

教育科學研究期刊 第六十七卷第四期

2022年，67 (4), 285-318

[https://doi.org/10.6209/JORIES.202212\\_67\(4\).0009](https://doi.org/10.6209/JORIES.202212_67(4).0009)



## 體現動態視覺化對中學生學習 代數式基本運算的影響

左台益

國立臺灣師範大學  
數學系

呂鳳琳

國立臺灣師範大學  
數學系

李健恆

國立臺灣師範大學  
數學系

### 摘要

動態視覺化易於解說與展演抽象概念和程序過程，經常作為促進個體認知理解的一項途徑。然而，其所伴隨的瞬變效應可能不利於學習者在短時間內進行感知及認知處理，以致無法顯現預期的學習效果。相關研究建議體現動態視覺化，意即結合手勢等體現模擬的展演方式，有助於個體在動態視覺化過程中進行有意義的學習。因此，本研究旨在探討體現模擬、圖像動畫與靜態圖示等不同展演方式對七年級學生在學習代數式基本運算的認知面與情意面之影響。研究方法採用準實驗設計，對96位七年級學生隨機提供一種展演方式進行自主學習，並透過前、後測與學習感受問卷分析效果。結果發現：一、體現模擬或圖像動畫能明顯幫助學生在基本題、迷思概念及近遷移和遠遷移的學習效果；但靜態圖示在遠遷移部分則未能顯現學習效果；二、對高數學學習成就學生來說，體現模擬在基本題方面的學習效果會明顯優於圖像動畫，在遠遷移方面的學習效果則會明顯優於靜態圖示；三、對低數學學習成就學生來說，體現模擬或圖像動畫在基本題方面的學習效果均明顯高於靜態圖示；四、展演方式與數學學習成就兩變項對學生在學習感受上具有明顯的交互作用。根據本研究結果，對體現動態視覺化在數學教學與學習上的應用與方向提出建議。

關鍵詞：代數式基本運算、概念隱喻、過程概念、體現動態視覺化、體現模擬

通訊作者：呂鳳琳，E-mail: fenglin.lu@gmail.com

收稿日期：2022/02/20；修正日期：2022/06/22；接受日期：2022/11/12。

## 壹、緒論

由於數學物件是抽象思維的產物，需借助外在表徵來溝通與建構數學思維，因此，在學習過程中，表徵的選取與使用成為學習者能否有效建構與應用數學概念的重要因素。一般而言，數學文本會透過算式或文字表徵的展演來幫助學習者理解數學內容（吳昭容等人，2021），特別是對使用大量抽象代數符號進行運算的中學代數單元更是如此。許多學生經常對於使用文數字符號代表一般數、未知數或是變數的代數思維與運用文數字符號進行運算感到抽象與混亂，同時可能也因為代數式基本運算的過程不易與具體經驗連結，而對演算法則與運算過程感到複雜與無法產生有感且有意義的學習。是故，即便是能順利解決多項式乘法、因式分解與配方法問題的學生，仍有相當比例是藉由強記或機械式演練這些演算程序法則，並非真正理解這些計算步驟的意義與概念，此即Skemp（1976）所謂的工具性理解（instrumental understanding）。相關研究指出，代數式基本運算同時具有概念性知識與程序性知識，並以過程概念（procept）一詞來強調整合過程與概念的重要性（Gray & Tall, 1994; Sfard, 1991）。再者，代數式基本運算中的交換律、結合律、分配律所蘊含的過程概念是發展中學代數的重要基礎，須讓學生在此階段順利理解，否則將不利於之後的代數概念發展，如一元二次方程式。因此，本研究即在探討在以算式表徵為主的數學文本內容中，不同展演方式解說代數式基本運算的概念與過程對學生在認知面與情意面的影響，以瞭解如何在學習內容中呈現有利於學生學習代數式基本運算的演示方式。

Moreno-Armella等人（2008）指出個體在數學學習過程中，其表徵形式與符號思維會隨著工具形式的改變而不斷地演化和發展。換言之，學習者需理解不同表徵形式與符號思維的意義，才能順利展現與溝通數學想法。例如，Rohr與Reimann（1998）指出數學教師經常會借助視覺化表徵促進學習者的概念理解。然而，對初學者而言，靜態視覺化表徵無法提供足夠訊息來充分展現數學上有關動作和動態過程的概念。因此，Bell等人（2012）主張動態視覺化表徵能夠在動態過程中提供更多視覺化的效果與訊息，支助學習者去經驗抽象數學概念中的變異性與不變性。Zazkis等人（1996）研究亦同樣指出動態視覺化過程有助於學習者建立內在表徵及外在表徵之間的連結。因此，本研究欲探討以不同表徵形式進行展演，對學生學習代數式基本運算的學習效果。

雖然動態視覺化方式易於展演和解說抽象數學概念或演算過程，且經常作為數位學習教材呈現抽象或複雜學習內容的方式之一，但其所伴隨的瞬變效應（transient effect）經常讓初學者無法在短時間內進行感知與認知上的處理而影響學習效果。對此，教育心理學家De Koning與Tabbers（2011）建議可以築基於個體在學習時可能使用或展現的肢體動作等身體經驗來強化動態視覺化的學習效果。例如，Wong等人（2009）研究指出個體在學習有關摺紙或繩結等

程序性操作活動時，觀看動畫產生的學習效果會明顯優於觀看靜態圖片產生的學習效果。Castro-Alonso等人（2015）進一步從認知神經科學的研究（Shimada & Oki, 2012）指出在動態視覺化過程中結合手勢等展演方式，能觸發個體腦中鏡像神經系統之運作，有助於個體對動作或過程等程序事件的理解和學習，此方式稱之為體現動態視覺化（embodied dynamic visualization）。簡言之，體現動態視覺化能降低瞬變效應所伴隨的負面影響，有助於學習者從動態過程中擷取必要的訊息，進行有意義的學習。例如，De Koning與Tabbers（2013）研究指出，在解說閃電形成過程的教學動畫中加入手勢的指引，能夠強化保留與遷移的學習效果。此外，Bos與Renkema（2022）以概念隱喻理論（Lakoff & Núñez, 2000）中的物件集合（object collection）為依據，將代數式基本運算的等價關係比喻為實體物件在天平上的移動過程，即透過具體物件或行動經驗以產生概念隱喻來理解抽象概念的認知機制（Lakoff & Núñez, 2000），探討借助鏡像神經系統喚起個體先前知覺動作經驗的體現模擬（embodied simulation）、動態視覺化與靜態圖示三者對七年級學生學習代數式基本運算的影響。其研究發現體現模擬與動態視覺化方式對已具備代數相關先備知識的高層次學生能產生低度效果量的正向學習效果，但體現模擬方式對未具備代數相關先備知識的低層次學生則會形成負面效果。是故，本研究以概念隱喻理論之物件集合概念（Lakoff & Núñez, 2000）與具指示性意義和隱喻性意義的手勢（McNeill, 1992; Robutti, 2020）觀點為基礎，將代數式基本運算視為集合中不同物件在抽象運算過程中具體產生的行為動作與處理結果，並探討體現模擬對七年級學生學習代數式基本運算的影響。

綜言之，本研究欲瞭解七年級學生學習代數式基本運算時，靜態圖示、圖像動畫與體現模擬等展演方式對其認知面與情意面的影響。因此，本研究以代數式基本運算與過程概念的關係、動態視覺化與數學學習的關聯以及體現動態視覺化與概念隱喻的連結作為理論基礎，並從中形成本研究的研究假設。

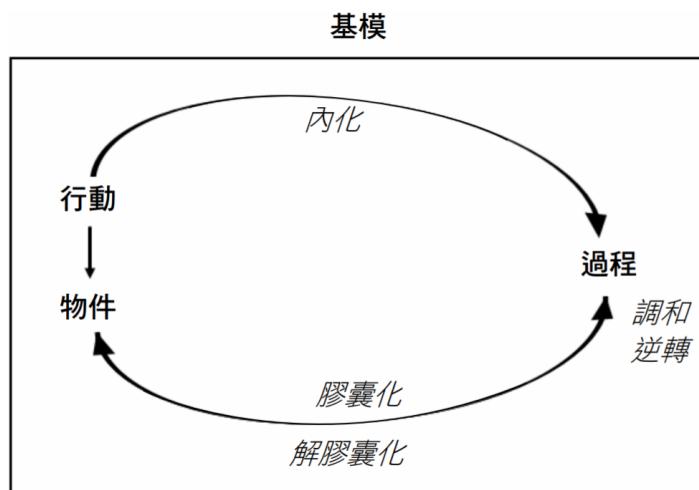
## 一、代數式基本運算與過程概念

在中學階段，代數式基本運算的數學概念與演算程序是發展代數概念與代數思維的基礎，亦是《十二年國民基本教育課程綱要》（以下簡稱108課綱）核心素養在符號運用與溝通表達項目上的具體內涵（教育部，2018）。因此，如何協助學生從小學處理日常語言與數字及算術符號之間的轉換能力發展到國中運用文數字符號描述情境中的現象與數學關係的一般化能力，是培養學生具備數學素養的重要門檻。事實上，代數式基本運算如數學物件般，同時具有概念性知識和程序性知識（Sfard, 1991）。Gray與Tall（1994）從過程物件觀點提出符號可作為整合數學概念與演算過程的樞紐（pivot），並提出過程概念來強調整合過程與概念的重要性。以分配律為例， $(ax + b) \times c$  不僅在闡釋數學式展開運算的概念，同時也在表達  $ax \times c$  加上  $b \times c$  逐步進行四則運算的結構與過程。一般在教科書上會透過靜態圖示、箭頭或文字來表達

代數式基本運算的過程與數學物件的結構關係。然而，代數式基本運算所蘊含的過程概念對初次接觸文數字表示與代數式基本運算的學生而言，可能因內在認知負荷過高而使學生無法深入理解代數式基本運算的過程概念。對此，Dubinsky自1980年代起即以APOS（Action-Process-Object-Schema）理論說明個體在學習特定數學概念或演算法則時，其心智結構與運作機制的發展歷程，以協助個體掌握數學的本體（Arnon et al., 2014）。Dubinsky認為概念基模（schema）的建立與發展過程是經由在舊有物件（object）上的行動（action），從外在的引導內化（internalization）為心智中的過程（process），配合概念的調和（coordination）與逆轉（reversal）等機制也能順利完成後，所有相關概念已逐漸被視為一個整體，並把概念膠囊化（encapsulation）為新物件。此時，個體也能將物件進行解膠囊化（de-encapsulation），從而與其他相關概念進行調和而形成其他新的物件，直到對相關概念完全掌握而成為該知識的基模（左台益、李健恆，2018），如圖1所示。

圖1

APOS理論的心智結構及機制



如上所述，Dubinsky將特定數學概念的認知發展歷程分為行動、過程、物件等不同階段，並配合內化、調和、膠囊化等反思運作機制來描述個體如何對數學概念達到深度理解與其可能的學習軌道。以代數式基本運算中的分配律 $(ax + b) \times c$ 為例，在運算過程中，會將 $ax \times c$ 和 $b \times c$ 視為APOS理論中的行動階段。當學習者在進行若干次行動後，掌握分配律即是在進行乘法展開運算的計算過程時，學習者的認知層次便達到過程階段。接著，當學習者從若干次的過程中體會到其結果為展開運算後所得到的值時，學習者的認知層次便達到物件階段。最後，當學習者能夠將以分配律運算後的值視為一新物件，並能用此新物件再次進行其他代數式基

本運算時，學習者便達到基模階段的認知層次。相關研究 (Dubinsky & McDonald, 2001; Weller et al., 2009) 亦指出，對數學概念進行仔細的分析及切割，能有效提供教學設計的依據和分析，有助於概念的建構。另一方面，將概念分解為數個可操作的子概念後，有助於降低學習任務的複雜度，使學習者有足夠的認知資源理解要學習的數學概念或演算程序（左台益等人，2011；Ayres, 2006）。是故，本研究嘗試在工作範例中透過分段方式對代數式基本運算的程序進行適當的切割或獨立處理，以降低代數式基本運算的複雜度，引導學習者逐步理解單一運算步驟的程序和反思步驟的意義。

