יונתן תורג'מן 315468363
יהל אורגד 325010809

תקשורת ספרתית 2 – תרגיל מטלב 2 – יונתן תורגמן ויהל אורגד

חלק א' – חישוב אנליטי

נתון משדר ספרתי באפנון QPSK וזמן סימבול T שניות. המשדר משתמש בעיצוב סימבולים $g_{\mathrm{TX}}(t)$, השידור עובר בערוץ $g_C(t)$ והמקלט משתמש במסנן $g_{\mathrm{RX}}(t)$. נתון:

$$g_{\mathrm{TX}}(t) = g_{\mathrm{RX}}(t) = f(t)$$

$$g_C(t) = -0.8 \cdot \delta(t) + \delta(t - T) - 0.3\delta(t - 1.5T)$$

$f(t)$ היא פונקציה מסוג Root Raised Cosine המתאימה לחצי זמן הסימבול ($T_s = T/2$).

פרמטר ההחלקה (rolloff) הוא 0.6.

במוצא מסנן הקליטה האות נדגם בקצב של 2 דגימות לסימבול, $m = 2$. הניחו תזמון מושלם בדגימה.

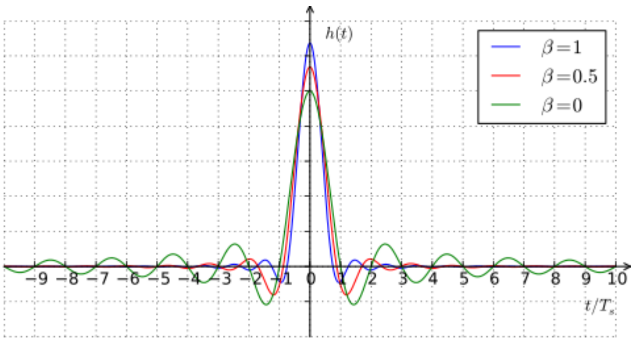
לפני המקלט מתווסף רעש גאוסי לבן עם תוחלת 0 וצפיפות הספק ספקטראלית $N_0/2 = 0.2$.

<u>א. האם לדעתכם בחירה אחרת של פרמטר ההחלקה משפרת / פוגעת בביצועי השווין?</u>

פרמטר ההחלקה (roll off) הוא הפרמטר שמגדיר את קצב הדעיכה של פונקציית ה

$$Root\ Raised\ Cosine \equiv RRC$$

את התלות ניתן להבין לפי הגרף הבא:



כפי שניתן לראות ככל שפרמטר ההחלקה גדול יותר כך הRRC דועכת מהר יותר לאפס.

במערכת שלנו

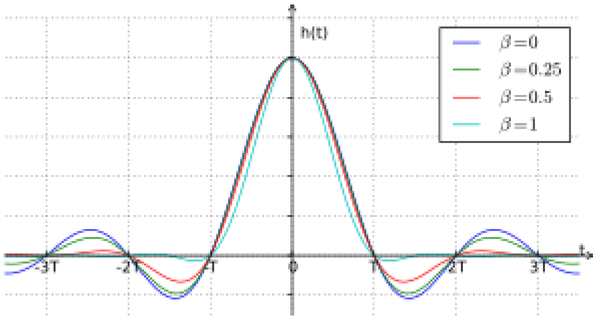
$$g_{\mathrm{TX}}(t) = g_{\mathrm{RX}}(t) = RRC(t)$$

לכן פונקציית הערוץ השקול תהיה:

$$h(t) = g_{TX}(t) * g_c(t) * g_{RX}(t) = RRC(t) * RRC(t) * g_c(t) = RC(t) * g_c(t)$$

ולכן ההשפעה של פרמטר ההחלקה על הסימבולים שיעברו במערכת ועל ביצועי השווין הסופו של דבר, תהיה שווה להשפעה של פרמטר ההחלקה על מסנן ה *RC*, שתלותו בפרמטר ההחלקה מתוארת בגרף הבא:

יונתן תורג'מן 315468363
יהל אורגד 325010809



השוויון פועל בעצם עם דגימות של האות כל mT ולכן בפועל ההשפעה של המסננים תהיה:

$$R(mT) = \int RRC(t) \cdot RRC(t - mT)dt = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}$$

וניתן לראות שבסופו של דבר אין כל השפעה לפרמטר ההחלקה על ביצועי השוויון.

