

Андрей Чумаков

Лабораторная работа 1.2.5 Исследование вынужденной регулярной прецессии гироскопа

1 Введение

Цели работы: Исследовать вынужденную прецессию гироскопа; установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа; определить скорость вращения ротора гироскопа и сравнить её со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

Оборудование: Гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр, крутильный маятник, весы, штангенциркуль, линейка.

2 Экспериментальная установка

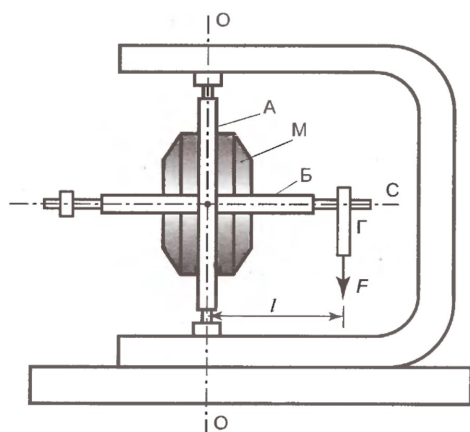


Рис. 1: Схема гироскопа

Экспериментальная установка гироскопа показана на рис.1. Ротором гироскопа является ротор высокооборотного электромотора М, питающегося током частотой 400 Гц. Ротор электромотора представляет массивный стальной цилиндр с прожилками меди, образующими «белчье колесо». Обозначенный на рис.1 буквой С рычаг направлен по оси симметрии ротора. На рычаг подвешивают грузы Г.

Подвешивая различные грузы, можно менять силу F , момент которой определяется расстоянием l от точки подвеса до горизонтальной оси кольца А (до центра масс гироскопа), указанным на самой установке.

3 Теоретические сведения

Уравнение движения твердого тела:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (2)$$

Так как сила \vec{F} не зависит от угловой скорости, а момент сил \vec{M} - от скорости поступательного движения, то уравнения движения можно рассматривать отдельно.

$$\vec{L} = \vec{i} I_x \omega_x + \vec{j} I_y \omega_y + \vec{k} I_z \omega_z \quad (3)$$

Гироскоп - быстро вращающееся тело, для которого, например:

$$I_z \omega_z \gg I_x \omega_x, I_y \omega_y \quad (4)$$

Уравношенный гироскоп - тот, у которого центр масс неподвижен. Если момент внешних сил действует в течение короткого промежутка времени, то:

$$|\Delta \vec{L}| = \left| \int \vec{M} dt \right| \ll |\vec{L}| \quad (5)$$

Рассмотрим маховик, вращающийся вокруг оси z (рис. 2). Будем считать, что:

$$\omega_x = \omega_0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = 0 \quad (6)$$

Пусть ось вращения повернулась на угол $d\varphi$ в плоскости zx :

$$d\varphi = \Omega dt$$

Будем считать, что $L_\Omega \ll L_{\omega_0}$. Это означает, что момент импульса маховика, равный $I_z \omega_0$, изменится только по направлению:

$$|d\vec{L}| = L d\varphi = L \Omega dt \quad (7)$$

Изменение направлено вдоль оси x , поэтому $d\vec{L}$ можно представить:

$$d\vec{L} = \vec{\Omega} \times \vec{L} dt \quad (8)$$

С учетом уравнения вращательного движения:

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \quad \text{Рис. 2: Маховик} \quad (9)$$

Под действием момента \vec{M} ось гироскопа медленно вращается вокруг оси y с угловой скоростью Ω - регулярная прецессия гироскопа. Скорость в случае движения уравновешенного гироскопа под действием моментов сил подвешенных грузов:

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z \omega_0}, \quad (10)$$

где l - расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа

Силы трения не лежат в плоскости осей вращения, поэтому они могут изменять момент импульса и по направлению, и по величине. Для ротора действие сил трения скомпенсировано действием электромотора. В результате действия нескомпенсированных сил трения в осях карданова подвеса ось гироскопа будет опускаться в направлении груза.

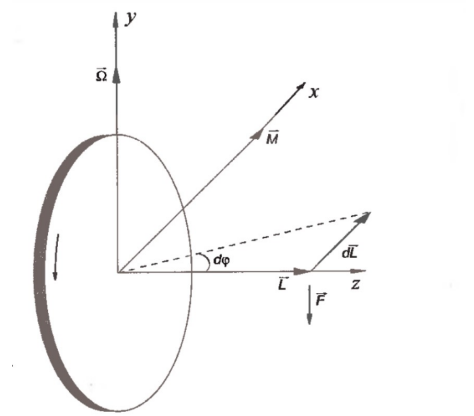
Момент инерции ротора относительно оси симметрии I_0 измеряется по крутильным колебаниям на жесткой проволоке.

