BAB 1

ERROR

1.1. Angka Penting

Dalam suatu perhitungan dibedakan antara nilai eksak / sejati dan nilai aproksimasi / pendekatan. Nilai – nilai $\pi, e, \sqrt{2}$ adalah nilai – nilai eksak dan nilai – nilai tersebut dapat didekati dengan nilai aproksimasi misalkan 3.14 , 2.7183, 1.414 .

Angka penting adalah tiap angka / digit dari angka – angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dan 0. Jika 0 digunakan untuk menentukan titik desimal maka 0 bukan angka penting.

Contoh :

Bilangan 0.00263 maka angka – angka pentingnya ada 3, yaitu : 2, 6 dan 3

Bilangan 3809 maka angka – angka pentingnya ada 4, yaitu 3, 8, 0 dan 9

Bilangan 4.63 x 10^4 maka angka – angka pentingnya ada 3, yaitu : 4, 6 dan 3

Bilangan 4.630 x 10^4 maka angka – angka pentingnya ada 4, yaitu : 4, 6,3 dan 0

Bilangan 4.6300 x 10^4 maka angka – angka pentingnya ada 5, yaitu : 4, 6,3,0 dan 0

1.2. Error

Error / kesalahan / galat numerik muncul akibat penggunaan nilai aproksimasi / pendekatan / hampiran untuk menyatakan hasil operasi atau besaran matematika yang eksak atau nilai sejatinya. Hubungan antara nilai aproksimasi dan nilai sejati (true value) dirumuskan dengan :

$$E_t = x_t - x_a$$

dimana

E_t = error sejati

x_t = nilai sejati

x_a = nilai aproksimasi

Error relatif diperoleh dengan menormalkan error terhadap nilai sejatinya, biasanya dinyatakan dalam persentase, sehingga diperoleh hubungan :

$$\varepsilon_t = \frac{E_t}{x_t} 100\%$$

dimana ε_t = persentase error relatif sejati

Contoh :

Seseorang melakukan pengukuran panjang sebuah jembatan dan paku. Jika hasil pengukuran panjang jembatan dan paku masing - masing 9999 cm dan 9 cm, sedangkan nilai sejati masing – masing ádalah 10000 cm dan 10 cm maka tentukan error dan persentase error relatif masing – masing ?

Penyelesaian :

Error untuk pengukuran jembatan E_t = 10000 – 9999 = 1 cm

Error untuk pengukuran paku E_t = 10 – 9 = 1 cm

Presentase error relatif untuk pengukuran jembatan $\varepsilon_t = \frac{1}{10000}100\% = 0.01\ \%$

Presentase error relatif untuk pengukuran paku $\varepsilon_t = \frac{1}{10}100\% = 10\ \%$

Jadi walaupun kedua pengukuran itu mempunyai error yang sama 1 cm, tetapi persentase error untuk paku lebih besar dari pada persentase error untuk jembatan. Dapat diambil kesimpulan bahwa error pengukuran jembatan lebih baik dari paku.

Untuk metode numerik nilai sejati hanya akan diketahui jika fungsi yang ditangani berupa fungsi yang dapat diselesaikan secara analitik / eksak. Untuk itu jika nilai sejatinya tidak diketahui maka digunakan penormalan error dengan menggunakan taksiran terbaik yang tersedia dari nilai sejati, yaitu dari nilai aproksimasi itu sendiri.

$$\varepsilon_a = \frac{E_a}{x_a}$$

dimana E_a = error aproksimasi

Secara iterasi nilai aproksimasi sekarang diperoleh dari perhitungan nilai aproksimasi sebelumnya. Dengan demikian maka :

$$\varepsilon_a = \frac{x_{a_i} - x_{a_{i-1}}}{x_{a_i}} 100\%$$

dimana

ε_a = persentase error relatif aproksimasi

x_{a_i} = nilai aproksimasi sekarang

$x_{a_{i-1}}$ = nilai aproksimasi sebelumnya

Nilai aproksimasi benar sampai suatu nilai toleransi ε_s dengan n angka penting / digit signifikan jika $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ dimana $\varepsilon_s = (0.5x10^{2-n})\%$

BAB 2

AKAR – AKAR PERSAMAAN

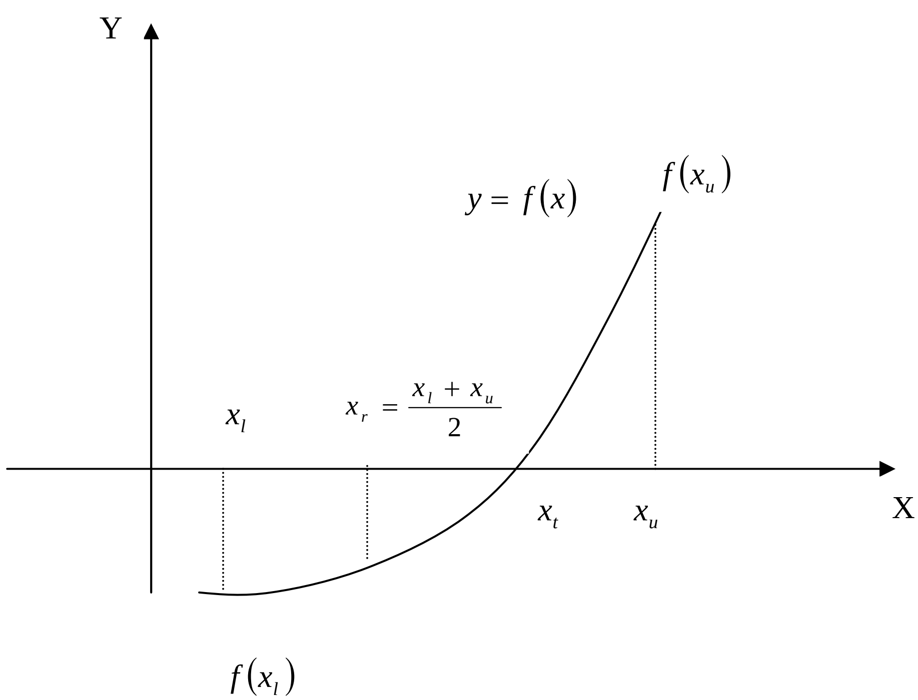
Untuk mencari akar – akar real dari suatu persamaan $f(x) = 0$ jika tidak dapat diselesaikan secara analitik / eksak dapat digunakan penyelesaian aproksimasi / pendekatan dengan metode numerik.

2.1. Metode Pengurung

Metode pengurung adalah suatu metode pencarian akar – akar persamaan berdasarkan fakta bahwa nilai fungsi akan berubah tanda di sekitar akar – akar persamaan yang dicari, sehingga metode ini memerlukan 2 nilai / tebakan awal yang mengurung akar – akar tersebut.

2.1.1. Meode Biseksi

Jika x_l dan x_u nilai / tebakan awal sehingga $f(x_l)\,f(x_u) < 0$ maka ada akar diantara x_l dan x_u. Akar yang baru untuk mendekati akar sejatinya adalah $x_r = \dfrac{x_l + x_u}{2}$. Hal ini dilakukan secara iterasi dengan cara mengganti nilai salah satu dari nilai x_l atau x_u dengan nilai x_r.



Langkah – langkah Metode Biseksi :

a. Tentukan nilai awal x_l dan x_u sedemikian hingga $f(x_l)\,f(x_u) < 0$

b. Hitung nilai $x_r = \dfrac{x_l + x_u}{2}$

c. Evaluasi nilai x_r

   - Jika $f(x_l)\,f(x_r) < 0$ maka $x_u = x_r$
   - Jika $f(x_l)\,f(x_r) > 0$ maka $x_l = x_r$
   - Jika $f(x_l)\,f(x_r) = 0$ maka nilai akar sejati x_r

d. Iterasi berhenti jika salah satu kriteria dibawah ini terpenuhi :

   - $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$
   - banyaknya iterasi terlampaui
   - $f(x\ ) < \varepsilon$ dengan ε = bilangan sembarang yang sangat kecil

Contoh :

Dengan menggunakan Metode Biseksi tentukan akar real dari $f(x) = x^4 - 2x^2 + x - 2$ dengan nilai awal $x_l = 1$ dan $x_u = 2$ sampai 2 angka signifikan

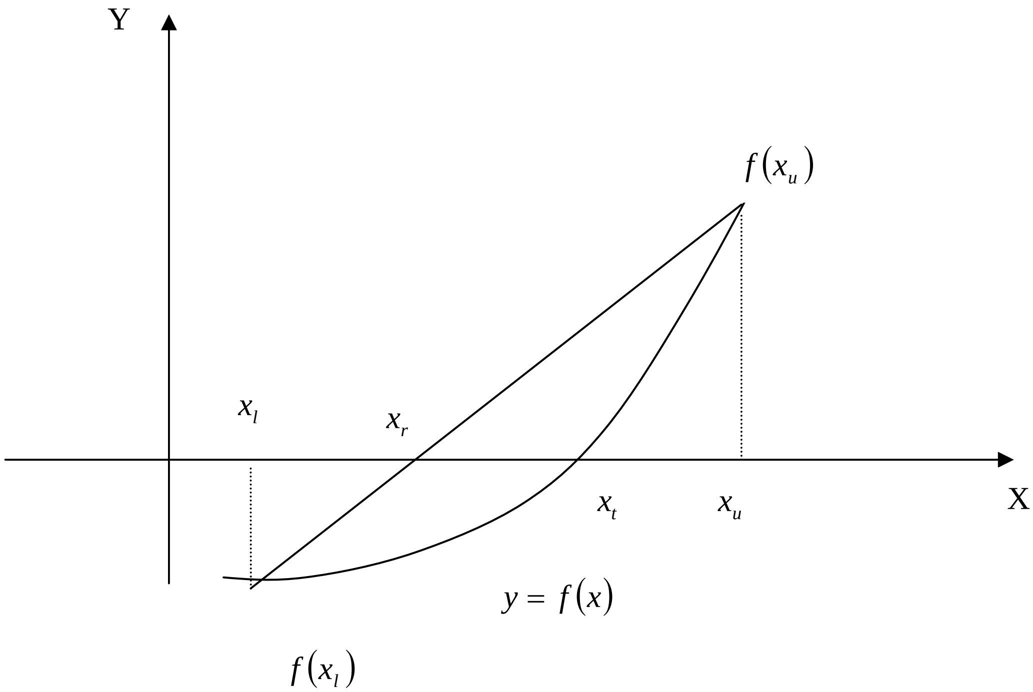
Penyelesaian :

