数学物理方法笔记

Notes of Mathematical Physics Methods

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

序言

本文为笔者本科时的数学物理方法笔记笔记, 总结了数学物理方法中的主要知识，也有适当的拓展延伸。同时，对一些晦涩的概念或公式，给出了笔者的个人理解，以帮助阅读。

由于个人精力及知识水平有限，书中难免有不妥、错误之处，望不吝指正，在此感谢。我的邮箱是 dingyi233@mails.ucas.ac.cn 。

目录

第 1 章 复数与复数运算

§ 1.1 预备知识

复数定义：

一个有序实数对 (x, y) 称为复数如果其满足如下运算：

$$\begin{aligned} &\text{加法} \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &\text{乘法} \quad (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned} \tag{1.1}$$

记作 $z = x + iy$，其中 $x = \mathbb{R}z$，$y = \mathscr{I}z$，$i^2 = 1$。

相关概念：

下面是一些相关概念：

① 复数的三种表示：$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$

② 模：$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

③ 幅角：$\arg z = \theta \in [0, 2\pi)$ 称为幅角主值（或 $[-\pi, \pi)$），$\operatorname{Arg} z = \theta + 2k\pi$ 称为幅角补值，$k \in \mathbb{Z}$。

④ 0 与 ∞：是两个特殊的复数，分别表示复平面中模为 0 和无穷大而幅角任意的"一个点"。在复平面的球表示中，0 对应南极，∞ 对应北极。

⑤ 扩充复平面：称包含无穷远点 ∞ 的复平面 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 为扩充复平面。

⑥ 共轭复数：$z = x + iy, z^* = x - iy$

⑦ 复数除法：设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$，则：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} = \frac{1}{|z_2|^2}\left[(x_1x_2 + y_1y_2) + \mathrm{i}(y_1x_2 - x_1y_2)\right] \tag{1.2}$$

用棣莫弗定理更易理解复数除法：设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$，则：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \tag{1.3}$$

⑧ 复数乘法：$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

§ 1.2 复数序列

相关概念：

一个复数序列 $\{z_n\}$ 完全等价于两个实数序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$

① 聚点：给点复序列 $\{z_n\}$，若存在 $z \in \mathbb{C}$，使 $\forall\, \varepsilon > 0$，恒有无穷多个 n 使得 $|z_n - z| < \varepsilon$ 则称 z 为序列 $\{z_n\}$ 的一个聚点。

例如序列 $\{(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}_+\} = \{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \cdots, (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}, \cdots\}$ 有两个聚点 $1, -1$.

② 有界 / 无界序列：序列 $\{z_n\}$ 称为有界的如果 $\exists\, M > 0$ s.t. $|z_n| < M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}_+$，否则称为无界的。

③ 极限：称序列 $\{z_n\}$ 收敛于 $z \in \mathbb{C}$ 如果 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N > 0$ s.t. $|z - z_n| < \varepsilon, \forall\, n > N$，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$，否则称为发散序列。极限的必要条件是唯一聚点，无界序列不可能收敛

Theorem. 1（Bolzano - Weierstrass 定理）： 任意有界序列至少有一个聚点。[①]

Theorem. 2（Cauchy 判别法）： 序列收敛的等价条件是：$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N = N(\varepsilon)$ s.t. $|z_{N+p} - z_N| < \varepsilon, \forall\, p \in \mathbb{N}_+$。

[①] Theorem.1 告诉我们有界序列必有聚点，事实上，在扩充复数域 $\overline{\mathbb{C}}$ 中，这对无界序列也成立（∞ 必为聚点），也即任意序列都必有聚点。

§ 1.3 复变函数

相关概念：

如下：

① 点集：复平面内点的集合

② 区域：复点集称为区域如果全部由内点组成，且具有连通性 [②]

③ 单连通 / 多联通区域：区域称为单连通的如果在其内作任何简单闭合围道（自身不相交的闭合曲线），围道内的点都属于该区域，否则称为多联通区域（也称复联通区域）

例如，图 1.1 中的 (a) 区域就属于单连通区域，而图 1.1 中的 (b) 区域则为多连通区域。区域定义的条件之一就是仅包含内点，因此区域必是开集，$\overline{G} = G \cup \partial G$ 表示区域并上边界，称为闭域。

④ 边界：区域 G 的全体边界点构成其边界，记为 ∂G

⑤ 边界方向：沿着区域的边界前进，区域恒保持在边界的左侧，则此走向称为边界的正向

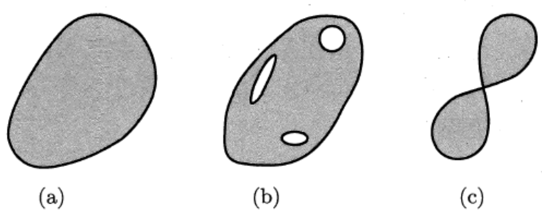


图 1.1: (a) (b) 构成区域，(c) 不构成区域

复变函数：

复变函数 f 是复数域子域 $G \subseteq \mathbb{C}$ 到复数域的映射，记作 $f: z \longmapsto \mathbb{C}$，或者 $f(z) = w$, $z \in G$。区域 G 称为函数 f 的定义域。事实上，复变函数等价于两个实变函数的有序组合。特别地，多值函数允许一个自变量对应多个函数值，我们在第二章会讨论。

