Семинар 12. Неинерциальные системы отсчета

Клименок Кирилл Леонидович

17.10.2022

1 Теоретическая часть

Неинерциальные системы отсчета — системы, которые движутся с ускорением. Такое ускорение может быть не только линейным, как например в автобусе, который ускоряется или тормозит, а может появиться в следствии вращения самой системы, например тот же автобус, который поворачивает.

1.1 Преобразование скоростей и ускорений в НСО

Рассмотрим, как преобразуются скорости и ускорения при переходе с новую систему координат. Запишем координаты точки в исходной системе и в новой системе, обозначенной штрихом.

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

После дифференцирования выражения получаем:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_{O'} + [\vec{\omega} \times \vec{r}']$$

В этом выражении можно ввести $V_{\text{отн}} = V'$ скорость относительно новой системы отсчета, или просто относительную скорость и $V_{\text{пер}} = V_{O'} + [\omega \times r']$ скорость новой системы отсчета относительно исходной, или переносную скорость. Дальнейшее дифференцирование выражения для скорости может дать нам ускорение. После дифференцирования получаем:

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'\right] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']] + 2[\vec{\omega} \times \vec{V}'] + \vec{a}'$$

В этом выражении также можно выразить переносное и относительной слагаемые по аналогии со скоростями: $a_{\text{пер}} = \vec{a}_{O'} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'\right] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']]$, $a_{\text{отн}} = \vec{a}'$ и $a_{\text{кор}} = 2[\vec{\omega} \times \vec{V}']$. Далее перепишем второй закон Ньютона в неинерциальной системе с учетом сделанных преобразований:

$$m\vec{a}' = \sum \vec{F}_i + \vec{F}_{\text{цб}} + \vec{F}_{\text{кор}}$$

В этом выражении введена центробежная сила:

$$\vec{F}_{\text{цб}} = -m\left(\vec{a}_{O'} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'\right] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}']]\right)$$

И сила Кориолиса

$$\vec{F}_{\text{кор}} = -2m[\vec{\omega} \times \vec{V}']$$

2 Практическая часть

2.1 Задача б/н

Условие На шероховатом диске, вращающемся с угловой скоростью ω находится жук массой m, идущий по направлению вращения со скоростью V относительно диска, перпендикулярно радиусу, на расстоянии r от центра диска. Записать для этого жука второй закон Ньютона в неподвижной системе отсчета, и в системе отсчета, вращающейся вместе с диском. Сравнить полученные результаты.

Решение Эта задача, несмотря на свою простоту демонстрирует очень важный принцип использования всей теории, связанной с неинерциальными системами отсчета: базовые физические законы, не зависят от того, какую систему отсчёта мы выбираем для их записи.

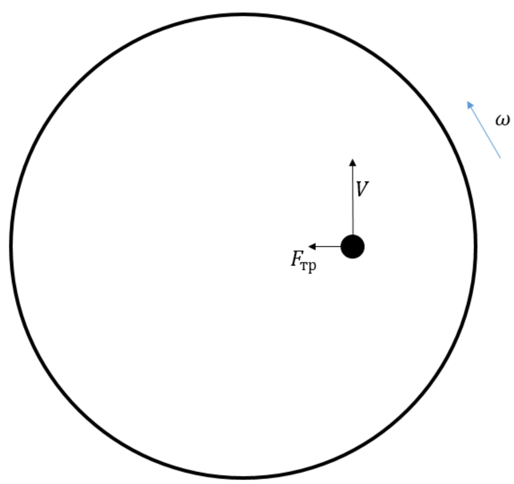

Рис. 1: К задаче 1

Рассмотрим неподвижную систему отсчета, «землю». Рассчитаем полную скорость жука относительно земли. Так как направление движения жука относительно диска совпадает с направлением вращения, то линейные скорости складываются и абсолютная скорость будет равна:

$$V_{\text{абс}} = V + \omega r$$

Теперь ответим на вопрос, какое движение совершает жук относительно земли. Тут все просто, это движение по окружности с радиусом r и линейной скоростью $V_{\text{абс}}$. При этом жук держится на диске исключительно за счет силы трения. Это позволяет нам записать второй закон Ньютона в проекции на радиус:

$$m\frac{V_{\text{абс}}^2}{r} = F_{\text{тр}} \Rightarrow m\frac{(V+\omega r)^2}{r} = F_{\text{тр}}$$

