UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA LA MOLINA

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA
FACULTAD DE ECONOMÍA Y PLANIFICACIÓN

TRABAJO INTEGRADOR

Inferencia Estadística 2025-II

Integrante	Código
Montúfar Paiva Yeraldi Mercedes	20230400
Kay Daniela L. Zavala Malpartida	20230420
Rojas Taco Fabiana	20220956
Paucar Arango Marcos David Alexander	20221412
Castillo Ruiz Mauricio Gabriel	20230384
Gómez Vigo Héctor Estefano	20230397
Villanueva Huamani Alexander Ruben	20230419

Docente: Fernando Miranda Villagómez

LA MOLINA - LIMA - PERÚ 2025

Distribución Pareto:

$$f(x) = \frac{\beta\alpha^{\beta}}{x^{\beta+1}} I_{(\alpha,\infty)}(x)$$
$$E(X) = \frac{\alpha\beta}{\beta-1} \quad ; \quad \mathrm{VAR}(X) = \left(\frac{\alpha}{\beta-1}\right)^2 \frac{\beta}{\beta-2}$$

Pregunta 1

1.1 EMV para parametro alfa:

Usaremos el Método de máxima verosimilitud para poder hallar el primer estimador para alfa:

$$L(\alpha,\beta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\alpha,\beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta\alpha^{\beta}}{x_i^{\beta+1}} I_{[\alpha,\infty)}(x_i) \quad = \beta^n \alpha^{n\beta} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{-(\beta+1)}\right) \times \prod_{i=1}^{n} I_{[\alpha,\infty)}(x_i)$$

Analizando la indicadora:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} I_{[\alpha,\infty]}(x_i) &= I\left(\bigcap_{i=i}^{n} \{x_i \geq \alpha\}\right)\\ &= I\left(\alpha \leq x_1, \alpha \leq x_2, \ldots \alpha \leq x_n\right)\\ &= I\left(\alpha \leq mi\left(x_1, \ldots, x_n\}\right) = I\left(\alpha \leq y_1\right]\end{aligned}$$

donde y1 = X(1) es el mínimo de la muestra:

$$El \text{ EMV de } \theta = \alpha \text{ es } \; T = Y_1.$$

1.1.2 Propiedades:

a) Insesgamiento: Distribución del mínimo:

$$X_1 \ldots X_n \sim \text{ Pareto } (\alpha,\beta) \text{ i i d}$$
$$F(x) = 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, x \geqslant \alpha$$
$$y = x_i$$
$$Fx_i(y) = n[1-F(y)]^{n-1}\mathcal{F}(y) \to n\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta}\right]^{\beta-1} \cdot \frac{\beta\alpha^{\beta}}{y^{\beta+1}}$$
$$= n\left[\frac{\alpha^{\beta(n-1)}}{\alpha^{\beta(n-1)}}\right] \cdot \frac{\beta\alpha^{\beta}}{y^{\beta+1}} = \frac{(n\beta)\alpha^{n\beta}}{y^{n\beta+1}}, y \geqslant \alpha$$

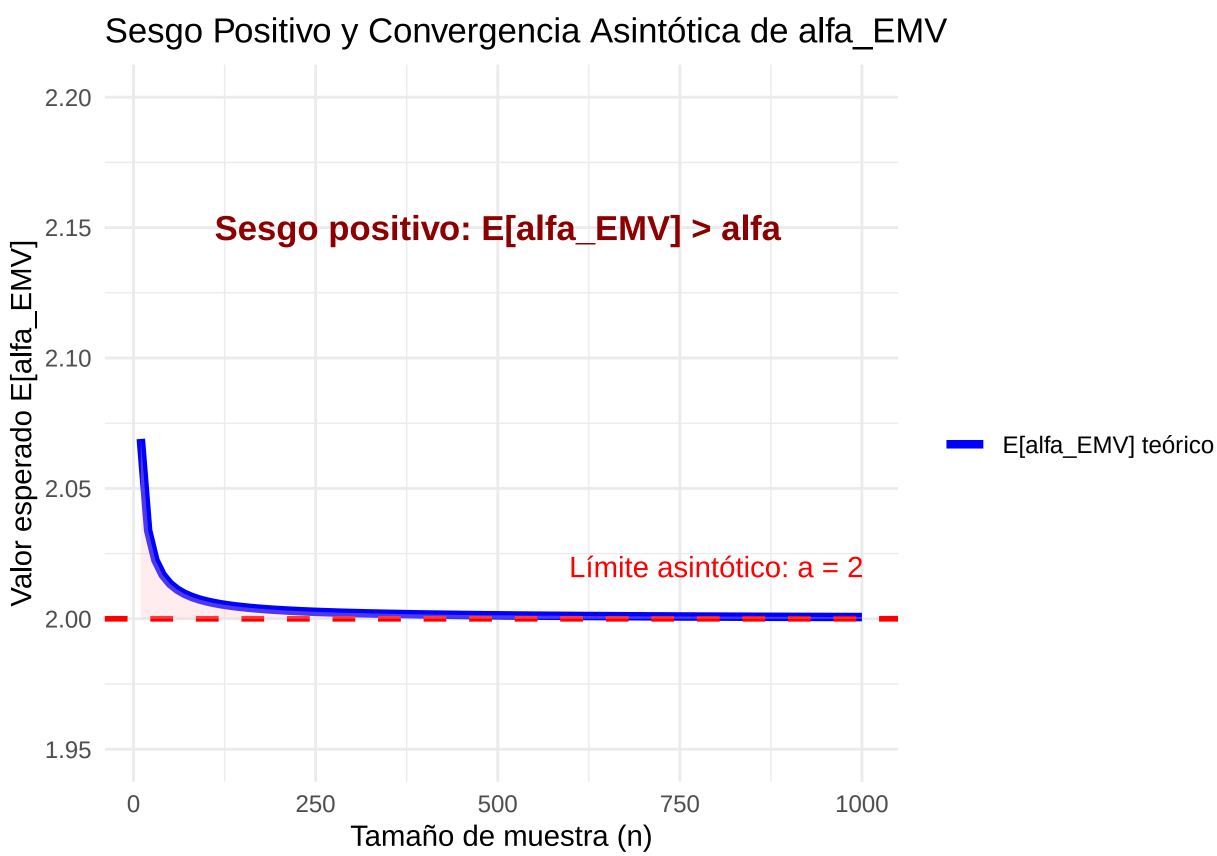
$$\to x_1 \sim \text{Pareto}(\alpha, n\beta)$$

Hay sesgo positivo, es decir que sobrestima al parametro, no cumple propiedades de Insesgamiento. Ahora lo veremos mejor con los valores para nuestra data:

```r
# 1. Valor observado del mínimo
alpha_EMV_observado <- min(reclamos)
# 2. Valor esperado teórico del mínimo
E_alpha_EMV_teorico <- (n * beta_true * alpha_true) / (n * beta_true - 1)
```

```
## [1] "El valor observado es: 2.00031032898679 y el valor esperado es: 2.00066688896299"
```

El valor observado en los datos fue de 2.00031, mientras que el valor esperado teórico es 2.00067, ambos ligeramente por encima del valor real del parámetro (alfa = 2.00000). Esto confirma que, para muestras finitas, el estimador tiende a sobrestimar el parámetro verdadero, aunque en este caso la magnitud del sesgo es muy pequeña (del orden de 0.0003 a 0.0007). La cercanía entre el valor observado y el teórico valida la expresión matemática del sesgo y respalda la propiedad de insesgamiento asintótico, ya que a medida que el tamaño de muestra aumenta, el sesgo tiende a cero.



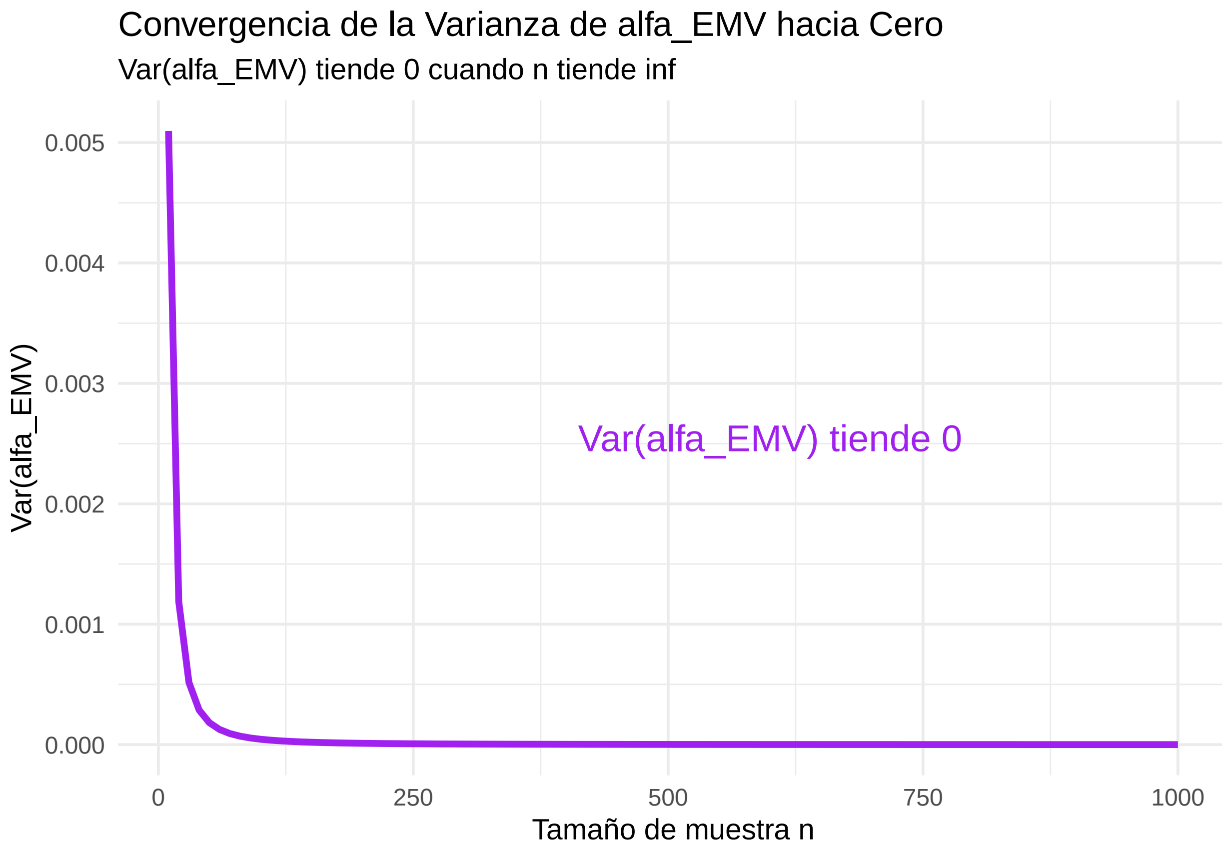
de nuestra base de datos, tomamos submuestras que van incrementando su valor para verificar que tendiendo al infinito (tamaños suficientemente grande) podemos ver como el valor tiende al parámetro de alfa = 2.

b) Consistencia: Podemos hacer uso del Teorema 2, por la propiedad anterior del insesgamiento asintotico

- $\lim_{n\to\infty} E(y_1) = \alpha \quad \text{ya que} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n\beta \cdot \alpha}{n\beta - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta\alpha}{\beta - \frac{1}{n}} = \frac{\beta\alpha}{\beta} = \alpha$
- $\lim_{n\to\infty} \text{Var}(y_1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\beta\alpha^2}{(n\beta-1)^2(n\beta-2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\beta\alpha^2}{n^3\beta^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^2}{n^2\beta^2} = 0$

Como podemos obervar cumple ambas condiciones, por ende decimos que nuestro estimador es consitente n otras palabras el estimador converge en probabilidades al parametro.

** Gráfico:** Hemos visto ya un gráfico para solidar la primera demostración, ahora veamos uno que consolide la segunda condición:



c) Suficiencia:

$$P(x = x/t = T) = \frac{P\left(x_1 = x_1 \ldots x_n = x_n, T = y_1\right)}{P(T = y_1)}$$

$$\frac{\left(\frac{\beta\alpha^\beta}{x_1^{\beta+1}}\right)\left(\frac{\beta\alpha^\beta}{x_2^{\beta+1}}\right)\cdots\left(\frac{\beta\alpha^\beta}{x_n^{\beta+1}}\right)}{\frac{n\beta\alpha^{n\beta}}{y^{n\beta+1}}}, \quad x_i \geqslant \alpha,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

$$= \frac{\beta^n \cdot \alpha^{n\beta} \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{-(\beta+1)}}{\frac{n\beta\alpha^{n\beta}}{y^{n\beta+1}}} = \frac{\beta^{n-1} \cdot y^{n\beta+1} \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{-(\beta+1)}}{n}$$

Dada la dsitribución condicional dado Y = X1, no depende de alfa, entonces podemos decir que es una estadística suficiente para alpha, cumple la propiedad.

d) Ancilaridad: La distribución del mínimo $x_{(1)}$ es:

$$x_{(1)} \sim \text{Pareto}(\alpha, n\beta)$$

$$f_{x_{(1)}}(t) = \frac{n\beta\alpha^{n\beta}}{t^{n\beta+1}}, \quad t \geqslant \alpha$$

Como vemos su distribución depende de alfa, no cumple con la propiedad de ancilaridad.

e) Completitud: Calculamos la esperanza de $g(T)$:

$$E[g(T)] = \int_{\alpha}^{\infty} g(t) \cdot \frac{n\beta\alpha^{n\beta}}{t^{n\beta+1}}\, dt.$$

Exigimos que $E[g(T)] = 0$ para todo $\alpha > 0$:

$$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{g(t)}{t^{n\beta+1}}\, dt = 0 \quad \forall\alpha > 0.$$

Derivamos ambos lados respecto a α:

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\int_{\alpha}^{\infty} \frac{g(t)}{t^{n\beta+1}}\, dt\right] = -\frac{g(\alpha)}{\alpha^{n\beta+1}} = 0.$$

Esto implica que:

$$g(\alpha) = 0 \quad \forall\alpha > 0.$$

Como α es cualquier valor positivo, concluimos que $g(t) = 0$ para todo t en el soporte de T. Por lo tanto, $T = X_{(1)}$ es una **estadística completa** para α cuando β es conocido.