§ 1.4 无穷远点

Riemann 球面：

如图 1.2，过扩充的复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 中的原点 $(0, 0)$ 作直径为 1 的球面，使之与 $\overline{\mathbb{C}}$ 相切，切点称为南极 S，南极直径另一端称为北极 N。$\forall\, z \in \overline{\mathbb{C}}$，将它和复数球面的北极 N 相连，连线和球面有且仅有一个交点，因此存在一一对应关系。容易理解，0 对应南极 S 而 ∞ 对应北极 N。

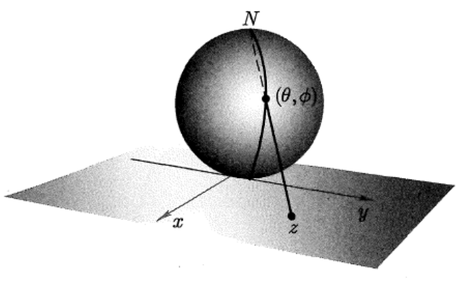
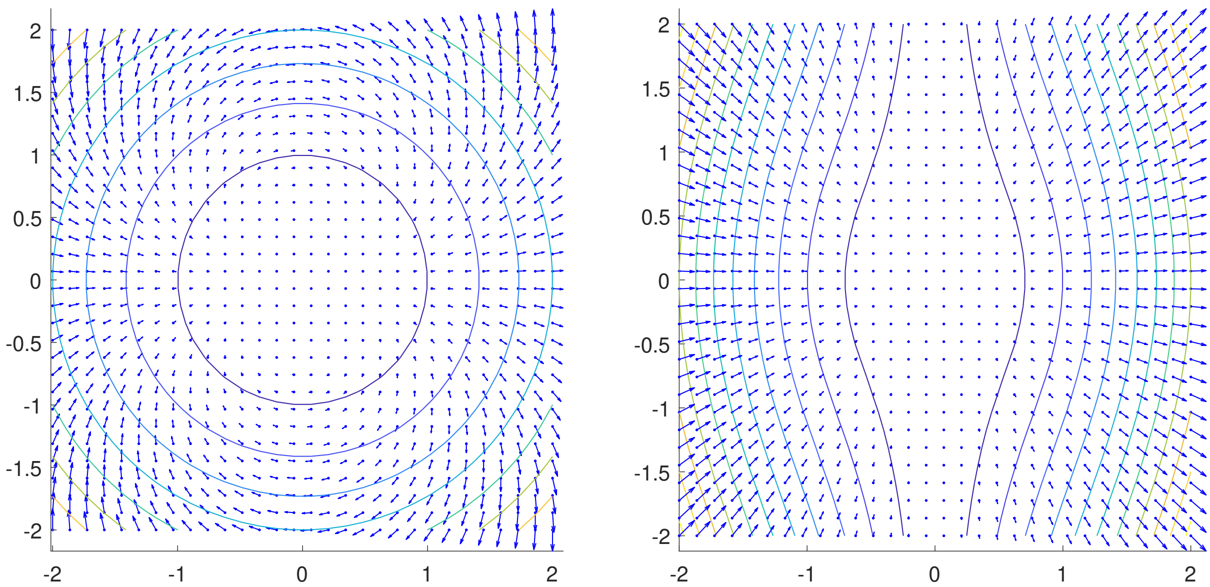


图 1.2: Riemann 球面（复数球面）

[②] 连通性：集合中任意两点都可以用一条折线连接起来，且折线上的点全部属于此点集

§ 1.5 复变函数可视化

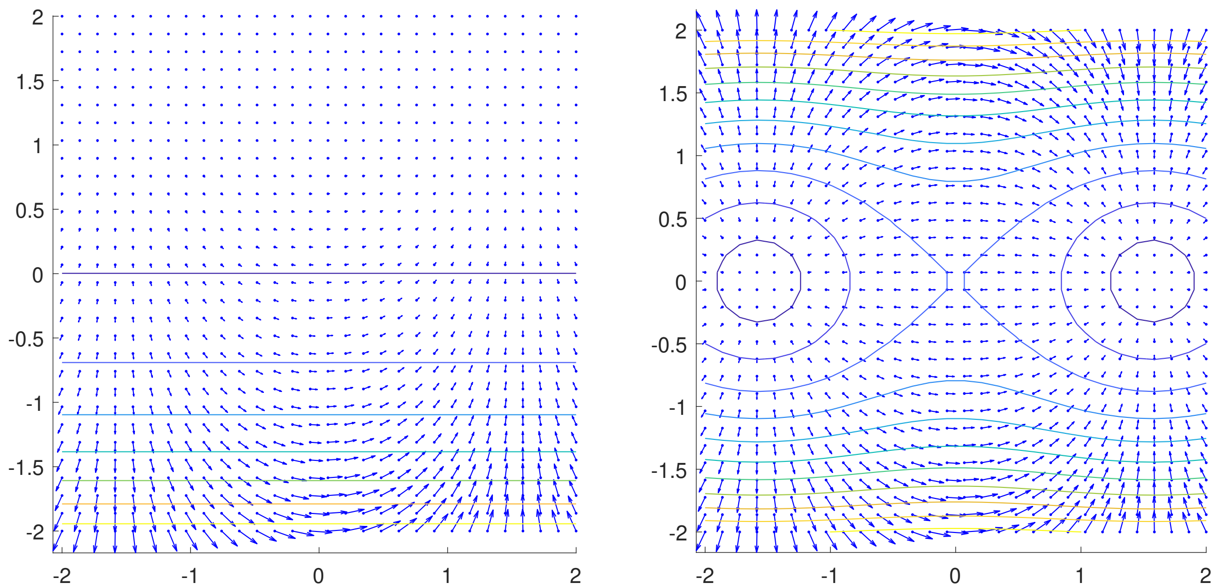
图 1.3 (a) 是函数 $f(z) = z^2$ 的可视化，图 1.3 (b) 是 $f(z) = z \cdot \mathrm{Re}\, z$ 的可视化。其中坐标 (x, y) 对应 $z = x + iy$，箭头的长度代表 $|f(z)|$，方向代表 $\arg f(z)$。等高线表示模长相等。



