# Método de aniquilación y Coeficientes indeterminados

# Ejercicios A

1. Encuentre la solución general de cada uno de los siguientes:

A. $y'' + y = 2e^{3x}$ //Ecuación diferenciales no homogeneas

//Método de aniqulación

//Encontrar otra función que al sumarse de cero.

$D[2e^{3x}]$

$= 2De^{3x}$ //Derivamos

$= 2[3e^{3x}]$

$= 6e^{3x}$

$3(2e^{3x}) = 6e^{3x}$ //multiplicamos por (-1)

$-3(2e^{3x}) = -6e^{3x}$

$D[2e^{3x}] - 3(2e^{3x}) = 0$

$[D-3](2e^{3x}) = 0$

$[D-3]\ y'' + y = 0$

//Términos de operador

$(D-3)(D^2+1)y = 0$

//Términos de Pm

$Pm = (m-3)(m^2+1) = 0$

$m_1 = 3 \qquad m^2 = -1$ || números

$\qquad\qquad m = \sqrt{1i}$ || imaginarios

$y = C_1e^{3x} + C_2\cos(x) + C_3\operatorname{sen}(x)$

Solución general.

7. Encuentre la solución general de cada uno de los siguientes.

A. $y'' + y = 2e^{3x}$

//Método de coeficientes indeterminados.

//Términos de P(m)

//$(D^2 + D)y = 2e^{3x}$

$m^2 + 1 = 0$

$m_1 = i$

$m_2 = -i$

$y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$ Solución Complementaria

//Proponemos una función

$\boxed{y_p = ae^{3x}}$

$(D^2 + 1)y_p = 2e^{3x}$

$(D^2 + 1)ae^{3x} = 9ae^{3x} + ae^{3x}$ //Sumamos

$= 10ae^{3x} = 2e^{3x}$ //Despejar a "a"

$a = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ //Despejamos en nuestra función propuesta

$y_p = \frac{1}{5}e^{3x}$ Solución particular

$y = y_p + y_c$

$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{5}e^{3x}$

Solución general

1. Encuentre la solución general de cada uno de los siguientes.

B) $(D^2+2D+1)y = 4\,\text{sen}\,2x$

// Método de aniquilación

$D^2(4\,\text{sen}\,x) = 4(-4\,\text{sen}\,2x)$ // Derivar dos veces

$= -16\,\text{sen}\,2x$

$4(4\,\text{sen}\,2x) = -16\,\text{sen}\,2x = 0$ // Debe ser = cero

$(D^2+4)(4\,\text{sen}\,2x) = 0$ // hacer la suma

$(D^2+4)(D^2+2D+1)y = 0$ // sustituimos

$P_m = (m^2+4)(m^2+2m+1) = 0$ // Términos de $P_m$

$(m^2+4)(m+1)(m+1) = 0$

| | |
|---|---|
| $m_1 = \sqrt{-4}$ | $m_3 = -1$ |
| $m_1 = 2i$ | $m_4 = -1$ |
| $m_2 = -2i$ | |
| imaginario | iguales |

$y = C_1\cos 2x + C_2\,\text{sen}\,2x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$

Solución general.

1. Encuentre la solución general de cada una de las siguientes.

B) $(D^2+2D+1)y = 4\,\text{sen}\, 2x$

// Método de coeficientes indeterminados.

$m^2+2m+1=0$

$(m+1)(m+1)=0$

$m_1=-1$ || Soluciones
$m_2=-1$ || iguales

$y_c = C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$

Solución Complementaria

// Proponemos una función

$y_p = A\,\text{sen}\,2x + B\cos 2x$ // Derivar 2 veces

$y'_p = 2A\cos 2x - 2B\,\text{sen}\,2x$

$y''_p = -4A\,\text{sen}\,2x - 4B\cos 2x$ // Acomodar

$(D^2+2D+1) = -4\,\text{sen}\,2x - 4B\cos 2x + 2(2A\,\text{sen}\,2x - 2B\,\text{sen}\,2x) + A\,\text{sen}\,2x + B\cos 2x$

