Семинар 5. Момент импульса. Движение в поле центральных сил. Тяготение

Клименок Кирилл Леонидович

19.09.2022

1 Теоретическая часть

1.1 Момент сил. Момент импульса.

Начнем с определения векторного произведения:

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{c};$$
$$|[\vec{a} \times \vec{b}]| = ab \sin \alpha;$$
$$\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{a}$$

Тут надо понимать, что результат векторного произведения это вектор, который перпендикулярен плоскости,где лежат исходные вектора и они образуют правую тройку. Проверить куда он направлен можно, если взять указательный палец правой руки вдоль вектора $\vec{a}$, средний — вдоль вектора $\vec{b}$?, тогда большой палец покажет направление результата. Векторное произведение не коммутативно — при изменении порядка меняется знак результата.

Теперь можно ввести момент силы относительно точки:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$$

В данном случае r — радиус-вектор из избранной точки в точку приложения силы. Физический смысл момента сил известен вам еще со школы и по сути показывает насколько интенсивно точка приложения будет вращаться под действием силы и в каком направлении вокруг избранной точки.

Тогда домножив векторно справа второй закон Ньютона мы получаем уравнение на связь момента силы и момента импульса:

$$\frac{d[\vec{r} \times \vec{p}]}{dt} = [\vec{r} \times \vec{F}] \Leftrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

В случае, если у нас есть не материальная точка, а система точек или тело, то аналогично можно сформулировать закон изменения момента импульса для системы: там будет стоять только момент внешних сил, так как момент всех пар внутренних сил равен нулю.

1.2 Центральные силы

Для начала определим центральные силы:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

Такие силы, действующие вдоль радиуса максимально удобны нам, так как во-первых они потенциальны, а во-вторых их момент относительно точки создания равен нулю.

Самый простой пример таких сил это гравитационное притяжение:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}; \Pi = -\int F dr = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

Для них мы считаем, что потенциальная энергия равна нулю на бесконечности, а чем ближе взаимодействующие массы тем она ниже. Теперь об их моменте:

$$\vec{M} = \left[r \times \vec{F}(r)\frac{\vec{r}}{r} \right] = 0$$

Таким образом можно сказать, что траектория по которой движется тело плоская (момент импульса постоянен, поэтому скорость лежит в плоскости перпендикулярной ему), так что можно ввести понятие секториальной скорости. Это величина, определяющая быстроту изменения площади, заметаемой радиус-вектором точки при её движении по кривой:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2}[\vec{r} \times d\vec{r}] = \frac{L}{2m} = const$$

Тогда для центральных сил она будет постоянной.

1.3 Движение в поле центральных сил

Законы Кеплера Начнем с формулирования законов Кеплера, которые были обнаружены экспериментально, еще до Ньютона.

1. Все планеты солнечной системы движутся по эллипсам, в фокусе которого находится Солнце
2. Секториальная скорость для планеты постоянна
3. Отношение квадрата периода к кубу большой полуоси постоянных

Полная энергия. Эффективный потенциал. Точки поворота Естественно, строго доказывать мы их не будем, но вот некоторые комментарии для решения задач надо бы написать. Для начала, будем использовать полярные координаты и в них перепишем скорость:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi; v_r = \dot{r}, v_\varphi = r\dot{\varphi}$$

Теперь можно расписать законы сохранения момента импульса и энергии в расчете на единицу массы:

$$\varepsilon = \frac{E}{m} = \frac{v_r^2 + v_\varphi^2}{2} - \frac{\gamma}{r} = const$$
$$l = \frac{L}{m} = r v_\varphi = const$$
$$\gamma = GM$$

Можно пересобрать эти законы сохранения в один:

$$\varepsilon = \frac{\dot{r}^2}{2} + \underbrace{\frac{l^2}{2r^2} - \frac{\gamma}{r}}_{\Pi'(r)}$$

И ввести эффективный потенциал, который зависит только от расстояния до гравитирующего центра.

