# 黎曼流形上 Hodge 分解的证明

陈轶钊

2025 年 3 月 14 日

## 目录

# 写在前面的话

写这篇笔记的主要原因是需要在一个讨论班上做一次报告。我在很久之前见过一次 Hodge 分解的证明，但因为那时对 Sobolev 空间知之甚少，所以对整个证明过程有些不知所以。这次写这个笔记也算是重新整理一遍之前听过的证明。

# 1 引入

这篇笔记主要参考 [3] 的第六章和 [4] 的第四、五章。我们的主定理是

**定理 1.1** 对 $n$ 维闭黎曼流形 $(M,g)$，对任意的 $1 \leq p \leq n$，有正交分解：

$$\Omega^p(M) = \mathrm{d}(\Omega^{p-1}(M)) \oplus \delta(\Omega^{p+1}(M)) \oplus \mathcal{H}^p(M) \tag{1}$$

并且 $\mathcal{H}^p(M)$ 是一个有限维的空间。

这里 $d$ 是外微分，$\delta$ 是余微分，$\mathcal{H}^p(M)$ 是 $M$ 上全体 $p$ 次调和微分形式构成的子空间。

我们会在后面给出 $\Omega^p(M)$ 上内积、余微分和调和微分形式的定义。

除了证明这一定理外，我们还会给出这一定理的一些推论。主定理的证明会被拆分成三部分：一部分是证明分解后的空间两两正交，这一部分只需要用到各种算子的定义和对称性；另一部分是证明三个空间的和是全空间，这部分证明会不可避免地涉及到对 Dirac 算子的紧性的讨论；最后剩下的是证明调和形式构成的空间 $\mathcal{H}^p(M)$ 是有限维的，这既可以依靠分析的手段得到，也可以使用拓扑的办法证明，我们在这里介绍使用分析的证明。

我们会在第二节里定义 Hodge 星算子、余微分和微分形式上的 Laplace 算子 (Beltrami-Laplacian)，并利用它们的基本性质给出主定理的一部分证明。在第三节

里我们展示第一节中定义的算子如何跟一个 Clifford 丛上的 Dirac 算子联系起来。作为插入内容，在第四节里我们会简单回顾 Sobolev 空间和 Sobolev 嵌入的一些事实。然后我们会在下一节讨论 Dirac 算子的正则性和紧性，并由此给出主定理剩下的证明。我们会在最后一节里列举主定理的一些简单推论。正文中略去的计算细节可以在附录中找到。

这篇笔记采用 Einstein 求和约定，即表达式里同时出现在上标和下标的指标表示对这一指标求和。另外这篇讲义始终假定流形 $M$ 是一个 $n$ 维定向的光滑闭流形，即 $M$ 是定向紧致无边流形，并且用 $g$ 表示 $M$ 上的黎曼度量.

## 2 Hodge 星算子、余微分和 Beltrami-Laplace 算子

我们会在这一节简单地给出 Hodge 星算子、余微分 $\delta$ 和 Beltrami-Laplace 算子的定义，并展示它们的基本性质。

我们先定义一个黎曼流形上的 $p$ 次微分形式丛 $\wedge^p T^*M$ 上的度量。对一个黎曼流形 $(M,g)$，度量 $g$ 在每一点上给出了切空间和余切空间的同构：

$$\begin{array}{cccc} \flat: & T_xM & \longrightarrow & T_x^*M \\ & v & \longmapsto & v^\flat := g(v,\cdot) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T_x^*M & \longrightarrow & T_xM \\ \omega & \longmapsto & \omega^\sharp := \flat^{-1}(\omega) \end{array}$$

利用这两个同构，我们可以用切空间上的内积 $g_x$ 定义余切空间上的内积 $g_x(\cdot^\sharp,\cdot^\sharp)$，进而切丛上的内积诱导了张量丛 $\otimes^{p,q}TM = (\otimes^p TM)\otimes(\otimes^q T^*M)$ 上的内积，我们将这些内积仍然记为 $g$.

这个时候，$M$ 上的微分形式丛 $\wedge^p T^*M$ 作为张量丛 $\otimes^{0,p}TM$ 的子丛，其上的度量由张量丛上度量的限制得到：$\frac{1}{p!}g|_{\wedge^p T^*M}$（我们仍将这个度量记为 $g$）。这里的常数 $\frac{1}{p!}$ 是为了保证对任意一组正交基 $\omega^1,\omega^2,\cdots,\omega^n \in T_x^*M$，有

$$\|\omega^{i_1}\wedge\omega^{i_2}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_p}\| = 1.$$

更进一步，对次数不同的两个微分形式 $\omega,\eta$，我们规定它们的内积 $g(\omega,\eta)$ 为 0. 这样我们就得到了 $\wedge^* T^*M$ 上的度量。

## 2.1 Hodge 星算子

简单来说，Hodge 星算子给出了 $\wedge^p T^*M$ 和 $\wedge^{n-p} T^*M$ 之间的比较自然的同构。

我们用 $\mathrm{d}V$ 或 $\mathrm{d}V_g$ 表示由 $g$ 和 $M$ 上的定向确定的体积形式，也就是是在定向局部坐标 $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ 下，

$$\mathrm{d}V = \sqrt{\det(g_{ij})_{n\times n}}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

其中 $g = g_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$. 体积形式的含义实际上是说：$T_xM$ 里面的单位正方体的体积为 1，也就是对 $TM$ 的一组局部定向单位正交标架 $e_1, e_2, \ldots, e_n$，有

$$\mathrm{d}V_x = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^n$$

其中 $\omega^1, \ldots, \omega^n$ 为 $e_1, \ldots, e_n$ 的对偶基。

利用体积形式和微分形式丛上的度量，我们可以定义 Hodge 星算子 $\star$:

**定义 2.1** 对 $M$ 上任意一点 $x$ 和任意的 $\omega_x \in \wedge^p T_x^*M$，在 $\wedge^* T_x^*M$ 中存在唯一的元素 $\star\omega_x \in \wedge^{n-p} T_x^*M$，使得

$$g(\eta_x, \omega_x)\mathrm{d}V = \eta_x \wedge \star\omega_x, \forall \eta_x \in \wedge^* T_x^*M.$$

并且映射:

$$\begin{aligned} \star: \quad \wedge^p T_x^*M &\longrightarrow \wedge^{n-p} T_x^*M \\ \omega_x &\longmapsto \star\omega_x \end{aligned}$$

是线性的。我们将 $\star$ 称为 *Hodge* 星算子。

我们来看一下 $\star$ 的基本性质：

**命题 2.1** 设 $M$ 为一个黎曼流形，取开集 $U \subseteq M$ 上 $TM$ 的任意一组定向单位正交标架 $e_1, \ldots, e_n$，并设它的对偶标架为 $\omega^1, \ldots, \omega^n$. 那么有：

- $\omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_p}, 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le n$ 给出了 $\wedge^p T^*M$ 的一组局部单位正交标架。

- $\star 1 = \mathrm{d}V, \star\mathrm{d}V = 1.$

- 一般的，对 $\omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_p}$，取 $j_1, j_2, \ldots, j_{n-p}$ 使得 $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_p$ 构成 $1, 2, \ldots, n$ 的一个排列，那么有

$$\star(\omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_p}) = \delta^{i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_{n-p}}_{1 \cdots p(p+1) \cdots n} \omega^{j_1} \wedge \omega^{j_2} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_{n-p}}$$

其中 $\delta_{12\cdots n}^{k_1\cdots k_n}$ 在排列 $k_1,\ldots,k_n$ 为奇排列时等于 $-1$，为偶排列时等于 1，在 $k_1,\ldots,k_n$ 不构成排列时等于 0.

- $\star$ 是微分形式丛之间的等距同构，也就是 $g(\star\omega,\star\eta)=g(\omega,\eta)$.
- 对 $\omega\in\wedge^p T^*M$，有 $\star\star\omega=(-1)^{p(n-p)}\omega$.

这些性质的证明从 $\star$ 的定义以及 $\mathrm{d}V=\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n$ 可以很容易地得到。

## 2.2 余微分算子和 Beltrami-Laplace 算子

余微分算子的一种定义方式是：

**定义 2.2** 对一个 $n$ 维黎曼流形 $M$，对任意的 $0\le p\le n$，余微分算子 $\delta\colon\Omega^p(M)\to\Omega^{p-1}(M)$ 被定义为：

$$\delta:=(-1)^p\star^{-1}\mathrm{d}\star=(-1)^{n(p+1)+1}\star\mathrm{d}\star$$

这一定义相当于下面的交换图表：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^n(M) \arrow[r, "(-1)^n\delta"] \arrow[d, "\star"] & \cdots \arrow[r, "(-1)^{p+1}\delta"] & \Omega^p(M) \arrow[r, "(-1)^p\delta"] \arrow[d, "\star"] & \Omega^{p-1}(M) \arrow[r, "(-1)^{p-1}\delta"] \arrow[d, "\star"] & \cdots \arrow[r, "-\delta"] & \omega^0(M) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\star"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^0(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^{n-p}(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^{n-p+1}(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \omega^n(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & 0
\end{tikzcd}$$

另一个更加自然的定义方式是将 $\delta$ 定义为 d 的形式伴随。在有了微分形式丛上的度量之后，在全体微分形式构成的空间 $\Omega^p(M)$ 上就可以定义内积：

$$\langle\omega,\eta\rangle=\int_M g(\omega,\eta)\mathrm{d}V,\forall\omega,\eta\in\Omega^p(M).$$

这时候 d 在内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 下会有“伴随”算子，而这一伴随算子恰好为 $\delta$，也就是下面的命题：

**命题 2.2** 对任意的 $\omega\in\Omega^{p-1}(M),\eta\in\Omega^p(M)$，有：

$$\langle\mathrm{d}\,\omega,\eta\rangle=\langle\omega,\delta\,\eta\rangle \tag{2}$$

**证明** 我们有：

$$
\begin{aligned}
g(\mathrm{d}\,\omega,\eta)\mathrm{d}V &= (\mathrm{d}\,\omega)\wedge\star\eta = \mathrm{d}(\omega\wedge\star\eta)+(-1)^p\omega\wedge\mathrm{d}\star\eta\\
&= \mathrm{d}(\omega\wedge\star\eta)+\omega\wedge\star\big((-1)^p\star^{-1}\mathrm{d}\star\eta\big)\\
&= \mathrm{d}(\omega\wedge\star\eta)+g(\omega,\delta\,\eta)\mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

关于两边在 $M$ 上积分，就得到了式2.

