数学物理方法课程作业

Homework of Mathematical Physics Methods

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

序言

本文为笔者本科时的“数学物理方法”课程作业（Homework of Mathematical Physics Methods, 2024.9-2025.1）。由于个人学识浅陋，认识有限，文中难免有不妥甚至错误之处，望读者不吝指正，在此感谢。

我的邮箱是 dingyi233@mails.ucas.ac.cn。

目录

序言 I

目录 I

Homework 1: 2024.8.26 - 2024.9.1 1

Homework 2: 2024.9.2 - 2024.9.8 3

Homework 3: 2024.9.9 - 2024.9.15 7

Homework 4: 2024.9.16 - 2024.9.22 11

Homework 5: 2024.9.23 - 2024.9.29 13

Homework 6: 2024.10.8 - 2024.10.14 16

Homework 7: 2024.10.15 - 2024.10.16 20

Homework 8: 2024.10.15 - 2024.10.21 21

Homework 9: 2024.10.22 - 2024.10.28 23

Homework 10: 2024.10.29 - 2024.11.04 27

Homework 11: 2024.11.05 - 2024.11.11 29

Homework 12: 2024.11.12 - 2024.11.18 31

Homework 13: 2024.11.19 - 2024.11.25 32

Homework 14: 2024.11.26 - 2024.12.02 34

Homework 15: 2024.12.03 - 2024.12.09 35

Homework 16: 2024.12.10 - 2024.12.16 37

Homework 17: 2024.12.17 - 2024.12.23 38

Homework 1: 2024.8.26 - 2024.9.1

1.1 计算

(1) $(\frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}})^2$

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2=\left(\frac{(1+i)(2+i)}{5}\right)^2=\left(\frac{1+3i}{5}\right)^2=\frac{-8+6i}{25}$$

(2) $(1+i)^n+(1-i)^n$

首先得到：

$$1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},\ 1-i=\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$
$$\Longrightarrow I=2^{\frac{n}{2}}\left(e^{i\frac{n\pi}{4}}+e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right)$$

于是有：

$$I=\begin{cases}2^{\frac{n}{2}+1}, & n=0+4k\\ 2^{\frac{n+1}{2}}, & n=1+4k\\ 0\quad, & n=2+4k\\ -2^{\frac{n}{2}+1}, & n=3+4k\end{cases},\quad k\in\mathbb{N}$$

习题课补：

$$\begin{aligned}I&=2^{\frac{n}{2}}\left(e^{i\frac{n\pi}{4}}+e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right)\\&=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos(\frac{n\pi}{4})+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos(-\frac{n\pi}{4})+i\sin(-\frac{n\pi}{4})\right)\\&=2^{\frac{n}{2}+1}\cos(\frac{n\pi}{4})\end{aligned}$$

(3) $\sqrt[4]{1+i}$

$$\sqrt[4]{1+i}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{\pi}{16}}$$

习题课补：在复数域中，开根号是多值函数，这里四次根在复数域中应有四个复根，设 $x=\sqrt[4]{1+i}$，则原式等价于方程：

$$x^4=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\Longrightarrow|x|=2^{\frac{1}{8}},\quad\arg x=\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{2},k=0,1,2,3$$

1.2 将复数化为三角或指数形式

(1) $\frac{5}{-3+i}$

$$\frac{5}{-3+i}=\frac{5e^{i0}}{\sqrt{10}e^{i(\arctan(-\frac{1}{3})+\pi)}}=\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot e^{-i(\arctan(-\frac{1}{3})+\pi)}$$

(2) $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$

$$\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}e^{i\arctan(\frac{1}{2})}}{\sqrt{13}e^{i\arctan(-\frac{2}{3})}}\right)^2=\frac{5}{13}e^{2i\left(\arctan(\frac{1}{2})-\arctan(-\frac{2}{3})\right)}$$

1.3 求极限 $\lim_{z\to i}\frac{1+z^6}{1+z^{10}}$

作不完全因式分解：

$$1+z^6=z^6-i^6=(z^3-i^3)(z^3+i^3)=(z-i)(z^2+iz+i^2)(z^3+i^3)$$

$$
\begin{aligned}
1+z^{10}=z^{10}-i^{10}=(z^5-i^5)(z^5+i^5)&=(z-i)(z^4+iz^3+i^2z^2+i^3z+i^4)(z^5+i^5)\\
\Longrightarrow L=\lim_{z\to i}\frac{1+z^6}{1+z^{10}}&=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)(z^2+iz+i^2)(z^3+i^3)}{(z-i)(z^4+iz^3+i^2z^2+i^3z+i^4)(z^5+i^5)}\\
&=\lim_{z\to i}\frac{(z^2+iz+i^2)(z^3+i^3)}{(z^4+iz^3+i^2z^2+i^3z+i^4)(z^5+i^5)}\\
&=\frac{(-3)\times(-2i)}{5i}=\frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

事实上，实数域上的洛必达法则（L'Hospital）可以推广到复数域的解析函数，下面给出 $\frac{0}{0}$ 型的证明。设复变函数 $f(z),g(z)$ 在 $z=z_0$ 解析，且 $f(z_0)=g(z_0)=0$，则有：

$$
\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}
$$

特别地，若 $f'(z_0)$ 与 $g'(z_0)$ 存在且不为零，就有 $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$

1.4 讨论函数在原点的连续性

(1) $f(z)=\begin{cases}\frac{1}{2i}(\frac{z}{z^*}-\frac{z^*}{z}), & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$

令 $z=x+iy, x,y\in\mathbb{R}$，则 $\forall\,(x,y)\neq(0,0)$:

$$
f(x,y)=\frac{1}{2i}\left(\frac{x+iy}{x-iy}-\frac{x-iy}{x+iy}\right)=\frac{1}{2i}\cdot\frac{4ixy}{x^2+y^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}
$$

令 $k=\frac{y}{x}$，则：

$$
L=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2k}{1+k^2}
$$

显然，L 随着 k 的变化而变化，因此极限不存在，$f(z)$ 在 0 处不连续。

(2) $f(z)=\begin{cases}\frac{\operatorname{Im} z}{1+|z|}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$

令 $z=x+iy$ 和 $k=\frac{y}{x}$，则 $\forall\,(x,y)\neq(0,0)$:

$$
f(x,y)=\frac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\Longrightarrow\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\frac{0}{1+0}=0=f(0,0)
$$

因此 $f(z)$ 在 0 处连续。

(3) $f(z)=\begin{cases}\frac{\operatorname{Re} z^2}{|z^2|}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$

同理令 $z=x+iy$ 和 $k=\frac{y}{x}$，则 $\forall\,(x,y)\neq(0,0)$:

$$
f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}
$$

因此 $f(z)$ 在 0 处不连续。

1.5 恒等式证明（附加题）

$$
\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right|^2=\sum_{i=1}^n|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^n|b_i|^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left|a_ib_j^*-a_jb_i^*\right|^2
$$

Homework 2: 2024.9.2 - 2024.9.8

2.1 下列函数在何处可导，何处解析

(1) $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$

设 $z = x + iy$，则 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = x^2 + ixy$。$\forall\, z \in C$，$u(x,y) = x^2$ 和 $v(x,y) = xy$ 在 $\mathbb{C}$ 上有连续一阶偏导，下面考虑 C-R 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x \tag{2.2}$$

联立 C-R 条件，得 $(x,y) = (0,0)$，因此 f 在 $(0,0)$ 处可导，在 $\mathbb{C}$ 上不解析。不在点 $(0,0)$ 上解析是因为在某点解析是指在此点的有心邻域上解析，显然这里不满足，因此 $(0,0)$ 为奇点。

后补：

u,v 有一阶连续偏导且满足 C-R 条件 $\Longrightarrow$ u,v 可微且满足 C-R 条件 $\Longleftrightarrow$ f 可微 $\Longleftrightarrow$ f 可导

(2) $f(x,y) = (x-y)^2 + 2i(x+y)$

$\forall\, z \in C$，$u(x,y) = (x-y)^2$ 和 $v(x,y) = 2(x+y)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有连续一阶偏导，下面验证 C-R 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x-y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2(x-y) \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \tag{2.4}$$

联立 C-R 条件后无解，因此 f 在 $\mathbb{C}$ 上不可导，在 $\mathbb{C}$ 上不解析。

2.2 求下列函数的解析区域

(1) $f(z) = xy + iy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

欲满足 C-R 条件，则：

$$y = 1,\ x = 0 \Longrightarrow f \text{ 在全平面不解析}$$

不在点 $(0,1)$ 上解析是因为在某点解析是指在此点的有心邻域上解析，显然这里不满足。

(2) $f(z) = \begin{cases} |z| \cdot z, & |z| < 1 \\ z^2, & |z| \geqslant 1 \end{cases}$

设 $z = x + iy$，则：

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \begin{cases} (x\sqrt{x^2+y^2}) + i(y\sqrt{x^2+y^2}), & \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ (x^2-y^2) + i(2xy), & \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow u(x,y) = \begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2}, & \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ x^2-y^2, & \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 1 \end{cases}, \quad v(x,y) = \begin{cases} y\sqrt{x^2+y^2}, & \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ 2xy, & \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 1 \end{cases}$$

分别求偏导得到：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}, \quad \sqrt{x^2+y^2} < 1 \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, & \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, & \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \end{cases}, \quad \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 1$$

偏导要满足 C-R 条件，代入得到：

$$x^2 = y^2,\ 2xy = 0, \quad \forall \sqrt{x^2+y^2} < 1, x^2+y^2 \neq 0$$
$$2x = 2x,\ -2y = -2y, \quad \forall \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 1$$
$$\Longrightarrow f(z) \text{ 在 } \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geqslant 1\} \text{ 上解析}$$

不在点 $(0,0)$ 上解析是因为在某点解析是指在此点的有心领域上解析，显然这里不满足。

后补：解析区域必须是开集（因为受"有心邻域"限制），f 的解析区域应为 $\{z \mid |z|>1\}$。另外，$|z|=1$ 代表的圆周上也不可微，这是因为 f 在 $|z|=1$ 上不连续（内部是一倍幅角，外部是二倍幅角），所以可微区域也为 $\{z \mid |z|>1\}$。

2.3 已知解析函数 $f(z)$ 的实部如下，求 $f(z)$

(1) $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$

$$v'_x = -u'_y = 2y, \quad v'_y = u'_x = 2x+1$$
$$\Longrightarrow v(x,y) = \int 2y\ \mathrm{d}x + \int \mathrm{d}y = 2xy + y + C$$
$$\Longrightarrow f(x,y) = (x^2+y^2+x) + i(2xy+y) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

(2) $u(x,y) = e^y \cos x$

$$v'_x = -u'_y = -e^y \cos x, \quad v'_y = u'_x = -e^y \sin x$$
$$\Longrightarrow v(x,y) = \int -e^y \cos x\ \mathrm{d}x + \int 0\ \mathrm{d}y = -e^y \sin x + C$$
$$\Longrightarrow f(x,y) = (e^y \cos x) + i(-e^y \sin x + C), \quad C \in \mathbb{R}$$

2.4 f 解析，且 $u - v = (x-y)(x^2+4xy+y^2)$，求 $f(z)$

两边分别对 x, y 求导，得到：

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 + 6xy - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 6xy - 3y^2$$

联立 C-R 条件，可以解出：

$$v'_x = -3x^2 + 3y^2, \quad v'_y = 6xy$$
$$u'_x = 6xy, \quad u'_y = 3x^2 - 3y^2$$
$$\Longrightarrow v(x,y) = -x^3 + 3xy^2 + C, \quad u(x,y) = 3x^2y - y^3 + C$$
$$\Longrightarrow f(x,y) = (3x^2y - y^3) + i(-x^3 + 3xy^2) + C(1+i),\ C \in \mathbb{R}$$

后补：u 和 v 中的实常数 C 其实是同一个！这是因为题目中 $u-v$ 没有常数项，说明两者积分常数相同。

2.5 极坐标 C-R 条件

证明极坐标下的 C-R 条件为：

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

极坐标变换：

$$
\begin{gathered}
x = x(r,\theta) = r\cos\theta, \quad y = y(r,\theta) = r\sin\theta \\
\Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta,\ \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta,\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta,\ \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta
\end{gathered}
$$

由复合函数的求导法则：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}u\left(x(r,\theta),y(r,\theta)\right) &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\cdot\sin\theta \\
\frac{\partial}{\partial \theta}v\left(x(r,\theta),y(r,\theta)\right) &= \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\cdot r\sin\theta + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\cdot r\cos\theta \\
\frac{\partial}{\partial \theta}u\left(x(r,\theta),y(r,\theta)\right) &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot r\sin\theta + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\cdot r\cos\theta \\
\frac{\partial}{\partial r}v\left(x(r,\theta),y(r,\theta)\right) &= \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\cdot\sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \begin{cases} u'_r = u'_x\cos\theta + u'_y\sin\theta, & u'_\theta = r\left(-u'_x\sin\theta + u'_y\cos\theta\right) \\ v'_r = v'_x\cos\theta + v'_y\sin\theta, & v'_\theta = r\left(-v'_x\sin\theta + v'_y\cos\theta\right) \end{cases}
$$

联立 C-R 条件，化简得到：

$$
\begin{cases} u'_r = v'_y\cos\theta - v'_x\sin\theta, & u'_\theta = r\left(-v'_y\sin\theta - v'_x\cos\theta\right) \\ v'_r = -u'_y\cos\theta + u'_x\sin\theta, & v'_\theta = r\left(u'_y\sin\theta + u'_x\cos\theta\right) \end{cases}
$$

将两个大括号中的内容作对比，立即得到：

$$
u'_r = \frac{1}{r}v'_\theta, \quad v'_r = -\frac{1}{r}u'_\theta \tag{2.6}
$$

反之也可以化为原 C-R 条件，因此 C-R 条件在极坐标下的形式为：

$$
\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \square
$$

2.6 证明 $f(z)$ 和 $\overline{f(\bar{z})}$ 同解析或同不解析

(1) $f(z)$ 解析 $\Longrightarrow \overline{f(\bar{z})}$ 解析

假设 $f(z)$ 在点 $z = z_0$ 解析，即 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在有心邻域 $U_\delta(z_0)$ 上解析，这等价于 $f(z)$ 有一阶导，且在邻域内满足 C-R 条件。设 $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = u(x,-y) - iv(x,-y)$，也即：

$$
g(z) = u_g(x,y) + iv_g(x,y), \quad u_g(x,y) = u(x,-y),\ v_g(x,y) = -v(x,-y)
$$

容易验证 $g(z)$ 有一阶偏导，下面验证 C-R 条件：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_g}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,-y), \quad \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{\partial u(x,-y)}{\partial(-y)}\cdot\frac{\partial(-y)}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,-y) \\
\frac{\partial v_g}{\partial x} &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,-y), \quad \frac{\partial v_g}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,-y)}{\partial(-y)}\cdot\frac{\partial(-y)}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}(x,-y)
\end{aligned}
$$

联立 u 和 v 的 C-R 条件，得到：

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u_g}{\partial x} - \frac{\partial v_g}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,-y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x,-y) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u_g}{\partial x} = \frac{\partial v_g}{\partial y} \\
\frac{\partial u_g}{\partial y} + \frac{\partial v_g}{\partial x} = -\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,-y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,-y)\right] = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u_g}{\partial y} = -\frac{\partial v_g}{\partial x}
\end{gathered}
$$

