

Simulación de rupturas en muestras de concreto

Eduardo Valdés

Introducción

El concreto es un material compuesto por partículas de agregados (como grava y arena), un aglomerante (comúnmente cemento), agua y algunos otros aditivos. La historia de su uso en construcción puede remontarse hasta el antiguo Egipto en donde se mezclaban arcillas y calizas para unir los sillares de piedra de las pirámides. Hoy en día es ampliamente utilizado y sigue evolucionado para cumplir con requerimientos de resistencia, estéticos, térmicos, flexibilidad, entre muchos otros.

El estudio de su resistencia a fuerzas de tensión y/o compresión ha sido de los más ampliamente abordados. Hoy en día, en las plantas concreteras se hacen pruebas o probetas para medir la capacidad de cierta composición para soportar estrés. Estas pruebas son hechas generalmente sobre piezas cilíndricas de distintos diámetros, según sea el caso. Existen numerosos análisis y clasificaciones obtenidos a partir de la resistencia y de curvas tensión-deformación. Sin embargo; también la forma en que se rompen o deforman las probetas es importante, pues aporta una valiosa información del comportamiento del material.

En este sentido se realizan análisis generalmente de estructuras y se hacen simulaciones computacionales de dichos fenómenos. En este trabajo se realiza una simulación de la superficie formada a partir de la deformación o ruptura de la probeta de concreto. No se busca hacer una interpolación sino representar, en cierta forma, la *rugosidad* de las rupturas. Esta característica se influye a partir de la dimensión fractal de la superficie. Enseguida se presenta el modelo propuesto para la simulación, su correspondiente implementación y los resultados obtenidos.

Modelo propuesto

La aproximación de la superficie formada por la ruptura se logra utilizando la técnica descrita por Gavin S. P. Miller (1986) conocido como algoritmo del desplazamiento del punto medio (en inglés, midpoint displacement algorithm) o del diamante-cuadrado (en inglés, diamond-square algorithm). El algoritmo comienza con las cuatro esquinas de un cuadrado (pudiera ser un rectángulo también), después hace iterativamente los siguientes dos pasos:

- *Paso del diamante:* Dadas las cuatro esquinas de un cuadrado, encontrar el punto medio (en donde se cruzan las diagonales). La altura del punto medio es calculada promediando las cuatro esquinas más un número aleatorio. Cuando la malla es más densa se forman diamantes con las diagonales.
- *Paso del cuadrado:* Dados los cuatro puntos de un diamante, calcular la altura del punto medio promediando las esquinas más un número aleatorio generado dentro del mismo rango que en el paso del diamante. Esto da nuevamente cuadrados.

Iterativamente, podemos visualizar la forma en que va incrementando la resolución de la superficie por el número total de cuadrados generados (véase Figura 1).

Los números aleatorios que se suman a los puntos generados en ambos pasos se generan de acuerdo a una distribución normal con media $\mu = 0$ y varianza σ^2 . La desviación σ regula la magnitud de los *saltos* entre las alturas de la superficie en cada iteración volviéndose un factor importante en la rugosidad final de la superficie. Descripciones de las propiedades teóricas de los fractales generados con esta técnica son descritos con gran detalle en Russ (2013). Entre éstas y muy importante es que la dimensión del fractal resultante puede controlarse de acuerdo al factor de escalamiento de σ en cada iteración del algoritmo. Saupe (1988) ofrece mayor detalle de la forma de escalamiento y describe a la desviación correspondiente a la i -ésima iteración como:

$$\sigma_i = \sigma(r^n)^{2H},$$

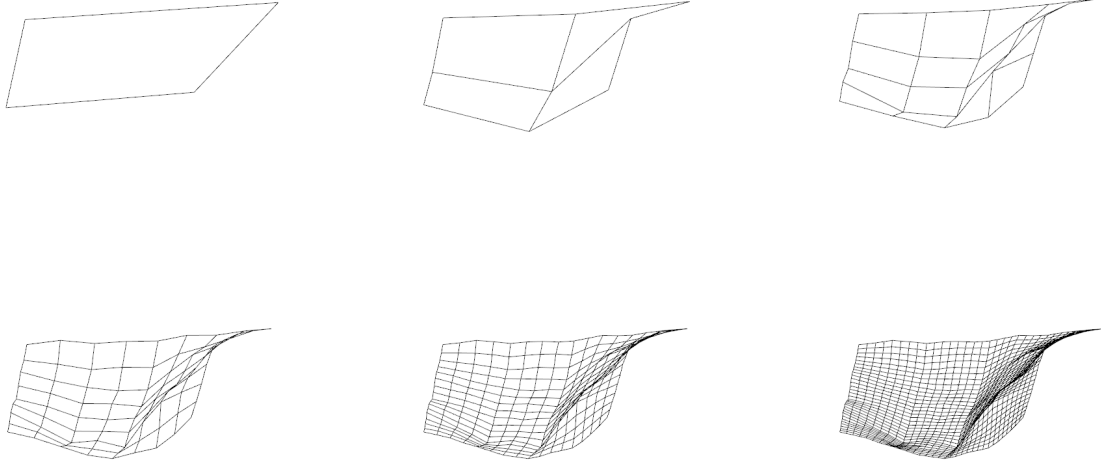


Figura 1: Ilustración del algoritmo diamante-cuadrado

donde σ es la desviación estándar para los primeros cuatro puntos con que inicia el algoritmo, $0 < r < 1$ es el factor de escalamiento, su efecto visual en la superficie es directamente proporcional a la cantidad resultante de picos y hundimientos (en inglés, esta característica es definida como *lacunarity*). $0 < H < 1$ es conocido como el exponente de Hausdorff y manifiesta una proporcionalidad inversa en σ_i . Además, la dimensión de la superficie fractal resultante es $D = 3 - H$. Cabe destacar que sin importar los valores de σ y r , la dimensión de la superficie fractal resultante no cambia.

