

Laplace 算子与 Bessel 函数

陈轶钊

2025 年 9 月 23 日

目录

1 为何考虑特征函数?	1
2 从特征值问题到 Bessel 方程	3
3 特征值问题的完整回答	4
A 三维空间中的 Laplace 算子与“形变” Bessel 方程	5

Bessel (贝塞尔) 函数被定义为 Bessel 方程 x

$$f''(x) + \frac{1}{x}f'(x) + \frac{x^2 - \nu^2}{x^2}f(x) = 0, \quad \nu \in \mathbb{R}, \nu \geq 0$$

的解。这个二阶微分方程的一组特定的线性无关的解 $J_\nu(x), Y_\nu(x)$ 分别被称为第一类和第二类 Bessel 函数¹。区别这两个解的一个简单办法是： J_ν 在 0 附近有界，而 Y_ν 在 0 附近无界。

我们在这篇笔记里给出一个出现 Bessel 方程的场景：使用极坐标求解二维圆盘上负 Laplace 算子的特征函数。

所谓的负 Laplace 算子的特征函数（也叫本征函数）是指一个函数 $\phi(x)$ ，满足 $-\Delta\phi(x) = \lambda\phi(x)$ ，其中 λ 是一个常数²，被称为特征值（这和矩阵的特征值与特征向量的定义类似）。

¹第一类 Bessel 函数 $J_\nu(x)$ 可以靠幂级数法解出来，这时要将幂级数展开设为 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\alpha}$ ，其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ 是待定常数。

²对负 Laplace 算子的情况，对积分 $\int_{\Omega} \phi \Delta \phi \, dV$ 使用格林公式可以证明 λ 非负。

1 为何考虑特征函数？

出现 $-\Delta$ 的特征函数的一个场合是在使用分离变量法求解热方程 $\partial_t u = \Delta u$ 和波动方程 $\partial_{tt} u = \Delta u$. 我们以热方程为例：假定我们已经求出了所有的特征向量 $\{\phi_\lambda(x)\}_{\lambda \in I \subseteq \mathbb{R}}$ ，其中 ϕ_λ 对应的特征值为 λ . 此外我们进一步假定任何一个函数都可以唯一地表示为一些（可能是无穷多个）特征函数的和³，那我们可以将热方程的解 $u(t, x)$ 设为

$$u(t, x) = \sum_{\lambda} a_{\lambda}(t) \phi_{\lambda}(x)$$

上面求和中的每一项都是单变量函数的乘积（暂且称这样的函数是变量分离的），我们能很方便地单独分析 t 或 x 对函数的影响。所以这种方法（将函数写为变量分离的函数的和）被称为分离变量法。

将上一段的等式代入热方程 $\partial_t u = \Delta u$ 中，会得到：

$$\sum_{\lambda} \left(\frac{d}{dt} a_{\lambda}(t) \right) \cdot \phi_{\lambda}(x) = \sum_{\lambda} a_{\lambda}(t) \Delta \phi_{\lambda}(x) = \sum_{\lambda} (-\lambda) a_{\lambda}(t) \cdot \phi_{\lambda}(x)$$

因为将函数表示为特征函数的和的方式唯一，所以每个 ϕ_{λ} 前的系数对应相等：

$$\frac{d}{dt} a_{\lambda}(t) = -\lambda a_{\lambda}(t), \quad \forall \lambda, \forall t \in [0, +\infty).$$

这样可以解出 $a_{\lambda}(t) = C_{\lambda} e^{-\lambda t}$ ，进而可以得到热方程的解：

$$u(t, x) = \sum_{\lambda} C_{\lambda} e^{-\lambda t} \phi_{\lambda}(x).$$

对于波动方程，在知道了特征函数之后也可以用同样的办法求解⁴。

我们在求解满足特定条件的特征向量时，会得到 Bessel 函数。具体来说，我们考虑在单位圆盘上满足特定边值问题的特征函数⁵：

$$\begin{cases} \Delta \phi(x) = -\lambda \cdot \phi(x), & \forall x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \\ \phi(x) = 0, & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

³可能是因为这个条件的严格陈述有些麻烦（比如在特征值取遍一个区间时，需要改成特征函数的某种积分），并且验证起来也有点麻烦，所以在讲解分离变量法的时候，有时会忽略这个条件。

⁴对量子力学里的不含时 Schrödinger(薛定谔) 方程 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = \left(-\frac{\hbar^2}{m} \Delta + V(x) \right) \psi(t, x)$ ，也可以用同样的想法求解，只是这时需要考虑的是 $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{m} \Delta + V(x)$ 的特征函数。

⁵在不做限制的情况下， Δ 具有连续的特征值，并且每个特征值对应的特征子空间会是无穷维的，如可以考虑 $\phi_{\lambda}(x, y) = e^{ax+by}, a^2 + b^2 = \lambda$ 。

其中 Ω 为单位闭圆盘 $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$. 为了利用对称性, 我们在极坐标下进行求解, 这时候 Δ 可以表示为

$$\Delta = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

可以看到框起来的部分和 Bessel 方程的前两项十分相似。

2 从特征值问题到 Bessel 方程

我们使用另一种形式的分离变量法处理特征值问题 (1): 我们直接假设它的解形如⁶

$$\phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta), \quad 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

