谱序列、双复形与导出函子、万有系数定理

陈铁钊

2025 年 3 月 13 日

目录

1 闲谈 **1**

2 谱序列简介 **2**

2.1 收敛性 4

3 谱序列从何而来？ **5**

3.1 正合对 5

3.2 链复形的 Filtration 6

3.3 双复形 7

4 应用 **9**

4.1 de Rham 上同调和 Čech 上同调的同构 9

4.2 Tor-函子即是 tor-函子 11

4.3 Kronecker 积与万有系数定理 13

4.4 Künneth 谱序列 17

A 附录：有限生成交换群的 Tor 函子与 Ext 函子 **17**

1 闲谈

我第一次接触谱序列的是胞腔同调——将胞腔复形写成一个谱序列之后就能证明胞腔同调同构于奇异同调。之后在学习纤维丛理论时候知道了如何从正合对 (exact couple) 得到谱序列。在那之后我又看了一些同调论和同调代数相关的内容，比如万有系数定理、上下同调群的 Kronecker 积、导出函子 $\mathrm{Tor}, \mathrm{Ext}$ 等，不过一直觉得学得马马虎虎。

某天在翻阅 McCleary 的 [2] 的时候，突然发现万有系数定理和导出函子的一些性质都可以用谱序列来证明——甚至许久之前看过一遍的 de Rham 上同调和 Čech 上同调之间的同构也可以用类似的手段来证明。我觉得这一发现颇为有趣，所以决定把它记下来。

因为画交换图表是一件顶费劲的事儿，所以我会省略很多推导过程——这使得这篇笔记不适合对谱序列完全没有了解的人阅读。我可能会省略一些代数和拓扑的前置知识，如果读者对一些代数概念感到迷惑的话，可以参考 Rotman 的 [3] 中相关章节，如果对一些拓扑概念感到困惑的话，可以参考 [4]。

这篇文章主要参考 [2] 第二章第四节以及其后的习题，我会再会提及一些例子：

- $H^*(X;G) \to \mathrm{Hom}\big(H_*(X;\mathbb{Z}), G\big)$ 是满射。
- de Rham 上同调和 Čech 上同调同构。

不想阅读本文的读者可以直接阅读该书对应章节。

2 谱序列简介

在给出谱序列的定义之前，我们需要双分次模 (bigraded module) 的概念。

定义 2.1 对交换环 R，一个双分次 R-模 $M_{*,*}$ 是至多可数个 R-模 $M_{*,*}$ 的直和：

$$M_{*,*} = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} M_{p,q}$$

按照习惯，我们用 p,q 分别表示 $M_{*,*}$ 的第一个和第二个指标，并用 n 表示 $p+q$. 另外我们不一定都使用下标，$M^{*,*}, M_*{}^*, M^*{}_*$ 也可以表示双分次模。按照代数拓扑的习惯，上标会与上同调群相关，下标会与同调群相关。

很多时候，我们习惯将一个双分次模 $M_{*,*}$ 放置在直角坐标系的整点上，画出这样一个表格：

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots & M_{0,2} & M_{1,2} & M_{2,2} & \cdots \\
\cdots & M_{0,1} & M_{1,1} & M_{2,1} & \cdots \\
\cdots & M_{0,0} & M_{1,0} & M_{2,0} & \cdots \\
\hline
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

对于两个双分次模 $M_{*,*}, N_{*,*}$，它们之间的态射是一个从 $M_{*,*}$ 到 $N_{*,*}$ 的模同态 f

$$f : M_{*,*} \longrightarrow N_{*,*}$$

使得对任意的 $p,q\in\mathbb{Z}$，f 将 $M_{p,q}$ 映入 $N_{p+r,q+s}$. 我们将 (r,s) 称作 f 的次数。

对于双分次模和其间的态射，我们可以类似定义核、像以及正合列。

McCleary 是这样定义谱序列的：

定义 2.2 一个谱序列是一列双分次模和其上次数为 (k_r, l_r) 的态射 $\{(E^r_{*,*}, d_r)\}_{r\geqslant 1}$，满足 $d_r^2 = 0$ 且

$$E^{r+1}_{p,q} \cong H_{p,q}(E^r_{*,*}, d_r) := \frac{\ker(d_r : E^r_{p,q} \to E^r_{p+k_r,q+l_r})}{\mathrm{im}(d_r : E^r_{p-k_r,q-l_r} \to E^r_{p,q})}$$

一般将双分次模 $E^r_{*,*}$ 叫做这个谱序列的第 r 页。

为了方便，我们在后面谈论一般的谱序列的时候，假定它的微分 d_r 的次数是 $(-r, r-1)$. 在具体的例子里，我们会碰到次数为 $(r, -r+1)$ 的情形。

给了一个谱序列 $E^r_{*,*}$ 之后，我们关心的是这个谱序列的“极限状态”，也就是“第无穷页” $E^\infty_{p,q}$. 这个极限用下面的办法定义：

我们记

$$B^2_{p,q} = \mathrm{im}(d_1 : E^1_{p+1,q} \to E^1_{p,q})$$
$$Z^2_{p,q} = \ker(d_1 : E^r_{p,q} \to E^r_{p-1,q})$$

这时候，$E^3_{p,q} = Z^2_{p,q}/B^2_{p,q}$ 中的全体闭链构成的子模唯一对应着 $Z^2_{p,q}$ 的一个子模 $Z^3_{p,q}$，且有

$$B^2_{p,q} \subseteq Z^3_{p,q} \subseteq Z^2_{p,q}$$

类似的，$E^3_{p,q} = Z^2_{p,q}/B^2_{p,q}$ 中的全体边缘链构成的子模唯一对应着 $Z^2_{p,q}$ 的一个子模 $B^3_{p,q}$，且有 $B^2_{p,q} \subseteq B^3_{p,q} \subseteq Z^2_{p,q}$. 对于 $E^4_{p,q}$ 可以作类似讨论，这样我们得到了一列 R-模：

$$B^2_{p,q} \subseteq B^3_{p,q} \subseteq \cdots \subseteq B^r_{p,q} \subseteq \cdots \subseteq Z^r_{p,q} \subseteq \cdots \subseteq Z^3_{p,q} \subseteq Z^2_{p,q} \subseteq E^2_{p,q}$$

并且有同构

$$E^r_{p,q} \cong Z^r_{p,q}/B^r_{p,q}$$

于是我们可以定义

$$Z^\infty_{p,q} = \bigcap_r Z^r_{p,q}, \quad B^\infty_{p,q} = \bigcup_r B^r_{p,q}$$

这时候我们可以表示出 $E^\infty_{p,q}$：

$$E^\infty_{p,q} := Z^\infty_{p,q}/B^\infty_{p,q}$$

大多数时候，我们不需要用这么麻烦的办法来计算 $E^\infty_{p,q}$：很多时候，我们的谱序列从某一页开始稳定，也就是对充分大的 r，有 $E^r_{p,q} \cong E^\infty_{p,q}$. 这里的“充分大”可能依赖于 p, q.

