Семинар 2. Динамика материальной точки. Законы Ньютона.

Клименок Кирилл Леонидович

08.09.2022

1 Теоретическая часть

Теоретическая часть этого семинара будет крайне простой, потому, что некоторые философские рассуждения с лекций никак не помогут нам решать задачи.

1.1 Законы Ньютона

Как вы помните из школы их всего три. Первый говорит о том, что существуют такие «инерциальные» системы отсчета, в которых если на тело не действуют силы или их действие скомпенсировано, изолированные тела движутся равномерно и прямолинейно или стоят на месте. Тут надо оговориться, что эти самые инерциальные системы отсчета постулируются и, по хорошему их надо бы проверять. Еще можно показать, что если одна система является инерциальной, а вторая движется относительно нее с постоянной скоростью, то и вторая — тоже инерциальная.

Второй закон для некоторого тела связывает его массу, ускорение и силу, которая на него действует. И тут возникает очередной подвох — мы не давали определение ни массы, ни силы. А определять одно через другое это дурной тон. Мы изящно выкрутились на лекции тем, что постулировали такую штуку, как меру количества движения (импульс), из того пространство однородно и изотропно показали, что импульс пропорционален скорости, а закон сохранения импульса постулировали. Это дало нам право сказать, что пропорциональность можно заменить на равенство, если ввести массу. Тем самым мы хоть немного это обосновали и дальше сказали что силу через массу определить также можно. при этом математическая формулировка второго закона Ньютона это не только определение силы, но еще и дифференциальное уравнение, решив которое можно найти то, как движется тело. Ну и правильно теперь записывать второй закон Ньютона как:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Третий же закон Ньютона, о равенстве сил действия и противодействия, также является следствием нашего постулирования закона Ньютона. И вообще-то в общем смысле он не совсем выполняется, так как мы говорим, что тела друг на друга действую мгновенно, а это не так — у любого взаимодействия есть конечная скорость передачи. Например, для электромагнитного взаимодействия — это скорость света.

1.2 Центр инерции и теорема о его движении.

Мы ввели относительно новое понятие для вас, а именно система центра инерции. все максимально просто: если у нас есть какая-то система из массивных точек, то система, где их суммарный импульс равен нулю и будет системой центра инерции. Тогда ее скорость:

$$\vec{V}_c = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$$

Теперь давайте покажем, что если на систему действую несколько силы, то только внешние силы и определяют как меняется импульс центр инерции всей системы.

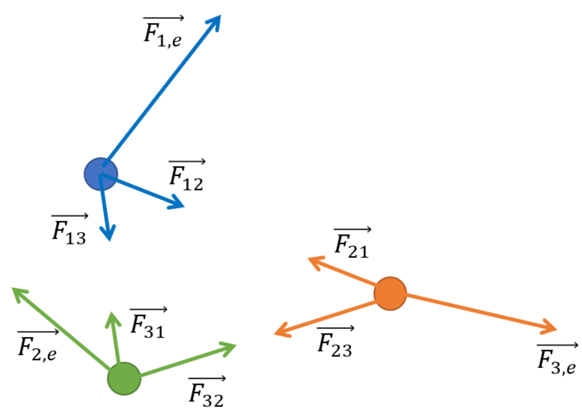

Рис. 1: Внутренние и внешние силы, действующие на систему из нескольких тел

Запишем, что происходит с импульсом каждой конкретной точки в системе, а потом сложи все воедино:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{1,e} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} \\ \dfrac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{2,e} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} \\ \dfrac{d\vec{p}_3}{dt} = \vec{F}_{3,e} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} \end{cases}$$

$$\frac{d\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3\right)}{dt} = \vec{F}_{1,e} + \vec{F}_{2,e} + \vec{F}_{3,e}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_e$$

То есть суммарный импульс системы оказывается изменяется только за счет внешних сил. Этот принципиальный факт и понадобится нам для разных задачек.

2 Практическая часть

2.1 Задача 2.43

Условие Брусок скользит по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v_0 и по касательной попадает в область, ограниченную забором в форме полуокружности. Определить время, через которое брусок покинет эту область. Радиус забора R, коэффициент трения скольжения бруска о поверхность забора k. Трением бруска о горизонтальную поверхность пренебречь, размеры бруска много меньше R.

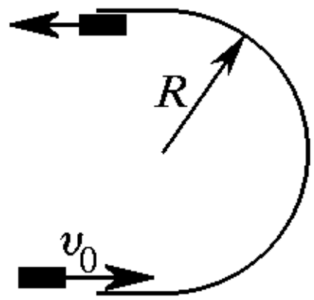

Рис. 2: К задаче 2.43

Решение То, что мы видим на рисунке — это вид сверху. Это означает, что тело едет по окружности и трется о поверхность желоба, при этом поворачивает тело под действием силы реакции со стороны этого желоба. Что еще важно, так это то, что скорость при прохождении желоба будет меняться и это несколько усложняет задачу. Давайте для начала запишем сто будет происходить в направлении к центру кривизны, а затем вдоль направления силы терния.