## 二、動態視覺化與數學學習

在學習過程中，視覺化經常扮演認知工具或知識學習工具的角色 (Karadag & McDougall, 2011; Presmeg, 2014)。例如，數學教師經常會借助視覺化表徵方式解說抽象數學概念，以促進學習者的概念理解 (Rohr & Reimann, 1998)。即便在數與量或代數等非幾何單元中，視覺化表徵對個體的認知處理歷程依然具有效果。如Boaler等人 (2016) 研究指出個體在進行 $12 \times 25$  此類數字或符號演算過程中，大腦中負責處理視覺訊息的相關區域也會隨之活化運作。Yerushalmy等人 (1999) 指出在代數解題歷程中，藉由視覺化與多重表徵的呈現，有助於學習者連結抽象符號與函數概念的意義。因此，如何透過視覺化呈現數學概念和演算程序，使學習者能有效地理解並建構內在的知識基模，一直是數學教育社群所關注的重要議題。

由於代數式基本運算是一種動態連續的演算過程，一般在教科書或靜態媒體上並不易將此過程以視覺化方式完整展現。靜態圖示或符號的標示雖能展現代數式基本運算的演算結構，但卻無法完整演示運算的過程與數學物件採取的動作，學習者需自行模擬想像，也因此容易造成初學者過高的認知負荷。對此，相關研究建議動態視覺化可作為幫助個體習得動作技能與避免認知負荷溢載的學習工具 (Höffler & Leutner, 2007)。例如，Höffler與Leutner從26篇與視覺化學習相關研究的後設分析發現，教學動畫的學習效果普遍優於靜態圖像的學習效果，且達中度效果量。此外，Höffler與Leutner更進一步指出當動畫內容涉及所要學習的知識概念而非一般聲光效果、內容具有高度真實性 (realistic)、抑或內容涵蓋有關程序性知識或技能時，採取動畫方式學習所產生的學習效果會明顯優於靜態圖像產生的學習效果。Wagner與Schnottz (2017) 在探討動態圖像與靜態圖像對受試者感知物體運動狀態的研究中指出，由於受試者需從靜態圖像中自行檢索與構建靜態圖像中所蘊藏的時間訊息，因此在訊息的理解上會比觀看動態圖像更加耗費心力。是故，Wagner與Schnottz認為當學習內容涉及動態模式時，動態視覺化的呈現方式，不論是在學習效率或動態資訊的應用上，都會比靜態圖像更具有教學上的優勢。因此，本研究透過圖像動畫方式來具體演示代數式基本運算的演算法則與數學物件在進行代數式基本運算時的動作和過程。

### 三、體現動態視覺化與概念隱喻

雖然動態視覺化有利於學習者對程序性知識與作業的認知表現，但對初學者而言，可能因其瞬變性（*transient*），即資訊在畫面上呈現的時間過於短暫，使學習者未能有足夠的時間進行理解與組織，反而造成學習上的不利，特別是對抽象的數學思維（Ayres & Paas, 2007）。對此，教育心理學家De Koning與Tabbers（2011）認為可以透過築基於個體在學習時可能使用或展現的肢體動作等身體經驗來強化動態視覺化的學習效果。換言之，藉由肢體動作的展現有助於喚起學習者在學習時的動作心像，進而促進概念的提取與理解（連宥鈞、吳昭容，2020）。同時，許多研究亦指出，手勢是人類在演化過程中逐漸具備的一項基本技能（*primary skill*）。像是兒童在可以使用口語清楚表達意思前，即會使用手勢來傳達想法（Goldin-Meadow & Wagner, 2005），或是藉由觀察他人的手勢會活化觀察者的運動系統，進而影響手勢傳達訊息的理解能力。因此，Castro-Alonso等人（2015）認為手勢是人類交流技能的體現和演化結果，運用手勢應可作為學習新概念的有效教學途徑。例如，Yeo與Tzeng（2020）引導學習者使用描摹手勢學習有關平行線截角性質與指數律等數學概念。結果發現學習者在學習有關平行線截角性質等幾何概念時，借助手勢的描摹能夠明顯促進學習者的學習效果；但在指數律的部分則顯示描摹並未能有效提升學習者的運算知識，並建議手勢應與運算知識結合才有助於運算原理的學習。

事實上，愈來愈多研究支持手勢對STEAM（Science, Technology, Engineering, Arts, and Math）教學的重要性。例如在數學解題過程中，當學生在說明如何解題的過程中，若搭配手勢的運用，會有助於學生將用於處理次級記憶任務的認知資源釋放出來。換言之，在訊息處理的過程中，手勢可能作為訊息暫存的載體，以利學習者將認知資源用於處理其他學習內容（Goldin-Meadow et al., 2001）。此外，Church等人（2004）研究指出透過教學影片學習守恆概念的兩組小學生中，觀看手勢搭配口語解說影片的學生在學習成效上會顯著優於觀看僅用口語解說影片的學生。其中值得關注的是，當學習者無法單從語言或文字表達上理解抽象數學概念時，手勢的輔助能有效幫助學習者理解與減少不必要的外在認知負荷。Castro-Alonso等人（2015）從認知神經科學的研究（Shimada & Oki, 2012）說明在動態視覺化過程中結合手勢等體現模擬的展演方式，能有效觸發鏡像神經系統之運作，有助於個體對動作或過程等程序事件的理解和學習。簡言之，體現動態視覺化能降低瞬變效應所伴隨的負面影響，即降低外在認知負荷，有助於學習者從動態過程中擷取必要的訊息，進行有意義的學習。Valenzano等人（2003）則是進一步分析手勢的展現之所以有利於個體學習抽象概念的原因在於：（一）動畫或影片中的手勢會活化個體的運動系統或鏡像神經元等具體機制，並建立抽象概念與具體事物間的連結關係；（二）手勢的動態描繪有助於引導學習者將注意力聚焦在學習目標上；（三）手勢可作為訊息傳遞的載體和通道，能與口語訊息所使用的聽覺通道同時提供個體工作記憶區中所需處理的訊息。另一方面，數學教育學者分別從符號學（semiotics）和概念隱喻的觀點

指出，手勢除了具有導引學習者注意之功能外，同時也在展現數學概念與運算的過程和意義（Radford, 2003; Robutti, 2020; Yang et al., 2021）。Yang等人（2021）指出數學抽象化可被視為一種社會建構活動。在此建構活動中，數學世界會經由學習者對素材內容和數位工具的操作或想像所產生的體現思維（embodied thinking）與隱喻推理（metaphorical inferences）而形成。簡言之，由來源域（即現實世界）、目標域（即數學世界）與兩者間的交互關係（即體現思維與隱喻推理）可構成概念隱喻的基礎（Lakoff, 2009）。綜言之，在數學教學過程中，手勢不僅具有指示性（deictic）功能，同時在數學概念上也帶有隱喻的（metaphoric）效果。因此，本研究在圖像動畫中加入手勢來模擬代數式基本運算的動態過程與隱喻數學概念的意義，並探討此教學演示方式對學生學習代數式基本運算的認知與情意效果。

#### 四、研究目的與研究假設

綜上所述，代數式基本運算是發展中學代數課程與核心素養的基礎。在進行代數學習的過程中，除了關注學生能否順利整合數學概念與演算過程，形成過程概念的認知面外，亦需關切學生在學習過程中的認知負荷、投入心力、自我效能、學習策略及主動性等可能影響學習表現的情意因素。例如，曾明基（2021）研究指出成功期望與興趣價值等情意信念因素會對數學成就產生不同的影響。是故，本研究嘗試以體現模擬、圖像動畫與靜態圖示等展演方式呈現代數式基本運算的數學概念與演算程序，並探討不同展演方式對七年級學生在認知面與情意面的影響。根據研究目的，本研究提出下列三項研究假設：

- （一）以工作範例方式學習代數式基本運算有助於提高學生對代數式基本運算的認知表現與解題能力。
- （二）運用體現模擬方式展現代數式基本運算的過程，對學生在認知上產生的學習效果會比透過圖像動畫或靜態圖示學習的學生來得好。
- （三）透過體現模擬方式學習代數式基本運算，對學生造成的認知負荷會比以圖像動畫或靜態圖示學習的學生來得低，且在投入心力、自我效能、學習策略與主動性方面會比以圖像動畫或靜態圖示學習的學生來得高。

### 貳、研究方法

#### 一、研究設計

根據研究目的，本研究分別以示意組、動畫組和體現模擬組三組不同展演方式來解說代數式基本運算的演算法則與運算過程。其中，在示意組部分，是透過靜態圖像或符號方式來展現代數式的基本運算。如圖2所示，示意組學生在學習交換律時，係透過靜態箭頭圖示與文字來表示兩個數學物件間的可交換性。此方式較常於一般教科書中呈現，用以說明數學物件間的運算過程和結構關係。

**圖2**

以靜態圖示呈現交換律的運算過程與結構關係

**以符號運算(三)**

例5 化簡下列各式：

(2)  $(4x - 1) \times (-5)$

解：

$$\begin{aligned}
 & (4x - 1) \times (-5) \\
 & = 4x \times (-5) - 1 \times (-5) \\
 & = 4 \times (-5) \times x - 1 \times (-5)
 \end{aligned}$$

示意組

31

在動畫組部分，學習者則是透過圖像動畫方式來學習代數式基本運算。如圖3所示，學習者可以看到 $x$ 和 $-5$ 兩個數學物件在運算過程中，是如何使用交換律進行數學物件間互換的動態過程。此動態過程一般較難在靜態媒體上展現，因此對於數學能力較低的學習者而言，經常需要動態視覺化過程來幫助他們具體呈現抽象的演算法則和運算過程。

**圖3**

以圖像動畫方式具體呈現抽象的演算法則與運算過程

**以符號運算(三)**

例5 化簡下列各式：

(2)  $(4x - 1) \times (-5)$

解：

$$\begin{aligned}
 & (4x - 1) \times (-5) \\
 & = 4x \times (-5) - 1 \times (-5) \\
 & \quad \text{交換律} \quad \text{(-5)} \\
 & \quad \text{x} \quad \text{x}
 \end{aligned}$$

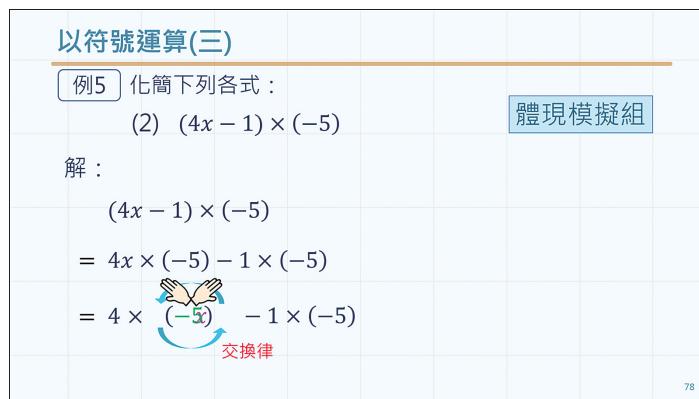
動畫組

55

最後在體現模擬組部分，由於靜態圖示與圖像動畫在展演過程中，學習者可能因為缺乏動態視覺化過程或是不瞭解動態過程所要表達的意義，反而造成學習上的困難 (Castro-Alonso et al., 2016)。因此，本研究採用體現模擬方式，即在動畫過程中加入手勢的模擬來表達代數式基本運算的過程和意義。如圖4所示，在體現模擬組的學習教材中，透過手勢模擬移動數學物件的動作能使學習者更深刻理解交換律的意義。