Por el Teorema de Bahadur, como es suficiente y completo, podemos afirmar que nuestro estimador es minimal suficiente.

f) Optimalidad: En nuestro caso alfa_EMV no es óptimo porque es sesgado. Pero si existe un estimador óptimo basado en la estadística suficiente que se podría obtener mediante corrección del sesgo. (Teorema de Lehman-Scheffé)

1.2 EMV para parametro Beta:

Para hallar el estimador debemos remplazar nuestro primer estimador para el parametro alfa:

$$\hat{\alpha}_{MLE} = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$$

Como sabemos el máximo en L(alpha,beta) es igual al máximo de Ln(Lalpha,beta)) entonces haremos uso del ln:

$$L(\alpha,\beta) = \beta^n \cdot \alpha^{n\beta} \cdot \prod_{i=1}^{n} X_i^{-(\beta+1)}$$
$$\ln(L(\alpha,\beta)) = n \cdot \ln(\beta) + n\beta\ln(\alpha) - (\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\ln(L(\alpha,\beta))}{d\beta} &= \frac{n}{\beta} + n\ln\alpha - \sum_{i=1}^{n}\ln X_i \\
&= \frac{n}{\beta} + n\ln\alpha - \sum_{i=1}^{n}\ln X_i = 0 \\
&\Rightarrow \frac{n}{\beta} = \sum_{i=1}^{n}\ln X_i - n\ln\alpha \\
&\Rightarrow \frac{n}{\beta} = \sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{X_i}{\alpha}\right) \\
&\Rightarrow \hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{X_i}{x_1}\right)}
\end{aligned}
$$

1.2.1 Propiedades:

a) Insesgamiento Primero analizaremos una parte del denominador para determinar su distribución y se facilite el procedimiento.

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) = P(Y_i \le y) &= P\left(\ln\left(\frac{X_i}{\alpha}\right) \le y\right) = P(X_i \le \alpha e^y) \\
&= 1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha e^y}\right)^{\beta} = 1 - e^{-\beta y}, \quad y \ge 0 \\
f_Y(y) &= \frac{d}{dy}F_Y(y) = \beta e^{-\beta y}, \quad y \ge 0
\end{aligned}
$$

Analizando el resultado de la distribución, notamos que tiene la forma de la exponencial. Entonces el mínimo igual será exponencial con parametro n por beta. Ademas tomamos a T como la sumatoria, donde por propiedad de ln de una división podemos desplegarlo.

$$
\begin{aligned}
Y_i &\sim \text{Exponencial}(\beta) \\
W = Y_{(1)} &= \min(Y_1, \ldots, Y_n) \sim \text{Exp}(n\beta) \\
T &= \sum_{i=1}^{n}(Y_i - Y_{(1)}) \sim \text{Gamma}(n-1, \beta) \\
\hat{\beta} &= \frac{n}{T}, \quad T \sim \text{Gamma}(n-1, \beta) \\
E\left[\frac{1}{T}\right] &= \frac{\beta}{n-2}, \quad n > 2 \\
E[\hat{\beta}] &= n \cdot E\left[\frac{1}{T}\right] = \frac{n\beta}{n-2}
\end{aligned}
$$

Acá vemos que hay un sesgo presente

$$
\text{Sesgo} = E[\hat{\beta}] - \beta = \frac{n\beta}{n-2} - \beta = \frac{2\beta}{n-2}
$$

Por ende, no es un estimador insesgado. Ademas al ser positivo podemos decir que sobrestima al parametro.

1.3 Estimador para la Media Poblacional (μ)

Consideramos la media muestral como estimador natural del valor esperado de la distribución:

$$\bar{X} = T(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Para que los momentos existan en una distribución Pareto, debemos asumir que $\beta > 1$ (para la esperanza) y $\beta > 2$ (para la varianza). El parámetro a estimar es:

$$\mu = E(X) = \frac{\beta\alpha}{\beta - 1}$$

1.3.1 Propiedades:

a) Insesgamiento: Calculamos el valor esperado del estimador:

$$\begin{aligned} E[\bar{X}] &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] \\ &= \frac{1}{n} \cdot n \cdot \left(\frac{\beta\alpha}{\beta - 1}\right) = \frac{\beta\alpha}{\beta - 1} = \mu \end{aligned}$$

El estimador es **estrictamente insesgado** para μ. Verificamos esto con la base de datos:

```
# 1. Valor observado de la media muestral
mu_muestral_obs <- mean(reclamos)

# 2. Valor esperado teórico (mu)
mu_teorico <- (beta_true * alpha_true) / (beta_true - 1)
```

```
## [1] "La media muestral observada es: 2.96908 y el valor esperado teórico es: 3"
```

b) Consistencia: Para demostrar la consistencia, verificamos las condiciones del Teorema de Chebyshev (asumiendo $\beta > 2$):

1. **Insesgadez:** $\lim_{n\to\infty} E(\bar{X}) = \mu$ (ya demostrado).
2. **Varianza tiende a cero:**

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(\bar{X}) &= \frac{\operatorname{Var}(X)}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta - 1}\right)^2 \frac{\beta}{\beta - 2}\right] \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var}(\bar{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{C}{n} = 0$$

Al cumplirse ambas condiciones, $\bar{X}$ es un estimador **consistente** para μ.

c) Suficiencia: Aplicamos el Teorema de Factorización de Fisher-Neyman a la función de verosimilitud:

$$L(\alpha, \beta) = \underbrace{\beta^n \alpha^{n\beta} \cdot I_{(\alpha,\infty)}(x_{(1)})}_{g(x_{(1)},\alpha,\beta)} \cdot \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{-(\beta+1)}}_{h(x_1,\dots,x_n)}$$

Como se observa, los estadísticos suficientes conjuntos para (α, β) son el mínimo $X_{(1)}$ y el producto $\prod X_i$ (o equivalentemente $\sum \ln X_i$). La media muestral $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$ **no puede factorizarse** de manera que contenga toda la información de los parámetros.

Por lo tanto, $\bar{X}$ **no es un estadístico suficiente** para los parámetros de la distribución Pareto.

d) Ancilaridad: Un estadístico es ancilar si su distribución no depende de los parámetros. La distribución de $\bar{X}$ para una Pareto no tiene una forma cerrada sencilla (es una suma de variables Pareto), pero su esperanza $E(\bar{X}) = \frac{\alpha\beta}{\beta-1}$ y su varianza dependen directamente de α y β.

Al depender sus momentos (y por ende su distribución) de los parámetros, el estimador **no es ancilar**.

e) Completitud: Dado que $\bar{X}$ no es un estadístico suficiente para la familia Pareto, no se suele analizar su completitud como estimador. Sin embargo, sabemos que el estadístico suficiente conjunto $(X_{(1)}, \sum \ln X_i)$ es completo, pero la suma aritmética $\sum X_i$ no lo es bajo esta estructura de familia no exponencial (en el sentido de los parámetros naturales de la Pareto).

f) Optimalidad: Un estimador es óptimo (UMVUE) si es insesgado y su varianza alcanza la Cota Inferior de Cramér-Rao (CICR) o si es función de un estadístico suficiente y completo.

1. **Eficiencia:** Al no ser función del estadístico suficiente $(X_{(1)}, \sum \ln X_i)$, la media muestral pierde información.
2. **Comparación:** Existe otro estimador para μ, basado en los EMV de α y β ($\hat{\mu} = \frac{\hat{\beta}\hat{\alpha}}{\hat{\beta}-1}$), que asintóticamente tiene menor varianza que $\bar{X}$.

Conclusión: $\bar{X}$ **no es un estimador óptimo** para la media de una población Pareto, aunque sea fácil de calcular e insesgado.

1.4 Método de Momentos para los parámetros de α y β de la Distribución Pareto

El método de momentos consiste en igualar los k primeros momentos poblacionales con los correspondientes momentos muestrales, donde k es el número de parámetros a estimar. Para la distribución Pareto con dos parámetros (α, β), utilizaremos los dos primeros momentos.

Definición de la distribución Pareto

Sea $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \beta)$ con función de densidad:

$$f_X(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}}, \quad x \geq \alpha > 0, \ \beta > 0$$

P1: Cálculo del primer momento poblacional $E[X]$

Planteamiento de la integral

$$E[X] = \int_\alpha^\infty x \cdot f_X(x)\, dx = \int_\alpha^\infty x \cdot \frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}}\, dx$$

$$E[X] = \beta\alpha^\beta \int_\alpha^\infty x \cdot x^{-(\beta+1)}\, dx = \beta\alpha^\beta \int_\alpha^\infty x^{-\beta}\, dx$$

Para $\beta > 1$ (condición de convergencia):

$$\int_\alpha^\infty x^{-\beta}\, dx = \left[\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_\alpha^\infty$$

Evaluando los límites:

Límite superior cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-\beta}}{1-\beta} = 0 \quad \text{porque } 1-\beta < 0$$

Límite inferior cuando $x = \alpha$:

$$\frac{\alpha^{1-\beta}}{1-\beta}$$

Resultado del primer momento

$$E[X] = \beta\alpha^\beta \left(0 - \frac{\alpha^{1-\beta}}{1-\beta}\right) = \beta\alpha^\beta \cdot \frac{\alpha^{1-\beta}}{\beta-1} = \frac{\beta\alpha}{\beta-1}$$

Primer momento poblacional:

$$\boxed{E[X] = \frac{\alpha\beta}{\beta-1}}, \quad \beta > 1$$

P2:Cálculo del segundo momento poblacional $E[X^2]$

Planteamiento de la integral

$$E[X^2] = \int_\alpha^\infty x^2 \cdot f_X(x)\,dx = \int_\alpha^\infty x^2 \cdot \frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}}\,dx$$

$$E[X^2] = \beta\alpha^\beta \int_\alpha^\infty x^2 \cdot x^{-(\beta+1)}\,dx = \beta\alpha^\beta \int_\alpha^\infty x^{1-\beta}\,dx$$

Para $\beta > 2$ (condición de convergencia):

$$\int_\alpha^\infty x^{1-\beta}\,dx = \left[\frac{x^{2-\beta}}{2-\beta}\right]_\alpha^\infty$$

Evaluando los límites:

Límite superior cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2-\beta}}{2-\beta} = 0 \quad \text{porque } 2-\beta < 0$$

Límite inferior cuando $x = \alpha$:

$$\frac{\alpha^{2-\beta}}{2-\beta}$$

Resultado del segundo momento

$$E[X^2] = \beta\alpha^\beta \left(0 - \frac{\alpha^{2-\beta}}{2-\beta}\right) = \beta\alpha^\beta \cdot \frac{\alpha^{2-\beta}}{\beta-2} = \frac{\beta\alpha^2}{\beta-2}$$

Segundo momento poblacional:

$$\boxed{E[X^2] = \frac{\alpha^2\beta}{\beta-2}}, \quad \beta > 2$$

P3: Momentos muestrales

Dada una muestra aleatoria $X_1, X_2, ..., X_n \overset{iid}{\sim}$ Pareto(α, β):

Primer momento muestral (media muestral)

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

Segundo momento muestral

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Varianza muestral (relacionada)

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

Nota: Existe relación entre m_2, $\bar{X}$ y S^2:

$$m_2 = S^2 \cdot \frac{n-1}{n} + \bar{X}^2$$

P4: Sistema de ecuaciones del método de momentos

Igualamos momentos poblacionales con momentos muestrales:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\beta-1} = \bar{X} & \text{(Ecuación I)} \\ \dfrac{\alpha^2\beta}{\beta-2} = m_2 & \text{(Ecuación II)} \end{cases}$$

Resolución del sistema

Despejar α de la Ecuación I De (I):

$$\frac{\alpha\beta}{\beta-1} = \bar{X} \quad \Rightarrow \quad \alpha\beta = \bar{X}(\beta-1)$$

Despejando α:

$$\boxed{\alpha = \bar{X} \cdot \frac{\beta-1}{\beta}} \quad \text{(Ecuación III)}$$

Sustituir en la Ecuación II Sustituyendo (III) en (II):

$$\frac{\left(\bar{X} \cdot \frac{\beta-1}{\beta}\right)^2 \beta}{\beta-2} = m_2$$

