

黎曼流形上 Hodge 分解的证明

陈轶钊

2024 年 11 月 19 日

目录

1 引入	2
2 Hodge 星算子、余微分和 Beltrami-Laplace 算子	3
2.1 Hodge 星算子	4
2.2 余微分算子和 Beltrami-Laplace 算子	5
2.3 Hodge 分解的证明：第一部分	7
3 Clifford 丛和 Dirac 算子	7
3.1 Clifford 丛	7
3.2 Dirac 算子	9
3.3 Dirac 算子的几何性质	10
4 插入：Sobolev 空间	11
4.1 Sobolev 空间和 Sobolev 嵌入	12
4.2 紧流形上的 Sobolev 空间	14
5 Dirac 算子的分析性质	16
5.1 先验估计	17
5.2 Dirac 算子的扩张	18
5.3 Dirac 算子的正则性	19
5.4 Dirac 算子相关的紧性	21
5.5 Hodge 分解的证明：第二部分	22

6 一些推论	24
A 使用协变导数表示外微分和余微分	25
B Weitzenböck 公式的证明	26
C Dirac 算子的谱	27

写在前面的话

写这篇笔记的主要原因是需要在一个讨论班上做一次报告。我在很久之前见过一次 Hodge 分解的证明，但因为那时对 Sobolev 空间知之甚少，所以对整个证明过程有些不知所以。这次写这个笔记也算是重新整理一遍之前听过的证明。

1 引入

这篇笔记主要参考 [3] 的第六章和 [4] 的第四、五章。我们的主定理是

定理 1.1 对 n 维闭黎曼流形 (M, g) ，对任意的 $1 \leq p \leq n$ ，有正交分解：

$$\Omega^p(M) = d(\Omega^{p-1}(M)) \oplus \delta(\Omega^{p+1}(M)) \oplus \mathcal{H}^p(M) \quad (1)$$

并且 $\mathcal{H}^p(M)$ 是一个有限维的空间。

这里 d 是外微分， δ 是余微分， $\mathcal{H}^p(M)$ 是 M 上全体 p 次调和微分形式构成的子空间。

我们会在后面给出 $\Omega^p(M)$ 上内积、余微分和调和微分形式的定义。

除了证明这一定理外，我们还会给出这一定理的一些推论。主定理的证明会被拆分成三部分：一部分是证明分解后的空间两两正交，这一部分只需要用到各种算子的定义和对称性；另一部分是证明三个空间的和是全空间，这部分证明会不可避免地涉及到对 Dirac 算子的紧性的讨论；最后剩下的是证明调和形式构成的空间 $\mathcal{H}^p(M)$ 是有限维的，这既可以依靠分析的手段得到，也可以使用拓扑的办法证明，我们在这里介绍使用分析的证明。

我们会在第二节里定义 Hodge 星算子、余微分和微分形式上的 Laplace 算子 (Beltrami-Laplacian)，并利用它们的基本性质给出主定理的一部分证明。在第三节

里我们展示第一节中定义的算子如何跟一个 Clifford 丛上的 Dirac 算子联系起来。作为插入内容，在第四节里我们会简单回顾 Sobolev 空间和 Sobolev 嵌入的一些事实。然后我们会在下一节讨论 Dirac 算子的正则性和紧性，并由此给出主定理剩下的证明。我们会在最后一节里列举主定理的一些简单推论。正文中略去的计算细节可以在附录中找到。

这篇笔记采用 Einstein 求和约定，即表达式里同时出现在上标和下标的指标表示对这一指标求和。另外这篇讲义始终假定流形 M 是一个 n 维定向的光滑闭流形，即 M 是定向紧致无边流形，并且用 g 表示 M 上的黎曼度量。

2 Hodge 星算子、余微分和 Beltrami-Laplace 算子

我们会在这一节简单地给出 Hodge 星算子、余微分 δ 和 Beltrami-Laplace 算子的定义，并展示它们的基本性质。

我们先定义一个黎曼流形上的 p 次微分形式丛 $\wedge^p T^* M$ 上的度量。对一个黎曼流形 (M, g) ，度量 g 在每一点上给出了切空间和余切空间的同构：

$$\begin{aligned} \flat: \quad T_x M &\longrightarrow \quad T_x^* M \\ v &\longmapsto v^\flat := g(v, \cdot) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_x^* M &\longrightarrow \quad T_x M \\ \omega &\longmapsto \omega^\sharp := \flat^{-1}(\omega) \end{aligned}$$

利用这两个同构，我们可以用切空间上的内积 g_x 定义余切空间上的内积 $g_x(\cdot^\sharp, \cdot^\sharp)$ ，进而切丛上的内积诱导了张量丛 $\otimes^{p,q} TM = (\otimes^p TM) \otimes (\otimes^q T^* M)$ 上的内积，我们将这些内积仍然记为 g 。

这个时候， M 上的微分形式丛 $\wedge^p T^* M$ 作为张量丛 $\otimes^{0,p} TM$ 的子丛，其上的度量由张量丛上度量的限制得到： $\frac{1}{p!} g|_{\wedge^p T^* M}$ （我们仍将这个度量记为 g ）。这里的常数 $\frac{1}{p!}$ 是为了保证对任意一组正交基 $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n \in T_x^* M$ ，有

$$\|\omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_p}\| = 1.$$

更进一步，对次数不同的两个微分形式 ω, η ，我们规定它们的内积 $g(\omega, \eta)$ 为 0。这样我们就得到了 $\wedge^* T^* M$ 上的度量。

2.1 Hodge 星算子

简单来说, Hodge 星算子给出了 $\wedge^p T^*M$ 和 $\wedge^{n-p} T^*M$ 之间的比较自然的同构。

我们用 dV 或 dV_g 表示由 g 和 M 上的定向确定的体积形式, 也就是在定向局部坐标 (x^1, x^2, \dots, x^n) 下,

$$dV = \sqrt{\det(g_{ij})_{n \times n}} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

其中 $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$. 体积形式的含义实际上是说: $T_x M$ 里面的单位正方体的体积为 1, 也就是对 TM 的一组局部定向单位正交标架 e_1, e_2, \dots, e_n , 有

$$dV_x = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^n$$

其中 $\omega^1, \dots, \omega^n$ 为 e_1, \dots, e_n 的对偶基。

利用体积形式和微分形式丛上的度量, 我们可以定义 Hodge 星算子 \star :

定义 2.1 对 M 上任意一点 x 和任意的 $\omega_x \in \wedge^p T_x^* M$, 在 $\wedge^* T_x^* M$ 中存在唯一的元素 $\star \omega_x \in \wedge^{n-p} T_x^* M$, 使得

$$g(\eta_x, \omega_x) dV = \eta_x \wedge \star \omega_x, \forall \eta_x \in \wedge^* T_x^* M.$$

并且映射:

$$\begin{aligned} \star: \quad \wedge^p T_x^* M &\longrightarrow \wedge^{n-p} T_x^* M \\ \omega_x &\longmapsto \star \omega_x \end{aligned}$$

是线性的。我们将 \star 称为 *Hodge 星算子*。

我们来看一下 \star 的基本性质:

命题 2.1 设 M 为一个黎曼流形, 取开集 $U \subseteq M$ 上 TM 的任意一组定向单位正交标架 e_1, \dots, e_n , 并设它的对偶标架为 $\omega^1, \dots, \omega^n$. 那么有:

- $\omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_p}, 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$ 给出了 $\wedge^p T^* M$ 的一组局部单位正交标架。
- $\star 1 = dV, \star dV = 1$.
- 一般的, 对 $\omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_p}$, 取 j_1, j_2, \dots, j_{n-p} 使得 $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_p$ 构成 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列, 那么有

$$\star(\omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_p}) = \delta_{1 \cdots p(p+1) \cdots n}^{i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_{n-p}} \omega^{j_1} \wedge \omega^{j_2} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_{n-p}}$$

其中 $\delta_{12\dots n}^{k_1\dots k_n}$ 在排列 k_1, \dots, k_n 为奇排列时等于 -1 , 为偶排列时等于 1 , 在 k_1, \dots, k_n 不构成排列时等于 0 .

- \star 是微分形式丛之间的等距同构, 也就是 $g(\star\omega, \star\eta) = g(\omega, \eta)$.
- 对 $\omega \in \wedge^p T^*M$, 有 $\star\star\omega = (-1)^{p(n-p)}\omega$.

