一、填空题

1. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(1+e^{xy})}{e^{xy}}=$

2. 设函数 $z=\dfrac{y}{x}$，在点 $(1,1)$ 处当 $\Delta x=0.1$，$\Delta y=-0.2$ 时的全微分是

3. 曲线 $x=\dfrac{t}{1+t}$，$y=\dfrac{1+t}{t}$，$z=t^2$ 在对应于 $t=1$ 的点处的法平面方程为

4. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z=1$，则球面上点 $(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3})$ 指向球面外侧的单位法向量是

5. 设向量场 $A=2x^3yz\,i-x^2y^2z\,j-x^2yz^2\,k$，则其在点 $M(1,1,2)$ 处的散度 $\mathrm{div}A|_M=$

6. p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$，当且仅当____时发散（$p$ 填 p 取值范围）

7. 设 $\lim\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=3$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n-1}$ 的收敛半径 R____

8. 设 $f(x)$ 为周期为 2π 的周期函数，其在 $(-\pi,\pi]$ 上的表达式为
$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$，$S(x)$ 为 $f(x)$ 的以 2π 为周期的傅里叶级数的和函数，则 $S(\pi)=$

9. 求微分方程 $y''=\dfrac{1}{x}y'+xe^x\,(x>0)$ 的通解____

10. ~~二阶~~二阶常系数齐次线性微分方程的一个特解为 $y=xe^x$，则该方程为____.

二、选择题

1. $f(x)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处

A. 偏导数不存在， B. 偏导存在且连续.

C. 不可微 D. 可微

2. 设 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{dS}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 的值为

A. 4π， B. $\frac{16}{5}\pi$， C. $\frac{16}{3}\pi$. D. $\frac{8}{3}\pi$.

3. 设常数 $k\ne 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{k\pi}{n})$

A. 条件收敛. B. 绝对收敛. C. 发散. D. 敛散性与 k 的取值有关

三、设 $y(x)$，$z(x)$ 由方程组 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\ x^2+2y^2+3z^2=20\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$、$\dfrac{dz}{dx}$.

四、计算

(1) 计算 $\iint\limits_{\Sigma}x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy$，其中 Σ 为 $z=x^2+y^2$ $(0\le z\le 4)$ 的上侧.

(2) 求微分方程 $(x^2-3xy^2)dx+(y^2-3x^2y)dy$ 的通解.

五、将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $x+4$ 的幂级数.

六、判断下列级数是发散、条件收敛还是绝对收敛，并说明理由.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$ $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

七. 求微分方程 $y''-2y'+y=4xe^x$ 的通解.

八. 设 $f(x)$ 在 $x>0$ 时可导, 且满足 $xf(x)=3x+\int_1^x f(t)dt$.

求 $f(x)$.

九. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^n$ 的收敛域和与和函数.

十. 证明 $\iint_{\Sigma}(x+y+z+\sqrt{3}a)ds\geq 12\pi a^3\ (a>0)$ 其中

Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+2a^2=0$.

一：1. $\ln 2$

2. -0.3

3. $x' = \frac{1+t-t}{(1+t)^2} = \frac{1}{4}$ $\quad x = \frac{1}{2}$

$y' = \frac{t-t-1}{t^2} = -1$ $\quad y = 2$

$z' = 2t = 2$. $\quad z = 1$

$\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2}) - (y-2) + 2(z-1) = 0$

4. $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

5. $2yz \cdot 3x^2 - x^2z \cdot 2y - x^2y \cdot 2z$

$= 4\times 3 - 4 - 4$

$= 4$

6. $p \le 1$

7. $\sqrt{3}$

8. 解：所给函数$f(x)$在区间$[-\pi, \pi]$上满足收敛条件.

将其拓展为周期函数时在$x=k\pi$处不连续.

$\therefore$ 收敛于 $\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(\pi+0)]$

$= \frac{1}{2}[1+\pi^2-1] = \frac{1}{2}\pi^2$

9. $y = (x-1)e^x + C_1x^2 + C_2$

10. $y'' - 2y' + y = 0$.

