某某课程作业模版
Template of Homework

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

序言

本文为笔者本科时的“电路原理”课程作业（Homework of Circuit Theory, 2024.9-2025.1）。由于个人学识浅陋，认识有限，文中难免有不妥甚至错误之处，望读者不吝指正，在此感谢。

我的邮箱是 dingyi233@mails.ucas.ac.cn。

目录

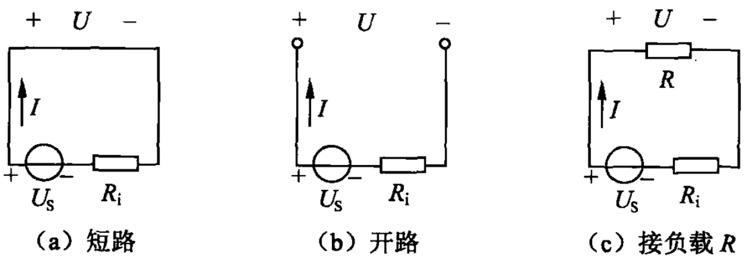
Homework 1: 2024.8.27 - 2024.9.2

1.1 习题集 1-2

(a) 短路，因此 $U = 0$, $I = \frac{U_S}{R_i}$

(b) 开路，因此 $U = U_s$, $I = 0$

(c) 构成回路，因此 $U = \frac{U_S R}{R+R_i}$, $I = \frac{U_S}{R+R_i}$



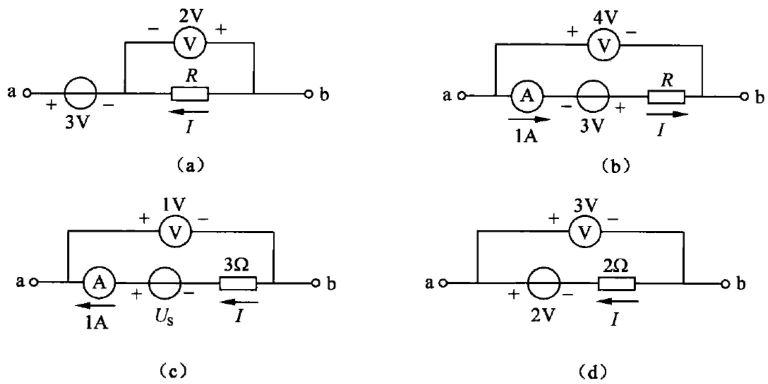
1.2 习题集 1-9

(a) $\varphi_a - 3\,\mathrm{V} + 2\,\mathrm{V} = \varphi_b \Longrightarrow U_{ab} = 1\,\mathrm{V}$

(b) $I = 1\,\mathrm{A}$, $3 - IR = -4 \Longrightarrow R = 7\,\Omega$

(c) $-3 + U_S = 1 \Longrightarrow U_S = 4\,\mathrm{V}$

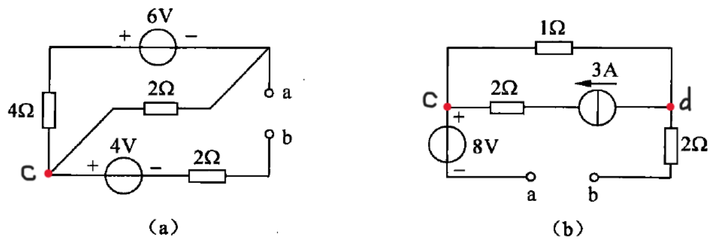
(d) $R = 2\,\Omega$, $-IR + 2 = 3 \Longrightarrow I = -0.5\,\mathrm{A}$



1.3 习题集 1-10

(a) 记参考点 a 的电势 $\varphi_a = 0$，则 $\varphi_c = 2\,\mathrm{V}$, $\varphi_b = -2\,\mathrm{V}$，因此 $U_{ab} = 2\,\mathrm{V}$

(b) 记参考点 d 的电势 $\varphi_d = \varphi_b = 0$，则 $\varphi_c = 6\,\mathrm{V}$, $\varphi_a = -2\,\mathrm{V}$，因此 $U_{ab} = -2\,\mathrm{V}$



后补：(b) 中电流源两端仍有电势差，$\varphi_c \neq 6\,\mathrm{V}$ 而是 $\varphi_c = -3\,\mathrm{V}$，最终得 $U_{ab} = -5\,\mathrm{V}$。

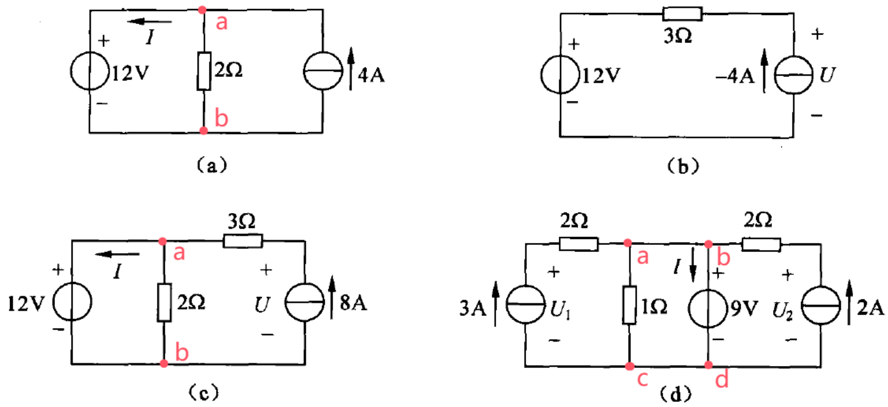
1.4 习题集 1-15

(a) $I = -\frac{U}{R} + 4\text{ A} = -2\text{ A}$

(b) $U = 12\text{ V} + 3\,\Omega \times 4\text{ A} = 0$

(c) $I = 8\text{ A} - 6\text{ A} = 2\text{ A}$，$U = 12\text{ V} + 3 \times 8\text{ V} = 36\text{ V}$

(d) 取点 d 为参考点，则 $\varphi_d = \varphi_c = 0$，$\varphi_b = \varphi_a = 9\text{ V}$，于是 $U_1 = 9 + 2 \times 3 = 15\text{ V}$, $U_2 = 9 + 2 \times 2 = 13\text{ V}$, $I = 2 - (9 - 3) = -4\text{ A}$



