数学物理方法课程作业

Homework of Mathematical Physics Methods

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

序言

本文为笔者本科时的“数学物理方法”课程作业（Homework of Mathematical Physics Methods, 2024.9-2025.1）。由于个人学识浅陋，认识有限，文中难免有不妥甚至错误之处，望读者不吝指正，在此感谢。

我的邮箱是 dingyi233@mails.ucas.ac.cn。

目录

Homework 1: 2024.8.26 - 2024.9.1

1.1 计算

(1) $(\frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}})^2$

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2 = \left(\frac{(1+i)(2+i)}{5}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{-8+6i}{25}$$

(2) $(1+i)^n + (1-i)^n$

首先得到：

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},\ 1-i = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$
$$\Longrightarrow I = 2^{\frac{n}{2}}\left(e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right)$$

于是有：

$$I = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}+1}, & n = 0+4k \\ 2^{\frac{n+1}{2}}, & n = 1+4k \\ 0\ \ , & n = 2+4k \\ -2^{\frac{n}{2}+1}, & n = 3+4k \end{cases},\quad k \in \mathbb{N}$$

习题课补：

$$\begin{aligned} I &= 2^{\frac{n}{2}}\left(e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right) \\ &= 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos(\frac{n\pi}{4}) + i\sin\frac{n\pi}{4} + \cos(-\frac{n\pi}{4}) + i\sin(-\frac{n\pi}{4})\right) \\ &= 2^{\frac{n}{2}+1}\cos(\frac{n\pi}{4}) \end{aligned}$$

(3) $\sqrt[4]{1+i}$

$$\sqrt[4]{1+i} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{\pi}{16}}$$

习题课补：在复数域中，开根号是多值函数，这里四次根在复数域中应有四个复根，设 $x = \sqrt[4]{1+i}$，则原式等价于方程：

$$x^4 = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Longrightarrow |x| = 2^{\frac{1}{8}},\quad \arg x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, k = 0,1,2,3$$

1.2 将复数化为三角或指数形式

(1) $\frac{5}{-3+i}$

$$\frac{5}{-3+i} = \frac{5e^{i0}}{\sqrt{10}e^{i(\arctan(-\frac{1}{3})+\pi)}} = \sqrt{\frac{5}{2}}\cdot e^{-i(\arctan(-\frac{1}{3})+\pi)}$$

(2) $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$

$$\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}e^{i\arctan(\frac{1}{2})}}{\sqrt{13}e^{i\arctan(-\frac{2}{3})}}\right)^2 = \frac{5}{13}e^{2i\left(\arctan(\frac{1}{2}) - \arctan(-\frac{2}{3})\right)}$$

1.3 求极限 $\lim_{z\to i}\frac{1+z^6}{1+z^{10}}$

作不完全因式分解：

$$1+z^6 = z^6 - i^6 = (z^3-i^3)(z^3+i^3) = (z-i)(z^2+iz+i^2)(z^3+i^3)$$

$$
\begin{aligned}
1+z^{10} &= z^{10}-i^{10} = (z^5-i^5)(z^5+i^5) = (z-i)(z^4+iz^3+i^2z^2+i^3z+i^4)(z^5+i^5) \\
\Longrightarrow L &= \lim_{z\to i}\frac{1+z^6}{1+z^{10}} = \lim_{z\to i}\frac{(z-i)(z^2+iz+i^2)(z^3+i^3)}{(z-i)(z^4+iz^3+i^2z^2+i^3z+i^4)(z^5+i^5)} \\
&= \lim_{z\to i}\frac{(z^2+iz+i^2)(z^3+i^3)}{(z^4+iz^3+i^2z^2+i^3z+i^4)(z^5+i^5)} \\
&= \frac{(-3)\times(-2i)}{5i} = \frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

事实上，实数域上的洛必达法则（L'Hospital）可以推广到复数域的解析函数，下面给出 $\frac{0}{0}$ 型的证明。设复变函数 $f(z), g(z)$ 在 $z=z_0$ 解析，且 $f(z_0)=g(z_0)=0$，则有：

$$
\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)} = \lim_{z\to z_0}\frac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}
$$

特别地，若 $f'(z_0)$ 与 $g'(z_0)$ 存在且不为零，就有 $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$

1.4 讨论函数在原点的连续性

(1) $f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2i}(\frac{z}{z^*}-\frac{z^*}{z}), & z\neq 0 \\ 0, & z=0 \end{cases}$

令 $z=x+iy, x,y\in\mathbb{R}$，则 $\forall\,(x,y)\neq(0,0)$:

$$
f(x,y) = \frac{1}{2i}\left(\frac{x+iy}{x-iy}-\frac{x-iy}{x+iy}\right) = \frac{1}{2i}\cdot\frac{4ixy}{x^2+y^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2}
$$

令 $k=\frac{y}{x}$，则：

$$
L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2k}{1+k^2}
$$

显然，L 随着 k 的变化而变化，因此极限不存在，$f(z)$ 在 0 处不连续。

(2) $f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Im} z}{1+|z|}, & z\neq 0 \\ 0, & z=0 \end{cases}$

令 $z=x+iy$ 和 $k=\frac{y}{x}$，则 $\forall\,(x,y)\neq(0,0)$:

$$
f(x,y) = \frac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}} \Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{0}{1+0} = 0 = f(0,0)
$$

因此 $f(z)$ 在 0 处连续。

(3) $f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z^2}{|z^2|}, & z\neq 0 \\ 0, & z=0 \end{cases}$

同理令 $z=x+iy$ 和 $k=\frac{y}{x}$，则 $\forall\,(x,y)\neq(0,0)$:

$$
f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}
$$

因此 $f(z)$ 在 0 处不连续。

1.5 恒等式证明（附加题）

$$
\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^n|b_i|^2 - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left|a_ib_j^*-a_jb_i^*\right|^2
$$

Homework 2: 2024.9.2 - 2024.9.8

2.1 下列函数在何处可导，何处解析

(1) $f(z) = z \cdot \mathrm{Re}\, z$

设 $z = x + iy$，则 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 + ixy$。$\forall\, z \in C$，$u(x, y) = x^2$ 和 $v(x, y) = xy$ 在 $\mathbb{C}$ 上有连续一阶偏导，下面考虑 C-R 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x \tag{2.2}$$

联立 C-R 条件，得 $(x, y) = (0, 0)$，因此 f 在 $(0, 0)$ 处可导，在 $\mathbb{C}$ 上不解析。不在点 $(0, 0)$ 上解析是因为在某点解析是指在此点的有心邻域上解析，显然这里不满足，因此 $(0, 0)$ 为奇点。

后补：

$$u, v \text{ 有一阶连续偏导且满足 C-R 条件} \Longrightarrow u, v \text{ 可微且满足 C-R 条件} \Longleftrightarrow f \text{ 可微} \Longleftrightarrow f \text{ 可导}$$

(2) $f(x, y) = (x - y)^2 + 2i(x + y)$

$\forall\, z \in C$，$u(x, y) = (x - y)^2$ 和 $v(x, y) = 2(x + y)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有连续一阶偏导，下面验证 C-R 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x - y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2(x - y) \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \tag{2.4}$$

联立 C-R 条件后无解，因此 f 在 $\mathbb{C}$ 上不可导，在 $\mathbb{C}$ 上不解析。

2.2 求下列函数的解析区域

(1) $f(z) = xy + iy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

欲满足 C-R 条件，则：

$$y = 1,\ x = 0 \Longrightarrow f \text{ 在全平面不解析}$$

不在点 $(0, 1)$ 上解析是因为在某点解析是指在此点的有心邻域上解析，显然这里不满足。

(2) $f(z) = \begin{cases} |z| \cdot z, & |z| < 1 \\ z^2, & |z| \geqslant 1 \end{cases}$

设 $z = x + iy$，则：

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \begin{cases} (x\sqrt{x^2 + y^2}) + i(y\sqrt{x^2 + y^2}), & \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \\ (x^2 - y^2) + i(2xy), & \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow u(x, y) = \begin{cases} x\sqrt{x^2 + y^2}, & \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \\ x^2 - y^2, & \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 1 \end{cases}, \quad v(x, y) = \begin{cases} y\sqrt{x^2 + y^2}, & \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \\ 2xy, & \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 1 \end{cases}$$

分别求偏导得到：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, & \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, & \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \end{cases}, \quad \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 1$$

偏导要满足 C-R 条件，代入得到：

$$x^2 = y^2,\ 2xy = 0, \quad \forall \sqrt{x^2+y^2} < 1, x^2+y^2 \neq 0$$
$$2x = 2x,\ -2y = -2y, \quad \forall \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 1$$
$$\Longrightarrow f(z) \text{ 在 } \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geqslant 1\} \text{ 上解析}$$

不在点 $(0,0)$ 上解析是因为在某点解析是指在此点的有心领域上解析，显然这里不满足。

后补：解析区域必须是开集（因为受“有心邻域”限制），f 的解析区域应为 $\{z \mid |z|>1\}$。另外，$|z|=1$ 代表的圆周上也不可微，这是因为 f 在 $|z|=1$ 上不连续（内部是一倍幅角，外部是二倍幅角），所以可微区域也为 $\{z \mid |z|>1\}$。

2.3 已知解析函数 $f(z)$ 的实部如下，求 $f(z)$

(1) $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$

$$v'_x = -u'_y = 2y, \quad v'_y = u'_x = 2x+1$$
$$\Longrightarrow v(x,y) = \int 2y\ \mathrm{d}x + \int \mathrm{d}y = 2xy + y + C$$
$$\Longrightarrow f(x,y) = (x^2+y^2+x) + i(2xy+y) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

(2) $u(x,y) = e^y \cos x$

$$v'_x = -u'_y = -e^y \cos x, \quad v'_y = u'_x = -e^y \sin x$$
$$\Longrightarrow v(x,y) = \int -e^y \cos x\ \mathrm{d}x + \int 0\ \mathrm{d}y = -e^y \sin x + C$$
$$\Longrightarrow f(x,y) = (e^y \cos x) + i(-e^y \sin x + C), \quad C \in \mathbb{R}$$

