Tarea 6. Ejercicios de función exponencial, inversas e hiperbólicas.

1. Probar que $n = 0, \pm1, \pm2$

a) $(1+i)^i = \exp[(-\pi/4) + 2n\pi]\exp[(i/2)\,\text{Log}\,2]$;

$(1+i)^i = \exp[i\log(1+i)]$

$(1+i)^i = \exp\{i[\ln\sqrt{2} + i(\pi/4 + 2n\pi)]\}$

Reduciendo

$(1+i)^i = \exp[i/2 \ln 2 + (\pi/4 + 2n\pi)]$

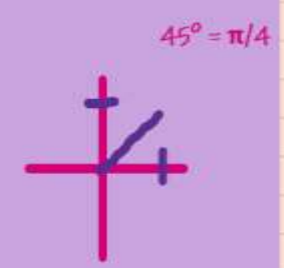
Agrupando terminos, nos queda:

$$\boxed{(1+i)^i = \exp[\pi/4 + 2n\pi]\exp[i/2\ln 2]}$$

Recordamos:

$z = \text{expo}[e * \ln z]$

$\log(z) = \ln|z| + i\arg z$



1. Probar que n = 0, +-1,+-2

b) $(-1)^{1/\pi} = \exp[2n+1)i]$

$(-1)^{1/\pi} = \exp[1/\pi \log(-1)]$

$(-1)^{1/\pi} = \exp\{1/\pi[\log 1 + i(\pi+2n\pi)$

Donde n = 0, +-1,+-2....
$\log 1 = 0$
Entonces nos queda:
$(-1)^{1/\pi} = \exp\{1/\pi[i(\pi+2n\pi)]\}$

Simplificando tenemos:

$(-1)^{1/\pi} = \exp[(2n+1)i]$

Comprobamos que

$(-1)^{1/\pi} = \exp[2n+1)i]$

es igual a

$$\boxed{(-1)^{1/\pi} = \exp[2n+1)i]}$$

Tenemos el arg

Recordemos:

$z = \exp o[e * \ln z]$

$\log(z) = \ln|z| + i \arg z$

2. Hallar el valor principal de

a) i^i

tenemos:

$i^i = \exp(i\text{Log}\, i) = \exp[i(\log 1 + i\pi/2)]$

el valor principal es :

$$\boxed{i^i = \exp[-\pi/2]}$$

2. Hallar el valor principal de

b) $[(e/2)(-1-\sqrt{3}\ i)]^{3\pi i}$

Aplicamos propiedades de los exponentes

Nos queda:

$\exp\{3\pi i \mathrm{Log}(e/2(-1-\sqrt{3}i)]\}$

Entonces

$\exp[3\pi i(\log e - i2\pi/3)]$

Simplificamos

$\exp(2\pi^2)\exp(i3\pi)$

Tenemos

$\exp(2\pi^2)[\cos[3\pi) + i\,\mathrm{sen}(3\pi)]$ //su forma polar

Entonces

$\exp(2\pi^2)[-1+0]$

Nos queda:

$-\exp(2\pi^2)$

Valor principal ---> $=-\exp(2\pi^2)$

2. Hallar el valor principal de

c) $(1-i)^{4i}$

Tenemos

$$(1-i)^{4i} = \exp[4i\,\mathrm{Log}(1-i)]$$

Nos queda:

$$(1-i)^{4i} = \exp[4i(\log\sqrt{2}\ -i\pi/4]$$

Tenemos:

$$(1-i)^{4i} = e^{\pi} e^{i4\ln\sqrt{2}}$$

Nos queda:

$$(1-i)^{4i} = e^{\pi}\ [\cos(4\log 2) + i\,\mathrm{sen}(4\ln\sqrt{2})]$$

Nos queda:

$$\boxed{(1-i)^{4i} = e^{\pi}\ [\cos(2\log 2) + i\,\mathrm{sen}(2\log 2)]}$$

10. Hallar todos los valores de:

a) $tg^{-1}(2i)$

Funciones trigonometricas inversas:

$$\log z = \ln|z| + \arg(z)$$

$$\tan^{-1} z = 1/2 \log i+z/i-z$$

$\tan^{-1} = i/2 \log i+2i/i-2i$

$\tan^{-1} = i/2 \log 3i/-i$

Tenemos:

$\tan^{-1} = i/2[\ln 3 + i(\pi + 2n\pi)]$

Nos queda:

$\boxed{\tan^{-1} = i/2 \ln 3 + \pi(n+1/2)}$

10. Hallar todos los valores de:

b) $\tan^{-1}(1+i)$

Tenemos:

$\tan^{-1}(1+i) = i/2 \log i+1+i / 1-(1+i)$

$\tan^{-1}(1+i) = i/2 \log 1+2i/-1$

$\tan^{-1}(1+i) = i/2 \log(-1-2i)$

$\boxed{\tan^{-1}(1+i) = i/2(\ln\sqrt{5} + i \tan^{-1} 2/2)}$

10. Hallar todos los valores de:

c) $\cosh^{-1}_{1}(-1)$

$\cosh^{-1}(-1) = \log[-1 + ((-1)) \;\; -1 \;]$
$\cosh^{-1}(-1) = \log[-1 + (1-1) \;]$
$\cosh^{-1}(-1) = \log[-1 + 0]$
$\cosh^{-1}(-1) = \log(-1)$
$\cosh(-1) = \ln + i(\pi + 2n\pi)$

$$\boxed{\cosh^{-1}(-1) = i\pi(2n+1)}$$

10. Hallar todos los valores de:

d) $tgh^{-1}\, 0$

$\tanh^{-1} = 1/2 \log 1$
$\tanh^{-1} = 1/2(\ln 1 + i(2n\pi)$

$\tanh^{-1} = n\pi 1$

Donde : $n = 0, +-1, +-2, \ldots$

Propiedad trigonometrica:

$\tanh^{-1}(z) = 1/2 \log(1+z/1-z)$

Tenemos

$senz = 2$

$senz = sen(x+iy)$ //Identificamos parte imaginaria y real

Nos queda:

$senz = senxcoshy + icosxsenhy$

Entonces:

Reales ---> $senxcoshy = 2$ y para imaginarios --->$cosxsenh = 0$

tomamos en cuenta:

si $senhy = 0$ ---> $coshy = 1$ entonces $y = 1$

$coshy = 1$

$senx = 2$

por lo que esta ecuación no tiene solución, ya que podemos notar que el número complejo

$senz = 2$

y nos da que el

$senx = 2$

por lo que es contradictorio y no se cumple.

Del otro lado tenemos que

si $cox = 0$

entonces

$x = \pi/2$

si tomamos la función de los reales nos queda que

$sen(\pi/2) coshg = 2$

entonces nos queda que

$cosh\, y = 2$

Entonces

$\cosh y = e + e /2$

nos queda:

$e^y + e^{-y}/2 = 2$

pasa multiplicando el 2

$e^y + e^{y} = 4$

$e^y + 1 = 4e^y$

por la formula general:

$a = 1$

$b = -4$

$c = 1$

Entonces

$$e^y = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2}$$

$$e^y = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$e^y = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\ln e^y = \ln(2+\sqrt{3})$$

$$y = \pm \ln(2+\sqrt{3})$$

Si $x = \pi/2 + 2n\pi$

Entonces tenemos que:

$\operatorname{sen} x = 1$

$z = \pi/2 + 2n\pi \pm i\ln(2+\sqrt{3})$

donde: $n = 0, \pm 1, \pm 2$

b) $\operatorname{sen}^{-1} z = -i\log(iz+(i-z^2)^{1/2})$

$\operatorname{sen}^{-1} z = -i\log(2i + (1-4)^{1/2})$

$\operatorname{sen}^{-1} z = -i\log(2i + \sqrt{-3})$

$\operatorname{sen}^{-1} z = -i\log(2i + \sqrt{3})i)$

$\operatorname{sen}^{-1} z = -i\,[\log(2 \pm \sqrt{3}) + i(\pi/4 + 2n\pi)$

$\operatorname{sen}^{-1} z = \pi/2 + 2n\pi - i\log(2 \pm \sqrt{3})$

-1

nos queda

$\operatorname{sen}^{-1} z = \pi/2 + 2n\pi \pm i\operatorname{Log}(2 + 3)$

donde

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$

12. Revolver la ecuacion: $\cos\ z = 2$

Donde $z = \cos^{-1}\sqrt{2}$

tomando en cuenta:

$$\boxed{\cos^{-1} z = -i\log[z + i(1-z^2)^{1/2}]}$$

$$\cos^{-1}\sqrt{2} = -i\log[\sqrt{2} \pm i{*}i]$$
$$\cos^{-1}\sqrt{2} = -i\log[\sqrt{2} \pm 1]$$
$$\cos^{-1}\sqrt{2} = \pm i\log[\sqrt{2} + 1]$$
$$\cos^{-1}\sqrt{2} = \pm[\ln(\sqrt{2} + 1) + i2n\pi]$$

nos queda:

$$\boxed{\cos^{-1}\sqrt{2} = \pm\ [-2n\pi + i\ln(\sqrt{2} + 1)]}$$