf{r}' = \mathbf{r} \frac{2a}{r} + 2\mathbf{r}_\perp \left(1 - \frac{2a}{r}\right) \quad (8.44)$$

соединяет правый фокус эллипса с левым (см. рис. 3.2) и поэтому имеет длину $2a\epsilon$. Безразмерный вектор

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2a} (\mathbf{r} + \mathbf{r}') = \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\mathbf{r}_\perp}{a} \left(1 - \frac{2a}{r}\right) \quad (8.45)$$

называют вектором Рунге–Ленца–Лапласа. Он сохраняется при движении в поле притяжения кулоновского типа.

Покажем, что вектор Рунге–Ленца–Лапласа выражается через переменные фазового пространства задачи. Для этого проведем преобразования, заметив, что

$$\mathbf{p} \times \ell = \mathbf{p} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 \mathbf{r} - \mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{p}^2 \mathbf{r}_\perp.$$

Кроме того, в кулоновском поле притяжения с зарядом $Q = -|Z|e$

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{|Z|e^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}^2 = -2m|E| \left(1 - \frac{|Z|e^2}{|E|r}\right),$$

так как $E = -|E| < 0$, и получим

$$a = \frac{|Z|e^2}{2|E|}.$$

Отсюда

$$\mathbf{r}_\perp = -\mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} \frac{a}{|Z|e^2 m} \left(1 - \frac{2a}{r}\right)^{-1}.$$

В итоге, сохраняющийся вектор Рунге–Ленца–Лапласа принимает стандартный вид

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{p} \times \boldsymbol{\ell} \frac{1}{|Z|e^2 m}. \quad (8.46)$$

Согласно связи параметров эллипса, по которому движется частица в кулоновском поле притяжения (см. рис. 3.2), длина вектора \mathbf{B} задается эксцентриситетом ϵ , поскольку расстояние между фокусами эллипса равно $2a\epsilon$, а $|\mathbf{B}| = |\mathbf{r} + \mathbf{r}'|/(2a) = 2a\epsilon/(2a)$:

$$\mathbf{B}^2 = \epsilon^2 = 1 - \frac{2m|E|}{Z^2 e^4 m^2} \ell^2.$$

В рамках классической механики сохраняющиеся величины являются генераторами канонических преобразований координат и импульсов гамильтоновой системы, при которых действие физической системы остается инвариантным. В свою очередь инвариантность действия физической системы согласно теоремы Нётер отвечает сохранению наблюдаемых величин, которые совпадают с теми, которые мы определили в качестве генераторов преобразований. Таким образом, имеет место симметрия действия физической системы, при которой экстремуму действия отвечает целое семейство траекторий системы. Важно установить, какая алгебра Ли связана с такими преобразованиями симметрии. Если это удастся сделать, то теория представлений групп Ли позволит определить характеристики физической системы, которые следуют из ее симметрии.

42.2 Скобки Пуассона и симметрия $\text{SO}(4)$

Опишем, как величины классической механики связаны с операторами, которые действуют в пространстве квантовых состояний, а затем покажем, что соотношения гамильтоновой механики для сохраняющихся классических величин связаны с группой симметрии квантовых состояний, а именно, установим алгебру и группу Ли, отвечающую сохранению момента количества движения и вектора Рунге–Ленца–Лапласа в задаче о замкнутых орбитах финитного движения в кулоновской задаче притяжения. Тогда групповые характеристики неприводимых представлений группы позволят нам вычислить инварианты Казимира и установить их связь с физической наблюдаемой —

энергией движения. Поэтому дискретный спектр собственных значений операторов Казимира определит и дискретный спектр квантовых состояний в задаче об атоме водорода.

Генераторы группы трансляций $\hat{\mathbf{k}} = -i\nabla$ и поворотов $\hat{\boldsymbol{\ell}} = -i\mathbf{r} \times \nabla$, действующие на поля и Ψ -функции квантовых состояний, связаны с импульсом и моментом импульса:

$$\hbar \hat{\mathbf{k}} = -i\hbar \nabla \mapsto \hat{\mathbf{p}}, \quad \hbar \hat{\boldsymbol{\ell}} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla \mapsto \hat{\boldsymbol{\ell}},$$

с помощью постоянной Планка с чертой (см. изложение фейнмановской формулировки механики в начале этой книги (глава 1), которому следуем в этой главе). В частности, действие этих операторов на амплитуду вероятности траектории с заданным импульсом

$$\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \right\}$$

дают как раз значения этих наблюдаемых:

$$-i\hbar \nabla \Psi_{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \Psi_{\mathbf{p}}, \quad -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla \Psi_{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\ell} \Psi_{\mathbf{p}},$$

в силу уравнений Гамильтона–Якоби и связи амплитуды с действием

$$S = -i\hbar \ln \Psi.$$

Подчеркнем, что амплитуда вероятности обнаружить частицу с определенным значением импульса \mathbf{p} в точке с координатами \mathbf{r} , т. е. $\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ — это волна де Броиля, так что собственное значение оператора импульса $\hat{\mathbf{p}}$ и оператора момента количества движения $\hat{\boldsymbol{\ell}}$ принимают вещественные значения благодаря тому, что в их определение, как генераторов преобразований, включена мнимая единица.

Дирак обратил внимание на то, что скобки Пуассона физических величин F и G , которые определены в фазовом пространстве гамильтоновой механики⁹ и являются генераторами канонических преобразований, совпадающих с групповыми преобразованиями, действующими в пространстве полей и Ψ -функций, с генераторами \hat{f} и \hat{g} , связанных с коммутаторами соответствующих этим величинам генераторов \hat{f} и \hat{g} простым соотношением

$$i\hbar \{F, G\}_P = [\hat{F}, \hat{G}], \quad \text{если} \quad \hbar \hat{f} \mapsto F, \quad \hbar \hat{g} \mapsto G. \quad (8.47)$$

В самом деле, добавляя сюда еще и соответствие для координат $\hat{\mathbf{r}} \mapsto \mathbf{r}$, найдем, что

$$\{r^\alpha, p_\beta\}_P = \delta_\beta^\alpha, \quad [\hat{r}^\alpha, -i\nabla_\beta] \Psi = i\delta_\beta^\alpha \Psi, \quad \forall \Psi \Rightarrow [\hat{r}^\alpha, \hat{p}_\beta] = i\hbar \delta_\beta^\alpha.$$

Пользуясь декартовыми координатами, в которых можно отождествить верхние, контравариантные и нижние, ковариантные индексы тензорных величин,

⁹В качестве напоминания приведем определение скобки Пуассона для $F = F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ и $G = G(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$:

$$\{F, G\}_P \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial r^\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial G}{\partial r^\alpha}.$$

вычислим скобки Пуассона для момента количества движения

$$\begin{aligned}
 \{\ell_\alpha, \ell_\beta\}_P &= \{\epsilon_{\alpha\mu\nu} r_\mu p_\nu, \epsilon_{\beta\mu'\nu'} r_{\mu'} p_{\nu'}\}_P = \epsilon_{\alpha\mu\nu} \epsilon_{\beta\mu'\nu'} \{r_\mu p_\nu, r_{\mu'} p_{\nu'}\}_P = \\
 &= \epsilon_{\alpha\mu\nu} \epsilon_{\beta\mu'\nu'} r_{\mu'} \left\{ \frac{\partial r_\mu p_\nu}{\partial r_\gamma} \frac{\partial r_{\mu'} p_{\nu'}}{\partial p_\gamma} - \frac{\partial r_\mu p_\nu}{\partial p_\gamma} \frac{\partial r_{\mu'} p_{\nu'}}{\partial r_\gamma} \right\} = \\
 &= \epsilon_{\alpha\mu\nu} \epsilon_{\beta\mu'\nu'} \{ \delta_{\mu\gamma} p_\nu r_{\mu'} \delta_{\nu'\gamma} - r_\mu \delta_{\nu\gamma} \delta_{\mu'\gamma} p_{\nu'} \} = \\
 &= \epsilon_{\alpha\gamma\nu} \epsilon_{\beta\mu'\gamma} p_\nu r_{\mu'} - \epsilon_{\alpha\mu\gamma} \epsilon_{\beta\gamma\nu'} r_\mu p_{\nu'} = \\
 &= -\delta_{\alpha\beta}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) + r_\alpha p_\beta + \delta_{\alpha\beta}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - r_\beta p_\alpha = \\
 &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\alpha'\beta'} r_{\alpha'} p_{\beta'} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_\gamma = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma,
 \end{aligned} \tag{8.48}$$

что можно сравнить с коммутатором генераторов группы поворотов

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\beta] = i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{l}_\gamma \quad \text{или} \quad [\ell_\alpha, \ell_\beta] = i\hbar \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma.$$

Другими словами, вычисляя скобки Пуассона физических величин, мы определяем коммутационные соотношения для генераторов преобразований, связанных с этими наблюдаемыми, на полях амплитуд вероятности траекторий, в то время как коммутаторы генераторов задают группу Ли непрерывных преобразований в системе. Более того, если рассматривать сохраняющиеся величины в качестве генераторов бесконечно малых канонических преобразований, то эти преобразования отвечают симметрии физической системы.

Например, в центрально симметричном потенциале сохраняется момент количества движения ℓ , а скобки Пуассона компонент вектора \mathbf{l} отвечают коммутаторам группы поворотов, т. е. группа генераторов является группой симметрии системы, если наблюдаемые, отвечающие этим генераторам, сохраняются.

Найдем скобки Пуассона для сохраняющихся векторов в кулоновском поле притяжения, т. е. для момента импульса и вектора Рунге–Ленца–Лапласа. Эти скобки будут определять алгебру генераторов группы симметрии этой системы. Вектор Рунге–Ленца–Лапласа перепишем в виде, симметризованном относительно перестановок местами физических величин, скобки Пуассона которых не равны нулю¹⁰:

$$\mathcal{B} = \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{p} \times \ell - \ell \times \mathbf{p}) \frac{1}{|Z|e^2 m}, \tag{8.49}$$

поскольку

$$\{p_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} p_\gamma.$$

¹⁰При переходе от классических величин к операторам необходимо сопоставлять составным физическим величинам операторы с исключительно вещественными собственными значениями, т. е. эрмитово самосопряженные операторы. В данном случае это легко достигается простой перестановкой величин, скобка Пуассона которых отлична от нуля:

$$p_\beta \ell_\gamma \mapsto \frac{1}{2} (p_\beta \ell_\gamma + \ell_\gamma p_\beta),$$

что при свертке с полностью антисимметричным символом Леви–Чивиты и дает выражение

$$(\mathbf{p} \times \ell)_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} p_\beta \ell_\gamma \mapsto \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{2} (p_\beta \ell_\gamma + \ell_\gamma p_\beta) = (\mathbf{p} \times \ell - \ell \times \mathbf{p})_\alpha.$$

Тогда

$$\{\mathcal{B}_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{B}_\gamma, \quad (8.50)$$

так как \mathcal{B} — вектор, и при поворотах он имеет стандартный коммутатор с генераторами поворотов.

Задача 56. Вычислите скобки Пуассона $\{\mathcal{B}_\alpha, \ell_\beta\}_P$ и $\{\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\beta\}_P$.

Прямые вычисления устанавливают, что

$$\{\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\beta\}_P = -2\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma \frac{E}{|Z|^2 e^4 m}, \quad (8.51)$$

где

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{|Z|e^2}{r} = \text{const.}$$

в силу закона сохранения энергии. Значит, если ввести векторы

$$\mathbf{u} = \mathcal{B} \sqrt{ma|Z|e^2}, \quad (8.52)$$

то их скобки Пуассона

$$\{u_\alpha, u_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma, \quad \{u_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} u_\gamma. \quad (8.53)$$

Введем вектора

$$\mathbf{j}^{(\pm)} = \frac{1}{2}(\ell \pm \mathbf{u}),$$

для которых имеют место скобки Пуассона

$$\{j_\alpha^{(+)}, j_\beta^{(+)}\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} j_\gamma^{(+)}, \quad \{j_\alpha^{(-)}, j_\beta^{(-)}\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} j_\gamma^{(-)}, \quad \{j_\alpha^{(+)}, j_\beta^{(-)}\}_P = 0. \quad (8.54)$$

Это означает, что соответствующие им генераторы реализуют алгебру симметрии $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$, которая изоморфна алгебре $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$, так как $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$.

Покажем, что алгебра генераторов отвечает алгебре группы поворотов 4-мерного евклидова пространства $SO(4)$. В пространстве размерности больше трех естественно описывать поворот не в терминах оси поворота, ортогональной плоскости, в которой происходит поворот, как это наглядно вводится в трехмерном пространстве, а в терминах самой плоскости поворота, когда маркером генератора поворота выступает не индекс оси поворота, а две оси в плоскости, например, повороту от оси x к оси y в плоскости (x, y) соответствует генератор ℓ_{xy} . Итак, сначала обратимся к алгебре поворотов в 3-мерном евклидовом пространстве, которую сформулируем в терминах тензора поворотов

$$l_{\alpha\beta} = r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha, \quad l_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \{\overline{1, 3}\},$$

в точном соответствии с описанной процедурой: генератор поворота вокруг оси z — это генератор поворота от оси x к оси y , $\ell_{xy} = \epsilon_{xyz} \ell_z = \ell_z$.

Скобка Пуассона генераторов $l_{\alpha\beta}$ легко вычисляется

$$\{l_{\alpha\beta}, l_{\alpha'\beta'}\}_P = g_{\alpha\alpha'} l_{\beta\beta'} + g_{\beta\beta'} l_{\alpha\alpha'} - g_{\alpha\beta'} l_{\beta\alpha'} - g_{\beta\alpha'} l_{\alpha\beta'}, \quad (8.55)$$

где $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ — метрика евклидова пространства в декартовых координатах. Скобки Пуассона в виде (8.55) эквивалентны стандартным скобкам Пуассона орбитального момента ℓ [см. (8.48)]. Теперь легко записать обобщение генераторов поворотов на случай 4-мерного евклидова пространства:

$$l_{\mu\nu} = r_\mu p_\nu - r_\nu p_\mu, \quad \{\mu, \nu\} \in \{\overline{1, 4}\}, \quad (8.56)$$

с такими же выражениями для скобок Пуассона:

$$\{l_{\mu\nu}, l_{\mu'\nu'}\}_P = g_{\mu\mu'}l_{\nu\nu'} + g_{\nu\nu'}l_{\mu\mu'} - g_{\mu\nu'}l_{\nu\mu'} - g_{\nu\mu'}l_{\mu\nu'}. \quad (8.57)$$

Если ввести в трехмерном подпространстве те же величины $l_{\alpha\beta}$, что эквивалентно ℓ_γ , и в дополнение к ним трехмерный вектор $u_\alpha = l_{\alpha 4}$, то из (8.57) нетрудно получить скобки Пуассона в виде

$$\{u_\alpha, u_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\ell_\gamma, \quad \{\ell_\alpha, u_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}u_\gamma, \quad \{\ell_\alpha, \ell_\beta\}_P = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\ell_\gamma, \quad (8.58)$$

что совпадает с выражениями (8.48) и (8.53), которые были получены чуть выше для орбитального момента и вектора Рунге–Ленца–Лапласа в задаче финитного движения в кулоновском потенциале, а значит, построенная алгебра генераторов симметрии в задаче о финитных траекториях в кулоновском поле притяжения — это алгебра группы $SO(4)$, группы поворотов в шести плоскостях 4-мерного евклидова пространства.

Итак, вырождение финитного движения в кулоновском потенциале в виде замкнутости любой орбиты отвечает группе симметрии $SO(4)$.

При этом, траектории движения реализуют не все представления этой группы, а только те из них, что отвечают $(j^{(+)})^2 = (j^{(-)})^2$, поскольку движение — плоское, а значит, $\ell \cdot u = 0$ и $(\ell \pm u)^2 = \ell^2 + u^2$. Кvantование уровней энергии атома водорода в согласии со структурой симметрии $SO(4)$ и описание соответствующих представлений проводится в курсе о группах Ли и о физических приложениях этих групп.

(8.F) Динамический тензорный интеграл движения

43 Изотропный гармонический осциллятор в 3D

Эволюция изотропного гармонического осциллятора в терминах комплексных векторов в фазовом пространстве, группа $SU(3)$ как матрическая группа инвариантности эволюции трехмерных фазовых векторов, матрицы Гелл-Манна, сохранение полуосей эллипса и тензор второго ранга, разложение тензора на синглет, вектор и квинтет по группе поворотов, разложение тензора на синглет и октет по группе $SU(3)$.

43.1 Комплексная амплитуда колебаний и группа $SU(3)$

При рассмотрении изотропного гармонического осциллятора с собственной частотой ω удобно ввести комплексные векторы (3-столбцы)

$$\mathbf{A} = m\omega \mathbf{r} + i\mathbf{p}. \quad (8.59)$$

Уравнения движения для этих векторов с учетом силы $\mathbf{F} = -\nabla(m\omega^2\mathbf{r}^2/2) = -m\omega^2\mathbf{r}$ могут быть выведены из уравнений Гамильтонона

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}.$$

Они принимают вид

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = m\omega \frac{\mathbf{p}}{m} - i m\omega^2 \mathbf{r} = -i\omega \mathbf{A},$$

и легко интегрируются

$$\mathbf{A}(t) = e^{-i\omega t} \mathbf{A}_0. \quad (8.60)$$

При этом введение величины как 3-строки

$$\mathbf{A}^\dagger = m\omega \mathbf{r} - i\mathbf{p}. \quad (8.61)$$

позволяет записать гамильтониан в виде

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{A}, \quad (8.62)$$

откуда сразу видно, что он инвариантен относительно матричной группы преобразований трехмерных комплексных векторов-столбцов, которые сохраняют длину вектора:

$$\mathbf{A}' = U \cdot \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A}')^\dagger \cdot \mathbf{A}' = \mathbf{A}^\dagger U^\dagger \cdot U \mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{A}, \quad (8.63)$$

откуда

$$U^\dagger \cdot U = \mathbb{1}. \quad (8.64)$$

Такие матрицы называются унитарными. Взяв детерминант (8.64), найдем, что

$$(\det U)^* \det U = 1.$$

Среди группы преобразований можно выделить элементарный сдвиг фазы всех компонент вектора \mathbf{A} , что, согласно (8.60), отвечает просто смене начала отсчета времени, а значит, соответствует сдвигу по времени и закону сохранения энергии. Поэтому, если нас интересует дополнительная симметрия, мы можем исключить изменение этой общей фазы в матрице U , потребовав

$$\det U = 1. \quad (8.65)$$

Итак, мы имеем симметрию унитарных преобразований трехмерных комплексных векторов со специальным условием единичного детерминанта матриц, что обозначают символом группы SU(3).

