

二〇二〇-二〇二一学年 第一学期 《线性代数》考试试题

考试日期: 2021年 月 日 试卷类型: A 卷 试卷代号: 28-84

班号 学号 姓名

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

本题分数 30 分

得分

一、填空题 (每空 2 分)

1. 设 $\alpha_1 = (2 \ 0 \ 3 \ -1)^T$, $\alpha_2 = (0 \ 2 \ 1 \ 5)^T$,

$\alpha_3 = (2 \ 2 \ 4 \ 4)^T$, $\alpha_4 = (1 \ 1 \ 0 \ 4)^T$, 则该向量组的秩

$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) =$ _____, 它的一个极大线性无关组是 _____.

2. 已知 A 为 n 阶可逆矩阵, E 是 n 阶单位矩阵, 则 $\begin{pmatrix} E & E \\ O & A \end{pmatrix}^{-1} =$ _____.

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $r(A) =$ _____, $A^{100} =$ _____.

4. 已知 A 是 3 阶方阵, 且 $|A| = \frac{1}{2}$, 则 $|A^{-1}| =$ _____, $|A^* + A^{-1}| =$ _____.

5. 设 A 为 3 阶方阵, 将 A 的第 2 列的 1 倍加到第 3 列得到矩阵 B , 则满足 $AP = B$ 的矩阵 $P =$ _____, $P^3 =$ _____.

6. 已知三元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 的系数矩阵 A 的特征值为 1, -2, 3, 则该二次型的规范形为 _____, 且当 t 满足 _____ 时, 矩阵 $2A - tE$ 是正定矩阵, 其中 E 是单位矩阵.

7. 设 α, β 分别是矩阵 A 的属于 1 和 -1 的特征向量, 则向量 α 与 β 线性 _____ (填“相关”或“无关”); 又若 $\alpha = (1 \ 2 \ 1)^T$, $\beta = (1 \ 1 \ 0)^T$, 则 $A^2(\alpha + \beta) =$ _____.

8. 已知 η_1, η_2, η_3 是三元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的 3 个解向量, 其中 $r(A) = 2$, 且 $\eta_1 - \eta_2 = (1, 0, -1)^T$, $\eta_1 + \eta_3 = (1, 2, 1)^T$, 则导出组 $Ax = 0$ 的基础解系中含有 _____ 个解向量, $Ax = b$ 的通解为 _____.

本题分数 28 分

得分

二、计算题 (每题 7 分) (要求写出计算过程)

1. 求行列式 $D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1+x & -1 \\ 1 & 1+x & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$ 的值.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且满足 $XA = 2X - A$, 求矩阵 X .

3. 设 A 是三维向量空间 R^3 的线性变换, 且 $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$, 求 A 在基 $\eta_1 = (1, 0, 0)^T$, $\eta_2 = (1, 1, 0)^T$, $\eta_3 = (1, 1, 1)^T$ 下的矩阵 A .

本题分数	13 分
得分	

三、已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2-\lambda \end{pmatrix}$. 问: 当 λ 满足什么条件时, 线性方程组 $Ax = b$ 有唯一解、无解、无穷多解? 在有无穷多解时, 求通解.

四、设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 问 A 能否与对角矩阵相似? 请说明理由.

本题分数	13分
------	-----

得分	
----	--

四、已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3$.

(1) 写出该二次型的系数矩阵 A ;

(2) 用正交变换法将其化为标准形, 并写出所用的正交变换

及二次型的标准形. 解: (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

本题分数	16分
------	-----

得分	
----	--

五、证明题 (每题8分, 共16分)

1. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是3维向量空间 R^3 的一组基,

设 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

(1) 证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也是3维向量空间 R^3 的一组基;

(2) 是否存在非零向量 $\alpha \in R^3$, 使 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 及基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标相同?

若存在, 求 α .

