应用数理统计 Notes*

目录

1 抽样分布

1.1 基本概念

定义 1.1 (统计量). 不含任何未知参数的样本函数称为统计量,设 $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 为总体ξ的样本,$T(x_1,\ldots,x_n)$ 为样本空间上的实值(*Borel*可测)函数.如果 $T(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 中不包含任何未知参数,则称 $T(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 为一个统计量.

定义 1.2 (矩). 设$(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 为总体ξ的样本,记$A_r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\xi_i^r$为$r$阶原点矩,$B_r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\xi_i-\bar{\xi}\right)^r$为$r$阶中心矩.有$A_1=\bar{\xi},B_2=S^2$

定义 1.3 (相关系数). 设 $(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2),\cdots,(\xi_n,\eta_n)$为二维总体$(\xi,\eta)$ 的样本,记$\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\xi_i,S_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\xi_i-\bar{\xi}\right)^2$ $\bar{\eta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\eta_i,S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(\eta_i-\bar{\eta})^2$ $S_{12}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\xi_i-\bar{\xi}\right)(\eta_i-\bar{\eta})$ $R=\frac{S_{12}}{S_1S_2}$,称S_{12},R分别为二维样本的协方差与二维样本的相关系数

协方差满足$S_{12}=\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n\left(\xi_i\eta_i-\xi_i\bar{\eta}-\bar{\xi}\eta_i+\bar{\xi}\bar{\eta}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\xi_i\eta_i-\bar{\xi}\bar{\eta}$

定义 1.4 (特征函数). 设$\varphi_\xi(t)$ 为总体ξ的特征函数, $\xi_1,\ldots,\xi_n$ 为总体ξ的样本,则样本均值的特征函数为$\varphi_{\bar{\xi}}(t)=E\left(e^{it\bar{\xi}}\right)=E\left(e^{i\frac{t}{n}\sum_{i=1}^n\xi_i}\right)=\left\{\varphi_\xi\left(\frac{t}{n}\right)\right\}^n$,利用特征函数的唯一性定理,可以求得$\bar{\eta}$的分布.

定义 1.5 (极差). 称 $R_n=\xi_{(n)}-\xi_{(1)}$ 为样本极差,它反映了样本观察值的离散程度.可以由顺序统计量的联合密度函数

$$f_{1,n}(x,y)=\left\{\begin{array}{c}n(n-1)f(x)f(y)[F(y)-F(x)]^{n-2},x<y\\0,\end{array}\right.$$

得到

定义 1.6 (经验分布函数). 若 $\xi_1,\xi_2\ldots,\xi_n$ 为总体ξ的样本, $\xi_{(1)},\xi_{(2)}\ldots,\xi_{(n)}$ 为样本 $\xi_1,\xi_2\ldots,\xi_n$ 的顺序统计量.对任意实数 x, 记

$$F_n(x)=\left\{\begin{array}{ll}0, & x\leq\xi_{(1)}\\\frac{k}{n}, & \xi_k<x\leq\xi_{k+1}\\1, & x>\xi_{(n)}\end{array}\right.$$

为总体ξ的经验分布函数,可用单位阶跃函数表示为$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\mu\left(x-\xi_k\right),x\in R$.($F_n(x)$ 单调不减,左连续, $0\leq F_n(x)\leq1,F_n(-\infty)=0,F_n(+\infty)=1$所以是分布函数)

事实上,$\mu\left(x-\xi_k\right)\sim B(1,F(x))$,从而有

$$E\left[F_n(x)\right]=\frac{1}{n}E\left[nF_n(x)\right]=\frac{1}{n}nF(x)=F(x)$$
$$D\left[F_n(x)\right]=D\left[\frac{1}{n}nF_n(x)\right]=\frac{1}{n^2}D\left[nF_n(x)\right]=\frac{F(x)[1-F(x)]}{n}$$

Γ分布$f(x)=\left\{\begin{array}{cc}\frac{\lambda^a x^{\alpha-1}}{\Gamma(a)}e^{-\lambda x}, & x>0\\0, & x\leqslant0\end{array}\right.$,$\alpha>0,\lambda>0$,其中$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$,有$E(\xi)=\frac{\alpha}{\lambda}$,$D(\xi)=\frac{\alpha}{\lambda^2}$

定理 1.1. 设 $\xi_i\sim\Gamma\left(\alpha_i,\lambda\right),i=1,2,\cdots,N$, 且 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N$ 相互独立,则 $\sum_{i=1}^N\varepsilon_i\sim\Gamma\left(\sum_{i=1}^N\alpha_i,\lambda\right)$