有了余微分算子之后，我们可以定义 Beltrami-Laplace 算子：

**定义 2.3** 对一个黎曼流形 $M$，称：

$$\Delta := \mathrm{d}\,\delta+\delta\,\mathrm{d}\colon \Omega^*(M)\to\Omega^*(M)$$

为 $M$ 上的 *Beltrami-Laplace* 算子。容易看出，$\Delta$ 将 $p$ 形式变为 $p$ 形式。

对 $M$ 上的微分形式 $\omega$，如果 $\Delta\omega=0$，那么我们称 $\omega$ 为 $M$ 上的调和形式。这篇讲义里将全体 $p$ 次调和形式构成的线性空间记为 $\mathcal{H}^p(M)$

这里我们列出余微分和 $\Delta$ 的主要性质：

**命题 2.3** 对一个黎曼流形 $M$，$e_1,\ldots,e_n$ 为切丛的一组局部标架（未必为单位正交标架），它的对偶标架为 $\omega^1,\ldots,\omega^n$，那么有：

(1) $\mathrm{d}^2=0,\delta^2=0.$

(2) $\Delta=\mathrm{D}^2$，其中 $\mathrm{D}=\mathrm{d}+\delta$ 被称为 *Dirac* 算子。

(3) $\Delta$ 是对称算子，即 $\langle\Delta\omega,\eta\rangle=\langle\omega,\Delta\eta\rangle,\forall\omega,\eta\in\Omega^*(M).$

(4) $\forall\omega\in\Omega^*(M),\langle\Delta\omega,\omega\rangle=\langle\mathrm{d}\,\omega,\mathrm{d}\,\omega\rangle+\langle\delta\,\omega,\delta\,\omega\rangle\geq 0$，这表明 $\Delta$ 是正算子.

(5) 对任意的 $\omega\in\Omega^*(M)$，$\Delta\omega=0$ 的充要条件为 $\mathrm{d}\,\omega=0$ 且 $\delta\,\omega=0$，也就是

$$\mathcal{H}^*(M)=\ker\mathrm{d}\cap\ker\delta \tag{3}$$

(6) 设 $\nabla$ 为 $(M,g)$ 上的 *Levi-Civita* 联络，那么有

$$\mathrm{d}\,\omega=\omega^i\wedge\nabla_{e_i}\omega,\quad \delta\omega=-\operatorname{tr}_{12}\nabla\omega=-g^{ij}\cdot\iota_{e_i}\nabla_{e_j}\omega \tag{4}$$

其中 $\iota_v\omega$ 表示将向量 $v$ 代入到线性形式 $\omega$ 的第一个分量，$\mathrm{tr}_{ij}$ 表示使用 $g$ 将第 $i,j$ 个指标缩并。

(7) 对光滑函数 $f \in C^\infty(M)$，有 $\Delta f = -\operatorname{tr}_{12} \nabla^2 f$，这表明 $\Delta$ 可以被视为通常意义下 *Laplace* 算子的推广。

上面列举的大部分性质并不难证，可以从定义直接推出。利用前五条性质可以得到主定理1.1的第一部分证明，最后两条性质是为下一节的论述做准备。等式4的证明被留在了附录中。

### 2.3 Hodge 分解的证明：第一部分

我们在这一节证明式1中的三个子空间两两正交。这可以从下面的几个等式很容易地得出来：

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{d}\,\omega, \delta\,\eta \rangle &= \left\langle \mathrm{d}^2\,\omega, \eta \right\rangle = 0, \forall \omega, \eta \in \Omega^*(M). \\ \langle \mathrm{d}\,\omega, \gamma \rangle &= \langle \omega, \delta\,\gamma \rangle = 0, \forall \omega \in \Omega^*(M), \gamma \in \mathcal{H}^*(M). \\ \langle \delta\,\eta, \gamma \rangle &= \langle \eta, \mathrm{d}\,\gamma \rangle = 0, \forall \eta \in \Omega^*(M), \gamma \in \mathcal{H}^*(M). \end{aligned} \tag{5}$$

上面的最后两个式子实际上利用了式3.

## 3 Clifford 丛和 Dirac 算子

在这一节里，我们会定义一个黎曼流形上的 Clifford 丛和其上的 Dirac 算子，并展示之前定义的算子 $\mathrm{d} + \delta$ 如何被实现为一个 Clifford 丛上的 Dirac 算子。这一节的主要目标是展示对 Hodge 分解的另一种理解方式，跳过这一节对后面的阅读并没有太大影响。

### 3.1 Clifford 丛

**定义 3.1** 对一个黎曼流形 $(M, g)$，对其上的一个带有内积 $h(\cdot,\cdot)$ 和与之相容的联络 $\nabla$ 的向量丛 $S$，我们称其为一个 *Clifford* 丛，如果存在一个切丛 $TM$ 在 $S$ 上的作用

$$\begin{aligned} c\colon \quad TM \otimes S &\longrightarrow \quad S \\ v \otimes s &\longmapsto c(v)s \end{aligned}$$

满足：

(1) $c$ 是一个丛同态。

(2) $c$ 为 *Clifford* 乘积，即

$$c(v)\big(c(v)s\big) = -g(v,v)\cdot s, \forall x\in M, v\in T_xM, s\in S_x.$$

(3) $TM$ 的作用是反对称的，也就是

$$h\big(c(v)s_1, s_2\big) + h\big(s_1, c(v)s_2\big) = 0, \forall x\in M, v\in T_xM, s_1, s_2\in S_x.$$

(4) $c$ 和 $S$ 上的联络以及 $M$ 上的 *Levi-Civita* 联络相容，也就是

$$\nabla_v\big(c(X)s\big) = c(\nabla_v X)s + c(X)\nabla_v s, \forall v\in TM, X\in\Gamma(TM), s\in\Gamma(S).$$

这里 $\nabla$ 同时表示 $M$ 上的 *Levi-Civita* 联络和 $S$ 上的联络，并且我们允许 $S$ 为一个复向量丛（这时 $S$ 上的内积为一个 *Hermite* 型）。

有时为了方便，我们会将 $c(v)s$ 简记为 $v\cdot s$.

上面的第一个和第四个要求比较自然。第二个要求的等价说法是，如果我们在每一点 $x$ 处取一个 Clifford 代数 $\mathrm{Cl}(T_xM,g)$，得到一个以 $\mathrm{Cl}_n$ 为纤维的纤维丛 $\mathrm{Cl}(TM,g)$，那么这个纤维丛可以作用在 $S$ 上，它在 $TM$ 上的限制恰好为 $c$.

如果记 $\mathrm{Cl}_n$ 中可逆元构成的乘法群为 $\mathrm{Cl}_n^\times$，那第三个要求相当于说，Clifford 乘法 $c\colon v\mapsto c(v)\in\mathrm{End}(S)$ 实现了 $\mathrm{Cl}_n^\times$ 的李代数（它恰好为 $\mathrm{Cl}_n$）到 $\mathfrak{so}(n)$ 或 $\mathfrak{su}(n)$ 的李代数同态。

**例 3.1** 我们展示一个特殊的 *Clifford* 丛：带有自旋结构 *(spin structure)* 的黎曼流形上的旋量丛 *(spinor bundle)*。

对一个黎曼流形 $(M,g)$，我们取以 *Clifford* 代数为纤维的纤维丛 $\mathrm{Cl}(TM,g)$，它的结构群为 $\mathrm{Isom}(\mathrm{Cl}_n)$. 如果它的结构群可以约化为 $\mathrm{Spin}(n)$（这时 $\mathrm{Spin}(n)$ 在 $\mathrm{Cl}_n$ 上的作用是 $g\cdot v = gvg^{-1}$），那么我们称这个流形具有一个自旋结构。这时候可以找到一个 $\mathrm{Spin}(n)$-主丛 $P_{spin}$ 使得：

$$\mathrm{Cl}(TM,g)\cong P_{spin}\times_{\mathrm{Spin}(n)}\mathrm{Cl}_n$$

对带有自旋结构的流形 $M$，我们选取 *Clifford* 代数 $\mathrm{Cl}_n$ 的一个不可约表示 $S$，这时 *Clifford* 代数和自旋群都可以作用在 $S$ 上，那么 $M$ 上的旋量丛就被定义为

$$\mathcal{S} := P_{spin}\times_{\mathrm{Spin}(n)} S$$

注意到，*Clifford* 代数 $\mathrm{Cl}_n$ 和自旋群 $\mathrm{Spin}(n)$ 在 $S$ 上的作用是相容的，所以如果定义 $P_{spin} \times \mathrm{Cl}_n$ 在 $P_{spin} \times S$ 上的作用为

$$(p, v) \cdot (p, s) = (p, v \cdot s), \forall p \in P_{spin}, v \in \mathrm{Cl}_n, s \in S.$$

那么就有：

$$\begin{aligned}\big((p, v)g\big) \cdot \big((p, s)g\big) &= (p \cdot g, (g^{-1}vg) \cdot g^{-1}s) = (p \cdot g, g^{-1}(v \cdot s)) \\ &= \big((p, v) \cdot (p, s)\big)g, \forall p \in P_{spin}, v \in \mathrm{Cl}_n, s \in S, g \in \mathrm{Spin}_n\end{aligned}$$

