

数学物理方法课程作业

Homework of Mathematical Physics Methods

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

序言

本文为笔者本科时的“数学物理方法”课程作业 (Homework of Mathematical Physics Methods, 2024.9-2025.1)。由于个人学识浅陋, 认识有限, 文中难免有不妥甚至错误之处, 望读者不吝指正, 在此感谢。

我的邮箱是 dingyi233@mails.ucas.ac.cn。

目录

序言	I
目录	I
1 2024.8.26 - 2024.9.1	1
2 2024.9.2 - 2024.9.8	3
3 2024.9.9 - 2024.9.15	6
4 2024.9.16 - 2024.9.22	9
5 2024.9.23 - 2024.9.29	11

Homework 1: 2024.8.26 - 2024.9.1

1.1 计算

(1) $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{(1+i)(2+i)}{5}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{-8+6i}{25}$$

(2) $(1+i)^n + (1-i)^n$

首先得到:

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad 1-i = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$

$$\implies I = 2^{\frac{n}{2}} (e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}})$$

于是有:

$$I = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}+1}, & n = 0 + 4k \\ 2^{\frac{n+1}{2}}, & n = 1 + 4k \\ 0, & n = 2 + 4k \\ -2^{\frac{n}{2}+1}, & n = 3 + 4k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}$$

习题课补:

$$I = 2^{\frac{n}{2}} (e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}})$$

$$= 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\frac{n\pi}{4} + \cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right) \right)$$

$$= 2^{\frac{n}{2}+1} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

(3) $\sqrt[4]{1+i}$

$$\sqrt[4]{1+i} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{\pi}{16}}$$

习题课补: 在复数域中, 开根号是多值函数, 这里四次根在复数域中应有四个复根, 设 $x = \sqrt[4]{1+i}$, 则原式等价于方程:

$$x^4 = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \implies |x| = 2^{\frac{1}{8}}, \quad \arg x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3$$

1.2 将复数化为三角或指数形式

(1) $\frac{5}{-3+i}$

$$\frac{5}{-3+i} = \frac{5e^{i0}}{\sqrt{10}e^{i(\arctan(-\frac{1}{3})+\pi)}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot e^{-i(\arctan(-\frac{1}{3})+\pi)}$$

(2) $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$

$$\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}e^{i\arctan(\frac{1}{2})}}{\sqrt{13}e^{i\arctan(-\frac{2}{3})}}\right)^2 = \frac{5}{13}e^{2i(\arctan(\frac{1}{2})-\arctan(-\frac{2}{3}))}$$

1.3 求极限 $\lim_{z \rightarrow i} \frac{1+z^6}{1+z^{10}}$

作不完全因式分解:

$$1+z^6 = z^6 - i^6 = (z^3 - i^3)(z^3 + i^3) = (z-i)(z^2 + iz + i^2)(z^3 + i^3)$$

$$\begin{aligned}
1 + z^{10} &= z^{10} - i^{10} = (z^5 - i^5)(z^5 + i^5) = (z - i)(z^4 + iz^3 + i^2z^2 + i^3z + i^4)(z^5 + i^5) \\
\Rightarrow L &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1 + z^6}{1 + z^{10}} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z - i)(z^2 + iz + i^2)(z^3 + i^3)}{(z - i)(z^4 + iz^3 + i^2z^2 + i^3z + i^4)(z^5 + i^5)} \\
&= \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z^2 + iz + i^2)(z^3 + i^3)}{(z^4 + iz^3 + i^2z^2 + i^3z + i^4)(z^5 + i^5)} \\
&= \frac{(-3) \times (-2i)}{5i} = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

事实上, 实数域上的洛必达法则 (L'Hospital) 可以推广到复数域的解析函数, 下面给出 $\frac{0}{0}$ 型的证明。设复变函数 $f(z), g(z)$ 在 $z = z_0$ 解析, 且 $f(z_0) = g(z_0) = 0$, 则有:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

特别地, 若 $f'(z_0)$ 与 $g'(z_0)$ 存在且不为零, 就有 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$

1.4 讨论函数在原点的连续性

$$(1) f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2i} \left(\frac{z}{z^*} - \frac{z^*}{z} \right), & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