1.5 习题集 1-29

取点 a 为参考点 $\varphi_a = 0$，可得 $\varphi_b = 100U_1 - 80$，于是在结点 a 有电流：

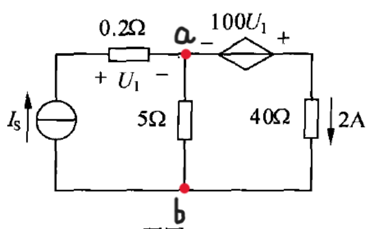
$$I_S + \frac{100U_1 - 80}{5} = 2$$

$0.2\,\Omega$ 电阻处又有 $U_1 = 0.2I_S$，联立解得 $I_S = 3.6\text{ A}, U_1 = 7.2\text{ V}$。

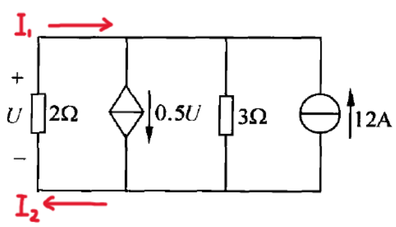
1.6 习题集 1-30

这里要注意左二元器件是受控电流源，因此 $0.5U$ 是指电流大小而非电压。I_1 处可列出方程：

$$\frac{U}{2} + 12 - \frac{U}{3} = 0.5U \implies U = 36\text{ V} \implies P = UI = 432\text{ W}$$



题图 1-29



题图 1-30

后补：上面的方程列错了，错将 I_1 的方向标为由左向右，应该是由右向左。最后得到 $P = 108\text{ W}$。另外，也可以直接将受控电流源看作是 $2\,\Omega$ 的电阻，这样左侧三个电阻并联，也可求出正确答案 108 W.

1.7 讲义题 1-6

$\alpha > 90°$ 时，电阻为“负电阻”。

1.8 讲义题 1-7

充放电倍率 C 的含义：

C（充放电倍率）表示电池充放电时电流相对电池容量的大小数值，$\mathrm{C}=\frac{\text{电池容量}}{\text{充放电所需时间}}$。例如，1 C 电流充电表示电池需要 1 小时充满，5 C 充电表示电池需要 0.2 小时充满。放电也是类似的，一个 10 Ah 的电池以 2 C 放电，表示以 20 A 的电流放电 0.5 h。

若倍率上升，总时间就会下降，若倍率下降，总时间就会上升。通俗来讲，C 代表了电池的爆发力大小，高倍率的动力电池瞬间放电电流大，特别适合大电流放电产品使用，如航模。

涓流充电：

涓流充电是指在电池接近完全充满电后，采用非常小的电流进行充电，以弥补电池自放电造成的容量损失。理论倍率 C 约为最大倍率 $\mathrm{C_{max}}$ 的 $\frac{1}{100}$ 至 $\frac{1}{1000}$，但由于倍率太小，常常根本无法充电，一个比较好的方法是脉冲式充电，例如以 $\frac{\mathrm{C_{max}}}{10}$ 充电 6 s，然后停止充电 54 s。

快速充电：

快速充电至少要求 1 C，现阶段的快速充电多在 1.5 C 至 2 C 之间。

1.9 讲义题 1-8（Multisim 仿真）

仿真电路如图 1.1 所示，

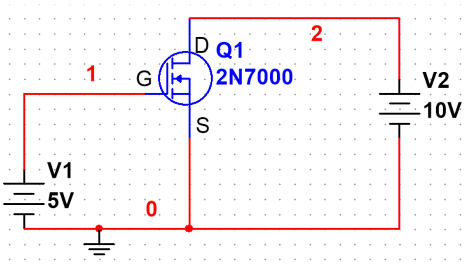


图 1.1: 仿真电路图

先固定 $U_{GS}=5\ \mathrm{V}$ 不变（即 $V_1=5\ \mathrm{V}$），横坐标 $U_{DS}\in[0\ \mathrm{V},\ 12\ \mathrm{V}]$，画出 I_{DS}（即 I_2）的变化曲线，如图 1.2 所示。再固定 $U_{DS}=10\ \mathrm{V}$ 不变（即 $V_2=10\ \mathrm{V}$），横坐标 $U_{GS}\in[0\ \mathrm{V},\ 10\ \mathrm{V}]$，画出 I_{DS}（即 I_2）的变化曲线，如图 1.3 所示。

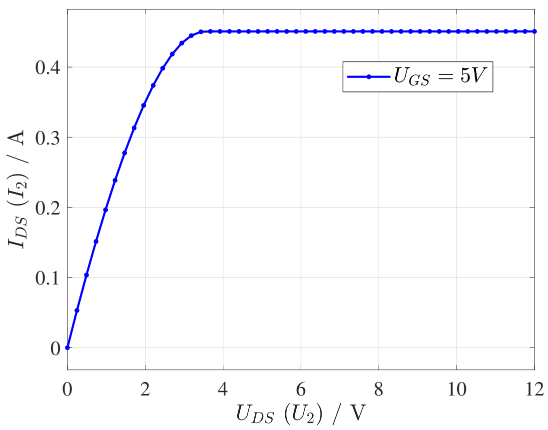


图 1.2: 仿真结果 1

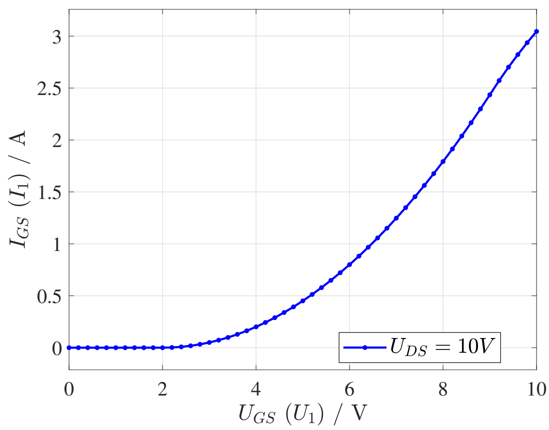


图 1.3: 仿真结果 2

Homework 2: 2024.9.10 - 2024.9.19

2.1 习题集 3-40（书上答案不正确）

由虚短和虚断，可以得到 R_1 处电流为 $i_1 = \frac{u_s}{R_1}$（从上至下），于是输出电压 $u_o = 3u_s$，右侧负载由三个电阻构成，并联电阻分压 $2u_s$，最后得电流 $i(t)$:

$$i(t) = \frac{2u_s}{6\ \text{K}\Omega} = \frac{u_s}{3}\ \text{mA} \tag{2.1}$$

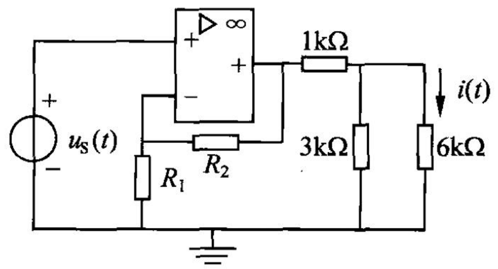


图 2.1: 习题集 3-40

2.2 习题集 3-45（注意题目单位是 S）

如图所示，将电导全部转换为电阻。由虚断、虚短，流经 $\frac{1}{10}\ \Omega$ 电阻的电流为 $i_1 = \frac{u_s}{0.1\ \Omega} = 10u_s$。右下角两电阻分压，再由虚短可得 $i_2 = 2U_o$，于是 $i_3 = i_1 + i_2 = 10U_s + 2U_o$，由 KVL:

$$0 - \frac{1}{3}(10U_s + 2U_o) = U_o \Longrightarrow \frac{U_o}{U_s} = -2 \tag{2.2}$$

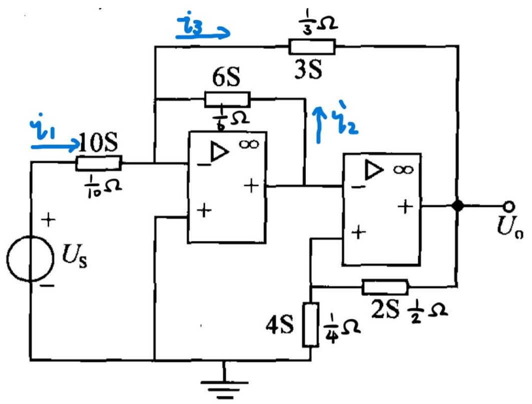
入端电阻 R_i:

$$i_1 = 10U_s \Longrightarrow R_i = \frac{1}{10}\ \Omega \tag{2.3}$$

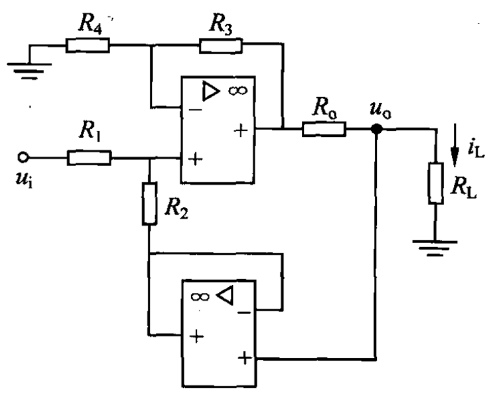
2.3 习题集 3-46

依据 KVL、KCL、虚短、虚断，标出各节点电势，如图所示。则有:

$$(u_i + u_o) - u_o = i_L R,\ i_L = \frac{u_o}{R_L} \Longrightarrow u_o = u_i,\ i_L = \frac{u_o}{R_L} = \frac{u_i}{R_L} \tag{2.4}$$



(a) 习题集 3-45



(b) 习题集 3-46

图 2.2: 习题集 3-45 和习题集 3-46

2.4 讲义题 2-19

(1) 反相比例放大器

对输入电阻，$i_1 = \frac{u_i}{R_1} \Longrightarrow R_i = R_1$。对输出电阻，将输入电压源短路，采用加流求压法，在输出端接入电流源，由 $u = iR$ 且 $u = 0$，得 $R_o = 0$。也即：

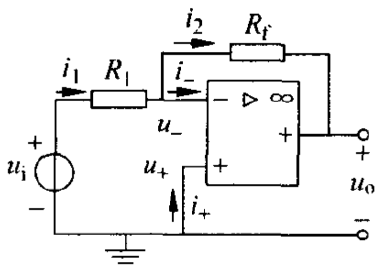
$$R_i = R_1,\ R_o = 0 \tag{2.5}$$

(2) 同相比例放大器

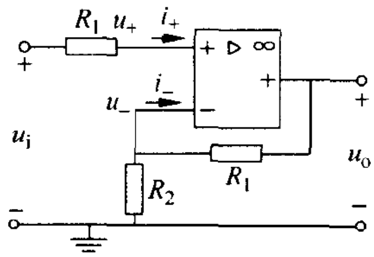
对输入电阻，R_1 右端断路，因此 $R_i = \infty$。对输出电阻，将输入电压源短路，采用加流求压法，在输出端接入电流源，由 $u = iR$ 且 $u = 0$，得 $R_o = 0$。也即：

$$R_i = \infty,\ R_o = 0 \tag{2.6}$$

从输入输出电阻特性来看，同相比例放大器电气特性更优秀。



(a) 同相比例放大器



(b) 反向比例放大器

图 2.3: 讲义题 2-19

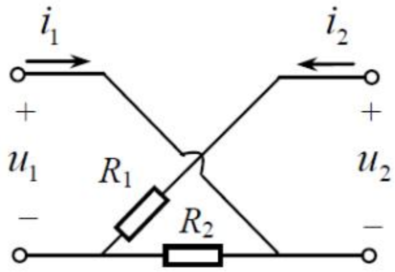
2.5 讲义题 2-20

(a) 由 KVL 有：

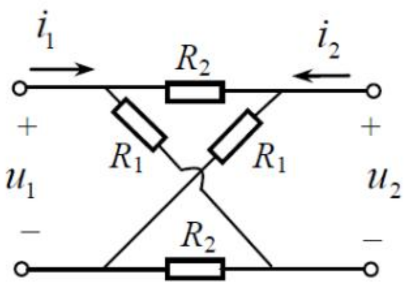
$$\begin{cases} u_1 = R_2(i_1 - i_2) \\ u_2 = R_1 i_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{1}{R_2}u_1 + \frac{1}{R_1}u_2 \\ i_2 = \frac{1}{R_1}u_2 \end{cases},\ \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{R_1} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

(b) 由 KVL, KCL 有：

$$\begin{cases} u_1 = R_1\left(i_1 - \frac{u_1 - u_2}{R_2}\right) \\ u_2 = R_1\left(i_2 + \frac{u_1 - u_2}{R_2}\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} i_1 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)u_1 - \frac{1}{R_2}u_2 \\ i_2 = -\frac{1}{R_2}u_1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)u_2 \end{cases},\ \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$



(a)



