

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

---

# Desacoplo térmico de la materia oscura fría en la expansión del universo

---

*Autor:*  
Yerko A. MUÑOZ BARROS

*Profesor Guía:*  
**Dr. Claudio DIB V.**  
*Comité Evaluador:*  
**Dr. Marat SIDDIKOV**  
**Dr. Alfonso ZERWEKH A.**

*Una tesina presentada cumpliendo con los requisitos  
para el grado de Licenciado en Física*

*en el*

**Departamento de Física**

4 de marzo de 2024



UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

## *Resumen*

Departamento de Física

Licenciado en Física

### **Desacoplo térmico de la materia oscura fría en la expansión del universo**

por Yerko A. MUÑOZ BARROS

En sus primeros momentos, el universo estaba compuesto por un plasma de partículas indistinguibles a altísima temperatura. Estas, al estar tan condensadas, interactuaban con mucha frecuencia, lo que permitía un equilibrio químico constantemente, pero debido a la rápida expansión del universo, esta tasa de interacción comenzó a disminuir. En este trabajo nos centramos en la evolución de las partículas de materia oscura no relativista en un modelo simplificado isotrópico y homogéneo del universo en expansión.

El propósito es analizar las predicciones teóricas sobre la abundancia de WIMPs y poder describir el fenómeno de desacoplo o «freeze-out», en donde la expansión del universo da como consecuencia una cantidad residual no interactuante de partículas de materia oscura conocida como densidad de reliquia. Hacemos un acercamiento amigable al tema derivando las fórmulas más relevantes para el análisis hecho trabajando de manera exhaustiva la ecuación de Boltzmann en su forma más general con el fin de utilizarla para nuestro modelo del desacoplo térmico. Obtuvimos una ecuación de Ricatti que describe la evolución de las partículas que no tiene soluciones analíticas, la cual logramos resolver aproximadamente para la densidad de reliquia, además de plantear un método que resolvería la ecuación numéricamente. Estudiamos efectos cualitativos de la variación en el parámetro  $\lambda$  que está directamente relacionado con la sección eficaz promediada térmicamente, a partir del cual obtuvimos que un mayor valor de estas conlleva una menor densidad de reliquia final. Calculamos que para coincidir con la abundancia de reliquia de materia oscura actual, los WIMPs deben de tener una sección eficaz promediada de  $\langle\sigma v\rangle \approx 1,67 \times 10^{-26} [\text{cm}^3\text{s}]$ , además de que su masa se encuentra en el rango de  $10^1 [\text{GeV}] \leq m_X \leq 10^2 [\text{GeV}]$ .



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>1. Materia Oscura</b>	<b>1</b>
1.1. Orígenes y Evidencias	1
1.1.1. Galaxias y Cúmulos	1
1.1.2. Lentes Gravitacionales	3
1.1.3. Fondo Cósmico de Microondas	4
1.2. Candidatos	5
<b>2. Modelo Cosmológico</b>	<b>7</b>
2.1. Relatividad General	7
2.1.1. Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	7
2.1.2. Ecuaciones de Einstein	8
2.2. Termodinámica y Mecánica Estadística	10
2.2.1. Evolución de la Energía	10
2.2.2. Ecuación de Estado	11
2.2.3. Densidades Críticas	12
2.2.4. Cambios de Variables	14
<b>3. Génesis y Densidad de Reliquia</b>	<b>17</b>
3.1. Ecuación de Boltzmann	17
3.2. Freeze-Out y Abundancia	21
3.2.1. Solución Analítica Aproximada	23
Densidad en Freeze-Out	23
Determinando $x_f$	24
3.2.2. Análisis Numérico	26
3.2.3. Calculando la Abundancia	27
3.3. Discusión	28
3.3.1. Observación de WIMPs	28
3.3.2. El Parámetro $\lambda$	29
3.3.3. Simplificaciones y Aproximaciones	29
<b>4. Resumen y Conclusiones</b>	<b>33</b>
<b>A. Códigos Figuras</b>	<b>35</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>37</b>



## Capítulo 1

# Materia Oscura

Una de las mayores revelaciones científicas del siglo XX en lo que respecta a nuestro conocimiento del Universo es que la materia bariónica ordinaria, es decir, materia compuesta de protones y neutrones, no es la forma de la materia más abundante en el Universo. En cambio, existe una forma de la materia que repleta nuestro Universo en notables cantidades más que la materia bariónica llamada «materia oscura». Detectarla experimentalmente es aún un desafío para la física, pero existen suficientes evidencias que nos permiten afirmar su existencia.

Se necesitan distintas disciplinas del conocimiento para poder llegar a tener un entendimiento completo de la materia oscura. Podemos estudiar su creación durante las eras tempranas del Universo haciendo uso de la termodinámica y mecánica estadística. La relatividad general y la cosmología son necesarias para comprender cómo la materia oscura actúa en escalas cósmicas y cómo podríamos utilizar el Universo mismo como un laboratorio para su estudio. La física de partículas es fundamental para la proposición de nuevos candidatos de partículas a materia oscura y sus posibles interacciones con la materia bariónica.

Abordar por completo todo lo relacionado a la materia oscura en un solo escrito es un acto heroico, por lo que en este trabajo nos centraremos principalmente en la física detrás de las interacciones que la rigen en la era temprana del Universo. Aquí nos encontraríamos con un caldo muy caliente de distintas especies de partículas, entre las cuales se encuentran las de materia oscura. Estas tienen una tasa de interacción entre ellas muy alta, lo que implica que las partículas se encuentren en equilibrio químico con el caldo. A medida que la expansión del universo se hacía cada vez más rápida, las interacciones disminuían, hasta el punto en el que cesan por completo. Este cese es conocido como desacople y tiene una gran relevancia a nivel cósmico, ya que nos entrega una cantidad residual de materia oscura en el universo que ya no interactúa. Nuestro estudio recae en la replicación de este fenómeno desde un enfoque teórico, en donde obtendremos resultados sobre el momento de desacople y la cantidad de materia oscura que deberíamos esperar encontrar en el universo.

En este capítulo daremos una introducción a las evidencias que apuntan a la existencia de la materia oscura y una breve explicación de los candidatos que se proponen para esta misteriosa forma de la materia.

### 1.1. Orígenes y Evidencias

#### 1.1.1. Galaxias y Cúmulos

Uno de los primeros indicios de la existencia de más materia que la observable en el Universo la entregó el astrónomo J. H. Oort en 1931 en [1], donde, al estudiar el efecto Doppler de las estrellas que se mueven dentro de la Vía Láctea, llegó a la

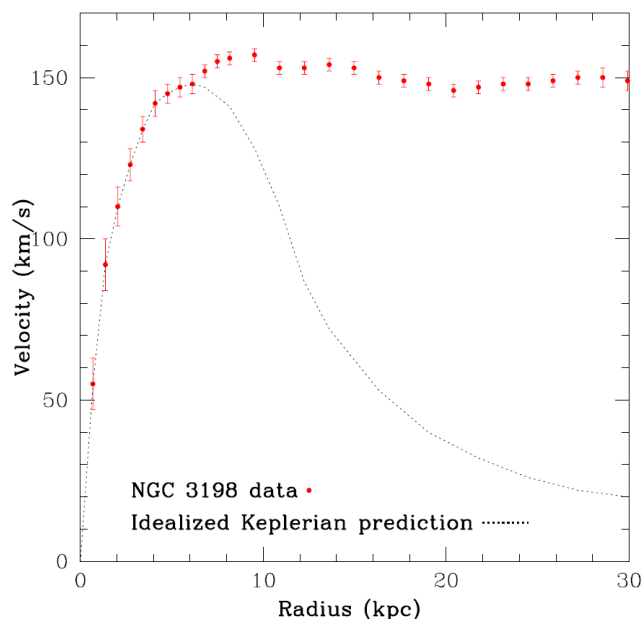


FIGURA 1.1: Velocidades rotacionales de distintas regiones en la galaxia NGC 3198 [4] comparado a un comportamiento Kepleriano (extraído de [5]).

conclusión de que la velocidad con la que estas se mueven debería ser suficiente para escapar de la atracción gravitacional producida por la materia visible. Una de las explicaciones que planteó Oort para este fenómeno es que aproximadamente el 85 % de la luz proveniente del centro de la galaxia estaba siendo opacada por polvo estelar, mientras que también notó que podría simplemente ser un error de medición. Asimismo, también postuló que debe de haber más masa presente en la Vía Láctea que la mantenga unida.

Fritz Zwicky en 1932 también descubrió una carencia de materia, pero esta vez en un cúmulo de galaxias [2]. Calculó que la masa total del cúmulo no correspondía a la suma de las masas de las galaxias que lo componen, sino que faltaba una gran porción que simplemente no era visible y que manifestaba un efecto Doppler mucho mayor al que se esperaba.

Asimismo, Vera Rubin en 1983 mostró resultados que indicaban una clara diferencia entre las velocidades de rotación de 60 distintas galaxias y las predicciones clásicas [3]. Este comportamiento se puede apreciar en la Fig. 1.1, donde el modelo Kepleriano plantea que las velocidades vienen dadas por

$$v(r) = \sqrt{G \frac{m(r)}{r}},$$

donde  $v(r)$  corresponde a la velocidad de rotación del objeto a un radio  $r$  del centro,  $G$  es la constante gravitacional de Newton y  $m(r)$  es la masa total contenida en  $r$ . Esta ecuación la podemos obtener directamente igualando la fuerza centrípeta con la fuerza gravitacional y despejando la velocidad.

Este resultado da indicios de que hay más materia que la observable en las galaxias si consideramos que la masa encerrada debería ir incrementando solamente hasta los extremos de la galaxia y permanecer constante al ir más allá. Las velocidades deberían ir disminuyendo en ese caso ya que estaríamos alejándonos y encerrando la misma cantidad de masa, pero en cambio, experimentalmente vemos



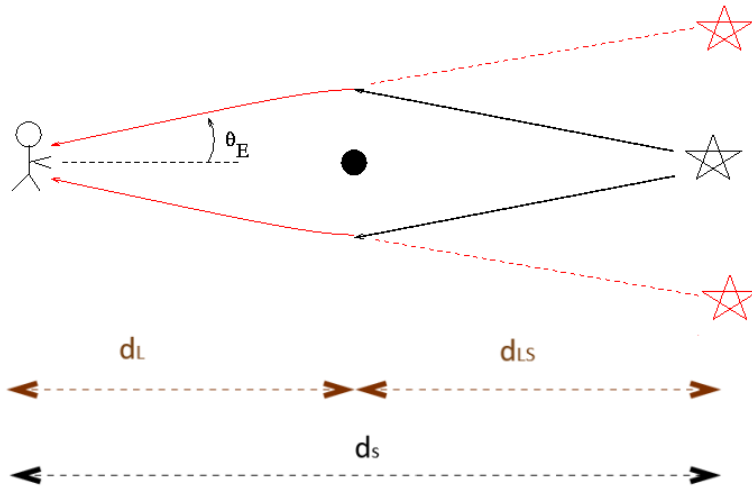


FIGURA 1.2: Diagrama general del efecto del lente gravitacional, en donde se siguen las trayectorias de los rayos de luz de la fuente (negro) y la imagen que estos dan como resultado para el observador (rojo).

que la velocidad permanece constante. La explicación más plausible a esto es que se siga encerrando masa fuera de los extremos de la galaxia, es decir, materia que no podemos ver: materia oscura.

Estas evidencias nos dejan en claro la existencia de la materia oscura, pero no son las únicas que tenemos hoy en día. Existe otro efecto que provoca la materia oscura que podemos percibir que nos da otra fuerte evidencia de su presencia y lo veremos a continuación.

### 1.1.2. Lentes Gravitacionales

La relatividad general de Einstein nos permite describir la gravedad utilizando el espacio-tiempo y su geometría, donde las trayectorias de los objetos siguen las geodésicas en este (ya ahondaremos más sobre esto en el Cap. 2). Una de las consecuencias más trascendentales de esta descripción es que la luz no se ve excluida de estas trayectorias curvas, por lo que objetos masivos «curvarán» la luz que pasa cerca de ellos y darán origen a un lente gravitacional.