这些性质的证明从 \star 的定义以及 $dV = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n$ 可以很容易地得到。

2.2 余微分算子和 Beltrami-Laplace 算子

余微分算子的一种定义方式是:

定义 2.2 对一个 n 维黎曼流形 M , 对任意的 $0 \leq p \leq n$, 余微分算子 $\delta: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p-1}(M)$ 被定义为:

$$\delta := (-1)^p \star^{-1} d \star = (-1)^{n(p+1)+1} \star d \star$$

这一定义相当于下面的交换图表:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{(-1)^n \delta} & \cdots & \xrightarrow{(-1)^{p+1} \delta} & \Omega^p(M) & \xrightarrow{(-1)^p \delta} & \Omega^{p-1}(M) \xrightarrow{(-1)^{p-1} \delta} \cdots \xrightarrow{-\delta} \omega^0(M) \xrightarrow{\delta} 0 \\ \downarrow \star & & & & \downarrow \star & & \downarrow \star \\ 0 & \xrightarrow{d} & \cdots & \xrightarrow{d} & \Omega^0(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^{n-p}(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \omega^n(M) \xrightarrow{d} 0 \end{array}$$

另一个更加自然的定义方式是将 δ 定义为 d 的形式伴随。在有了微分形式丛上的度量之后, 在全体微分形式构成的空间 $\Omega^p(M)$ 上就可以定义内积:

$$\langle \omega, \eta \rangle = \int_M g(\omega, \eta) dV, \forall \omega, \eta \in \Omega^p(M).$$

这时候 d 在内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 下会有“伴随”算子, 而这一伴随算子恰好为 δ , 也就是下面的命题:

命题 2.2 对任意的 $\omega \in \Omega^{p-1}(M), \eta \in \Omega^p(M)$, 有:

$$\langle d\omega, \eta \rangle = \langle \omega, \delta\eta \rangle \tag{2}$$

证明 我们有：

$$\begin{aligned}
g(d\omega, \eta)dV &= (d\omega) \wedge \star\eta = d(\omega \wedge \star\eta) + (-1)^p \omega \wedge d\star\eta \\
&= d(\omega \wedge \star\eta) + \omega \wedge \star((-1)^p \star^{-1} d\star\eta) \\
&= d(\omega \wedge \star\eta) + g(\omega, \delta\eta)dV
\end{aligned}$$

关于两边在 M 上积分，就得到了式2.

有了余微分算子之后，我们可以定义 Beltrami-Laplace 算子：

定义 2.3 对一个黎曼流形 M ，称：

$$\Delta := d\delta + \delta d: \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$$

为 M 上的 Beltrami-Laplace 算子。容易看出， Δ 将 p 形式变为 p 形式。

对 M 上的微分形式 ω ，如果 $\Delta\omega = 0$ ，那么我们称 ω 为 M 上的调和形式。

这篇讲义里将全体 p 次调和形式构成的线性空间记为 $\mathcal{H}^p(M)$

这里我们列出余微分和 Δ 的主要性质：

命题 2.3 对一个黎曼流形 M ， e_1, \dots, e_n 为切丛的一组局部标架（未必为单位正交标架），它的对偶标架为 $\omega^1, \dots, \omega^n$ ，那么有：

- (1) $d^2 = 0, \delta^2 = 0$.
- (2) $\Delta = D^2$ ，其中 $D = d + \delta$ 被称为 Dirac 算子。
- (3) Δ 是对称算子，即 $\langle \Delta\omega, \eta \rangle = \langle \omega, \Delta\eta \rangle, \forall \omega, \eta \in \Omega^*(M)$.
- (4) $\forall \omega \in \Omega^*(M), \langle \Delta\omega, \omega \rangle = \langle d\omega, d\omega \rangle + \langle \delta\omega, \delta\omega \rangle \geq 0$ ，这表明 Δ 是正算子。
- (5) 对任意的 $\omega \in \Omega^*(M)$ ， $\Delta\omega = 0$ 的充要条件为 $d\omega = 0$ 且 $\delta\omega = 0$ ，也就是

$$\mathcal{H}^*(M) = \ker d \cap \ker \delta \tag{3}$$

(6) 设 ∇ 为 (M, g) 上的 Levi-Civita 联络，那么有

$$d\omega = \omega^i \wedge \nabla_{e_i} \omega, \quad \delta\omega = -\text{tr}_{12} \nabla\omega = -g^{ij} \cdot \iota_{e_i} \nabla_{e_j} \omega \tag{4}$$

其中 $\iota_v \omega$ 表示将向量 v 代入到线性形式 ω 的第一个分量， tr_{ij} 表示使用 g 将第 i, j 个指标缩并。

(7) 对光滑函数 $f \in C^\infty(M)$, 有 $\Delta f = -\text{tr}_{12} \nabla^2 f$, 这表明 Δ 可以被视为通常意义下 Laplace 算子的推广。

上面列举的大部分性质并不难证, 可以从定义直接推出。利用前五条性质可以得到主定理1.1的第一部分证明, 最后两条性质是为下一节的论述做准备。等式4的证明被留在了附录中。

2.3 Hodge 分解的证明: 第一部分

我们在这一节证明式1中的三个子空间两两正交。这可以从下面的几个等式很容易地得出来:

$$\begin{aligned}\langle d\omega, \delta\eta \rangle &= \langle d^2\omega, \eta \rangle = 0, \forall \omega, \eta \in \Omega^*(M). \\ \langle d\omega, \gamma \rangle &= \langle \omega, \delta\gamma \rangle = 0, \forall \omega \in \Omega^*(M), \gamma \in \mathcal{H}^*(M). \\ \langle \delta\eta, \gamma \rangle &= \langle \eta, d\gamma \rangle = 0, \forall \eta \in \Omega^*(M), \gamma \in \mathcal{H}^*(M).\end{aligned}\tag{5}$$

上面的最后两个式子实际上利用了式3.

3 Clifford 丛和 Dirac 算子

在这一节里, 我们会定义一个黎曼流形上的 Clifford 丛和其上的 Dirac 算子, 并展示之前定义的算子 $d + \delta$ 如何被实现为一个 Clifford 丛上的 Dirac 算子。这一节的主要目标是展示对 Hodge 分解的另一种理解方式, 跳过这一节对后面的阅读并没有太大影响。

3.1 Clifford 丛

定义 3.1 对一个黎曼流形 (M, g) , 对其上的一个带有内积 $h(\cdot, \cdot)$ 和与之相容的联络 ∇ 的向量丛 S , 我们称其为一个 *Clifford 丛*, 如果存在一个切丛 TM 在 S 上的作用

$$\begin{aligned}c: TM \otimes S &\longrightarrow S \\ v \otimes s &\longmapsto c(v)s\end{aligned}$$

满足:

(1) c 是一个丛同态。

(2) c 为 *Clifford* 乘积, 即

$$c(v)(c(v)s) = -g(v, v) \cdot s, \forall x \in M, v \in T_x M, s \in S_x.$$

(3) TM 的作用是反对称的, 也就是

$$h(c(v)s_1, s_2) + h(s_1, c(v)s_2) = 0, \forall x \in M, v \in T_x M, s_1, s_2 \in S_x.$$

(4) c 和 S 上的联络以及 M 上的 *Levi-Civita* 联络相容, 也就是

$$\nabla_v(c(X)s) = c(\nabla_v X)s + c(X)\nabla_v s, \forall v \in TM, X \in \Gamma(TM), s \in \Gamma(S).$$

这里 ∇ 同时表示 M 上的 *Levi-Civita* 联络和 S 上的联络, 并且我们允许 S 为一个复向量丛 (这时 S 上的内积为一个 *Hermite* 型)。

有时为了方便, 我们会将 $c(v)s$ 简记为 $v \cdot s$.

上面的第一个和第四个要求比较自然。第二个要求的等价说法是, 如果我们在每一点 x 处取一个 *Clifford* 代数 $\text{Cl}(T_x M, g)$, 得到一个以 Cl_n 为纤维的纤维丛 $\text{Cl}(TM, g)$, 那么这个纤维丛可以作用在 S 上, 它在 TM 上的限制恰好为 c .

如果记 Cl_n 中可逆元构成的乘法群为 Cl_n^\times , 那第三个要求相当于说, *Clifford* 乘法 $c: v \mapsto c(v) \in \text{End}(S)$ 实现了 Cl_n^\times 的李代数 (它恰好为 Cl_n) 到 $\mathfrak{so}(n)$ 或 $\mathfrak{su}(n)$ 的李代数同态。

例 3.1 我们展示一个特殊的 *Clifford* 丛: 带有自旋结构 (*spin structure*) 的黎曼流形上的旋量丛 (*spinor bundle*)。

对一个黎曼流形 (M, g) , 我们取以 *Clifford* 代数为纤维的纤维丛 $\text{Cl}(TM, g)$, 它的结构群为 $\text{Isom}(\text{Cl}_n)$. 如果它的结构群可以约化为 $\text{Spin}(n)$ (这时 $\text{Spin}(n)$ 在 Cl_n 上的作用是 $g \cdot v = gvg^{-1}$), 那么我们称这个流形具有一个自旋结构。这时候可以找到一个 $\text{Spin}(n)$ -主丛 P_{spin} 使得:

$$\text{Cl}(TM, g) \cong P_{\text{spin}} \times_{\text{Spin}(n)} \text{Cl}_n$$

对带有自旋结构的流形 M , 我们选取 *Clifford* 代数 Cl_n 的一个不可约表示 S , 这时 *Clifford* 代数和自旋群都可以作用在 S 上, 那么 M 上的旋量丛就被定义为

$$\mathcal{S} := P_{\text{spin}} \times_{\text{Spin}(n)} S$$

注意到, *Clifford* 代数 Cl_n 和自旋群 $\text{Spin}(n)$ 在 S 上的作用是相容的, 所以如果定义 $P_{\text{spin}} \times \text{Cl}_n$ 在 $P_{\text{spin}} \times S$ 上的作用为

$$(p, v) \cdot (p, s) = (p, v \cdot s), \forall p \in P_{\text{spin}}, v \in \text{Cl}_n, s \in S.$$

