Feynman 积分和 Feynman 图

陈铁钊

2025 年 2 月 23 日

目录

在之前参加的一个数学物理讨论班里，一个比较重要的话题是费曼积分，也就是计算下面的积分：

$$\hbar^{-\frac{d}{2}}\int_V e^{-S(x)/\hbar}\mathrm{d}x \tag{1}$$

这里 V 是一个 d 维的欧氏空间，$\mathrm{d}x$ 可以视作对应的体积形式，$\hbar$ 是一个常数。讨论班上提到了利用费曼图 (Feynman diagram) 计算这个积分是一个很重要的技巧，但我对这个积分为何重要一直不求甚解，也不知道为什么要考虑这种形式的积分。在某天听一位朋友讲了量子力学里的路径积分之后，突然发现一切都刚好可以说通：在计算路径积分的时候会出现积分 (1)，而使用费曼图正好可以计算出它的值。

这篇笔记就是用来简单记录一下如何得到路径积分以及如何用费曼图计算费曼积分。虽然我个人希望这篇笔记的阅读门槛能尽可能低，但受文章长度和内容难度的限制，无法保证

所有人都能读懂。想要轻松读懂这篇笔记的话，需要熟悉高等数学（微积分、多元微积分和线性代数）中的概念、记号以及现代数学的一些表述，此外需要听说过傅里叶变换的定义和基本性质。此外，读者在阅读的时候可以适当跳过一些内容，以便迅速抓住推导的重点。

以防万一，在开始讨论之前，我们说明一下记号：

$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{C}$	复数集
E^d	标准 d 维欧氏空间，即集合 $\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_d)\mid x_j\in\mathbb{R}\}$，其上有内积 $x\cdot y=\sum_{j=1}^d x_jy_j$
$\lvert x\rvert$	$x=(x_1,\ldots,x_d)$ 的长度，即 $\lvert x\rvert=\sqrt{x\cdot x}=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_d^2}$
$\dot\gamma(t)$	一条曲线 γ 在 t 时刻的速度，即 $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t)$
$\frac{\partial}{\partial u}$	关于自变量 u 求偏导数
∂_j	（对一个 n 元函数）关于第 j 个变量求偏导数
$\exp(A),\exp\{A\}$	即 e^A

表 1: 记号

1 从 Schrönger 方程到路径积分

几乎所有的量子力学教材都是从 Schrönger 方程开始的：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\hat{H}\psi \tag{2}$$

这里，$\hbar$ 是 Planck 常数，i 是虚数单位，$\psi=\psi(x,t)$ 是将 $E^d\times\mathbb{R}$ 映到 $\mathbb{C}$ 的函数，$\hat{H}$ 被叫做哈密顿算符 (Hamitonian operator)，大部分时候 $\hat{H}$ 会被取成

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V(x,t).$$

这里 m 是一个常数，$\Delta=\sum_{j=1}^d\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ 是欧氏空间 E^d 上的拉普拉斯算子，$V(x,t)$ 是一个实数值的函数。所以大部分时候，Schrönger 方程会被写成

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+V(x,t)\psi$$

和大部分量子力学教材一样，我们不说明这个方程是如何得到的，只是简单解释一下这个方程的含义。我们假定空间是平直、均匀的，换言之，空间中每个点可以用 d 个坐标 $x=(x_1,\ldots,x_d)$ 表示。$\psi(x,t)$ 的自变量 x,t 分别代表位置和时间，粒子在 t 时刻出现在位置 x 处的概率密度恰好是 $|\psi(x,t)|^2$. 随着粒子的运动，它的概率分布会随着时间变化，粒子概率分

布的变化规律由 Schrönger 方程描述。Schrönger 方程中的量 $m, V(x,t)$ 可以靠它们的物理意义确定：m 被理解为粒子的质量，V 被称为势能函数，它由粒子在怎样的势场里运动确定。

一个不太严谨的例子是，围绕质子旋转的电子 e。我们假定质子不运动，始终处于原点。这时候，电子处于质子的电势场 $V(x)=\frac{C}{|x|}$ 中，所以电子满足的 Schrönger 方程是：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\psi + \frac{C\psi}{|x|}$$

