

某某课程作业模版

Template of Homework

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

序言

本文为笔者本科时的“电路原理”课程作业（Homework of Circuit Theory, 2024.9-2025.1）。由于个人学识浅陋，认识有限，文中难免有不妥甚至错误之处，望读者不吝指正，在此感谢。

我的邮箱是 dingyi233@mails.ucas.ac.cn。

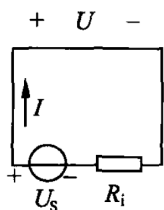
目录

序言	I
目录	I
1 2024.8.27 - 2024.9.2	1
2 2024.9.10 - 2024.9.19	4
3 第二章	10
参考文献	11
附录 A Matlab 代码	12

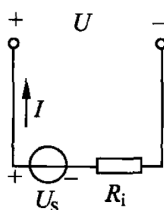
Homework 1: 2024.8.27 - 2024.9.2

1.1 习题集 1-2

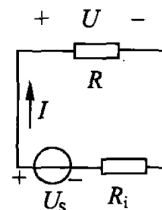
- (a) 短路, 因此 $U = 0$, $I = \frac{U_S}{R_i}$
 (b) 开路, 因此 $U = U_S$, $I = 0$
 (c) 构成回路, 因此 $U = \frac{U_S R}{R + R_i}$, $I = \frac{U_S}{R + R_i}$



(a) 短路

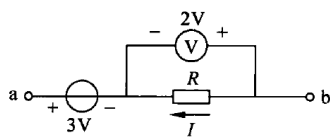


(b) 开路

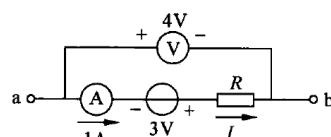
(c) 接负载 R

1.2 习题集 1-9

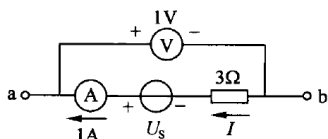
- (a) $\varphi_a - 3\text{ V} + 2\text{ V} = \varphi_b \Rightarrow U_{ab} = 1\text{ V}$
 (b) $I = 1\text{ A}$, $3 - IR = -4 \Rightarrow R = 7\ \Omega$
 (c) $-3 + U_S = 1 \Rightarrow U_S = 4\text{ V}$
 (d) $R = 2\ \Omega$, $-IR + 2 = 3 \Rightarrow I = -0.5\text{ A}$



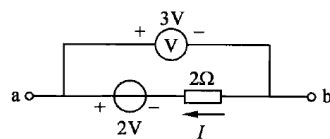
(a)



(b)



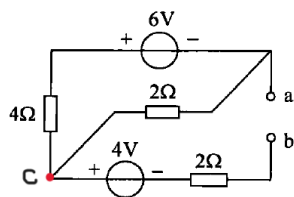
(c)



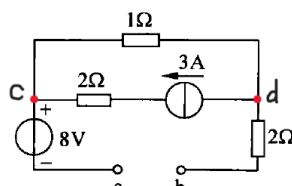
(d)

1.3 习题集 1-10

- (a) 记参考点 a 的电势 $\varphi_a = 0$, 则 $\varphi_c = 2\text{ V}$, $\varphi_b = -2\text{ V}$, 因此 $U_{ab} = 2\text{ V}$
 (b) 记参考点 d 的电势 $\varphi_d = \varphi_b = 0$, 则 $\varphi_c = 6\text{ V}$, $\varphi_a = -2\text{ V}$, 因此 $U_{ab} = -2\text{ V}$



(a)

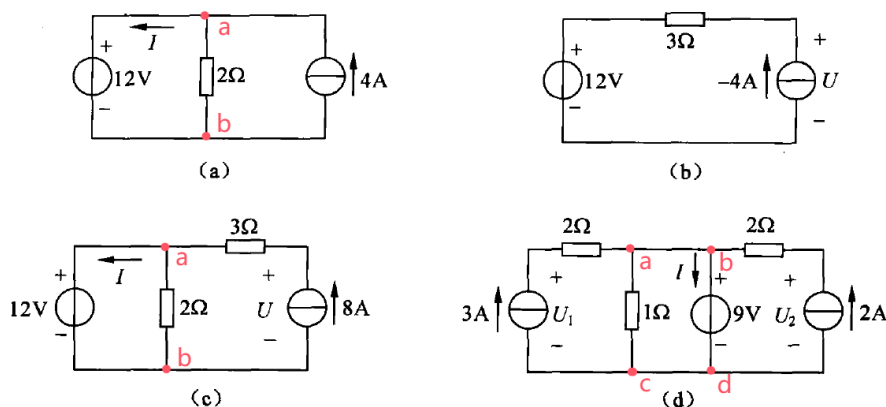


(b)

后补: (b) 中电流源两端仍有电势差, $\varphi_c \neq 6\text{ V}$ 而是 $\varphi_c = -3\text{ V}$, 最终得 $U_{ab} = -5\text{ V}$ 。

1.4 习题集 1-15

- (a) $I = -\frac{U}{R} + 4 \text{ A} = -2 \text{ A}$
 (b) $U = 12 \text{ V} + 3 \Omega \times 4 \text{ A} = 0$
 (c) $I = 8 \text{ A} - 6 \text{ A} = 2 \text{ A}$, $U = 12 \text{ V} + 3 \times 8 \text{ V} = 36 \text{ V}$
 (d) 取点 d 为参考点, 则 $\varphi_d = \varphi_c = 0$, $\varphi_b = \varphi_a = 9 \text{ V}$, 于是 $U_1 = 9 + 2 \times 3 = 15 \text{ V}$, $U_2 = 9 + 2 \times 2 = 13 \text{ V}$, $I = 2 - (9 - 3) = -4 \text{ A}$



1.5 习题集 1-29

取点 a 为参考点 $\varphi_a = 0$, 可得 $\varphi_b = 100U_1 - 80$, 于是在结点 a 有电流:

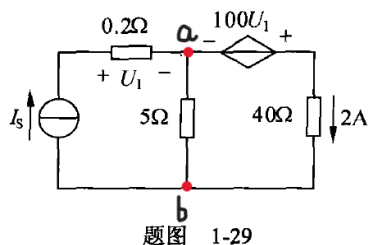
$$I_S + \frac{100U_1 - 80}{5} = 2$$

0.2Ω 电阻处又有 $U_1 = 0.2I_S$, 联立解得 $I_S = 3.6 \text{ A}$, $U_1 = 7.2 \text{ V}$ 。

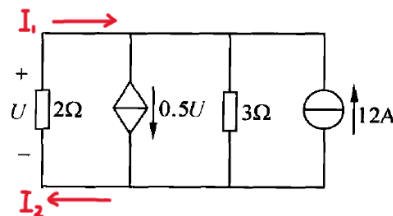
1.6 习题集 1-30

这里要注意左二元器件是受控电流源, 因此 $0.5U$ 是指电流大小而非电压。 I_1 处可列出方程:

$$\frac{U}{2} + 12 - \frac{U}{3} = 0.5U \Rightarrow U = 36 \text{ V} \Rightarrow P = UI = 432 \text{ W}$$



题图 1-29



题图 1-30

后补: 上面的方程列错了, 错将 I_1 的方向标为由左向右, 应该是由右向左。最后得到 $P = 108 \text{ W}$ 。另外, 也可以直接将受控电流源看作是 2Ω 的电阻, 这样左侧三个电阻并联, 也可求出正确答案 108 W 。

1.7 讲义题 1-6

$\alpha > 90^\circ$ 时, 电阻为“负电阻”。

1.8 讲义题 1-7

充放电倍率 C 的含义:

C (充放电倍率) 表示电池充放电时电流相对电池容量的大小数值, $C = \frac{\text{电池容量}}{\text{充放电所需时间}}$ 。例如, $1C$ 电流充电表示电池需要 1 小时充满, $5C$ 充电表示电池需要 0.2 小时充满。放电也是类似的, 一个 10 Ah 的电池以 $2C$ 放电, 表示以 20 A 的电流放电 0.5 h 。

若倍率上升, 总时间就会下降, 若倍率下降, 总时间就会上升。通俗来讲, C 代表了电池的爆发力大小, 高倍率的动力电池瞬间放电电流大, 特别适合大电流放电产品使用, 如航模。

涓流充电:

涓流充电是指在电池接近完全充满电后, 采用非常小的电流进行充电, 以弥补电池自放电造成的容量损失。理论倍率 C 约为最大倍率 C_{\max} 的 $\frac{1}{100}$ 至 $\frac{1}{1000}$, 但由于倍率太小, 常常根本无法充电, 一个比较好的方法是脉冲式充电, 例如以 $\frac{C_{\max}}{10}$ 充电 6 s , 然后停止充电 54 s 。

快速充电:

快速充电至少要求 $1C$, 现阶段的快速充电多在 $1.5C$ 至 $2C$ 之间。

1.9 讲义题 1-8 (Multisim 仿真)

仿真电路如图 1.1 所示,

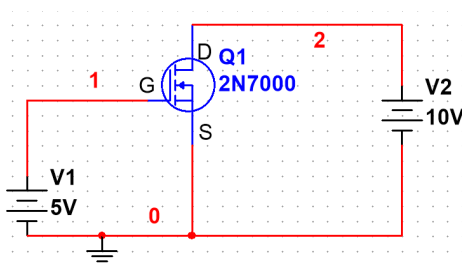


图 1.1: 仿真电路图

先固定 $U_{GS} = 5\text{ V}$ 不变 (即 $V_1 = 5\text{ V}$), 横坐标 $U_{DS} \in [0\text{ V}, 12\text{ V}]$, 画出 I_{DS} (即 I_2) 的变化曲线, 如图 1.2 所示。再固定 $U_{DS} = 10\text{ V}$ 不变 (即 $V_2 = 10\text{ V}$), 横坐标 $U_{GS} \in [0\text{ V}, 10\text{ V}]$, 画出 I_{DS} (即 I_2) 的变化曲线, 如图 1.3 所示。

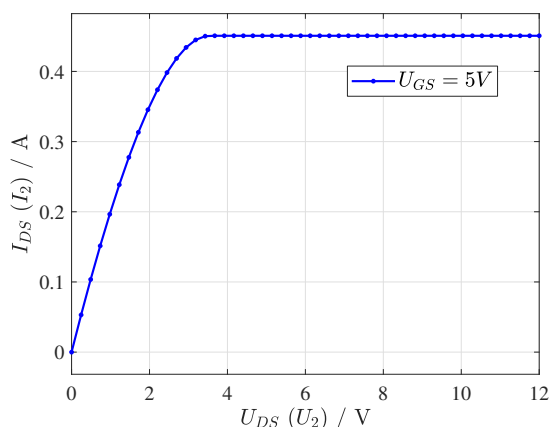


图 1.2: 仿真结果 1

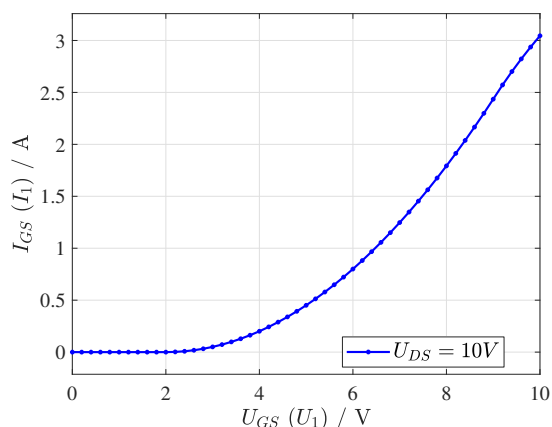


图 1.3: 仿真结果 2

Homework 2: 2024.9.10 - 2024.9.19

2.1 习题集 3-40 (书上答案不正确)

由虚短和虚断, 可以得到 R_1 处电流为 $i_1 = \frac{u_s}{R_1}$ (从上至下), 于是输出电压 $u_o = 3u_s$, 右侧负载由三个电阻构成, 并联电阻分压 $2u_s$, 最后得电流 $i(t)$:

$$i(t) = \frac{2u_s}{6\text{ k}\Omega} = \frac{u_s}{3} \text{ mA} \quad (2.1)$$

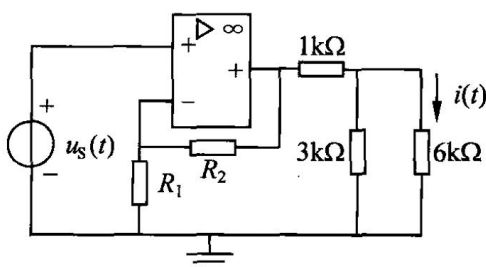


图 2.1: 习题集 3-40

2.2 习题集 3-45 (注意题目单位是 S)

