03-10-2025

SE V È UNO SPAZIO VETTORIALE $\{v_1, \dots, v_n\}$ È UNA BASE SE OGNI $v \in V$ PUÒ ESSERE SCRITTO IN MODO UNICO COME COMBINAZIONE LINEARE DI $\{v_1, \dots, v_n\}$.

EQUIVALENTEMENTE $\{v_1, \dots, v_n\}$ È UNA BASE DI V SE

- $\{v_1, \dots, v_n\}$ GENERA $V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$
- $\{v_1, \dots, v_n\}$ SONO LINEARMENTE INDIP.

  CIOÈ $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$

  $\Longleftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

PROPOSIZIONE: SE $\{v_1, \dots, v_n\}$, $\{u_1, \dots, u_m\}$ SONO BASI DI V ALLORA $m = n$.

<u>DEF</u> LA DIMENSIONE DI UNO SPAZIO

VETTORIALE È LA CARDINALITÀ DI UNA QUALUNQUE BASE.

- $\mathbb{R}^n$ UNA BASE COMODA È LA <u>BASE CANONICA</u> $\{e_1, \dots, e_n\}$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^3 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

VERIFICO CHE $\{e_1, \dots, e_n\}$ È UNA BASE

- SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

INFATTI SUPPONIAMO

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

QUINDI $\{e_1, \dots, e_n\}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

- $\{e_1, \dots, e_n\}$ GENERANO $\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n$$

QUINDI $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}(e_1, \dots, e_n)$

$\Rightarrow (e_1, \dots, e_n)$ GENERANO $\mathbb{R}^n$.

<u>DOMANDA</u> $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right), \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

PUÒ ESSERE UNA BASE DI $\mathbb{R}^3$?

NO, SONO TROPPI QUINDI SONO NECESSARIAMENTE LINEARMENTE DIPENDENTI.

- $M(m, n, \mathbb{R})$

MATRICI CON m RIGHE ED n COLONNE

HA DIMENSIONE $m \times n$, UNA BASE È COSTITUITA DALLE MATRICI $\{e_{ij}\}$ CHE HANNO 0 OVUNQUE ESCLUSA L'ENTRATA ij CHE È 1

PER ESEMPIO SE CONSIDERO $M(2,3,\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{array}{cc} & 3 \\ 2 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

e_{23}

È UNA BASE

DOMANDA: CHE DIMENSIONE HA $D(n)$?

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

BASE
$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

HA DIMENSIONE n

• $\mathbb{R}[x]$

PRENDIAMO $p(x)$ DI GRADO ≤ 4

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$$

HO 5 COSTANTI ARBITRARIE a, b, c, d, e

IN GENERALE LO SPAZIO $\mathbb{R}[x]^{\leq n}$ DEI POLINOMI DI GRADO $\leq n$ HA DIMENSIONE $n+1$.

UNA BASE È DATA DA

$$\{\underset{\overset{\|}{x^0}}{1}, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$$

ESISTONO BASI PIÙ "COMODE" DI ALTRE, MA UNO SPAZIO VETTORIALE AMMETTE INFINITE BASI DISTINTE.

ESEMPIO: VERIFICARE CHE ANCHE

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$ È UNA BASE DI $\mathbb{R}^2$

• VERIFICO CHE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

$$a\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b\\-b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b\\a-b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b=0 & \Rightarrow a=-b \\ a-b=0 & \Rightarrow a=b \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-a \quad b=-b \quad \Rightarrow a=b=0$$

$\Rightarrow$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

• VERIFICO CHE GENERANO $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}c_1+c_2\\c_1-c_2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}c_1+c_2=v_1\\c_1-c_2=v_2\end{matrix}$$

$$c_1 = v_1 - c_2 \qquad v_1 - 2c_2 = v_2$$

$$\boxed{\frac{v_1-v_2}{2} = c_2} \qquad c_1 = v_2 + c_2 =$$

$$= \frac{2v_2+v_1-v_2}{2} = \frac{v_1+v_2}{2}$$

IN REALTÀ ERA SUFFICIENTE VERIFICARE O L'INDIPENDENZA LINEARE O CHE GENERANO $\mathbb{R}^2$ DATO CHE

PROP SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE n, $\{v_1, \dots, v_n\}$ n ELEMENTI. ALLORA SONO EQUIVALENTI

- $\{v_1, \dots, v_n\}$ È UNA BASE
- $\{v_1, \dots, v_n\}$ GENERANO V
- $\{v_1, \dots, v_n\}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

