

**MODELO CINEMÁTICO DIRECTO PARA EL ROBOT KUKA  
KR120-2P® MEDIANTE EL USO DE CUATERNIOS EN UN  
AMBIENTE MATLAB®.**

**JOHN JAIRO QUIROGA OROZCO**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA**

**2011**

**MODELO CINEMÁTICO DIRECTO PARA EL ROBOT KUKA  
KR120-2P® MEDIANTE EL USO DE CUATERNIOS EN UN  
AMBIENTE MATLAB®.**

**JOHN JAIRO QUIROGA OROZCO**

Monografía para optar al título de  
Licenciado en Matemáticas

**Director**

**M.Sc. JORGE VILLAMIZAR MORALES\***

**Codirector**

**M.Sc. JOHN FABER ARCHILA DÍAZ\*\***

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA**

**2011**

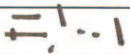
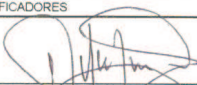
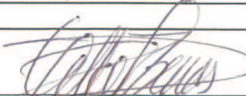
---

\*Profesor Escuela de Matemáticas.

\*\*Profesor Escuela de Diseño Industrial.



NOTA DE PROYECTO DE GRADO

NOMBRE DEL ESTUDIANTE: JHON JAIRO QUIROGA OROZCO		2070754	
TITULO DEL PROYECTO : "Modelo Cinemático directo para el robot KUKA KRI120-2P® mediante el uso de cuaternios en un ambiente de Matlab®"			
FACULTAD : Ciencias		CARRERA: Licenciatura en Matemáticas	
NOTA DEFINITIVA: CUATRO, OCHO ( 4.8 )		CREDITOS: 12	
DIRECTOR DEL PROYECTO: JORGE VILLAMIZAR MORALES			
FIRMA 			
CALIFICADORES			
F  RAFAEL ISAACS GIRALDO		F  GILBERTO ARENAS DIAZ	
		FECHA	
		A M D 11 8 19	



ENTREGA DE TRABAJOS DE GRADO, TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN O TESIS Y  
AUTORIZACIÓN DE SU USO A FAVOR DE LA UIS

Yo, **JOHN JAIRO QUIROGA OROZCO**, mayor de edad, identificado con Cédula de Ciudadanía No. 1.095.914.325 de Girón (Santander), actuando en nombre propio, en mi calidad de autor del trabajo de grado, del trabajo de investigación o de la tesis denominado(a):

MODELO CINEMÁTICO DIRECTO PARA EL ROBOT KUKA KR120-2P® MEDIANTE EL USO DE CUATERNIOS EN UN AMBIENTE MATLAB®, hago entrega del ejemplar respectivo y de sus anexos de ser el caso, en formato digital o electrónico (CD o DVD) y autorizo a **LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**, para que en los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia, utilice y use en todas sus formas, los derechos patrimoniales de reproducción, comunicación pública, transformación y distribución (alquiler, préstamo público e importación) que me corresponden como creador de la obra objeto del presente documento.

PARÁGRAFO: La presente autorización se hace extensiva no sólo a las facultades y derechos de uso sobre la obra en formato o soporte material, sino también para formato virtual, electrónico, digital, óptico, uso en red, Internet, extranet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer.

EL AUTOR-ESTUDIANTE, manifiesta que la obra objeto de la presente autorización es original y la realizó sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, por lo tanto la obra es de su exclusiva autoría y detenta la titularidad sobre la misma.

PARÁGRAFO: En caso de presentarse cualquier reclamación o acción por parte de un tercero en cuanto a los derechos de autor sobre la obra en cuestión, EL AUTOR / ESTUDIANTE, asumirá toda la responsabilidad, y saldrá en defensa de los derechos aquí autorizados; para todo los efectos la Universidad actúa como un tercero de buena fe.

Por constancia se firma el presente documento en dos (02) ejemplares del mismo valor y tenor, en Bucaramanga, a los 22 días del mes de agosto de Dos Mil Once (2011).

**EL AUTOR-ESTUDIANTE:**

**JOHN JAIRO QUIROGA OROZCO**  
C.C. 1.095.914.325 de Girón (Santander)

Dedicatoria:

*Julieta, tus manos me enseñaron a transformar el mundo con solo el poder de querer, me hiciste ver más allá de las fronteras de la realidad, me brindaste el don de la elocuencia y de la reflexión, me permitiste conocer el cielo y pintar con una ilusión su esplendoroso azul, te convertiste en el axioma que fundamenta mi existencia y otorga unicidad al constructo unitario que nos une.*

*Y, debes tener siempre presente, que un  
5 8 40 19 20  $\cdots$   $\infty$  reinará en nuestras vidas.*

*Canda Munani.*

---

# AGRADECIMIENTOS

A Dios por brindarnos las matemáticas como aquel código que encripta la grandeza de su creación, la cuál nos ofrece la posibilidad de descifrar sus secretos para así admirar su belleza.

A mis padres, Susana Orozco, Jairo Quiroga y a mi hermano Giovanni A. Quiroga Orozco, por ser los constructores del deseo de siempre salir adelante sin importar los obstáculos, por afrontar los retos siempre unidos sin importar lo inesperado, por disfrutar la vida con lo justo que se ha ganado y, además, por que son los primeros responsables de lo que hoy soy yo.

A las familias Sánchez Mora, Vargas Quiroga, Vargas Onatra, Quiroga Abril, Morera Riveros e Imues Orozco, por creer en mis aspiraciones y sueños, por brindarme su apoyo incondicional en los más cálidos y oscuros días.

A los directores del proyecto, Jorge Villamizar y John Faber Archila, por sus atenta participación, guía y acompañamiento en todas las fases de la elaboración de esta monografía.

A los compañeros de carrera, amigos y profesores, en especial a Luis Angel Pérez, Vladimir Angulo Castillo y Arnoldo Teherán, que de una u otra forma fueron partícipes en la culminación exitosa de mis estudios de pregrado.

---

# TABLA DE CONTENIDO

<b>Introducción</b>	<b>12</b>
<b>1. Componente matemático</b>	<b>14</b>
1.1. Preliminares . . . . .	14
1.1.1. Axiomas de campo de $\mathbb{R}$ . . . . .	14
1.1.2. Espacios vectoriales . . . . .	15
1.2. Transformaciones lineales . . . . .	16
1.3. Localización espacial . . . . .	20
1.3.1. Matrices de rotación . . . . .	20
1.3.2. Matrices de transformación homogénea . . . . .	23
<b>2. Cuaternios</b>	<b>26</b>
2.1. Historia . . . . .	26
2.2. Algunos conceptos importantes . . . . .	30
2.3. Álgebra de cuaternios . . . . .	31
2.3.1. Suma y resta de cuaternios . . . . .	31
2.3.2. Producto de cuaternios . . . . .	32
2.3.3. Norma de un cuaternio . . . . .	34
2.3.4. Normalización de un cuaternio . . . . .	35
2.3.5. Inverso de un cuaternio . . . . .	37
2.4. Consideraciones algebraicas . . . . .	37

2.5.	Consideraciones geométricas . . . . .	38
2.6.	El operador de rotación por cuaternios . . . . .	40
2.6.1.	Perspectivas . . . . .	44
<b>3.</b>	<b>Robot KUKA KR120-2P®</b>	<b>45</b>
3.1.	Cinemática del robot . . . . .	45
3.1.1.	El problema cinemático directo . . . . .	46
3.1.2.	El problema cinemático inverso . . . . .	46
3.2.	Definición del robot KUKA KR120-2P® . . . . .	47
3.2.1.	Especificaciones técnicas . . . . .	48
3.3.	Modelo cinemático directo . . . . .	49
<b>4.</b>	<b>Modelamiento computacional</b>	<b>57</b>
4.1.	Matlab® . . . . .	57
4.1.1.	Características principales . . . . .	58
4.2.	Caja de herramientas " <i>Robotics</i> " para Matlab® . . . . .	58
4.3.	Código simulación . . . . .	60
4.4.	Validación . . . . .	70
4.5.	Interfaz gráfica de usuario . . . . .	71
<b>5.</b>	<b>Propuesta de innovación en el aula</b>	<b>76</b>
<b>6.</b>	<b>Resultados</b>	<b>78</b>
	<b>Conclusiones.</b>	<b>80</b>
	<b>Referencias.</b>	<b>90</b>



---

# ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Rotación del vector $\vec{v}$ con ángulo $\theta$ . . . . .	18
1.2. Rotación en el eje $x$ . . . . .	21
1.3. Rotación en el eje $y$ . . . . .	22
1.4. Rotación en el eje $z$ . . . . .	22
2.1. Componentes vectoriales de $\vec{v}$ . . . . .	42
2.2. Componentes del vector rotado $\vec{v}$ . . . . .	43
3.1. Relación entre cinemática directa e inversa. . . . .	46
3.2. Robot KUKA KR120-2P®. . . . .	47
3.3. Dimensiones del robot KUKA KR120-2P®. . . . .	49
3.4. Sistema de referencia del robot KUKA KR120-2P®. . . . .	50
4.1. Posición inicial robot KUKA KR120-2P® en Matlab®. . . . .	65
4.2. Mapeos de posiciones 1. del robot KUKA KR120-2P®. . . . .	71
4.3. Mapeos de posiciones 2. del robot KUKA KR120-2P®. . . . .	72
4.4. GUI robot KUKA KR120-2P®. . . . .	73
4.5. GUI movimiento eje 1 del robot KUKA KR120-2P®. . . . .	74
4.6. GUI movimientos múltiples eje 1 del robot KUKA KR120-2P®. . . . .	74
4.7. GUI movimientos múltiples eje 2 del robot 3 KUKA KR120-2P®. . . . .	75
4.8. GUI movimientos múltiples de los ejes del robot KUKA KR120-2P®. . . . .	75

## RESUMEN

**Título:** MODELO CINEMÁTICO DIRECTO PARA EL ROBOT KUKA KR120-2P® MEDIANTE EL USO DE CUATERNIOS EN UN AMBIENTE MATLAB®. \*\*\*

**Autor:** JOHN JAIRO QUIROGA OROZCO\*\*\*\*

**Palabras claves:** Cuaternios, robótica, cinemática directa, Matlab®, Aprendizaje Basado en Proyectos.

### Descripción:

En este proyecto de monografía se desarrolla un modelo cinemática directo del robot KUKA KR120-2P® mediante el uso de los cuaternios de Hamilton ( $Q = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}$ , donde  $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ ), como método para representar transformaciones de rotaciones y orientaciones en  $\mathbb{R}^3$ . En el primer capítulo es referido a los conceptos preliminares, como los espacios vectoriales, transformaciones lineales y localización espacial por medio de las matrices de transformación homogénea, donde se utilizará como método comparativo a las rotaciones realizada con los cuaternios. En el segundo capítulo se presentan los cuaternios de Hamilton, donde se incluye una nota histórica respecto a su aparición, se expone el álgebra de cuaternios y se define el operador de rotación  $L_Q(\vec{v}) = Q(0 + \vec{v})Q^*$ , el cual  $Q$  es un cuaternio, se prueba que es una transformación lineal y se verifica que cumple con la rotación de puntos en el espacio. En el tercer capítulo se hace la presentación del robot KUKA KR120-2P®. En el cuarto capítulo se desarrolla el modelo cinemático directo del robot KUKA KR120-2P® usando cuaternios, donde se valida al realizar simulaciones con Matlab®. Por último, en el capítulo 5, se propone que esta monografía puede leerse como una propuesta de innovación en el aula para la enseñanza y aprendizaje de las transformaciones lineales en un curso de Álgebra Lineal.

---

\*\*\* Trabajo de grado.

M.Sc. JORGE VILLAMIZAR MORALES, Director.

M.Sc. JOHN FABER ARCHILA DÍAZ, Codirector.

\*\*\*\* Licenciatura en Matemáticas, Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias,  
Universidad Industrial de Santander.

## ABSTRACT

**Title:** DIRECT KINEMATIC MODEL FOR THE ROBOT KUKA KR120-2P® THROUGH THE USE OF QUATERNION IN A MATLAB® ENVIRONMENT.\*\*\*

**Author:** JOHN JAIRO QUIROGA OROZCO\*\*\*\*

**Keywords:** Quaternions, robotics, direct kinematics, Matlab®, Project Based Learning.

### Description:

The aim of this monograph is to develop a direct kinematic model for the robot KUKA KR120-2P® using Hamilton's quaternions ( $Q = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}$ , where  $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ ) based on lineal transformations. In the first chapter begins with preliminary concepts, real vector spaces, linear transformations and spatial locations in  $R^3$  using the transformation matrices containing homogeneous coordinates, which is used as the comparative method to rotations made with quaternions. The second chapter presents the Hamilton's quaternions, one historical note is discusses his appearance and you will see the conceptual development of quaternion emphasizing on their most important properties, mainly rotation operator  $L_Q(\vec{v}) = Q(0 + \vec{v})Q^*$ , where  $Q$  is a quaternion and  $Q^*$  it's yours conjugate, is proof to be a linear transformation and verified to comply with the rotation of point in the spaces. In the third chapter presents the robot KUKA KR120-2P®. In the fourth chapter develops the direct kinematic model of the robot KUKA KR120-2P® using quaternions and the validity of this model there will be simulations in Matlab®. Finally, in the fifth chapter, there will be a proposal of innovation in the classroom for teaching and learning in regards to the lineal transformations based on the direct kinematic project in an actual course of lineal algebra.

---

\*\*\* Graduation project.

M.Sc. JORGE VILLAMIZAR MORALES, Undergraduate Dissertation Director.

M.Sc. JOHN FABER ARCHILA DÍAZ, Undergraduate Dissertation Codirector.

\*\*\*\* Bachelor's degree in Mathematics, School of Mathematics, Faculty of Science, Universidad Industrial de Santander.

---

# INTRODUCCIÓN

Los cuaternios nacen del ingenio de Sir Rowan Hamilton, considerado uno de los matemáticos más eminentes de los pueblos de habla inglesa, después de Isaac Newton. Al principio los cuaternios fueron considerados difíciles en su manejo hasta inútiles, sin embargo hoy en día son ampliamente utilizados en la resolución de problemas de la mecánica clásica y en disciplinas contemporáneas mediante la elaboración de software para el control de movimientos de robots. No obstante, los cuaternios son poco conocidos en las aulas de clase donde se está desaprovechando toda la riqueza matemática y aplicabilidad que ofrece.

Ésta monografía se apoya en el campo de la robótica industrial al indagar y dar respuesta al problema cinemático directo mediante cuaternios de uno de los robots de la casa matriz alemana KUKA - ROBOTICS® el KR 120-2P®. Para esto se presenta una exposición amplia del álgebra de cuaternios, incluyendo una nota histórica. Además se exponen la cinemática del robot, se define el KR 120-2P® y luego se desarrolla el modelo cinemático directo. Para validar el modelo definitivo se aprovechó de las potencialidades de Matlab® donde se elaboraron simulaciones con las especificaciones técnicas del robot.

Es preciso tener presente otros trabajos relacionados con la temática central, como es el caso de los cuaternios y la robótica. Ervin Javier Lozano Chacón en su trabajo monográfico *Cuaternios de Hamilton* [3] presenta una disertación amplia de los cuaterniones, enfocándolos en el álgebra abstracta. Hace un relato histórico de cuando Sir William

Rowan Hamilton logró solucionar el conflicto algebraico de los nacientes cuaternios. Adicionalmente se dan dos aplicaciones desde un punto de vista algebraico: fractales y robótica. En cuanto a robótica trabaja alrededor del problema cinemático directo del robot SCARA®.

Mauricio Tarazona Álvarez en el trabajo de investigación de maestría denominado *Aplicación software para un brazo robótico usando un modelo geométrico basado en el álgebra de cuaternios* [2] define un modelo cinemático directo por medio de matrices homogéneas y de cuaterniones para representar geométricamente el robot SMA - V3R:T®\*\*\*\*. Además contrasta la eficiencia computacional entre los métodos de matrices homogéneas y el método de cuaternios, utiliza para ello ambientes de simulación Q-robot.

John Faber Archila Díaz y Max Suell Dutra, en su artículo *Estudio y modelamiento del robot KUKA KR 6* [1], exponen el modelamiento del robot KUKA KR 6, del laboratorio de robótica de la Universidad Federal de Río de Janeiro. Presentan el modelo CAD del robot, la cinemática directa usando matrices de transformación homogénea e inversa por el método de ecuaciones cuadráticas. También establece un modelo dinámico con base en las ecuaciones de Euler Lagrange donde focaliza los efectos inerciales por medio del tensor de inercias y realiza el control cinemático mediante el jacobiano del manipulador. Este trabajo lo presentan como la primera etapa para el control del robot planteando la implementación del modelo cinemático inverso en un DSP de la familia Texas Instruments donde analiza su desempeño.

Por último, ésta monografía puede leerse como una propuesta de innovación en el aula para la enseñanza y aprendizaje de las transformaciones lineales en un curso de álgebra lineal, convirtiéndose así en un material de consulta amplio para matemáticos, licenciados en matemáticas e ingenieros.

---

\*\*\*\* Construido por Carlos Gerardo Hernández Capacho, profesor de la Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga 2002.

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## COMPONENTE MATEMÁTICO

En este primer capítulo se abordará la fundamentación conceptual requerida para la modelación del robot KUKA KR120-2P®, donde se muestra la aplicabilidad de las transformaciones lineales, la cual provee herramientas de interés para la localización espacial de cualquier objeto.

---

### 1.1. Preliminares

---

Para el desarrollo conceptual que contiene este trabajo, es imprescindible tener presente los **axiomas de campo** de  $\mathbb{R}$ , la cual permitirá dar validez a cada definición y proposición que se presentan.

#### 1.1.1. Axiomas de campo de $\mathbb{R}$

Se asume la existencia de un conjunto  $\mathbb{R}$ , con dos operaciones  $+$  (suma),  $\cdot$  (producto), que satisfacen los siguientes axiomas:

1. Las operaciones  $+$  y  $\cdot$  cumplen con la propiedad clausurativa. Es decir,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ :  
 $x + y = z \in \mathbb{R}$  y  $x \cdot y = r \in \mathbb{R}$ .
2. Las operaciones  $+$  y  $\cdot$  cumplen con la propiedad conmutativa. Es decir,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ :  
 $x + y = y + x$ , y  $x \cdot y = y \cdot x$ .

3. Las operaciones  $+$  y  $\cdot$  cumplen con la propiedad asociativa. Es decir,  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ :  
 $(x + y) + z = x + (y + z)$  y  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ .
4. Existen  $0, 1 \in \mathbb{R}$  tal que:
  - $\forall x \in \mathbb{R} \ x + 0 = x$ .
  - $\forall x \in \mathbb{R} \ x \cdot 1 = x$ .
5. Para todo  $x \in \mathbb{R}$  existe  $-x \in \mathbb{R}$  (inverso aditivo) tal que  $x + (-x) = (-x) + x = 0$ .
6. Para todo  $x \in \mathbb{R}$  existe  $x^{-1} \in \mathbb{R}$  (inverso multiplicativo) tal que  $x \cdot x^{-1} = (x^{-1}) \cdot x = 1$ .
7.  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ .

### 1.1.2. Espacios vectoriales

Un espacio vectorial es un conjunto de elementos de naturaleza cualquiera sobre el que pueden realizarse dos operaciones llamadas adición y multiplicación por un escalar, donde cumple de forma análoga las propiedades expuestas en los axiomas de campo de  $\mathbb{R}$ .

**Definición 1.1.** Sea  $V$  un conjunto, donde  $V \neq \emptyset$ . El conjunto  $V$  se llama **espacio lineal** si satisface los siguientes axiomas:

**Axioma 1** A todo par de elementos  $x$  e  $y$  corresponde un único elemento de  $V$  llamado suma de  $x$  e  $y$ , designado por  $x + y$ .

**Axioma 2** A todo  $x \in V$  y  $\forall a \in \mathbb{R}$  corresponde un elemento de  $V$  llamado producto de  $a$  por  $x$ , designado por  $a \cdot x$  o  $ax$ .

**Axioma 3**  $\forall x, y \in V$ , se tiene que  $x + y = y + x$ .

**Axioma 4**  $\forall x, y, z \in V$ , se tiene que  $(x + y) + z = x + (y + z)$ .

**Axioma 5** Existe un elemento en  $V$ , designado por  $0$ , tal que  $x + 0 = x \ \forall x \in V$ .

**Axioma 6** Para todo  $x$  de  $V$ , el elemento  $(-1) \cdot x$  tiene la propiedad que  $x + (-1) \cdot x = 0$ .

**Axioma 7**  $\forall x, y \in V$  y  $\forall a \in \mathbb{R}$ , se tiene que  $a(x + y) = ax + ay$ .

**Axioma 8**  $\forall x \in V$  y  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , se tiene que  $a(bx) = (ab)x$ .

**Axioma 9**  $\forall x \in V$  y  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , se tiene que  $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$ .

**Axioma 10** Para todo  $x$  de  $V$ , tenemos  $1 \cdot x = x$ .

---

## 1.2. Transformaciones lineales

---

Las transformaciones lineales se pueden considerar como mapeos de particular importancia en el estudio del álgebra lineal y sus aplicaciones. Éstas transformaciones se realizan entre espacios vectoriales que conservan la suma y la multiplicación vectorial por un escalar.

**Definición 1.2.** Si  $V$  y  $W$  son dos espacios lineales, una función  $T : V \rightarrow W$  se llama *transformación lineal de  $V$  en  $W$*  (también es denominado *operador lineal*), si tiene las siguientes propiedades:

**a) Propiedad aditiva:**  $T(x + y) = T(x) + T(y)$  para todo  $x, y \in V$ .

**b) Propiedad homogénea:**  $T(cx) = cT(x)$  para todo  $x \in V$  y  $c \in \mathbb{R}$ .

Las dos propiedades se pueden combinar para así formar una fórmula que establece que

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y) \quad \forall x, y \in V \text{ y } a, b \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

**Ejemplo 1.1 (Transformación identidad).** Sea  $V$  un espacio vectorial y  $u \in V$ . La función:

$$\begin{aligned} T : V &\rightarrow V \\ u &\mapsto T(u) = u \end{aligned}$$

es una transformación lineal.

**Ejemplo 1.2 (El operador derivación).** Sea  $V$  un espacio lineal de todas las funciones reales  $f$  derivables en un intervalo abierto  $(a, b)$ . La transformación lineal que aplica cada función  $f$  de  $V$  en su derivada  $f'$  se llama *operador derivación* y se designa por  $D$ . De esta forma, se tiene que:

$$\begin{aligned} D : V &\rightarrow V \\ f &\mapsto D(f) = f' \end{aligned}$$

$D$  es una transformación lineal.



**Ejemplo 1.3 (El operador integración).** Sea  $V$  el espacio lineal de todas las funciones reales continuas en un intervalo  $[a, b]$ . Si  $f \in V$ , se define  $g = T(f)$  como la función  $T$  dada por:

$$g = T(f) = \int_a^x f(t) dt \text{ si } a \leq x \leq b$$

$T$  es una transformación lineal.

**Proposición 1.1 (Transformación lineal de reflexión respecto al eje  $y$ ).** Sea  $\mathbb{R}^2$  un espacio vectorial, la función

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$T$  es una transformación lineal.

*Demostración.* Sean  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ , donde  $\vec{v}_1 = (x, y)$  y  $\vec{v}_2 = (j, s)$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Se verifica el cumplimiento de la propiedad aditiva, en efecto,

$$T \begin{pmatrix} x+j \\ y+s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-j \\ y+s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -j \\ s \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} j \\ s \end{pmatrix}.$$

Se verifica el cumplimiento de la propiedad homogénea, en efecto,

$$T \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \alpha T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad \square$$

**Proposición 1.2 (Transformación lineal de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ ).** Sean  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$  espacios vectoriales con  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $A$  una matriz de  $m \times n$ . Se define,

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \vec{x} &\mapsto T(\vec{x}) = A\vec{x}. \end{aligned}$$

$T$  es una transformación lineal.

*Demostración.* Se verifica el cumplimiento de la propiedad aditiva, en efecto,

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A\vec{x} + A\vec{y}.$$

Se verifica el cumplimiento de la propiedad homogénea, en efecto,

$$A(\alpha\vec{x}) = A \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} = \alpha A\vec{x}. \quad \square$$

A continuación se presenta la construcción de la matriz de rotación. Sea  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , donde  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$  y  $\vec{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ , vector correspondiente a una rotación de  $\vec{v}$  con ángulo  $\theta$  (ver Figura 1.1).

