Estimador 4

Héctor G

24 de Diciembre de 2025

Contents

Distribución Pareto:

$$f(x) = \frac{\beta\,\alpha^{\beta}}{x^{\beta+1}}\,\mathbf{1}_{(\alpha,\infty)}(x),$$

$$E(X) = \frac{\alpha\beta}{\beta-1}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \left(\frac{\alpha}{\beta-1}\right)^2 \frac{\beta}{\beta-2}.$$

1.4 Estimador: Método de Momentos para el parámetro β

Dado que la distribución Pareto presenta dos parámetros desconocidos, α y β, es posible aplicar el **Método de Momentos (MM)** utilizando los dos primeros momentos teóricos de la distribución. Este método consiste en igualar los momentos teóricos con sus correspondientes momentos muestrales y resolver el sistema resultante.

1.4.1 Procedimiento

Paso 1: Identificación de los Momentos Teóricos: Para una variable aleatoria $X \sim \mathrm{Pareto}(\alpha, \beta)$, con $\beta > 2$, los dos primeros momentos teóricos están dados por:

$$E(X) = \frac{\alpha\beta}{\beta-1}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \left(\frac{\alpha}{\beta-1}\right)^2 \frac{\beta}{\beta-2}.$$

Paso 2: Igualación con los Momentos Muestrales: Sea $\bar{X}$ la media muestral y S^2 la varianza muestral.

El método de momentos propone igualar los momentos teóricos con los momentos empíricos:

$$\begin{cases} \bar{X} = \dfrac{\alpha\beta}{\beta - 1}, \\ S^2 = \left(\dfrac{\alpha}{\beta - 1}\right)^2 \dfrac{\beta}{\beta - 2}. \end{cases}$$

Paso 3: Eliminación del parámetro α: Dividiendo el cuadrado de la primera ecuación entre la segunda, se obtiene una expresión que depende únicamente del parámetro β:

$$\frac{\bar{X}^2}{S^2} = \frac{\left(\dfrac{\alpha\beta}{\beta - 1}\right)^2}{\left(\dfrac{\alpha}{\beta - 1}\right)^2 \dfrac{\beta}{\beta - 2}} = \beta(\beta - 2).$$

Reordenando términos:

$$\beta^2 - 2\beta - \frac{\bar{X}^2}{S^2} = 0.$$

Paso 4: Obtención del Estimador de Método de Momentos: Resolviendo la ecuación cuadrática y considerando que $\beta > 0$, se obtiene el estimador de método de momentos para el parámetro β:

$$\boxed{\hat{\beta}_{MM} = 1 + \sqrt{1 + \frac{\bar{X}^2}{S^2}}}.$$

Conclusión: El estimador $\hat{\beta}_{MM}$ se obtiene aplicando el método de momentos utilizando la media y la varianza muestral. Este estimador es consistente bajo la condición $\beta > 2$, aunque no es insesgado ni óptimo en términos de varianza, como es característico del método de momentos.

1.4.2 Propiedades del Estimador $\hat{\beta}_{MM}$

a) Insesgamiento: Un estimador $\hat{\beta}$ es **insesgado** si su esperanza coincide con el parámetro verdadero:

$$E(\hat{\beta}) = \beta.$$

En nuestro caso, el estimador de método de momentos para β es:

$$\hat{\beta}_{MM} = 1 + \sqrt{1 + \frac{\bar{X}^2}{S^2}},$$

donde $\bar{X}$ es la media muestral y S^2 es la varianza muestral.

Como $\hat{\beta}_{MM}$ es una **función no lineal** de $(\bar{X}, S^2)$, no se espera que cumpla en general que:

$$E\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\bar{X}^2}{S^2}}\right) = 1 + \sqrt{1 + \frac{E(\bar{X})^2}{E(S^2)}},$$

por lo que **no es insesgado en muestras finitas**.