Проиллюстрируем ситуацию на более простом примере группы SU(2). Элементы группы SU(2) при действии в пространстве двумерных спиноров записываются в виде

$$g = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi} \right\},$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули, которые являются эрмитовыми и бесследовыми, а $\boldsymbol{\phi}$ — вещественные параметры группы, углы поворота. Эрмитовость матриц

Паули следует из требования унитарности $g^\dagger \cdot g = \mathbb{1}$. Бесследовость матриц Паули является следствием специального условия

$$\det g = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\phi} \right\} = 1.$$

Число параметров группы $SU(3)$, u^a , в полной аналогии с рассуждениями для группы $SU(2)$ определяется числом эрмитовых, бесследовых матриц 3×3 , которое равно 8. Базис таких матриц можно выбирать в виде матриц Гелл-Манна λ^a , $a \in \{\overline{1}, \overline{8}\}$, так что

$$U = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{u} \right\},$$

причем

$$\operatorname{tr} \lambda^a \lambda^b = 2\delta^{ab}, \quad (8.66)$$

так же, как у матриц Паули.

В явном виде матрицы Гелл-Манна включают в себя прямые аналоги недиагональных матриц σ_1 и σ_2 по парам индексов 3-мерного вектора A_α (в декартовых координатах евклидова пространства не делаем различия между верхними и нижними индексами):

по индексам 1 и 2

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

по индексам 1 и 3

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

по индексам 2 и 3

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

а также диагональные матрицы:

аналог σ_3 в индексах 1 и 2

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

вместо аналога σ_3 в индексах 2 и 3 необходимо ввести диагональную эрмитову матрицу с нулевым следом, которая удовлетворяет условию ортонормированности (8.66), так что единственным решением такой задачи является диагональная матрица

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Как и следовало ожидать, лишь две матрицы являются диагональными, т. е. имеют совместный базис собственных векторов, так что ранг группы $SU(3)$ равен двум, а значит, старший вектор всякого неприводимого представления характеризуется двумя независимыми числами, которые, стало быть, определяют и два независимых оператора Казимира: однородные полиномы по генераторам, коммутирующие со всеми генераторами группы. Собственные значения генераторов подалгебры Картана принимают значения из допустимого дискретного набора вещественных чисел, который фиксирован для каждого неприводимого представления группы. Отметим, что по аналогии с матрицами спина можно построить три повышающих и три эрмитово сопряженных к повышающим понижающих матрицы из недиагональных матриц Гелл-Манна.

Коммутационные соотношения для генераторов группы $SU(3)$ можно получить, вычислив структурные константы в выражениях

$$\left[\frac{1}{2} \lambda^a, \frac{1}{2} \lambda^b \right] = i f^{abc} \frac{1}{2} \lambda^c. \quad (8.67)$$

Константы f^{abc} приводятся в справочниках.

Итак, преобразование симметрии изотропного гармонического осциллятора в терминах векторов A :

$$A'_\beta = U_{\beta\alpha} A_\alpha, \quad U \in SU(3).$$

Это означает, что A_α — это триплет 3 по $SU(3)$, а A_α^\dagger — антитриплет $\bar{3}$ по $SU(3)$, что заметно упрощает понимание последующих построений.

43.2 Тензор Фрадкина

Все финитные траектории изотропного гармонического осциллятора замкнуты. Траектория движения — эллипс, но в отличие от кулоновского случая, центр притяжения находится не в фокусе, а в центре эллипса. Это значит, что с помощью радиус-вектора и импульса невозможно построить характерный для эллипса вектор, например, соединяющий фокус с фокусом, так как положение обоих фокусов от центра зеркально симметрично. Этот эллипс можно описать направлениями и длинами его полуосей. Однако, опять же, направления по отношению к центру притяжения можно менять на противоположные, от этого эллипс не изменится. Итак у нас есть пара характерных векторов полуосей на плоскости, ортогональной моменту импульса, но направления этих векторов можно менять на противоположные по отношению к центру. Такая ситуация с возможностью смены направления векторов имеет место, если эти векторы собственные для некоторой матрицы. Поскольку эти собственные векторы должны сохраняться при движении, должна сохраняться и сама матрица. Значит, необходимо построить не сохраняющийся вектор, а сохраняющийся тензор второго ранга.

Это можно легко сделать в терминах векторов A : построим величину

$$F_{\alpha\beta} = A_\alpha^\dagger A_\beta$$

которая является тензором как по группе поворотов, так и по группе $SU(3)$, причем в силу уравнений движения $A_\alpha(t) = e^{-i\omega t} A_\alpha(0)$ и $A_\alpha^\dagger(t) = e^{i\omega t} A_\alpha^\dagger(0)$ значение тензора не зависит от времени, он сохраняется. При этом по построению в виде тензорного произведения триплета на антитриплет в группе $SU(3)$

$F_{\alpha\beta} \mapsto \bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$ по $SU(3)$. След тензора — синглет, т. е. инвариант группы $SU(3)$:

$$\text{tr } F = F_{\alpha\alpha} = 2mE.$$

Распишем $F_{\alpha\beta}$, выделив антисимметричный вклад

$$a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}\{F_{\alpha\beta} - F_{\beta\alpha}\} = i m\omega \{r_\alpha p_\beta - r_\beta p_\alpha\} = i m\omega \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \ell_\gamma,$$

и симметричный бесследовый вклад — тензор Фрадкина:

$$s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}\{F_{\alpha\beta} + F_{\beta\alpha}\} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} 2mE = p_\alpha p_\beta + m^2\omega^2 r_\alpha r_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} 2mE,$$

так что

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} 2mE + a_{\alpha\beta} + s_{\alpha\beta},$$

и мы получили разложение тензора по неприводимым представлениям группы поворотов $SO(3)$:

$$SO(3) : \quad \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \mathbf{5},$$

где указаны размерности базиса собственных векторов для каждого неприводимого представления. В этом разложении на неприводимые тензоры синглет отвечает сохраняющейся энергии, триплет — сохраняющемуся вектору момента импульса. Для того чтобы прояснить физический смысл квинтета, найдем собственные значения и собственные векторы симметричного тензора Фрадкина

$$S_{\alpha\beta} = p_\alpha p_\beta + m^2\omega^2 r_\alpha r_\beta.$$

Заметим сначала, что поскольку движение плоское

$$S_{\alpha\beta} \ell_\beta = 0,$$

т. е. тензор является поперечным. Выберем направление момента импульса в качестве оси z : $\ell \parallel z$. Тогда тензор Фрадкина вырождается в тензор на плоскости (x, y) : все его компоненты с индексом z обращаются в нуль,

$$S_{\alpha\beta} \mapsto \Sigma = \begin{pmatrix} p_x p_x + m^2\omega^2 x^2 & p_y p_x + m^2\omega^2 xy \\ p_y p_x + m^2\omega^2 xy & p_y p_y + m^2\omega^2 y^2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\det(\Sigma - \lambda) = \lambda^2 - \lambda(p^2 + m^2\omega^2 r^2) + m^2\omega^2(xp_y - yp_x)^2 = \lambda^2 - 2mE\lambda + m^2\omega^2\ell^2 = 0,$$

собственные значения этой матрицы

$$\lambda_{\pm} = mE \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\omega^2\ell^2}{E^2}} \right) \Rightarrow \lambda_+ = \frac{\ell^2}{a^2}, \quad \lambda_- = \frac{\ell^2}{b^2},$$

где a и b — полуоси эллипса по направлениям x и y , соответственно. Тогда собственные векторы можно найти, используя сохранение матрицы Σ по времени. А именно, если выбрать момент времени, когда $y = 0$, $p_x = 0$, $p_y = p$,

$x = a$, $\ell = ap$, т. е. выбрать эллипс с полуосами по x и y , то

$$\Sigma = \begin{pmatrix} m^2\omega^2 a^2 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{\ell^2}{a^2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Sigma - \lambda_+ = \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{b^2} - \frac{\ell^2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{\ell^2}{a^2} - \frac{\ell^2}{b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{b^2} - \frac{\ell^2}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а также в силу $\ell = abm\omega$

$$\Sigma - \lambda_- = \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{b^2} - \frac{\ell^2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{\ell^2}{a^2} - \frac{\ell^2}{b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ell^2}{a^2} - \frac{\ell^2}{b^2} \end{pmatrix},$$

откуда

$$\epsilon_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В итоге, собственные векторы тензора Фрадкина направлены по полуосям траектории вращения – эллипса, а их собственные значения задают обратные квадраты длин полуосей.

Теперь рассмотрим тензор F в отношении неприводимых представлений группы $SU(3)$. Вектор A_α реализует 3-мерное неприводимое представление, но, в отличие от группы $SO(3)$ или $SU(2)$, для которых комплексно сопряженные представления эквивалентны: $(2s+1)^* \cong (2s+1)$, – в группе $SU(3)$ комплексно сопряженные представления не всегда эквивалентны исходному, например, $\bar{3}^* = \bar{3} \not\cong 3$, т. е. вектор A_β^\dagger реализует независимое представление¹¹. При этом разложение по неприводимым представлениям выглядит следующим образом:

$$SU(3) : \quad \bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8},$$

т. е. тензор F раскладывается на синглет и октет относительно преобразований группы $SU(3)$. Очевидно, что синглет, т. е. инвариант, пропорционален единичной матрице, и это след тензора, т. е. фактически энергия. Что же касается октета, то его можно представить в виде 8-мерного вектора в пространстве параметров группы:

$$F^a = \frac{1}{4m\omega} \lambda_{\alpha\beta}^a F_{\alpha\beta}. \quad (8.68)$$

Поскольку матрицы Гелл-Манна бесследовые, след тензора F не дает вклада в вектор F^a . Введенный вектор имеет размерность момента импульса, т. е. действия.

Вычисление скобок Пуассона дает

$$\{F^a, F^b\}_P = f^{abc} F^c, \quad (8.69)$$

¹¹Мы знаем, что речь идет о двух фундаментальных представлениях группы $SU(3)$, которые являются комплексно сопряженными, а именно, $T^{(1,0)}$ и $T^{(0,1)}$.

а значит, сохраняющиеся генераторы, соответствующие F^a , действительно реализуют октетное представление генераторов группы SU(3).

Задача 57. Вычислите скобки Пуассона $\{F^a, F^b\}_P$.

Итак, вырождение финитного движения изотропного гармонического осциллятора в виде замкнутости орбиты отвечает группе симметрии SU(3).

Не все представления группы SU(3) реализуются траекториями движения, поскольку траектория является плоской: $\ell_\alpha s_{\alpha\beta} \equiv 0$. Это условие отвечает, как можно показать в теории представлений группы SU(3), старшему вектору, одно из квантовых чисел которого в терминах собственных значений двух диагональных генераторов равно нулю. Рассмотрение подобных вопросов проводится в курсах групп Ли.

Приложения

Предисловие к Приложениям

Общаясь с человеком, мы получаем его самого, а не только те формулы, которые возникают у него на лекции, на семинаре или в докладе.

Данные приложения ставит себе целью ввести элементарные понятия теории вероятностей, на которых в физике базируется как эксперимент, так и теория, а также численное сравнение в эмпирике, и служат в качестве дополнения к видео-лекциям, что предлагаются в бакалавриате первокурсникам Московского физико-технического института (Национального исследовательского университета) в рамках ознакомительного курса по обработке данных лабораторных работ по общей физике.

План изложения очень прост. Сначала рассматривается конечная выборка случайного события и устанавливаются свойства распределения вероятностей повторения этого события в выборке — биномиальное распределение. Для конечной выборки вводится понятие среднего, а также линейного и квадратичного отклонения от среднего, что позволяет определить не только дисперсию, но и многоточечные корреляторы случайной величины. Затем в случае фиксированного среднего значения числа повторений случайного события в выборке выводится распределение Пуассона для дискретной величины. Эта случайная дискретная величина меняется от нуля до бесконечности и равна числу повторений события в выборке при числе событий, стремящемся к бесконечности. При этом замкнутость изложения требует введения числа e как «золотого предела», экспоненты, натурального логарифма и ряда Тейлора как предела в схеме итераций для вычисления приближенного значения функции с помощью формулы Ньютона–Лейбница для интеграла от производной функции.

Наконец, путем линейного преобразования числа событий в выборке в случайную величину с нулевым средним и единичной дисперсией выводится нормальное распределение. Для этого приходится найти выражение для факториала в пределе бесконечно растущего числа — формулу Стирлинга, что требует детального описания вычисления асимптотики интеграла методом сведения его к гауссову возле экстремума подынтегральной функции — методом перевала. Эти упражнения вполне поучительны для первокурсников, как полагает автор.

В итоге, становится понятным и естественным использование элементарных терминов теории вероятностей, таких, как распределение случайной величины по Гауссу, среднее, дисперсия, и т.п. при введении в курс обработки данных лабораторных работ.

В качестве приложения теории вероятностей в физике сразу после введения основных понятий и инструментов рассмотрены вероятностные азы термодинамики, как то распределение Гиббса, статсумма, энтропия и уравнение состояния идеального газа.

Автор признателен студентам Физтеха, благодаря которым были исправлены ошибки и опечатки в тексте, а также изменены некоторые формулировки и подходы к изложению материала пособия.

Прошу читателей направлять свои замечания и отзывы об этих лекциях по электронному адресу kiselev.vv@phystech.edu с пометкой «EProb».

Приложение А

Элементарные основы теории вероятностей: ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И СРЕДНИЕ ОТКЛОНЕНИЯ

Математическая культура — это чувство меры в строгости обоснования при решении задачи. Постановка задачи в физике не сводится к бескомпромиссному стремлению достичь абсолютной аксиоматичности как формы специального математического исследования.

(A.1) Случайность и вероятность: дискретный случай

Многие физические закономерности в природе носят статистический характер, а это значит, что устойчивые связи между величинами, которые от случая к случаю принимают разные значения и на практике выглядят как проявление хаоса, возникают при подсчете долей различных событий, описывающих все возможные варианты реальности. Среди событий выделяют элементарные, т. е. такие, каждое из которых, с одной стороны, исключает любое другое, но вся совокупность таких взаимоисключающих событий, с другой стороны, составляет все возможные события в рассматриваемой системе. Элементарные события называют также элементарными исходами. Термин доля события (fraction) означает отношение числа событий заданного типа к общему числу всех возможных событий. Таким образом, доля событий — это, по физическим понятиям, безразмерная величины. В математике абстрактные числа не несут на себе физической размерности, и поэтому вместо термина «доля» события используют термин «частота» события, который является общепринятым в теории вероятностей. Однако в физике понятие частоты используется в совсем ином смысле: частота — это число событий в заданный промежуток времени, т. е. темп набора событий по времени, так что частота имеет размерность обратного времени. Подобная «нестыковка» физики и математики в связи с размерностью физических величин является типичной. При рассмотрении доли событий в теории вероятностей время как фактор отсутствует, поэтому мы используем безразмерный термин «доля», но с учетом сложившейся культурной традиции читателю нужно иметь в виду и математический эквивалент «частота»¹. Ясно, что событие может быть и не элементарным, т. е. быть произвольным множеством элементарных.

Самое начальное представление о том, что такое вероятность дает игра «орел или решка»: если считать, что монета в результате подбрасывания падает на одну из своих сторон совершенно случайно, то жребий «орел» или «решка» выпадает одинаково, как говорят, «пятьдесят на пятьдесят», имея в виду, что в среднем в половине случаев из ста монета окажется «орлом» вверх,

¹Основы математической культуры в теории вероятностей читатель может найти в школьных учебниках [23, 24].

а в другой половине — «решкой» вверх, и ни разу не встанет на ребро. С монетой, таким образом, в реальности может произойти только два возможных элементарных события или исхода: «орел» или «решка», которые мы полагаем равновероятными, т. е. происходящими одинаково часто. Ясно, что долю событий «орел» или «решка» можно посчитать, подбросив монету N раз. К примеру, если подбросить монету 3 раза ($N = 3$), то «орел» может выпасть либо 3 раза из трех, либо 2, либо 1 или 0 раз из трех, так что доли событий с «орлом» (fraction, которую в теории вероятностей именуют frequency) равна в этих случаях 1, $2/3$, $1/3$ и 0. Эти доли событий различны в каждом из рассмотренных вариантов реальности и во всех этих случаях не равны значению $1/2$ для равновероятного выпадения «орла» или «решки». В действительности мы полагаем, что вероятность события — это не просто доля события, когда монету подбрасили N раз, а предел «частоты» события при $N \rightarrow \infty$, причем этот предел один и тот же вне зависимости от того, кто и когда начал его подсчитывать.

§а Что такое предел?

Для практической ясности рассуждений рассмотрим пример. В игре «орел или решка» подбросим монетку 100 раз и запишем в таблицу долю событий с «орлом» как число a_1 и долю событий с «решкой» как число b_1 . Например, если «орел» выпал 48 раз из ста, то $a_1 = 0.48$, и тогда $b_1 = 0.52$, т. е. «решка» выпала 52 раза из ста. Затем подбросим монетку еще 100 раз и внесем в таблицу долю событий с «орлом» за оба сеанса нарастающим итогом, т. е. за все 200 геймов как число a_2 и долю событий с «решкой» за все 200 геймов как число b_2 . За два сеанса игры «орел или решка» по 100 геймов мы получили два числа a_1 и a_2 и два числа b_1 и b_2 . После n сеансов игры «орел или решка» по 100 геймов с нарастающим итогом по геймам и сеансам, как говорят, по результатам проведенных испытаний возникнут две последовательности чисел

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ и } \{b_1, b_2, \dots, b_n\},$$

которые для краткости обозначают $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Мы предполагаем, что эти

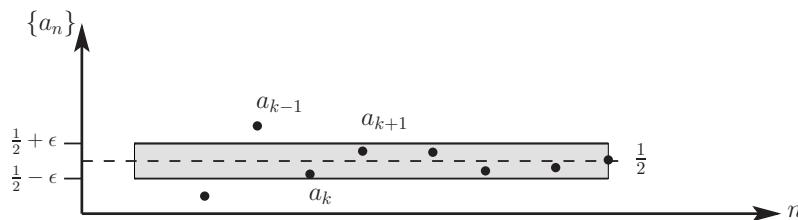


Рис. A.1: Последовательность $\{a_n\}$ и ее предел.

