

数学物理方法课程作业

Homework of Mathematical Physics Methods

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

序言

本文为笔者本科时的“数学物理方法”课程作业 (Homework of Mathematical Physics Methods, 2024.9-2025.1)。由于个人学识浅陋, 认识有限, 文中难免有不妥甚至错误之处, 望读者不吝指正, 在此感谢。

我的邮箱是 dingyi233@mails.ucas.ac.cn。

目录

序言	I
目录	I
1 Homework 1: 2024.8.26 - 2024.9.1	1
2 Homework 2: 2024.9.2 - 2024.9.8	3
3 Homework 3: 2024.9.9 - 2024.9.15	7
4 Homework 4: 2024.9.16 - 2024.9.22	11
5 Homework 5: 2024.9.23 - 2024.9.29	13
6 Homework 6: 2024.10.8 - 2024.10.14	16
7 Homework 7: 2024.10.15 - 2024.10.16	20
8 Homework 8: 2024.10.15 - 2024.10.21	21
9 Homework 9: 2024.10.22 - 2024.10.28	23

Homework 1: 2024.8.26 - 2024.9.1

1.1 计算

(1) $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{(1+i)(2+i)}{5}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{-8+6i}{25}$$

(2) $(1+i)^n + (1-i)^n$

首先得到:

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, 1-i = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$

$$\Rightarrow I = 2^{\frac{n}{2}} (e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}})$$

于是有:

$$I = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}+1}, & n = 0 + 4k \\ 2^{\frac{n+1}{2}}, & n = 1 + 4k \\ 0, & n = 2 + 4k \\ -2^{\frac{n}{2}+1}, & n = 3 + 4k \end{cases}, k \in \mathbb{N}$$

习题课补:

$$I = 2^{\frac{n}{2}} (e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}})$$

$$= 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\frac{n\pi}{4} + \cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right) \right)$$

$$= 2^{\frac{n}{2}+1} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

(3) $\sqrt[4]{1+i}$

$$\sqrt[4]{1+i} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{\pi}{16}}$$

习题课补: 在复数域中, 开根号是多值函数, 这里四次根在复数域中应有四个复根, 设 $x = \sqrt[4]{1+i}$, 则原式等价于方程:

$$x^4 = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow |x| = 2^{\frac{1}{8}}, \arg x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3$$

1.2 将复数化为三角或指数形式

(1) $\frac{5}{-3+i}$

$$\frac{5}{-3+i} = \frac{5e^{i0}}{\sqrt{10}e^{i(\arctan(-\frac{1}{3})+\pi)}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot e^{-i(\arctan(-\frac{1}{3})+\pi)}$$

(2) $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$

$$\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}e^{i\arctan(\frac{1}{2})}}{\sqrt{13}e^{i\arctan(-\frac{2}{3})}}\right)^2 = \frac{5}{13}e^{2i(\arctan(\frac{1}{2})-\arctan(-\frac{2}{3}))}$$

1.3 求极限 $\lim_{z \rightarrow i} \frac{1+z^6}{1+z^{10}}$

作不完全因式分解:

$$1+z^6 = z^6 - i^6 = (z^3 - i^3)(z^3 + i^3) = (z-i)(z^2 + iz + i^2)(z^3 + i^3)$$

$$\begin{aligned}
 1 + z^{10} &= z^{10} - i^{10} = (z^5 - i^5)(z^5 + i^5) = (z - i)(z^4 + iz^3 + i^2z^2 + i^3z + i^4)(z^5 + i^5) \\
 \implies L &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1 + z^6}{1 + z^{10}} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z - i)(z^2 + iz + i^2)(z^3 + i^3)}{(z - i)(z^4 + iz^3 + i^2z^2 + i^3z + i^4)(z^5 + i^5)} \\
 &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z^2 + iz + i^2)(z^3 + i^3)}{(z^4 + iz^3 + i^2z^2 + i^3z + i^4)(z^5 + i^5)} \\
 &= \frac{(-3) \times (-2i)}{5i} = \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

事实上, 实数域上的洛必达法则 (L'Hospital) 可以推广到复数域的解析函数, 下面给出 $\frac{0}{0}$ 型的证明。设复变函数 $f(z), g(z)$ 在 $z = z_0$ 解析, 且 $f(z_0) = g(z_0) = 0$, 则有:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

特别地, 若 $f'(z_0)$ 与 $g'(z_0)$ 存在且不为零, 就有 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$

1.4 讨论函数在原点的连续性

$$(1) f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2i}(\frac{z}{z^*} - \frac{z^*}{z}), & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

令 $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$, 则 $\forall (x, y) \neq (0, 0)$:

$$f(x, y) = \frac{1}{2i} \left(\frac{x + iy}{x - iy} - \frac{x - iy}{x + iy} \right) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{4ixy}{x^2 + y^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

令 $k = \frac{y}{x}$, 则:

$$L = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{2k}{1 + k^2}$$

显然, L 随着 k 的变化而变化, 因此极限不存在, $f(z)$ 在 0 处不连续。

$$(2) f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Im} z}{1 + |z|}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

令 $z = x + iy$ 和 $k = \frac{y}{x}$, 则 $\forall (x, y) \neq (0, 0)$:

$$f(x, y) = \frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} \implies \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \frac{0}{1 + 0} = 0 = f(0, 0)$$

因此 $f(z)$ 在 0 处连续。

$$(3) f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z^2}{|z|^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

同理令 $z = x + iy$ 和 $k = \frac{y}{x}$, 则 $\forall (x, y) \neq (0, 0)$:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}$$

因此 $f(z)$ 在 0 处不连续。

1.5 恒等式证明 (附加题)

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^n |b_i|^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i b_j^* - a_j b_i^*|^2$$

Homework 2: 2024.9.2 - 2024.9.8

2.1 下列函数在何处可导, 何处解析

(1) $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$

设 $z = x + iy$, 则 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 + ixy$. $\forall z \in C$, $u(x, y) = x^2$ 和 $v(x, y) = xy$ 在 C 上有连续一阶偏导, 下面考虑 C-R 条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x \quad (2.2)$$

联立 C-R 条件, 得 $(x, y) = (0, 0)$, 因此 f 在 $(0, 0)$ 处可导, 在 C 上不解析. 不在点 $(0, 0)$ 上解析是因为在某点解析是指在此点的有心邻域上解析, 显然这里不满足, 因此 $(0, 0)$ 为奇点.

后补:

u, v 有一阶连续偏导且满足 C-R 条件 $\implies u, v$ 可微且满足 C-R 条件 $\iff f$ 可微 $\iff f$ 可导

(2) $f(x, y) = (x - y)^2 + 2i(x + y)$

$\forall z \in C$, $u(x, y) = (x - y)^2$ 和 $v(x, y) = 2(x + y)$ 在 C 上有连续一阶偏导, 下面验证 C-R 条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x - y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2(x - y) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \quad (2.4)$$

联立 C-R 条件后无解, 因此 f 在 C 上不可导, 在 C 上不解析.

2.2 求下列函数的解析区域

(1) $f(z) = xy + iy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

欲满足 C-R 条件, 则:

$$y = 1, x = 0 \implies f \text{ 在全平面不解析}$$

不在点 $(0, 1)$ 上解析是因为在某点解析是指在此点的有心邻域上解析, 显然这里不满足.

