COMPLETAMENTO AD UNA BASE

PROBLEMA

SUPPONIAMO DI AVERE IN V SP VETT di dim n
VETTORI

$v_1, v_2, , v_K$ LIN INDIP.

POSSO COMPLETARLI AD UNA BASE?

cioè AGGIUNGERE VETTORI $w_1, , w_{n-k}$
in modo che

$v_1, v_2, \ldots, v_K, w_1, \ldots, w_{n-K}$ sia
base di V.

SÌ

$$\mathcal{L}\text{pan}(v_1, \ldots, v_K) \stackrel{?}{=} V$$

se non è $= V$

Martelli prende $w_1 \in V - \mathcal{L}\text{pan}(v_1, , v_K)$

e osserva che

$v_1, , v_K, w_1$ SONO LIN INDIP.

$$a_1 v_1 + \quad + a_k v_k + b_1 w_1 = 0$$

$b_1 \neq 0$ ASSURDO

allora $b_1 = 0$ e da questo anche $a_1 = a_2 = \quad = a_k = 0$.

$$\text{Span}(v_1, \quad , v_k, w_1) \overset{?}{=} V$$

$$\neq V$$

prendo w_2

ESEMPIO OPERATIVO

$\mathbb{R}^5$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

SONO LIN INDIP

Voglio completarli a base di $\mathbb{R}^5$.

Come posso fare?

ALGORITMO

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

IDEA

se aggiungo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Quindi $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ sono

un buon completamento ad una

base di $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$

Altro esempio

In $\mathbb{R}^5$ $\quad v_1, v_2, v_3 \quad$ LIN INDIP.

$$\underbrace{\text{FACCIO ALG}}$$

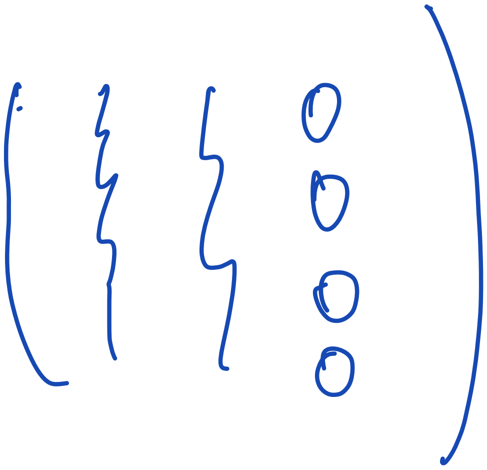
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Cosa aggiungo?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1\;0 \\ \cancel{0}\,18 \\ \cancel{0}\,41 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

v_1, v_2, v_3 NON LIN INDIP

ALGORITMO



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

INTERSEZIONE e SOMMA DI SOTTOSPAZI

PROP

V SP VETT

A e B sottospazi di V

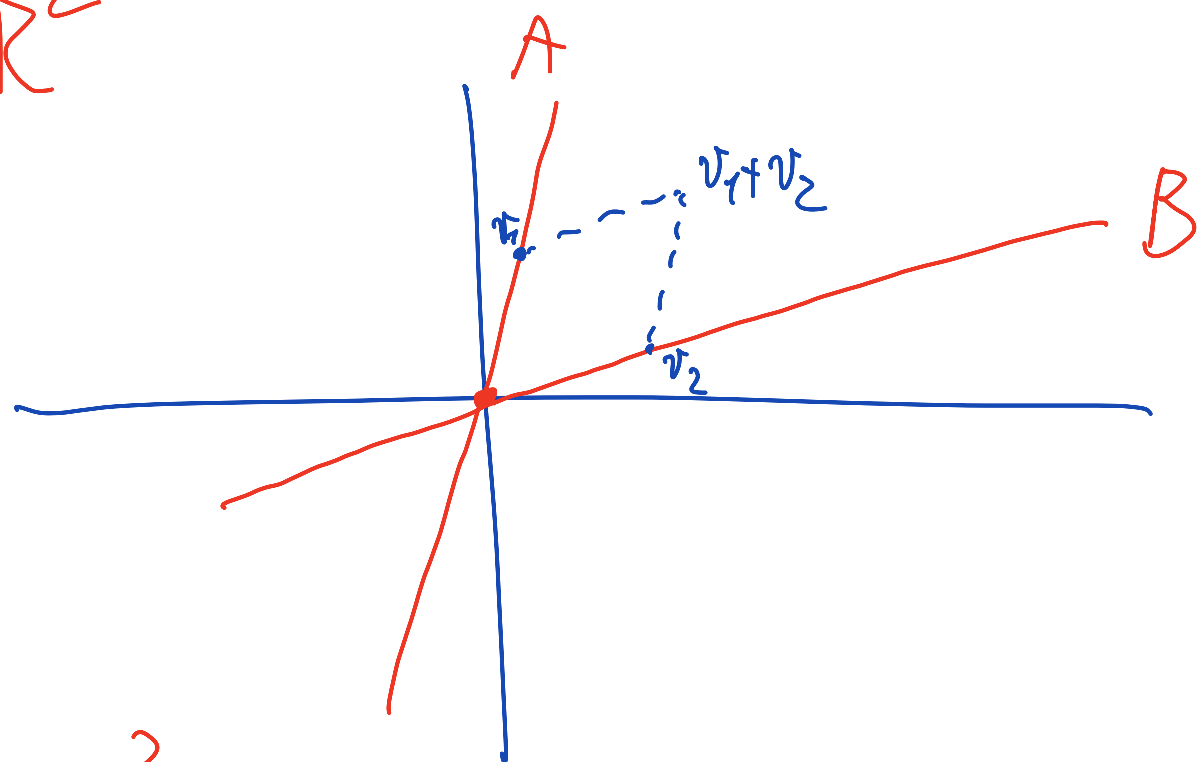
Allora $A \cap B$ è SOTTOSPAZIO DI V

DIM

- $0 \in A \cap B$ perché $0 \in A$, $0 \in B$
- se $v_1, v_2 \in A \cap B$
- se $v \in A \cap B$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ allora $\lambda v \in A \cap B$

