GUIDO FRANCHETTI

11:45 – 13:15

guido.franchetti@unipi.it

26/09/2025

RECAP

SPAZIO VETTORIALE V SU $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) ← CAMPO

INSIEME CON DUE OPERAZIONI

$v_1, v_2 \in V \qquad v_1 + v_2 \in V$ SOMMA

$\lambda \in \mathbb{R}, v \in V \qquad \lambda \cdot v \in V$ MOLT. PER UNO SCALARE

SOTTOSPAZIO VETTORIALE

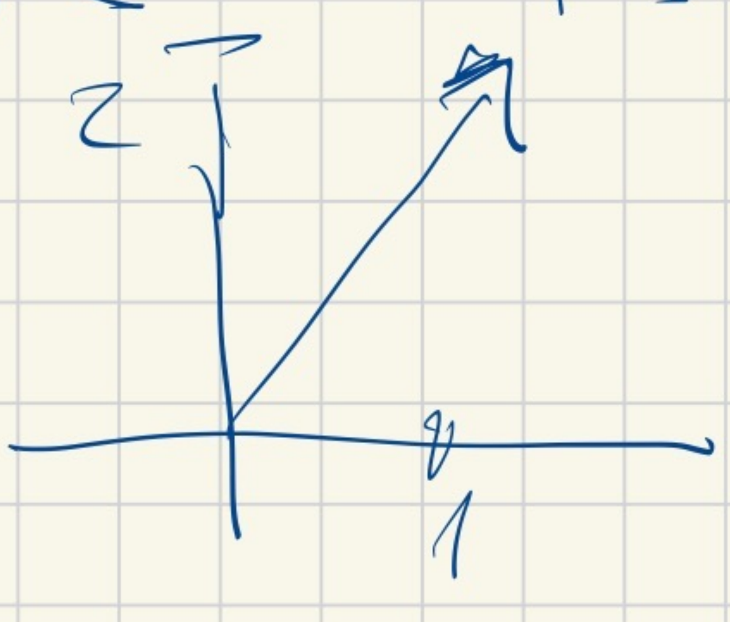
$U \subseteq V$ È UN SOTTOSPAZIO SE

$\forall u_1, u_2 \in U \qquad u_1 + u_2 \in U$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, u \in U \qquad \lambda u \in U$

IN PARTICOLARE UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE $U \subseteq V$ È UNO SPAZIO VETTORIALE

$\mathbb{K}^n \qquad \mathbb{R}^n \qquad \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ EG $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ VETTORE (COLONNA)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi + 1 \\ 2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi + 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

$$(-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- MATRICI CON m RIGHE
  n COLONNE $M(m, n, \mathbb{R})$
  E ENTRATE IN $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0,1 & 4 \end{pmatrix}$$ MATRICE 2x2

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

SOMMA = SOMMA DELLE COMPONENTI

MULT PER UNO SCALARE = SCALARE CHE MOLTIPLICA OGNI COMPONENTE

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 12 \\ 6 & 15 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{ij})$$

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij}$$

- $F(X, \mathbb{R}) = \{$ FUNZIONI DA X A $\mathbb{R}\}$

X INSIEME QUALUNQUE

CASO PARTICOLARE:

$\mathbb{R}[x] = \{$ POLINOMI A COEFF REALI $\}$

NOTAZIONE $\mathbb{R}[x]^{\leq k}$ POLINOMI DI GRADO MASSIMO k

$\mathbb{R}[x]^{=k}$ POLINOMI DI GRADO UGUALE A k

$$f, g \in F(X, \mathbb{R})$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$x \in \mathbb{R}$ $\qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