Раскроем все скобки и перенесем все члены последнего уравнения в одну сторону:

$$m\frac{V^2}{r} + 2mV\omega + m\omega^2 r - F_{\text{тр}} = 0$$

Теперь рассмотрим неинерциальную систему отсчета, которая вращается вместе с диском. Из-за этого вращения при записи второго закона Ньютона мы должны будем учитывать силы инерции:

центробежную и кориолисову. При этом в этой системе жук также будет двигаться по окружности радиуса r, но со скоростью V. Пользуясь формулой из теоретической части получаем следующее выражение в проекции на радиус:

$$m\frac{V^2}{r} = F_{\text{тр}} - F_{\text{кор}} - F_{\text{цб}} \Rightarrow m\frac{V^2}{r} = F_{\text{тр}} - 2mV\omega - m\omega^2 r$$

После переноса всех членов полученного уравнения результат оказывается в точности таким же, как и для инерциальной системы отсчета. Это и демонстрирует тезис, сформулированный в начале решения

2.2 Задача 12.38

Условие Какую работу должен совершить человек, чтобы пройти от периферии к центру карусели, равномерно вращающейся с угловой скоростью =1 рад/с, если радиус карусели $R = 5$ м, а масса человека $m = 60$ кг? Зависит ли работа от формы пути, по которому идет человек? Силы трения в оси карусели не учитывать.

Решение Начнем с того, что обсудим против каких сил совершает работу человек, идущий по карусели в сторону центра. В вертикальном направлении на него действуют сила тяжести и сила реакции, которые естественно не совершают работу при перемещении по радиусу, но есть силы в горизонтальном направлении. Для того, чтобы их представить перейдем в неинерциальную систему отсчета, связанную с каруселью. Тогда на человек в ней будут действовать силы инерции, а именно центробежная и кориолисова.

Начнем рассмотрение работы с силы Кориолиса. Из теоретического блока мы можем записать ее как:

$$\vec{F}_{\text{кор}} = 2m\left[\vec{V} \times \vec{\omega}\right] = 2m\left[\frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{\omega}\right]$$

Здесь V – скорость движения человека, которую можно представить как перемещение человека на расстояние dl за время dt. Тогда при подсчете работы против силы Кориолиса надо будет скалярно умножить силу на перемещение:

$$A_{\text{кор}} = \left(\vec{F}_{\text{кор}} \cdot \ d\vec{l}\right) = \left(2m\left[\frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{\omega}\right] d\vec{l}\right) = 0$$

Что рано нулю, так как 2 вектора в смешанном произведении коллинеарны.

Теперь рассмотрим центробежную силу.

$$F_{\text{цб}} = -m\left(a_{O'} + [\varepsilon \times r] + [\omega \times [\omega \times r]]\right)$$

Из нее сразу же можно исключить линейное ускорение центра карусели (он не перемещается) и угловое ускорение карусели (по условию трения в оси нет и вращение равномерное). Таким образом остается только двойное векторное произведение, которое можно переписать в более удобном виде:

$$F_{\text{цб}} = -m\left[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]\right] = \ -m\omega^2 r$$

Теперь рассмотрим расчет элементарной работы против этой силы. Для этого необходимо скалярно умножить силу на перемещение человека $d\boldsymbol{l}$. Но в скалярном произведении возникнет косинус угла между направлением по радиусу и перемещением, что дает нам возможность работать только с проекцией перемещения на радиус:

$$\delta A_{\text{цб}} = \left(\vec{F}_{\text{цб}} d\vec{l}\right) = F_{\text{цб}} dl \cos\alpha \ = F_{\text{цб}} dr = -m\omega^2 r dr$$

Таким образом мы показали, что работа против центробежной силы не зависит от траектории движения, а зависит только от расстояния до центра вращения

Итоговую работу можно посчитать, проинтегрировав выражение для элементарной работы от R до 0:

$$A = \int_R^0 -m\omega^2 r dr = \frac{m\omega^2 r^2}{2} = 750 \text{ Дж}$$

Осталось сделать небольшое замечание о том, как же решить эту же задачу в инерциальной системе отсчета, связанной с неподвижной землей. Здесь возникает проблема, так как в инерциальной системе отсчета никакой центробежной силы нет, но ответ не должен зависеть от выбора системы отсчета. Против чего же совершается работа? Ответ очень прост: сила трения между стопой и каруселью. В неинерциальной системе отсчета стопа неподвижна относительно карусели и естественно сила никакой работы против нее не совершается, а в случае с лабораторной системой отсчета, землей, карусель перемещается относительно и, следовательно, работа у силы трения будет не нулевой.

