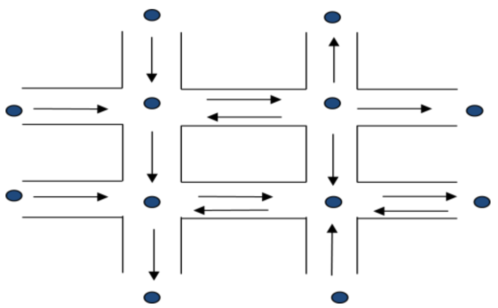
Graphes Orientés et Graphes non Orientés

Définitions et Propriétés

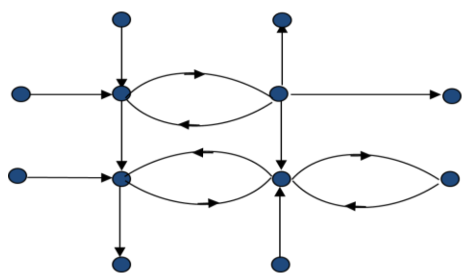
Introduction

- Modélisation de problèmes réels sous forme de graphes
    - Réseau routier, canalisation...
    - Réalisation d'un projet
    - Chaîne de fabrication
    - Agriculture
- Résolution des problèmes par résolution de ces problèmes modélisés par des graphes en utilisant les moyens appropriés

Exemple



Plan de circulation



Après modélisation par un graphe

Définition a

Soit X un ensemble fini de n sommets,

Soit R une relation sur les sommets

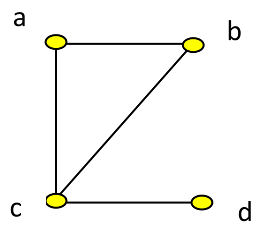
Soit E : {(x,y) / x R y}

G(X,E) est appelé graphe

|X|=n est dit ordre de G : nombre de sommets de G (cardinalité de X)

|E|=m est la taille d G : nombre de couples (x,y) de G (cardinalité de E)

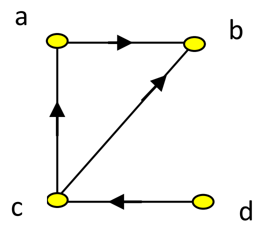
Si x R y est de type



On parle d'**arêtes** entre x et y

Le graphe **G est non orienté**

Si x R y est de type



On parle d'**arcs** (**arêtes orientées**) de x vers y

Le graphe **G est orienté**

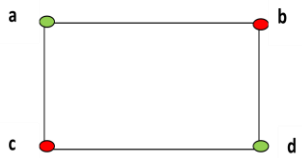
Définition b

Soit G(X,E) un graphe, G(X,E) est appelé graphe biparti si on peut partager l'ensemble de ses sommets X en deux sous-ensembles X1 et X2 /

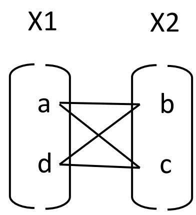
X1 U X2=X

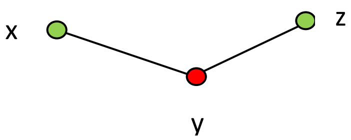
X1 ∩ X2 =Ø

Pour toute arête u(x,y) de E x ∈ X1 et y ∈ X2 (idem x ∈ X2 et y ∈ X1)

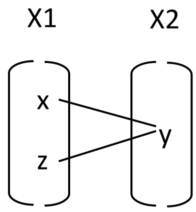


X1 :{a,d} ; X2 :{b,c}





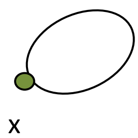
X1 :{x,z} ; X2 :{y}

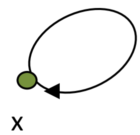


Le sous graphe engendré par X1 (respectivement X2) ne comporte pas d'arêtes.

Définition c

Une arête (respectivement un arc) (x,x) est une boucle

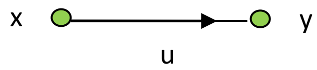




Définition d

Soit G(X,E) un graphe tels que X un ensemble fini de sommets et E ⊂ X*X l'ensemble des arcs (arêtes)

Soit u(x,y) Є E un arc



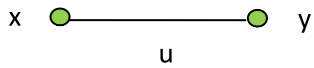
Soit $I : E \longrightarrow X$

$u \longmapsto$ I(u)=x appelé extrémité initiale de u

Soit $T : E \longrightarrow X$

$u \longmapsto$ T(u)=x appelé extrémité terminale de u

Soit u(x,y) Є E une arête

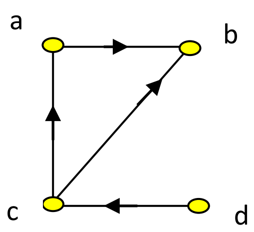


Les sommets x et y sont les extrémités de u

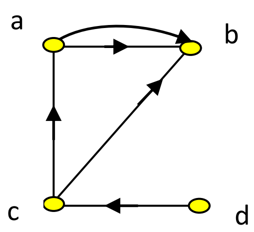
Définition e

Un p-graphe est un graphe orienté dans lequel il n'existe jamais de plus de p arcs de la forme (i,j) entre deux sommets quelconques i et j (pris dans cet ordre)

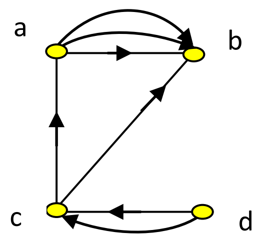
En particulier un 1-graphe est un graphe orienté tel que il n'existe jamais de plus d'un arc de la forme (i,j) ∀ i ∀ j.