因此 $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ 也解析。

(2) $f(z)$ 解析 $\Longleftarrow$ $\overline{f(\bar{z})}$ 解析

假设 $\overline{f(\bar{z})}$ 解析，令 $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$，则 $f(z) = \overline{g(\bar{z})}$，由 (1) 的结论，$g(z)$ 解析 $\Longrightarrow f(z) = \overline{g(\bar{z})}$ 也解析。

证毕。$\square$

Homework 3: 2024.9.9 - 2024.9.15

3.1 若 $f(z)$ 解析，$\arg f(z)$ 是否为调和函数？

注：下面的过程仅讨论了 $\arg f(z)$ 的解析性，未能揭示其调和性，正确的解答见后文补充的灰色小字。

(1) 当 $f(z)=C\in\mathbb{C},\forall z\in G$，也即 $f(z)$ 恒为常量时：$\arg f(z)$ 也为常量，设 $\arg f(z)=a+ib$，则 $a=\arg f(z)\in R$ 而 $b=0$，自然满足 $\Delta a=\Delta b=0$，因此 $\arg f(z)$ 为调和函数。

(2) 当 $f(z)$ 是非常量函数时：

由 $\ln z=\ln|z|+i\arg z$，移项，并作映射 $z\to f(z)$，则有：

$$\arg f(z)=\frac{1}{i}\left(\ln f(z)-\ln\rho\right)$$

函数 ln 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上解析，但对于函数 $\rho=\rho(z)$：

$$\rho=\sqrt{u^2+v^2}\Longrightarrow u_\rho=\sqrt{u^2+v^2},v_\rho=0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial x}=\frac{uu_x'}{\sqrt{u^2+v^2}}+\frac{vv_x'}{\sqrt{u^2+v^2}},\quad \frac{\partial u_\rho}{\partial y}=\frac{uu_y'}{\sqrt{u^2+v^2}}+\frac{vv_y'}{\sqrt{u^2+v^2}} \tag{3.2}$$

假设 ρ 满足 C-R 条件，代入得到：

$$\begin{cases}uu_x'+vv_x'=0\\ uu_y'+vv_y'=0\\ \sqrt{u^2+v^2}\neq 0\end{cases}$$

由于 $f(z)$ 解析，满足 C-R 条件 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，代入后整理得到：

$$\begin{cases}v(v_y'^2-u_y'^2)=0\\ u(u_y'^2+v_y'^2)=0\end{cases}$$

$f(z)$ 非常量，因此 u,v 非常量，因此只能有：

$$v_y'=u_y'=0\Longrightarrow u_x'=v_x'=0\Longrightarrow u \text{ 和 } v \text{ 为常量函数}$$

这使得 $f(z)=u+iv$ 是常量，矛盾！因此 $\arg f(z)$ 不解析（这能否推出不调和？解析是调和的充分条件，但是充要的吗？事实上并不是，因此并不能揭示调和性）。

后补：即使仅从解析性的角度来看，上面的过程也没有抓到主要矛盾，是舍本逐末了。因为无论 $f(z)$ 的性质如何，$\arg f(z)$ 始终是 $\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}$ 的函数，这表明 $\arg f(z)$ 是实部是它本身而虚部恒为 0，因此，由 C-R 条件可知 $\arg f(z)$ 解析的必要条件是实部为常数，而这也是充分条件。

对 $\arg f(z)$ 的调和性，我们有如下推导：

$$\arg f(z)=\arctan\frac{u(x,y)}{v(x,y)}+A,\quad A\in\{0,\pi\} \tag{3.3}$$

令 $g(z)=\arg f(z)$，则有：

$$g_x'=\frac{uv_x'-u_x'v}{u^2+v^2},\quad g_{xx}''=\frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left[(u^2+v^2)(uv_{xx}''+u_{xx}''v)-2uv(v_x^2-u_x^2)-2(u^2-v^2)u_x'v_x'\right] \tag{3.4}$$

对 y 求导也是同理，只需将上面的角标 x 换为 y，于是有 Δg:

$$\begin{aligned}\Delta g&=g_{xx}''+g_{yy}''\\&=\frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left[(u^2+v^2)(u(v_{xx}''+v_{yy}'')+(u_{xx}''+u_{yy}'')v)-2uv(v_x^2+v_y^2-u_x^2-u_y^2)-2(u^2-v^2)(u_x'v_x'+u_y'v_y')\right]\end{aligned}$$

f 解析意味着 u,v 构成一对共轭调和函数，有 $\Delta u=\Delta v=0$，代入上式，再代入 C-R 条件，容易验证右边为 0，也即证明了 $\Delta g=0$，因此 $\arg f(z)$ 为调和函数。对 $u^2+v^2=0$ 的情况，我们不再赘述，只关心普遍结论。

3.2 从已知的实虚部求出解析函数 $f(z)$

(1) $u = e^x(x\cos y - y\sin y) + 2\sin x \cdot \sinh y + x^3 - 3xy^2 + y$

$$u'_x = e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y) + 2\cos x\sinh y + 3x^2 - 3y^2 \tag{3.5}$$
$$u'_y = e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y) + 2\sin x\cosh y - 6xy + 1 \tag{3.6}$$

由 C-R 条件，$v'_x = -u'_y$, $v'_y = u'_x$，于是得到：

$$v(x,y) = \int(-u'_y)\mathrm{d}x + \int(-3y^2)\mathrm{d}y \tag{3.7}$$
$$= (x-1)e^x\sin y + (\sin y + y\cos y)e^x + 2\cos x\cosh y + 3x^2y - x - y^3 + C \tag{3.8}$$
$$= (x\sin y + y\cos y)e^x + 2\cos x\cosh y + 3x^2y - x - y^3 + C,\ C\in\mathbb{R} \tag{3.9}$$

令 $(x,y)=(z,0)$，得到：

$$u(z,0) = ze^z + z^3, \quad v(z,0) = 2\cos z - z + C,\ C\in\mathbb{R} \tag{3.10}$$

于是得到 $f(x,y)$:

$$f(z) = [u(x,y) + iv(x,y)]_{x=z,y=0} = (ze^z + z^3) + i(2\cos z - z + C),\ C\in\mathbb{R}$$

(2) $v = \ln(x^2+y^2) + x - 2y$

$$v'_x = \frac{2x}{x^2+y^2} + 1, \quad v'_y = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2$$

由 C-R 条件，$u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$，于是得到：

$$u(x,y) = \int v'_y\mathrm{d}x + \int(-1)\mathrm{d}y = 2\arctan\frac{x}{y} - 2x - y + C \tag{3.11}$$

$$f(x,y) = u + iv = (2\arctan\frac{x}{y} - 2x - y + C) + i(\ln(x^2+y^2) + x - 2y),\ C\in\mathbb{R}$$

后补，这里之所以没有令 $(x,y)=(z,0)$ 得到 $f(z)$，是因为函数 $\arctan\frac{x}{y}$ 在实轴附近是不连续的，例如在正实轴 $x>0$ 附近，$\lim_{y\to0^+}$ 时趋于 $+\infty$ 而 $\lim_{y\to0^-}$ 时趋于 $-\infty$。而映射 $(x,y)=(z,0)$ 的必要条件是解析域中包含实轴，这涉及到解析延拓的内容，我们不提。只需要写到 $f(x,y)$ 的形式就这样放着即可。

3.3 求下列函数的值

(1) $\cos(2+i)$
由 $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$，可得：

$$\cos(2+i) = \frac{1}{2}\left[e^{i(2+i)} + e^{i(2-i)}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{2i-1} + e^{1-2i}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[(\frac{1}{e}+e)\cos 2 + i(\frac{1}{e}-e)\sin 2\right]$$

(2) $\mathrm{Ln}\,(2-3i)$
由 $\mathrm{Ln}\,z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z$，可得：

$$\mathrm{Ln}\,(2-3i) = \ln|2-3i| + i\,\mathrm{Arg}\,(2-3i) = \frac{1}{2}\ln 13 + i\left(\arctan(-\frac{3}{2}) + 2k\pi\right), \quad k\in\mathbb{Z}$$

(3) $\mathrm{Arccos}\,(\frac{3+i}{4})$

$\arccos z = -i\ln(z+\sqrt{z^2-1})$，于是：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Arccos}\,(\frac{3+i}{4}) &= -i\,\mathrm{Ln}\left(\frac{3+i}{4}+\sqrt{(\frac{3+i}{4})^2-1}\right) = -i\,\mathrm{Ln}\left(\frac{3+i}{4}+\frac{\sqrt{-8+6i}}{4}\right) \\
&= -i\,\mathrm{Ln}\left(\frac{3+i}{4}\pm\frac{1+3i}{4}\right) = -i\,\mathrm{Ln}\,(1+i) \text{ 或 } -i\,\mathrm{Ln}\,(\frac{1-i}{2}) \\
&= (\frac{\pi}{4}+2k\pi) - i\frac{\ln 2}{2} \text{ 或 } -(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i\frac{\ln 2}{2}, \quad k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

(4) $\mathrm{Arctan}\,(1+2i)$

由 $\mathrm{Arctan}\,z = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1+iz}{1-iz}$，得：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Arctan}\,(1+2i) &= \frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1+i(1+2i)}{1-i(1+2i)}\right) = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{-1+i}{3-i}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\mathrm{Ln}\,(-2+i)-\ln 5\right) = \frac{1}{2i}\left[-\frac{\ln 5}{2}+i\left(\pi-\arctan(-\frac{1}{2})+2k\pi\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\pi-\arctan(-\frac{1}{2})+2k\pi\right)+i\frac{\ln 5}{4}, \quad k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

3.4 判断下列函数是单值还是多值函数

(1) $\sin\sqrt{z}$

多值函数。$\sqrt{z}$ 为双值函数，$a^2=z\Longrightarrow\sqrt{z}=\pm a$，而 sin 为奇函数，$\sin a\neq\sin(-a)$，故为多值函数。

(2) $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$

单值函数。$\frac{\sin a}{a}=\frac{\sin(-a)}{-a}$，因此为单值函数。

(3) $\frac{\cos\sqrt{z}}{z}$

单值函数。$\frac{\cos a}{a^2}=\frac{\cos(-a)}{(-a)^2}$，故为单值函数。

3.5 解方程：$2\cosh^2 z-3\cosh z+1=0$

原方程等价于：

$$
(2\cosh z-1)(\cosh z-1)=0\Longrightarrow\cosh z=\frac{1}{2}\text{ 或 }1 \tag{3.12}
$$

$$
\xRightarrow{\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}} e^z=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\text{ 或 }1 \tag{3.13}
$$

$$
\Longrightarrow z=i(\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi)\text{ 或 }i(0+2k\pi), \quad k\in\mathbb{Z} \tag{3.14}
$$

3.6 求下列多值函数的分支点

(1) $\sqrt{1-z^3}$ 的分支点：$1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\infty$

宗量 $1-z^3$ 不妨记为 $1-z^3=(z_1-z)(z_2-z)(z_3-z)$。支点仅可能在宗量的零点、奇点处出现，下面分别考察 z_1,z_2,z_3,∞ 四点。

对 z_1，取仅包含点 z_1 的简单闭合曲线，曲线上一点 z 沿逆时针绕一圈回到原处，因子 (z_1-z) 的幅角增加了 2π，因子 (z_2-z) 和 z_3-z 的幅角增加了 0，因此整个宗量的幅角增加 2π，开根后，函数值幅角增加 π，前后不相等。因此点 z_1 是分支点。同理可得 z_2 和 z_3 是分支点。

对 ∞，取包含点 z_1, z_2, z_3 的简单闭合曲线，曲线上一点 z 沿顺时针（不是逆时针）绕一圈回到原处，整个宗量的幅角增加了 -6π，开根后函数值幅角增加 -3π，因此 ∞ 也是分支点。

(2) $\operatorname{Ln}\cos z$ 的分支点：$\infty,\ \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$。

可以证明，$\operatorname{Ln} f(z)$ 的分支点等价于方程 $f(z)=0$ 和 $f(z)=\infty$ 的解[①]。于是分别令 $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ 为 0 和 ∞，解得：

$$z=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\text{ 或}z=\infty \tag{3.15}$$

(3) $\sqrt{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}$ 的分支点：$0,1,2,\infty$

考虑点 $0,1,2$，取仅包含点 0 的简单闭合曲线，曲线上一点 z 逆时针绕一圈后，宗量整体幅角增加 2π，函数值幅角增加 π，因此点 0 是分支点。同理点 1 和 2 也是分支点。

对 ∞，取包含点 $0,1,2$ 的简单闭合曲线，曲线上一点 z 顺时针绕一圈后，宗量整体幅角增加 -2π，函数值也不发生变化，∞ 不是分支点。

(4) $\operatorname{Ln}\frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)}$ 的分支点：a,b,c,∞

与 (2) 同理，考虑宗量 $\frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)}$ 的零点和无穷点，得到 $z=a,b,c,\infty$，即为所求分支点。

[①]这是助教在习题课上给出的结论，并未给出具体证明。但是我们可以证明 $\operatorname{Ln} z$ 的分支点为 0 和 ∞，这是因为 $\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z$，当 z 绕原点逆时针转一圈时，$\operatorname{Arg} z$ 增加 2π 而不是回到原来的函数值，因此 0 为分支点；无穷点同理。

Homework 4: 2024.9.16 - 2024.9.22

4.1 计算下列积分

(1) $\oint_{|z+i|=1} \frac{e^z}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$

被积函数 $\frac{e^z}{1+z^2}$ 在圆周 $|z+i|=1$ 内有且仅有 $z=-i$ 一个奇点，由 Cauthy 定理和 Cauthy 积分公式：

$$I = \oint_{|z+i|=1} \frac{e^z}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left[\frac{e^z}{z-i}\right]_{z=-i} = -\pi e^{-i} \tag{4.1}$$

结果化简到上面一步即可。

(2) $\oint_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1}\,\mathrm{d}z,\ a>1$

被积函数 $\frac{z}{z^4-1}$ 在圆周 $|z-a|=a$ 内有且仅有 $z=1$ 一个奇点，由 Cauthy 定理和 Cauthy 积分公式：

$$I = \oint_{|z-1|=\delta} \frac{z}{z^4-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot\left[\frac{z}{z^3+z^2+z+1}\right]_{z=1} = \frac{\pi i}{2}$$

(3) $\oint_{|z|=2} \frac{z^2-1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$

被积函数在圆周 $|z|=2$ 内有且仅有 $z=\pm i$ 两个奇点，由 Cauthy 定理和 Cauthy 积分公式：

$$I = \oint_{|z+i|=\delta_1} \frac{z^2-1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z + \oint_{|z-i|=\delta_2} \frac{z^2-1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot\left[\frac{z^2-1}{z-i}\right]_{z=-i} + 2\pi i\cdot\left[\frac{z^2-1}{z+i}\right]_{z=i} = 0$$

(4) $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2(z^2+16)}\,\mathrm{d}z$

被积函数在圆周 $|z|=2$ 内有且仅有 $z=0$ 一个奇点，由 Cauthy 定理和 Cauthy 积分公式：

$$I = \oint_{|z|=\delta} \frac{1}{z^2(z^2+16)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot\left[\frac{1}{z^2+16}\right]^{(1)}_{z=0} = 2\pi i\cdot\left[-\frac{2z}{(z^2+16)^2}\right]_{z=0} = 0$$

4.2 计算下列积分

(1) $\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$

被积函数在圆周 $|z|=R$ 内有且仅有 $z=1$ 一个奇点，则：

$$I = 2\pi i\cdot\left[\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}\right]_{z=1} = \frac{\sqrt{2}\pi i}{2}$$

