



Universidad Politécnica de Madrid

ESTRUCTURAS DE USO ESPACIAL

Análisis de estructuras a baja frecuencia y reducción modal.

Autora:
Inés Arauzo Andrés

Índice

1. Introducción	1
2. Enunciado	1
3. Fundamento teórico	3
3.1. Ensamblaje de las matrices y modelo FEM	3
3.2. Método de Craig-Bampton	3
4. Resultados	5
4.1. Modelo FEM completo	5
4.2. Modelo de síntesis modal y comparación	6
5. Conclusiones	9

Índice de figuras

2.1. Sistema de análisis	1
4.1. Desplazamientos de la viga a $f = 500$ Hz	5
4.2. Velocidad RMS del modelo FEM	6
4.3. Velocidades RMS del modelo FEM y del modelo CB reteniendo todos los modos .	7
4.4. Error relativo entre el modelo FEM y el modelo CB reteniendo todos los modos . .	7
4.5. Velocidades RMS del modelo FEM y del modelo CB reteniendo 24 modos	8
4.6. Error relativo entre el modelo FEM y el modelo CB reteniendo 24 modos	8

1. Introducción

En el presente informe se recogen los resultados y conclusiones extraídos de la realización del Ejercicio de Análisis de estructuras a baja frecuencia y reducción modal de la asignatura de Estructuras de uso espacial del Máster Universitario en Sistemas Espaciales (MUSE) en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio (ETSIAE) de la Universidad Politécnica de Madrid (UPM).

Se reúnen los datos del enunciado y los objetivos del trabajo en la Sección 2, mientras que en la Sección 3 se resumen las hipótesis y modelos aplicados en los cálculos con la intención de representar la física del problema. En la Sección 4 se muestran los resultados obtenidos acordes al planteamiento empleado y en la Sección 5 se evalúan las conclusiones extraídas tanto de los resultados como de la realización del trabajo.

2. Enunciado

El enunciado de este trabajo se encuentra disponible en [enunciado]. Se tiene un sistema formado por dos vigas elásticas de sección circular vibrando a flexión, tal y como se muestra en la Figura 2.1. Ambas vigas se consideran no amortiguadas, y las propiedades quedan expuestas en ??

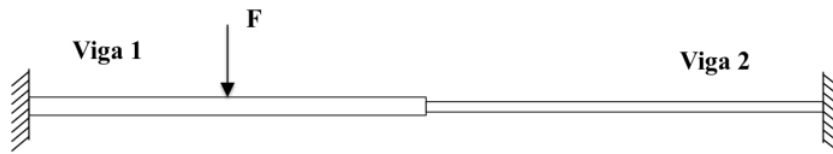


Figura 2.1: Sistema de análisis

Tabla 2.1: Datos sobre las propiedades químicas de los compuestos formados en la cámara de combustión.

Parámetro	Viga 1	Viga 2	Unidades
Módulo elástico	$2,4 \cdot 10^8$	$7,0 \cdot 10^8$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
Coefficiente de Poisson	0.4	0.3	-
Densidad	1400,0	11333	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Longitud	0,5	0,6	m
Radio de la sección transversal	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-4}$	m

Se pretende analizar la respuesta del sistema a una carga puntual de 1 N aplicada en el centro de la Viga 1, comparando los desplazamientos obtenidos con un modelo FEM completo con los obtenidos mediante un modelo reducido. Para la obtención de este último se debe emplear el Método de la Síntesis Modal de Componentes (Craig-Bampton).

Para ello se han de realizar modelos de MSC.Nastran/Patran de ambas vigas y leer sus matrices de inercia y rigidez con MATLAB. Una vez ensambladas las matrices de la manera correcta, se pide:

1. Calcular y representar la velocidad RMS del sistema formado por ambas vigas hasta 2000 Hz

- en banda fina ($\Delta f = 1$ Hz), reteniendo la base modal completa del sistema (modelo FEM completo).
2. Construir un modelo reducido en el que se retengan los modos de cada viga hasta la frecuencia superior de la banda de tercios en la que se cumpla que el número de modos por banda es mayor o igual a 5. Calcular y representar la velocidad RMS del sistema formado por ambas vigas hasta 2000 Hz en banda fina ($\Delta f = 1$ Hz).
 3. Analizar las diferencias entre ambos resultados y explicar si el modelo reducido analizado permite obtener la respuesta de ambas vigas en el intervalo de frecuencias de análisis.