En 1919, los astrónomos F. W. Dyson, A. S. Eddington y C. Davidson demostraron este fenómeno experimentalmente en el famoso evento científico que involucraba un eclipse solar, el cual permitió observar que los rayos luminosos rasantes a la corona solar provenientes de estrellas sufren una desviación con respecto a sus posiciones reales y así confirmar la relatividad general [6].

Así, podemos estudiar la imagen distorsionada de galaxias lejanas y poder determinar la masa de estas utilizando el ángulo de Einstein:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{d_{LS}}{d_L d_S}},$$

donde  $M$  es la masa del lente,  $c$  es la velocidad de la luz y  $d_{LS}$ ,  $d_L$  y  $d_S$  corresponden a la distancia entre el foco y la fuente, entre el observador y el foco y entre el observador y la fuente respectivamente. Estas distancias se ven mejor representadas en la

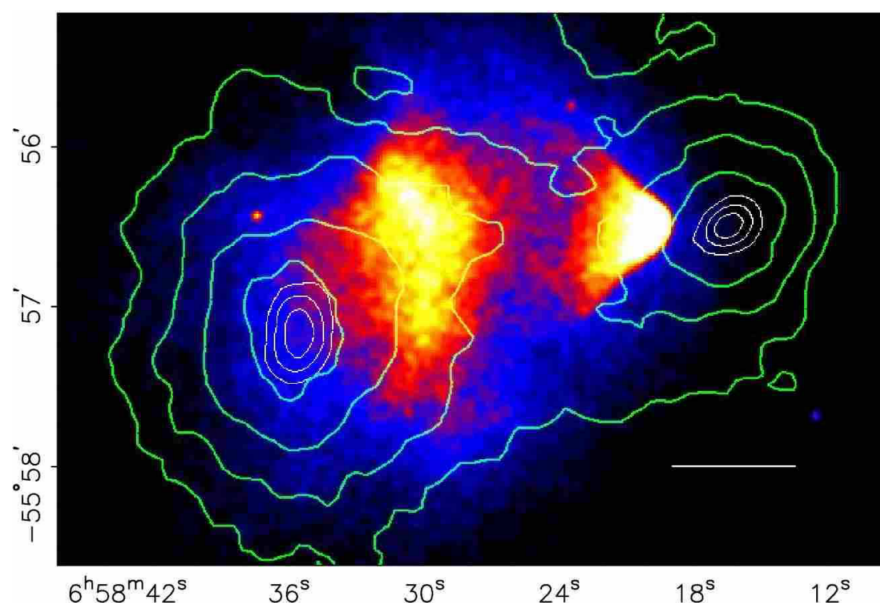


FIGURA 1.3: Mapa térmico del Cúmulo Bala superpuesto con los contornos de los potenciales gravitacionales reconstruidos a partir de las mediciones de los lentes gravitacionales en verde (extraído de [7]).

Fig. 1.2, que además entrega una representación física del ángulo de Einstein.

Medir los efectos de los lentes gravitacionales nos permite inferir la masa total de un sistema, la cual luego puede ser comparada a la masa visible para así encontrar la abundancia de materia no visible. En 2006, D. Clowe et al. publicaron un estudio del Cúmulo Bala [7], el cual es el resultado de una colisión de dos cúmulos de galaxias, donde obtuvieron una separación espacial no despreciable entre los potenciales gravitatorios que entrega el análisis considerando solamente la materia luminosa con los que entregan la reconstrucción utilizando los efectos del lente gravitacional del cúmulo.

En la Fig. 1.3 se aprecia uno de sus resultados, donde se puede ver claramente la separación entre los datos de rayos X representando la materia luminosa (el mapa térmico) y los pozos gravitacionales (contornos verdes). Esto sugiere la existencia de componentes invisibles a nuestros telescopios que componen al cúmulo y generan esta inconsistencia: materia oscura.

### 1.1.3. Fondo Cósmico de Microondas

A. Penzias y R. Wilson descubrieron la existencia de una temperatura residual en el fondo del universo de 2.73 [K] [8], la que actualmente sabemos que no es uniforme en todas sus direcciones ya que presenta fluctuaciones que son del orden de los  $[\mu\text{K}]$  conocidas como anisotropías que podemos ver en la Fig. 1.4. Estas son fundamentales, ya que nos entregan otra manera de poder determinar la composición del universo, utilizando los conocimientos que tenemos sobre su historia.

Inmediatamente después del Big Bang, el universo estaba compuesto por un plasma extremadamente denso de partículas cargadas y fotones que fue enfriándose a medida que este se expandía. De la misma manera que mencionamos anteriormente, estos elementos también se desacoplaron en el momento en el que el universo llegó a la temperatura necesaria. Este momento del universo se conoce como la época de recombinación y es cuando el plasma de electrones y núcleos se combinan

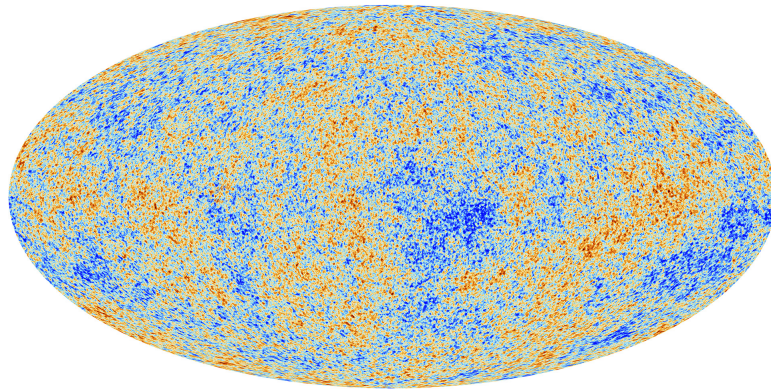


FIGURA 1.4: CMB y sus anisotropías térmicas medidas por Planck [9].

y los átomos neutros fueron formados. Así el universo se volvió transparente a la radiación electromagnética, es decir, los fotones ya no se encuentran sujetos a las interacciones con las partículas cargadas, sino que ahora pueden viajar libres por el universo. Los fotones liberados en su última interacción es lo que vemos hoy en día como el fondo cósmico de microondas o CMB por sus siglas en inglés.

El primer satélite construido especialmente para estudios de cosmología, el Cosmic Background Explorer (COBE), verificó dos propiedades del CMB: su notable uniformidad, y que se comporta como un cuerpo negro casi perfecto. Este segundo factor es un pilar muy sólido para argumentar a favor del uso de la termodinámica estadística para el estudio del universo temprano, la cual utilizaremos más adelante. COBE obtuvo las primeras mediciones de las fluctuaciones en el CMB, lo que planteó nuevas incógnitas, ya que estas eran demasiado pequeñas como para haber representado la formación de estructuras, es decir, la estructura del universo que vemos hoy en día no habría tenido el tiempo suficiente como para formarse [10].

Con esta consideración, posteriormente se han lanzado más sondas para obtener mediciones aún más precisas de las anisotropías, para así poder determinar cuánta materia está faltando para compensar con la formación de las estructuras galácticas. Gracias a esto, a día de hoy sabemos que la materia oscura, o materia faltante, corresponde a aproximadamente el 85 % de toda la materia del universo [11].

Con la evidencia presentada aquí ya tenemos la imagen de un universo que está principalmente dominado por una sustancia que no hemos descubierto aún, sino que sólo podemos percibir sus efectos en el cosmos, por lo que es un desafío actual para la física experimental lograr observar finalmente una de estas evasivas partículas que componen a esta sustancia.

## 1.2. Candidatos

Teniendo establecida la necesidad de la existencia de la materia oscura, hagamos un breve repaso a los candidatos a materia oscura que existen. Como es de esperar, existe una plétora de ellos debido a lo poco que sabemos sobre su naturaleza lo que nos impide poder establecer restricciones contundentes. En este trabajo nos referiremos en algunas ocasiones a las partículas de materia oscura como partículas masivas débilmente interactuantes, o WIMPs por sus siglas en inglés. Como su nombre lo adelanta, estas son partículas pesadas y que se presume interactúan únicamente mediante la gravedad y una fuerza débil. Una de las razones por las que los WIMPs son tan famosos, es debido al «milagro WIMP», un fenómeno que surge debido a que algunos parámetros numéricos que predice la teoría coincide con la

abundancia de materia oscura que podemos medir, sin embargo, entre los distintos candidatos que existen pueden haber órdenes de magnitud de diferencia entre estos parámetros, de ahí que exista un «zoológico» de estos, en el que todos necesitan de física más allá de nuestro modelo actual de física de partículas: el modelo estándar. Bertone et al. entrega una detallada lista de los principales candidatos [12], además de dar un enfoque más experimental al desafío que representa la materia oscura hoy en día.

## Capítulo 2

# Modelo Cosmológico

En esencia, la cosmología es una elegante fusión entre la relatividad general y la mecánica estadística. Esto implica que el interés de nuestro estudio radica en la evolución del universo como un todo, y no en las partículas de manera individual. De manera general, podemos decir que todos los resultados relevantes de la cosmología pueden ser obtenidos utilizando solamente dos ecuaciones: la ecuación de Einstein y la ecuación de Boltzmann.

A lo largo de toda nuestra discusión en este capítulo está implícita la idea de que nos encontramos en un universo uniforme y en equilibrio térmico. Más adelante consideraremos el supuesto que esto no es así y veremos qué ocurre con el comportamiento de la evolución del universo y sus componentes.

### 2.1. Relatividad General

En gran parte, uno puede tener cierta comprensión general de cosmología únicamente teniendo conocimientos sobre relatividad general. Esta es una herramienta que nos permite obtener y modelar tipos de universos a gusto cuando ya se tiene un manejo en conceptos básicos como la métrica, ecuaciones de Einstein y saber aplicarlas sobre una métrica que nos describa un universo isotrópico.

Todo esto será abordado en esta sección con el objetivo de, cuando más adelante tengamos conocimientos de mecánica estadística, poder ser capaces de manejar densidades en el universo.

#### 2.1.1. Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Con el objetivo de tener un trasfondo matemático más riguroso, debemos comprender lo que es un tensor métrico, ya que es un instrumento matemático fundamental a la hora de estudiar espacios con geometrías no planas. Lo más importante sobre este tensor, también conocido como métrica, es entender que nos ayuda a definir y entregar la distancia física entre dos puntos de un espacio [13].

Utilizando un formalismo más matemático [14], definamos un grupo de vectores que llamaremos *elementos de línea*:

$$d\vec{s} = dx^\mu \hat{e}_\mu \quad (2.1)$$

donde  $\hat{e}_\mu$  corresponden a los vectores base pertenecientes a una base definida en la variedad geométrica. Asimismo,  $dx^\mu$  corresponden a las componentes de nuestro vector de desplazamiento infinitesimal.

Podemos calcular la norma de este nuevo vector utilizando el producto escalar tal que

$$ds^2 \equiv d\vec{s} \cdot d\vec{s} = \hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu dx^\mu dx^\nu. \quad (2.2)$$

Aquí ya podemos definir la métrica, donde

$$g_{\mu\nu} \equiv \hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu. \quad (2.3)$$

Así, reescribiendo la norma (también conocida como intervalo) obtenemos

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.4)$$

Como mencionamos anteriormente, la Ec. (2.4) nos da una noción de distancia entre dos puntos separados por una distancia infinitesimal en un espacio con geometría definida por la métrica, ya que corresponde a la magnitud de un vector. Sin embargo, nosotros queremos utilizar una métrica que nos permita describir un espacio homogéneo e isotrópico, ya que, como vimos en el Cap. 1, es el caso de nuestro universo. Para esto, utilizamos la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (o por simplicidad, métrica FRW), la cual puede ser escrita de la siguiente forma [15]

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (2.5)$$

donde  $(t, r, \theta, \phi)$  son las coordenadas comoviles, las cuales nos entregan un sistema de referencia que se mueve en tándem a la dirección de la expansión del universo. El factor de escala  $a(t)$  es una función del tiempo y es un parámetro que nos determina la magnitud con la que varía la distancia física entre dos objetos. Más adelante en este capítulo obtendremos soluciones para este parámetro, las cuales nos permitirán modelar la evolución del universo.