Kriteria berhenti sampai 2 angka signifikan berarti $\varepsilon_s = 0.5\%$, dengan menggunakan program komputer dapat ditabelkan sbb :

Itrs	x_l	x_u	x_r	$f(x_l)$	$f(x_u)$	$f(x_r)$	ε_a, %
1	1.0000000	2.0000000	1.5000000	-2.0000000	8.0000000	0.0625000	
2	1.0000000	1.5000000	1.2500000	-2.0000000	0.0625000	-1.4335938	-20.00
3	1.2500000	1.5000000	1.3750000	-1.4335938	0.0625000	-0.8317871	9.09
4	1.3750000	1.5000000	1.4375000	-0.8317871	0.0625000	-0.4252777	4.34
5	1.4375000	1.5000000	1.4687500	-0.4252777	0.0625000	-0.1920767	2.12
6	1.4687500	1.5000000	1.4843750	-0.1920767	0.0625000	-0.0675277	1.05
7	1.4843750	1.5000000	1.4921875	-0.0675277	0.0625000	-0.0032072	0.52
8	1.4921875	1.5000000	1.4960938	-0.0032072	0.0625000	0.0294720	0.26

Dengan demikian akar persamaan $x = 1.4960938$

2.1.2. Metode Regula Falsi



Andaikan akar persamaan $f(x) = 0$ terletak diantara x_l dan x_u .Dibuat garis lurus yang melalui $[x_l, f(x_l)]$ dan $[x_u, f(x_u)]$ yang memotong sumbu X di x_r .Persamaan garis yang melalui dua titik ini adalah :

$$\frac{y - f(x_u)}{f(x_l) - f(x_u)} = \frac{x - x_u}{x_l - x_u}$$

Garis ini melalui titik $(x_r, 0)$ sehingga nilai x_r dapat dicari, yaitu :

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

Akar ini lebih dekat dengan akar sejatinya daripada x_l atau x_u .

Langkah – langkah Metode Regula Falsi :

a. Tentukan nilai awal x_l dan x_u sedemikian hingga $f(x_l)\, f(x_u) < 0$

b. Hitung nilai $x_r = x_u - \dfrac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$

c. Evaluasi nilai x_r

- Jika $f(x_l)\, f(x_r) < 0$ maka $x_u = x_r$
- Jika $f(x_l)\, f(x_r) > 0$ maka $x_l = x_r$
- Jika $f(x_l)\, f(x_r) = 0$ maka nilai akar sejati x_r

d. Iterasi berhenti jika salah satu kriteria dibawah ini terpenuhi :

- $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$
- banyaknya iterasi terlampaui
- $f(x\ ) < \varepsilon$ dengan ε = bilangan sembarang yang sangat kecil

Contoh :

Dengan menggunakan Metode Regula Falsi tentukan akar real dari $f(x) = x^4 - 2x^2 + x - 2$ dengan nilai awal $x_l = 1$ dan $x_u = 2$ sampai 2 angka signifikan

Penyelesaian :

Kriteria berhenti sampai 2 angka signifikan berarti $\varepsilon_s = 0.5\%$. dengan menggunakan program komputer dapat ditabelkan sbb :

Itrs	x_l	x_u	x_r	$f(x_l)$	$f(x_u)$	$f(x_r)$	ε_a, %
1	1.0000000	2.0000000	1.2000000	-2.0000000	8.0000000	-1.6064000	
2	1.2000000	2.0000000	1.3337775	-1.6064000	8.0000000	-1.0594401	10.03
3	1.3337775	2.0000000	1.4116877	-1.0594401	8.0000000	-0.6025371	5.52
4	1.4116877	2.0000000	1.4528941	-0.6025371	8.0000000	-0.3130040	2.84
5	1.4528941	2.0000000	1.4734939	-0.3130040	8.0000000	-0.1548331	1.40
6	1.4734939	2.0000000	1.4834905	-0.1548331	8.0000000	-0.0747228	0.67
7	1.4834905	2.0000000	1.4882703	-0.0747228	8.0000000	-0.0356300	0.32

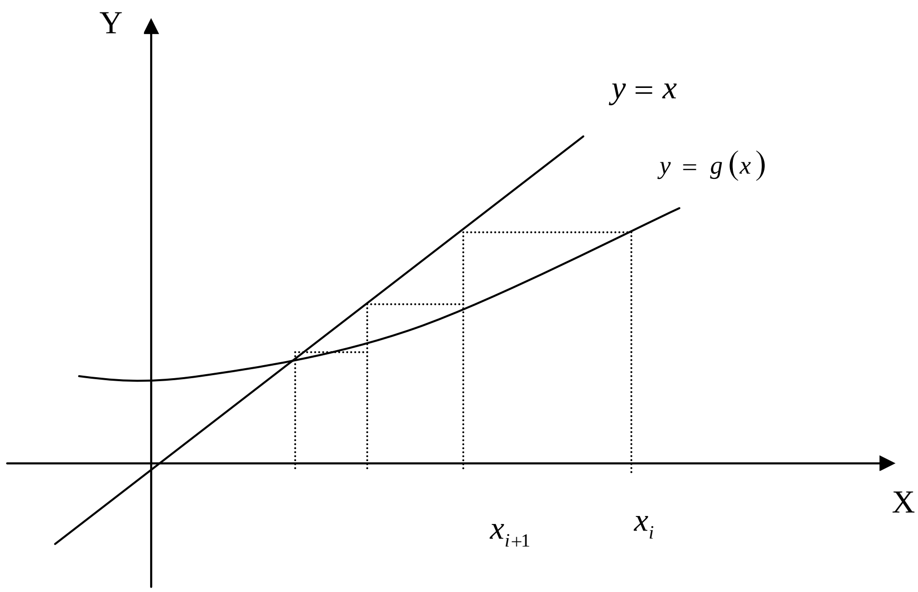
Dengan demikian akar persamaan $x = 1.4882703$

2.2. Metode Terbuka

Metode Terbuka adalah suatu metode yang pencarian akar – akar yang memerlukan hanya satu nilai / tebakan awal atau dua nilai / tebakan awal tanpa mengurung akar tersebut.

2.2.1. Metode Iterasi Satu Titik Sederhana

Metode ini bekerja dengan cara menyusun kembali persamaan $f(x) = 0$ sedemikian hingga menjadi persamaan $x = g(x)$. Proses iterasi konvergen jika $|g'(x_0)| < 1$



Langkah – langkah Metode Iterasi Satu Titik Sederhana :

a. Ubah bentuk persamaan $f(x) = 0$ menjadi bentuk $x = g(x)$

b. Tentukan nilai awal x_0 sehingga $|g'(x_0)| < 1$

c. Lakukan iterasi $x_{i+1} = g(x_i)$ dimana $i = 1, 2, 3, ...$

d. Iterasi berhenti jika salah satu kriteria dibawah ini terpenuhi :

- $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$
- banyaknya iterasi terlampaui
- $f(x\ ) < \varepsilon$ dengan ε = bilangan sembarang yang sangat kecil

Contoh :

Dengan menggunakan Metode Iterasi Satu Titik Sederhana tentukan akar real dari $f(x) = x^4 - 2x^2 + x - 2$ dengan nilai awal $x_0 = 1$ sampai 2 angka signifikan

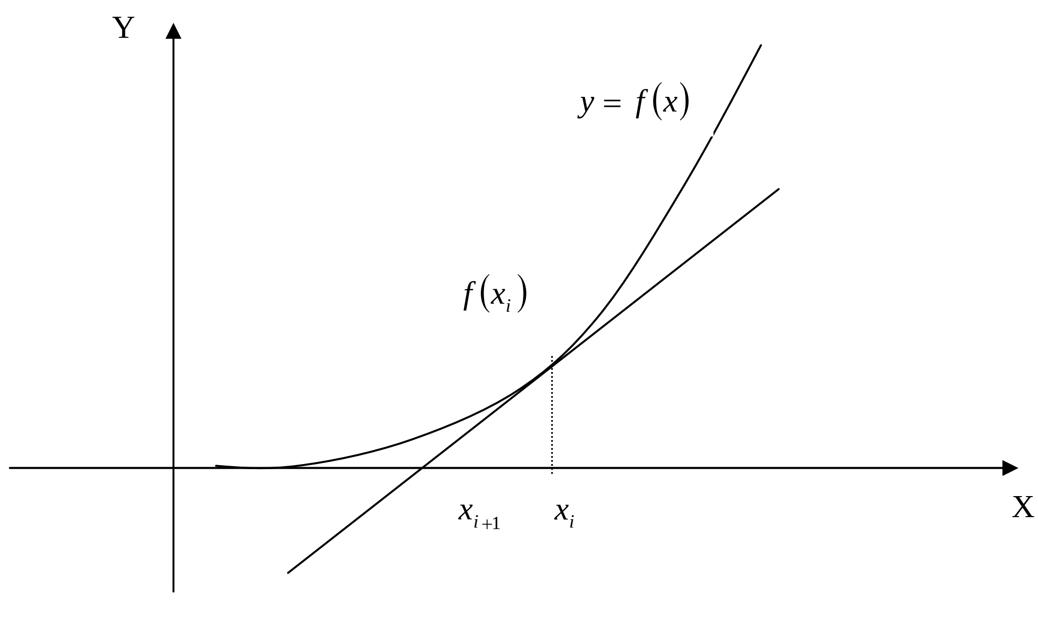
Penyelesaian :

Kriteria berhenti sampai 2 angka signifikan berarti $\varepsilon_s = 0.5\%$. Persamaan disusun kembali menjadi $x = \sqrt[4]{2x^2 = x + 2}$ dan dengan menggunakan program komputer dapat ditabelkan sbb :

Iterasi	x_i	$g(x_i)$	$g'(x_i)$	$f(x_i)$	$\varepsilon_a, \%$
0	1.0000000	1.3160740	0.3290185	-2.0000000	
1	1.3160740	1.4271197	0.3667804	-1.1480276	24.02
2	1.4271197	1.4681654	0.3719595	-0.4981941	7.78
3	1.4681654	1.4834583	0.3731472	-0.1966321	2.80
4	1.4834583	1.4891676	0.3735027	-0.0749849	1.03
5	1.4891676	1.4913004	0.3736239	-0.0282338	0.38