IL VETTORE NULLO $\underline{0}$ DI $F(X, \mathbb{R})$

È LA FUNZIONE COSTANTE UGUALE A ZERO

$$\underline{0} = (0f)(x) = 0 \cdot f(x) = 0$$

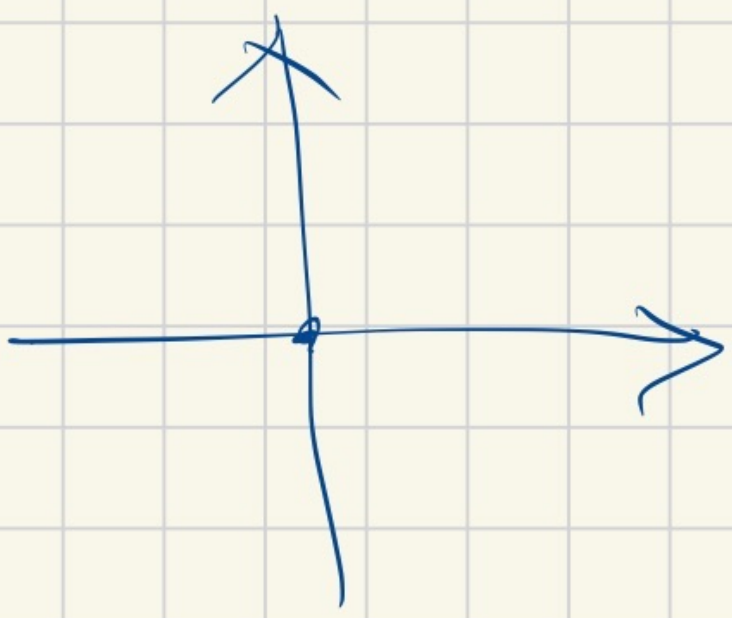
PROPRIETÀ DEGLI SPAZI VETTORIALI

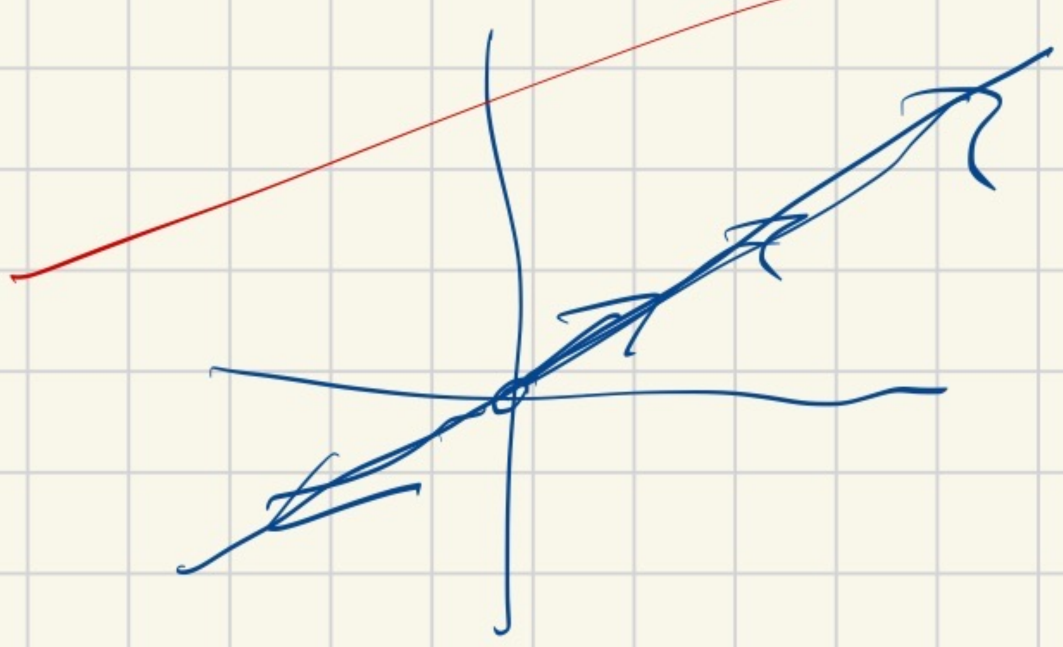
$$0 \cdot v = \underline{0} \quad \forall v \in V$$

