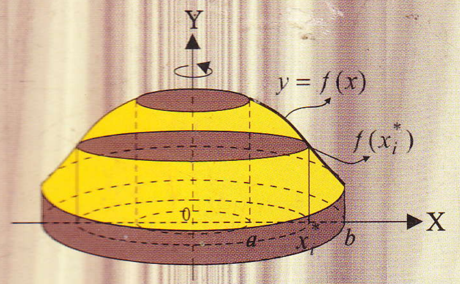
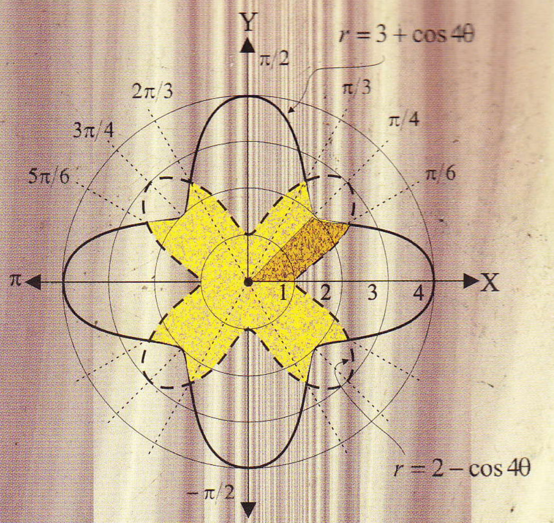


$$V = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx$$

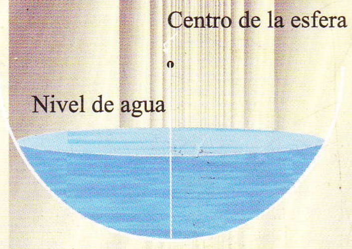


CÁLCULO

EN UNA VARIABLE

TERCERA EDICIÓN

Sergio Aquise Escobedo
Nancy Elguera Garrafa
Irma A. León Mamani
Elsa Mamani Palomino
Roxana L. Núñez Guzmán
Jorge W. Tarqui Ayala
Luisa V. Villaverde Retamozo
Elizabeth M. Zea Torres



Docentes del Departamento Académico
de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de San Agustín

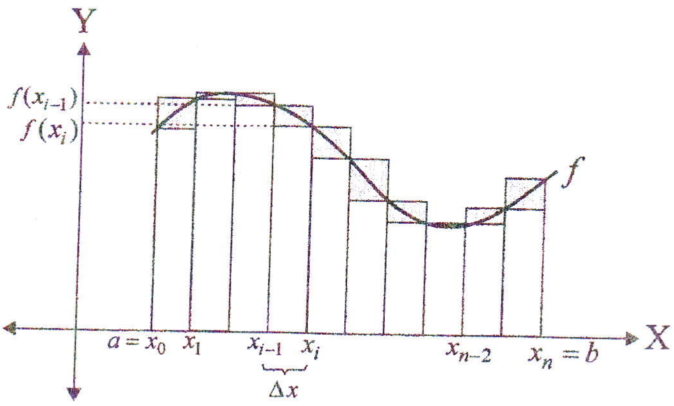
CÁLCULO

EN UNA VARIABLE

GUÍA DE PRÁCTICA

TERCERA EDICIÓN

Tercera impresión



$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Docentes del Departamento Académico
de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de San Agustín

Contenido

Capítulo 1

Números Reales y Funciones

Objetivos

- Aplicar conceptos teóricos, propiedades y técnicas del sistema de los números reales para la solución de problemas.
- Hallar el dominio de una función real.
- Evaluar y esbozar la gráfica de una función en forma eficiente.

1.1 Números Reales

Sistema de Números Reales. El sistema de números reales es un conjunto $\Re$ no vacío, en el cual se define las operaciones: adición $(+)$, multiplicación $(\bullet)$; una relación de orden $<$, que se lee "menor que"; y un axioma llamado "axioma del supremo", para los cuales las siguientes leyes o axiomas son válidas:

1. *Ley de Clausura: Si $a,b\in\Re$, entonces $a+b\in\Re$ y $a\bullet b\in\Re$*
2. Ley Conmutativa: Si $a,b\in\Re$, entonces $a+b=b+a$ y $a\bullet b=b\bullet a$
3. Ley Asociativa: Si $a,b,c\in\Re$, entonces $a+(b+c)=(a+b)+c$ y $a\bullet(b\bullet c)=(a\bullet b)\bullet c$
4. Neutro aditivo: Existe un número real "cero", denotado por 0, tal que la ecuación $a+0=0+a=a$ se cumple para cualquier $a\in\Re$, es decir:
$$\forall a\in\Re, \exists!\ 0\in\Re / a+0=0+a=a$$
5. Neutro Multiplicativo: Existe un número real "uno", denotado por 1, $(1\neq 0)$, tal que la ecuación $a\bullet 1=1\bullet a=a$ se cumple para cualquier $a\in\Re$, es decir:
$$\forall a\in\Re, \exists!\, 1\in\Re, 1\neq 0 / a\bullet 1=1\bullet a=a$$
6. Inverso Aditivo: Para cada $a\in\Re$, existe un elemento $b\in\Re$, tal que $a+b=b+a=0$. El elemento b es denotado por $-a$ y se llama opuesto de a.
7. Inverso Multiplicativo: Para cada $a\in\Re$, $a\neq 0$, existe un elemento $c\in\Re$, tal que $a\bullet c=c\bullet a=1$. El elemento c, denotado por a^{-1} y se llama recíproco de a.
8. Leyes Distributivas: Si $a,b,c\in\Re$, entonces
$$a\bullet(b+c)=a\bullet b+a\bullet c \quad \text{y} \quad (a+b)\bullet c=a\bullet c+b\bullet c$$
9. Ley de Tricotomía: Si $a,b\in\Re$, entonces una y sólo una de las siguientes relaciones se cumple $a<b,\quad a=b,\quad b<a$.
10. Ley Transitiva: Si $a<b$ y $b<c$, entonces $a<c$.
11. Ley de Monotonía en la Suma: Si $a<b$, entonces $a+c<b+c, \quad \forall c\in\Re$.
12. Ley de la Monotonía en el Producto: $a<b$ y $0<c$ implica $a\bullet c<b\bullet c$
$a<b$ y $c<0$ implica $b\bullet c<a\bullet c$
13. Axioma del Supremo: Todo conjunto de números reales $A\neq\varnothing$, acotado superiormente, tiene una menor cota superior llamada supremo de A.

Definiciones:

1. La diferencia de números $a,b \in \Re$ se define como: $a-b=a+(-b)$.

2. *El cociente de números $a,b \in \Re$, $b \neq 0$, se define como $a \bullet b^{-1}$ y se denota por $\frac{a}{b}$, o*

   sea: $a \bullet b^{-1} = \dfrac{a}{b}$.

3. La relación de orden "mayor que" se define: $\forall a,b \in \Re,\quad a>b \;\Leftrightarrow\; b<a$

Observaciones

- Debemos resaltar que no existe la división entre el número cero, es decir, $\frac{a}{0}$ no está definido.
- Podemos interpretar los axiomas como si fueran las reglas de un juego, cualquier operación que se haga respetando los axiomas será una operación válida.
- En este trabajo denotaremos el producto de dos números reales $a \bullet b$ simplemente por ab.

Propiedades adicionales de números reales

Si $a,b,c,d \in \Re$, entonces:

1) $-(-a)=a$
2) $a(-b)=(-a)b=-(ab)$
3) $(-a)(-b)=ab$
4) $ab=ac$ implica $b=c$, si $a \neq 0$
5) Si $a \neq 0$ y $c \neq 0$, entonces $\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$ si y sólo si $bc=ad$
6) Si $a \neq 0$ y $c \neq 0$, entonces $\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}=\dfrac{bc+ad}{ac}$
7) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-1}=\dfrac{a}{b}$
8) Si $a \neq 0$, entonces la ecuación $ax=b$ tiene como única solución $x=a^{-1}b=\dfrac{b}{a}$
9) Si $a+b=a+c$, entonces $b=c$
10) $\forall a \in \Re$, tenemos $a0=0a=0$
11) $\forall a \in \Re$, con $a \neq 0$, se cumple $a^{-1} \neq 0$
12) $\forall a,b \in \Re$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$, tenemos $ab \neq 0$
13) $ab=0$ si y sólo si $a=0 \vee b=0$
14) $a_1a_2a_3a_4...a_n=0$ si y sólo si $a_1=0 \;\vee\; a_2=0 \;\vee\; ... \;\vee\; a_n=0$
15) Si $b \neq 0$, entonces $\dfrac{a}{b}=0$ si y sólo si $a=0$
16) $a<b \;\Rightarrow\; -b<-a$
17) $a<b \;\Leftrightarrow\; a-b<0$
18) $a+c<b+c \;\Rightarrow\; a<b$

19) Si $a>0$ y $b>0$, entonces $a+b>0$ y $ab>0$

20) Si $a>0$, entonces $a^{-1}>0$

21) Si $a<0$, entonces $a^{-1}<0$

22) Si $a\neq 0$, entonces $a^2>0$

23) $a^2=0$, si y sólo si, $a=0$

24) Si $(a<b)\wedge(c<d)$, entonces $a+c<b+d$

25) $0\leq a<b \ \wedge \ 0\leq c<d \ \Rightarrow \ ac<bd$

26) Si $ab>0$, entonces $a<b \ \Leftrightarrow \ a^{-1}>b^{-1}$

27) $ab>0 \ \Leftrightarrow \ ((a>0)\wedge(b>0))\vee((a<0)\wedge(b<0))$

28) $ab<0 \ \Leftrightarrow \ ((a>0)\wedge(b<0))\vee((a<0)\wedge(b>0))$

29) $\left(\dfrac{a}{b}>0 \ \wedge \ b\neq 0\right) \Leftrightarrow (a>0 \ \wedge \ b>0) \ \vee \ (a<0 \ \wedge \ b<0)$

30) $\left(\dfrac{a}{b}<0 \ \wedge \ b\neq 0\right) \Leftrightarrow (a>0 \ \wedge \ b<0) \ \vee \ (a<0 \ \wedge \ b>0)$

31) $a^2=b \ \wedge \ b\geq 0 \Leftrightarrow a=\sqrt{b} \ \vee \ a=-\sqrt{b}$

32) $a^2>b \ \Leftrightarrow \ (b\geq 0) \wedge \left(a>\sqrt{b} \ \vee \ a<-\sqrt{b}\right)$

33) $a^2<b \ \Leftrightarrow \ (b>0) \ \wedge \ \left(-\sqrt{b}<a<\sqrt{b}\right)$

34) $a^2>b^2 \ \Leftrightarrow \ a>b$, si $a>0$, $b>0$

35) $a^2\leq b^2 \ \Leftrightarrow \ a\leq b$, si $a\geq 0$ y $b\geq 0$

36) $\sqrt{a}\leq\sqrt{b} \ \Leftrightarrow \ a\leq b$, si $a\geq 0 \ \wedge \ b\geq 0$

37) $\sqrt{a}<\sqrt{b} \ \Leftrightarrow \ a<b$, si $a\geq 0 \ \wedge \ b>0$

38) Si n es un número entero positivo impar, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

a) $\sqrt[n]{a}\leq\sqrt[n]{b} \ \Leftrightarrow \ a\leq b$

b) $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b} \ \Leftrightarrow \ a<b$

c) $\sqrt[n]{a}\geq 0 \ \Leftrightarrow \ a\geq 0$

d) $\sqrt[n]{a}\leq 0 \ \Leftrightarrow \ a\leq 0$

Intervalos

Si $a,b\in\Re$ con $a\leq b$, consideremos los siguientes tipos de intervalos:

- **Abierto:** $\langle a,b\rangle=\{x\in\Re \,/\, a<x<b\}$

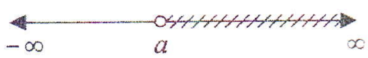
- **Cerrado:** $[a,b]=\{x\in\Re \,/\, a\leq x\leq b\}$

- **Semiabierto**

  Por la Izquierda: $\langle a,b]=\{x\in\Re \,/\, a<x\leq b\}$

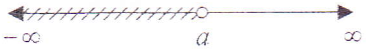
  Por la derecha: $[a,b\rangle=\{x\in\Re \,/\, a\leq x<b\}$

- **Infinito:** $\langle a,\infty\rangle=\{x\in\Re \,/\, x>a\}$



$[a,\infty\rangle = \{x \in \Re \,/\, x \geq a\}$

$\langle -\infty, a\rangle = \{x \in \Re \,/\, x < a\}$



$\langle -\infty, a] = \{x \in \Re \,/\, x \leq a\}$

Observación: $\Re = \langle -\infty, \infty\rangle$, $\quad a = [a,a]$, $\qquad \varnothing = \langle a,a\rangle = \langle a,a] = [a,a\rangle$

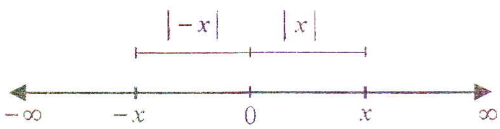
Valor Absoluto

Definición. El valor absoluto de un número real x, denotado por $|x|$ se define

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Observación:

1. Geométricamente, el valor absoluto de x se puede interpretar como la distancia del punto x al origen 0.



2. La distancia entre dos puntos $a,b \in \Re$ está dado por $|a-b| = |b-a|$

Propiedades. Para todo $a,b \in \Re$ se cumple lo siguiente:

1. $|a| \geq 0$
2. $|a| = |-a|$
3. $|a| = \sqrt{a^2}$
4. $|a^2| = |a|^2 = a^2$
5. $|ab| = |a||b|$
6. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, \qquad b \neq 0$
7. $|a+b| \leq |a| + |b| \qquad$ (desigualdad triangular)

Propiedades para resolver ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

1) $|a| = b \Leftrightarrow \big(b \geq 0 \wedge (a = b \vee a = -b)\big)$
2) $|a| = |b| \Leftrightarrow (a = b \vee a = -b)$
3) $|a| \leq b \Leftrightarrow (b \geq 0 \wedge -b \leq a \leq b)$

   $|a| < b \Leftrightarrow (b > 0 \wedge -b < a < b)$
4) $|a| \geq b \Leftrightarrow (a \geq b \vee a \leq -b)$

   $|a| > b \Leftrightarrow (a > b \vee a < -b)$
5) $|a| \leq |b| \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$

Ejercicios Resueltos

1.1.1 Demuestre que si $a^3 + b^3 = 4$ y $a + b = 2$, entonces $(a-b)^2 = \dfrac{4}{3}$.

Solución.

Como $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, necesitamos determinar estos elementos:

$$a+b=2 \;\Rightarrow\; (a+b)^3=8 \;\Rightarrow\; a^3+b^3+3a^2b+3ab^2=8$$

$$\Rightarrow\; a^3+b^3+3ab(a+b)=8 \;\Rightarrow\; 4+3ab(2)=8 \;\Rightarrow\; ab=\frac{2}{3}$$

$$a+b=2 \;\Rightarrow\; (a+b)^2=4 \;\Rightarrow\; a^2+b^2=4-2ab=4-2\left(\frac{2}{3}\right) \;\Rightarrow\; a^2+b^2=\frac{8}{3}$$

Luego, $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=\frac{8}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$.

1.1.2 ¿La afirmación que $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$ es verdadera o falsa?, ¿para qué valores es verdadera y para cuáles es falsa?

Solución.

Para que exista $\sqrt{x}$ se debe cumplir que $x\geq 0$, entonces la afirmación es verdadera si $x\geq 0$, pero en general $\forall\, x\in\Re$ no se verifica tal igualdad.

1.1.3 ¿La afirmación que $\sqrt{x^2}=x$ es verdadera o falsa? En todo caso, ¿para qué valores es verdadera y para cuáles es falsa?

Solución.

Decir que $\sqrt{x^2}=x$ es verdadero es un error muy común entre los estudiantes.

Como $\sqrt{x^2}$ es no negativa, es decir $\sqrt{x^2}\geq 0$, tenemos: $\sqrt{x^2}=|x|$

a) Si $x\geq 0$, entonces $\sqrt{x^2}=x$ es verdadero.

b) Si $x<0$, entonces $\sqrt{x^2}=x$ es falso, pues en este caso $\sqrt{x^2}$ sería negativa. Particularmente para $x=-2$, se tendría que $\sqrt{(-2)^2}=-2$, es decir $\sqrt{4}=-2$, o sea que $2=-2$, lo cual es una contradicción.

Vale recalcar que de (a) y (b) podemos decir que $|x|=\sqrt{x^2}$.

1.1.4 Halle el menor número de M tal que: $6+6x-x^2\leq M$

Solución.

Como $6+6x-x^2=-(x^2-6x)+6=15-(x-3)^2$ entonces

$$\forall\, x\in\Re,\;\; (x-3)^2\geq 0 \;\Rightarrow\; -(x-3)^2\leq 0 \;\Rightarrow\; 15-(x-3)^2\leq 15$$

por tanto $M=15$.

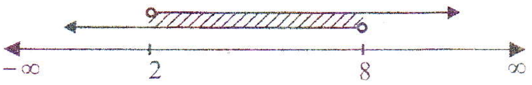
1.1.5 Resuelva $11-\frac{3}{2}x<\frac{5x+14}{3}>\frac{9}{5}(2+x)$

Solución.

Como se tiene doble desigualdad desglosamos esta, como sigue:

$$\begin{aligned}
11-\frac{3}{2}x<\frac{5x+14}{3}>\frac{9}{5}(2+x) &\Rightarrow 11-\frac{3}{2}x<\frac{5x+14}{3} \;\wedge\; \frac{5x+14}{3}>\frac{9}{5}(2+x)\\
&\Rightarrow \frac{22-3x}{2}<\frac{5x+14}{3} \;\wedge\; 25x+70>27(2+x)\\
&\Rightarrow 66-9x<10x+28 \;\wedge\; 25x+70>54+27x\\
&\Rightarrow -19x<-38 \;\wedge\; -2x>-16\\
&\Rightarrow 19x>38 \;\wedge\; 2x<16
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad x > 2 \quad \wedge \quad x < 8$$



$\therefore \; S = \langle 2,8 \rangle$

1.1.6 Resuelva $\dfrac{1}{5} < \dfrac{x-3}{x+1} < \dfrac{2}{3}$

Solución.

$$\frac{1}{5} < \frac{x-3}{x+1} < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{x-3}{x+1} \wedge \frac{x-3}{x+1} < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x+1-5x+15}{5(x+1)} < 0 \wedge \frac{3x-9-2x-2}{3(x+1)} < 0$$

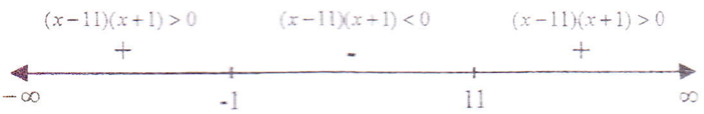
$$\Rightarrow \frac{-4x+16}{5(x+1)} < 0 \wedge \frac{x-11}{3(x+1)} < 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+1} > 0 \wedge \frac{x-11}{x+1} < 0$$

a) Resolvemos $\dfrac{x-4}{x+1} > 0$, inecuación equivalente a $(x-4)(x+1) > 0$, de donde:

$$\begin{aligned}
(x-4)(x+1) > 0 \;&\Rightarrow\; (x-4>0 \;\wedge\; x+1>0) \vee (x-4<0 \;\wedge\; x+1<0) \\
&\Rightarrow\; (x>4 \;\wedge\; x>-1) \vee (x<4 \;\wedge\; x<-1) \\
&\Rightarrow\; (x>4) \vee (x<-1) \\
&\therefore\; S_1 = \{ x \in \Re \;:\; x<-1 \;\vee\; x>4 \}
\end{aligned}$$

b) Resolvemos $\dfrac{x-11}{x+1} < 0 \Rightarrow (x-11)(x+1) < 0$, inecuación que se puede resolver empleando el método anterior, pero también lo podemos hacer empleando el método de *puntos críticos*, el cual consiste en:

- Igualar a cero cada factor de la desigualdad, obteniéndose los puntos críticos $x = 11$ y $x = -1$.
- Los puntos críticos se ubican en la recta real, así como se muestra en la figura:



Si $x < 11$ y $x > -1$ el producto de sus factores es estrictamente menor que 0.

$$\therefore \; S_2 = \{ x \in \Re \;:\; -1 < x < 11 \}$$

Luego, la solución es: $S = S_1 \cap S_2 = \{ x \in \Re : 4 < x < 11 \} = \langle 4,11 \rangle$

1.1.7 Determine m de modo que la raíz de la ecuación con respecto a la variable x sea menor que 1, donde

$$\frac{4}{x} = \frac{5m-1}{5+2m}$$

Solución.