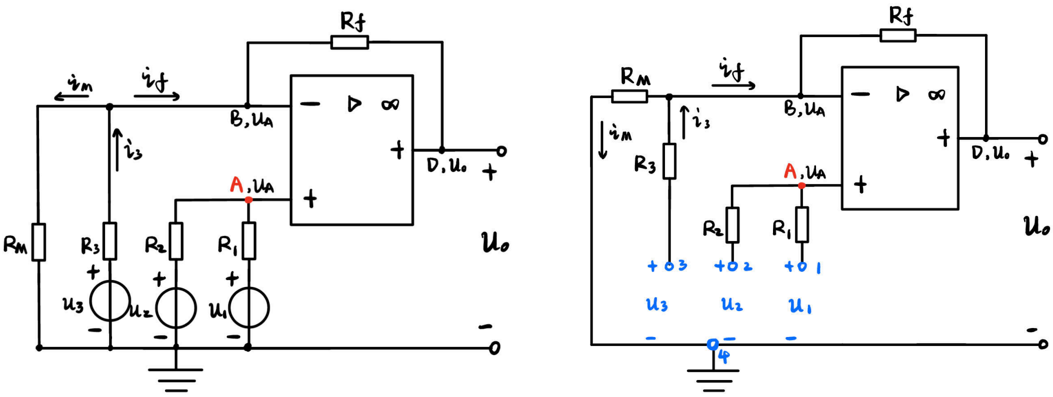
(b)

图 2.4: 讲义题 2-20

2.6 仿真 2-1

2.6.1 单 OPA 实现电压运算

电路如图 2.5 (a) 所示，接线端示意图见图 2.5 (b)。



(a) 电路示意图 **(b) 接线端示意图**

图 2.5: 单 OPA 实现电压运算

下面分析其输出特性。由虚断，在 u_1 和 u_2 构成的回路中，设正向流经 u_2 的电流为 i_2，则有：

$$i_2 = \frac{u_2 - u_1}{R_1 + R_2} \Longrightarrow u_A = u_2 - i_2 R_2 = \frac{R_2 u_1 + R_1 u_2}{R_1 + R_2} \tag{2.9}$$

由虚短，B 点的电势也为 u_A，于是：

$$i_3 = \frac{u_3 - u_A}{R_3},\ i_M = \frac{u_A}{R_M} \Longrightarrow i_f = i_3 - i_M = \frac{u_3 - u_A}{R_3} - \frac{u_A}{R_M} = \frac{u_3}{R_3} - (\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_M})u_A \tag{2.10}$$

由虚断和 KVL:

$$u_o = u_A - i_f R_f = u_A - \frac{R_f}{R_3}u_3 + (\frac{R_f}{R_3} + \frac{R_f}{R_M})u_A = \left(1 + \frac{R_f}{R_3} + \frac{R_f}{R_M}\right)u_A - \frac{R_f}{R_3}u_3 \tag{2.11}$$

将 u_A 的表达式代入，最终得到：

$$\boxed{u_o = \left(1 + \frac{R_f}{R_3} + \frac{R_f}{R_M}\right)\frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + 1}u_1 + \left(1 + \frac{R_f}{R_3} + \frac{R_f}{R_M}\right)\frac{\frac{R_1}{R_2}}{\frac{R_1}{R_2} + 1}u_2 - \frac{R_f}{R_3}u_3} \tag{2.12}$$

我们需要 u_1, u_2, u_3 前的系数分别为 3, 2, -0.5，于是有：

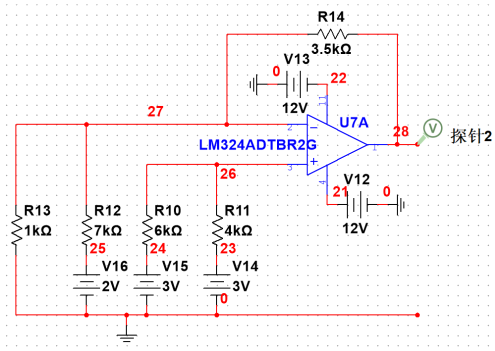
$$\begin{cases} \left(1 + \frac{R_f}{R_3} + \frac{R_f}{R_M}\right)\frac{1}{\frac{R_1}{R_2}+1} = 3 \\ \left(1 + \frac{R_f}{R_3} + \frac{R_f}{R_M}\right)\frac{\frac{R_1}{R_2}}{\frac{R_1}{R_2}+1} = 2 \\ -\frac{R_f}{R_3} = -0.5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{2}{3}R_2 & ,\ R_2 > 0 \\ R_3 = 2R_f,\ R_M = \frac{2}{7}R_f & ,\ R_f > 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

为了保持 OPA 的理想性，我们应选择 KΩ 量级的电阻，同时，为了降低电路的整体功率，减少消耗，电阻阻值应该尽量大。综合下来，不妨选取 $R_2 = 6$ KΩ，$R_f = 3.5$ KΩ，此时所有电阻阻值为：

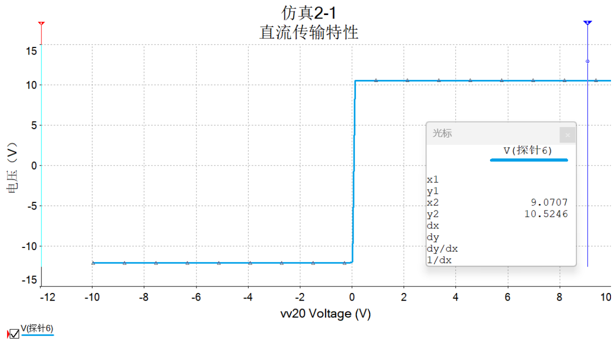
$$R_1 = 4\ \text{K}\Omega,\ R_2 = 6\ \text{K}\Omega,\ R_3 = 7\ \text{K}\Omega,\ R_M = 1\ \text{K}\Omega,\ R_f = 3.5\ \text{K}\Omega \tag{2.14}$$

如图 2.6 (a)，在 Multisim 中进行仿真，得到的结果如下表所示：

项目	1			2			3			4		
	x, u_1	y, u_2	z, u_3	x, u_1	y, u_2	z, u_3	x, u_1	y, u_2	z, u_3	x, u_1	y, u_2	z, u_3
	1	1	1	1	3	2	-2	2	0	3	3	2
理论输出 (V)	$3+2-0.5=4.5$			$3+6-1=8$			$-6+4-0=-2$			$9+6-1=14$		
仿真输出 (V)	4.50			8.00			-2.00			10.494		



