Título de tu Informe

Tu Nombre

23 de Diciembre de 2025

Contents

1. Estimadores y propiedades

1.5.1 Estimador : Estimador Insesgado de Varianza Uniformemente Mínima (EIVUM) para el parámetro β

Dado que en la sección anterior se determinó que el Estimador de Máxima Verosimilitud (EMV) para β es sesgado, procederemos a obtener el estimador óptimo aplicando el **Teorema de Lehmann-Scheffé**.

Según la teoría de la optimalidad, si logramos construir un estimador insesgado que sea función de una estadística suficiente y completa, dicho estimador será el **Estimador Insesgado de Varianza Uniformemente Mínima (EIVUM)**.

El procedimiento se detalla en los siguientes cuatro pasos.

Paso 1: Identificación de la Estadística Suficiente y Completa Analizando la función de densidad de la distribución Pareto, observamos que pertenece a la familia exponencial k-paramétrica respecto al parámetro de forma β.

Bajo la condición de que el parámetro de escala α es desconocido y estimado mediante el mínimo muestral $X_{(1)}$, la teoría de suficiencia indica que la estadística T que captura toda la información sobre β es la suma de los logaritmos de las razones muestrales:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \ln \left(\frac{X_i}{X_{(1)}} \right)$$

Esta estadística T es **suficiente y completa** para el parámetro β, condición necesaria para aplicar el teorema de Lehmann-Scheffé.

Paso 2: Distribución Muestral de la Estadística A partir de las propiedades de la transformación de variables aleatorias Pareto, se deduce que la estadística T sigue una distribución Gamma.

Dado que se ha estimado un parámetro adicional (α), los grados de libertad se ajustan a $(n-1)$. Por tanto:

$$T \sim \text{Gamma}(n-1, \beta)$$

Paso 3: Verificación del Sesgo y Corrección (Método de la Esperanza) Partimos del Estimador de Máxima Verosimilitud hallado previamente:

$$\hat{\beta}_{EMV} = \frac{n}{T}$$

Para verificar si es insesgado, calculamos su valor esperado $E[\hat{\beta}_{EMV}]$. Utilizando la propiedad de la esperanza inversa para una variable con distribución $\text{Gamma}(k, \lambda)$, donde:

$$E\left[\frac{1}{T}\right] = \frac{\lambda}{k-1},$$

se obtiene:

$$E\left[\frac{1}{T}\right] = \frac{\beta}{(n-1)-1} = \frac{\beta}{n-2}$$

Sustituyendo en la esperanza del EMV:

$$E[\hat{\beta}_{EMV}] = n \cdot E\left[\frac{1}{T}\right] = n\left(\frac{\beta}{n-2}\right) = \left(\frac{n}{n-2}\right)\beta$$

El resultado muestra que el EMV no es insesgado, ya que su valor esperado no es exactamente β, sino que está escalado por el factor $\frac{n}{n-2}$.

Paso 4: Construcción del Estimador Óptimo (EIVUM) Para eliminar el sesgo, aplicamos una corrección multiplicativa usando el inverso del factor de sesgo encontrado $\left(\frac{n-2}{n}\right)$.

Definimos el nuevo estimador como:

$$\hat{\beta}_{EIVUM} = \left(\frac{n-2}{n}\right) \cdot \hat{\beta}_{EMV}$$

Reemplazando $\hat{\beta}_{EMV} = \frac{n}{T}$:

$$\hat{\beta}_{EIVUM} = \left(\frac{n-2}{n}\right) \cdot \frac{n}{T} = \frac{n-2}{T}$$

Conclusión La fórmula final del estimador óptimo es:

$$\boxed{\hat{\beta}_{EIVUM} = \frac{n-2}{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{X_{(1)}}\right)}}$$

Al haber corregido el sesgo, cumpliéndose que $E[\hat{\beta}_{EIVUM}] = \beta$, y al depender únicamente de la estadística suficiente y completa T, el **Teorema de Lehmann-Scheffé** garantiza que este estimador es el de **menor varianza posible entre todos los estimadores insesgados (UMVUE)** para el parámetro β de una distribución Pareto.

