Th (Критерий Коши существования конечного предела функции)

Пусть $f(x)$ определена на $\mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

Тогда для существования конечного предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon): 0<\delta<\delta_0 : \forall x', x'' \in \mathring{U}_{\delta}(x_0) \mapsto |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

Док-во: $\Rightarrow$ → необходимость

1) Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon): 0<\delta<\delta_0 : \forall x' : x' \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto |f(x')-A| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon): 0<\delta<\delta_0 : \forall x'' : x'' \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \mapsto |f(x'')-A| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon) : 0<\delta<\delta_0 : \forall x', x'' \in \mathring{U}_{\delta}(x_0) \mapsto$

$$|f(x')-f(x'')| = |f(x')+A-A-f(x'')| \le |f(x')-A| + |f(x'')-A| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \text{ЧТД}$$

$\Leftarrow$ Достаточность

Дано: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon): 0<\delta<\delta_0 : \forall x', x'' \in \mathring{U}_{\delta}(x_0) \mapsto |f(x')-f(x'')| < \varepsilon$ (1)

Докажем по Гейне, что $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Возьмём x_n: $\begin{cases} x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \\ x_n \neq x_0 \ \forall n\in\mathbb{N} \\ x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \end{cases}$

$x_n \underset{\neq}{\xrightarrow{n\to\infty}} x_0 \iff \forall\delta\ \exists N(\delta): \forall n\geq N \mapsto x_n\in\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$

$\forall m\geq N \mapsto x_m\in\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ (2)

Т.О: из (1) и (2) $\to \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon): \exists N(\delta): \underset{\forall m\geq N}{\forall n\geq N} \mapsto \begin{cases} x_n\in\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \\ x_m\in\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \end{cases}$; $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$)

Т.О: $\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall m,n\geq N \mapsto |f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$

$\Rightarrow \{f(x_n)\}$ - фунд. $\Rightarrow \{f(x_n)\}$ - сх. по критерию Коши

для посл-ти $\Rightarrow$

Покажем, что $\forall \{x_n\}$: $\begin{cases} x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \\ x_n\neq x_0\ \forall n\in\mathbb{N} \\ x_n\in\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \end{cases} \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

одному и тому же

Предположим противное:

$\exists \begin{cases} x_n^1 \underset{\neq}{\to} x_0 & \lim f(x_n^{(1)}) = A \\ & \quad\quad\quad\quad\quad \neq \\ \exists\ x_n^2 \underset{\neq}{\to} x_0 & \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^2) = B \end{cases}$

Рассмотрим $\{x_n^3\} = \{x_1^1, x_2^2, x_3^1, x_4^2, \ldots\}$

$x_n^3 \not\to x_0$, при этом $\{f(x_n^3)\}$ имеет 2 частичных

предела $A \neq B$ => расходится

Это противоречит тому, что мы доказали,

что $f(\forall x_n)$ посл-ти сходится $\Rightarrow \forall x_n \xrightarrow{\neq} x_0 \hookrightarrow$

$\hookrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A \Rightarrow \lim f(x) = A$ по опр. Гейне