Третье задание

I. Мн-ва в конечномерных евклидовых пр-вах

9. Является ли множество, на котором определена функция $u = u(x;y)$:
а) замкнутым, б) открытым, в) линейно связным,
г) областью, д) замкнутой областью, е) выпуклым?

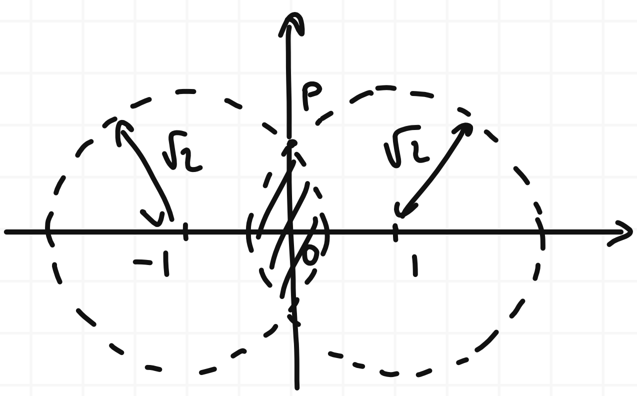
а б г

3, 4

Функция $u(x;y)$ задана формулой:
1) $u = \dfrac{1}{x^2+y^2-1}$; 2) $u = \sqrt{x \sin y}$;
3) $u = \ln(1-2x-x^2-y^2) + \ln(1+2x-x^2-y^2)$;
4) $u = \arcsin(y/x)$; 5) $u = \sqrt{xy} + \arcsin x$;
6) $u = \arccos(x/y^2)$; 7) $u = \arccos(2y+2yx^2-1)$.

3) $u = \ln(1-2x-x^2-y^2) + \ln(1+2x-x^2-y^2) = \ln\left((1-x^2-y^2)^2 - 4x^2\right)$

$$\begin{cases} 1-2x-x^2-y^2>0 \\ 1+2x-x^2-y^2>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+2x+1+y^2<2 \\ x^2-2x+1+y^2<2 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+1)^2+y^2<2 \\ (x-1)^2+y^2<2 \end{cases}$$



замкн — нет (р-м $(\cdot)P$)

откр — да (т.к. пересечение конечного числа откр.)

область — ?

// область — $\underbrace{\text{открытое}}_{\text{true}}$ $\underbrace{\text{лин. связное}}_{?}$ мн-во в метр. пр-ве //

Д-м линейную связность мн-ва. Назовем его A.

◁ Р-м произв. $O_1(x_1,y_1) \in A$, $O_2(x_2,y_2) \in A$

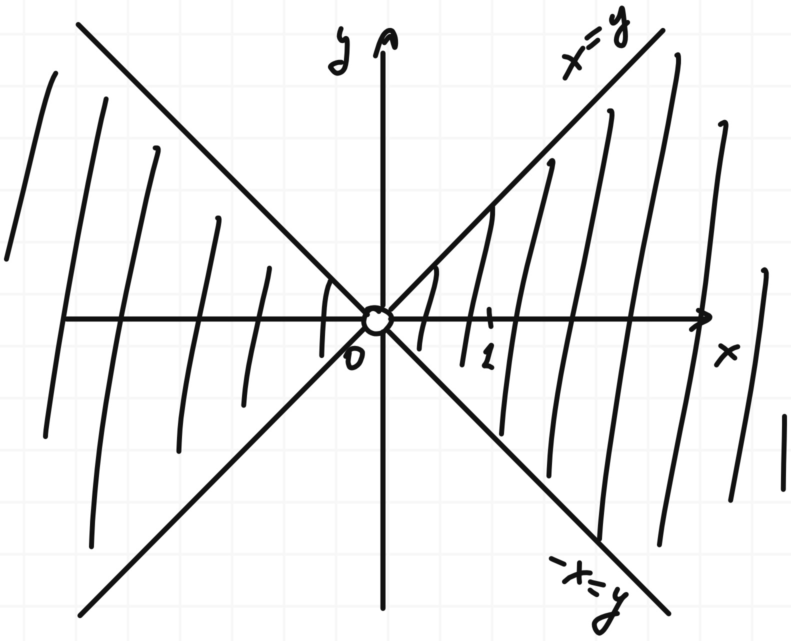
пусть O_1', O_2' — ортогональные пр-ции O_1, O_2 на ось x.

$O_1'(x_1, 0)$
$O_2'(x_2, 0)$; $O_1', O_2' \in A$

Построим ф-ю $\varphi: [t_1, t_2] \to X$, непр. на $[t_1,t_2]$, чтобы $\varphi(t_1) = O_1(x_1,y_1)$ $\varphi(t_2) = O_2(x_2,y_2)$, тогда по def докажем.

