B02GB001Y02 力学 第00章

2023 版
©邢志忠

★ 讲师：邢志忠 xingzz@ihep.ac.cn

★ 助教：夏烁屿、徐雪怡 xiashuoyu@ihep.ac.cn xuxy@ihep.ac.cn

★ 教材：舒幼生《力学》

★ 上课时间：周一3/4节，周三3/4节

★ 上课地点：主楼阶一5教室

★ 习题课：周一9/10节；教405（夏烁屿）、教413（徐雪怡）

★ 答疑：欢迎随时探讨，我的办公室 = 高能所图书馆201

★ 成绩评定：平时作业10%；期中考试40%；期末考试50%

课程安排 5

课程提纲与学时分配：

★ 数学补充知识（6 学时）
★ 第一章 质点运动学（6 学时）
★ 第二章 牛顿定律与动量定理（5 学时）
★ 第三章 机械能定理（6 学时）
★ 第四章 角动量定理与天体运动（5 学时）
★ 期中考试（2 学时）
★ 第五章 质心与刚体（8 学时）
★ 第六章 流体（4 学时）
★ 第七章 振动和波（10 学时）
★ 第八章 狭义相对论（8 学时）
★ 期末考试（2 学时）

基本目的：

★ 系统掌握基础力学知识
★ 培养大学物理学习方式

参考书：

★ 赵凯华、罗蔚茵《力学》 高等教育出版社
★ 克莱普纳等《力学概论》 机械工业出版社/刘树新
★ 基特尔等《力学》 科学出版社
★ Landau & Lifshitz Mechanics (3rd edition)

关于学业导师 10

如果物理专业的同学想就近选择学业导师，可进入高能所主页：

http://www.ihep.cas.cn/

建议：选择年轻有为的教授，做自己学业导师。一般大三以后再确定研究方向。

单位与符号 11

部分国际标准单位（SI units = international standard units）

千克 kg = kilogram；秒 s = second；米 m = meter；安培 A = ampere

牛顿 N = newton	$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg\ m\ s^{-2}}$
焦耳 J = joule	$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{N\ m}$
瓦特 W = watt	$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J\ s^{-1}}$
库仑 C = coulomb	$1\ \mathrm{C} = 1\ \mathrm{A\ s}$
帕斯卡 Pa = pascal	$1\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{N\ m^{-2}}$
吨 t = ton	$1\ \mathrm{t} = 10^3\ \mathrm{kg}$
巴 bar = bar	$1\ \mathrm{bar} = 10^5\ \mathrm{Pa}$
赫兹 Hz = hertz	$1\ \mathrm{Hz} = 1\ \mathrm{s^{-1}}$
英尺 ft = foot	$1\ \mathrm{ft} = 0.3048\ \mathrm{m}$
磅 lb = pound	$1\ \mathrm{lb} = 0.45259237\ \mathrm{kg}$

10^3 kilo (k)	10^{-3} milli (m)
10^6 mega (M)	10^{-6} micro (μ)
10^9 giga (G)	10^{-9} nano (n)
10^{12} tera (T)	10^{-12} pico (p)
10^{15} peta (P)	10^{-15} femto (f)
10^{18} exa (E)	10^{-18} atto (a)

数值绝对精确的物理量：

光速
普朗克常数
电荷值
标准重力加速度
阿伏伽德罗常数
玻尔兹曼常数

希腊字母 12

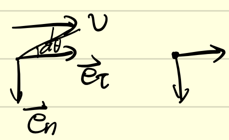
物理学中常用的希腊字母表:

注意希腊字母的发音和LaTeX拼写

α = \alpha	κ = \kappa	υ = \upsilon	Γ = \Gamma
β = \beta	λ = \lambda	ϕ = \phi	Δ = \Delta
γ = \gamma	μ = \mu	φ = \varphi	Θ = \Theta
δ = \delta	ν = \nu	χ = \chi	Λ = \Lambda
ε = \varepsilon	ξ = \xi	ψ = \psi	Ξ = \Xi
ζ = \zeta	π = \pi	ω = \omega	Π = \Pi
η = \eta	ϖ = \varpi	η = \eta	Σ = \Sigma
θ = \theta	ρ = \rho	τ = \tau	Υ = \Upsilon
ϑ = \vartheta	σ = \sigma	ι = \iota	Φ = \Phi
			Ψ = \Psi
			Ω = \Omega

希腊字母表

Αα alpha	Ββ beta	Γγ gamma	Δδ delta	Εε epsilon	Ζζ zeta
Ηη eta	Θθ theta	Ιι iota	Κκ kappa	Λλ lambda	Μμ mu(myu)
Νν nu(nyu)	Ξξ xi(ksee)	Οο omicron	Ππ pi	Ρρ rho	Σσ sigma
Ττ tau	Υυ upsilon	Φφ phi	Χχ chi(ki)	Ψψ psi	Ωω omega

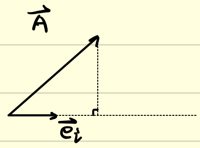


第零章. 数学补充

数学补充:

1. 矢量在某个方向的投影

$A_i=\vec{A}\cdot\vec{e_i}$



2. 三维标准基的叉乘:

$$\begin{cases}\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\end{cases}$$

，从左到右轮换总有: $\vec{i}\to\vec{j}\to\vec{k}$

3. 叉乘的行列式表达:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i}&A_x&B_x\\ \vec{j}&A_y&B_y\\ \vec{k}&A_z&B_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ A_x&A_y&A_z\\ B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}$$

2.

4. 多重叉乘(多重外积):

$$\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}=(\vec{A}\cdot\vec{C})\cdot\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C}$$

5. 叉乘与内积(三重标积):

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}A_x&A_y&A_z\\ B_x&B_y&B_z\\ C_x&C_y&C_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_x&B_x&C_x\\ A_y&B_y&C_y\\ A_z&B_z&C_z\end{vmatrix}$$

且有循环性: $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$

顺序由 $\vec{A}\to\vec{B}\to\vec{C}$. 另外, $|\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})|$ 即为平行六面体的体积 $\Rightarrow$ 三重标积为0等价于三向量共面.

6. 雅可比等式: $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})+\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})+\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{0}$

7. 拉格朗日恒等式:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

8. 三倍角公式:

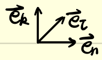
$$\begin{cases}\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x\\ \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x\\ \cos^3 x=\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x\end{cases}$$

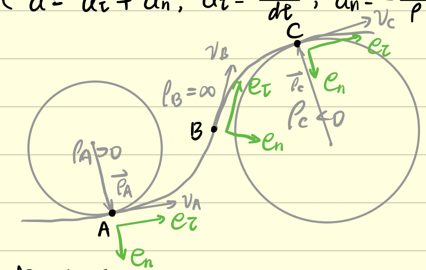
第一章. 质点运动

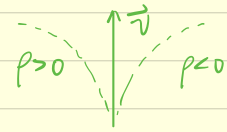
二维坐标系及其物理量:

1. 自然坐标系:(与旋转相关的物理量均与曲率半径球的球心为参考点)

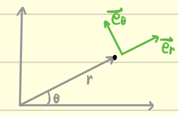
$$\begin{cases}|d\vec{e_\tau}|=|d\vec{e_n}|=d\theta\ ,\ d\vec{e_\tau}=-d\theta\,\vec{e_n}\ ,\ d\vec{e_n}=d\theta\,\vec{e_\tau}\\ \vec{e_n},\vec{e_\tau}\text{关系如下:}\ \text{，满足 }\vec{e_n}\times\vec{e_\tau}=\vec{e_k}\\ \vec{v}=v_\tau\cdot\vec{e_\tau}+v_n\cdot\vec{e_n}\ ,\ v_\tau=\frac{ds}{dt}=\rho\omega\ ,\ v_n=\frac{d\rho}{dt}\\ \vec{a}=\vec{a_\tau}+\vec{a_n}\ ,\ a_\tau=\frac{dv}{dt}\ ,\ a_n=-\frac{v^2}{\rho}\end{cases}$$







