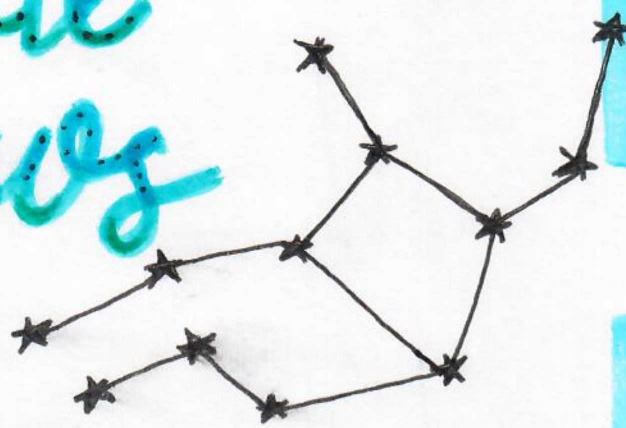
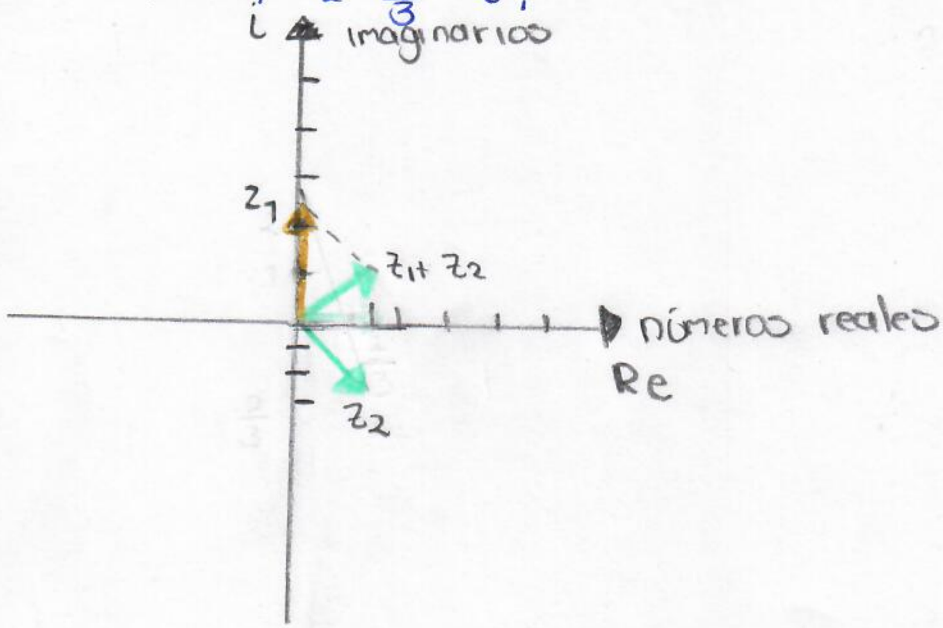
Álgebra de números complejos



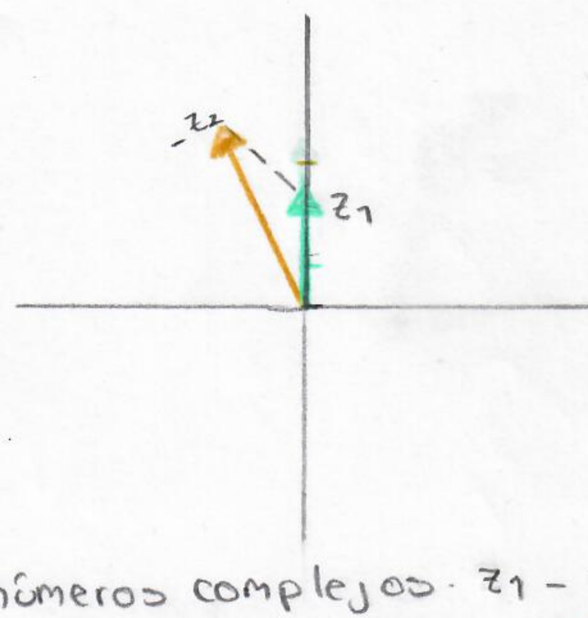
1 Localizar los números $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$ vectorialmente si

a) $z_1 = 2i$, $z_2 = \frac{2}{3} - i$;