2.4 f 解析，且 $u - v = (x-y)(x^2+4xy+y^2)$，求 $f(z)$

两边分别对 x, y 求导，得到：

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 + 6xy - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 6xy - 3y^2$$

联立 C-R 条件，可以解出：

$$v'_x = -3x^2 + 3y^2, \quad v'_y = 6xy$$
$$u'_x = 6xy, \quad u'_y = 3x^2 - 3y^2$$
$$\Longrightarrow v(x,y) = -x^3 + 3xy^2 + C, \quad u(x,y) = 3x^2 y - y^3 + C$$
$$\Longrightarrow f(x,y) = (3x^2y - y^3) + i(-x^3 + 3xy^2) + C(1+i),\ C \in \mathbb{R}$$

后补：u 和 v 中的实常数 C 其实是同一个！这是因为题目中 $u-v$ 没有常数项，说明两者积分常数相同。

2.5 极坐标 C-R 条件

证明极坐标下的 C-R 条件为：

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

极坐标变换：

$$x = x(r,\theta) = r\cos\theta, \quad y = y(r,\theta) = r\sin\theta$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta,\ \frac{\partial x}{\partial\theta} = -r\sin\theta,\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta,\ \frac{\partial y}{\partial\theta} = r\cos\theta$$

由复合函数的求导法则：

$$\frac{\partial}{\partial r}u\left(x(r,\theta), y(r,\theta)\right) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\cdot\sin\theta$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}v\left(x(r,\theta), y(r,\theta)\right) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\cdot r\sin\theta + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\cdot r\cos\theta$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta}u\left(x(r,\theta), y(r,\theta)\right) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot r\sin\theta + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\cdot r\cos\theta$$
$$\frac{\partial}{\partial r}v\left(x(r,\theta), y(r,\theta)\right) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\cdot\sin\theta$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} u'_r = u'_x\cos\theta + u'_y\sin\theta, & u'_\theta = r\left(-u'_x\sin\theta + u'_y\cos\theta\right) \\ v'_r = v'_x\cos\theta + v'_y\sin\theta, & v'_\theta = r\left(-v'_x\sin\theta + v'_y\cos\theta\right) \end{cases}$$

联立 C-R 条件，化简得到：

$$\begin{cases} u'_r = v'_y\cos\theta - v'_x\sin\theta, & u'_\theta = r\left(-v'_y\sin\theta - v'_x\cos\theta\right) \\ v'_r = -u'_y\cos\theta + u'_x\sin\theta, & v'_\theta = r\left(u'_y\sin\theta + u'_x\cos\theta\right) \end{cases}$$

将两个大括号中的内容作对比，立即得到：

$$u'_r = \frac{1}{r}v'_\theta, \quad v'_r = -\frac{1}{r}u'_\theta \tag{2.6}$$

反之也可以化为原 C-R 条件，因此 C-R 条件在极坐标下的形式为：

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta} \quad \square$$

2.6 证明 $f(z)$ 和 $\overline{f(\bar{z})}$ 同解析或同不解析

(1) $f(z)$ 解析 $\Longrightarrow \overline{f(\bar{z})}$ 解析

假设 $f(z)$ 在点 $z = z_0$ 解析，即 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在有心邻域 $U_\delta(z_0)$ 上解析，这等价于 $f(z)$ 有一阶导，且在邻域内满足 C-R 条件。设 $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = u(x,-y) - iv(x,-y)$，也即：

$$g(z) = u_g(x,y) + iv_g(x,y), \quad u_g(x,y) = u(x,-y),\ v_g(x,y) = -v(x,-y)$$

容易验证 $g(z)$ 有一阶偏导，下面验证 C-R 条件：

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,-y), \quad \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{\partial u(x,-y)}{\partial(-y)}\cdot\frac{\partial(-y)}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,-y)$$
$$\frac{\partial v_g}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,-y), \quad \frac{\partial v_g}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,-y)}{\partial(-y)}\cdot\frac{\partial(-y)}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}(x,-y)$$

联立 u 和 v 的 C-R 条件，得到：

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} - \frac{\partial v_g}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,-y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x,-y) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u_g}{\partial x} = \frac{\partial v_g}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u_g}{\partial y} + \frac{\partial v_g}{\partial x} = -\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,-y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,-y)\right] = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u_g}{\partial y} = -\frac{\partial v_g}{\partial x}$$

因此 $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ 也解析。

(2) $f(z)$ 解析 $\Longleftarrow \overline{f(\bar{z})}$ 解析

假设 $\overline{f(\bar{z})}$ 解析，令 $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$，则 $f(z) = \overline{g(\bar{z})}$，由 (1) 的结论，$g(z)$ 解析 $\Longrightarrow f(z) = \overline{g(\bar{z})}$ 也解析。

证毕。$\square$

Homework 3: 2024.9.9 - 2024.9.15

3.1 若 $f(z)$ 解析，$\arg f(z)$ 是否为调和函数？

注：下面的过程仅讨论了 $\arg f(z)$ 的解析性，未能揭示其调和性，正确的解答见后文补充的灰色小字。

(1) 当 $f(z)=C\in\mathbb{C},\forall\, z\in G$，也即 $f(z)$ 恒为常量时：$\arg f(z)$ 也为常量，设 $\arg f(z)=a+ib$，则 $a=\arg f(z)\in R$ 而 $b=0$，自然满足 $\Delta\, a=\Delta\, b=0$，因此 $\arg f(z)$ 为调和函数。

(2) 当 $f(z)$ 是非常量函数时：

由 $\ln z=\ln|z|+i\arg z$，移项，并作映射 $z\to f(z)$，则有：

$$\arg f(z)=\frac{1}{i}\left(\ln f(z)-\ln\rho\right)$$

函数 ln 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上解析，但对于函数 $\rho=\rho(z)$：

$$\rho=\sqrt{u^2+v^2}\Longrightarrow u_\rho=\sqrt{u^2+v^2},v_\rho=0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial x}=\frac{uu'_x}{\sqrt{u^2+v^2}}+\frac{vv'_x}{\sqrt{u^2+v^2}},\quad \frac{\partial u_\rho}{\partial y}=\frac{uu'_y}{\sqrt{u^2+v^2}}+\frac{vv'_y}{\sqrt{u^2+v^2}} \tag{3.2}$$

假设 ρ 满足 C-R 条件，代入得到：

$$\begin{cases}uu'_x+vv'_x=0\\ uu'_y+vv'_y=0\\ \sqrt{u^2+v^2}\neq 0\end{cases}$$

由于 $f(z)$ 解析，满足 C-R 条件 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，代入后整理得到：

$$\begin{cases}v(v_y'^2-u_y'^2)=0\\ u(u_y'^2+v_y'^2)=0\end{cases}$$

$f(z)$ 非常量，因此 u,v 非常量，因此只能有：

$$v'_y=u'_y=0\Longrightarrow u'_x=v'_x=0\Longrightarrow u \text{ 和 } v \text{ 为常量函数}$$

这使得 $f(z)=u+iv$ 是常量，矛盾！因此 $\arg f(z)$ 不解析（这能否推出不调和？解析是调和的充分条件，但是充要的吗？事实上并不是，因此并不能揭示调和性）。

后补：即使仅从解析性的角度来看，上面的过程也没有抓到主要矛盾，是舍本逐末了。因为无论 $f(z)$ 的性质如何，$\arg f(z)$ 始终是 $\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}$ 的函数，这表明 $\arg f(z)$ 是实部是它本身而虚部恒为 0，因此，由 C-R 条件可知 $\arg f(z)$ 解析的必要条件是实部为常数，而这也是充分条件。

对 $\arg f(z)$ 的调和性，我们有如下推导：

$$\arg f(z)=\arctan\frac{u(x,y)}{v(x,y)}+A,\quad A\in\{0,\pi\} \tag{3.3}$$

令 $g(z)=\arg f(z)$，则有：

$$g'_x=\frac{uv'_x-u'_xv}{u^2+v^2},\quad g''_{xx}=\frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left[(u^2+v^2)(uv''_{xx}+u''_{xx}v)-2uv(v_x^2-u_x^2)-2(u^2-v^2)u'_xv'_x\right] \tag{3.4}$$

对 y 求导也是同理，只需将上面的角标 x 换为 y，于是有 $\Delta\, g$:

$$\begin{aligned}\Delta\, g&=g''_{xx}+g''_{yy}\\&=\frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left[(u^2+v^2)(u(v''_{xx}+v''_{yy})+(u''_{xx}+u''_{yy})v)-2uv(v_x^2+v_y^2-u_x^2-u_y^2)-2(u^2-v^2)(u'_xv'_x+u'_yv'_y)\right]\end{aligned}$$

f 解析意味着 u,v 构成一对共轭调和函数，有 $\Delta\, u=\Delta\, v=0$，代入上式，再代入 C-R 条件，容易验证右边为 0，也即证明了 $\Delta\, g=0$，因此 $\arg f(z)$ 为调和函数。对 $u^2+v^2=0$ 的情况，我们不再赘述，只关心普遍结论。

3.2 从已知的实虚部求出解析函数 $f(z)$

(1) $u = e^x(x\cos y - y\sin y) + 2\sin x \cdot \sinh y + x^3 - 3xy^2 + y$

$$u'_x = e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y) + 2\cos x\sinh y + 3x^2 - 3y^2 \tag{3.5}$$
$$u'_y = e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y) + 2\sin x\cosh y - 6xy + 1 \tag{3.6}$$

由 C-R 条件，$v'_x = -u'_y$, $v'_y = u'_x$，于是得到：

$$v(x,y) = \int(-u'_y)\mathrm{d}x + \int(-3y^2)\mathrm{d}y \tag{3.7}$$
$$= (x-1)e^x\sin y + (\sin y + y\cos y)e^x + 2\cos x\cosh y + 3x^2y - x - y^3 + C \tag{3.8}$$
$$= (x\sin y + y\cos y)e^x + 2\cos x\cosh y + 3x^2y - x - y^3 + C,\ C\in\mathbb{R} \tag{3.9}$$

