线代期末模拟卷参考答案

一、填空题

1. 10　　$5x\cdot x\cdot x\cdot 2x=10x^4$

2. 2

解析：$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$$

即 $A\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}=B$

两边取行列式　$|A|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=1\times2=2=|B|$

$\therefore |B|=2$.

3. 3

$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$

4. 36

解析：$\because$ 方阵A的特征值为 $1,2,3$

$\therefore A^2-2A+3E$ 的特征值为 $2,3,6$

$\therefore |A^2-2A+3E|=2\times3\times6=36$

5. -10

$(-4,6,a)=-2\cdot(2,-3,5)$

6. $2^{2020}\begin{pmatrix}2&4&4\\1&2&2\\-1&-2&-2\end{pmatrix}$

解析：$A=\begin{pmatrix}2&4&4\\1&2&2\\-1&-2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}(1,2,2)$

$B=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$　$C=(1,2,2)$

$CB=(1,2,2)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=2$

$$A^{2021}=\begin{pmatrix}2&4&4\\1&2&2\\-1&-2&-2\end{pmatrix}^{2021}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}(1,2,2)\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}(1,2,2)\cdots\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}(1,2,2)$$

$$=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot 2^{2020}(1,2,2)$$

$$=2^{2020}\begin{pmatrix}2&4&4\\1&2&2\\-1&-2&-2\end{pmatrix}$$

7. $\begin{pmatrix}-2&3&-1\\1&-1&0\\3&-4&2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&3&-2\\2&4&-3\\0&1&-1\end{pmatrix}$

8. $-\frac{A-3E}{4}$.

$A^2-A-2E=0 \Rightarrow (A+2E)(A-3E)=-4E \quad \therefore (A+2E)^{-1}=-\frac{A-3E}{4}$

9. $t>\frac{3}{5}$ 3.

二次型系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&3&0\\1&0&t\end{pmatrix}$

若为正定，A的各阶顺序主子式大于0

$\therefore \begin{vmatrix}2&1&1\\1&3&0\\1&0&t\end{vmatrix}>0$ 即 $5t-3>0 \Rightarrow t>\frac{3}{5}$

二 计算题

1. 解：

$$\begin{vmatrix}x+a&b&c&d\\a&x+b&c&d\\a&b&x+c&d\\a&b&c&x+d\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x+a+b+c+d&b&c&d\\x+a+b+c+d&x+b&c&d\\x+a+b+c+d&b&x+c&d\\x+a+b+c+d&b&c&x+d\end{vmatrix}$$

$$=(x+a+b+c+d)\begin{vmatrix}1&b&c&d\\1&x+b&c&d\\1&b&x+c&d\\1&b&c&x+d\end{vmatrix}$$

$$=(x+a+b+c+d)\begin{vmatrix}1&b&c&d\\0&x&0&0\\0&0&x&0\\0&0&0&x\end{vmatrix}=(x+a+b+c+d)x^3$$

2.

$$C-B=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix},\qquad (C-B)'=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{bmatrix}$$

$$\left[(C-B)'\right]^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix},\quad X=E\left[(C-B)'\right]^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}$$

3.

解：（1）$\mathscr{A}\varepsilon_1=(1,1,0)^T=\varepsilon_1+\varepsilon_2$，

$\mathscr{A}\varepsilon_2=(1,-1,0)^T=\varepsilon_1-\varepsilon_2$，

$\mathscr{A}\varepsilon_3=(0,0,1)^T=\varepsilon_3$，

所求矩阵为：$D=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

(2) $\mathscr{A}\eta_1=(1,1,0)^T=\eta_2$，

$\mathscr{A}\eta_2=(2,0,0)^T=2\eta_1$，

$\mathscr{A}\eta_3=(2,0,1)^T=2\eta_1-\eta_2+\eta_3$，

故所求的矩阵为$\begin{pmatrix}0&2&2\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

4.

