Laplace 算子与 Bessel 函数

陈铁钊

2025 年 9 月 23 日

目录

Bessel（贝塞尔）函数被定义为 Bessel 方程 x

$$f''(x)+\frac{1}{x}f'(x)+\frac{x^2-\nu^2}{x^2}f(x)=0,\quad \nu\in\mathbb{R},\nu\geqslant 0$$

的解。这个二阶微分方程的一组特定的线性无关的解 $J_\nu(x),Y_\nu(x)$ 分别被称为第一类和第二类 Bessel 函数[1]。区别这两个解的一个简单办法是：J_ν 在 0 附近有界，而 Y_ν 在 0 附近无界。

我们在这篇笔记里给出一个出现 Bessel 方程的场景：使用极坐标求解二维圆盘上负 Laplace 算子的特征函数。

所谓的负 Laplace 算子的特征函数（也叫本征函数）是指一个函数 $\phi(x)$，满足 $-\Delta\phi(x)=\lambda\phi(x)$，其中 λ 是一个常数[2]，被称为特征值（这和矩阵的特征值与特征向量的定义类似）。

[1]第一类 Bessel 函数 $J_\nu(x)$ 可以靠幂级数法解出来，这时要将幂级数展开设为 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+\alpha}$，其中 $\alpha\in\mathbb{R}$ 是待定常数。

[2]对负 Laplace 算子的情况，对积分 $\int_\Omega\phi\Delta\phi\,\mathrm{d}V$ 使用格林公式可以证明 λ 非负。

1 为何考虑特征函数？

出现 $-\Delta$ 的特征函数的一个场合是在使用分离变量法求解热方程 $\partial_t u = \Delta u$ 和波动方程 $\partial_{tt} u = \Delta u$. 我们以热方程为例：假定我们已经求出了所有的特征向量 $\{\phi_\lambda(x)\}_{\lambda \in I \subseteq \mathbb{R}}$，其中 ϕ_λ 对应的特征值为 λ. 此外我们进一步假定任何一个函数都可以唯一地表示为一些（可能是无穷多个）特征函数的和[3]，那我们可以将热方程的解 $u(t,x)$ 设为

$$u(t,x) = \sum_\lambda a_\lambda(t)\phi_\lambda(x)$$

上面求和中的每一项都是单变量函数的乘积（暂且称这样的函数是变量分离的），我们能很方便地单独分析 t 或 x 对函数的影响。所以这种方法（将函数写为变量分离的函数的和）被称为分离变量法。

将上一段的等式代入热方程 $\partial_t u = \Delta u$ 中，会得到：

$$\sum_\lambda \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a_\lambda(t)\right) \cdot \phi_\lambda(x) = \sum_\lambda a_\lambda(t)\Delta\phi_\lambda(x) = \sum_\lambda (-\lambda) a_\lambda(t) \cdot \phi_\lambda(x)$$

因为将函数表示为特征函数的和的方式唯一，所以每个 ϕ_λ 前的系数对应相等：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a_\lambda(t) = -\lambda a_\lambda(t), \quad \forall \lambda, \forall t \in [0, +\infty).$$

这样可以解出 $a_\lambda(t) = C_\lambda e^{-\lambda t}$，进而可以得到热方程的解：

$$u(t,x) = \sum_\lambda C_\lambda e^{-\lambda t}\phi_\lambda(x).$$

对于波动方程，在知道了特征函数之后也可以用同样的办法求解[4]。

我们在求解满足特定条件的特征向量时，会得到 Bessel 函数。具体来说，我们考虑在单位圆盘上满足特定边值问题的特征函数[5]：

$$\begin{cases} \Delta\phi(x) = -\lambda \cdot \phi(x), & \forall x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \\ \phi(x) = 0, & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

[3]可能是因为这个条件的严格陈述有些麻烦（比如在特征值取遍一个区间时，需要改成特征函数的某种积分），并且验证起来也有点麻烦，所以在讲解分离变量法的时候，有时会忽略这个条件。

