

# Developing an Innovative RRT Planning Approach Incorporating Kinematic Constraints with Second-Order Polynomials for Generalized Bicycle Model-Based Mobile Robots

Yu-Lin Chen, Yeh-Chih Huang, Kuei-Yuan Chan

**Abstract—**

**Index Terms—**Path Planning, RRT, Generalized Bicycle Model, Mobile Robots

## I. INTRODUCTION AND LITERATURE REVIEW

隨著科技的進步，許多車輛模型已被提出研究。不同車輛模型皆具備各自優秀的特性與能力，例如利用麥克納姆輪的全向式移動機器人可以藉由直接調控四個車輪馬達速度，實現不改變朝向的橫向移動；而車輪具備轉向能力的雙舵輪型移動機器人(圖1)可發展出多元的移動模式，使其不僅可實現不改變朝向的橫向移動，也可採取與差速輪式機器人相同的移動策略。因此，我們根據目前已被提出的雙輪式車輛模型進行研究，以車輪的轉向、驅動能力來區分車輛研究的種類，如圖1以及表I。

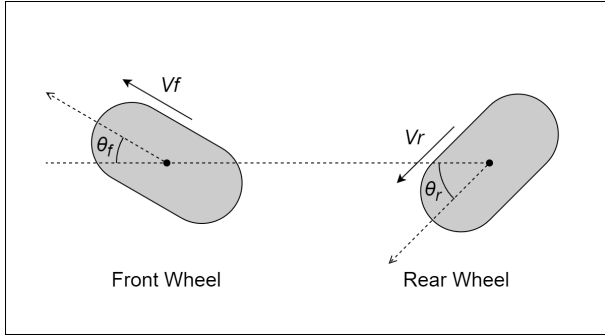


Fig. 1: Generalized Bicycle Model. This type of vehicle includes two steerable and drivable wheels.

TABLE I: 不同車輛轉向、驅動能力之研究

	Front Drive	Rear Drive	Double Drive
Front Steer	H. Chen [1]	R. Rajamani [2]	A. Bonci [3]
Rear Steer	L. Li [4]	T. A. Tamba [5]	A. Bonci [3]
Double Steer	J. Yuan [6]		M. Kokot [7]

根據上述研究回顧，移動式機器人中最常被研究使用的運動學模型即是「Bicycle Model」，其架構為「前輪轉向

與後輪驅動」，例如Car-like Mobile Robots [2]。關於後輪轉向、前輪驅動的車輛，其模型與Bicycle Model相似，其應用則常見於叉車型的車輛 [4]。

若機器人於應用中被要求追蹤被動軌跡，可能會面臨轉向鎖死的問題。然而利用前輪轉向、前輪驅動的操控方式，則可以有效解決此問題 [1]。另外，後輪轉向、後輪驅動的模型與前輪轉向、前輪驅動相似，其應用亦可見於叉車型的車輛模型 [5]。

在雙輪轉向、前(或後)輪驅動的定義下，我們在目前研究中發現較符合的架構是Tractor-Trailer Mobile Robots (TTMR) 模型。J. Yuan [6] 等人的研究中，設計Tractor 的驅動速度、轉向角度與Trailer 的轉向角度的控制律，與提及的雙輪轉向、前輪驅動概念相似。作者往後的研究中，更將可轉向的Trailer 數量增加，形成類似多輪轉向、前輪驅動的架構 [8]。另一方面，我們尚未發現有雙輪轉向、後輪驅動的架構，但此架構可視作TTMR 向後移動的概念。TTMR 向後行進的研究已有學者進行討論 [9], [10]，但在該架構下並未具備雙輪轉向的能力，因此這可能是較少被討論的領域。

在雙輪驅動、前(或後)輪轉向的架構下，可以視作全輪驅動的摩托車模型。對於該架構，A. Bonci 等人 [3]已提出其動力學模型的分析並以理論、軟體針對該模型進行驗證。然而，根據作者的說明，目前該研究領域仍有許多發展的可能性。

最後，關於雙輪驅動、雙輪轉向的模型，M. Kokot [7] 等人說明，目前相關研究較少被提出討論，而該模型可以利用Generalized Bicycle Model (GBM) 作為其車輛模型。如同其他分類的研究，不同架構的模型皆有其特色。我們認為GBM 多樣的移動模式可以為移動式機器人帶來更靈活、更彈性的移動方式，正如同全向型的移動式機器人。然而，全向型的移動式機器人其仰賴的是車輪的機構設計，在維修上可能帶來不便。因此，我們希望往GBM 類型的移動式機器人進行探討，靈活運用其特性於移動式機器人的應用上。

另一方面，移動式機器人實現導航或是自動駕駛亦是目前重要研究方向。相關技術概括了Simultaneous Localization And Mapping (SLAM), Path Planning, Path Following 等等。SLAM 負責車輛的即時定位以及環境建構，Path Planning 負責建構遠離障礙物的導航路線，Path Following 則負責車輛沿線行走的功能。時至今日，SLAM 已趨於成熟且穩定，而Path Planning 與Path Following 則仍為現今許多學者的研究項目。導航必須建立在好的路徑以及控制方法上，並且好的路徑可以有效提昇追蹤的表現且減輕控制上的負擔，因此，本研究亦將Path Planning 作為本文核

Manuscript received May 08, 2023; revised May 16, 2023.

Yu-Lin Chen and Yeh-Chih Huang have equal contributions to this article. The authors are with the Department of Mechanical Engineering, National Taiwan University, 106319 Taipei, Taiwan (e-mail: chenyl@solab.me.ntu.edu.tw; ychuang@solab.me.ntu.edu.tw; chanky@ntu.edu.tw).