ESEMPI DI SOTTOSPAZI

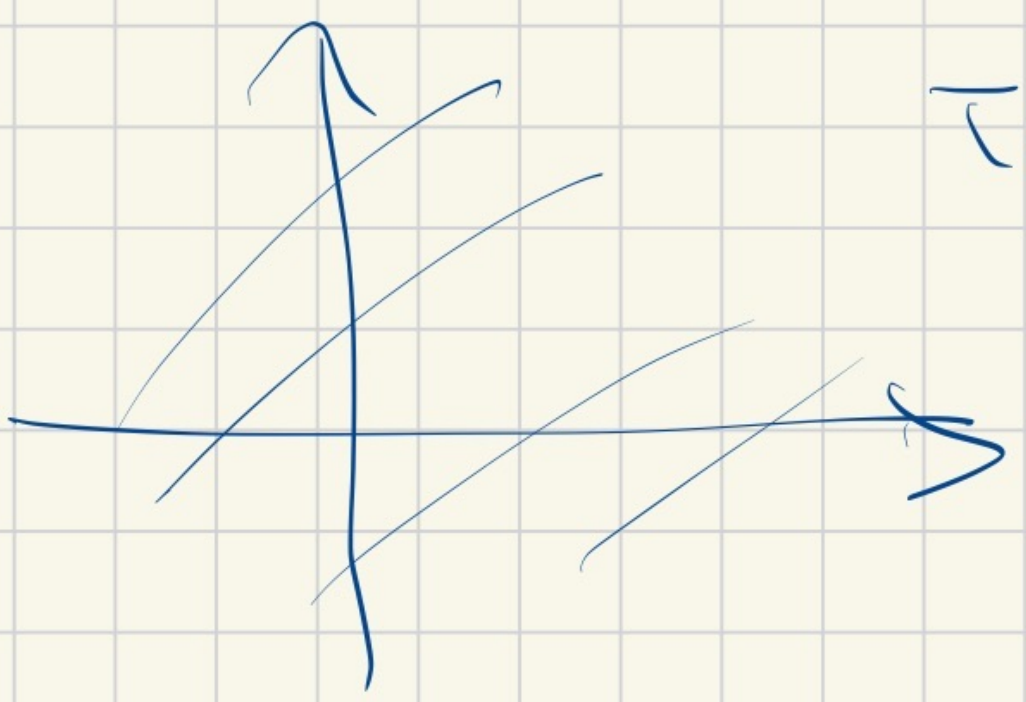
IN $\mathbb{R}^2$ I SOTTOSPAZI SONO

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, RETTE PER L'ORIGINE, $\mathbb{R}^2$





NON È UN SOTTOSPAZIO (NON CONTIENE $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)



TUTTO $\mathbb{R}^2$

• SOTTOSPAZI DELLO SPAZIO $M(m,n,\mathbb{R})$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$ È UN SOTTOSPAZIO

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

DEF $A \in M(m,n,\mathbb{R})$ È <u>QUADRATA</u>
SE $m=n$

SCRIVIAMO $M(n,\mathbb{R})$ PER LE MATRICI QUADRATE $n \times n$.

DEFINIAMO ANCHE

$$T^{sup}(n) = \left\{ \text{MATRICI QUADRATE } n\times n \text{ TALI CHE } \underline{a_{ij} = 0} \text{ SE } i > j \right\}$$

MATRICI TRIANGOLARI SUPERIORI

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$ DIAGONALE PRINCIPALE a_{ii}

$$T^{inf}(n) = \left\{ \text{MATRICI QUADRATE } n\times n \text{ TALI CHE } a_{ij} = 0 \text{ SE } i < j \right\}$$

MATRICI TRIANGOLARI INFERIORI

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D(n) = \left\{ \begin{array}{l} \text{MATRICI QUADRATE } n \times n \\ \text{TALI CHE } a_{ij} = 0 \text{ SE } i \neq j \end{array} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICI DIAGONALI

$$S(n) = \left\{ \begin{array}{l} A \in M(n, \mathbb{R}) \text{ TALI CHE} \\ a_{ij} = a_{ji} \end{array} \right\}$$

MATRICI SIMMETRICHE

$$A(n) = \left\{ \begin{array}{l} A \in M(n, \mathbb{R}) \text{ TALI CHE} \\ a_{ij} = -a_{ji} \end{array} \right\}$$

