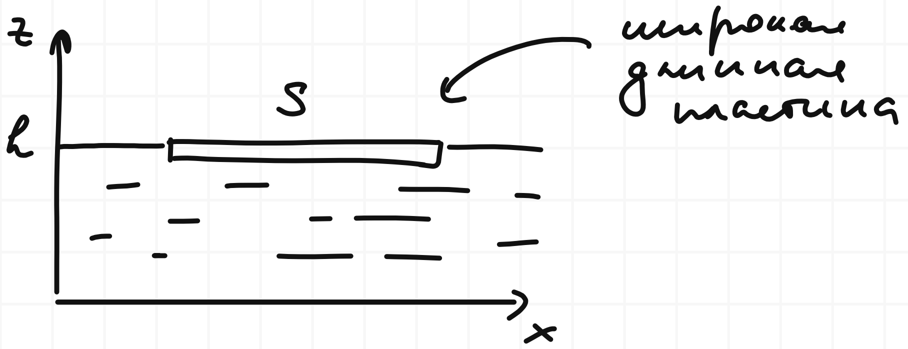
q32.

Вязкость
Стационарное течение вязкой жидкости в трубе
Формула Пуазейля
Число Рейнольдса

Вязкость

движения слоя жидкости вызывает движение прилегающих к нему слоёв т.е. перенос импульса перпендикулярно направ-ю течения



на основе эксп. данных:

$$F = \eta S \frac{v}{h} \quad \text{(з-н Ньютона)}$$

$$F = -F_{тр}$$

η − динамическая вязкость

в СГС

$$[\eta] = 1 \frac{г}{см \cdot с} = 1\ П$$

(пуаз)

в СИ

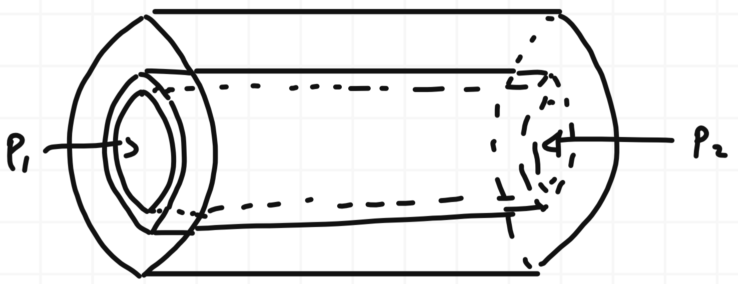
$$[\eta] = 1 \frac{кг}{м \cdot с} = 1 \frac{Н \cdot с}{м^2} = 1\ Па \cdot с = 10\ П$$

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \qquad [\nu] = \frac{см^2}{с}$$ − кинематическая вязкость

если скорость сложным образом меняется от слоя к слою:

$$\tau_{xz} = \frac{F_{xz}}{S} = \eta \frac{dv}{dz}$$

Формула Пуазейля



Труба R, L

перепад давлений

$v(r)$ – ?

Q – ?

Р-м $x \div x+dx$. Выделим слой $r \div r+dr$.

$$S = 2\pi r dx$$

$$F_{тр}(r) = 2\pi r dx \cdot \eta \frac{dv}{dr}$$

$$dF_{тр}(r) = F_{тр}(r+dr) - F_{тр}(r) = \frac{d}{dr}\left(2\pi r dx \eta \frac{dv}{dr}\right) dr = 2\pi\eta \frac{d}{dr}\left(dx dv \frac{r}{dr}\right) dr =$$

?

$$= 2\pi\eta \cdot dx dr \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{r}{dr}\right) dr$$

$$dF_{давл} = \left(p(x) - p(x+dx)\right) 2\pi r dr = -\frac{dp}{dx} \cdot 2\pi r dr dx$$

$$dF_{тр} + dF_{давл} = 0$$ (при стационарном течении)

$$\cancel{2\pi}\eta \cancel{dx}\cancel{dr} \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{r}{dr}\right) dr - \cancel{2\pi} r \cancel{dx}\cancel{dr} \frac{dp}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\eta \frac{dv}{dr}\right) - \frac{dp}{dx} r = 0$$

давление постоянно по сечению трубы, интегрируем

$$r\eta \frac{dv}{dr} - \frac{1}{2}\frac{dp}{dx} r^2 = const$$

если $r = 0$, $const = 0$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{2}\frac{dp}{dx} \cdot \frac{r}{\eta}$$

$$dv = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx} r dr$$

$$\int_0^{v(r)} dv = \frac{1}{2\eta} \frac{-\Delta p}{L} \int_0^r r dr$$

v не зависит от x

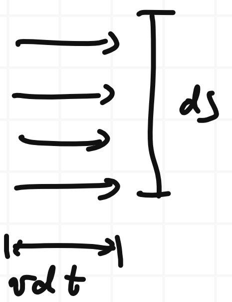
значит, правая сторона равенства тоже

$$\frac{dp}{dx} = const; \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{L} = -\frac{p_1 - p_2}{L}$$