<u>הערה:</u> הניתוח הנ"ל מתבסס על ניתוח המערכת בזמן רציף, בעוד שבמימוש ב- *Matlab* בהמשך, המסנן הינו ספרתי סופי ודגום. שינוי כזה עלול לגרום לסטיות קלות, כך שהערך של כל כפולה שלמה של T במסנן השקול לא בדיוק יתאפס. כשדבר כזה יקרה אז דווקא כן תהיה השפעה קטנה ואף אולי זניחה של פרמטר ההחלקה.

ב. חשבו (אנליטית) את $\boldsymbol{f[k] = g_{TX}(t) * g_c(t) * g_{RX}(t)|_{t=\frac{kT}{2}}}$.

<u>שימו לב, האורך של $\boldsymbol{f[k]}$ הוא 4. אנו נבחר את גובה המטריצה U להיות $\boldsymbol{K}$ כך ש $\boldsymbol{f[k]}$ ממוקם במרכזה, מרופד באפסים במידת הצורך. עבור תרגיל זה, $\boldsymbol{K = 8}$.</u>

$$\begin{aligned} f(t) = g_{TX}(t) * g_c(t) * g_{RX}(t) \\ &= RRC(t) * \{-0.8\delta(t) + \delta(t-T) - 0.3\delta(t-1.5T)\} * RRC(t) \\ &= RC(t) * \{-0.8\delta(t) + \delta(t-T) - 0.3\delta(t-1.5T)\} \\ &= -0.8RC(t) + RC(t-T) - 0.3RC(t-1.5T) \end{aligned}$$

נדגום את הביטוי כל $t = \frac{kT}{2}$:

$$\begin{aligned} f[k] &= -0.8RC\left(\frac{kT}{2}\right) + RC\left(\frac{kT}{2} - T\right) - 0.3RC\left(\frac{kT}{2} - 1.5T\right) = \\ &= -0.8RC\left(\frac{kT}{2}\right) + RC\left(\frac{(k-2)T}{2}\right) - 0.3RC\left(\frac{(k-3)T}{2}\right) \end{aligned}$$

בעת ידוע כי: $\forall k \neq 0: RC(t = kT) = 0$

ובנוסף $RC(t = 0) = 1$

ונקבל בסך הכל:

יונתן תורג'מן 315468363
יהל אורגד 325010809

$$f[k]=\begin{cases}-0.8\,, & k=0\\ 0\,, & k=1\\ 1\,, & k=2\\ -0.3\,, & k=3\\ 0\,, & otherwise\end{cases}$$

ג. מהו חסם המסנן המתואם, SNR_{MFB}, עבור המערכת הנתונה? כלומר, מהי הסתברות השגיאה אם משודר סימבול יחיד?

כמו שלמדנו בהרצאה, הכוונה בלחשב את החסם MF, היא להניח כי אין ISI במערכת, ושדגימות הרעש הן IID.

$$\begin{aligned}C_w[k]=E\big[w[k]w^*[n-k]\big]\\&=E\big[n(kT)*g_{RX}(kT)\cdot n^*\big((k-n)T\big)*g_{RX}^*\big((k-n)T\big)\big]\\&=E\left[\int_\mu n(\mu T)g_{RX}\big((k-\mu)T\big)d\mu\int_\eta n^*(\eta T)g_{RX}^*\big((k-n-\eta)T\big)d\eta\right]\\&=\int_\mu\int_\eta E[n(\mu T)n^*(\eta T)]\cdot g_{RX}\big((k-\mu)T\big)g_{RX}^*\big((k-n-\eta)T\big)d\eta\, d\mu\end{aligned}$$

$E[n(\mu T)n^*(\eta T)]=\frac{N_0}{2}\delta[\mu-\eta]$, ולכן נוכל לבטל את אחד האינטגרלים.

