1 第五章：动态电路的时域分析

线性电路是电阻、电容和电感等电学特性不随时间变化的电路，由于电压和电流是时间的函数，也就是说，线性电路的各参数不随电压或电流变化而变化。相反，非线性电路中的参数会发生变化，例如二极管作为一个非线性电阻，其阻值是电流的函数，从而是非线性电路。

1.1 一阶动态电路

三要素法：

$$\begin{cases} f(0^+) \\ f_\infty(t) \\ \tau = RC,\ \frac{L}{R} \end{cases} \Longrightarrow f(t) = [f(0^+) - f_\infty(0)] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + f_\infty(t), \quad \forall t \geqslant 0^+ \tag{1}$$

$$\text{线性电路满足：全响应 = 零输入响应 + 零状态响应} \tag{2}$$

MOSFET 缓冲器的传播延迟：

$$t_{\text{pd},0\to1} = R_{\text{ON}} C_{\text{GS}} \cdot \ln\left(\frac{V_{\text{DD}}}{V_{\text{TH}}}\right) \qquad t_{\text{pd},1\to0} = R_{\text{D}} C_{\text{GS}} \cdot \ln\left(\frac{V_{\text{DD}}}{V_{\text{DD}} - V_{\text{TH}}}\right) \tag{3}$$

$t_{\text{pd,out}0\to1}$ 过程：T_1 导通，$C_{\text{GS},2}$ 放电，从 V_S 放电到 $\frac{R_{\text{ON}}}{R_{\text{ON}}+R_D} \cdot V_S \approx 0$，三要素得：

$$u_{o1}(0^+) = V_S,\ u_{o1,\infty} = 0,\ \tau = (R_D \parallel R_{\text{ON}}) C_{GS,2} \approx R_{\text{ON}} C_{GS,2} \tag{4}$$

$$\Longrightarrow u_{o1}(t) = V_S \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = V_{TH} \Longrightarrow t_{\text{pd,out}0\to1} \tag{5}$$

1.2 二阶动态电路

$$y'' + 2\beta y' + \omega_0 y = 0 \tag{6}$$

经典法：y_s 是稳态解、$\omega = \sqrt{|\omega_0^2 - \beta^2|}$

$$\begin{aligned}
&\text{欠阻尼：}\beta < \omega_0,\ y(t) = y_s + e^{-\beta t} A \sin(\omega t + \phi) \\
&\begin{cases} y_s = 0 \Longrightarrow t = \frac{\omega}{\beta + \frac{y'(0)}{y(0)}}\ \text{(可能为负)}, \quad A = y(0) \cdot \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}, \quad \phi = \arctan t \\ y_0 = y_s = 0 \Longrightarrow A = \frac{y'(0)}{\omega}, \quad \phi = 0 \end{cases} \\
&\text{临界阻尼：}\beta = \omega_0,\ y(t) = y_s + e^{-\beta t}(A + Bt) \\
&\begin{cases} A = y(0) - y_s \\ B = \beta y(0) + y'(0) - \beta y_s \end{cases} \\
&\text{过阻尼：}\beta > \omega_0,\ y(t) = y_s + e^{-\beta t}\left(A\, e^{\omega t} + B\, e^{-\omega t}\right) \\
&\begin{cases} A = \frac{1}{2\omega}[y'(0) + (\beta + \omega)(y_0 - y_s)] \\ B = -\frac{1}{2\omega}[y'(0) + (\beta - \omega)(y_0 - y_s)] \end{cases}
\end{aligned} \tag{7}$$

具体电路中，f 可以是 u_C 或 i_L：

$$\text{串联 } RLC\text{：}LCf'' + RCf'' + f = h(t) \tag{8}$$

$$\text{并联 } RLC\text{：}f'' + \frac{f'}{RC} + \frac{f}{LC} = h(t) \tag{9}$$

1.3 冲激响应和阶跃响应

$$\delta_0 = \frac{\mathrm{d}\eta_0}{\mathrm{d}t}, \quad \text{冲激响应 } h(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}, \quad s(t) \text{ 为阶跃响应} \tag{10}$$

注意冲激 δ_0 前的系数是多少，响应的 η_0 也要乘上这个系数。单位冲激 $U_s = \delta_0$ 下的响应为：

类型	RC 串	RC 并	RL 串	RL 并
突变	$\Delta u_C = 1/RC$	$\delta u_C = 1/C$	$\Delta i_L = 1/L$	$\Delta i_L = R/L$

