关于 M-V 序列的三个反例

陈铁钊

2025 年 1 月 25 日

目录

1 M-V 列不成立的例子

我们下面构造一个拓扑空间 X 和其中的两个闭集 X_1, X_2，使得它们的并集是 X，但下面的一列映射

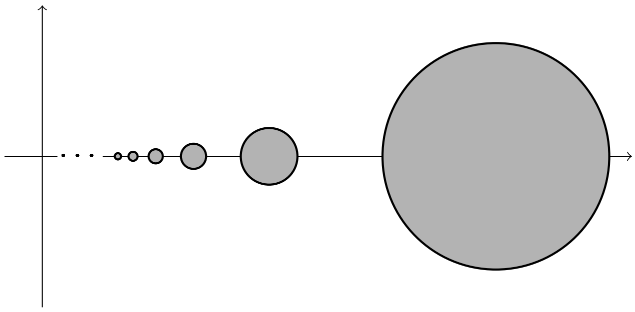
$$\cdots \xrightarrow{\partial_{q+1}} H_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_q} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \xrightarrow{j_q} H_q(X) \xrightarrow{\partial_q} H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_{q-1}} \cdots \tag{1}$$

不是正和的。其中 $i_*[c] = (i_*^1[c], i_*^2[c]), j_*([c_1],[c_2]) = j_*^1[c_1] - j_*^2[c_2]$，而自然嵌入 i^1, i^2, j^1, j^2 由下面的图表给出：

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[dr, "j^1"] & \\
X_1 \cap X_2 \arrow[ur, "i^1"] \arrow[dr, "i^2"'] & & X \\
 & X_2 \arrow[ur, "j^2"'] &
\end{tikzcd}$$

我们取 $X = \mathbb{R}^2$，并且取

$$X_1 = \{(0,0)\} \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{B}((\frac{1}{n}, 0), \frac{1}{4n^2}), \quad X_2 = \overline{\mathbb{R}^2 \setminus X_1}.$$



其中 $\overline{B}(x,r)$ 表示以 $x\in\mathbb{R}^2$ 为圆心、r 为半径的闭圆盘；$\overline{E}$ 表示集合 E 的闭包。那么 X_1 的每个连通分支都是可缩的，并且在可以算出 X_1,X_2 的交集是一个点加上可数个圈的不交并：

$$X_1\cup X_2=\{(0,0)\}\cup\bigcup_{n=1}^{+\infty}\partial B((\frac{1}{n},0),\frac{1}{4n^2}).$$

这样我们可以算出 $X_1,X_1\cap X_2$ 的同调群：

$$H_q(X_1)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}\oplus\bigoplus_{n=1}^{+\infty}\mathbb{Z} & q=0,\\ 0 & q\geqslant 1.\end{cases}$$

$$H_q(X_1\cap X_2)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}\oplus\bigoplus_{n=1}^{+\infty}\mathbb{Z} & q=0,\\ \bigoplus_{n=1}^{+\infty}\mathbb{Z} & q=1,\\ 0 & q\geqslant 2\end{cases}$$

这样前面写出的映射列 (1) 在 $q=1$ 附近就会给出

$$\cdots\to 0\xrightarrow{\partial_2}\bigoplus_{n=1}^{+\infty}\mathbb{Z}\xrightarrow{i_1}H_1(X_2)\xrightarrow{j_1}0\xrightarrow{\partial_1}\cdots$$

我们说明 i_1 不是满的，这样就得到了这一列映射不是正和的。

我们直接构造 X_2 中的闭链

$$\begin{aligned}\gamma:\quad [0,1]&\longrightarrow X_2\\ t&\longmapsto(4\cos 2\pi t,4\sin 2\pi t)\end{aligned}$$

我们说明 $[\gamma]$ 不是 X_1 中任何同调类 $[c]$ 的像。

为了叙述的方便，我们将 $\partial B((\frac{1}{n},0),\frac{1}{4n^2})$ 给出的 $X_1\cap X_2$ 中的闭链记为 γ_n，那么 $H_1(X_1\cap X_2)$ 由 $[\gamma_1],[\gamma_2],\ldots$ 自由生成。对 $X_1\cap X_2$ 中任意的同调类 $[c]$，可设 $[c]=\sum_{n=1}^{N}k_n[\gamma_n]$. 这时，我们将 $[\gamma]$ 和 $[c]$ 都嵌入到更大的空间

$$\mathbb{R}^2\setminus B((\frac{1}{N+1},0),\frac{1}{4(N+1)^2})$$

中，那么 $[\gamma]$ 被嵌入为这一空间的一阶同调群的生成元，而 $[c]$ 被嵌入为 0，它们在嵌入下的像不同。这就说明了 $[\gamma]$ 一定不能由 $[c]$ 嵌入得到。

