Пусть $f(x)$ определена на некотором мн-ве X, а ф-ия $g(t)$ на мн-ве T, причём $g(T) \subset X$, Тогда сложная функция $f \circ g$ определяется на T формулой $(f \circ g)(t) = f(g(t)), t \in T$

Th (непрерывность сложной функции)

Пусть f непрерывна в т. x_0, пусть g непрерывна в t_0; $g(t_0) = x_0$. Тогда $f \circ g$ – непрерывна в t_0

Док-во:

f - непрерывна в $x_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon): \forall x \in U_\delta(x_0) \mapsto f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$

g - непрерывна в $t_0 \Leftrightarrow$

$\forall \delta > 0 \; \exists \zeta(\delta) > 0 : \forall t \in U_\zeta(t_0) \mapsto g(t) \in U_\delta(x_0)$ → по усл.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \zeta(\varepsilon) > 0 : \forall t \in U_\zeta(t_0) \mapsto f(g(t)) \in U_\varepsilon(f(x_0))$

$g(t_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(g(t))$ – непрерывна в t_0

Th 2 (о занесении предела под знак непрерывной функции)

Пусть f – непрерывна в т. x_0, g - определена на $\mathring{U}_{t_0}$; $\exists \lim\limits_{t \to t_0} g(t) = x_0$

Тогда $\exists \lim\limits_{t \to t_0} \underbrace{(f \circ g)(t)}_{f(g(t))} = f \cdot (\lim\limits_{t \to t_0} g(t)) = f(x_0)$

Док-во аналогично предыдущему

Th 3 Пусть $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, пусть g - определена на $\mathring{U}(t_0)$; $x_0 \notin g(\mathring{U}(t_0))$, $\exists \lim\limits_{t \to t_0} g(t) = x_0$

Тогда $\exists \lim\limits_{t \to t_0} \underbrace{(f \circ g)(t)}_{f(g(t))} = y_0$