

光学笔记

Optics Notes

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

序言

本文为笔者本科时的“光学”课程笔记 (Optics Notes, 2024.8-2025.1)。作业与相关资料可以在笔者的个人网站上找到: [Notes > Physics > Optics \(https://yidingg.github.io/YiDingg/#/Notes/Physics/OpticsNotes\)](https://yidingg.github.io/YiDingg/#/Notes/Physics/OpticsNotes), 参考文献会在课程结束后上传到网址 (待更新)。由于个人学识浅陋, 认识有限, 文中难免有不妥甚至错误之处, 望读者不吝指正。读者可以到笔者的 [GitHub 笔记库 \(https://github.com/YiDingg/LatexNotes\)](https://github.com/YiDingg/LatexNotes) 上提 issue, 也可以将错误发送到我的邮箱 dingyi233@mails.ucas.ac.cn, 衷心感谢。

在正式学习之前, 建议先跳转至附录 A “波理论” 部分, 学习必要的前置知识 (否则可能难以理解)。

目录

序言	I
目录	IV
1 光学引言	1
1.1 光学发展简史（略）	1
1.2 光的几何传播规律	1
1.3 惠更斯原理与费马原理	2
1.4 成像	3
1.5 光学仪器	4
1.5.1 薄透镜	4
1.5.2 其它仪器	5
1.6 光波的描述	5
1.7 光度学基本概念	5
1.7.1 辐射度学基本概念	5
1.7.2 明视觉曲线	5
1.7.3 光度学基本概念	6
1.8 特殊发光体	6
1.8.1 余弦发光体（朗伯发光体）	6
1.8.2 定向发光体	6
2 光的反射与折射	7
2.1 菲涅尔公式	7
2.2 反射时的相位变化	7
2.3 完全偏振反射光	9
2.4 反射折射时的能量关系	9
2.5 全反射时的隐失波与穿透深度	10
2.6 古斯-亨欣位移（Goos-Hanchen Shift）	11
2.7 全反射时的相位变化	11
2.8 折射时的相位变化	12
2.9 反射折射总结	12
3 光的干涉	15
3.1 叠加原理	15
3.2 同频率光波的干涉	15
3.2.1 两个同频波源的干涉	15
3.2.2 多个同频波源的干涉	19
3.3 不同频率光的干涉	19
3.4 产生干涉的实际条件	19
3.5 分波前干涉	20

3.5.1	杨氏双缝干涉实验	20
3.5.2	杨氏实验中干涉条纹的移动	21
3.6	分振幅干涉	22
3.6.1	多光束薄膜干涉	22
3.6.2	双光束薄膜干涉	24
3.6.3	等倾干涉	25
3.6.4	等厚干涉	25
3.6.5	迈克尔逊干涉	26
3.7	迈克尔逊干涉与马赫曾德尔干涉	26
3.8	光场的空间相干性与时间相干性	26
3.9	多光束干涉	26
3.10	激光	26
参考文献		27
附录 A 波理论		28
A.1	一维波	28
A.1.1	n 维波的概念	28
A.1.2	波动方程	28
A.2	谐波	28
A.2.1	相位和相速度	28
A.2.2	谐波的概念	28
A.2.3	空间频率 κ 与空间角频率 k	29
A.3	复数表示	29
A.4	相矢量	30
A.4.1	分离 x 并随 t 旋转	30
A.4.2	分离 t 并随 x 旋转	30
A.5	三维波动方程	30
A.5.1	内积、叉乘与矩阵乘法	30
A.5.2	微分算子	31
A.5.3	拉普拉斯算子	31
A.5.4	矢量微分	32
A.5.5	波动方程	32
A.6	平面波、柱面波与球面波	32
A.6.1	平面波	32
A.6.2	球面波	33
A.6.3	柱面波	33
附录 B Matlab 代码		34
B.1	图 2.1 源码	34
B.2	图 2.6 源码	35
B.3	图 2.7 源码	38
B.4	图 2.8 源码	40
B.5	图 3.2 源码	41

B.6 图 3.3 源码	42
B.7 图 3.4 (b) 与图 3.5 源码	44
B.8 图 3.6 源码	46
B.9 图 3.8 源码	47

第1章 光学导言

§ 1.1 光学发展简史 (略)

§ 1.2 光的几何传播规律

光传播的基本原理：

光传播的常见基本原理：

- (1) 直线传播：光在均匀介质里沿直线传播^①
- (2) 反射定律：光线入射到两种不同的均匀介质的分界面上反射线位于入射面内，反射线和入射线分居法线两侧，反射角等于入射角
- (3) 折射定律 (斯涅尔定律)：折射线位于入射面内，折射线与入射线分居法线两侧，入射角的正弦与折射角的正弦之比为一与入射角无关的常数^②

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad (1.1)$$

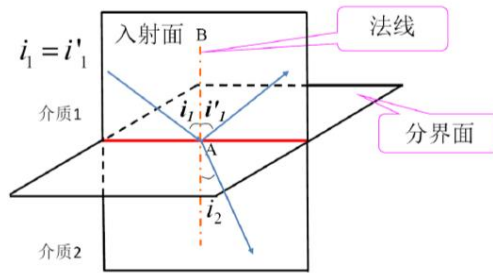


图 1.1: 反射与折射

- (4) 光路可逆性：光沿反方向传播时，必定沿原光路返回^③
- (5) 独立传播：光在传播过程中与其他光束相遇时，各光束都各自独立传播，不改变其传播方向
- (6) 全反射：光线从光密介质入射到光疏介质，当入射角大于某临界值时，折射光完全消失，只剩下反射光。该临界角度称为全反射临界角。

$$i_C = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right) \quad n_1 < n_2 \quad (1.2)$$

彩虹：

三棱镜最小偏向角：

最小偏向角 $\theta_0 = (i_1 - i'_1)_{\min}$ 满足：

$$\theta_0 = 2i_1 - A, \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \frac{\theta_0 + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \quad (1.3)$$

^①对高功率激光，此定律不成立

^②折射率较大的一侧称为光密介质；较小的一侧称为光疏介质

^③也即在几何光学中，任何光路都是可逆的

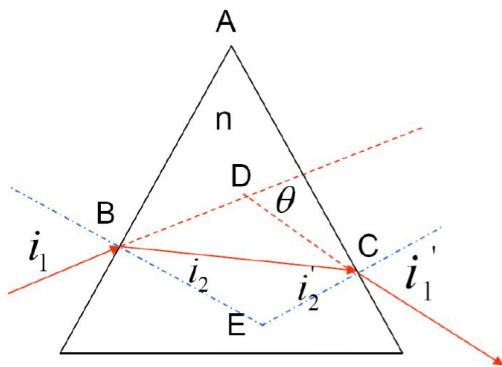


图 1.2: 三棱镜最小偏向角

§ 1.3 惠更斯原理与费马原理

Theorem. 1 (惠更斯原理): 由振源发出的波动在 t 时刻传播到一个波面 S , 波面上的每一个面元可认为是次波的波源。由面元发出的次波向四面八方传播。在以后的时刻 t' 形成次波面。这些次波面的包络面 S' 就是 t' 时刻总扰动的波面。

其中:

- (1) 波面: 在同一振源的波场中, 扰动同时到达的各点具有相同的相位, 这些点的轨迹构成一个曲面, 称为波面 (也称为等相位面)。
- (2) 波线: 与波面处处正交的曲线称为波线, 其切线方向为光的传播方向

几何光学的定律需要前提条件:

- (1) 必须是均匀介质, 即同一介质的折射率处处相等, 折射率不是位置的函数。
- (2) 必须是各向同性介质, 即光在介质中传播时各个方向的折射率相等, 折射率不是方向的函数。
- (3) 光强不能太强, 否则巨大的光能量会使线性叠加原理不再成立而出现非线性情况。
- (4) 光学元件的线度应比光的波长大得多, 否则不能把光束简化为光线。

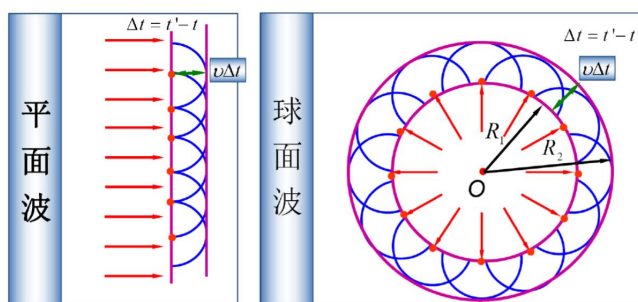


图 1.3: 惠更斯原理

Theorem. 2 (费马原理):

光从空间中一点传播到另一点时, 总是沿光程 (optical length, OPL) 取极值的路径传播^④, 公式:

$$d \text{ OPL} = d \left(\int_Q^P n dl \right) = 0 \implies \frac{d \text{ OPL}}{d \varphi} = \frac{d \text{ OPL}}{ds} = 0 \quad (1.4)$$

^④这里的“极值”可以是极小值、极大值或常数, 一般情况下, 实际光程大多取极小值。极大值 (如凹面镜成像)、拐点 (如椭球面镜、凸透镜) 的例子, 可以参考 [知乎: 浅谈几何光学 \(1\)——费马原理](#)

由费马原理可以导出诸多推论，包括我们熟知的几条基本原理，还有物像之间的等光程性（例如凸透镜）：在物点 Q 与像点 Q' 之间，不管光线经何路径，凡是由 Q 通过同样的光学系统到达 Q' 的光线，都是等光程的。

§ 1.4 成像

理想的像与物体在形状上一致，大小成比例。物与像之间的关系：本质上是一系列物点与像点的点对点，推广至线线、面面对应。

同心光束：各光线本身或其延长线交于同一点的光束称为同心光束，在各向同性介质中，它对应于球面波。

由若干反射面或折射面组成的光学系统称为光具组

- (1) 实物：发散的同心入射光束的“心”
- (2) 虚物：汇聚的同心入射光束的“心”
- (3) 实像：发散的同心出射光束的“心”
- (4) 虚像：汇聚的同心出射光束的“心”

物像的共轭性（可逆性）：若 P 为物体 P （可实可虚）的像点，则反之，当物点为 P 时，像点必在点 P' （实际光路可能不同）。是光路可逆性的必然结果。

计算由物到像的 OPL 时，若为实线（实物、实像）则取正，称为实光程，若为虚线（虚物、虚像）则取负，称为虚光程。

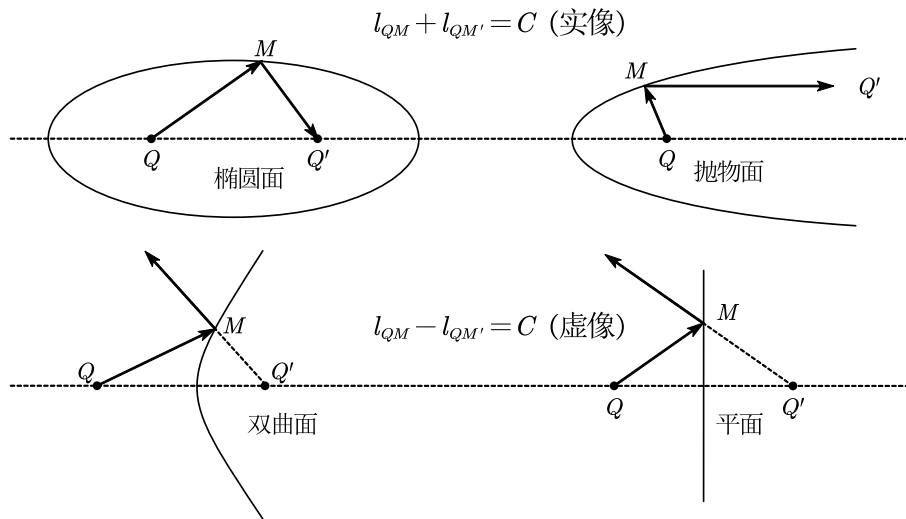


图 1.4: 光程恒定的例子

折射球面与反射球面：

对于折射球面，存在一对恰好成像的共轭点，称为齐明点。在齐明点处，可以证明 Q 到 Q' 的光程（即物像间的 OPL） $l_{QQ'}$ 。

折射球面公式：

$$\frac{n_1}{l_1} + \frac{n_2}{l_2} = \frac{1}{R} \left(\frac{n_2 s_2}{l_2} - \frac{n_1 s_1}{l_1} \right) \quad (1.5)$$

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \quad (\text{傍轴}) \quad (1.6)$$

反射球面公式:

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = -\frac{2}{R} \left(\frac{s_1}{l_1} + \frac{s_2}{l_2} \right) \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = -\frac{2}{R} \quad (\text{傍轴}) \quad (1.8)$$

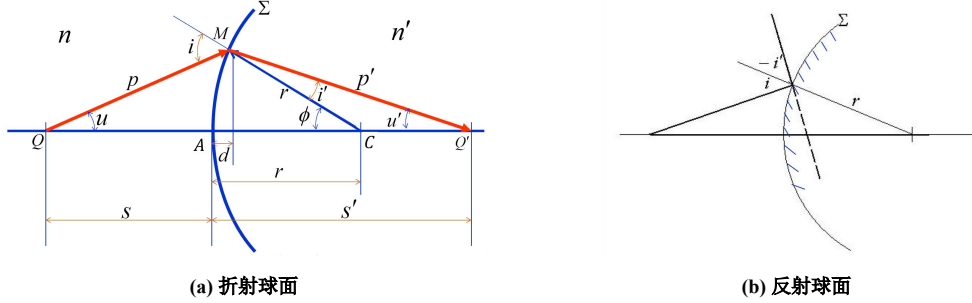


图 1.5: 折射球面与反射球面

像的放大率:

放大率公式:

$$\frac{n_1 |y_1|}{s_1} = \frac{n_2 |y_2|}{s_2} \quad (1.9)$$

Lagrange-Helmholtz 恒等式:

$$n_1 u_1 y_1 = n_2 u_2 y_2 \quad (1.10)$$

上式的 u 和 y 是有正负的, 例如折射球面中 $u_1 > 0$, $y_1 > 0$ 而 $u_2 < 0$, $y_2 < 0$ 。

§ 1.5 光学仪器

1.5.1 薄透镜

透镜是由两个共轴折射球面构成的光具组, 球面间距远远小于球面半径和物距像距的透镜称为薄透镜, 也即 $d \ll |R_1|, |R_2|, |s|, |s'|$ 。此时可以认为两球面顶点重合, 称为光心。

薄透镜成像公式 (物像距公式):

$$\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2} \quad (1.11)$$

$$s' = \infty \implies f = \frac{n}{\frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}} \quad \text{物方焦距} \quad (1.12)$$

$$s = \infty \implies f' = \frac{n'}{\frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}} \quad \text{像方焦距} \quad (1.13)$$

故物像焦距满足 $\frac{f}{n} = \frac{f'}{n'}$ 。特别地, 当物像方折射率都为 1 时 (真空), 我们有磨镜者公式和像的横向放大率:

$$f = f' = \frac{1}{(n_L - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}, \quad V = -\frac{\frac{s'}{n'}}{\frac{s}{n}} = -\frac{f s'}{f' s} = -\frac{s'}{s} \quad (1.14)$$

将公式 1.12 和公式 1.13 代入式 1.11 中, 可以得到 Gauss 物像公式:

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1 \xrightarrow{n=n'} \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (1.15)$$

令 $s = x + f$, $s' = x' + f'$, 代入公式 1.15, 可以得到 Newton 物像公式:

$$xx' = ff' \quad (1.16)$$

1.5.2 其它仪器

投影仪器、照相机、眼睛、放大镜、显微镜、望远镜

§ 1.6 光波的描述

§ 1.7 光度学基本概念

在学习光度学之前，需要区分辐射度学与光度学中的基本概念。辐射度学研究的是辐射能量对实际物体的影响，而光度学研究的是辐射能量对人眼的影响，是基于人眼实验数据的学科，例如 Luminous Efficiency Function。它们的概念相互对应（可以相互转化）但并不相同，如下表所示：

表 1.1: 光度学与辐射度学概念对应关系

学科范围	基本概念						
辐射度学	辐射能 Q_e	辐射通量 Φ_e	辐射强度 I_e	辐射亮度 L_e	辐射照度 E_e	辐射出射度 M_e	辐射通量谱密度 $\Phi_{e,\lambda}$
光度学	光量 Q_v	光通量 Φ_v	光强度 I_v	光亮度 L_v	光照度 E_v	光出射度 M_v	光通量谱密度 $\Phi_{v,\lambda}$

1.7.1 辐射度学基本概念

表 1.2: 辐射度学基本概念

名称	符号	定义式	单位	概念描述
辐射能	Q_e	-	J	以辐射形式传播的能量
辐通量	Φ_e	$\Phi_e = \frac{dQ_e}{dt}$	W	单位时间内流过某截面的辐射能量
辐强度	I_e	$I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega}$	$\text{W} \cdot \text{sr}^{-1}$	点辐射源在某方向上单位立体角 ^⑤ 内的辐射通量
辐照度	E_e	$E_e = \frac{d\Phi_e}{dA}$	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$	被辐射体单位面积上的辐射通量
辐亮度	L_e	$L_e = \frac{dI_e}{dA \cos \theta}$	$\text{W} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$	单位面积的面辐射源在某方向上的辐射强度
辐出射度	M_e	$M_e = \frac{d\Phi_e}{dA}$	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$	辐射体单位面积向半球空间发射的辐射通量
辐谱密度	ϕ_e	$\phi_e = \frac{\Delta\Phi_{e,\lambda}}{\Delta\lambda}$	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$	辐射能（通量）在频谱中的分布

其中 $\Delta\Phi_{e,\lambda}$ 表示波长为 λ （也可认为是 $[\lambda, \lambda + \Delta\lambda]$ ）的部分所贡献的辐射通量。

1.7.2 明视觉曲线

人眼对不同波长的光具有不同的明亮感觉程度^⑥，称为明视觉光谱光视效率曲线^⑦（函数），常简称为“明视觉曲线”或“视觉曲线”，记为 $V = V(\lambda)$ 。

光谱光效能 K ，表示在某一波长上每一瓦辐射通量可以产生多少流明的光通量。光谱光视效率 $V = V(\lambda)$ ，就是归一化的光谱光效能：

$$K = \frac{\Delta\Phi_{v,\lambda}}{\Delta\Phi_{e,\lambda}} = \frac{\phi_v(\lambda)}{\phi_e(\lambda)}, \quad V(\lambda) = \frac{K(\lambda)}{K_{\max}} = \frac{1}{K_{\max}} \cdot \frac{\phi_v(\lambda)}{\phi_e(\lambda)} \quad (1.17)$$

^⑥参考 新旧明视觉光谱光视效率曲线.pdf。

^⑦参考 ANSI E1.48 - 2014 (A Recommended Luminous Efficiency Function for Stage and Studio Luminaire Photometry)，国际照明委员会（CIE）规定的标准光谱光视效率函数 Luminous Efficiency Functions 或者 知乎：光通量与光辐照度之间的换算。

$K_{\max} = 683 \text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$ 在波长约 555.0 nm 取到, 因此 $V = V(\lambda)$ 也表示在相同辐射通量下, 波长为 λ 的光与 555.0 nm 的光所产生的亮暗感觉比值。

另外, 公式 1.17 建立了辐射度学参量与光度学参量之间的转化关系:

$$\Phi_v(\lambda) = \int \phi_v(\lambda) d\lambda = \int K_{\max} V(\lambda) \phi_e(\lambda) d\lambda \quad (1.18)$$

