Analisi I: Lezione 3

Prof. Adolfo Rabasa

25 settembre 2025

Indice

1 Funzioni (continuazione)

1.1 Successioni

Un tipo di funzioni particolarmente importante è quello definito sull'insieme $\mathbb{N}$. In altre parole, quelle il cui dominio è l'insieme dei numeri naturali:

$$f : \mathbb{N} \to B$$

che assegnano a ogni $n \in \mathbb{N}$ un valore

$$f_n := f(n) \in B.$$

Queste funzioni sono tradizionalmente chiamate **successioni**. A volte si scrive

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$$

per denotare la stessa successione.

Esempi:

1. Lanci di una moneta consecutivi:

$$f(n) \in \{\text{testa, croce}\}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

2. Poiché si tratta di una proprietà binaria, può essere modellata da

$$f(n) \in \{1, -1\}$$

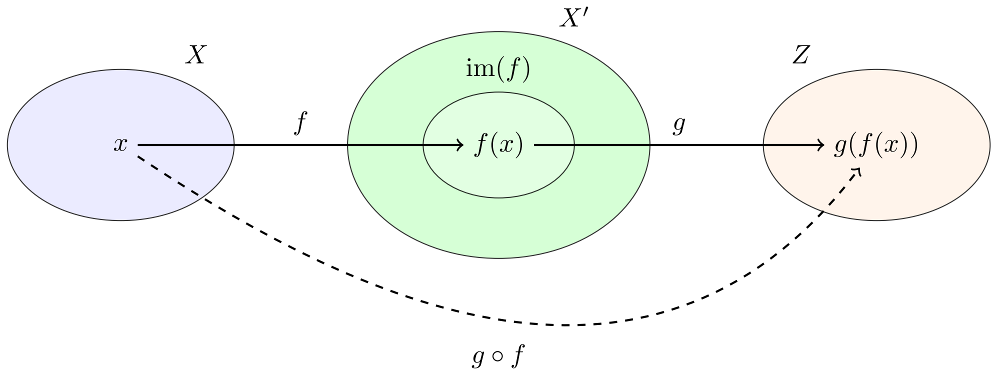
   assegnando il valore 1 per "testa" e -1 per "croce".

3. Una successione infinitesima
$$f(n) = \frac{1}{n}$$
4. Una successione oscillante
$$f(n) \coloneqq (-1)^n \in \{-1, 1\}$$

Useremo le successioni più avanti...

1.2 Composizione di funzioni

Siano date $f : X \to Y$ e $g : X' \to Z$. Se risulta che
$$\mathrm{im}(f) \subset X',$$
definiamo la **composizione**
$$g \circ f : X \to Z$$
data da
$$(g \circ f)(x) \coloneqq g(f(x)).$$
Osservazione: Per definire la composizione, è cruciale che
$$\mathrm{im}(f) \subset \mathrm{dom}(g)$$
[Disegno con set di patate. Questo può essere rappresentato nel modo seguente. Disegniamo i domini e i codomini. Un punto x viene inviato alla sua immagine da f su X, e poi viene inviato nuovamente da g su Z. Qui è fondamentale che il dominio di g contenga l'immagine di f.]

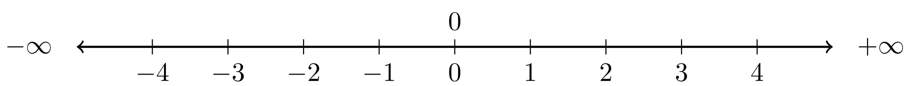


Per definizione di immagine
$$\begin{aligned}\mathrm{im}(g \circ f) &= \{g(f(x)) : x \in X\} \\ &= \{g(y) : y \in \mathrm{im}(f)\}\end{aligned}$$
Quindi, abbiamo
$$\mathrm{im}(g \circ f) = \mathrm{im}(g|_{\mathrm{im}(f)})$$
Esempio

- Consideriamo la successione $f(n) = (-1)^n$ e $g = |\cdot| : (-\infty, \infty) \to [0, \infty)$. In questo caso,
$$g \circ f(n) = |f(n)| \equiv 1.$$
Qui scriviamo $\equiv$ per indicare che una funzione è uguale a una costante.

