

# Hofer-Zehnder 容量与 Gromov 不可压缩定理的证明

陈轶钊

2025 年 7 月 28 日

## 目录

1 不可压缩定理与辛容量	2
2 Hofer-Zehnder 容量	3
3 变分的视角	5
4 Hilbert 空间上的负梯度流	8
4.1 一般的理论 . . . . .	8
4.2 作用量泛函的负梯度流 . . . . .	10
4.2.1 连续可微性 . . . . .	12
4.2.2 Palais-Smale 条件 . . . . .	13
5 环绕论证	15

这篇笔记的目的是给出 Hofer-Zehnder 容量的定义并计算  $\mathbb{R}^{2n}$  中特定柱体的 Hofer-Zehnder 容量。利用这个结果，我们可以进一步证明 Gromov 不可压缩定理：半径大的球体不能辛嵌入到半径小的柱体中。

这篇笔记的主要参考 McDuff 所著 *Introduction to Symplectic Topology* 的第 12 章第 4、5 节，以及 Hofer, Zehnder 的论文 *A New Capacity for Symplectic Manifolds* 和 *Periodic solutions on hypersurfaces and a result by C. Viterbo*。另外有关 Banach 空间上的 Morse 理论相关的内容参考了张恭庆所著的《非线性分析方法》。为了缩

减篇幅，我们省略了许多比较基本或琐碎的证明。读者可以在前面提及的参考文献中找到具体的论证。

## 1 不可压缩定理与辛容量

所谓的 Gromov 不可压缩定理是

**定理 1.1 (Non-squeezing Theorem)** 对辛向量空间

$$\mathbb{C}^n = \{z = x + \sqrt{-1}y \mid x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n\}, \omega = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j$$

记以原点为圆心的开球为  $B^{2n}(r) = \{z = x + \sqrt{-1}y \mid \sum_{j=1}^n x_j^2 + y_j^2 < r^2\}$ ，用  $Z^{2n}(R) = \{z = x + \sqrt{-1}y \mid x_1^2 + y_1^2 < R^2\}$  表示其中的柱体。那么当且仅当  $r \leq R$  时，存在从  $B^{2n}(r)$  到  $Z^{2n}(R)$  的辛嵌入。

这一定理直接导致了“辛容量”<sup>1</sup>这一概念的出现：我们能否类比黎曼流形的直径，给每个辛流形定义一个“宽度”，使得宽的辛流形无法嵌入更窄的辛流形。严格来说，我们想要的是：

**定义 1.1** 如果对每个辛流形  $(M, \omega)$  指定了一个数  $c(M) = c(M, \omega)$ （允许为  $+\infty$ ），满足

- (1) (单调性) 如果存在辛嵌入  $(M, \omega) \hookrightarrow (N, \eta)$  且  $\dim M = \dim N$ ，则  $c(M) \leq c(N)$ 。
- (2) (共形性)  $c(M, \lambda\omega) = |\lambda| c(M, \omega), \forall \lambda \neq 0$ 。
- (3) (非退化)  $0 < c(B^{2n}(1)) \leq c(Z^{2n}(1)) < +\infty$ 。

那么就称  $c$  是一个辛容量 (symplectic capacity)。

这里我们要指出，上面的第三条要求使得辛容量是比辛流形的体积更加精细的不变量，因为对非紧的辛流形，它的体积未必有限，但有可能具有有限的辛容量（如  $Z^{2n}(r)$ ）。

---

<sup>1</sup>Gromov 最初建议将这个概念称为“辛宽度 (symplectic width)”，但更多人习惯称它为辛容量。

我们有多种定义辛容量的方式，比如利用 Gromov 不可压缩定理，我们可以定义一种被称作 Gromov 宽度的辛容量。对  $2n$  维辛流形  $M$ ，它的 Gromov 宽度是

$$w_G(M) = \sup\{\pi r^2 \mid \exists \text{ symplectic embedding } B^{2n}(r) \rightarrow M\}.$$

这时 Gromov 不可压缩定理告诉我们，Gromov 宽度满足比非退化性更强的条件：

$$w_G(B^{2n}(1)) = w_G(Z^{2n}(1)) = \pi$$

反之，如果我们能定义一个辛容量  $c$ ，满足上面的条件（我们称之为规范化条件）：

$$c(B^{2n}(1)) = c(Z^{2n}(1)) = \pi \quad (1)$$

这和辛容量的单调性结合就能推出 Gromov 不可压缩定理。我们下面就采取这种办法证明 Gromov 不可压缩定理。我们构造的辛容量被称为 Hofer-Zehnder 容量。

## 2 Hofer-Zehnder 容量

Hofer-Zehnder 容量来自于对 Hamiltonian 系统的研究。对辛流形  $(M, \omega)$  上的光滑函数  $H$ ，下面的等式唯一地定义了一个  $H$  诱导的 Hamiltonian 向量场  $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ ：

$$\omega(X_H, \cdot) = dH(\cdot) \in \Gamma(T^*M).$$

在  $M = \mathbb{C}^n$  时， $X_H$  有更简单的表达式： $X_H = -\sqrt{-1} \text{grad } H$ ，其中

$$\text{grad } H = \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial H}{\partial x} + \sqrt{-1} \frac{\partial H}{\partial y} \in \mathbb{C}^n$$

是  $H$  的梯度。

在  $X_H$  是完备向量场时，方程

$$\frac{d}{dt} \phi_H^t(x) = X_H(\phi_H^t(x))$$

定义了  $X_H$  生成的流

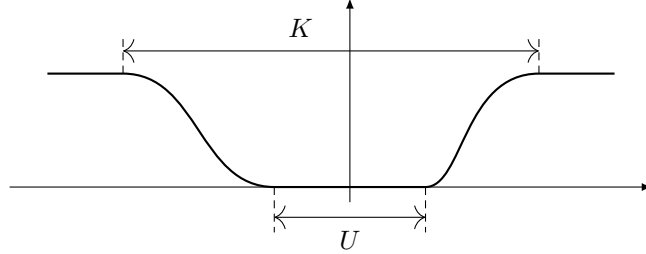
$$\mathbb{R} \times M \longrightarrow M$$

$$(t, x) \longmapsto \phi_H^t(x).$$

我们将其称为由  $H$  生成的 Hamiltonian 流。我们称从一点出发的流线  $z(t) = \phi_H^t(x)$  是一个  $T$ -周期轨 ( $T > 0$ ) 如果  $z(t+T) = z(t)$  对任意的  $t$  都成立。显然  $\phi_H^t$  的不动点都是  $T$ -周期轨，这样的轨道是平凡的。

我们用  $\mathcal{H}(M)$  表示满足下面几个条件的光滑函数  $H$  构成的集合：

- (I)  $0 \leq H \leq \sup_M H < +\infty$ .
- (II) 存在紧集  $K \subsetneq M$ , 使得  $H$  在  $M \setminus K$  上是常数  $\sup_M H$ .
- (III) 存在开集  $U \subset K$ , 使得  $H|_U \equiv 0$ .