2.1 收敛性

介绍谱序列的时候，不可避免的就是收敛性的讨论。谱序列的收敛性回答了这样一个问题：一个谱序列的第无穷页到底在计算什么。

定义 2.3 模 M 的一个 *filtration* 是 M 的一列子模：

$$0 \subseteq \cdots \subseteq F_{p-1}M \subseteq F_pM \subseteq F_{p+1}M \subseteq \cdots \subseteq M$$

使得 $\bigcup_p F_pM = M$.

这里定义的是上升的 filtration，我们也允许下降的 filtration 存在，不过一般的讨论中我们默认 filtration 是上升的。

注 2.1 这里定义 *filtration* 在更多时候被叫做一个穷尽的 *filtration(exhaustive filtration)*。更多时候，我们不要求 $\bigcup_p F_pM = M$.

对于分次模和链复形，我们也可以定义 filtration：

定义 2.4 一个分次模 H_* 的一个 *filtration* 是一列子分次模 $\{F_pH_*\}_{p\in\mathbb{Z}}$，使得

$$0 \subseteq F_pH_n \subseteq F_{p+1}H_n \subseteq H_n \forall p, n \in \mathbb{Z}$$

且 $\bigcup_p F_pH_* = H_*$.

一个微分链复形 $(C_*, \partial : C_* \to C_{*-1})$ 的 *filtration* 是一列子链复形 $\{(F_pC_*, \partial)\}$：

$$\begin{array}{ccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \subseteq & F_pC_{n+1} & \subseteq & F_{p+1}C_{n+1} & \subseteq & C_{n+1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \subseteq & F_pC_n & \subseteq & F_{p+1}C_n & \subseteq & C_n \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \subseteq & F_pC_{n-1} & \subseteq & F_{p+1}C_{n-1} & \subseteq & C_{n-1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

使得 $\bigcup_p F_pC_n = C_n$，对任意的 $n \in \mathbb{Z}$.

利用 filtration 可以描述出一个谱序列到底在算什么：

定义 2.5 称一个谱序列 $E^r_{p,q}$ 收敛到模 H，如果存在一个分次模 H_* 和它的 *filtration* F_pH_* 使得

$$E^\infty_{p,q} \cong F_pH_{p+q}/F_{p-1}H_{p+q}$$

这个定义有一个更草率的写法：

$$H_n \sim \bigoplus_{p+q=n} E^{\infty}_{p,q}$$

这里使用“$\sim$”而非“$\cong$”是完全准确的。因为一般来说，给定收敛的谱序列 $E^r_{*,*}$ 后，我们无法确定 H_*，不过谱序列本身已经给出了 H_* 的许多信息。在一些时候，我们可以用谱序列完全确定 H_*.

3 谱序列从何而来？

经过了前面的一系列抽象定义，我们下面来看稍微实际的东西：我们如何得到一个谱序列。我们这里指出三种得到谱序列的办法：

- 通过正合对 (exact couple)。
- 通过链复形的 filtration.
- 通过双复形 (bicomplex)。

后面两种方法本质上都可以归结为第一种。但出于实用考虑，我们还是分出三种情况。

我们这里仅介绍思路，具体的推导可以参考 [2].

3.1 正合对

一个正合对是两个双分次模 $D_{*,*}, E_{*,*}$ 和它们之间的同态 i, j, k，使得下面的映射列是正合的

$$\cdots \xrightarrow{k} D_{*,*} \xrightarrow{i} D_{*,*} \xrightarrow{j} E_{*,*} \xrightarrow{k} D_{*,*} \xrightarrow{i} D_{*,*} \xrightarrow{j} \cdots$$

我们有下面的定理：

定理 3.1 $E^1_{*,*} := (E_{*,*}, jk)$ 是一个微分双分次模，且双分次模 $D^2_{*,*} = \mathrm{im}\ i$ 使得 $D^2_{*,*}, E^2_{*,*}$ 构成一个正合对。其中

$$E^2_{p,q} := H_{p,q}(E^1_{*,*}, jk)$$

对一个正合对 (D, E, i, j, k) 反复使用上面的定理，我们就可以得到一个谱序列 $E^r_{p,q}$. 特别的，如果态射 i, j, k 的次数分别为 $(1, -1), (0, 0), (-1, 0)$（或者相应地 $(-1, 1), (0, 0), (1, 0)$），那么这个谱序列在第 r 页的微分的次数为 $(-r, r-1)$（或 $(r, -r+1)$）。一般而言，知道了 i, j, k 的次数之后，根据得到这一谱序列的过程可以确定每一页上微分的次数。

3.2 链复形的 Filtration

一种得到正合对的办法就是利用链复形的 filtration. 对链复形 C_* 的一个 filtration F_pC_*，我们有链复形的短正合列：

$$0 \to F_{p-1}C_* \to F_pC_* \to F_{p-1}C_*/F_pC_* \to 0$$

这个短正合列给出了同调群的长正合列：

$$\cdots \xrightarrow{k} H_n(F_{p-1}C_*) \xrightarrow{i} H_n(F_pC_*) \xrightarrow{j} H_n(F_pC_*/F_{p-1}C_*) \xrightarrow{k} \cdots$$

记 $D_{p,q} = H_{p+q}(F_pC_*)$, $E_{p,q} = H_{p+q}(F_pC_*/F_{p-1}C_*)$，那么 $(D_{*,*}, E_{*,*}, i, j, k)$ 就是一个正合对。更进一步，我们可以算出 i, j, k 的次数分别为 $(1,-1), (0,0), (-1,0)$，因此这个谱序列在第 r 页的微分的次数是 $(-r, r-1)$.

