

Андрей Чумаков

Работа 1.2.1: Определение скорости полета пули при помощи баллистического маятника

1 Введение

Цели работы: измерение момента инерции тел и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам; проверка справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

Оборудование: трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых требуется измерить (брусек, две половины диска).

2 Экспериментальная установка

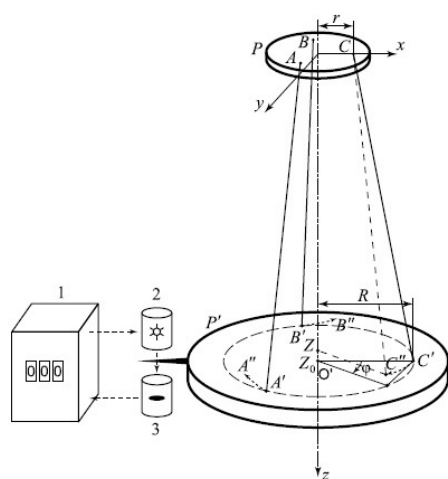


Рис. 1: Трифилярный подвес

Для достижения поставленных целей удобно использовать трифилярный подвес (Рис. 1). Он состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы P и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях AA' , BB' и CC' , вращающейся платформы P' .

После поворота верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебаний. После того, как нижняя платформа P' оказывается повернутой на угол φ относительно верхней платформы P , возникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия. В результате платформа совершает крутильные колебания.

3 Теоретические сведения

Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения вычисляется по формуле:

$$I = \int r^2 dm \quad (1)$$

Здесь r — расстояние элемента массы тела dm от оси вращения. Интегрирование проводится по всей массе тела m .

Если пренебречь потерями энергии на трение о воздух и крепление нитей, то уравнение сохранения энергии при колебаниях можно записать следующим образом:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E \quad (2)$$

Здесь I — момент инерции платформы вместе с исследуемым телом, m — масса платформы с телом, φ — угол поворота платформы от положения равновесия системы, z_0 — координата по вертикали центра нижней платформы O' при равновесии ($\varphi = 0$), z — координата той же точки при некотором угле поворота φ . Первый член в левой части уравнения — кинетическая энергия вращения, второй член — потенциальная энергия в поле тяжести, E — полная энергия системы (платформы с телом).

Воспользуемся системой координат x, y, z , связанной с верхней платформой, как показано на Рис. 1. Координаты верхнего конца одной из нитей подвеса точки C в этой системе — $(r, 0, 0)$. Нижний конец данной нити C' , находящийся на нижней платформе, при равновесии имеет координаты $(R, 0, z_0)$, а при повороте платформы на угол φ эта точка переходит в C'' с координатами $(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$. расстояние между точками C и C'' равно длине нити, поэтому, после некоторых преобразований, получаем:

$$(R\cos\varphi - r)^2 + R^2\sin^2\varphi + z^2 = L^2 \quad (3)$$

Учитывая, что для малых углов поворота $\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2$, получаем:

$$z^2 = L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos\varphi \approx z_0^2 - 2Rr(1 - \cos\varphi) \approx z_0^2 - Rr\varphi^2 \quad (4)$$

Извлекая из (4) квадратный корень и учитывая малость φ , получаем:

$$z = \sqrt{z_0^2 - Rr\varphi^2} \approx z_0 - \frac{Rr\varphi^2}{2z_0} \quad (5)$$

Подставляя z в уравнение (2), получаем:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = E \quad (6)$$

Дифференцируя по времени и сокращая на $\dot{\varphi}$, находим уравнение крутильных колебаний системы:

$$I\ddot{\varphi} + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi = 0 \quad (7)$$

Производная по времени от E равна нулю, т.к. потерями на трение пренебрегаем.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}}t + \theta\right) \quad (8)$$

Здесь амплитуда φ_0 и фаза θ колебаний определяются начальными условиями. Период крутильных колебаний нашей системы равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}} \quad (9)$$

Из формулы для периода и $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$ получаем:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0} = kmT^2 \quad (10)$$

4 Проведение опыта и вычисление значений

Предисловие: поработав с установкой до начала любых измерений было выяснено, что потери энергии в колебательной системе малы за 30 периодов амплитуда уменьшилась с $T_0 = 17$ до $T_{30} = 12$. Также была найдена оптимальная амплитуда, для которой колебания можно считать гармоническими - все измерения проводились на амплитуде ± 15 градусов ($T_{15} = 4.4c$ & $T_8 = 4.395c$)