Simplificación algebraica

$$\frac{\bar{X}^2 \cdot \frac{(\beta-1)^2}{\beta^2} \cdot \beta}{\beta-2} = m_2$$

$$\frac{\bar{X}^2 \cdot \frac{(\beta-1)^2}{\beta}}{\beta-2} = m_2$$

Reordenando:

$$\frac{(\beta-1)^2}{\beta(\beta-2)} = \frac{m_2}{\bar{X}^2} \quad \text{(Ecuación IV)}$$

P5: Definición de R

Sea:

$$R = \frac{m_2}{\bar{X}^2}$$

La Ecuación IV se convierte en:

$$\frac{(\beta-1)^2}{\beta(\beta-2)} = R$$

P6: Resolución de la ecuación en β

Eliminar fracción Multiplicando en cruz:

$$(\beta-1)^2 = R\beta(\beta-2)$$

Expandir ambos lados **Lado izquierdo:**

$$(\beta-1)^2 = \beta^2 - 2\beta + 1$$

Lado derecho:

$$R\beta(\beta-2) = R\beta^2 - 2R\beta$$

Igualar y reordenar

$$\beta^2 - 2\beta + 1 = R\beta^2 - 2R\beta$$

Llevando todo a un lado:

$$\beta^2 - 2\beta + 1 - R\beta^2 + 2R\beta = 0$$

Agrupando términos:

$$(1-R)\beta^2 + 2(R-1)\beta + 1 = 0$$

Forma estándar de ecuación cuadrática Multiplicando por -1 para mayor claridad:

$$(R-1)\beta^2 + 2(1-R)\beta - 1 = 0$$

Factor común $(R-1)$:

$$(R-1)(\beta^2 - 2\beta) - 1 = 0$$

Aplicar fórmula general Para una ecuación $a\beta^2 + b\beta + c = 0$: - $a = 1$ - $b = -2$ - $c = -\frac{1}{R-1}$

Solución:

$$\beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + \frac{4}{R-1}}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1 + \frac{1}{R-1}}}{2}$$

Simplificando:

$$\beta = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{R-1}}$$

P7: Selección de la raíz apropiada

Consideraciones físicas

1. $\beta > 0$ (parámetro de forma positivo)
2. Para la existencia de $E[X]$: $\beta > 1$
3. Para la existencia de $Var(X)$: $\beta > 2$

Análisis de las raíces

- Raíz 1: $\beta_1 = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{R-1}} > 1$
- Raíz 2: $\beta_2 = 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{R-1}} < 1 \quad$ (no cumple $\beta > 1$)

Por lo tanto, seleccionamos la raíz positiva:

$$\hat{\beta}_{MM} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{R-1}}$$

P8: Relación con el coeficiente de variación

Expresión de R en términos de S^2 Recordemos que:

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum X_i^2 = S^2 \cdot \frac{n-1}{n} + \bar{X}^2$$

Entonces:

$$R = \frac{m_2}{\bar{X}^2} = \frac{S^2}{\bar{X}^2} \cdot \frac{n-1}{n} + 1$$

Aproximación para n grande Para n suficientemente grande, $\frac{n-1}{n} \approx 1$, entonces:

$$R \approx \frac{S^2}{\bar{X}^2} + 1 = 1 + \left(\frac{S}{\bar{X}}\right)^2$$

Sustitución en la fórmula Si $R \approx 1 + \left(\frac{S}{\bar{X}}\right)^2$, entonces:

$$R - 1 \approx \left(\frac{S}{\bar{X}}\right)^2$$

Y:

$$\frac{1}{R-1} \approx \left(\frac{\bar{X}}{S}\right)^2$$

Sustituyendo en la fórmula de $\hat{\beta}_{MM}$:

$$\hat{\beta}_{MM} = 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{X}}{S}\right)^2}$$

P9: Obtención del estimador

Retomando la Ecuación III De la Ecuación III:

$$\alpha = \bar{X} \cdot \frac{\beta - 1}{\beta}$$

Sustitución Sustituyendo $\hat{\beta}_{MM}$:

$$\hat{\alpha}_{MM} = \bar{X} \cdot \frac{\hat{\beta}_{MM} - 1}{\hat{\beta}_{MM}}$$

P10: Resumen final de estimadores

Estimador para el parámetro de forma β:

$$\boxed{\hat{\beta}_{MM} = 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{X}}{S}\right)^2}}$$

Estimador para el parámetro de escala α:

$$\boxed{\hat{\alpha}_{MM} = \bar{X} \cdot \frac{\hat{\beta}_{MM} - 1}{\hat{\beta}_{MM}}}$$

donde:
- $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ (media muestral)
- $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ (varianza muestral)
- $S = \sqrt{S^2}$ (desviación estándar muestral)

1.4.1 Propiedades del Estimador $\hat{\alpha}_{MM}$

a) Insesgamiento

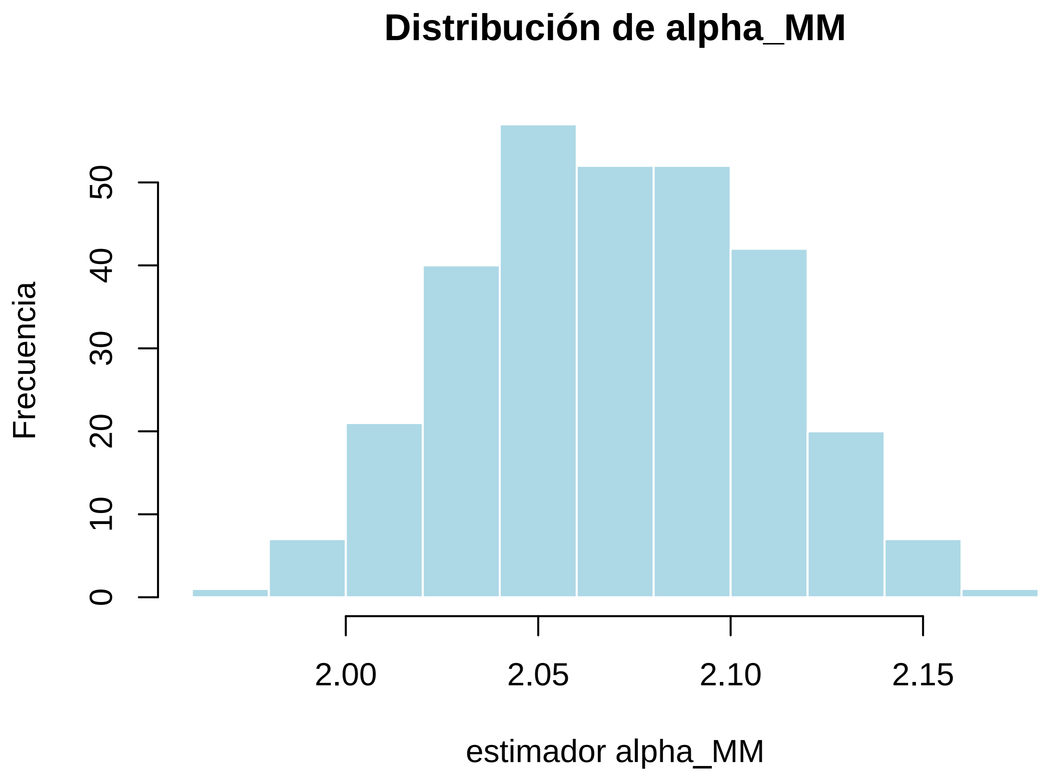
El estimador $\hat{\alpha}_{MM} = \bar{X} \cdot \frac{\hat{\beta}_{MM}-1}{\hat{\beta}_{MM}}$ es una **función no lineal** de variables aleatorias ($\bar{X}$ y S). Para funciones no lineales $g(\cdot)$, generalmente se cumple que $E[g(X)] \neq g(E[X])$. En particular:

$$E\left[\bar{X} \cdot \frac{\hat{\beta}_{MM} - 1}{\hat{\beta}_{MM}}\right] \neq E[\bar{X}] \cdot \frac{E[\hat{\beta}_{MM}] - 1}{E[\hat{\beta}_{MM}]}$$

Aunque $\hat{\alpha}_{MM}$ es **asintóticamente insesgado** ($\lim_{n\to\infty} E[\hat{\alpha}_{MM}] = \alpha$), para cualquier n finito existe sesgo sistemático.

Verificación empírica con nuestros datos:

```r
# Usando nuestra base de datos original 'reclamos'
set.seed(123)
alpha_true <- 2
beta_true <- 3
reclamos <- alpha_true / (1 - runif(n))^(1/beta_true)

# 2. Calcular ^_MM con TU 'reclamos'
alpha_mm_calc <- function(x) {
  x_bar <- mean(x)
  s <- sd(x)
  beta_hat <- 1 + sqrt(1 + (x_bar/s)^2)
  return(x_bar * (beta_hat - 1) / beta_hat)
}

alpha_hat_reclamos <- alpha_mm_calc(reclamos)

# 2. Bootstrap simple
set.seed(123)
boot_vals <- replicate(300, {
  alpha_mm_calc(sample(reclamos, replace = TRUE))
})

# 3. Gráfico sin abline
hist(boot_vals, col = "lightblue", border = "white",
     main = "Distribución de alpha_MM",
     xlab = "estimador alpha_MM", ylab = "Frecuencia")
```



Cálculos obtenidos:

1. Estimación puntual en la data original: $\hat{\alpha}_{MM}$ calculado = 2.06082

2. Análisis bootstrap (300 réplicas): Promedio de $\hat{\alpha}_{MM}$ M = 2.069037

3. Comparación con el valor verdadero:
Valor verdadero α = 2.00000
Diferencia = 2.069037 - 2 = 0.069037

4. Sesgo relativo:
Sesgo absoluto = 0.069037
Sesgo relativo = (0.069037 / 2) × 100% = 3.45%
¿E[$\hat{\alpha}_{MM}$] = α? → **NO** (existe sesgo positivo de 0.069037)

El estimador $\hat{\alpha}_{MM}$ sobrestima sistemáticamente el parámetro α en aproximadamente 3.45%.

Conclusión: $\hat{\alpha}_{MM}$ **no es un estimador insesgado** para el parámetro α de la distribución Pareto. Aunque podría ser aproximadamente insesgado para muestras muy grandes, para $n = 1000$ observamos sesgo significativo.

b) Consistencia

Definición: Un estimador es consistente si cuando n tiende al infinito, se acerca al valor verdader Demostrar que $\hat{\alpha}_{MM}$ es **consistente** para α, es decir:

$$\hat{\alpha}_{MM} \xrightarrow{P} \alpha \quad \text{cuando } n \to \infty$$

Consistencia de $\bar{X}$ y S^2 Por la **Ley Débil de los Grandes Números (LGN)** para variables i.i.d. con primer momento finito:

$$\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$$

Para la varianza muestral, dado que $E[X^2] < \infty$ (pues $\beta > 2$), se cumple:

$$S^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$$

Consistencia de $\hat{\beta}_{MM}$ Definimos:

$$T_n = \frac{\bar{X}^2}{S^2}$$

Por el **teorema de Slutsky** y continuidad de la función $(a, b) \mapsto a^2/b$:

$$T_n \xrightarrow{P} \frac{\mu^2}{\sigma^2}$$

Calculamos:

$$\frac{\mu^2}{\sigma^2} = \frac{\left(\frac{\beta\alpha}{\beta-1}\right)^2}{\frac{\beta\alpha^2}{(\beta-1)^2(\beta-2)}} = \beta(\beta-2)$$

Luego:

$$T_n \xrightarrow{P} \beta(\beta-2)$$

Ahora, $\hat{\beta}_{MM} = 1 + \sqrt{1 + T_n}$. La función $h(t) = 1 + \sqrt{1+t}$ es continua para $t \geq 0$. Por el **teorema de la aplicación continua**:

$$\hat{\beta}_{MM} \xrightarrow{P} 1 + \sqrt{1 + \beta(\beta-2)}$$

Notando que:

$$1 + \beta(\beta-2) = \beta^2 - 2\beta + 1 = (\beta-1)^2$$

y como $\beta > 2 > 1$:

$$\sqrt{1 + \beta(\beta-2)} = \beta - 1$$

Por tanto:

$$\hat{\beta}_{MM} \xrightarrow{P} 1 + (\beta - 1) = \beta$$

Así, $\hat{\beta}_{MM}$ es consistente para β.