MATRICI ANTI-SIMMETRICHE

A_{12} A_{13}

A_{21}

$$\begin{pmatrix} 2 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

A_{31}

SIMMETRICA

3×3

$a_{ii} = a_{ii}$

ANTISIMMETRICA

$a_{ii} = -a_{ii}$

$\Rightarrow a_{ii} = 0$

LA <u>TRACCIA</u> DI UNA MATRICE QUADRATA È LA SOMMA DEGLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE PRINCIPALE

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

ESEMPIO $Tr\begin{pmatrix} 1 & 44 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & 23 \end{pmatrix} =$

$= 1 + 0 + 23 = 24$

ESERCIZIO

1. SI DICA SE $T^{SUP}(n)$, $T^{INF}(n)$, $D(n)$, $S(n)$, $A(n)$ SONO SOTTOSPAZI VETTORIALI DI $M(n)$.

2. SIA $M_c = \{A \in M(n) \mid Tr(A) = c\}$, $c \in \mathbb{R}$

SI DICA SE M_c È UN SOTTOSPAZIO DI $M(n)$?

1. SONO TUTTI SOTTOSPAZI.

SIANO $A, B \in T^{SUP}(n)$

VOGLIAMO VERIFICARE CHE SE $i > j$ ALLORA

- $(A+B)_{ij} = 0$
- $(\lambda A)_{ij} = 0$

$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = 0+0$

SE $i>j$ DATO CHE $A, B \in T^{SUP}(n)$

$(\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij} = 0$ SE $i>j$

DATO CHE $A \in T^{SUP}(n)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

VEDIAMO ANCHE $A, B \in S(n)$

$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = A_{ji} + B_{ji} =$

DEF. DI SOMMA FRA MATRICI

$= (A+B)_{ji} \Rightarrow A+B \in S(n)$

A, B SIMMETRICHE

$(\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij} = \lambda A_{ji} = (\lambda A)_{ji}$

$\Rightarrow \lambda A \in S(n)$

VEDIAMO M_C

DOBBIAMO POTER CALCOLARE

$Tr(A+B)$

$Tr(\lambda A)$

$$\mathrm{Tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (A+B)_{ii} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(A_{ii} + B_{ii} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \sum_{i=1}^{n} B_{ii} =$$

$$= \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)}$$

$$\mathrm{Tr}(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda A)_{ii} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda A_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} A_{ii} = \lambda \mathrm{Tr}(A)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{Tr}(A)}$$

$A, B \in M_C$ CIOÈ $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = C$

$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}A + \mathrm{Tr}B = 2C$

$\Rightarrow$ PERCHÉ SIA UN SOTTOSPAZIO DOBBIAMO IMPORRE $\mathrm{Tr}(A+B) = C$

QUINDI $C = 2C \Rightarrow C = 0$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{Tr} A = \lambda C$

VIENE LA CONDIZIONE $\lambda C = C$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

CONCLUSIONE:

$M_c(n)$ È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $M(n)$ SE E SOLO SE $c=0$

(CIOÈ LE MATRICI A TRACCIA NULLA SONO UN SOTTOSPAZIO DI QUELLE QUADRATE).

CONSIDERIAMO $F(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{$ FUNZIONI DA $\mathbb{R}$ IN $\mathbb{R}\}$

- DOMANDA L'INSIEME DELLE FUNZIONI DA $\mathbb{R}$ IN $\mathbb{R}$

  - CONTINUE
  - DERIVABILI
  - INTEGRABILI

  SONO SOTTOSPAZI DI $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
  SÌ IN TUTTI I CASI.