4) $u = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$

$$-1 \le \frac{y}{x} \le 1 \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{lll} x > 0 & \wedge & x \ge y \\ x < 0 & \wedge & x \le y \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{lll} x > 0 & \wedge & -x \le y \\ x < 0 & \wedge & -x \ge y \end{array} \right. \end{cases}$$



откр: нет (р-м, например, (1;1))

замкн: нет ((0;0) должна принадл. замыканию, но не $\in$)

область: нет (не открытое)

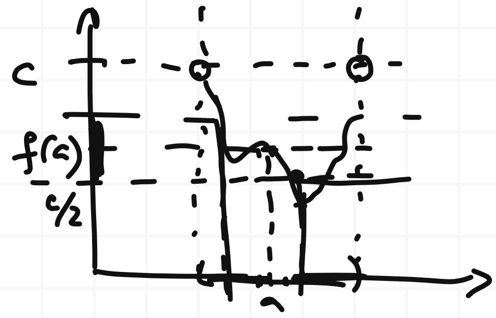
<u>Т.1</u>. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна. Докажите, что для любого $C \in \mathbb{R}$ множество всех решений неравенства $f(x) < C$ является открытым, а множество всех решений неравенства $f(x) \le C$ – замкнутым.

Т.1 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непр.

? $\forall c \in \mathbb{R}$ $A = \{x : f(x) < c\}$ – откр.

$B = \{x : f(x) \leq c\}$ – замкн.

(A) чтобы откр., должно выполняться



$\forall a \in A \ \exists \delta > 0 : U_\delta(a) \subset A$, т.е.

$\forall a \in A \ \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(a) \hookrightarrow f(x) < c$

р-м $\varepsilon = \left|\frac{c}{2} - f(a)\right| : \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(a) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$

$f(x) < f(a) + \varepsilon < c$

ура, выполняется

(B) д-м, что $\underbrace{\text{дополнение } B}_{X \setminus B}$ открыто

$X \setminus B = \{x : f(x) > c\} = [\text{пусть } g(x) = -f(x)] = \{x : -g(x) > c\} =$

$\underbrace{= \{x : g(x) < -c\}}_{\text{открыто по п. (A)}}$

Т.2.

$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : e^{x_1^2 + x_2^2} < 1 + x_3^2\}$ в $\mathbb{R}^3$

р-м ф-ю $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^2 + x_2^2} - x_3^2$

$f(x) < 1 = \text{const} \xRightarrow{\text{Т.1}} A$ – откр. $\Rightarrow A$ не замкн.

$g(x_1, x_2, x_3) = x_3$ — непр.

$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1 &= (0, 0, 1) \\ \bar{x}_2 &= (0, 0, -1) \end{aligned}\right\} \in A$

предположим, что A лин. связное

тогда $\exists$ непр $\bar{x}[t_1, t_2] \to A$

$\begin{cases} \bar{x}(t_1) = \bar{x}_1 \\ \bar{x}(t_2) = \bar{x}_2 \end{cases}$

$g(\bar{x}(t)) = x_3(t)$

$$\begin{cases} x_3(t_1) = 1 \\ x_3(t_2) = -1 \end{cases} \xRightarrow{\text{т. Больцано-Коши}} \exists t_0 \in [t_1, t_2] \quad x_3(t_0) = 0$$

$\Rightarrow \bar{x}(t_0) \notin A$ — противореч. $\Rightarrow$ A не лин. связно

$\Rightarrow$ A не область

Ответ:
а) откр — да
б) замкн — нет
в) область — нет

T.3

Ответ: нет.

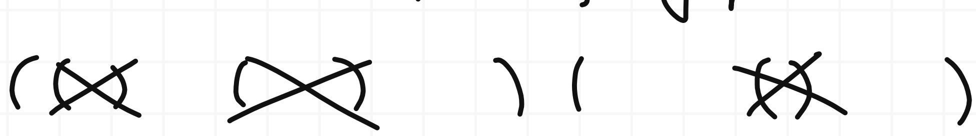
Контрпример: $\{[\frac{1}{k}; 1]\}_{k \geq 2}$

T.4*

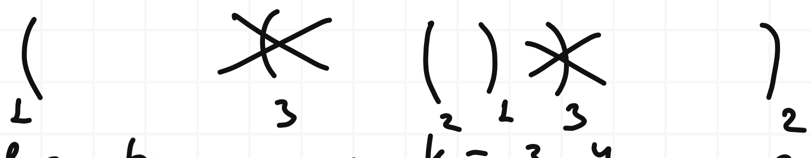
приведем алгоритм выбора такого покрытия и докажем, что он работает

алгоритм:

1) исключим из исходного покрытия интервалы, содерж. в иных интервалах покр-я



2) р-м все возможные объединения $k=2$ интервалов и искл. интервалы, полностью принадлеж. им.