这时候，我们还可以知道这一谱序列收敛到什么东西：

定理 3.2 当 *filtration* F_pC_* *有界 (is bounded)，也就是对任意的* n*，存在* $s(n), t(n)$ *使得*

$$F_{s(n)}C_n = 0, F_{t(n)}C_n = C_n$$

的时候，这一 filtration 定义的谱序列 $\{E^r_{*,*}\}$ *收敛到* $H_*(C_*, \partial)$*. 具体而言，有*

$$E^\infty_{p,q} \cong F_pH_{p+q}(C_*, \partial)/F_{p-1}H_{p+q}(C_*, \partial)$$

其中 $\iota : F_pC_* \to C_*$ *是自然嵌入，*$F_pH_n(C_*, \partial)$ *是* $H_n(F_pC_*)$ *在* ι *的前推下的像，也即是* $\iota_*H_n(F_pC_*, \partial)$*.*

我们在这里插入一个简单的例子：胞腔同调。对于一个 CW 复形 $X = \bigcup_{\alpha \in A} e^\alpha$，其中 e^α 是 X 的胞腔。我们用 $X^{(p)}$ 表示它的 p 维骨架，也就是

$$X^{(p)} = \bigcup_{\dim e^\alpha \leqslant p} e^\alpha$$

那么空间的 filtration

$$\emptyset \subseteq X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq X^{(p)} \subseteq \cdots \subseteq X$$

给出了 X 的奇异链复形 $S_*(X)$ 的一个 filtration：

$$F_pS_n(X) = S_n(X^{(p)})$$

由此我们得到一个收敛到 $H_*(X)$ 的谱序列，它的第一页是：

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(X^{(p)}, X^{(p-1)}; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} 0 & \text{if } q \neq 0; \\ \mathbb{Z}^{\alpha_p(X)} & \text{if } q = 0; \end{cases}$$

其中 $\alpha_p(X)$ 表示 X 的 p 维胞腔的个数。第一页上的微分是：

$$\partial_{cell}: H_{p+q}(X^{(p)}, X^{(p-1)}) \longrightarrow H_{p+q-1}(X^{(p-1)}, X^{(p-2)})$$

可以算出来，这个谱序列的第二页就是第无穷页，并且第二页是

$$E^{\infty}_{*,*} = E^2_{*,*} = \begin{array}{|cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ H_0^{cell}(X) & H_1^{cell}(X) & H_2^{cell}(X) & \cdots \\ \hline \end{array}$$

经过一些简单的代数步骤可以知道，$H_n(X) \cong H_n^{cell}(X)$.

3.3 双复形

一个双复形 $(C_{*,*}, \partial', \partial'')$ 由一个双分次模 $C_{*,*}$ 和微分

$$\partial' : C_{*,*} \longrightarrow C_{*-1,*}$$

$$\partial'' : C_{*,*} \longrightarrow C_{*,*-1}$$

构成，且满足 $\partial'\partial'' + \partial''\partial' = 0$.

实际上双复形的定义相当宽松，可以将 ∂' 换成 $d' : C_{*,*} \to C_{*+1,*}$，也可以将 ∂'' 换为 $d'' : C_{*,*} \to C_{*,*+1}$，也可以两个都换。我们这里为了书写的方便，只考虑选取 ∂', ∂'' 的情况。

此外，在一个复形 $(C_{*,*}, \partial', \partial'')$ 满足 ∂', ∂'' 交换，也就是

$$\partial'\partial'' - \partial''\partial' = 0$$

的时候，$C_{*,*}$ 不符合双复形的定义，但我们可以给 ∂'' 适当添加负号，使得在添加负号后，$C_{*,*}$ 成为一个双复形（注意添加正负号不改变同调群）。因此如果 ∂', ∂'' 交换，我们也将 $C_{*,*}$ 称作一个双复形，并且始终认为这时给 ∂'' 适当添加了负号。在本文的讨论范围内，添加负号的方式对最终的结果没有影响。

双复形的定义中，条件 $\partial'\partial'' + \partial''\partial' = 0$ 使得映射 $\partial := \partial' + \partial''$ 也成为一个微分，也就是，$\partial \circ \partial = 0$. 这样我们可以从双复形 $(C_{*,*}, \partial', \partial'')$ 构造出一个复形 $(\text{total } C, \partial)$，其中

$$(\text{total } C)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q}$$

我们将这一复形称作双复形 $C_{*,*}$ 定义的完全复形 (total complex)。

双复形结构给出了 $C_{*,*}$ 的两个 filtrations：

$$F_p^I(\text{total } C)_* = \bigoplus_{r \leqslant p} C_{r,*-r}$$

$$F_q^{II}(\text{total } C)_* = \bigoplus_{r \leqslant q} C_{*-r,r}$$

一种稍微直观一点的写法是

$$F_p^I(\text{total } C)_n = (\text{total } C)_n \cap \bigoplus_{r\leqslant p} C_{r,*}$$

$$F_q^{II}(\text{total } C)_n = (\text{total } C)_n \cap \bigoplus_{r\leqslant q} C_{*,r}$$

更直观的理解方式是将这两个 filtrations 在平面直角坐标系中画出来。这里我们将画图步骤留给读者，或者读者可以参考相关书籍中的图片。

注 3.1 如果 ∂' 或 ∂'' 被替换为了 d' 或 d''，那么我们的 *filtrations* 需要相应作修改，如将直和 $\bigoplus_{r\leqslant p}$ 改为 $\bigoplus_{r\geqslant p}$.

我们将 F_p^I 和 F_q^{II} 分别叫做第一 filtration 和第二 filtration. 它们给出了两个谱序列，注意到这两个谱序列都是有界的，所以它们都收敛到完全复形的同调群 $H_*(\text{total } C)$. 更进一步，我们可以写出这两个谱序列的第二页。

因为 ∂' 是一个微分，所以它定义了一族同调群：

$$H_{p,q}^I(C) := H_{p,q}(C_{*,*}, \partial') = \frac{\ker(\partial' : C_{p,q} \to C_{p-1,q})}{\operatorname{im}(\partial' : C_{p+1,q} \to C_{p,q})}$$

由 $\partial'\partial'' + \partial''\partial' = 0$ 可以知道，∂ 诱导上双复形 $H_{*,*}^I(C)$ 上的微分 $\overline{\partial''}$. 我们将这一微分定义的同调群记为：

$$H_{p,q}^{II}H^I(C) := H_{p,q}(H_{*,*}^I(C), \overline{\partial''})$$

直观来说，$H_{*,*}^{II}H^I(C)$ 是先逐行取同调群，再逐列取同调群得到的双分次模。我们可以先逐列取同调群，再逐行取同调群，得到 $H_{*,*}^I H^{II}(C)$. 于是我们有：

定理 3.3 *对双复形 $(C_{*,*}, \partial', \partial'')$，它的第一 filtration $F_p^I(\text{total } C)_*$ 给出的谱序列的第二页为*

$$^I E_{*,*}^2 = H_{*,*}^I H^{II}(C)$$

这一谱序列在第 r 页的微分的次数为 $(-r, r-1)$. 我们将这一谱序列叫做 C 的第一谱序列。

第二 filtration $F_q^{II}(\text{total } C)_*$ 给出的谱序列的第二页为

$$^{II} E_{*,*}^2 = H_{*,*}^{II} H^I(C)$$

这一谱序列在第 r 页的微分的次数为 $(r-1, -r)$，我们将这一谱序列叫做 C 的第二谱序列。

双复形 C 的第一和第二谱序列都收敛到 $H_*(\text{total } C)$.

