

线性代数期末模拟卷

出卷人：吕福慧

一、填空题（每空 2 分，共 24 分）

1. 设 $D = \begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$, 则 x^4 的系数为_____

2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, 记矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$ 。如果 $|A| = 1$, 则 $|B| =$ _____

3. 线性空间 $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c \end{pmatrix} \right\}$ 的维数是_____, 一组基是_____

4. 设 3 阶方阵 A 的特征值为 1, 2, 3, 则 $|A^2 - 2A + 3E| =$ _____

5. 设向量 $(2, -3, 5)$ 和向量 $(-4, 6, a)$ 线性相关, 则 $a =$ _____

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, 求 $A^{2021} =$ _____

7. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{2021} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$ _____, $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2021} =$ _____

8. A 为 $n \times n$ 阶矩阵, 且 $A^2 - A - 2E = 0$, 则 $(A + 2E)^{-1} =$ _____

9. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + tx_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围是_____, 此二次型的正惯性指数是_____

二、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix}$

2. 设 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 且矩阵 X 满足关系式

$$X(C-B)' = E, \text{ 求 } X$$

3. 设 R^3 的线性变换 \mathcal{A} 使得

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(1) 求 \mathcal{A} 在自然基下的矩阵;

(2) 求 \mathcal{A} 在基 $\eta_1 = (1, 0, 0)^T, \eta_2 = (1, 1, 0)^T, \eta_3 = (1, 1, 1)^T$ 的矩阵

4. 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似, 确定 a, b , 并求 P 使得 $P^{-1}AP = B$

三. λ 取何值时, 非齐次线性方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$
, (1) 有唯一解; (2) 无解;

(3) 有无穷多个解? 并在有无穷多个解时求其通解。(15 分)

四. 用正交变换 $X = TY$ 将下面二次型化为标准型, 并给出标准形及规范形 (11 分)

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

五、证明题

1. (5 分) 若 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$, 试证 $A=E$ 或 $|A|=0$

2. (8 分) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关。证明:

(1) α_1 能有 α_2, α_3 线性表出;

(2) α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出。

3 (5 分) 设 A, B 均为 n 阶正交矩阵, 且 $|A|=-|B|$, 证明 $|A+B|=0$