2 I Numeri Reali

Oggi definiremo i numeri reali, che sono tutti i numeri sulla retta dei numeri reali $(-\infty, \infty)$.



2.1 Definizione (allineamento decimali)

Questi sono **allineamenti decimali** (infiniti) della forma:

$$\mathbb{R} \coloneqq \{p.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots : p \in \mathbb{Z}, \alpha : \mathbb{N} \to \{0, 1, \ldots, 9\}\}$$

dove $\alpha : \mathbb{N} \to \{0, \ldots, 9\}$ è una **successione** con valori sulle cifre $0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9$. Come sopra, usiamo la convenzione

$$\alpha_n \coloneqq \alpha(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esempi:

- 1 (dove $p = 1$ e $\alpha_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$)
- 2.83 (dove $p = 2$, $\alpha_1 = 8$, $\alpha_2 = 3$, e $\alpha_n = 0$ per ogni $n \geq 3$)
- $0.\overline{9} \coloneqq 0,99999\ldots$ (dove $p = 0$ e $\alpha_n = 9$ per ogni $n \in \mathbb{N}$)

Osservazione 1. Notate che $1 = 0.\overline{9}$

2.2 Numeri irrazionali come decimali

Notate che i numeri razionali sono contenuti nei numeri reali, perché:

Lemma 1. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Infatti, i numeri razionali, nella loro espressione decimale, sono

$$\begin{aligned}\mathbb{Q} &= \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\} \\ &= A \coloneqq \{m, \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l\overline{\alpha_{l+1}\cdots\alpha_k} : m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Osservazione 2. In altre parole, i numeri razionali sono quelli la cui coda decimale è **eventualmente periodica**. Qui, *periodica* significa che la successione si ripete su un dato intervallo (di numeri naturali), per esempio

$$8,1934\overline{123\ldots34} = 8,1934 \quad \underbrace{123\ldots34}_{\text{intervallo di periodicità}} \quad 123\ldots34123\ldots34...$$

$$0,\overline{82} = 0, \quad \underbrace{82}_{\text{intervallo di periodicità}} \quad 8282828...$$

Esempi:

- 1 è razionale.
- $0.\overline{83}$ è razionale.
- $\sqrt{2}$ non è razionale, e quindi non può essere espresso come una successione decimale periodica.

Dimostrazione del Lemma 1. Dimostreremo prima che $A \subset \mathbb{Q}$ e dopo che $\mathbb{Q} \subset A$.

a) $A \subset \mathbb{Q}$. Per prima cosa forniamo un esempio concreto per motivare la dimostrazione formale: Consideriamo il numero $a = 0.\overline{83}$. Per dimostrare che è razionale, lo scriviamo come segue:

$$\begin{aligned} a &= 0.838383\ldots \\ 100a &= 83.838383\ldots \end{aligned}$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda, otteniamo

$$100a - a = 83 \quad \Longrightarrow \quad 99a = 83 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{83}{99}.$$

Poiché a può essere espresso come il rapporto di due interi, è un numero razionale.

Ora facciamo la prova formale: Sia a un elemento **arbitrario** di A, quindi della forma

$$a = p, \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l\overline{\alpha_{l+1}\cdots\alpha_k}, \qquad 0 \leq \ell \leq k-1, \quad 0 \leq k.$$

dove l, k sono numeri interi non-negativi. Allora, se segue che

$$a \times 10^l = p\alpha_1 \cdots \alpha_l, \overline{\alpha_{l+1} \cdots \alpha_k}$$
$$a \times 10^k = p\alpha_1 \cdots \alpha_k, \overline{\alpha_{l+1} \cdots \alpha_k}$$

dove $p\alpha_1 \cdots \alpha_k$ è il numero intero che si legge lessicograficamente. Dato che le code decimali dei due termini sono uguali, possiamo prendere la differenza (formalmente) e ottenere

$$a \times m = r \coloneqq p\alpha_1 \cdots \alpha_k - p\alpha_1 \cdots \alpha_l \in \mathbb{N}, \qquad m = 10^k - 10^l \geq 0.$$