1.7.3 光度学基本概念

表 1.3: 光度学基本概念

名称	符号	定义式	单位	概念描述
光量	Q_v	$Q_v(\lambda) = V(\lambda) \cdot Q_e(\lambda)$	$\text{cd} \cdot \text{sr} \cdot \text{s}$	辐射能的光度量大小
光通量	Φ_v	$\Phi_v = \frac{dQ_v}{dt}$	$\text{lm} = \text{cd} \cdot \text{sr}$	单位时间内流过某截面的光度学光量
光强度	I_v	$I_v = \frac{d\Phi_v}{d\Omega}$	cd	点辐射源在某方向上单位立体角内的光通量
光照度	E_v	$E_v = \frac{d\Phi_v}{dA}$	$\text{lm} \cdot \text{m}^{-2}$	被辐射体单位面积上的光通量
光亮度	L_v	$L_v = \frac{dI_v}{dA \cos \theta}$	$\text{cd} \cdot \text{m}^{-2}$	单位面积的面辐射源在某方向上的光强度
光出射度	M_v	$M_v = \frac{d\Phi_v}{dA}$	$\text{lm} \cdot \text{m}^{-2}$	辐射体单位面积向半球空间发射的光通量
光谱密度	ϕ_v	$\phi_v = \frac{\Delta \Phi_v, \lambda}{\Delta \lambda}$	$\text{lm} \cdot \text{m}^{-1}$	光量 (光通量) 在频谱中的分布

它们[®]之间的转化关系:

$$\text{与光通量的转换: } \Phi_v = \int E_v dA = \int I_v d\Omega = \iint L_v \cos \theta dA d\Omega \quad (1.19)$$

$$\text{与光强的转换: } I_v = r^2 E_v = \int L_v \cos \theta dA = \int L_v dA_{\perp} \quad (1.20)$$

计算时的常用微分:

$$\begin{aligned} \text{直角坐标系: } dA &= dx dy, & d\Omega &= \frac{dA}{r^2} \\ \text{球坐标系: } dA &= r^2 \sin \theta d\theta d\phi, & d\Omega &= \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (1.21)$$

§ 1.8 特殊发光体

1.8.1 余弦发光体 (朗伯发光体)

1.8.2 定向发光体

[®]参考 知乎: 如何区分并记忆光度、照度、发光强度、光强、亮度等

第2章 光的反射与折射

在本章，我们先以一定的顺序，依次对反射折射过程中所出现的现象或相关物理量进行讨论，最后给出所有现象的总结。

§2.1 菲涅尔公式

Theorem. 3 (菲涅尔公式, Fresnel Formula):

光线在通过两介质分界面时通常会同时发生折射（透射）和反射现象，设入射光（incident ray）介质折射率 n_i ，入射角 θ_i ，透射光（transmitted ray）介质折射率 n_t ，透射角（折射角） θ_t ，则有^①：

类型	振幅反射系数 r		振幅透射系数 t	
s 波	$r_s = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$	$-\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$	$t_s = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$	$+\frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$
p 波	$r_p = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t}$	$+\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$	$t_p = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i}$	$+\frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}$

折射角 θ_t 、 s 波通量反射率 R_s 、 p 波通量反射率 R_p 和总通量反射率 R 为：

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \left(\frac{n_i}{n_t} \sin \theta_i\right)^2}, \quad R_s = r_s^2, \quad R_p = r_p^2, \quad R = \frac{1}{2}(R_s + R_p) \quad (2.1)$$

总强度反射率 R 的严格证明见下一节。特别地，若 $1 - \left(\frac{n_i}{n_t} \sin \theta_i\right)^2 < 0$ ，则发生全反射，此时 $R = 1$ 。另外，需要指出菲涅尔公式的适用条件，也即推导时所做的一些假设，如下：

- (1) 介质为绝缘介质，无表面自由电荷或传导电流
- (2) 介质为各向同性的光学线性介质（弱光强）
- (3) 介质磁导率（约）等于真空磁导率^② $\mu_i = \mu_t = \mu_0$ ，其中 μ_0 为真空磁导率。

§2.2 反射时的相位变化

菲涅尔公式的推导以矢量分析为基础，因此公式中系数 r_s 的正负具有明确物理意义，它标识着方向。若为负，则反射后的方向与原方向相反，否则相同。各系数正负情况见表 2.1，其中 o 表示可正可负。

从波的角度，方向相反可以等价地视为相位发生了 π 的前移（或后移），称为相位突变。 $n_i < n_t$ 时，相位突变要么是 0，要么是 π ， $n_i > n_t$ 时的相位变化比较复杂，我们不深究。在 $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$ 时， r_p 的正负发生变化， p 波的反射波相位也发生突变，称此时 θ_i 的角度为布儒斯特角（Brewster angle），记为 θ_B ，也称为偏振角或起偏角。

表 2.1: 振幅系数的正负情况

折射率	r_s	r_p	t_s	t_p
$n_i < n_t$	-	o	+	+
$n_i > n_t$	o	o	+	+

可以推得 Brewster angle 的值为：

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (2.2)$$

^①对于金属材料（非绝缘材质），需要引入消光系数 k_t 来修正菲涅尔公式（绝缘材质等价于 $k_t = 0$ ），具体参见 知乎: 菲涅尔公式

^②对于介质磁导率不等于真空磁导率的情况，参考 Optics (Eugene Hecht, 尤金) Page 144

具体的振幅系数变化见图 2.1，见图 2.2， $n_i < n_t$ 时的反射示意图见图 2.3。

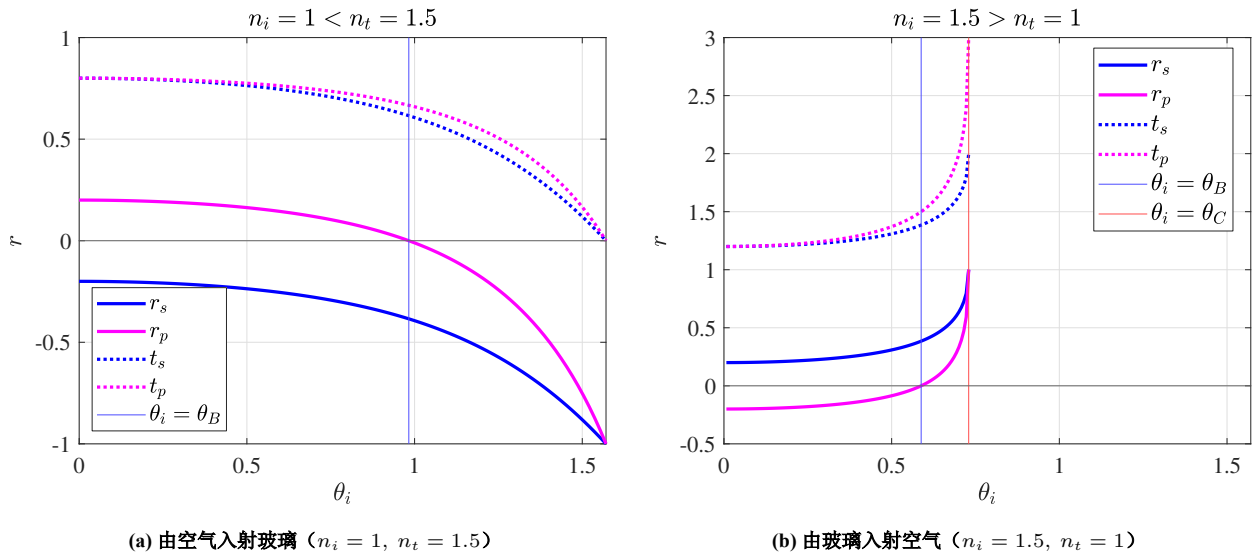


图 2.1: 振幅系数 r 随入射角 θ_i 的变化

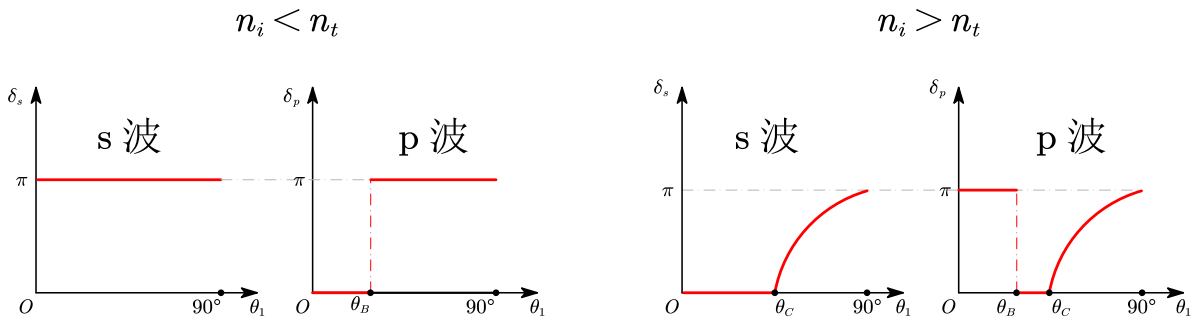


图 2.2: s 波和 p 波在反射时的相位变化

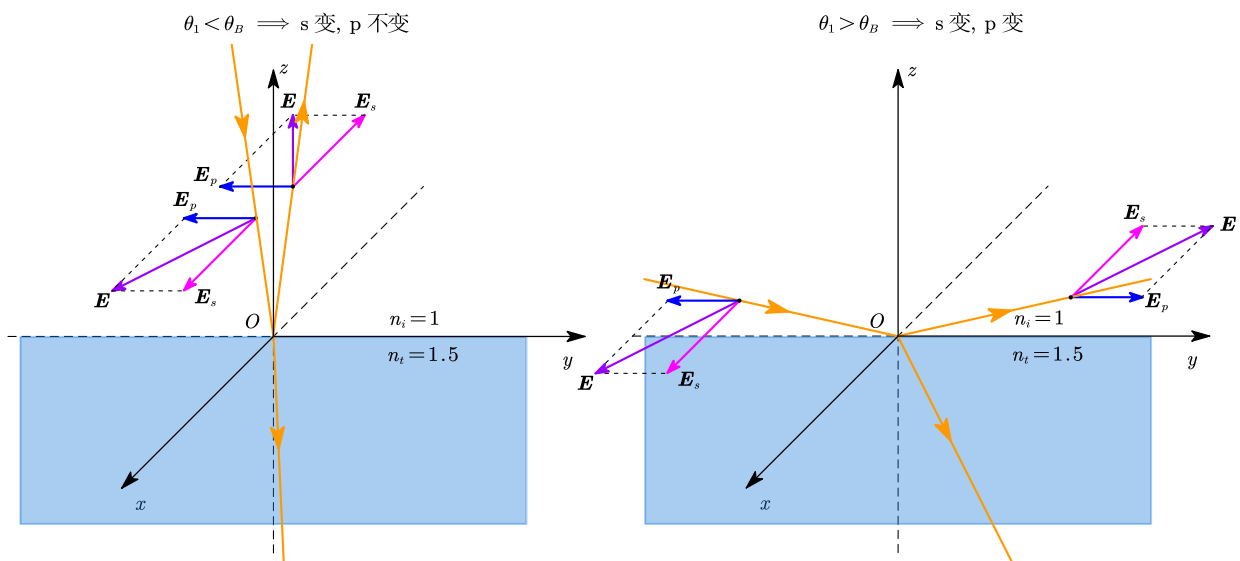


图 2.3: 由空气入射玻璃的光线示意图

由菲涅尔公式，当 $n_i < n_t$ 时，我们还有如下结论：

$$\begin{aligned} \theta_i = 0 \text{ 时: } \quad r_p &= (-r_s) = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}, \quad t_p = t_s = \frac{2n_i}{n_i + n_t} \\ \theta_i = \frac{\pi}{2} \text{ 时: } \quad r_p &= r_s = -1, \quad t_p = t_s = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

这表明，即使是正射（垂直于介质分界面的入射， $\theta_i = 0$ ），一般也存在部分反射光。总之，当 $n_i < n_t$ 时，入射光的 s 分量在反射中一定会相位跃变，p 分量都有可能。

另外，菲涅尔公式还可写成：

$$\begin{aligned} (-r_s) + t_s &= 1, & r_p + t_p &= 1 \\ r_s &= \frac{\cos \theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}, & r_p &= \frac{n_{ti}^2 \cos \theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}{n_{ti}^2 \cos \theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

§2.3 完全偏振反射光

当光波由布儒斯特角 θ_B 入射时，由 Fresnel Formula, $r_p = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} = 0$ ，也即反射光的 p 分量为 0，仅存在 s 分量。这说明反射光是完全偏振光， \mathbf{E} 的方向（称为振动方向）垂直于入射面。

但此时反射光能量占比 F 很小^③，例如，空气（ $n = 1$ ）入射玻璃（ $n = 1.5$ ）时， $\theta_B = 56.310^\circ$ ， $F = 0.0740$ ；玻璃入射空气时， $\theta_B = 33.690^\circ$ ， $F = 0.0740$ 。

§2.4 反射折射时的能量关系

在 Fresnel Formula 中可以发现， $r_s^2 + t_s^2 \neq 1$ ， $r_p^2 + t_p^2 \neq 1$ ，是能量不守恒了吗？显然不是。那么，反射光和透射光的能量关系是怎样的？这需要借助辐射度学的相关概念。

如图，圆形光束从空气入射到分界面上的一个面元 \mathbf{A} （界面下是玻璃），以此面元为研究对象。考虑玻印亭矢量 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ，即单位时间内通过单位面积的电磁辐射能量（单位面积辐射功率），于是瞬时辐射照度 \mathbf{E}_e ：

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{S} = c^2 \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad E_e = \varepsilon_0 c E^2 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}} = \frac{\varepsilon_0 c}{\mu_r} \cdot n E^2 \quad (2.5)$$

其中 ε_r ， μ_r 分别为相对介电常量、相对磁导率，对空气近似有 $\varepsilon_r = \mu_r = 1$ ，于是

核心理想是 $dQ_e = (\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{A}) dt$ 。入射、反射、透射光束的截面面积分别为 $A \cos \theta_i$ ， $A \cos \theta_r$ ， $A \cos \theta_t$ ，设其瞬时辐射照度分别为 \mathbf{E}_i ， \mathbf{E}_r ， \mathbf{E}_t ，则辐射通量为：

$$\Phi_{e,k} = E_{e,k} A \cos \theta_k = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_k \cos \theta_k E_k^2, \quad k = i, r, t \quad (2.6)$$

分别写出入射、反射、透射光的辐射通量：

$$\Phi_{e,i} = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_i \cos \theta_i E_i^2 = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_i \cos \theta_i (E_{i,s}^2 + E_{i,p}^2) \quad (2.7)$$

$$\Phi_{e,r} = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_i \cos \theta_i E_r^2 = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_i \cos \theta_i (r_s^2 E_{i,s}^2 + r_p^2 E_{i,p}^2) \quad (2.8)$$

$$\Phi_{e,t} = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_t \cos \theta_t E_t^2 = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_t \cos \theta_t (t_s^2 E_{i,s}^2 + t_p^2 E_{i,p}^2) \quad (2.9)$$

^③可以使用玻璃片堆得到强度较大的偏振光

由于入射光可分解为 s 波与 p 波，我们自然想到它们俩在入射前后应该是能量守恒的，这指导我们分别作数学上的处理。对 s 波，由菲涅尔定律（这说明已经做了近似 $\mu_r = 1$ ），做减法得到：

$$\begin{aligned} & n_i \cos \theta_i E_{i,s}^2 - n_i \cos \theta_i r_{i,s}^2 E_{i,s}^2 - n_t \cos \theta_t t_s^2 E_{i,s}^2 \\ &= E_{i,s}^2 \left[n_i \cos \theta_i \left(1 - \frac{(n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t)^2}{(n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t)^2} \right) - n_t \cos \theta_t \cdot \frac{(2n_i \cos \theta_i)^2}{(n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t)^2} \right] \\ &= \frac{E_{i,s}^2}{(n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t)^2} [n_i \cos \theta_i \cdot (4n_i \cos \theta_i \cdot n_t \cos \theta_t) - 4n_t \cos \theta_t \cdot n_i^2 \cos^2 \theta_i] \\ &= 0 \end{aligned}$$

同理，考虑 p 分量，作减法可得到：

$$n_i \cos \theta_i E_{i,p}^2 - n_i \cos \theta_i r_{i,p}^2 E_{i,p}^2 - n_t \cos \theta_t t_p^2 E_{i,p}^2 = 0 \quad (2.10)$$

代入即得：

$$\Phi_{e,i} - \Phi_{e,r} - \Phi_{e,t} = 0 \implies \Phi_{e,i} = \Phi_{e,r} + \Phi_{e,t} \quad (2.11)$$

这便验证了入射前后的能量是守恒的。

由此，我们可以定义一些能量系数：

$$\begin{aligned} \text{强度反射率 } R: \quad R &= \frac{1}{2}(R_s + R_p), \quad R_s = r_s^2, \quad R_p = r_p^2 \\ \text{强度透射率 } T: \quad T &= \frac{1}{2}(T_s + T_p), \quad T_s = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right)^2 t_s^2, \quad T_p = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right)^2 t_p^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

这样，它们具有下面的性质，方便我们计算能量关系：

$$\begin{aligned} R_s + T_s &= 1, & R_p + T_p &= 1, & R + T &= 1 \\ \Phi_{e,r} &= R\Phi_{e,i}, & \Phi_{e,r,s} &= R_s\Phi_{e,i,s}, & \Phi_{e,r,p} &= R_p\Phi_{e,i,s} \\ \Phi_{e,t} &= T\Phi_{e,i}, & \Phi_{e,t,s} &= T_s\Phi_{e,i,s}, & \Phi_{e,t,p} &= T_p\Phi_{e,i,s} \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中 $\Phi_{e,r} = R\Phi_{e,i}$ 和 $\Phi_{e,t} = T\Phi_{e,i}$ 是怎么来的？

§2.5 全反射时的隐失波与穿透深度

假设现在由光密介质射向光疏介质，即 $n_i > n_t$ ，则有临界角 $\theta_C = \arcsin n_{ti}$ 。当 $\theta_i > \theta_C$ 时，发生全反射， $R = 1$, $T = 0$ ，若简单地认为没有任何透射光，是不满足电磁场边界条件的。具体来讲， \mathbf{E} 的切向分量连续告诉我们，在透射介质中一定存在振荡场，它在平行于界面上的分量具有时间频率 ω （与入射光相同）。

进一步的推导表明^④，在透射介质中存在一种波（称为隐失波），其波函数如下：

$$\mathbf{E} = (e^{-\beta y} \mathbf{E}_{t,0}) \cdot e^{i\left(\frac{\sin \theta_i}{n_{ti}} k_t x - \omega t\right)}, \quad \text{衰减系数 } \beta = k_t \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{n_{ti}^2} - 1} = k_i \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2} \quad (2.14)$$

这是一个不均匀波，其振幅在 y 方向上极速衰减，只在几个波长的距离上就可以忽略不计。且它同时有纵波成分和横波成分，不是简单的简谐横波。

我们将振幅下降到 $\frac{1}{e}$ 的深度称为**穿透深度**，记为 $\delta = \frac{1}{\beta}$ ，它通常在一个波长以内。

对于此过程的能量守恒问题，更详尽广泛的讨论表明（利用波印廷矢量 \mathbf{S} ），能量实际上是跨过界面往复循环，最终使透向第二介质的净流量为零。就现阶段，可以理解为能量从入射波流到隐失波再回到反射波，或者说隐失波沿入射波又绕回了反射波。

^④ 详见参考文献 [1] 的 Page 158

§ 2.6 古斯-亨欣位移 (Goos-Hanchen Shift)

一束被全反射的光，入射点会与（反射后的）出射点存在微小偏移（事实上既有平行偏移也有垂直偏移），称为 Goos-Hanchen Shift。较为严谨的推导表明^⑥，沿入射方向、与分界线平行的偏移量如下（又称为侧向偏移）：

$$\delta_{\perp} = \frac{\lambda_i \sin \theta_i}{\pi \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}}, \quad \Delta x = \frac{\lambda_i \tan \theta_i}{\pi \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}} = 2\delta \tan \theta_i \quad (2.15)$$

