

1. A 2^2 factorial design has produced the following model relating machined part surface finish (y) to feed rate (x_1) and nose radius (x_2) of the tool (x_1, x_2 are in coded units of ± 1):

$$\hat{y} = 90 + 10x_1 - 15x_2 + 5x_1x_2$$

- (a) What is the average surface finish across the experiment?

將 x_1 與 x_2 的範圍取-1~1之間以0.5為間隔，作meshing後輸出所有的 x_1 與 x_2 的組合後，計算所有輸出的平均。結果輸出如下，可得到overall的平均為90

	-1	-0.95	-0.9	-0.85	-0.8	-0.75	-0.7	-0.65	-0.6	-0.55	-0.5	-0.45	-0.4	-0.35	-0.3	-0.25	-0.2	-0.15	-0.1	-0.05	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1				
-1	88	88.25	88.5	88.75	89	89.25	89.5	89.75	90	90.25	90.5	90.75	91	91.25	91.5	91.75	92	92.25	92.5	92.75	93	93.25	93.5	93.75	94	94.25	94.5	94.75	95	95.25	95.5	95.75	96	96.25	96.5	96.75	97	97.25	97.5	97.75	98	98.25	98.5	98.75	99
-0.9	88.25	88.5	88.75	89	89.25	89.5	89.75	90	90.25	90.5	90.75	91	91.25	91.5	91.75	92	92.25	92.5	92.75	93	93.25	93.5	93.75	94	94.25	94.5	94.75	95	95.25	95.5	95.75	96	96.25	96.5	96.75	97	97.25	97.5	97.75	98	98.25	98.5	98.75	99	
-0.7	88.5	88.75	89	89.25	89.5	89.75	90	90.25	90.5	90.75	91	91.25	91.5	91.75	92	92.25	92.5	92.75	93	93.25	93.5	93.75	94	94.25	94.5	94.75	95	95.25	95.5	95.75	96	96.25	96.5	96.75	97	97.25	97.5	97.75	98	98.25	98.5	98.75	99		
-0.5	88.75	89	89.25	89.5	89.75	90	90.25	90.5	90.75	91	91.25	91.5	91.75	92	92.25	92.5	92.75	93	93.25	93.5	93.75	94	94.25	94.5	94.75	95	95.25	95.5	95.75	96	96.25	96.5	96.75	97	97.25	97.5	97.75	98	98.25	98.5	98.75	99			
-0.3	89	89.25	89.5	89.75	90	90.25	90.5	90.75	91	91.25	91.5	91.75	92	92.25	92.5	92.75	93	93.25	93.5	93.75	94	94.25	94.5	94.75	95	95.25	95.5	95.75	96	96.25	96.5	96.75	97	97.25	97.5	97.75	98	98.25	98.5	98.75	99				
-0.1	89.25	89.5	89.75	90	90.25	90.5	90.75	91	91.25	91.5	91.75	92	92.25	92.5	92.75	93	93.25	93.5	93.75	94	94.25	94.5	94.75	95	95.25	95.5	95.75	96	96.25	96.5	96.75	97	97.25	97.5	97.75	98	98.25	98.5	98.75	99					
0	89.5	89.75	90	90.25	90.5	90.75	91	91.25	91.5	91.75	92	92.25	92.5	92.75	93	93.25	93.5	93.75	94	94.25	94.5	94.75	95	95.25	95.5	95.75	96	96.25	96.5	96.75	97	97.25	97.5	97.75	98	98.25	98.5	98.75	99						
0.1	89.75	90	90.25	90.5	90.75	91	91.25	91.5	91.75	92	92.25	92.5	92.75	93	93.25	93.5	93.75	94	94.25	94.5	94.75	95	95.25	95.5	95.75	96	96.25	96.5	96.75	97	97.25	97.5	97.75	98	98.25	98.5	98.75	99							
0.3	90	90.25	90.5	90.75	91	91.25	91.5	91.75	92	92.25	92.5	92.75	93	93.25	93.5	93.75	94	94.25	94.5	94.75	95	95.25	95.5	95.75	96	96.25	96.5	96.75	97	97.25	97.5	97.75	98	98.25	98.5	98.75	99								
0.5	90.25	90.5	90.75	91	91.25	91.5	91.75	92	92.25	92.5	92.75	93	93.25	93.5	93.75	94	94.25	94.5	94.75	95	95.25	95.5	95.75	96	96.25	96.5	96.75	97	97.25	97.5	97.75	98	98.25	98.5	98.75	99									
0.7	90.5	90.75	91	91.25	91.5	91.75	92	92.25	92.5	92.75	93	93.25	93.5	93.75	94	94.25	94.5	94.75	95	95.25	95.5	95.75	96	96.25	96.5	96.75	97	97.25	97.5	97.75	98	98.25	98.5	98.75	99										
0.9	90.75	91	91.25	91.5	91.75	92	92.25	92.5	92.75	93	93.25	93.5	93.75	94	94.25	94.5	94.75	95	95.25	95.5	95.75	96	96.25	96.5	96.75	97	97.25	97.5	97.75	98	98.25	98.5	98.75	99											
1	91	91.25	91.5	91.75	92	92.25	92.5	92.75	93	93.25	93.5	93.75	94	94.25	94.5	94.75	95	95.25	95.5	95.75	96	96.25	96.5	96.75	97	97.25	97.5	97.75	98	98.25	98.5	98.75	99												

- (b) What are the values for E1, E2, and E12 as obtained from the experiment?