令 $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$, 则 $\forall (x, y) \neq (0, 0)$:

$$f(x, y) = \frac{1}{2i} \left(\frac{x + iy}{x - iy} - \frac{x - iy}{x + iy} \right) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{4ixy}{x^2 + y^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

令 $k = \frac{y}{x}$, 则:

$$L = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{2k}{1 + k^2}$$

显然, L 随着 k 的变化而变化, 因此极限不存在, $f(z)$ 在 0 处不连续。

$$(2) f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Im} z}{1 + |z|}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

令 $z = x + iy$ 和 $k = \frac{y}{x}$, 则 $\forall (x, y) \neq (0, 0)$:

$$f(x, y) = \frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \frac{0}{1 + 0} = 0 = f(0, 0)$$

因此 $f(z)$ 在 0 处连续。

$$(3) f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z^2}{|z|^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

同理令 $z = x + iy$ 和 $k = \frac{y}{x}$, 则 $\forall (x, y) \neq (0, 0)$:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}$$

因此 $f(z)$ 在 0 处不连续。

1.5 恒等式证明 (附加题)

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^n |b_i|^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i b_j^* - a_j b_i^*|^2$$

Homework 2: 2024.9.2 - 2024.9.8

2.1 下列函数在何处可导, 何处解析

(1) $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$

设 $z = x + iy$, 则 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 + ixy$. $\forall z \in C$, $u(x, y) = x^2$ 和 $v(x, y) = xy$ 在 \mathbb{C} 上有连续一阶偏导, 下面考虑 C-R 条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x \quad (2.2)$$

联立 C-R 条件, 得 $(x, y) = (0, 0)$, 因此 f 在 $(0, 0)$ 处可导, 在 \mathbb{C} 上不解析。不在点 $(0, 0)$ 上解析是因为在某点解析是指在此点的有心邻域上解析, 显然这里不满足, 因此 $(0, 0)$ 为奇点。

后补:

u, v 有一阶连续偏导且满足 C-R 条件 $\implies u, v$ 可微且满足 C-R 条件 $\iff f$ 可微 $\iff f$ 可导

(2) $f(x, y) = (x - y)^2 + 2i(x + y)$

$\forall z \in C$, $u(x, y) = (x - y)^2$ 和 $v(x, y) = 2(x + y)$ 在 \mathbb{C} 上有连续一阶偏导, 下面验证 C-R 条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x - y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2(x - y) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \quad (2.4)$$

联立 C-R 条件后无解, 因此 f 在 \mathbb{C} 上不可导, 在 \mathbb{C} 上不解析。

2.2 求下列函数的解析区域

(1) $f(z) = xy + iy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

欲满足 C-R 条件, 则:

$$y = 1, x = 0 \implies f \text{ 在全平面不解析}$$

不在点 $(0, 1)$ 上解析是因为在某点解析是指在此点的有心邻域上解析, 显然这里不满足。

(2) $f(z) = \begin{cases} |z| \cdot z, & |z| < 1 \\ z^2, & |z| \geq 1 \end{cases}$

设 $z = x + iy$, 则:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \begin{cases} (x\sqrt{x^2+y^2}) + i(y\sqrt{x^2+y^2}), & \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ (x^2 - y^2) + i(2xy), & \sqrt{x^2+y^2} \geq 1 \end{cases}$$

$$\iff u(x, y) = \begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2}, & \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ x^2 - y^2, & \sqrt{x^2+y^2} \geq 1 \end{cases}, \quad v(x, y) = \begin{cases} y\sqrt{x^2+y^2}, & \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ 2xy, & \sqrt{x^2+y^2} \geq 1 \end{cases}$$

分别求偏导得到:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}, \quad \sqrt{x^2+y^2} < 1 \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, & \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, & \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \end{cases}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1$$

偏导要满足 C-R 条件, 代入得到:

$$\begin{aligned} x^2 = y^2, \quad 2xy = 0, \quad \forall \sqrt{x^2 + y^2} < 1, \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 2x = 2x, \quad -2y = -2y, \quad \forall \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1 \\ \implies f(z) \text{ 在 } \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1\} \text{ 上解析} \end{aligned}$$