2. 极坐标系:



$$\begin{cases}|d\vec{e_r}|=|d\vec{e_\theta}|=d\theta\ ,\ d\vec{e_\theta}=-d\theta\,\vec{e_r}\ ,\ d\vec{e_r}=d\theta\,\vec{e_\theta}\\ \vec{v}=\vec{v_r}+\vec{v_\theta}\ ,\ v_r=\frac{dr}{dt}\ ,\ v_\theta=\frac{d\theta}{dt}r=\omega r\Rightarrow\frac{1}{r}dr=\frac{v_r}{v_\theta}d\theta\\ \vec{a}=\vec{a_r}+\vec{a_\theta}\ ,\ a_r=\ddot{r}-\dot{\theta}^2 r\ ,\ a_\theta=\ddot{\theta}r+2\dot{\theta}\dot{r}\end{cases}$$

3. 矢量重构:

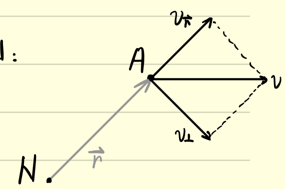
$$\begin{cases}\vec{\rho}=\rho\vec{e_n}\ ,\ \vec{\tau}=(d\vec{\theta})\times\vec{\rho}\\ \vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{\rho}\ ,\ \vec{a}=\vec{\beta}\times\vec{\rho}+\vec{\omega}\times(\dot{\rho}\vec{e_n})+\vec{\omega}\times\vec{v}\end{cases}$$

仅适用平面曲线运动，若为三维运动，定义 $d\vec{\theta}=d\theta\cdot\vec{k}$ 不能得到 $\vec{\omega}=\frac{d\vec{\theta}}{dt}=\omega\cdot\vec{k}$ ($\frac{d\vec{k}}{dt}$)不一定为0

其它:

1. 公式 $v=\omega r$ 意义剖析:

如图，对轨道未知的质点A，以及任意参考点N:



有 $\omega=\frac{d\theta}{dt}=\frac{v_\perp dt}{r\,dt}=\frac{v_\perp}{r}\Rightarrow v_\perp=\omega r$

其中r为 $\overrightarrow{NA}$ 的长度，ω为点A相对N的转动速度. $v_\perp$ 指垂直于 $\boxed{\vec{r}=\overrightarrow{NA}}$ 的速度分量大小.

$\vec{r}$ 称作"相对位矢"

这里的 $\vec{r}$ 与极坐标系中的 $\vec{e_r}$ 方向可能不同 (参考点N为原点时才相同，此时 $v_\perp=v_\theta=\omega r$)

2. 坐标系转换:

直角坐标系 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 极坐标系: $r=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ \theta=\begin{cases}\arctan(\frac{y}{x})\ ,x>0\\ \arctan(\frac{y}{x})+\pi\ ,x<0\end{cases}$

极坐标系 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 直角坐标系: $x=r\cos\theta\ ,\ y=r\sin\theta$

3. 曲率半径:

$$\rho=\frac{ds}{d\alpha}=\frac{v^2}{a_n}=\begin{cases}\rho(x)=\dfrac{[1+(\frac{dy}{dx})^2]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\dfrac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}\\ \rho(\theta)=\dfrac{[(\frac{dr}{d\theta})^2+r^2]^{\frac{3}{2}}}{r^2+2(\frac{dr}{d\theta})^2-r\frac{d^2r}{d\theta^2}}=\dfrac{[r^2+(r')^2]^{\frac{3}{2}}}{r^2+2(r')^2-rr''}\\ \rho(t)=\dfrac{v^3}{v_xa_y-v_ya_x}\end{cases}$$

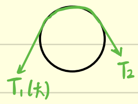
第二章. 牛顿定律与动量定理

有关力的知识:

1. 牛Ⅱ: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
2. 增质方程: $\vec{F} = m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\cdot(\vec{u}-\vec{v})$
2. 万有引力: $\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$, $m_{惯} = m_{引}$

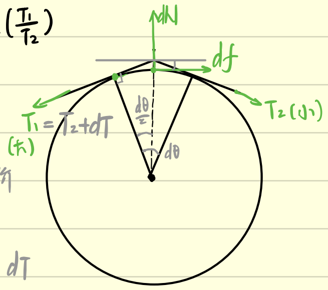
   2对1的引力,也即1受到的引力

   库仑力: $\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}_{12}|^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} = k\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$



非光滑滑轮微分关系:

$dN = \frac{dT}{\mu} = Td\theta \Rightarrow \mu\Delta\theta = \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$



如图取一段微元作研究对象,有:

$$\begin{cases} T_1\cos\frac{d\theta}{2} = df + T_2\cos\frac{d\theta}{2} \\ dN = T_1\sin\frac{d\theta}{2} + T_2\sin\frac{d\theta}{2} \end{cases}$$ 忽略二阶小量

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu dN = dT\cos\frac{d\theta}{2} \\ dN = (2T+dT)\sin\frac{d\theta}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu dN = dT \\ dN = T\,d\theta \end{cases}$$

非惯性系与惯性力:

1. 非惯性系: 在确定 $\vec{a}_{s's}$、$\vec{\omega}$ 与 $\vec{\beta}$ 后,即可在 S′系中研究物体运动状态,最后再变换回S系.

   $\vec{F}' = m\vec{a}'$, $\vec{F}' = \vec{F}_{真} + \vec{F}_{惯}$

   合力　　惯性力

2. 平移惯性力 $\vec{F}_i = -m\vec{a}_{s's}$
3. 惯性离心力 $\vec{F}_c = m\omega^2\vec{r}'$

   $\vec{r}'$ 即 $\vec{r}_{ms'}$,即质点 m在 S′系中的位置矢量

   为保守力, $\vec{F}_c = -(-m\omega^2)\cdot\vec{r}$,有惯性离心势能: $E_p(\vec{r}) = \frac{1}{2}k_c r^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$
4. 科里奥利力 $\vec{F}_{cor} = 2m\vec{v}'\times\vec{\omega}$

   $\vec{v}'$ 即 $\vec{v}_{ms'}$,即质点m在 S′系中的速度 (质点 m 相对 S′系的速度)

   (m相对于 S′系的速度)

   $\vec{\omega}$为S′相对S的转动速度,为常量
5. 切向惯性力 $\vec{F}_\tau = m\vec{r}'\times\vec{\beta}$
6. 变换条件:

   在S系中建立转动非惯性系 S′的变换: (原点相同)

   $$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r}\ ,\ \vec{v} = \vec{v} \\ \theta' = \theta - \int_0^t \omega_{s's}\,dt \end{cases}$$,惯性力有 $\begin{cases} \vec{F}_c \\ \vec{F}_{cor} \\ \vec{F}_\tau \end{cases}$

   在S系中建立平动非惯性系 S′的变换:

   $$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_{s's}\ ,\ \vec{a}_{s's} = \int_0^t \vec{v}_{s's}\,dt \\ \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{s's} \end{cases}$$,有惯性力 $\vec{F}_i = -m\vec{a}_{s's}$

其它:

1. 等距螺旋线(三维): 每旋转一周,沿轴前行相同距离 H

   参量R与H 分别称为旋转圆半径和螺距.

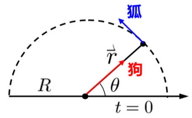
思考:

1. 在相对S系匀速定轴转动的S′系中,之所以令S′与S原点重合,是不是因为不重合时的坐标变换太困难? 答:θ变换难以进行.
2. S′能相对S系加速定轴转动吗?此时是否会出现新的惯性力? 答: 切向惯性力 $\vec{F}_\tau = m\vec{r}'\times\vec{\beta}$

期中考会有此题变式:

Part D　**思考题: 狗追狐**　29

举例: 狐沿着圆周跑,狗从圆心出发,速率都为 v。圆心、狗和狐始终成一条直线。求狗的轨迹。

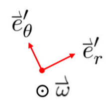


狐狸的角速度: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$, 狗的角速度相同。

狗的横、径向速率: $v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = \frac{rv}{R}$, $v_r = \sqrt{v^2 - v_\theta^2} = \frac{v}{R}\sqrt{R^2 - r^2}$

轨道 $\frac{dr}{d\theta} = \sqrt{R^2 - r^2}$　积分 $\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \int_0^\theta d\theta$　得 $r = R\sin\theta$

问题一: 在地面参考系,即S系,计算狗的加速度。



问题二: 建立随狗和狐一同逆时针匀速转动的S′系,计算狗的所受的惯性离心力和科里奥利力。

问题三: 为什么狗受到了科里奥利力,却在S′系仍然走直线?　$\vec{e}_r = \vec{e}_r'$, $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta'$

30 / 44

第三章.机械能

力、功与势能：

1.牛Ⅲ的重要推论：$dW=\vec{F_1}d\vec{r_1}+\vec{F_2}d\vec{r_2}=\vec{F_2}d\vec{r_{21}}=\vec{F_1}d\vec{r_{12}}$

这表明一对作用力与反作用力做功之和W为"独立"的(与参考系的选取无关)，如此我们可以选取其中一个质点为原点(两体问题)建立非惯性系，

计算 $W=\int\vec{F_2}d\vec{r_{21}}$ 即为此对作用力所做总功.

