Андрей Чумаков

Работа 1.4.2 (1.1.8*): Определение ускорения свободного падения при помощи оборотного маятника

1 Введение

Цели работы: определить величину ускорения свободного падения, пользуясь оборотным маятником.

Оборудование: оборотный маятник, счетчик числа колебаний, секундомер, штангенциркуль с пределом измерений 1 м.

2 Методология эксперемента

Для вычисления ускорения свободного падения g можно ипользовать много способов, двумя из них мы и воспользуемся: оборотным маятником и прямым измерением времени подения шарика. Для начала расмотрим первый из них:

2.1 Установка

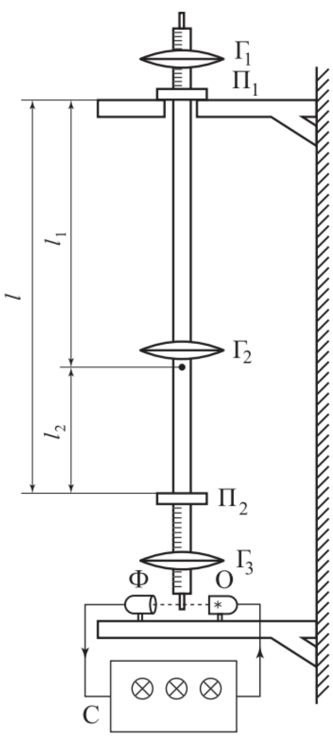


Рис. 1: Оборотный маятник

Схема устройства оборотного маятника изображена на рис. 1. Расстояние L между опорными призмами $П_1$ и $П_2$ не меняется. Расстояния l_1 и l_2 можно менять, перемещая грузы $Г_1$, $Г_2$ и $Г_з$.

Для определения числа колебаний используется счетчик, состоящий из осветителя, фотоэлемента и пересчетного устройства. Легкий стержень, укрепленный на торце маятника, пересекает световой луч дважды за период. Возникающие в фотоэлементе импульсы поступают на пересчетный прибор. Если $п_1$ и п2 - начальное и конечное значения показаний прибора за время наблюдения t, то измеренное число периодов, очевидно, равно $N = (n2 - n1)/2$, а период колебаний составляет $T = t/N$.

Время t измеряется секундомером, установленным на пересчетном приборе. Для определения расстояний l_1 и l_2 маятник снимают с консоли и располагают горизонтально на специальной подставке, имеющей острую грань. Перемещая маятник, нетрудно найти положение центра масс. Расстояния от него до опорных призм и есть искомые l_1 и l_2. Если они достаточно сильно отличаются друг от друга , а периоды T_1 и T_2 близки, нет необходимости определять l_1 и l_2 с высокой точностью.

Мы будем использовать его для точного вычисление ускорения свободного падения, используя его свойство, что период коллебаний физического маятника не изменяется при перемещении оси качаний в центр качаний, тоесть в точку, отстоящую от оси качаний на расстояние, равное приведенной длине маятника, и лежащую на одной прямой с точкой подвеса и центром масс маятника.

2.2 Теоритические сведения

Выведем необходимууую нам формулу исходя из физических соображений и того, что сказанно выше.

Период коллебаний физического маятника определяется формулой:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}$$

Здесь I – момент инерции маятника относительно оси качания, m – масса маятника, a – расстояние от центра масс до оси качания

Массу маятника и период его колебаний можно измерить с очень высокой точностью, но точно измерить момент инерции не удается. Указанного недостатка лишен метод оборотного маятника, который позволяет исключить момент инерции из расчетной формулы для g.

Допустим, что нам удалось найти такое положение грузов, при котором периоды колебаний маятника T1 и T2 на призмах П1 и П2 совпадают, т. е.

$$T_1 = T_2 = T = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{mgl_1}} == 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{mgl_2}}$$

Где l_1 и l_2 – расстояния от центра массы маятника до призм $П_1$ и $П_2$.