其中 m_e 是电子的质量。

为了方便，我们只讨论哈密顿算子 $\hat{H}$ 与时间无关的情形，在 $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V$ 时，相当于 V 和时间无关（比如刚刚给出的电子的例子）。

1.1 形式求解 Schrönger 方程

这一部分我们将形式地求解 Schrönger 方程，这一部分的推导旨在解释清楚事情的来龙去脉，不一定是严格的数学推导。在一些量子力学相关的书籍（如 [3]）中可以找到详细且严格的推导过程。

1.1.1 玩具模型

我们先来看一个不那么相关的例子。我们试图找一组函数 $x=(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))^T$（这里将 x 视作列向量），使得它们满足 [1]：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = A\cdot x(t) \tag{3}$$

这里 A 是一个 $n\times n$ 的常值矩阵。我们求解的办法是，构造这样一个矩阵：

$$e^{tA} = 1 + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \frac{(tA)^3}{3!} + \cdots + \frac{(tA)^n}{n!} + \cdots \tag{4}$$

可以证明，这里的无穷求和是有意义的。我们可以计算一下 e^{tA} 的导数：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tA} &= A + 2\frac{tA^2}{2!} + 3\frac{t^2A^3}{3!} + \cdots + n\frac{t^{n-1}A^n}{n!} + \cdots \\ &= A\cdot(1 + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \frac{(tA)^3}{3!} + \cdots + \frac{(tA)^n}{n!} + \cdots) \\ &= A\cdot e^{tA}\end{aligned}$$

所以 $x(t)=e^{tA}\cdot x(0)$ 是方程 (3) 的一个解。实际上，方程的解只可能是上面的样子。

这里让我们停一下，来看一下 e^A 的性质。首先 A 除了选成矩阵，还可以取成一个线性映射 $T:V\to V$. 这时候，$T^2:V\to V$ 就是映射 $T^2(v)=T\circ T(v)=T(T(v))$，对一般的 n，T^n 也可以类似定义。这样等式 (4) 的右边仍然是有意义的，所以我们也可以定义 e^T. 这种推广是必要的，因为哈密顿算子 $\hat{H}$ 就是一个线性映射。此外，我们还有这样一个结论：

[1]满足下面要求的方程被称作常系数线性常微分方程，是常微分方程曾经的研究对象。

命题 1 对于两个矩阵或者有限维空间上的线性映射 A, B，有下面的等式：

$$e^{A+B} = \lim_{N\to\infty} \left(e^{\frac{A}{N}} e^{\frac{B}{N}}\right)^N$$

这个等式是在研究李群时发现的，或许对没有了解过李群或量子理论的人来说，这个性质的出现有些突兀，但这确实是一个非常基本的结论[2]。

1.1.2 用指数表示 Schrönger 方程的解

我们来看 Schrönger 方程的情形。Schrönger 方程是：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi$$

两边除以 $i\hbar$ 得到：

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}\psi$$

类似前面的情况，我们有形式解：

$$\psi_t = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}\right)\psi_0$$

这里的下标 t 表示时间，也就是 $\psi_t(x) = \psi(x,t)$. 我们在这将 $\hat{H}$ 取成 $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x,t)$，所以这个方程的解可以写成：

$$\psi_t = \exp\left\{\frac{i\hbar}{2m}t\Delta - \frac{i}{\hbar}tV(x)\right\}\psi_0.$$

在命题1中，取 $A = \frac{i\hbar}{2m}t\Delta, B = -\frac{i}{\hbar}tV(x)$ 得：

$$\psi_t = \lim_{N\to\infty}\left(\exp\left(\frac{i\hbar t}{2mN}\Delta\right)\exp\left(-\frac{it}{\hbar N}V(x)\right)\right)^N\psi_0 \tag{5}$$

我们接下来的目标就是化简表达式

$$\left(\exp\left(\frac{i\hbar t}{2mN}\Delta\right)\exp\left(-\frac{it}{\hbar N}V(x)\right)\right)^N\psi_0 \tag{6}$$

