



Universidad Politécnica de Madrid

TRANSFERENCIA DE CALOR Y CONTROL TÉRMICO

Ejercicio de conducción de calor.

Autora:
Inés Arauzo Andrés

Índice

1. Introducción	1
2. Enunciado	1
3. Fundamento teórico	3
4. Resultados	5
4.1. Apartado 1	5
4.2. Apartado 2	6
4.3. Apartado 3	7
4.4. Apartado 4	8
4.5. Apartado 5	9
5. Conclusiones	12

Índice de figuras

2.1. Sistema de análisis	1
4.1. Distribución de temperaturas Apartado 4.1.	5
4.2. Distribución de temperaturas Apartado 4.2.	6
4.3. Distribuciones de temperaturas Apartado 4.3.	7
4.4. Distribuciones de temperaturas Apartado 4.3.	8
4.5. Convergencia al estacionario Apartado 4.4.	9
4.6. Perfiles de temperatura calculados en Apartado 4.4 y Apartado 4.3.	9
4.7. Evolución de la diferencia entre las temperaturas del sensor.	10
4.8. Evolución de la temperatura del sensor con el termostato.	10

1. Introducción

En el presente informe se recogen los resultados y conclusiones extraídos de la realización del Ejercicio de Conducción de la asignatura de Transferencia de calor y control térmico del Máster Universitario en Sistemas Espaciales (MUSE) en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio (ETSIAE) de la Universidad Politécnica de Madrid (UPM).

Se reúnen los datos del enunciado y los objetivos del trabajo en la Sección 2, mientras que en la Sección 3 se resumen las hipótesis y modelos aplicados en los cálculos con la intención de representar la física del problema. En la Sección 4 se muestran los resultados obtenidos acordes al planteamiento empleado y en la Sección 5 se evalúan las conclusiones extraídas tanto de los resultados como de la realización del trabajo.

2. Enunciado

El problema de estudio trata de analizar el comportamiento térmico de un panel estructural de un satélite. Este está compuesto por un núcleo de aluminio con forma de panel hexagonal de 15 mm de espesor y dos láminas exteriores de CFRP, cada una de 2.5 mm de espesor, véase la Figura 2.1. En condiciones normales, la temperatura se mantiene dentro de los requisitos debido al entorno y a la disipación de los elementos del panel. No obstante, en situaciones de emergencia, donde el entorno es más frío que los requisitos, se utilizan "heaters" no operativos de *Kapton* con resistencia interna para disipar el calor. Estos "heaters" miden 100x100 mm y pueden disipar 50 W cada uno. El panel está fijado a la estructura del satélite por los lados cortos a una temperatura de 0 °C, mientras que los lados largos se consideran aislados. Las propiedades de los distintos materiales quedan expuestas en Tabla 2.1

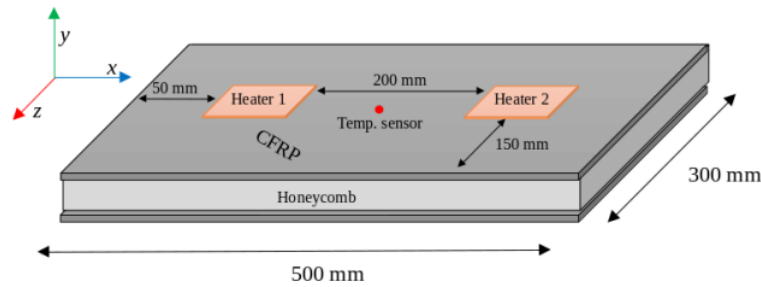


Figura 2.1: Sistema de análisis

Tabla 2.1: Datos sobre las propiedades químicas de los compuestos formados en la cámara de combustión.

Material	$\rho \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$	$C_p \left[\frac{\text{J}}{\text{Kg K}} \right]$	$k_x \left[\frac{\text{W}}{\text{m K}} \right]$	$k_y \left[\frac{\text{W}}{\text{m K}} \right]$	$k_z \left[\frac{\text{W}}{\text{m K}} \right]$
CFRP	1650	930	130	1.0	130
Honeycomb	40	890	0.7	1.5	0.7

Con esta información se pide calcular, tanto de forma numérica como analítica en caso de ser posible, el perfil de temperatura estacionario, la temperatura máxima y la temperatura medida por el sensor para los diferentes casos planteados. Para los siguientes apartados, se supone que los

calentadores se encuentran tanto en la parte superior como en la inferior del panel y se extienden por todo el lado corto, lo que permite asumir una distribución de temperatura unidimensional.