Consistencia de $\hat{\alpha}_{MM}$ Tenemos:

$$\hat{\alpha}_{MM} = \bar{X} \cdot \frac{\hat{\beta}_{MM} - 1}{\hat{\beta}_{MM}}$$

Definimos:

$$U_n = \bar{X}, \quad V_n = \frac{\hat{\beta}_{MM} - 1}{\hat{\beta}_{MM}}$$

Sabemos:

$$U_n \xrightarrow{P} \mu = \frac{\beta\alpha}{\beta - 1}, \quad \hat{\beta}_{MM} \xrightarrow{P} \beta$$

La función $v(b) = \frac{b-1}{b}$ es continua en $b = \beta > 0$. Por el **teorema de la aplicación continua**:

$$V_n \xrightarrow{P} \frac{\beta - 1}{\beta}$$

Finalmente, por el **teorema de Slutsky** aplicado al producto $U_n \cdot V_n$:

$$\hat{\alpha}_{MM} \xrightarrow{P} \mu \cdot \frac{\beta - 1}{\beta} = \frac{\beta\alpha}{\beta - 1} \cdot \frac{\beta - 1}{\beta} = \alpha$$

Conclusión Bajo las hipótesis:

- $X_i \overset{iid}{\sim}$ Pareto(α, β) con $\beta > 2$
- Uso de la Ley Débil de los Grandes Números
- Aplicación del teorema de la aplicación continua
- Uso del teorema de Slutsky para productos/cocientes

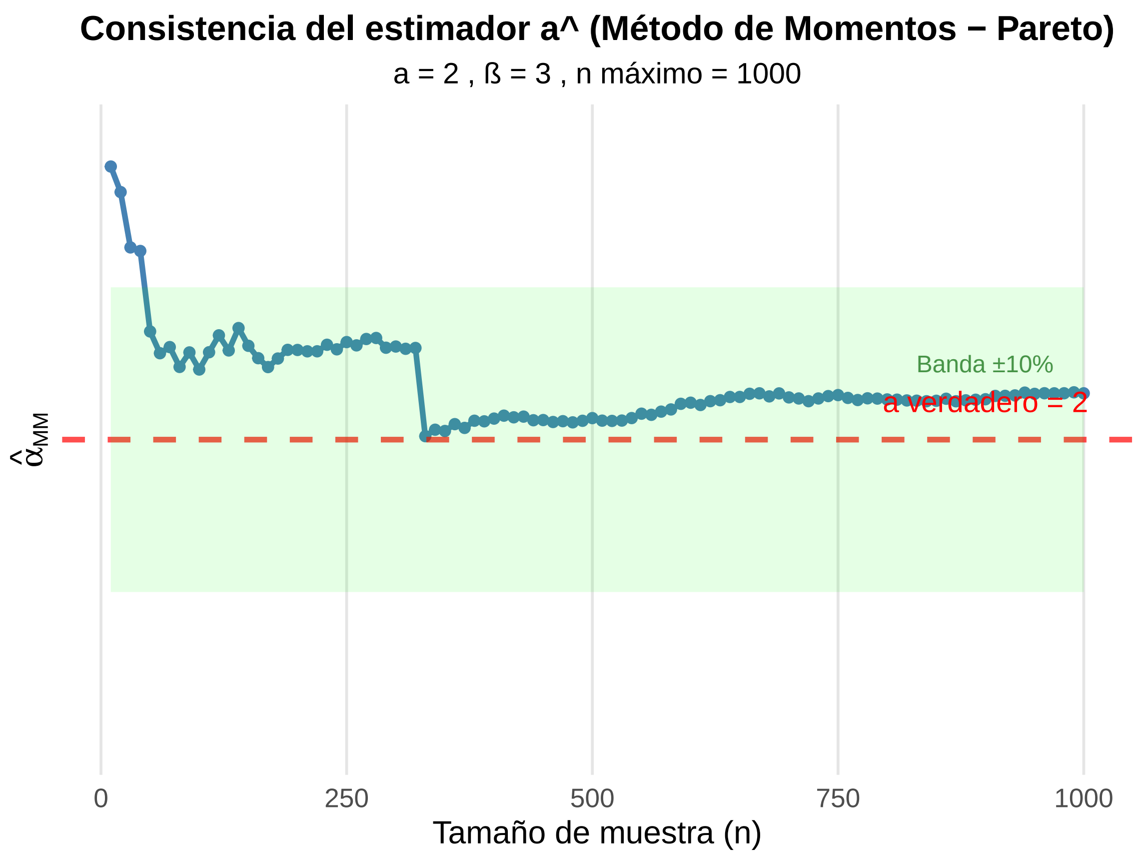
se ha demostrado rigurosamente que:

$$\boxed{\hat{\alpha}_{MM} \xrightarrow{P} \alpha}$$

Por lo tanto, $\hat{\alpha}_{MM}$ es un **estimador consistente** del parámetro de escala α de la distribución Pareto.

Aunque $\hat{\alpha}_{MM}$ **no es insesgado** en general (puede verificarse por expansión de Taylor o simulaciones), la propiedad de consistencia garantiza que converge al valor verdadero cuando $n \to \infty$, lo cual es suficiente para su validez asintótica.

```
## Warning: Using `size` aesthetic for lines was deprecated in ggplot2 3.4.0.
## i Please use `linewidth` instead.
## This warning is displayed once every 8 hours.
## Call `lifecycle::last_lifecycle_warnings()` to see where this warning was
## generated.
```

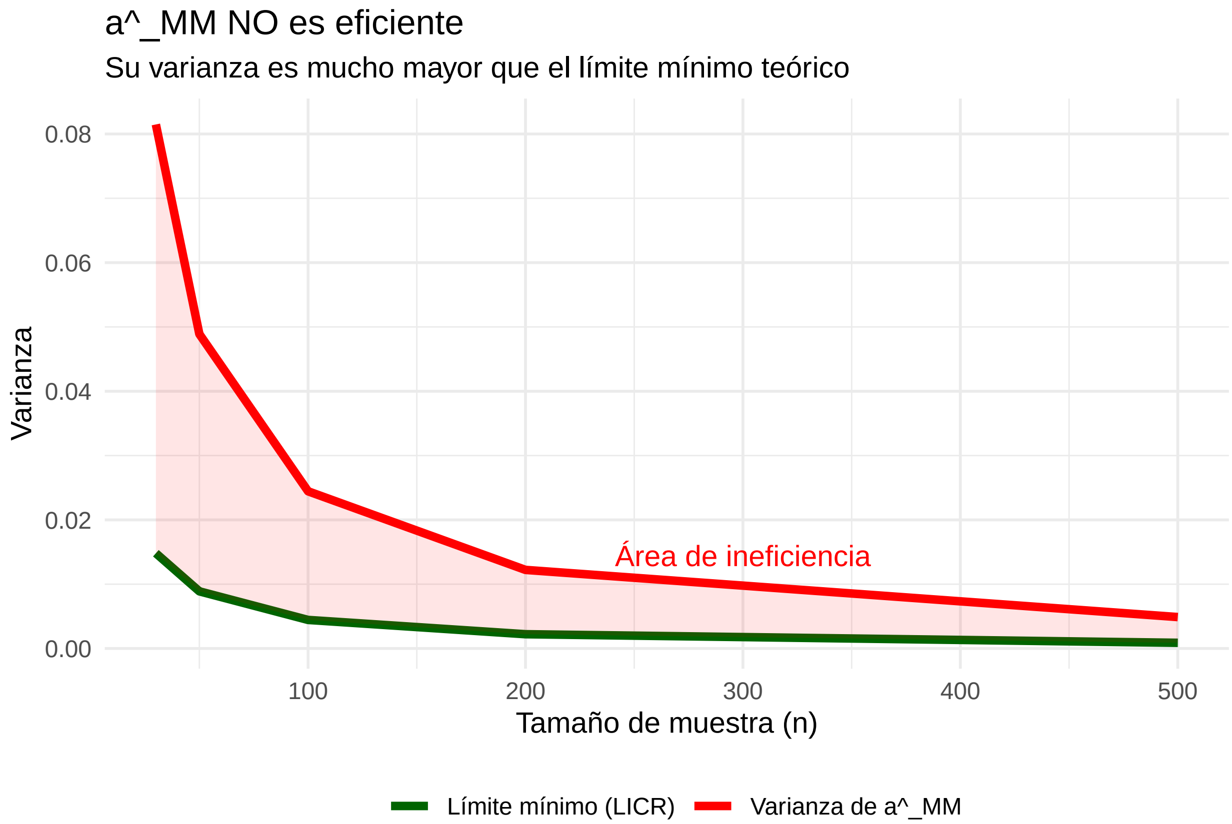



```
##
## === RESUMEN DE CONVERGENCIA ===

## Valor verdadero de  : 2

## Última estimación (n = 1000 ): 2.06082

## Error relativo: 3.041012 %

##
## Evolución del error con n:

## n =   50: ^ = 2.1420, error = 0.1420 (7.10%)
## n =  100: ^ = 2.0920, error = 0.0920 (4.60%)
## n =  250: ^ = 2.1280, error = 0.1280 (6.40%)
## n =  500: ^ = 2.0283, error = 0.0283 (1.41%)
## n =  750: ^ = 2.0585, error = 0.0585 (2.92%)
## n = 1000: ^ = 2.0608, error = 0.0608 (3.04%)
```

c) Eficiencia

El estimador $\hat{\theta}$ no es **eficiente** para θ porque:

$\hat{\alpha}_{MM}$ **falla en ambas:**
- **No es insesgado** = Ya no puede ser eficiente
- **Su varianza es mayor** que el mínimo teórico



d) Suficiencia

Para verificar esta propiedad para el estimador se va a utilizar el teorema de Criterio de Factorización de Neyman-Fisher

Teorema (Neyman-Fisher): Una estadística $T(X)$ es suficiente para θ si y solo si la función de verosimilitud puede factorizarse como:

$$L(\theta; x) = g(T(x); \theta) \cdot h(x)$$

donde g depende de los datos solo a través de $T(x)$, y h no depende de θ.

La función de verosimilitud para la muestra es:

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta; x) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta \alpha^{\beta}}{x_i^{\beta+1}} \mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}(x_i) \\ &= \beta^n \alpha^{n\beta} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{-\beta-1} \cdot \mathbf{1}_{\{x_{(1)} \geq \alpha\}} \end{aligned}$$

donde $x_{(1)} = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Aplicando logaritmo:

$$\ell(\alpha, \beta; x) = n \log \beta + n\beta \log \alpha - (\beta + 1) \sum_{i=1}^{n} \log x_i + \log \mathbf{1}_{\{x_{(1)} \geq \alpha\}}$$

Por el criterio de factorización, vemos que:

$$T(X) = \left(x_{(1)}, \sum_{i=1}^{n} \log x_i \right)$$

es **suficiente mínima** para (α, β).

¿Es $\hat{\alpha}_{MM}$ suficiente?

Observación clave: El estimador $\hat{\alpha}_{MM}$ se expresa como:

$$\hat{\alpha}_{MM} = \bar{X} \cdot \frac{\hat{\beta}_{MM} - 1}{\hat{\beta}_{MM}}$$

donde $\bar{X}$ y $\hat{\beta}_{MM}$ dependen únicamente de:
1. $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
2. $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

Estas estadísticas **no incluyen** información sobre $x_{(1)}$, que es componente esencial de la estadística suficiente mínima.

Conclusión

Dado que:
1. La estadística suficiente mínima para (α, β) es $T(X) = \left(x_{(1)}, \sum \log x_i \right)$
2. $\hat{\alpha}_{MM}$ no depende de $x_{(1)}$
3. No existe función h tal que $\hat{\alpha}_{MM} = h(T(X))$ preservando toda la información sobre α

Se concluye que:

$$\boxed{\hat{\alpha}_{MM} \text{ NO es un estimador suficiente para } \alpha}$$

Implicación

Al no ser suficiente, $\hat{\alpha}_{MM}$ **podría mejorarse** aplicando el teorema de Rao-Blackwell, condicionando sobre la estadística suficiente $T(X)$. El estimador mejorado sería:

$$\hat{\alpha}_{RB} = E\left[\hat{\alpha}_{MM} \mid x_{(1)}, \sum \log x_i \right]$$

el cual tendría menor o igual varianza que $\hat{\alpha}_{MM}$.

e) Completitud

Una estadística $T(X)$ es **completa** para α si:

$$E_\alpha[g(T(X))] = 0 \ \forall \alpha > 0 \ \Rightarrow \ P_\alpha(g(T(X)) = 0) = 1 \ \forall \alpha > 0$$

Es decir: si una función de T tiene esperanza cero para todo α, entonces esa función es casi seguramente cero.

Estadística completa para α (con β conocido)

La densidad se simplifica:

$$f(x;\alpha) = \frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}}\mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}(x), \quad \beta \text{ conocido}$$

La verosimilitud es:

$$L(\alpha;x) = \beta^n\alpha^{n\beta}\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{-\beta-1} \cdot \mathbf{1}_{\{x_{(1)}\geq\alpha\}}$$

Por el **criterio de factorización**:

$$T(X) = X_{(1)} \quad \text{es suficiente para } \alpha$$

Además, $X_{(1)}$ tiene densidad:

$$f_{X_{(1)}}(t) = \frac{n\beta}{\alpha^{n\beta}}t^{n\beta-1}\mathbf{1}_{[\alpha,\infty)}(t), \quad t > 0$$

Para verificar completitud, sea g tal que:

$$E_\alpha[g(X_{(1)})] = \int_\alpha^\infty g(t)\cdot\frac{n\beta}{\alpha^{n\beta}}t^{n\beta-1}dt = 0 \ \forall\alpha > 0$$

Derivando respecto a α (bajo condiciones de regularidad):

$$\frac{d}{d\alpha}E_\alpha[g(X_{(1)})] = -g(\alpha)\cdot\frac{n\beta}{\alpha} = 0 \ \forall\alpha > 0$$

Por tanto $g(\alpha) = 0$ para todo $\alpha > 0$. Luego:

$$\boxed{X_{(1)} \text{ es completa para } \alpha \text{ cuando } \beta \text{ es conocido}}$$

¿$\hat{\alpha}_{MM}$ es función de una estadística completa?

