Integrales curvilíneas

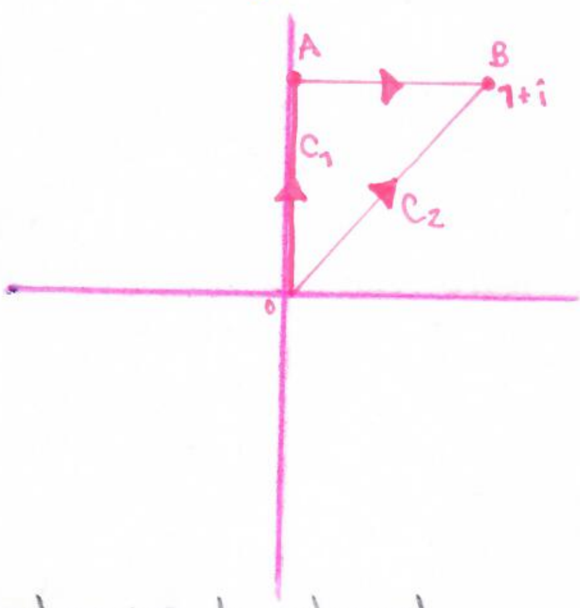
Para cada arco C y cada función f, en los ejercicios del 1 al 5, hallar el valor de:

$$\int_C f(z)\,dz$$

teniendo en cuenta que C es un contorno y que f es continua a trazos en C.

1) $f(z) = y - x - i3x^2$
y C:

a) Es el segmento de recta desde $z=0$ a $z=1+i$



Donde: $z = x + iy$
Utilizando la ecuación de la recta tenemos

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_1} \;\ldots\; \text{Ecuación de la recta.}$$

Sustituimos

$$m = \frac{1}{1} = y = x$$

Donde

$z = x + ix$ //sustituimos
$z = (1+i)x$; $dz = (1+i)dx$

Realizamos la integral

$$\int_C f(z)dz = \int_0^1 -i3x^2(1+i)dx = 3(1+i)\int_0^1 x^2 dx = 3(1-i)\frac{x^3}{3}\Big|_0^1$$

Nos queda: $\left[3(1+i)\frac{1}{3} - 0\right]$ (Resultado $= 1 - i$)

b) consiste en dos segmentos de ~~de~~ recta, uno desde $z=0$ a $z=i$ y otro desde $z=i$ a $z=1+i$

♥ Para $AB = y=1;\ z = x+i;\ dz = dx$

Resolviendo la integral tenemos:

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_0^1 (1-x-i3x^2)\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx - 3i\int_0^1 x^2\,dx$$

Donde

$$\left[x - \frac{x^2}{2} - 3i\left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^1 = \left[1 - \frac{1}{2} - i(1)\right] = \frac{1}{2} - i$$

♥ Para O a A

Tenemos

$$\int_{OA} f(z)\,dz = \int_0^1 yi\,dy = i\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{i}{2}$$

Donde:

$z = 0 + iy$

$dz = idy$

Nos queda:

$$OA + AB = \frac{1}{2} - i + \frac{i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

Haciendo la suma tenemos:

$$OA + AB = \frac{1-i}{2}$$

2. $f(z) = (z+2)/z$ y C es:

a) El semicirculo $z = 2e^{i\theta}$ donde $(0 \leq \theta \leq \pi)$

Tenemos

$z = 2e^{i\theta}$ //derivamos

$dz = 2ie^{i\theta} d\theta$

Entonces

Realizamos la integral

$$\int_C f(z)\,dz = \frac{z+2}{z}\,dz$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{2e^{i\theta}}{\cancel{2e^{i\theta}}} = 2iei\theta\, d\theta$$

$$= 2i\int_0^{\pi} e^{i\theta}\,d\theta + 2i\int_0^{\pi} d\theta = 2\cancel{i}\left[\frac{e^{i\theta}}{\cancel{i}}\right]_0^{\pi} + 2i[\theta]_0^{\pi}$$

$$= 2\left[e^{i\pi} - 1\right] + 2i\pi = 2i\left[\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi \mp 1\right] + 2i\pi$$

