Семинар 2. Второе начало термодинамики. Энтропия. Тепловые машины.

Клименок Кирилл Леонидович

08.02.2022

1 Теоретическая часть

1.1 Исторические формулировки второго начала термодинамики

Начнем с классических исторических формулировок:

Клаузиус: Невозможен процесс, единственным результатом которого будет передача тепла от более холодного тела к более теплому

Томпсон: Невозможен процесс, единственным результатом которого будет совершение работы за счет охлаждения теплового резервуара

Эти формулировки эквивалентны, и на лекции мы это показывали. Кроме них есть и другие, но для нас же представляет интерес следствие из этих постулатов. Пусть у нас есть квазистатический изотремический процесс с единственным тепловым резервуаром бесконечной теплоемкости, когда наше рабочее тело совершает работу. Далее мы хотим вернуть тело обратно в его исходное состояние, но проблема оказывается в том, что мы можем двигаться по адиабате, но второе начало запрещает нам перескакивать с нее куда-бы то ни было, чтобы замкнуть этот цикл, иначе нарушится формулировка Томпсона. Это приводит нас к тому, что все адиабаты, независимо от того, что мы рассматриваем, не пересекаются, а значит из них мы можем составить сетку в пространстве состояний. Также это означает, что мы можем ввести функцию состояния — энтропию.

1.2 Энтропия

Определение энтропии следует естественным образом из сказанного выше. На примере идеального газа мы получили выражение для нее:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}; \Delta S = C_V \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0} = C_P \ln \frac{T}{T_0} - R \ln \frac{P}{P_0} = C_V \ln \frac{PV^\gamma}{P_0 V_0^\gamma}$$

Общая логика вывода предельно проста и напоминает задачи из предыдущей недели, где мы мы рассматривали первое начало, записывали его и интегрировали.

Вторым важным аспектом, связанным с энтропией является то, что она аддитивна и в любом обратимом замкнутом процессе ее изменение равно нулю, так как это все-таки функция состояния.

1.3 Цикл Карно и теоремы Карно

Как мы уже поняли из второго начала для того, чтобы собрать тепловую машину нам нужно как минимум 2 тепловых резервуара, чтобы брать тепло у одного и отдавать другому, а разницу выдавать как работу. И естественным выбором для нас является рассмотрение цикла из 2 изотерм и 2 адиабат. Такой цикл является циклом Карно и для него есть 2 теоремы:

Теорема 1. КПД цикла Карно не зависит от рабочего тела и он равен:

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = 1 - \frac{|Q_X|}{Q_H} = 1 - \frac{T_X}{T_H}$$

Теорема 2. КПД любого из циклов с между максимальной и минимальной температурами меньше цикла Карно для данных максимальной и минимальной температур.

Из этих 2 теорем есть занимательное следствие, которое также отсылает на к энтропии, как функции состояния:

$$\frac{|Q_X|}{Q_H} = \frac{T_X}{T_H} \Rightarrow \frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_X}{T_X} = 0 \Rightarrow \oint \frac{\delta Q}{T} = \oint dS = 0$$

Этим свойством мы и будем пользоваться для расчетов наших задач.

2 Практическая часть

2.1 Задача 3.25

Условие Какую максимальную работу можно получить от периодически действующей тепловой машины, нагревателем которой служит $m_1 = 1$ кг воды при начальной температуре $T_1 = 373$ К, а холодильником $m_2 = 1$ кг льда при температуре $T_2 = 273$ К, к моменту, когда растает весь лед? Чему будет равна температура воды в этот момент? Удельная теплота плавления льда $q = 80$ ккал/кг. Зависимостью теплоемкости воды от температуры пренебречь.

Решение Тепло нашей машины отдается горячей водой и принимается льдом. Тогда мы можем применить бесконечно малый цикл Карно для этого процесса и посмотреть, что получается:

$$\frac{\delta Q_H}{T_H} = -\frac{\delta Q_X}{T_X}$$

Теперь рассмотрим более подробно каждое из обозначений. $\delta Q_H = cm_1 dT$ — элементарная теплота?которую забрали от нагревателя и соответственно изменили его температуру, T_H — текущая температура горячей воды, $\delta Q_X = qm_2$ — тепло переданное холодильнику, которое пошло на плавление льда, $T_X = T_2$ — температура льда. А дальше этот элементарный цикл мы должны прогонять каждый раз, постепенно понижая температуру воды до тех пор, пока лед не растает окончательно. Это означает интегрирование:

$$\int_{T_1}^{T} \frac{cm_1 dT}{T} = -\frac{m_2 q}{T_2} \Rightarrow -\frac{m_2 q}{T_2} = cm_1 \ln\frac{T_1}{T} \Rightarrow T = T_1 \exp\left(-\frac{m_2 \lambda}{cm_1 T_2}\right)$$