(a) $f(z) = z^2$ **(b)** $f(z) = z \cdot \mathrm{Re}\, z$

图 1.3: 复变函数可视化

图 1.4 (a) 是 $f(z) = e^{iz}$，图 1.4 (b) 是 $f(z) = cos(z)$。



(a) $f(z) = e^{iz}$ **(b)** $f(z) = cos(z)$

图 1.4: 复变函数可视化

第 2 章 解析函数

§ 2.1 复变函数的极限和连续

极限：

设复变函数 $f(z)$ 在 z_0 的空心邻域 $U_\delta^\circ(z_0)$ 中有定义[①]，若 $\exists\, A\in\mathbb{C}$ 满足 $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0$ s.t. $|f(z)-A|<\varphi,\ \forall\, 0<|z-z_0|<\delta$，则称 $z\to z_0$ 时 $f(z)$ 存在极限 A，记作：

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \tag{2.1}$$

并且，设 $f(z)=u(z)+iv(z)$，u,v 是 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数，可以证明：

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0} u(z)+\mathrm{i}\lim_{z\to z_0} v(z) \tag{2.2}$$

连续：

设复变函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域 $U_\delta(z_0)$ 中有定义，且 $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续。

在有界必域 $\overline{G}$ 中连续的函数 $f(z)$ 具有两个重要性质：

① $|f(z)|$ 在 $\overline{G}$ 中有界，并且上下界可取到

② $f(x)$ 在 $\overline{G}$ 中一致连续，即 $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon, \forall\,|z_1-z_2|<\delta$

§ 2.2 可导与可微

单值复变函数 $f(z)$ 在 z_0 处可导如果 $\lim \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=C\in\mathbb{R}$[②]，记为 $f'(z)$。

容易证明，高等数学中的各种求导公式都可以直接搬用到复变函数。

Cauchy-Riemann 条件是函数可导的必要条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.3}$$

极坐标中的 C-R 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi} \tag{2.4}$$

若存在 $A=A(z)\in\mathbb{C}$ s.t. $\Delta f(z)=A(z)\cdot\Delta z+O(\Delta z)$，则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微，记作 $\mathrm{d}f=A\mathrm{d}z$，或 $\mathrm{d}f=A(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)$

注意，与实变函数不同，在复变函数中，可导与可微是完全等价的：

$$f\ \text{可导}\iff f\ \text{可微}\iff u,v\ \text{可导且满足 C-R 条件} \tag{2.5}$$

§ 2.3 解析函数

2.3.1 解析的概念与判定

函数 f 称为 G 上的解析函数如果 f 在区域 G 内每一点都可导，又称为 f 在 G 上解析。

[①] z_0 的空心邻域是指以 z_0 为圆心的环域 $0<|z-z_0|<\varepsilon$

[②] 这要求 Δz 以任意方式趋于零，此极限都存在，类似二元函数的导数。

可以证明，函数 f 在任意一点解析的充要条件是：

$$f\ \text{在点}\ z\in\mathbb{C}\ \text{解析} \iff f\ \text{在点}\ z\ \text{可微且满足 Cauchy-Riemann 方程} \tag{2.6}$$

在实际的操作中，我们常用下面定理来判断函数的解析性：

Theorem. 3（解析函数判别法）：
设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是区域 G 上的单值复变函数，则：

$$u\ \text{和}\ v\ \text{在}\ G\ \text{上可微，且处处满足 C-R 条件} \iff f\ \text{在}\ G\ \text{上可导} \iff f\ \text{在}\ G\ \text{内解析} \tag{2.7}$$

$$u\ \text{和}\ v\ \text{在}\ G\ \text{上有连续一阶导，且处处满足 C-R 条件} \implies f\ \text{在}\ G\ \text{上可导} \iff f\ \text{在}\ G\ \text{内解析} \tag{2.8}$$

对于第一行，u 和 v 在 G 上可微并不能直接得到 f 可微，例如 $u=2x, v=-y$，还有加上 C-R 条件才能得到可微。对于第二行，u 有一阶连续偏导 $\implies u$ 可微（多元实变函数的结论），后面同理

2.3.2 已知实虚部求原函数

在 G 内解析的函数必满足 Cauchy-Riemann 方程（因为处处可导），因此只要知道实虚部其中之一，例如 $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的实部 $u(x,y)$，就可以唯一地确定其虚部（可加减实常数），这是因为：

$$\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y \tag{2.9}$$

$$\implies v(x,y)=\int\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right) \tag{2.10}$$