(2) $f(z) = \begin{cases} |z| \cdot z, & |z| < 1 \\ z^2, & |z| \geq 1 \end{cases}$

设 $z = x + iy$, 则:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \begin{cases} (x\sqrt{x^2+y^2}) + i(y\sqrt{x^2+y^2}), & \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ (x^2 - y^2) + i(2xy), & \sqrt{x^2+y^2} \geq 1 \end{cases}$$

$$\iff u(x, y) = \begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2}, & \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ x^2 - y^2, & \sqrt{x^2+y^2} \geq 1 \end{cases}, \quad v(x, y) = \begin{cases} y\sqrt{x^2+y^2}, & \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ 2xy, & \sqrt{x^2+y^2} \geq 1 \end{cases}$$

分别求偏导得到:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}, \quad \sqrt{x^2+y^2} < 1 \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, & \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, & \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \end{cases}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1$$

偏导要满足 C-R 条件, 代入得到:

$$\begin{aligned} x^2 = y^2, \quad 2xy = 0, \quad \forall \sqrt{x^2 + y^2} < 1, x^2 + y^2 \neq 0 \\ 2x = 2x, \quad -2y = -2y, \quad \forall \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1 \\ \implies f(z) \text{ 在 } \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1\} \text{ 上解析} \end{aligned}$$

不在点 (0, 0) 上解析是因为在某点解析是指在此点的有心邻域上解析, 显然这里不满足。

后补: **解析区域必须是开集** (因为受“有心邻域”限制), f 的解析区域应为 $\{z \mid |z| > 1\}$ 。另外, $|z| = 1$ 代表的圆周上也不可微, 这是因为 f 在 $|z| = 1$ 上不连续 (内部是一倍幅角, 外部是二倍幅角), 所以可微区域也为 $\{z \mid |z| > 1\}$ 。

2.3 已知解析函数 $f(z)$ 的实部如下, 求 $f(z)$

(1) $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$

$$\begin{aligned} v'_x = -u'_y = 2y, \quad v'_y = u'_x = 2x + 1 \\ \implies v(x, y) = \int 2y \, dx + \int dy = 2xy + y + C \\ \implies f(x, y) = (x^2 + y^2 + x) + i(2xy + y) + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(2) $u(x, y) = e^y \cos x$

$$\begin{aligned} v'_x = -u'_y = -e^y \cos x, \quad v'_y = u'_x = -e^y \sin x \\ \implies v(x, y) = \int -e^y \cos x \, dx + \int 0 \, dy = -e^y \sin x + C \\ \implies f(x, y) = (e^y \cos x) + i(-e^y \sin x + C), \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2.4 f 解析, 且 $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$, 求 $f(z)$

两边分别对 x, y 求导, 得到:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 + 6xy - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 6xy - 3y^2$$

联立 C-R 条件, 可以解出:

$$\begin{aligned} v'_x = -3x^2 + 3y^2, \quad v'_y = 6xy \\ u'_x = 6xy, \quad u'_y = 3x^2 - 3y^2 \\ \implies v(x, y) = -x^3 + 3xy^2 + C, \quad u(x, y) = 3x^2y - y^3 + C \\ \implies f(x, y) = (3x^2y - y^3) + i(-x^3 + 3xy^2) + C(1 + i), \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

后补: u 和 v 中的实常数 C 其实是同一个! 这是因为题目中 $u - v$ 没有常数项, 说明两者积分常数相同。

2.5 极坐标 C-R 条件

证明极坐标下的 C-R 条件为:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

极坐标变换:

$$\begin{aligned} x &= x(r, \theta) = r \cos \theta, \quad y = y(r, \theta) = r \sin \theta \\ \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \end{aligned}$$

由复合函数的求导法则:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} u(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial \theta} u(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot r \sin \theta + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot r \cos \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} v(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cdot \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial \theta} v(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cdot r \sin \theta + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cdot r \cos \theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u'_r = u'_x \cos \theta + u'_y \sin \theta, & u'_\theta = r(-u'_x \sin \theta + u'_y \cos \theta) \\ v'_r = v'_x \cos \theta + v'_y \sin \theta, & v'_\theta = r(-v'_x \sin \theta + v'_y \cos \theta) \end{cases}$$

联立 C-R 条件, 化简得到:

$$\begin{cases} u'_r = v'_y \cos \theta - v'_x \sin \theta, & u'_\theta = r(-v'_y \sin \theta - v'_x \cos \theta) \\ v'_r = -u'_y \cos \theta + u'_x \sin \theta, & v'_\theta = r(u'_y \sin \theta + u'_x \cos \theta) \end{cases}$$

将两个大括号中的内容作对比, 立即得到:

$$u'_r = \frac{1}{r} v'_\theta, \quad v'_r = -\frac{1}{r} u'_\theta \quad (2.6)$$

反之也可以化为原 C-R 条件, 因此 C-R 条件在极坐标下的形式为:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \square$$

2.6 证明 $f(z)$ 和 $\overline{f(\bar{z})}$ 同解析或同不解析

(1) $f(z)$ 解析 $\Rightarrow \overline{f(\bar{z})}$ 解析

假设 $f(z)$ 在点 $z = z_0$ 解析, 即 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在有心邻域 $U_\delta(z_0)$ 上解析, 这等价于 $f(z)$ 有一阶导, 且在邻域内满足 C-R 条件. 设 $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = u(x, -y) - iv(x, -y)$, 也即:

$$g(z) = u_g(x, y) + iv_g(x, y), \quad u_g(x, y) = u(x, -y), \quad v_g(x, y) = -v(x, -y)$$

容易验证 $g(z)$ 有一阶偏导, 下面验证 C-R 条件:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_g}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, -y), & \frac{\partial u_g}{\partial y} &= \frac{\partial u(x, -y)}{\partial(-y)} \cdot \frac{\partial(-y)}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, -y) \\ \frac{\partial v_g}{\partial x} &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x, -y), & \frac{\partial v_g}{\partial y} &= -\frac{\partial v(x, -y)}{\partial(-y)} \cdot \frac{\partial(-y)}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}(x, -y) \end{aligned}$$

联立 u 和 v 的 C-R 条件, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_g}{\partial x} - \frac{\partial v_g}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, -y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x, -y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_g}{\partial x} = \frac{\partial v_g}{\partial y} \\ \frac{\partial u_g}{\partial y} + \frac{\partial v_g}{\partial x} &= -\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, -y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, -y) \right] = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_g}{\partial y} = -\frac{\partial v_g}{\partial x} \end{aligned}$$

因此 $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ 也解析。

(2) $f(z)$ 解析 $\iff \overline{f(\bar{z})}$ 解析

假设 $\overline{f(\bar{z})}$ 解析, 令 $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$, 则 $f(z) = \overline{g(\bar{z})}$, 由 (1) 的结论, $g(z)$ 解析 $\implies f(z) = \overline{g(\bar{z})}$ 也解析。
证毕。□

Homework 3: 2024.9.9 - 2024.9.15

3.1 若 $f(z)$ 解析, $\arg f(z)$ 是否为调和函数?

注: 下面的过程仅讨论了 $\arg f(z)$ 的解析性, 未能揭示其调和性, 正确的解答见后文补充的灰色小字。

(1) 当 $f(z) = C \in \mathbb{C}, \forall z \in G$, 也即 $f(z)$ 恒为常量时: $\arg f(z)$ 也为常量, 设 $\arg f(z) = a + ib$, 则 $a = \arg f(z) \in \mathbb{R}$ 而 $b = 0$, 自然满足 $\Delta a = \Delta b = 0$, 因此 $\arg f(z)$ 为调和函数。

(2) 当 $f(z)$ 是非常量函数时:

由 $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, 移项, 并作映射 $z \rightarrow f(z)$, 则有:

$$\arg f(z) = \frac{1}{i} (\ln f(z) - \ln \rho)$$

函数 \ln 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上解析, 但对于函数 $\rho = \rho(z)$:

$$\rho = \sqrt{u^2 + v^2} \implies u_\rho = \sqrt{u^2 + v^2}, v_\rho = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial x} = \frac{uu'_x}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{vv'_x}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \frac{\partial u_\rho}{\partial y} = \frac{uu'_y}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{vv'_y}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (3.2)$$

假设 ρ 满足 C-R 条件, 代入得到:

$$\begin{cases} uu'_x + vv'_x = 0 \\ uu'_y + vv'_y = 0 \\ \sqrt{u^2 + v^2} \neq 0 \end{cases}$$