Plano 1. números complejos $z_1 + z_2$

$z_1 - z_2 = -\frac{2}{3} + 3i$

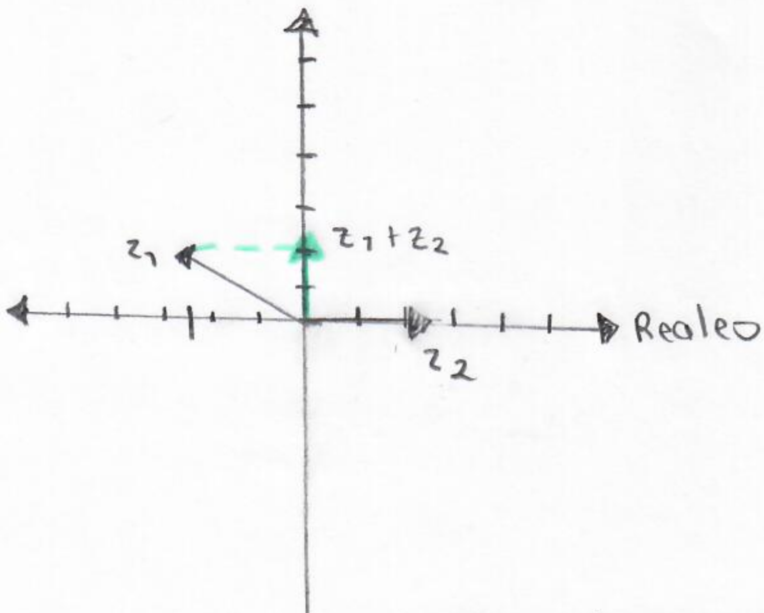


Plano 2. números complejos $z_1 - z_2$

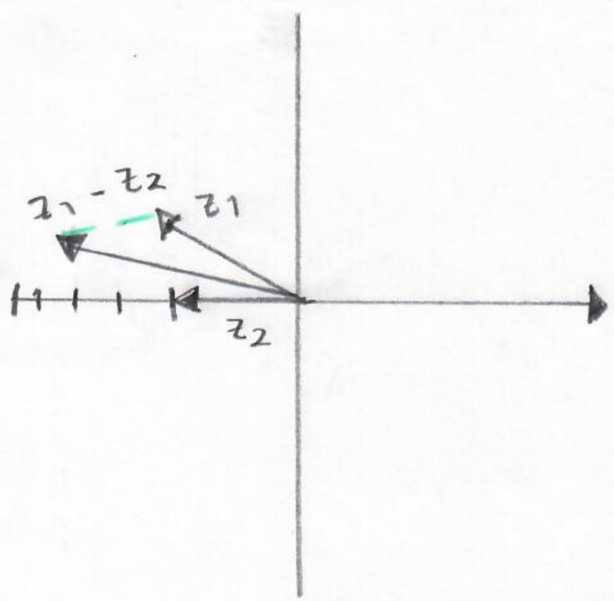
7. Localizar los números $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$ vectorialmente si:

b) $z_1 = (-\sqrt{3}, 1)$, $z_2 = (\sqrt{3}, 0)$

$z_1 + z_2 = (0, 1)$



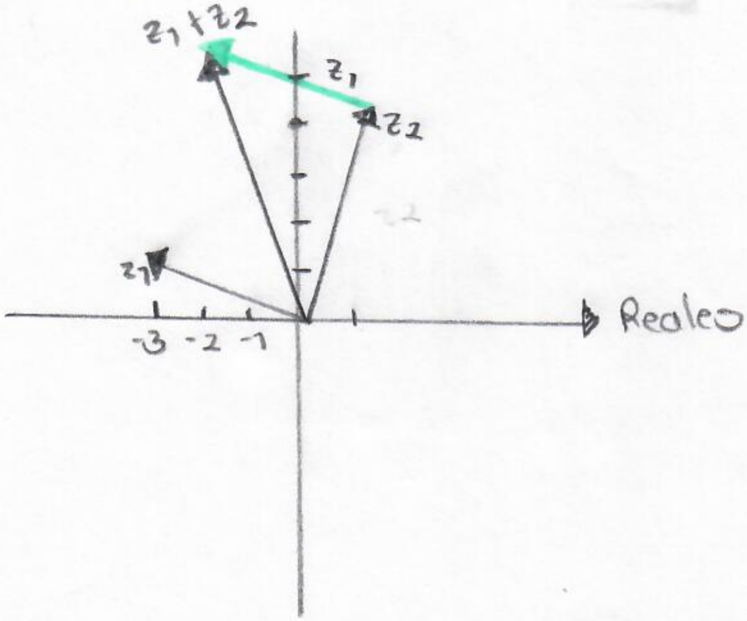
Plano 3. números complejos b. $z_1 + z_2$



