ESEMPIO. V SP. VETT.

$$\mathrm{SPAN}(v_1, v_2, v_3) =$$

$$= \{ a v_1 + b v_2 + c v_3 \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{SPAN}(v_1, v_2, v_3) =$$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -15 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \right\}$$

$$15\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-8\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=v_3$$

INSOMMA

$$15v_1-8v_2=v_3$$

Quindi se ho una comb. lineare di v_1, v_2, v_3 per esempio

$a v_1 + b\cdot v_2 + c v_3$ posso scriverla come

$$a v_1 + b v_2 + c\left(15 v_1 - 8 v_2\right) =$$

$$= \left(a+15c\right)v_1 + \left(b-8c\right)v_2$$

Allora in questo caso

$$SPAN(v_1, v_2, v_3) =$$

$$= SPAN(v_1, v_2)$$

$$SPAN\{v_1, v_2, \ldots, v_{10}\}$$

se v_{10} è COMB degli altri

$$= SPAN\{v_1, \ldots, v_9\}$$

se v_9 è comb degli altri

$$= SPAN(v_1, \quad , v_8)$$

SE NESSUNO dei vettori

$v_1, v_2, \ldots, v_8$ è COMB

degli ALTRI MI FERMO

e dico che

$$v_1, v_2, \dots, v_8$$

SONO VETT LIN. INDIP.

Abbiamo visto il concetto INTUITIVAMENTE diamo adesso una

DEFINIZIONE

Sia V sp. vett su $\mathbb{K}$ e siano

$v_1, , v_k \in V$ alcuni vettori.

DICIAMO che $v_1, \dots, v_k$ SONO LIN. DIPENDENTI se $\exists\ \lambda_1, , \lambda_k \in \mathbb{K}$ NON TUTTI NULLI tali che

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \quad + \lambda_k v_k = 0$$

OSS se $\lambda_3 \neq 0$

$$\lambda_3 v_3 = -\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \lambda_4 v_4 \cdots - \lambda_k v_k$$

$$v_3 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} v_2 \cdots\cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_3} v_k$$

DEF Se $v_1, \ldots, v_k \in V$

NON SONO LIN. DIPENDENTI

allora che SONO

LIN. INDIPENDENTI

NOTA Dunque $v_1, \ldots, v_k$

sono LIN. INDIP. se

1) nessuno di loro può essere espresso come comb. lineare degli altri

o equivalentemente

2) se $\lambda_1 v_1 + \quad + \lambda_k v_k = 0$

allora $\lambda_1 = \lambda_2 = \quad = \lambda_k = 0$

BASI

Sia V sp. vettoriale.

Siano $v_1, v_2, \quad , v_n \in V$

Dici che $v_1, v_2, \ldots, v_n$ SONO UNA base di V se accadono entrambe

1) $v_1, \quad , v_n$ SONO LIN INDIP

2) $\text{Span}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = V$

" $v_1, \ldots v_n$ generano V "

Esempio $V = \mathbb{R}^3$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SONO base di $\mathbb{R}^3$

la "BASE CANONICA"

"BASE STANDARD"

Anche

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

è base di $\mathbb{R}^3$

SONO INDIP. INFATTI

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è possibile se e solo se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

GENERANO

$$4\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\\9\end{pmatrix}$$

$$4 + 7\lambda_3 = 9$$

$$\lambda_3 = \frac{5}{7}$$

Quindi $\begin{pmatrix}4\\6\\9\end{pmatrix} \in \mathcal{S}pan(v_1, v_2, v_3)$

ragionamento ripetibile.

Dunque v_1, v_2, v_3 è un'altra base di $\mathbb{R}^3$, diversa da e_1, e_2, e_3.