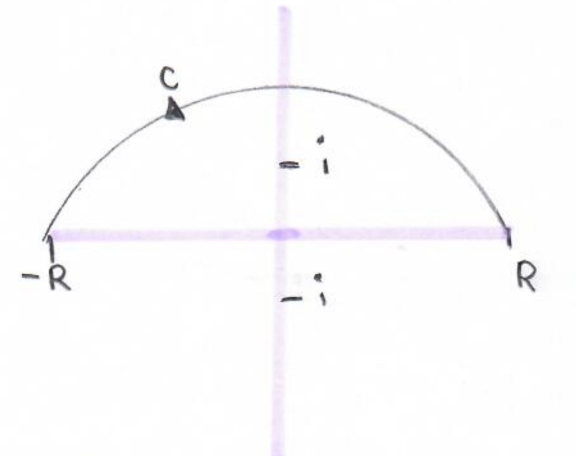
Integrales impropias

teorema de los residuos.

Probar las siguientes formulas de integración con la ayuda del teorema de residuos.

1. a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$



Gráfica 1

donde

$$f(z) = \frac{dz}{z^2+1}$$

Sabemos que $f(z)$ tiene singularidades aisladas en z_0 de z^2+1

Tenemos:

$$0 = z^2+1 \;;\; z^2 = -1 \;;\; z = \pm i$$

Alrededor de i

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z-a} \quad \text{Entonces } f(z) = \frac{\frac{1}{z^2+1}}{z-a} \quad \text{donde } \frac{\frac{1}{(z+i)(z-i)}}{z-a}$$

Nos queda $\phi(z) = \dfrac{1}{z+i}$

♡ Calculamos el residuo

$$b_1 = \phi(z_0) = \frac{1}{i+i} = \frac{1}{2i}$$

♡ Usando el teorema de los residuos

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+1} + \int_C \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i \left[\frac{1}{2i}\right]$$

donde

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+1} = \pi - \int_C \frac{dz}{z^2+1}$$

Tenemos

$$|z^2+1| \geq ||z^2|-1| = R^2-1$$

donde

$$\left|\int_C \frac{dz}{z^2+1}\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} = \frac{\frac{\pi}{R}}{1-\frac{1}{R^2}} \to 0$$

cuando R tiende a ∞

Al ser solo la mitad de la circonferencia, los limites de integración seria de cero a infinito.

Tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi$$

donde

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$;

Nota: Usando la función
$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$$

Sabemos $f(z)$ tiene singularidades aisladas en z_0 de z^2+1 de orden $m=2$

Tenemos

$$0 = z^2+1 \; ; \; z^2 = 1 \quad \text{donde } z = \pm i$$

Entonces
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \int_C \frac{dz}{(z^2+1)^2} = 2\pi i B$$

Ahora calculamos el residuo

$$B = \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^2}$$

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-1)^2} \quad \text{donde } \phi(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$$

Tenemos

$$B = \phi'(i) = \frac{1}{4i}$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2} - \int \frac{dz}{(z^2+1)^2}$$

Tenemos que z es un punto en C

Nos queda $|z^2+1| \geq R^2 - 1$

Entonces
$$\left| \int_C \frac{dz}{(z^2+1)^2} \right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} = \frac{\frac{\pi}{R3}}{\left(1 - \frac{1}{R^2}\right)^2} \quad \text{Donde} = 0$$

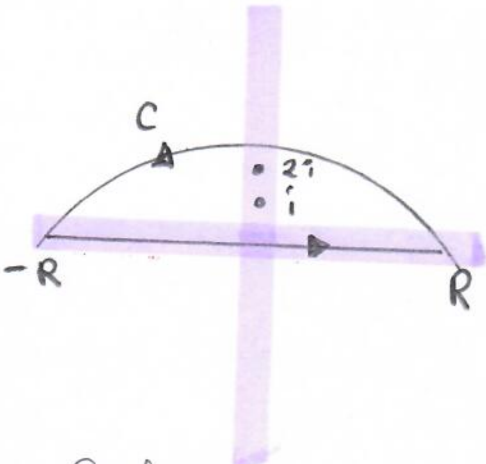
Cuando $R \to \infty$

Así se obtiene la media circunferencia

donde

2) a) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

$$f(z) = \frac{z^2 dx}{(z^2+1)(z^2+4)}$$



Gráfica 2

//sabemos que tiene polos simples en $z=i$ y en $z=2i$ por la gráfica 2

♡ahora calculamos los residuos

Tenemos

$$B_1 = \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \left.\frac{z^2}{(z+i)(z^2+4)}\right|_{z=i} = -\frac{1}{6i}$$