2. 设 A, B 为 n 阶方阵,

(1) 如果 A 与 B 相似, 证明: A 与 B 有相同的特征多项式;

(2) 设 A, B 均为实对称矩阵, 且 A, B 有相同的特征多项式, 证明: A 与 B 相似.

$$1. 3, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)$$

$$2. \begin{bmatrix} E & -A^{-1} \\ 0 & A^{-1} \end{bmatrix}$$

$$3. 1, 3^9 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4. 2, \frac{27}{4}$$

$$5. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$6. y_1^2 - y_2^2 + y_3^2, t < -4$$

$$7. \text{无关}, (2, 3, 1)^T$$

$$8. 1, k(1, 0, -1)^T + \frac{1}{2}(1, 2, 1)^T$$

$$\text{II. I. } D = \begin{vmatrix} 0 & -x & -x^2-2x & x \\ 1 & 1 & 1+x & -1 \\ 0 & x & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -x & -x^2-2x & x \\ x & -x & 0 \\ 0 & -x & x \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & -x^2-3x & x \\ x & -x & 0 \\ 0 & -x & x \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot (-1) \cdot x \begin{vmatrix} -x^2-3x & x \\ -x & x \end{vmatrix}$$

$$= x \begin{vmatrix} -x^2-3x & x \\ x^2+2x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -x^2(x^2+2x)$$

$$2. \quad XA = 2X - A$$

$$X(A - 2E) = -A$$

$$X = -A(A - 2E)^{-1}$$

$$A - 2E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A - 2E)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -A(A - 2E)^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= 3, \quad \eta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \eta_1$$

$$\eta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \eta_3 - \eta_1$$

$$\eta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\eta_3 - \eta_1 - \eta_2$$

\therefore 在一组基 $\eta_1 = \dots$

$$\eta_2 = \dots$$

$$\eta_3 = \dots$$

的秩矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

④

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$$

$\therefore 1, 1, 2$ 是 A 的 3 个特征值.

解 $(E - A)X = 0$, 得 1 对应的特征向量为 $(0, 0, 1)^T$.

\therefore 二重特征值 1 对应的特征向量只有 1 个

$\therefore A$ 不能与对角矩阵相似

$$\text{三. } [A \ b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 2-2\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-2 & 2\lambda-2 \end{bmatrix}$$

① 当 $\lambda=1$ 时, $[A \ b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Ax=b$ 有无穷多解.

② 当 $\lambda=-2$ 时, $[A \ b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$, $Ax=b$ 无解.

③ 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时, $Ax=b$ 有唯一解.

当 $\lambda=1$ 时, $Ax=b$ 的基础解系 $\eta_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\eta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

特解为 $\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

\therefore 通解为 $x = \xi + k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2$ (k_1, k_2 为任意数)

例 (1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 5 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)[(\lambda - 5)(\lambda - 1) - 4] + (-1) \cdot 1 \cdot (\lambda - 1)$
 $= (\lambda - 1) \cdot \lambda(\lambda - 6)$

$\therefore A$ 的 3 个特征值为 0, 1, 6.

解 $-Ax = 0$, 得 0 对应的一个特征向量为 $(1, 1, -2)^T$

解 $(E - A)x = 0$, 得 1 对应的一个特征向量为 $(2, 0, 1)^T$

解 $(6E - A)x = 0$, 得 6 对应的一个特征向量为 $(-1, 5, 2)^T$

把它们单位化, 得 $\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T$, $\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1)^T$, $\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}(-1, 5, 2)^T$

令 $P = [\eta_1, \eta_2, \eta_3]$, 则经正交变换 $x = Py$, 二次型化为标准型 $f = \frac{1}{2}y_1^2 + 6y_2^2$

Ⅱ 2. (1) 由 A 与 B 相似, 则存在可逆矩阵 P , 使 $A = P^{-1} B P$.

$$\begin{aligned} \text{则 } |\lambda E - A| &= |P^{-1}(\lambda E)P - P^{-1}BP| = |P^{-1}(\lambda E - B)P| = |P^{-1}| |\lambda E - B| |P| \\ &= |\lambda E - B| \end{aligned}$$

(2) A, B 为实对称矩阵, 则它们一定相似于一对角矩阵.
又它们有相同的特征多项式, 所以对角线上的元素相同,
 $\therefore A$ 与 B 相似于同一对角矩阵
由传递性, $\therefore A$ 相似于 B