$v_1 + v_2$ è in A e in B dunque è in $A \cap B$

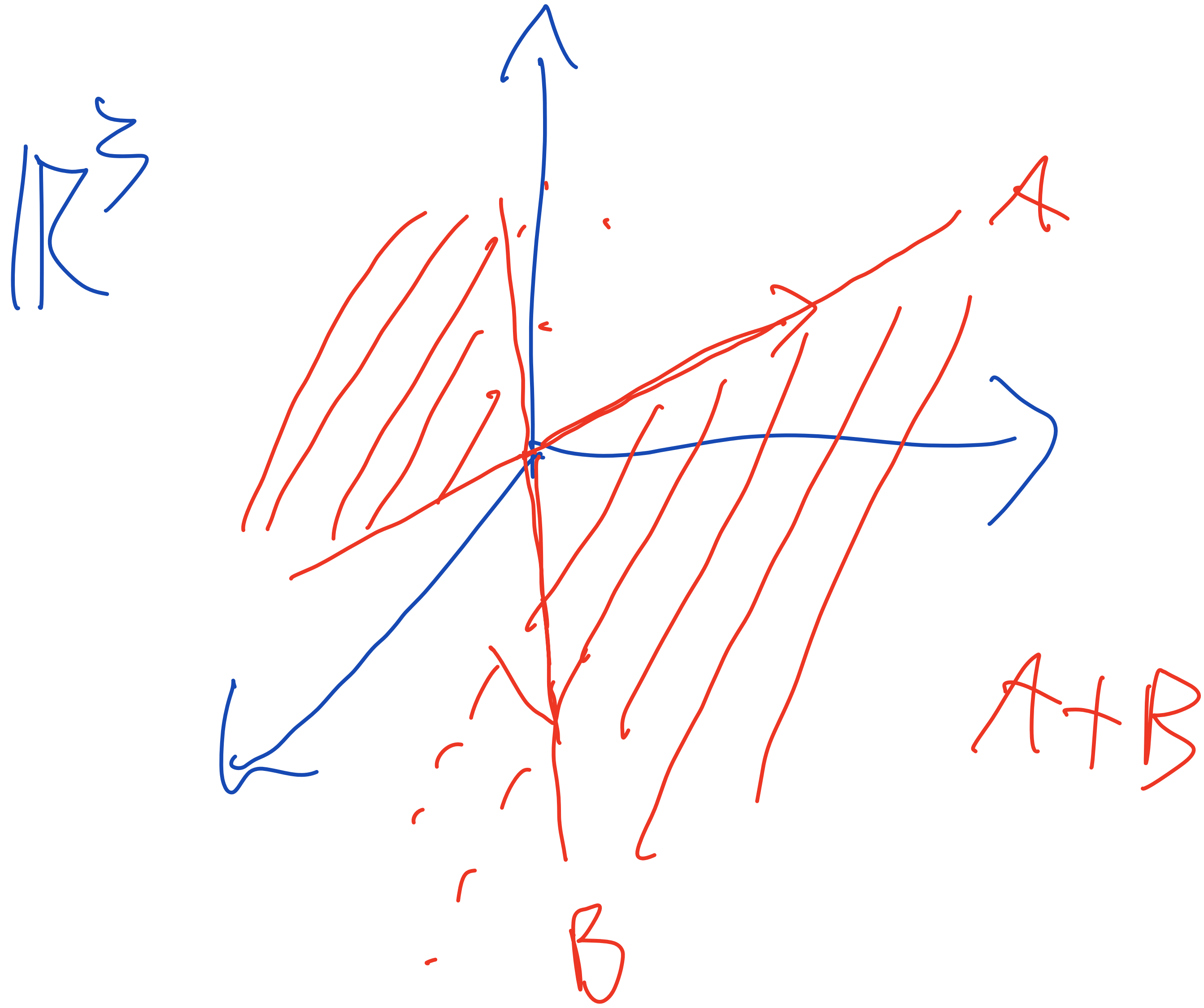
$\mathbb{R}^2$



$A \cup B$? NON È SOTTOSPAZIO

IN GENERALE IN UNO SP VETT V, DATI A e B SOTTOSP.
SI CONSIDERA INVECE

$$A + B = \{ v + w \mid v \in A, w \in B \}$$



A+B è SOTTOSPAZIO VETT di V

$$0 \in A+B$$

$$0+0 \in A \cap B$$

$v_1+v_2 \in A+B$ $\qquad$ $v_1 \in A$, $v_2 \in B$

$w_1+w_2 \in A+B$ $\qquad$ $w_1 \in A$, $w_2 \in B$

$$(v_1+v_2)+(w_1+w_2) \overset{?}{\in} A+B$$

$$(v_1+v_2)+(w_1+w_2) =$$
$$= \underset{A}{\underset{\cap}{(v_1+w_1)}} + \underset{B}{\underset{\cap}{(v_2+w_2)}} \in A+B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$