粗略来说,  $\mathcal{H}(M)$  中的函数都可以靠常值函数减去一个鼓包函数得到。注意  $\mathcal{H}(M)$  中函数的一阶微分都是紧支的, 所以它们的 Hamiltonian 向量场都是完备的。

对  $\mathcal{H}(M)$  中的函数, 我们称它是容许的 (admissible), 如果对任意的  $T \in (0, 1]$ , 它没有非平凡的  $T$ -周期轨。下面的引理说明, 对任意的  $H \in \mathcal{H}(M)$ , 存在一个充分小的常数  $\varepsilon$  使得  $\varepsilon H$  是容许的——粗略来讲, 这是因为在  $|dH|$  充分小时, Hamiltonian 流的速度会充分慢。

**引理 2.1** 对  $\mathbb{R}^m$  中向量场  $X: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , 它定义的流的一个  $T$ -周期轨为  $x(t)$ . 如果  $\sup_{\mathbb{R}^m} |\nabla X| < \frac{1}{T}$ , 则  $x(t)$  为平凡的周期轨。

这一引理可以靠用两种办法估计  $\ddot{x}(t)$  证明, 我们省略它的细节。

上面的讨论告诉我们,  $\mathcal{H}(M)$  中存在大量的容许函数。我们用容许函数定义 Hofer-Zehnder 容量:

**定义 2.1 (Hofer-Zehnder capacity)** 对辛流形  $(M, \omega)$ , 它的 Hofer-Zehnder 容量是

$$c_{HZ}(M) = \sup \left\{ \sup_M H \mid H \in \mathcal{H}(M), H \text{ is admissible.} \right\} \quad (2)$$

分别利用“容许函数的前推还是容许函数”和“相差常数倍的辛形式的辛向量场相差常数倍”可以证明  $c_{HZ}(M)$  满足单调性和共形性, 这部分的论证可以从定义直接推出, 我们这里略去证明细节。真正困难的是证明 Hofer-Zehnder 容量满足规范化条件 (1). 我们这里先将对规范条件做简单转化。

我们实际上只需要证明一组不等式

$$\pi \leq c_{HZ}(B^{2n}(1)) \leq c_{HZ}(Z^{2n}(1)) \leq \pi$$

上面第一个不等号可以靠构造适当的函数得到：我们可以对二次函数  $f(x) = (\pi - \varepsilon)|x|^2$  稍作调整，使得它成为  $\mathcal{H}(B^{2n}(1))$  中的容许函数，这样会得到

$$c_{HZ}(B^{2n}(1)) \geq \pi - \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

进而得出第一个不等式。第二个不等式可以由辛容量的单调性得到。最后只剩下最右侧的不等号。

最后一个不等号实际上说，如果  $H_0 \in \mathcal{H}(Z^{2n}(1))$  是一个容许函数，那么  $\sup_{Z^{2n}(1)} H_0 \leq \pi$ 。我们只需要证明它的逆否命题，即：对  $H_0 \in \mathcal{H}(Z^{2n}(1))$ ，如果  $\sup_{Z^{2n}(1)} H_0 > \pi$ ，则  $H_0$  不是容许函数，也就是存在  $H_0$  的 1-周期轨。

我们对定理的条件稍作优化：我们已知  $H_0$  在某个开集  $U$  上恒为 0，因为辛同胚不改变 Hamiltonian 方程  $\dot{z} = -\sqrt{-1} \operatorname{grad} H_0$ ，进而也不改变周期轨的周期，所以我们可以选取一个将 0 映入  $U$  的辛同胚  $\psi : Z^{2n}(1) \rightarrow Z^{2n}(1)$  并考虑  $H_0 \circ \psi$ ，它在 0 的一个邻域上恒为 0。这样我们只需要证明：

**定理 2.1** 设  $H_0 \in \mathcal{H}(Z^{2n}(1))$  满足：存在 0 的开邻域  $U$  使得  $H_0|_U \equiv 0$ ，如果  $\sup_{Z^{2n}(1)} H_0 > \pi$ ，则存在  $H_0$  的 1-周期轨。

之后几节的主要目的就是证明这一定理。在下一节中，我们会用变分的语言重新叙述这个问题；在第四节中，我们会引入负梯度流这一工具来寻找临界点，而临界点的非退化性由第五节中的“环绕论证 (linking argument)”来保证。

### 3 变分的视角

对于 Hamiltonian 流，我们可以用变分的方法描述。

**引理 3.1** 对  $\mathbb{C}^n$  中开区域  $Z$  和其上光滑函数  $H_0$ ，由  $H_0$  定义的作用量泛函：

$$\mathcal{A}_{H_0} : z(t) = (x(t), y(t)) \mapsto \int_0^1 \frac{1}{2} \langle z, \sqrt{-1} \dot{z} \rangle - H_0(x + y\sqrt{-1}) dt$$

的临界点为  $H_0$  定义的 Hamiltonian 流，其中  $z(t)$  满足  $z(t+1) = z(t), \forall t \in \mathbb{R}$ ， $\langle \cdot, \cdot \rangle$  是  $\mathbb{C}^n$  上的标准内积。我们会在下一节给出  $\mathcal{A}_{H_0}$  的定义域，它是平方可积函数空间的某个子空间。

我们之后讨论的函数  $H$  都是不超过二次增长的，即  $H(z) \leq C(|z|^2 + 1)$ ，因此  $\int_0^1 H_0(z) dt$  是良定义的。

作用量  $\mathcal{A}_{H_0}$  的构造实际上来自于经典力学中的作用量：经典力学中的基本结论是，作用量  $\mathcal{L}$  的临界点恰好给出质点的运动轨迹。而这里的 1-周期轨可以看作某种广义的“运动轨迹”，所以可以类似地构造作用量。

这一引理的证明是相当容易的，唯一需要注意的地方是需要额外验证  $z(t)$  的光滑性，这可以靠证明它具有一阶弱导数和 Sobolev 嵌入得到。

**证明 (引理3.1(不严格))** 任取  $\zeta \in C^\infty(S^1; \mathbb{C}^n)$ ，那么在  $z$  是临界点时，它沿着  $\zeta$  方向的方向导数一定为 0，也就是

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\delta} \mathcal{A}_{H_0}(z(t) + \delta \cdot \zeta(t)) \\ &= \int_0^1 \operatorname{Re} \langle \sqrt{-1} \dot{z}, \zeta \rangle - dH_0|_z(\zeta) dt \\ &= \int_0^1 \operatorname{Re} \langle \sqrt{-1} \dot{z} - \operatorname{grad} H_0(z), \zeta \rangle dt \end{aligned}$$

其中最后一个等号用到了  $dH_{z(t)}(\zeta(t)) \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, 1]$ . 注意到  $\zeta$  是任意的，所以有  $\dot{z} = -\sqrt{-1} \operatorname{grad} H_0(z)$ . 这里因为没有给出定义域，我们省略对  $z(t)$  光滑性的证明。

所以我们只需要证明由  $H_0 \in \mathcal{H}(Z^{2n}(1))$  定义的泛函  $\mathcal{A}_{H_0}$  具有不是常值的临界点。注意到  $H_0 \geq 0$ ，所以在  $z(t)$  是常值映射时一定有  $\mathcal{A}_{H_0}(z) \leq 0$ . 因此周期轨  $z(t)$  非平凡的一个充分条件是  $\mathcal{A}_{H_0}(z) > 0$ . 我们只需要找  $\mathcal{A}_{H_0}$  的正临界值即可。