1.5.2 Verificación de Propiedades del Estimador ($\hat{\beta}_{EIVUM}$)

Recordamos la expresión del estimador y la distribución de la estadística suficiente sobre la cual se basa:

$$\hat{\beta}_{EIVUM} = \frac{n-2}{T}, \quad \text{donde } T \sim \text{Gamma}(n-1, \beta)$$

1. Insesgabilidad Un estimador es insesgado si su esperanza matemática coincide con el parámetro a estimar. Calculamos:

$$E[\hat{\beta}_{EIVUM}] = E\left[\frac{n-2}{T}\right] = (n-2)\, E\left[\frac{1}{T}\right]$$

Dado que para una variable $T \sim \text{Gamma}(k, \beta)$ se cumple $E[1/T] = \frac{\beta}{k-1}$ con $k = n-1$, resulta:

$$E[\hat{\beta}_{EIVUM}] = (n-2) \cdot \frac{\beta}{n-2} = \beta$$

Conclusión: Se verifica que $E[\hat{\beta}_{EIVUM}] = \beta$, por lo que el estimador es insesgado para todo $n > 2$.

```r
# Usamos la base de datos 'reclamos' generada en la sección 1.1
n_obs <- length(reclamos) # n = 1000
x_min_obs <- min(reclamos)

# Cálculo del estadístico T
T_obs <- sum(log(reclamos / x_min_obs))

# Cálculo del Estimador 5 (EIVUM)
beta_eivum_val <- (n_obs - 2) / T_obs

print(paste("Valor Verdadero Beta:", beta_true))
```

```
## [1] "Valor Verdadero Beta: 3"
```

```r
print(paste("Estimación EIVUM:", round(beta_eivum_val, 5)))
```

```
## [1] "Estimación EIVUM: 3.03747"
```

```r
print(paste("Diferencia (Sesgo muestral):", round(beta_eivum_val - beta_true, 5)))
```

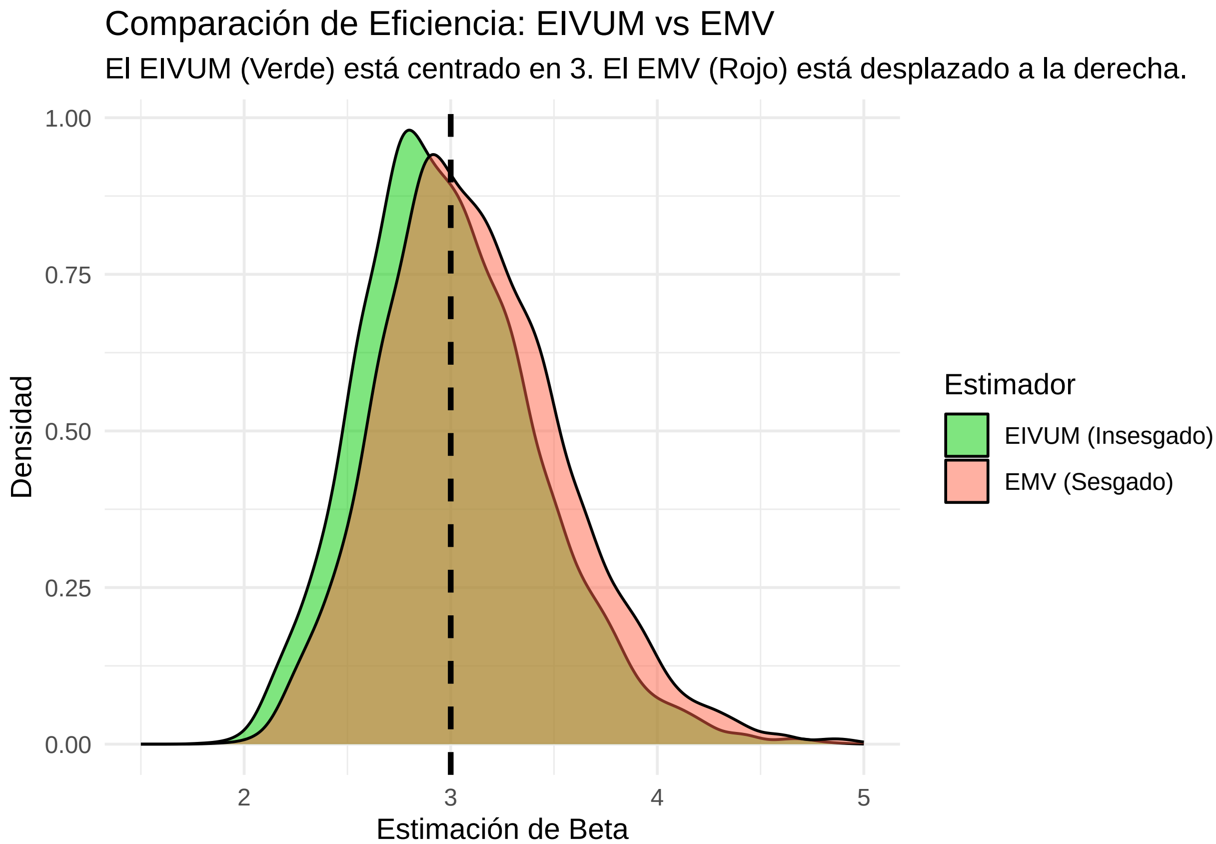
```
## [1] "Diferencia (Sesgo muestral): 0.03747"
```

