微积分

Ivan Chien

Contents

I 函数 极限 连续

I.i 函数

I.i.1 初等函数

I.i.1-a 反三角函数

1. $\arcsin x$ 和 $\arccos x$ 的定义域为 $[-1, 1]$
2. $\arcsin x$ 的值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
3. $\arccos x$ 的值域为 $[0, \pi]$

I.ii 极限

I.ii.1 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

I.ii.2 数列的极限

定义 对于 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

成立，则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 当 n 趋于无穷时的**极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

I.ii.3 函数的极限

I.ii.3-a 自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists X>0$，当 $x>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的**极限**，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$$

定义 对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists X>0$，当 $x<-X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的**极限**，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$$

定义 对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A$$

I.ii.3-b 自变量趋于有限值时函数的极限

定义 对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的**极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

注：

1. ε 用来刻画 $f(x)$ 与 A 的接近程度，δ 用来刻画 $x\to x_0$ 的极限过程
2. 该极限与 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有无定义、值是多少无关，$f(x)$ 必须在 $x=x_0$ 的某去心邻域 $\mathring{U}(x,\delta)$ 处处有定义

> 这里的 $|f(x)-A|$ 比任意的 ε 都要小，ε 可以小到非常小，所以说 ε 是用来刻画两者的接近程度的；$f(x)$ 在某个去心邻域（会存在）中无限趋近于 A，δ 具体等于多少也无所谓，它也可以无限小。

定义 对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$$

定义 对 $\forall\varepsilon > 0$，总 $\exists\delta > 0$，当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**右极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$$

定理 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ 当且仅当 $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \wedge \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$

极限存在当且仅当左右极限都存在且相等。

I.ii.4 极限的性质

有界性 （数列）如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界。

（函数）若 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域有界（局部有界性）。

保号性 （数列）设 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$

(1) 如果 $A > 0(A < 0)$，则 $\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，$x_n > 0(x_n < 0)$。

(2) 如果 $\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，$x_n \geq 0(x_n \leq 0)$，则 $A \geq 0(A \leq 0)$。

（函数）设 $\lim_{x\to x_0} x_n = A$

(1) 如果 $A > 0(A < 0)$，则 $\exists\delta > 0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，$f(x) > 0(f(x) < 0)$。

(2) 如果 $\exists\delta > 0$，当 $x \in \mathring{U}(x, \delta)$ 时，$f(x) \geq 0(f(x) \leq 0)$，则 $A \geq 0(A \leq 0)$（局部保号性）。

注意这里的等于号。

I.ii.5 函数极限与数列极限的关系

海因定理 若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，则对任意数列 $\{x_n\}$，$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$，且 $x_n \neq x_0$，都有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$。

I.ii.6 无穷小量与无穷大量

I.ii.6-a 无穷小量

无穷小量 若函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 或 $x \to \infty$ 时的极限为零，则称 $f(x)$ 为此时的**无穷小量**。

性质：

1. **有限个**无穷小的和仍是无穷小
2. **有限个**无穷小的积仍是无穷小
3. 无穷小量与**有界量**的积仍是无穷小

所以很多极限才可能通过简单的算术运算就得出结果啊。

比较：

1. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，则 β 是比 α **高阶的无穷小**，记作 $\beta = o(\alpha)$
2. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，则 β 是比 α **低阶的无穷小**
3. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，则 β 和 α 是**同阶无穷小**
4. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则 β 和 α 是**等价无穷小**，记作 $\alpha \sim \beta$
5. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$，则 β 是 α 的**k 阶无穷小**

等价无穷小：

当 $x \to 0$ 时，有:

- $\sin x \sim x$
- $\ln(1+x) \sim x$
- $e^x - 1 \sim x$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
- $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$

极限值与无穷小之间的关系：

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$$

其中 $\lim \alpha(x) = 0$。

I.ii.6-b 无穷大量

无穷大量 若对于 $\forall M > 0$，总 $\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x)| > M$，则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的**无穷大量**，记为 $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$。

性质：

1. **两个**无穷大量的积仍为无穷大量
2. 无穷大量与**有界变量**之和仍为无穷大量
3. 无穷大量与**非零常数**乘积仍为无穷大量

> 和不一定，比如 $y_1 = \frac{1}{x}$ 和 $y_2 = -\frac{1}{x}$。

与无界变量的关系：

1. 数列 $\{x_n\}$ 是无穷大量：$\forall M > 0, \exists N > 0$，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n| > N$。
2. 数列 $\{x_n\}$ 是无界变量：$\forall M > 0, \exists N > 0$，使 $|x_N| > M$。

> 无穷大量必无界，无界变量不一定无穷大。

举一个无界的例子：

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

使用海因定理，构造两个数列：

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$y_n = \frac{1}{2n\pi}$$

它们在 $x \to \infty$ 的极限都为 0，可带入函数极限中，但得到的结果分别为：

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(x_n)^2} \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = +\infty$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(y_n)^2} \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) = 0$$

故这个函数极限的值不是无穷大，只是无界。

I.ii.7 极限的计算

若 $\lim f(x) = a, \lim g(x) = b$，则：

1. $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = a \pm b$
2. $\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = a \cdot b$
3. $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{a}{b}(b \neq 0)$

常用结论：

1. $\lim f(x) = A \neq 0 \Rightarrow \lim f(x)g(x) = A \lim g(x)$，**极限非零**的因子的极限可以先求出来
2. $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在$, \lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0$
3. $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0, \lim f(x) = 0 \Rightarrow \lim g(x) = 0$
4. $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
5. $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1(a > 0)$

各种未定式的求法考虑以下：

1. 有理化
2. 通分
3. 化为第两重要极限（主要是 1^∞ 型）

其实是废话?