[4]对量子力学里的不含时 Schrödinger(薛定谔) 方程 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = \left(-\frac{\hbar^2}{m}\Delta + V(x)\right)\phi(t,x)$，也可以用同样的想法求解，只是这时需要考虑的是 $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{m}\Delta + V(x)$ 的特征函数。

[5]在不做限制的情况下，Δ 具有连续的特征值，并且每个特征值对应的特征子空间会是无穷维的，如可以考虑 $\phi_\lambda(x,y) = e^{ax+by}, a^2+b^2=\lambda$.

其中 Ω 为单位闭圆盘 $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant 1\}$. 为了利用对称性，我们在极坐标下进行求解，这时候 Δ 可以表示为

$$\Delta = \boxed{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

可以看到框起来的部分和 Bessel 方程的前两项十分相似。

2 从特征值问题到 Bessel 方程

我们使用另一种形式的分离变量法处理特征值问题 (1)：我们直接假设它的解形如[6]

$$\phi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta), \quad 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

且 $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$. 代入到方程 (1) 中，得到

$$\Theta(\theta)\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2}(r) + \frac{\Theta(\theta)}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}(r) + \frac{R(r)}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2} = -\lambda R(r)\Theta(\theta)$$

在等式两边乘以 $\frac{r^2}{R(r)\Theta(\theta)}$，整理之后会得到

$$\frac{1}{R(r)}\left(r^2 R''(r) + rR'(r) + \lambda r^2 R(r)\right) = -\frac{1}{\Theta(\theta)}\Theta''(\theta)$$

上面等式的左侧只依赖 r，右侧只依赖 θ，因此唯一的可能是两侧都是常数，也就是

$$\begin{cases} -\frac{1}{\Theta(\theta)}\Theta''(\theta) = \mu, \\ \frac{1}{R(r)}\left(r^2 R''(r) + rR'(r) + \lambda r^2 R(r)\right) = \mu. \end{cases}$$

第一个方程的解有三种情况：

(i) 在 $\mu > 0$ 时：$\Theta(\theta) = A\sin(\sqrt{\mu}\theta) + B\cos(\sqrt{\mu}\theta)$.

(ii) 在 $\mu = 0$ 时：$\Theta(\theta) = A + B\theta$.

(iii) 在 $\mu < 0$ 时：$\Theta(\theta) = Ae^{\sqrt{-\mu}\theta} + Be^{\sqrt{-\mu}\theta}$.

[6]一般来说，这样假设有可能会漏解，因此在求解完之后需要验证找出了所有解（比如证明任何光滑函数都能表示为找到的解的和）。但因为完成验证需要二阶常微分方程边值问题的理论，这一步也常被忽略。

但 $\Theta(\theta)$ 还要满足 $\Theta(0)=\Theta(2\pi)$，这说明只可能是第一种情况，即 $\Theta(\theta)$ 是三角函数；这也要求 $\sqrt{\mu}$ 是个整数，所以可设 $\mu=n^2, n\in\mathbb{Z}$. 这样第二个方程就变为了

$$\frac{1}{R(r)}\left(r^2R''(r)+rR'(r)+\lambda r^2R(r)\right)=n^2.$$

也就是

$$r^2R''(r)+rR'(r)+\left(\lambda r^2-n^2\right)R(r)=0.$$

上面的微分方程几乎就是 Bessel 方程了。我们作换元 $\rho=\sqrt{\lambda}r$，那么上面的方程正好会给出 Bessel 方程：

$$\rho^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+(\rho^2-n^2)R=0.$$

至此，我们完整展示了 Bessel 方程是如何出现在 Laplace 算子特征值问题里的。

3 特征值问题的完整回答

我们在剩下的部分给出特征值问题 (1) 完整回答，不过这和笔记的主题无关，仅仅是为了内容的完整性。根据已有的论证，我们知道 $R(r)$ 可以用 Bessel 函数表示：