Plano 4. números complejos b $z_1 - z_2$

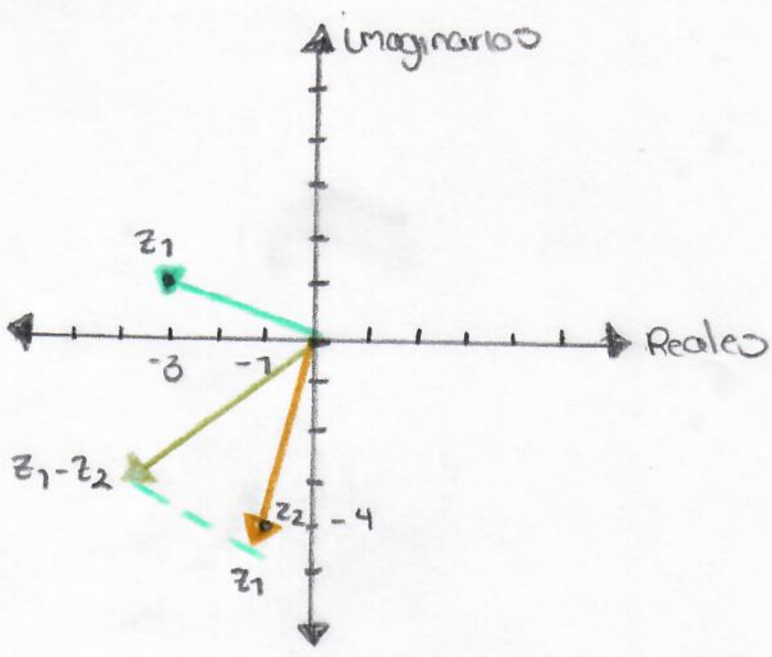
1. Localizar los números $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$ vectorialmente si:

c) $z = (-3, 1)$, $z_2 = (1, 4)$ $z_1 + z_2 = (-2, 5)$



Plano 5. números complejos c) $z_1 + z_2$

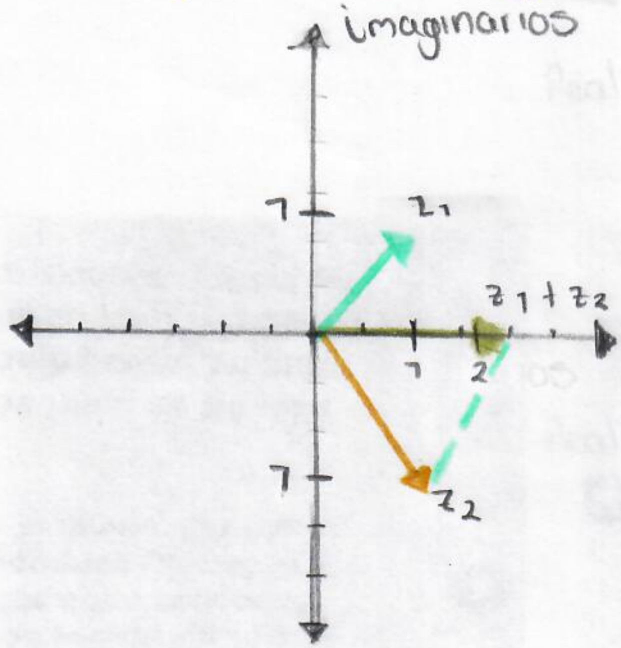
$z_1 - z_2 = (-4, -3)$



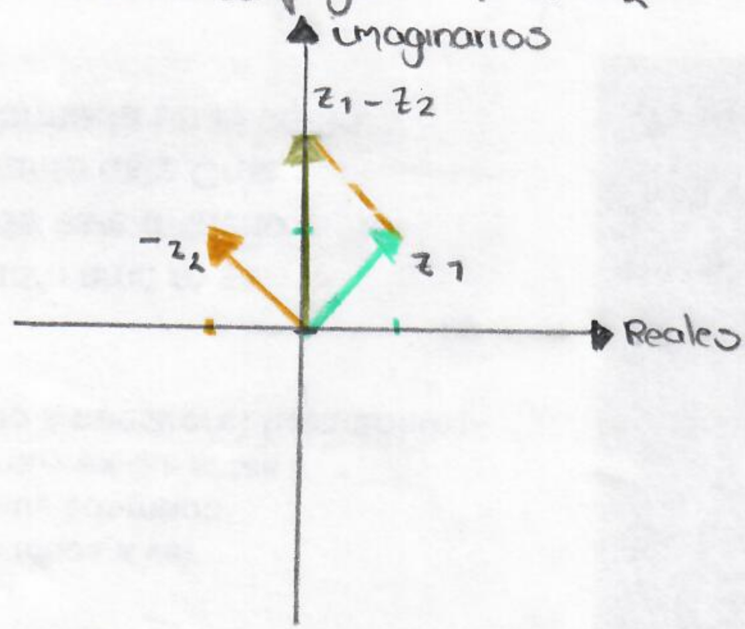
Plano 6. números complejos c) $z_1 - z_2$

7. Localizar los números $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$ vectorialmente si

d) $z_1 = x_1 + iy$, $z_2 = x_1 - iy$ $\quad z_1 + z_2 = 2x_1$



Plano 7. números complejos d) $z_1 + z_2$



Plano 7. números complejos d) $z_1 - z_2$

2 Probar que:

a) $\overline{\overline{z}+3i} = z - 3i$

Complejo conjugado de z

$z = x + iy$
$\overline{z} = x - iy$ ➜ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Podemos separar la suma de conjugados

$\overline{\overline{z}} + \overline{3i} = z - 3i$

$\overline{\overline{z}} = x + iy$ //Aplicamos conjugado

$\overline{\overline{z}} = x - iy$ //Aplicamos conjugado

$\underbrace{z = x + iy}$ //probamos que $\overline{\overline{z}} = z$

//el conjugado de un numero complejo cambia su signo

Entonces:

$\overline{3i} = -3i$

Nos queda

$\underbrace{z - 3i = z - 3i}$ //se cumple la igualdad

b $\overline{iz} = -i\overline{z}$

//El producto de un conjugado se puede separar

$\overline{iz} = \overline{i} \cdot \overline{z}$

//El conjugado cambia el signo

Tenemos

$\underbrace{-i \cdot \overline{z} = -i\overline{z}}$

se cumple la igualdad

C. $\overline{(2+i)^2} = 3 - 4i$

//Resolvemos el cuadrado

$\overline{4+4i-1} = 3 - 4i$ //Recordando $i^2 = -1$

//Reescribiendo nos queda

$\overline{3+4i} = 3-4i$

//se puede separar la suma de conjugados

$\overline{3} + \overline{4i} = 3 - 4i$

//Sacamos conjugado

$\underbrace{3 - 4i = 3 - 4i}$ //se cumple la igualdad

$\underline{d.}$ $|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = \sqrt{3}\,|2z+5|$

//Separamos los valores absolutos

$$|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = |2\bar{z}+5|\,|\sqrt{2}-i| \quad \ldots (1)$$

// Elevarla al cuadrado para eliminar el valor absoluto

$$|2\bar{z}+5|^2 = (2\bar{z}+5)\overline{(2\bar{z}+5)}$$ || Propiedad $|z|^2 = z\bar{z}$