也就是这一作用是 $\mathrm{Spin}(n)$-等变的，进而它诱导了 $\mathrm{Cl}(TM, g)$ 在 $\mathcal{S}$ 上的作用。这一作用恰好给出了 $\mathcal{S}$ 上的 *Clifford* 乘法。

更进一步，我们可以选取 $S$ 上的内积 $h$，使得 $\mathrm{Cl}_n$ 的作用是反对称的。这样 $h$ 会诱导 $\mathcal{S}$ 上的内积 $h$，使得 *Clifford* 乘法是反对称的。如果再取 $\mathcal{S}$ 上由自旋联络诱导的联络，那么这一联络和 *Levi-Civita* 联络会与 *Clifford* 乘法相容。

这样我们就知道，带有自旋结构的流形 $M$ 上的旋量丛是一个 *Clifford* 丛。

## 3.2 Dirac 算子

我们在这一节定义 Dirac 算子。

**定义 3.2** 对黎曼流形 $(M, g)$ 上的 *Clifford* 丛 $S$，其上的 *Dirac* 算子 $\mathrm{D}$ 被定义为下列一串映射的复合：

$$\Gamma(S) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes S) \xrightarrow{\sharp} \Gamma(TM \otimes S) \xrightarrow{c} \Gamma(S).$$

在取了 $e_1, \ldots, e_n$ 是 $TM$ 的一组局部标架后，设矩阵 $g_{ij}$ 是 $g$ 在这组标架下的坐标表示，$g^{ij}$ 是 $g_{ij}$ 的逆矩阵，那么有

$$\mathrm{D}\, s = g^{ij} e_i \cdot \nabla_{e_j} s, \forall s \in \Gamma(S)$$

我们来看 $M$ 的切丛。因为 $\mathrm{Cl}(V, g)$ 和 $\wedge^* V$ 之间有自然的线性同构，所以由切丛生成的 $\mathrm{Cl}_n$-丛 $\mathrm{Cl}(TM, g)$ 的乘法给出了 $\wedge^* TM$ 上的 Clifford 乘法。我们取这个乘法的对偶：

$$c\colon \mathrm{Cl}(TM, g) \otimes \wedge^* T^*M \longrightarrow \wedge^* T^*M$$

可以验证这一乘法是反对称的。此外，流形 $M$ 上的 Levi-Civita 联络自然地诱导了 $\mathrm{Cl}(TM, g)$ 上的联络 $\nabla$ 和微分形式丛 $\wedge^* T^*M$ 上的联络 $\nabla$。根据 Levi-Civita 联

络与度量 $g$ 相容可以证明微分形式丛 $\wedge^* T^* M$ 上的联络和 Clifford 乘法相容。这样我们就知道了

**命题 3.1** $\wedge^* T^* M$ 是一个 *Clifford* 丛。

我们在这里直接给出 Clifford 丛 $\wedge^* T^* M$ 上的 Clifford 乘法：

$$c(X)\omega = v^\flat \wedge \omega - \iota_v \omega, \forall v \in TM.$$

这样我们可以写出 Dirac 算子在局部标架下的表示：设 $TM$ 一组的局部标架为 $e_1, \ldots, e_n$，它的对偶标架为 $\omega^1, \ldots, \omega^n$，那么

$$c(e_i)\omega = e_i^\flat \wedge \omega - \iota_{e_i}\omega = g_{ik}\omega^k \wedge \omega - \iota_{e_i}\omega, \forall \omega \in \wedge^* T^* M.$$

根据上一节的式4，就有：

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\,\omega &= g^{ij} c(e_i) \nabla_{e_j}\omega = g^{ij} g_{ik}\omega^k \wedge \nabla_{e_j}\omega - g^{ij}\iota_{e_i}\nabla_{e_j}\omega \\
&= \omega^j \wedge \nabla_{e_j}\omega - g^{ij}\iota_{e_i}\nabla_{e_j}\omega \\
&= \mathrm{d}\,\omega + \delta\,\omega, \forall \omega \in \Omega^*(M).
\end{aligned}$$

这就说明：

**命题 3.2** 对于 *Clifford* 丛 $\wedge^* T^* M$，其上的 *Dirac* 算子 $\mathrm{D} = \mathrm{d} + \delta$.

从这里开始，我们讨论一般的 Clifford 丛 $S$ 上的 Dirac 算子的性质。

## 3.3 Dirac 算子的几何性质

我们在 $\Gamma(S)$ 上取内积：

$$\langle s_1, s_2 \rangle := \int_M h(s_1, s_2)\mathrm{d}V, \forall s_1, s_2 \in \Gamma(S).$$

类比 $\mathrm{d} + \delta$ 的性质，我们证明：

**命题 3.3** *Dirac* 算子 $\mathrm{D}$ 是对称的，即

$$\langle \mathrm{D}\, s_1, s_2 \rangle = \langle s_2, \mathrm{D}\, s_2 \rangle, \forall s_1, s_2 \in \Gamma(S).$$

**证明** 在取了 $TM$ 的一组局部单位正交标架 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 后，我们有：

$$\begin{aligned}
h(\mathrm{D}\, s_1, s_2) &= \sum_i h(e_i \nabla_{e_i} s_1, s_2) = \sum_i -h(\nabla_{e_i} s_1, e_i \cdot s_2) \\
&= -\sum_i e_i\big(h(s_1, e_i \cdot s_2)\big) + \sum_i h\big(s_1, \nabla_{e_i}(e_i \cdot s_2)\big) \\
&= h(s_1, \mathrm{D}\, s_2) - \sum_i e_i\big(h(s_1, e_i \cdot s_2)\big) + \sum_i h\big(s_1, (\nabla_{e_i} e_i) \cdot s_2\big)
\end{aligned}$$

注意到下面的等式

$$g(X, Y) = h(s_1, Y \cdot s_2), \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$$

定义了一个全局向量场 $X$，因此我们上面的式子变成了：

$$\begin{aligned}
h(\mathrm{D}\, s_1, s_2) - h(s_1, \mathrm{D}\, s_2) &= \sum_i e_i\big(g(X, e_i)\big) + \sum_i g(X, \nabla_{e_i} e_i) \\
&= \sum_i g(\nabla_{e_i} X, e_i) = \operatorname{div}(X).
\end{aligned}$$

这样对两边积分，并利用散度定理就知道，$\langle \mathrm{D}\, s_1, s_2 \rangle = \langle s_2, \mathrm{D}\, s_2 \rangle$.

Weitzenböck 公式给出了 Dirac 算子的另一个重要性质，它说明了 Dirac 算子的平方几乎就是通常意义下的 Laplace 算子。

**定理 3.1** 对 *Clifford* 丛 $S$ 上的 *Dirac* 算子 D，在取了 $TM$ 的一组局部标架 $e_1, \ldots, e_n$ 后有：

$$\mathrm{D}^2\, s = -\operatorname{tr}_{12} \nabla^2 s + \frac{1}{2} g^{ik} g^{jl} e_i e_j \cdot \hat{R}(e_k, e_l) s \tag{6}$$

其中 $\hat{R}(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$ 是 $S$ 上的曲率算子。

我们将这一定理的证明放在附录中。

# 4 插入：Sobolev 空间

对于跳过上一节的读者，可以认为这一节以及之后内容中的向量丛 $S$ 均为 $\wedge^* T^* M$.

这一节的主要作用是给出 Sobolev 空间的定义、Sobolev 不等式的陈述和 Rellich 引理的陈述，并且展示如何定义流形上 Sobolev 空间。我们主要参考 [1].

## 4.1 Sobolev 空间和 Sobolev 嵌入

我们先给出 $\mathbb{R}^n$ 里有界区域 $U$ 上 Sobolev 空间的定义以及 Sobolev 嵌入。这一小节里所有定理和命题的证明可以在 [1] 中找到。

我们用 $C^\infty(U)$ 表示 $U$ 上的全体光滑函数构成的空间，$C_0^\infty(U)$ 表示区域 $U$ 上具有紧支集的光滑函数构成的空间，用 $\partial^k f$ 表示 $f$ 的 $k$ 阶全导数，对于一个指标或多重指标 $i$，用 $\partial_i f$ 表示由 $i$ 确定的偏导数或高阶偏导数。

我们用 $C^{k,\alpha}(U)$ 表示 $U$ 上 $k$ 次可微，且全体 $k$ 阶导数 $\alpha$-Hölder 连续的函数空间。并且我们假定 $C^{k,\alpha}(U)$ 上带有一个范数：

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(U)} = \sup_{x,y\in U} \frac{\|\partial^k f(x) - \partial^k f(y)\|}{\|x-y\|^\alpha} + \sum_{i=1}^{k} \sup_{|i|=j} |\partial_i f|$$

我们用 $L^p(U)$ 表示 $U$ 上全体 $p$ 次可积函数构成的空间，其上的范数为

$$\|f\|_{L^p(U)} = \left(\int_U \|f\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

一个基本的结论是，在上面的范数下，$C^{k,\alpha}(U), L^p(U)$ 均为 Banach 空间。

我们先定义弱导数。

**定义 4.1** 对 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域 $U$，以及 $U$ 上一个局部 $L^1$ 的函数 $f$，如果存在另一个局部 $L^1$ 的函数 $f_i$，使得

$$\int_U f\cdot\partial_i\phi = (-1)^{|i|}\int_U f_i\cdot\phi, \forall\phi\in C_0^\infty(U)$$

那么就称 $f_i$ 是 $f$ 的弱偏导数，仍记为 $\partial_i f = f_i$.

