



**Universidad Politécnica de Madrid**

MÁSTER UNIVERSITARIO EN SISTEMAS ESPACIALES

**Dinámica Orbital y Control de  
Actitud**

2023-2024

# Índice general

<b>1. Orbital Mechanics and Perturbations</b>	<b>1</b>
1.1. Órbitas Keplerianas . . . . .	1
1.1.1. Leyes de Kepler . . . . .	1
1.1.2. Ley de invarianza de la energía o Vis-Viva . . . . .	3
1.1.3. Pozos gravitacionales o 'gravity wells' y órbitas . . . . .	3
1.1.4. Elementos orbitales . . . . .	4
1.2. Perturbaciones Orbitales . . . . .	4
1.2.1. Perturbaciones generales y especiales . . . . .	5
1.2.2. Perturbación por achatamiento terrestre . . . . .	6
1.2.3. Campo gravitatorio terrestre real . . . . .	8
1.2.4. Efecto de $J_2$ en los elementos orbitales . . . . .	10
1.2.5. Aplicaciones de la perturbación $J_2$ . . . . .	14
<b>2. Orbital Perturbations and Coordinate Systems</b>	<b>17</b>
2.1. Perturbaciones Orbitales . . . . .	17
2.1.1. Resistencia Atmosférica . . . . .	17
2.1.2. Tercer Cuerpo . . . . .	19
2.1.3. Presión de Radiación Solar . . . . .	23
2.2. Perturbaciones en Órbita Geoestacionaria . . . . .	24
2.2.1. Este-Oeste y Norte-Sur Drift . . . . .	25
2.3. Tipos de órbitas de satélites . . . . .	26
2.3.1. Low Earth Orbits (LEO) . . . . .	26
2.3.2. Medium Earth Orbits (MEO) . . . . .	26
2.3.3. Órbitas Geosíncronas . . . . .	26
2.3.4. Órbitas Geoestacionarias (GEO) . . . . .	27
2.3.5. High Earth Orbit . . . . .	27
2.3.6. Highly Elliptical Orbit (HEO) . . . . .	27
2.3.7. Sun-Synchronous Orbit . . . . .	27
2.4. Sistemas de Coordenadas . . . . .	27
2.4.1. Sistema de Coordenadas Inercial . . . . .	27
2.4.2. Sistema de Coordenadas Heliocéntrico . . . . .	28
2.4.3. Earth Centered Inertial (ECI) . . . . .	28
2.4.4. Sistema de Coordenadas Perifocal . . . . .	28
2.4.5. Sistema de Coordenadas Orbital . . . . .	28
2.4.6. Body-Fixed Coordinate System . . . . .	28
2.4.7. Transformaciones entre diferentes sistemas de coordenadas . . . . .	29
<b>3. Attitude Hardware and Attitude Concepts</b>	<b>31</b>
3.1. Introducción . . . . .	31
3.1.1. Objetivo principal de la actitud . . . . .	31
3.1.2. ADCS vs GNC . . . . .	32
3.1.3. Necesidad de Determinación y Control de Actitud . . . . .	33

<b>3.2. Hardware de Actitud: Sensores para Determinación de Actitud . . . . .</b>	<b>33</b>
3.2.1. Sensores . . . . .	34
3.2.2. Tipos de Sensores de Actitud . . . . .	34
3.2.3. Selección de Sensores . . . . .	35
3.2.4. Precisión Potencial de la Medición de Actitud . . . . .	35
3.2.5. Sensor Solar . . . . .	36
3.2.6. Sensor Terrestre . . . . .	37
3.2.7. Sensor de Estrellas . . . . .	38
3.2.8. Magnetómetros . . . . .	40
3.2.9. Giróscopo . . . . .	40
3.2.10. Interferometría GPS . . . . .	43
3.2.11. Pros y contras de sensores . . . . .	44
3.2.12. Determinación de Actitud: Sensores y Rendimiento Típico . . . . .	44
3.2.13. Configuración Típica de Sensores en una Nave Espacial . . . . .	45
<b>3.3. Introducción a Conceptos de Actitud . . . . .</b>	<b>45</b>
3.3.1. Momento Angular y Torques Externos: . . . . .	45
3.3.2. Principio de Conservación del Momento Angular . . . . .	46
3.3.3. Momento de Inercia . . . . .	46
3.3.4. Cinemática de Actitud . . . . .	47
3.3.5. Dinámica de Actitud (Ecuaciones de Euler) . . . . .	47
<b>3.4. Control de Actitud . . . . .</b>	<b>48</b>
3.4.1. Requisitos de Control de Actitud . . . . .	48
3.4.2. Satélites Estabilizados en Tres Ejes y en Giro . . . . .	49
3.4.3. Configuración del Sistema de Control . . . . .	49
3.4.4. Objetivos y Tareas de Actitud . . . . .	50
3.4.5. Cómo Estabilizar una Nave Espacial Frente a Torques de Perturbación . . . . .	50
3.4.6. Métodos de Control de Actitud . . . . .	51
3.4.7. Sistemas de Actuadores . . . . .	51
<b>3.5. Hardware de Actitud: Actuadores para el Control Activo de la Actitud . . . . .</b>	<b>52</b>
3.5.1. Concepto de Propulsor . . . . .	52
3.5.2. Control de Actitud con Propulsores . . . . .	53
3.5.3. Rueda de Momento y Rueda de Reacción . . . . .	53
3.5.4. Giroscopios de Control de Momento . . . . .	56
3.5.5. Torque Magnético . . . . .	56
3.5.6. Torque Magnético con bobinas electromagnéticas . . . . .	57
<b>3.6. Control de Actitud Pasivo . . . . .</b>	<b>58</b>
3.6.1. Estabilización mediante Gradiente de Gravedad . . . . .	58
3.6.2. Estabilización por Giro . . . . .	59
<b>3.7. Torques de Perturbación . . . . .</b>	<b>60</b>
3.7.1. Torque Aerodinámico . . . . .	61
3.7.2. Torque de Gradiente Gravitacional . . . . .	61
3.7.3. Torque por Presión de Radiación Solar . . . . .	62
3.7.4. Torque Magnético . . . . .	62
3.7.5. Dependencia respecto a la distancia a la Tierra . . . . .	63
<b>4. Space mission ADCS subsystem design</b>	<b>65</b>
4.1. Introducción . . . . .	65
4.2. Pasos del diseño de un subsistema ADCS para una misión espacial . . . . .	66
4.2.1. Definir modos de control y requisitos . . . . .	67
4.2.2. Seleccionar el tipo de control de actitud . . . . .	68
4.2.3. Cuantificar las perturbaciones internas y externas del entorno . . . . .	69
4.2.4. Seleccionar y medir el hardware ADCS . . . . .	72
4.2.5. Definir el algoritmo de ADCS . . . . .	77
4.2.6. Iterar y documentar el proceso . . . . .	81

<b>5. Attitude Kinematics</b>	<b>83</b>
5.1. Sistema de referencia y vectores . . . . .	83
5.2. Matriz de rotación . . . . .	84
5.2.1. Matriz de cosenos directores / Directional Cosine Matrix (DCM) . . . . .	84
5.2.2. Ángulos de Euler . . . . .	85
5.2.3. Rotación de Euler mediante eje propio (eigenaxis) . . . . .	87
5.2.4. Parámetros de Euler / Cuaternión (Quaternion) . . . . .	88
5.3. Velocidad angular . . . . .	89
5.3.1. Teorema del transporte . . . . .	89
5.3.2. Aceleración angular . . . . .	89
5.4. Ecuación diferencial cinemática . . . . .	89
<b>6. Attitude determination</b>	<b>91</b>
6.1. Determinación de actitud . . . . .	91
6.1.1. Idea básica . . . . .	91
6.1.2. Enfoque estático . . . . .	92
6.1.3. Enfoque filtrado . . . . .	92
6.2. Determinación en un solo eje . . . . .	93
6.3. Determinación en tres ejes . . . . .	94
6.3.1. TRIAD Method . . . . .	94
6.3.2. Problema de Whaba . . . . .	95
<b>7. Dinámica de sólido rígido</b>	<b>99</b>
7.1. Dinámica de partículas . . . . .	99
7.2. Dinámica de sólido rígido . . . . .	100
7.3. Ecuación de Euler . . . . .	101
7.4. Resumen . . . . .	101
<b>8. Attitude Dynamics I</b>	<b>103</b>
8.1. Ecuaciones Euler . . . . .	103
8.1.1. Ecuación del movimiento en referencia a un cuerpo fijo . . . . .	103
8.1.2. Ecuaciones de Euler en ejes principales . . . . .	104
8.2. Ecuaciones diferenciales . . . . .	104
8.2.1. Ecuación diferencial lineal . . . . .	105
8.2.2. Ecuación diferencial de orden superior . . . . .	106
8.2.3. Ecuación característica de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales . . .	109
8.2.4. Estabilidad de las soluciones de un sistema matricial de ecuaciones diferenciales	109
8.2.5. Teorema de estabilidad de los sistemas lineales . . . . .	110
8.2.6. Linealización de un sistema no lineal . . . . .	110
8.3. Movimiento sin torque (simetría axial) . . . . .	111
8.3.1. Ecuaciones de Euler sin torque externo . . . . .	111
8.3.2. Movimiento circular en cuerpo fijo (simétrico axial) . . . . .	113
8.3.3. Movimiento en marco de inercia (simétrico axial) . . . . .	114
8.3.4. Prolate y Oblate . . . . .	115
8.3.5. Interpretación geométrica . . . . .	115
8.3.6. Velocidad de precesión . . . . .	115
8.3.7. Resumen . . . . .	117
8.4. Movimiento sin torque (no simétrico) . . . . .	117
8.4.1. Vista geométrica: Construcción Poinsot . . . . .	118
8.4.2. Elipsoide de la energía cinética . . . . .	118
8.4.3. Elipsoide del momento angular . . . . .	119
8.4.4. Polhode . . . . .	119
8.5. Estabilidad del movimiento sin torque: Vista geométrica (pequeñas perturbaciones en un cuerpo no simétrico) . . . . .	121

8.5.1.	Caso especial con rotación constante en el tiempo . . . . .	121
8.5.2.	Ejemplo de rotación estable (eje menor) . . . . .	121
8.5.3.	Ejemplo de rotación estable (eje mayor) . . . . .	122
8.5.4.	Ejemplo de rotación estable (eje intermedio) . . . . .	122
8.6.	Estabilidad del movimiento sin torque: método matemático (pequeñas perturbaciones cuerpo no simétrico) . . . . .	124
8.6.1.	Estabilidad de rotación alrededor de los ejes principales(Ecuaciones de Euler)	124
8.6.2.	Equilibrio . . . . .	124
8.6.3.	Perturbación del equilibrio . . . . .	125
8.6.4.	Linealizar las ecuaciones de Euler . . . . .	125
8.6.5.	Ecuación diferencial de segundo orden . . . . .	126
8.6.6.	Condición para la estabilidad del eje de giro. . . . .	126
8.6.7.	Estabilidad del movimiento libre de torque de un cuerpo asimétrico . . . . .	127
8.6.8.	Regla del eje mayor . . . . .	127
8.6.9.	Disipación de energía: hipótesis del sumidero de energía . . . . .	127
8.6.10.	Disipación de energía: deriva de Polhode para cuerpos cuasi rígidos . . . . .	128
8.6.11.	Disipación de energía para cuerpos axisimétricos: Matemáticas . . . . .	128
8.6.12.	Resumen . . . . .	130
8.7.	Resumen total . . . . .	131
<b>9.</b>	<b>Attitude Dynamics II</b>	<b>133</b>
9.1.	Spin Stabilization . . . . .	133
9.2.	Dual-spin stabilization . . . . .	133
9.2.1.	Ecuacion de movimiento Dual-Spin . . . . .	134
9.2.2.	Estabilidad de dual spin . . . . .	135
9.3.	Environmental disturbance torques . . . . .	136
9.4.	Gravity-gradient stabilization . . . . .	136
9.4.1.	Reference frames . . . . .	137
9.4.2.	Orbita circular . . . . .	138
9.4.3.	Stability analysis . . . . .	140
9.5.	Three axis stabilization . . . . .	142
9.6.	Summary . . . . .	143
<b>10.</b>	<b>Attitude Control</b>	<b>145</b>
10.1.	Formulación matemática . . . . .	145
10.1.1.	Representación del sistema en la función de transferencia . . . . .	146
10.1.2.	Señales de entrada comunes en control . . . . .	147
10.1.3.	Diagramas de bloques . . . . .	147
10.1.4.	Control con perturbaciones: retroalimentación . . . . .	149
10.1.5.	Leyes de control habituales . . . . .	150
10.1.6.	Requisitos generales del sistema de control . . . . .	151
10.1.7.	Propiedades de los sistemas cerrados . . . . .	151
10.1.8.	Especificación en el dominio del tiempo . . . . .	152
10.1.9.	Respuesta transitoria a impulso escalón . . . . .	154
10.1.10.	Efectos de añadir polos o ceros al sistema . . . . .	158
10.1.11.	Respuesta permanente . . . . .	159
10.2.	Transformada de Laplace . . . . .	163

# Capítulo 1

## Orbital Mechanics and Perturbations

### 1.1. Órbitas Keplerianas

También llamado problema de los dos cuerpos, debido a la atracción mutua solamente bajo la acción gravitatoria, asumiendo masas puntuales. La ecuación diferencial responde, en ejes inerciales, a la siguiente, siendo un modelo razonable para satélites orbitando planetas o los mismos orbitando el Sol, entre otros:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{|\vec{r}|^3} \vec{r} &= 0 & \mu = G(m_1 + m_2) \approx Gm_2 \\ \vec{r}(0) &= \vec{r}_0 \\ \dot{\vec{r}}(0) &= \vec{v}(0) = \vec{v}_0\end{aligned}$$

Con ello, todas las órbitas son resultado de una sección cónica, siendo circulares, elípticas, parabólicas o hiperbólicas.

#### 1.1.1. Leyes de Kepler

##### Primera ley de Kepler

Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse. Ello da lugar a la ecuación del movimiento orbital (polar):

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta},$$

siendo  $a$  el semieje mayor de la órbita y  $e$  la excentricidad, constante determinada por el momento angular y la energía de valor 0 para órbitas circulares,  $0 < e < 1$  para elípticas, 1 para

parabólicas y  $\neq 1$  para hiperbólicas. En cuanto a la posición polar en la órbita, se tiene:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

$$r_{\min}(\theta = 0) = r_{per} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e} = a(1 - e)$$

$$r_{\max}(\theta = \pi) = r_{apo} = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e} = a(1 + e)$$

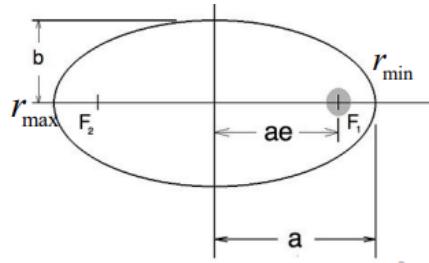


Figura 1.1.1: Parámetros de una elipse.

Con ello, se definen las constantes del movimiento:

- **Energía:** se conserva la energía total en la órbita.

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{\nu^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

- **Momento angular:** el movimiento se mantiene en un plano fijo, normal al momento angular (vector), el cual es constante y responde a la ecuación siguiente.

$$\vec{h} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\dot{\vec{h}} = \dot{\vec{r}} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times m\vec{r}\frac{GM}{r^3} = 0$$

### Segunda ley de Kepler

El radio vector que une un planeta y el Sol recorre áreas iguales en tiempos iguales.

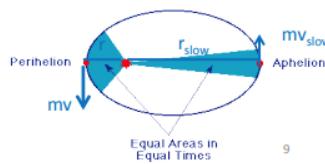


Figura 1.1.2: Segunda ley de Kepler

### Tercera ley de Kepler

Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

### 1.1.2. Ley de invarianza de la energía o Vis-Viva

Proporciona una relación entre la velocidad y la posición (semieje mayor), que ambas determinan la energía total del satélite.

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{\nu^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a},$$

donde  $v$  = es la velocidad orbital,  $r$  = r la distancia o radio orbital en dicho instante,  $a$  = el semieje mayor de la órbita y  $\mu$  = el parámetro gravitacional.

### 1.1.3. Pozos gravitacionales o 'gravity wells' y órbitas

La expresión "gravity well" (pozo gravitacional) se utiliza comúnmente en el contexto de la física y la astronáutica para describir la influencia gravitatoria de un objeto masivo, como una estrella, un planeta o una luna. Un gravity well representa una región del espacio en la que la gravedad de ese objeto masivo es lo suficientemente fuerte como para afectar significativamente a otros objetos cercanos.

No confundir con la esfera de influencia o de Hill, ya que no se refiere a una región esférica específica respecto de un cuerpo, si no que describe cómo la gravedad se vuelve más intensa a medida que te acercas a un objeto masivo. En otras palabras, es una descripción cualitativa de cómo la gravedad afecta a los objetos cercanos. Ayuda a comprender cómo la gravedad influye en las trayectorias de vuelo de naves espaciales y cómo se deben planificar las maniobras para ingresar o salir de la influencia gravitacional de un objeto masivo.

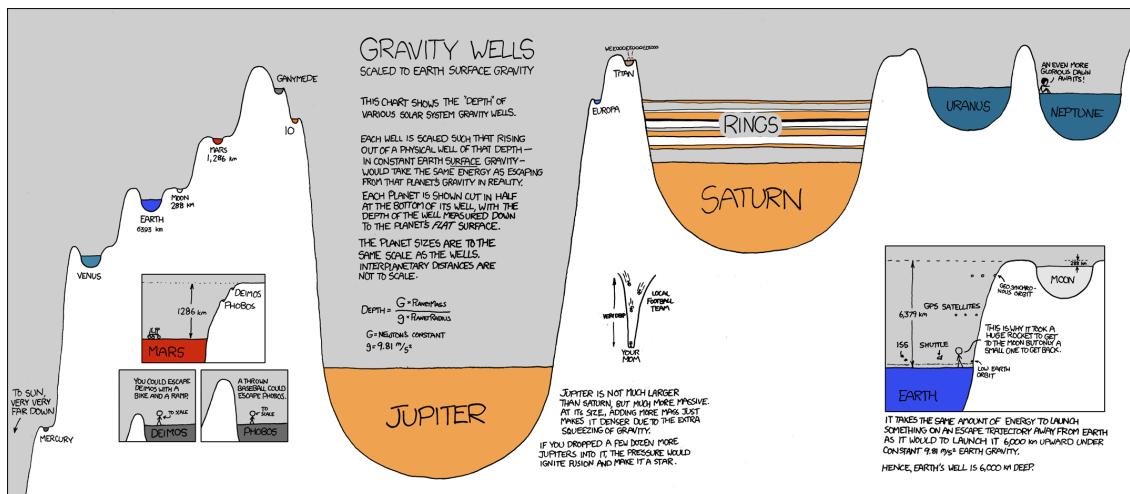


Figura 1.1.3: Gravity Wells

### 1.1.4. Elementos orbitales

De acuerdo con la ecuación diferencial presentada antes, es decir, 3 ecuaciones diferenciales de segundo orden, se requieren 6 variables, equivalente a resolver 6 ecuaciones diferenciales de primer orden con 6 condiciones iniciales de posición y velocidad, pero estas no son las más óptimas al no dar información de cómo es la órbita o de su altitud, mismamente.

Las órbitas planas o 2D utilizan un set de 3 variables: semieje mayor,  $a$  y excentricidad,  $e$  que definen la órbita y el periodo orbital,  $T$ . De no ser plana, se añaden la inclinación,  $0 < i < \pi$ , la longitud del nodo ascendente o RAAN,  $0 < \Omega < 2\pi$  y el argumento del perigeo,  $0 < \omega < 2\pi$ . Este set de 6 parámetros son específicos de cada órbita y equivalentes a saber posición y velocidad.

**Definition of ellipse**

$e$ : shape of orbit  
 $a$ : size of orbit

**Definition of orbital plane**

$i$ : orients orbital plane with respect to ecliptic plane  
 $\Omega$ : longitude of intersection of orbital and ecliptic planes

**Orientation of ellipse within orbital plane**  
 $\omega$ : orients semi-major axis with respect to ascending node

**Position of object on ellipse**  
 $\theta$ : orients celestial body in space

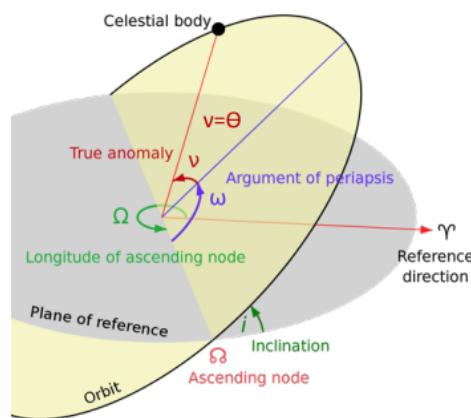
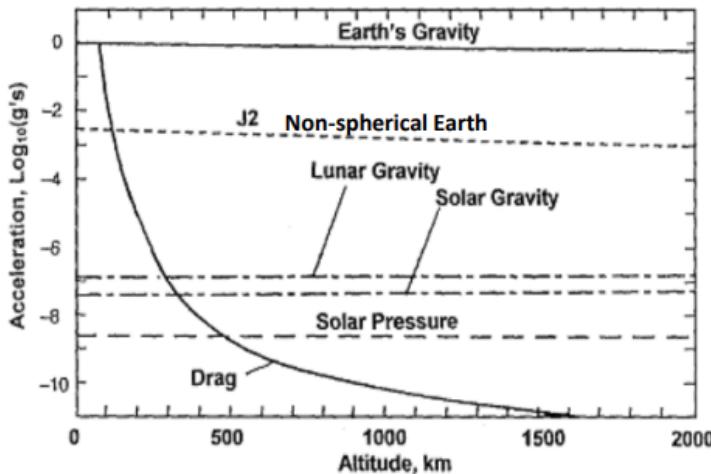


Figura 1.1.4: Set de parámetros orbitales.

## 1.2. Perturbaciones Orbitales

Conjunto de fuerzas o aceleraciones externas al satélite que modifican la Ley Kepleriana expuesta anteriormente. No obstante, el modelo kepleriano resulta interesante no para órbitas precisas, si no para las características generales de la misión. Estas se deben a:

- **Achatamiento terrestre:** no es una masa puntual ni perfectamente esférica.
- **Tercer Cuerpo:** presencia de otros cuerpos y de sus campos gravitacionales (Sol, Luna, ...).
- **Resistencia atmosférica:** produce decaimiento orbital (atmósfera residual).
- **Radiación solar:** presión solar ejercida sobre la nave que crea un momento transmitido a la misma por los fotones.



Logarithm of forces normalized with 1 g as function of altitude  
 Dominant forces: Earth's gravity field and  $J_2$  perturbation due to non-spherical Earth  
 Curve for drag has large uncertainty up to one order of magnitude (due to solar activity)

Figura 1.2.1: Influencia de las perturbaciones según la altitud orbital.

A modo de resumen se tienen la siguiente importancia según la órbita:

- **LEO( 300km):** achatamiento terrestre y resistencia atmosférica.
- **High LEO( 1000km):** achatamiento terrestre y acción del Sol y de la Luna.
- **GEO(36000km):** achatamiento terrestre y acción del Sol y de la Luna y presión de radiación solar.

En órbitas cercanas a la Tierra:

Tabla 1.2.1: Ejemplo de aceleraciones de las perturbaciones en LEO.

Fuente	Aceleración [m/s <sup>2</sup> ]
Gravedad terrestre	10
Achatamiento terrestre	$5 \cdot 10^{-2}$
Resistencia atmosférica	$1 \cdot 10^{-1}$ a $1 \cdot 10^{-9}$
Radiación solar	$1 \cdot 10^{-9}$
Sol, Luna	$1 \cdot 10^{-7}$

Ello da lugar a una modificación de la ecuación orbital:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{|\vec{r}|^3} \vec{r} + \vec{a}_{pert.}; \quad \vec{r}(0) = \vec{r}_0; \quad \dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}(0) = \vec{v}_0$$

$$\vec{a}_{pert.} = \vec{a}_{J2} + \vec{a}_{drag} + \vec{a}_{SolPres} + \vec{a}_{Third-body}$$

### 1.2.1. Perturbaciones generales y especiales

Para tener en cuenta las perturbaciones, hay diversas técnicas clasificadas en:

- **Perturbaciones especiales o numéricas:** técnicas numéricas de integración de la ecuación orbital con condiciones iniciales específicas, en la cual se obtiene en un solo paso la posición y velocidad (método de Cowell, método de Encke, etc.).

Esta integración se repite si cambian las condiciones iniciales y, para una buena precisión, se requiere integración numérica. Es un método flexible y que puede incluir cualquier aceleración de perturbación arbitraria.

- **Perturbaciones generales o analíticas:** lida con la variación en los parámetros orbitales (constantes en Kepler) causadas por efectos de aceleraciones de perturbación, determinando analíticamente su variación ( $da/dt$ ,  $de/dt$ , etc.).

Solución válida para cualquier condición inicial, con una mejor comprensión de la física de las perturbaciones. Útil para un análisis rápido en la planificación de misiones.

Es menos preciso que una perturbación especial al necesitar aproximar las derivadas. Fueron desarrolladas por Euler y mejoradas por Lagrange y Gauss, reciben su nombre, **variación de los parámetros orbitales**, al cambiar los mismos, supuestos constantes por Kepler bajo la acción de perturbaciones, en forma de ecuaciones diferenciales de primer orden que representan la tasa de cambio de los mismos.

Para el desarrollo se remite a los libros de referencia (Apuntes Mecánica Orbital CTA, Spacecraft Dynamics and Control, etc.), donde se aprecia como dichas variaciones son función de los parámetros orbitales y la aceleración de perturbación,  $A_{pert}$ . Un ejemplo se recoje con la variación del RAAN:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{GM}} \frac{\sin(\omega + \theta)}{\sin i(1+e \cos \theta)} a_z$$

expresada en coordenadas cilíndricas, siendo  $a_z$  la aceleración de la perturbación.

### 1.2.2. Perturbación por achatamiento terrestre

Debido al achatamiento terrestre y a la rotación de la misma, la distribución de la masa en la Tierra no es uniforme, concentrándose en ciertas regiones, afectando al potencial gravitacional en el término  $1/r$ . Esto resulta en fuerzas que actúan en satélites, especialmente en órbitas bajas, cambiando sus parámetros orbitales. Además, la fuerza gravitatoria pierde con ello su pertenencia al plano orbital, no siendo un movimiento plano.

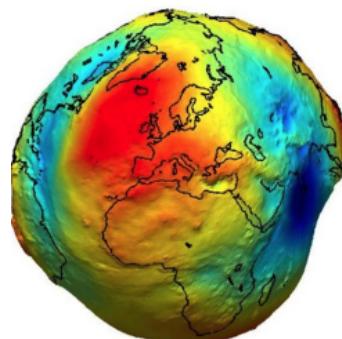


Figura 1.2.2: Geoide terrestre.

Esto se detalla en las ecuaciones, partiendo de la ley de Newton,

$$\vec{F} = -G \frac{M_1 \cdot M_2}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

expresando la aceleración radial, en términos de potenciales (más fácil) como

$$\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[ -\frac{GM}{r} \right].$$

Esto es equivalente a la fórmula diferencial de Gauss, con densidad nula al ser exterior al cuerpo, derivando en  $\nabla^2 U = 0$ . Esto resulta en una alternativa al cálculo del potencial gravitatorio y campo gravitatorio (ver Lectura 1, potencial magnético como referencia).

Si se expresa en coordenadas polares y haciendo un poco de álgebra de armónicos esféricos, resulta en:

$$U(r, \lambda, \phi) = -\frac{GM}{r} + U_{pert}(r, \lambda, \phi),$$

donde el término de perturbaciones es de la forma:

$$U_{pert}(r, \lambda, \phi) = \frac{GM}{r} \left( \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R_e}{r} \right)^n J_n P_{n0}(\sin \phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{R_e}{r} \right)^n [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(\sin \phi) \right)$$

Esta expresión se puede simplificar según:

$$U_{pert}(r, \lambda, \phi) = U_{zonal}(r, \phi) + U_{sectorial}(r, \lambda) + U_{tesseral}(r, \lambda, \phi)$$

- **Armónicos de zona,  $m=0$ .** Varían únicamente en la longitud (sectores positivos y negativos), siendo  $P_{n0}$  polinomios de Legendre y  $J_n$  coeficientes experimentales.

$$U_{zonal}(r, \phi) = \frac{GM}{r} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R_e}{r} \right)^n J_n P_{n0}(\sin \phi) \right]$$

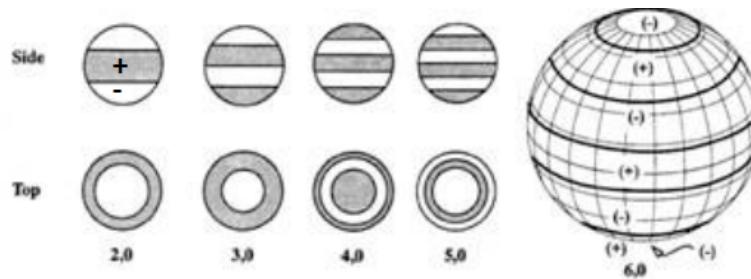


Figura 1.2.3: Armónicos zonales

- **Armónicos sectoriales,  $m=n$ .** Varían en la latitud, con  $P_{nn}$  polinomios de Legendre uniformemente positivos y  $C_{nn}$  y  $S_{nn}$  coeficientes experimentales.

$$U_{sectorial}(r, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R_e}{r} \right)^n \left[ C_{nn} \cos n\lambda + S_{nn} \sin n\lambda \right] P_{nn}(\sin \phi)$$

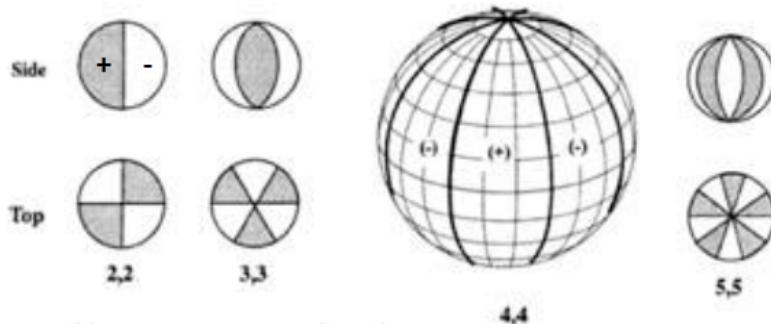


Figura 1.2.4: Armónicos sectoriales.

- **Armónicos teserales,  $m \neq n$ .** Varían en ambas direcciones.

$$U_{\text{tesseral}}(r, \lambda, \phi) = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{R_e}{r} \right)^n [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(\sin \phi)$$

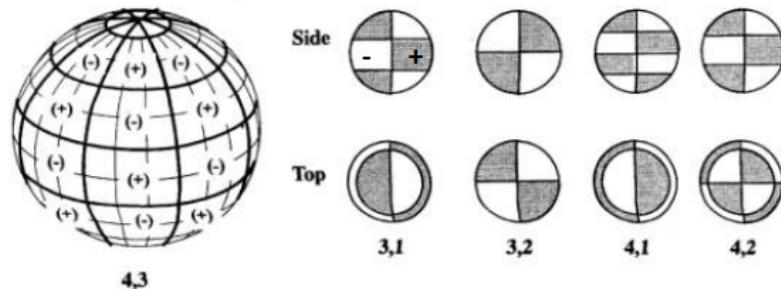


Figura 1.2.5: Armónicos teserales.

Resumiendo, es necesario determinar experimentalmente los coeficientes  $J_n$ ,  $C_{nm}$  y  $S_{nm}$  de la expresión anterior, donde se tiene en cuenta a partir de  $n \geq 2$ . Se adjuntan las expresiones de los polinomios de Legendre, por si fuera necesario:

$$P_{nm}(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{\partial^m P_n(x)}{\partial x^m}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{(-2)^n n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (1 - x^2)^n$$

### 1.2.3. Campo gravitatorio terrestre real

Con ello, se aprecia cómo el achatamiento resulta en un término que añade masa cerca del ecuador. Al añadir  $J_2$  como primera corrección, se aprecia una dependencia radial con  $1/r^3$  y angular con  $P_{20} = f(\sin \phi)$ , y términos mayores para adecuar mejor la distribución real de masa. Este término se calcula con detalle en las diapositivas, y se obtiene:

$$\begin{aligned}
 U(r, \phi) &= -\frac{GM}{r} \left[ 1 - \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 J_2 P_{20}(\sin \phi) \right] \\
 &= -\frac{GM}{r} + \frac{GM}{r^3} R_e^2 J_2 \left( \frac{3}{2} \sin^2 \phi - \frac{1}{2} \right) \\
 &= U_0 + U_{J_2}
 \end{aligned}$$

La mayoría de los satélites asumen la hipótesis de simetría rotacional en el potencial terrestre, según la ecuación:

$$\begin{aligned}
 U(r, \phi) &= -\frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R_e}{r} \right)^n J_n P_{n0}(\sin \phi) \right] \\
 J_2 &= 1,083 \cdot 10^{-3} \\
 J_3 &= -2,56 \cdot 10^{-6}
 \end{aligned}$$

Sin la corrección  $J_2$ , la precisión del modelo es de un 0.1 % preciso únicamente, describiendo la posición en una referencia fija en la Tierra, que rota con ella, a una distancia  $r$  del centro de la misma y una declinación  $\phi$  respecto del ecuador.

Estos coeficientes se pueden encontrar en varias referencias como James R. Wertz (1978) *Spacecraft attitude determination and control*, NASA EGM96, Earth Gravitational Model 2008 EGM2008 hasta n=2160. Para órdenes mayores que 2, todos los coeficientes son de orden  $O(10^{-6})$  a excepción de  $J_2$ :

Tabla 1.2.2: Magnitude of low order  $J$ ,  $C$  and  $S$  values for Earth

<b><math>J</math> Values</b>	<b><math>C</math> Values</b>	<b><math>S</math> Values</b>
$J_2 = 1082,7 \times 10^{-6}$	$C_{2,1} = 0$	$S_{2,1} = 0$
$J_3 = -2,56 \times 10^{-6}$	$C_{3,1} = 1,57 \times 10^{-6}$	$S_{3,1} = 0,897 \times 10^{-6}$
$J_4 = 1,58 \times 10^{-6}$	$C_{3,2} = 2,10 \times 10^{-6}$	$S_{3,2} = 0,16 \times 10^{-6}$
$J_5 = -0,15 \times 10^{-6}$	$C_{3,3} = 0,25 \times 10^{-6}$	$S_{3,3} = 0,27 \times 10^{-6}$
$J_6 = 0,59 \times 10^{-6}$	$C_{4,1} = 0,077 \times 10^{-6}$	$S_{4,1} = 0,173 \times 10^{-6}$

Este término es el efecto dominante ( $J_2$ ) resultado de la protuberancia ecuatorial de la Tierra (potencial perturbador  $U_{J_2}$  anterior). Una vez obtenido el potencial perturbador, ¿cómo se obtiene la aceleración? Tomando gradientes en el potencial (diapositivas 49 y 50 de la Lectura 2). A continuación, se presentan las ecuaciones para el modelo esférico y el real con achatamiento terrestre.

**$J_2$  produce aceleraciones en la declinación pero no en la ascensión recta en coordenadas fijas a la Tierra.**

<u>Spherical Earth</u>	<u>Earth-fixed coordinate</u>	<u>Equatorial bulge Earth</u>
$U_{Sphere} = -\frac{GM}{r}$		$U(r, \theta) = U_{Sphere} + U_{J_2}$
$a_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{GM}{r^2}$		$U_{J_2} = \frac{GM}{r} J_2 \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \phi - \frac{1}{2}\right)$
$a_\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0$		$a_r = -\frac{\partial U_{J_2}}{\partial r} = 3 \frac{GM}{r^4} R_e^2 J_2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \phi - \frac{1}{2}\right)$
$a_\lambda = -\frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0$		$a_\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial U_{J_2}}{\partial \phi} = \frac{GM}{r^4} R_e^2 J_2 (3 \sin \phi \cos \phi)$
Because of symmetry only radial acceleration	Perturbation of radial acceleration	$a_\lambda = -\frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial U_{J_2}}{\partial \lambda} = 0$
	Acceleration in declination (i.e. <b>North-South</b> )	
	No acceleration in right ascension (i.e. <b>East-West</b> ) because of symmetry	50

Figura 1.2.6: Aceleraciones producidas por J2.

#### 1.2.4. Efecto de $J_2$ en los elementos orbitales

Mediante una técnica de perturbación general, se puede obtener el efecto mejor que con gradientes dada la diferencia entre coordenadas cilíndricas (aceleración) y esféricas (potencial).

Para ello:

- Se expresa  $U_{J_2}$  en coordenadas ECEF, Earth Centered Earth Fixed sabiendo  $z = r \sin \phi$ .

$$U_{J_2} = \frac{GM}{r} J_2 \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \left(\frac{3}{2} \left(\frac{z}{r}\right)^2 - \frac{1}{2}\right)$$

- Se calcula la aceleración tomando gradientes.

$$\vec{F}_{J_2} = -\nabla U_{J_2} = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{x}_G + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{y}_G + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{z}_G$$

Como la variación de los parámetros se da en cilíndricas (por ejemplo,  $d\Omega/dt$ ) y, de acuerdo con el libro *Spacecraft Dynamics and Control*, se realiza la rotación de ángulos de Euler según: rotación de  $\Omega$  en torno a  $z$ , rotación de  $i$  en torno a  $x$  y rotación de  $\omega$  en torno a  $z$ .

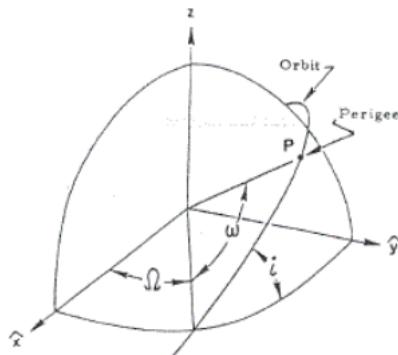


Figura 1.2.7: Rotación de coordenadas ECEF a cilíndricas.

Con ello se tiene:

$$\vec{z}_G = \sin i \sin(\omega + \theta) \vec{x}_0 + \sin i \cos(\omega + \theta) \vec{y}_0 + \cos i \vec{z}_0$$

$$\vec{F}_{J_2} = a_r(i, \omega, \theta) \vec{x}_0 + a_\theta(i, \omega, \theta) \vec{y}_0 + a_z(i, \omega, \theta) \vec{z}_0$$

$$a_r = -\frac{\partial U_{J_2}}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{GM}{r} J_2 \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \left( \frac{z}{r} \right)^2 - \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$a_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U_{J_2}}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{simetría axial})$$

Con ello, se obtendrían las expresiones. Principalmente, afecta a la longitud del nodo ascendente y al argumento del periapsis, cuyas tasas de cambio resultan:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{3}{2} J_2 \frac{R_e^2}{a^2} \frac{n}{(1-e^2)^2} \cos i \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{3}{4} J_2 \frac{R_e^2}{a^2} \frac{n}{(1-e^2)^2} (4 - 5 \sin^2 i) \end{aligned}$$

Para  $\Omega$ , se obtiene la tasa de cambio instantáneo, y  $\omega$  y  $\theta$  varían cíclicamente entre 0 y  $2\pi$ . En general, los tipos de perturbaciones producidas se clasifican en:

- **Corto periodo:** varían cíclicamente en cada periodo orbital, sin un cambio neto en los elementos orbitales.
- **Largo periodo:** los ciclos duran más que un periodo orbital, sin cambio neto en los elementos orbitales.
- **Secular:** no oscilan, pero se acumulan con el tiempo, dando lugar a cambios a largo plazo en todos los elementos orbitales, por lo que deben ser corregidos. El ratio de cambio secular es la media de cambio sobre muchas órbitas.

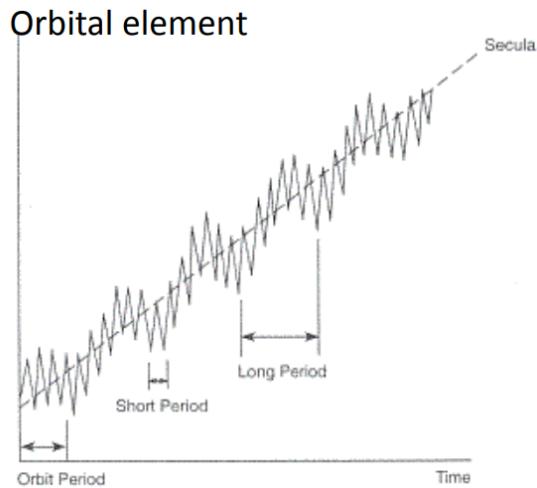


Figura 1.2.8: Perturbaciones de elementos orbitales con el tiempo.

Para el cálculo de la contribución secular, aislada, se promedia en una órbita y, mediante la regla de la cadena,  $\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d\Omega}{d\theta}\dot{\theta} \Leftrightarrow \frac{d\Omega}{d\theta} = \frac{1}{\dot{\theta}} \frac{d\Omega}{dt}$ , con la anomalía verdadera. Se muestra con el ejemplo de  $\Omega$ , analizando primero el cambio medio en una órbita:

$$\Delta\Omega_{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{d\Omega}{d\theta} d\theta = \dots = -\frac{3\pi J_2 R_e^2}{a^2 (1-e^2)^2} \cos i$$

y al dividir por el periodo orbital,  $\Delta T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$ , se obtiene, ya incluyendo las expresiones de todos los elementos orbitales:

$$\dot{a}_{avg} = 0$$

$$\dot{e}_{avg} = 0$$

$$\dot{i}_{avg} = 0$$

$$\dot{\Omega}_{avg} = \frac{\Delta\Omega_{2\pi}}{\Delta T} = -\frac{3J_2 R_e^2}{2(1-e^2)^2} \sqrt{\frac{\mu}{a^7}} \cos i$$

$$\dot{\omega}_{avg} = \frac{3\pi J_2 R_e^2}{4(1-e^2)^2} \sqrt{\frac{\mu}{a^7}} (5 \cos^2 i - 1)$$

El cambio secular en  $\Omega$  se llama **regresión nodal** y en  $\omega$ , **rotación apsidal o de ápsides**. Se aprecia cómo con la aproximación de primer orden, no tiene incidencia en la forma y tamaño de la órbita ( $a, e$ ) ni la inclinación del plano orbital,  $i$ , si no en  $\Omega, \omega$ , girando el plano orbital, un ratio  $d\Omega/dt$  sobre el eje de giro de la Tierra y el perigeo de la órbita gira con  $d\omega/dt$ .

### Interpretación física de la protuberancia ecuatorial de la Tierra

Dada la protuberancia, la fuerza gravitatoria ya no se encuentra en el plano orbital, dando lugar a:

- Movimiento no plano.
- La órbita perturbada antes y después del paso por el ecuador es diferente con respecto a la inicial.

- La masa extra produce una atracción extra localizada hacia el plano ecuatorial, intentando alinearse con él el plano orbital.
- Como se conserva el momento angular, la órbita se comporta como un giróscopo.
- La órbita posee un movimiento de precesión alrededor de los ejes de rotación de la Tierra sin cambio en la inclinación, dada la precesión del vector momento angular por el torque inducido por la gravedad en los pases por el Ecuador.
- Precesión de  $\Omega$  y  $\omega$

### Regresión nodal

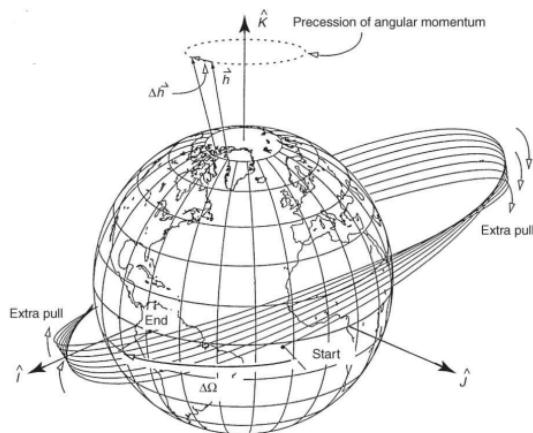


Figura 1.2.9: Regresión nodal.

La regresión nodal depende de la inclinación, altitud y excentricidad. Esto da lugar a una serie de aplicaciones como órbitas polares (inclinación de  $90^\circ$  donde la masa extra no tiene efecto), heliosíncronas (precesión nula con la misma orientación de plano orbital) y Molniya (distribución simétrica de la masa extra para órbitas polares).

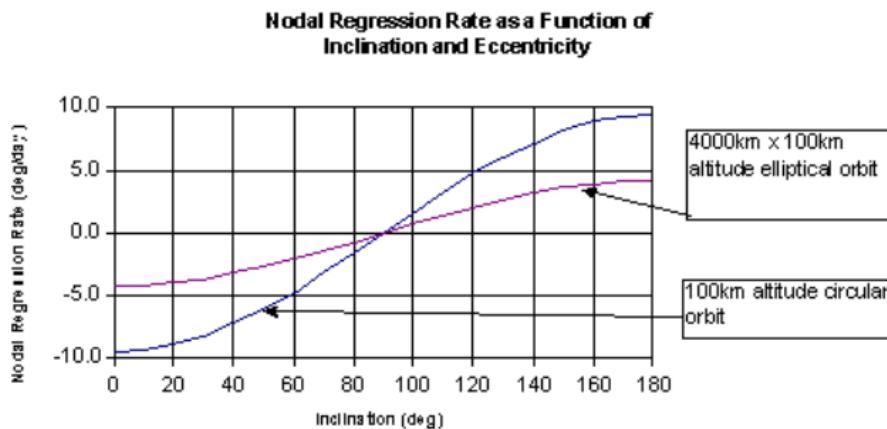


Figura 1.2.10: Dependencia de la regresión nodal con la inclinación y altitud orbital.

Se aprecian una serie de efectos:

- Órbitas polares,  $i = 90^\circ$  presentan una precesión nodal nula, siendo máxima para  $i = 0^\circ$ .
- Los nodos se mueven al Oeste en inclinaciones menores a  $90^\circ$ , **prógradas**, y al Este en las **retrógradas**,  $i > 90^\circ$ .
- A mayor altitud, menor efecto en el satélite y, si se encuentra en órbita polar, no presenta efecto. A menos altitud y menor inclinación, mayor efecto.