Se debe encontrar el valor de x que satisface la ecuación, de modo que $x < 1$. Entonces

$$\frac{4}{x} = \frac{5m-1}{5+2m} \Rightarrow x = \frac{20+8m}{5m-1} < 1 \Rightarrow \frac{20+8m-5m+1}{5m-1} < 0 \Rightarrow \frac{3m+21}{5m-1} < 0$$

Puntos críticos:

$m = -7$ y $m = 1/5$

$$\therefore \; m \in \langle -7, 1/5 \rangle$$

1.1.8 Resuelva la ecuación $|x-1| = 1-x$.

Solución.

Empleando propiedades para resolver ecuaciones con valor absoluto:

$$|x-1| = 1-x \iff 1-x \geq 0 \wedge (x-1 = 1-x \vee x-1 = x-1) \Rightarrow x \leq 1 \wedge (x = 1 \vee 0 = 0)$$
$$\Rightarrow x \leq 1 \wedge (x = 1 \vee x \in \Re) \Rightarrow x \leq 1 \wedge (x \in \Re) \Rightarrow x \leq 1$$
$$\therefore S = \{x \in \Re : x \leq 1\} \text{ luego } x \in \langle -\infty, 1]$$

1.1.9 Determine el conjunto solución de:

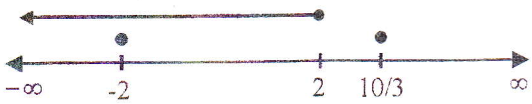
a) $2-5\left|\dfrac{x}{2}-3\right| = 5x-8$ b) $\dfrac{|x-4|}{x-5} \leq \dfrac{x}{x+1}$

Solución.

a) $2-5\left|\dfrac{x}{2}-3\right| = 5x-8 \Rightarrow 5\left|\dfrac{x}{2}-3\right| = 10-5x \Rightarrow \left|\dfrac{x}{2}-3\right| = 2-x$. Utilizando propiedades:

$$2-x \geq 0 \wedge \left(\frac{x}{2}-3 = 2-x \vee \frac{x}{2}-3 = x-2\right) \Rightarrow x \leq 2 \wedge \left(\frac{3}{2}x = 5 \vee \frac{x}{2} = -1\right)$$

$$\Rightarrow x \leq 2 \wedge \left(x = \frac{10}{3} \vee x = -2\right) \Rightarrow x = -2 \quad \text{(como se muestra en la gráfica)}$$



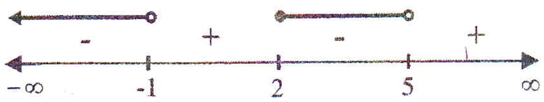
$$\Rightarrow S = \{-2\}$$

b) $\dfrac{|x-4|}{x-5} \leq \dfrac{x}{x+1}$: Por definición $|x-4| = \begin{cases} x-4, & x-4 \geq 0 \\ 4-x, & x-4 < 0 \end{cases} \Rightarrow |x-4| = \begin{cases} x-4, & x \geq 4 \\ 4-x, & x < 4 \end{cases}$

i) $x \geq 4 \Rightarrow \dfrac{x-4}{x-5} \leq \dfrac{x}{x+1} \Rightarrow \dfrac{x-4}{x-5} - \dfrac{x}{x+1} \leq 0$

$$\Rightarrow \frac{x^2+x-4x-4-x^2+5x}{(x-5)(x+1)} \leq 0 \Rightarrow \frac{2(x-2)}{(x-5)(x+1)} \leq 0$$

Puntos críticos: $\begin{cases} x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x-5 = 0 \Rightarrow x = 5 \\ x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$



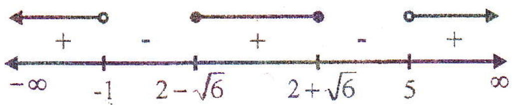
$$x \in (\langle -\infty, -1\rangle \cup [2, 5\rangle)$$

Luego $x \in [4, \infty\rangle \cap (\langle -\infty, -1\rangle \cup [2, 5\rangle)$ $\therefore S_1 = [4, 5\rangle$

ii) $x < 4 \Rightarrow \dfrac{4-x}{x-5} \leq \dfrac{x}{x+1} \Rightarrow \dfrac{4-x}{x-5} - \dfrac{x}{x+1} \leq 0$

$$\Rightarrow \frac{4x+4-x^2-x-x^2+5x}{(x-5)(x+1)} \leq 0 \Rightarrow \frac{2(x^2-4x-2)}{(x-5)(x+1)} \geq 0$$

p.c.: $\begin{cases} x^2-4x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{6} \\ x-5 = 0 \Rightarrow x = 5 \\ x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$



$$x \in (\langle -\infty, -1\rangle \cup [2-\sqrt{6}, 2+\sqrt{6}] \cup \langle 5, \infty\rangle)$$

Luego $x \in \langle -\infty, 4\rangle \cap (\langle -\infty, -1\rangle \cup [2-\sqrt{6}, 2+\sqrt{6}] \cup \langle 5, \infty\rangle)$

$$\therefore S_2 = \langle -\infty, -1\rangle \cup [2-\sqrt{6}, 4\rangle$$

El conjunto solución es $S = S_1 \cup S_2 = \langle -\infty, -1\rangle \cup [2-\sqrt{6}, 5\rangle$.

1.1.10 Encuentre el conjunto solución correspondiente a la desigualdad $|x|+1 \le |1-x|$.

Solución.

Podemos proceder como sigue:

- Igualando a cero cada valor absoluto:
  $x=0 \ \wedge \ 1-x=0 \Rightarrow x=1$

- Analizando cada valor absoluto en el intervalo respectivo, y reemplazando en la inecuación:
  $x \in \langle -\infty,0\rangle \Rightarrow |x| = -x \ \wedge \ |1-x| = 1-x$, luego $-x+1 \le 1-x \Rightarrow 0 \le 0 \Rightarrow x \in \Re$
  Luego $S_1 = \langle -\infty,0\rangle \cap \Re = \langle -\infty,0\rangle$.
  $x \in [0,1\rangle \Rightarrow |x| = x \ \wedge \ |1-x| = 1-x$, luego $x+1 \le 1-x \Rightarrow x \le 0 \Rightarrow x \in \langle -\infty,0]$
  $S_2 = [0,1\rangle \cap \langle -\infty,0] = \{0\}$.
  $x \in [1,\infty\rangle \Rightarrow |x| = x \ \wedge \ |1-x| = x-1$, luego $x+1 \le x-1 \Rightarrow 0 \le -2 \Rightarrow x \in \varnothing$
  $S_3 = [1,\infty\rangle \cap \varnothing = \varnothing$.
- Uniendo las soluciones: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \langle -\infty,0]$

1.1.11 Si $|x| \le 3$ y $x > -1/2$, ¿qué puede decirse de x?

Solución.

$|x| \le 3 \ \Rightarrow \ -3 \le x \le 3 \ \Rightarrow \ x \in [-3,3]$, además $x > -1/2 \Rightarrow x \in \langle -1/2,\infty\rangle$.
Interceptando los dos intervalos se tiene que $x \in \langle -1/2,3]$.

1.1.12 Empleando intervalos exprese el conjunto $A = \{x \in \Re / |x-2|^2 - 2|x-2| - 15 > 0\}$.

Solución.

$$|x-2|^2 - 2|x-2| - 15 > 0 \Rightarrow (|x-2|-5)(|x-2|+3) > 0$$
$$\Rightarrow |x-2|-5 > 0, \text{ pues } |x-2|+3 > 0, \quad \forall x \in \Re$$

luego: $x-2 > 5 \ \vee \ x-2 < -5 \Rightarrow x > 7 \ \vee \ x < -3 \Rightarrow A = \langle -\infty,-3\rangle \cup \langle 7,\infty\rangle$

1.1.13 Resuelva: $||x+2|-1|^2 - 5||x+2|-1| - 6 = 0$

Solución.

Sea $||x+2|-1| = z$, entonces resolvemos la ecuación siguiente

$z^2 - 5z - 6 = 0 \Rightarrow (z-6)(z+1) = 0 \Rightarrow z = 6 \ \vee \ z = -1$, luego

Si $z = 6$, $||x+2|-1| = 6 \Rightarrow |x+2|-1 = 6 \ \vee \ |x+2|-1 = -6 \Rightarrow |x+2| = 7 \ \vee \ |x+2| = -5$
$$\Rightarrow (x+2 = 7 \ \vee \ x+2 = -7) \ \vee \ (x \in \varnothing)$$
$$\Rightarrow x = 5 \ \vee \ x = -9$$

Si $z = -1$, $||x+2|-1| = -1$ (absurdo)
$$\therefore S = \{5,-9\}$$

1.1.14 Resuelva $\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1} > 2$

Solución.

Condición: $x+7 \ge 0 \ \wedge \ x-1 \ge 0 \Rightarrow x \ge -7 \ \wedge \ x \ge 1 \Rightarrow \ x \ge 1$, entonces la solución de la inecuación debe estar en el intervalo $[1,\infty\rangle$

Luego, elevando ambos miembros de la desigualdad al cuadrado tenemos:

$$x+7+x-1-2\sqrt{(x+7)(x-1)}>4 \;\Rightarrow\; -2\sqrt{(x+7)(x-1)}>-2x-2 \;\Rightarrow\; \sqrt{x^2+6x-7}<x+1$$

$$\Rightarrow\; x+1>0 \;\wedge\; x^2+6x-7<x^2+2x+1$$

$$\Rightarrow\; x>-1 \;\wedge\; 4x<8 \;\Rightarrow\; x>-1 \;\wedge\; x<2 \;\Rightarrow\; x\in\langle -1,2\rangle$$

Interceptando con la condición la solución será: $S=[1,2\rangle$.

1.2 Plano Coordenado

Distancia entre dos Puntos

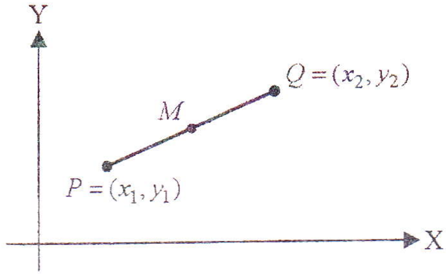
Dados dos puntos en el plano coordenado $P_1=(x_1,y_1)$ y $P_2=(x_2,y_2)$, la distancia entre P_1 y P_2, representada por $d(P_1,P_2)$, está definida por:

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

Punto Medio de un Segmento

El punto medio del segmento de recta con extremos $P=(x_1,y_1)$ y $Q=(x_2,y_2)$, está definido por

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



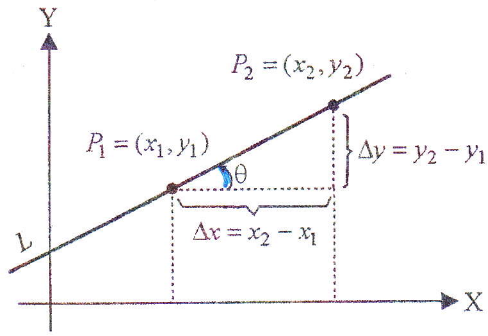
La Recta y sus Ecuaciones

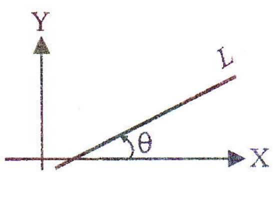
La **pendiente** m de una recta no vertical, que pasa por los puntos $P_1=(x_1,y_1)$ y $P_2=(x_2,y_2)$, está dada por:

$$m=\tan\theta$$

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

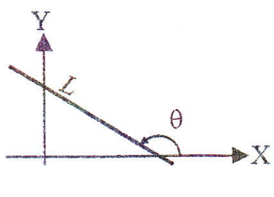
θ es el ángulo de inclinación de la recta L.





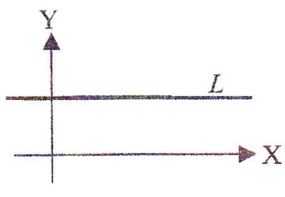
$m>0$

θ ángulo agudo



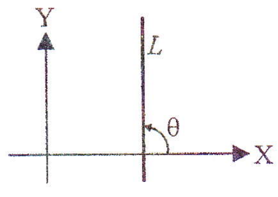
$m<0$

θ ángulo obtuso



$m=0,\quad \theta=0°$

L recta horizontal



m no está definida

$\theta=90°$, L recta vertical

Ecuaciones de Líneas Rectas

- La ecuación punto–pendiente de la recta que pasa por el punto (x_0,y_0) y tiene pendiente m es

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

- La ecuación pendiente-ordenada al origen, de la recta con pendiente m y ordenada b, es de la forma

$$y = mx + b$$

- La ecuación general de la recta está dada por

$$Ax + By + C = 0$$

donde A y B son números reales no simultáneamente iguales a cero.

Si $A = 0$ y $B \neq 0$, entonces $y = -\dfrac{C}{B}$ es la ecuación de una recta horizontal.

Si $A \neq 0$ y $B = 0$, entonces $x = -\dfrac{C}{A}$ es la ecuación de una recta vertical.

Rectas Paralelas y Rectas Perpendiculares

- Dos rectas L_1 y L_2 no verticales con pendientes m_1 y m_2, respectivamente, son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente, es decir,

$$L_1 \,//\, L_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 = m_2$$

- Dos rectas L_1 y L_2 no verticales con pendientes m_1 y m_2, respectivamente, son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es igual a -1, es decir,

$$L_1 \perp L_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 \cdot m_2 = -1$$

- Dos rectas L_1 y L_2 son coincidentes si tienen la misma pendiente y un punto común.

Intersección de Rectas. Dos rectas se intersecan cuando hay un único punto (x, y) que satisface ambas ecuaciones de las rectas.

Distancia de un Punto a una Recta

Dada una recta $L: Ax + By + C = 0$ y un punto $Q = (x_0, y_0)$, la distancia del punto Q a la recta L está definida por:

$$d(Q, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

La Circunferencia

Dado un punto $P_0 = (h, k)$ en el plano coordenado, una circunferencia $\mathscr{C}$ es un conjunto de puntos $P = (x, y)$ los cuales distan una distancia r del centro P_0, es decir, la circunferencia está conformada por puntos P tal que

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Luego, concluimos que la circunferencia $\mathscr{C}$ con centro en el punto (h, k) y radio r está conformada por puntos $P = (x, y)$ que satisfacen la ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ (forma canónica).

Por otro lado, la ecuación general de una circunferencia está dada por:

$$\mathscr{C}:\ Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad \text{donde } A = B \neq 0.$$

Nota: La ecuación general de una circunferencia se expresa en su forma canónica mediante completación de cuadrados.

Ejercicios Resueltos

1.2.1 Halle la distancia entre los puntos $P=(-1,2)$ y $Q=(3,4)$

Solución.

Sea $P=(x_1,y_1)=(-1,2)$ y $Q=(x_2,y_2)=(3,4)$, luego

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(-1-3)^2+(2-4)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

1.2.2 Si M es el punto medio del segmento de recta que va de $P_1=(5,2)$ a $P_2=(-5,-4)$, encuentre el punto medio del segmento de P_1 a M y el punto medio del segmento de M a P_2.

Solución.

El punto medio de P_1 a P_2 es: $M=\left(\dfrac{5-5}{2},\dfrac{2-4}{2}\right)=(0,-1)$

El punto medio de $P_1=(5,2)$ a $M=(0,-1)$ es: $M_1=\left(\dfrac{5+0}{2},\dfrac{2-1}{2}\right)=\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

El punto medio de $M=(0,-1)$ a $P_2=(-5,-4)$ es: $M_2=\left(\dfrac{0-5}{2},\dfrac{-1-4}{2}\right)=\left(\dfrac{-5}{2},\dfrac{-5}{2}\right)$

1.2.3 Halle la ecuación de la recta cuya intersección con el eje Y es $(0,5)$ y cuya pendiente es 3.

Solución.

Empleamos $y=mx+b$, donde $b=5 \;\wedge\; m=3$, luego $y=3x+5$.

1.2.4 Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1,2)$ y tiene pendiente -4.

Solución.

Sea $(x_0,y_0)=(-1,2)$, reemplazando en $y-y_0=m(x-x_0)$, tenemos

$$y-2=-4(x+1) \;\Rightarrow\; L:\; 4x+y+2=0$$

1.2.5 Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(3,4)$ y $(-5,2)$.

Solución.

Sea $(x_1,y_1)=(3,4)$ y $(x_2,y_2)=(-5,2)$, luego $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{2-4}{-5-3}=\dfrac{1}{4}$

Reemplazando en $y-y_0=m(x-x_0)$ tenemos: $y-4=\dfrac{1}{4}(x-3) \;\Rightarrow\; L:\; x-4y+13=0$.

Comprobando: Sustituir $(3,4)$ en $x-4y+13=0 \;\Rightarrow\; 3-4(4)+13=0 \;\Rightarrow\; 0=0$

Sustituir $(-5,2)$ en $x-4y+13=0 \;\Rightarrow\; -5-4(2)+13=0 \Rightarrow 0=0$

1.2.6 Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $(4,-2)$ y es paralela a la recta $L_1: 8x+3y=5$.

Solución.

Recta a determinar: L, con punto de paso $(x_0,y_0)=(4,-2)$

En $L_1: 8x+3y=5 \Rightarrow y=-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3} \Rightarrow m_1=-\frac{8}{3}$. Como $L \parallel L_1 \Rightarrow m=m_1 \Rightarrow m=-\frac{8}{3}$

Luego $L:\ y+2=-\frac{8}{3}(x-4) \Rightarrow L:\ 8x+3y=26$

1.2.7 Halle la ecuación de una recta que pasa por el punto medio del segmento de recta que va de $P_1=(-1,3)$ a $P_2=(6,-8)$ y es perpendicular al segmento $\overline{P_1P_2}$.

Solución.

Sea L la recta por determinar, la cual pasa por M y tiene pendiente m.

El punto medio entre $P_1=(-1,3)$ y $P_2=(6,-8)$ es $M=\left(\frac{5}{2},\frac{-5}{2}\right)$

La pendiente del segmento de recta que pasa por P_1 y P_2 es $m_1=\frac{-8-3}{6-(-1)}=\frac{-11}{7}$

Como $L \perp \overline{P_1P_2} \Rightarrow m\cdot m_1=-1 \Rightarrow m=-\frac{1}{m_1} \Rightarrow m=\frac{7}{11}$, luego la ecuación de la recta L es:

$$L:\ y+\frac{5}{2}=\frac{7}{11}\left(x-\frac{5}{2}\right) \Rightarrow L:\ 7x-11y=45$$

1.2.8 Halle el punto de intersección entre las rectas cuyas ecuaciones son: $L_1: 3x-4y+6=0$ y $L_2:\ x-2y-3=0$.

Solución.