二、1. D 2. D 3. A

三、方程组对 x 求导

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} - 2x - 2y\dfrac{dy}{dx} = 0 \\ 2x + 4y\cdot\dfrac{dy}{dx} + 6z\cdot\dfrac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

得 $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{2x}{3z+1}$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3zx}{(3z+1)\cdot y}$

四(1)补充平面Ω：$x^2+4y^2=4$. 上侧

$$\iint_{\Sigma} = -\oiint_{\Sigma+\Omega} 3dxdydz + \iint_{\Omega} xdydz$$

$$= -3\iiint_{\Sigma+\Omega} dxdydz$$

$$= -Sh$$

$$= -2\pi\cdot 4$$

$$= -8\pi$$

(2) $(x^2-3xy^2)dx+(y^2-3x^2y)dy=0$

$$\frac{\partial\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2y^2+P(y)\right]}{\partial x}=x^2-3xy^2$$

$$\frac{\partial\left[\frac{1}{3}y^3-\frac{3}{2}x^2y^2+Q(x)\right]}{\partial y}=y^2-3x^2y$$

$\therefore$ 通解为 $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}y^3-\frac{3}{2}x^2y^2=C$

五. $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{-3+x+4}-\frac{1}{-2+x+4}$

$$=\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{1+\frac{x+4}{-3}}+\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{1+\frac{x+4}{-2}}$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(-\frac{x+4}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(-\frac{x+4}{2}\right)^n.$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n\quad(-6<x<-2)$$

六、1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[\dfrac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right]}{\left[\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}\right]}=\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}2\left[\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{-\frac{n}{n+1}}=\dfrac{2}{e}<1$.

∴收敛

2. $\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}>\dfrac{\sqrt{n}}{n}=\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$发散

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}=0$, $U_{n+1}=\dfrac{\sqrt{n+1}}{n}$, $U_n-U_{n+1}=\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}-\dfrac{\sqrt{n+1}}{n}=\dfrac{\sqrt{n^3}-\sqrt{(n-1)^2\cdot(n+1)}}{n(n-1)}=\dfrac{\sqrt{n^3}-\sqrt{n^3-n^2-n+1}}{n(n-1)}>0$.

∴由莱布尼茨准则, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$收敛, 原级数条件收敛

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)}=1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散, ∴级数发散.

七、齐次方程特征方程为，$r^2-2r+1=0$，$r_1=r_2=1$。

齐次方程的通解为 $Y=(C_1+C_2x)\cdot e^x$

设非齐次方程的特解为：$y^*=x^2(ax+b)\cdot e^x$

代入得

$$(ax^3+bx^2+3ax^2+2bx+3ax^2+2bx+6ax+2b)\cdot e^x-2(ax^3+bx^2+3ax^2+2bx)e^x+(ax^3+bx^2)\cdot e^x=4x\cdot e^x$$

$$(6ax+2b)\cdot e^x=4x\cdot e^x$$

$$a=\frac{2}{3},\ b=0.$$

∴方程的通解为 $y=(C_1+C_2x+\frac{2}{3}x^3)\cdot e^x$.

八、$xf(x)=3x+\int_1^x f(t)dt$

$$f(x)=\frac{\int_1^x f(t)dt}{x}+3.$$

令 $u=\frac{\int_1^x f(t)dt}{x}$.

$$\frac{du}{dx}\cdot x+u=u+3$$

$$du=\frac{3}{x}dx$$

$$u=3\ln x+C_1$$

$$\int_1^x f(t)dt=3x\ln x+C_1x.$$

$$f(x)=3\ln x+C$$

又 $\because f(1)=3$

$\therefore C=3$

$$f(x)=3\ln x+3$$

九、$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)}\right]}{\left(\frac{n^2+1}{n}\right)}=1.$

$\therefore$ 收敛半径为 1.

当 $x=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}=n+\frac{1}{n}$，发散.

当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^2+1}{n}$ 发散.

$\therefore$ 收敛域为 $(-1,1)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}\cdot x^n=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot x^n.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^n=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}=x\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\int_1^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\int_1^x\frac{1}{1-x}=-\ln(1-x),$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^n=\frac{x}{(1-x)^2}-\ln(1-x)\quad(-1<x<1).$$

十. $R=\sqrt{\dfrac{A^2+B^2+C^2-4D}{4}}$

$=\sqrt{\dfrac{4a^2\times3-4\times2a^2}{4}}$

$=a.$

$O(a,a,a).$ $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2$

$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS+\sqrt{3}a\cdot4\pi a^2$

先求 $f(x,y,z)=x+y+z+\sqrt{3}a$ 在 $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2$ 下的最小值

令 $L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda(x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+2a^2)$

$$\begin{cases}L_x=0\\L_y=0\\L_z=0\\L_\lambda=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=y=z\\(x-a)=(y-a)=(z-a)=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\end{cases}$$

$\therefore$ 最小值为 $3a$. $\therefore\geq12\pi a^3.$