Неделя 1

I. ПРОИЗВОДНАЯ   Ст. §13

32

$$f(x) = \log_x 2^x \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = (\log_x 2^x)' = (\underbrace{x}_{\smile}\underbrace{\log_x 2}_{})' = \log_x 2 + \underbrace{x}_{\smile}\underbrace{\left(\frac{\ln 2}{\ln x}\right)'}_{} = \log_x 2 + x\ln 2\left(\frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x}\right) =$$

$$= \frac{\ln 2}{\ln x} - \frac{\ln 2}{\ln^2 x} = \frac{\ln 2(\ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

67

$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x \neq 0$$

$$f'(x) = -\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot(-1)\,x^{-2} = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$

106

$$f(x) = 3^{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \left(3^{\cos^2 x}\right)' = 3^{\cos^2 x}\cdot\ln 3\,(\cos^2 x)' = \ln(3)\cdot 3^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x(-\sin x) =$$

$$= -2\sin x\cos x\cdot 3^{\cos^2 x}\cdot\ln 3 = -\sin 2x\cdot 3^{\cos^2 x}\cdot\ln 3$$

149

$$f(x) = x^{x^x}$$

$$// \quad (x^x)' = (e^{x\ln x})'_x = e^{x\ln x}(x\ln x)'_x = e^{x\ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1) \; //$$

$$f'(x) = \left(e^{\ln x\cdot(x^x)}\right)'_x = e^{x^x\ln x}(x^x\cdot\ln x)'_x = e^{x^x\ln x}\left(x^{x-1} + \ln x\cdot x^x(\ln x+1)\right) =$$

$$= x^{x^x}\left(x^x\cdot\frac{1}{x} + x^x\cdot\ln x(\ln x+1)\right) = x^{x^x}x^x\left(\frac{1}{x} + \ln x(\ln x+1)\right)$$

T.1

$$y = \left(\frac{\operatorname{tg}\sqrt{1-\log_3 2x}}{\operatorname{cth}(x^3+3e^{x^7})}\right)^{\arccos 2x^2} = \left[\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{tg}\sqrt{1-\log_3 2x} \\ g(x) &= \operatorname{cth}(x^3+3e^{x^7}) \\ h(x) &= \arccos 2x^2 \end{aligned}\right] = \left(\frac{f}{g}\right)^h$$

$$y' = \left(\left(\frac{f}{g}\right)^h\right)' = h\left(\frac{f}{g}\right)^{h-1}\left(\frac{f}{g}\right)' =$$

$$= h\left(\frac{f}{g}\right)^{h-1}\left(\frac{f'g - g'f}{g^2}\right)$$

$$// \quad f'(x) = \frac{\left(\sqrt{1-\log_3 2x}\right)'}{\cos^2\sqrt{1-\log_3 2x}} = \frac{-(\log_3 2x)'}{2\cos^2\left(\sqrt{1-\log_3 2x}\right)\cdot\sqrt{1-\log_3 2x}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-\log_3 2x}\,\cos^2\left(\sqrt{1-\log_3 2x}\right)}\cdot\frac{\cancel{2}}{(\cancel{2}x)\ln 3} \; //$$

$$f'(x) \; \frac{1}{2x\ln 3\sqrt{1-\log_3 2x}\,\cos^2\sqrt{1-\log_3 2x}}$$

$$g'(x) = -\frac{3x^2+3(e^{x^4})'}{sh^2(x^3+3e^{x^4})} = -\frac{3x^2+3e^{x^4}\cdot 4x^3}{sh^2(x^3+3e^{x^4})} = -\frac{3x^2+12x^3e^{x^4}}{sh(x^3-3e^{x^4})}$$

$$h'(x) = -\frac{2\cdot 2x}{\sqrt{1-(2x^2)^2}} = -\frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2)^2}}$$

//

ответ, где $\underbrace{f, g, h}_{\text{см. пред. стр.}}$, $\underbrace{f', g', h'}$

II. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ C2, §1

2.15

$$\int \sin^2\frac{x}{2}dx = \int\frac{1-\cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int\cos x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C$$

2.16

$$\int ctg^2 x\,dx = \int\frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -ctg\,x - x + C$$

12.2

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = \left[\begin{matrix} t = 1+x \\ x = t-1\end{matrix}\right] = \int(t-1)\sqrt{t}\,dt = \int t\sqrt{t}\,dt - \int\sqrt{t}\,dt = \frac{t^{5/2}}{5/2} - \frac{t^{3/2}}{3/2} + C =$$

$$= \frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$$

17.4

$$\int x\ln x\,dx = \int\underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{x\,dx}_{dv} = \left[\begin{matrix}\int dv = \int x\,dx \\ v = \frac{x^2}{2}+C\end{matrix}\right] = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x\,dx}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 + C = \frac{1}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C$$

23.5

$$\int \arcsin^2 x\,dx = \left[\begin{matrix} x = \sin t \\ \arcsin x = t \\ dx = \cos t\,dt\end{matrix}\right] = \int t^2\cdot\underbrace{\cos t\,dt}_{d(\sin t)} = t^2\sin t - \int\sin t\cdot 2t\,dt =$$

$$= t^2\sin t + 2\int t\,d(\cos t) = t^2\sin t + 2\left(t\cos t - \int\cos t\,dt\right) =$$

$$= t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t + C$$

24.3

$$I=\int \underbrace{e^{ax}}_{u}\underbrace{\sin bx\,dx}_{dv}=\left[\begin{array}{l}\sin bx\,\frac{d(bx)}{b}=\\ =\frac{1}{b}\sin bx\,d(bx)=\\ =-\frac{1}{b}d(\cos bx)\end{array}\right]=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\int+\frac{a}{b}e^{ax}\underbrace{\cos bx\,dx}_{\frac{1}{b}d(\sin bx\,d(bx))}=$$

$$=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\Big(e^{ax}\cdot\frac{1}{b}\sin bx-\underbrace{\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx}_{I}\Big)$$

$$I=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx-\frac{a^2}{b^2}I$$

$$I\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right)=\frac{1}{\cancel{b}}e^{ax}\left(\frac{a}{b}\sin bx-\cos bx\right)$$

$$I=\frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\left(\frac{a}{b}\sin bx-\cos bx\right)$$

III. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ПОСЛ-ТИ

Сл. §7

275.3

$$\left\{\frac{n+(-1)^n}{3n-1}\right\}$$

сверху

$$\frac{n+(-1)^n}{3n-1}\leq\frac{n+1}{3n-1}<\frac{n-1}{3(n-1)}+\frac{2}{3(n-1)}=\frac{1}{3}+\underbrace{\frac{2}{3(n-1)}}_{\substack{n\to+\infty\\ \downarrow\\ 0}}<1$$

снизу:

$$\frac{n+(-1)^n}{3n-1}\geq\frac{n-1}{3n-1}>\frac{n+1}{3(n+1)}-\frac{2}{3(n+1)}=\frac{1}{3}-\underbrace{\frac{2}{3(n+1)}}_{\substack{n\to+\infty\\ \downarrow\\ 0}}>0$$

276.7

$$\left\{\frac{n^3}{n^2+1}\right\}$$

$$n\frac{n^2}{n^2+1}=n\left(\frac{n^2+1}{n^2+1}-\frac{1}{n^2+1}\right)=\underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{n}\Big(1-\underbrace{\frac{1}{n^2+1}}_{\substack{\downarrow\\ 0}}\Big)\to\infty$$

279.2

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1},\ n\in\mathbb{N}$$

$$x_n\ ?\ x_{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}\ ?\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}+\frac{1}{4(n+1)^2-1}$$

$$0\ ?\ \frac{1}{4(n+1)^2-1}$$

точка смены знака:

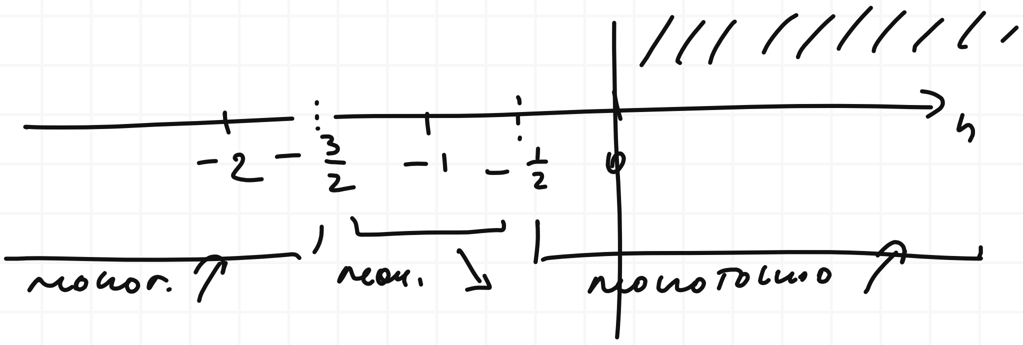
$$4(n+1)^2 - 1 = 0$$

$$(n+1)^2 = \frac{1}{4}$$

$$n+1 = \pm\frac{1}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} n = -\frac{3}{2} \\ n = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

как ведет себя последоват-ть?



но $n \in \mathbb{N}$, а значит посл-ть монотонно ↗

(очевидно, огр. снизу самым первым эл-ом)

$$\inf(x_n) = x_1 = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$$

Найдем $\sup(x_n)$.

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right); \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \ldots + \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{\to 0}\right) \to \frac{1}{2}$$

$$\sup(x_n) = \frac{1}{2}$$

300.2

$$\{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\}$$

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \quad ? \quad \sqrt{(n+1)+2} - \sqrt{(n+1)+1}$$

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \quad ? \quad \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}$$

$$\underset{\geq 0}{2\sqrt{n+2}} \quad ? \quad \underbrace{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+3}}_{\geq 0} \qquad |\_^2$$

$$\cancel{4n+8}\;\; 2n+4 \quad ? \quad \cancel{n+1} + \cancel{n+3} + 2\sqrt{(n+1)(n+3)})$$

$$\underbrace{n+2}_{\text{с } n>-2} \geq 0 \quad ? \quad \underset{\geq 0}{\sqrt{(n+1)(n+3)}} \qquad |\_^2$$

$$\cancel{n^2} + \cancel{4n} + 4 \quad ? \quad \cancel{n^2} + \cancel{4n} + 3$$

$$4 > 3$$

с $n > -2$ эта последовательность монотонно ↘

Неделя 2.

III. С1. §8

2(4)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2-n}{2+n} \overset{?}{=} -1$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}: n \geq N \overset{?}{\hookrightarrow} |x_n + 1| < \varepsilon$

$$|x_n+1| = \frac{2-n}{2+n} + 1 = \frac{2-\cancel{n}+2+\cancel{n}}{2+n} = \frac{4}{2+n} < \varepsilon$$

$4 < (2+n)\varepsilon$

$n\nearrow$

$\frac{4}{\varepsilon} < 2+n$

$\frac{4}{\varepsilon} - 2 < n \quad ; \quad n > 2 - \frac{4}{\varepsilon}$

$N = 3 - \frac{4}{\varepsilon}$ подойдет

13(1)

$x_n = (-1)^n \quad \overset{?}{-}$ расходится

$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0: \forall N \in \mathbb{N} \hookrightarrow \exists n \geq N \quad |x_n - a| \geq \varepsilon$

if $a \neq \pm 1$, то возьмем такое ε, чтобы $\pm 1 \notin U_\varepsilon(a)$ (можем сделать по т. о непересек. окр-тях)

$x_n = \pm 1$, соотв. $|x_n - a| \geq \varepsilon$

else, т.е. если $a = \pm 1$, возьмем $\varepsilon = 1$ и $n: x_n = \mp 1$, выполн.

q.e.d.

15(1)

$x_n = (-1)^n n \quad \overset{?}{-}$ расх., т.е. $\left[\begin{array}{l}\text{не имеет предела} \\ \text{имеет беск. пр.}\end{array}\right.$

д-м, что не имеет предела. От противного.

$\exists\ \exists a: \forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

Возьмем $\varepsilon = 1$.

$n = 2k: \quad x_{2k} = (-1)^{2k} n = n; \qquad x_n \in (a-1, a+1)$

$n = 2k+1: \quad x_{2k+1} = (-1)^{2k+1} n = -n; \qquad x_n \in (-a-1, -a+1)$

эти интервалы не пересекаются, или для достат. больших значений n x_n им не принадлежит. Против-е.

$\exists n = \max(2N, |a+1+N|)$

27.

$\exists \lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$ — дано. $\left[\begin{array}{l}\exists s \in \mathbb{N}: x_s = \sup(x_n) := m \\ \exists i \in \mathbb{N}: x_i = \inf(x_n) := M\end{array}\right.$ — д-ть

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$

Выберем такой ε, чтобы $\left[\begin{array}{l} m \notin U_\varepsilon(a) \\ M \notin U_\varepsilon(a)\end{array}\right.$. Не умаляя общности будем считать, что $m \notin U_\varepsilon(a)$.

Тогда вне $U_\varepsilon(a)$ — конечное число членов x_n. Т.е. m или достиг., или меньше $\min(x_n \notin U_\varepsilon(a))$. пр-е.

q.e.d.

N25(1)

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$\overset{?}{\exists} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} \overset{?}{=} \sqrt{a}$

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{a}} \varepsilon := \tilde{\varepsilon}$$

Ура: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow \left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| < \tilde{\varepsilon}$

N46 (1, 2, 4) $\quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$: $\quad x_n = \frac{1}{n^2}$; $y_n = \frac{1}{n}$; $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{1} = \frac{1}{n}$

(2) $\lim \frac{x_n}{y_n} = 1$: $\quad x_n = \frac{1}{n}$; $y_n = \frac{1}{n}$; $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{1} = 1$

(3) $\lim \frac{x_n}{y_n} \ \neg\exists$: $\quad x_n = \frac{1}{n}$; $y_n = 0$ $\quad \frac{x_n}{y_n} \ \neg\exists$

17(1) $\quad n, N \in \mathbb{N}$ (здесь и далее)

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \qquad ?\exists \lim |x_n| \overset{?}{=} |a|$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tilde{N}: \forall n \geq \tilde{N} \hookrightarrow |x_n - a| < \tilde{\varepsilon} \qquad x_n - a \geq x_n - |a|$

// $\quad |a| - |b| = |a - b + b| - |b| \leq |a - b|$; $|a| - |b| \leq |a - b|$
ан-но $|b| - |a|$; $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$ //

$\tilde{\varepsilon} > |x_n - a| \geq \big||x_n| - |a|\big|$ (*)

Хотим д-ть:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow \big||x_n| - |a|\big| < \varepsilon$

из (*) видим, что для $N = \tilde{N}$, $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$ уже будет выполняться.

17(2)

$x_n = (-1)^n$ — x_n расх.

$|x_n| = |(-1)^n| = 1$ — $|x_n| \to 1$

ура!