Determinamos $P=L_1\cap L_2$ resolviendo el sistema obtenido por sus ecuaciones, es decir,

$$\begin{cases}3x-4y=-6\\ x-2y=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x-4y=-6\\ -3x+6y=-9\end{cases} \Rightarrow y=-\frac{15}{2}$$

luego $x-2y=3 \Rightarrow x=2y+3 \Rightarrow x=2\left(-\frac{15}{2}\right)+3 \Rightarrow x=-12$

Por tanto el punto de intersección es $P=(x,y)=\left(-12,-\frac{15}{2}\right)$

1.2.9 Halle la distancia del punto $Q=(7,9)$ a la recta $L: 3x+4y-7=0$

Solución.

Como $Q=(x_0,y_0)=(7,9)$ entonces

$$d(Q,L)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|3(7)+4(9)-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{50}{5}=10 \text{ unidades}$$

1.2.10 Determine todos los valores de r tales que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(r,4)$ y $(1,\ 3-2r)$ es menor que 5.

Solución.

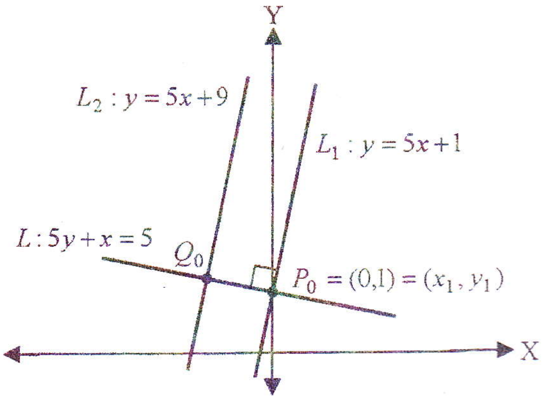
$$m=\frac{(4)-(3-2r)}{(r)-(1)}<5 \Leftrightarrow \frac{2r+1}{r-1}<5 \Leftrightarrow \frac{2r+1-5r+5}{r-1}<0 \Leftrightarrow \frac{3(r-2)}{r-1}>0$$

$$r\in(\langle-\infty,1\rangle\cup\langle 2,\infty\rangle)$$

1.2.11 Determine la distancia perpendicular entre las rectas paralelas definidas por $y=5x+1$, $y=5x+9$.

Solución.

Graficando cada una de las rectas:



Primera forma: Como la recta el punto $P_0 = (0,1)$, aplicamos la fo la distancia del punto $P_0 = (x_0, y_0)$ a la L_2, donde $L_2 : 5x - y + 9 = 0$

$$d(P_0, L_2) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|5(0) + (-1)(1) + 9|}{\sqrt{25+1}} = \frac{8}{\sqrt{26}} \approx 1.5689$$

Segunda forma: Observe que la pendiente de L_1 es $m_1 = 5$ y un punto de paso es $P_0 = (0,1)$. Determinamos la recta L que pasa por $P_0 = (0,1)$ y tiene pendiente $m = -1/5$, pues L es perpendicular a L_1, luego:

$$L:\ y - 1 = -\frac{1}{5}(x - 0) \quad \Rightarrow \quad x + 5y = 5$$

Obtenemos $Q_0 = L \cap L_2$ resolviendo el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 5y = 5 \\ -5x + y = 9 \end{cases}$

de donde $y = \frac{17}{13}$ y $x = -\frac{20}{13}$, luego $Q_0 = \left(-\frac{20}{13}, \frac{17}{13}\right)$. Por tanto, la distancia perpendicular entre L_1 y L_2 será:

$$d(P_0, Q_0) = \sqrt{\left(\tfrac{20}{13}\right)^2 + \left(1 - \tfrac{17}{13}\right)^2} = \frac{1}{13}\sqrt{400 + 16} = \frac{4}{13}\sqrt{26} \approx 1.5689$$

1.2.12 Dadas las ecuaciones $L_1 : ax + (2-b)y - 23 = 0$, L_2 : recta que pasa por el punto $(0, 15/b)$ y es perpendicular a $L_3 : y = \frac{b}{a-1}x + 3$. Halle los valores de a y b para que representen rectas que pasan por el punto $(2,-3)$.

Solución.

En $L_3 :\ m_3 = \dfrac{b}{a-1}$, pero $L_2 \perp L_3 \Rightarrow m_2 = \dfrac{1-a}{b}$, luego: $L_2 : y - \dfrac{15}{b} = \dfrac{1-a}{b}x$ o $L_2 : (1-a)x - by + 15 = 0$

$(2,-3) \in L_1 \Rightarrow 2a - 3(2-b) = 23 \Rightarrow 2a + 3b = 29$

$(2,-3) \in L_2 \Rightarrow 2(1-a) + 3b = -15 \Rightarrow -2a + 3b = -17$

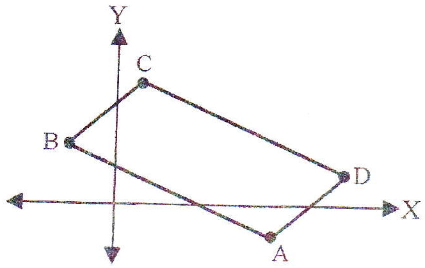
Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones tenemos que $b = 2$ y $a = \dfrac{29 - 3b}{2} \Rightarrow a = \dfrac{23}{2}$.

1.2.13 Muestre que los puntos $A = (7,-1)$, $B = (-2,2)$, $C = (1,4)$ y $D = (10,1)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo.

Solución.

Determinaremos las pendientes de los segmentos con extremos en los puntos dados.

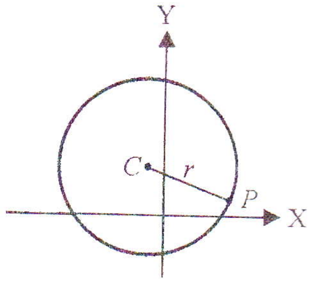
$$m_{\overline{AB}} = \frac{2+1}{-2-7} = -\frac{1}{3},\quad m_{\overline{BC}} = \frac{4-2}{1+2} = \frac{2}{3},\quad m_{\overline{CD}} = \frac{1-4}{10-1} = -\frac{1}{3},\quad m_{\overline{DA}} = \frac{-1-1}{7-10} = \frac{2}{3}$$



Vemos que $\overline{AB}//\overline{CD}$ y $\overline{BC}//\overline{DA}$, por lo que A, B, C y D son los vértices de un paralelogramo.

1.2.14 Halle la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(4,1)$ y tiene centro en $(-1,3)$.

Solución.



Sea $C=(h,k)=(-1,3)$ y $P=(4,1)$

$$r=d(C,P)=\sqrt{(4-(-1))^2+(1-3)^2}=\sqrt{29}$$

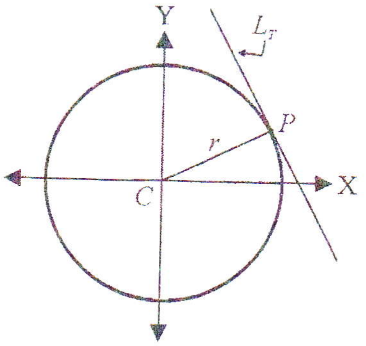
Como $\mathscr{C}:\ (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, entonces:

$$\mathscr{C}:\ (x+1)^2+(y-3)^2=29 \quad \text{o}$$

$$\mathscr{C}:\ x^2+y^2+2x-6y-19=0$$

1.2.15 Sea $P=(x_0,y_0)$ un punto de la circunferencia con centro $C=(0,0)$ y radio r. Recuerde que la recta tangente a la circunferencia en P es perpendicular al radio $\overline{CP}$. Demuestre que la ecuación de esta recta tangente L_T es $x_0x+y_0y=r^2$.

Solución.



La ecuación de la circunferencia es: $x^2+y^2=r^2$

$$m_{PC}=\frac{y_0-0}{x_0-0}=\frac{y_0}{x_0} \Rightarrow m_{L_T}=-\frac{x_0}{y_0}$$

La ecuación de L_T es:

$$L_T:\ y-y_0=m_{L_T}(x-x_0)$$

$$L_T:\ y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$$

$$L_T:\ yy_0-y_0^2=-xx_0+x_0^2 \quad \Rightarrow \quad xx_0+yy_0=x_0^2+y_0^2=r^2 \qquad \therefore L_T:\ xx_0+yy_0=r^2.$$

1.2.16 Halle el valor de k de tal manera que $x^2+y^2-8x+10y+k=0$ representa la ecuación de una circunferencia de radio 4.

Solución.

Completando cuadrados en $x^2+y^2-8x+10y+k=0$, tenemos:

$$(x-4)^2+(y+5)^2=-k+16+25 \Rightarrow (x-4)^2+(y+5)^2=41-k$$

luego: $41-k=r^2=16 \Rightarrow k=41-16 \Rightarrow k=25$

1.2.17 Halle el centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos $P=(3,3)$, $Q=(8,-2)$ y $R=(6,2)$.

Solución.

Sabemos que la ecuación general de la circunferencia es $\mathscr{C}:\ x^2+y^2+Cx+Dy+E=0$, como los puntos P, Q y R pertenecen a $\mathscr{C}$ entonces satisfacen su ecuación, por lo tanto te-nemos:

$$\begin{cases} P = (3,3) \in \mathscr{C} & \Rightarrow 9+9+3C+3D+E=0 \\ Q=(8,-2) \in \mathscr{C} & \Rightarrow 64+4+8C-2D+E=0 \\ R=(6,2) \in \mathscr{C} & \Rightarrow 36+4+6C+2D+E=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3C+3D+E=-18 \\ 8C-2D+E=-68 \\ 6C+2D+E=-40 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones simultáneas, obtenemos: $C=-6$, $D=4$, $E=-12$ y reemplazando en $\mathscr{C}$: $x^2+y^2-6x+4y-12=0 \Rightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=25$ obteniendo así el centro $(h,k)=(3,-2)$ y radio $r=5$.

1.2.18 Grafique la ecuación: $y=\sqrt{4-(x-2)^2}$.

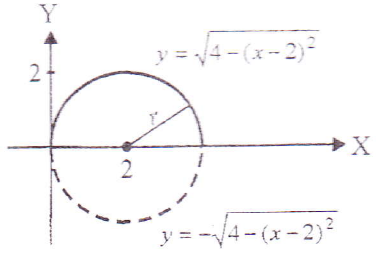
Solución.

Esta ecuación considera que $y \geq 0$ (semiplano superior solamente), luego:

$$y^2=4-(x-2)^2, \quad y \geq 0$$

$$(x-2)^2+y^2=4, \quad y \geq 0$$

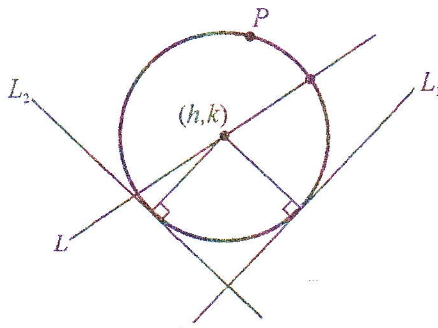
cuya gráfica corresponde a la parte de la circunferencia de centro $(2,0)$ y radio $r=2$ que se encuentra en el semiplano superior $y \geq 0$.



1.2.19 Halle la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta L: $y-x-1=0$ y que es tangente a cada una de las rectas L_1: $4x-3y-15=0$ y L_2: $3x+4y-10=0$.

Solución.

Sea $C=(h,k)$ el centro de la circunferencia, como C está sobre L, entonces



$$k-h-1=0 \qquad (1)$$

Además $r=d(C,L_1)=d(C,L_2)$, entonces

$$\frac{|4h-3k-15|}{\sqrt{25}}=\frac{|3h+4k-10|}{\sqrt{25}}$$

de donde $h-7k=5 \;\vee\; 7h+k=25$ (2)

Resolviendo (1) y (2) se obtiene $h=-2$ y $k=-1$, o sino, $h=3$ y $k=4$.

Si $h=-2$ y $k=-1$, entonces $r=4$; Si $h=3$ y $k=4$, entonces $r=3$

Por lo tanto, existen dos circunferencias que cumplen las condiciones, sus ecuaciones vienen dadas por: $(x+2)^2+(y+1)^2=16$ y $(x-3)^2+(y-4)^2=9$, respectivamente.

1.2.20 Halle la ecuación de las dos rectas tangentes trazadas desde el punto $(2,7)$ a la circunferencia $x^2+y^2=6x+16$.

Solución.

Sea $L_T: y=mx+b$ una ecuación genérica de la recta tangente, como $(2,7) \in L_T$ entonces:

$7=2m+b \Rightarrow b=7-2m$, luego:

$L_T: y=mx+(7-2m)$, que al reemplazar en la circunferencia, se obtiene:

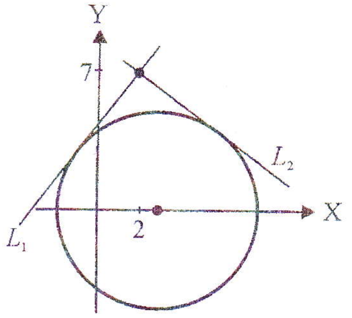
$x^2 + (mx + 7 - 2m)^2 = 6x + 16$

$(1 + m^2)x^2 - 2(2m^2 - 7m + 3)x + (4m^2 - 28m + 33) = 0$

Aquí aplicamos la condición de tangencia: discriminante igual a cero

$$12m^2 - 7m - 12 = 0 \Rightarrow (3m-4)(4m+3) = 0$$

$$\Rightarrow m = 4/3 \vee m = -3/4$$



Así, existen dos rectas que pasando por el punto (2,7) son tangentes a la circunferencia dada, las cuales son:

$$L_{T_1}: y - 7 = \frac{4}{3}(x-2), \quad L_{T_2}: y - 7 = \left(-\frac{3}{4}\right)(x-2)$$

1.2.21 Grafique la relación definida por: $R = \{(x, y) / 8 \le x^2 + y^2 \le 16 \wedge |x| + |y| \le 4\}$.

Solución.

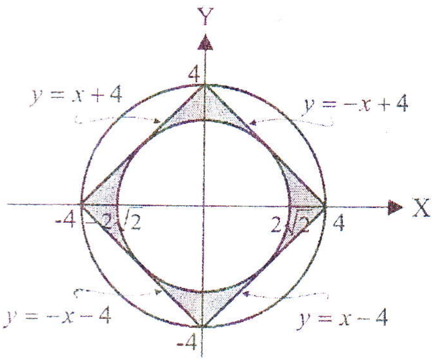
i) $8 \le x^2 + y^2 \le 16$, corresponde a la zona de barrido de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ desde $r^2 = 8$ hasta $r^2 = 16$, es decir, $r = 2\sqrt{2}$ hasta $r = 4$.

ii) $y \ge 0 : |x| \le 4 - y \Rightarrow 0 \le y \le 4 \wedge y - 4 \le x \le 4 - y$

$\Rightarrow 0 \le y \le 4 \wedge (y \le x + 4 \wedge y \le -x + 4)$

$y < 0 : |x| \le 4 + y \Rightarrow -4 \le y < 0 \wedge -y - 4 \le x \le 4 + y$

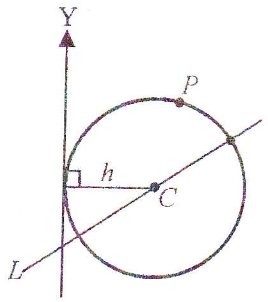
$\Rightarrow -4 \le y < 0 \wedge (y \ge -x - 4 \wedge y \ge x - 4)$



1.2.22 Halle la ecuación de la circunferencia tangente al eje Y, con centro sobre la recta $L: x - y + 3 = 0$, y que pasa por el punto $P = (4,5)$.

Solución.

Como $C = (h,k)$ pertenece a la recta L, entonces $\quad h - k + 3 = 0 \quad$ (1)



Además, $r = d(C,P) = h$, esto implica que

$$\sqrt{(h-4)^2 + (k-5)^2} = h$$

de donde $\quad k^2 - 10k - 8h + 41 = 0 \quad$ (2)

Resolviendo (1) y (2) se tiene

$$k^2 - 18k + 65 = 0 \Rightarrow k = 5 \vee k = 13$$

Si $k = 5$ entonces $h = 2$, por otro lado, si $k = 13$ entonces $h = 10$.

Por lo tanto, existen dos circunferencias que cumplen las hipótesis, sus ecuaciones están dadas por: $\mathscr{C}_1 : (x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$ y $\mathscr{C}_2 : (x-10)^2 + (y-13)^2 = 100$, respectivamente.

1.3 Función

Definición. Una función $f : D \subset \Re \mapsto \Re$, es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento $x \in D$ un único elemento $f(x) \in \Re$.

Observación. Cuando nos referimos a una función, debemos denotarla sólo por f, y no por $f(x)$, debido a que $f(x)$ es sólo un valor particular de la función correspondiente a x.

Dominio y Rango

El dominio de una función es un conjunto formado por todos los $x \in \Re$ tal que $f(x) \in \Re$, y lo representamos por $D_f = \{x \in \Re : f(x) \in \Re\}$.

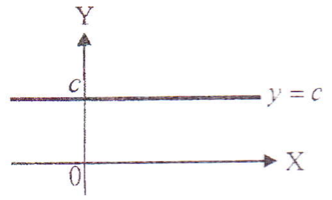
El rango o imagen de una función es el conjunto de todos los $y \in \Re$ tal que $y = f(x)$, donde $x \in D_f$. El rango es representado por $R_f = \{y \in \Re : y = f(x),\ x \in D_f\}$.

Funciones Especiales

1. Función Constante

$f(x) = c, \qquad c$ constante

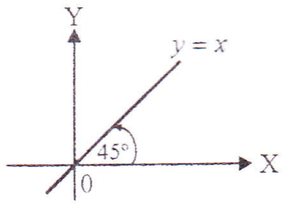
$D_f = \Re, \qquad R_f = \{c\}$



2. Función Identidad

$f(x) = x$

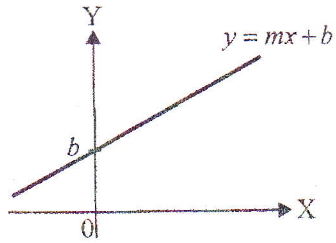
$D_f = \Re, \qquad R_f = \Re$



3. Función Lineal

$f(x) = mx + b, \quad m \neq 0$
donde m, b son constantes

$D_f = \Re, \qquad R_f = \Re$

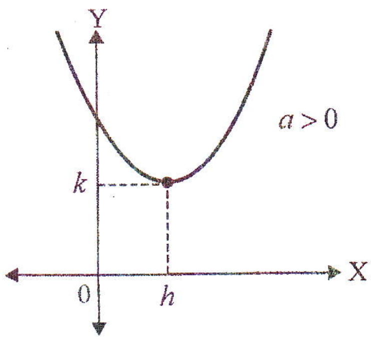


4. Función Cuadrática

$f(x) = ax^2 + bx + c$
donde a, b, c constantes y $a \neq 0$

$D_f = \Re$

Su gráfica es una parábola
Si $a > 0$ se dobla hacia arriba
Si $a < 0$ se dobla hacia abajo



Para graficar una parábola completamos cuadrados, obteniendo la ecuación de la forma $y - k = a(x-h)^2$, así tenemos que el vértice de la parábola es el punto (h, k).

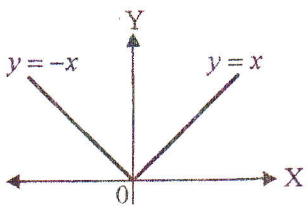
Sea $\Delta = b^2 - 4ac$ el discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, tenemos:

- $\Delta < 0$, No existe intersección entre la gráfica de la parábola con el eje X.
- $\Delta = 0$, Existe intersección de la parábola con el eje X en un sólo punto.
- $\Delta > 0$, Existe intersección de la parábola con el eje X en dos puntos.

