随机过程引论 Notes*

目录

1　基本概念

定义 1.1 (矩母函数). 对于随机变量 $X \sim F$. 若下面的数学期望存在, 则称

$$M_X(t) := \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{tX}\right] = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{tx} \mathrm{d}F(x), \quad t \in \mathbb{R}$$

为 X 的矩母函数.矩母函数唯一确定X的分布,可以通过$M_X(t)$ 求出X的各阶矩

$$\mathbb{E}\left[X^n\right] = M_X^{(n)}(0), \quad n \geq 1,$$

正态分布的矩母函数为$M_X t = e^{\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$

对于相互独立的随机变量有$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$.

定义 1.2 (数列的母函数(痛苦回忆)). 设有一个实数列 $a = \{a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$, 如果幂级数

$$G_a(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

在0点的一个非空领域上收敛, 则称它为数列 a 的母函数.

定义 1.3 (随机变量的母函数). 设 ξ 是 $\mathbb{Z}_{+-}$ 值随机变量,,则其概率分布律是一个有界数列, 定义ξ的母函数:

$$G_\xi(z) := \sum z^n \mathbb{P}(\xi = n) = \mathbb{E}\left[z^\xi\right]$$

随机变量的母函数同样有$G_{\xi+\eta}(z) = G_\xi(z) G_\eta(z)$

定义 1.4 (随机过程). $\forall t \in T, \quad X(t) \equiv X(t, \omega) : \Omega \mapsto \mathbb{R}$为随机变量,程随机变量族$X = \{X(t), t \in T\}$为随机过程.$X$可能取到的值称为状态,全体状态$E$称为状态空间.

2　泊松过程

定理 2.1. 设 $N \sim P(\lambda), N$ 个事件独立地(也独立于个数 N) 以概率 p_i 为第 i 个类型, $i = 1, 2, \cdots, n$, 其 $\mathbf{p} p_1 + p_2 + \cdots p_n = 1$. 记 N_i 为第i类事件发生的次数, 则 $N_i \sim P\left(\lambda p_i\right)$, 且 $N_1, N_2, \cdots, N_n$ 相互独立。

---

*EEEEEErin