我们接下来会考虑构造一些具体的双复形，并用它们证明一些熟知的结论。

4 应用

4.1 de Rham 上同调和 Čech 上同调的同构

这里我们使用 Bott 和 Tu 在 [1] 中对 Čech 上同调的定义。

对于流形 M^d 的一个可数开覆盖 $\mathfrak{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$，我们称它是一个好覆盖 (good cover)，如果对其中任意有限多个开集 $U_{\alpha_1},\cdots,U_{\alpha_k}$，它们的交集

$$U_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}:=\bigcap_{i=1}^{k}U_{\alpha_i}$$

微分同胚于 $\mathbb{R}^d$. 在选取了好覆盖 $\mathfrak{U}$ 之后，我们可以定义

$$\begin{aligned}C^p(\mathfrak{U},\Omega^q):=\{(\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_p})_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\in A^p}\in&\prod_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\in A^p}\Omega^q(U_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p})\\ &\mid\omega_{\cdots\alpha\cdots\beta\cdots}=-\omega_{\cdots\beta\cdots\alpha\cdots}\},\forall p\geqslant 1,q\geqslant -1\end{aligned}$$

其中 $\Omega^*(U)$ 表示定义在开集 U 上的全体微分形式，特别的，我们定义 $\Omega^{-1}(U)$ 为 U 上的全体局部常值函数构成的交换群。此外，我们定义 $C^0(\mathfrak{U},\Omega^*)=\Omega^*(M)$.

这时候，在 $C^*(\mathfrak{U},\Omega^*)$ 上可以定义一个微分运算 d'：

$$\begin{array}{rccc}d': & C^p(\mathfrak{U},\Omega^*) & \longrightarrow & C^{p+1}(\mathfrak{U},\Omega^*)\\ & (\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_p})_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)\in A^p} & \longmapsto & (\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_p})_{(\alpha_0,\ldots,\alpha_p)\in A^{p+1}}\end{array}$$

其中 $(\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_p})_{(\alpha_0,\ldots,\alpha_p)\in A^{p+1}}$ 的分量为：

$$\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_p}=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\omega_{\alpha_0\cdots\widehat{\alpha_k}\cdots\alpha_p}$$

其中 $\widehat{\alpha_k}$ 表示不取指标 α_k.

这时候，由 M 上局部 $\mathbb{R}$-常值层定义的 Čech 上同调为：

$$\check{H}^*(M;\mathbb{R}):=H^*(C^*(\mathfrak{U},\Omega^{-1}),d')$$

de Rham 上同调被定义为 $H^n_{DR}(M):=H^n(\Omega^*(M),d),n\geqslant 0$，其中 d 表示外微分。

这时候我们有定理：

定理 4.1 $H^*_{DR}(M)\cong\check{H}^*(M;\mathbb{R})$.

Bott 和 Tu 在 [1] 给出的证明利用了所谓的 Čech-de Rham 双复形

$$\big(C^p(\mathfrak{U},\Omega^q),d',d\big)_{p\geqslant 1,q\geqslant 0}$$

和它的完全复形 (total $C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*), D = d + d'$) 的上同调。但他们没有使用谱序列的技术。他们的证明思路是这样：首先验证这一双复形的每一行都是正合的（这相当于验证 Ω^* 给出了 M 上的层）；接着他们证明，限制映射

$$r : \Omega^*(M) \longrightarrow \prod_\alpha \Omega^*(U_\alpha)$$

诱导了同构

$$r^* : H^*_{DR}(M) \longrightarrow H^*\big(\text{total } C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)\big)$$

证明的办法是利用行正合性，给 $H^*\big(\text{total } C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)\big)$ 中的每一个上同调类 $[\phi]$ 找到唯一的闭链代表元 $\tilde{\phi} \in C^1(\mathfrak{U}, \Omega^*)$；最后根据 $\mathfrak{U}$ 是好覆盖可以知道每一列都是正合的，所以可以用同样的办法证明 $\check{H}^*(M;\mathbb{R})$ 和 Čech-de Rham 双复形的完全复形的上同调同构。

我们这里可以直接 Čech-de Rham 双复形的两个谱序列得到定理的证明。我们还是需要用到这样一个事实：

- Čech-de Rham 双复形的每一行和每一列都是正合的。

利用这一事实，我们可以知道：

$$H^{p,q}_{II}(K) \cong \begin{cases} 0 & \text{if } q \geqslant 1 \\ C^p(\mathfrak{U}, \Omega^{-1}) & \text{if } q = 0 \end{cases}$$

这里 $K^{*,*}$ 是 Čech-de Rham 双复形，进而

$${}_IE_2^{p,q} \cong H^p(H^{*,q}_{II}(K), \overline{d'}) \cong \begin{cases} 0 & \text{if } q \geqslant 1 \\ \check{H}^p(M;\mathbb{R}) & \text{if } q = 0 \end{cases}$$

画在平面直角坐标系中就是

$${}_IE_2^{p,q} = \begin{array}{|ccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \check{H}^0(X;\mathbb{R}) & \check{H}^1(X;\mathbb{R}) & \check{H}^2(X;\mathbb{R}) & \check{H}^3(X;\mathbb{R}) & \cdots \\ \hline \end{array}$$

这样我们就得到了 $\check{H}^*(M;\mathbb{R}) \cong H^*(\text{total } K)$. 类似的我们可以算出：

$${}_{II}E_2^{p,q} \cong H^q(H^{p,*}_I(K), \overline{d}) \cong \begin{cases} 0 & \text{if } p \geqslant 2 \\ H^q_{DR}(M) & \text{if } p = 1 \end{cases}$$

也就是

$$
{}_{II}E_2^{p,q} = \left|\begin{array}{cccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
H^0_{DR}(X) & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
H^1_{DR}(X) & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
H^0_{DR}(X) & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\hline
\end{array}\right.
$$

因此也有 $H^*_{DR}(M) \cong H^*(\text{total } K)$. 这样我们就知道：

$$H^*_{DR}(M) \cong H^*(\text{total } K) \cong \check{H}^*(M;\mathbb{R}).$$

4.2 Tor-函子即是 tor-函子

在同调代数中，有两种定义 Tor-函子的办法：一种是取 A 的投射分解 (projective resolution)，将函子 $\bullet \otimes_R B$ 的左导出函子定义为 $\mathrm{Tor}_n^R(\cdot, B)$；另一种办法是取 B 的投射分解，将 $A \otimes_R \bullet$ 的左导出函子定义为 $\mathrm{tor}_n^R(A, \cdot)$.

