线性代数(2024春)(Linear Algebra)

作业5

1. 在$\mathbb{R}^3$中，记$u=(x_1,x_2,x_3)$。给定二次型

$$q(u)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2.$$

(1) 求q在标准基$\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$下的矩阵$F$;
(2) 求q的规范基和它的标准型;
(3) 找出q的惯性指数，正惯性指数和负惯性指数；
(4) 求矩阵T使得$TF\,{}^tT$是对角矩阵。

2. 设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

求矩阵T使得$TA\,{}^tT$是对角矩阵。

3. 当t取什么值时，二次型

$$q(u)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3, \qquad \forall u=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,$$

是正定的?

给定对称矩阵$A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$，我们有$\mathbb{R}^n$上对称双线性型$f_A(u,v)=uA\,{}^tv$。$A$称为正定的(半正定的，负定的，半负定的，不定的) 如果q_{f_A}是正定的(半正定的，负定的，半负定的，不定的)。

4. 证明：
(1) 如果A是正定矩阵，则A^{-1}也是正定矩阵；
(2) 如果A和B是正定矩阵，则$A+B$也是正定矩阵。

5. 给定对称矩阵$A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$。证明对充分小的$\varepsilon\in\mathbb{R}$ (依赖于A)，矩阵$I_n+\varepsilon A$是正定的。(提示：用定理11的推论)