3. Fundamento teórico

Como se ha comentado anteriormente en la Sección 2, los objetivos del presente trabajo son, en primer lugar realizar un modelo de elementos finitos del sistema y posteriormente emplear el método de síntesis de componentes (o Craig-Bampton) para obtener el modelo reducido y finalmente comparar los resultados obtenidos mediante ambos métodos. Como el método de elementos finitos es ampliamente conocido a estas alturas se va a explicar muy brevemente, con el fin de explicar el proceso que se sigue para aplicar el método de Craig-Bampton.

3.1. Ensamblaje de las matrices y modelo FEM

En primer lugar se han creado en el programa MSC.Patran dos vigas distintas con elementos *beam*, modeladas en condiciones libre-libre. De estas se han extraído dos archivos .pch que permiten leer las matrices de inercia y rigidez de cada una de las estructuras. Estas matrices han sido ensambladas de acuerdo a lo que se pedía en el enunciado, guardando los grados de libertad de los elementos frontera al inicio y sumando el aporte de ambas vigas al grado de libertad de la interfaz entre las mismas.

Posteriormente se aplican las condiciones de contorno (se eliminan los grados de libertad de la frontera dado que la viga se considera doblemente empotrada) y partiendo de la ecuación del sistema,

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K}]\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (3.1.1)$$

(donde $[\mathbf{M}]$ es la matriz de inercia, $[\mathbf{K}]$ es la matriz de rigidez, \mathbf{F} el vector de fuerzas aplicadas y \mathbf{q} el vector de desplazamientos que se desea obtener), se procede a obtener las frecuencias propias,

$$|\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}| = 0. \quad (3.1.2)$$

y del mismo modo, de la Ecuación 3.1.1 se pueden obtener los desplazamientos del sistema.

3.2. Método de Craig-Bampton

En este método se emplean los autovalores del problema para reducir el tamaño de un modelo de elementos finitos, en particular cuando dos o más subsistemas están conectados.

Partiendo de la ecuación dinámica del sistema, expuesta en Ecuación 3.1.1 si se reorganizan las matrices de inercia y rigidez según si los grados de libertad pertenecen a la frontera o al interior del sistema, se tiene,

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} M_{bb} & M_{bi} \\ M_{ib} & M_{ii} \end{bmatrix}, [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bi} \\ K_{ib} & K_{ii} \end{bmatrix}. \quad (3.2.1)$$

Donde el subíndice i indica un grado de libertad interior. y el b indica un grado de libertad en la frontera.

Los modos normales del interior se obtienen restringiendo todos los grados de libertad del límite y resolviendo el problema generalizado de valores propios

$$|\mathbf{K}_{ii} - \omega_j^2 \mathbf{M}_{ii}| \{\phi_{ip}\}_j = 0. \quad (3.2.2)$$

De este modo, el conjunto completo de modos normales es

$$\phi_i = \begin{bmatrix} 0_{bi} \\ \Phi_{ii} \end{bmatrix}, \quad (3.2.3)$$

y con ello los modos normalizados del problema quedan,

$$\Phi_{ii}^T M_{ii} \Phi_{ii} = I_{ii} \Phi_{ii}^T K_{ii} \Phi_{ii} = \Lambda_{ii} = \text{diag}(\omega_j^2) \quad (3.2.4)$$

En lo que respecta a los modos frontera se calculan con la matriz de modos restringidos ϕ_s ,

$$\phi_s = \begin{bmatrix} I_{bb} \\ -K_{ii}^{-1} K_{ib} \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