En particular, se consideran los siguientes casos:

1. En el primer caso, se asume que la disipación de calor se distribuye de manera homogénea en todo el panel.
2. En el segundo caso, se coloca la disipación de calor en la zona donde se encuentran los calentadores.

Además, se deben tener en cuenta para los siguientes apartados las pérdidas de calor por radiación, modelando el interior del satélite como un cuerpo negro a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. La emisividad del CFRP es de 0.8.

3. En este caso se linealiza la transferencia de calor por radiación utilizando la temperatura del sensor obtenida en el apartado anterior. Opcionalmente, se resuelve numéricamente el problema estacionario sin linealizar la radiación mediante diferencias finitas.
4. A partir del panel a una temperatura ambiente de $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, se calcula la evolución transitoria del perfil de temperatura y se determina en cuánto tiempo se alcanza el estado estacionario. Se utiliza la fórmula no linealizada para la transferencia de calor por radiación.
5. Los calentadores de supervivencia suelen implementarse con un control de tipo termostato. Si se configura el termostato para que los calentadores disipen calor si la temperatura del sensor es menor de $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ y se apaguen cuando supera los $12\text{ }^{\circ}\text{C}$, se calcula la evolución cíclica de la temperatura del panel y se determina la potencia media consumida.
6. **OPCIONAL.** Se calcula la distribución de temperatura bidimensional (xy) estacionaria en la que se tiene en cuenta la configuración real de los calentadores, que se encuentran situados únicamente en una de las caras del panel. Se compara el perfil de temperaturas de la cara superior e inferior con el perfil obtenido en el apartado 3 o 4.
7. **OPCIONAL.** Se calcula la distribución de temperatura tridimensional estacionaria teniendo en cuenta el tamaño real de los calentadores. Se compara la distribución bidimensional (xy) de la parte central y del borde con la obtenida

3. Fundamento teórico

Tal y como se plantea en la Sección 2, el problema se puede modelizar de forma unidimensional, por lo que la ecuación que se ha de plantear es la del calor 1D,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q(x, t), \quad 0 < x < L_x, \quad t > 0 \quad (3.0.1)$$

donde k es el coeficiente de conductividad térmica del material. Al tratarse en este caso de un material compuesto, habrá que calcular la k como una conductividad equivalente que tenga en cuenta las resistencias térmicas de los distintos materiales,

$$R_{CFRP} = \frac{L_x}{k_{CFRP} L_z h_{CFRP}}, \quad (3.0.2)$$

$$R_{HC} = \frac{L_x}{k_{HC} L_z h_{HC}}, \quad (3.0.3)$$

$$R_{eq} = \left(\frac{2}{R_{CFRP}} + \frac{1}{R_{HC}} \right)^{-1}. \quad (3.0.4)$$

Con todo ello, se tiene,

$$k = \frac{L_x}{R_{eq} L_z h} = 33,025 \frac{\text{W}}{\text{m K}} \quad (3.0.5)$$

con ello, se procede a resolver la ecuación Ecuación 3.0.1 para los distintos supuestos presentados. La resolución analítica se ha realizado para los dos primeros apartados, ambos estacionarios, por lo que $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. En el primer caso las condiciones de contorno son de tipo Dirichlet (temperatura fija), mientras que en el segundo son mixtas, ya que, como veremos a continuación, habrá que imponer que el flujo de calor en ciertas secciones sea continuo.

Por su parte, la resolución numérica se ha llevado a cabo mediante el método de diferencias finitas, con el que se ha discretizado el problema estacionario de la siguiente forma:

$$\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{dx^2} = -\frac{q_i}{k}, \quad (3.0.6)$$

donde i es el punto de la malla en el que se calcula y q es la suma de los calores que actúan en los distintos apartados; el calor emitido por los *heaters* se ha modelizado como:

$$\dot{q}_{heaters} = \frac{Q}{L_z H dx}, \quad (3.0.7)$$

donde Q son los 50 W del enunciado, L_z y H son la longitud lateral del panel y el espesor del mismo respectivamente y dx es el diferencial de panel que se considera. Asimismo, el calor por radiación se ha calculado en primer lugar linealizando con la temperatura del sensor (T_s),

