光学作业

Homework of Optics

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.9 – 2025.1

序言

本文为笔者本科时的“光学”课程作业（Homework of Optics, 2024.9-2025.1）。由于个人学识浅陋，认识有限，文中难免有不妥甚至错误之处，望读者不吝指正，在此感谢。

我的邮箱是 dingyi233@mails.ucas.ac.cn。

目录

Homework 1：第一章

1.1 求入射到光纤的角度满足的条件

$$n_0 \sin i = n_g \sin i', \quad n_g \sin(\frac{\pi}{2} - i') = n_c \sin\frac{\pi}{2} \Longrightarrow i \leqslant \text{arcsin} \tag{1.1}$$

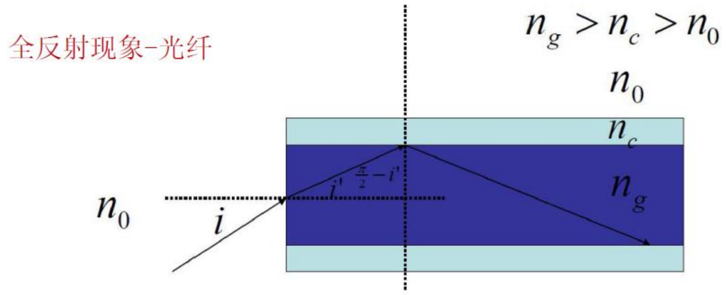

图 1.1: 求入射到光纤的角度满足的条件

1.2 推导光线轨迹方程

在 x-y 平面中，设 $y = y(x)$ 表示光线的轨迹方程，$n = n(y)$ 表示介质的折射率。由几何关系，我们有：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\theta = \frac{1}{\tan i} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 i}}{\sin i} \tag{1.2}$$

由折射定律，记 $[n(y)\sin i(y)]_{y=0} = C$ ，则我们有：

$$n(y)\sin i(y) = C \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{n^2-C^2}}{C^2}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{n^2}{C^2} - 1 \tag{1.3}$$

两边同时对 x 求导，得到：

$$2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right) = \frac{1}{C^2}\left(\frac{\mathrm{d}n^2}{\mathrm{d}y}\right)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{2C^2}\cdot\frac{\mathrm{d}n^2}{\mathrm{d}y} \tag{1.4}$$

也即

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{2n_0^2\sin^2 i}\cdot\frac{\mathrm{d}n^2}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{2n_0^2\cos^2\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}n^2}{\mathrm{d}y} \tag{1.5}$$

证毕。 □

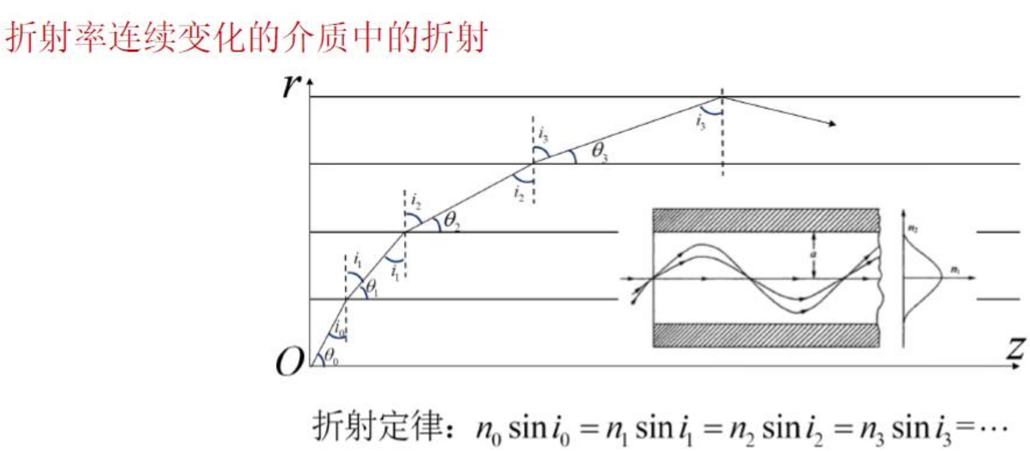

图 1.2: 推导光线轨迹方程

事实上，在三维坐标系中考虑上述过程，或者利用费马原理和变分法，又或考虑哈密顿光学，可以得到更一般的形式，称为光路方程，如下：

$$\nabla n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\right) \tag{1.6}$$