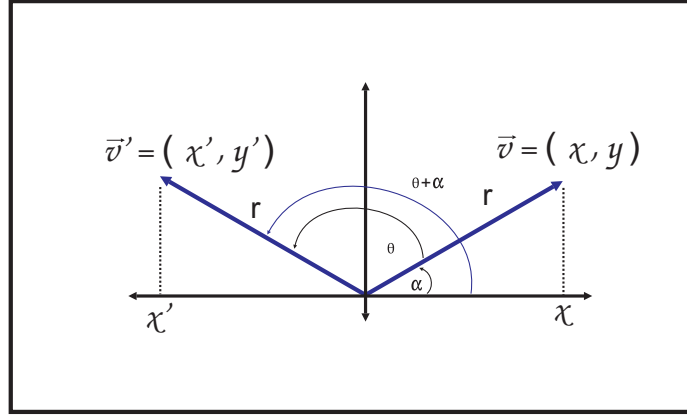


Figura 1.1: Rotación del vector  $\vec{v}$  con ángulo  $\theta$ .

Es de notar que  $r$  es la longitud (norma) de  $\vec{v}$ , la cual se tiene que  $x = r \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \alpha$ ,  $x' = r \cos(\theta + \alpha)$  y  $y' = r \sin(\theta + \alpha)$ . Aplicando identidades trigonométricas, se obtiene

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta + \alpha) \\ r \sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \alpha - r \sin \theta \sin \alpha \\ r \sin \theta \cos \alpha + r \cos \theta \sin \alpha \end{pmatrix},$$

Como  $x = r \cos \alpha$  y  $y = r \sin \alpha$ , se tiene

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta & -y \sin \theta \\ x \sin \theta & y \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Con este resultado se presenta la transformación lineal de rotación

**Proposición 1.3 (Transformación lineal de rotación).** *Sea  $\mathbb{R}^2$  un espacio vectorial, la función:*

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

*Es una transformación lineal de rotación cuando  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  es la rotación en sentido antihorario de  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  con un ángulo  $\theta$ .*

*Demostración.* Se verifica el cumplimiento de la propiedad aditiva, en efecto,

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} x + r \\ y + m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (x + r) \cos \theta & -(y + m) \sin \theta \\ (x + r) \sin \theta & (y + m) \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ m \end{pmatrix} \\ &= T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} r \\ m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se verifica el cumplimiento de la propiedad homogénea, en efecto,

$$\begin{aligned} T \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\alpha x) \cos \theta & -(\alpha y) \sin \theta \\ (\alpha x) \sin \theta & (\alpha y) \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Por lo tanto el operador de rotación  $T$  cumple con la propiedad aditiva y homogénea, por lo que se concluye que  $T$  es una transformación lineal.  $\square$

---

## 1.3. Localización espacial

---

Para el cumplimiento de los ejercicios que se establecen en la ejecución de una tarea para un brazo robótico, es imprescindible identificar la posición y orientación de los elementos a manipular con respecto a la base del robot [4]. Por lo tanto, es necesario determinar herramientas matemáticas que permitan realizar la localización espacial de cualquier objeto (incluyendo las configuraciones propias del robot) con respecto a un punto fijo del mismo (que por lo general es la base de soporte del robot).

Para la representación de un objeto en el espacio existen diferentes métodos, tales como: coordenadas cartesianas, polares, esféricas, cilíndricas, entre otros. Métodos como las matrices de rotación, cuaternios, ángulos de Euler, matrices de transformación homogénea se usan para la representación de orientaciones únicamente. A continuación se presentan los métodos de interés para este proyecto.

### 1.3.1. Matrices de rotación

Las matrices de rotación son el método más versátil para la descripción de orientaciones, principalmente por la comodidad proporcionada por el uso del álgebra matricial.

Cuando se desea rotar un vector  $\vec{P} = (x, y) = x\hat{i} + y\hat{j}$ , donde  $\hat{i}, \hat{j}$  son vectores unitarios correspondientes a los ejes coordenados del sistema OXY (plano XY), un ángulo  $\theta$ , se utiliza el operador de rotación mencionado en el epígrafe capítulo anterior, la cual se presenta de una forma más compacta como

$$\mathbb{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La matriz  $R(\theta)$  se denomina también matriz de cosenos directores, donde además  $R$  es ortonormal.

Es de importancia asociar un sistema de ejes de referencia fijo al vector  $\vec{P}$ , y tam-

bién a éste asociarle ejes solidarios (ejes móviles) según la rotación o traslación que se haga con respecto al sistema fijo, la cual son de utilidad en el análisis espacial de objetos.

De forma análoga, se definen matrices de rotación para espacios vectoriales  $V$  de dimensión 3 ( $R^3$ ), que tienen la siguiente forma:

$$\text{Rot}_x \theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ 0 & \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

De la expresión (1.4), el sistema  $OZXY$  respecto al sistema solidario generado al rotar un vector  $\vec{P} \in \mathbb{R}^3$ , siendo este el sistema  $OUVW$ , se obtiene que el eje  $U$  coincide con el eje  $X$ , mientras que los ejes  $V$ ,  $W$  se encuentran girados un ángulo  $\theta$  respecto a los ejes  $Y$ ,  $Z$  correspondientes (ver Figura 1.2).

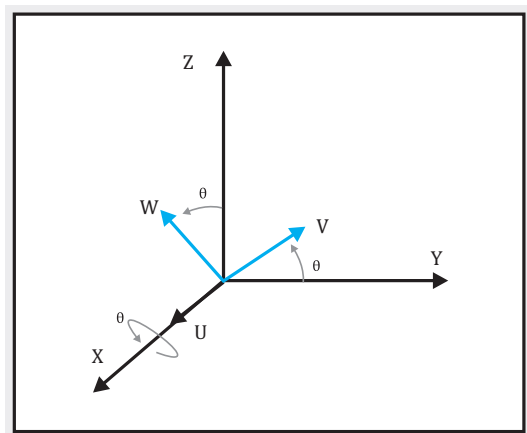


Figura 1.2: Rotación en el eje  $x$ .

$$\text{Rot}_y \varsigma = \begin{pmatrix} \cos \varsigma & 0 & \text{sen } \varsigma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \varsigma & 0 & \cos \varsigma \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

De la expresión (1.5), el sistema  $OZXY$  respecto al sistema solidario generado al rotar un vector  $\vec{P} \in \mathbb{R}^3$ , siendo este el sistema  $OUVW$ , se obtiene que el eje  $V$  coincide con el eje  $Y$ , mientras que los ejes  $U$ ,  $W$  se encuentran girados un ángulo  $\varsigma$  respecto a los ejes  $X$ ,  $Z$  correspondientes (ver Figura 1.3).

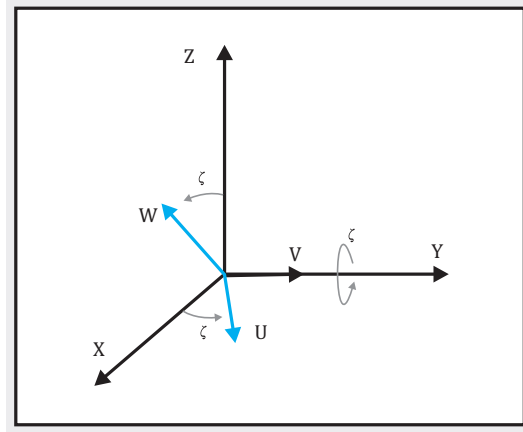


Figura 1.3: Rotación en el eje  $y$ .

$$\text{Rot}_z \sigma = \begin{pmatrix} \cos \sigma & -\sin \sigma & 0 \\ \sin \sigma & \cos \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

De la expresión (1.6), el sistema  $OZXY$  respecto al sistema solidario generado al rotar un vector  $\vec{P} \in \mathbb{R}^3$ , siendo este el sistema  $OUVW$ , se obtiene que el eje  $W$  coincide con el eje  $Z$ , mientras que los ejes  $U$ ,  $V$  se encuentran girados un ángulo  $\sigma$  respecto a los ejes  $X$ ,  $Y$  correspondientes (ver Figura 1.4).

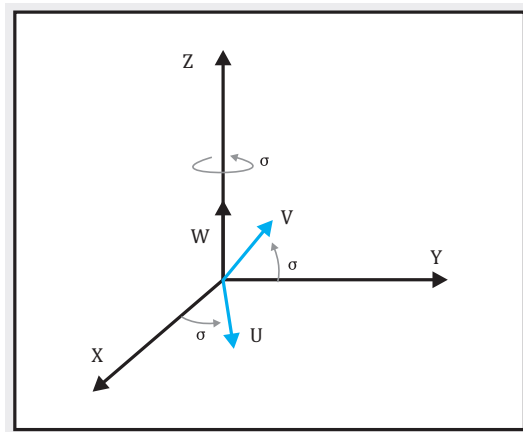


Figura 1.4: Rotación en el eje  $z$ .

### Rotaciones en $\mathbb{R}^3$ como transformaciones lineales.

Como se definió para  $\mathbb{R}^2$  en (1.2) una transformación lineal de rotación, se obtiene de forma análoga transformaciones de rotaciones lineales en el espacio de la forma que sigue: Consideremos el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ . Sean  $J$ ,  $S$ ,  $M$ , donde  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ,  $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$ ,  $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ ,  $\forall \vec{v}, \vec{w}, \vec{p} \in \mathbb{R}^3$ , se tiene que  $J$ ,  $S$ ,  $M$  son transformaciones lineales, donde dicho operadores tienen la forma:

$$\begin{aligned} J : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (v_x, v_y, v_z) &\mapsto J((v_x, v_y, v_z)) = (v'_x, v'_y, v'_z) = (\text{Rot}_x \theta) \cdot (v_x, v_y, v_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (w_x, w_y, w_z) &\mapsto S((w_x, w_y, w_z)) = (w'_x, w'_y, w'_z) = (\text{Rot}_y \varsigma) \cdot (w_x, w_y, w_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (p_x, p_y, p_z) &\mapsto M((p_x, p_y, p_z)) = (p'_x, p'_y, p'_z) = (\text{Rot}_z \sigma) \cdot (p_x, p_y, p_z) \end{aligned}$$

**Nota:** Se deja la verificación al lector de que las funciones  $J$ ,  $S$  y  $M$  son transformaciones lineales.

### 1.3.2. Matrices de transformación homogénea

Las matrices de transformación homogénea son de gran interés por permitir representar conjuntamente la posición y orientación de un sólido en el espacio, logrando de esta forma ampliar las posibilidades ofrecidas por las matrices de rotación.

#### Coordenadas homogéneas.

Los puntos en el espacio se pueden representar por medio de coordenadas homogéneas.

Sea el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ , donde  $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ , tiene la forma  $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$ . Las coordenadas homogéneas involucran una cuarta componente, un escalar  $\varrho$ , a la expresión de los vectores en  $\mathbb{R}^3$ , donde ésta representa un factor de escala.

**Definición 1.3.** *Un vector se representa por medio de coordenadas homogénea (para abreviar c.h.) al introducirle un parámetro  $\varrho \in \mathbb{R}$ , que representa un factor de escala, donde:*

$$\vec{v}_{c.h.} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \varrho \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

### Matrices de Transformación Homogéneas.

Luego de definir las coordenadas homogéneas se presenta la definición de las matrices homogéneas, el cual permiten representar rotaciones y traslaciones en el espacio.

**Definición 1.4.** *Una matriz de transformación homogénea se define como una matriz de dimensión  $4 \times 4$ , el cual representa la transformación de un vector de coordenadas homogéneas de un sistema coordenado a otro. En general, las matrices de transformación homogénea son representaciones de transformaciones lineales:*

$$T = \begin{pmatrix} R_{3 \times 3} & T_{3 \times 1} \\ P_{1 \times 3} & E_{1 \times 1} \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

donde  $R_{3 \times 3}$  corresponde a las matrices de rotación,  $P_{1 \times 3}$  corresponde a un vector fila que representa la perspectiva,  $T_{3 \times 1}$  corresponde a un vector columna que representa la traslación y  $E_{1 \times 1}$  corresponde a un escalar que representa el factor de escala.

En el caso de sólo describir la posición y orientación de un objeto donde éste no se le aplique parámetros de escalado y perspectiva (es decir,  $P_{1 \times 3}$  corresponde al vector nulo  $\mathbf{0}$  y  $E_{1 \times 1} = 1$ ), la matriz de transformación homogénea se reduce a

$$T = \begin{pmatrix} R_{3 \times 3} & T_{3 \times 1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$



### Principales Matrices homogéneas.

Como se observó en el epígrafe capítulo referente a las matrices de rotación, se establecen matrices de transformación homogéneas para rotaciones en los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ :

$$\text{Rot}_x \theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

$$\text{Rot}_y \varsigma = \begin{pmatrix} \cos \varsigma & 0 & \sin \varsigma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varsigma & 0 & \cos \varsigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y} \quad (1.11)$$

$$\text{Rot}_z \sigma = \begin{pmatrix} \cos \sigma & -\sin \sigma & 0 & 0 \\ \sin \sigma & \cos \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Para expresar solo la traslación de un vector  $\vec{P} = P_x \hat{i} + P_y \hat{j} + P_z \hat{k}$  se tiene:

$$T(\vec{P})(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Para realizar rotaciones y traslaciones con matrices de rotación homogénea es necesario establecer nueve elementos, el cual contrasta con los cuaternios, que se presenta en el siguiente capítulo, donde solo requiere cuatro elementos.

---

---

## CAPÍTULO 2

---

# CUATERNIOS

A demás de las matrices de transformación homogénea, existen otros métodos, como es el caso de los cuaternios, el cual es el centro conceptual de este trabajo. A continuación se hace una nota histórica y una exposición del álgebra de cuaternios con algunas consideraciones geométricas de interés para el proyecto.

---

### 2.1. Historia

---

Sir Rowan Hamilton es considerado, después de Isaac Newton, como el matemático más eminente de los pueblos de habla inglesa. Nació el 4 de agosto de 1805 en Dublín, Irlanda, y murió el 2 de septiembre 1865 en la misma ciudad. A los 5 años ya demostraba sus grandes capacidades al emplear otros idiomas como el griego, el latín, el hebreo y dominaba a los diez años otras lenguas orientales. Estudió en el Trinity College de Dublín. A la edad de 22 años era ya astrónomo real de Irlanda, director del Observatorio de Dunsink y profesor de Astronomía. Publicó tempranamente un trabajo sobre rayos en óptica, y estudió otros fenómenos naturales cuya teorización y validación experimental le dieron enorme prestigio, tanto como para ser elevado a la nobleza a los 30 años. Además, fue la primera persona que presentó un trabajo original sobre el álgebra de números complejos, siendo el primero en formalizarlo en 1833 [13].

Sir William Rowan Hamilton estudió los números complejos como parejas de números



Figura 2.0.1: Sir William Rowan Hamilton. Tomado de *BBC British History* [16].

reales, donde profundizó en la relación geométrica que establecían como rotaciones en el plano. Con base en lo anterior, Hamilton por varios años busco extender los números complejos a números de dimensión 3, donde éstos lograran de forma análoga representar rotaciones en el espacio [14].

Los números complejos tienen la forma  $a + bi$ , donde  $i$  es la unidad imaginaria. Hamilton consideró la expresión  $a + bi + cj$ , donde  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $i$  y  $j$  son unidades imaginarias. Hamilton intentó definir las operaciones algebraicas con esta expresión. Para lograr lo anterior, debía asegurar que esta nueva álgebra cumpliera la propiedad clausurativa al efectuar cualquier operación algebraica. La suma y la resta no poseían dificultad. En la multiplicación, aparece un gran problema. Al extender las operaciones algebraicas de los números reales al producto de la expresión definida por Hamilton, se obtiene:

$$(a + bi + cj)(d + fi + gj) = ad + afi + agj + bdi + bfii + bgij + cdj + cfji + cgjj,$$

donde lo anterior tiene validez si se puede expresar como  $x + yi + zj$ , donde  $x, y, z \in \mathbb{R}$  e  $i$  y  $j$  son unidades imaginarias. Sin embargo, aparecía el inconveniente de reducir los productos  $i \cdot i$ ,  $i \cdot j$ ,  $j \cdot i$  y  $j \cdot j$ . Hamilton tomó como consideración que tanto  $i$

y  $j$  son unidades imaginarias que cumplen con las mismas propiedades. Por lo tanto, como el producto  $i \cdot i = -1$ , con la unidad imaginaria  $j$  sucede lo mismo, por lo tanto  $i \cdot i = j \cdot j = -1$ . No obstante, hacía falta determinar los otros productos,  $i \cdot j$  y  $j \cdot i$ . Las unidades  $i$  y  $j$  son linealmente independientes, por lo cual, si al efectuar el producto  $i \cdot j = a$ , donde  $a$  es un número real y se multiplica a ambos lados por  $i$ , se obtiene que  $i \cdot i \cdot j = i \cdot a$ , por lo tanto  $-j = i \cdot a$ , lo cual es contradictorio. Pero si se considera  $a$  no como un número real sino como un número imaginario de la forma  $bi$ , se tiene que  $i \cdot j = bi$ , es decir,  $j = b$ , donde  $b$  es un número real y nuevamente se obtiene otra inconsistencia. Tampoco  $a$  puede ser de la forma  $cj$ , porque eso implicaría que  $c = i$ . Éste problema le tomó a Hamilton varios años sin llegar a una solución.

Unos meses antes de su muerte, Hamilton escribió una carta a su hijo Archibald, donde le explicaba aquel momento de inspiración que lo condujo a su gran descubrimiento, el 16 de octubre de 1843:

*" . . . Cada mañana en la primera mitad de ese mes (octubre de 1843), cuando bajaba a desayunar, tu hermano y tú me solías preguntar: «¿Bueno, Papá, ya sabes multiplicar ternas?» Y yo tenía que responder, con un movimiento triste de la cabeza: «No, sólo sé sumarlas y restarlas». Pero el día 16 de ese mes —que era lunes, y día de Consejo en la Real Academia Irlandesa— estaba paseando hacia allí para asistir y presidir la reunión, y tu madre caminaba conmigo, a lo largo del Canal Real; y aunque ella me decía cosas aquí y allá, una línea de pensamiento se iba formando en mi mente, que por fin dio resultado, del cual inmediatamente comprendí la importancia. Pareció como si un circuito eléctrico se cerrara y saltara una chispa . . . "* [14].

Y continua describiendo:

*"No pude reprimir el impulso y grabé con una navaja en el Brougham Bridge (puente de Brougham), la fórmula fundamental con los símbolos  $i$ ,  $j$  y  $k$ , . . . que contiene la solución del problema".* En ese lugar existe una placa recordando el suceso, Ver Figura 3.2.

Lo que resuelve Hamilton es adoptar un cuarto componente, otra unidad imaginaria, quien la denominó  $k$ . De esta forma emplea la expresión  $a + bi + cj + dk$ , donde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

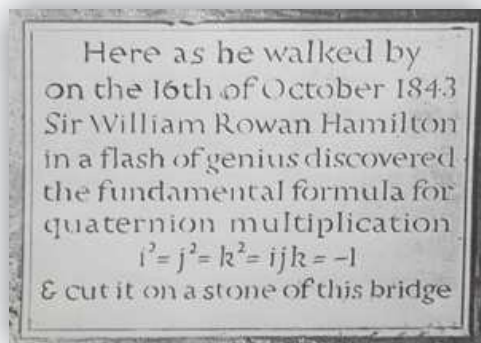


Figura 2.0.2: Placa conmemorativa de Sir William Rowan Hamilton. Puente Brougham, Dublín, Irlanda. Tomado de *Cuaternios de Hamilton* [3].

con  $i$ ,  $j$  y  $k$  unidades imaginarias linealmente independientes. A esta combinación lineal lo llamo, ***cuaternios***.

Hamilton al indagar por la interpretación geométrica que se podían desprender de los cuaternios, descubrió que al hacer que la parte real,  $a$ , fuera igual a cero, las unidades imaginarias  $i$ ,  $j$  y  $k$  podían representar puntos en el espacio y además, los cuaternios permitían realizar rotaciones de estos puntos.

Hamilton después de su descubrimiento envió una carta a John Graves donde le explicaba el gran suceso. El 26 de octubre de 1843 le responde Graves con elogios y expone una inquietud que le surge, ¿hasta que punto era posible agregar más unidades imaginarias? El 26 de diciembre de 1843 Graves le envía una carta a Hamilton explicándole que había logrado crear un álgebra de dimensión 8, donde extiende los cuaternios, generando expresiones como  $a + bi + cj + dk + le + mo + su + fw$ , donde  $a, b, c, d, l, m, s, f \in \mathbb{R}$ , con  $i, j, k, e, o, u$  y  $w$  unidades imaginarias, la cual las llamo *octavas*. Hamilton encontró que las octavas perdía la propiedad asociativa del producto, la cual posee los cuaternios. En 1845, Arthur Cayley independientemente de Hamilton y Grave presentó su trabajo sobre los octonios, un trabajo análogo al realizado por Grave, un álgebra de dimensión 8.

El resto de su vida Hamilton la dedicó a estudiar el álgebra de cuaternios. El pensaba que los cuaternios serían de gran utilidad en la matemática y en la física. Su trabajo monumental sobre los cuaternios fue publicado en 1853, *Treatise on Quaternions*. Después

trabajó una extensión, *Elements of Quaternions*, la cuál no pudo terminar por su muerte en 1855, sin embargo su hijo lo publicó en 1866.

---

## 2.2. Algunos conceptos importantes

---

Los cuaternios son una extensión de los números reales, que es generada por los vectores  $\hat{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\hat{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\hat{k} = (0, 0, 1)$  que forman una base ortonormal [9].

**Definición 2.1.** Sean  $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ , un **cuaternio** es una combinación lineal  $Q = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}$ , donde  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  son la base ortonormal estándar en  $\mathbb{R}_3$  ( $\hat{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\hat{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\hat{k} = (0, 0, 1)$ ).

En los cuaternios se reconocen dos componentes, la parte real (escalar),  $q_0$ , y la parte vectorial,  $\vec{q} = q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}$ . De esta forma se puede expresar un cuaternio como:

$$Q = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k} = q_0 + \vec{q}$$

**Ejemplo 2.1.**  $Q = 8 + 5\hat{i} + 40\hat{j} + 19\hat{k}$  es un cuaternio, donde 8 es la parte real y  $\vec{q} = 5\hat{i} + 40\hat{j} + 19\hat{k}$  la parte vectorial.

**NOTA:** Se denotará al conjunto de cuaternios por  $H(\mathbb{R})$  y para cada cuaternio se utilizará  $Q = q_0 + \hat{i}q_1 + \hat{j}q_2 + \hat{k}q_3 = q_0 + \vec{q}$ , donde  $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$  y  $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$ .

**Definición 2.2.** Para todo  $Q_1, Q_2 \in H(\mathbb{R})$ , se dice que son **cuaternios iguales** si y solo si tienen exactamente los mismos componentes, es decir, si

$$Q_1 = q_0 + \hat{i}q_1 + \hat{j}q_2 + \hat{k}q_3 \text{ y } Q_2 = p_0 + \hat{i}p_1 + \hat{j}p_2 + \hat{k}p_3,$$

se tiene que,

$$Q_1 = Q_2 \Leftrightarrow q_0 = p_0 \text{ y } q_1 = p_1 \text{ y } q_2 = p_2 \text{ y } q_3 = p_3.$$

**Definición 2.3.** Sea el cuaternio  $Q = q_0 + \hat{i}q_1 + \hat{j}q_2 + \hat{k}q_3$ . El cuaternio  $Q$  se denomina nulo cuando  $q_0 = q_1 = q_2 = q_3 = 0$ .

**Definición 2.4.** Sea el cuaternio  $Q = q_0 + \hat{i}q_1 + \hat{j}q_2 + \hat{k}q_3$ . El cuaternio conjugado de  $Q$  (denotado por  $\bar{Q}$ ) es aquel donde la parte vectorial de  $Q$ ,  $\vec{v}$  tiene invertidos los signos, es decir,

$$\bar{Q} = q_0 - \hat{i}q_1 - \hat{j}q_2 - \hat{k}q_3.$$

**Definición 2.5.** Dado el cuaternio  $Q = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}$ , su cuaternio opuesto es  $-Q = -q_0 - q_1\hat{i} - q_2\hat{j} - q_3\hat{k}$ .