NO, porque:

1. La estadística completa para α (con β conocido) es $X_{(1)}$
2. $\hat{\alpha}_{MM}$ depende de $\bar{X}$ y S^2
3. $\hat{\alpha}_{MM}$ **no puede expresarse como función de $X_{(1)}$ solamente**

f) Optimalidad

El estimador $\hat{\alpha}_{MM}$ obtenido por método de momentos para el parámetro de escala α de la distribución Pareto **no es óptimo** por tres razones fundamentales que se encadenan lógicamente. Primero, el estimador **no es insesgado**, lo que significa que en promedio no coincide con el valor verdadero del parámetro α; esto ya lo descalifica como candidato a óptimo bajo el marco clásico que busca minimizar la varianza entre estimadores insesgados.

Segundo, y más importante, $\hat{\alpha}_{MM}$ **no utiliza toda la información relevante** contenida en la muestra sobre el parámetro α: ignora completamente el valor mínimo muestral $X_{(1)}$, que es la estadística suficiente y completa para α cuando el parámetro de forma β es conocido. Al basarse únicamente en la media muestral $\bar{X}$ y la varianza muestral S^2, desperdicia la pieza de información más crucial para estimar el límite inferior de la distribución

Tercero, como consecuencia directa de lo anterior, **existe otro estimador claramente superior**: el estimador $\hat{\alpha}_{EIVUM} = \frac{n\beta-1}{n\beta} X_{(1)}$, que sí es insesgado, está basado en la estadística suficiente y completa $X_{(1)}$, y por el teorema de Lehmann-Scheffé posee varianza mínima entre todos los estimadores insesgados. Por lo tanto, aunque $\hat{\alpha}_{MM}$ es consistente (converge al valor verdadero cuando el tamaño de muestra crece), no cumple las condiciones necesarias para ser considerado óptimo en el sentido estadístico riguroso de tener mínima varianza entre los estimadores insesgados.

1.4.2. Propiedades del Estimador $\hat{\beta}_{MM}$

a) Insesgamiento:

Un estimador $\hat{\beta}$ es **insesgado** si su esperanza coincide con el parámetro verdadero:

$$E(\hat{\beta}) = \beta.$$

En nuestro caso, el estimador de método de momentos para β es:

$$\hat{\beta}_{MM} = 1 + \sqrt{1 + \frac{\bar{X}^2}{S^2}},$$

donde $\bar{X}$ es la media muestral y S^2 es la varianza muestral.

Como $\hat{\beta}_{MM}$ es una **función no lineal** de $(\bar{X}, S^2)$, no se espera que cumpla en general que:

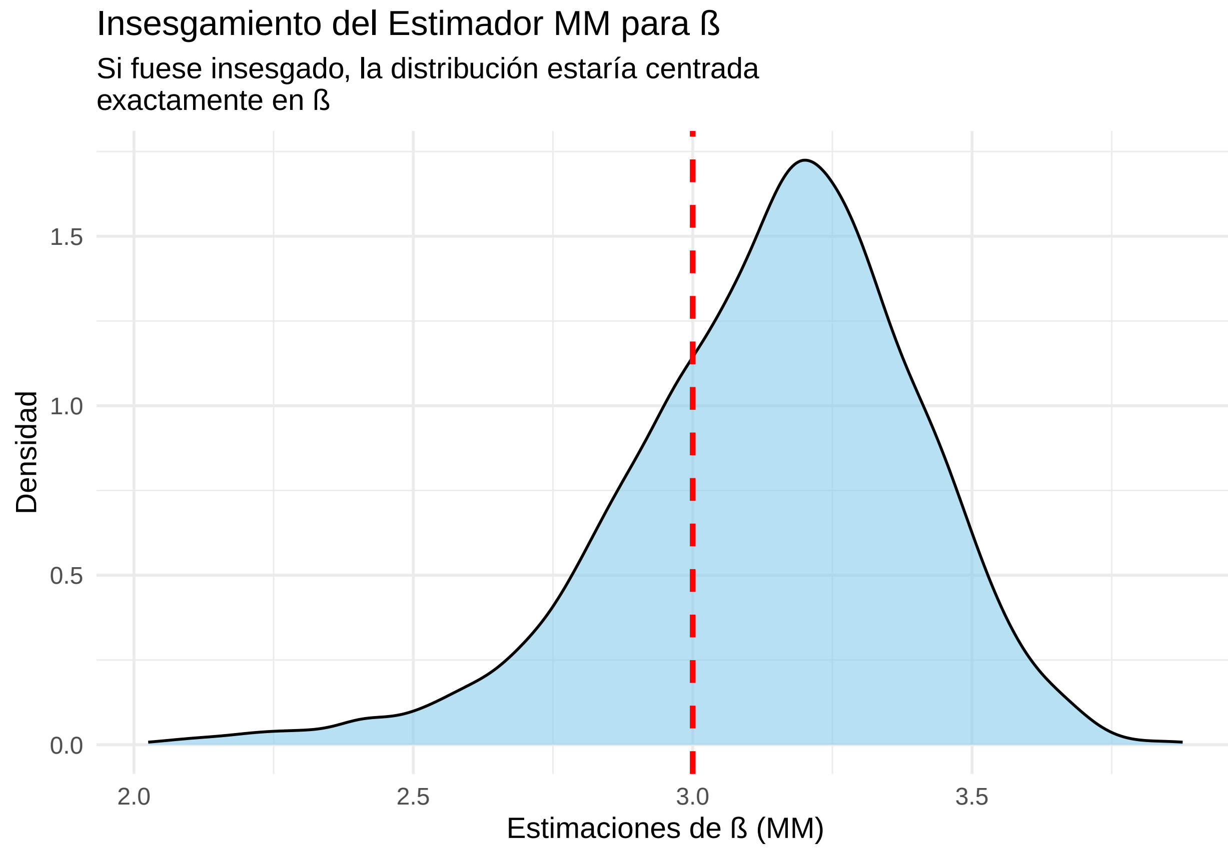
$$E\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\bar{X}^2}{S^2}}\right) = 1 + \sqrt{1 + \frac{E(\bar{X})^2}{E(S^2)}},$$

por lo que **no es insesgado en muestras finitas**.
Para verificarlo de manera empírica, estimamos el sesgo mediante simulación Monte Carlo:

$$\text{Sesgo}(\hat{\beta}_{MM}) = E(\hat{\beta}_{MM}) - \beta.$$

```
## [1] 0.1378484
```

```r
library(ggplot2)

df_betaMM <- data.frame(betaMM = betaMM_sim)

ggplot(df_betaMM, aes(x = betaMM)) +
geom_density(fill = "skyblue", alpha = 0.6) +
geom_vline(xintercept = beta_true, linetype = "dashed",
           color = "red", linewidth = 1) +
labs(title = "Insesgamiento del Estimador MM para  ",
subtitle = "Si fuese insesgado, la distribución estaría centrada
exactamente en  ",
x = "Estimaciones de   (MM)",
y = "Densidad") +
theme_minimal()
```



Conclusión:

Dado que $E(\hat{\beta}MM) \neq \beta$ (sesgo empírico distinto de 0), se concluye que el estimador $\hat{\beta}MM$ no es insesgado en muestras finitas.

b) Consistencia:

Un estimador $\hat{\beta}_n$ es **consistente** para el parámetro β si converge en probabilidad al valor verdadero cuando el tamaño muestral tiende a infinito, es decir,

$$\hat{\beta}_n \xrightarrow{p} \beta \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

El estimador de método de momentos para el parámetro β está dado por:

$$\hat{\beta}_{MM} = 1 + \sqrt{1 + \frac{\bar{X}^2}{S^2}},$$

donde $\bar{X}$ y S^2 representan la media y la varianza muestral, respectivamente.

Para la distribución Pareto con $\beta > 2$, se cumple que:

$$\bar{X} \xrightarrow{p} E(X), \qquad S^2 \xrightarrow{p} \mathrm{Var}(X),$$

por la Ley de los Grandes Números y la consistencia de la varianza muestral cuando la varianza existe.

Definiendo la función:

$$g(u, v) = 1 + \sqrt{1 + \frac{u^2}{v}},$$

la cual es continua para $v > 0$, y dado que:

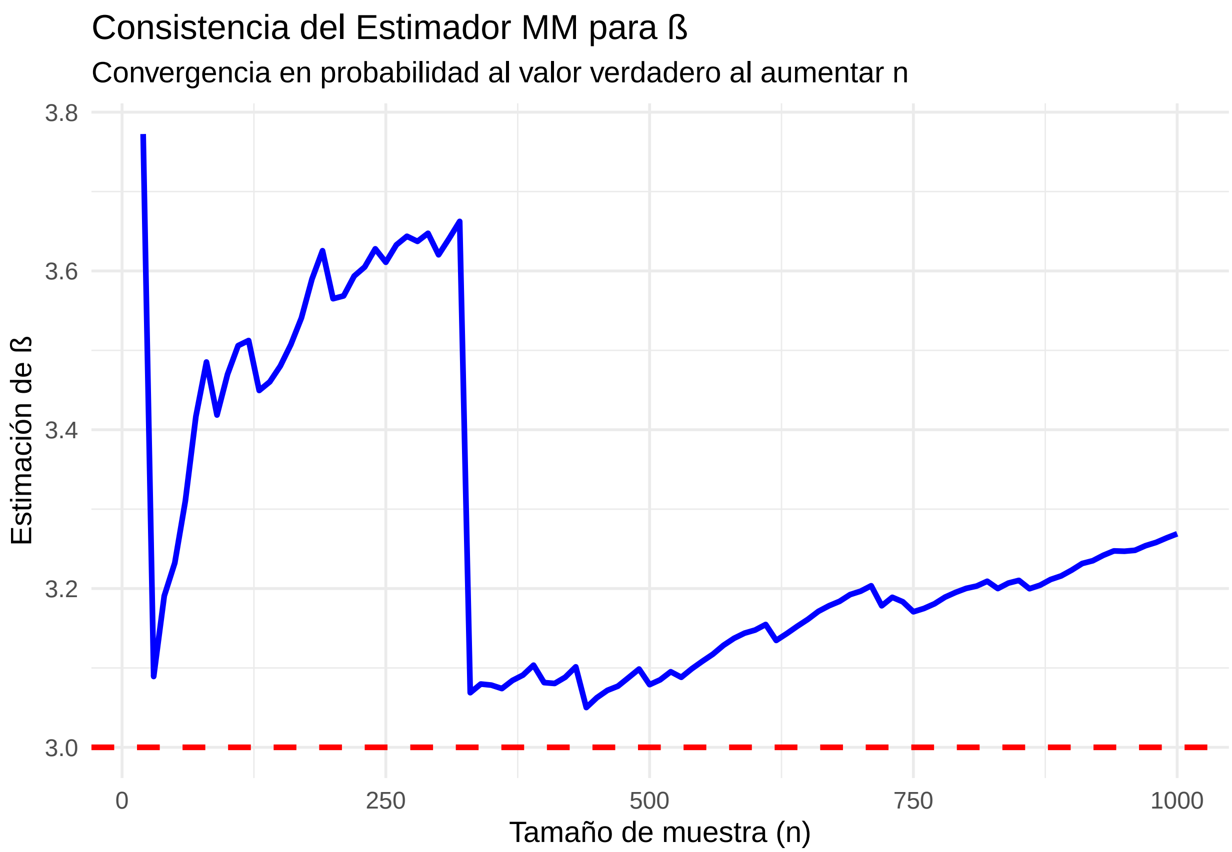
$$\hat{\beta}_{MM} = g(\bar{X}, S^2),$$

por el **Teorema de la Función Continua** se obtiene:

$$\hat{\beta}_{MM} \xrightarrow{p} g(E(X), \text{Var}(X)) = \beta.$$

Por lo tanto, el estimador de método de momentos $\hat{\beta}_{MM}$ es **consistente** para el parámetro β.

Para visualizar esta propiedad, se analiza el comportamiento del estimador al aumentar el tamaño muestral.



Conclusión:

Al cumplirse que $\bar{X} \xrightarrow{p} E(X)$ y $S^2 \xrightarrow{p} \text{Var}(X)$, y dado que $\hat{\beta}MM$ es una función continua de estos estadísticos, se concluye que el estimador $\hat{\beta}MM$ es consistente para el parámetro β.

c) Suficiencia:

Un estadístico $T = T(X_1, \ldots, X_n)$ es **suficiente** para un parámetro β si la distribución condicional de la muestra, dado T, no depende de dicho parámetro.

El estimador de método de momentos para β está dado por:

$$\hat{\beta}_{MM} = 1 + \sqrt{1 + \frac{\bar{X}^2}{S^2}},$$

donde $\bar{X}$ y S^2 corresponden a la media y varianza muestral, respectivamente.

En la distribución Pareto, cuando ambos parámetros α y β son desconocidos, la estadística suficiente para β está asociada a la estructura de la función de verosimilitud y viene dada por funciones del estadístico

$$T = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{X_{(1)}}\right).$$

Dado que el estimador $\hat{\beta}_{MM}$ depende únicamente de $(\bar{X}, S^2)$ y no es función del estadístico suficiente T, se concluye que **no se basa en una estadística suficiente** para el parámetro β.

