función exponencial

Probar que

a) $\exp(2 \pm 3\pi i) = -e^2$

Cuando tenemos a π podemos representarlo de su forma polar

Tenemos

$$e^{2 \pm 3\pi i} = -e^2 \quad \begin{cases} e^{2+3\pi i} = e^2[\cos 3\pi + i \operatorname{sen} 3\pi] = -e^2 \\ e^{2-3\pi i} = e^2[\cos(-3\pi) + i\operatorname{sen}(-3\pi)] = -e^2 \end{cases}$$

En ambos casos se demuestra que

$e^{2 \pm 3\pi i} = -e^2$ en ambos casos.

b) $\exp \frac{2+\pi i}{4} = \sqrt{\frac{e}{2}}\,(1+i)$

La forma conjugada la podemos expresar en su forma polar

$$e^{\frac{2}{4}+\frac{\pi}{4}i} = e^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right] \Big\} \text{ forma polar}$$

$$e^{\frac{2}{4}+\frac{\pi}{4}i} = e^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right] \Big\} \text{ se multiplica por su conjugado}$$

$$e^{\frac{2}{4}+\frac{\pi}{4}i} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}[1+i] \Big\} \text{ se pueden agrupar terminos}$$

$$e^{\frac{2}{4}+\frac{\pi}{4}i} = \frac{e}{\sqrt{2}}(1+i)$$

∴ Se demuestra que son iguales

c) $\exp(z+\pi i) = -\exp z$

Podemos expresar el número complejo

$$e^{(z+\pi)}$$

en su forma polar, nos queda

$$e^{(z+\pi i)} = -e^{z}\left[\overset{-1}{\cancel{\cos(\pi)}} + \overset{0}{\cancel{i\,\mathrm{sen}(\pi)}}\right] \Big\}\text{ forma polar}$$

se puede expresar como

$$\underbrace{e^{(z+\pi i)} = -e^{z}}$$

se cumple la igualdad

2. Probar que la función $2z^2 - 3 - ze^{z} + e^{-z}$ es entero

Tenemos la función

$$2z^2 - 3 - ze^{z} + e^{-z}$$

derivamos respecto a z

$$\frac{df(z)}{dz} = 4z + 0 - \frac{d[ze^{z}]}{dz} - \frac{de^{-z}}{dz}$$ //hacemos regla de la cadena

$$\frac{df(z)}{dz} = 4z - \left[\frac{dz}{dz} \cdot e^{z} + z\frac{de^{z}}{dz}\right] - \left[-e^{-z}\right]$$

$$f'(z) = 4z - e^{z}[1+z] + e^{-z}$$

$$f'(z) = 4z - e^{z} + ze^{z} + \frac{1}{e^{z}}$$ } la función no se indetermina en ningún punto

$\therefore$ f(z) es una función entera

3. Hallar los valores de z para los que

a) $e^z = -2$

utilizando la propiedad $z = |z| e^{i\theta_0}$

Para la magnitud de z tenemos

Nos queda

$$e^z = 2e^{i(\pi + 2n\pi)} \quad (n = 0 \pm 1 \pm 2, \ldots) \;||\; \text{valores que puede tomar } n$$

Despejamos z

Aplicamos logaritmo para quitar exponencial

$$\cancel{\ln} e^z = \ln\left[2e^{i(\pi+2n\pi)}\right]$$

$$z = \ln 2 + \cancel{\ln} (e^{i(\pi+2n\pi)})$$

$$z = \ln 2 + i(\pi + 2\pi)$$

Entonces

$$z = \ln 2 + (2n+1)\pi i$$

Donde $n = 0 \pm 1, \pm 2 \ldots$

Hallar los valores de z para los cuales

b) $e^z = 1 + \sqrt{3}\,i$

Utilizando la Propiedad $z = |z| e^{i\theta_0}$

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$|z| = \sqrt{1+3}$$

$$|z| = \sqrt{4}$$

$$|z| = 2$$

Nos queda

$$e^z = 2 + e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

donde

$$e^z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)} \quad ; \; n = 0, \pm 1, \pm 2 \pm \ldots$$

Aplicamos logaritmos para quitar el exponencial

$$\cancel{\ln} e^z = \ln\left[2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)}\right]$$

Nos queda

$$z = \ln 2 + \cancel{\ln}\left[e^{i\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)}\right]$$

$$z = \ln 2 + \left(2n + \frac{1}{3}\pi i\right)$$

donde

$n = 0 \pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots$

Hallar los valores de z para los que

c) $\exp(2z-1)=1$

// $z=|z|e^{i\theta_0}$

$|z|=\sqrt{1^2}$

$|z|=1\ ,\ \theta=0$

Tenemos

$$e^{(2z-1)}=1e^{i0}$$

Donde

$$e^{(2z-1)}=1e^{i(2z-1)}\ ;\ n=0\pm1\pm2\pm\ldots$$

Aplicamos logaritmo para quitar exponencial

$$\cancel{\ln}\,e^{(2z-1)}=\cancel{\ln}[1e^{i(0+2n\pi)}]$$

$$2z-1=0+2n\pi \quad \text{// Despejamos z}$$

$$2z=1+i2n\pi$$

$$z=\frac{1}{2}+n\pi i$$

donde

$$n=0\pm1\pm2\ldots$$

77. Probar que

a) $ex\bar{p} = \overline{\exp z}$ para todo z

obtener los valores de ambos lados

tenemos

$$e^{\bar{z}} = e^{\overline{(x+iy)}}$$

$$e^{\bar{z}} = e^{x-iy}$$

$$\underbrace{e^{\bar{z}} = e^{x}(\cos(y) - i\,\mathrm{sen}(y))}$$

Para $\overline{\exp z}$

Tenemos

$$\overline{(e^{z})} = \overline{(e^{x+iy})}$$

$$\overline{e^{z}} = \overline{e^{x}(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y))}$$

Por el conjugado se cambia el signo del i imaginario

$$\underbrace{\overline{e^{z}} = e^{x}(\cos(y) - i\,\mathrm{sen}(y))}$$

Ambas partes son iguales, por lo que concluimos que

$$\underbrace{\exp\bar{z} = \overline{\exp z}}$$

11. Probar que

b) $\exp(i\bar{z}) = \overline{\exp(iz)}$

si y solo si $z = n\pi$, con $n = 0 \pm 1 \pm 2 \pm \ldots$

Tenemos

Recordando propiedades

$$e^{(i\bar{z})} = \overline{e^{(iz)}} \qquad \Big\| \qquad \begin{array}{l} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{array}$$

Donde

$$e^{y} e^{ix} = e^{-y} e^{-x} \qquad // \text{utilizando propiedades}$$

$$e^{-y} = e^{y} \quad y \quad -x = x + 2n\pi$$

donde

$$y = 0 \quad y \quad x = n\pi$$

Tenemos

$$z = n\pi \;; n = 0 \pm 1 \pm 2 \ldots$$