$$B_2 = \operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = \left.\frac{z^2}{(z^2+1)(z+2i)}\right|_{z=2i} = \frac{1}{3i}$$

Tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} + \int_C \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

Nos queda

$$= 2\pi i (B_1 + B_2)$$

donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} + \int_C \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

Nos queda

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{3i} - \frac{1}{6i}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{3} - \int_C \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

Entonces si z es un punto en el contorno C

Tenemos

$$|z^2+1| \geq ||z|^2-1| = R^2-1$$

y

$$|z^2+4| \geq ||z^2|-4| = R^2-4$$

Donde

$$\left| \int_C \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)(z^2+4)} \right| \leq \frac{\pi R^3}{(R^2-1)(R^2-4)} = \frac{\frac{\pi}{R}}{\left(1-\frac{1}{R^2}\right)\left(1-\frac{4}{R^2}\right)} = 0$$

Cuando $R \to \infty$

Por lo que podemos concluir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{3}$$

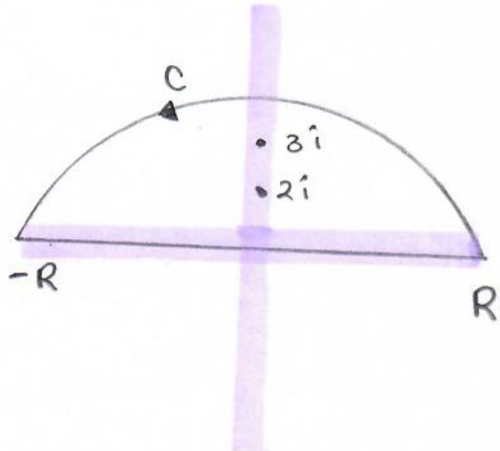
Donde

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}}$$

b) $$\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{200}$$

Donde
$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2}$$

Tenemos
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2} + \int_C \frac{z^2\,dz}{(z^2+9)(z^2+4)^2}$$
$$= 2\pi i\,(B_1 + B_2)$$



Gráfica 3

donde
$$B_1 = \operatorname*{Res}_{z=3i} \frac{z^2\,dz}{(z^2+9)(z^2+4)^2} ;$$
$$B_2 = \operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{z^2\,dz}{(z^2+9)(z^2+4)^2}$$

Entonces para
$$B_1 = \left.\frac{z^2}{(z+3i)(z^2+4)^2}\right|_{z=3i} \quad \text{donde} \quad = \frac{-3}{50i}$$

Entonces para
$$B_2 = \frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2} = \frac{\phi(z)}{(z-2i)^2}$$

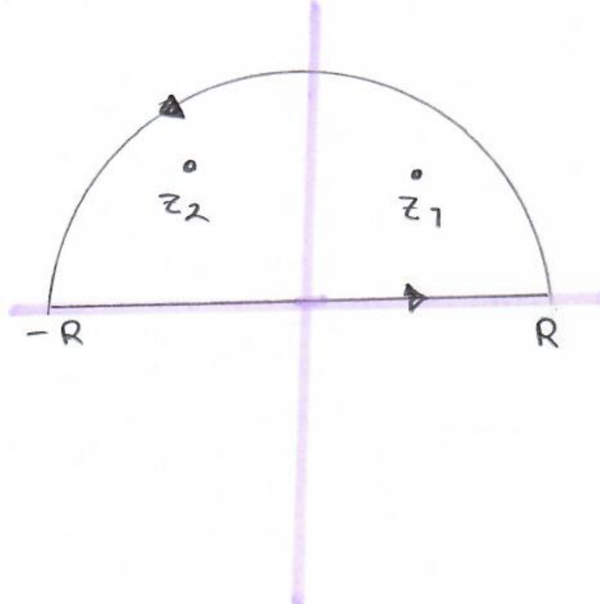
donde
$$\phi(z) = \frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+2i)^2} \quad \text{entonces} \quad B_2 = \phi'(2i) = \frac{13}{200i}$$

