كلية العلوم ببنزرت
Faculté des Sciences de Bizerte

Concepts de base de la théorie des ensembles

2L GLSI

H. Merdassi

Introduction

La théorie des langages est un socle de l'informatique théorique qui étudie l'ensemble des théories fondées pour définir et présenter la syntaxe des langages de programmation. La théorie des langages, comme on peut la paraphraser aussi par l'algèbre des langages, est bâtie sur une base mathématique de la théorie des ensembles. A cet effet, nous allons consacrer ce premier chapitre à un rappel mathématique qui présente quelques notions de la théorie des ensembles.

Ensembles

1. On appelle un ensemble E toute collection d'objets appelés éléments de l'ensemble E. Exemple : E = {1, 2 ,3}.

- Si le nombre de ces objets est fini, on l'appelle cardinal de E et on note card E.
- Si E possède une infinité d'objets, on dit qu'il est de cardinal infini.

2. L'ensemble vide noté ∅, est l'ensemble qui ne contient aucun élément, ainsi card ∅=0 ;

3. L'ensemble des parties de E noté P(E), est l'ensemble des sous-ensembles de E.

Exemple : P({1,2,3})={∅ ,{1},{2},{3} ,{1,2} ,{1,3} ,{2,3} , {1,2,3} }

Ensembles

En pratique

Pour définir un ensemble, il existe deux façons :

1. Donner la liste de ses éléments. Exemple : $E = \{1,2,3\}$ est un ensemble avec card $E=3$.
2. Donner le critère d'appartenance. Exemple : $F = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 0\}$ est un ensemble de cardinal infini.

Ensembles

Opérations sur les ensembles

Soient E et F deux ensembles de $\mathbb{R}$, nous définissons les différentes opérations ensemblistes sur E et F comme suit :

L'inclusion : $E \subset F : \forall x \in E \Rightarrow x \in F$

L'union U : $E \cup F = \{x \in \ / x \in E \text{ ou } x \in F\}$

L'intersection : $E \cap F = \{x \in / x \in E \text{ et } x \in F\}$

Le complémentaire de F dans E (avec $F \subset E$) : $C_E F = \{x \in \mathbb{R} / x \in E \text{ et } x \notin F\}$

Le produit cartésien : $E X F = \{(x,y) \in \mathbb{R} / x \in E \text{ et } y \in F\}$

Relation

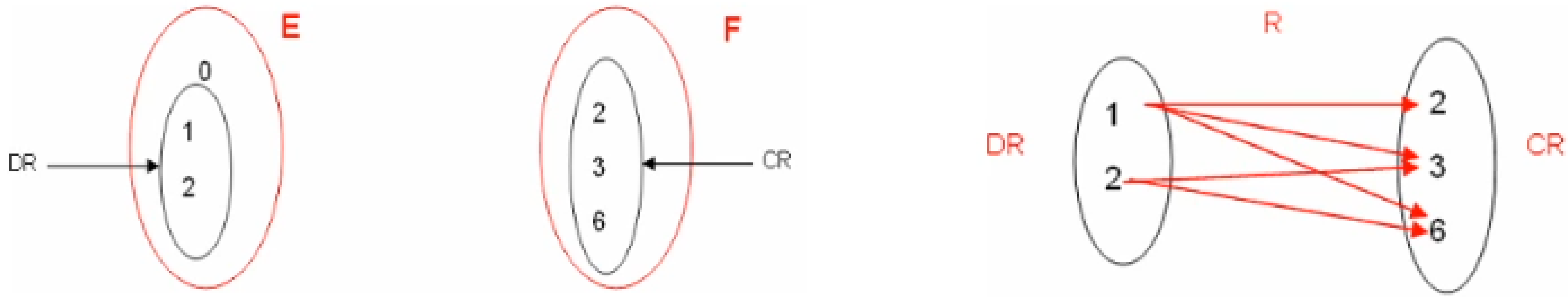
Relation

Soient E et F deux ensembles

- Une relation R de E dans F est un sous ensemble des couples (x, y) du E x F tel que x R y.
- Une relation R sur un ensemble E est un sous ensemble des couples (x, y) du produit cartésien E x E tel que x R y.