ALGORITMO PER VERIFICARE LO SPAN DI VETTORI DATI

$$\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{v_2 \to v_1 + v_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{v_2 \to \frac{1}{2} v_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{v_1 \to v_1 - v_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{v_1 \leftrightarrows v_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

QUINDI $\text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) = \text{Span}(e_1, e_2)$

OPERAZIONI CONSENTITE

- SOSTITUIRE UNA COLONNA CON LA COLONNA SOMMATA AD UN'ALTRA

  $v_i \longrightarrow v_i + v_k$

- MOLTIPLICARE UNA COLONNA PER UNO SCALARE

  $v_i \longrightarrow \lambda v_i \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- SCAMBIARE FRA LORO DUE COLONNE

  $v_i \longleftrightarrow v_j$

IL PRINCIPIO ALLA BASE DI QUESTE OPERAZIONI È CHE SOSTITUIRE UN VETTORE CON UNA COMBINAZIONE LINEARE NON CAMBIA LO SPAN.

• DETERMINARE LA DIMENSIONE DEL SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^4$ GENERATO DAI VETTORI

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\\2 & -1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\2 & -1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\\2 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\2 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\2 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix} \right) = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix}a\\0\\b\\0\end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

CHE HA DIMENSIONE 2

$$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left\{ a\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}2a+b\\0\\a\\0\end{pmatrix} \right\}$$

- SI DICA SE

$\{2x+1, x^3-1, x^2, x\}$ È UNA BASE DI $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$?

DATO CHE HO 4 ELEMENTI IN UNO SPAZIO DI DIMENSIONE 4 MI BASTA VERIFICARE UNA DELLE DUE PROPRIETÀ.

VERIFICHIAMO L'INDIPENDENZA LINEARE.

$$a(2x+1)+b(x^3-1)+cx^2+dx=0$$

$$\Downarrow$$

$$(a-b)+(2a+d)x+cx^2+bx^3=0$$

$$=0\cdot 1+0\cdot x+0x^2+0\cdot x^3$$

$$\begin{cases} b=0 \\ c=0 \\ 2a+d=0 \\ a-b=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b=0 \\ c=0 \\ a=b=0 \\ 2a+d=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} b&=0 \\ c&=0 \\ a&=0 \\ d&=-2a=0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI PER CUI È UNA BASE.

SE VOLESSIMO USARE L'ALGORITMO DELLE COLONNE, COME POTREI FARE?

$\mathbb{R}^4$ HA LA BASE CANONICA e_1, e_2, e_3, e_4

$\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$ HA " $1, x, x^2, x^3$

POSSO STABILIRE UNA CORRISPONDENZA

$$\mathbb{R}[x]^{\leq 3} \longleftrightarrow \mathbb{R}^4$$

DICENDO CHE

(1) $1 \in \mathbb{R}[x]^{\leq 3} \overset{T}{\longmapsto} e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) $x \overset{T}{\longmapsto} e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $x^2 \overset{T}{\longmapsto} e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(4) $x^3 \overset{T}{\longmapsto} e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

DEFINISCO $T : \mathbb{R}[x]^{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}^4$

MEDIANTE LE FORMULE (1)-(4) SOPRA

"ESTESE PER LINEARITÀ".

CIOÈ SUPPONIAMO CHE

$$h(x) = a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3$$

ALLORA

$$T(h(x)) = T(a \cdot 1 + b \cdot x + cx^2 + dx^3)$$

$$= a\,T(1) + b\,T(x) + c\,T(x^2) + d\,T(x^3)$$

$$= a e_1 + b e_2 + c e_3 + d e_4$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

NELL'ESEMPIO PRECEDENTE

$$T(2x+1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T(x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(x^3-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad T(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

QUINDI AVREI POTUTO USARE L'ALGORITMO DELLE COLONNE SU

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

NOTA: CON DEFINIZIONI CHE SARANNO INTRODOTTE IN SEGUITO ABBIAMO VISTO CHE $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$ E $\mathbb{R}^4$ SONO ISOMORFI (CIOÈ ESISTE UNA FUNZIONE LINEARE INVERTIBILE FRA I DUE SPAZI).

È VERO IN GENERALE CHE DUE SPAZI VETTORIALI QUALUNQUE DI DIMENSIONE n SU CAMPO $\mathbb{K}$ SONO ISOMORFI.

L'IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE È LA STESSA USANDO IL FATTO CHE ENTRAMBI HANNO UNA BASE DI n ELEMENTI.

DIVERSE SCELTE DI BASE DANNO LUOGO A ISOMORFISMI DIVERSI PER CUI L'ISOMORFISMO È DETTO NON CANONICO.