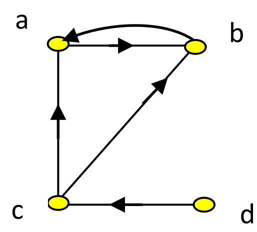
1-graphe



2-graphe



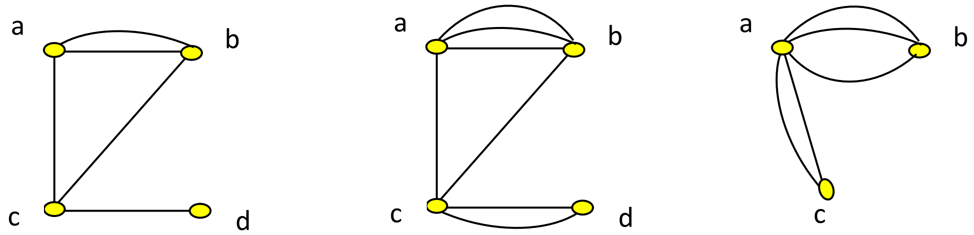
3-graphe



1-graphe

Définition f

Un multigraphe est un graphe pour lequel il existe au moins deux sommets reliés par plus d'une arête

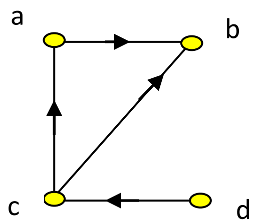


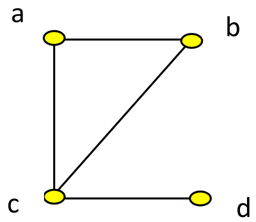
Définition g

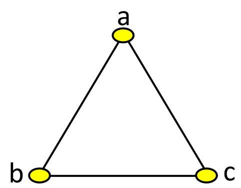
Un graphe est dit simple

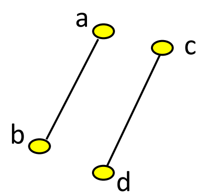
S'il est sans boucles

S'il n'y a jamais plus d'une arête entre deux sommets quelconques









Définition h

Une **chaîne C** d'extrémités x_0 et x_n est une séquence alternée de sommets et d'arêtes (x_0 u_0 x_1 u_1 x_2…x_n) telle que chaque sommet est relié au suivant par une arête (x_i et x_{i+1} sont les extrémités de u_i).

La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes composant cette chaîne.

Une chaîne est dite **élémentaire** si elle passe une et une seule fois par chaque **sommet**

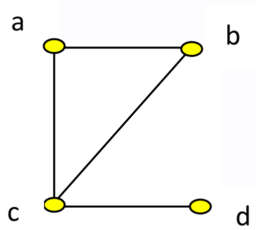
Une chaîne est dite **simple** si elle passe une et une seule fois par chaque **arête**

Pour les graphes simples, une chaîne peut être définie par la succession des sommets qui la composent

Pour les multigraphes, une chaîne peut être définie soit :

par la succession des sommets et arêtes qui la composent

par la succession des arêtes qui la composent



C1 a c d chaîne élémentaire (simple)

C2 b a c d chaîne élémentaire (simple)

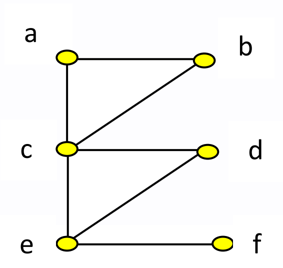
C3 a b c d chaîne élémentaire (simple)

C4 d c a b c chaîne simple

Définition i

Un **cycle Cy** est une chaîne dont les extrémités coïncident (c'est à dire dont l'origine et l'extrémité sont identiques) dont toutes les arêtes sont distinctes.

Un cycle élémentaire est un cycle minimal (pour l'inclusion) c'est-à-dire ne contenant strictement aucun cycle. En parcourant un cycle élémentaire, on ne rencontre pas deux fois le même sommet (sauf le sommet choisi comme origine du parcours)



Cy 1 a b c a cycle élémentaire

Cy 2 a b c d e c a cycle non élémentaire (composé de cycles)

Cy 3 a b c e d c a cycle non élémentaire

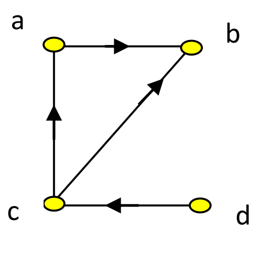
Définition j

Un **chemin Ch** d'extrémités x0=I(u_0) et x_n=T(u_{n-1})est une séquence alternée de sommets et d'arcs telle que x_i=I(u_i) et x_{i+1} = T(u_i).

Un chemin est dit **élémentaire** s'il passe une et une seule fois par chaque **sommet**

Un chemin dit **simple** s'il passe une et une seule fois par chaque **arc**

Pour les graphes simples, un chemin peut être défini par la succession des sommets qu'il rencontre

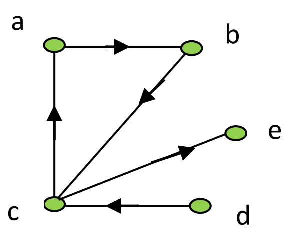


Ch1 : d c a b est un chemin élémentaire (simple)

b a c d n'est pas un chemin (chaîne orientée)

a b c d n'est pas un chemin (chaîne orientée)

Ch2 : d c b est un chemin élémentaire (simple)



Ch1' : d c a b c e est un chemin simple

Ch2' : d c a b c est un chemin simple

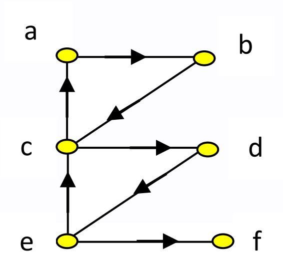
d c b a c e n'est pas un chemin (chaîne orientée)

e c a b c n'est pas un chemin (chaîne orientée)

Définition k

Un **circuit Cr** est un <u>chemin</u> dont les extrémités coïncident I(u_0)=T(u_{n-1}) et dont tous les arcs sont distincts.