$$C_w[k]=\int_\mu\frac{N_0}{2}\cdot g_{RX}\big((k-\mu)T\big)g_{RX}^*\big((k-n-\mu)T\big)d\mu$$
$$m=k-\mu$$
$$C_k[k]=\int_\mu\frac{N_0}{2}\cdot g_{RX}(mT)g_{RX}\big((m-n)T\big)dm=\frac{\mathrm{N}_0}{2}\cdot g_{RX}(t)*g_{RX}^*(-t)_{t=nT}$$
$$=\frac{N_0}{2}\cdot RRC(t)_{t=nT}*RRC^*(-t)_{t=nT}=\frac{N_0}{2}\cdot RRC(t)*RRC(t)_{t=nT}=\frac{N_0}{2}\cdot RC(t)_{t=nT}$$

$$\rightarrow C_w[k]=\begin{cases}\frac{N_0}{2}\,, & k=0\\ 0\,, & k\neq 0\end{cases}\qquad\rightarrow C_w=\frac{\mathrm{N}_0}{2}I$$

$$v_{MFB}^2=\frac{\frac{\mathrm{N}_0}{2}}{\|u_0\|^2}=\frac{0.2}{(-0.8)^2+(1)^2+(-0.3)^2}=\frac{0.2}{1.73}=\frac{20}{173}=0.115606$$

על מנת לחשב את הסתברות השגיאה נשתמש בנוסחה להסתברות שגיאה עבור אפנון QPSK, שפיתחנו כבר בקורס הקודם, ההסתברות להצלחה בביט אחד $P_{Correct,1-bit}=1-Q\big(\sqrt{SNR}\big)$, ועבור שני ביטים: $P_{Correct}=\big(1-Q\big(\sqrt{SNR}\big)\big)^2$.

ולבסוף:

$$P_{error}=1-\big(1-Q\big(\sqrt{SNR}\big)\big)^2$$

$$SNR=\frac{\sigma_{bit}^2}{v_{MFB}^2}=\frac{1}{0.1156}=8.65$$

$$P_{error}=1-\big(1-Q\big(\sqrt{8.65}\big)\big)^2=0.0033$$

יונתן תורג'מן 315468363
יהל אורגד 325010809

ד. רשמו ביטוי מתמטי לאות במוצא מסנן הקליטה (לפני השווין), $r[n]$. מה פונקציית האוטוקורלציה של הרעש הדגום?

מוצא מסנן הקליטה, לפני השוויין יכול להיות מבוטא באופן הבא:

$$r[n] = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{b}[n] + \boldsymbol{w}[n]$$

ואת $\boldsymbol{U}$ נחשב בסעיף הבא.

ובנוסף קיבלנו כבר בסעיף קודם:

$$C_w[k] = \begin{cases} N_0\ , & k = 0 \\ 0\ , & k \neq 0 \end{cases} \qquad\qquad C_w = \mathrm{N}_0 I$$

ה. רשמו מודל וקטורי לוקטורי הקליטה באורך K. רשמו במפורש את המטריצה $\boldsymbol{U}$, את וקטור הסימבולים ואת מטריצת הקווריאנס של הרעש.

בסעיף ב' מצאנו כי $u_0 = (-0.8, 0, 1, -0.3)$, מכיוון שנתון אורך מטריצה $K = 8$ נרפד את הוקטור בשני אפסים מלמעלה ומלמטה. בנוסף נתון $m = 2$ לכן כמו שלמדנו כאשר נזיז את הווקטור עמודה שמאלה נזיז אותו גם 2 מקומות למעלה, ובהזזה ימינה 2 מקומות למטה, עד אשר נקבל עמודת אפסים, ושם נחתוך את המטריצה.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -0.8 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.8 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}[n] = \begin{pmatrix} 1 & -0.8 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.8 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0.8 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b[n-2] \\ b[n-1] \\ b[n] \\ b[n+1] \\ b[n+2] \end{pmatrix} + \boldsymbol{w}[n]$$

וכפי שראינו בסעיפים הקודמים:

$$C_w = N_0 I$$

ו. תכננו שווין לינארי מאלץ אפס (Zero Forcing) באורך K.

כפי שלמדנו השווין הנ"ל מאלץ ביטול גמור של השפעת ה-ISI, אבל לא מטפל ברעש.

יונתן תורג'מן 315468363
יהל אורגד 325010809

$$c_{ZF} = U(U^H U)^{-1} e = U(U^H U)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1577 \\ -0.5255 \\ -0.3409 \\ -0.7160 \\ 0.4204 \\ -1.0229 \\ 0 \\ -1.1210 \end{pmatrix}$$

ז. תכננו שווין מינימום שגיאה ריבועית (MMSE) באורך K.

$$c_{MMSE} \triangleq R^{-1} p \qquad R \triangleq \sigma_b^2 U U^H + C_w \qquad p \triangleq \sigma_b^2 u_0$$

$$\rightarrow c_{MMSE} = (\sigma_b^2 U U^H + C_w)^{-1} \sigma_b^2 u_0$$

עבור האפנון QPSK: $b[n] \in \{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$, מתקיים $\sigma_b^2 = 2$.

