

# Homework

王邑安

August 2023

## 1 Question: Ten-bar Truss

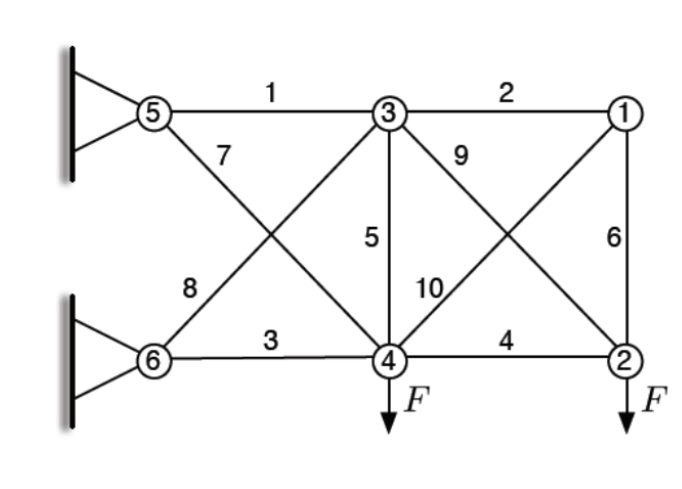


Figure 1: Ten-bar Truss 題目

### Problem Definition

在以下的已知條件下，給定桿件截面半徑，試求各桿件的 **位移、應力與反作用力**：

- 整體架構處在靜力平衡的情況下
- 所有桿件截面皆為圓形
- 材料為鋼，楊氏係數  $E = 200GPa$ ，密度  $\rho = 7860kg/m^3$ ，降伏強度  $\sigma_y = 250MPa$
- 平行桿件與鉛直桿件（桿件 1 至桿件 6）長度皆為 9.14 m

- 桿件 1 至桿件 6 截面半徑相同為  $r_1$ ，桿件 7 至桿件 10 截面半徑相同為  $r_2$
- 所有桿件半徑的最佳化範圍為 0.001 至 0.5 m 之間
- 在節點 2 和節點 4 上的負載  $F$  皆為  $1.0 * 10^7 N$  向下

## 2 Solution

### 2.1 最佳化數學表示式:

$$\min_{r_1, r_2} f(r_1, r_2) = \sum_{i=1}^6 m_i(r_1) + \sum_{i=7}^{10} m_i(r_2)$$

$$(m_i(r) = r^2 * \pi * L * \rho)$$

subject to :

$$|\sigma_i| \leq \sigma_y$$

$$\Delta_{s_2} \leq 0.02$$

where

$f$  : 所有桿件的質量  
 $\Delta_{s_2}$  : node 2 的位移  
 $\sigma_y$  : 降伏應力  
 $\sigma_i$  : 所有桿件的應力

### 2.2 matlab 程式碼:

使用 fmincon 作為最佳化函數，選擇 sqp 演算法，須建立一個 script 檔 (主程式 main.m)，兩個 function 檔 (目標函數 obj.m、非線性拘束條件 nonlcon.m)

### 2.2.1 主程式 main.m

```
1 r0=[0.1 0.05];
2 A=[]; %Ax<=B,沒有線性不等式拘束條件
3 B=[]; %同上
4 Aeq=[]; %Ax=B,沒有線性等式拘束條件
5 Beq=[]; %同上
6 ub=[0.5 0.5]; %半徑r1、r2的最大值為0.5m
7 lb=[0.001 0.001]; %半徑r1、r2的最小值為0.001m
8 options=optimset("display","off","Algorithm","sqp"); %設定參數及指定sqp
    演算法
9 [x,fval,exitflag]=fmincon(@(r)obj(r),r0,A,B,Aeq,Beq,lb,ub,...
10    @(r)nonlcon(r),options); %呼叫兩個副程式，並執行fmincon
```