χ^2 分布,$\chi^2\sim\chi^2(N)=\Gamma\left(\frac{N}{2},\frac{1}{2}\right)$故$E\left(\chi^2\right)=N,D\left(\chi^2\right)=2N$

定理 1.2. 设 $\xi_i\sim N(0,1),i=1,2,\cdots,N$, 且 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N$ 相互独立, 记 $\chi^2=\sum_{i=1}^N\xi_i^2$, 则 χ^2 有密度函数

$$f_{x^2}(x)=\left\{\begin{array}{cc}\frac{1}{2^{\frac{N}{2}}}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)^{\frac{N}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\\0, & x\leqslant0\end{array}\right.$$

并称 χ^2 服从自由度为 N 的 χ^2 分布,记为 $\chi^2\sim\chi^2(N)$.

t分布,$E(T)=0,D(T)=\frac{n}{n-2}$,

*EEEEEErin

定理 1.3. 设 $\xi \sim N(0,1), \eta \sim \chi^2(n)$, 且 ξ 与 η 独立,记 $T=\frac{\xi}{\sqrt{\eta/n}}$, 则 T 有密度函数:

$$f_T(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, x \in R$$

并称 T 服从自由度为 n 的 t 分布,记为 $T \sim t(n)$

F 分布,有$F \sim F(m,n)$, 则 $\frac{1}{F} \sim F(n,m)$

定理 1.4. 设 $\xi \sim \chi^2(m), \eta \sim \chi^2(n)$, 且 ξ 与 η 独立,记 $F=\frac{\xi/m}{\eta/n}$, 则 F 有密度函数 :

$$f_F(x)=\begin{cases}\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}m^{m/2}n^{n/2}x^{\frac{m}{2}-1}(n+mx)^{-\frac{m+n}{2}}, & x>0\\ 0, & x \leqslant 0\end{cases}$$

并称 F 服从参数为 m 与 n 的 F 分布,记为 $F \sim F(m,n)$

1.2 多元正态分布与正态二次型

定义 1.7. 若随机向量有密度函数

$$f_\eta(y_1,\cdots,y_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|\Sigma_j\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(y-\theta)'\Sigma^{-1}(y-\theta)\right\}$$

,其中$\Sigma=\operatorname{var}(\eta)\triangleq E\left[(\eta-\theta)(\eta-\theta)'\right]=\left[E\left(\eta_i-\theta_i\right)\left(\eta_j-\theta_j\right)\right]_{n\times n}$为$n$阶对称正定矩阵.则称$\eta$服从均值向量$\theta$协方差矩阵$\Sigma$的$n$元正态分布

引理 1.1. 将正交矩阵T作用在独立同正态分布的随机变量上,得到的$\zeta=T'\eta$依旧是独立同分布的随机变量.

推论 1.1. $\eta-N_m\left(\theta,\sigma^2 I_n\right)$,$T$是正交矩阵,则有$T\left(\frac{\eta-\theta}{\sigma}\right)\sim N_n\left(0,I_n\right)$

引理 1.2. $\eta \sim N_n(\theta,\Sigma)$则存在正交矩阵$T'\Sigma T=\Lambda$使得$\zeta=T'(\eta-\theta)\sim N_n(0,\Lambda)$,即通过正交变化将相关的随机变量转化成了独立随机变量.

引理 1.3. $\eta \sim N_n(\theta,\Sigma)$特征函数为$\varphi_\eta(t)=\exp\left\{jt'\theta-\frac{1}{2}t'\sum t\right\}$

引理 1.4. 设 $\eta \sim N_n(\theta,\Sigma)$, A 为一个秩是 m 的 $m\times n$ 阶常数矩阵,a是m维常数列向量,则m维随机向量$\xi=A\eta+a$满足 $\xi \sim N_m\left(A\theta+a, A\Sigma A'\right)$(利用特征函数证明)

定理 1.5. 设 $\eta \sim N_n\left(0,I_n\right)$, A 为 n 阶对称幂等 (即 $A^2=A$)矩阵. 则$\eta'A\eta\sim\chi^2(\operatorname{tr}(A))$,即 $\eta'A\eta$ 服从自由度为 $\operatorname{tr}(A)$ 的卡方分布