---

## 2.3. Álgebra de cuaternios

---

### 2.3.1. Suma y resta de cuaternios

**Definición 2.6.** Sean  $Q_1, Q_2 \in H(\mathbb{R})$ , donde  $Q_1 = q_0 + \hat{i}q_1 + \hat{j}q_2 + \hat{k}q_3$  y  $Q_2 = p_0 + \hat{i}p_1 + \hat{j}p_2 + \hat{k}p_3$ . Se define la suma entre cuaternios, como la suma componente a componente,

$$Q_1 + Q_2 = (q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)\hat{i} + (q_2 + p_2)\hat{j} + (q_3 + p_3)\hat{k}. \quad (2.1)$$

**Ejemplo 2.2.** Dados  $Q_1 = -3 + 6\hat{i} + 7\hat{j} - 8\hat{k}$ ,  $Q_2 = 1 + 12\hat{i} - 7\hat{j} - 11\hat{k}$

$$Q_1 + Q_2 = (-3 + 1) + (6 + 12)\hat{i} + (7 - 7)\hat{j} + (-8 - 11)\hat{k} = -2 + 18\hat{i} - 19\hat{k}.$$

**Definición 2.7.** De forma análoga a la suma se define la resta o diferencia, es decir, si  $Q_1, Q_2 \in H(\mathbb{R})$ , donde  $Q_1 = q_0 + \hat{i}q_1 + \hat{j}q_2 + \hat{k}q_3$  y  $Q_2 = p_0 + \hat{i}p_1 + \hat{j}p_2 + \hat{k}p_3$ , entonces,

$$Q_1 - Q_2 = (q_0 - p_0) + (q_1 - p_1)\hat{i} + (q_2 - p_2)\hat{j} + (q_3 - p_3)\hat{k}. \quad (2.2)$$

**Ejemplo 2.3.** Dados  $Q_1 = -3 + 6\hat{i} + 7\hat{j} - 8\hat{k}$ ,  $Q_2 = 1 + 12\hat{i} - 7\hat{j} - 11\hat{k}$

$$Q_1 - Q_2 = (-3 - 1) + (6 - 12)\hat{i} + (7 + 7)\hat{j} + (-8 + 11)\hat{k} = -4 - 6\hat{i} + (14)\hat{j} + 3\hat{k}.$$

La suma de cuaternios cumple con las propiedades conmutativa y asociativa, la cual se presentan a continuación.

**Proposición 2.1.** Dados  $Q_1, Q_2 \in H(\mathbb{R})$ , donde  $Q_1 = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}$  y  $Q_2 = p_0 + p_1\hat{i} + p_2\hat{j} + p_3\hat{k}$ , se tiene que  $Q_1 + Q_2 = Q_2 + Q_1$ .

*Demostración.* Sean  $Q_1, Q_2 \in H(\mathbb{R})$ , donde  $Q_1 = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}$  y  $Q_2 = p_0 + p_1\hat{i} + p_2\hat{j} + p_3\hat{k}$ , se tiene que

$Q_1 + Q_2 = (q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)\hat{i} + (q_2 + p_2)\hat{j} + (q_3 + p_3)\hat{k}$ , como la operación aditiva en  $\mathbb{R}$  es conmutativa (ver axiomas de campo de  $\mathbb{R}$ ) se tiene que  $q_0, p_0, q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3 \in \mathbb{R}$ , entonces  $Q_1 + Q_2 = (q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)\hat{i} + (q_2 + p_2)\hat{j} + (q_3 + p_3)\hat{k} = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)\hat{i} + (p_2 + q_2)\hat{j} + (p_3 + q_3)\hat{k} = Q_2 + Q_1$ .  $\square$

**Proposición 2.2.** *Dados  $Q_1, Q_2, Q_3 \in H(\mathbb{R})$ , donde  $Q_1 = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}$ ,  $Q_2 = p_0 + p_1\hat{i} + p_2\hat{j} + p_3\hat{k}$  y  $Q_3 = r_0 + r_1\hat{i} + r_2\hat{j} + r_3\hat{k}$ , se tiene que  $(Q_1 + Q_2) + Q_3 = Q_1 + (Q_2 + Q_3)$ .*

*Demostración.* Sean  $Q_1, Q_2, Q_3 \in H(\mathbb{R})$ , donde  $Q_1 = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}$ ,  $Q_2 = p_0 + p_1\hat{i} + p_2\hat{j} + p_3\hat{k}$  y  $Q_3 = r_0 + r_1\hat{i} + r_2\hat{j} + r_3\hat{k}$ . Utilizando los axiomas de campos de  $\mathbb{R}$  se tiene que

$$\begin{aligned}
(Q_1 + Q_2) + Q_3 &= (q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k} + p_0 + p_1\hat{i} + p_2\hat{j} + p_3\hat{k}) + r_0 + r_1\hat{i} + r_2\hat{j} + r_3\hat{k} \\
&= (q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)\hat{i} + (q_2 + p_2)\hat{j} + (q_3 + p_3)\hat{k} + r_0 + r_1\hat{i} + r_2\hat{j} + r_3\hat{k} \\
&= ((q_0 + p_0) + r_0) + ((q_1 + p_1) + r_1)\hat{i} + ((q_2 + p_2) + r_2)\hat{j} + ((q_3 + p_3) + r_3)\hat{k} \\
&= (q_0 + (p_0 + r_0)) + (q_1 + (p_1 + r_1))\hat{i} + (q_2 + (p_2 + r_2))\hat{j} + (q_3 + (p_3 + r_3))\hat{k} \\
&= (p_0 + r_0) + (p_1 + r_1)\hat{i} + (p_2 + r_2)\hat{j} + (p_3 + r_3)\hat{k} + q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k} \\
&= Q_1 + (Q_2 + Q_3) \quad \square
\end{aligned}$$

### 2.3.2. Producto de cuaternios

**Definición 2.8.** *Si  $c$  es un escalar,  $c \in \mathbb{R}$ , y  $Q \in H(\mathbb{R})$ , donde  $Q = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}$ , entonces el producto de un cuaternio y un escalar está dado por*

$$cQ = cq_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}. \quad (2.3)$$

**Ejemplo 2.4.** *Si  $Q = 5 + 8\hat{i} + 6\hat{j} + 21\hat{k}$ , entonces  $3Q = 15 + 24\hat{i} + 18\hat{j} + 63\hat{k}$ .*

Antes de abordar el producto de cuaternios se debe tener en cuenta los productos definidos por Hamilton con las unidades imaginarias  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ .

$$\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = \hat{i} \cdot \hat{j} \cdot \hat{k} = -1$$

De esta ecuación se deduce los siguientes productos:

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \cdot \hat{i} = -\hat{k}, \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \cdot \hat{j} = -\hat{i}, \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{j}, \hat{i} \cdot \hat{k} = -\hat{j}.$$

**NOTA:** De ahora en adelante se obviará  $\cdot$  en los productos (es decir,  $a \cdot b = ab$ ).

Ahora, utilizando las reglas ordinarias de multiplicación algebraica, junto a los productos anteriores, se tiene que si  $Q_1, Q_2 \in H(\mathbb{R})$ , donde  $Q_1 = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}$  y  $Q_2 =$



$p_0 + p_1\hat{i} + p_2\hat{j} + p_3\hat{k}$ , entonces

$$\begin{aligned}
Q_1Q_2 &= (q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k})(p_0 + p_1\hat{i} + p_2\hat{j} + p_3\hat{k}) \\
&= q_0p_0 + q_0p_1\hat{i} + q_0p_2\hat{j} + q_0p_3\hat{k} \\
&+ q_1p_0\hat{i} + q_1p_1\hat{i}^2 + q_1p_2\hat{i}\hat{j} + q_1p_3\hat{i}\hat{k} \\
&+ q_2p_0\hat{j} + q_2p_1\hat{j}\hat{i} + q_2p_2\hat{j}^2 + q_2p_3\hat{j}\hat{k} \\
&+ q_3p_0\hat{k} + q_3p_1\hat{k}\hat{i} + q_3p_2\hat{k}\hat{j} + q_3p_3\hat{k}^2
\end{aligned}$$

Al utilizar los productos definidos por Hamilton se tiene que

$$\begin{aligned}
Q_1Q_2 &= q_0p_0 + q_0p_1\hat{i} + q_0p_2\hat{j} + q_0p_3\hat{k} + q_1p_0\hat{i} - q_1p_1 + q_1p_2\hat{k} - q_1p_3\hat{j} + q_2p_0\hat{j} - q_2p_1\hat{k} \\
&- q_2p_2 + q_2p_3\hat{i} + q_3p_0\hat{k} + q_3p_1\hat{j} - q_3p_2\hat{i} - q_3p_3
\end{aligned}$$

Al reagrupar términos, la expresión anterior se puede expresar de la forma  $q_0 + \vec{q}$ , donde  $q_0 \in \mathbb{R}$  y  $q \in \mathbb{R}^3$ .

**Definición 2.9.** Dados  $Q_1, Q_2 \in H(\mathbb{R})$ , donde  $Q_1 = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}$  y  $Q_2 = p_0 + p_1\hat{i} + p_2\hat{j} + p_3\hat{k}$ , se define su producto

$$\begin{aligned}
Q_1Q_2 &= (q_0p_0 - q_1p_1 - q_2p_2 - q_3p_3) + (q_0p_1 + q_1p_0 + q_2p_3 - q_3p_2)\hat{i} \\
&+ (q_0p_2 - q_1p_3 + q_2p_0 + q_3p_1)\hat{j} + (q_0p_3 + q_1p_2 - q_2p_1 + q_3p_0)\hat{k} \quad (2.4)
\end{aligned}$$

La ecuación (2.4) se puede reescribir de una forma más concisa. Para esto, al considerar  $Q_1 = q_0 + \vec{q}_1$ ,  $Q_2 = p_0 + \vec{q}_2$ , donde  $\vec{q}_1 = q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}$ ,  $\vec{q}_2 = p_1\hat{i} + p_2\hat{j} + p_3\hat{k}$  y al reagrupar nuevamente los términos se obtiene

$$\begin{aligned}
Q_1Q_2 &= p_0q_0 - (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) \\
&+ q_0(p_1\hat{i} + p_2\hat{j} + p_3\hat{k}) + p_0(q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}) \\
&+ (q_2p_3 - q_3p_2)\hat{i} + (q_3p_1 - q_1p_3)\hat{j} + (q_1p_2 - q_2p_1)\hat{k} \\
&= q_0p_0 - \vec{v}_1\vec{v}_2 + q_0\vec{v}_2 + p_0\vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_1 \quad (2.5)
\end{aligned}$$

**Ejemplo 2.5.** Sean  $Q_1, Q_2 \in H(\mathbb{R})$ , donde  $Q_1 = 3 + \vec{q}_1$ ,  $Q_2 = 2 + \vec{q}_2$ , donde  $\vec{q}_1 = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ,  $\vec{q}_2 = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ . Realizando el producto punto entre los vectores

$$\vec{q}_1\vec{q}_2 = (1, -2, 1)(-1, 2, 3) = -2,$$

y el producto cruz entre los vectores

$$\vec{q}_1 \times \vec{q}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -8\hat{i} - 4\hat{j}.$$

De acuerdo a la ecuación (2.5) se tiene

$$\begin{aligned} Q_1 Q_2 &= 6 - (-2) + 3(-\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + 2(\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) + (-8\hat{i} - 4\hat{j}) \\ &= 8 - 9\hat{i} - 2\hat{j} + 11\hat{k}. \end{aligned}$$

Es de notar, que los productos  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  no son conmutativos, por lo tanto, el producto de cuaternios tampoco lo es. Sin embargo si cumple con la propiedad asociativa para el producto.

**Proposición 2.3.** *Dados  $Q_1, Q_2, Q_3 \in H(\mathbb{R})$ , donde  $Q_1 = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}$ ,  $Q_2 = p_0 + p_1\hat{i} + p_2\hat{j} + p_3\hat{k}$  y  $Q_3 = r_0 + r_1\hat{i} + r_2\hat{j} + r_3\hat{k}$ , se tiene que  $(Q_1 Q_2) Q_3 = Q_1 (Q_2 Q_3)$ .*

*Demostración.* Sean  $Q_1, Q_2, Q_3 \in H(\mathbb{R})$ , donde  $Q_1 = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}$ ,  $Q_2 = p_0 + p_1\hat{i} + p_2\hat{j} + p_3\hat{k}$  y  $Q_3 = r_0 + r_1\hat{i} + r_2\hat{j} + r_3\hat{k}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} (Q_1 Q_2) Q_3 &= [(q_0 p_0 - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3) + (q_0 p_1 + q_1 p_0 + q_2 p_3 - q_3 p_2)\hat{i} + (q_2 p_0 - q_0 p_2 - q_3 p_1 - q_1 p_3)\hat{j} + (q_3 p_0 - q_0 p_3 - q_2 p_1 - q_1 p_2)\hat{k}] Q_3 \\ &= (q_0 p_0 r_0 - r_0 q_1 p_1 - r_0 q_2 p_2 - r_0 q_3 p_3 - p_0 q_1 r_1 - q_0 p_1 r_1 + q_3 p_2 r_1 - q_2 p_3 r_1 - p_1 q_2 r_2 - q_3 p_1 r_2 - q_0 p_2 r_2 + q_1 p_3 r_2 - p_0 q_3 r_3 + q_2 p_1 r_3 - q_1 p_2 r_3 - q_0 p_3 r_3) + (p_0 r_0 q_1 + q_0 r_0 p_1 - r_0 q_3 p_2 + r_0 q_2 p_3 + q_0 p_0 r_1 - q_1 p_1 r_1 - q_2 p_2 r_1 - q_3 p_3 r_1 - p_0 q_3 r_2 + q_2 p_1 r_2 - q_1 p_2 r_2 - q_0 p_3 r_2 + p_0 q_2 r_3 + q_3 p_1 r_3 + q_0 p_2 r_3 - q_1 p_3 r_3)\hat{i} + (p_0 r_0 q_2 + r_0 q_3 p_1 + q_0 r_0 p_2 - r_0 q_1 p_3 + p_0 q_3 r_1 - q_2 p_1 r_1 + q_1 p_2 r_1 + q_0 p_3 r_1 + q_0 p_0 r_2 - q_1 p_1 r_2 - q_2 p_2 r_2 - q_3 p_3 r_2 - p_0 q_1 r_3 - q_0 p_1 r_3 + q_3 p_2 r_3 - q_2 p_3 r_3)\hat{j} + (p_0 r_0 q_3 - r_0 q_2 p_1 + r_0 q_1 p_2 + q_0 r_0 p_3 - p_0 q_2 r_1 - q_3 p_1 r_1 - q_0 p_2 r_1 + q_1 p_3 r_1 + p_0 q_1 r_2 + q_0 p_1 r_2 - q_3 p_2 r_2 + q_2 p_3 r_2 + q_0 p_0 r_3 - q_1 p_1 r_3 - q_2 p_2 r_3 - q_3 p_3 r_3)\hat{k} \\ &= (q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k})[(p_0 r_0 - p_1 r_1 - p_2 r_2 - p_3 r_3) + (p_1 r_0 + p_0 r_1 - p_3 r_2 + p_2 r_3)\hat{i} + (p_2 r_0 + p_3 r_1 + p_0 r_2 - p_1 r_3)\hat{j} + (p_3 r_0 - p_2 r_1 + p_1 r_2 + p_0 r_3)\hat{k}] = Q_1 (Q_2 Q_3) \quad \square \end{aligned}$$

### 2.3.3. Norma de un cuaternio

Sea el cuaternio  $Q = q_0 + \hat{i}q_1 + \hat{j}q_2 + \hat{k}q_3$ , se define su norma por

$$\|Q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}. \quad (2.6)$$

**Ejemplo 2.6.** Dado  $Q = 8 + 5\hat{i} + 40\hat{j} + 19\hat{k}$

$$\|Q\| = \sqrt{8^2 + 5^2 + 40^2 + 19^2} = \sqrt{2050} \|Q\| = 5\sqrt{82}$$

### 2.3.4. Normalización de un cuaternio

Sea  $Q \in H(\mathbb{R})$  donde  $\|Q\| \neq 0$ . Para normalizar  $Q$  se define un nuevo cuaternio,  $Q'$ , donde  $Q' = \frac{Q}{\|Q\|}$ . La norma de  $Q'$  es uno, es decir  $\|Q'\| = 1$ .

**Proposición 2.4.** Para todo  $Q \in H(\mathbb{R})$ , se tiene que  $\|Q'\| = \left\| \frac{Q}{\|Q\|} \right\| = 1$ .

*Demostración.* Sea  $Q = q_0 + \hat{i}q_1 + \hat{j}q_2 + \hat{k}q_3$ , con  $\|Q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ .

Tenemos que

$$\|Q'\| = \left\| \frac{Q}{\|Q\|} \right\| = \left\| \frac{q_0 + \hat{i}q_1 + \hat{j}q_2 + \hat{k}q_3}{\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \right\| = \sqrt{\frac{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} = 1 \quad \square$$

**Ejemplo 2.7.** Dado  $Q = 8 + 5\hat{i} + 40\hat{j} + 19\hat{k}$  el cuaternio unitario asociado a este es

$$Q' = \frac{Q}{\|Q\|} = \frac{Q}{5\sqrt{82}} = \frac{1}{5\sqrt{82}}(8 + 5\hat{i} + 40\hat{j} + 19\hat{k}) = \frac{8}{5\sqrt{82}} + \frac{\hat{i}}{\sqrt{82}} + \frac{8\hat{j}}{\sqrt{82}} + \frac{19\hat{k}}{5\sqrt{82}}$$

**Proposición 2.5.** Sea  $Q, \bar{Q} \in H(\mathbb{R})$ , donde  $Q = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}$  y  $\bar{Q} = q_0 - q_1\hat{i} - q_2\hat{j} - q_3\hat{k}$ , el producto

$$Q\bar{Q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \quad (2.7)$$

*Demostración.* Con base en la ecuación (2.4), se tiene

$$\begin{aligned} Q\bar{Q} &= (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + (-q_0q_1 + q_1q_0 - q_2q_3 + q_3q_2)\hat{i} \\ &\quad + (-q_0q_2 + q_1q_3 + q_2q_0 - q_3q_1)\hat{j} + (-q_0q_3 - q_1q_2 + q_2p_1 + q_3p_0)\hat{k} \\ &= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2. \quad \square \end{aligned} \quad (2.8)$$

**Observación.** Se puede reescribir la norma de un cuaternio teniendo en cuenta (2.8), de la siguiente forma:

$$\|Q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = \sqrt{Q\bar{Q}} \quad (2.9)$$

**Proposición 2.6.** Sea  $Q_1, Q_2 \in H(\mathbb{R})$ , se tiene que el conjugado de un producto de cuaternios es igual al producto de los conjugados en sentido opuesto, es decir

$$\overline{Q_1 Q_2} = \overline{Q_2} \cdot \overline{Q_1} \quad (2.10)$$

*Demostración.* Sea  $Q_1, Q_2 \in H(\mathbb{R})$ , donde  $Q_1 = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}$  y  $Q_2 = p_0 + p_1\hat{i} + p_2\hat{j} + p_3\hat{k}$ . Recuerde que

$$\begin{aligned} Q_1 Q_2 &= (q_0 p_0 - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3) + (q_0 p_1 + q_1 p_0 + q_2 p_3 - q_3 p_2)\hat{i} \\ &\quad + (q_0 p_2 - q_1 p_3 + q_2 p_0 + q_3 p_1)\hat{j} + (q_0 p_3 + q_1 p_2 - q_2 p_1 + q_3 p_0)\hat{k} \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \overline{Q_1 Q_2} &= (q_0 p_0 - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3) - (q_0 p_1 + q_1 p_0 + q_2 p_3 - q_3 p_2)\hat{i} \\ &\quad - (q_0 p_2 - q_1 p_3 + q_2 p_0 + q_3 p_1)\hat{j} - (q_0 p_3 + q_1 p_2 - q_2 p_1 + q_3 p_0)\hat{k} \\ &= (q_0 p_0 - q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3) + (-q_0 p_1 - q_1 p_0 - q_2 p_3 + q_3 p_2)\hat{i} \\ &\quad + (-q_0 p_2 + q_1 p_3 - q_2 p_0 - q_3 p_1)\hat{j} + (-q_0 p_3 - q_1 p_2 + q_2 p_1 - q_3 p_0)\hat{k} \\ &= \overline{Q_2} \cdot \overline{Q_1}. \quad \square \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.8.** Dados  $Q_1 = 5 + 8\hat{i} + 40\hat{j} - 19\hat{k}$  y  $Q_2 = 6 + 21\hat{i} - 15\hat{j} + 17\hat{k}$ , donde  $\overline{Q_1} = 5 - 8\hat{i} - 40\hat{j} + 19\hat{k}$  y  $\overline{Q_2} = 6 - 21\hat{i} + 15\hat{j} - 17\hat{k}$  se tiene que

$$\begin{aligned} \overline{Q_1 Q_2} &= \overline{Q_2} \cdot \overline{Q_1} \\ &= (30 - 168 + 600 + 323) + (105 + 48 - 680 + 285)\hat{i} \\ &\quad + (-75 + 136 + 240 + 399)\hat{j} + (85 + 120 + 840 - 114)\hat{k} \\ &= 785 - 242\hat{i} + 700\hat{j} + 931\hat{k}. \end{aligned}$$

**Observación.** Para una mayor comodidad para el lector, la expresión referida al conjugado del cuaternio  $\overline{Q}$  será también representado por  $Q^*$ .

**Proposición 2.7.** Sean  $Q_1, Q_2 \in H(\mathbb{R})$ , se tiene que la norma del producto de dos cuaternios es el producto de la norma individual de cada cuaternio, es decir:

$$\|Q_1 Q_2\| = \|Q_1\| \|Q_2\| \quad (2.11)$$

*Demostración.* De las ecuaciones (2.9) y (2.10) se tiene que

$$\begin{aligned}
\|Q_1 Q_2\| &= \sqrt{(Q_1 Q_2)(Q_1 Q_2)^*} \\
&= \sqrt{Q_1 Q_2 Q_2^* Q_1^*} \text{ asociando cuaternios,} \\
&= \sqrt{(Q_1 Q_1^*)(Q_2 Q_2^*)} \text{ como los productos } Q_1 Q_1^* > 0, Q_2 Q_2^* = j > 0, \\
&= \sqrt{Q_1 Q_1^*} \sqrt{Q_2 Q_2^*} \\
&= \|Q_1\| \|Q_2\|. \quad \square
\end{aligned}$$

### 2.3.5. Inverso de un cuaternio

Aplicando las ideas del conjugado y la norma de cuaternios, se podrá demostrar que todo cuaternio no nulo tiene inverso multiplicativo, para la cual se desarrollará una fórmula para esto.

**Definición 2.10.** Sea  $Q \in H(\mathbb{R})$ . Si se designa el inverso de un cuaternio como  $Q^{-1}$ . Aplicando la definición general de inverso, se tiene que

$$Q^{-1}Q = QQ^{-1} = 1 + \vec{0} = 1$$

Ahora, si se hace el producto a ambos lados de la anterior igualdad por el cuaternio conjugado  $Q^*$  se obtiene

$$Q^{-1}QQ^* = Q^*QQ^{-1} = Q^*.$$

Dado que  $QQ^* = \sqrt{(QQ^*)^2} = \|Q\|^2$ , se puede reescribir lo anterior como

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{\|Q\|^2}. \quad (2.12)$$

**Corolario 2.1.** Sea  $Q \in H(\mathbb{R})$ , donde  $\|Q\| = 1$ , se tiene que el inverso de  $Q$  es simplemente el cuaternio conjugado, esto es  $Q^{-1} = Q^*$ .

*Demostración.* La demostración es sencilla y se le deja al lector.  $\square$

---

## 2.4. Consideraciones algebraicas

---

El interés principal de trabajar con los cuaternios es desarrollar un método para determinar la orientación de un objeto en el espacio tridimensional [7]. Un objeto en  $\mathbb{R}^3$

puede ser considerado como un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^3$ . Se puede identificar de forma sencilla esos puntos como vectores en  $\mathbb{R}^3$ . La orientación del objeto puede ser estudiada por medio de las operaciones vectoriales. Si se desea obtener lo anterior utilizando un operador definido en términos de cuaternios, aparece la sensación de incongruencia por el hecho de que los cuaternios están inmersos en  $\mathbb{R}^4$ . Afortunadamente, hay una relación directa, la cual permite establecer una correspondencia entre los cuaternios y los vectores, por el hecho de que *Un vector  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  se puede considerar simplemente como un cuaternio  $Q \in \mathbb{R}^4$  donde la parte escalar es cero.*

Estos tipos de cuaternios son denominados *cuaternios puros*". Al considerar  $\mathbb{Q}_0$  como el conjunto de todos los cuaternios puros,  $\mathbb{Q}_0 \subset H(\mathbb{R})$ , se considera a los vectores  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  como elementos del conjunto  $\mathbb{Q}_0$ . Por lo anterior se puede definir una correspondencia *uno a uno* de la forma

$$\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow v = 0 + \vec{v} \in \mathbb{Q}_0 \subset H(\mathbb{R}).$$

El fácil verificar que la adición y multiplicación por un escalar en esta correspondencia es plausible. Por ejemplo, la suma de cualquier par de vectores en  $\mathbb{R}^3$  corresponde a la suma de sus correspondientes cuaternios puros en  $\mathbb{Q}_0$ .