为求此原函数，设 $v(x,y)=g_1(x,y)+g_2(y)$，则：

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial g_1}{\partial x}\implies g_1(x,y)=\int\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x=\int(-\frac{\partial u}{\partial y})\mathrm{d}x \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial g_1}{\partial y}+\frac{\partial g_2}{\partial y}\implies g_2(y)=\int(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial g_1}{\partial y})\mathrm{d}y=\int(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial g_1}{\partial y})\mathrm{d}y \tag{2.12}$$

最后相加即得 $v(x,y)$。

这也就是说，先考虑 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 对 x 的积分，得到 $g_1(x,y)$，然后考虑 $\frac{\partial v}{\partial y}$，将其含 x 的项全部舍弃（因为它们属于 g_1），再对 y 作积分。两积分结果相加即得 $v(x,y)$。

特别地，当已知 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 时，欲求 $f(z)$ 的表达式（而不是 $f(x,y)$），只需直接令表达式 $u+iv$ 的 $(x,y)=(z,0)$，也即：

$$f(z)=[u(x,y)+iv(x,y)]_{x=z,y=0}=u(z,0)+iv(z,0) \tag{2.13}$$

具体原因我们会在第五章“解析延拓”处讨论。

2.3.3 实虚部关系可视化

解析函数实部与虚部之间的这种依赖关系，还可以形象地表现出来。在 $x-y$ 平面中，分别作出 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的等高线图，在任意一点 (x,y)，由 Cauchy-Reimann 方程，两者方向矢量的内积为零：

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial x}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{\partial v}{\partial y}\\ -\frac{\partial v}{\partial x}\end{bmatrix}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=0 \tag{2.14}$$

因此两者的等高线图处处正交（表现为曲线处处正交）。

例如 $f(z) = z^2$，则：

$$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)\mathrm{i} \Longrightarrow u(x, y) = x^2 - y^2,\ v(x, y) = 2xy$$

它们的等高线图如图 2.1 所示：

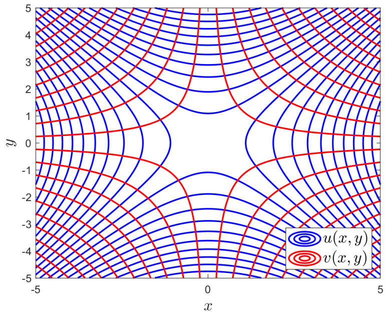


图 2.1: 解析函数 $f(z) = z^2$ 实虚部示意图

之后我们会证明，解析函数 f 的实部 $u(x, y)$ 和虚部 $v(x, y)$ 的二阶偏导一定存在且连续，并且满足二维 Laplace 方程[③]，这表明解析函数的实部和虚部构成一对共轭的调和函数[④] 。

$$\Delta u = \Delta v = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{2.15}$$

函数的解析性总是和给点区域联系在一起，有时也称函数在 z_0 点解析，也即在邻域 $U_\delta(z_0)$ 内解析。讨论解析函数的各种特殊性质，就是复变函数论的中心课题。

§ 2.4 初等函数

一些实初等函数推广到复数域时会有比较的特殊性质，下面进行讨论。

幂函数 z^n：

当 $n \in \mathbb{N}$ 时，z^n 在 $\mathbb{C}$ 内解析，并且当 $n \in \mathbb{N}^*$ 时，z^n 在 ∞ 不解析；当 $n \in -\mathbb{N}^*$ 时，z^n 在 $z = 0$ 不解析，在 $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ 内解析。

指数函数 e^z：

复指数函数在 $\mathbb{C}$ 内解析，但在 ∞ 无意义，因为极限 $\lim_{z\to\infty} e^z$ 不存在

$$e^z = e^{x+\mathrm{i}y} = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \tag{2.16}$$

三角函数 $\sin z,\ \cos z,\ \ldots$：

复三角函数是用复指数函数定义的，如下：

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \quad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} \tag{2.17}$$

$\sin z,\ \cos z$ 在 $\mathbb{C}$ 内解析，唯一奇点是 $z = \infty$。可以证明，实三角函数的各种恒等式对复三角函数仍成立（包括和差化积、万能公式等）。

③这样的函数 f 称为调和函数

④共轭是因为满足 Cauchy-Riemann 方程

双曲函数 $\sinh z$, $\cosh z$, …**：**

双曲函数也是通过复指数函数来定义的，如下

$$\sinh z=\frac{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}{2},\cosh z=\frac{\mathrm{e}^{z}+\mathrm{e}^{-z}}{2},\quad \tanh z=\frac{\sinh z}{\cosh z},\tag{2.18}$$

$$\coth z=\frac{\cosh z}{\sinh z},\quad \mathrm{sech} z=\frac{1}{\cosh z},\quad \cosh z=\frac{1}{\sinh z}\tag{2.19}$$

由定义可知，双曲函数和三角函数能够互化：

$$\sinh z=-\mathrm{i}\sin\mathrm{i}z,\quad \cosh z=\cos\mathrm{i}z,\quad \tanh z=-\mathrm{i}\tan\mathrm{i}z.\tag{2.20}$$