$\vec{F}=F_{(r)}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\Rightarrow\vec{F}d\vec{r}=F_{(r)}dr$

这表明W仅与两体间距相关，与路径等无关.

2.由势能分布求保守力分布：

$\vec{F}=-\nabla E_p$，$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k}$ 为哈密顿算符(微分算子)

3.保守力：

保守力 $\Leftrightarrow$ $\forall$闭合路径l，$\oint_l\vec{F}d\vec{l}=0$

特别地，$F=A\vec{r}$ 的都为保守力.

4.重弹簧在重力场的表现：

一根质量为mg且均匀的弹簧竖直悬挂.(以向下为正)，有结论：

胡克定律(修正)：$F+\frac{mg}{2}=k\Delta l$ (以mg方向为正)

弹性势能(修正)：$E_{pT}=\frac{1}{2}k\Delta l^2+\boxed{\frac{m^2g^2}{24k}}$ 或许是$\frac{m^2g^2}{12k}$?

(详见拓展随记"有重力弹簧…")

5.约化质量：

处理两体问题(两质点)时：转换参考系并 $\sum\vec{F}+\sum\vec{F}_{惯}=\frac{d\vec{p}}{dt}$ 为通用方法.

但对于一些问题可以简化，如万有引力、两体弹力等.

若两质点间存在一对作-反作用力，且无外力，设作用力(内力)大小为$\vec{F}$，

不能写"系统合外力为0"

则有 $\vec{F}=\mu\vec{a}$，其中约化质量 $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}=\frac{1}{\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}}$

由S'系中 $\vec{F}+\vec{F}_i=m\vec{a}$ 推得(结合牛Ⅲ)

这相当于又将非惯性系S'转化为惯性系S.(通过改变B质点质量)，此时A质点"绝对"静止不动(即A点为坐标系原点不动)

碰撞问题：

1.一维碰撞：

$$\begin{cases}v_1'=\dfrac{(m_1v_1+m_2v_2)+em_2(v_2-v_1)}{m_1+m_2}\\[2mm] v_2'=\dfrac{(m_1v_1+m_2v_2)+em_1(v_1-v_2)}{m_1+m_2}\end{cases},\quad v_{相}'=-e\,v_{相}$$

$$\Delta E=\Delta E_k=\frac{1}{2}(e^2-1)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)^2=\frac{1}{2}(e^2-1)\mu v_{相}^2$$

2.二维碰撞：

$$\begin{cases}m_1\vec{v_1}+m_2\vec{v_2}=m_1\vec{v_1'}+m_2\vec{v_2'}\\[2mm] \frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2\end{cases}$$

第四章. 角动量

角动量与力矩:

1. 角动量$\vec L$与力矩$\vec M$:

$\vec L=\vec r\times\vec p=\vec r\times(m\vec v)$, $\vec M=\vec r\times\vec F \Rightarrow M=rF\sin\theta$

在三维坐标系中,有 $\vec M=\vec r\times\vec F=\begin{vmatrix}\vec i & x & F_x\\ \vec j & y & F_y\\ \vec k & z & F_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{cases}M_x=yF_z-zF_y\\ M_y=zF_x-xF_z\\ M_z=xF_y-yF_x\end{cases}$

与之类似,我们有 $\vec L=\vec r\times\vec p=\begin{vmatrix}\vec i & x & p_x\\ \vec j & y & p_y\\ \vec k & z & p_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ x & y & z\\ p_x & p_y & p_z\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{cases}L_x=yp_z-zp_y\\ L_y=zp_x-xp_z\\ L_z=xp_y-yp_x\end{cases}$

我们可以从另一个简单的角度理解 $\vec M$, $\vec L$ 的分量式:

$\vec M=\vec r\times\vec F=(\vec x+\vec y+\vec z)\times(\vec F_x+\vec F_y+\vec F_z)$

$=(\vec x\times\vec F_y+\vec y\times\vec F_x)+(\vec x\times\vec F_z+\vec z\times\vec F_x)+(\vec y\times\vec F_z+\vec z\times\vec F_y)$

$=\vec M_z+\vec M_y+\vec M_x$, 同理有:

$\vec L=(\vec x\times\vec p_y+\vec y\times\vec p_x)+(\vec x\times\vec p_z+\vec z\times\vec p_x)+(\vec y\times\vec p_z+\vec z\times\vec p_y)$

$=\vec L_z+\vec L_y+\vec L_x$

2. 面积速度:

$\vec K=\frac{d\vec S}{dt}=\frac{\frac12\vec r\times(\vec v dt)}{dt}=\frac12\vec r\times\vec v=\frac{\vec L}{2m}$,

即 $\vec L=2m\vec K=\vec r\times\vec p$

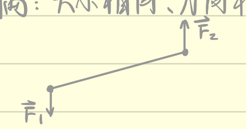
3. 有心力: 质点所受力始终指向一固定力心

4. 合力为零的合力矩:

质点系合力为零时,系统合力矩与参考点的选取无关,即:

$\sum\vec F_i=0$ 时, $\sum\vec M_i$ 与参考点选取无关.

例如一对力偶: 大小相同、方向相反,且不在同一直线的两个力.



其它:

1. 重心及其推论: $m_c=\sum m_i$, $m_c\vec r_c=\sum m_i\vec r_i$

$\Rightarrow\begin{cases}\text{重力做功等效:}\ \sum(m_i\vec g)d\vec r_i=(m_c\vec g)d\vec r_c\\ \text{重力力矩等效:}\ \sum M_{iG}=M_{cG}\end{cases}$

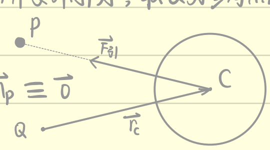
2. 对称球:

密度呈球对称分布的球体,不仅引力可等效于质心引力,引力力矩也可等效为质心引力力矩.

如图,对称球C受到质点P的引力称为C所受外引力,取Q为参考点,

则P对C的引力力矩 $\vec M_p=\vec r_c\times\vec F_{引}$

特别地,当参考点Q取在直线PC上时,有: $\vec M_p\equiv\vec 0$



3. 天体运动:

小行星绕大质量天体运行,以无穷远处为势能零点,记轨道能量 $E=E_k+E_{pG}$,则有结论:

行星轨道为 $\begin{cases}\text{椭圆}, & E<0\\ \text{抛物线}, & E=0\\ \text{双曲线}, & E>0\end{cases}$ 　轨道方程 $r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$ 　其中 $p=\frac{L^2}{GMm^2}$

4. 极坐标系中: $L=rmv_\theta$

4. Runge-Lenz 矢量:

在行星轨道问题中,我们引入 Runge-Lenz 矢量:

$\vec B=\vec v\times\vec L-GMm\frac{\vec r}{r}$, 则有结论:

① $\frac{d\vec B}{dt}=0$, $\vec B$是个守恒量

② $B^2=G^2M^2m^2+\frac{2EL^2}{m}$

③ $\vec r\cdot\vec B=\frac{L^2}{m}-GMmr$

④ 行星轨道方程: $r=\frac{L^2}{GMm+mB\cos\theta}$,由③易推得.

