光学笔记

Optics Notes

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

目录

第 1 章 偏振

在这一章，我们将要讨论光会以什么样的状态（即偏振态）进行传播、合成，如何观察、产生和改变光的偏振态，以及如何利用它。相比于干涉和衍射两章，本章内容较为简短，因为许多介绍性的东西都没有放在这里（抄教材不符合我们的初衷），读者若感兴趣，可阅读文献 [?] 的 Page 425-497。

§ 1.1 偏振光的性质

偏振光可粗略地分为自然光（非偏振光），部分偏振光，（椭）圆偏振和线偏振。其中，线偏振态又记为 $\mathscr{P}$ 态，左圆和右圆分别记为 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{R}$ 态。

1.1.1 椭圆偏振光

由于 $\boldsymbol{E}$ 的矢量性，所有偏振光的电矢量 $\boldsymbol{E}$ 都可以分解为两个互相垂直（正交）的光扰动：

$$\boldsymbol{E_x} = E_{0x}\cos(kz-\omega t)\cdot\hat{i},\quad \boldsymbol{E_y} = E_{0y}\cos(kz-\omega t+\varepsilon)\cdot\hat{j} \tag{1.1}$$

其中 $\hat{i}$ 和 $\hat{j}$ 表示分解的方向，E_{0x} 和 E_{0y} 是分量的振幅（可能是时间的函数），ε 为相位差（可能是时间的函数）。对于 E_{0x}、E_{0y} 和 ε 都为常量的情况，合成的光多为椭圆偏振光：

$$E_y = E_{0y}\cos(kz-\omega t+\varepsilon) \Longrightarrow \frac{E_y}{E_{0y}} = [\cos(kz-\omega t)\cos\varepsilon - \sin(kz-\omega t)\sin\varepsilon] \tag{1.2}$$

由 $\sin^2(kz-\omega t) = 1-\cos^2(kz-\omega t) = 1-\frac{E_x^2}{E_{0x}^2}$，可以得到：

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}} - \cos\varepsilon\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 = \sin^2\varepsilon\left(1-\frac{E_x^2}{E_{0x}^2}\right) \tag{1.3}$$

$$\Longrightarrow \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2\frac{E_xE_y}{E_{0x}E_{0y}}\cos\varepsilon = \sin^2\varepsilon \tag{1.4}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{E_x^2}{(E_{0x}\sin\varepsilon)^2} + \frac{E_y^2}{(E_{0y}\sin\varepsilon)^2} - 2\frac{E_xE_y}{(E_{0x}\sin\varepsilon)(E_{0y}\sin\varepsilon)} = 1 \tag{1.5}$$

由高中的知识可知，当 $\varepsilon \neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ 时，这是一个椭圆（或圆）方程，因为 $\Delta = B^2-4AC = 4\cos^2\varepsilon-4 < 0$。这样的的偏振光称为椭圆偏振光。

椭圆偏振光也分左旋和右旋，这是因为从观察点向光源看去时（光指向“眼睛”），若 $\varepsilon\in(0,\pi)$，我们“看到”的由 E_x 和 E_y 合成后的 $\boldsymbol{E}$ 在逆时针旋转（左旋）。一个典型的例子是 $\varepsilon=\frac{\pi}{2}$ 时，也即 E_x “领先” E_y 相位 $\frac{\pi}{2}$：

$$\boldsymbol{E_x} = E_{0x}\cos(kz-\omega t) = E_{0x}\cos(\omega t-kz)\cdot\hat{i}, \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{E_y} = E_{0y}\cos(kz-\omega t+\frac{\pi}{2}) = E_{0y}\sin(\omega t-kz)\cdot\hat{j} \tag{1.7}$$

由椭圆的参数方程知道，$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E_x}+\boldsymbol{E_y}$ 的极角 $\theta=(\omega t-kz)$ 随时间 t 增大，$\boldsymbol{E}$ 逆时针旋转，称为左圆光。相反，当 $\varepsilon\in(\pi,2\pi)$ 时（也可以说是 $(-\pi,0)$），$\boldsymbol{E}$ 顺时针旋转（右旋），称为右圆光。

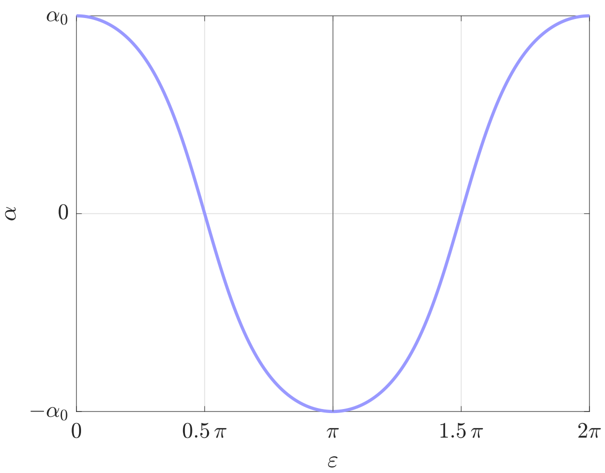
随着 ε 不同，$\boldsymbol{E}$ 的形状和方向也不同，但总的来讲，椭圆主轴夹角满足：

$$\tan(2\alpha) = 2\cos\varepsilon\cdot\frac{E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2-E_{0y}^2} \tag{1.8}$$