T.2

$$x_n = \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_0}{b_q n^q + \ldots + b_0} \circledequal \quad (a_p \neq 0,\ b_q \neq 0)$$

$$\circledequal \frac{n^p\left(a_p + a_{p-1}\frac{1}{n} + \ldots + a_0 \cdot \frac{1}{n^p}\right)}{n^q\left(b_q + b_{q-1}\frac{1}{n} + \ldots + b_0 \cdot \frac{1}{n^q}\right)} \boxed{=}$$

I. $p = q$: $\dfrac{a_p + \underbrace{(\ldots)}_{\to 0}}{b_q + \underbrace{(\ldots)}_{\to 0}} \to \dfrac{a_p}{b_q}$; $\lim x_n = \dfrac{a_p}{b_q}$

II. $p > q$: $\dfrac{a_p n^{p-q} + a_{p-1} n^{p-q-1} + \ldots + a_q + \underbrace{(\ldots)}_{\to 0}}{b_q + \underbrace{(\ldots)}_{\to 0}} \to \infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

III. $p < q$: ан-но, только $\begin{matrix}\text{числ} \to a_p \\ \text{знам} \to \infty\end{matrix}$ $\to 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

91

x_n – беск. больш $\underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightleftarrows}}$ x – неогр

$\forall M>0\ \exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow x_n > M$ $\qquad$ $\forall M>0\ \exists n: x_n > M$

(1) да, верно

$\forall M>0\ \exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow x_n > M$. Возьмем $n = N$. Для него услов. неогр. выполн. q.e.d.

(2) нет, неверно

Контрпример: $x_n = \begin{cases} 0 & ; n \,\vdots\, 2 \\ n & ; n \not\vdots\, 2 \end{cases}$

$\forall M>0\ \exists n: x_n > M$ – выполн., но $\forall M>0\ \forall N>0\ \exists n = 2k \hookrightarrow x_n < M$ (т.к. $=0$)

53(1)

$x_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$ $\qquad$ Д-м, что $x_n \to 0$.

$$x_n = \frac{(\cancel{n^2}+1)-(\cancel{n^2}-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} = \frac{\overset{\to 2}{2}}{\underbrace{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}_{\to\infty}} \to 0$$

q.e.d. $\quad \underline{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0}$

7

$$|q|<1 \overset{?}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

$q=0$ - очевидно

$q>0$: $\forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n\geq N \hookrightarrow |q^n| \overset{?}{<} 1$

или $n=2k;\ k\in\mathbb{N}$

$$|q^n| = q^n = \underset{\overset{\wedge}{1}}{q} \cdot\ldots\cdot \underset{\overset{\wedge}{1}}{q} < 1, \text{ q.e.d.}$$

$q<0$: $|q^n| = -|q|^n = -\underbrace{|q|^n}_{\overset{\wedge}{1}} < 1$, q.e.d.

и $n=2k+1$

60 (для всех $a>0$)

Неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad n\in\mathbb{N},\ x>-1$$

$a>0$ $\quad ?\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

I. если $a>1$

$x_n = \sqrt[n]{a}$; $y_n = \sqrt[n]{a}-1$; $\forall n\in\mathbb{N}\ y_n>0$

$a = (1+y_n)^n \geq 1+ny_n > ny_n = n(\sqrt[n]{a}-1)$; $\frac{a}{n} > y_n$

$$\forall n\in\mathbb{N} \hookrightarrow \underset{\underset{0}{\downarrow}}{0} < y_n < \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{a}{n}} \Rightarrow y_n\to 0;\ \underline{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1}, \text{ q.e.d.}$$

II если $a=1$, очевидно

III если $0<a<1$ $\quad a=\frac{1}{b}$; $b>1$

$x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$, $\sqrt[n]{b}\to 1$; $\underline{x_n\to 1}$, q.e.d.

67

с какого-то номера это k найдется

$\lim \frac{a^n}{n!} \overset{?}{=} 0$

$\exists k$: $2|a|<k+1$; $\frac{|a|}{k+1} < \frac{1}{2}$; ...

$$\underset{\underset{0}{\downarrow}}{0} < \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdot\ldots\cdot\underset{\overset{\wedge}{1/2}}{\frac{|a|}{k}}\cdot\underset{\overset{\wedge}{1/2}}{\frac{|a|}{k+1}}\cdot\ldots\cdot\underset{\overset{\wedge}{1/2}}{\frac{|a|}{n}} < \underbrace{\frac{|a|^k}{k!}}_{const}\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}} \to 0$$

по теор. о сжатой п-ти: $\left|\frac{a^n}{n!}\right| \to 0$

ан-но $-\left|\frac{a^n}{n!}\right| \to 0$

$\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ q.e.d.

74 (1)

$$x_n = \sqrt[n]{3^n - 2^n} = 3 \cdot \underbrace{\sqrt[n]{1 - \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 0}}}_{\to 1} = 3 \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 3$$

71 (1)

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ - ?

$x_n = \frac{n!}{n^n}$

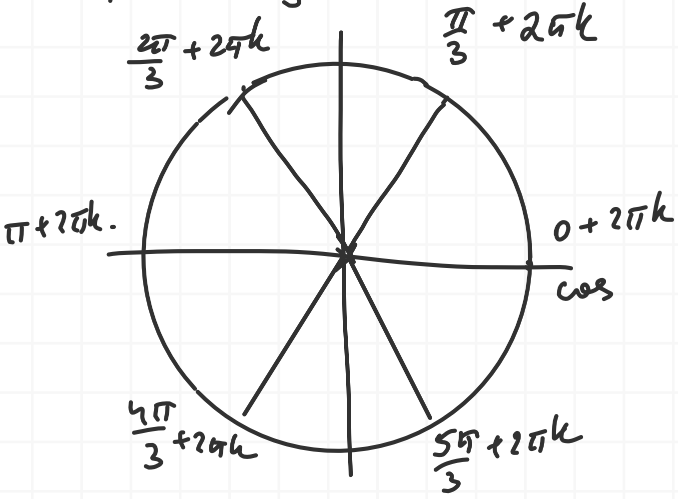
$$\underset{\downarrow \atop 0}{0} < \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{n}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Неделя 3.

C1, §8 <u>116(1)</u>

$x_n = \cos\frac{\pi n}{3}$



$\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi(n+6k)}{3}\right)$; $k \in \mathbb{N}$

n	$\cos\frac{\pi n}{3}$
$0+6k$	1
$1+6k$	$1/2$
$2+6k$	$-1/2$
$3+6k$	-1
$4+6k$	$-1/2$
$5+6k$	$1/2$

мн-во всех значений, а также ч.п.

Ↄ мн-во ч.п. — L

$L = \{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$ ответ

$\varliminf_{n\to\infty} x_n = -1$; $\varlimsup_{n\to\infty} x_n = 1$

<u>117(2)</u>

$x_n = (-1)^n \frac{3n-1}{n+2}$

$n = 2k$; $k \in \mathbb{N}$: $x_n = \frac{3n-1}{n+2}$

$n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$: $x_n = -\frac{3n-1}{n+2} = \frac{1-3n}{n+2}$

$\lim_{n\to\infty} x_{2k} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n+2} = \left[\frac{3n-1}{n+2} = \frac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} \to 3\right] = 3$

$\lim_{n\to\infty} x_{2k-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-3n}{n+2} = -3$

$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = 3$

$\underline{\varliminf_{n\to\infty} x_n = -3}$

x_{2k} ? $x_{2(k+1)}$

$\frac{3n-1}{n+2}$? $\frac{3(n+1)-1}{(n+1)+2}$

$\frac{3n-1}{n+2>0}$? $\frac{3n+2}{n+3>0}$

$(3n-1)(n+3)$? $(n+2)(3n+2)$

$\overset{+0}{\cancel{3n^2} \cancel{-n+9n} \cancel{-3}}$? $\overset{+7}{\cancel{3n^2} \cancel{+6n+2n} \cancel{+4}}$

$0 < 7$

$x_{2k}\uparrow$

$\sup x_{2k} = 3$

$\inf x_{2k} = x_2 = \frac{3\cdot 2-1}{2+2} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

x_{2k-1} ? $x_{2(k+1)-1}$

$\frac{1-3n}{n-2}$? $\frac{1-3(n+1)}{(n+1)+2}$

$>$ (см. ←)

$x_{2k-1}\downarrow$

$\inf x_{2k-1} = -3$

$\sup x_{2k-1} = x_1 = \frac{1-3}{1-2} = \frac{+2}{+1} = 2$

Итак:

$\underline{\sup x_n} = \max(\sup x_{2k}, \sup x_{2k-1}) = \underline{3}$

$\underline{\inf x_n} = \min(\inf x_{2k}, \inf_{2k-1}) = \underline{-3}$

121

дано: x_n – неогр   д-ть (x_n – беск. больш) xor ($\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in \mathbb{R}$) = true

1) $\exists\ x_n$ - беск. большая, т.е. $\forall M>0\ \exists N: \forall n \geq N \hookrightarrow x_n > M$.
Очевидно, что конечных ч.п. $\nexists$:

$$\forall a: \exists \varepsilon>0\ \forall N: \exists k \geq N \hookrightarrow |x_{n_k}-a|<\varepsilon \iff \left[\begin{array}{l} x_{n_k}-a<\varepsilon \\ x_{n_k}-a>-\varepsilon \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x_{n_k}<a+\varepsilon \\ x_{n_k}>a-\varepsilon \end{array}\right.$$

$\exists M > a+\varepsilon: \exists N: \forall n \geq N\ \underline{x_n} > M > \underline{a+\varepsilon}$ $\longrightarrow$ прот-е!

2) $\exists\ x_n$ – имеет конеч. ч.п. $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$

$\exists M > a: \forall N\ \exists n \geq N \hookrightarrow x_n > M$, в частн. $\exists \varepsilon: x_{n_k} \notin U_\varepsilon(a)$ – против-е!

3) $\exists\ x_n$ - неогр, но не беск. больш. и не имеет ч.п.

не беск. больш: $\exists M > 0\ \forall N: \exists n \geq N \hookrightarrow |x_n| \leq M$
можем составить подпосл-ть из таких n. – x_{n_k}
она огр, а значит у x_{n_k} есть конечный предел.

136

(1) $x_n = \{1, \frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots\}$

(2)

$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{-2}{1}$	...
$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{-2}{2}$	
$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{3}$	

a_n – такие номер, как изобр. слева

x_n – запишем элементы a_n так:
$a_1\ a_2\ a_1\ a_2\ a_3\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \dots$

$x_n = \{0, 1, 0, 1, \frac{1}{2}, \dots\}$

146 $\{x_n\}$ – фунд, т.е:

$\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall m,n\geqslant N \hookrightarrow |x_m-x_n|<\varepsilon \iff \forall\varepsilon>0\quad \exists n>N \hookrightarrow |x_n-x_N|<\varepsilon$

„$\Rightarrow$" очевидно $m=N$

„$\Leftarrow$" $|x_n-x_N|<\varepsilon$

$$\underbrace{|x_m-x_n|\leqslant}_{\text{нер-во } \Delta} \underbrace{|x_m-x_N|}_{<\varepsilon}+\underbrace{|x_n-x_N|}_{<\varepsilon}<2\varepsilon \quad ✓$$

143(3) Докажем сходимость по критерию Коши, воспользуясь равносильной форм. из. 146 (*)

$x_n = 1+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N \hookrightarrow |x_n-x_N|<\varepsilon$

$$|x_n-x_N|=\frac{1}{(n+1)!}+\dots+\frac{1}{N!}\leqslant\frac{N-n}{(n+1)!}\leqslant\frac{N}{(n+1)!}\leqslant\underbrace{\frac{N}{(N+1)!}<\varepsilon}_{\text{подбр. } N \text{ по этому условию}}$$

147(4) Д-м: $\exists\varepsilon>0\ \forall N: \exists n,m>N \hookrightarrow |x_n-x_m|\geqslant\varepsilon$

$\varepsilon=$ ___ $n=$ ___ $m=$ ___

$x_n=\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n$

$n=2k$

$m=2k+1$

$$|x_n-x_m|=\Big|\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e}-\underbrace{\left(1-\frac{1}{m}\right)^m}_{1>\ \cdot\ >0}\Big|>e$$

q.e.d.

158

$\forall p\in\mathbb{N} \hookrightarrow \lim|x_{n+p}-x_n|=0$

$$x_n=\begin{cases}0, & n\equiv 0 \pmod p\\ 1, & n\equiv 1 \pmod p\\ \vdots & \\ p-1, & n\equiv p-1 \pmod p\end{cases}$$

164(1)

$x_1=13 \qquad x_{n+1}=\sqrt{12+x_n}$

Исследуем монотонность $\{x_n\}$:

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{12+x_n}-x_n=\frac{12+x_n-x_n^2}{\sqrt{12+x_n}+x_n}=-\frac{x_n^2-x_n-12}{x_n+\sqrt{12+x_n}}=$$

$$=-\frac{(x_n+3)(x_n-4)}{x_n+\sqrt{12+x_n}}$$

Д-м, что $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n > 4$. По индукции.

База: $x_1 = 13 > 4$

Переход: предположим, $x_n > 4$

$$x_{n+1} = \sqrt{\underbrace{12 + \underset{\vee}{x_n}}_{\underset{16}{\vee}}} > 4$$

$$x_{n-1} - x_n = -\frac{\overset{>0}{(x_n+3)}\overset{>0}{(x_n-4)}}{\underbrace{x_n + \sqrt{12+x_n}}_{>0}} < 0$$

получается, $\{x_n\}$ монотонно убывает и огр. слева $(x_i > 4)$.

Значит, по т. Вейерштрасса $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$

$a = \sqrt{12+a}$; $a^2 - a - 12 = 0$; $(a+3)(a-4) = 0$; $a = -3$ – не подх.

$a = 4$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$ ← ответ

220.

$x_1 > 0$

$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ $\qquad\qquad \lim x_n - ?$

$a > 0$; $n \in \mathbb{N}$

заметим, что $\forall \alpha > 0$ $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$, т.к. $\alpha^2 + 1 - 2\alpha = (\alpha - 1)^2 \geq 0$

Д-м, что $\lim x_n = \sqrt{a}$.

$\exists x_n = \alpha\sqrt{a}$, $\alpha > 0$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha\sqrt{a} + \frac{a}{\alpha\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{a}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \geq \sqrt{a}$$

$\forall n \geq 2$ $x_n \geq \sqrt{a}$, $\quad \exists x_n = k_n\sqrt{a}$; $k_n \geq 1$

исследуем на монотонность:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} - x_n\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x_n}\left(a - x_n^2\right) = \frac{1}{2}\cdot\overset{>0}{\frac{1}{x_n}}\overset{\leq 0}{\left(a - \underbrace{k_n^2 a}_{\geq a}\right)} \leq 0$$

$\{x_n\} \searrow$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n > 0 \hookrightarrow \{x_n\}$ огр. снизу

По т. Вейерштр. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b \in \mathbb{R}$

$$b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right); \quad \overset{b}{\cancel{2b}} = \cancel{b} + \frac{a}{b}; \quad b^2 = a; \quad b = \sqrt{a}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$$

246

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ $\quad ?\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n) = 0$

$$\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n) = \underset{\downarrow\atop 0}{\frac{x_1}{n}} + \ldots + \underset{\downarrow\atop 0}{\frac{x_n}{n}} \to 0 \quad \left(\lim \frac{x_i}{n} \to 0, \text{ т.к. б.малая} \cdot \text{огр.}\right)$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

$$\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n) = \frac{1}{n}(x_1-a+x_2-a+\ldots+x_n-a)+a \ \textcircled{=}$$

$\{y_n\}:\ y_n = x_n - a$; y_n – беск. малая

$$\textcircled{=}\ \underbrace{\frac{1}{n}(y_1+y_2+\ldots+y_n)}_{\substack{\downarrow \\ 0}\ (\text{см. п. (1)})} + a \to a$$

q.e.d.

(3) $\{x_n\}$ – расходящ.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)$

$$x_n = \begin{cases} 1, & n \not\vdots\, 2 \\ -1; & n \vdots\, 2 \end{cases}$$

$\{x_n\}$ расход.

$$\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n) = \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{n}(\cancel{1}-\cancel{1}+\cancel{1}-\cancel{1}+\ldots+1) & n=2k+1 \\ \frac{1}{n}(\cancel{1}-\cancel{1}+\ldots+\cancel{1}-\cancel{1}) & n=2k \end{array}\right. = \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{n} & \to 0 \\ 0 & \to 0 \end{array}\right.$$

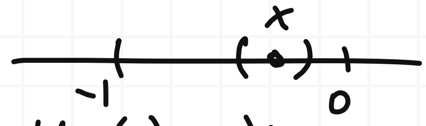
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n) = 0$$

ответ

IV. Топология и мощность множеств

Т.4

$A = (-1;0] \cup ([1;2] \cap \mathbb{Q}) \cup \{3\}$



а) $\operatorname{int} A = (-1;0)$ $\qquad$ $\forall x \in \operatorname{int} A \ \exists \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_\varepsilon(x) \in X$

возьмем $\varepsilon = \min(x-(-1),\ 0-x)$

б) $\operatorname{cl} A = [-1;0] \cup [1;2] \cup \{3\}$ $\qquad$ $\{3\} \cup [-1,0]$ очев, $\forall x \in [1,2]$ в ε-окр найдем $\mathbb{Q}$ число

в) $\partial A = \{-1,0\} \cup [1;2] \cup \{3\}$ $\qquad$ гран = т. прик \ внутр. точки

г) $A' = [-1,0] \cup [1;2]$ $\qquad$ $\{-1;0\}$ – посл. вида $b + \frac{1}{n} \to b$ $\left(\begin{array}{l} b=-1 \\ b=0 \end{array}\right)$

$[1;2]$ – $\forall \varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(a)$ найд. $\mathbb{Q}$ число, будем сопряг. опр-ю, построим посл-ть

д) $\{3\}$

Т.5

$$A = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}\right)\right) \cup \left\{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

а) $\operatorname{int} A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{3^n}; \frac{2}{3^n}\right)$ $\qquad$ рассуждение совершенно аналогично Т.4.

б) $\operatorname{cl} A = \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{3^n}; \frac{2}{3^n}\right]\right) \cup \left\{\frac{n+1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{1\}$

в) $\delta A = \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}\right\}\right) \cup \left\{\frac{n+1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{1\}$

г) $A' = \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{3^n}; \frac{2}{3^n}\right]\right) \cup \{1\}$

д) изолир. т. $A = \left\{\frac{n+1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$

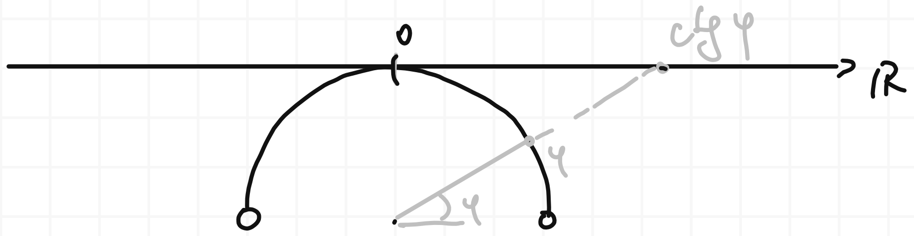
Т.6 (а)

$$\operatorname{card}(0,1) \underset{(1)}{=} \operatorname{card}(0,\pi) \underset{(2)}{=} \operatorname{card} \mathbb{R}$$

$(0,\pi)$ — полуокружность единичного радиуса с выколотыми гранич. точк.

(1) биекция $\quad f: x \mapsto \arccos(2x-1)$, $\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad x \in (0,1)$, $\arccos(2x-1) \in (0;\pi)$

(2) биекция: $\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f: \varphi \mapsto \operatorname{ctg} \varphi$, $\quad \varphi \in (0;\pi)$, $\operatorname{ctg}\varphi \in \mathbb{R}$



T.6(б)

$[0,1] \to (0,1)$ построим биекцию

] $0 \mapsto \frac{1}{2}$, а все ост. числа переходят в себя

$1 \mapsto \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} \mapsto \frac{1}{8}$

$\frac{1}{4} \mapsto \frac{1}{16}$

$f: [0;1] \to (0,1)$

$x \mapsto f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x=0 \\ \frac{x}{4}, & x = 2^{-k}, k \in \mathbb{N}_0 \\ x, & \text{else} \end{cases}$$

V. Функции. Предел функции. Непрерывность

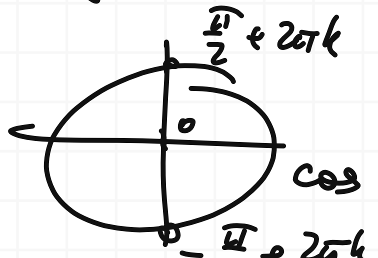
Сл. §7. 218(5)

$\frac{a^2}{2}$

$f(x) = \sin\frac{1}{x}$

$f'(x) = \cos\frac{1}{x}\cdot(-1)\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$

точки смены монотонности: (или разрыва) $f'(x)=0$



$-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} = 0$; $\cos\frac{1}{x} = 0$

$\frac{1}{x} = \frac{\pi+2\pi k}{2}$; $k\in\mathbb{Z}$ $\wedge$ $x\neq 0$

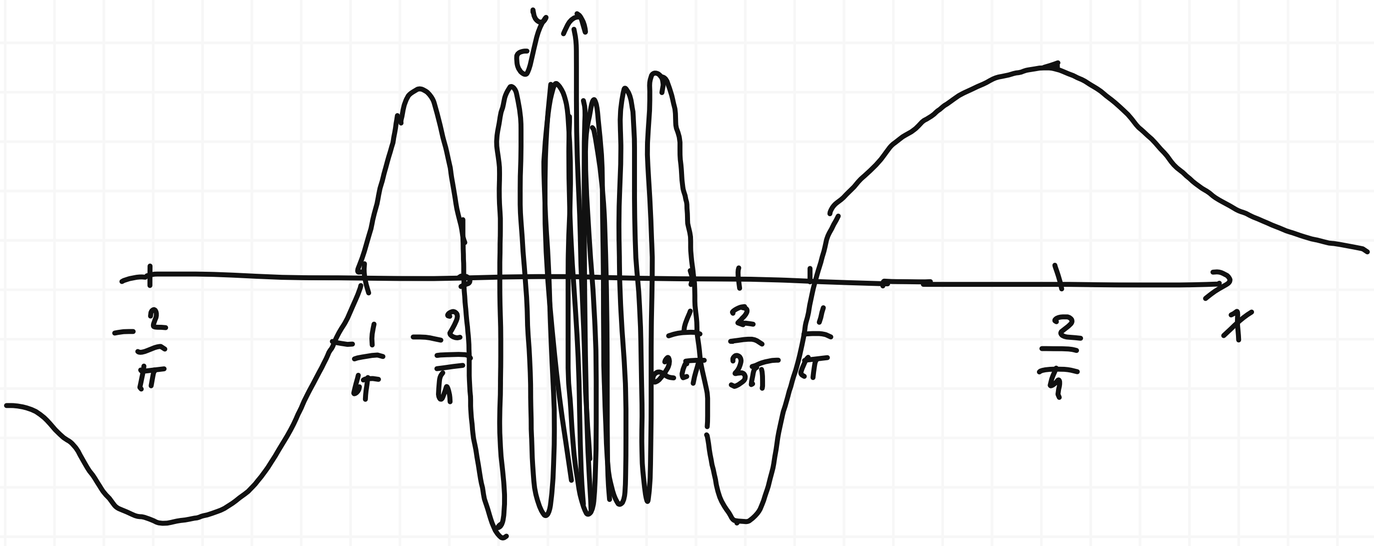
$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{3} =$

$x\neq 0 \wedge x = \frac{2}{\pi+2\pi k} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+2k}$

$\frac{2}{\pi}$ $(k=0)$; $-\frac{2}{\pi}$ $(k=-1)$

корни: $f(x)=0 \iff \sin\left(\frac{1}{x}\right)=0 \iff \frac{1}{x} = \pi k$; $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$; $x = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k}$

$\frac{1}{\pi}$ $(k=1)$; $\frac{1}{2\pi}$ $(k=2)$; $-\frac{1}{\pi}$ $(k=-1)$



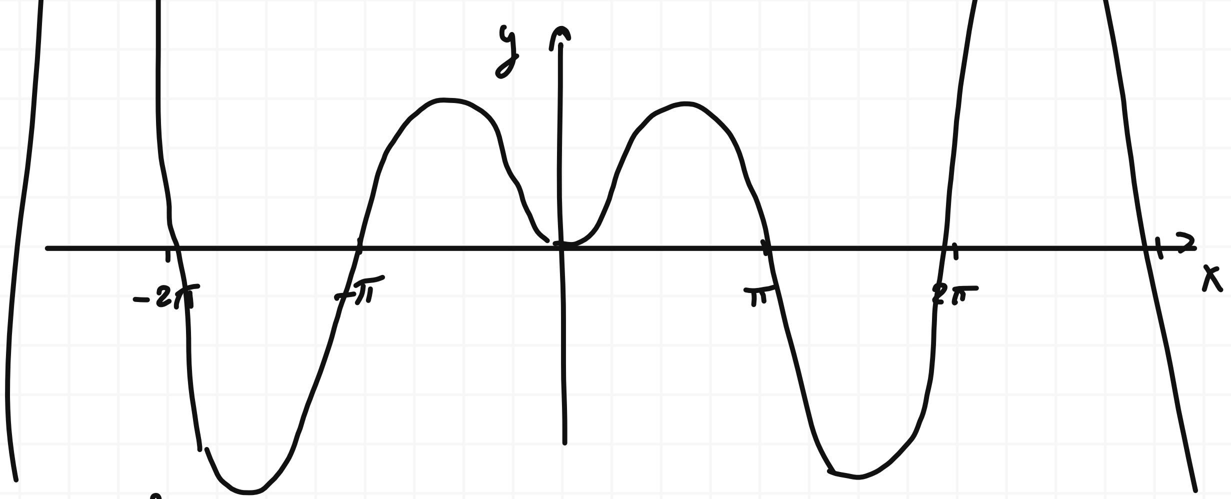
219(2)

$y = x\sin x$

корни: $f(x)=0$ $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ \sin x = 0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pi k;\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$ $x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

смена монотонности/разрыв: $f'(x)=0$; $f'(x) = x\cos x + \sin x = 0$

$f(-x) = -x\sin(-x) = x\sin x = f(x)$ — четная



Cl. § 3. <u>1(1)</u>

$f(x) = x^2,\ x_0 = 2,\ a = 4,\ \varepsilon = 0{,}001$

$\delta > |x - x_0| > 0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$ $\qquad \delta - ?$

$|x^2 - 4| < 0{,}001$

$x^4 - 8x^2 + 16 - 10^{-6} < 0$

$\frac{D}{4} = 16 - (16 - 10^{-6}) = 10^{-6};\ \sqrt{\frac{D}{4}} = 10^{-3}$

$x = 4 \pm 10^{-3}$

$x \in (4 - 10^{-3};\ 4 + 10^{-3})$

true

$\delta > |x - x_0| > 0$

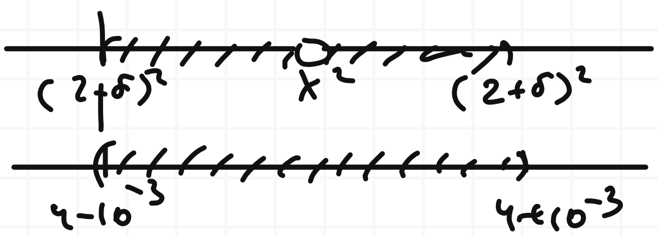
$\begin{cases} x \neq x_0 \\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \end{cases}$

$x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$

$x \in (2 - \delta; 2) \cup (2; 2 + \delta)$

$\begin{cases} x > 2 - \delta \\ x < 2 + \delta \\ x \neq 2 \end{cases}$ $\quad {}^2 \quad$ $\begin{cases} x^2 > (2-\delta)^2 \\ x^2 < (2+\delta)^2 \\ x^2 \neq 4 \end{cases}$

($\delta < 2$,
$\delta \geq 2$ – не подх.)



$\begin{cases} \delta + 2 \leq \sqrt{4 + 10^{-3}} \\ \delta - 2 \geq \sqrt{4 - 10^{-3}} \end{cases}$

Ответ: $[2 - \sqrt{4 - 10^{-3}};\ 2 + \sqrt{4 + 10^{-3}}]$

<u>8(1)</u>

$f(x) = \cos x$ $\qquad$ Д-ть: $\neg\exists \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

область знач: $[-1; 1]$

$f(x)$ периодична с периодом 2π. Т.о. для сколь угодно большого M $\forall y \in [-1; 1]\ \exists x: f(x) = y$.

Можем составить послед. из элементов $f(x_0), f(x_0 + 2\pi), \ldots, f(x_0 + n\pi)$, получим, что $\forall y \in [-1; 1]$ – частичный предел.

Т.е. частн. предел не $!$ $\Rightarrow \neg\exists \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

16 сформулировать утверждение

Пусть $f(x)$ определена в X, тогда

1) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=a$ $\qquad X=(x_0-\delta_0, x_0)$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta\in(0;\delta_0):\ \forall x\in(x_0-\delta; x_0) \hookrightarrow f(x)\in U_\varepsilon(a)$

2) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$ $\qquad X=(x_0, x_0+\delta_0)$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta\in(0;\delta_0): \forall x\in(x_0, x_0+\delta) \hookrightarrow f(x)\in(-\infty; -\frac{1}{\varepsilon})\cup(\frac{1}{\varepsilon}; +\infty)$

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$ $\qquad X=(-\infty, -\frac{1}{\delta_0})$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta\in(0;\delta_0): \forall x\in(-\infty; -\frac{1}{\delta}) \hookrightarrow f(x)\in(\frac{1}{\varepsilon}; +\infty)$

4) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=-\infty$ $\qquad X=(-\infty; -\frac{1}{\delta_0})\cup(\frac{1}{\delta_0}; +\infty)$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta\in(0;\delta_0): \forall x\in(-\infty; -\frac{1}{\delta})\cup(\frac{1}{\delta}, +\infty) \hookrightarrow f(x)\in(-\infty; -\frac{1}{\varepsilon})$

19(2) ф-я $f(x)$ не имеет конечного предела в точке x_0

$\neg\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\in\mathbb{R} \iff \neg(\exists a\in\mathbb{R}: \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0: \forall x\in U_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x)\in U_\varepsilon(A))$

$\iff \forall a\in\mathbb{R}\ \exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x(\delta)\in X\ \ \delta(\varepsilon)>|x_1-x_0|>0\ \wedge\ f(x_1)\notin U_\varepsilon(A)$

25(5)

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}} = \left[\begin{matrix} y=x-5\\ x=y+5\end{matrix}\right] = \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1-y}-1}{3-\sqrt{y+9}} \ominus$$

$\sqrt{1-y} = (1+(-y))^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}y+o(y)$

$\sqrt{y+9} = 3\left(1+\frac{y}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = 3\left(1+\frac{1}{18}y+o(y)\right) = 3+\frac{1}{6}y+o(y)$

$$\ominus \lim_{y\to 0}\frac{\cancel{1}-\frac{1}{2}y-\cancel{1}+o(y)}{\cancel{3}-\cancel{3}-\frac{1}{6}y+o(y)} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{2}y+o(y)}{\frac{1}{6}y+o(y)} = 3$$

26(2)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^6-1}{\sqrt{x^{12}+5x^5-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^6}(5-\frac{1}{x^6})}{\cancel{x^6}\sqrt{1+5x^{-7}-x^{-12}}} = 5$$

29(2,5)

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{4x + o(x)}{x + o(x)} = 4$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x + o(x)}{6x - 7x + o(x)} = -1$

33(1)

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \left(1 - \frac{1}{1+2x}\right)^{x^2} =$

// $\frac{x}{2x+1} = \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2}}{2x+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1+2x}\right)$ //

$= \lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}}_{\to 0} \underbrace{\underbrace{\left(1 + \frac{1}{-(1+2x)}\right)^{-(1+2x)}}_{\to e} \cdot \frac{x^2}{-(1+2x)}}_{\to 0} \to -\infty = 0$

35(4)

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{7x} - e^{2x}}{\operatorname{tg} x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{7x} - \cancel{1} - \cancel{2x} + o(x)}{x + o(x)} = 5$ (above the numerator: $+5x$)

61

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$

$\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$

$\not\Rightarrow \lim\limits_{t\to t_0} f(g(t)) = a$

Ответ: нет, не следует, т.к. $f(g(t))$ не определена для $\forall t$.

Например:

$f(x) = \frac{5(x-1)}{(x-1)}$; $\lim\limits_{x\to x_1} f(x) = 5$

$g(t) = 1$

Тогда $f(g(t)) = f(1)$ не определена!

Cl. §10 $\quad$ 14

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \neq 0 \qquad X \xrightarrow{f} R$$

? $\exists\ \delta, c \in R: \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow |f(x)| \geq c > 0$

пусть f определена в $U_{\delta_0}(x_0)$. Тогда, раз f непрер. в x_0,

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde\delta > 0\ \forall x \in U_{\tilde\delta}(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$

$\delta = \tilde\delta \qquad\qquad |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$

1) x_0 – изолированная, т.е. $\exists \delta > 0: U_\delta(x_0) \cap X = \{x_0\}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon f(x_0)$

т.е. для x_0 $\qquad$ т.к. $f(x_0) \in U_\varepsilon f(x_0)$

$f(x) = f(x_0)$; $|f(x)| = |f(x_0)| > 0$

в качестве δ возьмем такую δ

$c = \dfrac{|f(x_0)|}{2}$

2) x – предельная

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon f(x_0)$

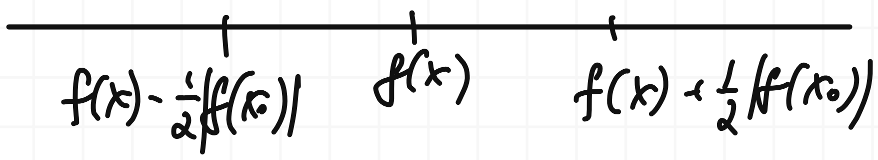
т.е. $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

т.к. $f(x_0) \neq 0$, сможем выбрать ε-окр, которая не содержит 0. для такого ε найд. δ по усл. выше

q.e.d.

Р-м $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(x_0)|$

$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in U_\delta(x_0)\ \left|f(x) - \frac{1}{2}|f(x_0)|\right| < \frac{1}{2}|f(x_0)|$



$c = \min\left(\left|f(x) - \frac{1}{2} f(x_0)\right| ; \left|f(x) + \frac{1}{2} f(x_0)\right|\right)$

22

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0; & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$? разр. в каждой точки

$\forall x_0\in\mathbb{R}\quad \exists\varepsilon>0\quad \forall\delta>0\quad \exists x\in U_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x)\notin U_\varepsilon(f(x_0))$

Возьмем $\varepsilon=\frac{1}{2}$

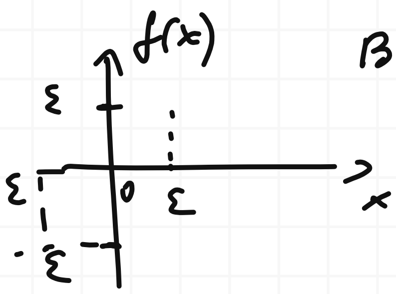
Если $x_0\in\mathbb{Q}$; $f(x_0)=1$; в $U_\varepsilon(f(x_0))$ содерж. только 1, а значит туда могут попасть только $x\in\mathbb{Q}$. Но $\forall\delta>0$ в $U_\delta(x_0)$ будут $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Противоречие.

Если $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; $f(x_0)=0$; в $U_\varepsilon(f(x_0))$ только 0, —"— $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, —"— $x\in\mathbb{Q}$. Против-е.

23

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$ 1) ? непр. в $x=0$ 2) ? разр $\forall x\neq 0$

1) $\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \forall x\in U_\delta(0) \hookrightarrow f(x)\in U_\varepsilon(0)$



Возьмем $\delta=\varepsilon$. $\forall x\in U_\delta(0)=U_\varepsilon(0)\hookrightarrow f(x)\in U_\varepsilon(0)$

т.к. если $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $0\in U_\varepsilon(0)$
если $x\in\mathbb{Q}$; $f(x)=x\in U_\varepsilon(0)$

q.e.d.

2) $\forall x_0\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\quad \exists\varepsilon>0\quad \forall\delta>0\quad \exists x\in U_\delta(x_0)\hookrightarrow f(x)\notin U_\varepsilon(f(x_0))$

Возьмем $\varepsilon=\frac{|x_0|}{2}$.

Если $x_0\in\mathbb{Q}$, $f(x_0)=x_0$; $0\notin U_\varepsilon(f(x_0))=U_{\frac{|x_0|}{2}}(x_0)$, но $\forall\delta\,\exists x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\hookrightarrow x\in U_\delta(x_0)$. Но такой $x\notin U_\varepsilon(f(x_0))$. Против.-е

Если $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $f(x_0)=0$; $\forall\delta\,\exists x\in\mathbb{Q}\hookrightarrow x\in U_\delta(x_0)$; $f(x)\notin U_\varepsilon(0)$

Прот-е.

q.e.d.

40

(1) $f(x)=\frac{1}{x}$, $(0;1)$

неогр: $\forall M>0\ \exists x_0\in(0;1) \hookrightarrow f(x_0)>M$

$f(x_0)=\frac{1}{x_0}$; $\frac{1}{x_0}>M$; $\underline{x_0<\frac{1}{M}}$

непр.: $\forall x_0\in(0;1)\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in U_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x)\in U_\varepsilon(f(x_0))$

$$\begin{cases}\frac{1}{x_0}-\varepsilon<\frac{1}{x_0+\delta}\\ \frac{1}{x_0}+\varepsilon<\frac{1}{x_0-\delta}\end{cases}$$

$\frac{1}{x_0}-\varepsilon$ $\frac{1}{x_0}$ $\frac{1}{x_0}+\varepsilon$

$\cancel{x_0}+\delta-\varepsilon x_0(x_0+\delta)<\cancel{x_0}^{\,0}$

$\delta-\varepsilon x_0^2-\varepsilon x_0\delta<0$

$\delta(1-\varepsilon x_0)<\varepsilon x_0^2$

$\delta<\frac{\varepsilon x_0^2}{1-\varepsilon x_0}$

$\cancel{x_0}-\delta+\varepsilon x_0(x_0-\delta)<\cancel{x_0}$

$-\delta(1+\varepsilon x_0)+\varepsilon x_0^2<0$

$\delta>\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}$

подойдет $\forall\delta$ из $\left(\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0};\frac{\varepsilon x_0^2}{1-\varepsilon x_0}\right)$

(2) $f(x)=x$ $(0;1)$

огр: $0<f(x)<1$; $\sup f(x)=1$; $\inf f(x)=0$

непр: $\delta=\varepsilon$; $f(x)=x\in U_\varepsilon(x_0)$

41(1)

f непр на $[a;b]$; $\forall x\in[a;b]\hookrightarrow f(x)>0$

? $\exists\mu>0 : \forall x\in[a;b] \hookrightarrow f(x)\geq\mu$

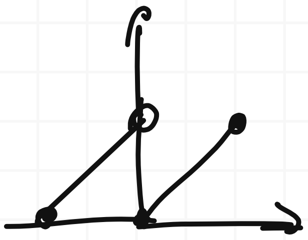
$f([a;b])=[m;M]$, где $m=\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$; $M=\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$

$M\geq m>0$

$\mu=\frac{m}{2}$ подойдет

44.

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0;1] \\ x+1; & x\in[-1;0) \end{cases} \qquad x\in[-1;1]$$



$f(x)\in[0;1]$

разр. в $(\cdot)\ x=0$

76

f непр на $[a;+\infty)$

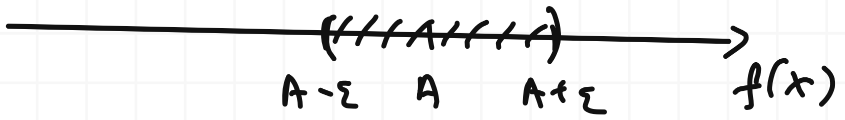
$\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$

? f – огр. на $[a;+\infty)$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in\left(\frac{1}{\delta};+\infty\right) \hookrightarrow f(x)\in U_\varepsilon(A)$

Возьмем произв. ε.

$\forall x\in\left(\frac{1}{\delta};+\infty\right)$



$f\left(\left[a;\frac{1}{\delta}\right]\right)=[m,M]$, где $m=\min\limits_{x\in[a;\frac{1}{\delta}]} f(x)$; $M=\max\limits_{x\in[a;\frac{1}{\delta}]} f(x)$

$[m,M]\cup U_\varepsilon(A)$ – ограничено

T.10

$f: [a;b] \xrightarrow{\text{непр}} [a;b]$

$? \exists x \in [a;b]: f(x) = x$

$\rceil g(x) = f(x) - x$; $\quad ? \exists x \in [a;b]: g(x) = 0$

$g(a) = f(a) - a \qquad 0 \le g(a) \le b - a \qquad g(a) \ge 0$

$g(b) = f(b) - b \qquad a - b \le g(b) \le 0 \qquad g(b) \le 0$

1) если $g(a) = 0 \vee g(b) = 0$ — нашли

2) если $(g(a) < 0 \wedge g(b) > 0) \vee (g(a) > 0 \wedge g(b) < 0)$, то по теореме о промежуточном значении $\exists c \in [a;b] \hookrightarrow g(c) = 0$ нашли

3) случай $(g(a) < 0 \wedge g(b) < 0) \vee (g(a) > 0 \wedge g(b) > 0)$ быть не может, т.к. $g(a) \ge 0 \wedge g(b) \le 0$

T.12

f непр на $[0; +\infty)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{array}\right.$

Это верно. Д-м от противного.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \ne +\infty \wedge \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \ne -\infty$

$$\neg\left(\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_1 > 0 \; \forall x \in \left(\tfrac{1}{\delta_1}; +\infty\right) \hookrightarrow f(x) \in \left(\tfrac{1}{\varepsilon}; +\infty\right)\right) \wedge$$
$$\wedge \neg\left(\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_2 > 0 \; \forall x \in \left(\tfrac{1}{\delta_2}; +\infty\right) \hookrightarrow f(x) \in \left(-\infty; -\tfrac{1}{\varepsilon}\right)\right) =$$
$$= \left(\exists \varepsilon_1 > 0 \; \forall \delta_1 > 0 \; \exists x \in \left(\tfrac{1}{\delta_1}; +\infty\right) \hookrightarrow f(x) \notin \left(\tfrac{1}{\varepsilon_1}; +\infty\right)\right) \wedge$$
$$\wedge \left(\exists \varepsilon_2 > 0 \; \forall \delta_2 > 0 \; \exists x \in \left(\tfrac{1}{\delta_2}; +\infty\right) \hookrightarrow f(x) \notin \left(-\infty; -\tfrac{1}{\varepsilon_2}\right)\right)$$

Возьмем

$\delta_1 = 1 \qquad x_1 \le \frac{1}{\delta_1} = 1 \qquad f(x_1) < \frac{1}{\varepsilon_1}$

$\delta_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 \ge \frac{1}{\delta_1} = 2 \qquad f(x_2) < \frac{1}{\varepsilon_1}$

$\vdots \qquad \vdots$

$\delta_1 = \frac{1}{n} \qquad x_n \le \frac{1}{\delta_n} = n \qquad f(x_n) < \frac{1}{\varepsilon_1}$

$\{x_n\}$ – огр. сверху, по обобщ. т. Больцано – Вейерштрасса

$\exists \lim\limits_{x_n \to +\infty} f(x_n) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

аналогично

$\exists \lim\limits_{y_n \to +\infty} f(y_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Если хотя бы один из этих пределов конечен, то по def Гейне $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| \in \mathbb{R}$, т.е. $\neq +\infty$. против-е.

Значит, $\lim\limits_{x_n \to +\infty} f(x_n) = -\infty \ \wedge \ \lim\limits_{x_n \to +\infty} f(y_n) = +\infty$

по def lim: $(\forall n \geq N_1 \hookrightarrow f(x_n) < 0) \wedge (\forall n \geq N_2 \hookrightarrow f(y_n) > 0)$

$\forall n \geq N = \max(N_1, N_2) \quad \exists z_n \in [\underset{\wedge\atop 0}{x_n}, \underset{\vee\atop 0}{y_n}] : \ f(z_n) = 0$

(т. о промежуточном значении)

$\lim\limits_{z_n \to +\infty} f(z_n) = 0$ из def lim по Гейне, $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| \neq 0$. против-е.

q.e.d.

Значит, иск. утв. верно.