非惯性系、质点系中的动力学定理:

记$\sum\vec F_i$为内力、外力(惯性力也归属到外力)的总和,也即 $\sum\vec F_i=\sum\vec F_{内}+\sum\vec F_{外}$

$\sum\vec F_{外}=\sum\vec F_{系统外真实力}+\sum\vec F_{惯}$.

1. 动量定理:

$\sum\vec F_{外}dt=\sum d\vec p_j$, $\vec F_{外}dt=d\vec p_{总}$

$\vec p$整体守恒: $\vec F_{外}\equiv0\Rightarrow\vec p\equiv\vec p_0$

$\vec p$分量守恒: $\vec F_{外x}\equiv0\Rightarrow\vec p_x\equiv\vec p_{x0}$

2. 动能定理:

$\sum\vec F_i d\vec r_i=\sum dE_{kj}$, $dW_{总}=dE_{k总}$

3. 机械能定理:

$\sum\vec F_{外i}d\vec r_i+\sum\vec F_{内非保}d\vec r_i=\sum dE_{机j}$, $dW_{外}+dW_{内非保}=dE_{机}$

$E_{机}=E_k+E_p\longrightarrow$ 内势能(如 E_{pT}, E_{pG}, 离心势能E_{pc})　系统内非保守力做功

$E_{p(i)}=-\frac12m\omega^2r^2=-\frac12mv_\theta^2$

(以r=0为零势点,由$\vec F_c=m\omega^2\vec r$产生)

保守惯性力

4. 角动量定理:

$\sum\vec M_{外}dt=\sum d\vec L$, $\vec M_{外}dt=d\vec L_{总}$.

$\vec L$整体守恒: $\vec M_{外}\equiv\vec 0\Rightarrow\vec L\equiv\vec L_0$

$\vec L$分量守恒: $\vec M_{外x}\equiv\vec 0\Rightarrow\vec L_x\equiv\vec L_{x0}$

注: 角量的相关分析都需确定参考点,参考点的选取会影响后续分析的难易.

第五章. 质心与刚体.

质心与质点系:

1. 质心定义: 当且仅当以质心为原点

$m_c = \sum m_i$, $m_c \vec{r}_c = \sum m_i \vec{r}_i \Rightarrow \sum \vec{F}_外 = m_c \vec{a}_c$

推论: 在质心系中, $\sum m_i \vec{r}_i' = 0$, $\sum m_i \vec{v}_i' = 0 = \vec{p}'$

2. 任一参考系中的动力学量分解: 质心在选定参考系中的

① 动量$\vec{p}$: $\vec{p} = \vec{p}_c + \vec{p}'$ 质心系中的

$\vec{p}_c = m_c \vec{v}_c$, $\vec{p}' = \sum m_i \vec{v}_i'$

② 动能E_k: $E_k = E_{kc} + E_k'$

$E_{kc} = \frac{1}{2} m_c v_c^2$, $E_k' = \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$

③ 角动量$\vec{L}$: $\vec{L} = \vec{L}_c + \vec{L}'$

$\vec{L}_c = \vec{r}_c \times \vec{p}_c$, $\vec{L}' = \sum \vec{r}_i' \times \vec{p}_i'$

3. 质心系中的动力学定理: 坐标原点不一定设在质心处

建立随质心一齐平动的质心系C, 无论C为惯性系、非惯性系都有:

①位矢、动量: $\sum m_i \vec{r}_i = m_c \vec{r}_c$, $\sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = \vec{0}$

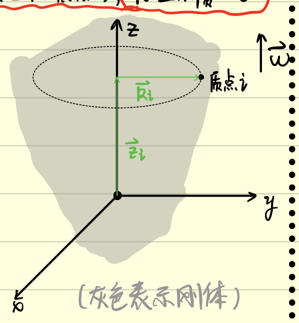
②动能定理: 所有参考系中有 $dW_总 = dE_k$, $W_外$包含真实、惯性力.

而在质心系中, 惯性力只存在F_i, 且$dW_惯 = \vec{F}_惯 d\vec{r}_c = -m_c \vec{a}_c d\vec{r}_c = 0$

③角动量定理: 这表明不分析受力过程时(能量)可以把质心系当作惯性系处理!

$\sum \vec{M}_外 dt = d\vec{L}$, 若选取质心为参考点(坐标原点), 有$\sum \vec{M}_惯 = 0$

刚体定轴转动:



(灰色表示刚体)

1. 各质点物理量:

所有质点角速度ω, 角加速度β相同

$\vec{r} = \vec{R} + \vec{z}$, $v = v_\tau = \omega R$

$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \beta R$, $a_n = \omega^2 R$

2. 质点系物理量:

$\vec{p} = \vec{p}_c = m_c \vec{v}_c$, $E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$

$\vec{L} = \underbrace{\sum \vec{R}_i \times (m_i \vec{v}_i)}_{沿z轴(绕转轴)} + \underbrace{\sum \vec{z}_i \times (m_i \vec{v}_i)}_{平行于xoy}$, $L_z = \sum R_i m_i (\omega R_i) = J\omega$

$J = \int_0^m r^2 dm$

3. 平动、转动对比:

	转动	平动
质量	J	m
位移	θ	r
速度	ω	v
加速度	β 这里是指L_z	a
动量	$L = J\omega$	$p = mv$
动能	$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$	$E_k = \frac{1}{2} m v^2$

4. 平行轴定理: $I = I_c + md^2$

取两条相互平行、间距为d的转轴, 其中之一通过刚体质心, 则有:

$I = I_c + md^2$ ⇒ 刚体沿任何方向转动, 转轴过质心时J最小.

5. 垂直轴定理: $J_z = J_x + J_y$, J_x表示以x轴为轴的转动惯量

以平板刚体的某一部位为坐标原点建立直角坐标系$Oxyz$, 使板平面恰好在xy平面上, 则有

$$\begin{cases} I_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum m_i (r_i^2 - x_i^2) \\ I_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) = \sum m_i (r_i^2 - y_i^2) \\ I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{cases} \xRightarrow[z_i = 0]{平面刚体} I_z = I_x + I_y$$

6. 回转半径:

转动惯量J的量纲同mR^2, 总可以写成$J = m\bar{R}^2$, 将这一长度量$\bar{R}$称为回转半径.

转动的动力学定理:

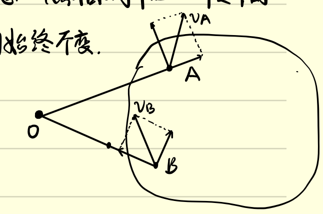
1. 转动定理: $\sum M = J\beta = \frac{dL}{dt}$ (这里只考虑$\vec{M}$沿z轴的分量, $\vec{\beta}$也沿z轴)

2. 动能定理: $\sum M d\theta = dE_k$, $E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$, $\frac{dE_k}{d\theta} = \sum M = J\beta$

刚体平面平行运动:

1. 角速度:

刚体作平面平行运动时, 刚体上任意一点相对任一转轴的角速度都相同, 记为$\vec{\omega}$, 且$\vec{\omega}$方向始终不变.



2. 速度:

当刚体角速度和任意一点A的速度已知时, 刚体上所有点的运动即被确定:

$\vec{v}_p = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{pA}$

3. 瞬心:

刚体运动时, 每个时刻平面中都存在一点, "速度为零", 记为M. M称为该时刻的瞬心. 且可由 $\vec{r}_{mA} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2}$ 确定M位置. 或已知两点速度, 速度垂线的交点即为瞬心位置.