### Rotación de ápsides

Este efecto puede tener gran importancia en cuanto a magnitud y afectar a tanto perigeo como apogeo dependiendo de la inclinación de la órbita. Si se busca que la variación sea nula, da lugar a órbita Molniya (inclinación de  $63.4^\circ$  o  $116.6^\circ$  que anula la rotación). Si la derivada es positiva, el perigeo avanza en la dirección del movimiento del satélite.

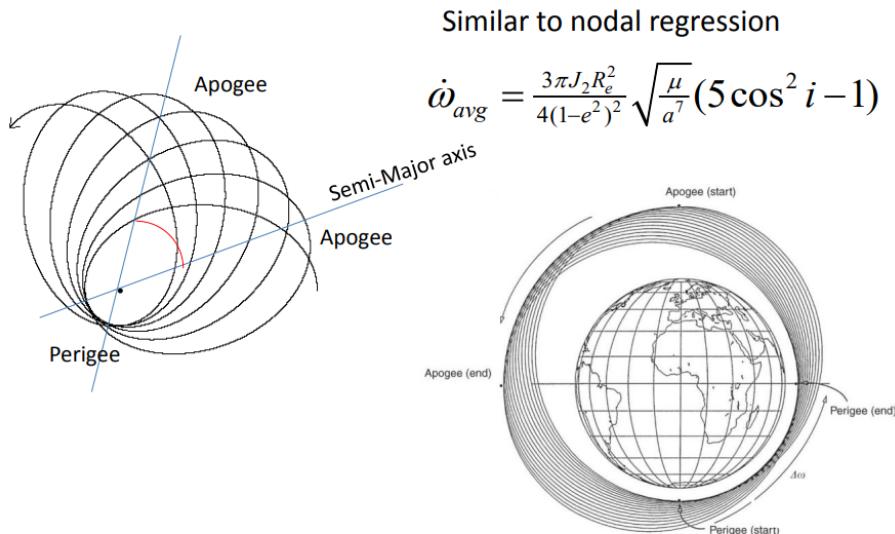


Figura 1.2.11: Rotación de ápsides.

### 1.2.5. Aplicaciones de la perturbación $J_2$

#### Órbitas heliosíncronas

El plano orbital rota a la misma velocidad que la Tierra respecto del Sol, una vez al año, esto es,  $0,9855^\circ$  al día para compensar dicha revolución.

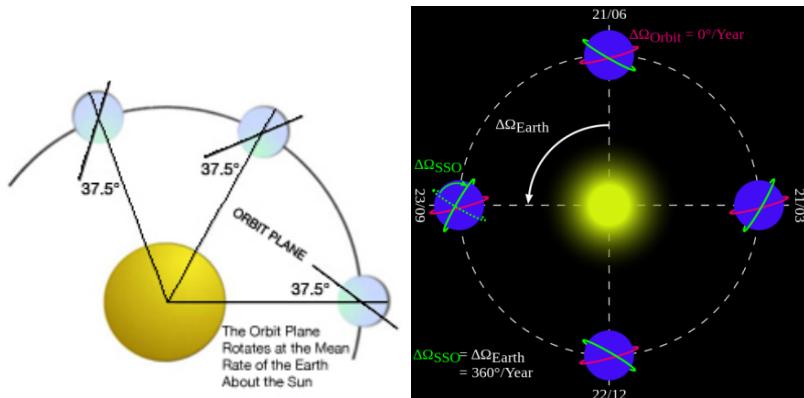


Figura 1.2.12: Órbita heliosíncrona (órbita en verde y no heliosíncrona en rojo).

$$\dot{\Omega}_{avg} = -\frac{3J_2R_e^2}{2(1-e^2)^2} \sqrt{\frac{\mu}{a^7}} \cos i = 1,99 \cdot 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Ello da lugar a una combinación de semieje mayor,  $a$ , excentricidad,  $e$  e inclinación,  $i$  para que  $\dot{\Omega}_{avg} = 360^0/\text{year}$ . Ejemplo: para una altitud en el perigeo de 695km y en el apogeo de 705km.

La inclinación es determinada por:

$$\dot{\Omega}_{avg} = -\frac{3J_2R_e^2}{2(1-e^2)^2} \sqrt{\frac{\mu}{a^7}} \cos i = 1,99 \cdot 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Con una excentricidad de:

$$e = 1 - \frac{r_p}{a} = 0,00071$$

y con  $J_2 = 0,001082$  y  $\mu = 398600 \text{ km}^3\text{s}^{-2}$   $\rightarrow \cos i = -0,151 \rightarrow$  da lugar a una inclinación de  $i = 98,7^0$

### Órbitas Molniya

Buscar eliminar la rotación de los ápsides. Son órbitas con inclinaciones tales que anulen el término  $5 \cos^2 i - 1 = 0$ , dando lugar a  $63.4^0$  o  $116.6^0$ .

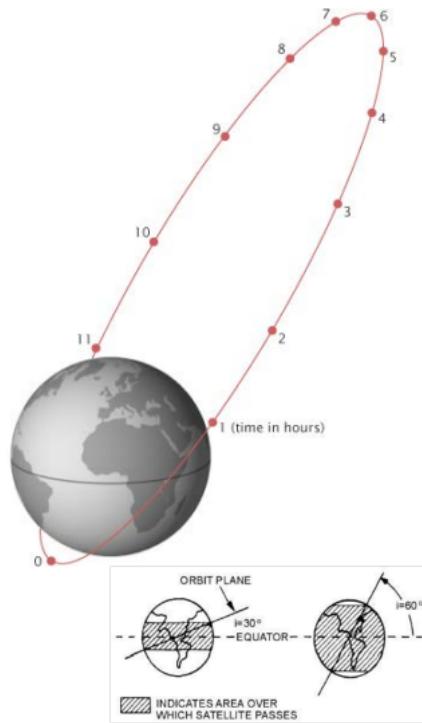


Figura 1.2.13: Órbita Molniya.

Son órbitas de alta excentricidad, con el perigeo en la misma declinación o latitud en toda órbita. Tiene un periodo de 12 horas y cubre regiones polares y altas latitudes bien.

Ejemplo: diseña una órbita Molniya con una precesión,  $d\Omega/dt$  de  $-0.2^\circ$  por día.

Con el periodo de 12 horas, se obtiene un semieje mayor de 26600km, que, con la fórmula de  $\dot{\Omega}_{avg} = -0.2^\circ/day = -4 \cdot 10^{-8} rad/s$ , para la pareja de inclinaciones, da lugar a una excentricidad de 0.78.

## Capítulo 2

# Orbital Perturbations and Coordinate Systems

### 2.1. Perturbaciones Orbitales

Las perturbaciones en órbitas keplerianas son generadas por: los efectos de una Tierra no-esférica, la resistencia atmosférica (decaimiento orbital gradual), el efecto de tercer cuerpo (presencia de otros cuerpos y sus campos gravitacionales) y la presión de radiación solar (causado por la transferencia de momento de los fotones de la luz solar al satélite).

#### 2.1.1. Resistencia Atmosférica

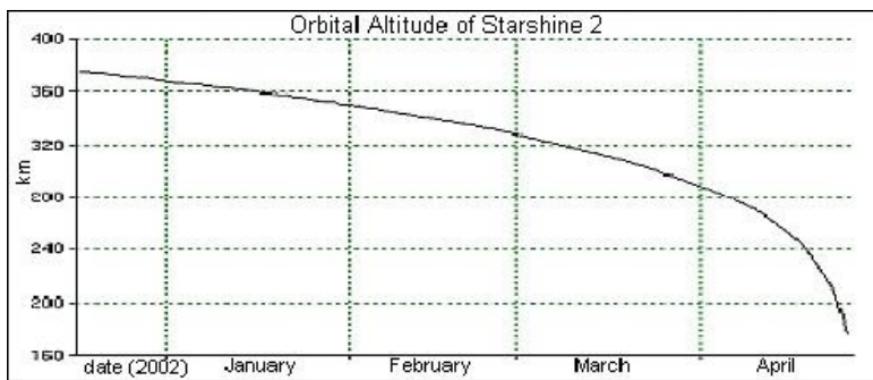
La atmósfera terrestre se extiende varios cientos de kilómetros hacia el espacio, por lo que afecta a los satélites que viajan a través de ella, produciendo fuerzas y torques sobre el cuerpo. Es la mayor perturbación para altitudes menores de 300 km, por lo que es muy importante considerarla en el estudio de órbitas bajas. **La resistencia atmosférica se opone a la velocidad del satélite.**

$$F_D = \frac{1}{2} C_D A \rho \nu^2 \quad (2.1.1)$$

donde  $\rho$  es la densidad atmosférica (muy difícil de modelar),  $\nu$  es la velocidad del satélite,  $A$  es el área de la sección del cuerpo (es necesario conocer su actitud) y  $C_D$  es el coeficiente de resistencia atmosférica, asociado a la geometría del satélite.

#### Tasa de descenso orbital típica para satélites de baja altitud

La atmósfera terrestre es difícil de predecir debido a la actividad solar. Existen muchos modelos para la densidad atmosférica que dependen de la temperatura, altitud, nivel de actividad solar..etc. (El estándar en U.S. es el Jacchia). El principal problema es predecir la actividad solar. Un modelo sencillo de densidad atmosférica es:  $\rho = \rho_0 e^{-h/H}$ . Los satélites tienen que maniobrar para compensar el decaimiento de la resistencia atmosférica. **Es necesario extra-fuel para mantener los satélites en órbita baja** (ISS, Hubble). En la Figura 10.1.14 se representa el decaimiento orbital del satélite Starshine 2 durante el tiempo.



### Efecto de la resistencia atmosférica en órbitas circulares

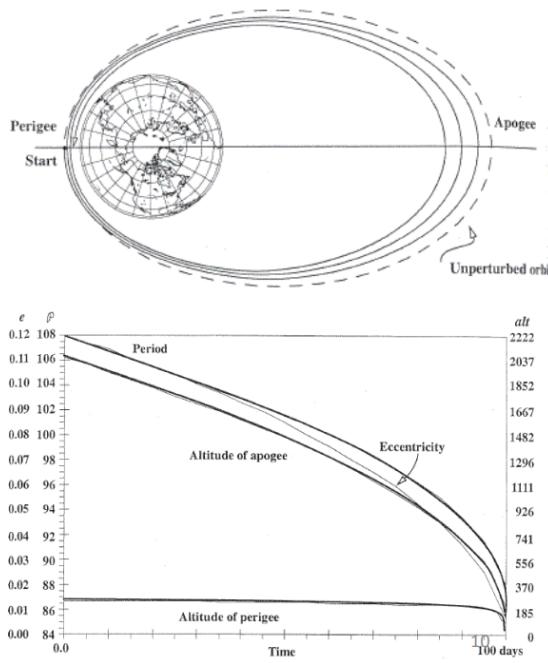
La resistencia atmosférica provoca un efecto opuesto al vector velocidad, por lo que se produce disipación de energía y una reducción gradual del radio de la órbita hasta que el satélite choca contra la Tierra. El decaimiento orbital depende de parámetros como la altitud inicial, la excentricidad, la actividad solar... etc.

Un efecto poco intuitivo de la resistencia atmosférica ("drag paradox") es que aumenta la velocidad del satélite y su energía cinética, ya que al disminuir el radio de la órbita, se reduce el periodo y se incrementa la velocidad ( $\nu = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$ ).

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = \frac{2\pi a}{\nu} \quad (2.1.2)$$

### Efecto de la resistencia atmosférica en órbitas excéntricas

Aunque el efecto de la resistencia atmosférica se da en el perigeo de la órbita, la altura del apogeo se ve drásticamente reducida con el tiempo, mientras la altitud del perigeo se mantiene casi constante. Para una primera aproximación, se puede considerar que la orientación del plano de la órbita no cambia por el efecto de la resistencia atmosférica.



### 2.1.2. Tercer Cuerpo

Para resolver el problema de los tres cuerpos (tres puntos másicos cuyos campos gravitacionales interactúan entre sí) es necesario resolver un sistema de 9 ecuaciones diferenciales acopladas (2º orden).

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} &= -Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} \\ \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} &= -Gm_3 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} - Gm_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \\ \frac{d^2\mathbf{r}_3}{dt^2} &= -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3} \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Hay 10 integrales del movimiento: la ecuación de conservación de la energía (1 parámetro), la ecuación del momento angular (3 parámetros) y la del centro de masas (momento lineal + posición) (6 parámetros). No existe una solución exacta ni analítica al problema, solo para casos muy concretos. La mayoría de las órbitas son inestables o caóticas (muy sensibles a las condiciones iniciales). Es necesario integrar las ecuaciones de forma numérica.

El comportamiento orbital de un satélite bajo la influencia de otros dos cuerpos másicos es complejo y muy diferente al comportamiento kepleriano. Para satélites que orbitan la Tierra, es necesario modelar la Luna y el Sol como tercer cuerpo para tener predicciones precisas (efemérides). Sus campos gravitacionales provocan tirones en el satélite, que lo desvían de su órbita nominal. Estos efectos son más notorios cuando disminuye el efecto de la resistencia atmosférica.

Un método ampliamente utilizado es la descomposición del sistema solar en problemas de "dos-cuerpos", llamado enfoque cónico parcheado y basado en el concepto de esfera de influencia.

### Problema de los Tres Cuerpos Restringido (R3BP)

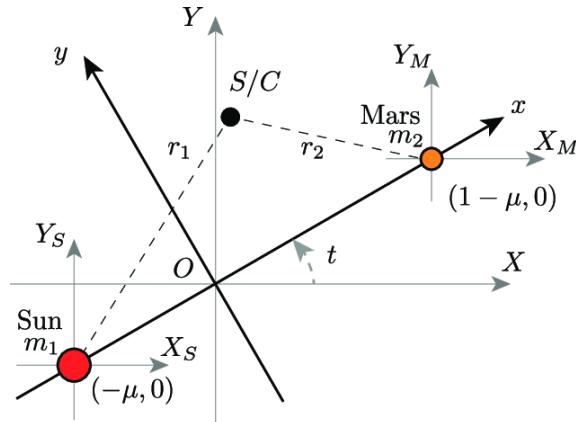
El R3BP asume que un satélite se ve afectado por los campos gravitatorios de dos cuerpos que están rotando alrededor de un centro común de masas. Una serie de simplificaciones se tienen en cuenta:

- El efecto gravitatorio de  $m_3$  sobre  $m_1$  y  $m_2$  es despreciable (permite encontrar soluciones "two-body" para  $m_1$  y  $m_2$ ).
- Las órbitas de los dos cuerpos másicos ( $m_1$  y  $m_2$ ) son circulares, alrededor de su baricentro.
- La posición y velocidad inicial de  $m_3$  están en el plano de movimiento de los otros dos cuerpos, y se mantiene sobre el mismo.

Se pueden definir dos sistemas principales de coordenadas, con origen común en el centro de masas del sistema (CM) o baricentro.

- Sistema inercial X-Y
- Sistema rotatorio x-y : gira con una velocidad angular similar al movimiento medio del sistema (los dos cuerpos másicos son estacionarios).

$$\omega = \sqrt{G(m_1 + m_2)/r_{12}^3}, \quad r_{12} = r_1 + r_2 \quad (2.1.4)$$



De esta forma, se puede aproximar el movimiento de  $m_1$  y  $m_2$  como un problema de Kepler, donde dos cuerpos describen órbitas circulares alrededor de su centro de masas.

Se puede expresar la posición del satélite como :  $\vec{r} = x\vec{x}_1 + y\vec{y}_1$ , mientras que la velocidad angular del sistema rotatorio se define como  $\vec{\omega} = \omega\vec{z}_1$ . Por tanto, la aceleración del satélite expresada en el sistema rotatorio se puede escribir como:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_{rot} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{rot} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (2.1.5)$$

donde

- $\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{x}_1 + \ddot{y}\vec{y}_1$  es la aceleración de  $m_3$  en el sistema rotatorio

- $\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{rot} = -j\omega \vec{x}_1 + \dot{x}\omega \vec{y}_1$  es la velocidad de  $m_3$  en el sistema rotatorio
- $\omega$  es la velocidad angular.

Por tanto, la aceleración de  $m_3$  es:

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{x} - 2\dot{y}\omega - \omega^2 x)\vec{x}_1 + (\ddot{y} + 2\dot{x}\omega - \omega^2 y)\vec{y}_1 \quad (2.1.6)$$

Según la segunda ley de Newton :  $m_3 \ddot{\vec{r}} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$ , donde las fuerzas gravitacionales de los cuerpos másicos sobre el satélite se pueden expresar como:

- $\vec{f}_1 = -\frac{Gm_1 m_3}{d_1^3}(\vec{r} - \vec{r}_1) = -\frac{Gm_1 m_3}{d_1^3}[(x - r_1)\vec{x}_1 + y\vec{y}_1]$
- $\vec{f}_2 = -\frac{Gm_2 m_3}{d_2^3}(\vec{r} - \vec{r}_2) = -\frac{Gm_2 m_3}{d_2^3}[(x + r_2)\vec{x}_1 + y\vec{y}_1]$

Sustituyendo estas expresiones en la expresión de la aceleración de  $m_3$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= (\ddot{x} - 2\dot{y}\omega - \omega^2 x)\vec{x}_1 + (\ddot{y} + 2\dot{x}\omega - \omega^2 y)\vec{y}_1 = \\ &= -\frac{Gm_1}{d_1^3}[(x - r_1)\vec{x}_1 + y\vec{y}_1] - \frac{Gm_2}{d_2^3}[(x + r_2)\vec{x}_1 + y\vec{y}_1] \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

de donde se puede extraer un sistema de dos ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y}\omega - \omega^2 x &= -\frac{Gm_1}{d_1^3}(x - r_1) - \frac{Gm_2}{d_2^3}(x + r_2) \\ \ddot{y} - 2\dot{x}\omega - \omega^2 y &= -G \left[ \frac{m_1}{d_1^3} + \frac{m_2}{d_2^3} \right] y \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

que definen el movimiento del satélite en el sistema rotatorio. No existe solución analítica al problema, por lo que debe integrarse numéricamente.

### Puntos de Lagrange

Se pueden obtener los puntos de equilibrio asociados al anterior sistema de ecuaciones diferenciales. Se considera un punto de equilibrio si se cumple :  $\dot{x} = \dot{y} = \ddot{x} = \ddot{y} = 0$ . Introduciendo esta condición en el sistema de ecuaciones, se obtiene un sistema no-lineal de dos incógnitas (x-y):

$$\begin{aligned} -\omega^2 x &= -G \left[ \frac{m_1}{d_1^3}(x - r_1) + \frac{m_2}{d_2^3}(x + r_2) \right] \\ -\omega^2 y &= -G \left[ \frac{m_1}{d_1^3} + \frac{m_2}{d_2^3} \right] y \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

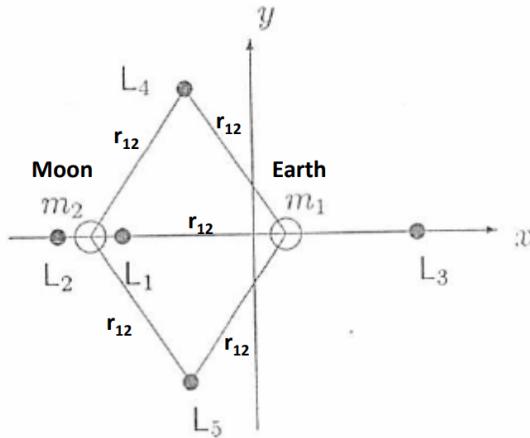
donde  $d_1 = \sqrt{(x - r_1)^2 + y^2}$  y  $d_2 = \sqrt{(x + r_2)^2 + y^2}$ .

#### Caso 1 $y = 0$

Es posible encontrar una solución sobre el eje x del sistema (puntos colineales de Lagrange  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$ ). Se puede resolver la primera ecuación de forma numérica y encontrar tres soluciones.

**Caso 2**  $y \neq 0$ 

Se pueden encontrar otras dos soluciones de equilibrio en los vértices de un triángulo equilátero ( $d_1 = d_2$ ).

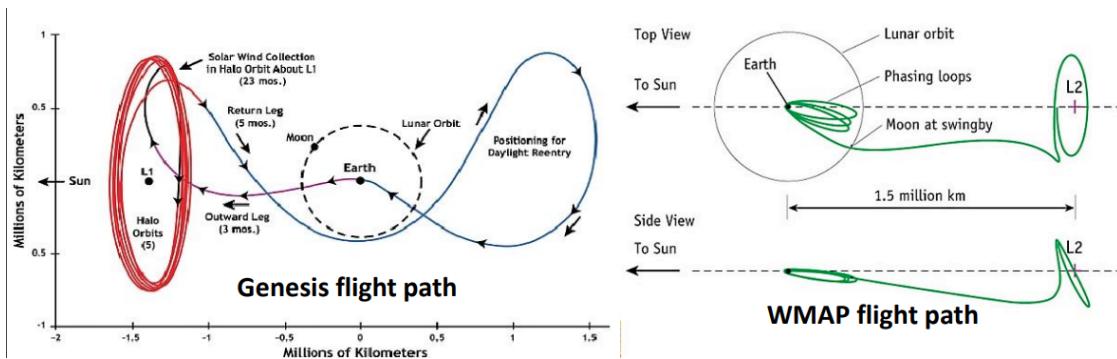


Por tanto, en los puntos de Lagrange, las fuerzas que actúan sobre el satélite están en equilibrio. Las fuerzas gravitacionales se contrarrestan con la fuerza centrífuga provocada por la rotación. En ellos, el satélite se encuentra en reposo respecto al sistema de coordenadas rotatorio.

**$L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  son inestables (ante pequeñas perturbaciones el satélite se aleja del punto de equilibrio), mientras que  $L_4$  y  $L_5$  son estables.** Mantener un satélite en los puntos colineales es posible mediante pequeños impulsos correctivos ("station-keeping").

### Órbitas Halo

Son órbitas periódicas y tridimensionales alrededor de los puntos inestables de Lagrange. Es el resultado de la interacción gravitatoria entre dos cuerpos másicos y la fuerza centrífuga y de Coriolis sobre el satélite. Son inestables y necesitan de "station-keeping". Las órbitas quasi-periódicas se llaman órbitas de Lissajous. Algunas misiones en órbitas Halo son el ISEE-3 (Sun-Earth  $L_1$ , observación de viento solar) y SOHO (Sun-Earth  $L_1$ , observación solar). Otros ejemplos de órbitas Lissajous son Genesis (Sun-Earth  $L_1$ , recolección de partículas de viento solar) y WMAP/Planck (Sun-Earth  $L_2$ , medición del fondo cósmico de microondas).



### 2.1.3. Presión de Radiación Solar

La radiación solar no es lo mismo que el viento solar, ya que la presión de radiación solar viene inducida por el momento de los fotones de la luz solar, mientras que el viento solar está formado por partículas diversas que vienen del Sol.

Los fotones son reflejados o absorbidos por la superficie del satélite, que generan un cambio de momento (una fuerza asociada).

$$a_{RAD} \sim \frac{A}{m} \quad (2.1.10)$$

donde  $a_{RAD}$  es la aceleración debida a la presión de radiación solar,  $A$  es el área del satélite y  $m$  su masa. Es una perturbación importante en satélites con gran superficie y baja masa (paneles solares grandes, velas solares).

Dependiendo de la actividad solar, se puede definir la presión de radiación solar como:

$$a_{rad} = \frac{\Phi_{rad}(r)}{c} (1 + q) \frac{A_{\perp}}{m} \quad (2.1.11)$$

donde

$$\Phi_{rad}(r) = \Phi_{rad,Earth} \left( \frac{r_{Sun-Earth}}{r_{Sun-sat}} \right)^2 \quad (2.1.12)$$

con  $\Phi_{rad}(r)$  la energía solar ( $\Phi_{rad,Earth} = 1362 \text{ W/m}^2$ ),  $c$  la velocidad de la luz,  $q$  la reflectividad de la superficie,  $A_{\perp}$  el área de la superficie proyectada sobre la normal al Sol y  $m$  la masa del satélite.

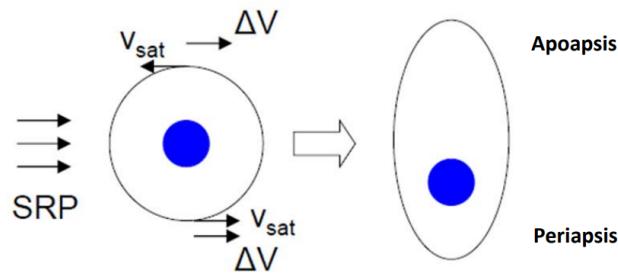
Por tanto, la presión de radiación solar:

- Depende de la geometría y las propiedades ópticas de la superficie
- Depende de la distancia al Sol
- Es perpendicular a la linea que va hacia el Sol
- Independiente (en 1º aproximación) de la posición y la velocidad del satélite
- Independiente de la actividad solar

Pueden existir otros efectos relacionados con la presión de radiación como por ejemplo el albedo terrestre.

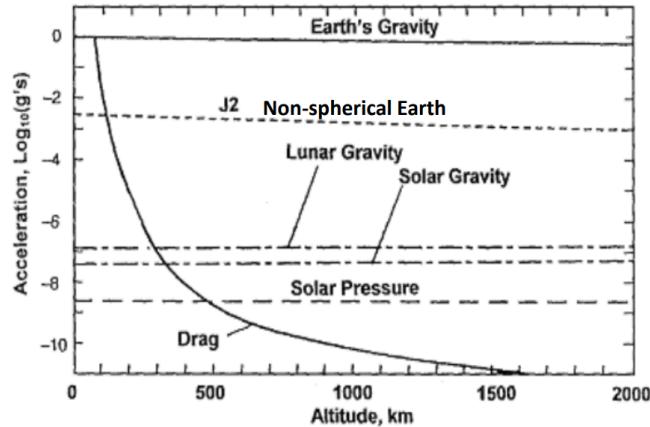
#### Efecto de la presión de radiación solar sobre la excentricidad

Se produce un incremento y un decremento de velocidad en puntos opuestos de la órbita, lo que la convierte de forma progresiva en una órbita más elíptica. Durante los siguientes 6 meses, el Sol se encuentra en la posición opuesta, por lo que los  $\Delta V$  son contrarios y la órbita se recirculariza de forma gradual.



### Importancia relativa de las perturbaciones para órbitas bajas

Las fuerzas dominantes son el campo gravitatorio terrestre y la perturbación  $J_2$  debida a la no-esfericidad de la Tierra. La curva de la resistencia atmosférica tiene un alto grado de incertidumbre debido a la actividad solar.

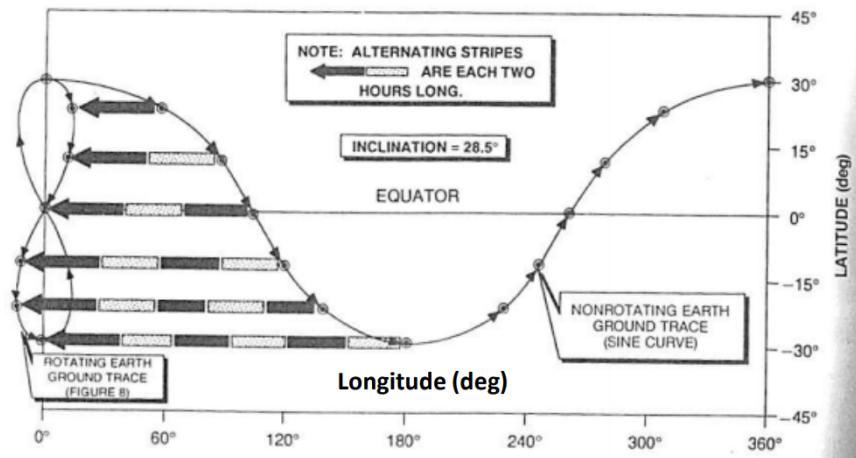


## 2.2. Perturbaciones en Órbita Geoestacionaria

Los satélites geoestacionarios tienen un comportamiento estacionario respecto a la superficie de la Tierra. Se llaman geosíncronos si su periodo es igual al periodo de rotación de la Tierra. El radio de estas órbitas es de unos 42000 km (36000 km de altitud). Deben cumplir una serie de hipótesis:

- Viajar hacia el este a la misma velocidad de rotación que la Tierra
- La inclinación de la órbita es cero ( $i = 0$ ) y la excentricidad es cero ( $e = 0$ ). La inclinación debe ser cero ya que cualquier inclinación haría que el satélite se moviera de norte a sur (plano ecuatorial).
- La órbita debe ser circular. Velocidad constante significa que se deben barrer áreas iguales en intervalos de tiempo iguales, y esto sólo es posible para órbita circular.

En la siguiente figura se puede observar la traza de una órbita geosíncrona con inclinación no nula.



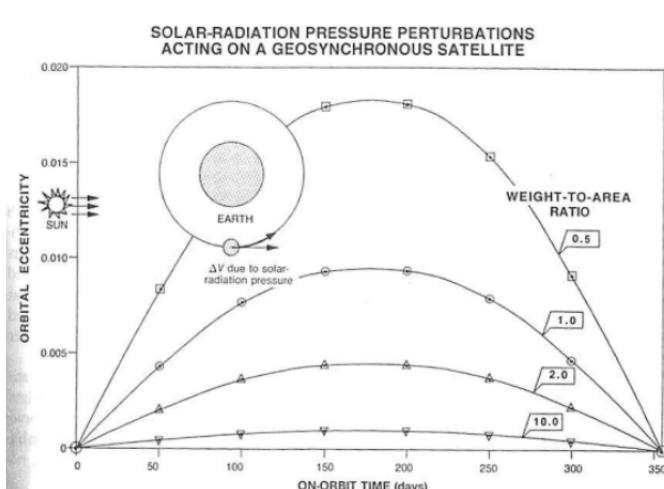
Los satélites geoestacionarios se ven principalmente afectados por tres perturbaciones: la noesfericidad de la Tierra (armónico teseral), los efectos del Sol y la Luna, y la presión de radiación solar.

### 2.2.1. Este-Oeste y Norte-Sur Drift

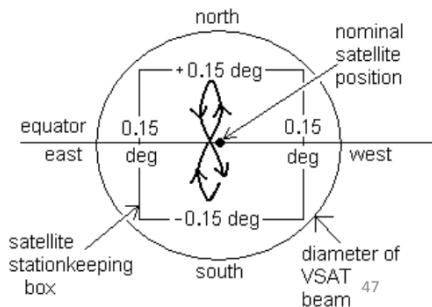
- **Este-Oeste Drift:** la longitud se ve modificada por el armónico teseral ( $J_{22}$ ). Existen cuatro puntos a lo largo de la órbita geosíncrona donde las fuerzas están en equilibrio y no existe drift.
    - Puntos estables:  $75^{\circ}\text{E}$  y  $255^{\circ}\text{E}$
    - Puntos inestables:  $162^{\circ}\text{E}$  y  $348^{\circ}\text{E}$
- El drift medio por dia es de unos  $0.01^{\circ}$ .

- **Norte-Sur Drift:** la inclinación se ve modificada por la atracción del Sol y la Luna (efectos out-of-plane). La influencia de la Luna es aproximadamente el doble que la del Sol. El drift medio al año es de unos  $0.85^{\circ}$ .

También existe un cambio en la excentricidad debido a la presión de radiación solar.



Por ello, es necesario mantener el satélite en su órbita nominal mediante pequeñas maniobras de "station-keeping". Para ello se define una "station-keeping box", que se define como la máxima distancia autorizada que se puede desviar el satélite de su posición nominal.



## 2.3. Tipos de órbitas de satélites

### 2.3.1. Low Earth Orbits (LEO)

- Corto periodo orbital (sobre los 90 minutos)
- Entre los 160-2000 km de altitud
- Es necesario considerar la resistencia atmosférica (hasta los 600 km)
- Eclipses frecuentes y largos
- Usualmente órbitas circulares
- Los satélites pueden ser vistos por las estaciones terrenas en pequeños intervalos de tiempo
- Existen políticas de "de-orbiting"

### 2.3.2. Medium Earth Orbits (MEO)

- Varias horas de periodo orbital
- Altitudes desde LEO hasta geosíncrono
- Visibilidad de estaciones terrenas de varias horas
- Aplicaciones comunes en constelaciones de satélites para comunicaciones y navegación

### 2.3.3. Órbitas Geosíncronas

- Periodos orbitales de 24 horas (periodo de rotación sidéreo de la Tierra)
- Visibilidad máxima en latitud de 15°

### 2.3.4. Órbitas Geoestacionarias (GEO)

- Unos 36000 km de altitud y unas 24 horas de periodo
- Órbitas circulares con inclinación casi nula
- Siempre visibles desde la estación terrena de interés
- Carácter estacionario respecto a un punto en la superficie terrestre
- Muy usados en telecomunicaciones y observación terrestre

### 2.3.5. High Earth Orbit

- Altitud del apogeo supera en 200 km a la de la órbita geoestacionaria

### 2.3.6. Highly Elliptical Orbit (HEO)

- Mucho tiempo entorno al apogeo de la órbita ( $2^{\text{o}}$  ley Kepler)
- Molniya orbit (tienen una inclinación crítica de  $63.4^{\circ}$ , para que la rotación del perigeo sea nula debido a  $J_2$ ). Utilizada para cubrir regiones de muy altas latitudes (USSR)

### 2.3.7. Sun-Synchronous Orbit

- Orientación respecto a la línea Solar fijada a lo largo del año
- Muy utilizados para observación terrestre

## 2.4. Sistemas de Coordenadas

Los sistemas de coordenadas fijas de carga útil y sensor están parametrizados con respecto a los sistemas de ejes cuerpo. La alineación entre los diferentes sistemas de coordenadas se mide en tierra, pero puede cambiar durante el lanzamiento y otras perturbaciones. El conocimiento preciso de la actitud requiere una calibración en órbita de los cambios de alineación y distorsiones.

### 2.4.1. Sistema de Coordenadas Inercial

El sistema de coordenadas inercial se define como un sistema que no está rotando ni acelerando con respecto a ningún otro origen inercial. Otra definición es que un sistema de coordenadas inercial es un sistema para el cual las leyes de Newton son verdaderas. No existe ningún sistema de coordenadas inercial conocido, pero para la mayoría de los problemas se puede encontrar un sistema que es "suficientemente inercial". Para algunos problemas, un sistema de coordenadas fijo en la Tierra es suficiente, mientras que para otros problemas se debe tener en cuenta la rotación de la Tierra.

## 2.4.2. Sistema de Coordenadas Heliocéntrico

El sistema de coordenadas heliocéntrico se asume como inercial, es decir, fijo con respecto a las estrellas. El origen del sistema está en el centro del Sol. La dirección principal está definida por la intersección de los planos eclíptico y ecuatorial. El plano ecuatorial está inclinado alrededor de 23.5 grados con respecto al plano eclíptico. El plano eclíptico contiene la órbita del Sol y de la Tierra. Este sistema se utiliza típicamente para misiones interplanetarias. Existen dos equinoccios al año (primavera y otoño), donde la duración del día y la noche es similar en todos los lugares de la Tierra.

## 2.4.3. Earth Centered Inertial (ECI)

El origen está en el centro de masa de la Tierra. El sistema de coordenadas está definido por el ecuador de la Tierra y el eje de rotación. El eje I está en la dirección del equinoccio vernal. El eje K es el eje de rotación de la Tierra, que es perpendicular al plano ecuatorial. El eje J está en el plano ecuatorial y se define por la regla de la mano derecha. También se le llama sistema de coordenadas ecuatoriales geocéntricas.

Los marcos ECI son inerciales, a diferencia de los marcos Fijos Centrados en la Tierra (ECEF) que rotan en el espacio inercial. Se utiliza un sistema de coordenadas fijo e inercial centrado en la Tierra para describir la posición y orientación orbital del satélite. Dado que el eje de la Tierra se mueve, el marco de referencia se especifica con respecto a una fecha de época (J2000).

## 2.4.4. Sistema de Coordenadas Perifocal

El origen está en el centro de la Tierra. El plano fundamental está dado por la órbita del satélite. Es un sistema inercial basado en la órbita y centrado en la Tierra. El eje P apunta hacia el perigeo. El eje Q está a 90 grados del eje P en la dirección del movimiento del satélite en el plano orbital. El eje W es perpendicular al plano orbital. Nota: el sistema PQW mantiene la orientación hacia el perigeo, por lo que no es adecuado para una órbita perfectamente circular.

## 2.4.5. Sistema de Coordenadas Orbital

El origen está en el centro de masa del satélite. El sistema de coordenadas rota a medida que el satélite orbita. El eje z siempre apunta al centro de la Tierra (dirección del nadir). El eje y siempre está en la dirección normal negativa de la órbita (.ºapuntando hacia abajo"). El eje x apunta en la dirección del movimiento (dirección del vector de velocidad para órbitas circulares). La notación típica para el marco z-y-x también es el marco o3-o2-o1. En la dinámica de las naves espaciales, estas direcciones se dan nombres roll-pitch-yaw".

## 2.4.6. Body-Fixed Coordinate System

El sistema de coordenadas fijo al cuerpo está fijo con respecto al cuerpo del satélite. Existen muchos sistemas de coordenadas diferentes adaptados para misiones de satélites específicas. Se asume que el marco de referencia fijo al cuerpo solo está ligeramente desplazado del marco en

órbita. El eje z está en la dirección del nadir. El eje y está en la dirección normal negativa de la órbita. El eje x apunta en la dirección del movimiento.

#### 2.4.7. Transformaciones entre diferentes sistemas de coordenadas

Los sistemas de coordenadas forman una referencia para la medición de posición/ángulo. **La transformación de coordenadas entre dos sistemas de coordenadas implica rotación y traslación.** Las relaciones entre los sistemas de coordenadas pueden caracterizarse de diferentes maneras: matrices de cosenos directores, rotaciones de ángulos de Euler, parámetros de Euler, cuaterniones.

Se requiere conocimiento de la relación entre los sistemas de coordenadas para la determinación y control de la actitud. La transformación entre marcos sucesivos puede determinarse a partir de una serie de multiplicaciones de matrices.



## Capítulo 3

# Attitude Hardware and Attitude Concepts

### 3.1. Introducción

Las diversas instrumentaciones de las naves espaciales requieren apuntar en direcciones específicas para cumplir con sus funciones designadas:

1. **Paneles Solares:** Ubicados para maximizar la exposición al sol y así garantizar una óptima generación de energía.
2. **Telescopios Específicos:** Ejemplo destacado: el telescopio del satélite Hubble, diseñado para apuntar con precisión a objetos celestes específicos y capturar imágenes de alta resolución.
3. **Satélites de Comunicación:** Antenas orientadas hacia direcciones específicas para optimizar la transmisión y recepción de señales.
4. **Cámaras Fotográficas:** Dirigidas hacia ubicaciones predeterminadas para capturar imágenes específicas, ya sea con propósitos científicos o de observación.
5. **Propulsores de la Nave:** Requieren alineación precisa para llevar a cabo maniobras espaciales y ajustes de trayectoria.
6. **Instrumentos Científicos Adicionales:** Sensores y dispositivos específicos que deben apuntar con precisión para realizar mediciones científicas especializadas.

#### 3.1.1. Objetivo principal de la actitud

El objetivo principal del control de actitud en una nave espacial es la orientación de la misma en relación con otros sistemas de referencia, lo cual se denomina “actitud”. La actitud de una nave espacial se caracteriza por la orientación del sistema de coordenadas fijas a la nave en relación con un sistema de coordenadas de referencia.

**Objetivo:** Determinar la orientación del sistema de referencia fijo a la nave espacial con respecto a un sistema de referencia inercial conocido.

### **Descripción:**

La descripción de la actitud en una nave espacial implica que los instrumentos y antenas deben apuntar en direcciones específicas:

- Los paneles solares deben apuntar hacia el Sol.
- Los propulsores deben apuntar en la dirección requerida.

La orientación de la nave espacial en el espacio con respecto a otro marco de referencia se denomina actitud. La actitud se define como la orientación de los ejes del cuerpo de la nave espacial con respecto a un marco inercial fijo.

Para controlar la actitud, los operadores de la nave espacial (o la computadora, si es un sistema autónomo) deben tener la capacidad de:

- **Determinación de Actitud:** Utilizar sensores para estimar la actitud.
- **Control de Actitud:** Mantener una actitud específica con una precisión dada utilizando actuadores.
- **Determinar el error entre la actitud actual y la deseada de la nave espacial (error de actitud).**
- **Aplicar torques para corregir el error de actitud.**

#### **3.1.2. ADCS vs GNC**

**ADCS (Sistema de Determinación y Control de Actitud):** El ADCS, que significa Sistema de Determinación y Control de Actitud, gestiona la actitud nominal de un satélite, controlando los ejes del cuerpo de la nave de manera que los errores se mantengan dentro de límites definidos. La actitud se controla aplicando torques para proporcionar estabilización de apuntamiento. Este sistema no solo controla la actitud, sino que también proporciona conocimiento sobre la actitud de la nave espacial para respaldar los objetivos de la misión.

**GNC (Sistema de Guiado, Navegación y Control):** El GNC, por sus siglas en inglés, significa Sistema de Guiado, Navegación y Control. Este sistema se encarga de controlar la órbita nominal que el satélite debe mantener dentro de límites definidos. La órbita se controla aplicando fuerzas para proporcionar conocimiento sobre la posición y velocidad de la nave espacial. Además, el GNC determina la sincronización, magnitud, duración y dirección de las quemas para transferencia de órbita y maniobras de mantenimiento de posición.

Es importante destacar la distinción entre:

- **Control de Actitud:** Trata con la rotación alrededor de los ejes de la nave espacial.
- **Control de Guiado:** Trata con la posición de los objetos.

Se separa el movimiento en:

- **Movimiento del Centro de Masa**
- **Movimiento Rotacional alrededor del Centro de Masa**

### 3.1.3. Necesidad de Determinación y Control de Actitud

Si un satélite solo experimenta movimiento de Kepler, permanecerá inercialmente fijo en el espacio. Sin embargo, existen perturbaciones:

- Campo magnético terrestre
- Arrastre atmosférico
- Radiación solar
- Gradiente gravitacional
- Gravedad (problema de n-cuerpos)

Estas perturbaciones generan torques externos. Para compensar estos torques no deseados, la nave espacial necesita hardware de determinación y control de actitud.

1. **Determinación de Actitud:** Requiere sensores.
2. **Control de Actitud:** Requiere actuadores.

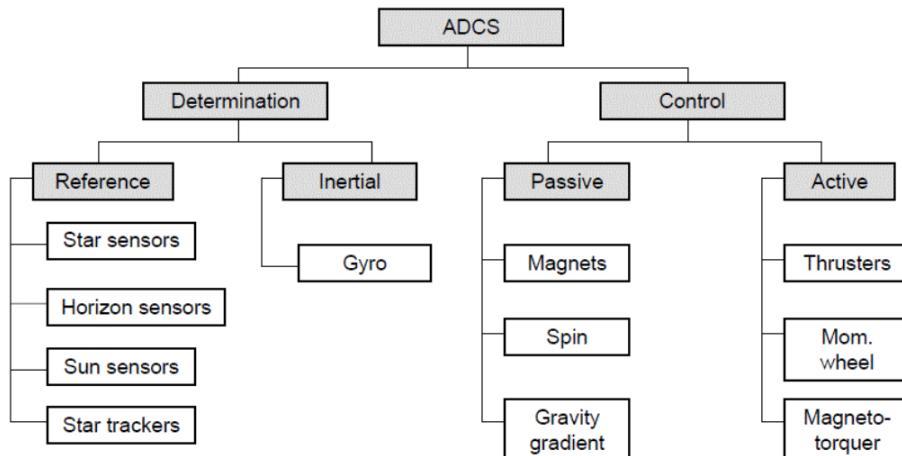


Figura 3.1.1: Esquema del hardware empleado en el ADCS.

### 3.2. Hardware de Actitud: Sensores para Determinación de Actitud

Las referencias externas utilizadas para determinar la actitud absoluta de una nave espacial incluyen:

- Sol
- Estrellas
- Horizonte terrestre
- Campo magnético terrestre

### 3.2.1. Sensores

- **Sensor Solar:** Mide la posición del Sol. Los sensores solares simples proporcionan un vector unitario al Sol utilizando células fotométricas enmascaradas.
- **Sensor Estelar:** Compara la imagen del cielo con una imagen esperada. Las cámaras estelares buscan en una base de datos de catálogo estelar para determinar la dirección.
- **Sensor Terrestre:** Mide la posición de la Tierra o la actitud con respecto al horizonte. El principio de funcionamiento de los sensores terrestres se basa en la modulación electromagnética de la radiación desde el horizonte terrestre.
- **Magnetómetros:** Miden la magnitud y dirección del campo magnético. El magnetómetro terrestre es un instrumento de medición para medir la fuerza o dirección del campo magnético terrestre.
- **Giroscopios:** Miden la rotación de la nave espacial sin referencia externa.

### 3.2.2. Tipos de Sensores de Actitud

Existen dos tipos principales de sensores de actitud:

**Sensor de Referencia:** Mide la actitud con respecto a algún marco de referencia definido por la posición de objetos en el espacio, como el Sol, la Tierra, las estrellas, etc.

**Sensor Inercial:** Mide cambios continuos en la actitud en relación con un rotor giroscópico. Detecta si el satélite no está en un marco de referencia inercial y registra tasas de aceleraciones de ángulos calculadas mediante integración.

#### Pros y Contras de Sensores de Referencia e Iniciales

##### Sensores de Referencia:

###### ■ Pros:

- Proporcionan mediciones directas y fijan el marco de referencia (no necesitan condiciones iniciales).

###### ■ Contras:

- Pueden ser temporalmente cegados o de otra manera no estar disponibles (por ejemplo, el sensor solar puede tener problemas durante períodos de eclipse).

##### Sensores Iniciales:

###### ■ Pros:

- Siempre disponibles.

###### ■ Contras:

- Necesitan ser actualizados (cualquier deriva debe ser detectada utilizando una referencia externa).
- Los errores aumentan progresivamente al realizar mediciones continuas.

Es común combinar sensores de referencia e iniciales:

- Los sensores de referencia se utilizan para calibrar los sensores iniciales en momentos discretos.
- Los sensores iniciales pueden medir continuamente entre cada calibración.