Nos queda
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{100} - \int_C \frac{z^2\,dz}{(z^2+9)(z^2+4)^2}$$

Entonces
$$\left| \int_C \frac{z^2\,dz}{(z^2+9)(z^2+4)^2} \right| \leq \frac{\pi R^3}{(R^2-9)(R^2-4)^2} \quad \text{donde} \to 0 \text{ cuando } R \to \infty$$

Nos queda
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{100} \quad \text{donde} \quad \int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{100}$$

3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$



Gráfica 4

El polinomio tiene cuatro raíces

$$z_1 = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$z_2 = e^{\frac{i\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}}\, e^{i\pi/2}$$

donde

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

Podemos observar en la gráfica 4 que solo z_2 y z_1 estan dentro del contorno C.

Ahora calculamos los residuos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} + \int_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\,(B_1 + B_2)$$

donde

$$B_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{1}{z^4+1} \qquad B_2 = \operatorname*{Res}_{z=z_2} \frac{1}{z^4+1}$$

donde los polos simples de $f(z)$ son

$$B_1 = \frac{1}{4z_1^3} \cdot \frac{z_1}{z_1} = -\frac{z_1}{4} \quad \text{y} \quad B_2 = \frac{1}{4z_2^3} \cdot \frac{z_2}{z_2} = -\frac{z_2}{4}$$

Tenemos

$$B_1 + B_2 = -\frac{1}{4}(z_1 + z_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\Big]\; -\frac{1}{4}$$

Nos queda

$$= -\frac{i}{2\sqrt{2}}$$

Entonces

Tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} + \int_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\left(-\frac{i}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \int_C \frac{dz}{z^4+1}$$

Nos queda

$$\left|\int_C \frac{dz}{z^4+1}\right| \leq \frac{\pi R}{R^4-1} \to 0 \quad \text{Cuando } R\to\infty$$

Así

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} =$$

donde

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$$

Nos queda

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

3) b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\,dx$

Nota: En $f(z)$ podemos darnos cuenta que existen singularidades aisladas en z^6+1, las cuales tienen seis raíces de -1.

donde

$$f(z) = \frac{z^2}{z^6+1}$$

Tenemos

$$C_n = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{6}\right)\right] \text{ donde } (n = 0, 1, \cdots 5)$$

Primeras tres raíces

$$C_0 = e^{i\pi/6}, \ C_1 = i, \ C_2 = e^{i5\pi/6}$$

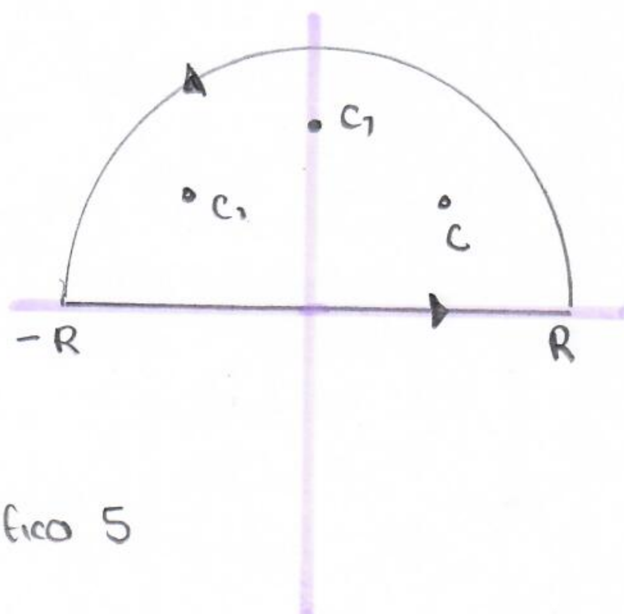


Gráfico 5

usando el teorema de los residuos.