從effect推論係數數的過程為：

B0 = overall mean

B1 = E1/2,

B2 = E2/2

B3 = E12/2

因此可以推論

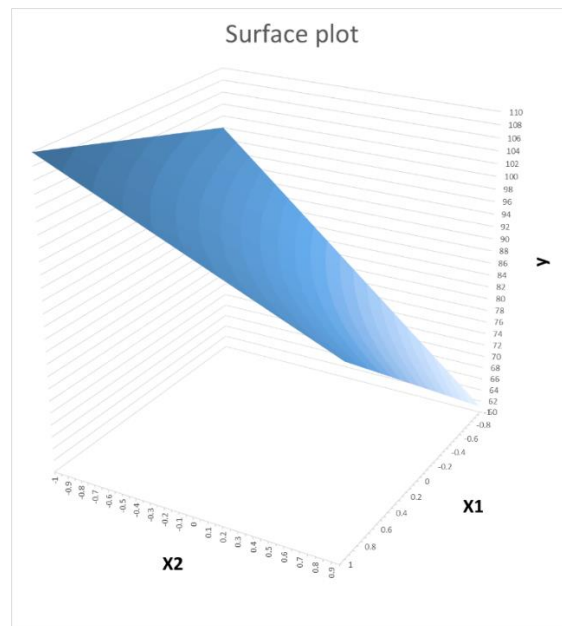
E1 = 2*B1 = 20

E2 = 2*B2 = -30

E12 = 2*B3 = 10

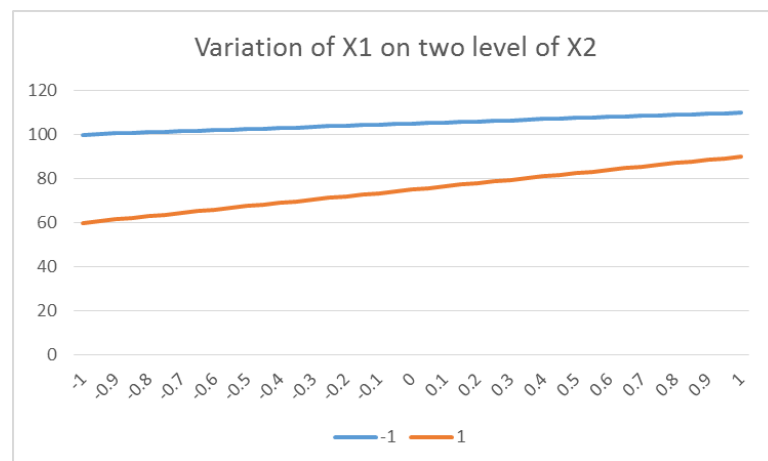
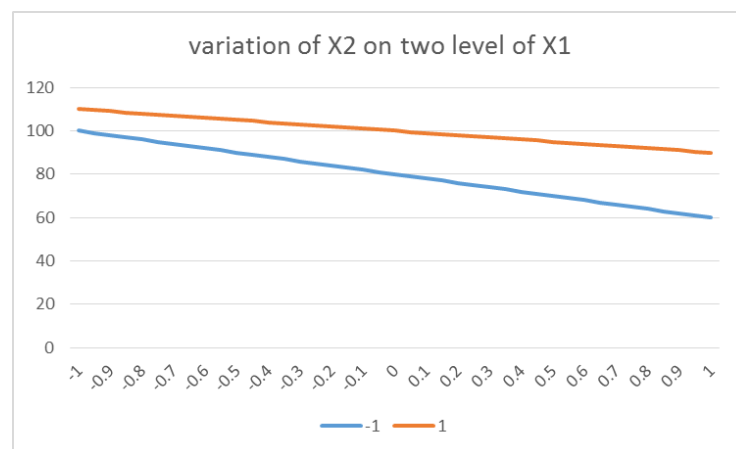
- (c) Use Excel to sketch the 3D or contour response surface in the x_1, x_2, y coordinate space.

根據(a)所得結果會出曲面圖如下：



(d) Explain the meaning of the interaction effect.

Interaction effect指的是一個參數如何影響另一個參數對於結果的影響。在這個題目中，x2的改變會影響y，但x1的改變會影響x2對y的值，這種非完全獨立的參數關係則稱為interaction effect。



- (e) If a surface finish of 100 is desired, what values of feed rate and nose radius (coded units) should be used? Identify the possible values of the feed rate and the nose radius to achieve the desired surface finish on the response surface in (c).