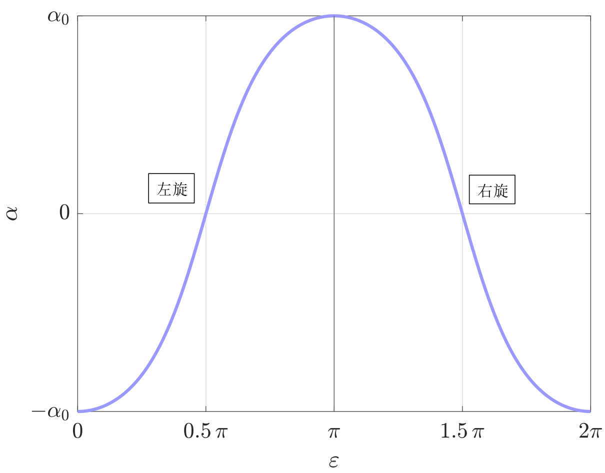
$$\Longrightarrow \alpha = \frac{1}{2}\arctan\left(2\cos\varepsilon\cdot\frac{E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2-E_{0y}^2}\right) \tag{1.9}$$

主轴，是指长轴，也即 $2E_{0x}$ 和 $2E_{0y}$ 中更长的轴与对应的 x 或 y 轴夹角。举个例子，当 $E_{0x} > E_{0y}$ 时，x 为主轴（长轴），α 为长轴与 x 轴的夹角，此时 α 随 ε 的变化如图 1.1 (a) 所示；当 $E_{0x} < E_{0y}$ 时，情况则相反，α 是长轴与 y 轴的夹角，如图 1.1 (b) 所示。

从图中可以看出，随着 ε 不断变化，椭圆会在主轴附近“摆动”，而不是转动。



(a) $E_{0x} > E_{0y}$ 时 x 为主轴



(b) $E_{0x} < E_{0y}$ 时 y 为主轴

图 1.1: α 随 ε 的变化情况

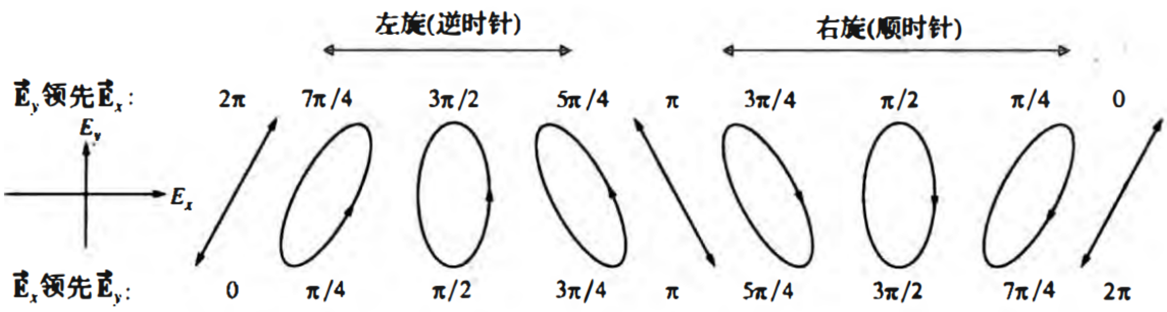


图 1.2: 主轴为 y 时椭圆的“摆动”情况

特别地，我们指出，若 x 为主轴（$E_{0x} > E_{0y}$），则 α 一定在 $(-45°, 45°)$ 之间，这表明椭圆的长轴更“贴近” x 轴，y 的情况也同理。另外，当 $E_{0x} = E_{0y}$ 时，椭圆退化为圆，不存在 α 的概念，但左旋和右旋仍然存在。

为了方便参考，我们给出平面椭圆的一般公式，设椭圆中心为 (x_0, y_0)，长轴与 x 轴夹角为 α，则椭圆方程为：

$$\frac{[(x-x_0)\cos\alpha + (y-y_0)\sin\alpha]^2}{a^2} + \frac{[(x-x_0)\sin\alpha + (y-y_0)\cos\alpha]^2}{b^2} = 1 \tag{1.10}$$

对比系数，可以得到公式 1.5 对应椭圆的半长轴 a 和半短轴 b :

$$a^2 = \frac{E_{0x}^2 E_{0y}^2 \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)}{E_{0y}^2\cos^2\alpha - E_{0x}^2\sin^2\alpha}, \quad b^2 = \frac{E_{0x}^2 E_{0y}^2 \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)}{E_{0x}^2\cos^2\alpha - E_{0y}^2\sin^2\alpha} \tag{1.11}$$

1.1.2 线偏振光

当 $\varepsilon = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ 时，方程退化为：

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}} \pm \frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 0 \Longleftrightarrow \frac{E_x}{E_{0x}} \pm \frac{E_y}{E_{0y}} = 0 \tag{1.12}$$

这是一个直线方程，表示线偏振光。

1.1.3 自然光

特别地，对于自然光，我们可以用两个振幅相等、非相干（即相位差 ε 迅速且无规变化）、正交的线偏振光的合成来表示自然光，这是数学上是一种非常方便的处理。

§ 1.2 偏振光的数学表示

偏振光的状态可以用向量来描述，常见的有斯托克斯（四维）参量和琼斯矢量（二维）。前者可以描述所有偏振光（包括完全和不完全）和非偏振光，但参数较多，后者仅可以描述偏振光，但较为简洁。相应地，偏振光器件对偏振光的作用可以用矩阵来表示，分别对应穆勒矩阵（四维）和琼斯矩阵（二维）。