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_C f(z)\,dz$$

donde

$$= 2\pi i\left[B_0 + B_1 + B_2\right]$$

Ahora calculamos los residuos.

donde

$$B_n = \operatorname*{Res}_{z=C_n} \frac{z^2}{z^6+1}$$

$$= \frac{C_n^2}{6C_n^5} = \frac{1}{6C_n^3} \quad \text{donde } (n = 0, 1, 2)$$

Tenemos

$$2\pi i(B_0 + B_1 + B_2)$$

donde

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{6i} - \frac{1}{6i} + \frac{1}{6i}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Nos queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{3} - \int_C f(z)\,dz$$

♡ utilizando la desigualdad de Jordan

Tenemos

$$|z^6+1| \geq ||z|^6+1| = R^6-1$$

donde

$$|f(z)| = \frac{|z^2|}{|z^6+1|} \leq M_R \quad \text{entonces} \quad M_R = \frac{R^3}{R^6-1}$$

Nos queda

$$M_R = \frac{\frac{1}{R^3}}{1-\frac{1}{R^6}} \to 0 \quad \text{cuando} \quad R \to \infty$$

donde

$$\lim_{R\to\infty} \int_C f(z)\,dz = 0$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \frac{\pi}{3}$$

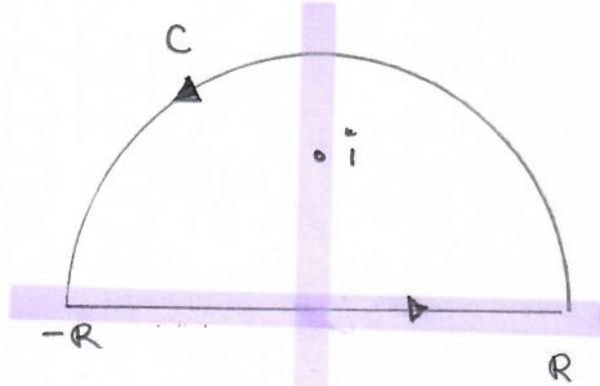
Nos queda

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \frac{\pi}{6}$$

5. $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \, (a \geq 0)$

donde

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$



Podemos notar que $f(z)$ tiene singularidades aisladas en $\pm i$

Tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx + \int_C f(z)e^{iaz}\,dz = 2\pi i B$$

donde

$$B = \operatorname*{Res}_{z=i}\left[f(z)e^{iaz}\right] = \left.\frac{e^{iaz}}{z+i}\right|_{z=i} = \frac{e^{-a}}{2i}$$

Nos queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-a} - \int_C f(z)e^{iaz}\,dz$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-a} - \operatorname{Re}\int_C f(z)e^{iaz}\,dz$$

Usando la desigualdad de Jordan

$|f(z)| \leq M_R$ donde $M_R = \frac{1}{R^2-1}$

$$\left|\operatorname{Re}\int_C f(z)e^{iaz}\,dz\right| \leq \left|\int_C f(z)e^{iaz}\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1}$$

Nos queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-a}$$

Tenemos

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1}\,dx$$

donde $= \frac{\pi e^{-a}}{2}$

7) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} 2x}{x^2+3}\,dx = \frac{\pi}{2}\exp(-2\sqrt{3})$

donde

$$f(z) = \frac{z}{z^2+3}$$

Tenemos

$$= \frac{z\exp(i2z)}{(z-z_1)(z-\bar{z}_1)}$$

Podemos notar que las singularidades de $f(z)$ se encuentran en z^2+3 y estan dados por

$z^2 = -3$ $\quad z_1 = \sqrt{3}i$

$z = \pm\sqrt{3}i$ $\quad z_2 = -\sqrt{3}i$

♡ utilizamos las singularidades $\sqrt{3}i$ es un polo simple.