4.1 Опыт с 2мя фигурами

Измерим параметры установки для подсчета k в формуле (10).

$$\begin{aligned} R &= (114.6 \pm 0.5) \text{ мм} \\ R_i &= (133 \pm 0.5) \text{ мм} \\ r &= (30.5 \pm 0.3) \text{ мм} \\ m &= (983.2 \pm 0.5) \text{ г} \\ z_0 &= (2120 \pm 5) \text{ мм} \end{aligned}$$

Значение коэффициента k и погрешность σ_k по соответствующим формулам:

$$\varepsilon_k = \sqrt{\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z_0}{z_0}\right)^2} = 0.011 \quad (11)$$

Подставив данные, получим:

$$k = (4.09 \pm 0.045) 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^2$$

4.1.1 Момент инерции ненагруженной платформы

Измерим период колебания ненагруженной платформы, чтобы выяснить ее момент инерции.

№	$10T_0, \text{ с}$	$T_0, \text{ с}$
1	43.86	4.286
2	43.95	4.395
3	43.84	4.384

Среднее значение $\overline{T_0} = 4.39$, систематическая погрешность измерительного прибора пренебрежима мала, а случайная погрешность $\sigma_{\overline{T_0}} = 0.008\text{с} \implies \overline{T} = (4.39 \pm 0.008)\text{с}$. Отсюда:

$$I_0 = kmT^2 = (7.75 \pm 0.09) * 10^{-3} \text{ кг} * \text{м}^2$$

Погрешность считалась по формуле:

$$\varepsilon_{I_0} = \sqrt{\left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2} = 0.011 \quad (12)$$

Посчитаем теоретическое значение момента инерции платформы как для диска:

$$I_{0\text{теор}} = \frac{mR_i^2}{2} = 8.9 * 10^{-3} \text{ кг} * \text{м}^2$$

Заметим, что теоретическое значение $I_{\text{п}}$ отличается от практического не в пределах погрешности, скорее всего это вызвано неправильностью приближения платформы, как равномерного диска

4.1.2 Момент инерции металлического диска с пимпочкой

Теперь проведем аналогичные измерения, где получим экспериментально момент инерции **металлического диска с пимпочкой по середине** и посчитаем его теоритически:

$$\begin{aligned} m_1 &= (1122.9 \pm 0.5) \text{ г} \\ R_{\text{pimp}} &= (10 \pm 0.05) \text{ мм} \\ h_{\text{pimp}} &= (35.5 \pm 0.1) \text{ мм} \\ h_1 &= (7.1 \pm 0.1) \text{ мм} \\ R_1 &= (80.2 \pm 0.05) \text{ мм} \end{aligned}$$

№	$10T_1, \text{ с}$	$T_1, \text{ с}$
1	36.14	3.614
2	36.19	3.619
3	36.14	3.614

Пользуясь формулами (10), (11) и (12) получим:

$$\begin{aligned} \overline{T_1} &= (3.62 \pm 0.014); \varepsilon_{T_1} = 0.004 \\ I_1 = I_{01} - I_0 &= (3.54 \pm 0.08) * 10^{-3} \text{ кг} * \text{м}^2; \varepsilon_{I_1} = \varepsilon_{I_0} + \varepsilon_{I_{01}} = 0.023 \end{aligned}$$

Теоритические расчеты данного тела в приближении диска (пимпочка дает минимальную погрешность):

$$I_{1\text{теор}} = \frac{m_1 R_1^2}{2} = 3.6 * 10^{-3} \text{ кг} * \text{м}^2$$

Тут теоритические значения уже не выходят за рамки погрешностей. Выше мы воспользовались свойством аддитивности моментов инерции, как мы видим по ответу, это утверждение довольно объективно, как мы убедимся и далее

4.1.3 Момент инерции толстого кольца

Ровно так же как и в примерах выше найдем экспериментальное и теоритическое значение момета энергии **толстого кольца**:

$$\begin{aligned}m_2 &= (748 \pm 0.5)\text{г} \\ R_{in} &= (75.5 \pm 0.05)\text{мм} \\ R_{out} &= (79.3 \pm 0.05)\text{мм} \\ h_2 &= (55.7 \pm 0.1)\text{мм} \\ Sh &= (4 \pm 0.1)\text{мм}\end{aligned}$$