設feed rate為 x_1 ，nose radius為 x_2 ，從regression model中可得到 y 與 x_1 和 x_2 的關係。當 y 鎖定為100時，可得到 x_1 與 x_2 的關係式為：

$$x_1 = \frac{10 + 15x_2}{10 + 5x_2}$$

將 x_2 從-1~1的區間以0.05為單位，找出對應的 x_1 (x_1 須介於-1~1之間才有意義)，並輸出對應的 y ，所得結果如下：

x_2	x_1	y
-1	-1	100
-0.95	-0.8095238	100
-0.9	-0.6363636	100
-0.85	-0.4782609	100
-0.8	-0.3333333	100
-0.75	-0.2	100
-0.7	-0.0769231	100
-0.65	0.037037	100
-0.6	0.1428571	100
-0.55	0.2413793	100
-0.5	0.3333333	100
-0.45	0.4193548	100
-0.4	0.5	100
-0.35	0.5757576	100
-0.3	0.6470588	100
-0.25	0.7142857	100
-0.2	0.7777778	100
-0.15	0.8378378	100
-0.1	0.8947368	100
-0.05	0.9487179	100
0	1	100

2. Give an example where a dependent variable (output) y is affected by two independent variables x_1 and x_2 with interaction effect. Explain why there exists the interaction effect.

車輛在超車的時候，在不當的操作下，會有一定的翻車機率(y)，其中影響最顯著的兩個因子為超車時的速度(x_1)與超車路徑(通常是用貝茲曲線來表示超車的猛烈度)的前進距離與橫移長度的比例(x_2)。另外，

超車時的翻車機率也會受到其他因素影響(noise)。

前進距離與橫移長度的比例(x2)會顯著的影響到翻車時的機率，但若將車速(x1)的高低也加入考量，則會使x2對超車時的翻車機率影響的顯著程度加劇；同樣的，超車時的速度(x1)也會顯著的影響超車時的翻車機率，但超車時的猛烈程度(x2)的高低表現也會影響到超車速度高低對翻車機率的影響程度。

3. For the problem of “Glove Box Door Alignment” experiment to achieve parallelism equal to zero,

(a) Calculate the SN ratios of the parallelisms of the experimental results;

此題的目標是要使結果越趨近於平行，所求為使每一組實驗的結果與0的距離越小越好，因此S/N ratio的計算公式如下：

$$\eta = -10\log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

其中平均值為兩次run的平均，標準差為兩次run的樣本標準差。

計算S/N ratio的結果如下表所示：

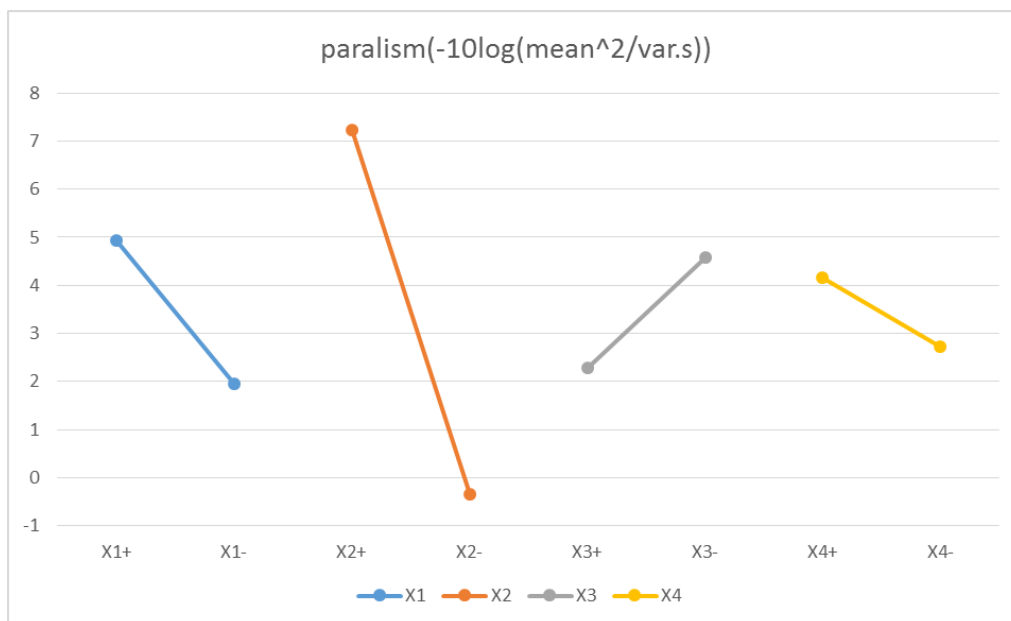
test	X1	X2	X3	X4	Run1	Run2	mean	var	S/N
1	-1	-1	-1	-1	-1.44	-0.08	-0.76	0.9248	-3.180633
2	1	-1	-1	-1	-1.79	-1.01	-1.4	0.3042	-6.257445
3	-1	1	-1	-1	0.39	0.17	0.28	0.0242	7.4232143
4	1	1	-1	-1	-0.5	-0.24	-0.37	0.0338	5.1201367
5	-1	-1	1	-1	-0.2	0.17	-0.015	0.06845	11.617808
6	1	-1	1	-1	-0.79	-0.64	-0.715	0.01125	-0.143945
7	-1	1	1	-1	1.22	0.28	0.75	0.4418	-1.950136
8	1	1	1	-1	0.21	0.28	0.245	0.00245	9.1186391
9	-1	-1	-1	1	-0.4	-0.65	-0.525	0.03125	2.3470407
10	1	-1	-1	1	-0.63	-1.19	-0.91	0.1568	-2.583978
11	-1	1	-1	1	0.47	0.44	0.455	0.00045	3.8247547
12	1	1	-1	1	-0.01	-0.03	-0.02	0.0002	30
13	-1	-1	1	1	1.29	0.64	0.965	0.21125	-3.167459
14	1	-1	1	1	-1.17	0.14	-0.515	0.85805	-1.425459
15	-1	1	1	1	0.48	1.06	0.77	0.1682	-1.316187
16	1	1	1	1	0.4	0.34	0.37	0.0018	5.5972079