$= 4\,\text{sen}\,2x$ // Reducir

$(D^2+2D+1) = (-3A-4B)\,\text{sen}\,x + (4A-3B)\cos 2x$

$= 4\,\text{sen}\,2x$

// Encontrar valores de A y B

$-3A-4B=4$
$4A-3B=0$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & -4 & 4 \\ 4 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 4 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{25}{3} & \frac{16}{3} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{12}{25} \\ 0 & 1 & -\frac{16}{25} \end{array}\right]$$

$A = -\frac{12}{25}$

$B = -\frac{16}{25}$

$$y_p = -\frac{12}{25}\,\text{sen}\,2x - \frac{16}{25}\cos 2x$$

Solución particular

$$y = C_1 e^{-x} + C_2\, x e^{-x} - \frac{12}{25}\,\text{sen}\,2x - \frac{16}{25}\cos 2x$$

Solución general

7. Encuentre la solución general de cada uno de los siguientes.

c) $(D^2-4)y=8x^2$

//Método de Aniquilador

$D^3(8x^2)=0$ //sustituimos

$D^3(D^2-4)=0$ //Pasar a Pm

$Pm = m^3(m^2-4)=0$

$m_1 = 2$ $m_4=0$

$m_2=-2$ $m_5=0$

$m_3=0$

$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3e^0 + C_4xe^0 + C_5x^2e^0$

$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3 + C_4x + C_5x^2$

Solucion general

7. Encuentre la solución general de cada una de las siguientes.

$(D^2-4)y = 8x^2$

//Método de coeficientes indeterminados

$P_m = m^2 - 4 = 0$ //De la forma $P_m$

$m_1 = 2$

$m_2 = -2$

$y_c = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

Solución complementaria

$y_p = ax^2$ //Fundamental

$y_p = ax^2 + bx + c$ //Derivar

$y'_p = 2ax + b$

$y''_p = 2a$ //construir la ecuación

$(D^2-4)y_p = 2a - 4(ax^2 + bx + c) = 8x^2$

$= (2a - 4c) - (4ax^2 - 4bx) = 8x^2$

// Encontrar el valor de las constantes

$2a - 4c = 0$

$-4ax^2 = 8x^2$

$-4b = 0$

$-4c = -2a$

$4c = -4$

$c = -1$

$a = -2$

$b = 0$

$c = -1$

Valor de las constantes

$y_p = -2x^2 - 1$

Solución particular

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 2x^2 - 1$

Solución general

7. Encuentre la solución general de cada una de los siguientes.

d) $(D^2+4D+5)y=e^{-x}+15x$

//Método de aniquilación. //Derivar una vez

$D^2(e^{-x})=-e^{-x}$

$-1(e^{-x})=e^{-x}$

$(D+1)(e^{-x})=0$

$D^2(15x)=0$ //Derivamos 2 veces

//sustituir

$(D^2+4D+5)y\,(D+1)\,D^2=0$ //Términos de M

$m^2(m+1)(m^2+4m+5)=0$

$m_1=0$ $\quad (m^2+4m+4)+1$

$m_2=0$ $\quad (m+2)^2+1$

$m_3=-1$

$m_4=-2+i$

$m_5=-2-i$

$$y=C_1e^0+C_2xe^0+C_3e^{-x}+C_4e^{-2x}\cos x+C_5e^{-2x}\operatorname{sen}x$$

Solución general.

1. Encuentre la solución general de cada uno de los siguientes.

d) $(D^2+4D+5)y=e^{-x}+15x$

//Coeficientes indeterminados

// Pasar en función de Pm

$(m^2+4m+5)=0$

$(m^2+4m+4+1)=0$

$(m+2)^2+1=0$

$(m+2)=\pm\sqrt{-1}$

$m_1=-2+i$
$m_2=-2-i$

$y_c=C_1e^{-2x}\operatorname{sen}x+C_2e^{-2x}$

Solución Complementaria

//Solución particular, proponemos nuestra función

$g(x)=e^{-x}+15x$

$y_p=ae^{-x}+bx+C$ //Propuesta

//Derivamos 2 veces

$y_p'=-ae^{-x}+b$

$y_p''=ae^{-x}$ //Armamos la ecuación diferencial

$=ae^{-x}-4ae^{-x}+4b+5ae^{-x}+5bx+5C$ //Agrupar términos

$2ae^{-x}+5bx+4b+5C=e^{-x}+15x$

$2a=1$ $\quad a=\frac{1}{2}$ $\quad C=-\frac{12}{5}$ //valor de las constantes.

