南京航空航天大学

二〇二〇～二〇二一学年 第一学期《线性代数》考试试题

考试日期：2021年[redacted]日　　试卷类型：A卷　　试卷代号：38084

班号　　　　学号　　　　姓名

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

本题分数	30分
得　分	

一、填空题（每空2分）

1. 设 $\alpha_1=(2\ \ 0\ \ 3\ \ -1)^T$，$\alpha_2=(0\ \ 2\ \ 1\ \ 5)^T$，$\alpha_3=(2\ \ 2\ \ 4\ \ 4)^T$，$\alpha_4=(1\ \ 1\ \ 0\ \ 4)^T$，则该向量组的秩 $r(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4)=$________，它的一个极大线性无关组是____________.

2. 已知 A 为 n 阶可逆矩阵，E 是 n 阶单位矩阵，则 $\begin{pmatrix} E & E \\ O & A \end{pmatrix}^{-1}=$____________.

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $r(A)=$______，$A^{10}=$____________.

4. 已知 A 是3阶方阵，且 $|A|=\frac{1}{2}$，则 $|A^{-1}|=$______，$|A^*+A^{-1}|=$________.

5. 设 A 为3阶方阵，将 A 的第2列的1倍加到第3列得到矩阵 B，则满足 $AP=B$ 的矩阵 $P=$________，$P^5=$________.

6. 已知三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的系数矩阵 A 的特征值为1，-2，3，则该二次型的规范形为____________，且当 t 满足________时，矩阵 $2A-tE$ 是正定矩阵，其中 E 是单位矩阵.

7. 设 α，β 分别是矩阵 A 的属于1和-1的特征向量，则向量 α 与 β 线性________（填“相关”或“无关”）；又若 $\alpha=(1\ \ 2\ \ 1)^T$，$\beta=(1\ \ 1\ \ 0)^T$，则 $A^3(\alpha+\beta)=$________.

8. 已知 η_1，η_2，η_3 是三元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的3个解向量，其中 $r(A)=2$，且 $\eta_1-\eta_2=(1,0,-1)^T$，$\eta_2+\eta_3=(1,2,1)^T$，则导出组 $Ax=0$ 的基础解系中含有________个解向量，$Ax=b$ 的通解为________________.

本题分数	28分
得　分	

二、计算题（每题7分）（要求写出计算过程）

1. 求行列式 $D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1+x & -1 \\ 1 & 1+x & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$ 的值.

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且满足 $XA=2X-A$，求矩阵 X.

3. 设 $\mathcal{A}$ 是三维向量空间 R^3 的线性变换，且 $\mathcal{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\x_2\\x_2+x_3\end{pmatrix}$，求 $\mathcal{A}$ 在基 $\eta_1=(1,0,0)^T$，$\eta_2=(1,1,0)^T$，$\eta_3=(1,1,1)^T$ 下的矩阵 A.

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，问 A 能否与对角矩阵相似？请说明理由。

本题分数	13 分
得　分	

三、已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2-\lambda \end{pmatrix}$，问：当 λ 满足什么条件时，线性方程组 $Ax=b$ 有唯一解、无解、无穷多解？在有无穷多解时，求通解。

本题分数	13分
得　分	

四、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+4x_2x_3$，

（1）写出该二次型的系数矩阵 A；

（2）用正交变换法将其化为标准形，并写出所用的正交变换及二次型的标准形.

解：(1)

$$A=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

本题分数	16分
得　分	

五、证明题（每题8分，共16分）

1. 已知 α_1、α_2、α_3 是3维向量空间 R^3 的一组基，设 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

（1）证明 β_1、β_2、β_3 也是3维向量空间 R^3 的一组基；

(2) 是否存在非零向量 $\alpha\in R^3$，使 α 在基 α_1、α_2、α_3 及基 β_1、β_2、β_3 下的坐标相同？若存在，求 α.

2. 设 A，B 为 n 阶方阵，

(1) 如果 A 与 B 相似，证明：A 与 B 有相同的特征多项式；

(2) 设 A，B 均为实对称矩阵，且 A，B 有相同的特征多项式，证明：A 与 B 相似.

