Ancora su $A+B$

Sia $A = \mathrm{Span}(v_1, \; v_K)$
$B = \mathrm{Span}(w_1, \; , w_s)$

$$A+B = \{ v+w \mid v \in A, w \in B \} =$$

$$= \{ \underbrace{\alpha_1 v_1 + \quad + \alpha_K v_K}_{v} + \underbrace{\beta_1 w_1 + \quad + \beta_s w_s}_{w} \mid \alpha_1, \; , \alpha_K, \beta_1, \; , \beta_s \in \mathbb{K} \} =$$

$$= \mathrm{Span}(v_1, \; , v_K, w_1, \; , w_s)$$

ESEMPIO

$V = \mathbb{R}^5$

$$A = \mathrm{SPAN}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$B = \mathrm{SPAN}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

si nota subito che $\dim A = 2$

$\dim B = 2$

Chi è $A+B$ e che dimensione ha?

$$A+B = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Con l'algoritmo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -6 & 0 \\ 4 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

PIVOT

Dunque una base di $A+B$ è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e dunque $A+B$ ha dimensione 3

FORMULA DI GRASSMANN

Teorema Dato V sp. vett e dati A, B SOTTOSPAZI, vale

$$\dim(A+B) + \dim(A \cap B) = \dim A + \dim B$$

Per esempio sia $V = \mathbb{R}^7$ e siano A e B di dim 4

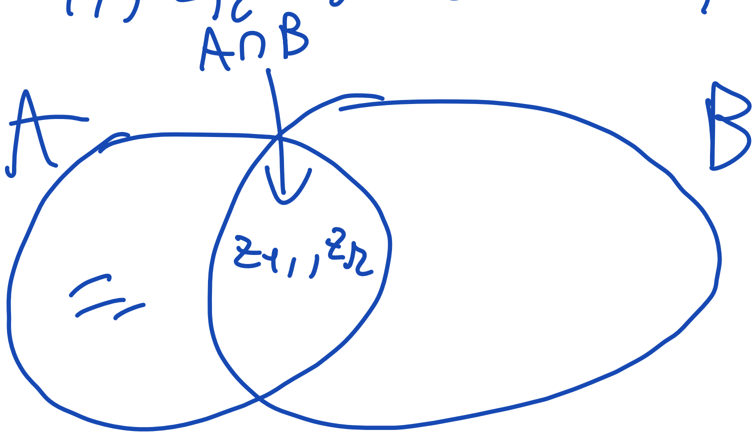
$$\underbrace{\dim(A+B)}_{\leq 7} + \dim(A \cap B) = 4+4$$

allora $\dim(A\cap B)\geq 1$

TRACCIA della

DIM

Sia $z_1, \dots, z_r$ base di $A\cap B$.



la completo ad una base di B

$$z_1, \dots, z_r, w_1, \dots, w_{m-r} \quad \text{base di } B$$

(B ha dim m)

completo $z_1, \dots, z_r$ anche ad una base di A

$$z_1, \dots, z_r, v_1, \dots, v_{k-r} \quad \text{base di } A$$

(A ha dim k)

Sappiamo che

$$A+B = \mathrm{Span}\left(z_1, \ldots, z_r, v_1, \ldots, v_{k-r}, w_1, \ldots, w_{m-r}\right)$$

DOMANDA.

$A+B$ ha forse dimensione $\underline{k+m-r}$?

se la risposta è SI il teo è dimostrato

$$\begin{array}{ccccccc} \dim A+B & + & \dim A\cap B & = & \dim A & + & \dim B \\ \| & & \| & & \| & & \| \\ k+m-r & + & r & = & k & + & m \end{array}$$

Per dim che $A+B$ ha dim $k+m-r$ resta solo da dimostrare che

$$\underline{z_1, \ldots, z_r, v_1, \ldots, v_{k-r}, w_1, \ldots, w_{m-r}}$$

SONO LIN INDIP

SUPPONIAMO che

$$\alpha_1 z_1 + \quad + \alpha_r z_r + \beta_1 v_1 + \quad + \beta_{k-r} v_{k-r} +$$
$$+ \gamma_1 w_1 + \quad + \gamma_{m-r} w_{m-r} = 0$$

Allora

$$(*) \quad \underbrace{\alpha_1 z_1 + \quad + \alpha_r z_r + \beta_1 v_1 \quad + \beta_{k-r} v_{k-r}}_{\in A} = \underbrace{-\gamma_1 w_1 - \quad - \gamma_{m-r} w_{m-r}}_{\in B}$$

Allora il vettore qui sopra è in $A \cap B$
e pertanto posso esprimerlo anche come

$$= \underbrace{\delta_1 z_1 + \quad + \delta_r z_r}$$

In particolare

$$\delta_1 z_1 + \quad + \delta_r z_r + \gamma_1 w_1 + \quad + \gamma_{m-r} w_{m-r} = 0$$

dato che $z_1, \dots, z_r, w_1, \dots, w_{m-r}$ è base di B, deve valere

$$\delta_1 = \dots = \delta_r = \gamma_1 = \dots = \gamma_{m-r} = 0$$

Riguardando $\circledast$ implica

$$\alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_r z_r + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{k-r} v_{k-r} = 0$$

