Семинар 10. Динамика в специальной теории относительности

Клименок Кирилл Леонидович

3.11.2022

1 Теоретическая часть

1.1 Определение импульса и энергии

Как и в случае с кинематикой, честная попытка вывести что такое импульс и энергия в СТО пока неподъемна для нас. Поэтому мы просто введем несколько определений и попробуем показать, что с ними все нормально работает и переходит в классику.

Начнем с импульса:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m v$$

Ясно, что при малых скоростях, выражение стремится к классическому импульсу. Для него можно записать второй закон Ньютона:

$$\frac{dp}{dt} = F \Rightarrow \frac{d\gamma v}{dt} = \frac{F}{m}$$

Так как γ зависит от скорости то теперь нельзя пользоваться обычной школьной формулой типа $ma = F$, так как производная будет сложнее выглядеть. Вот как это работает:

$$\frac{dp}{dt} = \gamma m \dot{\vec{v}} + \gamma^3 \frac{m\vec{v}(v\dot{v})}{c^2} = F$$

То есть сила не со направлена с ускорением, а у нее есть 2 компоненты: по и перпендикулярно скорости.

Теперь энергия:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma mc^2$$

Если импульс еще хоть как-то был понятен, то это выглядит совсем контр интуитивно. Это нормально, боятся не надо, пока достаточно поверить. Первое что сделаем, посмотрим, как ведет себя эта штука при малых скоростях:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

Таким образом, мы получили во-первых, энергию покоя, а во-вторых, кинетическую энергию, в классическом виде. Значит действительно все нормально работает. Далее в релятивизме есть еще особенность: релятивистская кинетическая энергия это

$$K = E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$$

Теперь осознаем,чем же так хороша такая энергия. Оказывается, из нее и импульса можно собрать очередной инвариант для произвольной частицы:

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 = inv$$

Отсюда можно сделать еще один интересный вывод, что если частица обладает $m = 0$, как например фотон, то для нее $E = pc$, а скорость будет строго рана скорости света.

Более того, эта штука работает не только для отдельных частиц, но и для систем частиц включая различные соударения. Тогда вместо энергии надо ставить сумму энергий, а вместо импульсов — векторную сумму импульсов.

Здесь же мы можем определить систему центра инерции, как такую систему отсчета, где суммарный импульс всех частиц равен нулю, тем самым у нас останется только энергия. И чисто формально скорость центра инерции определяется как:

$$V_{\text{ЦИ}} = \frac{c^2 \sum p}{\sum E}$$

1.2 Пороговая энергия при неупругом столкновении

Здесь все немного сложнее, чем в классике, так как наша аналогия с горкой перестала работать, и вообще непонятно, что делать в релятивизме с сохранением энергии. Итак вот рецепт: энергия всегда сохраняется! Как же тогда работают преобразования одних частиц в другие? Преобразуется масса продуктов и исходников, а дефект масс идет на энергию связи. Тогда решим традиционную задачу о том, как частица A налетает на покоящуюся частицу B и образуется блок частиц-продуктов C. Тогда из сохранения энергии мы можем записать:

$$E_A + E_{B,0} = E_C \Rightarrow E_A^2 + E_{B,0}^2 + 2E_A E_{B,0} = E_C^2$$
$$E_{A,0}^2 + p_A^2c^2 + E_{B,0}^2 + 2E_A E_{B,0} = E_{C,0}^2 + p_C^2c^2$$
$$E_A = \frac{E_{C,0}^2 - E_{A,0}^2 - E_{B,0}^2}{2E_{B,0}}$$

В этом выражении индекс 0 соответствует энергии покоя частицы, а минимальность получается из того, что обычный импульс налетающей частицы до равен обычному импульсу всего облака продуктов после.

2 Практическая часть

2.1 Задача 8.59

Условие Две одинаковые частицы (например, два протона), ускоренные до одной и той же энергии $E = 10$ ГэВ, движутся навстречу друг другу и сталкиваются между собой. Рассмотрев тот же процесс в системе отсчета, связанной с одной из частиц, в которой частица-мишень покоится, а другая движется навстречу ей, определить энергию E второй частицы в этой системе. (Принцип ускорителя на встречных пучках.)

Решение Первый, и самый очевидный шаг — по данной энергии рассчитать до какого гамма-фактора (а значит и до какой скорости разогнаны наши протоны с энергией покоя $E_0 = 0.938$ ГэВ):

$$E = \gamma m_p c^2 = \gamma E_0 \Rightarrow \gamma = \frac{E}{E_0} \Rightarrow \beta = \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{E^2}}$$

Так, мы нашли скорость каждого из протонов и теперь можем рассчитать их скорость относительного движения (и соответственно относительный гамма-фактор), используя кинематику из прошлой недели:

$$\beta_{rel} = \frac{2\beta}{1+\beta^2} \Rightarrow \gamma_{rel} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{rel}^2}} = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}$$

Тогда в системе отсчета, связанной с одной из частиц энергия налетающей частицы будет:

$$E' = \gamma_{rel} E_0 = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} E_0 = \frac{2E^2 - E_0^2}{E_0} \approx 213 \text{ ГэВ}$$

2.2 Задача 8.43

Условие Релятивистский π^0-мезон (энергия покоя m_0c^2) распадается на лету на два фотона с энергиями E_1 и E_2. Найти угол между направлениями разлета фотонов.