Dengan demikian akar persamaan $x = 1.4891676$

2.2.2. Metode Newton – Raphson



Dari gambar diatas persamaan garis singgung $f(x)$ dengan gradien garis singgung $f'(x_i)$ yang melalui titik $[x_i, f(x_i)]$ adalah $y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$. Garis singgung ini memotong sumbu X di $(x_{i+1}, 0)$ sehingga $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

Langkah – langkah Metode Newton – Raphson :

a. Tentukan nilai awal x_0

b. Lakukan iterasi $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ dimana $i = 1, 2, 3, \ldots.$

c. Iterasi berhenti jika salah satu kriteria dibawah ini terpenuhi :

- $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$
- banyaknya iterasi terlampaui
- $f(x\ ) < \varepsilon$ dengan ε = bilangan sembarang yang sangat kecil

Contoh :

Dengan menggunakan Metode Newton - Raphson tentukan akar real dari $f(x) = x^4 - 2x^2 + x - 2$ dengan nilai awal $x_0 = 2$ sampai 2 angka signifikan

Penyelesaian :

Kriteria berhenti sampai 2 angka signifikan berarti $\varepsilon_s = 0.5\%$ dan $f'(x) = 4x^3 - 4x + 1$ .Dengan menggunakan program komputer dapat ditabelkan sbb :

Iterasi	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\varepsilon_a, \%$
0	2.0000000	8.0000000	25.0000000	
1	1.6800000	2.0011418	13.2465280	-19.05
2	1.5289308	0.3181836	9.1805722	-9.88
3	1.4942725	0.0141922	8.3688568	-2.32
4	1.4925766	0.0000327	8.3302531	-0.11

Dengan demikian akar persamaan $x = 1.4925766$

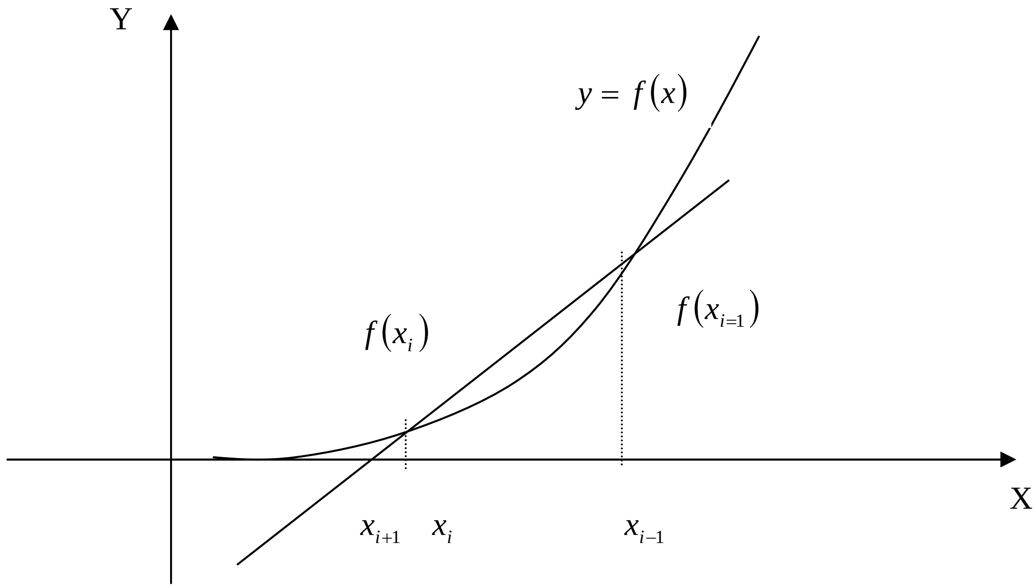
2.2.3. Metode Secant

Persamaan garis yang melalui $\left[x_i, f(x_i)\right]$ dan $\left[x_{i-1}, f(x_{i-1})\right]$ seperti tampak pada gambar berikut adalah :

$$\frac{y - f(x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}$$

Garis ini melalui titik $(x_{i+1}, 0)$ sehingga nilai x_{i+1} dapat dicari, yaitu :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i=1}) - f(x_i)} \quad \text{dimana } i = 1, 2, 3, \ldots.$$



Langkah – langkah Metode Secant :

a. Tentukan nilai awal x_0 dan x_1

b. Lakukan iterasi $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i=1}) - f(x_i)}$ dimana $i = 1, 2, 3, \ldots.$

c. Iterasi berhenti jika salah satu kriteria dibawah ini terpenuhi :

- $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$
- banyaknya iterasi terlampaui
- $f(x\ ) < \varepsilon$ dengan ε = bilangan sembarang yang sangat kecil

Contoh :

Dengan menggunakan Metode Secant tentukan akar real dari $f(x) = x^4 - 2x^2 + x - 2$ dengan nilai awal $x_0 = 2$ dan $x_1 = 3$ sampai 2 angka signifikan

Penyelesaian :

Kriteria berhenti sampai 2 angka signifikan berarti $\varepsilon_s = 0.5\%$ dan dengan menggunakan program komputer dapat ditabelkan sbb :

Itrs	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$	ε_a , %
1	2.0000000	3.0000000	1.8571429	8.0000000	64.0000000	4.8546439	
2	3.0000000	1.8571429	1.7633373	64.0000000	4.8546439	3.2127299	-5.32
3	1.8571429	1.7633373	1.5797881	4.8546439	3.2127299	0.8169974	-11.62
4	1.7633373	1.5797881	1.5171938	3.2127299	0.8169974	0.2120773	-4.13
5	1.5797881	1.5171938	1.4952490	0.8169974	0.2120773	0.0223754	-1.47
6	1.5171938	1.4952490	1.4926606	0.2120773	0.0223754	0.0007322	-0.17

Dengan demikian akar persamaan $x = 1.4926606$

BAB 3

SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Diketahui sistem persamaan linear (SPL) dengan n persamaan dan n variabel :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n12}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n$$

Ditulis dalam bentuk perkalian matriks $A\bar{x} = \bar{b}$

dengan $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Ada 3 metode yang akan dibahas disini, yaitu : Metode Dekomposisi LU, Metode Jacobi dan Metode Gasuss – Seidel.

3.1. Metode Dekomposisi LU

Dalam metode ini SPL $A\bar{x} = \bar{b}$ disusun kembali menjadi bentuk $U\bar{x} = \bar{d}$ dimana U adalah matriks segitiga atas sehingga $U\bar{x} - \bar{d} = \bar{0}$, kemudian dikalikan matriks segitiga bawah L sehingga $L(U\bar{x} - \bar{d}) = A\bar{x} - \bar{b}$. Dengan demikian $LU = A$ dan $L\bar{d} = \bar{b}$

- Jika diagonal U bernilai 1 maka dekomposisi LU disebut Dekomposisi Crout.

$A = LU$ sehingga $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

- Jika diagonal L bernilai 1 maka dekomposisi LU disebut Dekomposisi Doolittle

$A = LU$ sehingga $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$

Dari $L\overline{d} = \overline{b}$ dengan substitusi maju diperoleh $\overline{d}$ dan dari $U\overline{x} = \overline{d}$ dengan substitusi mundur diperoleh penyelesaian untuk $\overline{x}$.

Alur Metode Dekomposisi Crout : $A = LU$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$l_{i1} = a_{i1}$ untuk $i = 1,2,\ldots,n$

$u_{ij} = \dfrac{a_{1j}}{l_{11}}$ untuk $j = 2,3,\ldots,n$

Untuk $j = 2,3,..,n-1$

$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}$ untuk $i = j, j+1,\ldots,n$

$u_{jk} = \dfrac{a_{jk} - \sum_{i=1}^{j-1} l_{ji} u_{ik}}{l_{jj}}$ untuk $k = j+1, j+2,..n$

dan $l_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} u_{kn}$

Contoh :

Lakukan dekomposisi LU Crout dan tentukan penyelesaian dari SPL :

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + x_3 &= 12 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= -8 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 16 \end{aligned}$$

Penyelesaian :

$l_{11} = 2$; $l_{21} = -1$; $l_{31} = 3$

$u_{12} = \dfrac{a_{12}}{l_{11}} = \dfrac{-5}{2} = -2.5$; $u_{13} = \dfrac{a_{13}}{l_{11}} = \dfrac{1}{2} = 0.5$

$l_{22} = a_{22} - l_{21}\,u_{12} = 3 - (-1)(-2.5) = 0.5$

$l_{32} = a_{32} - l_{31}\,u_{12} = -4 - 3(-2.5) = 3.5$

$u_{23} = \dfrac{a_{23} - l_{21}\,u_{13}}{l_{22}} = \dfrac{-1-(-1)(0.5)}{0.5} = -1$

$l_{33} = a_{33} - l_{31}\,u_{13} - l_{32}\,u_{23} = 2 - 3\,(0.5) - (3.5)(-1) = 4$

Dengan demikian $A = LU$ sehingga $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0.5 & 0 \\ 3 & 3.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L\overline{d} = \overline{b}$ sehingga $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0.5 & 0 \\ 3 & 3.5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix}$

$2d_1 = 12$ sehingga $d_1 = 6$

$-d_1 + 0.5\,d_2 = -8$ sehingga $d_2 = -4$

$3d_1 + 3.5d_2 + 4d_3 = 16$ sehingga $d_3 = 3$

Dengan demikian $\overline{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$U\overline{x} = \overline{d}$ sehingga $\begin{pmatrix} 1 & -2.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$x_3 = 3$

$x_2 - x_3 = -4$ sehingga $x_2 = -1$

$x_1 - 2.5x_2 + 0.5x_3 = 6$ sehingga $x_1 = 2$

3.2. Metode Jacobi

Andaikan SPL dengan n persamaan dan n variabel dinyatakan dalam bentuk perkalian matriks $A\overline{x} = \overline{b}$. SPL tersebut disusun kembali dengan memperhatikan elemen pivot menjadi bentuk :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}}\, x_j^{(k)} \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots.. \text{ dan } i = 1,2,\ \ldots..,n$$

Jika diberikan nilai / penyelesaian awal $\overline{x}^{(0)}$ maka proses perhitungan secara iterasi ini terus dilakukan sampai error yang dikehendaki tercapai.