### 3.2.3. Selección de Sensores

Se requieren sensores para una variedad de propósitos, ya que una misión espacial puede tener diversas necesidades. La misión puede requerir:

- Determinación de actitud de alta precisión.
- Estabilización de imágenes (eliminación de movimientos).
- Maniobras de orientación (redirección).

La funcionalidad del satélite puede requerir:

- Recuperación de giros incontrolados.
- Localización del Sol.
- Punteo para maniobras de cambio de trayectoria.

Los objetivos de la misión pueden necesitar diferentes componentes hardware:

- Seleccionar hardware para cada objetivo de la misión (o todos los objetivos con un único hardware).
- La redundancia es importante.
- Decidir entre rendimiento, costo, peso, volumen, confiabilidad y disponibilidad.

### 3.2.4. Precisión Potencial de la Medición de Actitud

Tabla 3.2.1: 1 segundo de arco = 1/360 grados, 1 minuto de arco = 1/60 grados.

Objeto de Referencia	Precisión Potencial
Estrellas	1 segundo de arco
Sol	1 minuto de arco
Tierra	6 minutos de arco
Magnetómetro	30 minutos de arco

La precisión última está asociada al objeto utilizado por el sensor y depende del ángulo que el objeto subtende y la nitidez del horizonte. Es importante destacar que el algoritmo de control es tan bueno como el hardware.

### 3.2.5. Sensor Solar

Un sensor solar es un dispositivo que mide el ángulo entre el Sol y un ángulo de referencia. Este tipo de sensores se basan en el uso de células fotométricas enmascaradas que proporcionan un vector unitario al Sol. El sensor solar tiene la ventaja de ser una referencia grande, brillante y fácilmente adquirida, pero también presenta algunos inconvenientes, como el problema con los eclipses o la precisión limitada, que suele ser de varios segundos de arco para los sensores más precisos y de medio grado para los menos precisos. Además, una medición de sensor solar no es suficiente para determinar la actitud completa del satélite, sino solo una dirección. Por lo tanto, se requieren dos mediciones, que pueden obtenerse por un segundo sensor independiente o por el mismo sensor pero en momentos diferentes. Según su diseño y funcionamiento, los sensores solares se pueden clasificar en tres categorías: analógicos, digitales y de presencia.

#### Sensores Solares Analógicos

Los sensores solares analógicos son los más simples y se basan en medir la corriente de salida de las células solares, que es proporcional al coseno del ángulo de incidencia de la radiación solar. Comparando la luminosidad en varios detectores, se puede deducir el ángulo de incidencia. Estos sensores tienen la ventaja de ser de baja precisión, tamaño pequeño, bajo costo y no necesitar alimentación eléctrica.

#### Cono a partir de Sensores Solares Analógicos

El sensor solar analógico proporciona el ángulo  $\theta$  del vector solar con respecto a la normal del sensor. A partir de este ángulo, se puede definir un cono en el cual el vector solar debe estar. Sin embargo, esta información no es suficiente para determinar el vector solar con precisión. Para ello, se pueden combinar pares de sensores solares analógicos con normales ( $n_1$ ) y ( $n_2$ ), que definen un par de conos en los cuales el vector solar debe estar. Esto da lugar a un par de posibles vectores solares ( $s_1$ ) y ( $s_2$ ), que se pueden diferenciar con una medición adicional. Otra opción es agregar un tercer sensor solar, lo que resulta en tres conos que se intersectan y proporcionan el vector solar.

#### Sensores Solares Digitales

A diferencia de los sensores solares analógicos, la salida digital del sensor solar permite determinar el plano en el cual se encuentra el Sol. Con dos de estos detectores montados ortogonalmente, se puede determinar el vector solar de la nave espacial en los ejes del cuerpo. Los sensores solares digitales son más complejos que los analógicos, ya que consisten en un bloque transparente de material con un índice de refracción conocido, una rendija grabada en la parte superior y áreas receptoras grabadas en la parte inferior. La luz del Sol que pasa a través de la rendija forma una línea sobre el fotodetector. Los sensores solares digitales generalmente tienen mayor precisión, son más grandes, más costosos y necesitan más energía que los sensores solares analógicos.

## Sensor de Presencia Solar

El sensor de presencia solar es un dispositivo que permite saber si el Sol está dentro del campo de visión de una nave espacial. Este sensor es muy útil para las naves que rotan, ya que les ayuda a realizar diferentes funciones, como proteger la instrumentación, activar hardware o posicionar la nave o los experimentos. El sensor se compone de dos rendijas y fotocélulas que detectan la luz solar y envían una señal indicadora.

### 3.2.6. Sensor Terrestre

Los satélites cercanos a la Tierra tienen que enfrentarse al desafío de que la Tierra es el segundo objeto celeste más brillante y cubre hasta el 40 % del cielo, lo que dificulta la determinación de la actitud. Por eso, el objetivo principal del sensor terrestre es localizar el horizonte terrestre, que es la frontera entre la superficie y la atmósfera. Sin embargo, el horizonte no se ve igual en todas las longitudes de onda, y se pueden producir errores por diversos factores, como el achatamiento de la Tierra, los efectos de radiación o la variación estacional de la atmósfera. Una forma de evitar estos problemas es observar el horizonte en las estrechas bandas de CO<sub>2</sub> de 14 a 16 μm, donde la forma de la Tierra es constante tanto de día como de noche. Además, el sensor debe tener en cuenta que solo puede detectar el horizonte si la Tierra está dentro de su campo de visión, y que debe evitar que el Sol y la Luna interfieran con su medición.

Existen dos tipos principales de sensores terrestres: y los que no.

- Los sensores estáticos del horizonte terrestre tienen un campo de visión ligeramente más grande que la Tierra y miden la fracción del disco terrestre que ven.
- Los sensores de escaneo del horizonte terrestre giran para barrer un área de cono y detectan cuándo se recibe y se pierde la señal infrarroja de la Tierra. Además, tiene un campo de visión estrecho, exploración mecánica, óptica simple y un solo detector.

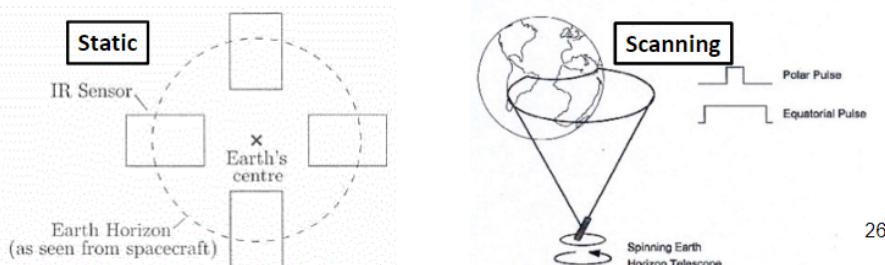


Figura 3.2.1: Earth Sensors.

### Sensor de Escaneo del Horizonte Terrestre

**Con dispositivo óptico giratorio:** Este sensor utiliza un escáner infrarrojo que barre un área en forma de cono y detecta la presencia de la Tierra en su campo de visión. Cuando el escáner cruza el horizonte terrestre, se produce una adquisición de señal (AOS) o una pérdida de señal (LOS), dependiendo de la dirección del barrido. El ángulo de inclinación del escáner, que determina el ángulo entre el eje del cono y la dirección perpendicular al plano orbital, se puede

hallar si se dispone de una referencia vertical. Algunos sensores cuentan con dos escáneres para aumentar la precisión y la fiabilidad.

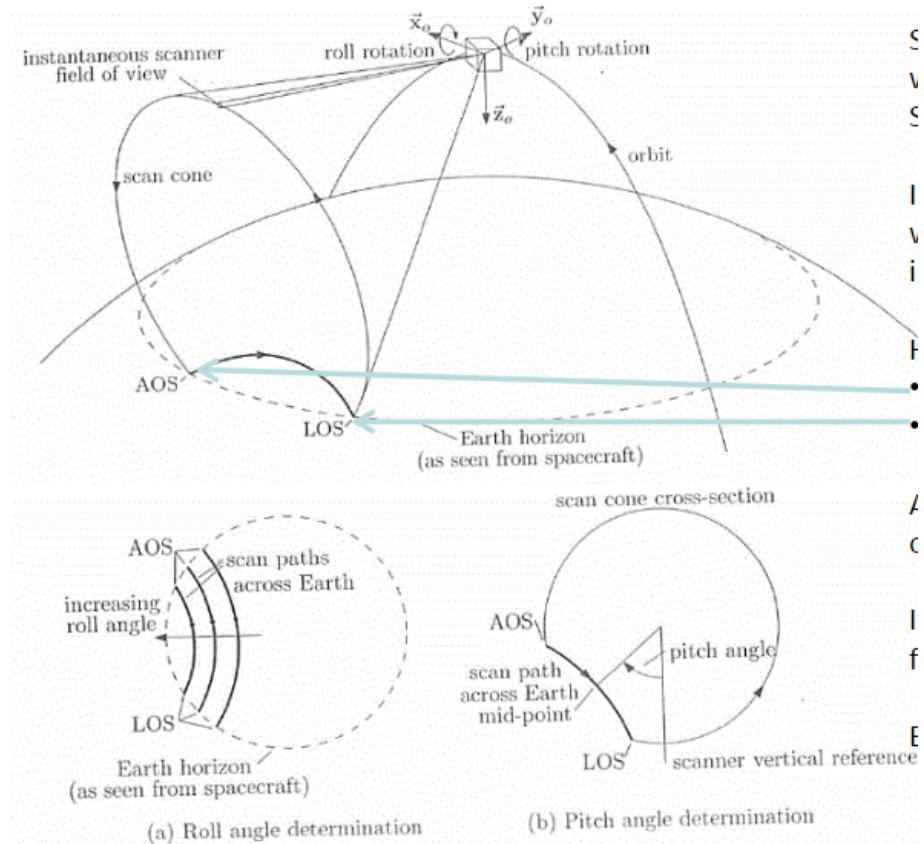


Figura 3.2.2: Scanning Earth Sensor.

### 3.2.7. Sensor de Estrellas

El sensor de estrellas es un dispositivo que permite obtener una medida precisa de la actitud de una nave espacial mediante la observación de las posiciones de las estrellas en el cielo. Su funcionamiento se basa en la captura de la luz de las estrellas con una cámara CCD y su comparación con un catálogo de estrellas previamente almacenado. De esta forma, se puede determinar la orientación absoluta de la nave con una precisión del orden de segundos de arco. Sin embargo, el sensor de estrellas tiene algunas limitaciones, como su campo de visión estrecho, su sensibilidad a las altas tasas angulares, su dependencia de un sensor grueso inicial, su vulnerabilidad a la occultación del Sol y otros cuerpos celestes, y su elevado peso, costo y consumo energético.

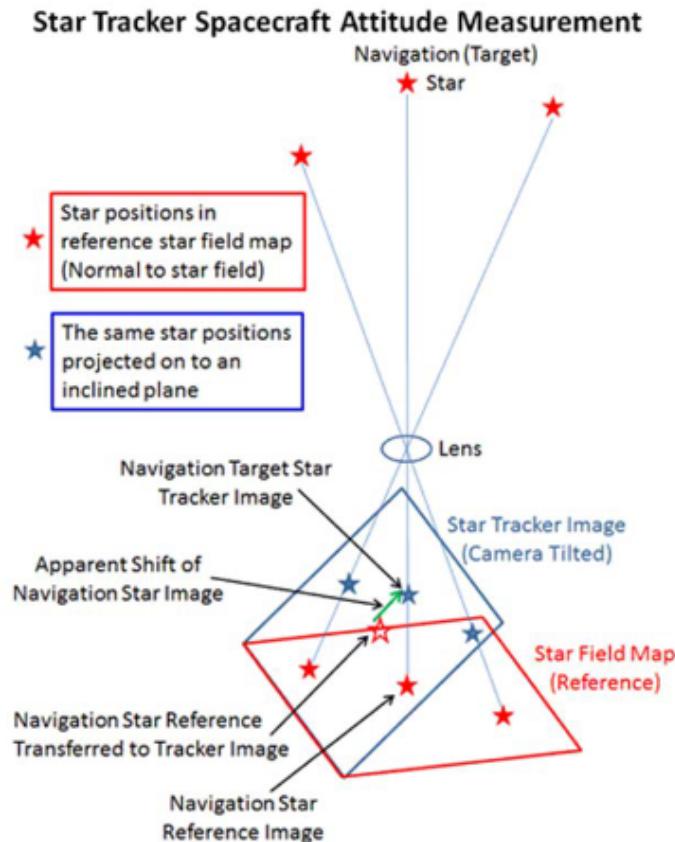


Figura 3.2.3: Sensor de Estrellas.

El instrumento consta de varios componentes básicos:

- **El sistema óptico**, que proyecta la imagen de las estrellas en el plano focal.
- **El detector**, que suele ser una matriz CCD que registra la posición y el brillo de las estrellas.
- **El sistema de sombra solar**, que evita que el Sol dañe el detector o interfiera con la medición.
- **El sistema de control térmico**, que mantiene una temperatura estable para evitar distorsiones.
- **El sistema de lectura**, que procesa los datos del detector y los envía al ordenador de a bordo.

El algoritmo que utiliza el sensor de estrellas para determinar la actitud se puede dividir en dos fases: el reconocimiento de patrones y el seguimiento de estrellas.

1. En la primera fase, el sensor busca en el catálogo de estrellas las que coinciden con las observadas en el plano focal, teniendo en cuenta factores como el brillo, la distancia angular y la magnitud.

2. En la segunda fase, el sensor mantiene el apuntamiento a las estrellas seleccionadas y calcula los ángulos hacia ellas.

Estas dos fases pueden tener dos modos diferentes: el modo de adquisición, que se usa cuando se desconoce la actitud inicial o se ha perdido el seguimiento; y el modo de punto fino, que se usa cuando se conoce la actitud inicial o se ha recuperado el seguimiento. El sensor puede determinar la actitud con solo dos estrellas diferentes, pero puede usar más para aumentar la precisión o la robustez.

### 3.2.8. Magnetómetros

Los magnetómetros son instrumentos que miden la dirección y magnitud del campo magnético local, y son útiles para altitudes bajas (menores a  $\approx 1000$  km). Estos dispositivos son simples, robustos y relativamente económicos, pero su precisión suele estar limitada más por la calidad del modelo del campo magnético terrestre a bordo y por los efectos de los campos a bordo que por el dispositivo en sí. Para determinar el vector del campo magnético terrestre, se requieren tres magnetómetros que sean mutuamente ortogonales. Los magnetómetros constan de dos partes: el sensor magnético, que detecta el campo magnético, y la unidad electrónica, que transforma la medición del sensor en un formato utilizable. Existen diferentes tipos de magnetómetros según el principio físico que emplean. Por ejemplo, los magnetómetros de inducción se basan en la ley de Faraday

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t},$$

mientras que casi todos los magnetómetros de sistemas de actitud son magnetómetros de reluctancia, que aprovechan la variación de la inductancia de una bobina al cambiar el flujo magnético.

#### Magnetómetros de Reluctancia (Fluxgate)

Un magnetómetro de reluctancia, también conocido como fluxgate, es un dispositivo que mide una componente del campo magnético terrestre mediante el efecto de la reluctancia magnética. Consiste en un núcleo de metal ferromagnético rodeado por dos bobinas: una de excitación y otra de detección.

- La bobina de excitación genera un campo electromagnético alterno que magnetiza el núcleo.
- La bobina de detección registra el campo magnético resultante, que depende de la reluctancia del núcleo.

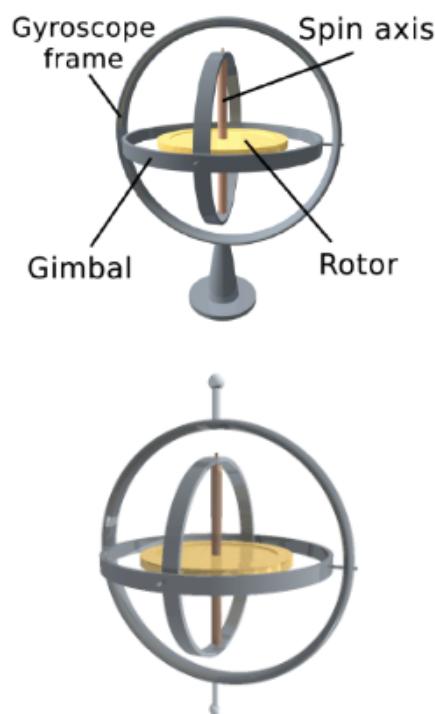
Cuando el núcleo está expuesto a un campo magnético externo, como el terrestre, su reluctancia cambia y produce una señal en la bobina de detección que es proporcional a la intensidad del campo externo. De esta forma, se puede medir una componente del campo magnético terrestre con un magnetómetro de reluctancia.

### 3.2.9. Giróscopo

Un giroscopio es un dispositivo que permite medir la orientación de un cuerpo en el espacio tridimensional, sin necesidad de referencias externas. Se basa en el principio de conservación del

momento angular, que implica que el eje de rotación de una rueda giratoria tiende a mantenerse constante, a menos que se aplique un torque externo. Existen diferentes tipos de giroscopios, según su función y diseño.

- Los giroscopios de velocidad son sensores de actitud que miden la variación del ángulo con respecto al tiempo, es decir, la velocidad angular.
- Los giroscopios de integración de velocidad son sensores de actitud que miden el ángulo total recorrido por el cuerpo, mediante un mecanismo que resiste la precesión de la rueda giratoria.
- Los giroscopios de momento de control no son sensores de actitud, sino que se usan para generar torques que modifiquen la orientación del cuerpo.



Para medir las tres componentes de la velocidad angular inercial, se necesita un conjunto de tres giroscopios ortogonales entre sí. Los giroscopios no pueden determinar la orientación absoluta del cuerpo, sino solo los cambios relativos, por lo que requieren una inicialización con otro sensor que proporcione una referencia inicial.

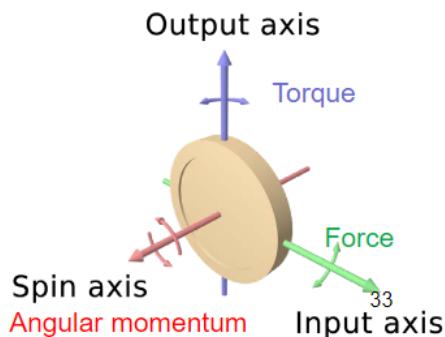
### **Construcción Básica y Geometría del Giroscopio**

Un giroscopio es un dispositivo que mide la orientación de una nave espacial mediante el uso de un disco que gira rápidamente. El disco tiene un vector de momento angular que es constante en magnitud y paralelo al eje de giro del disco. Este vector no cambia su dirección en el espacio inercial, a menos que haya una fuerza externa que lo haga. Si la nave espacial gira alrededor del eje de entrada del giroscopio, el soporte que sostiene el eje de giro se mueve con ella, pero el disco no. Esto hace que el soporte precese alrededor del eje de salida, que es perpendicular al eje de entrada

y al eje de giro. El movimiento de la horquilla se registra y se envía a una computadora a bordo, que calcula la orientación de la nave espacial con respecto al vector de momento angular. La ley que rige este fenómeno es:

$$\dot{\vec{h}} = \vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$$

,



## Diferentes giroscopios

### Giroscopios Ópticos

Los giroscopios ópticos son dispositivos que miden la velocidad de rotación mediante el uso de la luz. Existen tres tipos principales de giroscopios ópticos: el interferómetro Sagnac, el giroscopio de anillo láser y el giroscopio de fibra óptica.

#### Interferómetro Sagnac

El interferómetro Sagnac consiste en un anillo óptico por el que circulan dos haces de luz en sentidos opuestos. La velocidad de rotación se determina por la diferencia de tiempo que tardan los haces en completar el circuito, que depende de la distancia recorrida por cada uno debido al efecto Sagnac. Si no hay rotación, los haces llegan al mismo tiempo al detector. Si hay rotación, uno de los haces recorre una distancia mayor que el otro y llega con un retraso proporcional a la velocidad angular.

#### Giroscopio de Anillo Láser

El giroscopio de anillo láser es similar al interferómetro Sagnac, pero con la diferencia de que incorpora un láser en la trayectoria óptica que crea una resonancia de fotones a una longitud de onda fija. La rotación del anillo provoca un cambio de frecuencia en la cavidad resonante, que es proporcional a la velocidad angular. Para medir las tres componentes de la velocidad angular se necesitan tres giroscopios de anillo láser dispuestos en ejes ortogonales.

#### Giroscopio de Fibra Óptica

El giroscopio de fibra óptica se basa en el mismo principio que el interferómetro Sagnac, pero utiliza una longitud larga de cable de fibra enrollado en un círculo en lugar de un anillo óptico. La fuente y el sensor de luz están fuera de las fibras ópticas, lo que reduce las pérdidas y las interferencias. El giroscopio de fibra óptica tiene la ventaja de ser más compacto, ligero y resistente que los otros tipos de giroscopios ópticos.

### Otros Giroscopios

Además de los giroscopios ópticos, existen otros tipos de giroscopios que utilizan diferentes principios físicos para medir la velocidad angular, como los giroscopios mecánicos, los giroscopios piezoelectrómicos, los giroscopios vibratorios o los giroscopios MEMS.

#### 3.2.10. Interferometría GPS

La interferometría GPS es una técnica que permite determinar la actitud de un objeto a partir de la diferencia de fase de la señal GPS recibida por dos antenas separadas por una distancia conocida. Esta diferencia de fase depende del ángulo entre el plano formado por las antenas y el frente de onda de la señal. Al medir este ángulo, se puede estimar la orientación del objeto con respecto al satélite emisor. La interferometría GPS se basa en el principio de que las ondas en fase se refuerzan entre sí, mientras que las ondas fuera de fase se cancelan entre sí. Para realizar esta técnica, se requieren varias antenas GPS montadas en diferentes ubicaciones del objeto, preferiblemente a larga distancia entre sí para aumentar la precisión. Sin embargo, esta técnica también presenta algunos problemas, como la necesidad de una señal a mayor altitud y la posible interferencia de otros factores ambientales.

**Radio Interferometry Attitude Control**

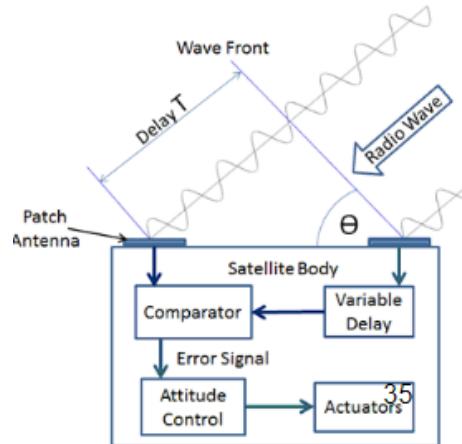


Figura 3.2.4

En la figura se muestra un esquema de la interferometría GPS, donde  $T$  es la demora entre las señales recibidas por las antenas  $A_1$  y  $A_2$  y  $\theta$  es el ángulo entre el plano de las antenas y el frente de onda.

### 3.2.11. Pros y contras de sensores

#### Pros y Contras de los Sensores

Sensor	Comentario Positivo (+)	Comentario Negativo (-)
<b>Sol</b>	Brillante y sin ambigüedades.	Simple, confiable, económico. No visible durante un eclipse.
<b>Tierra</b>	Siempre disponible, brillante y sin ambigüedades.	Estático: económico, simple. Escaneo: caro, dependiente de la órbita. Gran ángulo para satélites cercanos. Puede requerir movimiento de escaneo. Debe protegerse del Sol.
<b>Magnetómetro</b>	Económico, necesita baja potencia, siempre disponible para satélites de baja altitud.	Económico, baja resolución ( $\approx 0,5^\circ$ ). Solo utilizable a baja altitud. La nave espacial debe estar magnéticamente limpia.
<b>Seguidor de Estrellas</b>	Disponible en casi todas partes del cielo con una precisión muy alta ( $\approx 0,001^\circ$ ).	Sensores pesados, complejos y caros. Identificar objetivos es lento y complejo. Necesitan protección contra el Sol. Requiere algoritmos sofisticados.
<b>Giroscopio</b>	No requiere sensores externos. Muy preciso para intervalos de tiempo limitados.	Mejor referencia a corto plazo, costoso. Solo detecta cambios en la orientación. Puede estar sujeto a deriva. Necesita recalibración de vez en cuando.

### 3.2.12. Determinación de Actitud: Sensores y Rendimiento Típico

Sensor	Precisión Típica [grados]	Aplicación Típica
<b>Sol</b>	0.2 – 1.0	La dirección debe ser conocida para alinear el panel solar.
<b>Horizonte (Tierra)</b>	0.02-0.1	Órbita terrestre, de baja a órbita geostacionaria.
<b>Magnetómetro</b>	0.5 - 1.0	Principalmente debido a la incertidumbre del campo magnético. Órbitas terrestres $\geq 6000$ km.
<b>Seguidor de Estrellas</b>	0.0002-0.1	Puntería de alta precisión.
<b>GPS</b>	-	Utilizado para grandes estructuras espaciales.

**Recordatorio:** Se necesitan dos direcciones no paralelas para medir la orientación de manera única.

### 3.2.13. Configuración Típica de Sensores en una Nave Espacial

Los sensores que se utilizan en una nave espacial dependen del tipo de misión, la órbita y la precisión que se requiere. A continuación se presentan algunos ejemplos de sensores según estos criterios:

**Mediciones más precisas (por ejemplo, satélites científicos):** Los seguidores de estrellas son sensores ópticos que determinan la orientación de la nave espacial mediante la observación de las posiciones de las estrellas.

**Requisitos de precisión moderada:** Los sensores solares digitales gruesos, los sensores de la Tierra y los magnetómetros son sensores que miden el ángulo entre la nave espacial y el Sol, la Tierra o el campo magnético terrestre, respectivamente.

**Satélites de baja altitud:** Los sensores solares, los sensores de la Tierra y los magnetómetros son los mismos que en el caso anterior, pero con menor precisión y menor consumo de energía.

**Satélites de alta altitud (por ejemplo, geoestacionarios):** Los sensores ópticos y los giroscopios son sensores que proporcionan información sobre la actitud y la velocidad angular de la nave espacial. Los sensores ópticos pueden ser seguidores de estrellas o cámaras que detectan puntos de referencia en la superficie terrestre. Los giroscopios son dispositivos que mantienen una dirección fija en el espacio.

Recuerda que el campo magnético de la Tierra es demasiado débil para su uso en satélites de alta altitud.

## 3.3. Introducción a Conceptos de Actitud

### 3.3.1. Momento Angular y Torques Externos:

El objetivo es establecer la relación entre los torques externos y la velocidad angular para comprender su influencia en la dinámica de actitud.

Cantidad fundamental en la dinámica rotacional:

- Momento angular  $\vec{h}$  con respecto a un origen definido.

$$\vec{h} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

- El momento angular referido a un punto fijo inercial solo cambia si las fuerzas sobre él generan un momento angular  $\vec{T}$  con respecto a este punto fijo.

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{T}$$

### 3.3.2. Principio de Conservación del Momento Angular

En la ausencia de torques externos, el momento angular se conserva. Este momento angular es proporcional al momento de inercia ( $I$ ) y a la velocidad angular ( $\omega$ ).

$$\vec{h} = \mathbf{I}\vec{\omega} \quad , \quad \frac{d\vec{h}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{h} = \text{const.}$$

En la dinámica rotacional, el momento angular es análogo al momento lineal, donde la masa ( $m$ ) se corresponde con el momento de inercia ( $I$ ), y la velocidad ( $v$ ) con la velocidad angular ( $\omega$ ).

### 3.3.3. Momento de Inercia

El momento de inercia es una medida de la distribución de masa de un objeto en relación con un eje específico, donde  $r$  representa la distancia perpendicular entre la masa y el eje. Este parámetro ofrece información acerca de la resistencia de un objeto a la rotación alrededor de dicho eje y cuán difícil resulta realizar dicha rotación.

Para una partícula el momento de inercia depende de la masa y la distancia  $r$  al eje de rotación.

$$I_O = r^2 m$$

Para un cuerpo rígido libre para rotar en tres dimensiones el momento de inercia está dado por una matriz simétrica de 3x3.

$$I = \sum r^2 dm = \int_m r^2 dm$$

#### Matriz de momento de inercia

$$\vec{h} = \mathbf{I}\vec{\omega}$$

- $h$  = momento angular
- $I$  = matriz de momento de inercia
- $\omega$  = velocidad angular
- Matriz simétrica
- Los productos cruzados de la matriz de inercia son iguales (es decir,  $I_{xy} = I_{yx}$ )

$$\vec{h} = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

**Matriz de Momentos Principales de Inercia:** Una matriz real y simétrica puede ser transformada, mediante una matriz de rotación, en una matriz diagonal, eligiendo apropiadamente los

ejes de coordenadas. Los componentes diagonales de esta matriz diagonal se denominan momentos principales de inercia.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

Los torques alrededor de los ejes principales actúan de manera independiente entre sí.

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \frac{d(\mathbf{I}\vec{\omega})}{dt} = \vec{T}$$

### 3.3.4. Cinemática de Actitud

La cinemática relaciona la velocidad y la posición. Para la trayectoria del centro de masa (punto), la cinemática se expresa de manera simple.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}$$

De manera análoga, la cinemática de actitud consiste en relaciones (ecuaciones diferenciales) entre la velocidad angular ( $\omega$ ) y la actitud ( $\Theta$ ), representadas mediante una matriz de rotación, como la matriz de cosenos direccionales, ángulos de Euler, etc., donde  $C$  es una matriz de  $3 \times 3$ .

$$\frac{d\vec{\theta}}{dt} = \mathbf{C}\vec{\omega}$$

### 3.3.5. Dinámica de Actitud (Ecuaciones de Euler)

La dinámica establece la conexión entre el cambio de momento (velocidad) y las fuerzas. El movimiento del centro de masa sigue la segunda ley de Newton.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

De manera similar, la dinámica de actitud relaciona el momento angular (velocidad angular) con los torques.

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{T}$$

El momento angular  $h$  del satélite con respecto al centro de masa se describe en un marco de referencia fijo.

$$\vec{h} = \mathbf{I}\vec{\omega}$$

La ecuación del momento angular se expresa en un marco de referencia rotativo, dando lugar a las ecuaciones de Euler, que describen la dinámica de actitud de un satélite.

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{T} \quad ; \quad \mathbf{I} \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \mathbf{I} \cdot \vec{\omega} = \vec{T}$$

Si  $\mathbf{I}$  está en ejes principales entonces las ecuaciones de Euler son tres ecuaciones de primer orden, no lineales y acopladas que conectan la velocidad angular con los torques.

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= T_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= T_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 &= T_3 \end{aligned}$$

## 3.4. Control de Actitud

### 3.4.1. Requisitos de Control de Actitud

El control de actitud de un satélite es el proceso de orientar y estabilizar sus componentes según los objetivos de la misión. Para ello, se deben definir una serie de requisitos que determinan el rendimiento y las capacidades del sistema de control. El requisito principal es apuntar la carga útil del satélite, que puede ser un instrumento científico, una antena de comunicación, una matriz solar, etc. La estabilidad de actitud es necesaria para casi todas las aplicaciones de satélites, ya que permite obtener datos fiables y precisos. Además, el control de actitud puede tener otros requisitos específicos, como:

- Apuntar con una precisión dada: se refiere al error máximo tolerable entre la dirección deseada y la real.
- Mantener desviaciones por debajo de un nivel dado: se refiere a la variación máxima permitida en la orientación del satélite.
- Saber en qué dirección y ubicación apuntar: se refiere a la capacidad de determinar la posición y actitud del satélite en el espacio.
- Mover los instrumentos del satélite al objetivo en un tiempo dado: se refiere a la velocidad y agilidad del sistema de control para cambiar la orientación del satélite.
- Evitar apuntar instrumentos sensibles al Sol: se refiere a la protección de los componentes que pueden dañarse por la radiación solar.

La precisión requerida depende de la carga útil y los objetivos de la misión. Por ejemplo, un telescopio espacial necesita una mayor precisión que una antena de comunicación. La precisión alcanzable depende del hardware disponible, como los sensores, los actuadores y el software de control.

### 3.4.2. Satélites Estabilizados en Tres Ejes y en Giro

Los **satélites estabilizados en giro** tienen la ventaja de que su momento angular se conserva casi constante en el espacio inercial durante largos períodos de tiempo, lo que reduce la influencia de los torques ambientales.

Por el contrario, los **satélites estabilizados en tres ejes** necesitan controlar activamente la orientación de sus tres ejes perpendiculares, que deben apuntar a direcciones específicas. Esto implica un mayor consumo de energía y recursos. Además, para conocer la actitud completa de un satélite estabilizado en tres ejes, se necesitan al menos dos referencias externas, como el vector del Sol y el vector de la Tierra o dos estrellas diferentes.

#### Elección del Método de Control de Actitud

El método de control de actitud que se elija para el satélite determinará en gran medida su configuración y diseño. Existen diferentes opciones, cada una con sus ventajas y desventajas, que se pueden resumir de la siguiente manera:

- **Estabilizado en Giro:** Consiste en hacer rotar al satélite alrededor de un eje principal fijo, lo que le confiere una estabilidad angular. Es un método simple y económico, pero limita el apuntamiento de las cargas útiles y los paneles solares.
- **Estabilizado en Giro Doble:** Es una variante del método anterior, en la que se hace rotar al satélite alrededor de dos ejes principales fijos. Esto permite orientar mejor las cargas útiles y los paneles solares, pero aumenta la complejidad y el costo del sistema.
- **Estabilizado por Gradiente Gravitacional:** Aprovecha las variaciones en la gravedad a lo largo del satélite para mantener una orientación fija respecto a la Tierra. Es un método pasivo y barato, pero solo es aplicable a satélites con una forma alargada y una órbita baja.
- **Estabilizado en Tres Ejes:** Utiliza sensores y actuadores para controlar los tres ejes del satélite y apuntar en direcciones específicas. Es el método más versátil y preciso, pero también el más complejo y caro.

La elección del sistema de control de actitud es una decisión que debe tomarse temprano en la planificación de la misión, ya que afectará a muchos otros aspectos del diseño del satélite.

### 3.4.3. Configuración del Sistema de Control

El sistema de determinación y control de la nave espacial debe cumplir con los requisitos que se establezcan para la misión. Estos requisitos implican una cierta configuración de la nave espacial, que afecta a la disposición general de los subsistemas y componentes. A continuación se describen algunos aspectos clave de esta configuración.

- **Configuración Específica de la Nave Espacial y Requisitos del Sistema:** Los requisitos de la misión deben asignarse a todos los subsistemas y componentes que forman parte del sistema de determinación y control. Cada componente debe implementarse de manera robusta, teniendo en cuenta las posibles fuentes de error y las condiciones ambientales. Además, todos los subsistemas combinados deben cumplir con los requisitos del sistema en general, garantizando el funcionamiento óptimo de la nave espacial.

- **Requisitos Apropiadamente Asignados:** La asignación adecuada de los requisitos es esencial para el éxito de la misión. Los problemas y recursos deben compartirse equitativamente entre los diferentes subsistemas, evitando sobrecargas o desequilibrios. Asimismo, se debe asegurar que cada subsistema afecte positivamente a todos los demás subsistemas, favoreciendo la integración y la cooperación.
- **Definir Objetivos de Actitud Específicos de la Misión y Tareas de Control:** Finalmente, se deben definir los objetivos específicos de actitud para la misión y las tareas de control que se deben realizar. Estos objetivos y tareas determinarán las estrategias y algoritmos que se utilizarán para controlar la orientación y el movimiento de la nave espacial.

Aquí tienes una posible mejora de la redacción en formato LaTeX. He intentado evitar el abuso de las listas y he añadido algunas frases de transición para mejorar la coherencia.

#### 3.4.4. Objetivos y Tareas de Actitud

Los objetivos de actitud son los fines que se persiguen al controlar la orientación de la nave espacial. Entre ellos, se pueden destacar los siguientes:

- **Desrotación (Detumbling):** Consiste en estabilizar la rotación descontrolada que puede tener la nave espacial al ser lanzada o por efecto de las perturbaciones externas. Si no se logra este objetivo, la misión puede fracasar.
- **Reorientación (Repointing):** Consiste en orientar la nave espacial hacia un punto específico, como puede ser un planeta, una estrella o una antena terrestre. Este objetivo es necesario para realizar observaciones científicas o comunicaciones.

Para alcanzar estos objetivos, se deben realizar las siguientes tareas de control de actitud:

1. **Medir la Actitud.** Utilizar sensores de actitud, como magnetómetros, giróscopos o cámaras, para medir la orientación actual de la nave espacial.
2. **Corregir la Actitud.** Utilizar actuadores, como ruedas de reacción, propulsores o bobinas magnéticas, para aplicar torques sobre la nave espacial y modificar su orientación.
3. **Control.** Implementar un algoritmo que determine la magnitud y dirección del torque óptimo en respuesta a las perturbaciones y al objetivo deseado.

#### 3.4.5. Cómo Estabilizar una Nave Espacial Frente a Torques de Perturbación

Los torques de perturbación son fuerzas externas que pueden alterar la orientación de una nave espacial. Para mantener la actitud deseada, se requiere un sistema de control que contrarreste estos torques. Existen dos tipos de sistemas de control de actitud:

##### 1. Control de Actitud Pasivo

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \vec{T}_{disturbance}$$

## 2. Control de Actitud Activo

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \frac{d(\mathbf{I}\vec{\omega})}{dt} = \vec{T}_{control}$$

### 3.4.6. Métodos de Control de Actitud

El control de actitud se refiere a la capacidad de orientar una nave espacial según una referencia determinada. Existen dos enfoques principales para lograrlo: el control pasivo y el control activo.

#### Control Pasivo de Estabilización

El control pasivo se basa en la interacción de la nave espacial con campos externos, como el campo gravitatorio, el campo magnético o la radiación solar de la Tierra. Estos campos ejercen fuerzas o torques sobre la nave espacial que pueden estabilizar su actitud sin necesidad de un sistema de control. En general, el control pasivo no requiere sensores de actitud ni actuadores. Este método se utiliza principalmente en misiones de bajo costo o con pocos requisitos de precisión.

#### Control Activo de Estabilización

El control activo implica el uso de un sistema de control que mide la actitud actual de la nave espacial y la compara con la actitud deseada. Si hay una diferencia, el sistema de control envía una señal a los actuadores para que generen un torque correctivo. El control activo requiere hardware adicional, como sensores, actuadores, energía y combustible. El control activo puede ser necesario cuando el control pasivo no proporciona la orientación deseada o no tiene la precisión suficiente.

Las principales motivaciones para el control activo son:

- Requisitos de misión que exigen una alta precisión, como apuntar a un objetivo específico o mantener una órbita determinada.
- Perturbaciones inesperadas que pueden desestabilizar la actitud, como colisiones con partículas espaciales o errores en el diseño o fabricación de la nave espacial.

### 3.4.7. Sistemas de Actuadores

Los sistemas de actuadores son los encargados de modificar la actitud del satélite mediante la aplicación de torques externos. Según el origen de estos torques, se pueden clasificar en dos tipos: pasivos y activos.

#### Sistemas de Actuadores Pasivos

Los sistemas de actuadores pasivos utilizan las fuerzas naturales del entorno orbital para alinear el satélite con una dirección deseada. Estas fuerzas pueden ser de origen gravitacional, magnético o aerodinámico. Algunos métodos de estabilización pasiva son:

- Estabilización por Gradiente Gravitacional
- Estabilización por Giro
- Estabilización Magnética

### Sistemas de Actuadores Activos

Los sistemas de actuadores activos requieren el uso de energía eléctrica o química para generar torques controlados que permitan modificar la actitud del satélite. Estos sistemas ofrecen una mayor precisión y flexibilidad que los pasivos, pero también implican un mayor coste y complejidad. Algunos ejemplos de actuadores activos son:

- Propulsores
- Par Magnético
- Ruedas de Momento, Ruedas de Reacción
- Giroscopio de Momento de Control

## 3.5. Hardware de Actitud: Actuadores para el Control Activo de la Actitud

El control activo, típicamente utilizado para la estabilización en tres ejes, implica un enfoque más complejo y costoso en comparación con el control pasivo. Sin embargo, ofrece una precisión de apuntado elevada, siendo especialmente efectivo para misiones con frecuentes cambios en la orientación del instrumento, como en el caso de telescopios espaciales. En este contexto, se utilizan actuadores específicos para cada eje rotacional de la nave espacial.

Un ejemplo destacado de actuadores en control activo son los **propulsores**. Estos propulsores, que son pequeños cohetes, se utilizan en pares: primero se disparan los propulsores de un par para iniciar la rotación y luego se disparan los del par opuesto para detener la rotación.

### 3.5.1. Concepto de Propulsor

El concepto de propulsor implica la expulsión de masa ( $\frac{d}{dt}m$ , tasa de flujo de masa) con una velocidad de escape ( $v_e$ ). Esto genera una fuerza que se ejerce sobre la nave espacial.

$$F = \dot{m}v_e$$

Si el propulsor tiene un brazo de momento con respecto al centro de masa de la nave espacial, se produce un par sobre el centro de masa.

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$$

La presencia de un único propulsor también cambia el momento lineal de la nave espacial. Para contrarrestar este efecto y evitar cambios no deseados en el momento lineal, se utilizan dos propulsores, de manera que las dos fuerzas suman cero.

$$F_1 + F_2 = 0 \quad T_1 + T_2 = 2rF$$

### 3.5.2. Control de Actitud con Propulsores

El uso de propulsores es una solución común y efectiva para proporcionar el control de actitud de una nave espacial. Sin embargo, es importante destacar que el uso de propulsores implica el consumo de combustible. Esta estrategia es común en satélites destinados a operar en órbitas relativamente altas, donde no están disponibles el campo magnético o el gradiente gravitacional.

El control de actitud con propulsores tiene varias características destacadas:

- Puede ser la fuente potencialmente más significativa de torque con un alto grado de control.
- Por lo general, se requiere un conjunto redundante de propulsores para garantizar la fiabilidad.
- Se realiza un control directo de la velocidad angular.
- Los propulsores de control de reacción suelen ser dispositivos de encendido y apagado que utilizan gas frío, propelentes hipergólicos/catalíticos, o cohetes de iones/plasma.
- Los propulsores se comandan en pares para cancelar los cambios de velocidad.
- Los factores limitantes de la vida útil incluyen la cantidad de combustible disponible y posibles fallos (causados por fallas en las válvulas, fugas, etc.).
- Uso común: descargar ruedas de momento, detener el giro (por ejemplo, después del despliegue).

### 3.5.3. Rueda de Momento y Rueda de Reacción

#### Rueda de Momento

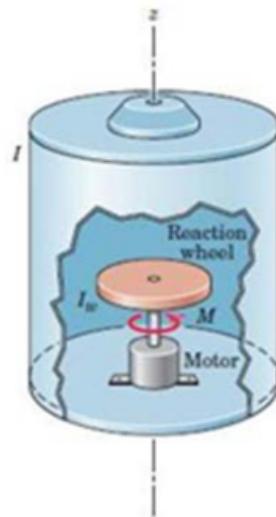
La rueda de momento opera a altas revoluciones por minuto para proporcionar estabilidad de giro. Por lo general, gira alrededor de un eje alineado con el eje de la nave espacial.

#### Rueda de Reacción

La rueda de reacción opera a revoluciones por minuto variables para controlar y ajustar el momento angular total entre la nave espacial y la rueda de reacción. Este sistema ofrece una respuesta muy rápida en comparación con otros sistemas. Utiliza tres ruedas ortogonales para variar todas las componentes del momento angular en el espacio y, comúnmente, se emplea una cuarta rueda para redundancia.

## Concepto de Rueda de Reacción

Una rueda de reacción es una rueda giratoria montada en un disco metálico cuya velocidad de rotación puede ajustarse mediante un motor eléctrico reversible. Transfiere momento angular hacia o desde la nave espacial cambiando la velocidad de la rueda, pero no tiene influencia sobre el momento angular total. Los torques se generan internamente en la nave espacial, conservando el momento angular total e influyendo en la orientación de la nave espacial.



Considere la rotación alrededor de un eje dado con:

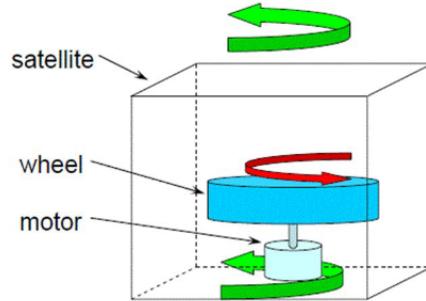
- $I_w$  = momento de inercia de la rueda sobre el eje de giro
- $\omega_w$  = velocidad angular de la rueda en relación con la nave espacial
- $I$  = momento de inercia de la nave espacial sin la rueda
- $\omega$  = velocidad angular de la nave espacial en relación con el marco inercial

Conservación del momento angular:

$$I_w(\omega_w + \omega) + I\omega = 0$$

## Función de la Rueda de Reacción

La rueda de reacción corrige los torques perturbadores. Los torques externos generan momento angular no deseado. El sistema de control aplica torques de control a las ruedas de reacción para dejar el momento angular de la nave espacial sin cambios. Por ejemplo, cuando se aplica un torque de perturbación en sentido horario a la nave espacial, el sistema de control de actitud mantiene la actitud constante al rotar la rueda de reacción en sentido antihorario.



**Maniobras de giro:** La nave espacial se rota en pequeños ángulos para mantener el telescopio apuntando a una estrella (debido a la rotación de la Tierra) al disminuir o acelerar la rueda. Un ejemplo típico es cuando un telescopio espacial debe girarse para observar un nuevo objeto celestial. El momento angular se toma prestado de las ruedas y se devuelve más tarde, sin cambios netos en el momento angular de la rueda a lo largo del tiempo.

### Rueda de Reacción: Eliminación de Momento Angular

Cuando los torques perturbadores no se compensan a lo largo de una órbita:

- La velocidad de la rueda aumentará para mantener la actitud de la nave espacial.
- Existe el riesgo de saturar la rueda (la rueda gira tan rápido como puede y no puede contrarrestar más torques perturbadores).
- La cantidad de momento angular almacenado debe cancelarse, y este proceso se denomina eliminación de momento angular.

Dispositivos de eliminación de momento angular (reducen la velocidad de la rueda):

- Propulsores (en órbita alta).
- Torques magnéticos (útiles para órbitas cercanas a la Tierra).