Итак для силы реакции опоры:

$$m\frac{v^2}{R} = N$$

Это выражение дает нам возможность записать что происходит с силой трения:

$$m\frac{dv}{dt} = -F_{\text{тр}} = -kN = -km\frac{v^2}{R} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -k\frac{v^2}{R}$$

$$\frac{dv}{v^2} = -k\frac{dt}{R}$$

Кажется, что задача уже решена и осталось только проинтегрировать. Но есть проблема: у нас в задаче вообще ни ничего не сказано о времени. Придется выкручиваться. Для этого надо бы выразить dt через что-то известное нам. Единственный вариант — это скорость:

$$v = \frac{dL}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dL}{v}$$

А вот теперь собираем все воедино и радуемся:

$$\frac{dv}{v^2} = -k\frac{dL}{vR}$$
$$\frac{dv}{v} = -k\frac{dL}{R}$$
$$\int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k\int\limits_{0}^{\pi R} \frac{dL}{R}$$
$$v = v_0 \exp\left[-\frac{kL}{R}\right]$$

Это и есть ответ.

2.2 Задача 2.57

Условие Нить перекинута через бревно. На концах нити укреплены грузы, имеющие массы m_1 и m_2. Считая заданным коэффициент трения k нити о бревно, найти условие, при котором грузы будут оставаться в покое. Определить ускорение a системы грузов при нарушении условий равновесия.

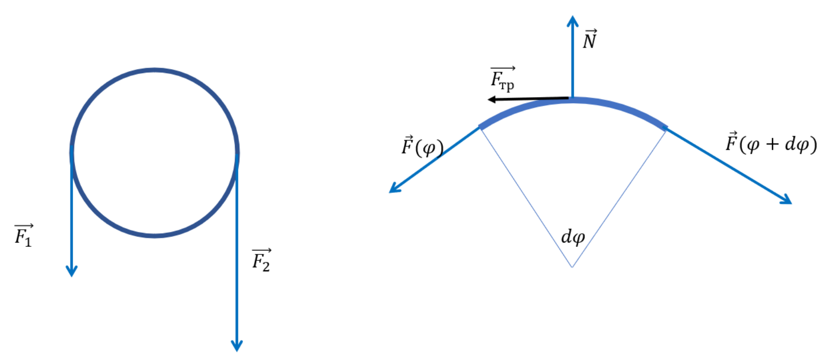

Рис. 3: К задаче 2.57

Решение Я решу только часть задачи в самом общем виде, так как этот подход окажется очень важным для нам с методической точки зрения.

Для начала, просто посмотрим, что происходит на макроуровне: у нас есть 2 силы, которые действуют на веревку, которая перекинута через блок. Они разные, а система находится в равновесии. Почему? Из-за силы трения, которая возникает между блоком и веревкой. Давайте ее считать. Для этого выделим небольшой участок веревки с угловым размером $d\varphi$ и расставим все силы, которые на него действуют. Их 4 штуки: сила реакции, сила трения и 2 силы натяжения, которые при этом еще и разные немного. Теперь, зная это можно смело записывать как и что у нас происходит с точки зрения равновесия и с учетом геометрии:

$$N = F(\varphi)\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + F(\varphi + d\varphi)\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \approx F(\varphi)d\varphi$$

$$F(\varphi + d\varphi)\cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - F(\varphi)\cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \approx dF = F_{\text{тр}} = kN$$

$$dF = kFd\varphi \Rightarrow \frac{dF}{F} = kd\varphi$$

$$\int\limits_{F_1}^{F_2} \frac{dF}{F} = \int\limits_0^{\pi} kd\varphi \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \exp\left(k\pi\right)$$

Здесь мы использовали довольно стандартное приближение, что вдоль силы трения проекции растягивающих сил равны силам, так как косинус угла равен 1, а вот перпендикулярные составляющие, хоть и малы, но они есть. А из геометрии синус угла равен примерно самому углу.

Вопросы, что делать если система начнет двигаться, я оставляю вам для самостоятельного изучения.

2.3 Задача 2.24

Условие Хоккейная шайба падает на лед со скоростью v_0 под углом α и продолжает скользить по льду. Найти скорость скольжения как функцию времени, если коэффициент трения шайбы о лед k не зависит от скорости и силы давления шайбы на лед.

Решение В этой задаче демонстрируется еще один важный принцип, а именно, даже если ты не можешь посчитать интеграл явно, не стесняйся его записать, вдруг получится.