3) повторим для $k = 3, 4, \ldots$ до объединения всех интервалов покрытия

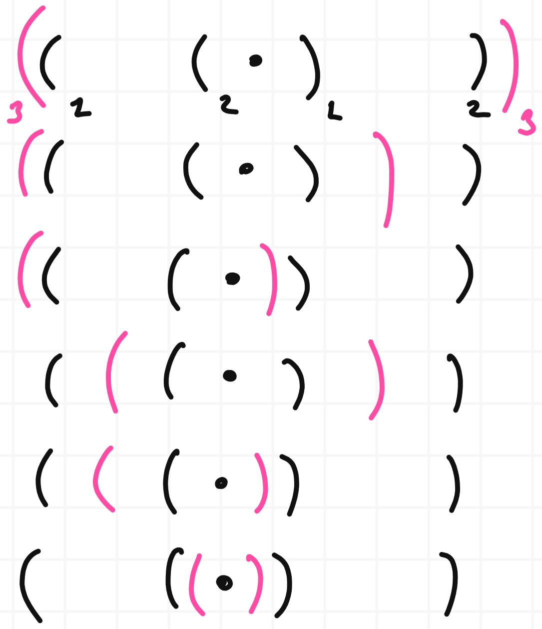
готово!

почему работает?

д-м, что теперь каждая точка покрыта ≤ 2 интервалами

от противного: пусть ≥ 3

как это может выглядеть?



(1), (2) ⊂ (3) — (1), (2) ✗ по п.1

(1) ⊂ (3) — (1) ✗ по п.1

(1) ⊂ (2) ∪ (3) — (1) ✗ по п.2

(3) ⊂ (1) ∪ (2) — (3) ✗ по п.2

(3) ⊂ (1) ∪ (2) — (3) ✗ по п.2

(3) ⊂ (1) ∪ (2) — (3) ✗ по п.2

и симметричные варианты

Замечание. Получается, данных первых двух пунктов алгоритма достаточно.

q.e.d.

(С3)

15. Построить последовательность открытых множеств, пересечение которых не является открытым.

1.15

Ответ: концентрические круги с выколотой границей $\{\omega_n\}$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \omega_n = \{\underbrace{0}_{\text{точка центра}}\}$$

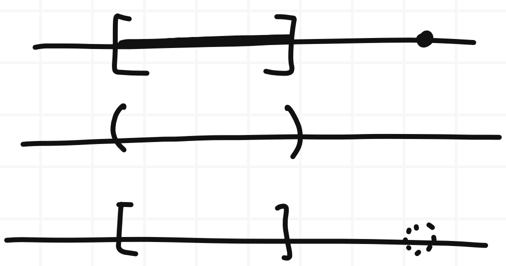
18. Построить множество, все точки которого изолированные, а множество его предельных точек непустое.

1.18

37. Привести пример замкнутого множества F, не равного замыканию множества внутренних точек F.

38. Привести пример открытого в R^2 множества G, не равного множеству внутренних точек его замыкания G.

1.37



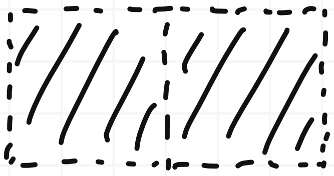
пример мн-ва

внутр. точки

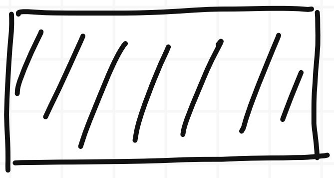
замыкание внутр. точек

1.38

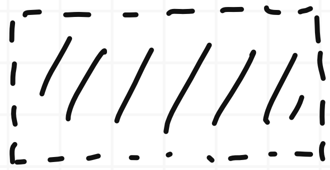
пример:



мн-во



замыкание



внутр. точки замыкания

II. КРИВЫЕ

лельную плоскости $y = 0$.

50. В каких точках касательная к кривой $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$ параллельна плоскости $3x + y + z + 2 = 0$?

51. Найти нормальную плоскость кривой ...

24.50

$3x + y + z + 2 = 0$

$\vec{n}(3;1;1)$

$$\vec{r} = \begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 3t^2 \\ z = 3t + t^3 \end{cases} \qquad \vec{r}\,'(t) = \begin{cases} x = 3 - 3t^2 \\ y = 6t \\ z = 3 + 3t^2 \end{cases}$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{9 + 9t^4 - \cancel{18t^2} + 36t^2 + 9 + 9t^4 + \cancel{18t^2}} = 3\sqrt{2 + 2t^4 + 4t^2} =$$

$$= 3\sqrt{2}\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} = 3\sqrt{2}(t^2 + 1)$$

$$(\vec{n}, \vec{r}\,'(t)) = 0$$

$$3(3 - 3t^2) + 6t + 3 + 3t^2 = 9 - 9t^2 + 6t + 3 + 3t^2 = 12 + 6t - 6t^2 = 0$$

$t^2 - t - 2 = 0$

$(t+1)(t-2) = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

$$t = -1 \to A\begin{pmatrix} -3-1 \\ 3 \\ -3+1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$t = 2 \to B\begin{pmatrix} 6-8 \\ 3 \cdot 4 \\ 6+8 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix}$$