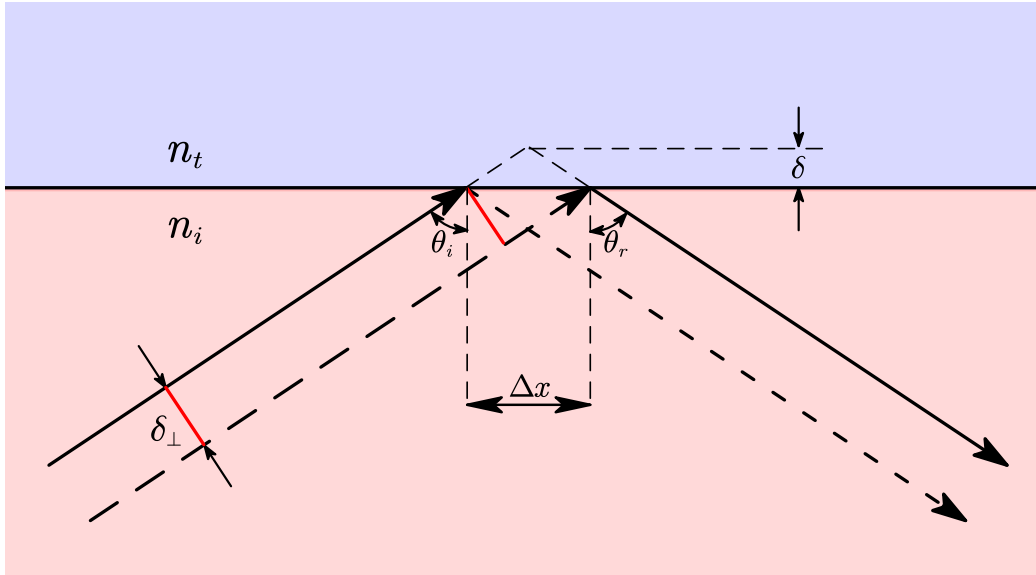


图 2.4: Goos-Hanchen Shift

§ 2.7 全反射时的相位变化

发生全内反射时^⑥，入射波 s 分量、p 分量的相位变化并非简单的 0 或 π ，下面作推导。

对入射光的波函数 $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{i,0} \cdot e^{i\theta} = \mathbf{E}_{i,0} \cdot e^{i(kx - \omega t)}$ ，若反射光满足 $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_i \cdot \lambda e^{i\delta}$ ，则表明相对于入射光，反射光的振幅变为了原来的 λ 倍，且相位增加了 δ 。特别地， $\lambda < 0$ 时，可以等价于 $\lambda > 0$ 且相位增加 $\delta + \pi$ 或 $\delta - \pi$ 。

由菲涅尔定律，我们有 $\mathbf{E}_{r,s} = r_s \mathbf{E}_{i,s}$ ， $\mathbf{E}_{r,p} = r_p \mathbf{E}_{i,p}$ 。可以发现，在全反射时， $r_s, r_p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ，并且 $|r_s| = |r_p| = 1$ ，振幅不变，于是可以令 $r = e^{i\delta}$ 。为了反解相位增量 δ ，一种自然的想法是考虑

$$e^{i\delta} = \cos \delta + i \lambda \sin \delta = a + ib \implies \delta = \arctan \left(\frac{b}{a} \right) \quad (2.16)$$

这样做虽然可行，但由于 \arctan 函数的局限性，其值域范围在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ，而 δ 的取值范围在 $[0, \pi]$ 或者 $[-\pi, 0]$ 。因此，最终得到的 δ 仅在部分区域上正确，对另一部分需做数学上的平移修正。因此，我们考虑另一种方法。在全反射时，注意到 r_s 和 r_p 的形式为 $r = \frac{a-bi}{a+bi}$ ，其中 $a, b \in \mathbb{R}$ ，有如下过程：

$$\frac{a-bi}{a+bi} = e^{i\theta} \implies e^{i\frac{\theta}{2}} = \pm \frac{a-bi}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \tan \frac{\delta}{2} = -\frac{b}{a}, \quad \frac{\delta}{2} = \arctan \left(-\frac{b}{a} \right) \quad (2.17)$$

^⑥ 详见参考文献 [2]，或者 知乎：古斯汉欣位移产生的原因 (<https://www.zhihu.com/question/446676895/answer/3407740051>)，以及 知乎：古斯汉森位移的原理是什么 (<https://www.zhihu.com/question/620522351/answer/3209865128>)

^⑦ 全内反射是指，由光疏介质射向光密介质且入射角大于临界角时发生的全反射现象

这样得到的 $\frac{\delta}{2}$ 便是全范围正确的，无需修正。分别令 $r = r_s, r_p$ ，代入即得：

$$\delta_{r,s} = -2 \arctan \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}}{\cos \theta_i} \right), \quad \delta_{r,p} = -2 \arctan \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}}{n_{21}^2 \cos \theta_i} \right) \quad (2.18)$$

§ 2.8 折射时的相位变化

入射光不发生全反射时，由菲涅尔定律， $t_s, t_p \in (0, \frac{2n_i}{n_i+n_t}) \subset \mathbb{R}$ ，恒为正实数，因此相位不发生变化。当入射光发生全反射时，折射光（透射光）以隐失波的形式存在，我们前面已经提过，隐失波同时含有横波纵波成分，它与入射光不再是同一种波，此时谈论相位变化自然没有意义。

§ 2.9 反射折射总结

到此，我们已经讨论了目前可能接触到的所有情况，包括光疏射向光密、光密射向光疏、小于或大于临界角时的折射反射振幅、相位以及能量关系等，终于可以给出反射折射的总结。

整个结论由菲涅尔定律推导而来，基于电磁场的边界条件和麦克斯韦方程组，从波的角度揭示了光在反射折射时发生的变化，包括振幅、相位、能量、位移等关系。

$$\text{反射波: } \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{r,s} + \mathbf{E}_{r,p} = r_s \mathbf{E}_{i,s} + r_p \mathbf{E}_{i,p}, \quad r \in \mathbb{C} \quad (2.19)$$

$$\text{透射波: } \mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{t,s} + \mathbf{E}_{t,p} = t_s \mathbf{E}_{i,s} + t_p \mathbf{E}_{i,p}, \quad t \in \mathbb{R}, \theta_i < \theta_C \quad (2.20)$$

$$\text{反射系数: } r_s = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}, \quad r_p = \frac{n_{ti}^2 \cos \theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}{n_{ti}^2 \cos \theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}} \quad (2.21)$$

$$\text{透射系数: } (-r_s) + t_s = 1, \quad r_p + t_p = 1 \quad (2.22)$$

$$\text{能量关系: } \begin{cases} R = \frac{1}{2}(R_s + R_p), \quad R_s = |r_s|^2, \quad R_p = |r_p|^2 \\ T = \frac{1}{2}(T_s + T_p), \quad T_s = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right)^2 t_s^2, \quad T_p = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right)^2 t_p^2 \\ R + T = 1, \quad R_s + T_s = 1, \quad R_p + T_p = 1 \\ \Phi_{e,r} = R \Phi_{e,i}, \quad \Phi_{e,t} = T \Phi_{e,i} \end{cases} \quad (2.23)$$

$$s \text{ 波反射相位增量: } \delta_{r,s} = \begin{cases} -\pi, & n_i < n_t \\ \begin{cases} 0, & \theta_i \in (0, \theta_C) \\ -2 \arctan \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}}{\cos \theta_i} \right), & \theta_i > \theta_C \end{cases}, & n_i > n_t \end{cases} \quad (2.24)$$

$$p \text{ 波反射相位增量: } \delta_{r,p} = \begin{cases} \begin{cases} 0, & \theta_i \in (0, \theta_B) \\ -\pi, & \theta_i \in (\theta_B, \frac{\pi}{2}) \end{cases}, & n_i < n_t \\ \begin{cases} -\pi, & \theta_i \in (0, \theta_B) \\ 0, & \theta_i \in (\theta_B, \theta_C) \\ -2 \arctan \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}}{n_{ti}^2 \cos \theta_i} \right), & \theta_i \in (\theta_C, \frac{\pi}{2}) \end{cases}, & n_i > n_t \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\text{隐失波: } \mathbf{E}_t = (e^{-\beta y} \mathbf{E}_{t,0}) \cdot e^{i \left(\frac{\sin \theta_i}{n_{ti}} k_t x - \omega t \right)}, \quad \beta = k_i \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2} = \frac{2\pi}{\lambda_i} \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}, \quad \delta = \frac{1}{\beta} \quad (2.26)$$

$$\text{Goos-Hanchen Shift: } \Delta x = 2\delta \tan \theta_i = \frac{2 \tan \theta_i}{k_i \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}} = \frac{\lambda_i \tan \theta_i}{\pi \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}} \quad (2.27)$$

另外, 如图 2.5 考虑一束光由光疏介质射向光密介质 ($n_i < n_t$), 发生透射、反射。保持各角度不变, 将透射光方向置反, 射向光疏介质, 由菲涅尔公式, 可得对称前后的振幅与能量系数变化:

$$\theta_i < \theta_B : \begin{cases} \text{反射振幅与强度:} & \frac{r'_s}{r_s} = \frac{r'_p}{r_p} = 1, \quad \frac{R'}{R} = \frac{R'_s}{R_s} = \frac{R'_p}{R_p} = 1 \\ \text{透射振幅与强度:} & \frac{t'_s}{t_s} = \frac{t'_p}{t_p} = \frac{\tan A}{\tan B}, \quad \frac{T'}{T} = \frac{T'_s}{T_s} = \frac{T'_p}{T_p} = \frac{1}{n_{ti}^2} \cdot \frac{\sin^2 2A}{\sin^2 2B} \\ \text{反射光相位增量:} & \delta_{r,s} = -\pi, \delta_{r,p} = 0, \quad \delta'_{r,s} = 0, \delta'_{r,p} = -\pi \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\theta_i > \theta_B : \begin{cases} \text{反射振幅与强度:} & \frac{r'_s}{r_s} = \frac{r'_p}{r_p} = 1, \quad \frac{R'}{R} = \frac{R'_s}{R_s} = \frac{R'_p}{R_p} = 1 \\ \text{透射振幅与强度:} & \frac{t'_s}{t_s} = \frac{t'_p}{t_p} = \frac{\tan A}{\tan B}, \quad \frac{T'}{T} = \frac{T'_s}{T_s} = \frac{T'_p}{T_p} = \frac{1}{n_{ti}^2} \cdot \frac{\sin^2 2A}{\sin^2 2B} \\ \text{反射光相位增量:} & \delta_{r,s} = -\pi, \delta_{r,p} = -\pi, \quad \delta'_{r,s} = 0, \delta'_{r,p} = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

上面最左侧的图中, 考虑光路可逆性, 假设反射光、折射光振幅不变而方向置反, 则合成出的光也应是原来的入射光 (左下角合成后为 0), 得到斯托克斯倒逆关系:

$$r' + r = 1, \quad tt' + rr' = 1 \quad (2.30)$$

由于没有涉及电场的方向, 上式对 s 波、 p 波均成立, 可以角标同时为 s , 也可以角标同时为 p 。

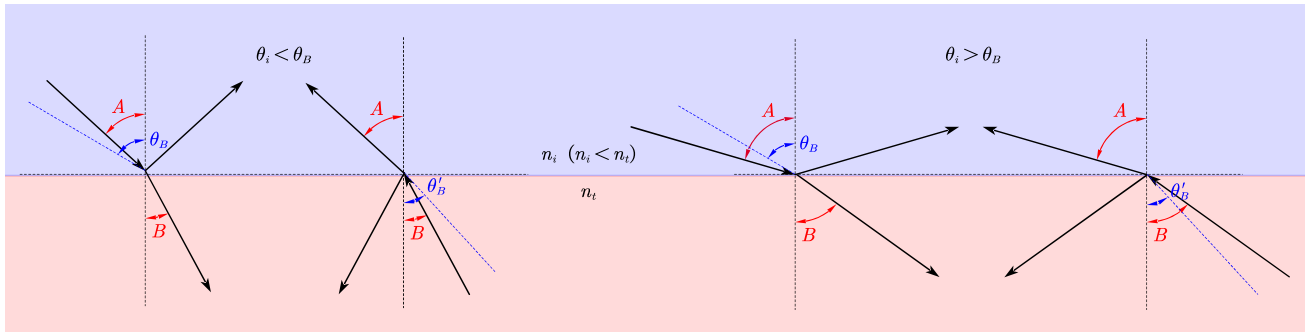


图 2.5: 光路可逆性下的振幅与能量系数

图 2.6 展示了反射折射光的振幅 r_s, r_p, t_s, t_p 、能量 R_s, R_p, R 随入射角 $\tan \theta_i$ 的变化^⑦, 其中 (a) 图为空气入射玻璃 ($n_i = 1, n_t = 1.5$), (b) 图为玻璃入射空气 ($n_i = 1.5, n_t = 1$)。

图 2.7 展示了反射光的 s 分量与 p 分量的相位增量 $\delta_{r,s}, \delta_{r,p}$ 随入射角 θ_i 的变化^⑧, 其中 (a) 图为空气入射玻璃 ($n_i = 1, n_t = 1.5$), (b) 图为玻璃入射空气 ($n_i = 1.5, n_t = 1$)。特别地, 当 (b) 图中 $\theta_i > \theta_C$ 时, 发生全 (内) 反射, 此时 $r_s, r_p, t_s, t_p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, 图中展示的是它们的模长, 即 $|r_s|, |r_p|, |t_s|, |t_p|$ 。

图 2.8 展示了隐失波穿透深度 δ 和 GH SHift Δx 随入射角 θ_i 的变化^⑨。

^⑦ 源码见附录 B.2

^⑧ 源码见附录 B.3

^⑨ 源码见附录 B.4

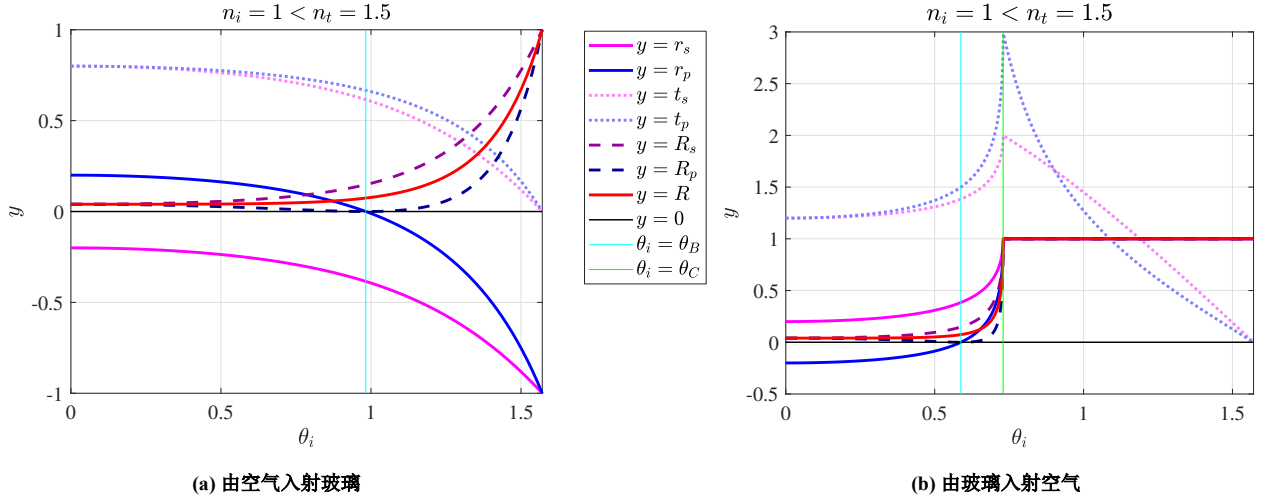


图 2.6: 反射折射光的振幅与能量变化

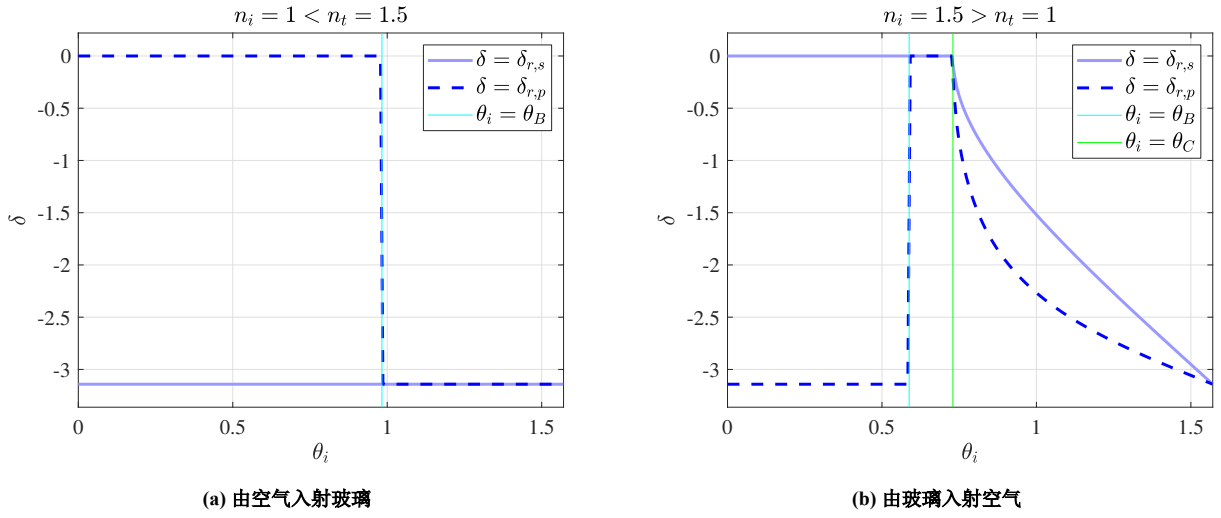


图 2.7: 反射光 s 分量与 p 分量的相位增量

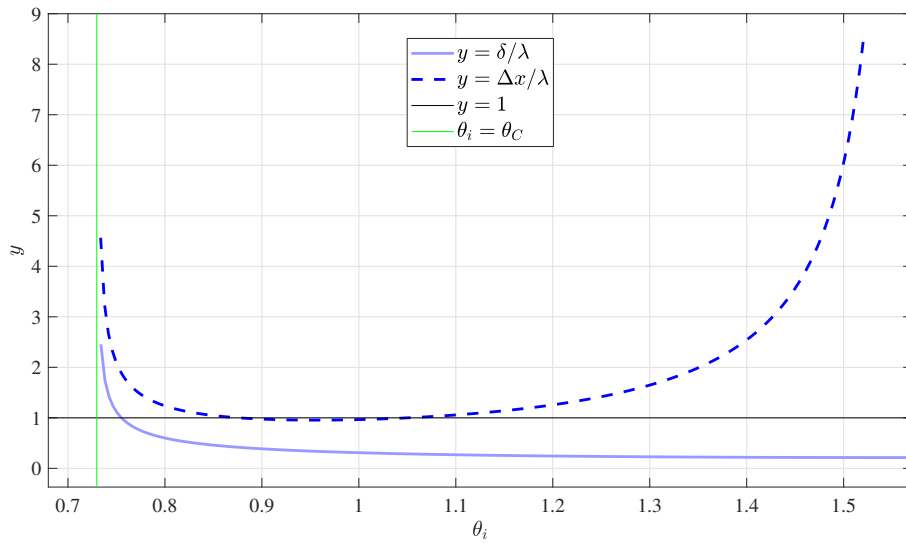


图 2.8: 隐失波穿透深度与 GH Shift (玻璃入射空气)

第3章 光的干涉

通常将平面波与球面波^①是光波的基元，当两个光源（或两束光波）间存在某种关联，波的叠加会引起强度的重新分布，若相互叠加的波满足某些特定条件，使得叠加后产生了稳定的强度分布，则称发生了光的干涉。

换句话说，研究干涉现象，就是讨论当两个或多个（光）波在空间中的某区域相遇时，它们如何相互叠加，会产生怎样的新波动现象，了解各个波的特性（振幅、频率、相位、波的类型等）如何影响叠加后的波的性质。

§3.1 叠加原理

只要波在空间中某点相遇，就会发生叠加，但不一定会产生干涉。也就是说，叠加是无条件的，干涉则要求形成稳定的、新的强度分布。

回想波动方程^②，它的一个重要特性是：方程是线性的。因此，如果 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ 各自是波动方程的解，那么它们的任意线性组合也是方程的解，即：

$$\psi = \sum a_i \psi_i \quad (3.1)$$

这个性质称为叠加原理，它表面：介质中任何一点的合扰动是各个单独波组分的代数和。另外，需要注意，叠加原理仅在均匀、线性、各向同性的介质中成立，有极大振幅的波（能量极大），无论是纵波（声波）或横波（电磁波），都可以产生非线性的效应，此时叠加原理不再适用。