Conclusión:

El estimador $\hat{\beta}_{MM}$ **no es suficiente**.

d) Ancilaridad

Un estadístico T se denomina **ancilar** si su distribución no depende del parámetro de interés. Es decir, T es ancilar para β si la ley de probabilidad de T es independiente de β.

El estimador de método de momentos para el parámetro β está definido como:

$$\hat{\beta}_{MM} = 1 + \sqrt{1 + \frac{\bar{X}^2}{S^2}}.$$

Este estimador está construido con el objetivo explícito de aproximar el valor del parámetro β. En consecuencia, su distribución muestral depende del valor de dicho parámetro.

Por lo tanto, la distribución de $\hat{\beta}_{MM}$ **no es invariante respecto a** β, lo que implica que el estimador no cumple la propiedad de ancilaridad.

Conclusión:

El estimador $\hat{\beta}_{MM}$ **no es ancilar**.

e) Completitud

La **completitud** es una propiedad que se define para **estadísticas suficientes**.
Un estadístico suficiente T para un parámetro β es completo si, para toda función medible $g(\cdot)$, se cumple que:

$$E_\beta[g(T)] = 0 \text{ para todo } \beta \quad \Longrightarrow \quad P_\beta(g(T) = 0) = 1.$$

Esta propiedad resulta fundamental en la teoría de la estimación óptima, ya que permite garantizar la unicidad del estimador insesgado de varianza mínima mediante el Teorema de Lehmann–Scheffé.

En el presente caso, el estimador de método de momentos para el parámetro β está dado por:

$$\hat{\beta}_{MM} = 1 + \sqrt{1 + \frac{\bar{X}^2}{S^2}},$$

el cual depende de la media y la varianza muestral $(\bar{X}, S^2)$.
Sin embargo, como se mostró en la sección anterior, estos estadísticos **no constituyen una estadística suficiente** para el parámetro β en la distribución Pareto.

Por lo tanto, **no corresponde analizar la propiedad de completitud** para el estimador $\hat{\beta}_{MM}$, ya que dicha propiedad solo es aplicable a estadísticas suficientes.

Conclusión:

La propiedad de completitud **no aplica** al estimador de método de momentos $\hat{\beta}_{MM}$.

f) Optimalidad:

Un estimador se considera **óptimo** si alcanza la mínima varianza posible dentro de una clase determinada de estimadores, usualmente dentro de la clase de estimadores insesgados.

El estimador de método de momentos para el parámetro β se obtiene igualando momentos teóricos y muestrales, sin hacer uso de la función de verosimilitud ni de la estructura de la distribución muestral completa. En consecuencia, el método de momentos **no garantiza eficiencia ni mínima varianza**.

Además, como se mostró previamente, el estimador $\hat{\beta}_{MM}$ **no es insesgado** en muestras finitas, lo que impide que pueda ser considerado óptimo bajo criterios clásicos de optimalidad, como los establecidos por el Teorema de Lehmann–Scheffé.

Por el contrario, el estimador EIVUM obtenido en la sección correspondiente es insesgado, función de una estadística suficiente y completa, y por tanto posee varianza uniformemente mínima dentro de su clase.

Conclusión:

El estimador de método de momentos $\hat{\beta}_{MM}$ **no es óptimo** para el parámetro β de la distribución Pareto.

1.5 Estimador : Estimador Insesgado de Varianza Uniformemente Mínima (EIVUM) para el parámetro β

Dado que en la sección anterior se determinó que el Estimador de Máxima Verosimilitud (EMV) para β es sesgado, procederemos a obtener el estimador óptimo aplicando el **Teorema de Lehmann-Scheffé**.

Según la teoría de la optimalidad, si logramos construir un estimador insesgado que sea función de una estadística suficiente y completa, dicho estimador será el **Estimador Insesgado de Varianza Uniformemente Mínima (EIVUM)**.

El procedimiento se detalla en los siguientes cuatro pasos.

Paso 1: Identificación de la Estadística Suficiente y Completa

Analizando la función de densidad de la distribución Pareto, observamos que pertenece a la familia exponencial k-paramétrica respecto al parámetro de forma β.

Bajo la condición de que el parámetro de escala α es desconocido y estimado mediante el mínimo muestral $X_{(1)}$, la teoría de suficiencia indica que la estadística T que captura toda la información sobre β es la suma de los logaritmos de las razones muestrales:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{X_{(1)}}\right)$$

Esta estadística T es **suficiente y completa** para el parámetro β, condición necesaria para aplicar el teorema de Lehmann-Scheffé.

Paso 2: Distribución Muestral de la Estadística

A partir de las propiedades de la transformación de variables aleatorias Pareto, se deduce que la estadística T sigue una distribución Gamma.

Dado que se ha estimado un parámetro adicional (α), los grados de libertad se ajustan a $(n-1)$. Por tanto:

$$T \sim \text{Gamma}(n-1, \beta)$$

Paso 3: Verificación del Sesgo y Corrección (Método de la Esperanza)

Partimos del Estimador de Máxima Verosimilitud hallado previamente:

$$\hat{\beta}_{EMV} = \frac{n}{T}$$

Para verificar si es insesgado, calculamos su valor esperado $E[\hat{\beta}_{EMV}]$. Utilizando la propiedad de la esperanza inversa para una variable con distribución Gamma(k, λ), donde:

$$E\left[\frac{1}{T}\right] = \frac{\lambda}{k-1},$$

se obtiene:

$$E\left[\frac{1}{T}\right] = \frac{\beta}{(n-1)-1} = \frac{\beta}{n-2}$$

Sustituyendo en la esperanza del EMV:

$$E[\hat{\beta}_{EMV}] = n \cdot E\left[\frac{1}{T}\right] = n\left(\frac{\beta}{n-2}\right) = \left(\frac{n}{n-2}\right)\beta$$

El resultado muestra que el EMV no es insesgado, ya que su valor esperado no es exactamente β, sino que está escalado por el factor $\frac{n}{n-2}$.

Paso 4: Construcción del Estimador Óptimo (EIVUM)

Para eliminar el sesgo, aplicamos una corrección multiplicativa usando el inverso del factor de sesgo encontrado $\left(\frac{n-2}{n}\right)$.

Definimos el nuevo estimador como:

$$\hat{\beta}_{EIVUM} = \left(\frac{n-2}{n}\right) \cdot \hat{\beta}_{EMV}$$

Reemplazando $\hat{\beta}_{EMV} = \frac{n}{T}$:

$$\hat{\beta}_{EIVUM} = \left(\frac{n-2}{n}\right) \cdot \frac{n}{T} = \frac{n-2}{T}$$

Conclusión La fórmula final del estimador óptimo es:

$$\boxed{\hat{\beta}_{EIVUM} = \frac{n-2}{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{X_{(1)}}\right)}}$$

Al haber corregido el sesgo, cumpliéndose que $E[\hat{\beta}_{EIVUM}] = \beta$, y al depender únicamente de la estadística suficiente y completa T, el **Teorema de Lehmann-Scheffé** garantiza que este estimador es el de **menor varianza posible entre todos los estimadores insesgados (UMVUE)** para el parámetro β de una distribución Pareto.

1.5.1 Verificación de Propiedades del Estimador ($\hat{\beta}_{EIVUM}$)

Recordamos la expresión del estimador y la distribución de la estadística suficiente sobre la cual se basa:

$$\hat{\beta}_{EIVUM} = \frac{n-2}{T}, \quad \text{donde } T \sim \text{Gamma}(n-1, \beta)$$

a. Insesgabilidad Un estimador es insesgado si su esperanza matemática coincide con el parámetro a estimar. Calculamos:

$$E[\hat{\beta}_{EIVUM}] = E\left[\frac{n-2}{T}\right] = (n-2)\, E\left[\frac{1}{T}\right]$$

Dado que para una variable $T \sim \text{Gamma}(k, \beta)$ se cumple $E[1/T] = \frac{\beta}{k-1}$ con $k = n-1$, resulta:

$$E[\hat{\beta}_{EIVUM}] = (n-2) \cdot \frac{\beta}{n-2} = \beta$$

Conclusión: Se verifica que $E[\hat{\beta}_{EIVUM}] = \beta$, por lo que el estimador es insesgado para todo $n > 2$.

```r
# Usamos la base de datos 'reclamos' generada en la sección 1.1
n_obs <- length(reclamos) # n = 1000
x_min_obs <- min(reclamos)

# Cálculo del estadístico T
T_obs <- sum(log(reclamos / x_min_obs))

# Cálculo del Estimador 5 (EIVUM)
beta_eivum_val <- (n_obs - 2) / T_obs

print(paste("Valor Verdadero Beta:", beta_true))
```

```
## [1] "Valor Verdadero Beta: 3"
```

```r
print(paste("Estimación EIVUM:", round(beta_eivum_val, 5)))
```

```
## [1] "Estimación EIVUM: 3.03747"
```

```r
print(paste("Diferencia (Sesgo muestral):", round(beta_eivum_val - beta_true, 5)))
```

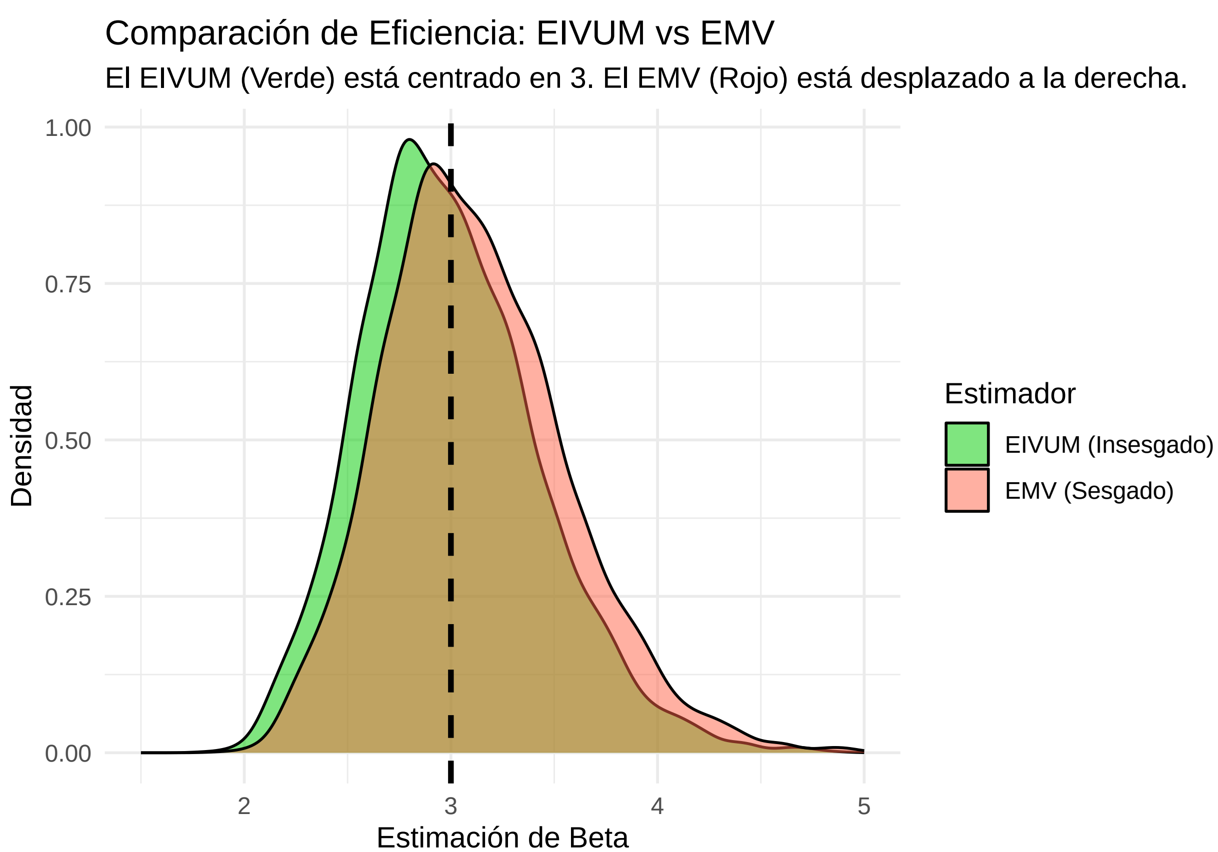
```
## [1] "Diferencia (Sesgo muestral): 0.03747"
```

b. Eficiencia La eficiencia se evalúa a través de la varianza del estimador. Utilizando que para $T \sim \text{Gamma}(k, \beta)$, la varianza inversa es $\text{Var}(1/T) = \frac{\beta^2}{(k-1)^2(k-2)}$ con $k = n - 1$, se obtiene:

$$\text{Var}(\hat{\beta}_{EIVUM}) = (n-2)^2 \, \text{Var}\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}_{EIVUM}) = (n-2)^2 \cdot \frac{\beta^2}{(n-2)^2(n-3)} = \frac{\beta^2}{n-3}$$