Observaciones sobre las ruedas de reacción y de momento angular:

- Elección común para el control activo de la actitud.
- Ofrecen un control rápido y preciso.
- Mayormente utilizadas para el control de torques internos solamente (para el control de torques externos se requiere eliminación de momento angular cuando las ruedas alcanzan la velocidad máxima).
- La rueda de momento angular opera a altas revoluciones por minuto y proporciona estabilidad de giro.
- Se evita operar la rueda cerca de la saturación (control limitado).
- Las ruedas no se operan cerca de 0 revoluciones por minuto debido a la respuesta no lineal de la rueda.

- Se requieren tres ruedas de reacción para el control de tres ejes (pero comúnmente se utilizan cuatro o más para redundancia).
- La lógica de control es simple para tres ejes independientes, pero puede volverse complicada con redundancia.

### 3.5.4. Giroscopios de Control de Momento

Los giroscopios de control de momento (CMG) operan de manera similar a las ruedas de reacción, pero con algunas diferencias:

- Tienen una velocidad fija (la magnitud del vector de momento angular es constante).
- Están montados en cardanes (la dirección del vector de momento angular puede cambiar).
- El control de cardán único se logra mediante la rotación del giroscopio a través de un ángulo.

Cuando se aplica un par en el cardán, se produce un cambio en el momento angular perpendicular al vector de momento angular existente. Un par en el eje de entrada (cambio en la dirección del momento angular) produce un par en el eje de salida, modificando así la dirección de la nave espacial.

Los CMG se utilizan para giros rápidos de la actitud y en aplicaciones con altas demandas de par. Proporcionan 50 veces más par de control que las ruedas de reacción para la misma masa y potencia.

### 3.5.5. Torque Magnético

#### Características del Torque Magnético

- El control de actitud se realiza con la ayuda del campo magnético de la Tierra ( $B$ ).
- Un imán en el satélite interactúa con el campo magnético de la Tierra.
- Los imanes fijos son demasiado pesados, por lo que se generan momentos magnéticos dipolares ( $\mu$ ) a partir de bobinas electromagnéticas que transportan corriente.
- El torque  $\vec{T} = \vec{\mu} \times \vec{B}$  tiende a rotar la nave espacial.
- Las naves espaciales utilizan el torque magnético para un control de actitud económico.
- Se utiliza principalmente para eliminar el exceso de momento angular de las ruedas de reacción.
- No se utiliza para misiones interplanetarias, ya que la intensidad del campo magnético disminuye con la distancia.

**Nota:** La magnitud del campo magnético de la Tierra es inversamente proporcional a la distancia ( $B \sim \frac{1}{r^3}$ ).

### 3.5.6. Torque Magnético con bobinas electromagnéticas

El campo magnético de la Tierra y de otros planetas tiene la capacidad de generar torque magnético en naves espaciales. Cuando las naves se encuentran a bajas altitudes, el campo magnético terrestre interactúa con bucles de corriente, ya sean intencionales o no, dentro de la nave espacial, produciendo torques.

El torque generado por cualquier campo magnético en una bobina de corriente puede expresarse como:

$$\vec{T} = \vec{\mu} \times \vec{B} = N A \vec{I} \times \vec{B} = N A I B \sin \phi \quad \text{donde} \quad \vec{\mu} = N A I$$

Donde:  $N$  es el número de vueltas,  $A$  es el área incluida por las vueltas,  $I$  es la corriente.

Los torquers magnéticos, también conocidos como varillas de torque, aprovechan esta interacción para generar torque, especialmente en la gestión del momento angular. El algoritmo de control requiere un conocimiento preciso del campo magnético terrestre, el cual está inclinado 11 grados con respecto a los ejes de rotación de la Tierra y puede modelarse como un dipolo.

El campo magnético terrestre presenta ventajas notables:

- Actúa como fuente de torques de control para la gestión del momento angular.
- La dirección del campo se utiliza para realizar determinaciones de actitud a grandes rasgos.

## Actuadores

Tabla 3.5.1: Actuadores

Actuador	Precisión [°]	Comentarios
Propulsores	0.1	Rápido, de gran autoridad, costoso, consumible Se utiliza en cualquier entorno Proporciona estabilización, mantenimiento de estación y control de actitud Grandes impulsos para maniobras orbitales importantes Control de actitud con pequeños impulsos
Ruedas de inercia	0.01	Rápido, costoso, alta precisión Principalmente para estabilización/control de actitud Estabilización en uno, dos o tres ejes
Ruedas de reaccion	0.01	Rápido, costoso, alta precisión Necesidad de propulsores para el “momentum dumping”.
Giroscopios de momento de control	0.1	Alta autoridad, rápido, pesado, costoso
Momento magnético	1 - 2	Sólo cerca de la Tierra, lento, ligero, bajo coste

## 3.6. Control de Actitud Pasivo

### 3.6.1. Estabilización mediante Gradiente de Gravedad

La fuerza gravitatoria disminuye con el radio desde el centro de la Tierra ( $F = G mM/r^2$ ). En la región del satélite, esta fuerza es más intensa cerca de la Tierra que en la región más alejada. Estas fuerzas desiguales generan un par de torsión que induce la rotación del satélite, produciendo un movimiento oscilatorio similar al de un péndulo.

Cuando el satélite se encuentra en una orientación cercana a la vertical, las fuerzas desiguales tienden a alinear el satélite con esta dirección. La estabilización mediante el gradiente de gravedad aprovecha la propensión natural del satélite a alinear su eje largo con el vector de gravedad.

Para lograr la estabilización, el par de torsión generado por el gradiente de gravedad supera a cualquier otro par de torsión perturbador, una condición que suele cumplirse en órbitas por debajo de los 1000 km.

### 3.6.2. Estabilización por Giro

Utiliza la rigidez giroscópica intrínseca de un cuerpo giratorio para mantener su orientación en el espacio inercial, conservando el momento angular. Este método es sencillo y de bajo costo para estabilizar la actitud, pero suele ser inadecuado para cargas útiles de imágenes. La eficiencia energética es baja, ya que toda la estructura del cuerpo del satélite está cubierta con células solares.

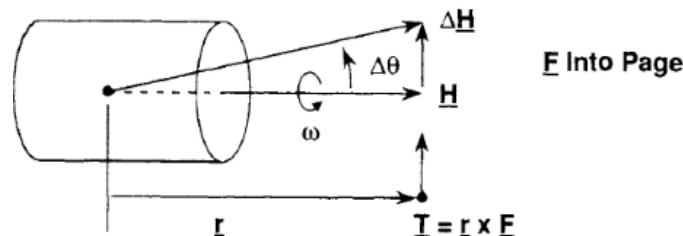
Si no hay torques externos, el vector de momento angular permanece fijo en el espacio, manteniendo una magnitud y dirección constantes.

$$\dot{\mathbf{h}} = \frac{\Delta \mathbf{h}}{\Delta t} = \mathbf{T} \quad , \quad \Delta\theta = \frac{\Delta \mathbf{h}}{\mathbf{h}} = \frac{\Delta \mathbf{h}}{\mathbf{I}\omega} = \frac{\mathbf{T}\Delta t}{\mathbf{I}\omega}$$

En presencia de un torque externo  $T$  con componentes perpendiculares y/o paralelas al vector de momento angular  $h$ :

- El torque paralelo provoca cambios en la magnitud del momento angular del satélite.
- El torque perpendicular induce un desplazamiento de  $h$  en la dirección de  $T$ .

$$\mathbf{T} = \mathbf{I}\ddot{\theta} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \frac{T}{I} t^2$$



#### Estabilización de Doble Giro:

Combina la simplicidad de una nave espacial estabilizada por giro sin la necesidad de una plataforma giratoria en la parte superior. La carga útil se monta en una plataforma no giratoria para lograr una mejor orientación.

Tabla 3.6.1: Métodos de Estabilización

Método	Precisión [°]	Comentarios
Spin stabilization	0.1	Pasivo, simple, bajo costo, larga vida Proporciona solo estabilización en un eje Se requieren otros dispositivos (como propulsores) Sin apuntamiento fijo Eficiencia baja de celdas solares
Gravity-gradient stabilization	1 – 5	Pasivo, simple, bajo costo, larga vida Proporciona apuntamiento pasivo hacia la Tierra Baja precisión
Dual-spin stabilization	0.1	Pasivo, puede ser complejo y costoso Proporciona apuntamiento fijo (en una plataforma no giratoria) y movimiento de escaneo Requiere mecanismo no giratorio
3-axis stabilization	0.001	Activo, costoso, complejo Actuadores para cada eje del cuerpo Alta precisión de apuntamiento Posibles giros rápidos de actitud

### Control de actitud: Pasivo versus Activo

- **Pasivo:**
  - Pocos grados de libertad.
  - Apunta en una dirección.
  - Sencillo y sin consumo de energía.
  - Económico.
- **Activo:**
  - 0.001-1 grados de libertad.
  - Apunta en varias direcciones.
  - Complejo y requiere energía.
  - Costoso.
- **Medios sencillos:** control mediante el uso del entorno y propiedades físicas naturales del satélite.
- **Medios complejos:** control mediante el uso de instrumentación sofisticada y compleja (actuadores).

## 3.7. Torques de Perturbación

- **Torques Ambientales Externos:** Estos torques afectan el momento angular total.

- Aerodinámicos
  - Gradiente de gravedad
  - Presión solar
  - Magnéticos
  - Etc.
- **Torques Internos:** Aunque el momento angular total se conserva, estos torques influyen en la orientación de la nave espacial.
- Movimiento de la tripulación
  - Movimiento del hardware
  - Movimiento de combustible (agitación)
  - Despliegue de paneles solares
  - Etc.

### 3.7.1. Torque Aerodinámico

Torque dado por la distancia entre el centro de gravedad y el centro de presión.

$$\vec{T}_a = \vec{r}_{cp} \times \vec{F}_a \quad ; \quad \vec{F}_a = \frac{1}{2} \rho V^2 A_{\perp} C_D \frac{\vec{V}}{V}$$

- $T_a$  = torque aerodinámico
- $F_a$  = fuerza aerodinámica (siempre alineada con el vector de velocidad y con signo opuesto)
- $V$  = velocidad de la nave espacial
- $A_{\perp}$  = área superficial normal al vector de velocidad
- $\rho$  = densidad atmosférica
- $C_D$  = coeficiente de arrastre (generalmente entre 1 y 2.5 para naves espaciales)

Nota:  $r_{cp}$  varía con la actitud de la nave espacial.

### 3.7.2. Torque de Gradiente Gravitacional

Los campos gravitacionales disminuyen con la distancia desde el centro del planeta. En una nave espacial en órbita, se experimenta una atracción más fuerte en su “lado inferior” que en su “lado superior”. Esta diferencia en la intensidad gravitatoria se debe a la variación de la fuerza gravitacional a lo largo de la estructura de la nave, siendo más pronunciada en la región más cercana al cuerpo celeste que en la parte más distante.

$$\vec{T}_g = \frac{3\mu}{r^5} \vec{r} \times \mathbf{I} \cdot \vec{r}$$

- $T_g$  = torque de gradiente gravitacional

- $\mu$  = constante gravitacional ( $398600 \text{ km}^3/\text{s}^2$  para la Tierra)
- $\mathbf{r}$  = vector desde el centro del planeta hasta la nave espacial
- $\mathbf{I}$  = matriz de inercia de la nave espacial

### 3.7.3. Torque por Presión de Radiación Solar

La luz solar, al portar momento, interactúa con la superficie de la nave espacial mediante reflexión y absorción. El cambio resultante en el momento genera una presión en la nave espacial, la cual está influenciada por la geometría y las propiedades ópticas de la superficie. Cuando el vector promedio de la presión solar tiene una distancia desde el centro de masa, la presión de radiación solar induce un torque de perturbación en la nave espacial.

$$\vec{T}_s = \vec{r}_{cp} \times \vec{F}_s \quad ; \quad \vec{F}_s = (1+q)p_s A_{\perp} \quad ; \quad p_s = \frac{\Phi}{c} = \frac{1361 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{c}$$

- $T_s$  = torque por presión de radiación solar
- $\mathbf{r}_{cp}$  = vector desde el centro de masa del cuerpo hasta el centro de presión solar
- $F_s$  = fuerza de presión solar
- $A_{\perp}$  = área de la superficie proyectada en la línea solar normal
- $q$  = reflectividad de la superficie (entre 0 y 1)
- $p_s$  = presión solar (densidad de flujo solar dividida por la velocidad de la luz), sólo válido cerca de la Tierra.

### 3.7.4. Torque Magnético

El torque magnético surge de la interacción entre el campo magnético terrestre y cualquier magnetización presente en la nave espacial. La presencia de componentes electrónicos genera un bucle de corriente equivalente, dando lugar a la formación de un dipolo magnético. El campo magnético terrestre, a su vez, ejerce un torque sobre el momento dipolar magnético de la nave espacial.

$$\vec{T}_m = \vec{\mu} \times \vec{B}_{-}$$

- $T_m$  = torque magnético
- $\mu$  = momento dipolar magnético de la nave espacial
- $B$  = intensidad del campo magnético terrestre (proporcional a  $1/r^3$ , con  $r$  como radio de la órbita)
- La intensidad del campo magnético varía en un factor de 2 dependiendo de la latitud.

$$\mu = mT \times \mathbf{B}$$

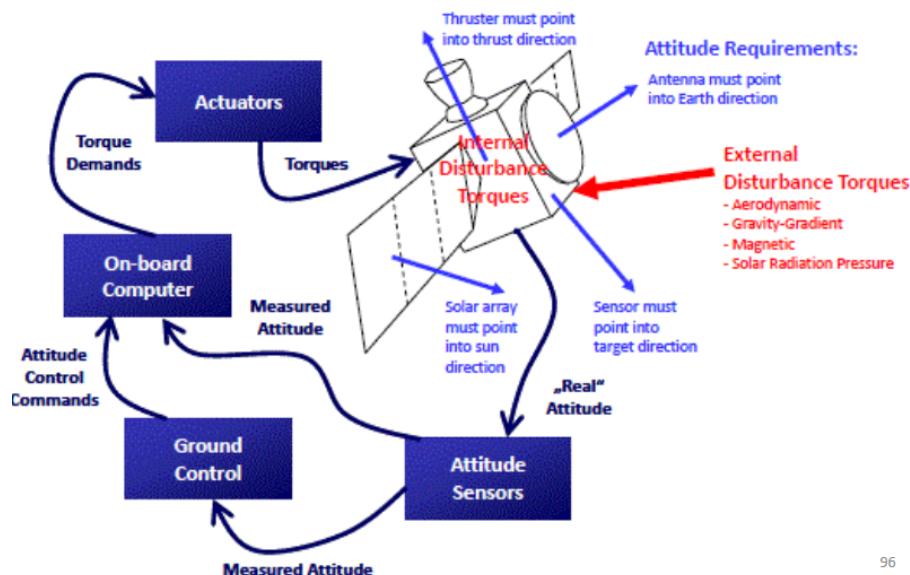
Donde  $\times$  denota el producto vectorial.

$$T_m = \mu \times \mathbf{B}$$

Esto representa el torque magnético en función de los parámetros mencionados. Avísame si necesitas más información o si hay algo más en lo que pueda ayudarte.

### 3.7.5. Dependencia respecto a la distancia a la Tierra

- Aerodinámico:  $e^{-a}$ , altitud:  $<\approx 400$  km
- Gradiente de gravedad:  $1/r^3$ , altitud: 400 – 35000 km
- Presión solar: Independiente, altitud:  $> 400$  km
- Magnético:  $1/r^3$ , altitud: 400 – 35000 km



96

**Observaciones sobre Torques para Diferentes Altitudes:** Entre el viaje interplanetario y la órbita geoestacionaria (GEO), la presión solar se convierte en la principal fuente de torque de perturbación si hay desplazamientos entre el centro de masa y el centro de presión. A altitudes inferiores a 1000 km, deben considerarse torques diferentes. Entre 250 y 400 km, el torque aerodinámico domina, siendo dependiente de la densidad atmosférica, la cual puede variar significativamente. Es crucial tener en cuenta las variaciones diurnas y nocturnas, así como la fuerte dependencia de la actividad solar y los eclipses en la presión solar.



# Capítulo 4

## Space mission ADCS subsystem design

### 4.1. Introducción

El subsistema ADCS (*Attitude Determination and Control System*) es el encargado de estabilizar la nave y orientarla en las direcciones deseadas durante la misión, anulando los torques externos que actúen sobre ella (ya que por conservación del momento angular, son los únicos que pueden cambiar el momento angular neto del sistema). Esto requiere que el vehículo sea capaz de determinar su actitud a través de sensores y la controle a través de actuadores.

Las maniobras de reorientación son giros del propio satélite para que quede orientado de acuerdo a los requisitos de la misión (carga de pago, paneles solares, antenas...).

Los sistemas activos de control de actitud de una nave son los siguientes:

- **Sensores de actitud:** Son los equipos encargados de tomar medidas para determinar la actitud actual del satélite y/o su velocidad angular. Tienen un error incorporado a la medida que se debe tener en cuenta.
- **Algoritmos de control:** También llamados leyes de control, son relaciones matemáticas entre la actitud medida y los torques correctivos a aplicar. Generan las órdenes para los actuadores a partir de las medidas de los sensores.
- **Actuadores:** Proporcionan los torques necesarios para corregir las desviaciones entre la actitud medida y la deseada. Estos torques junto a las perturbaciones producen las dinámicas del vehículo.

El esquema general del funcionamiento del subsistema ADCS se puede observar en la Figura 4.1.1.

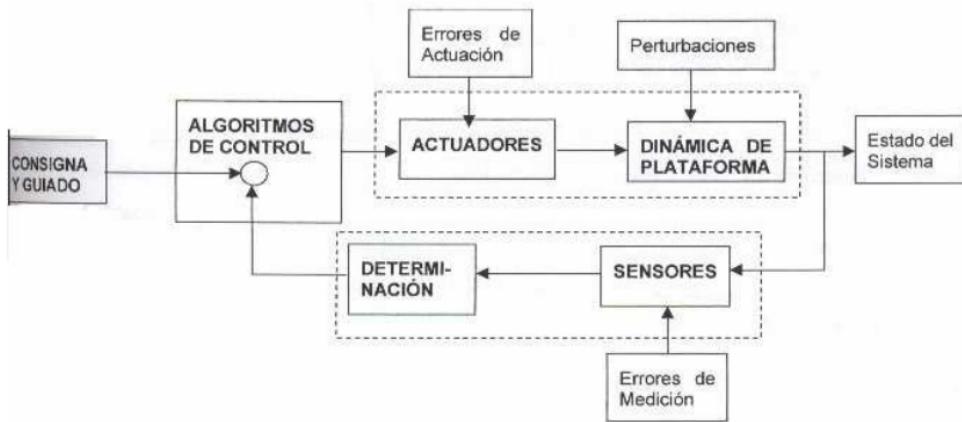


Figura 4.1.1: Esquema de funcionamiento de un subsistema ADCS

## 4.2. Pasos del diseño de un subsistema ADCS para una misión espacial

Los pasos para el diseño de un subsistema ADCS de una misión espacial se pueden observar en la Figura 4.2.1.

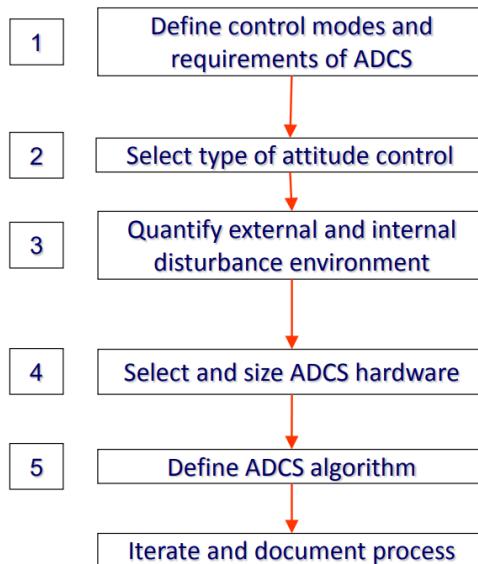


Figura 4.2.1: Pasos seguidos para el diseño de un subsistema ADCS

Estos pasos se desarrollarán en detalle en las siguientes Subsecciones. Para ejemplificar cómo se aplican en una misión espacial, se utilizará el satélite Zahori, un satélite LEO cuyo objetivo principal era encontrar agua bajo la superficie de la Tierra.

#### 4.2.1. Definir modos de control y requisitos

Los principales modos de control de una nave espacial son los siguientes:

- **Orbit insertion:** Período durante y después del lanzamiento en el que el satélite es llevado a una órbita final en la que empezar su operación. Según el satélite y la misión, puede no haber control de actitud alguno, una estabilización simple en un eje del motor del cohete o completo control de actitud.
- **Acquisition:** Modo utilizado para determinar la actitud inicial del satélite y realizar una primera estabilización. Puede utilizarse para recuperar al satélite tras una emergencia o imprevisto.
- **Normal, On-Station:** Modo nominal durante la operación del satélite. Utilizado durante la amplia mayoría de la operación, sus requisitos serán los que marquen gran parte del diseño.
- **Slew:** Modo utilizado para la reorientación del satélite a través de los actuadores cuando sea necesario.
- **Safe Mode:** Modo seguro utilizado en emergencias si el modo normal falla o es desactivado. Suele consumir menos o sacrificar la operación nominal para cumplir con los requisitos térmicos y de consumo de potencia.
- **Condiciones especiales:** Utilizado para momentos con requisitos particulares, como los eclipses.

En una primera etapa del diseño, se pueden considerar algunos modos únicamente. Por ejemplo, para el Zahori, se asumió que el lanzador insertará al satélite en su órbita final sin necesidad de ADCS, no se consideraron condiciones especiales y el modo seguro se pospuso para etapas posteriores, por lo que inicialmente sólo se diseñó considerando los modos Acquisition, Normal y Slew.

Los requisitos del sistema ADCS son específicos para cada uno de los modos de operación de la nave. Se dividen en los requisitos de determinación (sensores) y de control (actuadores). Los requisitos de determinación pueden ser de dos tipos:

- **Precisión:** La precisión de un sensor es cómo de bien puede determinar la actitud de la nave respecto de una referencia absoluta conocida. Ej Zahori:  $0,034^\circ$ .
- **Rango:** Rango total de ángulos en los que se debe mover el sensor y en los que la precisión se debe cumplir. Ej Zahori:  $\pm 20^\circ$  respecto a Nadir

Mientras que los requisitos de control pueden ser de 5 tipos:

- **Precisión:** Cómo de bien se puede controlar la actitud de un satélite respecto de una dirección fija. Ej Zahori:  $0,034^\circ$ .
- **Rango:** Rango total de ángulos en los que el actuador va a dar las maniobras y en los que se debe cumplir la precisión. Ej Zahori:  $\pm 50^\circ$  respecto a Nadir.
- **Jitter:** Un límite en la variación angular o en la velocidad angular en un corto período de tiempo en movimiento a alta frecuencia. Ej:  $0,3^\circ/\text{min}$  a 20 Hz.

- **Drift:** Un límite en la variación angular o en la velocidad angular en un movimiento lento a baja frecuencia. Ej Zahori:  $0,3^\circ/\text{s}$ .
- **Settling time:** Especifica el tiempo máximo que debe tardar la nave en recuperarse de una maniobra o perturbación inesperada. Ej: Pasar de una desviación de  $2^\circ$  a menos de  $0,1^\circ$  en 1 minuto.

Así, los requisitos de ADCS del Zahori son los siguientes:

Grupo	Tipo de requisito	Valor
Determinación	Precisión	$0,034^\circ$
	Rango	$\pm 20^\circ$ respecto a Nadir
Control	Precisión	$0,034^\circ$
	Rango	$\pm 50^\circ$ respecto a Nadir
	Drift (velocidad angular máxima)	$0,3^\circ/\text{s}$

Tabla 4.2.1: Requisitos del sistema ADCS del Zahori

#### 4.2.2. Seleccionar el tipo de control de actitud

Una vez que los requisitos del sistema ADCS están fijos, se utilizan para seleccionar el sistema de control de actitud que se va a utilizar para controlar el satélite.

Los principales tipos de sistemas de control de actitud son los siguientes:

- **Gradiente gravitatorio:** Es un sistema pasivo de control de actitud en el que se utilizan las propiedades inerciales de la nave para mantenerla orientada hacia la Tierra. Se basa en el hecho de que un objeto alargado tiende a orientar su eje más largo en dirección a la Tierra. Es más efectivo cuánto más cerca está de la Tierra (la fuerza gravitatoria aumenta) y se utiliza en naves simples que están en órbitas bajas. Sólo puede controlar dos ejes, dejando la orientación respecto al vector de Nadir sin restringir. Orden de magnitud de la precisión típica:  $\pm 5^\circ$ .
- **Gradiente gravitatorio más rueda de momento:** Para controlar este tercer eje libre, se utiliza una rueda de momento (motor eléctrico que hace girar una rueda a una velocidad constante, proporcionando a la nave un momento angular fijo. Por la conservación del momento angular la nave gira, de manera proporcional) a lo largo de este eje. Normalmente presenta velocidades de giro altas (6000 rpm). Orden de magnitud de la precisión típica:  $\pm 5^\circ$ .
- **Magnético pasivo:** Utiliza imanes permanentes a bordo de la nave para forzar un alineamiento con el campo magnético de la Tierra. Es más efectivo en órbitas quasi-ecuatoriales en las que la orientación del campo es prácticamente constante para un vehículo apuntando a la Tierra. Orden de magnitud de la precisión típica:  $\pm 5^\circ$ .
- **Estabilización por giro puro (*Pure spin stabilization*):** Es una técnica de control pasiva en la que la nave entera gira de tal forma que su momento angular permanece aproximadamente fijo en el espacio inercial. El movimiento de giro es estable si el vehículo gira respecto del eje de mayor momento de inercia. Sus desventajas son que las propiedades de masa del vehículo deben estar muy controladas para asegurar la deseada dirección y magnitud de giro y que para realizar reorientaciones se necesita más combustible que un vehículo sin momento angular neto. Orden de magnitud de la precisión típica:  $\pm 0,1-1^\circ$ .

- **Estabilización por giro dual (*Dual-spin stabilization*):** Variación de la anterior en la que la nave tiene dos secciones girando a diferentes velocidades respecto del mismo eje. Una sección, el rotor, gira más rápido para proporcionar momento angular; y la otra, el estator, gira más despacio para mantener uno de sus ejes apuntando a la Tierra o al Sol. Puede ser estable respecto a un eje de menor momento de inercia, pero añade complejidad a la nave. Orden de magnitud de la precisión típica:  $\pm 0,1\text{-}1^\circ$ .
- **Rueda de momento (1 eje):** Se utiliza únicamente una rueda de momento para dar una cantidad de momento angular fijo al satélite, normalmente con el objetivo de estabilizarlo en un único eje para poder realizar un apuntamiento vertical local. Orden de magnitud de la precisión típica:  $\pm 0,1\text{-}1^\circ$ .
- **Thrusters:** La nave cuenta con pequeños motores que van dando impulsos cortos para contrarrestar el giro de la nave. Orden de magnitud de la precisión típica:  $\pm 0,1\text{-}1^\circ$ .
- **Ruedas de reacción (3 ejes):** Se utilizan ruedas de reacción, que se diferencian en las de momento en que la rueda empieza trabajando a un número de revoluciones nominal de cero, y el motor va acelerándola para contrarrestar los torques externos y mantener la nave con momento angular nulo. Orden de magnitud de la precisión típica:  $\pm 0,001\text{-}1^\circ$ .
- **Giróscopos de control de momento:** Consisten en un rotor que va girando y uno o más giróscopos que inclinan el momento angular del rotor. Según va inclinándose el rotor, se genera un cambio en el momento angular que provoca un torque giroscópico que rota la nave (o anula los torques externos). Es más eficiente que las ruedas de reacción y no varía la velocidad de giro del rotor. Orden de magnitud de la precisión típica:  $\pm 0,001\text{-}1^\circ$ .

Debido a los altos requisitos de precisión, para el Zahori se seleccionaron ruedas de reacción.

#### 4.2.3. Cuantificar las perturbaciones internas y externas del entorno

Hay 4 tipos de torques que son relevantes para órbitas LEO: gradiente gravitatorio, torque de campo magnético, presión de la radiación solar y torque aerodinámico. Estos torques pueden variar de acuerdo a la orientación de la nave, las propiedades básicas o la simetría del diseño, debiéndose cuantificar para el peor escenario posible.

Los torques son de dos tipos: cílicos y seculares. Los torques cílicos varían de manera sinusoidal a lo largo de la órbita, teniendo una variación neta nula al final de la misma. Los torques seculares tienen una variación neta con el tiempo y no se anulan tras el paso de una órbita.

##### Gradiente gravitatorio

Es el torque provocado en el satélite por el campo gravitatorio al no tener su eje de mayor momento de inercia alineado con el centro de la Tierra. Es un torque constante para vehículos orientados hacia la Tierra y cíclico para vehículos orientados inercialmente. Para el Zahori es un torque constante. Está influenciado principalmente por la inercia del vehículo y por la altitud orbital.

El torque gravitatorio viene definido por la siguiente expresión:

$$T_g = \frac{3\mu}{2R^3} (I_Z - I_Y) \cdot \sin(2\theta), \quad (4.2.1)$$

donde:

- $T_g$  es el torque gravitatorio máximo.
- $\mu$  es la constante gravitatoria terrestre y vale  $3,986 \cdot 10^{14} m^3/s^2$ .
- $R$  es el radio orbital en metros. Si la órbita no es circular es la distancia al centro de la Tierra, y el peor caso es que su valor sea mínimo.
- $\theta$  Es la máxima desviación respecto del eje Z, siendo este la local vertical.
- $I_Z, I_Y$  son los momentos de inercia respecto a los ejes Z e Y (o X si es más pequeño que  $I_Y$ ) en  $kg/m^2$ .

Para el caso del Zahori,  $R$  es  $6,77 \cdot 10^6$  m,  $I_Z$  es  $32,8 \text{ kg}/m^2$ ,  $I_Y$  es  $18,9 \text{ kg}/m^2$  (se selecciona porque  $I_X$  es  $24,7 \text{ kg}/m^2$ ), y por ser el peor caso, se selecciona el ángulo máximo marcado por el requisito,  $\theta = 20^\circ$ , resultando en un torque gravitatorio de  $1,2 \cdot 10^{-5} Nm$ .

### Presión de radiación solar

Torque causado en el vehículo por el impacto en sus superficies de la radiación solar. Es un torque cíclico en vehículos orientados hacia la Tierra y constante para vehículos orientados hacia el Sol, siendo cíclico para el Zahori. Está principalmente influenciado por la geometría de la nave, las localizaciones de su centro de gravedad y su centro de presión solar; y por la reflectividad de las superficies, siendo mayor cuanto más reflectiva sea y menor cuanto más transparente sea. Si es absorbente, es un punto intermedio entre estas dos.

El torque de radiación solar para el peor caso (nada de absorción) es:

$$T_{sp} = \frac{F_S}{c} A_S (1 + q) \cos(i) \cdot (c_{ps} - c_g), \quad (4.2.2)$$

donde:

- $F_S$  es la constante solar:  $1362 \text{ W}/m^2$ .
- $c$  es la velocidad de la luz:  $3 \cdot 10^8 m/s$ .
- $A_S$  es el área de la superficie en la que incide la radiación solar.
- $q$  es la reflectividad, que va de 0 a 1.
- $i$  es el ángulo de incidencia solar.
- $c_{ps}$  es la localización del centro de la presión solar.
- $c_g$  es la localización del centro de gravedad.

Para el caso del Zahori,  $A_S$  es  $5,96 \text{ m}^2$ ,  $q$  se supone 0,5;  $i$  es 0 por ser el peor caso y se asume la máxima distancia posible entre centros, que resulta en 6 mm. El torque resultante es de  $2,4 \cdot 10^7 Nm$ .

### Torque de campo magnético

Es el torque que provoca en el vehículo la acción del campo magnético terrestre. Es un torque siempre cíclico por las características de este campo. Está influido principalmente por la altitud orbital, la inclinación de la órbita y el dipolo magnético residual que haya en la nave.

El torque de campo magnético se define como:

$$T_m = D \cdot B = D \cdot \frac{M}{R^3} (1 + 3\sin^2(\theta_m))^{0,5}, \quad (4.2.3)$$

donde:

- D es el dipolo residual de la nave en  $Am^2$ . Depende del tamaño del vehículo, del sistema de compensación y suele estar en el rango de 0,1 a 20  $Am^2$ .
- B es el módulo del campo magnético terrestre en la posición de la nave.
- M es el momento magnético de la Tierra ( $7,96 \cdot 10^{15} Tm^3$ ).
- R es el radio orbital o el punto de menor distancia a la Tierra si la órbita no es circular (peor caso).
- $\theta_m$  es la latitud magnética, ángulo respecto a la línea de polos del campo magnético, que está  $11,5^\circ$  inclinada. Para el peor caso se puede sustituir por la inclinación menos estos  $11,5^\circ$ .

Para el caso del Zahori,  $\theta_m$  resulta  $23,5^\circ$ , R es  $6,77 \cdot 10^6$  m y para una nave pequeña se estima un D de  $1 Am^2$ , resultando en un torque magnético de  $3,1 \cdot 10^{-5} Nm$ .

### Torque aerodinámico

Es el torque causado por la interacción con la atmósfera terrestre y sólo es relevante en órbitas de muy baja altitud. Es un torque constante. Está influido por la altitud orbital, la geometría de la nave y la posición relativa del centro de gravedad y el centro de presiones atmosférico.

El torque aerodinámico se define como:

$$T_a = \frac{1}{2} \rho v^2 A C_D (c_{pa} - c_g), \quad (4.2.4)$$

donde:

- $\rho$  es la densidad atmosférica en  $kg/m^3$ .
- v es la velocidad de la nave.
- A es el área de la superficie normal al vector velocidad.
- $C_D$  es el coeficiente de resistencia.
- $c_{pa}$  es la localización del centro de presiones de la nave.
- $c_g$  es la localización del centro de gravedad de la nave.

Para el Zahori,  $\rho$  a 400 km de altura está cerca de  $10^{-11} kg/m^3$ , v es  $7,67 \cdot 10^3 m/s$ , A es  $0,42 m^2$ ,  $C_D$  es típicamente 2-2,5 y la posición relativa entre centros se asume 6 mm; resultando en un torque aerodinámico de  $1,7 \cdot 10^{-6} Nm$ .

### Resumen para el Zahori

En la Tabla 4.2.2 se ve un resumen del valor y tipo de los torques para el caso del Zahori, con el objetivo de tener una idea del orden de magnitud de estos torques para un satélite pequeño en órbita LEO.

Torque	Tipo	Valor [Nm]
Gradiente gravitatorio	Constante	$1,2 \cdot 10^{-5}$
Campo magnético	Cíclico	$3,1 \cdot 10^{-5}$
Presión de radiación solar	Cíclico	$2,4 \cdot 10^{-7}$
Torque aerodinámico	Constante	$1,7 \cdot 10^{-6}$

Tabla 4.2.2: Peor caso de los torques sufridos por el Zahori

### Torques internos

Son torques generados en la propia nave. En general, se tiene control sobre estas perturbaciones internas, por lo que el objetivo es reducirlas hasta que el torque interno total sea mucho menor que los torques externos y se pueda despreciar. Algunos ejemplos de perturbaciones internas son:

- Incertidumbre del centro de gravedad: 1-3 cm.
- Desalineamiento de los actuadores: 0,1º-0,5º.
- Diferencia entre el impulso teórico y el real: ±5 %.
- Maquinaria rotatoria: bombas, grabadoras...
- Movimientos internos de fluidos (normalmente líquidos).
- Dinámicas de cuerpos flexibles: paneles solares, antenas...
- Choques térmicos en apéndices flexibles.

#### 4.2.4. Seleccionar y medir el hardware ADCS

Una vez conocidos los torques a contrarrestar y el tipo de control de actitud deseado, toca seleccionar los componentes individuales del subsistema ADCS.

##### Actuadores

Empezando por los actuadores, el objetivo es seleccionar los equipos que te permitan contrarrestar los torques externos que va a sufrir el vehículo.

##### Ruedas de reacción

En el caso de las ruedas de reacción (se utilizará el Zahori como ejemplo), es importante distinguir entre las perturbaciones cílicas y seculares que se deben contrarrestar. También en el rendimiento de las ruedas se debe distinguir entre la capacidad de almacenamiento de momento angular y la capacidad de control del torque ejercido.

Los torques seculares y la capacidad máxima de almacenamiento determinarán la frecuencia con la que el momento angular debe ser amortiguado. La capacidad de control de torque necesaria estará determinada por los requisitos de giro o por la necesidad de control por encima de un torque de perturbación pico con el objetivo de mantener la precisión de apuntado.

El torque de una rueda de reacción ( $T_{RW}$ ) debe ser capaz de compensar el peor caso del torque de perturbaciones esperado ( $T_D$ ) multiplicado por un margen de seguridad  $C_{MF}$ , normalmente de

valor 1,1-1,5, debiéndose cumplir la expresión:

$$T_{RW} \geq T_D C_{MF}. \quad (4.2.5)$$

Para el caso del Zahori, el torque máximo secular era el magnético ( $3,1 \cdot 10^{-5} Nm$ ) y se ha seleccionado un factor de 1,2; resultando en que el torque de la rueda de reacción debe ser mayor a  $3,7 \cdot 10^{-5} Nm$ .

La rueda de reacción también debe dar un torque de giro para el reapuntado del satélite en el caso de que se haya desviado en un cierto tiempo. La mitad del tiempo de maniobra estará acelerando y la otra mitad estará decelerando. La expresión del torque de reapuntamiento se obtiene de:

$$\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \frac{T}{I_X} \left( \frac{t}{2} \right)^2 \rightarrow T = \frac{4\theta I_X}{t^2}, \quad (4.2.6)$$

donde

- $\theta$  es el ángulo que debe corregir, que será la mayor desviación posible respecto del eje Z (peor caso).
- $I_X$  es la inercia respecto del eje X (o Y si es mayor)
- t es el tiempo máximo de maniobra.

Para el caso del Zahori,  $\theta$  son los  $20^\circ$  de desviación máxima,  $I_X$  es  $24,7 \text{ kgm}^2$  y t vale 4 minutos, resultando en un torque mínimo de  $6 \cdot 10^{-4} Nm$ .

El torque mínimo necesario lo determinará el máximo de los dos, que para el caso del Zahori será la maniobra de giro, siendo el torque mínimo necesario  $6 \cdot 10^{-4} Nm$ .

En cuanto a la capacidad de almacenamiento, un enfoque para estimarla es integrar el peor caso de los torques de perturbación a lo largo de una órbita completa. Para el caso del gradiente gravitatorio, la perturbación máxima se acumula en 1/4 de órbita, siendo la expresión simplificada para la perturbación sinusoidal:

$$H = \frac{2}{\pi} T_D \frac{P}{4}, \quad (4.2.7)$$

mientras que para una perturbación secular se aproxima tras una órbita como:

$$H = T_g P, \quad (4.2.8)$$

siendo P el período orbital.

Para el caso del Zahori, H para el caso de la perturbación gravitatoria es  $0,064 Nms$  y para el torque magnético es  $0,027 Nms$ , siendo la capacidad de almacenamiento necesaria el mayor de los dos, que en este caso será  $0,064 Nms$ .

Con estos requisitos, la rueda de reacción elegida para el Zahori es la rueda de reacción Hamster, con las siguientes características:

$H_{max}$	0,1 Nms a 15000 rpm
Dimensiones	100x100x150 mm
Masa	0,315 kg
Potencia requerida	1 W
Torque de reacción	30 mNm

Tabla 4.2.3: Características de la rueda de reacción Hamster

El tiempo de saturación es el tiempo mínimo en el que se puede alcanzar la capacidad de almacenamiento de una rueda de reacción. Para calcularlo, en primer lugar se calcula el momento de inercia de la rueda de reacción:

$$I_{RW} = \frac{H_{max}}{\omega_{max}}, \quad (4.2.9)$$

que para el Zahori resulta en  $6,37 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2$ . A partir de ahí, se calcula el tiempo de saturación, sólo para perturbaciones constantes:

$$t_{sat} = \frac{I_{RW}}{T_D} \omega_{max}, \quad (4.2.10)$$

que en el caso del Zahori para el torque aerodinámico resulta en 981 minutos y para el torque gravitatorio resulta en 145 minutos.

Sin embargo, el torque gravitatorio depende del ángulo de desviación respecto del eje Z, siendo nulo si es  $0^\circ$ . Como se pretende que la mayoría de tiempo de la misión se esté a  $0^\circ$  (sólo el 2% del tiempo se estará a  $20^\circ$ ), el tiempo de saturación será:

$$t_{sat} = 981 \cdot 0,98 + 145 * 0,02 = 964 \text{ min} \quad (4.2.11)$$

En conclusión, para las ruedas de reacción se elegirán 3 ruedas Hamster, una para cada eje y una redundante, con una masa de 0,945 kg por rueda, cumpliendo el presupuesto de masa de 3 kg para el sistema ADCS.

### Mini thruster

Se puede añadir a las ruedas de reacción un pequeño motor con el objetivo de maniobrar la nave en ángulos grandes (en los modos de Acquisition y en emergencias), amortiguar un momento angular adicional al de las ruedas de reacción y ser un sistema redundante del control de actitud.

El thruster debe al menos ser capaz de igualar la máxima perturbación externa según la expresión:

$$F = \frac{T}{L}, \quad (4.2.12)$$

siendo L el brazo del punto de aplicación del motor y T el torque máximo.

Para el Zahori el torque máximo es  $3,1 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}$  y el brazo es de 0,3 m, resultando en una fuerza de 0,1 mN, que es un valor muy pequeño para cualquier motor del mercado.

Para reorientar el satélite, la fuerza necesaria será:

$$F = \frac{T}{L} = \frac{I_Z \ddot{\theta}}{L} = \frac{I_Z \dot{\theta}}{\Delta t \cdot L}, \quad (4.2.13)$$

donde  $\dot{\theta}$  será la velocidad angular máxima,  $\Delta t$  el tiempo de aplicación del impulso e  $I_Z$  el momento de inercia máximo.

Para el Zahori, la velocidad angular máxima será de  $0,3^\circ/\text{s}$ , el tiempo de quemado se asume de 3 segundos y el momento de inercia máximo es  $I_Z$  con  $32,8 \text{ kgm}^2$ , resultando en una fuerza mínima requerida de 0,19 N, un valor pequeño pero factible de encontrar en motores.

Finalmente, se debe estimar la fuerza para amortiguar el momento de la rueda de reacción, que se calcula como:

$$F = \frac{H}{L \Delta t}, \quad (4.2.14)$$

siendo  $H$  la capacidad máxima de almacenamiento de la rueda,  $L$  el brazo y  $\Delta t$  el tiempo de quemado.

Para el Zahori,  $H$  es 0,1 Nms, el tiempo de aplicación se asume de 5 s y el brazo de 0,3 m, resultando en un empuje requerido de 0,07 N.

Así, el motor elegido debe tener como mínimo un empuje máximo del mayor de estos tres valores, es decir, para el Zahori debe de ser al menos 0,19 N. Se eligieron los motores EADS Astrium, colocando 6 motores, dos por eje en caras opuestas, con las siguientes características:

Propulsante	Hidracina
Empuje en vacío	0,5 N
$I_{sp}$ en vacío	227,3 s
Presión de cámara	22 bar
Longitud	113 mm
Diámetro de tobera	4,8 mm
Masa	0,195 kg

Tabla 4.2.4: Características de los motores EADS Astrium

Para estimar la masa de propulsante, se asumió para la misión Zahori una misión de 2 años, con impulsos de amortiguamiento de las ruedas de reacción cada 964 minutos (1091 pulsos) y 4 pulsos de reorientación por mes (96 pulsos), siendo el impulso total requerido:

$$I_T = F t_p = 1091 \cdot 5 \cdot 0,07 + 96 \cdot 3 \cdot 0,19 = 436,6 \text{Ns}, \quad (4.2.15)$$

y a partir del impulso específico se obtiene la masa de propulsante:

$$m_p = \frac{I_T}{g_0 I_{sp}} = 0,2 \text{kg} \quad (4.2.16)$$

## Sensores

Una vez seleccionados los actuadores, se pasa a estudiar los sensores. La selección de sensores está influenciada por los siguientes parámetros:

- Orientación requerida de la nave y su precisión.
- Redundancia.
- Tolerancia al fallo.
- Requisitos de field of view.
- Data rates disponibles.

Para que se pueda conocer la orientación en los 3 ejes en todo momento se necesitan al menos dos medidas externas de vectores.

Hay varios tipos de sensores según el cuerpo al que apunten:

- **Sun sensor:** Son detectores de luz visible que miden uno o dos ángulos entre la base en la que se montan y la radiación solar incidente. Son populares, precisos y confiables, pero requieren campos de visión claros y tiene que haber repuestos para cuando el satélite entre en eclipse.

- **Star sensor:** Son el sensor más común para misiones que requieren alta precisión. Identifican los patrones de estrellas que están observando y lo comparan respecto de una referencia inercial para inferir la posición. Son sensores más caros y son susceptibles de ser cegados por el Sol, la Luna u otros cuerpos.
- **Horizon sensor:** Son dispositivos infrarrojos que detectan el contraste entre el frío del espacio profundo y la radiación infrarroja emitida por la atmósfera terrestre. Son especialmente útiles para misiones que necesiten apuntado a la Tierra, ya que da información directa sobre la posición relativa del satélite respecto de la Tierra.
- **Magnetómetros:** Son sensores simples, confiables y ligeros que miden la dirección y magnitud del campo magnético terrestre. Comparando estos resultados con el campo conocido, se obtiene la posición del sensor. Su precisión no es tan buena como los sensores de estrellas o de horizonte, pero consumen muy poca potencia.
- **Receptores GPS:** Son dispositivos de navegación de alta precisión que calculan la diferencia de señales entre antenas separadas de la nave. Potencialmente ofrecen bajo coste y precio en órbitas LEO y se utilizan actualmente en aplicaciones de baja precisión como repuesto.
- **Giróscopos:** Sensores iniciales que miden la velocidad o el ángulo de rotación respecto de una referencia inicial, pero sin conocimiento de una referencia externa absoluta. Se utilizan para aumentar la precisión de otros sensores combinados con una referencia inercial proporcionada por otros sensores (Sol, estrellas...).