如图所示, 将电导全部转换为电阻。由虚断、虚短, 流经 $\frac{1}{10}\Omega$ 电阻的电流为 $i_1 = \frac{u_s}{\frac{1}{10}\Omega} = 10u_s$ 。右下角两电阻分压, 再由虚短可得 $i_2 = 2U_o$, 于是 $i_3 = i_1 + i_2 = 10U_s + 2U_o$, 由 KVL:

$$0 - \frac{1}{3}(10U_s + 2U_o) = U_o \Rightarrow \frac{U_o}{U_s} = -2 \quad (2.2)$$

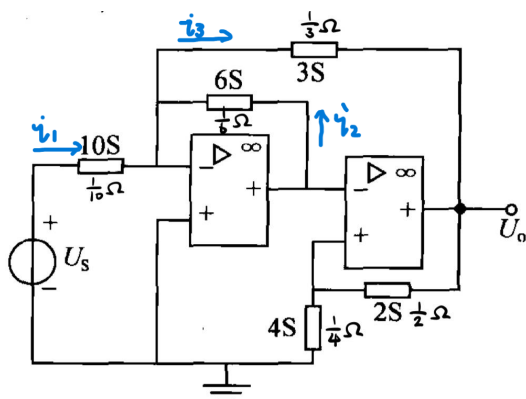
入端电阻 R_i :

$$i_1 = 10U_s \Rightarrow R_i = \frac{1}{10} \Omega \quad (2.3)$$

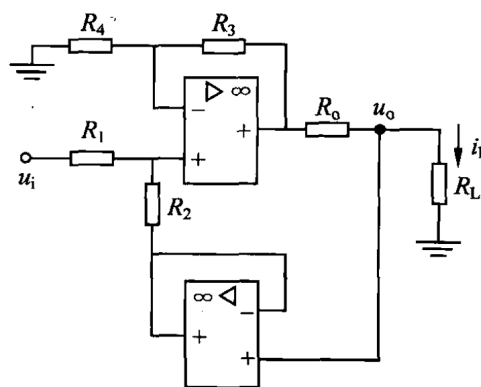
2.3 习题集 3-46

依据 KVL、KCL、虚短、虚断, 标出各节点电势, 如图所示。则有:

$$(u_i + u_o) - u_o = i_L R, i_L = \frac{u_o}{R_L} \Rightarrow u_o = u_i, i_L = \frac{u_o}{R_L} = \frac{u_i}{R_L} \quad (2.4)$$



(a) 习题集 3-45



(b) 习题集 3-46

图 2.2: 习题集 3-45 和习题集 3-46

2.4 讲义题 2-19

(1) 反比例放大器

对输入电阻, $i_1 = \frac{u_i}{R_1} \Rightarrow R_i = R_1$ 。对输出电阻, 将输入电压源短路, 采用加流求压法, 在输出端接入电流源, 由 $u = iR$ 且 $u = 0$, 得 $R_o = 0$ 。也即:

$$R_i = R_1, R_o = 0 \quad (2.5)$$

(2) 同比例放大器

对输入电阻, R_1 右端断路, 因此 $R_i = \infty$ 。对输出电阻, 将输入电压源短路, 采用加流求压法, 在输出端接入电流源, 由 $u = iR$ 且 $u = 0$, 得 $R_o = 0$ 。也即:

$$R_i = \infty, R_o = 0 \quad (2.6)$$

从输入输出电阻特性来看, 同比例放大器电气特性更优秀。

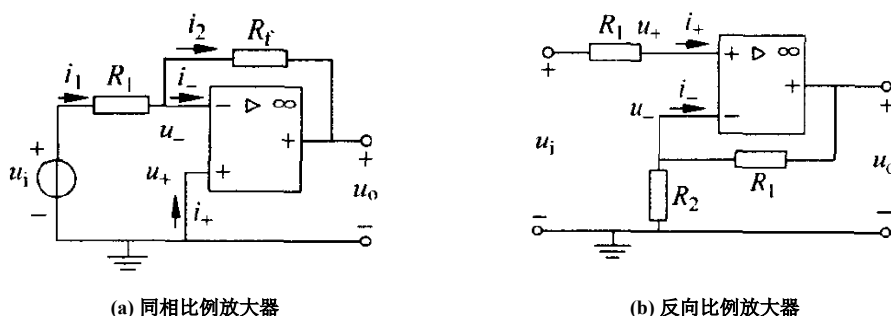


图 2.3: 讲义题 2-19

2.5 讲义题 2-20

(a) 由 KVL 有:

$$\begin{cases} u_1 = R_2(i_1 - i_2) \\ u_2 = R_1 i_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{1}{R_2} u_1 + \frac{1}{R_1} u_2 \\ i_2 = \frac{1}{R_1} u_2 \end{cases}, G = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

(b) 由 KVL, KCL 有:

$$\begin{cases} u_1 = R_1 \left(i_1 - \frac{u_1 - u_2}{R_2} \right) \\ u_2 = R_1 \left(i_2 + \frac{u_1 - u_2}{R_2} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u_1 - \frac{1}{R_2} u_2 \\ i_2 = -\frac{1}{R_2} u_1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u_2 \end{cases}, G = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