Conclusión: La varianza es finita para $n > 3$. Además, dado que el estimador es insesgado y depende únicamente de una estadística suficiente y completa, el Teorema de Lehmann-Scheffé garantiza que esta varianza es la mínima posible entre todos los estimadores insesgados, confirmando que $\hat{\beta}_{EIVUM}$ es el estimador más eficiente de su clase.



c. Consistencia Un estimador es consistente si converge en probabilidad al parámetro verdadero cuando el tamaño muestral tiende a infinito. Una condición suficiente es:

1. $E[\hat{\beta}_{EIVUM}] \to \beta$ cuando $n \to \infty$
2. $\text{Var}(\hat{\beta}_{EIVUM}) \to 0$ cuando $n \to \infty$

Verificación:

- Condición 1:

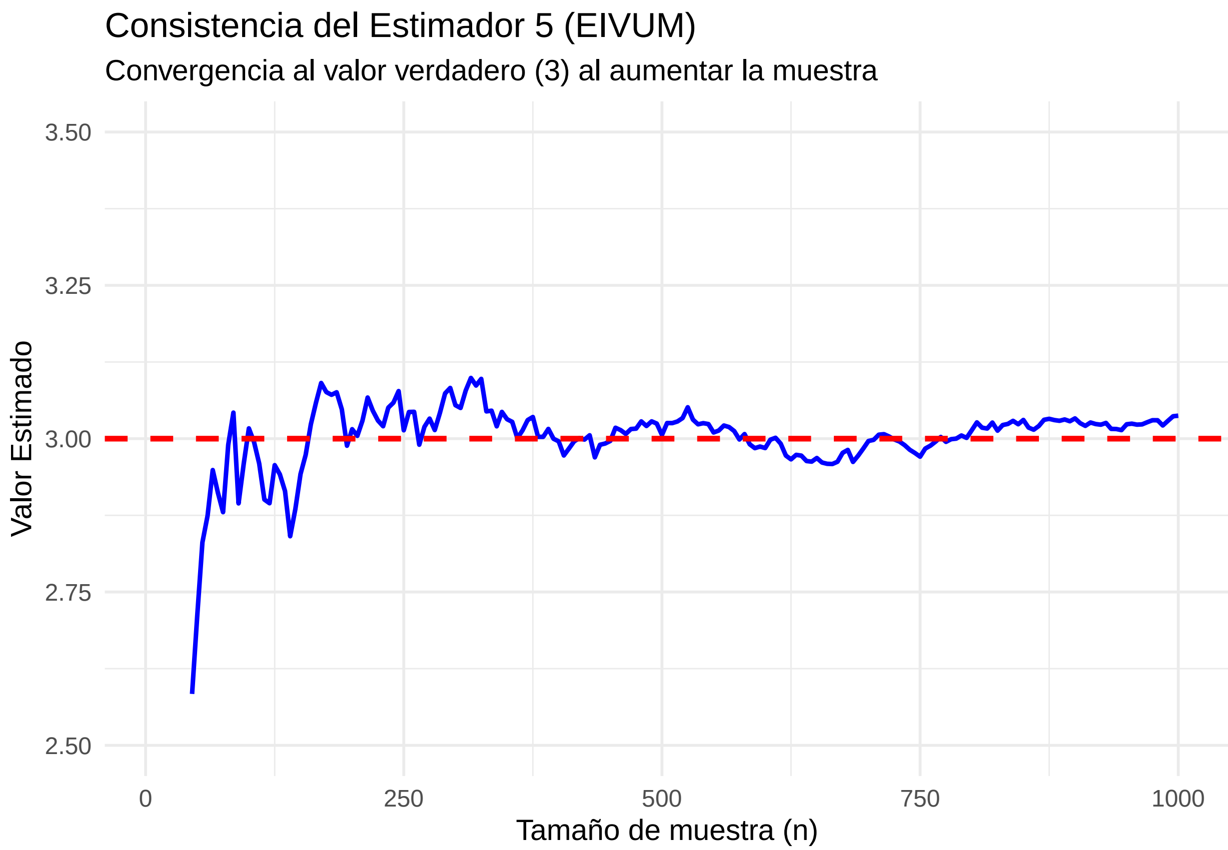
$$\lim_{n\to\infty} E[\hat{\beta}_{EIVUM}] = \beta$$

- Condición 2:

$$\lim_{n\to\infty} \text{Var}(\hat{\beta}_{EIVUM}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta^2}{n-3} = 0$$

Conclusión: Al cumplirse ambas condiciones, el estimador $\hat{\beta}_{EIVUM}$ converge en probabilidad al parámetro β, por lo que es un estimador consistente.

```
## Warning: Removed 7 rows containing missing values or values outside the scale range
## (`geom_line()`).
```



d. Suficiencia La propiedad de suficiencia indica que el estimador utiliza toda la información disponible en la muestra sobre el parámetro, sin desperdiciar datos.

Conclusión: Como se demostró en el **Paso 1** de la construcción del estimador, $\hat{\beta}_{EIVUM}$ es una función inyectiva de la estadística $T = \sum \ln(X_i/X_{(1)})$. Dado que se probó que T es una estadística suficiente para β (por pertenecer a la Familia Exponencial), el estimador hereda esta propiedad. Por tanto, es un estimador **suficiente**.

e. Ancilaridad Según la definición teórica, una estadística es ancilar si su distribución no depende del parámetro de interés.

En este caso, el estimador construido es $\hat{\beta}_{EIVUM} = \frac{n-2}{T}$. Para evaluar si el estimador es ancilar, analizamos sus momentos:

$$E[\hat{\beta}_{EIVUM}] = \beta, \qquad \mathrm{Var}(\hat{\beta}_{EIVUM}) = \frac{\beta^2}{n-3}$$

Dado que la esperanza y la varianza dependen explícitamente de β, la distribución del estimador cambia según el valor del parámetro.

Conclusión: El estimador $\hat{\beta}_{EIVUM}$ **no es una estadística ancilar**, ya que su distribución depende del parámetro β. Este comportamiento es esperado y adecuado para un estimador puntual del parámetro de interés.

f. Completitud La propiedad de completitud es fundamental para garantizar la unicidad del estimador óptimo según el Teorema de Lehmann-Scheffé.

La estadística suficiente es $T = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{X_{(1)}}\right)$. Se ha demostrado previamente que $T \sim \mathrm{Gamma}(n-1, \beta)$. La distribución Gamma con uno de sus parámetros desconocidos pertenece a la familia exponencial regular de un parámetro. Dado que el espacio paramétrico es abierto ($\beta > 0$), se cumple que la estadística suficiente T es completa.

Esto implica que si una función medible $g(T)$ satisface $E[g(T)] = 0$ para todo β, entonces $P(g(T) = 0) = 1$.

Conclusión: La estadística T es una estadística suficiente y completa para el parámetro β.

g. Optimalidad (Conclusión Final) Se ha verificado que el estimador $\hat{\beta}_{EIVUM} = \frac{n-2}{T}$ cumple las siguientes propiedades:

- Es insesgado: $E[\hat{\beta}_{EIVUM}] = \beta$.
- Es función de una estadística suficiente y completa (T).
- Posee varianza mínima dentro de la clase de estimadores insesgados.

Por lo tanto, aplicando el **Teorema de Lehmann-Scheffé**, se concluye que:

> Un estimador insesgado que sea función de una estadística suficiente y completa es el Estimador Insesgado de Varianza Uniformemente Mínima.

Conclusión General: $\hat{\beta}_{EIVUM}$ es el **Estimador Insesgado de Varianza Uniformemente Mínima (EIVUM)** para el parámetro β de la distribución Pareto. No existe otro estimador insesgado con menor varianza que este.

2) Pregunta 2 - Intervalos de confianza

2.1 Estimador 1 (el mínimo para alfa)

Vamos a hallar un intervalo de confianza del 90%:

$$\hat{\alpha}_{EMV} = y_1 = \min(x_1, \dots, x_n);$$
$$f_Y(y) = \frac{n\beta\alpha^{n\beta}}{y^{n\beta+1}}, \quad y > \alpha$$

Un posible pivote es $W = Y_1/\alpha$, porque su distribución no debería depender de α. Hacemos un cambio de variable $Q = W = \frac{Y_1}{\alpha}$. Con el jacobiano $dy_1 = \alpha\, dw$, se tiene:

$$\begin{aligned} f_W(w) = f_{Y_1}(\alpha w) \cdot \alpha &= n\beta\, \alpha^{n\beta}(\alpha w)^{-(n\beta+1)} \cdot \alpha \\ &= n\beta\, \alpha^{n\beta}\alpha^{-n\beta-1}w^{-(n\beta+1)}\alpha \\ &= n\beta\, w^{-(n\beta+1)}, \quad w > 1. \end{aligned}$$

La densidad resultante no depende de α, por lo tanto W es un pivote.

Hallamos la función de distribución de W:

$$\begin{aligned} F_W(w) &= \int_1^w n\beta t^{-(n\beta+1)}\, dt \\ &= n\beta \left[\frac{t^{-n\beta}}{-n\beta}\right]_1^w \\ &= n\beta \left[-\frac{t^{-n\beta}}{n\beta}\right]_1^w \\ &= 1 - w^{-n\beta}, \quad w > 1. \end{aligned}$$

Usando el método de pivote: $P(a \le W \le b) = 0.90$. Un posible intervalo sería el siguiente:

$$P(w \le a) = F_W(a) = 1 - a^{-n\beta} = 0.05 \quad \to \quad a = (0.95)^{-1/(n\beta)}$$
$$P(w \le b) = F_W(b) = 1 - b^{-n\beta} = 0.95 \quad \to \quad b = (0.05)^{-1/(n\beta)}$$

Entonces:

$$P\left[a \le \tfrac{Y_1}{\alpha} \le b\right] = 0.90 \to P\left[\tfrac{Y_1}{b} \le \alpha \le \tfrac{Y_1}{a}\right] = P\left[\tfrac{Y_1}{(0.6)^{-1/n\beta}} \leqslant \alpha \leqslant \tfrac{Y_1}{(0.95)^{-1/n\beta}}\right]$$

$$\text{I.C } = \left[Y_1 \cdot (0.05)^{1/(n\beta)}; Y_1 \cdot (0.95)^{1/(n\beta)}\right]$$

2.3 Estimador 3: Media Muestral ($\bar{X}$) para la media poblacional μ

Para la construcción del intervalo de confianza de la media poblacional $\mu = E(X)$, utilizaremos el **Método Asintótico** basado en el Teorema del Límite Central (TLC).

2.3.1 Justificación Teórica

Dado que el tamaño de muestra es suficientemente grande ($n = 1000$) y que en nuestro modelo la varianza poblacional existe (puesto que $\beta = 3 > 2$), el estadístico media muestral $\bar{X}$ sigue una distribución aproximadamente normal:

$$\bar{X} \xrightarrow{d} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Como la varianza poblacional σ^2 es desconocida, utilizamos la varianza muestral S^2 como estimador consistente, definiendo la siguiente **Cantidad Pivotal Asintótica**:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

2.3.2 Construcción del Intervalo

Para un nivel de confianza del $(1 - \gamma)$, buscamos los valores críticos de la distribución normal estándar tales que:

$$P\left(-z_{1-\gamma/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq z_{1-\gamma/2}\right) = 1 - \gamma$$

Despejando el parámetro μ, obtenemos la expresión del intervalo de confianza:

$$IC(\mu)_{1-\gamma} = \left[\bar{X} - z_{1-\gamma/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \bar{X} + z_{1-\gamma/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

2.3.3 Aplicación en R

Utilizamos los datos de la variable `reclamos` para calcular el intervalo al 95% de confianza.

```r
# ================================================================================
# CÁLCULO DEL INTERVALO DE CONFIANZA ASINTÓTICO PARA LA MEDIA (MU)
# ================================================================================

# 1. Parámetros de la muestra
n <- length(reclamos)
media_muestral <- mean(reclamos)
desv_estandar <- sd(reclamos)
confianza <- 0.95
gamma <- 1 - confianza

# 2. Valor crítico Z
z_critico <- qnorm(1 - gamma/2)

# 3. Error estándar y márgenes
error_estandar <- desv_estandar / sqrt(n)
margen_error <- z_critico * error_estandar

# 4. Límites del intervalo
```

```r
lim_inf_mu <- media_muestral - margen_error
lim_sup_mu <- media_muestral + margen_error

# 5. Valor teórico para comparación
mu_teorico <- (alpha_true * beta_true) / (beta_true - 1)

# Reporte
cat(
  "INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA (TLC)\n\n",
  "Media Muestral (X_bar): ", round(media_muestral, 5), "\n",
  "Desviación Estándar (S): ", round(desv_estandar, 4), "\n",
  "Nivel de Confianza: 95%\n\n",
  "Límite Inferior: ", round(lim_inf_mu, 5), "\n",
  "Límite Superior: ", round(lim_sup_mu, 5), "\n",
  "Valor Teórico (mu): ", mu_teorico, "\n"
)
```

```
## INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA (TLC)
##
##  Media Muestral (X_bar):  2.96908
##  Desviación Estándar (S):  1.4578
##  Nivel de Confianza: 95%
##
##  Límite Inferior:  2.87873
##  Límite Superior:  3.05944
##  Valor Teórico (mu):  3
```

2.3.4 Interpretación

Con un nivel de confianza del 95%, el valor esperado de los reclamos se encuentra entre 2.8787 y 3.0594. Observamos que el **valor teórico ($\mu = 3$)** se encuentra contenido dentro del intervalo, lo que valida la precisión del estimador $\bar{X}$ y la eficacia de la aproximación por el Teorema del Límite Central para este tamaño de muestra.