不在点 (0, 0) 上解析是因为在某点解析是指在此点的有心邻域上解析, 显然这里不满足。

后补: **解析区域必须是开集** (因为受“有心邻域”限制), f 的解析区域应为 $\{z \mid |z| > 1\}$ 。另外, $|z| = 1$ 代表的圆周上也不可微, 这是因为 f 在 $|z| = 1$ 上不连续 (内部是一倍幅角, 外部是二倍幅角), 所以可微区域也为 $\{z \mid |z| > 1\}$ 。

2.3 已知解析函数 $f(z)$ 的实部如下, 求 $f(z)$

(1) $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$

$$\begin{aligned} v'_x = -u'_y = 2y, \quad v'_y = u'_x = 2x + 1 \\ \implies v(x, y) = \int 2y \, dx + \int dy = 2xy + y + C \\ \implies f(x, y) = (x^2 + y^2 + x) + i(2xy + y) + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(2) $u(x, y) = e^y \cos x$

$$\begin{aligned} v'_x = -u'_y = -e^y \cos x, \quad v'_y = u'_x = -e^y \sin x \\ \implies v(x, y) = \int -e^y \cos x \, dx + \int 0 \, dy = -e^y \sin x + C \\ \implies f(x, y) = (e^y \cos x) + i(-e^y \sin x) + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2.4 f 解析, 且 $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$, 求 $f(z)$

两边分别对 x, y 求导, 得到:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 + 6xy - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 6xy - 3y^2$$

联立 C-R 条件, 可以解出:

$$\begin{aligned} v'_x = -3x^2 + 3y^2, \quad v'_y = 6xy \\ u'_x = 6xy, \quad u'_y = 3x^2 - 3y^2 \\ \implies v(x, y) = -x^3 + 3xy^2 + C, \quad u(x, y) = 3x^2y - y^3 + C \\ \implies f(x, y) = (3x^2y - y^3) + i(-x^3 + 3xy^2) + C(1 + i), \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

后补: u 和 v 中的实常数 C 其实是同一个! 这是因为题目中 $u - v$ 没有常数项, 说明两者积分常数相同。

2.5 极坐标 C-R 条件

证明极坐标下的 C-R 条件为:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

极坐标变换:

$$\begin{aligned} x &= x(r, \theta) = r \cos \theta, & y &= y(r, \theta) = r \sin \theta \\ \implies \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \theta, & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r \sin \theta, & \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos \theta \end{aligned}$$

由复合函数的求导法则:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} u(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial \theta} u(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot r \sin \theta + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot r \cos \theta \end{aligned}$$

联立 C-R 条件, 化简得到:

$$v'_r = -u'_y \cos \theta + u'_x \sin \theta = \frac{1}{r} u'_\theta$$

同理, 由偏导关系:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} u(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot r \sin \theta + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot r \cos \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} v(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cdot \sin \theta \end{aligned}$$

联立 C-R 条件, 化简得到:

$$u'_r = u'_x \cos \theta + u'_y \sin \theta = \frac{1}{r} v'_\theta$$

反之也可以化为原 C-R 条件, 因此 C-R 条件在极坐标下的形式为:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \square$$

2.6 证明 $f(z)$ 和 $\overline{f(\bar{z})}$ 同解析或同不解析

(1) $f(z)$ 解析 $\implies \overline{f(\bar{z})}$ 解析

假设 $f(z)$ 在点 $z = z_0$ 解析, 即 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在有心邻域 $U_\delta(z_0)$ 上解析, 这等价于 $f(z)$ 有一阶导, 且在邻域内满足 C-R 条件. 设 $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = u(x, -y) - iv(x, -y)$, 也即:

$$g(z) = u_g(x, y) + iv_g(x, y), \quad u_g(x, y) = u(x, -y), \quad v_g(x, y) = -v(x, -y)$$

容易验证 $g(z)$ 有一阶偏导, 下面验证 C-R 条件:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_g}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, -y), & \frac{\partial u_g}{\partial y} &= \frac{\partial u(x, -y)}{\partial(-y)} \cdot \frac{\partial(-y)}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, -y) \\ \frac{\partial v_g}{\partial x} &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x, -y), & \frac{\partial v_g}{\partial y} &= -\frac{\partial v(x, -y)}{\partial(-y)} \cdot \frac{\partial(-y)}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}(x, -y) \end{aligned}$$

