光学课程作业
Homework of Optics

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.9 – 2025.1

序言

本文为笔者本科时的“光学”课程作业（Homework of Optics, 2024.9-2025.1）。本门课程笔记和其他科目的笔记、作业，例如热学、电磁学、电路原理和数学物理方法等，也可以在我的 GitHub > LatexNotes 仓库上找到。

每次提交作业，老师给予批阅反馈之后，会对原作业内容进行修改、订正，以期达到满分作业的参考标准。但是，由于个人学识浅陋，认识有限，文中难免有不妥甚至错误之处，望读者不吝指正。读者可以将错误发送到我的邮箱 dingyi233@mails.ucas.ac.cn，也可以到笔者的 GitHub (https://github.com/YiDingg/LatexNotes) 上提 issue，衷心感谢。

目录

Homework 1：第一章作业

1.1 求入射到光纤的角度满足的条件

$$n_0 \sin i = n_g \sin i', \quad n_g \sin(\frac{\pi}{2} - i') = n_c \sin \frac{\pi}{2} \Longrightarrow i \leqslant \arcsin\left(\frac{n_g}{n_0}\sqrt{1 - \frac{n_c^2}{n_g^2}}\right) \tag{1.1}$$

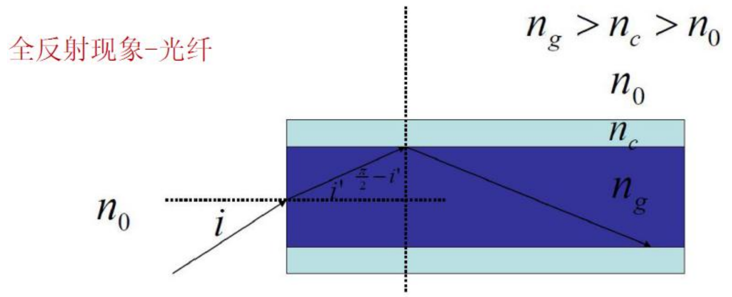


图 1.1: 求入射到光纤的角度满足的条件

1.2 推导光线轨迹方程

在 x-y 平面中，设 $y = y(x)$ 表示光线的轨迹方程，$n = n(y)$ 表示介质的折射率。由几何关系，我们有：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\theta = \frac{1}{\tan i} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 i}}{\sin i} \tag{1.2}$$

由折射定律，记 $[n(y)\sin i(y)]_{y=0} = C$ ，则我们有：

$$n(y)\sin i(y) = C \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{n^2 - C^2}}{C^2}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{n^2}{C^2} - 1 \tag{1.3}$$

两边同时对 x 求导，得到：

$$2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right) = \frac{1}{C^2}\left(\frac{\mathrm{d}n^2}{\mathrm{d}y}\right)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{2C^2}\cdot\frac{\mathrm{d}n^2}{\mathrm{d}y} \tag{1.4}$$

也即

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{2n_0^2\sin^2 i_0}\cdot\frac{\mathrm{d}n^2}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{2n_0^2\cos^2\theta_0}\cdot\frac{\mathrm{d}n^2}{\mathrm{d}y} \quad \square \tag{1.5}$$

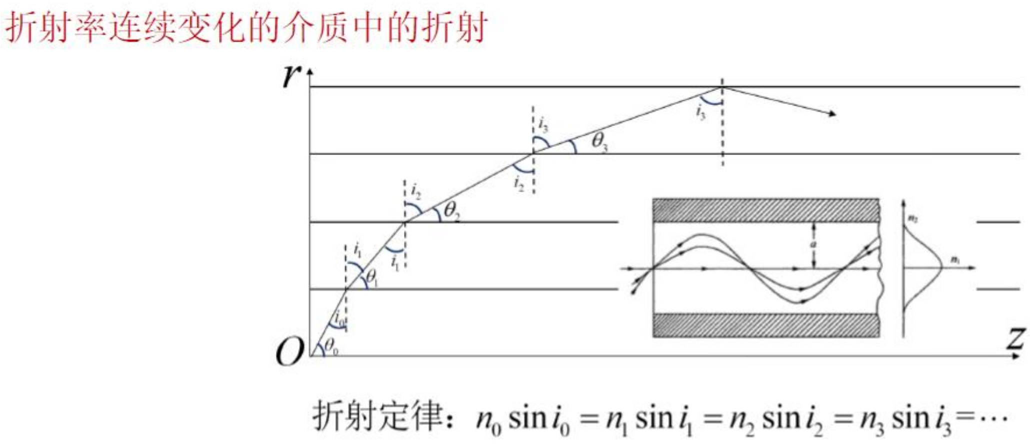


图 1.2: 推导光线轨迹方程

事实上，在三维坐标系中考虑上述过程，或者利用费马原理和变分法，又或考虑哈密顿光学，可以得到更一般的形式，称为光路方程，如下：

$$\nabla n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\right) \tag{1.6}$$

1.3 （已被删去）

1.4 利用费马原理给出物像关系

折射球面如图，由余弦定理可知：

$$\text{OPL} = np + n'p' = n\sqrt{r^2+(s+r)^2 - 2r(s+r)\cos\phi} + n'\sqrt{r^2+(s'-r)^2 + 2r(s'-r)\cos\phi} \tag{1.7}$$

由费马原理，$\frac{\mathrm{dOPL}}{\mathrm{d}\phi}=0$，于是：

$$\frac{-nr(s+r)\sin\phi}{p} + \frac{n'r(s'-r)\sin\phi}{p'} = 0 \Longrightarrow \frac{n}{p} + \frac{n'}{p'} = \frac{1}{R}\left(\frac{n's'}{p'} - \frac{ns}{p}\right) \tag{1.8}$$

在傍轴条件下，有 $s\approx p$，$s'\approx p'$，于是：

$$\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'-n}{R} \quad \square \tag{1.9}$$

证毕。

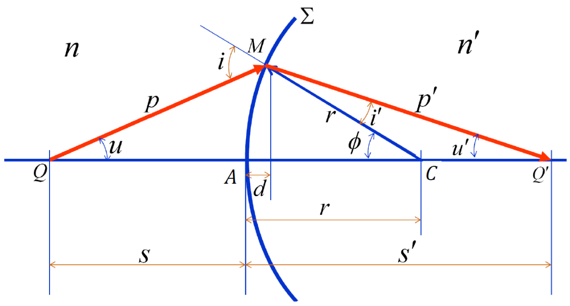


图 1.3: 折射球面物像关系

1.5 推导反射球面的物像公式

这里要注意，由于像是虚像，l_2 贡献虚光程（为负），且 $s_2<0$，因此圆心到像点的距离为 $r+s_2$ 而非 $r-s_2$。同由余弦定理，写出光程 OPL，有：

$$\text{OPL} = n_1l_1 - n_2l_2 = n_1\sqrt{r^2+(r+s_1)^2-2r(r+s_1)\cos\phi} - n_2\sqrt{r^2+(r+s_2)^2-2r(r+s_2)\cos\phi} \tag{1.10}$$

由费马原理，$\frac{\mathrm{dOPL}}{\mathrm{d}\phi}=0$，于是有：

$$\frac{-n_1r(r+s_1)\sin\phi}{l_1} + \frac{n_2r(r+s_2)\sin\phi}{l_2} = 0 \Longrightarrow \frac{n_2}{l_2} - \frac{n_1}{l_1} = \frac{1}{r}\left(\frac{n_1s_1}{l_1} - \frac{n_2s_2}{l_2}\right) \tag{1.11}$$

傍轴时，有 $s_1\approx l_1$，$s_2\approx -l_2$，于是：

$$-\frac{n_2}{l_2} - \frac{n_1}{l_1} = \frac{1}{r}(n_1+n_2) \tag{1.12}$$

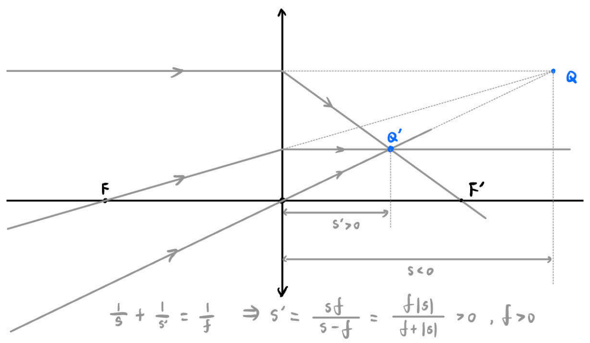
当反射球面两侧为相同介质时，$n_1=n_2$，则：

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = -\frac{2}{r} \quad \square \tag{1.13}$$

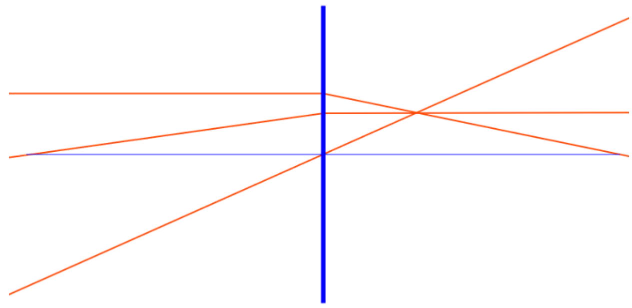
证毕。

1.6 画出图中的像点

如下图所示，左侧为手绘图，右侧为光路仿真软件 Optico 效果图。

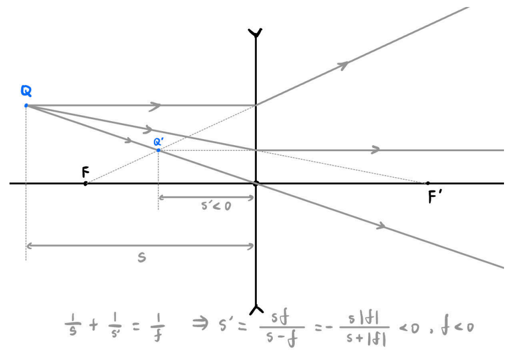


(a) 手绘图

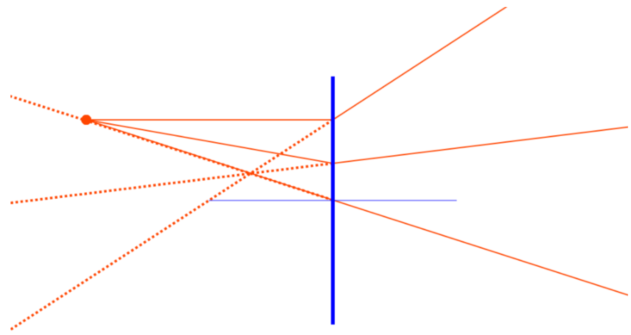


(b) 光路仿真

图 1.4: 画出虚物 Q 的像点 Q'