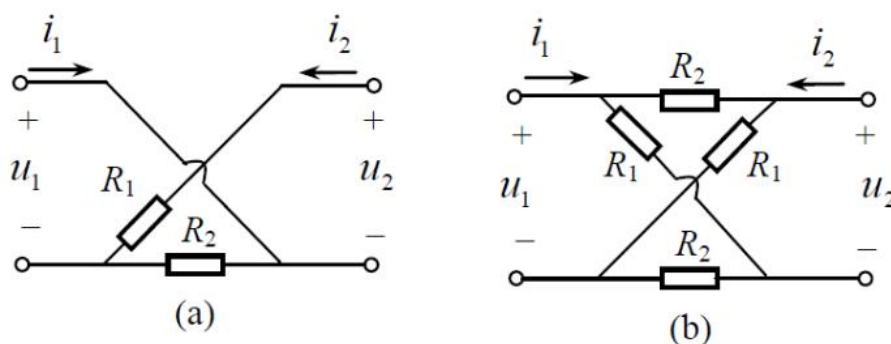


图 2.4: 讲义题 2-20

2.6 仿真 2-1

(1) 单 OPA 实现电压运算

电路如图 2.5 (a) 所示, 接线端示意图见图 2.5 (b)。

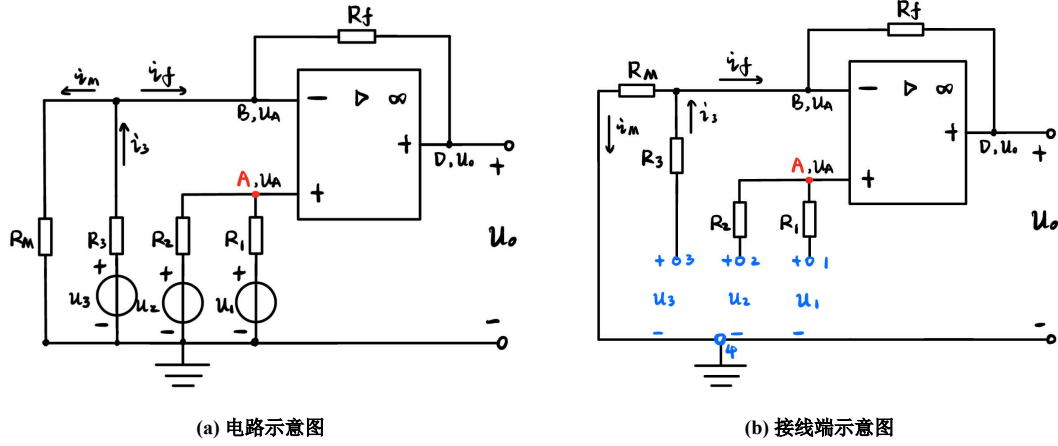


图 2.5: 单 OPA 实现电压运算

下面分析其输出特性。由虚断, 在 u_1 和 u_2 构成的回路中, 设正向流经 u_2 的电流为 i_2 , 则有:

$$i_2 = \frac{u_2 - u_1}{R_1 + R_2} \Rightarrow u_A = u_2 - i_2 R_2 = \frac{R_2 u_1 + R_1 u_2}{R_1 + R_2} \quad (2.9)$$

由虚短, B 点的电势也为 u_A , 于是:

$$i_3 = \frac{u_3 - u_A}{R_3}, i_M = \frac{u_A}{R_M} \Rightarrow i_f = i_3 - i_M = \frac{u_3 - u_A}{R_3} - \frac{u_A}{R_M} = \frac{u_3}{R_3} - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_M}\right)u_A \quad (2.10)$$

由虚断和 KVL:

$$u_o = u_A - i_f R_f = u_A - \frac{R_f}{R_3} u_3 + \left(\frac{R_f}{R_3} + \frac{R_f}{R_M}\right)u_A = \left(1 + \frac{R_f}{R_3} + \frac{R_f}{R_M}\right)u_A - \frac{R_f}{R_3} u_3 \quad (2.11)$$

将 u_A 的表达式代入, 最终得到:

$$u_o = \left(1 + \frac{R_f}{R_3} + \frac{R_f}{R_M}\right) \frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + 1} u_1 + \left(1 + \frac{R_f}{R_3} + \frac{R_f}{R_M}\right) \frac{\frac{R_1}{R_2}}{\frac{R_1}{R_2} + 1} u_2 - \frac{R_f}{R_3} u_3 \quad (2.12)$$

我们需要 u_1, u_2, u_3 前的系数分别为 3, 2, -0.5, 于是有:

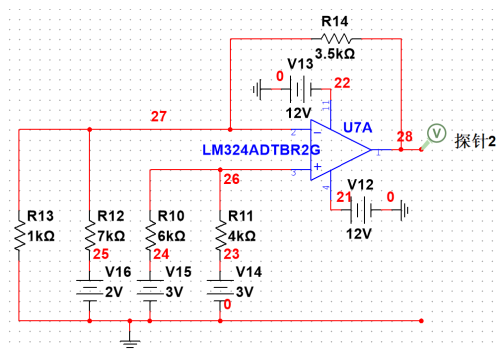
$$\begin{cases} \left(1 + \frac{R_f}{R_3} + \frac{R_f}{R_M}\right) \frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + 1} = 3 \\ \left(1 + \frac{R_f}{R_3} + \frac{R_f}{R_M}\right) \frac{\frac{R_1}{R_2}}{\frac{R_1}{R_2} + 1} = 2 \\ -\frac{R_f}{R_3} = -0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{2}{3} R_2, & R_2 > 0 \\ R_3 = 2 R_f, R_M = \frac{2}{7} R_f, & R_f > 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

为了保持 OPA 的理想性, 我们应选择 $K\Omega$ 量级的电阻, 同时, 为了降低电路的整体功率, 减少消耗, 电阻阻值应该尽量大。综合下来, 不妨选取 $R_2 = 6 K\Omega$, $R_f = 3.5 K\Omega$, 此时所有电阻阻值为:

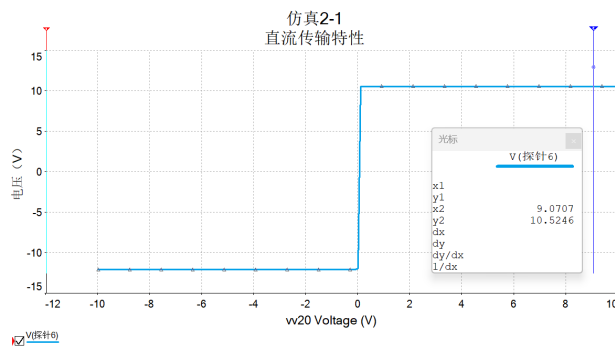
$$R_1 = 4 K\Omega, R_2 = 6 K\Omega, R_3 = 7 K\Omega, R_M = 1 K\Omega, R_f = 3.5 K\Omega \quad (2.14)$$

如图 2.6 (a), 在 Multisim 中进行仿真, 得到的结果如下表所示:

项目	1			2			3			4		
	x, u_1	y, u_2	z, u_3	x, u_1	y, u_2	z, u_3	x, u_1	y, u_2	z, u_3	x, u_1	y, u_2	z, u_3
	1	1	1	1	3	2	-2	2	0	3	3	2
理论输出 (V)	$3 + 2 - 0.5 = 4.5$			$3 + 6 - 1 = 8$			$-6 + 4 - 0 = -2$			$9 + 6 - 1 = 14$		
仿真输出 (V)	4.50			8.00			-2.00			10.494		



