Семинар 7. Плоское движение твердого тела.

Клименок Кирилл Леонидович

13.10.2022

1 Теоретическая часть

1.1 Теорема Эйлера

Первая ключевая мысль, которая нам понадобится — это теорема Эйлера. Если тело движется в плоскости, то в любой момент времени существует мгновенная ось, вокруг которой вращается тело. Доказывать строго это теорему мы не будем, а просто рассмотрим идею как ее найти. Если есть 2 точки с известными скоростями, то строим прямые, перпендикулярные скоростям. В точке пересечения и будет мгновенная ось вращения. Если нам известные скорости лежат на 1 прямой, то из их соотношения и расстояний можно найти расстояние до оси: $v_A/r_A = v_B/r_B$. Если расстояние получается бесконечным, то и ось будет бесконечно далеко и тело движется поступательно.

Эта теорема работает только, чтобы найти скорости, для расчета ускорений она **не работает**!

1.2 Запись уравнения моментов относительно движущейся оси

Так как при плоском движении тело вращается, то мы бы хотели писать уравнение моментов с такой же легкостью, что и для простого вращения. Пусть наша ось A движется со скоростью v_A относительно неподвижной точки O. Тогда момент сил относительно движущейся оси:

$$\vec{M}_A = [(\vec{r}_O - \vec{r}_A) \times \vec{F}] = \vec{M}_O - [\vec{r}_A \times \vec{F}]$$

Момент импульса тогда:

$$\vec{L}_A = [(\vec{r}_O - \vec{r}_A) \times \vec{p}] = \vec{L}_O - [\vec{r}_A \times \vec{L}] \Rightarrow \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} - [\vec{v}_A \times \vec{p}] - [\vec{r}_A \times \vec{F}]$$

Импульс здесь записан в системе отсчета, движущегося с точкой A. Тогда, чтобы выполнялось $dL_A/dt = M_A$ надо, чтобы $[\vec{v}_A \times \vec{p}] = 0$, то есть ось должна двигаться параллельно с центром масс тела. Это наш принципиальный момент, который поможет решать задачи.

2 Практическая часть

2.1 Задача 0.15

Условие Мяч радиуса R и массы m раскручен до угловой скорости ω и поставлен на горизонтальную шероховатую поверхность. С какой скоростью V будет двигаться мяч после прекращения проскальзывания?

Решение Задача является стандартной для применения уравнения движения и уравнения на момент импульса. В нашем случае по горизонтали есть только сила трения, которая вообще-то не равна силе трения скольжения, а из моментов относительно оси, проходящей через центр масс только ее момент замедляет вращение:

$$\begin{cases} m\dfrac{dV}{dt} = F_{fr} \\ I\dfrac{d\omega}{dt} = -F_{fr}r \end{cases} \Rightarrow Id\omega = -mrdV \Rightarrow \int\limits_{\omega}^{V/r} Id\omega = -\int_0^V mrdV \Rightarrow \frac{2}{3}mr^2\left(\frac{V}{r} - \omega\right) = -mrV$$

Окончательно

$$V = \frac{2}{5}\omega r$$

2.2 Задача 9.76

Условие По поверхности большого полого цилиндра, лежащего на горизонтальной плоскости, начинает бежать собака массой m в направлении к наивысшей точке A и притом так, что она все время находится на одном и том же расстоянии от этой точки (см.рис.). В результате цилиндр начинает катиться по горизонтальной плоскости без скольжения. Масса цилиндра M, а угол AOB равен α. Определить: 1) ускорение оси цилиндра a; 2) силу трения F_{fr} между цилиндром и плоскостью во время качения; 3) время t, в течение которого собака способна оставаться на указанном расстоянии от точки A, если максимальная полезная мощность, которую она способна развить, равна N_{max}. Какая при этом будет достигнута максимальная скорость v_{max} поступательного движения цилиндра? (Полезной мощностью здесь называется мощность, которая затрачивается собакой на увеличение кинетической энергии системы.)

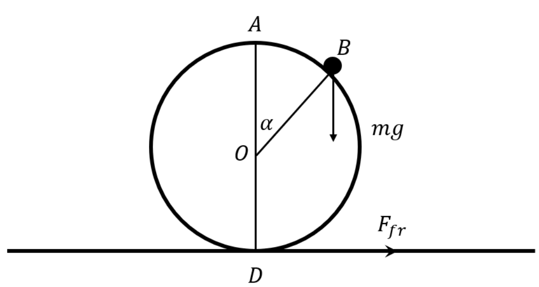

Рис. 1: К задаче 9.76

Решение Задача похожа на рассматриваемую ранее нулевку, но несколько сложнее из-за собаки. В начале разберемся с взаимодействием собаки и цилиндра: у них есть сила взаимодействия друг с другом, но если рассматривать систему «собака + цилиндр», то эта сила — внутренняя и ее не нужно рассматривать в уравнении моментов или во втором законе Ньютона.