另外注意导数公式：

$$(\sinh z)'=\cosh z,\quad (\cosh z)'=\sinh z,\quad (\tanh z)'=\mathrm{sech}^2 z\tag{2.21}$$

其它结论：

$$\cosh^2 z-\sinh^2 z=1,\quad 1-\tanh^2 z=\mathrm{sech}^2 z\tag{2.22}$$

$$\sinh(z_1\pm z_2)=\sinh z_1\cosh z_2\pm\cosh z_1\sinh z_2\tag{2.23}$$

$$\cosh(z_1\pm z_2)=\cosh z_1\cosh z_2\pm\sinh z_1\sinh z_2\tag{2.24}$$

§ 2.5 解析函数的保角性（略）

§ 2.6 多值函数

2.6.1 基本概念

多值函数的概念：

f 称为区域 $G\subseteq\mathbb{C}$ 上的多值函数如果 $\forall z\in G$ 存在多个 $w\in\mathbb{C}$ 使得 $f(z)=w_1=w_2=\cdots$。许多函数的逆运算都是多值函数。

宗量、分支点：

考虑 $z-a$ 的开方 $w=\sqrt{z-a}$，设 $w=\rho_1 e^{\alpha}$ 而 $z-a=\rho_2 e^{\theta}$，代入解得：

$$w=\sqrt{|z-a|}e^{\frac{\theta}{2}+n\pi},\quad n\in\mathbb{Z}\tag{2.25}$$

$$\iff |w|=\sqrt{|z-a|},\quad \arg w=\frac{1}{2}\arg(z-a)\tag{2.26}$$

ω 的多值性来源于 $z-a$ 幅角的多样性，我们把这样量称为**宗量**[5]（而不是自变量）。

为了进一步揭示多值函数 $w=\sqrt{z-a}$ 的性质，我们讨论“还原”与“不还原”。在 z 复平面上依次画两个圆，如图 2.2 左侧，第一个圆在点 a 外，第二个圆包含了点 a。

对第一种情况，z 沿路径 C_1 逆时针旋转一圈后，由于 a 在圆外，因此旋转前后的 $\arg(z-a)$ 不变，$\arg w=\frac{1}{2}\arg(z-a)$ 也不变，从而使得旋转前后 w 也不变，称为 w 值“还原”。对第二种情况，z 沿路径 C_2 逆时针旋转一圈后，由于 a 在圆内，$\arg(z-a)$ 增加了 2π 但 $\arg w=\frac{1}{2}\arg(z-a)$ 使得 $\arg w$ 仅增加 π，从而使得旋转前后 w 未回到原点，称为 w 值“不还原”。

因此，点 a 对多值函数 $w=\sqrt{z-a}$ 有特殊意义，它是否位于简单闭合路径内就决定了当 z 沿这个路径行进一周回到原处时，相应的 w 值是否能还原。对于无法还原的点，我们称为**分支点**[6]。也即，如果 $\exists r>0$，

[5] 宗量通常不同于自变量. 例如，多值函数 $\sqrt{z-a}$ 的宗量就是 $z-a$，多值函数号 $\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$ 的宗量就是 $(z-a)(z-b)$。当然，也有宗量就是自变量的情形. 例如多值函数 $\sqrt{z}$ 的宗量就是自变量 z。

[6] 分支点描述的是函数的多值性质，与函数的解析性无关

当 z 沿圆周 $|z-z_0|=r$ 绕一圈回到原处时，w 不还原，且当 $r\mapsto 0$ 时，w 始终不还原，这样的点 z_0 就称为多值函数 $w(z)$ 的分支点。

例如，$z=a,\infty$ 是 $f(z)=\sqrt{z-a}$ 的分支点，$z=a,b,c,\infty$ 是 $f(z)=\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$ 的分支点，$z=0,\infty$ 是 $f(z)=\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\,z$ 的分支点。

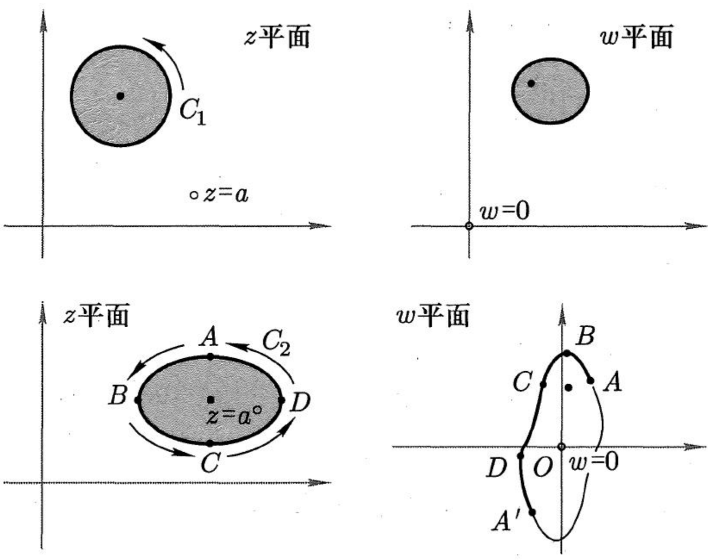


图 2.2: z **沿闭合曲线一周回到原处时，**$w=\sqrt{z-a}$ **值的不同变化**

2.6.2 “有理”函数的分支点

“有理”函数 $f(z)$:

$$f(z)=\sqrt[k]{\frac{(z-z_{i_1})^{r_1}(z-z_{i_2})^{r_2}\cdot(z-z_{i_m})^{r_m}}{(z-z_{j_1})^{s_1}(z-z_{j_2})^{s_2}\cdot(z-z_{j_n})^{s_n}}} \tag{2.27}$$