№	$10T_2, \text{ с}$	$T_2, \text{ с}$
1	41.82	4.182
2	41.92	4.192
3	41.78	4.178

Пользуясь формулами (10), (11) и (12) получим:

$$\begin{aligned}\overline{T_2} &= (4.18 \pm 0.04); \varepsilon_{T_2} = 0.01 \\ I_1 = I_{02} - I_0 &= (4.62 \pm 0.13) * 10^{-3}\text{кг} * \text{м}^2; \varepsilon_{I_2} = \varepsilon_{I_0} + \varepsilon_{I_{02}} = 0.028\end{aligned}$$

Теоритические расчеты данного тела в приближении толстого кольца:

$$I_{2\text{теор}} = \frac{1}{2}m_2(R_{in}^2 + R_{out}^2) = 4.5 * 10^{-3}\text{кг} * \text{м}^2$$

Тут мы также видим, что расчеты получились в пределах погрешности и свойство аддитивности еще раз подтвердило свою справедливость

4.1.4 Вычисление суммарного момента энергии двух грузов

Все делаем аналогично вычислениям выше:

№	$10T_{12}, \text{ с}$	$T_{12}, \text{ с}$
1	36.87	3.687
2	36,92	3.692
3	36.85	3.685

Пользуясь формулами (10), (11) и (12) получим:

$$\begin{aligned}\overline{T_{12}} &= (3.69 \pm 0.019); \varepsilon_{T_2} = 0.005 \\ I_{12} = I_{012} - I_0 &= (8.14 \pm 0.2) * 10^{-3}\text{кг} * \text{м}^2; \varepsilon_{I_2} = \varepsilon_{I_0} + \varepsilon_{I_{012}} = 0.024\end{aligned}$$

Выполненные ранее теоритические вычисления, если мы воспользуемся условием аддитивности моментов инерции, дают результат:

$$I_{12\text{теор}} = I_{1\text{теор}} + I_{2\text{теор}} = 8.1 * 10^{-3}\text{кг} * \text{м}^2$$

И снова мы попадаем в пределы погрешности, что окончательно показывает применимость правила аддитивности для момента инерции объектов

4.1.5 Момент инерции бруска

Отдельно от данных вычислений, ради интереса проведем опыт, где измерим момент инерции металлического бруска с характеристиками:

$$\begin{aligned}m_3 &= (1206 \pm 0.5)\text{г} \\ I_{\text{шир}} = I_{\text{выс}} &= (38 \pm 0.05)\text{мм} \\ I_{\text{длин}} &= (178 \pm 0.05)\text{мм}\end{aligned}$$

№	$10T_3, \text{ с}$	$T_3, \text{ с}$
1	35.37	3.537
2	35.32	3.532
3	35.35	3.535

Из этих данных, аналогично для ненагруженной платформы находим все интересующее.

$$\begin{aligned}\overline{T_3} &= (3.53 \pm 0.01)\text{с} \\ I_{03} &= (11.2 \pm 0.11) * 10^{-3}\text{кг} * \text{м}^2; \varepsilon_{03} = 0.01 \\ I_3 = I_{03} - I_0 &= (3.4 \pm 0.08) * 10^{-3}\text{кг} * \text{м}^2; \varepsilon_3 = \varepsilon_0 + \varepsilon_{03} = 0.022\end{aligned}$$

Теоритически сначала рассчитаем его момент энерции по готовой формуле:

$$I_{\text{бртеор}} = \frac{m_3}{3} \left(\left(\frac{l_{\text{дл}}}{2} \right)^2 + \left(\frac{l_{\text{шир}}}{2} \right)^2 \right) = 3.33 * 10^{-3}\text{кг} * \text{м}^2$$

Это значение так же попадает в рамки погрешности

Теперь попробуем аппроксимировать реальный стрежень бесконечно тонким, проверив применимость модели:

$$I_{\text{бртеор2}} = \frac{1}{2} l_{\text{дл}} m_3 = 3.18 * 10^{-3}\text{кг} * \text{м}^2$$

Мы видим, что хоть эта формула и не попала в пределы погрешности, но она дает довольно адекватные результаты, которые в целом можно использовать, как первое приближение