如果 $f$ 的全体不超过 $k$ 阶的偏导数都存在，那么我们称 $f$ 是 $k$ 阶弱可微的。

利用分部积分容易看出，在 $f$ 光滑时，它的弱导数等于通常意义下的导数。弱导数相关的计算与通常意义的导数没有太大差别，比如我们有（弱化版本的）Leibniz 律：

$$\partial_i(f\cdot\phi) = (\partial_i f)\cdot\phi + f\cdot\partial_i\phi, \forall\phi\in C_0^\infty(U), 1\le i\le n.$$

所有 $k$ 阶弱可微，且前 $k$ 阶导数均 $p$ 次可积的函数构成的空间就是 Sobolev 空间：

**定义 4.2** 对 $k\in\mathbb{N}, 1\le p\le\infty$，由它们确定的区域 $U$ 上的 *Sobolev* 空间是一个赋范线性空间：

$$W^{k,p}(U) = \{f\in L^p(U) \mid \partial_i f\in L^p(U), \forall|i|\le k\}$$

其上的范数为：

$$\|f\|_{W^{k,p}(U)} = \sum_{|i|\leq k} \|\partial_i f\|_{L^p(U)}, \forall f \in W^{k,p}(U).$$

在 $p=2$ 时，我们会将 $W^{k,2}(U)$ 记为 $W^k(U)$.

我们在这里不加证明地列举 Sobolev 空间的一些基本事实：

**命题 4.1** 对 $k \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$ 和 $\mathbb{R}^n$ 中区域 $U$，有：

(1) $W^{k,p}(U)$ 是 *Banach* 空间，即它对加法和数乘封闭，且在 $W^{k,p}$-范数下是完备的。

(2) $C^\infty(U)$ 在 $W^{k,p}(U)$ 中稠密。更进一步，如果 $U$ 有 $C^1$-边界，那么 $C^\infty(\bar{U})$ 在 $W^{k,p}(U)$ 中稠密。

(3) 如果 $U$ 有 $C^1$-边界，那么 $W^{1,p}(U)$ 可以连续地延拓到 $\mathbb{R}^n$ 上，也就是存在一个有界算子

$$E\colon W^{1,p}(U) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

使得 $(Ef)|_U = f, \forall f \in W^{1,p}(U)$.

上面的第二个性质使得我们很多时候可以将 Sobolev 空间的问题化归为光滑函数的问题。

我们这篇笔记里主要使用的是 Sobolev 嵌入的性质。

**定理 4.1** *(Sobolev 不等式)* 对 $\mathbb{R}^n$ 中有 $C^1$ 边界的区域 $U$，以及 $U$ 上 *Sobolev* 空间 $W^{k,p}(U)$：

*(i)* 如果 $p < n/k$，那么 $W^{k,p}(U)$ 中的元素都在 $L^{p^{*k}}(U)$ 中，其中 $p^{*k}$ 满足：

$$\frac{1}{p^{*k}} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$

更进一步，存在一个仅依赖于 $n, k, p, U$ 的常数 $C$ 使得：

$$\|f\|_{L^{p^{*k}}(U)} \leq C\|f\|_{W^{k,p}(U)}, \forall f \in W^{k,p}(U). \tag{7}$$

*(ii)* 如果 $p > n/k$，那么 $W^{k,p}(U)$ 中的每个元素都可以在 $C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\bar{U})$ 中找到一个代表元，其中 $\gamma$ 满足：

$$\gamma = \begin{cases} 1 - \{\frac{n}{p}\}, & \textit{if } \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}, \\ \textit{any number in } (0,1), & \textit{if } \frac{n}{p} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

更进一步，存在一个仅依赖于 $n,k,p,\gamma,U$ 的常数 $C$ 使得：

$$\|f\|_{C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\bar{U})} \leq C\|f\|_{W^{k,p}(U)}, \forall f \in W^{k,p}(U). \tag{8}$$

我们后面主要使用式8来提升解的正则性。我们还会用到的另一个定理是：

**引理 4.1** *(Rellich)*

*(1)* 对 $\mathbb{R}^n$ 中有 $C^1$ 边界的区域 $U$，对 $U$ 上 *Sobolev* 空间 $W^{k,p}(U)$，用 $\mathcal{X}$ 表示 $L^{p^{*k}}(U)$ 或 $C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\bar{U})$（依据 $k,p$ 的取值），那么 $W^{k,p}(U)$ 紧包含于 $\mathcal{X}$. 也就是对 $W^{k,p}(U)$ 中任意有界序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，它有一个在 $\mathcal{X}$ 中收敛的子列。

*(2)* 对 $\mathbb{R}^n$ 中有 $C^1$ 边界的有界区域 $U$，对 $U$ 上 *Sobolev* 空间 $W^{k,p}(U)$（其中 $1 \leq p \leq \infty$），有 $W^{1,p}(U)$ 紧包含于 $L^{1,p}$. 更进一步，$W^{k+1,p}$ 紧包含于 $W^{k,p}$.

## 4.2 紧流形上的 Sobolev 空间

我们在这一小节使用两种方法定义紧流形上的 Sobolev 空间：一种是拼接局部图卡，另一种是使用协变导数和度量。第一种定义方式方便我们将 $\mathbb{R}^n$ 中 Sobolev 空间的结论推广到向量丛的截面上，而第二种定义方式方便我们给出流形上的偏微分方程的解的估计。

**定义 4.3** 设 $M$ 为紧黎曼流形，其上有向量丛 $\pi\colon S \to M$. 对 $M$ 的一个有限开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$，满足：

*(i)* 每个 $U_i$ 与 $\mathbb{R}^n$ 中某个有界、带光滑边界的区域微分同胚。

*(ii)* $S$ 在每个 $\bar{U}_i$ 上有局部标架 $s_{i,1}, s_{i,2}, \cdots, s_{i,r}$.

那么我们将 $W^{k,p}(M,S)$ 定义为：

$$W^{k,p}(M,S) = \{s\colon M \to S \mid s|_{U_i} = \sum_{1\leq j\leq r} f^{i,j}s_{i,j}, f^{i,j} \in W^{k,p}(U_i), \forall i \in I\}.$$

其上的范数被定义为

$$\|s\|_{W^{k,p}(M,S)} = \sum_{i\in I}\sum_{1\leq j\leq r}\|f^{i,j}\|_{W^{k,p}(U_i)} \tag{9}$$

这一定义相当于说，$s$ 落在 Sobolev 空间中当且仅当 $s$ 限制在每个 $U_i$ 上的时候它的每个分量都在通常的 Sobolev 空间中。

使用类似的想法可以定义 $M$ 上的 $L^p$ 空间 $L^p(M,S)$ 和 Hölder 连续函数空间 $C^{k,\alpha}(M,S)$. 这样我们可以很容易看流形上的 Sobolev 不等式和 Rellich 引理仍然成立，此外，利用单位分解还可以知道，光滑截面 $\Gamma(S)$ 是稠密的。

流形上 Sobolev 空间的另一种定义方式是：

**定义 4.4** 设 $(M,g)$ 为紧黎曼流形，其上有向量丛 $\pi\colon S\to M$. 取 $S$ 上的内积 $h$ 和与之相容的联络 $\nabla$，那么 $h$ 和 $g$ 诱导了 $(\otimes^k T^*M)\otimes S$ 上的内积 $g$. 我们在光滑截面上定义范数：

$$\|s\|_{W^{k,p}(M,S)}=\sum_{0\le i\le k}\left(\int_M g(\nabla^i s,\nabla^i s)^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}V\right)^{\frac{1}{p}},\forall s\in\Gamma(S). \tag{10}$$

这时候我们可以将 $W^{k,p}(M,S)$ 定义为 $\Gamma(S)$ 关于上面的范数做完备化之后得到的空间。

这一定义明显只依赖于 $M$ 和 $S$ 的整体几何信息，而不依赖局部坐标的选取。

我们粗略解释一下如何证明这两个空间相同。

因为光滑截面 $\Gamma(S)$ 在两种定义方式里都是稠密的，所以我们只需要证明式9和10定义的范数对光滑截面而言是等价的。又因为我们只取了有限个开集 $U_i$，所以只需要验证在每个 $U_i$ 上，两种范数是等价的。

比如我们以 $W^{1,p}$ 范数为例。对 $M$ 中一个局部图卡 $\varphi\colon U\to\mathbb{R}^n$，使得 $\bar{U}$ 上有 $S$ 的局部标架 $s_1,\dots,s_r$，可设 $\nabla s_i=\mathrm{d}+\Gamma_{ij}^k\mathrm{d}x^j\otimes s_k$. 对 $s|_U=\sum_j f^j s_j$，根据 $\bar{U}$ 的紧致可知：

$$\begin{aligned}
h(s,s)^{\frac{p}{2}} &= (h(s_i,s_j)f^if^j)^{\frac{p}{2}}\sim\left(\textstyle\sum_j|f^j|^2\right)^{\frac{p}{2}}\sim\textstyle\sum_j|f^j|^p\\
g(\nabla s,\nabla s)^{\frac{p}{2}} &\sim\left(\textstyle\sum_{k,i}|\partial_k f^i+\sum_j\Gamma_{jk}^i f^j|^2\right)^{\frac{p}{2}}\sim\textstyle\sum_{k,i}|\partial_k f^i|^p+\sum_j|f^j|^p\\
\mathrm{d}V &\sim\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n
\end{aligned}$$

其中 $f\sim g$ 表示存在一个仅依赖于 $n,r,k,p,s_1,\dots,s_r,U,\varphi$ 的正常数 $C$，使得

$C^{-1}g \leq f \leq Cg$. 上面三个式子表明：

$$\begin{aligned}\left(\int_M h(s,s)^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}V\right)^{\frac{1}{p}} &+ \left(\int_M g(\nabla s,\nabla s)^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}V\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\sim \left(\sum_j \|f^j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k,i}\|\partial_k f^i\|^p + \sum_j \|f^j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\sim \sum_j \|f^j\|_{W^{1,p}(U)}\end{aligned}$$

也就是我们定义的两种范数等价。

使用同样的想法可以证明，在选取了 $S$ 上的内积 $h$ 之后，使用 $h$ 可以给出 $L^p(M,S)$ 的不依赖图册的定义。

# 5 Dirac 算子的分析性质

我们从这一节回归到对 Dirac 算子的讨论。在这一节里，我们会使用分析的工具来研究 Dirac 算子。我们的第一步是将 Dirac 算子 $\mathrm{D}$ 延拓为平方可积截面 $L^2(M,S)$ 上的稠定 (densely defined) 无界自伴算子（在延拓的时候会不可避免地遇到 Sobolev 空间）。