(b) Plot the effect plot and build an additive model;

計算出每個參數的高水準表現及低水準表現的Effect，可整理於下表

X1+		X1-		X2+		X2-		X3+		X3-		X4+		X4-	
2	-6.2574	1	-3.1806	3	7.4232143	1	-3.180633	5	11.617808	1	-3.18063335	9	2.34704	1	-3.1806
4	5.1201	3	7.4232	4	5.1201367	2	-6.257445	6	-0.143945	2	-6.257444722	10	-2.584	2	-6.2574
6	-0.1439	5	11.618	7	-1.950136	5	11.617808	7	-1.950136	3	7.423214251	11	3.82475	3	7.42321
8	9.1186	7	-1.9501	8	9.1186391	6	-0.143945	8	9.1186391	4	5.120136689	12	30	4	5.12014
10	-2.584	9	2.347	11	3.8247547	9	2.3470407	13	-3.167459	9	2.347040703	13	-3.1675	5	11.6178
12	30	11	3.8248	12	30	10	-2.583978	14	-1.425459	10	-2.583978041	14	-1.4255	6	-0.1439
14	-1.4255	13	-3.1675	15	-1.316187	13	-3.167459	15	-1.316187	11	3.824754651	15	-1.3162	7	-1.9501
16	5.5972	15	-1.3162	16	5.5972079	14	-1.425459	16	5.5972079	12	30	16	5.59721	8	9.11864
AVG	4.9281		1.9498		7.2272038		-0.349259		2.2913087		4.586636273		4.15949		2.71845

根據所計算出來的Effect，繪製出來的effect plot如圖所示：



Additive model則針對所有參數的低水準與高水準建立，並從effect plot中找出最佳參數組合為(x1, x2, x3, x4) = (1, 1, -1, 1)，完成optimal的最佳解的additive model，也確實可以看見最佳解在Effect上比起最高與最低水準的組合都表現得更好。

	all low level			all high level			optimal	
		contribution			contribution			contribution
Factor	setting		Factor	setting		Factor	setting	
X1	X1-	-1.489172151	X1	X1+	1.489172151	X1	X1+	1.489172151
X2	X2-	-3.788231326	X2	X2+	3.788231326	X2	X2+	3.788231326
X3	X3-	1.147663811	X3	X3+	-1.147663811	X3	X3-	1.147663811
X4	X4-	-0.720517591	X4	X4+	0.720517591	X4	X4+	0.720517591
overall mean		3.438972462	overall mean		3.438972462	overall mean		3.438972462
total		-1.411284794	total		8.289229718	total		10.58455734

- (c) Use the effect plot to determine the optimal setting for the process and use the additive model to predict the optimal parallelism;

從effect plot中找出最佳參數組合為(x1, x2, x3, x4) = (1, 1, -1, 1)，完成optimal的最佳解的additive model，也確實可以看見最佳解在Effect上比起最高與最低水準的組合都表現得更好。

	all low level			all high level			optimal	
		contribution			contribution			contribution
Factor	setting		Factor	setting		Factor	setting	
X1	X1-	-2.58170663	X1	X1+	2.58170663	X1	X1+	2.58170663
X2	X2-	-4.014166929	X2	X2+	4.014166929	X2	X2+	4.014166929
X3	X3-	1.952332223	X3	X3+	-1.952332223	X3	X3-	1.952332223
X4	X4-	-3.002310352	X4	X4+	3.002310352	X4	X4+	3.002310352
overall mean		5.991054348	overall mean		5.991054348	overall mean		5.991054348
total		-1.654797342	total		13.63690604	total		17.54157048

從實驗中即可以得到在 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, -1, 1)$ 時的參數組合的實驗的結果，如下

optimized set									
test	X1	X2	X3	X4	Run1	Run2	mean	var	S/N ratio
12	1	1	-1	1	-0.01	-0.03	-0.02	0.0002	30

(d) Calculate all the main factor and two-factor interaction effects on the SN ratio and build a regression predictive model;

對應於單一參數對結果的影響及兩個參數的對結果的影響，可從每個參數組合的高底水準(-1&1)與對應的輸出結果的sum product進行平均，可得到每個參數組合所對應到的Effect。Regression predictive model的係數則可透過利用effect到迴歸至平面的最佳參數關係來得到。所得到的各參數組合對應到的effect及regression predictive model的係數呈現於下表：

test	X1	X2	X3	X4	X1X2	X1X3	X1X4	X2X3	X2X4	X3X4	S/N
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-3.18063335
2	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-6.257444722
3	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	7.423214251
4	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	5.120136689
5	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	11.61780778
6	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-0.143945163
7	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1.950135629
8	1	1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	9.118639113
9	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	2.347040703
10	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-2.583978041
11	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	3.824754651
12	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	30
13	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-3.167459277
14	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1.425458841
15	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1.316186643
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5.597207868

regression model										
	E1(X1)	E2(X2)	E3(X3)	E4(X4)	E5(X1X2)	E6(X1X3)	E7(X1X4)	E8(X2X3)	E9(X2X4)	E10(X3X4)
	2.978	7.576	-2.295	1.441	7.485	-0.988	4.497	-6.434	3.157	-6.180
b0	b1(X1)	b2(X2)	b3(X3)	b4(X4)	b5(X1X2)	b6(X1X3)	b7(X1X4)	b8(X2X3)	b9(X2X4)	b10(X3X4)
3.439	1.489	3.788	-1.148	0.721	3.743	-0.494	2.248	-3.217	1.579	-3.090