那么就有:

$$\begin{aligned} ((p, v)g) \cdot ((p, s)g) &= (p \cdot g, (g^{-1}vg) \cdot g^{-1}s) = (p \cdot g, g^{-1}(v \cdot s)) \\ &= ((p, v) \cdot (p, s))g, \forall p \in P_{\text{spin}}, v \in \text{Cl}_n, s \in S, g \in \text{Spin}_n \end{aligned}$$

也就是这一作用是 $\text{Spin}(n)$ -等变的, 进而它诱导了 $\text{Cl}(TM, g)$ 在 S 上的作用。这一作用恰好给出了 S 上的 *Clifford* 乘法。

更进一步, 我们可以选取 S 上的内积 h , 使得 Cl_n 的作用是反对称的。这样 h 会诱导 S 上的内积 h , 使得 *Clifford* 乘法是反对称的。如果再取 S 上由自旋联络诱导的联络, 那么这一联络和 *Levi-Civita* 联络会与 *Clifford* 乘法相容。

这样我们就知道, 带有自旋结构的流形 M 上的旋量丛是一个 *Clifford* 丛。

3.2 Dirac 算子

我们在这一节定义 Dirac 算子。

定义 3.2 对黎曼流形 (M, g) 上的 *Clifford* 丛 S , 其上的 *Dirac* 算子 D 被定义为下列一串映射的复合:

$$\Gamma(S) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes S) \xrightarrow{\sharp} \Gamma(TM \otimes S) \xrightarrow{c} \Gamma(S).$$

在取了 e_1, \dots, e_n 是 TM 的一组局部标架后, 设矩阵 g_{ij} 是 g 在这组标架下的坐标表示, g^{ij} 是 g_{ij} 的逆矩阵, 那么有

$$D s = g^{ij} e_i \cdot \nabla_{e_j} s, \forall s \in \Gamma(S)$$

我们来看 M 的切丛。因为 $\text{Cl}(V, g)$ 和 $\wedge^* V$ 之间有自然的线性同构, 所以由切丛生成的 Cl_n -丛 $\text{Cl}(TM, g)$ 的乘法给出了 $\wedge^* TM$ 上的 *Clifford* 乘法。我们取这个乘法的对偶:

$$c: \text{Cl}(TM, g) \otimes \wedge^* T^* M \longrightarrow \wedge^* T^* M$$

可以验证这一乘法是反对称的。此外, 流形 M 上的 *Levi-Civita* 联络自然地诱导了 $\text{Cl}(TM, g)$ 上的联络 ∇ 和微分形式丛 $\wedge^* T^* M$ 上的联络 ∇ 。根据 *Levi-Civita* 联

络与度量 g 相容可以证明微分形式丛 $\wedge^* T^* M$ 上的联络和 Clifford 乘法相容。这样我们就知道了

命题 3.1 $\wedge^* T^* M$ 是一个 Clifford 丛。

我们在这里直接给出 Clifford 丛 $\wedge^* T^* M$ 上的 Clifford 乘法：

$$c(X)\omega = v^\flat \wedge \omega - \iota_v \omega, \forall v \in TM.$$

这样我们可以写出 Dirac 算子在局部标架下的表示：设 TM 一组的局部标架为 e_1, \dots, e_n , 它的对偶标架为 $\omega^1, \dots, \omega^n$, 那么

$$c(e_i)\omega = e_i^\flat \wedge \omega - \iota_{e_i} \omega = g_{ik}\omega^k \wedge \omega - \iota_{e_i} \omega, \forall \omega \in \wedge^* T^* M.$$

根据上一节的式4, 就有：

$$\begin{aligned} D\omega &= g^{ij}c(e_i)\nabla_{e_j}\omega = g^{ij}g_{ik}\omega^k \wedge \nabla_{e_j}\omega - g^{ij}\iota_{e_i}\nabla_{e_j}\omega \\ &= \omega^j \wedge \nabla_{e_j}\omega - g^{ij}\iota_{e_i}\nabla_{e_j}\omega \\ &= d\omega + \delta\omega, \forall \omega \in \Omega^*(M). \end{aligned}$$

这就说明：

命题 3.2 对于 Clifford 丛 $\wedge^* T^* M$, 其上的 Dirac 算子 $D = d + \delta$.

从这里开始, 我们讨论一般的 Clifford 丛 S 上的 Dirac 算子的性质。

3.3 Dirac 算子的几何性质

我们在 $\Gamma(S)$ 上取内积：

$$\langle s_1, s_2 \rangle := \int_M h(s_1, s_2) dV, \forall s_1, s_2 \in \Gamma(S).$$

类比 $d + \delta$ 的性质, 我们证明:

命题 3.3 Dirac 算子 D 是对称的, 即

$$\langle Ds_1, s_2 \rangle = \langle s_2, Ds_1 \rangle, \forall s_1, s_2 \in \Gamma(S).$$

证明 在取了 TM 的一组局部单位正交标架 e_1, e_2, \dots, e_n 后, 我们有:

$$\begin{aligned} h(D s_1, s_2) &= \sum_i h(e_i \nabla_{e_i} s_1, s_2) = \sum_i -h(\nabla_{e_i} s_1, e_i \cdot s_2) \\ &= -\sum_i e_i(h(s_1, e_i \cdot s_2)) + \sum_i h(s_1, \nabla_{e_i}(e_i \cdot s_2)) \\ &= h(s_1, D s_2) - \sum_i e_i(h(s_1, e_i \cdot s_2)) + \sum_i h(s_1, (\nabla_{e_i} e_i) \cdot s_2) \end{aligned}$$

注意到下面的等式

$$g(X, Y) = h(s_1, Y \cdot s_2), \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$$

定义了一个全局向量场 X , 因此我们上面的式子变成了:

$$\begin{aligned} h(D s_1, s_2) - h(s_1, D s_2) &= \sum_i e_i(g(X, e_i)) + \sum_i g(X, \nabla_{e_i} e_i) \\ &= \sum_i g(\nabla_{e_i} X, e_i) = \text{div}(X). \end{aligned}$$

这样对两边积分, 并利用散度定理就知道, $\langle D s_1, s_2 \rangle = \langle s_2, D s_2 \rangle$.

Weitzenböck 公式给出了 Dirac 算子的另一个重要性质, 它说明了 Dirac 算子的平方几乎就是通常意义下的 Laplace 算子。

定理 3.1 对 Clifford 丛 S 上的 Dirac 算子 D , 在取了 TM 的一组局部标架 e_1, \dots, e_n 后有:

$$D^2 s = -\text{tr}_{12} \nabla^2 s + \frac{1}{2} g^{ik} g^{jl} e_i e_j \cdot \hat{R}(e_k, e_l) s \quad (6)$$

其中 $\hat{R}(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$ 是 S 上的曲率算子。

我们将这一定理的证明放在附录中。

4 插入: Sobolev 空间

对于跳过上一节的读者, 可以认为这一节以及之后内容中的向量丛 S 均为 $\wedge^* T^* M$.

这一节的主要作用是给出 Sobolev 空间的定义、Sobolev 不等式的陈述和 Rellich 引理的陈述, 并且展示如何定义流形上 Sobolev 空间。我们主要参考 [1].

4.1 Sobolev 空间和 Sobolev 嵌入

我们先给出 \mathbb{R}^n 里有界区域 U 上 Sobolev 空间的定义以及 Sobolev 嵌入。这一小节里所有定理和命题的证明可以在 [1] 中找到。

我们用 $C^\infty(U)$ 表示 U 上的全体光滑函数构成的空间, $C_0^\infty(U)$ 表示区域 U 上具有紧支集的光滑函数构成的空间, 用 $\partial^k f$ 表示 f 的 k 阶全导数, 对于一个指标或多重指标 i , 用 $\partial_i f$ 表示由 i 确定的偏导数或高阶偏导数。

我们用 $C^{k,\alpha}(U)$ 表示 U 上 k 次可微, 且全体 k 阶导数 α -Hölder 连续的函数空间。并且我们假定 $C^{k,\alpha}(U)$ 上带有一个范数:

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(U)} = \sup_{x,y \in U} \frac{\|\partial^k f(x) - \partial^k f(y)\|}{\|x - y\|^\alpha} + \sum_{i=1}^k \sup_{|i|=j} |\partial_i f|$$

我们用 $L^p(U)$ 表示 U 上全体 p 次可积函数构成的空间, 其上的范数为

$$\|f\|_{L^p(U)} = \left(\int_U \|f\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

一个基本的结论是, 在上面的范数下, $C^{k,\alpha}(U), L^p(U)$ 均为 Banach 空间。

我们先定义弱导数。

定义 4.1 对 \mathbb{R}^n 中的有界区域 U , 以及 U 上一个局部 L^1 的函数 f , 如果存在另一个局部 L^1 的函数 f_i , 使得

$$\int_U f \cdot \partial_i \phi = (-1)^{|i|} \int_U f_i \cdot \phi, \forall \phi \in C_0^\infty(U)$$

那么就称 f_i 是 f 的弱偏导数, 仍记为 $\partial_i f = f_i$.