בנוסף חשבנו כבר את :

$$u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.8 \\ 0 \\ 1 \\ -0.3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_w = N_0 I$$

נקבל:

$$c_{MMSE} = \begin{pmatrix} -0.1072 \\ -0.1109 \\ -0.2587 \\ -0.1789 \\ 0.4831 \\ -0.3206 \\ 0.1743 \\ -0.2196 \end{pmatrix}$$

ח. תכננו שווין DFE-MMSE באורך K.

$$c_{FF,MMSE} \triangleq \left(\sigma_b^2 U_f U_f^H + C_w\right)^{-1} \sigma_b^2 u_0$$

כאשר $U_f \triangleq$ החלק במטריצה U המתאים לדגימות ההווה והעתיד:

$$U_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0.8 & 0 \\ -0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.8 \\ 0 & -0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

נציב ונקבל:

$$c_{FF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5788 \\ 0 \\ 0.3271 \\ -0.2171 \\ 0.1180 \\ -0.1487 \end{pmatrix}$$

$$c_{FB} \triangleq -c_{FF}^{H} U_p$$

כאשר U_f ≜החלק במטריצה U המתאים לדגימות העבר:

$$U_p = \begin{pmatrix} -0.8 & 1 \\ 0 & -0.3 \\ 1 & 0 \\ -0.3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נציב ונקבל:

$$c_{FB} = \begin{pmatrix} 0.5788 & 0 \end{pmatrix}$$

ט. חשבו תיאורטית את הסתברות השגיאה עבור השווינים (חסם עבור ZF, הערכה עבור MMSE, וחסם SNR גבוה עבור MMSE-DFE).

כפי שכבר הראנו:

$$P_{error} = 1 - \left(1 - Q\left(\sqrt{SNR}\right)\right)^2$$

ואנו נתעניין ב:

$$P_{error} = 1 - \left(1 - Q\left(\sqrt{SIR}\right)\right)^2$$

בהרצאה למדנו ש:

$$SIR \triangleq \frac{\sigma_b^2 |\langle c, u_0 \rangle|^2}{\sigma_b^2 \sum_{j \neq 0} \left|\langle c, u_j \rangle\right|^2 + c^H C_w c}$$

<u>ZF:</u>

לפי הגדרת השווין הוא מאלץ ש $\sigma_b^2 \sum_{j \neq 0} \left|\langle c, u_j \rangle\right|^2 = 0$ ו $\langle c, u_0 \rangle = 1$ לכן נשאר רק עם:

$$SIR_{ZF} = \frac{\sigma_b^2}{c_{ZF}^H C_w c_{ZF}} = 1.4664$$

יונתן תורג'מן 315468363
יהל אורגד 325010809

$$P_{error} = 1 - \left(1 - Q\left(\sqrt{1.4664}\right)\right)^2 = 0.2132$$

:MMSE

$$SIR_{MMSE} = \frac{\sigma_b^2 |\langle c_{MMSE}, u_0 \rangle|^2}{\sigma_b^2 \sum_{j \neq 0} \left|\langle c_{MMSE}, u_j \rangle\right|^2 + c_{MMSE}^H C_w c_{MMSE}} = 3.6788$$

$$P_{error} = 1 - \left(1 - Q\left(\sqrt{3.6788}\right)\right)^2 = 0.0543$$

:MMSE-DFE

$$SIR_{MMSE-DFE} = \frac{\sigma_b^2 |\langle c_{MMSE}, u_0 \rangle|^2}{\sigma_b^2 \sum_{j > 0} \left|\langle c_{MMSE}, u_j \rangle\right|^2 + c_{MMSE}^H C_w c_{MMSE}} = 5.9105$$

