

# 光学笔记

## Optics Notes

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

# 目录

|                 |   |
|-----------------|---|
| 目录              | I |
| 1 偏振            | 1 |
| 1.1 偏振光的性质      | 1 |
| 1.1.1 椭圆偏振光     | 1 |
| 1.1.2 线偏振光      | 3 |
| 1.1.3 自然光       | 3 |
| 1.2 偏振光的数学表示    | 3 |
| 1.2.1 斯托克斯参量    | 3 |
| 1.2.2 琼斯矢量      | 4 |
| 1.2.3 琼斯矩阵和穆勒矩阵 | 5 |
| 1.3 双折射         | 6 |
| 1.3.1 双折射现象     | 6 |
| 1.3.2 相位延迟片     | 7 |
| 1.3.3 偏振光的检验    | 8 |
| 1.4 偏振态的计算      | 8 |
| 1.4.1 矩阵法       | 8 |
| 1.4.2 相位法       | 9 |

# 第1章 偏振

在这一章，我们将要讨论光会以什么样的状态（即偏振态）进行传播、合成，如何观察、产生和改变光的偏振态，以及如何利用它。相比于干涉和衍射两章，本章内容较为简短，因为许多介绍性的东西都没有放在这里（抄教材不符合我们的初衷），读者若感兴趣，可阅读文献[?]的 Page 425-497。

## § 1.1 偏振光的性质

偏振光可粗略地分为自然光（非偏振光），部分偏振光，（椭）圆偏振和线偏振。其中，线偏振态又记为  $\mathcal{P}$  态，左圆和右圆分别记为  $\mathcal{L}$  和  $\mathcal{R}$  态。

### 1.1.1 椭圆偏振光

由于  $\mathbf{E}$  的矢量性，所有偏振光的电矢量  $\mathbf{E}$  都可以分解为两个互相垂直（正交）的光扰动：

$$\mathbf{E}_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \cdot \hat{i}, \quad \mathbf{E}_y = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varepsilon) \cdot \hat{j} \quad (1.1)$$

其中  $\hat{i}$  和  $\hat{j}$  表示分解的方向， $E_{0x}$  和  $E_{0y}$  是分量的振幅（可能是时间的函数）， $\varepsilon$  为相位差（可能是时间的函数）。对于  $E_{0x}$ 、 $E_{0y}$  和  $\varepsilon$  都为常量的情况，合成的光多为椭圆偏振光：

$$E_y = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varepsilon) \implies \frac{E_y}{E_{0y}} = [\cos(kz - \omega t) \cos \varepsilon - \sin(kz - \omega t) \sin \varepsilon] \quad (1.2)$$

由  $\sin^2(kz - \omega t) = 1 - \cos^2(kz - \omega t) = 1 - \frac{E_x^2}{E_{0x}^2}$ ，可以得到：

$$\left( \frac{E_y}{E_{0y}} - \cos \varepsilon \frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 = \sin^2 \varepsilon \left( 1 - \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} \right) \quad (1.3)$$

$$\implies \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} \cos \varepsilon = \sin^2 \varepsilon \quad (1.4)$$

$$\iff \frac{E_x^2}{(E_{0x} \sin \varepsilon)^2} + \frac{E_y^2}{(E_{0y} \sin \varepsilon)^2} - 2 \frac{E_x E_y}{(E_{0x} \sin \varepsilon)(E_{0y} \sin \varepsilon)} = 1 \quad (1.5)$$

由高中的知识可知，当  $\varepsilon \neq k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$  时，这是一个椭圆（或圆）方程，因为  $\Delta = B^2 - 4AC = 4 \cos^2 \varepsilon - 4 < 0$ 。这样的偏振光称为椭圆偏振光。

椭圆偏振光也分左旋和右旋，这是因为从观察点向光源看去时（光指向“眼睛”），若  $\varepsilon \in (0, \pi)$ ，我们“看到”的由  $E_x$  和  $E_y$  合成后的  $\mathbf{E}$  在逆时针旋转（左旋）。一个典型的例子是  $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$  时，也即  $E_x$  “领先”  $E_y$  相位  $\frac{\pi}{2}$ ：

$$\mathbf{E}_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz) \cdot \hat{i}, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{E}_y = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}) = E_{0y} \sin(\omega t - kz) \cdot \hat{j} \quad (1.7)$$

由椭圆的参数方程知道， $\mathbf{E} = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y$  的极角  $\theta = (\omega t - kz)$  随时间  $t$  增大， $\mathbf{E}$  逆时针旋转，称为左圆光。相反，当  $\varepsilon \in (\pi, 2\pi)$  时（也可以说是  $(-\pi, 0)$ ）， $\mathbf{E}$  顺时针旋转（右旋），称为右圆光。

