# Задачи повышенной сложности

**1. Сходящиеся лучи падают на выпуклое сферическое зеркало с радиусом кривизны R = 60 см так, что их продолжения пересекаются на оси системы в точке S на расстоянии a =15 см за зеркалом. На каком расстоянии от зеркала сойдутся эти лучи после отражения от зеркала? Будет ли точка их пересечения действительной? Решите эту же задачу для a = 40 см.**

**Решение:**

Поскольку на зеркало падают сходящиеся лучи, точка S является мнимым источником для зеркала (рисунок 1). Расстояние a от источника до зеркала войдет в формулу сферического зеркала со знаком «-»:

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{F} \quad \rightarrow \quad b=\frac{aF}{F-a}$$

Фокусное расстояние равно половине радиуса $F=\frac{R}{2}=30$см, оно тоже вошло в формулу сферического зеркала с минусом, поскольку зеркало выпуклое, его фокус мнимый.

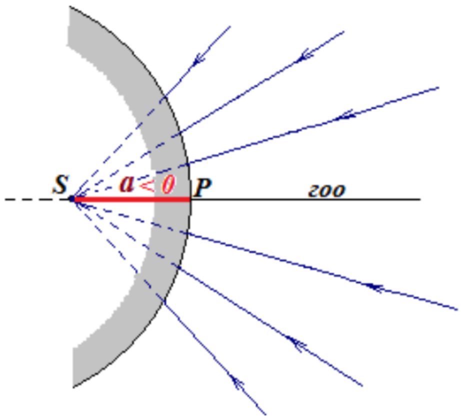



Рисунок 1.

Для a =15 см получаем $b=\frac{15\cdot 30}{30-15}=30$см. Значение b положительное, это значит, что точка схождения лучей действительная, она находится перед зеркалом (рисунок 2).

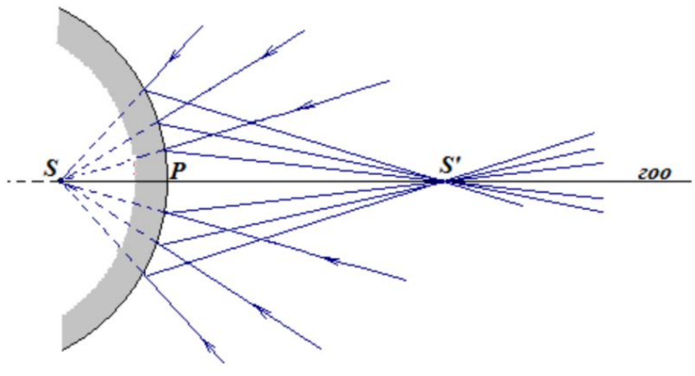



Рисунок 2.

Для а =40 см получаем $b = \frac{40 \cdot 30}{30-40} = -120$см. Значение b отрицательное, это значит, что точка схождения лучей мнимая, она находится за зеркалом (рисунок 3).

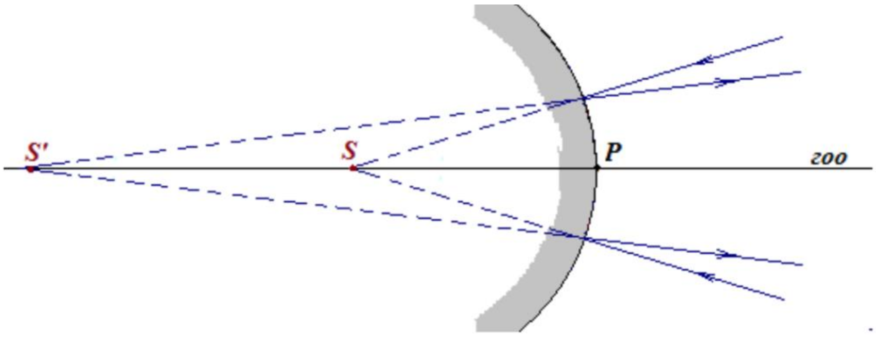
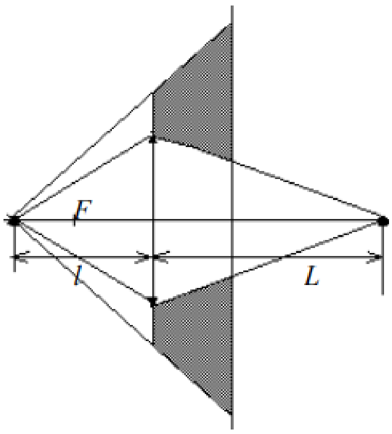



Рисунок 3.