5. Función Valor Absoluto

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

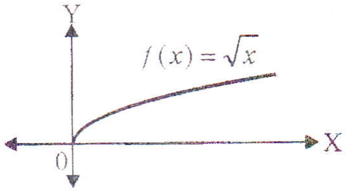
$D_f = \Re, \qquad R_f = [0, +\infty\rangle$



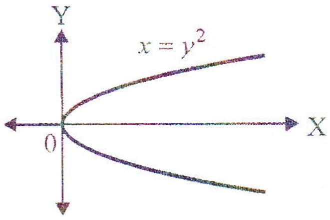
6. Función Raíz Cuadrada

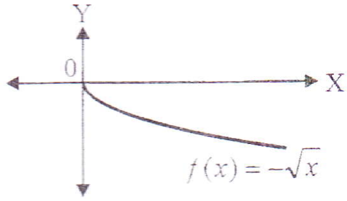
$$f(x)=\sqrt{x}$$

$D_f=\Re_0^+=[0,+\infty\rangle\ ,\quad R_f=\Re_0^+$



Nota: La función raíz cuadrada proviene de la parábola $x=y^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{x}$, la cual no es función, de donde se obtienen dos funciones $f(x)=\sqrt{x}$ y $f(x)=-\sqrt{x}$.



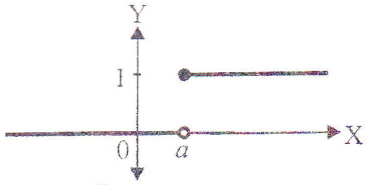


$D_f=\Re_0^+\ ,\quad R_f=\langle-\infty,0]$

7. Función Escalón Unitario

$$f(x)=U(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ 1, & x\geq a\end{cases}$$

donde $D_f=\Re\ ,\qquad R_f=\{0,1\}$ Dom

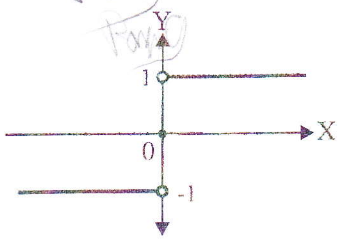


Rang

8. Función Signo

$$f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

$D_f=\Re,\quad R_f=\{-1,0,1\}$

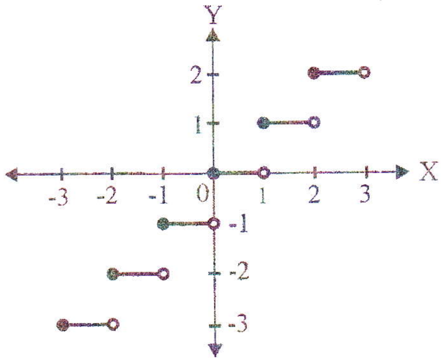


9. Función Máximo Entero (denotado por $\lfloor\ \rfloor$)

$f(x)=\lfloor x\rfloor=n,$ si $n\leq x<n+1\ ,\ n\in\mathbb{Z}$

Es decir

$$f(x)=\lfloor x\rfloor=\begin{cases}\vdots & \vdots\\ -2\ , & -2\leq x<-1\\ -1\ , & -1\leq x<0\\ 0\ , & 0\leq x<1\\ 1\ , & 1\leq x<2\\ 2\ , & 2\leq x<3\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$



$D_f=\Re$ y $R_f=\mathbb{Z}$

Algunas Propiedades de máximo entero:

a) $\lfloor x\rfloor=x \Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$

b) $\lfloor x+n\rfloor=\lfloor x\rfloor+n$

c) $\lfloor x\rfloor\leq n \Leftrightarrow x<n+1$

d) $\lfloor x\rfloor<n \Leftrightarrow x<n$

e) $\lfloor x\rfloor\geq n \Leftrightarrow x\geq n$

f) $\lfloor x\rfloor>n \Leftrightarrow x\geq n+1$

10. Función Racional

Es toda función que viene a ser el cociente de dos polinomios.

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0}\ ,\quad D_f=\Re-\{x\,/\,Q(x)=0\}$$

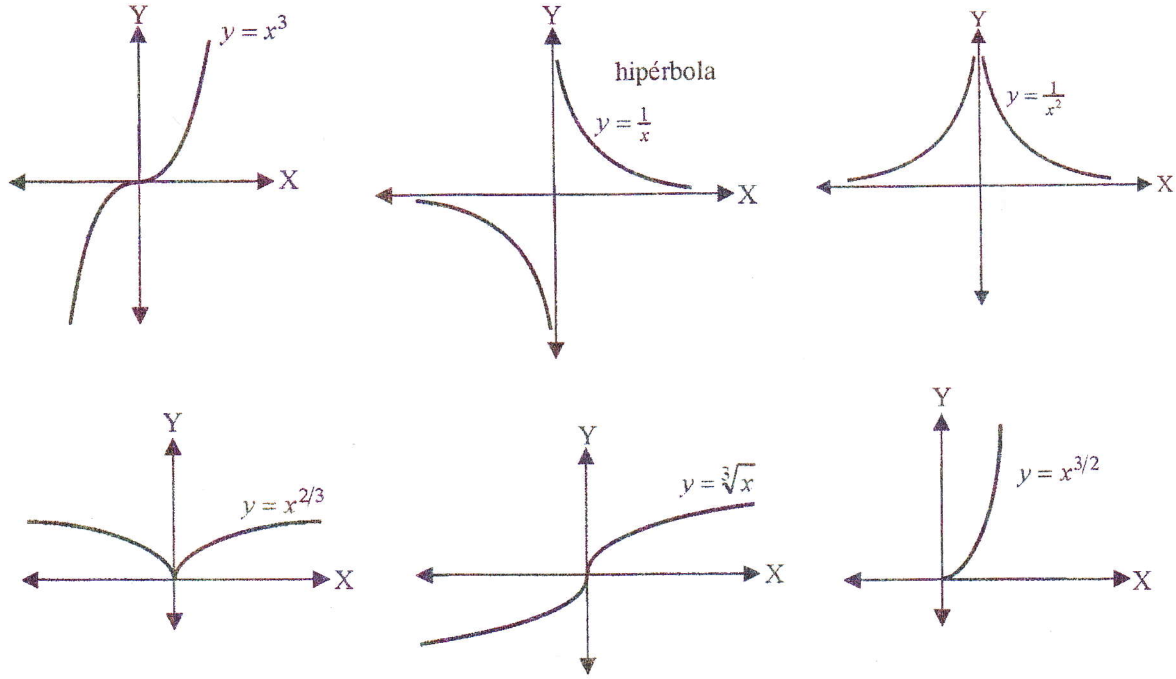
11. Funciones definidas a trozos. No siempre el dominio de una función es un sólo intervalo, en general, funciones que representan fenómenos reales tienen dominios que están compuestos de varios intervalos (trozos).

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in D_{f_1}\\ f_2(x), & x\in D_{f_2}\\ \vdots & \vdots\\ f_n(x), & x\in D_{f_n}\end{cases}$$

donde $D_f=D_{f_1}\cup D_{f_2}\cup\cdots\cup D_{f_n}$ y D_{f_i} son disjuntos dos a dos

$R_f=\bigcup R_{f_i}$

12. Otros gráficos Importantes



Ejercicios Resueltos

1.3.1 Determine el dominio de definición de la función dada.

a) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-5x-14}}$ b) $g(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x^3-5x^2-4x+20}}$

Solución.

a) $x^2-5x-14>0 \;\Rightarrow\; (x-7)(x+2)>0 \;\Rightarrow\; D_f=\langle-\infty,-2\rangle\cup\langle 7,\infty\rangle$.

b) $x^3-5x^2-4x+20=0 \;\Rightarrow\; (x-2)(x^2-3x-10)=0 \;\Rightarrow\; (x-2)(x-5)(x+2)=0 \;\Rightarrow$ $x=2,\ x=5,\ x=-2$. Por lo tanto, $D_g=\Re-\{2,5,-2\}$.

1.3.2 Determine el dominio y rango de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{5x-1}{3x+2}$ b) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ c) $f(x)=\dfrac{2}{x^2+9}$

Solución.

a) $f(x)=\dfrac{5x-1}{3x+2}$

Dominio: $3x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq -2/3$, entonces $D_f=\Re-\{-2/3\}$.

Rango: $y=\dfrac{5x-1}{3x+2}=\dfrac{5}{3}-\dfrac{13}{3(3x+2)}$, (realizando la división entre polinomios)

Como $x\neq -2/3 \Rightarrow 3x\neq -2 \Rightarrow (3x+2)\neq 0 \Rightarrow 3(3x+2)\neq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{3(3x+2)}\neq 0 \Rightarrow \dfrac{13}{3(3x+2)}\neq 0$

$$\Rightarrow \frac{13}{3(3x+2)}\neq 0 \Rightarrow -\frac{13}{3(3x+2)}\neq 0 \Rightarrow \frac{5}{3}-\frac{13}{3(3x+2)}\neq \frac{5}{3} \Rightarrow y\neq \frac{5}{3}$$

luego $R_f=\Re-\{5/3\}$.

Para obtener el rango, por ser el dominio de f casi todo $\Re$, también se puede preceder como sigue,

$$y=\frac{5x-1}{3x+2} \Rightarrow y(3x+2)=5x-1 \Rightarrow x(3y-5)=-1-2y \Rightarrow x=\frac{1+2y}{5-3y}$$

de donde $5-3y\neq 0 \Rightarrow y\neq 5/3$, luego $R_f=\Re-\{5/3\}$.

b) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

Dominio: $1-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1 \Rightarrow x\in[-1,1] \Rightarrow D_f=[-1,1]$

Rango: $x\in[-1,1] \Rightarrow -1\leq x\leq 1 \Rightarrow -1\leq x<0 \vee 0\leq x\leq 1 \Rightarrow 0<x^2\leq 1 \vee 0\leq x^2\leq 1$

$$\Rightarrow 0\leq x^2\leq 1 \Rightarrow -1\leq -x^2\leq 0 \Rightarrow 0\leq 1-x^2\leq 1 \Rightarrow 0\leq\sqrt{1-x^2}\leq 1$$

$$\Rightarrow 0\leq y\leq 1 \Rightarrow y\in[0,1]$$

luego $R_f=[0,1]$

c) $f(x)=\dfrac{2}{x^2+9}$

Dominio: $x^2\geq 0 \Rightarrow x^2+9\geq 9$, es decir x^2+9 es siempre positiva, luego $D_f=\Re$

Rango: $y=\dfrac{2}{x^2+9} \Rightarrow yx^2+9y=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{2-9y}{y}}$, luego

$\dfrac{2-9y}{y}\geq 0 \Rightarrow \dfrac{9y-2}{y}\leq 0 \Rightarrow \begin{cases} y=2/9 \text{ (punto crítico)} \\ y=0 \end{cases}$

entonces $R_f=\langle 0, 2/9]$

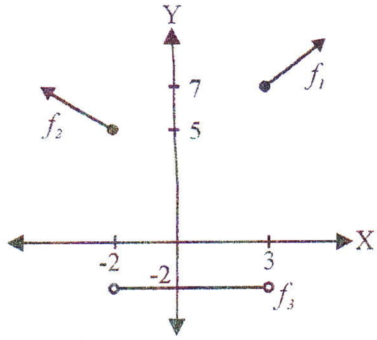
1.3.3 Grafique e indique el dominio y rango de $f(x)=\begin{cases} x+4, & x\geq 3 \\ |x-3|, & x\leq -2 \\ -2, & -2<x<3 \end{cases}$

Solución.

Como $|x-3|=\begin{cases} x-3, & x\geq 3 \\ 3-x, & x<3 \end{cases} \Rightarrow |x-3|=3-x$, para $x\leq -2$.

La función queda:

$$f(x)=\begin{cases} f_1: x+4, & x\geq 3 \\ f_2: 3-x, & x\leq -2 \\ f_3: \ -2, & -2<x<3 \end{cases}$$



Luego, $D_f = D_{f_1}\cup D_{f_2}\cup D_{f_3}=\Re$.

- $x\geq 3 \Rightarrow x+4\geq 7 \Rightarrow R_{f_1}=[7,\infty\rangle$
- $x\leq -2 \Rightarrow -x\geq 2 \Rightarrow 3-x\geq 5 \Rightarrow R_{f_2}=[5,\infty\rangle$
- $-2<x<3 \Rightarrow R_{f_3}=\{-2\}$

de donde $R_f = R_{f_1}\cup R_{f_2}\cup R_{f_3}=[5,\infty\rangle\cup\{-2\}$

1.3.4 Halle el dominio, rango y trace la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^2-6x+5$

b) $f(x)=\sqrt{2x-4}$

c) $f(x)=\lfloor x/2\rfloor$

d) $f(x)=\begin{cases} x^2-4, & x<2 \\ |x-2|, & x\geq 2 \end{cases}$

e) $f(x)=\dfrac{(x-2)+|x-1|}{|x-2|+(x-1)}$

Solución.

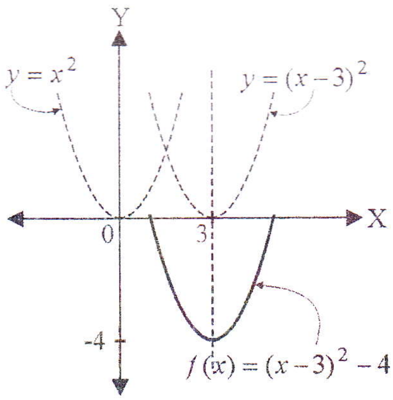
a) Completando cuadrados:

$f(x)=x^2-6x+5 \Rightarrow f(x)=(x-3)^2-4$

Tomando como base la gráfica de la función $y=x^2$ se desplaza $h=3$ $(h>0)$ unidades a la derecha y luego $k=-4$ $(k<0)$ unidades hacia abajo.

Como $a>0$ el punto más bajo de la parábola es el vértice $V=(3,-4)$, entonces :

$D_f=\Re,\quad R_f=[-4,\infty\rangle$



b) $f(x)=\sqrt{2x-4}$

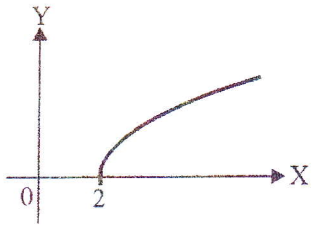
Dominio: $2x-4\geq 0 \Rightarrow x\geq 2 \Rightarrow D_f=[2,\infty\rangle$

Rango: Dado que $y\geq 0,\ \forall x\in D_f \Rightarrow R_f=[0,\infty\rangle$

Elevando al cuadrado f se tiene:

$$y^2=2(x-2)\Rightarrow x-2=\tfrac{1}{2}y^2$$

la cual es una parábola con $V=(2,0)$, luego se construye la rama superior de la parábola encima del eje X $(y\geq 0)$.



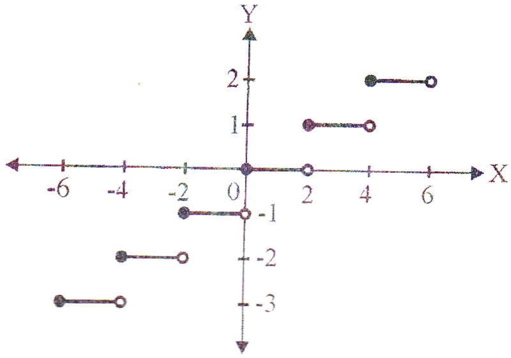
c) $f(x)=\lfloor x/2\rfloor$

Dominio: Si $\lfloor x/2\rfloor=n \Rightarrow n\leq x/2<n+1 \Rightarrow 2n\leq x<2(n+1)$

entonces $D_f=\{x/x\in[2n,2(n+1)\rangle, n\in\mathbb{Z}\}=\Re$.

Rango: Obsérvese que aquí los sub-intervalos del dominio de f son de longitud doble, y como $f(x)=n$ entonces $R_f=\mathbb{Z}$.

$$f(x)=\left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right]=\begin{cases}\vdots & \vdots\\ -2\ , & -4\le x<-2,\ n=-2\\ -1\ , & -2\le x<0,\ n=-1\\ 0\ , & 0\le x<2,\ n=0\\ 1\ , & 2\le x<4,\ n=1\\ 2\ , & 4\le x<6,\ n=2\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$



d) $f(x)=\begin{cases}x^2-4, & x<2\\ |x-2|, & x\ge 2\end{cases}$

Dominio: En esta función el dominio se ha dividido en dos subconjuntos $A=\langle-\infty,2\rangle$ y $B=[2,\infty\rangle$, por ello $D_f=A\cup B=\Re$.

Rango: Sea $f_1(x)=x^2-4$ (parábola con vértice $V=(0,-4)$)

$$x<2\Rightarrow(x<0)\vee(0\le x<2)\Rightarrow(x^2>0)\vee(0\le x^2\le 4)\Rightarrow x^2\ge 0\Rightarrow\ x^2-4\ge-4$$
$$\Rightarrow\ f_1(x)\ge-4\ \Rightarrow\ R_{f_1}=[-4,\infty\rangle$$

Sea

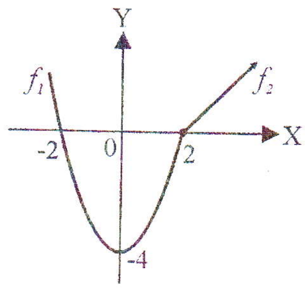
$x\ge 2\Rightarrow x-2\ge 0$

$\Rightarrow\ f_2(x)\ge 0\ \Rightarrow\ R_{f_2}=[0,\infty\rangle$

Finalmente:

$R_f=R_{f_1}\cup R_{f_2}=[-4,\infty\rangle\cup[0,\infty\rangle$

$R_f=[-4,\infty\rangle$



e) $f(x)=\dfrac{(x-2)+|x-1|}{|x-2|+(x-1)}$

Eliminando las barras del valor absoluto utilizando el método de los puntos críticos, que en este caso son: $x=1$ y $x=2$

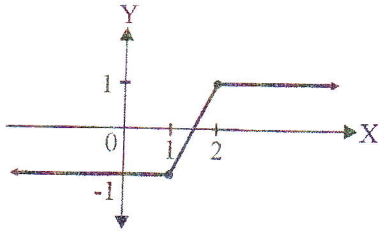
$x<1$	$1\le x<2$	$x\ge 2$
$\lvert x-1\rvert=-(x-1)$	$\lvert x-1\rvert=x-1$	$\lvert x-1\rvert=x-1$
$\lvert x-2\rvert=-(x-2)$	$\lvert x-2\rvert=-(x-2)$	$\lvert x-2\rvert=x-2$

($-\infty$, 1, 2, ∞)

Para $x<1$ $\quad: y=\dfrac{(x-2)-(x-1)}{(2-x)+(x-1)}=-1$

Para $1\le x<2: y=\dfrac{(x-2)+(x-1)}{(2-x)+(x-1)}=2x-3$

Para $x\ge 2$ $\quad: y=\dfrac{(x-2)+(x-1)}{(x-2)+(x-1)}=1$



Luego:

$$f(x)=\begin{cases}-1\ , & x<1\\ 2x-3, & 1\le x<2\\ 1\ , & x\ge 2\end{cases}\qquad\Rightarrow\quad D_f=\Re\ \text{, además } R_{f_1}=\{-1\}\ ,\quad R_{f_3}=\{1\}$$

Para determinar el rango f_2 tenemos: $1 \le x < 2 \Rightarrow 2 \le 2x < 4 \Rightarrow -1 \le 2x-3 < 1$ $\Rightarrow y \in [-1,1\rangle$, luego $R_{f_2} = [-1,1\rangle$

Por tanto: $R_f = \{-1\} \cup [-1,1\rangle \cup \{1\} = [-1,1]$.

1.3.5 Sea la función $f : \Re \mapsto \Re$ definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$. Halle $f(x+h) - f(x)$.