随着  $\varepsilon$  不同， $\mathbf{E}$  的形状和方向也不同，但总的来讲，椭圆主轴夹角满足：

$$\tan(2\alpha) = 2 \cos \varepsilon \cdot \frac{E_{0x} E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \quad (1.8)$$

$$\implies \alpha = \frac{1}{2} \arctan \left( 2 \cos \varepsilon \cdot \frac{E_{0x} E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \right) \quad (1.9)$$

主轴，是指长轴，也即  $2E_{0x}$  和  $2E_{0y}$  中更长的轴与对应的  $x$  或  $y$  轴夹角。举个例子，当  $E_{0x} > E_{0y}$  时， $x$  为主轴（长轴）， $\alpha$  为长轴与  $x$  轴的夹角，此时  $\alpha$  随  $\varepsilon$  的变化如图 1.1 (a) 所示；当  $E_{0x} < E_{0y}$  时，情况则相反， $\alpha$  是长轴与  $y$  轴的夹角，如图 1.1 (b) 所示。

从图中可以看出，随着  $\varepsilon$  不断变化，椭圆会在主轴附近“摆动”，而不是转动。

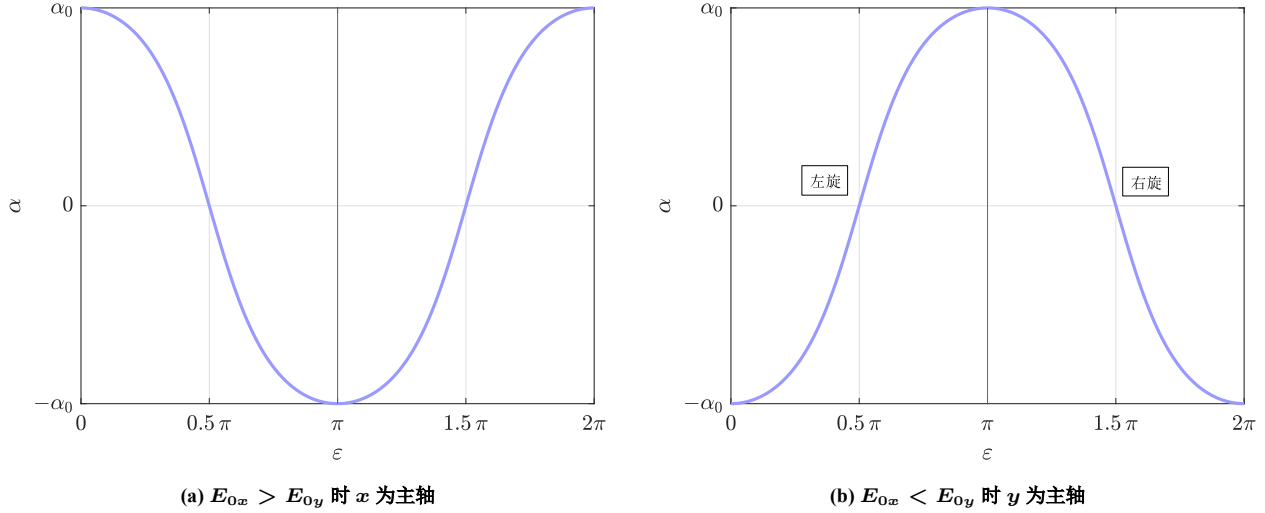


图 1.1:  $\alpha$  随  $\varepsilon$  的变化情况

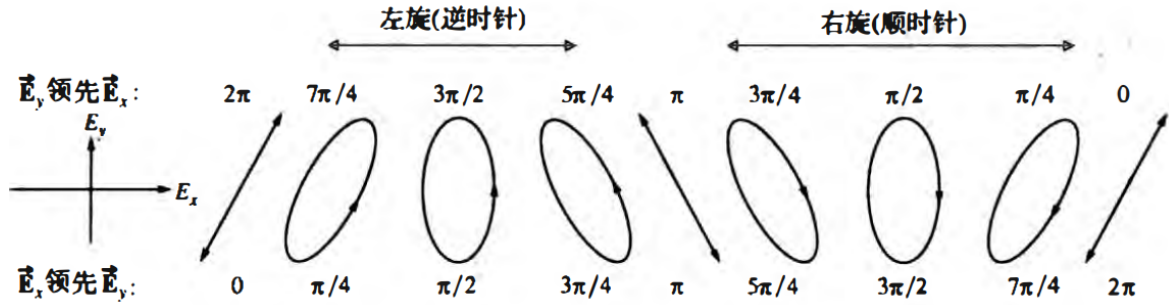


图 1.2: 主轴为  $y$  时椭圆的“摆动”情况

特别地，我们指出，若  $x$  为主轴 ( $E_{0x} > E_{0y}$ )，则  $\alpha$  一定在  $(-45^\circ, 45^\circ)$  之间，这表明椭圆的长轴更“贴近” $x$  轴， $y$  的情况也同理。另外，当  $E_{0x} = E_{0y}$  时，椭圆退化为圆，不存在  $\alpha$  的概念，但左旋和右旋仍然存在。