1.2.1 斯托克斯参量

设想有四个滤波片，它们都只能透过一半（强度）的入射光。第一个是简单各向同性地，允许各个方向的偏振通过；第二个是（通光轴）水平的线偏振器，第三个是（通光轴）45° 的线偏振器；最后一个是右圆起偏器（对 $\mathscr{L}$ 不透明）。

把每个滤光片分别放在要研究的光束的光路上，也即光路上每次只有一个偏振器，测量到的辐照度分别记为 I_0, I_1, I_2, I_3，则斯托克斯参量的定义为：

$$\delta_0 = 2I_0, \quad \begin{cases} \delta_1 = 2I_1 - \delta_0 \\ \delta_2 = 2I_2 - \delta_0 \\ \delta_3 = 2I_3 - \delta_0 \end{cases} \tag{1.13}$$

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 直接反映了光束的偏振态。具体而言：

(1) δ_1 反映光束更接近水平 $\mathscr{P}$ 态 $(\delta_1 \to \delta_0)$ 还是竖直 $\mathscr{P}$ 态 $(\delta_1 \to -\delta_0)$；

(2) δ_2 反映光束更接近 $+45°$ $\mathscr{P}$ 态 $(\delta_2 \to \delta_0)$ 还是 $-45°$ $\mathscr{P}$ 态 $(\delta_2 \to -\delta_0)$；

(3) δ_3 反映光束更接近右旋 $(\delta_3 \to \delta_0)$ 还是左旋 $(\delta_3 \to -\delta_0)$

对于准单色光 $\boldsymbol{E}$，将其分解为 $\boldsymbol{E_x}$ 和 $\boldsymbol{E_y}$，可将斯托克斯参量进一步写为：

$$\delta_0 = \langle E_{0x}^2 \rangle_T + \langle E_{0y}^2 \rangle_T, \quad \delta_1 = \langle E_{0x}^2 \rangle_T - \langle E_{0y}^2 \rangle_T \delta_2 = \langle 2E_{0x}E_{0y}\cos\varepsilon \rangle_T, \quad \delta_3 = \langle 2E_{0x}E_{0y}\sin\varepsilon \rangle_T \tag{1.14}$$

我们在上式中略去了常数 $\frac{\varepsilon_0 c}{2}$，因此这些参量现在正比于辐照度。把每个参量都除以 δ_0 以归一化常常带来很大的方便，此时 $\delta_k \in [-1, 1],\ k = 1, 2, 3$。

描述一束光偏振程度的量，称为偏振度 $\mathbf{V}$，定义为：

$$\mathbf{V} = \frac{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}}{\delta_0} \tag{1.15}$$

对两束不相干的光 $(\delta_0', \delta_1', \delta_2', \delta_3')$ 和 $(\delta_0'', \delta_1'', \delta_2'', \delta_3'')$，在斯托克斯参量下，可以直接将它们的偏振态相加，得到合成的光的偏振态为 $(\delta_0' + \delta_0'', \delta_1' + \delta_1'', \delta_2' + \delta_2'', \delta_3' + \delta_3'')$，用公式表示为：

$$\begin{bmatrix} \delta_0' \\ \delta_1' \\ \delta_2' \\ \delta_3' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_0'' \\ \delta_1'' \\ \delta_2'' \\ \delta_3'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_0' + \delta_0'' \\ \delta_1' + \delta_1'' \\ \delta_2' + \delta_2'' \\ \delta_3' + \delta_3'' \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

1.2.2 琼斯矢量

琼斯矢量是直接用 E_x 和 E_y 来表示光的偏振态，它是一个二维复矢量。对一束光 $\boldsymbol{E} = E_{0x}\cos(kz - \omega t + \varphi_x)\cdot\hat{i} + E_{0y}\cos(kz - \omega t + \varphi_y)\cdot\hat{j}$，它的琼斯矢量定义为：

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i\varphi_x} \\ E_{0y}e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} = E_{0x}e^{i\varphi_x}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{E_{0y}}{E_{0x}}e^{i\varepsilon} \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

实际应用中常常不需要知道具体的振幅的相位，只需要知道相对相位差 $\varepsilon = \varphi_y - \varphi_x$ 即可，因此琼斯矢量也常用归一化的方式来表达。下图列出了常见偏振态的斯托克斯和琼斯矢量表示：

偏振态	斯托克斯矢量	琼斯矢量	偏振态	斯托克斯矢量	琼斯矢量
水平 $\mathscr{P}$态	$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	-45°的 $\mathscr{P}$态	$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$
垂直 $\mathscr{P}$态	$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$	$\mathscr{R}$态	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$
+45°的 $\mathscr{P}$态	$\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\mathscr{L}$态	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$

图 1.3: 常见偏振态的斯托克斯和琼斯矢量表示

上图的圆偏振可以轻松的扩展到椭圆，例如一个右旋椭圆的偏振态可表示为 $\boldsymbol{E} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix}$。