$$\dot{q}_{rad} = 4\epsilon\sigma T_o^3(T_s - T_o), \quad (3.0.8)$$

y también sin linealizar,

$$\dot{q}_{rad} = \varepsilon \sigma (T_i^4 - T_o^4). \quad (3.0.9)$$

Para los apartados en los que se desea calcular la evolución de la ecuación con el tiempo, se ha utilizado la misma Ecuación 3.0.6, pero en este caso iterando n_t veces según va variando el flujo de calor entrante,

$$\frac{T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j}{dx^2} = -\frac{q_i^j}{k}. \quad (3.0.10)$$

4. Resultados

4.1. Apartado 1

En este apartado se pedía calcular la distribución de temperaturas para el caso en el que los *heaters* se extendían en toda la superficie del panel de forma uniforme transmitiendo un calor \dot{q}_h equivalente a las 2 tiras de *heaters*, (100 W) de potencia, por considerarse la modelización 1D. Como se ha comentado en la Sección 3, para el cálculo analítico las condiciones de contorno eran de tipo Dirichlet:

$$T(x = 0) = T(x = L_x) = 0^\circ\text{C}, \quad (4.1.1)$$

Por lo que resolviendo la EDO se llegaba a que

$$T = -\frac{\dot{q}_h}{k} \frac{x^2}{2} + Ax + B, \quad (4.1.2)$$

y sustituyendo los valores se llegaba a que

$$T = -\frac{\dot{q}_h}{k} \frac{x^2}{2} + q_h \frac{L_x}{2} x + T_o, \quad (4.1.3)$$

esto es, se tiene un perfil de temperaturas parabólico, en el que la temperatura máxima se da en el centro de la placa.

Se ha calculado también la distribución resultante por diferencias finitas¹ (con el algoritmo expuesto en Ecuación 3.0.6) y los perfiles resultantes se pueden ver en la Figura 4.1.

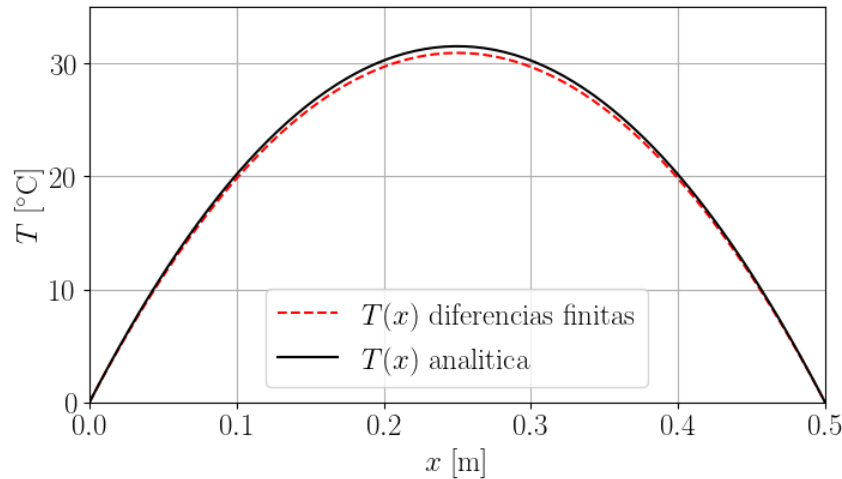


Figura 4.1: Distribución de temperaturas Apartado 4.1.

Asimismo las temperaturas máximas se pueden consultar en la Tabla 4.1.

¹Conviene comentar que todos los modelos de diferencias finitas se han calculado con $n_x = 150 \rightarrow dx = 0,003$ y $n_t = 10000$, $t = 1000s$

Tabla 4.1: Temperaturas máximas según el modelo de la Apartado 4.1.