Un circuit élémentaire est un circuit tel qu'en le parcourant on ne rencontre pas deux fois le même sommet (sauf le sommet choisi comme origine du parcours)



Cr 1 a b c a   circuit élémentaire

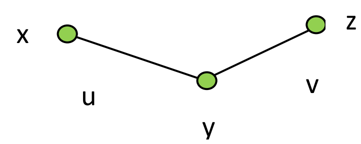
Cr 2 a b c d e c a   circuit non élémentaire (composé de circuits)

Cy a b c e d c a   n'est pas un circuit (cycle non élémentaire orienté)

Remarque : Pas de cycles (respectivement circuits) simples

Définition l

Deux sommets x et y sont dits <u>adjacents</u> si l'arête u(xy) Є E



u est dite <u>incidente</u> au sommet x (respectivement y)

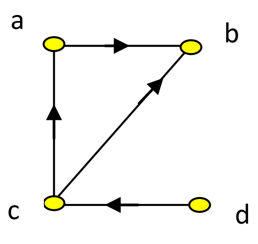
Deux arêtes u et v sont dites adjacentes si elles ont une extrémité commune (y)

Définition m

Soit G(X,E) un graphe orienté, on appelle demi-degré intérieur (respectivement extérieur) d'un sommet x qu'on note $d^-_G(x)$ (respectivement $d^+_G(x)$) le nombre d'arcs u de E tel que x=T(u) (respectivement I(u))

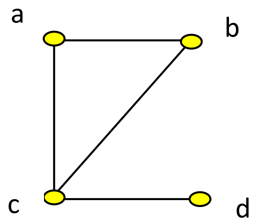
La quantité $d_G(x)= d^+_G(x)+ d^-_G(x)$ est appelée degré du sommet x.

un sommet x de degré 0 ($d_G(x)=0$) est dit sommet isolé



Sommet x	$d^+_G(x)$	$d^-_G(x)$	$d_G(x)$
A	1	1	2
B	0	2	2
C	2	1	3
D	1	0	1

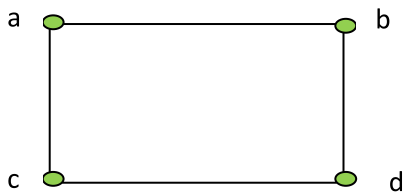
La notion $d_G(x)$ est également utilisée pour les graphes non orientés, elle désigne le nombre d'arêtes incidentes à x.



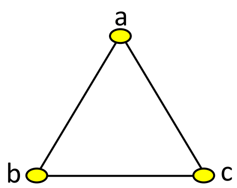
Sommet x	$d_G(x)$
a	2
b	2
c	3
d	1

Le degré maximum d'un graphe noté $\Delta(G)$ est défini par $\Delta(G) = Max_{x\in X}\left(\left(d_G(x)\right)\right.$ (pour l'exemple $\Delta(G) = 3$)

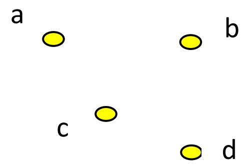
Un graphe régulier est un graphe tel que $\forall x \in X\ d_G(x) = d$



$\forall x \in X\ d_G(x) = 2$

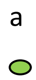


$\forall x \in X\ d_G(x) = 2$

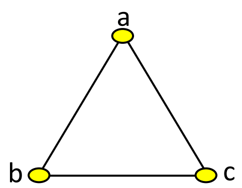


$\forall x \in X\ d_G(x) = 0$

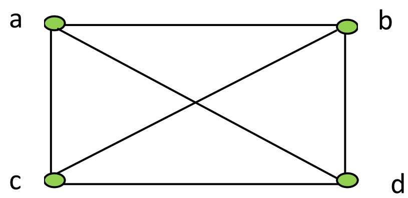
Un graphe complet est un graphe régulier tel que $\forall x \in X\ d_G(x) = n - 1$



$\forall x \in X\ d_G(x) = 0 = (1-1)$



$\forall x \in X\ d_G(x) = 2 = \ (3-1)$



$\forall x \in X\ d_G(x) = 3 = (4-1)$

Un sommet x de degré 0 $d_G(x)=0$ est dit sommet isolé.

Théorème

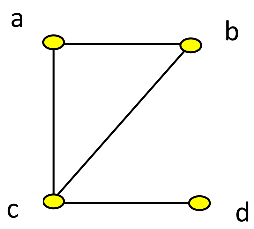
Soit G(X,E) un graphe orienté on a :

$$\sum_{x\in X} d_G^+\,(x) = \sum_{x\in X} d_G^-\,(x) = |E|$$

Sommet x	$d^+_G(x)$	$d^-_G(x)$
A	1	1
B	0	2
C	2	1
D	1	0
	Σ=4=|E|	Σ=4=|E|

Corollaire 1

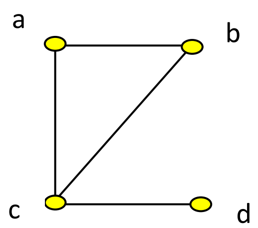
$$\sum_{x \in X} d_G(x) = 2|E| \equiv 0 (mod\ 2)$$

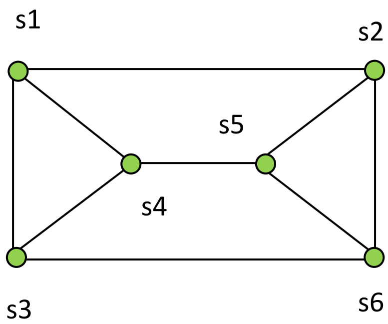


Sommet x	$d_G(x)$
a	2
b	2
c	3
d	1
	Σ=8=2|E|

Corollaire 2

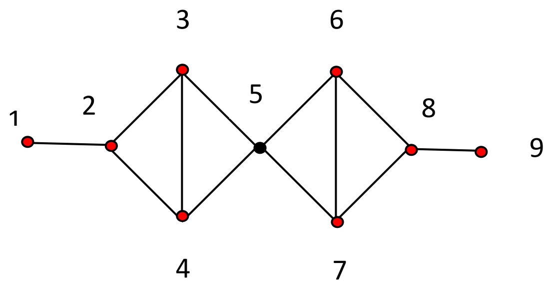
Le nombre de sommets de degré impair est pair





nombre = 2 (pair)

nombre=6 (pair)



nombre=8 (pair)