在许多情况下，无需考虑光波的矢量性，例如多个光波的电场方向都始终在一条直线上时，可以将电场 \mathbf{E} 处理为具有正负的标量 E 。本章我们研究的都是基于上述处理的光波，这表明它们的传播方向都在同一平面内，这样即降低了讨论的难度，又具有相当高的普适性和推广性（利用旋转对称性或平移对称性）。

§3.2 同频率光波的干涉

3.2.1 两个同频波源的干涉

两源干涉原理：

现在，我们讨论均匀介质的两个波源（频率相同）的干涉情况，为了提高普适性，我们并不事先假设波源的类似，它可以是平面波、球面波或柱面波。设两波源分别为 S_A, S_B ，波函数分别为 ψ_A, ψ_B ，不妨假设它们都沿各自的正向传播，借助相矢量的思想^③，将位矢 \mathbf{x} （和初相位 ε ）分离后，它们的波函数可写为：

$$E_A = E_{A,0} \cdot e^{i(-\omega t + \alpha_A)}, \quad E_B = E_{B,0} \cdot e^{i(-\omega t + \alpha_B)} \quad (3.2)$$

其中 $\alpha_A = \alpha_A(\mathbf{x})$, $\alpha_B = \alpha_B(\mathbf{x})$ 是位矢的函数， $E_{A,0}, E_{B,0}$ 可能是位矢的函数。对于平面中任意一点 P ，合扰动为：

$$E = E_A + E_B = E_{A,0} \cdot e^{i(-\omega t + \alpha_A)} + E_{B,0} \cdot e^{i(-\omega t + \alpha_B)} \quad (3.3)$$

^①即平面电磁波与球面电磁波，详见附录 A.6，也可参考 知乎：球面光波与平面光波 (<https://www.zhihu.com/question/267133640/answer/319531458>) 和 知乎：高斯光束，平面波，球面波三者间有什么关系 (<https://www.zhihu.com/question/534511391/answer/2501271591>)

^②详见 A.5

^③详见附录 A.4

作数学上的处理，得到合扰动：

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t + \alpha)} \quad (3.4)$$

$$E_0 = \sqrt{E_{A,0}^2 + E_{B,0}^2 + 2E_{A,0}E_{B,0}\cos(\alpha_A - \alpha_B)}, \quad \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{E_0} (E_{A,0} \sin \alpha_A + E_{B,0} \sin \alpha_B) \\ \cos \alpha = \frac{1}{E_0} (E_{A,0} \cos \alpha_A + E_{B,0} \cos \alpha_B) \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin \left[\frac{1}{E_0} (E_{A,0} \sin \alpha_A + E_{B,0} \sin \alpha_B) \right] & , \cos \alpha \geq 0 \\ \pi - \arcsin \left[\frac{1}{E_0} (E_{A,0} \sin \alpha_A + E_{B,0} \sin \alpha_B) \right] & , \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

E_0 与 α 的取值可以由相矢量相加来理解。在给定的位置 P ， A 波的相矢量为 $E_{A,0} \angle \alpha_A$ ， B 波的相矢量为 $E_{B,0} \angle \alpha_B$ ，在复平面中将它们相加（平行四边形法则），即得到合扰动的相矢量 $E_0 \angle \alpha$ ，这样， E_0 的大小就是合相矢量的模长， α 是合相矢量与 x 轴的夹角。

在光学中，常用干涉条纹对比度 γ 来描述干涉情况是否明显，它定义为：

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{E_{0,\max}^2 - E_{0,\min}^2}{E_{0,\max}^2 + E_{0,\min}^2} \quad (3.7)$$

其中 I 表示光强，也即光通量密度。在两波源产生的干涉中，有：

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\alpha_A - \alpha_B) \quad (3.8)$$

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}, \quad I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (3.9)$$

则对比度为：

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt{\frac{I_1}{I_2}} + \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{E_{A,0,\max}^2}{E_{B,0,\max}^2}} + \sqrt{\frac{E_{B,0,\max}^2}{E_{A,0,\max}^2}}} \quad (3.10)$$

因此，两波源电场的振幅越接近，干涉对比度越高，也就越明显。

示例一：两球面波

如图 3.1 (a)，考虑两个相同的球面波源在 x - y 平面上的干涉情况，相同的波源（理想单频波源）保证了两束波的物理参数相同，如波长、频率和振幅等。设两波源位置分别为 x_{OA} ， x_{OB} ，简记 $r_1 = |x_{AP}|$ 和 $r_2 = |x_{BP}|$ ，则波函数可写为：

$$E_A = \frac{A}{r_1} \cdot e^{i(-\omega t + kr_1 + \varepsilon_A)}, \quad E_{A,0} = \frac{A}{r_1}, \quad \alpha_A = kr_1 + \varepsilon_A \quad (3.11)$$

$$E_B = \frac{B}{r_2} \cdot e^{i(-\omega t + kr_2 + \varepsilon_B)}, \quad E_{B,0} = \frac{B}{r_2}, \quad \alpha_B = kr_2 + \varepsilon_B \quad (3.12)$$

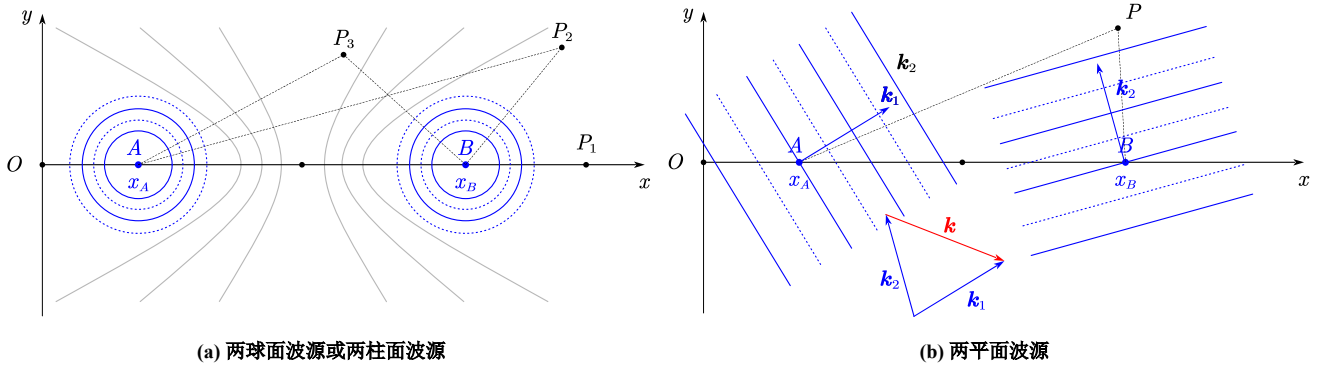


图 3.1: 两个同频波源的干涉

方便起见, 不妨令 $\varepsilon_A = \varepsilon_B$, 则合扰动为:

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t + \alpha)}, \quad E_0 = \sqrt{\frac{A^2}{r_1^2} + \frac{B^2}{r_2^2} + \frac{2AB}{r_1 r_2} \cos(k(r_1 - r_2))} \quad (3.13)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{r_1} \sin \alpha_A + \frac{B}{r_2} \sin \alpha_B \right), \quad \cos \alpha = \frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{r_1} \cos \alpha_A + \frac{B}{r_2} \cos \alpha_B \right) \quad (3.14)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin \left[\frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{r_1} \sin \alpha_A + \frac{B}{r_2} \sin \alpha_B \right) \right] & , \cos \alpha \geq 0 \\ \pi - \arcsin \left[\frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{r_1} \sin \alpha_A + \frac{B}{r_2} \sin \alpha_B \right) \right] & , \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

对于可见光, 其波长在 nm 级别, 空间频率 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 极高。为方便可视化, 我们取波长 $\lambda = 0.4\pi$ m, 即 $k = 5$ 的微波, 并令振幅系数 $A = 50$, $B = 50$, 作出图像。图 3.2 展示了单个波源在平面上的振荡情况 ($t = 0$)。对两波源的干涉^④, 我们令两波源位置分别为 $(-2, 0)$, $(2, 0)$, 作出图像, 图 3.3 展示了它们的干涉情况 ($t = 0$)^⑤。单波源和双波源随时间的振动详见 GIF 动图链接 <https://www.123pan.com/s/0y0pTd-QwKj3>。

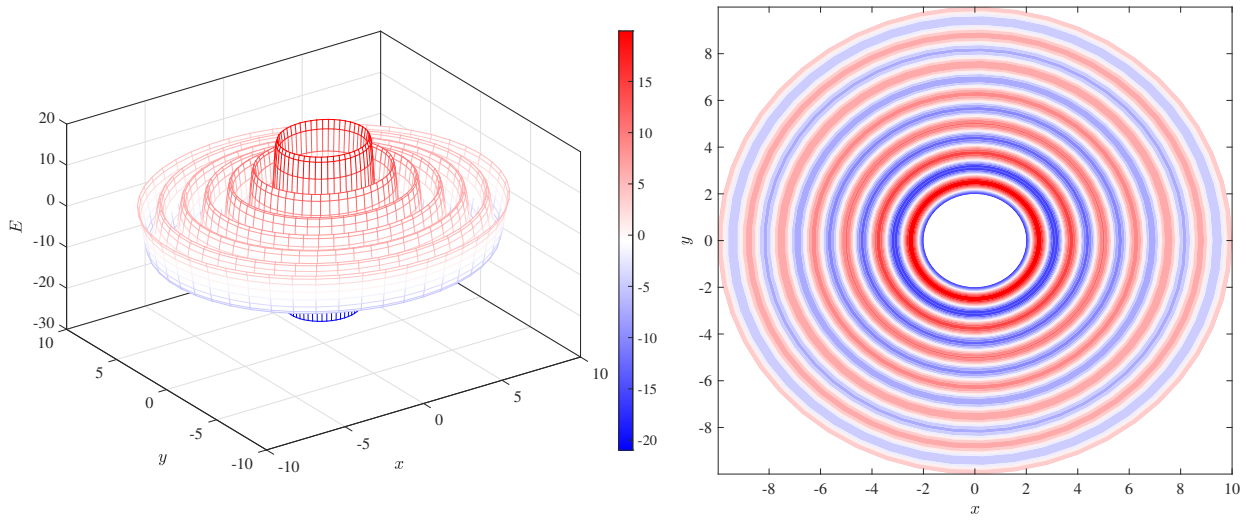


图 3.2: 单个球面波源在平面上的振荡情况

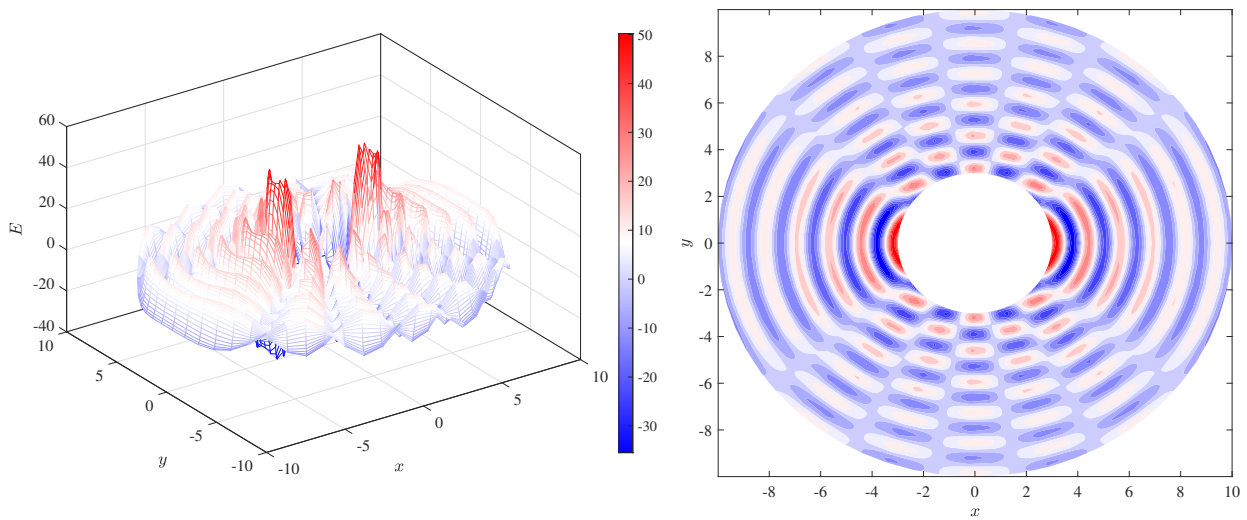


图 3.3: 两个球面波源在平面上的干涉情况

^④源码见附录 B.5

^⑤源码见附录 B.6

当点 P 离波源极远时, 近似有 $\frac{r_1}{r_2} = 1$ (这与近似有 $r_1 - r_2 = 0$ 不同), 将距离记为 r , 则振幅的位置分布为 $E_0 = \frac{1}{r} \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(k(r_1 - r_2))}$ 。若可以认为 $\frac{1}{r}$ 近似不变, 则此时, 具有相同振幅大小的点, 等价于 $\cos(k(r_1 - r_2))$ 具有相同的值, 也即:

$$|r_1 - r_2| = \frac{1}{k}(\theta + 2\pi n), \quad \theta \in [0, 2\pi), n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

对每个给定的 n , 上述方程表示一条双曲线 (焦点为两波源), 因此上述方程构成一个双曲线族 (空间中构成旋转双曲线族), 如图 3.1 (a) 中的灰色曲线所示。特别地, 令 $\theta = 0$ 可以得到最大振幅对应的双曲线族, 令 $\theta = \pi$, 得到最小振幅对应的双曲线族。

由于球面波的旋转对称性, 只需绕 x 轴旋转一圈, 即可得到整个空间上的振幅分布情况, 也即两波源干涉情况。振幅的位置分布是较为重要的内容, 在后文的干涉实验部分, 我们将再次讨论这个问题。

示例二: 两柱面波

考虑两柱面波的干涉情况, 其中柱体的高与 $x-y$ 平面垂直。容易发现, 这与球面波在 $x-y$ 平面的行为是相同的, 仅需修改波源的振幅衰减系数。同样地, 不妨令初相位 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, 得到合扰动:

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t + \alpha)}, \quad E_0 = \sqrt{\frac{A^2}{r_1} + \frac{B^2}{r_2} + \frac{2AB}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos(k(r_1 - r_2))} \quad (3.17)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{\sqrt{r_1}} \sin \alpha_A + \frac{B}{\sqrt{r_2}} \sin \alpha_B \right), \quad \cos \alpha = \frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{\sqrt{r_1}} \cos \alpha_A + \frac{B}{\sqrt{r_2}} \cos \alpha_B \right) \quad (3.18)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin \left[\frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{\sqrt{r_1}} \sin \alpha_A + \frac{B}{\sqrt{r_2}} \sin \alpha_B \right) \right] & , \cos \alpha \geq 0 \\ \pi - \arcsin \left[\frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{\sqrt{r_1}} \sin \alpha_A + \frac{B}{\sqrt{r_2}} \sin \alpha_B \right) \right] & , \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

由于柱面波的平移对称性, 只需沿 z 轴进行平移, 即可得到整个空间上的干涉情况。在平面内的其它性质与球面波类似。

示例三: 两平面波

考虑两平面波的干涉情况, 如图 3.1 (b), 平面波函数为:

$$E_A = E_{A,0} \cdot e^{i(-\omega t + k r_1 + \varepsilon_A)}, \quad \alpha_A = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_{AP} + \varepsilon_A \quad (3.20)$$

$$E_B = E_{B,0} \cdot e^{i(-\omega t + k r_2 + \varepsilon_B)}, \quad \alpha_B = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_{BP} + \varepsilon_B \quad (3.21)$$

令 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, 得到合扰动:

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t + \alpha)} \quad (3.22)$$

$$E_0 = \sqrt{E_{A,0}^2 + E_{B,0}^2 + 2 \cos(\Delta \alpha)}, \quad \Delta \alpha = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_B - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_A) \quad (3.23)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{E_0} [E_{A,0} \sin(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_{AP}) + E_{B,0} \sin(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_{BP})] \quad (3.24)$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{E_0} [E_{A,0} \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_{AP}) + E_{B,0} \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_{BP})] \quad (3.25)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin \left[\frac{1}{E_0} (E_{A,0} \sin \alpha_A + E_{B,0} \sin \alpha_B) \right] & , \cos \alpha \geq 0 \\ \pi - \arcsin \left[\frac{1}{E_0} (E_{A,0} \sin \alpha_A + E_{B,0} \sin \alpha_B) \right] & , \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

由于 $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_A$ 和 $\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_B$ 是定值, 而 $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ 构成一个新的传播矢量, 因此合成后的波仍是平面波 (但不均匀, 振幅是位置的函数), 或者说每个等相面仍构成一个平面。

类似地, 由平面波的平移对称性, 沿 z 轴平移即可得全空间的合成情况。

3.2.2 多个同频波源的干涉

上面的结论容易推广到任意 n 个扰动叠加，即：

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t + \alpha)} \quad (3.27)$$

$$E_0 = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n E_{i,0} \sin \alpha_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n E_{i,0} \cos \alpha_i\right)^2} \quad (3.28)$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n E_{i,0}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2E_{i,0}E_{j,0} \cos(\alpha_i - \alpha_j)}, \quad (3.29)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{E_0} \sum_{i=1}^n E_{i,0} \sin \alpha_i, \quad \cos \alpha = \frac{1}{E_0} \sum_{i=1}^n E_{i,0} \cos \alpha_i \quad (3.30)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{1}{E_0} \sum_{i=1}^n E_{i,0} \sin \alpha_i\right) & , \cos \alpha \geq 0 \\ \pi - \arcsin\left(\frac{1}{E_0} \sum_{i=1}^n E_{i,0} \sin \alpha_i\right) & , \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

$$I = \sum_{i=1}^n I_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2\sqrt{I_i I_j} \cos(\alpha_i - \alpha_j) \quad (3.32)$$

§ 3.3 不同频率光的干涉

§ 3.4 产生干涉的实际条件

前面我们已经提到，在叠加（或干涉）问题中，电场的振幅通常只是位置的函数，而与时间无关，其实这也是观察到干涉图样的必要条件。观察干涉图样，无非是用照片（视频等同于照片）、人眼、辐射计以及类似的传感器，它们都有一定的“曝光时间”，我们只能观察到在曝光时间内，光强或辐射强度的平均值，即：

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos(\Delta\alpha) dt \quad (3.33)$$

其中 τ 为仪器的曝光时间。对可见光而言，其振荡周期 $T = \frac{\lambda}{v}$ 在 10^{-15} s 级别，因此 τ 通常远大于 T ，这样，我们只能观察到平均光强，而无法观察到光强的瞬时变化。如果 $\Delta\alpha$ 与时间无关，或者在曝光时间内几乎保持不变，那么就能得到（观察到）稳定的干涉图样。否则恒有 $I = I_1 + I_2$ ，是平凡的叠加，观察不到干涉现象。

另外，若两波源的振动方向垂直，电场也仅是平凡的叠加，而不会产生干涉。因此，干涉现象要求两波源振动方向不能垂直。

还有一种情况是，实际中的波源（光源）大多不能产生理想的、初相位不变的单频波。

例如，对普通光源（如白炽灯），光是由光源中的原子、分子发生能级跃迁时发出的，跃迁时发出的波列都是有限长的，且初相位随机，持续时间通常短于 10 ns，在此时段内，光场振荡约百万次。对于外界的探测设备来讲，10 ns 仍是一个极短的时间，通常远远小于曝光时间。因此，即使每个波列的初相位都相同，在曝光时间内的上万个波列的平均下，积分项 $\int_0^\tau \cos(\Delta\alpha) dt$ 为 0， $I = I_1 + I_2$ ，导致观察到的强度分布仅为平凡的叠加，无法观察到干涉。

上面光源发出的光的初相位是时间的函数，随着时间快速变化，无法产生干涉，称其为不相干光源。在实际中，还有一些光源，并不能达到完美的点光源，而是有一定的光源宽度，当宽度较大时，不同位置上光的叠加，会导致条纹的对比度降低（甚至为 0），称为空间不相干。另外有一些光源，发出的光具有多个波长（或者频谱较均匀），不同波长相互叠加导致相干性降低，称为时间不相干。