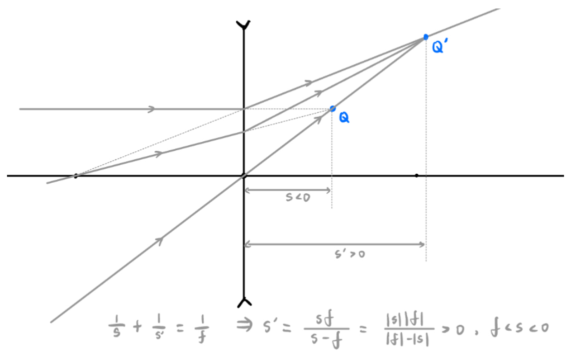


(a) 手绘图

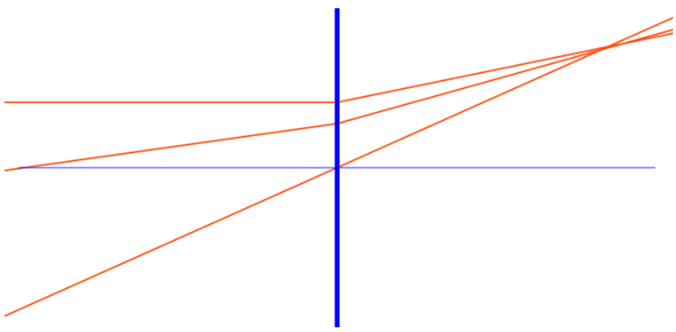


(b) 光路仿真

图 1.5: 画出实物 Q 经凹透镜的像点 Q'



(a) 手绘图



(b) 光路仿真

图 1.6: 画出虚物 Q 经凹透镜的像点 Q'

Homework 2: 第二章作业

2.1 对于正入射的情况，写出菲涅尔公式

菲涅尔公式如下：

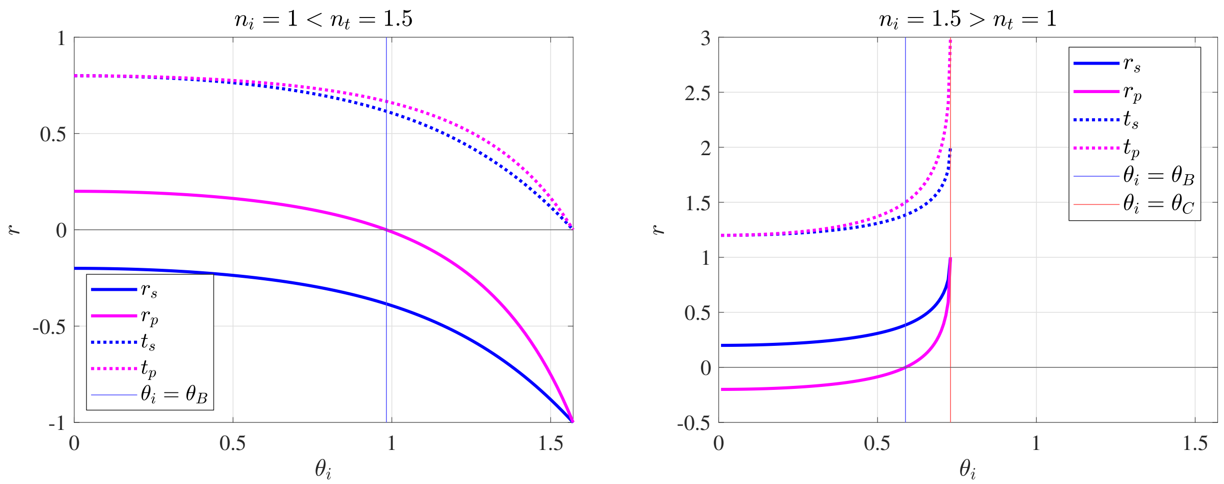
类型	振幅反射系数 r		振幅透射系数 t	
s 波	$r_s = \dfrac{n_i\cos\theta_i - n_t\cos\theta_t}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t}$	$-\dfrac{\sin(\theta_i-\theta_t)}{\sin(\theta_i+\theta_t)}$	$t_s = \dfrac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t}$	$+\dfrac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)}$
p 波	$r_p = \dfrac{n_t\cos\theta_i - n_i\cos\theta_t}{n_t\cos\theta_i + n_i\cos\theta_t}$	$+\dfrac{\tan(\theta_i-\theta_t)}{\tan(\theta_i+\theta_t)}$	$t_p = \dfrac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_t + n_t\cos\theta_i}$	$+\dfrac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)\cos(\theta_i-\theta_t)}$

正入射时，$\theta_i = \theta_t = 0$，于是有：

$$r_p = (-r_s) = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}, \quad t_p = t_s = \frac{2n_i}{n_i + n_t} \tag{2.1}$$

$$F = R_s = R_p = \left(\frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}\right)^2 \tag{2.2}$$

不妨作出相关的图像，图 2.1 是 s 波、p 波振幅系数关于入射角 θ_i 的变化情况[①]。



(a) 由空气入射玻璃（$n_i = 1$，$n_t = 1.5$）

(b) 由玻璃入射空气（$n_i = 1.5$，$n_t = 1$）

图 2.1: 振幅系数 r 随入射角 θ_i 的变化

2.2 一自然光以 Brewster Angle 入射到空气中的一块玻璃，已知功率透射率为 0.86。

(1) 求功率的反射率

$T = 0.86$，由能量守恒，功率反射率 $R = 0.14$。

(2) 若输入为 1000 W，求透射光 s 分量上的功率

光束为自然光，因此 s 分量和 p 分量的功率相同，都为 500 W，也即 $\Phi_{e,i,s} = \Phi_{e,i,p} = 500$ W。又由 Brewster Angle 入射，因此反射光的 p 分量为 0，也即 $R_p = 0$，于是：

$$T_p = 1 - R_p = 1, \quad T_s = 2T - T_p = 0.72 \tag{2.3}$$

由此可求得透射光 s 分量上的辐射通量（即辐射功率）：

$$\Phi_{e,t,s} = T_s\Phi_{e,i,s} = 0.72 \times 500\text{ W} = 360\text{ W} \tag{2.4}$$

[①]源码见附录 A.1

(3) 求玻璃的折射率

虽然题目并未要求[②]，但我们不妨求解一下玻璃的折射率 n_t。在题设条件下，$R = 0.14$，默认空气折射率为 1，则唯一的未知量是玻璃折射率 n_t，这是可以求解的，方程如下：

$$R = \frac{1}{2}(R_s + R_p) = 0.14, \quad \theta_i = \theta_B = \arctan\left(\frac{n_t}{n_i}\right), \quad n_i = 1 \Longrightarrow \tag{2.5}$$

$$\left[\frac{\cos(\arctan n_t) - \sqrt{n_t^2 - \sin^2(\arctan n_t)}}{\cos(\arctan n_t) + \sqrt{n_t^2 - \sin^2(\arctan n_t)}}\right]^2 + \left[\frac{n_t^2\cos(\arctan n_t) - \sqrt{n_t^2 - \sin^2(\arctan n_t)}}{n_t^2\cos(\arctan n_t) + \sqrt{n_t^2 - \sin^2(\arctan n_t)}}\right]^2 = 2\times 0.14 \tag{2.6}$$

此方程有唯一未知量 n_t，用 Matlab 解此非线性方程组[③]，得到玻璃折射率 n_t，以及其它参量[④]:

$$\begin{cases} n_t = 0.554902, \quad \theta_i = \theta_B = 29.025970^\circ \\ \theta_t = 60.974030^\circ, \quad \theta_C = 33.703947^\circ \\ R = 0.1400, \quad R_s = 0.280000,\ R_p = 0.000000 \\ T = 0.8600, \quad T_s = 0.720000,\ T_p = 1.000000 \end{cases} \quad \begin{cases} n_t = 1.802121, \quad \theta_i = \theta_B = 60.974030^\circ \\ \theta_t = 29.025970^\circ, \quad \theta_C = 90.000000^\circ \\ R = 0.1400, \quad R_s = 0.280000,\ R_p = 0.000000 \\ T = 0.8600, \quad T_s = 0.720000,\ T_p = 1.000000 \end{cases} \tag{2.7}$$

也即上述方程有两解，考虑 $n_{ti} \in [0,\ 2]$，令方程左边为 $f(n_{ti})$，作出图像如右。图 2.2 说明了我们并没有漏掉其它解。

一般玻璃的折射率在 1.5 左右，即使是特殊玻璃（例如高折射率镜片），也基本在 1.3 至 1.9 之间，0.5 的玻璃折射率显然是不合理的，即使是考虑介质折射率关于波长的变化（如 X 射线或 Gamma 射线），也不会达到如此低的折射率。因此舍去 $n_t = 0.554902$，最终得 $n_t = 1.802121$。

