Transformada de Fourier e Inversa.

Encuentre la integral de Fourier compleja de la función y determine a que converge esta integral

1. $f(x) = x e^{-|x|}$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c\omega e^{i\omega x} dx \qquad \text{donde } c\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Entonces

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ x e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{donde } f(t) = \begin{cases} t e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ t e^{t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

nos queda

$$c\omega = \int_{-\infty}^{0} t e^{t} e^{-i\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} t e^{-t} \cdot e^{-i\omega t} dt$$

// Ahora integramos por partes

Nos queda

$$u = t \qquad dv = e^{t - i\omega t}$$

$$du = dt \qquad v = \frac{e^{t - i\omega t}}{i\omega - 1}$$

Nos queda

$$C\omega = \left[-\frac{t e^{t-i\omega t}}{i\omega - 1} - \int_{-\infty}^{0} - \frac{e^{t-i\omega t}}{i\omega - 1}\, dt - \frac{t e^{-t-i\omega t}}{i\omega + 1} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega t + 1} \right) dt \right]$$

Entonces

$$C\omega = \left[\frac{t e^{t-i\omega t}}{i\omega - 1} - \frac{e^{t-i\omega t}}{(i\omega - 1)^2} \right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{t e^{-\omega t - t}}{i\omega + 1} - \frac{e^{-i\omega t - t}}{(i\omega + 1)^2} \right]_0^{\infty}$$

Nos queda

$$C\omega = -\left[\frac{((i\omega - 1)t + 1)e^{-(i\omega - t)}}{(i\omega - 1)^2} \right]_{\infty}^{0} + \left[\frac{(i\omega t + t + 1)e^{-(i\omega + 1)t}}{(i\omega + 1)^2} \right]_0^{\infty}$$

finalmente

$$C\omega = \left(\frac{-4i\omega\,(i - \omega^2)^2}{((i - \omega^2)^2 + 4\omega^2)^2} - 16i\,\frac{\omega^3}{((1 - \omega^2)^2 + 4\omega^2)^2} \right)$$

Resultado

$$f(x) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-2\omega\,\frac{(1 - \omega^2)^2}{((1 - \omega^2)^2 + 4\omega^2)^2} - 8\,\frac{\omega^3}{((1 - \omega^2)^2 + 4\omega^2)^2} \right) e^{i\omega x}\, dx$$

3. $f(x) = \begin{cases} sen(\pi x) & para \quad -5 \leq x < 5 \\ 0 & para \quad |x| > 5 \end{cases}$

Tenemos

$$f(t) = \begin{cases} sen(\pi t) & para \quad -5 \leq t \leq 5 \\ 0 & para \quad |x| > 5 \end{cases}$$

Nos queda

$$c\omega = \int_{-5}^{5} sen(\pi t) e^{-i\omega t} dt + \int_{5}^{0} 0 \cdot \cancel{e^{-i\omega t} dt}^{\,0}$$

$$c\omega = \int_{-5}^{5} sen(\pi t) e^{-i\omega t} dt =$$

Tenemos

$$i \left[\frac{sen(5(\omega+\pi))}{\omega+\pi} - \frac{sen(5(\omega-\pi))}{\omega-\pi} \right]$$

finalmente tenemos

$$\underbrace{f(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{sen(5(\omega+\pi))}{\omega+\pi} - \frac{sen(5(\omega-\pi))}{\omega-\pi} \right] e^{i\omega x} d\omega}$$

5. $f(x) = \begin{cases} x & \text{para } -1 \leq x \leq 1 \\ e^{-|x|} & \text{para } |x| > 1 \end{cases}$

Nos queda

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{para } -1 \leq t \leq 1 \\ e^{-|t|} & \text{para } |x| > 1 \end{cases}$$

donde

$$C\omega = \int_{-\infty}^{-1} e^{t} e^{-i\omega t}\,dt + \int_{-1}^{1} t\, e^{-i\omega t}\,dt + \int_{1}^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t}\,dt$$

