关于球面上的近复结构

陈铁钊

2025 年 3 月 13 日

目录

最近发现忘了如何证明只有 2 维和 6 维球面上有近复结构。这篇只是整理一下找到的证明。我不确定看懂这篇笔记到底需要多少前置知识，也不保证笔记里面一定没有循环论证。

1 陈类、Pontryagin 类和 S^{4k} 上的近复结构

这里我不打算介绍陈类的具体定义。

基于陈类，可以定义实向量丛 $\pi : E \to X$ 的 Pontryagin 类：

$$p_k(E) = (-1)^k c_{2k}(E \otimes \underline{\mathbb{C}}) \in H^{4k}(X; \mathbb{Z})$$

利用 Pontryagin 类可以证明，在球面 S^{4k} 上没有近复结构。在后面会证明，当 $n > 3$ 时，S^{2n} 上没有近复结构，因此实际上只用证明 S^4 上没有近复结构就可以了。下面来看证明。

首先，有这样两个观察：

命题 1 我们有：

- 对球面 S^n，有 $TS^n \oplus \underline{\mathbb{R}}$ 是平凡丛，这里 $\underline{\mathbb{R}}^k$ 表示秩为 k 的实平凡丛。

- 对具有复结构的向量丛 $\pi: E \to X$，有复向量丛的同构：$E \otimes_{\mathbb{R}} \underline{\mathbb{C}} \cong E \oplus \overline{E}$. 这里 $\overline{E}$ 表示 E 的共轭丛。

第一个命题成立是因为 S^n 嵌入为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的单位球面时，它的法丛

$$\nu(S^n) = \{(x, tx) \mid x \in S^n, t \in \mathbb{R}\}$$

是平凡的。所以 S^n 的切丛 TS^n 和 $\underline{\mathbb{R}}$ 的直和正好是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的切丛 $T\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ 在 S^n 上的限制 $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$，进而是平凡丛。第二个命题需要稍微仔细验证一下。$E \oplus \overline{E}$ 上的复结构为 $J \oplus (-J)$. 从 $E \otimes \mathbb{C} \cong E \oplus E$ 到 $E \oplus \overline{E}$ 的丛同构可以取成 $u \oplus v \mapsto (u + Jv) \oplus (u - Jv)$.

从这两个观察出发，如果球面 S^{4k} 上有近复结构，那么会有：

$$0 = p_k(TS^{4k} \oplus \underline{\mathbb{R}}) = p_k(TS^{4k}) = (-1)^k c_{2k}(TS^{4k} \otimes \underline{\mathbb{C}}) = (-1)^k c_{2k}(TS^{4k} \oplus \overline{TS^{4k}})$$

而由陈类的性质稍作计算知道

$$\begin{aligned} 1 + c_{2k}(TS^{4k} \oplus \overline{TS^{4k}}) &= c(TS^{4k} \oplus \overline{TS^{4k}}) = c(TS^{4k}) c(\overline{TS^{4k}}) \\ &= \big(1 + c_{2k}(TS^{4k}\big)\big(1 + (-1)^{2k} c(TS^{4k})\big) \\ &= 1 + 2c_{2k}(TS^{4k}) \end{aligned}$$

故 $c_{2k}(TS^{4k} \oplus \overline{TS^{4k}}) = 2c_{2k}(TS^{4k})$. 进而 $2 \cdot (-1)^k c(TS^{4k}) = 0$. 在两边作用基本类 $\left[S^{4k}\right]$，注意到最高次的陈类等于欧拉类，并且切丛的欧拉类和基本类的作用等于欧拉示性数，所以我们得到了 $0 = (-1)^k \cdot 2\chi(S^{4k}) = 4 \cdot (-1)^k$. 这显然不可能。

至此，我们证明了 S^{4k} 上没有近复结构。

2 K 群和陈特征

证明 S^{2n} 在 $n > 3$ 时没有复结构的一个办法是，先证明下面的命题：

命题 2 S^{2n} 上复向量丛 E 的最高次陈类 $c_n(E)$ 是某个整系数上同调类的 $(n-1)!$ 倍。

根据这个命题可以知道，当 S^{2n} 有近复结构时，它的欧拉示性数 $2 = \chi(S^{2n}) = \langle c_n(TS^{2n}), [S^{2n}] \rangle$ 必须被 $(n-1)!$ 整除，这样 n 不能超过 3.