联立 u 和 v 的 C-R 条件, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_g}{\partial x} - \frac{\partial v_g}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, -y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x, -y) = 0 \implies \frac{\partial u_g}{\partial x} = \frac{\partial v_g}{\partial y} \\ \frac{\partial u_g}{\partial y} + \frac{\partial v_g}{\partial x} &= -\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, -y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, -y) \right] = 0 \implies \frac{\partial u_g}{\partial y} = -\frac{\partial v_g}{\partial x} \end{aligned}$$

因此 $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ 也解析。

(2) $f(z)$ 解析 $\iff \overline{f(\bar{z})}$ 解析

假设 $\overline{f(\bar{z})}$ 解析, 令 $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$, 则 $f(z) = \overline{g(\bar{z})}$, 由 (1) 的结论, $g(z)$ 解析 $\implies f(z) = \overline{g(\bar{z})}$ 也解析. 证毕. \square

Homework 3: 2024.9.9 - 2024.9.15

3.1 若 $f(z)$ 解析, $\arg f(z)$ 是否为调和函数?

(1) 当 $f(z) = C \in \mathbb{C}, \forall z \in G$, 也即 $f(z)$ 恒为常量时: $\arg f(z)$ 也为常量, 设 $\arg f(z) = a + ib$, 则 $a = \arg f(z) \in \mathbb{R}$ 而 $b = 0$, 自然满足 $\Delta a = \Delta b = 0$, 因此 $\arg f(z)$ 为调和函数。

(2) 当 $f(z)$ 是非常量函数时:

由 $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, 令 $f(z) = \rho \cdot e^{i \arg z}$, 则有:

$$\arg f(z) = \frac{1}{i} (\ln f(z) - \ln \rho)$$

函数 \ln 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上解析, 但对于函数 $\rho = \rho(z)$:

$$\rho = \sqrt{u^2 + v^2} \implies u_\rho = \sqrt{u^2 + v^2}, v_\rho = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial x} = \frac{uu'_x}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{vv'_x}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \frac{\partial u_\rho}{\partial y} = \frac{uu'_y}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{vv'_y}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (3.2)$$

假设 ρ 满足 C-R 条件, 代入得到:

$$\begin{cases} uu'_x + vv'_x = 0 \\ uu'_y + vv'_y = 0 \\ \sqrt{u^2 + v^2} \neq 0 \end{cases}$$

由于 $f(z)$ 解析, 满足 C-R 条件 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, 代入后整理得到:

$$\begin{cases} v(v_y'^2 - u_y'^2) = 0 \\ u(u_y'^2 + v_y'^2) = 0 \end{cases}$$

$f(z)$ 非常量, 因此 u, v 非常量, 因此只能有:

$$v_y' = u_y' = 0 \implies u_x' = v_x' = 0 \implies u \text{ 和 } v \text{ 为常量函数}$$

这使得 $f(z) = u + iv$ 是常量, 矛盾! 因此 $\arg f(z)$ 不解析 (这能否推出不调和? 解析是调和的充分条件, 但是充要的吗? 我觉得不是, 没思路了)

3.2 从已知的实虚部求出解析函数 $f(z)$

$$(1) u = e^x(x \cos y - y \sin y) + 2 \sin x \cdot \sin hy + x^3 - 3xy^2 + y$$

$$u'_x = e^x(x \cos y - y \sin y + \cos y) + 2 \cos x \sin hy + 3x^2 - 3y^2 \quad (3.3)$$

$$u'_y = e^x(-x \sin y - \sin y - y \cos y) + 2h \sin x \cos hy - 6xy + 1 \quad (3.4)$$

由 C-R 条件, $v'_x = -u'_y, v'_y = u'_x$, 于是得到:

$$v(x, y) = \int (-u'_y) dx + \int (-3y^2) dy \quad (3.5)$$

$$= (x-1)e^x \sin y + (\sin y + y \cos y)e^x + 2h \cos x \cos hy + 3x^2y - x - y^3 + C \quad (3.6)$$

$$= (x \sin y + y \cos y)e^x + 2h \cos x \cos hy + 3x^2y - x - y^3 + C, C \in \mathbb{R} \quad (3.7)$$