$$f(z)e^{iaz} = \frac{\phi(z)}{z-\sqrt{3}i}$$

donde

$$\phi(z) = \frac{z\exp(i2z)}{z+\sqrt{3}i}$$

$$\phi(\sqrt{3}i) = \frac{\sqrt{3}i\, e^{2i\sqrt{3}i}}{2\sqrt{3}i}$$

Nos queda

$$= \frac{e^{-2\sqrt{3}}}{2}$$

Cuando z es un punto en C

Por el limite

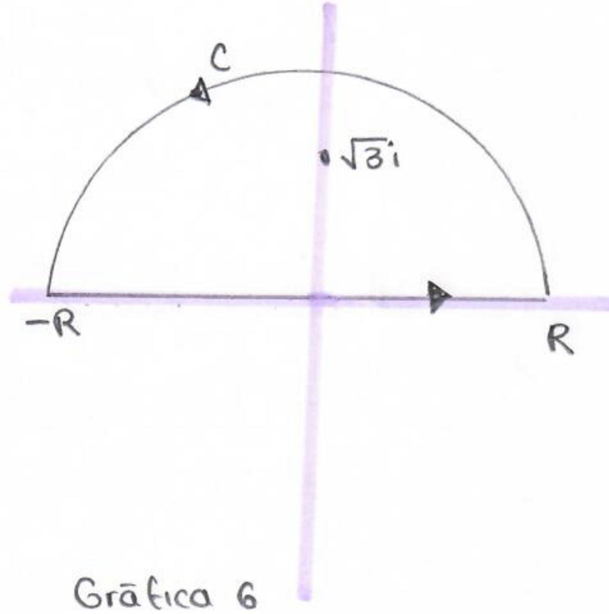
$$\lim_{R\to\infty} \int_C f(z)\, e^{i2z}\,dz = 0$$

$$\left|\lim \int_C f(z)e^{i2z}dz\right| \leq \left|\int_C f(z)e^{i2z}dz\right|$$

Nos queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\operatorname{sen}x}{x^2+3}\,dx = \pi\exp(-2\sqrt{3}) \Rightarrow \int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}x}{x^2+3}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\exp(-2\sqrt{3})$$



Gráfica 6

♥ Siguiendo el teorema de los residuos de cauchy

$$\int_C f(z)\, e^{i2z}\,dz + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2+3}\,dx$$

$$= \pi i e^{-2\sqrt{3}}$$

Por la desigualdad de Jordan

$|f(z)| \leq M_R \quad M_R = \dfrac{R}{R^2-3} \to 0$

Cuando $R \to \infty$

9) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \operatorname{sen} ax}{x^4+4}\, dx = \pi e^{-a} \cos a \quad (a>0)$$

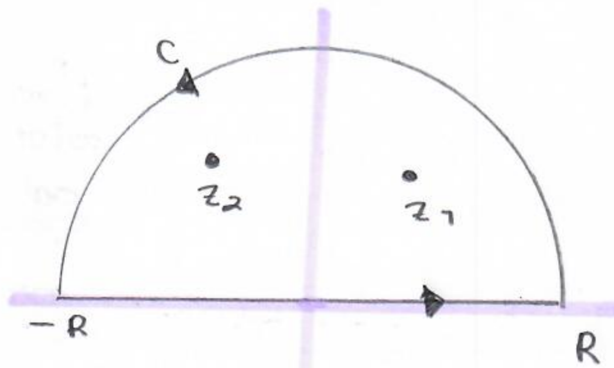
Nota: Debemos calcular las cuatro raíces de -4 para encontrar las singularidades aisladas.

donde
$$f(z) = \frac{z^3}{z^4+4}$$

♡ Tenemos que las singularidades son

$$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = 1+i$$

donde
$$z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$$
$$= \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{2}}$$
$$= (1+i)i = -1+i$$



♥ z_1 y z_2 están dentro del contorno C.