接着我们会讨论 Dirac 算子的分析性质。我们会先给出所谓的 Gårding 不等式，它是 Dirac 算子最基础的先验估计。接着我们给出 Dirac 算子的闭包和它的自伴扩张。然后我们证明对主定理而言最重要的两个性质：第一个性质宣称，Dirc 算子具有正则性，也就是如果 $\mathrm{D}\,s$ 是 $k$ 次可微的，那么 $s$ 是 $k+1$ 次可微的，我们可以使用这一性质证明解的光滑性；第二个性质宣称，$(1+\mathrm{D}^2)^{-1}$ 是紧算子，这一性质在证明式1右侧三个空间张成左边时是不可或缺的。

如果从算子的谱的角度来看，上面的第一个性质实际上表明 Dirac 算子是本质自伴的，这样我们可以得到 Dirac 算子的谱分解。为了证明 Hodge 分解定理的剩下部分，我们只需要它的像是闭的，这就需要上面的第二个性质：我们可以利用紧算子的谱的性质证明 Dirac 算子的只有离散点谱，进而可以确定它的像。

这一节主要参考 [4] 第五章。这一节中或许会涉及到一些泛函分析的内容，例如算子的谱和谱分解、函数演算 (functional calculus) 等，读者可以参考 [2][5][6].

## 5.1 先验估计

我们先给出关于 $S$ 的截面 $s$ 的方程 $\mathrm{D}\, s = u$ 的先验估计。

利用 $S$ 上的内积，我们可以将 $M$ 上的平方可积截面空间和 Sobolev 空间 $W^k$ 定义为：

$$L^2(M,S) = W^0(M,S) = \{s : M \to S \mid \|s\|_{L^2} := \langle s, s\rangle < +\infty\}$$
$$W^k(M,S) = \text{completion of } \Gamma(S) \text{ w.r.t. } \|s\|_{W^k} = \left(\sum_{i\le k} \|\nabla^i s\|^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

首先从 D 是一阶微分算子可以看出来的是：存在常数 $C$ 使得

$$\|\mathrm{D}\, s\|_{W^0} \le C\|s\|_{W^1}, \forall s \in \Gamma(S). \tag{11}$$

结合 $\Gamma(S)$ 在 $W^1(M,S)$ 中稠密可以知道，Dirac 算子是 $W^1(M,S)$ 上的有界算子。此外我们也有反方向的不等式：

**定理 5.1** *(Gårding 不等式)* 存在（仅依赖于 $M, g$ 的）常数 $C$，使得对任意光滑截面 $s \in \Gamma(S)$，有

$$\|s\|_{W^1} \le C(\|s\|_{W^0} + \|\mathrm{D}\, s\|_{W^0}) \tag{12}$$

**证明** 事实上，根据 *Weitzenböck* 公式*6*和散度定理，有：

$$\begin{aligned}\|\nabla s\|^2_{W^0} = \langle -\Delta s, s\rangle &= \left\langle \mathrm{D}^2\, s, s\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle g^{ik}g^{jl}e_ie_j\cdot \hat{R}(e_k,e_l)s, s\right\rangle \\ &\le \|\mathrm{D}\, s\|^2_{W^0} + C\|s\|^2_{W^0}\end{aligned}$$

由此即知不等式*12*成立。

我们可以将上面的结果推广到一般的 $W^k$:

**定理 5.2** *(椭圆估计)* 存在（仅依赖于 $M, g, k$ 的）常数 $C$，使得对任意光滑截面 $s \in \Gamma(S)$，有

$$\|s\|_{W^{k+1}} \le C(\|s\|_{W^k} + \|\mathrm{D}\, s\|_{W^k}) \tag{13}$$

**证明** 注意到有：

$$\mathrm{D}\,\nabla_v s = \nabla_v\, \mathrm{D}\, s + [\nabla_v, \mathrm{D}]s, \forall v \in TM.$$

在取了 $S$ 的一组局部标架 $e_1, \ldots, e_r$ 后又可以计算出：

$$[\nabla_v, \mathrm{D}]s = g^{ij}\left(e_i\cdot \hat{R}(v,e_j)s + e_i\cdot \nabla_{[v,e_j]}s + \nabla_v e_i \cdot \nabla_{e_j} s\right)$$

也就是协变导数和 *Dirac* 算子的对易子是一个一阶微分算子，这样利用归纳法就可以得到：

$$\|\nabla s\|_{W^k} \leq C(\|\nabla \mathrm{D}\, s\|_{W^{k-1}} + \|\nabla s\|_{W^{k-1}}) \leq C(\|s\|_{W^k} + \|\mathrm{D}\, s\|_{W^k})$$

从这可以得到不等式*13*.

## 5.2 Dirac 算子的扩张

这一小节里我们扩大 Dirac 算子的定义域，使它成为一个闭算子（也就是它的图像是闭的）。

对算子 $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$，我们用 $\mathrm{Dom}(A)$ 表示 $A$ 的定义域，它是 $\mathcal{X}$ 的一个子空间（有可能为真子空间）。对两个算子 $A, A' : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$，如果 $\mathrm{Dom}(A) \subseteq \mathrm{Dom}(A')$，且 $A'|_{\mathrm{Dom}(A)} = A$，则称 $A'$ 包含 $A$（或 $A'$ 是 $A$ 的一个扩张），记为 $A \subseteq A'$.

我们会介绍两种扩张方式。第一种扩张方式被称为取闭包。对算子 $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$，我们称

$$\mathrm{Graph}(A) = \{(x, Ax) \mid x \in \mathrm{Dom}(A)\} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$$

为算子 $A$ 的图或图像。

**命题 5.1** 对 *Dirac* 算子 $\mathrm{D}$，存在唯一的算子 $\overline{\mathrm{D}}$，使得它的图像恰好是 $\mathrm{D}$ 的图像的闭包 $\overline{\mathrm{Graph}(\mathrm{D})}$。我们将 $\overline{\mathrm{D}}$ 称为 $\mathrm{D}$ 的闭包。

这一命题成立是因为 Dirac 算子是对称的。事实上，我们有下面的定理：

**定理 5.3** 对 *Hilbert* 空间 $\mathscr{H}$ 上的无界对称算子 $A$，$A$ 一定存在唯一的闭包 $\overline{A}$.

这一结果的证明可以在 [6] 中找到。

对 Dirac 算子 $\mathrm{D}$ 的闭包而言，更重要的是下面的定理：

**定理 5.4** 将 $\mathrm{D}$ 自然地延拓到 $W^1(M, S)$ 上得到的算子 $\tilde{D}$ 就是 $\overline{\mathrm{D}}$.

**证明** 根据 $\Gamma(S)$ 在 $W^1(S)$ 中稠密以及 $\mathrm{D}$ 在 $W^1$-范数下有界可以知道，

$$W^1(M, S) \subseteq \mathrm{Dom}(\overline{D}).$$

我们只需要证明 $\mathrm{Dom}(\overline{\mathrm{D}})$ 被 $W^1(M, S)$ 包含。我们任取 $\mathrm{Dom}(\overline{\mathrm{D}})$ 中的截面 $s$，那么存在一列光滑截面 $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 使得：

$$s_m \xrightarrow{L^2} s, \quad \mathrm{D}\, s_m \xrightarrow{L^2} \mathrm{D}\, s, \quad as\ m \to \infty.$$

这时利用 *Gårding* 不等式*12*可以知道，$s_n \xrightarrow{W^1} s$，根据 $W^1(M,S)$ 的完备性就可以知道 $s \in W^1(M,S)$. 这样就证明了 $\mathrm{Dom}(\overline{\mathrm{D}}) \subseteq W^1(M,S)$.

另一种扩张的方式利用了 Dirac 算子的对称性，被称为自伴扩张。我们定义 D 的对偶 $\mathrm{D}^*$ 为满足下面等式的算子

$$\langle \mathrm{D}^* s, \phi \rangle = \langle s, \mathrm{D}\,\phi \rangle, \forall \phi \in \mathrm{Dom}(\mathrm{D}) = \Gamma(S).$$

并且

$$\mathrm{Dom}(\mathrm{D}) = \{ s \in L^2(M,S) \mid \langle s, \mathrm{D}\,\cdot \rangle \text{ is bounded} \}.$$

根据 Dirac 算子的对称性可以知道，$\mathrm{D}^*$ 一定包含 D. 此外，$\mathrm{D}^*$ 一定是闭的，这是因为它的图像在 $V(s_1,s_2)=(-s_2,s_1)$ 的变换下变为 $\mathrm{Graph}(\mathrm{D})^{\perp}$. 所以我们实际上有：

$$\mathrm{D} \subsetneq \overline{\mathrm{D}} \subseteq \overline{\mathrm{D}}^* \subseteq \mathrm{D}^*.$$

在这里我们并不知道是否有 $\overline{\mathrm{D}} = \overline{\mathrm{D}}^*$，也就是 D 是否是本质自伴的 (essentially self-sdjoint)。我们之后关于 Dirac 算子正则性的讨论会告诉我们，Dirac 算子的确是本质自伴的。

## 5.3 Dirac 算子的正则性

Dirac 算子的正则性是指：

**定理 5.5** 设 $s \in L^2(M,S)$，满足 $\mathrm{D}^* s = u \in L^2(M,S)$，那么有 $s \in W^1(M,S)$，且 $\overline{\mathrm{D}} s = u$.

**证明** 通过取单位分解后在局部将 $s$ 光滑化，我们可以选取一列 $L^2$ 意义下收敛到 $s$ 的光滑截面 $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$，并且 $\{\nabla s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 有界。这样根据 $\mathrm{D}^*$ 的定义就知道：

$$\lim_{m\to\infty} \langle \mathrm{D}\, s_m, \phi \rangle = \lim_{m\to\infty} \langle s_m, \mathrm{D}\,\phi \rangle = \langle s, \mathrm{D}\,\phi \rangle = \langle \mathrm{D}^* s, \phi \rangle, \forall \phi \in \Gamma(S).$$

这时利用共鸣定理就知道 $\mathrm{D}\, s$ 弱收敛到 $\mathrm{D}^* s$. 根据 *Mazur* 的定理，$\mathrm{D}^* s$ 落在 $\{\mathrm{D}\, s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 的凸包的闭包内。更进一步，对任何一个正整数 $m$，$\mathrm{D}^* s$ 落在 $\{\mathrm{D}\, s_n\}_{n\geq m}$ 的凸包的闭包内。这时对每个 $m$，我们能选取一个光滑截面

$$s'_m = \sum_{i=m}^{m+N_m} \lambda_{mi} s_i,$$

满足 $\sum_{m\le i\le m+N_m}\lambda_{mi}=1$，且

$$\|\mathrm{D}^*s-\mathrm{D}\,s'_m\|_{L^2}=\left\|\mathrm{D}^*s-\sum_{i=m}^{m+N_m}\lambda_{mi}\,\mathrm{D}\,s_i\right\|_{L^2}\le\frac{1}{m}$$

此外，根据 $s'_m$ 的定义还可以证明，$\{s'_m\}$ 在 $L^2(M,S)$ 中的极限仍然是 $s$.