**2. Идеальная собирающая тонкая линза с фокусным расстоянием F имеет форму диска диаметра d и заключена в оправу с внешним диаметром D. За линзой на расстоянии F от ее оптического центра перпендикулярно главной оптической оси расположен плоский экран достаточно большой площади. Перед линзой на ее главной оптической оси размещен точечный источник света. Получите формулу зависимости площади тени, отбрасываемой оправой на экран, от расстояния l между источником и оптическим центром линзы, если F<l<∞. Постройте график этой зависимости.**

**Решение:** Ход лучей в рассматриваемой системе приведен на рис. 1




области тени отмечены серым цветом. Тень от оправы линзы на экране имеет форму кольца, внешний диаметр которого определяется из простых геометрических соображений:

$$D_T = \frac{l+F}{l} D$$

Внутренний диаметр теневого кольца определяется аналогичных образом

$$d_T = \frac{L+F}{L}d = \left(1 - \frac{F}{L}\right)d$$

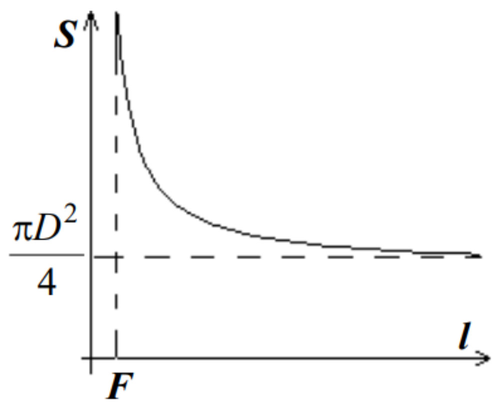
где L – расстояние от линзы до действительного изображения источника, которое определяется по формуле тонкой линзы:

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{L} = \frac{1}{F} \quad \to \quad L = \frac{Fl}{l-F}$$

Тогда внутренний диаметр тени $d_T = \frac{F}{l}d$ и ее площадь определяется по формуле

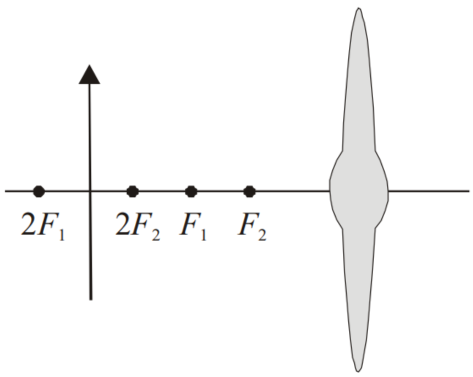
$$s = \frac{\pi}{4}\left(D_T^2 - d_T^2\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{(l+F)^2}{l^2}D^2 - \frac{F^2}{l^2}d^2\right)$$

График этой зависимости приведен на рис.2

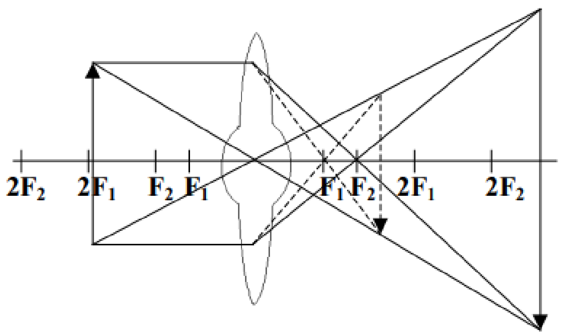



Заметим, что при увеличении расстояния l до бесконечности площадь тени стремится к значению $\pi D^2/4$, т.к. изображение источника находится на экране и имеет нулевую площадь.

**3. В центре собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1$ вырезано круговое отверстие и в него вставлена собирающая линза с меньшим фокусным расстоянием $F_2$. Постройте изображение предмета, показанного на рисунке, в этой “двойной” линзе.**



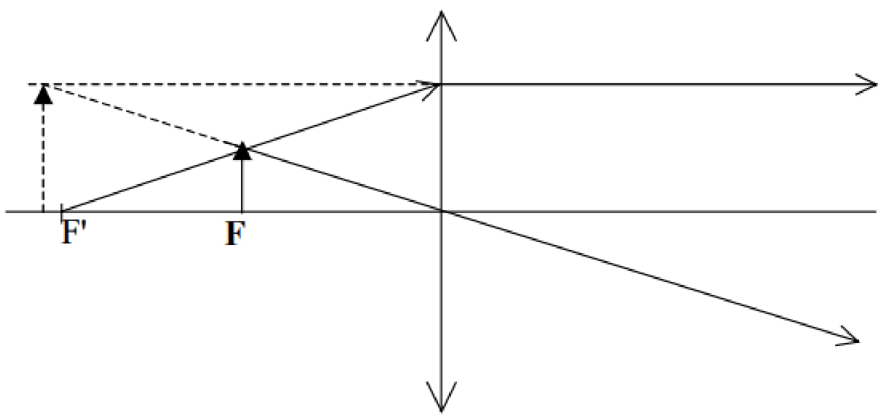
**Решение:** Каждая линза дает изображение всего предмета, поэтому в данной системе возникнет два изображения, каждое из которых строится по обычным правилам.