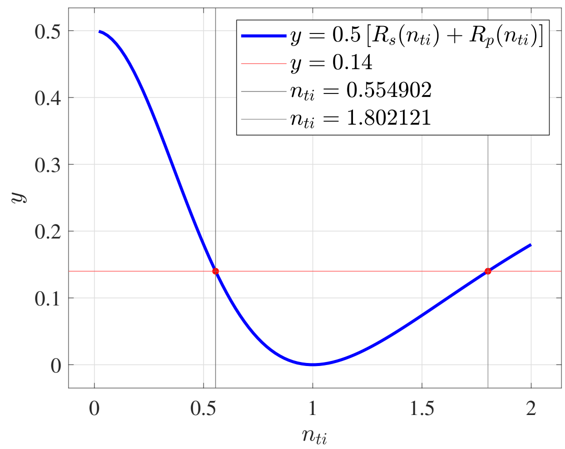


图 2.2: 方程 2.5 左边函数值随 n_{ti} 的变化情况

上题改编：一自然光由空气入射玻璃，玻璃折射率为 1.5，已知功率透射率为 0.86。

(1) 求功率的反射率：

$T = 0.86$，由能量守恒，功率反射率 $R = 0.14$。

(2) 若输入为 1000 W，求透射光 s 分量上的功率

光束为自然光，因此 s 分量和 p 分量的功率相同，都为 500 W。先求解入射角 θ_i，由菲涅尔定理和能量关系：

$$R = \frac{1}{2}(R_s + R_p),\ R_s = \left[\frac{\cos\theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}\right]^2,\ R_p = \left[\frac{n_{ti}^2\cos\theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}{n_{ti}^2\cos\theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}\right]^2 \tag{2.8}$$

其中 $n_i = 1$，$n_t = 1.5$，因此 $n_{ti} = 1.5$，代入即得：

$$\left[\frac{\cos\theta_i - \sqrt{1.5^2 - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{1.5^2 - \sin^2\theta_i}}\right]^2 + \left[\frac{1.5^2\cos\theta_i - \sqrt{1.5^2 - \sin^2\theta_i}}{1.5^2\cos\theta_i + \sqrt{1.5^2 - \sin^2\theta_i}}\right]^2 = 2\times 0.14 \tag{2.9}$$

[②] 查阅资料发现，此题来自于光学（尤金，第五版）*Optics (Eugene Hecht)* 的 Page 152

[③] 源码见附录 A.2

[④] 图 2.2 源码见附录 A.4

用 Matlab 解此非线性方程组[5]，得到入射角 θ_i 和其它参量：

$$\begin{aligned} \theta_i &= 1.173220 \ \text{rad} = 67.220559^\circ \\ R = 0.140000, \quad R_s &= 0.256933, \ R_p = 0.023067 \\ T = 0.860000, \quad T_s &= 0.743067, \ T_p = 0.976933 \end{aligned} \tag{2.10}$$

于是透射光 s 分量上的辐射通量为：

$$\Phi_{e,t,s} = T_s \Phi_{e,i,s} = 0.743067 \times 500 \text{ W} = 371.5335 \text{ W} \tag{2.11}$$

2.3 光束垂直入射到玻璃-空气界面，玻璃折射率 1.5，求出能量反射率和透射率

$\theta_i = 0$ 时，由菲涅尔定律和能量关系，有：

$$R = \frac{1}{2}(R_s + R_p), \quad T = 1 - R \tag{2.12}$$

$$R_s = \left[\frac{\cos\theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}\right]^2 = \left[\frac{1 - n_{ti}}{1 + n_{ti}}\right]^2, \ R_p = \left[\frac{n_{ti}^2\cos\theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}{n_{ti}^2\cos\theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}\right]^2 = \left[\frac{n_{ti}^2 - n_{ti}}{n_{ti}^2 + n_{ti}}\right]^2 \tag{2.13}$$

由空气入射玻璃时，$n_{ti} = 1.5$，由玻璃入射空气时，$n_{ti} = \frac{2}{3}$，代入得到：

$$\begin{aligned} \text{空气入射玻璃: } R = 0.04, \quad T = 0.96 \\ \text{玻璃入射空气: } R = 0.04, \quad T = 0.96 \end{aligned}$$

也即无论从哪边入射，能量反射率和透射率分别为 0.04 和 0.96。

[5]源码见附录 A.3

Homework 3: 第三章作业

3.1 在杨氏双缝实验中，设两缝之间的距离为 0.2 mm，在距双缝 1 m 远的屏上观察干涉条纹，若入射光是波长为 400 nm 至 760 nm 的白光，问屏上距零级明纹 20 mm 处，哪些波长的光最大限度地加强？

也即求哪些波长的光在 20 mm 处是亮条纹。杨氏干涉中，两相邻亮（暗）条纹的间距 $\Delta x = \frac{D\lambda}{d}$，其中 D 是双缝屏与屏幕的距离，d 是双缝间距，λ 是波长。因此有：

$$k\Delta x = 20\ \text{mm} \Longrightarrow \lambda = \frac{d \cdot 20\ \text{mm}}{D} \cdot \frac{1}{k} = \frac{4}{k} \times 10^{-6}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots \tag{3.1}$$

而波长范围 $\lambda \in [400\ \text{nm},\ 760\ \text{nm}]$，于是：

$$k \in [5.2632,\ 10] \Longrightarrow k = 6, 7, 8, 9, 10, \quad \lambda = 400.0\ \text{nm},\ 444.4\ \text{nm},\ 500.0\ \text{nm},\ 571.4\ \text{nm},\ 666.7\ \text{nm} \tag{3.2}$$

3.2 在空气中用某单色光进行双缝干涉实验时，观察到干涉条纹相邻明条纹的间距为 1.33 mm，当把实验装置放在水中时（水的折射率为 1.33），则相邻明条纹的间距变为多少？

空气折射率近似为 1，设光在空气中的波长为 λ，则在水中的波长为 $\frac{\lambda}{n}$，其中 n 为水的折射率。而双缝干涉中相邻亮条纹间距为：

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{d} \Longrightarrow \Delta x' = \frac{\Delta x}{n} = 1\ \text{mm} \tag{3.3}$$

3.3 用波长为 589.3 nm 的钠黄光垂直照射长 $L = 20$ mm 的空气尖劈，测得条纹间距为 1.18 $\times 10^{-4}$ m，求钢球直径 d。

构成劈尖干涉，相邻亮条纹间距为 $\Delta x = \frac{\lambda}{2\tan\theta} \approx \frac{\lambda}{2\theta}$，设劈尖长为 L，倾角为 θ，钢球的直径为 D，则有：

$$\tan\theta = \frac{D}{L} \Longrightarrow D = L\tan\theta \approx \theta L = \frac{\lambda L}{2\Delta x} = 4.9941 \times 10^{-5}\ \text{m} \tag{3.4}$$

即为所求直径。

3.4 厚度为 0.050 mm 的玻璃片，其折射率为 1.520，插入迈克尔孙干涉仪的一条光路中，照明光为波长 587.56 nm 的氦黄线。求插入这片玻璃片移动了多少干涉条纹？

改变两干涉光束的光程差，会使原干涉条纹发生移动。设 n_f 为玻璃片折射率，d 为玻璃片厚度，λ_0 为氦黄线在空气中的波长，则有：

$$2n_f d = N\lambda_0 \Longrightarrow N = \frac{2n_f d}{\lambda_0} = 258.6970 \tag{3.5}$$

3.5 迈克耳逊干涉仪两臂中分别加入 20 cm 长的玻璃管，一个抽成真空，一个充以一个大气压的氩气，今以汞光线（波长为 546.0 nm）入射干涉仪，如将氩气抽出，发现干涉仪中条纹移动了 205 条，求氩气的折射率。

抽成真空的玻璃管补偿了穿过玻璃管带来的光程，因此没有引入附加光程差。与上题同理，设 n_f 为氩气折射率，d 为玻璃管长度，λ_0 为汞光线在空气中的波长，并近似空气折射率为 1，则有:

$$2(n_f - 1)d = N\lambda_0 \Longrightarrow n_f = \frac{N\lambda_0}{2d} + 1 = 1.0002798 \tag{3.6}$$

3.6 有一谱线结构，谱线范围是 500 nm 至 501 nm，若 F-P 标准具 $d = 0.5$ mm，可否用它来分析这一谱线结构？

波长的自由光谱宽度 $(\Delta\lambda)_{\text{fsr}}$、最小分辨率 $(\Delta\lambda)_{\text{min}}$ 和极限分辨率 $(\Delta\lambda)_{\text{lim}}$ 分别为：

$$(\Delta\lambda)_{\text{fsr}} = \frac{\lambda_0^2}{2nd}, \quad (\Delta\lambda)_{\text{min}} = \frac{2\lambda_0}{\pi\sqrt{F}}, \quad (\Delta\lambda)_{\text{lim}} = \frac{\lambda_0^2}{\pi nd\sqrt{F}} \tag{3.7}$$

代入数据 $d = 0.5$ mm，空气折射率近似 $n = 1$，并取能量反射率为典型值 $R = 0.90$，可以得到：

$$F = 80.0000, \quad (\Delta\lambda)_{\text{fsr}} = 0.2505\ \text{nm}, \quad (\Delta\lambda)_{\text{min}} = 0.0011\ \text{nm}, \quad (\Delta\lambda)_{\text{lim}} = 5.6382 \times 10^{-7}\ \text{nm} \tag{3.8}$$