Когда мы разобрались с внутренней силой, можно и ответить, почему наш цилиндр будет раскручиваться. Тут тоже все просто — из-за силы трения. Тогда мы можем записать уравнение моментов. Осталось определиться с точкой, относительно которой надо записывать. Но и тут все просто: мы не знаем силу трения, вот относительно точки касания и будем писать, чтобы занулить ее момент, а также момент сил реакции и силы тяжести от цилиндра:

$$L_D = I_D\omega + mvr(1+\cos\alpha) = 2Mr^2 + mvr(1+\cos\alpha) = (M + 2m(1+\cos\alpha))\, vr$$
$$\frac{dL_D}{dt} = (M + 2m(1+\cos\alpha))\, r\frac{dv}{dt} = M_D = mg\sin\alpha$$
$$a = \frac{mg\sin\alpha}{M + 2m(1+\cos\alpha)}$$

Теперь не составляет труда найти силу трения из второго закона Ньютона:

$$(M+m)\frac{dv}{dt} = F_{fr} \Rightarrow F_{fr} = \frac{(M+m)mg\sin\alpha}{M + 2m(1+\cos\alpha)}$$

Теперь разбираемся с мощностью. Тут все просто: мощность собаки идет на увеличение кинетической энергии системы (собака остается на одной и той же высоте, а сила трения не совершает работу, так как качение идет без проскальзывания):

$$N = \frac{dK}{dt} = I_D\omega\frac{d\omega}{dt} + mv\frac{dv}{dt} = (2M+m)v\frac{dv}{dt} = (2M+m)va \Rightarrow v_{max} = \frac{N_{max}}{(2M+m)a}$$

Тогда время, за которое эта скорость достигается будет:

$$t = \frac{v_{max}}{t} = \frac{N_{max}}{(2M+m)a^2}$$

2.3 Задача 9.79

Условие Бильярдный шар катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью v и ударяется в покоящийся такой же бильярдный шар, причем линия центров параллельна скорости движения. Определить скорости обоих шаров после того, как их движение перейдет в чистое качение. Какая доля первоначальной кинетической энергии перейдет в тепло? Считать, что при столкновении шаров передачи вращательного движения не происходит. Потерей энергии на трение при чистом качении пренебречь.

Решение Первое, рассматриваем ситуацию непосредственно до и непосредственно после удара. Так как удар упругий, а время удара мало, то работает и ЗСИ и ЗСЭ:

$$\begin{cases} mv = mv_1 + mv_2 \\ mv^2 + 2E_{rot} = mv_1^2 + mv_2^2 + 2E_{rot} \end{cases} \Rightarrow v_1 = 0; v_2 = v$$

Так как во время удара вращение не передается, то первый продолжает вращаться вперед с угловой скоростью $\omega_1 = v/r$, а для второго $\omega_2 = 0$. Что происходит дальше? А дальше происходит задача 0.15 и для каждого шарика надо ее решить, с учетом начальных условий, которые мы только что выписали. Конечные условия это их качение без проскальзывания. Я позволю себе записать только записать сами интегралы. Для первого шара:

$$\int\limits_{\omega_1}^{V_{1,e}/r} I d\omega = -\int_0^{V_{1,e}} mrdV \Rightarrow v_{1,e} = \frac{I\omega_1 r}{I + mr^2} = \frac{2}{7}v$$

Аналогично и для 2 шарика:

$$\int\limits_0^{V_{2,e}/r} I d\omega = -\int_{V_2}^{V_{2,e}} mrdV \Rightarrow v_{2,e} = \frac{5}{7}v$$

И последнее. Если шар с моментом инерции I относительно центра катится со скоростью v без проскальзывания, то у него есть кинетическая энергия поступательного и вращательного движения:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{I(v/r)^2}{2} = \frac{7}{10}mv^2$$

Тогда потери энергии:

$$\frac{E_0 - E_1 - E_2}{E_0} = 1 - \frac{v_1^2}{v^2} - \frac{v_2^2}{v_0^2} = \frac{20}{49}$$

2.4 Задача 9.115

Условие На идеально гладкой горизонтальной поверхности лежит стержень длиной l и массой M, который может скользить по этой поверхности без трения. В одну из точек стержня ударяет шарик массой m, движущийся перпендикулярно к стержню. На каком расстоянии x от середины стержня должен произойти удар, чтобы шарик передал стержню всю свою кинетическую энергию? Удар считать абсолютно упругим. При каком соотношении масс M и m это возможно?

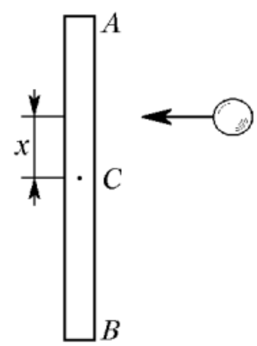

Рис. 2: К задаче 9.115

Решение Естественно решать задачу будем используя законы сохранения. Стержень свободный, значит после удара он поедет. Тогда ЗСИ:

$$mv_0 = Mv_C$$

Закон сохранения момента импульса относительно центра стержня:

$$mv_0 x = I\omega$$

Закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Напомню, что момент инерции стрежня относительно центра это $ml^2/12$. И конечно же после решения системы получаем ответ:

$$x = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{M-m}{3m}}$$

2.5 Комментарии к задачам из задания

Нулевки Задача про скатывание разобрана на лекции, а соотношение кинетических энергий считается через теорему Кенига.

Задача 6.15 Идейно повторяет 9.115. Использовать законы сохранения

Задача 9.71 Небольшое усложнение скатывания из-за трения между 2 скатывающимися телами. Его надо учесть, когда будете писать моменты

Задача 9.76 Решена

Задача 9.79 Решена

Задача 9.89 Опять законы сохранения и все

Задача 9.115 Решена

Задача 9.163 Здесь надо расписать, что происходит в момент удара с точки зрения импульса силы и изменения момента импульса

Задача 9.187 Задачу о катушке мы рассматривали на лекции