$$R(r)=AJ_n(\sqrt{\lambda}r)+BY_n(\sqrt{\lambda}r).$$

我们提到过，Y_n 在 0 附近是无界的，这不符合我们对 $R(r)$ 的要求，所以 $B=0$，这样可以取 $R(r)=J_n(\sqrt{\lambda}r)$. 此外因为 ϕ 要满足边值条件 $\phi(x)=1,\forall|x|=1$，所以有

$$0=R(1)=J_n(\sqrt{\lambda})$$

所以特征值 λ 是 Bessel 函数 $J_n(x)$ 的某个零点。记 $J_n(x)$ 在正半轴上的第 k 小的零点为 $\zeta_{n,k}$，那根据上面的讨论，我们可以给出特征值的回答：

结论 3.1 特征值问题 *(1)* 的所有特征值构成的集合为

$$\{\zeta_{n,k}^2 \mid n,k\in\mathbb{Z}, n\geqslant 0, k\geqslant 1\}.$$

对特征值 $\zeta_{n,k}^2$，在 $n=0$ 时，它仅有一个线性无关的特征函数

$$\phi_{0,k}(r,\theta)=J_0(\zeta_{0,k}^2 r).$$

在 $n>0$ 时，它恰有两个线性无关的特征函数：

$$\phi_{n,k}(r,\theta)=\cos(n\theta)J_n(\zeta_{n,k}^2 r),\qquad \tilde{\phi}_{n,k}(r,\theta)=\sin(n\theta)J_n(\zeta_{n,k}^2 r).$$

注 3.1 这里没有验证任何光滑函数都可以表示为上面求出的特征函数的和。我们在这个注记里给出验证思路。我们采取的办法是逐步分解。任给一个函数 $f(r,\theta)$，先固定 r，利用 *Fourier*（傅里叶）级数的性质，有分解

$$f(r,\theta)=a_0(r)+\sum_{n=1}^{+\infty}\big(a_n(r)\cos(n\theta)+b_n(r)\sin(n\theta)\big).$$

对于每个 $a_n(r),b_n(r)$，它们可以继续分解为

$$a_n(r)=\sum_{k=1}^{+\infty}C_{n,k}J_n(\zeta_{n,k}^2 r),\qquad b_n(r)=\sum_{k=1}^{+\infty}\tilde{C}_{n,k}J_n(\zeta_{n,k}^2 r).$$

这一步需要用到 *Sturm-Liouville* 边值问题的性质，这类问题的简单介绍可以参考周珍楠老师的讲义。所以我们最终知道有分解

$$\begin{aligned}
f(r,\theta)&=\sum_{k=1}^{\infty}C_{0,k}J_0(\zeta_{0,k}^2 r)+\sum_{n,k=1}^{+\infty}\Big(C_{n,k}\cos(n\theta)J_n(\zeta_{n,k}^2 r)+\tilde{C}_{n,k}\sin(n\theta)J_n(\zeta_{n,k}^2 r)\Big)\\
&=\sum_{k=1}^{+\infty}C_{0,k}\phi_{0,k}(r,\theta)+\sum_{n,k=1}^{+\infty}\big(C_{n,k}\phi_{n,k}(r,\theta)+\tilde{C}_{n,k}\tilde{\phi}_{n,k}(r,\theta)\big).
\end{aligned}$$

A 三维空间中的 Laplace 算子与“形变”Bessel 方程

我们之前考虑的是二维空间中的 Laplace 算子，一个很自然的问题是，我们能否考虑三维的 Laplace 算子，并在球极坐标下求解特征值问题：

$$\begin{cases}-\Delta\phi=\lambda\phi, & \forall\,|x|\leqslant 1;\\ \phi(x)=0, & \forall\,|x|=1.\end{cases}\tag{2}$$

