Здесь

$$A = \frac{(2\pi G)^{2/3} M_2 (M_1 + 2M_2)}{P_{\rm b}^{2/3} (M_1 + M_2)^{4/3} (1 - e^2)}. \tag{289}$$

Величина ePA/c^2 и дает амплитуду задержки $\gamma_{\rm p}$ (157).

Выражение (288) показывает, что задержка, связанная с гравитационным красным смещением, может быть выделена лишь в том случае, если экцентриситет орбиты e отличен от нуля. В противном случае радиопульсар находился бы в постоянном гравитационном поле компаньона (а квадрат орбитальной скорости также был бы постоянным). Менее тривиальным обстоятельством является то, что для определения величины A необходимо также, чтобы имело место изменение долготы периастра. Дело в том, что при постоянном значении ω появление дополнительного слагаемого eA/c^2 в уравнении (288) приведет лишь к переопределению величины K_1, определяющей, как мы видели, функцию масс системы.

8. Движение периастра

Прежде чем переходить к выводу формулы (150) для смещения периастра, рассмотрим колебание массы m на пружине вдоль оси x вокруг положения равновесия в точке x_0. Закон сохранения энергии может быть записан в виде

$$\frac{m}{2}\left(\frac{{\rm d}x}{{\rm d}t}\right)^2 + \frac{k}{2}(x - x_0)^2 = \mathcal{E}, \tag{290}$$

где

$$U(x) = \frac{k}{2}(x - x_0)^2 \tag{291}$$

есть потенциальная энергия сжатой пружины а k — жесткость пружины. Для малых гармонических колебаний

$$x = x_0 + A_0 \sin(\Omega t), \tag{292}$$

и поэтому

$$\frac{{\rm d}x}{{\rm d}t} = A_0 \Omega \cos(\Omega t). \tag{293}$$

Поскольку в правой части уравнения (290) стоит величина, не зависящая от времени, то коэффициенты при $\sin^2(\Omega t)$ и $\cos^2(\Omega t)$ в левой части уравнения (290) должны быть одинаковыми:

$$\frac{m A_0^2 \Omega^2}{2} = \frac{k A_0^2}{2}, \tag{294}$$

что дает известное соотношение $\Omega^2 = k/m$. С другой стороны, величина k есть вторая производная от потенциала U, взятая в точке равновесия $x = x_0$: $k = U''(x_0)$. В итоге, получаем

$$\Omega^2 = \frac{U''(x_0)}{m}. \tag{295}$$

Таким образом, для определения частоты малых колебаний нужно знать лишь поведение потенциала вблизи положения равновесия $x = x_0$.

Покажем теперь, как с помощью соотношения (295) можно получить выражение (150) для угла смещения периастра за один период. Для этого воспользуемся явным выражением эффективного потенциала $U_{\rm eff}(r)$ (192)

$$U_{\rm eff}(r) = -\frac{mc^2}{2(e')^2}\left(1 - \frac{r_{\rm g}}{r}\right)^2 \left[(e')^2 - \left(1 - \frac{r_{\rm g}}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{c^2 r^2}\right)\right] + \\ + \mathcal{E} - mc^2. \tag{296}$$

При этом необходимо учесть тот факт, что нас интересуют лишь малые поправки к нерелятивистскому случаю, когда отношение $r_{\rm g}/r$ можно считать малым. Поэтому радиус круговой орбиты $r_{\rm c}$, определяемый из условия ${\rm d}U_{\rm eff}/{\rm d}r = 0$, может быть записан как

$$r_{\rm c} = r_0 \left(1 - \frac{3}{2}\frac{r_{\rm g}}{r_0}\right), \tag{297}$$

где

$$r_0 = \frac{2L^2}{c^2 r_{\rm g}} = \frac{L^2}{GM} \tag{298}$$

— радиус круговой орбиты без учета релятивистских эффектов. После элементарных, хотя и громоздких вычислений, получаем

$$U''(r_{\rm c}) = \frac{mL^2}{(e')^2 r_0^4}\left(1 + \frac{r_{\rm g}}{r_0}\right). \tag{299}$$

Поэтому частота радиальных колебаний Ω_r для случая $r_{\rm g}/r_0 \ll 1$ будет равна

$$\Omega_r = \frac{L}{e' r_0^2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{r_{\rm g}}{r_0}\right). \tag{300}$$

С другой стороны, частота вращения по орбите Ω_φ легко может быть найдена из закона сохранения углового момента $L = r v_\varphi \gamma$ (188). Здесь нужно лишь не забыть, что скорость $v_\varphi = r{\rm d}\varphi/{\rm d}\tau$ измеряется по часам наблюдателя, находящегося в гравитационном поле. В итоге, получаем для угловой частоты вращения $\Omega_\varphi = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$

$$\Omega_\varphi = \frac{L}{e' r_0^2}\left(1 + 2\frac{r_\mathrm{g}}{r_0}\right). \tag{301}$$

Здесь мы вновь воспользовались условием $\alpha\gamma = e'$, а также малостью отношения r_g/r.

Как мы видим, невозмущенные величины Ω_φ и Ω_r совпадают друг с другом. Это и означает, что в ньютоновской теории траектория движения является замкнутой. Учет же релятивистских поправок приводит к тому, что периоды орбитального ($P_\varphi = 2\pi/\Omega_\varphi$) и радиального ($P_r = 2\pi/\Omega_r$) движения уже не будут в точности равны друг другу. В результате, за один период орбита повернется на дополнительный угол $\Delta\varphi = \Omega_\varphi \Delta t$, где $\Delta t = 2\pi/\Omega_r - 2\pi/\Omega_\varphi$ — разность периодов колебаний. В итоге, получаем

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Omega_\varphi - \Omega_r}{\Omega_r} = 2\pi\frac{3GM}{c^2 r_0}, \tag{302}$$

что совпадает с точным значением (150).

Упражнения

1. Покажите, что для определения вида преобразований Лоренца достаточно использовать следующие условия:

   а) при преобразованиях остается инвариантным интервал $\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$,

   б) два последовательных преобразования Лоренца вдоль оси x со скоростями V_1 и V_2 есть также преобразование Лоренца с некоторой скоростью V_3.

2. Объясните, как масса тела M может появиться в решении уравнения (23).

3. Объясните, почему поправки к кинетической энергии не могут иметь слагаемых, пропорциональных $|\mathbf{v}|$, $|\mathbf{v}|^3$, и т. д.

4. Воспользовавшись результатами пункта 3.3, покажите, что диагональный тензор (35) является единственно возможным тензором масс для простой кубической решетки.

5. Найдите метрический тензор плоского пространства в координатах u, v, φ, связанных со сферическими координатами r, θ и φ соотношениями

   $$u = r(1 - \cos\theta), \tag{303}$$
   $$v = r(1 + \cos\theta). \tag{304}$$

   Запишите выражения для div и rot (249)–(251) в этих координатах.

6. Докажите, что геодезические в плоском трехмерном пространстве есть прямые линии.

7. Проверьте, что для сферы радиуса R_c формула Гаусса (85) дает кривизну $k = R_\mathrm{c}^{-2}$ и для сферических координат, когда $\mathrm{d}\mathbf{r}^2 = r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$.

8. Найдите кривизну поверхности параболоида вращения

   $$x^2 + y^2 - z^2 = R^2. \tag{305}$$

9. Найдите коэффициент λ в выражении

   $$L_0/R - 2\pi = \lambda k \delta S. \tag{306}$$

10. Объясните, почему отличие суммы углов треугольника Σ от π зависит только от площади треугольника, но не от его формы.