由于 $f(z)$ 解析, 满足 C-R 条件 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, 代入后整理得到:

$$\begin{cases} v(v_y'^2 - u_y'^2) = 0 \\ u(u_y'^2 + v_y'^2) = 0 \end{cases}$$

$f(z)$ 非常量, 因此 u, v 非常量, 因此只能有:

$$v_y' = u_y' = 0 \implies u_x' = v_x' = 0 \implies u \text{ 和 } v \text{ 为常量函数}$$

这使得 $f(z) = u + iv$ 是常量, 矛盾! 因此 $\arg f(z)$ 不解析 (这能否推出不调和? 解析是调和的充分条件, 但是充要的吗? 事实上并不是, 因此并不能揭示调和性)。

后补: 即使仅从解析性的角度来看, 上面的过程也没有抓到主要矛盾, 是舍本逐末了。因为无论 $f(z)$ 的性质如何, $\arg f(z)$ 始终是 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ 的函数, 这表明 $\arg f(z)$ 是实部是它本身而虚部恒为 0, 因此, 由 C-R 条件可知 $\arg f(z)$ 解析的必要条件是实部为常数, 而这也是充分条件。

对 $\arg f(z)$ 的调和性, 我们有如下推导:

$$\arg f(z) = \arctan \frac{u(x, y)}{v(x, y)} + A, \quad A \in \{0, \pi\} \quad (3.3)$$

令 $g(z) = \arg f(z)$, 则有:

$$g'_x = \frac{uv'_x - u'_x v}{u^2 + v^2}, \quad g''_{xx} = \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} [(u^2 + v^2)(uv''_{xx} + u''_{xx}v) - 2uv(v_x'^2 - u_x'^2) - 2(u^2 - v^2)u'_x v'_x] \quad (3.4)$$

对 y 求导也是同理, 只需将上面的角标 x 换为 y , 于是有 Δg :

$$\begin{aligned} \Delta g &= g''_{xx} + g''_{yy} \\ &= \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} [(u^2 + v^2)(u(v''_{xx} + v''_{yy}) + (u''_{xx} + u''_{yy})v) - 2uv(v_x'^2 + v_y'^2 - u_x'^2 - u_y'^2) - 2(u^2 - v^2)(u'_x v'_x + u'_y v'_y)] \end{aligned}$$

f 解析意味着 u, v 构成一对共轭调和函数, 有 $\Delta u = \Delta v = 0$, 代入上式, 再代入 C-R 条件, 容易验证右边为 0, 也即证明了 $\Delta g = 0$, 因此 $\arg f(z)$ 为调和函数。对 $u^2 + v^2 = 0$ 的情况, 我们不再赘述, 只关心普遍结论。

3.2 从已知的实虚部求出解析函数 $f(z)$

(1) $u = e^x(x \cos y - y \sin y) + 2 \sin x \cdot \sinh y + x^3 - 3xy^2 + y$

$$u'_x = e^x(x \cos y - y \sin y + \cos y) + 2 \cos x \sinh y + 3x^2 - 3y^2 \quad (3.5)$$

$$u'_y = e^x(-x \sin y - \sin y - y \cos y) + 2 \sin x \cosh y - 6xy + 1 \quad (3.6)$$

由 C-R 条件, $v'_x = -u'_y$, $v'_y = u'_x$, 于是得到:

$$v(x, y) = \int (-u'_y) dx + \int (-3y^2) dy \quad (3.7)$$

$$= (x-1)e^x \sin y + (\sin y + y \cos y)e^x + 2 \cos x \cosh y + 3x^2 y - x - y^3 + C \quad (3.8)$$

$$= (x \sin y + y \cos y)e^x + 2 \cos x \cosh y + 3x^2 y - x - y^3 + C, C \in \mathbb{R} \quad (3.9)$$

令 $(x, y) = (z, 0)$, 得到:

$$u(z, 0) = ze^z + z^3, \quad v(z, 0) = 2 \cos z - z + C, C \in \mathbb{R} \quad (3.10)$$

于是得到 $f(x, y)$:

$$f(z) = [u(x, y) + iv(x, y)]_{x=z, y=0} = (ze^z + z^3) + i(2 \cos z - z + C), C \in \mathbb{R}$$

(2) $v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$

$$v'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2} + 1, \quad v'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2} - 2$$

由 C-R 条件, $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$, 于是得到:

$$u(x, y) = \int v'_y dx + \int (-1) dy = 2 \arctan \frac{x}{y} - 2x - y + C \quad (3.11)$$

$$f(x, y) = u + iv = (2 \arctan \frac{x}{y} - 2x - y + C) + i(\ln(x^2 + y^2) + x - 2y), C \in \mathbb{R}$$

后补, 这里之所以没有令 $(x, y) = (z, 0)$ 得到 $f(z)$, 是因为函数 $\arctan \frac{x}{y}$ 在实轴附近是不连续的, 例如在正实轴 $x > 0$ 附近, $\lim_{y \rightarrow 0^+}$ 时趋于 $+\infty$ 而 $\lim_{y \rightarrow 0^-}$ 时趋于 $-\infty$. 而映射 $(x, y) = (z, 0)$ 的必要条件是解析域中包含实轴, 这涉及到解析延拓的内容, 我们不提. 只需要写到 $f(x, y)$ 的形式就这样放着即可.

3.3 求下列函数的值

(1) $\cos(2 + i)$

由 $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, 可得:

$$\begin{aligned} \cos(2 + i) &= \frac{1}{2} [e^{i(2+i)} + e^{i(2-i)}] = \frac{1}{2} [e^{2i-1} + e^{1-2i}] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{e} + e \right) \cos 2 + i \left(\frac{1}{e} - e \right) \sin 2 \right] \end{aligned}$$

(2) $\text{Ln}(2 - 3i)$

由 $\text{Ln} z = \ln |z| + i \text{Arg} z$, 可得:

$$\text{Ln}(2 - 3i) = \ln |2 - 3i| + i \text{Arg}(2 - 3i) = \frac{1}{2} \ln 13 + i \left(\arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

(3) $\operatorname{Arccos}\left(\frac{3+i}{4}\right)$

$\arccos z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$, 于是:

$$\begin{aligned}\operatorname{Arccos}\left(\frac{3+i}{4}\right) &= -i \operatorname{Ln}\left(\frac{3+i}{4} + \sqrt{\left(\frac{3+i}{4}\right)^2 - 1}\right) = -i \operatorname{Ln}\left(\frac{3+i}{4} + \frac{\sqrt{-8+6i}}{4}\right) \\ &= -i \operatorname{Ln}\left(\frac{3+i}{4} \pm \frac{1+3i}{4}\right) = -i \operatorname{Ln}(1+i) \text{ 或 } -i \operatorname{Ln}\left(\frac{1-i}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) - i\frac{\ln 2}{2} \text{ 或 } -\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\frac{\ln 2}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

(4) $\operatorname{Arctan}(1+2i)$

由 $\operatorname{Arctan} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}$, 得:

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctan}(1+2i) &= \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{1+i(1+2i)}{1-i(1+2i)}\right) = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{-1+i}{3-i}\right) \\ &= \frac{1}{2i} (\operatorname{Ln}(-2+i) - \ln 5) = \frac{1}{2i} \left[-\frac{\ln 5}{2} + i\left(\pi - \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\pi - \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi\right) + i\frac{\ln 5}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

3.4 判断下列函数是单值还是多值函数

(1) $\sin \sqrt{z}$

多值函数。 \sqrt{z} 为双值函数, $a^2 = z \implies \sqrt{z} = \pm a$, 而 \sin 为奇函数, $\sin a \neq \sin(-a)$, 故为多值函数。

(2) $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$

单值函数。 $\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin(-a)}{-a}$, 因此为单值函数。