On considère l'ensemble des sommets X :{x1,x2,…,xn}

D'après le corollaire 1 $d_G(x1)+ d_G(x2)+ d_G(x3)+…+ d_G(xn)=2|E|$

On pose X = X1∪X2 avec

X1 : {x∈X/ $d_G(x)$(mod2) =1} les sommets de degré impair

On renomme les sommets de X1/ X1 :{x_{11},x_{12},…,x_{1n1}} ; |X1|=n1

X2 : {x∈X/ $d_G(x)$(mod2) =0} les sommets de degré pair

On renomme les sommets de X2/ X2 :{x_{21},x_{22},…,x_{2n2}} ; |X2|=n2

On cherche à montrer que **|X1|=n1 est pair**

$d_G(x_{11})+ d_G(x12)+ \ldots+d_G(x1n1)+ d_G(x_{21})+ d_G(x_{22})+\ldots+ d_G(x_{2n2})=2|E|$

$d_G(x)(\ mod2) =1 \Rightarrow d_G(x) =2k+1$

$d_G(x)(\ mod2) =0 \Rightarrow d_G(x) =2p$

$d_G(x_{11})+ d_G(x_{12})+ \ldots+d_G(x_{1n1})+ d_G(x_{21})+ d_G(x_{22})+\ldots+ d_G(x_{2n2})=2|E|$

$(2k_1+1)+(2k_2+1)+\ldots+(2k_{n1}+1) +2p_1+2p_2+\ldots+2p_{n2}=$

$2K +2P+1+1+\ldots+1=2L+n1=2|E|$ => **n1 est pair**

Définition n

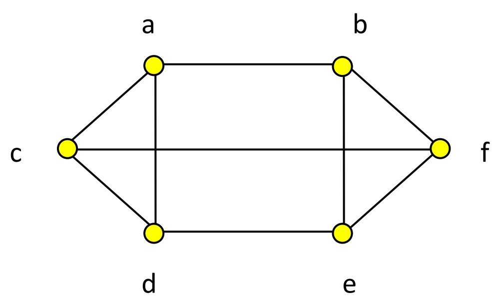
Deux graphes G1(X1,E1) et G2(x2,E2) sont dits isomorphes s'il existe deux bijections :

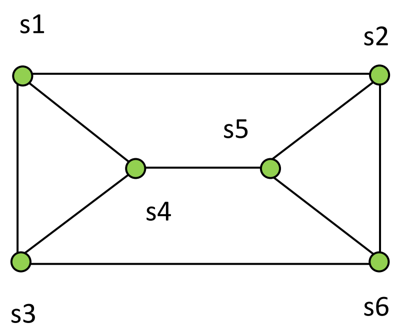
$B_X\ X1 \longrightarrow X2$

$B_E\ E1 \longrightarrow E2$

tel que 2 arcs qui se correspondent dans B_E aient pour extrémités initiales et terminales des sommets qui se correspondent dans B_X

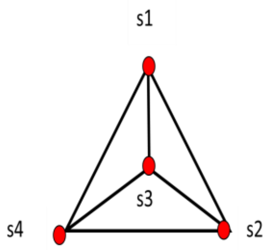
Autrement c'est le même graphe représenté de deux manières différentes.

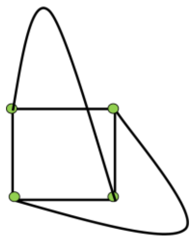


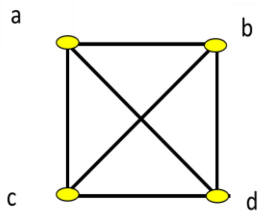


Ces deux graphes sont isomorphes, une des bijections possibles est :

$$B_X : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} s1 \\ s2 \\ s4 \\ s3 \\ s6 \\ s5 \end{pmatrix} \qquad B_E : \begin{pmatrix} (ab) \\ (bf) \\ (de) \\ (ac) \\ (cd) \\ (ad) \\ (be) \\ (cf) \\ (fe) \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} (s1s2) \\ (s2s5) \\ (s3s6) \\ (s1s4) \\ (s4s3) \\ (s1s3) \\ (s2s6) \\ (s4s5) \\ (s5s6) \end{pmatrix}$$





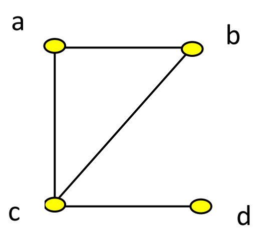


Définitions o : Sous graphe ,Graphe partiel, Sous Graphe partiel

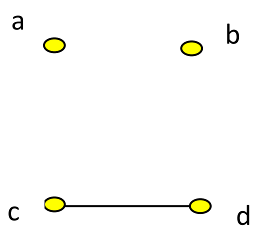
On considère un graphe G(X,E).

a- Soit E'⊂ E, le graphe G'(**X,E'**) est appelé graphe partiel de G.

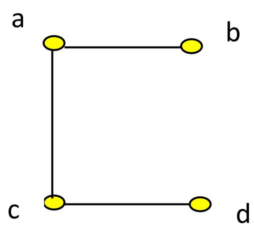
Un graphe partiel comporte tous les sommets de G et une partie de E.



G(X,E)



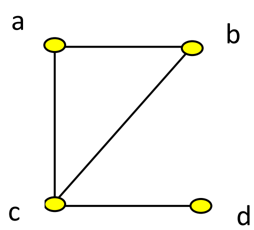
G1'(X,E1')



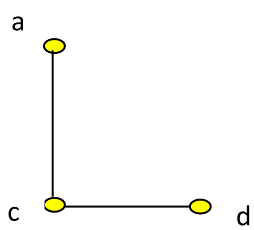
G2'(X,E2')

b- Soit X'⊂ X et soit E'' :{(xy) Є E/(xy) Є X'},le graphe V(**X',E''**) est appelé sous-graphe de G.