如果 f 的全体不超过 k 阶的偏导数都存在, 那么我们称 f 是 k 阶弱可微的。

利用分部积分容易看出, 在 f 光滑时, 它的弱导数等于通常意义下的导数。弱导数相关的计算与通常意义的导数没有太大差别, 比如我们有 (弱化版本的) Leibniz 律:

$$\partial_i(f \cdot \phi) = (\partial_i f) \cdot \phi + f \cdot \partial_i \phi, \forall \phi \in C_0^\infty(U), 1 \leq i \leq n.$$

所有 k 阶弱可微, 且前 k 阶导数均 p 次可积的函数构成的空间就是 Sobolev 空间:

定义 4.2 对 $k \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$, 由它们确定的区域 U 上的 Sobolev 空间是一个赋范线性空间:

$$W^{k,p}(U) = \{f \in L^p(U) \mid \partial_i f \in L^p(U), \forall |i| \leq k\}$$

其上的范数为：

$$\|f\|_{W^{k,p}(U)} = \sum_{|i| \leq k} \|\partial_i f\|_{L^p(U)}, \forall f \in W^{k,p}(U).$$

在 $p = 2$ 时，我们会将 $W^{k,2}(U)$ 记为 $W^k(U)$.

我们在这里不加证明地列举 Sobolev 空间的一些基本事实：

命题 4.1 对 $k \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$ 和 \mathbb{R}^n 中区域 U , 有：

- (1) $W^{k,p}(U)$ 是 Banach 空间，即它对加法和数乘封闭，且在 $W^{k,p}$ -范数下是完备的。
- (2) $C^\infty(U)$ 在 $W^{k,p}(U)$ 中稠密。更进一步，如果 U 有 C^1 -边界，那么 $C^\infty(\bar{U})$ 在 $W^{k,p}(U)$ 中稠密。
- (3) 如果 U 有 C^1 -边界，那么 $W^{1,p}(U)$ 可以连续地延拓到 \mathbb{R}^n 上，也就是存在一个有界算子

$$E: W^{1,p}(U) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

使得 $(Ef)|_U = f, \forall f \in W^{1,p}(U)$.

上面的第二个性质使得我们很多时候可以将 Sobolev 空间的问题化归为光滑函数的问题。

我们这篇笔记里主要使用的是 Sobolev 嵌入的性质。

定理 4.1 (Sobolev 不等式) 对 \mathbb{R}^n 中有 C^1 边界的区域 U , 以及 U 上 Sobolev 空间 $W^{k,p}(U)$:

(i) 如果 $p < n/k$, 那么 $W^{k,p}(U)$ 中的元素都在 $L^{p^{*k}}(U)$ 中, 其中 p^{*k} 满足:

$$\frac{1}{p^{*k}} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

更进一步, 存在一个仅依赖于 n, k, p, U 的常数 C 使得:

$$\|f\|_{L^{p^{*k}}(U)} \leq C \|f\|_{W^{k,p}(U)}, \forall f \in W^{k,p}(U). \quad (7)$$

(ii) 如果 $p > n/k$, 那么 $W^{k,p}(U)$ 中的每个元素都可以在 $C^{k-[n/p]-1,\gamma}(\bar{U})$ 中找到一个代表元, 其中 γ 满足:

$$\gamma = \begin{cases} 1 - \left\{ \frac{n}{p} \right\}, & \text{if } \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}, \\ \text{any number in } (0, 1), & \text{if } \frac{n}{p} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

更进一步，存在一个仅依赖于 n, k, p, γ, U 的常数 C 使得：

$$\|f\|_{C^{k-[n/p]-1,\gamma}(\bar{U})} \leq C \|f\|_{W^{k,p}(U)}, \forall f \in W^{k,p}(U). \quad (8)$$

我们后面主要使用式8来提升解的正则性。我们还会用到的另一个定理是：

引理 4.1 (Rellich)

- (1) 对 \mathbb{R}^n 中有 C^1 边界的区域 U , 对 U 上 Sobolev 空间 $W^{k,p}(U)$, 用 \mathcal{X} 表示 $L^{p^*k}(U)$ 或 $C^{k-[n/p]-1,\gamma}(\bar{U})$ (依据 k, p 的取值), 那么 $W^{k,p}(U)$ 紧包含于 \mathcal{X} . 也就是对 $W^{k,p}(U)$ 中任意有界序列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 它有一个在 \mathcal{X} 中收敛的子列。
- (2) 对 \mathbb{R}^n 中有 C^1 边界的有界区域 U , 对 U 上 Sobolev 空间 $W^{k,p}(U)$ (其中 $1 \leq p \leq \infty$), 有 $W^{1,p}(U)$ 紧包含于 $L^{1,p}$. 更进一步, $W^{k+1,p}$ 紧包含于 $W^{k,p}$.

4.2 紧流形上的 Sobolev 空间

我们在这一小节使用两种方法定义紧流形上的 Sobolev 空间：一种是拼接局部图卡，另一种是使用协变导数和度量。第一种定义方式方便我们将 \mathbb{R}^n 中 Sobolev 空间的结论推广到向量丛的截面上，而第二种定义方式方便我们给出流形上的偏微分方程的解的估计。

定义 4.3 设 M 为紧黎曼流形，其上有向量丛 $\pi: S \rightarrow M$. 对 M 的一个有限开覆盖 $\{U_i\}_{i \in I}$, 满足：

- (i) 每个 U_i 与 \mathbb{R}^n 中某个有界、带光滑边界的区域微分同胚。
- (ii) S 在每个 \bar{U}_i 上有局部标架 $s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,r}$.

那么我们将 $W^{k,p}(M, S)$ 定义为：

$$W^{k,p}(M, S) = \{s: M \rightarrow S \mid s|_{U_i} = \sum_{1 \leq j \leq r} f^{i,j} s_{i,j}, f^{i,j} \in W^{k,p}(U_i), \forall i \in I\}.$$

其上的范数被定义为

$$\|s\|_{W^{k,p}(M,S)} = \sum_{i \in I} \sum_{1 \leq j \leq r} \|f^{i,j}\|_{W^{k,p}(U_i)} \quad (9)$$

这一定义相当于说， s 落在 Sobolev 空间中当且仅当 s 限制在每个 U_i 上的时候它的每个分量都在通常的 Sobolev 空间中。

使用类似的想法可以定义 M 上的 L^p 空间 $L^p(M, S)$ 和 Hölder 连续函数空间 $C^{k,\alpha}(M, S)$. 这样我们可以很容易看流形上的 Sobolev 不等式和 Rellich 引理仍然成立，此外，利用单位分解还可以知道，光滑截面 $\Gamma(S)$ 是稠密的。

流形上 Sobolev 空间的另一种定义方式是：

定义 4.4 设 (M, g) 为紧黎曼流形，其上有向量丛 $\pi: S \rightarrow M$. 取 S 上的内积 h 和与之相容的联络 ∇ ，那么 h 和 g 诱导了 $(\otimes^k T^* M) \otimes S$ 上的内积 g . 我们在光滑截面上定义范数：

$$\|s\|_{W^{k,p}(M,S)} = \sum_{0 \leq i \leq k} \left(\int_M g(\nabla^i s, \nabla^i s)^{\frac{p}{2}} dV \right)^{\frac{1}{p}}, \forall s \in \Gamma(S). \quad (10)$$

这时候我们可以将 $W^{k,p}(M, S)$ 定义为 $\Gamma(S)$ 关于上面的范数做完备化之后得到的空间。

这一定义明显只依赖于 M 和 S 的整体几何信息，而不依赖局部坐标的选取。

我们粗略解释一下如何证明这两个空间相同。

因为光滑截面 $\Gamma(S)$ 在两种定义方式里都是稠密的，所以我们只需要证明式9和10定义的范数对光滑截面而言是等价的。又因为我们只取了有限个开集 U_i ，所以只需要验证在每个 U_i 上，两种范数是等价的。

比如我们以 $W^{1,p}$ 范数为例。对 M 中一个局部图卡 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，使得 \bar{U} 上有 S 的局部标架 s_1, \dots, s_r ，可设 $\nabla s_i = d + \Gamma_{ij}^k dx^j \otimes s_k$. 对 $s|_U = \sum_j f^j s_j$ ，根据 \bar{U} 的紧致可知：

$$\begin{aligned} h(s, s)^{\frac{p}{2}} &= (h(s_i, s_j) f^i f^j)^{\frac{p}{2}} \sim \left(\sum_j |f^j|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \sim \sum_j |f^j|^p \\ g(\nabla s, \nabla s)^{\frac{p}{2}} &\sim \left(\sum_{k,i} |\partial_k f^i + \sum_j \Gamma_{jk}^i f^j|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \sim \sum_{k,i} |\partial_k f^i|^p + \sum_j |f^j|^p \\ dV &\sim dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \end{aligned}$$