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{f}}, \quad (11)$$

где f - модуль кручения проволоки. Чтобы исключить f можно подвесить цилиндр с известными размерами и массой:

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2} \quad (12)$$

Скорость вращения ротора гироскопа можно определить и не прибегая к исследованию прецессии. У используемых в работе гироскопов статор имеет две обмотки, необходимые



для быстрой раскрутки гироскопа. В данной работе одну обмотку используют для раскрутки гироскопа, а вторую - для измерения числа оборотов ротора. Ротор электромотора всегда немного намагничен. Вращаясь, он наводит во второй обмотке переменную электродвижущую силу (ЭДС) индукции, частота которой равна частоте вращения ротора. Частоту этой ЭДС можно, в частности, измерить по фигурам Лиссажу, получаемым на экране осциллографа, если на один вход подать исследуемую ЭДС, а на другой - переменное напряжение с хорошо прокалиброванного генератора. При совпадении частот на экране получаем эллипс.

4 Проведение опыта и вычисление значений

Предисловие: Отклоняем рычаг на 5-6 градусов вверх и подвешиваем к нему грузы различной массы и находим угловую скорость регулярной прецессии. Так же в конце опыт был проведен измерением полу-периода, чтобы сравнить полученные нами результаты честным методом. Результаты измерения представлены в таблице

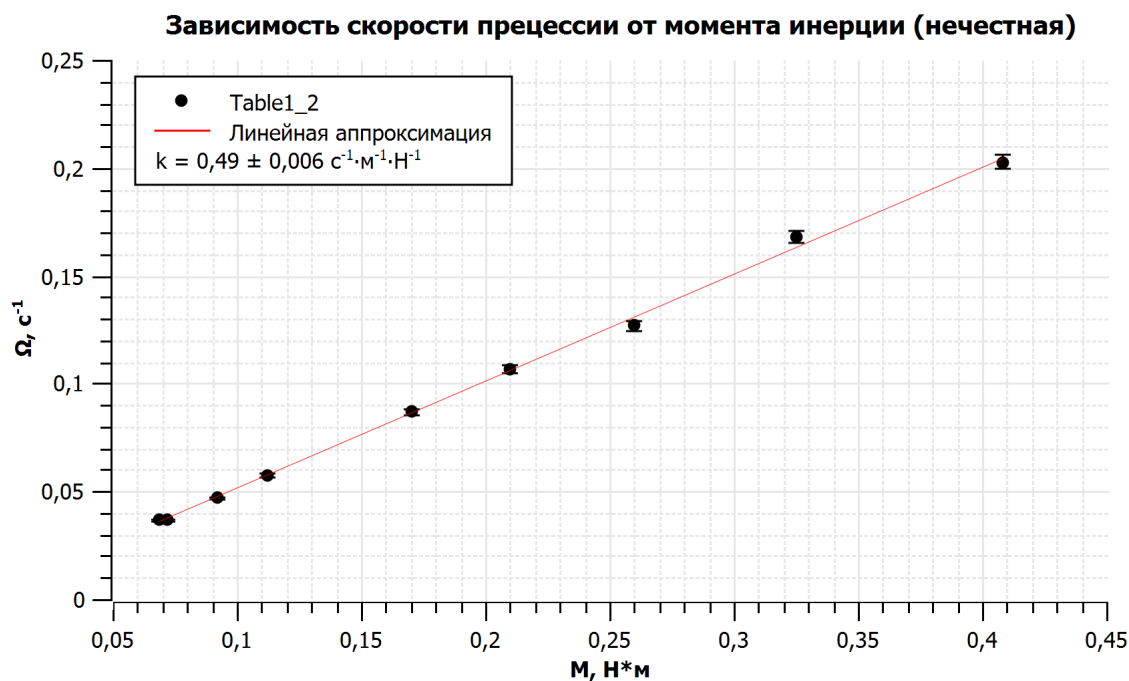
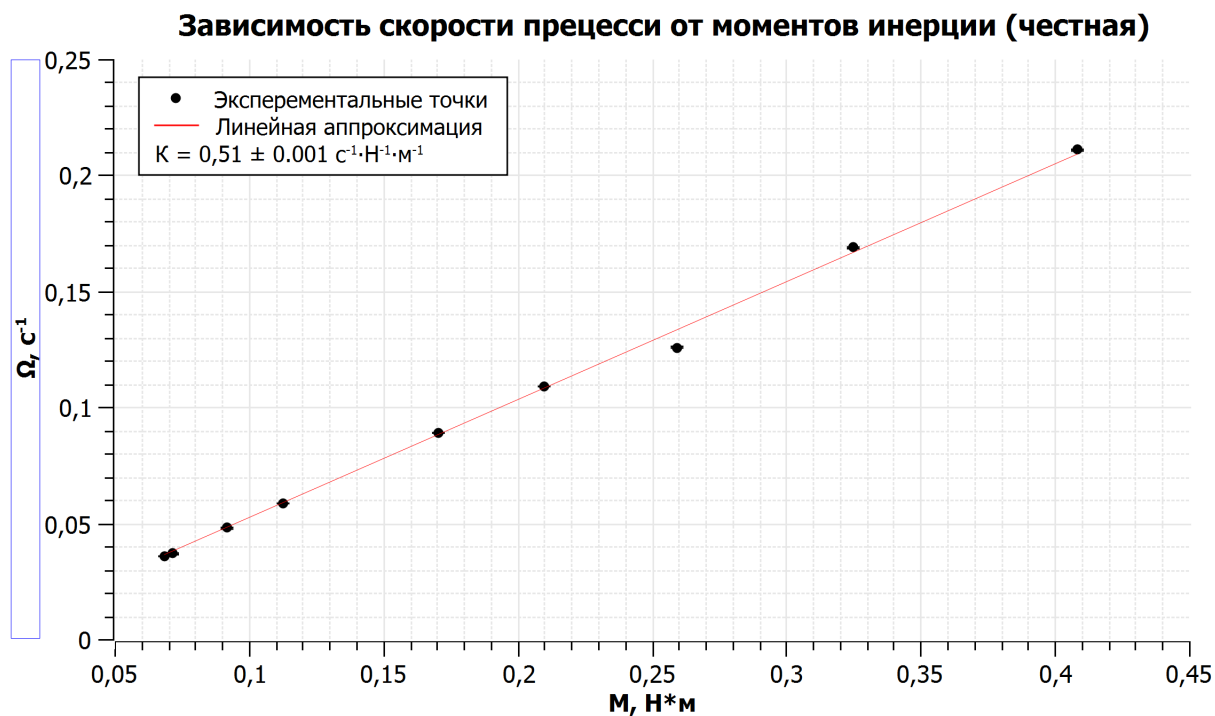
$m_r, \text{гp}$	$T_1, \text{с}$	$T_2, \text{с}$	$T_2, \text{с}$	n_{π}	$T/2, \text{с}$
337,5	119,58	118,73	119,01	4	15,47
268,5	148,97	149,45	148,81	4	18,74
214,4	149,75	149,23	149,93	3	24,76
173,1	115,26	115,45	115,61	2	29,4
140,8	141,47	141,56	141,91	2	36,01
92,8	107,27	107,07	107,17	1	54,3
75,9	130,56	131,11	130,82	1	66,78
59,1	169,14	168,01	167,3	1	85,84
56,4	174,24	175,19	174,89	1	85,76

