Método de aniquilación y Coeficientes indeterminados

Ejercicios A

1. Encuentre la solución general de cada uno de los siguientes:

A. $y'' + y = 2e^{3x}$ // Ecuación diferenciales no homogeneas

// Método de aniquilación

// Encontrar otra función que al sumarse de cero.

$D[2e^{3x}]$

$= 2D e^{3x}$ // Derivamos

$= 2[3e^{3x}]$

$= 6e^{3x}$

$3(2e^{3x}) = 6e^{3x}$ // multiplicamos por (-1)

$-3(2e^{3x}) = -6e^{3x}$

$D[2e^{3x}] - 3(2e^{3x}) = 0$

$[D-3](2e^{3x}) = 0$

$[D-3]y'' + y = 0$

// Términos de operador

$(D-3)(D^2+1)y = 0$

// Términos de Pm

$Pm = (m-3)(m^2+1) = 0$

$m_1 = 3 \quad m^2 = -1$ // números imaginarios

$im = \sqrt{1}$

$y = C_1 e^{3x} + C_2 \cos(x) + C_3 \operatorname{Sen}(x)$

Solución general.

7. Encuentre la solución general de cada uno de los siguientes.

A. $y'' + y = 2e^{3x}$

// Método de coeficientes indeterminados.

// Términos de P(m)

// $(D^2 + D)y = 2e^{3x}$

$m^2 + 1) = 0$

$m_1 = i$

$m_2 = -i$

$y_c = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$ Solución Complementaria

// Proponemos una función

$y_p = ae^{3x}$

$(D^2 + 1)y_p = 2e^{3x}$

$(D^2 + 1)ae^{3x} = 9ae^{3x} + ae^{3x}$ // Sumamos

$= 10ae^{3x} = 2e^{3x}$ // Despejar a "a"

$a = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ // Despejamos en nuestra función propuesta

$y_p = \frac{1}{5} e^{3x}$ Solución particular

$y = y_p + y_c$

$y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{5} e^{3x}$

Solución general

7. Encuentre la solución general de cada uno de los siguientes.

B) $(D^2+2D+7)y = 4\operatorname{sen} 2x$

// Método de aniquilación

$D^2(4\operatorname{sen} x) = 4(-4\operatorname{sen} 2x)$ // Derivar dos veces

$= -16 \operatorname{sen} 2x$ // Debe ser = cero

$-4(4\operatorname{sen} 2x) = -16 \operatorname{sen} 2x = 0$ // hacer la suma

$(D^2+4)(4\operatorname{sen} 2x) = 0$ // sustituimos

$(D^2+4)(D^2+2D+7)y = 0$ // Términos de Pm

$Pm = (m^2+4)(m^2+2m+7) = 0$

$(m^2+4)(m+7)(m+7) = 0$

$m_1 = \sqrt{-4}$ || $m_3 = -7$

$m_1 = 2i$ || $m_4 = -7$

$m_2 = -2i$ ||

imaginario | iguales

$y = C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$

solución general.

7. Encuentre la solución general de cada una de las siguientes.

B) $(D^2+2D+1)y = 4\operatorname{sen} 2x$

// Método de coeficientes indeterminados.

$m^2+2m+1=0$

$(m+1)(m+1)=0$

$m_1=-1$ // Soluciones

$m_2=-1$ // iguales

$y_c = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$

Solución Complementaria

// Proponemos una función

$y_p = A\operatorname{sen} 2x + B\cos 2x$ // Derivar 2 veces

$y'_p = 2A\cos 2x - 2B\operatorname{sen} 2x$

$y''_p = -4A\operatorname{sen} 2x - 4B\cos 2x$ // Acomodar

$(D^2+2D+1) = -4\operatorname{sen} 2x - 4B\cos 2x + 2(2A\operatorname{sen} 2x - 2B\operatorname{sen} 2x) + A\operatorname{sen} 2x + B\cos 2x$