定理 1.6. 设 $\eta'=\left(\eta_1,\cdots,\eta_n\right), E(\eta)=\theta, \theta'=\left(\theta_1,\cdots,\theta_n\right)$ $\operatorname{Var}(\eta)=\sigma^2 I_n$, 且 $A=\left[a_{ij}\right]$ 为 n 阶对称矩阵,则

1. $E\left(\eta'A\eta\right)=\sigma^2\operatorname{tr}(A)+\theta'A\theta$
2. 如果 $\eta \sim N_n\left(0,\sigma^2 I_n\right)$, 则 $\operatorname{Var}\left(\eta'A\eta\right)=2\sigma^4\operatorname{tr}\left(A^2\right)$

定理 1.7. 设 A 为 n 阶对称矩阵, B 为 $m\times n$ 阶矩阵,且 $BA=0, \eta \sim N_n\left(\theta,\sigma^2 I_n\right)$, 则 $B\eta$ 与 $\eta'A\eta$ 相互独立.

定理 1.8. 设 A,B 均为 n 坎对称矩阵 , $BA=0$, 且 $\eta \sim N_n\left(\theta,\sigma^2 I_n\right)$, 则 $\eta'B\eta$ 与 $\eta'A\eta$ 相互独立.

定理 1.9. 设 $Q_i \sim \chi^2\left(r_i\right), i=1,2, r_1>r_2$ 且 Q_1-Q_2 与 Q_2 独立,则

$$Q_1-Q_2 \sim \chi^2\left(r_1-r_2\right)$$

定理 1.10. 设 $\eta \sim N_n(\theta,\Sigma)$, 则 $(\eta-\theta)'\Sigma^{-1}(\eta-\theta)\sim\chi^2(n)$

1.3 抽样分布定理

定理 1.11. 设总体 $\xi \sim N\left(a.\sigma^2\right).\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为总体 ξ 的样本,则

1. $\bar{\xi}\sim N\left(a,\frac{\sigma^2}{n}\right)$,
2. $\bar{\xi}$ 与 S^2 相互独立
3. $\frac{nS^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

推论 1.2. 设总体 $\xi \sim N\left(a,\sigma^2\right),\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为 ξ 的样本,则 $T\triangleq\frac{\bar{\xi}-a}{S/\sqrt{n-1}}\sim t(n-1)$

推论 1.3. 设 $\xi_1,\cdots,\xi_k$ 为 $k(k\geqslant 2)$ 个相互独立的随机变量,且 $\xi_i \sim N(0,1), i=1,2,\cdots,k$. 今从这 k 个相互独立的总体中分别抽取容量为 n_i 的样本 $\xi_{i1},\cdots,\xi_{in_i}, i=1,2,\cdots,k$, 且这 k 个样本相互独立,记$\bar{\xi}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\xi_{ij}, S_i^2=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\xi_{ij}-\bar{\xi}_i\right)^2, i=1,2,\cdots,k$ $n=\sum_{i=1}^k n_i, \bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{n=1}^k\sum_{j=1}^{m_i}\xi_{ij}$,则有离差平方和的分解式

$$S_;^2\triangleq\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^{n_i}\left(\xi_{ij}-\bar{\xi}\right)^2=Q+U$$

其中$Q=\sum_{i=1}^k n_i S_i^2, U=\sum_{i=1}^k n_i\left(\bar{\xi}_i-\bar{\xi}\right)^2$,且有$\frac{U/(k-1)}{Q/(n-k)}\sim F(k-1,n-k)$

定理 1.12. 设总体 $\xi \sim N\left(a_1,\sigma_1^2\right)$, 总体 $\eta \sim N\left(a_2,\sigma_2^2\right)$,记相互独立的样本$\bar{\xi}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m\xi_i, S_1^2=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m\left(\xi_i-\bar{\xi}\right)^2$ $\bar{\eta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\eta_i, S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\eta_i-\bar{\eta}\right)^2$有

1. $F\triangleq\frac{(n-1)mS_1^2}{(m-1)nS_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}-F(m-1,n-1)$
2. 当$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$,有$T\triangleq\frac{\bar{\xi}-\bar{\eta}-\left(a_1-a_2\right)}{\sqrt{mS_1^2+nS_2^2}}\sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}}\sim t(m+n-2)$

1.4 分位数

定义 1.8. 设 ξ 为一个随机变量, α 为满足 $0<\alpha<1$ 的实数.如果 x_α 使得 $P\{\xi \leqslant x_\alpha\}=\alpha$, 则称 x_a 为 ξ 的下侧 a 分位数. 如果 y_α 使得 $P|\xi>y_\alpha|=\alpha$, 则称 y_α 为 ξ 的上侧 α 分位数,分位数也叫分位点或临界值,