Exemple

Soit R est définie comme suit : x est strictement inférieur à y et $x \neq 0$. Le



- ExF = {(1,2), (1,3), (1,6), (2,2), (2,3), (2,6), (0,2), (0,3),(0,6)}
- Le sous ensemble du produit cartésien qui vérifie cette relation est {(1,2), (1,3), (1,6), (2,3), (2,6)}.

Relation

Relation d'équivalence

Définition

On dit qu'une relation R est une relation d'équivalence si elle est :

- symétrique : $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ xRy \Rightarrow yRx,$
- réflexive : $\forall x \in E,\ xRx,$
- transitive : $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \forall z \in E,\ (xRy \text{ et } yRz) \Rightarrow xRz.$

Dans le cas d'une relation d'équivalence, deux éléments en relation sont aussi dits équivalents.

Relation

Relation d'équivalence

Exemples:

1. La relation R « être parallèle » est une relation d'équivalence pour l'ensemble E des droites affines du plan :
   - réflexivité : une droite est parallèle à elle-même,
   - symétrie : si D1 est parallèle à D2 alors D2 est parallèle à D1,
   - transitivité : si D1 parallèle à D2 0 et D2 parallèle à D3 alors D1 est parallèle à D3.
2. La relation « être du même âge » est une relation d'équivalence.
3. La relation « être perpendiculaire » n'est pas une relation d'équivalence (ni la réflexivité, ni la transitivité ne sont vérifiées).

Relation

Relation d’équivalence

Classe d’équivalence:

Soit R une relation d’équivalence sur un ensemble E. Soit $x \in E$, la classe d’équivalence de x est l’ensemble des éléments qui sont en relation avec x.
On note cette ensemble par : $cl(x) = \{y \in E \mid y \, R \, x\}$.

Exemple

La relation « être du même âge » est une relation d’équivalence. Si on prend une personne appelée Ali et âgée de 20 ans. Donc la classe d’équivalence de Ali par cette relation est l’ensemble des personnes qui ont le même âge que lui.

Relation

Relation d'ordre

Définition:

Soit E un ensemble. Une relation binaire R dans E est une relation d'ordre si elle est :

- Réflexive : $\forall x \in E,\ xRx$
- Antisymétrique : $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ (xRy \text{ et } yRx) \Rightarrow x = y$
- Transitive : $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \forall z \in E,\ (xRy \text{ et } yRz) \Rightarrow xRz$

Exemple

- La relation d'ordre $\leq$ dans l'ensemble des réels.
- La relation d'inclusion sur $\subset$ les parties d'un ensemble.
- La relation $x < y$ sur $\mathbb{R}$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas réflexive.

Relation

Relation d'ordre total

Définition:

On dit qu'une relation R dans un ensemble E est une relation d'ordre total si tous les éléments de E sont comparables par cette relation.