(3) $\frac{\cos \sqrt{z}}{z}$

单值函数。 $\frac{\cos a}{a^2} = \frac{\cos(-a)}{(-a)^2}$, 故为单值函数。

3.5 解方程: $2 \cosh^2 z - 3 \cosh z + 1 = 0$

原方程等价于:

$$(2 \cosh z - 1)(\cosh z - 1) = 0 \implies \cosh z = \frac{1}{2} \text{ 或 } 1 \quad (3.12)$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \implies e^z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \text{ 或 } 1 \quad (3.13)$$

$$\implies z = i\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \text{ 或 } i(0 + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.14)$$

3.6 求下列多值函数的分支点

(1) $\sqrt{1-z^3}$ 的分支点: $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \infty$

宗量 $1-z^3$ 不妨记为 $1-z^3 = (z_1-z)(z_2-z)(z_3-z)$ 。支点仅可能在宗量的零点、奇点处出现, 下面分别考察 z_1, z_2, z_3, ∞ 四点。

对 z_1 , 取仅包含点 z_1 的简单闭合曲线, 曲线上一一点 z 沿逆时针绕一圈回到原处, 因子 (z_1-z) 的幅角增加了 2π , 因子 (z_2-z) 和 z_3-z 的幅角增加了 0 , 因此整个宗量的幅角增加 2π , 开根后, 函数值幅角增加 π , 前后不相等。因此点 z_1 是分支点。同理可得 z_2 和 z_3 是分支点。

对 ∞ , 取包含点 z_1, z_2, z_3 的简单闭合曲线, 曲线上一点 z 沿顺时针 (不是逆时针) 绕一圈回到原处, 整个宗量的幅角增加了 -6π , 开根后函数值幅角增加 -3π , 因此 ∞ 也是分支点。

(2) $\text{Ln} \cos z$ 的分支点: $\infty, \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 。

可以证明, $\text{Ln} f(z)$ 的分支点等价于方程 $f(z) = 0$ 和 $f(z) = \infty$ 的解^①。于是分别令 $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ 为 0 和 ∞ , 解得:

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ 或 } z = \infty \quad (3.15)$$

(3) $\sqrt{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}$ 的分支点: $0, 1, 2, \infty$

考虑点 $0, 1, 2$, 取仅包含点 0 的简单闭合曲线, 曲线上一点 z 逆时针绕一圈后, 宗量整体幅角增加 2π , 函数值幅角增加 π , 因此点 0 是分支点。同理点 1 和 2 也是分支点。

对 ∞ , 取包含点 $0, 1, 2$ 的简单闭合曲线, 曲线上一点 z 顺时针绕一圈后, 宗量整体幅角增加 -2π , 函数值也不发生变化, ∞ 不是分支点。

(4) $\text{Ln} \frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)}$ 的分支点: a, b, c, ∞

与 (2) 同理, 考虑宗量 $\frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)}$ 的零点和无穷点, 得到 $z = a, b, c, \infty$, 即为所求分支点。

^①这是助教在习题课上给出的结论, 并未给出具体证明。但是我们可以证明 $\text{Ln} z$ 的分支点为 0 和 ∞ , 这是因为 $\text{Ln} z = \ln |z| + i \text{Arg} z$, 当 z 绕原点逆时针转一圈时, $\text{Arg} z$ 增加 2π 而不是回到原来的函数值, 因此 0 为分支点; 无穷点同理。

Homework 4: 2024.9.16 - 2024.9.22

4.1 计算下列积分

$$(1) \oint_{|z+i|=1} \frac{e^z}{1+z^2} dz$$

被积函数 $\frac{e^z}{1+z^2}$ 在圆周 $|z+i|=1$ 内有且仅有 $z=-i$ 一个奇点, 由 Cauchy 定理和 Cauchy 积分公式:

$$I = \oint_{|z+i|=1} \frac{e^z}{1+z^2} dz = 2\pi i \left[\frac{e^z}{z-i} \right]_{z=-i} = -\pi e^{-i} \quad (4.1)$$

结果化简到上面一步即可。

$$(2) \oint_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1} dz, a > 1$$

被积函数 $\frac{z}{z^4-1}$ 在圆周 $|z-a|=a$ 内有且仅有 $z=1$ 一个奇点, 由 Cauchy 定理和 Cauchy 积分公式:

$$I = \oint_{|z-1|=a} \frac{z}{z^4-1} dz = 2\pi i \cdot \left[\frac{z}{z^3+z^2+z+1} \right]_{z=1} = \frac{\pi i}{2}$$

$$(3) \oint_{|z|=2} \frac{z^2-1}{z^2+1} dz$$

被积函数在圆周 $|z|=2$ 内有且仅有 $z=\pm i$ 两个奇点, 由 Cauchy 定理和 Cauchy 积分公式:

$$I = \oint_{|z+i|=\delta_1} \frac{z^2-1}{z^2+1} dz + \oint_{|z-i|=\delta_2} \frac{z^2-1}{z^2+1} dz = 2\pi i \cdot \left[\frac{z^2-1}{z-i} \right]_{z=-i} + 2\pi i \cdot \left[\frac{z^2-1}{z+i} \right]_{z=i} = 0$$

$$(4) \oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2(z^2+16)} dz$$

被积函数在圆周 $|z|=2$ 内有且仅有 $z=0$ 一个奇点, 由 Cauchy 定理和 Cauchy 积分公式:

$$I = \oint_{|z|=\delta} \frac{1}{z^2(z^2+16)} dz = 2\pi i \cdot \left[\frac{1}{z^2+16} \right]_{z=0}^{(1)} = 2\pi i \cdot \left[-\frac{2z}{(z^2+16)^2} \right]_{z=0} = 0$$

4.2 计算下列积分

$$(1) \oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2-1} dz$$

被积函数在圆周 $|z|=R$ 内有且仅有 $z=1$ 一个奇点, 则:

$$I = 2\pi i \cdot \left[\frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} \right]_{z=1} = \frac{\sqrt{2}\pi i}{2}$$

$$(2) \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{|z|=R} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2-1} dz$$

被积函数在圆周 $|z|=R$ 内有且仅有 $z=\pm 1$ 两个奇点, 则:

$$I = 2\pi i \cdot \left[\frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z-1} \right]_{z=-1} + 2\pi i \cdot \left[\frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} \right]_{z=1} = \sqrt{2}\pi i$$

$$(3) \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2-1} dz$$

被积函数在圆周 $|z|=R$ 内有且仅有 $z=-1$ 一个奇点, 则:

$$I = 2\pi i \cdot \left[\frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z-1} \right]_{z=-1} = \frac{\sqrt{2}\pi i}{2}$$

4.3 计算积分 $\int_L \frac{1}{(z-a)^n} dz$, 其中 L 为以 a 为圆心, r 为半径的上半圆周

作变换 $z \rightarrow z+a$, 则原积分化为 $\int_{L'} \frac{1}{z^n} dz$, 其中 L' 是以 0 为圆心, r 为半径的上半圆周。当 $n=1$ 时, $\frac{1}{z}$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内解析, $I(n) = [\ln z]_{z=-r}^{z=r} = \ln(-1) = i\pi$; 当 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ 时, $\frac{1}{z^n}$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内解析, $I(n) = \left[\frac{z^{1-n}}{1-n} \right]_{z=-r}^{z=r} = \frac{1}{1-n} [(-r)^{1-n} - r^{1-n}]$ 。综上, 我们有:

$$I(n) = \int_L \frac{1}{(z-a)^n} dz = \begin{cases} i\pi, & n=1 \\ [(-1)^{1-n} - 1] \cdot \frac{r^{1-n}}{1-n}, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\} \end{cases}$$

4.4 计算积分 $\oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)} dz$, 其中 a, b 不在圆周 $|z|=R$ 上, n 为正整数

令 $G = \{z \mid |z|=R\}$, 共有四种情况, 总结如下:

$$I = \oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)} dz = \begin{cases} 0, & a, b \notin G \\ \frac{(-1)^{n-1} 2\pi i}{(a-b)^n}, & a \in G, b \notin G \\ \frac{2\pi i}{(b-a)^n}, & b \in G, a \notin G \\ 0, & a, b \in G \end{cases}$$

