

# 线性代数(2024春)(Linear Algebra)

## 作业9

1. 设 $A$ 为一个 $m \times n$ 矩阵和 $B$ 为一个 $n \times m$ 矩阵。回忆在上学期作业10第二题中, 利用对行列式

$$\begin{vmatrix} I_n + BA & B + BAB \\ A & I_m + AB \end{vmatrix}$$

分别做适当的分块行变换和分块列变换证明

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA).$$

假设 $m \leq n$ , 找出特征多项式 $|xI_m - AB|$ 与特征多项式 $|xI_n - BA|$ 的关系。

2. 设域 $\mathbb{F}$ 的特征不等于2, 且 $V$ 是 $\mathbb{F}$ 上的一个向量空间。如果 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\varphi^2 = e_V$ , 则对任意 $v \in V$ , 证明 $v - \varphi(v) \in V^{-1}$ 。

3. 设域 $\mathbb{F}$ 的特征不等于2, 且 $V$ 是 $\mathbb{F}$ 上的一个有限维向量空间。如果对 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ ,  $\lambda^2$ 是 $\varphi^2$ 的特征值, 证明 $\lambda$ 或 $-\lambda$ 是 $\varphi$ 的一个特征值。

4. 对任意正整数 $k$ 和 $n$ 满足 $k < n$ 。求 $(J_n(\lambda))^k$ 。