I.ii.7-a 第一重要极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

这里其实还告诉你了可以用无穷小比阶来算某些 $\frac{0}{0}$ 形的结果。所以像 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ 这种也是成立的。

I.ii.7-b 第二重要极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\text{（数列极限）}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\ \text{(a)}$$

这里同样可以将 (a) 式中的 x 换成无穷小量。

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+c}=e^{ab}$$

第一重要极限是 $\frac{0}{0}$ 型，第二重要极限是 1^∞ 型。

求幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 的极限，常用以下方法:
1. 利用 $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$
2. 若为 1^∞ 型，可利用第二重要极限
3. 若 $\lim f(x)=A>0,\lim g(x)=B$，则 $\lim f(x)^{g(x)}=A^B$

I.ii.7-c 等价无穷小替换

等价无穷小替换定理 设 $f_1(x)\sim f_2(x),g_1(x)\sim g_2(x)$，且 $\lim\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ 存在，则

$$\lim\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=\lim\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

注意没有在加减里做等价无穷小替换的定理。

但有推论:
- 若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$，且 $\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=A\neq1$，则 $\alpha-\beta\sim\alpha_1-\beta_1$
- 若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$，且 $\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=A\neq-1$，则 $\alpha+\beta\sim\alpha_1+\beta_1$

即两个函数相减，能对这两个函数分别做无穷小替换，当且仅当这两个函数互相不是等价无穷小。比如 $x-\sin x$ 就不能换成 $x-x=0$，因为很显然 x 和 $\sin x$ 是等价无穷小。

最好还是别用。

常用等价无穷小:

当 $x \to 0$ 时:

1. $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x$
2. $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
3. $\ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a$
4. $(1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x (\alpha \neq 0)$（$\alpha$ 为$\frac{1}{n}$ 做开方时一样有效）
5. $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \sim x$

这里的 x 都换成无穷小量 $\alpha(x)$ 一样成立。

I.ii.7-d 洛必达法则

洛必达法则 若

(1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$或$\infty$

(2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导，且 $g'(x) \neq 0$

(3) $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或 ∞）

则:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

洛必达限制条件还挺多的。

给出求七种未定式的方法:

1. $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 型，用洛必达
2. $0 \cdot \infty$，化为商，变成情况 1
3. $\infty \pm \infty$，通分或有理化，变成情况 1
4. $1^{\infty}, \infty^0, 0^0$，拆成 $e^{\ln}$ 指数化为 $0 \cdot \infty$，变成情况 2

I.ii.7-e 夹逼准则

夹逼准则 若函数 $f(x), g(x), h(x)$ 满足:

(1) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

(2) $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = A$

则 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$。

I.ii.7-f 泰勒公式

定理 （带皮亚诺余项的泰勒公式）设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处 n 阶可导，则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o(x-x_0)^n$$

特别的，当 $x_0 = 0$ 时，有:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

常用的泰勒公式:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

I.iii 连续性

定义 设 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0$$

则称 $y = f(x)$ **在点 x_0 处连续**，并称 x_0 为 $f(x)$ 的连续点。

定义 设 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $y = f(x)$ **在点 x_0 处连续**，x_0 为 $f(x)$ 的连续点。

用人话讲就是:
1. $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处要有定义
2. $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 的极限要存在
3. 而且这两个值要相等

这三条与连续**互为充要**。

另外，连续是可以推极限存在的。
连续也分左连续和右连续，充要也跟左右极限相仿。

连续可以推出极限值和函数值相等。

定义 在开闭区间内的连续，非常 make sense，就不写了。

I.iii.1 运算

四则运算 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 处都连续，则四则运算后的结果在 x_0 处也连续。

复合函数连续性 如果函数 $u = \varphi(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续，$\varphi(x_0) = u$。而函数 $y = f(u)$ 在点 $u = u_0$ 处连续，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 $x = x_0$ 处连续。

复合函数的连续性能带来下面的效果：
对于良定义下的 f 和 φ，有：

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f\left[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\right] = f(u_0)$$

即当 f 连续时，才可以交换 f 和极限的次序。

反函数连续 设函数 $y=f(x)$ 在某区间上连续，且单调增加（减少），则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在对应区间上连续，且**单调性相同**。

I.iii.2 初等函数的连续性

基本初等函数在其定义域内都连续。

初等函数在其定义区间内都连续。

这里说定义区间是要考虑比如初等函数组成的分段函数。

结合上面说的举例一个函数：$y=|f(x)|$（讨论 $x=x_0$ 处），因为 $y=|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$，首先基本初等函数在定义域上都连续，然后复合函数又能连续，所以 $y=|f(x)|$ 在连续。

再讨论一个命题：
命题 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，$f(x_0)\neq 0$，且 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处连续，则 $g(x)$ 在 x_0 处连续。

这是一个真命题，构选 $g(x)=\frac{f(x)g(x)}{f(x)}$ 即可。

I.iii.3 间断点

定义 间断点其实就是不连续。 左右极限都存在的间断点被称为**第一类间断点**，其它的就是**第二类间断点**。

I.iii.4 闭区间上连续函数的性质

最值定理 $f(x)$ 在闭区间上连续，那在这个区间内必有最大最小值。

有界性定理 同上。

介值定理 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对于任意介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的数 C，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=C$。

零点定理 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$。

这部分主要跟证明相关，暂时略过。

II 一元函数微分学

II.i 导数

导数 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 在某邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ **在点 x_0 处可导**，并称此极限值为 $f(x)$ **在 x_0 处的导数**，记为 $f'(x_0)$，或 $y'|_{x-x_0}$，或 $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$；如果上述极限不存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导。

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

导数也分左右，make sense。