Integrales resueltas por el teorema de Cauchy

Bocanegra Heziquio Yestlanezi

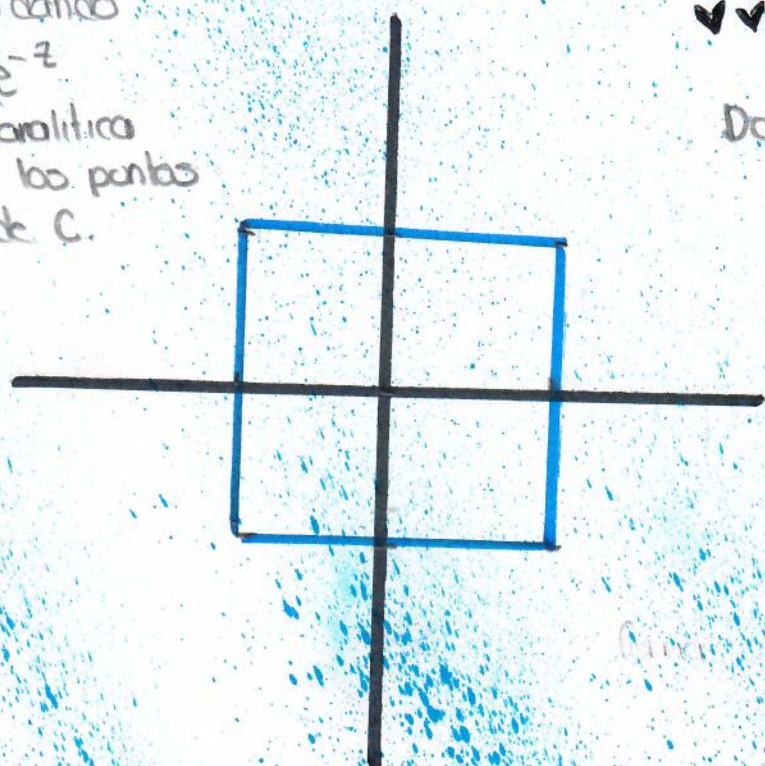
1. Denotemos por C la frontera del cuadrado cuyos lados estan sobre las rectas $x = \pm 2$ así como $y = \pm 2$ donde C se recorre en sentido positivo.

Calcular cada una de estas integrales.

⇒ Recordando

$f(z) = e^{-z}$

$f(z)$ es analítica en todos los puntos dentro de C.



a) $\boxed{\int_C \frac{e^{-z}\,dz}{z-(\pi i/2)}}$

Donde $\int \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = 2\pi i\, f(z)$

Tenemos:

$$\oint_C \frac{e^{-z}}{z-(\pi i/2)} = 2\pi i \left[e^{-z}\right]_{z=\frac{\pi i}{2}}$$

Entonces:

$$= 2\pi i \left[e^{-\frac{\pi i}{2}}\right]$$

de la forma polar

$$= 2\pi i \left[\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 2\pi i\,[-i]$$

$$= 2\pi$$

Resultado: 2π

b) $\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)} dz$

// Multiplicamos por la unidad

Tenemos

$$\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)} dz \cdot \frac{\frac{1}{z^2+8}}{\frac{1}{z^2+8}}$$

Nos queda:

$$\int_C \frac{\frac{\cos z}{z^2+8}}{z-0} dz = 2\pi i \left[\frac{\cos z}{z^2+8}\right]_{z=0}$$

$$= \cancel{2}\pi i \left[\frac{1}{\cancel{8}}\right]$$

Simplificando nos queda

$$= \frac{\pi i}{4}$$

Respuesta: $= \frac{\pi i}{4}$

Recordando
$f(z)$ es analitica porque todos los puntos estan en C

c) $\int_C \frac{z\,dz}{2z+1}$

Nos queda

$$\int_C \frac{z\,dz}{2z+1} = \int_C \frac{\frac{z}{2}\,dz}{z+\frac{1}{2}} = 2\pi i \left[\frac{z}{2}\right]_{z=-\frac{1}{2}}$$

f(z) es analítica en todos los puntos dentro de C

$$= 2\pi i \left[\frac{-\frac{1}{2}}{2}\right]$$

$$= 2\pi i \left[-\frac{1}{4}\right]$$

Respuesta: $= -\frac{\pi i}{4}$

d) $\int_C \frac{tg\left(\frac{z}{2}\right)}{(z-x_0)} dz$ $\quad (-2 < x_0 < 2)$

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

$$\int_C \frac{tg\left(\frac{z}{2}\right) dz}{(z-x_0)^{1+1}} = \frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{d}{dz}\left(tg\left(\frac{z}{2}\right)\right)\right]_{z=x_0}$$