Entonces

$$C\omega = \frac{2e^{-1}}{1+\omega^2}(\cos(\omega) - \omega\,\text{sen}(\omega)) + \frac{2i}{\omega^2}(\omega\cos(\omega) - \text{sen}(\omega))$$

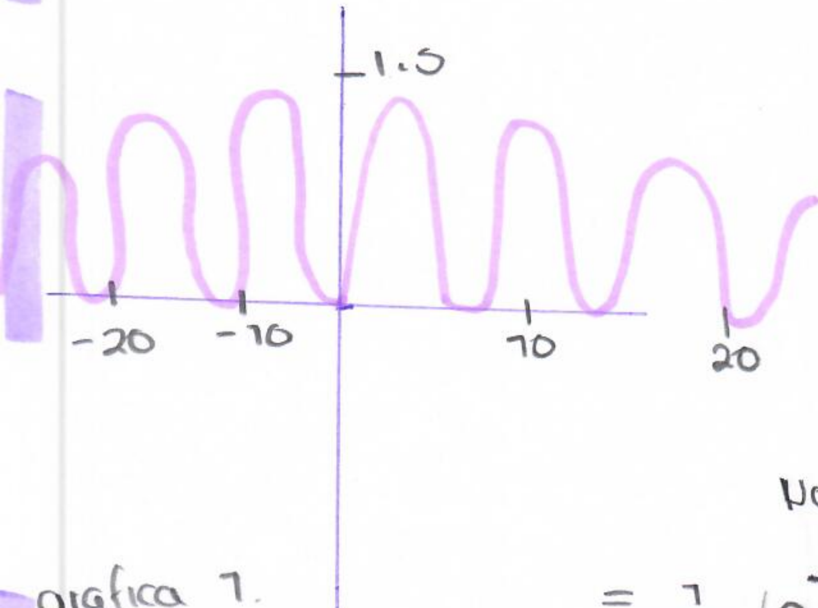
finalmente Tenemos

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{e^{-1}}{1+\omega^2}(\cos(\omega) - \omega\,\text{sen}(\omega)) + \frac{i}{\omega^2}(\omega\cos(\omega) - \text{sen}(\omega))\right] e^{i\omega x}\,d\omega$$

Encuentre la transformada de Fourier de la función y dibuje el espectro de amplitud.

Siempre que aparezca k es una constante positiva.

9. $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & \text{para } -1 \leq t \leq 0 \\ 0 & \text{para } |t| > 1 \end{cases}$



grafica 1.

Tenemos

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

Entonces

$$= -\int_{-1}^{0} e^{-i\omega t}\, dt + \int_{0}^{1} e^{-\omega t}\, dt$$

Nos queda

$$= \frac{1}{i\omega}(e^{-i\omega t}\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t}\Big|_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{i\omega}\left(1 - (e^{i\omega} - 1)\right)$$

finalmente

$$= \frac{1}{i\omega}\left(2 - (e^{i\omega} + e^{i\omega})\right)$$

$$= \frac{2(1 - \cos\omega)}{i\omega}$$

$$= \frac{2i(1 - \cos\omega)}{i^2 \omega}$$

$$= \frac{2i(\cos\omega - 1)}{\omega}$$

$11 \cdot f(t) = 5\left[H(t-3) - H(t-11)\right]$

// utilizamos la definición

Nos queda

$$\mathcal{F}(H(t-a))(\omega) = \int_a^{\infty} e^{-it\omega}\, dt$$

$$= -\frac{1}{i\omega} e^{it\omega}\Big|_a^{\infty}$$

$$= \frac{1}{i\omega} e^{-ia\omega}$$

Nos queda

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(5(H(t-3) - H(t-11)))(\omega)$$

$$= 5\mathcal{F}(H(t-3))(\omega) - 5\mathcal{F}(H(t-11)(\omega)$$

$$= \frac{5}{i\omega} e^{-3i\omega} - \frac{5}{i\omega} e^{+11i\omega}$$

$$= \frac{5i}{\omega} e^{-7i\omega}\left(e^{-4i\omega} - e^{4i\omega}\right)$$

finalmente

$$= \frac{5}{i\omega} e^{-7i\omega}(-2i\, sen(4\omega))$$

$$= \frac{10}{\omega} e^{-7i\omega} sen(4\omega)$$

13. $f(t) = H(t-K)e^{-t/4}$

Tenemos

$$\hat{f}(\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\omega} dt$$

$$= \int_{K}^{\infty} e^{-t/4} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{K}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{4} + i\omega\right)t} dt$$