ответ

(это точки, в кот. кривая и плоскость параллельны)

24.78(2)

78. Найти кривизну кривой в произвольной точке:
1) эллипса $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ |t| \leqslant \pi$;
2) гиперболы $x = a\,\mathrm{ch}\,t,\ y = b\,\mathrm{sh}\,t,\ t \in R$;
3) циклоиды $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ t \in R$.

$$r = \begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}t \\ y = b\,\mathrm{sh}t \end{cases};\quad r' = \begin{cases} x' = a\,\mathrm{sh}t \\ y' = b\,\mathrm{ch}t \end{cases};\quad r'' = \begin{cases} x'' = a\,\mathrm{ch}t \\ y'' = b\,\mathrm{sh}t \end{cases}$$

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{|a\,\mathrm{sh}t \cdot b\,\mathrm{sh}t - a\,\mathrm{ch}t \cdot b\,\mathrm{ch}t|}{(a^2\mathrm{sh}^2t + b^2\mathrm{ch}^2t)^{3/2}} = \frac{|ab|}{(a^2\mathrm{sh}^2t + b^2\mathrm{ch}^2t)^{3/2}}$$

24.80(1)

80. Найти кривизну в точке M_0 графика функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$:
1) $F(x, y) = y^5 + y - x^2$, $M_0(\sqrt{2}; 1)$;
2) $F(x, y) = y^3 + y - 2x^3$, $M_0(1; 1)$;

$$F(x,y) = y^5 + y - x^2 \qquad M_0(\sqrt{2};1) \qquad k(M_0) - ?$$

$$F'(x,y) = 5y^4 \cdot y' + y' - 2x \cdot x' = 0$$

$$y' = \frac{2x}{5y^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$20y^3(y')^2 + (1+5y^4)y'' - 2 = 0$$

$$y'' = \frac{2 - 20y^3(y')^2}{1+5y^4} = \frac{11}{27}$$

$$k = \frac{(y'')}{(1+(y')^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

24.81(3) найти наиб. кривизну

$$y = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad k = \frac{\left|\frac{1}{a}\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)\right|}{\left(1+\mathrm{sh}^2\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{|a|}\cancel{\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)}}{\mathrm{ch}^{\cancel{3}}\left(\frac{x}{a}\right)} = \frac{1}{a\,\mathrm{ch}^2\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$y' = \mathrm{sh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$y'' = \frac{1}{a}\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad k_{max} = \frac{1}{a}$$

109(1)

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -a\sin t \\ y' = a\cos t \\ z' = b \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = -a\cos t \\ y'' = -a\sin t \\ z'' = 0 \end{cases}$$

$$|\vec{r}'| = \sqrt{a^2+b^2};\quad \tau = \frac{r'}{|\vec{r}'|};\quad s(t) = \sqrt{a^2+b^2}\,t$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{\tau}) = 0$$

$$(a\cos t - x)(-a\sin t) + (a\sin t - y)(a\cos t) + (bt - z)b = 0$$

норм. пл-ть

$$\frac{d\tau}{ds} = -\frac{a}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{r}-\vec{r_0}, \frac{d\vec{\tau}}{ds}\right)=0$$

$$(a\cos t - x)(-\cos t)+(a\sin t - y)(-\sin t)=0$$

спрямл. пл-ть

$$x\cos t + y\sin t = a$$

$$\vec{\nu} = \frac{d\vec{\tau}/ds}{|d\vec{\tau}/ds|} = \begin{pmatrix}-\cos t\\ -\sin t\\ 0\end{pmatrix}$$

$$(\vec{r}-\vec{r_0}, \vec{\tau}, \vec{\nu})=0$$

$$\begin{vmatrix} a\cos t - x & a\sin t - y & bt - z\\ -a\sin t & a\cos t & b\\ \cos t & \sin t & 0\end{vmatrix}=0$$

$$ba\cancel{\sin t\cos t} - by\cos t + az\sin^2 t - abt\sin^2 t - a\cos^2 t\, bt + a\cos^2 t\, bz -$$
$$-\cancel{ba\sin t\cos t} + bx\sin t = 0$$

соприк. пл-ть.