$5b=15$ $\quad b=3$

$4b+5C=0$

$12+5C=0$

$5C=-12$

$C=-\frac{12}{5}$

//sustituimos en la función propuesta

$$y_p = \frac{1}{2}e^{-x} + 3x - \frac{12}{5}$$

Solución particular

//sustituimos para obtener la solución general

$$y = y_c + y_p$$

$$y = e^{-x}(c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x) + \frac{1}{2}e^{-x} + 3x - \frac{12}{5}$$

7. Encuentre la solución general de cada uno de los siguientes.

e) $4I''(t) + I(t) = t^2 + 2\cos 3t$

// Método de Aniquilación

// Pasar a términos de operador

$(4D^2 + 1)I = t^2 + 2\cos 3t$

// Derivada de cada función

$D^3(t^2) = 0$

$D^2(2\cos 3t) = -18\cos 3t$ // Igualamos a cero

$9(\cos 3t) = 18\cos 3t$ // Realizamos la suma

$(D^2+9)(2\cos 3t) = 0$ // Sustituimos

$D^3(D^2+9)(4D^2+1)I = 0$ // Ecuación homogenea

$P_m = m^3(m^2+9)(4m^2+1) = 0$ // Pasar en términos $P_m$

// Encontrar soluciones

$m_1 = 0$ $m_4 = 3i$ $m_6 = \frac{1}{2}i$

$m_2 = 0$ $m_5 = -3i$ $m_7 = -\frac{1}{2}i$

$m_3 = 0$

|| Soluciones

// Solución general

$$I = C_1e^0 + C_2te^0 + C_3t^2e^0 + C_4\cos 3t + C_5 \operatorname{sen} 3t + C_6\cos \tfrac{1}{2}t + C_7 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}t$$

Solución general

7. Encuentre la solución general de cada uno de los siguientes.

e) $4I''(t) + I(t) = t^2 + 2\cos 3t$

// Método de coeficientes indeterminados

// Función de operador

$(D^2+1)I = t^2 + 2\cos 3t$ // Pasar en función Pm

$4m^2 + 1 = 0$

$4m^2 = -1$ $\quad m = \sqrt{\frac{-1}{4}}$ || imaginarios

$m^2 = -\frac{1}{4}$ $\quad m_1 = +\frac{1}{2}i$, $m_2 = -\frac{1}{2}i$ || soluciones

// Solución general

$I_c = C_1 \cos 3t + C_2 \operatorname{sen} 3t$

Solucion Complementaria

$I_p = t^2 + 2\cos 3t$ // Completar para la solución

$I_p = at^2 + bt + C + d \operatorname{sen} 3t + e \cos 3t$ // Derivamos 2 veces

$I'_p = 2at + b + 3d\cos 3t - 3e \operatorname{sen} 3t$

$I''_p = 2a - 9d \operatorname{sen} 3t - 9e \cos 3t$

// Armamos la ecuación diferencial

$= 8a - 36 d\operatorname{sen} 3t - 36e\cos 3t + at^2 + bt + C + d\operatorname{sen} 3t + e\cos 3t = t^2 + 2\cos 3t$

// Agrupar términos

$= 8a + C = 0$ <br> $b = 0$ <br> $-35d = 0$ <br> $-35e = 2$ <br> $a = 1$ || $e = -\frac{2}{35}$ <br> $d = 0$ <br> $b = 0$ <br> $a = 1$ $\quad 8(1) + C = 0$ <br> $8 + C = 0$ <br> $C = -8$ || Soluciones de las constantes

//Armamos la solución particular

$$I_p = t^2 - 8 - \frac{2}{35}\cos 3t$$

Solución particular

//solución general

$$I = C_1 \operatorname{sen}\frac{t}{2} + C_2 \cos\frac{t}{2} + t^2 - 8 - \frac{2}{25}\cos 3t$$

Solución general

1. Encuentre la solución general de cada una de los siguientes.

f) $(D^3+4D)y=e^x+\operatorname{sen}x$

//Método de Aniquilación

$D(e^x)=e^x$ //Derivamos por partes.