(2) $\lim\limits_{R\to+\infty}\oint_{|z|=R} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$

被积函数在圆周 $|z|=R$ 内有且仅有 $z=\pm1$ 两个奇点，则：

$$I = 2\pi i\cdot\left[\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z-1}\right]_{z=-1} + 2\pi i\cdot\left[\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}\right]_{z=1} = \sqrt{2}\pi i$$

(3) $\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$

被积函数在圆周 $|z|=R$ 内有且仅有 $z=-1$ 一个奇点，则：

$$I = 2\pi i\cdot\left[\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z-1}\right]_{z=-1} = \frac{\sqrt{2}\pi i}{2}$$

4.3 计算积分 $\displaystyle\int_L \frac{1}{(z-a)^n}\,\mathrm{d}z$，其中 L 为以 a 为圆心，r 为半径的上半圆周

作变换 $z \to z+a$，则原积分化为 $\int_{L'} \frac{1}{z^n}\,\mathrm{d}z$，其中 L' 是以 0 为圆心，r 为半径的上半圆周。当 $n=1$，时，$\frac{1}{z}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 内解析，$I(n) = [\ln z]_{z=r}^{z=-r} = \ln(-1) = i\pi$；当 $n \in \mathbb{Z}\setminus\{1\}$ 时，$\frac{1}{z^n}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 内解析，$I(n) = \left[\frac{z^{1-n}}{1-n}\right]_{z=r}^{z=-r} = \frac{1}{1-n}\left[(-r)^{1-n} - r^{1-n}\right]$。综上，我们有：

$$I(n) = \int_L \frac{1}{(z-a)^n}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} i\pi, & n=1 \\ \left[(-1)^{1-n}-1\right]\cdot\frac{r^{1-n}}{1-n}, & n \in \mathbb{Z}\setminus\{1\} \end{cases}$$

4.4 计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)}\,\mathrm{d}z$，其中 a, b 不在圆周 $|z|=R$ 上，n 为正整数

令 $G = \{z \mid |z| = R\}$，共有四种情况，总结如下：

$$I = \oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & a, b \notin G \\ \frac{(-1)^{n-1}2\pi i}{(a-b)^n}, & a \in G, b \notin G \\ \frac{2\pi i}{(b-a)^n}, & b \in G, a \notin G \\ 0, & a, b \in G \end{cases}$$

4.5 （附加题）$f(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析，求证 $I(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cdot e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$ 与 r 无关，$\forall\, r \in (0,R)$

设 $f(z)$ 在 G 内解析，由 Cauthy 积分公式：

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial G} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z$$

在上式中，取 $G = \{z \mid |z-a| = r,\ r \in (0,R)\}$，也即以 a 为圆心，r 为半径的圆周，则有 $z-a = r\cdot e^{i\theta}$, $\mathrm{d}z = ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$，代入即得：

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial G} \frac{f(z)}{r\cdot e^{i\theta}}\, ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi} f(z)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi} f(a + r\cdot e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

上式中令 $a=0$，即得：

$$I = I(r) = \oint_0^{2\pi} f(r\cdot e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta = 2\pi f(0), \quad \forall\, r \in (0,R) \quad \square \tag{4.2}$$

因此积分的值与 r 无关。

Homework 5: 2024.9.23 - 2024.9.29

!!! 不要忘了 $2\pi i$!!!

5.1 求积分 $\oint_C \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\mathrm{d}z$，$C:\ x^2+y^2-2x=0$

$C:\ (x-1)^2+y^2=1$，因此：

$$I = 2\pi i\left[\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}\right]_{z=1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i \tag{5.1}$$

5.2 求下列积分的值，积分路径均沿直线

(1) $\int_0^i \frac{z}{z+1}\,\mathrm{d}z$

$$I = \int_0^i \left(1-\frac{1}{z+1}\right)\,\mathrm{d}z = [z-\ln(z+1)]_0^i = i-\ln(1+i) = -\frac{\ln 2}{2}+i\left(1-\frac{\pi}{4}\right) \tag{5.2}$$

(2) $\int_0^{1+i} z^2\sin z\,\mathrm{d}z$

$$\begin{aligned} I &= \left[-z^2\cos z+2z\sin z+2\cos z\right]_0^{1+i} \\ &= (2-2i)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{e}+e\right)\cos 1+\left(\frac{1}{e}-e\right)\sin 1\right]+2(1+i)\cdot\frac{1}{2i}\cdot\left[\left(\frac{1}{e}-e\right)\cos 1+\left(\frac{1}{e}+e\right)\sin 1\right]-2 \\ &= \frac{2(1-i)}{e}(\cos 1+i\sin 1)-2 \end{aligned}$$

(3) $\int_{-1}^i \frac{1}{z^2+z-2}\,\mathrm{d}z$

$$I = \frac{1}{3}\int_{-1}^i\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+2}\right)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{3}\left[\ln(z-1)-\ln(z+2)\right]_{-1}^i = -\frac{1}{3}\left[\frac{\ln 10}{2}+i\left(\arctan\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{5.3}$$

5.3 讨论下列各积分的值，其中积分路径是圆周 $|z|=r$

(1) $\oint_{|z|=r} \frac{z^3}{(z-1)(z^2+2z+3)}\,\mathrm{d}z$

记 $z^2+2z+3=0$ 的两个根分别为 $z_1=-1+i\sqrt{2},\ z_2=-1-i\sqrt{2}$，先考虑 $r\in(\sqrt{3},\ +\infty)$，此时积分围道内有三个奇点 $1,\ z_1,\ z_2$。由 Cauthy 定理，可得：

$$I = 2\pi i\left\{\left[\frac{z^3}{(z-z_1)(z-z_2)}\right]_{z=1}+\left[\frac{z^3}{(z-1)(z-z_2)}\right]_{z=z_1}+\left[\frac{z^3}{(z-1)(z-z_1)}\right]_{z=z_2}\right\} \tag{5.4}$$

$$= 2\pi i\left[\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{7-i4\sqrt{2}}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{7+i4\sqrt{2}}{3}\right)\right] = -2\pi i \tag{5.5}$$

当 $r\in(0,1)$ 时，无奇点，$I=0$；当 $r\in(1\sqrt{3})$ 时，有唯一奇点 $z=1$，$I=2\pi i\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{3}i$。综上有：

$$I = I(r) = \begin{cases} 0 & ,r\in(0,1) \\ \frac{\pi}{3}i & ,r\in(1,\sqrt{3}) \\ -2\pi i & ,r\in(\sqrt{3},+\infty) \end{cases} \tag{5.6}$$

(2) $\oint_{|z|=r} \frac{1}{z^3(z+1)(z+2)}\,\mathrm{d}z$

先考虑 $r\in(2,+\infty)$ 的情况，此时围道内有三个奇点 $0,-1,-2$，但我们不需要具体求解，直接由大圆弧定理：

$$\lim_{z\to\infty}\left(z\cdot\frac{1}{z^3(z+1)(z+2)}\right)=0\Longrightarrow I=2\pi i\cdot 0=0 \tag{5.7}$$

$r\in(1,2)$ 时，有两奇点 0, -1，于是：

$$I=2\pi i\left\{\frac{1}{2!}\cdot\left[\frac{1}{(z+1)(z+2)}\right]^{(2)}_{z=0}+\left[\frac{1}{z^3(z+2)}\right]_{z=-1}\right\}=2\pi i\left[\frac{7}{8}+(-1)\right]=-\frac{1}{4}\pi i \tag{5.8}$$

再考虑上 $r\in(0,1)$，综上有：

$$I=I(r)=\begin{cases}\frac{7}{4}\pi i & ,r\in[0,1)\\ -\frac{1}{4}\pi i & ,r\in(1,2)\\ 0 & ,r\in(2,+\infty)\end{cases} \tag{5.9}$$

5.4 设 $f(z)=\oint_{|\zeta|=2}\frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$，求 $f''(1+i)$

由 Cauthy 积分公式：

$$f(z)=2\pi i\left[3z^2+7z+1\right],\quad\Longrightarrow f''(1+i)=2\pi i\cdot 6=12\pi i \tag{5.10}$$

5.5 计算积分 $f(z)=\oint_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$，其中 $|z|\neq 1$

$|\zeta|=1$ 时有 $\overline{\zeta}=\frac{1}{\zeta}$，$z=0$ 的情况需单独计算，综合有：

$$f(z)=\oint_{|\zeta|=1}\frac{1}{\zeta(\zeta-z)}\,\mathrm{d}\zeta=\begin{cases}0 & ,|z|\in[0,1)\\ -\frac{2\pi i}{z} & ,|z|\in(1,+\infty)\end{cases} \tag{5.11}$$

5.6 计算积分 $f(z)=\oint_{|\zeta|=2}\frac{\overline{\zeta}^2e^{\zeta}}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$，其中 $|z|\neq 2$

$|\zeta|=2$ 时 $\overline{\zeta}=\frac{4}{\zeta}$，于是 $|z|<2$ 时：

$$I=16\oint_{|\zeta|=2}\frac{e^{\zeta}}{\zeta^2(\zeta-z)}\,\mathrm{d}\zeta=16\cdot 2\pi i\left\{\left[\frac{e^{\zeta}}{\zeta-z}\right]^{(1)}_{\zeta=0}+\left[\frac{e^{\zeta}}{\zeta^2}\right]_{\zeta=z}\right\} \tag{5.12}$$

$$=32\pi i\left[\left(-\frac{z+1}{z^2}\right)+\frac{e^z}{z^2}\right]=32\pi i\cdot\frac{e^z-z-1}{z^2} \tag{5.13}$$

$|z|=0$ 时 $I=16\oint_{|\zeta|=2}\frac{e^{\zeta}}{\zeta^3}\,\mathrm{d}\zeta=16\pi i$，再考虑上 $|z|>2$，综合有：

$$I=f(z)=\begin{cases}16\pi i & ,|z|=0\\ 32\pi i\cdot\frac{e^z-z-1}{z^2} & ,|z|\in(0,2)\\ -32\pi i\cdot\frac{z+1}{z^2} & ,|z|\in(2,+\infty)\end{cases} \tag{5.14}$$

5.7 计算积分 $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3}\,\mathrm{d}z$

由高阶导数公式：

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{2!} \cdot [e^z]_{z=0}^{(2)} = \pi i \tag{5.15}$$

5.8 求 a 的值使得函数 $F(z) = \int_{z_0}^{z} e^z \left(\frac{1}{z} + \frac{a}{z^3}\right) \mathrm{d}z$ 是单值的

$F(z)$ 是单值的，也即积分与路径无关，这等价于被积函数是解析函数，由于没有限制 z 的范围，也即 $z \in \mathbb{C}$，因此：

$$\oint_{\partial G} \left(\frac{e^z}{z} + a\frac{e^z}{z^3}\right) \mathrm{d}z = 0, \quad \forall\, G \subset \mathbb{C} \tag{5.16}$$

计算左边的积分：

$$I = 2\pi i \left\{ [e^z]_{z=0} + \frac{a}{2!} \cdot [e^z]_{z=0}^{(2)} \right\} = 2\pi i \left(1 + \frac{a}{2}\right) = 0 \Longrightarrow a = -2 \tag{5.17}$$

Homework 6: 2024.10.8 - 2024.10.14

求幂级数的收敛半径有两个常用方法：

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \tag{6.1}$$

前者称为 Cauchy-Hadamard 公式，是普遍成立的，后者称为 d'Alembert 公式，在极限存在时成立，但通常计算更简单。

6.1 确定下列幂级数的收敛半径

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Longrightarrow R = 1 \tag{6.2}$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \infty \cdot e \Longrightarrow R = 0 \tag{6.3}$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$, ???

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n}$

$$\text{级数} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \text{ 的收敛半径 } r = 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n} \text{ 的收敛半径为 } R = \sqrt{r} = 1\text{。} \tag{6.4}$$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} [3+(-1)^n]^n z^n$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} [3+(-1)^n] = 4 \Longrightarrow R = \frac{1}{4} \tag{6.5}$$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} cos(in)\cdot z^n$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\cos(in+i)}{\cos(in)}\right| = \lim_{n\to\infty} |\cos i - \sin i \cdot \tan(in)| = |\cos i - i\sin i| = |e^{i(-i)}| = e \Longrightarrow R = \frac{1}{e} \tag{6.6}$$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+a^n) z^n$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)+a^{n+1}}{n+a^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1+a\cdot\left(\frac{a^n}{n}\right)}{1+\left(\frac{a^n}{n}\right)}\right| = \begin{cases} 1, & |a| \leqslant 1 \\ a, & |a| > 1 \end{cases} \Longrightarrow R = \begin{cases} 1, & |a| \leqslant 1 \\ \frac{1}{|a|}, & |a| > 1 \end{cases} \tag{6.7}$$

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^n z^n$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1 \Longrightarrow R = 1 \tag{6.8}$$

6.2 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 $R \in (0, \infty)$，求下列幂级数的收敛半径

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^R c_n z^n$

$$\frac{1}{R_1} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^R c_{n+1}}{n^R c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^R\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 1\cdot\frac{1}{R} \Longrightarrow R_1 = R \tag{6.9}$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)c_n z^n$

$$\frac{1}{R_2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n-1}{2^n-1}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 2\cdot\frac{1}{R} \Longrightarrow R_2 = \frac{R}{2} \tag{6.10}$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n)^k z^n$

$$\frac{1}{R_3} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|^k = \frac{1}{R^k} \Longrightarrow R_3 = R^k \tag{6.11}$$

6.3 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$ 在 $|z| \neq 1$ 上收敛，并求其和函数

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n}\frac{z^{k-1}}{(1-z^k)(1-z^{k+1})} = \frac{1}{z(1-z)}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1-z^k}-\frac{1}{1-z^{k+1}}\right) = \frac{1}{z(1-z)}\cdot\left[\frac{1}{z^{n+1}-1}-\frac{1}{z-1}\right]$$

$$\Longrightarrow S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z) = \begin{cases} \frac{1}{(1-z)^2} & ,|z|<1 \\ \frac{1}{z(1-z)^2} & ,|z|>1 \end{cases}$$

因此级数在 $|z| \neq 1$ 上收敛。

6.4 证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}-\frac{2z^{2n+3}}{2n+3}\right)$ 的和函数 $S = S(z)$ 在 $z = 1$ 不连续

容易知道上面级数在 $|z| < 1$ 收敛而在 $|z| > 1$ 发散，因此在 $|z| = 1$ 处不连续 $\Longrightarrow$ 在 $z = 1$ 点不连续。但我们不妨求解一下和函数。

先求和函数 $S(z)$, $|z| < 1$。级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^{2n+3}}{2n+3}$ 的收敛半径都为 1，, 因此当 $|z| < 1$ 时，由一致收敛性有：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1} = \int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)\right]\mathrm{d}z = \int\left[\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right]\mathrm{d}z = \int\frac{1}{1-z}\,\mathrm{d}z = -\ln(z-1)+C_1 \tag{6.12}$$

$z=0$ 时级数为 0，因此 $C_1=\ln(-1)$。同理可得：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^{2n+3}}{2n+3}=2\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^{2n+3}}{2n+3}\right)\right]\,\mathrm{d}z=2\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^2\right)^{n+1}\right]\,\mathrm{d}z=2\int\frac{z^2}{1-z^2}\,\mathrm{d}z \tag{6.13}$$

$$=2\int\left[-1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)\right]\,\mathrm{d}z=-2z-\ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+C_2 \tag{6.14}$$