心內容之一。

路徑規劃已有許多種類的方法，像是Dijkstra, A\*等利用圖搜尋的方法，或是RRT, PRM等利用隨機特性進行採樣的方法 [11]。這些方法中，RRT 的隨機特性以及節點擴展方式可簡單、直接地將GBM 的移動模式定義與約束代入，因此本研究將以RRT 演算法作為方法基礎。另外，路徑的連續性亦扮演著重要的角色，其目的在於提昇Local Path 的Controllability [12]以及降低車輛驅動單元的控制負擔，滿足連續性條件的路徑可以有效降低機器人驅動單元的震盪，並且降低追蹤的誤差 [7]。

Huh U-Y et al. [13] 在研究中說明了不同連續性的定義，並提及了 $G_2$  代表路徑含有連續的曲率，同時隱含其代表著加速度的連續性，可降低動態系統的負擔。針對此問題，作者使用二階多項式對每組路徑點進行參數化，帶入Fuzzy Control Theory 中的Membership function 來操作相鄰路徑點集的重疊關係，使相鄰片段可組合成三階多項式，滿足 $G_2$  連續的要求。

Yang, K. et al. [14] 提出基於Spline 的RRT 規劃方法。作者以曲率最大值與節點生長的最大角度為條件，限制了RRT 擴展節點的範圍，並針對路徑點以三階Bezier Curve 進行平滑化，滿足了 $G_2$  連續的要求，因此可確保產生的路徑不僅降低機器人控制的負擔，同時也滿足Non-holonomic的限制。

另一方面，亦有部份研究是將機器人的運動學考量於路徑規劃方法中，以此計算出適合該機器人導航使用的全域路徑。以Ghosh. D et al. [15] 的研究為例，作者在雙向RRT 方法中代入了Non-holonomic 機器人的運動學約束，在節點擴展中利用約束確保節點間符合機器人的運動學。然而，其研究中提及雙向RRT 的方法在銜接兩棵樹時會面臨運動學連續性的關係，因此作者利用Parametrized Trajectory Generator (PTG) [16] 將兩棵相連樹重製出一條軌跡。然而，此方法考量的運動學約束僅確保了節點間的軌跡滿足 $G_1$  連續，即切線方向連續。

J. Wang et al. [17] 也提出考量運動學限制的雙向RRT 規劃方法，作者雖然將運動學限制式帶入了節點擴展的方法中，然而對於機器人速度命令的候選離散中，卻缺乏了妥善的連續性考量，因此只能確保單一節點週期內的曲率連續，而無法確保節點銜接時的曲率連續，因此作者的方法亦是僅滿足 $G_1$  連續。

Kang, Y. et al. [18] 則提出Dynamic Smoothing 方法，作者基於運動學限制將點與點之間的連接改為Arc 與Line 的組合，作為Rewiring 的方法。然而，儘管考量了運動學限制，其Arc 與Line 的銜接點仍無法確保曲率連續，亦即無法證明完整路徑滿足 $G_2$  連續。

考量運動學約束於路徑規劃方法的本意是在於計算出適合機器人的路徑，但相關方法皆僅滿足 $G_1$  連續的要求。然而，在M. Kokot et al. [7]的研究中以實驗證實，相同機器人在沿著滿足 $G_1$  連續的路徑移動時，其車輪的控制命令會產生震盪的問題，而沿著滿足 $G_2$  連續的路徑移動時則可以有效避免該問題，由此可知 $G_2$  連續性對於路徑規劃的重要性。

根據已回顧的研究，本研究將以GBM 為機器人模型，妥善研究其移動模式，並為其設計一套可滿足 $G_2$  連續性要求的路徑規劃演算法。以下是各章節的說明，第二章介紹GBM 的移動模式的定義以及模式切換的約束條件；第三章介紹本研究的路徑規劃方法以及連續性分析的推導；第四章介紹本研究的案例環境，並以路徑規劃結果驗證連

續性的要求；第五章則將總結本研究的貢獻，同時提出值得持續討論的問題以及未來工作。

## II. MOTION MODES

### A. Definitions

M. Kokot [7]的研究中，作者說明在相同路徑下，調整GBM 的朝向對機器人的移動表現有不同的影響，例如其更為貼近牆壁，因此作者以機器人朝向為變數設計了可用於GBM 的移動模式。然而，該研究中作者並未提及關於模式切換的條件，模式切換代表GBM 在移動中可以利用不同的移動模式進行切換，例如橫移的Crab 模式可以轉換成相切於路徑的Tangential 模式，因此GBM 的移動控制方法仍有持續討論的議題。另外，當討論模式切換問題時，以朝向為主的定義方法可能會忽略車輪控制的連續性。基於上述問題，本研究以車輪的控制項來定義移動模式、探討移動行為，並建立模式切換關係，最後再說明移動模式與路徑規劃的關聯性。

首先，假設車輪裝置於車體中心的前、後方，軸距為 $L$ ，因移動機器人的低速移動特性，本文以運動學幾何關係進行分析。依照Bicycle Model 的分析方法，可建立Ackermann Steering Geometry 模式，如圖3，其幾何關係為：

$$\frac{L}{\sin(\theta_f + \theta_r)} = \frac{R_f}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_r)} = \frac{R_r}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_f)} \quad (1)$$

$$\frac{V_f}{R_f} = \frac{V_r}{R_r} = \omega$$

根據式(1)，Ackermann Steering Geometry模式建立於迴轉半徑與軸距成三角形關係，即 $R_f \neq 0$  or  $R_r \neq 0$ 。另外，其運動學關係可建立為式(2)

$$\frac{\cos(\theta_f)}{\cos(\theta_r)} = \frac{R_r}{R_f} = \frac{V_r}{V_f} \quad (2)$$

$$V_r = V_f \cdot \frac{\cos(\theta_f)}{\cos(\theta_r)}$$

根據上述定義，作為Control Inputs 的車輪控制項僅需將後輪的速度作為應變數，其餘速度、轉向角度仍可作為獨立變數進行控制，並考量馬達運動能力即可。Ackermann Steering Geometry 模式主要根據瞬心位置使車體朝向有所不同，一個比較直觀的情況是瞬心與中心點連線與車身垂直(圖2)，故行進時朝向會相切於路徑，本文將此情況稱之為Tangential 模式，其條件定義為式(3)。