$= 4\operatorname{sen} 2x$ // Reducir

$(D^2+2D+1) = (-3A-4B)\operatorname{sen} x + (4A-3B)\cos 2x$

$= 4\operatorname{sen} 2x$

// Encontrar valores de A y B

$-3A-4B=4$

$4A-3B=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -3 & -4 & 4 \\ 4 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 4 & -3 & 0 \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{25}{3} & \frac{16}{3} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{12}{25} \\ 0 & 1 & -\frac{16}{25} \end{array}\right]$

$A = -\frac{12}{25}$

$B = -\frac{16}{25}$ //

$$y_p = -\frac{12}{25}\operatorname{sen} 2x - \frac{76}{25}\cos 2x$$

Solución Particular

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} - \frac{12}{25}\operatorname{sen} 2x - \frac{76}{25}\cos 2x$$

Solución general

7. Encuentre la solución general de cada uno de los siguientes.

c) $(D^2-4)y = 8x^2$

//Método de Aniquilador

$D^3(8x^2) = 0$ //Sustituimos

$D^3(D^2-4) = 0$ //Pasar a Pm

$Pm = m^3(m^2-4) = 0$

$m_1 = 2 \quad m_4 = 0$

$m_2 = -2 \quad m_5 = 0$

$m_3 = 0$

$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3e^0 + C_4xe^0 + C_5x^2e^0$

$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3 + C_4x + C_5x^2$

Solucion general

7. Encuentre la solución general de cada una de las siguientes.

(c) $(D^2-4)y = 8x^2$

// Método de coeficientes indeterminados

$P_m = m^2 - 4 = 0$ // De la forma P_m

$m_1 = 2$

$m_2 = -2$

$y_c = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

Solución complementaria

$y_p = ax^2$ // Fundamental

$y_p = ax^2 + bx + c$ // Derivar

$y'_p = 2ax + b$

$y''_p = 2a$ // construir la ecuación

$(D^2-4)y_p = 2a - 4(ax^2 + bx + c) = 8x^2$

$= (2a - 4c) - (4ax^2 - 4bx) = 8x^2$

// Encontrar el valor de las constantes

$2a - 4c = 0$

$-4ax^2 = 8x^2$

$-4b = 0$

$-4c = -2a$

$4c = -4$

$c = -1$

$a = -2$

$b = 0$

$c = -1$ // Valor de las Constantes

$y_p = -2x^2 - 1$

Solución particular

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 2x^2 - 1$

Solución general

7. Encuentre la solución general de cada una de los siguientes.

d) $(D^2+4D+5)y = e^{-x}+75x$

//Método de aniquilación.

//Derivar una vez

$D^2(e^{-x}) = -e^{-x}$

$-1(e^{-x}) = e^{-x}$

$(D+1)(e^{-x}) = 0$

$D^2(15x) = 0$

//Derivamos 2 veces

//Sustituir

$(D^2+4D+5)y\,(D+1)D^2 = 0$

//Términos de m

$m^2(m+1)(m^2+4m+5) = 0$

$m_1 = 0$

$m_2 = 0$

$m_3 = -1$

$m_4 = -2+i$

$m_5 = -2-i$

$(m^2+4m+4)+1$

$(m+2)^2+1$

$y = c_1e^0 + c_2xe^0 + c_3e^{-x} + c_4e^{-2x}\cos x + c_5e^{-2x}\operatorname{sen} x$

Solución general.

1. Encuentre la solución general de cada uno de los siguientes.

d) $(D^2+4D+5)y = e^{-x}+15x$

// Coeficientes indeterminados

// Pasar en función de Pm

$(m^2+4m+5)=0$

$(m^2+4m+4+1)=0$

$(m^2+2)^2+1=0$

$(m+2) = \pm\sqrt{-1}$

$m_1 = -2+i$

$m_2 = -2-i$

$y_c = c_1 e^{-2x} \operatorname{sen} x + c_2 e^{-2x}$

Solución Complementaria

// Solución particular, proponemos nuestra función

$g(x) = e^{-x}+15x$

$y_p = ae^{-x}+bx+c$ // Propuesta

// Derivamos 2 veces

$y'_p = -ae^{-x}+b$

$y''_p = ae^{-x}$ // Armamos la ecuación diferencial

$= ae^{-x} - 4ae^{-x}+4b+5ae^{-x}+5bx+5c$ // Agrupar términos

$2ae^{-x}+5bx+4b+5c = e^{-x}+15x$

$2a=1 \quad a=\frac{1}{2}$

$5b=15 \quad b=3$

$4b+5c=0$

$12+5c=0$

$5c=-12$

$c=-\frac{12}{5}$

// Valor de las constantes.