1.3 （已被删去）

1.4 利用费马原理给出物像关系

折射球面如图，由余弦定理可知：

$$\mathrm{OPL} = np + n'p' = n\sqrt{r^2 + (s+r)^2 - 2r(s+r)\cos\phi} + n'\sqrt{r^2 + (s'-r)^2 + 2r(s'-r)\cos\phi} \tag{1.7}$$

由费马原理，$\frac{\mathrm{dOPL}}{\mathrm{d}\phi} = 0$，于是有：

$$\frac{-nr(s+r)\sin\phi}{p} + \frac{n'r(s'-r)\sin\phi}{p'} = 0 \Longrightarrow \frac{n}{p} + \frac{n'}{p'} = \frac{1}{R}\left(\frac{n's'}{p'} - \frac{ns}{p}\right) \tag{1.8}$$

在傍轴条件下，有 $s \approx p$，$s' \approx p'$，于是有：

$$\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'-n}{R} \tag{1.9}$$

证毕。

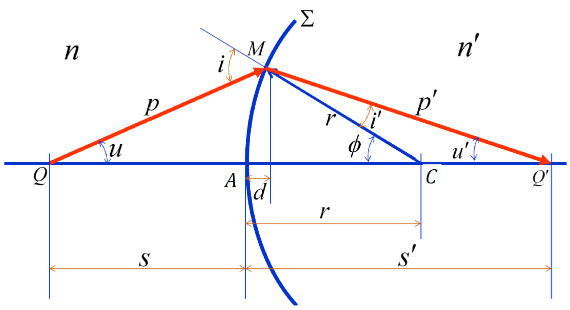

图 1.3: 折射球面物像关系

1.5 推导反射球面的物像公式

这里要注意，由于像是虚像，l_2 贡献虚光程（为负），且 $s_2 < 0$，因此圆心到像点的距离为 $r + s_2$ 而非 $r - s_2$。同由余弦定理，写出光程 OPL，有：

$$\mathrm{OPL} = n_1 l_1 - n_2 l_2 = n_1\sqrt{r^2 + (r+s_1)^2 - 2r(r+s_1)\cos\phi} - n_2\sqrt{r^2 + (r+s_2)^2 - 2r(r+s_2)\cos\phi} \tag{1.10}$$

由费马原理，$\frac{\mathrm{dOPL}}{\mathrm{d}\phi} = 0$，于是有：

$$\frac{-n_1 r(r+s_1)\sin\phi}{l_1} + \frac{n_2 r(r+s_2)\sin\phi}{l_2} = 0 \Longrightarrow \frac{n_2}{l_2} - \frac{n_1}{l_1} = \frac{1}{r}\left(\frac{n_1 s_1}{l_1} - \frac{n_2 s_2}{l_2}\right) \tag{1.11}$$

傍轴时，有 $s_1 \approx l_1$，$s_2 \approx -l_2$，于是：

$$-\frac{n_2}{l_2} - \frac{n_1}{l_1} = \frac{1}{r}(n_1 + n_2) \tag{1.12}$$

当反射球面两侧为相同介质时，$n_1 = n_2$，则：

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = -\frac{2}{r} \tag{1.13}$$

证毕。

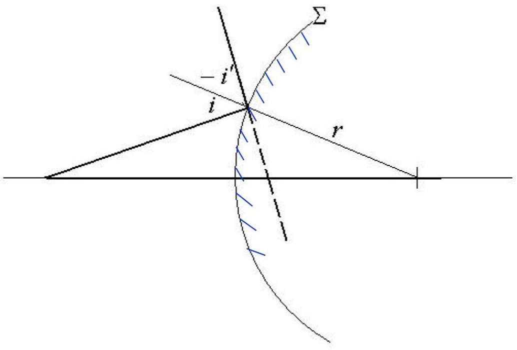

图 1.4: 反射球面

1.6 画出图中的像点

(1) height

(2) hhh

Homework 2: 第二章

Homework 3: 第三章

Homework 4: 第四章

Homework 5: 第五章

Homework 6: 第六章