这样我们就说明了我们给出的例子的确为反例。

2 切除定理不成立的例子

这一个构造和上一个例子是类似的，我们选取

$$
\begin{aligned}
X &= \mathbb{R}^2, \\
A &= \{(0,0)\} \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{B}((\frac{1}{n},0),\frac{1}{4n^2}), \\
W = A^\circ &= \bigcup_{n=1}^{+\infty} B((\frac{1}{n},0),\frac{1}{4n^2}),
\end{aligned}
$$

并证明 $W \subset A \subset X$ 不满足切除定理，也就是嵌入 $\iota\colon X - A \to X$ 诱导的同调群之间的同态

$$
\iota_*\colon H_*(X-W, A-W) \longrightarrow H_*(X,A) \tag{2}
$$

不是同构。

我们使用反证法来说明这件事。我们的办法是将切除定理的证明“反过来”，从同调群的同构推出 $(A, X-W)$ 构成 M-V 耦，但上一个例子已经告诉了我们，$(A, X-W)$ 不可能是 M-V 耦，这样就得到了矛盾。

我们假定 (2) 是同构，这时候考虑短正合列之间的同态：

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_*(A) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{S_*(A)}"] & S_*(A)+S_*(B) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"] & \big(S_*(A)+S_*(B)\big)/S_*(A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_*(A) \arrow[r] & S_*(X) \arrow[r] & S_*(X)/S_*(A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

其中 $B = X - W$，同态 i_* 由 $A, X-W$ 到 X 的自然嵌入定义。这样我们有长正合列之间的同态

$$
\begin{tikzcd}
H_{q+1}(B, A\cap B) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_*"] & H_q(A) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{H_*(A)}"] & H_q(A+B) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"] & H_q(B, A\cap B) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_*"] & H_{q-1}(A) \arrow[d, "\mathrm{id}_{H_*(A)}"] \\
H_{q+1}(X,A) \arrow[r] & H_q(A) \arrow[r] & H_q(X) \arrow[r] & H_q(X,A) \arrow[r] & H_{q-1}(A)
\end{tikzcd}
$$

其中 $H_*(A+B)$ 是 $S_*(A)+S_*(B)$ 的同调群。注意到对这个交换图表中所有向下的箭头，除了中间一个外全都是同构，所以根据五引理，我们有同构

$$i_*\colon H_*(A+B) \longrightarrow H_*(X)$$

这说明 $(A,B)=(A,X-W)$ 构成 M-V 耦（上面的同构恰好是 M-V 耦的定义）。这样就和上一个例子矛盾了。

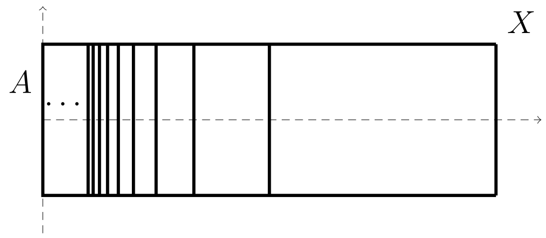
3 相对同调群不同构于商空间同调群的例子

这一节里我们给出一个空间耦 (X,A)，使得

$$H_*(X,A) \ncong H_*(X/A) \tag{3}$$

我们的办法是将两个“拓扑学家的梳子”拼在一起，也就是取：

$$\begin{aligned} X =& \{(x,-1) \mid 0 \le x \le 1\} \cup \{(x,1) \mid 0 \le x \le 1\} \\ & \cup \{(0,y) \mid -1 \le y \le 1\} \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{(\frac{1}{n}, y) \mid -1 \le y \le 1\} \\ A =& \{(0,y) \mid -1 \le y \le 1\} \end{aligned}$$



我们下面说明式子 (3) 的左边是一个至多可数的集合，而右边是不可数集合，这样两侧一定不同构。

先来看左侧的群。我们用 x-轴将 X 分成上下两部分

$$X_\pm := X \cap \{(x,y) \mid \pm x \geqslant 0\}.$$

很容易验证 (X_+, X_-) 构成一对 M-V 耦，所以有正合列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{q+1}} \tilde{H}_q(X_+ \cap X_-) \xrightarrow{i_q} \tilde{H}_q(X_+) \oplus H_q(X_-) \xrightarrow{j_q} \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{\partial_q} \tilde{H}_{q-1}(X_+ \cap X_-) \xrightarrow{i_{q-1}} \cdots$$

又注意到 $X_\pm$ 可以强形变收缩为单点 $\{(0,\pm1)\}$，所以它们的简约同调群为平凡群；而 $X_+\cap X_-$ 有可数个道路连通分支，且每个道路连通分支都是单点，所以它的只有 0 阶简约同调群，且 0-阶简约同调群由可数个元素的自由生成。所以有

$$\tilde{H}_*(X_\pm)=0,\quad \tilde{H}_q(X_+\cap X_-)=\begin{cases}\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathbb{Z}, & q=0\\ 0, & q>0.\end{cases}$$