与斯托克斯参量类似，光偏振态的合成也可以直接在琼斯矢量下进行，即直接将两个琼斯矢量相加即可。例如相同振幅的 $\mathscr{R}$ 态和 $\mathscr{L}$ 态可以合成为水平的 $\mathscr{P}$ 态：

$$\boldsymbol{E}_{\mathscr{R}} + \boldsymbol{E}_{\mathscr{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

特别地，当两束光的琼斯矢量相互垂直时，称两个偏振态正交。由于琼斯矢量是复矢量，因此正交不是内积而是 Hermitian 内积，即 $\langle \boldsymbol{E_1} \mid \boldsymbol{E_2} \rangle = \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2^*$。例如 $\mathscr{R}$ 态和 $\mathscr{L}$ 态是正交的、水平 $\mathscr{P}$ 态 (记作 $\mathscr{H}$) 和垂直 $\mathscr{P}$ 态 (记作 $\mathscr{V}$) 也是正交的：

$$\boldsymbol{E}_{\mathscr{R}} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathscr{L}}^* = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}^* \right\rangle = 1 + i^2 = 0, \quad \boldsymbol{E}_{\mathscr{H}} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathscr{V}}^* = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^* \right\rangle = 0 \tag{1.19}$$

由线性代数的知识知道，任何偏振态（即琼斯矢量）都可以由这样的一组正交偏振态合成得到，这也验证了我们之前对自然光“可分解为相位差迅速随机变化的两线偏振光”表述的合理性。

1.2.3 琼斯矩阵和穆勒矩阵

偏振器件对光的作用可以直接由矩阵来描述，常记作 $\mathscr{A}$（或 $\boldsymbol{A}$）：

$$\boldsymbol{E}_t = \mathscr{A}\boldsymbol{E}_i \tag{1.20}$$

相应地，多个偏振器作用于同一光束时，设第一个通过的是 $\mathscr{A}$，按矩阵乘法有：

$$\boldsymbol{E}_t = \mathscr{A}_n\mathscr{A}_{n-1}\cdots\mathscr{A}_2\mathscr{A}_1\boldsymbol{E}_i \tag{1.21}$$

图 1.4 给出了常见偏振器的琼斯矩阵和穆勒矩阵。需要指出，我们指介绍了矩阵方法较重要的一些内容，对这个专题的完备讨论远远超出了本课程的范围。

线性光学元件		琼斯矩阵	穆勒矩阵
水平的线起偏器	↔	$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$
铅直的线起偏器	↕	$\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$
+45°的线起偏器	⤢	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$
−45°的线起偏器	⤡	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$
四分之一波片，快轴铅直		$e^{i\pi/4}\begin{bmatrix}1&0\\0&-i\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$
四分之一波片，快轴水平		$e^{i\pi/4}\begin{bmatrix}1&0\\0&i\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}$
同质右旋圆起偏器	↻	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&i\\-i&1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$
同质左旋圆起偏器	↺	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-i\\i&1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}$

图 1.4: 常见偏振器的琼斯矩阵和穆勒矩阵

§ 1.3 双折射

1.3.1 双折射现象

一些特殊的晶体是光学各向异性的，最直接的表现是双折射。双折射是指光在晶体中传播时，不同偏振态（即不同电矢量）的光有不同的折射率，因此会有不同的折射角。这种具有两个（两套）折射率的性质称为双折射。

这样的晶体一般都有一个特殊方向（称为光轴），当光沿此方向入射时，无论偏振态如何，都不会发生双折射，退化到普通入射现象，称为单轴晶体。当光线的传播方向 $\boldsymbol{k}$ 确定时，与光轴垂直的分量称为 o 光，平行的分量称为 e 光（o 和 e 正交）。对于单轴晶体，o 光和 e 光的折射率是不同的，准确的说，o 光的折射率是一个常数，而 e 光的折射率是与光轴夹角 θ 的函数（在光轴方向上 $n_e(\theta) = n_o$）。由不同方向上折射率大小构成的曲面是一个椭球面，称为折射率椭球。$n_{e0} < n_o$ 的单轴晶体称为负晶体（等价于 $v_o < v_e$），$n_{e0} > n_o$（$v_o > v_e$）的称为正晶体。