Para verificarlo de manera empírica, estimamos el sesgo mediante simulación Monte Carlo:

$$\text{Sesgo}(\hat{\beta}_{MM}) = E(\hat{\beta}_{MM}) - \beta.$$

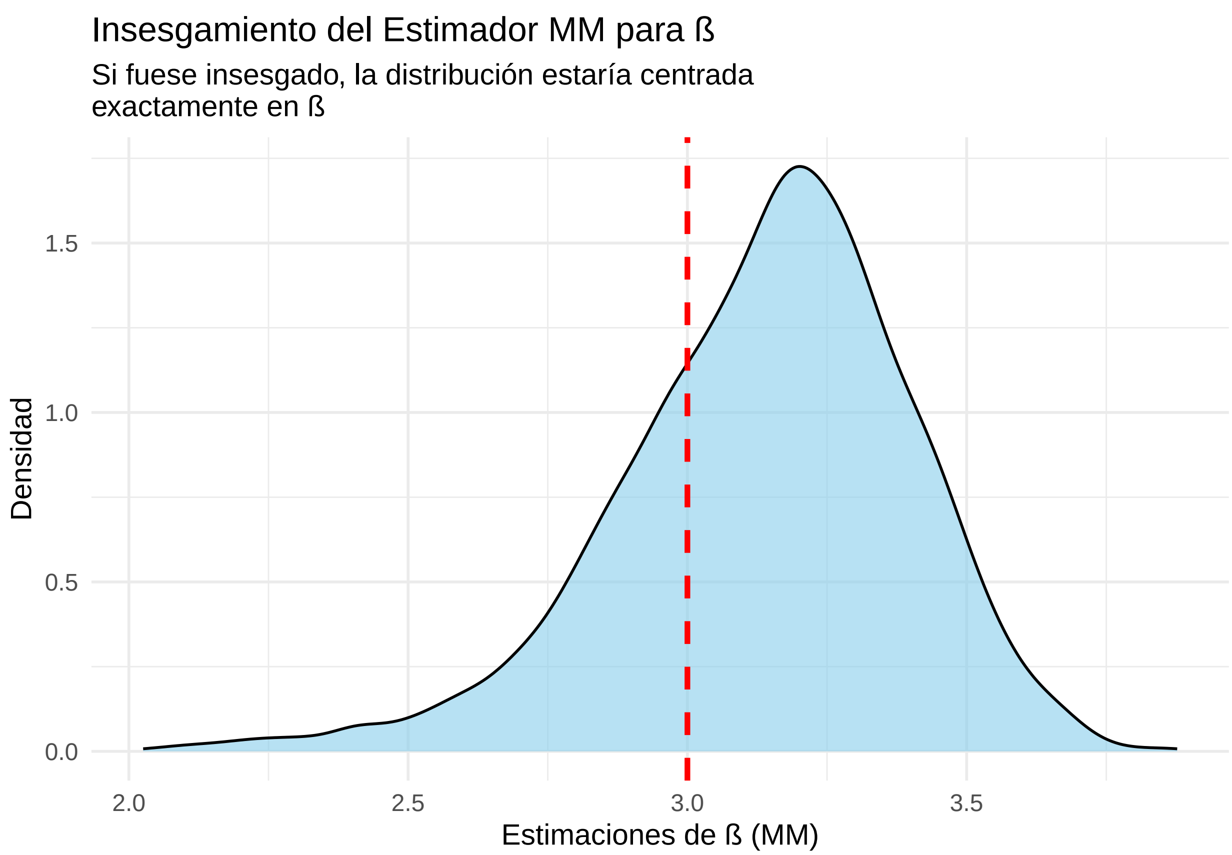
```
## [1] 0.1378484
```

```r
library(ggplot2)

df_betaMM <- data.frame(betaMM = betaMM_sim)

ggplot(df_betaMM, aes(x = betaMM)) +
geom_density(fill = "skyblue", alpha = 0.6) +
geom_vline(xintercept = beta_true, linetype = "dashed",
```

```
           color = "red", linewidth = 1) +
labs(title = "Insesgamiento del Estimador MM para  ",
subtitle = "Si fuese insesgado, la distribución estaría centrada
exactamente en  ",
x = "Estimaciones de   (MM)",
y = "Densidad") +
theme_minimal()
```



Conclusión:

Dado que $E(\hat{\beta}MM) \neq \beta$ (sesgo empírico distinto de 0), se concluye que el estimador $\hat{\beta}MM$ no es insesgado en muestras finitas.

b) Consistencia: Un estimador $\hat{\beta}_n$ es **consistente** para el parámetro β si converge en probabilidad al valor verdadero cuando el tamaño muestral tiende a infinito, es decir,

$$\hat{\beta}_n \xrightarrow{p} \beta \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

El estimador de método de momentos para el parámetro β está dado por:

$$\hat{\beta}_{MM} = 1 + \sqrt{1 + \frac{\bar{X}^2}{S^2}},$$

donde $\bar{X}$ y S^2 representan la media y la varianza muestral, respectivamente.