Con todo ello la matriz de Craig Bampton queda:

$$\phi_{CB} = [\phi_s, \phi_i] = \begin{bmatrix} I_{bb} & \mathbf{0} \\ -K_{ii}^{-1} K_{ib} & \phi_{ii} \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

y con esta matriz se pasa el problema al espacio modal,

$$[\phi_{CB}]^T [\mathbf{M}] [\phi_{CB}] \ddot{\eta} + [\phi_{CB}]^T [\mathbf{K}] [\phi_{CB}] \eta = [\phi_{CB}]^T \mathbf{F} \quad (3.2.7)$$

o escrito de forma reducida

$$[\mathbf{M}_{CB}] \ddot{\eta} + [\mathbf{K}_{CB}] \eta = \mathbf{F}_{CB} \quad (3.2.8)$$

Donde η son las coordenadas generalizadas. Obteniendo de la Ecuación 3.2.8 estas coordenadas generalizadas, podemos volver al espacio físico deshaciendo la transformación, recuperando por tanto los desplazamientos del sistema.

La reducción de este modelo se encuentra en la matriz ϕ_{CB} ; como esta matriz está definida con los autovectores del problema organizados por columnas, si se reduce el número de columnas de la matriz decrece de manera importante el coste computacional del problema, pudiendo mantener la información que se desee.

4. Resultados

Como se venía comentando en la Sección 3, se ha obtenido en primer lugar el modelo FEM del sistema completo, para después utilizar el método de síntesis modal o de Craig-Bampton para reducir el coste computacional del sistema. A continuación se procede a mostrar los resultados obtenidos de dicho análisis.

4.1. Modelo FEM completo

En primer lugar, para tener la certeza de que el modelo reflejaba la física del problema que se planteaba, se han graficado los resultados de los desplazamientos q que sufre la viga para una frecuencia dada, que se pueden apreciar en la Figura 4.1. Esto permite garantizar que el problema está correctamente planteado. A partir de los valores del desplazamiento de la viga en el rango de frecuencias solicitado se ha calculado la velocidad de cada punto para las distintas frecuencias $V = q \cdot f$, y con ello la velocidad RMS del sistema en cada frecuencia, como se puede ver en la Ecuación 4.1.1. Los valores que toma la velocidad RMS han sido representados en la Figura 4.2.

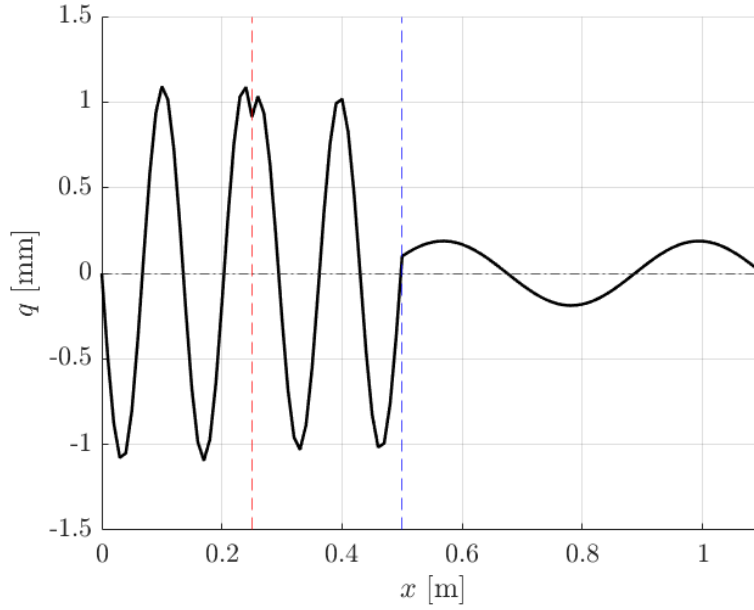


Figura 4.1: Desplazamientos de la viga a $f = 500$ Hz

Asimismo, se han obtenido los modos y frecuencias del sistema completo, de las cuales se pueden ver las 10 primeras en la Tabla 4.1. Se desarrollará más a continuación en la comparativa con el modelo reducido.

