数学物理方法笔记
Notes of Mathematical Physics Methods

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

序言

本文为笔者本科时的“数学物理方法”课程笔记（Notes of Mathematical Physics Methods, 2024.9 - 2025.1）。读者可在笔者的个人网站 https://yidingg.github.io/YiDingg/#/Notes/Math/MathematicalPhysicsMathods 上找到课程信息、教材、教辅和作业答案等相关资料。

由于个人学识浅陋，认识有限，文中难免有不妥甚至错误之处，望读者不吝指正。读者可以将错误发送到我的邮箱 dingyi233@mails.ucas.ac.cn，也可以到笔者的 GitHub (https://github.com/YiDingg/LatexNotes) 上提 issue，衷心感谢。

目录

第 1 章 复数与复数运算

§ 1.1 预备知识

复数定义：

一个有序实数对 (x, y) 称为复数如果其满足如下运算：

$$\begin{aligned} &\text{加法} \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &\text{乘法} \quad (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned} \tag{1.1}$$

记作 $z = x + iy$，其中 $x = \mathbb{R}z$，$y = \mathscr{I}z$，$i^2 = 1$。

相关概念：

下面是一些相关概念：

① 复数的三种表示：$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$

② 模：$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

③ 幅角：$\arg z = \theta \in [0, 2\pi)$ 称为幅角主值（或 $[-\pi, \pi)$），$\operatorname{Arg} z = \theta + 2k\pi$ 称为幅角补值，$k \in \mathbb{Z}$。

④ 0 与 ∞：是两个特殊的复数，分别表示复平面中模为 0 和无穷大而幅角任意的“一个点”。在复平面的球表示中，0 对应南极，∞ 对应北极。

⑤ 扩充复平面：称包含无穷远点 ∞ 的复平面 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 为扩充复平面。

⑥ 共轭复数：$z = x + iy, z^* = x - iy$

⑦ 复数除法：设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$，则：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} = \frac{1}{|z_2|^2}\left[(x_1 x_2 + y_1 y_2) + \mathrm{i}(y_1 x_2 - x_1 y_2)\right] \tag{1.2}$$

用棣莫弗定理更易理解复数除法：设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$，则：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \tag{1.3}$$

⑧ 复数乘法：$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

§ 1.2 复数序列

相关概念：

一个复数序列 $\{z_n\}$ 完全等价于两个实数序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$

① 聚点：给点复序列 $\{z_n\}$，若存在 $z \in \mathbb{C}$，使 $\forall\, \varepsilon > 0$，恒有无穷多个 n 使得 $|z_n - z| < \varepsilon$ 则称 z 为序列 $\{z_n\}$ 的一个聚点。

例如序列 $\{(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}_+\} = \{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \cdots, (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}, \cdots\}$ 有两个聚点 $1, -1$.

② 有界 / 无界序列：序列 $\{z_n\}$ 称为有界的如果 $\exists\, M > 0$ s.t. $|z_n| < M,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_+$，否则称为无界的。

③ 极限：称序列 $\{z_n\}$ 收敛于 $z \in \mathbb{C}$ 如果 $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N > 0$ s.t. $|z - z_n| < \varepsilon, \forall\, n > N$，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$，否则称为发散序列。极限的必要条件是唯一聚点，无界序列不可能收敛

Theorem. 1（Bolzano - Weierstrass 定理）： 任意有界序列至少有一个聚点。[①]

Theorem. 2（Cauchy 判别法）： 序列收敛的等价条件是：$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N = N(\varepsilon)$ s.t. $|z_{N+p} - z_N| < \varepsilon, \forall\, p \in \mathbb{N}_+$。

[①] Theorem. 1 告诉我们有界序列必有聚点，事实上，在扩充复数域 $\overline{\mathbb{C}}$ 中，这对无界序列也成立（∞ 必为聚点），也即任意序列都必有聚点。

§ 1.3 复变函数

相关概念：

如下：

① 点集：复平面内点的集合

② 区域：复点集称为区域如果全部由内点组成，且具有连通性 [②]

③ 单连通 / 多联通区域：区域称为单连通的如果在其内作任何简单闭合围道（自身不相交的闭合曲线），围道内的点都属于该区域，否则称为多联通区域（也称复联通区域）

例如，图 1.1 中的 (a) 区域就属于单连通区域，而图 1.1 中的 (b) 区域则为多连通区域。区域定义的条件之一就是仅包含内点，因此区域必是开集，$\overline{G} = G \cup \partial G$ 表示区域并上边界，称为闭域。

④ 边界：区域 G 的全体边界点构成其边界，记为 ∂G

⑤ 边界方向：沿着区域的边界前进，区域恒保持在边界的左侧，则此走向称为边界的正向

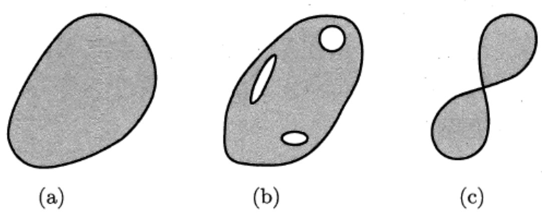


图 1.1: (a) (b) 构成区域，(c) 不构成区域

复变函数：

复变函数 f 是复数域子域 $G \subseteq \mathbb{C}$ 到复数域的映射，记作 $f: z \longmapsto \mathbb{C}$，或者 $f(z) = w,\ z \in G$。区域 G 称为函数 f 的定义域。事实上，复变函数等价于两个实变函数的有序组合。特别地，多值函数允许一个自变量对应多个函数值，我们在第二章会讨论。

§ 1.4 无穷远点

Riemann 球面：

如图 1.2，过扩充的复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 中的原点 $(0,0)$ 作直径为 1 的球面，使之与 $\overline{\mathbb{C}}$ 相切，切点称为南极 S，南极直径另一端称为北极 N。$\forall\, z \in \overline{\mathbb{C}}$，将它和复数球面的北极 N 相连，连线和球面有且仅有一个交点，因此存在一一对应关系。容易理解，0 对应南极 S 而 ∞ 对应北极 N。

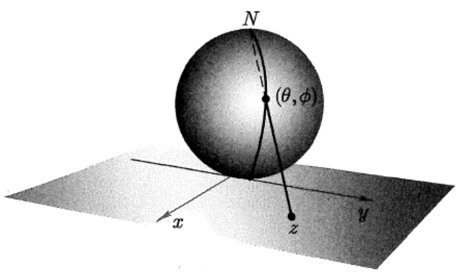
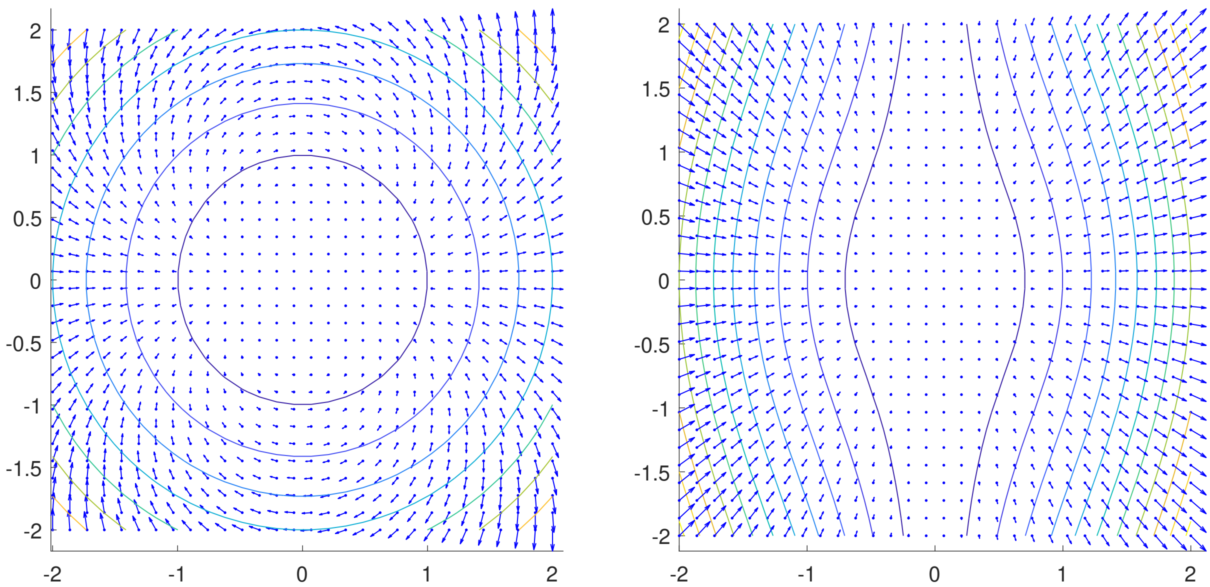