为了叙述的方便，我们把这个表达式叫一个渐进解。

1.2 从渐进解到路径积分

这一小节会说明如何将渐进解可以整理成所谓的路径积分的形式。

[2]这个结论可以被用于证明矩阵李群的李代数是加法封闭的。

1.2.1 傅里叶变换与拉普拉斯算子

为了化简上一小节最后的公式，我们需要一些傅里叶变换的工具。为了降低阅读的难度，我们简单介绍一下傅里叶变换的内容。Stein 的书 [4] 非常详细地讨论了傅里叶变换，如果有必要的话，读者可以在其中查阅相关的证明。

对于一个函数 $f : E^d \to \mathbb{C}$，我们定义它的傅里叶变换为：

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{E^d} f(x)e^{-2i\pi\xi\cdot x}\mathrm{d}x, \forall \xi \in E^d.$$

严格来说，我们只能对一部分函数定义傅里叶变换，不过对于形式求解 Schrönger 方程来说，知道表达式就够了。

为了从变换之后的函数得到原先的函数，我们还需要傅里叶逆变换：

$$g^\vee(x) = \int_{E^d} \widehat{g}(\xi)e^{2i\pi\xi\cdot x}\mathrm{d}\xi, \forall x \in E^d.$$

下面是傅里叶变换的一些基本性质：

命题 2 *假设 $f, g : E^d \to \mathbb{C}$ 是足够好的函数（比如具有紧支集的光滑函数）。那么有*

- $(\widehat{\lambda f + \mu g}) = \lambda\widehat{f} + \mu\widehat{g}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$
- $f = (\widehat{f})^\vee = \widehat{(f^\vee)}$
- 若 $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$，则 $\widehat{f}(\xi_1, \xi_2) = \widehat{f_1}(\xi_1)\widehat{f_2}(\xi_2)$.
- $\widehat{\partial_j f}(\xi) = 2i\pi\xi_j\widehat{f}(\xi), \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d), j = 1, 2, \ldots, d$
- $(\widehat{x_j f(x)})(\xi) = \frac{i}{2\pi}\partial_j\widehat{f}(\xi), x = (x_1, \ldots, x_d), j = 1, 2, \ldots, d$
- $\widehat{f \cdot g} = \widehat{f} * \widehat{g}, \widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$

这里 $f * g$ 表示 f 与 g 的卷积，也就是

$$f * g(x) = \int_{E^d} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y = \int_{E^d} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$$

我们略去这些性质的证明，它们都可以直接由傅里叶变换的定义得到。这些性质里比较值得注意的是第三个和第四个。这两个性质可以将有关函数微分的问题转化为乘除多项式的问题，让我们能很方便地处理函数的微分。

为了给后面的步骤做准备，我们来看两个例子：

例 1 取函数 $f_0(x)=e^{-ax^2}, x\in\mathbb{R}, a>0$，我们来计算一下它的傅里叶变换：

$$\begin{aligned}\widehat{f_0}(\xi)&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}e^{-2i\pi\xi x}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2i\pi\xi}\left(e^{-ax^2}e^{-2i\pi\xi x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+2a\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-ax^2}e^{-2i\pi\xi x}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{ia}{\pi\xi}(\widehat{xf_0(x)})(\xi)=-\frac{a}{2\pi^2\xi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\widehat{f_0}(\xi).\end{aligned}$$

一个已知的结论（即高斯积分）是，$\widehat{f}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$，所以 $\hat{f}$ 满足方程：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\widehat{f}(\xi)=-\frac{2\pi^2\xi}{a}\widehat{f}(\xi)\\\widehat{f}(0)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\end{cases}$$

解微分方程可以得到：$\widehat{f}(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-\frac{\pi^2\xi^2}{a}\right)$.

在 E^d 中，我们可以考虑 $f(x)=e^{-a|x|^2}=\prod_{j=1}^d f_0(x_j), a>0$，这里 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_d)$. 这时候有：

$$\widehat{f}(\xi)=\prod_{j=1}^d\widehat{f_0}(\xi_j)=\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{d}{2}}\exp\left(-\frac{\pi^2|\xi|^2}{a}\right)\tag{7}$$

例 2 用 Δ 表示 E^d 中的拉普拉斯算子,即 $\Delta=\partial_1^2+\partial_2^2+\cdots+\partial_d^2$. 对充分好的函数 $f:E^d\to\mathbb{C}$，根据傅里叶变换的性质，有：