2.5 Estimador 5 (para β con el EIVUM)

Para la construcción del intervalo de confianza para el parámetro de forma β, usaremos el **Método de la Cantidad Pivotal**.

2.5.1 Deducción de la Cantidad Pivotal

Partiendo de los resultados obtenidos en la sección de estimación puntual, la estadística suficiente para β se define como:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{X_i}{X_{(1)}}\right)$$

Se conoce que esta estadística sigue una distribución Gamma con parámetros de forma $n-1$ y tasa β:

$$T \sim \text{Gamma}(n-1, \beta)$$

A partir de las propiedades de la distribución Gamma, es posible construir una función de las variables muestrales y del parámetro que siga una distribución conocida e independiente de β. Al aplicar la transformación $2\beta T$, obtenemos:

$$Q = 2\beta T \sim \chi^2_{(2(n-1))}$$

La variable Q constituye una **cantidad pivotal válida**, dado que su distribución es una Chi-cuadrado con $2n-2$ grados de libertad, la cual no depende de los parámetros desconocidos de la población.

2.5.2 Construcción del Intervalo

Para obtener un intervalo con un nivel de confianza del $(1-\alpha)$, se plantea la siguiente ecuación de probabilidad:

$$P\left(\chi^2_{\alpha/2} < 2\beta T < \chi^2_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Donde χ^2_p denota el cuantil de probabilidad acumulada p de la distribución Chi-cuadrado con $gl = 2(n-1)$.

Al despejar algebraicamente el parámetro β de la desigualdad, se obtiene:

$$\frac{\chi^2_{\alpha/2}}{2T} < \beta < \frac{\chi^2_{1-\alpha/2}}{2T}$$

En consecuencia, el intervalo de confianza de $(1-\alpha)\%$ para el parámetro β queda definido por:

$$IC(\beta) = \left[\frac{\chi^2_{\alpha/2,\,2(n-1)}}{2T}\,;\,\frac{\chi^2_{1-\alpha/2,\,2(n-1)}}{2T}\right]$$

2.5.3 Aplicación

A continuación, aplicamos este método a nuestra base de datos `reclamos` generada en la simulación ($n = 1000$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$).

```r
# ============================================================================
# CÁLCULO DEL INTERVALO DE CONFIANZA EXACTO PARA BETA
# Método del Pivote (Chi-Cuadrado)
# ============================================================================

# 1. Configuración
# Usamos la variable 'reclamos' que ya existe en el entorno
datos_analisis <- reclamos
n <- length(datos_analisis)
nivel_confianza <- 0.95
alfa <- 1 - nivel_confianza

# 2. Cálculo de la Estadística Suficiente (T)
x_min <- min(datos_analisis)
T_stat <- sum(log(datos_analisis / x_min))

# 3. Valores Críticos de la Chi-Cuadrado
# El pivote es Q = 2*beta*T ~ Chi^2(gl = 2(n-1))
```

```r
gl <- 2 * (n - 1)

chi_inf <- qchisq(alfa / 2, df = gl)      # Cola izquierda
chi_sup <- qchisq(1 - alfa / 2, df = gl)  # Cola derecha

# 4. Construcción del Intervalo
# Fórmula: [ Chi_Inf / 2T  ;  Chi_Sup / 2T ]
Limite_Inferior <- chi_inf / (2 * T_stat)
Limite_Superior <- chi_sup / (2 * T_stat)

# 5. Reporte de Resultados
cat(
  "INTERVALO DE CONFIANZA EXACTO PARA BETA\n\n",
  "Tamaño de muestra (n): ", n, "\n",
  "Estadística T: ", round(T_stat, 4), "\n",
  "Grados de Libertad: ", gl, "\n\n",
  "Límite Inferior: ", round(Limite_Inferior, 5), "\n",
  "Límite Superior: ", round(Limite_Superior, 5), "\n"
)
```

```
## INTERVALO DE CONFIANZA EXACTO PARA BETA
##
##  Tamaño de muestra (n):  1000
##  Estadística T:  328.563
##  Grados de Libertad:  1998
##
##  Límite Inferior:  2.85487
##  Límite Superior:  3.23192
```

2.5.4 Interpretación de Resultados

Con un nivel de confianza del 95%, estimamos que el verdadero valor del parámetro de forma β se encuentra dentro del intervalo:

$$IC(\beta)_{95\%} = [2.85487, 3.23192]$$

Análisis de la simulación:

Dado que en nuestro diseño experimental el valor verdadero del parámetro es $\beta = 3$, podemos confirmar que el intervalo calculado ha **capturado exitosamente** al parámetro.

Adicionalmente, observamos que la longitud del intervalo es reducida ($L \approx 0.377$), lo cual evidencia una **alta precisión** en la estimación. Esto es consecuencia directa de dos factores:

1. El uso de un estimador basado en una estadística suficiente (EIVUM), que minimiza la varianza.
2. El tamaño de muestra grande ($n = 1000$), que reduce el error estándar.

4) Pregunta 4 - Pruebas de hipótesis para los estimadores

4.3 Prueba de Hipótesis para la Media Poblacional (μ)

En esta sección, evaluamos la validez de una afirmación sobre el valor central de la población mediante la media muestral $\bar{X}$. A diferencia de los estimadores de los parámetros de forma (β), la media muestral nos permite realizar inferencia sobre el valor esperado de la variable "reclamos".

4.3.1 Fundamento Asintótico

Para la construcción de esta prueba, no nos basamos en una distribución exacta (como la Gamma), sino en el **Teorema del Límite Central (TLC)**. Dado que nuestra muestra $n = 1000$ es grande y hemos verificado que $\beta > 2$ (lo que garantiza la existencia de una varianza finita), se cumple que:

1. Por TLC: $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ asintóticamente.
2. Por Consistencia: $S^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$.
3. Por **Teorema de Slutsky**: El estadístico pivot $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ converge en distribución a una Normal Estándar $N(0,1)$.

4.3.2 Planteamiento Formal de la Prueba

Definimos una prueba de hipótesis de dos colas para verificar si la media poblacional es consistente con el valor teórico esperado bajo los parámetros originales ($\mu_0 = 3$).

$$H_0 : \mu = 3 \quad \text{(Hipótesis Nula)}$$
$$H_1 : \mu \neq 3 \quad \text{(Hipótesis Alternativa)}$$

Nivel de Significancia (α): 0.05.

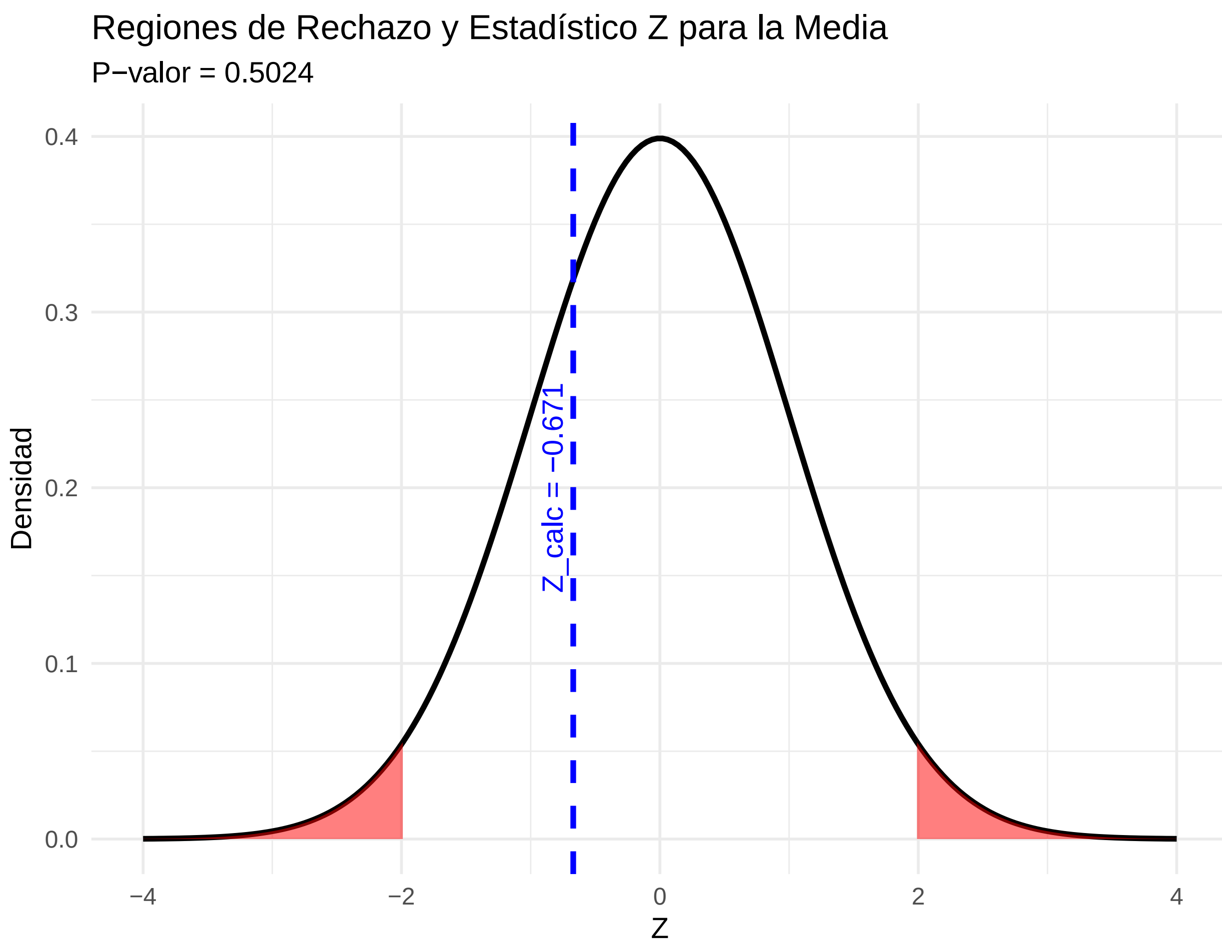
Regla de Decisión: Se rechaza H_0 si $|Z_{calc}| > Z_{1-\alpha/2}$, donde $Z_{0.975} = 1.96$. Alternativamente, se rechaza si el $p - valor < 0.05$.

4.3.3 Ejecución y Visualización en R

Para darle mayor peso al análisis, incluiremos una gráfica de la densidad normal que muestre la ubicación de nuestro estadístico respecto a la zona de rechazo.

```r
# 1. Configuración de parámetros
mu_0 <- 3
n <- length(reclamos)
x_bar <- mean(reclamos)
s_dev <- sd(reclamos)

# 2. Cálculo del estadístico y P-valor
z_calc <- (x_bar - mu_0) / (s_dev / sqrt(n))
p_val <- 2 * pnorm(-abs(z_calc))

# 3. Visualización de la Región de Rechazo
x_vals <- seq(-4, 4, length = 200)
y_vals <- dnorm(x_vals)
df_plot <- data.frame(x = x_vals, y = y_vals)

library(ggplot2)
ggplot(df_plot, aes(x = x, y = y)) +
  geom_line(color = "black", linewidth = 1) +
  # Sombreado de regiones de rechazo
  geom_area(data = subset(df_plot, x <= -1.96), fill = "red", alpha = 0.5) +
```

```r
geom_area(data = subset(df_plot, x >= 1.96), fill = "red", alpha = 0.5) +
# Línea del estadístico calculado
geom_vline(xintercept = z_calc, color = "blue", linetype = "dashed", linewidth = 1) +
annotate("text", x = z_calc, y = 0.2, label = paste("Z_calc =", round(z_calc, 3)),
         angle = 90, vjust = -0.5, color = "blue") +
labs(title = "Regiones de Rechazo y Estadístico Z para la Media",
     subtitle = paste("P-valor =", round(p_val, 4)),
     x = "Z", y = "Densidad") +
theme_minimal()
```



4.3.4 Análisis de Resultados y Dualidad

1. **Estadístico Observado:** El valor de $Z_{calc} = -0.6707$ cae dentro de la región de **no rechazo** (área blanca entre -1.96 y 1.96).
2. **Conclusión Estadística:** Dado que el $p - valor = 0.5024 > 0.05$, no existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula. Se concluye que la media de la muestra de reclamos es estadísticamente igual a 3.
3. **Diferencia con los estimadores de Beta:** A diferencia de las pruebas de hipótesis realizadas para los estimadores EIVUM o EMV, que se basan en la distribución Gamma o Chi-cuadrado, esta prueba utiliza la **Normalidad Asintótica**. Esto es válido únicamente por el gran tamaño de la muestra ($n = 1000$).

4. **Relación con el Intervalo de Confianza:** Esta conclusión refuerza lo hallado en el punto 2.3. Se cumple la propiedad de **Dualidad de la Inferencia**: un valor de hipótesis nula μ_0 no se rechaza al nivel α si y solo si dicho valor está contenido en el intervalo de confianza del $(1-\alpha)100\%$.