(a) 单 OPA 实现电压运算



(b) OPA 饱和电压

图 2.6: 仿真电路图与 OPA 饱和电压

由表可见, 除了最后一组数据, 仿真结果与理论结果完全一致。最后一组之所以不同, 是因为输出电压 u_o 超出了此 OPA 的饱和电压 U_{sat} , 导致输出电压 $u_o = U_{sat} = 10.494V$ 。如图 2.6 (b) 所示, 此 OPA (LM324ADTBR2G) 的饱和电压为 10.525V, 与解释相符。具体仿真时的结果见图 2.7。

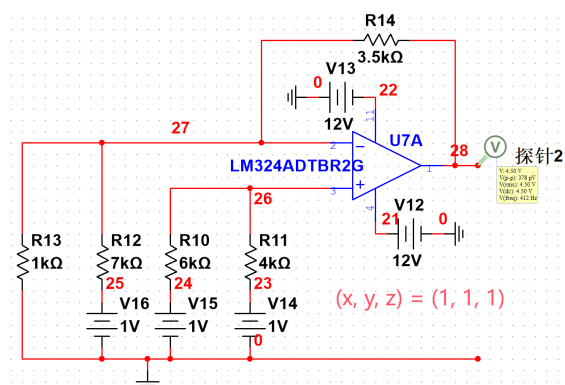
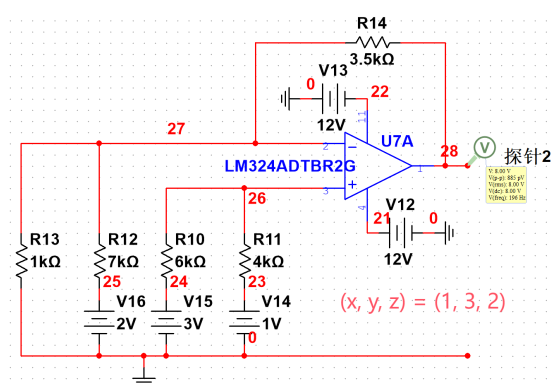
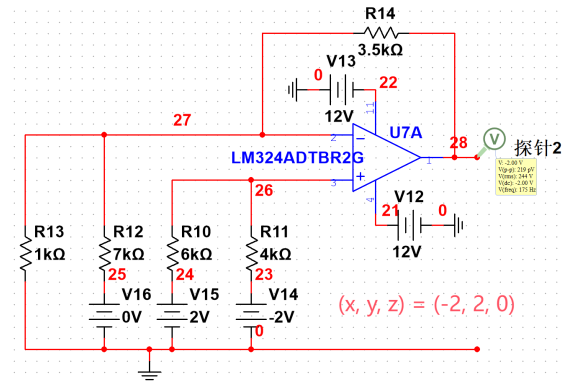
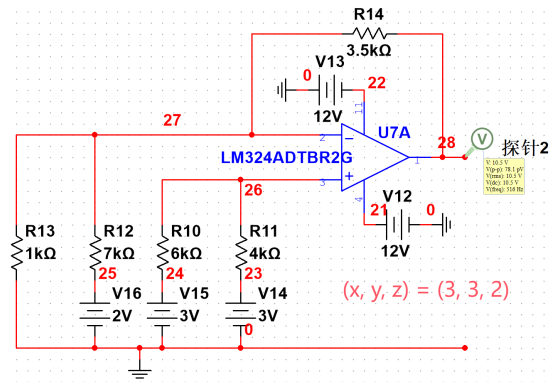
(a) $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ (b) $(x, y, z) = (1, 3, 2)$ (c) $(x, y, z) = (-2, 2, 0)$ (d) $(x, y, z) = (3, 3, 2)$

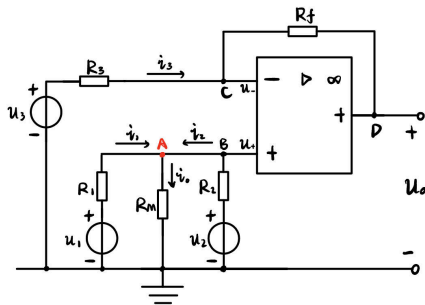
图 2.7: 仿真具体结果图

(2) 一些失败的例子

注意到, 减法器是在反相加法器的基础上, 串联入电压源 (和电阻) 改变了 u_+ 端的电压。这样, 在最终的输出电压 u_o 中, u_- 端的电源电压会带负号, u_+ 端的电源电压带正号。用类似的思想, 我们可以对减法器进行改造, 最终仅用一个 OPA 便实现 $3x + 2y - 0.5z$ 的电压运算。

一种方法是向 u_+ 端再串联一个电压源, 使得输出 u_o 中两正一负, 然后通过电阻值来调整系数, 但是, 这样不满足接线端的要求 (三正一共地)。另一种方法是向 u_- 端再并联一个电压源, 使得输出 u_o 中两负一正 ($-u_1, -u_2, +u_3$), 最后通过电阻值来调整系数, 但是, 这样得到的是两负一正而不是两正一负, 虽满足了接线端要求, 却不是我们需要的结果。

其实, 我们只需要向 u_+ 端的电压源再并联一个电压源即可, 如图所示。下面分析其输出特性。



(a) 失败的例子

第一次仿真作业

注意: 一定要独立完成!

1 用运算放大器实现 $3x+2y-0.5z$ 的信号运算功能, 你的输入只有4个接线端, 分别对应 x, y, z 信号的正端和整个电路公共的地 (x, y, z 信号的公共负端)。由于信号有公共的地, 你只能得到 x, y, z 信号, $-x, -y$ 和 $-z$ 信号需要自己实现。运算放大器在 Multisim 中选择某5端或更多端运放 (具有 \pm 电源输入的运放, 比如 Analog - OPAMP - OPAMP - LM324AD 等等)。运放供电电压需固定为主 15V, 不得改变运放内部的缺省参数, 不得选择 5 端 virtual 运放来仿真。 (这个条件的目的是确保你的运放是饱和的)

(1) 使用的运算放大器的数量不能超过3个, 电阻数量不限;

(2) 画出电路原理图, 分析输出与输入信号 x, y, z 的关系;