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta f}(\xi)&=\widehat{\partial_1^2 f}(\xi)+\cdots+\widehat{\partial_d^2 f}(\xi)\\&=(2i\pi\xi_1)^2\widehat{f}(\xi)+\cdots+(2i\pi\xi_d)^2\widehat{f}(\xi)=-4\pi^2|\xi|^2\widehat{f}(\xi)\end{aligned}$$

所以我们可以知道，对任意的数 a，有

$$\begin{aligned}\widehat{e^{a\Delta}f}(\xi)&=\widehat{f}(\xi)+\frac{\widehat{a\Delta f}(\xi)}{1!}+\frac{(\widehat{a^2\Delta^2 f})(\xi)}{2!}+\cdots+\frac{(\widehat{a^n\Delta^n f})(\xi)}{n!}+\cdots\\&=\widehat{f}(\xi)+\frac{-4a\pi^2|\xi|^2}{1!}\widehat{f}(\xi)+\frac{(-4a\pi^2|\xi|^2)^2}{2!}\widehat{f}(\xi)+\cdots+\frac{(-4a\pi^2|\xi|^2)^n}{n!}\widehat{f}(\xi)+\cdots\\&=\exp\left(-4a\pi^2|\xi|^2\right)\cdot\widehat{f}(\xi)\end{aligned}\tag{8}$$

我们接下来化简渐进解。

1.2.2 渐进解的化简

我们先考虑表达式

$$\exp\left(\frac{i\hbar t}{2mN}\Delta\right)\exp\left(-\frac{it}{\hbar N}V(x)\right)\psi_0$$

这个式子被认为是波函数 ψ_t 在 $t_1=t/N$ 时刻的近似解。

$\exp\left(-\frac{it}{\hbar N}V(x)\right)\psi_0$ 是容易理解的，它就是通常意义的指数乘上 ψ_0. 主要的困难在于算出 $\exp\left(\frac{i\hbar t}{2mN}\Delta\right)$ 作用在一个函数 $f(x)$ 上会得到什么。为了记号的方便，我们将 $\frac{i\hbar t}{2mN}\Delta$ 记为 $\hat{H}_0$.

根据式子 (8)，我们可以作傅里叶变换，写出 $\widehat{e^{\hat{H}_0}f}(\xi)$ 的表达式：

$$\exp\left\{-\frac{2i\pi^2\hbar t}{mN}|\xi|^2\right\}\cdot\widehat{f}(\xi)$$

在作傅里叶逆变换之后得到：

$$\begin{aligned}
e^{\hat{H}_0}f(x) &= \left(\exp\left\{-\frac{2i\pi^2\hbar t}{mN}|\xi|^2\right\}\cdot\widehat{f}(\xi)\right)^{\vee}(x) = \left(\exp\left\{-\frac{2i\pi^2\hbar t}{mN}|\xi|^2\right\}\right)^{\vee}(x) * f(x)\\
&= \left(\frac{imN}{2\pi\hbar t}\right)^{\frac{d}{2}}\exp\left\{\frac{imN|x|^2}{2\hbar t}\right\} * f(x)\\
&= C\hbar^{-\frac{d}{2}}\int_{E^d}\exp\left\{\frac{imN|x-y^0|^2}{2\hbar t}\right\}\cdot f(y^0)\mathrm{d}y^0
\end{aligned}$$

这里 y^0 是一个向量，0 是上标，$C=C(m,N,t)$ 是仅依赖于 m,N,t 的常数。上面的推导中，第二个等号是因为函数卷积在傅里叶变换后会变成函数乘积，第三个等号用到了式子 (7)。我们再把 f 选成 $\exp\left(-\frac{it}{\hbar N}V(x)\right)\psi_0$，就得到了在时刻 t/N 时波函数的近似解：

$$\psi_{t/N}(x)\approx C\hbar^{-\frac{d}{2}}\int_{E^d}\exp\left\{\frac{imN|x-y^0|^2}{2\hbar t}-\frac{it}{\hbar N}V(y^0)\right\}\cdot\psi_0(y^0)\mathrm{d}y^0$$