與Excel中的回歸求解功能所得到的答案也是一致的。

	係數	標準誤	t 統計	P-值	下限 95%	上限 95%	下限 95.0%	上限 95.0%
截距	3.438972	1.473334	2.334143	0.066866	-0.34835	7.226299	-0.34835	7.226299
X1	1.489172	1.473334	1.01075	0.35852	-2.29815	5.276498	-2.29815	5.276498
X2	3.788231	1.473334	2.571196	0.049963	0.000905	7.575557	0.000905	7.575557
X3	-1.14766	1.473334	-0.77896	0.471245	-4.93499	2.639662	-4.93499	2.639662
X4	0.720518	1.473334	0.489039	0.64551	-3.06681	4.507844	-3.06681	4.507844
X1X2	3.74262	1.473334	2.540238	0.051879	-0.04471	7.529946	-0.04471	7.529946
X1X3	-0.49387	1.473334	-0.33521	0.751076	-4.2812	3.293456	-4.2812	3.293456
X1X4	2.248281	1.473334	1.525981	0.187537	-1.53905	6.035607	-1.53905	6.035607
X2X3	-3.21716	1.473334	-2.18359	0.080746	-7.00448	0.570167	-7.00448	0.570167
X2X4	1.578723	1.473334	1.071531	0.332904	-2.2086	5.366049	-2.2086	5.366049
X3X4	-3.0898	1.473334	-2.09715	0.090079	-6.87713	0.697526	-6.87713	0.697526

(e) Use the regression model to determine the optimize setting and predict the resulting optimal parallelism. Compare the results with (c).

使用excel內建的規劃求解功能，其最佳化列式如下：

$$\text{Max } (y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_1x_2 + b_6x_1x_3 + b_7x_1x_4 + b_8x_2x_3 + b_9x_2x_4 + b_{10}x_3x_4)$$

w. r. t x_1, x_2, x_3, x_4

s. t

$$-1 \leq x_1 \leq 1$$

$$-1 \leq x_2 \leq 1$$

$$-1 \leq x_3 \leq 1$$

$$-1 \leq x_4 \leq 1$$

所得到的最佳化結果為：當 $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=-1$, $x_4=1$ 時，所得到的 S/N ratio 最佳值為 24.955。相比於(c)中所求得的實驗結果(S/N ratio=30)來的大，推測是實驗的誤差以及模型本身在迴歸時就忽略了高次的影響，也會影響到收斂結果。由於 effect plot 只能看出 main 對結果的影響，看不到 interaction 的影響，因此不足以從單一個 effect plot 就判定最佳的參數組合。因此可以得知，並不是更高次項就可以忽略，而是要實際去檢視每個項次的影響顯著程度才能選擇是否能忽略。

4. The yield (as large as possible with the maximum at 100%) of a semiconductor fabrication process has been studied as a function of three factors, at the following experimental levels:

Variable	Low Level	High Level
1. Temperature (°C)	80	120
2. Pressure (psi)	50	70
3. Reaction time (min)	5	15

A 2^3 factorial design was performed. Each test, or unique combination of the three variables, was performed three times. The table provides the results of the tests.

Test	Temperature	Pressure	Time	Trial			Average
				1	2	3	
1	80	50	5	61.43(14)	58.58(18)	57.07(16)	59.03
2	120	50	5	75.62(6)	77.57(11)	75.75(2)	76.31
3	80	70	5	27.51(21)	34.03(1)	25.07(19)	28.87
4	120	70	5	51.37(10)	48.49(15)	54.37(9)	51.41
5	80	50	15	24.80(3)	20.69(7)	15.41(5)	20.30
6	120	50	15	43.58(17)	44.31(22)	36.99(13)	41.63
7	80	70	15	45.20(24)	49.53(12)	50.29(20)	48.34
8	120	70	15	70.51(8)	74.00(4)	74.68(23)	73.07

在下列的作答中，為了方便表達，令temperature的低水準表現(80)為-1，高水準表現(120)為1、壓力的低水準表現(50)為-1，高水準表現(70)為1、時間的低水準表現(5)為-1，高水準表現(15)為1。在 regression model、predicted model中的x所代表的範圍皆在-1~1之間，於求得x後在等比例換算回所對應到的時計物理量。

- (a) Estimate the variance of the noises.