这时候一个亟待证明是事情是，这两种方式定义出的函子是等价的，也就是

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B) \cong \mathrm{tor}_n^R(A, B)$$

我第一次看到的证明出自 Rotman 的 [3] 第六章。证明的关键是取 A, B 的投射分解：

$$P^* = \cdots \to P_1 \to P_0 (\to A \to 0)$$

$$Q^* = \cdots \to Q_1 \to Q_0 (\to B \to 0)$$

然后在下面的交换图中作图表追踪证明 $X \cong Y, W \cong Z$：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & X & \to & 0 & & W & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
Y & \to & K_i \otimes V_j & \to & K_i \otimes Q_j & \to & K_i \otimes V_{j-1} & \to 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & P_i \otimes V_j & \to & P_i \otimes Q_j & \to & P_i \otimes V_{j-1} & \to 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
Z & \to & K_{i-1} \otimes V_j & \to & K_{i-1} \otimes Q_j & \to & K_{i-1} \otimes V_{j-1} & \to 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

其中 $K_i \subseteq P_i$ 是 P_* 的闭链（也是边缘链），$V_j \subseteq Q_j$ 是 Q_* 中的闭链。最后注意到

$$W = \mathrm{Tor}_1^R(K_{i-1}, V_{j-1}),$$

$$X = \mathrm{Tor}_1^R(K_{i-1}, V_j),$$

$$Y = \mathrm{tor}_1^R(K_i, V_{j-1}),$$

$$Z = \mathrm{tor}_1^R(K_{i-1}, V_{j-1}),$$

因此可以用一连串的同构将 $\mathrm{Tor}_n^R(A,B)$ 与 $\mathrm{tor}_n^R(A,B)$ 连接起来。这里我们不给出详细的证明过程。

如果使用谱序列的话，这个例子和上一个例子在技术上没有太大差别。都是利用了同一件事：如果一个双复形的每一行、每一列都正合，那么它的第一个谱序列的第二页只有第一列（或第零列）非退化，它的第二个谱序列的第二页只有第一行（或第零行）非退化。

设 A,B 的投射分解分别为 $(P_*,d_P),(Q_*,d_Q)$，考虑双复形：

$$C_{*,*}=(P_*\otimes Q_*,d_P\otimes 1,1\otimes d_Q)$$

我们来计算它的两个谱序列的第二页。注意到 P_p,Q_q 是投射模，进而是平坦的，也就是函子 $P_p\otimes\bullet$ 和 $\bullet\otimes Q_p$ 将正合列映为正合列，因此有：

$$\begin{aligned}H^{II}_{p,q}(C)&=H_{p,q}(P_*\otimes Q_*,1\otimes d_Q)\cong P_p\otimes H_q(Q_*,d_Q)\\&=\begin{cases}0 & \text{if } q>0;\\ P_p\otimes B & \text{if } q=0.\end{cases}\end{aligned}$$

因此它的第一谱序列的第二页是：

$${}_IE^2_{p,q}\cong H^I_{p,q}H^{II}(C)\cong\begin{cases}0 & \text{if } q>0;\\ \mathrm{Tor}_p^R(A,B) & \text{if } q=0.\end{cases}$$

由 P_p,Q_q 平坦可知，双复形 $C_{*,*}$ 的每一行和每一列都是正合的，因此它的谱序列第二页只有一行或者一列非退化。我们的计算结果与这一观察相符。根据计算结果我们知道：$\mathrm{Tor}_*^R(A,B)$ 同构于 C 的完全复形的同调。类似的可以算出

$${}_{II}E^2_{p,q}\cong H^{II}_{p,q}H^{I}(C)\cong\begin{cases}0 & \text{if } p>0;\\ \mathrm{tor}_q(A,B) & \text{if } p=0.\end{cases}$$

因此 $\mathrm{tor}_*^R(A,B)$ 也同构于 C 的完全复形的同调，这样我们就知道

$$\mathrm{Tor}_*^R(A,B)\cong\mathrm{tor}_*^R(A,B)$$

更进一步，如果读者了解过谱序列之间的态射，还可以进一步证明这一同构是自然的。

同调代数中另一个重要的函子是 Ext-函子，它同样有两种办法定义。对 A,B，取 A 的投射分解 P_* 或 B 的入射分解 J^*，那么我们可以定义：

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^n_R(A,B)&:=H^n\big(\mathrm{Hom}_R(A,J^*),\mathrm{Hom}_R(A,d_J)\big)\\ \mathrm{ext}^n_R(A,B)&:=H^n\big(\mathrm{Hom}_R(P_*,B),\mathrm{Hom}_R(d_P,B)\big)\end{aligned}$$

考虑双复形 $C^{p,q}:=\mathrm{Hom}_R(P_p,J^q)$ 的话，可以证明，存在自然同构：

$$\mathrm{Ext}^n_R(A,B)\cong\mathrm{ext}^n_R(A,B).$$

4.3 Kronecker 积与万有系数定理

在引入奇异上同调的时候，有这样一个定理：

定理 4.2 *空间的奇异上下同调的 Kronecker 积诱导了映射：*

$$\kappa : H^*(X;G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(H_*(X;\mathbb{Z}), G)$$

这一映射 κ 是满射，且存在右逆。

我一直不太理解这一定理的证明思路。不过谱序列给出了这一定理的另一种证明方式。

在给出证明之前，我们补充一些交换群的投射分解和入射分解的简单性质。

注意到我们可以将交换群视作 $\mathbb{Z}$-模，所以我们可以讨论交换群的投射分解和入射分解。我们有下面的结果：

定理 4.3 *设 G 是一个交换群。*
(1) 如果 G 是自由生成的，那么 G 是投射的。
(2) 对任意 G，存在 G 的投射分解

$$P_* = P_0 \oplus P_1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \cdots ,$$

也就是下面的正合列：

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

更进一步，P_1, P_0 是自由生成的交换群。
(3) 不论 G 为何，存在 G 的入射分解

$$J^* = J^0 \oplus J^1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \cdots$$

也就是下面的正合列：

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow J^0 \longrightarrow J^1 \longrightarrow 0$$