- SIA $K = \{ f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ TALI CHE $f(x_0) = c \}$
  $x_0 \in \mathbb{R}$

  È UN SOTTOSPAZIO? SICURAMENTE NO SE $c \neq 0$ DATO CHE UN SOTTOSPAZIO DEVE CONTENERE IL VETTORE NULLO

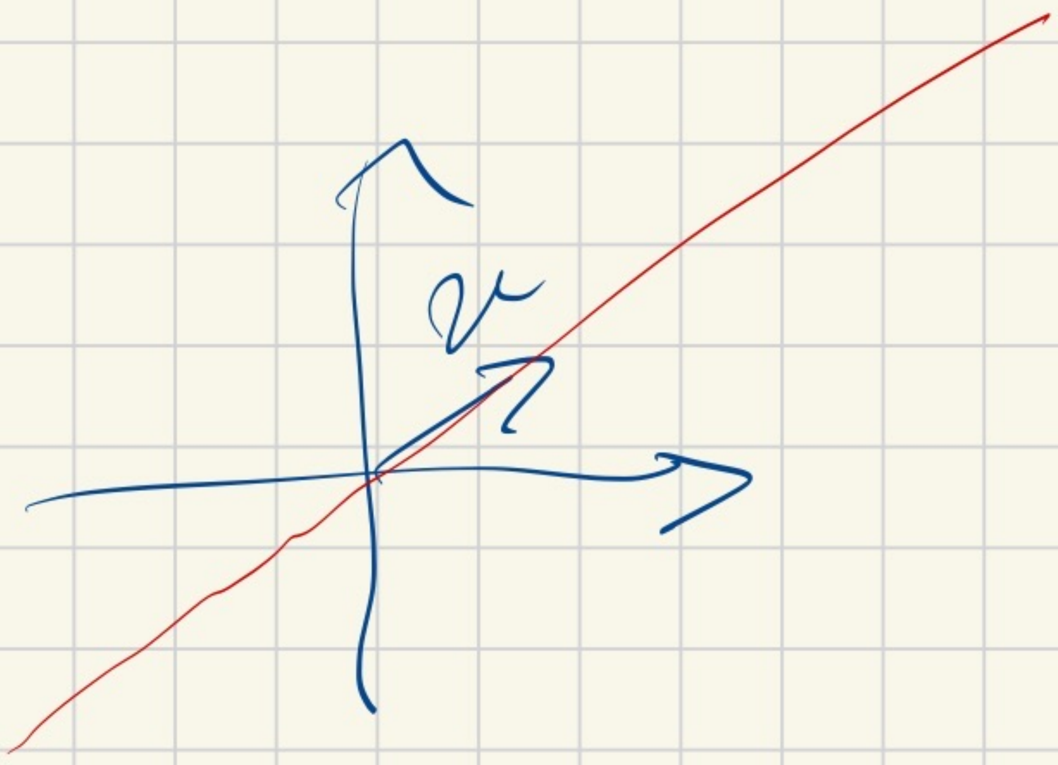
PER $C=0$

$$(f+g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = 0+0=0$$

$$(\lambda f)(x_0) = \lambda f(x_0) = \lambda \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow$ È UN SOTTOSPAZIO SE E SOLO SE $C=0$.

MODI PER OTTENERE SOTTOSPAZI



$$\underbrace{v+\dots+v}_{n \text{ volte}} = nv$$

λv CON $\lambda \in \mathbb{R}$

POSSO VEDERE LA RETTA COME GENERATA DA v.

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ DOMANDA

QUAL È IL SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^2$ "GENERATO" DA v_1 E v_2?

$v_1 + v_2$ $\qquad \lambda v_1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\qquad \mu v_2 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$

$2v_1 + 3v_2 \qquad \{ \lambda v_1 + \mu v_2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$

IN GENERALE SE V È UNO SPAZIO VETTORIALE E $\{v_1, \dots, v_k\}$ $v_i \in V$ ALLORA UN'ESPRESSIONE DEL TIPO

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k \quad \text{CON } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

È DETTA COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI $v_1, \dots, v_k$.

L'INSIEME

$$\{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

È IL SOTTOSPAZIO DI V GENERATO DA $v_1, \dots, v_k$, CHE È QUINDI L'INSIEME DI TUTTE LE POSSIBILI COMBINAZIONI LINEARI DI $v_1, \dots v_k$.