这和上面的长正合列结合起来就可以算出：

$$\tilde{H}_q(X)=\begin{cases}\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathbb{Z}, & q=1\\ 0, & q\neq 1.\end{cases}$$

这时再利用相对同调的长正合列

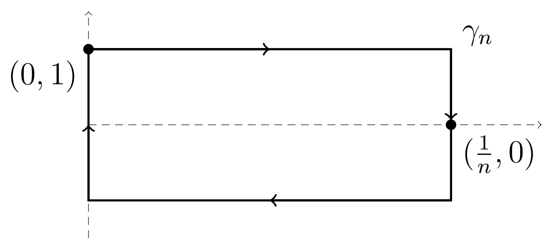
$$\cdots\to\tilde{H}_q(A)\to\tilde{H}_q(X)\to H_q(X,A)\to\tilde{H}_{q-1}(A)\to\cdots$$

就可以算出（其中用到了 A 的简约同调群是平凡群）：

$$H_q(X,A)\cong\tilde{H}_q(X)=\begin{cases}\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathbb{Z}, & q=1\\ 0, & q\neq 1.\end{cases}$$

这样我们就知道式子 (3) 左侧的群只有可数个元素。

然后我们考虑右侧的群。为了方便，我们用 $\gamma_n\colon[0,1]\to X$ 表示 X 中从 $(0,1)$ 出发，依次经过 $(\frac{1}{n},1),(\frac{1}{n},-1),(0,-1)$，最后回到出发点得到的简单闭曲线。对任意一条闭曲线 γ 和整数 $k>0$，我们用 $k\cdot\gamma$ 表示 γ 自己和自己首尾相连 k 次得到的曲线；对整数 $k<0$，$k\cdot\gamma$ 表示先将 γ 反向，再首尾相连 k 次得到的曲线（$k=0$ 时，$k\cdot\gamma$ 表示单点 $\gamma(0)$）。



我们用 q 表示从 X 到 X/A 的商映射。对任意一列整数 $\mathbf{k}=\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，我们可以定义 X/A 中的曲线 $c_{\mathbf{k}}\colon[0,1]\to X/A$

$$c_{\mathbf{k}}(t)=\begin{cases}\big(k_n\cdot(q\circ\gamma_n)\big)(2-2^n(1-t)), & t\in[1-\frac{1}{2^{n-1}},1-\frac{1}{2^n}]\\ \{A\}, & t=1\end{cases}$$

换言之，曲线 $c_{\mathbf{k}}$ 先绕着 γ_1 转了 k_1 圈，然后绕着 γ_2 转了 k_2 圈，再绕着 γ_3 转了 k_3 圈……如此反复，直到最后停在点 $\{A\} \in X/A$.

我们说明 $c_{\mathbf{k}}$ 连续，这样它定义了一条闭链。首先由每个 γ_n 都是连续可知，在 $t \in [0,1)$ 处，曲线 $c_{\mathbf{k}}$ 是连续的。而在 $t=1$ 处，对 $\{A\} = c_{\mathbf{k}}(1)$ 的任何一个开邻域 $X \supseteq U \supseteq A$，我们可以取 $U_m = \{(x,y) \in X \mid x < \frac{1}{m}\}$ 使得 $A \subseteq U_m \subseteq U$（因为 A 是紧的），这时候很容易看出：

$$c_{\mathbf{k}}^{-1}(U) \supseteq c_{\mathbf{k}}^{-1}(U_m) \supseteq (1 - \frac{1}{2^m}, 1]$$

这说明 $c_{\mathbf{k}}^{-1}(U)$ 是 1 的一个邻域，而 U 是任意的，所以 $c_{\mathbf{k}}$ 在 1 处也连续。这样就证明了 $c_{\mathbf{k}}$ 的连续性。

于是我们可以考虑 $H_1(X/A)$ 的子集：

$$C = \{[c_{\mathbf{k}}] \mid \mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots), k_n \in \mathbb{Z}\} \subseteq H_*(X/A)$$

对不同的两个序列 $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$，我们可以取最小的 n 使得 $k_n \neq k'_n$，那么取嵌入

$$i^{(n)} : X \to X \cup \{(x,y) \mid x < 1/(n+1)\}$$

之后可以很容易算出

$$i_*^{(n)}([c_{\mathbf{k}}] - [c_{\mathbf{k}'}]) = (k_n - k'_n)[\gamma_n] \neq 0$$

这样不同的整数列 $\mathbf{k}$ 定义了 C 中的不同元素 $c_{\mathbf{k}}$，这样 C 的元素个数 $|C|$ 满足：

$$|C| = \left| \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} \right| = |\mathbb{R}|$$

这样 $H_*(X/A)$ 包含一个不可数集 C，因此 $H_*(X/A)$ 也是不可数集。这样比较元素个数就可以知道 (3) 式两边一定不同构。