且 $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$. 代入到方程 (1) 中, 得到

$$\Theta(\theta) \frac{d^2 R}{dr^2}(r) + \frac{\Theta(\theta)}{r} \frac{dR}{dr}(r) + \frac{R(r)}{r^2} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} = -\lambda R(r)\Theta(\theta)$$

在等式两边乘以 $\frac{r^2}{R(r)\Theta(\theta)}$, 整理之后会得到

$$\frac{1}{R(r)} (r^2 R''(r) + r R'(r) + \lambda r^2 R(r)) = -\frac{1}{\Theta(\theta)} \Theta''(\theta)$$

上面等式的左侧只依赖 r , 右侧只依赖 θ , 因此唯一的可能是两侧都是常数, 也就是

$$\begin{cases} -\frac{1}{\Theta(\theta)} \Theta''(\theta) = \mu, \\ \frac{1}{R(r)} (r^2 R''(r) + r R'(r) + \lambda r^2 R(r)) = \mu. \end{cases}$$

第一个方程的解有三种情况:

(i) 在 $\mu > 0$ 时: $\Theta(\theta) = A \sin(\sqrt{\mu}\theta) + B \cos(\sqrt{\mu}\theta)$.

(ii) 在 $\mu = 0$ 时: $\Theta(\theta) = A + B\theta$.

(iii) 在 $\mu < 0$ 时: $\Theta(\theta) = A e^{\sqrt{-\mu}\theta} + B e^{-\sqrt{-\mu}\theta}$.

⁶一般来说, 这样假设有可能会漏解, 因此在求解完之后需要验证找出了所有解 (比如证明任何光滑函数都能表示为找到的解的和)。但因为完成验证需要二阶常微分方程边值问题的理论, 这一步也常被忽略。

但 $\Theta(\theta)$ 还要满足 $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$, 这说明只可能是第一种情况, 即 $\Theta(\theta)$ 是三角函数; 这也要求 $\sqrt{\mu}$ 是个整数, 所以可设 $\mu = n^2, n \in \mathbb{Z}$. 这样第二个方程就变为了

$$\frac{1}{R(r)} (r^2 R''(r) + r R'(r) + \lambda r^2 R(r)) = n^2.$$

也就是

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + (\lambda r^2 - n^2) R(r) = 0.$$

上面的微分方程几乎就是 Bessel 方程了。我们作换元 $\rho = \sqrt{\lambda}r$, 那么上面的方程正好会给出 Bessel 方程:

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + (\rho^2 - n^2) R = 0.$$

至此, 我们完整展示了 Bessel 方程是如何出现在 Laplace 算子特征值问题里的。

3 特征值问题的完整回答

我们在剩下的部分给出特征值问题 (1) 完整回答, 不过这和笔记的主题无关, 仅仅是为了内容的完整性。根据已有的论证, 我们知道 $R(r)$ 可以用 Bessel 函数表示:

$$R(r) = A J_n(\sqrt{\lambda}r) + B Y_n(\sqrt{\lambda}r).$$

我们提到过, Y_n 在 0 附近是无界的, 这不符合我们对 $R(r)$ 的要求, 所以 $B = 0$, 这样可以取 $R(r) = J_n(\sqrt{\lambda}r)$. 此外因为 ϕ 要满足边值条件 $\phi(x) = 1, \forall |x| = 1$, 所以有

$$0 = R(1) = J_n(\sqrt{\lambda})$$

所以特征值 λ 是 Bessel 函数 $J_n(x)$ 的某个零点。记 $J_n(x)$ 在正半轴上的第 k 小的零点为 $\zeta_{n,k}$, 那根据上面的讨论, 我们可以给出特征值的回答:

结论 3.1 特征值问题 (1) 的所有特征值构成的集合为

$$\{\zeta_{n,k}^2 \mid n, k \in \mathbb{Z}, n \geq 0, k \geq 1\}.$$

对特征值 $\zeta_{n,k}^2$, 在 $n = 0$ 时, 它仅有一个线性无关的特征函数

$$\phi_{0,k}(r, \theta) = J_0(\zeta_{0,k} r).$$

在 $n > 0$ 时，它恰有两个线性无关的特征函数：

$$\phi_{n,k}(r, \theta) = \cos(n\theta) J_n(\zeta_{n,k}^2 r), \quad \tilde{\phi}_{n,k}(r, \theta) = \sin(n\theta) J_n(\zeta_{n,k}^2 r).$$

注 3.1 这里没有验证任何光滑函数都可以表示为上面求出的特征函数的和。我们在这个注记里给出验证思路。我们采取的办法是逐步分解。任给一个函数 $f(r, \theta)$ ，先固定 r ，利用 *Fourier*（傅里叶）级数的性质，有分解

$$f(r, \theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(r) \cos(n\theta) + b_n(r) \sin(n\theta)).$$