две последовательности сходятся к одному и тому же числу, а именно, при $n \rightarrow \infty$ последний член последовательности все меньше и меньше отличается от $1/2$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2},$$

так как только в этом случае имеет смысл говорить о том, что случайность допускает вероятностное описание. Смысл термина «отличается все меньше и

меньше» можно представить себе графически так, как показано на рис. А.1: если вблизи значения предела $1/2$ изобразить узкую полоску некоторой ширины, то в последовательности после какого-то номера k все числа a_n при $n > k$ окажутся внутри этой полосы. Утверждение, которое проиллюстрировано на этом рисунке, в математике записывают с помощью специальных символов — кванторов, так что слова «по определению число a является пределом последовательности $\{a_n\}$ при $n \rightarrow \infty$ равносильно тому, что для любого эпсилон больше нуля существует номер k числа в последовательности, такой, что для всех номеров n , больших k , значение члена последовательности a_n отличается от предела последовательности a меньше чем на эпсилон» приобретают следующий вид:

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists k : \forall n \geq k \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon.$$

В проведенных сейчас рассуждениях мы совершили переход от конкретного примера последовательности, которая описывала долю событий с «орлом» в зависимости от номера сеанса, к абстрактному понятию последовательности и ее пределу. Это один из методов научного мышления — абстрагирование: переход от наглядных, интуитивно ясных представлений об объектах исследования к максимально общим формам описания понятий и их связей. Этот переход от частного к общему (индукция) необходим для того, чтобы с помощью логически строгих утверждений для абстрактных понятий получать выводы (дедукция), которые справедливы уже не только в частных исходных примерах, а в любых системах, допускающих описание в терминах тех же абстрактных понятий². Абстрактное мышление — это форма логического мышления, опирающаяся на абстрагирование и конструирование новых объектов из абстрактных понятий.

Возвращаясь к последовательностям подчеркнем, что не всякая последовательность имеет предел, существуют и последовательности, у которых нет предела, например, бесконечное чередование единицы и минус единицы не имеет предела.

В примере с игрой «орел или решка» мы предполагаем, что равновероятная случайность выпадения каждой из сторон монеты связана с достижением вполне определенного предела специально построенной последовательности частоты событий, равного $1/2$, который совпадает с вероятностью того, что выпадет «орел» или «решка», а сумма вероятностей всех элементарных исходов равна единице.

Рассмотрение приведенного примера с игрой «орел или решка» показывает как в теории вероятностей вводится понятие *классической вероятности*, когда *a priori* элементарные события полагаются равновероятными, а вероятность неэлементарных событий может вычисляться, исходя из постулата о равновероятности, и пример подобных вычислений мы приведем чуть ниже. С другой стороны, построение последовательностей частот исходов в игре «орел или решка» демонстрирует подход, который называют *frequentist statistics*, так как в нем не делается априорных предположений о значениях вероятности, и эти значения рассчитываются опытным путем по частотам (*frequency*). В обоих случаях строгая математическая теория строится, исходя из постулативного определения как пространства событий и его свойств (сигма-алгебры), так

²Примеры сами по себе ничего не доказывают и ничего не обобщают. Но контрпримеры могут служить инструментом опровержения абстрактных утверждений–предположений.

и согласно аксиоматическому введению вероятности как меры в пространстве событий (см. университетские учебники [25, 26]). В предлагаемом ниже тексте элементарные основы теории вероятности излагаются не как свод специальных законов, а скорее как исследование идей и смыслов, так что мы следуем интуитивно понятным логическим построениям, полагая, что для начинающих наглядней прежде научиться уверенно совершать операции со счетными палочками, а потом уже вводить аксиомы Пеано для натуральных чисел, чтобы ощутить их красоту.

Итак, опишем теперь вероятностные игры в рамках элементарных абстрактных понятий.

1A Случайная величина

Определение вероятности и понятие случайной величины, конечная выборка, биномиальное распределение вероятностей числа событий в конечной выборке, определение среднего значения величины при заданном распределении вероятностей, линейное и квадратичное отклонение от среднего, дисперсия, многоточечные корреляторы, вычисление среднего и дисперсии случайной величины для биномиального распределения.

Событием называется один из возможных вариантов реальности с какими-то фиксированными свойствами типа «орел» или «решка».

1A.1 Событие и выборка: биномиальное распределение

Вероятность как математическая мера существования возможных вариантов реальности есть предел доли событий, которые происходят от случая к случаю при бесконечном повторении попыток регистрации событий среди всех возможных вариантов реальности. Многократное повторение попыток, которые полагают независимыми друг от друга, называют конечной выборкой с числом повторений N , а число событий n вполне определенного заданного в пространстве событий типа в конечной выборке N называют случайной величиной³. В литературе по физике многократное повторение выборки часто именуют статистическим ансамблем. Ясно, что невозможное событие происходит с вероятностью p , равной нулю, $p = 0$, а событие, которое происходит всякий раз в любой попытке, имеет вероятность, равную единице, $p = 1$. В общем же случае вероятность события лежит на отрезке от нуля до единицы,

$$0 \leq p \leq 1. \quad (\text{A.1})$$

Итак, пусть событие по имени A имеет вероятность p . Обычно вводят также вероятность q того, что событие по имени A не произошло, т. е. произошло что-то из возможных вариантов реальности, но не событие A , $q = 1 - p$. Рассмотрим конечную выборку N и вычислим вероятность того, что событие A в этой конечной выборке может быть зарегистрировано n раз⁴: $0 \leq n \leq N$. Ве-

³ В предлагаемом изложении преднамеренно упрощена терминология, чтобы избежать ситуации, когда за деревьями не видно леса, и чтобы картина в целом смотрелась логично. Если же читателя больше интересует рафинированный язык теории вероятностей на уровне деталей конструкции, то в этом помощником может служить школьный курс теории вероятностей, представленный в учебниках [23, 24]. Там можно найти профессиональные обозначения и определения для генеральной совокупности событий, выборки как ее подмножества, чем попытки отличаются от испытаний, что такое «успех» и «неудача» в испытании события и прочие бонусы детализации а также чем простые ситуации отличаются от сложных.

⁴ Данную постановку задачи называют испытаниями Бернулли.

роятность того, что событие произошло в каждой из N попыток вычисляется как N -кратное произведение вероятности события, так как каждая попытка считается независимой, а вероятность события не зависит от попытки,

$$w_N = p^N.$$

Вероятность того, что событие не произошло в каждой из N попыток, вычисляется аналогично как

$$w_0 = q^N.$$

Вероятность того, что событие произошло ровно n раз, очевидно, означает и то, что оно не произошло ровно $N - n$ раз, и при этом число вариантов регистрации события можно легко сосчитать, так как неважно, каким по счету произошло событие, первым, последним или в каком порядке среди попыток оно происходило, и аналогично для вариантов, когда событие не происходило в попытке. Значит, с использованием перестановок порядка событий найдем, что в общем числе перестановок попыток $N!$ есть $n!$ вариантов с событием и $(N - n)!$ вариантов без события, так что искомая вероятность равна числу перестановок порядка реализации события, умноженному на вероятность того, что A выпало первые n раз, p^n , и на вероятность того, что в остальные $(N - n)$ раз событие не выпало, q^{N-n} , так что

$$w_n = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} = C_N^n p^n q^{N-n}, \quad (\text{A.2})$$

где для полноты описания мы принимаем $0! = 1$.

Специально подчеркнем физический смысл вероятности w_n , а именно, важность статистического ансамбля. Если один студент проведет N испытаний и обнаружит в них n_1 событий заданного типа A , то никакого распределения вероятностей согласно факт такой выборки не возникнет. Если же все студенты на Земле независимо друг от друга проведут подобные N испытаний и обнаружат в них каждый свое значение n' событий заданного типа A , то для этого статистического ансамбля можно вычислить распределение частот \tilde{w}_n , которое, как мы полагаем, окажется идентично по своим значениям распределению по формуле (A.2), так как общее число студентов настолько велико, что частоты достигают своего вероятностного предела.

Если найти сумму вероятностей того, что в выборке событие появилось любое число раз, то мы ожидаем, что эта сумма отвечает доле событий, в которых произошло все, что возможно, и она равна единице,

$$\sum_{n=0}^N w_n = \sum_{n=0}^N C_N^n p^n q^{N-n} = (p+q)^N = (p+(1-p))^N = 1^N \equiv 1. \quad (\text{A.3})$$

Таким образом, определенная нами случайная величина, принимающая значение n в конечной выборке с числом повторений N , имеет распределение вероятностей (A.2), которое называется биномиальным по факту разложения единицы в бином Ньютона

$$1^N = (p+q)^N = \sum_{n=0}^N w_n.$$

На рис. A.2 мы показали пример биномиального распределения.

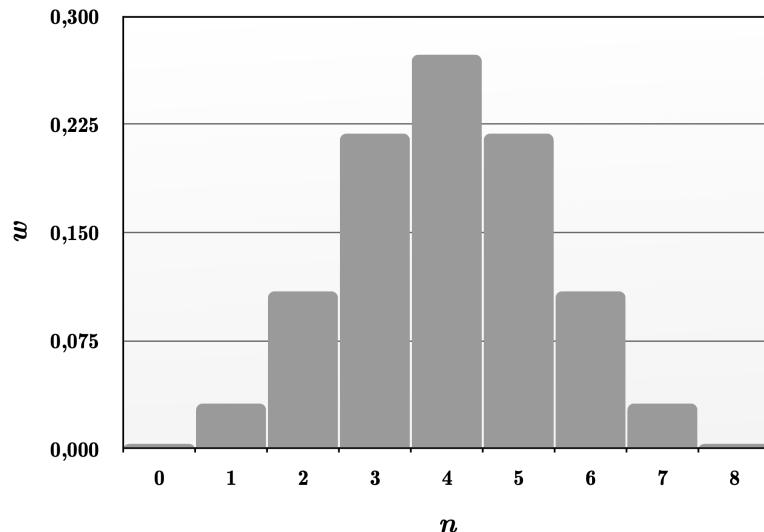


Рис. А.2: Биномиальное распределение вероятностей наблюдать событие n раз для выборки с числом повторений $N = 8$ при вероятности события $p = 0.5$.

1A.2 Усреднение

Среднее значение случайной величины определяется через подсчет того, как часто появляется событие с определенным n , т. е.

$$\langle n \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^N n w_n. \quad (\text{A.4})$$

Среднее значение $\langle n \rangle$ как бы выносится из под знака суммы, после чего учитывается то, что сумма вероятностей всех возможных значений равна единице:

$$\sum_{n=0}^N n w_n = \langle n \rangle \sum_{n=0}^N w_n = \langle n \rangle.$$

Такое среднее значение называют также математическим ожиданием и обозначают символом

$$En \equiv \langle n \rangle,$$

где буква Е является аббревиатурой от expectation (E, ожидание), которое отличают от всевозможных ожиданий с помощью эпитета «математическое».

Для величины n с биномиальным распределением вероятностей проведем расчет, где сначала заметим, что $n = 0$ дает нулевой вклад в среднее, и перейдем к суммированию от $n = 1$, затем введем обозначение $n' = n - 1$, так

что

$$\begin{aligned}
 \langle n \rangle &= \sum_{n=0}^N n \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} = \sum_{n=0}^N \frac{n}{n!} \frac{N!}{(N-n)!} p p^{n-1} q^{N-n} = \\
 &= p \sum_{n=1}^N \frac{N!}{(n-1)!(N-n)!} p^{n-1} q^{N-n} = \\
 &= p \sum_{n=1}^N \frac{N(N-1)!}{(n-1)!((N-1)-(n-1))!} p^{n-1} q^{(N-1)-(n-1)} = \\
 &= pN \sum_{n'=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(n')!((N-1)-n')!} p^{n'} q^{(N-1)-n'} = pN(p+q)^{N-1} = pN.
 \end{aligned}$$

В итоге получим

$$\langle n \rangle = pN. \quad (\text{A.5})$$

Подчеркнем, что данное нами определение вероятности теперь находит свое подтверждение, так как расчетная частота событий A в выборке N в среднем равна вероятности события, в том числе в случае, когда число событий в выборке стремится к бесконечности, т. е. при $N \rightarrow \infty$

$$\frac{\langle n \rangle}{N} = p.$$

Можно определить новую случайную величину δn_1 как отклонение числа событий в выборке от среднего числа событий, т. е. линейное отклонение от среднего

$$\delta n_1 = n - \langle n \rangle, \quad -\langle n \rangle \leq \delta n_1 \leq N - \langle n \rangle. \quad (\text{A.6})$$

Среднее линейного отклонения равно нулю,

$$\langle \delta n_1 \rangle = \sum_{n=0}^N \delta n_1 w_n = \sum_{n=0}^N n w_n - \langle n \rangle \sum_{n=0}^N w_n = \langle n \rangle - \langle n \rangle = 0.$$

По аналогии с отклонением от среднего рассматривают одноточечный коррелятор — отклонение случайной величины от точки n_1 ,

$$\langle n - n_1 \rangle = \langle n \rangle - n_1. \quad (\text{A.7})$$

По той же схеме вводят двухточечный коррелятор

$$\begin{aligned}
 D_{12} &\stackrel{\text{def}}{=} \langle (n - n_1)(n - n_2) \rangle = \langle (n^2 - n(n_1 + n_2) + n_1 n_2) \rangle = \\
 &= \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle (n_1 + n_2) + n_1 n_2. \quad (\text{A.8})
 \end{aligned}$$

В частности, при $n_1 = n_2 = \langle n \rangle$ двухточечный коррелятор — это среднеквадратичное отклонение от среднего значения, которое называют дисперсией случайной величины

$$D(n) \stackrel{\text{def}}{=} \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 \quad (\text{A.9})$$

и часто обозначают как

$$\sigma^2 = (\delta n_1)^2 = D(n). \quad (\text{A.10})$$

В русскоязычной литературе по теории вероятностей принято обозначение $Dn \equiv D(n)$, а в англоязычной — $Vn \equiv D(n)$, как следствие сокращения variance (V , отклонение).

Вычислим дисперсию для случайной величины с биномиальным распределением. Для среднего значения квадрата сначала заметим, что $n = 0$ дает нулевой вклад в среднее, и перейдем к суммированию от $n = 1$, затем введем обозначение $n' = n - 2$ и найдем

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle &= \sum_{n=0}^N n^2 \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} = \sum_{n=1}^N (n-1+1) \frac{N!}{(n-1)!(N-n)!} p^n q^{N-n} = \\ &= \sum_{n=2}^N \frac{N!}{(n-2)!(N-n)!} p^n q^{N-n} + \sum_{n=1}^N \frac{N!}{(n-1)!(N-n)!} p^n q^{N-n} = \\ &= p^2 N(N-1) \left(\sum_{n'=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(n')!((N-2)-n')!} p^{n'} q^{(N-2)-n'} \right) + Np = \\ &= p^2 N^2 + Np(1-p) = \langle n \rangle^2 + Npq. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Значит, дисперсия случайной величины с биномиальным распределением согласно определению (A.9) и расчету среднего квадрата числа событий (A.11) равна

$$\sigma^2 = Npq. \quad (\text{A.12})$$

Для полноты изложения дадим определение k -точечного коррелятора

$$D_{1\dots k} \stackrel{\text{def}}{=} \langle (n - n_1) \cdots (n - n_k) \rangle. \quad (\text{A.13})$$

2А Распределение Пуассона

Вывод распределения Пуассона, «золотой предел», экспонента и натуральный логарифм, ряд Тейлора, дисперсия случайной дискретной величины.

Зафиксируем среднее значение $\langle n \rangle$ случайной величины n и перейдем к пределу при числе попыток, стремящемся к бесконечности, $N \rightarrow \infty$. Тогда область изменения случайной величины $0 \leq n \leq N$ станет равной

$$0 \leq n \leq +\infty,$$

а вероятность найти ровно n событий во всех попытках при подстановке⁵

$$p = \frac{\langle n \rangle}{N}$$

⁵При фиксированном среднем значении $\langle n \rangle$ при разных N вероятность p принимает разные значения, так что при изменении числа попыток N формально нужно говорить о переходе от одной биномиально распределенной случайной величины к другой, что, впрочем, очевидно.

примет значение

$$\begin{aligned}
 w_n(\langle n \rangle) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \Big|_{p=\frac{\langle n \rangle}{N}} = \\
 &= \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{(N-n)!} \frac{1}{N^n} \left(1 - \frac{\langle n \rangle}{N}\right)^{N-n} = \\
 &= \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(N-1) \cdots (N-n+1)}{N^n} \right\} \times \\
 &\quad \times \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\langle n \rangle}{N}\right)^{-n} \right\} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\langle n \rangle}{N}\right)^N \right\} = \\
 &= \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdots \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) \right\} \cdot 1 \cdot \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\langle n \rangle}{N}\right)^N \right\} = \\
 &= \frac{\langle n \rangle^n}{n!} \cdot 1 \cdots 1 \cdot \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\langle n \rangle}{N}\right)^N \right\}. \quad (\text{A.14})
 \end{aligned}$$

Следовательно, для вычисления вероятности события $w_n(\langle n \rangle)$ в бесконечной выборке необходимо вычислить «золотой предел»

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\langle n \rangle}{N}\right)^N = e^{-\langle n \rangle}, \quad (\text{A.15})$$

т. е. фактически ввести основание степени «е».

§а Экспонента и натуральный логарифм

Рассмотрим последовательность

$$a_N = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{9}{4}, \quad a_3 = \frac{64}{27}, \dots \quad (\text{A.16})$$

и вычислим ее предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_N.$$

Для этого покажем сначала, что члены последовательности монотонно растут, а потом, что последовательность ограничена сверху, а значит, предел последовательности существует.

Воспользуемся биномом Ньютона и запишем

$$a_N = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = \sum_{n=0}^N C_N^n \left(\frac{1}{N}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} \frac{1}{N^n}.$$

Поскольку первые три члена последовательности (A.16), известные в явном виде, монотонно растут рассмотрим $N \geq 3$ и выделим последний член в би-

номе,

$$\begin{aligned}
 a_N &= 1 + 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n!} \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N^n} = \\
 &= 1 + 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) = \\
 &= 1 + 1 + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) + \frac{1}{N^N}. \quad (\text{A.17})
 \end{aligned}$$

Но поскольку при замене знаменателя положительной дроби N на $N-1$ дробь увеличивается,

$$\left(1 - \frac{1}{N}\right) > \left(1 - \frac{1}{N-1}\right), \quad \dots \quad \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) > \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right),$$

из соотношения (A.17) заключаем, что

$$\begin{aligned}
 a_N &= 2 + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) + \frac{1}{N^N} > \\
 &> 2 + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{N-1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) + 0.
 \end{aligned}$$

А так как

$$a_{N-1} = 2 + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{N-1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right),$$

находим

$$a_N > a_{N-1}, \quad (\text{A.18})$$

и последовательность действительно монотонно возрастает.

При $n \geq 1$ имеем

$$n! \geq 2^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}},$$

и тогда из соотношения (A.17) находим

$$\begin{aligned}
 a_N &= 1 + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{N}\right) < \\
 &< 1 + \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}. \quad (\text{A.19})
 \end{aligned}$$

Сумма $S_N = \sum_{n=0}^N b_n$ членов геометрической прогрессии $b_n = b_0 q^n$, $n \geq 0$, с показателем $0 < q < 1$, равна

$$S_N = b_0 \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q},$$

откуда следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\right) = 2,$$

Из неравенства (A.19) следует, что последовательность ограничена сверху

$$a_N < 3. \quad (\text{A.20})$$

Поэтому монотонно растущая последовательность, ограниченная сверху, сходится и имеет предел⁶, который обозначают числом «e»

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = e. \quad (\text{A.21})$$

Выведем теперь простейшие свойства.