4. 加速度: $\vec{a}_p = \vec{a}_{pm} + \vec{a}_m$

5. 以质心为原点的参考系:

考虑到 $\sum \vec{M}_惯 = \vec{0}$, 且对刚体$\sum \vec{F}_内 = \vec{0}$, $\sum \vec{F}_内 d\vec{r} = \vec{0}$, $\sum \vec{M}_内 = 0$, 故有:

在外惯性系中
- 质心运动: $\vec{F}_{合外} = m_c \vec{a}_c$, 即$\sum \vec{F}_外 = m_c \vec{a}_c$
- 动能定理: $W_外 = \Delta E_k$, $E_k = \frac{1}{2} m_c v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2$

在质心系中
- 转动定理: $\sum M_外 = J\beta$
- 动能定理: $W_外 = \Delta E_k$, $E_k = \frac{1}{2} J_c \omega^2$

6. 瞬时轴转动定理:

瞬心M位置变化导致J_m变化, 有结论:

$M_{外,m} = J_m \beta + \frac{1}{2} \frac{dJ_m}{dt} \omega$

刚体定点转动:

1. 角速度: 对应平面平行运动中的、实际为一条轴的"瞬心"

刚体作定点转动时, 设此定点为O, 刚体上任意一点相对点O的角速度$\vec{\omega}$都一致, 且有$\vec{v}_p = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{pO}(t)$. 需注意, 在定点转动中, $\vec{\omega}$并非恒定: $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$

类似地, 由平动转动分解, 若已知t时刻时A点速度$\vec{v}_A$, 角速度$\vec{\omega}$, 即可确定刚体上所有点的运动: $\vec{v}_p = \vec{v}_A(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{PA}$ 有待考证.

2. 角动量: 以定点O为参考点

$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) = \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$

$= m_i [(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i)\vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})\vec{r}_i]$ $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

$= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \times m_i [(\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}) \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})]$

$$= m_i[r^2(\omega_x\vec i+\omega_y\vec j+\omega_z\vec k)-(x\vec i+y\vec j+z\vec k)\cdot(\omega_x\vec i+\omega_y\vec j+\omega_z\vec k)(x\vec i+y\vec j+z\vec k)]$$

$$= m_i[r^2(\omega_x\vec i+\omega_y\vec j+\omega_z\vec k)-(x\omega_x+y\omega_y+z\omega_z)(x\vec i+y\vec j+z\vec k)]$$

$$= m_i[r^2(\omega_x\vec i+\omega_y\vec j+\omega_z\vec k)-(x^2\omega_x+xy\omega_y+xz\omega_z)\vec i$$
$$-(y^2\omega_y+yx\omega_x+yz\omega_z)\vec j-(z^2\omega_z+zx\omega_x+zy\omega_z)\vec k]$$

$$=[m_i(r_i^2-x_i^2)\omega_x-m_ixy\omega_y-m_ixz\omega_z]\vec i+$$
$$[m_i(r_i^2-y_i^2)\omega_y-m_iyx\omega_x-m_iyz\omega_z]\vec j+$$
$$[m_i(r_i^2-z_i^2)\omega_z-m_izx\omega_x-m_izy\omega_y]\vec k$$

求和后即得:

$$\vec L=\sum\vec L_i=L_x\vec i+L_y\vec j+L_z\vec k$$
$$=[I_{xx}\omega_x+I_{xy}\omega_y+I_{xz}\omega_z]\vec i+[I_{yy}\omega_y+I_{yx}\omega_x+I_{yz}\omega_z]\vec j+$$
$$[I_{zz}\omega_z+I_{zx}\omega_x+I_{zy}\omega_y]\vec k$$

也即 $\vec L=[L_x\ \ L_y\ \ L_z]\begin{bmatrix}\vec i\\ \vec j\\ \vec k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_{xx}&I_{yy}&I_{zz}\\ I_{xy}&I_{yx}&I_{zx}\\ I_{xz}&I_{yz}&I_{zy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec i\\ \vec j\\ \vec k\end{bmatrix}$

常见匀质刚体转动惯量:

长方体 (m,h,l_1,l_2): $J_0=\frac{1}{12}m(l_1^2+l_2^2)$
- $h=0$: 平板 $\xrightarrow{l_1=0}$ 细杆
- $l_2=l_1$: 正方体

有厚度的圆筒 (m,R_1,R_2): $J_0=\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$
- $R_2=0$: 圆柱 $\xrightarrow{h=0}$ 圆盘
- $R_1=R_2$: 薄圆筒 $\xrightarrow{h=0}$ 圆环

有厚度的球壳 (m,R_1,R_2): $J_0=\frac{2}{5}m\frac{R_1^5-R_2^5}{R_1^3-R_2^3}$
- $R_2=0$: 实心球
- $R_1\to R_2$: 球壳

在刚体平面平行运动中:

当刚体角速度和任意一点A的速度已知时，刚体上所有点的运动即被确定:

$$\vec v_P=\vec v_A+\vec\omega\times\vec r_{PA}$$

此式可以理解为，在以A为原点的非惯性系中，有:

$$\vec v_{PA}=\vec\omega_A\times\vec r_{PA}$$

$\vec\omega_A$ 表示点P绕A的角速度，而在刚体作平面平行运动时，刚体上任意一点相对任一转轴的角速度都相同，因此不必写为 $\vec\omega_A$，直接记为 $\vec\omega$，且 $\vec\omega$ 方向始终不变。即得:

$$\vec v_{PA}=\vec v_P-\vec v_A=\vec\omega\times\vec r_{PA}$$

$$\Rightarrow\quad \vec v_P=\vec v_A+\vec\omega\times\vec r_{PA}$$

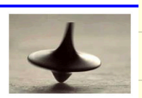
特别地，当 $\vec v_A=0$ (A为瞬心)时，$\vec v_P=\vec\omega\times\vec r_{PA}$

实际为一条线

那么在更普遍的刚体定点转动中:

Part D 刚体定点转动 47

定点转动是刚体转动的一般情形，此时刚体中仅已确定的一个点部位 O 静止不动。刚性结构限制了运动中任何其他点部位只能以恒定不变的间距绕着 O 点旋转



定点转动中每一时刻存在**一致的角速度** $\vec\omega(t)$，使得该时刻刚体各个点部位 P_i 的速度 $\vec v_i(t)$ 都可以表达成：$\vec v_i(t)=\vec\omega(t)\times\vec r_i(t)$。

证明上述表达式可参考课本第183/184页，注意有 $\vec v_i(t)\perp\vec r_i(t)$。

是否可以把上图中的点O理解为"瞬心"，即 $\vec v_O=0$

并且对任意已知速度、位置的点A，有:

$$\vec v_P=\vec v_A+\vec\omega\times\vec r_{PA}$$

第六章. 流体

流体静力学:

1. 浮心:

所排开流体块的重心位置，通常不与刚体质心重合，因此当浮心与重心不在同一竖直线上时，由合力矩作用，物体会偏向/远离平衡位置.

2. 理想气体状态方程 : $pV = nRT$ ，或 $pV = \frac{m}{M}RT$

流体动力学与质量守恒:

1. 由拉格朗日表述导出欧拉表述: 可转化为 $\vec{r}_0 = (\vec{r}, t)$

拉格朗日中 $\begin{cases} \vec{r} = (\vec{r}_0, t) \\ \vec{v} = (\vec{r}_0, t) \end{cases} \xrightarrow{\text{消去}r_0}$ 欧拉表述 $\vec{v} = (r, t)$ 速度场

2. 质量守恒:

在空间中取一区域，流出此区域的质量和质量减少量相同，作微元分析得:

连续性方程: $\underbrace{\oint_S \rho\vec{v}\,d\vec{s}}_{\text{流出此区域的质量速率}} + \underbrace{\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV}_{\text{质量减少速率 }\frac{dm}{dt}} = 0$

密度恒不变的流体 : $\rho \equiv \rho_0$ ， $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ ，得到 :

$$\oint_S \vec{v}\,d\vec{s} = 0$$

3. 定常流动:

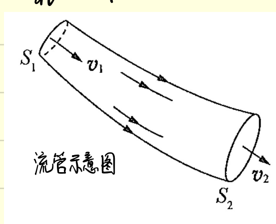
流体场达到稳定状态，$\vec{v}$, p, ρ 等都不随t变化的流动称为定常流动. 此时，连续性方程简化为: 质量流量

$\oint_{S_1} \rho_1\vec{v}_1 d\vec{s}_1 + \oint_{S_2} \rho_2\vec{v}_2 d\vec{s}_2 = 0$ ，记 $Q_m = \frac{dm}{dt}$ ，也即 $Q_{m_1} = Q_{m_2}$

质量流量 $Q_m = \frac{dm}{dt}$ ，体积流量

$Q_V = \frac{dV}{dt}$ 没称为流量，用Q表示.