图 1.2: Riemann 球面（复数球面）

[②] 连通性：集合中任意两点都可以用一条折线连接起来，且折线上的点全部属于此点集

§1.5 复变函数可视化

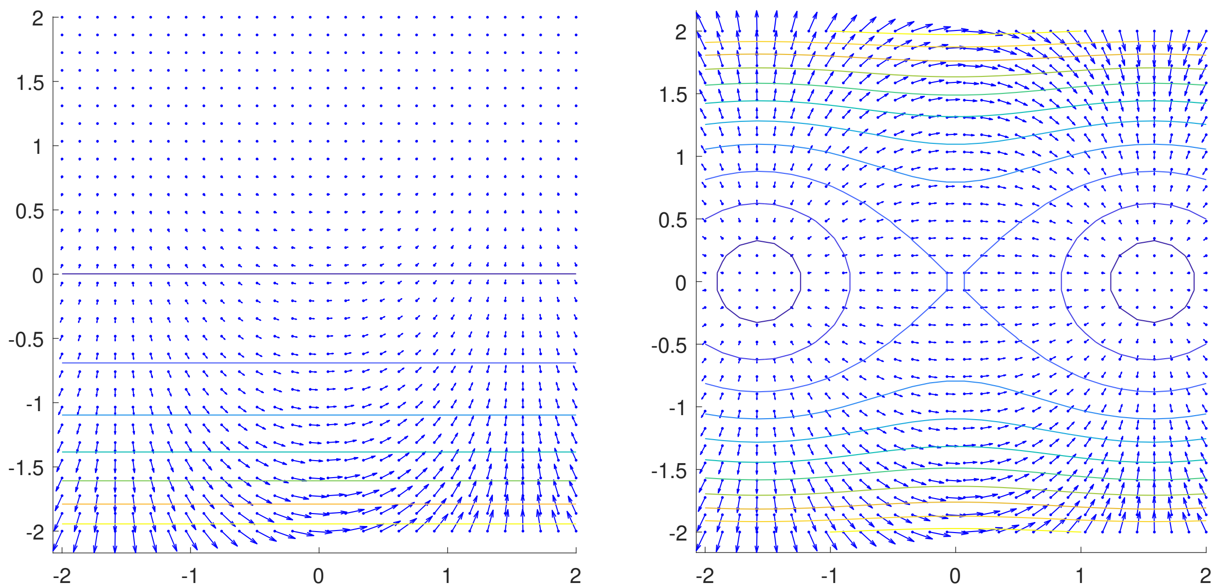
图 1.3 (a) 是函数 $f(z) = z^2$ 的可视化，图 1.3 (b) 是 $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$ 的可视化。其中坐标 (x, y) 对应 $z = x + iy$，箭头的长度代表 $|f(z)|$，方向代表 $\arg f(z)$。等高线表示模长相等。



(a) $f(z) = z^2$　**(b)** $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$

图 1.3: 复变函数可视化

图 1.4 (a) 是 $f(z) = e^{iz}$，图 1.4 (b) 是 $f(z) = cos(z)$。



(a) $f(z) = e^{iz}$　**(b)** $f(z) = cos(z)$

图 1.4: 复变函数可视化

第 2 章 解析函数

§ 2.1 复变函数的极限和连续

极限：

设复变函数 $f(z)$ 在 z_0 的空心邻域 $U_\delta^\circ(z_0)$ 中有定义[①]，若 $\exists A \in \mathbb{C}$ 满足 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ s.t. $|f(z) - A| < \varphi, \forall\, 0 < |z - z_0| < \delta$，则称 $z \to z_0$ 时 $f(z)$ 存在极限 A，记作：

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \tag{2.1}$$

并且，设 $f(z) = u(z) + iv(z)$，u, v 是 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数，可以证明：

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} u(z) + \mathrm{i} \lim_{z \to z_0} v(z) \tag{2.2}$$

连续：

设复变函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域 $U_\delta(z_0)$ 中有定义，且 $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$，则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续。

在有界必域 $\overline{G}$ 中连续的函数 $f(z)$ 具有两个重要性质：

① $|f(z)|$ 在 $\overline{G}$ 中有界，并且上下界可取到

② $f(x)$ 在 $\overline{G}$ 中一致连续，即 $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon, \forall\, |z_1 - z_2| < \delta$

§ 2.2 可导与可微

单值复变函数 $f(z)$ 在 z_0 处可导如果 $\lim \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = C \in \mathbb{R}$[②]，记为 $f'(z)$。

容易证明，高等数学中的各种求导公式都可以直接搬用到复变函数。

Cauchy-Riemann 条件是函数可导的必要条件：

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}} \tag{2.3}$$

极坐标中的 C-R 条件：

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi}} \tag{2.4}$$

若存在 $A = A(z) \in \mathbb{C}$ s.t. $\Delta f(z) = A(z) \cdot \Delta z + O(\Delta z)$，则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微，记作 $\mathrm{d}f = A\mathrm{d}z$，或 $\mathrm{d}f = A(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)$

注意，与实变函数不同，在复变函数中，可导与可微是完全等价的：

$$f \text{ 可导} \Longleftrightarrow f \text{ 可微} \Longleftrightarrow u, v \text{ 可导且满足 C-R 条件} \tag{2.5}$$

§ 2.3 解析函数

2.3.1 解析的概念与判定

函数 f 称为 G 上的解析函数如果 f 在区域 G 内每一点都可导，又称为 f 在 G 上解析。

[①] z_0 的空心邻域是指以 z_0 为圆心的环域 $0 < |z - z_0| < \varepsilon$

[②] 这要求 Δz 以任意方式趋于零，此极限都存在，类似二元函数的导数。

可以证明，函数 f 在任意一点解析的充要条件是：

$$f \text{ 在点 } z \in \mathbb{C} \text{ 解析} \iff f \text{ 在点 } z \text{ 可微且满足 Cauchy-Riemann 方程} \tag{2.6}$$

在实际的操作中，我们常用下面定理来判断函数的解析性：

Theorem. 3 (解析函数判别法):
设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 是区域 G 上的单值复变函数，则：

$$u \text{ 和 } v \text{ 在 } G \text{ 上可微，且处处满足 C-R 条件} \iff f \text{ 在 } G \text{ 上可导} \iff f \text{ 在 } G \text{ 内解析} \tag{2.7}$$

$$u \text{ 和 } v \text{ 在 } G \text{ 上有连续一阶导，且处处满足 C-R 条件} \implies f \text{ 在 } G \text{ 上可导} \iff f \text{ 在 } G \text{ 内解析} \tag{2.8}$$

对于第一行，u 和 v 在 G 上可微并不能直接得到 f 可微，例如 $u = 2x, v = -y$，还有加上 C-R 条件才能得到可微。对于第二行，u 有一阶连续偏导 $\implies u$ 可微（多元实变函数的结论），后面同理

2.3.2 已知实虚部求原函数

在 G 内解析的函数必满足 Cauchy-Riemann 方程（因为处处可导），因此只要知道实虚部其中之一，例如 $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ 的实部 $u(x,y)$，就可以唯一地确定其虚部（可加减实常数），这是因为：

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y = -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y \tag{2.9}$$

$$\implies v(x,y) = \int \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right) \tag{2.10}$$

为求此原函数，设 $v(x,y) = g_1(x,y) + g_2(y)$，则：

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g_1}{\partial x} \implies g_1(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x = \int (-\frac{\partial u}{\partial y})\mathrm{d}x \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \implies g_2(y) = \int (\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial g_1}{\partial y})\mathrm{d}y = \int (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y})\mathrm{d}y \tag{2.12}$$

最后相加即得 $v(x,y)$。

这也就是说，先考虑 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 对 x 的积分，得到 $g_1(x,y)$，然后考虑 $\frac{\partial v}{\partial y}$，将其含 x 的项全部舍弃（因为它们属于 g_1），再对 y 作积分。两积分结果相加即得 $v(x,y)$。

特别地，当已知 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 时，欲求 $f(z)$ 的表达式（而不是 $f(x,y)$），只需直接令表达式 $u+iv$ 的 $(x,y) = (z,0)$，也即：

$$\boxed{f(z) = [u(x,y) + iv(x,y)]_{x=z,y=0} = u(z,0) + iv(z,0)} \tag{2.13}$$

具体原因我们会在第五章“解析延拓”处讨论。

2.3.3 实虚部关系可视化

解析函数实部与虚部之间的这种依赖关系，还可以形象地表现出来。在 $x-y$ 平面中，分别作出 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的等高线图，在任意一点 (x,y)，由 Cauchy-Reimann 方程，两者方向矢量的内积为零：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{2.14}$$

因此两者的等高线图处处正交（表现为曲线处处正交）。

例如 $f(z)=z^2$，则：

$$f(z)=z^2=(x^2-y^2)+(2xy)\mathrm{i} \Longrightarrow u(x,y)=x^2-y^2,\ v(x,y)=2xy$$