为了方便参考，我们给出平面椭圆的一般公式，设椭圆中心为  $(x_0, y_0)$ ，长轴与  $x$  轴夹角为  $\alpha$ ，则椭圆方程为：

$$\frac{[(x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \sin \alpha]^2}{a^2} + \frac{[(x - x_0) \sin \alpha + (y - y_0) \cos \alpha]^2}{b^2} = 1 \quad (1.10)$$

对比系数，可以得到公式 1.5 对应椭圆的半长轴  $a$  和半短轴  $b$ ：

$$a^2 = \frac{E_{0x}^2 E_{0y}^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{E_{0y}^2 \cos^2 \alpha - E_{0x}^2 \sin^2 \alpha}, \quad b^2 = \frac{E_{0x}^2 E_{0y}^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{E_{0x}^2 \cos^2 \alpha - E_{0y}^2 \sin^2 \alpha} \quad (1.11)$$

### 1.1.2 线偏振光

当  $\varepsilon = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  时, 方程退化为:

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}} \pm \frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 0 \iff \frac{E_x}{E_{0x}} \pm \frac{E_y}{E_{0y}} = 0 \quad (1.12)$$

这是一个直线方程, 表示线偏振光。

### 1.1.3 自然光

特别地, 对于自然光, 我们可以用两个振幅相等、非相干 (即相位差  $\varepsilon$  迅速且无规变化)、正交的线偏振光的合成来表示自然光, 这是数学上是一种非常方便的处理。

## § 1.2 偏振光的数学表示

偏振光的状态可以用向量来描述, 常见的有斯托克斯 (四维) 参量和琼斯矢量 (二维)。前者可以描述所有偏振光 (包括完全和不完全) 和非偏振光, 但参数较多, 后者仅可以描述偏振光, 但较为简洁。相应地, 偏振光器件对偏振光的作用可以用矩阵来表示, 分别对应穆勒矩阵 (四维) 和琼斯矩阵 (二维)。

### 1.2.1 斯托克斯参量

设想有四个滤波片, 它们都只能透过一半 (强度) 的入射光。第一个是简单各向同性地, 允许各个方向的偏振通过; 第二个是 (通光轴) 水平的线偏振器, 第三个是 (通光轴)  $45^\circ$  的线偏振器; 最后一个为右圆起偏器 (对  $\mathcal{L}$  不透明)。

把每个滤光片分别放在要研究的光束的光路上, 也即光路上每次只有一个偏振器, 测量到的辐照度分别记为  $I_0, I_1, I_2, I_3$ , 则斯托克斯参量的定义为:

$$\delta_0 = 2I_0, \quad \begin{cases} \delta_1 = 2I_1 - \delta_0 \\ \delta_2 = 2I_2 - \delta_0 \\ \delta_3 = 2I_3 - \delta_0 \end{cases} \quad (1.13)$$

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$  直接反映了光束的偏振态。具体而言:

- (1)  $\delta_1$  反映光束更接近水平  $\mathcal{P}$  态 ( $\delta_1 \rightarrow \delta_0$ ) 还是竖直  $\mathcal{P}$  态 ( $\delta_1 \rightarrow -\delta_0$ );
- (2)  $\delta_2$  反映光束更接近  $+45^\circ$   $\mathcal{P}$  态 ( $\delta_2 \rightarrow \delta_0$ ) 还是  $-45^\circ$   $\mathcal{P}$  态 ( $\delta_2 \rightarrow -\delta_0$ );
- (3)  $\delta_3$  反映光束更接近右旋 ( $\delta_3 \rightarrow \delta_0$ ) 还是左旋 ( $\delta_3 \rightarrow -\delta_0$ )

对于准单色光  $\mathbf{E}$ , 将其分解为  $\mathbf{E}_x$  和  $\mathbf{E}_y$ , 可将斯托克斯参量进一步写为:

$$\delta_0 = \langle E_{0x}^2 \rangle_T + \langle E_{0y}^2 \rangle_T, \quad \delta_1 = \langle E_{0x}^2 \rangle_T - \langle E_{0y}^2 \rangle_T, \quad \delta_2 = \langle 2E_{0x}E_{0y} \cos \varepsilon \rangle_T, \quad \delta_3 = \langle 2E_{0x}E_{0y} \sin \varepsilon \rangle_T \quad (1.14)$$

我们在上式中略去了常数  $\varepsilon_0 c$ , 因此这些参量现在正比于辐照度。把每个参量都除以  $\delta_0$  以归一化常常带来很大的方便, 此时  $\delta_k \in [-1, 1]$ ,  $k = 1, 2, 3$ 。

描述一束光偏振程度的量, 称为偏振度  $\mathbf{V}$ , 定义为:

$$\mathbf{V} = \frac{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}}{\delta_0} \quad (1.15)$$