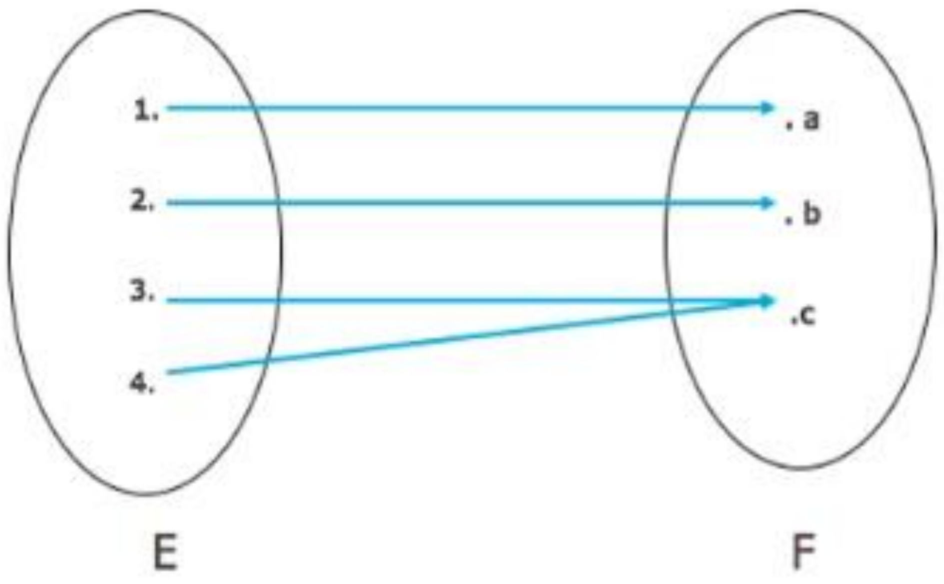
Exemple

- Etant donnés deux nombres réels x et y , on a toujours $x \leq y$ ou $y \leq x$:
- La relation d'inclusion entre sous-ensembles d'un ensemble E n'est pas une relation d'ordre total sur P(E). Il existe des ensembles tel que le premier ne soit pas inclus dans le second, ni le second inclus dans le premier. Par exemple $[1, 3] \not\subset [0, 2]$ et $[0, 2] \not\subset [1, 3]$ pour des intervalles de $\mathbb{R}$.

Relation

Application

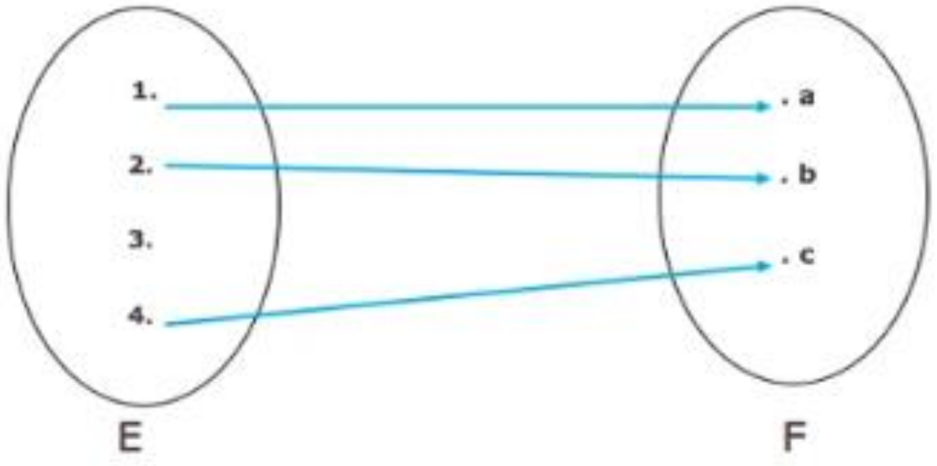
La relation définit dans le schéma ci-dessous est une application car tout élément de E a une image dans F.



Fonction

Fonction

La relation définit dans le schéma ci-dessous est une fonction car tout élément de E a au plus une image dans F.



Exemple : f : $x \longrightarrow 1/x$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais pas une application car « 0 » n'a pas d'image.