而谱线宽度 $\Delta\lambda = 1\ \text{nm} > (\Delta\lambda)_{\text{fsr}}$，因此，无论光谱是连续谱还是分立谱，虽然可以观察到明显的干涉条纹（对分立谱），或者在频谱分析仪中看到明显的频率纵模（对连续谱），但是都会出现严重的条纹越级，因此不能用它来分析这一谱线结构。

Homework 4: 第四章作业

4.1 对圆盘衍射，当圆盘恰好包含 n 个半波带时（即 n 个半波带被遮挡），为何中心为亮斑？

我们先给出结论，再作具体的讨论：
除了紧挨着圆盘后的一小段区域，**整个中轴线上处处呈亮态**（辐照度不为 0），**这与圆盘是否包含整数个半波带无关**，但可能是（与圆盘平行的）平面上的极小值。如果是圆孔衍射，则当圆盘恰好包含偶数个半波带时，中心为暗斑，恰好包含奇数个半波带时，中心为亮斑（且是极大值）。

为了讨论圆盘衍射，我们需要先给出菲涅尔衍射的基本原理（菲涅尔波带法）。

(1) 球面波的传播（菲涅尔波带法）

在菲涅尔衍射中，之前的许多近似都不再成立，需要建立另外一套理论基础。

由菲涅尔原理，如果每个子波向一切方向都均匀地辐射，那么除了产生一个向前进的波以外，还会出现一个向波源后退的反向波。实验上并没有发现这样的波，因此我们必须对次级发射体的辐射图样作某些修改。更详细的理论[①]表明，次波源发射的光具有方向性，由倾斜因子 $K = K(\theta)$ 来描述，它是次波源在不同方向光场的振幅系数：

$$K = K(\theta) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\theta\right), \quad E = K\frac{\varepsilon_A}{R}\, e^{i(kr-\omega t)} \tag{4.1}$$

如图 4.1，由波带理论，第 m 级半波带（后文简称“波带”）在点 P 的电场为：

$$E_m = (-1)^{m+1}\frac{2K_m\varepsilon_0}{\rho_0 + r_0}\, e^{i(k(\rho_0+r_0)-\omega t)}, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_A\rho_0\lambda \tag{4.2}$$

式中 $\varepsilon_0 = \varepsilon_A\rho_0\lambda$ 是波源强度，即球面波表达式 $E = \frac{\varepsilon_0}{r}\, e^{i(kr-\omega t)}$ 中的 ε_0。

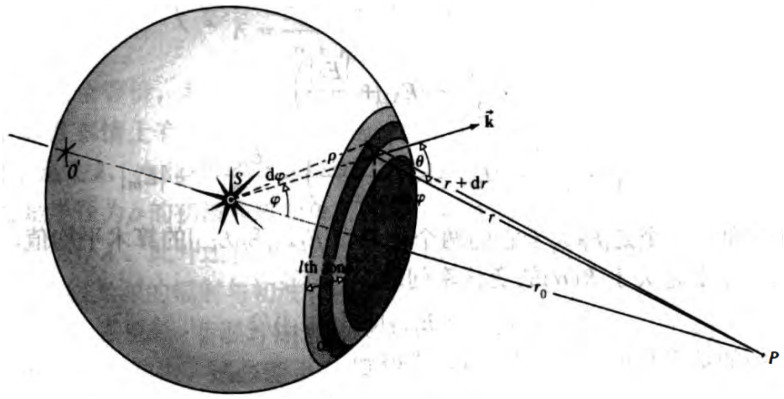


图 4.1: 球形波阵面的传播

(2) 圆孔近场衍射

我们指出，虽然在数学上将半波带分为了无限多个，但由于倾斜因子 $K(\theta)$ 的存在，认为小孔中只能“看到”有限个半波带是合适的。通过计算给定小孔上的半波带数目 N_F，可以得到中轴线上辐照度的一个良好近似。每个半波带的面积 A 由下式给出：

$$A = \pi\frac{r_0\rho}{r_0 + \rho}\lambda \approx \pi r_0\lambda \tag{4.3}$$

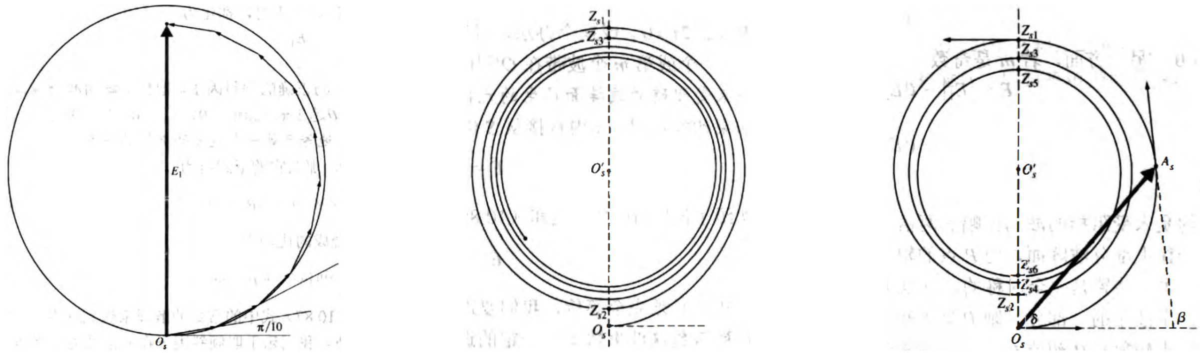
[①]基尔霍夫理论，详见参考文献 [?] 的 10.4 节

对圆形小孔，半波带数目为：

$$N_F = \frac{\pi a^2}{A} = \frac{(\rho_0 + r_0)a^2}{r_0 \rho_0 \lambda} \approx \frac{a^2}{r_0 \lambda} \tag{4.4}$$

上式中 ρ 和 r_0 分别是小孔到光源和观察点的距离，a 是小孔的半径。N_F 常称为菲涅耳数。保持小孔半径不变，当点 P 从无穷远处向小孔靠近时，r_0 由无穷到 0，N_F 会由 0 逐渐增大为 ∞。

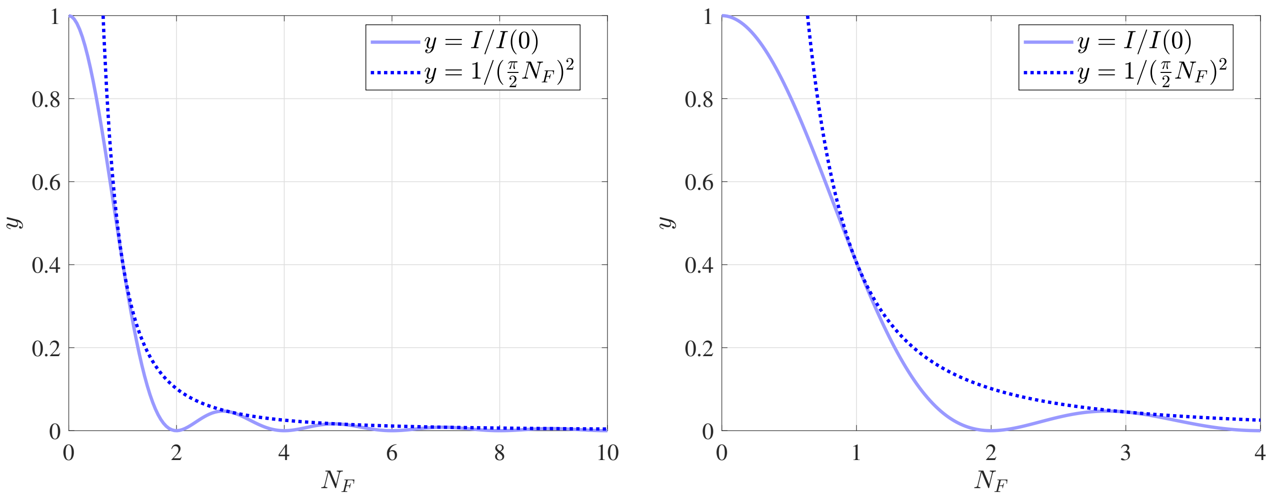
由图 4.2 (c) 可以看出在不同半波带数目下，中轴线上的振幅情况。角度还可看出，实际相位角与惠更斯-菲涅尔原理所预测的相位角的不同，O_s 点的切线（向右）是惠更斯-菲涅尔原理的相位角，而相矢量 $\overrightarrow{O_s A_s}$ 的切线对应实际相位角。



(a) 相矢量叠加 (b) 总振幅随波带数目的变化 (c) 振动曲线

图 4.2: 利用波带和振动曲线来判断中轴线上的振幅情况

在固定直径的孔内，由于 $A = \frac{\pi a^2}{N_F}$，随着 N_F 的增大，每个波带的面积 A 会减小，使得轴上辐照度的极大值将依 $\frac{1}{N_F^2}$ 减小（包络线）。一个定性的近似是 $I = I(0)\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi}{2}N_F\right)$，其中 $I(0)$ 是 $N_F = 0$ (P 点离小孔无穷远)，作出 I 关于 N_F 的变化情况，如图 4.3 所示：



(a) $N_F \in [0, 10]$ (b) $N_F \in [0, 4]$

图 4.3: 中心振幅随波带数的变化

另外，当观察点不在中轴线上时，随着点 P 向外移动，“观察”到的波带也会发生变化，如图 4.4，此时辐照度会有一系列极大与极小值，变化比较复杂。对整个观察平面而言，所得衍射图样随着 N_F 的变化而变化，如图 4.5 所示。