分位数有如下性质

1. $x_a=y_{1-a}, y_a=x_{1-\alpha}$
2. 对于正态分布 $N(0,1)$ 与 t 分布 $t(n)$ 有$y_{1-\alpha}=-y_\alpha, x_{1-\alpha}=-x_\alpha$即$y_{1-\alpha}=-y_\alpha=x_a=-x_{1-\alpha}$
3. 设 $F_\alpha(m,n)$ 为$F\sim F(m,n)$ 的下侧α 分位数,则$F_a(m,n)=\frac{1}{F_{1-a}(n,m)}$

2 参数估计

2.1 点估计常用方法

2.1.1 矩法

由辛钦大数定律(Wiener-Khinchin Law)有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right)\right|<\varepsilon\right\}=1$$

由科尔莫格罗夫强大数定律(Kolmogorov Strong Law)有

$$P\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k-E\xi_k\right)=0=1$$

从而可以用样本的矩来估计样本参数,得 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_t$ 的解 $\hat\theta_1,\hat\theta_2,\cdots,\hat\theta_t$作为估计量.

2.1.2 极大似然法

构造极大似然函数$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p\left(\xi_i;\theta\right)$,固定样本观察值选择使得$L(\theta)$达到最大的参数$\hat\theta$作为参数 θ 的估计值.

考虑到$L(\theta)$连乘的形式,可以将方程转换为$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta_k}=0,\quad k=1,2,\cdots,t$.对于方程无唯一解的情况,可以通过定义结合变量范围确定使得$L(\theta)$最大的取值.

极大似然法不要求原点矩存在,相对于矩法具有更好的性质,但是在求解方程时需要借助数值方法求近似解.

2.2 评估估计量好坏的标准

2.2.1 无偏性和有效性

定义 2.1 (无偏估计量)**.** 如果参数 θ 的估计量 $T\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)$ 对一切 n 及任意 $\theta\in\Theta$有

$$E_\theta\left[T\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)\right]=\theta$$

则称 $T\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)$ 为 θ 的**无偏估计量**,记$E_\theta\left[T\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)\right]-\theta=b_n$为偏差,若$\lim_{n\to\infty} b_n=0$称为$T$为$\theta$的**渐进无偏估计量**.如果 $g(\theta)$ 的无偏估计量存在则称其为可估计函数.

例如,$S^{*2}\triangleq\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-\bar\xi\right)=\frac{n}{n-1}S^2$是总体方差的无偏估计量,又叫修正样本方差.

应注意的是,如果 $T\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)$ 是参数 θ 的无偏估计量,除了 g 是线性函数外,推不出$g(T)$也是 $g(\theta)$ 的无偏估计量,例如不能用对均值估计量的平方作为对二阶矩原点的估计.

事实上,存在某一参数有多种无偏估计量的情况,为对之进行对比,引入无偏估计量的方差.

定义 2.2. 若对于一切 $\theta\in\Theta$(即任意可能的参数范围,因为估计时不确定具体值)均有$D_\theta\left(\hat\theta_1\right)\leqslant D_\theta\left(\hat\theta_2\right)$, 则说估计量$\hat\theta_1$比估计量$\hat\theta_2$ 有效.

定理 2.1 (Rao-Cramer不等式)**.** 设总体 ξ 为具有密度函数 $f(x;\theta)$ 的连续型随机变量 ,θ 为未知参数, $\theta\in\Theta.\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为 ξ 的样本, $T\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)$ 为可估计函数 $g(\theta)$ 的无偏估计量. 如果

1. Θ 为实数域 R 中的开区间且集合 $\{x: f(x;\theta)>0\}$ 与 θ 无关.
2. $\frac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta)$ 存在,且 $I(\theta)\equiv E_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(\xi;\theta)\right]^2>0$, 此处 $I(\theta)$ 又叫 Fisher 信息量.
3. $g'(\theta)$ 存在,且

$$\begin{aligned}g'(\theta)=&\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} T\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\prod_{i=1}^{n} f\left(x_i;\theta\right)\right]\\&dx_1\cdots dx_n\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left[\prod_{i=1}^{n} f\left(x_i;\theta\right)\right]dx_1\cdots dx_n\\=&\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\prod_{i=1}^{n} f\left(x_i;\theta\right)\right]dx_1\cdots dx_n\end{aligned}$$