È ANCHE INDICATO CON

$$\operatorname{Span}(v_1, \dots, v_k) = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

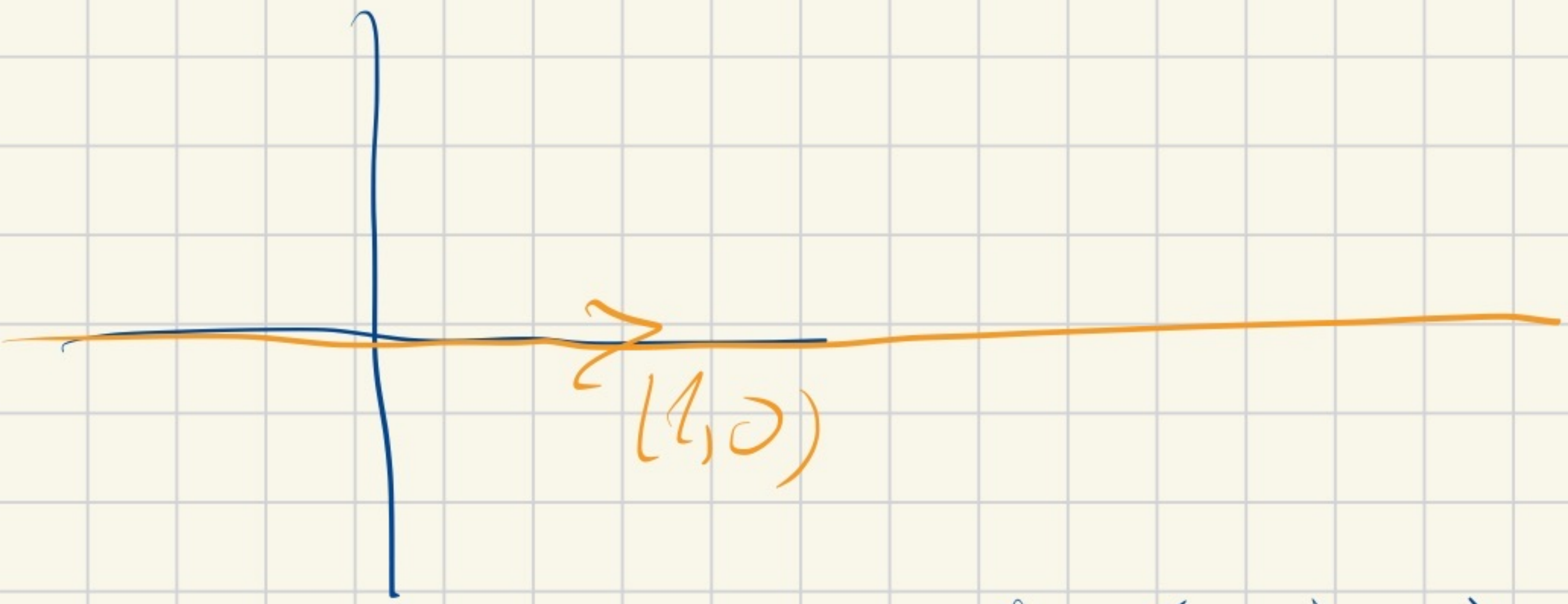
(SPAN DALL'INGLESE)

QUALCHE ESEMPIO

$$\operatorname{Span}(0) = \{\lambda 0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{0\}$$

$$v = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{Span}(v) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}\lambda\\0\end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$



$$\text{Span}\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \vdots \\ \lambda x_n\end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \text{ TALE CHE } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

PROPOSIZIONE

SIA V UNO SPAZIO VETTORIALE, $v_1, \dots, v_k \in V$. ALLORA

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_k) = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \}$$

È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V

<u>dimostrazione</u>

SIANO $u, w \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$.
QUINDI POSSO SCRIVER

$$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$$
$$w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k$$

PER CERTE COSTANTI λ_i, μ_i.

$$u + w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k$$
$$= \underbrace{(\lambda_1 + \mu_1)}\, v_1 + \dots + \underbrace{(\lambda_k + \mu_k)}\, v_k$$
$$\in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

$$c u = c(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k) =$$
$$= (c\lambda_1) v_1 + \dots + (c\lambda_k) v_k \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

$0 \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ DATO CHE

$$0 = 0 \cdot v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 \cdot v_k \in \text{Span}(v_i) \quad \blacksquare$$