它们的等高线图如图 2.1 所示：

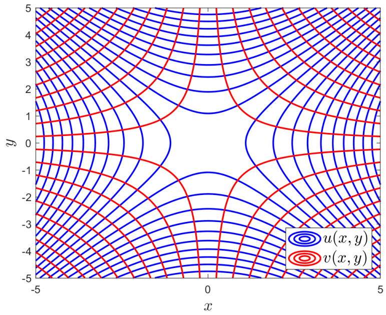


图 2.1: 解析函数 $f(z)=z^2$ 实虚部示意图

之后我们会证明，解析函数 f 的实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$ 的二阶偏导一定存在且连续，并且满足二维 Laplace 方程[③]，这表明解析函数的实部和虚部构成一对共轭的调和函数[④]。

$$\Delta u=\Delta v=0 \Longleftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \tag{2.15}$$

函数的解析性总是和给点区域联系在一起，有时也称函数在 z_0 点解析，也即在邻域 $U_\delta(z_0)$ 内解析。讨论解析函数的各种特殊性质，就是复变函数论的中心课题。

§ 2.4 初等函数

一些实初等函数推广到复数域时会有比较的特殊性质，下面进行讨论。

幂函数 z^n：

当 $n\in\mathbb{N}$ 时，z^n 在 $\mathbb{C}$ 内解析，并且当 $n\in\mathbb{N}^*$ 时，z^n 在 ∞ 不解析；当 $n\in-\mathbb{N}^*$ 时，z^n 在 $z=0$ 不解析，在 $\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ 内解析。

指数函数 e^z：

复指数函数在 $\mathbb{C}$ 内解析，但在 ∞ 无意义，因为极限 $\lim_{z\to\infty}e^z$ 不存在

$$e^z=e^{x+\mathrm{i}y}=e^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y) \tag{2.16}$$

三角函数 $\sin z$, $\cos z$, ...：

复三角函数是用复指数函数定义的，如下：

$$\boxed{\begin{aligned} \cos z&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{e^y}+e^y\right)\cos x+\left(\frac{1}{e^y}-e^y\right)\sin x\right]\\ \sin z&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}=\frac{1}{2i}\cdot\left[\left(\frac{1}{e^y}-e^y\right)\cos x+\left(\frac{1}{e^y}+e^y\right)\sin x\right]\end{aligned}} \tag{2.17}$$

$\sin z$, $\cos z$ 在 $\mathbb{C}$ 内解析，唯一奇点是 $z=\infty$。可以证明，实三角函数的各种恒等式对复三角函数仍成立（包括和差化积、万能公式等）。

[③]这样的函数 f 称为调和函数

[④]共轭是因为满足 Cauchy-Riemann 方程

双曲函数 $\sinh z$, $\cosh z$, ...**：**

双曲函数也是通过复指数函数来定义的，如下

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \tag{2.18}$$

$$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \quad \mathrm{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \cosh z = \frac{1}{\sinh z} \tag{2.19}$$

由定义可知，双曲函数和三角函数能够互化：

$$\sinh z = -\mathrm{i}\sin \mathrm{i}z, \quad \cosh z = \cos \mathrm{i}z, \quad \tanh z = -\mathrm{i}\tan \mathrm{i}z. \tag{2.20}$$

另外注意导数公式：

$$(\sinh z)' = \cosh z, \quad (\cosh z)' = \sinh z, \quad (\tanh z)' = \mathrm{sech}^2 z \tag{2.21}$$

其它结论：

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad 1 - \tanh^2 z = \mathrm{sech}^2 z \tag{2.22}$$

$$\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2 \tag{2.23}$$

$$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2 \tag{2.24}$$

§ 2.5 解析函数的保角性（略）

§ 2.6 多值函数

2.6.1 基本概念

多值函数的概念：

f 称为区域 $G \subseteq \mathbb{C}$ 上的多值函数如果 $\forall\, z \in G$ 存在多个 $w \in \mathbb{C}$ 使得 $f(z) = w_1 = w_2 = \cdots$。许多函数的逆运算都是多值函数。

宗量、分支点：

考虑 $z-a$ 的开方 $w = \sqrt{z-a}$，设 $w = \rho_1 e^{\alpha}$ 而 $z - a = \rho_2 e^{\theta}$，代入解得：

$$w = \sqrt{|z-a|}e^{\frac{\theta}{2}+n\pi}, \quad n \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow |w| = \sqrt{|z-a|}, \quad \arg w = \frac{1}{2}\arg(z-a) \tag{2.25}$$

ω 的多值性来源于 $z-a$ 幅角的多样性，我们把这样的量称为宗量[5]（而不是自变量）。

为了进一步揭示多值函数 $w = \sqrt{z-a}$ 的性质，我们讨论“还原”与“不还原”。在 z 复平面上依次画两个圆，如图 2.2 左侧，第一个圆在点 a 外，第二个圆包含了点 a。

对第一种情况，z 沿路径 C_1 逆时针旋转一圈后，由于 a 在圆外，因此旋转前后的 $\arg(z-a)$ 不变，$\arg w = \frac{1}{2}\arg(z-a)$ 也不变，从而使得旋转前后 w 也不变，称为 w 值“还原”。对第二种情况，z 沿路径 C_2 逆时针旋转一圈后，由于 a 在圆内，$\arg(z-a)$ 增加了 2π 但 $\arg w = \frac{1}{2}\arg(z-a)$ 使得 $\arg w$ 仅增加 π，从而使得旋转前后 w 未回到原点，称为 w 值“不还原”。

因此，点 a 对多值函数 $w = \sqrt{z-a}$ 有特殊意义，它是否位于简单闭合路径内就决定了当 z 沿这个路径行进一周回到原处时，相应的 w 值是否能还原。对于无法还原的点，我们称为**分支点**[6]。也即，如果 $\exists\, r > 0$,

[5] 宗量通常不同于自变量. 例如，多值函数 $\sqrt{z-a}$ 的宗量就是 $z-a$，多值函数号 $\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$ 的宗量就是 $(z-a)(z-b)$。当然，也有宗量就是自变量的情形. 例如多值函数 $\sqrt{z}$ 的宗量就是自变量 z。

[6] 分支点描述的是函数的多值性质，与函数的解析性无关

当 z 沿圆周 $|z-z_0|=r$ 绕一圈回到原处时，w 不还原，且当 $r\mapsto 0$ 时，w 始终不还原，这样的点 z_0 就称为多值函数 $w(z)$ 的分支点。

例如，$z=a,\infty$ 是 $f(z)=\sqrt{z-a}$ 的分支点，$z=a,b,c,\infty$ 是 $f(z)=\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$ 的分支点，$z=0,\infty$ 是 $f(z)=\mathrm{Ln}\, z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\, z$ 的分支点。

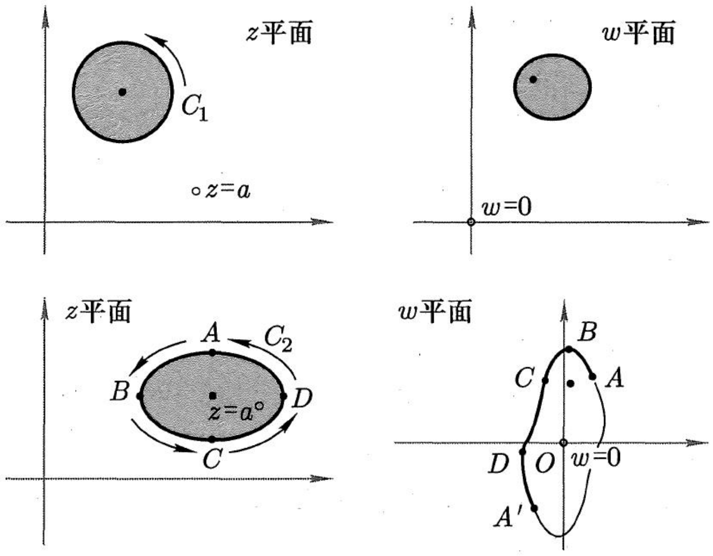


图 2.2: z **沿闭合曲线一周回到原处时，**$w=\sqrt{z-a}$ **值的不同变化**

2.6.2 “有理”函数的分支点

“有理”函数 $f(z)$:

$$f(z)=\sqrt[k]{\frac{(z-z_{i_1})^{r_1}(z-z_{i_2})^{r_2}\cdot(z-z_{i_m})^{r_m}}{(z-z_{j_1})^{s_1}(z-z_{j_2})^{s_2}\cdot(z-z_{j_n})^{s_n}}} \tag{2.26}$$

(1) 对 a: 若因式 $(z-a)^b$ 的幂指数 b 不能被根指数 k 整除，即 $b\neq 0\ (\mathrm{mod}\ k)$，则 a 为分支点，否则不是分支点。

(2) 对 ∞: 若 $(\sum r_i-\sum s_i)\neq 0\ (\mathrm{mod}\ k)$，则 ∞ 为分支点，否则不是分支点。

2.6.3 单值分支

为了得到多值函数的单值分支，我们可以限制宗量的幅角范围（常通过“割线”来实现）。这样，宗量幅角范围的各个周期，给出多值函数的各个单值分支。另一种自然的方法是规定初始值和连续变化路线（移动路线）。