$$x\sin t - y\cos t + \frac{az}{b} - at = 0$$

<u>122(3)</u> найти кривизну

$$\begin{cases} x = t - \sin t\\ y = 1 - \cos t\\ z = 4\sin\frac{t}{2}\end{cases} \quad \begin{cases} x' = 1-\cos t\\ y' = \sin t\\ z' = 2\cos\frac{t}{2}\end{cases} \quad \begin{cases} x'' = \sin t\\ y'' = \cos t\\ z'' = -\sin\frac{t}{2}\end{cases}$$

$$k = \frac{|[r', r'']|}{|r'|^3} =$$

$$|r'| = \sqrt{1-2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t + 4\cos^2\frac{t}{2}} = \sqrt{2}\sqrt{1-\cos t + 2\cos^2\frac{t}{2}} =$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{1-\cancel{\cos t}+1+\cancel{\cos t}} = 2$$

$$[r', r''] = \begin{pmatrix} -2\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} - 2\cos\frac{t}{2}(1-2\sin^2\frac{t}{2}) \\ 4\sin\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2} + 2\sin^3\frac{t}{2} \\ -2\sin^2\frac{t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cos^3\frac{t}{2} \\ -2\sin^3\frac{t}{2} + 4\sin\frac{t}{2} \\ -2\sin^2\frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

$$|[r', r'']| = \sqrt{4\cos^6\frac{t}{2} + 4\sin^6\frac{t}{2} + 16\sin^2\frac{t}{2} - 16\sin^4\frac{t}{2} + 4\sin^4\frac{t}{2}} =$$

$$= \sqrt{4\cos^4\frac{t}{2} - 4\cos^2\frac{t}{2}\sin^2\frac{t}{2} - 8\sin^4\frac{t}{2} + 16\sin^2\frac{t}{2}} =$$

$$= \sqrt{4(1-\sin^2\frac{t}{2})^2 - 4\sin^2\frac{t}{2} + 4\sin^4\frac{t}{2} - 8\sin^4\frac{t}{2} + 16\sin^2\frac{t}{2}} =$$

$$= 2\sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}$$

$$\ominus \quad \frac{\cancel{2}\sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}}{\cancel{8}4} = \frac{\sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}}{4}$$

109(8)

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = t\sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = e^t \\ y' = -e^{-t} \\ z' = \sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = e^t \\ y'' = e^{-t} \\ z'' = 0 \end{cases}$$

$$(r - r_0, \tau) = 0$$

$$(e^t - x)e^t + (e^{-t} - y)(-e^{-t}) + (t\sqrt{2} - z)\sqrt{2} = 0$$

норм.пл: $e^{2t} - xe^t - e^{-2t} + ye^{-t} + 2t - \sqrt{2}z = 0$

$$(r - r_0, \tau, \upsilon) = 0$$

$$\begin{vmatrix} e^t - x & e^{-t} - y & t\sqrt{2} - z \\ e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^t & e^{-t} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

сопр.пл: $2(t\sqrt{2} - z) - \sqrt{2}ye^t + \sqrt{2}xe^{-t} = 0$

$$|r'| = (e^t - e^{-t})$$

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{d\tau}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \qquad (r - r_0, \frac{d\tau}{ds}) = 0$$

$$(x - e^t)2 + (y - e^{-t})2 + (z - t\sqrt{2})(-\sqrt{2})(e^t - e^{-t}) = 0$$

$$2x + 2y - \sqrt{2}(e^t - e^{-t})z - 2e^t - 2e^{-t} - 2t(e^t - e^{-t}) = 0$$

спрям. пл.: $x + y - \sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,t \cdot z - 2(\mathrm{ch}\,t + t\,\mathrm{sh}\,t) = 0$

24.14*

$\vec{r}(t) \perp \vec{r}\,'(t) \iff |\vec{r}(t)| = const$

д-во „$\Rightarrow$": $(\vec{r}, \vec{r}\,') = x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z' = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)' = \frac{1}{2}(|\vec{r}|^2)' =$

$= |\vec{r}| \cdot |\vec{r}|' = 0$

$\left[\begin{array}{l} |\vec{r}| = 0 \\ |\vec{r}|' = 0 \end{array}\right. \Rightarrow |\vec{r}| = const$ q.e.d.

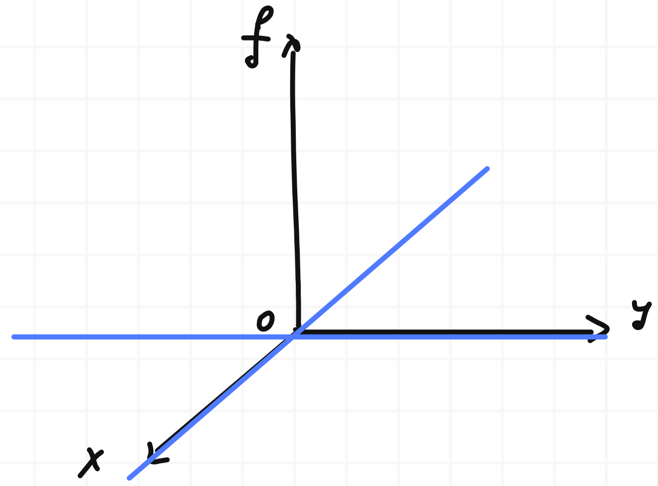
д-во „$\Leftarrow$": $|\vec{r}| = const \Rightarrow |\vec{r}|' = 0$

$\Rightarrow (\vec{r}, \vec{r}\,') = 0 \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{r}\,'$ q.e.d.