$$V_f(t) = V_r(t)$$

$$\theta_f(t) = -\theta_r(t) \quad (3)$$

$$t \geq 0$$

然而，Ackermann Steering Geometry 模式會出現三種例外情況，即兩輪轉向角度平行、兩輪轉向角度皆達 $\pm\frac{\pi}{2}$ 、 $R_f, R_r = 0$ 。因此，我們另外設計Crab 與Differential Drive 模式來因應前兩種情況，而第三種情況會使GBM 移動卡死，因此應在規劃與控制時避免該情況的發生。Crab 模式的幾何關係如圖4，其條件式如式(4)，而Differential Drive 模式幾何關係如圖5，其條件式如式(5)。

$$\begin{aligned}
V_f(t) &= V_r(t) \\
\theta_f(t) &= \theta_r(t) \\
t &\geq 0
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\theta_f(t) &= \pm \frac{\pi}{2} \\
\theta_r(t) &= \pm \frac{\pi}{2} \\
t &\geq 0
\end{aligned} \tag{5}$$

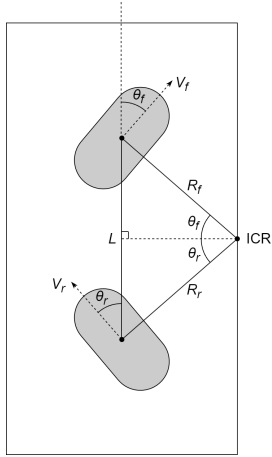


Fig. 2: Tangential

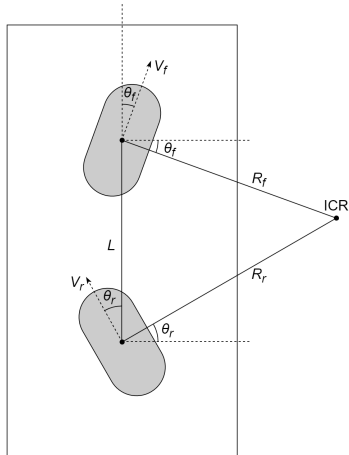


Fig. 3: Ackermann Steering Geometry

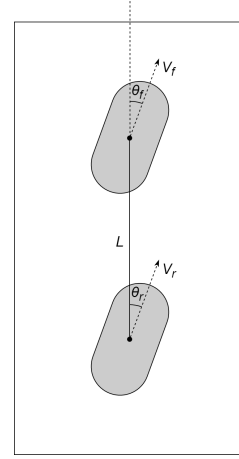


Fig. 4: Crab

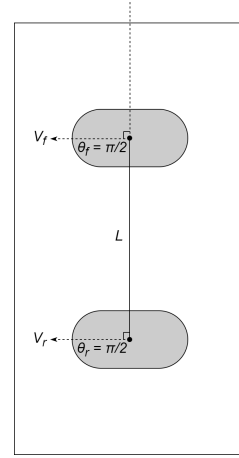


Fig. 5: DifferentialDrive

基於定義的移動模式，我們展示模式的移動行為，其中Ackermann Steering Geometry 的模式則以直觀的Tangential 模式為代表。如圖6, 7, 8。

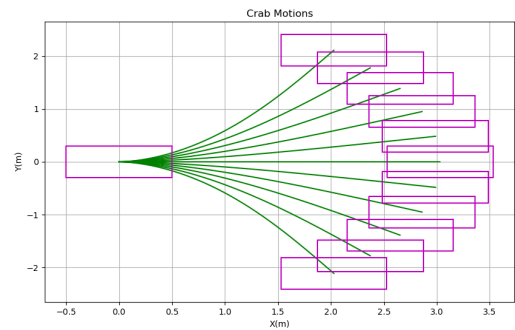


Fig. 6: Visualization of "Crab" motions. Purple rectangles represent poses of GBM vehicle.

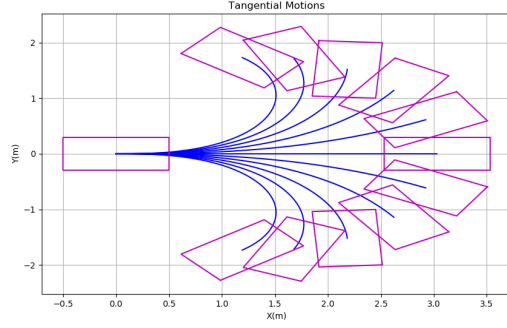


Fig. 7: Visualization of "Tangential" motions. Purple rectangles represent poses of GBM vehicle.

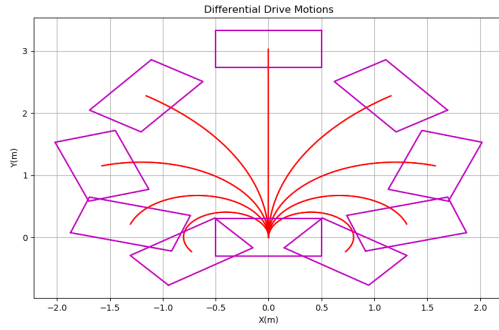


Fig. 8: Visualization of "Differential Drive" motions. Purple rectangles represent poses of GBM vehicle.

最後，我們建立模式間的切換關係如圖9，考量車輪控制項於模式邊界條件的連續性關係即可進行模式間的切換。以Crab與Ackermann Steering Geometry模式為例，兩模式的條件邊界為 $V_f = V_r$  &  $\theta_f = \theta_r$ ，只要在相同時間點滿足該條件即可成功切換模式。

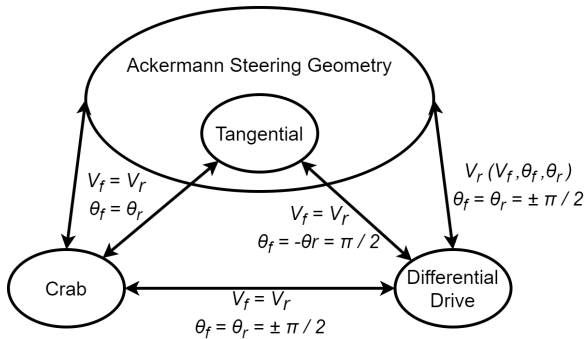


Fig. 9: Relationship of motion modes °

### B. Relations Between Motion Modes and Path

許多路徑規劃方法都是針對非完整約束的車輛可使用的路徑進行演算法設計，因此對該種類車輛而言，可以簡單地以單一移動模式進行考量，例如，Car-like機器人可只考量Ackermann Steering Geometry模式。然而，如同Omni-directional Mobile Robots, GBM具有多樣的移動模式，因此針對其運動學而開發可使用的路徑規劃方法是必要的。