$Q_m = \rho\vec{s}\cdot\vec{v}$ ， $Q_V = \vec{s}\cdot\vec{v}$



流管示意图

3. 流体的流动状态随参考系变化而变化

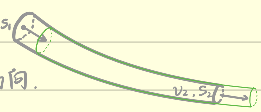
理想流体的定常流动:

1. 理想流体: 无黏力(切向力)、不可压缩 ($\rho_{(\vec{r},t)} \equiv \rho_0$).

2. 动量定理 : $\vec{F}_合 = Q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = Q_m\vec{v}_相 = \frac{d\vec{p}}{dt}$

如图，取流管中的一段，此前后位置分别记为灰色、绿色.

$\frac{d\vec{p}}{dt}$ 即为此段流管的动量变化率，



$Q_m = \rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2$ ，$\vec{v}_相 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ 决定 $d\vec{p}$ 方向.

$\vec{F}_合$ 包括两端面、侧面所受力与重力 : $\vec{F}_合 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_侧 + \vec{G}$

3. 伯努利方程: $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = C$

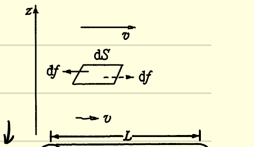
在理想流管中选取两点 A, B, 则有:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2$$

需要注意，一是对于不同的细流管，方程中的常量一般不相同. 二是对于大流管，如果端面1各处 h_1, p_1(严格或近似)相同，各处 v_1(严格或近似)相同且与面元垂直，端面2各处 h_2, p_2(严格或近似)相同，各处 v_2(严格或近似)相同且与面元垂直，那么以式(6.20)表述的伯努利方程仍然成立.

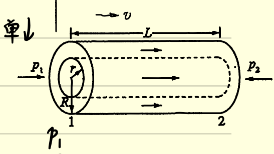
流管内高度差可以略去时，也常写作 $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = C$

黏性流体的流动:



1. 黏滞定律: $df = \eta\frac{dv}{dz}ds$ 　描述流体间的黏力

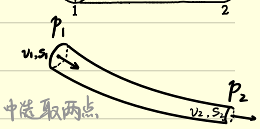
其中 η 为黏度，因流体、温度而异. 对于气体 η 单↑，对液体 η 单↓



2. 泊肃叶公式: $Q_V = \frac{p_1 - p_2}{8\eta L}\pi R^4$

3. 类伯努利方程: $\frac{dW_黏}{dt} = \Delta Q_V \Delta(p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh)$

其中 $\Delta Q_V = Q_{V_2} - Q_{V_1}$ 为流量差



描述不可压缩(ρ不变)黏性流体作定常流动，在流管中选取两点 A, B，即可确定 ΔQ_V 和 $\Delta(p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh)$

4. 球体黏性阻力: $f_v = 4\pi r\eta v$

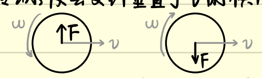
5. 压差阻力: $f_p = \begin{cases} 2\pi r\eta v, & v\text{较小} \\ kv^2, & v\text{较大} \end{cases}$

6. 斯托克斯公式: $f = f_v + f_p = 6\pi r\eta v$

半径为r的球以速度v在"静止"黏性流体中平动.

7. 压差推力(马格努斯效应):

在黏性流体中平动的球体由某种因素发生转动，便会受到垂直于v的横向推力，方向可由 $\frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} = \frac{\vec{\omega}\times\vec{v}}{|\vec{\omega}\times\vec{v}|}$ 判断



这里需要注意，4~7式中v为小球在地面系中的速度，且黏性流体"静止".

而大多数图解都以球心为参考系，此时流体速度方向与 $\vec{v}$ 相反.

8. 茹可夫斯基公式: $F = \rho v_0 l\Gamma$

注: 黏性定律中所取微元与 ds 含义的理解.

微元的选取随定常流动的形式而变，ds为微元与其周围流体发生速度变化的面积之和.

如 6.22 中，选取同轴圆柱r，$ds = 2\pi rh$

6.30 中，选取长方体，$ds = 2Ld$

第七章. 振动与波

简谐振动的运动学描述:

1. $x = A\cos(\omega t+\phi)$, 称 $\nu = \frac{1}{T}$ 为振动频率, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 为角频率

2. 同方向上的合成: (设振幅和初相位相同)

   $x = 2A\cos(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t)\cdot\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\phi)$

   有效振幅 $A(t) = 2A\cos(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t)$ 随时间周期变化, 频率 $\nu_a = \frac{|\nu_1-\nu_2|}{2}$

3. 拍:

   振动的强弱与振幅的平方成正比, 我们将振动强弱随时间变化的现象称为拍, 强弱变化的频率 $\nu_{拍} = 2\nu_a = |\nu_1-\nu_2|$

   思考: 为什么不是 $\nu_{拍} = \nu_a = \frac{1}{2}|\nu_1-\nu_2|$?

4. 垂直方向上的合成:

   设质点同时参与两个简谐运动 $\begin{cases} x = A_x\cos(\omega_x t+\phi_x) \\ y = A_y\cos(\omega_y t+\phi_y)\end{cases}$, 一般情况比较复杂, 轨迹图形称为李萨如图形. 特别地, 当 $\omega_x = \omega_y$ 时, 轨迹为椭圆, 即 $\frac{x^2}{A_x^2}+\frac{y^2}{A_y^2}=1$, 再特别一些, 当 $\phi_x-\phi_y = k\pi$ 时, 轨迹为一直线.

5. 矢量/复数表述:

   数学回顾: 矢量 $\vec{A}$ 在 $\vec{e}_i$ 上的投影 $A_i = \vec{A}\cdot\vec{e}_i$

   矢量: $\vec{A} = \vec{A_1}+\vec{A_2}$

   复数: $\tilde{A} = x+yi = A_x\cos(\omega_x t+\phi)+A_y\cos(\omega_y t+\phi)$

简谐振动的动力学性质:

线性回复力: $F = -kx$

微分方程: $\ddot{x}+\omega^2 x = 0$

振动能量:

水平弹簧振子 $\begin{cases} E_k = \frac{1}{2}mv_x^2 \\ E_p = \frac{1}{2}kx^2 \\ E = E_k+E_p = \frac{1}{2}kA^2 \end{cases}$, 小角度复摆 $\begin{cases} E_k = \frac{1}{2}I_0\omega^2 \\ E_p = mgh \\ E = E_k+E_p = \frac{1}{2}mgl\theta_0^2 \end{cases}$

在求解此类问题时, 常常可以列出能量守恒式, 然后对时间求导, 即得微分方程.

保守系的振动: 多个自由度的保守系发生振动, 其振动方程是多个简正模的合成.

阻尼、受迫、自激振动:

阻尼振动: $m\ddot{x} = F+f$, $F = -kx$, $f = -\gamma\dot{x}$ 阻力系数

$\Rightarrow \ddot{x}+\frac{\gamma}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x = 0$, 令 $\beta = \frac{\gamma}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

其中 β 称为阻尼系数, ω_0 为固有角频率, 方程的解为:

① 过阻尼: $\beta > \omega_0$

$x = e^{-\beta t}(A_1e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}+A_2e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t})$, A_1, A_2 为待定常量

② 临界阻尼: $\beta = \omega_0$

$x = (A_1+A_2t)e^{-\beta t}$, A_1, A_2 为待定常量

③ 低阻尼: $\beta < \omega_0$

$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t+\phi)$, A, ϕ 为待定常量, $\omega = \sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$ 新引入量

波的运动学描述:

1. 横波: 振动方向与传播方向垂直

   纵波: 振动方向与传播方向平行

2. 波长: 波的空间周期 $\lambda = vT = \frac{2\pi v}{\omega}$

   波数: 空间角频率 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (与 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 对应)

   平面简谐波: $\xi(\vec{r},t) = A\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\phi)$, 其中 $\vec{k}\cdot\vec{r} = k_xx+k_yy+k_zz$

   球面简谐波: $\xi(\vec{r},t) = (\frac{A_0r_0}{r})\cdot\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\phi)$, 振幅随球半径成比例地减小.