则有

$$D_\theta(T) \geqslant \frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)}$$

对一切 $\theta\in\boldsymbol{\Theta}$成立,且等号成立的充要条件是$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\ln\prod_{i=1}^n f(\xi_i;\theta)\right]=C(\theta)[T-g(\theta)]$几乎处处成立,其中 $C(\theta)\neq 0$ 是与样本无关的数. 特别, 当 $g(\theta)=\theta$ 时有$g(\theta)$ 的 $R-C$ 下界

$$D_\theta(T) \geqslant \frac{1}{nI(\theta)}$$

. 且当等号成立时称 $T(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 为 $g(\theta)$ 的有效估计量.

事实上 $I(\theta)=-E_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(\xi;\theta)\right]$ 故等价有

$$D_\theta(T) \geqslant -\frac{(g'(\theta))^2}{nE_\phi\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(\xi;\theta)\right]}$$

对一切 $\theta\in\boldsymbol{\theta}$, 对于离散型情况, 只要将求和换成积分则同样成立.

推论 2.1. 在定理 **??** 的条件下我们有

1. 可估计函数 $g(\theta)$ 的有效估计量存在且为 $T(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 的充鑿条件是 $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta)$ 可化为形式 $C(\theta)[T-g(\theta)]$,即

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta)=C(\theta)[T-g(\theta)],\ a.\ s.$$

   其中 $C(\theta)\neq 0$ 甚与样本无关的函数,且 $E_\theta(T)=g(\theta)$

2. 若上一条中等式成立, 进一步有 $\frac{\left[g^1(\theta)\right]^2}{nI(\theta)}=\frac{g'(\theta)}{C(\theta)}$ 从而 $I(\theta)=\frac{C(\theta)g'(\theta)}{n}$ 特别当 $g(\theta)=\theta$ 时,有 $\frac{1}{nI(\theta)}=\frac{1}{C(\theta)},\quad I(\theta)=\frac{C(\theta)}{n}$

3. 可估计函数的有效估计量是唯一的. 且一定是 $g(\theta)$ 的唯一极大似然估计量

2.2.2 一致最小方差无偏估计量

定义 2.3. 设 $T(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 为可估计函数 $g(\theta)$ 的无偏估计量. 如果对 $g(\theta)$ 的任一无偏估计量 $T_1(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 均有

$$D_\theta(T)\leqslant D_\theta(T_1),\quad \text{对一切 } \theta\in\Theta$$

则称 $T(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 为 $g(\theta)$ 的一致最小方差无偏估计量, 记

$$U=\mid T:E_\theta(T)=\theta, D_\theta(T)<\infty,\ \text{对一切}\ \ \theta\in\Theta\}$$

$$U_0=\{T_0:E_\theta(T_0)=0, D_\theta(T_0)<\infty,$$

对一切 $\theta\in\Theta\}$, 即 U 为未知参数 θ 的方差有限的无偏估计量集, U_0 为 θ 的方差有限数学期望为零的估计量集

定理 2.2. 设 U 非空, $T(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_a)\in U$, 则 $T_\Delta T\ (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 为未知参数 θ 的最优无偏估计量的充要条件是对每个 $T_0\in U_0$ 有

$$E_\theta(TT_0)=0,\ \ \text{对一切}\ \theta\in\Theta$$

推论 2.2. 设 T_1 和 T_2 分别为可估计函数 $g_1(\theta)$ 和 $g_2(\theta)$ 的 *UMVUE*, 则 $b_1T_1+b_2T_2$ 是 $b_1g_1(\theta)+b_2g_2(\theta)$ 的 *UMVUE*, 其中 b_1,b_2 均为常数.

定理 2.3. 设 U 是 **??** 定义的非空集, 则对未知参数 θ (在概率为 1 意义下)至多存在一个 *UMVUE*.

常见的 Fisher 信息量 $I(\theta)$.

$$\begin{array}{cc}
\xi\sim B(1,p) & I(p)=\frac{1}{p(1-p)}\\
\xi\sim P(\lambda) & I(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\\
\xi\sim\Gamma(1,\lambda)=Exp(\lambda) & I(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}\\
\xi\sim N\left(a,\sigma^2\right) & I(a)=\frac{1}{\sigma^2}\\
\xi\sim N\left(0,\sigma^2\right) & I\left(\sigma^2\right)=\frac{1}{2\sigma^4}
\end{array}$$

2.2.3 一致性(相合性)