La precisión, masa y potencia requeridas típicamente por los 4 primeros tipos de sensores se pueden ver en la siguiente tabla:

Sensor	Precisión típica [º]	Masa [kg]	Potencia [W]
Sol	0,005-3	0,5-7	0-3
Star	0,0003-0,01	3-7	5-20
Horizon	0,1-1	2-5	5-10
Magnetómetro	0,5-3	0,6-1,2	¡1

Tabla 4.2.5: Características de los principales tipos de sensores

Para el Zahori, se seleccionaron el sensor Sun y el Star como sensores principales, y un sensor Horizon para repuesto, y para los modos Acquisition y emergencias.

Las características de los 3 sensores elegidos se ven en las siguientes tablas:

Dimensiones	80x100x180 mm
Masa	1,1 kg
Potencia	2,5 W
Rango de voltaje	9-18 VDC
Precisión (x,y / z)	0,005º / 0,0338º
Probabilidad Acquisition	¡99,7%
Frecuencia de actualización	4-8 Hz
Field of View	14ºx14º
Tiempo de la primera Acquisition	max 900 ms

Tabla 4.2.6: Características del sensor Star del Zahori

Precisión	0,0167°
Field of view	100°x50°
Número de píxeles en CCD	1,728
Frecuencia de medición	10 Hz
Potencia consumida	2,5 W
Masa	0,35 kg

Tabla 4.2.7: Características del sensor Sun del Zahori

Precisión	0,2° (3σ)
Rango de operación alrededor de nadir	10°
Field of view de 1 telescopio	20°x14,8°
Field of view de ambos telescopios	120°
Temperatura de operación	45°C
Rango de operación en órbita	-40 a 40 °C
Banda espectral	14-16 μm
Masa	1 kg
Dimensiones	190x120 mm
Potencia consumida	5 W

Tabla 4.2.8: Características del sensor Horizon del Zahori

### Resumen global del Zahori

Los sensores y actuadores elegidos para el Zahori en una primera iteración se pueden ver en la siguiente tabla:

Equipo	Nº	Masa 1 unidad [kg]	Masa total [kg]	Potencia [W]
Ruedas de reacción	3	0,32	0,95	1
Thrusters	6	0,2	1,17	-
Combustible	1	0,2	0,2	-
Star sensor	1	1,1	1,1	2,5
Sun sensor	1	0,35	0,35	2,5
Horizon sensor	1	1	1	5
Total	-	-	4,77	11

Tabla 4.2.9: Resumen de sensores y actuadores elegidos para el Zahori

### 4.2.5. Definir el algoritmo de ADCS

Una vez definidos los sensores y actuadores del sistema ADCS, se deben integrar a través de un algoritmo que permita dar las respuestas adecuadas a los actuadores a partir de las medidas tomadas por los sensores. Este algoritmo es llamado ley de control.

Para crearlo, se parte de las ecuaciones de la dinámica del sólido:

$$\mathbf{T} = \dot{\mathbf{h}}_I = \dot{\mathbf{h}} + \omega \mathbf{x} \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{T}_C + \mathbf{T}_D = \dot{\mathbf{h}} + \omega \mathbf{x} \mathbf{h}, \quad (4.2.17)$$

donde  $\mathbf{T}_C$  es el torque de control,  $\mathbf{T}_D$  es el torque de perturbaciones,  $\mathbf{h}$  el momento angular del sistema y  $\omega$  la velocidad angular. Desarrollando las ecuaciones en los tres ejes y expresando el

momento angular como la suma del del satélite ( $h_S$ ) y el de la rueda de reacción ( $h_W$ ) resulta:

$$T_{Cx} + T_{Dx} = \dot{h}_{Sx} + \dot{h}_{Wx} + (\omega_y h_{Sz} - \omega_z h_{Sy}) + (\omega_y h_{Wz} - \omega_z h_{Wy}), \quad (4.2.18)$$

$$T_{Cy} + T_{Dy} = \dot{h}_{Sy} + \dot{h}_{Wy} + (\omega_z h_{Sx} - \omega_x h_{Sz}) + (\omega_z h_{Wx} - \omega_x h_{Wz}), \quad (4.2.19)$$

$$T_{Cz} + T_{Dz} = \dot{h}_{Sz} + \dot{h}_{Wz} + (\omega_x h_{Sy} - \omega_y h_{Sx}) + (\omega_x h_{Wy} - \omega_y h_{Wx}), \quad (4.2.20)$$

una serie de complicadas ecuaciones no lineales. La teoría analítica de control no proporciona soluciones analíticas exactas, por lo que se deben realizar hipótesis simplificadorias y linealizar las ecuaciones para aplicar técnicas de control. El control de actitud se discutirá más en profundidad en el ??.

Las hipótesis que se aplican son las siguientes:

- Ángulos y velocidades angulares pequeñas:  $\omega_i \approx \dot{\theta}_i$ , siendo  $i$  el eje correspondiente: x,y,z.
- Despreciar términos de segundo orden de la ecuación dinámica:  $\omega_i \omega_j \approx 0$ .
- Los ejes de las ruedas de reacción coinciden con los ejes principales de inercia del satélite.

Esto resulta en las ecuaciones linealizadas de la dinámica:

$$T_{Cx} + T_{Dx} = \dot{h}_{Sx} + \dot{h}_{Wx}, \quad (4.2.21)$$

$$T_{Cy} + T_{Dy} = \dot{h}_{Sy} + \dot{h}_{Wy}, \quad (4.2.22)$$

$$T_{Cz} + T_{Dz} = \dot{h}_{Sz} + \dot{h}_{Wz}, \quad (4.2.23)$$

que son ecuaciones desacopladas y de la misma forma para todos los ejes. A partir de ahora se considera un único eje para escribir una única vez las ecuaciones (es aplicable todo para los 3 ejes) y se sustituye el momento angular del satélite por el producto del momento de inercia y la velocidad angular, resultando:

$$T_C + T_D = I_S \ddot{\theta} + \dot{h}_W. \quad (4.2.24)$$

Si se asume el ángulo de referencia como cero, entonces el ángulo medido  $\theta$  es directamente el error en la orientación.

Las leyes de control expresan el torque de control a dar en función del ángulo de error  $\theta$  y de unos coeficientes llamados ganancias. Las dos leyes más sencillas son:

- **Torque de control proporcional:** El torque de control es directamente proporcional al error en el ángulo:

$$T_C = -K\theta, \quad (4.2.25)$$

siendo  $K$  la ganancia proporcional.

- **Torque de control proporcional derivativo:** Añade amortiguamiento al control:

$$T_C = -K_1 \dot{\theta} - K_2 \theta, \quad (4.2.26)$$

siendo  $K_1$  la ganancia derivativa y  $K_2$  la ganancia proporcional. Las ruedas de reacción proporcionan esta ley de control.

Aplicando la ley de control proporcional derivativa, la ecuación dinámica de la rueda de reacción se puede escribir como:

$$T_C = -\dot{h}_W = -K_1 \dot{\theta} - K_2 \theta = -K(\tau \dot{\theta} + \theta), \quad (4.2.27)$$

siendo  $\tau$  una constante tempoal y  $K$  la ganancia, dependiendo ambas del diseño electromagnético de las ruedas de reacción.

Reemplazando esta expresión en la ecuación del movimiento resulta:

$$T_D = I_S \ddot{\theta} + K\tau \dot{\theta} + K\theta, \quad (4.2.28)$$

que aplicando la transformada de Laplace para pasarla al dominio de la frecuencia resulta:

$$L(T_D) = [I_S s^2 + K\tau s + K]L(\theta). \quad (4.2.29)$$

Esto representa un sistema de bucle cerrado (ver Figura 10.1.14) cuya función de transferencia de segundo orden es:

$$G(s) = \frac{L(\theta)}{L(T_D)} = \frac{1}{I_S s^2 + K\tau s + K} = \frac{1}{I_S} \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (4.2.30)$$

donde  $\omega_n$  es la frecuencia natural no amortiguada del sistema (frecuencia de oscilación del sistema de bucle cerrado sin amortiguamiento) y  $\xi$  el coeficiente de amortiguamiento (medida de la resistencia del sistema a cambiar el output del mismo). Estos parámetros se definen como:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{I_S}} \quad (4.2.31)$$

$$\xi = \frac{\tau}{2} \sqrt{\frac{K}{I_S}} \quad (4.2.32)$$

La respuesta del sistema a una función de magnitud  $T_D$  se evalúa utilizando la transformada de Laplace:

$$L(T_D) = \frac{T_D}{s} \rightarrow L(\theta) = \frac{T_D}{I_S} \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (4.2.33)$$

Con  $0 < \xi < 1$  y  $\omega_n > 1$ , la transformada inversa de Laplace de  $L(\theta)$  devuelve el valor de  $\theta$ :

$$\theta(t) = \frac{T_D}{I_S \omega_n^2} \left[ 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left( \cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t) \right) \right], \quad (4.2.34)$$

con:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (4.2.35)$$

La respuesta del sistema es de la forma:

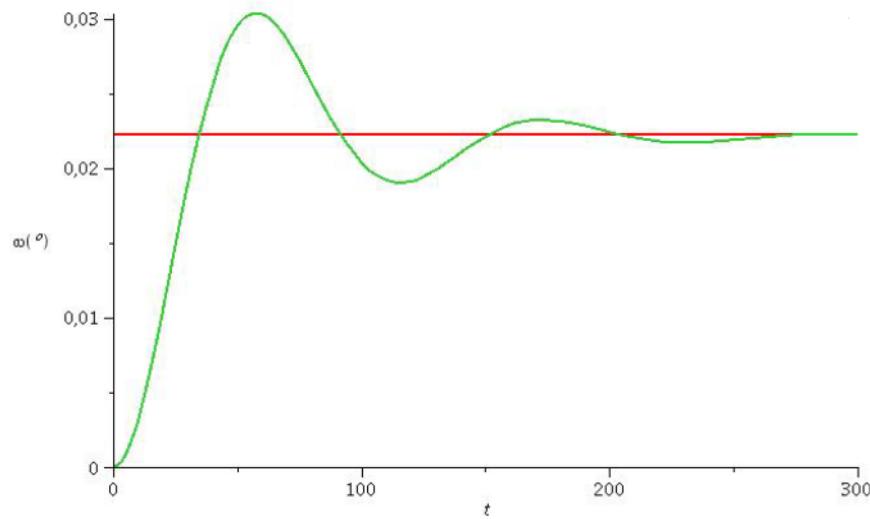


Figura 4.2.2: Respuesta del sistema de ley de control proporcional derivativa

El objetivo es encontrar los valores de  $\omega_n$  y  $\xi$  que permitan cumplir el requisito de error máximo del sistema. En el caso del Zahori, el error máximo debe ser menor que  $0,034^\circ$ .

El tiempo de pico (tiempo que tarda en llegar a un máximo local) se calcula con la expresión:

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \rightarrow t_p = k \frac{\pi}{\omega_d}, \quad (4.2.36)$$

siendo  $k$  un número entero: 1,2,3... Se puede ver en la Figura 4.2.2 que el máximo absoluto está en el primer máximo local, por lo que sustituyendo en la expresión de  $\theta$  se obtiene el error máximo, del que se puede sacar el valor de la frecuencia natural mínima necesaria:

$$\theta_{max} = \frac{T_D}{\omega_n^2 I_S} \left( 1 + e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \right) \rightarrow \omega_n^2 = \frac{T_D}{\theta_{max} I_S} \left( 1 + e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \right) \quad (4.2.37)$$

Para el caso del Zahori, se asume un coeficiente de amortiguamiento de 0,5; el momento de inercia se coge  $I_Y$  ( $I_Y$  es  $18,9 \text{ kg/m}^2$ , y es el valor mínimo de los 3. En la Figura 4.2.3 se ve que es el peor caso y que los ejes con mayor momento de inercia lo cumplen si el de menor valor lo cumple), para  $T_D$  se coge la perturbación máxima ( $3,1 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}$ , el torque magnético) y se supone un amortiguamiento de 0,5; resultando en una frecuencia natural de  $0,057 \text{ rad/s}$ .

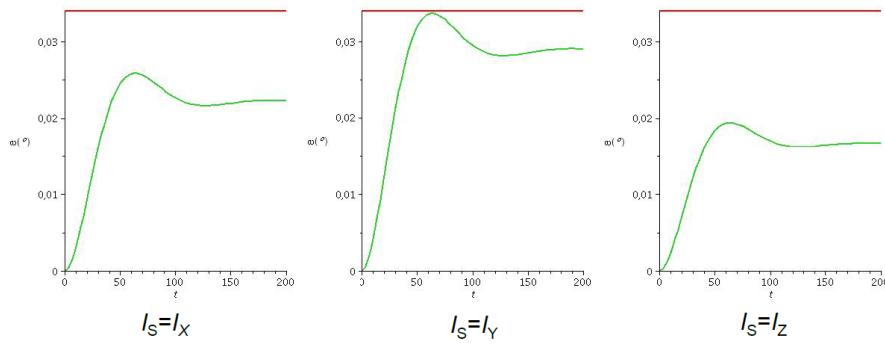


Figura 4.2.3: Respuesta del sistema del Zahori para los 3 ejes dimensionando para  $I_Y$

Finalmente, con estos valores de  $\xi$  y  $\omega$ , de las expresiones Equation 4.2.31, y Equation 4.2.32 se obtienen los valores de  $K$  y  $\tau$ , que se deben dar al fabricante de la rueda de reacción para que la modifique y obtenga una rueda de reacción que cumpla los requisitos. Para el Zahori, se obtiene una  $K$  de 0,0614 Nm/rad y un  $\tau$  de 17,5 s.

#### 4.2.6. Iterar y documentar el proceso

Finalmente, el proceso seguido se documenta y se empieza con una nueva iteración, ya que es muy posible que en la primera iteración el subsistema ADCS elegido no cumpla los requisitos impuestos o que afecte a otros subsistemas de tal forma que estos no puedan cumplir los suyos. Por tanto, los datos de la iteración se pasan a los otros subsistemas y se revisan y discuten con otros ingenieros de los demás subsistemas, llegando a una serie de conclusiones que se aplicarán en la siguiente iteración. Este proceso se repite continuamente, afinando cada vez más el diseño hasta cumplir todos los requisitos de la misión.

Por ejemplo, en el caso del Zahori, se obtiene una masa del sistema ADCS total de 4,77 kg, superior a los 3 kg de presupuesto de masa que se tenían originalmente, por lo que se debe seguir iterando hasta cumplirlo. También hay una potencia total de 11 W, que se debe poner en común con los ingenieros de sistemas y de potencia eléctrica para comprobar si son plausibles de obtener o si se deben bajar.



# Capítulo 5

## Attitude Kinematics

### 5.1. Sistema de referencia y vectores

Los Sistema de referencia están dados por tres vectores unitarios perpendiculares entre sí (ortogonales):

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} \quad (5.1.1)$$

Las condiciones de ortonormalidad son:

- Ortogonalidad:  $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1 = 0$
- Vectores unitarios:  $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_3 = 1$

#### Producto vectorial

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (5.1.2)$$

#### Matriz antisimétrica

La notación  $[\cdot]^\times$  define una matriz antisimétrica de  $3 \times 3$ , cuyos 3 elementos son componentes de una matriz de  $3 \times 1$ :

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{a}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.1.3)$$

Propiedades:

$$\mathbf{a}^\times \mathbf{a} = 0 \quad (5.1.4)$$

$$\mathbf{a}^\times \mathbf{b} = -\mathbf{b}^\times \mathbf{a} \quad (5.1.5)$$

$$(\mathbf{a}^\times)^T = -\mathbf{a}^\times \quad (5.1.6)$$

## 5.2. Matriz de rotación

### Matrices de rotación elementales

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \end{bmatrix} \quad (5.2.1)$$

$$\mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \quad (5.2.2)$$

$$\mathbf{C}_z = \begin{bmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.3)$$

### Propiedades matrices rotación

Ortogonalidad y ortonormalidad:

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^T = 1 = \mathbf{C}^T\mathbf{C} \quad (5.2.4)$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T \quad (5.2.5)$$

$$|Det(\mathbf{C})| = 1 \quad (5.2.6)$$

NO Comutativo (importa el orden de las rotaciones):

$$\mathbf{C}_A \mathbf{C}_B \neq \mathbf{C}_B \mathbf{C}_A \quad (5.2.7)$$

Se puede usar unos ejes intermedios para pasar de unos ejes a otros:

$$\mathbf{C}_{AB} = \mathbf{C}_{AC} \mathbf{C}_{CB} \quad (5.2.8)$$

### 5.2.1. Matriz de cosenos directores / Directional Cosine Matrix (DCM)

Las cosenos directores especifican la orientación de un conjunto de ejes cartesianos en relación con otro conjunto, ambos con un origen común.

En la Figura 5.2.1 se observan 2 conjuntos de ejes con mismo origen. Los ejes  $\vec{b}$  se pueden relacionar con los ejes  $\vec{a}$  mediante ángulos  $\alpha_{ij}$ .

Siendo  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , para pasar de unos ejes a otros la relación es:

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} \quad (5.2.9)$$

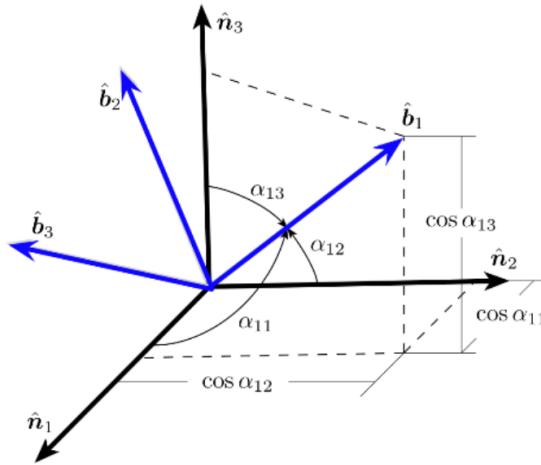


Figura 5.2.1: Cosenos directores.

usando el producto escalar, se obtiene  $C_{ij}$ :

$$C_{ij} \equiv \vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = \cos \alpha_{ij} \quad (5.2.10)$$

$$C_{ij} = C_{ji}^T \quad (5.2.11)$$

por tanto, la matriz de cosenos directores es:

$$\mathbf{C}_{AB} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_3 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_3 \\ \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{bmatrix} \quad (5.2.12)$$

### 5.2.2. Ángulos de Euler

Los ángulos de Euler corresponden a una transformación ortogonal mediante tres rotaciones sucesivas realizadas en una secuencia específica. Dos Sistemas de referencia ortonormales independientes pueden estar relacionados por una secuencia de tres rotaciones. En resumen, cualquier rotación puede ser descrita con solo tres parámetros (usando tres ángulos).

#### Secuencia de rotación de ángulos de Euler 3-1-3

$$\mathbf{C}_{tot}(\mu, \gamma, \psi) = \mathbf{C}_3(\mu)\mathbf{C}_1(\gamma)\mathbf{C}_3(\psi) = \begin{bmatrix} c_\mu c_\psi - s_\mu s_\psi c_\gamma & c_\mu s_\psi + s_\mu c_\psi c_\gamma & s_\mu s_\gamma \\ -s_\mu c_\psi - c_\mu s_\psi c_\gamma & -s_\mu s_\psi + c_\mu c_\psi c_\gamma & c_\mu s_\gamma \\ s_\psi s_\gamma & -c_\psi s_\gamma & c_\gamma \end{bmatrix} \quad (5.2.13)$$

Los ángulos de Euler son:

$$\mu = \tan^{-1}\left(\frac{C_{13}}{C_{23}}\right); \gamma = \cos^{-1}(C_{33}); \psi = -\tan^{-1}\left(\frac{C_{31}}{C_{32}}\right) \quad (5.2.14)$$

Las rotaciones realizadas son:

- Rotación alrededor eje 3:  $\mathbf{C}_3(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Rotación alrededor eje 1:  $\mathbf{C}_1(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$
- Rotación alrededor eje 3:  $\mathbf{C}_3(\mu) = \begin{bmatrix} \cos \mu & \sin \mu & 0 \\ -\sin \mu & \cos \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**SINGULARIDAD:**  $\gamma = 0$  o  $\pi$ . Los ángulos  $\mu$  y  $\psi$  no están determinados de manera única.

### Secuencia de rotación de ángulos de Euler 3-2-1

$$\mathbf{C}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \mathbf{C}_1(\theta_1)\mathbf{C}_2(\theta_2)\mathbf{C}_3(\theta_3) = \begin{bmatrix} c_2c_3 & c_2s_3 & -s_2 \\ s_1s_2c_3 - c_1s_3 & s_1s_2s_3 + c_1c_3 & s_1c_2 \\ c_1s_2c_3 + s_1s_3 & c_1s_2s_3 - s_1c_3 & c_1c_2 \end{bmatrix} \quad (5.2.15)$$

Los ángulos de Euler son:

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{C_{23}}{C_{33}}\right); \theta_2 = -\sin^{-1}(C_{13}); \theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{C_{12}}{C_{11}}\right) \quad (5.2.16)$$

Si la rotación es infinitesimal ( $|\theta_1|, |\theta_2|, |\theta_3| \ll 1$ ):

$$c_i \cong 1, s_i \cong \theta_i, \theta_i \theta_j \cong 0 \quad (5.2.17)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 1 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 1 \end{bmatrix} = 1 - \theta^\times; \theta = [\theta_1 \theta_2 \theta_3] \quad (5.2.18)$$

**SINGULARIDAD:**  $\theta_2 = \pi/2$ . En este caso  $\theta_1$  y  $\theta_3$  están asociados con la misma rotación.

$$\mathbf{C}(\theta_1, \frac{\pi}{2}, \theta_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \sin(\theta_1 - \theta_3) & \cos(\theta_1 - \theta_3) & 0 \\ \cos(\theta_1 - \theta_3) & -\sin(\theta_1 - \theta_3) & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2.19)$$

### Secuencia de rotación de ángulos de Euler 3-2-3

$$\mathbf{C}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \mathbf{C}_3(\theta_1)\mathbf{C}_2(\theta_2)\mathbf{C}_3(\theta_3) = \begin{bmatrix} c_1c_2c_3 - s_1s_3 & c_1c_2s_3 + s_1c_3 & -c_1s_2 \\ -s_1c_2c_3 - c_1s_3 & -s_1c_2s_3 + c_1c_3 & s_1s_2 \\ s_2c_3 & s_2s_3 & c_2 \end{bmatrix} \quad (5.2.20)$$

Los ángulos de Euler son:

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{C_{23}}{C_{13}}\right); \theta_2 = -\sin^{-1}(C_{33}); \theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{C_{32}}{C_{31}}\right) \quad (5.2.21)$$

## Singularidades en rotaciones de Euler

Cada conjunto de ángulos de Euler tiene una singularidad donde dos ángulos no están definidos de manera única.

Siempre es el segundo ángulo el que define la singularidad:

- 2 ejes: 2º ángulo es 0 o  $\pi$  (3-1-3:  $\gamma = 0$  o  $\pi$ )
- 3 ejes: 2º ángulo es  $+\pi/2$  o  $-\pi/2$  (3-2-1:  $\theta_2 = \pi/2$ )

### 5.2.3. Rotación de Euler mediante eje propio (eigenaxis)

Teorema: La mayoría de los desplazamientos generales de un cuerpo rígido con un punto fijo es una rotación alrededor de un eje fijo que pasa por ese punto.

En la Figura 5.2.2 se observan 2 conjuntos de ejes con mismo origen. El eje  $\vec{\Phi}$  es el eje propio sobre el cual se pueden relacionar los ejes  $\vec{b}$  con los ejes  $\vec{n}$ .

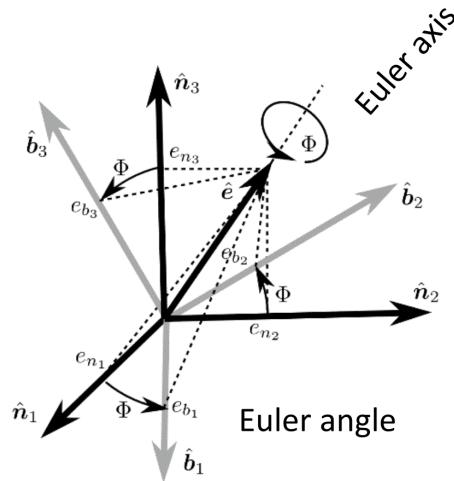


Figura 5.2.2: Teorema Rotación mediante eje propio (eigenaxis).

El eje  $\vec{e}$  es el eje propio con un valor propio 1, el ángulo de rotación  $\Phi$  se llama ángulo de Euler.

$$\vec{e} = [e_1, e_2, e_3] \quad (5.2.22)$$

$$\vec{e}^T \vec{e} = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 \equiv 1 \quad (5.2.23)$$

Para definir el eje propio se necesitan 4 parámetros:  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  y  $\Phi$ . El eje propio se define:

$$\mathbf{C}(\vec{e}, \phi) = \cos \phi \mathbf{1} + (1 - \cos \phi) \vec{e} \vec{e}^T - \sin \phi \mathbf{e}^\times \quad (5.2.24)$$

$$\vec{e} \vec{e}^T = \begin{bmatrix} e_1 e_1 & e_1 e_2 & e_1 e_3 \\ e_2 e_1 & e_2 e_2 & e_2 e_3 \\ e_3 e_1 & e_3 e_2 & e_3 e_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2.25)$$

## Conocida matriz de cosenos directores

Conocida la matriz de cosenos directores  $\mathbf{C}$ , se puede determinar  $\vec{e}$  y  $\phi$ :

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \sin \phi} \begin{bmatrix} C_{23} - C_{32} \\ C_{31} - C_{13} \\ C_{12} - C_{21} \end{bmatrix} \quad \text{if } \phi \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots \quad (5.2.26)$$

$$\cos \phi = \frac{1}{2} [C_{11} + C_{22} + C_{33} - 1] \quad (5.2.27)$$

### 5.2.4. Parámetros de Euler / Cuaternión (Quaternion)

Basándonos en el teorema de rotación del eje propio de Euler, se pueden construir otro conjunto de cuatro parámetros (Parámetros de Euler o Cuaternión).

Un Cuaternión es una matriz de 4x1 (parte vector  $q_{1:3}$  y parte escalar  $q_4$ ):

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vec{q} \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (5.2.28)$$

Los parámetros del Cuaternión se definen:

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \sin(\phi/2) \\ e_2 \sin(\phi/2) \\ e_3 \sin(\phi/2) \end{bmatrix} = \vec{e} \sin \frac{\phi}{2}, \quad q_4 = \cos \frac{\phi}{2} \quad (5.2.29)$$

Propiedades del Cuaternión:

- Módulo:  $|\mathbf{q}| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} = 1$
- Conjugado:  $\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$
- Inversa:  $\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{|q|}$
- Multiplicación  $\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2 = \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \vec{q}_2 + \eta_2 \vec{q}_1 + \vec{q}_1 \times \vec{q}_2 \\ \eta_1 \eta_2 - \vec{q}_1^T \cdot \vec{q}_2 \end{bmatrix}$

La matriz de cosenos directores (DCM) se puede expresar con los Cuaterniones:

$$\mathbf{C}(\vec{q}, q_4) = (q_4^2 - \vec{q}^T \vec{q}) \mathbf{1} + 2\vec{q}\vec{q}^T - 2q_4 \mathbf{q}^\times = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \\ 2(q_2 q_1 - q_3 q_4) & 1 - 2(q_3^2 + q_1^2) & 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) \\ 2(q_3 q_1 + q_2 q_4) & 2(q_3 q_2 - q_1 q_4) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix} \quad (5.2.30)$$

Los Cuaterniones se pueden expresar con la DCM:

$$q_4 = \pm \frac{1}{2} (1 + C_{11} + C_{22} + C_{33})^{\frac{1}{2}}, \quad \vec{q} = \frac{1}{4q_4} \begin{bmatrix} C_{23} - C_{32} \\ C_{31} - C_{13} \\ C_{12} - C_{21} \end{bmatrix} \quad (5.2.31)$$

## 5.3. Velocidad angular

### 5.3.1. Teorema del transporte

$$\left( \frac{d}{dt} \vec{r} \right)_{inertial} = \left( \frac{d}{dt} \vec{r} \right)_{body} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (5.3.1)$$

### 5.3.2. Aceleración angular

$$\vec{v} = \left( \dot{\vec{r}} \right)_i = \left( \dot{\vec{r}} \right)_b + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (5.3.2)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left( \ddot{\vec{v}} \right)_i = \left( \ddot{\vec{v}} \right)_b + \vec{\omega} \times \vec{v} = \left( \ddot{\vec{r}} \right)_b + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (5.3.3)$$

- Aceleración:  $\left( \ddot{\vec{r}} \right)_b$
- Aceleración angular:  $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$
- Aceleración de Coriolis:  $2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$
- Aceleración Centrípeta:  $\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$

## 5.4. Ecuación diferencial cinemática

### DCM

Ecuación diferencial cinemática para Matriz de cosenos directores (DCM):

$$\dot{\mathbf{C}} + \boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{C} = 0 \quad (5.4.1)$$

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{b}_1 + \omega_2 \vec{b}_2 + \omega_3 \vec{b}_3 \quad (5.4.2)$$

- Ventajas: Lineal, No singularidades.
- Desventajas: 9 ecuaciones diferenciales acopladas (redundancia).

### Ángulos de Euler

Ecuación diferencial cinemática para Rotación de Euler 3-2-1:

$$\vec{\omega} \equiv \vec{\omega}^{B/A} = \omega_1 \vec{b}_1 + \omega_2 \vec{b}_2 + \omega_3 \vec{b}_3 = \dot{\theta}_1 \vec{b}_1 + \dot{\theta}_2 \vec{a}_2'' + \dot{\theta}_3 \vec{a}_3' \quad (5.4.3)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{C}_1(\theta_1) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{C}_1(\theta_1)\mathbf{C}_2(\theta_2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta_2 \\ 0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (5.4.4)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\theta_2} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\sin\theta_2 \\ 0 & \cos\theta_1\cos\theta_2 & -\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (5.4.5)$$

Singularidad: ( $\theta_2 = \pi/2$ ).

Ecuación diferencial cinemática para Rotación de Euler 3-1-3:

$$\vec{\omega} \equiv \vec{\omega}^{B/A} = \omega_1 \vec{b}_1 + \omega_2 \vec{b}_2 + \omega_3 \vec{b}_3 = \dot{\mu} \vec{b}_3 + \dot{\gamma} \vec{a}'_1 + \dot{\psi} \vec{a}'_3 \quad (5.4.6)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} + \mathbf{C}_3(\mu) \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{C}_3(\mu)\mathbf{C}_1(\gamma) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\gamma\sin\mu & \cos\mu & 0 \\ \sin\gamma\cos\mu & -\sin\mu & 0 \\ \cos\gamma & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} \quad (5.4.7)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin\gamma} \begin{bmatrix} \sin\mu & \cos\mu & 0 \\ \cos\mu\sin\gamma & -\sin\mu\sin\gamma & 0 \\ -\sin\mu\cos\gamma & -\cos\mu\cos\gamma & \sin\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (5.4.8)$$

Singularidad: ( $\gamma = 0$ ).

## Cuaternión

Ecuación diferencial cinemática para Cuaternión:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\Omega\mathbf{q}, \quad \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (5.4.9)$$

Se puede reescribir:

$$\dot{q}_{1:3} = \frac{1}{2}(q_4 \vec{\omega} - \vec{\omega} \times \vec{q}_{1:3}), \quad \dot{q}_4 = -\frac{1}{2} \vec{\omega}^T \vec{q}_{1:3} \quad (5.4.10)$$

## Eje propio de Euler (eigenaxis)

Ecuación diferencial cinemática para Eje propio de Euler:

$$\dot{\phi} = \vec{e}^T \vec{\omega}, \quad \dot{\vec{e}} = \frac{1}{2} \left[ \vec{e}^\times - \cot \frac{\phi}{2} \vec{e}^\times \vec{e}^\times \right] \vec{\omega} \quad (5.4.11)$$

# Capítulo 6

## Attitude determination

### 6.1. Determinación de actitud

#### 6.1.1. Idea básica

##### Objetivo de la determinación de atitud

Determinar la actitud (u orientación o dirección de apuntamiento) del sistema de referencia fijo de la nave espacial con respecto al sistema de referencia conocido (normalmente inercial).

La determinación de la actitud requiere dos o más sensores de actitud como:

- Magnetómetros
- Sensores solares
- Sensores de Tierra
- Giroscopios
- GPS

##### Método de determinación de la actitud

Normalmente, se necesita uno o varios instrumentos montados en el satélite detectando referencias externas (el Sol, la Tierra, las estrellas...) para así medir la dirección hacia estos objetos en coordenadas del satélite.

Se conocen también las direcciones hacia estos objetos en algún sistema de coordenadas conocido (por ejemplo, sistema inercial centrado en la Tierra) y se desea encontrar la orientación de las coordenadas del satélite en relación a este marco conocido.

Encontrar la matriz de rotación  $C_{bi}$  que nos permite transformar unas direcciones en otras.

## Implementación de la determinación de la actitud

La actitud queda descrita por 3 parámetros, lo que significa que necesitamos al menos 2 vectores tanto en el cuerpo como en el marco de referencia (por ejemplo, vector solar y terrestre o 2 vectores estelares).

Con un solo vector se puede obtener el módulo de rotación de la orientación de la nave sobre la dirección a la estrella, pero no la actitud concreta. Para una actitud concreta necesitamos conocer 2 o más vectores.

### Medición

La determinación de la actitud es un proceso de derivación de la estimación de nave espacial a partir de datos medidos.

La determinación exacta no es posible (las mediciones siempre tienen algún error).

Para determinar la actitud actual de la nave espacial es necesario utilizar sensores. Es posible tener mediciones absolutas (sensor) o relativas (giroscopio).

Los sensores reales miden ángulos con algunos errores (3 posiciones angulares y 3 velocidades angulares).

### Sobredeterminación e infradeterminación

El vector unitario sólo tiene dos parámetros debido a la restricción del vector unitario, por eso, al necesitar 3 escalares para determinar la actitud se requiere más de 1 y menos de 2 medidas vectoriales.

Por lo tanto, la mayor parte de la determinación de la actitud está sobredeterminada ( $\geq 2$  vectores) o infradeterminada (si sólo hay 1 vector).

Se suele buscar utilizar una sobredeterminación.

#### 6.1.2. Enfoque estático

Enfoque de determinación estática que depende de mediciones realizadas en el mismo momento (o lo suficientemente cerca en el tiempo como para que pueda ignorarse el movimiento del satélite entre las mediciones).

El requisito es que en cada momento se disponga de información suficiente para calcular completamente la actitud (no es necesaria una estimación previa de la actitud).

#### 6.1.3. Enfoque filtrado

Enfoque de determinación por filtrado que utiliza el conocimiento del movimiento del satélite para acumular información (memoria) de mediciones anteriores.

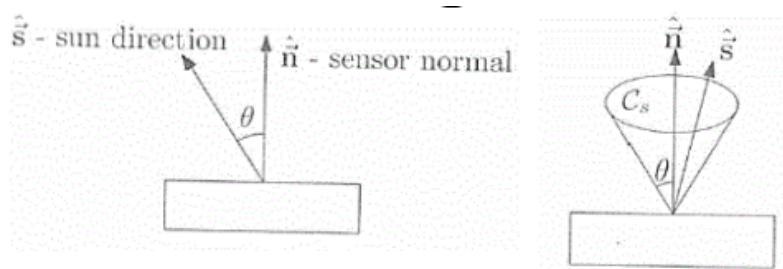
El enfoque filtrado puede proporcionar una estimación de actitud más precisa que el que el enfoque estático (filtro de Kalman).

De ahora en adelante nos concentraremos en la determinación estática de la actitud (sin tiempo).

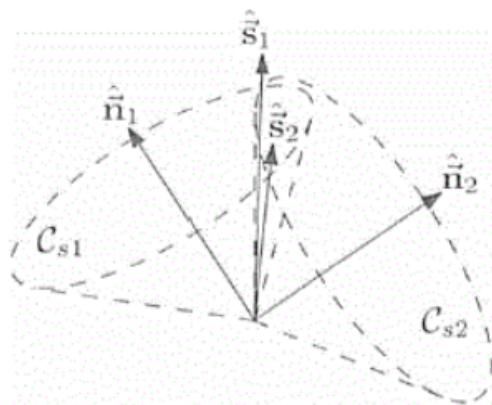
## 6.2. Determinación en un solo eje

Utiliza sensores que proporcionan una medición de la longitud de arco entre el sensor de la nave espacial y un punto conocido (por ejemplo, el Sol o el nadir). Requiere al menos dos mediciones independientes y un esquema para elegir entre la solución verdadera y la falsa.

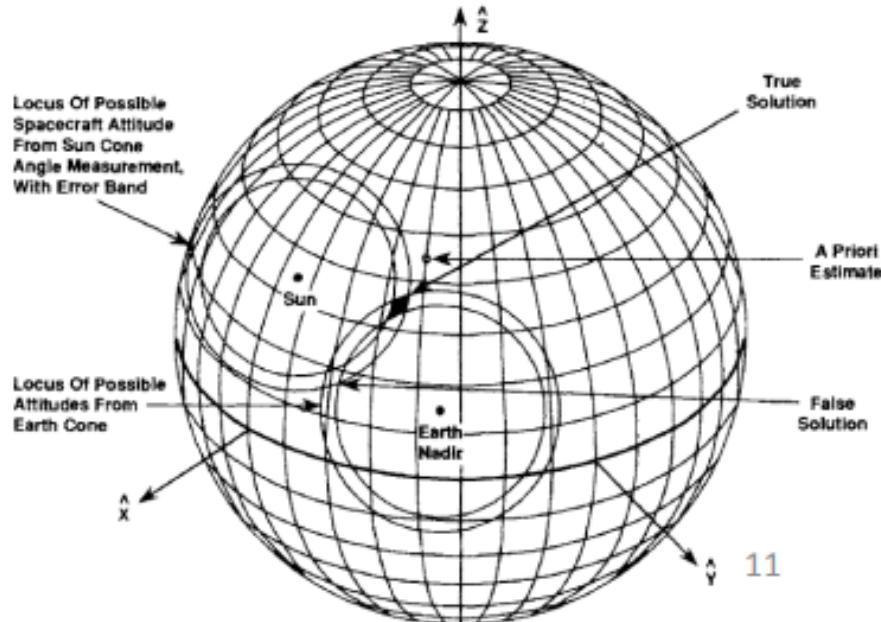
El sensor solar analógico proporciona el ángulo  $\Theta$  del Vector solar respecto a la normal del sensor (cono donde debe situarse el vector solar):



Las combinaciones de pares de sensores solares analógicos proporcionan información adicional. Un par de sensores solares analógicos con normal  $n_1$  y  $n_2$  proporcionan un par de conos en los que debe estar el vector solar lo que a su vez proporciona un par de posibles vectores solares  $s_1$  y  $s_2$ :



Es necesaria una medición adicional para determinar el verdadero vector solar. Esta puede ser un tercer sensor solar o el conocimiento de la posición orbital de la nave y de la Tierra.



### 6.3. Determinación en tres ejes

Determina la actitud concreta. Necesita 2 vectores medidos en el marco de referencia de la nave y conocidos en el marco de referencia inercial. Generalmente la información disponible es redundante y se incluye una estimación de mínimos cuadrados de la actitud en los cálculos.

#### 6.3.1. TRIAD Method

**CAE UN EJERCICIO DE ESTO EN EL EXAMEN SEGURO**

Necesita conocer 2 vectores ( $\vec{v}$  y  $\vec{u}$ ) no paralelos normalizados en los dos ejes de referencia.

$$\vec{u}_b = \mathbf{C}_{bi} \vec{u}_i, \quad \vec{v}_b = \mathbf{C}_{bi} \vec{v}_i$$

**Pasos:**

- Construir el triad en ejes cuerpo:

$$\begin{aligned}\vec{t}_{1b} &= \vec{u}_b \\ \vec{t}_{2b} &= \frac{\vec{u}_b \times \vec{v}_b}{|\vec{u}_b \times \vec{v}_b|} \\ \vec{t}_{3b} &= \vec{t}_{1b} \times \vec{t}_{2b}\end{aligned}$$

- Construir el triad en ejes referencia de forma similar:

$$\begin{aligned}\vec{t}_{1i} &= \vec{u}_i \\ \vec{t}_{2i} &= \frac{\vec{u}_i \times \vec{v}_i}{|\vec{u}_i \times \vec{v}_i|} \\ \vec{t}_{3i} &= \vec{t}_{1i} \times \vec{t}_{2i}\end{aligned}$$

- Encontrar la matriz de rotación única que conecta los dos triads:

$$\mathbf{C}_{bi} = [\vec{t}_{1b} \ \vec{t}_{2b} \ \vec{t}_{3b}] [\vec{t}_{1i} \ \vec{t}_{2i} \ \vec{t}_{3i}]^T = \sum_{j=1}^3 \vec{t}_{jb} \vec{t}_{ji}^T$$

### 6.3.2. Problema de Whaba

Dado  $\vec{v}_{ki}$  and  $\vec{v}_{kb}$  queremos encontrar  $\mathbf{C}_{bi}$  bajo la condición  $\mathbf{C}_{bi}^T \mathbf{C}_{bi} = 1$ . Obviamente  $N > 2$  por lo que está sobredeterminado.

Queremos encontrar la solución para la matriz de rotación que minimice el error total.

$$\begin{aligned}\text{Minimizar} \quad J(\mathbf{C}_{bi}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N w_k \vec{r}_k^T \vec{r} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N w_k (\vec{v}_{kb} - \mathbf{C}_{bi} \vec{v}_{ki})^T (\vec{v}_{kb} - \mathbf{C}_{bi} \vec{v}_{ki})\end{aligned}$$

Tal que  $\mathbf{C}_{bi}^T \mathbf{C}_{bi} = 1$  donde  $w_k > 0$  son pesos escalares.

La función de pérdida es la suma de los errores al cuadrado de cada vector de medición. Se utilizan ponderaciones ( $w_k$ ) para dar más importancia a determinadas mediciones. Si las mediciones están libres de errores  $J = 0$ , si hay algún error  $J > 0$ . Cuanto menor sea  $J$ , mejor será la aproximación de  $\mathbf{C}_{bi}$ .

Hay dos métodos para resolver el problema de minimización de Whaba:

#### Q-Method

MUY COMPLICADO, se puede intentar tener un programa de Matlab que lo resuelva

$\mathbf{K}$  es una matriz 4x4 dada por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \vec{\mathbf{k}}_{12} \\ \vec{\mathbf{k}}_{12}^T & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad \mathbf{K}_{11} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \vec{\mathbf{k}}_{12} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \quad k_{22} \in \mathbb{R}$$

donde

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^N w_k (\vec{v}_{ki} \vec{v}_{kb}^T) \quad (\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3})$$

$$k_{22} = \text{tr}[\mathbf{B}]$$

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{B} + \mathbf{B}^T - k_{22}\mathbf{1} \quad (\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{3 \times 3})$$

$$\mathbf{k}_{12} = [(B_{23} - B_{32}) \quad (B_{31} - B_{13}) \quad (B_{12} - B_{21})]^T$$

Tras construir la matriz  $\mathbf{K}$  se busca su mayor autovalor y su vector y se procede de la siguiente forma:

$$\lambda_{max} ; \vec{q}_{max} = [q_1, q_2, q_3, q_4]$$

Llamamos  $\vec{q}$  al vector formado por las 3 primeras componentes del autovector utilizado y obtenemos la matriz de rotación con la siguiente fórmula:

$$\mathbf{C}(\vec{q}, q_4) = (q_4^2 - \vec{q}^T \vec{q})\mathbf{1} + 2\vec{q}\vec{q}^T - 2q_4\mathbf{q}^\times, \quad (\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3 \times 3})$$

## QUEST Method

**MUY COMPLICADO**, se puede intentar tener un programa de Matlab que lo resuelva

Paso 1:

Encontrar el autovalor óptimo  $\lambda_{max}$  utilizando la iteración Newton-Raphson partiendo del valor inicial estimado  $\sum_{k=1}^N w_k$ .

Una buena aproximación del autovalor óptimo se puede obtener mediante:

$$\lambda_{máx} \approx \sum_{k=1}^N w_k$$

Tomando la suposición de que el error  $\mathbf{J}$  es pequeño.

Paso 2:

Resolver el problema de autovector  $\mathbf{K}\mathbf{q} = \lambda_{max}\mathbf{q}$  para encontrar el cuaternión óptimo  $\mathbf{q}$ .

Primero se define el vector de Gibbs como  $\vec{\mathbf{p}} = \frac{\vec{\mathbf{q}}}{q_4} = \vec{\mathbf{e}} \tan \frac{\phi}{2}$

El problema de autovectores se reescribe como:

$$\vec{\mathbf{p}} = [(\lambda_{máx} + k_{22})\mathbf{1} - \mathbf{S}]^{-1} \vec{\mathbf{k}}_{12} \quad with \quad \mathbf{S} = \mathbf{B} + \mathbf{B}^T$$

Se resuelve la ecuación invirtiendo la matriz:

$$[(\lambda_{máx} + k_{22})\mathbf{1} - \mathbf{S}] \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{k}}_{12}$$

Tras encontrar  $\vec{\mathbf{p}}$  se calcula el cuaternión óptimo mediante:

$$\mathbf{q} = \frac{1}{\sqrt{1 + \vec{\mathbf{p}}^T \vec{\mathbf{p}}}} \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{p}} \\ 1 \end{bmatrix}$$



# Capítulo 7

## Dinámica de sólido rígido

### 7.1. Dinámica de partículas

Toda esta sección son recordatorios de las ecuaciones de Newton.

Definiciones básicas:

- **Partícula:** Objeto cuyo tamaño o forma no afecta al problema
- **Masa puntual:** Cuerpo cuyas dimensiones son pequeñas en comparación con las distancias características

La **Segunda Ley de Newton** define la **inercia** ( $\vec{p} = m \dot{\vec{r}}$ ) de una partícula como:

$$m \frac{d^2}{dt^2}x = f_x \quad m \frac{d^2}{dt^2}y = f_y \quad m \frac{d^2}{dt^2}z = f_z \quad (7.1.1)$$

Esta ecuación sólo es válida si la fuerza e inercia están definidas en un sistema **inercial**(el sistema **NO** sufre aceleración o rotación).