Tenemos también un parámetro  $k$  muy interesante, ya que este nos define la curvatura de una sección espacial del universo [16]. Si consideramos que sea adimensional,  $k \in \{-1, 0, 1\}$ , y en consecuencia el factor de escala tiene unidades de distancia. Si  $k = -1$ , estamos considerando que nuestro universo tiene geometría con curvatura negativa (hiperbólica), si  $k = 0$  recuperamos el espacio plano y si  $k = 1$  obtenemos curvatura positiva, que implica una geometría esférica.

### 2.1.2. Ecuaciones de Einstein

Albert Einstein postuló sus ecuaciones de campo para generalizar la ley de gravitación de Newton desde un punto de vista relativista [17]. Su propuesta incluía la inexistencia de una fuerza gravitacional como tal, donde el movimiento de una partícula no está influenciado por un potencial gravitatorio como postuló Newton, sino que se debe al movimiento libre de las partículas en curvas geodésicas que siguen la geometría del espacio-tiempo.

La ley de gravitación de Newton nos permite escribir [18]

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r}) \quad (2.6)$$

donde  $\rho(\vec{r})$  es la densidad de masa. Es lógico querer reemplazar este término por el tensor de energía-momentum y que este actúe como fuente. Asimismo, el potencial gravitacional  $\phi(\vec{r})$  determina el movimiento de las partículas en el cuadro clásico. En la relatividad general, como mencionamos anteriormente, es la geometría del

espacio-tiempo quien determina esto, por lo que tiene sentido querer relacionar el potencial con la métrica.

La Ec. (2.6) involucra segundas derivadas del potencial en forma del laplaciano. La relatividad general plantea precisamente un tensor que depende de las segundas derivadas de la métrica y es conocido como tensor de Riemann o tensor de curvatura e incluye toda la información sobre la curvatura. Toma la siguiente forma [14]

$$R_{\lambda\alpha\beta}^{\mu} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\lambda\beta}^{\mu} + \Gamma_{\nu\alpha}^{\mu}\Gamma_{\lambda\beta}^{\nu} - \partial_{\beta}\Gamma_{\lambda\alpha}^{\mu} - \Gamma_{\nu\beta}^{\mu}\Gamma_{\lambda\alpha}^{\nu} \quad (2.7)$$

donde nos encontramos con la conexión de Levi-Civita  $\Gamma_{\lambda\nu}^{\rho}$  (también conocida como los símbolos de Christoffel), la cual puede escribirse en términos de la métrica tal que

$$\Gamma_{\lambda\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(\partial_{\lambda}g_{\mu\nu} + \partial_{\nu}g_{\lambda\mu} - \partial_{\mu}g_{\nu\lambda}). \quad (2.8)$$

Combinando las ecuaciones (2.7) y (2.8) podemos expresar el tensor de Riemann exclusivamente en términos de la métrica y es apreciable la relación con las segundas derivadas que buscábamos. Si contraemos índices podemos definir también el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} \quad (2.9)$$

y el escalar de Ricci

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

De aquí que el primer intento de Einstein fue plantear una proporcionalidad entre  $R_{\mu\nu}$  y  $T_{\mu\nu}$ , sin embargo, notó rápidamente que esta relación no era del todo satisfactoria, ya que el tensor de energía-momentum es simétrico y cumple con la siguiente relación de conservación

$$\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.11)$$

no así el tensor de Ricci. Es por esta razón que la proporcionalidad debe de ser con otro tensor que dependa de este. Así es como se plantea el tensor de Einstein [18]

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2.12)$$

el cual es simétrico y sí cumple con  $\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0$ . Así, la proporcionalidad nos queda entonces

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \propto T_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

con

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

llamada la constante de gravitación de Einstein. Es fácil notar que, si multiplicamos la métrica por una constante  $\Lambda$ , esta sigue cumpliendo con las condiciones que le exigimos a  $G_{\mu\nu}$ . Esta constante es conocida como la constante cosmológica, y así,



podemos obtener una forma más general para la Ec. (2.14):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

Esta es conocida como la ecuación de campo de Einstein, y nos permite relacionar cómo se deforma el espacio-tiempo con la presencia de una fuente de energía.

## 2.2. Termodinámica y Mecánica Estadística

### 2.2.1. Evolución de la Energía

Nos centraremos un poco más en la parte de la derecha de la ecuación de Einstein (Ec. (2.14)), donde está involucrado el tensor energía-momentum. Para hacer un análisis más en profundidad de este término, debemos realizar primero una suposición fundamental: el universo en el que nos encontramos está lleno de un fluido perfecto de presión  $\mathcal{P}$  y densidad  $\rho$ . De esta manera, el tensor queda escrito en su manera más simplificada con los índices mixtos y, en forma matricial, puede escribirse como [13]:

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{P} \end{pmatrix}.$$

Como ya mencionamos, se debe cumplir la ley de conservación para nuestro tensor, donde  $\nabla_{\mu}T_{\nu}^{\mu} = 0$ . Expandiendo la derivada covariante, obtenemos que

$$\nabla_{\mu}T_{\nu}^{\mu} \equiv \partial_{\mu}T_{\nu}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu}T_{\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}T_{\alpha}^{\mu} = 0. \quad (2.16)$$

Para poder relacionar nuestras dos variables  $\rho$  y  $\mathcal{P}$ , sólo nos es útil considerar el caso en el que  $\nu = 0$ . Como nuestro tensor en forma matricial es diagonal, todos aquellos valores para  $\alpha$  y  $\mu$  que sean distintos de cero en el primer y segundo término respectivamente, desaparecerán. Así, obtenemos que

$$\partial_0 T_0^0 + \Gamma_{0\mu}^{\mu} T_0^0 - \Gamma_{0\mu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu} = 0. \quad (2.17)$$

Si consideramos que  $T_0^0 = -\rho$  nos queda

$$-\partial_0 \rho - \Gamma_{0\mu}^{\mu} \rho - \Gamma_{0\mu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu} = 0. \quad (2.18)$$

El tercer término lo podemos expandir en la suma implícita en los índices, tal que

$$\Gamma_{0\mu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu} = \Gamma_{00}^0 T_0^0 + \Gamma_{01}^1 T_1^1 + \Gamma_{02}^2 T_2^2 + \Gamma_{03}^3 T_3^3 \quad (2.19)$$

$$= -\Gamma_{00}^0 \rho + \mathcal{P} (\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3). \quad (2.20)$$

Usando la Ec. (2.8), podemos escribir los símbolos de Christoffel de la ecuación anterior como

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0 g_{00} + \cancel{\partial_0 g_{00}} - \cancel{\partial_0 g_{00}}). \quad (2.21)$$



De aquí podemos derivar una ecuación general para los símbolos de Christoffel tal que  $\Gamma_{0k}^i = \frac{1}{2}g^{ji}\partial_0 g_{jk}$ , con  $\partial_0$  la derivada temporal.

Para la métrica de FRW, tenemos que solo los términos espaciales tienen dependencia del tiempo gracias al factor de escala  $a(t)$ , tal que

$$g_{11} = a^2(t)(1 - kr^2)^{-1} \quad (2.22)$$

$$g^{11} = a^2(t)(1 - kr^2). \quad (2.23)$$

Así, obtenemos que se cumple que

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a} \equiv H \quad (2.24)$$

donde hemos definido el factor de Hubble  $H$ . Combinando las Ecs. (2.18), (2.20) y (2.24) obtenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}[3\rho + 3\mathcal{P}] = 0 \quad (2.25)$$

la cual corresponde a la ecuación de conservación de energía en un universo en expansión lleno de un fluido ideal. Podemos reescribir esta ecuación de la siguiente forma:

$$d(a^3\rho) + \mathcal{P}d(a^3) = 0. \quad (2.26)$$

Si consideramos  $a^3$  como el volumen de un trozo del universo en expansión, nos relaciona la expansión del universo con la primera ley de la termodinámica, donde obtenemos que la expansión es un proceso adiabático.

### 2.2.2. Ecuación de Estado

Ahora estamos interesados en encontrar una ecuación que nos relacione de manera más directa las variables de nuestro sistema, es decir, buscamos una ecuación de estado para el universo en expansión. Como ya supusimos el modelo del universo lleno de un fluido ideal, es válido comenzar con la ecuación de estado del gas ideal, la cual viene dada por [19]

$$\mathcal{P}V = Nk_B T \quad (2.27)$$

con  $k_B = 1$  la constante de Boltzmann. Sabemos también que, para el gas ideal monoatómico, su energía interna cinética viene dada por

$$U = \frac{3}{2}Nk_B T, \quad (2.28)$$

por lo tanto, despejando  $T$  y reemplazando en la ecuación de estado obtenemos

$$\mathcal{P}V = \frac{2}{3}U. \quad (2.29)$$

Si tomamos  $\rho = U/V$  como la densidad de energía cinética en unidad de volumen, tenemos que  $U = \rho V$ , por lo tanto obtenemos que

$$\mathcal{P} = \frac{2}{3}\rho, \quad (2.30)$$

la cual es la reducción de la ecuación de estado para el gas ideal. Este resultado permite plantearnos una generalización de la proporcionalidad entre  $\mathcal{P}$  y  $\rho$ , que podemos definir mediante una constante de proporcionalidad  $\omega$  de modo que

$$\mathcal{P} = \omega \rho, \quad (2.31)$$

donde ahora  $\rho$  es la densidad de energía que incluye la energía en reposo. Esta constante nos permite distinguir entre el tipo de materia que estemos considerando. Estos valores son conocidos [15] y vienen dados, para distintas especies, por

$$\omega = \begin{cases} -1 & \text{(Energía del Vacío)} \\ 0 & \text{(Materia)} \\ \frac{1}{3} & \text{(Radiación).} \end{cases} \quad (2.32)$$

Ahora podemos juntar las Ecs. (2.25) y (2.31) con el objetivo de poder obtener una ecuación diferencial para la densidad, tal que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho (1 + \omega) = 0, \quad (2.33)$$

la cual tiene por solución

$$\rho(t) = a(t)^{-3(1+\omega)} \rho_0 \quad (2.34)$$

donde  $\rho_0$  corresponde a la densidad actual en  $t_0$ .

Ya con estos resultados, podemos obtener ciertas proporcionalidades para el factor de escala y las distintas densidades. Volviendo a la Ec. (2.25), si consideramos que la materia ( $\omega = 0$ ) ejerce netamente 0 presión en todo el universo, se tiene que

$$\frac{\partial [\rho_m a^3]}{\partial t} = 0, \quad (2.35)$$

donde se obtiene que para la densidad de energía de la materia la proporcionalidad con el factor de escala viene dada por  $\rho_m \propto a^{-3}$ . Este es un resultado bastante intuitivo si consideramos  $a^3$  como un volumen, donde una expansión implicaría una disminución en la densidad numérica al mantener la materia constante.

Asimismo, si consideramos que para la radiación  $\mathcal{P} = \rho/3$ , obtenemos que

$$\frac{\partial \rho_r}{\partial t} \frac{\dot{a}}{a} 4 \rho_r = a^{-4} \frac{\partial [\rho_r a^4]}{\partial t}. \quad (2.36)$$

Por lo tanto, la densidad de energía para la radiación va del orden  $\rho_r \propto a^{-4}$ , haciendo sentido a la disminución de energía por partícula mientras el universo se expande.

### 2.2.3. Densidades Críticas

Ahora podemos utilizar los resultados que hemos obtenido para poder obtener ecuaciones que nos permitan determinar el comportamiento del factor de escala en dependencia de lo que esté compuesto nuestro universo. Para esto, usando  $c = 1$  y

considerando la componente 0-0 de la ecuación de Einstein (ver Ec. (2.15)), obtenemos [15]

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.37)$$

que es conocida como la ecuación de Friedmann. Al introducir nuestra solución para  $\rho(t)$  obtenida en (2.34), la Ec. (2.37) nos queda

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}a^{-3(1+\omega)}\rho_0 + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.38)$$

Resolver esta ecuación nos permite obtener el comportamiento de distintas épocas del universo. En nuestro caso, nos interesa estudiar la época de radiación, que es cuando ocurre el freeze-out. En esta  $\omega = 1/3$  y  $\Lambda = 0$ , de manera que la Ec. (2.38) nos queda

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3}a^{-4}, \quad (2.39)$$

la cual tiene como solución

$$a(t) = \left(\frac{32\rho_0}{3}\right)^{1/4} \sqrt{t}. \quad (2.40)$$

De aquí concluimos que el factor de escala para la época de radiación del universo va como  $a \sim t^{1/2}$ .