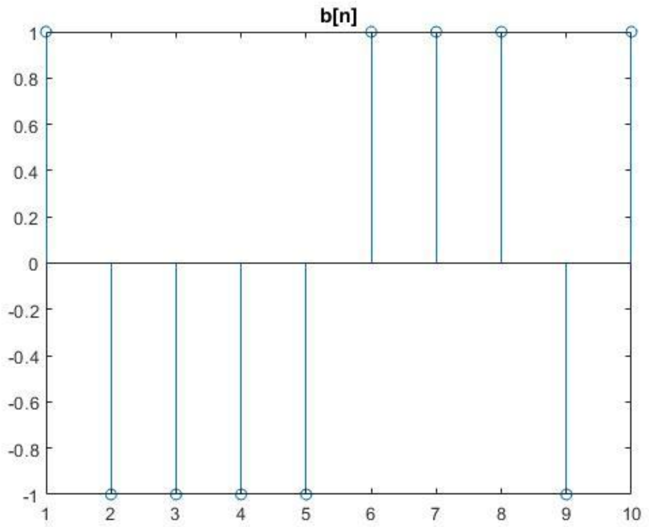
$$P_{error} = 1 - \left(1 - Q\left(\sqrt{5.9105}\right)\right)^2 = 0.0150$$

יונתן תורג'מן 315468363
יהל אורגד 325010809

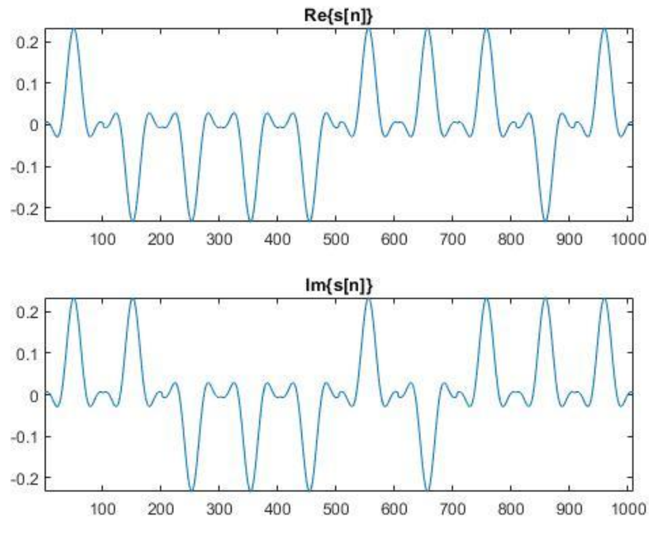
חלק ב' – סימולציית מטלב

בדרוש מימשנו את המערכת עבור $\frac{E_b}{N_0}$ שצוינו בתרגיל (...5,0,5-).

כפי שהוצע בתרגיל שידרנו כ-2000 סימבולים אך מטעמי נוחות נציג רק 10 סימבולים:



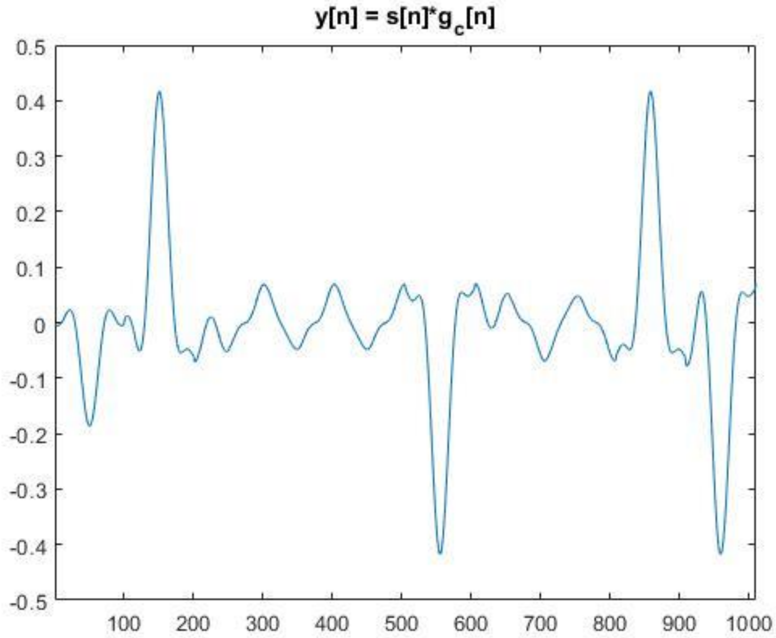
יצרנו מסנן raised cosine עם rollof=0.6. והעברנו את הסימבולים שלנו במסנן:



ניתן לראות שקיבלנו את הסימבולים שרוכבים על צורת המסנן RRC.