### 2.2.2 副程式 nonlcon.m

```
1 function [g,geq]=nonlcon(r)
2 A=r.^2*pi; % A:截面積
3 E=200e9; % E:楊氏係數
4 L=[9.14 9.14*2^(1/2)]; % L:桿長
5 dof=12; % dof:自由度(degree of freedom)
6 yst=250e6; % yst:降伏強度
7 K=zeros(dof); % K是初始化12*12的stiffness matrix(勁度矩陣)
8 n1=[5 3 6 4 4 2 5 6 3 4]; % 將每根元素的node_j依照順序排列
9 n2=[3 1 4 2 3 1 4 3 2 1]; % 將每根元素的node_i依照順序排列
10 angle=[0 0 0 0 90 90 -45 45 -45 45]; % 將每根元素的角度照順序列出
11 M=cell(5,10); % 創造5*10的cellarray
12 stname=["K","k","kk","T","Y"]; % 依序將cellarray的每row命名
13 % "K"列: 儲存每根元素的global stiffness matrix(編號過的)
14 % "k"列: 儲存每根元素的global stiffness matrix(未編號的)
15 % "kk"列: 儲存每根元素的local stiffness matrix
16 % "T"列: 儲存每根元素的Transformation matrix
17 % "Y"列: 儲存用於計算應力的矩陣(Y=E/L*[-C -S C S])
18 M=cell2struct(M,stname,1); % 將cellarray轉換成structure並指派給M
19 for ii=1:10 % 呼叫Truss_2D函數，將元素(ii)的上述5個矩陣指派給M(ii)
20     structure
21     if ii<=6
22         M(ii)=Truss_2D(dof,A(1),E,L(1),n1(ii),n2(ii),angle(ii));
23     else
24         M(ii)=Truss_2D(dof,A(2),E,L(2),n1(ii),n2(ii),angle(ii));
25     end
26 end
27 for ii=1:10
28     K=K+M(ii).K; % 執行Direct stiffness method
29 end
30 % F=[0 0 0 -F 0 0 0 -F na na na na]' (na:未知)
31 % U=[na na na na na na 0 0 0 0]' (na:未知)
32 U=zeros(dof,1); % U:初始的位移矩陣
33 F=zeros(dof,1); % F:初始的力矩陣
34 F(4)=-1e7; % node2受力10^7 N 向下
```

```

35 F(8)=-1e7; % node4受力10^7 N 向下
36 kf=[K(1:8,1:8) F(1:8)]; % 結合前8項勁度矩陣和已知的力矩陣成為auhmented
    matrix
37 KF=rref(kf); % 形成reduced row echelon form
38 U(1:8)=KF(:,9); % 得到節點位移量
39 % F(9:12)=K(9:12,9:12)*U(9:12);
40 % R=F(9:12); 這兩行是回推reaction force，但是作業不需要所以變成comment
41 g=zeros(1,13); % 總共有13個非線性拘束條件
42 for ii=1:10 % 1~10的拘束條件是限制每根元素所承受的應力不能超過降伏應力
43     u=[U(n1(ii)*2-1) U(n1(ii)*2) U(n2(ii)*2-1) U(n2(ii)*2)]';
44     stress=M(ii).Y*u;
45     g(ii)=abs(stress)-yst;
46 end
47 g(11)=abs(U(3))-0.02; % 節點2的X軸向位移不能超過0.02m
48 g(12)=abs(U(4))-0.02; % 節點2的Y軸向位移不能超過0.02m
49 g(13)=(U(3)^2+U(4)^2)^0.5-0.02; % 節點2的總位移量不能超過0.02m
50 geq=[];

```

## nonlcon.m 呼叫的 Truss\_2D.m

```

1 function M=Truss_2D(dof,A,E,L,n_1st,n_2st,angle)
2 %輸入Truss元素的截面積、桿長、節點編號等資料，此函數可以回傳各類此元素
    的矩陣
3 K=zeros(dof);
4 u=[1 0 ; 0 0];
5 kk=E*A/L*[u -u ; -u u]; % kk:local stiffness matrix
6 C=cos(pi*angle/180);
7 S=sin(pi*angle/180);
8 lamda=[C S ; -S C];
9 O=zeros(2);
10 T=[lamda 0 ; 0 lamda]; % T:transformation matrix
11 k=T'*kk*T; % k:global stiffness matrix
12 a=0;
13 b=0;
14 for ii=[n_1st*2-1 n_1st*2 n_2st*2-1 n_2st*2 ]
15 % 將global stiffness matrix的各项数值依節點編號安排到K矩陣的指定位置
16     a=a+1;
17     for jj=[n_1st*2-1 n_1st*2 n_2st*2-1 n_2st*2 ]
18         b=b+1;
19         K(ii,jj)=k(a,b);
20     end
21     b=0;
22 end
23 M.K=K; % return serial global stiffness matrix
24 M.k=k; % return global stiffness matrix
25 M.kk=kk; % return local stiffness matrix
26 M.T=T; % return Transformation matrix
27 M.Y=E/L*[-C -S C S]; %return a matrix for caculating stress