在这一节的最后，我们对  $H_0$  做一个稍显奇怪的延拓，得到一个  $\mathbb{C}^n$  上的光滑函数  $H$ ，使得它的特定非退化 1-周期轨恰好也是  $H_0$  的非退化周期轨。

设  $\sup H_0 = M \geq \pi + \varepsilon$ ，其中  $\varepsilon$  是某个满足  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$  的常数. 再取一个充分大的  $R > 0$ ，使得  $H_0$  在  $B^{2n}(R)$  之外恒等于  $M$ . 取  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$  满足：

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(s) = M, & \forall 0 \leq s \leq 1; \\ f(s) = (\pi + \varepsilon)s, & \forall s \geq C; \\ f(s) \geq (\pi + \varepsilon)s, & \forall s \geq 0; \\ 0 < f'(s) \leq \pi + \varepsilon, & \forall s > 1. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} g(s) = 0, & \forall 0 \leq s \leq R^2; \\ g(s) = \frac{\pi}{2}s, & \forall s \geq 4R^2; \\ 0 < g'(s) < \pi, & \forall s > R^2. \end{array} \right.$$

其中  $C$  是一个充分大的正数。我们定义  $H_0$  的延拓  $H \in C^{+\infty}(\mathbb{C}^n)$  为：

$$H(z_1, w) = \begin{cases} H_0(z_1, w), & \forall (z_1, w) \in Z^{2n}(1) \cap B^{2n}(R), \\ f(|z_1|^2) + g(|w|^2), & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3)$$

这里  $z_1 \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C}^{n-1}$ . 根据  $f, g$  的选取可以证明,  $H$  是  $\mathbb{C}^n$  上的光滑函数。下面的引理告诉我们, 我们实际上只需要考虑由  $H$  定义的作用量泛函  $\mathcal{A}_H$  的正临界值:

**引理 3.2** 对 1-周期的映射  $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ , 如果  $z(t)$  是  $\mathcal{A}_H$  的临界点, 且  $\mathcal{A}_H(z(t)) > 0$ , 则  $z(t)$  始终落在  $Z^{2n}(1)$  中, 且为  $H_0$  的非退化 1-周期轨。

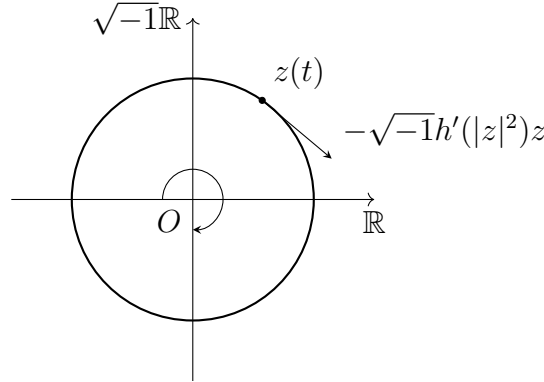
**证明** 我们实际上只需要证明  $z(t)$  落在  $Z^{2n}(1) \cap B^{2n}(R)$  中。

我们采用反证法, 若对某个  $t_0$ , 有  $z(t_0)$  不在  $Z^{2n}(1) \cap B^{2n}(R)$  中, 那么由  $H(z(t))$  为常数可以知道,  $H(z(t)) = H(z(t_0)) > M$  恒成立, 进而  $z(t)$  恒不在  $Z^{2n} \cap B^{2n}(R)$  中。

这时  $z(t) = (z_1(t), w(t))$  满足的 *Hamiltonian* 方程是

$$\dot{z}_1 = -2\sqrt{-1}f'(|z_1|^2)z_1(t), \quad \dot{w}(t) = -2\sqrt{-1}g'(|w|^2)w(t).$$

从上面的方程可以推出  $|z_1(t)|^2, |w|^2$  都是常数, 所以  $z_1(t), w(t)$  实际上都是具有固定角速度的旋转, 它们的角速度分别为  $2f'(|z_1|^2), 2g'(|w|^2)$  (如下图所示)。



又因为  $z(t)$  以 1 为周期, 所以  $z_1(t), w(t)$  的角速度必须是  $2\pi$  的整数倍, 也就是  $f'(|z_1|^2), g'(|w|^2) \in \pi \cdot \mathbb{Z}$ , 注意到  $f', g'$  只能在特定区间里取值, 所以实际上只可能是  $g'(|w|^2) = 0, f'(|z_1|^2) = \pi$ , 再根据  $f, g$  的构造可以知道

$$\begin{aligned} g(|w(t)|^2) &\equiv 0, & f(|z_1(t)|) &\geq (\pi + \varepsilon)|z_1(1)|^2; \\ \dot{w}(t) &\equiv 0, & \dot{z}_1(t) &= -2\pi z_1(t). \end{aligned}$$

我们用上面的式子计算  $\mathcal{A}_H(z(t))$ , 会发现  $\mathcal{A}_H(z(t)) \leq 0$ , 这与条件矛盾了。

## 4 Hilbert 空间上的负梯度流

我们找临界值的工具是负梯度流，这是 Hamiltonian 系统的研究中相当常用的一个工具。和 Riemann 流形中的梯度流略微不同的地方是，我们需要用到 Hilbert 空间（或 Hilbert-和 Riemann 流形）上的梯度流。虽然两种梯度流考虑的空间完全不同，技术上也略有差异，但思路是完全一致的。对非线性泛函分析不熟悉的读者可以暂且假定这一节中的空间  $\mathcal{H}$  就是一个有限维内积空间。

### 4.1 一般的理论

对复 Hilbert 空间  $\mathcal{H}$  上的泛函  $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ ，我们称它在  $x$  处 Fréchet 可微，如果存在有界实线性泛函  $dA_x: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ ，使得

$$A(x + \Delta x) = A(x) + dA_x(\Delta x) + o(\|\Delta x\|_{\mathcal{H}})$$

我们称  $dA_x \in \mathcal{H}^*$  是泛函  $A$  在  $x$  处的 Fréchet 导数。这个定义与有限维空间上函数的可微性几乎一致。在  $A$  处处 Fréchet 可微时，它的导数定义了一个映射

$$dA: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^*; x \longmapsto dA_x$$

如果这一映射连续，那就称  $A$  具有连续的 Fréchet 导数。

在有了 Fréchet 导数之后，根据 Riesz 表示定理，存在唯一的  $\text{grad } A(x) \in \mathcal{H}$ ，使得

$$dA_x(v) = \text{Re} \langle \text{grad } A(x), v \rangle_{\mathcal{H}}, \forall v \in \mathcal{H}$$

我们称  $\text{grad } A(x)$  是  $A$  在  $x$  处的梯度。对处处 Fréchet 可微的泛函  $A$ ，我们有良定义的微分方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = -\text{grad } A(x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad x(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{H}).$$

它的解  $x(t) = x(t; x_0)$  给出了  $\mathcal{H}$  上由  $A$  定义的负梯度流  $\Phi_t(x_0) = x(t; x_0)$ 。当然，上面的微分方程未必有全局的解，我们这里给出一个充分条件：

**引理 4.1** 若  $\text{grad } A$  处处有存在，且满足 Lipschitz 条件，即存在常数  $L > 0$  使得

$$\|\text{grad } A(x_1) - \text{grad } A(x_2)\|_{\mathcal{H}} \leq L \|x_1 - x_2\|_{\mathcal{H}}, \forall x_1, x_2 \in \mathcal{H},$$