这时 $\{s'_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 和 $\{\mathrm{D}\,s'_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 均为 *Cauchy* 列。根据 *Gårding* 不等式*12*就知道：$\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 在 $W^1$-范数下也是柯西列。又因为它在 $L^2$ 意义下收敛到 $s$，因此在 $W^1$-的意义下的极限也只能为 $s$.

这样 $s$ 一定在 $W^1(M,S)$ 中，又利用 $\overline{\mathrm{D}}$ 在 $W^1$-范数下有界可以知道 $\overline{\mathrm{D}}s=u$.

这一定理实际上表明了 $\mathrm{Dom}(\mathrm{D}^*)\subseteq W^1(M,S)=\mathrm{Dom}(\overline{\mathrm{D}})$，进而有 $\mathrm{D}^*\subseteq\overline{\mathrm{D}}$. 这样我们就知道：

**命题 5.2** *Dirac* 算子 D 是本质自伴的，也就是有 $\overline{\mathrm{D}}^*=\overline{\mathrm{D}}$.

一般的，我们有：

**命题 5.3** 对 $s\in W^k(M,S)$，如果 $\overline{\mathrm{D}}s=u\in W^k(M,S)$，那么 $s\in W^{k+1}(M,S)$.

**证明** 命题的证明可以靠归纳法得到。对 $\overline{\mathrm{D}}s=u\in W^k(M,S)$ 两边取协变导数可以得到

$$\overline{\mathrm{D}}\nabla_v s=\nabla u+[\overline{\mathrm{D}},\nabla_v]s$$

因为 $\nabla_v$ 和 $[\overline{\mathrm{D}},\nabla_v]$ 都是一阶微分算子，上面式子的右边落在 $W^{k-1}(M,S)$ 中。这样根据归纳假设可以知道 $\nabla s\in W^k(M,S)$，进而 $s\in W^{k+1}(M,S)$.

上面的命题和 Sobolev 嵌入结合起来，我们就可以提升解的光滑性：

**引理 5.1** *(Weyl)* 如果 $s\in L^2(M,S)$ 使得 $\overline{\mathrm{D}}s=u\in\Gamma(S)$，那么 $s\in\Gamma(S)$.

**证明** 因为 $\Gamma(S)$ 是任何 $W^k(M,S)$ 的子空间，所以根据命题*5.3*可以知道对任意的 $k$，截面 $s$ 落在 $W^k(M,S)$ 中。这时候，取 $k$ 充分大（比如取 $k>n+2l$），那么由*8*就知道：对任意的 $l$，截面 $s$ 是 $l$ 阶可微的。所以截面 $s$ 是光滑的。

在这些定理的基础上，我们有下面的推论：

**推论 5.1** 对 *Clifford* 丛 $S$ 上的 *Dirac* 算子 D，有 $\ker\mathrm{D}=\ker\overline{\mathrm{D}}$，且 $\dim\ker\mathrm{D}<+\infty$.

**证明** 显然有 $\ker \mathrm{D} \subseteq \ker \overline{\mathrm{D}}$. 又对 $s \in \ker \overline{\mathrm{D}}$，有 $\mathrm{D}\, s = 0 \in \Gamma(S)$，所以根据 *Weyl* 引理*5.1*可知 $s \in \Gamma(S)$，这样 $\ker \overline{\mathrm{D}} \subseteq \ker \mathrm{D}$. 所以 $\ker \mathrm{D} = \ker \overline{\mathrm{D}}$.

下设 $\ker \mathrm{D}$ 不是有限维的，那么可以找到一列单位正交的截面 $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \ker \mathrm{D}$. 利用 *Gårding* 不等式*12*得：

$$\|s_m\|_{W^1} \leq C(\|s_m\|_{L^2} + \|\mathrm{D}\, s_m\|_{W^2}) = C, \forall m \in \mathbb{N}.$$

这样由 *Rellich* 引理*4.1*可知，$\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 有一个子列（仍然记为 $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$），它在 $L^2(M,S)$ 中为 *Cauchy* 列。但根据 $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 的选取，有：

$$\|s_{m_1} - s_{m_2}\|_{L^2} = \sqrt{2}, \forall m_1, m_2 \in \mathbb{N}.$$

这就产生了矛盾。

## 5.4 Dirac 算子相关的紧性

我们这一节的目标是证明下面的引理：

**引理 5.2** 存在自伴紧算子 $Q\colon L^2(M,S) \to W^1(M,S)$，使得 $\operatorname{im} Q \subseteq W^2(M,S)$，且

$$s = (1 + \overline{\mathrm{D}}^2) Q s, \forall s \in L^2(M,S).$$

如果使用谱分解定理和函数演算 (functional calculus) 的结论，我们可以很快得到引理里的 $Q$ 的存在性：容易看出 $1 + \overline{\mathrm{D}}^2$ 的谱均不小于 1，因此它有逆映射：

$$Q\colon \operatorname{im}(1 + \overline{\mathrm{D}}^2) \longrightarrow \operatorname{Dom}(1 + \overline{\mathrm{D}}^2)$$

根据 Dirac 算子的正则性（命题5.3）可以知道 $\operatorname{Dom}(1 + \overline{\mathrm{D}}^2) \subseteq W^2(M,S)$，而根据 $\frac{1}{1+x^2}$ 有界可以知道 $\operatorname{Dom}(Q) = L^2(M,S)$.

不过我们还是给出一种不需要谱分解定理的证明办法。

**证明** 因为 $\overline{\mathrm{D}}$ 的图像是闭的，我们可以取从 $L^2(M,S) \times L^2(M,S)$ 到 $\operatorname{Graph}(\overline{\mathrm{D}})$ 的投影 $P$. 我们设

$$P(x,0) = (Qx, \overline{\mathrm{D}} Q x), \forall x \in L^2(M,S).$$

这时 $(x,0) - (Qx, \overline{\mathrm{D}} Q x)$ 与 $\operatorname{Graph}(\overline{\mathrm{D}})$ 正交，也就是：

$$0 = \langle x - Qx, s \rangle - \left\langle \overline{\mathrm{D}} Q x, \mathrm{D}\, s \right\rangle, \forall s \in \Gamma(S).$$

这表明 $\mathrm{D}^*(\overline{\mathrm{D}}Qx) = x - Qx \in L^2(M,S)$，因此根据 *Dirac* 算子的正则性（命题*5.3*）有 $\overline{\mathrm{D}}Qx \in W^1(M,S)$，进而 $Qx \in W^2(M,S)$. 结合 $x$ 的任意性知，$\mathrm{im}\,Q \subseteq W^2(M,S)$.

此外，上面的等式相当于 $\left\langle x - (1+\overline{\mathrm{D}}^2)Qx, s \right\rangle = 0$，这说明

$$x = (1+\overline{\mathrm{D}}^2)Qx, \forall x \in L^2(M,S).$$

又根据 *Gårding* 不等式*12*，我们有：

$$\begin{aligned}\|x\|_{W^2}^2 &\leq C(\|x\|_{W^0}^2 + \|\overline{\mathrm{D}}^2 x\|_{W^0}^2 + 2\|\overline{\mathrm{D}}x\|_{W^2}^2) \\ &= C(\|x\|_{W^0}^2 + \|\overline{\mathrm{D}}^2 x\|_{W^0}^2 + 2\left\langle x, \overline{\mathrm{D}}^2 x\right\rangle) \\ &= C\|x + \overline{\mathrm{D}}^2 x\|_{W^2}\end{aligned}$$

将上面不等式里的 $x$ 全部替换为 $Qs$，就有：$\|Qx\|_{W^2} \leq C\|x\|_{W^2}$. 也就是 $Q$ 是 $L^2(M,S)$ 到 $W^2(M,S)$ 的有界算子。又根据 *Rellich* 引理*4.1*，$W^2(M,S)$ 紧包含于 $W^1(M,S)$，所以作为 $L^2(M,S)$ 到 $W^1(M,S)$ 的算子，$Q$ 是紧的。

事实上，从上面的引理可以进一步得到 Dirac 算子的谱的性质。我们将这部分的讨论留在了附录中。

## 5.5 Hodge 分解的证明：第二部分

我们在这一部分完成 Hodge 分解的所有证明。这时候 $M$ 上的 Clifford 从 $S$ 为 $\wedge^* T^* M$，相应的 Dirac 算子 $\mathrm{D}$ 为 $\mathrm{d}+\delta$.