Deduciamo che

$$a = \frac{r}{m} \in \mathbb{Q}.$$

Poiché a è un elemento arbitrario di A, questo dimostra che $A \subset \mathbb{Q}$.

b) $\mathbb{Q} \subset A$. Come sopra, prima facciamo un esempio concreto della dimostrazione: Consideriamo $a = \frac{1}{7}$. Eseguiamo la divisione lunga:

$$\begin{aligned} 10 \div 7 &= \mathbf{1} \quad \text{con resto } 3 \\ 30 \div 7 &= \mathbf{4} \quad \text{con resto } 2 \\ 20 \div 7 &= \mathbf{2} \quad \text{con resto } 6 \\ 60 \div 7 &= \mathbf{8} \quad \text{con resto } 4 \\ 40 \div 7 &= \mathbf{5} \quad \text{con resto } 5 \\ 50 \div 7 &= \mathbf{7} \quad \text{con resto } 1 \end{aligned}$$

Il resto 1 si ripete, quindi la sequenza di cifre si ripeterà. I residui ottenuti sono $\{3, 2, 6, 4, 5, 1\}$, che sono tutti compresi in $\{0, \ldots, 6\}$. Il numero di possibili residui è limitato, quindi a un certo punto un residuo deve ripetersi, e questo fa sì che la sequenza decimale sia periodica, quindi

$$\frac{1}{7} = 0, \overline{142857}.$$

Sia ora $a \in \mathbb{Q}$ un elemento arbitrario, quindi della forma

$$a = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}.$$

Supponiamo che $p \geq 0$, (oppure moltiplichiamo per -1). Ricordiamo **l'algoritmo della divisione**: per ogni $p, q \in \mathbb{N}$, esistono unici $p_0, m_0 \in \mathbb{N}$ che soddisfano

$$p = p_0 q + m_0, \qquad m_0 \in \{0, \ldots, q-1\}.$$

Qui, il numero m_0 è chiamato il **resto**. Ripetiamo l'operazione, questa volta con il resto m_0, per ottenere $p_1, m_1 \in \mathbb{N}$ che soddisfano

$$m_0 \times 10 = p_1 \times q + m_1, \qquad m_1 \in \{0, \ldots, q-1\}$$

Poiché $0 \leq m_0 < q$, segue che

$$0 \leq p_1 = \frac{m_0 \times 10 - m_1}{q} < \frac{q \times 10}{q} = 10 \quad \Rightarrow \quad p_1 \in \{0, \ldots, 9\}.$$

In particolare (usando la notazione decimale)

$$\frac{p}{q} = p_0, p_1 \alpha_2 \ldots$$

Procedendo induttivamente, per ogni $n \geq 1$ otteniamo

$$m_{n-1} \times 10 = p_n \times q + m_n, \qquad m_n \in \{0, \ldots, q-1\}$$

È cruciale notare che per tutti $n \geq q+1$ **deve esistere** $l \leq q$ tale che $m_n = m_l$. Questo succede perché la condizione $m_n \in \{0, \ldots, q-1\}$ forza che non ci siano più di q resti diversi. Allora, esiste $0 \leq l < k \leq q$ tale che $m_l = m_k$ è il primo resto che si ripete. Dalle identità ottenute induttivamente, questo implica che anche la sequenza di cifre p_n diventerà periodica. Questo dimostra (formalmente) che ogni numero razionale ha uno sviluppo decimale eventualmente periodico, cioè appartiene all'insieme A.

$$\frac{p}{q} = p_0, \alpha_1 \cdots \alpha_l \overline{\alpha_{l+1} \cdots \alpha_k}, \qquad \alpha_i \in \{0, \ldots, 9\} \forall i \geq 1.$$

Quindi, $a \in A$ e ne consegue che $\mathbb{Q} \subset A$.