El **Momento Angular** alrededor de un punto **O** y su derivada temporal son:

$$\vec{h}_O = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (7.1.2)$$

$$\dot{\vec{h}}_O = m \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + m \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{f} \quad (7.1.3)$$

Se define el **torque** alrededor del punto O como  $\dot{\vec{h}}_O = \vec{t}_O$  por lo que el torque queda como  $\vec{t}_O = \vec{r} \times \vec{f}$  (básicamente fuerza por brazo al punto de aplicación).

## 7.2. Dinámica de sólido rígido

Un sólido sin deformación. Su momento angular se describe por:

$$\overrightarrow{h_{O^*}} = \int_V \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}} dm = \int_V \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm \quad (7.2.1)$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular respecto al sistema de referencia.

**Momento de inercia alrededor de  $O^*$**  (Memorizar esta matriz, cae en problemas y teoría):

$$\mathbf{J} = \int_V \begin{bmatrix} (\rho_y^2 + \rho_z^2) & -\rho_x \rho_y & -\rho_x \rho_z \\ -\rho_x \rho_y & (\rho_x^2 + \rho_z^2) & -\rho_y \rho_z \\ -\rho_x \rho_z & -\rho_y \rho_z & (\rho_x^2 + \rho_y^2) \end{bmatrix} \sigma(\rho_x, \rho_y, \rho_z) dV \quad (7.2.2)$$

Esta también es importante:

$$h_{O^*} = J\omega \quad (7.2.3)$$

Cuando el punto  $O^*$  coincide con el centro de masas la matriz  $\mathbf{J}$  se llama **I**.

Para cambiar de sistema de referencia se utiliza una de las siguientes ecuaciones:

$$J_1 = C_{21}^T J_2 C_{21} \quad \text{o} \quad J_2 = C_{21} J_1 C_{21}^T \quad (7.2.4)$$

Cuando una matriz de inercia tiene elementos sólo en la diagonal, estos elementos se llaman **principales momentos de inercia**.

Las propiedades de las matrices de inercia son:

- Definibles respecto a cualquier sistema de coordenadas fijo al cuerpo
- El sistema de referencia tiene origen en el centro de masas
- Son **reales y simétricas, definidas positivas** (por lo que los **los autovalores son reales y positivos**).
- Son constantes

En las matrices de inercia, los **autovectores** son las **direcciones principales de inercia**. Cuando un cuerpo rota alrededor de un eje principal solo existe un componente no nulo (el de ese eje).

**Energía de un sólido rígido** en ejes principales

$$T_r = \frac{1}{2} \omega^T I \omega \quad T_t = \frac{1}{2} m v^2 \quad T = T_t + T_r \quad (7.2.5)$$

## 7.3. Ecuación de Euler

**IMPORTANTE:** La matriz de inercia para un cuerpo que rota en un sistema inercial **NO** es constante.

$$\frac{dh_c}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = T_c \quad (7.3.1)$$

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = \frac{dI}{dt}\omega + I\frac{d\omega}{dt} \quad (7.3.2)$$

por lo que  $\frac{dI}{dt} \neq 0$

Derivando esta ecuación y sabiendo que  $\dot{\vec{h}_c} = \vec{T}_c$  se consigue la **ecuación de Euler**.

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = T_c \quad (7.3.3)$$

Esta ecuación en ejes principales se convierte en las ecuaciones de **dinámica de actitud**:

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = T_1 \quad (7.3.4)$$

$$I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = T_2 \quad (7.3.5)$$

$$I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 = T_3 \quad (7.3.6)$$

Con las ecuaciones de **cinemática de actitud**:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \theta_1 \tan \theta_2 & \cos \theta_1 \tan \theta_2 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 \sec \theta_2 & \cos \theta_1 \sec \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_3 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \quad (7.3.7)$$

## 7.4. Resumen

Ecuaciones de Euler (ecuaciones de dinámica de actitud):

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = T_c \quad (7.4.1)$$

En ejes principales:

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = T_1 \quad (7.4.2)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = T_2 \quad (7.4.3)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 = T_2 \quad (7.4.4)$$

Ecuaciones de cinemática de actitud:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \theta_1 \tan \theta_2 & \cos \theta_1 \tan \theta_2 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 \sec \theta_2 & \cos \theta_1 \sec \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_3 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \quad (7.4.5)$$

La matriz de inercia (es real y simétrica, que puede diagonalizarse en los ejes principales resolviendo los autovalores) y su rotación:

$$J_1 = C_{21}^T J_2 C_{21} \quad \text{o} \quad J_2 = C_{21} J_1 C_{21}^T \quad (7.4.6)$$

Ecuación de energía cinética con rotación:

$$T_r = \frac{1}{2} \omega^T I \omega \quad T_t = \frac{1}{2} m v^2 \quad T = T_t + T_r \quad (7.4.7)$$

# Capítulo 8

## Attitude Dynamics I

### 8.1. Ecuaciones Euler

#### 8.1.1. Ecuación del movimiento en referencia a un cuerpo fijo

El Torque es igual a la tasa de cambio del momento angular en el marco inercial:

$$\mathbf{T} = \frac{d}{dt} \mathbf{h} \quad (8.1.1)$$

Momento angular de un cuerpo rígido en el marco del cuerpo con  $\mathbf{I}$  constante:

$$\mathbf{h} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \quad (8.1.2)$$

Si el marco solidario al cuerpo está rotando con un vector de rotación  $\boldsymbol{\omega}$ , entonces para cualquier vector  $\mathbf{v}$ , la derivada temporal  $\frac{d}{dt}\mathbf{v}$  en el marco inercial está dada por:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v})_i = \frac{d}{dt}(\mathbf{v})_b + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (8.1.3)$$

Aplicando la ley de momento angular:

$$\mathbf{T} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) \quad (8.1.4)$$

En el marco de rotación la matriz de inercia es constante, por tanto, queda:

$$\mathbf{T} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \quad (8.1.5)$$

De esta forma, las ecuaciones de Euler describen la dinámica de actitud de un cuerpo rígido en el marco del cuerpo.

### 8.1.2. Ecuaciones de Euler en ejes principales

Siguiendo con lo anterior, la ecuación rotacional de Euler del movimiento de un cuerpo rígido viene dada por:

$$\mathbf{T} = \mathbf{I}\dot{\omega} + \omega \times \mathbf{I}\omega \quad (8.1.6)$$

Donde la matriz de inercia más simple en el marco de ejes principales es la siguiente:

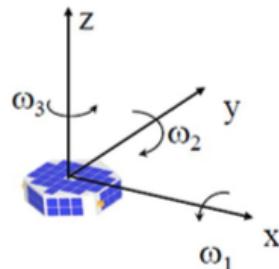
$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

Por tanto, se obtienen las siguientes ecuaciones de Euler, tres ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden acopladas.

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= T_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= T_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 &= T_3 \end{aligned} \quad (8.1.7)$$

De acuerdo a los siguientes ejes del cuerpo:

#### Spacecraft body axes



Existen los siguientes casos particulares:

$$\omega_1 = \omega_2 = 0 \rightarrow I_i\dot{\omega}_i = T_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8.1.8)$$

$$I_1 = I_2 = I_3 \rightarrow I_i\dot{\omega}_i = T_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8.1.9)$$

### 8.2. Ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones de Euler son tres ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden acopladas. El movimiento de los sistemas dinámicos suele describirse mediante ecuaciones diferenciales, por ejemplo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) \quad (8.2.1)$$

Se trata de:

- Ecuación diferencial de primer orden
- x variable de interés (por ejemplo, posición, ángulo, velocidad, etc.)
- f posible función no lineal

**Nota:** Las ecuaciones de Euler tienen esta forma si  $x = \omega = [\omega_1 \omega_2 \omega_3]$ . **Nota:** La ecuación diferencial puede ser de orden superior o tener múltiples variables de interés.

### 8.2.1. Ecuación diferencial lineal

Tienen la siguiente forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda x(t) \quad (8.2.2)$$

Donde,  $\lambda$  es una constante. La solución es la siguiente:

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad (8.2.3)$$

**Estabilidad:** Comprueba el comportamiento de la solución si  $t \rightarrow \text{infinito}$ :

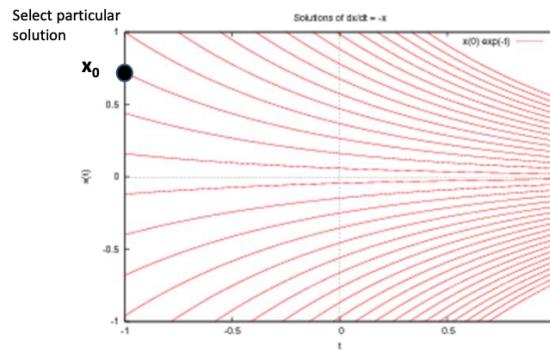
- Estable si  $\lambda < 0$ .
- Inestable si  $\lambda > 0$ .

Una ecuación diferencial de tipo  $\frac{dx(t)}{dt} = \lambda x(t)$ , no determina una solución única, si no que la ecuación diferencial especifica la pendiente  $dx/dt$  de la solución en cada punto. Por tanto, una familia infinita de funciones posibles resuelve una ecuación diferencial.

Para encontrar una solución particular:

- Se necesita valores iniciales  $x_0$  en un momento inicial específico  $t_0$  y  $x(t_0) = x_0$ .
- La ecuación diferencial describe la evolución del sistema en el tiempo desde estado  $x_0$  en el tiempo  $t_0$  a cualquier otro estado.
- Por ejemplo, con la ecuación  $\frac{dx(t)}{dt} = \lambda x(t)$  y condición inicial  $x(t_0) = x_0$ . Se obtiene la solución  $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$

Para la ecuación  $\frac{dx(t)}{dt} = -x(t)$ , se obtiene la siguiente familia de soluciones en función de la condición inicial.



### 8.2.2. Ecuación diferencial de orden superior

Tienen la siguiente forma:

$$\ddot{x} = a\dot{x} + bx \quad (8.2.4)$$

Existen diferentes técnicas para resolver ecuaciones diferenciales de orden superior. El método más simple es: Reducir cualquier ecuación diferencial de orden superior a un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales de primer orden.

1. Definir una nueva variable para cada término de orden superior excepto para el más alto:

$$y_1 = x \quad y_2 = \dot{x} \quad (8.2.5)$$

2. Añadir una nueva ecuación diferencial de primer orden para cada variable:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x} = y_2 & \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= a\dot{x} + bx & \dot{y}_2 &= ay_2 + by_1 \end{aligned} \quad (8.2.6)$$

Diversos sistemas físicos se modelan mediante sistemas de ecuaciones diferenciales (variables acopladas). El movimiento de  $y_1$  afecta al movimiento de  $y_2$  y viceversa.

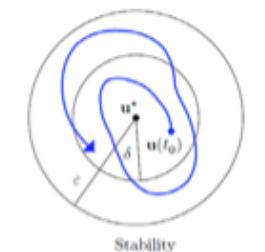
$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= ay_1 + by_2 \\ \dot{y}_2 &= cy_1 + dy_2 \end{aligned} \quad (8.2.7)$$

Se puede escribir el sistema de primer orden mediante uso de matrices:

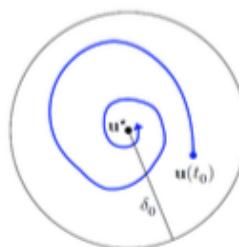
$$\dot{\vec{y}} = \mathbf{A}\vec{y} \rightarrow \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (8.2.8)$$

Las soluciones de una ecuación diferencial pueden ser:

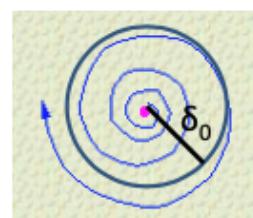
- **Estable:** si las soluciones resultantes de pequeños cambios (perturbaciones) del valor inicial se mantienen próximas a la solución original.
- **Asintótica-mente estables:** si las soluciones resultantes de pequeños cambios (perturbaciones) del valor inicial convergen a la solución original.
- **Inestables:** si las soluciones resultantes de pequeños cambios (perturbaciones) divergen de la solución original.



Stability

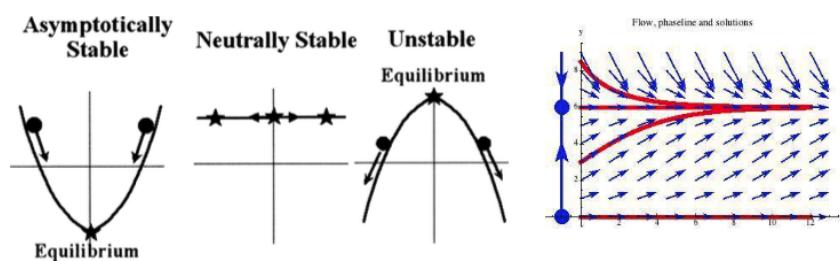


Asymptotic Stability



Representaciones esquemáticas (los ejes representan dos variables de estado cualesquiera) de:

- Estabilidad asintótica alrededor del punto de equilibrio (estrella).
- Estabilidad neutra con un continuo de puntos de equilibrio
- Inestabilidad en torno al equilibrio



- Las **soluciones de equilibrio** corresponden a sistemas físicos que no se mueven.
- Un sistema físico real sólo existe si el equilibrio es estable.
- Los equilibrios inestables no existen en la práctica, porque cualquier pequeña perturbación moverá el sistema lejos del equilibrio inicial.

Con  $\dot{x} = f(x)$ , solución de equilibrio constante significa  $x(t) = x^*$  para todo  $t$ :

- Las derivadas deben desaparecer  $dx/dt = 0$
- Toda solución de equilibrio tiene  $f(x^*) = 0$

$x^*$  es **Punto de equilibrio** de  $\dot{x} = f(x)$  si  $f(x^*) = 0$  (Significa  $dx/dt = f(x^*) = 0$ ).

Los sistemas no lineales pueden tener muchos puntos de equilibrio y los sistemas lineales con una variable sólo tienen un punto de equilibrio.

#### EJEMPLO: estabilidad de la solución.

- Ecuación:  $\frac{dx(t)}{dt} = \lambda x(t)$
- Solución con valores iniciales:  $x(t) = e^{\lambda t}$

Para  $\lambda$  real:

- $\lambda > 0$ : todas las soluciones crecen exponencialmente  $\rightarrow$  inestable.
- $\lambda < 0$ : todas las soluciones decaen exponencialmente  $\rightarrow$  asintóticamente estables.
- $\lambda = 0$ : todas las soluciones permanecen constantes  $\rightarrow$  estable.

Para  $\lambda$  complejos: oscilación  $e^{\lambda t} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos \beta + i \sin \beta)$

- $Re(\lambda) > 0 \rightarrow$  inestable.
- $Re(\lambda) < 0 \rightarrow$  asintóticamente estables.
- $Re(\lambda) = 0 \rightarrow$  estable.

Tanto los sistemas de ecuaciones diferenciales, tanto de orden superior como los lineales, tienen ecuación característica. Se obtiene mediante:

- Ansatz de la solución  $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$  with  $x_0 = \text{constant}$
- Transformada de Laplace:  $x(t) \rightarrow x(\lambda)$ ,  $d/dt(x(t)) \rightarrow \lambda x(\lambda)$ ,  $d^2/dt^2 x(t) \rightarrow \lambda^2 x(\lambda), \dots$

#### EJEMPLO:

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \rightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (8.2.9)$$

Con soluciones,  $x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t}$  y  $x(t) = x_0 e^{\lambda_2 t}$ . Las raíces de la ecuación característica determinan el movimiento de la ecuación diferencial (Las raíces aparecerán en pares complejos conjugados  $\lambda = \alpha + \beta i$ )

Equilibrio y estabilidad:

- Las raíces tienen toda la parte real negativa  $\rightarrow$  estable
- Al menos una raíz tiene parte real positiva  $\rightarrow$  inestable
- Al menos una parte imaginaria distinta de cero  $\rightarrow$  oscilación

### 8.2.3. Ecuación característica de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\vec{y}} = \mathbf{A}\vec{y} \rightarrow \vec{y}(t) = \vec{y}_0 e^{\lambda t} \quad (8.2.10)$$

Para el sistema de ecuación diferencial, se utiliza Ansatz (o transformada de Laplace) para obtener:

$$\lambda\vec{y}_0 = \mathbf{A}\vec{y}_0 \rightarrow (\lambda\mathbf{1} - \mathbf{A})\vec{y}_0 = \vec{0} \quad (8.2.11)$$

La ecuación característica de la matriz viene dada por el siguiente determinante:

$$\det(\lambda\mathbf{1} - \mathbf{A}) = 0 \quad (8.2.12)$$

Los autovalores de la matriz A son raíces de la ecuación característica.

### 8.2.4. Estabilidad de las soluciones de un sistema matricial de ecuaciones diferenciales

- Supongamos que A tiene autovalores  $\lambda_i$  y sus correspondientes vectores propios  $v_i$ .
- Expresar  $y_0$  como combinación lineal  $\vec{y}_0 = \sum_{i=0}^n \alpha_i \vec{v}_i \implies \vec{y}(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \vec{v}_i e^{\lambda_i t}$  y es solución de ecuación diferencial con condición inicial  $y(0) = y_0$ .
- Los autovalores de la matriz A con partes reales positivas dan soluciones de crecimiento exponencial
- Los autovalores con partes reales negativas dan soluciones exponenciales decrecientes
- Los autovalores con componentes reales nulos (sólo imaginarios) dan soluciones osculatorias

Las soluciones son:

- **Estables** si  $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$  para todo autovalor
- **Asintóticamente estable** si  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$  para todo autovalor.
- **Inestable** si  $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$  para todo autovalor.

### 8.2.5. Teorema de estabilidad de los sistemas lineales

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0 \quad \text{and} \quad \dot{\vec{x}} = \mathbf{A} \vec{x} \quad (8.2.13)$$

- **Teorema 1:** La solución de equilibrio  $x^*(t) = 0$  de las ecuaciones anteriores son estables si las raíces de la ecuación característica son distintas y  $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ .
- **Teorema 2:** La solución de equilibrio  $x^*(t) = 0$  de las ecuaciones anteriores son asintóticamente estables si las raíces de la ecuación característica satisfacen  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ . (No es necesario que los autovalores sean distintos)
- **Teorema 3:** La solución de equilibrio  $x^*(t) = 0$  de las ecuaciones anteriores son inestables si cualquiera de las raíces de la ecuación característica satisfacen  $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ . (No es necesario que los autovalores sean distintos)

Si las raíces de la ecuación característica son iguales entonces la solución general es por ejemplo:  $x(t) = x_0 e^{\lambda t} + x_1 t e^{\lambda t}$ .

### 8.2.6. Linealización de un sistema no lineal

- Las soluciones de los sistemas lineales se pueden encontrar explícitamente.
- Pero los problemas reales sólo pueden modelarse mediante sistemas no lineales.
- El comportamiento de un sistema no lineal en torno a un punto de equilibrio es un misterio
- Idea: aproximar un sistema no lineal a uno lineal (punto de equilibrio)
- El comportamiento de las soluciones del sistema lineal será el mismo que el del no lineal (no siempre es cierto)

La ecuación diferencial puede linealizarse localmente en torno a la solución (de equilibrio)  $x^*(t)$  mediante series de Taylor de primer orden que dan lugar a ecuaciones diferenciales lineales con derivadas parciales dadas por la matriz jacobiana.

1. Asumir  $\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = f(\vec{x})$  y expandir la solución como  $\vec{x}(t) = \vec{x}^* + \vec{\varepsilon}(t)$
2. Utilizar Taylor de primer orden:  $\vec{x} = \vec{z} = f(\vec{x}^* + \vec{\varepsilon}(t)) = f(\vec{x}^*) + \frac{df}{d\vec{\varepsilon}}|_{x=x^*} \vec{\varepsilon} + \dots$
3. Linealizar el sistema:  $\vec{\varepsilon}' = \mathbf{A} \vec{\varepsilon} \quad \mathbf{A} = \frac{df}{d\vec{\varepsilon}}|_{x=x^*}$
4. Comprobar la estabilidad del sistema linealizador  $\vec{\varepsilon}(t) = \vec{\varepsilon}_0 e^{\lambda t} \implies \lambda \vec{\varepsilon}_0 = \mathbf{A} \vec{\varepsilon}_0$
5. La solución es:  $\vec{\mathcal{E}}(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \vec{\nu}_i e^{\lambda t}$

#### Resumen linealización:

1. Encontrar el punto de equilibrio de un sistema no lineal.

2. Linealizar: Hallar las derivadas parciales y escribir la matriz jacobiana
3. Hallar los valores propios de la matriz jacobiana
4. Implicar a partir de los autovalores el comportamiento de las soluciones en torno al equilibrio
  - Si los valores propios son negativos o complejos con parte real negativa
    - El punto de equilibrio es el sumidero (las soluciones convergen al punto de equilibrio)
    - Si los valores propios son complejos (las soluciones giran en espiral alrededor del equilibrio)
  - Si los valores propios son positivos o complejos con parte real positiva
    - El punto de equilibrio es fuente (las soluciones se alejan del equilibrio)
    - Si los valores propios son complejos (las soluciones se alejan del equilibrio en espiral)
  - Si los valores propios son números reales con signo contrario
    - El punto de equilibrio es una silla de montar (algunas soluciones se alejan del equilibrio otras se acercan al punto de equilibrio)

## 8.3. Movimiento sin torque (simetría axial)

### 8.3.1. Ecuaciones de Euler sin torque externo

La dinámica libre de cuerpo rígido está definida por las ecuaciones de Euler:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= 0 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 &= 0 \end{aligned} \quad (8.3.1)$$

Se conservan:

- Energía cinética de rotación:

$$T_r = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \quad (8.3.2)$$

- Magnitud del momento angular:

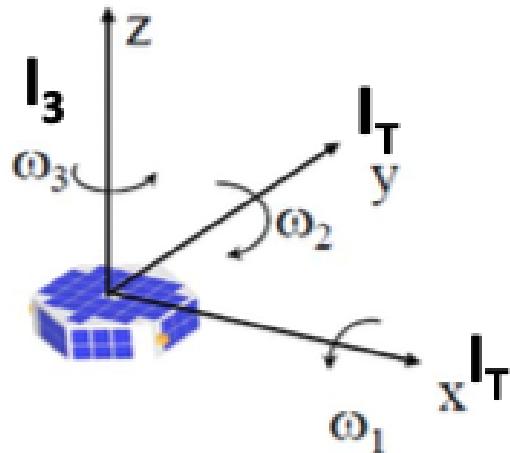
$$h^2 = I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 \quad (8.3.3)$$

Supongamos una nave espacial perfectamente simétrica con momento de inercia transversal:

$$I_T = I_1 = I_2 \quad (8.3.4)$$

El entorno espacial está libre de torque: se supone que no hay torques externas que actúen sobre la nave espacial  $T = 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= I_T\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_T)\omega_2\omega_3 \\ 0 &= I_T\dot{\omega}_2 + (I_T - I_3)\omega_1\omega_3 \\ 0 &= I_3\dot{\omega}_3 \end{aligned} \quad (8.3.5)$$



Las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned}\omega_1(0) &= \omega_{01} \\ \omega_2(0) &= \omega_{02} \\ \omega_3(0) &= \omega_{03}\end{aligned}\tag{8.3.6}$$

Integrando la última ecuación:  $\omega_3(t) = \omega_{03}$ .

La constante de velocidad de rotación de 3 ejes significa componente de velocidad angular alrededor del eje de simetría constante.

Otras dos ecuaciones con  $\Omega = \frac{I_T - I_3}{I_T} \omega_{03}$  ( $\Omega$  = velocidad de giro relativa) son:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 - \Omega\omega_2 &= 0 \\ \dot{\omega}_2 + \Omega\omega_1 &= 0\end{aligned}\tag{8.3.7}$$

Diferenciando la primera ecuación con respecto al tiempo y sustituyendo la segunda por  $\dot{\omega}_2$  se obtiene la Ecuación de oscilación armónica:

$$\ddot{\omega}_1 + \Omega^2\omega_1 = 0\tag{8.3.8}$$

De forma similar para la otra ecuación (combina la ecuación de Euler para los ejes de 1 y 2 cuerpos para formar una única ecuación):

$$\ddot{\omega}_2 + \Omega^2\omega_2 = 0\tag{8.3.9}$$

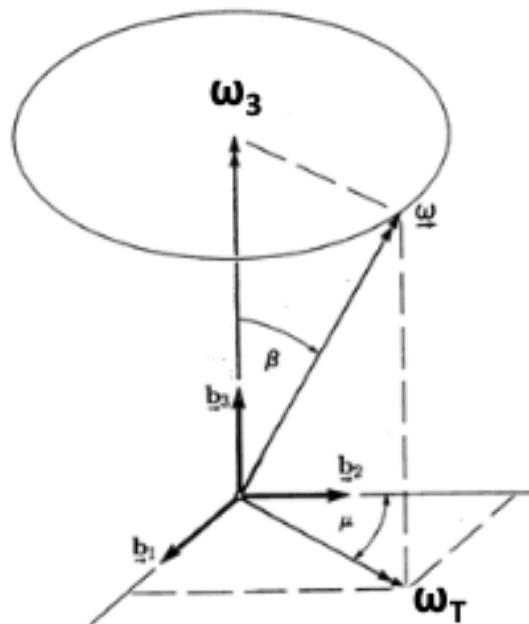
La solución a estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= \omega_{01} \cos \Omega t + \omega_{02} \sin \Omega t \\ \omega_2(t) &= \omega_{02} \cos \Omega t - \omega_{01} \sin \Omega t \\ \omega_3(t) &= \omega_{03}\end{aligned}\tag{8.3.10}$$

Tienen solución oscilatoria para la velocidad angular de 1 y 2 ejes. Se define la velocidad transversal que es constante:

$$\omega_T = (\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t))^{\frac{1}{2}} = (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (8.3.11)$$

- $\omega_3$  constante: rotación en torno al eje de simetría
- $\omega_T$  constante: rotación perpendicular al eje de simetría



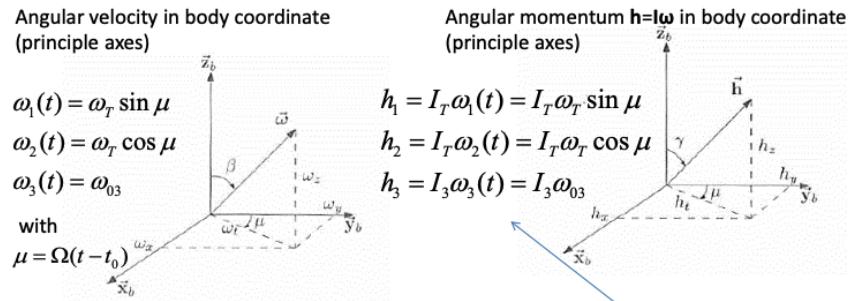
### 8.3.2. Movimiento circular en cuerpo fijo (simétrico axial)

Se puede escribir la solución como:

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= \omega_T \sin[\Omega(t - t_0)] \\ \omega_2(t) &= \omega_T \cos[\Omega(t - t_0)] \\ \omega_3(t) &= \omega_{03}\end{aligned}\quad (8.3.12)$$

El vector  $\omega_T$  gira uniformemente alrededor del eje de simetría del cuerpo con velocidad de giro relativa  $\Omega$ .

### 8.3.3. Movimiento en marco de inercia (simétrico axial)



Para el movimiento libre de torque, el vector momento angular es constante con respecto al marco de inercia:  $T = \frac{d}{dt} h = 0$ , tanto el momento transversal angular como el total.

$$h_T = (h_1^2 + h_2^2)^{\frac{1}{2}} = I_T \omega_T \quad \rightarrow h = (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)^{\frac{1}{2}} = (h_T^2 + h_3^2)^{\frac{1}{2}} \quad (8.3.13)$$

Tanto  $h$ ,  $\omega$  y la simetría del cuerpo los 3 ejes se encuentran siempre en el mismo plano.

#### Ángulo nutación $\gamma$

$\gamma$ : Ángulo entre el eje de simetría y el vector de momento angular  $h$ , ángulo de nutación.

$$h_3 = h \cos \gamma \quad h_T = h \sin \gamma \quad (8.3.14)$$

$$\tan \gamma = \frac{h_T}{h_3} = \frac{I_T \omega_T}{I_3 \omega_3} \quad (8.3.15)$$

$\gamma$  tiene un valor constante ya que  $h_T$  y  $h$  son constantes.

#### Ángulo $\beta$

$\beta$ : Ángulo entre el eje de simetría y el vector de velocidad angular  $\omega$

$$\tan \beta = \frac{\omega_T}{\omega_3} \quad (8.3.16)$$

$$\overline{\frac{I_T}{I_3} \tan \beta} = \tan \gamma \quad (8.3.17)$$

$\beta$  tiene un valor constante ya que  $\omega_T$  y  $\omega_3$  son constantes.

- Caso 1:  $I_3 < I_T \rightarrow \gamma > \beta$
- Caso 2:  $I_3 > I_T \rightarrow \gamma < \beta$

### 8.3.4. Prolate y Oblate

La dirección de la velocidad de giro relativa depende de la forma del cuerpo:

- Un cuerpo rígido con simetría axial (alrededor de 3 ejes) es Prolate si  $I_3 < I_T$ .
- Un cuerpo rígido con simetría axial (alrededor de 3 ejes) es Oblate si  $I_3 > I_T$ .
- El caso 1 con  $\Omega > 0$  se denomina precesión prógrada (si el objeto es prolate)
- El caso 2. con  $\Omega < 0$  se denomina precesión retrógrada (si el objeto es oblate)

### 8.3.5. Interpretación geométrica

El movimiento del cuerpo alrededor de un punto fijo es igual al movimiento del Body Cone rodando sin deslizamiento sobre el Space Cone.

- **Prolate spinner ( $I_3 < I_T$ )**: Caso 1: Cuerpo alargado con  $\gamma > \beta$ . Space Cone y Body Cone tienen tangente externa a lo largo del vector velocidad angular  $\omega$ . Precesión prógrada (velocidad de giro relativa  $\Omega > 0$ ).
- **Prolate spinner ( $I_3 > I_T$ )**: Caso 2: Cuerpo alargado con  $\gamma < \beta$ . Space Cone está dentro del Body Cone, tienen tangente interna a lo largo del vector velocidad angular  $\omega$ . Precesión retrógrada (velocidad de giro relativa  $\Omega < 0$ ).

### 8.3.6. Velocidad de precesión

La velocidad de precesión corresponde a la velocidad a la que el cuerpo simétrico de 3 ejes gira en torno a la dirección fija de inercia  $h$  (vector de momento angular).

$$\mathbf{C}_{bi}(\mu, \gamma, \psi) = \mathbf{C}_3(\mu)\mathbf{C}_1(\gamma)\mathbf{C}_3(\psi) \quad (8.3.18)$$

Donde,

- $\psi$  = rotación  $C_3$  sobre el eje 3 fijo del cuerpo llamado ángulo de precesión.
- $\gamma$  = rotación  $C_1$  para que el vector momento angular  $h$  sea igual que el eje 3 fijo del cuerpo (Véase que  $\gamma$  es ángulo fijo,  $\dot{\gamma} = 0$  ).
- $\mu$  = rotación  $C_3$  alrededor del vector momento angular  $h$ .

Los ángulos de Euler relacionados con el vector de velocidad angular como

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\mu} \end{bmatrix} + \mathbf{C}_3(\mu) \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{C}_3(\mu) \mathbf{C}_1(\gamma) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (8.3.19)$$

$$\mathbf{C}_3(\mu) = \begin{bmatrix} \cos \mu & \sin \mu & 0 \\ -\sin \mu & \cos \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_1(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

Se obtiene así:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \sin \gamma \sin \mu \\ \dot{\psi} \sin \gamma \cos \mu \\ \dot{\mu} + \dot{\psi} \cos \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_T \sin \mu \\ \omega_T \cos \mu \\ \omega_{03} \end{bmatrix} \quad (8.3.20)$$

De la primera componente se define la velocidad de precesión como:

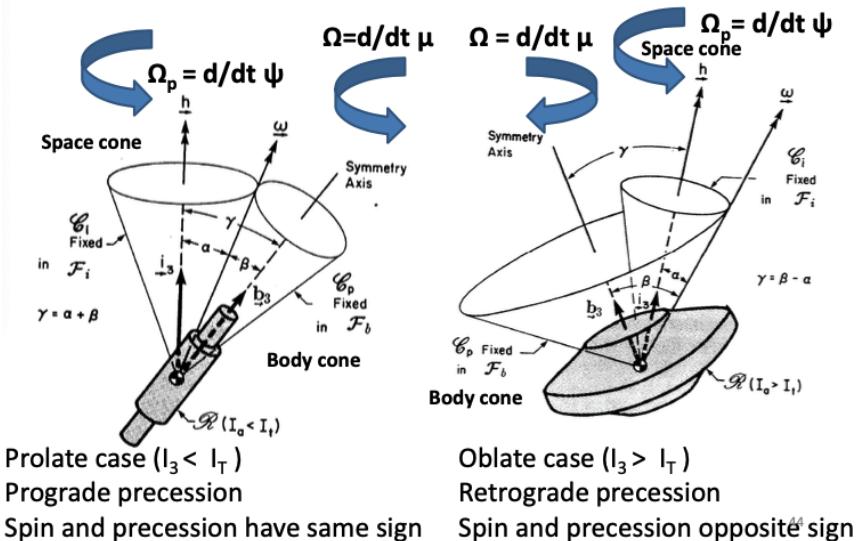
$$\Omega_p \triangleq \dot{\psi} = \frac{h}{I_T} \quad (8.3.21)$$

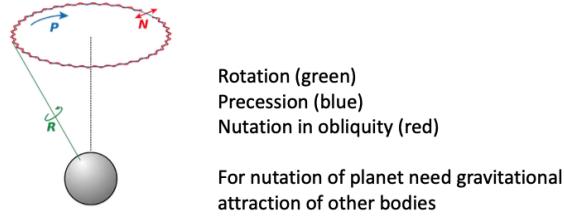
La velocidad de precesión  $\Omega_p$  corresponde a la velocidad a la que el eje 3 del cuerpo de simetría gira alrededor de la dirección fija de inercia  $h$ . Nota: El vector velocidad angular total  $\omega$  también precesa alrededor de la dirección fija inercial  $h$  (ya que  $h$ ,  $\omega$  y eje 3 están en el plano).

De la tercera componente, con  $\Omega$ (velocidad de rotación) =  $\dot{\mu}$ :

$$\Omega_p = \frac{I_3}{(I_T - I_3) \cos \gamma} \Omega \quad (8.3.22)$$

- Caso 1:  $I_3 < I_T \rightarrow$  Precesión retrógrada ( $\Omega_p$  y  $\Omega$  tienen el mismo signo).
- Caso 2:  $I_3 > I_T \rightarrow$  Precesión prógrada ( $\Omega_p$  y  $\Omega$  tienen signo opuesto).





Si no hay fuerzas y nave espacial es axial-simétrica, sólo dos movimientos posibles sin precesión:

- La nave gira alrededor de su eje de simetría:  $\omega_T = h_T = 0$ ,  $h$  y  $\omega$  están alineados.
- La nave gira sobre su eje transversal:  $\omega_3 = h_3 = 0$ ,  $h$  y  $\omega$  están alineados.

$$\begin{aligned}
 h_1 &= I_T \omega_1(t) = I_T \omega_T \sin\left[\frac{I_T - I_3}{I_T}(t - t_0)\right] \\
 h_2 &= I_T \omega_2(t) = I_T \omega_T \cos\left[\frac{I_T - I_3}{I_T}(t - t_0)\right] \\
 h_3 &= I_3 \omega_3(t) = I_3 \omega_{03}
 \end{aligned} \tag{8.3.23}$$

### 8.3.7. Resumen

- La proyección transversal de  $\omega$  ( $\omega_T$ ) es constante:  $\omega_T = (\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t))^{\frac{1}{2}}$
- La magnitud del vector angular es constante:  $\omega = (\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) + \omega_3^2(t))^{\frac{1}{2}}$
- La magnitud de los momentos angulares ( $h^2$ ) es constante (porque es escalar):  $h^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = I_T^2 \omega_T^2 + I_3^2 \omega_3^2$
- El vector momento angular es constante en el sistema inercial pero rota en el marco del cuerpo (no es constante):  $h_1 = I_T \omega_1(t)$   
 $h_2 = I_T \omega_2(t)$   
 $h_3 = I_3 \omega_3(t)$
- A partir de  $\dot{\vec{h}} = \vec{T}$  y del movimiento sin torque la dirección del vector momento angular ( $h$ ) es constante en el marco inercial

## 8.4. Movimiento sin torque (no simétrico)

Se deben resolver las tres ecuaciones de Euler:

$$\begin{aligned}
 I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\
 I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= 0 \\
 I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{8.4.1}$$

Conservación de la energía cinética de rotación:

$$T_r = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \quad (8.4.2)$$

Conservación de la magnitud del momento angular:

$$h^2 = I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 \quad (8.4.3)$$

Existe una solución analítica completa con funciones elípticas jacobianas (funciones periódicas desconocidas). Las funciones circulares del tiempo para cuerpo axisimétrico se convierten en función elíptica para cuerpo no simétrico.

#### 8.4.1. Vista geométrica: Construcción Poinsot

Movimiento sin torque de un cuerpo no simétrico:

- En su lugar de tratar con funciones elípticas desconocidas, se utiliza el truco geométrico (L. Poinsot).
- La solución geométrica permite obtener una comprensión cualitativa del movimiento general del cuerpo rígido sin torque.
- Construcción Poinsot:
  - Utilizada para visualizar cómo se mueve el extremo final del vector angular  $\omega$ .
  - Utiliza la conservación de la energía cinética y la magnitud del momento angular para restringir el movimiento de la velocidad angular  $\omega$ .

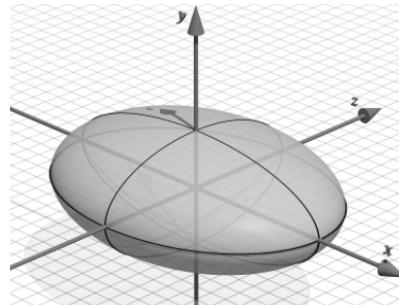
#### 8.4.2. Elipsoide de la energía cinética

En sistema de ejes principal: la energía cinética es  $T = \frac{1}{2}\omega|\omega$ . Y si el movimiento sin torque  $T$  es constante:

$$T = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \rightarrow \frac{\omega_1^2}{2T/I_1} + \frac{\omega_2^2}{2T/I_2} + \frac{\omega_3^2}{2T/I_3} = 1 \quad (8.4.4)$$

El vector angular  $\omega$  debe situarse en la superficie del elipsoide de energía cinética. Se demuestra así empleando la ecuación de Euler, que la energía es constante:

$$\dot{T} = I_1\omega_1\dot{\omega}_1 + I_2\omega_2\dot{\omega}_2 + I_3\omega_3\dot{\omega}_3 = -\omega_1 [(I_3 - I_2)\omega_2\omega_3] - \omega_2 [(I_1 - I_3)\omega_1\omega_3] - \omega_3 [(I_2 - I_1)\omega_1\omega_2] = 0 \quad (8.4.5)$$

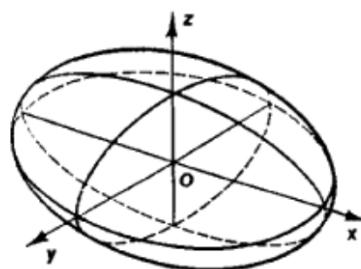


### 8.4.3. Elipsoide del momento angular

Para el movimiento sin torque, el vector momento angular  $h = I\omega$  es fijo en el espacio inercial  $\rightarrow$  la magnitud  $h^2 = (I\omega)^2$  debe ser constante (en cualquier marco).

El vector angular debe situarse en la superficie del elipsoide del momento angular. En el sistema de ejes principales:

$$h^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 \rightarrow \frac{\omega_1^2}{h^2/I_1^2} + \frac{\omega_2^2}{h^2/I_2^2} + \frac{\omega_3^2}{h^2/I_3^2} = 1 \quad (8.4.6)$$

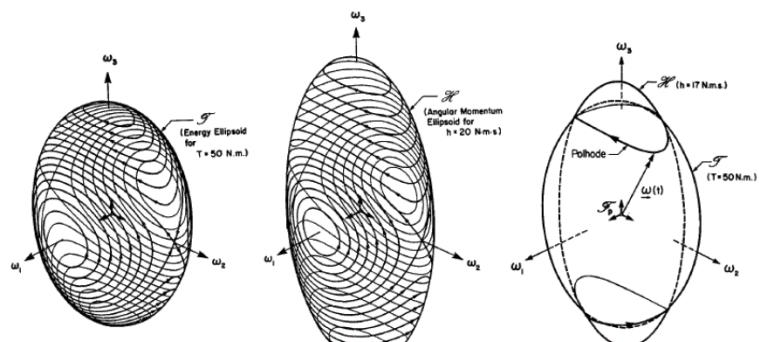


El elipsoide de energía y el de momento angular no son iguales, ya que la longitud de sus ejes no es la misma.

- La longitud del eje del elipsoide de momento angular es:  $h/I_1, h/I_2, h/I_3$
- La longitud del eje del elipsoide de energía cinética es:  $\sqrt{2T/I_1}, \sqrt{2T/I_2}, \sqrt{2T/I_3}$

### 8.4.4. Polhode

Las componentes de la velocidad angular  $[\omega_1, \omega_2, \omega_3]$  tienen que estar en la superficie de los elipsoides de energía y momento angular. El lugar debe estar en la curva de intersección entre dos elipsoides. Y La curva trazada por el vector de velocidad angular  $\omega$  se denomina **Polhode**. Polhode muestra la posible trayectoria del vector angular  $\omega$  visto desde el marco del cuerpo (sin información sobre la velocidad de los movimientos del vector  $\omega$ ).

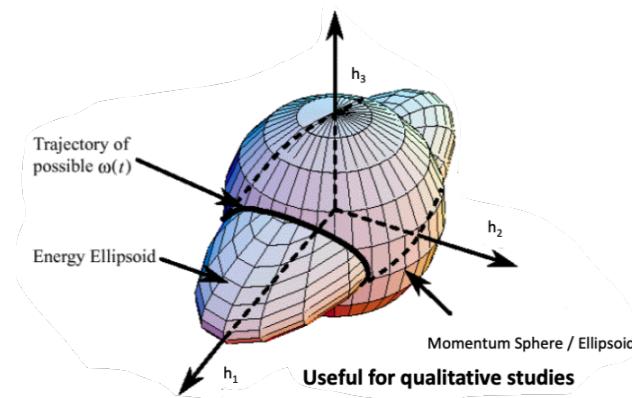


**Energy ellipsoid      Momentum ellipsoid      Intersecting polhodes**

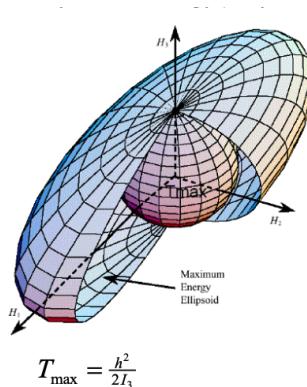
## Intersección de los elipsoides de energía cinética y momento angular

Visualización de la intersección de dos elipsoides utilizando componentes vectoriales de momento angular  $h_i$  en lugar del componente vectorial de velocidad angular del cuerpo  $\omega_i$ :

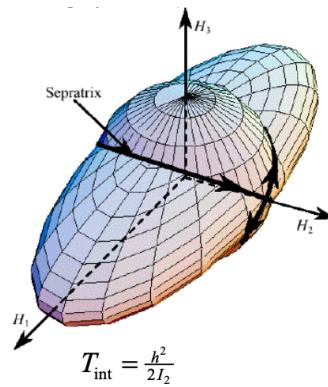
Usando  $h_i$  como coordenadas independientes  $\rightarrow$  elipsoide de momento se convierte en esfera de momento:  $h^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$ , y el elipsoide de energía cinética puede escribirse como:  $\frac{h_1^2}{2I_1T} + \frac{h_2^2}{2I_2T} + \frac{h_3^2}{2I_3T} = 1$ .



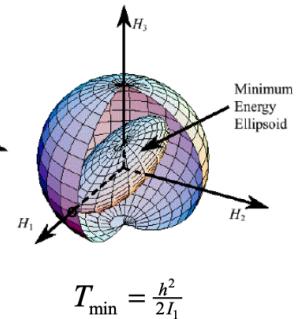
**Casos especiales:** Fijar la magnitud del momento angular ( $h^2$ )  $\rightarrow$  Variar la energía cinética (sólo es posible cierto rango). Asumir:  $I_1 \geq I_2 \geq I_3$ .



Maximum energy  
Polhodes small circle  
around 3-axis



Intermediate energy  
Polhodes large circle  
over entire ellipsoid



Minimum energy  
Polhode small circle  
around 1-axis 55

## 8.5. Estabilidad del movimiento sin torque: Vista geométrica (pequeñas perturbaciones en un cuerpo no simétrico)

### 8.5.1. Caso especial con rotación constante en el tiempo

Rotación constante (velocidad angular constante  $\omega$ ):  $(d\omega_i/dt) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$

De la ecuación de Euler se deduce:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= 0 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= 0 \rightarrow (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 = 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 &= 0 \end{aligned} \quad (8.5.1)$$

Todas las componentes de  $\omega$  pueden ser constantes sólo si al menos dos de  $\omega_i = 0$ . Esto significa: El vector  $\omega$  sólo puede ser constante si está a lo largo de un eje principal. Pero no todas las rotaciones con  $\omega$  a lo largo del eje principal son estables.