圖4

透過手勢模擬移動數學物件的動作過程來展現交換律的過程與意義



綜上所述，本研究根據展演方式的不同分為示意組、動畫組與體現模擬組三組。其中，示意組主要是透過靜態圖示來表達在代數式基本運算過程中，數學物件間的演算結構與關係；動畫組主要是透過圖像動畫方式來展現數學物件在進行代數式基本運算時的動作和過程；體現模擬組則是透過手勢動畫的呈現更進一步具體表達代數式基本運算的動作過程與意義。本研究採準實驗研究設計，透過三組學生在前、後測的答對率及實驗完成當下的數學教材學習感受程度來瞭解展演方式與數學學習成就對學生學習代數式基本運算時，其認知面與情意面的影響。

## 二、研究對象

研究對象採方便取樣，以臺北市萬華區某國中120位七年級學生作為受試者。在取得家長與學生同意後，依據學生前兩次段考成績平均進行排序後，再分為高、低數學學習成就兩類且平均分派到三組。經剔除未完整參與實驗過程以及前測結果顯示受試者已具備代數式基本運算的基本概念和演算能力後，本研究之有效樣本人數為96位，其分布情況如表1所列。

表1

各組人數分布情形

	展演方式			整體
	體現模擬組	動畫組	示意組	
數學學習成就	高	14	17	13
	低	18	16	18
	整體	32	33	96

### 三、研究工具

#### (一) 代數式基本運算數位學習教材

本研究以代數式基本運算之基礎—代數式基本運算作為教材內容，借助數位科技的功能屬性來展演代數式基本運算所蘊含的過程概念。在教材內容部分，三組均是以工作範例形式步驟化說明與展演代數式的簡記、以文數字符號進行結合律、交換律、分配律及同類項合併等基本運算和重點整理等內容進行學習。

三組教材內容不同之處在於展演方式。表2為三組教材在不同代數式基本運算下的展演方式。

表2

三組教材在不同代數式基本運算下的展演方式

體現模擬組	動畫組	示意組
$\begin{aligned} & 3 \times 8x \\ & = 3 \times (8 \times x) \quad \text{結合律} \\ & = (\cancel{3} \times 8) \times x \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 3 \times 8x \\ & = 3 \times (8 \times x) \quad \text{結合律} \\ & = \cancel{3} \times 8 \times x \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 3 \times 8x \\ & = 3 \times (8 \times x) \quad \text{結合律} \\ & = (3 \times 8) \times x \end{aligned}$
$\begin{aligned} & (4x - 1) \times (-5) \\ & = 4x \times (-5) - 1 \times (-5) \\ & = 4 \times (\cancel{x} \times 5) - 1 \times (-5) \quad \text{交換律} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & (4x - 1) \times (-5) \\ & = 4x \times (-5) - 1 \times (-5) \\ & \quad \text{交換律} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & (4x - 1) \times (-5) \\ & \text{交換律} \\ & = 4 \times (\cancel{x} \times 5) - 1 \times (-5) \\ & = 4 \times (-5) \times x - 1 \times (-5) \end{aligned}$
$\begin{aligned} \text{解 : } & (4x - 1) \times (-5) \quad \text{分配律} \\ & = \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{解 : } & (4x - 1) \times (-5) \quad \text{分配律} \\ & = \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{解 : } & (4x - 1) \times (-5) \quad \text{分配律} \\ & = 4x \times (-5) \end{aligned}$
$\begin{aligned} (2) \quad & 6y - 3y - 8y \\ & \underline{\cancel{6y}} \quad \underline{\cancel{-3y}} \quad \underline{\cancel{-8y}} \\ & \text{合併同類項} \\ & = \quad \text{双手图标} \end{aligned}$	$\begin{aligned} (2) \quad & 6y - 3y - 8y \\ & \underline{\cancel{6y}} \quad \underline{\cancel{-3y}} \quad \underline{\cancel{-8y}} \\ & \text{合併同類項} \\ & = \quad \text{双手图标} \end{aligned}$	$\begin{aligned} (2) \quad & 6y - 3y - 8y \\ & \underline{\cancel{6y}} \quad \underline{\cancel{-3y}} \quad \underline{\cancel{-8y}} \\ & \text{合併同類項} \\ & = -5y \end{aligned}$

研究者首先參考代數式基本運算學習之相關文獻 (Renkema, 2019; Wittmann et al., 2013) 及現行教科書內容，並與專家學者討論及修改數位教材的敘述和說明。接著，從臺北市某國中隨機選取數學程度高、中、低程度各兩名學生來進行預試，目的在於瞭解正式施測時可能面臨的問題，以及教材內容和理解測驗使用的語詞對學生是否適當，並根據訪談結果，對工具的內容及實驗流程進行檢討與修正。

## (二) 代數式基本運算理解測驗

在理解測驗部分，主要包含與代數式基本運算相關的預備知識、基本題、近遷題、遠遷題和迷思概念題等五類題型。預備知識包含文數字表示及符號的簡記，例如  $7 \times a = 7a$  或  $h \times (-4) = -4h$ ；基本題包含結合律、交換律、分配律及同類項合併等基本概念的理解與使用，例如  $a - 2a - 3a$  或  $4 \times (2b + 5)$ ；近遷題是指在演算過程中，需要運用到代數式基本運算與另外一個運算概念（如負數減法運算），例如  $5b - 3b \times (-2)$ ；遠遷題則是以代數式基本運算為基礎的多項式四則運算，例如  $2c \times (-1) - 5d \times (-3) + 4c$ ；迷思概念題則是指學習者在學習代數式基本運算單元時，因對文數字表示概念或符號簡記不熟悉而產生演算錯誤的題目進行檢測，例如在  $5n - n = 5$  或  $3a + 2b = 5ab$  的題目中，請學生判斷算式的正確性並說明理由。在本研究的前、後測階段，係以維持數學結構不變，修改數字或文字符號的平行題本方式來評量學生對代數式基本運算的認知情形。例如， $5 \times (3m + 4)$  和  $4 \times (2b + 5)$  即為平行試題。

理解測驗共有三大題，其中，第一大題為預備知識，共八題，每小題各1分，因此預備知識部分的總分為8分。若參與者在此部分得到6分，則該部分的答對率為  $6 \div 8 = 75\%$ ；第二大題包含基本題、近遷題和遠遷題，共12題，每小題同樣以1分計，並依作業複雜度採部分給分。例如  $5 \times (3m + 4)$  為兩步驟計算，因此參與者的答案中有  $15m$  或  $20$ ，將各占0.5分。在第二大題中，係依據不同題型分別計算該題型的答對率；第三大題為迷思概念題，共三題，每小題同樣以1分計。參與者需要同時成功判斷算式的正確與否並說明原因才能得分。最後，同樣根據參與者在迷思概念部分的得分計算其答對率。

在信度與效度部分，此份理解測驗是由研究者參考教科書中有關代數式基本運算單元的內容並依據代數式基本運算的認知結構進行命題，然後再與兩位數學家及數學教育專家逐題討論，針對題目的適切性與有效性提供修正建議，以確保題目符合理論架構的設計。因此，此份理解測驗在內容上具有專家效度。再者，此評量工具採用內部一致性信度考驗，整份測驗所得之 $\alpha$ 係數為  $.743 > .7$ ，其中，預備知識信度為  $.847$ 、基本題信度為  $.783$ 、近遷題信度為  $.701$ 、遠遷題信度為  $.808$ 、迷思概念題信度為  $.710$ ，表示此評量工具整體而言均達到可接受之信度標準，對於信度較低的近遷題與迷思概念題部分，後續將有待做進一步的瞭解與改進。

## (三) 數學教材學習感受問卷

本研究之數學教材學習感受問卷採用李克特六點量表方式來檢測困難度、投入心力、自

我效能、學習策略與主動性等五個向度，以1分到6分代表完全不同意、很不同意、不同意、同意、很同意、完全同意。各向度之題項敘述如表3所列。其中，困難度為反向題，採用反向計分方式處理，分數愈高表示受試者在該向度的學習感受愈好。問卷在發展過程中，每一項目均先參照相關文獻的敘述(Paas, 1992)進行初步的草擬後，再經由專家學者逐題討論修正，因此本問卷符合專家效度之標準。在信度部分，本量表之內部一致性信度，經分析顯示Cronbach's  $\alpha$ 係數為 $.887 > .7$ ，達到良好信度標準。

**表3**  
**數學教材學習感受向度及題項敘述**

向度	題項敘述
困難度	我覺得這份教材的內容非常困難
投入心力	我投入非常多心力在學習這份內容複雜的教材上
自我效能	這份教材的設計，可以讓我瞭解所要學習的目標
學習策略	我在這份教材的學習過程中，能調整自己學習的方法和步調
主動性	學習完這份教材後，我會主動和同學討論數學

#### 四、研究程序

本研究採準實驗研究法，以班級為單位，在實驗介入的前一節課，先對班上三組受試者進行20分鐘左右的前測，以瞭解各組學生在實驗介入前，有關代數式基本運算的概念理解與演算技能的認知情形。在前測結束後的下一堂課，由研究者根據分組名單提供班上的三組受試者對應的數位教材，並說明實驗目的及方式。接著，請這三組受試者同時就指派到的代數式基本運算數位學習教材進行自主學習，並於學習結束當下，請受試者根據自身感受回答數學教材學習感受量表。實驗介入與填答問卷所需時間約30分鐘。最後，再立即對班上的三組受試者同時進行20分鐘左右的後測，以瞭解不同展演方式對學生在認知面與情意面的影響。

#### 五、資料處理與分析

在資料處理與編碼方面，理解測驗的計分處理方式係由兩位受過評分訓練的數學教育研究生分別對同一份試卷進行批閱，當兩位評分者的分數出現不一致時，則與數學家及數學教育專家共同會商討論裁決。學習感受部分則是透過讀卡機將受試者所勾選的數據轉成Excel檔，再以人工方式逐一確認。

完成資料處理與建檔後，透過統計軟體SPSS進行相關分析。首先，針對三組參與者在實驗介入前對代數式基本運算單元的認知表現情況，係以單因子變異數分析進行比較。接著，針對展演方式對學生產生的學習效果部分，係以成對樣本t檢定來檢驗。最後，則是透過二因

子多變量變異數分析（即展演方式(3)×數學學習成就(2)）來瞭解展演方式與數學學習成就對學生前後測答對率變化之影響。在情意感受部分，同樣是以二因子多變量變異數分析來探討展演方式與數學學習成就對學生在情意面的影響。

## 參、結果與討論

### 一、學習成效分析

表4為三組學生在不同展演方式下的描述統計結果。由表4結果可知，三組學生在前測階段，對於代數式基本運算的預備知識部分，平均約有八成左右的答對率，且在基本題、近遷移、遠遷移題及迷思概念題部分，其平均答對率則是不到三成。此結果顯示，三組受試學生在實驗介入前，均已具備足以學習代數式基本運算的預備知識，但對於代數式基本運算的概念及演算法則尚不熟悉，是相當適合作為本研究探討不同教學策略對學生學習代數式基本運算之影響的研究對象。

首先，針對三組學生在前測各類題型之答對率進行單因子變異數分析，以瞭解不同展演方式之學生在實驗介入前，對代數式基本運算的認知情況。結果顯示，三組學生在預備知識、基本題、近遷移題、遠遷移題和迷思概念部分的答對率均無顯著差異， $F(3,126) = 0.09, 0.32, 1.48, 0.43, 0.09$ ,  $ps > .05$ ，表示三組學生在實驗介入前，對於代數式基本運算單元在各類題型上的認知程度是相近的。接著，針對三組學生在前、後測各類題型之答對率進行組內和組間比較，以進一步瞭解不同教學演示對學生學習代數式基本運算時在認知面的影響。