对上面的式子的右边再作用 $\exp\left(\frac{i\hbar t}{2mN}\Delta\right)\exp\left(-\frac{it}{\hbar N}V(x)\right)$，可以算出：

$$\begin{aligned}
&\left(\exp\left(\frac{i\hbar t}{2mN}\Delta\right)\exp\left(-\frac{it}{\hbar N}V(x)\right)\right)^2\psi_0(x)\\
&= C\hbar^{-d}\int_{E^d\times E^d}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m|x-y^1|^2}{2t/N}+\frac{m|y^1-y^0|^2}{2t/N}-\frac{t}{N}V(y^1)-\frac{t}{N}V(y^0)\right)\right\}\mathrm{d}y^0\mathrm{d}y^1
\end{aligned}$$

依此往下计算可以知道，式子 (6) 最终可以写成：

$$C\hbar^{-\frac{Nd}{2}}\int_{E^d\times\cdots\times E^d}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{m|y^j-y^{j-1}|^2}{2(t/N)^2}-V(y^{j-1})\right)\cdot\frac{t}{N}\right\}\mathrm{d}y^0\mathrm{d}y^1\cdots\mathrm{d}y^{N-1}$$

其中 $y^N=x$，$C=C(m,N,T)$ 是仅依赖于 m,N,T 的常数。所以 Schrönger 方程的解就是：

$$\psi_t(x)=\lim_{N\to\infty}C\hbar^{-\frac{Nd}{2}}\int_{E^d\times\cdots\times E^d}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{m|y^j-y^{j-1}|^2}{2(t/N)^2}-V(y^{j-1})\right)\cdot\frac{t}{N}\right\}\mathrm{d}y^0\mathrm{d}y^1\cdots\mathrm{d}y^{N-1} \tag{9}$$

我们到这里歇一口气，看看最后得到的式子。我们记 N 个 E^d 的乘积是 V，那么上面的式子实际上是这样一个积分：

$$C\hbar^{-\frac{Nd}{2}}\int_V e^{-\tilde{S}_x(y^0,y^1,\ldots,y^{N-1})/\hbar}\mathrm{d}y^0\mathrm{d}y^1\cdots\mathrm{d}y^{N-1}$$

这个积分和本文开头提到的费曼积分 (1) 只相差一个常数。

1.2.3 路径积分

上面的表达式 (9) 距离得出路径积分只差一点了，我们只需要整理一下记号，弄清楚这个式子到底是什么意思。对整数 $0 \leqslant j \leqslant N$，记 $t_j = \frac{jt}{N}$，所以 $\frac{t}{N} = t_{j+1} - t_j$. 代入到式子 (9) 中，得到：

$$\begin{aligned}&\psi_t(x)\\&= \lim_{N\to\infty} C\hbar^{-\frac{Nd}{2}} \int_{E^d\times\cdots\times E^d} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{m\left|y^j - y^{j-1}\right|^2}{2(t_j - t_{j-1})^2} - V(y^{j-1})\right)(t_j - t_{j-1})\right\}\mathrm{d}y^0\cdots\mathrm{d}y^{N-1}\end{aligned}$$

在上面的积分中，选定一组 $Y = (y^0, y^1, \ldots, y^N)$ 之后，用线段连接 $(y^j, t_j), (y^{j-1}, t_{j-1})$，就得到了一条在 t_j 时刻经过 y^j 的道路 $\gamma_Y : y^0 \to y^1 \to \cdots \to y^N = x$，所以上面的积分相当于对所有这样的道路 γ_Y 求和，注意到在原来的积分中，e 的指数恰好是一个黎曼和，所以 (9) 右侧的积分变成了：

$$\int_{\text{all }\gamma_Y} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2}m\left|\dot{\gamma_Y}(t_{j-1})\right|^2 - V(\gamma_Y(t_{j-1}))\right)(t_j - t_{j-1})\right\}$$

再令 N 趋于无穷，也就是将 0 到 t 的时间无限细分，那么 γ_Y 会取遍所有以 x 为终点的道路，e 的指数也会变成一个积分：

$$S(\gamma) = \int_0^t \frac{1}{2}m\left|\dot{\gamma}(u)\right|^2 - V(\gamma(u))\mathrm{d}u$$

所以 Schrönger 方程的解可以表示为：

$$\psi_t(x) \sim \int_{\text{all paths }\gamma\text{ with }\gamma(t)=x} e^{\frac{i}{\hbar}S(\gamma)} \tag{10}$$