令 $(x,y) = (z,0)$，得到：

$$u(z,0) = ze^z + z^3, \quad v(z,0) = 2\cos z - z + C,\ C\in\mathbb{R} \tag{3.10}$$

于是得到 $f(x,y)$:

$$f(z) = [u(x,y) + iv(x,y)]_{x=z,y=0} = (ze^z + z^3) + i(2\cos z - z + C),\ C\in\mathbb{R}$$

(2) $v = \ln(x^2+y^2) + x - 2y$

$$v'_x = \frac{2x}{x^2+y^2} + 1, \quad v'_y = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2$$

由 C-R 条件，$u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$，于是得到：

$$u(x,y) = \int v'_y\mathrm{d}x + \int(-1)\mathrm{d}y = 2\arctan\frac{x}{y} - 2x - y + C \tag{3.11}$$

$$f(x,y) = u + iv = (2\arctan\frac{x}{y} - 2x - y + C) + i(\ln(x^2+y^2) + x - 2y),\ C\in\mathbb{R}$$

后补，这里之所以没有令 $(x,y) = (z,0)$ 得到 $f(z)$，是因为函数 $\arctan\frac{x}{y}$ 在实轴附近是不连续的，例如在正实轴 $x>0$ 附近，$\lim_{y\to0^+}$ 时趋于 $+\infty$ 而 $\lim_{y\to0^-}$ 时趋于 $-\infty$。而映射 $(x,y) = (z,0)$ 的必要条件是解析域中包含实轴，这涉及到解析延拓的内容，我们不提。只需要写到 $f(x,y)$ 的形式就这样放着即可。

3.3 求下列函数的值

(1) $\cos(2+i)$

由 $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$，可得：

$$\cos(2+i) = \frac{1}{2}\left[e^{i(2+i)} + e^{i(2-i)}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{2i-1} + e^{1-2i}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[(\frac{1}{e}+e)\cos 2 + i(\frac{1}{e}-e)\sin 2\right]$$

(2) $\mathrm{Ln}\,(2-3i)$

由 $\mathrm{Ln}\,z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z$，可得：

$$\mathrm{Ln}\,(2-3i) = \ln|2-3i| + i\,\mathrm{Arg}\,(2-3i) = \frac{1}{2}\ln 13 + i\left(\arctan(-\frac{3}{2}) + 2k\pi\right), \quad k\in\mathbb{Z}$$

(3) $\mathrm{Arccos}\,(\frac{3+i}{4})$

$\arccos z = -i\ln(z+\sqrt{z^2-1})$，于是：

$$\begin{aligned}\mathrm{Arccos}\,(\frac{3+i}{4}) &= -i\,\mathrm{Ln}\left(\frac{3+i}{4}+\sqrt{(\frac{3+i}{4})^2-1}\right) = -i\,\mathrm{Ln}\left(\frac{3+i}{4}+\frac{\sqrt{-8+6i}}{4}\right)\\ &= -i\,\mathrm{Ln}\left(\frac{3+i}{4}\pm\frac{1+3i}{4}\right) = -i\,\mathrm{Ln}\,(1+i) \text{ 或 } -i\,\mathrm{Ln}\,(\frac{1-i}{2})\\ &= (\frac{\pi}{4}+2k\pi)-i\frac{\ln 2}{2} \text{ 或 } -(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i\frac{\ln 2}{2},\quad k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

(4) $\mathrm{Arctan}\,(1+2i)$

由 $\mathrm{Arctan}\,z=\frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1+iz}{1-iz}$，得：

$$\begin{aligned}\mathrm{Arctan}\,(1+2i) &= \frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1+i(1+2i)}{1-i(1+2i)}\right) = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{-1+i}{3-i}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\left(\mathrm{Ln}\,(-2+i)-\ln 5\right) = \frac{1}{2i}\left[-\frac{\ln 5}{2}+i\left(\pi-\arctan(-\frac{1}{2})+2k\pi\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(\pi-\arctan(-\frac{1}{2})+2k\pi\right)+i\frac{\ln 5}{4},\quad k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

3.4 判断下列函数是单值还是多值函数

(1) $\sin\sqrt{z}$

多值函数。$\sqrt{z}$ 为双值函数，$a^2=z\Longrightarrow\sqrt{z}=\pm a$，而 sin 为奇函数，$\sin a\neq\sin(-a)$，故为多值函数。

(2) $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$

单值函数。$\frac{\sin a}{a}=\frac{\sin(-a)}{-a}$，因此为单值函数。

(3) $\frac{\cos\sqrt{z}}{z}$

单值函数。$\frac{\cos a}{a^2}=\frac{\cos(-a)}{(-a)^2}$，故为单值函数。

3.5 解方程：$2\cosh^2 z-3\cosh z+1=0$

原方程等价于：

$$(2\cosh z-1)(\cosh z-1)=0\Longrightarrow\cosh z=\frac{1}{2}\text{ 或 }1 \tag{3.12}$$

$$\overset{\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}}{\Longrightarrow} e^z=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\text{ 或 }1 \tag{3.13}$$

$$\Longrightarrow z=i(\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi)\text{ 或 }i(0+2k\pi),\quad k\in\mathbb{Z} \tag{3.14}$$

3.6 求下列多值函数的分支点

(1) $\sqrt{1-z^3}$ 的分支点：$1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\infty$

宗量 $1-z^3$ 不妨记为 $1-z^3=(z_1-z)(z_2-z)(z_3-z)$。支点仅可能在宗量的零点、奇点处出现，下面分别考察 z_1,z_2,z_3,∞ 四点。

对 z_1，取仅包含点 z_1 的简单闭合曲线，曲线上一点 z 沿逆时针绕一圈回到原处，因子 (z_1-z) 的幅角增加了 2π，因子 (z_2-z) 和 z_3-z 的幅角增加了 0，因此整个宗量的幅角增加 2π，开根后，函数值幅角增加 π，前后不相等。因此点 z_1 是分支点。同理可得 z_2 和 z_3 是分支点。

对 ∞，取包含点 z_1, z_2, z_3 的简单闭合曲线，曲线上一点 z 沿顺时针（不是逆时针）绕一圈回到原处，整个宗量的幅角增加了 -6π，开根后函数值幅角增加 -3π，因此 ∞ 也是分支点。

(2) $\mathrm{Ln}\cos z$ 的分支点：$\infty,\ \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$。

可以证明，$\mathrm{Ln}\, f(z)$ 的分支点等价于方程 $f(z)=0$ 和 $f(z)=\infty$ 的解[①]。于是分别令 $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ 为 0 和 ∞，解得：

$$z = \frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \text{ 或} z=\infty \tag{3.15}$$

(3) $\sqrt{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}$ 的分支点：$0,1,2,\infty$

考虑点 $0,1,2$，取仅包含点 0 的简单闭合曲线，曲线上一点 z 逆时针绕一圈后，宗量整体幅角增加 2π，函数值幅角增加 π，因此点 0 是分支点。同理点 1 和 2 也是分支点。

对 ∞，取包含点 $0,1,2$ 的简单闭合曲线，曲线上一点 z 顺时针绕一圈后，宗量整体幅角增加 -2π，函数值也不发生变化，∞ 不是分支点。

(4) $\mathrm{Ln}\,\frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)}$ 的分支点：a,b,c,∞

与 (2) 同理，考虑宗量 $\frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)}$ 的零点和无穷点，得到 $z=a,b,c,\infty$，即为所求分支点。

[①]这是助教在习题课上给出的结论，并未给出具体证明。但是我们可以证明 $\mathrm{Ln}\, z$ 的分支点为 0 和 ∞，这是因为 $\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$，当 z 绕原点逆时针转一圈时，$\mathrm{Arg}\, z$ 增加 2π 而不是回到原来的函数值，因此 0 为分支点；无穷点同理。

Homework 4: 2024.9.16 - 2024.9.22

4.1 计算下列积分

(1) $\oint_{|z+i|=1} \frac{e^z}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$

被积函数 $\frac{e^z}{1+z^2}$ 在圆周 $|z+i|=1$ 内有且仅有 $z=-i$ 一个奇点，由 Cauthy 定理和 Cauthy 积分公式：

$$I = \oint_{|z+i|=1} \frac{e^z}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left[\frac{e^z}{z-i}\right]_{z=-i} = -\pi e^{-i} \tag{4.1}$$

结果化简到上面一步即可。

(2) $\oint_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1}\,\mathrm{d}z,\ a>1$

被积函数 $\frac{z}{z^4-1}$ 在圆周 $|z-a|=a$ 内有且仅有 $z=1$ 一个奇点，由 Cauthy 定理和 Cauthy 积分公式：

$$I = \oint_{|z-1|=\delta} \frac{z}{z^4-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot\left[\frac{z}{z^3+z^2+z+1}\right]_{z=1} = \frac{\pi i}{2}$$

(3) $\oint_{|z|=2} \frac{z^2-1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$

被积函数在圆周 $|z|=2$ 内有且仅有 $z=\pm i$ 两个奇点，由 Cauthy 定理和 Cauthy 积分公式：

$$I = \oint_{|z+i|=\delta_1} \frac{z^2-1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z + \oint_{|z-i|=\delta_2} \frac{z^2-1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot\left[\frac{z^2-1}{z-i}\right]_{z=-i} + 2\pi i\cdot\left[\frac{z^2-1}{z+i}\right]_{z=i} = 0$$

(4) $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2(z^2+16)}\,\mathrm{d}z$

被积函数在圆周 $|z|=2$ 内有且仅有 $z=0$ 一个奇点，由 Cauthy 定理和 Cauthy 积分公式：

$$I = \oint_{|z|=\delta} \frac{1}{z^2(z^2+16)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot\left[\frac{1}{z^2+16}\right]^{(1)}_{z=0} = 2\pi i\cdot\left[-\frac{2z}{(z^2+16)^2}\right]_{z=0} = 0$$