Da a) e b), deduciamo che $\mathbb{Q} = A \subset \mathbb{R}$. ■

2.3 Ordinamento

Uguaglianza dei numeri reali. Diciamo che due numeri reali $a = p.\alpha_1\alpha_2\dots$ e $b = q.\beta_1\beta_2\dots$ sono uguali se e solo se $p = q$ e $\alpha \sim \beta$ (le successioni di cifre sono equivalenti) sotto le seguenti convenzioni:

$$\begin{cases} 1 & = 0.\overline{9} \\ p+1 & = p.\overline{9} \\ p.\alpha_1\dots\alpha_k\overline{9} & = p.\alpha_1\dots(\alpha_k+1) \quad (\text{se } \alpha_k < 9) \end{cases}$$

Esempi sulle convenzioni:

- $3 = 2.\overline{9}$.
- $1.2 = 1.1\overline{9}$.
- $5.124 = 5.123\overline{9}$
- $100 = 99.\overline{9}$

Ordinamento

1. Diciamo che $a, b \in \mathbb{R}$ **non negativi** soddisfano $a \geq b$ se:
$$p > q \quad \text{o} \quad p = q \text{ e } \exists k \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \alpha_n = \beta_n \forall n < k \text{ e } \alpha_k \geq \beta_k.$$
2. Se $a = 0$ o positivo e b è negativo, definiamo $a > b$. In particolare,
$$\text{se } a \text{ è positivo,} \quad \text{risulta che } a > 0$$
3. Ora dobbiamo ordinare i numeri reali **negativi**. A tal fine, ricordiamo che il valore assoluto (per i numeri razionali) è dato da:
$$|a| = \operatorname{sgn}(a)a = \begin{cases} a & \text{se } a > 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$
oppure $|a| = \operatorname{sgn}(a)a$, dove
$$\begin{cases} \operatorname{sgn}(a) = 1 & \text{se } a \geq 0 \\ \operatorname{sgn}(a) = -1 & \text{se } a < 0 \end{cases}$$
In particolare, se $a = p.\alpha_1\alpha_2\dots$, abbiamo:
$$|a| = \begin{cases} p, \alpha_1\alpha_2\dots & \text{se } p \geq 0 \\ -p, \alpha_1\alpha_2\dots & \text{se } p < 0 \end{cases}$$
Questo è il valore assoluto di un numero reale.
Per i numeri negativi a e b, definiamo l'ordine (inverso) come:
$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad |a| > |b|$$

Questa definizione è compatibile con il fatto classico che

$$a < b \quad \Leftrightarrow -a > -b.$$

Osservazione: I numeri reali $\mathbb{R}$ sono **totalmente ordinati** nel senso che è possibile confrontare due numeri reali qualsiasi. (Questo ordine coincide con l'ordine naturale della linea.)

2.4 Operazioni algebriche (somma e moltiplicazione)

In generale, non esiste un algoritmo per sommare due allineamenti decimali. Questo perché la parte decimale può essere infinita (e l'addizione parte da destra a sinistra). Per esempio, non è chiaro come definire

$$1 + (-0.\overline{9}) = 0$$

che sappiamo deve essere zero.

Informalmente, possiamo definire la somma di due numeri reali come il limite di una successione di somme di decimali **finiti** che approssimano ciascuno di essi. Sia $a = p.\alpha_1 \dots$ non negativo, definiamo

$$a^{(n)} := p.\alpha_1 \cdots \alpha_n \overline{0}$$

Dall'ordinamento, segue che

$$a^{(n)} \leq a^{(n+1)} \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

L'idea è che

$$|a - a^{(n)}| = a - a^{(n)} = 0.\underbrace{0 \cdots 0}_{n \text{ volte}} \alpha_{n+1}\alpha_{n+2} \dots$$

Possiamo farlo perché la "coda" di $a^{(n)}$ è composta da zeri.

Otteniamo (informalmente)

$$|a - a^{(n)}| \leq 0.\ \underbrace{0 \dots 0}_{n-1 \text{ volte}}\ 1 = \frac{1}{10^{n-1}} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Quindi, l'errore "$|a - a^{(n)}|$" tende a zero.

In altre parole, consideriamo una successione di numeri reali non decrescenti, con decimali finiti che approssimano a dal basso. Questo procedimento può essere reso formalmente matematicamente!