2.6.4 常见多值函数

最常见的多值函数是开根，在实际做题中，如果遇到开根 $\sqrt[n]{z}$，便是默认取 $z\in[0,2\pi]$ 的单值分支。这里之所以取闭区间，是因为 2π 可以取到，并且其值与 0 不同。特别地，令 $z=x+iy=re^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi]$，则 $\sqrt{z}$ 可以写为：

$$\boxed{\sqrt{z}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{sgn}\,(\pi-\theta)\sqrt{|z|+x}+i\sqrt{|z|-x}\right)} \tag{2.27}$$

对数函数和幂函数也是一种常见的多值函数：

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z,\quad \mathrm{Ln}\, z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\, z \tag{2.28}$$

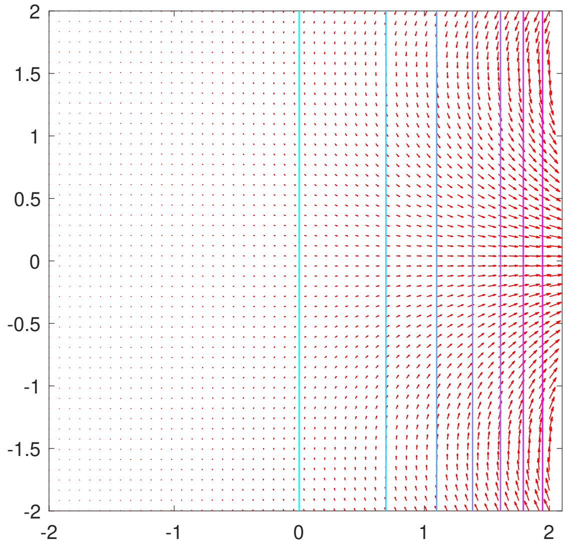
包括幂函数[7]、三角函数在内的很多常见的多值函数都可以通过 $\mathrm{Ln}\,z$ 和根号来定义：

$$\mathrm{Arcsin}\,z = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\,(iz + \sqrt{1-z^2}), \quad \mathrm{Arccos}\,z = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\,(z + \sqrt{z^2-1}) \tag{2.29}$$

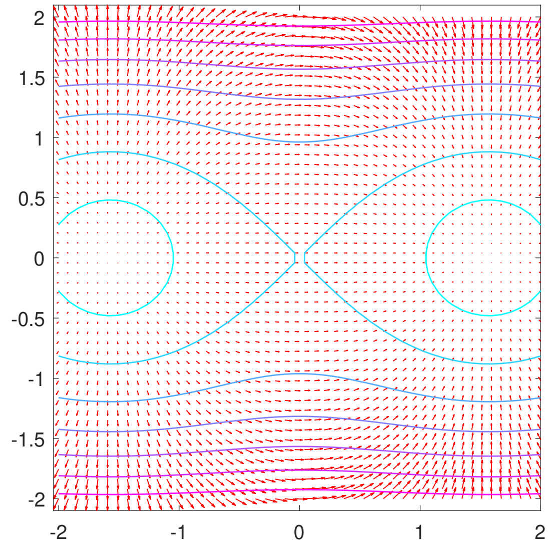
$$\mathrm{Arctan}\,z = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\,(\frac{1+iz}{1-iz}), \quad z^\alpha = e^{\alpha \mathrm{Ln}\,z} = |z|^a \cdot e^{i(a\mathrm{Arg}\,z)},\ \alpha \in \mathbb{C} \tag{2.30}$$

§ 2.7 部分复变函数可视化

图 2.3 是 $f(z) = e^z$ 与 $f(z) = \cos(z)$ 的可视化，图 2.4[8] 是多值函数 $f(z) = \sqrt{z}$ 和 $f(z) = \mathrm{Ln}\,z$ 的单值分支的可视化，图中等高线表示模长相等。

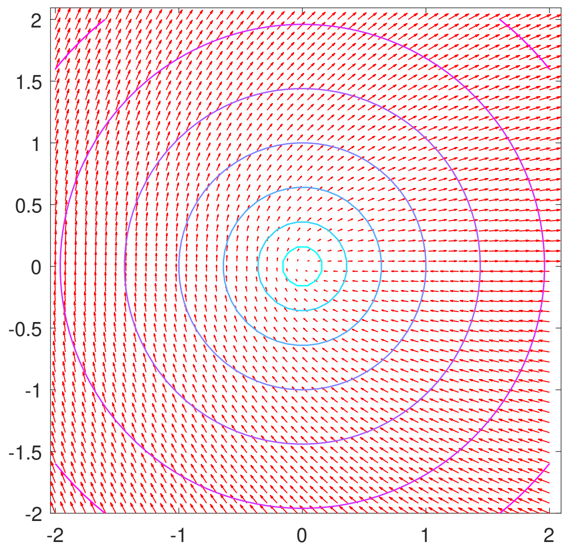


(a) $f(z) = e^z$

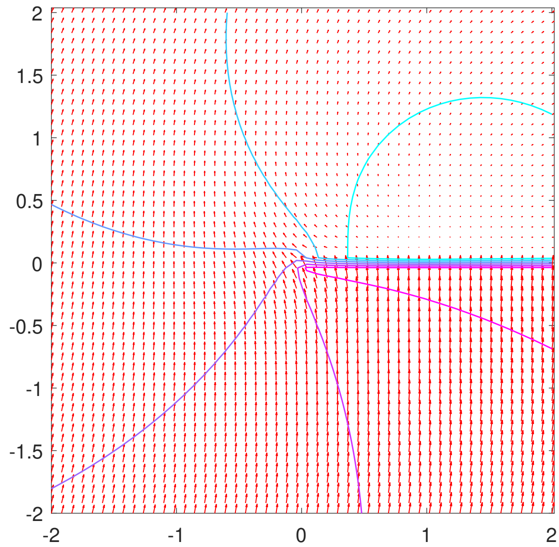


(b) $f(z) = \cos(z)$

图 2.3: 单值复变函数可视化



(a) $f(z) = \sqrt{z}$, $\arg z \in [0, 2\pi]$ 单值分支



(b) $f(z) = \mathrm{Ln}\,z$, $\arg z \in [0, 2\pi]$ 单值分支

图 2.4: 多值复变函数可视化

[7] 在后文，除非特殊说明，都默认 z^a 是取 $z \in [0, 2\pi]$ 时的单值分支，即 $z^a\ |_{z=1} = 1$

[8] 图 2.3 和图 2.4 源码见附录 B.1

第 3 章　复变积分

§ 3.1　复变积分的概念

复变积分是 $\mathbb{C}$ 上的线积分，沿某条路径，由点 A 至点 B 的复变积分定义为：

$$I=\lim_{\max|\Delta z_i\to 0|}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta z_i=\int_{C_{AB}}f(z)\mathrm{d}z \tag{3.1}$$

如果路径是闭合的，也常称为积分围道。一个复变积分实际上是两个实变线积分的线性组合，因此，若 C 是分段光滑曲线，且 $f(z)$ 在路径 C 上连续，则复变积分一定存在。

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C(u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)+i\int_C(v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y) \tag{3.2}$$

§ 3.2　Cauthy 定理

3.2.1　Cauthy-Goursat 定理

Theorem. 4（Cauthy 定理）:

若 $f(z)$ 在有界区域 G 上单值解析，在 $\overline{G}$ 上连续 [①]，则：

$$\oint_{\partial G}f(z)\mathrm{d}z=0 \tag{3.3}$$

对单连通区域，∂G 即为外围边界线（沿逆时针）；对多连通区域，外围边界线沿逆时针积分，内部边界线沿顺时针积分[②]。

3.2.2　Cauthy 定理的推广

Theorem. 5（Cauthy 定理推广 1）:

连续函数 f 在有界复连通区域 G 上单值解析，则：

$$\oint_{C_0}f(z)\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{i=n}\oint_{C_i^{(-)}}f(z)\mathrm{d}z \tag{3.4}$$

路径上的负号表示路径沿反相，在这里即沿逆时针。也就是所有路径（包括 C_0）都沿逆时针。

Theorem. 6（Cauthy 定理推广 2）:

连续函数 f 在有界单连通区域 G 上单值解析，则：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z,\ C\subset G\ \text{与路径无关，也即}\ f(z)\ \text{存在原函数} \tag{3.5}$$

Theorem. 7（Cauthy 定理推广 3）:

C 为 G 的边界，任取简单闭合曲线 $C'\subset G$，若连续函数 $f(z)$ 在构成的新有界复连通区域上解析，则：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C'}f(z)\mathrm{d}z \tag{3.6}$$

① 如何理解在 $\overline{G}$ 上解析？∂G 上的解析性如何定义？

② 始终保持区域在自身左侧的走向称为正向。

3.2.3 Cauthy 定理推论

Theorem. 8 (Morera 定理):

设 f 在闭域 $\overline{G}$ 中连续，且对 G 中任意闭合围道 C，都有 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$，则 f 在 G 中解析。结合 Cauthy 定理的正表述，也即：

$$f(z) \text{ 在 } \overline{G} \text{ 内解析} \Longleftrightarrow \oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0,\ \forall\, C \subset \overline{G} \Longleftrightarrow \text{ 积分} \int_{z_1}^{z_2} f(z)\mathrm{d}z \text{ 与路径无关},\ z_1, z_2 \in \overline{G} \tag{3.7}$$