Solución.

$$f(x+h) = 2(x+h)^2 - 3(x+h) + 5 = 2x^2 + 4hx + 2h^2 - 3x - 3h + 5$$

luego

$$f(x+h) - f(x) = \left(2x^2 + 4hx + 2h^2 - 3x - 3h + 5\right) - \left(2x^2 - 3x + 5\right) = 4hx + 2h^2 - 3h$$

1.3.6 Sea $f : \Re \to \Re$ tal que $f(x) = mx + b$, con m y b constantes; si $f(1) = -2$ y $f(3) = 1$, calcule $f(5)$.

Solución.

$f(1) = m + b, \qquad f(3) = 3m + b$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} m + b = -2 \\ 3m + b = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{3}{2}, \qquad b = -\frac{7}{2}$$

de donde $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$. Finalmente $f(5) = \frac{3}{2}(5) - \frac{7}{2} = 4$.

1.3.7 Si $f : \Re \to \Re$ es una función definida por $f(x+2) = 2x^2 + 5x + c$ y $f(-1) = 8$, determine el valor mínimo de f.

Solución.

$f(x+2) = 2x^2 + 5x + c \Rightarrow f(x) = 2(x-2)^2 + 5(x-2) + c$

$f(-1) = 2(-3)^2 + 5(-3) + c = 8 \Rightarrow c = 5$

luego $f(x) = 2(x-2)^2 + 5(x-2) + 5 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 3x + 3$

como $a = 2 > 0$, entonces la parábola se abre hacia arriba, por tanto tiene valor mínimo, el cual se encuentra en el vértice, por lo que procedemos como sigue:

$$y = 2x^2 - 3x + 3 = 2\left(x^2 - \tfrac{3}{2}x\right) + 3 = 2\left(x - \tfrac{3}{4}\right)^2 + \tfrac{15}{8} \Rightarrow y - \tfrac{15}{8} = 2\left(x - \tfrac{3}{4}\right)^2$$

de donde $V = (3/4, 15/8)$. Por lo tanto el valor mínimo es $15/8$.

1.3.8 Sea f una función lineal de pendiente m, e intercepto con el eje Y igual a b, tal que $f(m^2 - 2b) = f(b + 12 - 2m^2)$ y $f(2m + b - 2) = f(m + b + 1)$. Halle la función g si se tiene $g(x+4) - x = f\left(\frac{m+b}{8}\right) + f\left(\frac{m-b}{6}\right)$.

Solución.

Sea la función lineal $f(x) = mx + b$, $m \ne 0$

$$f(m^2 - 2b) = f(b + 12 - 2m^2) \Rightarrow m(m^2 - 2b) + b = m(b + 12 - 2m^2) + b \Rightarrow 3m(m^2 - b - 4) = 0 \quad (*)$$

$$f(2m + b - 2) = f(m + b + 1) \Rightarrow m(2m + b - 2) + b = m(m + b + 1) + b \Rightarrow m^2 - 3m = 0 \Rightarrow m = 3$$

reemplazando m en (*) resulta: $b = 5 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 3x + 5$.

Entonces $f\left(\dfrac{m+b}{8}\right)+f\left(\dfrac{m-b}{6}\right)=f(1)+f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=3(1)+5+3\left(-\dfrac{1}{3}\right)+5=12$

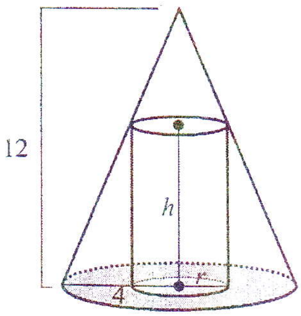
luego $g(x+4)-x=12 \Rightarrow g(x+4)=x+12=(x+4)+8 \Rightarrow g(x)=x+8$.

1.3.9 Un cilindro circular recto de radio r y altura h está inscrito en un cono de altura 12 y radio de la base 4.

a) Exprese h como una función de r.

b) Exprese el volumen V del cilindro como función de r.

Solución.



a) Usando triángulos semejantes:

$$\frac{h}{12}=\frac{4-r}{4} \Leftrightarrow h=12-3r$$

luego $h(r)=12-3r$.

b) $V=\pi r^2 h=\pi r^2(12-3r)=3\pi r^2(4-r)$, además $r>0 \wedge h>0$, es decir:

$r>0 \wedge 12-3r>0 \Rightarrow r>0 \wedge r<4 \Rightarrow r\in\langle 0,4\rangle$

Por tanto: $V(r)=3\pi r^2(4-r)$, con $r\in\langle 0,4\rangle$.

1.3.10 Un hombre que dispone de 160 pies de alambre desea cercar una superficie de forma rectangular. Si uno de los lados no necesita cerco, cuales deben ser las dimensiones para que el área sea máxima?

Solución.

Sean x i y las dimensiones del terreno

Área de la superficie: $A=xy$ (1)

Perímetro por cercar: $2x+y$

$\Rightarrow 2x+y=160 \Rightarrow y=160-2x$ (2)

(2) en (1): $A(x)=(160-2x)x=160x-2x^2$

Además $x>0 \wedge y>0 \Rightarrow 160-2x>0 \Rightarrow x<80$, entonces $0<x<80$

Luego: $A(x)=160x-2x^2$, $x\in\langle 0,80\rangle$.

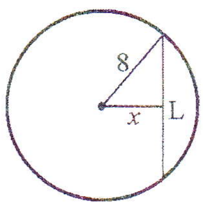
Como la función $A(x)=160x-2x^2$ es una parábola que se abre hacia abajo ($a=-2<0$), entonces existe área máxima y se encuentra en relación al vértice, luego

$y=160x-2x^2=-2(x^2-80x)=-2(x-40)^2+3200 \Rightarrow y-3200=-2(x-40)^2 \Rightarrow V=(40,3200)$

Por tanto $x=40$ pies, de donde $y=160-2x=160-2(40) \Rightarrow y=80$ pies.

1.3.11 Exprese la longitud L de la cuerda de una circunferencia de 8 cm. de radio en función de su distancia x cm. al centro de la misma. Determine el campo de variación de x.

Solución.



Del gráfico tenemos:

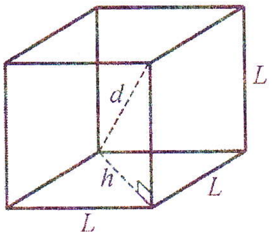
$$\tfrac{1}{2}L=\sqrt{64-x^2} \quad \text{luego} \quad L(x)=2\sqrt{64-x^2}$$

El intervalo de variación de x es $[0,8]$, pues $64-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 64 \Rightarrow -8\leq x\leq 8$, pero $x\geq 0$ (por ser longitud), luego $x\in[0,8]$.

1.3.12 Exprese la longitud de la arista de un cubo como una función de la longitud d de la diagonal del cubo. Luego, exprese el área de la superficie y el volumen del cubo como una función de la longitud de su diagonal.

Solución.

Consideremos el siguiente gráfico



Sea L y d las longitudes del lado y de la diagonal del cubo, respectivamente. Por Pitágoras vemos que $h^2 = L^2 + L^2 = 2L^2 \Rightarrow h = L\sqrt{2}$, por ser L y h no negativos. Además $d^2 = h^2 + L^2 \Rightarrow d = \sqrt{h^2 + L^2} = \sqrt{2L^2 + L^2} = \sqrt{3L^2} = L\sqrt{3}$. Es decir, el lado del cubo como función de la diagonal resulta de:

$$d = L\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad L = d/\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad L(d) = d/\sqrt{3}.$$

Por otro lado, el área total de la superficie del cubo está dada por

$$A = 6L^2 = 6\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad A(d) = 6\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2.$$

y como el volumen del cubo es $V = L^3$, tenemos:

$$A = L^3 = \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^3 \Rightarrow A(d) = \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^3, \quad d \geq 0.$$

1.3.13 Se desea elaborar un pequeño recipiente cilíndrico sin tapa que tenga volumen de $24\pi \text{ cm}^3$. El material que se usa para la base cuesta tres veces más que el que se emplea para la parte cilíndrica. Exprese el costo del material de fabricación en función al radio del cilindro.

Solución.

Volumen del cilindro: $V = \pi r^2 h = 24\pi \Rightarrow h = \dfrac{24}{r^2}$

Costo total del cilindro = Costo de la base + Costo de la parte cilíndrica, o $C = C_1 + C_2$.

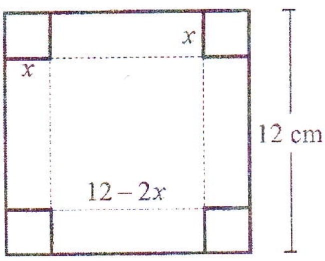
Sea p el costo por centímetro cuadrado del material que se emplea para la parte curva.

$$C_1 = 3p\pi r^2 \quad \wedge \quad C_2 = p(2\pi rh = 2p\pi r\left(\frac{24}{r^2}\right) = 48p\pi\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\Rightarrow C = 3p\pi r^2 + 48p\pi\left(\frac{1}{r}\right) = 3p\pi\left(r^2 + \frac{16}{r}\right), \quad r > 0 \qquad \Rightarrow \quad C(r) = 3p\pi\left(r^2 + \frac{16}{r}\right), \quad r > 0$$

1.3.14 En cada uno de los vértices de una placa cuadrada de estaño de 12 cm. de lado, se cortan pequeños cuadrados de x cm. de lado, doblándose a continuación los bordes hacia arriba para formar una caja abierta. Exprese el volumen V (cm^3) en función de x, y determine el campo de variación de cada una de las variables.

Solución.



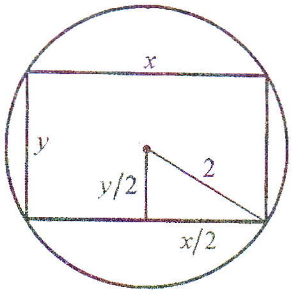
La base de la caja es un cuadrado de $(12 - 2x)$ cm. de lado y su altura es x cm.

Volumen: $V = x(12 - 2x)^2 = 4x(6 - x)^2$

Campo de variación de x: $0 < x < 6$, pues $(x > 0 \wedge 12 - 2x > 0) \Rightarrow (x > 0 \wedge x < 6)$

1.3.15 Un rectángulo con base de longitud x está inscrito en un círculo de radio 2. Exprese el área del rectángulo como una función de x.

Solución.



Por el teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=2^2 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=4$$

$$x^2+y^2=16 \Rightarrow y=\pm\sqrt{16-x^2}$$

Base del rectángulo: $x>0$

Altura del rectángulo: $y>0$, de donde

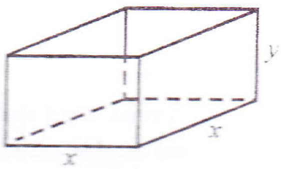
$y=\sqrt{16-x^2}$, para $0<x<4$.

Área del rectángulo: $A=(\text{base})\times(\text{altura})=xy=x\sqrt{16-x^2}$, $0<x<4$

Por tanto, $A(x)=x\sqrt{16-x^2}$, $0<x<4$.

1.3.16 Suponga que una caja rectangular tiene un volumen de 324 cm^3 y una base cuadrada cuyo lado es x cm. El material de la base de la caja cuesta 2 centavos el centímetro cuadrado y el material para la tapa y los cuatro lados cuestan 1 centavo el centímetro cuadrado. Exprese el costo total de la caja como una función de x.

Solución.



Volumen de la caja $V=324\text{cm}^3$

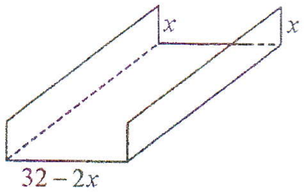
$$V=x^2y \Leftrightarrow y=\frac{324}{x^2},\quad x>0$$

Costo total de la caja $c(x)=?$

$$c(x)=2x^2+x^2+4x\left(\frac{324}{x^2}\right),\quad x>0 \Rightarrow c(x)=3x^2+\frac{1296}{x},\quad x>0.$$

1.3.17 Una larga lámina rectangular de metal de 32 cm. de ancho, se va a convertir en una canaleta para lluvia doblando dos lados hacia arriba, de manera que queden perpendiculares al resto de la lámina. Exprese la capacidad de la canaleta en función a la longitud del doblado. ¿De cuántos centímetros debe ser el doblado para dar a la canaleta la capacidad máxima?

Solución.



x: ancho de la parte doblada a cada lado.

$32-2x$: ancho de la canaleta

La capacidad de la canaleta será máxima cuando el área del rectángulo con lados de longitud x y $32-2x$ lo sea, luego:

$$f(x)=A(x)=x(32-2x)=32x-2x^2,\ x\in[0,16]$$

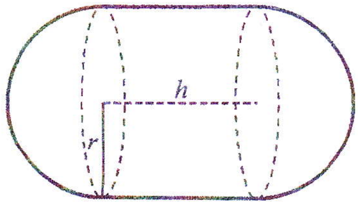
La función obtenida es una parábola, entonces:

$$y=32x-2x^2=-2(x^2-16x)=-2\left[(x-8)^2-64\right]=-2(x-8)^2+128 \Rightarrow y-128=-2(x-8)^2$$

Por lo tanto, se obtendrá capacidad máxima cuando el área de dicho rectángulo sea 128 cm^2 y se logra cuando el doblado es $x=8$ cm.

1.3.18 Se desea construir un tanque de acero con forma de un cilindro circular recto y semiesferas en los extremos para almacenar gas propano. El costo por pie cuadrado de los extremos es el doble del de la parte cilíndrica. Exprese el costo del tanque en función de su radio, si la capacidad deseada es de 10π pies^3.

Solución.



Sea a el costo por pie cuadrado de la parte cilíndrica.

Costo total = Costo (parte cilíndrica)
+ Costo (parte esférica)

$$C = C_1 + C_2 \Rightarrow C = a(2\pi rh) + 2a(4\pi r^2) = 2a\pi(rh + 4r^2)$$

Además $V = 10\pi \Rightarrow \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 = 10\pi \Rightarrow h = \frac{30-4r^3}{3r^2}$, entonces

$$C(r) = 2a\pi\left(r\cdot\frac{30-4r^3}{3r^2} + 4r^2\right) = 4a\pi\left(\frac{5}{r} - \frac{2}{3}r^2 + 2r^2\right) = 4a\pi\left(\frac{5}{r} + \frac{4}{3}r^2\right)$$

Obteniendo el dominio de la función costo:

$$r \geq 0 \wedge h \geq 0 \Rightarrow \frac{30-4r^3}{3r^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{2(2r^3-15)}{3r^2} \leq 0 \Rightarrow r^3 = \frac{15}{2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{15}{2}}$$

$r \in \left(0, \sqrt[3]{15/2}\right]$

$$\therefore\ C(r) = 4a\pi\left(\frac{5}{r} + \frac{4}{3}r^2\right),\quad r \in \left(0, \sqrt[3]{\frac{15}{2}}\right].$$

1.4 Álgebra y Composición de Funciones

Álgebra de Funciones

Si f y g son funciones con dominio D_f y D_g, respectivamente, entonces para cada $x \in D_f \cap D_g \neq \varnothing$, es posible definir:

- $(c\cdot f)(x) = c\cdot f(x)$, c constante $\quad D_{c\cdot f} = D_f$
- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $\quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ $\quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$
- $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$ $\quad D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad D_{f/g} = (D_f \cap D_g) - \{x / g(x) = 0\}$

Composición de funciones

Si f y g son funciones, la composición de f y g, denotada por $f \circ g$, es la función definida mediante la siguiente regla de correspondencia

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \qquad D_{f\circ g} = \{x / x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}.$$

Observación. No necesariamente $f \circ g = g \circ f$.

Función Par e Impar

Funciones pares. Una función f es par, si se cumple:

i) $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

ii) $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$

Funciones impares. Una función f es impar, si cumple:

i) $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

ii) $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$

Nota:

- La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje Y, es decir, el punto (x, y) está en la gráfica, si y sólo si, el punto $(-x, y)$ también lo está.
- La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen, es decir, el punto (x, y) está en la gráfica, si y sólo si, el punto $(-x, -y)$ también lo está.

En ambos casos, una vez conocida la gráfica a un lado del eje Y, ya es posible conocer toda la gráfica.

Función periódica. Una función f es periódica si existe un número $p \neq 0$, tal que

i) $x \in D_f \Rightarrow (x+p) \in D_f$

ii) $f(x+p) = f(x)$, $\forall x \in D_f$.

Nota:

- Al menor número $p > 0$ se le llama período de la función f.
- Geométricamente, la gráfica de una función periódica tiene la propiedad de ser repetitiva en cada intervalo, es decir, se repite en forma idéntica cada p unidades.

Ejercicios Resueltos

1.4.1 Verifique que $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es un entero} \\ -1, & \text{si } x \text{ no es un entero} \end{cases}$

Solución.

Para esto usamos la siguiente definición

$$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1, \quad n \in \mathbb{Z}$$

note que $-(n+1) < -x \leq -n$.

Realizando la suma de dos funciones se presentan dos casos:

- Si x es entero, $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = n - n = 0$
- si x no es entero, entonces $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = n - (n+1) = -1$

Por tanto, $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es un entero} \\ -1, & \text{si } x \text{ no es un entero} \end{cases}$

1.4.2 Halle el dominio, rango y gráfica de:

a) $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor + 1$

b) $\sqrt{\lfloor x \rfloor - x}$

Solución.

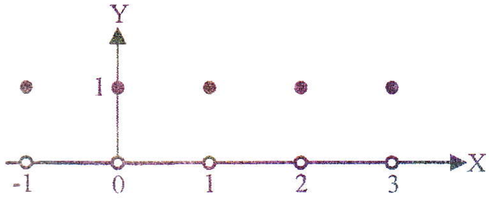
a) $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor + 1$, $D_f = \Re$, para hallar el rango usaremos el ejercicio 1.4.1:

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es un entero} \\ -1, & \text{si } x \text{ no es un entero} \end{cases}$$

Entonces sumando la función constante $c(x) = 1$, tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es un entero} \\ 0, & \text{si } x \text{ no es un entero} \end{cases}$$

de donde $R_f = \{0,1\}$



b) $f(x) = \sqrt{\lfloor x \rfloor - x}$, primeramente hallamos el D_f:

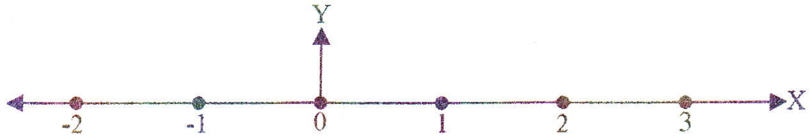
$$\lfloor x \rfloor - x \geq 0 \qquad (1)$$

Como $\lfloor x \rfloor = n \Rightarrow n \leq x < n+1 \Rightarrow -n-1 < -x \leq -n$, de aquí

$$-1 < \lfloor x \rfloor - x \leq 0 \qquad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos $\lfloor x \rfloor - x = 0$, lo cual ocurre sólo si $x \in \mathbb{Z}$, por tanto $D_f = \mathbb{Z}$.

Rango: Como $f(x) = \sqrt{\lfloor x \rfloor - x} = 0$, concluimos que $R_f = \{0\}$



1.4.3 Sean $f(x) = 4x - x^2 - 2$, $x \in [0,4]$ y $g(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 2 \\ 3, & 2 \leq x < 6 \end{cases}$. Halle $(f+g)(x)$.

Solución.

Vemos que la función g es seccionada con $D_{g_1} = [-1,2\rangle$ y $D_{g_2} = [2,6\rangle$, además $D_f = [0,4]$, entonces $D_f \cap D_{g_1} = [0,2\rangle$ y $D_f \cap D_{g_2} = [2,4]$. Luego,

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 4x - x^2 - 1, & x \in [0,2\rangle \\ 4x - x^2 + 1, & x \in [2,4] \end{cases}$$

1.4.4 Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{\dfrac{6-x}{x+4}}$, $x \in D_f$, $g(x) = \lfloor \sqrt{x} - 1 \rfloor$, $x \in D_g = [0,9\rangle$, halle $f+g$ y f/g con sus respectivos dominios.