南航本科试卷+QQ



截至2022年1月，已有近3年本科试卷科目(后续会不断更新，具体可咨询)：

试卷科目（依据教务处或课表名称）	科目展示院系版
B:变分原理与有限元	全校热门：高数、线代、概率论、毛概、马原、航概、大物、创业基础、计算方法、理力、材力、电工电子技术、工程图学、数字电路、微机原理、复变函数、理工基础化学
C:测试技术、操作系统、测试信号分析与处理、材料力学、创业基础、冲压工艺学	院系热门(仅部分): (航空) 复合材力、飞行器结构力学、互换性、有限元、工数、控制系统工程、变分原理、塑性力学、流体力学、振动理论
D:电机学、电路、电子线路、电工与电子技术、电力工程、电磁场理论、电气测试技术、电力电子、大物、电离辐射探测学	(能动) 燃烧室、工热、互换性、机械设计、现控、自控、工程流体力学
F:复合材料力学、飞行器结构力学、复变函数	(自动化) 电机学、电路、电力电子、计硬、机械设计基础、模电、现控、自控、测试信号分析、电力工程、电气测试技术、功率变换器、数字信号处理、信号、系统可靠性
G:概率论、高数、工程热力学/基础、工程材料学、工数、工程图学、管理学、功率变换器计算机仿真与设计、工程经济学、工程流体力学	(电信) 电子线路、雷达原理、信号、微波技术、通信原理、电磁场、数据结构、数字信号处理、工程经济学、随机信号分析、数理方程、通信电子线路
H:航概、互换性与技术测量、宏观经济学	(机电) 测试技术、工热、机原、机械制造工艺、工材、互换性、控制系统工程、机床数控技术、冲压工艺学、计算机集成、机械制造技术、工程流体力学、机械设计
J:结构力学及有限元、计算方法、计算机组成原理、计算机硬件技术基础、计量经济学、机械原理、机械设计/基础、机械制造工艺与装备、机床数控技术、金属材料、计算机集成与柔性制造、机械制造技术、检测技术与传感原理	(材料) 金属材料、电离辐射探测学、数理方程
K:控制系统工程	(民航) 机械设计基础、模电、信号、运筹、自控、工程经济学、随机信号分析、民航机载电子设备、数据结构与数据库、工程流体力学、检测技术与传感原理、通信电子线路、项目管理、专业英语
L:理论力学、离散数学、雷达原理、流体力学、理工基础化学	(理) 计组、模电、数据库
M:模拟电子技术、马原、毛概、民航机载电子设备与系统、密码学	(经管) 管理学、计量、应统、运筹、操作系统、数据库、宏经、微经、工程经济学、项目管理、专业英语
R:燃烧室原理	(航天) 结构力学及有限元、电路、工材、机原、数字信号处理、通信原理、自控
S:数字电路/与逻辑设计、数据库原理、数据结构/与数据库、数字信号处理、塑性力学、随机信号分析、数理方程	(计科) 操作系统、工数、离散数学、计组、数据库、数据结构、密码学
T:通信原理、通信电子线路	(长空) 工热、工材、工数、计组、机原、数理方程
W:微机原理与应用/接口技术、微波技术、微观经济学	(国教) 计量、应统、运筹、宏经
X:线代、现代控制理论、信号与系统/线性系统、系统可靠性设计分析技术、项目管理	
Y:有限元、应用统计学、运筹学	
Z:自动控制原理、振动理论、专业英语	

资料使用tips

- (1) 名称相近的课程可能会因专业、年份、教学大纲等的不同在考试范围、题型、内容、难度上等出现细微差异，通常相互间都有借鉴价值，具体需自行判断试卷所考内容与自身所学是否大部分一致；
- (2) 试卷名称的数字是学年的后一年份，如22是指21-22学年，分第一(秋季)学期(9月-次年1月)和第二(春季)学期(2月-7月)，一门课程通常会出2套试卷即AB卷分别用于期末和补缓考，二者在范围、难度及题量上保持一致，由教务处随机抽取；
- (3) 图片形式的试卷可能在清晰度上会有所欠缺或者有少量缺漏，绝大部分基本可以辨认，同时缺漏的分值控制在一定限度；
- (4) 关于答案：大学学习不同于中学那样有浩如烟海的资料且基本配有参考答案，大学许多课程的资料不易获得，即使无答案的资源对复习也有较大参考价值，能帮助把握近年命题方向趋势、题型范围难度。试卷里手写形式的答案大多为人工制作，仅供参考，可能会存在某些题目答案正确性有待商榷的情况，欢迎能提供答案或者更正的同学予以分享；
- (5) 教材、课程设计、PPT、非试卷类复习资料、练习册或教材习题答案、网课或英语代做、四六级真题、研究生课程试卷、初复试专业课真题等均不是业务范围；
- (6) 试卷均来自同学分享，除为便利同学使用进行必要的整理外，不对试卷本身做其他操作，有问题可以协商处理，欢迎有近3年试卷资源的予以分享

守住及格底线，努力争取高分！
祝您考试顺利，取得理想成绩！