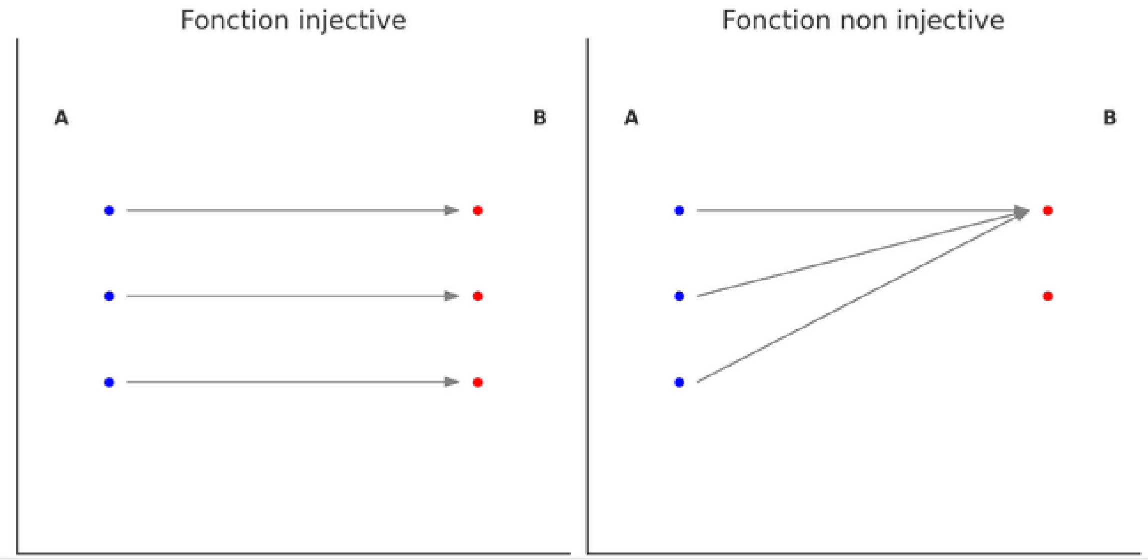
Fonction

Fonctions injectives

- **Définition :**
  Une fonction $f : A \to B$ est dite *injective* si deux éléments distincts de A ont des images distinctes dans B.

$$f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

- **Lien avec la théorie des langages :**
  - Dans le **codage d'alphabets**, une fonction injective garantit qu'aucun symbole n'est confondu avec un autre.
  - Dans les **morphismes de langages**, l'injectivité évite les ambiguïtés et assure une traduction réversible.
- **Exemple :**
  - $h(a) = 0,\ h(b) = 1$ → **injectif**
  - $h(a) = 0,\ h(b) = 0$ → **non injectif**



Fonction

Fonctions injectives

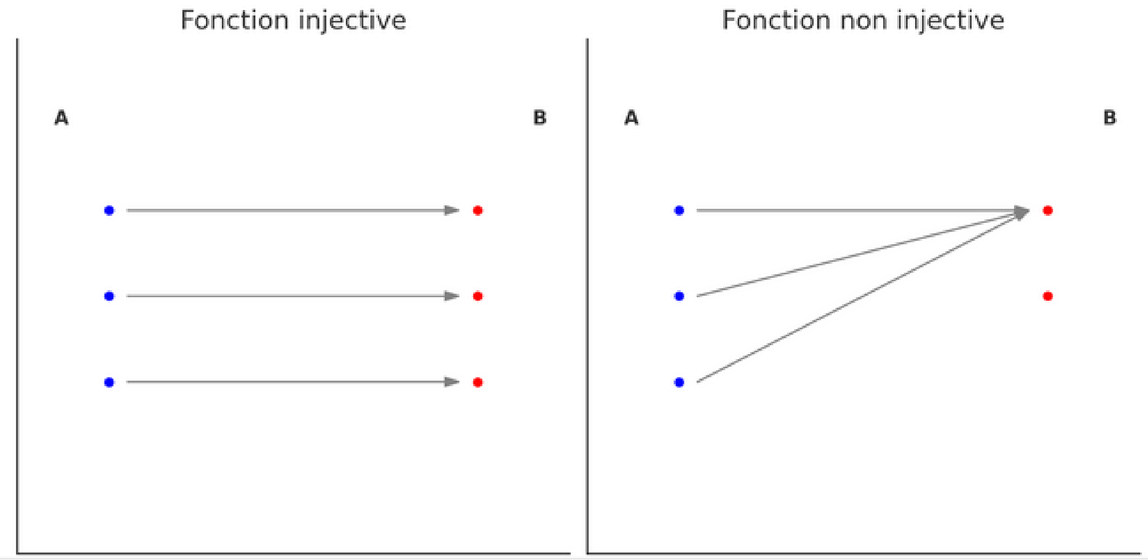
- **Définition :**

  Une fonction $f : A \to B$ est dite *injective* si deux éléments distincts de A ont des images distinctes dans B.