Contoh

Selesaikan SPL berikut :

$$8x_1 + x_2 - x_3 = 8 \quad ....(1)$$

$$2x_1 + x_2 + 9x_3 = 12 \quad ....(2)$$

$$x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -4 \quad ....(3)$$

Dengan memperhatikan elemen pivot maka SPL ini disusun kembali menjadi bentuk :

$x_1 = 1 - 0.125\,x_2 + 0.125\,x_3$ .... dari persamaan (1)

$x_2 = 0.571 + 0.143\,x_1 + 0.286\,x_3$ ....dari persamaan (3)

$x_3 = 1.333 - 0.222\,x_1 - 0.111\,x_2$ ....dari persamaan (2)

Andaikan diberikan nilai awal $\overline{x}^{(0)} = (0,0,0)$ maka perhitungan secara iterasi dapat ditabelkan sbb :

	$\overline{x}^{(0)}$	$\overline{x}^{(1)}$	$\overline{x}^{(2)}$	$\overline{x}^{(3)}$	$\overline{x}^{(4)}$	$\overline{x}^{(5)}$	$\overline{x}^{(6)}$	$\overline{x}^{(7)}$
x_1	0	1.000	1.095	0.995	0.993	1.002	1.001	1.000
x_2	0	0.571	1.095	1.026	0.990	0.998	1.001	1.000
x_3	0	1.333	1.048	0.969	1.000	1.004	1.001	1.000

Dengan demikian penyelesaiannya $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ dan $x_3 = 1$

3.3. Metode Gauss – Seidel

Andaikan SPL dengan n persamaan dan n variabel dinyatakan dalam bentuk perkalian matriks $A\overline{x} = \overline{b}$ .Penyelesaian dengan metode ini analog dengan Metode Jacobi, hanya saja nilai yang baru ketemu dari perhitungan langsung dimasukkan tanpa menunggu satu iterasi selesai sehingga penyusunan kembali SPL menjadi :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots.. \text{ dan } i = 1,2,\ldots..,n$$

Jika diberikan nilai / penyelesaian awal $\bar{x}^{(0)}$ maka proses perhitungan secara iterasi ini terus dilakukan sampai error yang dikehendaki tercapai.

Contoh

Selesaikan SPL berikut :

$8x_1 + x_2 - x_3 = 8$ ....(1)

$2x_1 + x_2 + 9x_3 = 12$ ....(2)

$x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -4$ ....(3)

Dengan memperhatikan elemen pivot maka SPL ini disusun kembali menjadi bentuk :

$x_1^{(k+1)} = 1 - 0.125\,x_2^{(k)} + 0.125\,x_3^{(k)}$ .... dari persamaan (1)

$x_2^{(k+1)} = 0.571 + 0.143\,x_1^{(k+1)} + 0.286\,x_3^{(k)}$ ....dari persamaan (3)

$x_3^{(k+1)} = 1.333 - 0.222\,x_1^{(k+1)} - 0.111\,x_2^{(k+1)}$ ....dari persamaan (2)

Andaikan diberikan nilai awal $\bar{x}^{(0)} = (0,0,0)$ maka perhitungan secara iterasi dapat ditabelkan sbb :

	$\bar{x}^{(0)}$	$\bar{x}^{(1)}$	$\bar{x}^{(2)}$	$\bar{x}^{(3)}$	$\bar{x}^{(4)}$	$\bar{x}^{(5)}$
x_1	0	1.000	1.041	0.997	1.001	1.000
x_2	0	0.714	1.014	0.996	1.001	1.000
x_3	0	1.032	0.990	1.002	1.001	1.000

Dengan demikian penyelesaiannya $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ dan $x_3 = 1$

BAB 4
SISTEM PERSAMAAN NON LINEAR

Penyelesaian dari sistem persamaan non linear (SPNL) dengan n persamaan dan n variabel dapat diperoleh dengan menggunakan Metode Newton – Raphson atau Metode Iterasi.

4.1. Metode Newton – Raphson

Diketahui SPNL dengan n persamaan dan n variabel yang ditulis dalam bentuk sbb:

$$f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_n(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = 0$$

Jika nilai awal diberikan $\overline{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots\ldots, x_n^{(0)}\right)$ maka ekspansi Deret Taylor di sekitar $\overline{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots\ldots, x_n^{(0)}\right)$ dari fungsi – fungsi pada SPNL tersebut akan menghasilkan :

$$f_1(x_1^{(0)} + e_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)} + e_n^{(0)}) = f_1\left(\overline{x}^{(0)}\right) + e_1^{(0)} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(\overline{x}^{(0)}\right) + e_2^{(0)} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\left(\overline{x}^{(0)}\right) + \ldots\ldots + e_n^{(0)} \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\left(\overline{x}^{(0)}\right) = 0$$
$$f_2(x_1^{(0)} + e_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)} + e_n^{(0)}) = f_2\left(\overline{x}^{(0)}\right) + e_1^{(0)} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(\overline{x}^{(0)}\right) + e_2^{(0)} \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\left(\overline{x}^{(0)}\right) + \ldots\ldots + e_n^{(0)} \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\left(\overline{x}^{(0)}\right) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_n(x_1^{(0)} + e_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)} + e_n^{(0)}) = f_n\left(\overline{x}^{(0)}\right) + e_1^{(0)} \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\left(\overline{x}^{(0)}\right) + e_2^{(0)} \frac{\partial f_n}{\partial x_2}\left(\overline{x}^{(0)}\right) + \ldots\ldots + e_n^{(0)} \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\left(\overline{x}^{(0)}\right) = 0$$

Dengan demikian penyelesaian untuk iterasi pertama :

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + e_1^{(0)}$$
$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + e_2^{(0)}$$
$$\vdots$$
$$x_n^{(1)} = x_n^{(0)} + e_n^{(0)}$$

dimana :

$$e_1^{(0)} = \frac{\begin{vmatrix} -f_1(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ -f_2(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -f_n(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{vmatrix}} \quad , \quad e_2^{(0)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & -f_1(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & -f_2(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & -f_n(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{vmatrix}},$$

$$\ldots\ldots, \; e_n^{(0)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & -f_1(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & -f_2(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & -f_n(\bar{x}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{vmatrix}}$$

Secara umum untuk iterasi yang ke i diperoleh :

$$x_1^{(i)} = x_1^{(i-1)} + e_1^{(i-1)}$$
$$x_2^{(i)} = x_2^{(i-1)} + e_2^{(i-1)}$$
$$\vdots$$
$$x_n^{(i)} = x_n^{(i-1)} + e_n^{(i-1)}$$

Contoh :

Dengan Metode Newton – Raphson tentukan penyelesaian dari SPNL berikut :

$$x_1 + 3\log x_1 - x_2^2 = 0$$
$$2x_1^2 - x_1 x_2 - 5x_1 + 1 = 0$$

dengan nilai awal $\overline{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) = (3.4\ , 2.2)$. Lakukan sampai 3 iterasi !

Penyelesaian

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + 3\log x_1 - x_2^2 \quad \text{maka} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1 + \frac{3}{x\ln 10} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_{21}} = 2x_2$$

$$f_2(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_1 x_2 - 5x_1 + 1 \quad \text{maka} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 4x_1 - x_2 - 5 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -x_1$$

Setelah dimasukkan untuk $\overline{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) = (3.4\ , 2.2)$ maka untuk iterasi pertama diperoleh :

$$e_1^{(0)} = \frac{\begin{vmatrix} -0.1545 & -4.4 \\ 0.72 & -3.4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.383 & -4.4 \\ 6.4 & -3.4 \end{vmatrix}} = 0.157 \quad \text{sehingga} \quad x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + e_1^{(0)} = 3.4 + 0.157 = 3.557$$

$$e_2^{(0)} = \frac{\begin{vmatrix} 1.383 & -0.1545 \\ 6.4 & 0.72 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.383 & -4.4 \\ 6.4 & -3.4 \end{vmatrix}} = 0.085 \quad \text{sehingga} \quad x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + e_2^{(0)} = 2.2 + 0.085 = 2.285$$

Dengan demikian jika ditabelkan :

Iterasi	e_1	x_1	e_2	x_2
1	0.157	3.557	0.085	2.285
2	-0.0685	3.4885	-0.0229	2.2621
3	-0.0013	3.4782	-0.00056	2.26154

4.2. Metode Iterasi

Diketahui SPNL dengan n persamaan dan n variabel yang ditulis dalam bentuk sbb:

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = 0\\
&f_2(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = 0\\
&\vdots\\
&f_n(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = 0
\end{aligned}$$

dengan nilai awal diberikan $\overline{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots\ldots, x_n^{(0)}\right)$

SPNL ini disusun kembali menjadi bentuk :

$$\begin{aligned}
&x_1 = F_1(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)\\
&x_2 = F_2(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)\\
&\vdots\\
&x_n = F_n(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)
\end{aligned}$$

Seperti halnya Metode Gauss – Seidel maka secara iterasi hasil yang baru dihitung langsung masuk pada perhitungan berikutnya tanpa menunggu hasil satu iterasi selesai semua sehingga proses iterasi dapat ditulis menjadi :

$$\begin{aligned}
&x_1^{(k+1)} = F_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots\ldots x_n^{(k)})\\
&x_2^{(k+1)} = F_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \ldots\ldots x_n^{(k)})\\
&\vdots\\
&x_n^{(k+1)} = F_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots\ldots x_n^{(k)})
\end{aligned}$$

Contoh :

Dengan Metode Iterasi tentukan penyelesaian dari SPNL berikut

$$x_1^{\,2} + 2x_2^{\,2} - x_2 - 2x_3 = 0$$
$$x_1^{\,2} - 8x_2^{\,2} + 10x_3 = 0$$
$$\frac{x_1^{\,2}}{7x_2\,x_3} - 1 = 0$$

dengan nilai awal $\overline{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right) = (0.55,\ 0.39,\ 0.10)$.

Lakukan 2 iterasi saja !