$z=0$ 时级数为 0，因此 $C_2=0$。由于原级数在 $|z|<1$ 内绝对收敛，可以任意交换求和次序，因此有：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}-\frac{2z^{2n+3}}{2n+3}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^{2n+3}}{2n+3}=-\left[\ln(z-1)+2z+\ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right]+\ln(-1) \tag{6.15}$$

于是极限 $\lim_{z\to 1}S(z)$ 不存在，自然不可能连续。

6.5 对 $|z|<1$，求下列级数的和

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$

级数的收敛半径为 1，由绝对收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}nz^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n-\sum_{n=1}^{\infty}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n-\frac{z}{1-z} \tag{6.16}$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径仍为 1，由一致收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int(n+1)z^n\,\mathrm{d}z\right)\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\sum_{n=1}^{\infty}z^{n+1}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^2}{1-z}\right]=\frac{z(2-z)}{(1-z)^2} \tag{6.17}$$

综上有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}nz^n=\frac{z(2-z)}{(1-z)^2}-\frac{z}{1-z}=\frac{z}{(1-z)^2} \tag{6.18}$$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$

由一致收敛性：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}=\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^{2n+1}}{2n+1}\right)\right]\,\mathrm{d}z=\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^2\right)^{n}\right]\,\mathrm{d}z=\int\frac{1}{1-z^2}\,\mathrm{d}z \tag{6.19}$$

$$=\int\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)\right]\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+C \tag{6.20}$$

$z=0$ 时级数为 0，因此 $C=0$。

需要注意，这里的定积分 $\int\frac{1}{1-z^2}\,\mathrm{d}z$ 结果与 z 的范围有关，当 $|z|<1$ 时，对应实函数上的 $-1<x<1$，此时 $1-x>0$，所以应该对 $\frac{1}{1-z}$ 积分：

$$\int\frac{1}{1-z^2}\,\mathrm{d}z=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\left[-\ln(1-z)+\ln(1+z)\right]+C=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+C \tag{6.21}$$

当 $|z|>1$ 时，对应实函数上的 $x>1$，此时 $x-1>0$，所以应该对 $\frac{1}{z-1}$ 积分：

$$\int\frac{1}{1-z^2}\,\mathrm{d}z=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z-1}\right)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\left[\ln(z+1)-\ln(z-1)\right]+C=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)+C \tag{6.22}$$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$

由一致收敛性：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}=\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)\right]\mathrm{d}z=\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right]\mathrm{d}z=\int\frac{1}{1-z}\,\mathrm{d}z=-\ln(z-1)+C_1 \tag{6.23}$$

$z=0$ 时级数为 0，因此 $C_1=\ln(-1)$。

6.6 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z+n}$ 在不包含负整数的任意闭圆上一致收敛

首先有两个引理：

Theorem. 1（Dirichlet 判别法）： 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 有界，$\sum_{n=1}^{\infty}(v_{n+1}-v_n)$ 绝对收敛且 $\lim v_n=0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nv_n$ 收敛。

Theorem. 2（级数收敛）： 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛，但不绝对收敛。证明略。

在 Theorem.2 的基础上，由 Theorem.1 (Dirichlet 判别法) 知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z+n}$ 收敛，可以任意加括号。给定不包含负整数的任意闭圆 G，记 $r=|z|$，$N_0=\sup_z\left\lceil\frac{|z|+1}{2}\right\rceil$，则有：

$$S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z+n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+2n-1}-\frac{1}{z+2n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+2n-1)(z+2n)} \tag{6.24}$$

$$\Longrightarrow |S(z)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|}=\sum_{n=1}^{N_0-1}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|}+\sum_{n=N_0}^{\infty}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|} \tag{6.25}$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|2n-1-r|\cdot|2n-r|}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|2n-1-r|^2}<\infty \tag{6.26}$$

$$S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z+n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+2n-1}-\frac{1}{z+2n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+2n-1)(z+2n)} \tag{6.27}$$

$$\Longrightarrow |S(z)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|}=\sum_{n=1}^{N_0-1}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|}+\sum_{n=N_0}^{\infty}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|} \tag{6.28}$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{N_0-1}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|}+\sum_{n=N_0}^{\infty}\frac{1}{|2n-1-r|\cdot|2n-r|} \tag{6.29}$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{N_0-1}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|}+\sum_{n=N_0}^{\infty}\frac{1}{|2n-1-r|^2} \tag{6.30}$$

对给定的区域 G，前一项是有限和，自然收敛，后一项是收敛级数，因此原级数在 G 上一致收敛。 □

Homework 7: 2024.10.15 - 2024.10.16

> 作业题目详见网址 https://www.123865.com/s/0y0pTd-jKKj3，除非必要，后文不再重复叙述题目。

Homework 8: 2024.10.15 - 2024.10.21

8.1 讨论下列函数所有奇点的性质

(1) $\frac{1}{z-z^3}$：有 $z=0,1,-1$ 三个一阶极点

(2) $\cos\frac{1}{\sqrt{z}}$：由 $\lim_{z\to 0} z\cos\frac{1}{\sqrt{z}}=0$ 知，有一阶极点 $z=0$

(3) $\frac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$：$\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}=1$，因此有可去极点 $z=0$

(4) $\frac{1}{(z-1)\ln z}$：$\lim_{z\to 1}(z-1)^2\cdot\frac{1}{(z-1)\ln z}=1$，因此有二阶极点 $z=1$

(5) $f(z)=\int_0^z\frac{\sin\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}}\,\mathrm{d}\zeta$：作换元 $t=\sqrt{\zeta}$，可得 $f(z)=1-\cos t=1-\cos\sqrt{z}$，在 $\mathbb{C}$ 上无奇点，在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上有本性奇点 $z=\infty$

(6) $\frac{1-e^z}{2+e^z}$：$\lim_{z\to\infty}\frac{1-e^z}{2+e^z}=-1$，因此有且仅有可去奇点 $z=\infty$

(7) $\frac{1}{z^3(2-\cos z)}$：有三阶极点 $z=0$

8.2 讨论

(1) $\lim_{z\to\infty}\frac{\cos z}{z}=0$，是可去奇点

(2) 做换元 $t=\frac{1}{z}$，有 $\lim_{t\to 0} t^2\cdot\frac{1}{t\cos\frac{1}{t}}=0$，因此为二阶极点。

(3) 做换元 $t=\frac{1}{z}$，有 $\lim_{t\to 0} t\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{t}-a\right)\left(\frac{1}{t}-b\right)}=\lim_{t\to 0}\sqrt{(1-at)(1-bt)}=1$，因此为一阶极点。

8.3 计算函数在指定点的留数

(1) $f(z)=\frac{e^{z^2}}{z-1}$，$z_0=1$：
$z_0=1$ 为一阶极点，因此：

$$\operatorname{res} f(1)=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=e \tag{8.1}$$

(2) $f(z)=\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$：
$f(z)$ 有二阶极点 $z=0$ 和一阶极点 $z=1$，于是：

$$\operatorname{res} f(0)=\left[z^2 f(z)\right]^{(1)}_{z=0}=\left[\frac{2\,z+1}{z-1}-\frac{z^2+z-1}{(z-1)^2}\right]_{z=0}=\left[-\frac{2\,z-z^2}{(z-1)^2}\right]_{z=0}=0 \tag{8.2}$$

$$\operatorname{res} f(1)=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=1 \tag{8.3}$$

(3) $f(z)=\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$：
有一阶极点 $z=\pm 3i$ 和二阶极点 $z=0$，因此：

$$\operatorname{res} f(3i)=\lim_{z\to 3i}(z-3i)f(z)=-\frac{e^{3i}}{54i},\quad \operatorname{res} f(-3i)=\lim_{z\to 3i}(z-3i)f(z)=\frac{e^{-3i}}{54i} \tag{8.4}$$

$$\operatorname{res} f(0)=\left[z^2 f(z)\right]^{(1)}_{z=0}=\left[\frac{e^z(z^2-2z+9)}{(z^2+9)^2}\right]_{z=0}=\frac{1}{9} \tag{8.5}$$

(4) $\frac{1}{z^2\sin z}$，$z_0=0$：
$z_0=0$ 为三阶极点，因此：

$$\operatorname{res} f(0)=\frac{1}{2!}\left[z^3 f(z)\right]^{(2)}_{z=0}=\frac{1}{2}\left[\frac{2\,z\cos{(z)}^2-2\,\cos{(z)}\,\sin{(z)}+z\sin{(z)}^2}{\sin{(z)}^3}\right]_{z=0}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \tag{8.6}$$

(5) $\frac{1}{\cosh\sqrt{z}}$，$z_0 = -\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2$：

考虑 $\sqrt{z}$ 满足 $\sqrt{z}\mid_{z=0} = 0$ 的单值分支，我们有 $\sqrt{-\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2} = i\cdot\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$，因此本题相当于求 $f(z) = \frac{1}{\cosh z}$，$z_0 = i\cdot\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$ 处的留数，由于

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)\cos y + i\cdot\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)\sin y\right] \tag{8.7}$$

我们有：

$$z = z_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{\cosh\sqrt{z_0}} = \frac{1}{\cos y} = \infty \tag{8.8}$$

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_o)f(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{2(z-z_0)}{e^z - e^{-z}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{z\to z_0}\frac{2}{e^z - e^{-z}} = \pm 1 \tag{8.9}$$

因此都是一阶极点，有：

$$\mathrm{res}\, f(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \begin{cases} -i & ,n = 0,2,4,\dots \\ i & ,n = 1,3,5,\dots \end{cases} \tag{8.10}$$

Homework 9: 2024.10.22 - 2024.10.28

9.1 计算下列有理三角积分

(1) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta,\ a>b>0$

作三角换元 $z=e^{i\theta}$，则 $\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$， $\mathrm{d}\theta=\frac{1}{iz}\,\mathrm{d}z$，有：

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{1}{a+b\cdot\frac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{1}{iz}\,\mathrm{d}z=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{bz^2+2az+b}\,\mathrm{d}z \tag{9.1}$$

函数 $bz^2+2az+b$ 有两根 $-k\pm\sqrt{k^2-1}$，其中 $k=\frac{a}{b}>1$，但仅有 $z=-k+\sqrt{k^2-1}$ 在积分围道内，故：

$$\boxed{I=\frac{2}{i}\cdot 2\pi i\cdot\left[\frac{1}{2bz+2a}\right]_{z=-k+\sqrt{k^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}} \tag{9.2}$$

(2) $\int_0^{\pi} \frac{1}{\left(1+\sin^2\theta\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$

代入 $\sin^2\theta=\frac{1-\cos2\theta}{2}$，并作三角换元 $z=e^{i\theta}$，得：

$$I=\int_0^{\pi}\frac{1}{\left(1+\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{2}{(3-\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta=\frac{8}{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{\left(z^2-6z+1\right)^2}\,\mathrm{d}z \tag{9.3}$$

函数 z^2-6z+1 有两根 $z_1=3-2\sqrt{2}$，$z_2=3+2\sqrt{2}$，但仅有 z_1 在积分围道内，且是二阶极点，因此有：

$$I=\frac{8}{i}\cdot 2\pi i\left[\frac{z}{(z-z_2)^2}\right]^{(1)}_{z=z_1}=16\pi\cdot\left[\frac{1}{(z-z_2)^2}-\frac{2z}{(z-z_2)^3}\right]_{z=z_1} \tag{9.4}$$

$$=16\pi\cdot\frac{-(z_1+z_2)}{(z_1-z_2)^3}=16\pi\cdot\frac{-6}{32\cdot(-4\sqrt{2})} \tag{9.5}$$

$$\boxed{=\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi} \tag{9.6}$$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,\ a>0$

将其转化为第 (1) 小问中的形式：

$$I=\int_0^{\pi}\frac{1}{(2a+1)-\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{(2a+1)-\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2a+1)-\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \tag{9.7}$$

由 (1) 的结论：

$$\boxed{I=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-(-1)^2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{a(a+1)}}} \tag{9.8}$$

9.2 计算下列无穷积分

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

作半圆积分围道，也即从 $(-R,0)$ 到 $(R,0)$ 的直线，以及半径为 R 的上半圆 $L_R=\{|z|=R \mid \operatorname{Im} z>0\}$ 构成的闭合围道 C。令 $f(z)=\frac{z^2+1}{z^4+1}$，则 $zf(z)$ 在 $z\to\infty$ 时一致趋于 0，由大圆弧定理，$\lim_{R\to\infty}\int_{L_R}f(z)\,\mathrm{d}z=0$，

于是：

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x\Longrightarrow I'=\lim_{R\to\infty}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=2I+\lim_{R\to\infty}\int_{L_R}f(z)\,\mathrm{d}z=2I+0 \tag{9.9}$$

再单独计算积分 I'。$f(z)$ 有四个一阶极点，其中 $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ 和 $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ 在积分围道内，由留数定理：

$$I'=2\pi i\cdot\left[\left(\frac{z_1^2+1}{4z_1^3}\right)+\left(\frac{z_2^2+1}{4z_2^3}\right)\right]=2\pi i\cdot\left[-\frac{1}{4}z_1(z_1^2+1)-\frac{1}{4}z_2(z_2^2+1)\right] \tag{9.10}$$

$$=2\pi i\cdot\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}i-\frac{\sqrt{2}}{4}i\right]=2\pi i\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \tag{9.11}$$

$$=\sqrt{2}\pi \tag{9.12}$$

$$\Longrightarrow\boxed{I=\frac{1}{2}I'=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi} \tag{9.13}$$

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,\mathrm{d}x$

与上题类似，作半圆积分围道，也即从 $(-R,0)$ 到 $(R,0)$ 的直线，以及半径为 R 的上半圆 $L_R=\{|z|=R\mid \operatorname{Im}z>0\}$ 构成的闭合围道 C。令 $f(z)=\frac{z^2}{z^4+6z^2+13}$，则 $zf(z)$ 在 $z\to\infty$ 时一致趋于 0，由大圆弧定理，$\lim_{R\to\infty}\int_{L_R}f(z)\,\mathrm{d}z=0$，于是：

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+6x^2+13}\,\mathrm{d}x\Longrightarrow I'=\lim_{R\to\infty}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=2I+\lim_{R\to\infty}\int_{L_R}f(z)\,\mathrm{d}z=2I+0 \tag{9.14}$$

再单独计算积分 I'。$f(z)$ 有四个一阶极点，先求解：

$$z^4+6z^2+13=\left(z^2+3\right)^2+4=0\Longrightarrow z^2+3=\pm 2i \tag{9.15}$$

利用 $\sqrt{z}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\operatorname{sgn}(\pi-\arg z)\sqrt{|z|+x}+i\sqrt{|z|-x}\right]$，可以得到在积分围道中的两根 z_1 和 z_2:

$$z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{13}-3}+i\sqrt{\sqrt{13}+3}\right),\quad z_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{\sqrt{13}-3}+i\sqrt{\sqrt{13}+3}\right) \tag{9.16}$$

由留数定理：

$$I'=2\pi i\left[\frac{z_1^2}{4z_1^3+12z_1}+\frac{z_2^2}{4z_2^3+12z_2}\right]=2\pi i\left[\frac{z_1}{4z_1^2+12}+\frac{z_2}{4z_2^2+12}\right] \tag{9.17}$$

$$=2\pi i\left[\frac{z_1}{8i}+\frac{z_2}{-8i}\right]=2\pi i\cdot\frac{z_1-z_2}{8i} \tag{9.18}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{13}-3}}{8i} \tag{9.19}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{13}-3}}{4}\pi \tag{9.20}$$

$$\Longrightarrow\boxed{I=\frac{1}{2}I'=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\cdot\sqrt{\sqrt{13}-3}} \tag{9.21}$$