По теореме Гюгенса-Штейнера

$$I_1 = I_0 + ml_1^2 \text{ and } I_2 = I_0 + ml_2^{2\prime}$$

Итого проведя необходимые математические операции с данными формулами получим, что:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}(l_1 + l_2)$$

При выводе формулы выше, мы полагали, что $T_1 = T_2$. На самом деле точного равенства периодов добиться, конечно, невозможно. Тогда

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ml_1^2}{mgl_1}} \text{ and } 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ml_2^2}{mgl_2}}$$

Из этих равенств имеем

$$T_1^2 gl_1 - T_2^2 gl_2 = 4\pi^2(l_1^2 - l_2^2)$$

откуда

$$g = 4\pi^2\frac{l_1^2 - l_2^2}{l_1T_1^2 - l_2T_2^2} = 4\pi^2\frac{L}{T_0^2}$$

где

$$T_0^2 = \frac{l_1T_1^2 - l_2T_2^2}{l_1^2 - l_2^2}$$

Погрешность определения g может быть найдена по формуле:

$$\frac{\sigma}{g} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_{T_0}}{T_0}\right)^2}$$

Учитывая формулу для T_0

$$\sigma_{T_0} \approx \frac{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{l_1 - l_2}$$

3 Проведение эксперемента

Перед тем, как начать какие-либо измерения, определим рабочий диапазон амплитуд маятника, в котором период коллебаний T можно считать не зависящим от амплитуды, тоесть колебания гармонические. Сравнив периоды с A и $A/2$. Выбрав амплитуду 5 градусов и померев веремя 100 периодов поймем, что $T_A = T_{A/2}$. Будем проводить измерения используя амплитуду $\approx$ 5градусов.

Далее разберем установку и взвесив все элементы оборотного маятника проведем предварительный расчет положения грузов и призм для выполнения необходимого соотношения. Установив соотвествующие элементы оборотного маятника нам их места будем двигать их для более точного совпадения периодов переворачиявая маятник и измеряя T_1 и T_2 по 30 периодам. У нас получилось совпадение периодов T_1 и T_2 при переворачивании с точностью до $0,02\%$

Перед тем как проводить точные измерения мы проверим, что трение не оказывает существенного влияния на коллебания. Получим, что добротность системы более 2000 (ампилитуда уменьшается в 2 раза за 1100 периодов), поэтому в разрезе 200-300 коллебаний мы можем считать коллебания не затухающими.

Теперь проведем по 5 измерений на каждый поворот по 50 периодов, записав полученные значения в таблицу. А так же измерим растояния от точек качания до центра масс и занесем полученные данные в таблицу

№	$50\mathrm{T}_1, \pm 0,005$с	$50\mathrm{T}_2, \pm 0,005$с	T_1, c	T_2, с
1	72,875	1,4575	72,865	1,4573
2	72,865	1,4573	72,865	1,4573
3	72,875	1,4575	72,865	1,4573
4	72,865	1,4573	72,865	1,4573
5	72,875	1,4575	72,865	1,4573
6	72,875	1,4575	72,865	1,4573

Таблица 1: Данные измерения периодов обортного маятника

$$l_1 = 369.2 \pm 0.1mm \text{ and } l_2 = 158.7 \pm 0.1mm$$

4 Обработка эксперементальных данных

Обработав данные выше, получим, что

$$\overline{T_1} = 1.4574 \pm 0.00015mm$$

$$\overline{T_2} = 1.4573 \pm 0.0001mm$$

Зная периоды и расстоянининия до цента масс и их погрешности, можем найти итоговое g и его погрешность по формулам:

$$g = 4\pi^2 \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_1 T_1^2 - l_2 T_2^2} = 9.811\text{м}/c^2$$

$$\sigma_{T_0} \approx \frac{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{l_1 - l_2} \sigma_T = 1.9\sigma_T = 0.00024$$

Учитывая, что $T_0 = 1.4575$ исходя из формулы выше

$$\frac{\sigma}{g} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_{T_0}}{T_0}\right)^2} = 0.00025$$

Итого получаем:

$$g_1 = 9.811 \pm 0.0025\text{м/с}^2$$

Мы получили отличную относительную погрешность вплоть до 10^{-4}. Использовав интернет сравним полученные данные с эталонным значением ускорения свободного падения для Москвы $g_{ekv} = 9.8155\text{м/с}^2$. Это выходит за рамки погрешности, но при такой точности на результат уже влияет потеря энергии в колебательном контуре, разница высот г. Долгопрудного и Москвы, разность пород и другие посторонние факторы.

5 Лабораторная работа 1.1.8*

Получив очень точное значение ускорения свободного падения, используя оборотный маятник, теперь попытаемся измерить его напрямую

Цель работы: определить ускорение свободного падения посредством прямых измерений ускорения падающего тела и оценить сопротивление воздуха.

В работе используются: вертикальная труба с намотанными катушками; шарообразные неодимовые магниты; линейка; блок регистрации сигнала (микроконтроллер с АЦП), соединённый с цифровым осциллографом.

