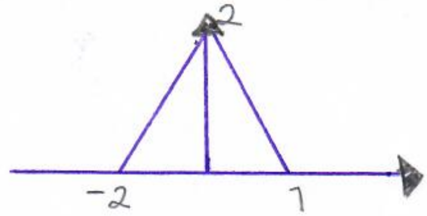
Examen tercer parcial.

•• Bocanegra Hziquio Yeotlanezi •••
◄- - 2019340090 - - ►

1. Encuentre la serie de Fourier de



Tenemos

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & -2 \leq x \leq 0 \\ -x+2 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Tenemos los valorcs

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= -2 \\ p &= 3 \\ \alpha + p &= 1 \end{aligned}}$$

// Donde

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty+p} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_{-2}^{0} (x+2)\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx + \int_{0}^{1} (x+2)\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx$$

// Nos queda

$$a_n = \frac{2}{3}\left[\int_{-2}^{0} x\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx + 2\int_{-2}^{0} \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx + \int_{0}^{1} x\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx + 2\int_{0}^{1} \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx\right]$$

// Hacemos cambio de variable

$$y = \frac{x}{3} \quad dy = \frac{1}{3}$$

// Nos queda

$$a_n = \frac{2}{3}\left[9\int_{-2}^{0} y\cos(\pi n y)\,dy + 18\int_{-2}^{0}\cos(n\pi y)\,dy + 9\int_{0}^{1} y\cos(\pi n y)\,dy + 18\int_{0}^{1}\cos(n\pi y)\,dy\right]$$

2. Encuentre la integral de Fourier compleja de

$$f(x) = xe^{-|x|}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C\omega\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ xe^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Entonces para

$$C\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ te^{t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Entonces para

$$C\omega = \int_{-\infty}^{0} t\, e^{t} e^{-i\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} t\, e^{-t} e^{-i\omega t}\, dt$$

Realizamos la integral por partes

$$U = t \qquad dv = e^{t - i\omega t}$$

$$du = dt \qquad V = \frac{-e^{t - i\omega t}}{i\omega - 1}$$

Nos queda

$$C\omega = \left[\frac{-te^{t-i\omega t}}{i\omega - 1} - \int_{-\infty}^{0} \frac{-e^{t-i\omega t}}{i\omega - 1}\, dt\, \frac{-te^{-i\omega t - t}}{i\omega + 1} - \int_{0}^{\infty} \left(-\frac{e^{i\omega t - t}}{i\omega + 1} \right) dt \right]$$

4 2

// Continuación ejercicio 2

Nos queda

$$C\omega = \left[-\frac{t e^{t - i\omega t}}{i\omega - 1} - \frac{e^{t - i\omega t}}{(i\omega - 1)^2} \right|_{-\infty}^{0} \left. \frac{-t e^{-\omega t - t}}{i\omega + 1} - \frac{e^{-i\omega x - t}}{(i\omega + 1)^2} \right|_{0}^{\infty}$$

Entonces

$$C\omega = \left[-\frac{((i\omega - 1)t + 1) e^{-(i\omega - 1)t}}{(i\omega - 1)^2} \right|_{-\infty}^{0} \left. \frac{-(i\omega t + t + 1) e^{-(i\omega + 1)t}}{(i\omega + 1)^2} \right|_{0}^{\infty}$$

Tenemos

$$C\omega = \left(-4i\omega \frac{(1 - \omega^2)^2}{((i - \omega^2 + 4\omega^2)^2} - 16i \frac{\omega^3}{((1 - \omega^2)^2 + 4\omega^2)^2} \right)$$

Entonces

La integral de Fourier compleja nos queda

$$f(x) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-2\omega \frac{(1 - \omega^2)^2}{((1 - \omega^2)^2 + 4\omega^2)^2} - 8 \frac{\omega^3}{((1 - \omega^2)^2 + 4\omega^2)^2} \right) e^{i\omega x}$$

3. Encuentre la transformada de Fourier de

$$f(t) = 5H(t-2)e^{-5t}$$

// Tenemos la integral

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\omega} dt$$

// Entonces

$$= 5\int_{2}^{\infty} e^{-5t} e^{-i\omega t} dt$$

// Nos queda

$$= 5\int_{2}^{\infty} e^{-(5+i\omega)t} dt$$

// Evaluamos

$$= -\frac{5}{5+i\omega} e^{-(5+i\omega)t} \Big|_{2}^{\infty}$$

// Nos queda

$$= \frac{5}{5+i\omega} e^{-(5+i\omega)2}$$

$$= \frac{5e^{-10-2i\omega}}{5+i\omega}$$

// Simplificando y nos queda

La transformada de Fourier es

$$\hat{f}(\omega) = \frac{5e^{-10-2i\omega}}{5+i\omega}$$

4 3

4. Encuentre la transformada Inversa de Fourier

$$\frac{e^{(20-4\omega)i}}{3-(5-\omega)i}$$

// para encontrar la transformada inversa de Fourier debemos aplicar el siguiente teorema

Teorema inversión del tiempo:

$$\mathcal{F}[f(-t)](\omega) = \hat{f}(-\omega)$$

// Aplicando el teorema tenemos:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{e^{(20-4\omega)i}}{3-(5-\omega)i}\right]$$

// Nos queda

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{e^{4(5-\omega)i}}{3+(\omega-5)i}\right]$$

// Tenemos

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{e^{-4(\omega-5)i}}{3+(\omega-5)i}\right]$$

// Ahora debemos aplicar el teorema de la frecuencia

donde $= e^{5it}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{e^{-4\omega i}}{3+\omega i}\right] = e^{5it}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{3+\omega i}\right](t-4)$

Nos queda

$$= H(t-4)\,e^{5it}\,e^{-3(t-4)}$$

$$= H(t-4)\,e^{-3t+5it+12}$$

Por lo tanto la transformada inversa de Fourier nos queda

$$H(t-4)\,e^{-3t+5it+12}$$

4