Simplificando tenemos

$$= 2\pi i \left[\frac{\sec^2\left(\frac{z}{2}\right)}{2}\right]_{z=x_0}$$

Respuesta: $= \pi i \sec^2\left(\frac{x_0}{2}\right)$

e) $\int_C \frac{\cosh z}{z^4}\,dz$

Tenemos

$$\int_C \frac{\cosh z}{z^4}\,dz = \frac{2\pi i}{3!}\left[\frac{d^3}{dz^3}(\cosh z)\right]_{z=0}$$

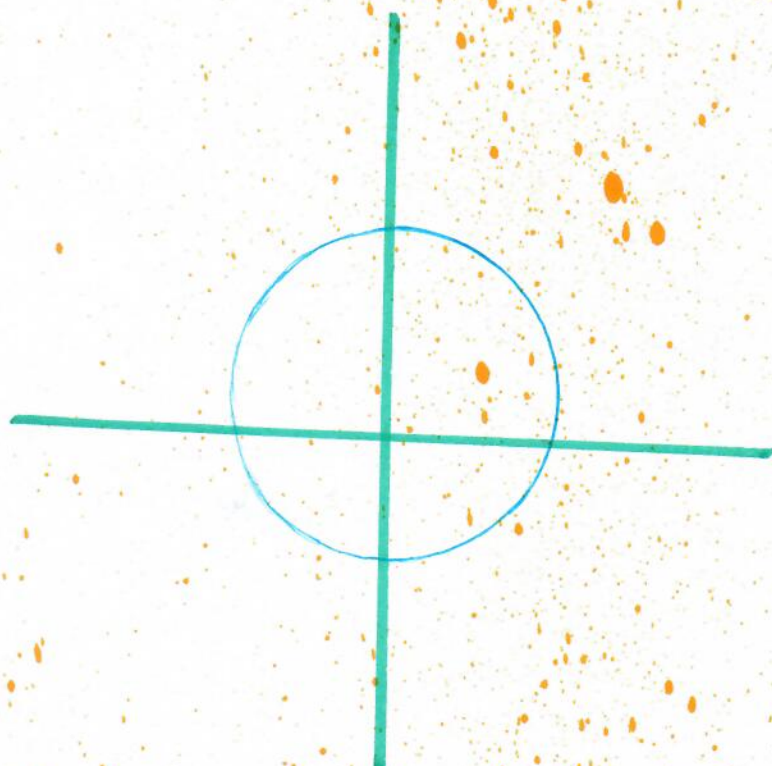
$$= \frac{2\pi i}{3!}\left[\operatorname{senh} z\right]_{z=0}$$

$$= \frac{2\pi i}{3!}[0]$$

Respuesta: $= 0$

2. Hallar el valor de la integral de $g(z)$ sobre el circulo $|z-i|=2$, con la orientación positiva, cuando:

a) $g(z) = \frac{1}{z^2+4}$



$$\int_C \frac{dz}{z^2+4} = \int_C \frac{dz}{(z-2i)(z+2i)}$$

Tenemos

$$\int_C \frac{\frac{1}{(z+2i)}}{z-2i} = \int_C \frac{dz}{(z-2i)(z+2i)}$$

Nos queda

$$\int_C \frac{\frac{1}{(z+2i)}}{z-2i}\, dz = 2\pi i \left[\frac{1}{z+2i}\right]_{z=2i}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{2i+2i}\right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{4i}\right]$$

Simplificando

Respuesta: $\frac{\pi}{2}$

b) $g(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$

$$\rightarrow \int_C \frac{dz}{(z^2+4)^2} = \int_C \frac{dz}{(z-2i)^2(z+2i)^2}$$

$$= \int_C \frac{\frac{1}{(z+2i)^2}}{(z-2i)^2} dz$$

Nos queda

$$= \frac{2\pi i}{1!} \left[\frac{d}{dz} \cdot \frac{1}{(z+2i)^2} \right]_{z=2i}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{-2(z+2i)}{(z+2i)^4} \right]_{z=2i}$$

$$= -4\pi i \left[\frac{1}{(z+2i)^3} \right]_{z=2i}$$

Tenemos

$$= -4\pi i \left[\frac{1}{(2i+2i)^3} \right]$$

$$= -4\pi i \left[\frac{1}{(4i)^3} \right]$$

$$= -\pi \left[\frac{1}{(4i)^2} \right]$$

Respuesta : $\frac{\pi}{16}$