Poiché la somma o il prodotto di due decimali con cifre finali finite è ben definito, possiamo definire:

- la somma
$$a + b := \lim_{n \to \infty} \operatorname{sgn}(a)|a|^{(n)} + \operatorname{sgn}(b)|b|^{(n)}$$
- il prodotto
$$a \cdot b := \operatorname{sgn}(a) \cdot \operatorname{sgn}(b) \lim_{n \to \infty} |a|^{(n)} \cdot |b|^{(n)}$$

I segni sopra ci permettono di usare il valore assoluto, il che a sua volta ci permette di impiegare l'approssimazione decimale finita.

Esempio: Possiamo ora tornare alla differenza

$$\begin{aligned} 1 - 0.\overline{9} &= \lim_{n \to \infty} \left(1 - 0.\underbrace{9 \dots 9}_{n \text{ volte}} \overline{0} \right) \\ &= \lim_{n \to \infty} 0.\ \underbrace{0 \dots 0}_{n-1 \text{ volte}}\ 1 \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{10^{n-1}} = 0. \end{aligned}$$

2.5 La disuguaglianza triangolare

Teorema. Qualsiasi $a, b \in \mathbb{R}$, soddisfano

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Dimostrazione: La dimostrazione si basa su una sequenza di implicazioni/equivalenze logiche. Per prima cosa, notiamo che

$$\forall c \geq 0, \qquad |x| \leq c$$

se e solo se

$$\begin{cases} x \leq c & \text{se } x \geq 0 \\ -x \leq c \text{ (ovvero } -c \leq x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

se e solo se

$$-c \leq x \leq c.$$

Pertanto,

$$|x| \leq c \qquad \Leftrightarrow \qquad -c \leq x \leq c.$$

Poiché $|a| = |a|$ (e in particolare $|a| \leq |a|$), otteniamo (ponendo $x = a$ e $c = |a|$)

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

Analogamente

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

Quindi, sommando questi due termini e applicando le regole delle disuguaglianze, deduciamo che

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

Ponendo ora $x = a + b$ e $c = |a| + |b|$, questo è equivalente a

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Questo dimostra la disuguaglianza triangolare.

3 Radianti e Funzioni Trigonometriche

3.1 Angoli in radianti

Il modo più naturale per misurare gli angoli in matematica, specialmente in analisi, è usare i **radianti**. La misura in radianti di un angolo al centro di una circonferenza è definita come il rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza sotteso dall'angolo e il raggio della circonferenza.

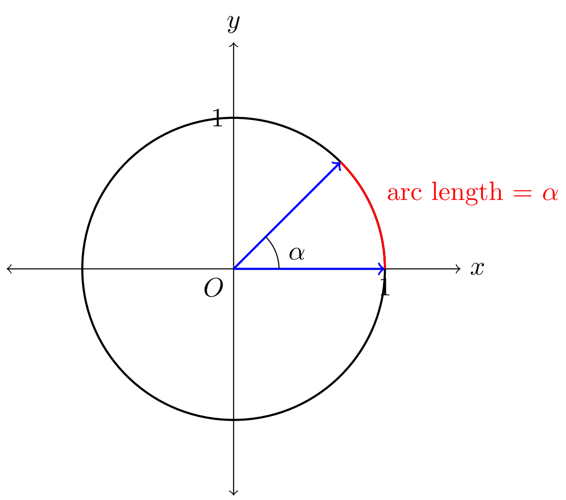
$$\text{Angolo in radianti} = \frac{\text{Lunghezza dell'arco}}{\text{Raggio}}$$

La circonferenza di un cerchio di raggio r è $2\pi r$. Un angolo di $360°$ corrisponde quindi a 2π radianti. La conversione tra gradi e radianti è data da:

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$
$$1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi}$$

3.2 Funzioni Trigonometriche

Consideriamo il cerchio unitario (con raggio $r = 1$) centrato nell'origine di un sistema di assi cartesiani. Sia α un angolo misurato in radianti a partire dall'asse x positivo.