任意激励的瞬态响应，先求出单位冲激响应 $h(t)$，则激励 e 下的零状态响应 H 为：

$$H(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t - \tau) \mathrm{d}\tau \tag{11}$$

2 第六章：正弦激励下电路的稳态分析

2.1 功率

功率：

$$\begin{aligned}
\text{瞬时 (W)：} & p(t) = u(t) \cdot i(t) & (12)\\
\text{有功 (W)：} & P = UI\cos\varphi = I^2 \operatorname{Re}\{Z\} & (13)\\
\text{无功 (var)：} & Q = UI\sin\varphi = I^2 \operatorname{Im}\{Z\} & (14)\\
\text{视在 (V·A)：} & S = UI = I^2|Z| = \sqrt{P^2 + Q^2} & (15)\\
\text{复功率 (V·A)：} & \dot{S} = P + jQ = \dot{U}\dot{I}^* & (16)\\
\text{功率因数：} & \cos\varphi = \frac{\operatorname{Re}\{Z\}}{|Z|} = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}} & (17)
\end{aligned}$$

保持有功功率 P 不变，将阻抗角从 φ_1 改变到 φ_2 (仅影响无功功率 Q)，需要并联的电抗 jX 为：

$$X = \frac{3U^2}{P(\tan\varphi_2 - \tan\varphi_1)} \tag{18}$$

特别地：

$$\text{感性：}\varphi > 0, \quad C = \frac{P(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)}{3\omega U^2} \quad \text{容性：}\varphi < 0, \quad L = \frac{3U^2}{\omega P(\tan\varphi_2 - \tan\varphi_1)} \tag{19}$$

2.2 最大功率传输

考虑实际电源 $(\dot{U}_s, Z_s = R_s + jX_s)$ 接在负载 $Z = R + jX$ 两端，则有功率为：

$$P = \frac{R}{(R + R_s)^2 + (X + X_s)^2} \cdot U_s^2 \tag{20}$$

为使负载获得最大有功功率 P，有以下几种情况：

情况	满足条件	最大功率 $P_{\max}$
改变 X	$X = -X_s$	$\frac{R}{(R+R_s)^2} U_s^2$
改变 R	$R = \sqrt{R_s^2 + (X + X_s)^2}$	$\frac{1}{2(R_s + R)} U_s^2$
改变 X 和 R	$Z = Z_s^*$	$\frac{1}{4R_s} U_s^2$
$\arg Z = \varphi_s$ 不变，$\|Z\|$ 可变	$\|Z\| = \|Z_s\|$	$\frac{\cos\varphi_s}{2\|Z_s\|[1 - \cos(\varphi_s\varphi)]}$

2.3 频率响应

常见一阶滤波器的网络函数 H、相频特性 $\varphi(\omega)$ 与截止频率 ω_c 为：

$$\begin{aligned}
RC\text{低通}, \quad & H = \frac{1}{1 + j\omega CR}, & \varphi = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right), \quad & \omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} \\
RC\text{高通}, \quad & H = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}, & \varphi = 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right), \quad & \omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} \\
RL\text{低通}, \quad & H = \frac{1}{1 + j\omega\frac{R}{L}}, & \varphi = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right), \quad & \omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L} \\
RL\text{高通}, \quad & H = \frac{j\omega\frac{R}{L}}{1 + j\omega\frac{R}{L}}, & \varphi = 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right), \quad & \omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L}
\end{aligned}$$

RC 带通滤波器（经缓冲器隔离）的谐振频率 ω_0 与最大增益 $H_{\max}$：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}, \quad H_{\max} = \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \tag{21}$$

2.4 波特图

求出 H 的表达式，分子为零则零点，分母为零则极点。在画波特图之前，需要先确定 $\lim_{\omega\to0,\infty} \arg H$ 和 $\lim_{\omega\to0,\infty} |H|$。然后：

$$|H|\text{：初始斜率为 0，遇到零点斜率增加 20 dB/dec，遇到极点斜率增加 - 20 dB/dec；} \tag{22}$$

$$\arg H\text{：不受零点影响，经过极点时会有 } 0 \to -45^\circ \to -90^\circ \text{ 的相位下降。} \tag{23}$$