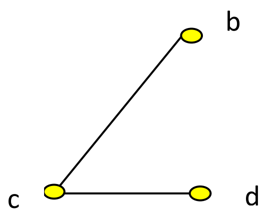
Un sous-graphe comporte un sous ensemble de sommets et toutes les arêtes dans E reliant ces sommets.



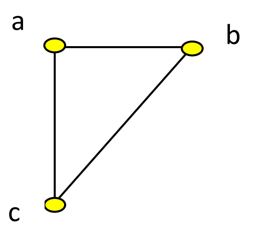
G(X,E)



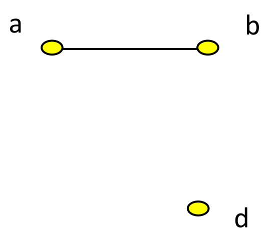
V1'(X1',E1'')



V2'(X2',E2'')



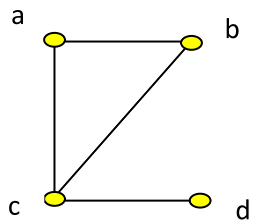
V3'(X3',E3'')



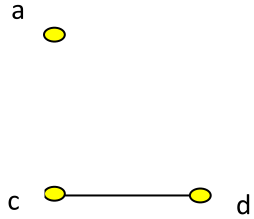
V4'(X4',E4'')

c- soit X'⊂ X ,Soit E ‴⊂ E (E ‴⊂ E ″), le graphe W(**X',E‴**) est appelé sous-graphe partiel de G.

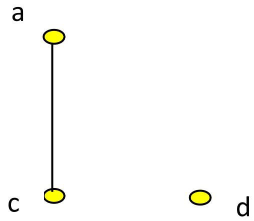
Un sous-graphe partiel est formé d'un sous-ensemble de sommets et une partie des liaisons entre les sommets X' de G.



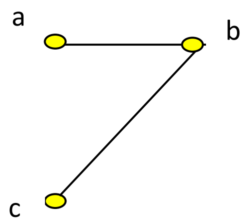
G(X,E)



W1(X1,E1‴)



W2(X2,E2‴)



W3(X3,E3‴)

W4(X4,E4‴)

Un sous-graphe partiel est formé d'un sous-ensemble de sommets et une partie des liaisons entre les sommets X' de G.

Définition p : Connexité et Forte Connexité

A- Forte connexité

Soit G(X,E) un graphe orienté
Soit R1 la relation suivante:
(x,y) Є X*X

x R1 y ⟺ { il existe un chemin de x à y
et
il existe un chemin de y à x

ou x=y

- R1 est une relation d'équivalence

R1 est réflexive (un sommet est un chemin particulier), symétrique et transitive

Réflexive x R1 x

Symétrique x R1 y ⟺ { il existe un chemin de x à y -1-
et
il existe un chemin de y à x -2-

⟺ { il existe un chemin de y à x -2-
et
il existe un chemin de x à y -1-

⟺ y R1 x

transitive x R1 y $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{il existe un chemin de x à y} & \text{-1-} \\ \text{et} & \\ \text{il existe un chemin de y à x} & \text{-2-} \end{cases}$

y R1 z $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{il existe un chemin de y à z} & \text{-3-} \\ \text{et} & \\ \text{il existe un chemin de z à y} & \text{-4-} \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{il existe un chemin de x à z} & \text{-1- et -3-} \\ \text{et} & \\ \text{il existe un chemin de z à x} & \text{-4- et-2-} \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ x R1 z

- Chaque classe d'équivalence est appelée **composante fortement connexe** notée (cfc)
- Au graphe G(X,E) on associe le graphe réduit $\hat{G} = (\hat{X}, \hat{E})$

  $\hat{X}$: Chaque cfc est un sommet dans $\hat{X}$

  $\hat{E}$: Les liaisons entre les cfci sont telles qu'on ne considère qu'une seule liaison entre cfci et cfcj s'il en existe plusieurs

  $\hat{G}$: Est un graphe **sans circuit**

- Un graphe est dit **fortement connexe** s'il ne possède qu'**une seule** composante fortement connexe

Algorithme de Détermination de composantes fortement connexes

1. Soit **s** un sommet du graphe
2. Etapes de recherche de la composante fortement connexe **cfc** contenant **s**:

   – Attribuer à **s** les signes **+** et **–**

   – Si l'arc u(xy) est tel que

   x marqué par **+** et y non marqué par **+** alors marquer y par **+**

   – Si l'arc u(xy) est tel que

   y marqué par **-** et x non marqué par **-** alors marquer x par **–**

L'ensemble des sommets X_s marqués à la fois par (**+**) et par (**-**) forment la composante fortement connexe contenant **s**

Pour déterminer les autres composantes fortement connexes du graphe

Ignorer (supprimer) les marquages restants

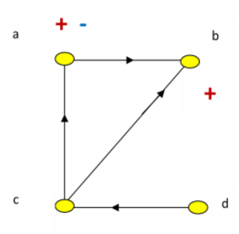
Soit un sommet s' appartenant au sous graphe $X \backslash X_s$

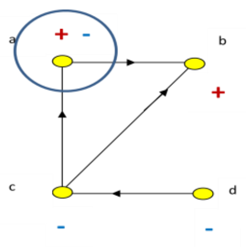
Refaire l'étape 2 pour obtenir la cfc contenant s'

Procéder ainsi jusqu'à traiter tous les sommets ⇨ chaque sommet appartient à une composante fortement connexe