Справедливо равенство для следующего предела⁷:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N &= \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^{\frac{N}{x}}\right)^x = \\ &= \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{M}\right)^M\right)^x = e^x. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Производная экспоненциальной функции равна

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^x &= \frac{d}{dx} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} \left(1 + \frac{x}{N}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{N}\right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^{N-1} \cdot N \cdot \frac{d}{dx} \left(1 + \frac{x}{N}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^{N-1} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N\right)^{1-\frac{1}{N}} = e^x. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Мы установили, что производная экспоненты равна самой экспоненте!

⁶Критерий Вейерштрасса: у ограниченного сверху множества $A = \{a_N\}$ есть супремум, т. е. точная верхняя грань $a = \sup(A)$ такая, что $\forall a_N \in A$ верно $a_N \leq a$ и $\forall \epsilon > 0 \exists a_k \in A: a_k > a - \epsilon$. Для ограниченной сверху монотонно растущей последовательности супремум равен пределу.

⁷Любое конечное вещественное число можно ограничить сверху и снизу рациональными числами, а для рациональных чисел предел вычисляется с помощью элементарных замен переменных.

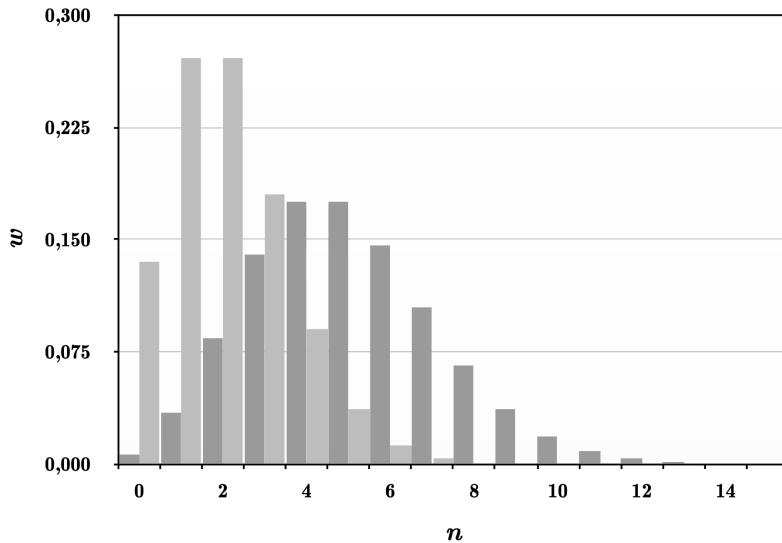


Рис. A.3: Пуассоновское распределение вероятностей наблюдать событие n раз при среднем $\langle n \rangle = 5$ (темно-серая столбчатая диаграмма) и $\langle n \rangle = 2$ (светло-серая диаграмма).

Обратная функция называется натуральным логарифмом

$$\ln x : \quad e^{\ln x} = x. \quad (\text{A.24})$$

Поэтому

$$a = e^{\ln a},$$

и показательная функция имеет вид

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Итак, мы провели вычисления «золотого предела»

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\langle n \rangle}{N} \right)^N = e^{-\langle n \rangle}, \quad (\text{A.15})$$

что позволяет нам продолжить рассмотрение для вероятности наблюдать n событий для случайной дискретной величины с заданным средним значением (A.14). Эти вероятности образуют распределение Пуассона,

$$w_n(\langle n \rangle) = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}. \quad (\text{A.25})$$

На рис. A.3 мы показали два примера распределения по Пуассону.

Для того чтобы убедиться в том, что и сумма предельных значений w_n при $N \rightarrow \infty$ равна единице, так же как для конечной выборки, необходимо вычислить сумму бесконечного ряда, что легко сделать, если использовать знание ряда Тейлора для экспоненты.

§b Ряд Тейлора

Запишем формулу Ньютона–Лейбница⁸

$$\int_a^x d\tilde{x} \frac{df(\tilde{x})}{d\tilde{x}} = f(x) - f(a), \quad (\text{A.26})$$

или, если опустить знак тильды у переменной под интегралом,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x dx \frac{df(x)}{dx}. \quad (\text{A.27})$$

Связь (A.27) в случае, когда $x \rightarrow a$, рассмотрим как схему последовательных итераций для вычисления приближенного значения функции. На нулевом шаге итераций

$$f(x) \approx f_{(0)}(x) = f(a).$$

На первом шаге учтем, что производная функции $f'(x) \approx f'(a)$, так что из формулы Ньютона–Лейбница следует соотношение

$$f(x) \approx f_{(1)}(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

На втором шаге итерации используем формулу Ньютона–Лейбница для производной функции

$$f'(x) = f'(a) + \int_a^x dx f''(x)$$

и учтем, что $f''(x) \approx f''(a)$, так что

$$f'(x) \approx f'(a) + f''(a)(x - a),$$

⁸Напомним, что по определению производной функции в пределе при $dx \rightarrow 0$ имеем

$$f(x + dx) - f(x) = \frac{df(x)}{dx} dx.$$

Разобьем отрезок $[a; x]$ точками x_k так, чтобы первая и последняя точки совпадали с концами отрезка: $x_1 = a$, $x_N = x$, а интервалы обозначим $dx_k = x_{k+1} - x_k$, и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{N-1} \{f(x_k + dx_k) - f(x_k)\} = f(x) - f(a),$$

а затем рассмотрим предел при $N \rightarrow \infty$, $dx_k \rightarrow 0$. Тогда в левой части формулы для суммы воспользуемся определением производной

$$f(x_k + dx_k) - f(x_k) = \frac{df(x_k)}{dx} dx_k,$$

и получим

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ dx_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{df(x_k)}{dx} dx_k = \int_a^x d\tilde{x} \frac{df(\tilde{x})}{d\tilde{x}}$$

в точном соответствии с определением определенного интеграла в формулировке Римана. В итоге придем к формуле Ньютона–Лейбница.

и подставляя это выражение для функции $f(x)$ в формулу Ньютона–Лейбница (A.27), получим приближенное значение на втором шаге итерационной процедуры

$$f(x) \approx f_{(2)}(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x - a)^2.$$

Ясно, что на n -м шаге итерации необходимо использовать цепочку

$$f^{(n)}(x) \approx f^{(n)}(a), \quad f^{(n-1)}(x) \approx f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)(x - a), \dots$$

В итоге приближенная оценка для значения функции для n -й итерации примет вид

$$f(x) \approx f_{(n)}(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) (x - a)^k.$$

В математике последовательность из n -х итераций значения функции $f_{(n)}(x)$ рассматривается на предмет сходимости. В случае, когда последовательность сходится в некоторой области возле a , говорят о разложении функции в ряд Тейлора в этой области сходимости,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (x - a)^n. \quad (\text{A.28})$$

В качестве примера запишем очевидное разложение экспоненты в ряд Тейлора возле $a = 0$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad (\text{A.29})$$

так как производные функции $f(x) = e^x$ равны

$$f^{(1)}(x) = \frac{d}{dx} e^x = e^x, \quad f^{(n)}(x) = e^x,$$

а $f(0) = e^x|_{x=0} = 1$.

Для натурального логарифма $f(x) = \ln x$ как обратной функции экспоненты $e^{\ln x} = x$ вычисление производной приводит к равенствам

$$\frac{d}{dx} e^{f(x)} = \frac{d}{dx} x \Rightarrow e^{f(x)} \frac{d}{dx} f(x) = 1 \Rightarrow x \frac{d}{dx} \ln x = 1,$$

а значит,

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}, \quad f^{(1)}(x) = \frac{1}{x}.$$

Отсюда с помощью дальнейшего дифференцирования получаем

$$f^{(2)} = -\frac{1}{x^2}, \quad f^{(3)} = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)} = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}, \quad \dots, \quad f^{(n+1)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Поэтому разложение натурального логарифма в ряд Тейлора возле точки $a = 1$, где $\ln 1 = 0$, записывается в виде

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (x - 1)^n,$$

что обычно приводят в несколько иной форме после подстановки $x \mapsto y + 1$

$$\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} y^n. \quad (\text{A.30})$$

В частности, для первых двух вкладов имеем

$$\ln(1+y) = y - \frac{1}{2} y^2 + \dots \quad (\text{A.31})$$

§c Дисперсия по Пуассону

Суммирование вероятностей распределения по Пуассону благодаря знанию ряда Тейлора для экспоненты (A.29) элементарно приводит к равенству

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(\langle n \rangle) = e^{-\langle n \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^n}{n!} = e^{-\langle n \rangle} e^{\langle n \rangle} = 1. \quad (\text{A.32})$$

Убедимся теперь, что и среднее значение

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n w_n(\langle n \rangle) = e^{-\langle n \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\langle n \rangle^n}{n!} = e^{-\langle n \rangle} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^n}{(n-1)!} = \\ &= e^{-\langle n \rangle} \langle n \rangle \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^{n'}}{(n')!} = \langle n \rangle e^{-\langle n \rangle} e^{\langle n \rangle} = \langle n \rangle. \end{aligned}$$

Наконец, для расчета дисперсии найдем

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 w_n(\langle n \rangle) = e^{-\langle n \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{\langle n \rangle^n}{n!} = e^{-\langle n \rangle} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1+1)\langle n \rangle^n}{(n-1)!} = \\ &= e^{-\langle n \rangle} (\langle n \rangle^2 + \langle n \rangle) \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^{n'}}{(n')!} = \langle n \rangle^2 + \langle n \rangle. \quad (\text{A.33}) \end{aligned}$$

Значит, дисперсия равна

$$\sigma^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle, \quad (\text{A.34})$$

т. е. среднеквадратичное отклонение от среднего значения задается равенством

$$\sigma = \sqrt{\langle n \rangle}. \quad (\text{A.35})$$

На рис. A.3 можно визуально оценить разность дисперсий в распределении Пуассона при двух значениях среднего.

Распределение вероятности по Пуассону встречается в физике, например, как распределение вероятности наблюдать в случайному процессе n квантов, если известно что система характеризуется заданным средним числом квантов. Этим же распределением Пуассона описываются когерентные состояния

гармонического осциллятора и когерентные состояния квантованного электромагнитного поля — лучи лазера⁹. В эксперименте случайные флуктуации числа отсчетов события прибором также распределены по Пуассону.

Подчеркнем, что распределение вероятности по Пуассону имеет одну независимую характеристику — среднее значение числа событий, а все остальные полиномиальные отклонения от среднего, как, например, дисперсия, выражаются через это среднее. Эта особенность распределения Пуассона с одной стороны является универсальной в том смысле, что распределение вероятности по Пуассону описывает вероятности для случайной дискретной величины, область возможных значений которой охватывает все натуральные числа, и на которую по условию реализации не наложены специальные условия или ограничения, включая взаимно однозначные отображения случайной пуссоновской величины на зависимую случайную величину с той же натуральной областью значений. С другой стороны, не все величины являются дискретными, например, случайная величина может иметь значения, непрерывно распределенные на вещественном интервале от $-\infty$ до $+\infty$, так что необходимо рассмотреть другое распределение вероятностей, построенное в виде плотности вероятности для непрерывной величины. Среди распределения вероятности для непрерывной величины особую роль играет нормальное распределение или распределение по Гауссу. Распределение плотности вероятности по Гауссу имеет две независимые характеристики — среднее и дисперсию, а остальные многоточечные корреляторы выражаются через них. Рассмотрим этот вопрос более детально.

(A.II) Теория вероятностей: от дискретного к непрерывному

3А Непрерывная случайная величина

Переход от дискретной случайной величины к непрерывной, условие нулевого среднего и единичной дисперсии, вывод асимптотической формулы Стирлинга для факториала бесконечно большого числа, интегральное представление факториала и гамма-функция, метод экстремальной точки для вычисления асимптотики интеграла, гауссов интеграл в полярных координатах, предел нормального распределения, вероятности отклонения от среднего на 1-, 2- и 3-сигма, критерий в 5-сигма, распределение случайной величины по Гауссу.

Определим случайную величину

$$x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n - \langle n \rangle}{\sigma}, \quad \langle n \rangle = Np, \quad \sigma^2 = Npq, \quad (\text{A.36})$$

⁹В лазере, выходная мощность которого стабильна, фиксировано среднее число квантов одной частоты в единицу времени. Это значит, что в единицу времени в активной среде лазера, где происходит вынужденная генерация квантов, вероятность вынужденного излучения одного кванта задается величиной $p = \langle n \rangle/N$, где N — это максимально возможное число квантов, которое может быть получено при вынужденном излучении активной среды под воздействием самого лазерного пучка. Величина N рассчитывается по отношению длины, которую проходит лазерный луч в среде за единицу времени, к длине рассеяния, выраженной через сечение рассеяния фотона на атомах активной среды и концентрацию этих атомов. Следовательно для распределения по числу квантов в лазерном пучке возникает биномиальное распределение, которое при $N \rightarrow \infty$ переходит в распределение по Пуассону с заданным значением $\langle n \rangle$.

так что при биномиальном распределении для n величина x по построению имеет среднее, равное нулю, и дисперсию, равную единице: $\langle x \rangle = 0$, $\sigma^2(x) = 1$. Область изменения x при конечной выборке —

$$-p \cdot \sqrt{\frac{N}{pq}} \leq x \leq q \cdot \sqrt{\frac{N}{pq}}. \quad (\text{A.37})$$

Шаг между соседними значениями для случайной величины n , равный $\Delta n = 1$, преобразуется в шаг между соседними величинами x

$$\Delta x = \frac{\Delta n}{\sqrt{Npq}} \Rightarrow \frac{\Delta n}{\Delta x} = \sqrt{Npq},$$

так что в пределе для бесконечной выборки ($N \rightarrow \infty$) при $\Delta n = 1$ получается бесконечно малый интервал

$$dx = \frac{1}{\sqrt{Npq}} \rightarrow 0. \quad (\text{A.38})$$

Рассмотрим теперь предел при $N \rightarrow \infty$ для вероятности

$$dp = w_n \Delta n = w(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}, \quad (\text{A.39})$$

откуда получаем, что плотность вероятности случайной величины

$$w(x) = \frac{dp}{dx}$$

с учетом выражения для dx в формуле (A.38) задается следующим пределом:

$$w(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} w_n \frac{\Delta n}{\Delta x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \sqrt{Npq}, \quad (\text{A.40})$$

где по построению

$$n = Np + x\sqrt{Npq}, \quad N - n = N(1 - p) - x\sqrt{Npq} = Nq - x\sqrt{Npq}. \quad (\text{A.41})$$

Поэтому для вычисления плотности вероятности случайной величины x , необходимо получить формулу для факториала при асимптотически больших значениях аргумента.

§а Гауссов интеграл и формула Стирлинга

Интегральное представление для факториала

$$N! = \int_0^\infty e^{-t} t^N dt \quad (\text{A.42})$$

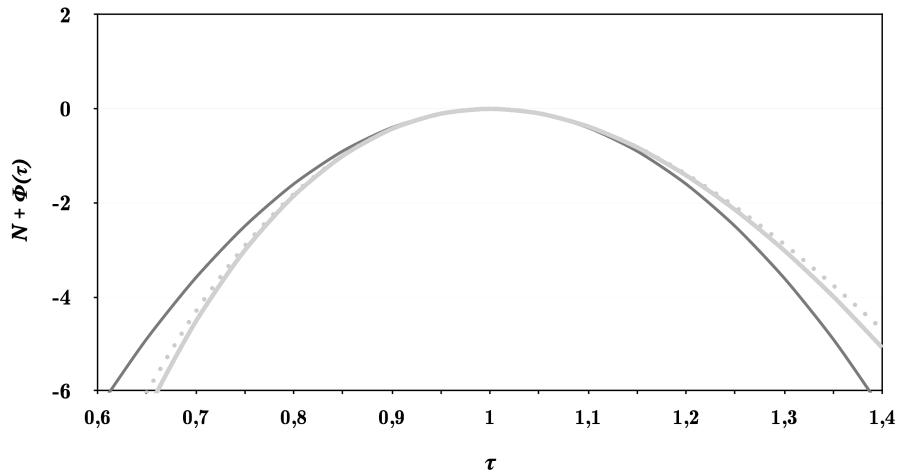


Рис. A.4: График функции $N + \Phi(\tau)$ при $N = 80$ (светлосерая линия) и ее аппроксимации — до второго порядка (темносерая линия) и кубического (пунктир).

выводится путем многократного интегрирования по частям, а именно, на первом шаге

$$\int_0^\infty e^{-t} t^N dt = - \int_0^\infty t^N de^{-t} = - \int_0^\infty d(e^{-t} t^N) + N \int_0^\infty e^{-t} t^{N-1} dt = N \int_0^\infty e^{-t} t^{N-1} dt,$$

так что на последнем $(N - 1)$ -м шаге остается интеграл

$$N(N - 1) \cdots 2 \cdot 1 \int_0^\infty e^{-t} dt = N!$$

Если N принимает не только натуральные значения, то интеграл определяет гамма-функцию

$$\Gamma(N + 1) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-t} t^N dt. \quad (\text{A.43})$$

В частности $\Gamma(1) = 0! = 1$. Важное свойство гамма-функции:

$$\Gamma(N + 1) = N \cdot \Gamma(N). \quad (\text{A.44})$$

Теперь в интеграле (A.42) произведем замену переменной интегрирования

$$t = \tau N,$$

а значит,

$$\begin{aligned} N! &= \int_0^\infty e^{-t+N \ln t} dt = \int_0^\infty e^{-N\tau+N \ln N+N \ln \tau} N d\tau = \\ &= N \cdot N^N \int_0^\infty e^{-N\tau+N \ln \tau} d\tau = N \cdot N^N \int_0^\infty e^{\Phi(\tau)} d\tau, \end{aligned}$$

где показатель экспоненты $\Phi(\tau)$ имеет вид

$$\Phi(\tau) = -N\tau + N \ln \tau,$$

так что

$$\Phi' = -N + \frac{N}{\tau}, \quad \Phi'' = -\frac{N}{\tau^2}, \quad \Phi''' = +\frac{2N}{\tau^3}.$$

Первая производная показывает, что при $\tau = 1$ функция $\Phi(\tau)$ имеет экстремум, а так как вторая производная всюду отрицательна, этот экстремум — глобальный максимум. Более того, при $\tau > 1$ функция $\Phi(\tau)$ монотонно убывает, а при $0 < \tau < 1$ она монотонно растет. Поэтому раскладывая функцию $\Phi(\tau)$ в ряд Тейлора до членов второго порядка малости возле точки экстремума $\tau = 1$, где $\Phi'(1) = 0$, получим

$$\Phi \approx -N - \frac{1}{2!} N(\tau - 1)^2,$$

и, следовательно, подынтегральная функция ведет себя весьма специфически

$$e^{\Phi(\tau)} \approx e^{-N} e^{-\frac{1}{2!} N(\tau - 1)^2},$$

а значит, при $N \rightarrow \infty$ аргумент второй экспоненты — это гигантское по абсолютной величине отрицательное число, стоит только удалиться от экстремальной точки на бесконечно малое расстояние, например $(\tau - 1)^2 \sim N^{-3/4} \rightarrow 0$. Поэтому мы можем без ущерба точности вычисления положить нижний предел равным $-\infty$ вместо 0 и пренебречь вкладами от третьей производной возле точки экстремума,

$$e^{\frac{1}{3!} 2N(\tau - 1)^3} \approx 1,$$

так как отличие от единицы возникает в той области переменной интегрирования, где подынтегральное выражение сильно подавлено экспонентой с квадратичным вкладом в аргументе экспоненты. Для иллюстрации мы показали поведение функции $N + \Phi(\tau)$ при $N = 80$ на рис. А.4, где видно, что область вблизи экстремума при конечном значении N довольно точно аппроксимируется квадратичным вкладом.