4.2 计算下列积分

(1) $\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$

被积函数在圆周 $|z|=R$ 内有且仅有 $z=1$ 一个奇点，则：

$$I = 2\pi i\cdot\left[\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}\right]_{z=1} = \frac{\sqrt{2}\pi i}{2}$$

(2) $\lim\limits_{R\to+\infty}\oint_{|z|=R} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$

被积函数在圆周 $|z|=R$ 内有且仅有 $z=\pm 1$ 两个奇点，则：

$$I = 2\pi i\cdot\left[\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z-1}\right]_{z=-1} + 2\pi i\cdot\left[\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}\right]_{z=1} = \sqrt{2}\pi i$$

(3) $\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$

被积函数在圆周 $|z|=R$ 内有且仅有 $z=-1$ 一个奇点，则：

$$I = 2\pi i\cdot\left[\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z-1}\right]_{z=-1} = \frac{\sqrt{2}\pi i}{2}$$

4.3 计算积分 $\displaystyle\int_L \frac{1}{(z-a)^n}\,\mathrm{d}z$，其中 L 为以 a 为圆心，r 为半径的上半圆周

作变换 $z \to z+a$，则原积分化为 $\int_{L'} \frac{1}{z^n}\,\mathrm{d}z$，其中 L' 是以 0 为圆心，r 为半径的上半圆周。当 $n=1$，时，$\frac{1}{z}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 内解析，$I(n) = [\ln z]_{z=r}^{z=-r} = \ln(-1) = i\pi$；当 $n \in \mathbb{Z}\setminus\{1\}$ 时，$\frac{1}{z^n}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 内解析，$I(n) = \left[\frac{z^{1-n}}{1-n}\right]_{z=r}^{z=-r} = \frac{1}{1-n}\left[(-r)^{1-n} - r^{1-n}\right]$。综上，我们有：

$$I(n) = \int_L \frac{1}{(z-a)^n}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} i\pi, & n=1 \\ \left[(-1)^{1-n}-1\right]\cdot\frac{r^{1-n}}{1-n}, & n\in\mathbb{Z}\setminus\{1\} \end{cases}$$

4.4 计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)}\,\mathrm{d}z$，其中 a,b 不在圆周 $|z|=R$ 上，n 为正整数

令 $G = \{z \mid |z| = R\}$，共有四种情况，总结如下：

$$I = \oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & a,b\notin G \\ \frac{(-1)^{n-1}2\pi i}{(a-b)^n}, & a\in G, b\notin G \\ \frac{2\pi i}{(b-a)^n}, & b\in G, a\notin G \\ 0, & a,b\in G \end{cases}$$

4.5 （附加题）$f(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析，求证 $I(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cdot e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$ 与 r 无关，$\forall\, r\in(0,R)$

设 $f(z)$ 在 G 内解析，由 Cauthy 积分公式：

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial G}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z$$

在上式中，取 $G = \{z \mid |z-a| = r,\ r\in(0,R)\}$，也即以 a 为圆心，r 为半径的圆周，则有 $z-a = r\cdot e^{i\theta}$, $\mathrm{d}z = ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$，代入即得：

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial G}\frac{f(z)}{r\cdot e^{i\theta}}\,ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi} f(z)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi} f(a+r\cdot e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

上式中令 $a=0$，即得：

$$I = I(r) = \oint_0^{2\pi} f(r\cdot e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta = 2\pi f(0), \quad \forall\, r\in(0,R) \quad \square \tag{4.2}$$

因此积分的值与 r 无关。

Homework 5: 2024.9.23 - 2024.9.29

!!! 不要忘了 $2\pi i$!!!

5.1 求积分 $\oint_C \dfrac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\mathrm{d}z$，$C$: $x^2+y^2-2x=0$

C : $(x-1)^2+y^2=1$，因此：

$$I = 2\pi i\left[\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}\right]_{z=1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i \tag{5.1}$$

5.2 求下列积分的值，积分路径均沿直线

(1) $\displaystyle\int_0^i \frac{z}{z+1}\,\mathrm{d}z$

$$I = \int_0^i\left(1-\frac{1}{z+1}\right)\,\mathrm{d}z = [z-\ln(z+1)]_0^i = i-\ln(1+i) = -\frac{\ln 2}{2}+i\left(1-\frac{\pi}{4}\right) \tag{5.2}$$

(2) $\displaystyle\int_0^{1+i} z^2\sin z\,\mathrm{d}z$

$$\begin{aligned}
I &= \left[-z^2\cos z+2z\sin z+2\cos z\right]_0^{1+i} \\
&= (2-2i)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{e}+e\right)\cos 1+\left(\frac{1}{e}-e\right)\sin 1\right]+2(1+i)\cdot\frac{1}{2i}\cdot\left[\left(\frac{1}{e}-e\right)\cos 1+\left(\frac{1}{e}+e\right)\sin 1\right]-2 \\
&= \frac{2(1-i)}{e}(\cos 1+i\sin 1)-2
\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^i \frac{1}{z^2+z-2}\,\mathrm{d}z$

$$I = \frac{1}{3}\int_{-1}^i\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+2}\right)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{3}\left[\ln(z-1)-\ln(z+2)\right]_{-1}^i = -\frac{1}{3}\left[\frac{\ln 10}{2}+i\left(\arctan\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{5.3}$$

5.3 讨论下列各积分的值，其中积分路径是圆周 $|z|=r$

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=r}\frac{z^3}{(z-1)(z^2+2z+3)}\,\mathrm{d}z$

记 $z^2+2z+3=0$ 的两个根分别为 $z_1=-1+i\sqrt{2}$, $z_2=-1-i\sqrt{2}$，先考虑 $r\in(\sqrt{3},+\infty)$，此时积分围道内有三个奇点 1, z_1, z_2。由 Cauthy 定理，可得：

$$I = 2\pi i\left\{\left[\frac{z^3}{(z-z_1)(z-z_2)}\right]_{z=1}+\left[\frac{z^3}{(z-1)(z-z_2)}\right]_{z=z_1}+\left[\frac{z^3}{(z-1)(z-z_1)}\right]_{z=z_2}\right\} \tag{5.4}$$

$$= 2\pi i\left[\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{7-i4\sqrt{2}}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{7+i4\sqrt{2}}{3}\right)\right] = -2\pi i \tag{5.5}$$

当 $r\in(0,1)$ 时，无奇点，$I=0$；当 $r\in(1\sqrt{3})$ 时，有唯一奇点 $z=1$，$I=2\pi i\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{3}i$。综上有：

$$I = I(r) = \begin{cases} 0 & ,r\in(0,1) \\ \dfrac{\pi}{3}i & ,r\in(1,\sqrt{3}) \\ -2\pi i & ,r\in(\sqrt{3},+\infty) \end{cases} \tag{5.6}$$

(2) $\oint_{|z|=r} \frac{1}{z^3(z+1)(z+2)}\,\mathrm{d}z$

先考虑 $r \in (2, +\infty)$ 的情况，此时围道内有三个奇点 $0, -1, -2$，但我们不需要具体求解，直接由大圆弧定理：

$$\lim_{z\to\infty}\left(z \cdot \frac{1}{z^3(z+1)(z+2)}\right) = 0 \Longrightarrow I = 2\pi i \cdot 0 = 0 \tag{5.7}$$

$r \in (1, 2)$ 时，有两奇点 0, -1，于是：

$$I = 2\pi i \left\{ \frac{1}{2!} \cdot \left[\frac{1}{(z+1)(z+2)}\right]^{(2)}_{z=0} + \left[\frac{1}{z^3(z+2)}\right]_{z=-1} \right\} = 2\pi i \left[\frac{7}{8} + (-1)\right] = -\frac{1}{4}\pi i \tag{5.8}$$

再考虑上 $r \in (0, 1)$，综上有：

$$I = I(r) = \begin{cases} \frac{7}{4}\pi i & , r \in [0, 1) \\ -\frac{1}{4}\pi i & , r \in (1, 2) \\ 0 & , r \in (2, +\infty) \end{cases} \tag{5.9}$$

5.4 设 $f(z) = \oint_{|\zeta|=2} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$，求 $f''(1+i)$

由 Cauthy 积分公式：

$$f(z) = 2\pi i \left[3z^2 + 7z + 1\right], \quad \Longrightarrow f''(1+i) = 2\pi i \cdot 6 = 12\pi i \tag{5.10}$$

5.5 计算积分 $f(z) = \oint_{|\zeta|=1} \frac{\overline{\zeta}}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$，其中 $|z| \neq 1$

$|\zeta| = 1$ 时有 $\overline{\zeta} = \frac{1}{\zeta}$，$z = 0$ 的情况需单独计算，综合有：

$$f(z) = \oint_{|\zeta|=1} \frac{1}{\zeta(\zeta - z)}\,\mathrm{d}\zeta = \begin{cases} 0 & , |z| \in [0, 1) \\ -\frac{2\pi i}{z} & , |z| \in (1, +\infty) \end{cases} \tag{5.11}$$

5.6 计算积分 $f(z) = \oint_{|\zeta|=2} \frac{\overline{\zeta}^2 e^\zeta}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$，其中 $|z| \neq 2$

$|\zeta| = 2$ 时 $\overline{\zeta} = \frac{4}{\zeta}$，于是 $|z| < 2$ 时：

$$I = 16 \oint_{|\zeta|=2} \frac{e^\zeta}{\zeta^2(\zeta - z)}\,\mathrm{d}\zeta = 16 \cdot 2\pi i \left\{ \left[\frac{e^\zeta}{\zeta - z}\right]^{(1)}_{\zeta=0} + \left[\frac{e^\zeta}{\zeta^2}\right]_{\zeta=z} \right\} \tag{5.12}$$

$$= 32\pi i \left[\left(-\frac{z+1}{z^2}\right) + \frac{e^z}{z^2}\right] = 32\pi i \cdot \frac{e^z - z - 1}{z^2} \tag{5.13}$$

