ESEMPIO DI BASE

$M(2,2,\mathbb{R})$ $\qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Osservo che $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

SONO una base di $M(2,2,\mathbb{R})$

INFATTI

- GENERANO

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- SONO LIN INDIP

Infatti se vale

$$a_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

allora $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$

A COSA SERVONO LE BASI ?

<u>Proposizione.</u> Sia V sp. vett. e siano

$v_1, v_2, \ , v_n$ base di V.

Allora ogni vettore $v \in V$ si scrive IN MODO UNICO come combinazione lineare di $v_1, v_2, \ldots, v_n$:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ UNICI.

DIM Va dimostrata l'unicità.

Supponiamo che si possa scrivere anche

$$v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n$$

Dunque

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$$

$$(\lambda_1 - \mu_1) v_1 + (\lambda_2 - \mu_2) v_2 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0$$

Ma $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è base, allora questo $\Rightarrow$

$$\lambda_1 - \mu_1 = 0$$
$$\lambda_2 - \mu_2 = 0$$

$$\lambda_n - \mu_n = 0$$

cioè $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$, , $\lambda_n = \mu_n$ $\square$

FISSO una base

V

$$v \rightsquigarrow \lambda_1, , \lambda_n$$

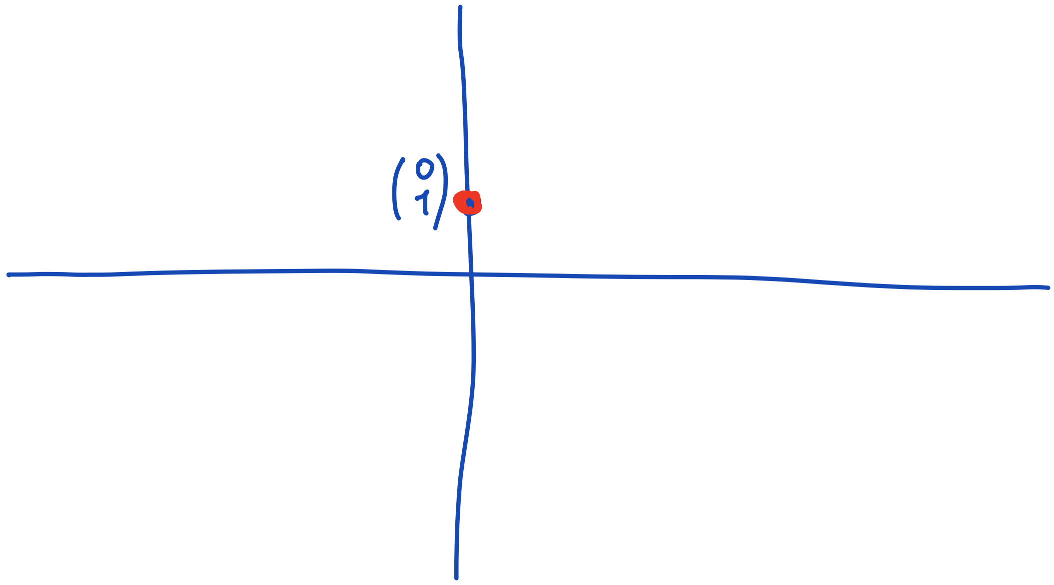
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

ESEMPIO

$\mathbb{R}^2$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ BASE

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ BASE (Verificate!)



$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

l'unica soluzione è $a = 2 \quad b = -1$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{v_1, v_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{e_1, e_2}$$

NOTAZIONE

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\underset{\sim}{e_1, e_2}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{v_1, v_2}$$

DIMENSIONE

Teorema Due basi dello stesso V sp. vett. contengono lo stesso numero n di elementi.

Lemma Sia V sp. vettoriale. Siano

- $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vettori che generano V
- $w_1, \ldots, w_n$ LIN INDIP.

Allora anche $w_1, \ldots, w_n$ generano V.