波的干涉:

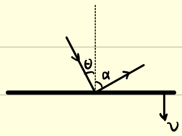
1. 同种类、同频率 ν、同振动方向的两列波叠加, 导致点位振幅变化, 称为干涉.

2. $A_{max} = A_1+A_2$ $A_{min} = |A_1-A_2|$

3. 弦波: 弦的两端点振幅为0, 且波满足 $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

波的衍射、反射、折射.

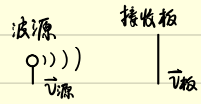
1. 高速下的反射定律

   如图, 镜面以速度 v 向下匀速, 可导出反射定律:

   $\frac{\sin\theta}{1+\beta\cos\theta} = \frac{\sin\alpha}{1-\beta\cos\alpha}$, $\beta = \frac{v}{c}$

2. 多普勒效应

   $f' = \frac{v_{波}+v_{板}}{v_{波}-v_{源}}\cdot f$, 靠近时 v 取正, 远离时为负.

   对于二维平面的一般运动情形, 只需令 v 为径向速度即可

   思考: 为什么切向速度时接收频率没有影响?

3. 冲击波

   物体在介质中运动速度大于波的传播速度时形成圆锥形的冲击波.

波动方程:

波动方程是振动量关于时间 t 和空间 r 的微分方程, 其数学解即为波的运动方程.

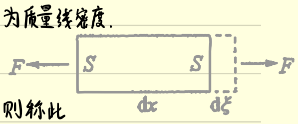
1. 一维线性波动方程: $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-u^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = 0$ 质元的加速度

2. 弦上的横波:

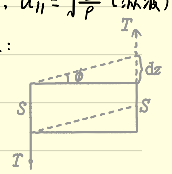
   质量线密度为 ρ 的细弦受到微扰后发生横向振动, 可得:

   $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-u^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = 0$, $u = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, T为弦的张力, ρ 为质量线密度.

3. 弹性介质中的纵波、横波:

   横截面积为S的柱形固态介质, 若恒有 $\frac{d\xi}{dx}\propto\frac{F}{S}$, 则称此介质为弹性的, 引入弹性模量(杨氏模量) $E = \frac{F}{S}\frac{dx}{d\xi}$, 当介质长L, 伸长量为 ΔL 时, 即得 $F = k\Delta L$, $k = \frac{ES}{L}$. 波动方程为: $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-u_{\parallel}^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = 0$, $u_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ (纵波)

   对于切向振动, 引入切变模量 $G = \frac{T}{S}\frac{dx}{dz}$, 可得横波波动方程:

   $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-u_\perp^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = 0$, $u_\perp = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ (横波)

4. 声波波动方程: $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-u^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = 0$, $u = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho}}$, γ 为绝热方程 $pV^\gamma = const$ 中的 γ.

5. 一维波动方程的通解:

   $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-u^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = 0$, 通解为 $\xi(x,t) = f_1(t-\frac{x}{u})+f_2(t+\frac{x}{u})$, 其中 f_1, f_2 为两个待定的函数.

波的性质：

1. 波的反射、透射：

波从介质A传播到介质A、B的分界面时，发生反射与透射，在介质A中产生反射波，在介质B中产生透射波。为了数学上的方便，将波的表示成为复数形式： 入射波 $\sum \tilde{A}_j e^{i(\omega t-k_1x)}$，$\tilde{A}_j=A_j e^{i\varphi_j}$

任意波可分解为一系列平面简谐波.

反射波 $\tilde{R}\sum \tilde{A}_j e^{i(\omega t+k_1x)}$，$\tilde{R}$ 为反射系数(为复数).

透射波 $\tilde{T}\sum \tilde{A}_j e^{i(\omega t+k_1x)}$，$\tilde{T}$ 为透射系数(为复数).

波在介质A、B分界面振动量相同：$1+\tilde{R}=\tilde{T}$ ①

作用力相同： $\frac{E_1}{u_1}(1-\tilde{R})=\frac{E_2}{u_2}\tilde{T}$ ②

弹性介质中的纵波

①②可得 $\tilde{R}=\frac{\rho_1u_1-\rho_2u_2}{\rho_1u_1+\rho_2u_2}$，$\tilde{T}=\frac{2\rho_1u_1}{\rho_1u_1+\rho_2u_2}$

端面固定时，$\rho_2\to\infty$：$\tilde{R}=-1$，$\tilde{T}=0$，即全部反射，不发生透射

端面自由时，$\rho_2\to 0$：$\tilde{R}=+1$，$\tilde{T}=2$

2. 波的能量：

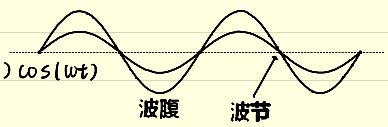
① 平面简谐波：$\xi=A\cos(\omega t-kx)$，则可推得：

波的能量密度：$w=\frac{\Delta E_k+\Delta E_p}{\Delta V}=\rho\omega^2A^2\sin^2(\omega t-kx)$

能流密度：$\vec{i}=w\vec{u}$，波的强度：$\bar{I}=\frac{\rho\omega^2A^2}{2}\cdot\vec{u}$

② 驻波的能量：

驻波运动方程：$\xi=2A\cos(kx)\cos(\omega t)$



③ 与简谐振动的区别：

简谐振动的动能和势能是交替变换的一个增加另外一个就会减少，而波的势能和动能是同增同减的。

第八章. 狭义相对论

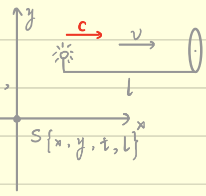
狭义相对论基本原理:

1. 两条基本假设:

①相对性原理: 在所有惯性系中,物理定律有相同的表达形式

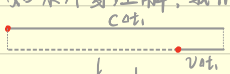
② 光速不变原理: 在所有惯性系中,真空光速具有相同量值,与光源运动无关.

理解: 每一个惯性系可依据光速不变原理建立自己的时空度量系统,但各自认定的是光相对本惯性系的真空速度为常量 c,但光相对其它惯性系的真空速度可以不是 c. 比如在惯性系 S 中,有一速度为 v 的木板,长为 l,左端有光源,右端有反射镜,如图.



$t=0$ 时,光源向镜发射光束,显然,光束速度为 c,此时光束相对于反射镜的速度为 $c-v$,反射后,光束相对于反射镜的速度为 $c+v$,因此在 S 系中,光束回到光源用时 $\Delta t=\frac{l}{c-v}+\frac{l}{c+v}=\frac{2l}{c}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}$

如果不易理解,我们考虑光束向右至镜的过程,图解:



红点时发出光束,有 $c\Delta t_1=l+v\Delta t_1$

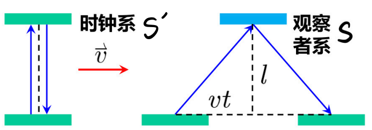
$\Rightarrow \Delta t_1=\frac{l}{c-v}$,同理 $\Delta t_2=\frac{l}{c+v}$ $\Rightarrow \Delta t=\frac{2l}{c}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}$.

2. 推论:

即 S 系中速度 v 的物体时间流速变慢了.

①钟慢效应: $t=\frac{t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$

考虑一个最简单的时钟,由两个反射镜和一个光子组成。该时钟相对观察者做匀速直线运动,运动速度为 $\vec{v}$。下方镜面发射光子到上方镜面,反射回来之后被下方镜面接收。



时钟测得的光子单程时间:

$t_0=\frac{l}{c}$ (S′系中所用时间)

观察者测得的光子单程时间:

$$t=\frac{\sqrt{l^2+(vt)^2}}{c}=\frac{\sqrt{(ct_0)^2+(vt)^2}}{c}$$ (S系中所用时间)

Time dilation

$$\underset{(S系)}{t}=\frac{\overset{(S'系)}{t_0}}{\sqrt{1-\beta^2}}>t_0,\quad \beta\equiv\frac{v}{c}$$

观察者认为,运动的时钟走得慢了,即运动的时钟对同一事件用时更短.