令 $(x, y) = (z, 0)$, 得到:

$$u(z, 0) = ze^z + z^3, \quad v(z, 0) = 2h \cos z - z + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad (3.8)$$

于是得到 $f(x, y)$:

$$f(z) = [u(x, y) + iv(x, y)]_{x=z, y=0} = (ze^z + z^3) + i(2h \cos z - z + C), \quad C \in \mathbb{R}$$

(2) $v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$

$$v'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2} + 1, \quad v'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2} - 2$$

由 C-R 条件, $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$, 于是得到:

$$u(x, y) = \int v'_y dx + \int (-1) dy = \frac{2}{y} \arctan \frac{x}{y} - 2x - y + C \quad (3.9)$$

$$f(x, y) = u + iv = \left(\frac{2}{y} \arctan \frac{x}{y} - 2x - y + C \right) + i(\ln(x^2 + y^2) + x - 2y), \quad C \in \mathbb{R}$$

3.3 求下列函数的值

(1) $\cos(2 + i)$

由 $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, 可得:

$$\begin{aligned} \cos(2 + i) &= \frac{1}{2} [e^{i(2+i)} + e^{i(2-i)}] = \frac{1}{2} [e^{2i-1} + e^{1-2i}] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{e} + e \right) \cos 2 + i \left(\frac{1}{e} - e \right) \sin 2 \right] \end{aligned}$$

(2) $\text{Ln}(2 - 3i)$

由 $\text{Ln} z = \ln a + i \text{Arg} z$, 可得:

$$\text{Ln}(2 - 3i) = \ln |2 - 3i| + i \text{Arg}(2 - 3i) = \ln 13 + i \left(\arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

(3) $\text{Arccos}\left(\frac{3+i}{4}\right)$

$\arccos z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$, 于是:

$$\begin{aligned} \text{Arccos}\left(\frac{3+i}{4}\right) &= -i \text{Ln} \left(\frac{3+i}{4} + \sqrt{\left(\frac{3+i}{4}\right)^2 - 1} \right) = -i \text{Ln} \left(\frac{3+i}{4} + \frac{\sqrt{-8+6i}}{4} \right) \\ &= -i \text{Ln} \left(\frac{3+i}{4} \pm \frac{1+3i}{4} \right) = -i \text{Ln}(1+i) \text{ 或 } -i \text{Ln}\left(\frac{1-i}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) - i \frac{\ln 2}{2} \text{ 或 } -\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

(4) $\text{Arctan}(1 + 2i)$

由 $\text{Arctan} z = \frac{1}{2i} \text{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}$, 得:

$$\begin{aligned} \text{Arctan}(1 + 2i) &= \frac{1}{2i} \text{Ln} \left(\frac{1 + i(1 + 2i)}{1 - i(1 + 2i)} \right) = \frac{1}{2i} \text{Ln} \left(\frac{-1 + i}{3 - i} \right) \\ &= \frac{1}{2i} (\text{Ln}(-2 + i) - \ln 5) = \frac{1}{2i} \left[-\frac{\ln 5}{2} + i \left(\pi - \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\pi - \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi \right) + i \frac{\ln 5}{4} \end{aligned}$$

3.4 判断下列函数是单值还是多值函数

(1) $\sin \sqrt{z}$

多值函数。 \sqrt{z} 为双值函数, $a^2 = z \implies \sqrt{z} = \pm a$, 而 \sin 为奇函数, $\sin a \neq \sin(-a)$, 故为多值函数。

(2) $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$

单值函数。 $\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin(-a)}{-a}$, 因此为单值函数。

(3) $\frac{\cos \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$

多值函数。 $\frac{\cos a}{a} \neq \frac{\cos(-a)}{-a}$, 故为多值函数。

3.5 解方程: $2 \cos^2 hz - 3 \cos hz + 1 = 0$

原方程等价于:

$$(2 \cos hz - 1)(\cos hz - 1) = 0 \implies \cos hz = \frac{1}{2}, 1 \quad (3.10)$$

$$\implies z = \frac{1}{h}(\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi), \frac{1}{h}(2k\pi), k \in \mathbb{Z} \quad (3.11)$$