III. Предел и непр-ть ф-й неск. перем

Т.5

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$$



а) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} 1 = 1$$

$y = kx$

$$f(x,kx) = \begin{cases} 1, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

предел по совокупности $\neg\exists$, т.к. предел по напр. зависит от k

б) $f(x,y) = \begin{cases} 0, & y \neq x^2 \\ 1, & y = x^2 \end{cases}$

$$f(x,kx) = \begin{cases} 0, & \begin{cases} x\neq 0 \\ x \neq k \end{cases} \Longleftrightarrow k \neq 0 \\ 1, & \begin{cases} x = 0 \\ x = k \end{cases} \Longleftrightarrow k = 0 \end{cases}$$

предел по совокупности переменных $\neg\exists$, т.к. предел по напр. зависит от k

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Т.6

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \Longrightarrow f = \frac{\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^4\cos^4\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}$$

пусть $\varphi = 0$ тогда $\underset{\rho \to 0}{f \to 0}$, с другой стороны $y = x^2$, тогда

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$\Rightarrow \neg\exists$ предела по совокупности

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = \lim 0 = 0$$

$y = kx$

$$f(x, y) = \frac{kx^3}{x^4 + k^2x^2} \xrightarrow[x \to 0]{\forall k} 0$$

предел по всем напр. $\exists$ и равен 0
(в точке $(0;0)$)

<u>Т.7</u>

а) $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\delta = |x_0|$ $\forall \binom{x}{y} \in U_r \binom{x_0}{y_0} \hookrightarrow x \neq 0$

f опр. верхней частью ф-и

$\Rightarrow f$ непр. $\forall \binom{x_0}{y_0} : x_0 \neq 0$

Р-м т. $\binom{0}{y_0}$

а) $y_0 \neq 0$

$$\lim_{x \to +0} f(x, y) - ?$$

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi k} \quad ; \quad \tilde{x}_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$$

$f(x_n, y) \to y_0$ $\quad f(\tilde{x}_n, y) \to -y_0$

$\Rightarrow$ по def. Гейне нет предела

б) $y_0 = 0$ пусть $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$

$$|f(x,y)| \le \left| \frac{\rho^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} \right| \le 2\rho \xrightarrow[\rho \to 0+]{} 0$$

$\Rightarrow f$ непр. в т. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

мн-во точек разрыва $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix}, y \ne 0 \right\}$

т.к. мы рассмотр. $\mathbb{R}^2$, что $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ – это круг, а мн-во точек разрыва – это прямая

$\nexists (x_0, y_0)\ \forall \varepsilon > 0 \quad U_\varphi(x_0, y_0) = A$

A – не открыто

$(0;0)$ – т. замыкания т.к. $x_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix} \xrightarrow[k \to \infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, но эта точка $\notin A$
$\Rightarrow A$ не замкнуто

б) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2 - y^2)}{x - y}, & x \ne y \\ x + y, & x = y \end{cases}$

f непр. в $\forall \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} : x_0 \ne y_0$

пусть $x - y = v \quad x + y = u$

$$|f(u,v)| \le \left| \frac{\sin(u_0, v)}{v} \right| = |u_0|$$

$$\Rightarrow f(u,v) \xrightarrow[\substack{u \to u_0 \\ v \to 0}]{} u_0$$

$\Rightarrow f(x,y)$ непр. при $x = y$

$\Rightarrow f$ непр. на $\mathbb{R}^2$

24.37(0)

$$u = x \cdot \sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}$$

$\nexists \lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} u$

из опр. по Гейне

$\nexists \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} u$

$\exists \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$

$$u = \rho \overset{\le 1}{\cos\varphi} \sin \overset{\le 1}{\frac{1}{\rho\sin\varphi}} + \rho\sin\varphi \sin\frac{1}{\rho\cos\varphi} \le 2\rho \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$$

<u>48(8)</u>

$$u = (x^2+y^2)^{x^2y^2}$$

$$u = \left(\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\right)^{\rho^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi} = \rho^{\frac{1}{2}\rho^4\sin^2 2\varphi} \le \rho^{\frac{\rho^4}{2}} = e^{\frac{\rho^4}{2}\ln\rho} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 1$$

<u>51(1)</u>

$$u = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ $\quad \lim\limits_{y\to 0} u(y) = 0 \Rightarrow u$ - непр. по y в $(0;0)$

$y = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0 \Rightarrow u$ - непр по x в $(0;0)$

$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$

$u = \frac{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}{\rho^2} = \cos\varphi\sin\varphi$ — зависит от φ

$\Rightarrow$ нет предела по сов. перем.