②尺缩效应: $l=l_0\sqrt{1-\beta^2}$

基于上面 S 系中的结果,回到 1.②的讨论,在木棍系(S′系)中,设木棍长度为 l',完整的反射接收过程用时 $\Delta t'=\frac{2l'}{c}$,再由 2.①的结论,$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$,联立消去时间所得 $l=l'\sqrt{1-\beta^2}$. 即在 S′系中,木棍速度为 0,此时测得的木棍长为 l',称为静止长度,记为 l_0,在 S 系中,测得的木棍长为 $l<l_0$.

注: 直尺的运动方向必须是它的长度方向,或者说物体沿速度方向的长度按上式比例缩短.

由上面两式可得: $\rho=\frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}>\rho_0$

洛伦兹变换:

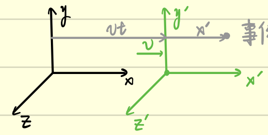
1. 线性变换

相对性原理: 在所有惯性系中,物理定律有相同的表达形式 $\Rightarrow$

时空坐标变换应该是线性的: $\begin{cases}x=a_{11}x'+a_{12}t'\\ t=a_{21}x'+a_{22}t\end{cases}$,四个待定系数可由运动相对性和基本假设②解得.

2. 洛伦兹变换 由1.的思路解出待定系数,即得洛伦兹变换:

$\begin{cases}x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ t=\frac{t'+\frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{cases}$,逆变换 $\begin{cases}x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{cases}$,物理量图解如下:



事件P $\begin{cases}x', y', z', t'\\ x, y, z, t\end{cases}$ 注: $t=t'=0$ 时两系原点重合

3. 限定条件:

① 光是物质,它的真空速度为 c,但光不是物体,不可取为参考物,不可构成度量其它物体运动的参考系.

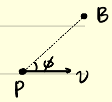
② 为使狭义相对论符合因果律的要求,任一惯性系中的物体速度不可超过 c.

4. 本征时间:

任何一个动力学系统测量自身物理过程所经历的时间间隔,是指用一个相对它静止的时钟测得的时间间隔,这样测得的时间间隔称为本征时间.

5. 相对论尺度下的多普勒效应

如图,以接收点B为参考系S的原点,光源P为S′系原点,S′系相对S系以 v 匀速运动,则有结论: $\nu=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}\nu_0$



$\phi=0$,P朝向B运动,$\vec{v}\parallel\overrightarrow{PB}$: $\nu=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\nu_0>\nu_0$,蓝移

$\phi=\pi$,P背离B运动,$\vec{v}\parallel\overrightarrow{BP}$: $\nu=\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\nu_0<\nu_0$,红移

$\phi=\pm\frac{\pi}{2}$,P作横向运动,$\vec{v}\perp\overrightarrow{PB}$: $\nu=\sqrt{1-\beta^2}\nu_0<\nu_0$,红移

6. 速度变换:

设S′系相对S系速度为 v(沿 x 轴),物体P在S′系中的速度为 $\vec{u}'$,则有:

$u_x=\frac{u'_x+v}{1+\frac{u'_xv}{c^2}}$, $u_y=\frac{\sqrt{1-\beta^2}u'_y}{1+\frac{u'_xv}{c^2}}$, $u_z=\frac{\sqrt{1-\beta^2}u'_z}{1+\frac{u'_xv}{c^2}}$,逆变换即为:

$u'_x=\frac{u_x-v}{1-\frac{u_xv}{c^2}}$, $u'_y=\frac{\sqrt{1-\beta^2}u_y}{1-\frac{u_xv}{c^2}}$, $u'_z=\frac{\sqrt{1-\beta^2}u_z}{1-\frac{u_xv}{c^2}}$,进而得:

$|\vec{u}|^2=c^2-\frac{1-\beta^2}{(1+\frac{vu'_x}{c^2})^2}\cdot|\vec{u}'|^2$,由此可得 $|\vec{u}|^2<c^2\Longleftrightarrow|\vec{u}'|^2<c^2$

可简记速度变换为: $v_{AC}=\frac{v_{AB}+v_{BC}}{1+\frac{v_{AB}v_{BC}}{c^2}}\Rightarrow u_{PS}=\frac{u_{PS'}+u_{S'S}}{1+\frac{u_{PS'}u_{S'S}}{c^2}}$

仅沿运动方向

7. 加速度变换:

需要说明的是,加速度的变换与速度有关,因此牛顿定律不再成立(需要修正Ⅱ、Ⅲ)

$a_x=\frac{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\frac{vu'_x}{c^2})^3}\cdot a'_x$, $a_y=\frac{1-\beta^2}{(1+\frac{vu'_x}{c^2})^2}\cdot a'_y-\frac{(1-\beta^2)\frac{vu'_y}{c^2}}{(1+\frac{vu'_x}{c^2})^3}\cdot a'_x$

$a_z=\frac{1-\beta^2}{(1+\frac{vu'_x}{c^2})^2}\cdot a'_z-\frac{(1-\beta^2)\frac{vu'_z}{c^2}}{(1+\frac{vu'_x}{c^2})^3}\cdot a'_x$

相对论动力学:

1. 受力变换:

$F_x=\frac{F'_x+\frac{v}{c^2}(\vec{u}\cdot\vec{F})}{1+\frac{vu'_x}{c^2}}$, $F_y=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{vu'_x}{c^2}}\cdot F'_y$, $F_z=\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{vu'_x}{c^2}}F'_y$

2. 牛顿定律修正:

$p_x=mv_x$

① 第Ⅰ: 仍成立

② 第Ⅱ: $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{u})}{dt}$,其中 m 为动质量.

③ 第Ⅲ: 不再普遍成立,用动量守恒替代

3. 动量 $\vec{p}$,能量E变换:

注意这里是 p'_x 而非 p'

$p_x=\frac{p'_x+\frac{vE'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $p_y=p'_y$, $p_z=p'_z$, $E=\frac{E'+vp'_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$

4. 质量变换,能量分解:

$m=\frac{1+\frac{vu'_x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}m'\Rightarrow m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$,$m_0$ 称为静质量,m 称为动质量

$E=E_k+E_0$, $mc^2=E_k+m_0c^2\Rightarrow E_k=mc^2-m_0c^2$

5. 能量动量方程:

$$E^2=(pc)^2+(m_0c^2)^2=(pc)^2+E_0^2$$

注：对于长度收缩和时间延缓效应，要求研究的对象是在某惯性系中同时发生的两件事，这个界限非常模糊，因此一般还是使用 Lorenz Tr.

注：对斜率相关问题，利用速度变换，最后 $\tan\theta = \frac{u_y}{u_x}$.

期末考试看课件.

1. 一至两题算转动惯量 J.（较简单）

2. 转动只考普通转动，不考进动、章动.

3. 水平流管雷诺数 $Re = 1000 \sim 2000$

思考：

1. 速度分解能用于长度收缩吗？—个例子如下：

S 系中有一静止时各边长为 a 的正方形面板，如图 8-32 所示. 今使面板沿其对角线方向匀速运动，速度大小为 v. 某学生将 $\boldsymbol{v}$ 沿面板静止时的两条直角边方向分解，每一个方向上的分速度大小均为 $v' = v/\sqrt{2}$. 考虑到每一直角边的长度收缩，他认为 S 系中运动面板的形状将如图 8-33 所示，是一个各边长为 $a' = \sqrt{1-\beta'^2}a$ ($\beta' = v'/c$) 的正方形.

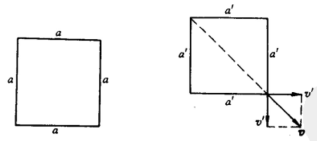
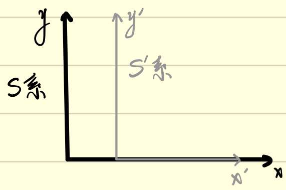


图 8-32(题 8-7)　图 8-33(题 8-7)

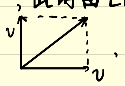


S' 系相对 S 系向右以 v 运动（沿 x 轴）

正方形在 S' 系中沿 y' 向上运动，

$u_y' = \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}$，此时由 Lorenz Trans：

$\vec{u}$ 如图：



，正方形形状？

答：不能速度分解，因为运动物体沿运动方向上线度的收缩不可分解为沿分运动方向的线度收缩.

2. 长度收缩适用条件？—个例子如下：