对两束不相干的光  $(\delta'_0, \delta'_1, \delta'_2, \delta'_3)$  和  $(\delta''_0, \delta''_1, \delta''_2, \delta''_3)$ ，在斯托克斯参量下，可以直接将它们的偏振态相加，得到合成的光的偏振态为  $(\delta'_0 + \delta''_0, \delta'_1 + \delta''_1, \delta'_2 + \delta''_2, \delta'_3 + \delta''_3)$ ，用公式表示为：

$$\begin{bmatrix} \delta'_0 \\ \delta'_1 \\ \delta'_2 \\ \delta'_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta''_0 \\ \delta''_1 \\ \delta''_2 \\ \delta''_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta'_0 + \delta''_0 \\ \delta'_1 + \delta''_1 \\ \delta'_2 + \delta''_2 \\ \delta'_3 + \delta''_3 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

### 1.2.2 琼斯矢量

琼斯矢量是直接用  $E_x$  和  $E_y$  来表示光的偏振态，它是一个二维复矢量。对一束光  $\mathbf{E} = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_x) \cdot \hat{i} + E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varphi_y) \cdot \hat{j}$ ，它的琼斯矢量定义为：

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{i\varphi_x} \\ E_{0y} e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} = E_{0x} e^{i\varphi_x} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{E_{0y}}{E_{0x}} e^{i\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

实际应用中常常不需要知道具体的振幅的相位，只需要知道相对相位差  $\varepsilon = \varphi_y - \varphi_x$  即可，因此琼斯矢量也常用归一化的方式来表达。下图列出了常见偏振态的斯托克斯和琼斯矢量表示：

| 偏振态                    | 斯托克斯矢量  | 琼斯矢量  | 偏振态                    | 斯托克斯矢量  | 琼斯矢量   |
|------------------------|---|---|------------------------|---|--|
| 水平 $\mathcal{P}$ 态     | $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  | $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$                    | -45° 的 $\mathcal{P}$ 态 | $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ |
| 垂直 $\mathcal{P}$ 态     | $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$                    | $\mathcal{R}$ 态        | $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ |
| +45° 的 $\mathcal{P}$ 态 | $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\mathcal{L}$ 态        | $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$  |

图 1.3: 常见偏振态的斯托克斯和琼斯矢量表示

上图的圆偏振可以轻松的扩展到椭圆，例如一个右旋椭圆的偏振态可表示为  $\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix}$ 。

与斯托克斯参量类似，光偏振态的合成也可以直接在琼斯矢量下进行，即直接将两个琼斯矢量相加即可。例如相同振幅的  $\mathcal{R}$  态和  $\mathcal{L}$  态可以合成为水平的  $\mathcal{P}$  态：

$$\mathbf{E}_{\mathcal{R}} + \mathbf{E}_{\mathcal{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

特别地，当两束光的琼斯矢量相互垂直时，称两个偏振态正交。由于琼斯矢量是复矢量，因此正交不是内积而是 Hermitian 内积，即  $\langle \mathbf{E}_1 | \mathbf{E}_2 \rangle = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^*$ 。例如  $\mathcal{R}$  态和  $\mathcal{L}$  态是正交的、水平  $\mathcal{P}$  态 (记作  $\mathcal{H}$ ) 和垂直  $\mathcal{P}$  态 (记作  $\mathcal{V}$ ) 也是正交的：

$$\mathbf{E}_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{E}_{\mathcal{L}}^* = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}^* \right\rangle = 1 + i^2 = 0, \quad \mathbf{E}_{\mathcal{H}} \cdot \mathbf{E}_{\mathcal{V}}^* = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^* \right\rangle = 0 \quad (1.19)$$

由线性代数的知识知道，任何偏振态（即琼斯矢量）都可以由这样的一组正交偏振态合成得到，这也验证了我们之前对自然光“可分解为相位差迅速随机变化的两线偏振光”表述的合理性。

### 1.2.3 琼斯矩阵和穆勒矩阵

偏振器件对光的作用可以直接由矩阵来描述，常记作  $\mathcal{A}$ （或  $A$ ）：

$$E_t = \mathcal{A} E_i \quad (1.20)$$

相应地，多个偏振器作用于同一光束时，设第一个通过的是  $\mathcal{A}$ ，按矩阵乘法有：

$$E_t = \mathcal{A}_n \mathcal{A}_{n-1} \cdots \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1 E_i \quad (1.21)$$

图 1.4 给出了常见偏振器的琼斯矩阵和穆勒矩阵。需要指出，我们指介绍了矩阵方法较重要的一些内容，对这个专题的完备讨论远远超出了本课程的范围。

| 线性光学元件                    | 琼斯矩阵   | 穆勒矩阵   |
|---------------------------|--|--|
| 水平的线起偏器 $\leftrightarrow$ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$               | $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$   |
| 铅直的线起偏器 $\updownarrow$    | $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$               | $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ |
| +45°的线起偏器 $\nearrow$      | $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$   | $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$   |
| -45°的线起偏器 $\nwarrow$      | $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ | $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ |
| 四分之一波片，快轴铅直               | $e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$   | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$              |
| 四分之一波片，快轴水平               | $e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$    | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$              |
| 同质右旋圆起偏器 $\odot$          | $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$  | $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$   |
| 同质左旋圆起偏器 $\ominus$        | $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$  | $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ |

图 1.4: 常见偏振器的琼斯矩阵和穆勒矩阵

## § 1.3 双折射

### 1.3.1 双折射现象

一些特殊的晶体是光学各向异性的，最直接的表现是双折射。双折射是指光在晶体中传播时，不同偏振态（即不同电矢量）的光有不同的折射率，因此会有不同的折射角。这种具有两个（两套）折射率的性质称为双折射。

这样的晶体一般都有一个特殊方向（称为光轴），当光沿此方向入射时，无论偏振态如何，都不会发生双折射，退化到普通入射现象，称为单轴晶体。当光线的传播方向  $\mathbf{k}$  确定时，与光轴垂直的分量称为  $o$  光，平行的分量称为  $e$  光（ $o$  和  $e$  正交）。对于单轴晶体， $o$  光和  $e$  光的折射率是不同的，准确的说， $o$  光的折射率是一个常数，而  $e$  光的折射率是与光轴夹角  $\theta$  的函数（在光轴方向上  $n_e(\theta) = n_o$ ）。由不同方向上折射率大小构成的曲面是一个椭球面，称为折射率椭球。 $n_{e0} < n_o$  的单轴晶体称为负晶体（等价于  $v_o < v_e$ ）， $n_{e0} > n_o$ （ $v_o > v_e$ ）的称为正晶体。

以光轴为  $z$  轴，则单轴晶体的折射率椭球可写为：

$$\frac{x^2 + y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1 \quad (1.22)$$

为了研究较一般的情况，我们先给出主截面和入射面的概念：

- (1) 主截面：介质表面法线与光轴共同构成的平面；
- (2) 入射面：介质表面法线与入射光线构成的平面。

当入射面和主截面重合时（入射光线在主截面）内，折射的  $o$  光和  $e$  光都在主截面内，可由惠更斯原理推出  $o$  光和  $e$  光各自的折射方向，如下图所示：

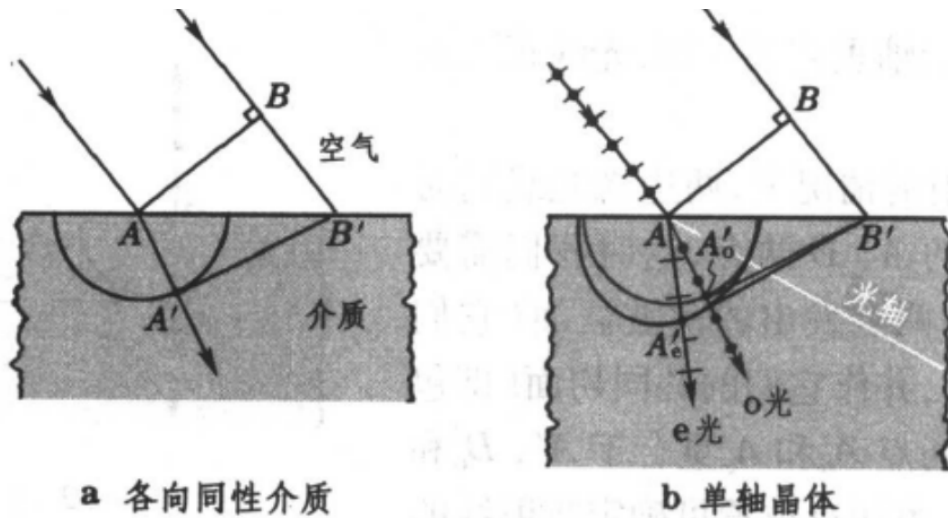
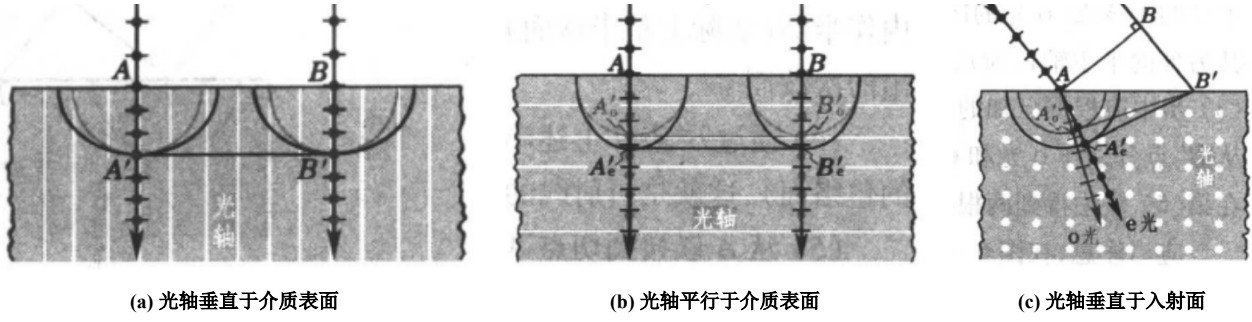