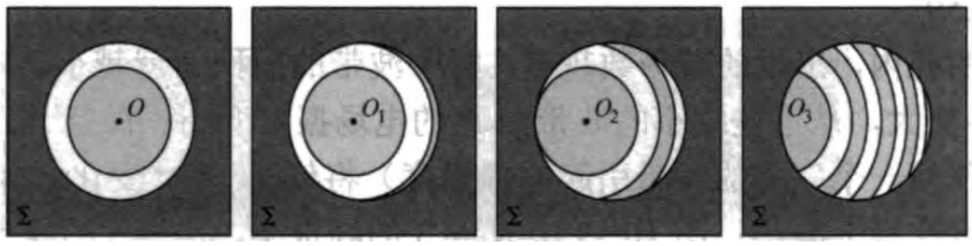


图 4.4: 圆孔内“观察”到的波带

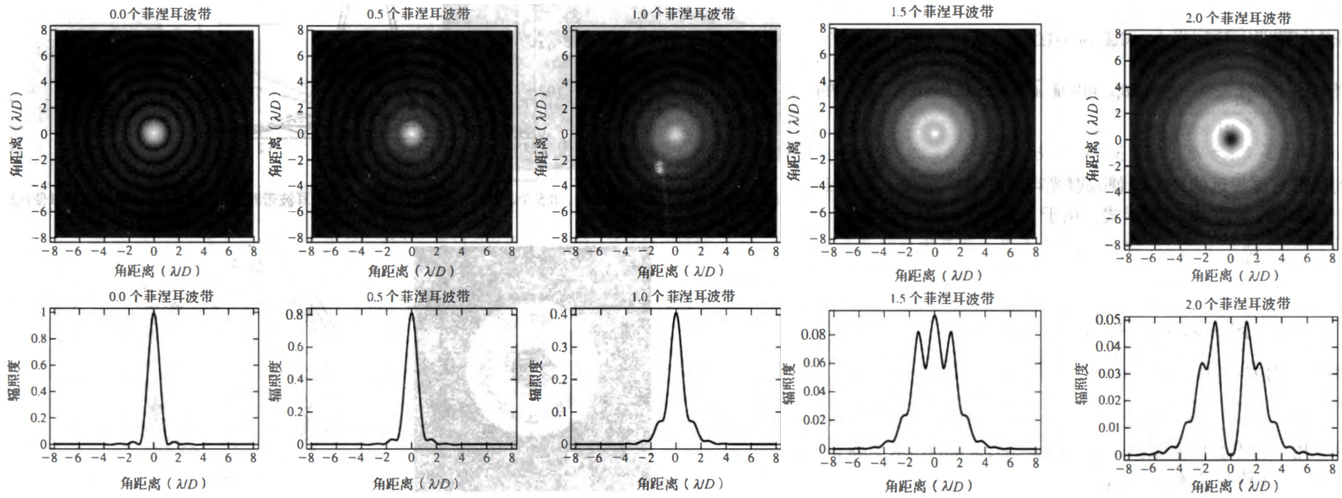


图 4.5: 不同菲涅尔数 N_F 时的圆孔衍射图样

可以看到，当 $N_F \to 0$ 时（即 $N_F \gg 1$），发生夫琅禾费衍射，这实质上是夫琅禾费衍射的另一种判别方法；当 $N_F \geqslant 1$ 时，发生菲涅尔衍射。特别地，对于环形孔，我们也可以借助振动曲线来分析，如下图：

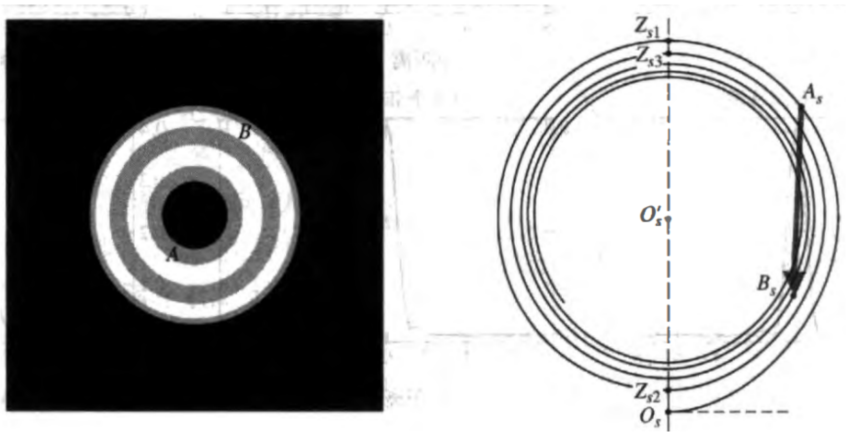


图 4.6: 透光圆环中心轴上的菲涅尔衍射情况

图 4.6 是一个包含 $\frac{1}{3}+3+\frac{1}{3}$ 个波带的环形孔，中心波带（第一波带）被圆盘挡住大约 $\frac{2}{3}$（剩余 $\frac{1}{3}$），振动曲线的 A_s 和 B_s 分别对应图中 A 点和 B 点。由合成结果知道，相矢量 $\overrightarrow{A_sB_s}$ 给出了振幅的大小和相位。

(3) 圆盘近场衍射

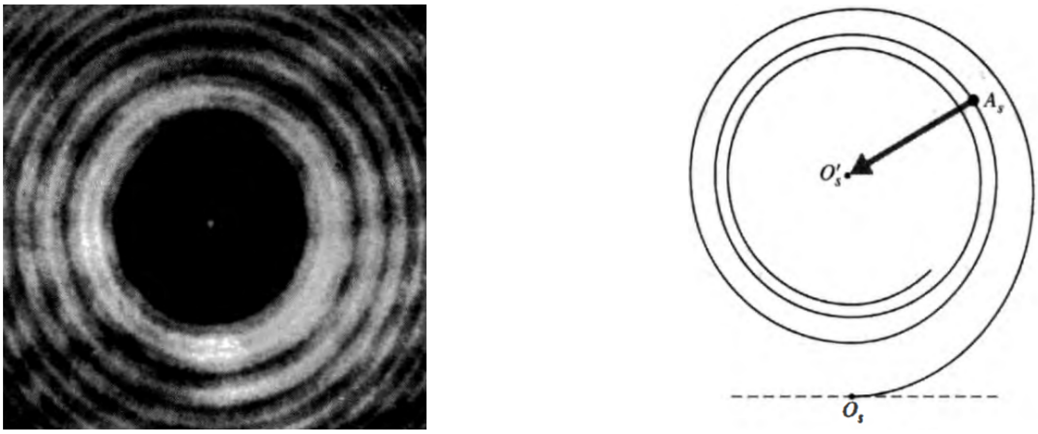
我们知道，一个未受阻碍的波有无穷多个波带到达 P 点（中轴线上一点），在此处产生一个大小约为第一波带一半的电场，即 $E \approx \frac{1}{2}E_1$。如果障碍物正好盖住第一波带，在振动曲线中减去第一波带的贡献，此

时的电场 $E' = -\frac{1}{2}E_1$，这表明障碍物的加入不会改变点 P 的亮暗状态（仍是亮斑）。

用类似的思想，如果障碍物从无开始，逐渐遮住 $1, 2, ..., n$ 个波带，这相当于对给定的圆屏，点 P 由无穷远向圆盘靠近。由振动曲线可看出，除非 n 非常大（P 离圆盘很近），相矢量 $\overrightarrow{A_s B_s}$ 的振幅始终不（近似）为 0。这表明**除了紧挨着圆盘之后的一小段，中轴线上处处为亮点（辐照度始终不为 0），但可能是（与圆盘平行的）平面上的极小值**。遮住前 n 个波带时的电场可写为：

$$E = \frac{1}{2}E_{n+1} = (-1)^n K_{n+1} \frac{\varepsilon_A \rho_0 \lambda}{\rho_0 + r_0} e^{i(k(\rho_0+r_0)-\omega t)} = (-1)^n K_n E_0 \tag{4.5}$$

其中 E_0 是无阻挡时的电场，K_n 是第 n 级波带法线与中轴线的夹角，随着 n 的增大，夹角逐渐向 π 靠近。放到图 4.7 (b) 中，便是点 A_s 逆时针绕振动不断旋转，随着 N_F 的增大，逐渐向中心点 O'_s 靠近，直到 A_s 和 O'_s 重合，$|E| = 0$。



(a) 直径为 3 mm 滚珠的衍射图样

(b) 圆盘衍射时振动曲线上的相矢量

图 4.7: 圆盘障碍物衍射

4.2 讨论光栅的自由光谱范围。

光栅方程为：

$$a\left(\sin\theta_m - \sin\theta_i\right) = m\lambda, \quad m = 0, \pm1, \pm2, ... \tag{4.6}$$

其中 a 是光栅常数，表示两相邻狭缝的间距，即周期长度。以垂直于光栅平面的直线为法线，θ_i 是入射角而 θ_m 是第 m 级（极大）衍射角。对于正入射的情况，$\theta_i = 0 \Longrightarrow m < \frac{a}{\lambda}$，对于自准直装置，$\theta_i = -\theta_m \Longleftarrow m < \frac{2a}{\lambda}$。

考虑光栅的自由光谱范围，由于波长小（频率高）的光谱线更密集，当 $\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}$ 的第 $m+1$ 级与 $\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}$ 的第 m 级重合时，达到自由光谱范围 $(\Delta\lambda)_{\text{fsr}}$：

$$\begin{cases} a(\sin\theta_m - \sin\theta_i) = (m+1)\left(\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}\right) \\ a(\sin\theta_m - \sin\theta_i) = m\left(\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}\right) \end{cases} \Longrightarrow (\Delta\lambda)_{\text{fsr}} = \frac{\lambda_0}{m} \tag{4.7}$$

上面所有公式中的级数 m 在范围 $[0, \frac{2a}{\lambda})$ 内。由此可得到各参数在不同要求下的最值，这与当初 F-P 时的讨论类似，我们不多赘述。