以光轴为 z 轴，则单轴晶体的折射率椭球可写为：

$$\frac{x^2+y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1 \tag{1.22}$$

为了研究较一般的情况，我们先给出主截面和入射面的概念：

(1) 主截面：介质表面法线与光轴共同构成的平面；

(2) 入射面：介质表面法线与入射光线构成的平面。

当入射面和主截面重合时（入射光线在主截面）内，折射的 o 光和 e 光都在主截面内，可由惠更斯原理推出 o 光和 e 光各自的折射方向，如下图所示：

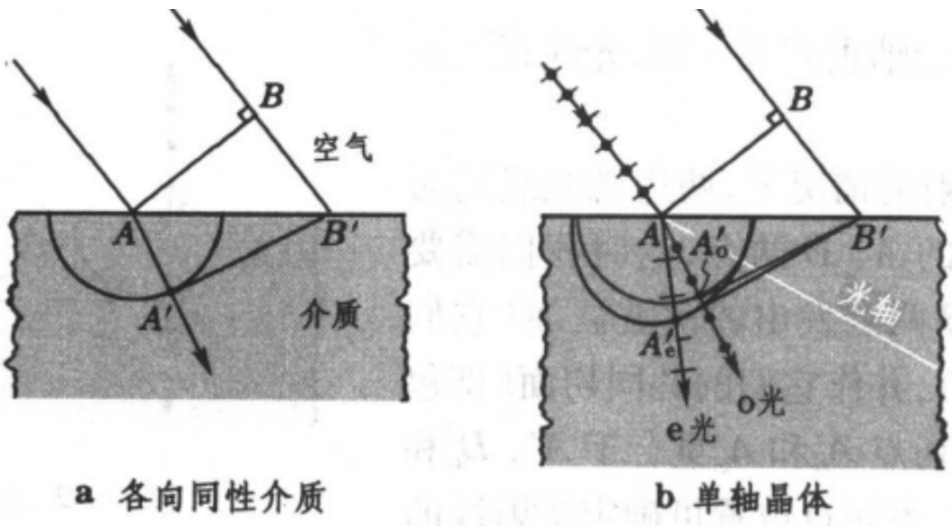


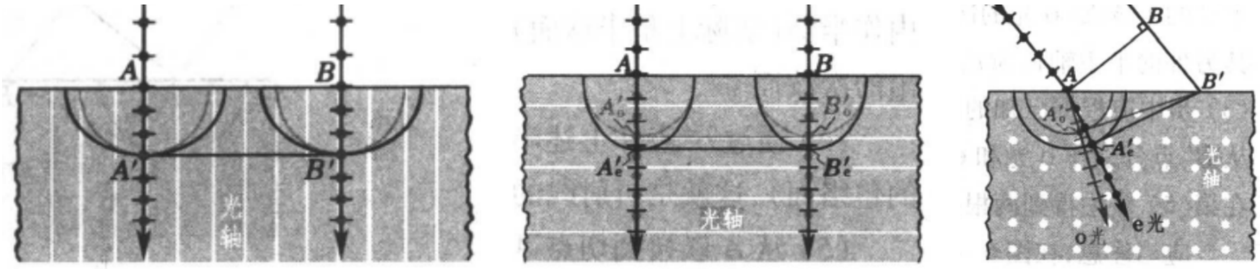
图 1.5: 用惠更斯作图法求折射线

下面讨论几种特殊的情况：

(1) 光轴垂直于表面，光线正入射（图 1.6 (a)）：$n_o = n_e(\theta)$，没有发生双折射。

(2) 光轴平行于表面，光线正入射（图 1.6 (b)）：$n_o \neq n_e(\theta)$，尽管两光方向相同，但波速不同（这会引起相位差，将在后文提到），发生了双折射。

(3) 光轴垂直于入射面，光线斜入射（图 1.6 (c)）：$n_o \neq n_e(\theta)$，两光方向和波速都不同。



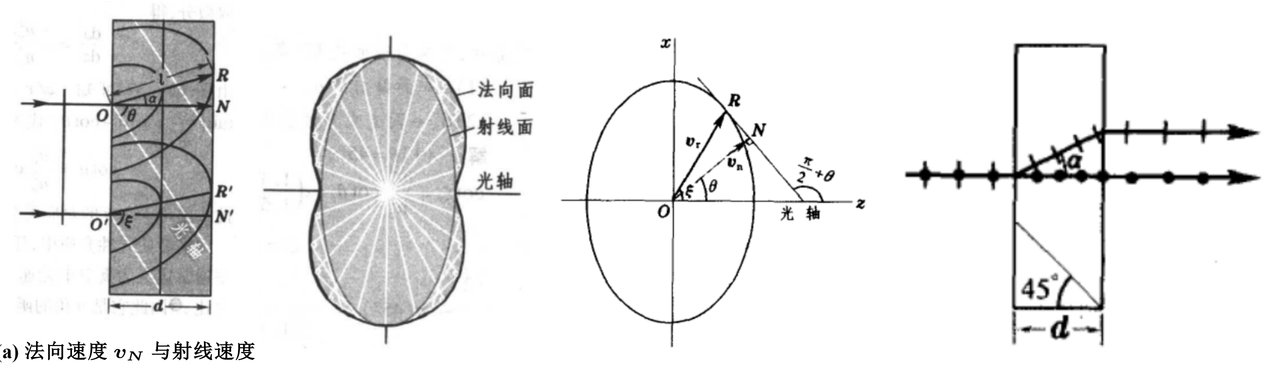
(a) 光轴垂直于介质表面 (b) 光轴平行于介质表面 (c) 光轴垂直于入射面

图 1.6: 不同情形下 o 光与 e 光的行为

设 θ 是折射 o 光与光轴的夹角，ξ 是折射 e 光与光轴的夹角，则有法向折射率 n_N：

$$\cot\xi = \frac{n_e^2}{n_o^2}\cot\theta,\quad n_N = n_N(\theta) = \sqrt{\frac{n_o^2 n_e^2}{n_o^2\sin^2\theta + n_e^2\cos^2\theta}} \tag{1.23}$$

由上面两个公式可以分别确定法向折射率 n 和 ξ，而 ξ 又可以确定 e 光的折射方向。需要注意，上式中的 n_N 是法向折射率，如图 1.7 (d)，对于正入射，o 光和 e 光的光程差是 $\Delta L = n_N(\theta)d - n_o d$，而不是 $n_N(\theta)\frac{d}{\cos\alpha} - n_o d$。后一种应该用射线折射率 $n_r = n_r(\xi)$。