Sustituimos en la función propuesta

$$y_p = \frac{1}{2}e^{-x} + 3x - \frac{12}{5}$$

Solución particular

Sustituimos para obtener la solución general

$$y = y_c + y_p$$

$$y = e^{-x}(C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x) + \frac{1}{2}e^{-x} + 3x - \frac{12}{5}$$

1. Encuentre la solución general de cada uno de los siguientes.

e) $4I''(t) + I(t) = t^2 + 2\cos 3t$

// Método de Aniquilación

// Pasar a términos de operador

$(4D^2 + 1)I = t^2 + 2\cos 3t$

// Derivada de cada función

$D^3(t^2) = 0$

$D^2(2\cos 3t) = -18\cos 3t$

$9(\cos 3t) = 18\cos 3t$

// Igualamos a cero

// Realizamos la suma

$(D^2 + 9)(2\cos 3t) = 0$

// Sustituimos

$D^3(D^2 + 9)(4D^2 + 1)I = 0$

// Ecuación homogenea

// Pasar en términos Pm

$Pm = m^3(m^2 + 9)(4m^2 + 1) = 0$

// Encontrar soluciones

$m_1 = 0 \quad m_4 = 3i \quad m_6 = \frac{1}{2}i$

$m_2 = 0 \quad m_5 = -3i \quad m_7 = \frac{-1}{2}i$

$m_3 = 0$

Soluciones

// Solución general

$I = C_1 e^0 + C_2 t e^0 + C_3 t^2 e^0 + C_4 \cos 3t + C_5 \operatorname{sen} 3t + C_6 \cos \frac{1}{2}t + C_7 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t$

Solución general

7. Encuentre la solución general de cada una de las siguientes.

e) $4I''(t) + I(t) = t^2 + 2\cos 3t$

// Método de coeficientes indeterminados

// Función de operador

$(D^2 + 1)I = t^2 + 2\cos 3t$ // Pasar en función Pm

$4m^2 + 1 = 0$

$4m^2 = -1 \quad m = \sqrt{-\frac{1}{4}}$ // imaginarios

$m^2 = -\frac{1}{4}$

$m_1 = +\frac{1}{2}i$

$m_2 = -\frac{1}{2}i$ // soluciones

// Solución general

$I_c = C_1 \cos 3t + C_2 \operatorname{sen} 3t$

Solución Complementaria

$I_p = t^2 + 2\cos 3t$ // Completar para la solución

$I_p = at^2 + bt + C + d \operatorname{sen} 3t + e\cos 3t$ // Derivamos 2 veces

$I'p = 2at + b + 3d\cos 3t - 3e \operatorname{sen} 3t$

$I''p = 2a - 9d \operatorname{sen} 3t - 9e \cos 3t$

// Armamos la ecuación diferencial

$= 8a - 36d\operatorname{sen} 3t - 36e\cos 3t + at^2 + bt + C + d\operatorname{sen} 3t + e\cos 3t = t^2 + 2\cos 3t$

// Agrupar términos

$8a + C = 0$
$b = 0$
$-35d = 0$
$-35e = 2$
$a = 1$

$e = -\frac{2}{35}$
$d = 0$
$b = 0$
$a = 1$

$8(1) + C = 0$
$8 + C = 0$
$C = -8$

soluciones de las constantes

// Armamos la solución particular

$$I_p = t^2 - 8 - \frac{2}{35}\cos 3t$$

Solución particular

// Solución general

$$I = C_1 \operatorname{sen}\frac{t}{2} + C_2 \cos\frac{t}{2} + t^2 - 8 - \frac{2}{25}\cos 3t$$

Solución general

1. Encuentre la solución general de cada una de los siguientes.

f) $(D^3+4D)y = e^x \operatorname{sen} x$

// Método de Aniquilación

$D(e^x) = e^x$ // Derivamos por partes.