Таблица 1: Полученные данные

Обработав данные статистически получим усредненные периоды и угловые скорости с их отклонениями, по которым построим график. Также посчитаем момент сил инерции зная что расстояние до точки подвеса грузиков $l = 121\text{mm}$

$M, \text{H}^*\text{m}$	$\bar{T}, \text{с}$	$\delta_{\bar{T}}, \text{с}$	$T_x, \text{с}$	$\delta_{T_x}, \text{с}$	$\Omega, \text{с}^{-1}$	$\delta_{\Omega}, \text{с}^{-1}$	$\Omega_x, \text{с}^{-1}$	$\delta_{\Omega_x}, \text{с}^{-1}$
0,408	29,78	0,09	30,94	0,5	0,211	0,0006	0,203	0,0035
0,325	37,27	0,07	37,48	0,6	0,169	0,0003	0,168	0,0028
0,259	49,88	0,10	49,52	0,8	0,126	0,0002	0,127	0,0022
0,209	57,72	0,07	58,80	1,0	0,109	0,0001	0,107	0,0018
0,170	70,82	0,09	72,02	1,2	0,089	0,0001	0,087	0,0015
0,112	107,17	0,08	108,60	1,8	0,059	0,0000	0,058	0,0010
0,092	130,83	0,22	133,56	2,3	0,048	0,0001	0,047	0,0008
0,072	168,15	0,76	171,68	2,9	0,037	0,0002	0,037	0,0006
0,068	174,77	0,40	171,52	2,9	0,036	0,0001	0,037	0,0006

Таблица 2: Данные после обработки



Мы видим, что графики отличаются незначительно, несмотря на значительные различия в затраченных ресурсах и сложности методов.