7. 解：由于$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-2&\lambda-4&2\\3&3&\lambda-a\end{vmatrix}\underline{\underline{c_1-c_2}}\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-1\\2-\lambda&\lambda-4&2\\0&3&\lambda-a\end{vmatrix}$

$\underline{\underline{r_2+r_1}}\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-1\\0&\lambda-3&1\\0&3&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-2)\left[(\lambda-3)(\lambda-a)-3\right]$，

由B可知$\lambda_1=2$是A的一个二重特征值，则$\lambda_1=2$是$(\lambda-3)(\lambda-a)-3=0$的一个根，

代入解得$a=5$，则$(\lambda-2)\left[(\lambda-3)(\lambda-a)-3\right]=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$.又因为$\lambda_2=b$是另一

个特征值，故$b=6$.对$\lambda_2=6$，解方程组

$$(6E-A)X=\begin{bmatrix}5&1&-1\\-2&2&2\\3&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=[1,-2,3]^T$.对于$\lambda_1=2$，解方程组

$$(2E-A)X=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\\3&3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=[-1,1,0]^T,\xi_3=[1,0,1]^T$.

可令$P=[\xi_2,\xi_1,\xi_3]=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-2&0\\0&3&1\end{bmatrix}$，则$P^{-1}AP=B$.

三．计算线性方程组的系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda\\ 0 & 0 & 2-\lambda^2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)\cdots\cdots\cdots\cdots 6\text{分}$$

当 $|A|\neq 0$，方程组有唯一解，即

（1）当$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -2$时，方程组有唯一解；……………………………8 分

（2）当 $\lambda=-2$时，方程组的增广矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

则 $R(A)=2,R(B)=3$，方程组无解；……………………………10 分

（3）当 $\lambda=1$时，方程组的增广矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad R(A)=R(B)=1, \cdots\cdots 12\text{分}$$

方程组有无穷多个解，可得通解为 $x_1=1-x_2-x_3(x_2,x_3$可任意取值)

$$\text{即:}\ \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},(c_1,c_2\in R)\cdots\cdots\cdots\cdots 15\text{分}$$

四．解：$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & 4 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{bmatrix}$,

则 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-4 & 2\\ 4 & 2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-5)^2$，所以 A 的特征值为

$\lambda_1=-4,\lambda_2=5$（二重）．对 $\lambda_1=-4$，解方程组

$$(-4E-A)X=\begin{bmatrix}-5 & 2 & 4\\ 2 & -8 & 2\\ 4 & 2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_1=[2,1,2]^T$，标准化得到$q_1=\frac{1}{3}[2,1,2]^T$. 对于$\lambda_2=5$，解方程组

$$(5E-A)X=\begin{bmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

得到一个基础解系：$\xi_2=[1,-2,0]^T,\xi_3=[0,-2,1]^T$，标准化得到

$q_2=\frac{1}{\sqrt5}[1,-2,0]^T,q_3=\frac{1}{3\sqrt5}[-4,-2,5]^T$.

取$T=[q_1,q_2,q_3]=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{4}{3\sqrt5}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{2}{3\sqrt5}\\\frac{2}{3}&0&\frac{\sqrt5}{3}\end{bmatrix}$，则$T$为正交矩阵，且$X=TY$，可得二次型的标准形为：$f=-4y_1^2+5y_2^2+5y_3^2$，规范形为：$f=z_1^2+z_2^2-z_3^2$.

五.证明题

1、证明：$A^2-A=0$

$A(A-E)=0$

取行列式 $|A||A-E|=0$

① $|A|=0$

② $|A|\neq0$，A可逆

$A^2=A\Rightarrow A^2\cdot A^{-1}=AA^{-1}=E$

$\therefore A=E$

2：

证明：

(1)、因为 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_3$线性无关，所以 α_2,α_3线性无关。，

又$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，故$\alpha_1$ 能由 α_2,α_3线性表出。 (4 分)

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，

（2）、（反正法）若不，则 α_4 能由 α_1，α_2, α_3 线性表出，

不妨设 $\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$。

由（1）知，α_1 能由 α_2，α_3 线性表出，

不妨设 $\alpha_1 = t_1\alpha_2 + t_2\ \alpha_3$。

所以 $\alpha_4 = k_1(t_1\alpha_2 + t_2\ \alpha_3) + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$，

这表明 α_2，α_3, α_4 线性相关，矛盾。

3. 证明：$\because$ A, B 均为 n 阶正交矩阵

$\therefore A^TA = E \quad |A^TA| = |A|^2 = 1$

$|B^TB| = E \quad |B^TB| = |B|^2 = 1$

$\therefore |A| = \pm 1, \ |B| = \pm 1$

$|A+B| = |(A+B)^T| = |B^T + A^T|$

$= -|A|\,|B^T+A^T| \cdot |B|$ （注意"一"）

$= -|AB^TB + AA^TB|$

$= -|A+B|$

$\therefore |A+B| = 0$.