#### (一) 比較學生在不同展演方式介入前後的認知表現之影響

首先，為回應研究假設一：以工作範例方式學習代數式基本運算有助於提高學生的認知表現與解題能力，本研究針對三組學生在各類題型的前、後測答對率進行成對樣本t檢定，以瞭解各個展演方式對學生在各類題型的影響。結果顯示，在體現模擬組部分，整體學生在預備知識、基本題、近遷題、遠遷題及迷思概念題等題型上的前、後測答對率之差異均達顯著水準， $t(31) = 6.16, 18.27, 4.46, 4.73, 7.69$ ,  $ps < .001$ 。其中，高數學學習成就學生在各類題型上的前、後測答對率同樣具有顯著差異， $t(13) = 2.69, 12.39, 5.55, 11.30, 4.16$ ,  $ps < .05$ 。低數學學習成就學生則是在預備知識、基本題和迷思概念題等三類題型上的前、後測答對率具有顯著差異， $t(17) = 6.59, 13.12, 1.72, 1.23, 6.65$ ,  $ps < .05$ 。從前、後測各類題型的平均答對率顯示，透過體現模擬呈現代數式基本運算的演算過程對高數學學習成就學生在預備知識、基本題、近遷題、遠遷題和迷思概念題部分均能達到明顯的學習效果；對低數學學習成就學生而言，則是在預備知識、基本題與迷思概念題部分具有明顯的學習效果；就整體學生而言，以體現模擬呈現代數式基本運算的演算過程對學生在學習該單元的預備知識、基本題、近遷題、遠遷題和迷思概念題部分的認知表現均有明顯的助益，如圖5所示。

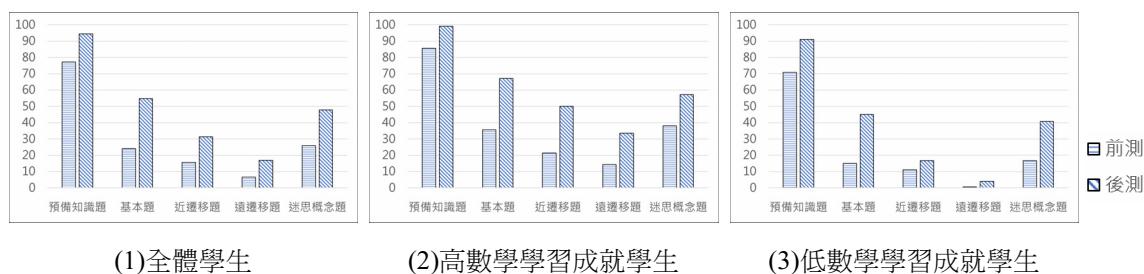
表4

不同學習成就與展演方式下學生在代數式基本運算的答對率

	體現模擬組		動畫組		示意組	
	平均數	標準差	平均數	標準差	平均數	標準差
<b>高數學學習成就學生</b>						
前測預備知識	85.7	20.1	83.8	22.0	91.3	14.8
後測預備知識	99.1	3.3	99.3	3.0	97.1	5.5
前測基本題	35.7	28.2	36.5	22.3	36.9	18.4
後測基本題	67.1	25.8	58.2	23.0	65.4	22.2
前測近遷移題	21.4	42.6	41.2	50.7	30.8	48.0
後測近遷移題	50.0	29.4	61.8	34.4	53.8	35.1
前測遠遷移題	14.3	24.9	5.1	9.9	16.3	23.6
後測遠遷移題	33.6	27.1	21.2	13.2	24.6	26.0
前測迷思概念題	38.1	38.9	25.5	25.1	38.5	35.6
後測迷思概念題	57.1	35.6	49.0	35.6	53.8	42.0
<b>低數學學習成就學生</b>						
前測預備知識	70.8	25.4	76.6	31.9	72.2	37.5
後測預備知識	91.0	17.0	91.4	17.5	88.9	19.6
前測基本題	15.0	20.1	21.3	25.0	18.9	15.3
後測基本題	45.0	18.2	48.8	25.3	33.9	14.2
前測近遷移題	11.1	32.3	25.0	44.7	5.6	23.6
後測近遷移題	16.7	33.2	25.0	36.5	8.3	19.2
前測遠遷移題	0.7	2.9	2.3	6.8	1.4	5.9
後測遠遷移題	3.9	10.4	2.5	10.0	0.0	0.0
前測迷思概念題	16.7	26.2	20.8	24.0	11.1	16.2
後測迷思概念題	40.7	29.3	39.6	30.4	31.5	24.2
<b>全體學生</b>						
前測預備知識	77.3	24.1	80.3	27.1	80.2	31.3
後測預備知識	94.5	13.4	95.5	12.8	92.3	15.7
前測基本題	24.1	25.8	29.1	24.5	26.5	18.7
後測基本題	54.7	24.2	53.6	24.2	47.1	23.7
前測近遷移題	15.6	36.9	33.3	47.9	16.1	37.4
後測近遷移題	31.3	35.4	43.9	39.5	27.4	35.0
前測遠遷移題	6.6	17.7	3.8	8.5	7.7	17.3
後測遠遷移題	16.9	24.3	12.1	14.9	10.3	20.6
前測迷思概念題	26.0	33.6	23.2	24.3	22.6	29.0
後測迷思概念題	47.9	32.7	44.4	33.0	40.9	34.1

**圖5**

體現模擬形式對全體學生與不同數學學習成就學生在各類題型上的答對率



(1)全體學生

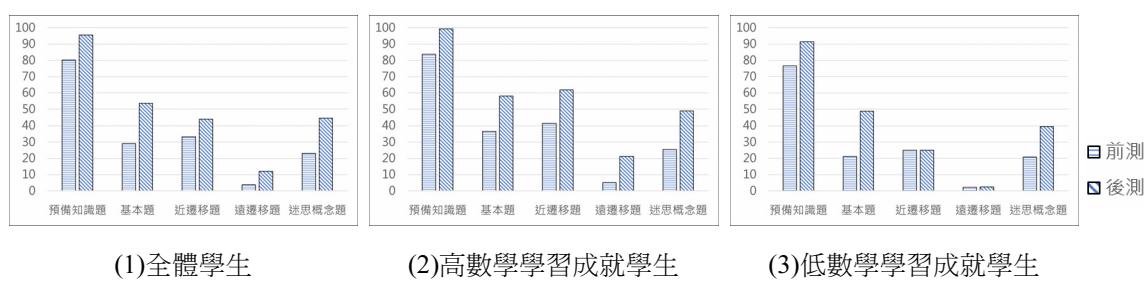
(2)高數學學習成就學生

(3)低數學學習成就學生

在動畫組部分，整體學生在各類題型上的前、後測答對率同樣具有顯著差異之水準， $t(32) = 4.59, 13.64, 2.44, 4.03, 7.48, ps < .05$ 。其中，高數學學習成就學生在各類題型上的前、後測答對率之差異同樣達到顯著水準， $t(16) = 3.04, 9.44, 4.20, 8.11, 6.20, ps < .01$ 。低數學學習成就學生則是在預備知識、基本題和迷思概念題部分的前、後測答對率具有顯著差異之水準， $t(15) = 3.45, 10.33, 4.39, ps < .01$ 。這表示以圖像動畫形式呈現代數式基本運算的演算過程對高數學學習成就學生在各類題型同樣具有明顯的學習效果；對低數學學習成就學生而言，則是在預備知識、基本題與迷思概念題等三類題型具有明顯的學習效果。就全體學生而言，以圖像動畫形式呈現代數式基本運算的演算過程對學生在學習該單元的各類題型的認知表現均能產生明顯的學習助益，如圖6所示。

**圖6**

圖像動畫形式對全體學生與不同數學學習成就學生在各類題型上的答對率



(1)全體學生

(2)高數學學習成就學生

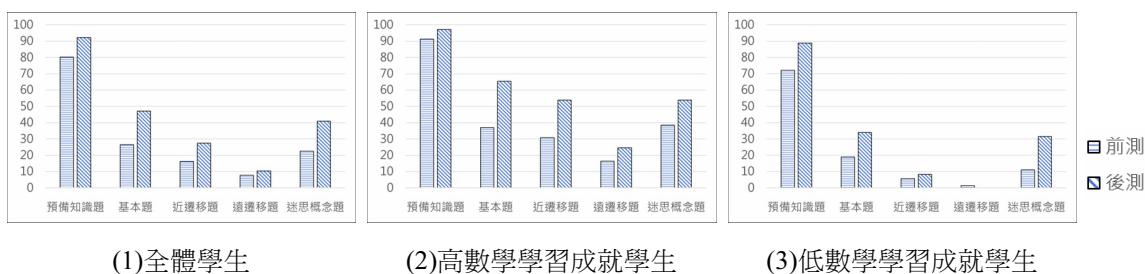
(3)低數學學習成就學生

在示意組部分，整體學生在預備知識、基本題、近遷題和迷思概念題部分的前、後測答對率達到顯著差異之水準， $t(30) = 3.91, 10.51, 2.72, 6.04, ps < .05$ 。其中，高數學學習成就學生在基本題、近遷題、遠遷題和迷思概念題部分的前、後測答對率具顯著差異之水準， $t(12) = 14.90, 3.86, 2.46, 3.21, ps < .05$ 。低數學學習成就學生在預備知識、基本題和迷思概念題部分的前、後測答對率達顯著差異之水準， $t(17) = 3.52, 6.46, 5.17, ps < .01$ 。此結果表示以

靜態圖示或符號來呈現代數式基本運算的演算過程對高數學學習成就學生在基本題、近遷題、遠遷題和迷思概念題部分均能達到明顯的學習效果；對低數學學習成就學生來說，則是在預備知識、基本題、迷思概念題等三類題型會有顯著的學習效果。就全體學生而言，以圖示或符號等靜態形式解說代數式基本運算的演算過程對學生學習該單元的預備知識、基本題、近遷題與迷思概念題部分的認知表現會有明顯的進步，如圖7所示。

圖7

靜態圖示形式對全體學生與不同數學學習成就學生在各類題型上的答對率



## (二) 比較不同展演方式對學生在認知表現之影響程度

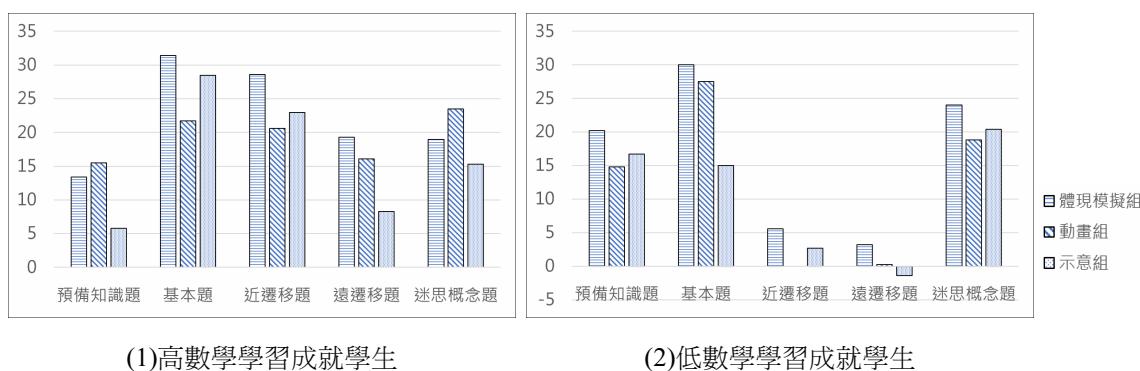
為回應研究假設二：運用體現模擬方式展現代數式基本運算過程，對學生在認知上產生的學習效果會優於以圖像動畫或靜態圖示的學生。因此，本研究以展演方式和學習成就作為自變項，學生在各類題型的前、後測答對率之差異作為依變項，進行二因子多變量變異數分析。結果顯示，共變量矩陣等式之Box檢定及Levene之變異同質性檢定皆未違反基本假設，整體效果的多變量檢定結果顯示，教學策略主要效果顯著，Wilk's  $\lambda = .773$ ， $p = .012 < .05$ ；數學學習成就主要效果也達到顯著水準，Wilk's  $\lambda = .538$ ， $p = .000 < .001$ ；展演方式與數學學習成就兩個自變項在五個依變項的交互作用同樣達顯著水準，Wilk's  $\lambda = .765$ ， $p = .009 < .05$ ，表示展演方式與數學學習成就兩個自變項對依變項的影響並非互相獨立。從受試者間效應項的檢定可知，展演方式與數學學習成就在交互作用項達到顯著水準主要是因學生在預備知識、基本題與迷思概念題的前、後測答對率之差異而造成。因此，須進一步進行單純主要效果比較。