En vías de aproximarnos a las características de la superficie formada por la ruptura de la muestra de concreto, ajustamos los valores de los parámetros del algoritmo antes descrito. Por cada ruptura, se tiene una nube de puntos en tres dimensiones tomados de la muestra. Hacemos σ la desviación estándar y μ la media de la componente z de los datos. Haciendo una traslación de los puntos de la iteración base a una distribución $N(\mu, \sigma)$, las propiedades de la superficie fractal no cambian e inducimos a la superficie aproximada a que tenga la misma media y desviación estándar en su componente z que los datos reales. Las componentes x y y dependen de la forma que tenga la muestra; de los datos que se tienen solo hay cilindros y unas columnas de esquinas ochavadas. En este caso se consideran sólo las muestras cilíndricas y para asemejar la superficie fractal se parte del cuadrado más pequeño que inscriba al círculo que representa la base del cilindro. Una vez formada la superficie, se discriminan los puntos que, en su proyección bidimensional, estén fuera de dicho círculo. El factor de escala r lo referenciamos a la reducción del área de los cuadrados tras una iteración; es decir $r = \frac{1}{4}$. Por último, $H = 3 - D_{\text{muestra}}$, donde D_{muestra} representa la dimensión fractal de la superficie formada por la ruptura de la muestra. De este modo, se puede generar una superficie que comparte la misma dimensión fractal que la superficie de la ruptura; es decir, ambas son superficies que tienen una rugosidad similar.

Implementación de la simulación

La función `superficie()` genera una nube de puntos y una lista de 4-tuplas de índices que indican que puntos forman un cuadrado. Sus parámetros de entrada son:

- **zoom:** Indica la cantidad de iteraciones (diamante-cuadrado) que se realizan.

- **H:** Exponente de Hausdorff
- **p:** Número de particiones del cuadrado inicial, por omisión se no hay particiones.
- **radio:** Radio del círculo base del cilindro de la muestra de concreto. Sirve para generar el menor cuadrado que lo inscribe.
- **sup.real:** Archivo con los puntos en tres dimensiones de la superficie de ruptura de la muestra de concreto.
- **interpolacion:** Indica si el valor de z de los puntos de la primer iteración deben ser interpolados de la superficie de ruptura **sup.real**. Para que tenga efecto se debe tener preferentemente un número de particiones iniciales $p > 3$.

La cantidad tanto de puntos y cuadrados crece exponencialmente en función de los valores de **zoomy p**. Básicamente la implementación puede dividirse en tres secciones:

- **Inicialización:** Se calculan los valores de μ y σ correspondientes a **sup.real** y se hace la malla inicial de puntos de acuerdo a la cantidad de particiones **p**. Si se elige hacer interpolación entonces la tercera coordenada de los puntos de la malla es obtenida utilizando la función **interp** de la librería **sp**. Esto guía a que la forma de la superficie se asemeje a la de la ruptura, pero en adelante no se sigue interpolando para no interferir con la dimensión fractal.
- **Formación de cuadrados:** En esta parte se forman las 4-tuplas de índices formando cada cuadrado. Se requiere que los puntos estén ordenados jerárquicamente en dirección vertical y horizontal, respectivamente. Calculando el número total de puntos (**total.puntos**) y el número de puntos que tienen en común su segunda coordenada (**num.pts=num.pts=2^p+1**); se puede hacer una asignación inyectiva cuadrado-punto. Un cuadrado es asignado única y exclusivamente a su esquina inferior izquierda. Obviamente, ningún cuadrado puede ser asignado a aquellos puntos que estén sobre el lado derecho y superior del cuadrado inicial. Sin embargo; es fácil identificar estos puntos y discriminarlos gracias a la forma en que se hacen las particiones. Así, descartando los puntos $x_i \in \mathbb{R}^3$ tal que **i%(num.pts)==0 & i>=total.puntos-num.pts**, se puede lograr una biyección punto-cuadrado de forma independiente, haciéndolo paralelizable.
- **Generación de nuevos puntos:** Los pasos iterativos del algoritmo diamante-cuadrado logran dos cosas: dividir un cuadrado en cuatro y asignar un valor para la coordenada **z** en dependencia de las cuatro esquinas iniciales más una cantidad aleatoria. Sin embargo; gracias a que se exige que los incrementos (o decrementos) aleatorios se hagan en ambos pasos con el misma desviación σ_i , $i > 0$, podemos reducir lo que falta de ambos pasos en uno sólo. Dejando de lado la geometría de la división de un cuadrado, llamémoslo c , lo que se busca es tener cinco nuevos puntos que ayuden a formar la próxima división. Conseguir esos cinco puntos es sencillo, cuatro son el punto medio de cada dos puntos adyacentes de c ; el otro es el punto medio de las cuatro esquinas de c . Si hacemos esto para cada cuadrado c que formamos en el paso anterior, se forman los puntos correspondientes a la siguiente iteración del algoritmo diamante-cuadrado. Más aún, se puede formar para la mayoría de los cuadrados c , sólo tres puntos nuevos: el punto medio de todo el cuadrado y los puntos medios de los lados izquierda y abajo. ¿Porqué? Pues porque el cuadrado que está encima de c genera en su lado de abajo el punto que necesito arriba de c y el cuadrado de la derecha forma el quinto faltante. Sólo se tienen que cuidar los cuadros que están en el extremo derecho y/o superior de la malla pues ellos si deben generar el punto (derecha/arriba) que ningún otro hará. Por la forma de generar los puntos y la biyección con los cuadrados, es fácil determinar cuáles son los cuadrados excepción a la regla. Hacer esta consideración elimina repeticiones de puntos lo cual ayuda en tres cosas: primero, al haber menos se tienen que formar menos cuadrados; segundo, se evitan repeticiones de cuadrados gracias a la biyección, lo que evitará en el futuro repeticiones de puntos y; tercera, como a cada nuevo punto generado se le agrega una cantidad aleatoria, si hubiera dos puntos con las primeras dos coordenadas iguales, entonces se formaría un salto o traslape en la superficie.