(3) 根据仿真结果完成下表。要求打印仿真电路图并在图中适当位置注明相应的信号表达式。如果输出结果与计算不同, 请分析结果并分析一下可能的解决方案。

	1			2			3			4		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
理论	1	1	1	1	3	2	-2	2	0	3	3	2
输出												
仿真												

(b) 仿真作业 2-1

图 2.8: 示意图

在 u_1, R_1, u_2, R_2 和 R_M 构成的局部电路中, 由 KVC:

$$\begin{cases} u_1 - R_1 i_1 - R_M(i_1 + i_2) = 0 \\ u_2 - R_2 i_2 - R_M(i_1 + i_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{(R_2 + R_M)u_1 - R_M u_2}{R_1 R_2 + R_1 R_M + R_2 R_M} \\ i_2 = \frac{(R_1 + R_M)u_2 - R_M u_1}{R_1 R_2 + R_1 R_M + R_2 R_M} \end{cases} \quad (2.15)$$

由此得点 A 处的电势 u_A :

$$u_A = \frac{R_2 R_M u_1 + R_1 R_M u_2}{R_1 R_2 + R_1 R_M + R_2 R_M} \quad (2.16)$$

也即点 B 和非反相输入端的电势 $u_+ = u_B = u_A$ 。由虚短, $u_- = u_+$, 可得电流 i_3 :

$$i_3 = \frac{u_3 - u_-}{R_3} = \frac{1}{R_3} \left(u_3 - \frac{R_2 R_M u_1 + R_1 R_M u_2}{R_1 R_2 + R_1 R_M + R_2 R_M} \right) \quad (2.17)$$

由虚断, 经过电阻 R_f 求得 D 点电势, 也即输出电压 u_o :

$$u_o = u_A - i_3 R_f = \left(1 + \frac{R_f}{R_3} \right) u_A - \frac{R_f}{R_3} u_3 \quad (2.18)$$

$$= \left(1 + \frac{R_f}{R_3} \right) \cdot \frac{\frac{R_M}{R_1} u_1 + \frac{R_M}{R_2} u_2}{1 + \frac{R_M}{R_1} + \frac{R_M}{R_2}} - \frac{R_f}{R_3} u_3 \quad (2.19)$$

$$= \frac{1 + \frac{R_f}{R_3}}{1 + \frac{R_M}{R_1} + \frac{R_M}{R_2}} \left(\frac{R_M}{R_1} u_1 + \frac{R_M}{R_2} u_2 \right) - \frac{R_f}{R_3} u_3 \quad (2.20)$$

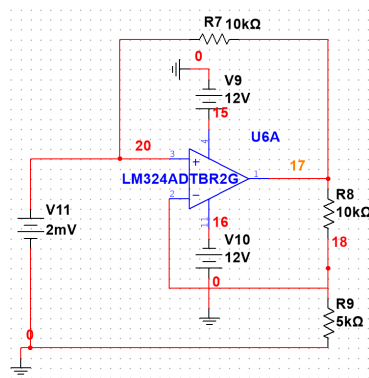
最后调整电阻阻值。为了保持 OPA 的理想性, 电阻需要在 $K\Omega$ 量级, 令电阻比例如下:

$$\begin{cases} \frac{R_f}{R_3} = 0.5 \\ \frac{1 + \frac{R_f}{R_3}}{1 + \frac{R_M}{R_1} + \frac{R_M}{R_2}} \cdot \frac{R_M}{R_1} = 3 \\ \frac{1 + \frac{R_f}{R_3}}{1 + \frac{R_M}{R_1} + \frac{R_M}{R_2}} \cdot \frac{R_M}{R_2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_f = \frac{1}{2} R_3 \\ R_1 = -2 R_M \\ R_2 = -\frac{4}{3} R_M \end{cases} \quad (2.21)$$

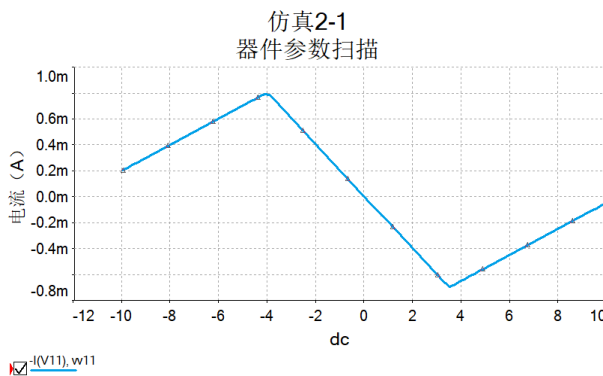
显然, 这不可能实现, 舍弃。

2.7 仿真 2-2

仿真电路如图 2.9 (a) 所示, 对输入电压进行参数扫描, 输出通过电压源的电流, 得到图 2.9 (b)。这里需要注意, 在 Multisim 中, 电流的参考方向始终是高电势指向低电势 (包括电压源), 因此, 仿真输出中的 $I(V11)$ 是从上往下通过 V11 的电流 (而不是从下至上), 电压源 V11 的实际电流为 $i = -I(V11)$ 。