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum V_i^2}{N}} \quad (4.1.1)$$

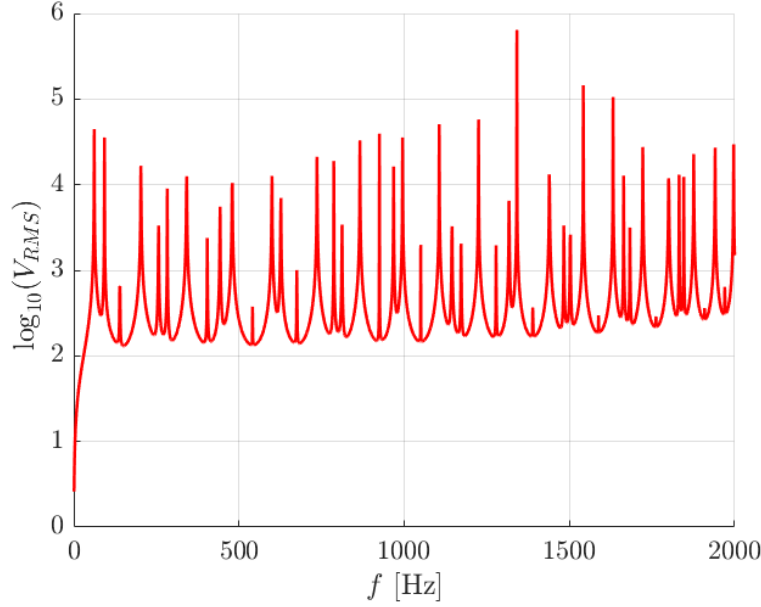


Figura 4.2: Velocidad RMS del modelo FEM

4.2. Modelo de síntesis modal y comparación

A continuación, se ha aplicado el método de Craig-Bampton al sistema completo, con el fin de reducir el problema. Para asegurar que el método había sido correctamente implementado, se han obtenido los resultados reteniendo todos los modos del sistema completo, con lo que se comprueba que la solución es exactamente idéntica a la del FEM completo, como se puede ver en Figura 4.3. Para completa seguridad, en la Figura 4.4, se ha representado el error cometido entre ambos métodos, calculado con la Ecuación 4.2.1, y en ella se aprecia como el este es del orden de 10^{-10} , es decir, el error viene del *round-off* del ordenador.

$$Error = \left| \frac{V_{RMS,FEM} - V_{RMS,CB}}{V_{RMS,FEM}} \right| 100 \quad (4.2.1)$$

Posteriormente, se ha vuelto a lanzar el código, esta vez reteniendo solo el número de modos que se deseaba, llegando a la primera frecuencia que tuviese 5 modos en una banda de tercio. Con este criterio se han retenido 24 modos propios del problema, quedando el modelo tal y como se puede ver en Figura 4.5. Del mismo modo, en la Figura 4.6, se ha representado el error cometido respecto al modelo FEM completo siguiendo la misma expresión que en el caso anterior, aunque en este caso no se ha tomado escala logarítmica.

Las 10 primeras frecuencias naturales del problema aparecen en la Tabla 4.1 calculadas con el modelo FEM completo y con el método de Craig-Bampton reteniendo 24 modos junto al error cometido entre ambas.

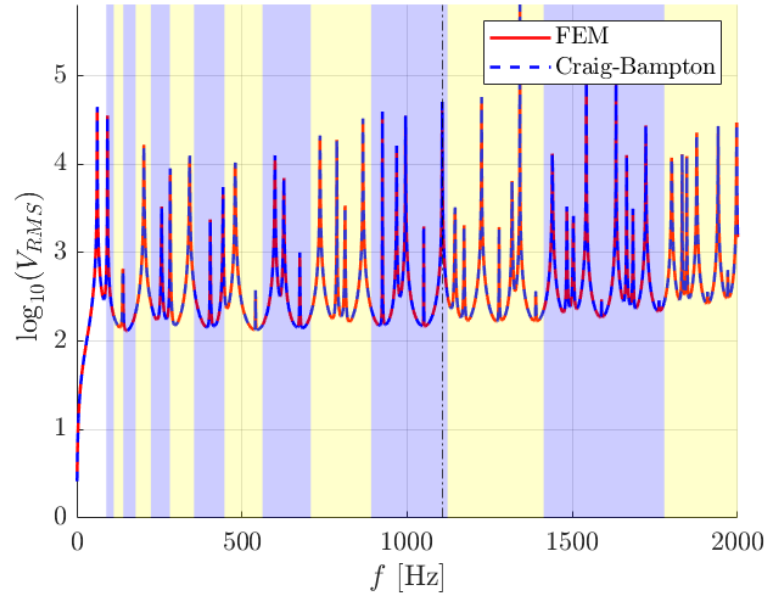


Figura 4.3: Velocidades RMS del modelo FEM y del modelo CB reteniendo todos los modos