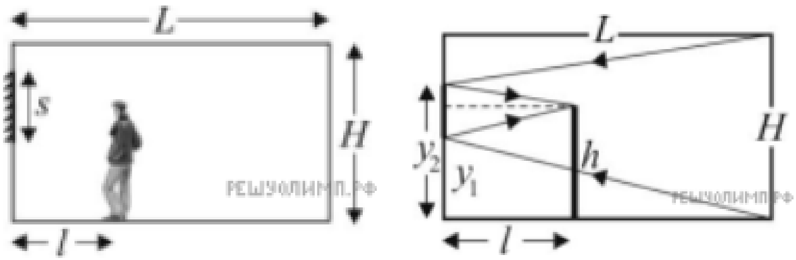

**4. В пустом аквариуме установлены изготовленная из стекла двояковыпуклая линза и предмет, находящийся в ее фокусе. Аквариум заполняют водой. Постройте (качественно) изображение предмета в линзе.**

**Решение**: Двояковыпуклая стеклянная линза в воздухе является собирающей. Поскольку предмет находится в фокусе линзы, то в пустом аквариуме его изображение будет находиться на бесконечности. Однако при заполнении аквариума водой оптическая сила линзы изменяется, т.к. преломление света на границе раздела “вода-стекло” происходит иначе, чем на границе раздела “воздух-стекло”. Поскольку показатель преломления стекла больше, чем воды, то линза останется собирающей, но ее фокусное расстояние увеличится. (Это несложно понять с помощью следующего качественного рассуждения: если бы показатели преломления линзы и воды были одинаковыми, то преломления бы не было вообще, оптическая сила такой линзы была бы нулевой, а фокусное расстояние – бесконечно большим. *Поэтому при уменьшении разности показателей преломления среды и линзы ее фокусное расстояние увеличивается.)*

Таким образом, в аквариуме с водой предмет оказывается между собирающей линзой и ее фокусом и дает прямое увеличенное мнимое изображение, получаемое по обычным правилам.



**5. В комнате длиной L = 5 м и высотой H = 3 м на стене висит плоское зеркало. Человек смотрит в него, находясь на расстоянии $l$ = 1 м от стены, на которой оно висит. Какова должна быть наименьшая высота s зеркала, чтобы человек мог видеть стену, находящуюся за его спиной, во всю высоту?**




Вертикальный размер зеркала ограничен световыми лучами, исходящими из точек, лежащих на нижнем и верхнем ребрах комнаты, и попадающими в глаз человека (см. рис., где $h$ - расстояние от пола до уровня глаз человека). Из подобия треугольников следуют равенства:

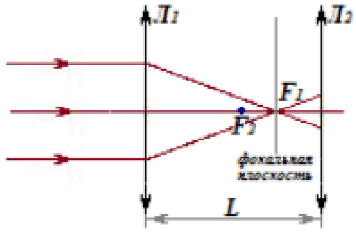
$$\frac{H-y_2}{L}=\frac{y_2-h}{l}\quad,\quad\frac{y_1}{L}=\frac{h-y_1}{l}$$

$$y_2=\frac{l*H+L*h}{l+L}\quad,\quad y_1=\frac{L*h}{L+l}$$

Учитывая, что $s=y_2-y_1$, получаем, что $s=\frac{l*H}{L+l}$

$$s=\frac{l*H}{L+l}=\frac{6}{7}\approx 0.86\text{ м.}$$

**6. Наблюдатель рассматривает удаленный предмет с помощью зрительной трубы Кеплера. В качестве объектива и окуляра используются линзы с фокусными расстояниями $F_1$ = 30 см и $F_2$ = 5 см. Наблюдатель видит четкое изображение предмета, если расстояние между объективом и окуляром трубы находится в пределах от $L_1$ = 33 см до $L_2$ = 34,5 см. На каких расстояниях наблюдатель видит изображение предмета? Человек рассматривает удаленный предмет. Это значит, что изображение предмета в объективе получится в фокальной плоскости**



По условию расстояние между объективом и окуляром меньше суммы фокусных расстояний объектива и окуляра $L < F_1 + F_2$. Это означает, что изображение в объективе, являющееся предметом для окуляра, находится перед фокусом окуляра.