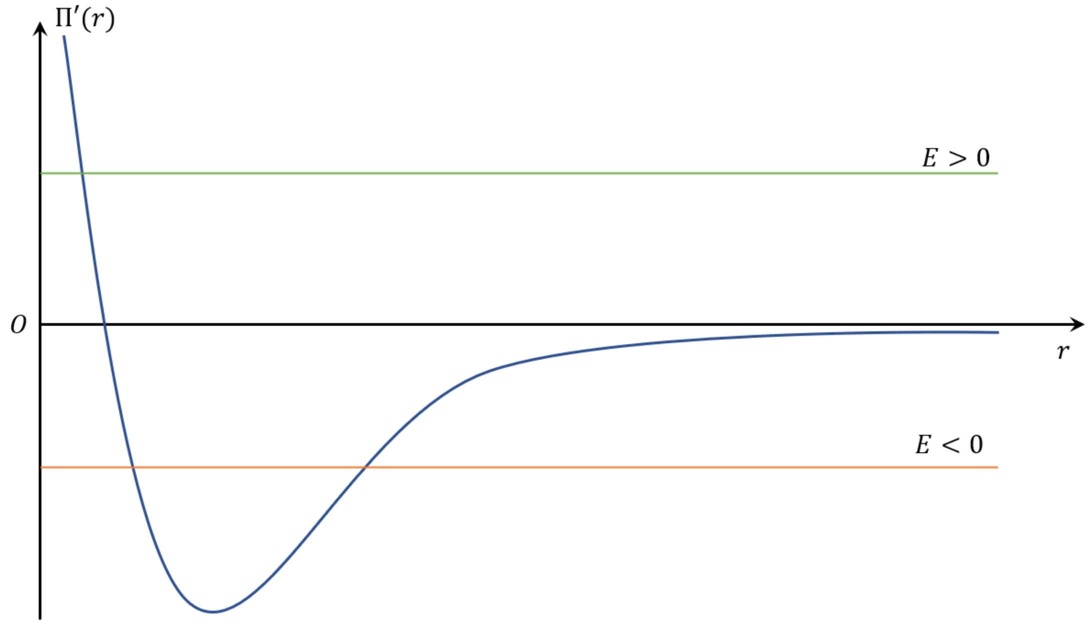

Рис. 1: Структура эффективного потенциала $\Pi'(r)$

Давайте обсудим это выражение и картинку. Выбирая уровень энергии тела мы просто рисуем горизонтальную прямую. Тогда, когда эта прямая пересекает наш график, это означает, что скорость вдоль радиуса равна нулю. Такие точки называются точками поворота и скорость в них перпендикулярна радиус-вектору. Теперь у нас есть несколько областей. Область с энергией меньше нуля соответствует 2 точкам поворота и это эллипс (финитная траектория). Область, где энергия равна нулю будет соответствовать 1 точке поворота и параболе, область с энергией больше нуля соответствует гиперболе, где на бесконечности у тела будет какая-то скорость, соответствующая асимптоте этой самой гиперболы. И парабола, и гипербола — инфинитные траектории.

Характеристики эллиптической орбиты Обсудим эллипс более подробно. Напомню (или расскажу первым) одно из свойств эллипса: сумма расстояний от фокусов до произвольной точки эллипса должна быть одинакова. Найдем длину полуосей эллипса. Для большей полуоси давайте Перепишем выражение для энергии как квадратное уравнение на расстояние до точек поворота:

$$\varepsilon r^2 + \gamma r - \frac{l^2}{2} = 0 \Rightarrow 2a = r_1 + r_2 = -\frac{\gamma}{\varepsilon}$$

То есть большая полуось эллипса это всего имеет смысл только при полной энергии меньше нуля и равна $a = -\gamma/2\varepsilon$.