-	Modelo Analítico	Diferencias Finitas
T_{max}^a [°C]	31.54	30.95
T_s^a [°C]	31.54	30.95

4.2. Apartado 2

Para este segundo apartado se pedía la distribución de calor con los *heaters* ya colocados en sus respectivos sitios. Como el calor entrante no es uniforme a lo largo de la superficie, el cálculo analítico es ligeramente más complicado, ya que se tienen que imponer condiciones de contorno mixtas sobre una función a trozos, ya que la ecuación a resolver será,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, 50] \cup [200, 350] \cup [450, 500] \text{ mm} \quad (4.2.1)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{q(x, t)}{k}, \quad x \in [50, 150] \cup [350, 450] \text{ mm} \quad (4.2.2)$$

y las condiciones de contorno serán

$$T(x = 0) = T(x = L_x) = 0^\circ\text{C}, \quad (4.2.3)$$

$$\frac{\partial T(a^-)}{\partial x} = \frac{\partial T(a^+)}{\partial x}, \quad a = 50, 150, 350 \text{ y } 450 \text{ mm}. \quad (4.2.4)$$

Esta distribución evidentemente dista mucho de ser parabólica, y aplicando el modelo de diferencias finitas, el perfil de temperaturas resultante se obtiene la misma geometría, que se puede ver en Figura 4.2.

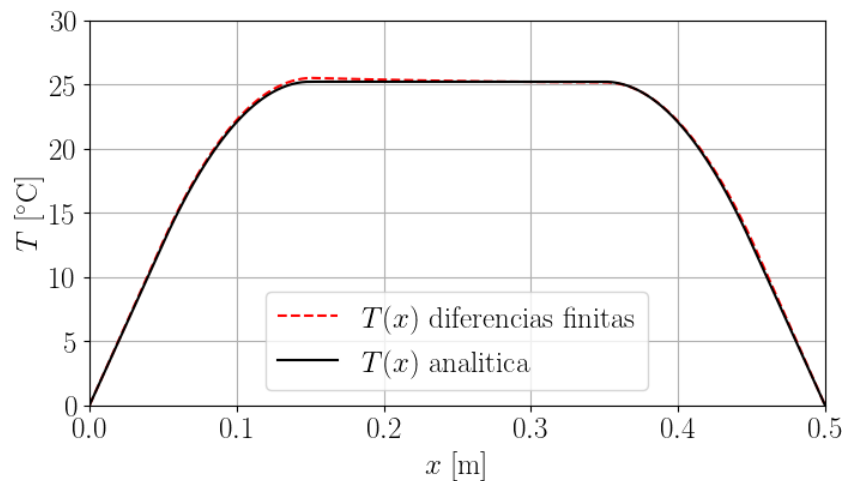


Figura 4.2: Distribución de temperaturas Apartado 4.2.

Del mismo modo, las temperaturas máximas se pueden consultar en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2: Temperaturas máximas según el modelo del Apartado 4.2.

-	Modelo Analítico	Diferencias Finitas
T_{max}^a [°C]	25.23	25.52
T_s^a [°C]	25.23	25.28

En este caso se aprecia que en el tramo central la resolución analítica es constante, ya que al integrar la EDO se obtiene una ecuación lineal, mientras que en el modelo de diferencias finitas hay un leve descenso de la temperatura entre el punto central del sensor y los *heaters*.

4.3. Apartado 3

En esta ocasión se pedía el mismo supuesto que en la Apartado 4.2 pero teniendo en cuenta las pérdidas de calor por radiación al interior del satélite. Para ello, se ha calculado modelizando estas pérdidas linealizando con la temperatura del sensor T_s y sin linealizar, como se explico en Sección 3. Los perfiles de temperatura resultantes se pueden ver en Figura 4.3.

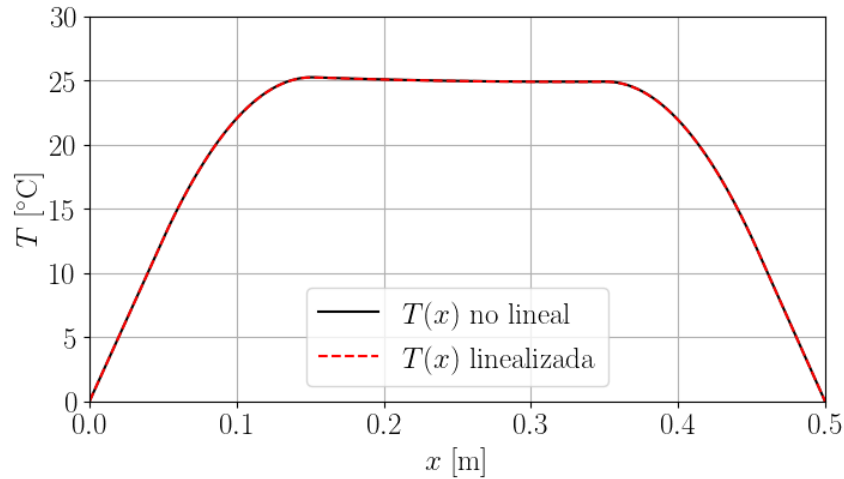


Figura 4.3: Distribuciones de temperaturas Apartado 4.3.