4.5 (附加题) $f(z)$ 在 $|z| < R$ 内解析, 求证 $I(r) = \int_0^{2\pi} f(r \cdot e^{i\theta}) d\theta$ 与 r 无关, $\forall r \in (0, R)$

设 $f(z)$ 在 G 内解析, 由 Cauchy 积分公式:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

在上式中, 取 $G = \{z \mid |z-a|=r, r \in (0, R)\}$, 也即以 a 为圆心, r 为半径的圆周, 则有 $z-a = r \cdot e^{i\theta}$, $dz = ire^{i\theta} d\theta$, 代入即得:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(z)}{r \cdot e^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} f(z) d\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} f(a + r \cdot e^{i\theta}) d\theta$$

上式中令 $a=0$, 即得:

$$I = I(r) = \oint_0^{2\pi} f(r \cdot e^{i\theta}) d\theta = 2\pi f(0), \quad \forall r \in (0, R) \quad \square \quad (4.2)$$

因此积分的值与 r 无关。

Homework 5: 2024.9.23 - 2024.9.29

!!! 不要忘了 $2\pi i$!!!

5.1 求积分 $\oint_C \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2 - 1} dz$, $C: x^2 + y^2 - 2x = 0$

$C: (x-1)^2 + y^2 = 1$, 因此:

$$I = 2\pi i \left[\frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} \right]_{z=1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi i \quad (5.1)$$

5.2 求下列积分的值, 积分路径均沿直线

$$(1) \int_0^i \frac{z}{z+1} dz$$

$$I = \int_0^i \left(1 - \frac{1}{z+1} \right) dz = [z - \ln(z+1)]_0^i = i - \ln(1+i) = -\frac{\ln 2}{2} + i \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \quad (5.2)$$

$$(2) \int_0^{1+i} z^2 \sin z dz$$

$$\begin{aligned} I &= [-z^2 \cos z + 2z \sin z + 2 \cos z]_0^{1+i} \\ &= (2-2i) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{e} + e \right) \cos 1 + \left(\frac{1}{e} - e \right) \sin 1 \right] + 2(1+i) \cdot \frac{1}{2i} \cdot \left[\left(\frac{1}{e} - e \right) \cos 1 + \left(\frac{1}{e} + e \right) \sin 1 \right] - 2 \\ &= \frac{2(1-i)}{e} (\cos 1 + i \sin 1) - 2 \end{aligned}$$

$$(3) \int_{-1}^i \frac{1}{z^2 + z - 2} dz$$

$$I = \frac{1}{3} \int_{-1}^i \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2} \right) dz = \frac{1}{3} [\ln(z-1) - \ln(z+2)]_{-1}^i = -\frac{1}{3} \left[\frac{\ln 10}{2} + i \left(\arctan \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (5.3)$$

5.3 讨论下列各积分的值, 其中积分路径是圆周 $|z| = r$

$$(1) \oint_{|z|=r} \frac{z^3}{(z-1)(z^2+2z+3)} dz$$

记 $z^2 + 2z + 3 = 0$ 的两个根分别为 $z_1 = -1 + i\sqrt{2}$, $z_2 = -1 - i\sqrt{2}$, 先考虑 $r \in (\sqrt{3}, +\infty)$, 此时积分围道内有三个奇点 $1, z_1, z_2$ 。由 Cauchy 定理, 可得:

$$I = 2\pi i \left\{ \left[\frac{z^3}{(z-z_1)(z-z_2)} \right]_{z=1} + \left[\frac{z^3}{(z-1)(z-z_2)} \right]_{z=z_1} + \left[\frac{z^3}{(z-1)(z-z_1)} \right]_{z=z_2} \right\} \quad (5.4)$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{7-i4\sqrt{2}}{3} \right) + \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{7+i4\sqrt{2}}{3} \right) \right] = -2\pi i \quad (5.5)$$

当 $r \in (0, 1)$ 时, 无奇点, $I = 0$; 当 $r \in (1, \sqrt{3})$ 时, 有唯一奇点 $z = 1$, $I = 2\pi i \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}i$ 。综上有:

$$I = I(r) = \begin{cases} 0 & , r \in (0, 1) \\ \frac{\pi}{3}i & , r \in (1, \sqrt{3}) \\ -2\pi i & , r \in (\sqrt{3}, +\infty) \end{cases} \quad (5.6)$$

$$(2) \oint_{|z|=r} \frac{1}{z^3(z+1)(z+2)} dz$$

先考虑 $r \in (2, +\infty)$ 的情况, 此时围道内有三个奇点 $0, -1, -2$, 但我们不需要具体求解, 直接由大圆弧定理:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(z \cdot \frac{1}{z^3(z+1)(z+2)} \right) = 0 \implies I = 2\pi i \cdot 0 = 0 \quad (5.7)$$

$r \in (1, 2)$ 时, 有两奇点 $0, -1$, 于是:

$$I = 2\pi i \left\{ \frac{1}{2!} \cdot \left[\frac{1}{(z+1)(z+2)} \right]_{z=0}^{(2)} + \left[\frac{1}{z^3(z+2)} \right]_{z=-1} \right\} = 2\pi i \left[\frac{7}{8} + (-1) \right] = -\frac{1}{4}\pi i \quad (5.8)$$

再考虑上 $r \in (0, 1)$, 综上有:

$$I = I(r) = \begin{cases} \frac{7}{4}\pi i & , r \in [0, 1) \\ -\frac{1}{4}\pi i & , r \in (1, 2) \\ 0 & , r \in (2, +\infty) \end{cases} \quad (5.9)$$

$$5.4 \text{ 设 } f(z) = \oint_{|\zeta|=2} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta, \text{ 求 } f''(1+i)$$

由 Cauchy 积分公式:

$$f(z) = 2\pi i [3z^2 + 7z + 1], \implies f''(1+i) = 2\pi i \cdot 6 = 12\pi i \quad (5.10)$$

$$5.5 \text{ 计算积分 } f(z) = \oint_{|\zeta|=1} \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta, \text{ 其中 } |z| \neq 1$$

$|\zeta| = 1$ 时有 $\bar{\zeta} = \frac{1}{\zeta}$, $z = 0$ 的情况需单独计算, 综合有:

$$f(z) = \oint_{|\zeta|=1} \frac{1}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta = \begin{cases} 0 & , |z| \in [0, 1) \\ -\frac{2\pi i}{z} & , |z| \in (1, +\infty) \end{cases} \quad (5.11)$$

$$5.6 \text{ 计算积分 } f(z) = \oint_{|\zeta|=2} \frac{\bar{\zeta}^2 e^\zeta}{\zeta - z} d\zeta, \text{ 其中 } |z| \neq 2$$

$|\zeta| = 2$ 时 $\bar{\zeta} = \frac{4}{\zeta}$, 于是 $|z| < 2$ 时:

$$I = 16 \oint_{|\zeta|=2} \frac{e^\zeta}{\zeta^2(\zeta - z)} d\zeta = 16 \cdot 2\pi i \left\{ \left[\frac{e^\zeta}{\zeta - z} \right]_{\zeta=0}^{(1)} + \left[\frac{e^\zeta}{\zeta^2} \right]_{\zeta=z} \right\} \quad (5.12)$$

$$= 32\pi i \left[\left(-\frac{z+1}{z^2} \right) + \frac{e^z}{z^2} \right] = 32\pi i \cdot \frac{e^z - z - 1}{z^2} \quad (5.13)$$

$|z| = 0$ 时 $I = 16 \oint_{|\zeta|=2} \frac{e^\zeta}{\zeta^3} d\zeta = 16\pi i$, 再考虑上 $|z| > 2$, 综合有:

$$I = f(z) = \begin{cases} 16\pi i & , |z| = 0 \\ 32\pi i \cdot \frac{e^z - z - 1}{z^2} & , |z| \in (0, 2) \\ -32\pi i \cdot \frac{z+1}{z^2} & , |z| \in (2, +\infty) \end{cases} \quad (5.14)$$

