

线性代数(2024春)(Linear Algebra)

作业2

1. 在 q 元域 \mathbb{F}_q 上的 n 维向量空间中, 对于 $1 \leq k \leq n$, 有多少个 k 维子空间?

2. 设 \mathbb{F} 是个无限域且 a_1, a_2, \dots, a_n 为 \mathbb{F} 中互不相同的元素。证明多项式

$$f_i = (x - a_1) \cdots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \cdots (x - a_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

构成次数 $\leq n - 1$ 的多项式全体 $\mathcal{P}_n[x]$ 的一组基。

3. 确定函数

$$1, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin nx$$

是否在 \mathbb{R} 上线性无关。

4. 证明对任意 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$, 存在非零多项式 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ 满足 $\deg f(x) \leq n^2$ 且 $f(A) = 0_{n \times n}$ 。