МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра компьютерного моделирования

Курсовая работа

ТЕМА

студента III курса 4 группы
Степанова И.Д.

Научный руководитель
Тимощенко И.А.

Минск, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

FIRST 3

1 FIRST

Дана цилиндрическая емкость с гибким дном. Дно колебается по закону $z = Acos(\frac{\pi r}{2R})sin(2\pi\nu t)$, где A – амплитуда колебаний, r – удаление точки от центра сечения цилиндра, R – радиус цилиндра, μ – частота колебаний, t – время. Промоделировать волны на поверхности воды.

Решение:

Нормаль к нижней части запишется как:

$$\vec{n} = \left\{2A\sin\left(\frac{\pi r_0}{2R}\right)\sin\left(2\pi\nu t\right), 0, \frac{\pi}{R}\right\}$$

Берем уравнение Навье-Стокса

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right] = -\mathrm{grad}p + \eta\Delta\vec{v} + (\zeta + \frac{\eta}{3})\mathrm{graddiv}\vec{v} \tag{1}$$

Будем считать жидкость несжимаемой, тогда:

$$\mathrm{div}\vec{v} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = \frac{-\mathrm{grad}p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v} \tag{3}$$

Перепишем данное уравнение в цилиндрической системе:

$$\begin{cases} x = rcos(\varphi) \\ y = rsin(\varphi) \\ z = z \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v_r}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right) \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)v_\varphi - \frac{v_\varphi v_r}{r} = -\frac{1}{Rr}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \nu\left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)v_z = -\frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta v_z \\ \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)f = v_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi} + v_z\frac{\partial f}{\partial z} \\ \Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{cases} \tag{5}$$

В данной задаче есть центральная симметрия, движение потенциально, а значит:

$$\begin{cases} v_\varphi = 0 \\ \vec{v} = \vec{v}\left(r, z\right) \end{cases} \tag{6}$$

Итого получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

И граничные условия:

$$\begin{cases} \vec{v}\left(R, z\right) = \vec{0} \\ \vec{v}\left(r, 0\right) = \left\{ \frac{A^2\pi^2\nu}{4R} sin\left(\frac{\pi r}{R}\right) sin\left(4\pi\nu t\right), 0, 2A\pi\nu cos\left(\frac{\pi r}{2R}\right) cos\left(2\pi\nu t\right) \right\} \end{cases} \tag{8}$$

На поверхности:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \\ p + \sigma_{zz} = p_{\text{газа}} \\ \vec{v}_{\text{газа}} \cdot \vec{n} = \vec{v}_{\text{жидкости}} \cdot \vec{n} \end{cases} \tag{9}$$

Пусть раздел двух сред будет на высоте h, высота всей емкости H, тогда задача сводится к двум системам:

Для $0 \leq z < h$

$$\{ \tag{10}$$

Для $h < z \leq H$