

数学物理方法笔记

Notes of Mathematical Physics Methods

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.9 – 2025.1

序言

本文为笔者本科时的数学物理方法笔记,总结了数学物理方法中的主要知识,也有适当的拓展延伸。同时,对一些晦涩的概念或公式,给出了笔者的个人理解,以帮助阅读。

由于个人精力及知识水平有限,书中难免有不妥、错误之处,望不吝指正,在此感谢。我的邮箱是 dingyi233@mailsucas.ac.cn。

目录

序言	I
1 复数与复数运算	1
1.1 预备知识	1
1.2 复数序列	1
1.3 复变函数	2
参考文献	3

第1章 复数与复数运算

§1.1 预备知识

复数定义：

一个有序实数对 (x, y) 称为复数如果其满足如下运算：

$$\begin{aligned} \text{加法} \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \text{乘法} \quad (x_1, y_1)(x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \end{aligned} \quad (1.1)$$

记作 $z = x + iy$, 其中 $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $i^2 = -1$ 。

相关概念：

下面是一些相关概念：

1. 复数的三种表示: $z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$
2. 模: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. 幅角: $\arg z = \theta \in (-\pi, \pi]$ 称为幅角主值, $\operatorname{Arg} z = \theta + 2k\pi$ 称为幅角补值, $k \in \mathbb{Z}$ 。
4. 0 与 ∞ : 是两个特殊的复数, 分别表示复平面中模为 0 和无穷大而幅角任意的“一个点”。在复平面的球表示中, 0 对应南极, ∞ 对应北极。
5. 扩充复平面: 称包含无穷远点 ∞ 的复平面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 为扩充复平面。
6. 共轭复数: $z = x + iy, z^* = x - iy$
7. 复数除法: 设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, 则:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{1}{|z_2|^2} [(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)] \quad (1.2)$$

用棣莫弗定理更易理解复数除法: 设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, 则:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (1.3)$$

8. 复数乘法: $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

§1.2 复数序列

相关概念：

一个复数序列 $\{z_n\}$ 完全等价于两个实数序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$

1. 聚点: 给点复序列 $\{z_n\}$, 若存在 $z \in \mathbb{C}$, 使 $\forall \varepsilon > 0$, 恒有无穷多个 n 使得 $|z_n - z| < \varepsilon$ 则称 z 为序列 $\{z_n\}$ 的一个聚点。
例如序列 $\{(-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}_+\} = \{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}, \dots\}$ 有两个聚点 1, -1
2. 有界 / 无界序列: 序列 $\{z_n\}$ 称为有界的如果 $\exists M > 0$ s.t. $|z_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 否则称为无界的。
3. 极限: 称序列 $\{z_n\}$ 收敛于 $z \in \mathbb{C}$ 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ s.t. $|z - z_n| < \varepsilon, \forall n > N$, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$, 否则称为发散序列。极限的必要条件是唯聚点, 无界序列不可能收敛
- 4.

Theorem. 1 (Bolzano - Weierstrass 定理): 一个有界序列至少有一个聚点。

Theorem. 2 (Cauchy 判别法): 序列收敛的等价条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$ s.t. $|z_{N+p} - z_N| < \varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}_+$ 。

§ 1.3 复变函数

相关概念：

你好

1. 点集：复平面内点的集合
2. 区域：复点集称为区域如果全部由内点组成，且具有连通性
连通性：集合中任意两点都可以用一条折线连接起来，且折线上的点全部属于此点集
3. 单连通区域：区域称为单连通的如果在其内作任何简单闭合围道（自身不相交的闭合曲线），围道内的点都属于该区域，否则称为多联通区域（也称复联通区域）

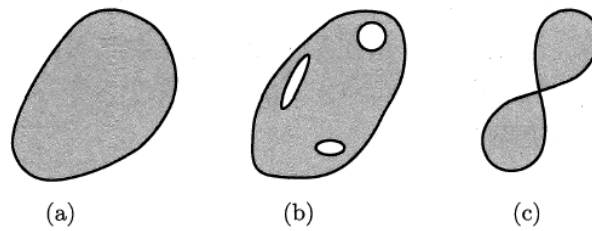


图 1.1: (a) (b) 构成区域, (c) 不构成区域

参考文献

- [1] 吴崇试. 数学物理方法. 北京大学出版社, 3 edition, 5 2019.