在有多次實驗下的replicate noise to estimate overall variance of noise, 當一組實驗的重複次數相同時($v_1 = v_2 = v_3 = \dots = v_m$)時，

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = s_p^2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_m^2}{m}$$

整理計算結果於下表中：

test	temp	pres	time	trial 1	trial 2	trial 3	average	var
1	-1	-1	-1	61.43	58.58	57.07	59.0267	4.9020
2	1	-1	-1	75.62	77.57	75.75	76.3133	1.1886
3	-1	1	-1	27.51	34.03	25.07	28.8700	21.4576
4	1	1	-1	51.37	48.49	54.37	51.4100	8.6448
5	-1	-1	1	24.8	20.69	15.41	20.3000	22.1571
6	1	-1	1	43.58	44.31	36.99	41.6267	16.2572
7	-1	1	1	45.2	49.53	50.29	48.3400	7.5391
8	1	1	1	70.51	74	74.68	73.0633	5.0052

將所得到的variance平均後，可得到variance of the noises = 10.89397

(b) Estimate the variance of effects.

對於Effect而言，可以下列式子計算：

$$E_1 = \left(\frac{\sum y_{ij}}{N/2} \right)$$

對於variance of effects的計算，在假設每個實驗的noise都相同的條件下，可使用下列公式：

$$\text{var}(E) = \text{var} \left[\frac{\sum y_{ij}}{\frac{N}{2}} \right] = \left(\frac{2}{N} \right)^2 \text{var} \left(\sum y_{ij} \right) = \left(\frac{2}{N} \right)^2 \times N \times \sigma_{\epsilon}^2 = \frac{4}{N} \times \sigma_{\epsilon}^2$$

其中，N為所進行的實驗總次數，在這裡N=8*3=24，因此可得知

$$\text{variance of effect} = \frac{4}{24} \times 10.89397 = 1.81566$$

(c) With t test statistics and $\alpha=0.05$, which effects are statistically significant?

使用test，自由度為 $\nu = \sum_{test} (\#replicates - 1) = m(n - 1) = 8 \times 2 = 16$ 。

計算一個、兩個、參個參數組合時的effect後，可從回歸的最佳模型中得到regression model中的係數bi。其結果如下：

	avg	X1	X2	X3	X1X2	X1X3	X2X3	X1X2X3
		-1	-1	-1	1	1	1	-1
		1	-1	-1	-1	-1	1	1
		-1	1	-1	-1	1	-1	1
		1	1	-1	1	-1	-1	-1
		-1	-1	1	1	-1	-1	1
		1	-1	1	-1	1	-1	-1
		-1	1	1	-1	-1	1	-1
		1	1	1	1	1	1	1
Ei	49.86875	21.46917	1.104167	-8.0725	2.1625	28.63417	1.555833	-0.46417
bi	49.86875	10.73458	0.552083	-4.03625	1.08125	14.31708	0.777917	-0.23208

進行t檢定的目的為要檢測該係數與0的差異，因此在考量noise時，無效假設為 $H_0: E_i = 0$ 。所使用的test statistic為

$$t = \frac{E_i - 0}{S_{effect}} \sim t_{v=16}$$

其中，在信心水準為95%下，上下界的範圍應為

$$E_i \pm t_{16,0.975}(S_{effect})$$

因此可從regression model的係數中整理出信賴水準95%的信賴區間。並可將其信賴區間與0做比較，若該信賴區間沒有包含0，則檢測其p-value，若p-value小於0.05，則可以認定有足夠的信心水準推翻無效假設，也可進一步認定該係數的影響為顯著的。

	B0	B1	B2	B3	B4(X1X2)	B5(X2X3)	B6(X1X3)	B7(X1X2X3)
upper limit	52.72524755	12.16283211	1.98033211	-2.608001224	2.509498776	15.74533211	2.206165443	1.196165443
lowe limit	47.01225245	9.306334557	-0.876165443	-5.464498776	-0.346998776	12.88883456	-0.65033211	-1.66033211
t=(Ei-0)/s	37.00931838	15.93300864	0.819440145	-5.990880514	1.604865793	21.25040212	1.154637547	-0.344474083
p-value	0	3.08109E-11	0.424574047	1.999981156	0.128077371	3.74811E-13	0.265193298	1.265024133
t test result	H1 stands	H1 stands	H0 stands	H1 stands	H0 stands	H1 stands	H0 stands	H0 stands
significant?	significant	significant	N	significant	N	significant	N	N

從表中可以看到，除了截距項之外，B1、B3、與B5都是顯著的項目，分別是對應到 E_1 、 E_3 與 E_{23} 。

(d) Use the significant effects to construct a mathematical prediction model.

承上題，保留檢測為顯著的係數，整理預測的反應曲面可得到下列方程式：

$$y = 49.86875 + 10.73458x_1 - 4.03625x_3 + 14.31708x_2x_3$$

- (e) Use Excel's regression analysis to build the regression model and compare it to (c).

將實驗結果與組合整理如下表所示：

test	X1	X2	X3	X1X2	X1X3	X2X3	X1X2X3	output
1_1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	61.43
1_2	1	-1	-1	-1	-1	1	1	75.62
1_3	-1	1	-1	-1	1	-1	1	27.51
1_4	1	1	-1	1	-1	-1	-1	51.37
1_5	-1	-1	1	1	-1	-1	1	24.8
1_6	1	-1	1	-1	1	-1	-1	43.58
1_7	-1	1	1	-1	-1	1	-1	45.2
1_8	1	1	1	1	1	1	1	70.51
2_1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	58.58
2_2	1	-1	-1	-1	-1	1	1	77.57
2_3	-1	1	-1	-1	1	-1	1	34.03
2_4	1	1	-1	1	-1	-1	-1	48.49
2_5	-1	-1	1	1	-1	-1	1	20.69
2_6	1	-1	1	-1	1	-1	-1	44.31
2_7	-1	1	1	-1	-1	1	-1	49.53
2_8	1	1	1	1	1	1	1	74
3_1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	57.07
3_2	1	-1	-1	-1	-1	1	1	75.75
3_3	-1	1	-1	-1	1	-1	1	25.07
3_4	1	1	-1	1	-1	-1	-1	54.37
3_5	-1	-1	1	1	-1	-1	1	15.41
3_6	1	-1	1	-1	1	-1	-1	36.99
3_7	-1	1	1	-1	-1	1	-1	50.29
3_8	1	1	1	1	1	1	1	74.68