(a) 法向速度 v_N 与射线速度 v_r (b) e 光的射线面与法向面 (c) v_r 夹角 ξ 与 v_N 夹角 θ 的关系 (d) 光线正入射时的相位差

图 1.7: e 光折射方向与光程差

为了继承原有的惯性思维（沿光线传播方向上的折射率），我们推荐使用 n_r 而不是 n_N，如下：

$$\cot\xi = \frac{n_e^2}{n_o^2}\cot\theta,\quad n_r = n_r(\theta) = \cos\alpha\sqrt{\frac{n_o^2 n_e^2}{n_o^2\sin^2\theta + n_e^2\cos^2\theta}} = \cos(\xi-\theta)\sqrt{\frac{n_o^2 n_e^2}{n_o^2\sin^2\theta + n_e^2\cos^2\theta}} \tag{1.24}$$

此时图 1.7 (d) 中的光程差便是直觉上的 $\Delta L = n_r\frac{d}{\cos\alpha} - n_o d$。[①]

1.3.2 相位延迟片

再回来思考图 1.6 (b) 中发生的情况：e 光和 o 光方向都不变，但是它们的光程却不同，相位延迟片便是这样构成的。o 光相对于 e 光的相位增量是：

$$\Delta\phi_o = \phi_o - \phi_e = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d \tag{1.25}$$

这样便可以用先前的 ε 来判断相位延迟片（又称波晶片）对偏振态的影响。最常用的波晶片是四分之一波片（简称 $\frac{\lambda}{4}$ 片），对应 $\Delta\phi_o = \frac{\pi}{2}$。

①这一节如果不好理解，可以到网址 here 观看视频的 11:00 - 12:00 部分，在动画的帮助下很快能懂。

不能混淆的是，一些教材喜欢用“落后”或“领先”来表达这样的相位关系，尽管我们不提倡，但还是要指明，在 $(kz-\omega t)$ 的情形中，相位增加 $\Delta\phi_o$ 意味着延迟（落后），即从 $(kz-\omega t)$ 变为 $(kz-\omega t+\Delta\phi_o)$。

现在我们把各种光经过四分之一波片后偏振态的变化做一个总结，如下图所示：

入射光	λ/4 片光轴取向	出射光
线偏振	e 轴或 o 轴与偏振方向一致*	线偏振
	e 轴或 o 轴与偏振方向成 45° 角	圆偏振
	其它取向	椭圆偏振
圆偏振	任何取向	线偏振
椭圆偏振	e 轴或 o 轴与椭圆主轴一致	线偏振
	其它取向	椭圆偏振

图 1.8: 偏振光经过四分之一波片后偏振态的变化

1.3.3 偏振光的检验

检验入射光到底是哪种偏振态，只需要一个偏振片和一个四分之一波片，具体方法如下图所示：

第一步	令入射光通过偏振片 Ⅰ，改变偏振片 Ⅰ 的透振方向 P_1，观察透光强度的变化(图 6－58a)				
观察到的现象	有消光	强度无变化		强度有变化，但无消光	
结论	线偏振	自然光或圆偏振		部分偏振或椭圆偏振	
第二步		a. 令入射光依次通过 λ/4 片和偏振片 Ⅱ，改变偏振片 Ⅱ 的透振方向 P_2，观察透射光的强度变化(6－58b)		b. 同 a，只是 λ/4 片的光轴方向必须与第一步中偏振片 Ⅰ 产生的强度极大或极小的透振方向重合	
观察到的现象		有消光	无消光	有消光	无消光
结论		圆偏振	自然光	椭圆偏振	部分偏振

图 1.9: 偏振光的检验

§ 1.4 偏振态的计算

本小节我们讨论不同偏振态经过不同厚度的波片（相位延迟片）后，会得到怎样的偏振态。一般有矩阵和相位两种方法，前者是利用偏振态和波片的琼斯矢量（矩阵），直接作矩阵乘法，后者是利用波片对 o 光的相位延迟作用。从数学地角度上，前者更直接，计算也更简单，但后者更能体现物理上的直观，有助于对偏振态的理解。

1.4.1 矩阵法

在玻片平面上建立平面直角坐标系，将光轴所在角度记为 ϕ，称为波片的方位角。入射光束由琼斯矩阵 $\boldsymbol{E}=(E_{0x},E_{0y})$ 来描述。考虑光线垂直入射到厚度为 d 的波片（光线与光轴垂直），波片对 o 光的相位延迟是 $\Delta\varepsilon=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d$，所以其琼斯矩阵 $\boldsymbol{W}$ 可写为：

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{W_0}\boldsymbol{R},\quad \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{W}=e^{i\varphi}\begin{bmatrix}e^{i\frac{\Delta\varepsilon}{2}} & 0\\ 0 & e^{-i\frac{\Delta\varepsilon}{2}}\end{bmatrix} \tag{1.26}$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 是二维旋转矩阵，满足 $\boldsymbol{R}^{-1}=\boldsymbol{R}^T$，而 $\boldsymbol{W_0}$ 是波片在 oe 坐标系（e 为横轴）下的琼斯矩阵，$\varphi=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\lambda}(n_o+n_e)d$ 称为平均相位变化。由于 $e^{i\varphi}$ 一项同时作用在 E_x 和 E_y，不会影响出射光的偏振态。在绝大多数情况下，我们仅关心相对相位差 $\varepsilon_0=\varepsilon+\Delta\varepsilon$，因此这一项常常被略去，此时波片的琼斯矩阵写为：