El error relativo entre ambas distribuciones se ha calculado en tanto por 1 como,

$$E = \left| \frac{T_3 - T_{3,nl}}{T_3} \right|, \quad (4.3.1)$$

y como se puede ver en la Figura 4.4, es prácticamente despreciable para cálculos que no necesiten una precisión excesiva.

Las temperaturas máximas y mínimas quedan expuestas en Tabla 4.3

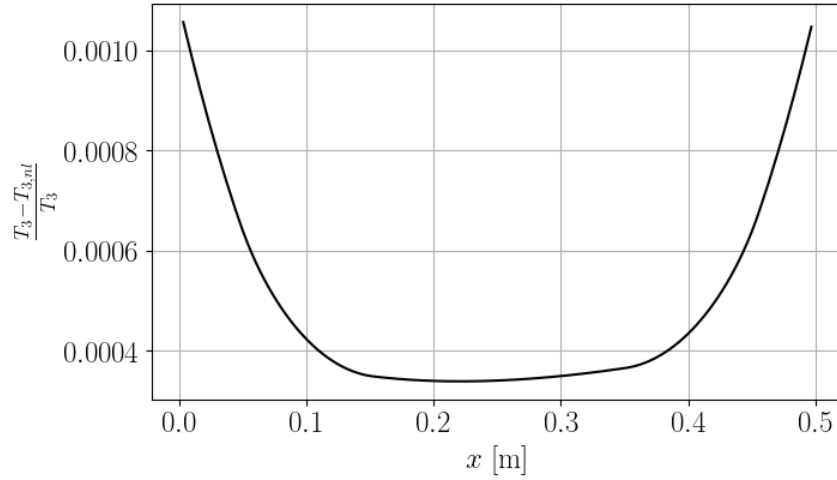


Figura 4.4: Distribuciones de temperaturas Apartado 4.3.

Tabla 4.3: Temperaturas máximas según el modelo del Apartado 4.3.

-	Radiación linealizada	Radiación no linealizada
T_{max}^a [°C]	25.2579	25.2667
T_s^a [°C]	24.9697	24.9783

4.4. Apartado 4

El modelo planteado en este modelo es exactamente el mismo que en el caso anterior, pero en este caso, además del perfil de temperaturas, se pretende analizar la evolución temporal de la temperatura del panel, es decir, se desea conocer el transitorio desde que el panel está a la temperatura del entorno $T_o = 0^\circ\text{C}$ hasta que se llega al estacionario calculado en el apartado anterior con la radiación no linealizada. Para ello, se ha utilizado el algoritmo expuesto en Ecuación 3.0.10, y el proceso de convergencia al estacionario se puede ver en la Figura 4.5.

Si se considera que ha convergido para una diferencia de 0.01°C entre la temperatura del sensor en el perfil calculado en Apartado 4.3 y la del transitorio, el tiempo de convergencia es de 988 s. En la Figura 4.6 se aprecia la diferencia entre el perfil de temperaturas calculado en la última iteración temporal y el calculado en Apartado 4.3, mientras que en la Figura 4.7 se representa como evoluciona el la diferencia entre estas temperaturas calculada como,

