# SPAZI VETTORIALI

Sia $\mathbb{K}$ un campo. $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C})$

RARO CONOSCERETE

Uno spazio vettoriale $V$ sul campo $\mathbb{K}$ è un INSIEME con due operazioni:

- UNA SOMMA : $v_1 + v_2$ con $v_1, v_2 \in V$
- UNA moltiplicazione per scalare $\lambda v$ con $\lambda \in \mathbb{K}, v \in V$

[Gli elementi di $V$ si chiamano vettori.]

Le due operazioni hanno le seguenti 8 buone proprietà

1) $\forall\, v_1, v_2 \in V$

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

2) $\forall\, v_1, v_2, v_3 \in V$

$$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$$

3) $\exists$ l'elemento neutro della SOMMA che chiameremo $\underline{0}$

Dunque $\forall v \in V$ vale

$$v + \underline{0} = \underline{0} + v = v$$

4) $\forall v \in V$ esiste l'opposto

cioè esiste un vettore $w$ tale che

$$v + w = w + v = \underline{0}$$

5) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\forall v \in V$, $\forall w \in V$

$$\lambda (v + w) = \lambda v + \lambda w$$

6) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ $\forall v \in V$

$$(\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v$$

7) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall v \in V$

$$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$$

8) $\forall v \in V$

$$1v = v$$

SEGUONO FINEZZE

$v \in V$

$$0 \qquad 0$$

In $\mathbb{R}^3$ $\quad 0 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

DOMANDA:

$$0v = ?$$

$$0\begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

CONGETTURA

$$0v = 0$$

VERO

INFATTI

$$0v = (0+0)v = 0v + 0v$$

DUNQUE

$$0v = 0v + 0v$$

Chiamo $w$ l'opposto di $0v$

Lo sommo ad entrambi i membri

$$0v + w = 0v + 0v + w$$

$$\underline{0} = 0v + \underline{0}$$

$$\underline{0} = 0v$$

---

## DOMANDA 2

$v \in V$

$(-1)v$ chi è?

$$\underline{0} = 0v = (1 + (-1))v =$$

per quanto visto sopra

$= 1v + (-1)v = v + (-1)v$

per proprietà (6) per la (8)

DUNQUE

$$0 = v + \underbrace{(-1)\,v}$$

Quindi $(-1)v$ è UN OPPOSTO di $v$
(con una breve dimostrazione si fa vedere che $\forall v \in V$ l'OPPOSTO è UNICO)

e dunque $(-1)v$ è L'OPPOSTO di $v$

D'ORA in avanti scriveremo

$-v$ AL POSTO DI $(-1)v$

# ESEMPI DI SPAZI VETTORIALI

$\mathbb{R}[x]$ l'insieme dei polinomi

c'è la somma:

$$(x^2 + x + 7) + (x^3 + 10x - 2)$$

$$= x^3 + x^2 + 11x + 5$$

c'è la moltiplic. per scalare

$$7 \, (x^3 + x - 1) = 7x^3 + 7x - 7$$

Queste due operazioni godono delle 8 proprietà:

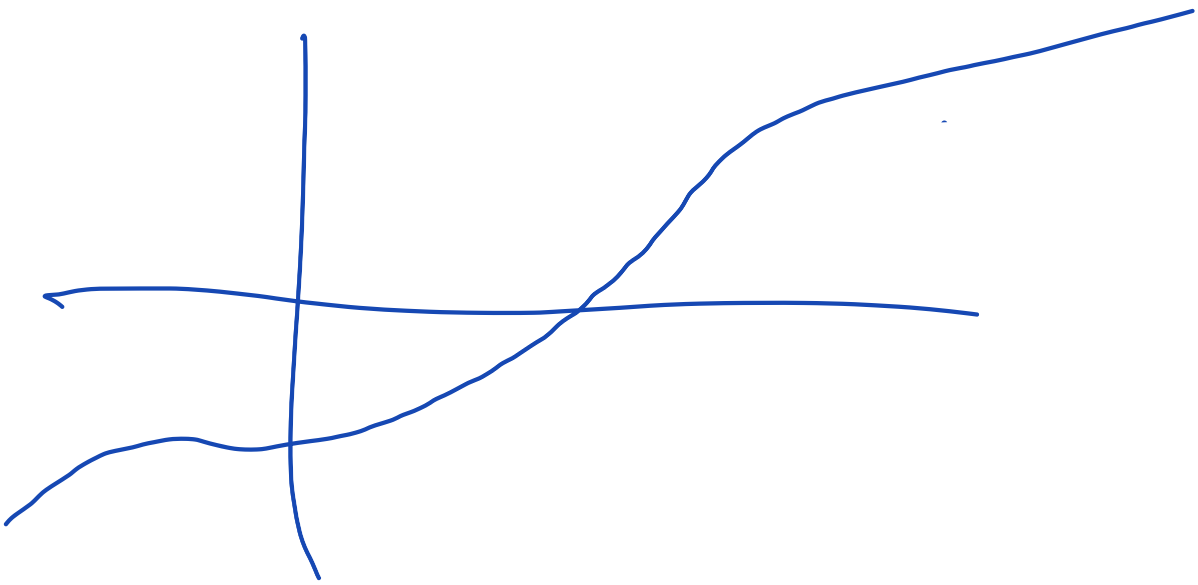
ALTRO ESEMPIO

$\mathbb{R}[x]^{\leq 5}$ ← polinomi di grado $\leq 5$

Anche questo è spazio vettoriale

ESEMPIO

$C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le funzioni da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONTINUE



$f(x) + g(x)$

$\cos x + (3x^2 - 2)$

$7 \cdot e^x$

ALTRO ESEMPI LE MATRICI

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & \sqrt{2} \\ -3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ \pi & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$A$ è una matrice $4 \times 3$

<u>Def</u> Chiamo $M(4,3,\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le matrici $4 \times 3$ a coefficienti in $\mathbb{R}$

Osserviamo che $M(4,3,\mathbb{R})$ è

uno spazio vettoriale

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \pi & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 \\ -2 & -2 & -2 \\ \sqrt{7} & \sqrt{7} & \sqrt{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ \pi+6 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \\ \sqrt{7}+3 & \sqrt{7}-1 & \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}$$

$$5 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 35 & -10 & 5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{3} & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

Con queste due operazioni $M(4,3,\mathbb{R})$ è uno SPAZIO VETTORIALE

In generale si definisce lo

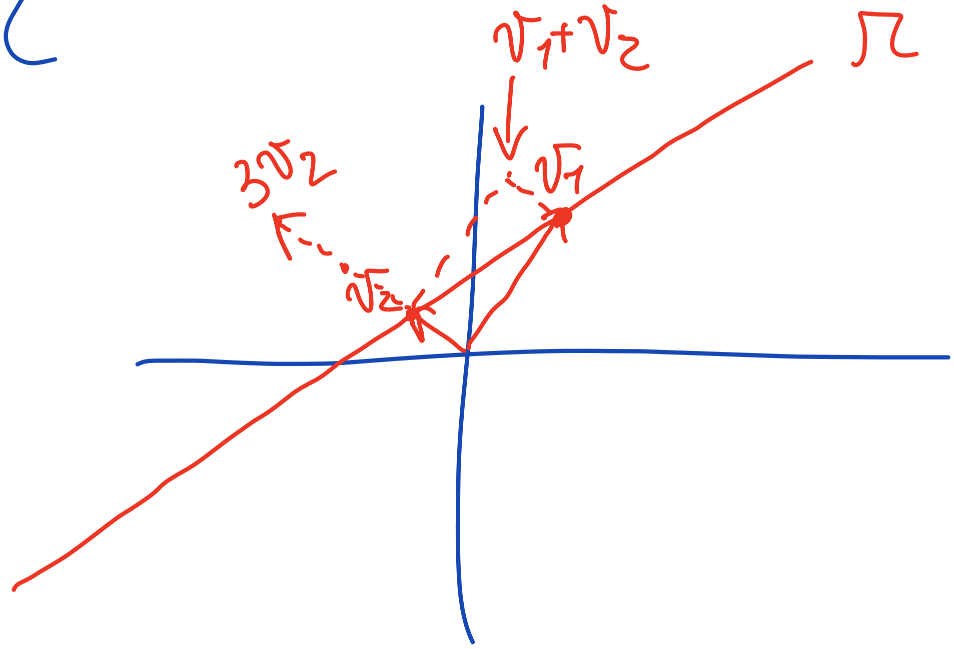
SPAZIO VETTORIALE

$$M(m,n,\mathbb{K})$$

$$\begin{pmatrix} 1+i & \frac{i}{3} \\ 7 & 4-i \end{pmatrix} \in M(2,2,\mathbb{C})$$

