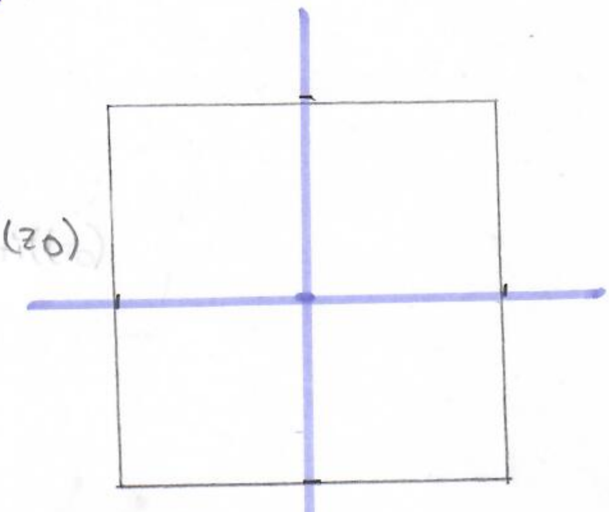
Examen 2do parcial

Bocanegra Heziquio Yestlanezi
2019340090

1. Demostremos por C la frontera del cuadrado cuyos lados estan sobre las rectas $x = \pm 2$, $y = \pm 2$, donde C se recorre en sentido positivo

Calcule $\int_C \frac{\cosh z}{z^4} dz$



Gráfica 1

Recordando

$$\int \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Recordando

$f(z) = e^{-z}$

donde $f(z)$ es analitica en todos los puntos dentro de C.

Tenemos

$$\int_C \frac{\cosh z}{z^4} dz$$

donde

$$\int_C \frac{\cosh z}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} \left[\frac{d^3}{dz^3} (\cosh z) \right]_{z=0}$$

Entonces

$$\int_C \frac{\cosh z}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} \left[\operatorname{sen} h\, z \right]_{z=0}$$

Nos queda

$$\int_C \frac{\cosh z}{z^4} = \frac{2\pi i}{3!} [0] \} \text{ Evaluada}$$

Respuesta = 0

2. Probar que:

$$e^{z} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} \quad \text{donde } (|z|<\infty)$$

$$f(z) = e^{z}$$

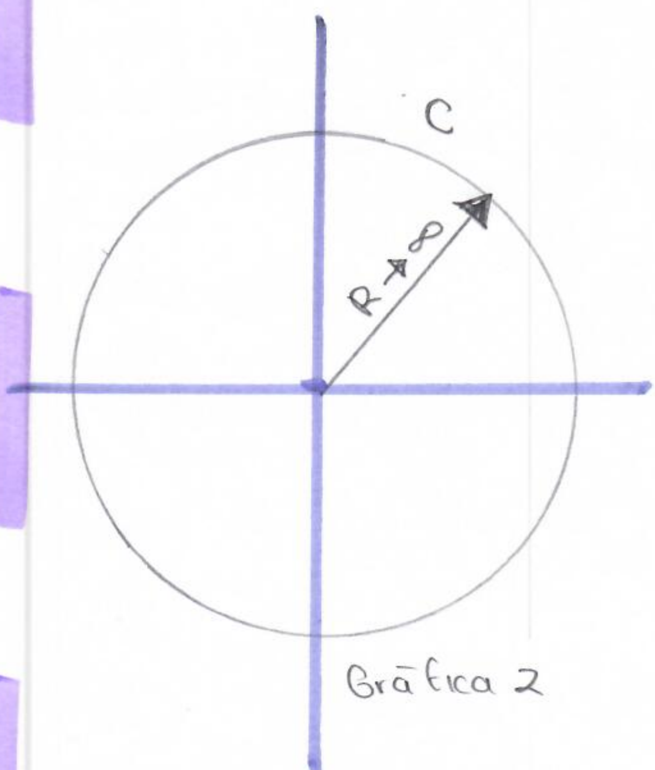
$$z = z - 1$$

donde

$$e^{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (|z|<\infty)$$

Tenemos

$$e^{(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} \quad \text{donde } (|z|<\infty)$$



Gráfica 2

Entonces

$$e^{(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} \quad (|z|<\infty)$$

Tenemos

$$e^{z} = e^{z-1} e$$

$$= e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} \quad \text{donde } (|z|<\infty)$$