(a) 负电阻仿真电路



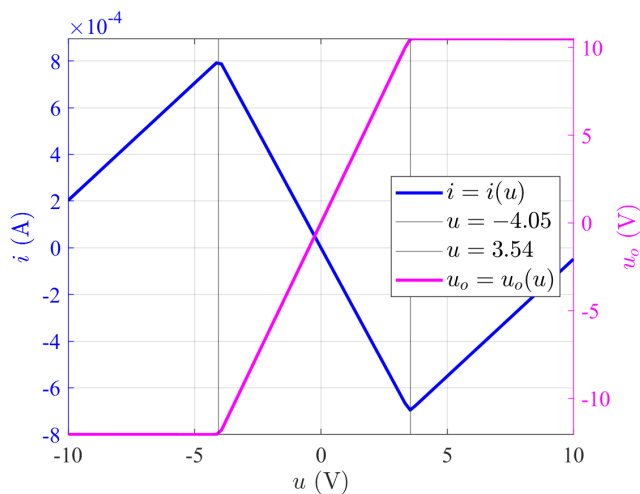
(b) I (纵轴) U (横轴) 关系

图 2.9: 负电阻仿真

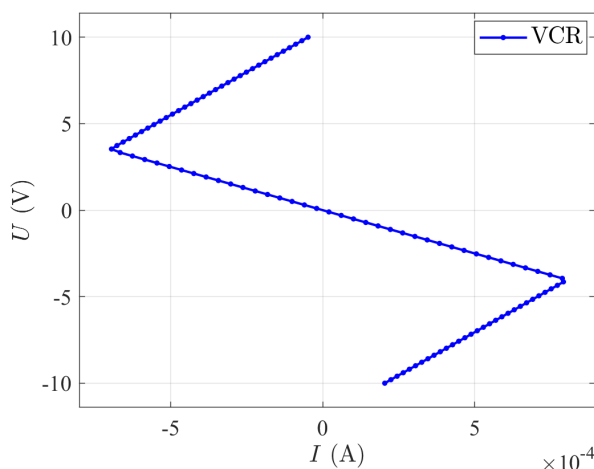
简记电压源 V11 的电压为 u , 继续仿真输出电压 u_o 关于输入电压 u 的变化, 将数据导出后在 Matlab 中绘制曲线, 如图 2.10 (a)。再将 $I-U$ 关系转化为 $U-I$ 关系, 如图 2.10 (b)。可以发现, 在线性工作区内, 电路表现为负阻。而线性区外的两段折线位于 OPA 的饱和区, 此时 u_o 始终为饱和电压, 电路呈现正电阻, 且阻值为:

$$\begin{cases} i = \frac{u - U_{\text{sat}}}{R_1} & , u > 3.54 \text{ V} \\ i = \frac{u + U_{\text{sat}}}{R_1} & , u < -4.05 \text{ V} \end{cases} \Rightarrow R_{\text{sat}} = R_1 = 10 \text{ K}\Omega \quad (2.22)$$

这与图 2.10 (b) 中曲线的斜率是相符的。而在线性区, 负电阻 $R = -\frac{10 \text{ K}\Omega}{10 \text{ K}\Omega} \cdot 5 \text{ K}\Omega = -5 \text{ K}\Omega$, 这也是符合的。



(a) u_o 与 i 关于 u 的变化



(b) $U-I$ 关系 (VCR)

图 2.10: 仿真结果分析

Homework 3: 第二章

3.1 对于正入射的情况, 写出菲涅尔公式

菲涅尔公式如下:

类型	振幅反射系数 r		振幅透射系数 t	
s 波	$r_s = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$	$-\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$	$t_s = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$	$+\frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$
p 波	$r_p = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t}$	$+\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$	$t_p = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i}$	$+\frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}$

正入射时, $\theta_i = \theta_t = 0$, 于是有:

$$r_p = (-r_s) = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}, \quad t_p = t_s = \frac{2n_i}{n_i + n_t} \quad (3.1)$$

$$F = R_s = R_p = \left(\frac{n_t - n_i}{n_t + n_i} \right)^2 \quad (3.2)$$

不妨作出相关的图像, 图 3.1 是 s 波、p 波振幅系数关于入射角 θ_i 的变化情况^①。

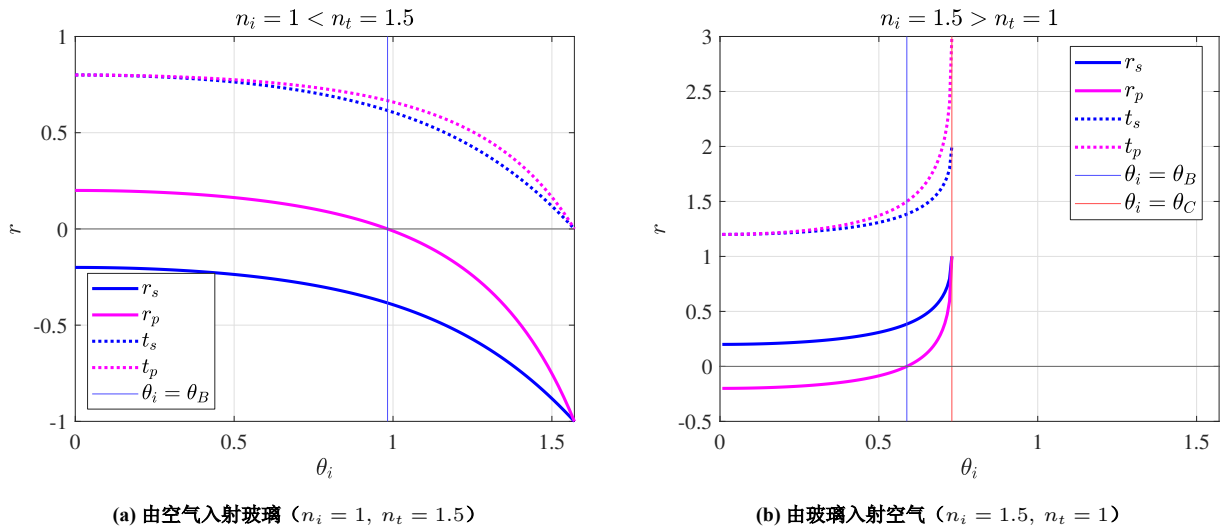


图 3.1: 振幅系数 r 随入射角 θ_i 的变化

3.2 一自然光以 Brewster Angle 入射到空气中的一块玻璃, 已知功率透射率为 0.86。

(1) 求功率的反射率:

$T = 0.86$, 由能量守恒, 功率反射率 $R = 0.14$ 。

(2) 若输入为 1000 W, 求透射光 s 分量上的功率

光束为自然光, 因此 s 分量和 p 分量的功率相同, 都为 500 W。先求解入射角 θ_i , 由菲涅尔定理和能量关系:

$$R = \frac{1}{2}(R_s + R_p), \quad R_s = \left[\frac{\cos \theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}} \right]^2, \quad R_p = \left[\frac{n_{ti}^2 \cos \theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}{n_{ti}^2 \cos \theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}} \right]^2 \quad (3.3)$$

^①源码见附录 A.1

其中 $n_i = 1$, $n_t = 1.5$, 因此 $n_{ti} = 1.5$, 代入即得:

$$\left[\frac{\cos \theta_i - \sqrt{1.5^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{1.5^2 - \sin^2 \theta_i}} \right]^2 + \left[\frac{1.5^2 \cos \theta_i - \sqrt{1.5^2 - \sin^2 \theta_i}}{1.5^2 \cos \theta_i + \sqrt{1.5^2 - \sin^2 \theta_i}} \right]^2 = 2 \times 0.14 \quad (3.4)$$