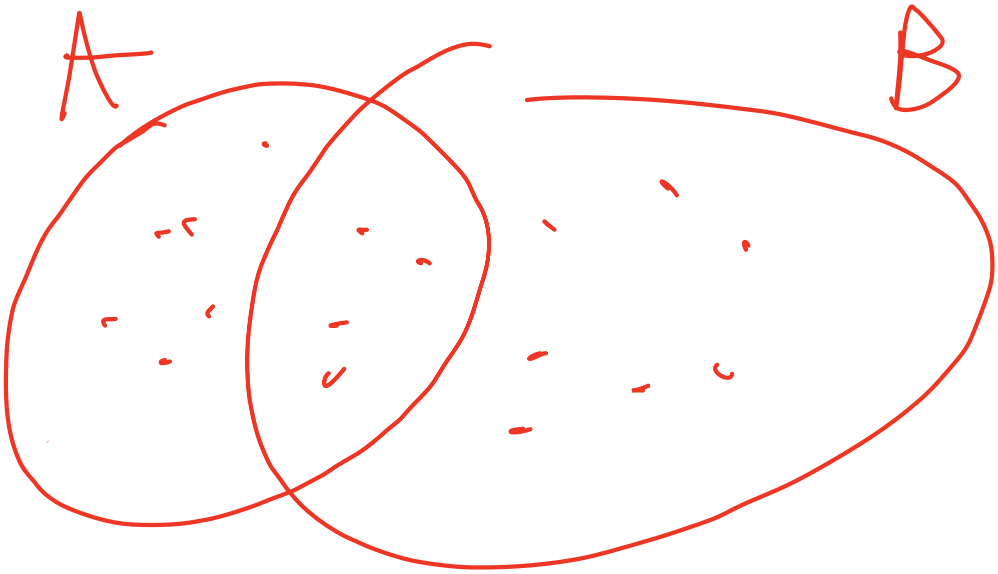
dato che $z_1, \dots, z_r, v_1, \dots, v_{k-r}$ è base di A, deve valere

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_r = \beta_1 = \dots = \beta_{k-r} = 0$$

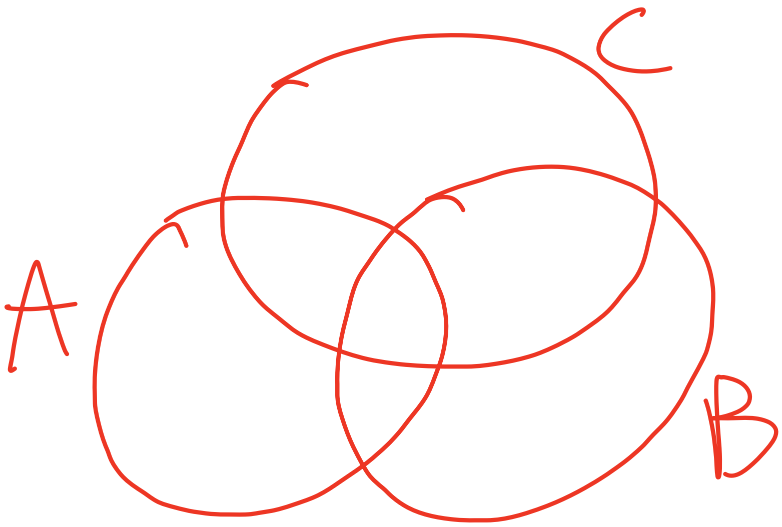
$\square$

ESERCIZIO

FRA INSIEMI FINITI



$$\#(A\cup B) = \#A + \#B - \#(A\cap B)$$



$$\#(A\cup B\cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A\cap B) - \#(A\cap C) - \#(B\cap C) + \#(A\cap B\cap C)$$

VALE FORSE UN EQUIVALENTE DI QUESTA PER LE DIM DI SOTTOSPAZI?

NO

ESERCIZIO

Dire se esistono in $\mathbb{R}^4$ tre sottospazi A, B, C di dim 2 tali che

$$A \cap B = \{0\}$$
$$A \cap C = \{0\}$$
$$B \cap C = \{0\}$$

Parto per esempio da

$$A = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$B = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$A \cap B = \{0\}$$

È C ???

$$C = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \right)$$ di dim 2

$A \cap C = \{0\}$ per GRASSMANN

è equivalente a

$\dim A + C = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e colon con B

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque la risposta è SI, posso trovare A, B, C come richiesto).

NOTO che in $\mathbb{R}^4$ con gli A, B, C costruiti SOPRA

$$\overbrace{\dim(A+B+C)}^{4} \overset{?}{=} \dim \overset{2}{A} + \dim \overset{2}{B} + \dim \overset{2}{C}$$

$$- \dim(\overset{0}{A\cap B}) - \dim(\overset{0}{A\cap C}) - \dim(\overset{0}{B\cap C})$$

$$+ \dim(\underset{0}{A\cap B\cap C})$$

$4 \neq 6$ DUNQUE

NIENTE FORMULA DI GRASSMANN GENERALIZZATA.

SISTEMI LINEARI

NOTAZIONE

MOLTIPLICAZIONE FRA UNA MATRICE $m \times n$ e un vettore $n \times 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

3×4 $\qquad$ 4×1 $\qquad$ 3×1

$$= 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

3×2 $\qquad$ 2×1

VECCHIO SISTEMA LINEARE OMOGENEO

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 1x + 1y + 1z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y + 4z \\ 2x + y - z \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

POSSO PRESENTARE IL SISTEMA COSÌ

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

MATRICE DEL SISTEMA

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

DA QUI VEDETE SUBITO CHE L'UNICA SOLUZIONE È

$x = y \quad z = 0$