4.3 波长为 634.8 nm 的平行光射向直径为 2.76 mm 的圆孔，与孔相距 1 m 处放一屏。回答下面两个问题：(1) 屏上正对圆孔中心的 P 点是亮点还是暗点？(2) 要使 P 点变成与 (1) 相反的情况，至少要把屏幕分别向前或向后移动多少？

(1) 屏上正对圆孔中心的 P 点是亮点还是暗点？

计算菲涅尔数 N_F :

$$N_F = \frac{\pi a^2}{A} = \frac{(\rho_0 + r_0)a^2}{r_0\rho_0\lambda} \overset{\rho_0\to\infty}{=} \frac{D^2}{4r_0\lambda} = \frac{(2.76\ \mathrm{mm})^2}{4\times 1\ \mathrm{m}\times 634.8\ \mathrm{nm}} = 3 \tag{4.8}$$

N_F 为奇数，因此中心点是亮点。

(2) 要使 P 点变成与 (1) 相反的情况，至少要把屏幕分别向前或向后移动多少？

N_F 为偶数时中心成暗点，因此分别令 N_F 为 2 和 4 ，得到：

$$r_0 = \frac{D^2}{4N_F\lambda} = 1.5\ \mathrm{m},\quad 0.75\ \mathrm{m} \tag{4.9}$$

因此至少要把屏幕向 P 点移动 0.25 m，或者把屏幕远离 P 点移动 0.5 m。

4.4 一波带片由五个环带组成，第一环带是半径 $0\sim r_1$ 的不透明圆盘，第二环带半径 $r_1\sim r_2$ 透明，第三环带半径 $r_2\sim r_3$ 不透明，第四环带半径 $r_3\sim r_4$ 透明，第五环带是 $r_4\sim\infty$ 的不透明区域。用波长 500 nm 的平行单色光照明，最亮的像点在距波带片 1 m 的轴上，试求：(1) r_1；(2) 像点的光强；(3) 其它光强极大值出现在轴上的哪些位置？

(1) 求 r_1

由题意知主焦距 $f = 1\ \mathrm{m}$ ，因此：

$$f = \frac{R_1^2}{\lambda} \Longrightarrow R_1 = \sqrt{f\lambda} = \sqrt{1\ \mathrm{m}\times 500\ \mathrm{nm}} = 0.7071\ \mathrm{mm} \tag{4.10}$$

(2) 求像点的光强

像点是第一焦点，波带片如图 4.8 所示。

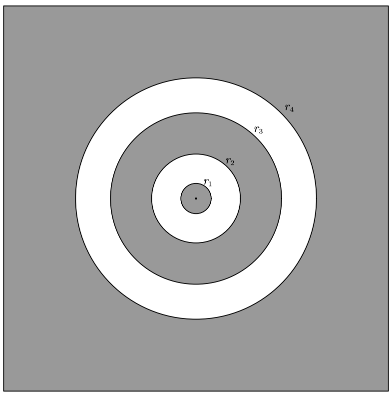


图 4.8: 题意中的波带片

设没有阻挡时的辐照度为 I_0，由于波带片透过第 2 和第 4 个（半）环带，因此振幅和辐照度为：

$$E = 2E_1 = 4E_0 \Longrightarrow I = 16I_0 \tag{4.11}$$

(3) 其它光强极大值出现在轴上的哪些位置？

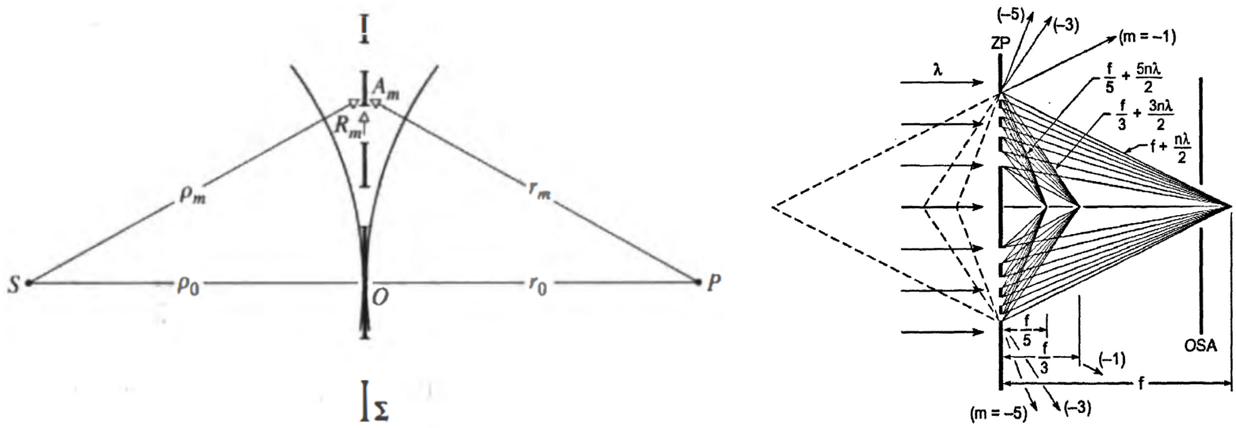
还是先给出结论，再做详细的讨论：

记主焦点（第一焦点）位于 $r = f_1$ 处，辐照度为 I_1，则波带片的所有焦点及其辐照度大小是：

$$f_1 = \frac{R_1^2}{\lambda}, \quad E_1 \approx nE_0, \quad I_1 \approx n^2 I_0 \tag{4.12}$$

$$f_k = \frac{f_1}{k}, \quad I_k = \frac{I_1}{k^2}, \quad k = 1, 3, 5, ... \tag{4.13}$$

由图 4.9 (a)，我们先来计算各波带的半径。



(a) 波带片各级圆环半径的计算 **(b) 波带片的各级焦点**

图 4.9: 波带片

将第 m 个波带的外缘标以点 A_m，按定义，路程 S-A_m-P 的光程应当比 S-O-P 要大 $\frac{m\lambda}{2}$，也即：

$$(\rho_m + r_0) - (\rho_0 + r_0) = m\frac{\lambda}{2} \tag{4.14}$$

作泰勒展开 $\rho_m = \rho_0 + \frac{R_m^2}{2\rho_0}$ 和 $r_m = r_0 + \frac{R_m^2}{2r_0}$，代入得到：

$$R_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0}}} \overset{\rho_0 \to \infty}{=} \sqrt{m r_0 \lambda} \tag{4.15}$$

更精确的公式[②]是 $R_m = \sqrt{m r_0 \lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4}}$，式中 $\frac{m^2\lambda^2}{4}$ 代表球差。

是上面，我们依据“在点 r_0 的各波带振幅相互加强”的原则，得到了波带片的各级半径，使得点 P 是中轴线上光强最大的一点，此时点 P 称为主焦点或一级焦点，距离 r_0 也相应的记作 f 或 f_1，有：

$$f_1 = \frac{R_1^2}{\lambda} \Longrightarrow \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} = \frac{1}{f} \tag{4.16}$$

[②] 由参考文献 [?] Page 3 给出

与薄透镜公式有相同的形式，因此，用一光束准直入射给定的波带片（起到 $\rho_0 \to \infty$ 的作业），此时中轴线上最亮的点就是主焦距，它是辐照度分布中的一个极大值（也是最大值），因为在 f 处波带片上的各圆环刚好和波阵面上的各波带重合。

需要注意，上面的“n 级半径”并不是波带片的最大圆环半径，对有 n_0 个圆环的挡光型波带片而言（中心圆算第一个圆环），无穷远处不透光，最外围的第 n_0 级圆环 $(R_{n_0-1} \sim R_{n_0})$ 是透光的，则式中的 $n = n_0$；对透光型波带片而言（如图 **??** 所示的正负菲涅尔波带片），无穷远处透光，最外围的第 n 级圆环 $(R_{n_0-1} \sim R_{n_0})$ 是不透光的，因此需要再往外“扩张一个半径”，式中的 $n = n_0 + 1$。当然，实际中的 n_0 一般都较大（100 以上），即使不考虑也几乎没有误差。

为什么我们要说是“一级”焦距？因为波带片本质上还是一个光栅，它（在中轴线上）的衍射图样是一系列的主焦点和次焦点交替出现（次焦点都比主焦点近），如图 4.9 (b) 所示。下面我们推导这些次焦点的位置和辐照度大小。

只需考虑 $r = \frac{f}{k}, k = 2, 3, 4, ...$ 时的情况，其余情况介于两者中间，可定性地判断辐照度的大小变化，且稍后能轻易知道它们都不是极值点。对于给定的 k，点 P 与波带距离 $r = \frac{f}{k}$，我们保持波带片的直径 D 不变，当距离变为原来的 $\frac{1}{k}$，由 $R_m = \sqrt{mr\lambda}$ 知道，P 点“看到”的各波带半径变为原来的 $\frac{1}{\sqrt{k}}$。之前 $r = f$ 时波带片共有 n 个半径，“孔”（波带片）的直径没变，而波带半径缩小为原来的 $\frac{1}{\sqrt{k}}$，因此在点 P “看到”的波带由 n 个增长至 kn 个。

记 $r = \frac{f}{k}$ 时，P 点“看到”的一系列波带半径为 $R_j^{(k)}$，$k = 1, 2, 3,\ \ j = 1, 2, ..., kn$，将它们的相对大小（$\frac{R_j^{(k)}}{R_1^(1)}$）如表 4.1 一样列出，一切都会变得显然：