DIM

$$V = \mathcal{L}\text{pan}(v_1, \ldots, v_n)$$

Allora in particolare

$$w_1 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

Non possono essere $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

$$0, v_2, \dots, v_n$$

$$a_1 0 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$$

Allora uno dei λ_i, DICIAMO λ_1, è $\neq 0$

Posso scrivere

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1} w_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n$$

Da questo deduco subito che

$$\mathcal{L}_{\text{span}}(v_1, \dots, v_n) =$$

$$= \mathcal{L}_{\text{span}}(w_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_n v_n =$$

w_1

$$= \gamma_1 \left(\frac{w_1}{\lambda_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n \right)$$

$$+ \gamma_2 v_2 + \quad + \gamma_n v_n$$

Proseguendo così

$$V = \operatorname{Span}(v_1, \quad v_n) = \operatorname{Span}(w_1, v_2, \quad, v_n) =$$

ANALOGAMENTE

$$= \operatorname{Span}(w_1, w_2, v_3, \quad, v_n)$$

$$w_2 = b_1 w_1 + b_2 v_2 + \quad + b_n v_n$$

$$b_2 = b_3 = \quad = b_n = 0 \quad ? \qquad NO$$

IMPOSSIBILE

allora uno dei b_i diciamo b_2 è $\neq 0$.

$$= \ldots \ldots \quad . \quad = \operatorname{Span}(w_1, \quad, w_n)$$

DIM TEO

Supponiamo che $v_1, \ , v_n$ base di V

e $w_1, \ , w_m$ base di V

e supponiamo $n \neq m$. DICIAMO

$m > n$.

USO il LEMMA notando che

- $v_1, \ , v_n$ generano V
- $w_1, \ , w_m$ SONO LIN INDIP

"è un SOTTOINSIEME dei w.."

per il LEMMA

$w_1, \ , w_n$ generano V.

Prendo w_{n+1} e deve valere

$$w_{n+1} = a_1 w_1 + \quad + a_n w_n$$

$$-a_1 w_1 - a_2 w_2 \quad - a_n w_n + 1 \cdot w_{n+1} = 0$$

CIOÈ $w_1, w_2, \,, w_{n+1}$ NON LIN INDIP

ASSURDO. $\square$

ALGORITMI PER RICONOSCERE UNA BASE in $\mathbb{R}^n$

Se ho dei vettori $v_1, v_2, \,, v_m$ in V

e sostituisco

$$v_i \to v_i + \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \widehat{\sim} + \gamma_{i+1} v_{i+1} + \gamma_m v_m$$

Se ho dei vettori v_1, v_2, v_3

e sostituisco

$$v_3 \rightsquigarrow \boxed{v_3 + 2v_1 - 4v_2 = v_3'}$$

Allora

$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3')$$

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3'$

$\|$

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 (v_3 + 2v_1 - 4v_2)$

dunque appartiene

$b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3$

$\|$

so che

$$v_3 = v_3' - 2v_1 + 4v_2$$

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 (v_3' - 2v_1 + 4v_2)$$

APPARTIENE A

MORALE

$$\text{Span}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \text{Span}(v_1, v_2, \ldots, v_i', \ldots, v_n)$$

dove $v_i' = v_i +$ comb lineari degli altri

Supponiamo di voler calcolare in $\mathbb{R}^3$ lo SPAN$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

ALGORITMO

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$=$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\sim\!\!> \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3) =$$

$$= \mathrm{Span}\left(v_1, v_2, \frac{7}{13} v_3\right)$$

ESERCIZIO in $\mathbb{R}^4$.

Calcolare.

$$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ -17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = W$$

ALGORITMO

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 7 & 1 & -5 \\ -1 & -11 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ -2 & 9 & 3 & -5 \\ -1 & -10 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 30 & -23 \\ -1 & -10 & -30 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 1 & -23 \\ -1 & -10 & -1 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 1 & 0 \\ -1 & -10 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \\ -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ SONO

LIN INDIP perché SONO A SCALINI

e QUINDI SONO

BASE DI W

ESERCIZI

A PIACERE

$$\mathrm{SPAN}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \qquad \rightsquigarrow$$