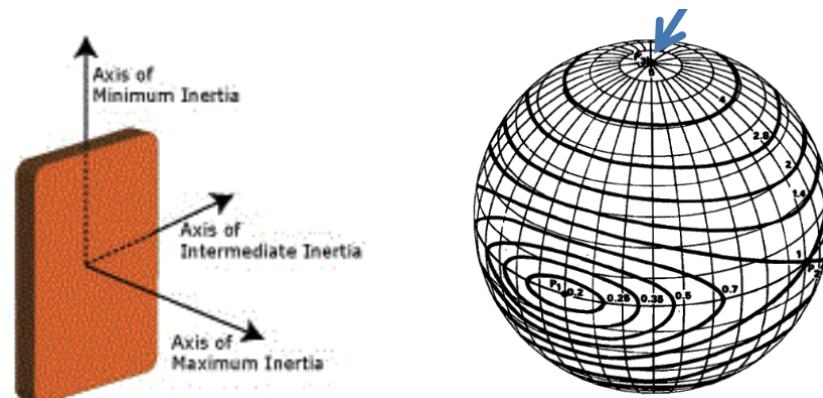
Rotación estable significa que una pequeña perturbación hace que el eje de rotación del cuerpo se aleje sólo ligeramente del eje principal

### 8.5.2. Ejemplo de rotación estable (eje menor)

Rotación estable y constante en torno a eje principal 3 (inerzia principal mínima  $I_3$ , eje 3).

$$I_1 \geq I_2 \geq I_3 \quad (8.5.2)$$

La figura muestra la intersección del momento angular y el elipsoide de energía cinética. Comienza con un giro puro alrededor del eje de inercia más pequeño (punto arriba o abajo, dos giros posibles). Si disminuye ligeramente la energía (curvas cerradas alrededor del eje 3). El movimiento es estable porque el vector  $\omega$  nunca se aleja de su posición inicial (eje menor).

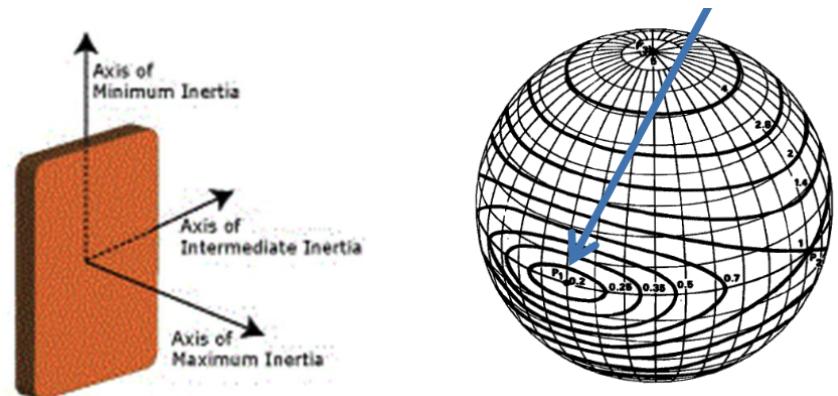


### 8.5.3. Ejemplo de rotación estable (eje mayor)

Rotación estable y constante en torno a eje principal 1 (inerzia principal máxima  $I_1$ , eje 1).

$$I_1 \geq I_2 \geq I_3 \quad (8.5.3)$$

La figura muestra la intersección del momento angular y el elipsoide de energía cinética. Comienza con un giro puro alrededor del eje de inercia mayor (punto delante o detrás, dos giros posibles). Si cambia ligeramente la energía (curvas cerradas alrededor del eje 1). El movimiento es estable porque el vector  $\omega$  nunca se aleja de su posición inicial (eje mayor).

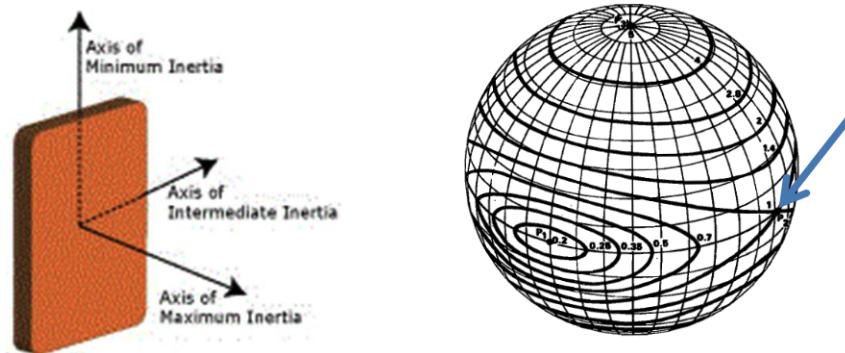


### 8.5.4. Ejemplo de rotación estable (eje intermedio)

Rotación estable y constante en torno a eje principal 2 (inerzia principal intermedia  $I_2$ , eje 2).

$$I_1 \geq I_2 \geq I_3 \quad (8.5.4)$$

La figura muestra la intersección del momento angular y el elipsoide de energía cinética. Comienza con un giro puro alrededor del eje de inercia intermedio (punto a la derecha o izquierda, dos giros posibles). Si las desviaciones son mínimas (dos curvas cerradas que giran alrededor y se cruzan en el eje 2)  $\omega$  tiene una trayectoria larga en la superficie y se desvía significativamente → movimiento basculante. El movimiento es inestable porque el vector  $\omega$  se desvía significativamente de su posición inicial.



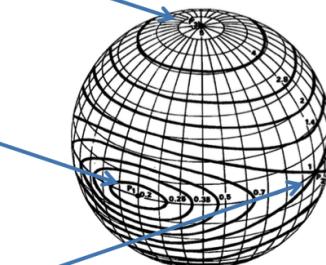
### Emplear Polhodes para ver la estabilidad

Near  
minimal principle inertia axis  
we have little loops  
stable

Near  
maximum principle inertia axis  
we have little loops  
stable

Near  
intermediate principle inertia axis  
we get send away  
unstable

Small deviations will eventually get big!



### Estabilidad del movimiento sin torque

**Teorema:** El movimiento sin torque de un cuerpo rígido es estable si el giro del cuerpo se produce alrededor del eje del momento de inercia principal máximo o mínimo. Si el giro se produce alrededor del eje del momento principal de inercia intermedio, el movimiento es inestable.

$$I_1 \geq I_2 \geq I_3 \quad (8.5.5)$$

- Eje de inercia mayor (máximo): estable
- Eje de inercia menor (mínimo): estable
- Eje de inercia intermedio: inestable

## 8.6. Estabilidad del movimiento sin torque: método matemático (pequeñas perturbaciones cuerpo no simétrico)

### 8.6.1. Estabilidad de rotación alrededor de los ejes principales(Ecuaciones de Euler)

Desde un punto de vista matemático:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= 0 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 &= 0 \end{aligned} \quad (8.6.1)$$

De la ecuación de Euler sin torque externo y con espines alrededor del eje principal de inercia:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= \text{const} & \omega_2(t) = \omega_3(t) &= 0 \\ \omega_2(t) &= \text{const} & \omega_1(t) = \omega_3(t) &= 0 \\ \omega_3(t) &= \text{const} & \omega_1(t) = \omega_2(t) &= 0 \end{aligned} \quad (8.6.2)$$

Las rotaciones permanentes parecen ser posibles alrededor de cada uno de los ejes principales.

- **Cuerpo simétrico:**  $I_1 = I_2 = I_3$

- $\frac{d}{dt}\omega_j = 0 \rightarrow \omega_j$  is constant ( $j = 1, 2, 3$ )

- **Cuerpo con simetría axial:**  $I_T = I_1 = I_2$

- $\frac{d}{dt}\omega_3 = 0 \rightarrow \omega_3$  is constant
- Las ecuaciones de Euler son lineales
- Las ecuaciones lineales tienen buenas soluciones

$$\begin{aligned} \ddot{\omega}_1 + \Omega^2\omega_1 &= 0 \rightarrow \omega_1(t) = \omega_T \sin[\Omega(t - t_0)] \\ \ddot{\omega}_2 + \Omega^2\omega_2 &= 0 \rightarrow \omega_2(t) = \omega_T \cos[\Omega(t - t_0)] \end{aligned} \quad (8.6.3)$$

- **Cuerpo sin simetría:** inercias mutuamente distintas.

- Las ecuaciones de Euler no son lineales.
- Es necesario linealizar las ecuaciones.
- Linealización alrededor de un equilibrio

### 8.6.2. Equilibrio

Es necesario encontrar un equilibrio para las ecuaciones de Euler no lineales. La linealización de un sistema no lineal permite considerar pequeñas desviaciones alrededor del equilibrio y así estudiar la estabilidad del sistema. Equilibrio: Giros puros alrededor de un eje principal (rotación alrededor eje 2).

$$\begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{with } \Omega = \text{constant} \quad (8.6.4)$$

Este es el equilibrio de las ecuaciones de Euler porque:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -\frac{(I_3 - I_2)}{I_1} \omega_2 \omega_3 = 0 \\ \dot{\omega}_2 &= -\frac{(I_1 - I_3)}{I_2} \omega_1 \omega_3 = 0 \\ \dot{\omega}_3 &= -\frac{(I_2 - I_1)}{I_3} \omega_2 \omega_1 = 0 \end{aligned} \quad (8.6.5)$$

### 8.6.3. Perturbación del equilibrio

Considerando la rotación alrededor de eje 2 con velocidad angular  $\Omega$ :  $\omega_2(t) = \Omega, \omega_1(t) = \omega_3(t) = 0$ .

Ahora perturbamos el estado de espín puro de manera que  $\epsilon_i \ll \Omega$ , pequeñas perturbaciones del equilibrio.

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= \varepsilon_1(t) \\ \omega_2(t) &= \Omega + \varepsilon_2(t) \\ \omega_3(t) &= \varepsilon_3(t) \end{aligned} \quad (8.6.6)$$

Se obtienen las siguientes ecuaciones de Euler:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\varepsilon}_1 + (I_3 - I_2)(\varepsilon_2 + \Omega)\varepsilon_3 &= 0 \\ I_2 \dot{\varepsilon}_2 + (I_1 - I_3)\varepsilon_1\varepsilon_3 &= 0 \\ I_3 \dot{\varepsilon}_3 + (I_2 - I_1)(\varepsilon_2 + \Omega)\varepsilon_1 &= 0 \end{aligned} \quad (8.6.7)$$

### 8.6.4. Linealizar las ecuaciones de Euler

Se desprecia el término de segundo orden porque las perturbaciones  $\epsilon_j$  son pequeñas. Linealización:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\varepsilon}_1 + (I_3 - I_2)\Omega\varepsilon_3 &= 0 \\ I_2 \dot{\varepsilon}_2 &= 0 \\ I_3 \dot{\varepsilon}_3 + (I_2 - I_1)\Omega\varepsilon_1 &= 0 \end{aligned} \quad (8.6.8)$$

Las ecuaciones 1 y 3 están desacopladas de la ecuación 2:  $\varepsilon_2(t) = \text{const}$ . Representa una perturbación constante de la componente de velocidad angular  $\Omega$  del giro sobre el eje 2.

$$\omega_2(t) = \Omega + \varepsilon_2(t) \quad (8.6.9)$$

### 8.6.5. Ecuación diferencial de segundo orden

Combinando ecuaciones de Euler linealizadas perturbadas en ejes 1 y 3 para formar una única ecuación (tomando derivadas del tiempo):

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\varepsilon}_1 &= (I_2 - I_3) \Omega \dot{\varepsilon}_3 \\ I_3 \ddot{\varepsilon}_3 &= (I_1 - I_2) \Omega \dot{\varepsilon}_1 \end{aligned} \quad (8.6.10)$$

De lo anteriormente expuesto:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\varepsilon}_1 + (I_3 - I_2) \Omega \varepsilon_3 &= 0 \\ I_3 \dot{\varepsilon}_3 + (I_2 - I_1) \Omega \varepsilon_1 &= 0 \end{aligned} \quad (8.6.11)$$

Se obtiene una ecuación diferencial única de segundo orden con coeficiente constante:

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon}_1 &= \alpha^2 \varepsilon_1 \\ \ddot{\varepsilon}_3 &= \alpha^2 \varepsilon_3 \\ \alpha^2 &= \frac{(I_2 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_1 I_3} \Omega^2 \end{aligned} \quad (8.6.12)$$

### 8.6.6. Condición para la estabilidad del eje de giro.

La solución para la ecuación diferencial de segundo orden  $\varepsilon_i(t)$  es:

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon}_1 &= \alpha^2 \varepsilon_1 & \varepsilon_i(t) &= A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t}, & (\alpha \neq 0) & & i = 1, 3 \\ \ddot{\varepsilon}_3 &= \alpha^2 \varepsilon_3 & \varepsilon_i(t) &= A + Bt, & (\alpha = 0) & & i = 1, 3 \end{aligned} \quad (8.6.13)$$

Análisis de estabilidad con tres casos:

1.  $\alpha^2 > 0$  real  $\rightarrow$  Existe exponente con parte real positiva. La solución crece sin límite  $\rightarrow$  El movimiento es inestable.
2.  $\alpha^2 > 0$  imaginario  $\rightarrow$  La solución es periódica  $\rightarrow$  El movimiento es estable.
3.  $\alpha^2 = 0$   $\rightarrow$  La solución crece linealmente con el tiempo  $\rightarrow$  Movimiento inestable.

$$\alpha^2 = \frac{(I_2 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_1 I_3} \Omega^2 < 0 \quad (8.6.14)$$

Por lo tanto, para la estabilidad se requiere:

$$\begin{aligned} (I_2 - I_3)(I_2 - I_1) &> 0 \\ I_2 > I_3 & \text{ and } I_2 > I_1 \\ &\text{or} \\ I_2 < I_3 & \text{ and } I_2 < I_1 \end{aligned} \quad (8.6.15)$$

### 8.6.7. Estabilidad del movimiento libre de torque de un cuerpo asimétrico

Obtenga una solución oscilatoria estable si el coeficiente  $\alpha^2 < 0$  (de lo contrario, solución inestable).

**Teorema:** El movimiento sin torque de un cuerpo rígido es estable si el giro del cuerpo es alrededor del eje del momento principal de inercia máximo o mínimo. Si el giro nominal se produce alrededor del eje del momento principal de inercia intermedio, entonces el movimiento es inestable.

$$I_1 > I_2 > I_3 \quad (8.6.16)$$

- El eje de inercia mayor (máximo) es estable ( $\alpha^2 < 0$ )
- El eje de inercia menor (mínimo) es estable ( $\alpha^2 < 0$ )
- El eje intermedio de inercia es inestable ( $\alpha^2 < 0$ )

### 8.6.8. Regla del eje mayor

- La disipación de energía cambia, esto resulta → El eje menor se vuelve inestable. Los giros simples alrededor del eje mayor de inercia son asintóticamente estables
- Teorema anterior restringido al caso de movimiento sin torque de un cuerpo rígido
- Los torques internos pueden producir deformación estructural del cuerpo que gira en un movimiento complejo y crear pérdida de energía en forma de calor (la disipación de energía proviene de la energía cinética que está disminuyendo en cantidad).
- Hipótesis del sumidero de energía: Un cuerpo cuasi rígido en un movimiento de rotación complejo disipará energía hasta alcanzar un estado de energía cinética mínima. Para el movimiento libre de torque, el momento angular se conserva. (El simple movimiento alrededor de un eje principal no produce disipación de energía mecánica)
- Regla del eje mayor:
  - El giro alrededor del eje mayor es asintóticamente estable.
  - El giro alrededor de cualquier otro eje es inestable.

### 8.6.9. Disipación de energía: hipótesis del sumidero de energía

- Los elementos flexibles de las naves espaciales pueden deformarse debido a pares internos asociados a movimientos complejos
- Las deformaciones estructurales dan como resultado la disipación de energía a través del calor.
- La energía total se conserva, por lo tanto el calor se debe tomar de la energía cinética.

Un cuerpo cuasi rígido disipa energía hasta alcanzar un estado de mínima energía cinética. El momento angular ( $h$ ) se conserva para el movimiento sin torque.

$$\begin{aligned} T_{maj} &= \frac{1}{2} I_{maj} \omega_{maj}^2 = \frac{h^2}{2I_{maj}} & h = I_{maj} \omega_{maj} & \text{for major axis spin} & 2T_{maj} &= \frac{h^2}{I_{maj}} & (8.6.17) \\ T_{min} &= \frac{1}{2} I_{min} \omega_{min}^2 = \frac{h^2}{2I_{min}} & h = I_{min} \omega_{min} & \text{for minor axis spin} & 2T_{min} &= \frac{h^2}{I_{min}} \end{aligned}$$

$$I_{min} < I_{maj} \text{ y para un momento angular dado } h \rightarrow T_{maj} < T_{min} \quad (8.6.18)$$

La energía cinética se minimiza para el giro alrededor del eje principal. Las naves espaciales reales (por lo tanto flexibles) pueden girar de manera estable sólo alrededor del eje de máximo momento de inercia.

### 8.6.10. Disipación de energía: deriva de Polhode para cuerpos cuasi rígidos

Desestabilización causada por la disipación de energía:

- Polhode de un cuerpo rígido general modificado por disipación de energía.
- Suponer que el vector  $\omega$  comienza en la columna pura alrededor del eje de inercia menor  $b_3$ .
- Disipación de energía: El vector  $\omega$  se aleja del eje de inercia menor  $b_3$
- La amplitud de la precesión aumenta.
- Cuando el vector  $\omega$  está cerca del eje intermedio, mayor precesión con mayor tasa de disipación de energía
- El vector  $\omega$  converge al estado de spin puro alrededor del eje mayor de inercia  $b_1$
- Sólo el spin alrededor del eje mayor de inercia es estable.

### 8.6.11. Disipación de energía para cuerpos axisimétricos: Matemáticas

Saber/asumir:

1. Momento angular ( $h$ ) conservado para movimiento sin torsión
2. Energía cinética no conservada
3. Pero utilizar hipótesis de sumidero de energía.

Tomar la hipótesis del sumidero de energía para un caso especial de movimiento sin torque de un cuerpo axisimétrico.

Considerar la energía cinética con un cuerpo axisimétrico.:

$$T = \frac{1}{2}(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) = \frac{1}{2}(I_T \omega_T^2 + I_3 \omega_3^2) \quad (8.6.19)$$

Momento angular y describir los componentes de la velocidad angular en términos de momento angular y ángulo de nutación:

$$\begin{aligned} h_t &= I_T \omega_t = h \sin \gamma \Leftrightarrow \omega_t = \frac{h}{I_T} \sin \gamma \\ h_3 &= I_3 \omega_3 = h \cos \gamma \Leftrightarrow \omega_3 = \frac{h}{I_3} \cos \gamma \end{aligned} \quad (8.6.20)$$

Sustituir en la expresión la energía:

$$T = \frac{1}{2} \left( I_T \left( \frac{h}{I_T} \sin \gamma \right)^2 + I_3 \left( \frac{h}{I_3} \cos \gamma \right)^2 \right) = \frac{1}{2} h^2 \left( \frac{1}{I_T} \sin^2 \gamma + \frac{1}{I_3} \cos^2 \gamma \right) \quad (8.6.21)$$

Tomar la derivada del tiempo de la energía cinética:

$$\dot{T} = \frac{d\Gamma}{d\gamma} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2} h^2 \left( \frac{1}{I_r} 2 \sin \gamma \cos \gamma - \frac{1}{I_3} 2 \cos \gamma \sin \gamma \right) \dot{\gamma} = \frac{1}{2} h^2 \sin 2\gamma \left( \frac{I_3 - I_T}{I_s I_T} \right) \dot{\gamma} \quad (8.6.22)$$

Se obtiene así:

$$\dot{T} = \frac{1}{2} h^2 \sin 2\gamma \left( \frac{I_3 - I_T}{I_s I_T} \right) \dot{\gamma} \quad (8.6.23)$$

Usar de hipótesis de sumidero de energía:  $\dot{T} < 0$ . Implica que el signo  $\frac{d}{dt}\gamma$  se corresponde con el signo de  $(I_T - I_3)$ .

Hay dos casos:

- Si  $(I_T - I_3) < 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\gamma < 0$ : El ángulo de nutación disminuirá y  $I_T < I_3$  corresponde al giro del eje mayor.

Para mínimo  $T \Rightarrow \dot{T} = 0 \Rightarrow \sin 2\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \text{ or } \gamma = \pi/2$ . Partiendo de  $T = \frac{1}{2} h^2 \left( \frac{1}{I_T} \sin^2 \gamma + \frac{1}{I_3} \cos^2 \gamma \right)$ .

$$T|_{\gamma=0} = \frac{h^2}{2I_3} \text{ or } T|_{\gamma=\pi/2} = \frac{h^2}{2I_T} \Rightarrow T|_{\text{mín}} = \frac{h^2}{2I_3} \text{ cuando } \gamma = 0 \quad (8.6.24)$$

Por tanto, el giro al rededor del eje 3 es **estable**.

- Si  $(I_T - I_3) > 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\gamma > 0$ : El ángulo de nutación aumentará y  $I_T > I_3$  corresponde al giro del eje menor. El ángulo de nutación aumenta hasta  $\dot{T} = 0$  cuando  $\gamma = \pi/2$ .

$$T|_{\text{mín}} = \frac{h^2}{2I_T} < \frac{h^2}{2I_3} \quad (8.6.25)$$

Por tanto, el giro al rededor del eje 3 es **inestable**.

Existe desestabilización del giro del eje menor debido a la disipación de energía.

La disipación de energía hace que el ángulo de nutación desaparezca en los giros del eje principal.

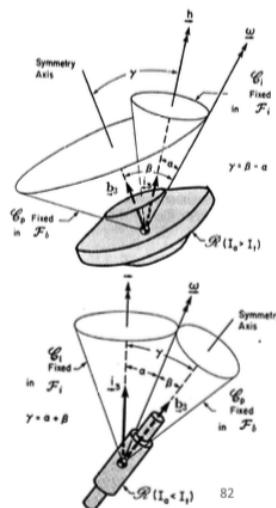
$$\frac{I_T}{I_3} \tan \beta = \tan \gamma \rightarrow \gamma = 0 \implies \beta = 0 \quad (8.6.26)$$

Por tanto están alineados:

- Vector de momento angular
- Vector de velocidad angular
- Eje de simetría

Así mismo:

- Los giros alrededor del eje menor son inestables
- El ángulo de nutación crece hasta que se obtiene el giro del eje mayor con  $\gamma = \pi/2$



### 8.6.12. Resumen

El vector de velocidad angular debe estar al mismo tiempo en:

1. Elipsoide de momento angular
2. Elipsoide de energía cinética

Intersección: Polhode (visto desde un marco de referencia fijo en el cuerpo)

La solución analítica de forma cerrada en el movimiento sin torque de un cuerpo rígido asimétrico se expresa en términos de funciones elípticas de Jacobi.

Estabilidad del movimiento sin par alrededor de los ejes principales:

1. Eje mayor: siempre estable
2. Eje intermedio: inestable
3. Eje menor: estable solo si no hay disipación de energía

## 8.7. Resumen total

- Ecuación de Euler en marco de ejes principales
- Ecuaciones diferenciales lineales y no lineales.
  - Equilibrio, Estabilidad, Ecuaciones características
  - Teorema de estabilidad
  - Linealización de sistemas no lineales
- Rotaciones libres de torque simétricas y asimétricas
  - Geométrica y matemática
  - Ecuación de movimiento linealizada
  - Estabilidad
- Disipación de energía
  - Geométrica y matemática
  - Efecto sobre la estabilidad de la rotación (regla del eje mayor)



# Capítulo 9

## Attitude Dynamics II

### 9.1. Spin Stabilization

Para estabilizar los cuerpos en el espacio es imprescindible tener en cuenta la ley de conservación angular.

La rigidez giroscópica intrínseca del objeto es la propiedad que se usa para mantener la orientación del eje de giro, generalmente hablando se prefiere un diseño correspondiente a un cilindro corto frente a uno largo.

Si no existe torque externo, el vector de momento angular queda constante en magnitud y dirección, en cambio si se aplica un torque externo  $\mathbf{T}$  se considera:

$$\dot{h} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = T \quad (9.1.1)$$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta h}{Iw} = \frac{T\Delta t}{Iw} \quad (9.1.2)$$

Los torques perpendiculares causan un desplazamiento en  $H$  en dirección al torque.

Los torques paralelos aumentan o disminuyen el momento angular y se deduce que a mayor momento de inercia, mayor estabilidad giroscópica y por tanto, menor perturbación angular.

$$T = I\dot{\theta} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \frac{T}{I} t^2 \quad (9.1.3)$$

### 9.2. Dual-spin stabilization

El problema del modelo de spin único es que los vehículos lanzadores no pueden diseñarse cortos y anchos por motivos aerodinámicos, además que las antenas necesitan apuntar a tierra, y el giro constante complica el apuntado.

Una solución sencilla es la de separar el S/C en dos partes, una que gire muy deprisa para conseguir la estabilidad y otra que gire despacio o nada. Esta solución permite que los radiómetros o antenas que necesitan apuntar a zonas concretas lo tengan mas fácil.

Este control de actitud pasivo permite una estabilización de spin en otros ejes (no solo en el mayor como el single-spin).

### 9.2.1. Ecuacion de movimiento Dual-Spin

Se considera un S/C con dos partes, Plataforma (P) y Rueda (R), la rueda gira con una velocidad angular  $w_s$ .

los Ejes principales están fijados en la plataforma, centrado en el centro de masas.

- $\mathbf{I}$  es la matriz inercial del S/C

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (9.2.1)$$

- $I_s$  es el momento de inercia de la rueda en el eje de spin
- $\mathbf{w}$  es la velocidad angular de la plataforma relativo al eje inercial
- $w_s$  es la velocidad angular de la rueda relativo a la plataforma.

se obtiene directamente como:

$$h = I\mathbf{w} + h_s a \quad (9.2.2)$$

Siendo  $a$  el eje de giro de la rueda:

$$a = [0, 1, 0]^T \quad (9.2.3)$$

Con la Ecuacion de Euler y considerando que la velocidad angular de la rueda es constante se llega a la ecuación de Spin dual:

$$T = I\mathbf{w}^\circ + \mathbf{w} \times (I\mathbf{w} + h_s a) \quad (9.2.4)$$

Estando definida la matriz de inercia, la velocidad angular y la dirección de spin de la rueda, para un Torque nulo se obtiene:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 - h_s\omega_3 &= 0 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 + h_s\omega_1 &= 0 \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

### 9.2.2. Estabilidad de dual spin

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 - h_s\omega_3 &= 0 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 + h_s\omega_1 &= 0 \end{aligned} \quad (9.2.6)$$

En la búsqueda de estabilidad de las soluciones del sistema de ecuaciones, se encuentran distintas soluciones de equilibrio al ser una ecuación diferencial no lineal.

Como ejemplo se estudiará el siguiente caso:

$$\omega_1(t) = \omega_3(t) = 0 \quad \omega_2(t) = \Omega \quad (9.2.7)$$

Teniendo en cuenta pequeñas perturbaciones  $\varepsilon_i \ll \Omega$  se reescribe como:

$$\omega_1(t) = \varepsilon_1(t) \quad \omega_3(t) = \varepsilon_3(t) \quad \omega_2(t) = \Omega + \varepsilon_2(t) \quad (9.2.8)$$

Partiendo de la ecuación de movimiento cerca del punto de equilibrio:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\varepsilon}_1 + (\dot{I}_3 - I_2)(\varepsilon_2 + \dot{\Omega})\varepsilon_3 - h_s\varepsilon_3 &= 0 \\ I_2\dot{\varepsilon}_2 + (I_1 - I_3)\varepsilon_1\varepsilon_3 &= 0 \\ I_3\dot{\varepsilon}_3 + (I_2 - I_1)(\varepsilon_2 + \Omega)\varepsilon_1 + h_s\varepsilon_1 &= 0 \end{aligned} \quad (9.2.9)$$

Se linealiza eliminando los términos de mayor orden quedando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\varepsilon}_1 + [(I_3 - I_2)\Omega - h_s]\varepsilon_3 &= 0 \\ I_2\dot{\varepsilon}_2 &= 0 \\ I_3\dot{\varepsilon}_3 + [(I_2 - I_1)\Omega + h_s]\varepsilon_1 &= 0 \end{aligned} \quad (9.2.10)$$

Se observa que  $\varepsilon_2(t) = const$ , y que el eje-2 de spin está desacoplado de los otros dos ejes. Esto concluye con que  $\varepsilon_2(t)$  es estable.

El análisis de estabilidad para los ejes 1 y 3 es mas complejo, dependiendo de si se considera un Dual Spinner o un Single Spinner.

Para una plataforma que gira se define:

$$\lambda = I_2 + \frac{h_s}{\Omega} \quad (9.2.11)$$

las ecuaciones de movimiento de ambos casos son iguales pero sustituyendo  $\lambda$  para el Dual Spinner:

Dualspinner	Singlespinner
$\dot{\varepsilon}_1 + \frac{(I_3 - \lambda)\Omega}{I_1} \mathcal{E}_3 = 0$	$\dot{\varepsilon}_1 + \frac{(I_3 - I_2)\Omega}{I_1} \mathcal{E}_3 = 0$
$\dot{\varepsilon}_3 + \frac{(\lambda - I_1)\Omega}{I_3} \mathcal{E}_1 = 0$	$\dot{\varepsilon}_3 + \frac{(I_2 - I_1)\Omega}{I_3} \mathcal{E}_1 = 0$

(9.2.12)

Esto indica que la presencia de una rueda de momento  $h_s$  aumenta el momento de inercia  $I_2$ , la estabilidad solo se cumple si:

$$\begin{array}{ll} \lambda > I_3 & \text{and} \\ & \text{or} \\ \lambda < I_3 & \text{and} \end{array} \lambda > I_1 \quad (9.2.13)$$

(Ver ejemplo práctico de la página 16 :))

### 9.3. Environmental disturbance torques

Los torques debido a perturbaciones mas relevantes son:

- Torque aerodinámico
- Torque debido a la presión de la radiación solar
- Torque magnético
- Torque por gradiente gravitatorio

Los torques aerodinámicos y gravitatorios tienen mas influencia en órbitas LEO y los torques debido a la presión de la radiación solar en GEO.

### 9.4. Gravity-gradient stabilization

Un cuerpo situado en un campo gravitatorio no uniforme puede tener el centro de gravedad desplazado de su centro de masas, esto da lugar a un par de torsión gravitatorio.

El par depende de la orientación del cuerpo y la forma del mismo.

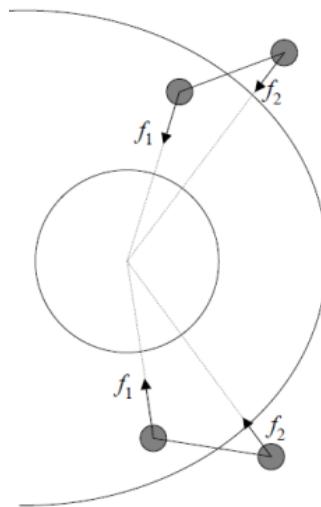


Figura 9.4.1: Gravity Torque

La atracción gravitatoria afecta a cada diferencial de masa con una dirección y magnitud distinta.

El Torque por gradiente gravitatorio se escribe como:

$$\dot{\mathbf{h}} = \frac{3\mu}{r^5} \mathbf{r} \times \mathbf{I}\mathbf{r} \quad (9.4.1)$$

Con ello se obtiene la ecuación de las ecuaciones de Euler:

$$\mathbf{I}\dot{\omega} + \omega \times \mathbf{I}\omega = \frac{3\mu}{r^5} \mathbf{r} \times \mathbf{I}\mathbf{r} \quad (9.4.2)$$

Desarrollándose para los ejes principales del cuerpo, como en los otros casos:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= T_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= T_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= T_3 \\ \mathbf{T}_g &= \frac{3\mu}{r^5} \mathbf{r} \times \mathbf{I}\mathbf{r} \end{aligned} \quad (9.4.3)$$

#### 9.4.1. Reference frames

Se utilizan tres sistemas de referencia distintos:

- Inercial centrado en la tierra (sin rotar con la tierra)

- Centrado en el centro de masas del S/C y rota en su propia órbita (1-Roll, 2-Pitch, 3-Yaw)
- Body frame (similar al anterior)

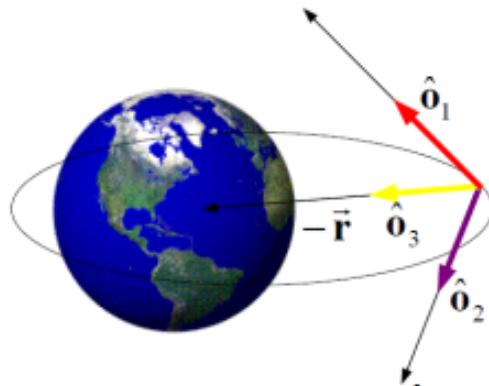


Figura 9.4.2: Orbiting Frame

#### 9.4.2. Órbita circular

Este caso simplificado se considera una velocidad angular respecto al sistema de referencia inercial:

$$\omega_{oi} = [0 \quad -\omega \quad 0]^T \quad (9.4.4)$$

El periodo orbital y el periodo orbital son dadas por la tercera ley de Kepler, la posición del S/C viene dada por el radio de la órbita:

$$\mathbf{R}_o = [0 \quad 0 \quad -R]^T \quad (9.4.5)$$

La matriz de rotación Body-Orbit se escribe como:

$$\mathbf{C}_{bo}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \mathbf{C}_1(\theta_1)\mathbf{C}_2(\theta_2)\mathbf{C}_3(\theta_3) = \begin{bmatrix} c_2c_3 & c_2s_3 & -s_2 \\ s_1s_2c_3 - c_1s_3 & s_1s_2s_3 + c_1c_3 & s_1c_2 \\ c_1s_2c_3 + s_1s_3 & c_1s_2s_3 - s_1c_3 & c_1c_2 \end{bmatrix} \quad (9.4.6)$$

Si se simplifica considerando que los ángulos de desplazamiento de la referencia orbital son ángulos muy pequeños:

$$\mathbf{0} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T \quad (9.4.7)$$

De esta forma, la matriz de rotación simplificada resulta de esta manera:

$$\mathbf{C}_{bo} = \begin{bmatrix} 1 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 1 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.4.8)$$

Para expresar el Torque  $T_g$  en la ejes cuerpo:

$$\mathbf{T}_g = \frac{3\mu}{R^5} \mathbf{R} \times \mathbf{IR} \quad (9.4.9)$$

Con el vector posición de la órbita circular en ejes orbita, con la matriz de giro se obtiene el vector posición en ejes cuerpo.

$$\mathbf{R}_b = \mathbf{C}_{bo} \mathbf{R}_o = \begin{bmatrix} 1 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 1 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2 R \\ -\theta_1 R \\ -R \end{bmatrix} \quad (9.4.10)$$

Conocido el vector posición en ejes cuerpo se obtiene directamente  $T_g$ .

$$\mathbf{T}_g = \frac{3\mu}{R^5} \mathbf{R}_b \times \mathbf{IR}_b = \frac{3\mu}{R^5} \begin{bmatrix} 0 & R & -\theta_1 R \\ -R & 0 & \theta_2 R \\ \theta_1 R & -\theta_2 R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 R \\ -\theta_1 R \\ -R \end{bmatrix} = \frac{3\mu}{R^5} \begin{bmatrix} (I_3 - I_2) R^2 \theta_1 \\ (I_3 - I_1) R^2 \theta_2 \\ (I_1 - I_2) R^2 \theta_2 \theta_1 \end{bmatrix} \quad (9.4.11)$$

Simplificando y eliminando términos de segundo orden  $\theta_i \theta_j$  y sustituyendo  $\omega^2 = \frac{\mu}{R^3}$ , se obtiene el Torque por gradiente gravitacional (para pequeños ángulos):

$$\mathbf{T}_g = 3\omega^2 \begin{bmatrix} (I_3 - I_2) \theta_1 \\ (I_3 - I_1) \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.4.12)$$

La velocidad angular en ejes cuerpo se descompone en dos términos:

$$\omega_{bi} = \omega_{bo} + \omega_{oi} \quad (9.4.13)$$

Siendo  $\omega_{bo}$  la velocidad angular del cuerpo respecto la órbita y  $\omega_{oi}$  la velocidad angular de eje orbital respecto los ejes iniciales.

$$\omega_{bo} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (9.4.14)$$

Al asumirse ángulos pequeños entre ejes órbita y ejes cuerpo:

$$\omega_{bo} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (9.4.15)$$

$\omega_{oi}$  ya es conocida al definir la órbita circular, conocidas ambas velocidades angulares, se obtiene  $\omega_{bi}$ :

$$\omega_{bi} = \omega_{bo} + \omega_{oi} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 1 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 - \omega\theta_3 \\ \dot{\theta}_2 - \omega \\ \dot{\theta}_3 + \omega\theta_1 \end{bmatrix} \quad (9.4.16)$$

Ahora que se conocen tanto  $\omega_{bi}$  como  $T_g$ , se puede sustituir en las Ecuaciones de Euler, obteniendo la Ecuación dinámica del gradiente de gravedad:

$$\mathbf{I}\dot{\omega} + \omega \times \mathbf{I}\omega = \frac{3\mu}{R^5} \mathbf{R} \times \mathbf{I}\mathbf{R}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 - \omega\dot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 + \omega\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 - \omega\theta_3 \\ \dot{\theta}_2 - \omega \\ \dot{\theta}_3 + \omega\theta_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 - \omega\theta_3 \\ \dot{\theta}_2 - \omega \\ \dot{\theta}_3 + \omega\theta_1 \end{bmatrix} = 3\omega^2 \begin{bmatrix} ((I_3 - I_2)\theta_1 \\ ((I_3 - I_1)\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.4.17)$$

El rabilo de arriba se linealiza eliminando los términos de orden dos consiguiendo la siguiente simplificación:

$$\begin{aligned} I_1\ddot{\theta}_1 - [(I_1 - I_2 + I_3)\omega]\dot{\theta}_3 + [4\omega^2(I_2 - I_3)]\theta_1 &= 0 \\ I_2\ddot{\theta}_2 + [3\omega^2(I_1 - I_3)]\theta_2 &= 0 \\ I_3\ddot{\theta}_3 - [(I_1 - I_2 + I_3)\omega]\dot{\theta}_1 + [\omega^2(I_2 - I_1)]\theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (9.4.18)$$

Recordamos que para llegar hasta aquí se ha supuesto ángulos pequeños, porque si no no lo resuelve nadie.

### 9.4.3. Stability analysis

El "Pitch" Eje – 2, como se puede ver en el sistema de ecuaciones anterior, está desacoplado ya que no tiene términos que tenga en cuenta los otros dos ejes.

$$\ddot{\theta}_2 - \lambda^2\theta_2 = 0 \quad \lambda^2 = 3\omega^2 \frac{I_3 - I_1}{I_2} \quad (9.4.19)$$

se obtienen 3 casos dependiendo de si el término  $\lambda^2$  es positivo o negativo:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t} & \lambda^2 > 0 \\ \theta(t) &= A + Bt & \lambda^2 = 0 \\ \theta(t) &= Ae^{i\lambda t} + Be^{-i\lambda t} & \lambda^2 < 0 \end{aligned} \quad (9.4.20)$$

- El primer caso se da cuando  $I_3 > I_2$  y es una solución que crece exponencialmente en el tiempo (Inestable).
- El segundo caso la solución es inestable, la solución tiene un crecimiento lineal con el tiempo cuando  $I_3 = I_2$
- El tercer caso es una solución oscilante (Estable)

Por tanto el "pitch motion" solo puede ser estable si  $I_1 > I_3$ .

Para los Ejes 1 y 3 (Roll & Yaw) se chequea las condiciones de estabilidad partiendo de:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 - [(I_1 - I_2 + I_3)\omega] \dot{\theta}_3 + [4\omega^2(I_2 - I_3)]\theta_1 &= 0 \\ I_3 \ddot{\theta}_3 - [(I_1 - I_2 + I_3)\omega] \dot{\theta}_1 + [\omega^2(I_2 - I_1)]\theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (9.4.21)$$

Se buscan soluciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= C_1 e^{\lambda t} \\ \theta_3(t) &= C_3 e^{\lambda t} \end{aligned} \quad (9.4.22)$$

Asumiendo dicha solución y incluyendo el término  $\lambda^2$  se obtiene la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} I_1 \lambda^2 + [4\omega^2(I_2 - I_3)] & -[(I_1 - I_2 + I_3)\omega]\lambda \\ [(I_1 - I_2 + I_3)\omega]\lambda & I_3 \lambda^2 + [\omega^2(I_2 - I_1)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.4.23)$$

La ecuación característica de esta matriz es un polinomio de  $\lambda$  de orden 4.

$$\lambda^4 + (1 + 3k_1 + k_1 k_3)\lambda^2 \omega^2 + 4k_1 k_3 \omega^4 = 0 \quad (9.4.24)$$

Siendo  $k_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1}$   $k_3 = \frac{I_2 - I_1}{I_3}$ , para resolver se añaden otras definiciones como  $s = \frac{\lambda^2}{\omega^2}$   $p = 1 + 3k_1 + k_1 k_3$   $q = 4k_1 k_3$ .

Con esto, la ecuación característica pasa a ser cuadrática en s:

$$s^2 + ps + q = 0 \quad (9.4.25)$$

Se chequean las soluciones posibles para s, si tienen parte real positiva, estas soluciones serán inestables.

Existen tres condiciones para que el término s sea negativo:

- $p^2 - 4q > 0$
- $p > 0$
- $q > 0$

Siendo  $p = 1 + 3K_1 + k_1k_3$  y  $q = 4k_1k_3$ . Se obtienen las siguientes conclusiones:

Se necesita que  $k_1 > 0$  y que  $k_3 > 0$ . Esto equivale a decir, por definición, que  $I_2 > I_3$  y que  $I_2 > I_1$  para que Roll-Yaw sean estables. Si se añade la condición anterior para la estabilidad de Pitch ( $I_1 > I_3$ ) se concluye con que la estabilidad completa se consigue para:

$$I_2 > I_1 > I_3 \quad (9.4.26)$$

Resumiendo, con la condición de arriba el satélite es estable frente al gradiente gravitacional, esta condición también sirve para órbitas no circulares pero con algunos cambios en las constantes.

Para evitar los movimientos pendulares frente a perturbaciones es necesario un damping. Un ejemplo sería el Liquid dumper, que consigue disipar energía mediante los efectos viscosos de un fluido que fluye por un tubo.

Como curiosidad decir que una de las razones por la cual la luna siempre muestra la misma cara a la tierra es por este gradiente sumando que la luna está orientada de forma que su Eje-3 (Yaw) es el propio eje de giro de la Luna, quedando esta estabilizada.  $I_3$  es el más pequeño de todos y esto se ve en la elongación de la luna en esta dirección.

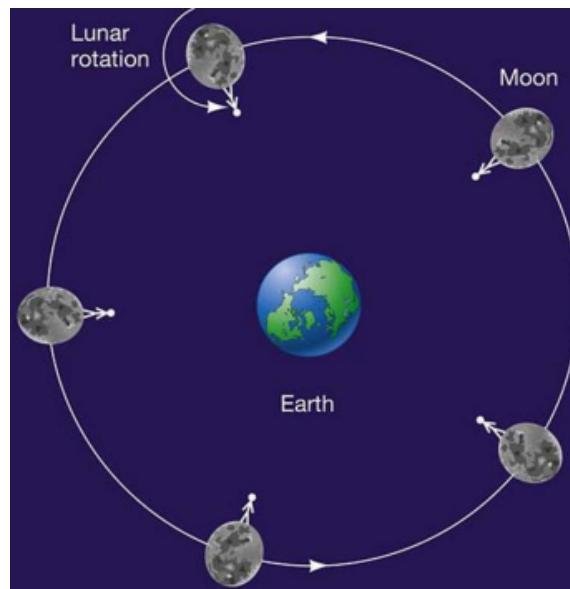


Figura 9.4.3: Moon Stabilization

## 9.5. Three axis stabilization

La estabilización en tres ejes se requiere un control de actitud activo, no como en el de dos ejes, donde bastaba con un sistema pasivo.

Esta actitud se mantiene con el uso de ruedas o giroscopios, un ejemplo sería un cuerpo cuya antena gira completamente en una órbita para seguir apuntando a nadir, a su vez los paneles rotan para apuntar al sol, al menos uno de estos ejes necesita de forma activa ser controlado.

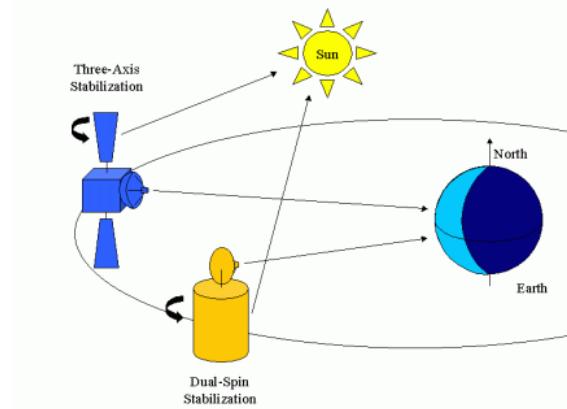


Figura 9.5.1: Three-Axis Stabilization

Algunos ejemplos de estos controles de actitud pueden ser los satélites de comunicación en GEO.

## 9.6. Summary

- Spin stabilization (control pasivo). Si existe spin, el ángulo frente a una perturbación aumenta linealmente en el tiempo. Si no hay spin, aumenta de forma cuadrática
- Dual-Spin stabilization (control pasivo) si el momento  $H_s$  es lo suficientemente grande se pueden hacer estables los ejes de spin intermedios.
- Gravity-gradient stabilization (control pasivo). Se consigue cuando  $I_2 > I_1 > I_3$
- Three axis stabilization (control activo)



# Capítulo 10

## Attitude Control

### 10.1. Formulación matemática

El objetivo actual es formular el problema de control de actitud con unos ejes cuerpo fijos en un marco inicialmente fijo. Para ello, se asume una secuencia de angulos de Euler 3-2-1 en ejes cuerpo.

Para ello, se emplearan ecuaciones no lineales de cinemática y dinámica:

$$\text{Cinemática} \quad \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (10.1.1)$$

$$\begin{aligned} \text{Dinámica} \quad I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= T_{1c} + T_{1d} \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= T_{2c} + T_{2d} \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 &= T_{3c} + T_{3d} \end{aligned} \quad (10.1.2)$$

Donde se ha dividido el momento en 2 componentes,  $T_c$ , el momento de control, esto es, el aplicado por los actuadores, y  $T_d$ , el momento generado por las perturbaciones.