其中 $f \sim g$ 表示存在一个仅依赖于 $n, r, k, p, s_1, \dots, s_r, U, \varphi$ 的正常数 C ，使得

$C^{-1}g \leq f \leq Cg$. 上面三个式子表明:

$$\begin{aligned} & \left(\int_M h(s, s)^{\frac{p}{2}} dV \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_M g(\nabla s, \nabla s)^{\frac{p}{2}} dV \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \sim \left(\sum_j \|f^j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k,i} \|\partial_k f^i\|^p + \sum_j \|f^j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \sim \sum_j \|f^j\|_{W^{1,p}(U)} \end{aligned}$$

也就是我们定义的两种范数等价。

使用同样的想法可以证明，在选取了 S 上的内积 h 之后，使用 h 可以给出 $L^p(M, S)$ 的不依赖图册的定义。

5 Dirac 算子的分析性质

我们从这一节回归到对 Dirac 算子的讨论。在这一节里，我们会使用分析的工具来研究 Dirac 算子。我们的第一步是将 Dirac 算子 D 延拓为平方可积截面 $L^2(M, S)$ 上的稠定 (densely defined) 无界自伴算子（在延拓的时候会不可避免地遇到 Sobolev 空间）。

接着我们会讨论 Dirac 算子的分析性质。我们会先给出所谓的 Gårding 不等式，它是 Dirac 算子最基础的先验估计。接着我们给出 Dirac 算子的闭包和它的自伴扩张。然后我们证明对主定理而言最重要的两个性质：第一个性质宣称，Dirac 算子具有正则性，也就是如果 Ds 是 k 次可微的，那么 s 是 $k+1$ 次可微的，我们可以使用这一性质证明解的光滑性；第二个性质宣称， $(1+D^2)^{-1}$ 是紧算子，这一性质在证明式 1 右侧三个空间张成左边时是不可或缺的。

如果从算子的谱的角度来看，上面的第一个性质实际上表明 Dirac 算子是本质自伴的，这样我们可以得到 Dirac 算子的谱分解。为了证明 Hodge 分解定理的剩下部分，我们只需要它的像是闭的，这就需要上面的第二个性质：我们可以利用紧算子的谱的性质证明 Dirac 算子的只有离散点谱，进而可以确定它的像。

这一节主要参考 [4] 第五章。这一节中或许会涉及到一些泛函分析的内容，例如算子的谱和谱分解、函数演算 (functional calculus) 等，读者可以参考 [2][5][6].

5.1 先验估计

我们先给出关于 S 的截面 s 的方程 $D s = u$ 的先验估计。

利用 S 上的内积，我们可以将 M 上的平方可积截面空间和 Sobolev 空间 W^k 定义为：

$$L^2(M, S) = W^0(M, S) = \{s : M \rightarrow S \mid \|s\|_{L^2} := \langle s, s \rangle < +\infty\}$$

$$W^k(M, S) = \text{completion of } \Gamma(S) \text{ w.r.t. } \|s\|_{W^k} = \left(\sum_{i \leq k} \|\nabla^i s\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

首先从 D 是一阶微分算子可以看出来的是：存在常数 C 使得

$$\|D s\|_{W^0} \leq C \|s\|_{W^1}, \forall s \in \Gamma(S). \quad (11)$$

结合 $\Gamma(S)$ 在 $W^1(M, S)$ 中稠密可以知道，Dirac 算子是 $W^1(M, S)$ 上的有界算子。此外我们也有反方向的不等式：

定理 5.1 (*Gårding 不等式*) 存在（仅依赖于 M, g 的）常数 C ，使得对任意光滑截面 $s \in \Gamma(S)$ ，有

$$\|s\|_{W^1} \leq C(\|s\|_{W^0} + \|D s\|_{W^0}) \quad (12)$$

证明 事实上，根据 Weitzenböck 公式和散度定理，有：

$$\begin{aligned} \|\nabla s\|_{W^0}^2 &= \langle -\Delta s, s \rangle = \langle D^2 s, s \rangle + \frac{1}{2} \left\langle g^{ik} g^{jl} e_i e_j \cdot \hat{R}(e_k, e_l) s, s \right\rangle \\ &\leq \|D s\|_{W^0}^2 + C \|s\|_{W^0}^2 \end{aligned}$$

由此即知不等式 12 成立。

我们可以将上面的结果推广到一般的 W^k ：

定理 5.2 (椭圆估计) 存在（仅依赖于 M, g, k 的）常数 C ，使得对任意光滑截面 $s \in \Gamma(S)$ ，有

$$\|s\|_{W^{k+1}} \leq C(\|s\|_{W^k} + \|D s\|_{W^k}) \quad (13)$$

证明 注意到有：

$$D \nabla_v s = \nabla_v D s + [\nabla_v, D] s, \forall v \in TM.$$

在取了 S 的一组局部标架 e_1, \dots, e_r 后又可以计算出：

$$[\nabla_v, D] s = g^{ij} \left(e_i \cdot \hat{R}(v, e_j) s + e_i \cdot \nabla_{[v, e_j]} s + \nabla_v e_i \cdot \nabla_{e_j} s \right)$$

也就是协变导数和 Dirac 算子的对易子是一个一阶微分算子，这样利用归纳法就可以得到：

$$\|\nabla s\|_{W^k} \leq C(\|\nabla D s\|_{W^{k-1}} + \|\nabla s\|_{W^{k-1}}) \leq C(\|s\|_{W^k} + \|D s\|_{W^k})$$

从这可以得到不等式 13.

5.2 Dirac 算子的扩张

这一小节里我们扩大 Dirac 算子的定义域，使它成为一个闭算子（也就是它的图像是闭的）。

对算子 $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ，我们用 $\text{Dom}(A)$ 表示 A 的定义域，它是 \mathcal{X} 的一个子空间（有可能为真子空间）。对两个算子 $A, A' : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ，如果 $\text{Dom}(A) \subseteq \text{Dom}(A')$ ，且 $A'|_{\text{Dom}(A)} = A$ ，则称 A' 包含 A （或 A' 是 A 的一个扩张），记为 $A \subseteq A'$.

我们会介绍两种扩张方式。第一种扩张方式被称为取闭包。对算子 $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ，我们称

$$\text{Graph}(A) = \{(x, Ax) \mid x \in \text{Dom}(A)\} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$$

为算子 A 的图或图像。

命题 5.1 对 Dirac 算子 D ，存在唯一的算子 \overline{D} ，使得它的图像恰好是 D 的图像的闭包 $\overline{\text{Graph}(D)}$ 。我们将 \overline{D} 称为 D 的闭包。

这一命题成立是因为 Dirac 算子是对称的。事实上，我们有下面的定理：

定理 5.3 对 Hilbert 空间 \mathcal{H} 上的无界对称算子 A ， A 一定存在唯一的闭包 \overline{A} .

这一结果的证明可以在 [6] 中找到。

对 Dirac 算子 D 的闭包而言，更重要的是下面的定理：

定理 5.4 将 D 自然地延拓到 $W^1(M, S)$ 上得到的算子 \tilde{D} 就是 \overline{D} .

证明 根据 $\Gamma(S)$ 在 $W^1(S)$ 中稠密以及 D 在 W^1 -范数下有界可以知道，

$$W^1(M, S) \subseteq \text{Dom}(\overline{D}).$$

我们只需要证明 $\text{Dom}(\overline{D})$ 被 $W^1(M, S)$ 包含。我们任取 $\text{Dom}(\overline{D})$ 中的截面 s ，那么存在一列光滑截面 $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ 使得：

$$s_m \xrightarrow{L^2} s, \quad D s_m \xrightarrow{L^2} D s, \quad \text{as } m \rightarrow \infty.$$

这时利用 *Gårding* 不等式 12 可以知道, $s_n \xrightarrow{W^1} s$, 根据 $W^1(M, S)$ 的完备性就可以知道 $s \in W^1(M, S)$. 这样就证明了 $\text{Dom}(\overline{D}) \subseteq W^1(M, S)$.

另一种扩张的方式利用了 Dirac 算子的对称性, 被称为自伴扩张。我们定义 D 的对偶 D^* 为满足下面等式的算子

$$\langle D^* s, \phi \rangle = \langle s, D \phi \rangle, \forall \phi \in \text{Dom}(D) = \Gamma(S).$$

并且

$$\text{Dom}(D) = \{s \in L^2(M, S) \mid \langle s, D \cdot \rangle \text{ is bounded}\}.$$

根据 Dirac 算子的对称性可以知道, D^* 一定包含 D . 此外, D^* 一定是闭的, 这是因为它的图像在 $V(s_1, s_2) = (-s_2, s_1)$ 的变换下变为 $\text{Graph}(D)^\perp$. 所以我们实际上有:

$$D \subsetneq \overline{D} \subseteq \overline{D}^* \subseteq D^*.$$

在这里我们并不知道是否有 $\overline{D} = \overline{D}^*$, 也就是 D 是否是本质自伴的 (essentially self-adjoint). 我们之后关于 Dirac 算子正则性的讨论会告诉我们, Dirac 算子的确是本质自伴的。

5.3 Dirac 算子的正则性

Dirac 算子的正则性是指:

定理 5.5 设 $s \in L^2(M, S)$, 满足 $D^* s = u \in L^2(M, S)$, 那么有 $s \in W^1(M, S)$, 且 $\overline{D}s = u$.