$$\left| \frac{T_4 - T_{3,nl}}{T_3} \right|, \quad (4.4.1)$$

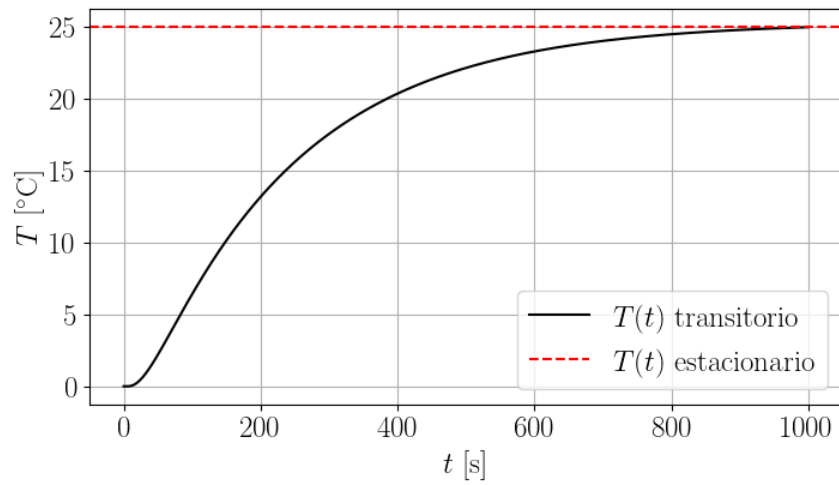


Figura 4.5: Convergencia al estacionario Apartado 4.4.

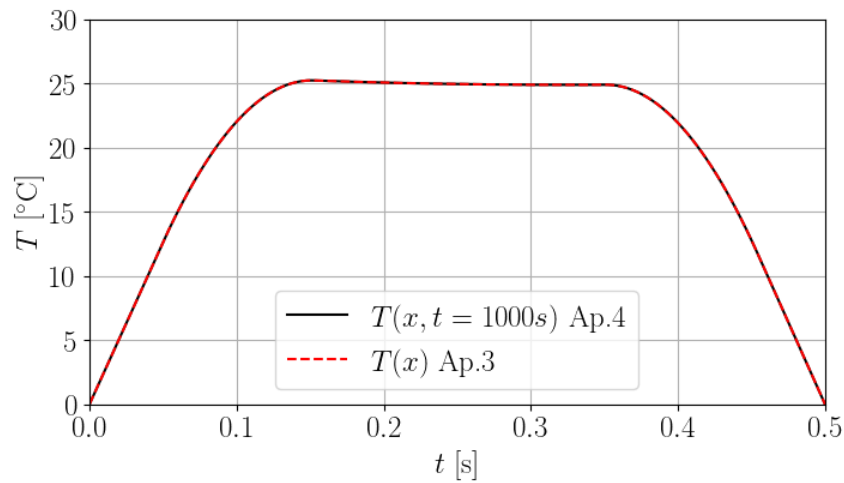


Figura 4.6: Perfiles de temperatura calculados en Apartado 4.4 y Apartado 4.3.

Las temperaturas máximas y del sensor quedan expuestas en Tabla 4.3

Tabla 4.4: Temperaturas máximas y del sensor según el modelo del Apartado 4.4.

-	$t = 1000 \text{ s}$
$T_{max}^a \text{ [}^\circ\text{C]}$	25.2579
$T_s^a \text{ [}^\circ\text{C]}$	24.9697

4.5. Apartado 5

Finalmente, en este apartado se pedía la evolución de la temperatura del panel implementando un control tipo termostato, según el cual hay una temperatura de encendido ($T_{on} = 10^\circ\text{C}$) por

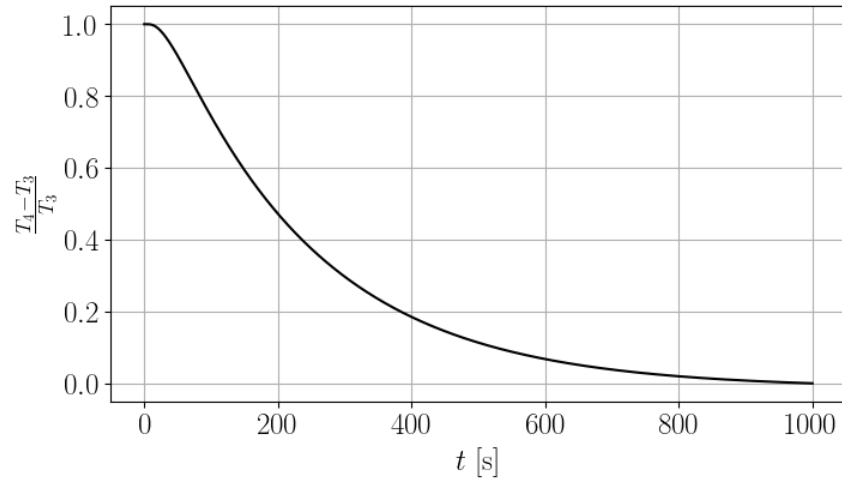


Figura 4.7: Evolución de la diferencia entre las temperaturas del sensor.

debajo de la cual se activan los *heaters*, y una de apagado ($T_{off} = 10^{\circ}\text{C}$), por encima de la cual se apagan. En este caso, se obtiene una evolución cíclica entre temperaturas ligeramente superiores a la de apagado e inferior a la de encendido debido a la inercia térmica del material. Este comportamiento queda representado en Figura 4.8.