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^{i\frac{\Delta\varepsilon}{2}} & 0\\ 0 & e^{-i\frac{\Delta\varepsilon}{2}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix} \tag{1.27}$$

1.4.2 相位法

利用相位法，可以在脑海中形成偏振态关于 ε 变化的“动图”，便于理解偏振态的变化过程。下面的讨论都默认波片的 $n_o>n_e$，也即 e 轴是快轴。一束光入射波片，分别以玻片的 e 轴、o 轴为 x 和 y 轴建系（注意 e 是横轴），则入射光可在 eo 坐标系下分解为：

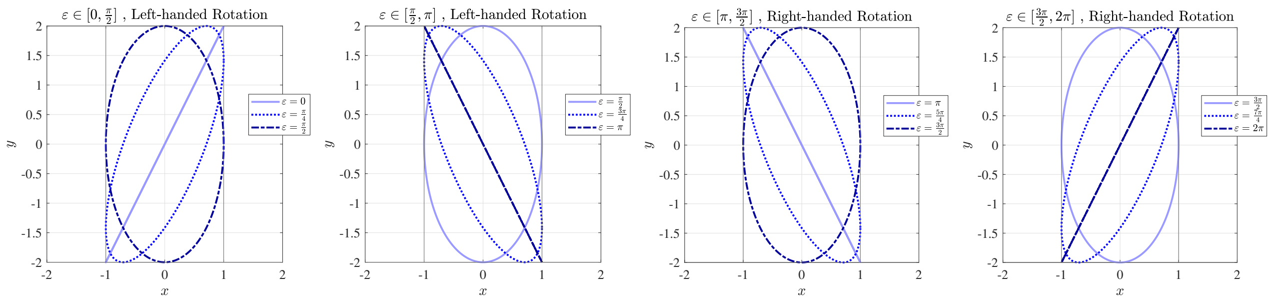
$$E_e=E_x=E_{0x}\cos(kr-\omega t),\quad E_o=E_y=E_{0y}\cos(kr-\omega t+\varepsilon_0) \tag{1.28}$$

注意不要与矩阵法中统一的 x、y 轴混淆。波片对光的作用，等价于 o 光发生了相位增量 $\Delta\varepsilon$，出射光变为：

$$E_x=E_{0x}\cos(kr-\omega t),\quad E_y=E_{0y}\cos(kr-\omega t+\varepsilon_0+\Delta\varepsilon) \tag{1.29}$$

此时相位差 ε_0 变为 $\varepsilon=\phi_y-\phi_x=\varepsilon_0+\Delta\varepsilon$，其中 $\Delta\varepsilon=\frac{2\pi}{\lambda}(n_o-n_e)d$。回到最开始我们讨论 ε 对偏振态“形状”的影响，这相当于 ε 在 $[0,2\pi]$ 上的周期性变化，引起偏振态的周期性变化。

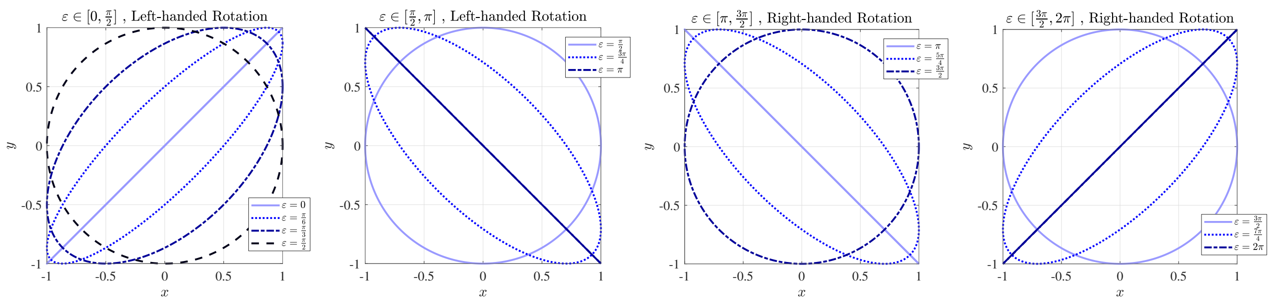
设入射光线是线偏振光（等价于 $\varepsilon_0=0$），且与 x 轴（e 轴）夹角为 $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$（否则作对称变换），夹角 α 即确定了 E_{0x} 和 E_{0y}（准确的说是比值）。当 $E_{0x}E_{0y}\neq 0$ 且 $E_{0x}\neq E_{0y}$ 时，波片对线偏振光的作用，可以用下图来直观表示（以 $E_y>E_x$ 为例）：



(a) $\varepsilon\in[0,\frac{\pi}{2}]$, Left Rotation **(b) $\varepsilon\in[\frac{\pi}{2},\pi]$, Left Rotation** **(c) $\varepsilon\in[\pi,\frac{3\pi}{2}]$, Right Rotation** **(d) $\varepsilon\in[\frac{3\pi}{2},2\pi]$, Right Rotation**

图 1.10: 波片对线偏振光的作用，$E_y>E_x>0$

当 $E_{0x}E_{0y}\neq 0$ 且 $E_{0x}=E_{0y}$ 时，随着 ε 的变化，偏振态依次经过右线、右椭圆、圆、左椭圆、左线，然后又依次返回到右线。且线、椭圆（和圆）都在 $\pm 45°$ 线上，如下图所示：