Morera 定理可以理解为 Cauthy 定理的逆定理，用于判别函数在某区域上的解析性。

Theorem. 9 (最大模原理): 设 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 中解析，则模 $|f(z)|$ 的最大值一定在边界 ∂G 上。

Theorem. 10 (Cauthy 不等式):

设函数 f 在 $\overline{G}$ 中解析，则有不等式：

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leqslant \frac{n!}{2\pi d^{n+1}} \cdot Ml, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.8}$$

其中 $M = \sup\{|f(z)|,\ z \in \partial G\}$ 是 $|f(z)|$ 在边界上的上界，$l = \int_{\partial G} \mathrm{d}s$ 是边界 ∂G 的长度，$d = \inf\{\rho(z, \partial G)\}$ 是 z 点到边界 ∂G 的距离下界。事实上，由于 $\overline{G}$ 是闭域，这里的上界、下界均可取到，因此分别是最大值、最小值。

特别地，当边界是以 z 为圆心，R 为半径的圆时，不等式变为：

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leqslant \frac{n!M}{R^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.9}$$

Theorem. 11 (Liouville 定理): 若 $f(z)$ 在全平面上解析，且 $\lim\limits_{z\to\infty} |f(z)| < \infty$，则 $f(z)$ 是常数函数。

Theorem. 12 (均值定理):

设 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 内解析，则 f 在 G 内任意一点 z_0 的函数值为：

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta})\mathrm{d}\theta \tag{3.10}$$

其中 R 是以 z_0 为圆心，位于 $\overline{G}$ 内的任一圆周的半径。

§ 3.3 圆弧定理

Theorem. 13 (小圆弧定理):

若 $f(z)$ 在 a 的空心邻域 $U_\delta^\circ(a)$ 上连续，且在 $\arg(z-a) \in [\theta_1,\ \theta_2]$ 时，$(z-a)f(z)$ 一致收敛于 k ($|z-a| \to 0$)，则：

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = ik(\theta_2 - \theta_1) \tag{3.11}$$

其中 C_δ 是以 a 为圆心，δ 为半径，张角为 $\theta_2 - \theta_1$ 的小圆弧。

Theorem. 14 (大圆弧定理):

若 $f(z)$ 在 ∞ 的空心邻域 $U_\delta^\circ(\infty)$ 上连续，且在 $\arg(z-a) \in [\theta_1,\ \theta_2]$ 时，$(z-a)f(z)$ 一致收敛于 k ($|z-a| \to \infty$)，则：

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = ik(\theta_2 - \theta_1) \tag{3.12}$$

其中 C_R 是以 a 为圆心，R 为半径，张角为 $\theta_2 - \theta_1$ 的大圆弧。

§ 3.4 Cauchy 积分公式

Theorem. 15（Cauchy 积分公式）:

若 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 中解析[③]，则 $f(z)$ 在 G 上有任意阶导数，且它们都是 $\overline{G}$ 上的解析函数。

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta, \quad \forall\, z \in G \tag{3.13}$$

特别地，当 $n = 0$ 时，得到 Cauchy 积分公式[④]:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}\mathrm{d}\zeta, \quad \forall\, z \in G \tag{3.14}$$

Theorem. 16（Cauchy 定理的推广）:

在计算回路积分时，Theorem.15 使用起来不太方便，由小圆弧定理和 Cauchy 定理，我们可以证明下面命题，方便我们使用。

若 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 上有唯一奇点 $z = a$，且 $(z-a)^n f(z)$ 在 $\overline{G}$ 上解析，则：

$$I = \oint_{\partial G} f(z)\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\lim_{z\to a}(z-a)^n f^{(n-1)}(z) = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\left[(z-a)^n f^{(n-1)}(z)\right]_{z=a} \tag{3.15}$$

特别地，当 $n = 1$ 时，得到 Cauchy 积分公式。

Theorem. 17（无界区域上的 Cauchy 积分公式）:

若 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ 中解析，则 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ 上有任意阶导数，且它们都是 $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ 上的解析函数。

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\overline{G},\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.16}$$

§ 3.5 Cauthy 型积分与含参量积分的解析性

Theorem. 18（Cauchy 型积分）:

设函数 ϕ 在分段光滑曲线 $L \in \mathbb{C}$ 上连续（L 可闭合或不闭合），则下面函数在 $\mathbb{C}\setminus L$ 上解析，在全平面上连续：

$$f(z) = \begin{cases} \phi(z) & , z \in L \\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_L \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta & , z \in \mathbb{C}\setminus L \end{cases} \tag{3.17}$$

且它在 $\mathbb{C}\setminus L$ 上的导数可由 Cauchy 积分公式得到：

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\setminus L, n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.18}$$

Theorem. 19（含参量积分的解析性）:

设含参函数 $f = f(t, z)$ 分别对 $t \in L$ 和 $z \in \overline{G}$ 连续[⑤]（对两个变量都连续），其中 $\overline{G}$ 是有界闭域。且 $\forall\, t \in L$，$f(t, z)$ 是 $\overline{G}$ 上的单值解析函数，则函数 $F(z) = \displaystyle\int_L f(t, z)\mathrm{d}t$ 在 G 内解析，且 $F'(z) = \displaystyle\int_L \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}\mathrm{d}t$。

[③] 解析域闭为开集，至于为什么说在闭域上解析，详见附录 A.2.2

[④] 事实上是由 $n = 0$ 和归纳法证明的 n 阶导数 Cauchy 积分公式

[⑤] 这与在 $L \times \overline{G}$ 上连续不同。

§3.6 Poisson 公式

Cauchy 积分公式告诉我们，对于在 $\overline{G}$ 上解析的函数 $f(z)$，函数在 $\overline{G}$ 内任意一条曲线上的值（可以是边界 ∂G）就完全唯一地决定了 f 在 G 内任意一点的值。特别地，当 $G=\mathbb{C}$ 时，若已知 f 在 $\mathbb{C}$ 内任意一条（分段光滑）曲线 L 上的值，都可求出 f 在全平面的值。

Theorem. 20 (上半平面 Poisson 公式):

如果 $f(z)$ 在上半平面解析，且 $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$，则可依据它（或者它的实部或虚部）在实轴上的值，求出它在整个上半平面的值:

$$
\begin{aligned}
&\text{已知 } f(z), z\in\mathbb{R}: && f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi \\
&=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi && =\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\xi-x)f(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi \quad,\quad \forall\, z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \\
&\text{已知 } u \text{ 或 } v: \\
&f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(\xi,0)}{\xi-(x+iy)}\mathrm{d}\xi && =\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v(\xi,0)}{\xi-(x+iy)}\mathrm{d}\xi \quad,\quad \forall\, z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \\
&u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yu(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi && =\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\xi-x)v(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi \quad,\quad \forall\, z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \\
&v(x,y)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\xi-x)u(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi && =\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yv(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi \quad,\quad \forall\, z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Theorem. 21 (圆内 Poisson 公式):

取 G 为半径是 a 的圆，可以得到圆内 Poisson 公式:

$$
f(r,\phi)=\frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(ae^{i\theta})}{a^2+r^2-2ar\cos(\phi-\theta)}\mathrm{d}\theta,\quad \forall\, r\leqslant a,\ \phi\in[0,2\pi) \tag{3.20}
$$

$$
u(r,\phi)=\frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(a,\theta)}{a^2+r^2-2ar\cos(\phi-\theta)}\mathrm{d}\theta,\quad \forall\, r\leqslant a,\ \phi\in[0,2\pi) \tag{3.21}
$$

$$
v(r,\phi)=\frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{v(a,\theta)}{a^2+r^2-2ar\cos(\phi-\theta)}\mathrm{d}\theta,\quad \forall\, r\leqslant a,\ \phi\in[0,2\pi) \tag{3.22}
$$

第 4 章 无穷级数

§ 4.1 复变函数项级数

4.1.1 复数项级数

收敛：

复数级数 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 称为收敛的如果它的部分和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ 是收敛的，否则称其发散。特别地，由于 $\sum u_n = \sum a_n + i \sum b_n$（不涉及交换求和次序），因此，一个复数级数完全等价于两个实数级数的有序组合。

收敛的级数满足加法结合律，即可以任意添加括号（但不能随意去掉括号）

Theorem. 22 (Cauchy 判别法):

级数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的等价条件是：

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N = N(\varepsilon)\ \text{ s.t. }\ \forall\, n > m > N,\ |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} u_k \right| < \varepsilon \tag{4.1}$$

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N = N(\varepsilon)\ \text{ s.t. }\ \forall\, n > N,\ p \in N^*,\ |S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon \tag{4.2}$$

绝对收敛：

复数级数 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 称为绝对收敛的如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛。绝对收敛 $\Longrightarrow$ 收敛，反之不然。