$|z| = 0$ 时 $I = 16\oint_{|\zeta|=2} \frac{e^\zeta}{\zeta^3}\,\mathrm{d}\zeta = 16\pi i$，再考虑上 $|z| > 2$，综合有：

$$I = f(z) = \begin{cases} 16\pi i & , |z| = 0 \\ 32\pi i \cdot \frac{e^z - z - 1}{z^2} & , |z| \in (0, 2) \\ -32\pi i \cdot \frac{z+1}{z^2} & , |z| \in (2, +\infty) \end{cases} \tag{5.14}$$

5.7 计算积分 $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3}\,\mathrm{d}z$

由高阶导数公式：

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{2!} \cdot \left[e^z\right]_{z=0}^{(2)} = \pi i \tag{5.15}$$

5.8 求 a 的值使得函数 $F(z) = \int_{z_0}^{z} e^z \left(\frac{1}{z} + \frac{a}{z^3}\right) \mathrm{d}z$ 是单值的

$F(z)$ 是单值的，也即积分与路径无关，这等价于被积函数是解析函数，由于没有限制 z 的范围，也即 $z \in \mathbb{C}$，因此：

$$\oint_{\partial G} \left(\frac{e^z}{z} + a\frac{e^z}{z^3}\right) \mathrm{d}z = 0, \quad \forall\, G \subset \mathbb{C} \tag{5.16}$$

计算左边的积分：

$$I = 2\pi i \left\{\left[e^z\right]_{z=0} + \frac{a}{2!} \cdot \left[e^z\right]_{z=0}^{(2)}\right\} = 2\pi i \left(1 + \frac{a}{2}\right) = 0 \Longrightarrow a = -2 \tag{5.17}$$

Homework 6: 2024.10.8 - 2024.10.14

求幂级数的收敛半径有两个常用方法：

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \tag{6.1}$$

前者称为 Cauchy-Hadamard 公式，是普遍成立的，后者称为 d'Alembert 公式，在极限存在时成立，但通常计算更简单。

6.1 确定下列幂级数的收敛半径

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Longrightarrow R = 1 \tag{6.2}$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \infty\cdot e \Longrightarrow R = 0 \tag{6.3}$$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$, ???

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n}$

$$\text{级数} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \text{ 的收敛半径 } r = 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n} \text{ 的收敛半径为 } R = \sqrt{r} = 1\text{。} \tag{6.4}$$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [3+(-1)^n]^n z^n$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} [3+(-1)^n] = 4 \Longrightarrow R = \frac{1}{4} \tag{6.5}$$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} cos(in)\cdot z^n$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\cos(in+i)}{\cos(in)}\right| = \lim_{n\to\infty} |\cos i - \sin i\cdot\tan(in)| = |\cos i - i\sin i| = |e^{i(-i)}| = e \Longrightarrow R = \frac{1}{e} \tag{6.6}$$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n+a^n) z^n$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)+a^{n+1}}{n+a^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1+a\cdot\left(\frac{a^n}{n}\right)}{1+\left(\frac{a^n}{n}\right)}\right| = \begin{cases} 1, & |a|\leqslant 1 \\ a, & |a|>1 \end{cases} \Longrightarrow R = \begin{cases} 1, & |a|\leqslant 1 \\ \frac{1}{|a|}, & |a|>1 \end{cases} \tag{6.7}$$

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^n z^n$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1 \Longrightarrow R = 1 \tag{6.8}$$

6.2 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 $R \in (0,\infty)$，求下列幂级数的收敛半径

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^R c_n z^n$

$$\frac{1}{R_1} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^R c_{n+1}}{n^R c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^R\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1\cdot\frac{1}{R} \Longrightarrow R_1 = R \tag{6.9}$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)c_n z^n$

$$\frac{1}{R_2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n-1}{2^n-1}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 2\cdot\frac{1}{R} \Longrightarrow R_2 = \frac{R}{2} \tag{6.10}$$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(c_n)^k z^n$

$$\frac{1}{R_3} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|^k = \frac{1}{R^k} \Longrightarrow R_3 = R^k \tag{6.11}$$

6.3 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$ 在 $|z|\neq 1$ 上收敛，并求其和函数

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n}\frac{z^{k-1}}{(1-z^k)(1-z^{k+1})} = \frac{1}{z(1-z)}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1-z^k}-\frac{1}{1-z^{k+1}}\right) = \frac{1}{z(1-z)}\cdot\left[\frac{1}{z^{n+1}-1}-\frac{1}{z-1}\right]$$
$$\Longrightarrow S(z) = \lim_{n\to\infty}S_n(z) = \begin{cases}\frac{1}{(1-z)^2} & ,|z|<1\\ \frac{1}{z(1-z)^2} & ,|z|>1\end{cases}$$

因此级数在 $|z|\neq 1$ 上收敛。

6.4 证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}-\frac{2z^{2n+3}}{2n+3}\right)$ 的和函数 $S=S(z)$ 在 $z=1$ 不连续

容易知道上面级数在 $|z|<1$ 收敛而在 $|z|>1$ 发散，因此在 $|z|=1$ 处不连续 $\Longrightarrow$ 在 $z=1$ 点不连续。但我们不妨求解一下和函数。

先求和函数 $S(z)$, $|z|<1$。级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^{2n+3}}{2n+3}$ 的收敛半径都为 1，, 因此当 $|z|<1$ 时，由一致收敛性有：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1} = \int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)\right]\mathrm{d}z = \int\left[\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right]\mathrm{d}z = \int\frac{1}{1-z}\,\mathrm{d}z = -\ln(z-1)+C_1 \tag{6.12}$$

$z=0$ 时级数为 0，因此 $C_1=\ln(-1)$。同理可得：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^{2n+3}}{2n+3}=2\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^{2n+3}}{2n+3}\right)\right]\,\mathrm{d}z=2\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^2\right)^{n+1}\right]\,\mathrm{d}z=2\int\frac{z^2}{1-z^2}\,\mathrm{d}z \tag{6.13}$$

$$=2\int\left[-1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)\right]\,\mathrm{d}z=-2z-\ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+C_2 \tag{6.14}$$

$z=0$ 时级数为 0，因此 $C_2=0$。由于原级数在 $|z|<1$ 内绝对收敛，可以任意交换求和次序，因此有：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}-\frac{2z^{2n+3}}{2n+3}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^{2n+3}}{2n+3}=-\left[\ln(z-1)+2z+\ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right]+\ln(-1) \tag{6.15}$$

于是极限 $\lim_{z\to1}S(z)$ 不存在，自然不可能连续。

6.5 对 $|z|<1$，求下列级数的和

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$

级数的收敛半径为 1，由绝对收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}nz^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n-\sum_{n=1}^{\infty}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n-\frac{z}{1-z} \tag{6.16}$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径仍为 1，由一致收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int(n+1)z^n\,\mathrm{d}z\right)\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\sum_{n=1}^{\infty}z^{n+1}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^2}{1-z}\right]=\frac{z(2-z)}{(1-z)^2} \tag{6.17}$$

综上有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}nz^n=\frac{z(2-z)}{(1-z)^2}-\frac{z}{1-z}=\frac{z}{(1-z)^2} \tag{6.18}$$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$

由一致收敛性：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}=\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^{2n+1}}{2n+1}\right)\right]\,\mathrm{d}z=\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^2\right)^{n}\right]\,\mathrm{d}z=\int\frac{1}{1-z^2}\,\mathrm{d}z \tag{6.19}$$

$$=\int\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)\right]\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+C \tag{6.20}$$

$z=0$ 时级数为 0，因此 $C=0$。

需要注意，这里的定积分 $\int\frac{1}{1-z^2}\,\mathrm{d}z$ 结果与 z 的范围有关，当 $|z|<1$ 时，对应实函数上的 $-1<x<1$，此时 $1-x>0$，所以应该对 $\frac{1}{1-z}$ 积分：

$$\int\frac{1}{1-z^2}\,\mathrm{d}z=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\left[-\ln(1-z)+\ln(1+z)\right]+C=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+C \tag{6.21}$$

当 $|z|>1$ 时，对应实函数上的 $x>1$，此时 $x-1>0$，所以应该对 $\frac{1}{z-1}$ 积分：

$$\int\frac{1}{1-z^2}\,\mathrm{d}z=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z-1}\right)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\left[\ln(z+1)-\ln(z-1)\right]+C=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)+C \tag{6.22}$$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$

由一致收敛性：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}=\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)\right]\mathrm{d}z=\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right]\mathrm{d}z=\int\frac{1}{1-z}\,\mathrm{d}z=-\ln(z-1)+C_1 \tag{6.23}$$

$z=0$ 时级数为 0，因此 $C_1=\ln(-1)$。

6.6 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z+n}$ 在不包含负整数的任意闭圆上一致收敛

首先有两个引理：

Theorem. 1 (Dirichlet 判别法)： 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 有界，$\sum_{n=1}^{\infty}(v_{n+1}-v_n)$ 绝对收敛且 $\lim v_n=0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nv_n$ 收敛。

Theorem. 2 (级数收敛)： 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛，但不绝对收敛。证明略。

在 Theorem.2 的基础上，由 Theorem.1 (Dirichlet 判别法) 知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z+n}$ 收敛，可以任意加括号。给定不包含负整数的任意闭圆 G，记 $r=|z|$，$N_0=\sup_z\left\lceil\frac{|z|+1}{2}\right\rceil$，则有：

$$S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z+n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+2n-1}-\frac{1}{z+2n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+2n-1)(z+2n)} \tag{6.24}$$

$$\Longrightarrow|S(z)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|}=\sum_{n=1}^{N_0-1}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|}+\sum_{n=N_0}^{\infty}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|} \tag{6.25}$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|2n-1-r|\cdot|2n-r|}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|2n-1-r|^2}<\infty \tag{6.26}$$

$$S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z+n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+2n-1}-\frac{1}{z+2n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+2n-1)(z+2n)} \tag{6.27}$$

$$\Longrightarrow|S(z)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|}=\sum_{n=1}^{N_0-1}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|}+\sum_{n=N_0}^{\infty}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|} \tag{6.28}$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{N_0-1}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|}+\sum_{n=N_0}^{\infty}\frac{1}{|2n-1-r|\cdot|2n-r|} \tag{6.29}$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{N_0-1}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|}+\sum_{n=N_0}^{\infty}\frac{1}{|2n-1-r|^2} \tag{6.30}$$

