为什么要求解联络——一个规范场的例子

陈铁钊

2025 年 8 月 24 日

作为数学理论，一些规范场论相关的理论关心的内容有些不同于“古典”微分几何关心的内容：规范场论中常常需要求解主丛上的联络；而微分几何，比如黎曼几何更习惯选取特定的联络，再讨论这个联络相关的量。

或许有些人（特别是数学家）会问：为什么要关心所有联络构成的空间？我们在这一节里给出一个简单的例子，以说明“求解联络”如何自然地出现在物理和数学之中的。

我们的例子是 Maxwell 方程，这也是物理中最容易碰到的规范理论。对真空中的电磁场，我们用 $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3), \vec{B} = (B^1, B^2, B^3)$ 分别表示电场强度和磁感应强度，那么它们由所谓的 Maxwell 方程决定

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi \vec{J}, \\ &\nabla \cdot \vec{B} = 0, \qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

这里我们采用自然单位制，ρ 是电荷密度，$\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$ 是电流密度。

粗略来说，Maxwell 方程告诉了我们，在已知真空中电荷的分布和运动之后，我们该如何确定电场和磁场。我们自然会问：给定电荷密度 ρ 和电流密度 $\vec{J}$，如何具体求解电磁场？

我们采取一些数学上的技巧。方程 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 告诉我们，$\vec{B}$ 是一个无源场，所以它一定可以写成某个向量场的旋度场[1]，我们假设

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

[1]这个方程等价于外微分形式 $B^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 + B^2 \mathrm{d}x^3 \mathrm{d}x^1 + B^3 \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2$ 是闭的，而 $\mathbb{R}^3$ 上的闭形式一定是恰当形式。

我们将 $\vec{A}=(A_1,A_2,A_3)$ 称为磁矢势。这时候我们可以将方程 $\nabla\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$ 重新写成

$$\nabla\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$$

也就是括号中的向量场是一个无旋场，所以我们能把它写成某个函数 ϕ 的负梯度场，也就是

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\phi$$

我们将 ϕ 称为电势。很容易看出来，如果磁场恒为 0，那么 ϕ 就是静电势。

注意电场强度 $\vec{E}$ 和磁感应强度 $\vec{B}$ 都可以用电势 ϕ 和磁矢势 $\vec{A}$ 表示，把这代入到 Maxwell 方程 (1) 的第一行之后，就能得到电势 ϕ 和磁矢势 $\vec{A}$ 满足的方程。

不过会有一个小问题：电势 ϕ 和磁矢势 $\vec{A}$ 的选取并不是唯一的。如果我们任取一个函数 λ，那么 $\phi-\frac{\partial\lambda}{\partial t}$ 和 $\vec{A}+\nabla\lambda$ 会给出另一组可行的电势和磁矢势。所以在实际的求解中，我们会额外添加一个规范条件 (gauge condition)，使得电势和磁矢势可以被唯一地求解出来。事实上，这里的“规范”一词就是规范场论 (gauge field theory) 中的“规范”。

举个例子，我们选取所谓的 Lorentz 规范：

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{A}=0.$$

然后按照上面的思路求解，会发现 Maxwell 方程被转化为了波方程：

$$\nabla^2\phi-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-4\pi\rho,\qquad \nabla^2\vec{A}-\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-4\pi\vec{J}.$$

所以我们可以用电荷密度和电流密度表示出电势和磁矢势，进而求解出 Maxwell 方程。

到此为止，我们所作的讨论只用到了一些微积分的知识，而狭义相对论的发展给了我们用几何的语言描述 Maxwell 方程的办法。

受限于主题的篇幅，我们不会对狭义相对论本身作过多解释。对我们的讨论来说，狭义相对论告诉我们的最关键的事情是：时空 $\mathbb{R}^4=\{(t,x,y,z)\mid t,x,y,z\in\mathbb{R}\}$ 额外带有一个伪度量结构：

$$\eta=-\mathrm{d}t\otimes\mathrm{d}t+\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y+\mathrm{d}z\otimes\mathrm{d}z$$

在这个度量下，$(\mathbb{R}^4,\eta)$ 成为了一个伪黎曼流形。这时候我们可以用 η 重写 Maxwell 方程。

我们记

$$\begin{aligned}F =& E_1\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}t + E_2\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}t + E_3\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}t\\ &+ B^1\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + B^2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + B^3\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\end{aligned}$$

称 F 为电磁张量。电流和电场密度也可以被整合成一个微分形式

$$J = -\rho\,\mathrm{d}t + J_1\,\mathrm{d}x + J_2\,\mathrm{d}y + J_3\,\mathrm{d}z.$$