且 J_0 形如 $(\bigoplus_i \mathbb{Q}_i)/K$，其中 K 是某个自由生成的交换群。

这些结果的证明可以在 Rotman 的 [3] 中找到。我们从上面的定理可以知道，当 $n \geqslant 2$ 的时候，Tor_n 和 Ext^n 都是平凡的，也就是它们取值始终为 0. 注意到对任意两个交换群 G_1, G_2，有

$$\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(G_1, G_2) \cong G_1 \otimes_{\mathbb{Z}} G_2, \quad \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(G_1, G_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1, G_2)$$

所以我们这时可以丢掉 Tor 和 Ext 上的指标 n：

$$\mathrm{Tor}(G_1, G_2) := \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(G_1, G_2)$$

$$\mathrm{Ext}(G_1, G_2) := \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G_1, G_2)$$

现在我们开始考虑如何用谱序列给出这一小节一开始提出的定理的证明。对于一个拓扑空间 X，我们用 $S_*(X)$ 表示 X 的（整系数）奇异链复形，用 $S^*(X)$ 表示（整系数）奇异上链复形，也就是

$$S^*(X) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_*(X), \mathbb{Z}).$$

我们用 d 表示上链复形的微分。因为这里不涉及其他拓扑空间，我们将奇异链复形和奇异上链复形分别记为 S_*, S^*.

取 G 的入射分解 J^*，我们考虑双复形

$$C^{p,q} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_p, J^q)$$

这时候，S_* 上的边缘映射 ∂ 诱导了 $C^{*,*}$ 上沿着水平方向的微分

$$d' := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\partial, J^*) : C^{*,*} \longrightarrow C^{*+1,*}.$$

类似的，J^* 上的微分 d_J 也诱导了 $C^{*,*}$ 上沿着垂直方向的微分，我们仍然将这个微分记为 d_J. 我们来算一下这个链复形的第一和第二谱序列。为了方便，我们将 $C^{*,*}$ 的第一和第二 filtrations 诱导的 $H^*(\text{total } C)$ 的两个 filtrations 分别记为 $F_I^p H^{p+q}$ 和 $F_{II}^q H^{p+q}$.

注意到 X 的奇异链复形 S_* 是自由生成的，因此是一个投射模。根据投射模的定义我们知道，函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_p, \cdot)$ 保持正合列不变，进而可以知道：

$$H_{II}^{p,q}(C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_p, H^*(J^*, d_J)) \cong \begin{cases} 0 & \text{if } q \geqslant 1; \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_p, G) & \text{if } q = 0. \end{cases}$$

这时候 d' 诱导了的 $H_{II}^{*,*}$ 上的微分恰好为 G-系数上链复形的微分，因此第一谱序列的第二页是：

$$H_I^{p,q} H_{II}(C) \cong \begin{cases} 0 & \text{if } q \geqslant 0; \\ H^p(X; G) & \text{if } q = 0. \end{cases}$$

这意味着完全复形 total C 的上同调就是 $H^*(X; G)$.

我们再来看第二谱序列。根据入射模的定义，我们知道函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, J^q)$ 保持短正合列，由此可以推出

$$H_I^{p,q}(C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(H_p(S_*, \partial), J^q\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_p(X; \mathbb{Z}), J^q)$$

这样第二谱序列的第二页是：

$$H_{II}^{p,q} H_I(C) \cong \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^q\big(H_p(X; \mathbb{Z}), G\big) \cong \begin{cases} 0 & \text{if } q \geqslant 2; \\ \mathrm{Ext}\big(H_p(X; \mathbb{Z}), G\big) & \text{if } q = 1; \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(H_p(X; \mathbb{Z}), G\big) & \text{if } q = 0. \end{cases}$$

在平面直角坐标系中画出来是：

$$
\begin{array}{|cccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots \\
\mathrm{Ext}\big(H_0(X;\mathbb{Z}),G\big) & \mathrm{Ext}\big(H_1(X;\mathbb{Z}),G\big) & \mathrm{Ext}\big(H_2(X;\mathbb{Z}),G\big) & \cdots \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(H_0(X;\mathbb{Z}),G\big) & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(H_1(X;\mathbb{Z}),G\big) & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(H_2(X;\mathbb{Z}),G\big) & \cdots \\
\hline
\end{array}
$$

注意到这一页上微分的次数 d_2 的次数为 $(-2,3)$，因此这个谱序列从第二页开始稳定。换言之，这个谱序列的第二页就是第无穷页。我们可以写出 $H^*(\text{total } C)$ 的第二 filtration：

$$H^n(X;G) \cong H^n(\text{total } C) = F^0_{II}H^n \supseteq F^1_{II}H^n \supseteq F^2_{II}H^n = 0$$

因为我们改变了 $C^{*,*}$ 上微分的方向，所以 filtration 变为了降列。并且我们知道：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(H_n(X;\mathbb{Z}),G\big) &\cong \ {}_{II}E^{n,0}_\infty &\cong F^0_{II}H^n/F^1_{II}H^n \\
\mathrm{Ext}\big(H_{n-1}(X;\mathbb{Z}),G\big) &\cong \ {}_{II}E^{n-1,1}_\infty &\cong F^1_{II}H^n/F^2_{II}H^n
\end{aligned}
$$

也就是

$$H^n(X;G)/\mathrm{Ext}\big(H_{n-1}(X;\mathbb{Z}),G\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(H_n(X;\mathbb{Z},G)\big)$$

这样就得到了短正合列：

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}\big(H_{n-1}(X;\mathbb{Z}),G\big) \longrightarrow H^n(X;G) \xrightarrow{\kappa'} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(H_n(X;\mathbb{Z}),G\big) \longrightarrow 0.$$

我们还需要验证的是，这一正合列里的映射 κ' 和 Kronecker 积给出的映射 κ 相差一个同构，以及这个正合列是分裂的。这一部分相对繁琐，不熟悉的读者可以先跳过，直接到我们的最终结论。

我们先来验证 κ' 在相差一个同构的意义下就是 κ. 我们选取另一个双复形：

$$
\tilde{C}^{*,*} = \begin{array}{|cccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_0,G) & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_1,G) & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_2,G) & \cdots \\
\hline
\end{array}
$$

我们用 ${}_I\tilde{E}^{*,*}_r, {}_{II}\tilde{E}^{*,*}_r$ 来表示 $\tilde{C}^{*,*}$ 的第一、第二谱序列，用 $\tilde{H}^*$ 表示 $\tilde{C}^{*,*}$ 的完全复形的同调。这时可以建立 $\tilde{C}^{*,*}$ 到 $C^{*,*}$ 的保持双复形结构的映射 $i^{p,q}: \tilde{C}^{p,q} \to C^{p,q}$，使得最下方的一行的映射

$$i^{*,0}: \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_*,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_*,J^0) \subseteq (\text{total } C)^*$$