Como las Equation 10.1.1 y 10.1.2 son no lineales, el primer paso será linealizarlas. Para ello, se asumen ángulos muy pequeños, pudiendo despreciarse así los términos de segundo orden:

$$\text{Cinemática} \quad \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (10.1.3)$$

$$\begin{aligned} \text{Dinámica} \quad I_1 \ddot{\theta}_1 &= T_{1c} + T_{1d} \\ I_2 \ddot{\theta}_2 &= T_{2c} + T_{2d} \\ I_3 \ddot{\theta}_3 &= T_{3c} + T_{3d}. \end{aligned} \quad (10.1.4)$$

Con ello, las ecuaciones dinámicas quedan desacopladas entre si, por lo que podemos considerarlas por separado,

$$I\ddot{\theta} = T_c + T_d \quad (10.1.5)$$

De ahora en adelante se acuñará la siguiente terminología:

- El sistema que se controla es la **planta**.
- La **planta** se describe con las ecuaciones de actitud  $I\ddot{\theta} = T_c + T_d$ .
- Lo que se desea controlar es el ángulo  $\theta$ .
- Este ángulo  $\theta$  es el **output de la planta**, y se le suele llamar  $y(t) = \theta(t)$ .
- Los actuadores son la forma que tiene el controlador de cambiar la actitud, es decir, son el **input de la planta**, y se le llama  $u(t) = T_c(t)$ .

### 10.1.1. Representación del sistema en la función de transferencia

El diseño del sistema de control está interesado en la respuesta de la salida a condiciones iniciales nulas.

La transformada de Laplace (LT) de  $I\ddot{\theta} = T_c + T_d$  a condiciones iniciales nulas es:

$$Is^2\hat{\theta}(s) = \hat{T}_c(s) + \hat{T}_d(s). \quad (10.1.6)$$

Teniendo en cuenta entonces el input  $U(s) = \hat{T}_c(s)$  y el output  $Y(s) = \hat{\theta}(s)$ , se tiene la siguiente relación:

$$Y(s) = \frac{1}{Is^2} \left( U(s) + \hat{T}_d(s) \right) \quad (10.1.7)$$

donde  $U(s)$  es la entrada al sistema, que no nos interesa estudiar en este caso. Con ello, la función de transferencia  $G(s)$  es la relación entre las funciones de transferencia de salida *output* y de *input*,

$$G(s) \equiv \frac{L(\text{output})}{L(\text{input})} = \frac{Y(s)}{U(s)}|_{\hat{T}_d(s)=0} = \frac{1}{Is^2}, \quad (10.1.8)$$

por lo que  $G(s)$  describelá respuesta del sistema a una entrada dada.

Para sistemas estáticos con una entrada y una salida, esta función de transferencia generalmente es una división de polinomios,

$$G(s) = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_m}{s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n} \quad (10.1.9)$$

siendo  $s$  complejo,  $m \leq n$  y  $a_i, b_i$  coeficientes reales.

Las funciones de transferencia se pueden factorizar:

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}, \quad (10.1.10)$$

donde  $z_i$  son las raíces del polinomio del numerador, llamadas raíces de  $G(s)$ , y  $p_i$  son las raíces del polinomio del denominador, llamadas polos de  $G(s)$ . Estas raíces se obtienen igualando numerador y denominador a 0, y se suelen representar en el plano s en un diagrama de polos-zeros para tener información cualitativa del comportamiento del sistema

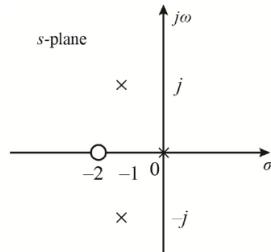


Figura 10.1.1: Diagrama de polos-zeros en el plano-s

De este modo, la función de transferencia es una ecuación algebraica en  $s$  que se deriva de una ecuación diferencial que representa la dinámica del sistema. **Los polos y ceros caracterizan completamente la función de transferencia (y, por lo tanto, el sistema)**, excepto por una constante global  $K$ .

### 10.1.2. Señales de entrada comunes en control

Al analizar y diseñar sistemas de control, es necesario contar con una base de comparación para evaluar el rendimiento de diversos sistemas de control. Esta base puede establecerse especificando señales de entrada de prueba particulares y comparando las respuestas de diferentes sistemas a estas señales de entrada.

Se usan dos clases de señales de entrada para caracterizar el rendimiento de los sistemas de control en retroalimentación:

- Función impulso unitario (función delta de Dirac) (utilizada para caracterizar la respuesta del sistema a una entrada breve e intensa).
- Función escalón unitario (utilizada para caracterizar la respuesta transitoria del sistema ante un cambio repentino).

### 10.1.3. Diagramas de bloques

Un diagrama de bloques de un sistema es una representación de las funciones realizadas por cada componente y del flujo de señales. Ayuda a mostrar el flujo de señales del sistema (a diferencia de la representación matemática abstracta). Así, lo que matemáticamente sería  $Y(s) = G(s)U(s)$ , se correspondería al diagrama de la Figura 10.1.2

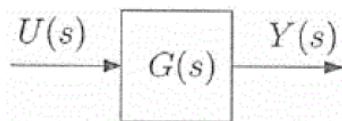


Figura 10.1.2: Diagrama de bloques de una función de transferencia

Además, estos diagramas se pueden disponer de formas distintas para obtener funciones de transferencia diferentes: Supongamos que  $U(s)$  es la salida de otro sistema con función de transferencia  $H(s)$  y entrada  $W(s)$ . **Conexión en serie:**

- $U(s) = H(s)W(s)$
- Tenemos  $Y(s) = G(s)H(s)W(s)$  y la función de transferencia para el sistema combinado es  $G(s)H(s)$ .

Esto significa que los diagramas de bloques representan el flujo de información con bloques de función de transferencia que operan sobre las entradas mediante multiplicación para producir salidas.

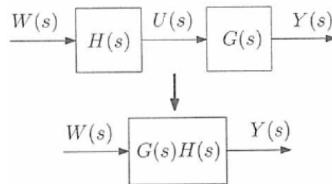


Figura 10.1.3: Diagrama de bloques en serie.

**Conexión en paralelo:** La conexión en paralelo entre  $G(s)$  y  $H(s)$  es

$$Y(s) = G(s)U(s) + H(s)U(s) = (G(s) + H(s))U(s)$$

y la función de transferencia es  $G(s) + H(s)$ .

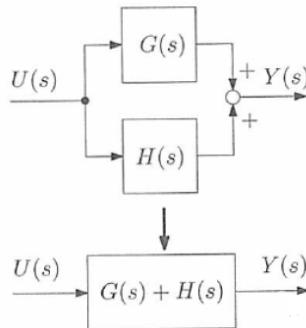


Figura 10.1.4: Diagrama de bloques en paralelo.

Sabiendo el comportamiento de las funciones de transferencia, podemos obtener el comportamiento del sistema de lazo cerrado. La formulación matemática es la siguiente:

Sea  $A(s) = H(s)Y(s)$  la salida de  $H(s)$ . Sea  $B(s) = U(s) - A(s)$ .

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)B(s) \\ &= G(s)[U(s) - A(s)] \\ &= G(s)[U(s) - H(s)Y(s)] \\ &= G(s)U(s) - G(s)H(s)Y(s) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de transferencia para la interconexión de retroalimentación se expresa como:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}U(s)$$

Y por ende, la función de transferencia del sistema completo es la fracción

$$\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

#### 10.1.4. Control con perturbaciones: retroalimentación

En los sistemas de control retroalimentados con perturbaciones el sistema tiene 2 inputs: la señal de referencia  $R(s)$  y la perturbación  $T_d(s)$ . La planta, que representa la dinámica de actitud de una nave espacial, se expresa como

$$Y(s) = G_p(s) \left( U(s) + \hat{T}_d(s) \right), \quad (10.1.11)$$

donde  $G_p(s) = \frac{1}{I_s^2}$  y el subíndice  $p$  indica que es la función de transferencia de la planta.

- La salida  $Y(s) = \Theta(s)$  corresponde a la actitud. - La entrada  $U(s) = T_c(s)$  es el par de control, y  $T_d(s)$  es el par de perturbación.

El objetivo del sistema es lograr que la salida  $y(t)$  (actitud  $\Theta(t)$ ) siga la señal de referencia  $r(t)$  (actitud deseada  $\Theta_d(t)$ ) con la transformada de Laplace  $R(s) = \Theta_d(s)$ .

La entrada de control debe corregir el error de salida, definido como el error en la actitud  $e(t) = \Theta_d(t) - \Theta(t) = r(t) - y(t)$ . En otras palabras, el objetivo es llevar el error  $e(t)$  a cero.

La ley de control se representa mediante la función de transferencia  $G_c(s)$ , siendo  $U(s) = G_c(s)E(s)$ , donde  $E(s)$  es la transformada de Laplace de  $e(t)$ .

Se asume aquí que  $H(s) = 1$ , lo que implica retroalimentación unitaria.

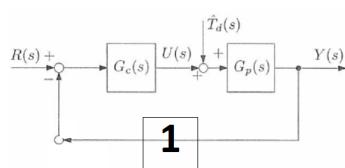


Figura 10.1.5: Diagrama de bloques con perturbaciones.

Como el sistema es lineal, podemos combinar las respuestas a la señal de referencia y a las perturbaciones por separado para obtener la respuesta completa del sistema. Así, siendo  $Y_r(s)$  la respuesta a la señal de referencia  $R(s)$  con  $T_d(s) = 0$ , se tiene

$Y_r(s) = G_p(s)G_c(s)E(s)$  con  $E(s) = R(s) - Y_r(s) \Leftrightarrow Y_r(s) = G_p(s)G_c(s)(R(s) - Y_r(s))$ , luego:

$$Y_r(s) = \frac{G_p(s)G_c(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)}R(s) \quad (10.1.12)$$

Y considerando y  $Y_d(s)$  es la respuesta a la señal de referencia  $T_d(s)$  con  $R(s) = 0$ , se tiene:  $Y_d(s) = G_p(s)(U(s) + \hat{T}_d(s)) = G_p(s)G_c(s)E(s) + G_p(s)\hat{T}_d(s)$  con  $E(s) = -Y_d(s)$ , y con ello:

$$Y_d(s) = \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)}\hat{T}_d(s). \quad (10.1.13)$$

Sumando ahora ambas respuestas, se consigue la respuesta del sistema completa:

$$Y(s) = Y_r(s) + Y_d(s) = \frac{G_p(s)G_c(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)}R(s) + \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)}\hat{T}_d(s). \quad (10.1.14)$$

Ahora se desea hacer que el error sea lo más pequeño posible a pesar de las perturbaciones, esto es, lograr que la salida sea casi igual que la entrada  $Y(s) \approx R(s)$ . Para ello, como  $G_p(s)$  depende de la planta, se ha de modificar  $G_c(s)$ , puesto que es el controlador

$G_p(s)$  es la planta y no puede cambiarse, mientras que  $G_c(s)$  es el controlador y puede modificarse. En esta línea, si se hace que  $|G_c(s)| \rightarrow \infty$  se tiene que:

$$\frac{G_p(s)G_c(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)} \rightarrow 1 \quad \text{y} \quad \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)} \rightarrow 0 \quad (10.1.15)$$

Con esto se consigue un seguimiento perfecto ( $Y_r(s) = R(s)$ ) ya que se elimina la respuesta a ruido.

No obstante, el lazo abierto tiene la desventaja de que el ruido también se ve afectado

### 10.1.5. Leyes de control habituales

**1) Control Proporcional:** La entrada de control es proporcional a la señal de error con  $K_p > 0$ . La función de transferencia de control asociada es  $G_c(s) = K_p$ . La ecuación de movimiento para la planta es un sistema masa-resorte,

$$I\dot{y}(t) = u(t) = K_p e(t) = K_p(r - y(t)), \quad (10.1.16)$$

si la actitud de referencia  $r(t)$  se mantiene constante, el comportamiento del bucle cerrado es un movimiento de actitud oscilatorio no amortiguado.

**2) Control Proporcional-Derivativo:** Se añade amortiguamiento a la entrada de control con  $K_d > 0$  (ganancia derivativa). La función de transferencia de control asociada es  $G_c(s) = K_p + sK_d$ . La ecuación de movimiento de la nave espacial es un sistema masa-resorte-amortiguador,

$$I\ddot{y}(t) = K_p e(t) + K_d \dot{e}(t) = K_p(\tau - y(t)) - K_d \dot{y}(t). \quad (10.1.17)$$

Si la actitud de referencia  $r(t)$  es constante, el comportamiento oscilatorio se reduce debido al término de amortiguamiento.

#### 10.1.6. Requisitos generales del sistema de control

Un sistema de control útil debe cumplir con los siguientes requisitos:

- **Requisito más importante:** El sistema de control debe ser estable.
- El sistema de control debe tener estabilidad relativa, lo que significa que la respuesta debe mostrar amortiguamiento.
- La velocidad de respuesta debe ser razonablemente rápida.
- El sistema de control debe ser capaz de reducir los errores a cero o a algún valor pequeño y tolerable.

#### 10.1.7. Propiedades de los sistemas cerrados

**Estabilidad asintótica** La ley de control debe proporcionar estabilidad asintótica al sistema en bucle cerrado. Supongamos que excitamos el sistema en bucle cerrado (se recuerda:  $Y(s) = \frac{G_p(s)G_c(s)}{1+G_p(s)G_c(s)}R(s)$  with) con un impulso unitario  $r(t) = \delta(t)$ .

La estabilidad asintótica implica que la respuesta al impulso debe tender asintóticamente a cero. Esto significa que los polos de la función de transferencia en bucle cerrado deben tener partes reales negativas.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{G_p(s)G_c(s)}{1+G_p(s)G_c(s)} \right), \quad T(s) = \frac{G_p(s)G_c(s)}{1+G_p(s)G_c(s)}. \quad (10.1.18)$$

**Funcionamiento del sistema de lazo cerrado** Dos componentes son fundamentales para especificar el comportamiento en el dominio del tiempo:

- Comportamiento transitorio ( $y_t$ ): Se refiere al comportamiento que se extingue con el tiempo, es decir,  $t_r$ ,  $t_p$ ,  $t_r$  y  $M_p$ .
- Estado estacionario ( $y_{ss}$ ): Se refiere al comportamiento que se mantiene en el tiempo.

De este modo, sumando las dos componentes, se tiene que la respuesta en tiempo es  $y(t) = y_t(t) + y_{ss}$

El comportamiento transitorio se suele estudiar considerando la respuesta del sistema en lazo cerrado a una orden de paso unitaria. A continuación, se verá con más detalle las características en el dominio del tiempo...

### 10.1.8. Especificación en el dominio del tiempo

Como se comentó antes, el comportamiento transitorio se suele estudiar considerando la respuesta del sistema en lazo cerrado a una orden de paso unitaria, esto es, la señal de referencia viene dada por,  $r(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ .

Además, se aplica una ley de control derivativa que, como la que se vió en el dominio s, que en el dominio del tiempo viene dada por  $u(t) = K_p e(t) + K_d \dot{y}(t)$ . Nótese, que el término derivativo se incluye en la planta ( $G_p(s)$ ), no en el control ( $G_c(s)$ ), como se puede ver en la Figura 10.1.6.

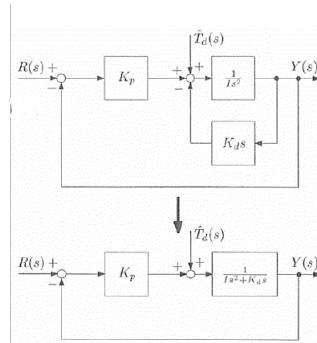


Figura 10.1.6: Diagrama de bloques con ley de control proporcional derivativa.

La función de transferencia de control es  $G_c(s) = K_p$ .

Y si se considera además que las perturbaciones son nulas ( $T_d(s) = 0$  ver Figura 10.1.7), la función de transferencia de la planta se verá aumentada:

$$G_p(s) = \frac{1}{Is^2 + K_d s}. \quad (10.1.19)$$

TIME-DOMAIN-td0

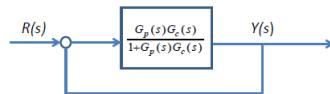


Figura 10.1.7: Diagrama de bloques con ley de control proporcional derivativa con  $T_d(s) = 0$ .

Con todo ello, la respuesta a la entrada de referencia (con  $T_d(s) = 0$ )  $R(s)$  será:

$$Y(s) = T(s)R(s),$$

donde  $T(s)$  es la función de transferencia de lazo cerrado:

$$T(s) = \frac{G_p(s)G_c(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)} = \frac{K_p/(Is^2 + K_d s)}{1 + K_p/(Is^2 + K_d s)} = \frac{(K_p/I)}{s^2 + (K_d/I)s + (K_p/I)}. \quad (10.1.20)$$

Si se definen ahora la frecuencia natural no amortiguada (frecuencia de oscilación del sistema cerrado sin amortiguamiento) como  $\omega_n^2 = \frac{K_p}{I}$ , y el amortiguamiento (resistencia a que cambie la salida del sistema) como  $\zeta\omega_n = \frac{K_d}{I}$ , entonces la función de transferencia se puede reescribir como:

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (10.1.21)$$

Se observa que con una ley de control proporcional derivativa (y eliminando las perturbaciones, lazo cerrado) queda un sistema cerrado de segundo orden, del cual los polos se pueden obtener resolviendo la siguiente ecuación

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad (10.1.22)$$

para la que hay 4 soluciones posibles dependiendo del valor de  $\zeta$ :

1. Sistema sobreamortiguado  $\zeta > 1$ : el sistema tiene 2 polos reales negativos (por el  $\pm$ )
2. Sistema criticamente amortiguado  $\zeta = 1$ : el sistema tiene 2 polos reales iguales (el argumento de la raíz es 0):  $s = -\zeta\omega_n, -\zeta\omega_n$
3. Sistema subamortiguado  $0 < \zeta < 1$ : el sistema tiene 2 polos complejos conjugados (el argumento de la raíz es negativo):  $s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ . Estos polos llevan el sistema a un comportamiento oscilatorio amortiguado de frecuencia  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ , que se denomina frecuencia natural amortiguada.
4. Sistema NO amortiguado:  $\zeta = 0$ : el sistema tiene 2 polos imaginarios puros (el primer término es nulo):  $s = \pm j\omega_n$

El efecto que tiene el valor de  $\zeta$  sobre el comportamiento de la respuesta se puede ver en la Figura 10.1.8.

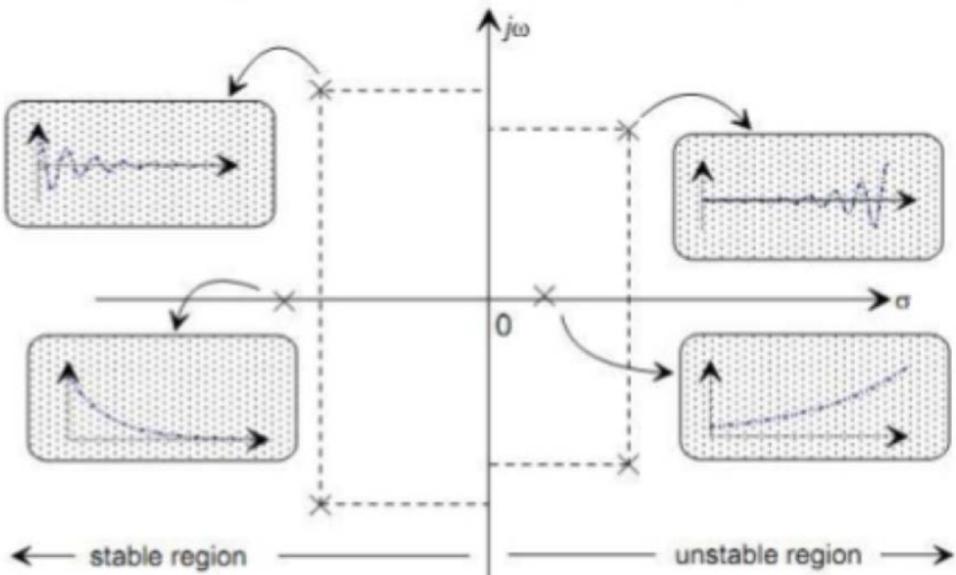


Figura 10.1.8: Efecto de la situación de los polos en el diagrama de polos-zeros

Para las 4 soluciones, al ratio de crecimiento/amortiguamiento lo marca la parte real del polo, mientras que la frecuencia de oscilación lo determina la parte imaginaria del polo.

La respuesta subamortiguada es la más habitual, por lo que se verá con más detalle a continuación.

### 10.1.9. Respuesta transitoria a impulso escalón

Se estudia ahora la respuesta a un impulso escalón ( $R(s) = \frac{1}{s}$ ) en el caso de un sistema subamortiguado (por ser la más genérica) ( $0 < \zeta < 1$ ):

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s}. \quad (10.1.23)$$

Desarrollando la fracción, se tiene que,

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} - \frac{\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (10.1.24)$$

y desarrollando un poco más el denominador,

$$\begin{aligned} s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 &= (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \zeta^2\omega_n^2) + \omega_n^2 - \zeta^2\omega_n^2, \\ &= (s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2), \\ &= (s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2. \end{aligned} \quad (10.1.25)$$

Se consigue tener la respuesta lista para realizar la transformada de Laplace inversa con

fácilidad:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}. \quad (10.1.26)$$

Lo que nos lleva a una respuesta<sup>1</sup> en el dominio del tiempo:

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left[ \cos \omega_d t + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t \right] \quad (10.1.27)$$

Para los sistemas subamortiguados, se han de dar unas definiciones concretas:

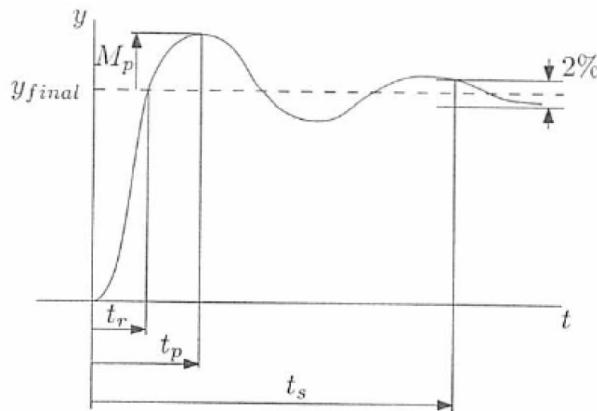


Figura 10.1.9: Respuesta en el dominio del tiempo.

- Tiempo de subida ( $t_r$ ): Tiempo necesario para que la respuesta al escalón alcance por primera vez su valor final.
- Tiempo pico ( $t_p$ ): Tiempo necesario para alcanzar por primera vez la respuesta máxima.
- Overshoot máximo ( $M_p$ ): Máximo sobreímpetu expresado como porcentaje respecto al valor final.
- Tiempo de establecimiento ( $t_s$ ): Tiempo requerido para que la salida alcance y permanezca dentro del 2 % del valor final.

Teniendo en cuenta estas definiciones, se desea encontrar expresiones que definen estos valores:

**Tiempo de subida:** Si  $t = t_r$  en la ecuación de la respuesta  $y$  y suponemos que la respuesta para ese tiempo es  $y(t_r) = 1$ , se tiene que  $\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t_r = 0$ .

Reescribiendo esta expresión se puede obtener la posición del polo<sup>2</sup> segun:

$$\tan \omega_d t_r = \frac{\omega_d}{-\zeta\omega_n} = \frac{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}{-\omega_n \zeta} \rightarrow \omega_d t_r = \pi - \beta, \quad (10.1.28)$$

donde  $\beta$  queda definida en la

<sup>1</sup>Nótese en esta respuesta que si  $\zeta = 0 \rightarrow \omega_d = \omega_n \rightarrow y(t) = 1 - \cos \omega_n t$ , se tiene el sistema no amortiguado.

<sup>2</sup> $s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ ,  $s - \zeta\omega_n$  es la parte real del polo y  $\omega_d$  la imaginaria.

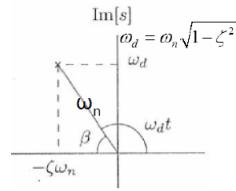


Figura 10.1.10: Localización del polo en el sistema subamortiguado.

Con todo esto se consigue la expresión del tiempo de subida:

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}, \quad \text{con} \quad \beta = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\xi} \right). \quad (10.1.29)$$

Con ello sabemos que hay una relación entre los polos y el tiempo de subida: **Cuanto más alejados del origen estén los polos menor será su tiempo de subida**

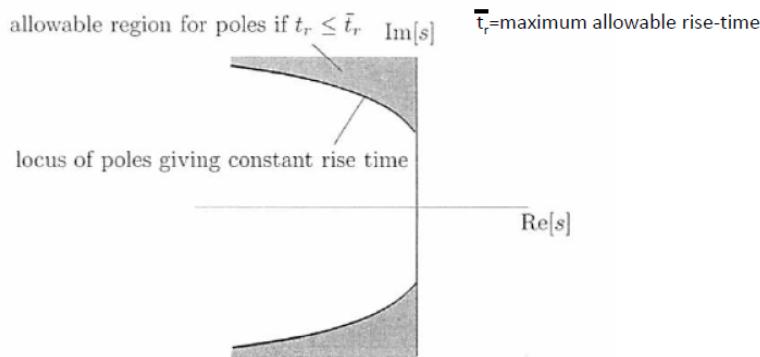


Figure 17.22 Relationship between pole locations and rise-time

Figura 10.1.11: Relación entre la posición del polo y el tiempo de subida.

**Tiempo pico** El tiempo de pico es el punto máximo de la respuesta, por lo que para obtener su expresión, se deriva la respuesta respecto al tiempo y se iguala a 0:

$$\frac{dy}{dt} = e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t \left[ \frac{\zeta^2 \omega_n^2}{\omega_d} + \omega_d^2 \right], \quad (10.1.30)$$

con lo que se llega a que el tiempo de pico se dà cuando  $\sin \omega_d t_p = 0$ , ergo cuando  $\omega_d t_p = 0, \pi, \dots, n\pi$ . Luego el primer pico (que es el que resulta interesaante) se tiene para tiempo

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (10.1.31)$$

Nótese que el tiempo pico solo depende de  $\omega_d$  y por tanto de la parte imaginaria del polo, **a mayor sea esta parte, menor será el tiempo**

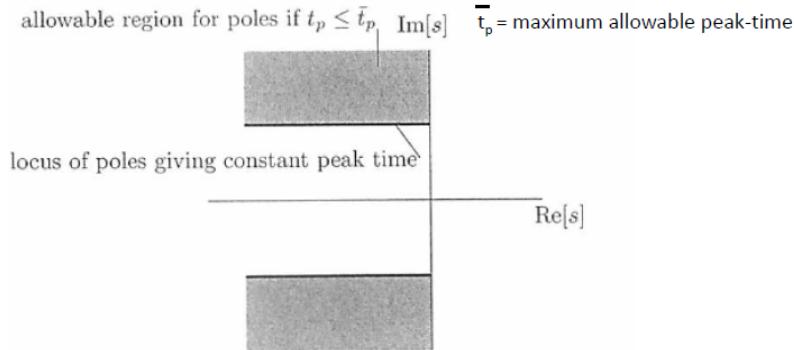


Figura 10.1.12: Relación entre la posición del polo y el tiempo de pico.

**Overshoot máximo** Como el overshoot máximo se da en el tiempo de pico, si metemos el valor obtenido en el tiempo de pico en la expresión de la respuesta:

$$y_p = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left[ \cos \omega_d t_p + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t_p \right], \quad (10.1.32)$$

y como  $\omega_d t_p = pi \rightarrow \cos \omega_d t_p = -1$  and  $\sin \omega_d t_p = 0$ , llegamos a una expresión de overshoot que solo depende del amortiguamiento:

$$M_p = \frac{y_p - 1}{1} \times 100 \% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100 \% \quad (10.1.33)$$

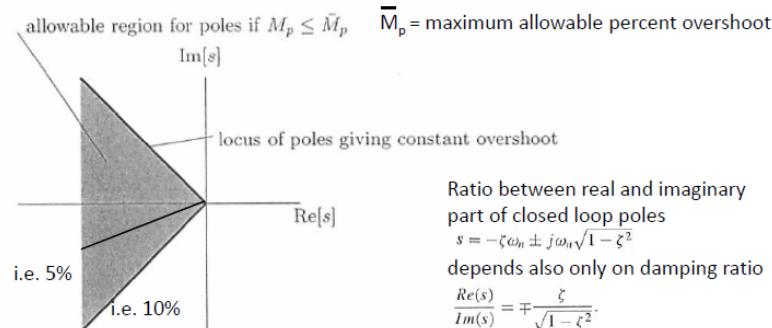


Figura 10.1.13: Relación entre la posición del polo y el overshoot máximo.

### Tiempo de establecimiento ( $t_s$ )

De la ecuación de la respuesta, se tiene que la diferencia entre el valor actual y final de la respuesta es:

$$y(t) - 1 = -e^{-\Sigma \cos r} \left[ \cos \omega_d t + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t \right], \quad (10.1.34)$$

y manipulando un poco la expresión se tiene:

$$y(t) - 1 = -\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \phi). \quad (10.1.35)$$

Así, para obtener el tiempo de establecimiento:

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0,02, \rightarrow t_s = \frac{\ln(0,02\sqrt{1-\zeta^2})}{-\zeta\omega_n} \quad (10.1.36)$$

que para  $0,1 < \zeta < 0,9$  se puede aproximar según  $t_s \approx \frac{4,4}{\zeta\omega_n}$ . Nótese que este valor depende principalmente de la parte real del polo, de manera que **a mas pequeña sea la parte real del polo, menor será el tiempo de establecimiento.**

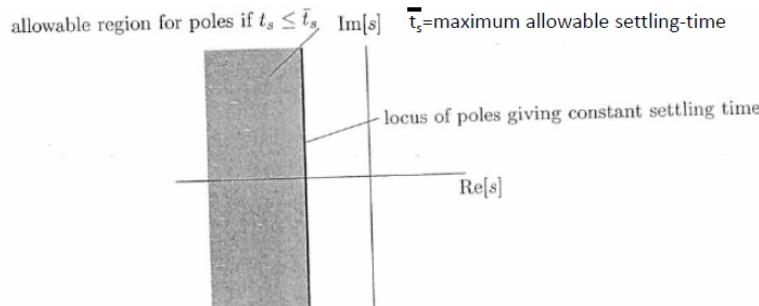


Figure 17.25 Relationship between pole locations and settling time

Figura 10.1.14: Relación entre la posición del polo y el tiempo de establecimiento.

### 10.1.10. Efectos de añadir polos o ceros al sistema

hay dos formas de alterar la respuesta transitoria del sistema: añadir zeros (aumentan la estabilidad generalmente) o añadir polos (suelen empeorar la estabilidad). **Efecto de añadir zeros** Comparando el control proporcional derivativo modificado con el standar se tiene que:

Control PD modificado:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \dot{y}(t) \rightarrow \text{función de transferencia: } T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

No tiene zeros.

Control PD standar:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \dot{e}(t) \rightarrow \text{función de transferencia: } T(s) = \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

tiene zeros en  $s = \zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$ .

Para ambos, los polos son los mismos  $s = \zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$  y la respuesta para es

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left[ \cos \omega_d t - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t \right] \quad \text{con } \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (10.1.37)$$

Nótese que la frecuencia de oscilación  $\omega_d$  y el ratio de amortiguamiento  $\zeta\omega_n$  son iguales porque se obtienen de los polos, pero los coeficientes que multiplican los términos se obtienen con los zeros.

De este modo, los tiempos de respuesta y de pico con el control PD standar son más rápidos que con el control PD modificado.

En general, los zeros lejanos a los polos no tienen un efecto significativo en el comportamiento transitorio. Los ceros cercanos a los polos sí afectan el comportamiento transitorio. Un cero muy cercano a un polo tiende a reducir la contribución de ese polo, ya que casi se produce una cancelación polo-cero en la función de transferencia.

En resumen, el efecto general de la adición de ceros es mejorar la estabilidad.

**Efecto de añadir zeros** La forma general de la función de transferencia en lazo cerrado es:

$$T(s) = K \frac{\prod_{i=1}^{m_i} (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (10.1.38)$$

con  $m \leq n$  y siendo  $z_i$  zeros y  $p_i$  polos. La ley de control tiene estabilidad asintótica si  $Re(p_i) < 0$ . Supongamos polos distintos: forma de expansión en fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{a}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{s - p_i} \quad (10.1.39)$$

La respuesta al escalón en el dominio del tiempo es:

$$y(t) = a + \sum_{i=1}^n b_i e^{p_i t}. \quad (10.1.40)$$

La contribución de cada polo a la respuesta depende del coeficiente asociado  $b_i$  y de la rapidez con que decae (cuán negativo es  $Re(p_i)$ ). Así, los polos más cercanos al eje imaginario (los menos negativos dentro de los negativos) son los dominantes, porque su contribución decrece más despacio.

En resumen, el efecto general de añadir polos es disminuir la estabilidad.

### 10.1.11. Respuesta permanente

Se ha estudiado ya la respuesta transitoria a un impulso escalón (es extrapolable al impulso unitario) y se procede ahora a estudiar el comportamiento que persiste en el tiempo.

El objetivo de la respuesta permanente es que la salida  $y(t)$  coincida con la señal de referencia  $r(t)$ . Si llevamos  $t \rightarrow \infty$  la respuesta transitoria se anula, deseamos que la actitud que tenemos corresponda con la deseada, es decir, que el error  $e(t) = r(t) - y(t)$  sea aproximadamente cero.

Problemas a considerar:

- Que la señal de perturbaciones no se elimine ( $T_d(t)$ ): Pueden causar un error en estado estacionario no nulo.
- Que el sistema de lazo cerrado no sea capaz de seguir la señal de referencia  $r(t)$ .

Teniendo en cuenta el esquema de bloques de lazo cerrado visto anteriormente, sabemos que la respuesta será la suma de la respuesta a la referencia y a las perturbaciones:

$$Y(s) = Y_r(s) + Y_d(s) = \frac{G_p(s)G_c(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)}R(s) + \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)}\hat{T}_d(s) \quad (10.1.41)$$

y como el error es  $E(s) = R(s) + Y(s)$ ,

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_p(s)G_c(s)}R(s) - \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)}\hat{T}_d(s). \quad (10.1.42)$$

Ahora bien, como se comentó antes, cabe la posibilidad de que el sistema no sea capaz de seguir la señal de referencia. Esto nos lleva a preguntarnos: ¿Qué tipo de señales puede seguir sin problema, cuales puede seguir con cierto error permanente y cuales le resulta imposible seguir? La respuesta a esta pregunta nos lleva a **diferentes tipos de sistema**. Para ello antes hemos de definir unas señales típicas para testear, que se pueden ver en la Figura 10.1.15.

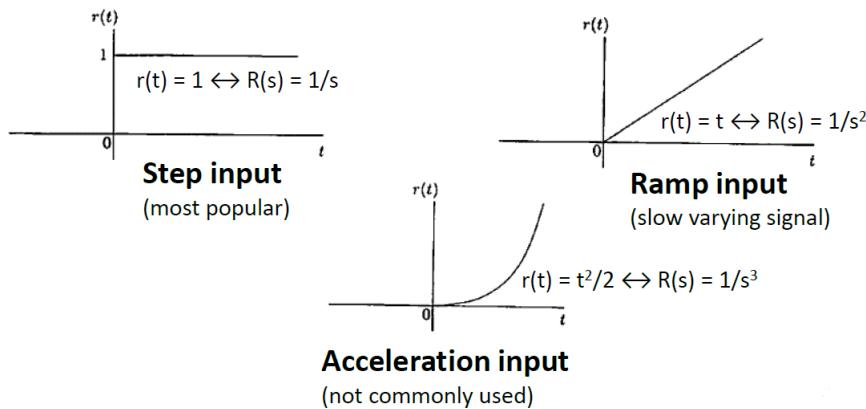


Figura 10.1.15: Señales para el testeo de sistemas

Volviendo a la pregunta de ¿que tipo de señal puede trackear el sistema, si ignoramos la señal de perturbaciones  $T_d(s)$ , la función de transferencia entre la señal de transferencia y la de error es:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_o(s)}R(s) \quad \text{con} \quad G_o(s) = G_p(s)G_c(s), \quad (10.1.43)$$

donde  $G_o$  es la función de transfrencia de lazo abierto, que resulta de multiplicar todas las funciones de transferencia del circuito. Esta función en general se define como:

$$G_o(s) = \bar{K} \frac{(s - z_1) \dots (s - z_m)}{s^N (s - p_1) \dots (s - p_n)}, \quad (10.1.44)$$

que se puede reescribir como,

$$G_o(s) = K \frac{(T_{a1}s + 1) \dots (T_{am}s + 1)}{s^N (T_{b1}s + 1) \dots (T_{bn}s + 1)}, \quad (10.1.45)$$

donde  $K = \bar{K} \frac{(-z_1) \dots (-z_m)}{(-p_1) \dots (-p_n)}$ , y  $T_{a1} = \frac{-1}{z_1} \dots T_{b1} = \frac{-1}{p_1} \dots$

donde  $z_i$ ,  $p_i$  son los zeros y los polos del circuito de lazo abierto. **Nótese que la función de transferencia de lazo abierto tiene N polos en  $s = 0$ , y es esto lo que define el tipo de sistema (si  $N = 0 \rightarrow$  tipo de sistema 0, si  $N = 1 \rightarrow$  tipo de sistema 1, si  $N = 2 \rightarrow$  tipo de sistema 2...)**

Siguiendo con el error, asumiendo un circuito cerrado asintóticamente estable, es decir, la igualdad  $1 + G_o = 0$  solo tiene raíces con parte real negativa, el error del estacionario resulta:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G_o(s)} R(s) \quad (10.1.46)$$

donde se ha aplicado el teorema del valor final.

Estudiaremos ahora el error permanente para distintas señales de entrada, para lo que antes han de definirse ciertas constantes de error:

- Error de escalón: error de posición constante  $K_{sp} = \lim_{s \rightarrow 0} G_o(s)$ .
- Error de rampa: error de velocidad constante  $K_{sv} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_o(s)$ .
- Error de aceleración: error de aceleración constante  $K_{sa} = \lim_{s^2 \rightarrow 0} sG_o(s)$ .

Estas constantes se definen como la habilidad de reducir el error permanente.

Con estas definiciones claras, se analiza a continuación el error permanente para distintas señales de entrada:

**Error permanente a entrada escalón** Por definición:

- Entrada escalón  $r(t) = 1$ ,  $R(s) = \frac{1}{s}$
- Error permanente:  $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G_o(s)} R(s)$
- Constante de error escalón:  $K_{sp} = \lim_{s \rightarrow 0} G_o(s)$ .
- Ganancia de lazo abierto:  $G_o(s) = \bar{K} \frac{(s-z_1)\dots(s-z_m)}{s^N(s-p_1)\dots(s-p_n)}$

Uniendo estas definiciones se tiene la definición de error con entrada escalón:  $e_{ss} = \frac{1}{1 + K_{sp}}$ ,

Haciendo el límite de  $G_o$  cuando  $s \rightarrow 0$ , se llega a 2 posibles soluciones:

- Tipo de sistema 0:  $N = 0$ , no hay polos en  $s$ :  $K_{sp} = \lim_{s \rightarrow 0} G_o(s) = K$ . El error a entrada escalón es finito distinto de 0,  $e_{ss} = \frac{1}{1 + K}$ .
- Tipo de sistema 1:  $N \geq 1$ , hay al menos 1 polo en  $s$ :  $K_{sp} = \lim_{s \rightarrow 0} G_o(s) = \infty$ , el error es nulo, la respuesta permanente será igual a la señal de entrada:  $e_{ss} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$ .

**Error permanente a entrada rampa** Por definición:

- Entrada rampa  $r(t) = t$ ,  $R(s) = \frac{1}{s^2}$
- Error permanente:  $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G_o(s)} R(s)$
- Constante de error escalón:  $K_{sv} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_o(s)$ .
- Ganancia de lazo abierto:  $G_o(s) = \bar{K} \frac{(s-z_1)\dots(s-z_m)}{s^N(s-p_1)\dots(s-p_n)}$

Uniendo estas definiciones se tiene la definición de error con entrada escalón:  $e_{ss} = \frac{1}{K_{sv}}$ ,

Haciendo el límite de  $sG_o$  cuando  $s \rightarrow 0$ , se llega a 3 posibles soluciones:

- Tipo de sistema 0:  $N = 0$ , no hay polos en s:  $K_{sv} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_o(s) = 0$ . El error a entrada escalón es 0,  $e_{ss} = \frac{1}{0} = \infty$ , el sistema no puede replicar la señal de entrada.
- Tipo de sistema 1:  $N = 1$ , hay un solo polo en s:  $K_{sv} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_o(s) = K$ . El error a entrada escalón es finito distinto de 0,  $e_{ss} = \frac{1}{K}$ .
- Tipo de sistema 2:  $N \geq 2$ , hay al menos 2 polos en s:  $K_{sv} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_o(s) = \infty$ , el error es nulo, la respuesta permanente será igual a la señal de entrada:  $e_{ss} = \frac{1}{\infty} = 0$ .

**Error permanente a entrada aceleración** Por definición:

- Entrada rampa  $r(t) = \frac{t^2}{2}$ ,  $R(s) = \frac{1}{s^3}$
- Error permanente:  $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1+G_o(s)} R(s)$
- Constante de error escalón:  $K_{sa} = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_o(s)$ .
- Ganancia de lazo abierto:  $G_o(s) = \bar{K} \frac{(s-z_1)\dots(s-z_m)}{s^N(s-p_1)\dots(s-p_n)}$

Uniendo estas definiciones se tiene la definición de error con entrada escalón:  $e_{ss} = \frac{1}{K_{sa}}$ ,

Haciendo el límite de  $sG_o$  cuando  $s^2 \rightarrow 0$ , se llega a 3 posibles soluciones:

- Tipo de sistema 0:  $N = 0$ , no hay polos en s:  $K_{sa} = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_o(s) = 0$ . El error a entrada escalón es 0,  $e_{ss} = \frac{1}{0} = \infty$ , el sistema no puede replicar la señal de entrada.
- Tipo de sistema 1:  $N = 1$ , hay un solo polo en s pero como hay 2 ceros pas como en  $N = 0$ :  $e_{ss} = \frac{1}{0} = \infty$ , el sistema no puede replicar la señal de entrada.
- Tipo de sistema 2:  $N = 2$ , hay al menos 2 polos en s:  $K_{sa} = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_o(s) = K$ . El error a entrada escalón es finito distinto de 0,  $e_{ss} = \frac{1}{K}$ .
- 
- Tipo de sistema 3:  $N \geq 3$ , hay al menos 3 polos en s:  $K_{sa} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_o(s) = \infty$ , el error es nulo, la respuesta permanente será igual a la señal de entrada:  $e_{ss} = \frac{1}{\infty} = 0$ .

Entonces un error permanente nulo se puede conseguir si la constante de error es infinita y se tiene un  $N$  lo suficientemente grande para cada entrada.

Así, para reducir el error del sistema para una entrada dada se puede

1. Incrementar la ganancia de lazo abierto  $G_o$
2. Aumentar la constante de la ganancia  $K$
3. Aumentar el tipo de sistema añadiendo polos (integradores  $\frac{1}{s}$  a la función de transferencia).

## 10.2. Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una herramienta utilizada para convertir una operación de una variable en el dominio del tiempo real ( $t$ ) en una operación de una variable en el dominio complejo ( $s$ ). Al operar en el dominio complejo transformado en lugar del dominio de tiempo real original, algunos problemas se simplifican bastante:

- Ecuaciones diferenciales lineales, que será lo que nos interese.
- Convoluciones.
- Y otros.

La idea de la transformada de Laplace es pasar de ecuaciones diferenciales a ecuaciones algebraicas, esto es, del dominio tiempo al complejo, ya que porque es mas facil operar en el, y una vez se tiene la solución deseada, volver al dominio del tiempo.

La transformada de Laplace queda definida como:

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (10.2.1)$$

donde  $t$  es el tiempo, la variable real,  $f(t)$  es la función continua (posiblemente con numeros complejos),  $s$  es la variable compleja y  $F(s)$  es la transformada de Laplace de la función  $f(t)$ .

Para obtener la transformada de Laplace se ha de hacer la integral, por lo que para que exista transformada la integral debe converger, esto es, el area bajo la integral ha de ser finita.

Del mismo modo, la transformada inversa consiste en pasar de  $F(s)$  a  $f(t)$ , pero su definición es mucho más complicada, por lo que se suele hacer expandiendo la  $F(t)$  en fracciones y usando tablas donde vienen algunas transformadas típicas (te viene en google).

La transformada de Laplace tiene las siguientes propiedades:

- Combinación Lineal, se puede aplicar el principio de superposición:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-st} (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) dt, \\ &= \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) dt + \beta \int_0^{\infty} e^{-st} f_2(t) dt, \\ &= \alpha \mathcal{L}(f_1(t)) + \beta \mathcal{L}(f_2(t)). \end{aligned} \quad (10.2.2)$$

- Multiplicación por una Exponencial: si la señal en el dominio tiempo se multiplica por una exponencial de  $at$ , la transformada de laplace mueve su dominio de  $s$  a  $s + a$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^{-at} f(t)) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-at} e^{-st} dt, \\ &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s+a)t} dt, \\ &= F(s + a), \end{aligned} \quad (10.2.3)$$

- Escalado del Tiempo: si el dominio tiempo se ve escalado por  $a$ , entonces el dominio complejo se ve escalado por  $\frac{1}{a}$ :

$$\mathcal{L}(f(at)) = \int_0^\infty f(at)e^{-st}dt = \frac{1}{a} \int_0^\infty f(\tau)e^{-(s/a)\tau}d\tau = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (10.2.4)$$

- Transformada de Laplace de una Derivada: la transformada de Laplace de la derivada enésima de una función  $f(t)$  viene dada por:

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} - \dots - \left.\frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}, \quad (10.2.5)$$

es decir, si es la primera derivada:  $\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sF(s) - f(0)$ . Y si fuese la segunda:  $\mathcal{L}\left(\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right) = s^2F(s) - sf(0) - \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0}$

- Transformada de Laplace de una Integral: la transformada de Laplace de una integral en el Dominio del Tiempo de una función  $f(t)$ , es la transformada de la función,  $F(s)$  dividida entre  $s$ :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \frac{F(s)}{s}. \quad (10.2.6)$$

- Convolución: La convolución<sup>3</sup> en el dominio tiempo, pasa a ser la multiplicación en el dominio s:

$$\mathcal{L}(f_1(t) * f_2(t)) = F_1(s)F_2(s). \quad (10.2.7)$$

- Teorema del Valor Final: si la integral de  $\frac{df}{dt}$  es convergente en  $s = 0$ , se tiene que:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t), \quad (10.2.8)$$

luego podemos obtener el valor permanente de la señal  $f(t)$  a través de su transformada  $F(s)$  en  $s = 0$ .

---

<sup>3</sup>Definición de convolución integral:  $f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$ .