5.7 计算积分 $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3} dz$

由高阶导数公式:

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{2!} \cdot [e^z]_{z=0}^{(2)} = \pi i \quad (5.15)$$

5.8 求 a 的值使得函数 $F(z) = \int_{z_0}^z e^z \left(\frac{1}{z} + \frac{a}{z^3} \right) dz$ 是单值的

$F(z)$ 是单值的, 也即积分与路径无关, 这等价于被积函数是解析函数, 由于没有限制 z 的范围, 也即 $z \in \mathbb{C}$, 因此:

$$\oint_{\partial G} \left(\frac{e^z}{z} + a \frac{e^z}{z^3} \right) dz = 0, \quad \forall G \subset \mathbb{C} \quad (5.16)$$

计算左边的积分:

$$I = 2\pi i \left\{ [e^z]_{z=0} + \frac{a}{2!} \cdot [e^z]_{z=0}^{(2)} \right\} = 2\pi i \left(1 + \frac{a}{2} \right) = 0 \implies a = -2 \quad (5.17)$$

Homework 6: 2024.10.8 - 2024.10.14

求幂级数的收敛半径有两个常用方法:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \quad (6.1)$$

前者称为 Cauchy-Hadamard 公式, 是普遍成立的, 后者称为 d'Alembert 公式, 在极限存在时成立, 但通常计算更简单。

6.1 确定下列幂级数的收敛半径

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \implies R = 1 \quad (6.2)$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \infty \cdot e \implies R = 0 \quad (6.3)$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}, \quad ???$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n}$$

$$\text{级数 } \sum_{n=1}^{\infty} z^n \text{ 的收敛半径 } r = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n} \text{ 的收敛半径为 } R = \sqrt{r} = 1. \quad (6.4)$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n z^n$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [3 + (-1)^n] = 4 \implies R = \frac{1}{4} \quad (6.5)$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \cos(in) \cdot z^n$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\cos(in+i)}{\cos(in)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\cos i - \sin i \cdot \tan(in)| = |\cos i - i \sin i| = |e^{i(-i)}| = e \implies R = \frac{1}{e} \quad (6.6)$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} (n + a^n) z^n$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) + a^{n+1}}{n + a^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + a \cdot \left(\frac{a^n}{n}\right)}{1 + \left(\frac{a^n}{n}\right)} \right| = \begin{cases} 1, & |a| \leq 1 \\ a, & |a| > 1 \end{cases} \implies R = \begin{cases} 1, & |a| \leq 1 \\ \frac{1}{|a|}, & |a| > 1 \end{cases} \quad (6.7)$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \implies R = 1 \quad (6.8)$$

6.2 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 $R \in (0, \infty)$, 求下列幂级数的收敛半径

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n^R c_n z^n$$

$$\frac{1}{R_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^R c_{n+1}}{n^R c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^R \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = 1 \cdot \frac{1}{R} \implies R_1 = R \quad (6.9)$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1) c_n z^n$$

$$\frac{1}{R_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2^n - 1}{2^n - 1} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = 2 \cdot \frac{1}{R} \implies R_2 = \frac{R}{2} \quad (6.10)$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (c_n)^k z^n$$

$$\frac{1}{R_3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|^k = \frac{1}{R^k} \implies R_3 = R^k \quad (6.11)$$

6.3 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$ 在 $|z| \neq 1$ 上收敛, 并求其和函数

$$\begin{aligned} S_n(z) &= \sum_{k=1}^n \frac{z^{k-1}}{(1-z^k)(1-z^{k+1})} = \frac{1}{z(1-z)} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{1-z^k} - \frac{1}{1-z^{k+1}} \right) = \frac{1}{z(1-z)} \cdot \left[\frac{1}{z^{n+1}-1} - \frac{1}{z-1} \right] \\ \implies S(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = \begin{cases} \frac{1}{(1-z)^2}, & |z| < 1 \\ \frac{1}{z(1-z)^2}, & |z| > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

因此级数在 $|z| \neq 1$ 上收敛。

6.4 证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^{n+1}}{n+1} - \frac{2z^{2n+3}}{2n+3} \right)$ 的和函数 $S = S(z)$ 在 $z = 1$ 不连续

容易知道上面级数在 $|z| < 1$ 收敛而在 $|z| > 1$ 发散, 因此在 $|z| = 1$ 处不连续 \implies 在 $z = 1$ 点不连续。但我们不妨求解一下和函数。

先求和函数 $S(z)$, $|z| < 1$ 。级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n+3}}{2n+3}$ 的收敛半径都为 1, 因此当 $|z| < 1$ 时, 由一致收敛性有:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^{n+1}}{n+1} \right) \right] dz = \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right] dz = \int \frac{1}{1-z} dz = -\ln(z-1) + C_1 \quad (6.12)$$

$z = 0$ 时级数为 0, 因此 $C_1 = \ln(-1)$ 。同理可得:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n+3}}{2n+3} = 2 \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^{2n+3}}{2n+3} \right) \right] dz = 2 \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^{n+1} \right] dz = 2 \int \frac{z^2}{1-z^2} dz \quad (6.13)$$

$$= 2 \int \left[-1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) \right] dz = -2z - \ln \left(\frac{z-1}{z+1} \right) + C_2 \quad (6.14)$$

$z = 0$ 时级数为 0, 因此 $C_2 = 0$ 。由于原级数在 $|z| < 1$ 内绝对收敛, 可以任意交换求和次序, 因此有:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^{n+1}}{n+1} - \frac{2z^{2n+3}}{2n+3} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n+3}}{2n+3} = - \left[\ln(z-1) + 2z + \ln \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \right] + \ln(-1) \quad (6.15)$$

于是极限 $\lim_{z \rightarrow 1} S(z)$ 不存在, 自然不可能连续。

6.5 对 $|z| < 1$, 求下列级数的和

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$

级数的收敛半径为 1, 由绝对收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) z^n - \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) z^n - \frac{z}{1-z} \quad (6.16)$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) z^n$ 的收敛半径仍为 1, 由一致收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{d}{dz} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int (n+1) z^n dz \right) \right] = \frac{d}{dz} \left[\sum_{n=1}^{\infty} z^{n+1} \right] = \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{1-z} \right] = \frac{z(2-z)}{(1-z)^2} \quad (6.17)$$

综上有:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z(2-z)}{(1-z)^2} - \frac{z}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2} \quad (6.18)$$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$

由一致收敛性:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^{2n+1}}{2n+1} \right) \right] dz = \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^n \right] dz = \int \frac{1}{1-z^2} dz \quad (6.19)$$

$$= \int \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) \right] dz = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right) + C \quad (6.20)$$

$z = 0$ 时级数为 0, 因此 $C = 0$ 。

需要注意, 这里的定积分 $\int \frac{1}{1-z^2} dz$ 结果与 z 的范围有关, 当 $|z| < 1$ 时, 对应实函数上的 $-1 < x < 1$, 此时 $1-x > 0$, 所以应该对 $\frac{1}{1-z}$ 积分:

$$\int \frac{1}{1-z^2} dz = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} \right) dz = \frac{1}{2} [-\ln(1-z) + \ln(1+z)] + C = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right) + C \quad (6.21)$$

当 $|z| > 1$ 时, 对应实函数上的 $x > 1$, 此时 $x-1 > 0$, 所以应该对 $\frac{1}{z-1}$ 积分:

$$\int \frac{1}{1-z^2} dz = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1} \right) dz = \frac{1}{2} [\ln(z+1) - \ln(z-1)] + C = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) + C \quad (6.22)$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

由一致收敛性:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^{n+1}}{n+1} \right) \right] dz = \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right] dz = \int \frac{1}{1-z} dz = -\ln(z-1) + C_1 \quad (6.23)$$