Con estas tres secciones realizadas sólo basta con actualizar el factor de escalamiento **r** y repetir las dos últimas tanto como se desee, en la implementación, esto es controlado por **zoom**.

Dimensión fractal

En palabras, la dimensión fractal podría definirse como un indicador de que tanto llena un fractal el espacio a medida que se amplía a escalas cada vez más finas. Este concepto generaliza el concepto de dimensión entera ordinaria de los cuerpos geométricos. Un círculo tiene dimensión dos, mientras que un cilindro, tres. Sin embargo, la superficie formada por la ruptura va más allá que un círculo, pero no tiene volumen como el cilindro. Parece intuitivo pensar que su dimensión D cumple que $2 < D < 3$. Si pensamos en la propiedad de la superficie de mantener auto semejanza a partir de su escala, se pudiera medir alguna característica a través de su escalamiento y observar. ¿Pero qué medir exactamente? Las diferentes respuestas a esta pregunta derivan en métodos de aproximación a este indicador.

Método de conteo de cajas

Este método también es conocido como método de conteo de cajas. Si hacemos una división del espacio en voxels, podemos contabilizar la cantidad de voxels que están en contacto con al menos un punto de la superficie. Haciendo cada vez más pequeños estos voxels, digamos partiéndolos por una razón r , un mayor número de éstos están en contacto con la superficie. De hecho, la cantidad crece de forma muy similar a una exponencial. Es decir, podemos expresar a la cantidad de voxels que tocan la superficie N en función de la cantidad de particiones en la malla como $N = br^D$. Si hacemos la gráfica de Richardson correspondiente, la línea recta corresponde a $\log(N) = \log(b) + D \log(r)$, donde la pendiente D corresponde a la dimensión fractal de la superficie. Este método es muy intuitivo, pero es criticado por su ineficiencia.

Método del variograma

Este método utiliza un concepto de ventanas de ancho w , la cual puede ser para fines prácticos un cuadrado en dos dimensiones. Utilizando múltiples ventanas de tamaño w que pueden ser colocadas aleatoria o secuencialmente, se calcula la desviación estándar promedio de las alturas de todos los puntos dentro de una ventana, con respecto a un plano de referencia. El plano de referencia puede ser uno obtenido con ajuste de mínimos cuadrados. Disminuyendo el tamaño de las ventanas w , se puede graficar la desviación estándar resultante con respecto al tamaño de las ventanas en escala log-log como una gráfica de Richardson.

El variograma de las ventanas de tamaño w se puede definir de acuerdo a Malinverno (1990) como:

$$\gamma(w) = \frac{1}{n_w} \sum_{i=1}^{n_w} \sqrt{\frac{1}{|w_i| - 3} \sum_{j \in w_i} z_j^2} \quad ,$$

donde n_w es el total de ventanas w_i de tamaño w , z_j son los residuales al plano de referencia. Los fractales se caracterizan por tener un modelo de variograma de la forma

$$\gamma(w) = \gamma_0 w^{2H} \quad ,$$

donde H es el exponente de Mandelbrot. Por lo tanto, la pendiente β de la recta de la gráfica de Richardson del variograma, proporciona una aproximación a la dimensión fractal $D = 3 - \frac{\beta}{2}$

Algunas consideraciones

Es importante recalcar que todos los métodos para calcular la dimensión fractal se basan en el supuesto de que la superficie es autosemejante a pesar de la escala. De acuerdo a esto, entre más pequeña la escala, más información tendríamos para de acuerdo a la gráfica de Richardson calcular la dimensión fractal. Sin embargo, las superficies de ruptura, aunque posiblemente puedan cumplir con este supuesto, no lo hacen los datos que se tienen de estos, por lo que una disminución de la escala demasiado alta perjudica a la medición.

Resultados

Como se dijo desde un inicio, el objetivo de esta simulación no es hacer una superficie de interpolación de la ruptura. Sino generar superficies que tengan una rugosidad similar; es decir, que compartan la misma dimensión fractal. Puesto que el cálculo de la dimensión es algo tan importante para este proyecto entonces dedicaré un pequeño análisis a la calidad de estas aproximaciones.

Comparación de los estimadores de la dimensión

Como se había mencionado, las superficies fractales que se generan de acuerdo al método y consideraciones descritas con antelación, tienen dimensión fractal $D = 3 - H$, donde H es un parámetro. Entonces, se puede medir la calidad del estimador de dimensión fractal con respecto a la dimensión teórica de la superficie. Por supuesto esto depende también de la calidad de la superficie pues esta no es un fractal sino hasta que se hagan infinitas iteraciones para generarlo. Como medida de control se consideran superficies generadas con $p=0$ y $zoom=10$, lo que quiere decir un total de 1,050,625 puntos. Se realizó un experimento donde se varía el parámetro $H \in \{0, 1, 0, 2, \dots, 0, 9\}$ con tres repeticiones para cada nivel. Los datos resultado de esta experimentación son utilizados en todos los experimentos de esta sección.