```

## 2.2.3 副程式 obj.m

```

1 function f=obj(r) %目標函數
2 m(1)=r(1).^2*pi*9.14*7860; % 桿件1(2~6)的質量
3 m(2)=r(2).^2*pi*9.14*2^(1/2)*7860; %桿件7(8~10)的質量
4 f=6*m(1)+4*m(2); %整體結構總質量

```

### 3 result and verify

#### 3.1 result

使用 fmincon 進行最佳化後，可得知欲使結構滿足條件下輕量化，最佳的解為：

$$r_1 = 0.3m \quad r_2 = 0.2663m$$

x    fval    exitflag			
1x2 double			
	1	2	3
1	0.3000	0.2663	
2			
3			
4			
5			
6			

最佳值為：

$$mass = 2.1241 * 10^5 kg$$

x x fval x exitflag x			
1x1 double			
	1	2	3
1	2.1241e+05		
2			
3			
4			
5			
6			

收斂狀況:(一階最佳化量值和違反拘束條件的最大程度小於預設值)

x x fval x exitflag x			
1x1 double			
	1	2	3
1	1		
2			
3			
4			
5			
6			

### 3.2 檢視結構是否符合條件

將 function nonlcon.m 計算節點位移及桿件應力的程式碼獨立出來，帶入  $r_1 = 0.3m$   $r_2 = 0.2663m$ , 檢視 node2 的位移是否超標、桿件承受的應力是否小於降伏強度。

verify\_code.m

```

1 r=[0.3 0.2663];
2 A=r.^2*pi;
3 E=200e9;
4 L=[9.14 9.14*2^(1/2)];
5 dof=12;
6 yst=250e6;
7 K=zeros(dof);
8 n1=[5 3 6 4 4 2 5 6 3 4];
9 n2=[3 1 4 2 3 1 4 3 2 1];
10 angle=[0 0 0 0 90 90 -45 45 -45 45];
11 M=cell(5,10);
12 stname=["K","k","kk","T","Y"];
13 M=cell2struct(M,stname,1);
14 for ii=1:10
15     if ii<=6
16         M(ii)=Truss_2D(dof,A(1),E,L(1),n1(ii),n2(ii),angle(ii));
17     else
18         M(ii)=Truss_2D(dof,A(2),E,L(2),n1(ii),n2(ii),angle(ii));
19     end
20 end
21 for ii=1:10
22     K=K+M(ii).K;
23 end
24 % F=K*U
25 % F=[0 0 0 -F 0 0 0 -F na na na na]'
26 % U=[na na na na na na 0 0 0 0]'
27 U=zeros(dof,1);
28 F=zeros(dof,1);
29 F(4)=-1e7; % 10^7 N 向下
30 F(8)=-1e7; % 10^7 N 向下
31 kf=[K(1:8,1:8) F(1:8)];
32 KF=rref(kf);
33 U(1:8)=KF(:,9);
34 % F(9:12)=K(9:12,9:12)*U(9:12);
35 % R=F(9:12);
36 stress=zeros(1,10);
37 for ii=1:10
38     u=[U(n1(ii)*2-1) U(n1(ii)*2) U(n2(ii)*2-1) U(n2(ii)*2)]';
39     stress(ii)=M(ii).Y*u;
40 end