首先，針對不同展演方式對相同數學學習成就學生的前、後測答對率之差異進行單純主要效果檢定。分析結果顯示，在高數學學習成就學生部分，展演方式在各類題型前、後測答對率差異變項之單因子多變量變異數分析結果顯示，整體考驗之Wilk's  $\lambda = .543$ ， $p = .008 < .01$ ，表示五個前、後測答對率差異變項中至少有一個依變項在展演方式的差異達到顯著。從受試者間效應項檢定結果可知，展演方式對高數學學習成就學生在基本題的前、後測答對率之差異具有顯著效果， $F(2,43) = 4.931$ ， $p = .012$ ， $\eta^2 = .194$ 。在遠遷題的前、後測答對率之

差異也同樣達到顯著水準， $F(2,43) = 5.257, p = .009, \eta^2 = .204$ 。這表示不同的展演方式對高數學學習成就學生在基本題及遠遷題的前、後測答對率之差異會有明顯的差別且屬高度效果量 ( $\eta^2 > .14$ )。從事後比較結果可知，體現模擬組的高數學學習成就學生在基本題的前、後測答對率之差異顯著高於動畫組的高數學學習成就學生。此外，體現模擬組的高數學學習成就學生在遠遷題的前、後測答對率之差異顯著高於示意組的高數學學習成就學生。從上述組內與組間比較的結果可知，對高數學學習成就學生來說，採取任一種展演方式均能明顯提升他們在基本題與遠遷題的認知表現，其中，又以體現模擬呈現方式產生的學習效果明顯比動畫組或示意組來得好。在低數學學習成就學生部分，展演方式在各類題型前、後測答對率差異變項之單因子多變項變異數分析結果顯示，整體考驗之Wilk's  $\lambda = .521, p = .019 < .05$ ，表示五個前、後測答對率差異變項中至少有一個依變項在展演方式的差異達到顯著。從受試者間效應項檢定結果可知，展演方式對低數學學習成就學生在基本題的前後測答對率之差異具有顯著效果， $F(2,51) = 11.393, p = .000 < .001, \eta^2 = .317$ 。這表示展演方式對低數學學習成就學生在基本題的前、後測答對率之差異同樣會有明顯的差別且達高度效果量。根據事後比較結果顯示，體現模擬組與動畫組的低數學學習成就學生在基本題的前、後測答對率之差異均顯著高於示意組的低數學學習成就學生。由組內與組間比較結果可知，對低數學學習成就學生來說，採取體現模擬、動畫或示意方式均能明顯提高低數學學習成就學生在基本題上的答對率。其中，以體現模擬或圖像動畫方式動態呈現代數式基本運算的演算過程所產生的學習效果會明顯優於以靜態圖示或符號呈現演算過程的學習效果，如圖8所示。

**圖8**

不同展演方式對高、低數學學習成就學生學習代數式基本運算產生的進步情形



接著，同樣針對採取相同展演方式對不同數學學習成就學生在前、後測答對率之差異進行單純主要效果檢定。結果顯示，在體現模擬組部分，數學學習成就在五個前、後測答對率差異變項之單因子多變項變異數分析結果顯示，整體考驗之Wilk's  $\lambda = .477, p = .001 < .01$ ，表

示五個前、後測答對率差異變項中至少有一個依變項在數學學習成就的差異達到顯著。從受試者間效應項檢定結果可知，數學學習成就對體現模擬組學生在近遷題的前後測答對率之差異具有顯著效果， $F(1,31) = 15.613, p = .000 < .001, \eta^2 = .342$ 。此外，數學學習成就對體現模擬組學生在遠遷題的前、後測答對率之差異同樣也有顯著效果， $F(1,31) = 23.501, p = .000 < .001, \eta^2 = .439$ 。這代表數學學習成就對體現模擬組學生在近遷題和遠遷題的前、後測答對率之差異皆會有明顯的差別且達高度效果量。從體現模擬組高數學學習成就學生與低數學學習成就學生在近遷題和遠遷題的答對率之差異數據可知，體現模擬組的高數學學習成就學生在近遷題和遠遷題的前、後測答對率之差異均顯著高於體現模擬組的低數學學習成就學生。

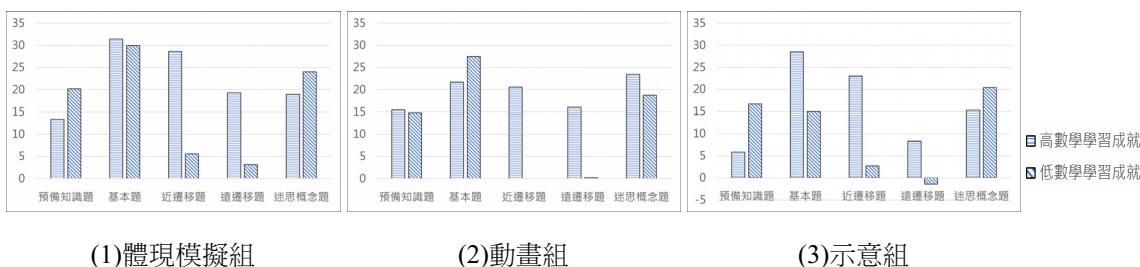
綜合前述組內與組間比較的結果可知，以體現模擬呈現的展演方式對高數學學習成就學生在近遷題和遠遷題上產生的學習效果顯著優於對低數學學習成就學生產生的學習效果。在動畫組部分，數學學習成就在五個前、後測答對率差異變項之單因子多變項變異數分析結果顯示，整體考驗之 Wilk's  $\lambda = .366, p = .001 < .01$ ，表示五個前後測答對率差異變項中至少有一個依變項在數學學習成就的差異達到顯著。從受試者間效應項檢定結果可知，數學學習成就對動畫組學生在近遷題的前、後測答對率之差異具有顯著效果， $F(1,32) = 6.547, p = .016 < .05, \eta^2 = .174$ 。此外，數學學習成就對動畫組學生在遠遷題的前後測答對率之差異同樣也有顯著效果， $F(1,31) = 26.341, p = .000 < .001, \eta^2 = .459$ 。這表示數學學習成就對動畫組學生在近遷題和遠遷題的前、後測答對率之差異同樣會有明顯的差別且達高度效果量。從動畫組高數學學習成就學生與低數學學習成就學生在近遷題和遠遷題的答對率之差異數據可知，動畫組高數學學習成就學生在近遷題和遠遷題的前、後測答對率之差異均顯著高於低數學學習成就學生。綜合組內與組間比較的結果同樣可以發現，以圖像動畫呈現的展演方式對高數學學習成就學生在近遷題和遠遷題上產生的學習效果顯著優於對低數學學習成就學生產生的學習效果。

在示意組部分，數學學習成就在五個前、後測答對率差異變項之單因子多變項變異數分析結果顯示，整體考驗之 Wilk's  $\lambda = .487, p = .002 < .01$ ，表示示意組學生在五個前、後測答對率差異變項中至少有一個依變項在數學學習成就的差異達到顯著。從受試者間效應項檢定結果可知，數學學習成就對示意組學生在基本題的前、後測答對率之差異具有顯著效果， $F(1,30) = 17.875, p = .000 < .001, \eta^2 = .381$ ；在近遷題的前、後測答對率之差異同樣具有顯著效果， $F(1,30) = 6.972, p = .013 < .05, \eta^2 = .194$ 。此外，數學學習成就對示意組學生在遠遷題的前、後測答對率之差異亦具有顯著效果， $F(1,30) = 8.661, p = .006 < .01, \eta^2 = .230$ 。這表示數學學習成就對示意組學生在基本題、近遷題和遠遷題的前、後測答對率之差異同樣會有明顯的差別且達高度效果量。從示意組高數學學習成就學生與低數學學習成就學生在基本題、近遷題和遠遷題的答對率之差異數據可知，示意組的高數學學習成就學生在基本題、近遷題和遠遷題的前、後測答對率之差異均顯著高於示意組的低數學學習成就學生。根據組內與組間比較

的結果顯示，以靜態圖示除了在近遷題和遠遷題部分對高數學學習成就學生產生的學習效果會明顯優於對低數學學習成就學生產生的學習效果外，在基本題部分同樣可以看到對高數學學習成就學生產生的學習效果也會明顯優於對低數學學習成就學生產生的學習效果，如圖9所示。

圖9

不同數學學習成就學生採取相同展演方式學習代數式基本運算的進步情形



(1)體現模擬組

(2)動畫組

(3)示意組

綜上所述，從不同展演方式介入前後對學生的認知表現的結果可知，體現模擬或圖像動畫形式動態呈現代數式基本運算的演算過程能明顯提升學生在代數式基本運算各類題型的答對率。其中，對高數學學習成就學生來說亦具有同樣效果。對低數學學習就學生來說，則是在預備知識、基本題與迷思概念題部分產生明顯的學習效果，在近遷題和遠遷題上的學習效果並不明顯。以靜態圖示表達代數式基本運算的演算過程則是能明顯提升學生在預備知識、基本題、近遷題和迷思概念題的答對率。其中，高數學學習成就學生在基本題、近遷題、遠遷題和迷思概念題部分會具有明顯的學習效果；低數學學習成就學生則是在預備知識、基本題和迷思概念題部分會產生明顯的學習效果。由上述結果可知，對整體學生而言，透過動態視覺化方式演示代數式基本運算的過程對學生在各類題型上均產生明顯的正面學習效果。以靜態圖示方式演示對學生在預備知識、基本題、近遷題和迷思概念題同樣具有明顯的正面學習效果，但在遠遷題部分的學習則未達到顯著效果。由此推測靜態圖示雖然能呈現代數式基本運算的演算結構，但未展演運算的過程，學生需要自行從前後的計算過程與脈絡去推測與理解該步驟是進行的運算為何，因此可能造成學生較高的認知負荷而不利學生有效掌握基本運算的遷移與應用。

在比較不同展演方式對學生在認知表現之影響的結果顯示，展演方式與學生的數學學習成就之間具有交互作用。經深入分析發現，對高數學學習成就學生而言，體現模擬組學生在基本題的學習效果會明顯優於動畫組學生。此外，體現模擬組學生在遠遷題的學習效果會明顯優於示意組學生。此結果表示藉由不同手勢模擬體現演算過程中的運算行為，像是分配展開或是同類項合併，有助於高數學學習成就學生更有效地處理基本運算的程序法則與演算技巧。此外，以手勢模擬體現演算的過程對高數學學習成就學生在遠遷題會比以靜態圖示方式

演示具有明顯正向學習效果的原因，除了動態視覺化方式能讓學生看到元素間的運算過程外，手勢的模擬展現也有助於學生理解運算的意義與產生有意義的動態心像。另一方面，對低數學學習成就學生而言，體現模擬組與動畫組學生在基本題的學習效果均會明顯優於示意組學生，但在近遷移題或遠遷移題部分的學習效果並無明顯差別。這表示動態視覺化的呈現的確有助於低數學學習成就學生理解與使用代數式基本運算的程序性知識，但對遷移應用部分，可能受限於學生預備知識的不足或未精熟之緣故，因此在遷移應用部分，體現模擬或圖像動畫等動態視覺化方式未能提供學生比靜態圖示更明顯的學習效果。由上述研究結果可知，手勢結合運算知識的過程有助於提升學習者對代數式基本運算的理解，此結果呼應了Yeo與Tzeng (2020) 的研究建議。同時，在本研究中更進一步解析出學習者的數學學習成就與預備知識的準備度會影響學習者對於手勢結合運算知識的理解程度。亦即高數學學習成就學生能有效將手勢結合運算知識並內化形成過程概念，進而能做遷移學習；低數學學習成就學生雖無法形成過程概念而進行遷移學習，但亦能將手勢結合運算知識的過程順利解決有關代數式基本運算的程序性問題。

