Решения задач письменного экзамена 9 января 2021 г.

1А. Выражение для 1-й космической скорости: $v_I = \sqrt{\gamma \frac{M_З}{R}}$. ЗСМИ: $r_{min} \cdot v_{max} = r_{max} \cdot v_{min}$, ЗСЭ: $\frac{(v_{max})^2}{2} - \gamma \frac{M_З}{r_{min}} = \frac{(v_{min})^2}{2} - \gamma \frac{M_З}{r_{max}}$ (r_{min} и r_{max} - минимальное и максимальное удаление от центра Земли). Подставляя v_{min} и v_{max} и решая систему, получаем: $r_{min} = \frac{2R_З}{0,8\cdot(0,8+0,6)} \approx 1.8\, R_З$; $h_{\min} = r_{min} - R_З \approx 0.8R_З = 5120$ км

1Б. (*Холин Д.И.*). Пользуясь выкладками из варианта А, получаем: $r_{max} = \frac{2R_З}{0,2(0,4+0,2)} \approx 16,7R_З =$ 107 тыс. км.

2А. В СО, связанной с точкой подвеса, эффективное значение ускорения свободного падения станет равно $\tilde{g} = \sqrt{g^2 + a^2} \approx g(1 + a^2/2g^2)$. Поправка второго порядка, поэтому ей в приближении малых колебаний следует пренебречь. При этом направление отвеса повернется на угол $\varphi_0 \approx a/g$, это и есть амплитуда колебаний стержня. Для вычисления периода малых колебаний запишем потенциальную и кинетическую энергию маятника: $\Pi = g(ml/2 + Ml)(1 - \cos\varphi) \approx gl\varphi^2/2 \cdot (m/2 + M)$; $K = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}(ml^2/3 + Ml^2)$. Отсюда для периода колебаний получаем ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{2l(m+3M)}{3g(m+2M)}}$.

2Б. Решение совпадает с вариантом А.

3А. Пусть E_1 – энергия одного гамма-кванта, E_2 – энергия другого, E_0 – их энергия покоя. Импульс позитрона $cp_+ = E_0\sqrt{\gamma^2 - 1}$.
Из закона сохранения импульса следует: $E_1 = cp_+ \cos\alpha = E_0\sqrt{\gamma^2 - 1}\cos\alpha$; $E_2 = cp_+ \sin\alpha = E_0\sqrt{\gamma^2 - 1}\sin\alpha$.
Из закона сохранения энергии следует: $\gamma E_0 + E_0 = E_1 + E_2 = E_0\sqrt{\gamma^2 - 1}\cdot(\cos\alpha + \sin\alpha)$.
Отсюда $\frac{\gamma+1}{\gamma-1} = (\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$; $\sin 2\alpha = \frac{1}{3}$; $\alpha \approx 9,7°$.

3Б. Из закона сохранения импульса следует:

$$E_0\sqrt{\gamma^2 - 1} = E_1\cos\alpha + E_2\cos 2\alpha; \text{ (1)}$$

$$E_1\sin\alpha = E_2\sin 2\alpha \text{ или } E_1 = 2E_2\cos\alpha\,. \text{ (2)}$$

Подставив (2) в (1), получим:

$$E_0\sqrt{\gamma^2 - 1} = 2E_2\cos^2\alpha + E_2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = E_2(4\cos^2\alpha - 1). \text{ (3)}$$

Из закона сохранения энергии следует:

$$\gamma E_0 + E_0 = E_1 + E_2 = E_2(2\cos\alpha + 1). \text{ (4)}$$

Поделив (3) на (4) получим: $\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\cos^2\alpha - 1}{1 + 2\cos\alpha}$.

Решая это квадратное уравнение относительно $\cos\alpha$, получим: $\cos\alpha \approx 0,933$; $\alpha \approx 21,1°$.

4А. $I = \frac{MR^2}{2}$ — момент инерции диска. Т.к. ось, по условию, тонкая, кинетической энергией поступательного движения центра масс маятника по сравнению с энергией вращения можно пренебречь. Тогда $\frac{L^2}{2I} = Mgh$; $L = \sqrt{Mgh \cdot 2I} = MR\sqrt{gh}$. Для частоты прецессии получаем $\Omega = Mgl/L = \sqrt{\frac{g}{h}}\frac{l}{R}$. $T = 2\pi/\Omega =$ 2 с.

4Б. ЗСЭ для каждого диска запишется так же, как в варианте А. В результате для момента импульса оставшегося диска в нижней точке получим аналогичное выражение: $L = MR\sqrt{gl}$. Для угловой скорости прецессии получим, с точностью до обозначений, ту же формулу: $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\frac{a}{R}$, $T = 1{,}4$ с.

5А,Б Уравнение равновесия элемента поверхности цилиндра толщиной dx, вырезанного углом $\mathrm{d}\varphi$:

$$P \cdot dx \cdot R d\varphi = \sigma_\perp \cdot h \cdot dx \cdot d\varphi \quad \Rightarrow \quad \sigma_\perp = \frac{PR}{h}.$$

Тот же результат можно получить, используя формулу для давления Лапласа.

Для напряжения вдоль трубы имеем:

$$\sigma_\parallel = \frac{P \cdot \pi R^2}{2\pi R h} = P\frac{R}{2h} = \frac{\sigma_\perp}{2}.$$

Закон Гука для связи продольной и поперечной деформации стенки трубы:

$$\begin{cases} \varepsilon_\parallel E = \sigma_\parallel - \mu\sigma_\perp = \frac{PR}{2h}(1-2\mu) \\ \varepsilon_\perp E = \sigma_\perp - \mu\sigma_\parallel = \frac{PR}{h}\left(1-\frac{\mu}{2}\right). \end{cases}$$

Для относительного изменения объёма имеем:

$$\frac{\delta V}{V} = 2\frac{\delta R}{R} + \frac{\delta L}{L} = 2\varepsilon_\perp + \varepsilon_\parallel = \frac{2PR}{hE}\left(1-\frac{\mu}{2}\right) + \frac{PR}{2hE}(1-2\mu) = \frac{PR}{hE}\cdot\frac{5-4\mu}{2} = \frac{2PR}{hE} = 1{,}5\cdot 10^{-3}.$$

Интересно отметить, что ответ не зависит от L.