它被称为 4-电流密度。这时候 Maxwell 方程 (1) 的第一行和第二行分别对应下面两个简洁的方程

$$*\,\mathrm{d}*F = 4\pi J, \qquad \mathrm{d}F = 0$$

这里 $*$ 是Hodge-星算子。在黎曼几何里也会将 $*\mathrm{d}*$ 单独记为一个算子 d^*，被称为余微分算子。

我们也能用这套语言重述上面的求解过程：因为 $\mathbb{R}^4$ 上的闭形式一定是恰当形式，所以我们可以假设 $F = \mathrm{d}A$. 事实上，A 可以用电势和磁矢势表示出来：

$$A = -\phi\,\mathrm{d}t + A_1\,\mathrm{d}x + A_2\,\mathrm{d}y + A_3\,\mathrm{d}z$$

我们称 A 为 4-电磁势。然后 Maxwell 方程可以被写成关于 4-电磁势的方程

$$\mathrm{d}^*\mathrm{d}A = 4\pi J.$$

我们之前选取 Lorentz 规范会被重写为 $\mathrm{d}^*A = 0$，所以 Maxwell 方程可以被重写为

$$(\mathrm{d}^*\mathrm{d} + \mathrm{d}\mathrm{d}^*)A = 4\pi J.$$

熟悉黎曼几何的读者不难看出，算子 $\mathrm{d}^*\mathrm{d} + \mathrm{d}\mathrm{d}^*$ 就是伪度量 η 定义的 Laplace 算子，不过这里因为 η 不是正定的，所以我们实际得到的是波方程而非椭圆方程。

上面最后的讨论距离主丛上的联络只差一点点了，唯一要做的只是换一个视角：我们将微分形式替代为取值在李代数中的微分形式：

$$\wedge^* T_x^*\mathbb{R}^4 = \hom(\wedge^* T_x\mathbb{R}^4, \mathbb{R}) \rightsquigarrow \hom(\wedge^* T_x\mathbb{R}^4, i\mathbb{R}) = \hom(\wedge^* T_x\mathbb{R}^4, \mathfrak{u}(1))$$

这里 $\mathfrak{u}(1)$ 是酉群 $U(1)$ 的李代数。注意左右两侧的集合作为实线性空间是同构的，因此只是作数值计算的话，两边是一样的。但右侧空间的好处是，这时候 4-电磁势 A 有了新的几何意义：它给出了 $\mathbb{R}^4$ 上 $U(1)$-主丛 $\mathbb{R}^4\times U(1)$ 的一个联络。

如果我们再考虑 A 定义的曲率，那么会有

$$A\ \text{的曲率} = \mathrm{d}A + [A, A] = \mathrm{d}A = F$$

也就是电磁场也具有几何意义：它是 4-电磁势定义的联络的曲率。

至此，我们最终得到了一条链：为了求解电磁场，我们只需要求解 4-电磁势 A，而这等价于求解 $U(1)$-主丛上的联络。这也给出了开头的问题的答案：特定主丛上的联络定义了物理对象（在我们的例子里，联络 A 定义的是电磁场），因此求解联络可以被视为求解特定的物理对象。

让我们用一点有关历史的评论来结束讨论："4-电磁势能被视作主丛上的联络"并不是一件很明显的事。物理上，规范场论的概念产生于 1920 年前后，在发展了四十多年后，才有数学家意识到它和纤维丛之间的关系，在这之后数学家才开始关注规范场论。

注 0.1 (Aharonov-Bohm 效应) *从物理的视角来看，电势和磁矢势（特别是磁矢势）看上去只是数学上的技巧，不具有任何的物理意义。在量子力学发展之后，这种看法才有所改变。Aharonov-Bohm 效应（A-B 效应）就是造成改变的关键。*

A-B 效应最初是一个理论预测，由 Ehrenberg、Siday 以及 Aharonov、Bohm 两组人独立地提出。他们预测当带电粒子采取不同的轨迹运动时，它的波函数的相位会受到磁矢势的影响——具体来说，两条路径的相位差正比于磁矢势沿着两条路径构成的环路的环路积分；在提出后，A-B 效应被实验验证成立。

A-B 效应说明了，尽管从经典力学的视角来看，4-电磁势只是数学上的构造，但在量子力学中，4-电磁势会对物理世界造成影响。这部分地证明了应当使用电势 ϕ 和磁矢势 $\vec{A}$ 而非 E, B 来描述电磁场。