§3.5 分波前干涉

波前，即波面，也称波阵面或等相面。“分波前”干涉，是依据惠更斯原理，将一个波面分为两个（或多个）波面，最终产生干涉现象。

3.5.1 杨氏双缝干涉实验

杨氏双缝干涉装置如图 3.4 (a)， S 为一狭缝， S_1 和 S_2 为一对狭缝，最右侧的屏为观察屏。由惠更斯原理，一平面波（可借助激光器和透镜产生）传播到狭缝 S 时，以柱面波形式出射，在遇到双缝屏时，分化为两个柱面波继续前进，从而产生干涉，并在观察屏上显现出来。与杨氏实验原理类似的有洛埃德镜实验、菲涅尔双棱镜、菲涅尔双面镜等，它们的 GIF 动图见链接 <https://www.123pan.com/s/0y0pTd-5wKj3>。

如果杨氏实验中双缝屏上的双缝对称分布，一般可认为分化的两个柱面波具有相同的初相位和振幅。装置中各参量的典型值是：

$$d = 100 \mu\text{m}, R = 5 \text{ cm}, D = 1 \text{ m}, L = 4 \text{ cm}, \quad D \gg L \gg d \quad (3.34)$$

设通过双缝屏后，两柱面波的振幅系数相同，都为 A ，真空介电常量 $\varepsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ ，真空磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ ，则两波的光强度分别为

$$I_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{1,0}^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{A^2}{r_1}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{A^2}{r_2} \quad (3.35)$$

那么，接受屏上的振幅和强度分布为：

$$E_0 = A \sqrt{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{2}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)\right)}, \quad I = A^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)\right)}{\sqrt{r_1 r_2}} \right] \quad (3.36)$$

装置参数在典型值附近时，可以有近似：

$$\frac{r_1}{D} = \frac{r_2}{D} = 1, \quad r_2 - r_1 = \frac{d}{\sin\theta} = \frac{d}{\sin\theta} = \frac{xd}{D}, \quad I_1 = I_2 \quad (3.37)$$

得到近似后的振幅和强度分布如下，其中 $\Delta x = \frac{\lambda D}{b}$ 称为条纹间距。

$$E_0(x) = \frac{\sqrt{2}A}{\sqrt{D}} \cdot \sqrt{1 + \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda D}x\right)} = \frac{\sqrt{2}A}{\sqrt{D}} \cdot \sqrt{1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{\Delta x}\right)} \quad (3.38)$$

$$I(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{A^2}{D} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda D}x\right) \right] = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{A^2}{D} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{\Delta x}\right) \right] \quad (3.39)$$

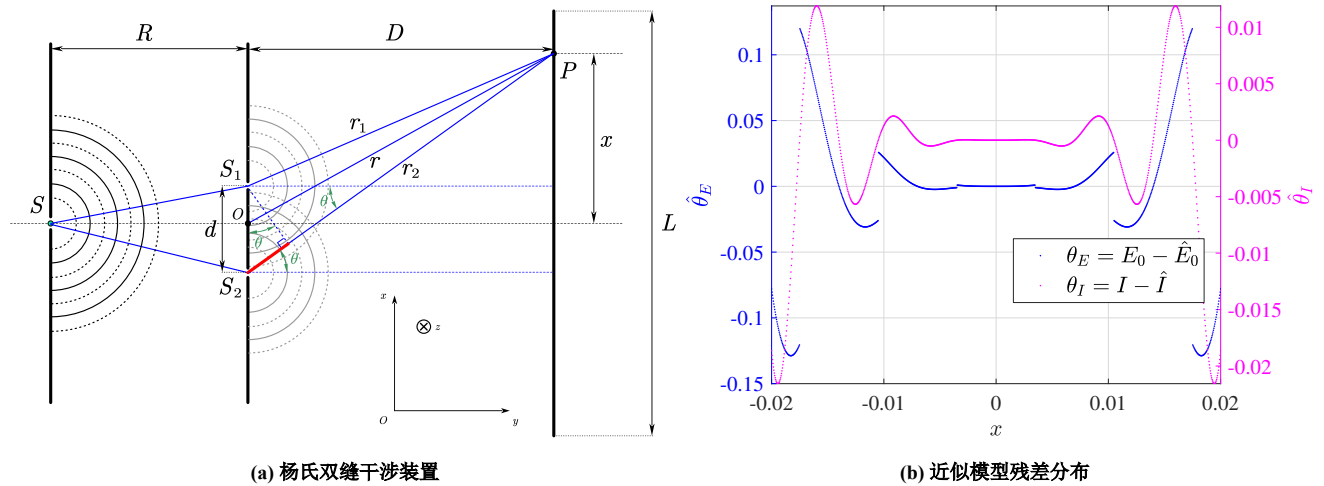


图 3.4: 杨氏双缝干涉装置与近似模型残差分布

图 3.5 展示了未近似和近似时, 振幅、光强在接受屏上的分布情况, 图 3.4 (b) 是近似与未近似模型的残差分布^⑥, 其中装置参数采取典型值。计算得到一些误差参数 (对横坐标均匀离散 1000 个点) 如下^⑦:

$$\begin{aligned}
 &\text{相对平均值误差: } \text{RME}_{E_0} = 0.0001336621, \quad \text{RME}_I = 0.0002192205 \\
 &\text{决定系数: } R_{E_0}^2 = 0.9999969495, \quad R_I^2 = 0.9999975710 \\
 &\text{调整决定系数: } R_{\text{adj}, E_0}^2 = 0.9999969464, \quad R_{\text{adj}, I}^2 = 0.9999975686 \\
 &\text{平均标准绝对残差: } \text{RS}_{E_0} = 0.0005191648, \quad \text{RS}_I = 0.0006515739 \\
 &\text{平均标准平方残差: } \text{RSS}_{E_0} = 0.0000007426, \quad \text{RSS}_I = 0.0000012850 \\
 &\text{标准面积误差: } \text{SAE}_{E_0} = 0.0005185186, \quad \text{SAE}_I = 0.0006493885
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

由图 3.4 (b), 图 3.5 和几个误差参数可以看到, 近似效果较好。

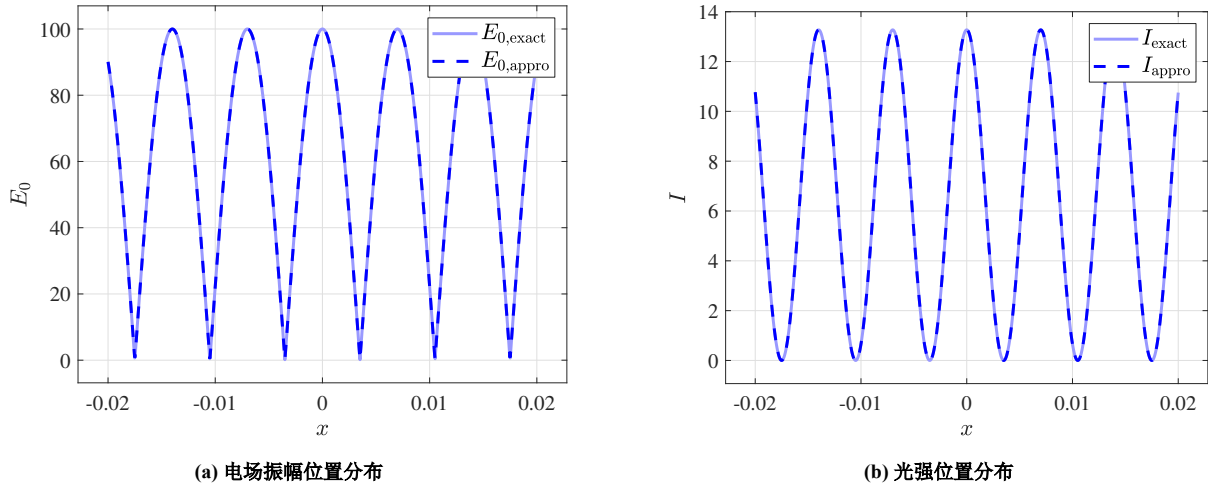


图 3.5: 近似模型与非近似模型的比较

杨氏双缝干涉的特点:

- (1) 非定域干涉: 在干涉场中离双孔不太近也不太远的区域处处有干涉
- (2) 自相干: 相干光波来自同一波源
- (3) 定态干涉: 振幅 (或强度) 在干涉场中的分布仅与位置有关, 与时间无关

白光光源与其他补充内容详见 [PHY C15: Double Slit Interference](#)、[University of Louisville: Double Slit Interference](#) 以及 [知乎: 双缝干涉实验](#), 我们不多赘述。从另一个角度, 也可以利用双曲线的定义杨氏干涉的精确模型 + 近似模型, 详见 [知乎: 杨氏干涉的条纹间距](#)。

3.5.2 杨氏实验中干涉条纹的移动

为提高分析效率, 此节的推导都采用近似模型。接受屏上相邻明 (暗) 条纹的间距 Δx 为:

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{d} \tag{3.41}$$

取 $\lambda = 700.0 \text{ nm}$ 的红光, $\Delta x = 7 \text{ mm}$, 可被人眼分辨。称 $\frac{\Delta x}{2}$ 为条纹宽度, 此时条纹宽度为 3.5 mm 。

下面依次讨论光源位置、光源宽度对干涉条纹的影响。先考虑理想点光源的微小移动引起的干涉条纹移动。当点光源位于中轴线上时, 0 级明纹也在轴上, 假设光源 S 向下移动距离 $|\delta_s|$, 也即向上移动 $(-\delta_s)$, 在近似条件 3.37 下, 以及 $R \gg d$ 时近似有 $R_1 - R_2 = \frac{d(-\delta_s)}{R}$, 得到 0 级明纹向上移动的距离 δ_x :

$$\delta_x = -\frac{D}{R}\delta_s \tag{3.42}$$

^⑥图 3.4 (b) 与图 3.5 源码见附录 B.7

^⑦这些误差参数的定义见附录 ?? 或网址 ([here](#))

负号表示两者移动方向相反。

实际光源并非理想的点光源，而是有一定的光源宽度，虽然对干涉条纹位置影响不大，但会对条纹对比度产生明显的影响。理想点光源不在中央时，屏幕上的强度分布大小可以近似不变，仅是发生上下平移。记点光源位置为 δ_s ，在公式 3.38 中作映射 $x \rightarrow x - \delta_s$ ，并简记接受屏上的最大光强为 $I_{\max} = 2 \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \cdot \frac{A^2}{r}$ ，简记 x 前的系数为 $\eta = \frac{2\pi}{\Delta x}$ ，得到新的强度分布：

$$I(x) = \frac{I_{\max}}{2} [1 + \cos(\eta(x - \delta_s))] = \frac{I_{\max}}{2} \left[1 + \cos\left(\eta x + \eta \frac{D}{R} \delta_s\right) \right] \quad (3.43)$$

$$= \frac{I_{\max}}{2} \left[1 + \cos(\eta x) \cos\left(\eta \frac{D}{R} \delta_s\right) - \sin(\eta x) \sin\left(\eta \frac{D}{R} \delta_s\right) \right], \quad \eta = \frac{2\pi}{\Delta x} \quad (3.44)$$

设光源在中央且宽度为 b （即发光区域在 $[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$ ），光源均匀发光（事实上这个条件比较苛刻，现实中的激光器无法做到，需要对光线进行处理），屏幕上的强度分布 $I(x, b)$ 为：

$$I(x, b) = \frac{I_{\max}}{2b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[1 + \cos(\eta x) \cos\left(\eta \frac{D}{R} \delta_s\right) - \sin(\eta x) \sin\left(\eta \frac{D}{R} \delta_s\right) \right] d\delta_s \quad (3.45)$$

$$= \frac{I_{\max}}{2} \left[1 + \frac{\sin\left(\frac{\eta D}{2R} b\right)}{\frac{\eta D}{2R} b} \cdot \cos(\eta x) \right] = \frac{I_{\max}}{2} \left[1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda R} b\right)}{\frac{\pi d}{\lambda R} b} \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{\Delta x}\right) \right] \quad (3.46)$$

对任意给定的光源宽度 b ，光强的最大最小值为 $1 \pm \left| \frac{\sin u}{u} \right|$ ，其中 $u = \frac{\pi d}{\lambda R} b$ ，于是干涉条纹对比度 γ ：

$$\gamma = \gamma(b) = \left| \frac{\sin u}{u} \right| = \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda R} b\right)}{\frac{\pi d}{\lambda R} b} \right| \quad (3.47)$$

强度分布 $I(x, b)$ 与干涉条纹对比度 $\gamma(b)$ 如图 3.6 所示[®]，当 $b = \frac{\lambda R}{d}$ 时，对比度为 0，完全看不到干涉条纹，将其称为光源极限宽度，此时认为光源完全不相干。

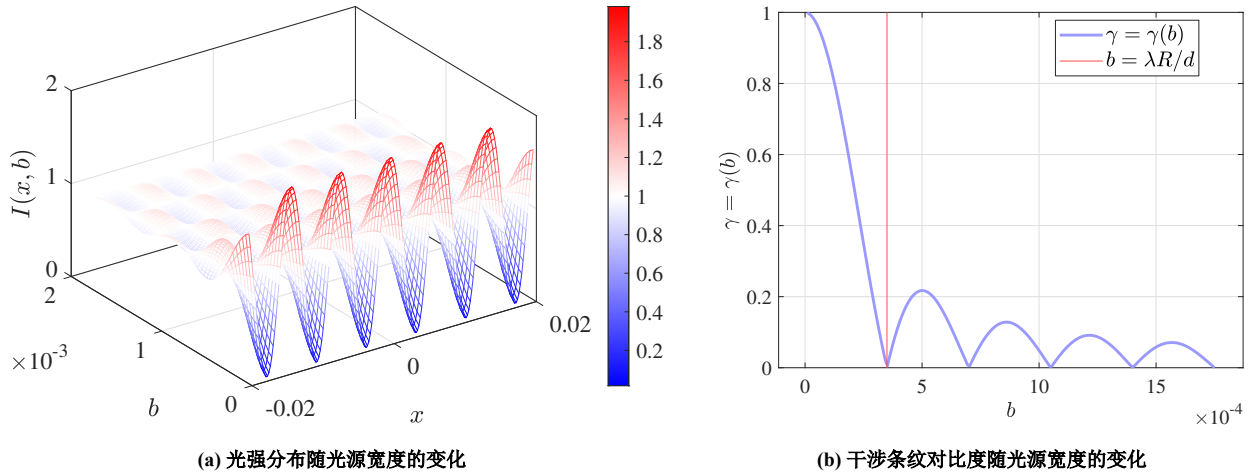


图 3.6: 光源宽度对干涉条纹的影响

§ 3.6 分振幅干涉

3.6.1 多光束薄膜干涉

如图 3.7 (a) 所示，一入射光接近垂直入射到一薄膜时 ($\theta_i < \theta_B$)，发生多次反射、透射，下面讨论其能量与干涉情况。

[®] 源码见附录 B.8

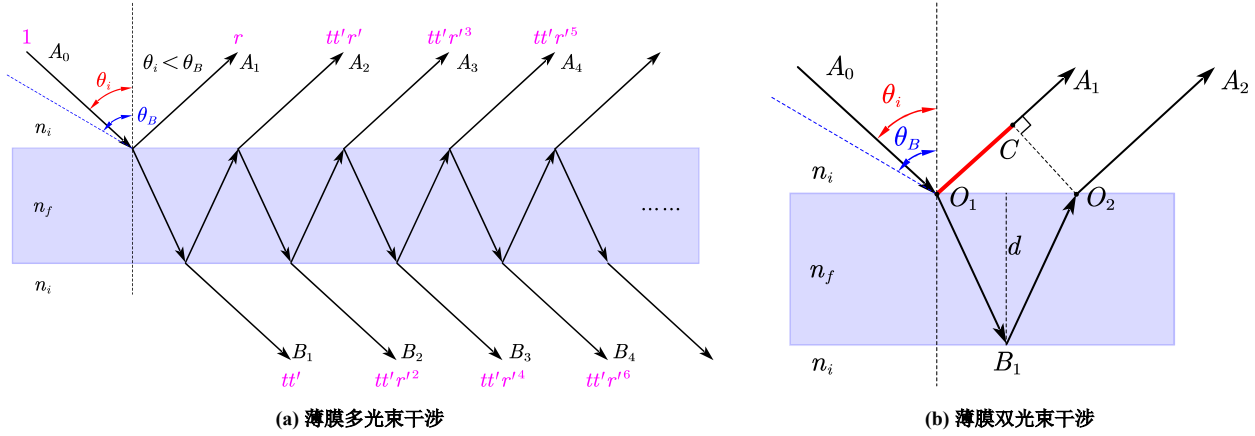


图 3.7: 薄膜干涉

由于没有发生全反射，相位变化是平凡的（透射无相变，反射只能是 $-\pi$ 或零），而反射光的相位变化已经包含在振幅反射系数 r 中了（由其正负表示）。因此，在分析多光束干涉时，只需考虑各光（有正负）的振幅以及光程差，处理波函数的表达式的叠加即可。

记相邻两束反射（透射）光的光程差为 ΔL ，光程差带来的相位差为 δ （**无需考虑反射相位突变，因为它涵盖在了振幅的正负中**），由图 3.7 (b) 所示，可求得：

$$\Delta L = l_2 - l_1 = 2n_f \cdot \overline{O_1 B_1} - n_i \cdot \overline{O_1 C} = \frac{2n_f d}{\cos \theta_t} - 2n_i \sin \theta_i \tan \theta_t d = 2n_f d \cos \theta_f \quad (3.48)$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_i} \Delta L = \frac{4\pi n_f d \cos \theta_f}{\lambda_i} \quad (3.49)$$

由公式 2.30（斯托克斯倒逆关系）， $r + r' = 1$ ， $tt' + rr' = 1$ ，结合等比数列极限（ $n \rightarrow \infty$ ），可得反射波的总振幅系数 r_A 、透射波的总振幅系数 t_B ：

$$r_A = r + tt'r'e^{i\delta} (1 + r'^2 e^{i\delta} + r'^4 e^{2i\delta} + \cdots) = r + \frac{tt'r'e^{i\delta}}{1 - r'^2 e^{i\delta}} = r \left(\frac{1 - e^{i\delta}}{1 - r^2 e^{i\delta}} \right) \quad (3.50)$$

$$t_B = tt' (1 + r'^2 e^{i\delta} + r'^4 e^{2i\delta} + \cdots) = \frac{tt'}{1 - r'^2 e^{i\delta}} = \frac{1 - r^2}{1 - r^2 e^{i\delta}} \quad (3.51)$$

由于上述推导与角标 s 或 p 无关，因此对 s 波和 p 波都成立。

也即得到：

$$r_{A,s} = \frac{\mathbf{E}_{r,s}}{\mathbf{E}_{i,s}} = r_s \left(\frac{1 - e^{i\delta}}{1 - r_s^2 e^{i\delta}} \right), \quad r_{B,p} = \frac{\mathbf{E}_{r,p}}{\mathbf{E}_{i,p}} = r_p \left(\frac{1 - e^{i\delta}}{1 - r_p^2 e^{i\delta}} \right) \quad (3.52)$$

$$t_{B,s} = \frac{\mathbf{E}_{t,s}}{\mathbf{E}_{i,s}} = \frac{1 - r_s^2}{1 - r_s^2 e^{i\delta}}, \quad t_{B,p} = \frac{\mathbf{E}_{t,p}}{\mathbf{E}_{i,p}} = \frac{1 - r_p^2}{1 - r_p^2 e^{i\delta}} \quad (3.53)$$

