Technika Regulacji

Sprawozdanie

Projekt 1 – Równania różniczkowe

Jakub Piekarek

Indeks 264202

Prowadzący mgr inż. Maciej Filiński

Kod grupy K00-39h

Środa 9^{15} – 11^{00}

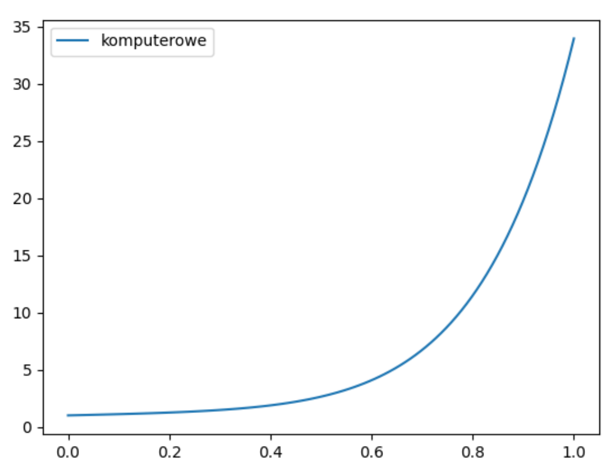
Wydział Informatyki i Telekomunikacji

1. Rozwiązanie numeryczne

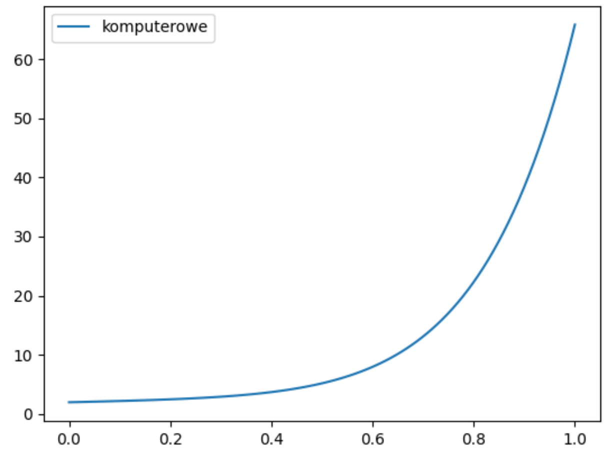
   Kod programu definiuje funkcje, która zwraca nam równanie różniczkowe. A następnie definiuje warunki początkowe y0, v0 oraz x0. W dalszej części tworzony jest wektor czasu t, który równomiernie rozkłada wartości między 0 a 1. Funkcja odeint jest używana do rozwiązania równania różniczkowego dla danego czasu i warunków początkowych. W końcowej fazie programu tworzony zostaje wykres, gdzie na osi X jest czas „t" a na osi Y jest „y".

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
from scipy.integrate import odeint
# numer indeksu ABCabc=264202
a = 2
b = 4
c = 2
Yetisio
def dSdt(t,S):
    y,v,x=S
    return [v,
            x,
            math.exp(-0.5*t)+(2*b+a)*x-(b*b+c+2*b*a)*v+a*(b*b+c)*y]


new *
def mojeObliczenia(t,S):...
# warunki poczatkowe niezerowe
y0 = 1
v0 = 1
x0 = 1
S0 = [y0, v0, x0]