Solución.

- Para f: determinamos su dominio

$$\frac{6-x}{x+4} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-6}{x+4} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -4 \end{cases}$$

$D_f = \langle -4, 6]$

- Analizamos $g(x) = \lfloor \sqrt{x} - 1 \rfloor$

  Por definición:

$$\lfloor \sqrt{x}-1 \rfloor = n \Leftrightarrow n \le \sqrt{x}-1 < n+1 \Leftrightarrow n+1 \le \sqrt{x} < n+2 \Leftrightarrow (n+1)^2 \le x < (n+2)^2$$

Entonces $g(x) = \lfloor \sqrt{x}-1 \rfloor$, $(n+1)^2 \le x < (n+2)^2$, es decir

$$g(x) = \begin{cases} -1, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x < 4 \\ 1, & 4 \le x < 9 \end{cases}$$

- Realizaremos las operaciones pedidas

  Vemos que $D_f = \langle -4,6]$, $D_{g_1} = [0,1\rangle$, $D_{g_2} = [1,4\rangle$, $D_{g_3} = [4,9\rangle$,

  entonces $D_f \cap D_{g_1} = [0,1\rangle$, $D_f \cap D_{g_2} = [1,4\rangle$ y $D_f \cap D_{g_3} = [4,6]$; luego

$$(f+g)(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{6-x}{x+4}}-1, & x \in [0,1\rangle \\ \sqrt{\dfrac{6-x}{x+4}}, & x \in [1,4\rangle \\ \sqrt{\dfrac{6-x}{x+4}}+1, & x \in [4,6\rangle \end{cases} \quad \text{y} \quad (f/g)(x) = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{6-x}{x+4}}, & x \in [0,1\rangle \\ \sqrt{\dfrac{6-x}{x+4}}, & x \in [4,6\rangle \end{cases}$$

$$g(x) \ne 0$$

  Además $D_{f+g} = [0,6]$ y $D_{f/g} = [0,1\rangle \cup [4,6\rangle$.

1.4.5 Para $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x$, halle $(f \circ g)(x)$ y $(f \circ g)(2)$.

Solución.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = (3x)^2 = 9x^2$ o $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (3x)^2 = 9x^2$

$(f \circ g)(2) = 9(2)^2 = 36$

1.4.6 Si $f(x) = \sqrt{2x-1}$ y $g(x) = \sqrt{4-x^2}$, determine las funciones $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, g/f, $f \circ g$ y defina sus respectivos dominios.

Solución.

- Para ver si existen las operaciones de $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ y g/f determinamos $D_f \cap D_g$.

  D_f: $2x-1 \ge 0 \Rightarrow x \ge 1/2 \Rightarrow x \in [1/2,\infty\rangle$ y

  D_g: $4-x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 \le 4 \Rightarrow -2 \le x \le 2 \Rightarrow x \in [-2,2]$, entonces $D_f \cap D_g = [1/2,2]$, luego

  $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \sqrt{2x-1}+\sqrt{4-x^2}$, $x \in [1/2,2]$

  $(f-g)(x) = f(x)-g(x) = \sqrt{2x-1}-\sqrt{4-x^2}$, $x \in [1/2,2]$

  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{4-x^2} = \sqrt{x^2-2x^3+8x-4}$, $x \in [1/2,2]$

  $(g/f)(x) = g(x)/f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{\dfrac{4-x^2}{2x-1}}$, $x \in \langle 1/2,2]$ pues $f(x) \ne 0$.

- Para ver si existe $f \circ g$ determinamos $D_{f \circ g}$

  $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} \Rightarrow x \in [-2,2]$, $\sqrt{4-x^2} \in [1/2,\infty\rangle$

  $\sqrt{4-x^2} \in [1/2,\infty\rangle \Rightarrow \sqrt{4-x^2} \ge 1/2 \Rightarrow 4-x^2 \ge 1/4 \Rightarrow x^2 \le 15/4 \Rightarrow -\sqrt{15}/2 \le x \le \sqrt{15}/2$

$\Rightarrow x \in [-2,2] \wedge x \in \left[-\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right] \Rightarrow D_{f\circ g} = \left[-\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right]$, luego

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{4-x^2}\right) = \sqrt{2\sqrt{4-x^2}-1}, \quad x \in \left[-\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right].$

1.4.7 Halle $f\circ g$ y $g\circ f$ si $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x\in[0,2] \\ x \ , & x\in\langle 3,5] \end{cases}$ y $g(x)=\sqrt{x}$

Solución.

- Determinamos primero $D_{f\circ g}$: Vemos que $D_{f_1} = [0,2]$, $D_{f_2} = \langle 3,5]$, $D_g = [0,\infty\rangle$

$$D_{f_1\circ g} = \{x\in D_g,\ g(x)\in D_{f_1}\} \Rightarrow x\in[0,\infty\rangle \wedge \sqrt{x}\in[0,2] \Rightarrow x\in[0,\infty\rangle \wedge x\in[0,4]$$
$$\Rightarrow x\in\left([0,\infty\rangle \cap [0,4]\right) \Rightarrow D_{f_1\circ g} = [0,4]$$
$$D_{f_2\circ g} = \{x\in D_g,\ g(x)\in D_{f_2}\} \Rightarrow x\in[0,\infty\rangle \wedge \sqrt{x}\in\langle 3,5] \Rightarrow x\in[0,\infty\rangle \wedge x\in\langle 9,25]$$
$$\Rightarrow x\in\left([0,\infty\rangle \cap \langle 9,25]\right) \Rightarrow D_{f_1\circ g} = \langle 9,25]$$

entonces $(f_1\circ g)(x) = f_1(g(x)) = f_1(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}-1$ y $(f_2\circ g)(x) = f_2(g(x)) = f_2(\sqrt{x}) = \sqrt{x}$

luego $(f\circ g)(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}-1, & x\in[0,4] \\ \sqrt{x} \ , & x\in\langle 9,25] \end{cases}$

- Para obtener $g\circ f$, procedemos como sigue

$$D_{g\circ f_1} = \{x\in D_{f_1},\ f_1(x)\in D_g\} \Rightarrow x\in[0,2] \wedge (2x-1)\in[0,\infty\rangle \Rightarrow x\in[0,2] \wedge 2x\in[1,\infty\rangle$$
$$\Rightarrow x\in[0,2] \wedge x\in[1/2,\infty\rangle \Rightarrow x\in\left([0,2]\cap[1/2,\infty\rangle\right) \Rightarrow D_{g\circ f_1} = [1/2,2]$$
$$D_{g\circ f_2} = \{x\in D_{f_2},\ f_2(x)\in D_g\} \Rightarrow x\in\langle 3,5] \wedge x\in[0,\infty\rangle \Rightarrow x\in\left(\langle 3,5]\cap[0,\infty\rangle\right) \Rightarrow D_{g\circ f_2} = \langle 3,5]$$

entonces $(g\circ f_1)(x) = g(f_1(x)) = g(2x-1) = \sqrt{2x-1}$ y $(g\circ f_2)(x) = g(f_2(x)) = g(x) = \sqrt{x}$

luego $(g\circ f)(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-1}, & x\in[1/2,2] \\ \sqrt{x} \ , & x\in\langle 3,5] \end{cases}$

1.4.8 Si $f(x)=x^2$, calcule $f(x+1)-2f(x)+f(x-1)$, $\forall x$.

Solución.

$f(x+1) = (x+1)^2 = x^2+2x+1$ y $f(x-1) = (x-1)^2 = x^2-2x+1$, luego

$$f(x+1)-2f(x)+f(x-1) = x^2+2x+1-2(x^2)+x^2-2x+1 = 2.$$

1.4.9 Sean $f(x)=ax+2$, $g(x)=x-b$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, si $f\circ g = g\circ f$, halle $b(a-1)$.

Solución.

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-b) = a(x-b)+2 = ax-ab+2$$
$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(ax+2) = ax+2-b$$

luego $(f\circ g)(x) = (g\circ f)(x) \Rightarrow ax-ab+2 = ax+2-b \Rightarrow ab-b=0 \Rightarrow b(a-1)=0$

1.4.10 Si $(g\circ f)(x) = x+2$, halle $g(x)$ tal que $f(x) = x^3+6x^2+12x+8$.

Solución.

Como $f(x)=(x+2)^3$ entonces $x+2=\sqrt[3]{f(x)}$, luego $g(f(x))=x+2=\sqrt[3]{f(x)}$ haciendo $u=f(x)\Rightarrow g(u)=\sqrt[3]{u}$, regresando a la variable x tenemos: $g(x)=\sqrt[3]{x}$.

1.4.11 Si $g(2-x)=\sqrt{x-1}$ y $(g\circ f)(x)=2x-1$, halle la función $f(x)$.

Solución.

En $g(2-x)=\sqrt{x-1}$ hacemos $z=2-x\Rightarrow x=2-z$ de donde $g(z)=\sqrt{(2-z)-1}=\sqrt{1-z}$

Cambiando z por x obtenemos $g(x)=\sqrt{1-x}$. Luego

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{1-f(x)}=2x-1\Rightarrow 1-f(x)=4x^2-4x+1\Rightarrow f(x)=4x(1-x)$$

con la condición que $2x-1\geq 0\Rightarrow x\geq 1/2$.

Por tanto $f(x)=4x(1-x)$, $x\geq 1/2$.

1.4.12 Si $f(x-2)=\dfrac{2}{x-3}$, halle el valor de x de modo que $(f\circ f)(2/x)=5$.

Solución.

En $f(x-2)=\dfrac{2}{x-3}$ sea $z=x-2\Rightarrow x=z+2$, entonces $f(z)=\dfrac{2}{(z+2)-3}=\dfrac{2}{z-1}$

Cambiando de variable $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$, luego

$$(f\circ f)\left(\frac{2}{x}\right)=f\left(f\left(\frac{2}{x}\right)\right)=f\left(\frac{2}{\frac{2}{x}-1}\right)=f\left(\frac{2x}{2-x}\right)=\frac{2}{\frac{2x}{2-x}-1}=\frac{2(2-x)}{2x-(2-x)}=\frac{4-2x}{3x-2}=5$$

$$\Rightarrow 4-2x=15x-10\Rightarrow x=14/17$$

1.4.13 Si f es una función de variable real definida por: $f(x)=\sqrt{x+\lfloor -x\rfloor}+x\lfloor x\rfloor$, demuestre que $-x\in D_f$ y $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in D_f$.

Demostración.

En efecto, siendo f una función de variable real, entonces

$$\exists f \Leftrightarrow x+\lfloor -x\rfloor\geq 0\Leftrightarrow \lfloor -x\rfloor\geq -x,\ \forall x\in\mathbb{Z} \qquad (1)$$

pero $\lfloor x\rfloor\leq x\leq\lfloor x\rfloor+1$, $\forall x\in\Re \Rightarrow \lfloor -x\rfloor\leq -x, \forall x\in\Re$ (2)

de (1) y (2) se sigue que $\lfloor -x\rfloor=-x\Leftrightarrow -x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=-(-x)\in\mathbb{Z}$

luego si $\lfloor x\rfloor=x\Rightarrow D_f=\mathbb{Z}$. Entonces f: $f(x)=\sqrt{x+(-x)}+x(x)=x^2$

por tanto $\forall x\in D_f=\mathbb{Z}$, $-x\in\mathbb{Z}$ y $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$

1.4.14 Determine si la función f dada, es par o impar.

a) $f(x)=3x^2-x^4$

b) $f(x)=x^3-x$

c) $f(x)=\sqrt[3]{x(1+|x|)}$

d) $f(x)=|x^3+2x|$, $x\in\langle -5,5\rangle$

Solución.

a) Notemos que $D_f=\Re$, entonces cumple las siguientes dos condiciones:

i) $x \in \Re \;\Rightarrow\; -x \in \Re$

ii) $f(-x) = f(x)$, $\forall\, x \in D_f$ pues $f(-x) = 3(-x)^2 - (-x)^4 = 3x^2 - x^4 = f(x)$

Por tanto, f es par.

b) Vemos que $D_f = \Re$, además $f(x) = x^3 - x$ cumple las siguientes condiciones:

i) $x \in \Re \;\Rightarrow\; -x \in \Re$

ii) $f(-x) = -f(x)$, $\forall\, x \in D_f$ pues $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$

Por tanto, f es impar.

c) Notemos que $D_f = \Re$, además $f(x) = \sqrt[3]{x(1+|x|)}$ cumple con:

i) $x \in \Re \;\Rightarrow\; -x \in \Re$

ii) $f(-x) = -f(x)$, $\forall\, x \in D_f$ pues $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)(1+|-x|)} = -\sqrt[3]{x(1+|x|)} = -f(x)$

Por tanto, f es impar.

d) Analizamos $f(x) = \left|x^3 + 2x\right|$, sabiendo que $D_f = \langle -5,5 \rangle$

i) $x \in D_f = \langle -5,5\rangle \;\Rightarrow\; -5 < x < 5 \;\Rightarrow\; 5 > -x > -5 \;\Rightarrow\; -x \in \langle -5,5\rangle = D_f$

ii) $f(-x) = \left|(-x)^3 + 2(-x)\right| = \left|-x^3 - 2x\right| = |-1|\left|x^3 + 2x\right| = \left|x^3 + 2x\right| = f(x)$

Por tanto, f es par.

1.4.15 Si $f(x) = x^2 + x + 1$, $h(x) = f(x) + f(-x)$, $g(x) = f(x) - f(-x)$; determine ¿cuál de las funciones h y g, es par y cuál es impar?

Solución.

- $h(x) = f(x) + f(-x) = x^2 + x + 1 + \left((-x)^2 + (-x) + 1\right) = x^2 + x + 1 + x^2 - x + 1 = 2x^2 + 2$

  Como $D_h = \Re$: $x \in D_h \Rightarrow -x \in D_h$ y $h(-x) = 2(-x)^2 + 2 = 2x^2 + 2 = h(x)$, entonces h es par.

- $g(x) = f(x) - f(-x) = x^2 + x + 1 - \left((-x)^2 + (-x) + 1\right) = x^2 + x + 1 - x^2 + x - 1 = 2x$

  Como $D_g = \Re$: $x \in D_g \Rightarrow -x \in D_g$ y $g(-x) = 2(-x) = -2x = -g(x)$, entonces g es impar.

1.4.16 Pruebe que la función $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ es periódica, halle y construya su gráfica.

Solución.

a) Dado que $D_f = \Re$, entonces

i) $x \in \Re \;\Rightarrow\; x + p \in \Re$

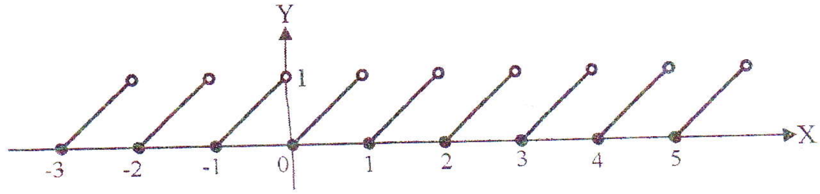
ii) $f(x+p) = x + p - \lfloor x + p \rfloor$

Supongamos que existe un número $p \neq 0$ tal que $f(x+p) = f(x)$, es decir, $x + p - \lfloor x+p \rfloor = x - \lfloor x \rfloor$, entonces $p = \lfloor x+p \rfloor - \lfloor x \rfloor$. Como la diferencia de dos números enteros es un número entero, se sigue que $p \in \mathbb{Z}$. Además, por propiedad de mayor entero $\lfloor x+p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$.

Luego, en (ii): $f(x+p) = x + p - \lfloor x+p \rfloor = x + p - \lfloor x \rfloor - p = x - \lfloor x \rfloor = f(x)$

Por lo tanto, f es una función periódica.

b) Si $p \in \mathbb{Z}$, con $p > 0$, entonces $p = \min\{1,2,3,..\} = 1$ (longitud del intervalo).



1.4.17 Demuestre que la función $f(x) = \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ es periódica.

Solución.

Vemos que $D_f = \Re$, sea $p \neq 0$ el período de f, $p \in \mathbb{Z}$

i) $x \in D_f = \Re \Rightarrow (x+p) \in \Re = D_f$

ii) $f(x+p) = \lfloor 2(x+p) \rfloor - 2\lfloor x+p \rfloor = \lfloor 2x+2p \rfloor - 2(\lfloor x \rfloor + p) = \lfloor 2x \rfloor + 2p - 2\lfloor x \rfloor - 2p$

$= \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = f(x)$

1.5 Función Inyectiva y Sobreyectiva

Función Inyectiva. Una función f es inyectiva si para todo $x_1, x_2 \in D_f$ se tiene:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Equivalentemente, f es inyectiva si para cualquier $x_1, x_2 \in D_f$ con $x_1 \neq x_2$ se tiene $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Función Sobreyectiva. Una función $f : A \to B$ es sobreyectiva, si

$$\forall\, y \in B, \exists x \in A \text{ tal que } y = f(x)$$

En otras palabras, $f : A \to B$ es sobreyectiva si y sólo si $R_f = B$.

Función Biyectiva. Una función f es biyectiva si ésta es inyectiva y sobreyectiva.

Función Inversa

Si $f : A \to B$ es una función inyectiva, entonces existe la función inversa de f, denotada por f^{-1}, donde $f^{-1} : B \to A$, definida por

$$f^{-1}(y) = x \text{ si y sólo si } f(x) = y$$

Es decir, si f es una función inyectiva y $f(x) = y$, entonces cuando resolvemos la ecuación anterior para x en términos de y, obtenemos la función inversa de f: $x = f^{-1}(y)$. Tener en cuenta que: $D_{f^{-1}} = R_f$ y $R_{f^{-1}} = D_f$.

Propiedades

Algunas propiedades importantes de la función inversa son:

- $(f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in D_f$
- $(f \circ f^{-1})(y) = y, \quad \forall y \in D_{f^{-1}}$
- $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$
- $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$

Ejercicios Resueltos

1.5.1 Sea $A=\{a,b,c,d,e\}$ y B el conjunto de las letras del alfabeto. Definidas las funciones f,g y h de A en B, por:

i) $f(a)=r$, $f(b)=a$, $f(c)=z$, $f(d)=r$, $f(e)=e$

ii) $g(a)=a$, $g(b)=c$, $g(c)=e$, $g(d)=r$, $g(e)=s$

iii) $h(a)=z$, $h(b)=y$, $h(c)=x$, $h(d)=y$, $h(e)=z$

Determine si son o no inyectivas.

Solución.

Téngase en cuenta que una función es inyectiva si al considerar distintos elementos del dominio estos tienen distintas imágenes.

i) f no es inyectiva, pues asigna r tanto a a como a d, es decir, $f(a)=f(d)=r$.

ii) g es inyectiva.

iii) h no es inyectiva, porque $h(a)=h(e)=z$.

1.5.2 Determine si la función f definida por $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$, $x\neq -2$, es inyectiva.

Solución.

Vemos que $D_f=\Re-\{-2\}$.

Supongamos que f es inyectiva, entonces por definición tenemos que dados $x_1,x_2\in D_f$ se tiene $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$, es decir,

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \frac{x_1-2}{x_1+2}=\frac{x_2-2}{x_2+2}\Rightarrow x_1x_2+2x_1-2x_2=x_1x_2-2x_1+2x_2\Rightarrow 4x_1=4x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

luego $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$, $x\neq -2$ es inyectiva.

1.5.3 Demuestre que la función $f(x)=1-\sqrt{x^2-4x-5}$, $x\leq -1$ es inyectiva.

Solución.