而证明这一命题的一个办法是引入拓扑空间的 K 群和复向量丛的陈特征（我们大约可以相信，这个命题就是来源于对 K 群的研究）。和上面一节一样，这里略去 K 群的定义。

出于需要，这里回顾一下陈特征 $\mathrm{ch}(E)$ 的定义。根据对称多项式的性质，我们知道，关于 $x_1, x_2, \ldots, x_r$ 的多项式

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_r^k, k \geqslant 0$$

可以写成关于初等对称多项式的整系数多项式:

$$s_k = G_k(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r), G_k \in \mathbb{Z}[t_1, t_2, \ldots, t_r]$$

这里 $\sigma_i = \sigma_i(x_1, x_2, \ldots, x_r)$，是关于 $x_1, x_2, \ldots, x_r$ 的第 i 个初等对称多项式。由牛顿公式 [1]，可以得到有关 G_k 的一些粗浅的观察：

命题 3 在 $k \leqslant r$ 时，G_k 仅与 $t_1, t_2, \ldots, t_k$ 有关，且有 $G_k = g_k(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}) + (-1)^{k+1} k \cdot t_k$，其中多项式 g_k 没有常数项。

在有了多项式 G_k 之后，我们可以定义秩为 r 的向量丛 E 的陈特征 $\mathrm{ch}(E)$ 为：

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(E) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{G_k(c_1(E), c_2(E), \ldots, c_r(E))}{k!} \\
&= \mathrm{rank}E + G_1(c_1(E)) + \frac{G_2(c_1(E), c_2(E))}{2!} + \frac{G_3(c_1(E), c_2(E), c_3(E))}{3!} + \cdots \\
&\in \prod_{k \in \mathbb{N}} H^k(X; \mathbb{Q})
\end{aligned}$$

注 1 对这一定义的一种理解方式是，根据分裂原理 *(Splitting principle)*，可以选取某个空间 Y 和映射 $f: Y \to X$ 使得

- 对 $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$，$f^*: H^*(X; K) \to H^*(Y; K)$ 始终是单射。
- $f^*E = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_r$ 是线丛的直和。

那么就有

$$f^*\mathrm{ch}(E) = e^{c_1(L_1)} + e^{c_1(L_2)} + \cdots + e^{c_1(L_r)}$$

这里对上同调群里的元素 $\alpha \in H^*(X)$，e^α 理解为无穷幂级数。

对于球面 S^{2n} 上的秩为 n 的复向量丛 E，因为在 $k \neq 0, 2n$ 时，S^{2n} 的第 k 个上同调群平凡，所以只有 $c_n(E)$ 可能非零。结合前面对 G_k 的观察可以知道，

$$\mathrm{ch}(E) = n + (-1)^{n+1} \frac{c_n(E)}{(n-1)!}.$$

因此，想要证明 $c_n(E)$ 被 $(n-1)!$ 整除，只用证明 $\mathrm{ch}(E) \in H^*(S^{2n}; \mathbb{Z})$. 这一结果可以从下面的命题推出：

定理 1 陈特征诱导的映射 $\mathrm{ch}: K(S^{2n}) \to H^*(S^{2n}; \mathbb{Z})$ 为环同构。

注 2 利用这个定理和 *Bott* 周期，可以在有限 *CW* 复形上证明类似的结论：

命题 4 对有限 *CW* 复形 X，陈特征给出了同构：$K^*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong H^*(X; \mathbb{Q})$.

[1]可参考姚慕生、吴泉水、谢启鸿《高等代数学》第三版第 248 页，或`https://www.zhihu.com/question/567676362/answer/2805187836`

3 定理的证明

这一节我们来证明上一节的定理。陈特征的性质保证了陈特征一定是环同态，所以只用证明陈特征是群同构。证明的想法是，由 $(S^{2n},*)$ 和 n 个 $(S^2,*)$ 的乘积同伦等价，得出群同构

$$\widetilde{K}(S^{2n}) \cong \bigotimes_{i=1}^{n} \widetilde{K}(S^2), \quad \widetilde{H}^*\left(S^{2n};\mathbb{Z}\right) \cong \bigotimes_{i=1}^{n} \widetilde{H}^*\left(S^2;\mathbb{Z}\right)$$

很容易验证陈特征 ch 给出 $\widetilde{K}(S^2)$ 和 $\widetilde{H}^*(S^2;\mathbb{Z})$ 之间的同构，因此 $\widetilde{K}(S^{2n})$ 和 $\widetilde{H}^*(S^2)$ 同构。下面进入证明的细节。