---

## 2.5. Consideraciones geométricas

---

Sea el cuaternio  $Q \in H(\mathbb{R})$ , donde  $\|Q\| = 1$ .  $Q$  está expresado por  $Q = \alpha + \vec{v}$  donde  $\alpha \in \mathbb{R}$  y es  $\vec{v}$  es la parte vectorial, por el hecho de ser un cuaternio unitario, se tiene que  $\alpha^2 + \|Q\|^2 = 1$ .

Sin embargo, para cualquier ángulo  $\theta \in \mathbb{R}$  se tiene la identidad trigonométrica

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

En consecuencia del cuaternio unitario y la identidad trigonométrica, se puede establecer la siguiente relación:

$$\cos^2 \theta = \alpha^2 \text{ y } \sin^2 \theta = \|Q\|^2$$

Para que se cumpla la anterior relación,  $\theta$  debe satisfacer la restricción:  $-\pi < \theta < \pi$ .

Ahora es conveniente reescribir el cuaternio  $Q$  en términos del ángulo  $\theta$ . Supóngase que se define un vector unitario  $\vec{u}$ , la cual representa la dirección de la parte vectorial del cuaternio  $\vec{v}$ , donde se tiene

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{v}}{\sin \theta}.$$

De esta forma se puede escribir  $Q$  como:

$$Q = \alpha + \vec{v} = \cos \theta + \vec{u} \sin \theta. \quad (2.13)$$

Al substituir  $-\theta$  por  $\theta$  en un cuaternio expresado por la ecuación (2.13), se obtiene el cuaternio conjugado de  $Q$ , es decir,

$$\cos(-\theta) + \vec{u} \sin(-\theta) = \cos \theta + \vec{u} \sin(-\theta) = \cos \theta - \vec{u} \sin \theta = Q^* \quad (2.14)$$

Usando (2.13) y (2.14) se puede desarrollar interesantes propiedades geométricas para el producto de cuaternios, las cuales servirán para establecer el operador de rotación en  $\mathbb{R}^3$ .

Ahora supóngase que se tienen dos cuaternios,  $Q_1, Q_2 \in H(\mathbb{R})$ , donde la parte vectorial de cada cuaternio es el mismo vector  $\vec{u}$ . Se asocia el ángulo  $\alpha$  para el cuaternio  $Q_1$  y el ángulo  $\beta$  para el cuaternio  $Q_2$ . Se tiene que

$$Q_1 = \cos \alpha + \vec{u} \sin \alpha \text{ y } Q_2 = \cos \beta + \vec{u} \sin \beta$$

Por el producto de cuaternios definido en (2.4) se obtiene que

$$\begin{aligned} Q_3 = Q_1 Q_2 &= (\cos \alpha + \vec{u} \sin \alpha)(\cos \beta + \vec{u} \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - (\vec{u} \sin \alpha)(\vec{u} \sin \beta) + \cos \alpha(\vec{u} \sin \beta) + \cos \beta(\vec{u} \sin \alpha) \\ &\quad + (\vec{u} \sin \alpha) \times (\vec{u} \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + \vec{u} \sin(\alpha + \beta) \\ &= \cos \gamma + \vec{u} \sin \gamma. \end{aligned}$$

Se observa que al multiplicar los cuaternios  $Q_1$  y  $Q_2$ , se obtiene un tercer cuaternio  $Q_3$  con la misma componente vectorial  $\vec{u}$  de  $Q_1$  y  $Q_2$ , además, el ángulo asociado en el producto corresponde a la suma angular asociado a cada factor, es decir,  $\gamma = \alpha + \beta$ .

## 2.6. El operador de rotación por cuaternios

Se define el operador de rotación por cuaternios,  $L_Q$ , asociado con el cuaternio unitario  $Q$ , el cual se aplica un vector  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  por la ecuación

$$L_Q(\vec{v}) = QvQ^* = Q(0 + \vec{v})Q^* \quad (2.15)$$

En esta sección se mostrará dos propiedades algebraicas del operador  $L_Q$ . La primera de ellas es que el operador  $L_Q$  es una transformación lineal y la segunda es que el operador  $L_Q$  proporciona rotaciones en  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposición 2.8.** Sea  $\mathbb{R}^3$ , el cuaternio  $Q \in H(\mathbb{R})$ , donde  $Q = q_0 + \vec{q}$ , con  $\|Q\| = 1$  y  $v \in \mathbb{Q}_0$ , donde  $v = 0 + \vec{v}$  con  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ . La función

$$\begin{aligned} L_Q : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{v} &\rightarrow L_Q(\vec{v}) = Q(0 + \vec{v})Q^* \text{ es una transformación lineal.} \end{aligned} \quad (2.16)$$

*Demostración.* Para realizar la prueba basta probar que el producto de cuaternios establecido en  $L_Q$  cumple con la propiedad homogénea y aditiva de la definición 2.2. Utilizando la propiedad distributiva del producto de cuaternios, la función  $L_Q$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} L_Q(\alpha\vec{a} + \vec{b}) &= Q(\alpha\vec{a} + \vec{b})Q^* = (\alpha Q\vec{a} + Q\vec{b})Q^* \\ &= \alpha Q\vec{a}Q^* + Q\vec{b}Q^* = \alpha L_Q(\vec{a}) + L_Q(\vec{b}) \quad \square \end{aligned}$$

**Proposición 2.9.** Sea  $Q = q_0 + \vec{q}$  y  $v = 0 + \vec{v}$ . El operador  $L_Q$  se puede reescribir como:

$$L_Q(\vec{v}) = QvQ^* = (q_0 + \vec{q})(0 + \vec{v})(q_0 - \vec{q})(q_0^2 - \|\vec{q}\|^2)\vec{v} + 2(\vec{q}\vec{v})\vec{q} + 2q_0(\vec{q} \times \vec{v}) \quad (2.17)$$

*Demostración.* Multiplicamos los dos primeros cuaternios:

$$\blacktriangleright Qv = (q_0 + \vec{q})(0 + \vec{v}) = (-\vec{q}\vec{v} + q_0\vec{v} + \vec{q} \times \vec{v}) = Q_1$$

Luego se hace el producto de los cuaternios  $Q_1Q^*$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft Q_1Q^* &= (-\vec{q}\vec{v} + q_0\vec{v} + \vec{q} \times \vec{v})Q^* = (-\vec{q}\vec{v} + q_0\vec{v} + \vec{q} \times \vec{v})(q_0 - \vec{q}) = \\ &= (-\vec{q}\vec{v}q_0 + \vec{q}\vec{v}q_0 + \vec{q}(\vec{q} \times \vec{v}) + (\vec{q}\vec{v})\vec{q} + q_0^2\vec{v} + q_0(\vec{q} \times \vec{v}) + (q_0\vec{v} + \vec{q} \times \vec{v}) \times (-\vec{q})) \end{aligned}$$



Se observa del producto anterior que la parte real es *cero*:

$$-\vec{q}\vec{v}q_0 + \vec{q}\vec{v}q_0 + \vec{q}(\vec{q} \times \vec{v}) = 0$$

Utilizando propiedades del producto cruz se obtiene:

$$\begin{aligned} & (0 + (\vec{q}\vec{v})\vec{q} + q_0^2\vec{v} + q_0(\vec{q} \times \vec{v}) + (q_0\vec{v} + \vec{q} \times \vec{v}) \times (-\vec{q})) = \\ & (0 + (\vec{q}\vec{v})\vec{q} + q_0^2\vec{v} + q_0(\vec{q} \times \vec{v}) + (q_0\vec{v} + q_0(\vec{q} \times \vec{v}) - \|\vec{q}\|^2)\vec{v} + (\vec{q}\vec{v})\vec{q} = \\ & (q_0^2 - \|\vec{q}\|^2)\vec{v} + 2(\vec{q}\vec{v})\vec{q} + 2q_0(\vec{q} \times \vec{v}) \quad \square \end{aligned}$$

La proposición anterior además de establecer una forma alternativa de la expresión (2.15), también muestra que para cualquier vector en  $\mathbb{R}^3$  al ser operador por  $L_Q$ , su imagen corresponde a otro vector que también pertenece a  $\mathbb{R}^3$ .

Ahora se prueba que el operador  $L_Q$  es un operador de rotación espacial.

**Proposición 2.10.** *Para cualquier cuaternio unitario  $Q = q_0 + \vec{q} = \cos \theta + \hat{u} \sin \theta$ , con  $\hat{u}$  unitario y cualquier vector  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ , el operador*

$$L_Q(\vec{v}) = QvQ^* = Q(0 + \vec{v})Q^*$$

*rota el vector  $\vec{v}$  un ángulo  $2\theta$  alrededor del vector  $\vec{q}$ .*

Para realizar la prueba se vale del siguiente razonamiento:

Sea  $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$  la parte vectorial de  $Q$ . Entonces, dado un vector  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ , se consideran dos componentes de  $\vec{v}$ , el vector  $\vec{a}$  que se encuentra a lo largo del vector  $\vec{q}$ , correspondiente a la proyección ortogonal de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{q}$  y el vector  $\vec{n}$  normal a  $\vec{q}$  (Ver Figura 2.3).

Entonces, se mostrará que bajo el operador  $L_Q$ , el vector  $\vec{a}$  es invariante (fijo), mientras que el vector  $\vec{n}$  es rotado alrededor de  $\vec{q}$  por un ángulo  $2\theta$ , donde  $\theta$  es un ángulo asociado con el cuaternio  $Q$ . Al probar lo anterior se tiene que  $L_Q$  se puede interpretar como una rotación en  $\mathbb{R}^3$  con un ángulo  $2\theta$  alrededor de  $\vec{q}$ .

*Demostración.* Sea  $\vec{v} = \vec{a} + \vec{n}$ , donde  $\vec{a}$  es la proyección ortogonal sobre  $\vec{q}$  y el vector  $\vec{n}$  es la componente de  $\vec{v}$  la cual es normal a la parte vectorial de  $Q$ . Dado que el vector  $\vec{a} \parallel \vec{q}$ ,

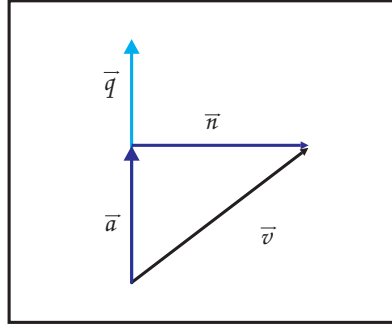


Figura 2.1: Componentes vectoriales de  $\vec{v}$ .

entonces  $\vec{a}$  es múltiplo de  $\vec{q}$ , es decir:

$$\vec{a} = k\vec{q} \text{ para algún escalar } k \in \mathbb{R}.$$

Aplicando el operador  $L_Q$  al vector  $\vec{a}$  se obtiene

$$\begin{aligned} L_Q(\vec{a}) &= Q(0 + k\vec{q})Q^* = (q_0^2 - \|\vec{q}\|^2)k\vec{q} + 2(\vec{q}k\vec{q})\vec{q} + 2q_0(\vec{q} \times k\vec{q}) \\ &= (q_0^2 - \|\vec{q}\|^2)k\vec{q} + 2(\vec{q}k\vec{q})\vec{q} = kq_0^2\vec{q} - k\|\vec{q}\|^2\vec{q} + 2k\|\vec{q}\|^2\vec{q} \\ &= kq_0\vec{q} + k\|\vec{q}\|^2\vec{q} = k(q_0^2 + \|\vec{q}\|^2)\vec{q}, \text{ como } Q = \cos \theta + \hat{u} \sin \theta \\ &= k(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)\vec{q} = k\vec{q} = \vec{a}. \end{aligned}$$

Lo anterior prueba que  $\vec{a}$  es un vector fijo (invariante). Para completar la demostración hace falta mostrar que el operador  $L_Q$  rota la componente  $\vec{n}$  un ángulo  $2\theta$  alrededor de  $\vec{q}$ . Para esto se usa la expresión (2.17), la cual se obtiene:

$$\begin{aligned} L_Q(\vec{n}) &= (q_0^2 - \|\vec{q}\|^2)\vec{n} + 2(\vec{q}\vec{n})\vec{q} + 2q_0(\vec{q} \times \vec{n}) \\ &= (q_0^2 - \|\vec{q}\|^2)\vec{n} + 2q_0(\vec{q} \times \vec{n}), \text{ Se utiliza el hecho de que } \hat{u} = \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} \\ &= (q_0^2 - \|\vec{q}\|^2)\vec{n} + 2q_0\|\vec{q}\|(\vec{u} \times \vec{n}), \text{ sea } \vec{n}_\perp = \hat{u} \times \vec{n} \\ &= (q_0^2 - \|\vec{q}\|^2)\vec{n} + 2q_0\|\vec{q}\|\vec{n}_\perp. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ahora se probará que  $\vec{n}_\perp$  y  $\vec{n}$  tienen la misma norma (longitud):

$$\|\vec{n}_\perp\| = \|\vec{n} \times \hat{u}\| = \|\vec{n}\| \cdot \|\hat{u}\| \sin(\theta).$$

El ángulo que forma los vectores  $\vec{n}_\perp$  y  $\vec{n}$  es  $\frac{\pi}{2}$ , lo cual se tiene que:

$$\|\vec{n}\| \cdot \|\hat{u}\| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \|\vec{n}\|.$$

Finalmente, utilizando el hecho de que  $Q = \cos \theta + \hat{u} \sin \theta$ , se puede reescribir (2.18) como:

$$\begin{aligned} L_Q(\vec{n}) &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \vec{n} + 2 \cos \theta \sin \theta \vec{n}_\perp \\ &= \cos(2\theta) \vec{n} + \sin(2\theta) \vec{n}_\perp. \end{aligned}$$

Lo cual prueba que el operador  $L_Q$  rota el vector  $\vec{n}$  un ángulo  $2\theta$ .  $\square$

En resumen se tiene que  $L_Q(\vec{v}) = L_Q(\vec{a}) + L_Q(\vec{n}) = \vec{a} + \vec{m}$  donde  $m = \cos(2\theta) \vec{n} + \sin(2\theta) \vec{n}_\perp$  (ver Figura 2.4).

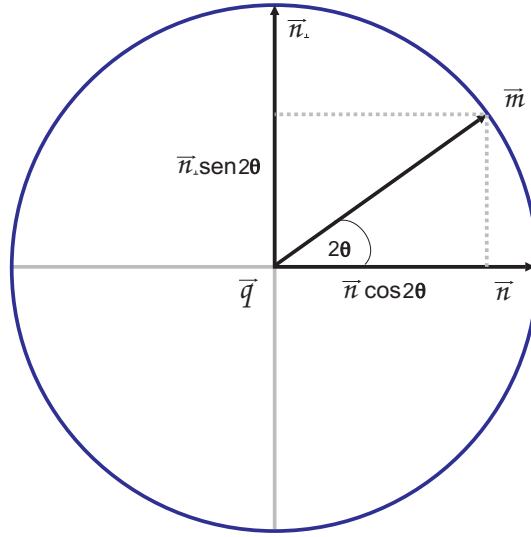


Figura 2.2: Componentes del vector rotado  $\vec{v}$ .

**Ejemplo 2.9** (Rotación del punto  $(0,3,2)$  alrededor del eje  $x$  con un ángulo de  $90^\circ$ ). *El valor angular que se empleará en el cuaternio es  $\frac{\theta}{2} = 45^\circ$  junto al vector unitario  $\hat{i}$ , el cual representa el eje  $x$ .*

Sea  $Q = \cos 45^\circ + \hat{i} \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i}$  y  $P = (0, 3, 2)$ .

El punto  $P$  escrito como cuaternio puro:  $Q_p = (0, 0, 3, 2)$ .

La rotación es efectuada al aplicar el operador  $L_q(P)$ , donde se obtiene.

$$L_q(P) = QQ_pQ^* = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} \right) (0, 0, 3, 2) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{i} \right) = (0, 0, -2, 3)$$

*De esta forma, el punto al ser rotado con un ángulo  $90^\circ$  en torno al eje  $x$  es el punto  $R = (0, -2, 3)$ .*

### **2.6.1. Perspectivas**

Al realizar rotaciones con cuaterniones pueden adoptarse dos perspectivas distintas. Una considerando fijos los ejes del marco de referencia, y otra considerando fijo el punto a rotar. Al considerar el marco de referencia, el operador  $L_Q$  representa una rotación del punto en sentido antihorario. Al definir un nuevo operador  $J_q$  como  $J_q(\vec{v}) = Q^*(0 + \vec{v})Q$ , donde los cuaternios  $Q, Q^* \in H(\mathbb{R})$  están expresado por la Definición 3.9 y  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ , representa una rotación del punto en sentido horario. Este tipo de perspectiva se denomina rotación con perspectiva central.

De esta forma, se cuenta con el marco conceptual suficiente para poder desarrollar el modelo cinemático directo de robot KUKA KR120-2P® por medio del operador transformación de rotación con cuaternios [9].

---

---

## CAPÍTULO 3

---

### ROBOT KUKA KR120-2P®

En el presente capítulo se define la cinemática del robot que incluye los problemas de interés de esta campo de la robótica, que corresponde a la cinemática directa e inversa. Luego se hace la resolución del modelo cinemático directo del robot KUKA KR120-2P® por medio de los cuaternios, donde se fundamenta con la base conceptual expuesta en los apartados anteriores.

---

#### 3.1. Cinemática del robot

---

La cinemática del robot estudia el movimiento de éste respecto a un marco de referencia. El interés de la cinemática es la descripción analítica del movimiento espacial del robot como una función del tiempo, y en particular las relaciones entre la posición y la orientación del extremo final del robot con los valores que toman sus coordenadas articulares.

Existen dos problemas principales en la resolución de la cinemática de un robot (ver Figura 4.1): el **problema cinemático directo** y **problema cinemático inverso** [4].

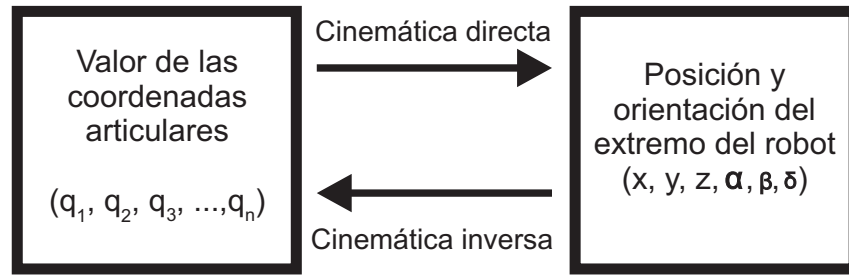


Figura 3.1: Relación entre cinemática directa e inversa.

### 3.1.1. El problema cinemático directo

La resolución del problema cinemático directo permite obtener la posición y orientación que adopta el extremo del robot cuando cada una de las variables que pertenecen a éste adquieren un valor predeterminado (ver Figura 3.1).

La obtención del modelo cinemático directo puede ser estructurado bajo dos enfoques diferentes, los *métodos geométricos* y los *métodos basados en cambio de sistema de referencia*. El método geométrico tiene fundamento en estructuras robóticas sencillas, como en el caso de manipuladores industriales de tres movimientos espaciales independientes entre sí. Mientras que los métodos basados en cambio de sistema de referencias utilizan referentes como las matrices de transformación homogénea y cuaternios, donde éste último es el objeto en estudio de este trabajo.

### 3.1.2. El problema cinemático inverso

El objetivo del problema cinemático inverso consiste en determinar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial (Ver figura 3.1).

Se han desarrollado algunos procedimiento genéricos que se pueden trabajar de forma eficiente computacionalmente, de tal forma, que a partir del conocimiento de la cinemática directa del robot se pueda obtener los valores articulares que posicionan y orientan su extremo.

---

### 3.2. Definición del robot KUKA KR120-2P®

---

El robot KR120-2P® (ver Figura 3.2) es un manipulador industrial con seis grados\* de libertad con articulaciones cinemáticas para tareas de control con trayectorias punto a punto y trayectorias continuas, perteneciente a la casa matriz alemana KUKA-ROBOTICS®.



Figura 3.2: Robot KUKA KR120-2P®.

#### **Trayectorias punto a punto (Trayectorias discretas)**

Cada articulación cambia su posición inicial a la final sin realizar consideraciones alguna sobre el estado de las demás articulaciones. Este proceso lo puede realizar por movimiento eje a eje o movimiento simultáneo de ejes. El movimiento entre los puntos que se establecen no tiene una trayectoria predeterminada.

#### **Trayectorias continuas**

Realiza movimientos siguiendo una serie de puntos preestablecidos de forma continua y

---

\*Los manipuladores son robots industriales que se asemejan al brazo humano. El brazo robótico se compone de articulaciones y eslabones, la cual determinan una característica propia del robot. El número de movimientos espaciales que el manipulador ejecuta en cada articulación de forma independiente entre sí se denomina *grados de libertad*.

controlada en su totalidad por el operario.

### 3.2.1. Especificaciones técnicas

Las especificaciones técnicas del robot KUKA KR120-2P® se resumen en la Tabla 1.

Carga útil.	120 kg	
Carga adicional brazo.	50 kg	
Carga máxima total.	170 kg	
Cantidad de ejes.	6	
Variante.	Foundry	
Posición de montaje.	Suelo, plataforma de montaje	
Repetibilidad.	+0,20 mm, -0,20 mm	
Unidad de control.	KR C2	
Peso (sin unidad de control), aprox..	1465 kg	
Datos de los ejes.	Campo Software.	Velocidad.
Eje 1 (A1).	185°, -185°	102°/s
Eje 2 (A2).	+70° /-120°	96°/s
Eje 3 (A3).	+ 155° /-119°	83°/s
Eje 4 (A4).	350°, -350°	121°/s
Eje 5 (A5).	125°, -125°	124°/s
Eje 6 (A6).	350°, -350°	184°/S

Tabla 1: Especificaciones técnicas robot KUKA KR120-2P®.

### Servicios

El robot KUKA KR120-2P® es ideal para carga y descarga en concatenaciones de prensa, incluso de piezas de gran tamaño gracias a los enormes alcances que posee (ver Figura



3.3). También ofrece servicios como manipulación, embalado y expedición de productos.

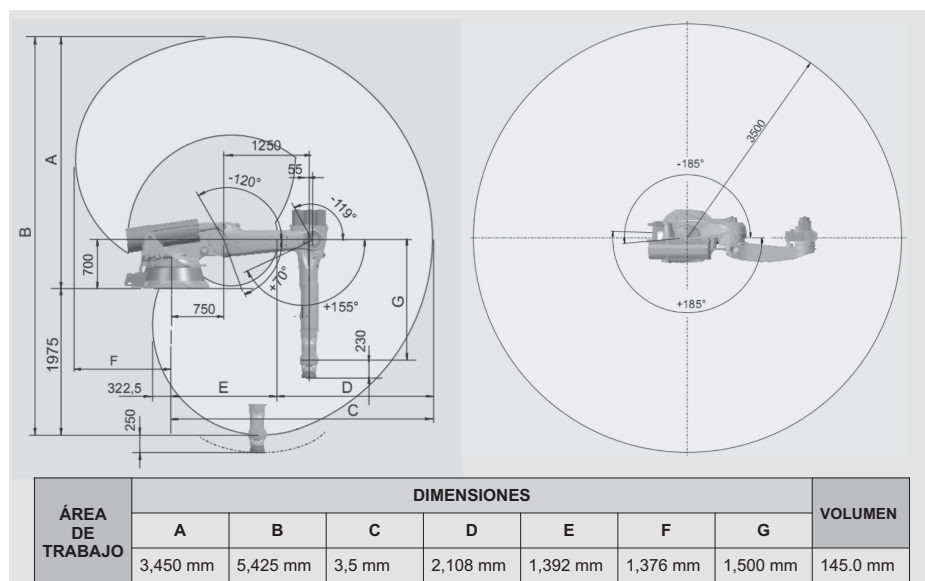


Figura 3.3: Dimensiones del robot KUKA KR120-2P®.