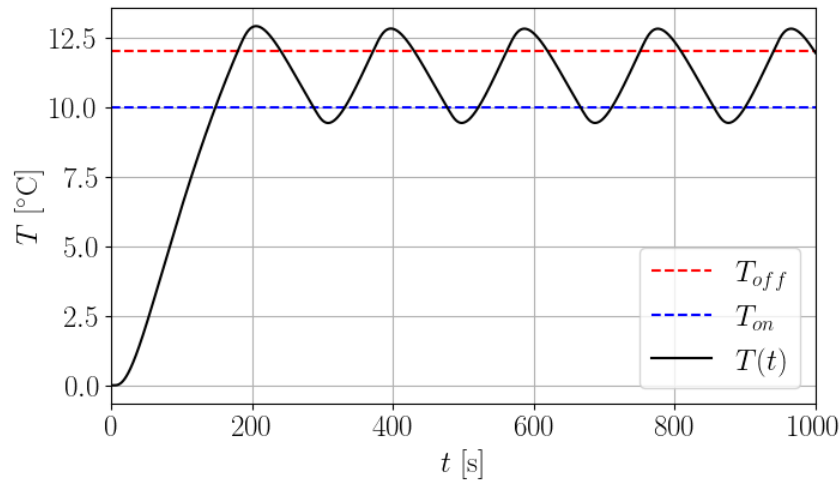


Figura 4.8: Evolución de la temperatura del sensor con el termostato.

Las temperaturas máximas y mínimas alcanzadas quedan tabuladas en la Tabla 4.6

Tabla 4.5: Temperaturas máximas y mínimas medidas por el sensor .

-	$t = 1000 \text{ s}$
T_{max}^a [$^{\circ}\text{C}$]	12.9133
T_{min}^a [$^{\circ}\text{C}$]	9.4321

Además, se pedía calcular la potencia media consumida por los *heaters*. Para ello, en primer lugar se debía calcular el tiempo medio de encendido de los mismos como,

$$t_{av} = t_{on}/t, \quad (4.5.1)$$

y con ello se calcula la potencia media como

$$P = t_{av}P_h, \quad (4.5.2)$$

donde P_h es la potencia consumida por los *heaters*, que como se comentaba al inicio se ha considerado $P_h = 100\text{W}$ Los resultados quedan tabulados en

Tabla 4.6: Potencia media y tiempo de encendido.

-	$t = 1000 \text{ s}$
$\frac{t_{on}}{t} [-]$	0.4892
$P [\text{W}]$	48.92

5. Conclusiones

Una vez se ha finalizado el estudio del sistema, se desea destacar ciertos puntos de interés. En primer lugar, aunque no se ha en el informe no se ha desarrollado exhaustivamente el cálculo analítico del Apartado 4.2, ciertamente fue un proceso que llevó un trabajo importante, aun siendo el sistema bastante simple. Por ello, y por se cree importante comentar la importancia de los métodos numéricos de cara a resolver problemas térmicos más complejos.

Por otra parte, cabe destacar que la mayor fuente de error, y por tanto la mayor cantidad de tiempo invertido ha sido emplear correctamente el modelo de diferencias finitas, tanto por errores tan simples y absurdos como fallos de indexación, como por motivos más técnicos como escoger un paso de tiempo no adecuado para el esquema (nótese que el esquema planteado en la Sección 3 es el Euler directo, por lo que el dt ha de ser inferior a 1). Por todo ello se considera que es prioritario entender este método numérico correctamente para poder utilizarlo de manera fiable.

Por último menciona que el trabajo ha permitido interiorizar conceptos clave de el transporte de calor tanto por conducción como por radiación, así como profundizar en estructuras como Ampliación de matemáticas 1.