4.2 Опыт с разрезанным диском

Ставим две половинки диска так, чтобы они образовали диск с центром в оси вращения трифилярного подвеса. Раскручиваем и замеряем данные. Раздвигаем половины вдоль линии разреза от центра в разные стороны, сначала двигая их сильно и потом все меньше. Снова замеряем и повторяем. По Теореме Гюйгенса-Штейнера измеряемый момент инерции должен увеличиваться пропорционально квадрату расстояния.

h , реек	$10T_{61}$, с	$10T_{62}$, с	$10T_{63}$, с	$\overline{T_6}$, с	h^2 , мм	δ_t , с	I , $10^{-3}\text{кг} \cdot \text{м}^2$	δ_I , $10^{-3}\text{кг} \cdot \text{м}^2$
0	31.15	31.17	31.12	3.11	0	0.011	9.2	0.111
3	31.5	31.55	31.51	3.15	225	0.012	9.4	0.115
6	33.08	33.2	32.98	3.3	900	0.024	10.4	0.154
8	34.53	34.48	34.46	3.45	1600	0.018	11.3	0.148
10	36.37	36.35	36.32	3.63	2500	0.013	12.5	0.152
12	38.52	38.48	38.46	3.85	3600	0.017	14.1	0.177
13	39.75	39.69	39.67	3.97	4225	0.023	15	0.206
14	40.91	40.87	40.86	4.09	4900	0.015	15.9	0.194
15	42.2	42.16	42.4	4.23	5625	0.077	16.9	0.474
16	43.62	43.55	43.51	4.36	6400	0.034	18	0.282

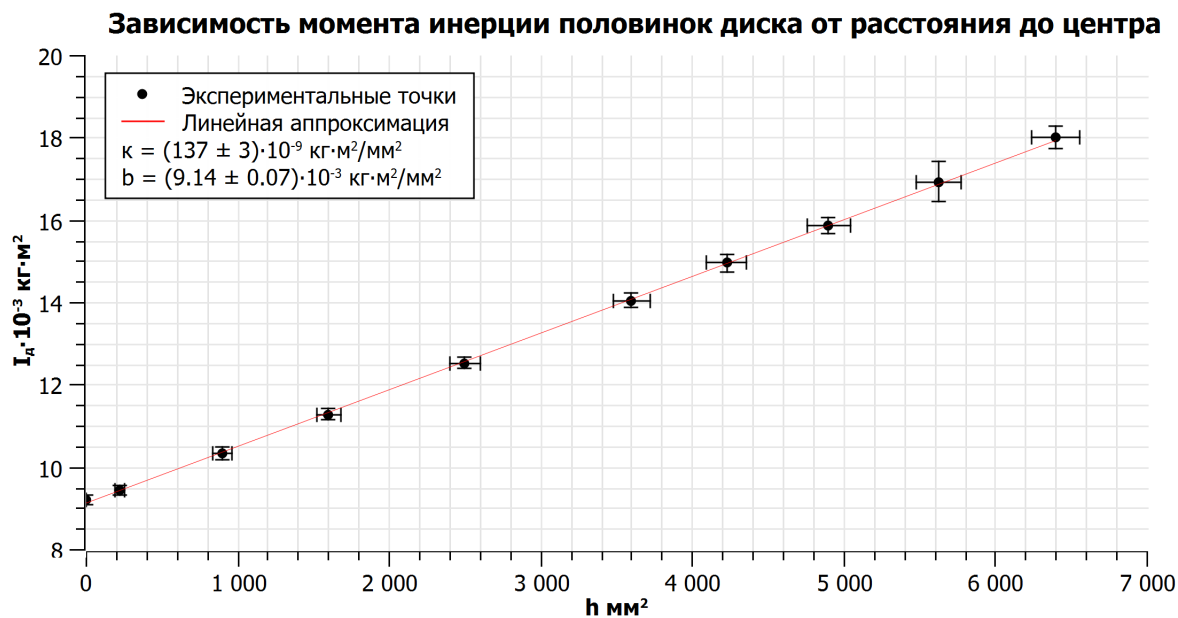
$$L_{\text{рейки}} = (5 \pm 0.004)\text{мм}$$

Ошибка $\sigma_h \approx 1\text{мм}$. Теория предсказывает, что:

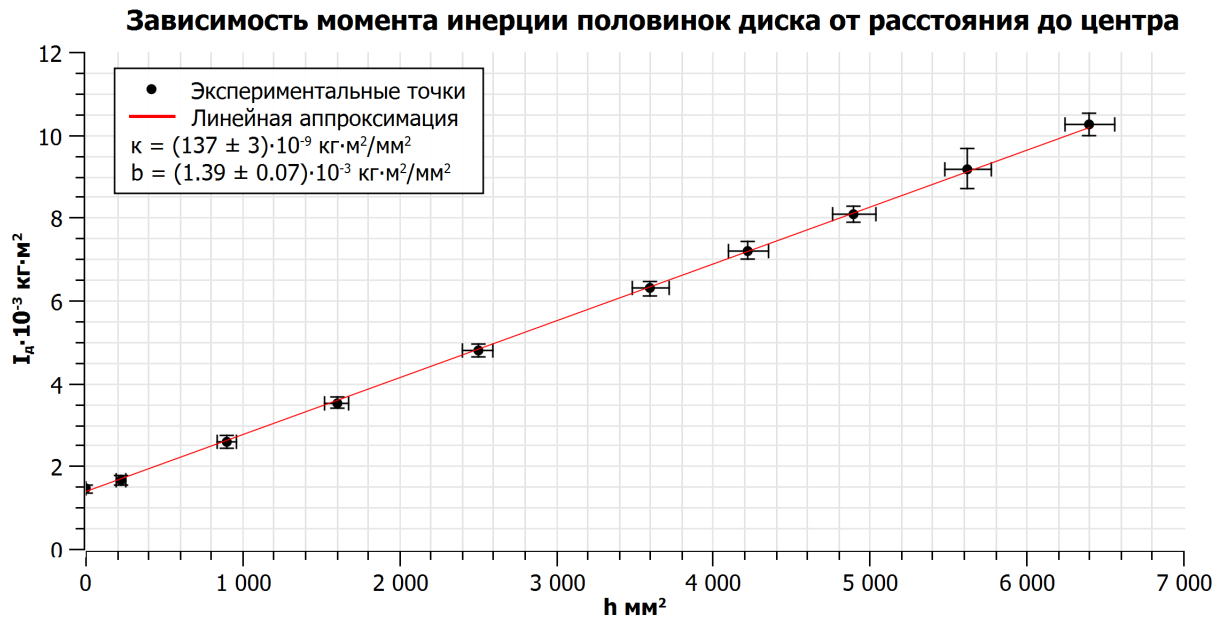
$$k(m_0 + M)T^2 = \frac{MR^2}{2} + Mh^2 + I_0 \quad (13)$$

Здесь m_0 и I_0 — это масса и момент инерции платформы, M и R — это масса и радиус диска соответственно.

Нарисуем график $I(h^2)$ и сделаем выводы.



Вычтя из этого графика значения константы I_0 получим зависимость момента инерции самих двух половинок диска



Линейная аппроксимация построена с помощью метода хи-квадрат на обоих графиках. Из графика выше можем легко найти момент инерции диска в начальном положении:

$$I_{d0} = (1.45 \pm 0.026) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Отсюда, зная радиус данного диска $R_d = 46 \pm 0.05 \text{ мм}$, который мы измерили и теоретическими вычислениями (в справедливости которых мы убедились выше) получим:

$$m_d = \frac{2I_{d0}}{R_d^2} = 1370 \pm 36 \text{ г}$$

Измерив экспериментально реальные значения масс напрямую, получим, что $m_d = 669 + 668 = 1337 \pm 1 \text{ г}$, что соответствует полученным данным в пределах погрешности данных измерений.

5 Выводы

Что касается первой части эксперимента, то все прошло удачно. Теоретические значения совпадают с практическими в пределах погрешности. Мы убедились, что правило аддитивности работает, а формулы для вычисления моментов энергии верны.

Относительно бруска, мы видим, что аппроксимировать его тонким стержнем в целом можно, хоть это и дает довольно большую погрешность.

Функция во второй части работы получилась крайне хорошо аппроксимируемой прямой, тем не менее значение массы бруска косвенным методом вычисленно довольно неточно, из-за большой изначальной погрешности измерения момента инерции, но все же также совпадает с теоретическим в пределах погрешности.