$-1(e^x)=-e^x$ //sumamos para eliminar y quede cero.

$(D-1)(e^x)=0$

$D^2(\operatorname{sen}x)=-\operatorname{sen}x$

$(\operatorname{sen}x)=\operatorname{sen}x$

$(D^2+1)(\operatorname{sen}x)=0$ //sustituimos en la ecuación diferencial.

$(D-1)(D^2+1)(D^3+4D)y=0$ //Pasar en función de Pm

$P(m)=(m-1)(m^2+1)(m^3+4m)=0$

$(m-1)(m^2+1)m(m^2+4)=0$

$m_1=1$ $m_4=0$

$m_2=i$ $m_5=2i$

$m_3=-i$ $m_6=-2i$

//Armando la solución general

$y=C_1e^x+C_2\cos x+C_3\operatorname{sen}x+C_4e^0+C_5\cos 2x+C_6\operatorname{sen}2x$

Solución general

7. Encuentre la solución general de cada una de los siguientes.

f) $(D^3+4D)y=e^x+\operatorname{sen} x$

// Método de coeficientes indeterminados

// Pasar en función de m

$P_m=m^3+4m=0$

$m(m^2+4)=0$

$m_1=0$
$m_2=2i$
$m_3=-2i$

Soluciones

$y_c=C_1e^0+C_2\cos 2x+C_3\operatorname{sen} 2x$

Solución Complementaria

// Proponer función

$y_p=ae^x+b\operatorname{sen} x+c\cos x$

$y'_p=ae^x+b\cos x-c\operatorname{sen} x$

$y''_p=ae^x-b\operatorname{sen} x-c\operatorname{sen} x$

$y'''_p=ae^x-b\cos x+c\operatorname{sen} x$

// Armar la ecuación diferencial

$(D^3+4D)y_p=ae^x-b\cos x+c\operatorname{sen} x+4ae+4b\cos x$
$-4c\operatorname{sen} x+5ae^x+3b\cos x-3c\operatorname{sen} x$

// Agrupar $=e^x+\operatorname{sen} x$

$5a=1$ $\quad a=\frac{1}{5}$

$3b=0$ $\quad b=0$

$-3c=1$ $\quad c=-\frac{1}{3}$

$y_p = \frac{1}{5} e^x - \frac{1}{3} \cos$

Solución particular

$y_c + y_p = y$

$y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{5} e^x - \frac{1}{3} \cos$

Solución general

2. Encuentre las soluciones que satisfagan las condiciones dadas.

a) $y'' + 16y = 5 \text{ sen } x$; $y(0) = y'(0) = 0$

// Método de coeficientes indeterminados

$(D^2 + 16)y = 0$

// Pasar en función de Pm

$Pm = m^2 + 16 = 0$

$m^2 = -16$
$m = \sqrt{16}$ || números imaginarios
$m_1 = 4i$
$m_2 = -4i$

// Evaluar

$y' = -C_1 \cos 4x + 4C_2 \cos 4x + \frac{10}{12} \cos 2x$

$y(0) = 0 = C_1$

$y'(0) = 0 = 4C_2 + \frac{10}{12}$

$y = \frac{5}{24} \text{ sen } 4x + \frac{5}{12} \text{ se } 2x$

$y_c = C_1 \cos 4x + C_2 \text{ sen } 4x$

Solución Complementaria

// Proponer una función

$y_p = a \text{ sen } 2x + b \cos 2x$ //Derivamos 2 veces

$y'_p = 2a \cos 2x - 2b \text{ sen } 2x$

$y''_p = 4a \text{ sen } 2x - 4b \text{ sen } 2x$

// Armar la ecuación diferencial.