一个比较基本的观察是

$$\left\langle \overline{\mathrm{D}}^2 s, s\right\rangle = \left\langle \overline{\mathrm{D}}s, \overline{\mathrm{D}}s\right\rangle = \|\overline{\mathrm{D}}s\|_{L^2}^2, \forall s \in W^2(M,S).$$

所以 $\ker \overline{\mathrm{D}}^2 = \ker \overline{\mathrm{D}}$. 在 Hodge 分解里，这相当于全体调和形式构成的空间 $\mathcal{H}^*(M)$ 就是 $\ker \mathrm{D}$.

我们首先说明：

**命题 5.4** *全体调和形式构成的空间* $\mathcal{H}^*(M) = \ker \mathrm{D}$ *是有限维的.*

事实上，在有了前面的观察之后，这一结果就是命题5.1的推论。

最后我们只需要证明：

**命题 5.5**

$$\Omega^*(M) = \mathrm{im}\,\mathrm{d} + \mathrm{im}\,\delta + \mathcal{H}^*(M) \tag{14}$$

使用 Dirac 算子的谱的相关结论可以很容易地得到上面的命题，不过我们还是给出一个绕开谱的性质的证明。

**证明** 容易看出

$$\operatorname{im}\Delta \subseteq \operatorname{im}\mathrm{d} + \operatorname{im}\delta$$

所以我们只需要证明 $\Omega^*(M) = \operatorname{im}\Delta \oplus \ker\Delta$.

注意到对 $\omega \in L^2(S)$，有

$$\begin{aligned}\omega \in (\operatorname{im}\Delta)^{\perp} &\iff 0 = \langle \omega, \Delta\phi \rangle, \forall \phi \in W^2(M,S)\\ &\iff \Delta^*\omega = 0\\ &\iff \Delta \in \ker\Delta.\end{aligned}$$

因此 $\operatorname{im}\Delta$ 的正交补就是 $\ker\Delta$. 所以我们只需要证明 $\Omega^*(M) = \operatorname{im}\Delta \oplus (\operatorname{im}\Delta)^{\perp}$. 而这只需要证明 $\operatorname{im}\overline{\Delta} \subseteq L^2(M,S)$ 是一个闭集。

我们先证明一个引理：

**引理 5.3** 存在常数 $C$ 使得对于 $\omega \in (\ker\Delta)^{\perp} \cap W^2(M,S)$，有

$$\|\omega\|_{L^2} \leq C\|\Delta\omega\|_{L^2}. \tag{15}$$

若不然，则可以找到一列 $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (\ker\Delta)^{\perp}$，使得每个 $\omega_k$ 的 $L^2$-范数都是 1，但 $\Delta\omega_k \xrightarrow{L^2} 0$. 这时 $\omega_k + \Delta\omega_k$ 是有界的，因此由引理*5.2*可知 $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 有一组 $L^2$-收敛的子列（仍然记为 $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$），设它的极限为 $\omega$. 那么有：

$$\langle \omega, \Delta\phi \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle \omega_k, \phi \rangle = \lim_{k\to\infty} \left\langle \overline{\Delta}\omega_k, \phi \right\rangle = 0, \forall \phi \in \Gamma(S).$$

这表明 $\Delta^*\omega = 0$. 这样 $\omega \in \ker\Delta$.

另一方面，由 $\omega_k \xrightarrow{L^2} \omega$ 和 $(\ker\Delta)^{\perp}$ 在 $L^2(M,S)$ 中是闭的可知，$\omega \in (\ker\Delta)^{\perp}$ 且 $\|\omega\|_{L^2} = 1$. 这样我们就得到了 $(\ker\Delta)^{\perp} \cap \ker\Delta$ 中的非零元素 $\omega$，这显然矛盾了。这样就证明了引理。

下面我们证明 $\operatorname{im}\overline{\Delta}$ 是闭集。对 $\operatorname{im}\overline{\Delta}$ 中的任何一个收敛子列 $\overline{\Delta}\eta_k \xrightarrow{L^2} s$，因为 $\ker\Delta$ 是闭集，所以我们可以选取 $\eta_k$ 使得 $\eta_k \in (\ker\Delta)^{\perp}$.

这时候由引理*5.3*可以知道

$$\|\eta_k + \overline{\Delta}\eta_k\|_{L^2} \leq \|\eta_k\|_{L^2} + \|\overline{\Delta}\eta_k\|_{L^2} \leq (1+C)\|\overline{\Delta}\eta_k\|_{L^2} \leq C', \forall k \in \mathbb{N}.$$

这样利用引理*5.2*可知 $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 有一个 $L^2$-范数下的收敛子列（仍然记为 $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$），设它收敛到 $\eta$. 那么有

$$\langle\eta,\Delta\phi\rangle=\lim_{k\to\infty}\langle\eta_k,\phi\rangle=\lim_{k\to\infty}\left\langle\overline{\Delta}\eta_k,\phi\right\rangle=\langle s,\phi\rangle,\forall\phi\in\Gamma(S).$$

这表明 $s=\Delta^*\eta=\overline{\Delta}\eta\in\operatorname{im}\overline{\Delta}$. 这样就说明了 $\operatorname{im}\overline{\Delta}$ 是闭集。

# 6 一些推论

我们在这一节里列举 Hodge 分解的一些简单推论。

**推论 6.1** 设 $(M,g)$ 为一个定向闭黎曼流形，那么：

(1) 对每一个 *de Rham* 上同调类 $[\omega]\in H^p_{DR}(M)$，存在唯一的调和形式 $\tilde{\omega}$ 作为它的代表元。

(2) $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{H}^p=\dim_{\mathbb{R}}H^p_{DR}(M)$. 进而 $M$ 的任意阶 *de Rham* 上同调群都是有限维线性空间。

(3) *(Poincaré* 对偶*)Hodge* 星算子 $\star$ 给出了上同调群的同构：$H^p_{DR}(M)\cong H^{n-p}_{DR}(M)$.

**证明** 对于 *(1)*，由定理*1.1*，可设 $\omega=\tilde{\omega}+\mathrm{d}\,\alpha+\delta\,\beta$，其中 $\tilde{\omega}\in\mathcal{H}^p(M)$ 是调和形式。那么由 $\mathrm{d}\,\omega=0$ 可知：

$$0=\langle\mathrm{d}\,\omega,\beta\rangle=\langle\mathrm{d}\,\delta\,\beta,\beta\rangle=\langle\delta\,\beta,\delta\,\beta\rangle$$

这样 $\delta\,\beta=0$，所以 $[\omega]=[\tilde{\omega}+\mathrm{d}\,\alpha]=[\tilde{\omega}]$. 这就证明了 $\tilde{\omega}$ 的存在性。

又对 $[\omega]$ 的两个调和的代表元 $\tilde{\omega},\tilde{\omega}'$，由 $[\tilde{\omega}]=[\tilde{\omega}']$ 可知

$$\tilde{\omega}-\tilde{\omega}'\in\operatorname{im}\mathrm{d}\cap\mathcal{H}^*(M)=0$$

所以 $\tilde{\omega}=\tilde{\omega}'$. 这就证明了唯一性。

对于 *(2)*，由 *(1)* 的证明以及调和形式为闭形式可知，我们有线性空间之间的同构：

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{H}^p(M)&\xrightarrow{\cong}&H^p_{DR}(M)\\\tilde{\omega}&\longmapsto&[\tilde{\omega}]\end{array}$$

这样 $\mathcal{H}^p(M)$ 和 $H^p_{DR}(M)$ 具有相同的维数。并且由 $\mathcal{H}^p(M)$ 是有限维线性空间可知 $H^p_{DR}(M)$ 也是有限维的。

对于 *(3)*，注意到对任意的 $\omega \in \Omega^p(M)$，有

$$\begin{aligned}
\star\Delta\omega &= \star(\mathrm{d}\,\delta + \delta\,\mathrm{d})\omega = (-1)^{n(p+1)+1}\star\mathrm{d}\star\mathrm{d}\star\omega + (-1)^{n(p+2)+1}\star^2\mathrm{d}\star\mathrm{d}\,\omega \\
&= \left((-1)^{n(n-p+2)+1}\star\mathrm{d}\star\right)\mathrm{d}\star\omega + (-1)^{np+1+p(n-p)}\,\mathrm{d}\star\mathrm{d}\,\omega \\
&= \delta\,\mathrm{d}\star\omega + \mathrm{d}\left((-1)^{n(n-p+1)+1}\star\mathrm{d}\star\right)\star\omega \\
&= \delta\,\mathrm{d}\star\omega + \mathrm{d}\,\delta\star\omega = \Delta\star\omega
\end{aligned}$$

也就是 $\star$ 和 $\Delta$ 交换，所以 $\mathcal{H}^*(M) = \ker\Delta$ 是 $\star$ 的不变子空间。这样我们就有一系列的同构：

$$H^p_{DR}(M) \cong \mathcal{H}^p(M) \xrightarrow{\star} \mathcal{H}^{n-p}(M) \cong H^{n-p}_{DR}(M).$$

这样就证明了 *(3)*.

上面的 (2) 实际上给出了使用拓扑的工具证明 $\mathcal{H}^p(M)$ 是有限维线性空间的办法。我们可以取 $M$ 的有限开覆盖，然后用 Mayer-Vietoris 长正合列证明 $H^p_{DR}(M)$ 是有限维的，这样和它线性同构的空间 $\mathcal{H}^p(M)$ 也是有限维的。

# A 使用协变导数表示外微分和余微分

我们在这一部分给出4的计算过程。我们只需要对每个点 $x \in M$ 验证这一等式。这时，我们可以取 $x$ 处由指数映射诱导的局部坐标 $(x^1, \dots, x^n)$，那么在 $x$ 处有

$$g_{ij} = \delta_{ij} \quad \nabla\frac{\partial}{\partial x^i} = 0, \quad \nabla \mathrm{d}x^j = 0, \quad \forall i, j$$

进而可知 $\nabla(\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p})$ 在 $x$ 处也为 0.