如果我們直接應用一般的路徑規劃方法於GBM機器人上，可能會因為移動模式的未定義，使得路徑的規劃上造成一些困難，我們以給定的Waypoints並使用SRRT的平滑方法 [14]產生一條固定路徑來進行說明。

首先，我們針對該路徑使用不同移動模式來展示機器人姿態與面積覆蓋的關係，如圖10, 12, 11。

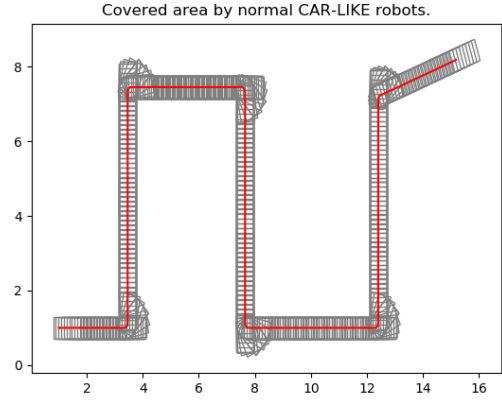


Fig. 10: Visualization of covered areas by normal Car-like mobile robots.

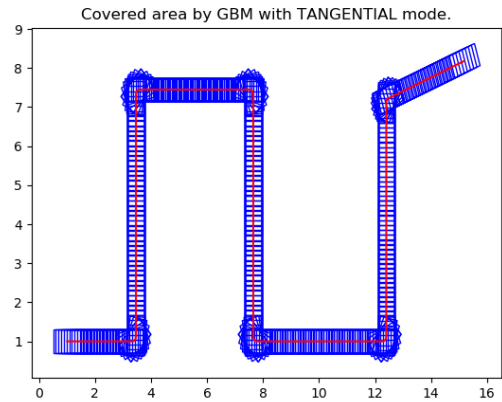


Fig. 11: Visualization of covered areas by GBM with tangential mode.

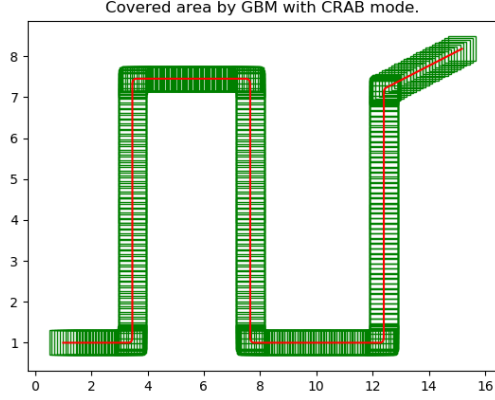


Fig. 12: Visualization of covered areas by GBM with crab mode.

從上圖中可以發現，如果以類似Carlike Robots與Tangential Mode的方式過彎時，會產生比較大的覆蓋面積，根據瞬心考量的位置又會產生差異，而使用Crab Mode過彎時，則可以有較小的覆蓋面積。然而在部份路段，使用Crab模式的車輛其朝向會與路線垂直，造成比較大的覆蓋面積。由於，一般的Path Planning方法並無針對多種移動模式進行設計，因此無法避免移動模式帶來的影響，同時也對規劃時的碰撞檢測造成影響。

故我們希望在路徑規劃的過程中，直接加入移動模式的考量，不僅可以解決碰撞障礙物的檢測問題，同時也可以直接定義出何種路段使用何種模式，進而避免模式選擇紊亂的情況發生。

### III. METHODOLOGY

本研究GBM 移動模式以車輪的轉向角度、移動速度進行條件限制，因此我們以RRT 為方法基礎，其優勢在於可以利用車輛的Control Inputs 進行節點擴展，如J. Wang et al. [17]的方法。我們將車輪的轉向角度、移動速度作為Control Inputs，並考量加減速能力後進行離散，以此進行路徑節點的擴展，進而計算出路徑解。另外，為滿足路徑的 $G_2$  連續性要求，我們首先分析了GBM 運動學模型與曲率連續的推導。依照推導的結果，我們對Control Inputs 採以二階多項式函數的設計，以滿足連續性要求。因此，本章節將首先說明連續性分析的推導，接著說明如何設計Control Inputs 的二階多項式函數，最後再帶入到RRT 路徑規劃方法。

#### A. Continuity Analysis

A. Kelly [19]在其研究中明確定義出GBM 的運動學模型，其運動學為：

$$\begin{aligned} v_c^w &= \begin{bmatrix} V_{fx} \\ V_{fy} \\ V_{rx} \\ V_{ry} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_f \\ 0 & 1 & x_f \\ 1 & 0 & -y_r \\ 0 & 1 & x_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ \omega \end{bmatrix} \\ &= H_c^v \dot{x}_v^w \\ \dot{x}_v^w &= [(H_c^v)^T (H_c^v)]^{-1} (H_c^v)^T v_c^w \end{aligned} \quad (6)$$

其中，關於車輪的 $V_{ix}$ ,  $V_{iy}$  可改以線速度與轉向角度進行表示：

$$\begin{aligned} V_{fx} &= V_f \cdot \cos(\theta_f) \\ V_{fy} &= V_f \cdot \sin(\theta_f) \\ V_{rx} &= V_r \cdot \cos(\theta_r) \\ V_{ry} &= V_r \cdot \sin(\theta_r) \end{aligned} \quad (7)$$

彙整式(6 - 7)，可得

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & \frac{-1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_f \cos \theta_f \\ V_f \sin \theta_f \\ V_r \cos \theta_r \\ V_r \sin \theta_r \end{bmatrix} \quad (8)$$