由自然嵌入 $i: G \hookrightarrow J^0$ 诱导。这样 $i^{p,q}$ 诱导了这两个双复形的谱序列之间的映射和 filtrations 之间的映射，因此我们有下面的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
H^n(X;G) \cong & {}_I\tilde{E}_2^{n,0} & \overset{\cong}{\to} & \tilde{H}^n & \longrightarrow & {}_{II}\tilde{E}_2^{n,0} & \cong H^n(X;G) \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
H^n(X;G) \cong & {}_IE_2^{n,0} & \overset{\cong}{\to} & H^n & \overset{\kappa'}{\to} & {}_{II}E_2^{n,0} & \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(H_n(X;\mathbb{Z}),G\big)
\end{array}$$

其中每一个向下的箭头都由 $i^{*,*}$ 诱导。注意到上面的图表中，除了 κ' 和最右侧的下箭头之外的其他箭头都是同构，所以在相差一个同构的意义下，κ' 就是 $i^{*,*}$ 诱导的映射

$$i_{II}^n : H^n(X;G) \cong {}_{II}\tilde{E}_2^{n,0} \longrightarrow {}_{II}E_2^{n,0} \cong \mathrm{Ext}^0\big(H_n(X;\mathbb{Z}),G\big)$$

而映射 i_{II}^n 是相当好计算的。对下面的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \to \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_0,J^1) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_1,J^1) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_2,J^1) & \longrightarrow \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_0,J^0) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_1,J^0) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_2,J^0) & \longrightarrow \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_0,G) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_1,G) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_2,G) & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

先逐行求上同调，这时候每一列（在转置过后）是

$$H^*(X;G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(H_*(X;\mathbb{Z}),J^0\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(H_*(X;\mathbb{Z}),J^1\big) \longrightarrow 0$$

在删去第一个元素后沿着每列求上同调，就可以得到 i_{II}^*. 我们这里直接写出 i_{II}^*：

$$i_{II}^*([\phi]) : [\psi] \longmapsto i \circ \phi(\psi) \in \mathrm{im}\ i, \forall \text{closed cochain } \psi.$$

这时很容易看出 i_{II}^* 实际上就是 κ.

验证 κ 有右逆是办法是直接构造：对 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(H_n(X;\mathbb{Z}),G\big)$ 中元素 $\phi: Z_n(X)/B_n(X) \to G$，我们可以将 ϕ 提升为 $Z_n(X)$ 上的态射。注意到我们有短正合列

$$0 \longrightarrow Z_n(X) \longrightarrow S_n \overset{\partial}{\to} B_{n-1}(X) \longrightarrow 0$$

这个正合列里 $B_{n-1}(X)$ 是自由的，因此有直和分解 $S_n \cong Z_n \oplus B_{n-1}$，所以我们可以将 ϕ 进一步延拓到 S_n 上。经过一些计算可以验证 ϕ 被延拓为一个上闭链 $\tilde{\phi}$. 进而我们可以验证 κ 的右逆为 $\phi \mapsto \tilde{\phi}$.

经过上面的讨论，我们最终得出了下面的更强的结论：

定理 4.4 对一个拓扑空间 X 和交换群 G，上下同调的 *Kronecker* 积诱导了短正合列：

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}\big(H_{n-1}(X;\mathbb{Z}),G\big) \longrightarrow H^n(X;G) \xrightarrow{\kappa} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(H_n(X;\mathbb{Z}),G\big) \longrightarrow 0,$$

且这个短正合列是分裂的。特别的，我们有：

$$H^n(X;G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(H_n(X;\mathbb{Z}),G\big) \oplus \mathrm{Ext}\big(H_{n-1}(X;\mathbb{Z}),G\big).$$

事实上，可以进一步证明上面定理中的正合列是自然的。另外对于张量函子，我们有类似的结论：

定理 4.5（万有系数定理）对拓扑空间 X 和交换群 G，有（自然的）短正合列：

$$0 \longrightarrow H_n(X;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} G \xrightarrow{t} H_n(X;G) \longrightarrow \mathrm{Tor}\big(H_{n-1}(X;\mathbb{Z}),G\big) \longrightarrow 0,$$

其中 t 将 $[\phi] \otimes g$ 映为 $[\phi \otimes g]$. 更进一步这个短正合列是分裂的。特别的，我们有：

$$H_n(X;G) \cong \big(H_n(X;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} G\big) \oplus \mathrm{Tor}\big(H_{n-1}(X;\mathbb{Z}),G\big).$$

这一定理的证明办法是考虑双复形 $C_{p,q} := S_p \otimes_{\mathbb{Z}} P_q$ 的谱序列。

4.4 Künneth 谱序列

在 [2] 中，双复形 $P_* \otimes Q_*$ 被进一步推广为了

$$M_{p,q} := \bigoplus_{s+t=q} K_s \otimes P_{p,t}$$

其中 (K_*, ∂_K) 是一个链复形，$P_{*,*}$ 是某个链复形 L_* 的投射分解（链复形的投射分解的定义见 [2]）。利用这一谱序列我们可以给出所谓的 Künneth 公式——它告诉了我们 $H_*(K,\partial_K) \otimes H_*(L,\partial_L)$ 和 $H_*(K \otimes L, d_K \otimes 1 + (-1)^{\deg \cdot} \otimes d_L)$ 之间的关系。有兴趣的读者可以去阅读相关文献。

A 附录：有限生成交换群的 Tor 函子与 Ext 函子

为了使用的方便，我们在附录中计算一下有限生成交换群的 Tor 函子和 Ext 函子。我们先给出 Tor 函子和 Ext 函子的一些性质。

定理 A.1 设 $A, B, \{A_k\}_{k\in K}, \{B_k\}_{k\in K}$ 是一些 R-模，其中 R 是一个交换环。那么我们有下面的自然同构：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tor}_n^R(A,B) &\cong \mathrm{Tor}_n^R(B,A),\\
\mathrm{Tor}_n^R\big(A, \textstyle\bigoplus_{k\in K} B_k\big) &\cong \textstyle\bigoplus_{k\in K} \mathrm{Tor}_n^R(A,B_k),\\
\mathrm{Ext}_R^n(\textstyle\bigoplus_{k\in K} A_k, B) &\cong \textstyle\prod_{k\in K} \mathrm{Ext}_R^n(A_k,B),\\
\mathrm{Ext}_R^n(A, \textstyle\prod_{k\in K} B_k) &\cong \textstyle\prod_{k\in K} \mathrm{Ext}(A,B_k).
\end{aligned}$$