2.5 谐振电路：

$|Z|$ 极小为串联谐振，$|Z|$ 极大为并联谐振。RLC 串联电路发生谐振时，具有如下特点：

(1) $\dot{U}_S$ 和 $\dot{I}$ 同相，入端阻抗 Z 表现为纯电阻，且模长最小；

(2) 在 $\dot{U}_S$ 作为激励下，电流 $\dot{I}$ 达到最大值，响应 $\dot{U}_R$ 达到最大值；

(3) 电容和电感电压的幅值都是 U_S 的 Q 倍，且相位相反，即 $\dot{U}_L = -\dot{U}_C = Q\dot{U}_S$，$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ 为品质因数；

(4) 电源无功功率为 0，只发出有功功率，且完全被电阻消耗；电感与电容之间进行能量交换，与电源没有能量交换。

RLC 并联电路发生谐振时，具有如下特点：

(1) $\dot{U}$ 和 $\dot{I}_S$ 同相，入端导纳 Y 表现为纯电导，且模长最小；

(2) 在 $\dot{I}_S$ 作为激励下，电压 $\dot{U}$ 达到最大值，响应 $\dot{U}_R$ 达到最大值；

(3) 电容和电感电流的幅值都是 I_S 的 Q 倍，且相位相反，即 $\dot{I}_L = -\dot{I}_C = Q\dot{I}_S$，$Q = \omega_0 CR = \frac{R}{\omega_0 L} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ 品质因数；

(4) 电源无功功率为 0，只发出有功功率，且完全被电阻消耗；电感与电容之间进行能量交换，与电源没有能量交换。

2.6 品质因数

$$RLC\text{ 串联：}Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{24}$$

$$RLC\text{ 并联：}Q = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 CR = R\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{25}$$

RLC 串并联电路的归一化频响：

$$I_{\text{norm}} = \frac{I(\eta\,\omega_0)}{I(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}}, \quad \eta = \frac{\omega}{\omega_0} \tag{26}$$

$$\text{WB} = \frac{\omega_0}{Q}, \quad Q\text{ 是谐振电路的品质因数} \tag{27}$$

电感和电容的品质因数：

$$Q_L = \frac{\omega L}{R\text{dcr}}, \quad Q_C = \frac{1}{\omega CR_{\text{esr}}} \tag{28}$$

2.7 互感

无论同名端、电流电压参考方向如何，我们有以下结论：

(1) 电流流入同名端，则为正，流出则为负；

(2) 电压正端在同名端，则无需取反，反之需取反；

上面的结论对多个线圈的互感也适用。

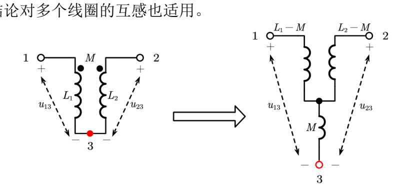


图 1: 电感去耦等效

利用去耦等效计算其电感两端电压，勿忘电感电压参考端会发生移动。

$$\begin{cases} \text{同侧串联：}L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + 2M \\ \text{异侧串联：}L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 - 2M \end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases} \text{同侧并联：}L_{\text{eq}} = M + (L_1 - M) \parallel (L_2 - M) \\ \text{异侧并联：}L_{\text{eq}} = -M + (L_1 + M) \parallel (L_2 + M) \end{cases} \tag{30}$$

2.8 变压器

非理想变压器等效：

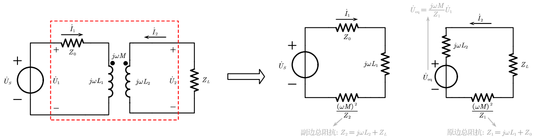


图 2: 非理想变压器的等效

$$\text{原边引入阻抗：}\frac{(\omega M)^2}{Z_2} \tag{31}$$

$$\text{副边引入阻抗：}\frac{(\omega M)^2}{Z_1}, \quad \text{副边引入电源：}\dot{U}_{\text{eq}} = \frac{j\omega M}{Z_1}\dot{U}_1 \tag{32}$$

当耦合系数 $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1$ 时，称为全耦合，此时将变压器看作二端口网络，则有：

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{j\omega L_1} + \frac{1}{n}(-\dot{I}_2) \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ \frac{1}{j\omega L_1} & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow T = \begin{bmatrix} n & 0 \\ \frac{1}{j\omega L_1} & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