这就是所谓的路径积分。

注 1 $\frac{1}{2}m\left|\dot{\gamma}(u)\right|^2 - V(\gamma(u))$ 是具有物理意义的。它正好是经典力学中的拉格朗日量，拉格朗日量在沿着一条曲线积分之后得到的值，也就是我们定义的 $S(\gamma)$ 被叫做这条曲线的作用量。因此费曼路径积分实际上揭露了这样一个事实：波函数在 t 时刻在位置 x 处的值是所有终点为 x 的曲线的作用量的指数的“总和”。

2 从费曼积分到费曼图

这一节将处理费曼积分 (1)，我们将展示这个积分如何用图来表示。这一部分我们始终认为 0 是 $S(x)$ 的极小值点，且 $S(x)$ 在 0 处的二阶导数非退化。我们最终会得到这样一个表达式：

$$\hbar^{-\frac{d}{2}}\int_V e^{-S(x)/\hbar}\mathrm{d}x = \sum_{\text{图}\Gamma}\Gamma\text{的费曼振幅}\times\text{系数}$$

这一部分的内容参考的是 [1]。由于个人原因，这一部分我们略去很多定义，假定读者已经掌握了张量相关的知识。

2.1 一些图论知识

在数学里，一个图 Γ 由两个集合 $V(\Gamma), E(\Gamma)$ 构成。$V(\Gamma)$ 中是一些点，被称为 Γ 的顶点集，$E(\Gamma)$ 由连接两个顶点的边构成，被称为 Γ 的边集。我们这里允许两点之间有多条边，也允许一条边的两个顶点是同一个点。我们记

$$b(\Gamma) = |E(\Gamma)| - |V(\Gamma)|.$$

对于图 Γ 中的一个点 v，如果从 v 出发有 k 条边，那么我们称 v 的度是 k，一般记为 $d(v) = k$. 靠算两次可以证明，对任意的图 Γ，有：

$$\sum_{v \in V(\Gamma)} d(v) = 2|E(\Gamma)|$$

我们还可以考虑图之间的映射。如果一个从 Γ 到自身的映射 f 保持点、边的连接关系，且存在逆映射，那我们称其为 Γ 的自同构，一个图 Γ 的所有自同构构成的集合被记为 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$. 一个微妙的地方是，为了和后面的计算相容，如果一条边的两个顶点相同，它会有两个自同构（而不是通常图论中的一个自同构）。

2.2 Wick 定理

我们需要一个引理以及一些记号。对正偶数 N，我们用 $[N]$ 表示集合 $1, 2, \ldots, N$。我们称集合族 σ 是 $[N]$ 中的配对，如果 $[N]$ 是 σ 中元素的不交并，且 σ 中的元素都是二元集合。我们也可以把一个配对 σ 看作 $[N]$ 上的等价关系。用 Π_N 表示 $[N]$ 的全体配对。容易验证，Π_N 的元素个数是 $\frac{N!}{2^{N/2}(N/2)!}$. 然后我们可以陈述下面的引理：

引理 1（*Wick* 定理）*设 N 为正整数数，V 是一个 d 维线性空间，B 是 V 上的正定二次型，那么对任意 N 重线性函数 B_N，当 N 为偶数时有*

$$\int_V B_N(x, x, \ldots, x) e^{\frac{-B(x,x)}{2}} \sqrt{\det B} \mathrm{d}x = (2\pi)^{d/2} \sum_{\sigma \in \Pi_N} \Big(\prod_{i \in [N]/\sigma} \mathrm{tr}^B_{i,\sigma(i)} \Big) B_N.$$

这里 $\det(B)$ 是在取了一组坐标 $x = (x_1, \cdots, x_N)$ 后 B 对应的矩阵的行列式；$\mathrm{tr}^B_{i,j}$ 表示用 B 对第 i, j 个指标求迹；$\prod_{i \in [N]/\sigma}$ 表示对 σ 的所有等价类 $\{i, \sigma(i)\}$ 求积或者求函数复合。
在 N 为奇数时，上面的积分等于 0.