$\Rightarrow u$ непр. в $(0,0)$

IV. Равномерная непрерывность ф-й одной переменной

12.2 (2,4)

(2) $y = \sin x^2$ $\quad X = \mathbb{R}$

лемма: следующие условия эквивалентны

1) f не явл. равномерно непр. на мн. X

2) $\exists \{x_k\}, \{\tilde{x}_k\} \subset X$: $\rho_x(x_k, \tilde{x}_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$\rho_y(f(x_k), f(\tilde{x}_k)) \underset{k\to\infty}{\not\to} 0$

$\sin x_k^2 = 1$ $\quad x_k := \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$; $k \in \mathbb{N}$

$\sin \tilde{x}_k^2 = -1$ $\quad \tilde{x}_k := \sqrt{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$

$$|x_k - \tilde{x}_k| = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi k} + \sqrt{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

по лемме 1 не яв-ся рав. непр.

(4) $y = \ln x$ $\quad X = (0; 1)$

$x_k = \frac{1}{k}$ $\quad \tilde{x}_k = \frac{1}{k^2}$ $\quad k \in \mathbb{N}$

$|x_k - \tilde{x}_k| = \left|\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$|f(x_k) - f(\tilde{x}_k)| = \left|\ln\frac{1}{k} - \ln\frac{1}{k^2}\right| = |\ln k| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$

по лемме 1 не рав. непр

12.7

ф-я неогранич на огранич. интервале $\Rightarrow$ ф-я не яв-ся равномерно непр. на интервале

от противного. пусть ф-я неогр. и явл. рав. непр. на интерв.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \forall x_1, x_2 \in X \ |x_1 - x_2| < \delta \hookrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = \varepsilon$

фиксируем $\varepsilon_0 > 0$ $\delta_0 := \delta(\varepsilon_0)$

$\exists$ отрезок $[A; B]$ по отрезке длиной δ_0
количество отрезков $N = \left[\frac{B-A}{\delta_0}\right]$

Если отрезок из разбиения пересек. с K, то обозначим это пересечение K_k и выберем в нем точку $\xi_k \in K_k$ (их конечное число)

$M := \max |f(\xi_k)|$

$\forall x \in K: \ |x - \xi_k| < \delta_0$

$|f(x)| = |f(x) - f(\xi_k) + f(\xi_k)| = |f(x) - f(\xi_k)| + |f(\xi_k)| \le 1 + M$

$\Rightarrow \forall x \in K \hookrightarrow |f(x)| \le 1 + M$

$\Rightarrow$ функц. огр, противо-е!

T8 $\quad f$ дифф. на $I = [a; +\infty)$

а) f' огр $\Rightarrow f$ равн. непр. на I

$\exists c > 0 : \forall x \in [a; +\infty) \le c$

Фикс. $\forall \varepsilon > 0 \ \delta := \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall x, x' \in I: \ 0 < |x - x'| < \delta$

по т. Лагранжа о ср. $\exists \xi \in (x, x'): \ \xi \in (a; +\infty): |f(x) - f(x')| < f'(\xi)|x - x'| \le$

$\le c|x - x'| < c\delta = \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in I \ |x - x'| < \delta \hookrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

$\Rightarrow f$ равн. непр. на I

f' беск. больш. при $x \to +\infty$ $\Rightarrow f$ н равн. непр.

$\triangleleft \ \lim\limits_{x \to \infty} |f'(x)| = +\infty \Rightarrow \forall c > 0 \ \exists x : \forall \xi > x \hookrightarrow |f'(\xi)| > c$

$\exists x_0 : \exists \xi > x_0 \hookrightarrow |f'(\xi)| > \frac{1}{\delta}$

по т. Лагранжа:

$\forall x, x' : \ 0 < |x - x'| < \delta \qquad \exists \xi \in (x, x'):$

$|f(x) - f(x')| = |f'(\xi)||x - x'| > \frac{|x - x'|}{\delta} \ge 1$

$\Rightarrow \exists \varepsilon = 1 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, x' : |x - x'| < \delta \hookrightarrow |f(x) - f(x')| > \varepsilon$

значит, f не равн. непр.

<u>12.3 (4, 9)</u>

(4) $y = e^x$; $X = R$

$y' = e^x \qquad \lim y' = +\infty \Rightarrow$ по Т8 g не равн. непр.