用 Matlab 解此非线性方程组^②, 得到入射角 θ_i 和其它参量:

$$\begin{aligned} \theta_i &= 1.173220 \text{ rad} = 67.220559^\circ \\ R &= 0.14, \quad R_s = 0.256933, \quad R_p = 0.023067 \\ T &= 0.86, \quad T_s = 0.743067, \quad T_p = 0.976933 \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.3 光束垂直入射到玻璃-空气界面, 玻璃折射率 1.5, 求出能量反射率和透射率

$\theta_i = 0$ 时, 由菲涅尔定律和能量关系, 有:

$$R = \frac{1}{2}(R_s + R_p), \quad T = 1 - R \quad (3.6)$$

$$R_s = \left[\frac{\cos \theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}} \right]^2 = \left[\frac{1 - n_{ti}}{1 + n_{ti}} \right]^2, \quad R_p = \left[\frac{n_{ti}^2 \cos \theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}{n_{ti}^2 \cos \theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}} \right]^2 = \left[\frac{n_{ti}^2 - n_{ti}}{n_{ti}^2 + n_{ti}} \right]^2 \quad (3.7)$$

由空气入射玻璃时, $n_{ti} = 1.5$, 由玻璃入射空气时, $n_{ti} = \frac{2}{3}$, 代入得到:

$$\text{空气入射玻璃: } R = 0.04, \quad T = 0.96$$

$$\text{玻璃入射空气: } R = 0.04, \quad T = 0.96$$

也即无论从哪边入射, 能量反射率和透射率分别为 0.04 和 0.96.

^②源码见附录 A.2

附录 A Matlab 代码

A.1 图 3.1 源码

```

1  %%%%%%%%%% 空气入射玻璃 %%%%%%%%%%
2  global n_i n_t
3  n_i = 1;
4  n_t = 1.5;
5
6  theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
7  r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
8  r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
9  t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
10 t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*
    cos(theta_i - theta_t) );
11 theta_B = atan(n_t/n_i);
12 theta_C = asin(n_t/n_i);
13
14 theta_array = linspace(-0.1, pi/2, 101);
15 Y = [
16     r_s(theta_array, theta_t(theta_array))
17     r_p(theta_array, theta_t(theta_array))
18     t_s(theta_array, theta_t(theta_array))
19     t_p(theta_array, theta_t(theta_array))
20 ];
21 stc = MyPlot(theta_array, Y);
22 xline(theta_B, 'b')
23 yline(0)
24 xlim([0, pi/2])
25 ylim([-1, 1])
26 stc.legend.String = ['$r_s$'; '$r_p$'; '$t_s$'; '$t_p$'; '$\theta_i = \theta_B$'];
27 stc.legend.Interpreter = "latex";
28 stc.legend.FontSize = 14;
29 stc.legend.Location = "southwest";
30 stc.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
31 stc.axes.Title.Interpreter = "latex";
32 stc.label.x.String = '$\theta_i$';
33 stc.label.y.String = '$r$';
34 stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
35 stc.plot.plot_3.Color = 'b';
36 stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
37 stc.plot.plot_4.Color = [1 0 1];
38 %MyExport_pdf
39
40 %%%%%%%%%% 玻璃入射空气 %%%%%%%%%%
41 n_i = 1.5;
42 n_t = 1;
43

```

```

44 theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
45 r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
46 r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
47 t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
48 t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*
    cos(theta_i - theta_t) );
49 theta_B = atan(n_t/n_i);
50 theta_C = asin(n_t/n_i);
51
52
53 theta_array = linspace(0, theta_C, 101);
54 Y = [
55     r_s(theta_array, theta_t(theta_array))
56     r_p(theta_array, theta_t(theta_array))
57     t_s(theta_array, theta_t(theta_array))
58     t_p(theta_array, theta_t(theta_array))
59 ];
60 stc = MyPlot(theta_array, Y);
61 xline(theta_B, 'b')
62 xline(theta_C, 'r')
63 yline(0)
64 xlim([0, pi/2])
65 ylim([-0.5, 3])
66 stc.legend.String = ['$r_s$'; '$r_p$'; '$t_s$'; '$t_p$'; '$\theta_i = \theta_B$'; '$\theta_i = \theta_C$'];
67 stc.legend.Interpreter = "latex";
68 stc.axes.Title.String = '$n_i = 1.5 > n_t = 1$';
69 stc.axes.Title.Interpreter = "latex";
70 stc.label.x.String = '$\theta_i$';
71 stc.label.y.String = '$r$';
72 stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
73 stc.plot.plot_3.Color = 'b';
74 stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
75 stc.plot.plot_4.Color = [1 0 1];
76 %MyExport_pdf

```

A.2 公式 3.5 源码

```

1 R_s = @(n_ti, t) ( (cos(t) - sqrt(n_ti^2 - sin(t)^2)) / (cos(t) + sqrt(n_ti^2 - sin(t)^2)) )^2;
2 R_p = @(n_ti, t) ( (n_ti^2*cos(t) - sqrt(n_ti^2 - sin(t)^2)) / (n_ti^2*cos(t) + sqrt(n_ti^2 - sin(t)^2)) )^2;
3
4 theta_i = fzero(@(t) ( R_s(1.5, t) + R_p(1.5, t) - 2*0.14) , deg2rad(45));
5 disp(['theta_i = ', num2str(theta_i, '%.6f'), ' rad'])
6 disp(['theta_i = ', num2str(rad2deg(theta_i), '%.6f'), ' deg'])
7 disp(['R_s = ', num2str(R_s(1.5, theta_i), '%.6f')])
8 disp(['R_p = ', num2str(R_p(1.5, theta_i), '%.6f')])

```

```
9  disp(['T_s = ', num2str(1 - R_s(1.5, theta_i), '%.6f')])
10 disp(['T_p = ', num2str(1 - R_p(1.5, theta_i), '%.6f')])
11 disp(['R = ', num2str( 0.5*(R_s(1.5, theta_i) + R_p(1.5, theta_i)) , '%.6f')])
12 disp(['T = ', num2str( 0.5*(2 - R_s(1.5, theta_i) - R_p(1.5, theta_i)), '%.6f')])
13
14 %{
15 >> Output:
16 theta_i = 1.173220 rad
17 theta_i = 67.220559 deg
18 R_s = 0.256933
19 R_p = 0.023067
20 T_s = 0.743067
21 T_p = 0.976933
22 R = 0.140000
23 T = 0.860000
24 %}
```