则  $A$  的梯度流  $\Phi: \mathbb{R} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  存在。

这一引理的证明和常微分方程理论中对应结论的证明类似，这里我们略去。

我们用来寻找临界点的定理是：

**定理 4.1 (Minimax principle)** 对复 Hilbert 空间  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$  (其中  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  关于第一个分量共轭线性) 和其上具有连续 Fréchet 导数的泛函  $A$  (未必线性)，设  $A$  定义的负梯度流  $\Phi: \mathbb{R} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}; x \mapsto \Phi_t(x)$  存在。如果  $A$  满足 Palais-Smale 条件，那么对  $\mathcal{H}$  中任意集合  $\Sigma$ ，只要

$$\inf_{t \geq 0} \sup_{x \in \Sigma} A(\Phi_t(x)) = c \in \mathbb{R}$$

那  $c$  就是  $A$  的临界值。

因为我们找到的临界值形如  $\inf_t \sup_{\Sigma} \dots$ ，所以这个定理一般被称为极小极大原理 (minimax principle)。定理中出现的 Palais-Smale 条件是：

**定义 4.1** 对复 Hilbert 空间  $\mathcal{H}$  上处处 Fréchet 可微的泛函  $A$ ，我们称  $A$  满足 Palais-Smale 条件，如果任意满足  $A(x_m) \rightarrow c \in \mathbb{R}$  和  $\text{grad } A(x_m) \rightarrow 0$  的点列  $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  都有收敛子列。

不同的文献对 Palais-Smale 条件的定义有所不同，我们之后实际上会验证更强的条件，即任意满足  $\text{grad } A(x_m) \rightarrow 0$  的点列  $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  都有收敛子列。这有时也会被称为 Palais-Smale 条件。

另外因为我们这里只考虑单个临界点的存在性，因此对梯度流的选取并没有太多要求，只需要存在一个梯度流即可，甚至不需要是梯度流也可以得到临界点的存在性，例如使用所谓的伪梯度流 (pseudo-gradient flow, 定义见张恭庆所著的《非线性分析方法》)。

最后，我们给出上面定理的证明。

**证明 (定理4.1)** 首先注意到对任意的  $x \in \mathcal{H}$ ，有

$$\frac{d}{dt} A(\Phi_t(x)) = dA_{\Phi_t(x)} \left( \frac{d}{dt} \Phi_t(x) \right) = - \|\text{grad } A(\Phi_t(x))\|_{\mathcal{H}}^2$$

所以  $\sup_{x \in \Sigma} A(\Phi_t(x))$  关于  $t$  单调递减，进而  $\sup_{x \in \Sigma} A(\Phi_t(x))$  的极限就是它的下确界  $c$ 。这样对任意的  $\delta > 0$ ，可以取充分大的  $t_\delta$  和  $x_\delta \in \Sigma$  使得

$$c - \delta \leq A(\Phi_{t_\delta+1}(x_\delta)) \leq A(\Phi_{t_\delta}(x_\delta)) \leq c + \delta.$$

那可以算出

$$2\delta \geq A(\Phi_{t_\delta}(x_\delta)) - A(\Phi_{t_\delta+1}(x_\delta)) = \int_{t_\delta}^{t_\delta+1} \|\text{grad } A(\Phi_s(x_\delta))\|_{\mathcal{H}}^2 ds.$$

这样我们可以找到  $\xi_\delta = \Phi_{s_\delta}(x_\delta)$ ,  $t_\delta \leq s_\delta \leq t_\delta + 1$ , 使得

$$\|\text{grad } A(\xi_\delta)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 2\delta.$$

此外根据  $s_\delta \in [t_\delta, t_\delta + 1]$  还知道  $A(\xi_\delta)$  落在  $A(\Phi_{t_\delta}(x_\delta)), A(\Phi_{t_\delta+1}(x_\delta))$  之间, 所以

$$c - \delta \leq A(\xi_\delta) \leq c + \delta.$$

在  $\delta$  变动时, 我们得到了一列点  $\{\xi_\delta\}_{\delta>0}$ , 满足  $A(\xi_\delta) \rightarrow c$  和  $\text{grad } A(\xi_\delta) \rightarrow 0$  (在  $\delta \rightarrow 0$  时), 这样根据 *Palais-Smale* 条件, 我们可以找到一个子列  $\{\xi_{\delta_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ , 使得  $\xi_{\delta_k} \rightarrow \xi$ . 这时由  $A$  和  $dA$  的连续性可以得到  $A(\xi) = c$  且  $\text{grad } A(\xi) = 0$ . 所以  $c$  确实是  $A$  的一个临界值。

## 4.2 作用量泛函的负梯度流

我们考虑的泛函自然是  $\mathcal{A}_H$ , 但我们还没有指定它的定义域。我们在这一节给出  $\mathcal{A}_H$  的定义域, 并验证它满足定理4.1的条件, 也就是  $\mathcal{A}_H$  处处 Fréchet 可微、它的 Fréchet 导数满足 Lipschitz 条件, 以及  $\mathcal{A}_H$  满足 Palais-Smale 条件。这一节中我们会不加证明地使用 Sobolev 空间、自伴算子谱分解、函数演算 (functional calculus) 相关的内容, 读者可以在有关泛函分析的书籍中找到介绍。

回忆泛函  $\mathcal{A}_H$  的定义是:

$$\mathcal{A}_H(z(t)) = \int_0^1 \frac{1}{2} \langle z(t), \sqrt{-1} \frac{d}{dt} z(t) \rangle - H(z(t)) dt, \quad z \in W^1(S^1; \mathbb{C}^n).$$

我们将  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  记为  $S^1$ . 这时  $\mathbb{R}$  上的 1-周期映射唯一对应于  $S^1$  上的映射。我们记

$$T = \sqrt{-1} \frac{d}{dt}: \text{Dom}(T) \longrightarrow L^2(S^1; \mathbb{C}^n)$$

这里  $\text{Dom}(T) \subseteq L^2(S^1; \mathbb{C}^n)$  是由  $L^2$ -范数定义的 Sobolev 空间  $W^1(S^1; \mathbb{C}^n)$ , 也就是  $S^1$  上光滑函数空间  $C^\infty(S^1; \mathbb{C}^n)$  关于范数

$$\|\zeta\|_{W^1} := \sqrt{\|\zeta\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{d}{dt} \zeta \right\|_{L^2}^2}$$

的完备化。粗略来说，它是由  $L^2(S^1; \mathbb{C}^n)$  中所有“可微”函数构成的完备度量空间。

一个自然的想法是，我们认为  $\mathcal{A}_H$  是  $W^1(S^1; \mathbb{C}^n)$  上的泛函，并考虑它的梯度流。但这并不是一个方便的空间：我们算出的  $\mathcal{A}_H$  的梯度会被过度“压缩”，这让我们很难验证 Palais-Smale 条件成立。

事实上，我们这里考虑的是“ $\frac{1}{2}$  次可微”的函数空间  $W^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{C}^n)$ ，它是  $|T|^{\frac{1}{2}}$  的定义域，也就是

$$W^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{C}^n) = \{\zeta \in L^2(S^1; \mathbb{C}^n) \mid |T|^{\frac{1}{2}} \zeta \in L^2(S^1; \mathbb{C}^n)\}$$

