第一章　线性代数基础

本章将会正式进入矩阵理论的知识内容中，首先是第一章，这一章的名字叫做“线性代数基础”，按照课本的话来讲，这一部分不是单纯的对于线性代数知识的简单回顾与复习，而是在已经掌握线性代数的知识的基础上进行深化，同时，这一章也是后面内容的基础。

本章将会涉及到以下内容：

- 线性空间与子空间
- 空间分解与维数定理
- 特征值与特征向量
- 线性变换
- …

注意：之后的内容会随着课程的进行进行及时更新

1.1 线性空间与子空间

提到“空间”一词，很多人对这个概念应该并不陌生，我们从出生便降临在这个世界中，这个世界便是一个三维空间，我们使用计算机浏览互联网，这也可以称作一个网络空间...... 类似的例子还有很多很多。

1.1.1 线性空间

在这里我们要讨论的概念叫“线性空间”，是数学上的空间，上面提到的我们生活在的三维空间，抽象出来也属于线性空间。

线性空间的例子，除了上面提到的三维空间，在平面直角坐标系 x, y 组成的一个平面也是一个空间（二维空间），那究竟何为线性空间呢？有什么标准来判断其是否是一个空间?

判断能否组成一个空间的定义如下：

定义 1.1.1: 判断空间的定义

设 V 是一个非空集合，P 是一个数域，在集合 V 的元素之间定义加法 $v = \alpha + \beta$，定义数量乘法 $\delta = k\alpha$，如果加法与数量乘法满足下列规则：

- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
- $\exists \mathbf{0} \in V, \forall \alpha \in V,$ 有$\alpha + \mathbf{0} = \alpha$（存在零元素）
- $\forall \alpha \in V, \exists \beta \in V,$ 使得$\alpha + \beta = \mathbf{0}$（存在负元素）
- $1\alpha = \alpha$
- $k(l\alpha) = (kl)\alpha$
- $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$
- $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$

则 V 称为数域 P 上的**线性空间**

在这里我们需要明确下面一个概念：何为数域?

定义 1.1.2: 数域的概念

如果一个由数字构成的集合（叫做数集）P，这个数集对于加法、减法、乘法、除法（除数不为 0）封闭，则就把这个数集 P 叫做数域

这里又引出了一个新的词——封闭，何为封闭？封闭的概念较为简单：如果一个集合中的某两个数做某一运算之后的结果仍然在该集合中，那么就称该集合对于该运算是封闭的。

如果还是对于这一概念不理解，希望下面这个例子能够帮你理解：

例 1.1.1. 全体整数组成的集合 $\mathbb{Z}$ 是否是一个数域？

解. 整数集包含两大部分：**正整数和负整数**，0 是整数，但 0 既不是正数也不是负数

接下来我们来判断整数集是否对于加法封闭：

我们从小学数学的知识就可以得知，两个整数相加依旧是整数，所以整数集对于加法是封闭的

依次类推，两个整数相减，相乘，结果依旧是一个整数，所以很显然，整数集对于四则运算中的加法、减法和乘法都是封闭的

最后，整数集对于除法是否是封闭的呢？

很显然不是，举一个最简单的例子，$a = 1, b = 2$，a 除以 b 的结果是 $\frac{1}{2}$，它并不是一个整数，而是一个分数，或者说小数，又可以说是一个有理数，所以整数集对于除法并不是封闭的。

综上，可以断定，整数集并不是一个数域。 □

注. *定义1.1.1中的八条性质说明了什么？*

左侧四条定义了空间对于加法需要满足以下特性：加法的交换律、加法的结合律、存在零元素、存在父元素

右侧的四条定义了空间的数量乘法需要满足以下特性：数量乘法的结合律、数量乘法的分配律（分配律分为两个标量相加的分配律，以及两个向量相加的分配律）。

通常，定义1.1.1给出的八个条件即为判断一个集合是否能构成空间的依据，请看下面的例题。

例 1.1.2. 设多项式集合

$$P_n[x] = \{a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 | a_i \in P, i = 0, 1, \cdots, n-1\}$$

这里 P_n 代表**次数不超过 n 的多项式**, 请问 $P_n[x]$ 是否能构成一个线性空间？

解. 按照定义1.1.1的八条规律，依次来判断

首先，多项式的加法一定满足交换律和结合律（由小学数学学过的加法交换律和加法结合律就能得知），同样的，我们可以在这个多项式集合中找到一个元素 0，使得该多项式与 0

相加的结果依旧是该多项式（很明显，这个元素 0 就是数字 0，即 $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0$ 均为 0 的时候），此外，我们可以构造出下面的一个多项式集合，令其与 $P_n[x]$ 相加的结果为 0：

$$Q_n[x] = -P_n[x]$$

综上，该集合满足空间定义中对于加法的规律，接下来判断乘法

很显然，存在一个元素 1，使得该集合与 1 相乘的结果就是其本身（这个元素 1 就是数字 1，即 $a_{n-1} = a_{n-2} = \cdots = a_1 = 0, a_0 = 1$ 的时候）。同时，由小学数学和初中数学的知识可以知道，多项式的乘法满足数乘的结合律与分配律

综上，该多项式集合是一个线性空间。 □

注. 上面的例子大多数情况下运用了一些"显然，由……的知识可以得知"，没有具体写明如何得出的结果，有以下两点原因，第一点原因是在写这段文字的时候确实懒得打这么长的公式了，二是认为大家应该能明白上面判断的过程，所以就没有写明公式，当然写出公式也是可以的，如果后面确实不理解上面是如何"显然"得来的，会重新更新这部分的例子，用公式表明。

1.1.2 线性空间的维数

在了解了何为线性空间之后，接下来我们再来了解一下如何形容一个线性空间，维数便是形容线性空间的一个度量，我们前面一直所说的"三维空间"中的"三维"，就表明该空间的维数为 3

定义 1.1.3: 线性空间维数的定义

在线性空间 V 中，如过有 n 个向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性无关，而 V 中任意 $n+1$ 个向量线性相关，则称 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 为 V 的一组**基底**，由于线性空间的所有基底总含有相同数目的向量，则 n 称为线性空间 V 的**维数**，常记为 $\dim V = n$

上面的定义说明了，一个空间中线性无关向量的个数其实就是该空间的维数，同时，这一系列线性无关的向量便可以构成该空间的一组基，回顾第零章线性表示相关的内容，我们同样可以得知：该空间的任意向量都可以由这一组基来线性表示。

注. 请注意，向量组/线性空间的维数与向量的维数是两个不同的概念，一定要注意区分。

向量的维数：向量有几行，一般就说是向量的维数为几，如 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,3]^T$，那么这就是一个三维向量

向量组/线性空间的维数：向量组中线性无关向量的个数，如 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$，虽然 A 是一个 3×3 的矩阵，但是经过分析可以看出该矩阵其实只有一个线性无关的向量，故该向量组/空间是 *1* 维的，但是其中按列分块出的的三个列向量却是三维的向量。

1.2 空间分解与维数定理

//TODO