Ejercicios A

1. Encuentre las soluciones generales de las siguientes.

(a) $(D^2 - 4D + 4)y = 0$ || $y = e^{mx}$, donde m es una constante. || soluciones repetidas

$P(m) = m^2 - 4m + 4 = 0$

$(m-2)^2 = 0$

|| soluciones de la función $(m-2)^2$

$m_1 = 2$ || dos soluciones
$m_2 = 2$ || iguales

$$\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 e x^{2x}}$$

Solución general.

1. Encuentre las soluciones generales de las siguientes.

(b) $16y'' - 8y' + y = 0$ || $y = e^{mx}$, donde m es una constante.

// Función de operador

$$[16D^2 - 8D + 1]y = 0$$

// En función de m

$$P(m) = 16m^2 - 8m + 1 = 0$$

// Dividir entre 16 a la función

$$P(m) = m^2 - \frac{1}{2}m + \frac{1}{16} = 0$$

$$\left(m - \frac{1}{4}\right)\left(m - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$m_1 = \frac{1}{4}$ || Soluciones

$m_2 = \frac{1}{4}$ || Iguales

$$y = C_1 e^{\frac{1}{4}x} + C_2 x e^{\frac{1}{4}x}$$ Solución general.

7. Encuentre las soluciones generales de las siguientes.

(c) $4I''(t) - 12I'(t) + 9I(t) = 0$ || $y = e^{mx}$, donde m es una constante.

// Función de operador

$$[4D^2 - 12D + 9]I = 0$$

// En función de P(m)

$$P(m) = 4m^2 - 12m + 9 = 0$$

// Dividir entre 4

$$= \frac{4m^2}{4} - \frac{12m}{4} + \frac{9}{4} = 0$$

$$P(m) = m^2 - 3m + \frac{9}{4} = 0$$

// Sacamos Raíz

$$P(m) = (m - \frac{3}{2}) = 0$$

$$m_1 = \frac{3}{2}$$
$$m_2 = \frac{3}{2}$$

|| Soluciones Iguales

$$I = C_1 e^{\frac{3}{2}t} + C_2 t^{\frac{3}{2}t}$$

Solución general

1. Encuentre las soluciones generales de las siguientes.

(d) $(D^6 - 4D^4)y = 0$ || $y = e^{mx}$, donde m es una constante. || soluciones repetidas.

//en función de P(m)

$P_m = m^6 - 4m^4 = 0$ // sacamos el exponente de grado menor.

$m^4(m^2 - 4) = 0$ //conjugado

$m^4 (m+4)(m-4) = 0$

$m_1 = 0$	Soluciones iguales	$m_5 = -4$	
$m_2 = 0$		$m_6 = 4$	
$m_3 = 0$			
$m_4 = 0$			

$$y = C_1 e^0 + C_2 x e^0 + C_3 x^2 e^0 + C_4 x^3 e^0 + C_5 e^{-4} + C_6 e^4$$

$$\boxed{y = C_5 e^{-4x} + C_6 e^{4x}}$$

Solución general

7. Encuentre las soluciones generales de las siguientes.

(e) $(D^4 - 2D^3 + D^2)y = 0$

// En función de Pm

$P(m) = m^4 - 2m^3 + m^2 = 0$ // Término común de menor grado.

$m^2(m^2 - 2m + 1) = 0$

$m^2(m-1)(m-1) = 0$

$m_1 = 0$, $m_2 = 0$ || Soluciones iguales. || $m_3 = 1$, $m_4 = 1$ || Soluciones iguales.