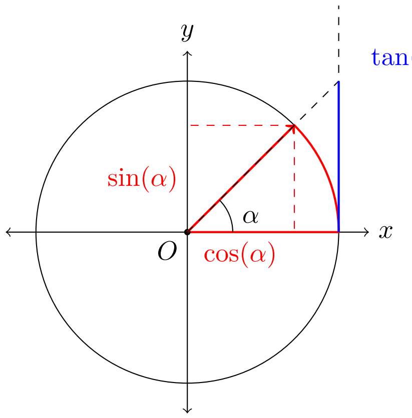


Se (x, y) è il punto sulla circonferenza che corrisponde all'angolo α (in radianti), definiamo le funzioni seno e coseno come:

$$\cos(\alpha) := x$$
$$\sin(\alpha) := y$$

In questo modo, ogni punto sul cerchio unitario può essere rappresentato come $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. La funzione tangente è definita come il rapporto tra seno e coseno:

$$\tan(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad \text{per } \cos(\alpha) \neq 0.$$



Periodicità e Iniettività

Le funzioni trigonometriche sono **periodiche** perché la loro definizione si basa sul cerchio unitario. Dopo aver percorso un'intera circonferenza (che corrisponde a 2π radianti), si ritorna allo stesso punto di partenza, e quindi i valori di seno e coseno si ripetono.

- La funzione $\sin(x)$ ha un periodo di 2π, ovvero $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.
- La funzione $\cos(x)$ ha un periodo di 2π, ovvero $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.
- La funzione $\tan(x)$ ha un periodo di π, ovvero $\tan(x + \pi) = \tan(x)$.

Una funzione si dice **iniettiva** se valori diversi nel dominio corrispondono a valori diversi nel codominio. Poiché le funzioni trigonometriche si ripetono, non sono iniettive su tutto $\mathbb{R}$. Per renderle iniettive, dobbiamo restringere il loro dominio. I principali intervalli in cui sono naturalmente iniettive sono:

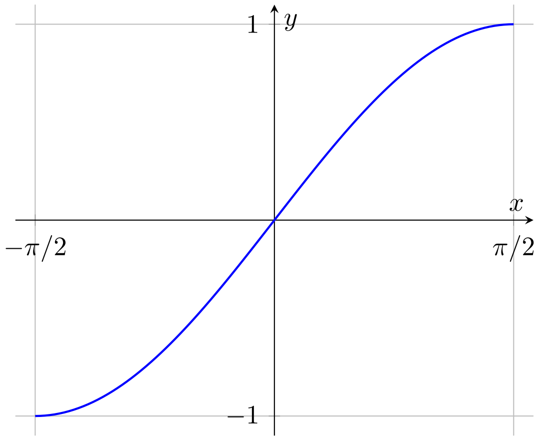
- $\sin(x)$: iniettiva su $[-\pi/2, \pi/2]$
- $\cos(x)$: iniettiva su $[0, \pi]$
- $\tan(x)$: iniettiva su $(-\pi/2, \pi/2)$

3.3 Grafici delle funzioni trigonometriche ristrette

Per visualizzare meglio l'iniettività, ecco i grafici di seno, coseno e tangente sui loro domini ristretti.

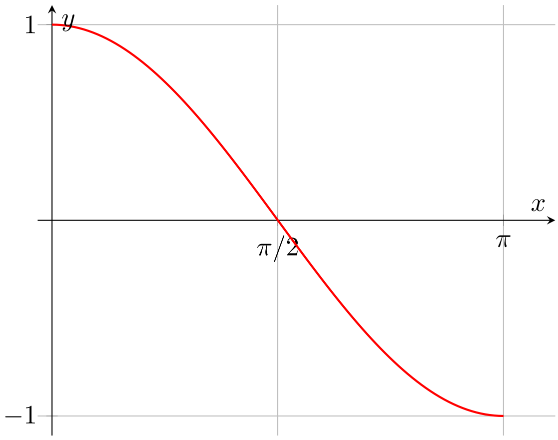
3.4 Grafico del Seno su $[-\pi/2, \pi/2]$

Grafico di $y = \sin(x)$ su $[-\pi/2, \pi/2]$



3.5 Grafico del Coseno su $[0, \pi]$

Grafico di $y = \cos(x)$ su $[0, \pi]$



3.6 Grafico della Tangente su $(-\pi/2, \pi/2)$

Grafico di $y = \tan(x)$ su $(-\pi/2, \pi/2)$