(9) $y = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (X; +\infty)$

<u>лемма 2:</u> $f : [a; +\infty) \to \mathbb{R}$ непр

$\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$, тогда равн. непр на $[a; +\infty)$

$$\lim_{x \to x} x \sin\frac{1}{x} = \lim_{\frac{1}{x} \to +0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{1/x} = 1$$

$\Rightarrow$ по лемме равн. непр

<u>12.9</u>

(1) f равн. непр. на огранич. мн-ве $\Longrightarrow$ огр. на этом

$\triangleleft$ если f неогр. на мн-ве, то множество содержит интервал или полуинтервал

этим интервалы ограничены по задаче 7

f огр на мн-ве q.e.d.

(2) $f_{\text{на}}$ − равн. непр. на мн-ве и неогр. на мн-ве

$y = x \quad X = \mathbb{R} \longleftarrow$ пример

12.20

(1) f и g огр. и равномерно непр-ны на $[a;+\infty)$, тогда fg − равн. непр. на $\underset{A}{[a;+\infty)}$

◁ $\exists M_1>0: \forall x\in[a;+\infty) \hookrightarrow |f(x)|\le M_1$

$\exists M_2>0: \forall x\in[a;+\infty) \hookrightarrow |g(x)|\le M_2$

$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x, x'\in A\quad |x-x'|<\delta \hookrightarrow |f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2M_2}$

$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x, x'\in A\quad |x-x'|<\delta \hookrightarrow |g(x)-g(x')|<\frac{\varepsilon}{2M_1}$

$$|f(x)g(x)-f(x')g(x')| = |(f(x)-f(x'))g(x)+f(x')(g(x)-g(x'))| \le$$
$$\le |g(x)||f(x)-f(x')|+|f(x')||g(x)-g(x')|$$

$$\le \frac{M_2\varepsilon}{2M_2}+\frac{M_1\varepsilon}{2M_1}=\varepsilon$$

т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x, x'\in A\quad |x-x'|<\delta \hookrightarrow |f(x)g(x)-f(x')g(x')|<\varepsilon$

$\Rightarrow fg$ − равн. непр. ф-и на A

(2) пример:

$f=x$
$g=\sin x$ $\qquad fg=x\sin x$ − не равн. непрерывн.

(3) f, g − равн. непр. на огр. мн-ве $\Rightarrow fg$ − равн. непр.

◁ по заданию 9, т.к. f и g огр. на огр. множ-ве ▷

12.23

f непр на $[a;+\infty)$ и $\exists \lim f = A \in \mathbb{R}$

f равн. непр на $[a;+\infty)$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \cdot \forall x, x' \in [a;+\infty):$

$|x-x'|<\delta \hookrightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon$

◁ фикс. $\forall \varepsilon>0$

1. if $b>a$: $\forall x \in (b;+\infty) \hookrightarrow |f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall x' \in (b,+\infty) \hookrightarrow |f(x')-A| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon$

2. р-м отрезок $[a,b]$ f равн. непр. на нем по т. Кантора

$\exists \delta>0\ \forall x, x' \in [a,b]: |x-x'|<\delta \hookrightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon$

3. $\exists x \in [a,b]$, $x' \in [b;+\infty)$, $|x-x'|<\delta$

$|f(x)-f(b)|<\varepsilon$

$|f(x')-f(b)|<\varepsilon$

$\Rightarrow |f(x)-f(x')|<2\varepsilon$

12.25

f равн. непр. на $(a,b) \Leftrightarrow$ f непр. на (a,b) и $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ $\exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$

„$\Leftarrow$"

$$\tilde f(x) = \begin{cases} f(x) & x\in(a,b) \\ f(b-0) & x=b \\ f(a+0) & x=a \end{cases}$$

$\Rightarrow \tilde f(x)$ равн. непр на $[a,b]$ по зад 23

$\Rightarrow \tilde f(x)$ равн. непр на (a,b)
т.к. $f(x)$ на (a,b) это и есть сужение $\tilde f(x)$,
то она также равн. непр.

"$\Rightarrow$"

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \forall x, x' \in (a, b)$

$|x - x'| < \delta \hookrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad (1)$

кр. Коши: $\exists \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$ и $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \forall x, x' \in (b - \delta, b) \hookrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

$\Rightarrow |x - x'| < \delta$ по (1)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \forall x, x' \in (a, a + \delta) \hookrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

12.4 (3, 5, 7*)

(3) $y = \sin x \cdot \frac{1}{x} \quad X = (0, \pi)$

y непр как произв. непр.

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

по лемме 2 y равн. непр. на $(0, \infty)$

$\Rightarrow$ равн. непр на $(0; \pi)$

(5) $y = x \cos x \quad X = R$

$\exists x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad f(x_k) = 0$

$\tilde{x}_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k + \frac{1}{k} \quad f(\tilde{x}_k) = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k + \frac{1}{k}\right) \sin\left(\frac{1}{k}\right)$

$\lim\limits_{k \to \infty} f(\hat{x}_k) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\pi}{2k} + 2\pi + \frac{1}{k^2} = 2\pi$

по лемме 1 не равн. непр.