Por completación de cuadrados $f(x)=1-\sqrt{x^2-4x-5}=1-\sqrt{(x-2)^2-9}$; Entonces

$$\forall\ x_1,x_2\in D_f=\langle-\infty,-1]\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 1-\sqrt{(x_1-2)^2-9}=1-\sqrt{(x_2-2)^2-9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_1-2)^2-9}=\sqrt{(x_2-2)^2-9}\Rightarrow (x_1-2)^2-9=(x_2-2)^2-9$$

$$\Rightarrow (x_1-2)^2=(x_2-2)^2\Rightarrow |x_1-2|=|x_2-2|$$

Como $\forall\ x_1,x_2\in\langle-\infty,-1]\Rightarrow x_1\leq -1\wedge x_2\leq -1\Rightarrow x_1-2\leq -3<0\wedge x_2-2\leq -3<0$

$$\Rightarrow |x_1-2|=2-x_1\wedge |x_2-2|=2-x_2$$

luego $2-x_1=2-x_2\Rightarrow -x_1=-x_2\Rightarrow x_1=x_2$, $\forall x_1,x_2\in D_f$; $\therefore f$ es inyectiva.

1.5.4 Halle el intervalo más amplio D en que la fórmula $f(x)=x^2$ define una función inyectiva.

Solución.

Si el intervalo D contiene sólo números positivos, o sólo números negativos, incluyendo el cero en ambos casos, la función f será inyectiva. Así D puede ser el intervalo infinito o $\langle -\infty, 0]$ o $[0,\infty\rangle$.

1.5.5 Determine si la función $f(x)=2-4x-x^2$ es inyectiva, si no lo es restringir su dominio para que lo sea.

Solución.

Observamos que $D_f=\Re$ por ser una función cuadrática, además $f(x)=6-(x+2)^2$.

Veremos si f es inyectiva: Por definición $\forall\ x_1,x_2\in\Re$ si $f(x_1)=f(x_2)$ debemos demostrar que $x_1=x_2$, entonces

$$6-(x_1+2)^2=6-(x_2+2)^2 \Rightarrow (x_1+2)^2=(x_2+2)^2 \Rightarrow x_1+2=x_2+2 \vee x_1+2=-(x_2+2)$$
$$\Rightarrow x_1=x_2 \ \vee\ x_1=-x_2-4$$

Como $D_f=\Re$ entonces f no es inyectiva, pues x_1 tiene dos valores.

Por ejemplo si $x_2=1 \Rightarrow x_1=1 \vee x_1=-5\neq x_2$.

Como $f(x)=2-4x-x^2$ es una parábola, para que f sea inyectiva podemos considerar como D_f los valores de x que se encuentran a la derecha o izquierda del vértice de la parábola, es decir,

$y=2-4x-x^2=6-(x+2)^2 \Rightarrow y-6=-(x+2)^2 \Rightarrow V=(-2,6)$, luego

si $D_f=[-2,\infty\rangle$ entonces f es inyectiva o si $D_f=\langle-\infty,-2]$ entonces f es inyectiva.

Ojo: Existen muchas otras restricciones al D_f para que f sea inyectiva.

1.5.6 Sea $f:\langle-\infty,0]\rightarrow\Re$ una función definida por $f(x)=5x^2+3$. Determine si f es inyectiva.

Solución.

Notemos que $D_f=\langle-\infty,0]$

Por definición tenemos que dados $x_1,x_2\in\langle-\infty,0]$ con $f(x_1)=f(x_2)$, es decir

$$5x_1^2+3=5x_2^2+3 \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow |x_1|=|x_2| \Rightarrow x_1=x_2 \ \vee\ x_1=-x_2$$

pero $x_1,x_2\in\langle-\infty,0]$, entonces solo se cumple $x_1=x_2$, lo que significa que f es inyectiva.

1.5.7 Sea f una función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+1, & x\in[-4,-2\rangle \\ \sqrt{2+x}, & x\in[-2,2] \\ 1-\frac{x}{2}, & x\in\langle 2,6] \end{cases}$$

Determine si f es inyectiva.

Solución.

Debemos analizar la inyectividad de cada una de las subfunciones.

$$f_1(x_1)=f_1(x_2) \Rightarrow \tfrac{1}{2}x_1^2+1=\tfrac{1}{2}x_2^2+1 \Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow |x_1|=|x_2|$$

pero $x_1, x_2 \in [-4,-2\rangle$, entonces $-x_1 = -x_2 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 \quad \therefore\; f_1$ es inyectiva.

$f_2(x_1) = f_2(x_2) \;\Rightarrow\; \sqrt{2+x_1} = \sqrt{2+x_2} \;\Rightarrow\; 2+x_1 = 2+x_2 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 \quad \therefore\; f_2$ es inyectiva.

$f_3(x_1) = f_3(x_2) \;\Rightarrow\; 1-\frac{1}{2}x_1 = 1-\frac{1}{2}x_2 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 \quad \therefore\; f_3$ es inyectiva.

Además debemos determinar los rangos de cada subfunción:

- $x \in [-4,-2\rangle \Rightarrow -4 \le x < -2 \Rightarrow 4 < x^2 \le 16 \Rightarrow 2 < \frac{1}{2}x^2 \le 8 \Rightarrow 3 < \frac{1}{2}x^2 + 1 \le 9 \Rightarrow f_1(x) \in \langle 3,9]$
- $x \in [-2,2] \Rightarrow -2 \le x \le 2 \Rightarrow 0 \le 2+x \le 4 \Rightarrow 0 \le \sqrt{2+x} \le 2 \Rightarrow f_2(x) \in [0,2]$
- $x \in \langle 2,6] \Rightarrow 2 < x \le 6 \Rightarrow 1 < \frac{x}{2} \le 3 \Rightarrow -3 \le -\frac{x}{2} < -1 \Rightarrow -2 \le 1-\frac{x}{2} < 0 \Rightarrow f_3(x) \in [-2,0\rangle$

Luego $R_{f_1} = \langle 3,9]$, $R_{f_2} = [0,2]$, $R_{f_3} = [-2,0\rangle$ y no existe intersecciones entre ellos.

Por tanto, como f_1, f_2 y f_3 son inyectivas y no existe intersección entre los rangos de las subfunciones, podemos concluir que f es inyectiva.

1.5.8 ¿Cuáles de las siguientes funciones son sobreyectivas?

a) $f:[0,\infty\rangle \to \Re$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f:[-1,2] \to [0,4]$ definida por $f(x) = x^2$

c) $f:\Re \to [0,\infty\rangle$ definida por $f(x) = |x|$

d) $f:\Re - \{0\} \to [-1,1]$ definida por $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

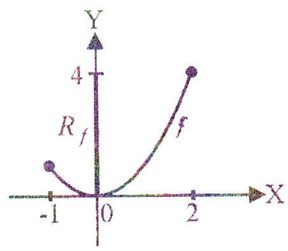
Solución.

a) Como $x \in [0,\infty\rangle \Rightarrow \sqrt{x} \in [0,\infty\rangle \Rightarrow y \in [0,\infty\rangle \Rightarrow R_f = [0,\infty\rangle \ne \Re$. $\therefore\; f$ no es sobreyectiva.

b) Como

$$x \in [-1,2] \Rightarrow -1 \le x \le 2 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 4$$
$$\Rightarrow x^2 \in [0,4] \Rightarrow f(x) \in [0,4]$$
$$\Rightarrow R_f = [0,4]$$

$\therefore\; f$ es sobreyectiva.



c) Sabemos que $\forall\, x \in \Re$, $|x| \ge 0 \Rightarrow y \ge 0$, luego $R_f = [0,\infty\rangle =$ conjunto de llegada.

$\therefore\; f$ es sobreyectiva.

d) Recordando la definición de valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1, & x > 0 \\ \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Luego, $R_f = \{-1,1\} \ne [-1,1]$ $\quad\therefore\; f$ no es sobreyectiva.

1.5.9 Sea $f:[1,4] \to [a,b]$ definida por $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Pruebe que f es inyectiva y halle los valores de a y b para que f sea biyectiva.

Solución.

Vemos que $D_f = [1,4]$, además $f(x) = (x-1)^2 + 2$.

- f es inyectiva: $\forall\ x_1, x_2 \in [1,4]$ si $f(x_1) = f(x_2)$ probaremos que $x_1 = x_2$

$$(x_1 - 1)^2 + 2 = (x_2 - 1)^2 + 2 \Rightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \Rightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1|$$

Como $x_1, x_2 \in [1,4]$ entonces $x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$, luego f es inyectiva.

- Para que f sea biyectiva, falta probar que sea sobreyectiva. Para esto, partiendo del D_f su conjunto de llegada debe ser $[a,b]$.

$$x \in D_f = [1,4] \Rightarrow 1 \le x \le 4 \Rightarrow 0 \le x - 1 \le 3 \Rightarrow 0 \le (x-1)^2 \le 9 \Rightarrow 2 \le (x-1)^2 + 2 \le 11$$

$$\Rightarrow 2 \le f(x) \le 11 \Rightarrow 2 \le y \le 11 \Rightarrow y \in [2,11] \text{ (conjunto de llegada)}$$

Luego $[a,b] = [2,11]$, es decir $a = 2,\quad b = 11$.

1.5.10 Sea $f : \Re \to B$ una función sobreyectiva definida por $f(x) = |x-2| - x$. Halle el conjunto B.

Solución.

Sabemos que $|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \ge 2 \\ 2-x, & x < 2 \end{cases}$ entonces $f(x) = \begin{cases} -2 \ , & x \ge 2 \\ 2(1-x), & x < 2 \end{cases}$

Vemos que $D_f = \Re = \langle -\infty, 2\rangle \cup [2, +\infty\rangle$. Ahora hallamos el conjunto $B = R_f$, por ser f sobreyectiva. Para esto:

- $x < 2 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow 1 - x > -1 \Rightarrow 2(1-x) > -2 \Rightarrow 2(1-x) \in \langle -2, \infty\rangle \Rightarrow y \in \langle -2, \infty\rangle$
- $x \ge 2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow y \in \{-2\}$

Luego $R_f = \langle -2, \infty\rangle \cup \{-2\} = [-2, \infty\rangle$. Por tanto, f es sobreyectiva cuando $B = [-2, \infty\rangle$.

1.5.11 Demuestre: Si $f : A \to B$ es sobreyectiva y si $g : B \to C$ es sobreyectiva entonces la función $(g \circ f) : A \to C$ es también sobreyectiva.

Solución.

Sea $c \in C$. Puesto que g es sobreyectiva, existe un elemento $b \in B$ tal que $g(b) = c$.

Como f es sobreyectiva, existe un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Pero $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$

Así, para todo $c \in C$ queda demostrado que existe al menos un elemento $a \in A$ tal que $(g \circ f)(a) = c$. Por consiguiente $g \circ f$ es una función sobreyectiva.

1.5.12 Sea $f : \Re \to \Re$ una función definida por $f(x) = x^3 + 5$. Siendo f inyectiva, halle f^{-1}, si existe.

Solución.

Como f es inyectiva entonces existe su inversa f^{-1}, la cual se obtiene despejando x

$$f(x) = x^3 + 5 \Rightarrow y = x^3 + 5 \Rightarrow x^3 = y - 5 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-5} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5}$$

1.5.13 Sea $A = \Re - \{3\}$ y $B = \Re - \{1\}$. Sea la función $f : A \to B$ inyectiva definida por $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$, halle f^{-1}.

Solución.

$$y = \frac{x-2}{x-3} \Rightarrow yx - 3y = x - 2 \Rightarrow x(y-1) = 3y - 2 \Rightarrow x = \frac{3y-2}{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x-2}{x-1}$$

1.5.14 Halle y grafique la función inversa si existe de $f(x)=x^2-2x-1,\ x\geq 2$.

Solución.

$y=f(x)=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$

- f inyectiva: $\forall x_1,x_2\in D_f=[2,\infty\rangle$, tal que $f(x_1)=f(x_2)$, implica $x_1=x_2$

  $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow (x_1-1)^2-2=(x_2-1)^2-2\Rightarrow (x_1-1)^2=(x_2-1)^2\Rightarrow |x_1-1|=|x_2-1|$

  Como $\forall\ x_1,x_2\in[2,\infty\rangle\Rightarrow x_1\geq 2\wedge x_2\geq 2\Rightarrow x_1-1\geq 1>0\wedge x_2-1\geq 1>0$

  $\Rightarrow |x_1-1|=x_1-1\wedge |x_2-1|=x_2-1$

  luego $x_1-1=x_2-1\Rightarrow x_1=x_2,\ \forall x_1,x_2\in D_f$. $\therefore f$ es inyectiva.

- Determinamos f^{-1} ya que f es inyectiva

  $y=(x-1)^2-2\Rightarrow (x-1)^2=y+2\Rightarrow x-1=\pm\sqrt{y+2}\Rightarrow x=1\pm\sqrt{y+2}\Rightarrow x=1+\sqrt{y+2}$,

  pues $x\geq 2$. Luego $f^{-1}(x)=1+\sqrt{x+2}$

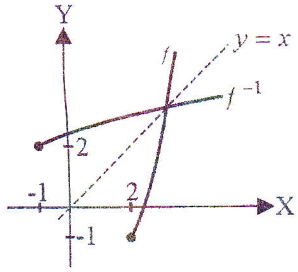
- Hallamos también $D_{f^{-1}}$, es decir R_f:

  $x\geq 2\Rightarrow x-1\geq 1\Rightarrow (x-1)^2\geq 1$

  $\Rightarrow (x-1)^2-2\geq -1\Rightarrow y\geq -1$

  $\Rightarrow R_f=[-1,\infty\rangle=D_{f^{-1}}$

  $\therefore\ f^{-1}(x)=1+\sqrt{x+2},\ x\in[-1,\infty\rangle$



1.5.15 Sea f definida por $f(x)=-\sqrt{x^2+8x-9},\ x\in\langle-\infty,-9]$. Encuentre f^{-1}, si existe.

Solución.

Veamos primero si f es inyectiva. Para eso hacemos:

$\forall x_1,x_2\in\langle-\infty,-9],\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow -\sqrt{x_1^2+8x_1-9}=-\sqrt{x_2^2+8x_2-9}$

$\Rightarrow x_1^2+8x_1-9=x_2^2+8x_2-9\Rightarrow x_1^2-x_2^2+8(x_1-x_2)=0$

$\Rightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2+8)=0\Rightarrow x_1=x_2\vee x_2=-8-x_1$

Como $x_1\in\langle-\infty,-9]\Rightarrow -x_1\in[9,\infty\rangle\Rightarrow (-8-x_1)\in[1,\infty\rangle\neq\langle-\infty,-9]\Rightarrow x_2\notin\langle-\infty,-9]$, entonces solo se cumple $x_1=x_2$, lo que significa que f es inyectiva en $\langle-\infty,-9]$, por lo que f^{-1} existe, entonces:

$y=-\sqrt{x^2+8x-9}=-\sqrt{(x+4)^2-25}\Rightarrow y^2=(x+4)^2-25\Rightarrow (x+4)^2=y^2+25$

luego $x=-4\pm\sqrt{y^2+25}$

$\sqrt{y^2+25}>0$ por lo que no podemos considerar $x=-4+\sqrt{y^2+25}$, pues jamás $x\in\langle-\infty,-9]$, luego consideramos $x=-4-\sqrt{y^2+25}$.

Además $x\in\langle-\infty,-9]\Rightarrow (x+4)\in\langle-\infty,-5]\Rightarrow (x+4)^2\in[25,\infty\rangle\Rightarrow [(x+4)^2-25]\in[0,\infty\rangle$

$\Rightarrow \sqrt{(x+4)^2-25}\in[0,\infty\rangle\Rightarrow -\sqrt{(x+4)^2-25}\in\langle-\infty,0]\Rightarrow y\in\langle-\infty,0]=R_f$

Luego $f^{-1}(x)=-4-\sqrt{x^2+25},\ D_{f^{-1}}=\langle-\infty,0]$.

1.5.16 Sea f la función definida por $f(x)=4\sqrt{x}-x$, $x\in[0,1]$. Determine f^{-1}, si existe.

Solución.

Para que f tenga inversa debe ser inyectiva, y para esto debe cumplir que

$$\forall x_1,x_2\in[0,1] \quad f(x_1)=f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1=x_2$$

$$4\sqrt{x_1}-x_1=4\sqrt{x_2}-x_2 \;\Rightarrow\; 4\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)-(x_1-x_2)=0 \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)\left(4-\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)=0$$

Como $x_1\in[0,1]$ entonces $4-\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\neq 0$, por lo que $\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=0\Rightarrow x_1=x_2$. Por lo tanto f^{-1} existe, luego

$y=f(x)=4\sqrt{x}-x=-(x-4\sqrt{x})=-\left[(\sqrt{x}-2)^2-4\right]\Rightarrow y=4-(\sqrt{x}-2)^2$ de donde

$(\sqrt{x}-2)^2=4-y\Rightarrow\sqrt{x}=2\pm\sqrt{4-y}\Rightarrow x=\left(2\pm\sqrt{4-y}\right)^2$

Como $x\in[0,1]$, consideramos $x=\left(2-\sqrt{4-y}\right)^2$, pues $x=\left(2+\sqrt{4-y}\right)^2$ jamás pertenecerá al intervalo $[0,1]$.

Además hallamos R_f por ser este el $D_{f^{-1}}$:

$$x\in[0,1]\Rightarrow\sqrt{x}\in[0,1]\Rightarrow(\sqrt{x}-2)\in[-2,-1]\Rightarrow(\sqrt{x}-2)^2\in[1,4]\Rightarrow-(\sqrt{x}-2)^2\in[-4,-1]$$
$$\Rightarrow\left[4-(\sqrt{x}-2)^2\right]\in[0,3]\Rightarrow y\in[0,3]\Rightarrow R_f=[0,3]=D_{f^{-1}}$$

En conclusión $f^{-1}(x)=\left(2-\sqrt{4-x}\right)^2$, $x\in[0,3]$.

1.5.17 Halle f^{-1}, si existe, si f está definida por $f(x)=\left(|x-5|+1+x\right)\sqrt{5-x}$.

Solución.

Claramente $D_f=\langle-\infty,5]$, entonces

$$|x-5|=-x+5 \quad \text{luego} \quad f(x)=6\sqrt{5-x},\quad x\in\langle-\infty,5]$$

Se verifica que f es inyectiva, luego tiene inversa. Como $R_f=[0,\infty\rangle$, entonces

$$D_{f^{-1}}=R_f=[0,\infty\rangle.$$

Además de $y=f(x)=6\sqrt{5-x}\Rightarrow\dfrac{y}{6}=\sqrt{5-x}\Rightarrow\dfrac{y^2}{36}=5-x\Rightarrow x=5-\dfrac{y^2}{36}$.

Finalmente, $f^{-1}(x)=5-\dfrac{x^2}{36}$, $x\in[0,\infty\rangle$.

1.5.18 Halle la función inversa, si existe, para $f(x)=\dfrac{|x+4|}{|x-1|-1}$, $x\in\langle-2,0\rangle\cup\langle0,1\rangle$

Solución.

Como $D_f=\langle-2,0\rangle\cup\langle0,1\rangle$, entonces $|x+4|=x+4$ y $|x-1|=1-x$, luego

$$f(x)=\frac{x+4}{1-x-1}=\frac{x+4}{-x}=-1-\frac{4}{x}\Rightarrow f(x)=-1-\frac{4}{x}.$$

Se verifica que f es inyectiva, por lo tanto existe f^{-1}. Despejando x se obtiene

$$x=\frac{-4}{y+1}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-4}{x+1}.$$

Además: $x\in D_f=\langle-2,0\rangle\cup\langle0,1\rangle\Rightarrow x\in\langle-2,0\rangle\vee x\in\langle0,1\rangle\Rightarrow -2<x<0\vee 0<x<1$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}<-\frac{1}{2} \vee \frac{1}{x}>1 \Rightarrow -\frac{4}{x}>2 \vee -\frac{4}{x}<-4 \Rightarrow -1-\frac{4}{x}>1 \vee -1-\frac{4}{x}<-5$$

$$\Rightarrow f(x)>1 \vee f(x)<-5 \Rightarrow R_f=\langle-\infty,-5\rangle\cup\langle 1,\infty\rangle=D_{f^{-1}}$$

Luego $f^{-1}(x)=\dfrac{-4}{x+1}$, $x\in(\langle-\infty,-5\rangle\cup\langle 1,\infty\rangle)$.