它上面的内积被定义为

$$\langle z, \zeta \rangle_{W^1} = \langle z, \zeta \rangle_{L^2} + \left\langle |T|^{\frac{1}{2}} z, |T|^{\frac{1}{2}} \zeta \right\rangle_{L^2}.$$

它诱导的范数是  $\|\cdot\|_{W^{1/2}}$ 。

为了说明  $W^{1/2}(S^1; \mathbb{C}^n)$  是 Hilbert 空间，我们给出它的更具体描述。我们考虑  $L^2(S^1; \mathbb{C}^n)$  上的 Fourier 变换

$$\zeta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\zeta}(n) \cdot e^{-2n\pi t \sqrt{-1}}, \quad \hat{\zeta}(n) = \int_0^1 \zeta(s) e^{2n\pi s \sqrt{-1}} ds.$$

它实际上给出了自伴算子  $T$  的谱分解：

$$L^2(S^1; \mathbb{C}^n) = \bigoplus_{\lambda \in 2\pi\mathbb{Z} = \sigma(T)} E_\lambda, \quad E_\lambda = \{e^{-\lambda t \sqrt{-1}} \cdot z \mid z \in \mathbb{C}^n\}$$

其中  $\bigoplus$  表示先做 Hilbert 空间的直和，再关于范数做完备化。这时  $|T|^{\frac{1}{2}} \zeta$  就是  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |2n\pi|^{\frac{1}{2}} \hat{\zeta}(n) e^{-2n\pi t \sqrt{-1}}$ 。进而  $W^{1/2}(S^1; \mathbb{C}^n)$  可以重写为

$$W^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{C}^n) = \{\zeta \in L^2(S^1; \mathbb{C}^n) \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |2n\pi|) |\hat{\zeta}(n)|^2 < +\infty\},$$

$$\langle z, \zeta \rangle_{W^{1/2}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |2n\pi|) \overline{\hat{z}(n)} \hat{\zeta}(n).$$

很容易验证这是一个 Hilbert 空间。

我们分别用  $E_+, E_- \subseteq L^2(S^1; \mathbb{C}^n)$  表示  $T$  的正、负特征值对应的特征子空间，并用  $P_\pm$  表示  $L^2(S^1; \mathbb{C}^n)$  向  $E_\pm$  的正交投影。显然很容易验证， $P_\pm$  在  $W^{1/2}(S^1; \mathbb{C}^n)$  上的限制是  $W^{1/2}(S^1; \mathbb{C}^n)$  到自身的有界算子，且我们有正交分解

$$W^{\frac{1}{2}}(S^1; \mathbb{C}^n) = \text{im } P_+ \oplus E_0 \oplus \text{im } P_-.$$

这时我们可以将  $\mathcal{A}_H$  重写为

$$\mathcal{A}_H(z) = \left\langle |T|^{\frac{1}{2}} z, |T|^{\frac{1}{2}} (P_+ - P_-) z \right\rangle_{L^2} - \int_0^1 H(z) dt$$

它在  $W^{1/2}(S^1; \mathbb{C}^n)$  上是良定义的。

#### 4.2.1 连续可微性

下面考虑  $\mathcal{A}_H$  的 Fréchet 可微性。我们将  $\mathcal{A}_H$  分成两部分考虑

$$\mathcal{A}_H(z(t)) = \mathcal{A}_0(z(t)) - \int_0^1 H(z(t)) dt$$

因为  $\mathcal{A}_0$  是  $W^{1/2}(S^1; \mathbb{C})$  上的有界共轭双线性型，所以它一定 Fréchet 可微。此外可以算出它的梯度

$$\text{grad } \mathcal{A}_0(z) = \frac{|T|}{1 + |T|} (P_+ z - P_- z) = \frac{T}{1 + |T|} z$$

是有界线性变换，因此一定是 Lipschitz 连续的。

而对  $\int_0^1 H(z) dt$ ，它的 Fréchet 可微性以及它的梯度的讨论都建立在有关  $H$  的估计上。所以我们先给出  $H$  的一些性质。

**引理 4.2** 对我们定义的函数  $H$ ，有：

(i)  $H$  的二阶导  $D^2 H: \in C^\infty(\mathbb{C}^n; (\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n)^*)$  有界，即  $H$  的任意二阶偏导有界。

(ii)  $dH, \text{grad } H$  都是 Lipschitz 连续的。特别的，存在常数  $C > 0$  使得

$$|\text{grad } H(z)| \leq C(|z| + 1), \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

(iii)  $H$  是不超过二次增长的，即存在常数  $C > 0$  使得

$$H(z) \leq C(|z|^2 + 1), \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

我们略去引理证明。上面的性质实际上来自这样一个观察： $H$  在一个紧集外是二次函数。对  $z \in W^1(S^1; \mathbb{C}^n)$ ，我们取线性泛函：

$$Q_z: \zeta(t) \mapsto \text{Re} \langle \text{grad } H(z), \zeta \rangle_{L^2} = \int_0^1 \text{Re} \langle \text{grad } H(z), \zeta \rangle dt.$$

这是一个有界算子，因为根据前面的引理和 Cauchy 不等式会有：

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \operatorname{Re} \langle \operatorname{grad} H(z), \zeta \rangle dt \right| &\leq C \int_0^1 (1 + |z|) |\zeta| dt \\ &\leq C(1 + \|z\|_{L^2}) \cdot \|\zeta\|_{L^2} \\ &\leq C(1 + \|z\|_{W^{1/2}}) \cdot \|\zeta\|_{W^{1/2}}. \end{aligned}$$

和引理3.1的证明类似，对任意的  $z, \zeta \in W^1(S^1; \mathbb{C}^n)$ ，可以算出

$$\begin{aligned} \int_0^1 H(z + \zeta) dt - \int_0^1 H(z) dt - Q_z \zeta &= \int_0^1 H(z + \zeta) - H(z) - \operatorname{Re} \langle \operatorname{grad} H(z), \zeta \rangle dt \\ &= \int_0^1 D^2 H_{z+\lambda_t \zeta}(\zeta, \zeta) dt \\ &= O(\|\zeta\|_{L^2}^2) = o(\|\zeta\|_{W^1}). \end{aligned}$$

其中最后一行的等号用到了之前给出的  $H$  的性质。所以我们知道  $\mathcal{A}_H$  是 Fréchet 可微的，且它的 Fréchet 导数为  $Q_z$ 。

注意到对  $G(z) = \operatorname{grad} H(z) \in L^2(S^1; \mathbb{C}^n)$  以及任意的  $\zeta \in W^1(S^1; \mathbb{C}^n)$ ，有

$$\begin{aligned} \langle G(z), \zeta \rangle_{L^2} &= \langle (1 + |T|)(1 + |T|)^{-1} G(z), \zeta \rangle_{L^2} \\ &= \langle (1 + |T|)^{-1} G(z), \zeta \rangle_{L^2} + \left\langle |T|^{\frac{1}{2}} (1 + |T|)^{-1} G(z), |T|^{\frac{1}{2}} \zeta \right\rangle_{L^2} \\ &= \langle (1 + |T|)^{-1} G(z), \zeta \rangle_{W^1}. \end{aligned}$$