Podemos reescribir la Ec. (2.37) de manera conveniente como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3}{8\pi G}\Lambda\right) - \frac{k}{a^2}, \quad (2.41)$$

donde utilizamos la definición del parámetro de Hubble  $H = \dot{a}/a$ . Los términos dentro del paréntesis corresponden a todas las densidades del universo, donde  $3\Lambda/8\pi G = \rho_\Lambda$  es la densidad del vacío mientras que  $\rho = \rho_R + \rho_{MNR}$  es la suma de las densidades de energía de radiación y de materia no relativista respectivamente.

Así, la ecuación de Friedmann la podemos reescribir en la forma

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \frac{(\rho_R + \rho_{MNR} + \rho_\Lambda)}{3H^2/8\pi G} - 1. \quad (2.42)$$

Podemos definir dos nuevos conceptos: la densidad crítica ( $\rho_c$ ) y la densidad relativa ( $\Omega$ ), según

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} \quad \Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (2.43)$$

donde  $\rho = (\rho_R + \rho_{MNR} + \rho_\Lambda)$  es la densidad de energía total. Podemos definir, además, densidades relativas para cada una de las especies no considerando las que no

son de interés, tal que

$$\begin{aligned}\Omega_R &= \frac{\rho_R}{\rho_c} \\ \Omega_{MNR} &= \frac{\rho_{MNR}}{\rho_c} \\ \Omega_\Lambda &= \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}.\end{aligned}$$

Podemos separar las densidades en materia y radiación, donde la primera la podemos subdividir en materia bariónica, materia oscura y energía oscura. De acuerdo a mediciones recientes [20] la densidad de radiación es despreciable, mientras que las otras densidades son:  $\Omega_M = 4,9\%$ ,  $\Omega_{DM} = 26,8\%$  y  $\Omega_\Lambda = 68,3\%$ .

#### 2.2.4. Cambios de Variables

Si utilizamos los resultados obtenidos en las secciones anteriores, la primera ley de la termodinámica también debería aplicar al universo en expansión, por lo tanto se debe cumplir que

$$dU = TdS - \mathcal{P}dV. \quad (2.44)$$

Si despejamos la entropía  $S$  de la Ec. (2.44) obtenemos:

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{\mathcal{P}}{T}dV. \quad (2.45)$$

Si suponemos que la densidad energía del sistema depende únicamente de  $T$  y no de  $V$  y es homogénea,  $U \equiv \rho V$  y así, ante un cambio de volumen manteniendo  $T$  fija,  $dU \equiv \rho dV$ . De esta manera, la Ec. (2.45) nos queda

$$dS = \frac{\rho dV}{T} + \frac{\mathcal{P}}{T}dV. \quad (2.46)$$

Considerando que  $dV \equiv d(a^3)$  y reemplazando, logramos obtener una ley de conservación:

$$dS = d\left[\left(\frac{\rho + \mathcal{P}}{T}\right)a^3\right]. \quad (2.47)$$

Como obtuvimos que el universo se expande como un proceso adiabático, la variación de entropía es 0, por lo tanto la Ec. (2.47) se simplifica a

$$d\left[\left(\frac{\rho + \mathcal{P}}{T}\right)a^3\right] = 0. \quad (2.48)$$

De aquí, podemos definir un nuevo concepto: la densidad de entropía por volumen comóvil:

$$s \equiv \frac{S}{a^3} = \frac{\rho + \mathcal{P}}{T}, \quad (2.49)$$

que la podemos expresar como [15]

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*S} T^3 \quad (2.50)$$

con  $g_{*s}$  el número de grados de libertad relativistas para la entropía, el cual es una función de la temperatura y toma la siguiente forma:

$$g_{*s}(T) = \sum_{i=\text{bosones}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermiones}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^3. \quad (2.51)$$

Con esto, la Eq. (2.48) se nos convierte en una ecuación que representa la conservación de la densidad de entropía en un volumen comóvil. El hecho que esta cantidad cumpla que  $s \propto a^{-3}$ , implica que el tamaño físico de un volumen comóvil cumple con  $a^3 \propto s^{-1}$ .

Asimismo, la cantidad de cierta especie de partículas en un volumen comóvil ( $N = na^3$ ) nos permite definir el «yield»:

$$Y \equiv \frac{n}{s}, \quad (2.52)$$

donde  $n$  es la densidad numérica de esta especie. Así,  $Y$  no depende de  $a(t)$ .

En cosmología, nos es útil medir las evoluciones temporales en una función que dependa de  $T$  y no del tiempo mismo, ya que las densidades son funciones explícita de  $T$  y no de  $t$ . Es por esto que cuando estudiamos la evolución del universo, la medición del tiempo se realiza en términos de la temperatura  $T$ , la cual es una función estrictamente decreciente del tiempo, así, nos es útil definir nuestra nueva variable temporal:

$$x \equiv \frac{m}{T}, \quad (2.53)$$

donde, en la era de radiación del universo, la temperatura  $T$  se relaciona con  $t$  y  $x$  como [15]

$$t = 0,301 g_*^{-1/2} \frac{m_{Pl}}{T^2} = 0,301 g_*^{-1/2} \frac{m_{Pl}}{m^2} x^2, \quad (2.54)$$

con  $m_{Pl} = 2,176 \times 10^{-8} \text{ [Kg]} = 1,22 \times 10^{19} \text{ [GeV]}$  la masa de Planck [21] y  $g_*$  el número de grados de libertad relativistas efectivo, que similar a  $g_{*s}$ , es también una función de la temperatura según

$$g_*(T) = \sum_{i=\text{bosones}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermiones}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4. \quad (2.55)$$

A continuación, en el Cap. 3 realizaremos un formalismo que nos permite obtener la abundancia de materia oscura, la cual viene representada en términos de la evolución temporal respecto a esta nueva variable que definimos. Además, haremos un análisis en profundidad de su comportamiento haciendo uso de los resultados obtenidos y los formalismos desarrollados en este capítulo, además de introducir la mecánica estadística a nuestro trabajo.



## Capítulo 3

# Génesis y Densidad de Reliquia

El universo en sus primeros segundos de vida era un denso plasma de partículas a altísima temperatura, lo que implica que todas las partículas interactuaban con mucha frecuencia entre ellas, lo que nos da como resultado un sistema en equilibrio termodinámico, es decir, se creaban y se aniquilaban partículas con la misma tasa. Sin embargo, debido a que el universo comenzó su proceso de expansión, estas interacciones comenzaron a disminuir su tasa.

En el momento en el que la tasa de interacción se iguala a la expansión del universo, las partículas de materia oscura se separan demasiado las unas de las otras, lo que implica que las aniquilaciones cesen y estas se desacoplen. Este fenómeno nos deja con una cantidad residual de materia oscura llamada densidad de reliquia y el fenómeno recibe el nombre de “Freeze-Out”. En las siguientes secciones formularemos los modelos matemáticos que nos permitan replicar este proceso haciendo uso de todos los antecedentes cosmológicos y termodinámicos vistos en el capítulo anterior.

### 3.1. Ecuación de Boltzmann

Para una especie de partículas, la densidad de su espacio de fase nos permite tener información sobre la distribución espacial y temporal de su momentum. Como tenemos un espacio isotrópico descrito por la métrica de FRW, la dependencia espacial es ignorable, por lo tanto la distribución del espacio de fase  $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$  se simplifica a  $f(p, t) \equiv f(E, t)$ .

En equilibrio y a cierta temperatura  $T$ , los bosones y fermiones con potencial químico  $\mu$  tienen distribuciones de Bose-Einstein y de Fermi-Dirac respectivamente [13], las cuales toman la siguiente forma

$$f_{BE} = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} - 1} \quad (3.1)$$

$$f_{FD} = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} + 1} \quad (3.2)$$

Conociendo estas funciones, podemos obtener tres importantes cantidades en equilibrio térmico: la densidad numérica, densidad de energía y presión:

$$n_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p f_i(E, t), \quad (3.3)$$

$$\rho_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p f_i(E, t) E, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{P}_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p f_i(E, t) \frac{p^2}{3E}, \quad (3.5)$$

con  $g_i$  el número internos de grados de libertad.

Para poder abordar adecuadamente el desacoplo, se debe hacer un tratamiento holístico al sistema. Para lograrlo, debemos comenzar con la ecuación de Boltzmann, la cual gobierna la evolución del espacio de fase de las partículas. En su forma más compacta, esta puede ser escrita como [15]

$$\hat{\mathbf{L}}[f] = \frac{df}{dt} = \mathbf{C}[f], \quad (3.6)$$

donde  $\hat{\mathbf{L}}$  es conocido como el operador de Liouville y  $\mathbf{C}$  es el operador de colisiones, el cual contiene toda la información respecto a las interacciones entre partículas. En su forma covariante y relativista el operador de Liouville toma la siguiente forma:

$$\hat{\mathbf{L}} = p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma \frac{\partial}{\partial p^\alpha}. \quad (3.7)$$

La gravedad entra en juego con el símbolo de Christoffel definido en la Ec. (2.8). Utilizando nuestro formalismo del universo isotrópico modelado por la métrica de FRW y tomando en cuenta el resultado obtenido en (2.24), el operador de Liouville queda como

$$\hat{\mathbf{L}}[f] = E \frac{\partial f}{\partial t} - H |\mathbf{p}|^2 \frac{\partial f}{\partial E}. \quad (3.8)$$

Insertando esta expresión en la Ec. (3.6) nos queda

$$E \frac{\partial f}{\partial t} - H |\mathbf{p}|^2 \frac{\partial f}{\partial E} = \mathbf{C}[f],$$

expresión la cual, al integrar sobre el espacio de fases, nos entrega

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{\partial f}{\partial t} - H \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{|\mathbf{p}|^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{E} \mathbf{C}[f]. \quad (3.9)$$

Simplificando esta ecuación y viendo la definición dada en (3.3), obtenemos que la ecuación de Boltzmann la podemos escribir como

$$\frac{dn}{dt} + 3nH = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{E} \mathbf{C}[f]. \quad (3.10)$$

Esta expresión la podemos simplificar aún más si consideramos el lado izquierdo de la ecuación como una derivada completa utilizando  $H = \dot{a}/a$ . Así, obtenemos

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(na^3)}{dt} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{E} \mathbf{C}[f]. \quad (3.11)$$

En ausencia de interacciones, la Ec. (3.11) nos dice que la densidad multiplicada por el factor de escala al cubo se conserva, lo cual tiene sentido si pensamos en la naturaleza del universo en expansión: mientras la grilla comóvil que modela el universo se expande, el volumen de una región que contiene  $N$  partículas crece como  $a^3$ .

En el caso de las partículas de materia oscura, consideramos que estas sí pueden interactuar, por lo que debemos considerar el lado derecho de la Ec. (3.11) como no cero.



Si suponemos que el único proceso que afecta la abundancia de nuestras partículas de materia oscura, que denotaremos como  $\chi$ , es la aniquilación con otra especie, es decir:  $(\chi + a + \dots \leftrightarrow i + j + \dots)$ , el lado derecho de la ecuación (3.11) lo podemos escribir como [13, 15]

$$\begin{aligned} \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{E} \mathbf{C}[f] &= \int d\Pi_\chi d\Pi_a \dots d\Pi_i d\Pi_j \dots \\ &\times (2\pi)^4 \delta^4(p_\chi + p_a + \dots - p_i - p_j - \dots) \\ &\times \left[ |\mathcal{M}|_{\chi+a+\dots \rightarrow i+j+\dots}^2 f_\chi f_a \dots (1 \pm f_i)(1 \pm f_j) \dots \right. \\ &\quad \left. - |\mathcal{M}|_{i+j+\dots \rightarrow \chi+a+\dots}^2 f_i f_j \dots (1 \pm f_\chi)(1 \pm f_a) \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Esta es una ecuación integrodiferencial para la distribución del espacio de fase. En esta nos encontramos con el espacio de fases invariante de Lorentz o DLIPS ( $d\Pi$ ), el cual aparece ya que, para poder encontrar el total de interacciones, debemos sumar sobre todo el espacio de momenta. Este viene dado por

$$d\Pi_i \equiv \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_i}{2E_i}. \quad (3.13)$$

Notemos que las deltas dentro de la integral en la segunda línea de la Ec. (3.12) aseguran que haya conservación del momentum en las interacciones mientras que el factor  $(2\pi)^4$  aparece al haberlas transformado de un sistema discreto (Kronecker) a uno continuo (Dirac).

