q01.

Описание движения МТ по плоской кривой.
Норм. и танг. ускор-я.
Радиус кривизны траектории.

def.

измерение расст. и времени (эталоны)

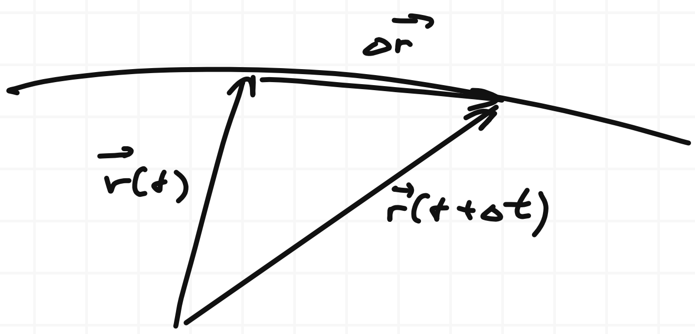
сист. отсчета
материальная точка
радиус-вектор
траектория

системы координат — начало отсчета + набор ортов

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{r} = (x, y, z)$

обобщ. сист. коорд. $\{r, \theta, \varphi\}$



$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$

$\vec{v}_{ср} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

$\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

$\vec{v}$ — касат. к траектории

$\Delta\vec{r} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\,dt = \vec{v}_{ср}(t_2 - t_1)$

$\vec{S} = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{(dt)^2}$

прямолинейное:

$\vec{v} = v\vec{\tau}$; $\vec{\tau} = const$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = a\vec{\tau}$

равн. вращ. точки по окр-ти:

$|\vec{r}(t)| = R$

$|\Delta\vec{r}| = 2R\sin\left(\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)$

$\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dfrac{d\varphi}{dt}$

$v = |\vec{v}| = \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right| = \omega R$

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

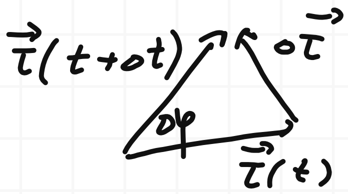
$|\Delta\vec{v}| = 2v\sin\left(\dfrac{\Delta\varphi}{2}\right)$

$a = |\vec{a}| = \left|\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right| = \omega v = \dfrac{v^2}{R}$

$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} = -\omega^2\vec{r} = \dfrac{v^2}{R}\vec{n}$

$\vec{n} = -\dfrac{\vec{r}}{r}$

общий случай движения



$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec\tau + v\frac{d\vec\tau}{dt}$$

$$\left|\frac{d\vec\tau}{dt}\right| = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = |\omega|$$

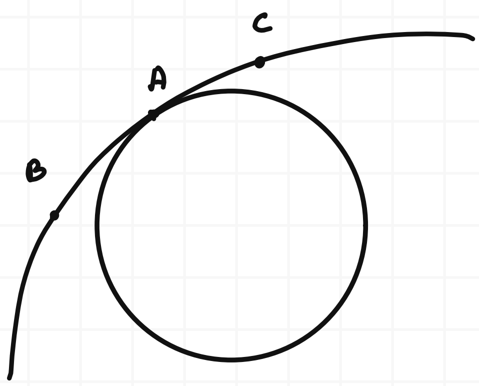
$\tau = const$

$$|\Delta\vec\tau| = 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\cdot\tau = \overset{1}{\tau}\Delta\varphi = \Delta\varphi$$

$$\frac{d\vec\tau}{dt} = \omega\vec n \overset{\text{по окр, } R}{=\!=\!=} \frac{v}{R}\vec n$$

$$\vec a = \vec a_\tau + \vec a_n \qquad \vec a_\tau = \vec\tau\frac{dv}{dt} \qquad \vec a_n = \vec n\frac{v^2}{R} = \omega^2 R\vec n$$

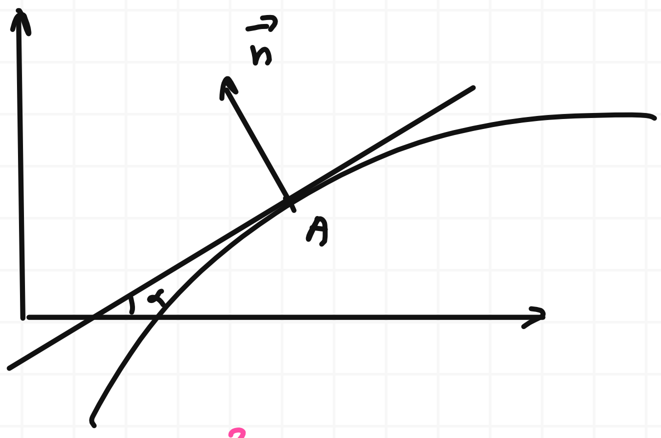
Радиус кривизны



B → A, C → A

р. крив — р. предельной окружности, описанной вокруг A, B, C

пусть кривая задана $y=f(x)$



$tg\,\alpha = \frac{dy}{dx}$ — касат.

смещение → на dx:

$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

нормаль и касат. повернутся на $d\alpha$

$$d(tg\,\alpha) = \overset{?}{d}\left(\frac{dy}{dx}\right); \quad \overset{?}{\rightsquigarrow} \quad \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{d^2y}{(dx)^2}dx$$

$$\cos^2\alpha = (1+tg^2\alpha)^{-1} = (1+y'^2)^{-1}$$

$$d\alpha = \frac{y''}{1+y'^2}dx$$

$$ds = R\,d\alpha$$

$$\boxed{R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}}$$

// пример. $y = ax^2$

$$k = \frac{1}{R} = \frac{2a}{(1+4a^2x^2)^{3/2}}$$ //