证明 因为 $\Gamma(S)$ 在 $L^2(M, S)$ 中稠密, 所以我们可以选取一列 L^2 意义下收敛到 s 的光滑截面 $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, 这样根据 D^* 的定义就知道:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle D s_m, \phi \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle s_m, D \phi \rangle = \langle s, D \phi \rangle = \langle D^* s, \phi \rangle, \forall \phi \in \Gamma(S).$$

这表明 $D s$ 弱收敛到 $D^* s$. 根据 *Mazur* 的定理, $D^* s$ 落在 $\{D s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ 的凸包的闭包内。更进一步, 对任何一个正整数 m , $D^* s$ 落在 $\{D s_n\}_{n \geq m}$ 的凸包的闭包内。这时对每个 m , 我们能选取一个光滑截面

$$s'_m = \sum_{i=m}^{m+N_m} \lambda_{mi} s_i,$$

满足 $\sum_{m \leq i \leq m+N_m} \lambda_{mi} = 1$, 且

$$\|D^* s - D s'_m\|_{L^2} = \left\| D^* s - \sum_{i=m}^{m+N_m} \lambda_{mi} D s_i \right\|_{L^2} \leq \frac{1}{m}$$

此外, 根据 s'_m 的定义还可以证明, $\{s'_m\}$ 在 $L^2(M, S)$ 中的极限仍然是 s .

这时 $\{s'_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ 和 $\{D s'_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ 均为 Cauchy 列。根据 Gårding 不等式 12 就知道: $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ 在 W^1 -范数下也是柯西列。又因为它在 L^2 意义下收敛到 s , 因此在 W^1 -的意义下的极限也只能为 s .

这样 s 一定在 $W^1(M, S)$ 中, 又利用 \bar{D} 在 W^1 -范数下有界可以知道 $\bar{D}s = u$.

这一定理实际上表明了 $\text{Dom}(D^*) \subseteq W^1(M, S) = \text{Dom}(\bar{D})$, 进而有 $D^* \subseteq \bar{D}$. 这样我们就知道:

命题 5.2 Dirac 算子 D 是本质自伴的, 也就是有 $\bar{D}^* = \bar{D}$.

一般的, 我们有:

命题 5.3 对 $s \in W^k(M, S)$, 如果 $\bar{D}s = u \in W^k(M, S)$, 那么 $s \in W^{k+1}(M, S)$.

证明 命题的证明可以靠归纳法得到。对 $\bar{D}s = u \in W^k(M, S)$ 两边取协变导数可以得到

$$\bar{D}\nabla_v s = \nabla u + [\bar{D}, \nabla_v]s$$

因为 ∇_v 和 $[\bar{D}, \nabla_v]$ 都是一阶微分算子, 上面式子的右边落在 $W^{k-1}(M, S)$ 中。这样根据归纳假设可以知道 $\nabla s \in W^k(M, S)$, 进而 $s \in W^{k+1}(M, S)$.

上面的命题和 Sobolev 嵌入结合起来, 我们就可以提升解的光滑性:

引理 5.1 (Weyl) 如果 $s \in L^2(M, S)$ 使得 $\bar{D}s = u \in \Gamma(S)$, 那么 $s \in \Gamma(S)$.

证明 因为 $\Gamma(S)$ 是任何 $W^k(M, S)$ 的子空间, 所以根据命题 5.3 可以知道对任意的 k , 截面 s 落在 $W^k(M, S)$ 中。这时候, 取 k 充分大 (比如取 $k > n + 2l$), 那么由 8 就知道: 对任意的 l , 截面 s 是 l 阶可微的。所以截面 s 是光滑的。

在这些定理的基础上, 我们有下面的推论:

推论 5.1 对 Clifford 丛 S 上的 Dirac 算子 D , 有 $\ker D = \ker \bar{D}$, 且 $\dim \ker D < +\infty$.

证明 显然有 $\ker D \subseteq \ker \bar{D}$. 又对 $s \in \ker \bar{D}$, 有 $D s = 0 \in \Gamma(S)$, 所以根据 Weyl 引理 5.1 可知 $s \in \Gamma(S)$, 这样 $\ker \bar{D} \subseteq \ker D$. 所以 $\ker D = \ker \bar{D}$.

下设 $\ker D$ 不是有限维的, 那么可以找到一列单位正交的截面 $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \ker D$. 利用 Gårding 不等式 12 得:

$$\|s_m\|_{W^1} \leq C(\|s_m\|_{L^2} + \|D s_m\|_{W^2}) = C, \forall m \in \mathbb{N}.$$

这样由 Rellich 引理 4.1 可知, $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ 有一个子列 (仍然记为 $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$), 它在 $L^2(M, S)$ 中为 Cauchy 列。但根据 $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ 的选取, 有:

$$\|s_{m_1} - s_{m_2}\|_{L^2} = \sqrt{2}, \forall m_1, m_2 \in \mathbb{N}.$$

这就产生了矛盾。

5.4 Dirac 算子相关的紧性

我们这一节的目标是证明下面的引理:

引理 5.2 存在自伴紧算子 $Q: L^2(M, S) \rightarrow W^1(M, S)$, 使得 $\text{im } Q \subseteq W^2(M, S)$, 且

$$s = (1 + \bar{D}^2)Qs, \forall s \in L^2(M, S).$$

如果使用谱分解定理和函数演算 (functional calculus) 的结论, 我们可以很快得到引理里的 Q 的存在性: 容易看出 $1 + \bar{D}^2$ 的谱均不小于 1, 因此它有逆映射:

$$Q: \text{im}(1 + \bar{D}^2) \longrightarrow \text{Dom}(1 + \bar{D}^2)$$

根据 Dirac 算子的正则性 (命题 5.3) 可以知道 $\text{Dom}(1 + \bar{D}^2) \subseteq W^2(M, S)$, 而根据 $\frac{1}{1+x^2}$ 有界可以知道 $\text{Dom}(Q) = L^2(M, S)$.

不过我们还是给出一种不需要谱分解定理的证明办法。

证明 因为 \bar{D} 的图像是闭的, 我们可以取从 $L^2(M, S) \times L^2(M, S)$ 到 $\text{Graph}(\bar{D})$ 的投影 P . 我们设

$$P(x, 0) = (Qx, \bar{D}Qx), \forall x \in L^2(M, S).$$

这时 $(x, 0) - (Qx, \bar{D}Qx)$ 与 $\text{Graph}(\bar{D})$ 正交, 也就是:

$$0 = \langle x - Qx, s \rangle - \langle \bar{D}Qx, D s \rangle, \forall s \in \Gamma(S).$$

这表明 $D^*(\bar{D}Qx) = x - Qx \in L^2(M, S)$, 因此根据 Dirac 算子的正则性(命题5.3)有 $\bar{D}Qx \in W^1(M, S)$, 进而 $Qx \in W^2(M, S)$. 结合 x 的任意性知, $\text{im } Q \subseteq W^2(M, S)$.

此外, 上面的等式相当于 $\langle x - (1 + \bar{D}^2)Qx, s \rangle = 0$, 这说明

$$x = (1 + \bar{D}^2)Qx, \forall x \in L^2(M, S).$$

又根据 *Gårding 不等式12*, 我们有:

$$\begin{aligned} \|x\|_{W^2}^2 &\leq C(\|x\|_{W^0}^2 + \|\bar{D}^2 x\|_{W^0}^2 + 2\|\bar{D}x\|_{W^2}^2) \\ &= C(\|x\|_{W^0}^2 + \|\bar{D}^2 x\|_{W^0}^2 + 2\langle x, \bar{D}^2 x \rangle) \\ &= C\|x + \bar{D}^2 x\|_{W^2} \end{aligned}$$

将上面不等式里的 x 全部替换为 Qs , 就有: $\|Qx\|_{W^2} \leq C\|x\|_{W^2}$. 也就是 Q 是 $L^2(M, S)$ 到 $W^2(M, S)$ 的有界算子。又根据 Rellich 引理4.1, $W^2(M, S)$ 紧包含于 $W^1(M, S)$, 所以作为 $L^2(M, S)$ 到 $W^1(M, S)$ 的算子, Q 是紧的。

事实上, 从上面的引理可以进一步得到 Dirac 算子的谱的性质。我们将这部分的讨论留在了附录中。

5.5 Hodge 分解的证明: 第二部分

我们在这一部分完成 Hodge 分解的所有证明。这时候 M 上的 Clifford 丛 S 为 $\wedge^* T^* M$, 相应的 Dirac 算子 D 为 $d + \delta$.

