南 京 航 空 航 天 大 学

二〇一八 ～ 二〇一九 学年 第 II 学期 **《高等数学》考试试题**

考试日期： 2019 年 6 月 22 日 试卷类型：A 试卷代号：

班号	学号	姓名

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、填空题(每小题 3 分, 共 24 分)：

1. 设函数 $z=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=\frac{1}{3}\ln 3$.

2. 设 $f(x,y)$ 连续, 交换二次积分的次序：$\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

3. 设 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dS=\frac{8\pi}{3}$。

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{1+\sqrt{4}}dS=\frac{1}{3}\cdot 2\pi\cdot 2^2$$

4. 设 $\vec{A}=x(1+x^2z)\vec{i}+y(1-x^2z)\vec{j}+z(1-x^2z)\vec{k}$，则 $div\,\vec{A}=3$.

$$div\,\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=(1+3x^2z)+(1-x^2z)+(1-2x^2z)$$

5. 函数 $f(x)=\ln(1+2x)$ 展开成 x 的幂级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^n}{n}x^n, x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

$$[\ln(1+x)]'=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \ln(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^n dt=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

6. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 x=-1 收敛, 则该幂级数在 $x=\frac{3}{2}$ 的敛散性为：绝对收敛.

7. 已知 $(x+4y)dx+(ax+y^2)dy=0$ 是全微分方程, 则 a = 4.

$$\frac{\partial}{\partial y}(x+4y)=\frac{\partial}{\partial x}(ax+y^2)\Rightarrow 4=a$$

二、(6 分) 设 y=y(x) 是由方程 $xy=e^x-e^y$ 确定的函数, 试计算 $\left.dy\right|_{x=0}$.

解：设 $F(x,y)=xy-e^x+e^y$ 则 $F_x=y-e^x, F_y=x+e^y, \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x+e^y}{x-e^x}$

由 $y(0)=0, \Rightarrow y'(0)=1; dy|_{x=0}=y'(0)dx=dx$

三、(8 分) 设 f 是任意二阶可导函数, 并设 $z=f(ay+x)$, 满足方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，试确定 a 的值.

解：$\because \frac{\partial z}{\partial x}=f', \frac{\partial z}{\partial y}=af'; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f'', \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=af'', \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2f''$ 由题设有:

$6f''+af''-a^2f''=0 \Rightarrow 6+a-a^2=0 \therefore a=3, or, a=-2$

四、(6 分) 计算 $\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上点 (-1, 1) 到 (1, 1) 的一段弧.

解: $I=\int_{-1}^{1}[(x^2-2x\cdot x^2)+(x^4-2x\cdot x^2)\cdot 2x]dx=2\int_0^1(x^2-4x^4)dx=-\frac{14}{15}$

五、(10 分) 判别下列级数的敛散性:

(1) (4 分) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

(2) (6 分) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n^a}$ ，若收敛, 指明是条件收敛还是绝对收敛.

解: (1) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=3\cdot(\frac{n}{n+1})^n \to \frac{3}{e}>1$ 故由"比值判别法"知原级数发散.

(2) 当 $\alpha\le 0$ 时, $\frac{1}{n^\alpha}\in[1,\infty), \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n^\alpha}\ne 0$ (振荡无极限) 此时原级数发散;

当 $0<\alpha\le 1$ 时, $\frac{1}{n}\le\frac{1}{n^\alpha}<1; \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0, \sin\frac{1}{n^\alpha}>\sin\frac{1}{(n+1)^\alpha}$ 由莱布尼茨定理知此时原级数收敛. 而由 $\frac{1}{n^\alpha}\to 0(n\to\infty), \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n^\alpha}\Big/\frac{1}{n^\alpha}=1$, 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n^\alpha}\right|, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 同敛散，而 $\frac{1}{n}\le\frac{1}{n^\alpha}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散; 故此时原级数条件收敛.

当 $\alpha>1$ 时, $\frac{1}{n^\alpha}\to 0(n\to\infty), \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n^\alpha}\Big/\frac{1}{n^\alpha}=1$ 此时也有级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n^\alpha}\right|, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 同敛散，故当 $\alpha>1$ 时原级数绝对收敛.

六、(8 分)将函数 $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\le x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & 0<x\le\pi\end{cases}$ 展开成傅里叶级数.

解: $a_n=0(n=0,1,2,3,\cdots),b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=\dfrac{2}{\pi}(-\dfrac{1}{n}\cos nx)\Big|_0^{\pi}$

$=\dfrac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]=\dfrac{4\pi}{2k-1},(k=1,2,3,\cdots)\ \therefore f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1},x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$

七、(10 分)求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域及和函数, 并求 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n+1)}{2^n}$ 的值.

解: $\because R=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{2n+1}=1,\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(\pm1)^n$ 都发散. 所求收敛域为(−1, 1).

令 $S(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)t^{2n},\int_0^t S(u)du=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n+1}=\dfrac{t}{1-t^2},s(t)=(\dfrac{t}{1-t^2})'=\dfrac{1+t^2}{(1-t^2)^2}$

$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\dfrac{1+x}{(1-x)^2},x\in(-1,1);\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n+1)}{2^n}=S(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{2}{9}.$

八、(10 分)计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}(x^3+z+1)dydz+(y^3+x+1)dzdx+(z^3+1)dxdy$, 其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

解: 设辅助圆面 $S_0:z=0,(x,y)\in D_{xy}:x^2+y^2\le1$ 的下侧, 则:

$I=\iint_{\Sigma+S_0}-\iint_{S_0}=3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz-\iint_{S_0}1\cdot dxdy=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^4\sin\theta dr+\pi=\dfrac{11\pi}{5}$

十、(8 分)设定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数 f(x), 对任意 x, y ∈ $(-\infty,+\infty)$, 满足 $f(x+y)=f(x)e^y+f(y)e^x$, 且 $f'(0)=a(a\ne0)$,

(1) 证明: 对任意 x∈ $(-\infty,+\infty)$, $f'(x)$ 存在, 并求出函数 $f(x)$;

(2) 将 $f(x)$ 展开成(x−1)的幂级数, 并求 $f^{(2007)}(1)$.

(1) 证: $\because f(x+\Delta x)=f(x)e^{\Delta x}+f(\Delta x)e^x$, $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$

$a=f'(0)=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$, $f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$

$=\lim_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x)(e^{\Delta x}-1)+e^x[f(\Delta x)-f(0)]}{\Delta x}=f(x)+e^xf'(0)\Rightarrow f'(x)=f(x)+ae^x$

$\therefore f(x)=axe^{x}$

(2)解：$\because \int_{0}^{x} te^{t}dt=(x-1)e^{x}=e(x-1)e^{x-1}=e(x-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^{n}=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^{n+1}$

$\therefore f(x)=axe^{x}=ae\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}(x-1)^{n}$, $f^{(n)}(1)=ae\cdot\frac{n+1}{n!}\cdot n!=ae(n+1)$

故 $f^{(2007)}(1)=2008ae$