Tenemos por el teorema de los residuos, podemos encontrar los residuos de los polos simples

Gráfica 6

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 e^{iex}}{x^4+4}\, dx + \int_C f(z) e^{iaz}\, dz = 2\pi i\,(B_1 + B_2)$$

donde
$$B_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{z^3 e^{iaz}}{z^4+4} = \frac{z_1^3 e^{iaz_1}}{4z_1^3} = \frac{e^{ia(1+i)}}{4} = \frac{e^{-a} e^{ia}}{4}$$

y
$$B_2 = \operatorname*{Res}_{z=z_2} \frac{z^3 e^{iaz_2}}{z^4+4} = \frac{z_1^3 e^{iaz_2}}{4z_1^3} = \frac{e^{iaz_2}}{4} = \frac{e^{-a} e^{-ia}}{4}$$

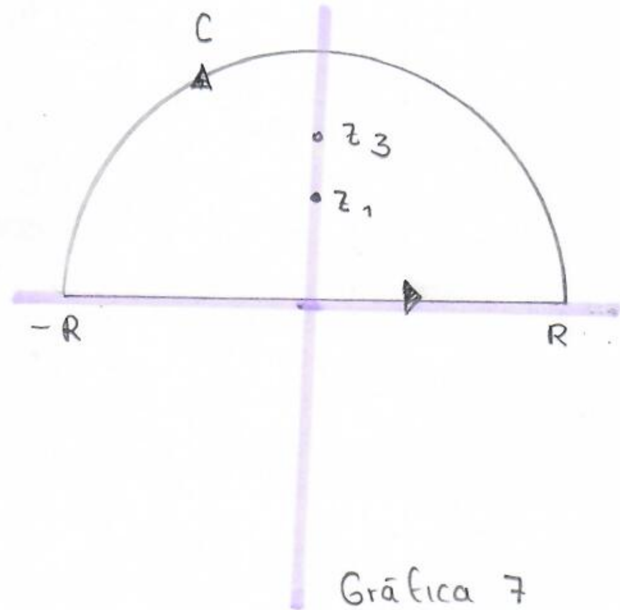
Por lo tanto
$$2\pi i\,(B_1 + B_2) = \pi i e^{-a} \left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right) = i\pi e^{-a} \cos a$$

Se puede escribir como
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \operatorname{sen} ax}{x^4+4}\, dx = \pi e^{-a} \cos a - \int_C \cancel{f(z) e^{iaz}}^{\,0}\, dz$$

Nos queda
$$= \pi e^{-a} \cos a$$

Usar los métodos de las secciones 59 y 60 para probar la convergencia de las integrales siguientes y hallar sus valores

11) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2+1)(x^2+4)}$$



Gráfica 7

Tenemos

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

Podemos notar que las singularidades estan dadas en $z+1$ y $z+4$

donde

$z_1 = 1$ $\quad z_3 = 2i$

$z_2 = -i$ $\quad z_4 = -2i$

Podemos notar en la gráfica 7 que z_1 y z_3 se encuentran dentro del contorno C

Tenemos para i

$$f(z)e^{iz} = \frac{\phi(z)}{z-i}$$

donde

$$= \phi(z) = \frac{z\exp(iz)}{(z+i)(z^2+4)}$$

$$= \frac{e^{-i}}{6}$$

Tenemos para $2i$

$$f(z)e^{iz} = \frac{\phi(z)}{z-2i}$$

$$\phi(z) = \frac{z\exp(iz)}{(z+2i)(z^2+i)}$$

$$\phi(i) = \frac{ie^{2i^2}}{4i((2i)^2+1)}$$

$$= -\frac{e^{-2}}{6}$$

// sumamos los residuos

$$\frac{e^{-1}}{6} - \frac{e^{-2}}{6} = \frac{1}{6e}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

Mediante el teorema de los residuos de Cauchy

Tenemos

$$\int f(z) e^{iaz} dz + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$$

donde

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{6e} \left(1 - \frac{1}{e}\right)\right)$$