另一方面，Huh U-Y et al. [13]的研究中已表示 $G_2$ 連續性即代表路徑的曲率連續，故定義曲率方程為：

$$\kappa = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (9)$$

曲率的計算中，位置點的項次關係可以代換為車輛運動學模型及其導數：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V_x \cos \theta - V_y \sin \theta \\ \dot{y} &= V_x \sin \theta + V_y \cos \theta \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{V}_x \cos \theta - V_x \omega \sin \theta - \dot{V}_y \sin \theta - V_y \omega \cos \theta \\ \ddot{y} &= \dot{V}_x \sin \theta + V_x \omega \cos \theta + \dot{V}_y \cos \theta - V_y \omega \sin \theta \\ \ddot{\theta} &= \dot{\omega} \end{aligned} \quad (11)$$

將方程式(8)微分可得：

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= \frac{1}{2} (\dot{V}_f \cos \theta_f - V_f \dot{\theta}_f \sin \theta_f + \dot{V}_r \cos \theta_r - V_r \dot{\theta}_r \sin \theta_r) \\ \dot{V}_y &= \frac{1}{2} (\dot{V}_f \sin \theta_f + V_f \dot{\theta}_f \cos \theta_f + \dot{V}_r \sin \theta_r + V_r \dot{\theta}_r \cos \theta_r) \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{L} (\dot{V}_f \sin \theta_f + V_f \dot{\theta}_f \cos \theta_f - \dot{V}_r \sin \theta_r - V_r \dot{\theta}_r \cos \theta_r) \end{aligned} \quad (12)$$

最後，整理方程式(8, 10, 11, 12)後，可計算曲率為：

$$\kappa = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|-V_x^2 \omega - V_y^2 \omega - V_x \dot{V}_y + \dot{V}_x V_y|}{(V_x^2 + V_y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (13)$$

由推導可知，曲率可以透過設計車輪轉向、移動速度及其一階導函數來實現連續性要求，因此本研究採取二階多項式函數為Control Inputs 進行設計。

## B. Polynomial Design

從連續性分析可知，Control Inputs必須滿足多項式函數連續及其一階導函數連續。另外，用於路徑規劃時，也必須考量一個週期 $T$  才可得知位置點關係，因此假設一多項式函數為

$$\begin{aligned} f(t) &= at^2 + bt + c \quad t \in [0, T) \\ f'(t) &= 2at + b \quad t \in [0, T) \end{aligned} \quad (14)$$

考量到相鄰週期的多項式函數銜接關係時，兩組函數必須滿足

$$\begin{aligned} f_N(t=T) &= f_{N+1}(t=0) \\ f'_N(t=T) &= f'_{N+1}(t=0) \end{aligned} \quad (15)$$

根據式(14 - 15)，可推導出多項式函數的參數關係為

$$\begin{aligned} b_N &= 2T \sum_{i=0}^{N-1} a_i \\ c_N &= T^2 \sum_{i=0}^{N-1} \left( (2(N-i)-1)a_i \right) \end{aligned} \quad (16)$$

而 $a_N$  無關於多項式歷史的項次，其範圍與多項式的邊界條件相關。故我們首先考量多項式的邊界條件，即

$$\begin{aligned} f_{\min} &\leq f_N(t) \leq f_{\max} \\ f'_{\min} &\leq f'_N(t) \leq f'_{\max} \end{aligned} \quad (17)$$

並且定義 $f'(t)$  為一個對稱的折線型函數，如圖所示：

$$f'_N(t) = \begin{cases} 2a_N t, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -2a_N t + 2T, & \frac{T}{2} < t \leq T \end{cases} \quad (18)$$

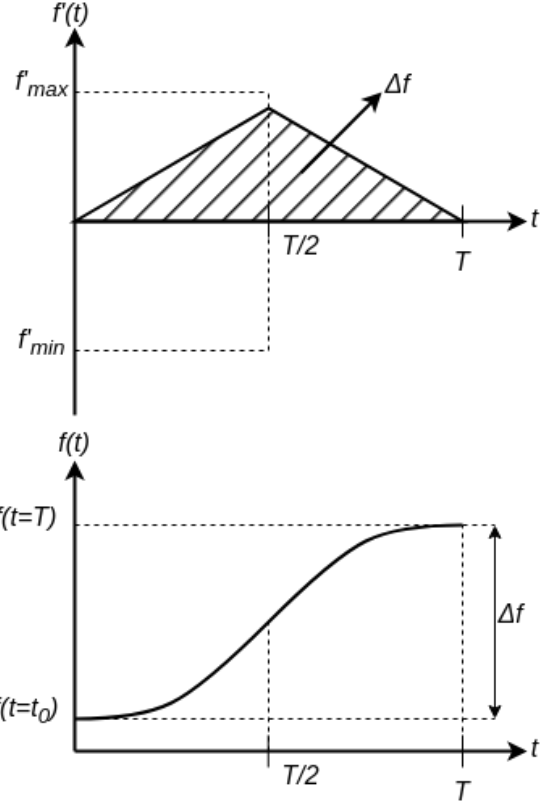


Fig. 13: 多項式最大、最小差值計算方法。

由於一階導函數的積分即為函數的改變量。利用這個特性， $f(t)$ 的改變量可以簡單地被控制，進而簡單地滿足方程式(17)的邊界條件，最後可以利用邊界條件得出 $a_N$  的範圍，即

$$\begin{aligned} f'_{\min} &\leq a_N T \leq f'_{\max} \\ f_{\min} &\leq f_{N-1}(T) + \frac{a_N T^2}{2} \leq f_{\max} \end{aligned} \quad (19)$$

根據方程式(19)，可進一步得出 $a_N$ 的上、下邊界，即 $a_{N,\max}$ 與 $a_{N,\min}$ 。於邊界內離散 $a_N$ 即可得出每個週期內的多項式函數候選集。