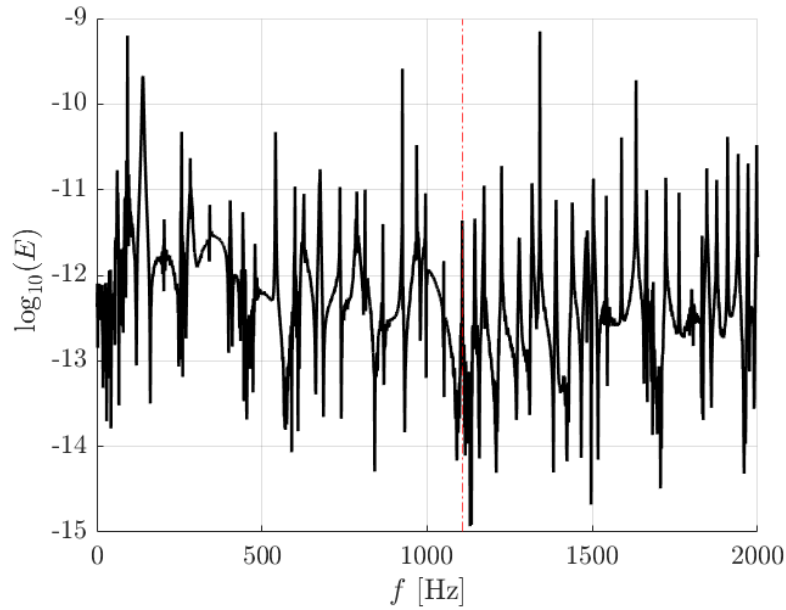


Figura 4.4: Error relativo entre el modelo FEM y el modelo CB reteniendo todos los modos

Tabla 4.1: Primeras frecuencias propias del modelo FEM.

Número de frecuencia	f_{FEM} [Hz]	f_{CB} [Hz]	Error [%]
1	61.8952	61.8952	$-5.1739 \cdot 10^{-11}$
2	92.9390	92.9390	$1.4327 \cdot 10^{-11}$
3	139.5067	139.5067	$-9.4123 \cdot 10^{-12}$
4	203.3138	203.3138	$-3.1174 \cdot 10^{-12}$
5	256.6419	256.6419	$-7.0434 \cdot 10^{-12}$
6	283.1031	283.1031	$-3.0720 \cdot 10^{-12}$
7	341.5800	341.5800	$-4.7095 \cdot 10^{-12}$
8	404.1964	404.1964	$-2.2501 \cdot 10^{-12}$
9	442.6893	442.6893	$-8.9883 \cdot 10^{-13}$
10	479.5287	479.5287	$-3.3191 \cdot 10^{-13}$