对给定的区域 G，前一项是有限和，自然收敛，后一项是收敛级数，因此原级数在 G 上一致收敛。 □

Homework 7: 2024.10.15 - 2024.10.16

> 作业题目详见网址 https://www.123865.com/s/0y0pTd-jKKj3，除非必要，后文不再重复叙述题目。

Homework 8: 2024.10.15 - 2024.10.21

8.1 讨论下列函数所有奇点的性质

(1) $\frac{1}{z-z^3}$: 有 $z=0,1,-1$ 三个一阶极点

(2) $\cos\frac{1}{\sqrt{z}}$: 由 $\lim_{z\to0} z\cos\frac{1}{\sqrt{z}}=0$ 知，有一阶极点 $z=0$

(3) $\frac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$: $\lim_{z\to0}\frac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}=\lim_{z\to0}\frac{z}{\sin z}=1$，因此有可去极点 $z=0$

(4) $\frac{1}{(z-1)\ln z}$: $\lim_{z\to1}(z-1)^2\cdot\frac{1}{(z-1)\ln z}=1$，因此有二阶极点 $z=1$

(5) $f(z)=\int_0^z\frac{\sin\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}}\,\mathrm{d}\zeta$: 作换元 $t=\sqrt{\zeta}$，可得 $f(z)=1-\cos t=1-\cos\sqrt{z}$，在 $\mathbb{C}$ 上无奇点，在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上有本性奇点 $z=\infty$

(6) $\frac{1-e^z}{2+e^z}$: $\lim_{z\to\infty}\frac{1-e^z}{2+e^z}=-1$，因此有且仅有可去奇点 $z=\infty$

(7) $\frac{1}{z^3(2-\cos z)}$: 有三阶极点 $z=0$

8.2 讨论

(1) $\lim_{z\to\infty}\frac{\cos z}{z}=0$，是可去奇点

(2) 做换元 $t=\frac{1}{z}$，有 $\lim_{t\to0}t^2\cdot\frac{1}{t\cos\frac{1}{t}}=0$，因此为二阶极点。

(3) 做换元 $t=\frac{1}{z}$，有 $\lim_{t\to0}t\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{t}-a\right)\left(\frac{1}{t}-b\right)}=\lim_{t\to0}\sqrt{(1-at)(1-bt)}=1$，因此为一阶极点。

8.3 计算函数在指定点的留数

(1) $f(z)=\frac{e^{z^2}}{z-1}$，$z_0=1$:
$z_0=1$ 为一阶极点，因此：

$$\operatorname{res} f(1)=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=e \tag{8.1}$$

(2) $f(z)=\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$:
$f(z)$ 有二阶极点 $z=0$ 和一阶极点 $z=1$，于是：

$$\operatorname{res} f(0)=\left[z^2f(z)\right]^{(1)}_{z=0}=\left[\frac{2\,z+1}{z-1}-\frac{z^2+z-1}{(z-1)^2}\right]_{z=0}=\left[-\frac{2\,z-z^2}{(z-1)^2}\right]_{z=0}=0 \tag{8.2}$$

$$\operatorname{res} f(1)=\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=1 \tag{8.3}$$

(3) $f(z)=\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$:
有一阶极点 $z=\pm3i$ 和二阶极点 $z=0$，因此：

$$\operatorname{res} f(3i)=\lim_{z\to3i}(z-3i)f(z)=-\frac{e^{3i}}{54i},\quad \operatorname{res} f(-3i)=\lim_{z\to3i}(z-3i)f(z)=\frac{e^{-3i}}{54i} \tag{8.4}$$

$$\operatorname{res} f(0)=\left[z^2f(z)\right]^{(1)}_{z=0}=\left[\frac{e^z(z^2-2z+9)}{(z^2+9)^2}\right]_{z=0}=\frac{1}{9} \tag{8.5}$$

(4) $\frac{1}{z^2\sin z}$，$z_0=0$:
$z_0=0$ 为三阶极点，因此：

$$\operatorname{res} f(0)=\frac{1}{2!}\left[z^3f(z)\right]^{(2)}_{z=0}=\frac{1}{2}\left[\frac{2\,z\cos{(z)}^2-2\,\cos{(z)}\,\sin{(z)}+z\sin{(z)}^2}{\sin{(z)}^3}\right]_{z=0}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \tag{8.6}$$

(5) $\frac{1}{\cosh\sqrt{z}}$，$z_0 = -\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2$：

考虑 $\sqrt{z}$ 满足 $\sqrt{z}\ |_{z=0}= 0$ 的单值分支，我们有 $\sqrt{-\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2} = i\cdot\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$，因此本题相当于求 $f(z) = \frac{1}{\cosh z}$，$z_0 = i\cdot\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$ 处的留数，由于

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)\cos y + i\cdot\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)\sin y\right] \tag{8.7}$$

我们有：

$$z = z_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{\cosh\sqrt{z_0}} = \frac{1}{\cos y} = \infty \tag{8.8}$$

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_o)f(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{2(z-z_0)}{e^z - e^{-z}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{z\to z_0}\frac{2}{e^z - e^{-z}} = \pm 1 \tag{8.9}$$

因此都是一阶极点，有：

$$\mathrm{res}\, f(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \begin{cases} -i & , n = 0, 2, 4, \dots \\ i & , n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \tag{8.10}$$

Homework 9: 2024.10.22 - 2024.10.28

9.1 计算下列有理三角积分

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$

作三角换元 $z=e^{i\theta}$，则 $\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$， $\mathrm{d}\theta=\frac{1}{iz}\,\mathrm{d}z$，有：

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{1}{a+b\cdot\frac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{1}{iz}\,\mathrm{d}z=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{bz^2+2az+b}\,\mathrm{d}z \tag{9.1}$$

函数 $bz^2+2az+b$ 有两根 $-k\pm\sqrt{k^2-1}$，其中 $k=\frac{a}{b}>1$，但仅有 $z=-k+\sqrt{k^2-1}$ 在积分围道内，故：

$$\boxed{I=\frac{2}{i}\cdot 2\pi i\cdot\left[\frac{1}{2bz+2a}\right]_{z=-k+\sqrt{k^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}} \tag{9.2}$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{\left(1+\sin^2\theta\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$

代入 $\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$，并作三角换元 $z=e^{i\theta}$，得：

$$I=\int_0^{\pi}\frac{1}{\left(1+\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{2}{\left(3-\cos\theta\right)^2}\,\mathrm{d}\theta=\frac{8}{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{\left(z^2-6z+1\right)^2}\,\mathrm{d}z \tag{9.3}$$

函数 z^2-6z+1 有两根 $z_1=3-2\sqrt{2}$，$z_2=3+2\sqrt{2}$，但仅有 z_1 在积分围道内，且是二阶极点，因此有：

$$I=\frac{8}{i}\cdot 2\pi i\left[\frac{z}{(z-z_2)^2}\right]^{(1)}_{z=z_1}=16\pi\cdot\left[\frac{1}{(z-z_2)^2}-\frac{2z}{(z-z_2)^3}\right]_{z=z_1} \tag{9.4}$$

$$=16\pi\cdot\frac{-(z_1+z_2)}{(z_1-z_2)^3}=16\pi\cdot\frac{-6}{32\cdot(-4\sqrt{2})} \tag{9.5}$$

$$\boxed{=\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi} \tag{9.6}$$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$

将其转化为第 (1) 小问中的形式：

$$I=\int_0^{\pi}\frac{1}{(2a+1)-\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{(2a+1)-\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2a+1)-\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \tag{9.7}$$

由 (1) 的结论：

$$\boxed{I=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-(-1)^2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{a(a+1)}}} \tag{9.8}$$

9.2 计算下列无穷积分

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

作半圆积分围道，也即从 $(-R,0)$ 到 $(R,0)$ 的直线，以及半径为 R 的上半圆 $L_R=\{|z|=R\mid \operatorname{Im}z>0\}$ 构成的闭合围道 C。令 $f(z)=\frac{z^2+1}{z^4+1}$，则 $zf(z)$ 在 $z\to\infty$ 时一致趋于 0，由大圆弧定理，$\lim_{R\to\infty}\int_{L_R}f(z)\,\mathrm{d}z=0$，

于是：

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow I'=\lim_{R\to\infty}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=2I+\lim_{R\to\infty}\int_{L_R}f(z)\,\mathrm{d}z=2I+0 \tag{9.9}$$

再单独计算积分 I'。$f(z)$ 有四个一阶极点，其中 $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ 和 $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ 在积分围道内，由留数定理：

$$I'=2\pi i\cdot\left[\left(\frac{z_1^2+1}{4z_1^3}\right)+\left(\frac{z_2^2+1}{4z_2^3}\right)\right]=2\pi i\cdot\left[-\frac{1}{4}z_1(z_1^2+1)-\frac{1}{4}z_2(z_2^2+1)\right] \tag{9.10}$$

$$=2\pi i\cdot\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}i-\frac{\sqrt{2}}{4}i\right]=2\pi i\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \tag{9.11}$$

$$=\sqrt{2}\pi \tag{9.12}$$

$$\Longrightarrow\boxed{I=\frac{1}{2}I'=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi} \tag{9.13}$$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,\mathrm{d}x$

与上题类似，作半圆积分围道，也即从 $(-R,0)$ 到 $(R,0)$ 的直线，以及半径为 R 的上半圆 $L_R=\{|z|=R\mid \operatorname{Im}z>0\}$ 构成的闭合围道 C。令 $f(z)=\frac{z^2}{z^4+6z^2+13}$，则 $zf(z)$ 在 $z\to\infty$ 时一致趋于 0，由大圆弧定理，$\lim_{R\to\infty}\int_{L_R}f(z)\,\mathrm{d}z=0$，于是：