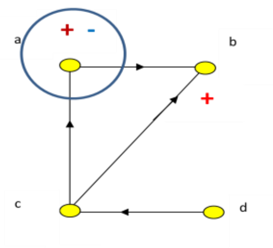
Application de l'algorithme

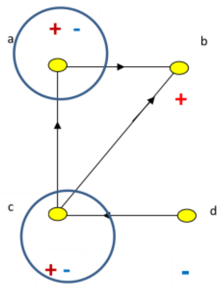
Exemple 1

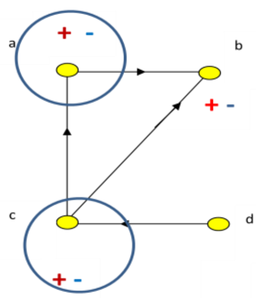


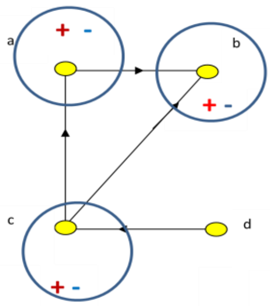


Choix : a



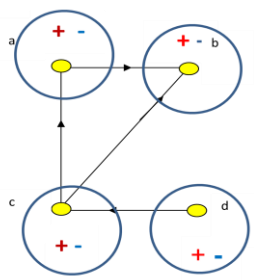






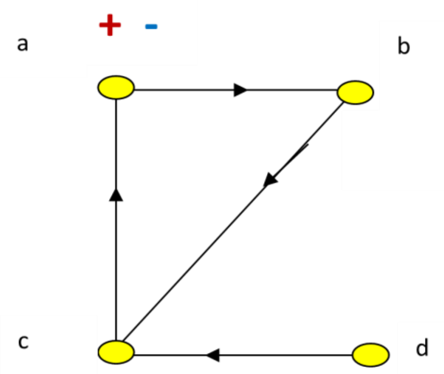
Choix : c

Choix : b

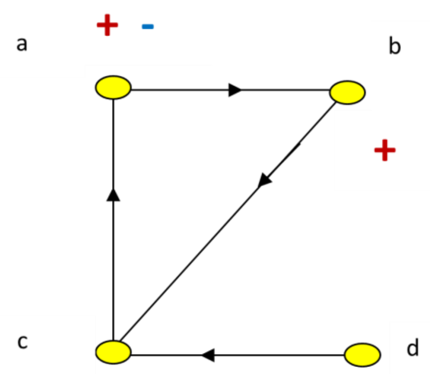


Choix : d

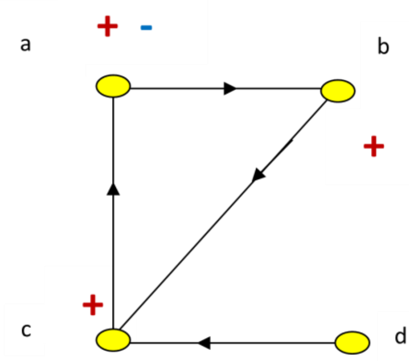
Exemple 2



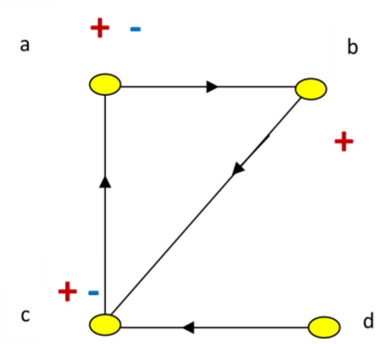
Choix : a



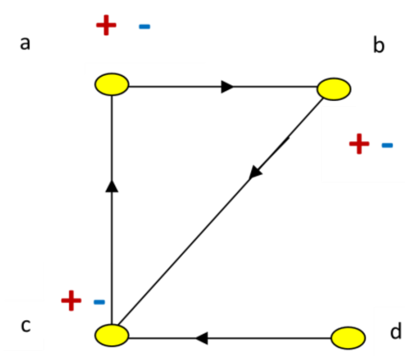
marquage +: b



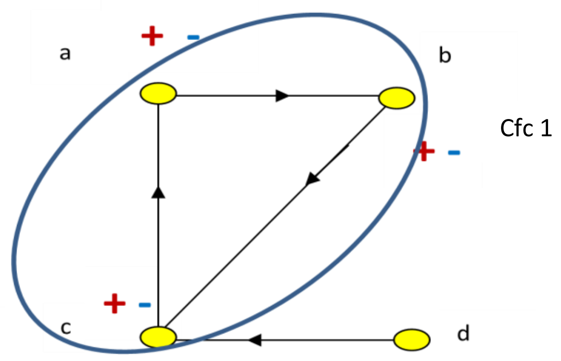
marquage + : c

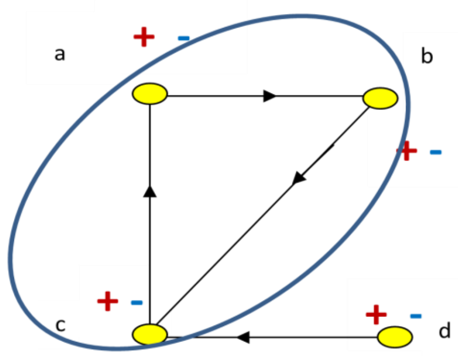


marquage - : c

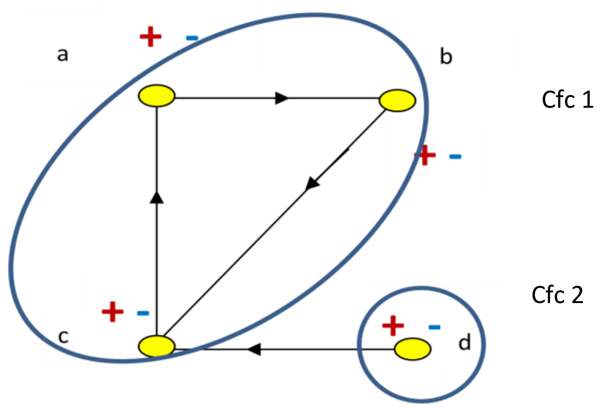


marquage - : b

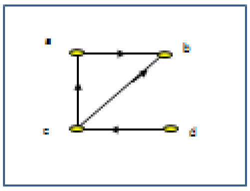




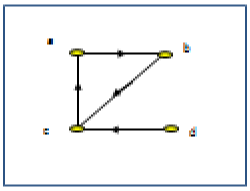
Choix : d



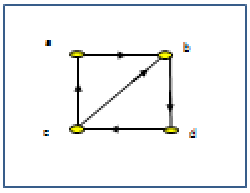
Exemples



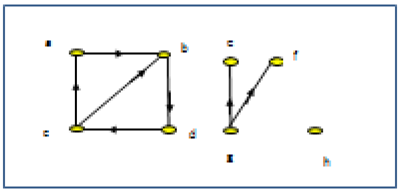
4 composantes fortement connexes



2 composantes fortement connexes

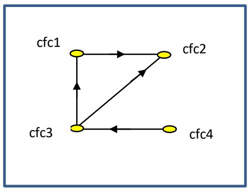


1 composante fortement connexe
Graphe fortement connexe

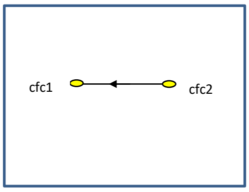


5 composantes fortement connexes

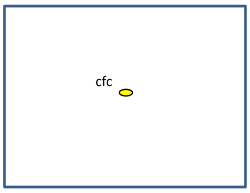
Exemples (suite)



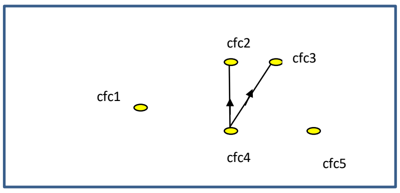
Graphe réduit :4 cfc



Graphe réduit : 2 cfc



Graphe réduit :1 cfc



Graphe réduit :5 cfc

B- Connexité

Soit G(X,E) un graphe

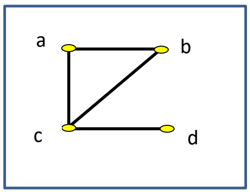
Soit R2 la relation suivante:

(x,y) Є X*X x R2 y $\Longleftrightarrow$ il existe une chaîne entre x et y