Прием, когда в аргументе экспоненты под знаком определенного интеграла выделяется стационарная точка по переменной интегрирования, т. е. точка, в которой производная аргумента равна нулю, а затем аргумент экспоненты раскладывается в ряд Тейлора возле стационарной точки с точностью до квадратичных членов по переменной интегрирования, называется методом перевала для приближенного вычисления значения определенного интеграла.

Термин «перевал» введен из-за формы подынтегральной функции, когда вещественный аргумент x заменяется на комплекснозначный $z = x + iy$, так что, например,

$$\exp(-x^2) \mapsto |\exp(-z^2)| = \exp(-x^2 + y^2).$$

Тогда абсолютная величина экспоненты принимает вид перевала, который проходит по вещественной оси между высоких гор, вздывающих вдоль мнимой оси, как это показано на рис. A.5.

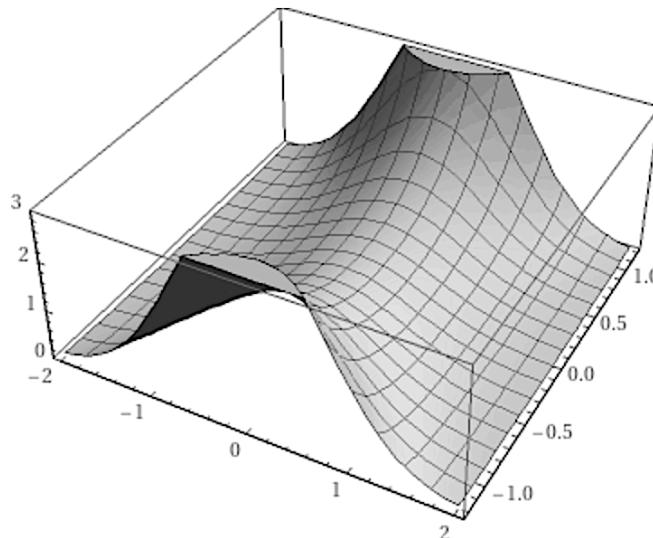


Рис. A.5: Горный перевал возле контура интегрирования вдоль вещественной оси x .

В случае факториала $N!$ мы используем метод перевала для вычисления предела при больших значениях $N \rightarrow \infty$. Итак,

$$N! \approx N \cdot N^N e^{-N} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}N(\tau-1)^2} d\tau.$$

Такой определенный интеграл от экспоненты, в аргументе которой стоит отрицательно определенная квадратичная функция переменной интегрирования, т. е. функция, графиком которой является парабола, обращенная своими ветвями вниз, называется гауссовым. Этот интеграл часто возникает в физике. Более того, метод выделения полного квадрата по переменной интегрирования в аргументе экспоненты — стандартный способ вычисления интегралов для многих физически значимых величин.

• Гауссов интеграл

Гауссов интеграл вычисляется следующим образом: представим положительно определенный интеграл как корень из произведения одинаковых интегра-

лов,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}N\tau^2} d\tau = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}N\tau^2} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}N\bar{\tau}^2} d\bar{\tau} \right)^{1/2}.$$

На плоскости $(\tau, \bar{\tau})$ можно перейти от интегрирования в декартовых координатах (по площади бесконечно малых квадратиков) к интегрированию в полярных координатах (по бесконечно малым элементам диска, площадь которых задается произведением длины бесконечно малой дуги на бесконечно малое расстояние между дугами),

$$r^2 = \tau^2 + \bar{\tau}^2, \quad \tau = r \cos \phi, \quad \bar{\tau} = r \sin \phi,$$

так что¹⁰

$$d\tau d\bar{\tau} \mapsto r d\phi \cdot dr = \frac{1}{2} d\phi dr^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}N\tau^2} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}N\bar{\tau}^2} d\bar{\tau} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \frac{1}{2} dr^2 e^{-\frac{1}{2}Nr^2} = \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} d\left(\frac{1}{2}Nr^2\right) e^{-\frac{1}{2}Nr^2} \frac{1}{N} = \frac{2\pi}{N}. \end{aligned}$$

• Формула Стирлинга

В итоге получаем формулу Стирлинга для факториала больших чисел

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} e^{N \ln N - N}. \quad (\text{A.45})$$

3А.1 Нормальное распределение

В пределе при $N \rightarrow \infty$ границы изменения случайной величины (A.37) определяют область

$$-\infty \leq x \leq +\infty. \quad (\text{A.46})$$

Для вычисления предела (A.40)

$$w(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \sqrt{Npq}$$

запишем

$$p^n q^{N-n} = e^{n \ln p + (N-n) \ln q} \quad (\text{A.47})$$

¹⁰Элемент площади в полярных координатах — это площадь сектора круга, ограниченного дугой $r d\phi$ и изменением радиуса от r до $r + dr$.

и воспользуемся формулой Стирлинга для факториалов (A.45)

$$\begin{aligned} \frac{N!}{n!(N-n)!} \sqrt{Npq} &\approx \frac{\sqrt{Npq}\sqrt{2\pi N}}{\sqrt{2\pi n}\sqrt{2\pi(N-n)}} \times \\ &\times \exp\{N \ln N - N - n \ln n + n - (N-n) \ln(N-n) + N - n\} \approx \\ &\approx \frac{\sqrt{Npq}\sqrt{2\pi N}}{\sqrt{2\pi Np}\sqrt{2\pi Nq}} \exp\{N \ln N - n \ln n - (N-n) \ln(N-n)\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{N \ln N - n \ln n - (N-n) \ln(N-n)\}, \quad (\text{A.48}) \end{aligned}$$

где под корнем мы уже учли, что согласно (A.41)

$$n = Np + x\sqrt{Npq} \rightarrow Np, \quad N - n = Nq - x\sqrt{Npq} \rightarrow Nq.$$

Собирая вклады (A.47) и (A.48) для аргумента экспоненты, в пределе при $N \rightarrow \infty$ найдем

$$\begin{aligned} n \ln p + (N-n) \ln q + N \ln N - n \ln n - (N-n) \ln(N-n) &= \\ &= \left(Np + x\sqrt{Npq} \right) \ln p + \left(Nq - x\sqrt{Npq} \right) \ln q + N \ln N - \\ &\quad - \left(Np + x\sqrt{Npq} \right) \ln \left(Np + x\sqrt{Npq} \right) - \\ &\quad - \left(Nq - x\sqrt{Npq} \right) \ln \left(Nq - x\sqrt{Npq} \right) = \\ &= - \left(Np + x\sqrt{Npq} \right) \ln \left(1 + x \frac{\sqrt{Npq}}{Np} \right) - \\ &\quad - \left(Nq - x\sqrt{Npq} \right) \ln \left(1 - x \frac{\sqrt{Npq}}{Nq} \right). \quad (\text{A.49}) \end{aligned}$$

Далее необходимо воспользоваться разложением в ряд Тейлора логарифмической функции вплоть до второго порядка малости (см. формулу (A.31)):

$$\ln(1+y) \approx y - \frac{1}{2}y^2.$$

Тогда соотношение (A.49) примет вид

$$\begin{aligned} &- \left(Np + x\sqrt{Npq} \right) \left(x \frac{\sqrt{Npq}}{Np} - \frac{1}{2}x^2 \frac{q}{Np} \right) - \\ &- \left(Nq - x\sqrt{Npq} \right) \left(-x \frac{\sqrt{Npq}}{Nq} - \frac{1}{2}x^2 \frac{p}{Nq} \right) \approx \\ &\approx x \left(-\sqrt{Npq} + \sqrt{Npq} \right) - x^2 \left(q + p - \frac{1}{2}(q+p) \right) = -\frac{1}{2}x^2. \quad (\text{A.50}) \end{aligned}$$

Это простое выражение (A.50) остается в аргументе экспоненты при вычислении предела при $N \rightarrow \infty$ в формулах (A.40) и (A.48). В итоге мы получили

так называемое стандартное нормальное распределение случайной величины, а именно, плотность вероятности

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}. \quad (\text{A.51})$$

Читатель, уже знакомый с вычислением гауссова интеграла, может легко сам убедиться, что стандартное нормальное распределение отнормировано на единицу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)dx = 1.$$

Эпитет «стандартное» у нормального распределения означает, что согласно проведенному построению среднее значение случайной величины равно нулю и дисперсия равна единице. Эпитет «нормальное» означает специальную функциональную форму плотности вероятности для случайной величины, введенной для событий, которые описываются в терминах вероятности «свершилось» – «не свершилось» или, что то же, «успех» – «неудача» при многократном повторении попыток без каких-либо ограничений и условий при переходе от числа событий к непрерывному пределу при заданном безразмерном значении дисперсии. Именно, в таком смысле имеет смысл говорить о «норме» для непрерывной случайной величины, что также принято в математике называть гауссовым типом случайной величины. Однако в физике, где величины имеют размерность отдаётся предпочтение термину «распределение плотности вероятности по Гауссу», а под нормальным обычно подразумевают стандартное нормальное распределение плотности вероятности для безразмерной гауссовой величины с нулевым средним значением и единичной дисперсией.

Ясно, что переход от безразмерной случайной величины x со стандартным нормальным распределением к размерной случайной величине y со средним $\langle y \rangle$, которое может быть отличным от нуля, и среднеквадратичным отклонением σ , которое может быть отлично от единицы, описывается заменой

$$x = \frac{y - \langle y \rangle}{\sigma}, \quad dx = \frac{1}{\sigma} dy. \quad (\text{A.52})$$

Тогда плотность вероятности имеет вид

$$w(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y - \langle y \rangle)^2}{\sigma^2}\right). \quad (\text{A.53})$$

Полезно знать численные значения вероятностей того, что случайная величина находится в пределах интервалов, заданных к терминах среднеквадратичного отклонения от среднего значения, и вычислить эти вероятности с помощью плотности вероятности для безразмерной величины стандартного нормального распределения. Эти значения широко используется в статистике. Вероятность отклонения в интервале «один сигма» обозначают как 1σ :

$$\int_{-1}^{+1} w(x)dx \approx 0.682, \quad (\text{A.54})$$

«два сигма» — 2σ :

$$\int_{-2}^{+2} w(x)dx \approx 0.954, \quad (\text{A.55})$$

«три сигма» — 3σ :

$$\int_{-3}^{+3} w(x)dx \approx 0.997. \quad (\text{A.56})$$

Гауссова случайная величина находится за пределами 5σ с вероятностью $5.7 \cdot 10^{-7}$. В физике отклонение величины за пределы 5σ принято считать порогом точного утверждения о том, что величина не описывается априорной моделью с гауссовым распределением. Говорят, что 5σ — критерий общепризнанного открытия, например. Величина в 5σ была принята из эмпирического опыта: даже утверждения, которые были установлены с точностью 3σ или реже с точностью 4σ , при росте объема новых статистических данных иногда оказывались неверными, а точность в 5σ оказалась устойчивой к росту статистики.

Итак, распределение по Гауссу действительно описывается с помощью двух независимых параметров. Трехточечные и четырехточечные корреляторы, а также все остальные высшие корреляторы определенным образом выражаются через среднее и дисперсию, а также значения выбранных точек корреляций. Это указывает на способ экспериментального определения того, является ли распределение гауссовым: необходимо определить среднее и дисперсию, а затем измерять многоточечные корреляторы и сравнивать их отклонения от теоретических величин, рассчитанных по закону Гаусса при эмпирически установленных значениях среднего и дисперсии. Статистически значимые отклонения будут сигнализировать, что эмпирически измеряемая величина распределена не по Гауссу.

Отметим, что оценки справедливости той или иной модели и их параметров для описания данных эксперимента связаны с понятиями условной вероятности и введением *subjective probability*.

(A.III) Теория вероятностей: разнообразие событий за пределами одной случайной величины

§а Условная вероятность

Условная вероятность вводится в пространстве событий Ω . Пусть события типа A и B имеют совместные события, которые обозначаются событием типа $A \cap B$. Тогда вероятность совместного события $p(A \cap B)$ можно вычислить, с одной стороны, как вероятность, что произошло событие B , а затем умножить эту вероятность на условную вероятность того, что событие A произошло при условии, что произошло событие B , считая, что события, составляющие совместные события $A \cap B$ независимы от событий, которые не входят во множество совместных. Такую условную вероятность обозначают $p(A|B)$. Поэтому

$$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A|B).$$

Но, с другой стороны, в приведенном рассуждении события типа A и B играют совершенно эквивалентную роль, так что та же вероятность совместных событий равна

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A).$$

В результате находим связь

$$p(A|B) = \frac{p(A) \cdot p(B|A)}{p(B)}, \quad (\text{A.57})$$

что в строгой аксиоматической формулировке теории вероятностей называют теоремой Байеса (Bayes' theorem), поскольку она доказывается из исходных постулатов.

Например, пусть A — это событие «орел» в игре о«орел или решка», а B — это событие выпадение «орел два раза». Тогда $A \cap B$ — это событие, при котором выпал «орел» с вероятностью $p(A) = p(\text{«орел»})$, которую нужно умножить на вероятность того, что после одной попытки с «орлом» выпал еще один «орел», а значит, умножить на вероятность $p(B|A) = p(\text{второй «орел» при условии, что первый «орел»})$. Но «орел» — это элементарное событие, а элементарные события происходят независимо в каждой попытке, и, следовательно, вероятность

$$p(\text{второй «орел» при условии, что первый «орел»}) = p(\text{«орел»}).$$

В итоге

$$p(\text{«орел»} \cap \text{«два орла»}) = p(\text{«два орла»}) = p(\text{«орел»}) \cdot p(\text{«орел»}).$$

Этот пример показывает, что, если события независимы, то условие не играет роли и

$$p(B|A) = p(B),$$

откуда следует, что *для независимых событий*

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B). \quad (\text{A.58})$$

Если события взаимноисключающие, например, A — «орел», B — «решка», то вероятность их совместного события равна нулю:

$$\begin{aligned} p(A \cap B) &= p(\text{«орел» и «решка»}) = \\ &= p(\text{«орел»}) \cdot p(\text{выпала «решка» при условии, что выпал «орел»}) = \\ &= p(\text{«орел»}) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Если набор непересекающихся событий A_i покрывает пространство всех возможных событий Ω , т. е. $\cup_i A_i = \Omega$, то $p(B \cap \Omega) = p(B)$, и верно, что

$$p(B) = p(B \cap \Omega) = p(B \cap (\cup_i A_i)) = \sum_i p(B|A_i) \cdot p(A_i).$$

Подобные формулы, которые выглядят очевидными для простых конечных пространств событий, навели создателей теории вероятностей на вопросы о том, какой смысл имеют операции объединения и пересечения событий в общем случае, а ответы вышлились в теорию σ -алгебр (см., например, университетский учебник [25] или лекции профессора В.В. Горяйнова [26]).

§b Subjective probability

При моделировании реальности в физике исходят из некоторой теории с параметрами, которая может с некоторой вероятностью описывать экспериментальные данные. Для определения этой вероятности пользуются байесовским подходом, а именно, записывают

$$p(\text{theory}|\text{data}) \propto p(\text{data}|\text{theory}) \cdot p(\text{theory}),$$

полагая, что вероятность измерения данных такими, какими они оказались в эксперименте, равна единице. В этой формуле $p(\text{data}|\text{theory})$ — это вероятность описания данных в рамках теоретической модели, которую устанавливают эмпирически, скажем, по вероятности наблюдаемых отклонений во множестве значений экспериментальных величин от модельных значений с учетом эффективности детектора к измерениям для каждой модельной величины. Эта вероятность называется функцией правдоподобия (likelihood), поскольку она зависит от параметров теории, а максимум функции правдоподобия позволяет найти максимальную вероятность описания данных теорией. Значение $p(\text{theory})$ является субъективным и считается неизвестным a priori. В итоге вероятность того, что теория верна для эмпирического набора данных имеет максимум, который задается максимумом функции правдоподобия. Построение функций правдоподобия типа «хи-квадрат» (χ^2) выходят за рамки нашего изложения.

§c Примеры распределений вероятностей

От гауссовой случайной величины можно переходить к другим случайным переменным. Приведем пару широко известных примеров.

- **Логарифмическое нормальное распределение** получает преобразованием от гауссовой переменной x к новой переменной $y > 0$:

$$x = \ln y \Rightarrow dx = \frac{dy}{y}.$$

Поэтому

$$w(x) dx = w_{\log}(y) dy$$

и плотность вероятности логарифмического нормального распределения равна

$$w_{\log}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \cdot \frac{1}{y} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\ln y - \langle \ln y \rangle)^2}{\sigma^2}\right). \quad (\text{A.59})$$

- **Распределение χ^2** определяется для переменной

$$z = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} > 0,$$

и оно зависит от числа степеней свободы n , которое равно числу независимых гауссовых переменных X_i , имеющих средние значения μ_i и дисперсию σ_i^2 . Плотность вероятности случайной величины z может быть

вычислена, и она равна

$$w(z; n) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \cdot z^{n/2-1} \cdot e^{-z/2}. \quad (\text{A.60})$$

У этого распределения среднее значение и дисперсия равны соответственно

$$\mathbb{E}z = n, \quad Dz = 2n. \quad (\text{A.61})$$

§d Неравенства Маркова и Чебышёва

А.А. Марков рассмотрел дискретную случайную величину $X \geq 0$ и вывел оценку сверху для вероятности того, что значения этой случайной величины X_i не меньше положительного числа $C > 0$, в виде выражения

$$p(X \geq C) \leq \frac{\mathbb{E}X}{C}, \quad (\text{A.62})$$

где $\mathbb{E}X$ — среднее значение случайной величины X .