Вот мы и нашли конечную температуру воды. Теперь про работу. Тут все очень просто — надо записать закон сохранения энергии и на этом все:

$$A = Q_H - Q_X = cm_1(T_1 - T) - m_2 q = 62 \text{ кДж}$$

И вот тут надо бы сказать, что в целом задачка понятная, но в дальнейшем я очень не хочу использовать эти самые бесконечно-малые циклы Карно и предлагаю решение на порядок проще. Суть его проста, хотя для вас и является новой: используйте то, что энтропия всей системы не меняется. То есть мы простого говорим: во время работы этой машины энтропия меняется у нагревателя и у холодильника, тогда эти изменения должны компенсировать друг друга. Это и будет в дальнейшем заменять нам условие Карно.

2.2 Задача Т2

Условие В двух одинаковых изолированных сосудах находится по молю воздуха при $T_0 = 300$ K. Сосуды используются в качестве тепловых резервуаров для тепловой машины, работающей по обратному циклу. Найти минимальную работу, которую должна затратить машина, чтобы охладить газ в одном из сосудов до $T_1 = 200$ K. Какова будет конечная температура газа во втором сосуде? Теплоёмкостью сосудов и зависимостью теплоёмкости воздуха от температуры пренебречь.

Решение Эта задача очень похожа не прошлую, только цикл здесь не прямой, а обратный. Мы отбираем тепло у первого сосуда и за счет совершения работы отдаем его второму. Причем, у нас в сосудах моль воздуха, объем не меняется и значит воздух будет и греться и охлаждаться при постоянном объеме с теплоемкостью $C_V = 5R/2$. Запишем нулевое изменение энтропии системы:

$$0 = \Delta S = \Delta S_H + \Delta S_X = \int\limits_{T_1}^{T_0} \frac{C_V dT}{T} + \int\limits_{T_2}^{T_0} \frac{C_V dT}{T} = C_V \ln \frac{T_1}{T_0} + C_V \ln \frac{T_2}{T_0} = C_V \ln \frac{T_1 T_2}{T_0^2}$$

$$\frac{T_1 T_2}{T_0^2} = 1 \Rightarrow T_2 = \frac{T_0^2}{T_1} = 450K$$

Вопрос о работе также совершенно аналогичен прошлой задаче:

$$A = Q_H - Q_X = C_V(T_2 - T_0) - C_V(T_0 - T_1) = \frac{5R}{2}(T_1 + T_2 - 2T_0) \approx 1 \text{ кДЖ}$$

2.3 Задача 3.43

Условие С помощью бензиновой горелки в помещении поддерживается температура $t_1 = -3$ C при температуре на улице $t_2 = -23$ C. Предлагается использовать бензин в движке с КПД $\eta = 0.4$, а с помощью полученной механической энергии запустить тепловой насос, перекачивающий по холодильному циклу теплоту с улицы в комнату. Какой должна быть в этом случае температура в помещении t? Движок находится вне помещения; расход бензина в нем такой же, как в горелке.

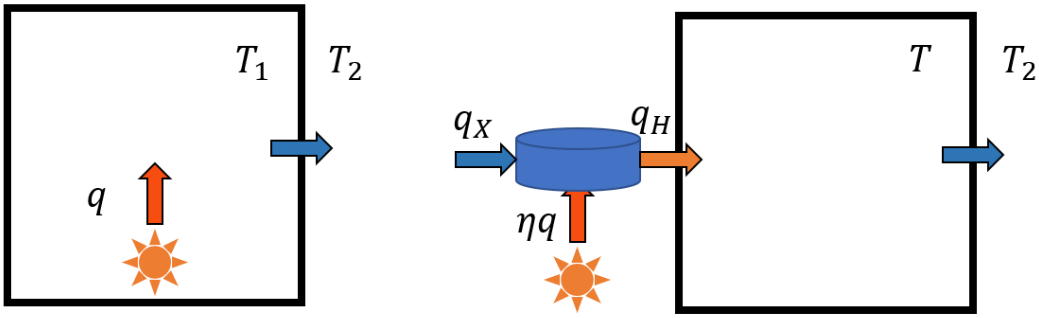

Рис. 1: К задаче 3.43

Решение Задача звучит непонятно, поэтому стоит нарисовать, что происходит. В первом случае у нас есть горелка, которая просто подает какую-то мощность в комнату. Но в комнате сохраняется фиксированная температура, значит эта мощность уходит через стенки на улицу. Тогда баланс этих мощностей можно записать в предположении, что поток тепла между стенками пропорционален разности температур внутри и снаружи, сразу перейдя к абсолютным температурам:

$$q = \alpha(T_1 - T_2)$$

Что же меняется в случае, когда мы ставим насос. В него вкачивается энергия от сжигания топлива в горелке, причем не вся, а только ее часть из-за КПД:

$$\frac{\delta A}{dt} = \eta q = \eta\alpha(T_1 - T_2)$$

На что идет эта работа? На традиционные для тепловых машин отъем тепла с улицы(холодильник) и передачу его в комнату(нагреватель). То есть у нас получается новый тепловой поток в комнату, которые в конечном итоге сбалансирует потоком через стенки из комнаты и там установится температура T:

$$q_H = q_X + \eta q \Rightarrow \alpha(T - T_2) = q_X + \eta\alpha(T_1 - T_2)$$

Осталось понять, что делать с потоком тепла, который забирается с улицы q_X. Для этого опять воспользуемся основной идеей из цикла Карно:

$$\frac{q_H}{T_H} = \frac{q_X}{T_X} \Rightarrow \frac{\alpha(T - T_2)}{T} = \frac{q_X}{T_2} \Rightarrow q_X = \alpha(T - T_2)\frac{T_2}{T}$$

Собираем все вместе и получаем:

$$\alpha(T - T_2) = \alpha(T - T_2)\frac{T_2}{T} + \eta\alpha(T_1 - T_2) \Rightarrow (T - T_2)^2 = \eta T(T_1 - T_2)$$

Это квадратное уравнение на T, которое дает только один физичный корень: $T \approx 299$ К

2.4 Задача 4.80

Условие На Венере атмосфера состоит из CO_2. Полагая его идеальным газом и атмосферу адиабатической, определить температуру на поверхности планеты, если плотность газа падает в $n = 2$ раза на высоте $H = 12.2$ км при ускорении силы тяжести $g = 8.87$ м/с^2. Молярная теплоемкость CO_2 в таких условиях $C_V = 5R$. Ускорение силы тяжести не зависит от высоты.

Решение Нулевой пункт, который нам нужен это связь удельного объема (объема одного моля) и плотности. Тут все легко: $v \propto \rho^{-1}$

Теперь можно переходить к самой задаче. Атмосфера адиабатическая, поэтому нам надо понять как меняются параметры с высотой. Так как теплового равновесия не наступает температура разных слоев разная, но связь для них как в обычной адиабате:

$$P\rho^{-\gamma} = P_0\rho_0^{-\gamma} \Rightarrow TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0 P_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}; T\rho^{1-\gamma} = T_0\rho_0^{1-\gamma}$$

Теперь получим зависимость температуры от давления:

$$T = T_0\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{R}{C_P}}$$

Найдем зависимость давления и температуры от высоты. Для этого надо записать во-первых механическое равновесие:

$$\frac{dP}{dh} = -\rho(h)g$$

А во-вторых, продифференцированную по высоте температуру:

$$\frac{dT}{dh} = T_0\frac{R}{C_P}\cdot\frac{P^{\frac{R}{C_P}-1}}{P_0^{\frac{R}{C_P}}}\cdot\frac{dP}{dh} = -T_0\frac{R}{C_P}\cdot\frac{P^{\frac{R}{C_P}-1}}{P_0^{\frac{R}{C_P}}}\rho g = -T_0\frac{R}{C_P}\cdot\frac{P^{\frac{R}{C_P}-1}}{P_0^{\frac{R}{C_P}}}\rho_0\frac{P^{\frac{C_V}{C_P}}}{P_0^{\frac{C_V}{C_P}}}g = -\frac{T_0\rho_0}{P_0}\frac{R}{C_P}g = -\frac{\mu g}{C_P}$$

То есть зависимость температуры от высоты у нас линейная:

$$T = T_0 - \frac{\mu g}{C_P}h$$

А из условия мы знаем плотность на нужной высоте, плюс записанное соотношение плотности и температуры. Тогда:

$$T_0\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1-\gamma} = T_0 - \frac{\mu g}{C_P}h \Rightarrow T_0 = \frac{\mu g H}{C_P\left[1-\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{R/C_V}\right]} = 740\text{ K}$$

2.5 Комментарии к задачам из задания

Нулевки Просто 2 задачки на КПД циклов для стандартных PV и новых TS координат. И еще одна задачка на правило для цикла Карно

Задача 3.25 Решена

Задача 3.43 Решена

Задача 3.47 Напоминает задачу 3.43, просто попрактиковаться с подходом

Задача 3.52 Задача кажется школьной, но на деле надо будет еще дописать условие на то, что энтропия в замкнутом цикле не меняется и из него найти соотношение между температурами в промежуточных точках и в точках экстремальных значений

Задача 4.15 Опять цикл и опять запись изменения энтропии в нем равна нулю

Задача 4.73 Нужно получить уравнение политропы в координатах (T, S) и опять записать нулевое изменение энтропии в цикле.

Задача 4.80 Решена

Задача Т2 Решена