3.6 求下列多值函数的分支点

(1) $\sqrt{1-z^3}$ 的分支点: $1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty$

$1 - z^3 = (1 - z)[(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) - z][(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) - z]$, 不妨记为 $1 - z^3 = (z_1 - z)(z_2 - z)(z_3 - z)$ 。支点仅可能在宗量的零点、奇点处出现, 下面分别考察 z_1, z_2, z_3, ∞ 四点。

对 z_1 , 取仅包含点 z_1 的简单闭合曲线, 曲线上一点 z 沿逆时针绕一圈回到原处, 因子 $(z_1 - z)$ 的幅角增加了 2π , 因子 $(z_2 - z)$ 和 $(z_3 - z)$ 的幅角增加了 0 , 因此整个宗量的幅角增加 2π , 开根后, 函数值幅角增加 π , 前后不相等。因此点 z_1 是分支点。同理可得 z_2 和 z_3 是分支点。

对 ∞ , 取包含点 z_1, z_2, z_3 的简单闭合曲线, 曲线上一点 z 沿顺时针 (不是逆时针) 绕一圈回到原处, 整个宗量的幅角增加了 -6π , 开根后函数值幅角增加 -3π , 因此 ∞ 也是分支点。

(2) $\text{Ln} \cos z$ 的分支点: 这题没思路了

(3) $\sqrt{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}$ 的分支点: $0, 1, 2, \infty$

考虑点 $0, 1, 2$, 取仅包含点 0 的简单闭合曲线, 曲线上一点 z 逆时针绕一圈后, 宗量整体幅角增加 2π , 函数值幅角增加 π , 因此点 0 是分支点。同理点 1 和 2 也是分支点。

对 ∞ , 取包含点 $0, 1, 2$ 的简单闭合曲线, 曲线上一点 z 顺时针绕一圈后, 宗量整体幅角增加 -2π , 函数值也不发生变化, ∞ 不是分支点。

(4) $\text{Ln} \frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)}$ 没有分支点。

$$\text{Ln} \frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)} = \ln \left| \frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)} \right| + i \text{Arg} \frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)}$$

考虑点 a, b, c , 取仅包含点 a 的简单闭合曲线, 曲线上一点 z 逆时针绕一圈后, 宗量整体幅角增加 2π , $\text{Arg} \frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)} = \text{Arg} \left(\frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)} + 2\pi \right)$, 因此函数值不发生变化, 点 a 不是分支点。同理点 b 和 c 也不是分支点。

对 ∞ , 取包含点 a, b, c 的简单闭合曲线, 曲线上一点 z 顺时针绕一圈后, 宗量整体幅角增加 -2π , 函数值也不发生变化, ∞ 不是分支点。

Homework 4: 2024.9.16 - 2024.9.22

4.1 计算下列积分

(1) $\oint_{|z+i|=1} \frac{\rho z}{1+z^2} dz$

没思路了。。。

(2) $\oint_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1} dz, a > 1$

被积函数 $\frac{z}{z^4-1}$ 在圆周 $|z-a|=a$ 内有且仅有 $z=1$ 一个奇点, 由 Cauchy 定理和 Cauchy 积分公式:

$$I = \oint_{|z-1|=\delta} \frac{z}{z^4-1} dz = 2\pi i \cdot \left[\frac{z}{z^3+z^2+z+1} \right]_{z=1} = \frac{\pi i}{2}$$

(3) $\oint_{|z|=2} \frac{z^2-1}{z^2+1} dz$

被积函数在圆周 $|z|=2$ 内有且仅有 $z=\pm i$ 两个奇点, 由 Cauchy 定理和 Cauchy 积分公式:

$$I = \oint_{|z+i|=\delta_1} \frac{z^2-1}{z^2+1} dz + \oint_{|z-i|=\delta_2} \frac{z^2-1}{z^2+1} dz = 2\pi i \cdot \left[\frac{z^2-1}{z-i} \right]_{z=-i} + 2\pi i \cdot \left[\frac{z^2-1}{z+i} \right]_{z=i} = 0$$

