

## Отчёт по теме 5.2 Математический маятник

Нестеров Даниил группа 11916/1

### Вариант 5

#### Модель с учетом сопротивления среды

##### Словестно-смысловое описание работы:

Маятник состоит из материальной точки массой  $m$ , подвешенной на невесомой нити (или на невесомом стержне) длиной  $L$ , причем эта материальная точка качается из стороны в сторону, как показано на рисунке 1

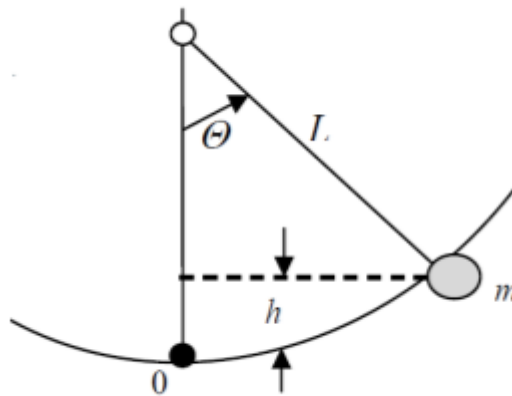


Рисунок 1 – Математический маятник

Предполагая, что в начальный момент времени  $t=0$  известно положение маятника, а также его начальная скорость, требуется определить положение и скорость маятника в произвольный момент времени  $t>0$ .

Математический маятник со стержнем способен колебаться только в какой-то одной плоскости (вдоль какого-то выделенного горизонтального направления) и, следовательно, является системой с одной степенью свободы. Если же стержень заменить на нерастяжимую нить, получится система с двумя степенями свободы (так как становятся возможными колебания по двум горизонтальным координатам).

При колебаниях в одной плоскости маятник движется по дуге окружности радиуса  $L$ , а при

наличии двух степеней свободы может описывать кривые на сфере того же радиуса.

Нередко, в том числе в случае нити, ограничиваются анализом плоского движения; оно и рассматривается далее.

### Математическая модель:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L} \sin\theta = 0$$

$$\theta(0) = \theta_0, \frac{d\theta}{dt}(0) = v_0$$

$\beta$  - коэффициент затухания,  $\theta$  - угол, определяющий положение маятника

### Компьютерная модель:

На рисунке 2 представлена модель:

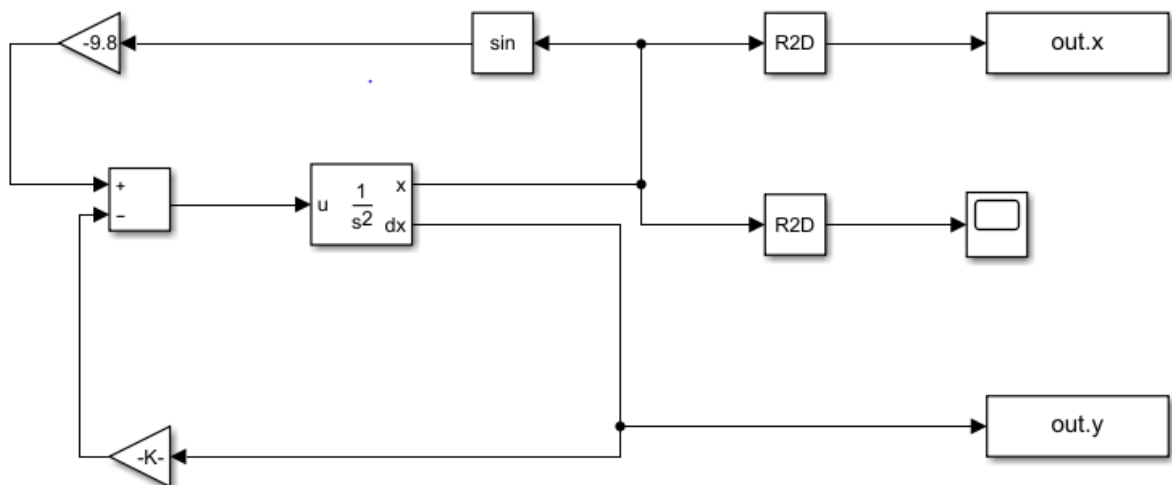


Рисунок 2 - Компьютерная модель

В блоке «Integrator, Second-Order» формируется начальный сигнал, в блоке происходит интегрирование второго порядка входного сигнала

$$\frac{d^2x}{dt^2} = u,$$

где  $u$  - является входным сигналом. Блок является динамической системой с двумя непрерывными состояниями  $x$  и  $\frac{dx}{dt}$ .