Nos queda

$$\int_C f(z)\,dz = -4 + 2\pi i$$

b) El semicirculo $z = 2e^{i\theta}$ donde $(\pi \leq \theta \leq 2\pi)$

Realizando la integral

$$\int_C f(z)dz = \int_C \frac{z+2}{z}\, dz$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{2e^{i\theta}+2}{2e^{i\theta}}\right) 2ie^{i\theta}\, d\theta$$

donde

$$\int_C f(z)dz = 2i\int_{\pi}^{2\pi} e^{i\theta}\, d\theta + 2i\int_{\pi}^{2\pi} d\theta$$

Entonces

$$\int_C f(z)dz = 2\cancel{i}\left[\frac{e^{i\theta}}{\cancel{i}}\right]_{\pi}^{2\pi} + 2i[\theta]_{\pi}^{2\pi}$$

Nos queda

$$\int_C f(z)dz = 2[e^{i2\pi} - e^{i\pi}] + 2i\pi$$

$$\int_C f(z)dz = 2[\cos 2\pi + i\,\text{sen}\, 2\pi - \cos\pi - i\,\text{sen}\,\pi] + 2i\pi$$

simplificando tenemos

$$\int_C f(z)dz = 2[2] + 2i\pi = 4 + 2i\pi$$

Resultado

$$\int_C f(z)dz = 4 + 2i\pi$$

c) el circulo $z=2e^{i\theta}$ donde $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$

Resolviendo la integral

Tenemos

$$\int_C f(z)dz = \int_C \frac{z+2}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \left(\frac{2e^{i\theta}+2}{2e^{i\theta}}\right) 2e^{i\theta} d\theta$$

donde

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} \left(1+\frac{1}{e^{i\theta}}\right) 2i\, e^{-i\theta} d\theta$$

Tenemo

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} \left(1+\frac{1}{e^{i\theta}}\right) 2i\, e^{i\theta} d\theta$$

$$\int_C f(z)dz = 2i\int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta + 2i\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\int_C f(z)dz = 2i\left[\frac{e^{i\theta}}{i}\right] + 2i\,[\theta]_0^{2\pi}$$

donde

$$\int_C f(z)dz = 2\left[e^{i2\pi}-1\right] + 4i\pi$$

En su forma

$$\int_C f(z)dz = 2\left[\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi - 1\right] + 4i\pi$$

Resultado

$$\int_C f(z)dz = 4\pi i$$

3. $f(z) = z - 1$ y C es el arco que va desde $z=0$ a $z=2$ y esta formado por

a) el semicirculo $z = 1 + e^{i\theta}$ donde $(\pi \leq \theta \leq 2\pi)$

Realizando la integral

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (z-1)\,dz = \int_{\pi}^{2\pi} (1 + e^{i\theta} - 1)\, i e^{i\theta} d\theta$$

donde

$$\int_C f(z)\,dz = i\int_{\pi}^{2\pi} e^{2i\theta} d\theta$$

Tenemos

$$\int_C f(z)\,dz = i\left[\frac{e^{2i\theta}}{2i}\right]_{\pi}^{2\pi}$$

Nos queda

$$\int_C f(z)\,dz = \frac{1}{2}\left(e^{i4\pi} - e^{i2\pi}\right)$$

de la forma

$$\int_C f(z)\,dz = \frac{1}{2}\left(\cos 4\pi + i\,\mathrm{sen}\,4\pi - \cos 2\pi - i\,\mathrm{sen}\,2\pi\right)$$

Resultado

$$\int_C f(z)\,dz = \frac{1}{2}(1-1)$$

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

b) El segmento $0 \leq x \leq 2$ del eje real

donde $z = x$, $(0 \leq x \leq 2)$

Resolviendo la integral

Tenemos

$$\int_c (z-1)\,dz = \int_c^2 (x-1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^2$$