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$

令 $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3}$，作半圆型闭合积分围道 C，其中半圆记作 L_R，则 $zf(z)$ 在 $z \to \infty$ 时一致趋于 0，由 Jordan 引理，$\lim_{R\to\infty} \int_{L_R} f(z)e^{iz}\,\mathrm{d}z = 0$，于是

$$I' = \lim_{R\to\infty} \oint_C f(z)e^{iz}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos x\,\mathrm{d}x + i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty}\oint_{L_R} f(z)e^{iz}\,\mathrm{d}z \tag{9.22}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow I' = 2I + 0 + 0 \tag{9.23}$$

积分围道内有且仅有 $z = i$ 一个三阶极点，由留数定理：

$$I' = 2\pi i \cdot \frac{1}{2!}\left[\frac{e^{iz}}{(z+i)^3}\right]^{(2)}_{z=i} \tag{9.24}$$

$$= \pi i \cdot \left[e^{iz}\left(\frac{i}{(z+i)^3} - \frac{3}{(z+i)^4}\right)\right]^{(1)}_{z=i} \tag{9.25}$$

$$= \pi i \cdot \left[e^{iz}\left(\frac{-1}{(z+i)^3} - \frac{3i}{(z+i)^4} - \frac{3i}{(z+i)^4} + \frac{12}{(z+i)^5}\right)\right]_{z=i} \tag{9.26}$$

$$= \pi i \cdot \frac{1}{e}\cdot\left[\frac{-2i}{16} - \frac{6i}{16} - \frac{6i}{16}\right] = \pi i \cdot \frac{1}{e}\cdot\left(-\frac{7i}{8}\right) \tag{9.27}$$

$$= \frac{7\pi}{8e} \tag{9.28}$$

$$\Longrightarrow \boxed{I = \frac{1}{2}I' = \frac{7\pi}{16e}} \tag{9.29}$$

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x, \quad a, b \in \mathbb{R}_+$

令 $f(z) = \frac{z}{z^2+b^2}$，作半圆型闭合积分围道 C，其中半圆记作 L_R，则 $zf(z)$ 在 $z \to \infty$ 时一致趋于 0，由 Jordan 引理，$\lim_{R\to\infty} \int_{L_R} f(z)e^{ipz}\,\mathrm{d}z = 0\ (p > 0)$，于是：

$$I' = \lim_{R\to\infty} \oint_C f(z)e^{iaz}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax\,\mathrm{d}x + i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\,\mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty}\oint_{L_R} f(z)e^{iz}\,\mathrm{d}z \tag{9.30}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow I' = 0 + 2i\cdot I + 0 \tag{9.31}$$

积分围道内有且仅有 $z_1 = bi$ 一个一阶极点，由留数定理：

$$I' = 2\pi i \cdot \frac{z_1 e^{iaz_1}}{2z_1} = \pi i \cdot e^{-ab} \tag{9.32}$$

$$\Longrightarrow \boxed{I = \frac{I'}{2i} = \frac{\pi}{2}\cdot e^{-ab}} \tag{9.33}$$

> 由于时间安排和 LaTeX 计划调整，后续的几次作业都将在 Notability 上手写，导出为 PDF 后插入到这里。插入前会对 PDF 进行压缩，以尽量减小文件体积。

> 由于时间安排和 LaTeX 计划调整，后续的几次作业都将在 Notability 上手写，导出为 PDF 后插入到这里。插入前会对 PDF 进行压缩，以尽量减小文件体积。

> 由于时间安排和 LaTeX 计划调整，后续的几次作业都将在 Notability 上手写，导出为 PDF 后插入到这里。插入前会对 PDF 进行压缩，以尽量减小文件体积。

Homework 10 : 2024.10.29 - 2024.11.04

标 的表示需要二次修改
标 的表示已作二次修改

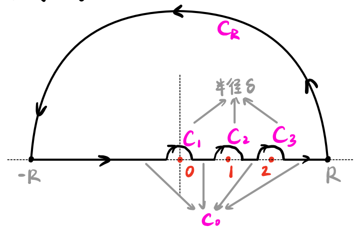
1. 计算积分

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)(x-2)} dx$

此题可由 $\frac{1}{x}$ 的对称性知 $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} dx = 0$
进而得 $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x-1} = 0$ 和 $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x-2} dx = 0$
而所求积分是它们的线性组合，因此值也为 0

(1) 令 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ ，$z \in \mathbb{C}$，奇点为 $z = 0, 1, 2$

作积分围道如图：



$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0$$

$$\lim_{z\to a} (z-a) f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & a=0 \\ -1, & a=1 \\ \frac{1}{2}, & a=2 \end{cases}$$

由小圆弧定理，得到（注意方向）：

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{C_1} f(z)\, dz = -\frac{1}{2}\pi i = \lim_{\delta\to 0} \int_{C_3} f(z)\, dz, \quad \lim_{\delta\to 0} \int_{C_2} f(z)\, dz = \pi i$$

再计算闭积分：$f(z)$ 在围道内无奇点，$\oint_C f(z)\, dz = 0$

因此：
$$\oint_C f(z)\, dz = I + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz + \sum_{i=1}^{3} \lim_{\delta\to 0} \int_{C_i} f(z)\, dz$$
$$0 = I + 0 + \left(1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right)\pi i$$
$$\Longrightarrow I = 0$$

(2) $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x+a)\sin(x-a)}{x^2 - a^2} dx$ ，$a > 0$

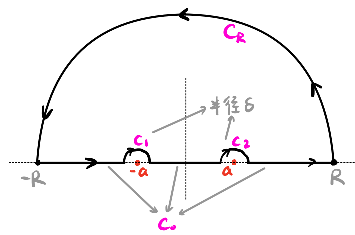
被积函数是偶函数，因此 $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x+a)\sin(x-a)}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2} I'$.

下面计算 I'.

由积化和差，有 $\sin(x+a)\sin(x-a) = \frac{1}{2}[\cos 2a - \cos 2x]$

$$I' = \frac{\cos 2a}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-a^2} dx - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2-a^2} dx \quad (*)$$

令 $f(z) = \frac{1}{z^2 - a^2}$ ，有奇点 $z = \pm a$ ，作积分围道如图：



对(*)式第一个积分项：

$$\lim_{z\to a} (z-a) f(z) = \frac{1}{2a}$$
$$\lim_{z\to -a} (z+a) f(z) = -\frac{1}{2a}$$

由小圆弧定理：

$$\sum_{i=1}^{2} \lim_{\delta\to 0} \int_{C_i} f(z)\, dz = 0$$

又 $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0 \xRightarrow{\text{大圆弧}} \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) = 0$

$f(z)$ 在围道内解析，因此 $\oint_C f(z)\, dz = 0$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-a^2} dx = 0$$

类似上一小题，这里也可快速判断出积分为 0

对(*)式第二项，考虑积分 $\oint_C f(z) e^{ipz} dz$ ，$p = 2$

由 Jordan 引理，$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) e^{i2z} = 0$ 。令 $g(z) = f(z) e^{i2z}$ ，则：

$$\begin{cases} \lim_{z\to a} (z-a) g(z) = e^{i2a} \cdot \frac{1}{2a} \\ \lim_{z\to -a} (z+a) g(z) = e^{i(-2a)} \cdot \frac{1}{-2a} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{2} \int_{C_i} g(z)\, dz = \frac{\pi}{a} \cdot \frac{e^{i2a} - e^{-i2a}}{2i} = \frac{\pi}{a} \cdot \sin 2a$$

同样，$g(z)$ 在围道内解析，闭积分为零，因此：

$$\oint_C g(z)\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(z)\, dz + \sum_{i=1}^{2} \lim_{\delta\to 0} \int_{C_i} g(z)\, dz$$
$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx + 0 + \frac{\pi}{a} \cdot \sin 2a$$
$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = -\pi \frac{\sin 2a}{a}$$
$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2-a^2} dx = \mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx\right\} = -\pi \frac{\sin 2a}{a}$$

代回(*)式，得 $I' = \frac{\sin 2a}{2a} \cdot \pi \Rightarrow I = \frac{\sin 2a}{2a} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \sin 2a}{4a}$

写完整的过程比较麻烦，后面的题目我们仅给出关键步骤

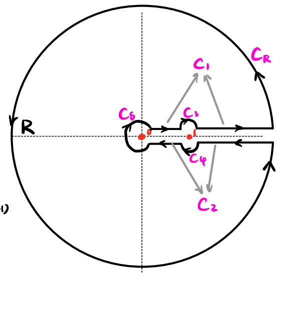
(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{px} - e^{qx}}{1 - e^{x}} dx$ ，$p, q \in (0,1) \subset \mathbb{R}$

无穷多个奇点

令 $t = e^x$ ，则 $dx = \frac{1}{t} dt$ ，有：

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{p-1} - t^{q-1}}{1-t} dt$ 。先考虑 $I_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1-t} dt$ ，t^{p-1} 是多值函数，

积分路径如图，令 $R \to \infty$，$\delta \to 0$，



$f(z) = \frac{z^{p-1}}{1-z}$ ，$p \in (0,1)$ ，则：

$\lim_{z\to 0} z f(z) = 0 \Rightarrow I_{C_\delta} = 0$

注意正负号

$\lim_{z\to 1} (z-1) f(z) = -1 \Rightarrow I_{C_3} = -i\pi$

$\lim_{z\to 1} (z-1) f(z e^{2\pi i}) = -(e^{2\pi i})^{p-1} \Rightarrow I_{C_4} = -i\pi e^{2\pi i(p-1)}$

$\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0 \Rightarrow I_{C_R} = 0$

$I_{C_1} = I'$

$$I_{C_2} = \int_{+\infty}^{0} \frac{(t \cdot e^{2\pi i})^{p-1}}{1-t} dt = -e^{2\pi i(p-1)} \cdot I'$$

而 $\oint_C f(z)\, dz = 0$ （无奇点），因此：

$$-i\pi\left(1 + e^{2\pi i(p-1)}\right) + \left(1 - e^{2\pi i(p-1)}\right) \cdot I' = 0$$

$$\Longrightarrow I_p = -i\pi \cdot \frac{e^{2\pi i(p-1)} + 1}{e^{2\pi i(p-1)} - 1} = -i\pi \cdot \frac{\cos((p-1)\pi)}{i\sin((p-1)\pi)} = -\frac{\pi}{\tan(p-1)\pi} = \frac{-\pi}{\tan p\pi}$$

因此 $I = I_p - I_q = \pi\left(\frac{1}{\tan q\pi} - \frac{1}{\tan p\pi}\right)$

(4) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx$

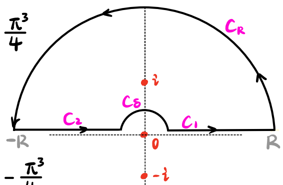
$I = \mathrm{Re}\left\{\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix} - e^{-x}}{x} dx\right\}$ ，令 $f(z) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{iz} - e^{-z}}{z} dz$ ，作 90° 扇形围道（挖去 $z=0$），可得：

$$0 + 0 + I + \int_{\infty}^{0} \frac{e^{i(iy)} - e^{-(iy)}}{(iy)} i\, dy = 0 \Longrightarrow I = 0$$

2. 计算积分

(1) $I = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx$

记 $I_k = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^k}{1+x^2} dx$ ，$k = 0, 1, 2$ 。先考虑 I_2 ，积分围道如图：



由留数定理，$\oint_C \frac{(\ln z)^2}{1+z^2} dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{\pi^2}{8} i\right) = -\frac{\pi^3}{4}$

$\lim_{z\to 0} z \cdot \frac{(\ln z)^2}{1+z^2} = 0 \Rightarrow I_{C_\delta} = 0$

$\lim_{z\to\infty} z \cdot \frac{(\ln z)^2}{1+z^2} = 0 \Rightarrow I_{C_R} = 0$

$$0 + 0 + \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx = -\frac{\pi^3}{4}$$

$\ln(-1) = i\pi$

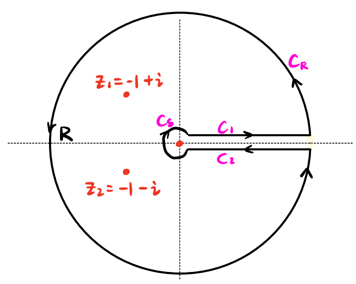
$$\int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(-x) + \ln(-1))^2}{1+x^2} d(-x) = -\frac{\pi^3}{4}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x + i\pi)^2}{1+x^2} dx = -\frac{\pi^3}{4}$$

用 arctan 计算

$$2I + 2\pi i \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{-\pi^2}{1+x^2} dx = -\frac{\pi^3}{4}$$

对比实虚部，得到 $2I - \pi^2 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^3}{4} \Longrightarrow I = \frac{\pi^3}{8}$



(2) $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+2x+2}dx$

$(z+1)^2=\pm i$

奇点 $z_1=-1+i$，$z_2=-1-i$

令 $f(z)=\frac{(\ln z)^2}{z^2+2z+2}$，积分围道见上一页的"圆"，由留数定理：

$$\oint_c f(z)\,dz=2\pi i\cdot\left[\left(\tfrac{1}{2}\ln 2+\tfrac{3\pi}{4}i\right)^2\cdot\frac{1}{2i}+\left(\tfrac{1}{2}\ln 2+\tfrac{5\pi}{4}i\right)^2\cdot\frac{1}{-2i}\right]$$

$\left(a=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3\pi}{4}i\right)$ $$=2\pi i\cdot\frac{-a\pi i+\frac{\pi^2}{4}}{2i}=-a\pi^2 i+\frac{1}{4}\pi^3$$，于是：

$$=-\frac{1}{2}\pi^2\ln 2\cdot i+\pi^3$$

$$0+0+\int_0^{+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x^2+2x+2}dx+\int_{+\infty}^0\frac{(\ln x+2\pi i)^2}{x^2+2x+2}dx=-\frac{1}{2}\pi^2\ln 2\cdot i+\pi^3$$

$$\Longrightarrow -4\pi i\cdot I+4\pi^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}dx=\left(-\frac{1}{2}\pi^2\ln 2\right)i+\pi^3$$

对比实虚部，即得 $I=\frac{\pi\ln 2}{8}$

(3) $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}dx$，$-1<p<1$

z^p 多值，分支点 0，∞。积分围道同上题，$p\in(-1,1)$ 可得 C_δ 和 C_R 上积分趋于零。令 $f(z)=\frac{z^p}{1+z^2}$，由留数定理：

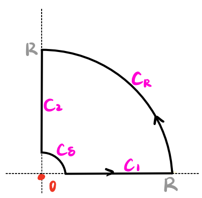
$$\oint_c f(z)\,dz=2\pi i\cdot\left[e^{ip\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2i}+e^{ip\frac{3\pi}{2}}\cdot\frac{1}{-2i}\right]$$

$$=\pi\left[e^{i(p\frac{\pi}{2})}-e^{i(p\frac{3\pi}{2})}\right]$$，于是：

$$0+0+I+\int_{+\infty}^0\frac{(x\cdot e^{2\pi i})^p}{1+x^2}dx=\pi\left[e^{i(p\frac{\pi}{2})}-e^{i(p\frac{3\pi}{2})}\right]$$

$$\Longrightarrow I=\pi\cdot\frac{e^{i(p\frac{\pi}{2})}-e^{i(p\frac{3\pi}{2})}}{1-e^{i(p2\pi)}}=\frac{\pi}{2\cos(\frac{\pi}{2}p)}$$