Además, tenemos a los elementos de matriz o probabilidades  $|\mathcal{M}|^2$ , términos que contienen las dinámicas del proceso y son funciones de los momenta. Cada uno de los que aparecen en la expresión corresponde al proceso directo e inverso respectivamente.

Los signos de  $(1 \pm f_\alpha)$  hacen distinción del tipo de partículas en el estado final, siendo suma para bosones y resta para fermiones. Las funciones  $f_\alpha$  corresponden a las distribuciones definidas en (3.1) y (3.2), ya que como las interacciones ocurren muy rápidamente en la época del universo que estamos estudiando, podemos considerar un equilibrio cinético entre todas las partículas interactuantes. Estas las podemos simplificar y unificar, si consideramos que estamos interesados en el caso en el que la temperatura es menor a  $E - \mu$ . En este límite, podemos considerar el gas como clásico, en donde  $f \ll 1$ , lo que nos lleva a que el factor  $\pm 1$  sea despreciable frente a la exponencial. Esto nos simplifica las funciones en una distribución de Maxwell-Boltzmann:

$$f(E_i, \mu_i) = e^{\mu_i/T} e^{-E_i/T}. \quad (3.14)$$

Asimismo, esta distribución nos permite reescribir la densidad numérica en equilibrio térmico dada en (3.3), que queda como

$$n_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} e^{\mu_i/T} \int d^3p e^{-E_i/T}. \quad (3.15)$$

Aquí podemos definir la densidad numérica de las partículas con  $\mu = 0$ , tal que

$$n_i^{EQ} = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-E_i/T}, \quad (3.16)$$

así, de la Ec. (3.15) podemos obtener

$$\frac{n_i}{n_i^{EQ}} = e^{\mu_i/T}, \quad (3.17)$$

resultado el cual nos permite reescribir la Ec. (3.14) como

$$f(E_i) = \frac{n_i}{n_i^{EQ}} e^{-E_i/T}. \quad (3.18)$$

Otra suposición que nos simplificará la Ec. (3.12) es que las interacciones ocurran de igual forma si las partículas se convierten en sus correspondientes antipartículas (invariancia CP) o si invertir el proceso no afecta la probabilidad de ocurrencia (invariancia T). Matemáticamente, esto se representa con la amplitud, tal que cumpla que

$$|\mathcal{M}|_{\chi+a+\dots \rightarrow i+j+\dots}^2 = |\mathcal{M}|_{i+j+\dots \rightarrow \chi+a+\dots}^2 \equiv |\mathcal{M}|^2. \quad (3.19)$$

Considerando lo obtenido en las Ecs. (3.18) y (3.19), las últimas dos líneas de la Ec. (3.12) las podemos reescribir como

$$|\mathcal{M}|^2 e^{-(E_\chi + E_a + \dots)/T} \left[ \frac{n_i n_j \dots}{n_i^{EQ} n_j^{EQ}} - \frac{n_\chi n_a \dots}{n_\chi^{EQ} n_a^{EQ} \dots} \right]. \quad (3.20)$$

Así, la Ec. (3.12) nos queda más simplificada tal que

$$\begin{aligned} \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{E} \mathbf{C}[f] &= \int d\Pi_\chi d\Pi_a \dots d\Pi_i d\Pi_j \dots \\ &\times (2\pi)^4 \delta^4(p_\chi + p_a + \dots - p_i - p_j - \dots) \\ &\times |\mathcal{M}|^2 e^{-(E_\chi + E_a + \dots)/T} \left[ \frac{n_i n_j \dots}{n_i^{EQ} n_j^{EQ}} - \frac{n_\chi n_a \dots}{n_\chi^{EQ} n_a^{EQ} \dots} \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Para simplificar aún más nuestra ecuación de Boltzmann, vamos a definir un nuevo término: la sección eficaz promediada térmicamente, la cual viene dada por [13]

$$\langle \sigma v \rangle \equiv \frac{1}{n^{EQ}} \int \sigma(E) f(E) v dE, \quad (3.22)$$

donde  $\sigma(E)$  es la sección eficaz de los procesos y  $v$  la velocidad de colisión. Físicamente, este concepto lo consideramos como un promedio de las secciones eficaces en función de las energías de las partículas, donde la distribución  $f(E)$  actúa como pesos estadísticos para cada una de las secciones. En nuestro caso, la podemos escribir como

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle &= \frac{1}{n_\chi^{EQ} n_a^{EQ} \dots} \int d\Pi_\chi d\Pi_a \dots d\Pi_i d\Pi_j \dots (2\pi)^4 \\ &\times \delta^4(p_\chi + p_a + \dots - p_i - p_j - \dots) |\mathcal{M}|^2 e^{-(E_\chi + E_a + \dots)/T}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Así, utilizando esta definición, la ecuación de Boltzmann general que obtuvimos en la Ec. (3.11) nos queda de manera simplificada como

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_\chi a^3)}{dt} = \langle \sigma v \rangle n_\chi^{EQ} n_a^{EQ} \dots \left[ \frac{n_i n_j \dots}{n_i^{EQ} n_j^{EQ} \dots} - \frac{n_\chi n_a \dots}{n_\chi^{EQ} n_a^{EQ} \dots} \right]. \quad (3.24)$$

Con este resultado, pasamos de una ecuación integrodiferencial a una ecuación diferencial ordinaria para la densidad numérica. Para la derivación de este modelo consideramos la interacción  $(\chi + a + \dots \leftrightarrow i + j + \dots)$ , pero el resultado obtenido es general, por lo que podemos comenzar a estudiar interacciones más específicas y ver cómo evoluciona la densidad de las partículas interactuantes relacionándola con la expansión del universo con el factor de escala  $a(t)$ .

### 3.2. Freeze-Out y Abundancia

Uno de los supuestos que utilizamos para obtener la forma de la ecuación de Boltzmann como la Ec. (3.24) fue considerar que el factor  $\pm 1$  en las funciones de distribuciones de Fermi-Dirac y Bose-Einstein era despreciable. Esto lo justificamos con que estábamos interesados en estudiar el caso en el que la temperatura de las partículas cae bajo su masa ( $T < E - \mu \equiv m$ ), es decir, que sean frías. En el momento de igualdad entre la temperatura y la masa, las partículas se «congelan», proceso también conocido como «freeze-out», lo que implica la incapacidad mantener el equilibrio cinético y químico con las aniquilaciones.

Nuestro objetivo ahora es resolver la ecuación de Boltzmann para el caso genérico de WIMPs, donde el proceso de autoaniquilación viene dado por  $(\chi + \chi \rightarrow l + l)$ , donde 2 partículas masivas  $\chi$  se aniquilan para producir 2 partículas muy ligeras  $l$  tal que ( $m_l \approx 0$ ) y ( $n_l = n_l^{EQ}$ ). Con este mecanismo, la ecuación de Boltzmann nos queda

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_\chi a^3)}{dt} = \langle \sigma v \rangle \left[ \left( n_\chi^{EQ} \right)^2 - n_\chi^2 \right]. \quad (3.25)$$

Si utilizamos la definición para  $Y = n/s$  dada en (2.52), notemos que, con cierta manipulación, la Ec. (3.25) la podemos reescribir, considerando que

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{n}{s} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{a^3 n}{a^3 s} \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$= \frac{1}{s} \left( \frac{1}{a^3} \frac{d(n a^3)}{dt} \right). \quad (3.27)$$

Aquí hemos utilizado el hecho de que la expansión del universo es adiabática, por lo tanto  $a^3 s$  permanece constante y puede salir de la derivada.

Con este resultado podemos reescribir la Ec. (3.25) en términos de la cantidad total de partículas  $Y$  y obtener una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dY}{dt} = s \langle \sigma v \rangle \left[ \left( Y^{EQ} \right)^2 - Y^2 \right], \quad (3.28)$$

donde  $Y^{EQ} = n_{\chi}^{EQ}/s$ . Integrando (3.3) y utilizando la definición para la densidad de entropía (2.50) obtenemos [15]

$$Y^{EQ} = 0,145 \frac{g}{g_{*s}} x^{3/2} e^{-x}. \quad (3.29)$$

Utilizando nuestra definición para la variable  $x$  que hicimos en la Ec. (2.53) y considerando que se cumple que  $a \propto T^{-1}$  a partir de lo que obtuvimos en el Cap. 2, obtenemos

$$\frac{d}{dt}(aT) = 0 \rightarrow m \frac{d}{dt} \left( \frac{a}{x} \right) = 0, \quad (3.30)$$

donde, al desarrollar la derivada, obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{a}{x} \right) = \frac{\dot{a}x - a\dot{x}}{x^2} = 0 \quad (3.31)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = Hx, \quad (3.32)$$

con  $H = \dot{a}/a$ . Esta relación la utilizaremos como nuestro Jacobiano para realizar la parametrización, tal que

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dY}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dY}{dx} Hx. \quad (3.33)$$

Así, nuestra ecuación de Boltzmann nos queda como

$$\frac{dY}{dx} Hx = s \langle \sigma v \rangle \left[ \left( Y^{EQ} \right)^2 - Y^2 \right]. \quad (3.34)$$

Si recordamos según lo visto en el Cap. 2, el factor de escala va como  $a \sim t^{1/2}$ , asimismo, el tiempo va como  $t \sim T^{-2}$  (ver Ec. (2.54)), por lo tanto  $a \sim T^{-1}$ . Así, podemos escribir el parámetro de Hubble como

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{T}}{T}. \quad (3.35)$$

Sin embargo, obtuvimos una relación entre  $T$  y  $t$  en el Cap. 2 que podemos utilizar para poder obtener  $\dot{T}$  en la Ec. (2.54), la cual al derivar respecto al tiempo obtenemos

$$1 = -\frac{2 \times 0,301}{g_*^{1/2}} \frac{m_{Pl}}{T^2} \left( -\frac{\dot{T}}{T} \right), \quad (3.36)$$

lo que nos lleva a que el parámetro de Hubble en función de la temperatura es

$$H(T) = 1,67 g_*^{1/2} \frac{T^2}{m_{Pl}}. \quad (3.37)$$

Asimismo, podemos dejarlo expresado en función de  $m$  y  $x$  considerando que  $x = m/T$ :

$$H(T) = 1,67 g_*^{1/2} \frac{m^2}{m_{Pl}} \equiv \frac{H(m)}{x^2}. \quad (3.38)$$

Por lo tanto, podemos normalizar esta expresión de manera que sólo haya dependencia en la masa de manera que  $H(m) = H(T)x^2$ . Así, la Ec. (3.34) nos queda entonces

$$\frac{dY}{dx} = \frac{sx \langle \sigma v \rangle}{H(m)} \left[ (Y^{EQ})^2 - Y^2 \right]. \quad (3.39)$$

Finalmente, usando la Ec. (2.50), podemos definir un nuevo parámetro  $\lambda$  de la siguiente forma

$$\lambda \equiv \left[ \frac{sx \langle \sigma v \rangle}{H(m)} \right]_{x=1} = 0,263 \langle \sigma v \rangle m_{Pl} m \frac{g_{*s}}{\sqrt{g_*}}, \quad (3.40)$$

donde hemos reemplazado  $s$  y  $H(m)$  según (2.50) y la definición obtenida para el parámetro de Hubble a partir de (3.38) respectivamente. Esto nos permite reescribir la Ec. (3.39) en nuestra forma más práctica como

$$\frac{dY}{dx} = \frac{\lambda}{x^2} \left[ (Y^{EQ})^2 - Y^2 \right]. \quad (3.41)$$

Notar que  $\lambda$  se escoge que sea independiente de  $x$  dejando  $m = T \rightarrow x = 1$  y así dejar la dependencia en el factor  $x^{-2}$ . Gracias a esto,  $\lambda$  puede ser tratada como una constante, lo que nos es especialmente útil para el tratamiento numérico de esta ecuación.