Для доказательства заметим, что, если в среднем значении

$$\mathbb{E}X = \sum X_i p_i$$

оставить только те значения X_i , которые удовлетворяют условию $X_i \geq C$, то значение суммы не может уменьшиться, так как все оставшиеся вклады с $X_i < C$ неотрицательны. Поэтому

$$\mathbb{E}X = \sum X_i p_i = \sum_{X_i < C} X_i p_i + \sum_{X_i \geq C} X_i p_i \geq \sum_{X_i \geq C} X_i p_i.$$

В силу $X_i \geq C$ замена $X_i \mapsto C$ не может увеличить сумму

$$\sum_{X_i \geq C} X_i p_i \geq \sum_{X_i \geq C} C p_i = C \sum_{X_i \geq C} p_i,$$

где по построению

$$\sum_{X_i \geq C} p_i = p(X \geq C),$$

и неравенство Маркова (A.62) доказано.

Опираясь на неравенство Маркова, П.Л. Чебышев вывел неравенство

$$p(|X - \mathbb{E}X| \geq C) \leq \frac{\mathbb{D}X}{C^2}, \quad (\text{A.63})$$

что дает оценку сверху для вероятности того, что отклонение значений случайной величины от ее среднего не меньше C . В самом деле, для неотрицательной случайной величины $Y = |X - \mathbb{E}X|$ вероятность $p(Y \geq C)$ совпадает с вероятностью для квадрата $p(Y^2 \geq C^2)$. Поэтому вследствие неравенства Маркова

$$p(|X - \mathbb{E}X| \geq C) = p(|X - \mathbb{E}X|^2 \geq C^2) \leq \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2}{C^2} = \frac{\mathbb{D}X}{C^2},$$

и неравенство Чебышева (A.63) доказано.

§e Статистика больших чисел

Неравенства Марков и Чебышева носят абстрактный характер, но они находят важные применения при рассмотрении эмпирических данных при большой статистике. Например, пусть значение одной и той же случайной величины X измеряется N раз, причем каждое измерение проводится независимо от остальных. Тогда каждое значение измерения X_i можно рассматривать как независимую случайную величину, а все такие N случайных величин имеют идентичные распределения вероятностей как по области значений каждой случайной величины, так и по значениям вероятностей в этих областях. Поэтому все X_i имеют одинаковые средние $\mathbb{E}X_i \equiv \mu_i = \mu$ и дисперсии $DX_i \equiv \sigma_i^2 = \sigma^2$. Независимость случайных величин означает, что при $i \neq j$ дисперсия суммы равна сумме дисперсий:

$$D(X_i + X_j) = DX_i + DX_j.$$

В самом деле, поскольку $\mathbb{E}(X_i + X_j) = \mu_i + \mu_j$, а дисперсия случайной величины X связана со средними стандартно как $DX = EX^2 - (\mathbb{E}X)^2$, то

$$\begin{aligned} D(X_i + X_j) &= \mathbb{E}(X_i + X_j)^2 - (\mu_i + \mu_j)^2 = \\ &= (EX_i^2 - \mu_i^2) + (EX_j^2 - \mu_j^2) + 2\mathbb{E}(X_i X_j) - 2\mu_i \mu_j = \\ &= DX_i + DX_j + 2\mathbb{E}(X_i(\mathbb{E}X_j)) - 2\mu_i \mu_j = DX_i + DX_j, \end{aligned}$$

где мы учли что усреднение произведения независимых случайных величин сводится к независимому усреднению каждой случайной величины в произведении: так как вероятности независимых величин независимы, то при усреднении по вероятностям значений одной величины, другую можно вынести из под знака такого усреднения по вероятностям значений первой величины.

В таких условиях естественно ввести равновероятно взвешенную величину в виде среднего арифметического

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} X_i$$

или новую случайную величину Y , которая обладает средним значением

$$\mathbb{E}Y = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \mathbb{E}X_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \mu = \frac{1}{N} \mu \sum_{i=1}^N 1 = \mu,$$

и дисперсией

$$DY = \frac{1}{N^2} D \left(\sum_{i=1}^N X_i \right) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N DX_i = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma^2 = \frac{1}{N} \sigma^2.$$

Тогда согласно неравенству Чебышева (A.63) в случае среднеарифметической случайной величины Y найдем, что

$$p(|Y - \mu| \geq C) \leq \frac{DY}{C^2} = \frac{\sigma^2}{NC^2},$$

а для вероятности отклонения случайной величины от ее среднего значения в пределах интервала получим

$$p(|Y - \mu| < C) = 1 - p(|Y - \mu| \geq C) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{NC^2}$$

В итоге общее ограничение для вероятности $p \leq 1$ дает

$$1 - \frac{\sigma^2}{NC^2} \leq p(|Y - \mu| < C) \leq 1, \quad (\text{A.64})$$

и для любого фиксированного, даже малого значения $C > 0$ при $N \rightarrow \infty$ вероятность того, что среднеарифметическое значение совпадает со средним значение стремиться к единице.

Рассмотрим теперь в том же стиле испытания Бернулли: пусть вероятность события равна w , и в сеансе из N попыток, т. е. в конечной выборке, событие было зарегистрировано n раз, так что частота события равна $f = n/N$ и, если повторить сеансы K раз, то получим n_i успехов¹¹, которые сами являются случайными величинами с идентичными вероятностными характеристиками так же, как и частоты $f_i = n_i/K$ при $i \in \{1, K\}$. Тогда вероятность отклонения среднеарифметической частоты

$$y = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K f_i$$

от вероятности w в рамках полосы шириной $\epsilon > 0$ ограничена согласно закону больших чисел (A.64)

$$1 - \frac{\sigma^2}{K\epsilon^2} \leq p(|y - w| < \epsilon) \leq 1, \quad (\text{A.65})$$

и в пределе больших чисел при числе сеансов $K \rightarrow \infty$ и любом малом, но фиксированном $\epsilon > 0$ среднеарифметическая частота события стремиться к вероятности события с вероятностью, равной единице. В частности, выборка может включать в себя одну попытку, и тогда среднеарифметическая частота стремиться к вероятности однократного повторения события, например, к вероятности элементарного события. Этот факт мы изучили, когда провели детальные вычисления на примере биномиального распределения в (А.1).

На этой красивой ноте изложение элементарных основ теории вероятностей заканчивается, а аксиоматическая теория σ -алгебр с вероятностной мерой не с одной, а с несколькими случайными величинами, условными вероятностями, ковариациями, случайными процессами, цепями Маркова, мартингалами и прочими содержательными вопросами представлена в курсах высшей математики [25, 26] и в обзоре практического применения вероятностных характеристик природы для физиков [27].

¹¹В качестве события можно рассмотреть не случайное число элементарных событий n_i в конечной выборке N , а положить, что $n_i = n \cdot \nu_i$, где n — это фиксированное число элементарных событий $0 \leq n \leq N$, а ν_i — это случайная величина, принимающая значение, равное единице, если выпало ровно n элементарных событий в выборке, и нуль в противном случае. Тогда при такой постановке задачи измеряется частота событий, описанная для конечной выборки при биномиальном распределении в разделе 1А.1, (А.1) приложения А, и эта частота стремиться к w_n в формуле (A.2) на стр. 280.

Приложение В

Принципы термодинамики

(B.1) Основы статистической физики

4B. Распределение Гиббса

Термодинамическое равновесие, статистическая сумма, свободная энергия, температура, энтропия, идеальный газ.

§а Термодинамическое равновесие

В термодинамике рассматривают физические системы, которые *на микроскопическом уровне* характеризуются многими степенями свободы, т. е. содержат много частиц, так что имеет место *внутренне движение* как каждой микроскопической степени свободы, например, энергия частицы, ее скорость зависят от времени, так и динамических переменных микроскопических подсистем. При этом рассматривается и *макроскопическое описание*, которое проводится в терминах коллективных наблюдаемых величин всех частиц и подсистем при условии, что макроскопические наблюдаемые стационарны, т. е. не зависят от времени, и являются универсальными как для системы в целом, так и для ее подсистем, например, плотность частиц, химический состав, давление и тому подобные макроскопические характеристики являются одними и теми же как для системы в целом, так и для макроскопических подсистем, и эти величины не зависят от времени. Такая универсальность и стационарность макроскопических характеристик при наличии внутреннего движения на микроскопическом уровне возможна, только если различные состояния внутреннего движения переходят друг в друга так, что вероятности перехода микроскопической подсистемы из одного состояния в другое и в обратную сторону равны, а значит, не происходит эволюция подсистемы из одних состояний в другие, что, конечно, необходимо по условию стационарности термодинамической системы на макроскопическом уровне. Такая равновероятность переходов при внутреннем движении на микроскопическом уровне описания называется детальным равновесием. Тогда говорят о термодинамическом равновесии в системе и о равновесии системы с термостатом, т. е. с внешней средой, также находящейся в термодинамическом равновесии.

В реальных системах термодинамическое равновесие может наступить после истечения некоторого периода времени, который называют временем релаксации. Предполагается, что после релаксации исходные условия эволюции системы в термостате за счет возникновения хаоса во внутреннем движении на микроскопическом уровне становятся иррелевантными или, по-просту говоря, стираются в макроскопических наблюдаемых, что называют эргодичностью: детерминированная эволюция микросистем при усреднении по периоду времени, существенно превышающему время релаксации, приводит к макроскопическим характеристикам, которые не зависят от времени. Эргодичность предполагает, что вероятностные характеристики, полученные при усреднении

ния по времени при внутреннем движении, становятся независимыми от времени усреднения. Например, средняя энергия частицы или распределение вероятностей наблюдать частицу в некоторых интервалах ее энергии являются стационарными и описываются в теории вероятностей с распределениями, которые не имеют зависимостей от времени и определяются универсальными свойствами системы в термодинамическом равновесии.

§b Статистическая сумма и обратная температура

Итак, рассмотрим термодинамическую систему, которая поконится как целое, т. е. ее макроскопические импульс и момент вращения тождественно равны нулю. При этом будем полагать, что число степеней свободы в системе фиксировано, так что универсальной макроскопической характеристикой является энергия, как для системы в целом, так и для подсистем, причем в силу термодинамического равновесия энергия не зависит от времени. Тогда энергия — это интеграл движения и имеет место связь: энергия E_{AB} подсистем A и B — это сумма энергий в каждой из подсистем:

$$E_{AB} = E_A + E_B. \quad (\text{B.1})$$

Поскольку подсистема может находиться в состояниях с разной энергией необходимо ввести распределение вероятностей по энергии подсистемы так, что это распределение по условию термодинамического равновесия должно быть универсальным, т. е. одним и тем же как функция энергии для любой из подсистем, а значит, распределение вероятностей по энергии должно иметь вид

$$p(E) = \frac{1}{Z} w(E) > 0, \quad w(E) > 0,$$

где Z — это положительный нормировочный множитель, который устанавливает нормировку вероятности на единицу, если провести суммирование по всем n состояниям с определенной энергией подсистемы E_n :

$$Z = \sum_n w(E_n) \Rightarrow \sum_n p(E_n) = 1.$$

Итак, с одной стороны распределение вероятностей по энергии системы, составленной из подсистем A и B , равно

$$p_{AB}(E_{AB}) = \frac{1}{Z_{AB}} w(E_A + E_B), \quad (\text{B.2})$$

а с другой стороны распределение вероятностей по энергиям в каждой из подсистем задается той же универсальной функцией $w(E)$ в термодинамическом равновесии:

$$p_A(E_A) = \frac{1}{Z_A} w(E_A), \quad p_B(E_B) = \frac{1}{Z_B} w(E_B), \quad (\text{B.3})$$

где различия возникают исключительно вследствие разного спектра энергии в подсистемах и выражаются в виде разных нормировочных множителей Z , которые маркированы индексом подсистемы. Но распределение вероятностей

в подсистеме зависит только от универсальной характеристики подсистемы, от энергии подсистемы, и это распределение не зависит от энергии в другой подсистеме, а значит сами вероятности в подсистемах являются независимыми. Следовательно, имеет место закон умножения независимых вероятностей и

$$\begin{aligned} p_{AB}(E_{AB}) &= p_A(E_A)p_B(E_B) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{Z_{AB}}w(E_A + E_B) = \frac{1}{Z_A}w(E_A)\frac{1}{Z_B}w(E_B). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

В частности, выберем начало отсчета энергии $E_A = E_B = 0$, так что (B.4) дает

$$w(0)Z_AZ_B = w(0)w(0)Z_{AB},$$

и в силу $w(E) > 0$ находим

$$Z_AZ_B = w(0)Z_{AB}.$$

Без ограничения общности рассмотрения положим $w(0) = 1$, поскольку выбор другого положительного значения приведет к перемасштабированию нормировочного множителя Z так, что распределение вероятностей по энергии $p(E)$ не изменится. Тогда для нормировочных множителей имеет место соотношение

$$Z_{AB} = Z_AZ_B,$$

и

$$w(E_A + E_B) = w(E_A)w(E_B). \quad (\text{B.5})$$

Из этой формулы и из аддитивности энергии как интеграла движения (B.1) и (B.5) найдем дифференциальное соотношение

$$\begin{aligned} w(E+dE) &= w(E)w(dE) \Rightarrow w(E) + \frac{dw(E)}{dE}dE = w(E)\left(1 + \frac{dw(0)}{dE}dE\right) \\ &\Rightarrow \frac{dw(E)}{dE} = w(E)\frac{dw(0)}{dE}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Универсальную для заданной термодинамической системы величину производной в нуле обозначают символом

$$\frac{dw(0)}{dE} = -\beta. \quad (\text{B.7})$$

Тогда решение дифференциального уравнения (B.6) с граничным условием $w(0) = 1$ имеет вид

$$w(E) = e^{-\beta E} \quad (\text{B.8})$$

и называется *распределением Гиббса*, так как физический смысл термодинамического параметра β определяется его связью с температурой T ,

$$\beta = \frac{1}{kT}, \quad (\text{B.9})$$

где k — это постоянная Больцмана. Доказательство этого факта будет приведено чуть ниже при рассмотрении идеального газа, как системы свободных точечных частиц, находящихся в равновесном состоянии с термостатом.

Важно, что, согласно условию стабильности у физических систем энергия ограничена снизу, так как иначе система «проваливалась» бы в бесконечность отрицательных энергий, излучая бесконечно большую энергию, т. е. система была бы нестабильна. Но тогда параметр β должен принимать исключительно положительные значения для того, чтобы сумма вероятностей по неограниченным сверху энергиям сходилась к конечной величине.

Нормировочный множитель распределения Гибbsа называется статистической суммой или сокращенно «статсуммой» (в английской терминологии «partition function»),

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}, \quad (\text{B.10})$$

для которой вводят термодинамический потенциал «свободной энергии» \mathcal{F} ,

$$Z = e^{-\beta \mathcal{F}}. \quad (\text{B.11})$$

Свободную энергию рассматривают как функцию температуры (или параметра «обратной температуры» β) и других макроскопических характеристик системы, например, объема.

§c Энергия и энтропия

По общим правилам теории вероятностей введем среднее значение энергии

$$\langle E \rangle = \frac{1}{Z} \sum_n E_n e^{-\beta E_n}, \quad (\text{B.12})$$

так что средняя энергия выражается через производную статсуммы по обратной температуре β ,

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \Rightarrow \langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \beta} = kT \cdot T \frac{\partial \ln Z}{\partial T} \quad (\text{B.13})$$

В терминах свободной энергии

$$\langle E \rangle = \mathcal{F} + \beta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} = \mathcal{F} - T \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}. \quad (\text{B.14})$$

После введения среднего значения энергии можно записать статсумму в виде

$$Z = e^{-\beta \langle E \rangle} \cdot \bar{N} = \sum_1^{\bar{N}} e^{-\beta \langle E \rangle}, \quad \bar{N} = \frac{1}{e^{-\beta \langle E \rangle}} \sum_n e^{-\beta E_n}.$$

Значит, \bar{N} имеет смысл эффективного числа состояний со средней энергией. Логарифм этого числа называют энтропией

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\stackrel{\text{def}}{=} k \ln \bar{N} = k(\beta \langle E \rangle - \beta \mathcal{F}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow T\mathcal{S} = \langle E \rangle - \mathcal{F}, \quad Z = e^{-\beta \mathcal{F}} = e^{-\beta \langle E \rangle + \mathcal{S}/k}. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Последнюю формулу можно записать в терминах вероятностей для уровней энергии так, что

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{1}{Z} \cdot e^{-\beta E_n} = \sum_n p_n = 1, \quad \ln p_n = -\beta E_n - \ln Z, \quad \Rightarrow \\ \mathcal{S} = k (\ln Z + \beta \langle E \rangle) = k \left(\ln Z + \sum_n e^{-\beta E_n} \frac{1}{Z} \cdot \beta E_n \right) = \\ = k \left(\ln Z + \sum_n p_n (-\ln p_n - \ln Z) \right) \\ \mathcal{S} = k \left(\ln Z - \sum_n p_n \ln p_n - \ln Z \sum_n p_n \right) = -k \sum_n p_n \ln p_n. \quad (B.16) \end{aligned}$$

Эта формула для энтропии имеет более широкий смысл, поскольку в неё входит распределение вероятностей в системе, которое может и не быть распределением Гиббса в равновесной термодинамической системе. Например, энтропия Шеннона I_S для сетей передачи данных определяется так, что, если все биты имеют равновероятное распределение, т. е.

$$p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^N = 2^{-N},$$

где N — число битов в линии передачи данных, то, заменяя постоянную Больцмана на единицу и натуральный логарифм на логарифм по основанию 2, получим

$$I_S = - \sum_n p_n \log_2 p_n = N \sum_n p_n = N. \quad (B.17)$$

Это значит, что энтропия Шеннона в информатике имеет смысл числа равновероятных битов в сети передачи данных.

В рамках термодинамики сравним (B.15) с (B.14) и найдем, что энтропия выражается через производную свободной энергии по температуре,

$$\mathcal{S} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}. \quad (B.18)$$

Поэтому переход от свободной энергии \mathcal{F} к средней энергии $\langle E \rangle$ — это преобразование Лежандра по переменной температуры:

$$\langle E \rangle = \mathcal{F} - T \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} = \mathcal{F} + T \mathcal{S}. \quad (B.19)$$

Тогда, используя дифференцирование сложной функции, найдем, что производная средней энергии по энтропии — это температура:

$$\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \mathcal{S}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial \mathcal{S}} + \frac{\partial T}{\partial \mathcal{S}} \mathcal{S} + T = -\mathcal{S} \frac{\partial T}{\partial \mathcal{S}} + \frac{\partial T}{\partial \mathcal{S}} \mathcal{S} + T = T,$$

как это и должно быть при преобразовании Лежандра: переменные температура T и энтропия \mathcal{S} сопряжены по Лежандру.

