# Residuos y polos

...Bocanegra Heziquio Yeotlanezi...

**1.** Escribir la parte principal de las funciones en sus singularidades aisladas y clasificar el tipo de esa singularidad.

a) $z \exp\left(\frac{1}{z}\right)$

Tenemos

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \Rightarrow e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

Entonces

$f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$

Nos queda

$$f'(z) = e^{\frac{1}{z}} + z\, e^{\frac{1}{z}} \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)$$

Tenemos

$$= e^{\frac{1}{z}}\left[1 - \frac{1}{z}\right]$$

Simplificando

$$= \frac{e^{\frac{1}{z}}\,[z-1]}{z}$$

Hay una singularidad aislada en $z_0 = 0$

b) $\frac{z^2}{1+z}$

Nota: En $z=-1$ existe una Singularidad aislada.

Tenemos:

$$f(z)=\frac{z^2}{z+1}$$

Nos queda

$$=\frac{(z^2-1)+1}{(z+1)}$$

Resolviendo

$$=\frac{(z+1)(z-1)+1}{(z+1)}$$

$$=z-1+\frac{1}{z+1}$$

Así: $z=-1$ es un polo simple

c) $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$

Sabemos que

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

Nos queda

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots}{z}$$

Tenemos como resultado

$$= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!}$$

Parte principal es cero, por lo tanto
$z_0 = 0$
es una singularidad removible.

d) $\frac{\cos z}{z}$

Sabemos que

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n!}$$

Nos queda

$$= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

Tenemos

$$\frac{\cos z}{z} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

$$\frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} + \cdots$$

Asi $z=0$ es un polo simple

e) $\frac{1}{(2-z)^3}$

Tenemos

$$f(z) = \frac{1}{(2-z)^3}$$

$$= \frac{-1}{(z-2)^3}$$

$z = 2$ es un polo de orden $m=3$

2. Demostrar que las singularidades de las funciones siguientes son polos. Determina su orden y los correspondientes residuos B.

a) $\dfrac{1-\cosh z}{z^3}$

Nota:
$f(z)$ no es analítica en $z=0$, por lo tanto $z=0$, es una singularidad y buscaremos la serie de Laurent de $f(z)$ en $z=0$.

$$f(z)=\frac{1-\cosh z}{z^3}$$

Usando la serie de maclaurin de $\cosh(z)$

$$\frac{1-\cosh z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(1-\left(1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots\right)\right)$$

Tenemos

$$=\frac{1}{z^3}\left(-\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}-\cdots\right)$$

Nos queda

$$=-\frac{1}{2z}-\frac{z}{4!}-\frac{z^3}{6!}-\cdots$$

La parte principal de la serie de Laurent en $z=0$ es una singularidad aislada.

El unico valor de la parte principal donde se indetermina es en $b_1$

Por lo tanto, podemos concluir

$$m=1\ ,\quad B=-\frac{1}{2}$$

b) $\frac{1-\exp(2z)}{z^4}$

$$f(z)= \frac{1-\exp(2z)}{z^4}$$

$f(z)=$ no es analitica en $z=0$, por lo tanto $z=0$ es una singolaridad y buscaremos la serie de Laurent de $f(z)$ en $z=0$

Usando la serie de Maclaurin de $e^z$

Tenemos

$$\frac{1-e^{2z}}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(1-\left(1+2z+\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^3}{3!}+\frac{(2z)^4}{4!}+\cdots\right)\right)$$

$$= \frac{1}{z^4}\left(-1-2z-\frac{(2z)^2}{2!}-\frac{(2z)^3}{3!}-\frac{(2z)^4}{4!}-\cdots\right)$$

Nos queda

$$= -\frac{2}{z^3}-\frac{2}{z^2}-\frac{4}{3z}-\frac{2}{3}-\frac{4}{15}z-\cdots$$

Tenemos en la parte principal podemos observar varios terminos donde de $z=0$, por lo tanto es un polo de $f(z)$ y como 3 es el entero más grande donde $b_m$ es diferente de 0 podemos concluir que

$m=3$ y $B=-\frac{4}{3}$

**3.** Hallar el residuo en $z=0$ de la función.

a) $\dfrac{1}{z+z^2}$

Tenemos

$$= \frac{1}{z(z+1)}$$

Vemos que

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

Tenemos

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

$$\frac{1}{z+z^2} = \frac{1}{z}\left(1-z+z^2-\cdots\right)$$

$$\frac{1}{z+z^2} = \frac{1}{z} - 1 + z - \cdots$$

Podemos ver que el residuo en $z=0$ es 1

b) $z \cos\left(\frac{1}{z}\right)$

|| Recordando:

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{z}\right)^{2n}}{(2n)!}$$

Tenemos

$$z \cos\left(\frac{1}{z}\right) = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{z}\right)^{2n}}{(2n)!}$$

$$z \cos\left(\frac{1}{z}\right) = z\left(1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^4} + \cdots\right) = z - \frac{1}{2z} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^3} + \cdots$$