据此，可以定义光学经过薄膜时的能量系数 $R_{F-P,s}$, $R_{F-P,p}$, $T_{F-P,s}$, $T_{F-P,p}$ （与菲涅尔公式中的能量系数类似，但物理意义不同）：

$$R_{F-P,s} = |r_{A,s}|^2 = \frac{4R_s \sin^2 \frac{\delta}{2}}{(1 - R_s)^2}, \quad R_{F-P,p} = |r_{A,p}|^2 = \frac{4R_p \sin^2 \frac{\delta}{2}}{(1 - R_p)^2} \quad (3.54)$$

$$T_{F-P,s} = \frac{n_1 \cos \theta_1}{n_3 \cos \theta_3} |t_{B,s}|^2 = \frac{(1 - R_s)^2}{(1 - R_s \cos \delta)^2 + R_s^2 \sin^2 \delta} \quad (3.55)$$

$$T_{F-P,p} = \frac{n_1 \cos \theta_1}{n_3 \cos \theta_3} |t_{B,p}|^2 = \frac{(1 - R_p)^2}{(1 - R_p \cos \delta)^2 + R_p^2 \sin^2 \delta} \quad (3.56)$$

其中 $\theta_1 = \theta_3 = \theta_i$, $n_1 = n_3 = n_i$ 。角标 $F-P$ 指 Fabry-Perot Interferometer (法布里-珀罗干涉仪), 是一种利用薄膜产生干涉现象的仪器。定义 $F_s = \frac{4R_s}{(1-R_s)^2}$, $F_p = \frac{4R_p}{(1-R_p)^2}$, 称为精细度, 则上式可简写为:

$$R_{F-P,s} = \frac{F_s \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + F_s \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad R_{F-P,p} = \frac{F_p \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + F_p \sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad (3.57)$$

$$T_{F-P,s} = \frac{1}{1 + F_s \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad T_{F-P,p} = \frac{1}{1 + F_p \sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad (3.58)$$

$$\delta = \frac{4\pi n_f d \cos \theta_f}{\lambda_i}, \quad F_s = \frac{4R_s}{(1-R_s)^2}, \quad F_p = \frac{4R_p}{(1-R_p)^2} \quad (3.59)$$

其中 n_f 是薄膜的折射率, 容易验证上式满足能量守恒。在实际操作中, 基本都会选取接近垂直的入射光, 此时 s 波 p 波 (近似) 具有相同的能量系数 $R = R_s = R_p$, 因此又常写为下面的式子:

$$R_{F-P} = \frac{F \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad T_{F-P} = \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad F = \frac{4R}{(1-R)^2}, \quad \delta = \frac{4\pi n_f d \cos \theta_f}{\lambda_i} \quad (3.60)$$

$T_{F-P} = T_{F-P}(F, \delta)$ 的图像如下所示^⑨, F 越大, 透射光的对比度越高, 在干涉现象中形成的条纹越明显, 且 F 增大时, 透射峰的宽度减小, 亮条纹变细变锐利。

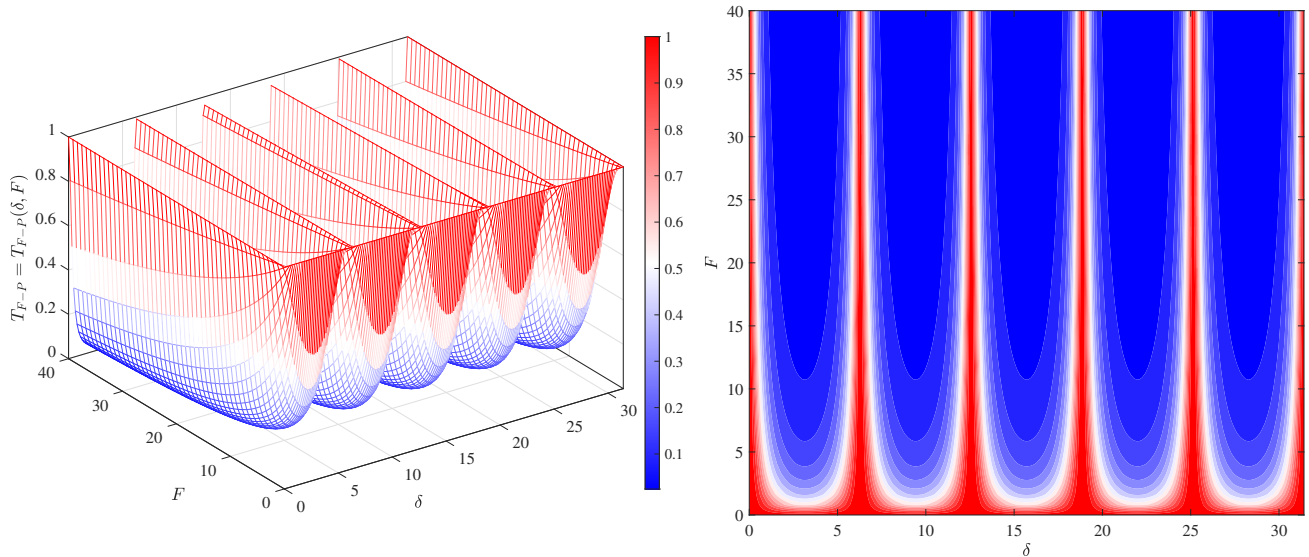


图 3.8: 精细度对透射率的影响

实际中常基于上面理论, 设计出增透膜、增反膜等薄膜, 实现光的选择性透射、反射。如果遇到, 直接利用反射相位突变进行分析即可。

更多有关多光束薄膜干涉 (法布里-珀罗干涉仪 Fabry-Perot Interferometer) 的内容见 [Fabry-Perot Interferometer \(https://zhuanlan.zhihu.com/p/579184206\)](https://zhuanlan.zhihu.com/p/579184206), 以及 [F-P 干涉仪 \(https://zhuanlan.zhihu.com/p/453978087\)](https://zhuanlan.zhihu.com/p/453978087)。

3.6.2 双光束薄膜干涉

当振幅反射率 r 较小时, A 光的振幅衰减很快, 可以仅考虑双光束干涉 (A_1 与 A_2), 而忽略剩余反射光带来的影响, 如图 3.7 (b)。实际操作中, 也常用薄透镜将两束出射光汇聚于一点, 而不会引起附加的相位差。反射后光线 O_1A_1 与 O_2A_2 的光程差 ΔL 为:

$$\Delta L = l_2 - l_1 = 2n_f \cdot \overline{O_1B_1} - n_i \cdot \overline{O_1C} = \frac{2n_f d}{\cos \theta_t} - 2n_i \sin \theta_i \tan \theta_t d = 2n_f d \cos \theta_f \quad (3.61)$$

^⑨源码见附录 B.9

即 A_2 比 A_1 多走了 ΔL 的光程, 相当于相位增量 $-\omega \frac{\Delta L}{c}$, 算上反射时 A_2 与 A_1 之间的相位增量 $-\pi$ (事实上 s 波是 $-\pi$ 而 p 波是 π), 总光程差 OPD (Optical Path Difference) (A_2 的减去 A_1) 和总相位增量 $\Delta\alpha$ 为:

$$\text{OPD} = 2n_f d \cos \theta_f + \frac{\lambda}{2}, \quad \Delta\alpha = - \left(1 + \frac{4n_f \cos \theta_t}{\lambda} \cdot d \right) \pi = - \left[1 + \frac{4n_f \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta_i}{n_{ti}} \right)^2}}{\lambda} \cdot d \right] \pi \quad (3.62)$$

随参数 θ_i 、 d 的改变, 不同位置上可以得到不同相位, 从而产生干涉条纹。

3.6.3 等倾干涉

等倾干涉实验装置如图 3.9 所示, 其干涉条纹特征为:

- (1) 亮条纹: $\Delta L = k\lambda \Rightarrow \cos \theta_t = \frac{\lambda}{2n_f d} \cdot (k - \frac{1}{2}), \quad k = 1, 2, 3, \dots$
- (2) 暗条纹: $\Delta L = (k + \frac{1}{2})\lambda \Rightarrow \cos \theta_t = \frac{\lambda}{2n_f d} \cdot k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$
- (3) r 较小时, 等倾双光束强度近似相等, 干涉条纹对比度接近 1
- (4) 称中心暗条纹为 0 级暗纹, 往外依次是 1 级亮纹、1 级暗纹、2 级亮纹、2 级暗纹……
- (5) 等倾条纹内疏外密。这是因为 (简记 θ_t 为 θ):

$$\cos \theta_{n+1} - \cos \theta_n = \frac{\lambda}{2n_f d}, \quad \frac{\cos \theta_{n+1} - \cos \theta_n}{\theta_{n+1} - \theta_n} \approx \frac{d \cos \theta}{d\theta} = -\sin \theta_n \quad (3.63)$$

$$\Rightarrow \Delta r = r_{n+1} - r_n \propto \theta_{n+1} - \theta_n = -\frac{\lambda}{2d \sin \theta_{t,n}} \quad (3.64)$$

随着 n 的增大, 入射光指在薄膜 (半反射镜) 上的点由中心向外移动, θ 增大, 于是 $|\Delta r|$ 减小, 条纹逐渐变密。

- (6) 增加薄膜厚度, 条纹向外移动。薄膜厚度连续增大时, 中心位置强度周期性变化, 且不断生出新条纹向外移动, 可以利用这一特点精确测量薄膜厚度的改变量。

使用扩展光源 (有宽度光源) 时, 条纹对比度不受影响, 但条纹的强度增大, 干涉图样更加明亮。

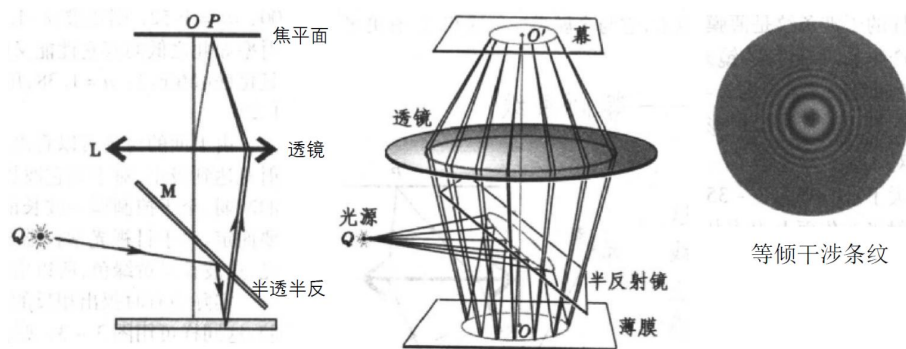


图 3.9: 等倾干涉实验装置

等倾干涉实验动图见链接 <https://www.123pan.com/s/0y0pTd-MgKj3>。

3.6.4 等厚干涉

等厚干涉, 也称等厚条纹干涉, 是指由薄膜厚度不均匀而引起的干涉现象, 产生的条纹是等厚位置的条纹, 例如劈尖干涉、牛顿环等。

劈尖干涉:

两块（几乎）平行的玻璃板，夹角为 θ 极小，中间是空气层，即薄膜是空气，观察反射光的干涉现象。由 $R_{F-P} = \frac{F \sin^2(\frac{\delta}{2})}{1 + F \sin^2(\frac{\delta}{2})}$ ，明条纹对应 $\frac{\delta}{2} = (k + \frac{1}{2})\pi$ ，暗条纹对应 $\frac{\delta}{2} = k\pi$ ，作近似 $n_f = 1$ ， $\cos \theta_f = 1$ ，得到：

$$\text{明条纹: } d = (1 + 2k) \cdot \frac{\lambda}{4}, \quad \text{暗条纹: } d = (2k) \cdot \frac{\lambda}{4}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.65)$$

$$\text{相邻亮(暗)纹: } \Delta d = \frac{\lambda}{2}, \quad \Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} \quad (3.66)$$

可借此求出夹在玻璃板之间引起 θ 角的细小物体的直径。

牛顿环:

把一个曲率半径很大的凸透镜至于平面玻璃片上，两者接触的地方形成厚度不均匀的空气薄膜，得到的干涉条纹是一系列同心圆环。设凸透镜的半径为 R ，以接触点为圆心 O ，类似劈尖干涉中的近似，得到：

$$\text{明条纹: } r = \sqrt{\left(k + \frac{1}{2}\right) R \lambda}, \quad \text{暗条纹: } r = \sqrt{k R \lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.67)$$

中心为 0 级暗纹，往外级数增大，干涉条纹逐渐变密。

3.6.5 迈克尔逊干涉**§ 3.7 迈克尔逊干涉与马赫曾德尔干涉****§ 3.8 光场的空间相干性与时间相干性****§ 3.9 多光束干涉****§ 3.10 激光**

参考文献

- [1] (美) Eugene Hecht 著; 秦克诚, 林福成译. *Optics*. 电子工业出版社, 北京, 5 edition, 6 2019.
- [2] 罗昌由. 电磁可控 goos-hänchen 位移理论研究. 博士论文, 湖南大学, 2015.

附录 A 波理论

光的真实本性是光学的全部讨论的中心问题，在本书中我们从头到尾都得对待这个问题。“光究竟是一种波动现象还是一种粒子现象？”这个似乎干脆利索的问题，远比它初看之下复杂得多。

因为对光的经典讨论和量子力学讨论都要用到波的数学描述，本章要为这两种表述所需要的东西打好基础。下面叙说的想法将用于一切物理波，从一杯茶的表面张力皱波，到从某个遥远的星系照到我们的光脉冲。

A.1 一维波

A.1.1 n 维波的概念

一维波指的是在一维空间中传播的波，或者可以看作在一维空间中传播的波。例如一束光在空间中传播，沿其传播方向建立 x 轴，则有 $E = E_0 e^{kx - \omega t}$ (具有正负)，这束光便可视为一维波。

一维波函数的最一般的形式：

$$\psi(x, t) = f(x - vt) = g(kx - \omega t) \quad (68)$$

具体而言，对于给定的波形 (波的形状)，我们只需令 $t = 0$ ，拍一张“照片” (例如 $\psi(x) = \frac{3}{10x^2 + 1}$)，得到 $\psi(x, 0) = f(x)$ ，然后将 $f(x)$ 中的 x 换为 $x - vt$ ，即可得到一个以速度 v (可为负) 向 x 轴正方向运动的波 $\psi(x, t) = f(x - vt) = g(kx - \omega t)$ 。

绳索的上下振动是在第二个维度上的，但振动导出的波仍是一维波。

A.1.2 波动方程

线性、各向同性、无损耗介质中的波动方程 (也称波动微分方程) 为：

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (69)$$

如果代表一个波的函数 ψ 是这个方程的解，它将同时是 $(x - vt)$ 的函数 (即 $kx - \omega t$ 的函数)，它还是一个可以同时 x 和 t 以非平庸方式求二次微商的函数。特别地，我们有结论： ψ 是一维波函数 $\iff \psi$ 是 $(x - vt)$ 的二次可微函数 $\iff \psi$ 是 $(kx - \omega t)$ 的二次可微函数。

A.2 谐波

A.2.1 相位和相速度

考虑任何一个一维波函数 $\psi(x, t) = A \cos(\phi(x, t)) = A \cos(kx - \omega t + \phi_0)$ ，其中 $\phi = kx + vt + \phi_0$ 称为相位， ϕ_0 称为初相 (也常用 ε 表示)。只要相位中的 kx 与 ωt 符号相反，即 $(kx - \omega t)$ 或 $(\omega t - kx)$ ，则波沿 x 轴正方向传播，否则沿 x 轴负方向。

A.2.2 谐波的概念

谐波，指简谐波、正弦波，其轮廓图是正弦曲线，是最简单的波形。在后续的傅里叶变换一节我们可以看到，任何波形都可以由谐波叠加合成，因此谐波具有特殊的意义。考虑如下波形：

$$\psi(x, t)|_{t=0} = \psi(x) = A \sin kx = f(x) \quad (70)$$

其中 $k > 0$ 是一个常数，称为传播数（空间角频率），且 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ （ λ 为波长）， A 称为波的振幅。

谐波函数有多种等价形式，其中最常见的是：

$$\psi(x, t) = A \sin(kx \mp \omega t), \quad \psi(x, t) = A \sin(\kappa(x \mp vt)) \quad (71)$$

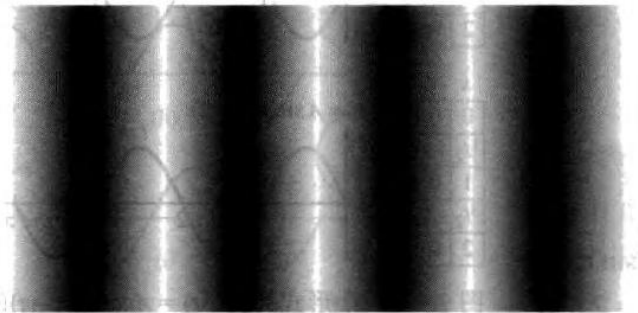
在本书中，如无特殊需求，我们都采用前者，也即 $\psi = A \sin(kx \mp \omega t)$ ，有时也采用 $\psi = A \cos(kx \mp \omega t)$ 。当然，三维谐波（在三维空间中传播的谐波）可写为：

$$\psi = \psi_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \mp \omega t) \quad (72)$$

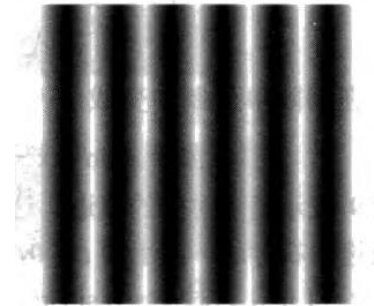
A.2.3 空间频率 κ 与空间角频率 k

光学中常用的长度单位是纳米 nm、微米 μm 和埃米 $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ 。本文规定，若无特殊情况，一般用 λ 表示波长， τ 或 T 表示周期， $\nu = \frac{1}{\tau}$ 表示时间频率， $\omega = 2\pi\nu$ 表示时间角频率，空间频率（波数） $\kappa = \frac{1}{\lambda}$ ，空间角频率（传播数） $k = 2\pi\kappa$ 。

光学信息可以以一种周期性方式散布在空间里，很像一个波的截图，我们可以将其视作静止（ $v = 0$ ）的波，并用空间频率 κ 来描述它们。



(a) 空间频率较低的正弦亮度分布



(b) 空间频率较高的正弦亮度分布

图 A.10: 正弦亮度分布

A.3 复数表示

在之后的学习会看到，用余弦或正弦函数描述波函数会带来很多不便，而复数表示在大多时候显得尤为有效，因此引入复数表示是极有必要的。在本书中，为表示某个变量（物理量）是复数，我们在其上加一波浪号，例如 \tilde{z} 或 \tilde{E} 。

习惯上，我们用复数的实部来描述谐波，例如将 $\psi = A \cos(kx - \omega t + \varepsilon)$ 写为 $\psi = \text{Re}[Ae^{i(kx - \omega t + \varepsilon)}]$ 。为了方便，常常把 Re 省略不写，即：

$$\psi(x, t) = Ae^{i\theta} = Ae^{i(kx - \omega t + \varepsilon)} \quad (73)$$

在后文，我们也采用此简写。需要时刻谨记，真实的波是实部，虚部没有物理意义。

另外，虽然复数表示在物理中十分常见，但应用它时需要时刻小心，只有运算限于加法、减法、乘除实数、对实变量进行微分和积分时，才能恢复实部。乘法运算（包括数乘、点乘和叉乘）必须仅与实数进行，否则会得出错误结论^⑩。例如 $\text{Re} \tilde{z}_1 \cdot \text{Re} \tilde{z}_2 \neq \text{Re}(\tilde{z}_1 \cdot \tilde{z}_2)$ ， $\text{Re} \tilde{\mathbf{A}}_1 \cdot \text{Re} \tilde{\mathbf{A}}_2 \neq \text{Re}(\tilde{\mathbf{A}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_2)$ 。

^⑩这里有一个疑问，在 2.7 节（全反射时的相位变化），推导反射光相位变化时，我们利用了 $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_i \cdot \lambda e^{i\delta}$ 所带来的相位变化，如何保证或说明这样做能得到正确的结果？

A.4 相矢量

相矢量（也称复振幅、旋转矢量）是将谐波 $\psi = Ae^{i(kx - \omega t + \varepsilon)}$ 中的位置变量 x 或时间变量 t 分离出来，以得到复平面上的矢量，常用于计算振幅^①等。