一个比较基本的观察是

$$\langle \bar{D}^2 s, s \rangle = \langle \bar{D}s, \bar{D}s \rangle = \|\bar{D}s\|_{L^2}^2, \forall s \in W^2(M, S).$$

所以 $\ker \bar{D}^2 = \ker \bar{D}$. 在 Hodge 分解里, 这相当于全体调和形式构成的空间 $\mathcal{H}^*(M)$ 就是 $\ker D$.

我们首先说明:

命题 5.4 全体调和形式构成的空间 $\mathcal{H}^*(M) = \ker D$ 是有限维的.

事实上, 在有了前面的观察之后, 这一结果就是命题5.1的推论。

最后我们只需要证明:

命题 5.5

$$\Omega^*(M) = \text{im } d + \text{im } \delta + \mathcal{H}^*(M) \quad (14)$$

使用 Dirac 算子的谱的相关结论可以很容易地得到上面的命题，不过我们还是给出一个绕开谱的性质的证明。

证明 容易看出

$$\text{im } \Delta \subseteq \text{im } d + \text{im } \delta$$

所以我们只需要证明 $\Omega^*(M) = \text{im } \Delta \oplus \ker \Delta$.

注意到对 $\omega \in L^2(S)$, 有

$$\begin{aligned} \omega \in (\text{im } \Delta)^\perp &\iff 0 = \langle \omega, \Delta\phi \rangle, \forall \phi \in W^2(M, S) \\ &\iff \Delta^* \omega = 0 \\ &\iff \Delta \in \ker \Delta. \end{aligned}$$

因此 $\text{im } \Delta$ 的正交补就是 $\ker \Delta$. 所以我们只需要证明 $\Omega^*(M) = \text{im } \Delta \oplus (\text{im } \Delta)^\perp$. 而这只需要证明 $\text{im } \bar{\Delta} \subseteq L^2(M, S)$ 是一个闭集。

我们先证明一个引理：

引理 5.3 存在常数 C 使得对于 $\omega \in (\ker \Delta)^\perp \cap W^2(M, S)$, 有

$$\|\omega\|_{L^2} \leq C \|\Delta \omega\|_{L^2}. \quad (15)$$

若不然, 则可以找到一列 $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq (\ker \Delta)^\perp$, 使得每个 ω_k 的 L^2 -范数都是 1, 但 $\Delta \omega_k \xrightarrow{L^2} 0$. 这时 $\omega_k + \Delta \omega_k$ 是有界的, 因此由引理 5.2 可知 $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 有一组 L^2 -收敛的子列 (仍然记为 $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$), 设它的极限为 ω . 那么有:

$$\langle \omega, \Delta \phi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \omega_k, \phi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \bar{\Delta} \omega_k, \phi \rangle = 0, \forall \phi \in \Gamma(S).$$

这表明 $\Delta^* \omega = 0$. 这样 $\omega \in \ker \Delta$.

另一方面, 由 $\omega_k \xrightarrow{L^2} \omega$ 和 $(\ker \Delta)^\perp$ 在 $L^2(M, S)$ 中是闭的可知, $\omega \in (\ker \Delta)^\perp$ 且 $\|\omega\|_{L^2} = 1$. 这样我们就得到了 $(\ker \Delta)^\perp \cap \ker \Delta$ 中的非零元素 ω , 这显然矛盾了。这样就证明了引理。

下面我们证明 $\text{im } \bar{\Delta}$ 是闭集。对 $\text{im } \bar{\Delta}$ 中的任何一个收敛子列 $\bar{\Delta} \eta_k \xrightarrow{L^2} s$, 因为 $\ker \Delta$ 是闭集, 所以我们可以选取 η_k 使得 $\eta_k \in (\ker \Delta)^\perp$.

这时候由引理 5.3 可以知道

$$\|\eta_k + \bar{\Delta} \eta_k\|_{L^2} \leq \|\eta_k\|_{L^2} + \|\bar{\Delta} \eta_k\|_{L^2} \leq (1 + C) \|\bar{\Delta} \eta_k\|_{L^2} \leq C', \forall k \in \mathbb{N}.$$

这样利用引理5.2可知 $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 有一个 L^2 -范数下的收敛子列（仍然记为 $\{\eta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ），设它收敛到 η . 那么有

$$\langle \eta, \Delta \phi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \eta_k, \phi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \overline{\Delta} \eta_k, \phi \rangle = \langle s, \phi \rangle, \forall \phi \in \Gamma(S).$$

这表明 $s = \Delta^* \eta = \overline{\Delta} \eta \in \text{im } \overline{\Delta}$. 这样就说明了 $\text{im } \overline{\Delta}$ 是闭集。

6 一些推论

我们在这一节里列举 Hodge 分解的一些简单推论。

推论 6.1 设 (M, g) 为一个定向闭黎曼流形，那么：

- (1) 对每一个 de Rham 上同调类 $[\omega] \in H_{DR}^p(M)$, 存在唯一的调和形式 $\tilde{\omega}$ 作为它的代表元。
- (2) $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^p = \dim_{\mathbb{R}} H_{DR}^p(M)$. 进而 M 的任意阶 de Rham 上同调群都是有限维线性空间。
- (3) (*Poincaré* 对偶) Hodge 星算子 \star 给出了上同调群的同构: $H_{DR}^p(M) \cong H_{DR}^{n-p}(M)$.

证明 对于 (1), 由定理1.1, 可设 $\omega = \tilde{\omega} + d\alpha + \delta\beta$, 其中 $\tilde{\omega} \in \mathcal{H}^p(M)$ 是调和形式。那么由 $d\omega = 0$ 可知:

$$0 = \langle d\omega, \beta \rangle = \langle d\delta\beta, \beta \rangle = \langle \delta\beta, \delta\beta \rangle$$

这样 $\delta\beta = 0$, 所以 $[\omega] = [\tilde{\omega} + d\alpha] = [\tilde{\omega}]$. 这就证明了 $\tilde{\omega}$ 的存在性。

又对 $[\omega]$ 的两个调和的代表元 $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'$, 由 $[\tilde{\omega}] = [\tilde{\omega}']$ 可知

$$\tilde{\omega} - \tilde{\omega}' \in \text{im } d \cap \mathcal{H}^*(M) = 0$$

所以 $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}'$. 这就证明了唯一性。

对于 (2), 由 (1) 的证明以及调和形式为闭形式可知, 我们有线性空间之间的同构:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^p(M) &\xrightarrow{\cong} H_{DR}^p(M) \\ \tilde{\omega} &\mapsto [\tilde{\omega}] \end{aligned}$$

这样 $\mathcal{H}^p(M)$ 和 $H_{DR}^p(M)$ 具有相同的维数。并且由 $\mathcal{H}^p(M)$ 是有限维线性空间可知 $H_{DR}^p(M)$ 也是有限维的。

对于 (3), 注意到对任意的 $\omega \in \Omega^p(M)$, 有

$$\begin{aligned}\star \Delta \omega &= \star(d\delta + \delta d)\omega = (-1)^{n(p+1)+1} \star d \star d \star \omega + (-1)^{n(p+2)+1} \star^2 d \star d \omega \\ &= ((-1)^{n(n-p+2)+1} \star d \star) d \star \omega + (-1)^{np+1+p(n-p)} d \star d \omega \\ &= \delta d \star \omega + d((-1)^{n(n-p+1)+1} \star d \star) \star \omega \\ &= \delta d \star \omega + d\delta \star \omega = \Delta \star \omega\end{aligned}$$

也就是 \star 和 Δ 交换, 所以 $\mathcal{H}^*(M) = \ker \Delta$ 是 \star 的不变子空间。这样我们就有一系列的同构:

$$H_{DR}^p(M) \cong \mathcal{H}^p(M) \xrightarrow{\star} \mathcal{H}^{n-p}(M) \cong H_{DR}^{n-p}(M).$$

这样就证明了 (3).

上面的 (2) 实际上给出了使用拓扑的工具证明 $\mathcal{H}^p(M)$ 是有限维线性空间的办法。我们可以取 M 的有限开覆盖, 然后用 Mayer-Vietoris 长正合列证明 $H_{DR}^p(M)$ 是有限维的, 这样和它线性同构的空间 $\mathcal{H}^p(M)$ 也是有限维的。

A 使用协变导数表示外微分和余微分

我们在这一部分给出4的计算过程。我们只需要对每个点 $x \in M$ 验证这一等式。这时, 我们可以取 x 处由指数映射诱导的局部坐标 (x^1, \dots, x^n) , 那么在 x 处有

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad \nabla \frac{\partial}{\partial x^i} = 0, \quad \nabla dx^j = 0, \quad \forall i, j$$

进而可知 $\nabla(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p})$ 在 x 处也为 0.

这样对 $\omega = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$, 在 x 处有:

$$\begin{aligned}d\omega &= (df) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} = \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ dx^k \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \omega &= dx^k \wedge \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\end{aligned}$$

比较这两个式子可知: $d\omega = dx^k \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \omega$.