// El conjugado solo afecta a z

$$= (2\bar{z}+5)(2\bar{\bar{z}}+5)$$ || $\bar{\bar{z}} = z$

$$= (2\bar{z}+5)(2z+5) \quad \ldots (2)$$

//Se puede escribir como

$$= \underbrace{|2z+5|}\quad \ldots (2)$$

Entonces

$$|2\bar{z}+5|^2 = |2z+5|^2 \quad \ldots (2)$$

//Tomando ahora $|\sqrt{2}-i|$

// Aplicando la propiedad

Propiedad

|| $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$x = \sqrt{2}$

$y = -i = -1$

$i^2 = -1$

$$|\sqrt{2}-i| = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(-i)^2}$$

$$|\sqrt{2}-i| = \sqrt{2+1}$$

$$|\sqrt{2}-i| = \sqrt{3} \quad \ldots (3)$$

// Entonces sustituimos los valores de 2 y 3 en 1 donde

$$\underbrace{|2\bar{z}+5|\,|\sqrt{2}-i|}_{1} = \underbrace{|2z+5|}_{2}\,\underbrace{\sqrt{3}}_{3}$$

Nos queda = $|2\bar{z}+5|\,|\sqrt{2}-i| = \sqrt{3}\,|2z+5|$

7

9. Usar los resultados de la sección 3 para demostrar que cuando z_1 y z_2 son no nulos

a) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2 z_3}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}\ \overline{z_3}}$

// Podemos separar en conjugados

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2 z_3}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2 z_3}}$$

// podemos separar los conjugados multiplicados por las propiedades

Nos queda

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2 z_3}\right)} = \underbrace{\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}\ \overline{z_3}}}$$ // se demuestra lo requerido

b) $\left|\frac{z_1}{z_2 z_3}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2||z_3|}$

// Podemos separar el valor absoluto por propiedades

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

// utilizando la propiedad nos queda

$$\left|\frac{z_1}{z_2 z_3}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2 z_3|}$$

$$\underbrace{\left|\frac{z_1}{z_2 z_3}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2||z_3|}}$$ // se demuestra lo requerido