2.3 Задача 12.19

Условие Стрелок и мишень расположены в диаметрально противоположенных точках карусели радиусом $R = 5$ м, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси. Период вращения карусели $T = 10$ с, скорость пули $V = 300$ м/с. Пренебрегая максимальной линейной скоростью вращения ωR, по сравнению со скоростью пули определите приближенно под каким углом к диаметру карусели должен целиться стрелок, чтобы поразить мишень.

Решение Решим задачу как в инерциальной, так в неинерциальной системах отсчета и сравним полученные результаты

Для начала рассмотрим инерциальную неподвижную лабораторную систему, «землю». В ней стрелок и мишень движутся в разных направлениях, находясь на диаметрально противоположенных точках карусели. Их линейные скорости относительно земли совпадают по модулю и равны ωR.

Пользуясь условием, что мы пренебрегаем линейной скоростью вращения по сравнению со скоростью пули, мы можем сказать, что за время полеты пули до мишени карусель почти не повернется, а значит, можно считать, что и карусель и стрелок продолжат двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью ωR. Для того, чтобы посчитать под каким углом тогда нужно стрелять пересядем в инерциальную систему отсчета, связанную со стрелком. Тогда относительно него скорость мишени будет равна $2\omega R$ и направлена перпендикулярно прямой линии от стрелка до мишени. Тогда за время полета пули t, пуля пролетит расстояние Vt, а мишень сместиться на расстояние $2\omega Rt$. Тогда угол под которым надо стрелять будет определяться из прямоугольного треугольника у будет:

$$\tan\alpha \approx \alpha = \frac{2\omega Rt}{Vt} = \frac{2\omega R}{V}$$

Рис. 2: К задаче 12.19

Теперь решим задачу в неинерциальной системе отсчета, связанной с вращающейся каруселью. Относительно нее и мишень и стрелок покоятся, но появляется сила Кориолиса, действующая перпендикулярно скорости пули и поворачивающая ее, а также есть центробежная сила, которая будет как-то менять скорость по модулю. Сравним их модули между собой и поймем, стоит ли учитывать их обе для описания движения:

$$|F_{\text{цб}}| \leq m\omega^2 R; |F_{\text{кор}}| = 2m\omega V$$

В силу условия $\omega R \ll V$ мы можем сказать, что $|F_{\text{цб}}| \ll |F_{\text{кор}}|$ и тогда центробежную силу в нашей задаче можно не учитывать.

Из-за оставшейся силы Кориолиса траектория движения пули будет дугой окружности с радиусом $r \neq R$ и мы можем записать второй закон Ньютона для пули:

$$m\frac{V^2}{r} = 2m\omega V$$

Отсюда находим радиус кривизны траектории

$$r = \frac{V}{2\omega}$$

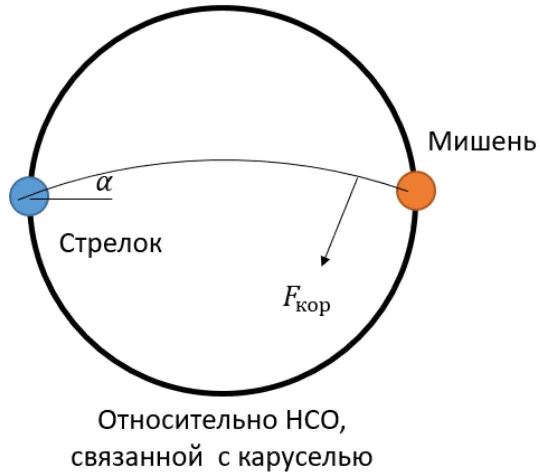

Рис. 3: К задаче 12.19

Далее из геометрии находим угол, под которым необходимо стрелять:

$$tg\ \alpha \approx \alpha = \frac{2\omega R}{V}$$

Как мы видим результат получается одинаковым и не зависит от системы отсчета.