绝对收敛的级数具有下列性质：

(1) 结合律：可以任意加括号（只要收敛即可），组成新的求和项
(2) 交换律：可以任意改换求和次序
(3) 子级数收敛：把绝对收敛级数拆成多个子级数，每个子级数都收敛
(4) 积收敛：两个绝对收敛级数之积（是一个二重级数）仍然绝对收敛

4.1.2 复变级数的判别法

判断复数级数是否绝对收敛，由于取模后皆为正实数，因此与正项级数的收敛判别完全等价，常见的方法有比较判别法、比式判别法、根式判别法和 Gauss 判别法。

Theorem. 23 (比较判别法):

比较判别法有常规形式、极限形式和上下极限形式，这里只介绍极限形式。后续的几种判别法也只给出极限形式。

设正向数列 v_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_n|}{v_n} = \rho \in \overline{R}$。若 $\rho \in (0, +\infty)$，则 $\sum |u_n|$ 与 $\sum v_n$ 同敛散；若 $\rho = 0$ 且 $\sum v_n$ 收敛，则 $\sum |u_n|$ 收敛；若 $\rho = +\infty$ 且 $\sum v_n$ 发散，则 $\sum |u_n|$ 发散。

Theorem. 24 (比式判别法): 设 $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho$。若 $\rho \in [0,\ 1)$ 则 $\sum |u_n|$ 收敛；若 $\rho > 1$ 则 $\sum |u_n|$ 发散。

Theorem. 25 (根式判别法): 设 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$。若 $\rho \in [0,\ 1)$ 则 $\sum |u_n|$ 收敛；若 $\rho > 1$ 则 $\sum |u_n|$ 发散。

Theorem. 26 (Gauss 判别法): 假设存在 $\zeta \in \mathbb{C},\ p > 1$ 使得序列 u_n 满足:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\zeta}{n} + O\left(\frac{1}{n^p}\right), \quad \zeta \in \mathbb{C},\ p > 1 \tag{4.3}$$

若 $\mathrm{Re}\,\zeta > 1$，则 $\sum |u_n|$ 收敛；若 $\mathrm{Re}\,\zeta \leqslant 1$，则 $\sum |u_n|$ 发散。

Theorem. 27 (Dirichlet 判别法): 设级数 $\sum c_n$ 有界，$\sum (z_{n+1} - z_n)$ 绝对收敛且 $\lim z_n = 0$，则级数 $\sum c_n z_n$ 收敛。

Theorem. 28 (Weierstrass 判别法[①]):
假设存在 $\zeta \in \mathbb{C},\ p > 1$ 使得序列 u_n 满足:

$$\frac{z_n}{z_{n+1}} = 1 + \frac{\zeta}{n} + O\left(\frac{1}{n^p}\right), \quad \zeta \in \mathbb{C},\ p > 1 \tag{4.4}$$

设 $\zeta = \alpha + i\beta$，则:

(1) 若 $\alpha > 1$，则 $\sum z_n$ 收敛；

(2) 若 $\alpha = 1$ 且 $\beta =\neq 0$，则 $\sum z_n$ 振荡（发散的一种）。

(3) 若 $\alpha \in (0, 1)$，则 $\sum z_n$ 发散。

(4) 若 $\alpha \leqslant 0$ 则 z_n 不趋于 0，于是 $\sum z_n$ 必发散。

4.1.3 复变函数项级数

收敛与一致收敛:

复变函数项级数的（逐点）收敛、发散与实变函数项级数完全一致，这里不提。

一致收敛定义为：若存在函数 $S(z)$ 使得复变函数项 $S_n(z)$ 满足 $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N = N(\varepsilon)$ s.t. $\forall\ n > N,\ z \in G,\ |S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$，则称其在 G 上一致收敛于 $S(z)$，记作 $S_n(z) \rightrightarrows S(z)$。

在 G 上逐点收敛与在 G 上一致收敛的区别如下：

$$\text{逐点收敛：}\ \forall\ z \in G,\ \lim_{n\to\infty} |S(z) - S_n(z)| = 0 \tag{4.5}$$

$$\text{一致收敛：}\ \lim_{n\to\infty} \sup_{z\in G} |S(z) - S_n(z)| = 0 \tag{4.6}$$

一致收敛的性质:

一致收敛函数列具有很好的性质（只需内闭一致收敛即可）:

(1) 极限换序定理：设 $f_n(z)$ 在 z_0 的空心邻域 $U_\delta^\circ(z_0)$ 上内闭一致收敛，则有:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{z\to z_0} f_n(z) = \lim_{z\to z_0} \lim_{n\to\infty} f_n(z) \tag{4.7}$$

(2) 极限微分换序 I : 设 $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$，$f_n(z)$ 是单值解析函数，且 f_n 在 G 上一致收敛，则:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f_n(z)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(z)\right) \tag{4.8}$$

(3) 极限微分换序 II : 设函数列 $\{f_n(z)\}$ 在 G 上单值解析，且 f_n' 在 G 上内闭一致收敛，则 $f_n(z)$ 在 G 上内闭一致收敛，且:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f_n(z)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(z)\right) \tag{4.9}$$

[①] Theorem.26 (Gauss 判别法) 是 Theorem.28 (Weierstrass 判别法) 的特殊情形。

(4) 极限积分换序:

若函数列 $\{f_n\}$ 在 G 上内闭一致收敛，则:

$$\lim_{n\to\infty}\int_L f_n(z)\mathrm{d}z=\int_L \lim_{n\to\infty} f_n(z)\mathrm{d}z \tag{4.10}$$

将极限换序定理运用到级数上，即得到逐项求极限；将极限微分换序 I、II 运用到级数上，即得到逐项微分；将极限积分换序运用到级数上，即得到逐项积分。

§ 4.2 二重级数

二重级数，指的是排列成下面形式的方阵：

$$\begin{aligned}
&a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+\cdots+a_{1n}+\cdots\\
&+a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}+\cdots+a_{2n}+\cdots\\
&+\cdots\\
&+a_{m1}+a_{m2}+a_{m3}+a_{m4}+\cdots+a_{mn}+\cdots\\
&+\cdots
\end{aligned} \tag{4.11}$$

方阵的右端和下端都是无限的，记 S_{mn} 为 $m\times n$ 方阵的和，称为部分和序列，并定义二重级数收敛的条件：

$$S_{mn}=\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\1\leqslant l\leqslant n}}a_{kl},\quad S=\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}S_{mn} \tag{4.12}$$

上式中并没有规定求和顺序，常见的求和顺序有次对角线求和、累次求和（先行后列或先列后行）。需要注意，即使二重级数收敛，某些行或列的和也不一定存在，因此累次求和的结果也不一定存在。二重积分的和是否依赖于求和方式，原则上与级数是否绝对收敛有关，若绝对收敛，则所有求和方式结果相同。

§ 4.3 幂级数

幂级数是指通项为幂函数的函数项级数，即：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \tag{4.13}$$

Theorem. 29 (Abel 第一定理):

若级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 在点 z_0 收敛，则其在圆 $|z-a|<|z_0-a|$ 内绝对收敛且内闭一致收敛[2]。圆内区域称为幂级数的收敛圆，收敛圆的半径称为收敛半径。

推论：若级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 在点 z_0 发散，则在圆外（即 $|z-a|>|z_0-a|$）处处发散。

求幂级数的收敛半径有两个常用方法：

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}|c_n|^{\frac{1}{n}},\quad \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \tag{4.14}$$

前者称为 Cauchy-Hadamard 公式，是普遍成立的，后者称为 d'Alembert 公式，在极限存在时成立，但计算通常更简单。

[2] 在圆上的收敛性未知，需要依据级数来具体判断。

Theorem. 30 (Abel 第二定理):

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在收敛圆内收敛到 $f(z)$，且在收敛圆周上某点 z_0 也收敛，和为 $S(z_0)$ 则当由收敛圆内趋于 z_0 时，只要保持在以 z_0 为顶点、张角为 $2\phi < \pi$ 的范围内（见图 4.1），$f(z)$ 就一定趋于 $S(z_0)$，也即：

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ 2\phi < \pi}} f(z) = S(z_0) \tag{4.15}$$

§ 4.4 含参量反常积分的解析性

Theorem. 31 (含参量反常积分的解析性):

设含参函数 $f = f(t, z)$ 满足：

(1) $f(t, z)$ 分别对 $t \in [a, \infty) \subset \mathbb{R}$ 和 $z \in \overline{G} \subseteq \mathbb{C}$ 连续[3]

(2) $\forall\, t \in [a, \infty)$，$f(t, z)$ 在 $\overline{G}$ 上单值解析

(3) $F(z) = \lim\limits_{b \to \infty} \displaystyle\int_a^b f(t, z)\,\mathrm{d}t$ 在 $\overline{G}$ 上一致收敛，即 $h(b, z) = \displaystyle\int_a^b f(t, z)\,\mathrm{d}t$ 满足 $\lim\limits_{b \to \infty} \sup\limits_{z} h(b, z) \in \mathbb{C} < \infty$

则反常积分 $F(z) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t, z)\,\mathrm{d}t$ 在 G 内解析，且：

$$F'(z) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}\,\mathrm{d}t \tag{4.16}$$