Nos queda

$$\int_c (z-1)\,dz = \left[\frac{4}{2} - 2 - 0\right]$$

Resultado

$$\int_c (z-1)\,dz = 0$$

4. C es el arco de $z = 1 - i$ a $z = 1 + i$ sobre la curva $y = x^3$, mientras que

$$f(z) = \begin{cases} 4y & \text{para } y > 0 \\ 1 & \text{para } y < 0 \end{cases}$$

♥ El arco C es la suma de C_1 y C_2 con $y = x^3$ donde $C_1 : z = x + ix^3 \ (0 \leq x \leq 1)$ $f(z) = 4y = 4x^2$ en C_1

y

$C_2 : z = x + ix^3 \ (-1 \leq x \leq 0)$ $f(z) = 1$ en C_2

Resolviendo la integral

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_{C2} f(z)\,dz$$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^1 4x^3(1 + i3x^2)\,dx + \int_{-1}^0 1(1 + i3x^2)\,dx$$

donde

$$\int_C f(z)\,dz = 4\int_0^1 x^3\,dx + 12i\int_0^1 x^5\,dx + \int_{-1}^0 dx + 3i\int_{-1}^0 x^2\,dx$$

Nos queda

$$\int_C f(z)\,dz = \left[x^4\right]_0^1 + 2i\left[x^6\right]_0^1 + \left[x\right]_{-1}^0 + i\left[x^3\right]_{-1}^0$$

Entonces

$$\int_C f(z)\,dz = 1 + 2i + 1 + i$$

Resultado

$$\boxed{\int_C f(z)\,dz = 2 + 3i}$$

15 a) Probar que si C_0 es un circulo $|z - z_0| = R$, orientado en un sentido antihorario, entonces:

$$\int_C f(z)\, dz = iR \int_{-\pi}^{\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$$

donde

$$z = z_0 + Re^{i\theta} \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

Resolviendo la integral

Nos queda

$$\int_C f(z - z_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(Re^{i\theta})\, d(z_0 + Re^{i\theta})$$

Dond

$$\int_C f(z - z_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(Re^{i\theta}) R i e^{i\theta} d\theta$$

Entonces

$$\int_C f(z - z_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(z - z_0)\, dz$$

Resultado

$$\int_C f(z - z_0) = \int_{-\pi}^{\pi} (z - z_0)\, dz$$

16. Denotemos por C_0 el circulo orientado positivamente $|z-z_0|=R$

Usando el resultado obtenido en el ejercicio 15 Probar que:

a) $\int_{C_0} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$

Resolviendo la integral, tenemos

$$\int_{C_0} \frac{dz}{z-z_0} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{Re^{i\theta}} Rie^{i\theta} d\theta$$

$$\int_{C_0} \frac{dz}{z-z_0} = i\int_{-\pi}^{\pi} d\theta = i\left[\theta\right]_{-\pi}^{\pi}$$

Resultado

$$\int_{C_0} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$$

c) $\int_{C_0} (z-z_0)^{n-1}$ donde $z = i\frac{2R^a}{a}\operatorname{sen}(a\pi)$, donde a es cualquier número real distinto de cero y se forma la determinación principal

Cuando $z_0 = Re^{i\theta}$

Entonces

$f(z)\,dz = iRe^{aia\theta} = -R^a \operatorname{sen} a\theta + iR^a \cos\theta$

Para $-\pi < \theta < \pi$

Nos queda

$$iR^a \int_{-\pi}^{\pi} e^{ia\theta} d\theta = iR^a \left[\frac{e^{ia\theta}}{ia}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{i2R^a}{a} \cdot \frac{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}}{2i}$$

Resultado

$$= \frac{i2R^a}{a} \operatorname{sen} a\pi$$