事实上，我们只会用到 R 是整数环 $\mathbb{Z}$ 的情形。上面的性质是为了和下面的定理配合使用：

定理 A.2 对于有限生成交换群 G，有群同构

$$G \cong \mathbb{Z}^r \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{Z}_{n_i}\right).$$

其中 $n_1, n_2, \ldots, n_l$ 是一些正整数，$\mathbb{Z}_m := \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 是阶为 m 的循环群。

在对加 $n_1, \ldots, n_l$ 上一些条件的情况下（比如 n_i 整除 n_{i+1}），可以证明整数组 $n_1, \ldots, n_l$ 是唯一的。不过我们这里只需要直和分解就够了。

我们先来看 Tor 函子。注意到 $\mathbb{Z}$ 是自由生成的，进而是投射 $\mathbb{Z}$-模，所以我们得到：

$$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}, G) = 0, \forall \text{abelian group } G.$$

下面我们考虑 $\mathrm{Tor}(G_1 = \mathbb{Z}_{n_1}, \mathbb{Z}_{n_2})$. $\mathbb{Z}_{n_1}$ 有投射分解

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n_1} \mathbb{Z}$$

在每一个位置张量上 $\mathbb{Z}_{n_2}$ 得到

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{n_2} \xrightarrow{m} \mathbb{Z}_{n_2}$$

其中 m 将 $a + n_2\mathbb{Z}$ 映为 $n_1 \cdot a + n_2\mathbb{Z}$. 所以（利用 Bézout 定理或 $\mathbb{Z}$ 是主理想整环）可以算出，m 的像是

$$\mathrm{im}\ m = \{\gcd(n_1, n_2) \cdot a + \mathbb{Z}_{n_2} \mid a \in \mathbb{Z}\} \cong \gcd(n_1, n_2)\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}$$

它的核是

$$\ker m = \{a + n_2\mathbb{Z} \mid \gcd(n_1, n_2) \cdot a \in n_2\mathbb{Z}\} \cong \gcd(n_1, n_2)\mathbb{Z}$$

因此由 Tor 函子的定义可以知道：

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_{n_1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{n_2} = \mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{n_1, n_2}) \cong \mathbb{Z}_{n_2}/\mathrm{im}\ n \cong \mathbb{Z}_{\gcd(n_1, n_2)},\\ \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_{n_1}, \mathbb{Z}_{n_2}) \cong \ker m \cong \mathbb{Z}_{\gcd(n_1, n_2)}.\end{aligned}$$

由此我们得到了 Tor 函子的表达式：

定理 A.3 对任意的整数 $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$，有

$$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) \cong \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \cong 0$$

$$\mathbb{Z}_{n_1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{n_2} \cong \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_{n_1}, \mathbb{Z}_{n_2}) \cong \mathbb{Z}_{\gcd(n_1, n_2)}.$$

Ext 函子的计算与 Tor 函子的计算类似，但要稍微麻烦一点，因为 $\mathrm{Ext}(G, \mathbb{Z})$ 并不是平凡群。我们这里直接给出计算结果：

定理 A.4 对任意的整数 $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$，有：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) &\cong \mathbb{Z}_n, & \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) &= 0 \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) &= 0, & \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}_n \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{n_1}, \mathbb{Z}_{n_2}) &\cong \mathbb{Z}_{\gcd(n_1,n_2)}, & \mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_{n_1}, \mathbb{Z}_{n_2}) &\cong \mathbb{Z}_{\gcd(n_1,n_2)}
\end{aligned}
$$

利用上面的两个定理，我们可以写出任意两个有限生成交换群的 Tor 和 Ext:

定理 A.5 设 G_1, G_2 是两个交换群，且

$$G_i = \mathbb{Z}^{r^{(i)}} \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{k^{(i)}} \mathbb{Z}_{n_j^{(i)}}\Big), i = 1, 2$$

那么有：

$$
\begin{aligned}
G_1 \otimes_{\mathbb{Z}} G_2 &\cong \mathbb{Z}^{r^{(1)} \cdot r^{(2)}} \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{k^{(1)}} (\mathbb{Z}_{n_j^{(1)}})^{r^{(2)}}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{k^{(2)}} (\mathbb{Z}_{n_j^{(2)}})^{r^{(1)}}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{1 \leqslant j^{(1)} \leqslant k^{(1)} \\ 1 \leqslant j^{(2)} \leqslant k^{(2)}}} \mathbb{Z}_{\gcd(n_{j^{(1)}}, n_{j^{(2)}})}\Big) \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1, G_2) &\cong \mathbb{Z}^{r^{(1)} \cdot r^{(2)}} \oplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{k^{(2)}} (\mathbb{Z}_{n_j^{(2)}})^{r^{(1)}}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{1 \leqslant j^{(1)} \leqslant k^{(1)} \\ 1 \leqslant j^{(2)} \leqslant k^{(2)}}} \mathbb{Z}_{\gcd(n_{j^{(1)}}, n_{j^{(2)}})}\Big) \\
\mathrm{Tor}(G_1, G_2) &\cong \Big(\bigoplus_{\substack{1 \leqslant j^{(1)} \leqslant k^{(1)} \\ 1 \leqslant j^{(2)} \leqslant k^{(2)}}} \mathbb{Z}_{\gcd(n_{j^{(1)}}, n_{j^{(2)}})}\Big) \\
\mathrm{Ext}(G_1, G_2) &\cong \Big(\bigoplus_{j=1}^{k^{(1)}} (\mathbb{Z}_{n_j^{(1)}})^{r^{(2)}}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{1 \leqslant j^{(1)} \leqslant k^{(1)} \\ 1 \leqslant j^{(2)} \leqslant k^{(2)}}} \mathbb{Z}_{\gcd(n_{j^{(1)}}, n_{j^{(2)}})}\Big)
\end{aligned}
$$

其中 G^l 表示 l 个 G 的直和。

这一定理可以不必记忆，能够利用前面的定理推导出来即可。

参考文献

[1] Bott, R., Tu, L.W., 1982. Differential Forms in Algebraic Topology, Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3951-0

[2] McCleary, J., 2000. A User's Guide to Spectral Sequences, 2nd ed, Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511626289

[3] Rotman, J.J., 2009. An Introduction to Homological Algebra. Springer New York, New York, NY. https://doi.org/10.1007/b98977

[4] 姜伯驹, 2007. 同调论, 第 1 版. 北京大学出版社, Beijing City.