Penyelesaian :

SPNL tersebut disusun kembali menjadi bentuk iterasi sbb :

$$x_1^{(k+1)} = \sqrt{x_2^{(k)} - 2x_2^{2\,(k)} + 2x_3^{(k)}}$$
$$x_2^{(k+1)} = \sqrt{\frac{x_1^{2\,(k+1)} + 10x_3^{(k)}}{8}}$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{x_1^{2\,(k+1)}}{7x_2^{(k+1)}}$$

Jika ditabelkan akan diperoleh hasil perhitungannya sbb:

	$\overline{x}^{(0)}$	$\overline{x}^{(1)}$	$\overline{x}^{(2)}$
x_1	0.55	0.534602656	0.532106322
x_2	0.39	0.400905225	0.403352621
x_3	0.10	0.101840956	0.100279905

BAB 5
POLINOMIAL INTERPOLASI

5.1. Beda Hingga

Jika $f(x)$ merupakan fungsi yang dapat dideferensialkan maka beda hingga pertama dari $f(x)$ dapat didefinisikan sebagai :

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

dimana $h = \Delta x$ = nilai beda x yang uniform.

Secara indeks beda hingga pertama didefinisikan sebagai :

$$\Delta f_1 = f_2 - f_1 \quad , \quad \Delta f_2 = f_3 - f_2 \quad , \quad ..... \quad , \quad \Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

Beda hingga ke dua didefinisikan :

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_1) = \Delta(f_2 - f_1) = \Delta f_2 - \Delta f_1 = (f_3 - f_2) - (f_2 - f_1) = f_3 - 2f_2 + f_1$$

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{I+1} + f_i$$

Beda hingga ke tiga didefinisikan :

$$\Delta^3 f_1 = \Delta(\Delta^2 f_1) = f_4 - 3f_3 + 3f_2 - f_1$$

$$\Delta^3 f_i = \Delta(\Delta^2 f_i) = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i$$

$\vdots$

Dengan demikian beda hingga ke n menjadi :

$$\Delta^n f_i = f_{i+n} - n\, f_{i+n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\, f_{i+n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\, f_{i+n-3} + ...$$

dimana $f_i = f(x_i)$

Tabel Beda Hingga menggunakan simbol :

s	x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
-2	x_{-2}	f_{-2}				
			Δf_{-2}			
-1	x_{-1}	f_{-1}		$\Delta^2 f_{-2}$		
			Δf_{-1}		$\Delta^3 f_{-2}$	
0	x_0	f_0		$\Delta^2 f_{-1}$		$\Delta^4 f_{-2}$
			Δf_0		$\Delta^3 f_{-1}$	
1	x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$		$\Delta^4 f_{-1}$
			Δf_1		$\Delta^3 f_0$	
2	x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$
			Δf_2		$\Delta^3 f_1$	
3	x_3	f_3		$\Delta^2 f_2$		
			Δf_3			
4	x_4	f_4				

s = indeks dari x

Jika $f(x)$ berbentuk polinomial dari data yang diberikan maka tabel beda hingga mempunyai bentuk yang khusus.

Contoh :

Tabel beda hingga untuk fungsi $f(x) = x^3$

s	*x*	*f(x)*	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0	0	0				
			1			
1	1	1		6		
			7		6	
2	2	8		12		0
			19		6	
3	3	27		18		0
			37		6	
4	4	64		24		0
			61		6	
5	5	125		30		
			91			
6	6	216				

Dapat dilihat bahwa beda hingga ke tiga konstan sehingga beda hingga ke empat dan selanjutnya akan bernilai 0. Untuk menunjukkan bahwa beda hingga ke n dari polinomial derajad n adalah konstan dapat dilakukan dengan cara sbb:

$$\Delta\left(a\,x^n\right) = a\,(x+h)^n - a\,x^n$$

$$= a\,x^n + a\,n\,x^{n-1}h + ... + a\,h^n - a\,x^n$$

$$= a\,n\,h\,x^{n-1} + ...$$ (suku – suku dengan derajad lebih rendah)

$$\Delta\left(a\,n\,h\,x^{n-1}\right) = a\,n\left(n-1\right)h^2 x^{n-2} + ...$$ (suku – suku dengan derajad lebih rendah)

Selanjutnya untuk polinomial derajad n

$$\Delta P_n(x) = \Delta\left(a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n x + a_{n+1}\right)$$

$$= a_1 nhx^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{(suku – suku dengan derajad lebih rendah)}$$

$$\Delta^2 P_n(x) = a_1 n(n-1)h^2 x^{n-2} + \ldots\ldots. \qquad \text{(suku – suku dengan derajad lebih rendah)}$$

$$\vdots$$

$$\Delta^n P_n(x) = a_1 n(n-1)(n-2)\ldots.3.2.1.h^n x^{n-n} = a_1\, n!\, h^n$$

Ini menunujukkan bahwa selain beda hingga ke n konstan nilainya diketahui $a_1 n! h^n$

Contoh :

Untuk $\Delta^3 P_3(x) = 1.(3!)1^3 = 6$ jika $h = 1$

5.2. Polinomial Interpolasi Newton - Gregory

Jika fungsi yang ditabelkan seperti berbentuk polinomial (dengan melihat beda hingga ke n konstan) maka fungsi itu dapat didekati dengan polinomial yang menyerupainya. Problemnya adalah dengan menentukan bentuk polinomial derajad n yang melalui (n+1) pasangan titik – titik $[x_i, f(x_i)];\, i = 1,2,\ldots..,(n+1)$. Jadi hanya ada satu polinomial derajad n yang melalui (n+1) titik.

Salah satu cara untuk menuliskan sebuah polinomial yang melalui titik – titik yang sudah dibuat dalam tabel , yaitu dengan menggunakan rumus polinomial maju Newton – Gregory :

$$P_n(x_s) = \binom{s}{0} f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_0 + \binom{s}{3}\Delta^3 f_0 + \ldots\ldots..$$

$$= f_0 + s\,\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{6}\Delta^3 f_0 + \ldots\ldots.$$

dengan $\binom{s}{n} = \dfrac{s!}{(s-n)!\,n!}$

Jika $s = 0$ maka $P_n(x_0) = f_0$

Jika $s = 1$ maka $P_n(x_1) = f_0 + \Delta f_0 = f_0 + (f_1 - f_0) = f_1$

Jika $s = 2$ maka $P_n(x_2) = f_0 + 2\Delta f_0 + \Delta^2 f_0 = f_2$

Perlu ditekankan disini bahwa umumnya $f(x)$ dan $P_n(x)$ bukan fungsi yang sama. Oleh karena itu ada error taksiran interpolasi yang berhingga, sedangkan nilai

$$s = \frac{x - x_0}{h}$$

Contoh :

Tentukan polinomial maju Newton – Gregory derajad tiga yang cocok dengan tabel berikut untuk empat titik dari $x = 0.4$ sampai $x = 1.0$. Gunakan interpolasi itu untuk memperoleh $f(0.73)$!

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0	0				
		0.203			
0.2	0.203		0.017		
		0.220		0.024	
0.4	0.423		0.041		0.020
		0.261		0.044	
0.6	0.684		0.085		0.052
		0.346		0.096	
0.8	1.030		0.181		0.211
		0.527		0.307	
1.0	1.557		0.488		
		1.015			
1.2	2.572				

Penyelesaian :

Untuk membuat polinomial yang cocok maka indeks s dicari dengan mengambil nilai $x_0 = 0.4$ sehingga $f_0 = 0.423$, $\Delta f_0 = 0.261$, $\Delta^2 f_0 = 0.085$, $\Delta^3 f_0 = 0.096$

$$s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.73 - 0.4}{0.2} = 1.65$$

$$P_3(x_s) = f_0 + s\,\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{6}$$

$$f(0.73) = 0.423 + (1.65)(0.261) + \frac{(1.65)(0.65)}{2}(0.085) + \frac{(1.65)\,(0.65)(-0.35)}{6}(0.096) = 0.893$$

Jika diambil sampai derajad empat maka ditambah dengan

$$\binom{s}{4}\Delta^4 f_0 = \frac{(1.65)(0.65)(-0.35)(=1.35)}{24}(0.211) = 0.0044$$

Dengan demikian

$$f(0.73) = 0.893 + 0.0044 = 0.8974$$

Cara lain untuk menuliskan sebuah polinomial yang melalui titik – titik yang sudah dibuat dalam tabel , yaitu dengan menggunakan rumus polinomial mundur Newton – Gregory :

$$\begin{aligned} P_n(x_s) &= f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_{-1} + \binom{s+1}{2}\Delta^2 f_{-2} + \binom{s+2}{3}\Delta^3 f_{-3} + \ldots\ldots.. \\ &= f_0 + s\,\Delta f_{-1} + \frac{s(s+1)}{2}\Delta^2 f_{-2} + \frac{s(s+1)(s+2)}{6}\Delta^3 f_{=3} + \ldots\ldots. \end{aligned}$$

Contoh :

Tentukan polinomial mundur Newton – Gregory derajad tiga yang cocok dengan tabel diatas untuk empat titik dari $x = 0.4$ sampai $x = 1.0$. Gunakan interpolasi itu untuk memperoleh $f(0.73)$!

Penyelesaian

Untuk membuat polinomial yang cocok maka indeks s dicari dengan mengambil nilai $x_0 = 1.0$ sehingga $f_0 = 1{,}557$, $\Delta f_{-1} = 0.527$, $\Delta^2 f_{-2} = 0.181$, $\Delta^3 f_{-3} = 0.096$

$$s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.73 - 1.0}{0.2} = -1.35$$

$$P_n(x_s) = f_0 + s\,\Delta f_{-1} + \frac{s(s+1)}{2}\Delta^2 f_{-2} + \frac{s(s+1)(s+2)}{6}\Delta^3 f_{=3}$$

$$f(0.73) = 1.557 + (-1.35)(0.527) + \frac{(-1.35)(-0.35)}{2}(0.181) + \frac{(-1.35)(-0.35)(0.65)}{6}(0.096) = 0.893$$

Jika diambil sampai derajad empat maka ditambah dengan

$$\binom{s+3}{4}\Delta^4 f_{-4} = \frac{(-1.35)(0.65)(-0.35)(0.65)(1.65)}{24}(0.052) = 0.001$$

Dengan demikian

$$f(0.73) = 0.893 + 0.001 = 0.894$$

Error untuk polinomial maju Newton – Gregory ini adalah :

$$E(x_s) = \binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{s(s-1)(s-2)....(s-n)}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \quad , \; x_0 \le \xi \le x_n$$

Contoh :

Data berikut ini untuk $\sin x$. Interpolasikan menggunakan kuadratik dari tiga titik pertama untuk menaksir nilai $\sin(0.8)$ dan tentukan juga errornya !