### 3.2.1. Solución Analítica Aproximada

La ecuación de evolución que obtuvimos en la Ec. (3.41) nos determina la densidad de reliquia de una especie partículas de materia oscura y pertenece a una ecuación diferencial de Ricatti, la cual no tiene soluciones analíticas. Sin embargo, aún podemos extraer un poco más de física de esta si planteamos ciertas condiciones y restricciones a los comportamientos de las densidades.

#### Densidad en Freeze-Out

Si hacemos un análisis a la Fig. 3.3, notamos que a altas temperaturas ( $m \ll T$ ), la densidad  $Y$  sigue el comportamiento de  $Y^{EQ}$ . Sin embargo, cuando la temperatura comienza a disminuir y las especies se desacoplan, las aniquilaciones no ocurren con la tasa suficiente para mantenerse en equilibrio, por ende,  $Y^{EQ}$  será mucho más pequeño que  $Y$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Así, el lado derecho de la Eq. (3.41) será dominado por  $Y^2$  para  $x \gg x_f$ , donde el subíndice  $f$  representa el valor, en este caso de  $x$ , en el momento de freeze-out. Así, podemos simplificar

$$\frac{dY}{dx} \approx -\frac{\lambda}{x^2} Y^2, \quad (3.42)$$

la cual es una ecuación ordinaria de variables separables que podemos integrar entre  $x_f$  e  $\infty$  tal que

$$\begin{aligned} \int_{Y_f}^{Y_\infty} \frac{1}{Y^2} dY &\approx - \int_{x_f}^{\infty} \frac{\lambda}{x^2} dx \\ \Rightarrow \frac{1}{Y_\infty} - \frac{1}{Y_f} &= \frac{\lambda}{x_f}. \end{aligned}$$

Sin embargo, debido al carácter decreciente de las densidades,  $Y_f$  eventualmente será mucho mayor que  $Y_\infty$ , por lo tanto podemos hacer una última aproximación tal que

$$Y_\infty \approx \frac{x_f}{\lambda}. \quad (3.43)$$

No obstante, esta aproximación está incompleta, ya que tenemos una dependencia en el momento en el que se produce el freeze-out  $x_f$ , el cual definimos vagamente. Sin embargo, se suele realizar una estimación sencilla al orden de magnitud de este, donde  $x_f \sim 20$  [13], pero en la subsección siguiente haremos un cálculo más preciso.

Este resultado nos entrega un aproximado para la densidad de reliquia para tiempos lo suficientemente lejanos, la cual podremos utilizar como punto de comparación para los resultados que obtengamos a continuación utilizando métodos numéricos para resolver el mismo problema.

### Determinando $x_f$

Si recordamos,  $x_f$  es el tiempo cuando  $Y$  deja de seguirle la pista a  $Y^{EQ}$ , es decir, ocurre el desacoplo. Si definimos  $Y_f$  como  $Y_f = (c + 1)Y^{EQ}(x_f)$ , con  $c$  una constante numérica cercana a 1, E. Kolb y M. Turner [15] nos permiten definir  $x_f$  como

$$x_f \cong \ln[(2 + c)\lambda\alpha c] - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \{\ln[(2 + c)\lambda\alpha c]\}, \quad (3.44)$$

con  $\alpha = 0,145(g/g_{*s})$  (ver Ec. (3.29)), donde  $g$  es la degenerancia de las partículas y  $g_{*s}$  los grados de libertad relativistas para la entropía definida en la Ec. (2.51). Para gran parte de la historia del universo, todas las partículas tuvieron una temperatura en común, y por ende  $g_{*s}$  puede ser reemplazado por  $g_*$ . En la Ec. (3.44) nos encontramos aquí con un parámetro  $n$ , que proviene del tipo de aniquilación entre las partículas. Estos detalles van más allá del enfoque de este estudio, pero tomaremos  $n = 0$  que corresponde a una interacción de ondas  $s$ . Lo que esto nos determina es que las colisiones serán independientes de la dirección de salida de las partículas. Esencialmente, lo que esto significa es que  $\langle\sigma v\rangle$  es independiente de  $x$  y que el orden de  $x$  en el denominador de la Ec. (3.41) sea cuadrático.

Así, el tiempo de freeze-out nos queda como:

$$x_f \cong \ln[(2 + c)\lambda\alpha c] - \frac{1}{2} \ln \{\ln[(2 + c)\lambda\alpha c]\}. \quad (3.45)$$

Si escogemos  $c(c + 2) = n + 1$ , donde  $n = 0$ ,  $x_f$  nos queda entonces

$$x_f = \ln(\lambda\alpha) - \frac{1}{2} \ln \{\ln(\lambda\alpha)\}. \quad (3.46)$$

En la Fig. 3.1 podemos observar cómo se comporta  $x_f$  para distintos valores de  $\lambda$ , donde hemos usado  $g = 1$  y  $g_{*s} = 100$ , considerando esta una buena aproximación para altas temperaturas [22].

Notamos que para  $\lambda > 10^3$ ,  $x_f$  se vuelve una función netamente creciente, sin embargo, para valores de  $\lambda$  más pequeños, es decir, para tasas de colisión menores comparadas con la tasa de expansión del universo,  $x_f$  se comporta de distinta manera. Este comportamiento lo justificamos al ver la Ec. (3.46), donde el segundo término con los logaritmos naturales nos determina un límite en el cual la expresión

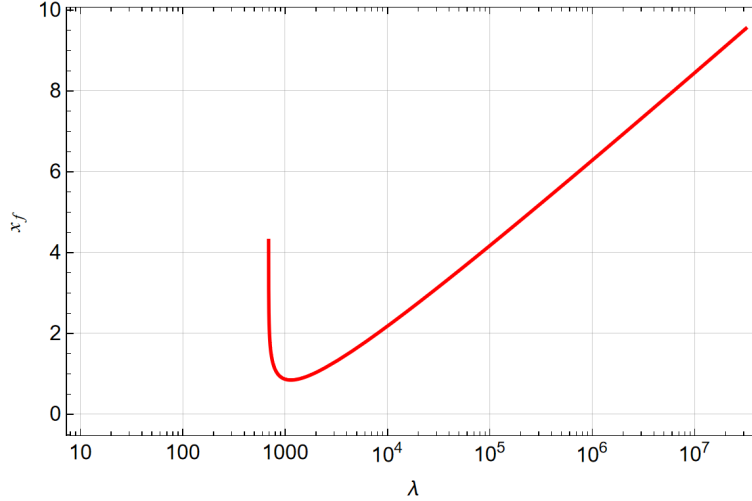


FIGURA 3.1: Comportamiento del momento de «freeze-out» en función de  $\lambda$  según la Ec. (3.46).

original para  $x_f$  es válida. Cuando  $\lambda = \alpha^{-1}$ , la ecuación (3.46) se indetermina, por lo que debemos analizar su comportamiento para valores mayores a este. Para esos casos, notamos una linealidad entre el momento de freeze-out y  $\lambda$ , lo que nos predice que el desacoplo térmico tarde más en ocurrir para sistemas con una mayor tasa de interacción.

Utilizando la definición para  $\lambda$  dada en la Ec. (3.40):

$$\lambda = 0,263 \langle \sigma v \rangle m_{Pl} m \frac{g_{*s}}{\sqrt{g_*}}, \quad (3.47)$$

podemos reemplazar  $\lambda$  en la Ec. (3.46), lo que nos permite escribir el momento de freeze-out como

$$x_f = \ln \left( 0,038 \langle \sigma v \rangle m_{Pl} m \frac{g}{\sqrt{g_*}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left\{ \ln \left( 0,038 \langle \sigma v \rangle m_{Pl} m \frac{g}{\sqrt{g_*}} \right) \right\}. \quad (3.48)$$

Notemos que el término  $\ln \ln(\dots)$  lo podemos despreciar respecto al primero, ya que será siempre como mínimo un orden de magnitud más pequeño, así  $x_f$  nos queda

$$x_f \approx \ln \left( 0,038 \langle \sigma v \rangle m_{Pl} m \frac{g}{\sqrt{g_*}} \right). \quad (3.49)$$

Insertando esta expresión en la Ec. (3.43), multiplicando a ambos lados por  $m$  y reemplazando  $\lambda$  según la Ec. (3.47) obtenemos

$$mY_\infty \approx m \frac{\ln \left( 0,038 \langle \sigma v \rangle m_{Pl} m \frac{g}{\sqrt{g_*}} \right)}{0,263 \langle \sigma v \rangle m_{Pl} m \frac{g_{*s}}{\sqrt{g_*}}}. \quad (3.50)$$

Definiendo la constante  $K = 0,038 m_{Pl} \frac{g}{\sqrt{g_*}}$  la Ec. (3.50) nos queda de la siguiente manera:

$$mY_\infty \approx \frac{\ln(Km \langle \sigma v \rangle)}{0,263 \langle \sigma v \rangle m_{Pl} \frac{g_{*s}}{\sqrt{g_*}}}, \quad (3.51)$$

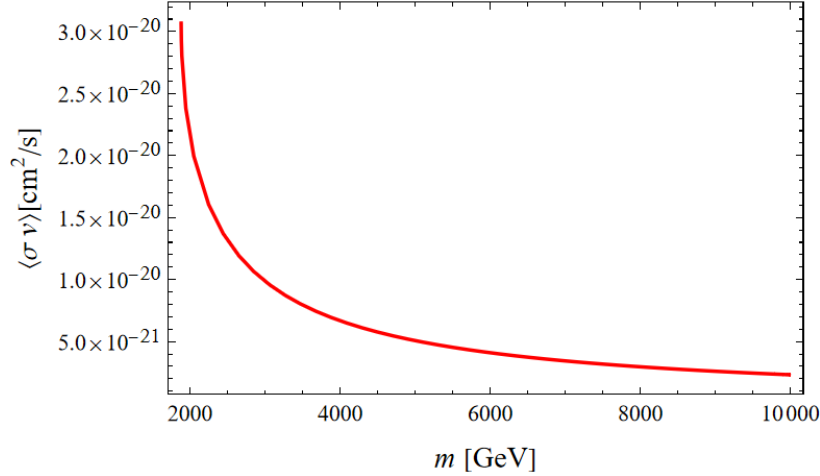


FIGURA 3.2: Relación entre  $\langle\sigma v\rangle$  y  $m$  según la Ec. (3.52) al considerar la abundancia de materia oscura final  $mY_\infty$  igual a 1.

expresión la cual podemos reescribir convenientemente como

$$\frac{3,802\sqrt{g_*}}{m_{Pl}g_{*s}} \ln(Km \langle\sigma v\rangle) - \langle\sigma v\rangle mY_\infty = 0. \quad (3.52)$$

Si consideramos que la abundancia de materia oscura final  $mY_\infty$  es fija, obtenemos una relación únicamente entre las variables  $\langle\sigma v\rangle$  y  $m$  a partir de la Ec. (3.52). Al despejar  $\langle\sigma v\rangle$  de la ecuación, obtenemos esta relación, la que vemos graficada en la Fig. 3.2, a partir de la cual apreciamos la clara relación inversa entre ambas variables.