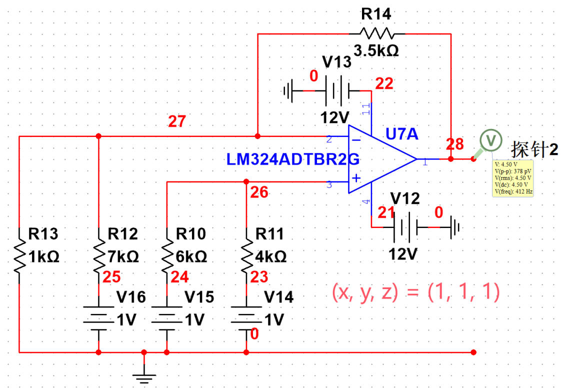
(a) 单 OPA 实现电压运算



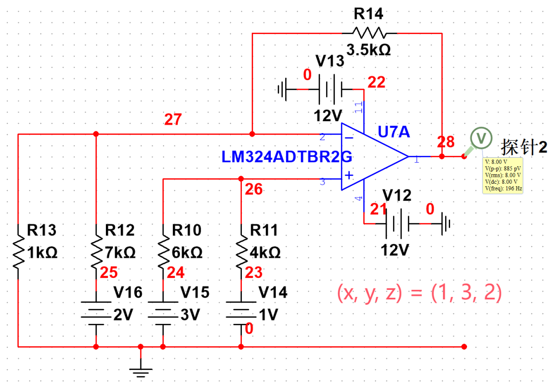
(b) OPA 饱和电压

图 2.6: 仿真电路图与 OPA 饱和电压

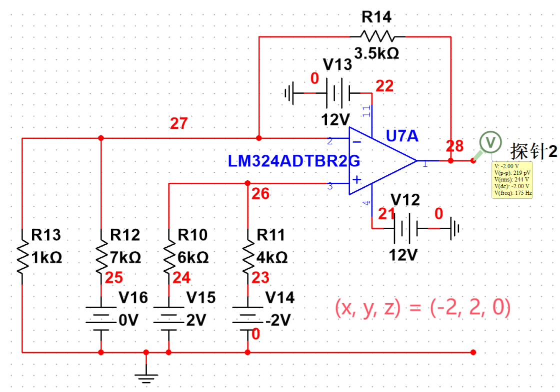
由表可见，除了最后一组数据，仿真结果与理论结果完全一致。最后一组之所以不同，是因为输出电压 u_o 超出了此 OPA 的饱和电压 U_{sat}，导致输出电压 $u_o = U_{\text{sat}} = 10.494\text{V}$。如图 2.6 (b) 所示，此 OPA (LM324ADTBR2G) 的饱和电压为 10.525V，与解释相符。具体仿真时的结果见图 2.7。



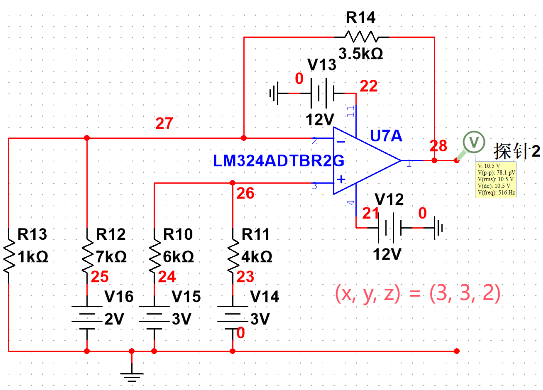
(a) $(x, y, z) = (1, 1, 1)$



(b) $(x, y, z) = (1, 3, 2)$



(c) $(x, y, z) = (-2, 2, 0)$



(d) $(x, y, z) = (3, 3, 2)$

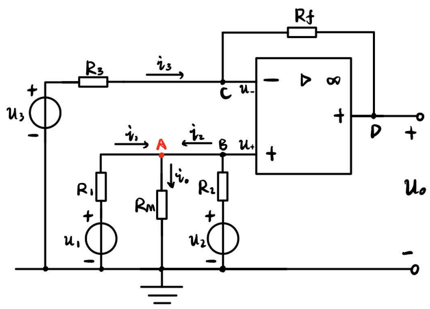
图 2.7: 仿真具体结果图

2.6.2 一些失败的例子

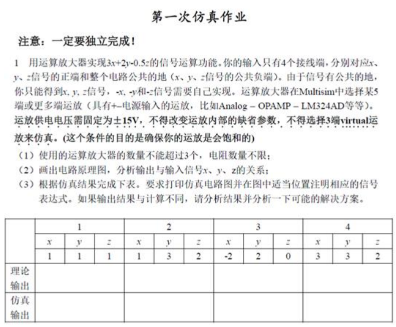
注意到，减法器是在反相加法器的基础上，串联入电压源（和电阻）改变了 u_+ 端的电压。这样，在最终的输出电压 u_o 中，u_- 端的电源电压会带负号，u_+ 端的电源电压带正号。用类似的思想，我们可以对减法器进行改造，最终仅用一个 OPA 便实现 $3x + 2y - 0.5z$ 的电压运算。

一种方法是向 u_+ 端再串联一个电压源，使得输出 u_o 中两正一负，然后通过电阻值来调整系数，但是，这样不满足接线端的要求（三正一共地）。另一种方法是向 u_- 端再并联一个电压源，使得输出 u_o 中两负一正（$-u_1$，$-u_2$，$+u_3$），最后通过电阻值来调整系数，但是，这样得到的是两负一正而不是两正一负，虽满足了接线端要求，却不是我们需要的结果。

其实，我们只需要向 u_+ 端的电压源再并联一个电压源即可，如图所示。下面分析其输出特性。



(a) 失败的例子



第一次仿真作业

注意：一定要独立完成！

1 用运算放大器实现3x+2y-0.5z的信号运算功能。你的输入只有4个接线端，分别对应x、y、z信号的正端和整个电路公共的地（x、y、z信号的公共负端）。由于信号有公共的地，你只能得到x, y, z信号，-x, -y和-z信号需要自己实现。运算放大器在Multisim中选择某5端或更多端运放（具有+–电源输入的运放，比如Analog – OPAMP – LM324AD等等）。**运放供电电压需固定为±15V，不得改变运放内部的缺省参数，不得选择3端virtual运放来仿真。(这个条件的目的是确保你的运放是会饱和的)**