La Figura 2 muestra los diagramas de bigotes y violines correspondientes a los resultados. Existe una clara diferencia estadística entre las dimensiones sugeridas por los dos métodos, una prueba de Kruskal y Wallis lo confirma con un valor- p de $2,2 \times 10^{-16}$. Además, se pueden apreciarse diferencias entre sus densidades, hecho que puede ser de utilidad. Se dibujaron los límites que se deberían respetar por la dimensión fractal aproximada ($2 < D < 3$). Note como ninguna de las dimensiones obtenidas con ambos métodos se mantienen dentro de las cotas, lo cual por supuesto es malo. Sin embargo; el principal problema que se observa es la forma de los violines. Puesto que se supone que las dimensiones se relacionan de la forma $D = 3 - H$, se esperaría que los violines no tuvieran zonas mas densas que otras. Desde este punto, ambos problemas podrían tener solución buscando una correcta relación entre una mayor resolución de la superficie y más puntos en las gráficas de Richardson. Sin embargo; aumentar a un nivel más la resolución de la superficie implica tener más de cuatro millones de puntos lo cual hace que separar los puntos dentro de cajas o ventanas sea costoso computacionalmente. De aquí la importancia de determinar las dimensiones más eficientemente que en este momento.

Mas, aunque se logren aproximar los fractales a su dimensión teórica, esto no es de mucha utilidad para el proyecto, pues la dimensión de las rupturas de las muestras de concreto no puede ser mejor estimada. Aquí la opción de buscar una mejor resolución no aplica y generar más puntos en la gráfica de Richardson tampoco ayuda pues a tanto aumento la superficie se pierde la auto similitud al quedarse sin más puntos. Entonces se tiene que usar la información que hay lo mejor posible. El valor de $zoom=10$ que se utilizó en las superficies generadas es el que logra la cota ínfima del total de puntos de todas las rupturas. Así que estamos trabajando, en la medida de lo posible con superficies de cardinalidad lo más similar posible.

Efecto de considerar sólo una parte de las superficies fractales

Como se había mencionado, la forma de asemejar a nuestra superficie con la ruptura es discriminando todos aquellos puntos que estén fuera del círculo base del cilindro muestra. Esto es sencillo de hacerse, pero ¿qué efecto causa en la dimensión fractal? Para responder a esta pregunta se calcula la dimensión fractal únicamente sobre los puntos dentro del círculo y se compara con la dimensión de la superficie completa. El experimento se hace sobre las mismas superficies generadas en el experimento para la comparación de los métodos de aproximación de la dimensión fractal.

La Figura 3 muestra los diagramas de bigotes y violines correspondientes a los resultados obtenidos. Note como la forma de los violines de los métodos de conteo de cajas y variograma no cambia entre considerar como proyección en 2D de la superficie el cuadrado o el círculo. Las pruebas de Kruskal y Wallis con valores- p de 0,74 y 0,84, respectivamente, confirman que no hay diferencia estadística entre las dimensiones de estos dos

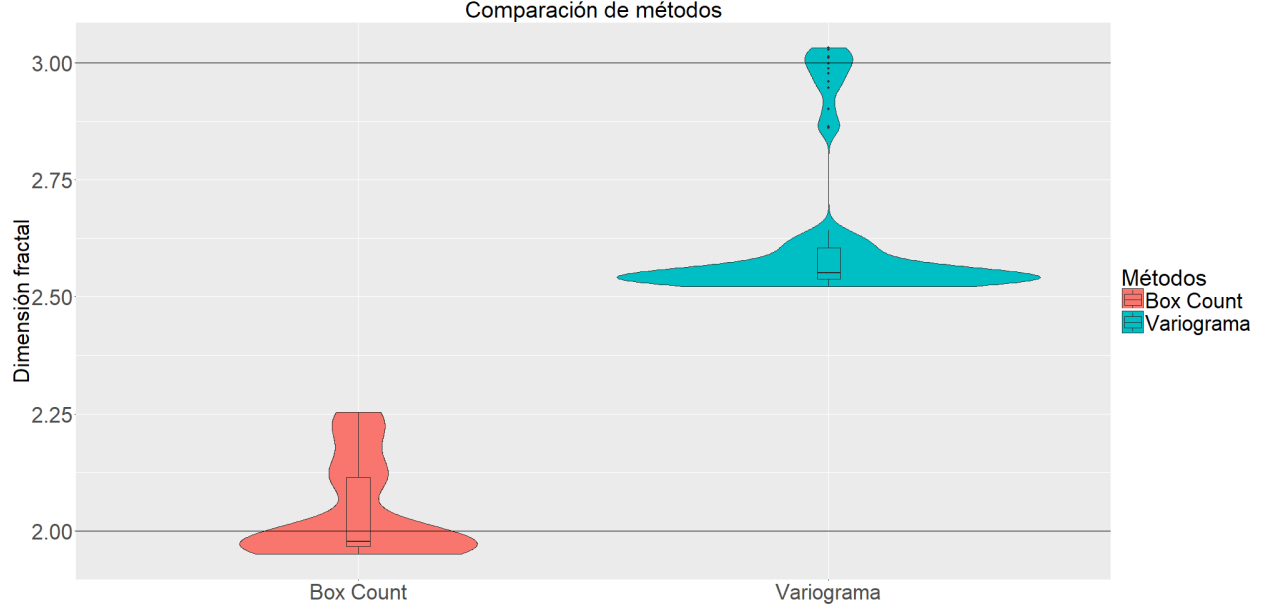


Figura 2: Comparación de los tres métodos para calcular la dimensión fractal

métodos. Por tanto, en adelante podemos comparar la dimensión fractal de la ruptura con la de la superficie fractal generada sin discriminar puntos.