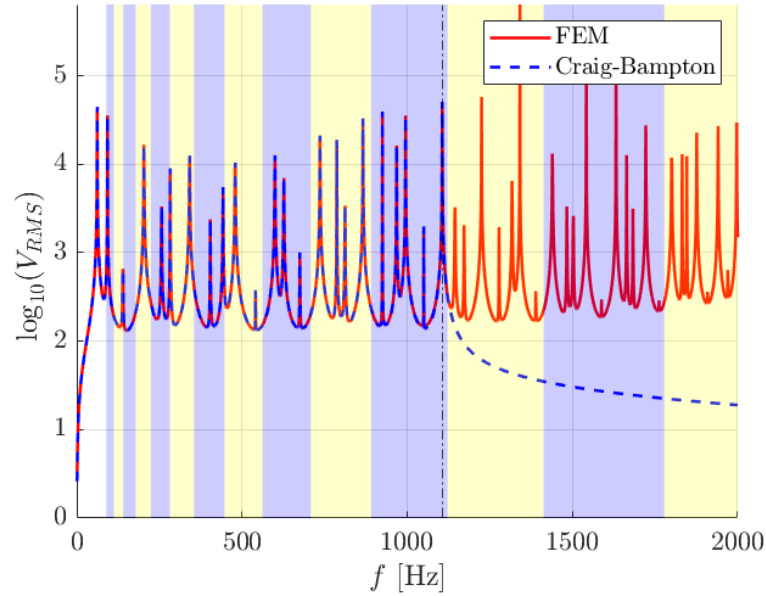


Figura 4.5: Velocidades RMS del modelo FEM y del modelo CB reteniendo 24 modos

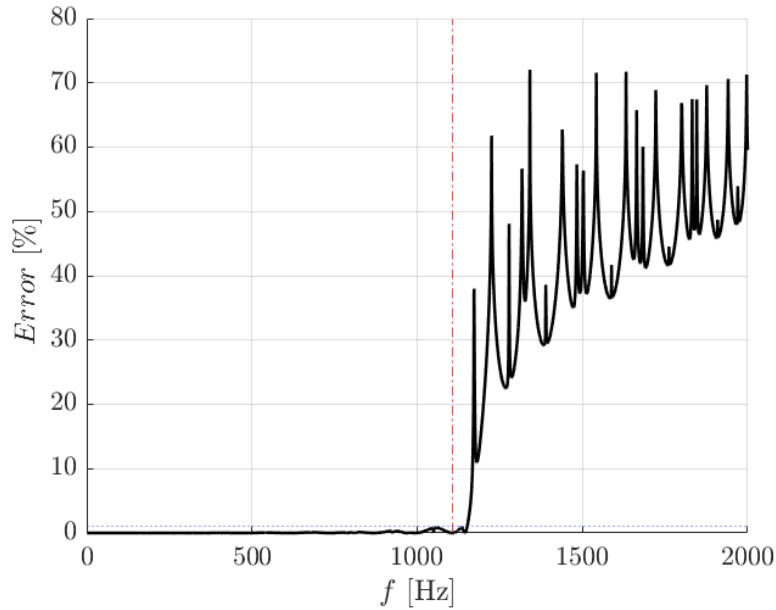


Figura 4.6: Error relativo entre el modelo FEM y el modelo CB reteniendo 24 modos

Finalmente, se concluye que el modelo de Craig Bampton se puede utilizar sin problema hasta la banda de tercios centrada en 1000, que agrupa hasta el modo 24 del problema ($f_o = 1144,5$ Hz). En este sentido, respondiendo a lo solicitado en el tercer apartado, el modelo de síntesis modal no permite obtener la respuesta del sistema en el intervalo de frecuencias de análisis, puesto que solo reproduce adecuadamente el comportamiento hasta los 1144 Hz, siendo el fallo para frecuencias más altas descabellado.

5. Conclusiones

Una vez se ha finalizado el estudio del sistema por ambos métodos, se desea destacar ciertos puntos de interés. En primer lugar, aunque no se ha en el informe no se ha desarrollado el proceso de implementación de las vigas en Patran, si se cree importante comentar la importancia de que la estructura que se modeliza sea coherente con el modelo físico que se está representando. Esto que a priori puede parecer obvio, ha sido la principal fuente de error (y por tanto de tiempo invertido) a la hora de resolver el problema, por lo que se debe tratar con sumo cuidado.

Por otra parte, en lo que respecta al modelo de síntesis de componentes, es siempre muy curioso ver como un desarrollo algebraico tan sencillo como es la descomposición en valores singulares (SVD) puede reducir tanto el coste computacional de problemas numéricos de grandes dimensiones. Es también muy interesante ver como la parte más complicada de este tipo de métodos de reducción por SVD (ya sea el método de Craig Bampton en sistemas estructurales o el POD y DMD en mecánica de fluidos) se encuentra en implementar correctamente las condiciones de contorno del problema.

Por último menciona que el trabajo ha permitido interiorizar y comprobar la sencillez y fiabilidad del método de Craig Bampton en sistemas estructurales, así como profundizar en estructuras como Vibraciones.