x	*f(x)*	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0.1	0.09983			
		0.37960		
0.5	0.47943		-0.07570	
		0.30390		-0.04797
0.9	0.78333		-0.12367	
		0.18023		-0.02846
1.3	0.96356		-0.18023	
		0.02810		
1.7	0.99166			

Penyelesaian :

Ambil $x_0 = 0.1$ dan $s = \dfrac{0.8-1.0}{0.4} = 1.75$ maka

$$P_2(x_s) = f_0 + s\,\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0$$

$$f(0.8) = 0.0983 + (1.75)(0.37960) + \frac{(1.75)(0.75)}{2}(-0.07570) = 0.71445$$

$$E(x_s) = \frac{s(s-1)(s-2)}{(2+1)!}h^{2+1} f^{(2+1)}(\xi) = \frac{(1.75)(0.75)(-0.25)}{6}(0.4)^3(-\cos\,\xi) \;\; , \;\; 0.1 \le \xi \le 0.9$$

Karena $\cos\xi$ monoton pada interval ini maka dapat ditentukan nilai maksimum dan minimum untuk $\cos\xi$

$$E(x_s) \le \frac{(1.75)(0.75)(-0.25)}{6}(0.4)^3(-\cos\,0.1) = 0.00348$$

$$E(x_s) \ge \frac{(1.75)(0.75)(-0.25)}{6}(0.4)^3(-\cos\,0.9) = 0.00218$$

Dengan demikian errornya adalah $0.00218 \le$ error ≤ 0.00348

5.3. Polinomial Lagrange

Jika beda hingga diantara x tidak sama polinomial maju / mundur Newton – Gregory tidak dapat dipakai. Pendekatan polinomial yang digunakan untuk menentukan interpolasi polinomial menggunakan polinomial Lagrange.

Andaikan diberikan data dari nilai x dan $f(x)$ dalam tabel berikut :

x	x_0	x_1	x_2	....	x_{n-1}	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	f_2	....	f_{n-1}	f_n

Maka polinomial Lagrangenya adalah :

$$P_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)......(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)......(x_0-x_n)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)......(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)......(x_1-x_n)} f_1 + ...$$

$$.......... + \frac{(x-x_0)(x-x_1)......(x-x_n)}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)......(x_{n-1}-x_n)} f_{n-1} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)......(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)......(x_n-x_{n-1})} f_n$$

Contoh :

Dengan interpolasi Lagrange tentukan $P_2(x)$ kemudian hitung $f(2.3)$ dari data berikut :

x	1.1	1.7	3.0
$f(x)$	10.6	15.2	20.3

Penyelesaian :

$$P_2(x) = \frac{(x-1.7)(x-3.0)}{(1.1-1.7)(1.1-3.0)}(10.6) + \frac{(x-1.1)(x-3.0)}{(1.7-1.1)(1.7-3.0)}(15.2) + \frac{(x-1.1)(x-1.7)}{(3.0-1.1)(3.0-1.7)}(20.3)$$

$$\begin{aligned} f(2.3) &= \frac{(2.3-1.7)(2.3-3.0)}{(1.1-1.7)(1.1-3.0)}(10.6) + \frac{(2.3-1.1)(2.3-3.0)}{(1.7-1.1)(1.7-3.0)}(15.2) + \frac{(2.3-1.1)(2.3-1.7)}{(3.0-1.1)(3.0-1.7)}(20.3) \\ &= 18.38 \end{aligned}$$

BAB 6

DIFERENSIASI NUMERIK

6.1. Derivatif Pertama

Jika sebuah fungsi dapat didekati dengan polinomial interpolasi maka diferensial / turunan fungsi tersebut dapat didekati dengan diferensial polinomial . Untuk polinomial maju Newton – Gregory :

$$f(x_s) = P_n(x_s) + error = f_0 + s\,\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{6}\Delta^3 f_0 + \ldots\ldots. + error$$

Error $P_n(x_s) = E(x_s) = \binom{s}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \quad , x_0 \le \xi \le x_n$

Jika persamaan ini dideferensialkan pertama diperpleh :

$$f'(x_s) = P_n'(x_s) = \frac{d}{dx}[P_n(x_s)] = \frac{d}{ds}[P_n(x_s)]\frac{ds}{dx} = \frac{d}{ds}[P_n(x_s)]\frac{1}{h}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 + \frac{2s-1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{3s^2-6s+2}{6}\Delta^3 f_0 + \frac{4s^3-18s^2+22s-6}{24}\Delta^4 f_0 + \ldots\right]$$

Untuk $s = 0$ derivatif yang berhubungan denga x_0

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 f_0 + \ldots\ldots. \pm \frac{1}{n}\Delta^n f_0\right]$$

Error dari derivatif pertama ini adalah :

Error $P_n^{'}(x_0) = \dfrac{(-1)^n}{n+1} h^n \; f^{(n+1)}(\xi) \quad , \quad x_0 \le \xi \le x_n$

Contoh :

Pada tabel berikut taksirlah derivatif pertama dari y pada $x = 1.7$ dengan menghitung sampai suku pertama , suku kedua , suku ketiga dan suku keempat dan errornya.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1.3	3.669				
		0..813			
1.5	4.482		0.179		
		0.992		0.041	
1.7	5.474		0.220		0.007
		1.212		0.048	
1.9	6.686		0.268		0.012
		1.480		0.060	
2.1	8.166		0.328		0.012
		1.808		0.072	
2.3	9.974		0.400		
		2.208			
2.5	12.182				

Penyelesaian :

Sampai suku pertama

$$y'(x_0) = \frac{1}{h}\,\Delta y_0 \text{ sehingga } y'(1.7) = \frac{1}{0.2}\,1.212 = 6.060$$

$$\text{Error} = \frac{(-1)^1}{1+1}(0.2)^1\ f''(\xi) \quad , \quad 1.7 \le \xi \le 1.9$$

Sampai suku kedua

$$y'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0\right] \text{sehingga } y'(1.7) = \frac{1}{0.2}\left[1.212 - \frac{1}{2}(0.268)\right] = 5.390$$

$$\text{Error} = \frac{(-1)^2}{3}(0.2)^2\ f'''(\xi) \quad , \quad 1.7 \le \xi \le 2.1$$

Sampai suku ketiga

$$y'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0\right] \text{sehingga}$$

$$y'(1.7) = \frac{1}{0.2}\left[1.212 - \frac{1}{2}(0.268) + \frac{1}{3}(0.060)\right] = 5.490$$

Error = $\dfrac{(-1)^3}{4}(0.2)^3 \; f^{(4)}(\xi) \quad , \quad 1.7 \le \xi \le 2.3$

Sampai suku keempat

$$y'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0\right] \text{sehingga}$$

$$y'(1.7) = \frac{1}{0.2}\left[1.212 - \frac{1}{2}(0.268) + \frac{1}{3}(0.060) - \frac{1}{4}(0.012)\right] = 5.475$$

Error = $\dfrac{(-1)^4}{5}(0.2)^4 \; f^{(5)}(\xi) \quad , \quad 1.7 \le \xi \le 2.5$

6.2. Derivatif Kedua Dan Lebih Tinggi

Untuk memperoleh derivatif kedua maka hasil derivatif pertama diturunkan lagi sehingga diperoleh :

$$f''(x_s) = P_n''(x_s) = \frac{d}{dx}\left[P_n'(x_s)\right] = \frac{d}{ds}\left[P_n'(x_s)\right]\frac{ds}{dx} = \frac{d^2}{ds^2}\left[P_n(x_s)\right]\frac{1}{h^2}$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f_0 + (s-1)\Delta^3 f_0 + \frac{12s^2 - 36s + 22}{24}\Delta^4 f_0 + \ldots\right]$$

Untuk $s = 0$ derivatif kedua yang berhubungan denga x_0

$$f''(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 f_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 f_0 ....\right]$$

Demikian juga untuk memperoleh derivatif ketiga didapatkan dari derivatif kedua diturunkan lagi, derivatif keempat diperoleh dari derivatif ketiga diturunkan lagi. Demikian seterusnya.

Contoh :

Dari tabel diatas tentukan $y''(1.7)$ sampai suku kedua dan hitung errornya !

Penyelesaian :

$y''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0\right]$ sehingga $y''(1.7) = \frac{1}{(0.2)^2}\left[0.268 - 0.060\right] = 5.200$

Error = $\frac{1}{h^2}\left[\frac{11}{12} h^4 \; y^{(4)}(\xi)\right]$, $1.7 \le \xi \le 2.1$

BAB 7
INTEGRASI NUMERIK

7.1. Integrasi Newton – Cotes

Cara yang umum untuk membentuk formula integrasi numerik hampir sama dengan cara membentuk formula untuk diferensiasi numerik.

Untuk polinomial maju Newton – Gregory maka :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P_n(x_s)\,dx$$

Formula ini tidak eksak karena polinomialnya tida identik dengan $f(x)$ dan ada errornya, yaitu sebesar :

$$\text{Error} = \int_a^b \binom{s}{n+1} h^{n+1}\, f^{(n+1)}(\xi)\,dx$$

Akan dibangun formula Newton – Cotes dengan mengubah variabel integrasi x menjadi variabel s. Dari $s = \dfrac{x - x_0}{h}$ maka $dx = ds$

Untuk $n = 1$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} (f_0 + s\Delta f_0)\,dx = h\int_{s=0}^{1} (f_0 + s\,\Delta f_0)\,ds = h\left(s\,f_0 + \frac{1}{2}s^2\Delta f_0\right)\Bigg|_0^1 = \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

$$\text{error} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{s(s-1)}{2} h^2 f''(\xi)\,dx = h^3 f''(\xi)\int_{s=0}^{1} \frac{s^2 - s}{2}\,ds = -\frac{1}{12}h^3 f''(\xi);\ \ x_0 \le \xi \le x_1$$

Untuk $n = 2$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_{21}} \left(f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0\right)dx = h\int_{s=0}^{2}\left(f_0 + s\,\Delta f_0 + \frac{s^2 - s}{2}\right)ds = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

Karena error = $\displaystyle\int_{x_0}^{x_2} \frac{s(s-1)(s-2)}{6} h^3 f'''(\xi)\,dx = 0$ maka diambil suku berikutnya sehingga :

$$\text{error} = \int_{x_0}^{x_2} \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{24}\, h^4 f^{(4)}(\xi)\,dx = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi);\ x_0 \le \xi \le x_2$$