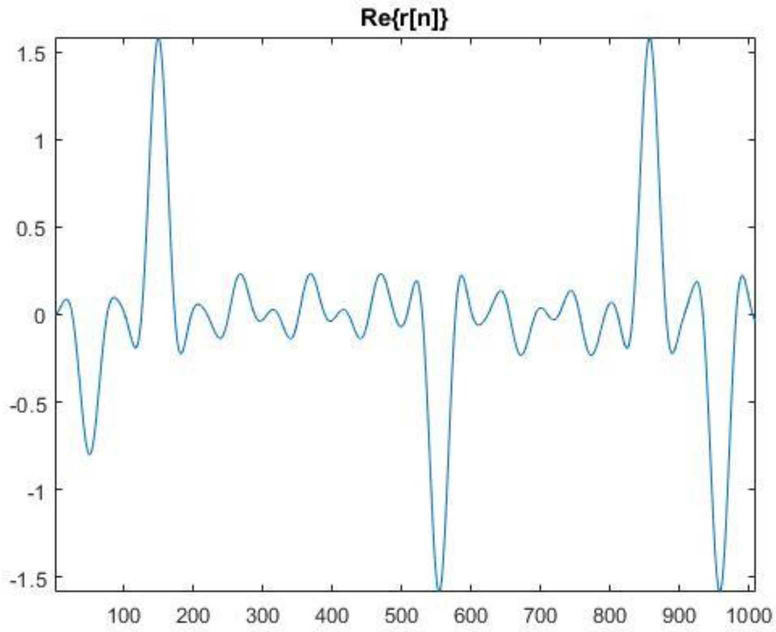
כעת נעביר את $s[n]$ במסנן הערוץ $g_c[n]$ ונקבל את $y[n]$:

יונתן תורג'מן 315468363
יהל אורגד 325010809



ניתן לראות שכתוצאה ממעבר בערוץ האות התעוות כמובן

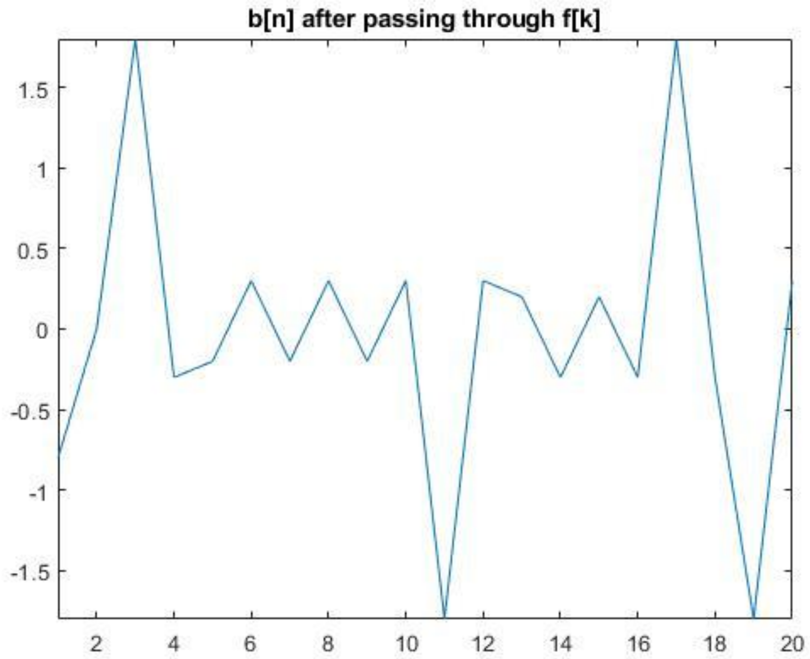
כעת נעביר את האות במסנן $g_{RX}[n]$ כלומר מסנן ה-Receiver:

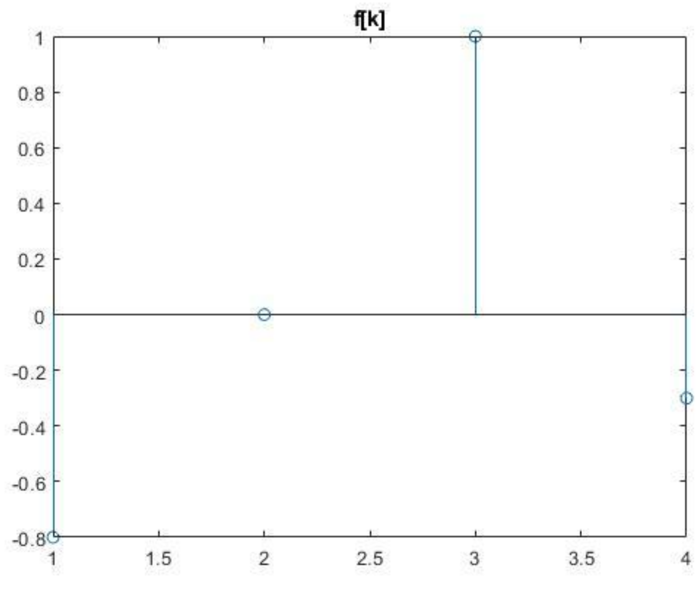


כעת ניקח את הסימבולים שלנו $b[n]$, נעלה את קצב הדגימה פי 2 ונעביר אותם במסנן $f[k]$ שחישבנו בחלק התיאורטי (כאמור לקחנו רק 10 סימבולים להמחשה):

יונתן תורג'מן 315468363
יהל אורגד 325010809

$$f[k]=\begin{cases}-0.8\,, & k=0\\ 0\,, & k=1\\ 1\,, & k=2\\ -0.3\,, & k=3\\ 0\,, & otherwise\end{cases}$$





ניתן לראות שקיבלנו בנקודות הדגימה את אותם ערכים כמו שקיבלנו באות שעבר במסנן $g_{RX}[n]$.

<u>חישוב הסתברות השגיאה</u>

אנרגיית הסימבול הנקלט היא :

יונתן תורג'מן 315468363
יהל אורגד 325010809

$$E_s = \sigma_b^2 \|u_0\|^2 = 2 \cdot [(-0.8)^2 + (1)^2 + (-0.3)^2] = 3.46$$

נחשב את N_0 , ניעזר בנוסחה:

$$SNR = \frac{E_b}{N_0} = \frac{E_s}{2N_0}$$

$$N_0 = \frac{E_s}{2 \cdot SNR} = \frac{E_s}{2 \cdot 10^{\frac{SNR_{dB}}{10}}}$$

ובסך הכל קיבלנו:

$$N_0 = \frac{3.46}{2 \cdot 10^{\frac{SNR_{dB}}{10}}}$$

נדרשנו לחשב עבור SNR הבאים:

```
SNR =

  -5     0     5    10    15    20    25    30    35    40   Inf
```

סה"כ לאחר חישוב פשוט ב-MATLAB קיבלנו:

```
N0 =

    5.4707    1.7300    0.5471    0.1730    0.0547    0.0173    0.0055    0.0017    0.0005    0.0002         0
```

בחלק התיאורטי מצאנו את הסתברות השגיאה:

$$P_{Error} = 1 - \left(1 - Q\left(\sqrt{SIR}\right)\right)^2$$

נרצה לבצע 4 שערוכים שונים, כאשר (כפי שנדרש בתרגיל) עבור כל אחד מהשוויוניים חישבנו את שגיאת השיערוך:

- <u>שיערוך ללא שווין</u>

  ניקח את וקטור הדגימות $r[n]$ ונחליט לפי סימן חיובי או שלילי מהו הסימבול ששודר. נבצע החלטה עבור כל דגימה שניה, מאחר ואנו יודעים כי העלינו קצב פי 2.

- <u>Zero Forcing</u>

  נבנה שווין ZF שחישבנו בחלק התיאורטי. בכל פעם נחתוך מ $r[n]$ את 8 הדגימות המתאימות, אותן נכפיל בשווין ZF שמימשנו. על וקטור זה נפעיל כלל החלטה לפי סימן.