Сигнал  $x$  переходит в блок «Trigonometric Function», который находит синус входа, сигнал идет в блок «Gain», где умножается на  $-g/L$ , что соответствует  $-g/L$  в уравнении математической модели. После сигнал проходит на положительный вход блока «Subtract». Сигнал  $\frac{dx}{dt}$  в блоке «Gain» умножается на коэффициент затухания, после чего сигнал проходит на отрицательный вход в блок «Subtract». В «Subtract» производится вычитание входных параметров, после чего сигнал попадает в блок «Integrator, Second-Order». Также сигнал  $x$  проходит через «Radians to Degrees», который переводит

радианы в градусы, затем попадает в блок «scope» для визуализации и «To Workspace» для сохранения.

### Планирование эксперимента:

1 Построить динамику колебаний:

$$\begin{aligned}b &= 0.0k; \\T &= 100. \\ \theta(0) &= \left[ \frac{2\pi}{3} + 0.0k \right]; \\ \dot{\theta}(0) &= 0;\end{aligned}$$

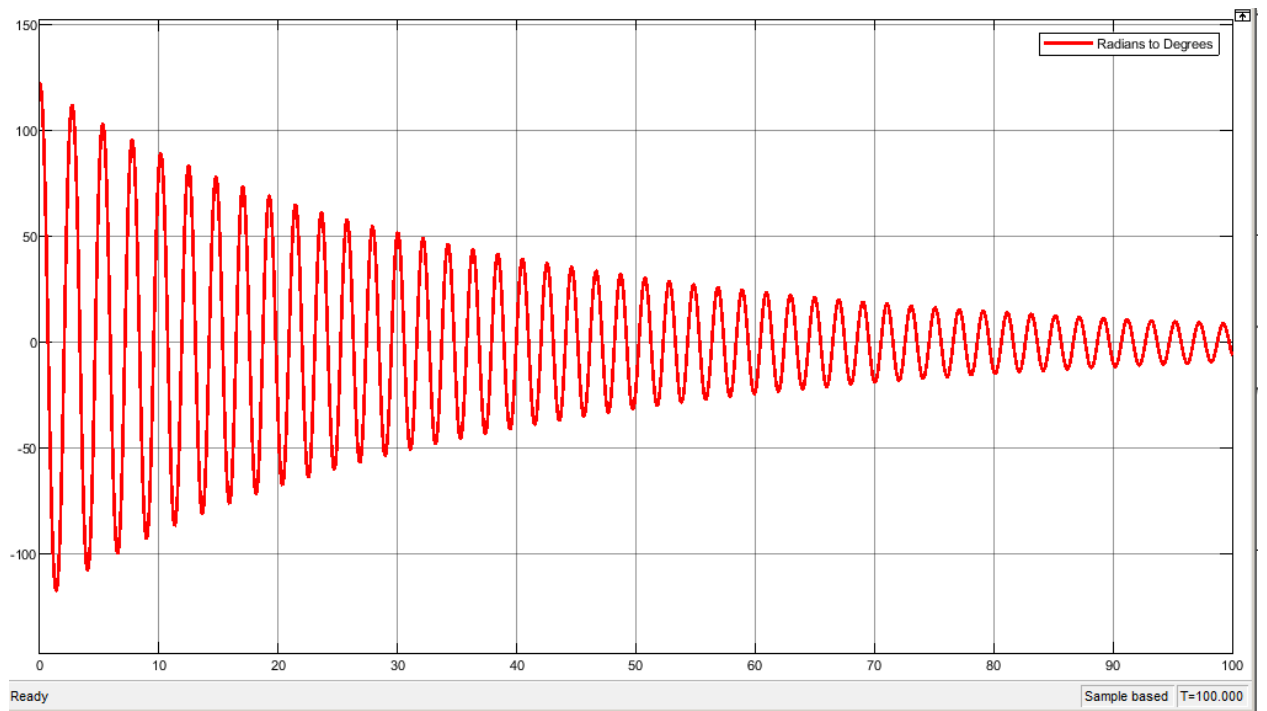
2 Построить фазовый портрет маятника:

$$\begin{aligned}b &= 4 + 0.0k; \\T &= 4. \\ \theta(0) &= \left[ -\frac{2\pi}{3} - 0.03k, \frac{2\pi}{3} + 0.03k \right]; \\ \dot{\theta}(0) &= 0; \\ \theta(0) &= [\pi - 0.001k]; \\ \dot{\theta}(0) &= -1; \\ \theta(0) &= [-\pi + 0.001k]; \\ \dot{\theta}(0) &= 1;\end{aligned}$$

k - номер варианта.

### Эксперимент

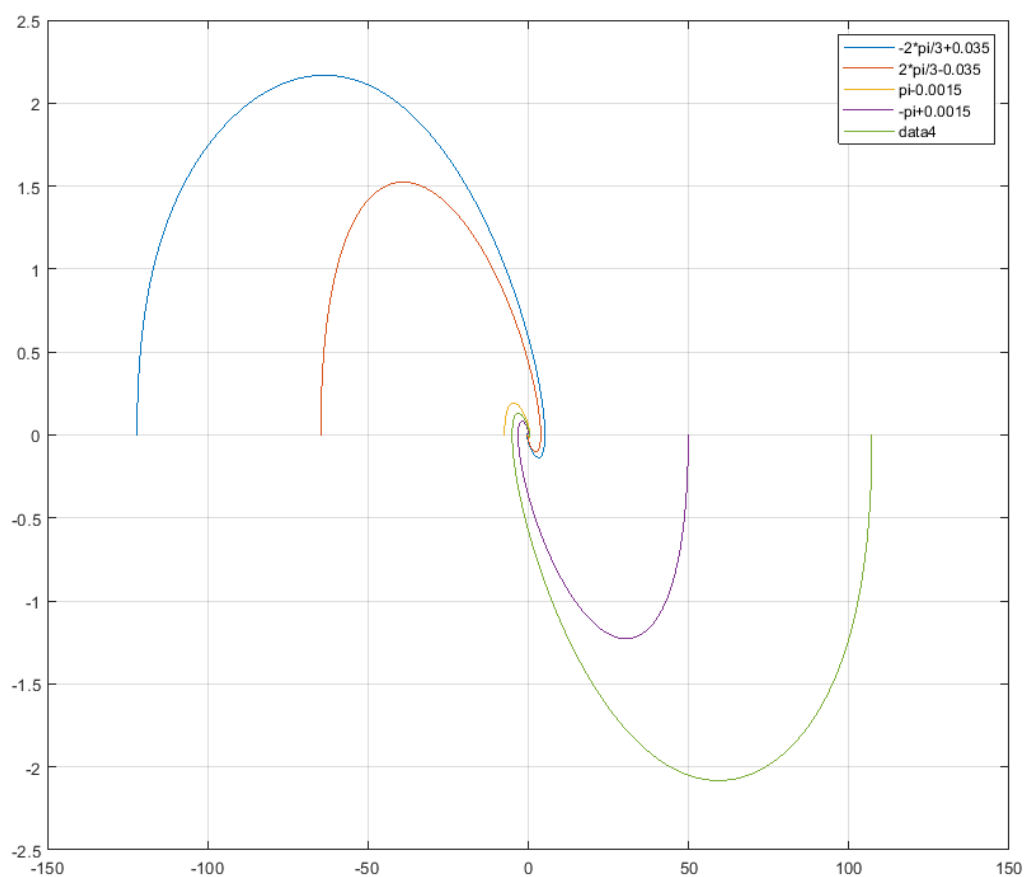
1. Построить динамику колебаний:



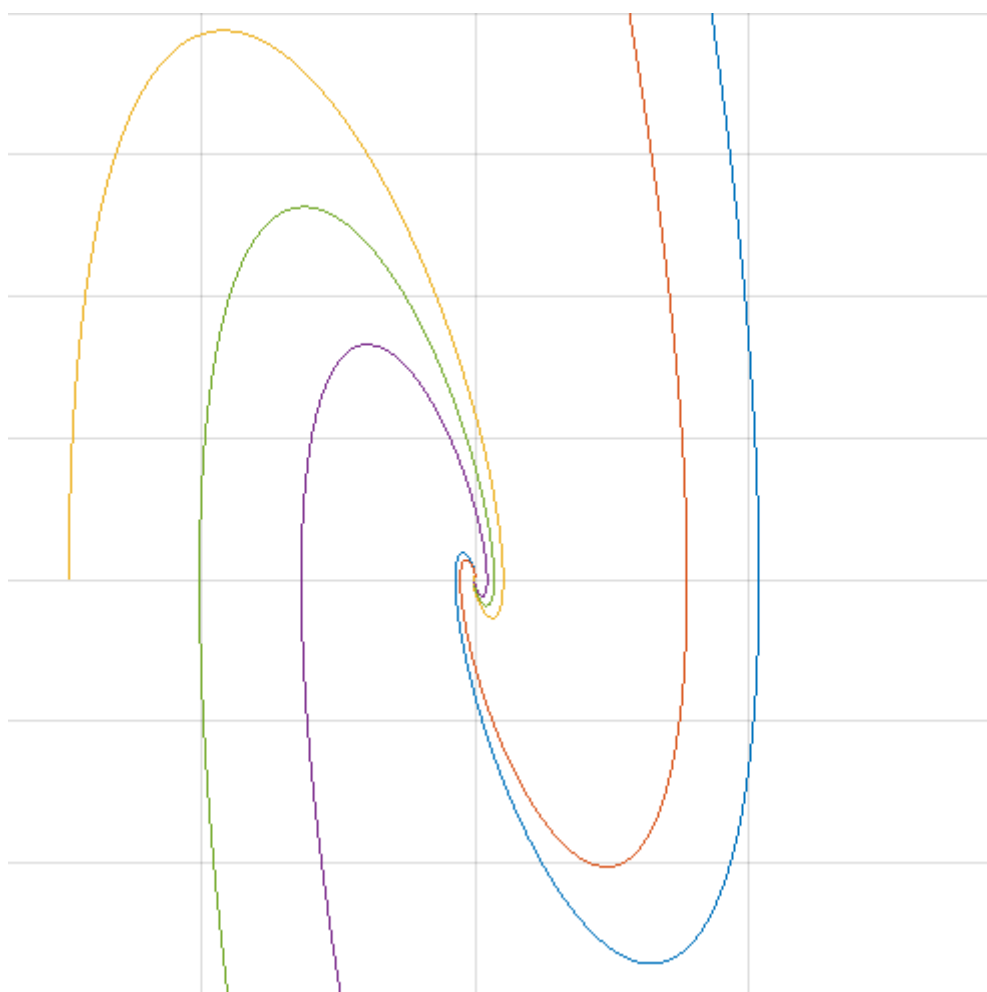
$$\theta_0 = \frac{2 * \pi}{3} + 0,05$$

Видно что с течением времени колебания маятника затухают.

2. построить фазовый портрет маятника:



Особая точка  $(0,0)$  является фокусом. К ней стремятся все фазовые траектории при  $t \rightarrow \infty$ .



Фазовый портрет маятника вблизи.

**Источники информации:**

<https://eluniver.ugrasu.ru/mod/folder/view.php?id=133214>

<https://ru.wikipedia.org/wiki>

<https://docs.exponenta.ru/>

<https://questions-physics.ru/>