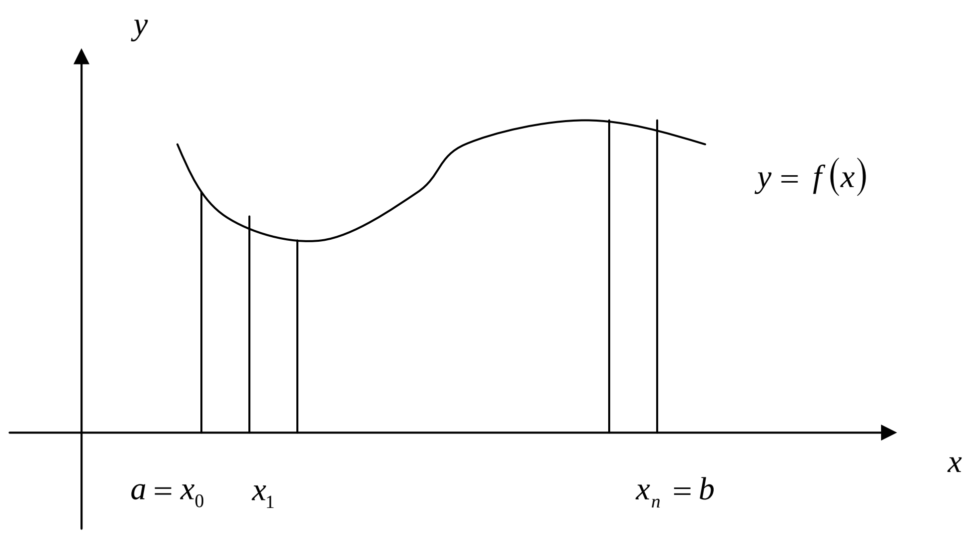
Untuk $n = 3$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} \left(f_0 + s\,\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{6}\Delta^3 f_0 \right) dx = \frac{3h}{8}\left(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3 \right)$$

error = $-\frac{3}{80}h^5 f^{(5)}(\xi);\ x_0 \le \xi \le x_3$

7.2. Aturan Trapezoidal

Formula Newton – Cotes pertama didasarkan pendekatan $f(x)$ di (x_0, x_1) dengan sebuah garis lurus. Aturan ini disebut juga sebagai Aturan Trapezoidal.



Untuk menghitung $\int_a^b f(x)dx$ interval dari *a* ke *b* dibagi menjadi n subinterval – subinterval. Luasan dibawah kurva $f(x)$ didekati dengan Aturan Trapezoidal.

Andaikan $h = \Delta x$ maka :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ dx = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\Delta x = \frac{h}{2}\left(f_i + f_{i+1} \right)$$

Dengan demikian untuk semua integral antara $[a,b]$ dengan n subinterval diperoleh :

$$\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left(f_i + f_{i+1}\right) = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2\left(f_1 + f_2 + \dots\dots + f_{n-1}\right) + f_n\right]$$

error = $-\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)\ ;\ a \le \xi \le b$

Contoh :

Pada tabel berikut diberikan nilai – nilai dari x dan $f(x)$:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.6	4.953	2.8	16.445
1.8	6.050	3.0	20.086
2.0	7.389	3.2	24.533
2.2	9.025	3.4	29.964
2.4	11.023	3.6	36.598
2.6	13.464	3.8	44.701

Tentukan integral $f(x)$ dari $x = 1.8$ sampai $x = 3.4$

Penyelesaian :

$$\int_{1.8}^{3.4} f(x)dx = \frac{0.2}{2}\left[6.050 + 2\left(7.389 + 9.025 + 11.023 + 13.464 + 16.445 + 20.086 + 24.553\right) + 29.964\right]$$
$$= 23.9944$$

error = $-\frac{3.4-1.8}{12}(0.2)^2\ f''(\xi)\ ; 1.8 \le \xi \le 3.4$

7.3. Aturan Simpson $\frac{1}{3}$

Formula Newton – Cotes kedua didasarkan pendekatan $f(x)$ di (x_0, x_2) dengan sebuah polinomial parabolik. Aturan ini disebut juga sebagai Aturan Simpson $\frac{1}{3}$

Untuk menghitung $\int_a^b f(x)dx$ interval dari a ke b dibagi menjadi n subinterval – subinterval. Luasan dibawah kurva $f(x)$ dapat didekati dengan Aturan Simpson $\frac{1}{3}$.

Andaikan $h = \Delta x$ maka :

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\, dx = \frac{f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})}{3}\, \Delta x = \frac{h}{3}\left(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}\right)$$

Dengan demikian untuk semua integral antara $[a,b]$ dengan n genap subinterval diperoleh :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{h}{3}\left(f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}\right) = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4\left(f_1 + f_3 + \ldots + f_{n-2}\right) + 2\left(f_2 + f_4 + \ldots\ldots + f_{n-1}\right) + f_n\right]$$

error = $-\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$; $a \le \xi \le b$

Contoh :

Tentukan integral $f(x)$ dari $x = 1.8$ sampai $x = 3.4$ dari tabel diatas jika menggunakan Aturan Simpson $\frac{1}{3}$

Penyelesaian :

$$\int_{1.8}^{3.4} f(x)dx = \frac{0.2}{3}\left[6.050 + 4(7.389 + 11.023 + 16.445 + 24.553) + 2(9.025 + 13.464 + 20.086) + 29.964\right]$$

$$= 23.9149$$

7.4. Aturan Simpson $\frac{3}{8}$

Formula Newton – Cotes ketiga didasarkan pendekatan $f(x)$ di (x_0, x_3) dengan sebuah polinomial kubik . Aturan ini disebut juga sebagai Aturan Simpson $\frac{3}{8}$

Untuk menghitung $\int_a^b f(x)\,dx$ interval dari a ke b dibagi menjadi n subinterval – subinterval. Luasan dibawah kurva $f(x)$ dapat didekati dengan Aturan Simpson $\frac{3}{8}$.

Andaikan $h = \Delta x$ maka :

$$\int_{x_i}^{x_3} f(x)dx = \frac{f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}) + f(x_{i+3})}{8} 3\Delta x = \frac{3h}{8}\left(f_i + 3f_{i+1} + 3f_{i+2} + f_{i+3}\right)$$

Dengan demikian untuk semua integral antara $[a,b]$ dengan n kelipatan tiga subinterval diperoleh :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-3} \frac{3h}{8}\left(f_i + 3f_{i+1} + 3f_{i+2} + f_{i+3}\right)$$

$$= \frac{3h}{8}\left[f_0 + 3(f_1 + f_2 + f_4 + f_5 + ... + f_{n-1}) + 2(f_3 + f_6 + ... + f_{n-3}) + f_n\right]$$

error = $-\frac{b-a}{80} h^4 f^{(4)}(\xi)$; $a \le \xi \le b$

Contoh :

Tentukan integral $f(x)$ dari $x = 1.6$ sampai $x = 3.4$ dari tabel diatas jika menggunakan Aturan Simpson $\frac{3}{8}$

Penyelesaian :

$$\int_{1.6}^{3.4} f(x)dx = \frac{3(0.2)}{8}\left[4.953 + 3(6.050 + 7.389 + 11.023 + 13.464 + 20.086 + 24.533) + 2(9.025 + 16.455) + 29.964\right]$$

$$= 25.013$$

7.5. Kuadratur Gauss

Formulasi integrasi numerik dengan menggunakan Kuadratur Gauss adalah mencari parameter – paramerter yang tidak diketahui dari fungsi yang akan diintegralkan.

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = af(t_1) + bf(t_2) + cf(t_3) + ...$$

dimana $a, b, c, ...$ adalah pemberat dan $t_1, t_2, t_3, ...$ nilai-nilai t yang akan ditentukan.

Sebagai contoh akan ditentukan parameter – parameter pada formula dua suku yang mengandung empat parameter yang tidak diketahui.

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = af(t_1) + bf(t_2)$$

Formula ini berlaku untuk polinomial derajad tiga sehingga bila dimasukkan :

$f(t) = t^3$ maka $\int_{-1}^{1} t^3\, dt = 0 = at_1^3 + bt_2^3$

$f(t) = t^2$ maka $\int_{-1}^{1} t^2\, dt = \frac{2}{3} = at_1^2 + bt_2^2$

$f(t) = t$ maka $\int_{-1}^{1} t\, dt = 0 = at_1 + bt_2$

$f(t) = 1$ maka $\int_{-1}^{1} 1 dt = 2 = a + b$

Dari empat persamaan ini diperoleh $a = 1$, $b = 1$, $t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0.5773$, $t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5773$

Andaikan batas integrasinya dari a sampai b bukan dari -1 sampai 1 maka batas integrasinya harus diubah menjadi -1 sampai 1.

$x = \frac{(b-a)t + b + a}{2}$ sehingga $dx = \frac{b-a}{2}\, dt$. Dengan demikian :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f\left[\frac{(b-a)t + b + a}{2}\right] dt$$

Contoh :

Tentukan nilai $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$

Penyelesaian :

$$x = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)t + \frac{\pi}{2} + 0}{2} = \frac{\pi t + \pi}{4}$$ sehingga $dx = \frac{\pi}{4} dt$. Dengan demikian :

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{\pi}{4} \int_{-1}^{1} \sin \left(\frac{\pi t + \pi}{4} \right) dt = \frac{\pi}{4} \left(\sin 0.10566\pi + \sin 0.39434\pi \right) = 0.99847$$

error = 0.00153

Untuk memperoleh parameter Kuadratur Gauss yang lebih tinggi derajadnya dapat digunakan polinomial Legendre yang berbentuk :

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)x\,L_n(x) + n\,L_{n-1}(x) = 0$$

dengan $L_0(x) = 1$ dan $L_1(x) = x$ maka $L_2(x) = \frac{3x\,L_1(x) - L_0(x)}{2} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

Akar – akarnya adalah $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ yang merupakan nilai parameter t_1 dan t_2