Variación del exponente de Hausdorff H

Una característica importante de las superficies generadas es que *teóricamente* tienen dimensión fractal $D = 3 - H$ donde H es un parámetro de nuestra implementación, conocido como exponente de Hausdorff. De la discusión hecha hasta el momento ya es previsible que no se cumpla esta meta. Es decir; no se puede esperar que bajo las condiciones actuales de nuestras superficies (recuerde que ya todos los parámetros han sido fijados para hacer una comparación justa con las superficies de las rupturas), se pueda lograr la suficiente auto similitud como para que la dimensión sea correcta. Sin embargo; lo que si es importante saber es si al variar el parámetro H existe diferencia entre las dimensiones fractales de sus superficies. La Figura 4 es un desglose de la Figura{metodos} mostrando las diferencias con respecto a los valores de H .

Observe como los dos metodos manifiestan un cambio respecto al parámetro H . Las pruebas de Kruskal y Wallis indican esta diferencia con valores- p de $6,22 \times 10^{-11}$ y $1,49 \times 10^{-8}$ para el método de conteo de cajas y variograma, respectivamente. Las pruebas de Dunn muestran que, para ambos métodos, hay diferencia entre sus niveles hasta $H = 0,5$. Es decir; los métodos pueden apreciar fácilmente cambios en las dimensiones cuando hay mucha rugosidad en las superficies, pero cuando esta comienza a disminuir son incapaces de distinguir. Note además como no hay una disminución lineal de la dimensión fractal con respecto a H como era de esperarse teóricamente.

Dimensión de las superficies de ruptura

A manera de ejemplificación, se utilizan cinco superficies de ruptura de muestras de concreto. De acuerdo al nombre del archivos con sus coordenadas, las superficies se denominan: *4340T*, *PT*, *M1a*, *M2a* y *M3a*. Estos archivos se encuentran anexos en la carpeta **grietas**. Para las primeras dos superficies se cuenta con las superficies de ruptura de ambos lados de la muestra. La Figura 5 muestra una gráfica tridimensional de las rupturas *4340T*.

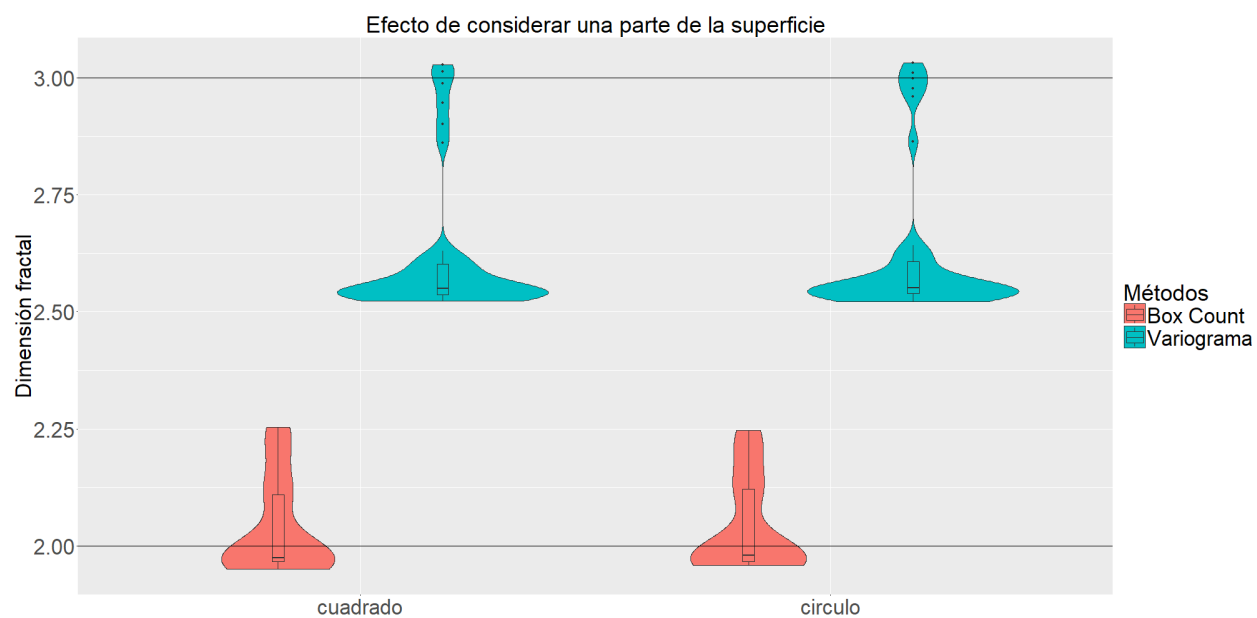


Figura 3: Efecto de la dimensión fractal al considerar únicamente la superficie correspondiente al cilindro de la muestra de concreto.