11. En cada caso, esbozar el conjunto de puntos determinado por la condición expuesta:

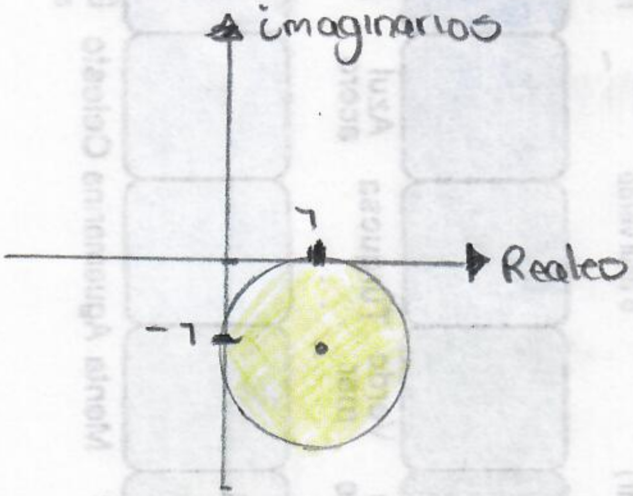
a. $|z-1+i|=1$

$R=1$

//multiplicamos por (-1) //formula: $|z-z_0|=R$

$|z-(1-i)|=1$

$z_0=1-i$



Plano 8. conjunto de puntos a

b. $|z+i|\leq 3$

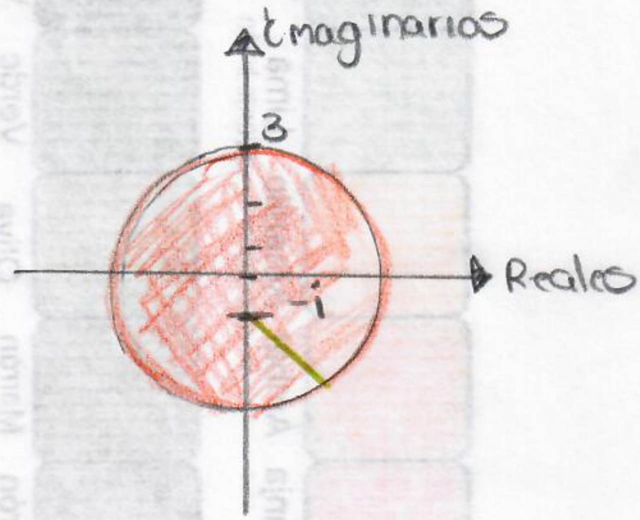
//Mediante la formula

$|z-z_0|\leq R$

$|z-(-i)|\leq 3$

$z+i\leq 3$

$z_0=-i$, $R=3$



Plano 9. conjunto de puntos b

c) $Re(\bar{z}-i) = 2$

//Mediante la propiedad

$\bar{z} = x - iy$

//Nos queda

$Re(x - iy - i) = 2$

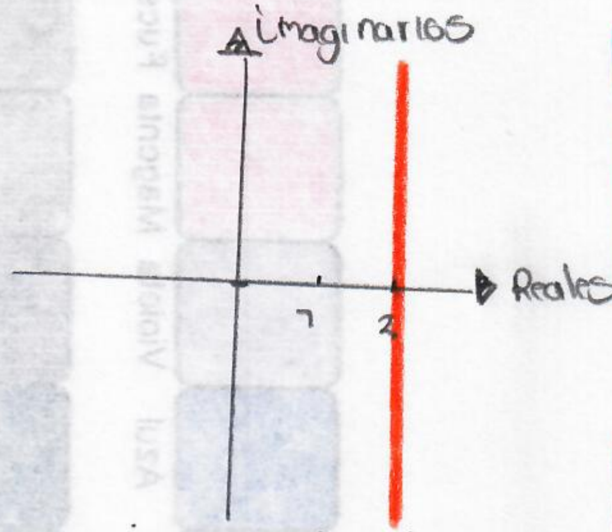
// Multiplicando por (-)

$Re(x - iy - (-i)) = 2$

$Re(x - iy + i) = 2$

$Re(x) = 2$

$x = 2$



Plano 10. conjunto de puntos c

d) $|2z - i| = 4$

//Resolviendo (dividir por 2)

$\frac{1}{2}|2z - \frac{i}{2}| = 4\left(\frac{1}{2}\right)$

nos queda

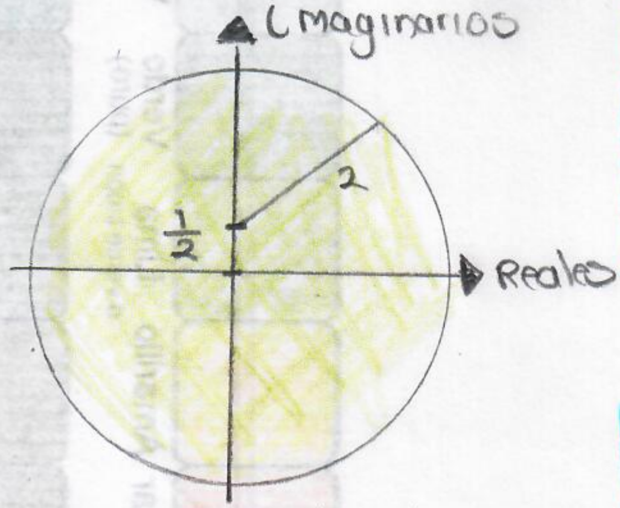
$\left|z - \frac{i}{2}\right| = 2$

$|z - z_0| = R$

$|z - \left(\frac{i}{2}\right)| = 2$

$z_0 = \frac{1}{2}$

$R = 2$



Plano 11. conjunto de puntos d

11) Demostrar que la ecuación $|z - z_0| = R$ del circulo con centro en z_0 y Radio R, se puede escribir

$$|z|^2 - 2Re(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2$$

$$|z - z_0| = R \Rightarrow |z|^2 - 2Re(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2$$

// Propiedades
- $z\bar{z} = |z|^2$ ... 1
- $Re\,z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ ... 2

// Desde la ecuación original

$|z - z_0| = R$ // por propiedades se puede escribir como:

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2$$

// Efectuando la multiplicación nos queda

$$z\bar{z} - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 = R^2$$

// Agrupamos y nos queda

$$z\bar{z} - (z\bar{z}_0 + \overline{z\bar{z}_0}) + z_0\bar{z}_0 = R$$

$$z\bar{z}_0 = z_0\bar{z} = \bar{z}_0 z$$

utilizando la propiedad 1 y 2
Nos queda

$$\boxed{|z|^2 - 2Re(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2}$$