Por lo tanto el residuo en $z=0$ es $-\frac{1}{2}$

c) $\dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z}$

// Recordando

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Tenemos

$$= \frac{1}{z}(z - \operatorname{sen} z)$$

$$z - \operatorname{sen} z = z - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right)$$

Nos queda

$$\frac{1}{z}(z - \operatorname{sen} z) = \frac{1}{z}\left[z - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right]$$

$$\frac{1}{z}(z - \operatorname{sen} z) = \frac{1}{z}\left[z - \left(z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 + \dots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{z}\left[-\frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 + \dots\right]$$

$$= -\frac{1}{3!} z^2 + \frac{1}{5!} z^4 + \dots$$

Podemos observar que el residuo en $z=0$ es $0$

4. usar residuos para calcular la integral de las siguientes funciones sobre el circulo $|z|=3$ orientado positivamente

a) $\dfrac{\exp(-z)}{z^2}$

Nota: Usamos la serie de Taylor de la función exponencial.

Tenemos:

$$e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!}$$

$$\frac{e^{-z}}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}\right)$$

$$= \frac{1}{z^2}\left(1 - z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)$$

Nos queda

$$= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} - \frac{z}{3!} + \cdots$$

En este caso el residuo es $-1$

Usamos el teorema de los residuos

Tenemos

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\,(-1)$$

Nos queda

$$= -2\pi i$$

c) $\dfrac{z+7}{z^2-2z}$

Resolviendo por fracciones parciales

$$f(z) = \frac{z+7}{z^2-2z} = \frac{z+7}{z(z-2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2} = \frac{A(z-2)+Bz}{z(z-2)}$$

Nos queda

$$A(z-2)+Bz = z+7$$

$$Az - 2A + Bz = z+7$$

Tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A+B &= z \\ -2A &= 7 \end{aligned} \qquad A = -\frac{7}{2} \qquad B = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto

$$f(z) = \frac{z+7}{z^2+2z} = \frac{3}{2(z-2)} - \frac{7}{2z}$$

Por lo tanto los coeficientes obtenidos seran nuestros residuos.

Usamos el teorema de los residuos

$$\int_c f(z)\,dz = 2\pi i\left[\frac{3}{2} - \frac{7}{2}\right]$$

$$= 2\pi i$$

**1.** Probar que las singularidades de las funciones siguientes son polos. Determinar el orden m de cada polo, y hallar el correspondiente residuo B.

a) $\dfrac{z^2+2}{z-1}$

Utilizamos el teorema

$$f(z)=\frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}$$

Podemos f(z) observar que la única singularidad que tiene es 1:

$$f(z)=\frac{z^2+2}{z-1}\ ; \quad z_0=1$$

Por lo tanto

$$\phi(z)=z^2+2$$

como $\phi(z)$ es analítica en 1, entonces $z=1$ es un polo de orden $m=1$ o un polo simple.

∴ Calculamos el residuo

$$B=\phi(1)=1^2+2=3$$

$$B=3$$
$$m=1$$

b) $\left(\frac{z}{2z+1}\right)^3$

$$= \frac{z^3}{(2(z+\frac{1}{2}))^3} = \frac{z^3}{8(z+\frac{1}{2})^3}$$

Podemos observar que nuestra singularidad es en

$z = \frac{1}{2}$

$\phi = \frac{z^3}{8}$

Como $\phi(z)$ es analitica en $\frac{1}{2}$, entonces $z = \frac{1}{2}$ es un polo de orden $m = 3$

Por lo tanto calculamos el residuo

$$B = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

$$B = \frac{\phi''\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}$$

$$= \frac{\frac{6}{8}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}$$

$$= -\frac{3}{16}$$

d) $\frac{\exp z}{z^2+\pi^2}$

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2+\pi^2} = \frac{e^z}{(z+\pi i)(z-\pi i)}$$

Podemos ver que las singularidades son $\pi i$ y $-\pi i$

Tenemos

$$\phi(z) = \frac{e^z}{z+\pi i}$$

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z-\pi i}$$

Nos queda como
$\phi(z)$ es analitica en $z=\pi i$, por lo tanto es un polo de orden 1 o un polo simple.

Calculemos el residuo B:

$$B = \phi(i\pi)$$
$$= \frac{e^{\pi i}}{2\pi i}$$
$$= \frac{-1}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi}$$

Tenemos

$$\phi(z) = \frac{e^z}{z-\pi i}$$

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z+\pi i}$$

como $\phi(z)$ es analitica en $z=-\pi i$ por lo tanto es un polo de orden 1 o un polo simple

calculamos el residuo B:

$$B = \phi(i\pi) = \frac{e^{\pi i}}{2\pi i} = \frac{-1}{-2\pi i} = \frac{-1}{2\pi}$$