A.4.1 分离 x 并随 t 旋转

考虑谐波 $\psi = \psi_0 e^{i(kx - \omega t + \varepsilon)}$ ，对于任意给定的 x ，令 $\alpha = kx + \varepsilon$ ，谐波可写为 $\psi = \psi_0 e^{i(-\omega t + \alpha)} = (\psi_0 e^{i\alpha}) \cdot e^{i(-\omega t)}$ 是 t 的函数，则此时的相矢量定义为 $\psi_0 \angle \alpha = \psi_0 e^{i\alpha}$ ，也常记为 $\psi_0 \angle \alpha$ 。

相矢量是复平面中的一个矢量（即一个复数）， ψ_0 表示其模长， α 表示其幅角，真实的波是它在实轴上的投影。对于 $\psi = \psi_0 e^{i(-\omega t + \alpha)}$ ，随着 t 增大，波的相位减小，代表相矢量在复平面中顺时针旋转， ωt 即为沿顺时针旋转的角度。对于 $\psi = \psi_0 e^{i(\omega t + \alpha)}$ （也即沿 x 轴负方向传播的波），相矢量在复平面中逆时针旋转， ωt 即为沿逆时针转过的角度。也就是说，将 x （以及初相 ε ）分离为相矢量后，我们可以方便的研究 x 这一点上，波关于时间 t 的变化情况。

当然，对于波的正弦表示 $\psi = A \sin(kx - \omega t + \varepsilon)$ ，也可令 $\alpha = kx + \varepsilon$ ，得到相矢量 $\psi_0 \angle \alpha = \psi_0 e^{i\alpha}$ ，只不过此时真实的波是它在虚轴上的投影。

例如，振动 $E_1 = 5 \cos(-\omega t)$ ， $E_2 = 10 \sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$ 的相矢量分别为 $5 \angle 0$ ， $10 \angle \frac{\pi}{3}$ ，前者顺时针旋转，向实轴投影，后者逆时针旋转，向虚轴投影。

A.4.2 分离 t 并随 x 旋转

类似地，考虑谐波 $\psi = \psi_0 e^{i(kx \pm \omega t + \varepsilon)}$ 。对于任意给定的 t ，令 $\alpha = \pm \omega t + \varepsilon$ ，谐波可写为 $\psi = \psi_0 e^{i(kx + \alpha)} = (\psi_0 e^{i\alpha}) \cdot e^{i(kx)}$ 是 x 的函数，则此时的相矢量定义为 $\psi_0 \angle \alpha = \psi_0 e^{i\alpha}$ 。将 t 分离为相矢量后，我们可以方便的研究 t 这一时刻，波关于位置 x 的变化情况。

习惯上，我们只考虑 $\psi_0 e^{i(kx + \alpha)}$ ，而不考虑 $\psi_0 e^{i(-kx + \alpha)}$ 的情况，后者可以通过三角变换，等价的改变初相 ϕ_0 的值转化为前者。

例如，对振动 $E_3 = 5 \cos(kx)$ ， $E_4 = 10 \sin(kx + \frac{\pi}{2})$ ，其相矢量分别为 $5 \angle 0$ ， $10 \angle \frac{\pi}{2}$ ，两者都逆时针旋转，前者向实轴投影，后者向虚轴投影。

A.5 三维波动方程

在介绍波动方程之前，先给出本文默认的一些符号规定，以及一些运算符的定义。

A.5.1 内积、叉乘与矩阵乘法

在本文，一切矢量运算皆使用矩阵运算。并且，若无特殊说明，矢量都等价于列向量，也即下面两种写法等价：

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (74)$$

^①我们将在 3.1 节讨论波的叠加时使用相矢量，并讨论相矢量相加时所代表的意义

用点乘符号 ‘ \cdot ’ 表示两向量的内积，例如 $\mathbf{A}_1 = (A_{1,x}, A_{2,x}, A_{3,x})$ ， $\mathbf{A}_2 = (A_{1,y}, A_{2,y}, A_{3,y})$ ，则：

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = (A_{1,x}, A_{2,x}, A_{3,x}) \cdot (A_{1,y}, A_{2,y}, A_{3,y}) = \begin{bmatrix} A_{1,x} \\ A_{2,x} \\ A_{3,x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{1,y} \\ A_{2,y} \\ A_{3,y} \end{bmatrix} = A_{1,x}A_{1,y} + A_{2,x}A_{2,y} + A_{3,x}A_{3,y} \quad (75)$$

在后文，点乘符号 ‘ \cdot ’ 皆表示内积，叉乘符号 ‘ \times ’ 表示外积，矩阵乘法不用特殊符号，如有必要会使用 ‘ \odot ’ 来表示矩阵乘法。

A.5.2 微分算子

下面依次给出微分算子 ∇ 、拉普拉斯算子 Δ 和矢量微分的定义。

假设 $f = f(\mathbf{x})$ 是三维空间中的标量函数， $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) = (A_x(\mathbf{x}), A_y(\mathbf{x}), A_z(\mathbf{x}))$ 是三维空间中的矢量（数学上称为自变量为 3 维的 3 维向量值函数），设 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) (B_1(x, y, z), B_1(x, y, z), B_1(x, y, z))$ 是三个矢量构成的张量（可视为 3×3 矩阵），如下：

$$f = f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) \quad (76)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} A_x(\mathbf{x}) \\ A_y(\mathbf{x}) \\ A_z(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x(x, y, z) \\ A_y(x, y, z) \\ A_z(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{B}_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{B}_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1,x}(\mathbf{x}) & B_{1,y}(\mathbf{x}) & B_{1,z}(\mathbf{x}) \\ B_{2,x}(\mathbf{x}) & B_{2,y}(\mathbf{x}) & B_{2,z}(\mathbf{x}) \\ B_{3,x}(\mathbf{x}) & B_{3,y}(\mathbf{x}) & B_{3,z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (78)$$

定义微分算子 ∇ ：

$$\begin{aligned} \text{微分算子: } \nabla &= \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \\ \text{梯度: } \nabla f &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] \\ \text{广义梯度: } \nabla \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \nabla A_x \\ \nabla A_y \\ \nabla A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \text{旋度: } \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \text{广义旋度: } \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot \mathbf{B}_1 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_2 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_{1,x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{1,y}}{\partial y} + \frac{\partial B_{1,z}}{\partial z} \\ \frac{\partial B_{2,x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{2,y}}{\partial y} + \frac{\partial B_{2,z}}{\partial z} \\ \frac{\partial B_{3,x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{3,y}}{\partial y} + \frac{\partial B_{3,z}}{\partial z} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \end{aligned} \quad (80)$$

A.5.3 拉普拉斯算子

并以此定义拉普拉斯算子 Δ ：

$$\begin{aligned} \text{拉普拉斯算子: } \Delta &= \nabla \cdot (\nabla) = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \text{拉普拉斯运算: } \Delta f &= \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (81)$$

广义拉普运算: $\Delta \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A}) = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \nabla A_x \\ \nabla A_y \\ \nabla A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot (\nabla A_x) \\ \nabla \cdot (\nabla A_y) \\ \nabla \cdot (\nabla A_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}_{3 \times 1}$ (82)

也可理解为: $\Delta \mathbf{A} = \Delta \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}_{3 \times 1}$

例如, 对于三维空间中的矢量 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}) = (E_x(\mathbf{x}), E_y(\mathbf{x}), E_z(\mathbf{x}))$, 我们有:

$$\Delta \mathbf{E} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{E}) = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \nabla E_x \\ \nabla E_y \\ \nabla E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot (\nabla E_x) \\ \nabla \cdot (\nabla E_y) \\ \nabla \cdot (\nabla E_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (83)$$

A.5.4 矢量微分

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} \end{bmatrix} \quad (84)$$

A.5.5 波动方程

定义好上述工具后, 可以给出三维空间中的波动方程:

$$\Delta \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (85)$$

例如, 对矢量 \mathbf{E} , 上面方程表示:

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \iff \begin{bmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{bmatrix} = \frac{1}{v^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \Delta E_x = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \Delta E_y = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \Delta E_z = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{cases} \quad (86)$$

上面几种表示是等价的。

A.6 平面波、柱面波与球面波

平面波、柱面波与球面波是最具有实际意义的波形, 因为它们在最容易实现^②。

A.6.1 平面波

三维空间中的平面波^③:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A} \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \mp \omega t + \varepsilon)} \quad (87)$$

^②其推导详见参考文献 [1] 的 Page 47-56, 以及 知乎: 电磁波的平面波、柱面波和球面波的表达式与推导 (<https://zhuanlan.zhihu.com/p/693746762>), 这里不多赘述

^③平面波概念的引入详见参考文献 [1] 的 Page 30, 这里不再赘述

每个等相面由下式给出：

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \text{const} \quad (88)$$

此扰动的每个等相面（也称波阵面）都是一个平面，且波矢 \mathbf{k} 垂直于等相面， $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$ 时沿 \mathbf{k} 传播， $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t)$ 时沿 \mathbf{k} 的反方向传播。在一切三维波中，只有平面波（可以是谐波也可以是非谐波）穿过空间传播时其截面轮廓（等相面）保持不变。

有时， \mathbf{A} 是 \mathbf{x} 的函数，称为非均匀波（例如 2.5 节介绍的隐失波）。

A.6.2 球面波

在球坐标系 (r, ϕ, θ) 下，可以解得球面波方程：

$$\psi = \psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(r) \cdot e^{i(kr \mp \omega t + \varepsilon)} = \frac{\mathbf{A}}{r} \cdot e^{i(kr \mp \omega t + \varepsilon)} \quad (89)$$

每个波阵面（等相面）由下式给出：

$$kr = \text{const} \quad (90)$$

注意，任何球面波的振幅 ψ_0 都是 r 的函数，因为球面波的振幅随着距离的增加而减小（能量守恒的必然结果）。当它从原点向外传播时，波阵面是逐渐扩张为更大的圆。

A.6.3 柱面波

在柱坐标系 (r, θ, z) 下，可以解得柱面波方程：

$$\psi = \psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(r) \cdot e^{i(kr \mp \omega t + \varepsilon)} = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{r}} \cdot e^{i(kr \mp \omega t + \varepsilon)} \quad (91)$$

每个等相面由下式给出：

$$kr = \text{const} \quad (92)$$

平面波投射到具有细长狭缝的不透明屏幕上，就会通过此狭缝发出与柱面波相似的扰动，目前大多采用此方法产生柱面光波。

附录 B Matlab 代码

B.1 图 2.1 源码

```

1  %%%%%%%%% 空气入射玻璃 %%%%%%%%%
2  global n_i n_t
3  n_i = 1;
4  n_t = 1.5;
5
6  theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
7  r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
8  r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
9  t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
10 t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*
    cos(theta_i - theta_t) );
11 theta_B = atan(n_t/n_i);
12 theta_C = asin(n_t/n_i);
13
14 theta_array = linspace(-0.1, pi/2, 101);
15 Y = [
16     r_s(theta_array, theta_t(theta_array))
17     r_p(theta_array, theta_t(theta_array))
18     t_s(theta_array, theta_t(theta_array))
19     t_p(theta_array, theta_t(theta_array))
20 ];
21 stc = MyPlot(theta_array, Y);
22 xline(theta_B, 'b')
23 yline(0)
24 xlim([0, pi/2])
25 ylim([-1, 1])
26 stc.legend.String = ["$r_s$"; "$r_p$"; "$t_s$"; "$t_p$"; "$\theta_i = \theta_B$"];
27 stc.legend.Interpreter = "latex";
28 stc.legend.FontSize = 14;
29 stc.legend.Location = "southwest";
30 stc.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
31 stc.axes.Title.Interpreter = "latex";
32 stc.label.x.String = '$\theta_i$';
33 stc.label.y.String = '$r$';
34 stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
35 stc.plot.plot_3.Color = 'b';
36 stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
37 stc.plot.plot_4.Color = [1 0 1];
38 %MyExport_pdf
39
40 %%%%%%%%% 玻璃入射空气 %%%%%%%%%
41 n_i = 1.5;
42 n_t = 1;
43

```

```

44 theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
45 r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
46 r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
47 t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
48 t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*
    cos(theta_i - theta_t) );
49 theta_B = atan(n_t/n_i);
50 theta_C = asin(n_t/n_i);
51
52
53 theta_array = linspace(0, theta_C, 101);
54 Y = [
55     r_s(theta_array, theta_t(theta_array))
56     r_p(theta_array, theta_t(theta_array))
57     t_s(theta_array, theta_t(theta_array))
58     t_p(theta_array, theta_t(theta_array))
59 ];
60 stc = MyPlot(theta_array, Y);
61 xline(theta_B, 'b')
62 xline(theta_C, 'r')
63 yline(0)
64 xlim([0, pi/2])
65 ylim([-0.5, 3])
66 stc.legend.String = ["$r_s$"; "$r_p$"; "$t_s$"; "$t_p$"; "$\theta_i = \theta_B$"; "$\theta_i = \theta_C$"];
67 stc.legend.Interpreter = "latex";
68 stc.axes.Title.String = '$n_i = 1.5 > n_t = 1$';
69 stc.axes.Title.Interpreter = "latex";
70 stc.label.x.String = '$\theta_i$';
71 stc.label.y.String = '$r$';
72 stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
73 stc.plot.plot_3.Color = 'b';
74 stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
75 stc.plot.plot_4.Color = [1 0 1];
76 %MyExport_pdf

```

B.2 图 2.6 源码

```

1 global n_i n_t
2 %%%%%%%%% 反射折射光振幅与能量变化 (空气入射玻璃) %%%%%%%%%
3 MyColor = num2cell( ...
4     [
5     "#ff8080" "#ff0000" "#990000" "#190000"
6     "#80ff80" "#00ff00" "#009900" "#001900"
7     "#8080ff" "#0000ff" "#000099" "#000019"
8     "#ff80ff" "#ff00ff" "#990099" "#190019"
9     "#ffff80" "#ffff00" "#999900" "#191900"
10    "#80ffff" "#00ffff" "#009999" "#001919"

```



```

11 "#####" "#####" "#####" "#191919"
12     ]...
13 );
14 n_i = 1;
15 n_t = 1.5;
16
17 theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
18 r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
19 r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
20 t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
21 t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*
    cos(theta_i - theta_t) );
22 theta_B = atan(n_t/n_i);
23 theta_C = asin(n_t/n_i);
24
25 theta_array_2 = linspace(-0.1, pi/2, 101);
26 Y = [
27     r_s(theta_array_2, theta_t(theta_array_2))
28     r_p(theta_array_2, theta_t(theta_array_2))
29     t_s(theta_array_2, theta_t(theta_array_2))
30     t_p(theta_array_2, theta_t(theta_array_2))
31     r_s(theta_array_2, theta_t(theta_array_2)).^2
32     r_p(theta_array_2, theta_t(theta_array_2)).^2
33     0.5 * ( r_s(theta_array_2, theta_t(theta_array_2)).^2 + r_p(theta_array_2, theta_t
    (theta_array_2)).^2 )
34 ];
35
36 stc = MyPlot(theta_array_2, Y);
37 yline(0, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 1)
38 xline(theta_B, 'Color', [0 1 1], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.7)
39 xlim([0, pi/2])
40 ylim([-1, 1])
41 stc.legend.Interpreter = 'latex';
42 stc.legend.FontSize = 15;
43 stc.legend.Location = 'southwest';
44 stc.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
45 stc.axes.Title.Interpreter = 'latex';
46 stc.label.x.String = '$\theta_i$';
47 stc.label.y.String = '$y$';
48 %stc.legend.String = ['$y=r_s$'; '$y=r_p$'; '$y=t_s$'; '$y=t_p$'; '$y=R_s$'; '$y=R_p$
    '; '$y=R$'; '$y=0$'; '$\theta_i = \theta_B$'];
49 stc.legend.Visible = 'off';
50
51 stc.plot.plot_2.LineStyle = "-";
52 stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
53 stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
54 stc.plot.plot_5.LineStyle = "--";
55 %stc.plot.plot_5.LineWidth = 0.7;
56 stc.plot.plot_6.LineStyle = "--";

```

```

57 %stc.plot.plot_6.LineWidth = 0.7;
58 stc.plot.plot_7.LineStyle = "-";
59
60 stc.plot.plot_1.Color = MyColor{4, 2};
61 stc.plot.plot_3.Color = MyColor{4, 1};
62 stc.plot.plot_5.Color = MyColor{4, 3};
63 stc.plot.plot_2.Color = MyColor{3, 2};
64 stc.plot.plot_4.Color = MyColor{3, 1};
65 stc.plot.plot_6.Color = MyColor{3, 3};
66 stc.plot.plot_7.Color = [1 0 0];
67 %MyExport_pdf
68 %MyExport_pdf_docked
69 %MyExport_svg_docked
70
71
72 %%%%%%%%% 反射折射光振幅与能量变化 (玻璃入射空气) %%%%%%%%%
73 n_i = 1.5;
74 n_t = 1;
75
76 theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
77 r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
78 r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
79 t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
80 t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*
    cos(theta_i - theta_t) );
81 theta_B = atan(n_t/n_i);
82 theta_C = asin(n_t/n_i);
83
84 theta_array_2 = linspace(-0.1, theta_C, 250);
85 theta_array_all = [linspace(-0.1, 0.65, 100), linspace(0.65, 0.74, 50), linspace(0.74,
    pi/2, 100)];
86
87 X = [
88     theta_array_all
89     theta_array_all
90     theta_array_all
91     theta_array_all
92     theta_array_all
93     theta_array_all
94     theta_array_all
95 ];
96
97 Y = [
98     (theta_array_all < theta_C).*r_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)) + (
99     theta_array_all > theta_C).*abs(r_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)))
100     (theta_array_all < theta_C).*r_p(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)) + (
101     theta_array_all > theta_C).*abs(r_p(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)))
102     abs( t_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)) )
103     abs( t_p(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)) )

```

```

102     abs(r_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all))).^2
103     abs(r_p(theta_array_all, theta_t(theta_array_all))).^2
104     0.5 * ( abs(r_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all))).^2 + abs(r_p(
theta_array_all, theta_t(theta_array_all))).^2    )
105 ];
106
107 stc = MyPlot(X, Y);
108 yline(0, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 1)
109 xline(theta_B, 'Color', [0 1 1], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.7)
110 xline(theta_C, 'Color', [0 1 0], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.7)
111 xlim([0, pi/2])
112 ylim([-0.5, 3])
113     stc.leg.Interpreter = 'latex';
114     stc.leg.FontSize = 14;
115     stc.leg.Location = 'northwestoutside';
116     stc.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
117     stc.axes.Title.Interpreter = "latex";
118     stc.label.x.String = '$\theta_i$';
119     stc.label.y.String = '$y$';
120     stc.leg.String = ["$y=r_s$"; "$y=r_p$"; "$y=t_s$"; "$y=t_p$"; "$y=R_s$"; "$y=R_p$";
"$y=R$"; "$y=0$"; "$\theta_i = \theta_B$"; "$\theta_i = \theta_C$"];];
121
122     stc.plot.plot_2.LineStyle = "-";
123     stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
124     stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
125     stc.plot.plot_5.LineStyle = "--";
126     %stc.plot.plot_5.LineWidth = 0.7;
127     stc.plot.plot_6.LineStyle = "--";
128     %stc.plot.plot_6.LineWidth = 0.7;
129     stc.plot.plot_7.LineStyle = "-";
130
131     stc.plot.plot_1.Color = MyColor{4, 2};
132     stc.plot.plot_3.Color = MyColor{4, 1};
133     stc.plot.plot_5.Color = MyColor{4, 3};
134     stc.plot.plot_2.Color = MyColor{3, 2};
135     stc.plot.plot_4.Color = MyColor{3, 1};
136     stc.plot.plot_6.Color = MyColor{3, 3};
137     stc.plot.plot_7.Color = [1 0 0];
138 %MyExport_pdf
139 %MyExport_pdf_docked
140 %MyExport_svg_docked

```

B.3 图 2.7 源码

```

1 global n_i n_t n_ti theta_B theta_C
2
3 %%%%%%%%% 反射光相位增量 (空气入射玻璃) %%%%%%%%%
4 n_i = 1;