$$f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

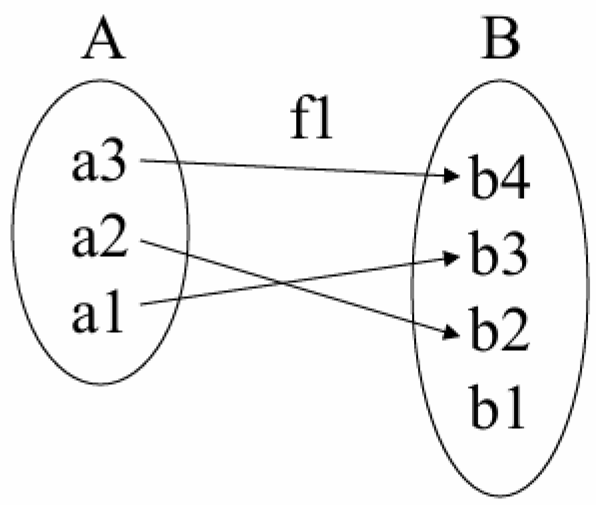
- Exemple : $f(x) = 2x$ de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

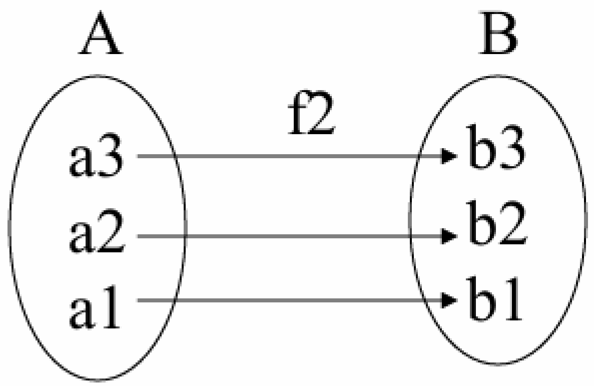
- **Lien avec la théorie des langages :**
  - Dans le **codage d'alphabets**, une fonction injective garantit qu'aucun symbole n'est confondu avec un autre.
  - Dans les **morphismes de langages**, l'injectivité évite les ambiguïtés et assure une traduction réversible.
- **Exemple :**
  - $h(a) = 0,\ h(b) = 1$ → injectif
  - $h(a) = 0,\ h(b) = 0$ → non injectif

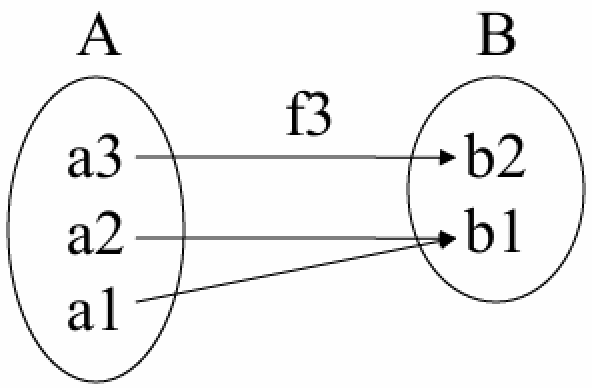


Fonction

Fonctions injectives







Fonction

Fonctions surjectives

- **Définition :**

Une fonction $f : A \to B$ est **surjective** si :

$$\forall b \in B,\ \exists a \in A\ : f(a) = b$$

👉 Cela veut dire que **chaque élément de B** est l'image d'au moins un élément de A.