（1）使用的运算放大器的数量不能超过3个，电阻数量不限；

（2）画出电路原理图，分析输出与输入信号x、y、z的关系；

（3）根据仿真结果完成下表。要求打印仿真电路图并在图中适当位置注明相应的信号表达式。如果输出结果与计算不同，请分析结果并分析一下可能的解决方案。

	1			2			3			4		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
	1	1	1	1	3	2	-2	2	0	3	3	2
理论输出												
仿真输出												

(b) 仿真作业 2-1

图 2.8: 示意图

在 u_1, R_1, u_2, R_2 和 R_M 构成的局部电路中，由 KVC:

$$\begin{cases} u_1 - R_1 i_1 - R_M(i_1 + i_2) = 0 \\ u_2 - R_2 i_2 - R_M(i_1 + i_2) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} i_1 = \frac{(R_2+R_M)u_1 - R_M u_2}{R_1R_2 + R_1R_M + R_2R_M} \\ i_2 = \frac{(R_1+R_M)u_2 - R_M u_1}{R_1R_2 + R_1R_M + R_2R_M} \end{cases} \tag{2.15}$$

由此得点 A 处的电势 u_A:

$$u_A = \frac{R_2R_Mu_1 + R_1R_Mu_2}{R_1R_2 + R_1R_M + R_2R_M} \tag{2.16}$$

也即点 B 和非反相输入端的电势 $u_+ = u_B = u_A$。由虚短，$u_- = u_+$，可得电流 i_3:

$$i_3 = \frac{u_3 - u_-}{R_3} = \frac{1}{R_3}(u_3 - \frac{R_2R_Mu_1 + R_1R_Mu_2}{R_1R_2 + R_1R_M + R_2R_M}) \tag{2.17}$$

由虚断，经过电阻 R_f 求得 D 点电势，也即输出电压 u_o:

$$u_o = u_A - i_3R_f = (1 + \frac{R_f}{R_3})u_A - \frac{R_f}{R_3}u_3 \tag{2.18}$$

$$= (1 + \frac{R_f}{R_3}) \cdot \frac{\frac{R_M}{R_1}u_1 + \frac{R_M}{R_2}u_2}{1 + \frac{R_M}{R_1} + \frac{R_M}{R_2}} - \frac{R_f}{R_3}u_3 \tag{2.19}$$

$$= \frac{1 + \frac{R_f}{R_3}}{1 + \frac{R_M}{R_1} + \frac{R_M}{R_2}} \left(\frac{R_M}{R_1}u_1 + \frac{R_M}{R_2}u_2\right) - \frac{R_f}{R_3}u_3 \tag{2.20}$$

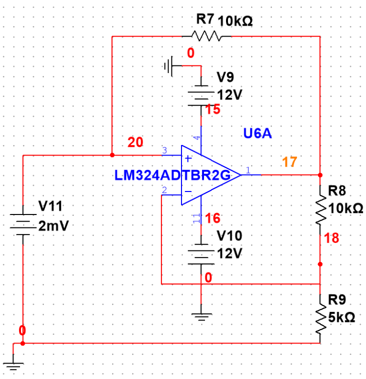
最后调整电阻阻值。为了保持 OPA 的理想性，电阻需要在 KΩ 量级，令电阻比例如下：

$$\begin{cases} \frac{R_f}{R_3} = 0.5 \\ \frac{1+\frac{R_f}{R_3}}{1+\frac{R_M}{R_1}+\frac{R_M}{R_2}} \cdot \frac{R_M}{R_1} = 3 \\ \frac{1+\frac{R_f}{R_3}}{1+\frac{R_M}{R_1}+\frac{R_M}{R_2}} \cdot \frac{R_M}{R_2} = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} R_f = \frac{1}{2}R_3 \\ R_1 = -2R_M \\ R_2 = -\frac{4}{3}R_M \end{cases} \tag{2.21}$$

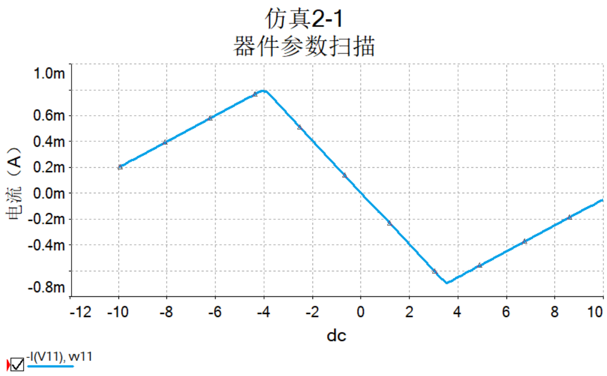
显然，这不可能实现，舍弃。

2.7 仿真 2-2

仿真电路如图 2.9 (a) 所示，对输入电压进行参数扫描，输出通过电压源的电流，得到图 2.9 (b)。这里需要注意，在 Multisim 中，电流的参考方向始终是高电势指向低电势（包括电压源），因此，仿真输出中的 I(V11) 是从上往下通过 V11 的电流（而不是从下至上），电压源 V11 的实际电流为 $i = -I(V11)$。