Решение В этой задаче надо пользоваться инвариантностью энергии-импульса и законом сохранения для него:

$$m_0^2 c^4 = (E_1 + E_2)^2 - c^2(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2$$

Здесь использована система отсчета, где мезон покоился и рассмотрено что было до распада и после. Также мы можем воспользоваться свойством фотонов и сказать, что для них $E = pc$, что существенно упростит наше выражение выше. Итого получится:

$$m_0^2 c^4 = 2E_1E_2 - 2(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)c^2$$

А из скалярного произведения найдем угол разлета:

$$\cos\theta = 1 - \frac{m_0^2 c^4}{2E_1E_2}$$

2.3 Задача 8.47

Условие При столкновении протонов высоких энергий могут образовываться антипротоны p' согласно реакции:

$$p + p \to p + p + p + p'$$

Какой минимальной (пороговой) кинетической энергией должен обладать протон, чтобы при его столкновении с покоящимся протоном была возможна такая реакция?

Решение Хоть задача и разобрана в задачнике, мне очень не нравится ее решение там. Я предлагаю решение много проще, которое мы уже по сути разобрали в теоретической части. Так как нас интересует минимальная энергия, необходимая для этой реакции, то мы можем повторить все рассуждения и просто получить ответ. Только надо определиться что такое A, B и C в нашем случае. С A и B все просто — это налетающий и покоящийся протоны. А вот то, что мы обозначили в теории за C — это все продукты реакции, которые образуются в результате, то есть это 3 протона и 1 антипротон. Тогда минимальная кинетическая энергия будет:

$$E_A = \frac{E_{C,0}^2 - E_{A,0}^2 - E_{B,0}^2}{2E_{B,0}} = \frac{(4E_0)^2 - E_0^2 - E_0}{2E_0} = 7E_0 \Rightarrow K_A = E_A - E_0 = 6E_0 \approx 5.5 \text{ ГэВ}$$

2.4 Задача Т4

Условие Электрон начинает двигаться из состояния покоя в однородном электрическом поле. Сила, действующая на электрон, постоянна и равна $F = 1.6 \cdot 10^{13}$ Н. Какое расстояние пройдёт электрон к моменту, когда его кинетическая энергия станет равной его энергии покоя? Какое время при этом пройдёт по лабораторным часам?

Решение Первое, что хочется записать в этом случае это второй закон Ньютона для релятивистского движения частиц. Не будем себе в это отказывать:

$$\frac{dp}{dt} = F \Rightarrow \frac{d(\gamma v)}{dt} = \frac{F}{m}$$

Дальше вроде как хочется вытащить ускорение и проинтегрировать, но делать этого нельзя из-за очень стремного вида производной от гамма-фактора. Поэтому ограничимся там, что проинтегрируем произведение:

$$\gamma v = \frac{Ft}{m}$$

А далее, можем из условия найти гамму и скорость, тем самым найдем время:

$$(\gamma - 1)mc^2 = mc^2 \Rightarrow \gamma = 2; \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Подставляем и получаем выражение для времени. Тут удобно рассчитывать все через энергию покоя электрона $mc^2 = 511$ КэВ:

$$t = \sqrt{3}\frac{mc}{F} = \sqrt{3}\frac{mc^2}{Fc} \approx 3 \cdot^{-9} \text{ с}$$

Теперь разбираемся с пройденным расстоянием. Если интегрировать ускорение в лоб, то ничего хорошего не произойдет — будет грустно и непонятно. Как выражать ускорение, по какому времени интегрировать? Идея решения на порядок проще — надо просто сказать, что работа постоянной силы пошла на кинетическую энергию и все (да, в релятивизме это тоже работает):

$$l = \frac{mc^2}{F} \approx 0.51 \text{ м}$$

2.5 Комментарии к задачам из задания

Нулевки

Задача 8.43 Решена

Задача 8.44 Почти один в один 8.43

Задача 8.47 Решена

Задача 8.57 в начала расписать распад каона и найти гамма-фактор пионов, а дальше кинематика

Задача 8.59 Решена

Задача 8.74 Идейно разобрана на лекции

Задача 8.105 Достаточно расписать, что происходит с неизвестной частицей после удара в проекциях на оси.

Задача T4 Решена