5.1 Методология эксперимента

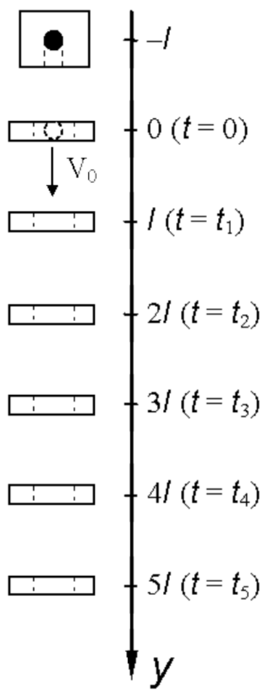


Рис. 2: Схема установки

В данной лабораторной работе проводится измерение ускорения свободного падения g при помощи специальной экспериментальной установки. Для этого используется металлический магнитный шарик, который начинает падать после выключения тока через электромагнит, его удерживающий. Шарик проходит через шесть тонких проволочных катушек, с которыми связаны датчики электрического напряжения и регистраторы времени (таймеры).

При прохождении шарика через катушки, его магнитное поле индуцирует в них индукционные токи, которые регистрируются датчиками и срабатывают таймеры. Каждый таймер фиксирует время пролета шарика соответствующей катушки. Расстояние между катушками известно и составляет около 40 см.

По полученным данным можно определить скорость и ускорение шарика во время падения. После прохождения всех катушек, шарик попадает в металлическую трубку, где его движение замедляется благодаря эффекту электромагнитного торможения. В трубке также создаются индукционные токи, которые противодействуют движению шарика в соответствии с правилом Ленца.

Осциллограммы импульсов тока от катушек и картину на экране запоминающего осциллографа используют для примерного определения времени пролета шарика каждой катушки. С помощью закона электромагнитной индукции связывают напряжение в цепи регистрации с производной магнитного потока от шарика. Поэтому, когда шарик находится в центре регистрирующей катушки, индукционное ЭДС резко меняет свое направление. Осциллограммы имеют различные амплитуды и формы в зависимости от ориентации намагниченности шарика относительно катушки, что нас не сильно инетересует

Запишем уравнение движения шарика:

$$y = \text{м}_0 t\frac{gt^2}{2}$$

И для 5 измеренных моментов времени:

$$nl = v_0 t_n + \frac{gt_n^2}{2}$$

Перепишем выражение в виде:

$$\frac{nl}{t_n} = v_0 + \frac{gt_n}{2}$$

Измерив t_n при свободном падении шарика можем построить график данного выражени я и найти ускорение свободного падения из углового коэффицента данной зависимости

5.1.1 Влияние сопротивления воздуха

Падение шарика в атмосфере не является полностью свободным: он, конечно, испытывает влияние сопротивления воздуха. Из-за этого измеряемое на опыте ускорение g окажется несколько меньше.

Мы имея точный независимый опыт, мы можем понять, какой вклад вносит сопротивление воздуха, просто из разности точного значения g.

Другой способ оценить вклад сопротивления воздуха, это использовать формулу ниже

$$F_{\text{сопр}} = C\pi r^2 pv^2$$

где p — плотность воздуха ($p \approx 1,2$кг/м3),C—константа,зависящаяотформытела,котораяможетбытьустановленатолько
0,2.

$$Re = \frac{pvr}{\eta}$$

Эта формула применима, так как число Рейнольдса (Re) » 1. Вяснив среднюю величину данной силы $F_{\text{сопр}}$ проинтегрировав работу данной силы и разделив на растояние, которое пролетел шарик. И найдем соответствующее ей $\approx \overline{F_{\text{сопр}}}/m$, где m - масса шарика

5.2 Проведение эксперемента

Измерим времена пролета шариком 2, 3, 4, 5, 6 катушек, после момента пролета превой из них, и занесем данные в таблицу, так же посчитав значение nl/t_n

№	t_1, c	t_2, c	t_3, c	t_4, c	t_5, c
1	0,118	0,207	0,286	0,351	0,411
2	0,118	0,207	0,283	0,351	0,411
3	0,119	0,208	0,282	0,350	0,411
4	0,118	0,207	0,283	0,350	0,411
5	0,116	0,205	0,281	0,348	0,409
6	0,118	0,208	0,284	0,350	0,410
7	0,118	0,207	0,284	0,350	0,411
8	0,117	0,206	0,282	0,349	0,410