所以  $\int_0^1 H(z) dt$  的梯度为  $(1 + |T|)^{-1} \operatorname{grad} H(z)$ 。由  $\operatorname{grad} H$  是 Lipschitz 连续的可以证明，对任意的  $z, \zeta \in W^1(S^1; \mathbb{C}^n)$ ，有

$$\|\operatorname{grad} H(z) - \operatorname{grad} H(\zeta)\|_{L^2}^2 \leq L^2 \cdot \int_0^1 |z - \zeta|^2 dt \leq L^2 \|z - \zeta\|_{W^1}^2.$$

又注意到从  $L^2(S^2; \mathbb{C}^n)$  映到  $W^{1/2}(S^1; \mathbb{C}^n)$  的算子  $(1 + |T|)^{-1}$  是有界的，这和上面的等式结合就会得到  $(1 + T^2)^{-1} \operatorname{grad} H(z)$  也是 Lipschitz 连续的。这样我们就知道  $\operatorname{grad} \mathcal{A}_H$  是 Lipschitz 连续的。

所以我们最终知道，作用量泛函  $\mathcal{A}_H$  在  $W^{1/2}(S^1; \mathbb{C}^n)$  上是 Fréchet 可微的，且它的梯度满足 Lipschitz 条件。

#### 4.2.2 Palais-Smale 条件

最后，我们验证  $\mathcal{A}_H$  满足 Palais-Smale 条件。事实上，这个条件成立的主要原因是， $H$  在除开一个紧集外是一个无周期轨的二次函数。

我们任取满足  $\text{grad } \mathcal{A}_H(z^{(m)}) \xrightarrow{W^1} 0$  的点列  $\{z^{(m)}\}$ , 根据上面的计算, 有

$$T(1 + |T|)^{-1}z^{(m)} - \underbrace{(1 + |T|)^{-1} \text{grad } H(z^{(m)})}_{K(z^{(m)})} \xrightarrow{W^{1/2}} 0.$$

注意到  $(1 + T)^{-1}: L^2(S^1; \mathbb{C}^n) \rightarrow L^2(S^1; \mathbb{C}^n)$  是紧的, 所以  $K(z)$  是  $W^{1/2}(S^1; \mathbb{C}^n)$  上的紧变换。如果我们还知道  $\{z^{(m)}\}$  的  $W^{1/2}$ -范数有界, 那  $K(z^{(m)})$  就有收敛子列  $K(z^{(m_k)}) \rightarrow z^\infty$ , 进而有

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} T(1 + |T|)^{-1}z^{(m_k)} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (T(1 + |T|)^{-1}z^{(m_k)} - K(z^{(m_k)})) + \lim_{k \rightarrow +\infty} K(z^{(m_k)}) \\ &= z^\infty \in \text{im } P_+ \oplus \text{im } P_-. \end{aligned}$$

又因为  $T(1 + |T|)^{-1}$  是  $W^{1/2}(S^1; \mathbb{C}^n)$  到  $\text{im } P_+ \oplus \text{im } P_-$  的可逆算子, 且  $E_0 = \ker T$  是有限维的, 所以我们就能得到  $\{z^{(m)}\}$  有收敛子列  $\{z^{(m_k)}\}$ .

我们采用反证法证明  $\{z^{(m)}\}$  的  $W^{1/2}$ -范数有界。假设  $\{z^{(m)}\}$  无界, 那么可以不妨设  $\|z^{(m)}\|_{W^{1/2}} \rightarrow +\infty$ . 将  $z^{(m)}$  归一化, 考虑  $u^{(m)} = \frac{z^{(m)}}{\|z^{(m)}\|_{W^{1/2}}}$ , 则有

$$T(1 + |T|)^{-1}u^{(m)} - \frac{1}{\|z^{(m)}\|_{W^{1/2}}} K(\|z^{(m)}\|_{W^{1/2}} u^{(m)}) \xrightarrow{W^{1/2}} 0. \quad (4)$$

根据  $H$  的性质, 即引理4.2, 存在一个常数  $C$  使得对任意的  $m$  都有

$$\left\| \frac{1}{\|z^{(m)}\|_{W^{1/2}}} \text{grad } H(\|z^{(m)}\|_{W^{1/2}} u^{(m)}) \right\|_{W^{1/2}} \leq C(1 + \|u^{(m)}\|_{W^{1/2}}) = 2C$$

所以根据 Sobolev 嵌入, 我们可以找到  $u^{(m)}$  的子列 (我们仍然记为  $\{u^{(m)}\}$ ), 使得

$$u^{(m)} \xrightarrow{L^2} v, \quad \frac{1}{\|z^{(m)}\|_{W^{1/2}}} \text{grad } H(\|z^{(m)}\|_{W^{1/2}} u^{(m)}) \xrightarrow{L^2} \tilde{v}$$

我们还可以进一步取子列, 使得上面的收敛是几乎处处的。这和前面的式子 (4) 结合就得到 (注意到  $K(z) = (1 + |T|)^{-1} \text{grad } H(z)$ ):

$$T(1 + |T|)^{-1}v = (1 + |T|)^{-1}\tilde{v} \in \text{Dom}(T).$$

所以  $v$  有平方可积的弱导数。更进一步, 由  $(1 + |T|)^{-1}$  是单射可知  $Tv = \tilde{v}$ .

根据  $v, \tilde{v}$  的定义, 我们可以用  $v$  表示  $\tilde{v}$ . 我们设  $v = (v_1, w), \tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{w})$ , 其中  $v_1, \tilde{v}_1$  是取值在  $\mathbb{C}$  中的函数,  $w, \tilde{w}$  取值在  $\mathbb{C}^{n-1}$  中。我们证明

$$\tilde{v}_1 \stackrel{\text{a.e.}}{=} 2(\pi + \varepsilon)v_1; \quad \tilde{w} \stackrel{\text{a.e.}}{=} \pi w \quad (5)$$

我们的办法是对  $\tilde{v}$  的取值讨论。我们任取  $t$  使得前面考虑的两个函数列在  $t$  处分别收敛到  $v(t), \tilde{v}(t)$ . 这样的  $t$  显然是几乎处处存在的。我们设  $u^{(m)} = (u_1^{(m)}, w^{(m)})$ , 其中  $u_1^{(m)}$  是  $u^{(m)}$  的第一个分量。

(i) 如果  $\tilde{v}(t) \neq 0$ , 则由  $\tilde{v}$  的定义有

$$|\operatorname{grad} H(\|z^{(m)}\|_{W^{1/2}} u^{(m)}(t))| \sim \|z^{(m)}\|_{W^{1/2}} |\tilde{v}(t)| \rightarrow +\infty$$

这说明  $\|z^{(m)}\|_{W^{1/2}} |u^{(m)}(t)| \rightarrow +\infty$ . 这和  $H$  的定义结合就知道, 对充分大的  $m$ , 有

$$\frac{1}{\|z^{(m)}\|_{W^{1/2}}} \operatorname{grad} H(\|z^{(m)}\|_{W^{1/2}} u^{(m)}(t)) = (2(\pi + \varepsilon)u^{(m)}(t), \pi w^{(m)}(t))$$

再令  $m \rightarrow +\infty$  就可以得到想要证明的等式 (5).