§ 4.5 发散级数与渐近级数（略）

[3]这与在 $[a, \infty) \times \overline{G}$ 上连续不同。

第 5 章 解析函数的局域性展开

§ 5.1 解析函数的 Talor 展开

Theorem. 32 (Talor Expansion):

设 $G = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ 是以 z_0 为圆心的圆盘开域，若 f 在 $\overline{G}$ 上解析，则 f 可在 $z_0 \in G$ 点展开为：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall\, z \in G \tag{5.1}$$

$$a_n = a_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \tag{5.2}$$

一个解析函数在给定点有唯一的 Talor 展开式，即展开系数是唯一确定的。

由于公式的形式与实变函数中完全相同，因此可以将实变函数的结果直接搬用到复变函数中。求函数的 Talor 级数时，除了直接搬用，还可以利用级数乘法和待定系数法[①]。

§ 5.2 解析函数的零点

设 $f(z)$ 在 z_0 的邻域内解析，且不恒为 0，若 $f(z_0) = 0$，则称 $z = z_0$ 为 f 的零点。由于 f 的解析性，考虑 Talor 展开 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$，则 $f(z_0) = a_0 = 0$，因此 z_0 为 f 的零点等价于 $a_0 = 0$。由此引出 m 阶零点的定义：$z = z_0$ 称为 f 的 m 阶零点如果

$$f^{(0)}(z_0) = f^{(1)}(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0 \tag{5.3}$$

$$\iff a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0, \quad a_m \neq 0 \tag{5.4}$$

Theorem. 33 (解析函数的零点孤立性):

若 $z = z_0$ 是 f 的零点，且 f 在 z_0 的邻域内不恒为零，则一定存在 z_0 的空心邻域 $U_\delta(z_0)$，使 f 在 $U_\delta(z_0)$ 内没有零点。

下面是零点孤立性的几条推论：

(1) 设 $f(z)$ 在 $G = \{z \mid |z - a| < r\}$ 内解析。若在 G 内存在 $f(z)$ 的无穷多个互不相等的零点 $\{z_n\}$，且 $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ 但 $z_n \neq a$，则在 G 内 $f(z) \equiv 0$。

(2) 设 $f(z)$ 在 $G = \{z \mid |z - a| < r\}$ 内解析。若在 G 内存在过 a 点的一段弧或含有 a 的一个子区域 g，在其上 $f(z) \equiv 0$，则在 G 内 $f(z) \equiv 0$。

(3) 设 $f(z)$ 在区域 G 内解析。若在 G 内存在过 a 点的一段弧或含有 a 的一个子区域 g，在其上 $f(z) \equiv 0$，则在 G 内 $f(z) \equiv 0$。

(4) 设 f_1 和 f_2 在 G 内解析，且在 G 内的一段弧或一个子区域上相等，则在 G 内 $f_1(z) \equiv f_2(z)$。

上面的推论 (1) 也可改写为解析函数的唯一性定理：

Theorem. 34 (解析函数的唯一性定理):

设 f_1 和 f_2 是区域 G 上的两个解析函数，且在 G 内存在序列 $\{z_n\}$ 使得 $f_1(z_n) = f_2(z_n), \forall\, n$。若 $\lim_{n\to\infty} z_n = a \in G$，则在 G 内有 $f_1(z) \equiv f_2(z)$。

① 详见参考文献 [1] Page 66

§ 5.3 解析函数的 Laurent 展开

Theorem. 35（Laurent Expansion）:

若 f 在以 z_0 为圆心的环形区域 $G:\ R_1 \leqslant |z-z_0| \leqslant R_2$ 中单值解析，则 f 可在环域内（不包含边界）展开为：

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \forall\, R_1 \leqslant |z-z_0| \leqslant R_2 \tag{5.5}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta, \quad n \in [-m, +\infty) \tag{5.6}$$

其中 m 可以是 0、正整数或正无穷，C 是圆环内绕点 z_0 一周的任意一条闭合曲线。Laurent Expansion 中的正幂项在大圆以内收敛，称为正则部分；负幂项在小圆以外收敛，称为主要部分，a_n 称为 Laurent 系数。Laurent 级数在环形区域内绝对且内闭一致收敛。

需要注意，对于 Laurent Expansion，幂级数的系数（即使是正则部分的系数）$a_n \neq \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$。与 Talor Expansion 类似，Laurent Expansion 也具有唯一性。

§ 5.4 单值函数的孤立奇点

设单值函数 $f(z)$ 在 z_0 点不解析，则称 z_0 为 f 的奇点。如果 f 在 z_0 的任意空心邻域 $U_\delta^\circ(b)\ :\ 0 < |z-z_0| < r$ 上解析，则称 z_0 为孤立奇点，否则称为非孤立奇点。

孤立奇点意味着 f 可在环域 $G:\ 0 < |z-z_0| < R$ 内展开为 Laurent 级数。孤立奇点又分为三种[②]：可去奇点、极点和本性奇点。下面是一些等价的条件：

(1) 可去奇点：若 f 在 z_0 的邻域内有界且不恒为零，则称 z_0 为可去奇点。这等价于 Laurent Expansion 中没有负幂项，即 $m = 0$。

(2) 极点：若 f 在 z_0 的邻域内无界，则称 z_0 为极点。这等价于 Laurent Expansion 中含有限个负幂项，即 $m \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$，称 z_0 为 m 阶极点。

(3) 本性奇点：若 f 在 z_0 的邻域内无界，则称 z_0 为本性奇点。本性奇点的 Laurent 展开中有无限项。

$$\begin{cases} \text{可去奇点：} & \lim_{z\to z_0} f(z) = A < \infty \Longleftrightarrow m = 0 \\ \text{（}m\text{ 阶）极点：} & \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \Longleftrightarrow m \in \mathbb{N}^* \\ \text{本性奇点：} & \lim_{z\to z_0} f(z) = \text{NaN} \Longleftrightarrow m = +\infty \end{cases} \tag{5.7}$$

特别地，考虑无穷远点 ∞ 是否为函数 $f(z)$ 的奇点（或者是什么奇点），等价于考虑 $g(z) = f(\frac{1}{z})$ 在 $z = 0$ 处的奇点性质。例如 $z = \infty$ 是 $e^z, \sin z, \cos z$ 的本性奇点。

§ 5.5 解析延拓

设函数 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 分别在 G_1 和 G_2 上解析，且 $G_1 \cap G_2 \neq \varnothing$。若在 $G_1 \cap G_2$ 上 $f_1(z) \equiv f_2(z)$，则称 $f_1(z)$ 是 $f_2(z)$ 在 G_1 上的解析延拓，反之称 $f_2(z)$ 是 $f_1(z)$ 在 G_2 上的解析延拓。

解析延拓的目的是为了使得函数在更大的区域内解析，从而更好地研究函数的性质。

[②] 在本书，我们也称可去奇点为“0 阶极点”，称本性奇点为“无穷阶极点”。

§5.6 Bernoulli 数和 Euler 数（略）

第 6 章 留数定理

§ 6.1 留数定理

Theorem. 36 (留数定理):

设游街区域 G 的边界 ∂G 为分段光滑的简单闭合曲线。若除有限个孤立奇点 $\{b_1, b_2, ..., b_n\} \subset G$ 外，函数 f 在 $\overline{G}$ 上单值解析，则：

$$\oint_{\partial G} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(b_k) \tag{6.1}$$

其中 $\operatorname{res} f(b_k)$ 称为 f 在 b_k 处的留数，它等价于 $f(z)$ 在 b_k 点的 Laurent Expansion 中的系数 a_{-1}（即原形式），也等价于 $(z-b)^m f(z)$ 的 Talor Expansion 中的系数 a_{m-1}:

$$\boxed{\operatorname{res} f(b_k) = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \left\{ \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \left[(z-b)^m f(z) \right] \right\}_{z=b}} \tag{6.2}$$

特别地，当奇点为一阶极点时（$m=1$），无需求导：

$$\operatorname{res} f(b_k) = \lim_{z \to b} \left[(z-b) f(z) \right] \tag{6.3}$$

常见的情况列在下表[①]:

表 6.1: 常见的留数计算方法

函数	给定条件	极点阶数	留数 $\operatorname{res} f(z_0)$
$f(z)$	$\lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = 0$	0	0
$f(z)$	$\lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) \neq 0$	1	$\lim\limits_{z \to z} (z-z_0) f(z)$
$f(z)$	$\lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0)^{k-1} f(z) = \infty$ $\lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0)^k f(z) \neq 0$	k	$\frac{1}{(k-1)!} \cdot \left\{ \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left[(z-b)^k f(z) \right] \right\}_{z=b}$
$\frac{f(z)}{g(z)}$	$f(z_0) \neq 0$ $g(z_0) = 0,\ g'(z_0) = 0$	1 (特殊)	$\lim\limits_{z \to z} \left[(z-z_0) \frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$
$\frac{f(z)}{g(z)}$	z_0 是 $f(z)$, $g(z)$ 的同阶零点	0	0
$\frac{f(z)}{g(z)}$	z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点 是 $g(z)$ 的 $m+n$ 阶零点	n	$\frac{1}{(k-1)!} \cdot \left\{ \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left[(z-b)^k \frac{f(z)}{g(z)} \right] \right\}_{z=b}$

另外，留数还可用于讨论有理函数的部分分式展开，例如函数 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-3}$ 的常数 A, B, C 正好就是 $f(z)$ 在一阶极点 $z = 1, 2, 3$ 处的留数，即：

$$A = \operatorname{res} f(1) = \frac{1}{2}, \quad B = \operatorname{res} f(2) = -1, \quad C = \operatorname{res} f(3) = \frac{1}{2} \tag{6.4}$$

①详见参考文献 [1] Page 86

参考文献

[1] 吴崇试，高春媛. 数学物理方法. 北京大学出版社, 北京, 3 edition, 5 2019.