(4) $I=\int_0^{+\infty}x^{p-1}\cos x\,dx$，$p\in(0,1)$



作扇形积分围道如图，考虑积分 $I'=\oint_c z^{p-1}e^{iz}dz$。

由留数定理，$I'=0$，于是：

$$\lim_{z\to 0}z^p e^{iz}=0\Longrightarrow\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}z^{p-1}e^{iz}dz=0\quad(\text{小圆弧})$$

$$\lim_{z\to\infty}z^{p-1}=0\Longrightarrow\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}z^{p-1}e^{iz}dz=0\quad(\text{Jordan})$$

又 C_2 上的积分：

$$I_{C_2}=-\int_0^{+\infty}(iy)^{p-1}e^{-y}\,i\,dy=-e^{i(p\frac{\pi}{2})}\cdot\int_0^{+\infty}y^{p-1}e^{-y}dy$$

$$=-e^{i(p\frac{\pi}{2})}\cdot\Gamma(p)$$

$$\Longrightarrow I'=-I_{C_2}=e^{i(p\frac{\pi}{2})}\cdot\Gamma(p)$$

$$I=\mathrm{Re}\{I'\}=\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\cdot\Gamma(p)$$

3. 证明解析延拓

$$\sum_{n=0}^{\infty}(az)^n=\frac{1}{1-az},\ \forall\,|az|<1\Rightarrow z\in D_1=\left\{z\,\middle|\,|z|<\frac{1}{|a|}\right\}.$$

$$\frac{1}{1-z}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(a-1)z}{1-z}\right]^n=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-\frac{(a-1)z}{1-z}}=\frac{1}{1-az},\ \forall z\in D_2=\left\{z\,\middle|\,\left|\frac{(a-1)z}{1-z}\right|<1\right\}$$

在 $D_1\cap D_2$ 上两级数恒等，且 $D_1\not\subseteq D_2$，$D_2\not\subseteq D_1$，因此互为解析延拓。

4. 证明解析延拓

$$f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},\quad f_1'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z},\quad |z|<1$$

$$\Rightarrow f_1(z)=-\ln(1-z),\quad z\in D_1=\{z\mid |z|<1\}$$

$$f_2'(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}(2-z)^{n-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}(2-z)^n=\frac{-1}{1-(2-z)}=\frac{-1}{z-1},\quad |z-2|<1$$

$$\Rightarrow f_2(z)=\pi i+(-\ln(z-1))=\ln(-1)-\ln(z-1)=-\ln(1-z),\ z\in D_2$$

因此互为解析延拓，证毕。

5. 证明不互成解析延拓

设 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1-z^{k+1}}-\frac{1}{1-z^k}\right)=\frac{1}{1-z^{n+1}}-\frac{1}{1-z}$，则：

$$\lim_{n\to\infty}S_n(z)=\begin{cases}1-\frac{1}{1-z}=\frac{z}{z-1}, & |z|<1\\ -\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z-1}, & |z|>1\end{cases}$$

因此不互成解析延拓。

Homework 11 : 2024.11.05 - 2024.11.11

1. 求 $f(t) = e^{-|t|}$ 的 Fourier Trans.

$f(t) = \begin{cases} e^{t} & ,t<0 \\ e^{-t} & ,t>0 \end{cases}$ ，由定义和 $f(t)$ 存在 Fourier Tran，且：

$$
\begin{aligned}
F(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwt} f(t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-iwt}\cdot e^{t}\,dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-iwt} e^{-t}\,dt \\
&= \frac{1}{1-iw}\cdot\left[e^{(1-iw)t}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-1-iw}\cdot\left[e^{-(1+iw)t}\right]_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{1-iw} + \frac{1}{1+iw} \\
&= \frac{2}{1+w^2}
\end{aligned}
$$

2. 求 $f(t) = \begin{cases} 1-t^2 & ,|t|\le 1 \\ 0 & ,|t|>1 \end{cases}$ 的 Fourier Trans，由此计算 $\int_0^{+\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}\cdot\cos\frac{x}{2}\,dx$

由定义：

$$
\begin{aligned}
F(w) &= \int_{-1}^{1} e^{-iwt}\cdot(1-t^2)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} e^{-iwt}\,dt - \int_{-1}^{1} e^{-iwt}\cdot t^2\,dt \quad (\text{简记 } a = iw) \\
&= \frac{1}{-iw}\cdot\left[e^{-iw} - e^{iw}\right] - \left[-\frac{e^{-at}}{a^3}(a^2t^2+2at+2)\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{iw}\cdot 2i\sin w + \frac{1}{a^3}\left[e^{-a}(a^2+2a+2) - e^{a}(a^2-2a+2)\right] \\
&= \frac{2\sin w}{w} + \frac{1}{a^3}\left[(a^2+2)\cdot(-2i\sin w) + 2a\cdot 2\cos w\right] \\
&= \frac{2\sin w}{w} + \frac{1}{-iw^3}\cdot\left[(2-w^2)\cdot(-2i\sin w) + 4iw\cos w\right] \\
&= \frac{4}{w^3}(\sin w - w\cos w)
\end{aligned}
$$

$$
I = \int_0^{+\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cdot\cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cdot\cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)\cos\frac{w}{2}\,dw
$$

$= -\frac{1}{8}\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)e^{-i(\frac{w}{2})}dw\right\}$，可以由乘积定理来做：

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)e^{-i(\frac{w}{2})}dw &= 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot\delta_{\frac{1}{2}}\,dt \\
&= 2\pi f(\tfrac{1}{2}) \\
&= \frac{3}{2}\pi
\end{aligned}
$$

$\mathscr{F}^{-1}\left[e^{-i(\frac{w}{2})}\right] = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\delta(t-\frac{1}{2})$ 勿忘 $\frac{1}{2\pi}$

$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1^*(w)\cdot F_2(w)\,dw$

因此 $I = -\frac{1}{8}\cdot\mathrm{Re}\left\{\frac{3}{2}\pi\right\} = -\frac{3}{16}\pi$

3. 证明：$e^{at}[f_1(t)*f_2(t)] = [e^{at}f_1(t)]*[e^{at}f_2(t)]$，$a$ 为常数

由卷积的定义：

$$
\begin{aligned}
\text{Right} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{as}f_1(s)\,e^{a(t-s)}f_2(t-s)\,ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at}f_1(s)f_2(t-s)\,ds \\
&= e^{at}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(s)f_2(t-s)\,ds \\
&= e^{at}[f_1(t)*f_2(t)] = \text{Left} \quad \square
\end{aligned}
$$

4. 求下列函数的 Laplace Trans.

(1) $f(t) = \frac{1-\cos wt}{t^2}$，$w>0$

$\lim_{t\to 0} f(t) = \frac{w^2}{2}$，可被指数函数限制，因此存在 Laplace Trans.

考虑对像函数参数 w 求导：

$$
\begin{aligned}
L(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt}\cdot\frac{1-\cos(wt)}{t^2}\,dt \\
\frac{\partial L}{\partial w} &= \int_0^{+\infty} e^{-zt}\frac{\sin(wt)}{t}\,dt \qquad (\tfrac{\partial}{\partial w}\text{ 与积分号可交换}) \\
\frac{\partial^2 L}{\partial w^2} &= \int_0^{+\infty} e^{-zt}\cos(wt)\,dt = \mathscr{L}\{\cos(wt), z\} = \frac{z}{z^2+w^2}
\end{aligned}
$$

，再作积分：

$\left(\frac{\partial L}{\partial w}\right)_{w=0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial w} = \arctan\left(\frac{w}{z}\right)$

$(L(z))_{w=0} = 0 \Rightarrow L(z) = w\arctan\left(\frac{w}{z}\right) - \frac{z}{2}\ln\left(1+\frac{w^2}{z^2}\right)$

也可以考虑两次像函数积分定理（即使比较麻烦）

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{\tfrac{1}{t}(1-\cos wt)\right\} &= \int_z^{+\infty}\left(\frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+w^2}\right)dz = \left[\ln z - \ln\sqrt{z^2+w^2}\right]_z^{+\infty} \\
&= \lim_{z\to+\infty}\ln\frac{z}{\sqrt{z^2+w^2}} - \ln\frac{z}{\sqrt{z^2+w^2}} \\
&= -\ln\frac{z}{\sqrt{z^2+w^2}} = \frac{1}{2}\ln(z^2+w^2) - \ln z
\end{aligned}
$$

后一项容易有 $\int \ln z\,dz = z\ln z - z + C$

前一项的定积分为：$\ln(z^2+w^2) = \ln(z+iw) + \ln(z-iw)$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \int\ln(z^2+w^2)\,dz &= (z+iw)\ln(z+iw) - (z+iw) + (z-iw)\ln(z-iw) - (z-iw) \\
&= z\ln(z^2+w^2) - 2z + iw\ln\left(\frac{z+wi}{z-wi}\right) \\
&= z\ln(z^2+w^2) - 2z - iw\left[\ln\left(\frac{wi-z}{wi+z}\right) + \ln(-1)\right] \\
&= z\ln(z^2+w^2) - 2z - iw\cdot 2i\arctan\left(\frac{z}{w}\right) \\
&= z\ln(z^2+w^2) - 2z + 2w\arctan\left(\frac{z}{w}\right) + C
\end{aligned}
$$

常数，可直接丢弃

继续积分定理，有：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t), p\} &= \int_p^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(z^2+w^2) - \ln z\right)dz \\
&= \left[\frac{1}{2}z\ln(z^2+w^2) - z + w\arctan\left(\frac{z}{w}\right) - z\ln z + z\right]_z^{+\infty} \\
&= \left[z\ln\left(\frac{\sqrt{z^2+w^2}}{z}\right) + w\arctan\left(\frac{z}{w}\right)\right]_z^{+\infty} \\
&= \lim_{z\to+\infty} z\ln\left(\frac{\sqrt{z^2+w^2}}{z}\right) + \frac{w\pi}{2} - z\ln\left(\frac{\sqrt{z^2+w^2}}{z}\right) - w\arctan\left(\frac{z}{w}\right) \\
&= -z\ln\left(\frac{\sqrt{z^2+w^2}}{z}\right) - w\arctan\left(\frac{z}{w}\right) + \frac{w\pi}{2} \\
&= -\frac{1}{2}z\ln(z^2+w^2) + z\ln z - w\arctan\left(\frac{z}{w}\right) + \frac{w\pi}{2} \\
&= w\arctan\left(\frac{w}{z}\right) - \frac{z}{2}\ln\left(1+\frac{w^2}{z^2}\right)
\end{aligned}
$$

积分为0

$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

用 Matlab 求 $f(t)$ 拉氏变换结果是

$L(z) = -\frac{1}{2}z\ln(z^2+w^2) + (1-\gamma)z - w\arctan\left(\frac{z}{w}\right) + \frac{w\pi}{2}$ 在我们的结果中是 $z\ln z$

其中 $\gamma = 0.5772$ 为 eulergamma 常量，如何理解结果不同？

(2) $f(t) = |\sin(wt)|$，$w>0$

设 $f(t)$ 是周期为 a 的函数，$a\in\mathbb{R}$，有通法：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)\,dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{na}^{(n+1)a} e^{-pt}f(t)\,dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{a} e^{-p(t+na)}f(t)\,dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(e^{-pa})^n\cdot\int_0^a e^{-pt}f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-pa}}\cdot\int_0^a e^{-pt}f(t)\,dt
\end{aligned}
$$

在本题，令 $f(t) = |\sin(wt)|$，则 $a = \frac{\pi}{w}$，有：

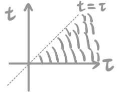
$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-za}}\cdot\int_0^a e^{-zt}\sin(wt)\,dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-za}}\cdot\frac{1}{w}\int_0^{\pi} e^{-\frac{z}{w}t}\sin t\,dt \quad (\text{简记 } b = \tfrac{z}{w}) \\
&= \frac{1}{1-e^{-za}}\cdot\frac{1}{w}\left[\frac{-e^{-bt}}{b^2+1}\cdot(\cos t + b\sin t)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{1-e^{-za}}\cdot\frac{1}{w}\cdot\frac{1+e^{-b\pi}}{1+b^2} \\
&= \frac{1+e^{-\frac{\pi z}{w}}}{1-e^{-\frac{\pi z}{w}}}\cdot\frac{w}{z^2+w^2} \\
&= \frac{w}{z^2+w^2}\cdot\frac{1}{-\tanh(-\frac{\pi z}{2w})} \\
&= \frac{w}{z^2+w^2}\cdot\frac{1}{\tanh(\frac{\pi z}{2w})} \longrightarrow \text{也可写为 } \frac{w\coth(\frac{\pi z}{2w})}{z^2+w^2}
\end{aligned}
$$

(3) $f(t) = \int_t^{+\infty}\frac{\cos\tau}{\tau}\,d\tau$ 的拉普拉斯变换

$f(0)$ 不收敛，无法用微分定理，考虑换序后求导：

$$
L(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}\left(\int_t^{+\infty}\frac{\cos\tau}{\tau}\,d\tau\right)dt = \int_0^{+\infty}dt\int_t^{+\infty}e^{-zt}\frac{\cos\tau}{\tau}\,d\tau
$$

$$= \int_0^{+\infty} d\tau \int_0^{\tau} e^{-zt} \frac{\cos\tau}{\tau}\, dt$$ ⟶ 二重积分区域如图:



$$= \int_0^{+\infty} \frac{\cos\tau}{\tau} (1 - e^{z\tau})\, d\tau = L(z)$$

$$\frac{dL}{dz} = \int_0^{+\infty} \cos\tau\, e^{-z\tau} d\tau = \frac{z}{z^2+1} \Longrightarrow L(z) = L(0) + \int_0^z L'(z)\, dz = \frac{1}{2}\ln(1+z^2)$$

5. 求下列 Laplace 变换式的原函数

(1) $L(z) = \dfrac{4z-1}{(z^2+z)(4z^2-1)}$ $= \dfrac{4z-1}{4z^4+4z^3-z^2-z}$

$\mathcal{L}(z) = \dfrac{4z-1}{z(z+1)(2z-1)(2z+1)}$，奇点 $0, -1, \pm\frac{1}{2}$，且 $L(z)$ 一致趋于 0 $(z\to\infty)$

由展开定理：

$$f(t) = \sum_k \mathrm{Res}[e^{zt}L(z), b_k]$$

$$= (-1)\cdot(-1) + e^{-t}(-5)\cdot\frac{1}{-16+12-1+2}$$

$$+ e^{\frac{t}{2}}\cdot 1\cdot\frac{1}{2+3-1-1} + e^{-\frac{t}{2}}(-3)\cdot\frac{1}{-2+3-1+1}$$

$$= 1 + \frac{5}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}} - 3e^{-\frac{t}{2}}$$

(2) $L(z) = \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{e^{-az}}{1-e^{-az}}$，$a > 0$ ⟶ 有没有其它做法？

$L(z)$ 在虚轴上有无穷多孤立奇点，无法直接用展开定理，考虑用级数展开：

$$L(z) = \frac{1}{z}\cdot e^{-az}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-az})^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{z}\cdot(e^{-az})^{n+1}\right]$$

$$\doteqdot \sum_{n=0}^{\infty}\eta(t-(n+1)a)$$ ⟶ 阶跃函数

$$= \eta(t-a) + \eta(t-2a) + \cdots$$

$$= \left\lfloor\frac{t}{a}\right\rfloor$$

延迟定理： $e^{-zt_0}\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}[f(t-t_0)]$

即 $e^{-zt_0}\cdot L(z) \doteqdot f(t-t_0)$

$\frac{1}{z} \doteqdot 1 = \eta(t) \Longrightarrow e^{-zt_0}\cdot\frac{1}{z} \doteqdot \eta(t-t_0)$

因此 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{L(z)\} = \left\lfloor\frac{t}{a}\right\rfloor$，$t > 0$. “$\lfloor\ \rfloor$”表示向下取整.