图 1.5: 用惠更斯作图法求折射线

下面讨论几种特殊的情况：

- (1) 光轴垂直于表面，光线正入射（图 1.6 (a)）： $n_o = n_e(\theta)$ ，没有发生双折射。
- (2) 光轴平行于表面，光线正入射（图 1.6 (b)）： $n_o \neq n_e(\theta)$ ，尽管两光方向相同，但波速不同（这会引引起相位差，将在后文提到），发生了双折射。
- (3) 光轴垂直于入射面，光线斜入射（图 1.6 (c)）： $n_o \neq n_e(\theta)$ ，两光方向和波速都不同。

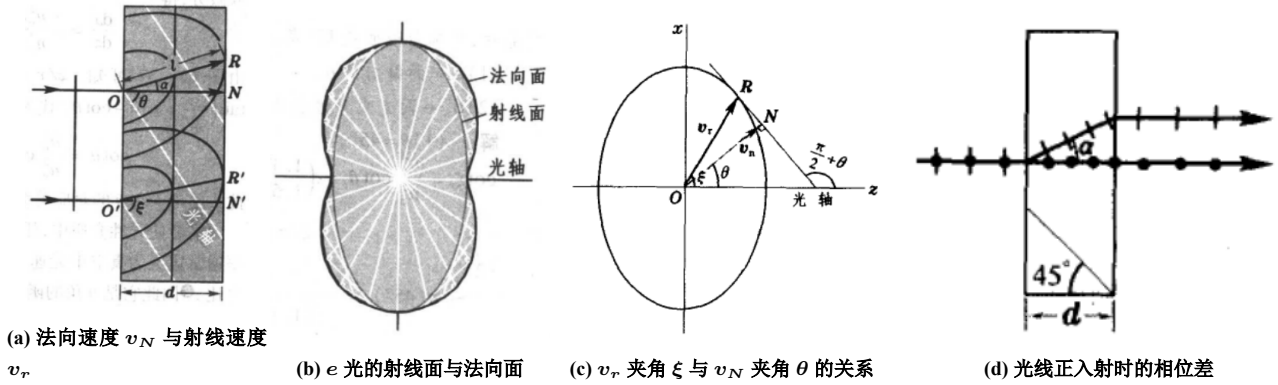


图 1.6: 不同情形下  $o$  光与  $e$  光的行为

设  $\theta$  是折射  $o$  光与光轴的夹角,  $\xi$  是折射  $e$  光与光轴的夹角, 则有法向折射率  $n_N$ :

$$\cot \xi = \frac{n_e^2}{n_o^2} \cot \theta, \quad n_N = n_N(\theta) = \sqrt{\frac{n_o^2 n_e^2}{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}} \quad (1.23)$$

由上面两个公式可以分别确定法向折射率  $n$  和  $\xi$ , 而  $\xi$  又可以确定  $e$  光的折射方向。需要注意, 上式中的  $n_N$  是法向折射率, 如图 1.7 (d), 对于正入射,  $o$  光和  $e$  光的光程差是  $\Delta L = n_N(\theta)d - n_o d$ , 而不是  $n_N(\theta) \frac{d}{\cos \alpha} - n_o d$ 。后一种应该用射线折射率  $n_r = n_r(\xi)$ 。

图 1.7:  $e$  光折射方向与光程差

为了继承原有的惯性思维 (沿光线传播方向上的折射率), 我们推荐使用  $n_r$  而不是  $n_N$ , 如下:

$$\cot \xi = \frac{n_e^2}{n_o^2} \cot \theta, \quad n_r = n_r(\theta) = \cos \alpha \sqrt{\frac{n_o^2 n_e^2}{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}} = \cos(\xi - \theta) \sqrt{\frac{n_o^2 n_e^2}{n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta}} \quad (1.24)$$

此时图 1.7 (d) 中的光程差便是直觉上的  $\Delta L = n_r \frac{d}{\cos \alpha} - n_o d$ 。<sup>①</sup>

### 1.3.2 相位延迟片

再回来思考图 1.6 (b) 中发生的情况:  $e$  光和  $o$  光方向都不变, 但是它们的光程却不同, 相位延迟片便是这样构成的。 $o$  光相对于  $e$  光的相位增量是:

$$\Delta \phi_o = \phi_o - \phi_e = (n_o - n_e)d \quad (1.25)$$

这样便可以用先前的  $\varepsilon$  来判断相位延迟片 (又称波晶片) 对偏振态的影响。最常用的波晶片是四分之一波片 (简称  $\frac{\lambda}{4}$  片), 对应  $\Delta \phi_o = \frac{\pi}{2}$ 。