这样对 $\omega = f\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}$，在 $x$ 处有：

$$\mathrm{d}\,\omega = (\mathrm{d}\,f) \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} = \frac{\partial f}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}$$

$$\mathrm{d}x^k \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\omega = \mathrm{d}x^k \wedge \frac{\partial f}{\partial x^k}\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}$$

比较这两个式子可知：$\mathrm{d}\,\omega = \mathrm{d}x^k \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\omega$.

余微分 $\delta$ 的计算要复杂一些。对 $\omega = f\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}$,不妨设 $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$. 我们取 $j_1 < j_3 < \cdots < j_{n-p}$ 使得 $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, k_{n-p}$ 构成 $1, 2, \dots, n$ 的排列。那么

$$\delta^{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_{n-p}}_{1\cdots p(p+1)\cdots n} = (-1)^{(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_p-p)} = (-1)^{\sum_{k=1}^p i_k + \frac{p(p+1)}{2}}$$

我们将上式的右边记为 $\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_p}$. 那么这时有：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\star\omega &= \epsilon_{i_1\cdots i_p}(\mathrm{d}\,f)\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_{n-p}} = \sum_{k=1}^{p}\epsilon_{i_1\cdots i_p}\frac{\partial f}{\partial x^{i_k}}\mathrm{d}x^{i_k}\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_{n-p}} \\
&= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{i_k+k}\epsilon_{i_1\cdots i_p}\frac{\partial f}{\partial x^{i_k}}\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_{l_k}}\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\wedge\mathrm{d}x^{j_{l_k+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_{n-p}} \\
&= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p+k}\epsilon_{i_1\cdots\hat{i_k}\cdots i_p}\frac{\partial f}{\partial x^{i_k}}\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_{l_k}}\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\wedge\mathrm{d}x^{j_{l_k+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_{n-p}} \\
&= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p+k}\star\frac{\partial f}{\partial x^{i_k}}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\hat{x^{i_k}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}
\end{aligned}$$

其中 $j_{l_k} < i_k < j_{l_k+1}$. 在上面的式子两边作用 $(-1)^{n(p+1)+1}\star$，可得：

$$\begin{aligned}
\delta\,\omega &= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p+k+n(p+1)+1+(p-1)(n-p+1)}\frac{\partial f}{\partial x^{i_k}}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\hat{x^{i_k}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p} \\
&= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k}\frac{\partial f}{\partial x^{i_k}}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\hat{x^{i_k}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}
\end{aligned}$$

同时，我们又有

$$\begin{aligned}
-\operatorname{tr}_{12}\nabla\omega &= -\iota_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\Big(\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^{i_k}\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\hat{x^{i_k}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p} \\
&= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k}\frac{\partial f}{\partial x^{i_k}}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\hat{x^{i_k}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}
\end{aligned}$$

将这一等式和上一等式比较就知道 $\delta\,\omega = -\operatorname{tr}_{12}\nabla\omega$.

# B　Weitzenböck 公式的证明

因为等式6左右两边均与标架的选取无关，因此我们只需要证明 $e_1,\ldots,e_n$ 为单位正交标架的情形。也就是

$$\mathrm{D}^2\,s = -\operatorname{tr}_{12}\nabla^2 s + \frac{1}{2}\sum_{i,j}e_i e_j\cdot\hat{R}(e_i,e_j)s \tag{16}$$

为了书写的方便，在这一节里，如果一个表达式里出现两个相同的指标（不论

是上标还是下标），我们都认为这表示对这一指标求和。我们有：

$$\begin{aligned}
D^2 s &= (e_i \cdot \nabla_{e_i})(e_j \cdot \nabla_{e_j} s) = e_i(\nabla_{e_i} e_j) \cdot \nabla_{e_j} s + e_i e_j \cdot \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} s \\
&= e_i e_k \cdot g(\nabla_{e_i} e_j, e_k) \nabla_{e_j} s + e_i e_j \cdot \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} s \\
&= \Big(-g(\nabla_{e_i} e_j, e_i) \nabla_{e_j} s + \textstyle\sum_{k \neq i} e_i e_k \cdot g(\nabla_{e_i} e_j, e_k) \nabla_{e_j} s\Big) \\
&\quad + \Big(-\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} s + \textstyle\sum_{i \neq j} e_i e_j \cdot \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} s\Big) \\
&= \Big(g(e_j, \nabla_{e_i} e_i) \nabla_{e_j} s - \textstyle\sum_{j \neq i} e_i e_j \cdot g(e_k, \nabla_{e_i} e_j) \nabla_{e_k} s\Big) \\
&\quad + \Big(-\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} s + \textstyle\sum_{i \neq j} e_i e_j \cdot \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} s\Big) \\
&= -\big(\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} s - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} s\big) + \textstyle\sum_{i \neq j} e_i e_j \cdot (\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} - \nabla_{\nabla_{e_i} e_j}) s
\end{aligned}$$

其中第三个等号是将上一行的两个式子分别按照 $i = j$ 和 $i \neq j$ 拆成两部分，下一个等号是因为联络 $\nabla$ 和度量 $g$ 相容（同时我们还交换了指标 $j, k$），最后一个等号是将所有 $i = j$ 的部分放到了一起，将所有 $i \neq j$ 的部分放到了一起。

最后注意到有：

$$\operatorname{tr}_{12} \nabla^2 s = \Big(\nabla_{e_i}(\nabla s)\Big)(e_i) = \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} s - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} s$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j} e_i e_j \cdot (\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} - \nabla_{\nabla_{e_i} e_j}) s &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} e_i e_j \cdot (\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} - \nabla_{\nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i}) s \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} e_i e_j \cdot (\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} - \nabla_{[e_i, e_j]}) s \\
&= \frac{1}{2} e_i e_j \cdot \hat{R}(e_i, e_j) s
\end{aligned}$$

将这两个等式代入上面的等式里，就得到了式16.

# C Dirac 算子的谱

关于 Dirac 算子的谱，我们给出下面的定理。

**定理 C.1** (1) *Dirac* 算子 D 的谱均为点谱，且谱集 $\sigma(\mathrm{D})$ 为 $\mathbb{R}$ 上的离散点集。

(2) 如果设 $\sigma(\mathrm{D}) = \{\lambda_i \mid i \in \mathbb{N}\}$，那么有正交分解：

$$L^2(M, S) = \overline{\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} E_{\lambda_i}}$$

其中 $E_{\lambda_i} \subseteq \Gamma(S)$ 是 $\lambda_i$ 对应的特征子空间，且 $\dim E_i < +\infty$.

**证明** 用 $Q$ 表示引理*5.2*中的算子 $Q$. 那么根据紧自伴算子的谱理论可知：$Q$ 除了 0 外的谱均为点谱，且至多有一个聚点 0，且 $Q$ 的每个点谱 $\lambda$ 给出了一个有限维特征子空间 $E'_\lambda$，使得 $L^2(M,S)=\overline{\bigoplus_{\lambda\in\sigma(Q)}E'_\lambda}$. 在我们这一情况中，$Q$ 有逆，所以 0 不是点谱。

这样就有

$$(1+\overline{\mathrm{D}}^2)\big|_{E'_\lambda}: s\longmapsto \frac{1}{\lambda}s, \forall\lambda\in\sigma(Q).$$

所以 $\sigma(1+\overline{\mathrm{D}}^2)=\{\lambda^{-1}\mid\lambda\in\sigma(Q)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的离散点集，且对 $\lambda\in\sigma(1+\overline{\mathrm{D}}^2)$，它对应的特征子空间是 $E'_{\lambda^{-1}}$.

又因为有 $\sigma(1+\overline{\mathrm{D}}^2)=1+\sigma(\overline{\mathrm{D}})^2$，所以

$$\sigma(\overline{\mathrm{D}})\subseteq\{\pm\sqrt{\lambda-1}\mid\lambda\in\sigma(1+\overline{\mathrm{D}}^2)\}$$

是 $\mathbb{R}$ 的离散点集。这样就证明了 *(1)*.

对于 *(2)*，因为 $\overline{\mathrm{D}}$ 和 $1+\overline{\mathrm{D}}^2$ 交换，所以 $\overline{\mathrm{D}}$ 保持每个 $E'_{\lambda^{-1}}$ 不变。在每个 $E'_{\lambda^{-1}}$ 上，有：

$$(\lambda-1)-\overline{\mathrm{D}}^2=0$$

这推出每个 $E'_{\lambda^{-1}}$ 可以正交分解为 $\overline{\mathrm{D}}$ 的两个特征子空间 $E_{\sqrt{\lambda-1}},E_{-\sqrt{\lambda-1}}$ 的直和。结合 $E'_\lambda$ 两两正交且它们的直和的闭包为 $L^2(M,S)$ 可知：

$$L^2(M,S)=\overline{\bigoplus_{\lambda\in\sigma(1+\overline{\mathrm{D}}^2)}E_{\sqrt{\lambda-1}}}\oplus\overline{\bigoplus_{\lambda\in\sigma(1+\overline{\mathrm{D}}^2)}E_{-\sqrt{\lambda-1}}}=\overline{\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}E_{\lambda_i}}.$$

并且每个 $E_{\lambda_i}$ 都是有限维的。此外，利用 *Dirac* 算子的正则性很容易证明 $E_{\lambda_i}\subseteq\Gamma(S)$.

# 参考文献


[1] Evans, L.C., 2022. Partial differential equations, Second edition. ed, Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society.

[2] Schmüdgen, K., 2012. Unbounded Self-Adjoint Operators on Hilbert space, Graduate texts in mathematics. Springer New York.

[3] Warner, F.W., 1983. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Graduate Texts in Mathematics. Springer New York.

[4] 梅加强, 2013. 流形与几何初步. 科学出版社.

[5] 张恭庆, 林源渠, 2021. 泛函分析讲义（上册）, 第 2 版. 北京大学出版社.

[6] 张恭庆, 郭懋正, 1990. 泛函分析讲义（下册）, 第 1 版. 北京大学出版社.