Окуляр, по существу, должен работать как лупа. Следовательно, он будет давать мнимое увеличенное изображение предмета.

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F_2}$$

f - это расстояние, на котором человек видит изображение;

d - расстояние от изображения в объективе(фокальной плоскости объектива) до окуляра $Л_2$, на рисунке видно, что $d = L - F_1$

$$\frac{1}{L - F_1} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F_2}$$

$$f = \frac{(L - F_1)F_2}{F_2 - L + F_1}$$

При $L_1 = 33$ см человек видит изображение на расстоянии

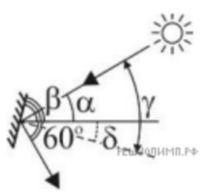
$$f = \frac{(33 - 30)5}{5 + 30 + 33} = 7 \text{ см.}$$

при $L_2 = 34{,}5$ см человек видит изображение на расстоянии

$$f = \frac{(34{,}5 - 30)5}{5 + 30 + 34{,}5} = 45 \text{ см.}$$

**7. Высота Солнца над горизонтом составляет угол α. Под каким углом β к горизонту следует расположить плоское зеркало для того, чтобы осветить солнечными лучами дно наклонной штольни, образующей угол 60° с горизонтом?**

Ход луча, падающего на зеркало и отраженного от него, изображен на рисунке.




Видно, что угол γ между

$$\gamma = \frac{1}{2}(60° + \alpha) = 30° + \frac{\alpha}{2}$$

Угол δ между нормалью к зеркалу и горизонтом равен

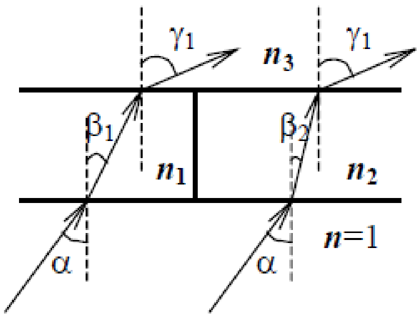
$$\delta = \gamma - \alpha = 30° - \frac{\alpha}{2}$$

Согласно теореме о равенстве углов с взаимно перпендикулярными сторонами, такой же угол зеркало образует с в вертикалью. Поэтому искомый угол

$$\beta = 90° - \delta = 60° + \frac{\alpha}{2}$$

**Ответ**: $\beta = 60° + \frac{\alpha}{2}$

**8. Три среды с показателями преломления $n_3$, $n_2$ и $n_3$ ($n_1 > n_2 > n_3 > 1$) располагаются так, как показано на рисунке 20. Два луча идут параллельно друг другу, при этом луч 1 проходит только через среды I и III, а луч 2 – через среды II и III. Определите угол между этими лучами в среде III.**




В соответствии с законом преломления можно записать:

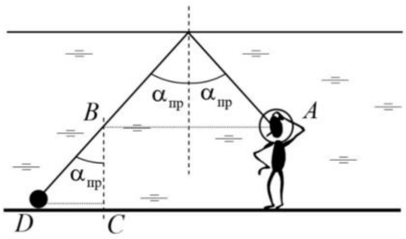
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_1} = n_1, \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta_2} = n_2, \quad \frac{\sin\beta_1}{\sin\gamma_1} = \frac{n_3}{n_1}, \quad \frac{\sin\beta_2}{\sin\gamma_2} = \frac{n_3}{n_2}$$

Отсюда следует $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1} = n_3 = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_2}$, т.е.

$\gamma_1 = \gamma_2$.

**Ответ**: лучи в среде III останутся параллельными.

**9. Водолаз стоит на горизонтальном дне водоёма, имеющего глубину $H = 15$ м. Рост водолаза равен $h = 1,7$ м. На каком расстоянии l от водолаза находятся те части дна, которые он может увидеть отражёнными от поверхности воды? Показатель преломления воды n = 4/3.**




Пусть на расстоянии l от водолаза на дне водоема лежит предмет. Чтобы водолаз видел этот предмет, отраженным от поверхности, луч, показанный на рисунке должен испытывать полное внутреннее отражение на поверхности, т.е. угол падения этого луча на поверхность должен быть равен предельному углу полного внутреннего отражения, т.е. определяться формулой. Расстояние от водолаза до этого предмета l находим геометрически из рисунка

$$l = AB + CD = 2(H - h)tg\alpha_{пр} + htg\alpha_{пр}$$

$$tg\alpha_{пр} = \frac{\sin\alpha_{пр}}{\sqrt{1 - sin^2\alpha_{пр}}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

Получим

$$l = \frac{2H - h}{\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{2 \times 15 - 1{,}7}{\sqrt{1{,}3^2 - 1}} = 34\text{м}$$