使用excel迴歸求解工具，可得到回歸結果如下：

迴歸統計								
R 的倍數	0.989446							
R 平方	0.979003							
調整的 R	0.969817							
標準誤	3.300601							
觀察值個數	24							
ANOVA								
	自由度	SS	MS	F	顯著值			
迴歸	7	8127.225	1161.032	106.5757	3.2E-12			
殘差	16	174.3035	10.89397					
總和	23	8301.529						
	係數	標準誤	t 統計	P-值	下限 95%	上限 95%	下限 95.0%	上限 95.0%
截距	49.86875	0.673732	74.01864	1.02E-21	48.4405	51.297	48.4405	51.297
X1	10.73458	0.673732	15.93301	3.08E-11	9.306335	12.16283	9.306335	12.16283
X2	0.552083	0.673732	0.81944	0.424574	-0.87617	1.980332	-0.87617	1.980332
X3	-4.03625	0.673732	-5.99088	1.88E-05	-5.4645	-2.608	-5.4645	-2.608
X1X2	1.08125	0.673732	1.604866	0.128077	-0.347	2.509499	-0.347	2.509499
X1X3	0.777917	0.673732	1.154638	0.265193	-0.65033	2.206165	-0.65033	2.206165
X2X3	14.31708	0.673732	21.2504	3.75E-13	12.88883	15.74533	12.88883	15.74533
X1X2X3	-0.23208	0.673732	-0.34447	0.734976	-1.66033	1.196165	-1.66033	1.196165

從迴歸的結果中，選出p-value小於0.05的項，認定他為顯著。從結果中可看到被認定為顯著的項有截距項、 x_1 、 x_3 、及 x_2x_3 項。所得到的regression model如下

$$y = 49.86875 + 10.73458x_1 - 4.03625x_3 + 14.31708x_2x_3$$

與(c)小題比較，會發現篩選出來的顯著項都是相同的，因此簡化過後的regression model會相同。

(f) Calculate all the main and interaction effects on the SN ratio.

實驗的目標是要找出與能讓目標函數最接近100的參數組合，因此考慮的是每一次實驗與100的變異，所使用的S/N ratio所使用公式如下：

$$\eta_1 = -10\log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - 100)^2\right)$$

另外，由於所有的實驗結果都還小於100，因此我們也使用第二種S/N ratio—the larger the better，

$$\eta_2 = -10\log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i}\right)^2\right)$$

整理計算結果於下表中：

test	temp	pres	time	trial_1	trial_2	trial_3	average	var	S/N ratio	S/N
1	-1	-1	-1	61.43	58.58	57.07	59.0267	4.9020	-32.2585	35.4089
2	1	-1	-1	75.62	77.57	75.75	76.3133	1.1886	-27.4962	37.6503
3	-1	1	-1	27.51	34.03	25.07	28.8700	21.4576	-37.0533	29.0009
4	1	1	-1	51.37	48.49	54.37	51.4100	8.6448	-33.7415	34.1925
5	-1	-1	1	24.8	20.69	15.41	20.3000	22.1571	-38.0393	25.6474
6	1	-1	1	43.58	44.31	36.99	41.6267	16.2572	-35.3381	32.2995
7	-1	1	1	45.2	49.53	50.29	48.3400	7.5391	-34.2713	33.6569
8	1	1	1	70.51	74	74.68	73.0633	5.0052	-28.6268	37.2657

對S/N ratio1，將main effect、interaction effect的參數組合分別乘上計算出來的S/N ratio後做sum product在除以4，及可得到每一個不同的S/N ratio effect.

整理於下表：

	X1	X2	X3	X1X2	X1X3	X2X3	X1X2X3
1	32.2585	32.258	32.2585	-32.258	-32.258	-32.258	32.2585
2	-27.4962	27.496	27.4962	27.4962	27.4962	-27.496	-27.4962
3	37.0533	-37.053	37.0533	37.0533	-37.053	37.0533	-37.0533
4	-33.7415	-33.742	33.7415	-33.742	33.7415	33.7415	33.7415
5	38.0393	38.039	-38.039	-38.039	38.0393	38.0393	-38.0393
6	-35.3381	35.338	-35.338	35.3381	-35.338	35.3381	35.3381
7	34.2713	-34.271	-34.271	34.2713	34.2713	-34.271	34.2713
8	-28.6268	-28.627	-28.627	-28.627	-28.627	-28.627	-28.6268
Ei	E1	E2	E3	E12	E23	E13	E123
	4.10492	-0.1402	-1.4315	0.3732	0.06789	5.37986	1.09844

對S/N ratio₂，將main effect、interaction effect的參數組合分別乘上計算出來的S/N ratio後做sum product在除以4，及可得到每一個不同的S/N ratio effect.