## 二、數學教材學習感受分析

表5為不同數學學習成就學生及全體學生在不同教學策略下進行有關代數式基本運算的數學教材學習感受之描述統計。學習感受包含困難度、投入心力、自我效能、學習策略及主動性等五個向度。由表5結果可知，整體而言，三組學生在自主學習過程中，均認為教材內容的困難度在中度偏低的範圍，且在投入心力、自我效能、學習策略及主動性等向度上，均有中高度以上的正向反應，表示本研究發展有關代數式基本運算的學習教材內容，不論是採取哪一種展演方式，學生感受到的困難度並不會過重，可降低學生在學習過程中的投入心力、自我效能、學習策略與主動性。

為回應研究假設三：透過體現模擬方式學習代數式基本運算，對學生造成的認知負荷會比其他兩組學生來得低，且在投入心力、自我效能、學習策略與主動性方面會比其他兩組來得高，因此，本研究以展演方式和學習成就作為自變項，以學生在困難度、投入心力、自我效能、學習策略及主動性等五個向度的回報程度作為依變項，進行二因子多變量變異數分析。結果顯示，共變量矩陣等式之Box檢定及Levene之變異同質性檢定皆未違反基本假設，整體效果的多變量檢定結果顯示，展演方式的主要效果未達顯著， $Wilk's \lambda = .848, p = .151 > .05$ ；數學學習成就主要效果達顯著水準， $Wilk's \lambda = .841, p = .010 < .01$ ；展演方式與數學學習成就兩個自變項在五個依變項的交互作用同樣達顯著水準， $Wilk's \lambda = .767, p = .009 < .01$ ，表示展演方式與數學學習成就兩個自變項對數學教材學習感受的五個向度之影響並非互相獨立。從受試者間效應項的檢定可知，展演方式與數學學習成就在交互作用項達到顯著水準主要是因數學教材學習感受中的自我效能與學習策略兩個向度所造成，因此須進一步進行單純主要效果的比較。

表5

不同學習成就與展演方式下學生在代數式基本運算的數學教材學習感受

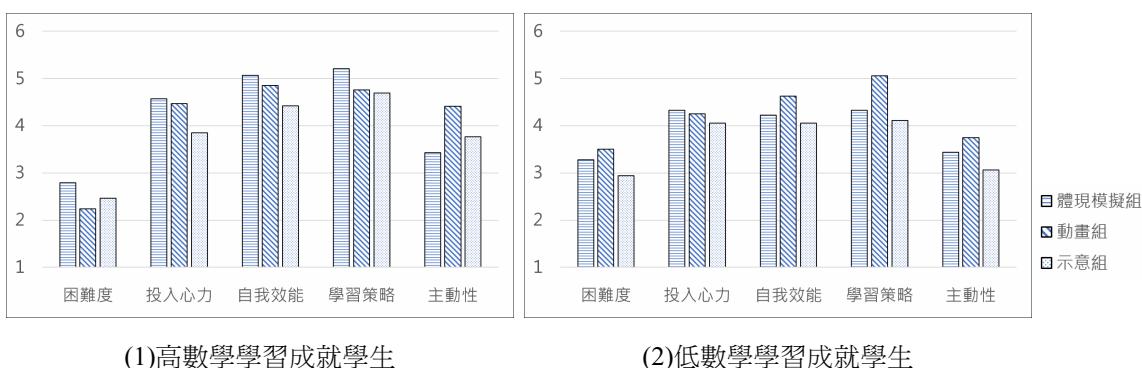
	體現模擬組		動畫組		示意組	
	平均數	標準差	平均數	標準差	平均數	標準差
<b>高數學學習成就學生</b>						
困難度	2.79	1.12	2.24	0.97	2.46	1.13
投入心力	4.57	0.85	4.47	0.87	3.85	1.34
自我效能	5.07	0.73	4.85	0.77	4.42	0.67
學習策略	5.21	0.80	4.76	0.97	4.69	0.63
主動性	3.43	1.02	4.41	1.00	3.77	0.73
<b>低數學學習成就學生</b>						
困難度	3.28	1.41	3.50	1.26	2.94	1.11
投入心力	4.33	0.84	4.25	0.93	4.06	1.70
自我效能	4.22	0.69	4.63	0.85	4.06	1.07
學習策略	4.33	0.69	5.06	0.77	4.11	1.41
主動性	3.44	1.15	3.75	0.77	3.06	1.26
<b>全體學生</b>						
困難度	3.06	1.29	2.85	1.28	2.74	1.12
投入心力	4.44	0.84	4.36	0.90	3.97	1.54
自我效能	4.59	0.82	4.74	0.80	4.21	0.93
學習策略	4.72	0.85	4.91	0.88	4.35	1.17
主動性	3.44	1.08	4.09	0.95	3.35	1.11

首先，針對不同展演方式對相同數學學習成就學生的數學教材學習感受之影響進行單純主要效果檢定。結果顯示，在高數學學習成就學生部分，展演方式在各類題型前、後測答對率差異變項之單因子多變項變異數分析結果顯示，整體考驗之Wilk's  $\lambda = .622$ ， $p = .048 < .05$ ，表示五個數學教材學習感受向度中至少有一個向度在教學策略的差異達到顯著。從受試者間效應項檢定結果可知，展演方式變項對高數學學習成就學生在主動性此一向度上具有顯著效果， $F(2,43) = 4.450$ ， $p = .018 < .05$ ， $\eta^2 = .178$ 。這表示展演方式的差異對高數學學習成就學生在主動性部分會有明顯的差別且屬高度效果量 ( $\eta^2 > .14$ )。從事後比較結果可知，動畫組的高數學學習成就學生在主動性部分所回報的程度顯著高於體現模擬組的高數學學習成就學生。在低數學學習成就學生部分，展演方式在各類題型前後測答對率差異變項之單因子多變項變異數分析結果顯示，整體考驗之Wilk's  $\lambda = .696$ ， $p = .074 > .05$ ，表示五個數學教材學習感受向度在展演方式的差異未達顯著。不過，從受試者間效應項檢定結果可知，展演方式對低數學

學習成就學生在自我效能和學習策略兩個向度上仍具有顯著效果， $F(2,43) = 7.688, 8.265, p = .018, .025 < .05$ ， $\eta^2 = .151, .140$ 。這表示展演方式的差異對低數學學習成就學生在自我效能和學習策略部分均有明顯的差別且同樣屬高度效果量 ( $\eta^2 > .14$ )。從事後比較結果可知，動畫組的低數學學習成就學生在自我效能和學習策略部分所回報的程度均顯著高於示意組的低數學學習成就學生，如圖10所示。

**圖10**

不同展演方式對高、低數學學習成就學生在數學學習感受上的影響

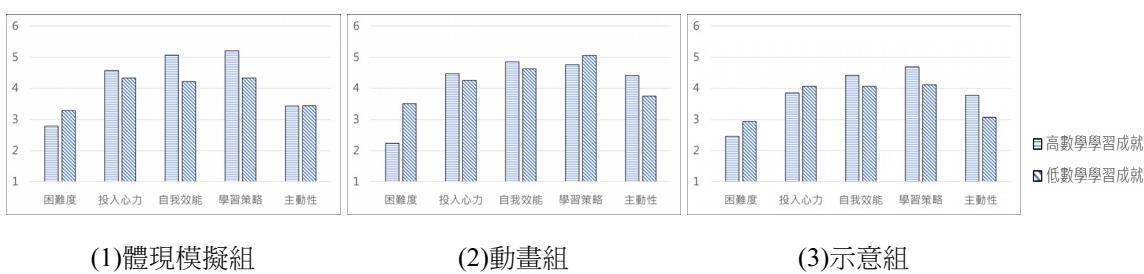


接著，同樣針對採取相同展演方式對不同數學學習成就學生在數學教材學習感受的影響進行單純主要效果檢定。結果顯示，在體現模擬組部分，數學學習成就變項在五個數學教材學習感受向度之單因子多變項變異數分析結果顯示，整體考驗之Wilks'  $\lambda = .650, p = .037 < .05$ ，表示五個數學教材學習感受向度中至少有一個向度在數學學習成就的差異達到顯著。從受試者間效應項檢定結果可知，數學學習成就對體現模擬組學生在自我效能向度的平均值之差異具有顯著效果， $F(1,31) = 6.334, p = .004 < .01, \eta^2 = .249$ 。此外，數學學習成就對體現模擬組學生在學習策略向度的平均值之差異同樣也有顯著效果， $F(1,31) = 6.112, p = .002 < .01, \eta^2 = .272$ 。這代表數學學習成就對體現模擬組學生在自我效能與學習策略向度的平均值之差異同樣會有明顯的差別且達高度效果量。從體現模擬組學生在數學教材學習感受各向度回報的平均值可知，高數學學習成就學生在自我效能和學習策略向度上的平均值會顯著高於低數學學習成就學生的平均值。在動畫組部分，數學學習成就在五個數學教材學習感受向度之單因子多變項變異數分析結果顯示，整體考驗之Wilks'  $\lambda = .536, p = .003 < .01$ ，表示五個數學教材學習感受向度中至少有一個向度在數學學習成就的差異達到顯著。從受試者間效應項檢定結果可知，數學學習成就對動畫組學生在困難度向度的平均值之差異具有顯著效果， $F(1,31) = 13.184, p = .003 < .01, \eta^2 = .252$ 。此外，數學學習成就對動畫組學生在主動性向度的平均值之差異同樣也有顯著效果， $F(1,31) = 3.610, p = .043 < .05, \eta^2 = .126$ 。這代表數學學

習成就對動畫組學生在困難度與主動性向度的平均值之差異同樣會有明顯的差別，且分別達高度與中度效果量。從動畫組學生在數學教材學習感受的平均值可知，高數學學習成就學生在困難度部分的平均值顯著低於低數學學習成就學生，且在主動性部分的平均值顯著高於低數學學習成就學生。在示意組部分，數學學習成就在五個數學教材學習感受向度之單因子多變項變異數分析結果顯示，整體考驗之 Wilk's  $\lambda = .805$ ， $p = .331 > .05$ ，表示五個數學教材學習感受向度在數學學習成就的差異未達顯著。同時在受試者間效應項檢定結果顯示，數學學習成就對示意組學生在數學教材學習感受的五個向度之平均值亦未達顯著差異之水準。這表示數學學習成就的差異對示意組學生在數學教材學習感受五個向度上的平均值之差異並無明顯的區別，如圖11所示。

**圖11**

採取相同展演方式對不同數學學習成就學生在數學學習感受上的影響



由上述有關數學教材學習感受的結果顯示，展演方式與學生的數學學習成就之間具有交互作用，因此透過單純主要效果深入分析展演方式與數學學習成就變項對學生在數學教材學習感受上的影響。結果顯示，對高數學學習成就學生而言，動畫組學生在主動性部分會明顯高於體現模擬組學生。研究者認為，對高數學學習成就學生而言，動態視覺化的演示除了提供學生視覺化的運算過程外，同時也能引發學生想要瞭解此視覺化過程的意義。手勢的模擬呈現有助於將此過程和意義體現出來，幫助學生理解，可能因此而減低高數學學習成就學生想要與其他同學討論的動機與意願。對低數學學習成就學生而言，動畫組學生在自我效能和學習策略部分會明顯高於示意組學生。這表示透過圖像動畫的呈現確實有助於低數學學習成就學生理解與掌握代數式基本運算的程序性知識與演算法則。手勢的模擬呈現在此處未能明顯高於示意組學生可能是因為低數學學習成就學生在學習過程中需要額外的認知資源去解讀手勢的意義，因此增加學生的認知負荷。