Мы знаем все кроме I_r , которое нам необходимо найти по отдельному эксперименту.

4.1 Измерение момента инерции ротора

Характеристики цилиндра и посчитанный по формуле $I_{\text{ц}} = \frac{1}{2}MR^2$ момент инерции представлены в таблице 4.1

Таблица 3: Характеристики цилиндра

m, г	d, мм	σ_m , г	σ_d , мм	$I_{\text{ц}}$, кг · м ²	$\sigma_{I_{\text{ц}}}$
1616,5	78,1	0.05	0,1	0.0012325	6.14^{10-6}

Из данных можно сказать, что $I_{\text{ц}} = 0.0012325$ кг · м² Результаты измерений периода крутильных колебаний с ротором и цилиндром представлены в таблице 4

Таблица 4: Измерения момента инерции ротора

тело	N число оборотов	t1, с	t2, с	t2, с	T, с	σT , с
цилиндр	10	40.22	40.20	40.14	4.0186	0.025
ротор	10	31.87	30.71	30.72	3.11	0.025

Из приведенных измерений можно сказать, что:

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2} = 0.000738 \pm 0.0000037 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \quad (13)$$

$$\omega = \frac{\alpha}{I_0 2\pi} = 389.74 \text{ об/с} \quad (14)$$

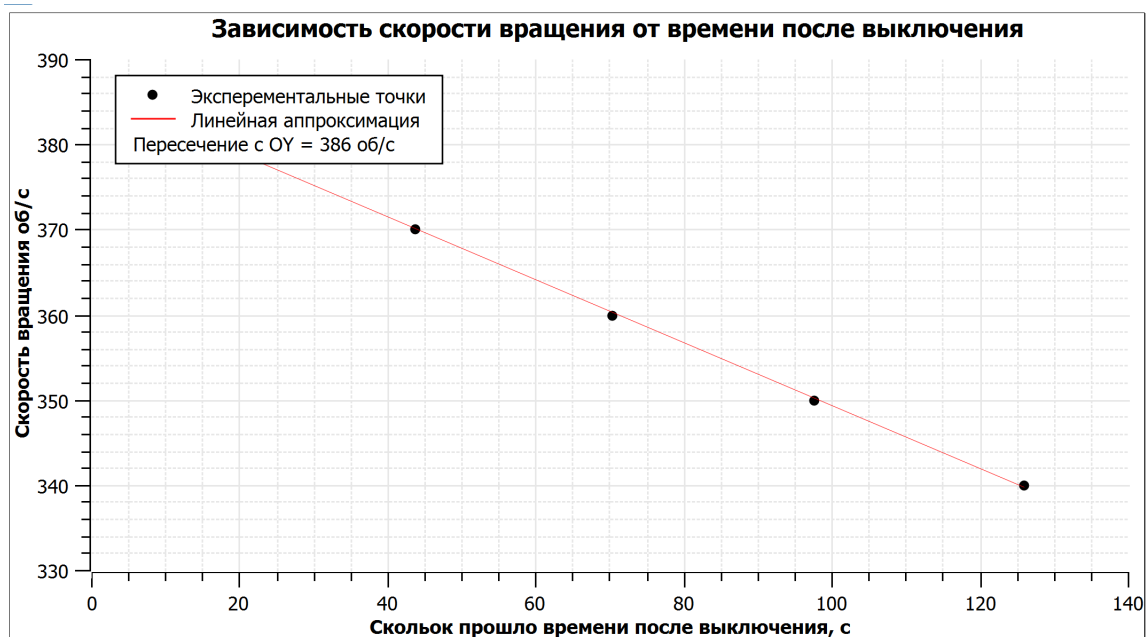
$$\sigma_{\omega} = 8.67 \text{ об/с} \quad (15)$$

Если считать не честно, то результат получится, что $\omega = 404 \text{ об/с}$

4.2 Определение частоты вращения ротора по фигурам Лиссажу

Если на один вход осциллографа подать ЭДС во второй обмотке статора гироскопа, а на второй - напряжение с генератора, то при совпадении частот можно увидеть эллипс. Для достижения более неподвижного эллипса, мы на короткое время отключали питание гироскопа, чтобы ток первой обмотки не мешал измерениям. Мы аппроксимируем экспоненту прямой в начале измерений и найдем изначальную частоту по графику

Об/с	380	370	360	350	349
T, с	17,6	43,79	70,37	97,67	126,01



5 Выводы

В ходе работы была установлена зависимость угловой скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа, она получилась линейная. С помощью неё, с хорошей точностью была посчитана угловая скорость вращения гироскопа 389 об/с, так же скорость вращения ротора была получена с помощью генератора тока 386 Гц.