如果“注意力”不够，无法拆分出级数，可用第二种方法：

$$L(z) = \frac{1}{z}\cdot\frac{e^{-az}}{1-e^{-az}}$$

$$(1-e^{-az})L(z) = \frac{1}{z}e^{-az}$$

$$L(z) - e^{-az}L(z) = \frac{1}{z}e^{-az}$$

两边同取 $\mathcal{L}^{-1}$，有： ⟶ 延迟定理：$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-az}\mathcal{L}\{f(t)\}$

$$f(t) - f(t-a) = \eta(t-a)$$ ⟶ 虽然 $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{z}] = 1$，但这仅对 $t>0$ 成立，在 $t<0$ 时 $g(t)$ 应为 0. 也即实际上 $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{z}] = \eta(t)$

$$\Longrightarrow f(t) = \left\lfloor\frac{t}{a}\right\rfloor,\ t > 0$$

(3) $L(z) = \dfrac{z}{z^2-w^2}$

$$L(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-w} + \frac{1}{z+w}\right)$$

$$\doteqdot \frac{1}{2}(e^{wt} + e^{-wt})$$

$$= \cosh(wt)$$

(4) $L(z) = \dfrac{1}{z}e^{-az}$，$a > 0$

类似 5.(2)，由延迟定理： $L(z) = \frac{1}{z}e^{-za} \doteqdot \eta(t-a)$

(5) $L(z) = \dfrac{e^{-z\tau}}{z^4+4w^4}$，$\tau > 0$，$w > 0$

延迟定理可处理 $e^{-z\tau}$，展开定理可求 $\frac{1}{z^4+4w^4}$ 的反演，但是太麻烦，有没有其它方法？似乎没有，我们仅给出关键步骤：

有 4 个一阶极点，$z = w(\pm1\pm i)$，设 $p_1 = (1+i)w$，$p_2 = (1-i)w$

$$f(t) = \sum \mathrm{Res}[e^{zt}\mathcal{L}(z), p_k]$$

$$= \frac{e^{p_1(t-\tau)}}{2p_1(p_1^2-p_2^2)} + \frac{e^{-p_1(t-\tau)}}{-2p_1(p_1^2-p_2^2)} + \frac{e^{p_2(t-\tau)}}{2p_2(p_2^2-p_1^2)} + \frac{e^{-p_2(t-\tau)}}{-2p_2(p_2^2-p_1^2)}$$

$$= \frac{\sinh(p_1(t-\tau))}{p_1(p_1^2-p_2^2)} + \frac{\sinh(p_2(t-\tau))}{p_2(p_2^2-p_1^2)}$$，具体数值就不代入了.

Homework 12 : 2024.11.12 - 2024.11.18

1. 求下列 ODE 的通解

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x-y^2}$

方法一： $\frac{dx}{dy} = \frac{2}{y}\cdot x - y$

$\frac{dx}{dy} + (-\frac{2}{y})x = -y$ 构成标准形式，其中 $p = -\frac{2}{y}$ 而 $q = -y$

同乘积分因子 $\mu = e^{\int p dy} = y^{-2}$，则：

$$\frac{d(x\mu)}{dy} = -\frac{1}{y}$$

这里是否需要考虑 $\int \frac{1}{y} dy = \ln|y| + C$

$\Longrightarrow \quad x\mu = -\ln y + C$

即 $\quad x\cdot y^{-2} = -\ln y + C$

$x = -y^2 \ln y + Cy^2$，C 为待定常量

特别地，如果 $y \in (-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，则积分 $\int \frac{1}{y} dy = \ln|y|$，则通解应为：

$$x|y|^{-2} = -\ln|y| + C \Longrightarrow x = -|y|^2\ln|y| + C|y|^2 = -y^2\ln|y| + Cy^2$$

方法二： 原式可变形为：

$$(\frac{2x}{y^3} - \frac{1}{y})dy + (-\frac{1}{y^2})dx = 0$$

记作 $u\,dy + v\,dx = 0$，则 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{y^3} = \frac{\partial v}{\partial y}$，又连续，因此存在原函数 $f = f(x,y)$ 使 $\frac{\partial f}{\partial y} = u$ 而 $\frac{\partial f}{\partial x} = v$，于是：

$$f(x,y) = \int(\frac{2x}{y^3} - \frac{1}{y})dy + 0 = -xy^{-2} - \ln|y| + C$$

$df \equiv 0$，因此 f 为常数，有：

$$-xy^{-2} - \ln|y| + C = 0$$

$x = -y^2\ln|y| + C'y^2$，C' 为待定常量.

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$

类似的思路，$\frac{dx}{dy} = 2\ln y + 1 - \frac{x}{y}$，显然 $y > 0$

$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}\cdot x = 2\ln y + 1$

同乘因子 $\mu = e^{\int p dy} = y$，则： $\int x\ln x\, dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4}$

$$\frac{d(\mu x)}{dy} = 2y\ln y + y$$

$\Longrightarrow \mu x = y^2 \ln y + C$

$\Longrightarrow x = y\ln y + \frac{C}{y}$，其中 C 为待定常量

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2\sin y - xy}$

$\frac{dx}{dy} = x^2\sin y - xy$，作换元 $u = \frac{1}{x}$，则：

$$\frac{du}{dy} + (-y)u = -\sin y$$

同乘因子 $\mu = e^{\int p dy} = e^{-\frac{y^2}{2}}$，有：

$$d(\mu u) = (-\sin y\, e^{-\frac{y^2}{2}})dy$$

$$\Longrightarrow u = -e^{\frac{y^2}{2}}\cdot\int e^{-\frac{y^2}{2}}\sin y\, dy$$

$$x = -\frac{1}{e^{\frac{y^2}{2}}\cdot\int e^{-\frac{y^2}{2}}\sin y\, dy}$$

此定积分无初等原函数

2. 求下列 ODE 的通解

(1) $y^2 dx + y dy = x^2 y dy - dx$

$(y^2+1)dx = (x^2y - y)dy$，可分离变量：

$$\frac{1}{x^2-1}dx = \frac{y}{y^2+1}dy$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + C$$

$y^2 = A\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - 1$，其中 $A > 0$ 为待定常量

(2) $y' + \sin y + x\cos y + x = 0$

$x\cdot(1+\cos y)$

$y' + 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2} + x\cdot 2\cos^2\frac{y}{2} = 0$，同除 $\cos^2\frac{y}{2}$，作换元 $u = \tan\frac{y}{2}$，则：

$u' + u + x = 0$，同乘积分因子 $\mu = e^x$，有：

$$d(\mu u) = -xe^x dx$$

$$\mu u = (1-x)e^x + C$$

$$\Longrightarrow u = \tan\frac{y}{2} = 1 - x + \frac{C}{e^x}$$

不用化为 arctan 的形式

(3) $xy' = 3y\ln x + x^2 y$

可分离变量： $y' - (\frac{3\ln x}{x} + x)y = 0$

$$\frac{1}{y}dy = (\frac{3\ln x}{x} + x)dx$$

$$\ln|y| = \frac{3}{2}(\ln x)^2 + \frac{x^2}{2} + C$$

$$\Longrightarrow y = A\cdot\exp(\frac{3}{2}(\ln x)^2 + \frac{x^2}{2})$$

其中 A 为待定常量.

3. 求下列 ODE 的通解

(1) $3y' + 2y = 6x$

标准形式： $y' + \frac{2}{3}y = 2x$，同乘积分因子 $\mu = e^{\frac{2}{3}x}$

$$d(\mu y) = 2x\cdot e^{\frac{2}{3}x}dx$$

$$\Longrightarrow \mu y = \frac{3}{2}(2x-3)e^{\frac{2}{3}x} + C$$

$y = 3x - \frac{9}{2} + \frac{C}{e^x}$，其中 C 为待定常量

(2) $y'\cos y + \sin^2 y = \sin^3 y$

分离变量： $\frac{\cos y}{\sin^3 y - \sin^2 y}dy = dx$，令 $u = \sin y \in [-1, 1]$，则

$$\frac{1}{u^3 - u^2}du = (\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2})du = dx$$

$$\ln\left|1 - \frac{1}{u}\right| + \frac{1}{u} + C = x \Longrightarrow x = \ln\left|1 - \frac{1}{\sin y}\right| + \frac{1}{\sin y} + C$$

(3) $x^2 y dx = (x^3 + y^4)dy$

$x^2 y dx - (x^3 + y^4)dy = 0$，同除 y^4，有：

$x^2y^{-3}dx - (x^3y^{-4} + 1)dy = 0$，记作 $u\,dx + v\,dy = 0$

因为 $\frac{\partial u}{\partial y} = -3x^2y^{-4} = \frac{\partial v}{\partial x}$，又连续，所以存在原函数 $f(x,y)$

使得 $\frac{\partial f}{\partial x} = u$ 而 $\frac{\partial f}{\partial y} = v$，于是：

$$f(x,y) = \int x^2y^{-3}dx + \int(-1)dy = \frac{x^3}{y^3} - y + C$$

原方程等价于 $df = 0$，即 $\frac{x^3}{y^3} - y = C \Longrightarrow x = y\cdot(y+C)^{\frac{1}{3}}$

(4) $2y'' + y' - y = 2e^x$

特解是 $y_s = e^x$，下面求齐次解 y_h：

特征方程 $2x^2 + x - 1 = 0 \Longrightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}$ 为两不同实根

$\Longrightarrow y_h = Ae^{-x} + Be^{\frac{x}{2}}$，全解为：

$$y = y_h + y_s = Ae^{-x} + Be^{\frac{x}{2}} + e^x$$

丁毅 https://github.com/YiDingg/LatexNotes

Homework 13： 2024.11.19 - 2024.11.25

1. 求下列方程在 $z=0$ 邻域内的两个幂级数解

(1) $w'' - z^2 w = 0$

z^2 在 $\mathbb{C}$ 上解析，设 $w = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$，则 $w' = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}(n+1) z^n$，

$w'' = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2}(n+1)(n+2) z^n$，代入得： $\sum_{n=2}^{\infty} C_{n-2} z^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2}(n+1)(n+2) z^n - \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{n+2} = 0$$

$$C_2 \cdot 2 + C_3 \cdot 6 \cdot z + \sum_{n=2}^{\infty}\left[C_{n+2}(n+1)(n+2) - C_{n-2}\right] z^n = 0$$

系数应全为0，于是 $C_2 = C_3 = C_{n+2}(n+1)(n+2) - C_{n-2} = 0$

$\Longrightarrow C_{n+2} = \dfrac{1}{(n+2)(n+1)} C_{n-2},\ n \geq 2$. 即 $C_n = \dfrac{1}{n(n-1)} C_{n-4}$，有:

$$\begin{aligned}
C_{4n} &= \frac{1}{4n(4n-1)} C_{4n-4} \\
&= \frac{1}{4n(4n-1)} \cdot \frac{1}{(4n-4)(4n-5)} \cdot C_{4n-8} \\
&= \frac{1}{4n(4n-1)(4n-4)(4n-5)\cdots\cdots 8\cdot 7\cdot 4\cdot 3} \times C_0 \\
&= \frac{C_0}{[4(n)]\cdot[4(n)-1]\cdot[4(n-1)]\cdot[4(n-1)-1]\cdots[4\cdot 2][4\cdot 2-1][4\cdot 1][4\cdot 1-1]} \\
&= \frac{C_0}{4^n \cdot n! \cdot 4^n \cdot \frac{\Gamma(n+\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}} \\
&= \frac{\Gamma(\frac{3}{4})\ C_0}{n!\, 2^{4n}\, \Gamma(n+\frac{3}{4})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{4n+1} &= \frac{1}{(4n+1)4n(4n-3)(4n-4)\cdots\cdots 9\cdot 8\cdot 5\cdot 4} \times C_1 \\
&= \frac{1}{[4(n)+1]\cdot[4(n)][4(n-1)+1][4(n-1)]\cdots[4\cdot 2+1][4\cdot 2][4\cdot 1+1][4\cdot 1]} C_1 \\
&= \frac{1}{4^n n! \cdot 4^n \cdot \frac{\Gamma(n+\frac{5}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})}} C_1 \\
&= \frac{\Gamma(\frac{5}{4})}{n!\, 2^{4n}\, \Gamma(n+\frac{5}{4})} C_1
\end{aligned}$$

$C_{4n+2} = C_{4n+3} = 0$，于是解为:

$w(z) = C_0 + C_1 z + \sum_{n=1}^{\infty} C_{4n} z^{4n} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{4n+1} z^{4n+1}$，其中 C_0, C_1 为待定常量

当然，也可以写为 $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{4n} z^{4n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{4n+1} z^{4n+1}$.

(2) $z w'' - z w' + w = 0$

$w'' - w' + \frac{1}{z} w = 0$，$z=0$ 是一阶极点，解的形式为：

$w = z^r \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$，$w' = z^r \sum_{n=-1}^{\infty} C_{n+1}(n+r+1) z^n$，$w'' = z^r \sum_{n=-2}^{\infty} C_{n+2}(n+r+2)(n+r+1) z^n$

代入并同除 z^n，有: $\sum_{n=-1}^{\infty} C_{n+1} z^n$

$$\sum_{n=-2}^{\infty} C_{n+2}(n+r+2)(n+r+1) z^n - \sum_{n=-1}^{\infty} C_{n+1}(n+r+1) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{n-1} = 0$$

$$C_0 \cdot r(r-1) z^{-2} + \sum_{n=-1}^{\infty}\left[C_{n+2}(n+r+2)(n+r+1) - C_{n+1}(n+r)\right] z^n = 0$$

系数全为零，因此有：

$r(r-1) = 0 \xrightarrow{} r_1 = 0,\ r_2 = 1$ ， $C_{n+2} = \dfrac{(n+r)}{(n+r+2)(n+r+1)} C_{n+1}$ ， $n \geq -1$.

当 $r = r_1 = 0$ 时： $(n+2)(n+1) C_{n+2} = n C_{n+1}$ ，令 $n=-1$，得 $C_0 = 0$，

令 $n=0$，得 $C_2 = 0$. 再由递推可得 $C_n = \begin{cases} C_1, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$. 因此 w_1 为:

$$w_1 = C_1 z$$

当 $r = r_2 = 1$ 时： $C_{n+2} = \dfrac{(n+1)}{(n+3)(n+2)} C_{n+1}$ ，令 $n=-1$，得 $C_1 = 0$，再由递推得 $C_n = \begin{cases} C_0, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$ ，解为 $C_0 z$. 事实上，由于 $r_1 - r_2 = -1 \in \mathbb{Z}$，$r = r_1$ 和 r_2 会得到两个线性相关的解. 为求第二个独立解，设

$$w_2 = A w_1 \ln z + \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = A z \ln z + \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

$$w_2' = A(\ln z + 1) + \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}(n+1) z^n$$

$$w_2'' = \frac{A}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2}(n+2)(n+1) z^n$$

代入得到:

$$A - Az + \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+2}(n+2)(n+1) z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}(n+1) z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = 0$$

$$A - Az + 2C_2 z - C_1 z + C_0 + C_1 z + \sum_{n=2}^{\infty}\left[C_{n+1}(n+1)n - C_n(n-1)\right] z^n = 0$$

$$(A + C_0) + (2C_2 - A) z + \sum_{n=2}^{\infty}\left[C_{n+1}(n+1)n - C_n(n-1)\right] z^n = 0$$

$\Longrightarrow A = -C_0$ ， $C_2 = -\frac{1}{2} C_0$ ， $C_{n+1} = \dfrac{n-1}{(n+1)n} C_n$ ， $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{n-2}{n(n-1)} C_{n-1} \\
&= \frac{(n-2)(n-3)\cdots 3\,2\,1}{n(n-1)^2(n-2)^2\cdots 4^2 3^2\, 2} C_2 \\
&= \frac{(n-2)(n-3)\cdots 3\,2\,1}{n(n-1)^2(n-2)^2\cdots 4^2 3^2\, 2^2} \cdot (-C_0) \\
&= \frac{-C_0}{(n-1)\, n!} \quad , n \geq 3
\end{aligned}$$

由于 $n=2$ 时 $C_2 = -\frac{1}{2} C_0$ 也符合，所以 $n \geq 2$，解 w_2 为：

$$w_2 = -C_0 z \ln z + \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

综上，两独立解分别为：

$$w_1 = C_1 z,\quad w_2 = -C_0 z \ln z + C_0 + C_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-C_0}{n!(n-1)} z^n$$

其中 C_0, C_1 为待定常量.