## 肆、結論與建議

根據學生在不同展演方式介入前後的認知表現結果可知，不論是採用何種展演方式，學生均能在預備知識、基本題、近遷題和迷思概念題上得到明顯的學習效果。換言之，此結果支持研究假設一，即以工作範例方式學習代數式基本運算有助提高學生對代數式基本運算的認知表現與解題能力。此外，本研究結果與先前採用工作範例進行學習的相關研究結果一致，即透過工作範例形式能使學習者產生較好的學習表現（連宥鈞、吳昭容，2020；Ginns et al., 2016; Sweller & Cooper, 1985），同時也呼應了Yeo與Tzeng（2020）建議將手勢與運算知識結合能有助於運算原理的學習。更重要的是，本研究結果顯示借助概念隱喻方式能有效整合手勢與運算知識，幫助學習者從學習過程中習得代數式基本運算的過程概念。

接著，從不同展演方式對學生的認知表現之比較結果可知，對高數學學習成就學生而言，體現模擬組學生在基本題的學習表現會明顯優於動畫組學生。此外，體現模擬組學生在遠遷題的學習表現會明顯優於示意組學生。這表示此結果支持研究假設二，亦即運用手勢的模擬呈現方式展演代數式基本運算過程，對學生在認知上產生的學習效果會明顯優於以圖像動畫或靜態圖示學習的學生。由此研究結果可以證實透過體現動態視覺化的展演形式確實能有效幫助學習者避免瞬變效應，從動態展演過程中進行有意義的學習（Castro-Alonso et al., 2015）。亦即有效習得代數式基本運算的過程概念以順利進行程序計算（基本題）與概念遷移（遠遷題）。再者，此研究結果亦呼應了Yang等人（2021）的研究論點：即借助手勢所產生的體現思維與隱喻推理可構成概念隱喻的基礎，進而形成預期的數學世界（intended mathematics world）。

最後，由學生對數學教材學習感受分析結果可知，三組學生對於以不同展演方式呈現的教材內容所感受到的困難度並無明顯區別。換言之，在展演過程中，學生並未受到手勢的影響而造成明顯過多的認知負荷。

所以，此研究結果與研究假設三的說法並不一致。可能的原因在於雖然Castro-Alonso等人（2015）指出手勢的模擬有利於活化學生大腦中負責處理視覺訊息的相關區域或是鏡像神經元等神經網絡系統來幫助學生學習程序性或操作性任務，但當手勢在學習過程中被賦予意義與功能後，學生會需要對手勢的意義進行解讀並與代數式基本運算的過程進行整合，才能產生有意義的學習。否則手勢的呈現對學生來說，將會是無助於學習的外在認知負荷。換言之，體現模擬組的學生在學習過程中，其認知資源可能用於理解運算過程中所呈現的手勢意義以連結手勢（來源域）與代數式基本運算（目標域）及其間的關係。因此，在本研究中，透過體現模擬呈現方式學習代數式基本運算，對學生造成的認知負荷並未比以圖像動畫或靜態圖示學習的學生來得低。此外，在數學教材學習感受的其他四個面向上的結果顯示，對高數學

學習成就學生而言，動畫組學生在主動性部分會明顯高於體現模擬組學生。對低數學學習成就學生而言，動畫組學生在自我效能和學習策略部分則會明顯高於示意組學生。此結果同樣與研究假設三之敘述不一致。研究者認為原因在於高數學學習成就學生能夠解讀藉由手勢模擬體現代數式基本運算的過程和意義，反觀動畫組學生，由於代數式基本運算對七年級學生而言是初次接觸抽象數學物件間的運算，因此即便是透過圖像動畫形式呈現演算過程，對高數學學習成就學生來說，在缺乏手勢隱喻，僅以圖像動畫展現的情況下，可能仍較不易完全掌握其演算法則與意義。因此相對於體現模擬組的高數學成就學生，動畫組的高數學學習成就學生應具有較高的動機與需求會主動與他人進行討論。此外，圖像動畫的呈現對低數學學習成就學生來說，因不需要用到額外的認知資源去解讀手勢的意義，因此對於理解與掌握代數式基本運算的程序性知識與演算法則會比透過靜態圖示學習的學生來得好。

本研究透過體現模擬、圖像動畫和靜態圖示等方式來探討動態視覺化與靜態圖示等不同展演方式對七年級學生學習代數式基本運算在認知表現與情意感受上的影響。由上述結果顯示，手勢對學生學習代數式基本運算在認知表現上具有明顯的正向學習效果。然而，在本研究中僅探討體現模擬與圖像動畫兩種動態視覺化的展演方式，建議在未來研究中可以進一步探討：一、是否還有其他動態視覺化的展演方式是有助於學生學習代數式基本運算相關單元並掌握其過程概念的。此外，本研究中的手勢展演並未如其他相關研究（Ginns et al., 2016）般要求學生跟著描摹或是操作，而是讓學生從教學演示過程中觀看與解讀手勢在代數式基本運算過程中的動作及意義。是故，本研究中的手勢在教學演示上缺乏互動性操作，建議在後續研究中能夠進一步探討。二、具互動性操作的手勢對學生學習代數式基本運算單元時，對學生在認知表現與情意感受上的影響。三、手勢對學生學習複雜度較高的其他代數單元，如一元二次方程式或配方法，以及幾何運算與推理單元上的影響。

## 誌謝

本研究為科技部專題研究計畫（MOST 106-2511-S-003-025-MY3）之部分研究成果，承蒙科技部的經費補助及審查委員提供寶貴的建議與指教，方便本研究得以順利完成，特此致謝。

## 參考文獻

### 一、中文部分

左台益、李健恆（2018）。素養導向之數學教材設計與發展。教育科學研究期刊，63（4），29-58。[https://doi.org/10.6209/JORIES.201812\\_63\(4\).0002](https://doi.org/10.6209/JORIES.201812_63(4).0002)

【Tso, T.-Y., & Lei, K.-H. (2018). Design and development of mathematical literacy-oriented subject materials. *The Journal of Educational Sciences*, 63(4), 29-58. [https://doi.org/10.6209/JORIES.201812\\_63\(4\).0002】](https://doi.org/10.6209/JORIES.201812_63(4).0002)

左台益、呂鳳琳、曾世綺、吳慧敏、陳明璋、譚寧君（2011）。以分段方式降低任務複雜度對專家與生手閱讀幾何證明理解的影響。教育心理學報，43（閱讀專刊），291-314。  
<https://doi.org/10.6251/BEP.20110517>

【Tso, T.-Y., Lu, F.-L., Tzeng, S.-C., Wu, H.-M., Chen, M.-J., & Tan, N.-C. (2011). Impact of reducing task complexity by segmentation on experts' and novices' reading comprehension of geometric proof problems. *Bulletin of Educational Psychology*, 43(Special Issue on Reading), 291-314. [https://doi.org/10.6251/BEP.20110517】](https://doi.org/10.6251/BEP.20110517)

吳昭容、鄭鈴華、張凌嘉（2021）。從算式或文字閱讀數學科普文章：共變數分析與階層線性模式的比較。教育科學研究期刊，66（1），107-139。[https://doi.org/10.6209/JORIES.202103\\_66\(1\).0004](https://doi.org/10.6209/JORIES.202103_66(1).0004)

【Wu, C.-J., Cheng, C.-H., & Chang, L.-C. (2021). Reading popular mathematics from equations or words: Comparison of analysis of covariance and hierarchical linear modeling. *The Journal of Educational Sciences*, 66(1), 107-139. [https://doi.org/10.6209/JORIES.202103\\_66\(1\).0004】](https://doi.org/10.6209/JORIES.202103_66(1).0004)

教育部（2018）。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校－數學領域。作者。

【Ministry of Education. (2018). *Curriculum guidelines of 12-year basic education for elementary, junior high Schools and general senior high schools – Mathematics*. Author.】

連宥鈞、吳昭容（2020）。手勢融入範例對低能力學生運算與幾何學習的影響。臺灣數學教育期刊，7（2），45-70。[https://doi.org/10.6278/tjme.202010\\_7\(2\).003](https://doi.org/10.6278/tjme.202010_7(2).003)

【Lien, Y.-C., & Wu, C.-J. (2020). The effects of gesture on low-ability students' learning of arithmetic and geometry using worked examples. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 7(2), 45-70. [https://doi.org/10.6278/tjme.202010\\_7\(2\).003】](https://doi.org/10.6278/tjme.202010_7(2).003)

曾明基（2021）。成功期望與興趣價值對數學成就的動態影響：動態結構方程模型分析。教育科學研究期刊，66（2），145-173。[https://doi.org/10.6209/JORIES.202106\\_66\(2\).0005](https://doi.org/10.6209/JORIES.202106_66(2).0005)

【Tseng, M.-C. (2021). Dynamic effect of success expectation and interest value on mathematic achievement: Dynamic structural equation model analysis. *The Journal of Educational Sciences*, 66(2), 145-173. [https://doi.org/10.6209/JORIES.202106\\_66\(2\).0005】](https://doi.org/10.6209/JORIES.202106_66(2).0005)

### 二、外文部分

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*.

- Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6>
- Ayres, P. (2006). Impact of reducing intrinsic cognitive load on learning in a mathematical domain. *Applied Cognitive Psychology*, 20(3), 287-298. <https://doi.org/10.1002/acp.1245>
- Ayres, P., & Paas, F. (2007). Making instructional animations more effective: A cognitive load approach. *Applied Cognitive Psychology*, 21, 695-700. <https://doi.org/10.1002/acp.1343>
- Bell, L., Juersivich, N., Hammond, T. C., & Bell, R. L. (2012). The TPACK of dynamic representations. In R. Ronau, C. Rakes, & M. Niess (Eds.), *Educational technology, teacher knowledge, and classroom impact* (pp. 103-135). IGI Global. <https://doi.org/10.4018/978-1-60960-750-0.ch005>
- Boaler, J., Chen, L., Williams, C., & Cordero, M. (2016). Seeing as understanding: The importance of visual mathematics for our brain and learning. *Journal of Applied & Computational Mathematics*, 5(5), 1-6. <https://doi.org/10.4172/2168-9679.1000325>
- Bos, R., & Renkema, W. (2022). *Metaphor-based algebra animation* [paper presentation]. The 15th International Conference on Technology in Mathematics Teaching, Copenhagen, Denmark.
- Castro-Alonso, J. C., Ayres, P., & Paas, F. (2015). The potential of embodied cognition to improve STEAM instructional dynamic visualizations. In X. Ge, D. Ifenthaler, & J. M. Spector (Eds.), *Emerging technologies for STEAM education: Full STEAM ahead* (pp. 113-136). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-02573-5\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-319-02573-5_7)
- Castro-Alonso, J. C., Ayres, P., & Paas, F. (2016). Comparing apples and oranges? A critical look at research on learning from statics versus animations. *Computers & Education*, 102, 234-243. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2016.09.004>
- Church, R. B., Ayman-Nolley, S., & Mahootian, S. (2004). The role of gesture in bilingual education: Does gesture enhance learning? *International Journal of Bilingual Education and Bilingualism*, 7(4), 303-319. <https://doi.org/10.1080/13670050408667815>
- De Koning, B. B., & Tabbers, H. K. (2011). Facilitating understanding of movements in dynamic visualizations: An embodied perspective. *Educational Psychology Review*, 23(4), 501-521. <https://doi.org/10.1007/s10648-011-9173-8>
- De Koning, B. B., & Tabbers, H. K. (2013). Gestures in instructional animations: A helping hand to understanding non-human movements? *Applied Cognitive Psychology*, 27(5), 683-689. <https://doi.org/10.1002/acp.2937>
- Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, & A. Schoenfeld (Eds.), *The teaching and learning of mathematics at university*