(ii) 如果  $\tilde{v}(t) = 0$ , 我们说明一定有  $v(t) = 0$ . 若不然, 则有

$$\|z^{(m)}\|_{W^{1/2}} u^{(m)}(t) \sim \|z^{(m)}\|_{W^{1/2}} v(t) \rightarrow \infty$$

因此我们仍然会知道, 对充分大的  $m$ , 有

$$\frac{1}{\|z^{(m)}\|_{W^{1/2}}} \operatorname{grad} H(\|z^{(m)}\|_{W^{1/2}} u^{(m)}(t)) = (2(\pi + \varepsilon)u^{(m)}(t), \pi w^{(m)}(t))$$

我们令  $m \rightarrow +\infty$  就知道  $0 = \tilde{v}(t) = (2(\pi + \varepsilon)v_1(t), \pi w(t)) \neq 0$ . 这就导出了矛盾。

这样我们就证明了之前声称的等式 (5).

我们还知道  $Tv = \tilde{v}$ , 所以有

$$-\sqrt{-1} \frac{d}{dt} v_1 = 2(\pi + \varepsilon)v_1, \quad -\sqrt{-1} \frac{d}{dt} w = \pi w$$

但  $S^1$  上不存在满足上面任何一个方程的函数, 这就导出了矛盾。这样我们最终说明了  $\mathcal{A}_H$  满足 Palais-Smale 条件。

## 5 环绕论证

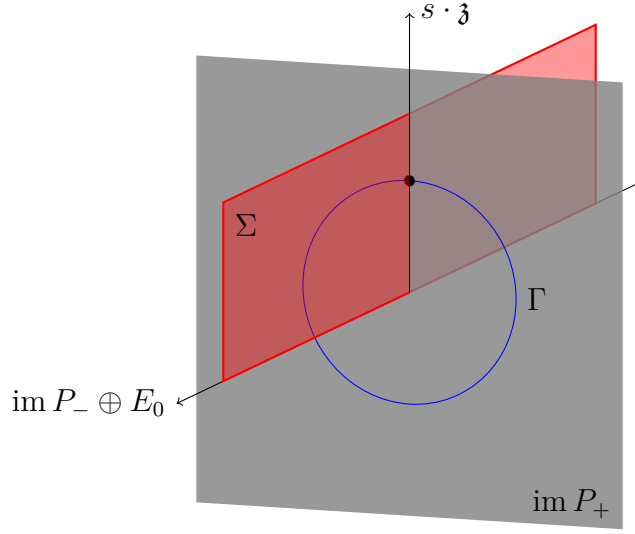
在这一节里, 我们利用上一节的结果来寻找  $\mathcal{A}_H$  的正临界值。我们采取的办法是构造两个相互环绕的“环”, 使得在梯度流下, 这两个环始终相互环绕。

我们取  $\mathfrak{z}(t) = (e^{-2\pi t\sqrt{-1}}, 0, \dots, 0)$ , 考虑  $W^{1/2}(S^1; \mathbb{C}^n)$  的子集

$$\Sigma = \{z^{\leq 0} + s \cdot \mathfrak{z} \mid z^{\leq 0} \in \operatorname{im} P_- \oplus E_0, \|z^{\leq 0}\|_{W^{1/2}} \leq \tau, 0 \leq s \leq \tau\}$$

$$\Gamma = \{z \in \operatorname{im} P_+ \mid \|z\|_{W^{1/2}} \leq c\}$$

其中  $\tau, c > 0$  为待定常数。粗略来说,  $\partial\Sigma$  和  $\Gamma$  的“环绕数”为  $\pm 1$  (如下图所示):



我们先验证下面的引理成立：

**引理 5.1** 对存在充分大的  $\tau$  和充分小的  $c, \beta > 0$ , 使得

$$\mathcal{A}_H|_{\partial\Sigma} \leq 0, \quad \mathcal{A}_H|_{\Gamma} > \beta.$$

进而对  $\mathcal{A}_H$  定义的梯度流  $\Phi_t$ , 有  $\Phi_t(\partial\Sigma) \cap \Gamma = \emptyset, \forall t \geq 0$ .

**证明** 我们先考虑  $\mathcal{A}_H|_{\partial\Sigma}$ . 我们将  $\Sigma$  的边界分成两部分：

- (i)  $\{z^{\leq 0} \in \text{im } P_- \oplus E_0 \mid \|z^{\leq 0}\|_{W^{1/2}} \leq \tau\}$ .
- (ii)  $\{z^{\leq 0} + s\mathfrak{z} \mid \|z^{\leq 0}\|_{W^{1/2}} = \tau \text{ or } s = \tau\}$ .

对于第一部分, 由  $H \geq 0$  可得

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_H(z^{\leq 0}) &\leq \frac{1}{2} \left\langle |T|^{1/2} z^{\leq 0}, |T|^{1/2} (P_+ - P_-) z^{\leq 0} \right\rangle_{L^2} \\ &= -\frac{1}{2} \left\langle |T|^{1/2} z^{\leq 0}, |T|^{1/2} z^{\leq 0} \right\rangle_{L^2} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

对于第二部分：首先由  $H$  的定义可以知道, 存在常数  $C > 0$  使得对任意的  $z = (z_1, w) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{n-1} = \mathbb{C}^n$ , 有

$$H(z) \geq (\pi + \epsilon) |z_1|^2 + \frac{\pi}{2} |w|^2 - C$$

对  $z = z^{\leq 0} + s\mathfrak{z} \in \partial\Sigma$ , 设  $z^{\leq 0} = (z_1^{\leq 0}, w^{\leq 0})$ ,  $z = (z_1, w)$ , 则有  $z_1 = z_1^{\leq 0} + s\mathfrak{z}$ ,  $w = w^{\leq 0}$ . 那么可以算出

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_H(z) &= \frac{s^2}{2} \left\| |T|^{\frac{1}{2}} \mathfrak{z} \right\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \left\| |T|^{\frac{1}{2}} z^{\leq 0} \right\|_{L^2}^2 - \int_0^1 H(z_1, w) dt \\
&\leq \pi s^2 - \frac{1}{2} \left\| |T|^{\frac{1}{2}} z^{\leq 0} \right\|_{L^2}^2 - (\pi + \varepsilon) \int_0^1 |z_1|^2 dt - \frac{\pi}{2} \int_0^1 |w|^2 dt + C \\
&= \pi s^2 - \frac{1}{2} \left\| |T|^{\frac{1}{2}} z^{\leq 0} \right\|_{L^2}^2 - (\pi + \varepsilon) \|z_1\|_{L^2}^2 - \frac{\pi}{2} \|w\|_{L^2}^2 + C \\
&= \pi s^2 - \frac{1}{2} \left\| |T|^{\frac{1}{2}} z^{\leq 0} \right\|_{L^2}^2 - (\pi + \varepsilon) \left( s^2 \|\mathfrak{z}\|_{L^2}^2 + \|z_1^{\leq 0}\|_{L^2}^2 \right) - \frac{\pi}{2} \|w\|_{L^2}^2 + C \\
&= -\varepsilon s^2 - \frac{1}{2} \left\| |T|^{\frac{1}{2}} z^{\leq 0} \right\|_{L^2}^2 - (\pi + \varepsilon) \|z_1^{\leq 0}\|_{L^2}^2 - \frac{\pi}{2} \|w^{\leq 0}\|_{L^2}^2 + C \\
&\leq -\varepsilon s^2 - \frac{1}{2} \|z^{\leq 0}\|_{W^{\frac{1}{2}}}^2 + C
\end{aligned}$$