(4) $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2(z^2+16)} dz$

被积函数在圆周 $|z|=2$ 内有且仅有 $z=0$ 一个奇点, 由 Cauchy 定理和 Cauchy 积分公式:

$$I = \oint_{|z|=\delta} \frac{1}{z^2(z^2+16)} dz = 2\pi i \cdot \left[\frac{1}{z^2+16} \right]_{z=0}^{(1)} = 2\pi i \cdot \left[-\frac{1}{(z^2+16)^2} \right]_{z=0} = -\frac{\pi i}{128}$$

4.2 计算下列积分

(1) $\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2-1} dz$

被积函数在圆周 $|z|=R$ 内有且仅有 $z=1$ 一个奇点, 则:

$$I = 2\pi i \cdot \left[\frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} \right]_{z=1} = \frac{\sqrt{2}\pi i}{2}$$

(2) $\lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{|z|=R} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2-1} dz$

被积函数在圆周 $|z|=R$ 内有且仅有 $z=\pm 1$ 两个奇点, 则:

$$I = 2\pi i \cdot \left[\frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z-1} \right]_{z=-1} + 2\pi i \cdot \left[\frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} \right]_{z=1} = \sqrt{2}\pi i$$

(3) $\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2-1} dz$

被积函数在圆周 $|z|=R$ 内有且仅有 $z=-1$ 一个奇点, 则:

$$I = 2\pi i \cdot \left[\frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z-1} \right]_{z=-1} = \frac{\sqrt{2}\pi i}{2}$$

4.3 计算积分 $\int_L \frac{1}{(z-a)^n} dz$, 其中 L 为以 a 为圆心, r 为半径的上半圆周

作变换 $z \rightarrow z+a$, 则原积分化为 $\int_{L'} \frac{1}{z^n} dz$, 其中 L' 是以 0 为圆心, r 为半径的上半圆周。当 $n=1$, 时, $\frac{1}{z}$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内解析, $I(n) = [\ln z]_{z=r}^{z=-r} = \ln(-1) = i\pi$; 当 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ 时, $\frac{1}{z^n}$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内解析, $I(n) = \left[\frac{z^{1-n}}{1-n} \right]_{z=r}^{z=-r} = \frac{1}{1-n} [(-r)^{1-n} - r^{1-n}]$ 。综上, 我们有:

$$I(n) = \int_L \frac{1}{(z-a)^n} dz = \begin{cases} i\pi, & n=1 \\ [(-1)^{1-n} - 1] \cdot \frac{r^{1-n}}{1-n}, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\} \end{cases}$$

4.4 计算积分 $\oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)} dz$, 其中 a, b 不在圆周 $|z|=R$ 上, n 为正整数

令 $G = \{z \mid |z|=R\}$, 共有四种情况, 总结如下:

$$I = \oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)} dz = \begin{cases} 0, & a, b \notin G \\ \frac{(-1)^{n-1} 2\pi i}{(a-b)^n}, & a \in G, b \notin G \\ \frac{2\pi i}{(b-a)^n}, & b \in G, a \notin G \\ 0, & a, b \in G \end{cases}$$

4.5 (附加题) $f(z)$ 在 $|z| < R$ 内解析, 求证 $I(r) = \int_0^{2\pi} f(r \cdot e^{i\theta}) d\theta$ 与 r 无关, $\forall r \in (0, R)$

设 $f(z)$ 在 G 内解析, 由 Cauchy 积分公式:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

在上式中, 取 $G = \{z \mid |z-a|=r, r \in (0, R)\}$, 也即以 a 为圆心, r 为半径的圆周, 则有 $z-a = r \cdot e^{i\theta}$, $dz = ire^{i\theta} d\theta$, 代入即得:

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(z)}{r \cdot e^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} f(z) d\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} f(r \cdot e^{i\theta}) d\theta \\ &\implies \oint_0^{2\pi} f(r \cdot e^{i\theta}) d\theta = 2\pi f(a), \quad \forall r \in (0, R) \quad \square \end{aligned}$$

Homework 5: 2024.9.23 - 2024.9.29