余微分 δ 的计算要复杂一些。对 $\omega = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$, 不妨设 $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$. 我们取 $j_1 < j_3 < \cdots < j_{n-p}$ 使得 $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, k_{n-p}$ 构成 $1, 2, \dots, n$ 的排列。那么

$$\delta_{1 \cdots p(p+1) \cdots n}^{i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_{n-p}} = (-1)^{(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_p-p)} = (-1)^{\sum_{k=1}^p i_k + \frac{p(p+1)}{2}}$$

我们将上式的右边记为 $\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_p}$. 那么这时有:

$$\begin{aligned}
d \star \omega &= \epsilon_{i_1 \dots i_p} (d f) \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-p}} = \sum_{k=1}^p \epsilon_{i_1 \dots i_p} \frac{\partial f}{\partial x^{i_k}} dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-p}} \\
&= \sum_{k=1}^p (-1)^{i_k+k} \epsilon_{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_p} \frac{\partial f}{\partial x^{i_k}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{i_k}} \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_{i_k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-p}} \\
&= \sum_{k=1}^p (-1)^{p+k} \epsilon_{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_p} \frac{\partial f}{\partial x^{i_k}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{i_k}} \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_{i_k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-p}} \\
&= \sum_{k=1}^p (-1)^{p+k} \star \frac{\partial f}{\partial x^{i_k}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge d\hat{x}^{i_k} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}
\end{aligned}$$

其中 $j_{l_k} < i_k < j_{l_k+1}$. 在上面的式子两边作用 $(-1)^{n(p+1)+1} \star$, 可得:

$$\begin{aligned}
\delta \omega &= \sum_{k=1}^p (-1)^{p+k+n(p+1)+1+(p-1)(n-p+1)} \frac{\partial f}{\partial x^{i_k}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge d\hat{x}^{i_k} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\
&= \sum_{k=1}^p (-1)^k \frac{\partial f}{\partial x^{i_k}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge d\hat{x}^{i_k} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}
\end{aligned}$$

同时, 我们又有

$$\begin{aligned}
-\text{tr}_{12} \nabla \omega &= -\iota_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \right) \\
&= \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge d\hat{x}^{i_k} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\
&= \sum_{k=1}^p (-1)^k \frac{\partial f}{\partial x^{i_k}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge d\hat{x}^{i_k} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}
\end{aligned}$$

将这一等式和上一等式比较就知道 $\delta \omega = -\text{tr}_{12} \nabla \omega$.

B Weitzenböck 公式的证明

因为等式6左右两边均与标架的选取无关, 因此我们只需要证明 e_1, \dots, e_n 为单位正交标架的情形。也就是

$$D^2 s = -\text{tr}_{12} \nabla^2 s + \frac{1}{2} \sum_{i,j} e_i e_j \cdot \hat{R}(e_i, e_j) s \quad (16)$$

为了书写的方便, 在这一节里, 如果一个表达式里出现两个相同的指标 (不论

是上标还是下标), 我们都认为这表示对这一指标求和。我们有:

$$\begin{aligned}
D^2 s &= (e_i \cdot \nabla_{e_i})(e_j \cdot \nabla_{e_j} s) = e_i(\nabla_{e_i} e_j) \cdot \nabla_{e_j} s + e_i e_j \cdot \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} s \\
&= e_i e_k \cdot g(\nabla_{e_i} e_j, e_k) \nabla_{e_j} s + e_i e_j \cdot \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} s \\
&= \left(-g(\nabla_{e_i} e_j, e_i) \nabla_{e_j} s + \sum_{k \neq i} e_i e_k \cdot g(\nabla_{e_i} e_j, e_k) \nabla_{e_j} s \right) \\
&\quad + \left(-\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} s + \sum_{i \neq j} e_i e_j \cdot \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} s \right) \\
&= \left(g(e_j, \nabla_{e_i} e_i) \nabla_{e_j} s - \sum_{j \neq i} e_i e_j \cdot g(e_k, \nabla_{e_i} e_j) \nabla_{e_k} s \right) \\
&\quad + \left(-\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} s + \sum_{i \neq j} e_i e_j \cdot \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} s \right) \\
&= -(\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} s - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} s) + \sum_{i \neq j} e_i e_j \cdot (\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} - \nabla_{\nabla_{e_i} e_j}) s
\end{aligned}$$

其中第三个等号是将上一行的两个式子分别按照 $i = j$ 和 $i \neq j$ 拆成两部分, 下一个等号是因为联络 ∇ 和度量 g 相容 (同时我们还交换了指标 j, k), 最后一个等号是将所有 $i = j$ 的部分放到了一起, 将所有 $i \neq j$ 的部分放到了一起。

最后注意到有:

$$\begin{aligned}
\text{tr}_{12} \nabla^2 s &= \left(\nabla_{e_i} (\nabla s) \right) (e_i) = \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} s - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} s \\
\sum_{i \neq j} e_i e_j \cdot (\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} - \nabla_{\nabla_{e_i} e_j}) s &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} e_i e_j \cdot (\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} - \nabla_{\nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i}) s \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} e_i e_j \cdot (\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} - \nabla_{[e_i, e_j]}) s \\
&= \frac{1}{2} e_i e_j \cdot \hat{R}(e_i, e_j) s
\end{aligned}$$

将这两个等式代入上面的等式里, 就得到了式16.

C Dirac 算子的谱

关于 Dirac 算子的谱, 我们给出下面的定理。

定理 C.1 (1) Dirac 算子 D 的谱均为点谱, 且谱集 $\sigma(D)$ 为 \mathbb{R} 上的离散点集。

(2) 如果设 $\sigma(D) = \{\lambda_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, 那么有正交分解:

$$L^2(M, S) = \overline{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} E_{\lambda_i}}$$

其中 $E_{\lambda_i} \subseteq \Gamma(S)$ 是 λ_i 对应的特征子空间, 且 $\dim E_i < +\infty$.

证明 用 Q 表示引理 5.2 中的算子 Q . 那么根据紧自伴算子的谱理论可知: Q 除了 0 外的谱均为点谱, 且至多有一个聚点 0, 且 Q 的每个点谱 λ 给出了一个有限维特征子空间 E'_λ , 使得 $L^2(M, S) = \overline{\bigoplus_{\lambda \in \sigma(Q)} E'_\lambda}$. 在我们这一情况中, Q 有逆, 所以 0 不是点谱。

这样就有

$$(1 + \bar{D}^2)|_{E'_\lambda}: s \mapsto \frac{1}{\lambda}s, \forall \lambda \in \sigma(Q).$$

所以 $\sigma(1 + \bar{D}^2) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(Q)\}$ 是 \mathbb{R} 上的离散点集, 且对 $\lambda \in \sigma(1 + \bar{D}^2)$, 它对应的特征子空间是 $E'_{\lambda^{-1}}$.

又因为有 $\sigma(1 + \bar{D}^2) = 1 + \sigma(\bar{D})^2$, 所以

$$\sigma(\bar{D}) \subseteq \{\pm\sqrt{\lambda - 1} \mid \lambda \in \sigma(1 + \bar{D}^2)\}$$

是 \mathbb{R} 的离散点集。这样就证明了 (1).

对于 (2), 因为 \bar{D} 和 $1 + \bar{D}^2$ 交换, 所以 \bar{D} 保持每个 $E'_{\lambda^{-1}}$ 不变。在每个 $E'_{\lambda^{-1}}$ 上, 有:

$$(\lambda - 1) - \bar{D}^2 = 0$$

这推出每个 $E'_{\lambda^{-1}}$ 可以正交分解为 \bar{D} 的两个特征子空间 $E_{\sqrt{\lambda-1}}, E_{-\sqrt{\lambda-1}}$ 的直和。

结合 E'_λ 两两正交且它们的直和的闭包为 $L^2(M, S)$ 可知:

$$L^2(M, S) = \overline{\bigoplus_{\lambda \in \sigma(1 + \bar{D}^2)} E_{\sqrt{\lambda-1}}} \oplus \overline{\bigoplus_{\lambda \in \sigma(1 + \bar{D}^2)} E_{-\sqrt{\lambda-1}}} = \overline{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} E_{\lambda_i}}.$$

并且每个 E_{λ_i} 都是有限维的。此外, 利用 Dirac 算子的正则性很容易证明 $E_{\lambda_i} \subseteq \Gamma(S)$.

参考文献

- [1] Evans, L.C., 2022. Partial differential equations, Second edition. ed, Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society.
- [2] Schmüdgen, K., 2012. Unbounded Self-Adjoint Operators on Hilbert space, Graduate texts in mathematics. Springer New York.
- [3] Warner, F.W., 1983. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Graduate Texts in Mathematics. Springer New York.

- [4] 梅加强, 2013. 流形与几何初步. 科学出版社.
- [5] 张恭庆, 林源渠, 2021. 泛函分析讲义 (上册), 第 2 版. 北京大学出版社.
- [6] 张恭庆, 郭懋正, 1990. 泛函分析讲义 (下册), 第 1 版. 北京大学出版社.