Выражение для малой полуоси получается несколько сложнее и мы примем его без вывода:

$$b = \frac{l}{\sqrt{\gamma/a}} = \frac{l}{\sqrt{-2\varepsilon}} = \frac{L}{\sqrt{-2Em}}$$

Круговая орбита Для круговой орбиты Можно будет вывести несколько своих особенностей. Так как окружность это эллипс с одинаковыми полуосями, тогда:

$$a = b = R = -\frac{\gamma}{2\varepsilon}$$

Тогда потенциальная энергия (на единицу массы) связана с полной следующим соотношением:

$$\pi = -\frac{\gamma}{R} = 2\varepsilon$$

А полную энергию можно представить как:

$$\varepsilon = \pi + k = \frac{\pi}{2} \Rightarrow k = -\frac{\pi}{2} = -\varepsilon$$

Также, для круговой орбиты можно просто записать первую космическую скорость:

$$v_I = \sqrt{gR}$$

2 Практическая часть

2.1 Задача 6.8

Условие По внутренней поверхности конической воронки, стоящей вертикально, без трения скользит маленький шарик (см. рис.). В начальный момент шарик находился на высоте h_0, а скорость его v_0 была горизонтальна. Найти v_0, если известно, что при дальнейшем движении шарик поднимается до высоты h, а затем начинает опускаться. Найти также скорость v шарика в наивысшем положении.

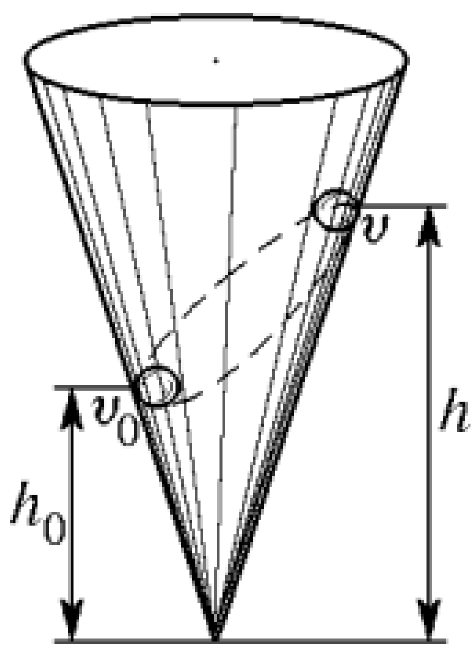

Рис. 2: К задаче 6.8

Решение Эта задача очевидно на закон сохранения энергии и момента импульса. Энергия сохраняется потому, что нет диссипативных сил, а момент импульса потому, что суммарный момент силы тяжести и силы реакции относительно любой точки на оси конуса равны 0 (вертикальные компоненты сил одинаковы, а проекция силы реакции на радиус имеет нулевой момент). Тогда, считая радиусы каждой конкретной точки в верхней и нижней точек r и r_0:

$$\begin{cases} mv_0r_0 = mvr \\ mgh_0 + \dfrac{mv_0^2}{2} = mgh + \dfrac{mv^2}{2} \end{cases}$$

Также из геометрии: $r/r_0 = h/h_0$. Тогда получается что у нас система из 2 уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} v_0h_0 = vh \\ gh_0 + \dfrac{v_0^2}{2} = gh + \dfrac{v^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^2 = \dfrac{2gh_0^2}{h+h_0} \\ v_0^2 = \dfrac{2gh^2}{h+h_0} \end{cases}$$

2.2 Задача 7.5

Условие Два тела с одинаковой массой M движутся навстречу из бесконечности по параллельным траекториям, расстояние между которыми равно l. Начальные скорости одинаковы и равны v_0. Каково будет минимальное расстояние между телами с учетом их гравитационного притяжения?

Решение Естественно, траектории по которым будут двигаться тела — это гиперболы. При этом, положение центра масс системы остается постоянным и никуда не двигается. Тогда все надо рассматривать относительно центра масс. Первое, на что надо ответить — это когда у нас будет минимальное расстояние? Тут все просто — в точке поворота, так как тогда полная скорость движения будет перпендикулярна радиус-вектору. И до и после этого момента у скорости будет проекция на него, что означает, что тела сближаются или удаляются друг от друга. Тогда можно записать законы сохранения энергии и момента импульса:

$$\begin{cases} 2mv_0\dfrac{l}{2} = 2mv\dfrac{r_{min}}{2} \\ 2\dfrac{mv_0^2}{2} = 2\dfrac{mv^2}{2} - G\dfrac{m^2}{r_{min}} \end{cases}$$

Далее надо просто решить эту систему и получить ответ:

$$r_{min} = -G\frac{m}{2v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{Gm}{2v_0^2}\right)^2 + l^2}$$

2.3 Задача 7.44

Условие Со спутника, движущегося по круговой орбите со скоростью v_0, стреляют в направлении, составляющем угол 120° градусов к курсу. Какой должна быть скорость пули v относительно спутника, чтобы пуля ушла на бесконечность?