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow I'=\lim_{R\to\infty}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=2I+\lim_{R\to\infty}\int_{L_R}f(z)\,\mathrm{d}z=2I+0 \tag{9.14}$$

再单独计算积分 I'。$f(z)$ 有四个一阶极点，先求解：

$$z^4+6z^2+13=\left(z^2+3\right)^2+4=0\Longrightarrow z^2+3=\pm 2i \tag{9.15}$$

利用 $\sqrt{z}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\operatorname{sgn}(\pi-\arg z)\sqrt{|z|+x}+i\sqrt{|z|-x}\right]$，可以得到在积分围道中的两根 z_1 和 z_2:

$$z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{13}-3}+i\sqrt{\sqrt{13}+3}\right),\quad z_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{\sqrt{13}-3}+i\sqrt{\sqrt{13}+3}\right) \tag{9.16}$$

由留数定理：

$$I'=2\pi i\left[\frac{z_1^2}{4z_1^3+12z_1}+\frac{z_2^2}{4z_2^3+12z_2}\right]=2\pi i\left[\frac{z_1}{4z_1^2+12}+\frac{z_2}{4z_2^2+12}\right] \tag{9.17}$$

$$=2\pi i\left[\frac{z_1}{8i}+\frac{z_2}{-8i}\right]=2\pi i\cdot\frac{z_1-z_2}{8i} \tag{9.18}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{13}-3}}{8i} \tag{9.19}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{13}-3}}{4}\pi \tag{9.20}$$

$$\Longrightarrow\boxed{I=\frac{1}{2}I'=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\cdot\sqrt{\sqrt{13}-3}} \tag{9.21}$$

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$

令 $f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^3}$，作半圆型闭合积分围道 C，其中半圆记作 L_R，则 $zf(z)$ 在 $z\to\infty$ 时一致趋于 0，由 Jordan 引理，$\lim_{R\to\infty}\int_{L_R} f(z)e^{iz}\,\mathrm{d}z=0$，于是

$$I'=\lim_{R\to\infty}\oint_C f(z)e^{iz}\,\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x+i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x+\lim_{R\to\infty}\oint_{L_R} f(z)e^{iz}\,\mathrm{d}z \tag{9.22}$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow I'=2I+0+0 \tag{9.23}$$

积分围道内有且仅有 $z=i$ 一个三阶极点，由留数定理：

$$I'=2\pi i\cdot\frac{1}{2!}\left[\frac{e^{iz}}{(z+i)^3}\right]^{(2)}_{z=i} \tag{9.24}$$

$$=\pi i\cdot\left[e^{iz}\left(\frac{i}{(z+i)^3}-\frac{3}{(z+i)^4}\right)\right]^{(1)}_{z=i} \tag{9.25}$$

$$=\pi i\cdot\left[e^{iz}\left(\frac{-1}{(z+i)^3}-\frac{3i}{(z+i)^4}-\frac{3i}{(z+i)^4}+\frac{12}{(z+i)^5}\right)\right]_{z=i} \tag{9.26}$$

$$=\pi i\cdot\frac{1}{e}\cdot\left[\frac{-2i}{16}-\frac{6i}{16}-\frac{6i}{16}\right]=\pi i\cdot\frac{1}{e}\cdot\left(-\frac{7i}{8}\right) \tag{9.27}$$

$$=\frac{7\pi}{8e} \tag{9.28}$$

$$\Longrightarrow \boxed{I=\frac{1}{2}I'=\frac{7\pi}{16e}} \tag{9.29}$$

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x,\quad a,b\in\mathbb{R}_+$

令 $f(z)=\frac{z}{z^2+b^2}$，作半圆型闭合积分围道 C，其中半圆记作 L_R，则 $zf(z)$ 在 $z\to\infty$ 时一致趋于 0，由 Jordan 引理，$\lim_{R\to\infty}\int_{L_R} f(z)e^{iz}\,\mathrm{d}z=0$，于是

$$I'=\lim_{R\to\infty}\oint_C f(z)e^{iaz}\,\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax\,\mathrm{d}x+i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\,\mathrm{d}x+\lim_{R\to\infty}\oint_{L_R} f(z)e^{iz}\,\mathrm{d}z \tag{9.30}$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow I'=0+2i\cdot I+0 \tag{9.31}$$

积分围道内有且仅有 $z_1=bi$ 一个一阶极点，由留数定理：

$$I'=2\pi i\cdot\frac{z_1e^{iaz_1}}{2z_1}=\pi i\cdot e^{-ab} \tag{9.32}$$

$$\Longrightarrow \boxed{I=\frac{I'}{2i}=\frac{\pi}{2}\cdot e^{-ab}} \tag{9.33}$$

> 由于时间安排和 LaTeX 计划调整，后续的几次作业都将在 Notability 上手写，导出为 PDF 后插入到这里。插入前会对 PDF 进行极致压缩，以尽量减小文件体积。

> 由于时间安排和 LaTeX 计划调整，后续的几次作业都将在 Notability 上手写，导出为 PDF 后插入到这里。插入前会对 PDF 进行极致压缩，以尽量减小文件体积。

> 由于时间安排和 LaTeX 计划调整，后续的几次作业都将在 Notability 上手写，导出为 PDF 后插入到这里。插入前会对 PDF 进行极致压缩，以尽量减小文件体积。

Homework 10 : 2024.10.29 - 2024.11.04

标 的表示需要二次修改
标 的表示已作二次修改

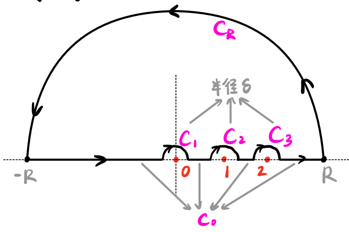
1. 计算积分

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)(x-2)} dx$

> 此题可由 $\frac{1}{x}$ 的对称性知 $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} dx = 0$
> 进而得 $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x-1} = 0$ 和 $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x-2} dx = 0$
> 而所求积分是它们的线性组合，因此值也为 0

(1) 令 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ ，$z \in \mathbb{C}$，奇点为 $z = 0, 1, 2$

作积分围道如图：



$\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$

$$\lim_{z\to a} (z-a) f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & a=0 \\ -1, & a=1 \\ \frac{1}{2}, & a=2 \end{cases}$$

由小圆弧定理，得到 (注意方向)：

$\lim_{\delta\to 0} \int_{C_1} f(z) dz = -\frac{1}{2}\pi i = \lim_{\delta\to 0} \int_{C_3} f(z) dz$，$\lim_{\delta\to 0} \int_{C_2} f(z) dz = \pi i$

再计算闭积分：　$f(z)$ 在围道内无奇点，　$\oint_C f(z) dz = 0$

因此：
$$\oint_C f(z) dz = I + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) dz + \sum_{i=1}^{3} \lim_{\delta\to 0} \int_{C_i} f(z) dz$$
$$0 = I + 0 + \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\pi i$$
$$\Longrightarrow I = 0$$

(2) $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x+a)\sin(x-a)}{x^2 - a^2} dx$ ，$a > 0$

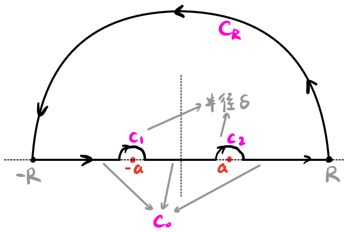
被积函数是偶函数，因此 $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x+a)\sin(x-a)}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2} I'$.

下面计算 I'.

由积化和差，有 $\sin(x+a)\sin(x-a) = \frac{1}{2}[\cos 2a - \cos 2x]$

$$I' = \frac{\cos 2a}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-a^2} dx - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2-a^2} dx \quad (*)$$

令 $f(z) = \frac{1}{z^2-a^2}$ ，有奇点 $z = \pm a$ ，作积分围道如图：



对(*)式第一个积分项：

$\lim_{z\to a} (z-a) f(z) = \frac{1}{2a}$

$\lim_{z\to -a} (z+a) f(z) = -\frac{1}{2a}$

由小圆弧定理：

$\sum_{i=1}^{2} \lim_{\delta\to 0} \int_{C_i} f(z) dz = 0$

又 $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0 \xRightarrow{\text{大圆弧}} \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) = 0$

$f(z)$ 在围道内解析，因此 $\oint_C f(z) dz = 0$

$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-a^2} dx = 0$

> 类似上一小题，这里也可快速判断出积分为 0

对(*)式第二项，考虑积分 $\oint_C f(z) e^{ipz} dz$ ，$p = 2$

由 Jordan 引理，$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) e^{i2z} = 0$. 令 $g(z) = f(z) e^{i2z}$ ，则：

$$\begin{cases} \lim_{z\to a} (z-a) g(z) = e^{i2a} \cdot \frac{1}{2a} \\ \lim_{z\to -a} (z+a) g(z) = e^{i(-2a)} \cdot \frac{1}{-2a} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{2} \int_{C_i} g(z) dz = \frac{\pi}{a} \cdot \frac{e^{i2a} - e^{-i2a}}{2i} = \frac{\pi}{a} \cdot \sin 2a$$

同样，$g(z)$ 在围道内解析，闭积分为零，因此：

$$\oint_C g(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(z) dz + \sum_{i=1}^{2} \lim_{\delta\to 0} \int_{C_i} g(z) dz$$
$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx + 0 + \frac{\pi}{a} \cdot \sin 2a$$
$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = -\pi \frac{\sin 2a}{a}$$
$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2-a^2} dx = \mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx\right\} = -\pi \frac{\sin 2a}{a}$$

代回(*)式，得 $I' = \frac{\sin 2a}{2a} \cdot \pi \Rightarrow I = \frac{\sin 2a}{2a} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \sin 2a}{4a}$

写完整的过程比较麻烦，后面的题目我们仅给出关键步骤

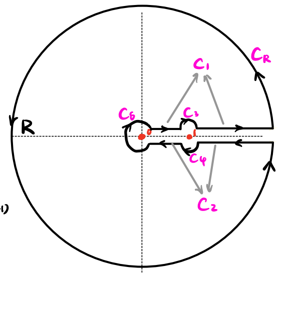
(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{px} - e^{qx}}{1 - e^x} dx$ ，$p, q \in (0,1) \subset \mathbb{R}$