## C. Path Planning

根據Control Inputs 的多項式函數設計與離散方法，可將其應用於考量GBM 移動模型的RRT 路徑規劃中，主要可分為三大部份，Random Sampling, Node Selection 和Node Expansion，步驟如演算法1所示，以下我們將逐步進行說明。

### Algorithm 1 Proposed RRT-based path planning algorithm.

- 1:  $T.\text{init}(X_{\text{init}})$
- 2: **while** Distance( $X_{\text{goal}}, X_{\text{new}}$ ) >  $d_{\text{lim}}$  **do**
- 3:    $x_{\text{sample}} \leftarrow \text{StateSampling}()$
- 4:    $X_{\text{near}} \leftarrow \text{NodeSelection}(T, x_{\text{sample}})$
- 5:    $x_{\text{new}} \leftarrow \text{NodeExpansion}(T, x_{\text{sample}}, X_{\text{near}})$
- 6:    $T.\text{add}(x_{\text{new}})$
- 7: **end while**

1) *Random Sampling*: 首先，我們會針對給定的環境區域範圍進行隨機點的取樣。在已知環境資訊的情況下，採樣點會避開障礙物的位置，因此僅在機器人可通行的位置進行灑點。另外，為使RRT的節點數可容易地朝終點擴展，因此我們設計一機率值 $P_{\text{sample}}$ 來決定是否以終點為採樣點供後續節點進行擴展的判斷。此步驟完成後，可得一採樣點 $X_{\text{sample}}$ 。

2) *Node Selection*: 根據採樣點，我們會針對節點樹的每個節點與採樣點進行由近至遠的距離排序，以 $X_{\text{sorted}}$ 表示。接著，我們依序在 $X_{\text{sorted}}$ 中挑選，若節點 $x_{\text{sorted},i}$ 滿足在世界座標系下的速度方向與採樣點相對於節點位置的角度小於一設定閾值 $\theta_{\text{thres}}$ ，則列入鄰近節點集合 $X_{\text{texnear}}$ ，此步驟會挑選出 $k$ 個節點，如演算法2。

---

**Algorithm 2** NodeSelection

---

**Input:**  $T$ : Tree;  $x_{\text{sample}}$ : Sample Point.

**Output:**  $X_{\text{near}}$ :  $k$  Nearest Nodes.

```

1:  $X_{\text{sorted}} \leftarrow \text{Distance}(T, x_{\text{sample}})$ 
2:  $X_{\text{near}} \leftarrow \emptyset$ 
3: for  $x_{\text{sorted},i} \in X_{\text{sorted}}$  do
4:    $\theta_{\text{velocity}} \leftarrow \text{VelocityOrientaion}(x_{\text{sorted},i})$ 
5:    $\theta_{\text{position}} \leftarrow \text{PositionOrientaion}(x_{\text{sorted},i}, x_{\text{sample}})$ 
6:   if  $||\theta_{\text{velocity}} - \theta_{\text{position}}|| \leq \theta_{\text{thres}}$  then
7:      $X_{\text{near}}.\text{add}(x_{\text{sorted},i})$ 
8:   end if
9:   if  $|X_{\text{near}}| \geq k$  then
10:    Break
11:   end if
12: end for
13: return  $X_{\text{near}}$ 

```

---

3) *Node Expansion*: 根據鄰近節點集合 $X_{\text{near}}$ 中的節點資訊，我們依照節點目前的移動模式代入車輪轉向、速度限制式，並以此計算轉向角度與移動速度的多項式候選。基於每個候選組合，我們可以計算出未來節點的目標姿態，並利用評估所有未來節點與採樣點的距離，可以找出此次擴展的最佳解，作為節點擴展的結果，詳細步驟如演算法3所示。

---

**Algorithm 3** NodeExpansion

---

**Input:**  $T$ : Tree;  $x_{\text{sample}}$ : Sample Point;  $X_{\text{near}}$ :  $k$  Nearest Nodes;

**Output:**  $x_{\text{new}}$ : New node.

```

1:  $J \leftarrow \infty$ 
2:  $x_{\text{new}} \leftarrow \text{null}$ 
3: for  $x_{\text{near},i} \in X_{\text{near}}$  do
4:    $G \leftarrow \text{GetMotionModeConstraints}(x_{\text{near},i})$ 
5:    $\Theta_{f,i}, \Theta_{r,i} \leftarrow \text{DiscreteSteer}(x_{\text{near},i}, G)$ 
6:    $V_{f,i}, V_{r,i} \leftarrow \text{DiscreteVelocity}(x_{\text{near},i}, G)$ 
7:    $X_{\text{new},i} \leftarrow \text{ComputePose}(x_{\text{near},i}, \Theta_{f,i}, \Theta_{r,i}, V_{f,i}, V_{r,i})$ 
8:   for  $x_j \in X_{\text{new},i}$  do
9:      $J_j \leftarrow ||x_{\text{sample}} - x_j||_2$ 
10:    if  $J_j < J$  then
11:       $J \leftarrow J_j$ 
12:       $x_{\text{new}} \leftarrow x_j$ 
13:    end if
14:   end for
15: end for
16: return  $x_{\text{new}}$ 

```

---

## IV. RESULTS AND DISCUSSION

本章節中，我們將測試提出的路徑規劃方法，並針對起點至終點的規劃軌跡進行連續性分析。根據圖9的定義，我們以Crab, Tangential, Differential Drive 作為本次測試使用的三種模式，其中以Tangential 模式作為Ackermann Steering Geometry 的代表較容易在路徑規劃時進行模式切換，以便後續分析。

以下是關於測試的車輛假設與環境說明。首先，假設車輛尺寸為長 $1(m)$ ，寬 $0.6(m)$ ，兩輪裝置車體中心線的前後方，軸距為 $0.8(m)$ 。對於車輪的控制能力，我們設定最高速度為 $0.3(m/s)$ ，加速度為 $0.15(m/s^2)$ ，轉向角度素為 $45(deg/s)$ ，這些參數將被使用於路徑規劃演算法的多項式計算當中。另外，環境案例中，第一個環境為雜亂環境，其具備許多不規則的障礙物。第二種為窄小通道，通道寬為 $0.8(m)$ ，因此不允許車輛以任意姿態通過。在兩種環境中，場地大小皆為長 $15.18(m)$ ，寬 $8.18(m)$ ，起、終點皆設置為 $(1, 1)$  與 $(15, 8)$  處。