1. 对 a: 若因式 $(z-a)^b$ 的幂指数 b 不能被根指数 k 整除，即 $b\neq 0\ (\mathrm{mod}\ k)$，则 a 为分支点，否则不是分支点。
2. 对 ∞: 若 $(\sum r_i-\sum s_i)\neq 0\ (\mathrm{mod}\ k)$，则 ∞ 为分支点，否则不是分支点。

2.6.3 单值分支

为了得到多值函数的单值分支，我们可以限制宗量的幅角范围（常通过“割线”来实现)。这样，宗量幅角范围的各个周期，给出多值函数的各个单值分支。另一种自然的方法是规定初始值和连续变化路线（移动路线)。

2.6.4 常见多值函数

最常见的多值函数是取对和开根。

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z,\quad \mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\,z \tag{2.28}$$

许多多值函数都可以通过 $\mathrm{Ln}\,z$ 和根号来定义：

$$\arcsin z=\frac{1}{i}\mathrm{Ln}\,(iz+\sqrt{1-z^2}),\quad \arccos z=\frac{1}{i}\mathrm{Ln}\,(z+\sqrt{z^2-1}) \tag{2.29}$$

$$\arctan z=\frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\,(\frac{1+iz}{1-iz}),\quad z^\alpha=e^{\alpha\mathrm{Ln}\,z},\ \alpha\in\mathbb{C} \tag{2.30}$$

第 3 章　复变积分

§ 3.1　复变积分的概念

复变积分是 $\mathbb{C}$ 上的线积分，沿某条路径，由点 A 至点 B 的复变积分定义为：

$$I = \lim_{\max|\Delta z_i \to 0|} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta z_i = \int_{C_{AB}} f(z)\mathrm{d}z \tag{3.1}$$

如果路径是闭合的，也常称为积分围道。一个复变积分实际上是两个实变线积分的线性组合，因此，若 C 是分段光滑曲线，且 $f(z)$ 在路径 C 上连续，则复变积分一定存在。

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i\int_C (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) \tag{3.2}$$

§ 3.2　Cauthy 定理

3.2.1　Cauthy-Goursat 定理

Theorem. 4（Cauthy 定理）:

若 $f(z)$ 在有界区域 G 上单值解析，在 $\overline{G}$ 上连续 [①]，则：

$$\oint_{\partial G} f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{3.3}$$

对单连通区域，∂G 即为外围边界线（沿逆时针）；对多连通区域，外围边界线沿逆时针积分，内部边界线沿顺时针积分[②]。

3.2.2　Cauthy-Goursa 的推广

Theorem. 5（Cauthy 定理推广 1）:

连续函数 f 在有界复连通区域 G 上单值解析，则：

$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{i=n} \oint_{C_i^{(-)}} f(z)\mathrm{d}z \tag{3.4}$$

路径上的负号表示路径沿反相，在这里即沿逆时针。也就是所有路径（包括 C_0）都沿逆时针。

Theorem. 6（Cauthy 定理推广 2）:

连续函数 f 在有界单连通区域 G 上单值解析，则：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z,\ C \subset G \text{ 与路径无关，也即 } f(z) \text{ 存在原函数} \tag{3.5}$$

Theorem. 7（Cauthy 定理推广 3）:

C 为 G 的边界，任取简单闭合曲线 $C' \subset G$，若连续函数 $f(z)$ 在构成的新有界复连通区域上解析，则：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C'} f(z)\mathrm{d}z \tag{3.6}$$

[①] 如何理解在 $\overline{G}$ 上解析？∂G 上的解析性如何定义？

[②] 始终保持区域在自身左侧的走向称为正向。

§ 3.3 圆弧定理

Theorem. 8（小圆弧定理）:

若 $f(z)$ 在 a 的空心邻域 $U_\delta^\circ(a)$ 上连续，且在 $\arg(z-a)\in[\theta_1,\ \theta_2]$ 时，$(z-a)f(z)$ 一致收敛于 k（$|z-a|\to 0$），则：

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = ik(\theta_2-\theta_1) \tag{3.7}$$

其中 C_δ 是以 a 为圆心，δ 为半径，张角为 $\theta_2-\theta_1$ 的小圆弧。

Theorem. 9（大圆弧定理）:

若 $f(z)$ 在 ∞ 的空心邻域 $U_\delta^\circ(\infty)$ 上连续，且在 $\arg(z-a)\in[\theta_1,\ \theta_2]$ 时，$(z-a)f(z)$ 一致收敛于 k（$|z-a|\to\infty$），则：

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = ik(\theta_2-\theta_1) \tag{3.8}$$

其中 C_R 是以 a 为圆心，R 为半径，张角为 $\theta_2-\theta_1$ 的大圆弧。

§ 3.4 Cauchy 积分公式

Theorem. 10（Cauchy 积分公式）:

若 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 中解析[③]，则 $f(z)$ 在 G 上有任意阶导数，且它们都是 $\overline{G}$ 上的解析函数。

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad \forall\, z\in G \tag{3.9}$$

特别地，当 $n=0$ 时，得到 Cauchy 积分公式[④]:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta,\quad \forall\, z\in G \tag{3.10}$$

Theorem. 11（Cauchy 定理的推广）:

在计算回路积分时，Theorem.10 使用起来不太方便，由小圆弧定理和 Cauchy 定理，我们可以证明下面命题，方便我们使用。

若 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 上有唯一奇点 $z=a$，且 $(z-a)^n f(z)$ 在 $\overline{G}$ 上解析，则：

$$I=\oint_{\partial G} f(z)\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\lim_{z\to a}(z-a)^n f^{(n-1)}(z)=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\left[(z-a)^n f^{(n-1)}(z)\right]_{z=a} \tag{3.11}$$

特别地，当 $n=1$ 时，得到 Cauchy 积分公式。

Theorem. 12（无界区域上的 Cauchy 积分公式）:

若 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ 中解析，则 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ 上有任意阶导数，且它们都是 $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ 上的解析函数。

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad \forall\, z\in\mathbb{C}\setminus\overline{G},\ n=0,1,2,... \tag{3.12}$$

[③]解析域闭为开集，至于为什么说在闭域上解析，详见附录 A.2.2

[④]事实上是由 $n=0$ 和归纳法证明的 n 阶导数 Cauchy 积分公式

§3.5 Cauthy 型积分与含参量积分的解析性

Theorem. 13（Cauchy 型积分）:

设函数 ϕ 在分段光滑曲线 $L\in\mathbb{C}$ 上连续（L 可闭合或不闭合），则下面函数在 $\mathbb{C}\setminus L$ 上解析，在全平面上连续：

$$f(z)=\begin{cases}\phi(z) & ,z\in L\\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_L\frac{\phi(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta & ,z\in\mathbb{C}\setminus L\end{cases}\tag{3.13}$$

且它在 $\mathbb{C}\setminus L$ 上的导数可由 Cauchy 积分公式得到：

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L\frac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad\forall\, z\in\mathbb{C}\setminus L,n=1,2,3,...\tag{3.14}$$

Theorem. 14（含参量积分的解析性）:

设 $f=f(t,z)$ 是定义在 $L\times\overline{G}$ 上的连续函数（对两个变量都连续），其中 $\overline{G}$ 是有界闭域。且 $\forall\, t\in L$，$f(t,z)$ 是 $\overline{G}$ 上的单值解析函数，则函数 $F(z)=\displaystyle\int_L f(t,z)\mathrm{d}t$ 在 G 内解析，且 $F'(z)=\displaystyle\int_L\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t$。

§3.6 Poisson 公式

Cauchy 积分公式告诉我们，对于在 $\overline{G}$ 上解析的函数 $f(z)$，函数在 $\overline{G}$ 内任意一条曲线上的值（可以是边界 ∂G）就完全唯一地决定了 f 在 G 内任意一点的值。特别地，当 $G=\mathbb{C}$ 时，若已知 f 在 $\mathbb{C}$ 内任意一条（分段光滑）曲线 L 上的值，都可求出 f 在全平面的值。

Theorem. 15（上半平面 Poisson 公式）:

如果 $f(z)$ 在上半平面解析，且 $\lim_{z\to\infty}f(z)=0$，则可依据它（或者它的实部或虚部）在实轴上的值，求出它在整个上半平面的值：

$$\begin{aligned}
&\text{已知 } f(z),z\in\mathbb{R}: && f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\\
&=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi && =\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\xi-x)f(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi\quad,\quad\forall\, z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\\
&\text{已知 } u \text{ 或 } v: &&\\
&f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(\xi,0)}{\xi-(x+iy)}\mathrm{d}\xi && =\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v(\xi,0)}{\xi-(x+iy)}\mathrm{d}\xi\quad,\quad\forall\, z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\\
&u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yu(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi && =\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\xi-x)v(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi\quad,\quad\forall\, z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\\
&v(x,y)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\xi-x)u(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi && =\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yv(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi\quad,\quad\forall\, z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}
\end{aligned}\tag{3.15}$$

Theorem. 16（圆内 Poisson 公式）:

取 G 为半径是 a 的圆，可以得到圆内 Poisson 公式：

$$f(r,\phi)=\frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(ae^{i\theta})}{a^2+r^2-2ar\cos(\phi-\theta)}\mathrm{d}\theta,\quad\forall\, r\leqslant a,\ \phi\in[0,2\pi)\tag{3.16}$$

$$u(r,\phi)=\frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(a,\theta)}{a^2+r^2-2ar\cos(\phi-\theta)}\mathrm{d}\theta,\quad\forall\, r\leqslant a,\ \phi\in[0,2\pi)\tag{3.17}$$

$$v(r,\phi)=\frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{v(a,\theta)}{a^2+r^2-2ar\cos(\phi-\theta)}\mathrm{d}\theta,\quad\forall\, r\leqslant a,\ \phi\in[0,2\pi)\tag{3.18}$$

§ 3.7 常见积分结果汇总

(1) $\oint_C (z-a)^n \mathrm{d}z = \begin{cases} i(2\pi) & , n=-1 \ \& \ a \in G \\ 0 & , \text{else} \end{cases}$

参考文献

[1] 吴崇试，高春媛. 数学物理方法. 北京大学出版社, 北京, 3 edition, 5 2019.