```

程式碼執行結果:

```
Command Window
New to MATLAB? See resources for Getting Started.

>> verify_code
>> U'
ans =
    0.0038   -0.0189   -0.0042   -0.0195    0.0032   -0.0087   -0.0033   -0.0093    0    0    0    0
>> (U(3)^2+U(4)^2)^0.5
ans =
    0.0200
>> stress
stress =
1.0e+07 *
    6.9296    1.4649   -7.2175   -2.0719    1.3210    1.4649    6.6061   -6.0895    3.7186   -2.6292
```

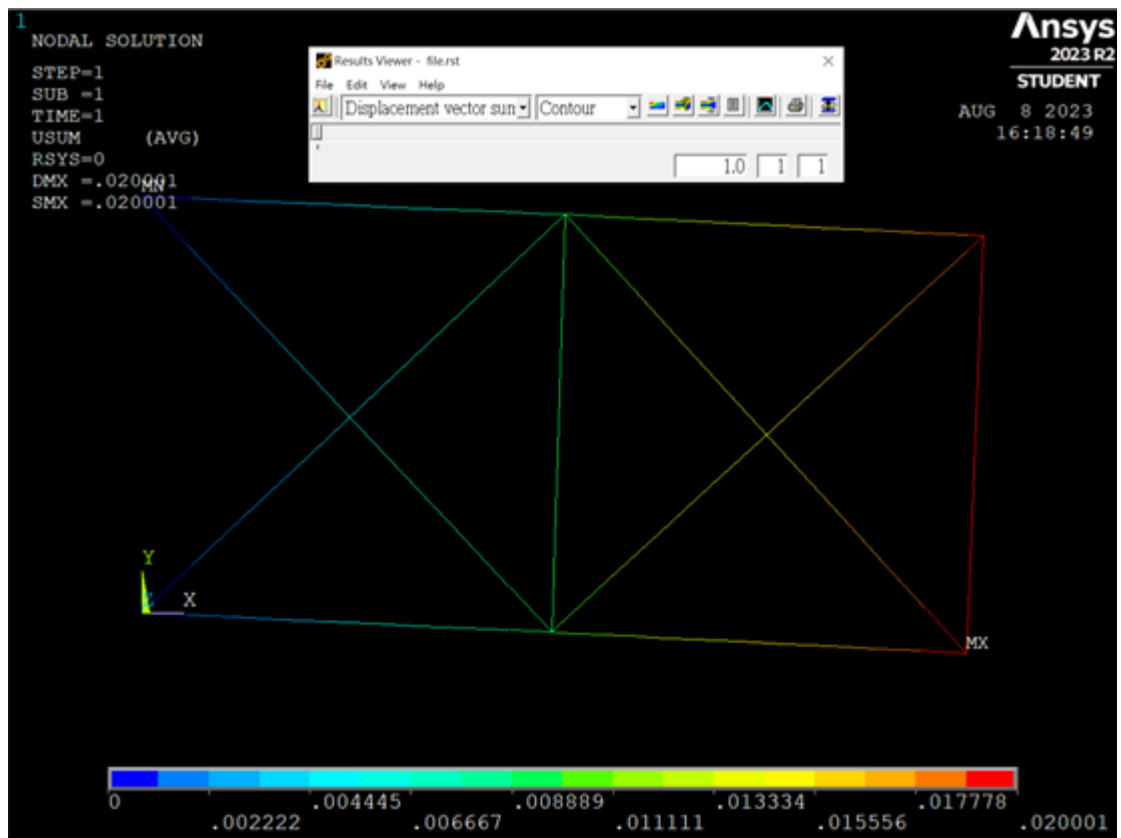
Node2的水平及垂直位移

10根桿件的應力

### 3.3 驗證有限元素的計算是否正確

進入 Ansys APDL 軟體，選擇 link180，給定楊氏模數 200Gpa、蒲松比 0.3，設定兩種桿件，桿 1 截面積 $A_1 = 0.2827m^2$ ，桿 2 截面積 $A_2 = 0.2228m^2$ ，依照題目畫出結構。結果如下





PRINT U      NODAL SOLUTION PER NODE

\*\*\*\*\* POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING \*\*\*\*\*

LOAD STEP=      1    SUBSTEP=      1  
TIME=      1.0000      LOAD CASE=    0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL COORDINATE SYSTEM