t = np.linspace(0, 1, 100)
sol = odeint(dSdt, y0=S0, t=t, tfirst=True)
solM= odeint(mojeObliczenia, y0=S0, t=t, tfirst=True)
plt.plot(t, sol.T[0],label='komputerowe')
plt.legend()
plt.show()
plt.plot(t, solM.T[0],label='kartka')
plt.legend()
plt.show()
```

Wykres dla rozwiązania numerycznego nr1



Wykres dla rozwiązania numerycznego nr2



2. Rozwiązanie ręczne

Równanie różniczkowe do obliczenia z numerem indeksu 264202

$$y''' - 10y'' + 34y' - 36y = e^{-\frac{1}{2}t}$$

Transformaty Laplace dla każdego stopnia

$y''' = s^3F(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)$

$y'' = s^2F(s) - sy(0) - y'(0)$

$y' = sF(s) - y(0)$

$y = F(s)$

Transformata Laplace dla liczby Eulera

$e^{-\frac{1}{2}t} = \frac{1}{s+\frac{1}{2}}$

Po podstawieniu wszystkiego do równania dostaliśmy

$$s^3F(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) - 10(s^2F(s) - sy(0) - y'(0)) + 34(sF(s) - y(0)) - 36F(s) = \frac{1}{s+\frac{1}{2}}$$

Następnie po uporządkowaniu

$$(s^3 - 10s^2 + 34s - 36)F(s) - (s^2 - 10s + 34)y(0) - y''(0) + 10y'(0) - sy'(0) = \frac{1}{s+\frac{1}{2}}$$

Po zostawieniu po lewej stronie samego F(s) mamy

$$F(s) = \frac{y(0)(2s^3 - 19s^2 + 58s + 34) + y''(0) + 2sy''(0) + y'(0)(2s^2 - 19s - 10) + 2}{(2s+1)(s^3 - 10s^2 + 34s - 36)}$$

Teraz rozkład na ułamki proste, wygląda on następująco

$$F(s)=\frac{1}{15(s-2)}-\frac{16}{445(2s+1)}+\frac{22}{89((s^2-8s+18)}-\frac{13s}{267(s^2-8s+18)}+\frac{3y(0)}{s-2}+$$
$$\frac{10y(0)}{s^2-8s+18}-\frac{2sy(0)}{s^2-8s+18}-\frac{4y'(0)}{3(s-2)}-\frac{7y'(0)}{s^2-8s+18}+\frac{4sy'(0)}{3(s^2-8s+18)}+\frac{y''(0)}{6(s-2)}+\frac{y''(0)}{s^2-8s+18}-\frac{sy''(0)}{6(s^2-8s+18)}$$

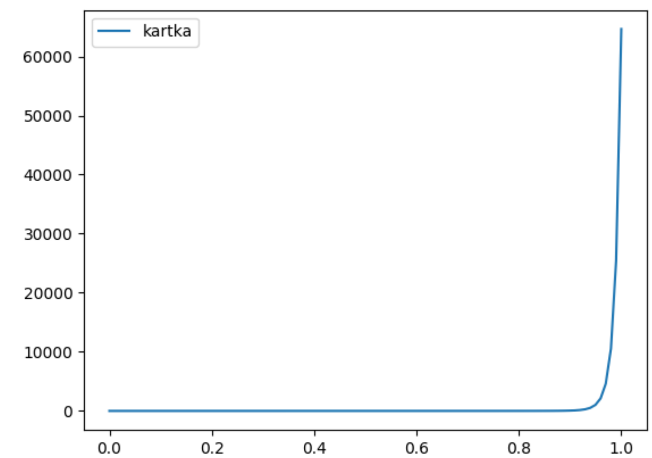
Odwrotna transformata Laplace

1. $\frac{1}{15(s-2)}=\frac{e^{2t}}{15}$
2. $-\frac{16}{445(2s+1)}=-\frac{8}{445}e^{\frac{-1}{2}t}$
3. $\frac{22}{89(s-4)^2+178}=\frac{11}{89}\sqrt{2}e^{4t}\sin(\sqrt{2}t)$
4. $-\frac{52}{267(s-4)^2+534}=-\frac{26}{267}\sqrt{2}e^{4t}\sin(\sqrt{2}t)$
5. $-\frac{13(s-4)}{267(s-4)^2+534}=-\frac{13}{267}\sqrt{2}e^{4t}\cos(\sqrt{2}t)$
6. $\frac{2y(0)}{(s-4)^2+2}=\sqrt{2}e^{4t}\mathrm{y}(0)\sin(\sqrt{2}t)$
7. $-\frac{2(s-4)y(0)}{(s-4)^2+2}=-2e^{4t}\mathrm{y}(0)\cos(\sqrt{2}t)$
8. $\frac{3y(0)}{s-2}=3e^{2t}y(0)$
9. $-\frac{7y'(0)}{(s-4)^2+2}=-\frac{7e^{4t}y'(0)\sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}$
10. $\frac{16y'(0)}{3(s-4)^2+6}=\frac{8}{3}\sqrt{2}e^{4t}y'(0)\sin(\sqrt{2}t)$
11. $\frac{4(s-4)y'(0)}{3(s-4)^2+6}=\frac{4}{3}e^{4t}y'(0)\cos(\sqrt{2}t)$
12. $-\frac{4y'(0)}{3(s-2)}=\frac{4}{3}e^{2t}y'(0)$
13. $\frac{y''(0)}{(s-4)^2+2}=\frac{e^{4t}y''(0)\sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}$
14. $-\frac{4y''(0)}{6(s-4)^2+12}=-\frac{1}{3}\sqrt{2}e^{4t}y''(0)\sin(\sqrt{2}t)$
15. $-\frac{(s-4)y''(0)}{6(s-4)^2+12}=-\frac{1}{6}\sqrt{2}e^{4t}y''(0)\cos(\sqrt{2}t)$