$\xrightarrow{}$ 无穷多个奇点

令 $t = e^x$ ，则 $dx = \frac{1}{t} dt$，有：

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{p-1} - t^{q-1}}{1-t} dt$. 先考虑 $I_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1-t} dt$ ，t^{p-1} 是多值函数，

积分路径如图，令 $R \to \infty$, $\delta \to 0$ ，



$f(z) = \frac{z^{p-1}}{1-z}$ ，$p \in (0,1)$ ，则：

$\lim_{z\to 0} z f(z) = 0 \Rightarrow I_{C_\delta} = 0$

注意正负号

$\lim_{z\to 1} (z-1) f(z) = -1 \Rightarrow I_{C_3} = -i\pi$

$\lim_{z\to 1} (z-1) f(z e^{2\pi i}) = -(e^{2\pi i})^{p-1} \Rightarrow I_{C_4} = -i\pi e^{2\pi i(p-1)}$

$\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0 \Rightarrow I_{C_R} = 0$

$I_{C_1} = I'$

$I_{C_2} = \int_{+\infty}^{0} \frac{(t \cdot e^{2\pi i})^{p-1}}{1-t} dt = -e^{2\pi i(p-1)} \cdot I'$

而 $\oint_C f(z) dz = 0$ (无奇点)，因此：

$$-i\pi\left(1 + e^{2\pi i(p-1)}\right) + \left(1 - e^{2\pi i(p-1)}\right) \cdot I' = 0$$

$$\Rightarrow I_p = -i\pi \cdot \frac{e^{2\pi i(p-1)} + 1}{e^{2\pi i(p-1)} - 1} = -i\pi \cdot \frac{\cos((p-1)\pi)}{i\sin((p-1)\pi)} = -\frac{\pi}{\tan(p-1)\pi} = \frac{-\pi}{\tan p\pi}$$

因此 $I = I_p - I_q = \pi\left(\frac{1}{\tan q\pi} - \frac{1}{\tan p\pi}\right)$

(4) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx$

$I = \mathrm{Re}\left\{\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix} - e^{-x}}{x} dx\right\}$，令 $f(z) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iz} - e^{-z}}{z} dz$ ，作 90° 扇形围道

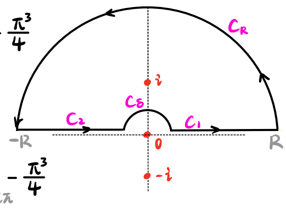
(挖去 $z=0$)，可得：

$$0 + 0 + I + \int_\infty^0 \frac{e^{i(iy)} - e^{-(iy)}}{(iy)} i\,dy = 0 \Longrightarrow I = 0$$

2. 计算积分

(1) $I = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx$

记 $I_k = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^k}{1+x^2} dx$ ，$k = 0, 1, 2$. 先考虑 I_2 ，积分围道如图：



由留数定理，$\oint_C \frac{(\ln z)^2}{1+z^2} dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{\pi^2}{8} i\right) = -\frac{\pi^3}{4}$

$\lim_{z\to 0} z \cdot \frac{(\ln z)^2}{1+z^2} = 0 \Rightarrow I_{C_\delta} = 0$

$\lim_{z\to\infty} z \cdot \frac{(\ln z)^2}{1+z^2} = 0 \Rightarrow I_{C_R} = 0$

$$0 + 0 + \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx = -\frac{\pi^3}{4}$$

$\ln(-1) = i\pi$

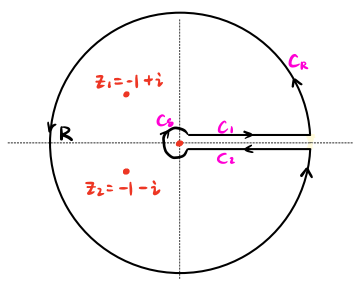
$$\int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(-x) + \ln(-1))^2}{1+x^2} d(-x) = -\frac{\pi^3}{4}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x + i\pi)^2}{1+x^2} dx = -\frac{\pi^3}{4}$$

用 arctan 计算

$$2I + 2\pi i \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{-\pi^2}{1+x^2} dx = -\frac{\pi^3}{4}$$

对比实虚部，得到 $2I - \pi^2 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^3}{4} \Longrightarrow I = \frac{\pi^3}{8}$



(2) $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+2x+2}dx$

$(z+1)^2=\pm i$

奇点 $z_1=-1+i$，$z_2=-1-i$

令 $f(z)=\frac{(\ln z)^2}{z^2+2z+2}$，积分围道见上一页的“圆”，由留数定理：

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\cdot\left[\left(\tfrac{1}{2}\ln 2+\tfrac{3\pi}{4}i\right)^2\cdot\frac{1}{2i}+\left(\tfrac{1}{2}\ln 2+\tfrac{5\pi}{4}i\right)^2\cdot\frac{1}{-2i}\right]$$

$(a=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3\pi}{4}i)$

$$=2\pi i\cdot\frac{-a\pi i+\frac{\pi^2}{4}}{2i}=-a\pi^2 i+\frac{1}{4}\pi^3\text{，于是：}$$

$$=-\frac{1}{2}\pi^2\ln 2\cdot i+\pi^3$$

$$0+0+\int_0^{+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x^2+2x+2}dx+\int_{+\infty}^0\frac{(\ln x+2\pi i)^2}{x^2+2x+2}dx=-\frac{1}{2}\pi^2\ln 2\cdot i+\pi^3$$

$$\Longrightarrow -4\pi i\cdot I+4\pi^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx=\left(-\frac{1}{2}\pi^2\ln 2\right)i+\pi^3$$

对比实虚部，即得 $I=\frac{\pi\ln 2}{8}$

(3) $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}dx$，$-1<p<1$

z^p 多值，分支点 0，∞。积分围道同上题，$p\in(-1,1)$ 可得 C_δ 和 C_R 上积分趋于零。令 $f(z)=\frac{z^p}{1+z^2}$，由留数定理：

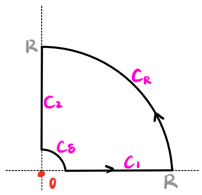
$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\cdot\left[e^{ip\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2i}+e^{ip\frac{3\pi}{2}}\cdot\frac{1}{-2i}\right]$$

$$=\pi\left[e^{i(p\frac{\pi}{2})}-e^{i(p\frac{3\pi}{2})}\right]\text{，于是：}$$

$$0+0+I+\int_{+\infty}^0\frac{(x\cdot e^{2\pi i})^p}{1+x^2}dx=\pi\left[e^{i(p\frac{\pi}{2})}-e^{i(p\frac{3\pi}{2})}\right]$$

$$\Longrightarrow I=\pi\cdot\frac{e^{i(p\frac{\pi}{2})}-e^{i(p\frac{3\pi}{2})}}{1-e^{i(p2\pi)}}=\frac{\pi}{2\cos(\frac{\pi}{2}p)}$$

(4) $I=\int_0^{+\infty}x^{p-1}\cos x\,dx$，$p\in(0,1)$



作扇形积分围道如图，考虑积分 $I'=\oint_C z^{p-1}e^{iz}dz$.

由留数定理，$I'=0$，于是：

$$\lim_{z\to 0}z^p e^{iz}=0\Longrightarrow\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}z^{p-1}e^{iz}dz=0\quad\text{(小圆弧)}$$

$$\lim_{z\to\infty}z^{p-1}=0\Longrightarrow\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}z^{p-1}e^{iz}dz=0\quad\text{(Jordan)}$$

又 C_2 上的积分：

$$I_{C_2}=-\int_0^{+\infty}(iy)^{p-1}e^{-y}\,i\,dy=-e^{i(p\frac{\pi}{2})}\cdot\int_0^{+\infty}y^{p-1}e^{-y}dy$$

$$=-e^{i(p\frac{\pi}{2})}\cdot\Gamma(p)$$

$$\Longrightarrow I'=-I_{C_2}=e^{i(p\frac{\pi}{2})}\cdot\Gamma(p)$$

$$I=\mathrm{Re}\{I'\}=\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\cdot\Gamma(p)$$

3. 证明解析延拓

$$\sum_{n=0}^{\infty}(az)^n=\frac{1}{1-az}\text{，}\forall\,|az|<1\Rightarrow z\in D_1=\left\{z\,\middle|\,|z|<\frac{1}{|a|}\right\}.$$

$$\frac{1}{1-z}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(a-1)z}{1-z}\right]^n=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-\frac{(a-1)z}{1-z}}=\frac{1}{1-az}\text{，}\forall z\in D_2=\left\{z\,\middle|\,\left|\frac{(a-1)z}{1-z}\right|<1\right\}$$

在 $D_1\cap D_2$ 上两级数恒等，且 $D_1\not\subseteq D_2$，$D_2\not\subseteq D_1$，因此互为解析延拓.

4. 证明解析延拓

$$f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\text{，}f_1'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}\text{，}|z|<1$$

$$\Rightarrow f_1(z)=-\ln(1-z)\text{，}z\in D_1=\{z\,|\,|z|<1\}$$

$$f_2'(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}(2-z)^{n-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}(2-z)^n=\frac{-1}{1-(2-z)}=\frac{-1}{z-1}\text{，}|z-2|<1$$

$$\Rightarrow f_2(z)=\pi i+(-\ln(z-1))=\ln(-1)-\ln(z-1)=-\ln(1-z)\text{，}z\in D_2$$

因此互为解析延拓，证毕.

5. 证明不互成解析延拓

设 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1-z^{k+1}}-\frac{1}{1-z^k}\right)=\frac{1}{1-z^{n+1}}-\frac{1}{1-z}$，则：

$$\lim_{n\to\infty}S_n(z)=\begin{cases}1-\frac{1}{1-z}=\frac{z}{z-1}, & |z|<1\\ -\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z-1}, & |z|>1\end{cases}$$

因此不互成解析延拓.