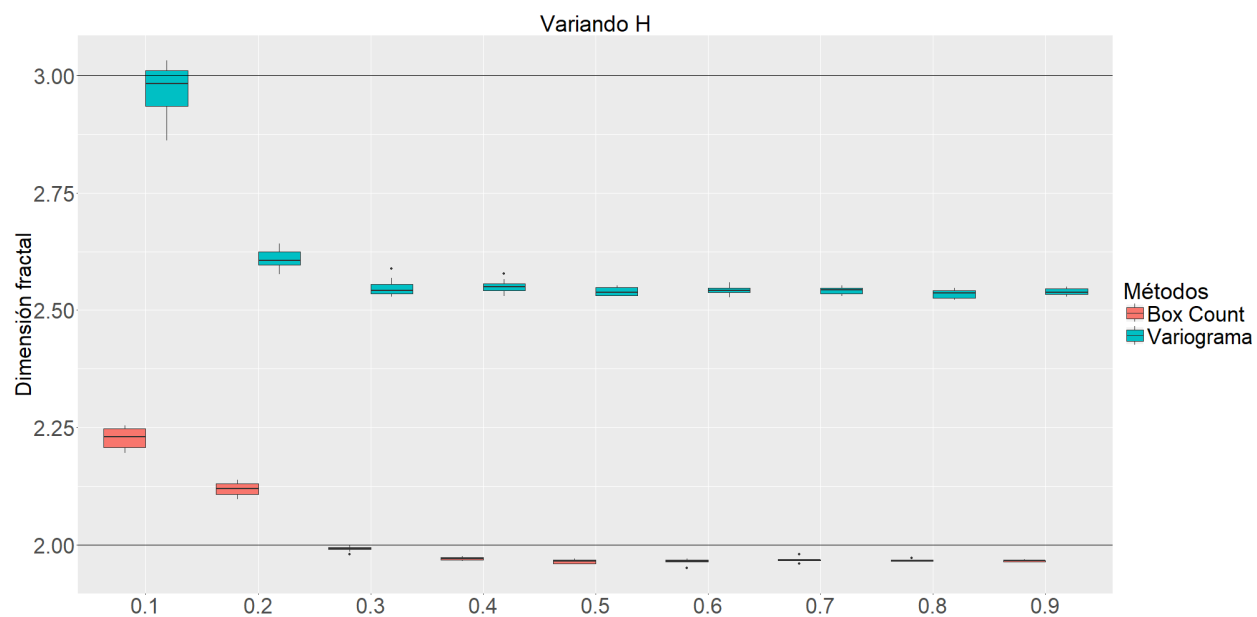


Figura 4: Relación entre la dimensión fractal de la superficie y el valor del parámetro H utilizado para generarla.

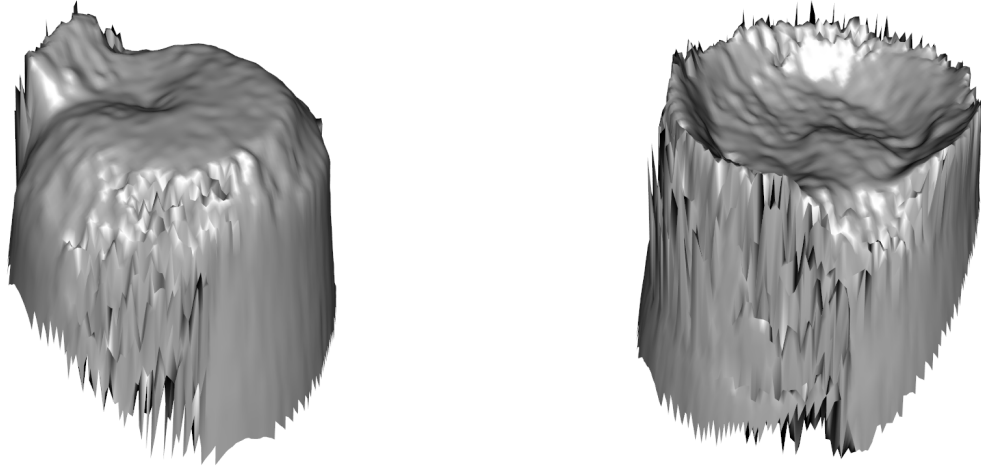


Figura 5: Ejemplo de las rupturas de ambos lados de una muestra de concreto

La dimensión fractal de cada ruptura de acuerdo a los diferentes métodos se muestra enseguida:

muestra	BoxCount	Variograma
4340C1	2.128	2.554
4340C2	2.168	2.526
PT1	2.143	2.536
PT2	2.154	2.524
M1a	2.176	2.561
M2a	2.057	2.591
M3a	2.131	2.549

Análisis de ambos métodos

Un aspecto a resaltar es que las dimensiones fractales obtenidas por los métodos difieren mucho entre si para cada valor de H . Más aún, el método de conteo de cajas otorga dimensiones menores a dos, lo cual no debería estar sucediendo (véase Figura 4). En un principio, podría pensarse que, aunque $D \leq 2$ esta sigue siendo un indicador de la dimensión y que su falla está en las condiciones para calcularlo. En esta idea, aunque $D \neq 3 - H$ si hay una relación que pudiera asociar a una ruptura con un valor de H como parametro para generar su superficie similar; por tanto, pudiéramos hacer una transformación lineal para escalar las dimensiones obtenidas a una mejor cobertura del intervalo $(2, 3)$.

En un análisis más a fondo, tome como ejemplo la ruptura denominada *PT2*, la gráfica log-log del número de cajas ocupadas contra la cantidad de particiones se muestra en la Figura 6. Observe como la linea que interpola esta relación se ajusta muy bien a los datos. La pendiente de la recta corresponde a la dimensión fractal de la superficie.

Por otro lado, los puntos en escala log-log correspondiente del variograma respecto al número de particiones también se ajustan muy bien a una linea recta (véase Figura 7). En este caso, la dimensión corresponde a $D = 3 - \frac{\beta}{2}$, donde β es la pendiente de la recta.

Desde esta perspectiva, podemos tomar a la dimensión calculada por cada método como una métrica diferente escalando a cada en su correspondiente equivalencia de acuerdo a los resultados obtenidos con las superficies fractales.