对于每个 $a_n(r), b_n(r)$ ，它们可以继续分解为

$$a_n(r) = \sum_{k=1}^{+\infty} C_{n,k} J_n(\zeta_{n,k}^2 r), \quad b_n(r) = \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{C}_{n,k} J_n(\zeta_{n,k}^2 r).$$

这一步需要用到 *Sturm-Liouville* 边值问题的性质，这类问题的简单介绍可以参考周珍楠老师的讲义。所以我们最终知道有分解

$$\begin{aligned} f(r, \theta) &= \sum_{k=1}^{\infty} C_{0,k} J_0(\zeta_{0,k}^2 r) + \sum_{n,k=1}^{+\infty} (C_{n,k} \cos(n\theta) J_n(\zeta_{n,k}^2 r) + \tilde{C}_{n,k} \sin(n\theta) J_n(\zeta_{n,k}^2 r)) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} C_{0,k} \phi_{0,k}(r, \theta) + \sum_{n,k=1}^{+\infty} (C_{n,k} \phi_{n,k}(r, \theta) + \tilde{C}_{n,k} \tilde{\phi}_{n,k}(r, \theta)). \end{aligned}$$

A 三维空间中的 Laplace 算子与“形变” Bessel 方程

我们之前考虑的是二维空间中的 Laplace 算子，一个很自然的问题是，我们能否考虑三维的 Laplace 算子，并在球极坐标下求解特征值问题：

$$\begin{cases} -\Delta \phi = \lambda \phi, & \forall |x| \leq 1; \\ \phi(x) = 0, & \forall |x| = 1. \end{cases} \quad (2)$$

我们的处理思路和二维时一样，先在球极坐标下写出 Δ ，然后使用分离变量来求解特征值问题。

经过一些（漫长的）计算，在球极坐标

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta$$

下，Laplace 算子的表达式是：

$$\Delta = \boxed{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2}$$

其中 Δ_{S^2} 是只和 θ, φ 以及关于它们的偏导数有关的算子，它被称为单位球面上的 Laplace 算子：

$$\Delta_{S^2} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

这篇笔记里我们不会讨论 Δ_{S^2} 的性质，只会把它们作为结论使用。

和前面一样，我们考虑形如

$$\phi(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot Y(\theta, \varphi), \quad 0 \leq r \leq 1, -\pi \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

那么特征值问题 (2) 等价于

$$\frac{1}{R(r)} (r^2 R''(r) + 2r R'(r) + \lambda r^2 R(r)) = -\frac{1}{Y(\theta, \varphi)} \Delta_{S^2} Y(\theta, \varphi)$$

进而得到

$$\begin{cases} \frac{1}{Y(\theta, \varphi)} \Delta_{S^2} Y(\theta, \varphi) = \mu, \\ \frac{1}{R(r)} (r^2 R''(r) + 2r R'(r) + \lambda r^2 R(r)) = -\mu. \end{cases}$$

上面的第一个方程对应于 Δ_{S^2} 的特征值问题，我们在这里不加证明的给出结果：

μ 的值只可能为 $-l(l+1)$ ，其中 $l \geq 1$ 是正整数。

所以 $R(r)$ 在这时满足的方程是：

$$r^2 R(r) + 2r R(r) + (\lambda r^2 - l(l+1)) R(r) = 0$$

我们做换元 $\rho = \sqrt{\lambda}r$ ，最终得到了一个和 Bessel 方程十分相似的方程

$$\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} R + 2\rho \frac{d}{d\rho} R + (\rho^2 - (l^2 + l)) R = 0.$$

这个方程和 Bessel 方程相似但又不一样的原因来自于 Laplace 算子的表达式：如果比较二维和三维空间中 Laplace 算子的表达式，我们会发现 r 的一阶导前面的系数从 1 变成了 2。

幸运的是，我们不需要引入什么“形变的 Bessel 方程”来解决三维 Laplace 算子的特征值问题。事实上，只需要做一个小小的变换，就能用 Bessel 函数表示出上面方程的解。我们做待定系数，设

$$R(\rho) = \frac{j(\rho)}{r^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ 为待定常数}$$

这样原本关于 R 的方程可以重写为关于 j 的方程：

$$\rho^2 \frac{d^2 j}{d\rho^2} + (2 - 2\alpha)\rho \frac{dj}{d\rho} + (\rho^2 - (l^2 + l) + \alpha(\alpha - 1))j = 0.$$

所以只需要令 $\alpha = \frac{1}{2}$ ，那我们就得到了 Bessel 方程：

$$\rho^2 \frac{d^2 j}{d\rho^2} + \rho \frac{dj}{d\rho} + \left(\rho^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right) j = 0.$$

对正整数 l ，上面的方程的解 $J_{l+\frac{1}{2}}, Y_{l+\frac{1}{2}}$ 也被称为球 Bessel 函数（前面得到的 J_l, Y_l 被称为柱 Bessel 函数）。将上面的过程整合起来，我们就得到了 $R(r)$ 的表达式：

$$R(r) = \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} J_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r).$$

对于更高维空间中的 Laplace 算子，我们也可以考虑特征值问题，并使用 Bessel 函数给出它的解。但实际中很少碰见需要使用极坐标求解的情况，所以我们不做进一步讨论。