线性代数(2024春)(Linear Algebra)

作业11

1. 在欧几里得空间$\mathbb{R}^4$中：
(1) 求$u=(1,1,1,2)$和$v=(3,1,-1,0)$之间的夹角；
(2) 求一单位向量与

$$u=(1,1,-1,1),\ \ v=(1,-1,-1,1),\ \ w=(2,1,1,3)$$

正交。

2. 求齐次线性方程组

$$2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0,\ \ x_1+x_2-x_3+x_5=0$$

的解空间($\subset\mathbb{R}^5$)的标准正交基。

3. 求

$$V=\mathrm{Span}\{1,\sin x,\sin 2x,\sin 3x\}\subset C[0,\pi]$$

的标准正交基。

4. 证明任意非退化矩阵$A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$可写成$A=BC$，其中$B$是$n\times n$正交矩阵而$C$是$n\times n$上三角矩阵满足$\det C=\pm\det A$。

5. 设$A=(a_{ij})_{n\times n}\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$且$\vec{a}_{(1)},\vec{a}_{(2)},...,\vec{a}_{(n)}$为其行向量。证明：
(1) 如果$\vec{a}_{(1)},\vec{a}_{(2)},...,\vec{a}_{(n)}$相互正交，则

$$|\det A|=\|\vec{a}_{(1)}\|\cdot\|\vec{a}_{(2)}\|\cdots\|\vec{a}_{(n)}\|;$$

(2) 对一般情况，我们有阿达马不等式

$$|\det A|\le\|\vec{a}_{(1)}\|\cdot\|\vec{a}_{(2)}\|\cdots\|\vec{a}_{(n)}\|.$$

6. 设φ是n维欧几里得空间V的自同构。证明$\chi_\varphi(x)=\pm x^n\chi_\varphi(x^{-1})$。