### A. Scenario 1: Cluttered Environment

GBM的移動機器人於雜亂環境的測試結果如圖14所示，對於已規劃出的路徑，其連續性與控制命令則可見於圖15與圖16。

從車輛控制命令圖中可知，第0至4秒時，前、後輪的轉向命令一正一負，且速度命令皆相同，因此為Tangential模式。在第4秒後，前、後輪轉向命令趨於0，並之後兩輪保持相同轉向，因此為Crab模式。從此圖可了解，在第4秒時移動機器人進行了模式切換。另外，從連續性分析圖中可知，所有時間段的曲率皆呈現一連續的狀態，因此證實了提出的演算法可滿足 $G_2$  連續的要求。



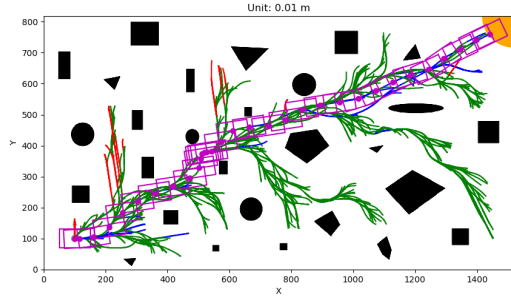


Fig. 14: 雜亂環境之路徑規劃結果。紅線代表Differential Drive模式；綠線代表Crab模式；藍線代表Tangential模式；紫色方框與紫色點代表車輛本體與其中心點。左下角為起點，右上角橘色區域則代表導航終點結束區。

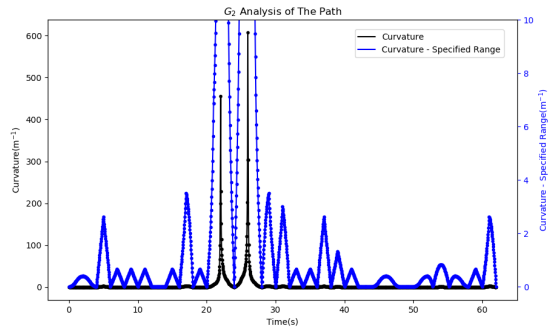


Fig. 15:  $G_2$ 連續性分析圖。因Scale問題，我們以雙重Y座標係來顯示特定範圍的曲率變化，可明顯看出本研究提出之路徑在任何時刻皆滿足曲率連續性，故確保了 $G_2$ 連續性要求。

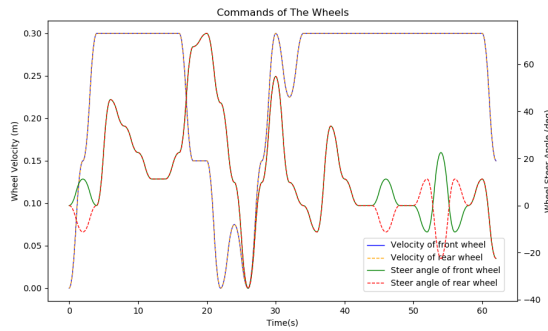


Fig. 16: 車輛控制命令圖。

## B. Scenario 2: Narrow Passage

GBM的移動機器人於窄小通道的測試結果如圖17所示，對於已規劃出的路徑，其連續性與控制命令則可見於圖18與圖19。

從規劃出的路徑中(圖17)可知，當機器人位於窄小通道時，其路徑為Tangential模式(藍色線段)，此時的速度命令可對應於圖19的第16至40秒左右。此段時間內，前後輪轉

向皆維持於0，速度皆相等，因此是Tangential與Crab兩模式切換的邊界狀態上。

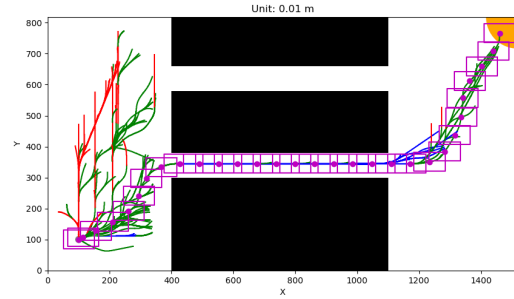


Fig. 17: 窄小通道之路徑規劃結果。紅線代表Differential Drive模式；綠線代表Crab模式；藍線代表Tangential模式；紫色方框與紫色點代表車輛本體與其中心點。左下角灰色圓圈為起點，右上角橘色區域則代表導航終點結束區。

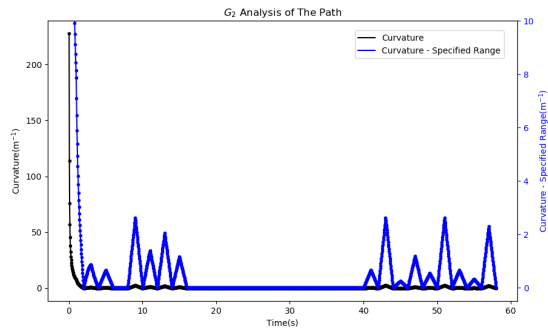


Fig. 18:  $G_2$ 連續性分析圖。

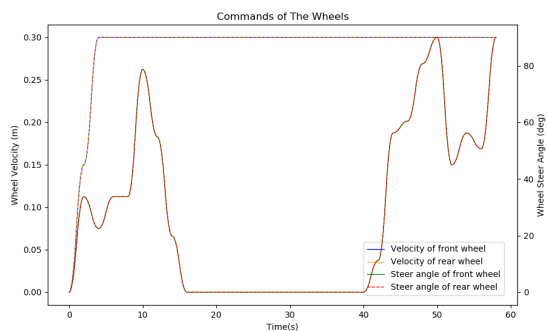


Fig. 19: 車輛控制命令圖。

從兩種環境測試中，本研究提出的路徑規劃方法可以為GBM 種類的移動機器人計算出起點至終點的路徑。路徑規劃過程中根據目前狀態、障礙物等資訊，考量可行進的移動模式進行節點擴展，展示了GBM 多樣化的移動特性。另外，我們的規劃方法包含了車輪的控制命令，其透過設計2 階多項式函數來實現平滑的控制，因此可降低控制負擔，相同的結論亦可以從路徑連續性圖的曲率連續結果得到證實。