$-1(e^x) = -e^x$ // sumamos para eliminar y quede cero.

$(D-1)(e^x) = 0$

$D^2(\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} x$

$(\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x$

$(D^2+1)(\operatorname{sen} x) = 0$ // sustituimos en la ecuación diferencial.

$(D-1)(D^2+1)(D^3+4D)y = 0$ // Pasar en función de Pm

$P(m) = (m-1)(m^2+1)(m^3+4m) = 0$

$(m-1)(m^2+1)m(m^2+4) = 0$

$m_1 = 1 \quad m_4 = 0$

$m_2 = i \quad m_5 = 2i$

$m_3 = -i \quad m_6 = -2i$

// Armando la solución general

$y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x + C_4 e^0 + C_5 \cos 2x + C_6 \operatorname{sen} 2x$

Solución general

7. Encuentre la solución general de cada una de las siguientes.

f) $(D^3+4D)y = e^x + \operatorname{sen} x$

// Método de coeficientes indeterminados

// Pasar en función de m

$P_m = m^3 + 4m = 0$

$m(m^2+4) = 0$

$m_1 = 0$
$m_2 = 2i$
$m_3 = -2i$ ‖ soluciones

$y_c = C_1 e^0 + C_2 \cos 2x + C_3 \operatorname{sen} 2x$

Solución complementaria

// Proponer función

$y_p = ae^x + b \operatorname{sen} x + C \cos x$

$y'_p = ae^x + b\cos x - C \operatorname{sen} x$

$y''_p = ae^x - b \operatorname{sen} x - C \operatorname{sen} x$

$y'''_p = ae^x - b\cos x + C \operatorname{sen} x$

// Armar la ecuación diferencial

$(D^3+4D)y_p = ae^x - b\cos x + C \operatorname{sen} x + 4ae^x + 4b\cos x - 4C \operatorname{sen} x + 8ae^x + 3b\cos x - 3C \operatorname{sen} x$

// Agrupar $= e^x + \operatorname{sen} x$

$8a = 1 \quad a = \frac{1}{8}$

$3b = 0 \quad b = 0$

$-3C = 1 \quad C = -\frac{1}{3}$

2. Encuentre las soluciones que satisfagan las condiciones dadas.

a) $y'' + 16y = 5 \operatorname{sen} x;\ y(0) = y'(0) = 0$

// Método de coeficientes indeterminados

$(D^2 + 16)y = 0$

// Pasar en función de Pm

$Pm = m^2 + 16 = 0$

$m^2 = -16$

$m = \sqrt{-16}$ // números imaginarios

$m_1 = 4i$

$m_2 = -4i$

$y_c = C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x$

Solución Complementaria

// Proponer una función

$y_p = a \operatorname{sen} 2x + b \cos 2x$ // Derivamos 2 veces

$y'_p = 2a \cos 2x - 2b \operatorname{sen} 2x$

$y''_p = -4a \operatorname{sen} 2x - 4b \operatorname{sen} 2x$

// Armar la ecuación diferencial.

$(D^2 + 16)y_p = -4a \operatorname{sen} 2x - 4b \cos 2x + 16a \operatorname{sen} 2x + 16b \cos 2x = 5 \operatorname{sen} x$

$12a \operatorname{sen} 2x + 12b \cos 2x = 5 \operatorname{sen} x$

$12a = 5 \quad a = \frac{5}{12}$

$12b = 0 \quad b = 0$

// valor de las constantes

// $y_c + y_p = y$

$y = C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x + \frac{5}{12} \operatorname{sen} 2x$

Solución general

// Evaluar

$y' = -C_1 \cos 4x + 4C_2 \cos 4x + \frac{10}{12} \cos 2x$

$y(0) = 0 = C_1$

$y'(0) = 0 = 4C_2 + \frac{10}{12}$

$y = \frac{5}{24} \operatorname{sen} 4x + \frac{5}{12} \operatorname{se} 2x$

// sustituir en la y propuesta

$y_p = \frac{5}{12} \operatorname{sen} 2x$

Solución Particular

2. Encuentre las soluciones que satisfagan las condiciones dadas.

b) $s''(t) - 3s'(t) + 2s(t) = 8t^2 + 12e^{-x}$

$s(0) = 0 \; , \; s'(0) = 2$

//Método de Aniquilación.