$$= -\frac{1}{\frac{1}{4} + i\omega} e^{-\left(\frac{1}{4} + i\omega\right)t} \Big|_{K}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\frac{1+4i\omega}{4}} e^{-\left(\frac{1}{4} + i\omega\right)K}$$

Nos queda

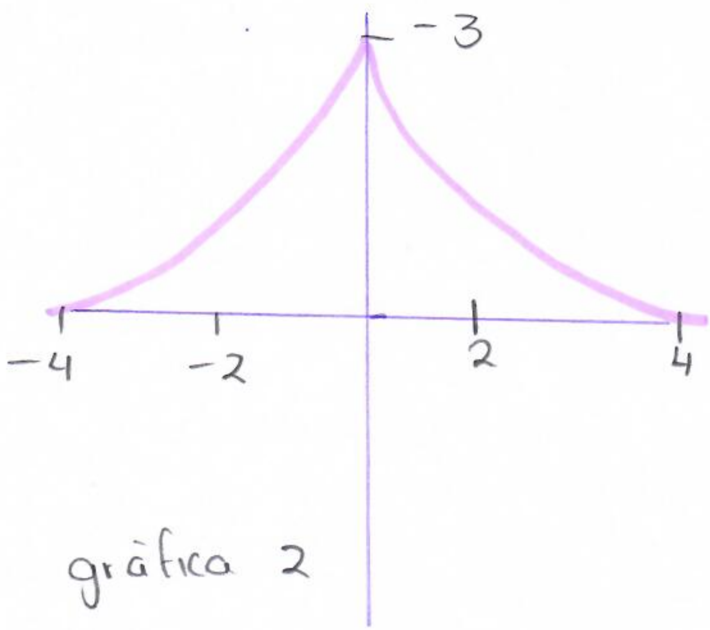
$$= \frac{4}{1+4i\omega} e^{-\frac{1+4i\omega}{4}K}$$

15. $f(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)}$

Donde

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{1} e^{-|\omega|}$$

$$= \pi e^{-|\omega|}$$



gráfica 2

17. f tl $f(t) = 3e^{-4|t+2|}$

donde

$$\mathcal{F}\left[e^{-4|t|}\right](\omega) = \frac{8}{16+\omega^2}$$

// utilizando inversión de tiempo

tenemos

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\left[3e^{-4|t+2|}\right](\omega)$$

$$= 3\,\mathcal{F}\left[e^{-4|t+2|}\right](\omega)$$

donde $= 3e^{-(-2)i\omega}\,\mathcal{F}\left[e^{-4|t|}\right](\omega)$

finalmente

$$= 3e^{2i\omega}\,\frac{8}{16+\omega^2}$$

$$= \frac{24\,e^{2i\omega}}{16+\omega^2}$$

19 Encuentre la transformada inversa de Fourier de la función

$9e^{-(\omega+4)^2/32}$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[9e^{-\frac{(\omega+4)^2}{32}}\right](t) = 9\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{(\omega+4)^2}{32}}\right](t)$$

donde

$$= 9e^{-4it}\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{\omega^2}{4\cdot 8}}\right]t$$

$$= 18\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-4it} e^{-8t^2}$$

27. $\dfrac{e^{(2\omega-6)i}}{5-(3-\omega)i}$

donde

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{e^{(2\omega-6)i}}{5-(3-\omega)i}\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{e^{(2(\omega-3)i}}{5+(\omega-3i)}\right]$$

Tenemos

$$= e^{3it}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{5+\omega i}\right](t+2)$$

Nos queda

$$= e^{3it} H(t+2) e^{-5(t+2)}$$

finalmente

$$= H(t+2)\, e^{-5t+3it-10}$$