Para la distribución Pareto con $\beta > 2$, se cumple que:

$$\bar{X} \xrightarrow{p} E(X), \qquad S^2 \xrightarrow{p} \mathrm{Var}(X),$$

por la Ley de los Grandes Números y la consistencia de la varianza muestral cuando la varianza existe.

Definiendo la función:

$$g(u, v) = 1 + \sqrt{1 + \frac{u^2}{v}},$$

la cual es continua para $v > 0$, y dado que:

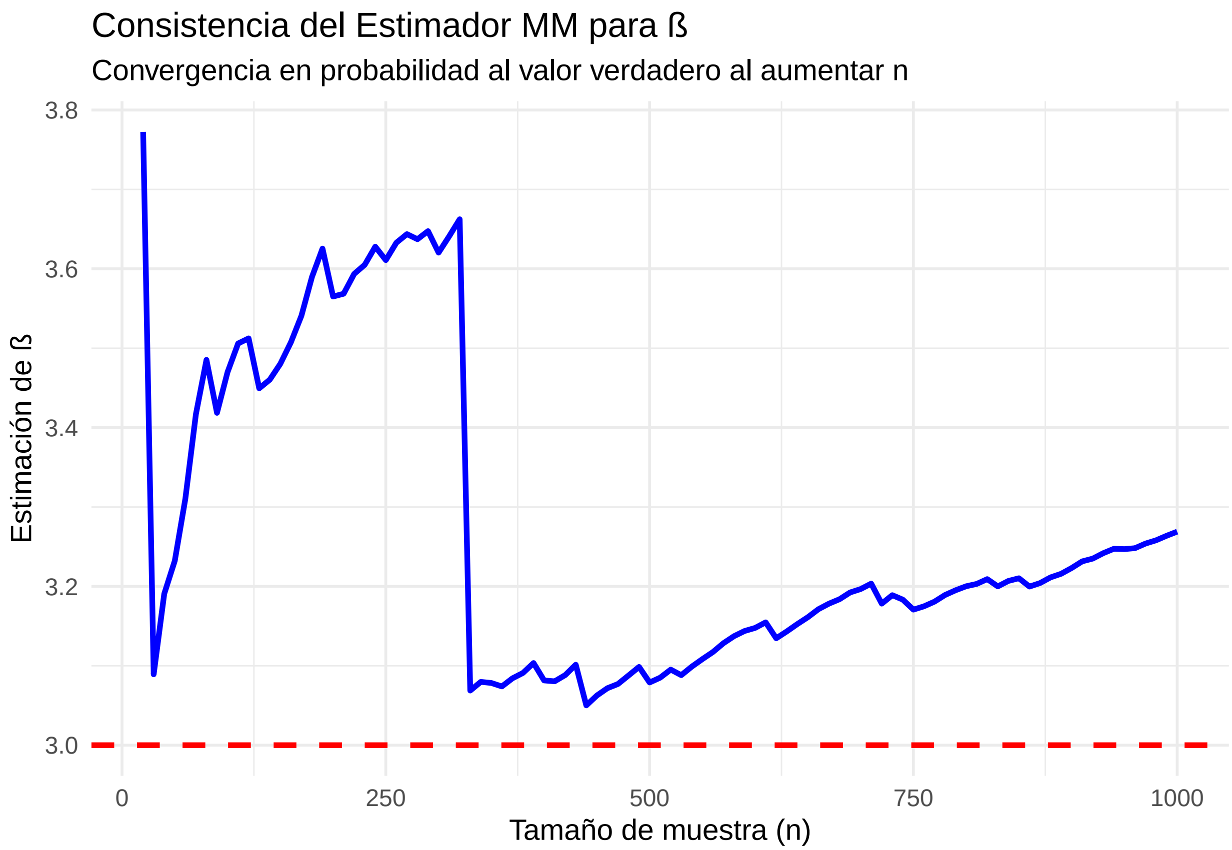
$$\hat{\beta}_{MM} = g(\bar{X}, S^2),$$

por el **Teorema de la Función Continua** se obtiene:

$$\hat{\beta}_{MM} \xrightarrow{p} g\big(E(X), \mathrm{Var}(X)\big) = \beta.$$

Por lo tanto, el estimador de método de momentos $\hat{\beta}_{MM}$ es **consistente** para el parámetro β.

Para visualizar esta propiedad, se analiza el comportamiento del estimador al aumentar el tamaño muestral.