Nos queda

$$= \frac{\pi}{3e} \left(1 - \frac{1}{e}\right) i$$

Entonces

$$\lim \int_C f(z) e^{iaz} dz + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$$

donde $= \frac{\pi}{3e} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$

Mediante Jordan

$$|f(x)| \leq M_R$$

Tenemos

$$M_R = \frac{R}{(R^2-1)(R^2-4)}$$

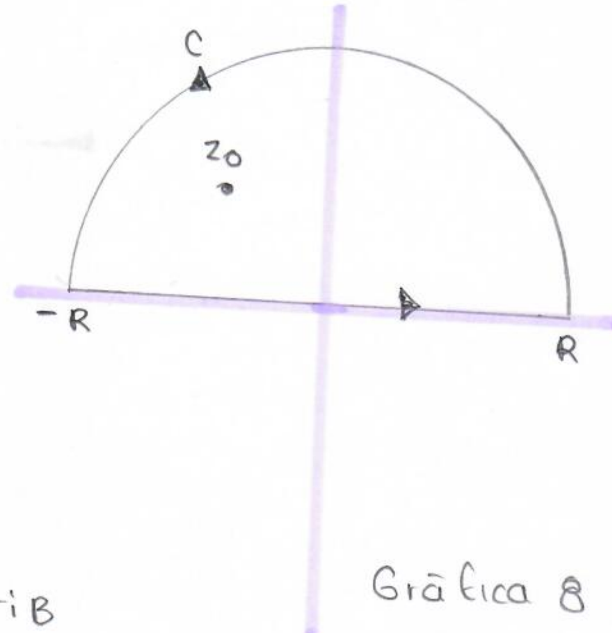
donde $\lim_{R \to \infty} M_R = 0$

$$\lim_{R \to \infty} \int_C f(z) e^{iz} dz = 0$$

Por lo tanto $R \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{3e} \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$



Gráfica 8

Tenemos

$$f(z) = \frac{1}{z^2+2z+2}$$

- podemos observar que las singularidades estan en

$$z^2+2z+2$$

- Utilizando el teorema de los residuos de Cauchy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx + \int_C f(z)\,dz = 2\pi i B$$

donde B es residuo de $f(z)$ en $-1+i$

- Ahora calculamos el residuo

Tenemos

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

donde

$$p(z) = 1$$
$$q(z) = z^2+2z+2$$
$$q'(z) = 2z+2$$

Tenemos para $z_0 = -1+i$

donde $p(-1+i) = 1 \neq 0$

$$q(-1+i) = (-1+i)^2 + 2(-1+i) + 2 = 0$$

$$q'(-1+i) = 2(-1+i) + 2 = 2i \neq 0$$

Entonces

$$B = \frac{p(-1+i)}{q'(-1+i)} = \frac{1}{2i}$$

Nos queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx + \int_C f(z)\,dz$$

donde

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{2i}\right) = \pi$$

Mediante Gauss Jordan

$$\lim_{R\to\infty} \int_C f(z)\,dz = 0$$

Tenemos

$$|z^2+2z+2| \geq |z^2+2z| - 2 \geq |z^2| - 2|z| - 2$$

Nos queda

$$= R^2 - 2R - 2$$

donde

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{z^2+2z+2}\right| \leq \frac{1}{R^2-2R-2}$$

Entonces

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq \int_C |f(z)|\,dz$$

Así

$$\leq \int_C \frac{1}{R^2-2R-2}$$

$$\leq \frac{1}{R^2-2R-2}\int_C dz$$

$$= \frac{1}{R^2-2R-2} \cdot R\pi$$

Nos queda

$$= \frac{\frac{\pi}{R}}{1-\frac{2}{R}-\frac{2}{R^2}} \to 0$$

Así tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \pi$$

15) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{x^2+4x+5}$

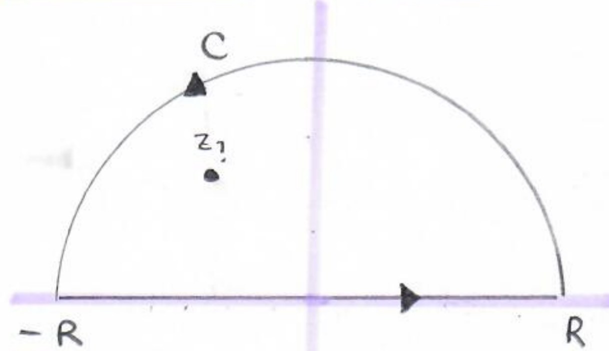
donde

$$f(z) = \frac{1}{z^2+4z+5}$$

Podemos notar que las singularidades estan en z^2+4z+5

Entonces

$$z_1 = -2+i$$
$$z_2 = -2-i$$



Nota: z_1 se encuentra dentro del contorno de C como podemos ver en la gráfica 9.