(a) 负电阻仿真电路



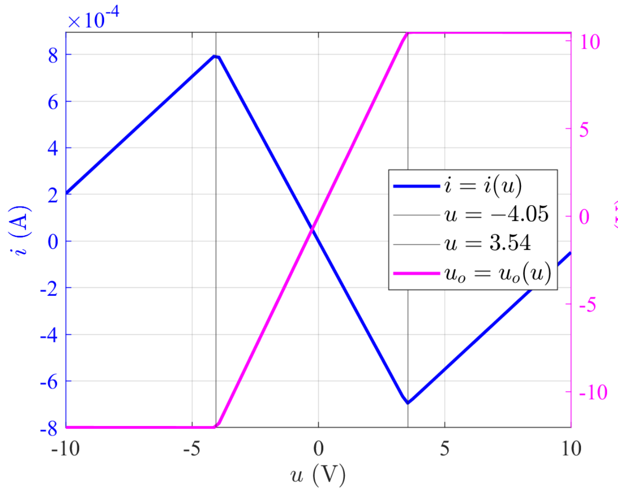
(b) I（纵轴）U（横轴）关系

图 2.9: 负电阻仿真

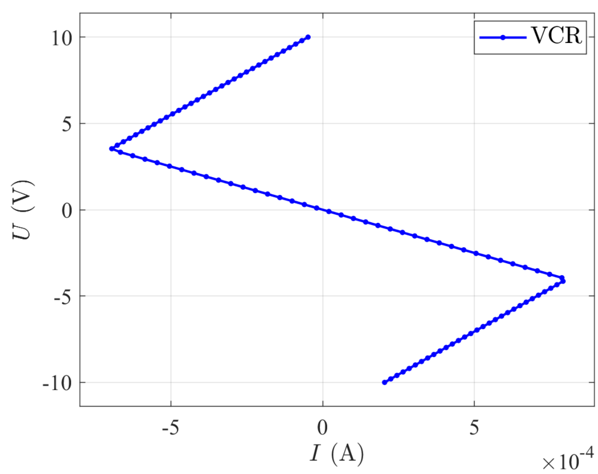
简记电压源 V11 的电压为 u，继续仿真输出电压 u_o 关于输入电压 u 的变化，将数据导出后在 Matlab 中绘制曲线，如图 2.10 (a)。再将 $I-U$ 关系转化为 $U-I$ 关系，如图 2.10 (b)。可以发现，在线性工作区内，电路表现为负阻。而线性区外的两段折线位于 OPA 的饱和区，此时 u_o 始终为饱和电压，电路呈现正电阻，且阻值为:

$$\begin{cases} i = \frac{u-U_{\text{sat}}}{R_1} & ,u > 3.54\ \text{V} \\ i = \frac{u+U_{\text{sat}}}{R_1} & ,u < -4.05\ \text{V} \end{cases} \Longrightarrow R_{\text{sat}} = R_1 = 10\ \text{K}\Omega \tag{2.22}$$

这与图 2.10 (b) 中曲线的斜率是相符的。而在线性区，负电阻 $R = -\frac{10\ \text{K}\Omega}{10\ \text{K}\Omega} \cdot 5\ \text{K}\Omega = -5\ \text{K}\Omega$，这也是符合的。



(a) u_o 与 i 关于 u 的变化



(b) U-I 关系（VCR）

图 2.10: 仿真结果分析

Homework 3: 第二章

3.1 对于正入射的情况，写出菲涅尔公式

菲涅尔公式如下：

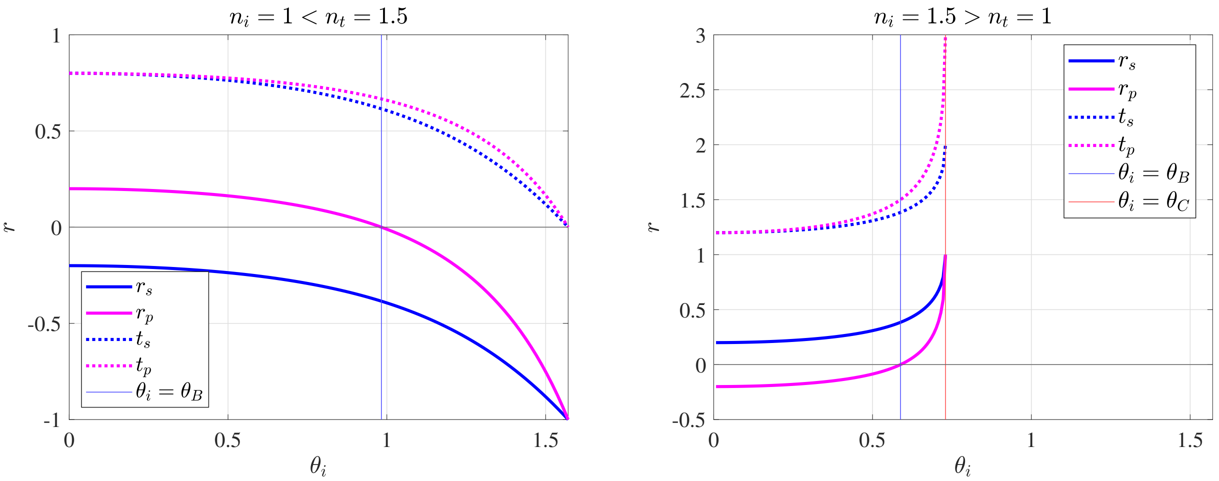
类型	振幅反射系数 r		振幅透射系数 t	
s 波	$r_s = \dfrac{n_i\cos\theta_i - n_t\cos\theta_t}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t}$	$-\dfrac{\sin(\theta_i-\theta_t)}{\sin(\theta_i+\theta_t)}$	$t_s = \dfrac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t}$	$+\dfrac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)}$
p 波	$r_p = \dfrac{n_t\cos\theta_i - n_i\cos\theta_t}{n_t\cos\theta_i + n_i\cos\theta_t}$	$+\dfrac{\tan(\theta_i-\theta_t)}{\tan(\theta_i+\theta_t)}$	$t_p = \dfrac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_t + n_t\cos\theta_i}$	$+\dfrac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)\cos(\theta_i-\theta_t)}$

正入射时，$\theta_i = \theta_t = 0$，于是有：

$$r_p = (-r_s) = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}, \quad t_p = t_s = \frac{2n_i}{n_i + n_t} \tag{3.1}$$

$$F = R_s = R_p = \left(\frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}\right)^2 \tag{3.2}$$

不妨作出相关的图像，图 3.1 是 s 波、p 波振幅系数关于入射角 θ_i 的变化情况[①]。



(a) 由空气入射玻璃（$n_i = 1$，$n_t = 1.5$）

(b) 由玻璃入射空气（$n_i = 1.5$，$n_t = 1$）

图 3.1: 振幅系数 r 随入射角 θ_i 的变化

3.2 一自然光以 Brewster Angle 入射到空气中的一块玻璃，已知功率透射率为 0.86。

(1) 求功率的反射率：

$T = 0.86$，由能量守恒，功率反射率 $R = 0.14$。

(2) 若输入为 1000 W，求透射光 s 分量上的功率

光束为自然光，因此 s 分量和 p 分量的功率相同，都为 500 W。先求解入射角 θ_i，由菲涅尔定理和能量关系：

$$R = \frac{1}{2}(R_s + R_p),\ R_s = \left[\frac{\cos\theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}\right]^2,\ R_p = \left[\frac{n_{ti}^2\cos\theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}{n_{ti}^2\cos\theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}\right]^2 \tag{3.3}$$