整理於下表：

	X1	X2	X3	X1X2	X1X3	X2X3	X1X2X3
1	-35.409	-35.409	-35.409	35.409	35.409	35.409	-35.409
2	37.650	-37.650	-37.650	-37.650	-37.650	37.650	37.650
3	-29.001	29.001	-29.001	-29.001	29.001	-29.001	29.001
4	34.193	34.193	-34.193	34.193	-34.193	-34.193	-34.193
5	-25.647	-25.647	25.647	25.647	-25.647	-25.647	25.647
6	32.300	-32.300	32.300	-32.300	32.300	-32.300	-32.300
7	-33.657	33.657	33.657	-33.657	-33.657	33.657	-33.657
8	37.266	37.266	37.266	37.266	37.266	37.266	37.266
Ei	E1	E2	E3	E12	E23	E13	E123
	4.423	0.777	-1.846	-0.023	0.707	5.710	-1.498

(g) Build a predictive model for the SN Ratio.

對S/N ratio₁而言，將S/N ratio的參數組合列進行線性迴歸，可得到結果如下：

Ei	0.000	E1	E2	E3	E12	E13	E23	E123
		4.105	-0.140	-1.431	0.373	0.068	5.380	1.098
Bi	-33.353	2.052	-0.070	-0.716	0.187	0.034	2.690	0.549

以Excel的迴歸工具驗證結果，會得到相同的係數：

	係數	標準誤	t 統計	P-值	下限 95%	上限 95%	下限 95.0%	上限 95.0%
截距	-33.3531	0	65535	#NUM!	-33.3531	-33.3531	-33.3531	-33.3531
X1	2.05246	0	65535	#NUM!	2.05246	2.05246	2.05246	2.05246
X2	-0.07011	0	65535	#NUM!	-0.07011	-0.07011	-0.07011	-0.07011
X3	-0.71573	0	65535	#NUM!	-0.71573	-0.71573	-0.71573	-0.71573
X1X2	0.186601	0	65535	#NUM!	0.186601	0.186601	0.186601	0.186601
X1X3	0.033947	0	65535	#NUM!	0.033947	0.033947	0.033947	0.033947
X2X3	2.68993	0	65535	#NUM!	2.68993	2.68993	2.68993	2.68993
X1X2X3	0.549219	0	65535	#NUM!	0.549219	0.549219	0.549219	0.549219

因此，根據S/N ratio_1所建立的反應曲面如下：

$$y = -33.3531 + 2.05246x_1 - 0.07011x_2 - 0.71573x_3 \\ - 0.186601x_1x_2 - 0.033947x_1x_3 - 2.68993x_2x_3 \\ + 0.549219x_1x_2x_3$$

對S/N ratio_2而言，將S/N ratio的參數組合列進行線性迴歸，可得到結果如下：

Ei	0.000	E1	E2	E3	E12	E13	E23	E123
		4.423	0.777	-1.846	-0.023	0.707	5.710	-1.498
Bi	33.140	2.212	0.389	-0.923	-0.012	0.353	2.855	-0.749

以Excel的迴歸工具驗證結果，會得到相同的係數：

	係數	標準誤	t 統計	P-值	下限 95%	上限 95%	下限 95.0%	上限 95.0%
截距	33.14027	0	65535	#NUM!	33.14027	33.14027	33.14027	33.14027
X1	2.21173	0	65535	#NUM!	2.21173	2.21173	2.21173	2.21173
X2	0.388746	0	65535	#NUM!	0.388746	0.388746	0.388746	0.388746
X3	-0.92289	0	65535	#NUM!	-0.92289	-0.92289	-0.92289	-0.92289
X1X2	-0.01165	0	65535	#NUM!	-0.01165	-0.01165	-0.01165	-0.01165
X1X3	0.353498	0	65535	#NUM!	0.353498	0.353498	0.353498	0.353498
X2X3	2.855171	0	65535	#NUM!	2.855171	2.855171	2.855171	2.855171
X1X2X3	-0.74921	0	65535	#NUM!	-0.74921	-0.74921	-0.74921	-0.74921

因此，根據S/N ratio_2所建立的反應曲面如下：

$$y = 33.3531 + 2.21173x_1 + 0.388746x_2 - 0.92289x_3 \\ - 0.01165x_1x_2 - 0.353498x_1x_3 - 2.855171x_2x_3 \\ - 0.74921x_1x_2x_3$$

- (h) Suggest an optimum setting for the process to achieve the highest, stable yield based on results of (d) and (g).

利用規劃求解功能，將x1, x2, x3的參數範圍設於-1~1之間，可得

到下列結果

regression on average	X1	X2	X3	Y
	1	-1	-1	78.95666667
	120	50	5	
regression on S/N ratio 1	X1	X2	X3	Y
	1	-1	-1	-27.49620849
	120	50	5	
regression on S/N ratio 2	X1	X2	X3	Y
	1	-1	-1	37.65025461
	120	50	5	

從表中可以看到，在三個不同的模型中所最佳化出來的結果參數組合是相同的。在[temp, pressure, time]=(120,50,5)時可讓平均達到最大，且最接近100，而變異也是所有的參數組合中最小的。