<sup>①</sup>这一节如果不好理解, 可以到网址 [here](#) 观看视频的 11:00 - 12:00 部分, 在动画的帮助下很快能懂。

不能混淆的是，一些教材喜欢用“落后”或“领先”来表达这样的相位关系，尽管我们不提倡，但还是要指明，在  $(kz - \omega t)$  的情形中，相位增加  $\Delta\phi_o$  意味着延迟（落后），即从  $(kz - \omega t)$  变为  $(kz - \omega t + \Delta\phi_o)$ 。现在我们把各种光经过四分之一波片后偏振态的变化做一个总结，如下图所示：

| 入射光  | $\lambda/4$ 片光轴取向           | 出射光  |
|------|-----------------------------|------|
| 线偏振  | e 轴或 o 轴与偏振方向一致*            | 线偏振  |
|      | e 轴或 o 轴与偏振方向成 $45^\circ$ 角 | 圆偏振  |
|      | 其它取向                        | 椭圆偏振 |
| 圆偏振  | 任何取向                        | 线偏振  |
| 椭圆偏振 | e 轴或 o 轴与椭圆主轴一致             | 线偏振  |
|      | 其它取向                        | 椭圆偏振 |

图 1.8: 偏振光经过四分之一波片后偏振态的变化

### 1.3.3 偏振光的检验

检验入射光到底是哪种偏振态，只需要一个偏振片和一个四分之一波片，具体方法如下图所示：

|        |  |         |     |  |      |
|--------|--|---------|-----|--|------|
| 第 一 步  | 令入射光通过偏振片 I，改变偏振片 I 的透振方向 $P_1$ ，观察透光强度的变化(图 6 - 58a)                      |         |     |  |      |
| 观察到的现象 | 有消光  | 强度无变化   |     | 强度有变化,但无消光   |      |
| 结 论    | 线偏振  | 自然光或圆偏振 |     | 部分偏振或椭圆偏振  |      |
| 第 二 步  | a. 令入射光依次通过 $\lambda/4$ 片和偏振片 II，改变偏振片 II 的透振方向 $P_2$ ，观察透射光的强度变化(6 - 58b) |         |     | b. 同 a,只是 $\lambda/4$ 片的光轴方向必须与第一步中偏振片 I 产生的强度极大或极小的透振方向重合 |      |
|        | 观察到的现象   |         | 有消光 | 无消光  | 有消光  |
| 结 论    |  | 圆偏振     | 自然光 | 椭圆偏振   | 部分偏振 |

图 1.9: 偏振光的检验

## § 1.4 偏振态的计算

本小节我们讨论不同偏振态经过不同厚度的波片（相位延迟片）后，会得到怎样的偏振态。一般有矩阵和相位两种方法，前者是利用偏振态和波片的琼斯矢量（矩阵），直接作矩阵乘法，后者是利用波片对 o 光的相位延迟作用。从数学地角度上，前者更直接，计算也更简单，但后者更能体现物理上的直观，有助于对偏振态的理解。

### 1.4.1 矩阵法

在玻片平面上建立平面直角坐标系，将光轴所在角度记为  $\phi$ ，称为波片的方位角。入射光束由琼斯矩阵  $E = \begin{bmatrix} E_{0x} & E_{0y} \end{bmatrix}^T$  来描述。考虑光线垂直入射到厚度为  $d$  的波片（光线与光轴垂直），波片对 o 光的相位延迟是  $\Delta\varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d$ ，所以其琼斯矩阵  $W$  可写为：

$$W = R^{-1}W_0R, \quad R = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad W = e^{i\varphi} \begin{bmatrix} e^{i\frac{\Delta\varepsilon}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\Delta\varepsilon}{2}} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

其中  $\mathbf{R}$  是二维旋转矩阵, 满足  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ , 而  $\mathbf{W}_0$  是波片在  $oe$  坐标系下的琼斯矩阵,  $\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} (n_o + n_e)d$  称为平均相位变化。由于  $e^{i\varphi}$  一项同时作用在  $E_x$  和  $E_y$ , 不会影响出射光的偏振态。在绝大多数情况下, 我们仅关心相对相位差  $\varepsilon_0 = \varepsilon + \Delta\varepsilon$ , 因此这一项常常被略去, 此时波片的琼斯矩阵写为:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{i\frac{\Delta\varepsilon}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\Delta\varepsilon}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

### 1.4.2 相位法

利用相位法, 可以在脑海中形成偏振态关于  $\varepsilon$  变化的“动图”, 便于理解偏振态的变化过程。下面的讨论都默认波片的  $n_o > n_e$ , 也即  $e$  轴是快轴。一束光入射波片, 分别以波片的  $e$  轴、 $o$  轴为  $x$  和  $y$  轴建系 (注意  $e$  是横轴), 则入射光可在  $eo$  坐标系下分解为:

$$E_e = E_x = E_{0x} \cos(kr - \omega t), \quad E_o = E_y = E_{0y} \cos(kr - \omega t + \varepsilon_0) \quad (1.28)$$