### 3.3. Modelo cinemático directo

El procedimiento que se seguirá para el desarrollo del modelo cinemático directo del robot KUKA KR120-2P® es obtener la expresión que permite conocer las coordenadas de la posición y orientación del sistema de referencia asociado al extremo del robot  $S_0$  con respecto al sistema de referencia asociado a la base  $S_6$  (ver Figura 3.4). Ésta relación será función de las longitudes  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$  y  $l_7$  ( ver Figura 3.3) de los elementos del robot así como los valores angulares de los ejes  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$  y  $\theta_6$ .

Para obtener la relación entre  $S_0$  y  $S_6$  se irá convirtiendo sucesivamente  $S_6$  en  $S_5, S_5$  en  $S_4, S_4$  en  $S_3, S_3$  en  $S_2, S_2$  en  $S_1, S_1$  en  $S_0$ , según la siguiente serie de transformaciones:

1. ( $S_6 \rightarrow S_5$ ). Desplazamiento de  $S_6$  una distancia  $l_7$  a lo largo del eje  $z_5$  hasta  $S_5$  y rotación con ángulo  $\theta_6$  alrededor del eje  $x_5$ .
2. ( $S_5 \rightarrow S_4$ ). Desplazamiento de  $S_5$  una distancia  $l_6$  a lo largo del eje  $x_4$  hasta  $S_4$  y rotación con ángulo  $\theta_5$  alrededor del eje  $y_4$ .

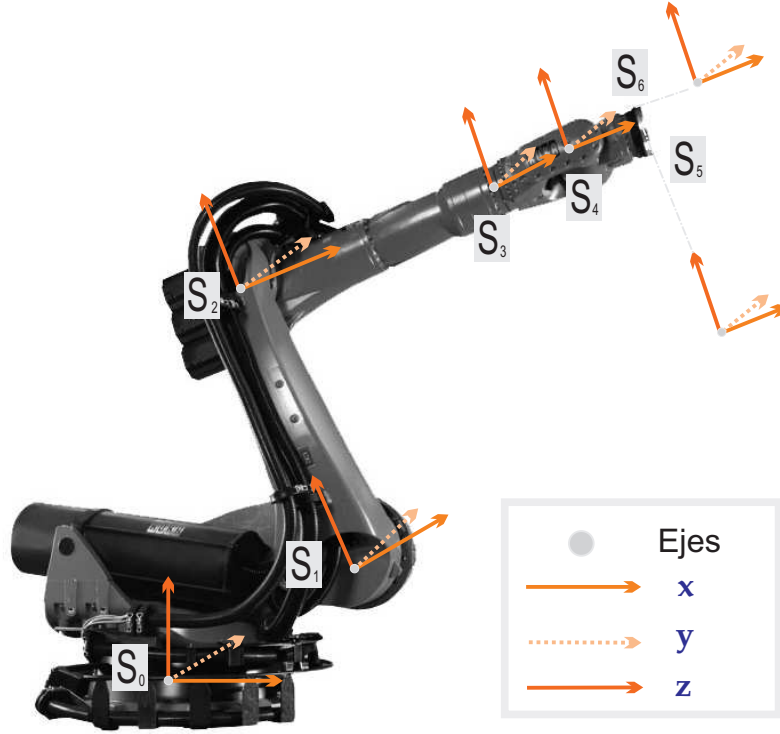


Figura 3.4: Sistema de referencia del robot KUKA KR120-2P®.

3.  $(S_4 \rightarrow S_3)$ . Desplazamiento de  $S_4$  una distancia  $l_5$  a lo largo del eje  $x_3$  hasta  $S_3$  y rotación con ángulo  $\theta_4$  alrededor del eje  $x_3$ .
4.  $(S_3 \rightarrow S_2)$ . Desplazamiento de  $S_3$  una distancia  $l_4$  a lo largo del eje  $x_2$  hasta  $S_2$  y rotación con ángulo  $\theta_3$  alrededor del eje  $y_2$ .
5.  $(S_2 \rightarrow S_1)$ . Desplazamiento de  $S_2$  una distancia  $l_3$  a lo largo del eje  $z_1$  hasta  $S_1$ , rotación con ángulo  $\theta_2$  alrededor del eje  $y_1$ .
6.  $(S_1 \rightarrow S_0)$ . Desplazamiento de  $S_1$  una distancia  $l_2$  a lo largo del eje  $z'_0$ , que es el punto colineal con  $S_1$ , desplazamiento  $l_1$  a lo largo del eje  $x_1$  hasta  $S_0$  y rotación con ángulo  $\theta_1$  alrededor del eje  $z_0$ .

Los desplazamientos quedaran definidos de la siguiente forma  $\vec{D}_1 = (l_1, 0, 0)$ ,  $\vec{D}_2 = (0, 0, l_2)$ ,  $\vec{D}_3 = (0, 0, l_3)$ ,  $\vec{D}_4 = (l_4, 0, 0)$ ,  $\vec{D}_5 = (l_5, 0, 0)$ ,  $\vec{D}_6 = (l_6, 0, 0)$  y  $\vec{D}_7 = (0, 0, l_7)$ .

Lo anterior se debe expresar como cuaternios puros para poder efectuar el desarrollo algebraico:  $T_1 = (0, l_1, 0, 0)$ ,  $T_2 = (0, 0, 0, l_2)$ ,  $T_3 = (0, 0, 0, l_3)$ ,  $T_4 = (0, l_4, 0, 0)$ ,  $T_5 = (0, l_5, 0, 0)$ ,  $T_6 = (0, l_6, 0, 0)$  y  $T_7 = (0, 0, 0, l_7)$ .

La representación de los giros estarán dados por los cuaternios  $Q_1 = (\ddot{C}_1, 0, 0, \ddot{S}_1)$ ,  $Q_2 = (\ddot{C}_2, 0, \ddot{S}_2, 0)$ ,  $Q_3 = (\ddot{C}_3, 0, \ddot{S}_3, 0)$ ,  $Q_4 = (\ddot{C}_4, \ddot{S}_4, 0, 0)$ ,  $Q_5 = (\ddot{C}_5, 0, \ddot{S}_5, 0)$  y  $Q_6 = (\ddot{C}_6, \ddot{S}_6, 0, 0)$ , donde  $\ddot{C}_i = \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right)$  y  $\ddot{S}_i = \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right)$ .

**Observación:**

Se deben tener presente las identidades trigonométricas básicas durante el desarrollo del modelo:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (3.1)$$

$$\cos \alpha \pm \beta = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad (3.2)$$

La representación para  $\cos \theta_i$  y  $\sin \theta_i$  serán respectivamente  $C_i$ ,  $S_i$ , es decir,  $C_i = \cos \theta_i$ ,  $S_i = \sin \theta_i$ .

**Ciclo 1. Paso del sistema  $S_6$  al sistema  $S_5$**

*Desplazamiento de  $S_6$  una distancia  $l_7$  a lo largo del eje  $z_5$  hasta  $S_5$  y rotación con ángulo  $\theta_6$  alrededor del eje  $x_5$ .*

Para iniciar el proceso, partimos del vector  $\vec{v}_0 = (0, 0, 0)$  asociado al sistema  $S_6$ , el cual expresado como cuaternio puro es  $T_0 = (0, 0, 0, 0)$ . De esta forma se tiene que  $S_6$

$$T_0 + T_7 = (0, 0, 0, l_7) = A_1,$$

$$Q_6 A_1 Q_6^* = (\ddot{C}_6, \ddot{S}_6, 0, 0)(0, 0, 0, l_7)(\ddot{C}_6, -\ddot{S}_6, 0, 0)$$

**Nota:** El producto de la terna de cuaternios, se realizará primero, la multiplicación de los dos primeros (contando de izquierda a derecha), dicho producto será identificado por ►. Posteriormente, del resultado anterior, se efectúa la última operación con el cuaternio restante, donde estará representado el procedimiento por ►.

$$\blacktriangleright \quad Q_6 A_1 = (\ddot{C}_6, \ddot{S}_6, 0, 0)(0, 0, 0, l_7) = (0, 0, -l_7 \ddot{S}_6, l_7 \ddot{C}_6) \text{ y}$$

$$\blacktriangleleft \quad (0, 0, -l_7 \ddot{S}_6, l_7 \ddot{C}_6) Q_6^* = (0, 0, -l_7 \ddot{S}_6, l_7 \ddot{C}_6)(\ddot{C}_6, -\ddot{S}_6, 0, 0) = (0, 0, -l_7 S_6, l_7 C_6) = A_2.$$

**Ciclo 2. Paso del sistema  $S_5$  al sistema  $(S_4)$**

*Desplazamiento de  $S_5$  una distancia  $l_6$  a lo largo del eje  $x_4$  hasta  $S_4$  y rotación con ángulo  $\theta_5$  alrededor del eje  $y_4$ .*

$$A_2 + T_6 = (0, l_6, -l_7 S_6, l_7 C_6) = A_3$$

$$Q_5 A_3 Q_5^* = (\ddot{C}_5, 0, \ddot{S}_5, 0)(0, l_6, -l_7 S_6, l_7 C_6)(\ddot{C}_5, 0, -\ddot{S}_5, 0),$$

$$\blacktriangleright (\ddot{C}_5, 0, \ddot{S}_5, 0)(0, l_6, -l_7 S_6, l_7 C_6) = (l_7 S_6 \ddot{S}_5, l_7 C_6 \ddot{S}_5 + l_6 \ddot{C}_5, -l_7 S_6 \ddot{C}_5, l_7 C_6 \ddot{C}_5 - l_6 \ddot{S}_5) \text{ y}$$

$$\blacktriangleleft (l_7 S_6 \ddot{S}_5, l_7 C_6 \ddot{S}_5 + l_6 \ddot{C}_5, -l_7 S_6 \ddot{C}_5, l_7 C_6 \ddot{C}_5 - l_6 \ddot{S}_5)(\ddot{C}_5, 0, -\ddot{S}_5, 0) = (0, l_7 C_6 S_5 + l_6 C_5, -l_7 S_6, l_7 C_6 C_5 - l_6 S_5) = A_4.$$

**Ciclo 3. Paso del sistema  $S_4$  al sistema  $S_3$**

*Desplazamiento de  $S_4$  una distancia  $l_5$  a lo largo del eje  $x_3$  hasta  $S_3$  y rotación con ángulo  $\theta_4$  alrededor del eje  $x_3$ .*

$$A_4 + T_5 = (0, l_7 C_6 S_5 + l_6 C_5 + l_5, -l_7 S_6, l_7 C_6 C_5 - l_6 S_5) = A_5,$$

$$Q_4 A_5 Q_4^* = (\ddot{C}_4, \ddot{S}_4, 0, 0) A_5 (\ddot{C}_4, -\ddot{S}_4, 0, 0),$$

$$\blacktriangleright (\ddot{C}_4, \ddot{S}_4, 0, 0) A_5 = (\ddot{C}_4, \ddot{S}_4, 0, 0)(0, l_7 C_6 S_5 + l_6 C_5 + l_5, -l_7 S_6, l_7 C_6 C_5 - l_6 S_5) =$$

$$(-[l_7 C_6 S_5 \ddot{S}_4 + l_6 C_5 \ddot{S}_4 + l_5 \ddot{S}_4], l_7 C_6 S_5 \ddot{C}_4 + l_6 C_5 \ddot{C}_4 + l_5 \ddot{C}_4, -l_7 [C_6 C_5 \ddot{S}_4 + S_6 \ddot{C}_4] + l_6 S_5 \ddot{S}_4,$$

$$l_7 [C_6 C_5 \ddot{C}_4 - S_6 \ddot{S}_4] - l_6 S_5 \ddot{C}_4) \text{ y}$$

$$\blacktriangleleft (-[l_7 C_6 S_5 \ddot{S}_4 + l_6 C_5 \ddot{S}_4 + l_5 \ddot{S}_4], l_7 C_6 S_5 \ddot{C}_4 + l_6 C_5 \ddot{C}_4 + l_5 \ddot{C}_4, -l_7 [C_6 C_5 \ddot{S}_4 + S_6 \ddot{C}_4] + l_6 S_5 \ddot{S}_4,$$

$$l_7 [C_6 C_5 \ddot{C}_4 - S_6 \ddot{S}_4] - l_6 S_5 \ddot{C}_4)(\ddot{C}_4, -\ddot{S}_4, 0, 0) = (0, l_7 C_6 S_5 +$$

$$l_6 C_5 + l_5, l_7 [-C_6 C_5 S_4 - S_6 C_4] + l_6 S_5 S_4, l_7 [C_6 C_5 C_4 - S_6 S_4] - l_6 S_5 C_4) = A_6 .$$

#### Ciclo 4. Paso del sistema $S_3$ al sistema $S_2$

*Desplazamiento de  $S_3$  una distancia  $l_4$  a lo largo del eje  $x_2$  hasta  $S_2$  y rotación con ángulo  $\theta_3$  alrededor del eje  $y_2$ .*

$$A_6 + T_4 =$$

$$(0, l_7 C_6 S_5 + l_6 C_5 + l_5 + l_4, l_7 [-C_6 C_5 S_4 - S_6 C_4] + l_6 S_5 S_4, l_7 [C_6 C_5 C_4 - S_6 S_4] - l_6 S_5 C_4) = A_7,$$

$$Q_3 A_7 Q_3^* = (\ddot{C}_3, 0, \ddot{S}_3, 0) A_7 (\ddot{C}_3, 0, -\ddot{S}_3, 0),$$

$$\blacktriangleright Q_3 A_7 = (\ddot{C}_3, 0, \ddot{S}_3, 0) A_7 =$$

$$\begin{aligned} & (-[l_7 [-C_6 C_5 S_4 \ddot{S}_3 - S_6 C_4 \ddot{S}_3] + l_6 S_5 S_4 \ddot{S}_3], l_7 [C_6 C_5 C_4 \ddot{S}_3 + C_6 S_5 \ddot{C}_3 - S_6 S_4 \ddot{S}_3] \\ & + l_6 [C_5 \ddot{C}_3 - S_5 C_4 \ddot{S}_3] + l_5 \ddot{C}_3 + l_4 \ddot{C}_3, l_7 [-C_6 C_5 S_4 \ddot{C}_3 - S_6 C_4 \ddot{C}_3] + l_6 S_5 S_4 \ddot{C}_3, \\ & l_7 [C_6 C_5 C_4 \ddot{C}_3 - C_6 S_5 \ddot{S}_3 - S_6 S_4 \ddot{C}_3] + l_6 [-S_5 C_4 \ddot{C}_3 - C_5 \ddot{S}_3] - l_5 \ddot{S}_3 - l_4 \ddot{S}_3) \text{ y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \blacktriangleleft (-[l_7 [-C_6 C_5 S_4 \ddot{S}_3 - S_6 C_4 \ddot{S}_3] + l_6 S_5 S_4 \ddot{S}_3], l_7 [C_6 C_5 C_4 \ddot{S}_3 + C_6 S_5 \ddot{C}_3 - S_6 S_4 \ddot{S}_3] \\ & + l_6 [C_5 \ddot{C}_3 - S_5 C_4 \ddot{S}_3] + l_5 \ddot{C}_3 + l_4 \ddot{C}_3, l_7 [-C_6 C_5 S_4 \ddot{C}_3 - S_6 C_4 \ddot{C}_3] + l_6 S_5 S_4 \ddot{C}_3, \\ & l_7 [C_6 C_5 C_4 \ddot{C}_3 - C_6 S_5 \ddot{S}_3 - S_6 S_4 \ddot{C}_3] + l_6 [-S_5 C_4 \ddot{C}_3 - C_5 \ddot{S}_3] - l_5 \ddot{S}_3 - l_4 \ddot{S}_3) (\ddot{C}_3, 0, -\ddot{S}_3, 0) = \\ & (0, l_7 [C_6 C_5 C_4 S_3 + C_6 S_5 C_3 - S_6 S_4 S_3] + l_6 [C_5 C_3 - S_5 C_4 S_3] + l_5 C_3 + l_4 C_3, l_7 [-C_6 C_5 S_4 - \\ & S_6 C_4] + l_6 S_5 S_4, l_7 [C_6 C_5 C_4 C_3 - C_6 S_5 S_3 - S_6 S_4 C_3] + l_6 [-C_5 S_3 - S_5 C_4 C_3] - l_5 S_3 - \\ & l_4 S_3) = A_8. \end{aligned}$$

#### Ciclo 5. Paso del sistema $S_2$ al sistema $S_1$

*Desplazamiento de  $S_2$  una distancia  $l_3$  a lo largo del eje  $z_1$  hasta  $S_1$ , rotación con ángulo  $\theta_2$  alrededor del eje  $y_1$ .*

$$A_8 + T_3 =$$

$$\begin{aligned} & (0, l_7 [C_6 C_5 C_4 S_3 + C_6 S_5 C_3 - S_6 S_4 S_3] + l_6 [C_5 C_3 - S_5 C_4 S_3] + l_5 C_3 + l_4 C_3, l_7 [-C_6 C_5 S_4 - \\ & S_6 C_4] + l_6 S_5 S_4, l_7 [C_6 C_5 C_4 C_3 - C_6 S_5 S_3 - S_6 S_4 C_3] + l_6 [-C_5 S_3 - S_5 C_4 C_3] - l_5 S_3 - \\ & l_4 S_3 + l_3) = A_9, \end{aligned}$$

$$Q_2 A_9 Q_2^* = (\ddot{C}_2, 0, \ddot{S}_2, 0) A_9 (\ddot{C}_2, 0, -\ddot{S}_2, 0),$$

$$\begin{aligned}
& \blacktriangleright Q_2 A_9 = (\ddot{C}_2, 0, \ddot{S}_2, 0) A_9 = \\
& (-[l_7[-C_6 C_5 S_4 \ddot{S}_2 - S_6 C_4 \ddot{S}_2] + l_6 S_5 S_4 \ddot{S}_2], \\
& l_7[C_6 C_5 C_4 C_3 \ddot{S}_2 - C_6 S_5 S_3 \ddot{S}_2 - S_6 S_4 C_3 \ddot{S}_2] + l_6[-C_5 S_3 \ddot{S}_2 - S_5 C_4 C_3 \ddot{S}_2] \\
& -l_5 S_3 \ddot{S}_2 - l_4 S_3 \ddot{S}_2 + l_3 \ddot{S}_2 + l_7[C_6 C_5 C_4 S_3 \ddot{C}_2 + C_6 S_5 C_3 \ddot{C}_2 - S_6 S_4 S_3 \ddot{C}_2] + l_6[C_5 C_3 \ddot{C}_2 \\
& -S_5 C_4 S_3 \ddot{C}_2] + l_5 C_3 \ddot{C}_2 + l_4 C_3 \ddot{C}_2, l_7[-C_6 C_5 S_4 \ddot{C}_2 - S_6 C_4 \ddot{C}_2] + l_6 S_5 S_4 \ddot{C}_2 \\
& l_7[-C_6 C_5 C_4 S_3 \ddot{S}_2 - C_6 S_5 C_3 \ddot{S}_2 + S_6 S_4 S_3 \ddot{S}_2] + l_6[-C_5 C_3 \ddot{S}_2 + S_5 C_4 S_3 \ddot{S}_2] - l_5 C_3 \ddot{S}_2 - \\
& l_4 C_3 \ddot{S}_2 + l_7[C_6 C_5 C_4 C_3 \ddot{C}_2 - C_6 S_5 S_3 \ddot{C}_2 - S_6 S_4 C_3 \ddot{C}_2] + l_6[-C_5 S_3 \ddot{C}_2 - S_5 C_4 C_3 \ddot{C}_2] - \\
& l_5 S_3 \ddot{C}_2 - l_4 S_3 \ddot{C}_2 + l_3 \ddot{C}_2) y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \blacktriangleleft (-[l_7[-C_6 C_5 S_4 \ddot{S}_2 - S_6 C_4 \ddot{S}_2] + l_6 S_5 S_4 \ddot{S}_2], \\
& l_7[C_6 C_5 C_4 C_3 \ddot{S}_2 - C_6 S_5 S_3 \ddot{S}_2 - S_6 S_4 C_3 \ddot{S}_2] + l_6[-C_5 S_3 \ddot{S}_2 - S_5 C_4 C_3 \ddot{S}_2] \\
& -l_5 S_3 \ddot{S}_2 - l_4 S_3 \ddot{S}_2 + l_3 \ddot{S}_2 + l_7[C_6 C_5 C_4 S_3 \ddot{C}_2 + C_6 S_5 C_3 \ddot{C}_2 - S_6 S_4 S_3 \ddot{C}_2] + l_6[C_5 C_3 \ddot{C}_2 \\
& -S_5 C_4 S_3 \ddot{C}_2] + l_5 C_3 \ddot{C}_2 + l_4 C_3 \ddot{C}_2, l_7[-C_6 C_5 S_4 \ddot{C}_2 - S_6 C_4 \ddot{C}_2] + l_6 S_5 S_4 \ddot{C}_2 \\
& l_7[-C_6 C_5 C_4 S_3 \ddot{S}_2 - C_6 S_5 C_3 \ddot{S}_2 + S_6 S_4 S_3 \ddot{S}_2] + l_6[-C_5 C_3 \ddot{S}_2 + S_5 C_4 S_3 \ddot{S}_2] - l_5 C_3 \ddot{S}_2 - \\
& l_4 C_3 \ddot{S}_2 + l_7[C_6 C_5 C_4 C_3 \ddot{C}_2 - C_6 S_5 S_3 \ddot{C}_2 - S_6 S_4 C_3 \ddot{C}_2] + l_6[-C_5 S_3 \ddot{C}_2 - S_5 C_4 C_3 \ddot{C}_2] - \\
& l_5 S_3 \ddot{C}_2 - l_4 S_3 \ddot{C}_2 + l_3 \ddot{C}_2)(\ddot{C}_2, 0, -\ddot{S}_2, 0) = \\
& (0, l_7[C_6 C_5 C_4 S_3 C_2 + C_6 S_5 C_3 C_2 - S_6 S_4 S_3 C_2] + l_6[C_5 C_3 C_2 - S_5 C_4 S_3 C_2] + l_5 C_3 C_2 + \\
& l_4 C_3 C_2 + l_7[C_6 C_5 C_4 C_3 S_2 - C_6 S_5 S_3 S_2 - S_6 S_4 C_3 S_2] + l_6[-C_5 S_3 S_2 - S_5 C_4 C_3 S_2] - \\
& l_5 S_3 S_2 - l_4 S_3 S_2 + l_3 S_2, l_7[-C_6 C_5 S_4 - S_6 C_4] + l_6 S_5 S_4, l_7[C_6 C_5 C_4 C_3 C_2 - C_6 S_5 S_3 C_2 - \\
& S_6 S_4 C_3 C_2] + l_6[-C_5 S_3 C_2 - S_5 C_4 C_3 C_2] - l_5 S_3 C_2 - l_4 S_3 C_2 + l_3 C_2 + l_7[-C_6 C_5 C_4 S_3 S_2 - \\
& C_6 S_5 C_3 S_2 + S_6 S_4 S_3 S_2] + l_6[-C_5 C_3 S_2 + S_5 C_4 S_3 S_2] - l_5 C_3 S_2 - l_4 C_3 S_2) = A_{10}.
\end{aligned}$$