[①]源码见附录 A.1

其中 $n_i = 1$，$n_t = 1.5$，因此 $n_{ti} = 1.5$，代入即得：

$$\left[\frac{\cos\theta_i - \sqrt{1.5^2 - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{1.5^2 - \sin^2\theta_i}}\right]^2 + \left[\frac{1.5^2\cos\theta_i - \sqrt{1.5^2 - \sin^2\theta_i}}{1.5^2\cos\theta_i + \sqrt{1.5^2 - \sin^2\theta_i}}\right]^2 = 2\times 0.14 \tag{3.4}$$

用 Matlab 解此非线性方程组[2]，得到入射角 θ_i 和其它参量：

$$\begin{gathered} \theta_i = 1.173220\ \text{rad} = 67.220559^\circ \\ R = 0.14, \quad R_s = 0.256933,\ R_p = 0.023067 \\ T = 0.86, \quad T_s = 0.743067,\ T_p = 0.976933 \end{gathered} \tag{3.5}$$

3.3 光束垂直入射到玻璃-空气界面，玻璃折射率 1.5，求出能量反射率和透射率

$\theta_i = 0$ 时，由菲涅尔定律和能量关系，有：

$$R = \frac{1}{2}(R_s + R_p), \quad T = 1 - R \tag{3.6}$$

$$R_s = \left[\frac{\cos\theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}\right]^2 = \left[\frac{1-n_{ti}}{1+n_{ti}}\right]^2,\ R_p = \left[\frac{n_{ti}^2\cos\theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}{n_{ti}^2\cos\theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}\right]^2 = \left[\frac{n_{ti}^2 - n_{ti}}{n_{ti}^2 + n_{ti}}\right]^2 \tag{3.7}$$

由空气入射玻璃时，$n_{ti} = 1.5$，由玻璃入射空气时，$n_{ti} = \frac{2}{3}$，代入得到：

$$\begin{gathered} \text{空气入射玻璃:}\ R = 0.04, \quad T = 0.96 \\ \text{玻璃入射空气:}\ R = 0.04, \quad T = 0.96 \end{gathered}$$

也即无论从哪边入射，能量反射率和透射率分别为 0.04 和 0.96.

[2]源码见附录 A.2

附录 A. Matlab 代码

A.1 图 3.1 源码

```
%%%%%%%%%% 空气入射玻璃 %%%%%%%%%%
global n_i n_t
n_i = 1;
n_t = 1.5;

theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*
    cos(theta_i - theta_t) );
theta_B = atan(n_t/n_i);
theta_C = asin(n_t/n_i);

theta_array = linspace(-0.1, pi/2, 101);
Y = [
    r_s(theta_array, theta_t(theta_array))
    r_p(theta_array, theta_t(theta_array))
    t_s(theta_array, theta_t(theta_array))
    t_p(theta_array, theta_t(theta_array))
    ];
stc = MyPlot(theta_array, Y);
xline(theta_B, 'b')
yline(0)
xlim([0, pi/2])
ylim([-1, 1])
stc.leg.String = ["$r_s$"; "$r_p$"; "$t_s$"; "$t_p$"; "$\theta_i = \theta_B$"];
stc.leg.Interpreter = "latex";
stc.leg.FontSize = 14;
stc.leg.Location = "southwest";
stc.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
stc.axes.Title.Interpreter = "latex";
stc.label.x.String = '$\theta_i$';
stc.label.y.String = '$r$';
stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
stc.plot.plot_3.Color = 'b';
stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
stc.plot.plot_4.Color = [1 0 1];
%MyExport_pdf

%%%%%%%%%% 玻璃入射空气 %%%%%%%%%%
n_i = 1.5;
n_t = 1;

```

```
theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*cos(theta_i - theta_t) );
theta_B = atan(n_t/n_i);
theta_C = asin(n_t/n_i);


theta_array = linspace(0, theta_C, 101);
Y = [
    r_s(theta_array, theta_t(theta_array))
    r_p(theta_array, theta_t(theta_array))
    t_s(theta_array, theta_t(theta_array))
    t_p(theta_array, theta_t(theta_array))
    ];
stc = MyPlot(theta_array, Y);
xline(theta_B, 'b')
xline(theta_C, 'r')
yline(0)
xlim([0, pi/2])
ylim([-0.5, 3])
stc.leg.String = ["$r_s$"; "$r_p$"; "$t_s$"; "$t_p$"; "$\theta_i = \theta_B$"; "$\theta_i = \theta_C$"];
stc.leg.Interpreter = "latex";
stc.axes.Title.String = '$n_i = 1.5 > n_t = 1$';
stc.axes.Title.Interpreter = "latex";
stc.label.x.String = '$\theta_i$';
stc.label.y.String = '$r$';
stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
stc.plot.plot_3.Color = 'b';
stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
stc.plot.plot_4.Color = [1 0 1];
%MyExport_pdf
```

A.2 公式 3.5 源码

```
R_s = @(n_ti, t) ( (cos(t) - sqrt(n_ti^2 - sin(t)^2)) / (cos(t) + sqrt(n_ti^2 - sin(t)^2)) )^2;
R_p = @(n_ti, t) ( (n_ti^2*cos(t) - sqrt(n_ti^2 - sin(t)^2)) / (n_ti^2*cos(t) + sqrt(n_ti^2 - sin(t)^2)) )^2;

theta_i = fzero(@(t) ( R_s(1.5, t) + R_p(1.5, t) - 2*0.14) , deg2rad(45));
disp(['theta_i = ', num2str(theta_i, '%.6f'), ' rad'])
disp(['theta_i = ', num2str(rad2deg(theta_i), '%.6f'), ' deg'])
disp(['R_s = ', num2str(R_s(1.5, theta_i), '%.6f')])
disp(['R_p = ', num2str(R_p(1.5, theta_i), '%.6f')])
```

```
disp(['T_s = ', num2str(1 - R_s(1.5, theta_i), '%.6f')])
disp(['T_p = ', num2str(1 - R_p(1.5, theta_i), '%.6f')])
disp(['R = ', num2str( 0.5*(R_s(1.5, theta_i) + R_p(1.5, theta_i)) , '%.6f')])
disp(['T = ', num2str( 0.5*(2 - R_s(1.5, theta_i) - R_p(1.5, theta_i)), '%.6f')])

%{
>> Output:
theta_i = 1.173220 rad
theta_i = 67.220559 deg
R_s = 0.256933
R_p = 0.023067
T_s = 0.743067
T_p = 0.976933
R = 0.140000
T = 0.860000
%}
```