# SOTTOSPAZIO VETTORIALE

$\mathbb{R}^2$




$$v_1+v_2 \notin r$$

$$3v_2 \notin r$$

Inoltre in $r$ non c'è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>Def</u> Dato $V$ sp. vett., un sottoinsieme $W \subseteq V$ si dice SOTTOSPAZIO

VETTORIALE se soddisfa

1) $0 \in W$

2) $\forall\, w_1, w_2 \in W$

vale $w_1 + w_2 \in W$

3) $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\, w \in W$

NOTATE che $W$ dunque

non è $\cancel{\emptyset}$.

In $V$ il sottospazio

vettoriale più piccolo

è $\{0\}$

$$5\,0 = 5\,(0+0)$$

$$= 5\,0 + 5\,0$$

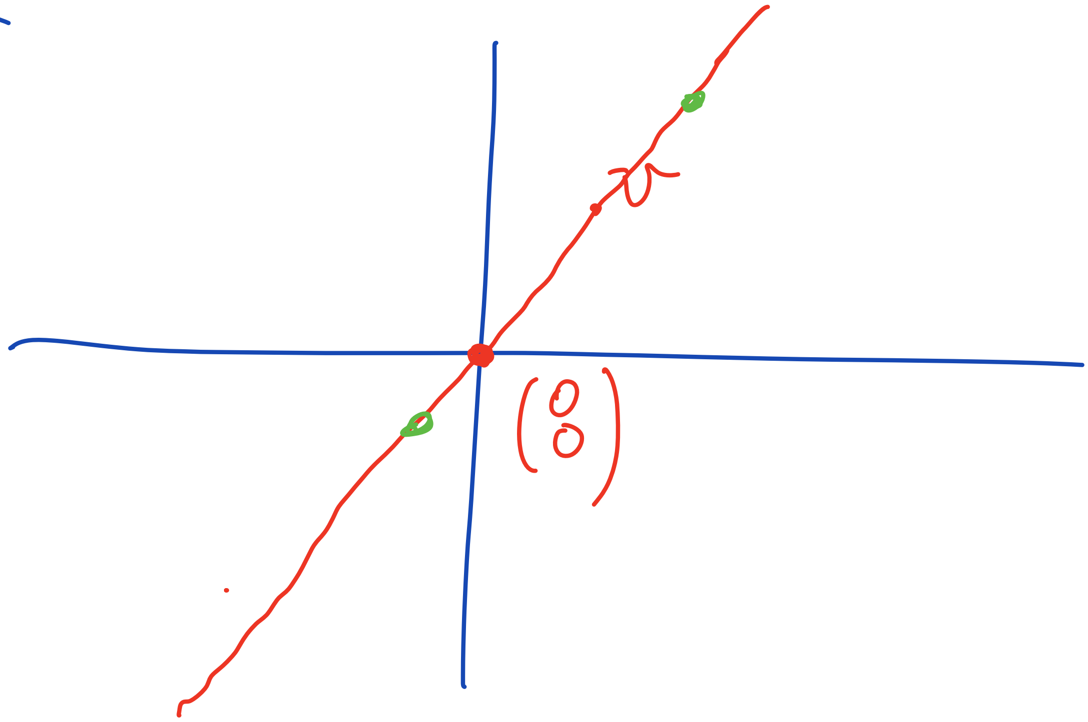
DUNQUE

$$5\,0 = 0$$

ESEMPIO

$\mathbb{R}^2$

CREO UN S. SPAZIO di $\mathbb{R}^2$



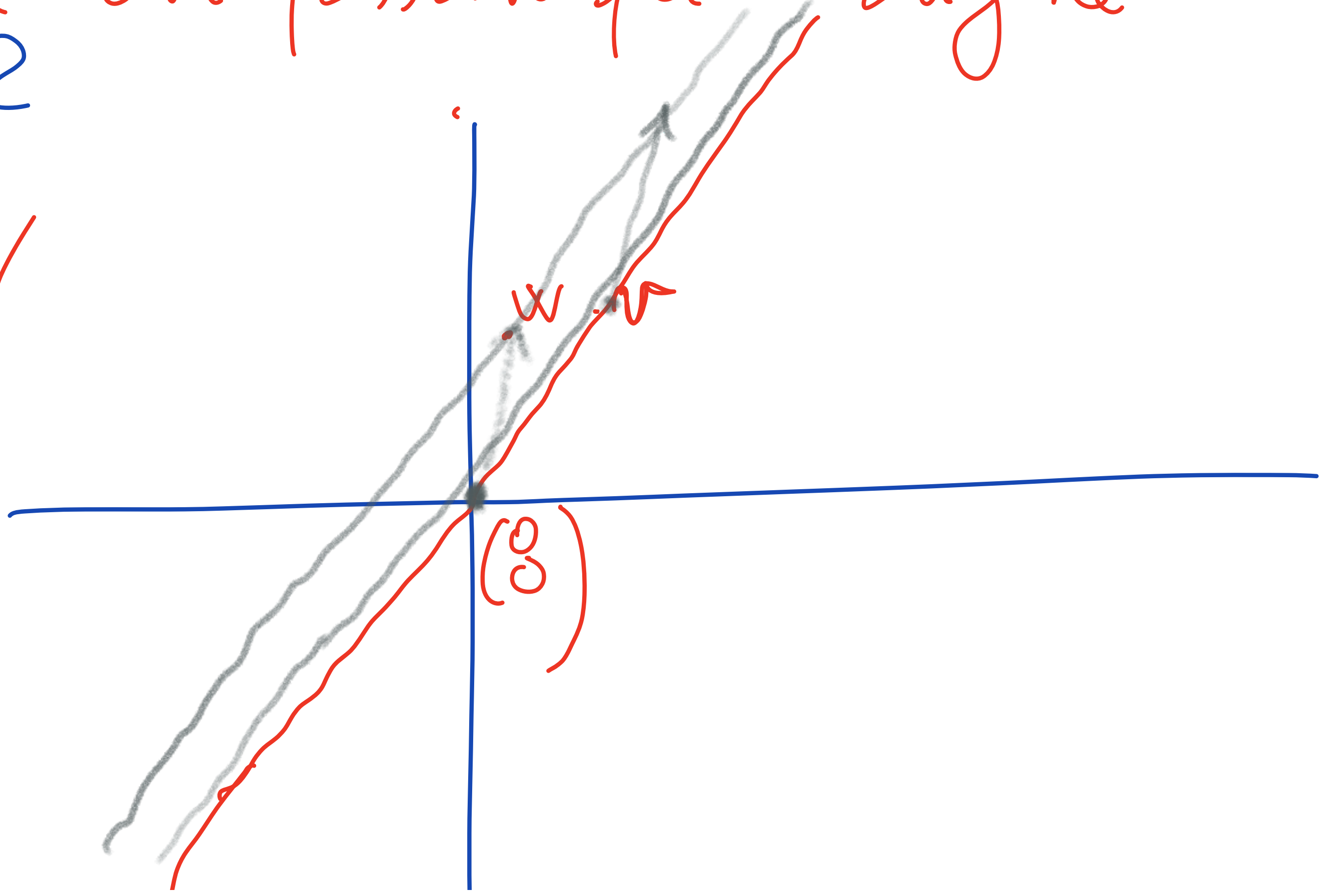

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

OK

TUTTE le rette passanti per l'origine

$\mathbb{R}^2$

W



NON CI SONO SOTTOSPAZI "INTERMEDI" FRA rette passanti per $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ e $\mathbb{R}^2$

i sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono solo questi:

- $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$
- rette passanti per l'origine
- $\mathbb{R}^2$

---

SISTEMI LINEARI OMOGENEI

$$\begin{cases} 2\overset{-1}{x} + 3\overset{3}{y} - \overset{7}{z} = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

OMOGENEO

Le soluzioni sono le terne $(x, y, z)$ che rendono vere entrambe le equazioni.

Per esempio $(-1, 3, 7)$ è SOLUZIONE

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

In questo modo identifico le soluzioni con dei vettori di $\mathbb{R}^3$

L'insieme delle soluzioni lo vedo come un sottoinsieme $S$ di $\mathbb{R}^3$

DOMANDA:

ma $S$ è S. SPAZIO VETT di $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$$

se $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \in S$

allora

$$2(a+a') + 3(b+b') - (c+c')$$

$$= 2a + 3b - c + 2a' + 3b' - c'$$

$$= 0 + 0 = 0$$

dunque $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \in S$

FACILE anche verificare

che $\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in S$

se $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in S$

sì, $S$ è sottospazio vettoriale