Если термодинамическая система занимает объем V и характеризуется давлением p , то средняя энергия при увеличении объема уменьшается за счет того, что давление совершает работу $dA = p dV$, так что $dA = -d\langle E \rangle$ и

$$\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial V} = -p.$$

В итоге, для системы в термодинамическом равновесии изменение средней энергии складывается из двух слагаемых

$$d\langle E \rangle = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial S} \cdot dS + \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial V} \cdot dV = T dS - p dV, \quad (\text{B.20})$$

что есть выражение закона сохранения энергии для термодинамической системы. Для сопряженной по Лежандру свободной энергии

$$dF = d(\langle E \rangle - TS) = T dS - p dV - T dS - S dT = -S dT - p dV. \quad (\text{B.21})$$

Средняя энергия определена как функция энтропии и объема, а свободная энергия — как функция температуры и объема. Обе функции принадлежат классу термодинамических потенциалов. При этом в адиабатическом процессе работа, которую совершает термодинамическая система, уменьшает среднюю энергию, а в изотермальном процессе работа, которую совершает термодинамическая система, уменьшает свободную энергию. Другими словами, в адиабатическом процессе может сохраняться свободная энергия, если работа компенсируется понижением температуры, а в изотермальном процессе может сохраняться средняя энергия, если работа компенсируется ростом энтропии.

Мы видим, что статсумма — центральный объект термодинамики, ее свойства полностью задают все тепловые характеристики системы.

§d Газ свободных частиц

Энергия классической частицы — функция Гамильтона зависит от координат \mathbf{r}_n и импульсов частиц \mathbf{k}_n , так что для консервативных систем энергия зависит от переменных фазового пространства,

$$E_n = E(\mathbf{r}_n; \mathbf{k}_n),$$

и вместо распределения вероятностей по энергиям необходимо рассматривать плотность распределения вероятностей в фазовом пространстве, т. е. статсумма равна многократному интегралу

$$Z = \int e^{-\beta E(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N)} \prod_{n=1}^N d^3 r_n d^3 k_n,$$

где элемент фазового пространства частицы задается как

$$d\Gamma_n \equiv d^3 r_n d^3 k_n.$$

Задача 58. Пользуясь распределением Гиббса, вычислите распределение Максвелла по импульсам свободных частиц.

Для свободных частиц с массой m в объеме V интегралы по координатам становятся элементарными, так как энергия зависит только от импульсов и

$$\begin{aligned} Z &= V^N \prod_{n=1}^N \int d^3 k_n \cdot \exp \left(-\beta \frac{\mathbf{k}_n^2}{2m} \right) = \\ &= V^N \prod_{n=1}^N \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dk_n^x \cdot \exp \left(-\beta \frac{(k_n^x)^2}{2m} \right) \times \right. \\ &\quad \times \left. \int_{-\infty}^{+\infty} dk_n^y \cdot \exp \left(-\beta \frac{(k_n^y)^2}{2m} \right) \times \int_{-\infty}^{+\infty} dk_n^z \cdot \exp \left(-\beta \frac{(k_n^z)^2}{2m} \right) \right\} = \\ &= V^N \prod_{n=1}^N \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dk_n^x \cdot \exp \left(-\beta \frac{(k_n^x)^2}{2m} \right) \right)^3. \quad (\text{B.22}) \end{aligned}$$

Задача 59. Пользуясь гауссовым интегралом, вычислите статсумму газа N классических нерелятивистских частиц.

Итак, статсумма газа свободных нерелятивистских точечных частиц равна

$$Z = V^N \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{\frac{3}{2}N}.$$

Значит, средняя энергия согласно уравнению (B.13) получается равной выражению

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{3}{2} N \frac{1}{\beta} = N \frac{3}{2} kT. \quad (\text{B.23})$$

Это уравнение говорит о том, что температура, которая определяется как мера средней энергии частицы в термодинамическом ансамбле так, чтобы на каждую степень свободы частицы приходилась энергия, равная $\frac{1}{2} kT$, связана с параметром β формулой для обратной температуры (B.9) (!).

Свободная энергия как функция температуры и объема равна

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{\beta} \ln Z = -kT \cdot N \left(\ln V + \frac{3}{2} \ln(kT) + \frac{3}{2} \ln(2\pi m) \right). \quad (\text{B.24})$$

Задача 60. Пользуясь связью давления с частной производной свободной энергии по объему

$$p = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial V},$$

вычислите давление идеального газа.

Легко найти уравнение состояния идеального газа — свободных нерелятивистских частиц в термодинамическом равновесии

$$p \cdot V = N \cdot kT. \quad (\text{B.25})$$

Итак, мы провели рассмотрение применения теории вероятностей в термодинамике в общем случае и в частности для газа свободных нерелятивистских частиц.

5B. Кванты осциллятора

Два типа тождественных квантов: фермионы и бозоны, энергия Ферми, химический потенциал, конденсат бозонов.

Под осциллятором понимают колебания физической величины с определенной частотой. Например, струна гитары при колебаниях издает звук определенной ноты, что описывается как осциллятор с частотой этой ноты. Или координата частицы, которая колеблется возле положения равновесия при действии силы упругости Гука. Наконец колебания электрического и магнитного полей на одной частоте — это тоже осциллятор. Как видим, колебания могут относиться к разным наблюдаемым: амплитуда отклонения струны, давление воздуха, координата частицы, величина электрического и магнитного полей, — важно, что эти колебания математически отвечают синусам или косинусам от произведения частоты на время (плюс сдвиг по фазе), так что говорят о гармонических колебаниях, которые отождествляют с осциллятором.

Колебания осциллятора частоты ω могут происходить с разной энергией E . Экспериментальный факт состоит в том, что энергия принимает не любые значения, а квантованные. Квант энергии осциллятора равен $E = \hbar\omega$. Если энергия колебаний много больше энергии кванта, то точности измерения энергии может не хватить, чтобы сосчитать, сколько квантов энергии в заданном колебании. Именно эта ситуация имеет место при классическом описании колебаний осциллятора: достаточно описывать движение с определенной энергией и не выделять в этом движении кванты энергии. Если же необходимо проводить точные исследования, то факт существования квантов осциллятора становится принципиально важным.

Как, к примеру, квантовость осциллятора скажется в термодинамике?

Эксперимент выявил, что кванты осциллятора делятся строго на 2 типа: бозоны и фермионы. Для фермионов действует принцип запрета Паули, который в частном случае его применения к осцилляторам звучит так: у фермионного осциллятора число квантов может быть равно только нулю или единице, а число квантов больше единицы запрещено. Для бозонов такого запрета нет: число бозонных квантов может быть равно нулю или любому натуральному числу. Дело в том, что все известные частицы в физике являются квантами осцилляторных колебаний наблюдаемых в природе полей: у электромагнитного поля кванты — фотоны, у электронного поля — электроны и позитроны и т.п. Поскольку электроны — это кванты одного и того же поля, эти кванты — тождественные частицы. А для тождественных частиц и было установлено, что они разделяются только на два типа: на бозоны и фермионы.

Итак, число квантов осциллятора напрямую входит в статсумму, а значит, термодинамика фермионов и бозонов существенно отличается!

§а Распределение Ферми–Дирака

Рассмотрим статсумму (B.10) в случае фермионного осциллятора: в сумме есть только два члена, без кванта и с одним квантами, а энергия отсчитывается от нуля (свободный осциллятор), так что

$$Z_F = \sum_{n=0}^1 e^{-\beta E_n} = 1 + e^{-\beta \hbar\omega}. \quad (\text{B.26})$$

Тогда вероятность найти в системе один свободный фермионный осциллятор согласно распределению Гиббса равна

$$p(E) = \frac{e^{-\beta \hbar \omega}}{1 + e^{-\beta \hbar \omega}} = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} + 1}, \quad (\text{B.27})$$

и это частный случай распределения Ферми–Дирака.

Если осциллятор не является свободным, то энергия отсчитывается не от нуля и распределение принимает более общий вид:

$$p(E) = \frac{e^{-\beta(\hbar\omega - E_F)}}{1 + e^{-\beta(\hbar\omega - E_F)}} = \frac{1}{e^{\beta(\hbar\omega - E_F)} + 1}, \quad (\text{B.28})$$

где E_F называется энергией Ферми.

График функции $p(E)$ при малых значениях температуры, т. е. при $\beta \rightarrow \infty$ приобретает характерный вид, близкий к ступеньке, как показано рис. В.1. Это означает, что при $\beta(\hbar\omega - E_F) \gg 1$ имеет место предел, который называют вырожденным фермионным газом, имея в виду, что в термодинамической системе фермионных осцилляторов с разной энергией, которая характеризуется одной и той же энергией Ферми, фермионы заполняют все состояния с энергией, меньшей энергии Ферми. Отсюда, между прочим, следует, что в природе могут реализовываться только системы с положительной энергией Ферми.

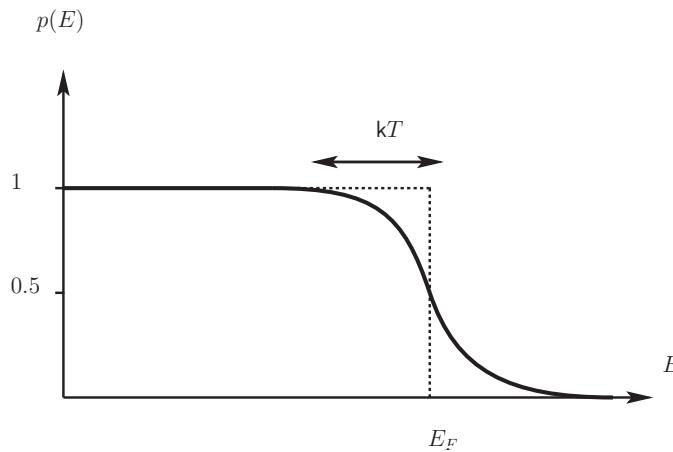


Рис. В.1: Распределение Ферми–Дирака по энергии фермионного осциллятора. Пунктир показывает предел нулевой температуры.

Примером вырожденного фермионного газа может служить электронный газ в звездах – белых карликах, где отношение энергии Ферми к температуре принимает гигантские значения, или электроны в металлах при температурах, близких к нулю.

§b Распределение Бозе–Эйнштейна

Вычисление статсуммы для свободного бозонного осциллятора сводится к сумме геометрической прогрессии,

$$Z_B = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar\omega \cdot n} = \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar\omega}}. \quad (\text{B.29})$$

Тогда легко найти среднюю энергию бозонных квантов в термодинамическом равновесии

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{Z_B} \cdot \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \hbar\omega \cdot \frac{e^{-\beta \hbar\omega}}{1 - e^{-\beta \hbar\omega}}, \quad (\text{B.30})$$

что согласуется и со средним числом квантов в системе

$$\langle n \rangle = -\frac{1}{Z_B} \cdot \frac{\partial Z}{\partial (\beta \hbar\omega)} = \frac{e^{-\beta \hbar\omega}}{1 - e^{-\beta \hbar\omega}}, \quad (\text{B.31})$$

и тогда говорят, что число квантов с энергией $E = \hbar\omega$ задается распределением по Бозе–Эйнштейну.

Если ввести начало отсчета энергии μ_B , то число бозонных квантов в термодинамическом ансамбле приобретает вид

$$n_B(E) = \frac{e^{-\beta(\hbar\omega - \mu_B)}}{1 - e^{-\beta(\hbar\omega - \mu_B)}} = \frac{1}{e^{\beta(\hbar\omega - \mu_B)} - 1}, \quad (\text{B.32})$$

и это — распределение Бозе–Эйнштейна. Из формулы сразу видно, что для того, чтобы не возникали отрицательные значения, параметр может иметь значения только в области $\mu_B \leq 0$. Его называют химическим потенциалом.

Особенностью бозонных осцилляторов является то, что число их квантов на одном уровне энергии ничем не ограничено, так что в термодинамической системе в основном состоянии с наименьшей энергией может образоваться бозе–Эйнштейновский конденсат, а возбужденные состояния будут распределены согласно $n_B(E)$. Условия возникновения конденсата исследуются в рамках квантовой статистической физики.

Пример практической реализации распределения вероятностей по Бозе–Эйнштейну — спектр излучения квантов электромагнитного излучения при тепловом равновесии, т. е. спектр излучения абсолютно черного тела.

Предметный указатель

- γ -фактор, 127
4-вектор, 176
4-дивергенция, 175
4-импульс, 129, 130, 232
4-скорость, 129, 130, 232
4-ток, 182, 232
on shell, 34
Арнольд В., 85
Белл Дж., 25, 62
Бозе Ш., 314
Больцман Л., 308
Гаусс К., 160, 291, 295
Гейзенберг В., 80
Гелл-Манн М., 269
Гибbs Дж., 305, 307, 310
Грассман Г., 230
Гюйгенс Х., 50
Де Бройль Л., 50
Дирак П., 59, 80, 202, 203, 254, 313
Казимири X., 209
Картан Э., 168, 209
Киллинг В., 148
Конфуций, 6
Кристоффель Э., 146
Кронекер Л., 107
Леви-Чивита Т., 112
Ли С., 138, 189
Лоренц Х., 121, 180
Максвелл Дж., 310
Минковский Г., 121
Нётер Э., 33
Паули В., 20, 221
Планк М., 26, 47
Пуанкаре А., 154
Пуассон С., 283, 290, 291
Резерфорд Э., 94, 96, 98
Риман Б., 155
Риччи Г., 157
Стокс Дж., 161
Фейнман Р., 13, 49, 56, 61
Ферма П., 51
Ферми Э., 313
Фрадкин Е., 271
Хевисайд О., 258
Шварцшильд К., 154
Шрёдингер Э., 56, 237
Эйнштейн А., 32, 38, 62, 65, 314
Якоби К., 141
- алгебра
— $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$, 266
— Грассмана, 230
— Ли, 194, 198
— абелева, 195
— генераторов, 198
— орбитального момента, 200
амплитуда вероятности, 20, 26, 52, 53, 58,
 70, 236
— интерференция, 21
— пространство, 22
— тождественных бозонов, 24
— тождественных фермionов, 23
антикоммутатор, 223
антитриплет
— $SU(3)$, 270
апоцентр, 84
ассоциативность, 191
атомное ядро, 98
базис, 102, 202, 208
— векторный, 108
— глобальный, 104
— декартов, 103, 207
— ковариантный, 132
— ковекторный, 107, 108, 142
— контравариантный, 132
— контравекторный, 142
— ортонормированный, 105, 132
— полнота, 206
— собственных векторов, 207
— совместный, 208
— спиновый, 212
— стандартное представление, 205
баланс
— импульса, 234

- энергии, 233
- бином Ньютона, 8
- бозон, 24, 312
- векторный, 242
- бра-вектор, 10, 203, 206
- вакуум, 129
- вариация, 25, 172
- траектории, 51
- функционала, 30
- вектор, 10, 102, 200, 202
- Киллинга, 148, 159
- Рунге–Ленца–Лапласа, 261
- базисный, 106
- волновой, 50
- младший, 205
- орбитального момента, 236
- собственный, 203, 207, 208
- — ортогональный, 203
- старший, 205
- векторное произведение, 112
- векторный анализ, 102
- вероятность, 12, 16, 18, 53, 59, 63, 237, 279
- отклонения от среднего, 296
- условная, 299
- внешнее произведение, 115, 163
- волна, 20
- де Бройля, 264
- изотропная, 122
- интенсивность, 20
- монохроматическая, 241, 242
- время
- релаксации, 305
- собственное, 128, 129, 152
- выборка, 279
- газ
 - фермионный, 313
 - — вырожденный, 313
- гамильтониан, 65, 239
- гамма-функция, 293
- гармонический осциллятор, 88, 98, 255
 - амплитуда колебаний, 268
 - изотропный, 267
- генератор, 190, 192, 199
 - группы поворотов, 197, 210
 - канонических преобразований, 77
 - сдвигов, 79
 - сдвигов по времени, 77
 - спина
 - — повышающий, 210
 - — понижающий, 210
 - трансляций, 77, 193
- геозедническая, 154
- гипербола, 91
- гиперповерхность, 110
- гипотеза де Бройля, 51
- градиент, 133, 143
- грассманова переменная, 230
- группа, 121, 191
 - ISO(1,1), 126
 - ISO(3), 121, 198
 - O(3), 121, 198
 - SO(3), 121, 189
 - SO(3,1), 127
 - SO(4), 263
 - SU(2), 189, 224
 - SU(3), 267, 271
 - Лоренца, 127
 - Планкаре, 154
 - поворотов, 189, 196, 198, 265
- давление, 234, 310
- данные
 - на концах траектории, 13
 - начальные, 13, 68
- движение
 - финитное, 91, 99
- действие, 25, 26, 51, 83, 127, 172, 176, 232, 237, 243, 249, 264
 - взаимодействия, 243
 - минимум, 47
 - нерелятивистской частицы, 149, 237
 - поля
 - — амплитуды вероятности, 239
 - релятивистской частицы, 130
 - экстремальное, 27, 46
 - дельта-функция Дирака, 59, 181, 254
 - детерминант, 112, 170, 203
 - дивергенция, 133, 160, 181
 - дипольный момент
 - электрический, 251
 - дисперсия, 54, 283, 290
 - дифракция, 12
 - дифференциал, 9, 106
 - детерминанта, 114
 - дифференциальная геометрия, 138
 - дифференциальная форма, 163
 - замкнутая, 168
 - точная, 168
 - дифференцирование
 - внешнее, 166
 - внутреннее, 109
 - по параметру, 36
 - правило Лейбница, 167
 - длина, 104
 - дублет, 213
 - задача Кеплера, 91
 - закон