2.4 Задача 12.7

Условие Из ружья произведен выстрел строго вверх (параллельно линии отвеса). Начальная скорость пули $V_0 = 100$ м/с географическая широта места $\varphi = 60°$. Учитывая осевое вращение Земли определить приближенно, насколько восточнее или западнее от места выстрела упадет пуля. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение Для начала ответим на вопрос, почему же пуля вообще куда-то сместится от направления линии отвеса. Рассмотрим это в системе отсчета, связанной с Землей. Напомню, что Земля вращается, а значит является неинерциальной системой, следовательно, на пулю, которая движется относительно земли будет действовать сила Кориолиса.

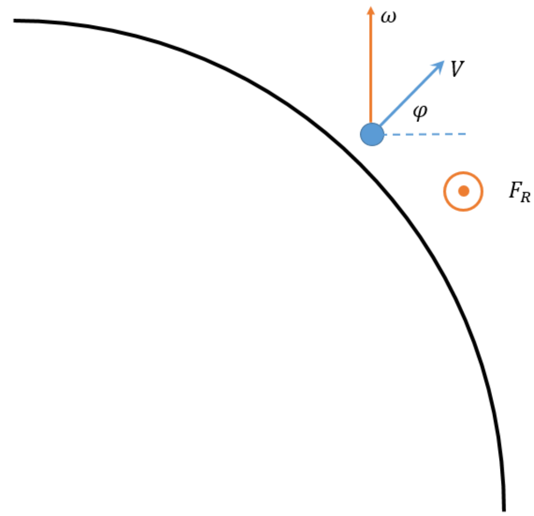

Рис. 4: К задаче 12.7

Определимся с направлением действия этой силы. Для этого рассмотрим рисунок. Угловая скорость вращения земли направлена вертикально вверх, скорость пули направлена вверх и вправо, перпендикулярно поверхности, а значит векторное произведение скорости на угловую скорость будет направлено на нас, то ей против вращения Земли, т.е. на запад.

Таким образом при подъеме вверх у пули будет появляться компонента скорости на запад. При падении же, компонента скорости сохранится, но тело будет замедляться из-за изменения направления действия силы Кориолиса. Также будет правильно сказать, что из-за компоненты скорости на запад, появится дополнительная компонента силы Кориолиса, действующая на север, но она будут мала по сравнению с рассмотренной ранее и поэтому, в рамках задачи мы ее не рассматриваем.

Для начала оценим время движения вверх и вниз. Это получается из кинематических соображений:

$$\tau = \tau_{\uparrow} = \tau_{\downarrow} = \frac{V_0}{g}$$

Вертикальная компонента скорости зависит от времени:

$$V(t) = V_0 - gt$$

Теперь запишем второй закон Ньютона для пули с учетом силы кориолиса:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 2m\omega\cos\varphi\ (V_0 - gt)$$

Теперь, чтобы найти смещение необходимо проинтегрировать это выражение дважды от 0 до времени t. Для начала найдем скорость в западном направлении:

$$V_з(t) = \frac{dx}{dt} = \int_0^t 2\omega\cos\varphi\ (V_0 - gt)dt = 2\omega\cos\varphi\ (V_0 t - \frac{gt^2}{2})$$

Проинтегрировав это выражение еще раз мы найдем смещение на запад для момента времени t:

$$x(t) = \int_0^t 2\omega\cos\varphi\ (V_0 t - \frac{gt^2}{2})dt = 2\omega\cos\varphi\ (\frac{V_0 t^2}{2} - \frac{gt^3}{3})$$

Подставляя в это выражение полное время полета получаем:

$$x\,(2\tau) = 2\omega\cos\varphi\,\left(\frac{V_0}{2}\left(\frac{2V_0}{g}\right)^2 - \frac{g}{3}\left(\frac{2V_0}{g}\right)^3\right) = \frac{4V_0^3}{3g^2}\omega\cos\varphi\ \approx 51\ \text{см}$$