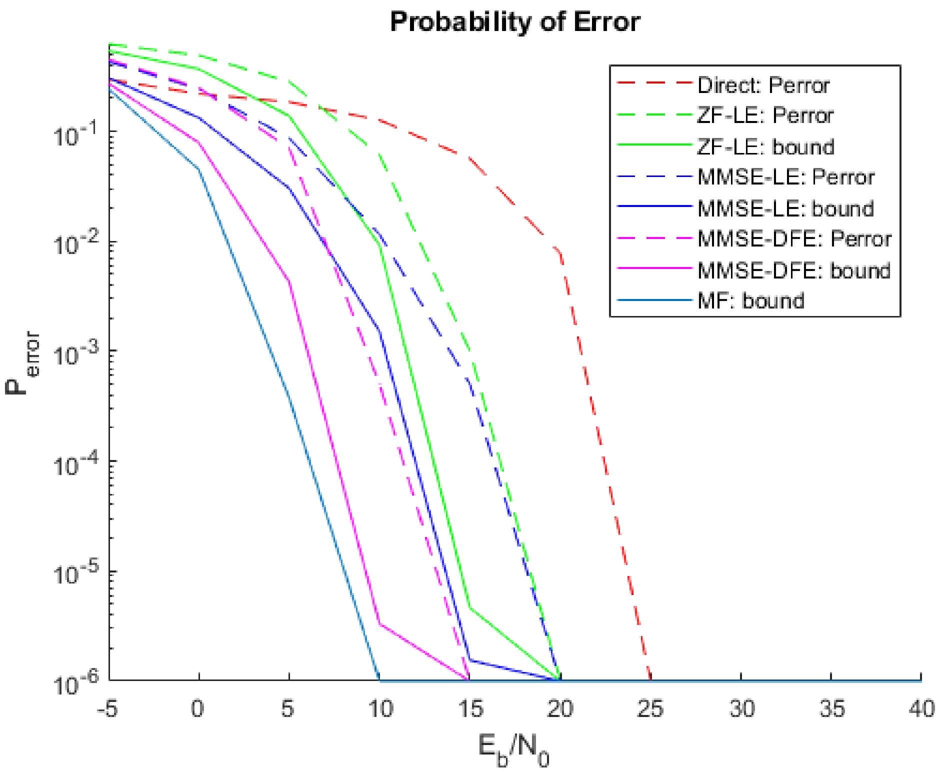
- <u>MMSE-LE</u>

  בדומה לשווין ה-ZF נבנה שווין MMSE-LE כפי שחישבנו בחלק התיאורטי. נכפיל אותו בדגימות הרלוונטיות מהווקטור $r[n]$ ונפעיל כלל החלטה לפי סימן.

- <u>MMSE-DFE</u>

נבנה שוויון (c_{ff}) MMSE-DFE, נכפיל אותו בדגימות המתאימות מהווקטור $r[n]$.
בנוסף עבור כל ערך של $z[n]$ נוסיף את השפעת ה-Feedback, על ידי הכפלת המוצאים הקודמים עליהם כבר קיבלנו החלטה בשוויון המתאים (c_{fb}). כאמור, על התוצאה הסופית נפעיל כלל החלטה לפי סימן.
עבור שני הסימבולים הראשונים נניח כי סימבולי העבר הם 0.

כעת נציג בגרף את שגיאות השיערוך ואת החסמים שחישבנו:



בהרצאה ראינו :

$$SNR_{MF-bound} \geq SNR_{MMSE} \geq SNR_{ZF}$$

לכן בצפוי ניתן לראות שהחסם של המסנן המתואם הוא בעל הסתברות השגיאה הנמוכה ביותר, אחריו שוויון MMSE-DFE , MMSE-LE , ולבסוף ZF-LE. כמו כן ניתן לראות שההחלטה ללא שוויון נותנת את התוצאות הכי פחות טובות.

בהתאם למה שלמדנו, ככל שה- SNR גבוה יותר נקבל הסתברות שגיאה נמוכה יותר והשוויון יתלכד עם החסם שלו.

כעת נסביר את התוצאות שקיבלנו:

- <u>שוויון MMSE-DFE</u> נתן לנו את התוצאות הכי טובות מכיוון שהוא נעזר בפידבק מסימבולי העבר בהחלטה שלו ומקבל החלטה טובה יותר כאשר אנו ב SNR גבוהה. לעומת זאת עבור

יונתן תורג'מן 315468363
יהל אורגד 325010809

SNR נמוך נקבל הסתברות שגיאה גבוהה יותר וזאת מכיוון שהוא מסתמך על סימבולי עבר ובמקרה זה ההחלטות הקודמות פחות איכותיות ועלולות לגרום להחלטה שגויה.

- שווין MMSE-LE נותן לנו תוצאות טובות מכיוון שהוא מתייחס גם ל-ISI וגם לרעש שמתווסף.
- שווין ZF-LE בעל הביצועים הכי פחות טובים במקרה הזה כצפוי, שכן הוא מטפל ב-ISI אבל לא מתייחס לרעש ואף עלול להגביר את השפעת הרעש על שיערוך הסימבול הנוכחי.