**Ciclo 6. Paso del sistema  $S_1$  al sistema  $S_0$**

*Desplazamiento de  $S_1$  una distancia  $l_2$  a lo largo del eje  $z'_0$ , desplazamiento  $l_1$  a lo largo del eje  $x_1$  hasta  $S_0$  y rotación con ángulo  $\theta_1$  alrededor del eje  $z_0$ .*

$$A_{10} + T_2 + T_1 = (0, l_7[C_6C_5C_4S_3C_2 + C_6S_5C_3C_2 - S_6S_4S_3C_2] + l_6[C_5C_3C_2 - S_5C_4S_3C_2] + l_5C_3C_2 + l_4C_3C_2 + l_7[C_6C_5C_4C_3S_2 - C_6S_5S_3S_2 - S_6S_4C_3S_2] + l_6[-C_5S_3S_2 - S_5C_4C_3S_2] - l_5S_3S_2 - l_4S_3S_2 + l_3S_2 + l_1, l_7[-C_6C_5S_4 - S_6C_4] + l_6S_5S_4, l_7[C_6C_5C_4C_3C_2 - C_6S_5S_3C_2 - S_6S_4C_3C_2] + l_6[-C_5S_3C_2 - S_5C_4C_3C_2] - l_5S_3C_2 - l_4S_3C_2 + l_3C_2 + l_7[-C_6C_5C_4S_3S_2 - C_6S_5C_3S_2 + S_6S_4S_3S_2] + l_6[-C_5C_3S_2 + S_5C_4S_3S_2] - l_5C_3S_2 - l_4C_3S_2 + l_2) = A_{11}.$$

$$\text{Sean } \Psi = l_7[C_6C_5C_4S_3C_2 + C_6S_5C_3C_2 - S_6S_4S_3C_2] + l_6[C_5C_3C_2 - S_5C_4S_3C_2] + l_5C_3C_2 + l_4C_3C_2 + l_7[C_6C_5C_4C_3S_2 - C_6S_5S_3S_2 - S_6S_4C_3S_2] + l_6[-C_5S_3S_2 - S_5C_4C_3S_2] - l_5S_3S_2 - l_4S_3S_2 + l_3S_2 + l_1.$$

$$\text{Sea } \Omega = l_7[-C_6C_5S_4 - S_6C_4] + l_6S_5S_4.$$

$$\text{Sea } \Phi = l_7[C_6C_5C_4C_3C_2 - C_6S_5S_3C_2 - S_6S_4C_3C_2] + l_6[-C_5S_3C_2 - S_5C_4C_3C_2] - l_5S_3C_2 - l_4S_3C_2 + l_3C_2 + l_7[-C_6C_5C_4S_3S_2 - C_6S_5C_3S_2 + S_6S_4S_3S_2] + l_6[-C_5C_3S_2 + S_5C_4S_3S_2] - l_5C_3S_2 - l_4C_3S_2 + l_2.$$

$$Q_1 A_{11} Q_1^* = (\ddot{C}_1, 0, 0, \ddot{S}_1)(0, \Psi, \Omega, \Phi)(\ddot{C}_1, 0, 0, -\ddot{S}_1),$$

$$\blacktriangleright Q_1 A_{11} = (\ddot{C}_1, 0, 0, \ddot{S}_1)(0, \Psi, \Omega, \Phi) = (-\ddot{S}_1\Phi, -\ddot{S}_1\Omega + \ddot{C}_1\Psi, \ddot{S}_1\Psi + \ddot{C}_1\Omega, \ddot{C}_1\Phi) \text{ y}$$

$$\blacktriangleleft (-\ddot{S}_1\Phi, -\ddot{S}_1\Omega + \ddot{C}_1\Psi, \ddot{S}_1\Psi + \ddot{C}_1\Omega, \ddot{C}_1\Phi)(\ddot{C}_1, 0, 0, -\ddot{S}_1) = (0, C_1\Psi - S_1\Omega, C_1\Omega + S_1\Psi, \Phi) = A_{12}.$$

La parte vectorial del cuaternio puro  $A_{12}$  indica que el extremo del robot referido al sistema de su base  $S_0$ , está posicionado en

$$\begin{aligned}
x &= C_1\Psi - S_1\Omega = \\
&l_7[C_6C_5C_4S_3C_2C_1 + C_6S_5C_3C_2C_1 - S_6S_4S_3C_2C_1 + C_6C_5S_4S_1 + S_6C_4S_1 + \\
&C_6C_5C_4C_3S_2C_1 - C_6S_5S_3S_2C_1 - S_6S_4C_3S_2C_1] + l_6[C_5C_3C_2C_1 - S_5C_4S_3C_2C_1 - \\
&S_5S_4S_1 - C_5S_3S_2C_1 - S_5C_4C_3S_2C_1] + l_5[C_3C_2C_1 - S_3S_2C_1] + l_4[C_3C_2C_1 - S_3S_2C_1] + \\
&l_3S_2C_1 + l_1C_1, \tag{3.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= C_1\Omega + S_1\Psi = \\
&l_7[C_6C_5C_4S_3C_2S_1 + C_6S_5C_3C_2S_1 - S_6S_4S_3C_2S_1 - C_6C_5S_4C_1 - S_6C_4C_1 + \\
&C_6C_5C_4C_3S_2S_1 - C_6S_5S_3S_2S_1 - S_6S_4C_3S_2S_1] + l_6[C_5C_3C_2S_1 - S_5C_4S_3C_2S_1 \\
&+ S_5S_4C_1 - C_5S_3S_2S_1 - S_5C_4C_3S_2S_1] + l_5[C_3C_2S_1 - S_3S_2S_1] + l_4[C_3C_2S_1 - S_3S_2S_1] + \\
&l_3S_2S_1 + l_1S_1 \text{ y} \tag{3.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= \Phi = \\
&l_7[C_6C_5C_4C_3C_2 - C_6S_5S_3C_2 - S_6S_4C_3C_2 - C_6C_5C_4S_3C_2 - C_6S_5C_3C_2 + S_6S_4S_3C_2] + \\
&l_6[-C_5S_3C_2 - S_5C_4C_3C_2 - C_5C_3S_2 + S_5C_4S_3S_2] + l_5[-S_3C_2 - C_3S_2] + \\
&l_4[-S_3C_2 - C_3S_2] + l_3C_2 + l_2. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Por lo cual, las expresiones (3.3), (3.4) y (3.5) permiten conocer la localización del extremo del robot referidas al sistema de la base en función de los valores angulares de los ejes  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)$  y las dimensiones del robot, correspondientes, por tanto, a la solución del problema cinemático directo.



---

---

## CAPÍTULO 4

---

# MODELAMIENTO COMPUTACIONAL

El potencial que ofrece los cuaternios frente al modelado de robots industriales está dado por su eficiencia computacional[2] en comparación con otros métodos, como en el caso de las matrices de transformación homogénea. El modelo que se desarrolló en el capítulo anterior, ahora se validará simulándolo en un lenguaje de programación de alto nivel, como es Matlab®. Para lo anterior se presentan dos códigos elaborados: el primero para el desarrollo de la simulación y el segundo para la interacción inmediata del usuario por medio de una interfaz gráfica.

---

### 4.1. Matlab®

---

Matlab® es un lenguaje de alto nivel y un entorno interactivo para el desarrollo de algoritmos, visualización de datos, análisis de datos y cálculo numérico. Es este el entorno en el cuál se desarrolla y simula el modelo cinemático directo del robot KUKA KR120-2P®.

La versión que se utilizó para la ejecución operacional del modelo es Matlab R2009a® 7.8.0.347 32-bit(win32).

### 4.1.1. Características principales

A continuación se enumeran las características principales de este software

- Lenguaje de alto nivel.
- Entorno para la gestión de códigos, archivos y datos.
- Herramienta interactiva para la exploración iterativa, diseño y resolución de problemas.
- Funciones matemáticas para álgebra lineal, estadísticas, análisis de Fourier, filtrado, optimización e integración numérica.
- Graficador de funciones en dos y tres dimensiones.
- Herramientas para la construcción de interfaces gráficas para el usuario.
- Funciones de Matlab® para la integración de algoritmos basados en aplicaciones externas y otros lenguajes, tales como C, C++, Fortran, Java, COM y Microsoft Excel.

---

## 4.2. Caja de herramientas "*Robotics*" para Matlab®

---

Una caja de herramientas (*toolbox*) en Matlab®, son archivos de texto con extensión ".M", llamados archivos *M-file*, que provee funcionalidades que no se encuentran por defecto en este. Existe una caja de herramientas especializado para robótica llamado *Robotics Toolbox for Matlab®* de Peter I. Corke\*, que incluye métodos de representación cinemática y dinámica para manipuladores industriales.

Se utilizó este toolbox dado su facilidad de manejo y completo campo conceptual que enmarca los cuaternios. Los comandos utilizados de esta caja de herramientas son:

✱ "*quaternion*", definición de cuaternios.

✱ "+", suma de cuaternios.

---

\*Se puede obtener de forma libre la caja de herramientas en la dirección [www.petercorke.com](http://www.petercorke.com)

✱ "\*", producto de cuaternios.

✱ "inv", conjugado de cuaternios.

✱ "Q.v", parte vectorial del cuaternio.

A continuación se muestra cada comando por medio de un ejemplo.

**Ejemplo 4.1** (*quaternion*, definición de cuaternios). Desde la ventana de comando de Matlab®, para definir el cuaternio;  $Q_1 = (5, 8, 40, 20)$ :

```
>> Q1=quaternion([5 8 4020])
```

```
Q1 =
```

```
5 <8, 40, 20>
```

**Ejemplo 4.2** (+, suma de cuaternios). Desde la ventana de comando de Matlab®, suma de los cuaternios  $Q_1 = (5, 8, 40, 20)$  y  $Q_2 = (1, 2, 3, 4)$ :

```
>> Q1=quaternion([5 8 40 20])
```

```
Q1 =
```

```
5 <8, 40, 20>
```

```
>> Q2=quaternion([1 2 3 4])
```

```
Q2 =
```

```
1 <2, 3, 4>
```

```
>> Q3=Q1+Q2
```

```
Q3 =
```

```
6 <10, 43, 24>
```

**Ejemplo 4.3** (\*, producto de cuaternios). Desde la ventana de comando de Matlab®, producto de los cuaternios  $Q_1 = (5, 8, 40, 20)$  y  $Q_2 = (1, 2, 3, 4)$ :

```
>> Q4=Q1*Q2
```

```
Q4 =
```

```
-211 <118, 63, -16>
```

⊗ inv. Conjugado de cuaternios:

**Ejemplo 4.4.** Desde la ventana de comando de Matlab®, conjugado del cuaternio  $Q_1 = (5, 8, 40, 20)$

```
>> Q5=inv(Q1)
Q5 =
5 <-8, -40, -20>
```

**Ejemplo 4.5** ( $Q.v$ , parte vectorial del cuaternio). Desde la ventana de comando de Matlab®, parte vectorial del cuaternio  $Q_1 = (5, 8, 40, 20)$

```
>> v1=q1.v
v1 =
8 40 20
```

---

## 4.3. Código simulación

---

En esta sección se presenta una explicación completa del código hecho en Matlab® del modelo cinemático directo del robot KUKA KR120-2P®. En primera instancia se establecen las condiciones iniciales para la posición inicial del robot.

**Observación:** El texto que aparezca en cursiva representa el código extraído del archivo M-file de Matlab® donde se escribió el código. Los comentarios que no pertenecen al código en Matlab® estarán precedidos por  $\ast$ .

$\ast$  Es necesario establecer los límites donde se presentará los movimientos del robot, para esto se definen los rangos por medio del comando *axis* para luego graficar los vectores unitarios correspondientes a cada eje.

```
%% POSICIÓN INICIAL clear
all
clc
% Vectores unitarios
i = [1, 0, 0]; j = [0, 1, 0]; k = [0, 0, 1]; n = [0, 0, 0]; % RANGOS EJES
% AXIS([XMIN XMAX YMIN YMAX ZMIN ZMAX])
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(i, n, n, 'm-') hold on
```

```
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(n, j, n, 'g-') hold on
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(n, n, k, 'B') hold on
```

✱ Se establecen los valores angulares en cero.

```
teta1 = 0; teta2 = 0; teta3 = 0; teta4 = 0; teta5 = 0; teta6 = 0;
```

✱ Se hacen las representaciones de las rotaciones.

```
Q1=quaternion([cos(teta1/2) 0 0 sin(teta1/2)]); CQ1 = inv(Q1);
Q2=quaternion([cos(teta2/2) 0 sin(teta2/2) 0]); CQ2 = inv(Q2);
Q3=quaternion([cos(teta3/2) 0 sin(teta3/2) 0]); CQ3 = inv(Q3);
Q4=quaternion([cos(teta4/2) sin(teta4/2) 0 0]); CQ4 = inv(Q4);
Q5=quaternion([cos(teta5/2) 0 sin(teta5/2) 0]); CQ5 = inv(Q54);
Q6=quaternion([cos(teta6/2) sin(teta6/2) 0 0]); CQ6 = inv(Q6);
```

✱ Se hacen las representaciones de las traslaciones.

```
T0=quaternion([0 0 0 0]); T1=quaternion([0 750 0 0]);
T2=quaternion([0 0 0 700]); T3=quaternion([0 0 0 1250]);
T4=quaternion([0 1000 0 0]); T5=quaternion([0 500 0 0]);
T6=quaternion([0 230 0 0]); T7=quaternion([0 0 0 200]);
```

✱ A continuación se realiza el modelo desarrollado en el capítulo anterior.

```
%% CICLO 1. PASO DEL SISTEMA S6 AL SISTEMA S5
A0 = T7 + T0;
A1 = Q6 * A0 * CQ6;
%% CICLO 2. PASO DEL SISTEMA S5 AL SISTEMA S4
A2 = A1 + T6;
A3 = Q5 * A2 * CQ5;
```

*%% CICLO 3. PASO DEL SISTEMA S<sub>4</sub> AL SISTEMA S<sub>3</sub>*

$$A4 = A3 + T5;$$

$$A5 = Q4 * A4 * CQ4;$$

*%% CICLO 4. PASO DEL SISTEMA S<sub>3</sub> AL SISTEMA S<sub>2</sub>*

$$A6 = A5 + T4;$$

$$A7 = Q3 * A6 * CQ3;$$

*%% CICLO 5. PASO DEL SISTEMA S<sub>2</sub> AL SISTEMA S<sub>1</sub>*

$$A8 = A7 + T3;$$

$$A9 = Q2 * A8 * CQ2;$$

*%% CICLO 6. PASO DEL SISTEMA S<sub>1</sub> AL SISTEMA S<sub>0</sub>*

$$A10 = A9 + T2 + T1;$$

$$A11 = Q1 * A10 * CQ1;$$

\* Ahora se definen las posiciones de cada sistema referido a la base del robot  $S_0$  (ver Figura 3.3).

*%%ESLABÓN 1 DEL MODELO CINEMÁTICO*

$$B1 = T2 + T1;$$

$$B2 = Q1 * B1 * CQ1;$$

*%%ESLABÓN 2 DEL MODELO CINEMÁTICO*

$$C1 = Q2 * T3 * CQ2;$$

$$C2 = C1 + T2 + T1;$$

$$C3 = Q1 * C2 * CQ1;$$

*%%ESLABÓN 3 DEL MODELO CINEMÁTICO*

$$D1 = Q3 * T4 * CQ3;$$

$$D2 = D1 + T3;$$

$$D3 = Q2 * D2 * CQ2;$$

$$D4 = D3 + T2 + T1;$$

$$D5 = Q1 * D4 * CQ1;$$

*%%ESLABÓN 4 DEL MODELO CINEMÁTICO*

$$E1 = Q4 * T5 * CQ4;$$

$$E2 = E1 + T4;$$

$$E3 = Q3 * E2 * CQ3;$$

```

E4 = E3 + T3;
E5 = Q2 * E4 * CQ2;
E6 = E5 + T2 + T1;
E7 = Q1 * E6 * CQ1;
%%ESLABÓN 5 DEL MODELO CINEMÁTICO
F1 = Q5 * T6 * CQ5;
F2 = F1 + T5;
F3 = Q4 * F2 * CQ4;
F4 = F3 + T4;
F5 = Q3 * F4 * CQ3;
F6 = F5 + T3;
F7 = Q2 * F6 * CQ2;
F8 = F7 + T2 + T1;
F9 = Q1 * F8 * CQ1;
%%ESLABÓN 6 DEL MODELO CINEMÁTICO
A1 = Q6 * T7 * CQ6;
A2 = A1 + T6;
A3 = Q5 * A2 * CQ5;
A4 = A3 + T5;
A5 = Q4 * A4 * CQ4;
A6 = A5 + T4;
A7 = Q3 * A6 * CQ3;
A8 = A7 + T3;
A9 = Q2 * A8 * CQ2;
A10 = A9 + T2 + T1;
A11 = Q1 * A10 * CQ1;

```

\* Se definen los vectores correspondientes a cada eje, para luego graficarlos.

```

V1=B2.v; V2=C3.v; V3=D5.v; V4=E7.v; V5=F9.v; V6=A11.v;

```

```

% Primer vector
X=[0 V1(1)]; Y=[0 V1(2)]; Z=[0 V1(3)];

```

*% Segundo Vector*

$X1=[V1(1) \ V2(1)];$   $Y1=[V1(2) \ V2(2)];$   $Z1=[V1(3) \ V2(3)];$

*% Tercer vector*

$X2=[V2(1) \ V3(1)];$   $Y2=[V2(2) \ V3(2)];$   $Z2=[V2(3) \ V3(3)];$

*% Cuarto vector*

$X3=[V3(1) \ V4(1)];$   $Y3=[V3(2) \ V4(2)];$   $Z3=[V3(3) \ V4(3)];$

*% Quinto vector*

$X4=[V4(1) \ V5(1)];$   $Y4=[V4(2) \ V5(2)];$   $Z4=[V4(3) \ V5(3)];$

*% Sexto vector*

$X5=[V5(1) \ V6(1)];$

$Y5=[V5(2) \ V6(2)];$   $Z5=[V5(3) \ V6(3)];$

✱ Con los vectores definidos, se establecen los parámetros para la graficación.

*hold on*

*axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])*

*plot3(X,Y,Z,'ro-','LineWidth',3)*

*hold on*

*axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])*

*plot3(X1,Y1,Z1,'bo-','LineWidth',3)*

*hold on*

*axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])*

*plot3(X2,Y2,Z2,'go-','LineWidth',3)*

*hold on*

*axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])*

*plot3(X3,Y3,Z3,'mo-','LineWidth',3)*

*hold on*

*axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])*



```

plot3(X4,Y4,Z4,'y-','LineWidth',3)
hold on
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(X5,Y5,Z5,'k+-','LineWidth',3)

title('MODELO DE CINEMÁTICA DIRECTA DEL';'ROBOT KR 120-2P CUATER-
NIOS','FontSize',14,'Color','k','EdgeColor','k')
xlabel('eje X','FontSize',16,'Color','B')
ylabel('eje Y','FontSize',16,'Color','B')
zlabel('eje Z','FontSize',16,'Color','B')
grid on
box on

```

✱ Al ejecutar esta primera parte del código, se obtiene la Figura 4.1.

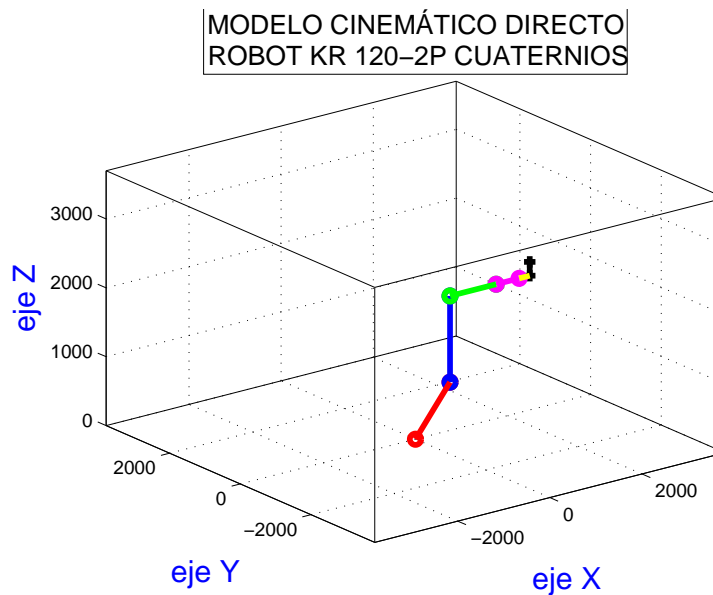


Figura 4.1: Posición inicial robot KUKA KR120-2P® en Matlab®.

✱ En la ejecución del modelo se deben definir los valores angulares de cada eje para efectuar el movimiento de las articulaciones desde la posición inicial hasta la deseada. Sin embargo, se debe tener en cuenta los límites angulares de cada eje que se encuentran

establecidos en la referencias técnicas del robot (ver Tabla 1.). A continuación se presenta el código que efectúa la recolección de datos, condicionándolos a los valores angulares definidos para cada articulación.

```
while(A1>185 || A1<-185)
disp(' Eje 1. El ángulo debe estar entre [-185,185]')
A1=input(' Digite el valor del ángulo correspondiente al Eje 1 ');
A1=round(A1);
if(A1>185 || A1<-185)
disp(' ') end end disp(' ')
end
```

```
while(A2 > 70 || A2 < -120)
disp(' Eje 2. El ángulo debe estar entre [-120,70]')
A2=input(' Digite el valor del ángulo correspondiente al Eje 2 ');
A2=round(A2);
if(A2 > 70 || A2 < -120)
disp(' ') end end disp(' ')
end
```

```
while(A3 > 65 || A3 < -209) disp(' Eje 3. El ángulo debe estar entre [-209,65]')
A3=input(' Digite el valor del ángulo correspondiente al Eje 3 ');
A3=round(A3);
if(A3 > 65 || A3 < -209)
disp(' ') end end disp(' ')
end
```

```
while(A4 > 350 || A4 < -350)
disp(' Eje 4. El ángulo debe estar entre [-350,350]')
A4=input(' Digite el valor del ángulo correspondiente al Eje 4 ');
A4=round(A4);
if(A4 > 350 || A4 < -350)
disp(' ') end end disp(' ')
end
```

```

while(A5 > 125 || A5 < -125)
disp(' Eje 5. El ángulo debe estar entre [-125,125]')
A5=input(' Digite el valor del ángulo correspondiente al Eje 5 ');
A5=round(A5);
if(A5 > 125 || A5 < -125)
disp(' ')
end end disp(' ')

```

```

while(A6 > 350 || A6 < -350)
disp(' Eje 6. El ángulo debe estar entre [-350,350]')
A6=input(' Digite el valor del ángulo correspondiente al Eje 6 ');
A6=round(A6);
if(A6 > 350 || A6 < -350)
disp(' ') end end disp(' ')

```

✱ Ahora se efectúa de nuevo el modelo que se encontrará condicionado a los valores que fueron ingresados por el usuario. Se debe tener presente que Matlab® trabaja los valores angulares en radianes, lo cual, para facilitar el uso del simulador, se efectúa el código de conversión de grados a radianes y se continua con el modelo.

```

Ani=input(' Simular, presione ENTER '); %%Orden para iniciar la simulación.