上面的变压器称为全耦合变压器，其中 $n \propto \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$。特别地，当 L_1 足够大时，$\frac{\dot{U}_1}{j\omega L_1}$ 一项可以忽略，此时有：

$$\dot{U}_1 = n\dot{U}_2, \quad \dot{I}_1 = -\frac{1}{n}\dot{I}_2 \tag{33}$$

即为喜闻乐见的理想变压器。理想变压器具有负载“放大”功能，设原线圈比幅线圈为 n，则在原线圈中有：

$$Z_{\text{eq}} = n^2 Z \tag{34}$$

2.9 三相电路

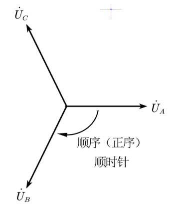
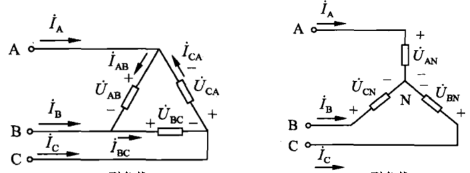


图 3: 三相电路的线序

$$\triangle\text{ 型负载：}\begin{cases} \dot{I}_A = \sqrt{3}\,\dot{I}_{AB}\angle -30^\circ \\ \dot{I}_B = \sqrt{3}\,\dot{I}_{BC}\angle -30^\circ \\ \dot{I}_C = \sqrt{3}\,\dot{I}_{CA}\angle -30^\circ \end{cases}, \quad Y\text{ 型负载：}\begin{cases} \dot{U}_{AB} = \sqrt{3}\,\dot{U}_{AN}\angle 30^\circ \\ \dot{U}_{BC} = \sqrt{3}\,\dot{U}_{BN}\angle 30^\circ \\ \dot{U}_{CA} = \sqrt{3}\,\dot{U}_{CN}\angle 30^\circ \end{cases}$$



(a) △ 型负载 (b) Y 型负载

图 4: 对称负载三相电路

△ 型电源和 △ 型负载变换为 Y 型：

$$\begin{cases} \dot{U}_{AN} = \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{U}_{AB}\angle -30^\circ \\ \dot{U}_{BN} = \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{U}_{BC}\angle -30^\circ \\ \dot{U}_{CN} = \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{U}_{CA}\angle -30^\circ \end{cases}, \quad Z_Y = \frac{Z_\triangle}{3} \tag{35}$$

对称负载 $\dot{U}_{N'N} \equiv 0$，$\dot{I}_{N'N} \equiv 0$，Z_N 对电路没有影响（虚短 + 虚断）。

2.9.1 非对称三相电路

负载不对称时，需要区分有没有中线。如果存在中线（$Z_N = 0$），负载电压仍等于相电压，直接抽单相计算即可；如果不存在中线（$Z_N = \infty$），：

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\frac{\dot{U}_{AN}}{Z_A} + \frac{\dot{U}_{BN}}{Z_B} + \frac{\dot{U}_{CN}}{Z_C}}{\frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} + \frac{1}{Z_C}} \tag{36}$$

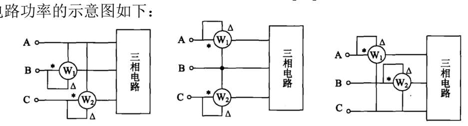
$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AN} - \dot{U}_{N'N}}{Z_A}, \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{BN} - \dot{U}_{N'N}}{Z_B}, \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{CN} - \dot{U}_{N'N}}{Z_C} \tag{37}$$

2.10 三相电路的功率

将相电压、相电流的下标用 p 表示 (phase)，将线电压、线电流的下标用 l 表示 (line)，则对称三相电路的各功率为：

$$P = 3U_p I_p \cos\varphi, \quad Q = 3U_p I_p \sin\varphi, \quad S = 3U_p I_p \dot{S} = 3\dot{U}_p \dot{I}_p^* \tag{38}$$

可以推出，对称三相电路的瞬时功率 $p \equiv 3U_P I_P \cos\varphi = P$。两表法测三相电路功率的示意图如下：



(a) 共 A 接法 (b) 共 B 接法 (c) 共 C 接法

图 5: 两表法测三相电路功率

以共 C 接法为例，两表的功率示数为：

$$P_1 = U_{AC} I_A \cos(\varphi_{u_{AC}} - \varphi_{i_A}), \quad P_2 = U_{BC} I_B \cos(\varphi_{u_{BC}} - \varphi_{i_B}) \tag{39}$$