- Био-Савара, 182
- Кеплера, 93
- Кулона, 160, 180
- больших чисел, 303
- дисперсии, 51
- преобразования
- — векторов, 106
- — ковекторов, 107
- сохранения, 175
- — заряда, 182
- — массы, 232
- — тензора энергии-импульса, 233
- — энергии, 234
- заряд, 42
 - магнитный, 184
 - поля, 242
 - поток, 42
- идеальный газ, 311
- уравнение состояния, 311
- измерение
 - единичное, 70
 - многократное, 70
- измерение спина, 207
- изометрия, 119, 122, 126, 149
- изотропность, 41
- импульс, 40, 44, 51, 67, 77
 - канонически сопряженный, 74, 81
- инвариант, 106, 139, 210, 228
 - адиабатический, 246, 247
 - в магнитном поле, 248
- инвариантный подход, 107
- инверсия, 244
 - базиса, 115
 - зеркальная, 115, 121, 198, 244
 - псевдовектор, 118
 - псевдоскаляр, 118
 - координат, 115
 - объема, 116
 - стрелы времени, 244
 - тензора Леви-Чивиты, 117
- индекс
 - верхний, 28, 32, 111
 - немой, 32, 106
 - нижний, 28, 111
 - опускание, 111
 - поднимание, 111
- индукция, 184
- инерциальная система, 43, 129
- инкремент угла, 84
- интеграл
 - гауссов, 60, 295
 - движения, 38, 80–82
 - определенный, 11
 - по траекториям, 56
- интегральное представление факториала, 292
- интегрирование
 - по ориентированной поверхности, 165
- интенсивность, 50
- интервал, 125, 153
 - нулевой, 130
- релятивистский, 128
- интерференция, 12, 20
 - амплитуд вероятности, 21
- испытания Бернулли, 279, 304
- калибровочная инвариантность, 241
 - глобальная, 241
 - локальная, 242
- калибровочное взаимодействие, 243
- неминимальное, 243
- квадратичная форма, 105
- квант, 68, 213, 312
 - электромагнитного поля, 314
 - энергии, 312
- квантование, 25, 238
 - каноническое, 80, 264
 - спина, 210
- квантовая телепортация, 70
- квантовые сны, 63
- квинтет
 - $SO(3)$, 219
- кет-вектор, 10, 202, 206
- ковариантная производная, 242
- ковектор, 102, 232
 - компоненты $s = 1$, 204
 - набла, 132
- колебания
 - вынужденные, 256
- коллапс волновой функции, 62
- коммутатор, 79, 195, 197, 200, 208
 - генераторов группы поворотов, 210
 - ковариантных производных, 155
 - спина, 223
- комплексное число, 9
- компоненты
 - вектора, 10
- конденсат
 - бозе-эйнштейновский, 314
- коническое сечение, 91
- консервативная система, 82, 86
- конформный фактор, 123, 124
- координатная сетка, 143
- координатный подход, 102, 107
- координаты, 67, 102
 - декартовы, 9, 32, 52, 103, 111, 133
 - криволинейные, 138, 169
 - нулевая компонента, 123
 - сферические, 103, 133, 134

- корпускула, 51
 коррелятор, 71
 — двухточечный, 282
 — многоточечный, 283
 корреляция, 69, 70, 72, 73
 — статистическая, 71
 коэффициенты Ламе, 147
 кривизна
 — скалярная, 157
 кручение, 143
- лагранжевы переменные, 49
 лагранжиан, 29
 лапласиан, 134, 137
 линейная функция, 105
 линия
 — геодезическая, 154
 логарифм
 — натуральный, 287
 локальная теория, 28
 локальный реализм, 65, 67, 71, 73
 лоренцев буст, 126, 127
- магнитный момент, 243
 масса, 44
 — гравитационная, 150
 — инертная, 150
 — нулевая, 45
 матрица, 10
 — генератора, 197
 — обратная, 114, 203
 — поворотов, 198, 201
 — спина, 201
 — в терминах бра- и кет-состояний, 206
 — повышающая, 205, 214
 — поникающая, 205, 214
 — эрмитово самосопряженная, 202, 208
 матрицы
 — Гелл-Манна, 269, 272
 — Паули, 221
 матричная экспонента, 222
 матричное умножение, 10, 119
 метод перевала, 294
 метрика, 104, 111, 151, 170, 172, 230
 — Минковского, 125
 — Шварцшильда, 154
 — диагональная, 105
 — евклидова, 119
 — обратная, 111, 124
 — сигнатура, 154
 — спинорная, 226, 228
 механика
 — гамильтонова, 49, 131
 — лагранжева, 30
- минор матрицы, 114, 173
 многократные измерения, 15
 момент импульса, 201
 момент количества движения, 42, 82
 мультиплетность, 213
- наблюдалася величина, 13
 полный набор, 209, 210
 нелокальность квантовая, 65, 71
 неопределенность, 15, 64
 — импульса, 57
 — статистическая, 68
 — траектории, 16
 непрерывная величина, 15
 неравенства Белла, 25, 62, 63, 71, 73
 — в форме CHSH, 73
 неравенство
 — Маркова, 302
 — Чебышева, 302
 — треугольника, 105
 нильпотентность, 168
 нормировка, 72
- объем, 104
 — ориентированный, 112, 166, 169
 — фазовый, 247
 однородность
 — времени, 41
 — пространства, 40
 оператор
 — Бельтрами, 147
 — Казимира, 195
 — — квадратичный, 198
 — единичного измерения, 70
 — импульса, 137, 237
 — линейный, 53
 — набла, 132
 — перестановок тождественных частиц, 25
 — сдвига, 137
 операция перестановок, 22
 — фермионов, 230
 орбита
 — близкая к круговой, 84
 — замкнутая, 84
 — финитная, 84, 86
 — эллиптическая, 261
 орбитальный момент, 89, 200, 235
 осциллятор, 312
- парабола, 91
 парадокс
 — ЭПР, 65, 68, 70
 — близнецов, 129
 параллельный перенос, 134, 139, 140, 157

- параметр
— скрытый, 65, 68, 70, 71, 73
- параметр эволюция, 130
- переменные действие–угол, 250
- периодическое движение, 249
- в магнитном поле, 245
- periцентр, 84
- плотность
— вероятности, 72, 237
- импульса, 179, 235, 241
- массы, 232
- энергии, 235, 241
- — вакуума, 129
- площадь
— ориентированная, 115, 158, 162, 163
- поворот
— Вика, 60
- на угол 2π , 224
- погрешность
— измерения, 15
- инструментальная, 15
- подалгебра
— Картана, 195
- подстановка вектора, 109
- поле
— векторное, 200
- внешнее, 172
- гравитационное, 150
- — свободное, 220
- калибровочное, 242
- ковекторное, 139
- кулоновское, 89
- локальное, 27
- магнитное, 183, 244
- поперечное, 220
- скалярное, 32, 102, 199, 236
- спина s , 212
- тензорное, 214
- электрическое, 180
- электромагнитное, 180
- — свободное, 220
- поляризация фотона, 68
- последовательность, 284
- итераций, 288
- постоянная
— Больцмана, 308
- Планка, 26, 47, 51, 54, 213, 237
- постулат
— квантовой механики, 70
- потенциал
— гармонического осциллятора, 88
- гравитационный, 88
- кулоновский, 88
- сферически симметричный, 81
- центральный, 86
- центробежный, 83
- поток
— магнитного поля, 248
- энергии, 177, 235, 241
- правило Эйнштейна для суммирования, 32
- предел, 284, 286
- геометрической оптики, 51
- последовательности, 277, 284
- представление группы, 191
- неприводимое, 213
- — SU(3), 272
- преобразование
— Лежандра, 49, 309
- Фурье, 59, 253
- инфинитезимальное, 190
- калибровочное, 241, 242
- каноническое, 75, 76
- — производящая функция, 75, 81
- обратное, 191
- ортогональное, 120, 198
- ортохронное, 126
- параметрическое, 33
- собственное, 126
- специальное, 120, 126, 198
- спинора, 222
- тождественное, 191, 196
- преобразования
— Галилея, 43
- принцип
— Гюйгенса, 50, 53, 63, 237
- Ферма, 51
- запрета Паули, 20, 230, 312
- локального реализма, 67
- относительности
— — Галилея, 45, 51, 158
- — релятивистский, 45
- причинности, 13, 65, 67, 69, 71
- суперпозиции, 180
- эквивалентности масс, 150
- экстремального действия, 28, 30, 52, 129
- прогрессия
— геометрическая, 8, 286
- производная
— Ли, 172
- — вектора, 140
- — ковектора, 139
- — коммутатор, 141
- — метрики, 141
- — скаляра, 139
- — ковариантная, 141, 150, 176
- — вектора, 146
- — ковектора, 146
- — метрики, 146

- скаляра по направлению, 133
- частная, 8, 309
- пространство
 - Минковского, 129, 154, 172
 - амплитуд вероятности, 22
 - векторное, 49, 104
 - ковариантное, 106, 107
 - контравариантное, 106
 - голономное, 144
 - евклидово, 102, 104, 111, 155, 176, 190, 192, 202
 - касательное, 104
 - квантовых состояний, 49
 - метрическое, 104
 - Римана, 104
 - изотропное, 104
 - однородное, 104
 - размерность, 192
 - фазовое, 61, 310
- пространство-время, 121, 126, 154
- прямая сумма, 219, 271
- прямое произведение, 108
- пучок траекторий, 15, 46
- радиус Шварцшильда, 154
- радиус-вектор, 137
- размерность
 - спинового пространства, 212
- распределение вероятностей, 19
- χ^2 , 301
- Бозе–Эйнштейна, 314
- Гаусса, 299
- Гиббса, 305
- Максвелла, 310
- Пуассона, 283, 287, 290
- Ферми–Дираха, 313
- биномиальное, 280
- логарифмическое нормальное, 301
- нормальное, 296
- рассеяние, 94
 - гравитационное, 98
 - на сфере, 96
 - поток, 95
 - резерфордовское, 94
 - сечение, 95
 - дифференциальное, 95
 - угол, 94, 98
 - упругое, 96
- ротор, 134, 161
- ряд
 - Тейлора, 137, 139, 193, 288
 - Фурье, 259
- свертка
 - тензоров Леви–Чивиты, 114
- свободная энергия, 308
- связность
 - симметрична, 143
 - торсионная, 143
 - связь спина со статистикой, 25
- сдвиг
 - координат, 138
 - координат и времени, 231
- сила
 - Лоренца, 180, 251
 - трения, 252
 - упругости, 252
- символ Кронекера, 107, 216, 219
- символы Кристоффеля, 146, 150
- симметрия, 14
 - действия, 38
 - дискретная, 244
 - сферическая, 82
- синглет, 213
- SO(3), 219
- сингулярная точка, 14
- скаляр, 102, 105, 128, 232
- скалярное произведение, 104
- скобка
 - Ли, 194
 - Пуассона, 74, 77, 79, 263, 272
- след, 224
- тензора, 216
- случайная величина, 16, 279
- непрерывная, 291
- смешанное произведение, 112
- собственное значение, 25, 203, 207
- матрицы спина, 207
- событие, 279
- соотношение
 - неопределеностей, 66, 68–71
 - координата-импульс, 66, 67
- сопряжение
 - комплексное, 9
 - эрмитово, 10, 202
- состояние
 - квантовое, 49, 66, 70, 264
 - зацепленное, 69
 - старшего веса, 205
 - спектр, 71
 - абсолютно черного тела, 314
 - спин, 25, 189, 199, 201, 210
 - $s = 1/2$, 221
 - $s = 1$, 202, 214
 - $s = 2$, 214
 - полуцелый, 230
 - проекция на ось z , 212
 - среднее значение, 206
 - тензора, 201
 - спинор, 222, 224

- Паули, 222
- сопряженный, 226
- среднее значение, 53, 71, 99, 281
- арифметическое, 303
- кинетической энергии, 101
- матрицы спина, 207
- потенциальной энергии, 101
- спина, 207
- статсумма, 308, 312
- стационарная точка, 294
- степень свободы, 305
- структурные константы, 270
- ступенька Хевисайда, 258
- суперпозиция, 53, 69
- состояний, 206
- сферическая гармоника, 204, 218

- температура, 307, 311
- тензор, 102, 107
- Леви-Чивиты, 112, 219
- Римана, 155, 159
- Риччи, 157
- Фрадкина, 270
- бесследовый, 216
- напряжений, 235, 241
- напряженности поля, 243
- орбитального момента, 235, 236
- поворотов, 266
- ранг, 107, 108
- симметричный, 216
- спина, 243
- углов поворотов, 235
- энергии-импульса, 175
- поля, 240
- частиц, 231
- тензорное произведение, 108, 165, 218, 271
 - двух векторов, 219
- тензорные обозначения, 106
- теорема
 - Адемолло–Гатто, 248
 - Байеса, 300
 - Белла, 71, 73
 - Гаусса, 160, 169, 181, 233
 - Нёттер, 33, 78, 79, 127, 231, 235, 240
 - теория поля, 39
 - Стокса, 161, 169, 184, 247
 - вириала, 99
- теорема Пифагора, 10
- теория
 - скрытых параметров, 65, 71, 73
- теория относительности, 45
- теория скрытых параметров, 17, 22, 61
- термодинамический потенциал, 308, 310
- термодинамическое равновесие, 305

- термостат, 305
- тождество
 - Картана, 168
 - Якоби, 75, 141, 194
- тождество Эйлера, 9
- ток
 - Нёттер, 40, 241
 - смещения, 184
 - стационарный, 183
- траектория, 12, 13, 57, 71
 - в кулоновском поле, 90
 - граничные точки, 33
 - поля, 28
 - прямая, 19, 26, 33, 46, 52
 - фиксированные концы, 30
- трансляция, 78, 190
- транспонирование, 42, 113, 119, 202
- триплет, 213
 - SO(3), 219
 - SU(3), 270

- угол
 - поворота, 197
- уравнение
 - Гейзенберга, 74, 80
 - Шрёдингера, 56, 137, 237, 241
 - волновое, 122
 - на собственные значения, 203
 - секулярное, 203
- уравнения
 - Гамильтона, 51, 57
 - Гамильтона–Якоби, 49, 53, 57, 63, 80, 82, 176, 232, 237, 264
 - релятивистской частицы, 131
 - Максвелла, 180, 185
 - Эйлера–Лагранжа, 30, 149, 239
 - движения, 28, 37

- фаза
 - волны, 50
- фазовая плоскость, 63, 74, 76
- фазовое пространство, 74
- факториал, 8, 292
- фейнмановская формулировка механики, 6, 7, 13, 22, 26, 56, 264
- фермион, 20, 23, 224, 230, 312
- флуктуация, 14
 - квантовая, 48, 52
 - энергии, 54
- формализм
 - первого порядка, 31
- формула
 - Ньютона–Лейбница, 169, 288
 - Сохотского, 260
 - Стирлинга, 292

- фотон, 51, 68, 312
- функционал, 14
 - вероятности достоверности траектории, 18, 25
 - действия, 26
 - динамический, 14
 - достоверности траектории, 14
 - инвариантный, 19
- функция
 - Гамильтона, 49, 77, 78, 82, 178, 310
 - Грина, 255, 257
 - запаздывающая, 258
 - Лагранжа, 25, 27, 28, 49, 78, 178
 - свободной нерелятивистской частицы, 43
 - свободной релятивистской частицы, 130
 - правдоподобия, 301
- частица, 13
 - нерелятивистская, 149, 237
 - релятивистская, 131
 - свободная, 12, 13, 43, 52, 64
 - релятивистская, 127
 - тождественная, 19, 22
 - черная дыра, 154
- четность
 - пространственная, 116, 118
- число e , 286
- эйконал, 51
- эксперимент
 - Майкельсона–Морли, 124
- экспонента, 9
- экстремум
 - действия, 33
 - функционала, 19, 25
- эксцентриситет, 90, 263
- электрон, 312
- элемент
 - единичный, 191
 - обратный, 191, 196
- эллипс, 91, 99, 262
 - полуось, 91
 - фокус, 91, 262
- энергия, 41, 51
 - Ферми, 313
- энтропия, 308
 - Шеннона, 309
- эргодичность, 305
- эфир, 124
- ядро гомоморфизма, 226

Литература

- [1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. “Механика”. «Наука»: Москва, 1988.
- [2] H.Goldstein, Ch.Pool and J.Safko. Classic Mechanics, Addison Wesley; 3rd edition (2000).
Г. Голдстейн, Ч. Пул, Д. Сафко. “Классическая механика”. URSS: Москва, 2012.
- [3] R.D.Gregory. Classical Mechanics, Cambridge University Press (2006),
- [4] L.N.Hand and J.D.Finch. Analytical Mechanics, Cambridge University Press (1998).
- [5] D.Morin. Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions, Cambridge University Press; 1st edition (2008).
- [6] D.Tong, Lectures on Theoretical Physics. Lecturer’s web-site in University of Cambridge:

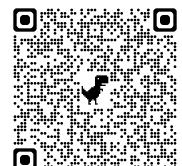


- [7] Albert Messiah. Quantum Mechanics, Dover Publications (February 17, 2014).
А. Мессиа. “Квантовая механика”. «Наука»: Москва. Т. 1, 1978; Т. 2, 1979.
- [8] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Frank Laloe. Quantum Mechanics, Volume 1, Wiley-VCH; 2nd edition (December 4, 2019);
Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Frank Laloe. Quantum Mechanics, Volume 2, Wiley-VCH; 2nd edition (December 4, 2019);
Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Frank Laloe. Quantum Mechanics, Volume 3, Wiley-VCH; 1st edition (December 16, 2019).
К. Коэн-Таннуджи, Б. Диу, Ф. Лалоэ. “Квантовая механика”. В 3-х томах. URSS: Москва, 2020.
- [9] Steven Weinberg. Lectures on Quantum Mechanics, Cambridge University Press; 2nd edition (November 9, 2015).
- [10] В.В. Киселев. “Квантовая механика”. МЦНМО: Москва, 2023.
- [11] В.И. Арнольд. “Математические методы классической механики”. УРСС: Москва, 2003.
- [12] Б.Л. ван дер Варден. “Алгебра”. «Наука»: Москва, 1979.

- [13] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. “Современная геометрия”. «Наука»: Москва, 1986.
- [14] Ю.М. Белоусов, С.Н. Бурмистров, А.И. Тернов. “Задачи по теоретической физике”. «Интеллект»: Долгопрудный, 2013.
- [15] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. “Теория поля”. «Наука»: Москва, 1976.
- [16] Дж. Джексон. “Классическая электродинамика”. «Мир»: Москва, 1965.
- [17] В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. “Современная электродинамика. Часть 1. Микроскопическая теория”. 2-е издание, исправленное. НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. Ижевск, 2005.
- [18] В.В. Киселев. “Релятивистская динамика и теория поля. Курс лекций”, 2013, интернет-ресурс:



- [19] А.А. Соколов, И.М. Тернов, В.Ч. Жуковский, А.В. Борисов. “Квантовая электродинамика”. «Изд-во МГУ»: Москва, 1983.
- [20] А.А. Соколов, И.М. Тернов, В.Ч. Жуковский, А.В. Борисов. “Калибровочные поля”. «Изд-во МГУ»: Москва, 1986.
- [21] В.А. Рубаков. “Классические калибровочные поля: Бозонные теории”. «КомКнига»: Москва, 2005.
- [22] В.А. Рубаков. “Классические калибровочные поля: Теории с фермионами. Некоммутативные теории”. «КомКнига»: Москва, 2005.
- [23] Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров, И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко. “Математика 7–9 класс. Теория вероятностей и статистика”. МЦНМО: ОАО «Московские учебники»: Москва, 2011.
- [24] Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров, И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко. “Теория вероятностей и статистика. Экспериментальное учебное пособие для 10 и 11 классов общеобразовательных учреждений”. МЦНМО: Москва, 2014.
- [25] В.Е. Гмурман. “Теория вероятностей и математическая статистика”. Высшая Школа: Москва, 2005.
- [26] В.В. Горяйнов. “Лекции по теории вероятностей”, 2022, интернет-ресурс:



- [27] S. Navas et. al.(Particle Data Group). Интернет-ресурс а сайте pdg.lbl.gov, “Reviews, Tables and Plots.” Section Mathematical Tools: Probability, 2024, по QR-коду:

