q16.

Связь векторов $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$
Тензор инерции
Главные оси инерции
Эллипсоид инерции

Тензор инерции

$$\vec{L} = \sum_i m_i [\vec{r}_i ; \vec{v}_i] \qquad \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i [\vec{r}_i ; [\vec{\omega} ; \vec{r}_i]] = \sum_i m_i \left(\vec{\omega}\, r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i , \vec{\omega}) \right)$$

! векторы $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ в общем случае не $\parallel$!

$$L_x = \sum_i m_i \left[(\cancel{x_i^2} + y_i^2 + z_i^2)\,\omega_x - (\cancel{x_i\omega_x} + y_i\omega_y + z_i\omega_z)\, x_i \right] =$$

$$= \Big(\sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)\Big)\omega_x + \Big(-\sum_i m_i x_i y_i\Big)\omega_y + \Big(-\sum_i m_i x_i z_i\Big)\omega_z$$

ан-но

$$L_x = \left[\sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)\right]\omega_x + \left[-\sum_i m_i x_i y_i\right]\omega_y + \left[-\sum_i m_i x_i z_i\right]\omega_z,$$

$$L_y = \left[-\sum_i m_i y_i x_i\right]\omega_x + \left[\sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2)\right]\omega_y + \left[-\sum_i m_i y_i z_i\right]\omega_z,$$

$$L_z = \left[-\sum_i m_i z_i x_i\right]\omega_x + \left[-\sum_i m_i z_i y_i\right]\omega_y + \left[\sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)\right]\omega_z.$$

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

Запишем эти равенства в следующей форме:

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z,$$
$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z,$$
$$L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z.$$

центробежные моменты инерции

осевые м. инерц.

В матричном виде они принимают вид

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}}_{\text{тензор инерции}} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix},$$

$$\vec{L} = \hat{I}\vec{\omega}$$

Момент импульса отн произв-й оси

пусть ω направ вдоль оси 0.

$$\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

$$\vec{L} = \hat{J}\vec{\omega}$$

$$\vec{L}_0 = \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega}, \hat{J}\vec{\omega}\right) = \frac{1}{\omega}(\vec{\omega}, \hat{J}\vec{\omega})$$

$$(\vec{L})_0 = (\hat{J}\vec{\omega})_0$$

$$L_0 = \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega}, \vec{L}\right) = I_0 \omega \qquad I_0 = \frac{L_0}{\omega} = \frac{1}{\omega}(\vec{\omega}, \hat{J}\vec{\omega})$$

$$I_0 = (\vec{n}, J\vec{n}) = (n_x, n_y, n_z)\begin{pmatrix} I_{xx}n_x + I_{xy}n_y + I_{xz}n_z \\ \dots \end{pmatrix} =$$

$$= I_{xx}n_x^2 + I_{xy}n_xn_y + I_{xz}n_xn_z + \dots$$

$$= I_{xx}n_x^2 + I_{yy}n_y^2 + I_{zz}n_z^2 + 2I_{xy}n_xn_y + 2I_{xz}n_xn_z + 2I_{yz}n_yn_z$$

$$n_x = \overset{1}{\overset{\parallel}{n}}\cos\alpha = \cos\alpha$$

$$y \quad \beta \quad \beta$$

$$z \quad \gamma \quad \gamma$$

$$I_0 = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + \dots$$

эллипсоид инерции

пусть $\vec{\rho} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{I_0}}$

$$\vec{\rho}\left(\frac{n_x}{\sqrt{I_0}}, \dots\right) = \vec{\rho}\left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{I_0}}\right.$$

$$\rho_x^2 = \frac{\cos^2\alpha}{I_0} = \frac{\cos^2\alpha}{I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + \dots + 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta + \dots}$$

$$I_{xx}\rho_x^2 + I_{yy}\rho_y^2 + I_{zz}\rho_z^2 + 2I_{xy}\rho_x\rho_y + \dots = 1$$

если р-вать ρ как радиус вектор

эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$