2. Eficiencia La eficiencia se evalúa a través de la varianza del estimador. Utilizando que para $T \sim \text{Gamma}(k, \beta)$, la varianza inversa es $\text{Var}(1/T) = \frac{\beta^2}{(k-1)^2(k-2)}$ con $k = n - 1$, se obtiene:

$$\text{Var}(\hat{\beta}_{EIVUM}) = (n-2)^2 \, \text{Var}\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}_{EIVUM}) = (n-2)^2 \cdot \frac{\beta^2}{(n-2)^2(n-3)} = \frac{\beta^2}{n-3}$$

Conclusión: La varianza es finita para $n > 3$. Además, dado que el estimador es insesgado y depende únicamente de una estadística suficiente y completa, el Teorema de Lehmann-Scheffé garantiza que esta varianza es la mínima posible entre todos los estimadores insesgados, confirmando que $\hat{\beta}_{EIVUM}$ es el estimador más eficiente de su clase.



3. Consistencia Un estimador es consistente si converge en probabilidad al parámetro verdadero cuando el tamaño muestral tiende a infinito. Una condición suficiente es:

1. $E[\hat{\beta}_{EIVUM}] \to \beta$ cuando $n \to \infty$
2. $\text{Var}(\hat{\beta}_{EIVUM}) \to 0$ cuando $n \to \infty$

Verificación:

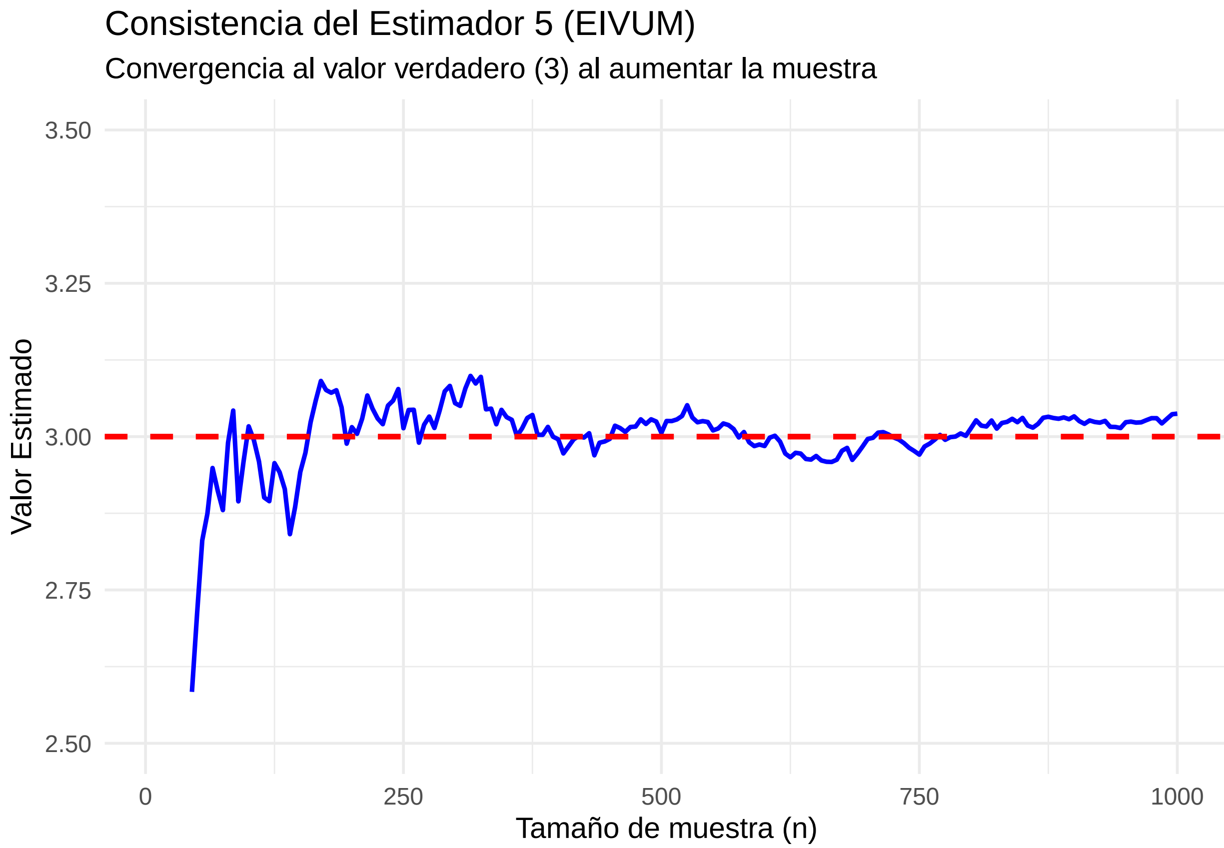
- Condición 1:

$$\lim_{n\to\infty} E[\hat{\beta}_{EIVUM}] = \beta$$

- Condición 2:

$$\lim_{n\to\infty} \text{Var}(\hat{\beta}_{EIVUM}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta^2}{n-3} = 0$$

Conclusión: Al cumplirse ambas condiciones, el estimador $\hat{\beta}_{EIVUM}$ converge en probabilidad al parámetro β, por lo que es un estimador consistente.



4. Suficiencia La propiedad de suficiencia indica que el estimador utiliza toda la información disponible en la muestra sobre el parámetro, sin desperdiciar datos.

Conclusión: Como se demostró en el **Paso 1** de la construcción del estimador, $\hat{\beta}_{EIVUM}$ es una función inyectiva de la estadística $T = \sum \ln(X_i/X_{(1)})$. Dado que se probó que T es una estadística suficiente para β (por pertenecer a la Familia Exponencial), el estimador hereda esta propiedad. Por tanto, es un estimador **suficiente**.

5. Ancilaridad Según la definición teórica, una estadística es ancilar si su distribución no depende del parámetro de interés.

En este caso, el estimador construido es $\hat{\beta}_{EIVUM} = \frac{n-2}{T}$. Para evaluar si el estimador es ancilar, analizamos sus momentos:

$$E[\hat{\beta}_{EIVUM}] = \beta, \qquad \text{Var}(\hat{\beta}_{EIVUM}) = \frac{\beta^2}{n-3}$$

Dado que la esperanza y la varianza dependen explícitamente de β, la distribución del estimador cambia según el valor del parámetro.

Conclusión: El estimador $\hat{\beta}_{EIVUM}$ **no es una estadística ancilar**, ya que su distribución depende del parámetro β. Este comportamiento es esperado y adecuado para un estimador puntual del parámetro de interés.

6. Completitud La propiedad de completitud es fundamental para garantizar la unicidad del estimador óptimo según el Teorema de Lehmann-Scheffé.

La estadística suficiente es $T = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{X_{(1)}}\right)$. Se ha demostrado previamente que $T \sim \text{Gamma}(n-1, \beta)$. La distribución Gamma con uno de sus parámetros desconocidos pertenece a la familia exponencial regular de un parámetro. Dado que el espacio paramétrico es abierto ($\beta > 0$), se cumple que la estadística suficiente T es completa.

Esto implica que si una función medible $g(T)$ satisface $E[g(T)] = 0$ para todo β, entonces $P(g(T) = 0) = 1$.

Conclusión: La estadística T es una estadística suficiente y completa para el parámetro β.

7. Optimalidad (Conclusión Final) Se ha verificado que el estimador $\hat{\beta}_{EIVUM} = \frac{n-2}{T}$ cumple las siguientes propiedades:

- Es insesgado: $E[\hat{\beta}_{EIVUM}] = \beta$.
- Es función de una estadística suficiente y completa (T).
- Posee varianza mínima dentro de la clase de estimadores insesgados.

Por lo tanto, aplicando el **Teorema de Lehmann-Scheffé**, se concluye que:

> Un estimador insesgado que sea función de una estadística suficiente y completa es el Estimador Insesgado de Varianza Uniformemente Mínima.

Conclusión General: $\hat{\beta}_{EIVUM}$ es el **Estimador Insesgado de Varianza Uniformemente Mínima (EIVUM)** para el parámetro β de la distribución Pareto. No existe otro estimador insesgado con menor varianza que este.