## V. CONCLUSIONS AND FUTURE WORK

本研究首先回顧目前已有的車輛種類研究，並說明了目前對於GBM的研究仍有持續發展的可能性。接著，我們針對GBM進行詳細的移動模式定義，說明目前的路徑規劃方法因為沒有考量移動模式，故不同模式運行於相同路徑時的覆蓋面積會有所不同，特別是在轉彎處會有影響。因此，我們考量移動模式於RRT演算法中，以設計車輪控制項的多項式函數來滿足路徑連續性要求，最後以兩種測試環境驗證本研究提出的方法。然而，我們認為目前方法還有許多可持續發展的方向。例如，以RRT為基礎的路徑規劃演算法，目前皆有考量最佳路徑的變種方法，因此在考量移動模式的同時，也考慮最佳路徑會是我們的未來工作。另外，以車輪速度為基礎的RRT方法在利用雙向RRT的概念增進效率時，會面臨路徑連續性、車輪命令連續性的問題，因此提升本研究方法的效率可能具有挑戰性。另一方面，GBM的路徑追蹤也是值得探討的重要問題，由於移動時可能面臨控制誤差或躲避動態障礙物的需求，使得路徑規劃的資訊受到侷限，故追蹤時考量移動模式也會是一個重要方向。儘管如此，我們仍相信本研究的方法具有價值，並會在未來針對這些方向持續研究並進行改善。

## REFERENCES

- [1] H. Chen, H. Yang, X. Wang, and T. Zhang, "Formation control for car-like mobile robots using front-wheel driving and steering," *International Journal of Advanced Robotic Systems*, vol. 15, no. 3, p. 1729881418778228, 2018.
- [2] R. Rajamani, *Vehicle dynamics and control*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [3] A. Bonci, S. Longhi, and G. A. Scala, "Towards an all-wheel drive motorcycle: Dynamic modeling and simulation," *IEEE Access*, vol. 8, pp. 112867–112882, 2020.
- [4] L. Li, K. Song, and H. Xie, "Active disturbance rejection path-following control for self-driving forklift trucks with geometry based feedforward," in *2020 4th CAA International Conference on Vehicular Control and Intelligence (CVCI)*, pp. 187–192, IEEE, 2020.
- [5] T. A. Tamba, B. Hong, and K.-S. Hong, "A path following control of an unmanned autonomous forklift," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 7, pp. 113–122, 2009.
- [6] J. Yuan, F. Sun, and Y. Huang, "Trajectory generation and tracking control for double-steering tractor-trailer mobile robots with on-axle hitching," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 62, no. 12, pp. 7665–7677, 2015.
- [7] M. Kokot, D. Miklič, and T. Petrović, "Path continuity for multi-wheeled agvs," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 6, no. 4, pp. 7437–7444, 2021.
- [8] J. Yuan, S. Yang, and J. Cai, "Consistent path planning for on-axle-hitching multisteering trailer systems," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 65, no. 12, pp. 9625–9634, 2018.
- [9] J. Morales, J. L. Martínez, A. Mandow, and A. J. García-Cerezo, "Steering the last trailer as a virtual tractor for reversing vehicles with passive on-and off-axle hitches," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 60, no. 12, pp. 5729–5736, 2013.
- [10] A. Widyotriatmo, Y. Y. Nazaruddin, M. R. F. Putranto, and R. Ardhi, "Forward and backward motions path following controls of a truck-trailer with references on the head-truck and on the trailer," *ISA transactions*, vol. 105, pp. 349–366, 2020.
- [11] J. R. Sanchez-Ibanez, C. J. Perez-del Pulgar, and A. García-Cerezo, "Path planning for autonomous mobile robots: A review," *Sensors*, vol. 21, no. 23, p. 7898, 2021.
- [12] K. R. Simba, N. Uchiyama, and S. Sano, "Real-time smooth trajectory generation for nonholonomic mobile robots using bézier curves," *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 41, pp. 31–42, 2016.
- [13] U.-Y. Huh and S.-R. Chang, "Ag 2 continuous path-smoothing algorithm using modified quadratic polynomial interpolation," *International Journal of Advanced Robotic Systems*, vol. 11, no. 2, p. 25, 2014.
- [14] K. Yang, S. Moon, S. Yoo, J. Kang, N. L. Doh, H. B. Kim, and S. Joo, "Spline-based rrt path planner for non-holonomic robots," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 73, no. 1-4, pp. 763–782, 2014.
- [15] D. Ghosh, G. Nandakumar, K. Narayanan, V. Honkote, and S. Sharma, "Kinematic constraints based bi-directional rrt (kb-rrt) with parameterized trajectories for robot path planning in cluttered environment," in *2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pp. 8627–8633, IEEE, 2019.
- [16] J. L. Blanco, M. Bellone, and A. Gimenez-Fernandez, "Tp-space rrt-kinematic path planning of non-holonomic any-shape vehicles," *International Journal of Advanced Robotic Systems*, vol. 12, no. 5, p. 55, 2015.
- [17] J. Wang, B. Li, and M. Q.-H. Meng, "Kinematic constrained bi-directional rrt with efficient branch pruning for robot path planning," *Expert Systems with Applications*, vol. 170, p. 114541, 2021.
- [18] Y. Kang, Z. Yang, R. Zeng, and Q. Wu, "Smooth-rrt: Asymptotically optimal motion planning for mobile robots under kinodynamic constraints," in *2021 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pp. 8402–8408, IEEE, 2021.
- [19] A. Kelly, *Mobile robotics: mathematics, models, and methods*. Cambridge University Press, 2013.