Таблица 2: Собраные эксперементальные данные

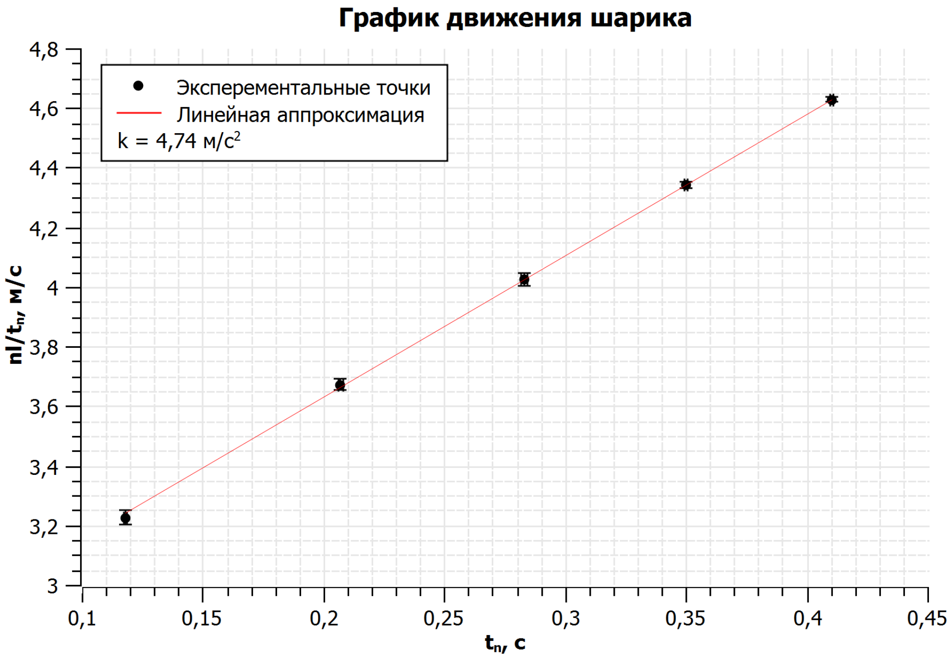
5.3 Обработка полученных данных

Из измеренных данных посчитаем необходымые для построения графика значения и также занемем их в табилцу

$\overline{t_n}$	0,118	0,207	0,283	0,350	0,411
nl/t_n	3,227	3,674	4,026	4,344	4,629
σ_{nl/t_n}	0,023	0,016	0,021	0,012	0,008

Таблица 3: Обработанные данные

Используя написанные выше значения построим график и найдем по нему коэфицент $k = g/2$



Итого получаем: $g_2 = 9,48 \pm 0.13$м/с^2 Значение получилось меньше настоящего, что связанно с трением воздуха, действием электромагнитных сил и других погрешностей, но все же, как мы убедимся дальше, такая огромная погрешность получается из-за неправильных данных об установке.

5.3.1 Вычисление силы сопротивления воздуха и ее вклада

Имея независимый экспериментпосмотрим, какая у нас разница между g_1, измереной точным экспериментом и g_2, измеренной напрямую, по времни пролета магнитного шарика через катушки:

$$\varepsilon_{g1} \approx \frac{g_1 - g_2}{g_2} = 0.035$$

Теперь проведем теоритические вычисления вклада трения воздуха. Учитывая, что на данных маштабах трение воздуха вносит не существенный вклад, а мы производим оценку, будем считать, что шарик движется с ускорением свободного падения, тогда $v = gt$, а из формул выше:

$$A_{\text{сопр}} = \int_0^s C\pi r^2 p v^2\, ds = \int_0^{t_5} C\pi r^2 p g^3 t^3\, dt = C\pi r^2 p g^3 \int_0^{t_5} t^3\, dt = \frac{1}{4} C\pi r^2 p g^3 t^4 = 0.01\text{дж}$$

Тогда получаем, что

$$\varepsilon_{g2} \approx \frac{A_{\text{сопр}}}{5 l m_{\text{ш}} g_2} = 0,003$$

Мы видим, что сопротивление воздуха вносит малую погрешность в сравнении с той, которая у нас есть относительно точного значения. Возможно основной вклад в это различие вносят электромагнитные силы, возникающие в катушках при пролете шарика. Но все же скорее-всего такая огромная погрешность возникает из-за недостоверных данных об установке.

6 Выводы

Мы провели измерения g двумя способами, с помощью трифелярного подвеса и прямого измерения падения шарика, а также расчитали вклад сопротивления воздуха в погрешность измерения ускорения свободного падения, посчитав теоритически.

Первый эксперемент дал нам очень маленькую погрешность в отличии от второго, где влияние на результат оказали электромагнитны силы и сопротивление воздуха, а так же недоставерные данные об установке