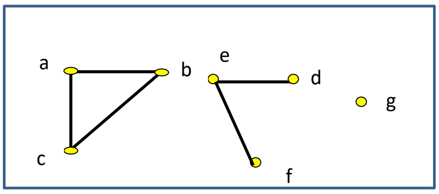
- R2 est une relation d’équivalence R2 est { réflexive, symétrique, transitive
- Chaque classe d’équivalence est appelée **composante connexe** notée (cc)

Un graphe est dit **connexe** s’il ne possède qu’**une seule** composante connexe

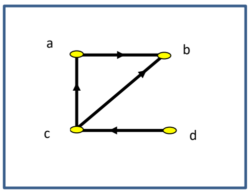
Exemples



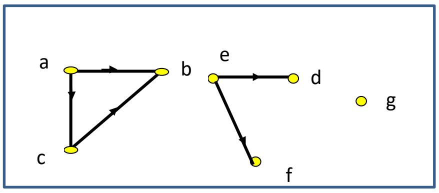
Une composante connexe
Graphe connexe



3 composantes connexes
Graphe non connexe



Une composante connexe
Graphe connexe
4 composantes fortement connexes



3 composantes connexes
Graphe non connexe
7 composantes fortement connexes

37

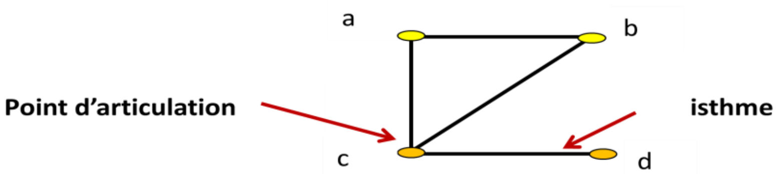
Définition q : point d’articulation/isthme

- **point d’articulation**

Un point d’articulation est un sommet dont l’enlèvement augmente le nombre de composantes connexes

- **isthme**

Un isthme est une arête dont l’enlèvement augmente le nombre de composantes connexes



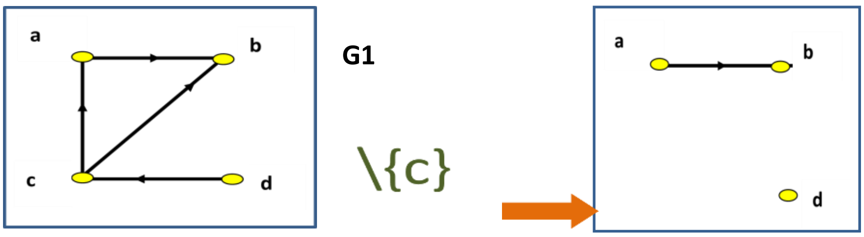
Définition r : h_connexe/h_arête connexe

Soit h Є N

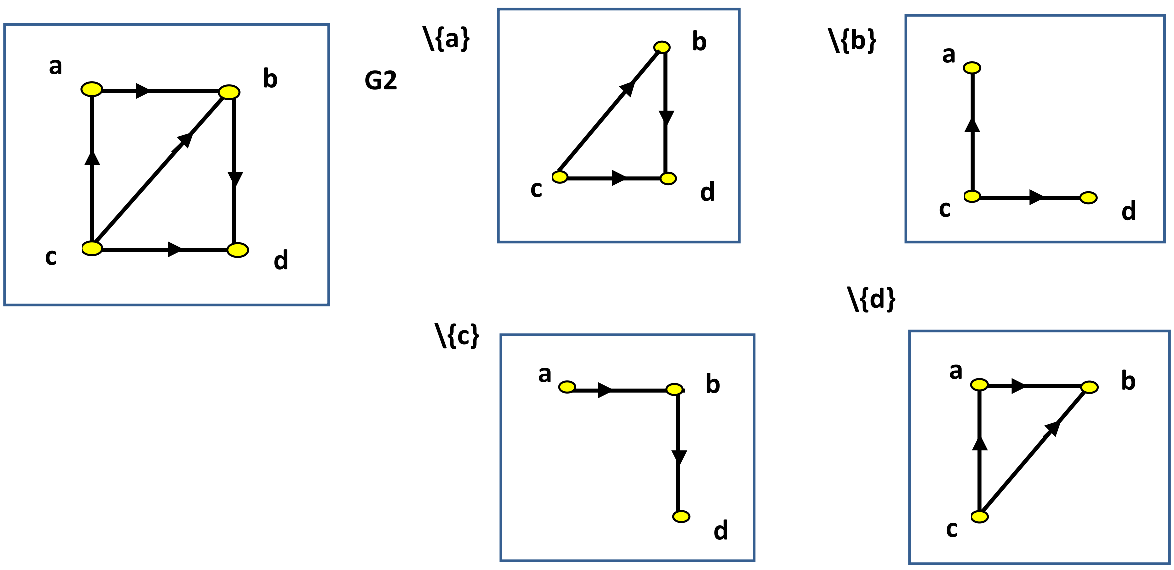
- Un graphe est dit h_connexe (respectivement h_arête connexe) si l'enlèvement de tout ensemble de (h-1) sommets et les arêtes adjacentes à ces sommets (respt (h -1) arêtes) n'augmente pas le nombre de composantes connexes.
- La connectivité d'un graphe (respectivement l'arête connectivité d'un graphe) est égale au nombre minimum de sommets (respt d'arêtes) qu'il faut supprimer pour déconnecter le graphe.