Dengan relasi rekursi diperoleh :

$$L_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}$$

$$L_4(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}$$

dan seterusnya

Jika ditabelkan maka nilai – nilai parameter Kuadratur Gauss

Jumlah Suku	Nilai t	Faktor pemberat	Derajad Polinomial
2	-0.57735027	1.00000000	3
	0.57735027	1.00000000	
3	-0.77459667	0.55555555	5
	0	0.88888889	
	0.77459667	0.55555555	
4	-0.86113631	0.34785485	7
	-.033998104	0.65214515	
	033998104	0.65214515	
	0.86113631	0.34785485	
5	-0.90617985	0.23692688	9
	-0.53846931	0.47862867	
	0	0.56888889	
	0.53846931	0.47862867	
	0.90617985	0.23692688	
6	-0.93246951	0.17132449	11
	-0.66120939	0.36076157	
	-0.23861919	0.46791393	
	0.23861919	0.46791393	
	0.66120939	0.36076157	
	0.93246951	0.17132449	

Contoh :

Tentukan nilai $I = \int_{0.2}^{1.5} e^{-x^2}\ dx$ dengan mengunakan Kuadratur Gauss tiga suku

Penyelesaian :

$x = \frac{(1.5 - 0.2)\, t + 1.5 + 0.2}{2} = 0.65t + 0.85$ sehingga $dx = 0.65\, dt$. Dengan demikian :

$$I = \int_{0.2}^{1.5} e^{-x^2}\, dx = 0.65 \int_{-1}^{1} e^{-(0.65t + 0.85)^2}\, dt$$
$$= 0.65\left[0.55555555 e^{-[0.65(-0.77459667)+0.85]^2} + 0.88888889 e^{-[0.65(0)+0.85]^2} + 0.55555555 e^{-[0.65(0.77459667)+0.85]^2}\right]$$
$$= 0.6586$$

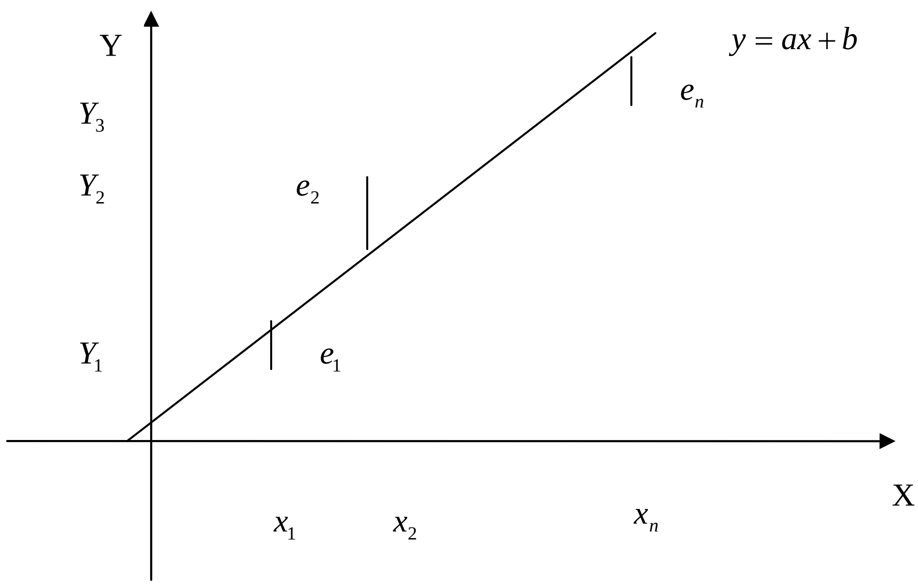
BAB 8
PENCOCOKAN KURVA

8.1. Metode Kuadrat Terkecil

Andaikan diberikan data – data dari suatu hasil percobaan yang menyatakan hubungan antara x dan Y. Data – data tersebut diberikan dalam tabel berikut :

x	x_1	x_2	....	x_{n-1}	x_n
Y	Y_1	Y_2	....	Y_{n-1}	Y_n

Dari data – data tersebut jika diplot dan akan dicari garis lurus terbaik $y = ax + b$ yang mendekati data – data tersebut seperti tampak pada gambar dibawah ini :



Error dari setiap titik data adalah $e_i = Y_i - y_i$, $i = 1, 2, 3, ..., n$. Error ini bisa bernilai positip maupun negatip. Metode kuadrat terkecil digunakan untuk mendapatkan konstanta a dan b diatas. Metode ini didasarkan bahwa garis lurus terbaik diperoleh jika jumlah kuadrat errornya minimum.

$$S = e_1^2 + e_2^2 + ... + e_n^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - ax_i - b)^2$$

Agar S minimum maka :

$\dfrac{\partial S}{\partial a} = 0$ sehingga $\sum_{i=1}^{n} 2\,(Y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0$ dan

$\dfrac{\partial S}{\partial b} = 0$ sehingga $\sum_{i=1}^{n} 2(Y_i - ax_i - b)(-1) = 0$

Dari dua syarat diatas maka diperoleh SPL :

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, Y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + n\, b = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Dengan menyelesaikan SPL maka nilai a dan b dapat didapatkan, yaitu :

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i\, Y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix}} \quad \text{dan} \quad b = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} Y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix}}$$

Contoh :

Dengan Metode kuadrat terkecil dapatkan garis lurus terbaik yang mendekati data – data dalam tabel berikut :

x	20.5	32.7	51.0	73.2	95.7
Y	765	826	873	942	1032

Penyelesaian :

$$a=\frac{\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{5}x_i\,Y_i & \sum_{i=1}^{5}x_i\\ \sum_{i=1}^{5}Y_i & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{5}x_i^2 & \sum_{i=1}^{5}x_i\\ \sum_{i=1}^{5}x_i & 5\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}254932.5 & 273.1\\ 4438 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}18607.27 & 273.1\\ 273.1 & 5\end{vmatrix}}=3.39$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{5}x_i^2 & \sum_{i=1}^{5}x_iY_i\\ \sum_{i=1}^{5}x_i & \sum_{i=1}^{5}Y_i\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{5}x_i^2 & \sum_{i=1}^{5}x_i\\ \sum_{i=1}^{5}x_i & 5\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}18607.27 & 254923.5\\ 273.1 & 4438\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}18607.27 & 273.1\\ 273.1 & 5\end{vmatrix}}=702$$

Dengan demikian garis lurus terbaik adalah : $y=3.39x+702$

Secara umum untuk pencocokan kurva terbaik yang berbentuk polinomial derajad n yang berbentuk $y=a_0+a_1x+a_2x^2+........+a_nx^n$ dilakukan dengan cara yang identik seperti mencari garis lurus terbaik diatas. Nilai $a_i\ ,i=1,2,3,....,n$ dapat dicari dengan menyelesaikan SPL :

$$A=\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n}x_i^{\,n}\\ \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n}x_i^{n+1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \sum_{i=1}^{n}x_i^n & \sum_{i=1}^{n}x_i^{n+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n}x_i^{2n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}Y_i\\ \sum_{i=1}^{n}x_iY_i\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{n}x_i^nY_i\end{pmatrix}$$

8.2. Pencocokan Kurva Mengandung Eksponen

Metode kuadrat terkecil banyak digunakan untuk pencocokan kurva dalam bentuk polinomial. Meskipun begitu kurva yang berhubungan dengan eksponen dapat pula didekati dengan Metode Kuadrat Terkecil ini dengan memodifikasi persamaan sehingga menjadi bentuk linear.

Andaikan suatu data – data mendekati bentuk kurva $y = b\,e^{ax}$. Kurva ini dengan Metode Kuadrat Terkecil dimodifikasi denga cara di logaritmakan sehingga menjadi bentuk linear. $\ln y = \ln b e^{ax} = \ln b + a\,x$.

Contoh :

Diberika data – data sbb:

x	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
Y	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

Data – data ini jika diplot pada kertas semilog akan berbentuk linear. Tentukanlah fungsi terbaik berbentuk $y = b\,e^{ax}$

Penyelesaian :

$y = b\,e^{ax}$ setelah dilogaritmakan akan berbentuk $\ln y = \ln b + a\,x$. Akan dicari nilai a dan $\ln b$ dengan Metode Kuadrat Terkecil.

i	x_i	Y_i	$\ln Y_i$	x_i^2	$x_i \ln Y_i$
1	1.00	5.10	1.629	1.0000	1.629
2	1.25	5.79	1.756	1.5625	2.195
3	1.50	6.53	1.876	2.2500	2.814
4	1.75	7.45	2.008	3.0625	3.514
5	2.00	8.46	2.135	4.0000	4.270
$n = 5$	$\sum_{i=1}^{5} x_i = 7.50$		$\sum_{i=1}^{5} \ln Y_i = 9.404$	$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 11.875$	$\sum_{i=1}^{5} x_i \ln Y_i = 14.422$

Identik dengan Metode Kuadrat Terkecil maka :

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{5} x_i \ln Y_i & \sum_{i=1}^{5} x_i \\ \sum_{i=1}^{5} \ln Y_i & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{5} x_i^2 & \sum_{i=1}^{5} x_i \\ \sum_{i=1}^{5} x_i & 5 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 14.422 & 7.50 \\ 9.404 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11.875 & 7.50 \\ 7.50 & 5 \end{vmatrix}} = 0.5056$$

$$\ln b = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{5} x_i^2 & \sum_{i=1}^{5} x_i \ln Y_i \\ \sum_{i=1}^{5} x_i & \sum_{i=1}^{5} \ln Y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{5} x_i^2 & \sum_{i=1}^{5} x_i \\ \sum_{i=1}^{5} x_i & 5 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 11.875 & 14.422 \\ 7.50 & 9.404 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11.875 & 7.50 \\ 7.50 & 5 \end{vmatrix}} = 1.122$$

Karena $\ln b = 1.122$ maka $b = e^{1.122} = 3.071$

Dengan demikian kurva terbaik yang berbentuk $y = b\, e^{ax}$ adalah $y = 3.071\, e^{0.5056x}$

DAFTAR PUSTAKA

1. Atkinson, K.E., "*An Introduction To Numerical Analysis*", John Willey & Sons, New York, 1978.
2. Burden, R.L., J.D, Faires & A.C. Reynolds, "*Numerical Analysis*", Prindle Weber & Schmidt Publshers, Boston, Mssachussetts, 1981.
3. Chapra, S.C. & R.P. Canale, "*Numerical Methods for Engineers*", Mac Graw Hill, Inc., New York, 1988.
4. Gerald, C.F, "*Applied Numerical Analysis*", Addison Wesley Publishing Company, 1980.
5. Mathews, J.H. & K.D. Fink, "*Numerical Methods Using Matlab*", Pearson, Prentice Hall, New Jersey, 2004.
6. Soehardjo, "*Analisa Numerik*", ITS, Surabaya, 1985.