$(D^2 + 16) y_p = -4a \text{ sen } 2x - 4b \cos 2x + 16a \text{ sen } 2x + 16b \cos 2x = 5 \text{ sen } x$

$12a \text{ sen } 2x + 12b \cos 2x = 5 \text{ sen } x$ //sustituir en la y propuesta

$12a = 5$ $\quad a = \frac{5}{12}$ || valor de las constantes
$12b = 0$ $\quad b = 0$

$y_p = \frac{5}{12} \text{ sen } 2x$

Solución Particular

// $y_c + y_p = y$

$y = C_1 \cos 4x + C_2 \text{ sen } 4x + \frac{5}{12} \text{ sen } 2x$

Solución general

**2.** Encuentre las soluciones que satisfagan las condiciones dadas.

b) $s''(t) - 3s'(t) + 2s(t) = 8t^2 + 12e^{-x}$
$s(0) = 0$, $s'(0) = 2$

// Método de Aniquilación.

$D^3(D+1)(D^2 - 3D + 2)s =$

$m^3(m+1)(m^2 - 3m + 2) = 0$

$m3(m+1)(m-2)(m-1) = 0$

$m_1 = 0 \qquad m_4 = -1$
$m_2 = 0 \qquad m_5 = 2$
$m_3 = 0 \qquad m_6 = 1$

$S = C_1e^0 + C_2e^0 + C_3e^0 + C_4e^{-x} + C_5e^{2x} + C_6e^x$

$S' = C_2 + 2C_3t - C_4e^{-t} - 2C_5e^{3t} + C_2e^2$

$S(0) = 0 = C_1 + C_4 + C_5 + C_6$
$S'(0) = 2 = C_2 - C_4 + 2C_5 + C_6$

$C_1 + C_4 + C_5 + C_6 = 0$ || Resolver
$C_2 - C_4 + 2C_5 + C_6 = 0$ || Sistema de ecuaciones.

2. Encuentre las soluciones que satisfagan las condiciones dadas.

b) $S''(t) - 3S'(t) + 2S(t) = 8t^2 + 12e^{-x}$
$S(0) = 0,\ S'(0) = 2$

// Método de coeficientes indeterminados.

$(D^2 - 3D + 2)S = 0$

$m^2 - 3m + 2 = 0$

$(m_1 - 1)(m - 2) = 0$

$m_1 = 1$

$m_2 = 2$

$y_c = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}$

Solución Complementaria

$S_p = at^2 + bt + c + de^{-t}$

$S'_p = 2at + b - de^{-t}$

$S''_p = 2a - de^{-t}$

$2a - de^{-t} - 6a^{t} + 3b - 3c^{-t} + 2at^2 + 2bt + 2c + 2de^{-t}$
$= 8t^2 + 12e^{-t}$

$S_p = at^2 + bt + c + de^{-t}$

$S'_p = 2at + b - de^{-t}$

$S''_p = 2a - de^{-t}$

$2a - de^{-t} - 6at + 3b - 3de^{-t} + 2at^2 + 2bt + 2c + 2de^{-t}$

$2at^2 + 2a - 6at + 3b + 2bt + 2c - 2e^{-t} = 8t^2 + 12e^{-x}$

$2a = 8$ $\qquad a = 4$

$2a + 2c = 0$ $\qquad d = \frac{12}{6} = 2$

$-6a + 2b = 0$

$6d = 12$ $\qquad b = 12$

$c = +14$

$$S_p = 4t^2 + 2t + 14 + \frac{12}{8} e^{-2t}$$

//Evaluar

$$S = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + 4t^2 + 2t + 14 + 2e^{-2t}$$

//Derivar una vez

$$S' = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + 8t + 2 - 4e^{-2t}$$

//Evaluar

$S(0) = 0$

$$S = C_1 e^{0} + C_2 e^{2(0)} + 14 + 2$$

$S'(0) = 2$

$$S' = C_1 + 2C_2 + 12 - 4$$

$$C_1 + C_2 + 16 = 0$$

$$C_1 + 2C_2 + 8 = 2$$

//Despejando

| | |
|---|---|
| $C_1 = 2 - 2C_2 - 10$ | $C_1 = -2 - 2(8) - 10$ |
| $2 - 2C_2 - 10 + 16 = 0$ | $C_1 = -24$ |
| $C_2 = 8$ | |

//No me sale la respuesta del libro, me sobra un

$C_2 = 8 \quad C_1 = -24$

$$S = 8e^{2t} - 24e^{t} + 12t + 14 + 2e^{-t}$$