(a) $\varepsilon\in[0,\frac{\pi}{2}]$, Left Rotation **(b) $\varepsilon\in[\frac{\pi}{2},\pi]$, Left Rotation** **(c) $\varepsilon\in[\pi,\frac{3\pi}{2}]$, Right Rotation** **(d) $\varepsilon\in[\frac{3\pi}{2},2\pi]$, Right Rotation**

图 1.11: 波片对线偏振光的作用，$E_y=E_x>0$

特别地，当 $E_{0x}E_{0y}=0$ 时（至少有一个为零），由于不存在两分量的合成，偏振态不会发生任何变化（除了固有的相位增量）。

§ 1.5 旋光性

1.5.1 旋光性物质

按我们之前的理论，一束线偏振光沿石英晶体的光轴传播时，不会发生双折射，因此不会发生偏振态的变化。但实际上，石英晶体具有旋光性的，线偏振光在沿其光轴传播时，振动方向不断转动，这种现象称为光的旋光性，而引起这种现象的物质称为旋光性物质。

旋光分为左旋和右旋，实验表面，振动面旋转的角度 $\delta\psi$ 与旋光晶体的厚度 d 成正比，即 $\delta\psi=\alpha d$，α 称为旋光率，例如石英对 546.1 nm 的光的旋光率为 $25.538°\cdot \mathrm{mm}^{-1}$。具体而言，定义逆时针旋转为正（向光源看去），继承之前的思想，我们可以有：

$$\Delta\psi=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\lambda}(n_R-n_L)d \tag{1.30}$$

其中 n_R 是物质对 $\mathscr{R}$ 态的折射率，n_L 是对 $\mathscr{L}$ 态的折射率，所以旋光性也称为“圆双折射”。$n_R>n_L$ 时发生左旋（顺时针转动的光走得慢），$n_R<n_L$ 时发生右旋（逆时针转动的光走得慢）。

由公式 (1.30) 可以看出，系数 $\frac{\pi}{\lambda}$ 是波长的函数。因此，当一束线偏振白光沿光轴入射旋光性物质时，各波长的光转动不同的角度，在观察屏前放一检偏器，不断旋转，即可出现漂亮的色彩，这种现象称为旋光色散。

当然，我们也可以用琼斯矩阵的方法计算旋光，设入射偏振光的琼斯矢量为 $\boldsymbol{E}=(E_{0x},E_{0y})$，则旋光性晶体的琼斯矩阵为：

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}(x-iy)+e^{2i\Delta\psi}(x+iy) & 0\\ -i\left[(x-iy)-e^{2i\Delta\psi}(x+iy)\right] & 0\end{bmatrix} \tag{1.31}$$

由于线性方程组解空间维数限制，上面的写法不唯一。当然，为了方便计算，我们更希望关注下面的结论：

$$\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{W}\cdot\begin{bmatrix}E_{0x}\\E_{0y}\end{bmatrix}=\boldsymbol{W}\cdot\left(a\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}\right)=a\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}+b\,e^{2i\Delta\psi}\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix} \tag{1.32}$$

注意 $e^{2i\Delta\psi}$ 一项应加在 $\mathscr{R}$ 光上，这是因为 $n_R>n_L$ 时，$v_R<v_L$ 更慢，相当于 $\mathscr{R}$ 发生了延迟。上式中 a、b 是 $\boldsymbol{E}$ 在 $\mathscr{R}$、$\mathscr{L}$ 上的投影分量，具体而言：

$$a=\frac{E_{0x}-iE_{0y}}{2},\quad b=\frac{E_{0x}+iE_{0y}}{2} \tag{1.33}$$

特别地，当 $\boldsymbol{E}=(1,0)$ 为水平线偏振时：

$$a=b=\frac{1}{2},\quad \boldsymbol{E}'=\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\left(e^{2i\Delta\psi}+1\right)\\ \frac{1}{2i}\left(e^{2i\Delta\psi}-1\right)\end{bmatrix}=e^{i\Delta\psi}\begin{bmatrix}\cos\Delta\psi\\ \sin\Delta\psi\end{bmatrix} \tag{1.34}$$

当 $\boldsymbol{E}=(0,1)$ 为垂直线偏振时：

$$a=-\frac{i}{2},\ b=\frac{i}{2},\quad \boldsymbol{E}'=\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\frac{i}{2}\left(e^{2i\Delta\psi}+1\right)\\ \frac{i}{2i}\left(e^{2i\Delta\psi}-1\right)\end{bmatrix}=i\,e^{i\Delta\psi}\begin{bmatrix}-\cos\Delta\psi\\ \sin\Delta\psi\end{bmatrix} \tag{1.35}$$

1.5.2 磁致旋光

当光在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，沿磁场方向传播时，同样会出现旋光现象，称为“磁致旋光”或“法拉第旋转效应”，光通过长度为 l 的样品时：

$$\Delta\psi = VBl \tag{1.36}$$

其中 V 称为韦尔代常量，一般物质的韦尔代常量都很小。在磁场边界放一反射镜，当光线进入磁场、反射、再出磁场时，光的振动面会旋转 $2\Delta\psi$，可以利用这一原理制造光隔离器。