2.5 Задача 12.82

Условие Ноги циркового гимнаста прикреплены в точке O к вертикально расположенному стержню, которые вращается вокруг оси OA с постоянной угловой скоростью $\omega = 3.1$ с$^{-1}$. Гимнаст описывает круговой конус. Определить угол α между гимнастом и вертикальной осью, силу реакции N в точке O и угол φ между направлением силы реакции и вертикальной осью. Гимнаста можно моделировать однородным стержнем длиной $l = 1.75$ м

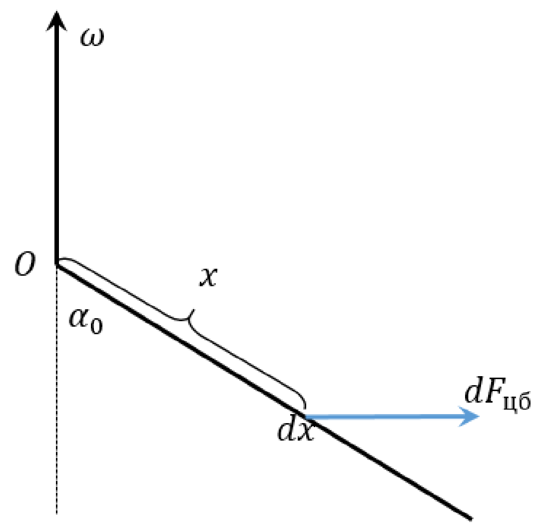

Рис. 5: К задаче 12.82

Решение Будем решать задачу в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вместе с гимнастом. В ней он будет покоиться, а значит и сумма сил, действующих на него и сумма моментов сил будет равна нулю.

Начнем с рассмотрения сил, действующих на гимнаста. К его центру масс (середине стержня) приложена сила тяжести равная mg, направленная вертикально вниз. К точке O приложена сила реакции, под углом φ, а также на него действует центробежная сила. Но так как стержень массивный и его различные положения будут расположены на разных расстояниях от оси вращения, то, чтобы посчитать эту силу нужно будет разбить стержень на элементы и проинтегрировать по всей длине, введя линейную плотность стержня ρ:

$$F_{\text{цб}} = \int dF = \int_0^l dm\ \omega^2 x\sin\alpha\ = \int_0^l \rho dx\ \omega^2 x\sin\alpha\ =$$

$$= \frac{1}{2}\rho l^2\omega^2\sin\alpha\ = \frac{1}{2}ml\omega^2\sin\alpha$$

Теперь рассмотрим момент этой центробежной силы относительно точки O:

$$M_{\text{цб}} = \int dF\ x\cos\alpha\ =\ \int_0^l \rho dx\ \omega^2 x^2 \sin\alpha\ \cos\alpha\ = \frac{1}{3}ml^2\omega^2\sin\alpha\ \cos\alpha$$

Теперь, зная центробежную силу и ее момент, запишем второй закон Ньютона в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси:

$$N\sin\varphi\ =\ \frac{1}{2}ml\omega^2\sin\alpha$$

$$N\cos\varphi\ = mg$$

А также суммарный момент сил относительно точки O:

$$\frac{1}{3}ml^2\omega^2\sin\alpha\ \cos\alpha\ - \frac{1}{2}mgl\sin\alpha\ = 0$$

Окончательно, решая систему из последних трех уравнений, получаем:

$$\cos\alpha\ = \frac{3g}{2\omega^2 l} = 0.87$$

$$\tan\varphi\ = \frac{\omega^2 l}{2g}\sin\alpha\ = 0.41$$

$$N = mg\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\omega^2 l}{2g}\right)^2 \sin^2\alpha}\ \approx 1.1mg$$

2.6 Комментарии к задачам из задания

Задача 12.7 Решена

Задача 12.19 Решена

Задача 12.27 Перейти в систему отсчета автобуса и посмотреть куда будет направлена сила Кориолиса

Задача 12.48 Запись уравнения движения во вращающейся системе отсчета с учетом центробежной силы

Задача 12.70 Ускорение свободного падения в шахте падает линейно. Остальное очень похоже на задачу с пулей

Задача 12.80 Рассмотреть верхнее и нижнее положения груза во вращающейся системе

Задача 12.82 Решена

Задача 12.86 Переход во вращающуюся систему и учет 2 сил