设 Y 型电源下的 $\dot{U}_A$，$\dot{I}_A$ 已知，则 $U_{AB} = \sqrt{3}U_A\angle 30^\circ$，设功率因数为 φ，则两表读数为：

$$P_1 = \sqrt{3}U_A I_A \cos(\varphi - 30^\circ), \quad P_1 = \sqrt{3}U_A I_A \cos(\varphi + 30^\circ) \tag{40}$$

2.11 提高功率因数

为提高功率因数，同时考虑到安全性，通常对感性电路（$\varphi > 0$，电压带动电流）并联 Y 型电容组，对容性电路（$\varphi < 0$，电流带动电压）并联 Y 型电感组。并联电容时计算公式如下：

$$\varphi > 0, \quad \text{感性：}C = \frac{P(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)}{3\,\omega U^2} \tag{41}$$

如果上式计算出 $C < 0$，则需要并联电感，计算公式为：

$$\varphi < 0, \quad \text{容性：}L = \frac{3U^2}{\omega\,P(\tan\varphi_2 - \tan\varphi_1)} \tag{42}$$

等价地讲，为了将一个 φ_1 变换到 φ_2，需要并联的电抗 X 为：

$$X = \frac{3U^2}{P(\tan\varphi_2 - \tan\varphi_1)}, \quad Z = jX = j\frac{3U^2}{P(\tan\varphi_2 - \tan\varphi_1)} \tag{43}$$

也可以考虑并联 △ 型电容，但 Y 型时电容承受相电压，△ 型承受线电压（通常更大），后者耐压要求更高。

2.12 周期性非正弦激励的电路稳态分析

通常是计算非正弦激励下的电压、电流或功率，只需分解为多个频率量，分别计算后利用叠加定理相加即可。注意不同频率下元件的阻抗不同，灵活运用串联、并联谐振以简化分析。功率之所以可以直接相加，是因为其为“不同频率”激励下的功率，而不是早先讨论的纯直流激励下的功率，前者互不影响，后者不能直接相加。需要注意，若已知非正弦激励下的电压有效值和电流有效值，不能简单的用 $P = UI\cos\varphi$ 来求有功功率 P，因为不同频率分量的 φ 不同。需要分别计算后将它们相加才可。注意变压器在 DC 不起作用。

3 其它

3.1 Y 型与 △ 型电阻

$$\begin{aligned} &\text{由 Y 求 }\triangle\text{：}\ R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}, \quad R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2} \\ &\text{由 }\triangle\text{ 求 Y：}\ R_1 = \frac{R_{12} R_{13}}{R_0}, \quad R_2 = \frac{R_{21} R_{23}}{R_0}, \quad R_0 = R_{12} + R_{13} + R_{23} \end{aligned} \tag{44}$$

3.2 二端口

传输矩阵 $\boldsymbol{T}$：

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}, \quad \text{互易：}AD - BC = 1, \quad \text{对称：}A = D \tag{45}$$

二端口吸收的功率：

$$P = u_1 i_1 + u_2 i_2 \tag{46}$$

若一个二端口网络 N 是对称的，则当 u_1, i_1, u_2, i_2 已知时，其传输矩阵的计算公式如下：

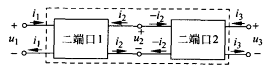
$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i_1}{i_2} & \frac{u_1}{i_2} \\ \frac{A^2-1}{B} & \frac{i_1}{i_2} \end{bmatrix} \tag{47}$$

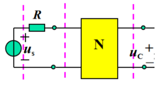
二端口级联：

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_1 \cdot \boldsymbol{T}_2 \tag{48}$$

与电阻级联：

$$T = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + CR & B + DR \\ C & D \end{bmatrix} \tag{49}$$





注意如果 R 在右边，乘法顺序相反。

3.3 杂七杂八

(1) 三相电路：三线即为 △ 型，需除以 $\sqrt{3}$；

(2) 380 V $\xrightarrow{\frac{1}{\sqrt{3}}}$ 220 V；

(3) 感性 $\varphi = 40^\circ$，$\dot{U} = 220\angle 0$，则 $\dot{I} = 10\angle -40^\circ$；

(4) 家用电频率、工频 50 Hz；

(5) 注意变压器在 DC 不起作用；