### 3.2.2. Análisis Numérico

Podemos utilizar métodos matemáticos para calcular  $Y(x)$ , para los cuales, en prácticamente todos los casos  $\lambda$  será del orden de  $10^8$ . Este valor tan grande implica una complejidad mayor a la hora de integrar usando métodos numéricos, la cual puede ser evadida introduciendo el siguiente cambio de variables:

$$W(x) \equiv \ln(Y(x)), \quad (3.53)$$

con  $W^{EQ}$  definido de manera análoga como lo realiza Steigman et al. [23]. Esto nos lleva a la siguiente reformulación de la Ec. (3.41)

$$\frac{dW}{dx} = \frac{\lambda}{x^2} \left[ e^{(2W^{EQ}-W)} - e^W \right]. \quad (3.54)$$

La estrategia consiste en resolver esta ecuación en el intervalo  $1 \leq x \leq 10^3$ , donde se asume que  $Y(10^3) = Y_\infty$ , y realizar la transformación dada en la Ec. (3.53) para obtener  $Y(x)$ . El objetivo principal de esto es encontrar el  $\langle\sigma v\rangle$  necesario para adecuar los resultados a la abundancia experimental que tenemos hoy en día.

Con esto en consideración, en la Fig. 3.3 presentamos soluciones a la Ec. (3.41). Notamos que para el rango dado por los valores de  $\lambda$  utilizados, en  $x < 10$  las soluciones no difieren en su comportamiento respecto a la abundancia en equilibrio, lo cual cobra sentido si consideramos que las interacciones siguen siendo lo suficientemente frecuentes como para mantener el equilibrio químico en las especies. De ahí



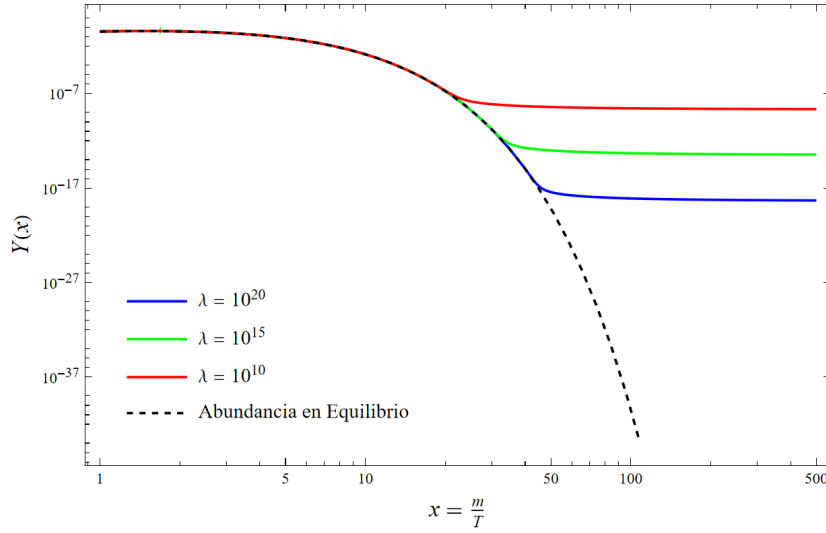


FIGURA 3.3: Soluciones a la Ec. (3.41). Se representan las abundancias en equilibrio térmico y cuando ocurre «freeze-out» para distintos valores de  $\lambda$ .

en adelante, la tasa de expansión del universo comienza a superar la tasa de interacción de las partículas y se apartan del comportamiento en equilibrio. Es posible observar cómo la abundancia decrece cada vez más lentamente y se vuelve prácticamente constante, experimentando «freeze-out». El incremento en el valor de  $\lambda$  provoca un retardo en el proceso de desacoplo, ya que las interacciones se producen en mayor cantidad, lo que conlleva a una menor densidad de reliquia de la especie.

### 3.2.3. Calculando la Abundancia

En el Cap. 2 definimos la fracción que contribuye la densidad crítica de una especie como  $\Omega_X = \rho_X / \rho_c$ , donde  $\rho_c$  está definido en la Ec. (2.43) y  $X$  representa la partícula de materia oscura. Scott Dodelson [13] plantea un modelo muy similar al nuestro pero con una diferencia: considera que

$$Y \equiv \frac{n}{T^3} \qquad \lambda \equiv \frac{m_X^3 \langle \sigma v \rangle}{H(m_X)}. \quad (3.55)$$

Estas definiciones tienen sentido físico y relación con nuestras definiciones si consideramos que la densidad de entropía va como  $T^3$  según la Ec. (2.50).

Con aquel modelo, Dodelson obtiene la siguiente expresión para  $\rho_X$ :

$$\rho_{X,0} \simeq \frac{m_X Y_\infty T_0^3}{30}, \quad (3.56)$$

donde los subíndices 0 representan los valores actuales. Reemplazando  $Y_\infty$  según (3.43), obtenemos que  $\Omega_X$  toma la siguiente forma:

$$\Omega_X = \frac{x_f m_X T_0^3}{\lambda 30 \rho_c} \quad (3.57)$$

$$= \frac{H(m_X) x_f T_0^3}{30 m_X^2 \langle \sigma v \rangle \rho_c}. \quad (3.58)$$

$H_0$	$74,6 \pm 0,8 [\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}]$
$G$	$6,67430(15) \times 10^{-11} [\text{m}^3 \text{Kg}^{-1} \text{s}^{-2}]$

CUADRO 3.1: Valores experimentales de la constante de Hubble actualmente y la constante de gravitación de Newton [21, 24].

A partir de la Ec. (2.41) podemos despejar  $H$ , de manera que

$$H(m_X) = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_R}{3}}, \quad (3.59)$$

donde  $\rho$  en este caso sería la densidad de energía en la era de radiación del universo, la cual viene dada por [13]

$$\rho_R = g_* \frac{\pi^2}{30} T^4. \quad (3.60)$$

Reemplazando así  $H(m_X)$  en (3.58) obtenemos la siguiente expresión:

$$\Omega_X = \left[ \frac{4\pi^3 G g_*(m_X)}{45} \right]^{1/2} \frac{x_f T_0^3}{30 \langle \sigma v \rangle \rho_c}, \quad (3.61)$$

donde, reemplazando  $\rho_c$  a partir de (2.43), considerando  $H \equiv H_0$ , y considerando que la producción de materia oscura ocurrió cuando  $T \sim 100$  GeV, con los valores presentes en el Cuadro 3.1 obtenemos que

$$\Omega_X h^2 = 0,1 \left( \frac{x_f}{20} \right) \left( \frac{g_*(m_X)}{100} \right)^{1/2} \frac{2 \times 10^{-26} \text{cm}^3 \text{s}^{-1}}{\langle \sigma v \rangle}, \quad (3.62)$$

donde hemos normalizado  $x_f$  y  $g_*(m_X)$  con sus valores esperados aproximados [22]. Este cálculo reincluye el valor para la velocidad de la luz que hemos ignorado hasta ahora con el objetivo de obtener las dimensiones para  $\langle \sigma v \rangle$  de manera correcta.

Utilizando valores experimentales [20], esperamos que  $\Omega_X h^2 = 0,1200 \pm 0,0012$ , así, obtenemos que  $\langle \sigma v \rangle \approx 1,67 \times 10^{-26} [\text{cm}^3/\text{s}]$ .

### 3.3. Discusión

#### 3.3.1. Observación de WIMPs

Una de las primeras asunciones realizadas en el desarrollo de nuestro modelo implicaba que el proceso de interacción de las partículas de materia oscura era el de autoaniquilación, el cual producía 2 partículas ligeras. Estas pueden pertenecer al modelo estándar, lo que nos permitiría observarlas experimentalmente generalmente mediante rayos cósmicos de alta energía y por ende, detectar de manera indirecta los WIMPs que las produjeron. Asimismo, en aceleradores de partículas se busca producir materia oscura, en donde se asume el mediador de la autoaniquilación permite el proceso inverso en donde estas 2 partículas ligeras produzcan 2 WIMPs. El diagrama presente en la Fig. 3.4 resume de buena manera esta información.

Además de la abundancia de materia oscura, podemos calcular una propiedad igual de importante como lo es la masa de las partículas de materia oscura. En la Fig. 3.5 presentamos las mediciones realizadas por el telescopio Fermi que obtuvo al

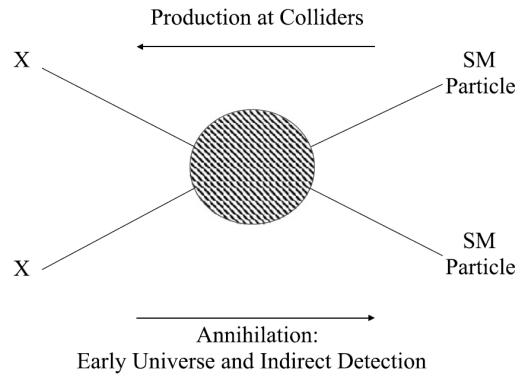


FIGURA 3.4: Diagrama de autoaniquilación de dos partículas de materia oscura  $X$  y los métodos de poder detectarlas.

observar galaxias con grandes cantidades de materia oscura, en donde se muestran las restricciones a la sección eficaz para la aniquilación de materia oscura.

Lo interesante de los rangos de valores que tenemos tanto para la sección eficaz  $\langle\sigma v\rangle$  como para la masa  $m_X$  es que se encuentran dentro de los valores esperados para interacciones electrodébiles: de aquí surge el milagro WIMP.

### 3.3.2. El Parámetro $\lambda$

En nuestros modelos propuestos nos encontramos con el parámetro  $\lambda$ , definido en la Ec. (3.40). En nuestro modelo analítico presentado en la Ec. (3.43), encontramos que  $\lambda$  es inversamente proporcional a la densidad de reliquia, por lo que un valor más grande de este parámetro nos entrega como resultado una menor densidad final. Este resultado es esperado si consideramos que  $\lambda$  a su vez es proporcional a la tasa de partículas interactuantes  $\langle\sigma v\rangle$ , por lo que es lógico considerar que su comportamiento sea acorde a lo que se aprecia en la Fig. 3.3.

En cambio, en el caso en el que  $\lambda$  sea pequeño (ver Fig. 3.1) lo que sucede es que ya no podemos asumir que las partículas de materia oscura, desde que se producen, nunca llegan a alcanzar el equilibrio térmico y mantienen su «yield». Este escenario se le conoce como «freeze-in» [26]. Pese a que la matemática para describir el proceso es la misma que para el freeze-out, la física detrás es levemente distinta, ya que se asume que la abundancia inicial de las partículas que experimentan el freeze-in es despreciable y posteriormente comienza a aumentar, sin que nunca alcancen el equilibrio térmico, ya que la abundancia de estas sigue incrementando con el tiempo hasta que la tasa de interacción sea menor a la tasa de expansión del universo.

### 3.3.3. Simplificaciones y Aproximaciones

En todo el desarrollo de nuestro modelo, una de las primeras mayores simplificaciones que realizamos fue suponer que la estadística de Maxwell-Boltzmann era válida en nuestro caso. Si hubiésemos utilizando las distribuciones de Bose-Einstein o Fermi-Dirac hay discrepancias en las abundancias como se puede ver en la Fig. 3.6. Ahí notamos que los efectos cuánticos sólo tienen relevancia en nuestro análisis para los primeros momentos del universo cuando las partículas estaban en equilibrio, posterior a eso, no hay una diferencia notable entre las distribuciones.

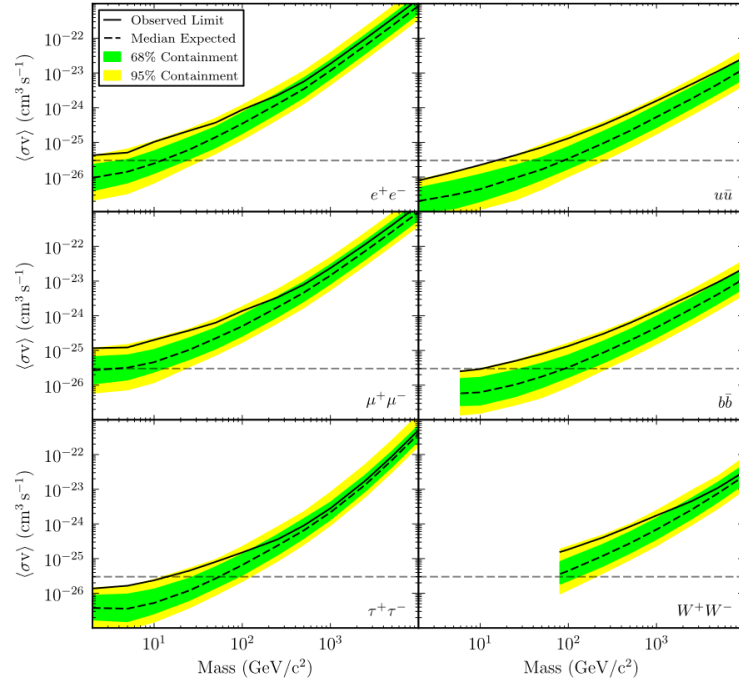


FIGURA 3.5: Restricciones en las secciones eficaces de la aniquilación de materia oscura en función de su masa para distintos canales. La línea horizontal representa la sección eficaz obtenida de (3.62) para producir la abundancia de reliquia correcta. Obtenido a partir de mediciones realizadas por el telescopio espacial de rayos gamma Fermi [25].