[2] 吴崇试. 数学物理方法习题指导. 北京大学出版社, 北京, 2 edition, 10 2020.

附录 A 数物方法 Q & A

A.1 第一章

A.1.1 问题 1

A.1.2 问题 2

A.2 第二章

A.2.1 如何快速而大致准确地判断一个函数是否解析？

判断一个函数（在某个开集 G 上）是否解析，相当于判断它的可导性。如果一个复变函数是由初等函数构成的，不包括多值函数（包括 $\sqrt{z}$, $\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Arctan} z$ 等）或 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ 等特殊函数，那么在除去奇点（包括无定义点、不连续点和无穷点等）的开集上，一般都是解析的。例如，函数 $f(z) = \frac{z-1}{z-i}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ 上解析，函数 $f(z) = \frac{e^z}{\cos z}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ 上解析。

在第三章及之后的章节中，若无特别声明，我们所说的函数都是指单值函数。

A.2.2 解析域一定是开集，为什么会说“在有界闭域 $\overline{G}$ 上解析”?

这个说法是许多教材中的惯用说法 [5]，且并没有给出具体细节。我的理解是：解析区域必为开集，因此不可能是闭域，这里的意思是 f 在开集 $\overline{G}$ 上解析，且在 ∂ 上连续。

在本书中，不引起歧义的情况下，我们都说在闭域 $\overline{G}$ 上解析。

A.2.3 分支点一定不解析吗？

首先需要区分，“解析”是单值函数的概念，而“分支点”是多值函数的概念。在讨论一个函数是否（在某点）解析时，要么这个函数本就是单值函数，要么是多值函数的某个单值分支。对于一个多值函数，分支点仅可能出现在奇点，包括无定义点、不连续点、不解析点和无穷点 ∞。因此，当约定好多值函数的单值分支时，对前三种情况（也即 $\mathbb{C}$ 内的情况），分支点一定是不解析的。无穷点的情况可以做变换 $z\to\frac{1}{z}$ 转变为零点来讨论。

例如，函数 $f(z)=\sqrt{z}$ 的分支点为 0, ∞，同时也是唯二的不解析点，无穷点不解析是因为函数 $\frac{1}{\sqrt{z}}$ 在 $z=0$ 无定义，零点不解析是因为 $f'(z)=\frac{1}{2\sqrt{z}}$ 在 $z=0$ 无定义。

A.3 第三章

A.3.1 为什么解析函数的积分与路径无关？

这是由 Cauchy 定理所保证的。只要函数在所讨论的区域上是解析的，那么 Cauchy 定理都成立，也就必定有“解析函数的积分与路径无关”。也就是说，积分的结果仅取决于起点和终点，这便自然而然地引出了“原函数”的概念。

回想力学中，重力场中的做功量与路径无关，也就是积分 $\oint \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的结果仅取决于起点和终点，而与路径无关，这也自然地引出了重力势能的概念。更严谨地说，在一个无旋的矢量场 A 中，矢量 $\boldsymbol{A}$ 与位矢的

[5] 例如教材 [1]

积分值与路径无关，仅取决于起点和终点，这是由矢量分析中的 Stokes Theorem（斯托克斯定理）所保证的，也即:

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{A} \,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{19}$$

当矢量场无旋时，上式右端恒为零。

A.3.2 如何使用（n 阶）Cauchy 积分公式？

(n 阶) Cauchy 积分公式（Theorem.10）为：若函数 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 上解析，则 $f(z)$ 在 G 上有任意 n 阶导数，且它们都是 $\overline{G}$ 上的解析函数。

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \,\zeta, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\} \tag{20}$$

在计算（含奇点的）回路积分时，我们常常会用到上述公式，有时取 $n = 0$，有时又取 $n = 1$ 或其它数。事实上，上述公式的本质是：在计算含有唯一奇点的回路积分时，将奇点“挖出来”，借助 Cauchy Theorem（Theorem.4）转为绕小圆的回路积分，然后利用小圆弧定理（Theorem.8）得到最终结果。这里面的关键就是“唯一奇点”。

在 $f(z)$ 解析的情况下，$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)}$ 有唯一奇点 a，且 $(z-a) \cdot g(z)$ 在 $\overline{G}$ 上解析，此时的 Cauchy 积分公式便可以写成：

$$\oint_{\partial G} g(z) = 2\pi i \cdot [(z-a) \cdot g(z)]_{z=a} \tag{21}$$

类似地，若 $g(z)$ 有唯一奇点 a，且 $(z-a)^n \cdot g(z)$ 在 $\overline{G}$ 上解析，便可以得到 n 阶 Cauchy 积分公式的等价形式：

$$\oint_{\partial G} g(z) = \frac{2\pi i}{n!} \cdot \left[(z-a)^{n+1} \cdot g(z)\right]_{z=a}^{(n)} \tag{22}$$

A.3.3 如何理解 Cauchy 型积分揭示的“解析函数在（分段）光滑曲线上的值决定了它在整个复平面上的值”