表 4.1: $r = \frac{f}{k}, k = 1, 2, 3, ...$ 时孔内一系列波带的相对半径及位置关系

$k=1$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	...	$\sqrt{n}$
$k=2$	$(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}, 1)$	$(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 2)$	$(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \sqrt{3})$	...	$(\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}, \sqrt{n})$
$k=3$	$(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 1)$	$(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \sqrt{2})$	$(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}, \sqrt{3})$	...	$(\frac{\sqrt{3n-1}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3n-2}}{\sqrt{3}}, \sqrt{n})$
$k=4$	$(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}, 1)$	$(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}, \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}}, \frac{7}{\sqrt{4}}, \sqrt{2})$	$(\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}, \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4}}, \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{4}}, \sqrt{3})$	...	$(\frac{\sqrt{4n-1}}{\sqrt{4}}, \frac{\sqrt{4n-2}}{\sqrt{4}}, \frac{\sqrt{4n-3}}{\sqrt{4}}, \sqrt{n})$

可以看到，当 k 是奇数时，波带片的一个圆环内透过奇数个相邻波带，抵消之后仍剩一个波带的振幅，呈现亮斑；当 k 是偶数时，波带片的一个圆环内透过偶数个相邻波带，抵消之后剩下的是零振幅，呈现暗斑。因此，波带片的所有焦点位置是 $\frac{f}{1}, \frac{f}{3}, \frac{f}{5}, ...$。

再来看辐照度大小，在 k 为奇数的情况下，每个波带片环相当于只透过一个波带，由 $A = \pi r_0 \lambda$ 知道波带面积缩小为原来的 $\frac{1}{k}$，因此电场振幅变为原来的 $\frac{1}{k}$，辐照度变为原来的 $\frac{1}{k^2}$。综上，波带片的所有焦点和辐照度大小是：

$$f_1 = \frac{R_1^2}{\lambda}, \quad E_1 \approx nE_0, \quad I_1 \approx n^2 I_0 \tag{4.17}$$

$$f_k = \frac{f_1}{k}, \quad I_k = \frac{I_1}{k^2}, \quad k = 1, 3, 5, ... \tag{4.18}$$

式中 n 为波带片最外圆的半径级数，也即波带片圆环总个数，E_0 和 I_0 分别是无阻挡时的振幅和辐照度。

4.5 一束波长为 500 nm 的平行光垂直照射在一个单缝上，如果所用的单缝的宽度 $a = 0.5$ mm，缝后紧挨着的薄透镜焦距 $f = 1$ m，试求：(1) 中央明条纹的角宽度；(2) 中央亮纹的线宽度；(3) 第一级与第二级暗纹的距离。

> 本题中的计算都可以借助近似来完成，但考虑到手边有计算机，我们还是取原公式来精确计算。从计算结果我们也可以看到，在小角近似下的误差是非常小的。

(1) 中央明条纹的角宽度

计算菲涅尔数 N_F：

$$N_F = \frac{b^2}{f\lambda} = \frac{(0.5\text{ mm})^2}{1\text{ m} \times 500\text{ nm}} = 0.5 \tag{4.19}$$

可以近似认为发生的是夫琅禾费衍射。由夫琅禾费单缝衍射公式：

$$I = I(0)\,\text{sinc}^2\beta, \quad \beta = \frac{1}{2}kb\sin\theta \tag{4.20}$$

可以推得全峰角宽度 ξ_θ：

$$I = I(0)\,\text{sinc}^2\beta = I(0)\,\text{sinc}^2\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right) = I(0)\,\text{sinc}^2\left(N\pi\sin\theta\right) \tag{4.21}$$

$$b\sin\theta_0 = \lambda \Longrightarrow \xi_\theta = 2\theta_0 = 2\arcsin\left(\frac{\lambda}{b}\right) = 2\arcsin\left(\frac{1}{N}\right) \tag{4.22}$$

代入数据：

$$\xi_\theta = 2\arcsin\left(\frac{500\text{ nm}}{0.5\text{ mm}}\right) = 0.00200000033\text{ rad} \approx 0.0020\text{ rad} \tag{4.23}$$

(2) 中央亮纹的线宽度

借助狭缝中心点在屏幕上的成像，可以帮助我们推导辐照度随位置 z 的分布。可以计算中央极大的全峰线宽度 ξ_z：

$$\sin\theta_0 = \frac{\lambda}{b} \Longrightarrow \xi_z = 2f\tan\theta_0 = 2f\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{2f}{\sqrt{N^2-1}}, \quad N = \frac{b}{\lambda} \tag{4.24}$$

代入数据：

$$N = \frac{0.5\text{ mm}}{0.5\ \mu\text{m}} = 1000 \Longrightarrow \xi_z = \frac{2\times 1\text{ m}}{\sqrt{1000^2-1}} = 0.0020000010\text{ m} \approx 2.0\text{ mm} \tag{4.25}$$

(3) 第一级与第二级暗纹的距离

由单缝夫琅禾费衍射公式，可得极小值（暗斑）对应的角度：

$$b\sin\theta_m = m\lambda \Longrightarrow \sin\theta_m = \frac{m\lambda}{b}, \quad m = 1, 2, ... \tag{4.26}$$

于是一级和二级暗斑距离为：

$$\Delta x = f\tan\theta_2 - f\tan\theta_1 = f\left[\frac{\sin\theta_2}{\sqrt{1-\sin^2\theta_2}} - \frac{\sin\theta_1}{\sqrt{1-\sin^2\theta_1}}\right], \quad \sin\theta_1 = \frac{\lambda}{b},\ \sin\theta_2 = \frac{2\lambda}{b} \tag{4.27}$$

代入数据：

$$\Delta x = 0.00100000350\text{ m} \approx 1.0\text{ mm} \tag{4.28}$$

4.6 一束白光垂直照射在一光栅上，在形成的同一级光栅光谱中，偏离中央明纹最远的是红光还是蓝光？为什么？

由单缝夫琅禾费衍射公式，可得极大值（亮斑）对应的角度：

$$b\sin\theta_m = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda,\quad m=1,2,\dots \tag{4.29}$$

从蓝光到红光，随着 λ 的增大，同级下的 θ_m 也增大，因此红光散射角度更大，偏离中央明纹最远的是红光。

4.7 波长为 600 nm 的单色光垂直入射在一光栅上，第二级明纹出现在 $\sin\theta_2 = 0.2$ 处，第 4 级为第一个缺级。求 (1) 光栅上相邻两缝的距离是多少？(2) 狭缝可能的最小宽度是多少？(3) 在该最小宽度下，实际上能观察到的全部明纹数是多少？

(1) 光栅上相邻两缝的距离是多少？

要相邻两缝的中心距离，即求光栅常数 a。由光栅方程：

$$a(\sin\theta_m - \sin\theta_i) = m\lambda,\quad m=0,\pm1,\pm2,\dots \Longrightarrow a = \frac{2\lambda}{\sin\theta_2} = 6\ \mu\text{m} \tag{4.30}$$

(2) 狭缝可能的最小宽度是多少？

当光栅是多缝光栅时，可以考虑狭缝宽度的概念。设光栅有 N_s 条多缝，有多缝夫琅禾费衍射公式：

$$I = I(0)\,\text{sinc}^2\beta\,\frac{\sin^2 N_\text{s}\alpha}{N_s^2\sin^2\alpha},\quad \beta=\frac{1}{2}kb\sin\theta,\ \alpha=\frac{1}{2}ka\sin\theta \tag{4.31}$$

设 $m=\frac{a}{b}$，由于第 4 极大是第一个缺级，因此 $m=4$，得到：

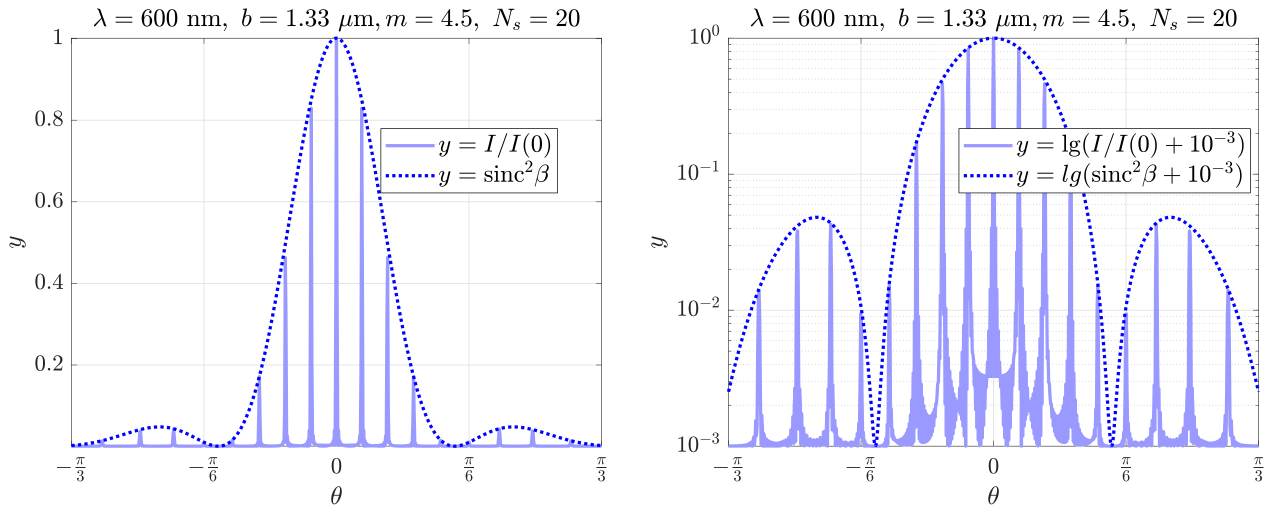
$$b = \frac{a}{4} = 1.5\ \mu\text{m} \tag{4.32}$$