Gráfica 9

Tenemos

Para $-2+i$

$$f(z)\,e^{iz} = \frac{\phi(z)}{z-(-2+i)}$$

donde

$$\phi(z) = \frac{\exp(iz)}{(z-(-2-i))}$$

Nos queda

$$\phi(-2+i) = \frac{e^{i(-2+i)}}{(-2+i-(-2-i))}$$

Entonces

$$= \frac{-e^{-1-2i}}{2i}$$

$$= -\frac{i}{2e}\,e^{-2i}$$

donde

$$= \frac{-\operatorname{sen}(2) - i\cos(2)}{2e}$$

Mediante el teorema de residuos de Cauchy

Tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \int_c f(z)dz = 2\pi i \frac{(-sen(2) - i\cos(2))}{2e}$$

donde

$$= \frac{\pi \cos(2)}{e} - i\frac{\pi\, sen(2)}{e}$$

Entonces

$$\lim \int_c \cancel{f(z)}\, e^{iaz} dz + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen(x)}{x^2+4x+5} dx$$

Nos queda

$$= \frac{-\pi\, sen(2)}{e}$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen(x)}{x^4+4x+5} = \frac{-\pi\, sen(2)}{e}$$

17) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x+a)^2+b^2}$ $(b>0)$

Tenemos

$$f(z) = \frac{1}{(z+a)^2+b^2}$$

Nota:

Las singularidades de $f(z)$ se encuentran en $(z+a)^2+b^2$

Tenemos

$(z+a)^2 = -b$ $\quad z_1 = -a+bi$

$z+a = \pm bi$ $\quad z_2 = -a-bi$

♡ sabemos que z_1 se encuentra dentro del contorno de C.

Entonces para las singularidades $-a+bi$

. Tenemos

$$f(z)e^{iz} = \frac{\phi(z)}{z-(-a+bi)}$$

donde

$$\phi(z) = \frac{e^{iz}}{(z-(-a+bi))}$$

, Entonces $\phi(z)$ es analitica.

♥ Ahora calculamos los residuos

Tenemos

$$\phi(-a+ib) = \frac{e^{(-a+ib)}}{-a+ib+a+bi}$$

$$= \frac{e^{-ai}}{2ibe^{b}}$$

$$= \frac{\cos(a) - i\,\mathrm{sen}(a)}{2ibe^{b}}$$

Mediante el teorema de residuo de Cauchy

Tenemos

$$\int_C f(z)\, e^{iaz}\, dz + \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{(x+a)^2+b^2}\, dx$$

$$= 2\pi i \left(\frac{\cos(a) - i\operatorname{sen}(a)}{2ibe^{b}} \right)$$

Entonces

$$= \frac{\pi \cos(a)}{be^{b}} - i\, \frac{\pi \operatorname{sen}(a)}{be^{b}}$$

Mediante Jordan

Tenemos

$$|\operatorname{Re} z| < |z|$$

donde

$$\left|\operatorname{Re} \int_C f(z)\, e^{iz}\, dz\right| \leq \left|\int_C f(z)\, e^{iz} dz\right.$$

Esto para toda z en el contorno C, existe una constante

Tenemos

$$|f(z)) \leq M$$

donde

$$M_R = \frac{1}{(R-a)^2 - b^2} = 0$$

cuando $R \to \infty$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x+a)^2 - b^2} \quad (b>0)$$

Nos queda

$$= \frac{\pi \cos(a)}{be^{b}}$$