Comparación visual entre simulación y datos reales

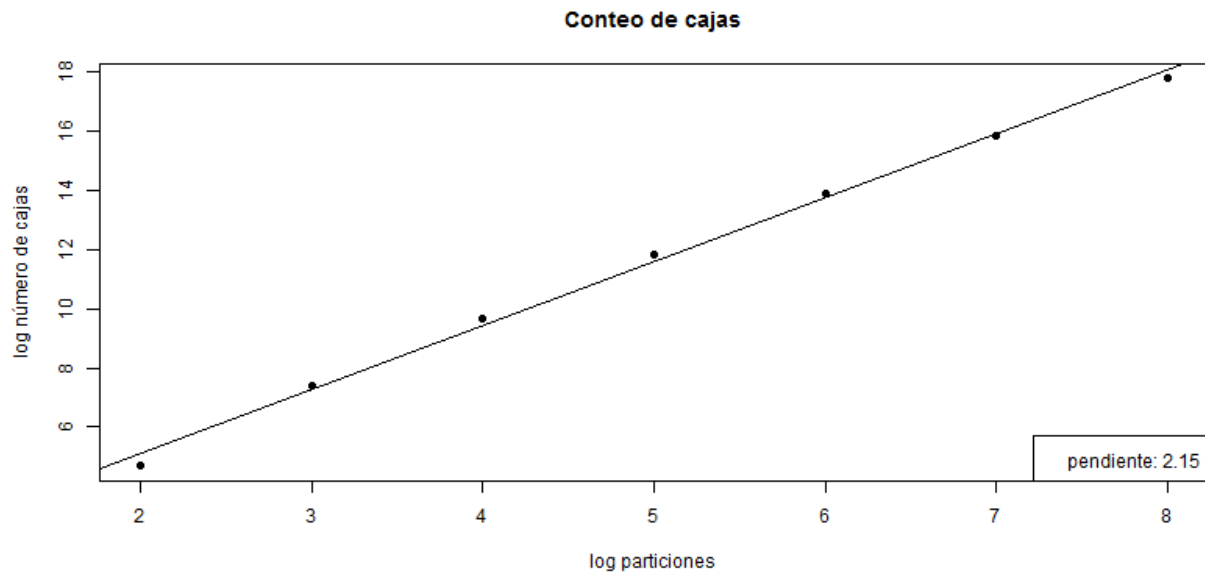


Figura 6: Gráfica de Richardson para el método de conteo de cajas de la ruptura PT2