🔑 Caractéristiques

- Tous les éléments de l'ensemble d'arrivée B sont « couverts ».
- Plusieurs éléments de A peuvent avoir la **même image** dans B.
- Il se peut qu'un élément de A ne soit pas utilisé, mais **aucun élément de B n'est laissé de côté.**

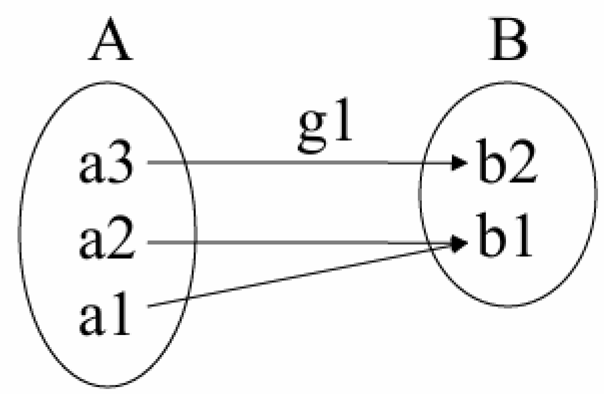
Exemple

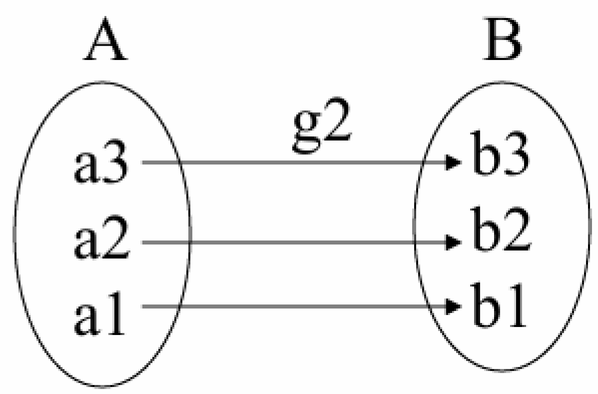
$f(x) = x^3$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

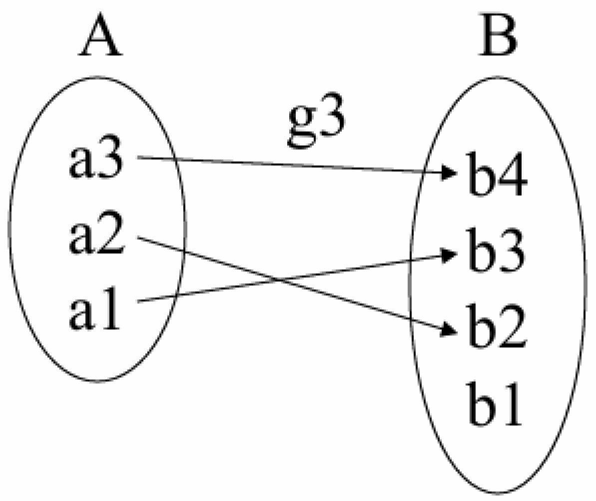
- Tout réel a une racine cubique, donc chaque $y \in \mathbb{R}$ est atteint.

Fonction

Fonctions surjectives







Fonction

Fonctions bijectives

- **Définition :**

  Une fonction $f : A \to B$ est **bijective** si elle est **injective** et **surjective** à la fois.

  1. **Injective (ou "un à un") :**

     Chaque élément de B est l'image d'au plus un élément de A.

     → Pas deux éléments de A ont la même image.

  2. **Surjective (ou "sur") :**

     Chaque élément de B est l'image d'au moins un élément de A.

     → L'ensemble B est complètement couvert par les images de A.

  Ensemble, cela veut dire que chaque élément de B correspond **exactement** à un élément de A : ni doublon, ni élément manquant.

Exemple

Soit $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ définie par :

$$f(1) = a, \quad f(2) = b, \quad f(3) = c$$

- Chaque élément de $\{a, b, c\}$ est atteint → **surjective**
- Aucun doublon dans les images → **injective**
- Donc f est **bijective**

Fonction

Fonctions bijectives

Exemple

Soit $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ définie par :

$$f(1) = a, \quad f(2) = b, \quad f(3) = c$$

- Chaque élément de $\{a, b, c\}$ est atteint → **surjective**
- Aucun doublon dans les images → **injective**
- Donc f est **bijective**