3.1 一些预备工作

我们不加证明地承认这样一个事实：

命题 5 *对任意的紧致 Hausdorff 拓扑空间 X，有同构*

$$\begin{aligned} p_1^* \otimes p_2^* : \quad K(X)\otimes K(S^2) &\longrightarrow \quad K(X\times S^2) \\ \alpha\otimes\beta \quad &\longmapsto \quad p_1^*(\alpha)\otimes p_2^*(\beta) \end{aligned}$$

这一结论的证明可以参考 Hatcher 写到一半的 *Vector Bundles and K-Theory.* [2]

一个拓扑空间 X 的"悬挂"(suspension)SX 是将 $X\times[0,1]$ 中 $X\times\{0\}, X\times\{1\}$ 捏成 2 个点之后得到的空间。带基点的空间 $(X,*)$ 的悬挂被定义为 $S(X,*)=(SX/S*,\{S*\})$，也被记为 ΣX. 事实上，$S:\mathsf{Top}\to\mathsf{Top}$ 是一个函子，对于映射任意的映射 $f:X\to Y$，$Sf:SX\to SY$ 由 $f\times \mathrm{id}_{[0,1]}:X\times[0,1]\to Y\times[0,1]$ 诱导。此外，对拓扑空间对 $(X,A), A\subseteq X$，可以证明 $S(X/A)$ 和 SX/SA 同伦等价，因此 $S(X,A)$ 也可以写成 (SX,SA).

我们再引入两个带基点空间的 wedge sum 和 smash product. 为了叙述的方便，后面将 wedge sum 称作"和"，将 smash product 称作"积"。为了不与 $X\times Y$ 混淆，后面始终用"乘积"称呼 $X\times Y$. 设两个带基点的空间为 $(X,x_0),(Y,y_0)$。那它们的和是

$$(X \amalg Y)/\{x_0,y_0\}$$

也就是将 X,Y 沿着基点站起来得到的空间。它们的积是

$$(X\times Y)/(X\times\{y_0\}\cup\{x_0\}\times Y)$$

也就是 X,Y 的乘积商掉 X,Y 的和。遵循 Hatcher 的记号，我们将空间的和与积分别记为 $X\wedge Y$ 和 $X\vee Y$.

[2]接下来的 2 段参考 Hatcher 的 *Algebraic Topology* 第 0 章中有关空间运算的内容

3.2 $\widetilde{K}(X \vee S^2)$ 与 $\widetilde{H}^*(X \vee S^2)$

由两个空间的和与积的定义可以知道，我们有映射：

$$X \wedge Y \xhookrightarrow{i} X \times Y \longrightarrow (X \times Y, X \wedge Y)$$

因此有正合列：

$$\begin{tikzcd} \widetilde{K}(S(X \times Y, X \wedge Y)) \arrow[r] & \widetilde{K}(S(X \times Y)) \arrow[r, "Si^*"] & \widetilde{K}(S(X \wedge Y)) \arrow[dll, rounded corners] \\ \widetilde{K}(X \times Y, X \wedge Y) \arrow[r] & \widetilde{K}(X \times Y) \arrow[r, "i^*"] & \widetilde{K}(X \wedge Y) \end{tikzcd}$$

这里对任何一个空间对 (X, A)，定义：[3]

$$\widetilde{K}(X, A) = \widetilde{K}(X/A)$$

将 $\widetilde{K}(X/A)$ 写作 $\widetilde{K}(X, A)$ 可以给我们带来理解上的便利：$\widetilde{K}(X, A)$ 可以被理解为由全体在 A 上平凡的向量丛得到的 K 群。

记 $X \times Y$ 到 X, Y 的投影分别为 p_1, p_2，那么

$$p^* = p_1^* + p_2^* : \widetilde{K}(X \wedge Y) \cong \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y) \to \widetilde{K}(X \times Y)$$

在将 p^*, i^* 具体写出来之后可以证明，$i^* p^* = \mathrm{id}_{\widetilde{K}(X \wedge Y)}$，类似的有 $Si^* Sp^* = \mathrm{id}_{\widetilde{K}(S(X \wedge Y))}$. 这两个式子说明 i^*, Si^* 是满射，因此之前的长正合列的第二行实际上是一个短正合列：

$$0 \longrightarrow \widetilde{K}(X \times Y, X \wedge Y) \longrightarrow \widetilde{K}(X \times Y) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}(X \wedge Y) \longrightarrow 0$$