注意不要与矩阵法中统一的  $x$ 、 $y$  轴混淆。波片对光的作用, 等价于  $o$  光发生了相位增量  $\Delta\varepsilon$ , 出射光变为:

$$E_x = E_{0x} \cos(kr - \omega t), \quad E_y = E_{0y} \cos(kr - \omega t + \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon) \quad (1.29)$$

此时相位差  $\varepsilon_0$  变为  $\varepsilon = \phi_y - \phi_x = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$ , 其中  $\Delta\varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e)d$ 。回到最开始我们讨论  $\varepsilon$  对偏振态“形状”的影响, 这相当于  $\varepsilon$  在  $[0, 2\pi]$  上的周期性变化, 引起偏振态的周期性变化。

设入射光线是线偏振光 (等价于  $\varepsilon_0 = 0$ ), 且与  $x$  轴 ( $e$  轴) 夹角为  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$  (否则作对称变换), 夹角  $\alpha$  即确定了  $E_{0x}$  和  $E_{0y}$  (准确的说是比值)。当  $E_{0x}E_{0y} \neq 0$  且  $E_{0x} \neq E_{0y}$  时, 波片对线偏振光的作用, 可以用下图来直观表示 (以  $E_y > E_x$  为例):

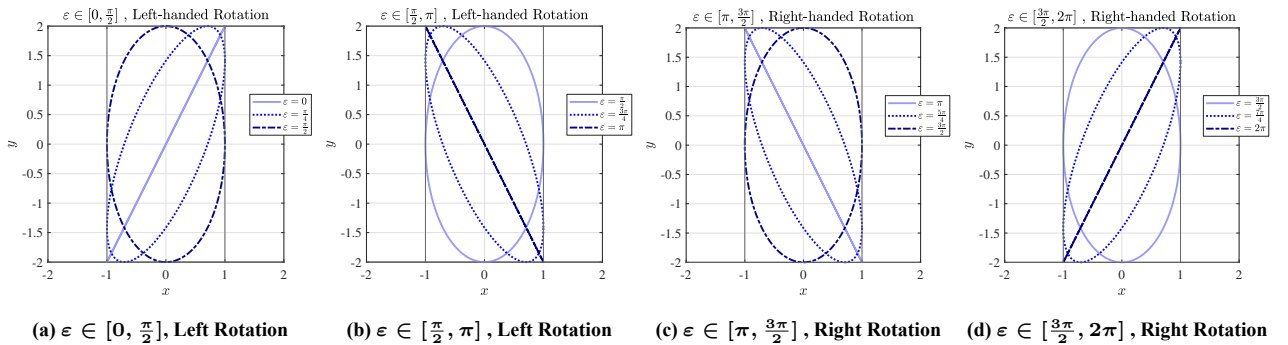


图 1.10: 波片对线偏振光的作用,  $E_y > E_x > 0$

当  $E_{0x}E_{0y} \neq 0$  且  $E_{0x} = E_{0y}$  时, 随着  $\varepsilon$  的变化, 偏振态依次经过右线、右椭圆、圆、左椭圆、左线, 然后又依次返回到右线。且线、椭圆 (和圆) 都在  $\pm 45^\circ$  线上, 如下图所示:

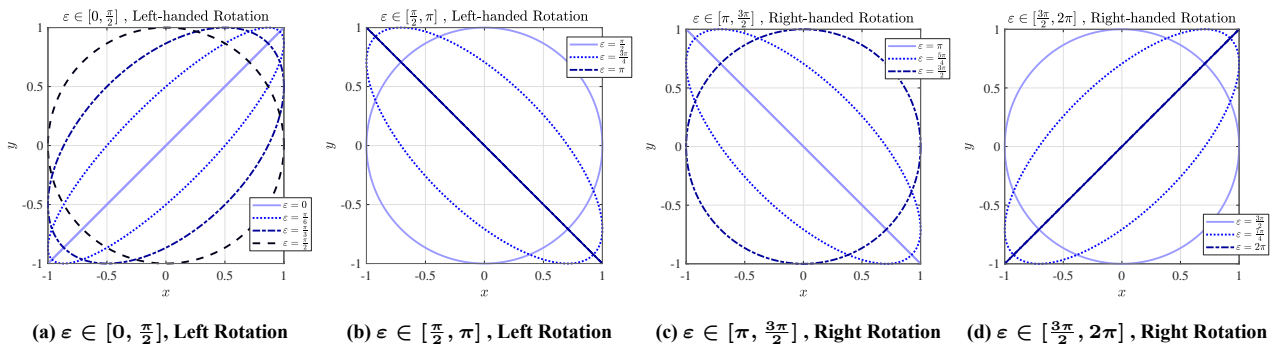


图 1.11: 波片对线偏振光的作用,  $E_y = E_x > 0$

特别地，当  $E_{0x}E_{0y} = 0$  时（至少有一个为零），由于不存在两分量的合成，偏振态不会发生任何变化（除了固有的相位增量）。