У этой задачи есть 2 этапа: удар и последующее скольжение. Кажется, а зачем нам тут вообще удар? Проблема в силе трения, которая как-то явно поменяет нам горизонтальную скорость. Вот давайте разберемся как именно это произойдет. Распишем что происходит во время удара с импульсом шайбы по вертикали и горизонтали:

$$\Delta\left(mv\right)_y = 0 - mv_0\sin\alpha = \int\limits_0^{\tau} Ndt$$

$$\Delta\left(mv\right)_x = mv_{st} - mv_0\cos\alpha = \int\limits_0^{\tau} F_{\text{тр}}dt = k\int\limits_0^{\tau} Ndt$$

$$v_{st} = v_0\cos\alpha - kv_0\sin\alpha$$

Мы здесь воспользовались тем, что во время удара сила реакции много больше силы тяжести и на нее можно забить. В результате мы получили начальную скорость движения по горизонтали. Дальше шайба просто едет с сухим трением. Это означает, что скорость будет завить линейно:

$$v(t) = v_{st} - kgt$$

2.4 Задача 2.32

Условие Парусный буер массой 100 кг начинает движение под действием ветра, дующего со скоростью $v = 10$ м/с. Вычислить время, через которое мощность, отбираемая буером у ветра, будет максимальной, если сила сопротивления паруса ветру пропорциональна квадрату относительной скорости между буером и ветром с коэффициентом пропорциональности $k = 0,1$ кг/м. Трением пренебречь.

Решение Для начала разберемся с терминологией. Буер — лёгкая лодка или платформа, установленная на особых металлических коньках, предназначенная для скольжения по льду и оснащённая мачтой с парусами. Теперь что же от нас хотят? Нам надо понять, когда мощность, отбираемая у ветра будет максимальна. Решаем задачу поэтапно и вспоминаем, что мощность — это произведение силы на скорость. Что за скорость — понятно, скорость буера. А что за сила? Эта сила, которая разгоняет и работает — сила сопротивления воздуха. Значит нашей целью является всего лишь найти выражение для зависимости мощности от времени и найти ее максимум. Первым найдем скорость:

$$m\frac{du}{dt} = k(u-v)^2 \Rightarrow \frac{du}{(v-u)^2} = \frac{k}{m}dt$$

$$\int\limits_0^{u(t)} \frac{du}{(v-u)^2} = \frac{k}{m}\int\limits_0^t dt$$

$$\frac{u}{v(v-u)} = \frac{k}{m}t \Rightarrow u(t) = \frac{kv^2t}{m+kvt}$$

Теперь пишем, что происходит с мощностью и с помощью производной находим максимум:

$$N(u) = k(v-u)^2u$$

$$\frac{dN}{du} = k(u-v)(3u-v) = 0 \Rightarrow u = v/3$$

И теперь зная скорость, можно найти нужный момент времени:

$$\frac{v}{3} = \frac{kv^2t}{m+kvt} \Rightarrow t = \frac{m}{2kv} = 50 \text{ с}$$

2.5 Комментарии к задачам из задания

Нулевки Эта задачка на аккуратное интегрирование. Делайте так, как мы делали в задачах семинара и все получится.

Задача 2.1 Мысленно разбить доску на 2 составляющих и записать для каждой 2 закон Ньютона. Этого хватит.

Задача 2.5 стандартная задача на наклонную плоскость. Аккуратно для каждого тела пишем 2 закон Ньютона и все.

Задача 2.17 В этой задаче надо сохранить центр масс в том же положении, где он был до начала движения. Запишите то, как и куда перемещаются грузы и обезьяна относительно земли и будет радостно.

Задача 2.18 Аккуратно расписать все силы между досками, между доской и полом и записать 2 закон Ньютона, больше ничего не надо.

Задача 2.43 Решена

Задача 2.51 Достаточно аккуратно расставить силы, действующие на шарик в первом и втором случаях. Даже интегрировать не придется.

Задача 2.57 Решена

Задача 2.59 Самая интересная задача на подумать. Первое — ответьте себе на вопрос, что было бы, если бы никакого дополнительно груза не было. Растягивалась ли пружина и почему? Зная ответ, запишите 2 закон Ньютона, для каждого небольшого кусочка пружины, а затем сложите удлинения всех этих кусков. Не забудьте подумать как связаны коэффициенты жесткости каждого из этих кусков со всей пружиной.

Задача 2.68 Просто аккуратно записать законы движения по каждой из осей с учетом вязкого трения о воздух и проинтегрировать. Дальше найти длину достаточно легко.

Задача 2.71 Задача на запись 2 закона Ньютона и последующее интегрирование. Воспользуйтесь указанием и разбейте подынтегральное выражение на два.