由 $i^* p^* = \mathrm{id}_{\widetilde{K}(X \wedge Y)}$ 还可以知道，对任意的 $\varepsilon \in \widetilde{K}(X \times Y)$，有：

$$\varepsilon = (\varepsilon - p^* i^* \varepsilon) + p^* i^* \varepsilon \in \ker i^* \oplus \mathrm{Im} i^*$$

这说明下面的正合列是可分 (split) 的：

$$0 \longrightarrow \ker i^* \longrightarrow \widetilde{K}(X \times Y) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}(X \wedge Y) \longrightarrow 0$$

[3]这里不能将 $\widetilde{K}(X, A)$ 定义为 $\ker\left(i^* : \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(A)\right)$，比如在 $(X, A) = S^2, S^1$ 的时候，就有

$$\widetilde{K}(S^2/S^1) \cong \widetilde{K}(S^2 \wedge S^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \ncong 0 \cong \ker\left(i^* : \widetilde{K}(S^2) \to S^1\right)$$

分析 (S^2, S^1)，可以给出这种不同构的一种直观解释：直观上，在几乎所有情况里，X/A 上从恒同映射出发的同痕始终固定点 $\{A\}$，而 X 上从恒同出发的同痕未必固定 A，因此相比于 X/A 上的向量丛，X 上的向量丛更容易出现同构。进而商映射诱导的拉回可能将两个不同的丛映为同一个。

将这个正合列和前一个正合列比较可知：

$$
\begin{aligned}
\widetilde{K}(X\times Y) &= \widetilde{K}(X\times Y, X\wedge Y)\oplus \widetilde{K}(X\wedge Y)\\
&= \widetilde{K}(X\times Y, X\wedge Y)\oplus \widetilde{K}(X)\oplus \widetilde{K}(Y)
\end{aligned}
$$

又容易验证,映射 $p_1^*\otimes p_2^*$ 将 $\widetilde{K}(X)\otimes\widetilde{K}(Y)\cong\widetilde{K}(X,*)\otimes\widetilde{K}(Y,*)$ 映到了 $\ker i^*=\widetilde{K}(X\times Y, X\wedge Y)$，因此，我们有下面的交换图表：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
K(X)\otimes K(Y) & = & \widetilde{K}(X)\otimes\widetilde{K}(Y) & \oplus & \widetilde{K}(X) & \oplus & \widetilde{K}(Y) & \oplus & \mathbb{Z}\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
K(X\times Y) & = & \widetilde{K}(X\times Y, X\wedge Y) & \oplus & \widetilde{K}(X) & \oplus & \widetilde{K}(Y) & \oplus & \mathbb{Z}
\end{array}
$$

其中每一列的映射都由 $p_1^*\otimes p_2^*$ 给出。在 $Y=S^2$ 时，由这一节一开始给出的命题知道，上面的交换图中除了第二列之外的每一列都是同构，因此第二列也必须是同构，因此我们得到了：

命题 6 映射 $p_1^*\otimes p_2^*$ 给出了同构：

$$\widetilde{K}(X\vee S^2)\cong\widetilde{K}(X)\otimes\widetilde{K}(S^2)$$

注意到，我们在推导这个结论的时候，所有使用到的 K 群的性质为：

- 映射 $p_1^*\otimes p_2^*: K(X)\otimes K(S^2)\longrightarrow K(X\times S^2)$ 为同构。
- 由空间的映射 $A\to X\to (X,A)$ 可以得到长正合列。
- $i^*p^*=\mathrm{id}_{\widetilde{K}(S(X\wedge Y))}$ 和 $Si^*Sp^*=\mathrm{id}_{\widetilde{K}(S(X\wedge Y))}$

很容易验证，整系数的约化奇异上同调也满足以上三个性质，因此有：

命题 7 映射 $p_1^*\otimes p_2^*$ 给出了同构：

$$\widetilde{H}^*(X\vee S^2;\mathbb{Z})\cong\widetilde{H}^*(X;\mathbb{Z})\otimes\widetilde{H}^*(S^2;\mathbb{Z})$$

3.3 $\widetilde{K}(S^{2n})$ 与 $\widetilde{H}^*(S^{2n})$ 的同构

在有了前面两个小节的讨论之后，我们可以开始证明第二节提出的定理。

写出 $S^n\vee S^m$ 的胞腔剖分可知，$S^n\vee S^m=S^{n+m}$. 因此 S^{2n} 为 n 个 S^2 的积，也就是

$$(S^{2n},*)=\prod_{i=1}^{n}(S^2,*)$$

用 p_i 表示从 $(S^{2n},*)$ 到第 i 个 $(S^2,*)$ 的投影，并记 $P^*=\otimes_{i=1}^n p_i^*$，这里 P^* 既可以表示 K 群之间的映射，也可以表示上同调群之间的映射，后面根据语境可以确定具体表示哪一个。