считаем, $p_1 > p_2$)

$v(R)=0$ ⇝ нашли const интегрирования

$$\underbrace{v(r)=\frac{1}{4\eta}\,\overset{=-\Delta P}{\frac{P_2-P_1}{L}}\,(r^2-R^2)=\frac{1}{4\eta}\,\frac{\Delta P}{L}\,(R^2-r^2)}_{\text{пуазейлевый (параболический) профиль скоростей}}$$



$dV = v\,dt\cdot dS$

$dm = \rho\, dV$

$$\underbrace{dQ}=\frac{dm}{dt}=\frac{\rho v \cancel{dt}\, dS}{\cancel{dt}}=\underbrace{\rho v\, dS}=$$

$$=[S=\pi r^2]=\underbrace{\rho v\cdot 2\pi r\,dr}$$

$$\underbrace{Q}=\int_S \rho v\, dS=\int_0^R \rho v(r)\cdot 2\pi r\,dr = 2\pi\rho\,\frac{\Delta P}{4\eta L}\int_0^R (R^2-r^2)\,r\,dr=\underbrace{\pi\rho\,\frac{P_1-P_2}{8\eta L}\,R^4}$$

(ф-ла Пуазейля)

Условия применимости

L — велика достаточна, чтобы пуазейл. профиль скоростей успел установиться

оценим

если идеальная:

$\frac{1}{2}\rho u^2 = \Delta P$ (ур-е Бернулли)

если вязк.:

$v_{max}=\frac{R^2}{4\eta L}\Delta P$; $\Delta P=\frac{4\eta L}{R^2}v_{max}$ (чем длиннее труба, тем медленн. поток)

? $\frac{1}{2}\rho u^2 \sim \frac{4\eta L}{R^2} v_{max}$

Вязкость играет знач. роль, если

$v_{max} << u$

или $L >> L_0 \sim \frac{\rho u R^2}{\eta}$ $\left(\frac{4\cancel{\eta}}{\cancel{R^2}} \cdot \frac{\rho u \cancel{R^2}}{\cancel{\eta}} v_{max} = 4\rho u v_{max} \sim \frac{1}{2}\rho u^2 \right)$

также можно вывести это условие из баланса энергий

$$K \sim \rho \frac{v_{max}^2}{2} \pi R^2 L \sim \rho R^2 L v_{max}^2$$

$$A_{тр} \sim F_{тр} L$$

$$F_{тр} \sim \eta \cdot 2\pi R L \cdot \left(-\frac{dv}{dr}\right)_{r=R} \sim \eta R L \frac{v_{max}}{R} \sim \eta L v_{max}$$

$$A_{тр} \sim \eta L^2 v_{max}$$

силы вязкости играют сущ-ю роль, если $A_{тр}$ сопост. с K

$$K \sim A_{тр}$$

$$\rho R^2 \cancel{L} v_{max}^{\cancel{2}} \sim \eta L^{\cancel{2}} \cancel{v_{max}}$$

$$L \sim \frac{\rho R^2 v_{max}}{\eta}$$

Число Рейнольдса

Def. Ламинарное течение — упоряд. режим течения без перемешивания между слоями жидкостей.

Def. Турбулентное течение — режим течения, когда эл-ты жидкости совершают нерегулярное, хаотич. движ. с интенсивным перемешиванием между слоями

$$Re = \frac{\rho u l}{\eta} = \frac{ul}{\eta/\rho} = \frac{ul}{\nu}$$

Свойство подобия гидродинамических течений:

при изм. параметров жидкости и тела, но при сохранении значения Re характер течения не меняется

$$\vec{v} = u\vec{f}\left(\frac{\vec{r}}{\ell}, Re\right) \qquad P = \rho u^2 \varphi\left(\frac{\vec{r}}{\ell}, Re\right)$$

WTF?

$$E_k = \frac{1}{2} m u^2 \overset{m \sim \rho \ell^3}{\frown} \rho u^2 \ell^3$$

$$F_{тр} = \eta S \frac{du}{dz} \sim \eta \ell^2 \frac{u}{\ell} = \eta u \ell$$

$$A_{тр} \sim F_{тр} \ell \sim \eta u \ell^2$$

$$\frac{E_k}{A_{тр}} \sim \frac{\rho u^2 \ell^3}{\eta u \ell^2} = \frac{\rho u \ell}{\eta} = Re$$

$Re \gg 1$ доминируют инерц. эффекты

$Re \ll$ — " — эфф. вязкости

ламинарное — турбулентное

Re: 1000 (пл-ти), 1800 (труба)

нужно ли о законах подобия течений?