```

```

5  n_t = 1.5;
6  n_ti = n_t/n_i;
7  theta_B = atan(n_ti);
8
9  theta_array_2 = linspace(0, pi/2-0.001, 200);
10
11 delta_r_s = @(t) -pi ;
12 delta_r_p = @(t) (-pi).*(t > theta_B).*( t < pi/2);
13
14 delta_r_s_kongqi = delta_r_s(theta_array_2);
15 delta_r_p_kongqi = delta_r_p(theta_array_2);
16
17 Y = [
18     zeros(size(theta_array_2)) - pi;
19     delta_r_p_kongqi;
20 ];
21
22 stc1 = MyPlot(theta_array_2, Y([1 2], :));
23 xlim([0, pi/2])
24 yline(0, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
25 xline(theta_B, 'Color', [0 1 1], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
26 xline(pi/2, '--');
27 stc1.plot.plot_2.LineStyle = '--';
28 stc1.legend.String = ["$\delta = \delta_{r,s}$"; "$\delta = \delta_{r,p}$"; "$\delta = 0$";
29     "$\theta_i = \theta_B$"];
30 stc1.label.x.String = '$\theta_i$';
31 stc1.label.y.String = '$\delta$';
32 stc1.axes.Title.Interpreter = 'latex';
33 stc1.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
34 %MyExport_pdf
35 %%%%%%%%% 反射光相位增量 (玻璃入射空气) %%%%%%%%%
36 n_i = 1.5;
37 n_t = 1;
38 n_ti = n_t/n_i;
39 theta_B = atan(n_ti);
40 theta_C = asin(n_ti);
41
42
43 delta_r_s = @(t) (t>theta_C).*2.*atan( -(sqrt(sin(t).^2 - n_ti^2))./cos(t) ) ;
44 delta_r_p = @(t) ...
45     (t<theta_B).*(-pi) ...
46     + (theta_B<t).*(t<theta_C).*0 ...
47     + (theta_C<t).*( -2*atan( (sqrt(sin(t).^2 - n_ti^2))./(n_ti^2.*cos(t)) ) );
48
49 Y = [
50     zeros(size(theta_array_2)) - pi;
51     delta_r_p_kongqi;
52     delta_r_s(theta_array_2);

```

```

53     delta_r_p(theta_array_2);
54 ];
55
56
57 stc2 = MyPlot(theta_array_2, Y([3 4], :));
58 xlim([0, pi/2])
59 yline(0, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
60 xline(theta_B, 'Color', [0 1 1], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
61 xline(theta_C, 'Color', [0 1 0], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
62 xline(pi/2, '--');
63 stc2.plot.plot_2.LineStyle = '--';
64 stc2.legend.String = ["$\delta = \delta_{r,s}$"; "$\delta = \delta_{r,p}$"; "$\delta = 0$";
    "$\theta_i = \theta_B$"; "$\theta_i = \theta_C$"];
65 stc2.legend.Location = 'northeast';
66 stc2.label.x.String = '$\theta_i$';
67 stc2.label.y.String = '$\delta$';
68 stc2.axes.Title.Interpreter = 'latex';
69 stc2.axes.Title.String = '$n_i = 1.5 > n_t = 1$';
70 %MyExport_pdf

```

B.4 图 2.8 源码

```

1  %%%%%%%%% 隐失波的穿透深度和 GH Shift (玻璃入射空气) %%%%%%%%%
2  global lambda n_i n_t
3  n_i = 1.5;
4  n_t = 1;
5  lambda = 550 * 10^(-9);    % 550.0 nm 的绿色光
6  delta = @(t) 1 ./ ( 2*pi*sqrt( sin(t).^2 - n_ti^2 )/lambda );
7  Delta_x = @(t) 2*delta(t).*tan(t);
8
9  theta_array_1 = linspace(theta_C, pi/2, 200);
10 theta_array_2 = linspace(theta_C, pi/2-0.05, 200);
11
12
13 X = [
14     theta_array_1
15     theta_array_2
16 ];
17 Y = [
18     delta(theta_array_1)/lambda
19     Delta_x(theta_array_2)/lambda
20 ];
21
22 stc = MyPlot(X, Y);
23 xlim([theta_C - 0.05, pi/2+0.02])
24 yline(1, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
25 xline(theta_C, 'Color', [0 1 0], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
26 stc.legend.String = ["$y = \delta / \lambda$"; "$y = \Delta x / \lambda$"; "$y = 1$"; "$\

```

```

theta_i = \theta_C$"; "$\theta_i = \frac{\pi}{2}$";
27 stc.label.x.String = '$\theta_i$';
28 stc.label.y.String = '$y$';
29 xlim([theta_C - 0.05, pi/2])
30
31 %MyExport_pdf_docked

```

B.5 图 3.2 源码

```

1 %%%%%%%%% 单个球面波源在平面上的振荡 (导出为 gif) %%%%%%%%%
2 clc,clear,close all;
3 global lambda k omega X_OA A
4
5 lambda = 550.0 * 10^(-9); % 单位: m
6 k = 5; % k 取决于光的波长, 但在可视化中不妨令为 1
7 omega = 1; % omega 取决于光的波长, 但在可视化中不妨令为 1
8 X_OA = [ 0, 0]; % 球面波源 A 的位置
9 A = 50; % r = 1 时的振幅
10 E_A0 = @(x, y) A./sqrt((x - X_OA(1)).^2 + (y - X_OA(2)).^2); % x 位置的振幅, 输入的
    X_array 为一列行向量
11 alpha_A = @(x, y) k*sqrt((x - X_OA(1)).^2 + (y - X_OA(2)).^2);
12 vib = @(E_0, t, alpha) E_0.*cos(-omega*t + alpha); % 振荡函数
13
14 R_array = linspace(2, 10, 100);
15 theta_array = transpose(linspace(0, 2*pi, 50));
16 x_matrix = R_array .* cos(theta_array) + X_OA(1);
17 y_matrix = R_array .* sin(theta_array) + X_OA(2);
18 E_A0_matrix = E_A0(x_matrix, y_matrix);
19 alpha_A_matrix = alpha_A(x_matrix, y_matrix);
20
21 stc = MyMesh(x_matrix, y_matrix, vib(E_A0_matrix, 0, alpha_A_matrix), 1);
22 stc.label_left.z.String = '$E$';
23
24
25 figure
26 h1 = surf(x_matrix, y_matrix, E_A0_matrix, 'EdgeColor', 'interp', FaceColor='interp');
27 hold on
28 surf([X_OA(1) X_OA(1)], [X_OA(2) X_OA(2)], [30 -30; 30 -30])
29 colormap(redblue);
30 zlim([-35 35]);
31 xlim([X_OA(1) - R_array(end), X_OA(1) + R_array(end)])
32 ylim([X_OA(2) - R_array(end), X_OA(2) + R_array(end)])
33 drawnow
34
35 t_array = linspace(0, 20, 200);
36 for i = 1:length(t_array)
37     h1.ZData = vib(E_A0_matrix, t_array(i), alpha_A_matrix);
38     f(i) = getframe(gcf);

```

```

39 end
40
41 numFrames = length(t_array);
42 animated(1,1,1,numFrames) = 0;
43 for i = 1:numFrames
44     if i == 1
45         [animated,cmap] = rgb2ind(f(i).cdata,256,'nodither');
46     else
47         animated(:,:,1,i) = rgb2ind(f(i).cdata,cmap,'nodither');
48     end
49 end
50 filename = '单个球面波源在平面上的振荡.gif';
51 imwrite(animated,cmap,filename,'DelayTime',1/30,'LoopCount',inf);
52 web(filename)

```

B.6 图 3.3 源码

```

1 %%%%%%%%% 两个球面波源在平面上的干涉情况 (导出为 gif) %%%%%%%%%
2
3 clc, clear, close all;
4 global lambda k omega X_OA X_OB A B
5
6 lambda = 550.0 * 10^(-9); % 单位: m
7 k = 5; % k 取决于光的波长, 但在可视化中不妨令为 1
8 omega = 1; % omega 取决于光的波长, 但在可视化中不妨令为 1
9 X_OA = [-2, 0]; % 球面波源 A 的位置
10 X_OB = [ 2, 0]; % 球面波源 B 的位置
11 A = 50; % r = 1 时 A 的振幅
12 B = 50; % r = 1 时 B 的振幅
13
14 E_A0 = @(x, y) A./sqrt((x - X_OA(1)).^2 + (y - X_OA(2)).^2); % X 位置的振幅, 输入的
    X_array 为一列行向量
15 E_B0 = @(x, y) B./sqrt((x - X_OB(1)).^2 + (y - X_OB(2)).^2); % X 位置的振幅, 输入的
    X_array 为一列行向量
16 alpha_A = @(x, y) k*sqrt((x - X_OA(1)).^2 + (y - X_OA(2)).^2);
17 alpha_B = @(x, y) k*sqrt((x - X_OB(1)).^2 + (y - X_OB(2)).^2);
18 E_0 = @(E_A0, alpha_A, E_B0, alpha_B) sqrt(E_A0.^2 + E_B0.^2 + 2*E_A0.*E_B0.*cos(
    alpha_A - alpha_B));
19 vib = @(E_0, t, alpha) E_0.*cos(-omega*t + alpha); % 振荡函数
20
21 R_array = linspace(4, 20, 80);
22 theta_array = transpose(linspace(0, 2*pi, 30));
23 x_matrix = R_array .* cos(theta_array);
24 y_matrix = R_array .* sin(theta_array);
25 %E_0_matrix = E_A0(x_matrix, y_matrix);
26
27 E_A0_matrix = E_A0(x_matrix, y_matrix);
28 E_B0_matrix = E_B0(x_matrix, y_matrix);

```

```

29 alpha_A_matrix = alpha_A(x_matrix, y_matrix);
30 alpha_B_matrix = alpha_B(x_matrix, y_matrix);
31 E_0_matrix = E_0(E_A0_matrix, alpha_A_matrix, E_B0_matrix, alpha_B_matrix);
32 alpha_matrix = GetAlpha(E_0_matrix, E_A0_matrix, alpha_A_matrix, E_B0_matrix,
    alpha_B_matrix);
33
34 MyMesh(x_matrix, y_matrix, vib(E_A0_matrix, 0, alpha_A_matrix), 1);
35 MyMesh(x_matrix, y_matrix, vib(E_B0_matrix, 0, alpha_B_matrix), 1);
36 MyMesh(x_matrix, y_matrix, vib(E_0_matrix, 0, alpha_matrix), 1);
37
38
39 figure
40 set(gca, 'NextPlot', 'replaceChildren', 'box', 'on', 'color', 'w');
41
42 h = mesh(x_matrix, y_matrix, E_0_matrix, 'EdgeColor', 'interp', 'FaceColor='interp'
    );
43 hold on
44 surf([X_OA(1) X_OA(1)], [X_OA(2) X_OA(2)], [40 -40; 40 -40])
45 surf([X_OB(1) X_OB(1)], [X_OB(2) X_OB(2)], [40 -40; 40 -40])
46 hold off
47 view([45, 30])
48 colormap(redblue);
49 zlim([-35 35]);
50 xlim([-R_array(end), R_array(end)])
51 ylim([-R_array(end), R_array(end)])
52 drawnow
53
54 t_array = linspace(0, 20, 200);
55 numFrames = length(t_array);
56 for i = 1:numFrames
57     h.ZData = vib(E_0_matrix, t_array(i), alpha_matrix);
58     f(i) = getframe(gcf);
59 end
60
61 animated(1,1,1,numFrames) = 0;
62 for i = 1:numFrames
63     if i == 1
64         [animated,cmap] = rgb2ind(f(i).cdata,256,'nodither');
65     else
66         animated(:,:,1,i) = rgb2ind(f(i).cdata,cmap,'nodither');
67     end
68 end
69 filename = '两个球面波源在平面上的干涉情况.gif';
70 imwrite(animated,cmap,filename,'DelayTime',1/20,'LoopCount',inf);
71 web(filename)

```


B.7 图 3.4 (b) 与图 3.5 源码

```

1  %%%%%%%%% 杨氏双缝振幅分布即近似模型误差分析 %%%%%%%%%
2  clc,clear,close all
3
4  global vare_0 mu_0 lambda I_1 d D R A k E_0 E_0_appro r r_1 r_2
5
6
7  vare_0 = 8.854187817 * 10^(-12);
8  mu_0 = 4*pi * 10^(-7);
9  A = 50;
10 I_1 = 50;
11 d = 100 * 10^(-6);
12 R = 5 * 10^(-2);
13 D = 1;
14 lambda = 700 * 10^(-9); % 700.0 nm 的红光
15 k = 2*pi/lambda;
16
17 r = @(x) sqrt( x.^2 + D^2 );
18 r_1 = @(x) sqrt( (x - d/2).^2 + D^2 );
19 r_2 = @(x) sqrt( (x + d/2).^2 + D^2 );
20 E_0 = @(r_1, r_2) A * sqrt( 1./r_1 + 1./r_2 + 2./sqrt(r_1.*r_2).*cos( k.*(r_1 - r_2)
    ) );
21 E_0_appro = @(x) sqrt(2./r(x))*A .* sqrt( 1 + cos(k*x*d/D) );
22 %I = @(r_1, r_2) A^2 * sqrt(vare_0/mu_0) * ( 0.5*(1./r_1 + 1./r_2) + cos(k*(r_1 - r_2)
    )/sqrt(r_1.*r_2));
23 I = @(r_1, r_2) 0.5 * sqrt(vare_0/mu_0) * E_0(r_1, r_2).^2;
24 I_appro = @(x) 0.5 * sqrt(vare_0/mu_0) * E_0_appro(x).^2;
25
26 x_array = linspace(-0.02, 0.02, 1000);
27 r_array = r(x_array);
28 r_1_array = r_1(x_array);
29 r_2_array = r_2(x_array);
30 E_0_array = E_0(r_1_array, r_2_array);
31 E_0_appro_array = E_0_appro(x_array);
32 I_array = I(r_1_array, r_2_array);
33 I_appro_array = I_appro(x_array);
34
35 plot_E = MyPlot(x_array, [E_0_array; E_0_appro_array]);
36 plot_E.label.y.String = '$E_0$';
37 plot_E.legend.Location = 'northeast';
38 plot_E.legend.String = ["$E_{0,\mathrm{exact}}$"; "$E_{0,\mathrm{appro}}$"];
39 %MyExport_pdf
40 plot_I = MyPlot(x_array, [I_array; I_appro_array]);
41 plot_I.label.y.String = '$I$';
42 plot_I.legend.Location = 'northeast';
43 plot_I.legend.String = ["$I_{\mathrm{exact}}$"; "$I_{\mathrm{appro}}$"];
44 %MyExport_pdf
45 stc_E = MyErrorAnalyzer(E_0_array, E_0_appro_array, 1);

```

```

46 stc_I = MyErrorAnalyzer(I_array, I_appro_array, 1);
47
48 stc_funcerror_E = MyErrorAnalyzer_func(@(x) E_0(r_1(x), r_2(x)), @(x) E_0_appro(x),
49     [-0.02, 0.02]);
50
51 stc_funcerror_I = MyErrorAnalyzer_func(@(x) I(r_1(x), r_2(x)), @(x) I_appro(x),
52     [-0.02, 0.02]);
53
54
55 stc_yy = MyYYPlot(x_array, stc_E.ResidualError, x_array, stc_I.ResidualError);
56 stc_yy.label.y_left.String = '$\hat{\theta}_E$';
57 stc_yy.label.y_right.String = '$\hat{\theta}_I$';
58
59 stc_yy.legend.String = ["$\theta_E = E_0 - \hat{E}_0$"; "$\theta_I = I - \hat{I}$"];
60 stc_yy.p_left.LineStyle = 'none';
61 stc_yy.p_left.Marker = '.';
62 stc_yy.p_left.MarkerSize = 3;
63 stc_yy.p_right.LineStyle = 'none';
64 stc_yy.p_right.Marker = '.';
65 stc_yy.p_right.MarkerSize = 3;
66 %MyExport_pdf_modal
67
68 function stc_error = MyErrorAnalyzer(Y, Y_hat, num_var)
69
70 stc_error.size_Y = size(Y);
71 length_Y = length(Y); stc_error.length_Y = length_Y;
72
73 % 数据准备
74 Y_bar = mean(Y); stc_error.Y_bar = mean(Y);
75 stc_error.Y_hat_bar = mean(Y_hat);
76
77
78 % 残差分布
79 ResidualError = Y - Y_hat; stc_error.ResidualError = Y - Y_hat;
80 stc_error.ResidualScatter = scatter(1:length(Y), ResidualError, 30, 'blue.');

```

```

92     disp(['RS_standard = ', num2str(stc_error.RS_standard, '%.10f')]);
93     disp(['RSS_standard = ', num2str(stc_error.RSS_standard, '%.10f')]);
94 end
95
96 function stc_error = MyErrorAnalyzer_func(f, f_hat, X_range)
97 % 标准面积误差
98     stc_error.AE_standard = integral( @(x) abs(f(x) - f_hat(x)), X_range(1), X_range(2)
99         ) / integral( @(x) abs(f(x)), X_range(1), X_range(2) );
100     disp(['AE_standard = ', num2str(stc_error.AE_standard, '%.10f')]);
end

```

B.8 图 3.6 源码

```

1  %%%%%%%%%% 光源宽度影响对比度位置分布 %%%%%%%%%%
2  global I_max d lambda R D Delta_x u
3
4  d = 100 * 10^(-6);
5  R = 5 * 10^(-2);
6  D = 1;
7  lambda = 700 * 10^(-9); % 700.0 nm 的红光
8  Delta_x = D*lambda/d;
9  I_max = 2;
10
11  I = @(x, b) I_max/2 .* ( 1 + sin( pi*d/(lambda*R)*b ) ./ ( pi*d/(lambda*R)*b ) .* cos
12      (2*pi*x/Delta_x) );
13  u = @(b) pi*d/(lambda*R) * b;
14  gamma = @(b) abs( sin(u(b))./u(b) );
15
16 % I = I(x, b)
17 x_array = linspace(-0.02, 0.02, 300);
18 b_array = transpose(linspace(0, 5*lambda*R/d, 50));
19 stc1 = MyMesh(x_array, b_array, I(x_array, b_array));
20 stc1.label_left.y.String = '$b$';
21 stc1.label_left.z.String = '$I(x, b)$';
22 stc1.label_right.y.String = '$b$';
23 stc1.label_right.z.String = '$I(x, b)$';
24 %MyExport_pdf_modal
25
26 % 干涉条纹对比度
27 b_array = transpose(linspace(0, 5*lambda*R/d, 200));
28 stc2 = MyPlot(b_array', gamma(b_array));
29 xline(lambda*R/d, 'LineWidth', 0.5, 'Color', [1 0 0]);
30 ylim([0, 1])
31 stc2.label.x.String = '$b$';
32 stc2.label.y.String = '$\gamma = \gamma(b)$';
33 stc2.leg.String = ["$\gamma = \gamma(b)$"; "$b = \lambda R / d$"];
34 %MyExport_pdf_modal

```

B.9 图3.8 源码

```

1  %%%%%%%%% 精细度对透射率的影响 %%%%%%%%%
2  clc, clear, close all;
3  F = @(R) 4*R ./ (1-R).^2;
4  T_FP = @(delta, F) 1 ./ ( 1 + sin(delta/2).^2 .* F );
5  F_array = linspace(0, 40, 50);
6  delta_array = linspace(0, 10*pi, 200);
7
8  MyPlot(linspace(0, 0.9,100), F(linspace(0, 0.9,100)));
9  stc = MySurf(delta_array, F_array, T_FP(delta_array, F_array));
10 stc.label_left.x.String = '$\delta$';
11 stc.label_left.y.String = '$F$';
12 stc.label_left.z.String = '$T_{F-P} = T_{F-P}(\delta, F)$';
13 stc.label_right.x.String = '$\delta$';
14 stc.label_right.y.String = '$F$';
15 %MyExport_pdf_docked
16
17 MyPlot(delta_array, T_FP(delta_array, 2));
18 MyPlot(delta_array, T_FP(delta_array, 10));
19 MyPlot(linspace(0, 10*pi, 1000), T_FP(linspace(0, 10*pi, 1000), 400));

```