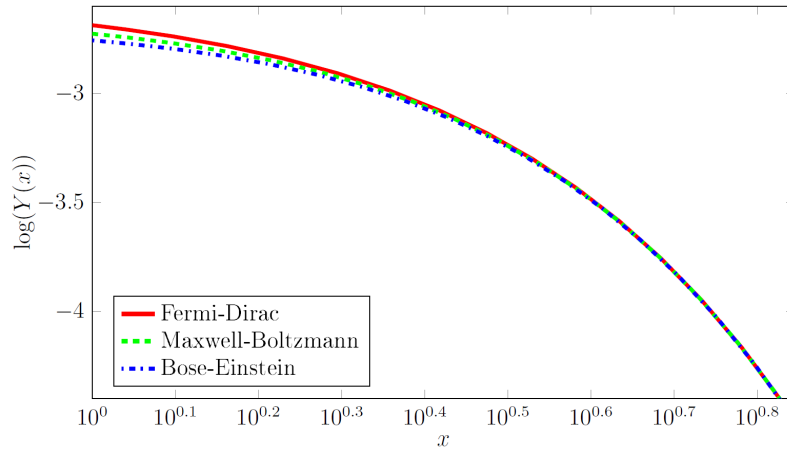


FIGURA 3.6: Se enseñan las pequeñas diferencias entre las distintas estadísticas para la abundancia  $Y(x)$  (extraído de [27]).

También supusimos un solo canal de interacción entre nuestras partículas, el de autoaniquilación. Despreciamos el hecho de que estas puedan interactuar con materia bariónica por la naturaleza misma de la materia oscura. Para que hubiese habido una buena simetría en las autoaniquilaciones, supusimos también que hay tantas antipartículas de materia oscura como partículas (potencial químico  $\mu = 0$ ), lo que no necesariamente debe ser correcto y es un escenario particular en nuestro trabajo.



## Capítulo 4

# Resumen y Conclusiones

En el presente escrito hemos desarrollado un modelo que nos permite estudiar la evolución de la abundancia de materia oscura en el universo y el mecanismo de «freeze-out», para el cual fue necesario sentar una base teórica sólida primero. Comenzamos dando una motivación para el estudio de la materia oscura, entregando antecedentes que nos permiten afirmar su existencia. Posteriormente, describimos nuestro modelo cosmológico, para el cual fue necesario utilizar la relatividad general y sus formalismos. Asimismo, la termodinámica y la mecánica estadística tomaron un rol fundamental para sustentar nuestro modelo, ya que nos entregó un excelente punto de partida: la ecuación de Boltzmann. Un tratamiento exhaustivo de esta nos permitió derivar una ecuación de Ricatti (ver Ec. (3.41)) que nos describe la evolución de la cantidad de partículas en un espacio comovil  $Y$  para la autoaniquilación de 2 WIMPs, a partir de la cual se basó nuestro análisis posterior.

Resolvimos analíticamente la ecuación de Ricatti realizando aproximaciones, solución la cual nos entregó una proporcionalidad directa entre  $Y_\infty$  y el momento en el que las partículas de materia oscura salen del equilibrio térmico con el plasma y sufren «freeze-out» ( $x_f$ ). Obtuvimos en la Fig. 3.1 el comportamiento de este en función de  $\lambda$ , parámetro el cual es proporcional a la sección eficaz promediada de las partículas  $\langle\sigma v\rangle$  y su masa  $m$ . En la Fig. 3.2 encontramos que su comportamiento nos permite inferir que la masa de una partícula de materia oscura debe estar en el intervalo  $10^1[\text{GeV}] \leq m \leq 10^4[\text{GeV}]$ . Resultados experimentales presentes en la Fig. 3.5 nos permiten validar nuestro modelo gracias a que hay una coincidencia entre nuestra predicción y las mediciones realizadas a galaxias abundantes en materia oscura.

La Fig. 3.3 nos entrega los resultados más interesantes de nuestro estudio, donde encontramos soluciones numéricas a la ecuación de Ricatti y comparamos la abundancia de materia oscura si esta siguiese en equilibrio térmico con aquella cuando se desacopla. Obtuvimos que  $\lambda$  es un parámetro relevante para la densidad de reliquia que obtengamos, donde un valor más pequeño de este nos entrega una mayor cantidad de materia oscura residual. Con esto en consideración, pudimos determinar un valor esperado para la sección eficaz promediada tomando en cuenta valores experimentales de la abundancia de materia oscura en el universo, así, encontramos que  $\langle\sigma v\rangle \approx 1,67 \times 10^{-26}[\text{cm}^3/\text{s}]$ .

Nuestro modelo es uno de los más simples que se pueden desarrollar para describir este fenómeno, por lo que es válido considerar reformular pasos de la derivación ignorando asunciones que realizamos con el objetivo de obtener una mayor precisión en las predicciones. El mayor desafío actualmente se encuentra bajo el alero de la física experimental, ya que la detección de un WIMP en un colisionador o en un observatorio de astropartículas podría revolucionar la física entera y restringir drásticamente algunos de los candidatos actuales a materia oscura, además de otorgar

puntos de sustento para nuevas teorías y modelos que permitan dar una explicación al origen de esta intrigante partícula.



## Apéndice A

# Códigos Figuras

Todos los códigos de Mathematica utilizados en este trabajo se encuentran en el siguiente repositorio de GitHub: <https://github.com/Yerk0/plots-tesina>.



# Bibliografía

- [1] J. H. Oort. «The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems». En: *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands* Vol. 6 (1932), pág. 249. URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1932BAN.....6..249O>.
- [2] Fritz Zwicky. «Republication of: The redshift of extragalactic nebulae». En: *General Relativity and Gravitation* 41 (2009), págs. 208-224. DOI: [10.1007/s10714-008-0707-4](https://doi.org/10.1007/s10714-008-0707-4).
- [3] Vera C Rubin. «Dark matter in spiral galaxies». En: *Scientific American* 248.6 (1983), págs. 96-109.
- [4] K. G. Begeman. «HI rotation curves of spiral galaxies». Tesis doct. University of Groningen, Kapteyn Astronomical Institute, dic. de 1987. URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1987PhDT.....199B>.
- [5] Katherine Garrett y Gintaras Duda. «Dark Matter: A Primer». En: *Advances in Astronomy* 2011 (2011), págs. 1-22. DOI: [10.1155/2011/968283](https://doi.org/10.1155/2011/968283).
- [6] Frank Watson Dyson, Arthur Stanley Eddington y Charles Davidson. «IX. A determination of the deflection of light by the Sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of May 29, 1919». En: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* 220.571-581 (1920), págs. 291-333.
- [7] Douglas Clowe et al. «A Direct Empirical Proof of the Existence of Dark Matter\*». En: *The Astrophysical Journal* 648.2 (ago. de 2006), págs. L109-L113. DOI: [10.1086/508162](https://doi.org/10.1086/508162).
- [8] A. A. Penzias y R. W. Wilson. «A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s.» En: *Astrophysical Journal* 142 (jul. de 1965), págs. 419-421. DOI: [10.1086/148307](https://doi.org/10.1086/148307).
- [9] ESA y The Planck Collaboration. *European Space Agency*. 2013. URL: [https://www.esa.int/ESA\\_Multimedia/Images/2013/03/Planck\\_CMB](https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2013/03/Planck_CMB).
- [10] G. F. Smoot et al. «Structure in the COBE Differential Microwave Radiometer First-Year Maps». En: *Astrophysical Journal Letters* 396 (sep. de 1992), pág. L1. DOI: [10.1086/186504](https://doi.org/10.1086/186504).
- [11] N. Jarosik et al. «Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Sky Maps, Systematic Errors, and Basic Results». En: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 192.2 (ene. de 2011), pág. 14. ISSN: 1538-4365. DOI: [10.1088/0067-0049/192/2/14](https://doi.org/10.1088/0067-0049/192/2/14).
- [12] Gianfranco Bertone, Dan Hooper y Joseph Silk. «Particle dark matter: evidence, candidates and constraints». En: *Physics Reports* 405.5-6 (ene. de 2005), 279-390. ISSN: 0370-1573. DOI: [10.1016/j.physrep.2004.08.031](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2004.08.031).
- [13] Scott Dodelson y Fabian Schmidt. *Modern Cosmology*. 2020. DOI: [10.1016/C2017-0-01943-2](https://doi.org/10.1016/C2017-0-01943-2).

- [14] Alfonso Zerwekh. «Apuntes para el Curso de Introducción a la Relatividad General». 2021.
- [15] Edward W. Kolb y Michael S. Turner. *The Early Universe*. Vol. 69. 1990. ISBN: 978-0-201-62674-2. DOI: [10.1201/9780429492860](https://doi.org/10.1201/9780429492860).
- [16] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019, págs. 329-333. DOI: [10.1017/9781108770385](https://doi.org/10.1017/9781108770385).
- [17] A. Einstein. «Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie». En: *Annalen der Physik* 354.7 (1916), págs. 769-822. DOI: [10.1002/andp.19163540702](https://doi.org/10.1002/andp.19163540702).
- [18] Øyvind Grøn y Sigbjørn Hervik. *Einstein's General Theory of Relativity*. Springer New York, NY, 2007, págs. 179-180. DOI: [10.1007/978-0-387-69200-5](https://doi.org/10.1007/978-0-387-69200-5).
- [19] R.K. Pathria y Paul D. Beale. «1 - The Statistical Basis of Thermodynamics». En: *Statistical Mechanics (Third Edition)*. Ed. por R.K. Pathria y Paul D. Beale. Third Edition. Boston: Academic Press, 2011, págs. 1-23. ISBN: 978-0-12-382188-1. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-382188-1.00001-3>.
- [20] N. Aghanim et al. «Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters». En: *Astronomy & Astrophysics* 641 (sep. de 2020), A6. DOI: [10.1051/0004-6361/201833910e](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910e).
- [21] Eite Tiesinga et al. «CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2018». en. En: 93 (2021). DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.93.025010>.
- [22] Lars Husdal. «On Effective Degrees of Freedom in the Early Universe». En: *Galaxies* 4.4 (dic. de 2016), pág. 78. ISSN: 2075-4434. DOI: [10.3390/galaxies4040078](https://doi.org/10.3390/galaxies4040078).
- [23] Gary Steigman, Basudeb Dasgupta y John F. Beacom. «Precise relic WIMP abundance and its impact on searches for dark matter annihilation». En: *Physical Review D* 86.2 (jul. de 2012). ISSN: 1550-2368. DOI: [10.1103/physrevd.86.023506](https://doi.org/10.1103/physrevd.86.023506).
- [24] R. Brent Tully. *The Hubble Constant: A Historical Review*. 2023. arXiv: [2305.11950](https://arxiv.org/abs/2305.11950) [astro-ph.CO].
- [25] M. Ackermann et al. «Dark matter constraints from observations of 25 Milky Way satellite galaxies with the Fermi Large Area Telescope». En: *Phys. Rev. D* 89 (4 2014), pág. 042001. DOI: [10.1103/PhysRevD.89.042001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.042001).
- [26] Yong Du et al. «Revisiting dark matter freeze-in and freeze-out through phase-space distribution». En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2022.04 (abr. de 2022), pág. 012. ISSN: 1475-7516. DOI: [10.1088/1475-7516/2022/04/012](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2022/04/012).
- [27] Dennis Alp y Samuel Modée. «Dark Matter: Particle Evolution through Freeze-out». En: 2014.