```

```

teta1=((A1*pi)/180);
teta2=((A2*pi)/180);
teta3=((A3*pi)/180);
teta4=((A4*pi)/180);
teta5=((A5*pi)/180);
teta6=((A6*pi)/180);

```

```

i=[1,0,0]; j=[0,1,0]; k=[0,0,1]; n=[0,0,0]; axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])

```

```

plot3(i,n,n,'m-') hold on
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(n,j,n,'g-') hold on
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(n,n,k,'B') hold on

```

```

Q1=quaternion([cos(teta1/2) 0 0 sin(teta1/2)]); CQ1=inv(Q1);
Q2=quaternion([cos(teta2/2) 0 sin(teta2/2) 0]); CQ2=inv(Q2);
Q3=quaternion([cos(teta3/2) 0 sin(teta3/2) 0]); CQ3=inv(Q3);
Q4=quaternion([cos(teta4/2) sin(teta4/2) 0 0]); CQ4=inv(Q4);
Q5=quaternion([cos(teta5/2) 0 sin(teta5/2) 0]); CQ5=inv(Q5);
Q6=quaternion([cos(teta6/2) sin(teta6/2) 0 0]); CQ6=inv(Q6);

```

```

T0=quaternion([0 0 0 0]);
T1=quaternion([0 750 0 0]);
T2=quaternion([0 0 0 700]);
T3=quaternion([0 0 0 1250]);
T4=quaternion([0 1000 0 0]);
T5=quaternion([0 500 0 0]);
T6=quaternion([0 230 0 0]);
T7=quaternion([0 0 0 200]);

```

```

B1=T2+T1; B2=Q1*B1*CQ1;
C1=Q2*T3*CQ2; C2=C1+T2+T1;
C3=Q1*C2*CQ1;
D1=Q3*T4*CQ3; D2=D1+T3;
D3=Q2*D2*CQ2; D4=D3+T2+T1;
D5=Q1*D4*CQ1;
E1=Q4*T5*CQ4; E2=E1+T4;
E3=Q3*E2*CQ3; E4=E3+T3;
E5=Q2*E4*CQ2; E6=E5+T2+T1;
E7=Q1*E6*CQ1;
F1=Q5*T6*CQ5; F2=F1+T5;

```

$F3=Q4*F2*CQ4$ ;  $F4=F3+T4$ ;  
 $F5=Q3*F4*CQ3$ ;  $F6=F5+T3$ ;  
 $F7=Q2*F6*CQ2$ ;  $F8=F7+T2+T1$ ;  
 $F9=Q1*F8*CQ1$ ;  
 $G1=Q6*T7*CQ6$ ;  $G2=G1+T6$ ;  
 $G3=Q5*G2*CQ5$ ;  $G4=G3+T5$ ;  
 $G5=Q4*G4*CQ4$ ;  $G6=G5+T4$ ;  
 $G7=Q3*G6*CQ3$ ;  $G8=G7+T3$ ;  
 $G9=Q2*G8*CQ2$ ;  $G10=G9+T2+T1$ ;  
 $G11=Q1*G10*CQ1$ ;

$V1=B2.v$ ;  $V2=C3.v$ ;  $V3=D5.v$ ;  $V4=E7.v$ ;  $V5=F9.v$ ;  $V6=G11.v$ ;

$X=[0 \ V1(1)]$ ;  $Y=[0 \ V1(2)]$ ;  $Z=[0 \ V1(3)]$ ;  
 $X1=[V1(1) \ V2(1)]$ ;  $Y1=[V1(2) \ V2(2)]$ ;  $Z1=[V1(3) \ V2(3)]$ ;  
 $X2=[V2(1) \ V3(1)]$ ;  $Y2=[V2(2) \ V3(2)]$ ;  $Z2=[V2(3) \ V3(3)]$ ;  
 $X3=[V3(1) \ V4(1)]$ ;  $Y3=[V3(2) \ V4(2)]$ ;  $Z3=[V3(3) \ V4(3)]$ ;  
 $X4=[V4(1) \ V5(1)]$ ;  $Y4=[V4(2) \ V5(2)]$ ;  $Z4=[V4(3) \ V5(3)]$ ;  
 $X5=[V5(1) \ V6(1)]$ ;  $Y5=[V5(2) \ V6(2)]$ ;  $Z5=[V5(3) \ V6(3)]$ ;

*hold on*

*axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])*

*plot3(X,Y,Z,'ro-','LineWidth',3) hold on*

*axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])*

*plot3(X1,Y1,Z1,'bo-','LineWidth',3) hold on*

*axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])*

*plot3(X2,Y2,Z2,'go-','LineWidth',3) hold on*

*axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])*

*plot3(X3,Y3,Z3,'mo-','LineWidth',3) hold on*

*axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])*

*plot3(X4,Y4,Z4,'y-','LineWidth',3) hold on*

*axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])*

*plot3(X5,Y5,Z5,'k+-','LineWidth',3)*

```

title('MODELO CINEMÁTICO DIRECTO DEL';'ROBOT KR 120-2P CUATER-
NIOS','FontSize',14,'Color','k','EdgeColor','k')
xlabel('eje x','FontSize',16,'Color','B')
ylabel('eje y','FontSize',16,'Color','B')
zlabel('eje z','FontSize',16,'Color','B')
grid on
box on
disp('Fin')

```

✱ Al ejecutar el M-file con el código desarrollado, se presenta en la ventana de comandos de Matlab® lo siguiente:

*Robot KR 120-2P.*  
*Ingrese los valores angulares de cada eje*  
*para hacer su simulación, se verifica gráficamente.*  
*Modelo Cinemático Directo Cuaternios robot KR 120-2P*

*Eje 1. El ángulo debe estar entre [-185,185]*  
*Digite el valor del ángulo correspondiente al Eje 1 |*

✱ De esta forma, se tiene el código completo del modelo computacional utilizando Matlab® del robot KUKA KR120-2P® por medio de cuaternios, por lo cual se encuentra listo para su ejecución.

---

## 4.4. Validación

---

Después de hacer la programación en Matlab® del modelo cinemático directo del robot KUKA KR120-2P® se efectúa la validación del modelo elaborado y expuesto en el capítulo anterior, por medio del ingreso de datos de posiciones angulares para cada articulación y así obtener las posiciones del elemento terminal del robot.

✱ Mapeo de posición para los ángulos:

1.  $A_1 = 0^\circ$ ,  $A_2 = 0^\circ$ ,  $A_3 = 0^\circ$ ,  $A_4 = 0^\circ$ ,  $A_5 = 0^\circ$ ,  $A_6 = 0^\circ$ .

2.  $A_1 = 20^\circ$ ,  $A_2 = -25^\circ$ ,  $A_3 = 64^\circ$ ,  $A_4 = 210^\circ$ ,  $A_5 = 2^\circ$ ,  $A_6 = 45^\circ$ .
3.  $A_1 = 85^\circ$ ,  $A_2 = 65^\circ$ ,  $A_3 = -100^\circ$ ,  $A_4 = 50^\circ$ ,  $A_5 = 1^\circ$ ,  $A_6 = 280^\circ$ .
4.  $A_1 = -60^\circ$ ,  $A_2 = -15^\circ$ ,  $A_3 = -45^\circ$ ,  $A_4 = -12^\circ$ ,  $A_5 = 25^\circ$ ,  $A_6 = 300^\circ$ .

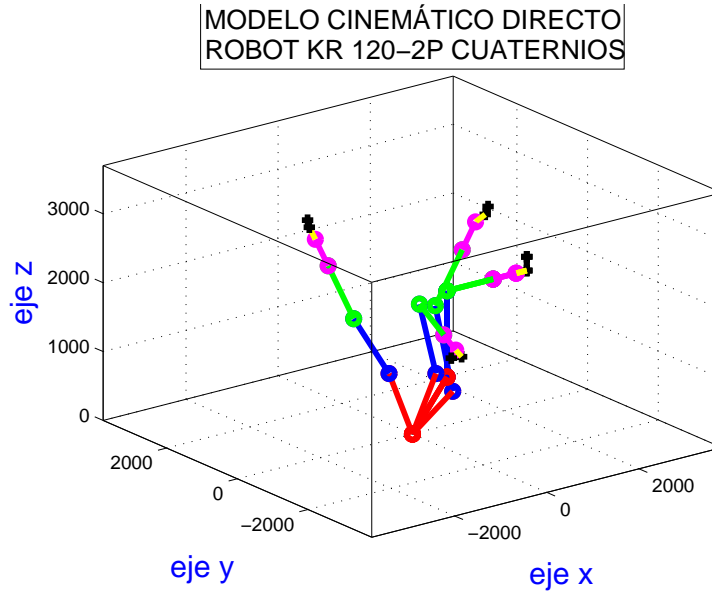


Figura 4.2: Mapeos de posiciones 1. del robot KUKA KR120-2P®.

✱ Mapeo de posición para los ángulos:

1.  $A_1 = 0^\circ$ ,  $A_2 = 0^\circ$ ,  $A_3 = 0^\circ$ ,  $A_4 = 0^\circ$ ,  $A_5 = 0^\circ$ ,  $A_6 = 0^\circ$ .
2.  $A_1 = -175^\circ$ ,  $A_2 = 13^\circ$ ,  $A_3 = -47^\circ$ ,  $A_4 = -32^\circ$ ,  $A_5 = -8^\circ$ ,  $A_6 = -1^\circ$ .
3.  $A_1 = 85^\circ$ ,  $A_2 = 70^\circ$ ,  $A_3 = -5^\circ$ ,  $A_4 = 349^\circ$ ,  $A_5 = 100^\circ$ ,  $A_6 = -15^\circ$ .

---

## 4.5. Interfaz gráfica de usuario

---

Se estableció una interfaz gráfica del usuario a la programación que se realizó referente al modelo cinemático directo del robot KUKA KR120-2P® para lograr un mayor dinamismo en la interacción del usuario al ejecutar el código. Al correr el código que se presentó, tiene la desventaja de que se deben manejar tres ventanas individualmente para realizar las simulaciones, una primera ventana que corresponde al "*M-file*" que contiene

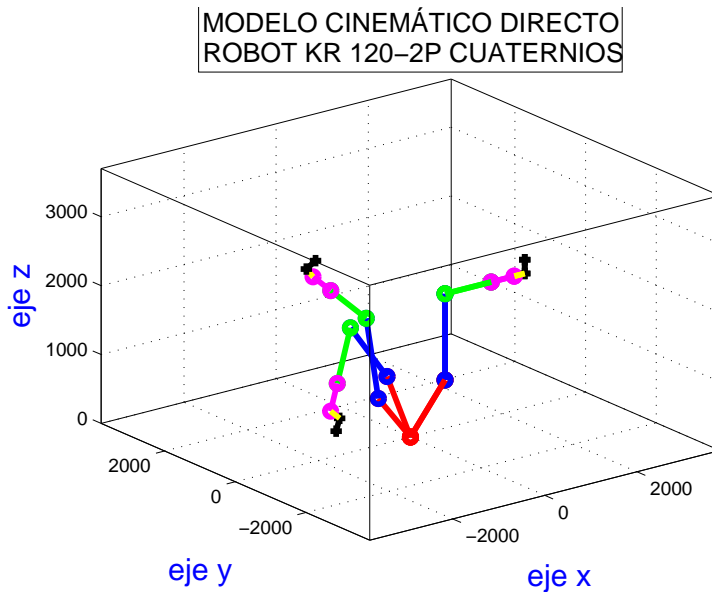


Figura 4.3: Mapeos de posiciones 2. del robot KUKA KR120-2P®.

el código, la segunda ventana denominada ventana de comandos (*Command Windows*) donde se introducen los valores angulares y la última que corresponde a la ventana que presenta la graficación.

Para solucionar lo anterior se realizó una integración del código que se desarrolló en una interfaz gráfica de usuario (GUI en sus siglas en inglés: graphical user interface), donde en una sola ventana se ingresan los valores angulares y se observa directamente los movimiento que se realizan en las simulaciones. Además, la interfaz gráfica de usuario tiene la posibilidad aplicar varias simulaciones a la vez y restaurar su valores a los parámetros iniciales.

En la Figura 4.3 se muestra la interfaz gráfica de usuario al ser ejecutado.



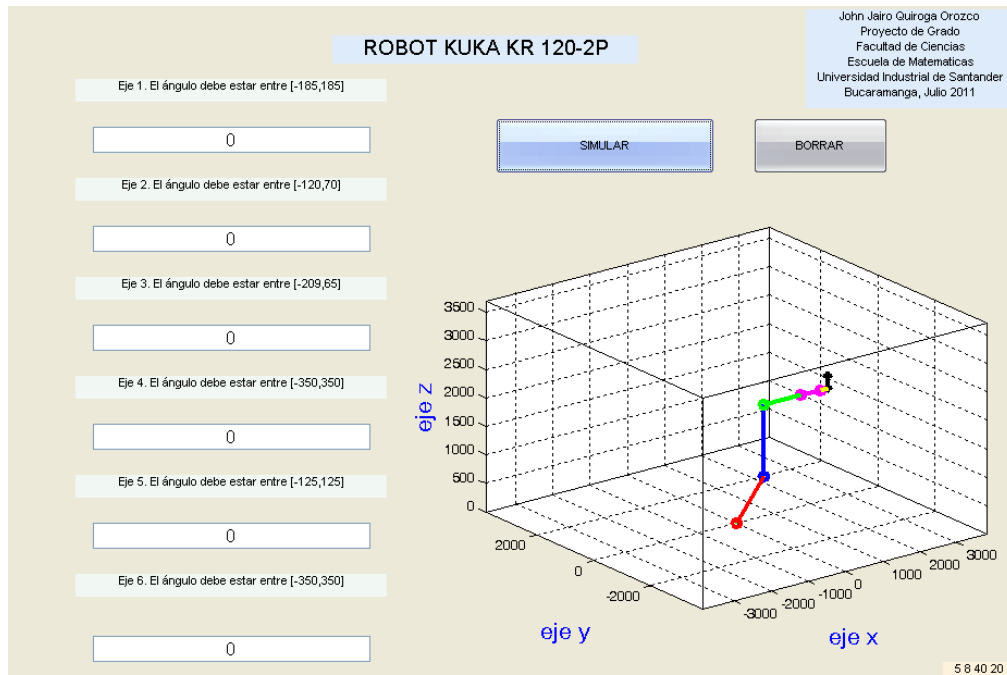


Figura 4.4: GUI robot KUKA KR120-2P®.

A continuación se presentan la interfaz gráfica de usuario en ejecución con datos ingresados. La *Figura 4.5* presenta el movimiento de  $100^\circ$  del *eje 1*. La *Figura 4.6* presenta el mapeo de movimientos múltiples del *eje 1* con valores angulares:  $0^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $100^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $185^\circ$ ,  $-50^\circ$ ,  $-100^\circ$ ,  $-150^\circ$ . En el pantallazo mostrado en la *Figura 4.6* se observa en la parte del ingreso de los valores solamente el último registro realizado. La *Figura 4.7* presenta el mapeo de movimientos múltiples del *eje 2* con valores angulares:  $20^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $-20^\circ$ ,  $-40^\circ$ ,  $-60^\circ$ ,  $-80^\circ$ ,  $-100^\circ$ . La *Figura 4.8* presenta el mapeo de movimientos múltiples de todos los ejes.

El código de la GUI se presenta en el *Anexo 1*, página 72.

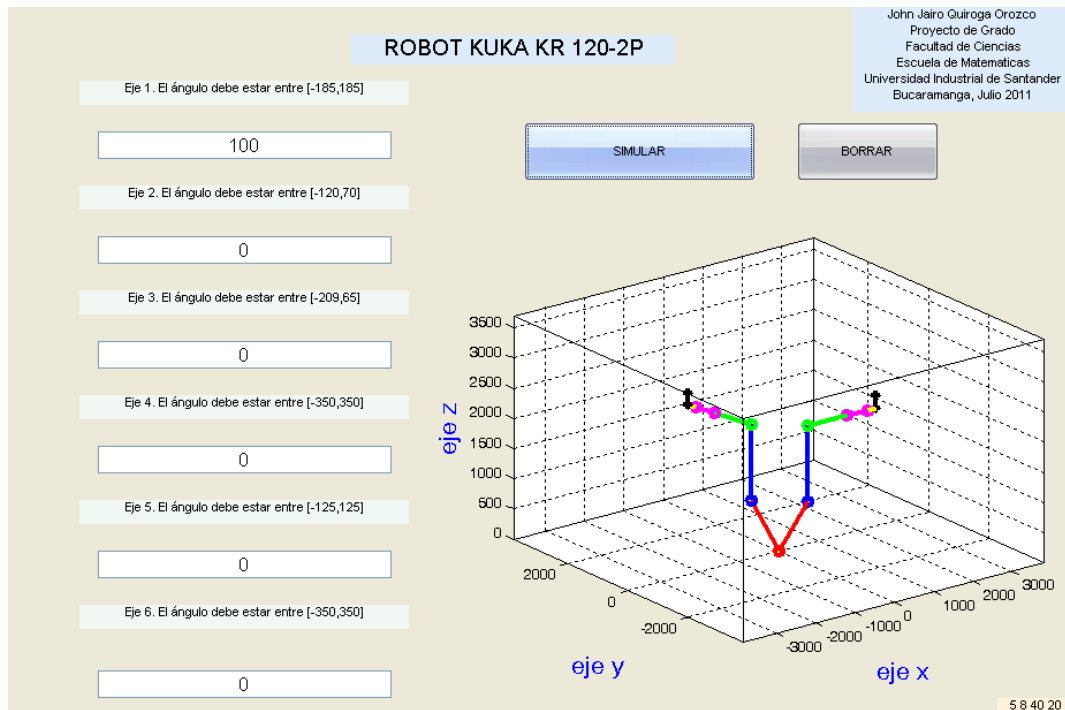


Figura 4.5: GUI movimiento eje 1 del robot KUKA KR120-2P®.

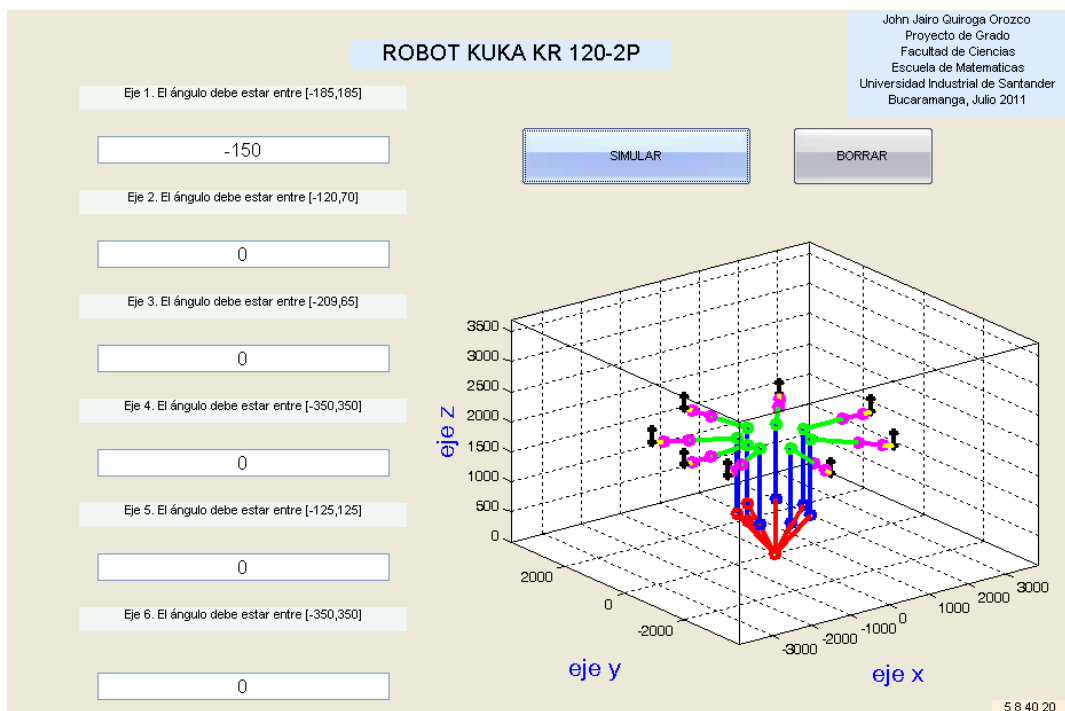


Figura 4.6: GUI movimientos múltiples eje 1 del robot KUKA KR120-2P®.

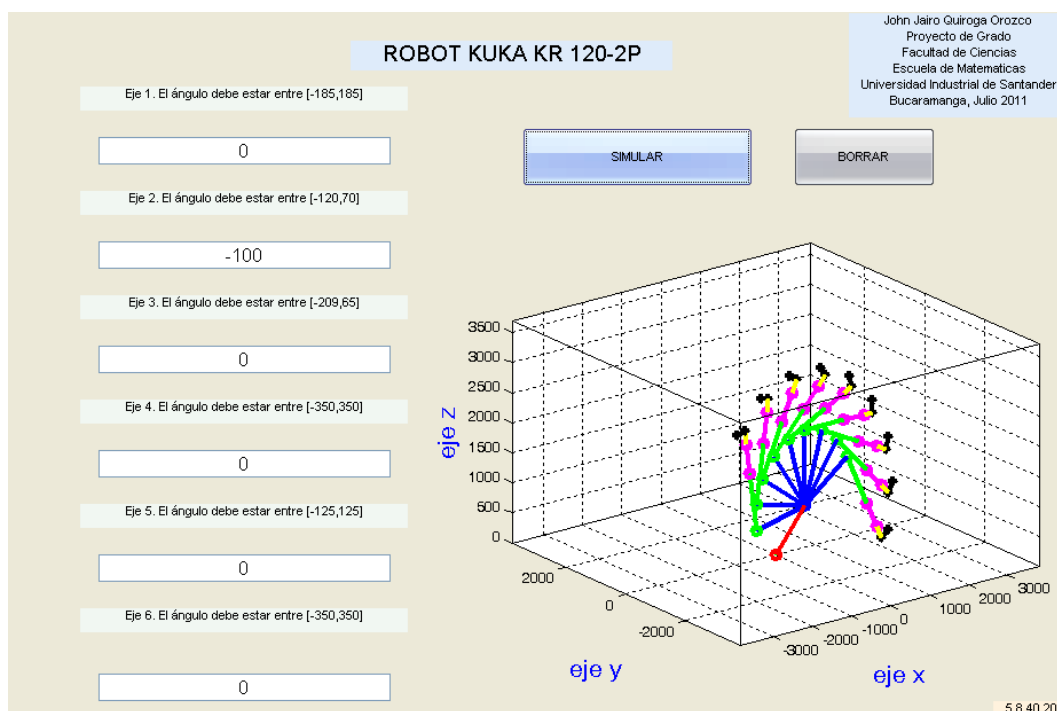


Figura 4.7: GUI movimientos múltiples eje 2 del robot 3 KUKA KR120-2P®.

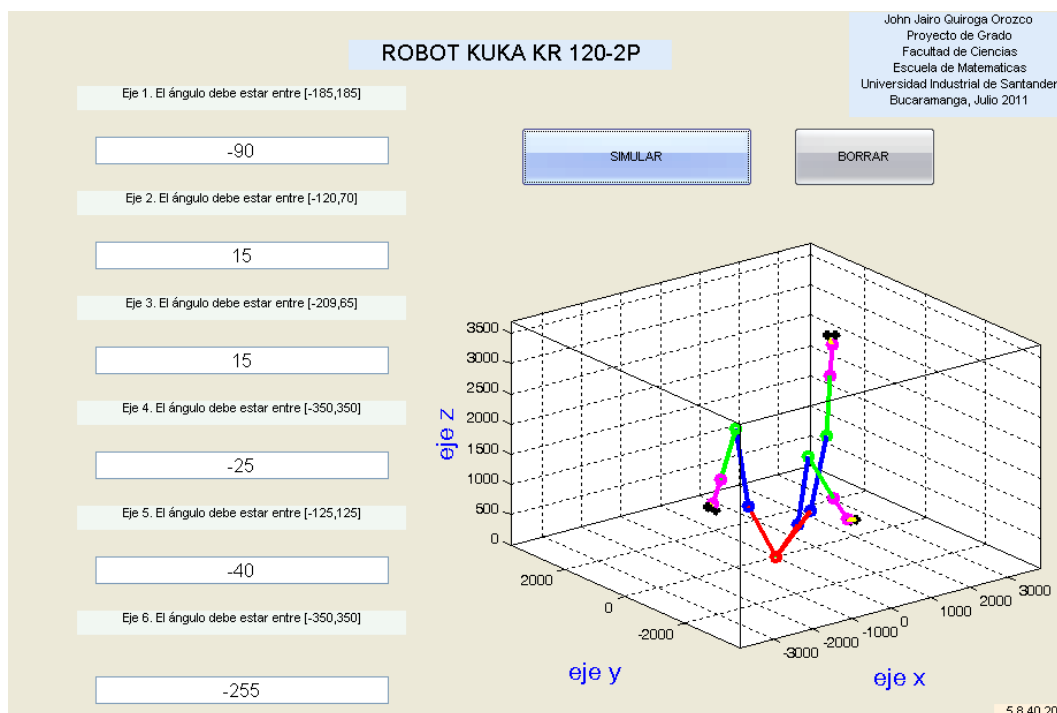


Figura 4.8: GUI movimientos múltiples de los ejes del robot KUKA KR120-2P®.

---

---

## CAPÍTULO 5

---

# PROPUESTA DE INNOVACIÓN EN EL AULA

El trabajo de grado que se ha expuesto se centró en el desarrollo de un modelo cinemático directo del robot KUKA KR120-2P® mediante el uso de cuaternios, donde luego se validó el modelo al programarlo en Matlab®. Todo este proceso elaborado abre las posibilidades de establecer una propuesta de innovación en el aula para la enseñanza y el aprendizaje de transformaciones lineales en un curso de Álgebra Lineal[17].

Históricamente los cursos de Álgebra Lineal, que son impartidos por lo general en el segundo nivel de estudios, han presentado altos niveles de desaprobación, por lo cual se establece la necesidad de proponer y desarrollar estrategias pedagógicas que optimicen el aprendizaje en ésta área. Es de interés el Álgebra Lineal ya que es un componente de gran importancia para la formación de profesionales en ciencias e ingenierías.

Además, es de interés el formar profesionales con aptitudes en competencias comunicativas, disciplinares, interpersonales, investigativas y tecnológicas, lo cual incentiva a la incorporación del trabajo por proyectos en las dinámicas del aula, esto con el propósito de orientar el aprendizaje de las transformaciones lineales mediante el desarrollo del modelo cinemático directo del robot KUKA KR120-2P®.

La propuesta consiste en que los estudiantes elaboren un proyecto donde presenten y validen el modelo cinemático directo del robot en cuestión. Para el desarrollo del proyecto se realizara de forma cooperativa, donde cada grupo de estudiantes desarrollará el modelo usando geometrías de transformación lineal, los cuaternios como representación de transformaciones lineales y la herramienta computacional Matlab®. Durante la elaboración del proyecto, los estudiantes planifican, ejecutan y evalúan el desarrollo del modelo del robot, donde les permite encontrar relación directa entre las matemáticas y la robótica (se hace una traspolación de la tradicional matemática abstracta teórica a la matemática aplicada), entre los conceptos y la realidad en que ellos son empleados, además de utilizar de forma conjunta los conocimientos previos. Al finalizar el proyecto, los estudiantes deben presentar los resultados obtenidos y sustentarlos, utilizando como soporte los medios electrónicos y elaborando un poster de trabajo realizado. El desarrollo del proyecto se puede considerar como una situación adidáctica en la conceptualización de las transformaciones lineales.

