

Семинар 8. Гироскопы

Клименок Кирилл Леонидович

20.10.2022

1 Теоретическая часть

1.1 Приближенная теория гироскопа

Как мы говорили на лекции, свободное движение твердого тела очень сложно и для описания его характеристик требуется как минимум решать систему уравнений Эйлера. При этом, решается эта система только в 3 случаях, а остальные кейсы являются неинтегрируемыми. Естественно на семинаре никто не будет от вас хотеть решать на это задач (для этого есть кафедра теормеха). Поэтому в неделю будут задачи только на приближенную теорию гироскопа. Во-первых, что такое гироскоп? Это осесимметричное тело, которое вращается вокруг оси симметрии очень быстро, так что выполняется следующее условие:

$$I_x = I_y; L_z \gg L_x, L_y; L_z \uparrow \uparrow \omega$$

Оно позволяет упростить описание движения гироскопа. Начнем с общей идеи: уравнение моментов продолжает работать, но так как момент импульса очень большой, то его изменение по модулю можно не рассматривать. А что тогда может делать момент сил? Только менять направление момента импульса — поворачивать его. Тогда можно записать следующее:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = [\vec{\Omega} \times \vec{L}]$$

Эта угловая скорость, с которой вращается момент импульса, Ω называется скоростью прецессии.

Все задачи этой недели по сути сводятся к этой формуле. Есть универсальные действия для всех этих задач:

1. Определите, где в задаче собственное вращение
2. Определите, что за сила вызывает прецессию
3. Рассчитайте прецессию по формуле

Обычно по двум пунктам из этого набора надо найти третье. Приступим к задачам.

2 Практическая часть

2.1 Задача 11.7

Условие В районе северного полюса на Землю падает метеорит под углом 45° к вертикали. Масса метеорита 1000 т. Его скорость 20 км/с. Найти, на сколько повернется земная ось в результате соударения с метеоритом. Масса Земли $6 \cdot 10^{24}$ кг, ее радиус 6400 км.

Решение Первый вопрос: где гироскоп? Тут это Земля. Теперь, что за сила будет заставлять Землю прецессировать? Эта сила от удара метеорита. Значит можно записать для Земли закон изменения момента импульса, а для метеорита второй закон Ньютона:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = M = FR \sin \alpha = \Omega I_E \omega \\ m \frac{dv}{dt} = F \end{cases}$$

Вытащим из этих двух уравнений угловую скорость прецессии:

$$\Omega = \frac{mR \sin \alpha}{I_E \omega_E} \frac{dv}{dt}$$

Осталось только проинтегрировать:

$$\Delta \varphi = \frac{mvR \sin \alpha}{\frac{2}{5} M_E R^2 \omega_E} 1.3 \cdot 10^{-17} \text{ рад}$$

2.2 Задача 11.1

Условие Симметричный волчок массой m , ось фигуры которого наклонена под углом α к вертикали, совершает регулярную прецессию под действием силы тяжести. Точка опоры волчка O неподвижна. Определить, под каким углом β к вертикали направлена сила, с которой волчок действует на плоскость опоры. Расстояние от точки опоры волчка до его центра масс равно a , момент инерции волчка относительно его оси равен I_{\parallel} .

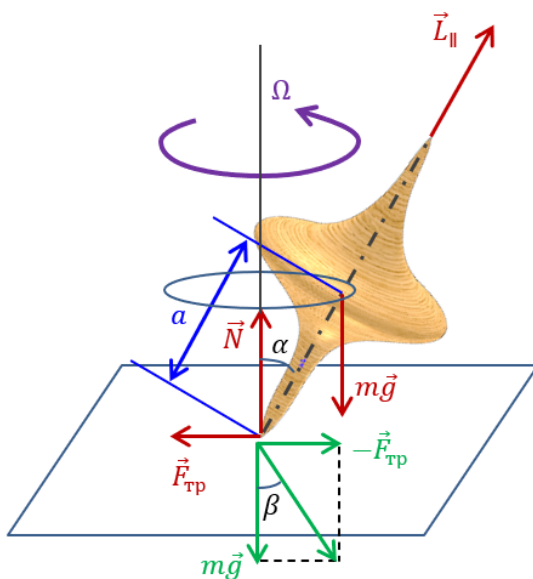


Рис. 1: К задаче 11.1

Решение Давайте для начала разберемся с гироскопической составляющей задачи. Где собственное вращение понятно. Какая сила заставляет наш волчок прецессировать? Очевидно сила тяжести

и только она, так как основание оси зафиксировано и момент сил реакции равен нулю относительно этого основания. Далее угловая скорость прецессии. Куда она направлена? Вертикально вверх. Все с этим разобрались можно записывать основную формулу:

$$\vec{L} = I_{\parallel} \vec{\omega}; [\vec{\Omega} \times I_{\parallel} \vec{\omega}] = [a \times m \vec{g}] \Rightarrow \Omega I_{\parallel} \omega = -mga$$

Теперь разбермся с силами. Для них остается обычный закон Ньютона. По вертикали центр масс не перемещается, поэтому вертикальная компонента силы реакции равна силе тяжести. А вот в плоскости центр масс движется по окружности, значит у него есть центростремительное ускорение и как следствие сила, которая и поворачивает его. Это и будет горизонтальная составляющая силы реакции:

$$N_y = mg; N_x = m\Omega^2 a \sin \alpha$$

Отсюда и находим угол:

$$\tan \beta = \frac{N_x}{N_y} = \frac{m\Omega^2 a \sin \alpha}{mg} = \frac{a^3 m^2 g \sin \alpha}{I_{\parallel}^2 \omega^2}$$

2.3 Задача 11.14

Условие Гироскопические эффекты используются в дисковых мельницах. Массивный цилиндрический каток (бегун) весом P , способный вращаться вокруг своей геометрической оси, приводится во вращение вокруг вертикальной оси (с угловой скоростью Ω) и катится по горизонтальной опорной плите. Такое вращение можно рассматривать как вынужденную прецессию гироскопа, каковым является бегун. При вынужденной прецессии возрастает сила давления бегуна на горизонтальную плиту, по которой он катится. Эта сила растирает и измельчает материал, подсыпaeмый под каток на плиту. Вычислить полную силу давления катка на опорную плиту, если радиус бегуна $r = 50$ см, а рабочая скорость 1 об/с.