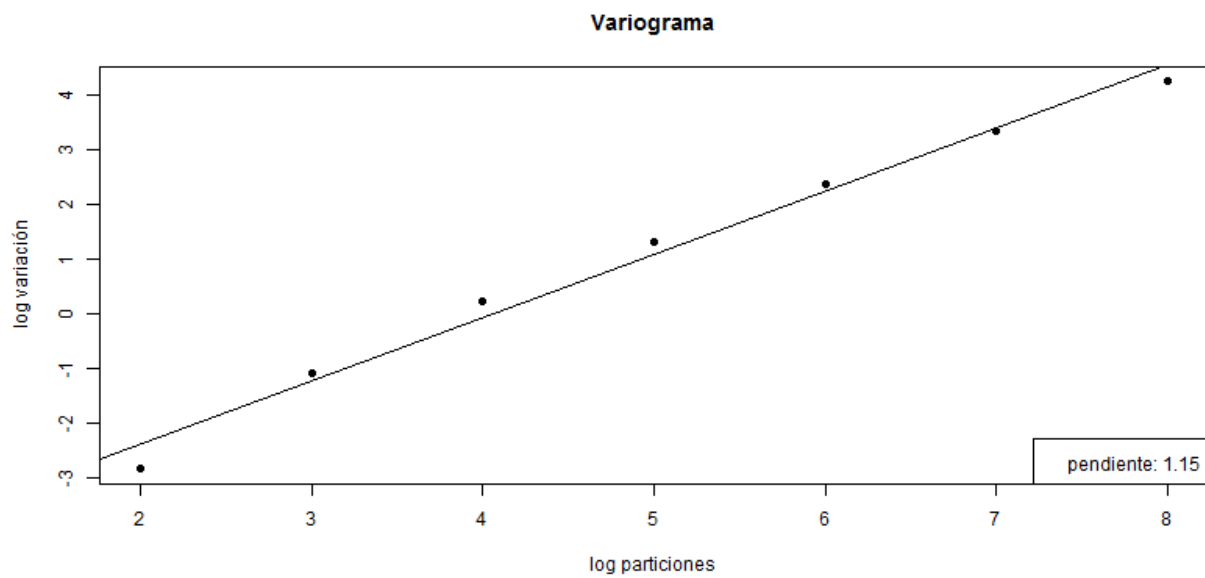


Figura 7: Gráfica de Richardson para el método de variograma de la ruptura PT2

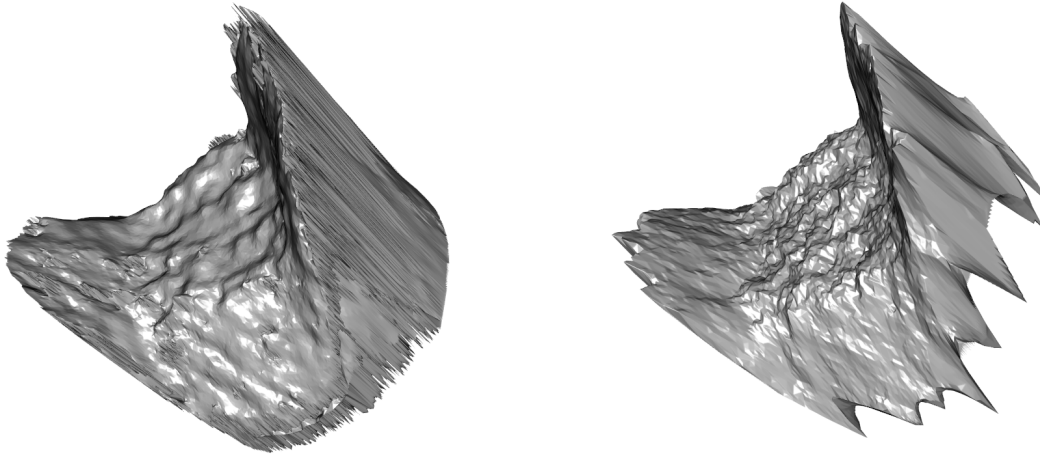
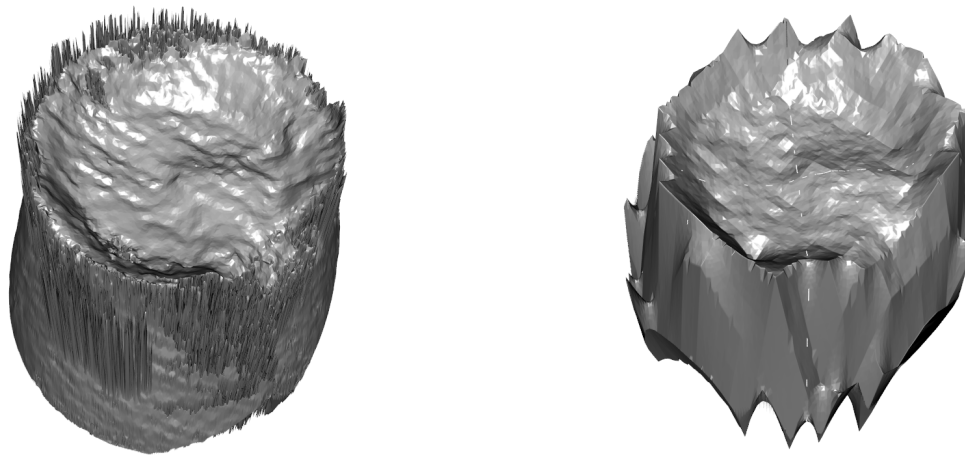


Figura 8: Comparación ruptura PT2 contra una superficie fractal similar



Observe como hay similitud en la rugosidad de las superficies fractales contra las rupturas de las muestras. Para una visualización agradable se utilizó el parámetro `interpolacion=TRUE`. Note como no hay dedicación en hacer una buena similitud en la forma y las orillas de la superficie fractal son mal estimadas.

Conclusiones y trabajo futuro

La construcción de superficies fractales es intuitivo y es relativamente sencillo. Además, las formas y relieves son, para el ojo humano, aceptables. En particular, la rugosidad final de las superficies puede ser controlada en su construcción haciendo uso de algunos resultados de la geometría fractal. Estas características permiten simular superficies similares en relieve a las rupturas de muestras de concreto. Su rugosidad, medida con la dimensión fractal, no se ve afectada si se manipulan o escalan los valores promedios o varianzas de las alturas para asemejarlas aun más a una ruptura.

Existen múltiples formas de estimar la dimensión fractal, en este trabajo se presentaron dos formas, por conteo de cajas y por un modelo de variograma. Ambos métodos proporcionan dimensiones podría decirse en escalas distintas, pero son inalterables, aunque se midan sobre una fracción de la superficie. De este modo, aún partiendo de una superficie generada a partir de la división de cuadrados, se puede aproximar a una que se adapte a la forma de la muestra de concreto.

En este trabajo, solo se consideraron muestras cilíndricas, pero podría extenderse hacia muestras de otras formas, salvo una prueba apropiada de que la discriminación de los puntos de la malla original no afectan a la dimensión de la superficie restante.

Una de las principales dificultades para comparar los métodos de aproximación de la dimensión fractal es la eficiencia de los métodos. Muchos de ellos utilizan un malla tridimensional y miden una característica en dependencia de la escala. Por tanto, haciendo un manejo eficiente de esta discretización de la superficie, se podría estimar mejor los métodos presentados y aplicar muchos otros.

La parte de la visualización de las gráficas resulta difícil. Las superficies resultantes fueron graficadas usando la función `persp3d` de `rgl`, la cual hace una interpolación para dibujarla. Pero si analizamos, se dispone de una nube de puntos y de un conjunto de 4-tuplas que los relaciona entre sí formando cuadrados en el espacio. Se hizo un intento por imprimir estos cuadrados; `rgl` dispone de funciones que permiten hacerlo, pero es un proceso muy tardado, la idea era paralelizar el proceso de dibujo de estos cuadrados. Si se pudiera lograr se tendría una mejor resolución de la superficie que la mostrada y extremadamente suavizada a mi parecer por las interpolaciones.

Otro aspecto en el cual se podría continuar es en utilizar otros algoritmos para generar las superficies. El algoritmo cuadrado-cuadrado (Miller 1986) cumple las mismas propiedades de las dimensiones fractales, pero genera superficies con picos más suaves, quitando el efecto de que los cuadrados iniciales aparecen en la superficie final o se forman quiebres no tan naturales.

Referencias

- Malinverno, Alberto. 1990. "A Simple Method to Estimate the Fractal Dimension of a Self-Affine Series." *Geophysical Research Letters* 17 (11). Wiley Online Library: 1953–6.
- Miller, Gavin SP. 1986. "The Definition and Rendering of Terrain Maps." In *ACM Siggraph Computer Graphics*, 20:39–48. 4. ACM.
- Russ, John C. 2013. *Fractal Surfaces*. Springer Science & Business Media.
- Saupe, Dietmar. 1988. "Algorithms for Random Fractals." *The Science of Fractal Images* 71. New York: Springer-Verlag: 136.