1. 3, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)$

2. $\begin{bmatrix} E & -A^{-1} \\ 0 & A^{-1} \end{bmatrix}$

3. 1, $3^9\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

4. 2, $\frac{27}{4}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$, $t < -4$

7. 无关, $(2, 3, 1)^T$

8. 1, $k(1, 0, -1)^T + \frac{1}{2}(1, 2, 1)^T$

二.1. $D=\begin{vmatrix} 0 & -x & -x^2-2x & x \\ 1 & 1 & 1+x & -1 \\ 0 & x & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}=(-1)\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} -x & -x^2-2x & x \\ x & -x & 0 \\ 0 & -x & x \end{vmatrix}$

$$=-\begin{vmatrix} 0 & -x^2-3x & x \\ x & -x & 0 \\ 0 & -x & x \end{vmatrix}$$

$$=-1\cdot(-1)\cdot x\begin{vmatrix} -x^2-3x & x \\ -x & x \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} -x^2-3x & x \\ x^2+2x & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-x^2(x^2+2x)$$

2. $XA = 2X - A$

$X(A-2E) = -A$

$X = -A(A-2E)^{-1}$

$$A-2E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A-2E)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$-A(A-2E)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二、3、$\varphi\eta_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\eta_1$

$\varphi\eta_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\eta_3-\eta_1$

$\varphi\eta_3=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=2\eta_3-\eta_1-\eta_2$

$\therefore$ φ在一组基 $\eta_1=$ - -

$\eta_2=$ - -

$\eta_3=$ - -

的矩阵为 $\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}$

④ $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2.$

$\therefore$ 1, 1, 2是A的3个特征值.

解 $(E-A)X=0$，得1对应的一个特征向量为$(0,0,1)^T$.

$\because$ 二重特征值1对应的特征向量只有1个

$\therefore$ A不能与对角矩阵相似

三、$[A\ b]=\begin{bmatrix}1&1&\lambda&\vdots&1\\1&\lambda&1&\vdots&1\\\lambda&1&1&\vdots&2-\lambda\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&\lambda&\vdots&1\\0&\lambda-1&1-\lambda&\vdots&0\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&\vdots&2-2\lambda\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&\lambda&\vdots&1\\0&\lambda-1&1-\lambda&\vdots&0\\0&0&\lambda^2+\lambda-2&\vdots&2\lambda-2\end{bmatrix}$

①当$\lambda=1$时，$[A\ b]=\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&1\\0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}$，$Ax=b$有无穷多解.

②当$\lambda=-2$时，$[A\ b]=\begin{bmatrix}1&1&-2&\vdots&1\\0&-3&3&\vdots&0\\0&0&0&\vdots&-6\end{bmatrix}$，$Ax=b$无解.

③当$\lambda\neq1$且$\lambda\neq-2$时，$Ax=b$有唯一解

当$\lambda=1$时，$Ax=b$的基础解系$\eta_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\eta_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

特解为$\xi=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$\therefore$通解为$x=\xi+k_1\eta_1+k_2\eta_2$（$k_1,k_2$为常数）.

四、(1) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 5 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$

(2) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & 0\\ 1 & \lambda-5 & -2\\ 0 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\left[(\lambda-5)(\lambda-1)-4\right]+(-1)\cdot 1\cdot(\lambda-1)$

$=(\lambda-1)\cdot\lambda(\lambda-6)$.

$\therefore$ A的3个特征值为 0, 1, 6.

解 $-Ax=0$, 得 0对应的一个特征向量为 $(1,1,-2)^T$

解 $(E-A)x=0$, 得1 - - - - - - - $(2,0,1)^T$

解 $(6E-A)x=0$ 得6 - - - - $(-1,5,2)^T$

把它们单位化, 得 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt6}(1,1,-2)^T$, $\eta_2=\frac{1}{\sqrt5}(2,0,1)^T$, $\eta_3=\frac{1}{\sqrt{30}}(-1,5,2)^T$

令 $P=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$, 则经正交变换 $x=Py$, 二次型化为标准型 $f=y_2^2+6y_3^2$

五 2. (1) 由A与B相似，则存在可逆矩阵P，使 $A=P^{-1}BP$.

则 $|\lambda E-A|=|P^{-1}(\lambda E)P-P^{-1}BP|=|P^{-1}(\lambda E-B)P|=|P^{-1}||\lambda E-B||P|$
$=|\lambda E-B|$

(2) A, B为实对称矩阵，则它们一定相似于一对角矩阵.
又它们有相同的特征多项式，所以对角线上的元素相同，
∴ A与B相似于同一对角矩阵
由传递性，∴ A相似于B