NODE	UX	UY	UZ	USUM
1	0.38369E-002-0.18875E-001	0.0000	0.19261E-001	
2	-0.42459E-002-0.19545E-001	0.0000	0.20001E-001	
3	0.31673E-002-0.87328E-002	0.0000	0.92895E-002	
4	-0.32989E-002-0.93366E-002	0.0000	0.99022E-002	
5	0.0000	0.0000	0.0000	
6	0.0000	0.0000	0.0000	

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE	2	2	0	2
VALUE	-0.42459E-002-0.19545E-001	0.0000	0.20001E-001	

PRINT S PRIN ELEMENT SOLUTION PER ELEMENT

\*\*\*\*\* POST1 ELEMENT NODAL STRESS LISTING \*\*\*\*\*

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING X,Y,Z VALUES ARE IN GLOBAL COORDINATES

ELEMENT=	1	LINK180				
NODE	S1	S2	S3	SINT	SEQU	
5	0.69307E+008	0.0000	0.0000	0.69307E+008	0.69307E+008	
3	0.69307E+008	0.0000	0.0000	0.69307E+008	0.69307E+008	

ELEMENT=	2	LINK180				
NODE	S1	S2	S3	SINT	SEQU	
3	0.14651E+008	0.0000	0.0000	0.14651E+008	0.14651E+008	
1	0.14651E+008	0.0000	0.0000	0.14651E+008	0.14651E+008	

ELEMENT=	3	LINK180				
NODE	S1	S2	S3	SINT	SEQU	
6	0.0000	0.0000	-0.72186E+008	0.72186E+008	0.72186E+008	
4	0.0000	0.0000	-0.72186E+008	0.72186E+008	0.72186E+008	

ELEMENT=	4	LINK180				
NODE	S1	S2	S3	SINT	SEQU	
4	0.0000	0.0000	-0.20722E+008	0.20722E+008	0.20722E+008	
2	0.0000	0.0000	-0.20722E+008	0.20722E+008	0.20722E+008	

ELEMENT=	5	LINK180				
NODE	S1	S2	S3	SINT	SEQU	
3	0.13211E+008	0.0000	0.0000	0.13211E+008	0.13211E+008	
4	0.13211E+008	0.0000	0.0000	0.13211E+008	0.13211E+008	

ELEMENT=	6	LINK180				
NODE	S1	S2	S3	SINT	SEQU	
1	0.14651E+008	0.0000	0.0000	0.14651E+008	0.14651E+008	
2	0.14651E+008	0.0000	0.0000	0.14651E+008	0.14651E+008	

ELEMENT=	7	LINK180				
NODE	S1	S2	S3	SINT	SEQU	
5	0.66058E+008	0.0000	0.0000	0.66058E+008	0.66058E+008	
4	0.66058E+008	0.0000	0.0000	0.66058E+008	0.66058E+008	

\*\*\*\*\* POST1 ELEMENT NODAL STRESS LISTING \*\*\*\*\*

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1  
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING X,Y,Z VALUES ARE IN GLOBAL COORDINATES

ELEMENT=	8	LINK180				
NODE	S1	S2	S3	SINT	SEQU	
6	0.0000	0.0000	-0.60892E+008	0.60892E+008	0.60892E+008	
3	0.0000	0.0000	-0.60892E+008	0.60892E+008	0.60892E+008	

ELEMENT=	9	LINK180				
NODE	S1	S2	S3	SINT	SEQU	
3	0.37185E+008	0.0000	0.0000	0.37185E+008	0.37185E+008	
2	0.37185E+008	0.0000	0.0000	0.37185E+008	0.37185E+008	

ELEMENT=	10	LINK180				
NODE	S1	S2	S3	SINT	SEQU	
4	0.0000	0.0000	-0.26290E+008	0.26290E+008	0.26290E+008	
1	0.0000	0.0000	-0.26290E+008	0.26290E+008	0.26290E+008	

可以發現 Ansys 所計算出的節點位移與桿件應力都和 Matlab 程式執行結果相去不遠，顯示有限元素的計算應無誤。