证明引理的办法是这样的：首先，注意到等式两边在坐标变换下是不变的，所以我们可以不妨设 $B(x) = x_1^2 + \cdots + x_N^2$. 又注意到等式两边关于 B_N 是线性的，所以只用验证 $B_N = x_1^{n_1} \otimes x_2^{n_2} \otimes \cdots \otimes x_N^{n_N}$ 的情形，也就是计算：

$$\int_V x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_N^{n_N} e^{\frac{-(x_1^2 + \cdots + x_d^2)}{2}} \mathrm{d}x.$$

通过分次积分，我们只用计算

$$\int_V x_1^N e^{\frac{-(x_1^2+\cdots+x_d^2)}{2}}\mathrm{d}x.$$

这个积分的计算可以转化为对 Gamma 函数 $\Gamma(z)=\int_{\mathbb{R}} y^{z-1}e^y\mathrm{d}y$ 的计算，这样我们可以得到引理的证明。

2.3 费曼图

有了引理之后，我们可以处理积分 (1)，办法是泰勒展开。我们设 $S(x)$ 的泰勒展开是：

$$S(x)=\frac{1}{2}B(x,x)+\sum_{m\geq 0}\frac{g_m}{m!}B_m(x,\ldots,x)$$

我们这里将泰勒展开的每一项看作一个多重线性函数，而非多项式。为了书写方便，我们记原来的积分为 Z，那么在作换元 $y=\frac{x}{\sqrt{\hbar}}$ 之后有：

$$Z=\int_V e^{-B(y,y)/2}\exp\left(\sum_{m\geq 0}g_m(\frac{-\hbar^{\frac{m}{2}-1}B_m(y,\ldots,y)}{m!})\right)\mathrm{d}y$$

更进一步，将指数函数展开成级数之后得到：

$$\begin{aligned}Z&=\int_V e^{-B(y,y)/2}\prod_{i\geq 0}\sum_{n_i\geq 0}\frac{g_i^{n_i}}{(i!)^{n_i}n_i!}\Big(-\hbar^{\frac{i}{2}-1}B_i(y,\ldots,y)\Big)^{n_i}\mathrm{d}y\\&=\sum_{\mathbf{n}=(n_0,n_1,\ldots)}\left(\prod_{i\geq 0}\frac{g_i^{n_i}}{(i!)^{n_i}n_i!}\hbar^{n_i(\frac{i}{2}-1)}\right)\int_V e^{-B(y,y)/2}\prod_{i\geq 0}\Big(-B_i(y,\ldots,y)\Big)^{n_i}\mathrm{d}y.\end{aligned}\tag{11}$$

这里 $\mathbf{n}=(n_0,n_1,...)$ 表示一个只有有限项不为零的非负整数列。对每个 $\mathbf{n}$，我们记

$$Z_{\mathbf{n}}=\int_V e^{-B(y,y)/2}\prod_{i\geq 0}(-B_i(y,\ldots,y))^{n_i}\mathrm{d}y.$$

我们对 $Z_{\mathbf{n}}$ 使用 Wick 定理，看看会发生什么。我们记 $N=\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot n_i$. 那么在 N 为奇数时，$Z_{\mathbf{n}}$ 等于 0. 在 N 为偶数时，上面的积分变成了：

$$\frac{(2\pi)^{d/2}}{\sqrt{\det B}}\sum_{\sigma\in\Pi_N}(\prod_{i\in[N]/\sigma}\mathrm{tr}^B_{i,\sigma(i)})\prod_{j\geq 0}(-B_j(y,\ldots,y))^{n_j}$$

关键的问题是弄清楚 $\sum_{\sigma\in\Pi_N}\prod_{i\in[N]/\sigma}$ 的含义是什么。

我们采取这样一种看法：将每个 B_J 看作一个点，因为 B_j 会提供 j 个指标，所以我们从 B_j 引出 j 条线（可以把这样的形状想象成带有 j 个花瓣的花）。这样我们就得到了 $\sum_{i\geq 0}n_i$ 朵花。这时候，作一次缩并相当于把两个花瓣连接了起来，在做了 $N/2$ 次缩并之后，所有的花瓣都被连接过了一次，我们就得到了一个图。所以每个配对 σ 对应着一种连接花瓣的方式，进而对应着一个图，而求和的每一项正好对应着这个图的费曼振幅 (Feynman amplitude).