1.5.19 Si $f(x)=\dfrac{3x-4a}{5}$, $f^{-1}(3)=2a-3b$ y $f^{-1}(5)=3a+5b$. Halle $f^{-1}(a-3b)$.

Solución.

Notamos que f es inyectiva por ser lineal, luego existe f^{-1} entonces

$$y=\frac{3x-4a}{5} \Rightarrow x=\frac{5y+4a}{3} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{5x+4a}{3}.$$

$$\left.\begin{array}{l} f^{-1}(3)=\dfrac{15+4a}{3}=2a-3b \Rightarrow 2a-9b=15 \\ f^{-1}(5)=\dfrac{25+4a}{3}=3a+5b \Rightarrow 5a+15b=25 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} 2a-9b=15 \\ a+3b=5 \end{cases}$$

resolviendo el sistema obtenemos: $a=6$, $b=-1/3$, luego $a-3b=7$ entonces

$$f^{-1}(a-3b)=f^{-1}(7)=\frac{35+24}{3}=\frac{59}{3}.$$

1.5.20 Sean f y g funciones biyectivas, tales que $(f\circ g)\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{4}$, $f\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{3}$, $f^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}$. Halle a) $g^{-1}(1/2)$ b) $(f\circ g^{-1})(1/2)$.

Solución.

Ambas funciones tienen funciones inversas por ser biyectivas.

a) De $f^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$ y de

$$(f\circ g)\left(\tfrac{2}{5}\right)=f\left(g\left(\tfrac{2}{5}\right)\right)=\tfrac{3}{4}=f\left(\tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow f\left(g\left(\tfrac{2}{5}\right)\right)=f\left(\tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow g\left(\tfrac{2}{5}\right)=\tfrac{1}{2} \Rightarrow g^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{2}{5}$$

b) $(f\circ g^{-1})\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{3} \Rightarrow (f\circ g^{-1})\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}$

1.5.21 Sean $f(x)=x^3+2$, $g(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$, si $g^{-1}(f^{-1}(a))=-\dfrac{4}{3}$, halle $g^{-1}(a+5)$.

Solución.

Las funciones f y g son inyectivas, por lo que determinamos f^{-1} y g^{-1}.

$y=x^3+2 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y-2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-2}$

$y=\dfrac{x-2}{x+3}=1-\dfrac{5}{x+3} \Rightarrow 1-y=\dfrac{5}{x+3} \Rightarrow x+3=\dfrac{5}{1-y} \Rightarrow x=\dfrac{5}{1-y}-3 \Rightarrow g^{-1}(x)=\dfrac{5}{1-x}-3$

Como $g^{-1}(f^{-1}(a))=-\dfrac{4}{3} \Rightarrow g^{-1}(\sqrt[3]{a-2})=\dfrac{5}{1-\sqrt[3]{a-2}}-3=-\dfrac{4}{3} \Rightarrow \dfrac{5}{1-\sqrt[3]{a-2}}=\dfrac{5}{3}$

$$\Rightarrow 1-\sqrt[3]{a-2}=3 \Rightarrow \sqrt[3]{a-2}=-2 \Rightarrow a-2=-8 \Rightarrow a=-6$$

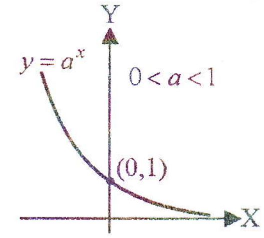
luego $g^{-1}(a+5)=g^{-1}(-6+5)=g^{-1}(-1)=\frac{5}{2}-3=-\frac{1}{2}$.

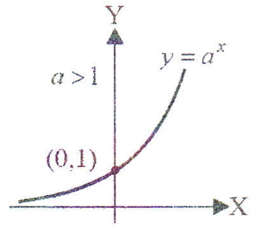
1.6 Funciones Trascendentes

Función Exponencial

Una función exponencial de base a es aquella cuya regla de correspondencia es $f(x)=a^x$, con $a>0$ y $a\neq 1$, donde $D_f=\Re$ y $R_f=\langle 0,\infty\rangle$.

Respecto a la gráfica consideremos dos casos, cuando $0<a<1$ y cuando $a>1$:





Propiedades

1) $a^{x+y}=a^x a^y$

2) $a^{x-y}=\dfrac{a^x}{a^y}$

3) $(ab)^x=a^x b^x$

4) $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$

5) $\left(a^x\right)^y=a^{xy}$

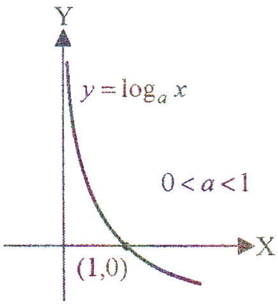
6) f es inyectiva, es decir $a^x=a^z \Rightarrow x=z$

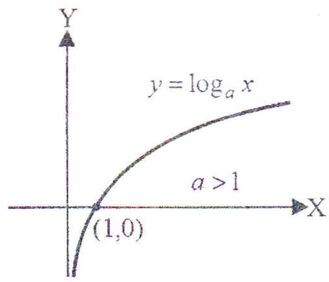
Función Logarítmica

Si $a>0$ y $a\neq 1$, entonces la función $f(x)=\log_a x$ se llama función logaritmo de base a, cuyo $D_f=\langle 0,\infty\rangle$ y $R_f=\Re$ y se cumple $y=\log_a x \Leftrightarrow a^y=x$.

La función logaritmo es la función inversa de la función exponencial.

Para la gráfica consideremos dos casos:





Propiedades

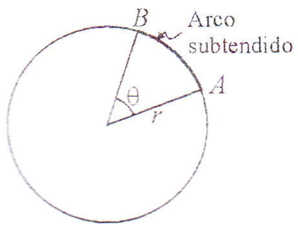
1. $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$
3. $\log_a x^n=n\log_a x$
4. $\log_a a=1$
5. $\log_a(a^x)=x$
6. $\log_{a^b} x=\dfrac{1}{b}\log_a x$
7. $\log_b a=\dfrac{\log_c a}{\log_c b}$ (cambio de base)
8. $a^{\log_a x}=x,\quad x>0$
9. $\ln(e^x)=x$
10. $e^{\ln x}=x,\quad x>0$
11. $\ln e=1,\quad \ln(1)=0$
12. La función logaritmo es inyectiva, es decir: $\log_a x=\log_a z \Rightarrow x=z$

Observación:

- $f(x) = e^x$, es una función exponencial de base e o función exponencial natural, donde $e = 2.7182818284....$
- $f(x) = \log_e x = \ln x$, es una función logaritmo de base e o logaritmo natural
- $f(x) = \log_{10} x = \log x$, es la función logaritmo decimal (de base 10).

Funciones Trigonométricas

En la figura, el ángulo θ se denomina **ángulo central** y la porción de la circunferencia entre los lados del ángulo se conoce como **arco subtendido.**



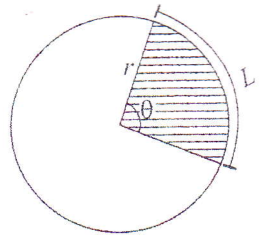
Si el ángulo central subtiende un arco de longitud igual al radio del círculo, se dice entonces que el ángulo tiene una medida de **un radian.**

Si la medida del arco es 1/360 de la longitud de la circunferencia, entonces la medida del ángulo es un grado sexagesimal ($1°$).

Como la longitud de la circunferencia es $L = 2\pi r$, decimos que una revolución completa es: $360° = 2\pi$ radianes

luego $1° =$ Un grado $= \dfrac{\pi}{180}$ rad , $\quad 1\,\text{radian} = \dfrac{180}{\pi}$ grados $= 57.29578...$ grados

La relación entre los grados sexagesimales y radianes está dada por: $\dfrac{S}{180} = \dfrac{R}{\pi}$



donde $S = N°$ de grados sexagesimales

$R = N°$ radianes

Por otro lado, la medida del ángulo central (en radianes) de la figura es: $\dfrac{L}{r} = \theta$ y el área de la región sombreada es $S = \dfrac{r^2\theta}{2} = \dfrac{rL}{2}$, donde θ se mide en radianes.

Razones Trigonométricas Elementales

Sea $P(x, y)$ el punto donde el lado terminal de θ (medida en radianes) interseca al círculo $x^2 + y^2 = r^2$. Entonces tenemos:

1) $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r}$

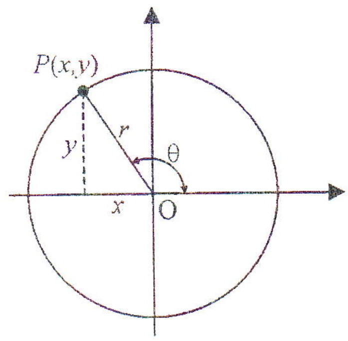
2) $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

3) $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

4) $\cot\theta = \dfrac{x}{y}$

5) $\sec\theta = \dfrac{r}{x}$

6) $\csc\theta = \dfrac{r}{y}$



Note que si $r = 1$, entonces $\operatorname{sen}\theta = y$, $\cos\theta = x$, $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, $\cot x = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$, $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ y $\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$.

Identidades Trigonométricas

1) $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$

2) $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$

3) $1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$

4) $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$

5) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$

6) $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

7) $\cot(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$

8) $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

9) $\operatorname{sen}^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

10) $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

11) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

12) $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

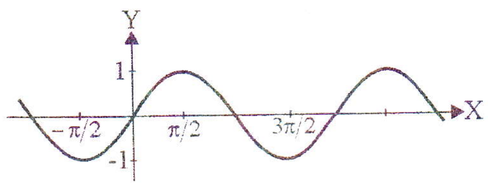
13) $\cot(2\alpha) = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$

Funciones Trigonométricas

Función seno. Definida por

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

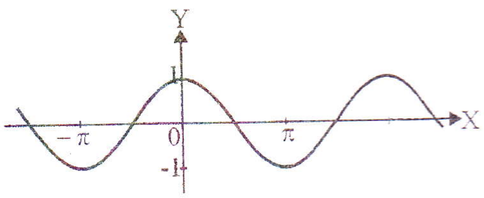
$$D_f = \Re,\ R_f = [-1,1]$$



Función coseno. Definida por

$$f(x) = \cos x$$

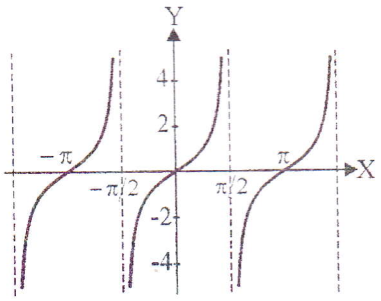
$$D_f = \Re,\ R_f = [-1,1]$$



Función tangente. Definida por

$$f(x) = \tan x$$

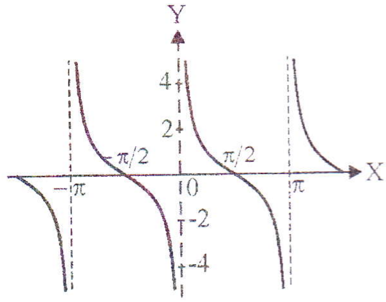
$$D_f = \Re - \{n\pi + \pi/2 : n \in \mathbb{Z}\},\ R_f = \Re$$



Función cotangente. Definida por

$$f(x) = \cot x$$

$$D_f = \Re - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\},\ R_f = \Re$$

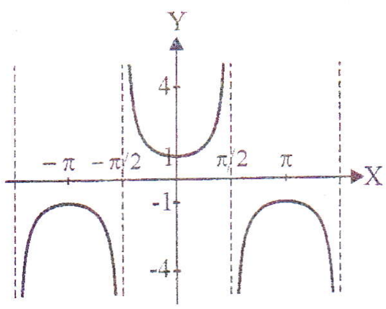


Función secante. Definida por

$$f(x) = \sec x$$

$$D_f = \Re - \{n\pi + \pi/2 : n \in \mathbb{Z}\}$$

$$R_f = \langle -\infty, -1] \cup [1, \infty\rangle$$

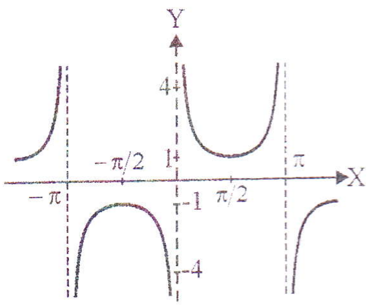


Función cosecante. Definida por

$$f(x) = \csc x$$

$$D_f = \Re - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$$

$$R_f = \langle -\infty, -1] \cup [1, \infty\rangle$$



Funciones Trigonométricas Inversas

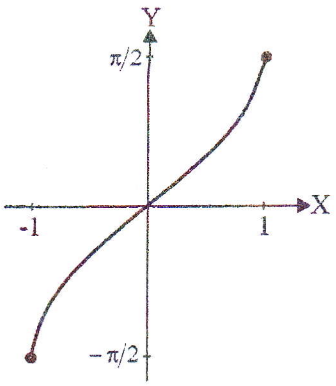
Las funciones trigonométricas son periódicas, y por lo tanto no son inyectivas. Sin embargo, restringiendo el dominio de cada una de ellas convenientemente se puede conseguir que lo sean. Luego, en esa restricción la función trigonométrica admite inversa.

Función seno inverso (arco seno)

$y = \text{arcsen}\, x \iff x = \text{sen}\, y$

Dominio: $[-1,1]$

Rango: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

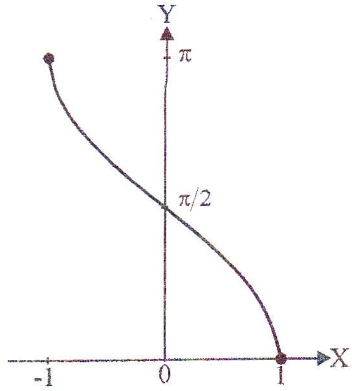


Función coseno inverso (arco coseno)

$y = \arccos x \iff x = \cos y$

Dominio: $[-1,1]$

Rango: $[0,\pi]$

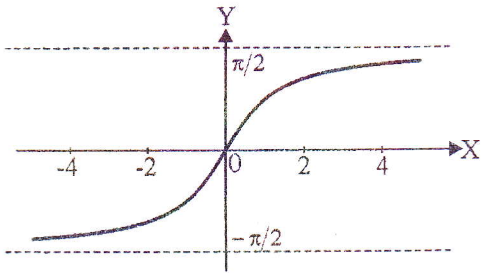


Función tangente inversa (arco tangente)

$y = \arctan x \iff x = \tan y$

Dominio: $\Re$

Rango: $\left\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$

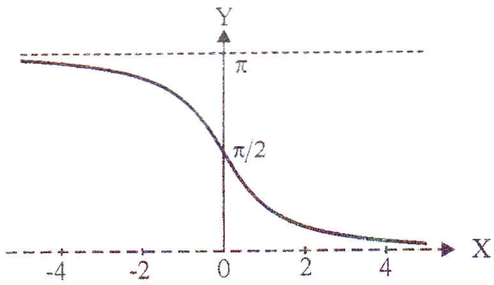


Función cotangente inversa (arco cotangente)

$y = \text{arccot} x \iff x = \cot y$

Dominio: $\Re$

Rango: $\langle 0,\pi\rangle$

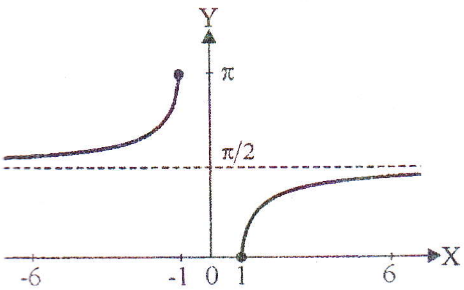


Función secante inversa (arco secante)

$y = \text{arc}\sec x \iff x = \sec y$

Dominio $\langle-\infty,-1]\cup[1,\infty\rangle$

Rango $[0,\pi/2\rangle\cup\langle\pi/2,\pi]$

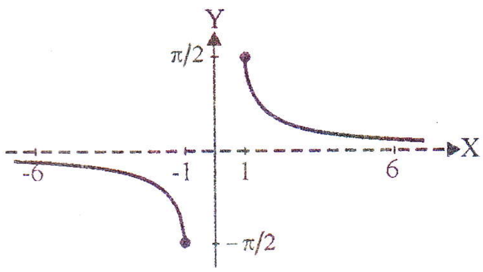


Función cosecante inversa (arco cosecante

$y = \text{arc}\csc x \iff x = \csc y$

Dominio $\langle-\infty,-1]\cup[1,\infty\rangle$

Rango $[-\pi/2,0\rangle\cup\langle 0,\pi/2]$



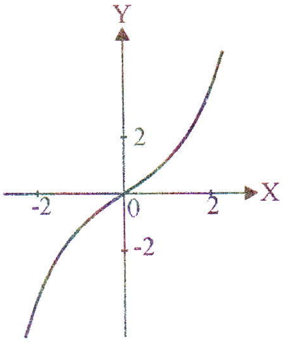
Funciones Hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas tienen como característica combinaciones de potencias de base e, tales como e^{x} y e^{-x}, aparecen en las aplicaciones avanzadas del cálculo. Sus propiedades son similares a las que tienen las funciones trigonométricas. Estas funciones son las siguientes:

Función seno hiperbólico. Es la función definida por

$$f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

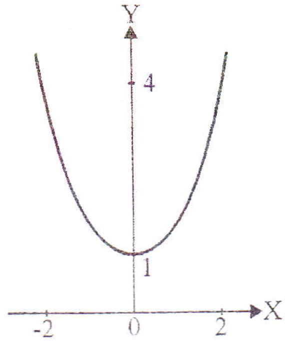
$$D_f = \Re\,,\ R_f = \Re$$



Función coseno hiperbólico. Es la función definida por:

$$f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

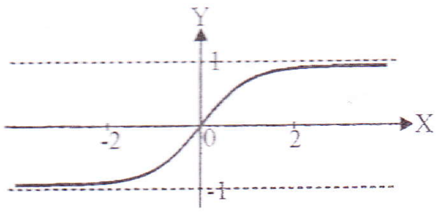
$$D_f = \Re\,,\ R_f = [1,\infty\rangle$$



Función tangente hiperbólica. Es la función definida por:

$$f(x) = \tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

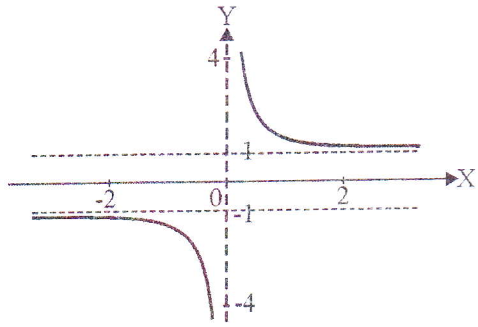
$$D_f = \Re\,,\ R_f = \langle -1,1\rangle$$



Función cotangente hiperbólica. Función definida

$$f(x) = \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

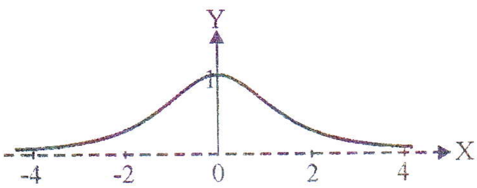
$$D_f = \Re - \{0\}\,,\ R_f = \Re - [-1,1]$$



Función secante hiperbólica. Es la función definida por:

$$f(x) = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$D_f = \Re\,,\ R_f = \langle 0,1]$$



Función cosecante hiperbólica. Función definida por:

$$f(x) = \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}$$

$$D_f = \Re - \{0\}\,,\ R_f = \Re - \{0\}$$