$D^3(D+1)(D^2-3D+2)s =$

$m^3(m+1)(m^2-3m+2) = 0$

$m^3(m+1)(m-2)(m-1) = 0$

$m_1 = 0 \quad m_4 = -1$

$m_2 = 0 \quad m_5 = 2$

$m_3 = 0 \quad m_6 = 1$

$s = C_1e^0 + C_2e^0 + C_3e^0 + C_4e^{-x} + C_5e^{2x} + C_6e^x$

$s' = C_2 + 2C_3t - C_4e^{-t} - 2C_5e^{3t} + C_2e^2$

$s(0) = 0 = C_1 + C_4 + C_5 + C_6$

$s'(0) = 2 = C_2 - C_4 + 2C_5 + C_6$

$C_1 + C_4 + C_5 + C_6 = 0$ || Resolver

$C_2 - C_4 + 2C_5 + C_6 = 0$ || Sistema de ecuaciones.

2. Encuentre las soluciones que satisfagan las condiciones dadas.

b) $S''(t) - 3S'(t) + 2S(t) = 8t^2 + 12e^{-t}$

$S(0) = 0, \quad S'(0) = 2$

// Método de coeficientes indeterminados.

$(D^2 - 3D + 2)S = 0$

$m^2 - 3m + 2 = 0$

$(m_1 - 1)(m - 2) = 0$

$m_1 = 1$

$m_2 = 2$

$y_c = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$

Solución Complementaria

$S_p = at^2 + bt + c + de^{-t}$

$S'_p = 2at + b - de^{-t}$

$S''_p = 2a - de^{-t}$

$2a - de^{-t} - 6at + 3b - 3ce^{-t} + 2at^2 + 2bt + 2c + 2de^{-t} = 8t^2 + 12e^{-t}$

$S_p = at^2 + bt + c + de^{-t}$

$S'_p = 2at + b - de^{-t}$

$S''_p = 2a - de^{-t}$

$2a - de^{-t} - 6at + 3b - 3de^{-t} + 2at^2 + 2bt + 2c + 2de^{-t}$

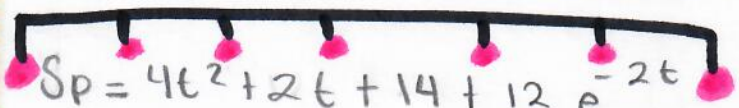
$2at^2 + 2a - 6at + 3b + 2bt + 2c - 2e^{-t} = 8t^2 + 12e^{-x}$

$2a = 8$ $\quad a = 4$

$2a + 2c = 0$ $\quad d = \frac{12}{6} = 2$

$-6a + 2b = 0$ $\quad b = 12$

$6d = 12$ $\quad c = +14$



$S_p = 4t^2 + 2t + 14 + \frac{12}{5} e^{-2t}$

// Evaluar

$S = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 4t^2 + 2t + 14 + 2e^{-2t}$

// Derivar una vez

$S' = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} + 8t + 2 - 4e^{-2t}$

// Evaluar

$S(0) = 0$

$S = C_1 e^0 + C_2 e^{2(0)} + 14 + 2$

$S'(0) = 2$

$S' = C_1 + 2C_2 + 12 - 4$

$C_1 + C_2 + 16 = 0$

$C_1 + 2C_2 + 8 = 2$

// Despejando

$C_1 = 2 - 8 - 2C_2$

$C_1 = -6 - 2C_2$

$C_2 = 10$

$C_1 = 2 - 8 - 2(10)$

$C_1 = 26$

// No me sale la respuesta del libro, me sobra un dos