$z=0$ 时级数为 0, 因此 $C_1 = \ln(-1)$ 。

6.6 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z+n}$ 在不包含负整数的任意闭圆上一致收敛

首先有两个引理:

Theorem. 1 (Dirichlet 判别法): 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有界, $\sum_{n=1}^{\infty} (v_{n+1} - v_n)$ 绝对收敛且 $\lim v_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ 收敛。

Theorem. 2 (级数收敛): 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛, 但不绝对收敛。证明略。

在 Theorem.2 的基础上, 由 Theorem.1 (Dirichlet 判别法) 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z+n}$ 收敛, 可以任意加括号。给定不包含负整数的任意闭圆 G , 记 $r = |z|$, $N_0 = \sup_z \left\lceil \frac{|z|+1}{2} \right\rceil$, 则有:

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+2n-1} - \frac{1}{z+2n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+2n-1)(z+2n)} \quad (6.24)$$

$$\Rightarrow |S(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z+2n-1| \cdot |z+2n|} = \sum_{n=1}^{N_0-1} \frac{1}{|z+2n-1| \cdot |z+2n|} + \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{|z+2n-1| \cdot |z+2n|} \quad (6.25)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|2n-1-r| \cdot |2n-r|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|2n-1-r|^2} < \infty \quad (6.26)$$

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+2n-1} - \frac{1}{z+2n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+2n-1)(z+2n)} \quad (6.27)$$

$$\Rightarrow |S(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z+2n-1| \cdot |z+2n|} = \sum_{n=1}^{N_0-1} \frac{1}{|z+2n-1| \cdot |z+2n|} + \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{|z+2n-1| \cdot |z+2n|} \quad (6.28)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N_0-1} \frac{1}{|z+2n-1| \cdot |z+2n|} + \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{|2n-1-r| \cdot |2n-r|} \quad (6.29)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N_0-1} \frac{1}{|z+2n-1| \cdot |z+2n|} + \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{|2n-1-r|^2} \quad (6.30)$$

对给定的区域 G , 前一项是有限和, 自然收敛, 后一项是收敛级数, 因此原级数在 G 上一致收敛。□

Homework 7: 2024.10.15 - 2024.10.16

作业题目详见网址 <https://www.123865.com/s/0y0pTd-jKKj3>, 除非必要, 后文不再重复叙述题目。

Homework 8: 2024.10.15 - 2024.10.21

8.1 讨论下列函数所有奇点的性质

- (1) $\frac{1}{z-z^3}$: 有 $z=0, 1, -1$ 三个一阶极点
- (2) $\cos \frac{1}{\sqrt{z}}$: 由 $\lim_{z \rightarrow 0} z \cos \frac{1}{\sqrt{z}} = 0$ 知, 有一阶极点 $z=0$
- (3) $\frac{\sqrt{z}}{\sin \sqrt{z}}$: $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{z}}{\sin \sqrt{z}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1$, 因此有可去极点 $z=0$
- (4) $\frac{1}{(z-1) \ln z}$: $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \cdot \frac{1}{(z-1) \ln z} = 1$, 因此有二阶极点 $z=1$
- (5) $f(z) = \int_0^z \frac{\sin \sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}} d\zeta$: 作换元 $t = \sqrt{\zeta}$, 可得 $f(z) = 1 - \cos t = 1 - \cos \sqrt{z}$, 在 \mathbb{C} 上无奇点, 在 $\bar{\mathbb{C}}$ 上有本性奇点 $z = \infty$
- (6) $\frac{1-e^z}{2+e^z}$: $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1-e^z}{2+e^z} = -1$, 因此有且仅有可去奇点 $z = \infty$
- (7) $\frac{1}{z^3(2-\cos z)}$: 有三阶极点 $z=0$

8.2 讨论

- (1) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\cos z}{z} = 0$, 是可去奇点
- (2) 做换元 $t = \frac{1}{z}$, 有 $\lim_{t \rightarrow 0} t^2 \cdot \frac{1}{t \cos \frac{1}{t}} = 0$, 因此为二阶极点。
- (3) 做换元 $t = \frac{1}{z}$, 有 $\lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{t} - a\right)\left(\frac{1}{t} - b\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{(1-at)(1-bt)} = 1$, 因此为一阶极点。

8.3 计算函数在指定点的留数

- (1) $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-1}$, $z_0 = 1$:
 $z_0 = 1$ 为一阶极点, 因此:

$$\text{res } f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = e \quad (8.1)$$

- (2) $f(z) = \frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$:
 $f(z)$ 有二阶极点 $z=0$ 和一阶极点 $z=1$, 于是:

$$\text{res } f(0) = [z^2 f(z)]_{z=0}^{(1)} = \left[\frac{2z+1}{z-1} - \frac{z^2+z-1}{(z-1)^2} \right]_{z=0} = \left[-\frac{2z-z^2}{(z-1)^2} \right]_{z=0} = 0 \quad (8.2)$$

$$\text{res } f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = 1 \quad (8.3)$$

- (3) $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$:
 有一阶极点 $z = \pm 3i$ 和二阶极点 $z=0$, 因此:

$$\text{res } f(3i) = \lim_{z \rightarrow 3i} (z-3i)f(z) = -\frac{e^{3i}}{54i}, \quad \text{res } f(-3i) = \lim_{z \rightarrow -3i} (z-3i)f(z) = \frac{e^{-3i}}{54i} \quad (8.4)$$

$$\text{res } f(0) = [z^2 f(z)]_{z=0}^{(1)} = \left[\frac{e^z(z^2-2z+9)}{(z^2+9)^2} \right]_{z=0} = \frac{1}{9} \quad (8.5)$$

- (4) $\frac{1}{z^2 \sin z}$, $z_0 = 0$:
 $z_0 = 0$ 为三阶极点, 因此:

$$\text{res } f(0) = \frac{1}{2!} [z^3 f(z)]_{z=0}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{2z \cos(z)^2 - 2 \cos(z) \sin(z) + z \sin(z)^2}{\sin(z)^3} \right]_{z=0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad (8.6)$$

(5) $\frac{1}{\cosh \sqrt{z}}$, $z_0 = -\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2$:

考虑 \sqrt{z} 满足 $\sqrt{z}|_{z=0} = 0$ 的单值分支, 我们有 $\sqrt{-\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2} = i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$, 因此本题相当于求 $f(z) = \frac{1}{\cosh z}$, $z_0 = i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ 处的留数, 由于

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(e^x + \frac{1}{e^x} \right) \cos y + i \cdot \left(e^x - \frac{1}{e^x} \right) \sin y \right] \quad (8.7)$$

我们有:

$$z = z_0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases} \implies \frac{1}{\cosh \sqrt{z_0}} = \frac{1}{\cos y} = \infty \quad (8.8)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{2(z - z_0)}{e^z - e^{-z}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{2}{e^z - e^{-z}} = \pm 1 \quad (8.9)$$

因此都是一阶极点, 有:

$$\text{res } f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \begin{cases} -i & , n = 0, 2, 4, \dots \\ i & , n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (8.10)$$

Homework 9: 2024.10.22 - 2024.10.28

9.1 计算下列有理三角积分

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b \cos \theta} d\theta$$

作三角换元 $z = e^{i\theta}$, 则 $\cos \theta = \frac{z^2+1}{2z}$, $d\theta = \frac{1}{iz} dz$, 有:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{a + b \cdot \frac{z^2+1}{2z}} \cdot \frac{1}{iz} dz = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{bz^2 + 2az + b} dz \quad (9.1)$$