Conclusión:

Al cumplirse que $\bar{X} \xrightarrow{p} E(X)$ y $S^2 \xrightarrow{p} \mathrm{Var}(X)$, y dado que $\hat{\beta}MM$ es una función continua de estos estadísticos, se concluye que el estimador $\hat{\beta}MM$ es consistente para el parámetro β.

c) Suficiencia: Un estadístico $T = T(X_1, \dots, X_n)$ es **suficiente** para un parámetro β si la distribución condicional de la muestra, dado T, no depende de dicho parámetro.

El estimador de método de momentos para β está dado por:

$$\hat{\beta}_{MM} = 1 + \sqrt{1 + \frac{\bar{X}^2}{S^2}},$$

donde $\bar{X}$ y S^2 corresponden a la media y varianza muestral, respectivamente.

En la distribución Pareto, cuando ambos parámetros α y β son desconocidos, la estadística suficiente para β está asociada a la estructura de la función de verosimilitud y viene dada por funciones del estadístico

$$T = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{X_{(1)}}\right).$$

Dado que el estimador $\hat{\beta}_{MM}$ depende únicamente de $(\bar{X}, S^2)$ y no es función del estadístico suficiente T, se concluye que **no se basa en una estadística suficiente** para el parámetro β.

Conclusión:

El estimador $\hat{\beta}_{MM}$ **no es suficiente**.

d) Ancilaridad Un estadístico T se denomina **ancilar** si su distribución no depende del parámetro de interés. Es decir, T es ancilar para β si la ley de probabilidad de T es independiente de β.

El estimador de método de momentos para el parámetro β está definido como:

$$\hat{\beta}_{MM} = 1 + \sqrt{1 + \frac{\bar{X}^2}{S^2}}.$$

Este estimador está construido con el objetivo explícito de aproximar el valor del parámetro β. En consecuencia, su distribución muestral depende del valor de dicho parámetro.

Por lo tanto, la distribución de $\hat{\beta}_{MM}$ **no es invariante respecto a** β, lo que implica que el estimador no cumple la propiedad de ancilaridad.

Conclusión:

El estimador $\hat{\beta}_{MM}$ **no es ancilar**.

e) Completitud La **completitud** es una propiedad que se define para **estadísticas suficientes**.

Un estadístico suficiente T para un parámetro β es completo si, para toda función medible $g(\cdot)$, se cumple que:

$$E_\beta[g(T)] = 0 \text{ para todo } \beta \quad \Longrightarrow \quad P_\beta(g(T) = 0) = 1.$$

Esta propiedad resulta fundamental en la teoría de la estimación óptima, ya que permite garantizar la unicidad del estimador insesgado de varianza mínima mediante el Teorema de Lehmann–Scheffé.

En el presente caso, el estimador de método de momentos para el parámetro β está dado por:

$$\hat{\beta}_{MM} = 1 + \sqrt{1 + \frac{\bar{X}^2}{S^2}},$$

el cual depende de la media y la varianza muestral $(\bar{X}, S^2)$.
Sin embargo, como se mostró en la sección anterior, estos estadísticos **no constituyen una estadística suficiente** para el parámetro β en la distribución Pareto.

Por lo tanto, **no corresponde analizar la propiedad de completitud** para el estimador $\hat{\beta}_{MM}$, ya que dicha propiedad solo es aplicable a estadísticas suficientes.

Conclusión:

La propiedad de completitud **no aplica** al estimador de método de momentos $\hat{\beta}_{MM}$.

f) Optimalidad: Un estimador se considera **óptimo** si alcanza la mínima varianza posible dentro de una clase determinada de estimadores, usualmente dentro de la clase de estimadores insesgados.

El estimador de método de momentos para el parámetro β se obtiene igualando momentos teóricos y muestrales, sin hacer uso de la función de verosimilitud ni de la estructura de la distribución muestral completa. En consecuencia, el método de momentos **no garantiza eficiencia ni mínima varianza**.

Además, como se mostró previamente, el estimador $\hat{\beta}_{MM}$ **no es insesgado** en muestras finitas, lo que impide que pueda ser considerado óptimo bajo criterios clásicos de optimalidad, como los establecidos por el Teorema de Lehmann–Scheffé.

Por el contrario, el estimador EIVUM obtenido en la sección correspondiente es insesgado, función de una estadística suficiente y completa, y por tanto posee varianza uniformemente mínima dentro de su clase.

Conclusión:

El estimador de método de momentos $\hat{\beta}_{MM}$ **no es óptimo** para el parámetro β de la distribución Pareto.