Exemples

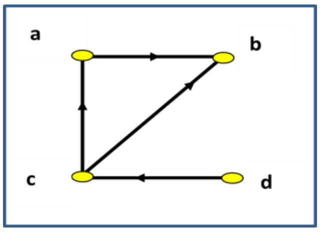
- Le graphe G1 n'est pas 2_connexe, il existe un ensemble formé d'1 sommet dont l'enlèvement augmente le nombre de c.c : {c}.



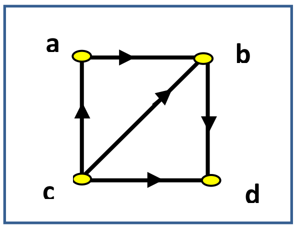
- Le graphe G1 est 1_connexe
- Le graphe G2 est 2_connexe, l'enlèvement de tout ensemble formé d'1 sommet n'augmente pas le nombre de c.c :



- Les graphes G1 et G2 ne sont pas 3_connexe, l'enlèvement de l'ensemble {c,b} augmente le nombre de c.c : 2 composantes connexes



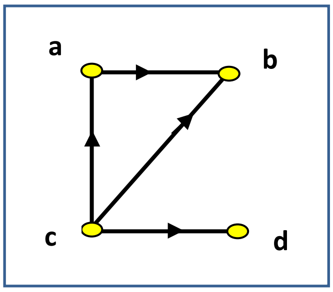
G1



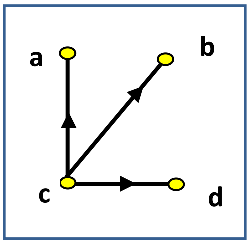
G2

\{c,b}

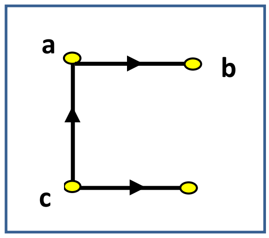
- La connectivité du graphe G1 est égale à 1.
- La connectivité du graphe G2 est égale à 2.
- Le graphe G1 est n’est pas 2_arêtes connexe, l’enlèvement de l’arête {(c,d)} augmente le nombre de c.c :



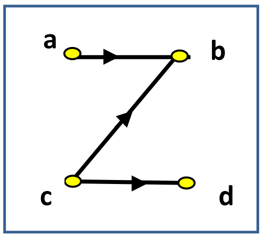
\{(a,b)}



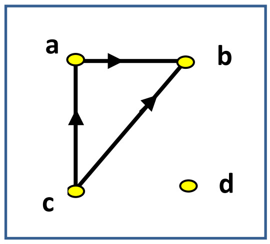
\{(c,b)}



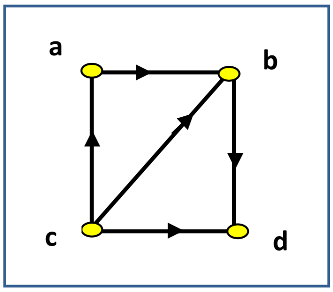
\{(a,c)}



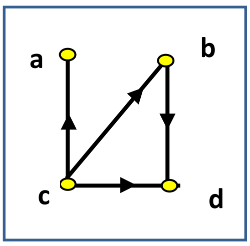
\{(c,d)}



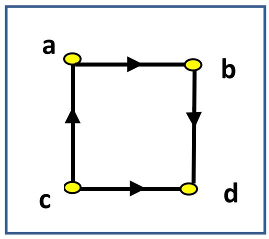
- Le graphe G2 est 2_arêtes connexe, l’enlèvement de tout ensemble formé d’1 arête n’augmente pas le nombre de c.c :



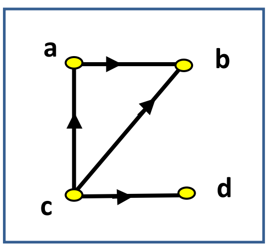
\{(a,b)}



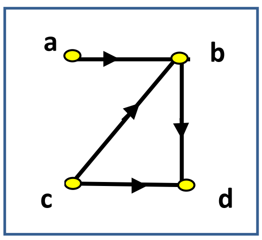
\{(c,b)}



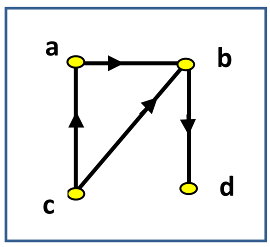
\{(b,d)}



\{(a,c)}



\{(c,d)}



- Les graphes G1 et G2 ne sont pas 3_arêtes connexe, l'enlèvement de l'ensemble {(a,b), (a,c)} par exemple augmente le nombre de c.c : 2 composantes connexes
- L'arête connectivité du graphe G1 est égale à 1.
- L'arête connectivité du graphe G2 est égale à 2.

Remarque :

La connectivité et l'arête connectivité d'un graphe ne sont pas toujours égales.