Por lo tanto

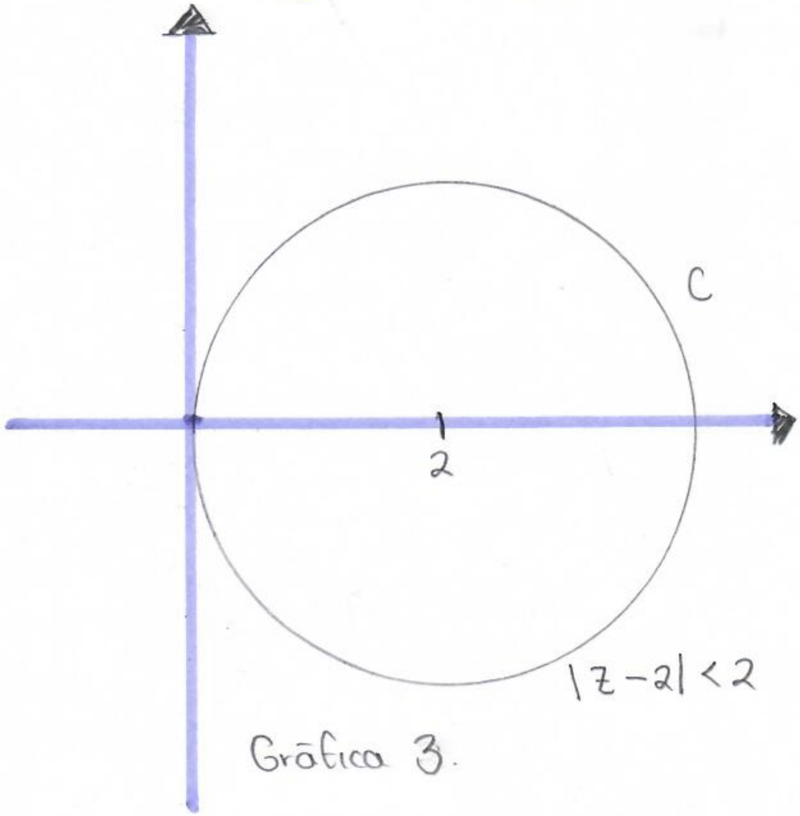
Nos queda

$$e^{z} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}$$

donde $(|z|<\infty)$

3. Probar que:

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{4}\right)^n \quad \text{donde } (|z-2|<2)$$



Gráfica 3.

Podemos notar que $f(z) = \frac{1}{z}$ donde tiene una desigualdad en $z=0$ Debido a que la serie de taylor esta en $z_0 = 2$

Primero buscamos la serie donde

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{2+(z-2)}$$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-2}{2}}$$

Tenemos

$$\frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-2}{2}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2)^n}{2^{n+1}}$$

Nos queda

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2)^n}{2^{n+1}}$$

♥ Derivamos

Tenemos

$$-\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} n (z-2)^{n-1}$$

donde

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} (n+1)(z-2)^n$$

Nos queda

$$\underbrace{\frac{1}{z} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{2}\right)}$$

4. Escriba la parte principal de la siguiente función y diga que tipo de singularidades aisladas hay

a) $= z \exp\left(\frac{1}{z}\right)$

Tenemos

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}$$

donde

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

Entonces

$$f(z) = z\, e^{\frac{1}{z}}$$

Nos queda

$$f'(z) = e^{\frac{1}{z}} + z\, e^{\frac{1}{z}} \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)$$

Tenemos

$$f'(z) = e^{\frac{1}{z}}\left[1 - \frac{1}{z}\right]$$

Simplificando

$$= \frac{e^{\frac{1}{z}}\,[z-1]}{z}$$

Respuesta

$$= \frac{e^{\frac{1}{z}}\,[z-1]}{z}$$

Hay una singularidad aislada en $z_0 = 0$

5. Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x+a)^2+b^2} \quad \text{donde} \quad (b>0)$$

Recordando: Las singularidades de $f(z)$ se encuentran en $(z+a)^2+b^2$.

Tenemos

$$f(z) = \frac{1}{(z+a)^2+b^2}$$

Entonces

$(z+a)^2=-b$ $\quad z_1=-a+bi$

$z+a=\pm bi$ $\quad z_2=-a-bi$

Sabemos que z_1 se encuentra dentro del contorno de C.

Entonces para las singularidades $-a+bi$

Tenemos

$$f(z)e^{iz} = \frac{\phi(z)}{z-(-a+bi)}$$

donde

$$\phi(z) = \frac{e^{iz}}{(z-(-a+bi))}$$, Entonces $\phi(z)$ es analítica.

Ahora calcularemos los residuos

Tenemos

$$\phi(-a+ib) = \frac{e^{(-a+ib)}}{-a+ib+a+bi}$$

$$= \frac{e^{-ai}}{2ibe^{b}}$$

Nos queda

$$= \frac{\cos(a)-i\operatorname{sen}(a)}{2ibe^{b}}$$ //de la forma polar

Utilizando el teorema de residuos de Cauchy

Tenemos

$$\int_C f(z)e^{iaz}dz + \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{(x+a)^2+b^2}dx$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\cos(a) - i\,\text{sen}(a)}{2ibe^b}\right)$$

Entonces

$$= \frac{\pi\cos(a)}{be^b} - \frac{i\pi\,\text{sen}(a)}{be^b}$$

Mediante Jordan

Tenemos

$$|\text{Re}\, z| < |z|$$

donde

$$|\text{Re}\int_C f(z)e^{iz}dz| \leq \int_C f(z)e^{iz}dz$$

Para toda z en el contorno C, existe una constante

Tenemos

$$|f(z)| \leq M$$

donde

$$M_R = \frac{1}{(R-a)^2-b^2} = 0 \text{ cuando } R \to \infty$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x+a)^2-b^2} \quad (b>0)$$

Nos queda

$$= \frac{\pi\cos(a)}{be^b}$$