线性代数(2024春)(Linear Algebra)

作业6

1. 给定正定矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$。证明

(1) 函数

$$q(u)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 \end{vmatrix}, \qquad \forall u=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

是一个负定的二次型;(提示:利用$TA\,{}^tT=I_n$和分块矩阵证明$q(u)<0$如果$u\neq\vec{0}$)

(2) $|A|\leq\Delta_{n-1}a_{nn}$;(提示:利用(1)和行列式是列向量的多线性函数)

(3) $|A|\leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

2. 给定斜称双线性型

$$f(u,v)=2x_1y_3-2y_3x_1-3x_2y_3+3x_3y_2+4x_2y_4-4x_4y_2-5x_3y_4+5x_4y_3,$$

其中$u=(x_1,x_2,x_3,x_4),v=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in\mathbb{R}^4$. 求$f$的规范基和它的标准型,并用矩阵的语言来解释。

3. 设U,V,W为$\mathbb{F}$上的有限维向量空间。如果$f\in\mathscr{L}_{\mathbb{F}}(V,W)$和$g\in\mathscr{L}_{\mathbb{F}}(U,V)$,证明$\dim\operatorname{Im} f\circ g\leq\dim\operatorname{Im} f$和$\dim\operatorname{Im} f\circ g\leq\dim\operatorname{Im} g$。

4. 定义$\theta:\mathcal{P}_n[x]\to\mathcal{P}_n[x]$为

$$\theta(f)=x\frac{d}{dx}(f)-f, \qquad \forall f\in\mathcal{P}_n[x].$$

证明θ是一个线性映射并求$\ker_\theta$, $\operatorname{Im}\theta$和$\operatorname{rank}\theta$。

5. 设$a_1,a_2,...,a_n$是$\mathbb{F}$中的n个不同的元素。定义线性映射$\vartheta:\mathcal{P}_n[x]\to\mathbb{F}^n$为

$$\vartheta(f)=(f(a_1),f(a_2),...,f(a_n)), \qquad \forall f\in\mathcal{P}_n[x].$$

写出ϑ在$\mathcal{P}_n[x]$的基$\{1,x,...,x^{n-1}\}$和$\mathbb{F}^n$的标准基$\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n\}$下的矩阵。证明$\vartheta$是一个向量空间的同构并写出$\vartheta^{-1}$。