我们的处理思路和二维时一样，先在球极坐标下写出 Δ，然后使用分离变量来求解特征值问题。

经过一些（漫长的）计算，在球极坐标

$$x=r\cos\varphi\sin\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\theta$$

下，Laplace 算子的表达式是：

$$\Delta=\boxed{\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}}+\frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}$$

其中 Δ_{S^2} 是只和 θ,φ 以及关于它们的偏导数有关的算子，它被称为单位球面上的 Laplace 算子：

$$\Delta_{S^2}=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

这篇笔记里我们不会讨论 Δ_{S^2} 的性质，只会把它们作为结论使用。

和前面一样，我们考虑形如

$$\phi(r,\theta,\varphi)=R(r)\cdot Y(\theta,\varphi),\quad 0\leqslant r\leqslant 1,-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant\varphi<2\pi.$$

那么特征值问题 (2) 等价于

$$\frac{1}{R(r)}\left(r^2R''(r)+2rR'(r)+\lambda r^2R(r)\right)=-\frac{1}{Y(\theta,\varphi)}\Delta_{S^2}Y(\theta,\varphi)$$

进而得到

$$\begin{cases}\frac{1}{Y(\theta,\varphi)}\Delta_{S^2}Y(\theta,\varphi)=\mu,\\ \frac{1}{R(r)}\left(r^2R''(r)+2rR'(r)+\lambda r^2R(r)\right)=-\mu.\end{cases}$$

上面的第一个方程对应于 Δ_{S^2} 的特征值问题，我们在这里不加证明的给出结果：

μ 的值只可能为 $-l(l+1)$，其中 $l\leqslant 1$ 是正整数。

所以 $R(r)$ 在这时满足的方程是：

$$r^2R(r)+2rR(r)+\left(\lambda r^2-l(l+1)\right)R(r)=0$$

我们做换元 $\rho=\sqrt{\lambda}r$，最终得到了一个和 Bessel 方程十分相似的方程

$$\rho^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}R+2\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}R+\left(\rho^2-(l^2+l)\right)R=0.$$

这个方程和 Bessel 方程相似但又不一样的原因来自于 Laplace 算子的表达式：如果比较二维和三维空间中 Laplace 算子的表达式，我们会发现 r 的一阶导前面的系数从 1 变成了 2.

幸运的是，我们不需要引入什么“形变的 Bessel 方程”来解决三维 Laplace 算子的特征值问题。事实上，只需要做一个小小的变换，就能用 Bessel 函数表示出上面方程的解。我们做待定系数，设

$$R(\rho)=\frac{j(\rho)}{r^\alpha},\qquad \alpha\in\mathbb{R}\text{为待定常数}$$

这样原本关于 R 的方程可以重写为关于 j 的方程：

$$\rho^2\frac{\mathrm{d}^2 j}{\mathrm{d}\rho^2}+(2-2\alpha)\rho\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}\rho}+\big(\rho^2-(l^2+l)+\alpha(\alpha-1)\big)\,j=0.$$

所以只需要令 $\alpha=\frac{1}{2}$，那我们就得到了 Bessel 方程：

$$\rho^2\frac{\mathrm{d}^2 j}{\mathrm{d}\rho^2}+\rho\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}\rho}+\left(\rho^2-\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right)j=0.$$

对正整数 l，上面的方程的解 $J_{l+\frac{1}{2}},Y_{l+\frac{1}{2}}$ 也被称为球 Bessel 函数（前面得到的 J_l,Y_l 被称为柱 Bessel 函数）。将上面的过程整合起来，我们就得到了 $R(r)$ 的表达式：

$$R(r)=\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}J_{l+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r).$$

对于更高维空间中的 Laplace 算子，我们也可以考虑特征值问题，并使用 Bessel 函数给出它的解。但实际中很少碰见需要使用极坐标求解的情况，所以我们不做进一步讨论。