所以我们只需要取  $\tau > \max\{\sqrt{C/\varepsilon}, \sqrt{2C}\}$ , 就能保证作用量泛函  $\mathcal{A}_H$  在  $\partial\Sigma$  上非正。

而对于集合  $\Gamma$ , 注意到  $H$  在一个包含 0 的开集上恒为 0, 所以可以算出泛函  $\mathcal{A}_H$  在 0 处的二阶 *Fréchet* 导数为

$$d^2 \mathcal{A}_H|_0(z, \zeta) = \operatorname{Re} \left\langle |T|^{\frac{1}{2}} z, |T|^{\frac{1}{2}} (P_+ - P_-) \zeta \right\rangle_{L^2}, \quad \forall z, \zeta \in W^{\frac{1}{2}}(S^2; \mathbb{C}^n).$$

这限制在  $\operatorname{im} P_+$  上是一个严格正定的  $\mathcal{Q}$ -形式, 所以由 *Taylor* 展开可知, 在  $c$  充分小时, 一定存在  $\beta > 0$  使得  $\mathcal{A}_H(z) > \beta, \forall \|z\|_{W^{1/2}} = c$ .

最后, 注意到  $\mathcal{A}_H(\Phi_t(z))$  关于  $t$  单调递减, 所以对任意非负实数  $t$ , 始终有  $\sup_{\partial\Sigma} \mathcal{A}_H(\Phi_t(z)) \leq 0$ . 因此  $\Phi_t(\partial\Sigma) \cap \Gamma = \emptyset$ .

有了上面的引理之后, 我们几乎可以完成 Hofer-Zehnder 容量的规范化条件的证明:

引理告诉我们, 当  $\partial\Sigma$  随着负梯度流流动时, 它不会穿过  $\Gamma$ , 因此  $\partial\Sigma$  和  $\Gamma$  的“环绕数”始终为非零常数, 进而  $\Phi_t(\Sigma) \cap \Gamma \neq \emptyset$ . 所以我们总有

$$\sup_{\Phi_t(\Sigma)} \mathcal{A}_H \geq \inf_{\Gamma} \mathcal{A}_H > \beta > 0.$$

这会告诉我们,  $\inf_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{\Phi_t(\Sigma)} \mathcal{A}_H$  为正实数, 所以借助极小极大原理 (定理4.1) 就能证明  $\mathcal{A}_H$  具有正的临界值。

现在唯一的问题是, 我们没有定义 Hilbert 空间中的环绕数和相交数, 所以没有严格证明  $\Phi_t(\Sigma) \cap \Gamma$  非空。这里我们使用所谓的 Leray-Schauder 度理论证明这件事。

我们实际上只需要找方程组：

$$\begin{cases} (1 - P_+) \Phi_t(z) = 0, \\ \|z\|_{W^{1/2}} = c; \end{cases} \quad z \in \Sigma \subseteq \operatorname{im} P_- \oplus E_0 \oplus \operatorname{Span}_{\mathbb{C}} \mathfrak{z}.$$

的解  $z$ . 为了使用 Leray-Schauder 度理论，我们验证上面的方程等价于一个形如  $x - \mathcal{K}(x) = 0$  的方程，其中  $\mathcal{K}$  是紧的。注意到有

$$T(1 + |T|) = (P_+ - P_-) - (1 + |T|)^{-1}(P_+ - P_-)$$

所以我们可以将  $\mathcal{A}_H$  的梯度重写为

$$\operatorname{grad} \mathcal{A}_H(z) = (P_+ - P_-)z - (1 + |T|)^{-1}B(z)$$

其中  $B(z) = (P_+ - P_-)z + \operatorname{grad} H(z)$  是  $W^{1/2}(S^1; \mathbb{C}^n)$  上的连续映射。因此在负梯度流的方程两边乘以  $e^{t(P_+ - P_-)}$  后对时间积分可以得到：

$$\exp(t(P_+ - P_-))\Phi_t(z) = z + \underbrace{(1 + |T|)^{-1} \int_0^t \exp(s(P_+ - P_-))B(\Phi_s(z)) \, ds}_{\tilde{K}_t(z)}$$

因为  $(1 + |T|)^{-1}$  是紧算子且  $\Phi_s(z)$  关于  $z$  连续，所以右侧第二项  $\tilde{K}(z)$  是紧的。因为  $\exp(t(P_+ - P_-))$  可逆，所以

$$\begin{aligned} (1 - P_+)\Phi_t(z) = 0 &\iff \exp(t(P_+ - P_-))(1 - P_+)\Phi(z) = 0 \\ &\iff (1 - P_+)\exp(t(P_+ - P_-))\Phi_t(z) = 0 \\ &\iff (1 - P_+)\left(z + \tilde{K}_t(z)\right) = 0 \end{aligned}$$

我们考虑映射

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t &= (\mathcal{F}_t^{(1)}, \mathcal{F}_t^{(2)}): \operatorname{im} P_- \oplus E_0 \oplus \operatorname{Span}_{\mathbb{C}} \mathfrak{z} \longrightarrow \operatorname{im} P_- \oplus E_0 \oplus \operatorname{Span}_{\mathbb{C}} \mathfrak{z} \\ &\begin{cases} \mathcal{F}_t^{(1)}(z) = (1 - P_+)z + (1 - P_+)\tilde{K}(z) \in \operatorname{im} P_+ \oplus E_0, \\ \mathcal{F}_t^{(2)}(z) = (\|z\|_{W^{1/2}} - c)\mathfrak{z} \in \operatorname{Span}_{\mathbb{C}} \mathfrak{z}. \end{cases} \end{aligned}$$

只需要证明对任意的  $t$ ，方程  $F_t(z) = 0$  有落在  $\Sigma$  中的解。

注意到  $\tilde{K}$  是紧的且  $\operatorname{Span}_{\mathbb{C}} \mathfrak{z}$  的维数有限，所以算子  $\mathcal{F}_t$  实际上形如  $z - \mathcal{K}_t(z)$ ，其中  $\mathcal{K}_t$  是某个紧算子，这样  $\mathcal{F}_t$  具有良定义的 Leray-Schauder 度  $\deg(\Sigma, \mathcal{F}_t, 0)$ . 从  $\mathcal{K}_t$  的具体表达式很容易验证， $\mathcal{K}_t$  实际上给出了落在紧算子空间中的同伦，且由

$\Phi_t(\partial\Sigma) \cap \Gamma = \emptyset$  可以知道  $\partial\Sigma$  上始终没有  $\mathcal{F}_t$  的零点，所以利用 Leray-Schauder 度的同伦不变性可以得到

$$\deg(\mathcal{F}_t, \Sigma, 0) = \deg(\mathcal{F}_0, \Sigma, 0) = \pm 1 \neq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

这样对任意正数  $t$ ，算子  $\mathcal{F}_t$  一定有零点。

至此我们完全完成了规范化条件的证明。