

Опр. f - равн. непрерывна на E , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in E : |x' - x''| < \delta \Leftrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Лемма. f - равн. непрерывна на $E \Rightarrow f$ - непрерывна на E

Th. (Кантор) f - непрерывна на $[a, b] \Rightarrow f$ - равномерно непрерывна на $[a, b]$

Док-во: Предположим противное:

$$1) \exists \varepsilon_0 : \forall \delta > 0 \exists x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta, |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0 (1)$$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, y_n \in [a, b] : |x_n - y_n| < \frac{1}{n}, |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0$$

$$2) x_n \in [a, b] \Rightarrow \exists x_{n_k} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \text{ по Тх } \left. \vphantom{\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0} \right\} \Rightarrow$$

Б-В

$$\Rightarrow |y_{n_k} - x_0| = |y_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k} - x_0| \leq \underbrace{|y_{n_k} - x_{n_k}|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{|x_{n_k} - x_0|}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$$

$$\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = x_0$$

$y_{n_k} \rightarrow x_0$
по Теореме, г.у. $x_{n_k} \rightarrow x_0$

$$3) \text{ В силу непрерывности } \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k})$$

$$\begin{aligned} \text{ч)} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| &= |f(x_{n_k}) - f(x_0) + f(x_0) - f(y_{n_k})| = \\ &= |f(x_{n_k}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y_{n_k})| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists K : \forall k \geq K \hookrightarrow |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon$$

в частности для $\varepsilon_0 \exists K : \forall k \geq K \hookrightarrow |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon_0$

\rightarrow противоречит (1) \Rightarrow ЧТД

Опр. Пусть f -определена на $E \subset \mathbb{R}^n$. ε -модуль

непрерывности на $E : \omega(\delta, f, E) = \sup \{ |f(x) - f(y)|,$

$x, y \in E, |x - y| < \delta \}$

Th. f -равн. непрерыв. на $E \Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \omega(\delta, f, E) = 0$