$$\boxed{y = C_1 e^0 + C_2 x e^0 + C_3 e^x + C_4 x e^x}$$

Solución general

1. Encuentre las soluciones generales de las siguientes.

(f) $4y^{(4)} - 20y'' + 25y = 0$

//En función de operador

$$[4D^4 - 20D^2 + 25]y = 0$$

//En función de P(m)

$$P(m) = 4m^4 - 20m^2 + 25 = 0$$

//Dividir entre 4 la función

$$P(m) = \frac{4m^4}{4} - \frac{20m^2}{4} + \frac{25}{4} = 0$$

$$P(m) = m^4 - 5m^2 + \frac{25}{4} = 0$$ //Cambio de variable

$U = m^2$

$U^2 = m^4$

//Reescribir la función

$$P(U) = U^2 - 5U + \frac{25}{4} = 0$$

$$\left(U - \frac{5}{2}\right)\left(U - \frac{5}{2}\right) = 0$$

$U_1 = \frac{5}{2}$

$U_2 = \frac{5}{2}$

$\left(U - \frac{5}{2}\right)^2 = 0$ Soluciones iguales

//Despejar

$m^2 = U_1$

$m = \sqrt{U_1}$

$m_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$m_2 = -\sqrt{\frac{5}{2}}$

$m = \sqrt{U_2}$

$m_3 = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$m_4 = -\sqrt{\frac{5}{2}}$

$$y = C_1 e^{\sqrt{5/2}\,x} + C_2 x e^{\sqrt{5/2}\,x} + C_3 e^{-\sqrt{5/2}\,x} + C_4 x e^{-\sqrt{5/2}\,x}$$

Solución general

Ejercicios A.2

2. Encuentre las soluciones que satisfagan las condiciones dadas.

(a) $(D^2 - 2D + 1)y = 0$

$y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$

// Pasar en función de $P(m)$

$$P(m) = m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$(m-1)(m-1) = 0$$

$m_1 = 1$ || Soluciones
$m_2 = 1$ || iguales

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 x e^x}$$

Solucion general

// Evaluar

// Derivamos

$$y' = C_1 e^x + C_2 e^x + C_2 x e^x \;||$$

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x \;||$$

// Evaluar

$$y(0) = C_1 + 0$$

// Encontrar el valor de la constante

$$y'(0) = C_1 + C_2 + 0$$

$$\boxed{C_1 = 1}$$

$$-2 = C_1 + C_2$$

$$-2 = 1 + C_2$$

$$\boxed{C_2 = -3}$$

Valor Constantes

$$y = 1e^x - 3xe^x$$

$$\boxed{y = e^x - 3xe^x}$$

Solucion particular

2. Encuentre las soluciones que satisfagan las condiciones dadas.

(b) $(D^3 - D^2)y = 0$

$y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$

// Pasar en función de $P(m)$

$P_m = m^3 - m^2 = 0$ // Sacar término común menor

$m^2(m - 1) = 0$

$m_1 = 0$
$m_2 = 0$
$m_3 = 1$ Soluciones

$$\boxed{y = C_1 e^0 + C_2 x e^0 + C_3 e^x}$$ Solución general

$y' = C_2 + C_3 e^x$

$y'' = C_3 e^x$

// Evaluamos

$y(0) = 1 = C_1 + 0 + C_3$

$y'(0) = 0 = C_2 + C_3$

$y''(0) = 0 = C_3$

$C_2 = 0$
$C_3 = 0$
$C_1 = 1$ Valor de constantes

$y = 1 + 0 + 0$

$$\boxed{y = 1}$$ Solución particular

2. Encuentre las soluciones que satisfagan las condiciones dadas.

(c) $\frac{d^2s}{dt^2} = -16\frac{ds}{dt} - 64s$; $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = -4$ donde $t = 0$

//En función de operadores

$$[D^2 + 16D - 64]S = 0$$

//en términos de P(m)

$$P(m) = m^2 + 16m - 64 = 0$$

$$(m+8)(m+8) = 0$$

$m_1 = -8$
$m_2 = -8$ || soluciones iguales

$$\boxed{S = C_1 e^{-8t} + C_2 t e^{-8t}}$$ Solución general

$$S' = -8C_1 e^{-8t} - 8C_2 t e^{-8t} + C_2 e^{-8t}$$

//Evaluamos

$S(0) = 0 = C_1$
$S'(0) = -4 = -8C_1 + C_2$ || $C_1 = 0$, $C_2 = -4$ || valor de las constantes

//

$$S = 0 - 4te^{-8t}$$

$$\boxed{S = -4te^{-8t}}$$ Solución Particular