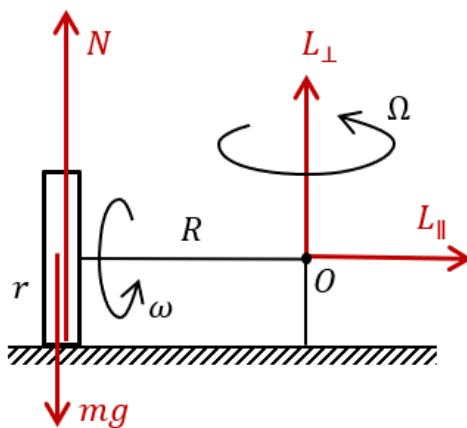


Рис. 2: К задаче 11.14

Решение Тут нам напрямую сказали, что гироскоп здесь это мельничный каток. Тогда его вращение вокруг своей оси — это собственное вращение, а вот прецессия — это его движение по кругу.

Тогда осталось понять, что за сила создает момент, который его поворачивает. Это очень просто осознать из основной формулы для нашей теории:

$$\vec{M} = [\vec{\Omega} \times \vec{L}] = [\vec{R} \times \vec{N}]$$

Записав это выражение, и воспользовавшись рисунком и правилом правой руки, мы видим, что эта сила N будет направлена вниз и тем самым она будет дополнительно давить на землю.

Единственное, чего нам не хватает — это условие на отсутствие проскальзывания нашего катка по земле: $\omega r = \Omega R$. Все теперь собираем воедино:

$$L = \frac{mr^2}{2}\omega; = NR \rightarrow N = \frac{I\omega\Omega}{R} = \frac{m\Omega^2 r}{2}$$

И окончательный ответ:

$$F = P + \frac{m\Omega^2 r}{2} \approx P + mg = 2mg$$

2.4 Задача 11.24

Условие Тонкий стержень длиной $l = 1$ м и массой $m = 10$ кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр, совершая $n = 3000$ об/мин. Ось вращения составляет со стержнем угол $\alpha = 89.9^\circ$. Каковы силы, действующие на подшипники, в которых закреплена ось? Подшипники расположены симметрично относительно стержня на расстоянии $a = 20$ см друг от друга.

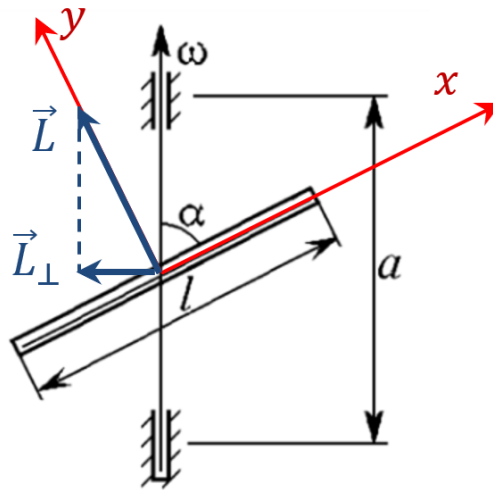


Рис. 3: К задаче 11.24

Решение Разложим угловую скорость вращения стержня *отёда* и его момент импульса \vec{L} по осям x и y — вдоль и поперек стержня. Эти оси, очевидно, являются главными осями тензора инерции, поэтому

$$\vec{L} = I_x \vec{\omega}_x + I_y \vec{\omega}_y$$

Но, поскольку стержень тонкий, его момент инерции относительно оси x очень мал: $I_x \ll I_y = \frac{1}{12}ml^2$. Поэтому, момент импульса стержня будет направлен перпендикулярна его оси:

$$\vec{L} = \vec{\omega}_y \cdot \frac{ml^2}{12}$$

При вращении стержня вектор L будет вращаться вместе с ним, сохраняя угол $(\pi/2 - \alpha)$ с осью вращения. Момент сил, действующий на стержень, найдем из уравнения моментов:

$$M = \dot{L} = \omega L_{\perp} \sin(\pi/2 - \alpha) = \frac{1}{12} m l^2 \omega^2 \sin(\pi/2 - \alpha) \cos(\pi/2 - \alpha) = \\ \frac{1}{24} m l^2 (2\pi n)^2 \sin(\pi - 2\alpha) \approx \frac{1}{24} m l^2 (2\pi n)^2 (\pi - 2\alpha)$$

Силы, действующие в подшипниках, найдем, разделив момент на плечо:

$$F = \frac{M}{a} \frac{1}{3} m (\pi l n)^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 718 \text{ Н}$$

2.5 Комментарии к задачам из задания

Задача 11.1 Решена

Задача 11.7 Решена

Задача 11.8 Понять где прецессия и где собственное вращение. Записать момент относительно, например центра

Задача 11.10 Понять, что колебания корабля по сути можно рассматривать как прецессию и все

Задача 11.14 Решена

Задача 11.20 Законы сохранения при ударе и посмотреть добавку момента импульса от этого удара

Задача 11.24 Решена

Задача Т5 Опускание оси гироскопа можно рассматривать как прецессию из-за трения

Задача Т6 Идеино повторяет 11.24