Th 1 (о двух милиционерах)

Пусть $f(x), g(x), h(x)$ определены на $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$, где $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ на $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$;

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$; $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$ $(A \in \overline{\mathbb{R}})$. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$

Док-во: Будем доказывать по Гейне

Возьмём $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$

$x_n \neq x_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$

По условию Th: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0) \Rightarrow$

$x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$

$\Rightarrow f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Rightarrow$ по опр. Гейне $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$

$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} h(x_n) = A$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = A$ (по Th о двух милиционерах для посл-ей)

Т.О. $\forall x_n : \{ x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0$

$\begin{cases} x_n \ne x_0 \ \forall n \in \mathbb{N} \\ x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0) \end{cases} \hookrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = A \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по опр. Гейне $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$ → ЧТД

---

**Th 2. (арифмет. операции)**

Пусть $f, g$ определены на $\mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$;

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$; $A, B \in \mathbb{R}$. Тогда

1) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$

3) если $g(x) \ne 0$ $\forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$ и $B \ne 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B}$

Док-во: пункт 2

1) Возьмём $x_n$ : $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$, $x_n \ne x_0$, $x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$ $\hookrightarrow$ $f(x_n) \to A$, $g(x_n) \to B$ - по опр Гейне

2) $\lim (f(x_n) \cdot g(x_n)) = A \cdot B$ (по Th для посл-ей)

$\xrightarrow{n\to\infty}$

3) $\forall x_n:\ x_n \to x_0$

$x_n \neq x_0$

$x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$

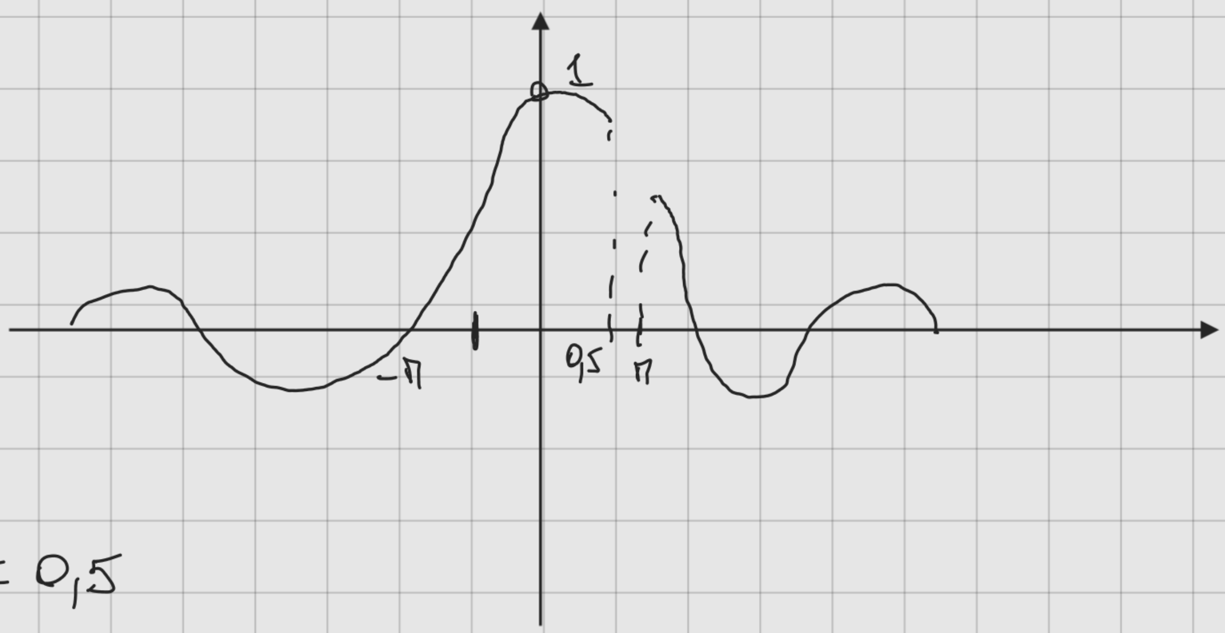
$\hookrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \big(\underbrace{f(x_n)\cdot g(x_n)}_{h(x_n)}\big) = A\cdot B \Rightarrow$

(можно взять $h(x) = f(x)\cdot g(x)$)

$\Rightarrow$ по опр Гейне восп для функций:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B \to \text{ЧТД}$$

---




$\delta_0 = 0{,}5$

---