对于一个图 Γ，它的费曼振幅是这样来定义的：

- 第一步，在度为 i 的顶点上放置张量 $-B_i$.

- 第二步，如果两个顶点之间有边相连，那就把这两个顶点放置的张量用 B 缩并一次（因为 B_i 是对称的，所以缩并时使用的指标不影响最后的结果）。这样对 Γ 的每个连通分支 Γ_i，我们得到了一个数 F_{Γ_i}.

- 第三步，将所有的 F_{Γ_i} 乘起来，得到 F_Γ.

我们称 F_Γ 是 Γ 的费曼振幅。

利用费曼振幅，我们知道了 $Z_{\mathbf{n}}$ 可以写成：

$$\sum_{\sigma\in\Pi_N} F_{\Gamma(\sigma)}$$

所以式子 (11) 变成了：

$$\frac{(2\pi)^{d/2}}{\sqrt{\det(B)}}\sum_{\mathrm{n}}\left(\prod_{i\geq 0}\frac{g_i^{n_i}}{(i!)^{n_i}n_i!}\hbar^{n_i(\frac{i}{2}-1)}\right)\sum_{\sigma\in\Pi_N}F_{\Gamma(\sigma)}$$

这时候，$\hbar$ 的次数正好是 $b(\Gamma)=|E(\Gamma)|-|V(\Gamma)|$，所以有

$$Z=\frac{(2\pi)^{d/2}}{\sqrt{\det(B)}}\sum_{\mathrm{n}}\left(\prod_{i\geq 0}\frac{g_i^{n_i}}{(i!)^{n_i}n_i!}\right)\sum_{\sigma\in\Pi_N}\hbar^{b(\Gamma(\sigma))}F_{\Gamma(\sigma)}$$

最后注意到这样一件事：N 的不同配对可能给出同一个图。对一个给定的图 Γ，我们认为 Γ 的顶点互不相同，边也互不相同。如果将度为 i 的点引出的边标记为 $1,2,\dots,i$，再将度为 i 的点标记为 $1,2,\dots,n_i$，那我们得到一个带标号的图。这时候，给出 Γ 的配对和 Γ 的不同标号方式一一对应，注意到如果 Γ 的一个同构将一种标号方式变成另一种，那么这两种标号方式实际上是同一种，所以共有

$$\frac{\prod_i (i!)^{n_i}n_i!}{|\mathrm{Aut}(\Gamma)|}$$

种标号方式，所以

$$\sum_{\sigma\in\Pi_N}\hbar^{b(\Gamma(\sigma))}F_{\Gamma(\sigma)}=\sum_{\Gamma\in G_{\mathbf{n}}}\frac{\prod_i (i!)^{n_i}n_i!}{|\mathrm{Aut}(\Gamma)|}\hbar^{b(\Gamma(\sigma)}F_{\Gamma(\sigma)}$$

这里对 $\mathbf{n}$，$G(\mathbf{n})$ 表示满足恰有 n_i 个顶点的度为 i 的所有图构成的集合。进而我们得到了最终的结果：

定理 1

$$\hbar^{-\frac{d}{2}}\int_V e^{-S(x)/\hbar}\mathrm{d}x=\frac{(2\pi)^{d/2}}{\sqrt{\det(B)}}\sum_{\mathbf{n}=(n_0,n_1,\dots)}\left(\prod_{i=0}^{\infty}g_i^{n_i}\right)\sum_{\Gamma\in G(\mathbf{n})}\frac{\hbar^{b(\Gamma)}}{|Aut(\Gamma)|}F_\Gamma$$

这里 $\mathbf{n}$ 是一个只有有限项不为零的数列。

参考文献

[1] Clader, E., Priddis, N., Shoemaker, M., 2013. Geometric Quantization with Applications to Gromov-Witten Theory.

[2] Dodson, C.T.J., Poston, T., 1991. Tensor Geometry, Graduate Texts in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-10514-2

[3] Hall, B.C., 2013. Quantum Theory for Mathematicians, Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7116-5

[4] Stein, E.M., Shakarchi, R., 2003. Fourier analysis: an introduction, 15. Druck. ed, Princeton lectures in analysis / Elias M. Stein & Rami Shakarchi. Princeton University Press, Princeton Oxford.