[2] 吴崇试. 数学物理方法习题指导. 北京大学出版社, 北京, 2 edition, 10 2020.

附录 A 数物方法 Q & A

A.1 第一章

A.1.1 问题 1

A.1.2 问题 2

A.2 第二章

A.2.1 如何快速而大致准确地判断一个函数是否解析？

判断一个函数（在某个开集 G 上）是否解析，相当于判断它的可导性。如果一个复变函数是由初等函数构成的，不包括多值函数（包括 $\sqrt{z}$, $\mathrm{Ln}\, z$, $\mathrm{Arctan}\, z$ 等）或 $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$ 等特殊函数，那么在除去奇点（包括无定义点、不连续点和无穷点等）的开集上，一般都是解析的。例如，函数 $f(z) = \frac{z-1}{z-i}$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ 上解析，函数 $f(z) = \frac{e^z}{\cos z}$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 上解析。

在第三章及之后的章节中，若无特别声明，我们所说的函数都是指单值函数。

A.2.2 解析域一定是开集，为什么会说“在有界闭域 $\overline{G}$ 上解析”?

这个说法是许多教材中的惯用说法[②]，且并没有给出具体细节。我的理解是：解析区域必为开集，因此不可能是闭域，这里的意思是 f 在开集 $\overline{G}$ 上解析，且在 ∂ 上连续。

在本书中，不引起歧义的情况下，我们都说在闭域 $\overline{G}$ 上解析。

A.2.3 分支点一定不解析吗？

首先需要区分，“解析”是单值函数的概念，而“分支点”是多值函数的概念。在讨论一个函数是否（在某点）解析时，要么这个函数本就是单值函数，要么是多值函数的某个单值分支。对于一个多值函数，分支点仅可能出现在奇点，包括无定义点、不连续点、不解析点和无穷点 ∞。因此，当约定好多值函数的单值分支时，对前三种情况（也即 $\mathbb{C}$ 内的情况），分支点一定是不解析的。无穷点的情况可以做变换 $z \to \frac{1}{z}$ 转变为零点来讨论。

例如，函数 $f(z) = \sqrt{z}$ 的分支点为 $0, \infty$，同时也是唯二的不解析点，无穷点不解析是因为函数 $\frac{1}{\sqrt{z}}$ 在 $z = 0$ 无定义，零点不解析是因为 $f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$ 在 $z = 0$ 无定义。

A.3 第三章

A.3.1 为什么解析函数的积分与路径无关？

这是由 Cauchy 定理所保证的。只要函数在所讨论的区域上是解析的，那么 Cauchy 定理都成立，也就必定有“解析函数的积分与路径无关”。也就是说，积分的结果仅取决于起点和终点，这便自然而然地引出了“原函数”的概念。

回想力学中，重力场中的做功量与路径无关，也就是积分 $\oint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 的结果仅取决于起点和终点，而与路径无关，这也自然地引出了重力势能的概念。更严谨地说，在一个无旋的矢量场 A 中，矢量 $\boldsymbol{A}$ 与位矢的

[②]例如教材 [1]

积分值与路径无关，仅取决于起点和终点，这是由矢量分析中的 Stokes Theorem（斯托克斯定理）所保证的，也即：

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{A.1}$$

当矢量场无旋时，上式右端恒为零。

A.3.2 如何使用（n 阶）Cauchy 积分公式？

(n 阶) Cauchy 积分公式（Theorem.15）为：若函数 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 上解析，则 $f(z)$ 在 G 上有任意 n 阶导数，且它们都是 $\overline{G}$ 上的解析函数。

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\zeta,\quad \forall\, n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\} \tag{A.2}$$

在计算（含奇点的）回路积分时，我们常常会用到上述公式，有时取 $n = 0$，有时又取 $n = 1$ 或其它数。事实上，上述公式的本质是：在计算含有唯一奇点的回路积分时，将奇点“挖出来”，借助 Cauchy Theorem（Theorem.4）转为绕小圆的回路积分，然后利用小圆弧定理（Theorem.13）得到最终结果。这里面的关键就是“唯一奇点”。

在 $f(z)$ 解析的情况下，$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)}$ 有唯一奇点 a，且 $(z-a)\cdot g(z)$ 在 $\overline{G}$ 上解析，此时的 Cauchy 积分公式便可以写成：

$$\oint_{\partial G} g(z) = 2\pi i \cdot [(z-a)\cdot g(z)]_{z=a} \tag{A.3}$$

类似地，若 $g(z)$ 有唯一奇点 a，且 $(z-a)^n \cdot g(z)$ 在 $\overline{G}$ 上解析，便可以得到 n 阶 Cauchy 积分公式的等价形式：

$$\oint_{\partial G} g(z) = \frac{2\pi i}{n!}\cdot \left[(z-a)^{n+1}\cdot g(z)\right]^{(n)}_{z=a} \tag{A.4}$$

A.3.3 如何理解 Cauchy 型积分揭示的“解析函数在（分段）光滑曲线上的值决定了它在整个复平面上的值”？

附录 B Matlab 代码

B.1 图 2.3 和图 2.4 源码

```
%% 复变函数可视化
clc, clear, close all

X_array = linspace(-2, 2, 50);
Y_array = linspace(-2, 2, 50);
[GridX, GridY] = meshgrid(X_array, Y_array);

%% 单值函数 e^z 与 cos z %%

ez = @(x,y) exp(x).*(cos(y) + 1i*sin(y))';   % 1i 即虚数 i, 是增强稳定性的写法, 转置是必要的
cosz = @(x,y) 0.5 * (  cos(x).*(exp(-y) + exp(y))' + 1i*sin(x).*(exp(-y) - exp(y))' );

figure('Color', [1 1 1])
quiver(GridX, GridY, real(ez(X_array, Y_array)), imag(ez(X_array, Y_array)), 'AutoScale', 'on', 'Color', 'b');
hold on, axis equal
%contourf(GridX, GridY, abs(ez(X_array, Y_array)))
contour(GridX, GridY, abs(ez(X_array, Y_array)), LineWidth=0.7)
hold off, colormap("cool")
%MyExport_pdf

figure('Color', [1 1 1])
quiver(GridX, GridY, 0.03*real(cosz(X_array, Y_array)), 0.03*imag(cosz(X_array, Y_array)), 'AutoScale', 'on', 'Color', 'b');
hold on, axis equal
%contourf(GridX, GridY, abs(ez(X_array, Y_array)))
contour(GridX, GridY, abs(cosz(X_array, Y_array)), LineWidth=0.7)
hold off, colormap("cool")
%MyExport_pdf
%% 多值函数 \sqrt{z} 与 Ln z 的单值分支 %%


% \sqrt{z} 取 arg z \in [0, 2*pi] 的单值分支
% zeta = Ln z 取 arg zeta \in [0, 2*pi] 的单值分支, 也即 zeta = \ln z  = \ln |z| + i \arg z

sqrtz = @(x, y) 1/sqrt(2)* (  sign(pi - MyArcTheta(x, y')).*sqrt(abs(x + 1i*y') + x) + 1i*sqrt(abs(x + 1i*y') - x)  );
lnz = @(x, y) log(abs(x + 1i*y')) + 1i* MyArcTheta(x, y');

figure('Color', [1 1 1])
quiver(GridX, GridY, real(sqrtz(X_array, Y_array)), imag(sqrtz(X_array, Y_array)), 'AutoScale', 'on', 'Color', 'b');
```

```
hold on, axis equal
%contourf(GridX, GridY, abs(ez(X_array, Y_array)))
contour(GridX, GridY, abs(sqrtz(X_array, Y_array)), LineWidth=0.7)
hold off, colormap("cool")
%MyExport_pdf

figure('Color', [1 1 1])
quiver(GridX, GridY, real(lnz(X_array, Y_array)), imag(lnz(X_array, Y_array)), '
    AutoScale', 'on', 'Color', 'b');
hold on, axis equal
%contourf(GridX, GridY, abs(ez(X_array, Y_array)))
contour(GridX, GridY, abs(lnz(X_array, Y_array)), LineWidth=0.7)
hold off, colormap("cool")
%MyExport_pdf
```