16. $\frac{y''(0)}{6(s-2)}=\frac{1}{6}e^{2t}y''(0)$

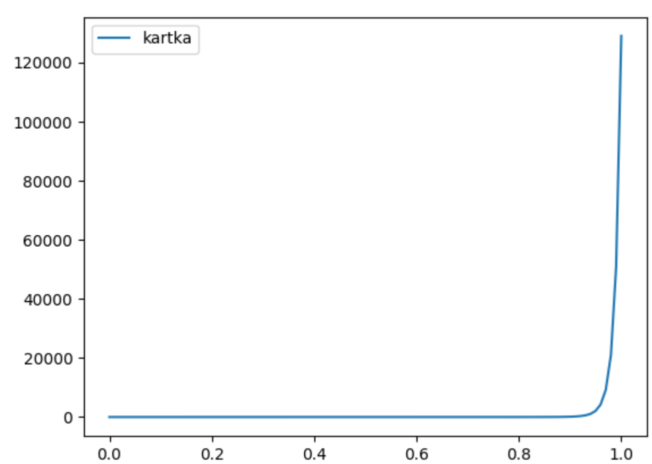
Po uproszeczeniu i zapisaniu mamy wynik końcowy w postaci

$$y(t) = -\frac{1}{2670}e^{-\frac{1}{2}t}(-170e^{\frac{5}{2}t} + 130e^{\frac{9}{2}t}\cos(\sqrt{2}t) - 70\sqrt{2}\,e^{\frac{9}{2}t}\sin(\sqrt{2}t) - 8010y(0)e^{\frac{5}{2}t} + 5340y(0)e^{\frac{9}{2}t}\cos(\sqrt{2}t) - 2670\sqrt{2}\,y(0)e^{\frac{9}{2}t}\sin(\sqrt{2}t) + 3560\,y'(0)e^{\frac{5}{2}t} - 3560\,y'(0)e^{\frac{9}{2}t}\cos(\sqrt{2}t) + 2225\sqrt{2}\,y'(0)e^{\frac{9}{2}t}\sin(\sqrt{2}t) - 445e^{\frac{5}{2}t}y''(0) + 445e^{\frac{9}{2}t}y''(0)\cos(\sqrt{2}t) - 445\sqrt{2}\,e^{\frac{9}{2}t}y''(0)\sin(\sqrt{2}t) + 48)$$

Wpisałem rozwiązanie do funkcji w programie następnie wyświetliłem jako wykres z takimi samymi parametrami jak numeryczne rozwiązanie nr1



Wpisałem rozwiązanie do funkcji w programie następnie wyświetliłem jako wykres z takimi samymi parametrami jak numeryczne rozwiązanie nr2



3. Porównanie

Wpływ Δt na rozwiązanie numeryczne:

Δt oznacza krok czasowy, czyli odstęp między kolejnymi punktami w siatce czasowej. Im mniejsza wartość Δt, tym dokładniejsze rozwiązanie numeryczne. Jednakże, mniejsza wartość Δt oznacza większą liczbę kroków czasowych, co zwiększa czas obliczeń. Zatem, dobór odpowiedniej wartości Δt zależy od wymaganego poziomu dokładności rozwiązania i akceptowalnego czasu obliczeń.

Wpływ warunków początkowych na rozwiązanie numeryczne:

Warunki początkowe odnoszą się do wartości zmiennych niezależnych w momencie początkowym. Dokładność i jakość rozwiązania numerycznego zależy od dokładności określenia wartości początkowych. W przypadku, gdy warunki początkowe są źle określone, rozwiązanie numeryczne może być niepoprawne lub niestabilne. W przykładzie podanym przez Ciebie, warunki początkowe zostały określone jako y0=1, v0=1, x0=1, co sugeruje, że równanie różniczkowe jest rzędu 3. Dlatego, dla poprawnego rozwiązania numerycznego równania różniczkowego, należy określić wartości początkowe dla każdej zmiennej niezależnej w momencie początkowym.

4. Wnioski

Rozwiązywanie równań różniczkowych za pomocą programów komputerowych, takich jak Python, może być szybsze i bardziej precyzyjne niż ręczne rozwiązywanie. Jednakże, ręczne rozwiązywanie jest nadal ważne w celu zrozumienia koncepcji i zasad rozwiązywania równań różniczkowych oraz w celu wyboru odpowiedniego programu do rozwiązywania danego równania.

Ważnym również jest dobranie starannie Δt czy warunków początkowych. Na przykładzie Δt jeśli dobierzemy zbyt duże stracimy dokładność rozwiązania, a zbyt małe do zwiększenia obliczeniowej złożoności i czasu operacji obliczeń. Błędy jakie mogą występować w założeniu warunków początkowych mogą prowadzić to błędnych wyliczyć lub mało dokładnych.