函数 $bz^2 + 2az + b$ 有两根 $-k \pm \sqrt{k^2 - 1}$, 其中 $k = \frac{a}{b} > 1$, 但仅有 $z = -k + \sqrt{k^2 - 1}$ 在积分围道内, 故:

$$I = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \left[\frac{1}{2bz + 2a} \right]_{z=-k+\sqrt{k^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (9.2)$$

$$(2) \int_0^\pi \frac{1}{(1 + \sin^2 \theta)^2} d\theta$$

代入 $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$, 并作三角换元 $z = e^{i\theta}$, 得:

$$I = \int_0^\pi \frac{1}{(1 + \frac{1 - \cos 2\theta}{2})^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{(3 - \cos \theta)^2} d\theta = \frac{8}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z^2 - 6z + 1)^2} dz \quad (9.3)$$

函数 $z^2 - 6z + 1$ 有两根 $z_1 = 3 - 2\sqrt{2}$, $z_2 = 3 + 2\sqrt{2}$, 但仅有 z_1 在积分围道内, 且是二阶极点, 因此有:

$$I = \frac{8}{i} \cdot 2\pi i \left[\frac{z}{(z - z_2)^2} \right]_{z=z_1}^{(1)} = 16\pi \cdot \left[\frac{1}{(z - z_2)^2} - \frac{2z}{(z - z_2)^3} \right]_{z=z_1} \quad (9.4)$$

$$= 16\pi \cdot \frac{-(z_1 + z_2)}{(z_1 - z_2)^3} = 16\pi \cdot \frac{-6}{32 \cdot (-4\sqrt{2})} \quad (9.5)$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{8}\pi \quad (9.6)$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a + \sin^2 \theta} d\theta$$

将其转化为第 (1) 小问中的形式:

$$I = \int_0^\pi \frac{1}{(2a + 1) - \cos \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \frac{1}{(2a + 1) - \cos \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(2a + 1) - \cos \theta} d\theta \quad (9.7)$$

由 (1) 的结论:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{(2a + 1)^2 - (-1)^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{a(a + 1)}} \quad (9.8)$$

9.2 计算下列无穷积分

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$$

作半圆积分围道, 也即从 $(-R, 0)$ 到 $(R, 0)$ 的直线, 以及半径为 R 的上半圆 $L_R = \{|z| = R \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ 构成的闭合围道 C 。令 $f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$, 则 $zf(z)$ 在 $z \rightarrow \infty$ 时一致趋于 0, 由大圆弧定理, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_R} f(z) dz = 0$,

于是:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx \implies I' = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C f(z) dz = 2I + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_R} f(z) dz = 2I + 0 \quad (9.9)$$

再单独计算积分 I' 。 $f(z)$ 有四个一阶极点, 其中 $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ 和 $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ 在积分围道内, 由留数定理:

$$I' = 2\pi i \cdot \left[\left(\frac{z_1^2 + 1}{4z_1^3} \right) + \left(\frac{z_2^2 + 1}{4z_2^3} \right) \right] = 2\pi i \cdot \left[-\frac{1}{4}z_1(z_1^2 + 1) - \frac{1}{4}z_2(z_2^2 + 1) \right] \quad (9.10)$$

$$= 2\pi i \cdot \left[-\frac{\sqrt{2}}{4}i - \frac{\sqrt{2}}{4}i \right] = 2\pi i \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \quad (9.11)$$

$$= \sqrt{2}\pi \quad (9.12)$$

$$\implies I = \frac{1}{2}I' = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \quad (9.13)$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 6x^2 + 13} dx$$

与上题类似, 作半圆积分围道, 也即从 $(-R, 0)$ 到 $(R, 0)$ 的直线, 以及半径为 R 的上半圆 $L_R = \{|z| = R \mid \text{Im } z > 0\}$ 构成的闭合围道 C 。令 $f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 6z^2 + 13}$, 则 $zf(z)$ 在 $z \rightarrow \infty$ 时一致趋于 0, 由大圆弧定理, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_R} f(z) dz = 0$, 于是:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx \implies I' = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C f(z) dz = 2I + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_R} f(z) dz = 2I + 0 \quad (9.14)$$

再单独计算积分 I' 。 $f(z)$ 有四个一阶极点, 先求解:

$$z^4 + 6z^2 + 13 = (z^2 + 3)^2 + 4 = 0 \implies z^2 + 3 = \pm 2i \quad (9.15)$$

利用 $\sqrt{z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot [\text{sgn}(\pi - \arg z) \sqrt{|z| + x} + i \sqrt{|z| - x}]$, 可以得到在积分围道中的两根 z_1 和 z_2 :

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\sqrt{13} - 3} + i \sqrt{\sqrt{13} + 3} \right), \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sqrt{\sqrt{13} - 3} + i \sqrt{\sqrt{13} + 3} \right) \quad (9.16)$$

由留数定理:

$$I' = 2\pi i \left[\frac{z_1^2}{4z_1^3 + 12z_1} + \frac{z_2^2}{4z_2^3 + 12z_2} \right] = 2\pi i \left[\frac{z_1}{4z_1^2 + 12} + \frac{z_2}{4z_2^2 + 12} \right] \quad (9.17)$$

$$= 2\pi i \left[\frac{z_1}{8i} + \frac{z_2}{-8i} \right] = 2\pi i \cdot \frac{z_1 - z_2}{8i} \quad (9.18)$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{13} - 3}}{8i} \quad (9.19)$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{13} - 3}}{4} \pi \quad (9.20)$$

$$\implies I = \frac{1}{2}I' = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \cdot \sqrt{\sqrt{13} - 3} \quad (9.21)$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3} dx$$

令 $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3}$, 作半圆型闭合积分围道 C , 其中半圆记作 L_R , 则 $zf(z)$ 在 $z \rightarrow \infty$ 时一致趋于 0, 由 Jordan 引理, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_R} f(z)e^{iz} dz = 0$, 于是

$$I' = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C f(z)e^{iz} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin x dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{L_R} f(z)e^{iz} dz \quad (9.22)$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3} dx \implies I' = 2I + 0 + 0 \quad (9.23)$$

积分围道内有且仅有 $z = i$ 一个三阶极点, 由留数定理:

$$I' = 2\pi i \cdot \frac{1}{2!} \left[\frac{e^{iz}}{(z+i)^3} \right]_{z=i}^{(2)} \quad (9.24)$$

$$= \pi i \cdot \left[e^{iz} \left(\frac{i}{(z+i)^3} - \frac{3}{(z+i)^4} \right) \right]_{z=i}^{(1)} \quad (9.25)$$

$$= \pi i \cdot \left[e^{iz} \left(\frac{-1}{(z+i)^3} - \frac{3i}{(z+i)^4} - \frac{3i}{(z+i)^4} + \frac{12}{(z+i)^5} \right) \right]_{z=i} \quad (9.26)$$

$$= \pi i \cdot \frac{1}{e} \cdot \left[\frac{-2i}{16} - \frac{6i}{16} - \frac{6i}{16} \right] = \pi i \cdot \frac{1}{e} \cdot \left(-\frac{7i}{8} \right) \quad (9.27)$$

$$= \frac{7\pi}{8e} \quad (9.28)$$

$$\implies \boxed{I = \frac{1}{2} I' = \frac{7\pi}{16e}} \quad (9.29)$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx, \quad a, b \in \mathbb{R}_+$$

令 $f(z) = \frac{z}{z^2+b^2}$, 作半圆型闭合积分围道 C , 其中半圆记作 L_R , 则 $zf(z)$ 在 $z \rightarrow \infty$ 时一致趋于 0, 由 Jordan 引理, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_R} f(z)e^{iaz} dz = 0$, 于是

$$I' = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C f(z)e^{iaz} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos ax dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin ax dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{L_R} f(z)e^{iaz} dz \quad (9.30)$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{(1+x^2)^3} dx \implies I' = 0 + 2i \cdot I + 0 \quad (9.31)$$

积分围道内有且仅有 $z_1 = bi$ 一个一阶极点, 由留数定理:

$$I' = 2\pi i \cdot \frac{z_1 e^{iaz_1}}{2z_1} = \pi i \cdot e^{-ab} \quad (9.32)$$

$$\implies \boxed{I = \frac{I'}{2i} = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-ab}} \quad (9.33)$$