Решение Первое, что делаем — пишем условие того, что орбита спутника круговая и находим скорость на ней:

$$\frac{mv_0^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow v_0^2 = \frac{GM}{r}$$

Теперь разбираемся со скоростями пули в ЛСО, относительно Земли. У нее будет 2 составляющих: по радиусу и по углу. Их мы можем найти:

$$v_\varphi = v_0 - v\sin 30^\circ = v_0 - \frac{v}{2}$$
$$v_r = v\cos 30^\circ = \frac{v\sqrt{3}}{2}$$

Тогда ее полная скорость относительно земли:

$$v_{abs}^2 = v_\varphi^2 + v_r^2 = v_0^2 - v_0 v + v^2$$

И условие, чтобы пуля улетела на бесконечность — это суммарная энергия равная нулю:

$$\frac{mv_{abs}^2}{2} - G\frac{Mm}{R} = 0 \Rightarrow v_{abs}^2 = 2v_0$$

получили квадратное уравнение на скорость v и решая его, выберем подходящий корень. Оказывается $v = \frac{v_0}{2}(1+\sqrt{5})$

2.4 Задача 7.61

Условие Космический корабль движется вокруг Солнца по той же круговой орбите, что и Земля ($R_E = 1,5 \cdot 10^8$ км), причем настолько далеко от Земли, что ее влиянием можно пренебречь. Корабль получает в направлении своего движения дополнительную скорость Δv, достаточную для достижения орбиты Марса по траектории, касающейся орбиты Марса. Марс вращается вокруг Солнца по круговой орбите радиусом $R_M = 2,28 \cdot 10^8$ км. Определить время перелета и величину Δv. Для Солнца $GM_S = 1325 \cdot 10^8$ км^3/с2

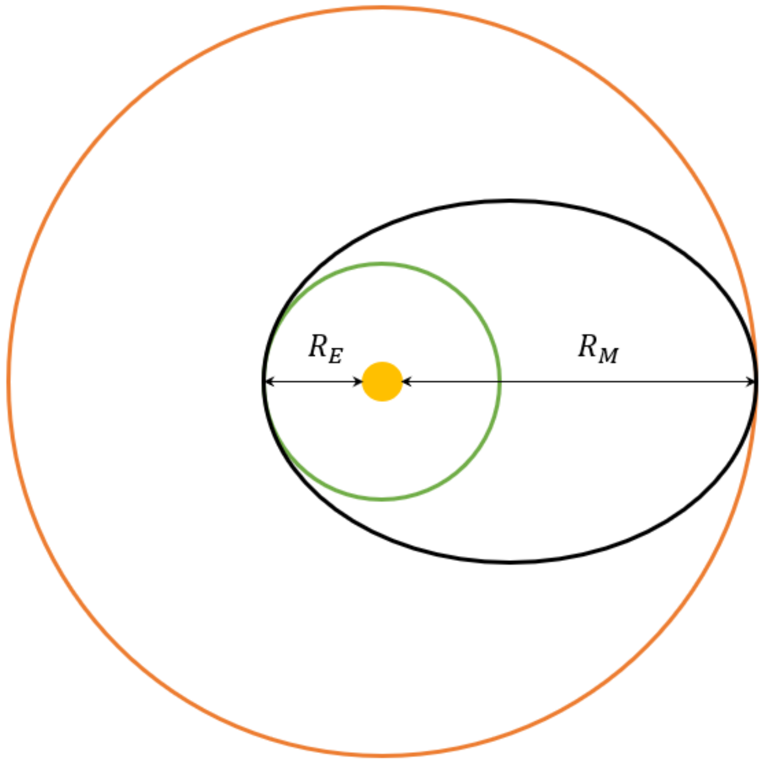

Рис. 3: К задаче 7.61

Решение Во-первых, надо понимать, что мы при добавке скорости получаем не новую круговую, а эллиптическую траекторию, так, чтобы она касалась орбиты Марса. При этом, мы к тому же знаем, что большая ось эллипса — это сумма расстояний от Солнца до Земли и расстояния от солнца до Марса:

$$2a = R_E + R_M$$

Во-вторых, тогда это сразу же нам дает возможность использовать идею о записи полной энергии на такой орбите. До всяких приключений корабль был на условно круговой орбите вокруг Солнца, тогда:

$$E_1 = -G\frac{mM_S}{2R_E}$$

После работы двигателей:

$$E_2 = -G\frac{mM_S}{2a} = -G\frac{mM}{R_E + R_M}$$

Тогда из разницы энергий можно найти разницу скоростей:

$$\Delta E = G\frac{mM_S}{2R_E}\left(1 - \frac{2R_E}{R_E + R_M}\right) = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2} \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 + G\frac{mM_S}{2R_E}\left(1 - \frac{2R_E}{R_E + R_M}\right)$$

Естественно начальную скорость можно найти как $v_1 = \sqrt{GM_S/R_E}$. Тогда финальный результат будет: $\Delta v \approx 2.9$ км/с.

Чтобы найти время не надо интегрировать. Надо воспользоваться 3 законом Кеплера, который работает для любого тела в солнечной системе, в том числе и для спутника:

$$\frac{T_E^2}{R_E^2}=\frac{T^2}{\frac{1}{8}(R_E+R_M)^3}\Rightarrow \tau=\frac{T_E}{4\sqrt{2}}\left(1+\frac{R_M}{R_E}\right)^{3/2}$$

2.5 Задача 7.189

Условие Слабая сила сопротивления, действующая на спутник в верхних слоях атмосферы, пропорциональна квадрату его скорости: $F=kv^2$. Найти, как зависит скорость спутника массой m, движущегося по круговой орбите, от времени, если при $t=0$ скорость спутника была равна v_0.

Решение Решим задачу через силовой подход, а затем через энергетический. В силовом надо расписать второй закон Ньютона и закон изменения момента импульса. Поехали:

$$m\frac{v^2}{R}=G\frac{Mm}{R^2}=mg_0\frac{R_E^2}{R^2}\Rightarrow v^2R=g_0R_E^2=const\Rightarrow 2Rvdv+v^2dR=0$$

Теперь разбираемся с моментом импульса:

$$\frac{dL}{dt}=-FR; L=mvR\Rightarrow dL=mRdv+mvdR$$

И полученные результаты можно собрать воедино:

$$Rdv-2Rdv=-\frac{F}{m}Rdt\Rightarrow a=\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m}=\frac{kv^2}{m}$$

Получим аналогичный результат через энергию. Запишем потери эенргии за некоторое время, как мощность силы сопротивления:

$$\frac{dE}{dt}=-Fv$$

А дальше воспользуемся тем, что орбита круговая и для нее полная энергия равна минус кинетической:

$$E=-\frac{mv^2}{2}\Rightarrow mv\frac{dv}{dt}=Fv\Rightarrow a=\frac{kv^2}{m}$$

Дальнейшее интегрирование с учетом начальной скорости дает результат:

$$v(t)=\frac{v_0}{1-\frac{kv_0}{m}t}$$

2.6 Комментарии к задачам из задания

Нулевки В первой просто записать законы Ньютона и все, во второй надо рассмотреть движение каждой вокруг центра масс и опять же записать второй закон Ньютона.

Задача 6.8 Решена

Задача 6.9 Записать второй закон Ньютона и закон сохранения момента импульса и все решится

Задача 7.1 Действовать через закон сохранения энергии

Задача 7.11 Логичное продолжение нулевки про двойную звезду. Добавить закон сохранения момента импульса и все получится

Задача 7.61 Решена

Задача 7.85 Надо понять по какой траектории движутся метеориты и использовать результат задачи 7.5

Задача 7.189 Решена

Задача Т2 Почти что задача 7.61

Задача Т3 Это комбинация законов сохранения энергии и момента импульса, при этом надо бы сказать, что еще есть и скорость на бесконечности.