当然，m 可以适当的有一些变化范围，我们取 $m\in[3.5,4.5]$，可以得到：

$$b\in[1.33\ \mu\text{m}, 1.71\ \mu\text{m}] \Longrightarrow b_\text{min} = 1.3\ \mu\text{m} \tag{4.33}$$

(3) 在该最小宽度下，实际上能观察到的全部明纹数是多少？

若 $b=1.5\ \mu$m，此时 $m=4$，实际能观察到的全部明纹数（主衍射峰内的极大，不包括缺级部分）为 $2m-1=7$ 条。但是在 $b_\text{min}=1.33\ \mu$m 下，$m=4.5$，不好确定能观察到的明纹数，因此我们直接作出图像：



(a) 光栅的衍射图样 (b) 光栅的对数衍射图样

图 4.10: 光栅的衍射图样

由图可知，$b_\text{min} = 1.33\ \mu$m 时 ($m=4.5$)，实际上能看到 7 条明纹，分别是 $0,\pm1,\pm2,\pm3$ 级明纹。

附录 A Matlab 代码

A.1 图 2.1 源码

```matlab
%%%%%%%%%% 空气入射玻璃 %%%%%%%%%%
global n_i n_t
n_i = 1;
n_t = 1.5;

theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*cos
    (theta_i - theta_t) );
theta_B = atan(n_t/n_i);
theta_C = asin(n_t/n_i);

theta_array = linspace(-0.1, pi/2, 101);
Y = [
    r_s(theta_array, theta_t(theta_array))
    r_p(theta_array, theta_t(theta_array))
    t_s(theta_array, theta_t(theta_array))
    t_p(theta_array, theta_t(theta_array))
    ];
stc = MyPlot(theta_array, Y);
xline(theta_B, 'b')
yline(0)
xlim([0, pi/2])
ylim([-1, 1])
stc.leg.String = ["$r_s$"; "$r_p$"; "$t_s$"; "$t_p$"; "$\theta_i = \theta_B$"];
stc.leg.Interpreter = "latex";
stc.leg.FontSize = 14;
stc.leg.Location = "southwest";
stc.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
stc.axes.Title.Interpreter = "latex";
stc.label.x.String = '$\theta_i$';
stc.label.y.String = '$r$';
stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
stc.plot.plot_3.Color = 'b';
stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
stc.plot.plot_4.Color = [1 0 1];
%MyExport_pdf

%%%%%%%%%% 玻璃入射空气 %%%%%%%%%%
n_i = 1.5;
n_t = 1;

```

```
theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*cos
    (theta_i - theta_t) );
theta_B = atan(n_t/n_i);
theta_C = asin(n_t/n_i);


theta_array = linspace(0, theta_C, 101);
Y = [
    r_s(theta_array, theta_t(theta_array))
    r_p(theta_array, theta_t(theta_array))
    t_s(theta_array, theta_t(theta_array))
    t_p(theta_array, theta_t(theta_array))
    ];
stc = MyPlot(theta_array, Y);
xline(theta_B, 'b')
xline(theta_C, 'r')
yline(0)
xlim([0, pi/2])
ylim([-0.5, 3])
stc.leg.String = ["$r_s$"; "$r_p$"; "$t_s$"; "$t_p$"; "$\theta_i = \theta_B$"; "$\
    theta_i = \theta_C$"];
stc.leg.Interpreter = "latex";
stc.axes.Title.String = '$n_i = 1.5 > n_t = 1$';
stc.axes.Title.Interpreter = "latex";
stc.label.x.String = '$\theta_i$';
stc.label.y.String = '$r$';
stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
stc.plot.plot_3.Color = 'b';
stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
stc.plot.plot_4.Color = [1 0 1];
%MyExport_pdf
```

A.2 公式 2.5 源码

```
R_s = @(n_ti, t) ( (cos(t) - sqrt(n_ti^2 - sin(t)^2)) / (cos(t) + sqrt(n_ti^2 - sin(t)
    ^2)) )^2;
R_p = @(n_ti, t) ( (n_ti^2*cos(t) - sqrt(n_ti^2 - sin(t)^2)) / (n_ti^2*cos(t) + sqrt(
    n_ti^2 - sin(t)^2)) )^2;

theta_B = @(n_ti) atan(n_ti);
n_ti = fzero(@(n_ti) 0.5*(R_s(n_ti, theta_B(n_ti)) + R_p(n_ti, theta_B(n_ti))) - 0.14,
    1);
```

```

theta_C = @(n_ti) asin(n_ti);
theta_B = @(n_ti) atan(n_ti);
theta_t = @(n_ti, theta_i) asin(sin(theta_i)/n_ti);

disp(['n_ti = ', num2str(n_ti, '%.6f')])
disp(['theta_i = theta_B = ', num2str(theta_B(n_ti), '%.6f') ' rad = ', num2str(rad2deg(theta_B(n_ti)), '%.6f'), ' deg'])
disp(['theta_t = ', num2str(theta_t(n_ti, theta_B(n_ti)), '%.6f') ' rad = ', num2str(rad2deg(theta_t(n_ti, theta_B(n_ti))), '%.6f'), ' deg'])
disp(['theta_C = ', num2str(theta_C(n_ti), '%.6f') ' rad = ', num2str(rad2deg(theta_C(n_ti)), '%.6f'), ' deg'])
disp(['R_s = ', num2str(R_s(n_ti, theta_B(n_ti)), '%.6f')])
disp(['R_p = ', num2str(R_p(n_ti, theta_B(n_ti)), '%.6f')])
disp(['T_s = ', num2str(1 - R_s(n_ti, theta_B(n_ti)), '%.6f')])
disp(['T_p = ', num2str(1 - R_p(n_ti, theta_B(n_ti)), '%.6f')])
disp(['R = ', num2str( 0.5*(R_s(n_ti, theta_B(n_ti)) + R_p(n_ti, theta_B(n_ti))) , '%.6f')])
disp(['T = ', num2str( 0.5*(2 - R_s(n_ti, theta_B(n_ti)) - R_p(n_ti, theta_B(n_ti))), '%.6f')])


%{
>> Output:
n_ti = 0.554902
theta_i = theta_B = 0.506599 rad = 29.025970 deg
theta_t = 1.064198 rad = 60.974030 deg
theta_C = 0.588245 rad = 33.703947 deg
R_s = 0.280000
R_p = 0.000000
T_s = 0.720000
T_p = 1.000000
R = 0.140000
T = 0.860000
%}
```

A.3 公式 2.10 源码

```
R_s = @(n_ti, t) ( (cos(t) - sqrt(n_ti^2 - sin(t)^2)) / (cos(t) + sqrt(n_ti^2 - sin(t)^2)) )^2;
R_p = @(n_ti, t) ( (n_ti^2*cos(t) - sqrt(n_ti^2 - sin(t)^2)) / (n_ti^2*cos(t) + sqrt(n_ti^2 - sin(t)^2)) )^2;

theta_i = fzero(@(t) ( R_s(1.5, t) + R_p(1.5, t) - 2*0.14) , deg2rad(45));
disp(['theta_i = ', num2str(theta_i, '%.6f'), ' rad'])
disp(['theta_i = ', num2str(rad2deg(theta_i), '%.6f'), ' deg'])
```

```
disp(['R_s = ', num2str(R_s(1.5, theta_i), '%.6f')])
disp(['R_p = ', num2str(R_p(1.5, theta_i), '%.6f')])
disp(['T_s = ', num2str(1 - R_s(1.5, theta_i), '%.6f')])
disp(['T_p = ', num2str(1 - R_p(1.5, theta_i), '%.6f')])
disp(['R = ', num2str( 0.5*(R_s(1.5, theta_i) + R_p(1.5, theta_i)) , '%.6f')])
disp(['T = ', num2str( 0.5*(2 - R_s(1.5, theta_i) - R_p(1.5, theta_i)), '%.6f')])

%{
>> Output:
theta_i = 1.173220 rad
theta_i = 67.220559 deg
R_s = 0.256933
R_p = 0.023067
T_s = 0.743067
T_p = 0.976933
R = 0.140000
T = 0.860000
%}
```

A.4 图 2.2 源码

```
R_s = @(n_ti, t) ( (cos(t) - sqrt(n_ti^2 - sin(t)^2)) / (cos(t) + sqrt(n_ti^2 - sin(t)^2)) )^2;
R_p = @(n_ti, t) ( (n_ti^2*cos(t) - sqrt(n_ti^2 - sin(t)^2)) / (n_ti^2*cos(t) + sqrt(n_ti^2 - sin(t)^2)) )^2;
theta_B = @(n_ti) atan(n_ti);

eq_left = @(n_ti) 0.5*(R_s(n_ti, theta_B(n_ti)) + R_p(n_ti, theta_B(n_ti)))

X = linspace(0, 2, 100);
Y = zeros(size(X));
for i = 1:length(X)
    Y(i) = eq_left(X(i));
end

stc = MyPlot(X, Y);
yline(0.14, 'Color', 'r', 'LineWidth', 0.4);
xline(0.554902, 'Color', [0.1, 0.1, 0.1], 'LineWidth', 0.4)
xline(1.802121, 'Color', [0.3, 0.3, 0.3], 'LineWidth', 0.4)
stc.axes.Title.String = '';
stc.label.x.String = '$n_{ti}$';
stc.leg.Location = 'northeast';
hold on
scatter([0.554902, 1.802121], [0.14, 0.14], 180, '.r')
stc.leg.String = ["$y =  0.5\left[ R_s(n_{ti}) + R_p(n_{ti}) \right]$"; "$y = 0.14$"; "$n_{ti} = 0.554902$"; "$n_{ti} = 1.802121$"];
```

```
%MyExport_pdf
```