Una experiencia de este tipo representaría a los participante de los proyectos, un aprendizaje significativo (Ausubel, 1976).

Otro propósito del trabajo por proyectos en el aula, es el de integrar otras áreas del conocimiento para el estudio del Álgebra Lineal, teniendo como referente las tendencias mundiales en el desarrollo científico, tecnológico e industrial alrededor de un tema de gran interés para los estudiantes, *la robótica*.

La presente propuesta de innovación en el aula para la enseñanza y el aprendizaje de transformaciones lineales en un curso de Álgebra Lineal abre la posibilidad de generar proyectos de investigación relacionados con la aplicación de la misma.

---

# CAPÍTULO 6

---

## RESULTADOS

- Se demostró que para el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ , los cuaternios  $Q, Q^* \in H(\mathbb{R})$  expresado por (3.9) y  $\vec{v} \in R^3$ . La función

$$\begin{aligned} L_q : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{v} &\rightarrow L_q(\vec{v}) = Q(0 + \vec{v})Q^* \end{aligned}$$

es una transformación lineal y define la rotación del vector  $\vec{v}$  un ángulo  $2\theta$  alrededor del vector  $\vec{q}$ .

- Se desarrolló el modelo cinemático directo del robot KUKA KR120-2P® utilizando el operador de transformación de rotación de cuaternios, obteniendo que

$$\begin{aligned} x = C_1\Psi - S_1\Omega = \\ l_7[C_6C_5C_4S_3C_2C_1 + C_6S_5C_3C_2C_1 - S_6S_4S_3C_2C_1 + C_6C_5S_4S_1 + S_6C_4S_1 + \\ C_6C_5C_4C_3S_2C_1 - C_6S_5S_3S_2C_1 - S_6S_4C_3S_2C_1] + l_6[C_5C_3C_2C_1 - S_5C_4S_3C_2C_1 - \\ S_5S_4S_1 - C_5S_3S_2C_1 - S_5C_4C_3S_2C_1] + l_5[C_3C_2C_1 - S_3S_2C_1] + l_4[C_3C_2C_1 - + \\ S_3S_2C_1]l_3S_2C_1 + l_1C_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y = C_1\Omega + S_1\Psi = \\
l_7[C_6C_5C_4S_3C_2S_1 + C_6S_5C_3C_2S_1 - S_6S_4S_3C_2S_1 - C_6C_5S_4C_1 - S_6C_4C_1 + \\
C_6C_5C_4C_3S_2S_1 - C_6S_5S_3S_2S_1 - S_6S_4C_3S_2S_1] + l_6[C_5C_3C_2S_1 - S_5C_4S_3C_2S_1 \\
+ S_5S_4C_1 - C_5S_3S_2S_1 - S_5C_4C_3S_2S_1] + l_5[C_3C_2S_1 - S_3S_2S_1] + l_4[C_3C_2S_1 - \\
S_3S_2S_1] + l_3S_2S_1 + l_1S_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z = \Phi = \\
l_7[C_6C_5C_4C_3C_2 - C_6S_5S_3C_2 - S_6S_4C_3C_2 - C_6C_5C_4S_3C_2 - C_6S_5C_3C_2 + \\
S_6S_4S_3C_2] + l_6[-C_5S_3C_2 - S_5C_4C_3C_2 - C_5C_3S_2 + S_5C_4S_3S_2] + l_5[-S_3C_2 - \\
C_3S_2] + l_4[-S_3C_2 - C_3S_2] + l_3C_2 + l_2.
\end{aligned}$$

donde  $(x, y, z)$  son las coordenadas del extremo del robot referidas a la base del robot ( $S_0$ )

- En los gráficos 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8 se evidencia la validación del modelo cinemático directo realizado al robot en cuestión, al ser mapeados distintos valores angulares para cada articulación.
- Se desarrolló una interfaz gráfica que integra la programación hecha sobre el modelo cinemático directo del robot KUKA KR120-2P®, que se muestra en las Figuras 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8 donde permite de una forma más práctica desarrollar las simulaciones de los movimientos de cada articulación del robot.
- Se complementa una propuesta de innovación en el aula para la enseñanza y el aprendizaje de transformaciones lineales en un curso de álgebra lineal, apoyado en la ejecución de trabajos por proyectos, en la modelación del robot KUKA KR120-2P® empleando cuaternios para luego ser validado utilizando Matlab.®

---

# CONCLUSIONES

- Los cuaternios se pueden considerar como transformaciones lineales de rotación y orientación de objetos en el espacio tridimensional.
- Los cuaternios es una herramienta alternativa en las representaciones geométricas de rotaciones de objetos en  $\mathbb{R}^3$ .
- Los cuaternios pueden ser usados para resolver el problema cinemático directo de robots industriales.
- El desarrollo del modelo cinemático directo del robot KUKA KR120-2P®, consiste en la composición de rotaciones lo que resulta computacionalmente muy práctico, ya que son multiplicaciones de cuaternios entre sí.
- Los cuaternios permite la representación de rotaciones mediante sólo 4 elementos, frente a los 9 utilizados por las matrices de transformación homogénea.
- Los cuaternios son un campo alterno en el estudio de las transformaciones lineales que favorece en su conceptualización, dado a su aplicabilidad y la cercanía directa que posee su álgebra con el álgebra vectorial, puesto que los cuaternios son sus precursores.
- La presente monografía donde esta inmerso la elaboración del modelo cinemático directo del robot KUKA KR120-2P® mediante el uso de cuaternios, permite esta-



blecerse como prototipo en la ejecución de proyectos de aula en cursos de álgebra lineal.

- La integración de una interfaz gráfica en la validación del modelo cinemático directo del robot KUKA KR120-2P® se convierte en una herramienta práctica para la interacción del usuario con la simulación.
- Matlab® es un entorno propicio para la programación del modelo cinemático directo del robot KUKA KR120-2P®, ya que permite generar archivos ejecutables (.exe) para ser utilizados en equipos con sistema operativo Microsoft Windows (XP o superior) y así convertirse en un software de simulación. Además su arquitectura posibilita la conversión a otros lenguajes que tienen una estructura similar a Matlab® como lo son C, C++ y java.

## ANEXO 1

A continuación se presenta el código completo de la interfaz gráfica presentada en la *sección 5.5*.

```
function varargout = GUIKUKAKR1202P(varargin)

% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
                  'gui_Singleton',   gui_Singleton, ...
                  'gui_OpeningFcn', @GUIKUKAKR1202P_OpeningFcn, ...
                  'gui_OutputFcn',  @GUIKUKAKR1202P_OutputFcn, ...
                  'gui_LayoutFcn',  [], ...
                  'gui_Callback',    []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT

% --- Executes just before GUIKUKAKR1202P is made visible.
function GUIKUKAKR1202P_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)

handles.i=[1,0,0];
handles.j=[0,1,0];
handles.k=[0,0,1];
handles.n=[0,0,0];
% CAJA GRAFICA
% AXIS([XMIN XMAX YMIN YMAX ZMIN ZMAX])
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(handles.i,handles.n,handles.n,'m-')
hold on
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(handles.n,handles.j,handles.n,'g-')
hold on
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(handles.n,handles.n,handles.k,'b')
hold on
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
teta1=0;
teta2=0;
teta3=0;
teta4=0;
teta5=0;
teta6=0;

%Representación de Rotaciones
Q1=quaternion([cos(teta1/2) 0 0 sin(teta1/2)]);
CQ1=inv(Q1);%%%Conjugado de Q1
Q2=quaternion([cos(teta2/2) 0 sin(teta2/2) 0]);
CQ2=inv(Q2);
Q3=quaternion([cos(teta3/2) 0 sin(teta3/2) 0]);
CQ3=inv(Q3);
Q4=quaternion([cos(teta4/2) sin(teta4/2) 0 0]);
CQ4=inv(Q4);
Q5=quaternion([cos(teta5/2) 0 sin(teta5/2) 0]);
CQ5=inv(Q5);
Q6=quaternion([cos(teta6/2) sin(teta6/2) 0 0]);
CQ6=inv(Q6);
```

```

%Representación de Traslaciones
T0=quaternion([0 0 0 0]);
T1=quaternion([0 750 0 0]);
T2=quaternion([0 0 0 700]);
T3=quaternion([0 0 0 1250]);
T4=quaternion([0 1000 0 0]);
T5=quaternion([0 500 0 0]);
T6=quaternion([0 230 0 0]);
T7=quaternion([0 0 0 200]);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%OPERADOR ROTACIÓN CUATERNIOS
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%CICLO 1. PASO DEL SISTEMA S6 AL SISTEMA S5%%
A0=T7+T0;
A1=Q6*A0*CQ6;
%%CICLO 2. PASO DEL SISTEMA S5 AL SISTEMA S4%%
A2=A1+T6;
A3=Q5*A2*CQ5;
%%CICLO 3. PASO DEL SISTEMA S4 AL SISTEMA S3%%
A4=A3+T5;
A5=Q4*A4*CQ4;
%%CICLO 4. PASO DEL SISTEMA S3 AL SISTEMA S2%%
A6=A5+T4;
A7=Q3*A6*CQ3;
%%CICLO 5. PASO DEL SISTEMA S2 AL SISTEMA S1%%
A8=A7+T3;
A9=Q2*A8*CQ2;
%%CICLO 6. PASO DEL SISTEMA S1 AL SISTEMA S0%%
A10=A9+T2+T1;
A11=Q1*A10*CQ1;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%ESLABONES%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%ESLABON 1 DEL MODELO CINEMATICO
B1=T2+T1;
B2=Q1*B1*CQ1;
%%ESLABON 2 DEL MODELO CINEMATICO
C1=Q2*T3*CQ2;
C2=C1+T2+T1;
C3=Q1*C2*CQ1;
%%ESLABON 3 DEL MODELO CINEMATICO
D1=Q3*T4*CQ3;
D2=D1+T3;
D3=Q2*D2*CQ2;
D4=D3+T2+T1;
D5=Q1*D4*CQ1;
%%ESLABON 4 DEL MODELO CINEMATICO
E1=Q4*T5*CQ4;
E2=E1+T4;
E3=Q3*E2*CQ3;
E4=E3+T3;
E5=Q2*E4*CQ2;
E6=E5+T2+T1;
E7=Q1*E6*CQ1;

```

```

%%ESLABON L5 DEL MODELO CINEMATICO
F1=Q5*T6*CQ5;
F2=F1+T5;
F3=Q4*F2*CQ4;
F4=F3+T4;
F5=Q3*F4*CQ3;
F6=F5+T3;
F7=Q2*F6*CQ2;
F8=F7+T2+T1;
F9=Q1*F8*CQ1;
%%ESLABON L6 DEL MODELO CINEMATICO
A1=Q6*T7*CQ6;
A2=A1+T6;
A3=Q5*A2*CQ5;
A4=A3+T5;
A5=Q4*A4*CQ4;
A6=A5+T4;
A7=Q3*A6*CQ3;
A8=A7+T3;
A9=Q2*A8*CQ2;
A10=A9+T2+T1;
A11=Q1*A10*CQ1;

%%%%%%%%%VECTORES DEL GRAFICO
V1=B2.v;
V2=C3.v;
V3=D5.v;
V4=E7.v;
V5=F9.v;
V6=A11.v;

% 1° Vector
handle.X=[0 V1(1)];
handle.Y=[0 V1(2)];
handle.Z=[0 V1(3)];

% 2° Vector
handle.X1=[V1(1) V2(1)];
handle.Y1=[V1(2) V2(2)];
handle.Z1=[V1(3) V2(3)];

% 3° Vector
handle.X2=[V2(1) V3(1)];
handle.Y2=[V2(2) V3(2)];
handle.Z2=[V2(3) V3(3)];

% 4° Vector
handle.X3=[V3(1) V4(1)];
handle.Y3=[V3(2) V4(2)];
handle.Z3=[V3(3) V4(3)];

% 5° Vector
handle.X4=[V4(1) V5(1)];
handle.Y4=[V4(2) V5(2)];
handle.Z4=[V4(3) V5(3)];

% 6° Vector
handle.X5=[V5(1) V6(1)];
handle.Y5=[V5(2) V6(2)];
handle.Z5=[V5(3) V6(3)];

```

```

% Grafico Modelo cinematico
hold on
% AXIS([XMIN XMAX YMIN YMAX ZMIN ZMAX])
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(handle.X,handle.Y,handle.Z,'ro-','LineWidth',3)
hold on
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(handle.X1,handle.Y1,handle.Z1,'bo-','LineWidth',3)
hold on
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(handle.X2,handle.Y2,handle.Z2,'go-','LineWidth',3)
hold on
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(handle.X3,handle.Y3,handle.Z3,'mo-','LineWidth',3)
hold on
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(handle.X4,handle.Y4,handle.Z4,'y-','LineWidth',3)
hold on
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(handle.X5,handle.Y5,handle.Z5,'k+-','LineWidth',3)
% Texto Gráfica
% title({'MODELO DE CINEMÁTICA DIRECTA DEL';'ROBOT KR 120-
2P'},'FontSize',12,'Color','k','EdgeColor','k')
xlabel('eje X','FontSize',10,'Color','B')
ylabel('eje Y','FontSize',10,'Color','B')
zlabel('eje Z','FontSize',10,'Color','B')
grid on
box on

% Choose default command line output for GUIKUKAKR1202P
handles.output = hObject;

% Update handles structure
guidata(hObject, handles);

% UIWAIT makes GUIKUKAKR1202P wait for user response (see UIRESUME)
% uiwait(handles.figure1);

% --- Outputs from this function are returned to the command line.
function varargout = GUIKUKAKR1202P_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
% varargout cell array for returning output args (see VARARGOUT);
% hObject handle to figure
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Get default command line output from handles structure
varargout{1} = handles.output;

function edit1_Callback(hObject, eventdata, handles)
Val=get(hObject,'String'); %Almacenar valor ingresado
NewVal = str2double(Val); %Transformar a formato double
handles.edit1=NewVal; %Almacenar en identificador
guidata(hObject,handles); %Salvar datos de la aplicación

```

```

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit1 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit2_Callback(hObject, eventdata, handles)

Val=get(hObject,'String'); %Almacenar valor ingresado
NewVal = str2double(Val); %Transformar a formato double
handles.edit2=NewVal;      %Almacenar en ide
guidata(hObject,handles); %Salvar datos d

% --- Executes during object creation, after setti
function edit2_CreateFcn(hObject, eventdata, handl
% hObject    handle to edit2 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit3_Callback(hObject, eventdata, handles)

Val=get(hObject,'String'); %Almacenar valor ingresado
NewVal = str2double(Val); %Transformar a formato double
handles.edit3=NewVal;      %Almacenar en identificador
guidata(hObject,handles); %Salvar datos de la aplicación

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit3_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit3 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%         See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

```

```

function edit4_Callback(hObject, eventdata, handles)
Val=get(hObject,'String'); %Almacenar valor ingresado
NewVal = str2double(Val); %Transformar a formato double
handles.edit4=NewVal; %Almacenar en identificador
guidata(hObject,handles); %Salvar datos de la aplicación

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit4_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit4 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit5_Callback(hObject, eventdata, handles)
Val=get(hObject,'String'); %Almacenar valor ingresado
NewVal = str2double(Val); %Transformar a formato double
handles.edit5=NewVal; %Almacenar en identificador
guidata(hObject,handles); %Salvar datos de la aplicación

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit5_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit5 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit6_Callback(hObject, eventdata, handles)
Val=get(hObject,'String'); %Almacenar valor ingresado
NewVal = str2double(Val); %Transformar a formato double
handles.edit6=NewVal; %Almacenar en identificador
guidata(hObject,handles); %Salvar datos de la aplicación

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit6_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject handle to edit6 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles empty - handles not created until after all CreateFcns called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
% See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

```

```

% --- Executes on button press in sim.
function sim_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject      handle to sim (see GCBO)
% eventdata    reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles      structure with handles and user data (see GUIDATA)

A1=handles.edit1;
A2=handles.edit2;
A3=handles.edit3;
A4=handles.edit4;
A5=handles.edit5;
A6=handles.edit6;

handle.i=[1,0,0];
handle.j=[0,1,0];
handle.k=[0,0,1];
handle.n=[0,0,0];
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(handle.i,handle.n,handle.n,'m-')
hold on
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(handle.n,handle.j,handle.n,'g-')
hold on
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(handle.n,handle.n,handle.k,'B')
hold on

teta1=((A1*pi)/180);
teta2=((A2*pi)/180);
teta3=((A3*pi)/180);
teta4=((A4*pi)/180);
teta5=((A5*pi)/180);
teta6=((A6*pi)/180);

Q1=quaternion([cos(teta1/2) 0 0 sin(teta1/2)]);
CQ1=inv(Q1);
Q2=quaternion([cos(teta2/2) 0 sin(teta2/2) 0]);
CQ2=inv(Q2);
Q3=quaternion([cos(teta3/2) 0 sin(teta3/2) 0]);
CQ3=inv(Q3);
Q4=quaternion([cos(teta4/2) sin(teta4/2) 0 0]);
CQ4=inv(Q4);
Q5=quaternion([cos(teta5/2) 0 sin(teta5/2) 0]);
CQ5=inv(Q5);
Q6=quaternion([cos(teta6/2) sin(teta6/2) 0 0]);
CQ6=inv(Q6);

%Representación de Traslaciones
T0=quaternion([0 0 0 0]);
T1=quaternion([0 750 0 0]);
T2=quaternion([0 0 0 700]);
T3=quaternion([0 0 0 1250]);
T4=quaternion([0 1000 0 0]);
T5=quaternion([0 500 0 0]);
T6=quaternion([0 230 0 0]);
T7=quaternion([0 0 0 200]);

B1=T2+T1;
B2=Q1*B1*CQ1;

C1=Q2*T3*CQ2;
C2=C1+T2+T1;
C3=Q1*C2*CQ1;

D1=Q3*T4*CQ3;
D2=D1+T3;
D3=Q2*D2*CQ2;
D4=D3+T2+T1;
D5=Q1*D4*CQ1;

E1=Q4*T5*CQ4;
E2=E1+T4;
E3=Q3*E2*CQ3;
E4=E3+T3;
E5=Q2*E4*CQ2;
E6=E5+T2+T1;
E7=Q1*E6*CQ1;

F1=Q5*T6*CQ5;
F2=F1+T5;
F3=Q4*F2*CQ4;
F4=F3+T4;
F5=Q3*F4*CQ3;
F6=F5+T3;
F7=Q2*F6*CQ2;
F8=F7+T2+T1;
F9=Q1*F8*CQ1;

G1=Q6*T7*CQ6;
G2=G1+T6;
G3=Q5*G2*CQ5;
G4=G3+T5;
G5=Q4*G4*CQ4;
G6=G5+T4;
G7=Q3*G6*CQ3;
G8=G7+T3;
G9=Q2*G8*CQ2;
G10=G9+T2+T1;
G11=Q1*G10*CQ1;

```



```

V1=B2.v;
V2=C3.v;
V3=D5.v;
V4=E7.v;
V5=F9.v;
V6=G11.v;
handle.X=[0 V1(1)];
handle.Y=[0 V1(2)];
handle.Z=[0 V1(3)];
handle.X1=[V1(1) V2(1)];
handle.Y1=[V1(2) V2(2)];
handle.Z1=[V1(3) V2(3)];
handle.X2=[V2(1) V3(1)];
handle.Y2=[V2(2) V3(2)];
handle.Z2=[V2(3) V3(3)];
handle.X3=[V3(1) V4(1)];
handle.Y3=[V3(2) V4(2)];
handle.Z3=[V3(3) V4(3)];
handle.X4=[V4(1) V5(1)];
handle.Y4=[V4(2) V5(2)];
handle.Z4=[V4(3) V5(3)];
handle.X5=[V5(1) V6(1)];
handle.Y5=[V5(2) V6(2)];
handle.Z5=[V5(3) V6(3)];

hold on
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(handle.X,handle.Y,handle.Z,'ro-','LineWidth',3)
hold on
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(handle.X1,handle.Y1,handle.Z1,'bo-','LineWidth',3)
hold on
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(handle.X2,handle.Y2,handle.Z2,'go-','LineWidth',3)
hold on
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(handle.X3,handle.Y3,handle.Z3,'mo-','LineWidth',3)
hold on
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(handle.X4,handle.Y4,handle.Z4,'y-','LineWidth',3)
hold on
axis([-3800 3800 -3800 3800 0 3700])
plot3(handle.X5,handle.Y5,handle.Z5,'k+-','LineWidth',3)
% Texto Gráfica
% title({'MODELO DE CINEMÁTICA DIRECTA DEL';'ROBOT KR 120-2P
JJQO'},'FontSize',16,'Color','k','EdgeColor','k')
xlabel('eje x','FontSize',16,'Color','B')
ylabel('eje y','FontSize',16,'Color','B')
zlabel('eje z','FontSize',16,'Color','B')
grid on
box on

% --- Executes on button press in borrar.
function borrar_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to borrar (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

cla(handles.axes1,'reset')
guidata(hObject, handles);

```

---

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] Archila Díaz, J. F., Dutra, M. S. (2008). *Estudio y modelamiento del robot KUKA® KR 6*. Revista Facultad de Ingenieria Universidad de Antioquia, 46(1), 132-144.
- [2] Tarazona, M. (2002). *Aplicación software para un brazo robótico usando un modelo geométrico basado en el álgebra de cuaterniones*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.
- [3] Lozano, E. J. (2002). *Cuaternios de Hamilton*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.
- [4] Barrientos, A., Peñín, L. F., Balaguer C. and Aracil, R. (2007) *Fundamentos de Robótica*. Madrid: Mc Graw Hill.
- [5] Grossman, S. I. (2004). *Álgebra lineal*. Quinta edición. Belmont: Mc Graw Hill.
- [6] Nakos, G., Joyner, D. (1999). *Álgebra lineal con aplicaciones*. Madrid: Thomson.
- [7] Kuipers, J. B. (1999). *Quaternions and rotation sequences: A primer with applications to orbits, aerospace, and virtual reality*. Princenton: Princenton University Press.
- [8] Apostol, T., M. (2002). *Calculus*. Volumen II. Barcelona: Reverté.
- [9] Favieri, A. (2008). *Introducción a los cuaterniones*.  
Obtenida de <http://www.edutecne.utn.edu.ar/cuaterniones/cuaterniones.pdf>

- [10] Sahul, S., Biswall, B. B. and Subudhi, B. (n.d). *A novel method for representing robot kinematics using Quaternion Theory*.  
Obtenida de <http://dspace.nitrkl.ac.in:8080/dspace/bitstream/2080/689/1/bbb2.pdf/>
- [11] KUKA Robotic. *Technical data KR 120-2P*.  
Obtenida de [http://www.roboticturnkeysolutions.com/robots/kuka/datasheet/kr\\_120.pdf/](http://www.roboticturnkeysolutions.com/robots/kuka/datasheet/kr_120.pdf/)
- [12] Corke, P. I. (2008). *Robotics toolbox for Matlab*.  
Obtenida de <http://www.petercorke.com/>
- [13] González Hernández, J. F. (n.d.) *El producto vectorial*.  
Obtenida de [http://www.uam.es/personal\\_pdi/ciencias/fchamizo/realquiler/fich/jfgh.pdf](http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/fchamizo/realquiler/fich/jfgh.pdf)
- [14] Elduque, A. (2004) *Otros números*.  
Obtenida de <http://www.unizar.es/matematicas/algebra/elduque/Talks/otrosnumeros.pdf>
- [15] O'Connor, J. J., Robertson, E. F. (n.d.) *Sir William Rowan Hamilton*.  
Obtenida de <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hamilton.html>
- [16] Williams, K. (2011) *BBC british history*.  
Obtenida de <http://www.bbc.co.uk/history/british>
- [17] Villamizar Morales, J. (2011). *Proyecto de innovación pedagógica en el aula para orientar el aprendizaje de las transformaciones lineales mediante el desarrollo del modelo cinemático directo para el robot kr120-2p®*. Simposio Internacional de Pedagogía, Red Colombiana de Pedagogía y Docencia Investigativa. Cartagena, Colombia.