- level: An ICMI study (Vol. 7, pp. 275-282). Kluwer Academic. [https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7\\_25](https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_25)
- Ginns, P., Hu, F. T., Byrne, E., & Bobis, J. (2016). Learning by tracing worked examples. *Applied Cognitive Psychology*, 30(2), 160-169. <https://doi.org/10.1002/acp.3171>
- Goldin-Meadow, S., Nusbaum, H., Kelly, S. D., & Wagner, S. (2001). Explaining math: Gesturing lightens the load. *Psychological Science*, 12(6), 516-522. <https://doi.org/10.1111/1467-9280.00395>
- Goldin-Meadow, S., & Wagner, S. (2005). How our hands help us learn. *Trends in Cognitive Sciences*, 9(5), 234-241. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2005.03.006>
- Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A “proceptual” view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116-140. <https://doi.org/10.2307/749505>
- Höffler, T. N., & Leutner, D. (2007). Instructional animation versus static pictures: A meta-analysis. *Learning and Instruction*, 17(6), 722-738. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.013>
- Karadag, Z., & McDougall, D. (2011). GeoGebra as a cognitive tool: Where cognitive theories and technology meet. In L. Bu & R. Schoen (Eds.), *Model-centered learning: Pathways to mathematical understanding using GeoGebra* (pp. 169-181). Sense. [https://doi.org/10.1007/978-94-6091-618-2\\_12](https://doi.org/10.1007/978-94-6091-618-2_12)
- Lakoff, G. (2009). The neural theory of metaphor. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.1437794>
- Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books.
- McNeill, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought*. University of Chicago Press.
- Moreno-Armella, L., Hegedus, S. J., & Kaput, J. J. (2008). From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 68, 99-111. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9116-6>
- Paas, F. G. W. C. (1992). Training strategies for attaining transfer of problem-solving skill in statistics: A cognitive load approach. *Journal of Educational Psychology*, 84(4), 429-434. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.84.4.429>
- Presmeg, N. (2014). Contemplating visualization as an epistemological learning tool in mathematics. *ZDM – Mathematics Education*, 46(1), 151-157. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0561-z>
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to

- students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70. [https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501\\_02](https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02)
- Renkema, W. (2019). *Effectiveness of dynamic visualisation in video-based animated algebra instruction* [Unpublished master's thesis]. Utrecht University.
- Rohr, M., & Reimann, P. (1998). Reasoning with multiple representations when acquiring the particulate model of matter. In M. W. van Someren, P. Reimann, H. P. A. Boshuizen, & T. de Jong (Eds.), *Learning with multiple representations* (pp. 41-66). Pergamon.
- Robutti, O. (2020). Gestures in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 311-315). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0\\_100042](https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100042)
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36. <https://doi.org/10.1007/BF00302715>
- Shimada, S., & Oki, K. (2012). Modulation of motor area activity during observation of unnatural body movements. *Brain and Cognition*, 80(1), 1-6. <https://doi.org/10.1016/j.bandc.2012.04.006>
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Sweller, J., & Cooper, G. A. (1985). The use of worked examples as a substitute for problem solving in learning algebra. *Cognition and Instruction*, 2(1), 59-89. [https://doi.org/10.1207/s1532690xci0201\\_3](https://doi.org/10.1207/s1532690xci0201_3)
- Valenzeno, L., Alibali, M. W., & Klatzky, R. (2003). Teachers' gestures facilitate students' learning: A lesson in symmetry. *Contemporary Educational Psychology*, 28(2), 187-204. [https://doi.org/10.1016/S0361-476X\(02\)00007-3](https://doi.org/10.1016/S0361-476X(02)00007-3)
- Wagner, I., & Schnotz, W. (2017). Learning from static and dynamic visualizations: What kind of questions should we ask? In R. Lowe & R. Ploetzner (Eds.), *Learning from dynamic visualization – Innovations in research and application* (pp. 69-91). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-56204-9\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-56204-9_4)
- Weller, K., Arnon, I., & Dubinsky, E. (2009). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, 9(1), 5-28. <https://doi.org/10.1080/14926150902817381>
- Wittmann, M. C., Flood, V. J., & Black, K. E. (2013). Algebraic manipulation as motion within a landscape. *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 169-181. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9428-4>
- Wong, A., Marcus, N., Ayres, P., Smith, L., Cooper, G. A., Paas, F., & Sweller, J. (2009).

- Instructional animations can be superior to statics when learning human motor skills.  
*Computers in Human Behavior*, 25(2), 339-347. <https://doi.org/10.1016/j.chb.2008.12.012>
- Yang, K.-L., Lin, F.-L., & Tso, T.-Y. (2021). An approach to enactivist perspective on learning: Mathematics-grounding activities. *The Asia-Pacific Education Researcher*, 31, 657-666. <https://doi.org/10.1007/s40299-021-00616-3>
- Yeo, L.-M., & Tzeng, Y.-T. (2020). Cognitive effect of tracing gesture in the learning from mathematics worked examples. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(4), 733-751. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-09987-y>
- Yerushalmi, M., Shternberg, B., & Gilead, S. (1999). Visualization as a vehicle for meaningful problem solving in algebra. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 197-211). Haifa, Israel: PME.
- Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D<sub>4</sub>. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 435-457. <https://doi.org/10.2307/749876>

Journal of Research in Education Sciences  
2022, 67(4), 285-318  
[https://doi.org/10.6209/JORIES.202212\\_67\(4\).0009](https://doi.org/10.6209/JORIES.202212_67(4).0009)

# Effects of Embodied Dynamic Visualization on Middle-school Students' Learning of Algebraic Manipulation

Tai-Yih Tso

Department of Mathematics,  
National Taiwan Normal University

Feng-Lin Lu

Department of Mathematics,  
National Taiwan Normal University

Kin Hang Lei

Department of Mathematics,  
National Taiwan Normal University

## Abstract

Mathematical objects are artifacts of abstract thinking achieved by both conceptual and procedural knowledge. Mathematical thinking is usually communicated and constructed with external representations such as texts, symbols, or diagrams. Since it is difficult to demonstrate the dynamic nature of mathematical objects using static representations, teachers and instructional designers often apply dynamic visualization to present abstract or complex content in digital learning materials. While this illustrates abstract concepts and procedures with mathematical discipline, the accompanying transient effects may impede perceptual and cognitive processing over the short term, such that the intended learning effect may not be achieved. These transient effects are more pronounced for mathematical content with a high intrinsic cognitive load which require the integration of concepts and procedures. Relevant studies have suggested that the learning effect of dynamic visualization can be enhanced using physical experiences such as moving the body while learning. This includes demonstrating learning content using embodied simulation, which means combining gestures and actions in the process of dynamic visualization. This approach is termed *embodied dynamic visualization*.

To facilitate the connection between physical gestures and procedural knowledge in the creation of mathematical meaning, this study adopted conceptual metaphor theory to develop related research instruments, including learning materials for embodied simulation. In addition to determining

---

Corresponding Author: Feng-Lin Lu, E-mail: fenglin.lu@gmail.com

Manuscript received: Feb. 20, 2022; Revised: Jun. 22, 2022; Accepted: Nov. 12, 2022.

whether students can successfully integrate mathematical concepts and the processes of calculation in the cognitive process of precept formation, we investigated affective factors. Affective factors which have been shown to affect learning outcomes include aspects of cognitive load, mental effort, self-efficacy, learning strategies, and degree of initiative. Therefore, this study applied a quasi-experimental design to explore the effects of different demonstration methods (i.e., embodied simulations, instructional animations, and static illustrations) on the cognition and emotions of seventh-grade students learning algebraic manipulation.

Criteria for inclusion in the experiment were participation in the whole process of the instructional experiment and a score of less 85% in the pre-test (to ensure the subjects had not already mastered the basic concepts and problem-solving skills relevant to algebraic manipulation). Based on these criteria, we recruited 96 seventh grade students, who were randomly provided with embodied simulations, instructional animations, or static illustrations. They were expected to engage in self-regulated learning of content related to algebraic manipulation. Data on both cognitive and affective aspects was collected and analyzed. For the former, students' comprehension of algebraic manipulation was evaluated using a pre-test and a post-test. For the latter, students completed a self-reported questionnaire on their learning perceptions. Cronbach's  $\alpha$  for these two aspects were .743 and .887, respectively, thereby confirming reliability.

Our results were as follows: (1) Students' overall learning outcomes can be significantly enhanced by including embodied simulation, instructional animation, or static illustration. All three types of demonstration helped students solve problems related to basic algebraic manipulation. They also increased the positive learning effects on misconceptions and near-transfer problems as well as far-transfer problems. However, static illustrations did not have a significant effect on the learning performances of the seventh-grade students in solving far-transfer problems. This type of demonstration illustrates the algorithm and structure of algebraic manipulation; however, the procedure and approach to calculation are not shown. Therefore, students must depend on their own imagination to determine how these algebraic expressions are calculated based on the result alone. This places a high cognitive demand on students and may thus hinder the learning effects on far-transfer and other applications relevant to algebraic manipulation. (2) For high-performing students, exposure to embodied simulation enabled the students to perform significantly better on basic questions related to algebraic manipulation than did exposure to instructional animation. Moreover, students exposed to embodied simulation performed significantly better on far-transfer problems than did students exposed to static illustration. This indicates the value of using different gestures to simulate the operations involved in the calculation process, such as distribution

expansion or the merging of similar items. This enabled high-performing students to acquire basic operating rules and calculation skills more effectively. In addition, embodying the process of the calculation exerted a more positive learning effect for high-performing students solving far-transfer problems than did exposure to static illustrations. This is because embodied simulation not only offers a form of dynamic visualization, but also connects the elements of the calculation based on operation processes. In addition, the simulated gestures help students understand the meaning of the operations, thereby generating meaningful dynamic mental images. (3) For low-performing students, exposure to either embodied simulation or instructional animation resulted in significantly better performance in the solution of basic questions related to algebraic manipulation than did exposure to static illustration. This means that dynamic visualization methods such as embodied simulation or instructional animation help improve understanding of procedural knowledge of algebraic manipulation for low-performing students. However, a lack of sufficient prior knowledge or proficiency at solving basic problems hampered the learning effects for low-performing students in the topic of far-transfer problems. For these, the results of exposure to embodied simulation or static instruction did not differ from those of exposure to static illustration. (4) We found significant interaction effects in terms of students' learning perceptions among the different forms of demonstration and high and low performance groups. That is, for different forms of demonstration, students' learning perceptions differ according to their level of mathematics learning achievement. To be specific, for high-performing students, exposure to instructional animation enable the students to perceive significantly better on the degree of initiative than did exposure to embodied simulation. However, for low-performing students, exposure to instructional animation showed significantly better on the self-efficacy and learning strategies than did exposure to static illustration.

Based on these results, we make the following recommendations for future studies into the use of dynamic visualization in mathematical instruction: (1) The current study focused on embodied simulation, instructional animation, and static illustration. It would be worth exploring whether other forms of dynamic visualization (such as an instructional video with a human instructor) could help students in the learning of algebraic manipulation, enabling them to successfully integrate the concept and process of algebraic manipulation. (2) In the current study, students studied algebraic manipulation using non-interactive demonstration. In future studies, it would be worth investigating the effects of interactive gestures on students' learning performances and perceptions. (3) As the complexity of algebraic manipulation problems may have been too low for high-performing students, it would be worth exploring the effects of embodied simulation or interactive gestures on other algebraic topics of higher cognitive complexity, such as solving square-root equations or completing

the square, as well as geometric calculation and geometric reasoning.

**Keywords:** algebraic manipulation, conceptual metaphor, procept, embodied dynamic visualization, embodied simulation

Copyright of Journal of Research in Education Sciences is the property of National Taiwan Normal University and its content may not be copied or emailed to multiple sites or posted to a listserv without the copyright holder's express written permission. However, users may print, download, or email articles for individual use.