我们记 $\widetilde{\mathrm{ch}} = \mathrm{ch} - \mathrm{rank}$，这里将向量丛的秩 rank 视作从 $K(X)$ 到 $H^0(X;\mathbb{Z})$ 的环同态。那么对任意的紧致 Hausdorff 拓扑空间 X，$\widetilde{\mathrm{ch}}$ 给出从 $\widetilde{K}(X)$ 到 $\widetilde{H}^*(X;\mathbb{Z})$ 的群同态。

我们先说明 $\widetilde{\mathrm{ch}} : \widetilde{K}(S^{2n}) \to \widetilde{H}^*(S^{2n};\mathbb{Z})$ 是群同构。将 $\widetilde{K}, \widetilde{H}^*$ 视作从紧致 Hausdorff 空间范畴到交换群范畴的函子，那么利用 ch 的自然性可以证明，$\widetilde{\mathrm{ch}}$ 是从 $\widetilde{K}$ 到 $\widetilde{H}$ 的自然变换。由 $\widetilde{\mathrm{ch}}$ 的自然性可以得到下面的交换图表：

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{K}(S^{2n}) & \xleftarrow[P^*]{} & \bigotimes_{i=1}^n \widetilde{K}(S^2) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{\mathrm{ch}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \bigotimes_{i=1}^n \widetilde{\mathrm{ch}}} \\
\widetilde{H}^*(S^{2n}) & \xleftarrow[P^*]{} & \bigotimes_{i=1}^n \widetilde{H}^*(S^2)
\end{array}$$

已知这个图标中的每一行都是同构。因此，为证明第一列是同构的，只用证明第二列是同构，即 $\widetilde{\mathrm{ch}} : \widetilde{K}(S^2) \to \widetilde{H}^*(S^2;\mathbb{Z})$ 是同构。根据 S^2 上复向量丛的分类结果，$S^2 = \mathbb{C}P^1$ 上的 K 群由重言丛的对偶丛 η^* 和平凡丛生成，而由陈类的定义，$\widetilde{\mathrm{ch}}(\eta^*) = c_1(\eta^*)$ 恰好为 $\widetilde{H}^*(S^2;\mathbb{Z}) = H^2(S^2;\mathbb{Z})$ 的生成元，因此 $\widetilde{\mathrm{ch}}$ 确为同构。

对于陈特征 ch，由交换图表：

$$\begin{array}{ccccc}
K(S^{2n}) & \xrightarrow{\cong} & \big(\widetilde{K}(S^{2n}) & \oplus & \mathbb{Z}\big) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{ch}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{\mathrm{ch}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{rank}} \\
H^*(S^{2n};\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & \big(\widetilde{H}^*(S^{2n};\mathbb{Z}) & \oplus & H^0(S^{2n};\mathbb{Z})\big)
\end{array}$$

可知，ch 确实给出了 $K(S^{2n})$ 与 $H^*(S^{2n};\mathbb{Z})$ 之间的同构。

这样，我们就完成了所有的证明。

4 S^2, S^6 上的近复结构

为了论证的完整，这里说明 S^2, S^6 上的确存在近复结构。

对于 S^2，有微分同胚 $\phi : S^2 \to \mathbb{C}P^1$，所以 S^2 可以看作复流形，其上的复结构定义了切丛上的近复结构。

对于 S^6，我们将其嵌入到八元数 $\mathbb{O} = \{\lambda + \sum_{i=1}^7 a_i\vec{e}_i \mid \lambda, a_i \in \mathbb{R}\}$ 中，使之为超平面 $\{\sum_{i=1}^7 a_i\vec{e}_i \mid a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, 7\}$ 中的单位球。此时对任意的 $x \in S^6$，T_xS^6 可以视作 $\mathbb{O}$ 的子空间。于是我们定义 S^6 上的近复结构为：

$$\begin{aligned}
\forall x \in S^6,\quad J_x :\ T_xS^6 &\longrightarrow T_xS^6 \\
v &\longmapsto x \cdot v
\end{aligned}$$

由 $x \cdot x = -1$ 可知，J 确为近复结构。