(3) $9z^2 w'' - 15 z w' + (36 z^4 + 7) w = 0$

$$w'' - \frac{15}{9z} w' + \left(4z^2 + \frac{7}{9z^2}\right) w = 0$$

$z=0$ 是正则奇点，设 $w_1 = z^r \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$，代入并同除 z^r，得:

$$\sum_{n=-2}^{\infty} C_{n+2}(n+r+2)(n+r+1) z^n - \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{15}{9} C_{n+1}(n+r+1) z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 4 C_n z^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7}{9} C_n z^{n-2} = 0$$

整合同次幂，将 $z^k, k \in \{-2,-1,0,1\}$ 的项提出：

z^{-2} : $C_0 \cdot r(r-1) - \frac{15}{9} C_0 \cdot r + \frac{7}{9} C_0 = \frac{1}{9} C_0 (3r-1)(3r-7)$

z^{-1} : $\frac{1}{9} C_1 (3r+2)(3r-4)$

z^0 : $\frac{1}{9} C_2 (3r+5)(3r-1)$

z^1 : $\frac{1}{9} C_3 (3r+8)(3r+2)$

$z^n (n \geq 2)$: $C_{n+2}(n+r+2)(n+r+1) - \frac{15}{9} C_{n+2}(n+r+2) + 4 C_{n-2} + \frac{7}{9} C_{n+2}$

$= \frac{1}{9} C_{n+2}[3(n+r)+5][3(n+r)-1] + 4 C_{n-2}$ ， $n \geq 2$

指标方程 $(3r-1)(3r-7) = 0 \Longrightarrow r_1 - r_2 = 2 \in \mathbb{Z}$

当 $3r = 1 \xrightarrow{} r = \frac{1}{3}$ 时 ： $C_1 = C_3 = 0$，C_0 和 C_2 待定，且:

$$\frac{1}{9} C_{n+2}(3n+6)(3n) + 4 C_{n-2} = 0$$

$\Longrightarrow C_{n+2} = \dfrac{(-4)}{(n+2)n} C_{n-2}$，$C_n = \dfrac{(-4)}{n(n-2)} C_{n-4}$ ，于是：

$$C_{4n+1} = C_{4n+3} = 0$$

$$\begin{aligned}
C_{4n} &= \frac{(-4)}{4n(4n-2)} C_{4n-4} = \frac{(-1)}{2n(2n-1)} C_{4n-4} \\
&= \frac{(-1)^n}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} C_0 \\
&= \frac{(-1)^n}{(2n)!} C_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{4n+2} &= \frac{(-4)}{(4n+2)4n} C_{4n-2} = \frac{(-1)}{(2n+1)2n} C_{4n-2} \\
&= \frac{(-1)^n}{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)\cdots\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} C_2 \\
&= \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} C_2
\end{aligned}$$

因此解 w 为:

$$\begin{aligned}
w &= z^{\frac{1}{3}}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} C_0 \cdot z^{4n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} C_2 \cdot z^{4n+2}\right] \\
&= z^{\frac{1}{3}}\left[C_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z^2)^{2n} + C_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot (z^2)^{2n+1}\right] \\
&= z^{\frac{1}{3}}\left[C_0 \cos(z^2) + C_2 \sin(z^2)\right] \\
&= C_0 z^{\frac{1}{3}} \cos(z^2) + C_2 z^{\frac{1}{3}} \sin(z^2)
\end{aligned}$$

其中 C_0, C_2 为待定常量. 上面的两项已经线性无关，不必继续求解.

(4) $zw'' + (z-1)w' + w = 0$

$$w'' + \left(1-\frac{1}{z}\right)w' + \frac{1}{z}w = 0$$

$z=0$ 是正则奇点，设 $w_1 = z^r\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$，代入并同除 z^r，得：

过程都是类似的，这题就不写了.

2. 用幂级数法求方程 $\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{dw}{dz} + m^2 w = 0$ 在 $z=0$ 邻域的两个独立解

$z=0$ 是正则奇点，设 $w_1 = z^r\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$，代入并同除 z^r，得：

$$\sum_{n=-2}^{\infty} C_{n+2}(n+r+2)(n+r+1)z^n + \sum_{n=-1}^{\infty} 2C_{n+1}(n+r+1)z^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} m^2 C_n z^n = 0$$

整理各项系数：

z^{-2}： $C_0\cdot r(r-1) + 2C_0\cdot r = C_0 r(r+1)$

z^{-1}： $C_1\cdot(r+1)r + 2C_1\cdot(r+1) = C_1(r+1)(r+2)$

$z^n\ (n\geq 0)$： $C_{n+2}(n+r+2)(n+r+1) + 2C_{n+2}(n+r+2) + m^2 C_n$

$= C_{n+2}(n+r+2)(n+r+3) + m^2 C_n$

于是 $r = 0, -1, -2$.

当 $r=0$ 时： C_0 待定，$C_1 = 0$， $C_{n+2}(n+2)(n+3) = -m^2 C_n$

$C_n = \frac{-m^2}{(n+1)n}C_{n-2}$ ，得到 $C_{2n+1} = \frac{(-1)^n m^{2n}}{(2n+2)!}C_1 \equiv 0$，

$$C_{2n} = \frac{-m^2}{(2n+1)2n}C_{2n-2}$$
$$= \frac{(-1)^n m^{2n}}{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)\cdots\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}C_0$$
$$= \frac{(-1)^n m^{2n}}{(2n+1)!}C_0$$

于是一个独立解为 $w_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n m^{2n}}{(2n+1)!}C_0 z^{2n} = \frac{C_0}{mz}\sin(mz)$

令 $r=-2$，则 $C_0 = 0$，C_1 待定，$C_{n+2}\cdot n(n+1) + m^2 C_n = 0$

$C_n = \frac{-m^2}{(n-1)(n-2)}C_{n-2}$ ，得到 $C_{2n}\equiv 0$.

$$C_{2n+1} = \frac{-m^2}{(2n)(2n-1)}C_{2n-1}$$
$$= \frac{(-1)^n m^{2n}}{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots\cdot 2\cdot 1}C_1$$
$$= \frac{(-1)^n m^{2n}}{(2n)!}C_1$$

于是另一独立解为：

$$w_2 = z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n m^{2n}}{(2n)!}C_1 z^{2n+1} = \frac{C_1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(mz)^{2n} = C_1\frac{\cos(mz)}{z}$$

为保持形式的一致性，可写为： $w = C_0\frac{\sin(mz)}{mz} + C_1\frac{\cos(mz)}{mz}$

其中 C_0, C_1 为待定常量.

3. 用幂级数法求方程 $\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{du}{dz} - m^2 u = 0$ 在 $z=0$ 邻域的两个独立解

过程仍然类似，我们仅给出关键步骤.

设 $w_1 = z^r\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$，代入得：

$$r^2 C_0 z^{-1} + (1-r)^2 C_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+r+1)^2 C_{n+1} - m^2 C_{n-1}\right]z^n = 0$$

r 的根为 $0, 1$. 令 $r=0$，则 C_0 待定，$C_1 = 0$， $(n+1)^2 C_{n+1} = m^2 C_{n-1}$

$C_n = \frac{m^2}{n^2}C_{n-2}$，得到 $C_{2n} = \frac{m^2}{(2n)^2}C_{2n-2} = \frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2n}C_0$ ，$n\geq 1$

$$\Longrightarrow w_1 = C_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2n}z^{2n} = C_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{imz}{2}\right)^{2n} = C_0 J_0(imz)$$

其中 C_0 是待定常量，$J_0(z)$ 是 0 阶 Bessel 函数（第一类）.

为求 w_2，设 $w_2 = Aw_1\ln z + \sum_{n=0}^{\infty}C_n z^n$，代入得：

$$\frac{A}{z}\left[w_1'' + \frac{1}{z}w_1' - m^2 w_1\right] + C_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(2n+1)^2 C_{2n+1} - m^2 C_{2n-1}\right]z^{2n}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[(2n)^2 C_{2n} - m^2 C_{2n-2} + 4A\left(\frac{m}{2}\right)^{2n}\cdot\frac{n}{(n!)^2}\right]z^{2n-1} = 0 \quad ,\ n\geq 1$$

$C_1 = 0 \Longrightarrow C_{2n+1}\equiv 0$，

$$C_{2n} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{m}{2}\right)^2 C_{2n-2} - \frac{A}{n(n!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2n}$$
$$= \frac{1}{n^2}\left(\frac{m}{2}\right)^2\left[\frac{1}{(n-1)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^2 C_{2n-4} - \frac{A}{(n-1)[(n-1)!]^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2n-2}\right] - \frac{A}{n(n!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2n}$$
$$= \frac{1}{n^2(n-1)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^4 C_{2n-4} - \frac{A}{(n!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2n}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right)$$
$$= \cdots$$
$$= \frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2n}C_0 - \frac{A}{(n!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2n}\cdot\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + 1\right)$$
$$= \frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2n}C_0 - \frac{A}{(n!)^2}\left(\frac{m}{2}\right)^{2n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

考虑到第一项就是 w_1，可将 w_2 写为：

$$w_2 = Aw_1\ln z - A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{(n!)^2}\left(\frac{mz}{2}\right)^{2n} = A\left[J_0(imz)\ln z - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{(n!)^2}\left(\frac{mz}{2}\right)^{2n}\right]$$

其中 A 为待定常量.

Homework 14: 2024.11.26 - 2024.12.02

1. 用分离变量法求定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (0,\pi),\ t \in (0,+\infty) \\ \text{初始条件}: u(x,0) = 3\sin x,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & x \in [0,\pi] \\ \text{边界条件}: u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \in [0,+\infty) \end{cases}$$

设 $u = X(x)T(t)$，代入得：$\dfrac{1}{a^2}\dfrac{T''(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$

$\lambda \le 0$ 时，$u(x,t) \equiv 0$，因此 $\lambda > 0$，此时对 X：

$\lambda < 0$ 时：$X = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad l = \pi$$

通解为 $X = B\sin(\sqrt{\lambda}x)$，且 $\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \implies \sqrt{\lambda} = \dfrac{n\pi}{l}$，$\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2, n \in \mathbb{N}^*$.

得到解系 $\left[X_n(x) = B_n\sin(\sqrt{\lambda_n}x)\right]_{n=1}^{\infty}$. 将 λ_n 代回，得到 $T(t)$ 的解系为

$$T_n(t) = C_n\cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + D_n\sin(a\sqrt{\lambda_n}t), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

由叠加原理：

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cdot\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right)\right]$$

应用初始条件可得：

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\frac{n\pi a}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

显然，a_n 是 $u(x,0)$ 的傅里叶系数，有：

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$b_n\frac{n\pi a}{l} = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

在本题，$l = \pi$，$f(x) = 3\sin x$，$g(x) = 0$，因此：$a_1 = 3$，$a_n = 0$，$n \ge 2$.

$b_n \equiv 0$. 代入得定解 u 为：

$$u = 3\sin x\cos(at), \quad x \in (0,\pi),\ t > 0$$

2. 用分离变量法求定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x,y) \in [0,a]\times[0,b] \\ x\text{边界条件}: u(0,y) = u_0,\ u(a,y) = u_0\cdot\left[3\left(\dfrac{y}{b}\right)^2 - 2\left(\dfrac{y}{b}\right)^3\right] \\ y\text{边界条件}: \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,b) = 0. \end{cases}$$

推导过程比较繁琐，我们仅给关键步骤：

设 $u(x,y) = X(x)Y(y)$，代入得 $-\dfrac{Y''}{Y} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$，由边界条件：

$$Y'(0) = Y'(b) = 0$$

① $\lambda > 0$ 时：$Y = Ae^{\sqrt{\lambda}y} + Be^{-\sqrt{\lambda}y}$，$Y'(y) = \sqrt{\lambda}\left(Ae^{\sqrt{\lambda}y} - Be^{-\sqrt{\lambda}y}\right)$

由 y 边界条件知 $A = B = 0$，舍去.

② $\lambda = 0$ 时：$Y = Ay + B$，由边界条件知 $A = 0$，$B \ne 0$. 同理 $X = Cx + D$，C, D 待定.

③ $\lambda < 0$ 时：$Y = A\cos(\sqrt{-\lambda}y) + B\sin(\sqrt{-\lambda}y)$，$Y' = \sqrt{-\lambda}\left[B\cos(\sqrt{-\lambda}y) - A\sin(\sqrt{-\lambda}y)\right]$

$\implies B = 0$，$\sqrt{-\lambda}b = n\pi$，$\lambda_n = -\left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^2$. 此时 $X_n = C_ne^{\sqrt{-\lambda}x} + D_ne^{-\sqrt{-\lambda}x}$.

回到 $u(x,y)$，可得：

$$u(x,y) = (Cx + D) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_ne^{\sqrt{-\lambda}x} + D_ne^{-\sqrt{-\lambda}x}\right)\cos(\sqrt{-\lambda}y)$$

$$u|_{x=0} = D + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n + D_n)\cos(\sqrt{-\lambda}y) = u_0$$

$$\implies D = u_0, \quad C_n + D_n = 0, \quad n \ge 1$$

$$u|_{x=a} = (Ca + u_0) + \sum_{n=1}^{\infty} 2C_n\sinh(\sqrt{-\lambda}a)\cos(\sqrt{-\lambda}y)$$

$$= u_0\cdot\left[3\left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{b}\right)^3\right]$$

记 $e_n = 2C_n\sinh(\sqrt{-\lambda}a)$ 和 $\varphi(y) = 3\left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{b}\right)^3$，则有：

$$Ca + \sum_{n=1}^{\infty} e_n\cos(\sqrt{-\lambda_n}y) = u_0[\varphi(y) - 1] = h(y), \quad y \in [0,b]$$

$$\implies Ca = \frac{1}{b}\int_0^b h(y)dy, \quad e_n = \frac{2}{b}\int_0^b h(y)\cos(\sqrt{-\lambda_n}y)dy$$

$$\implies C = -\frac{u_0}{2a}, \quad e_n = \begin{cases} -\dfrac{48}{n^4\pi^4}, & n\text{为奇} \\ 0, & n\text{为偶} \end{cases}$$

代回 $u(x,y)$ 中，即得：

$$u(x,y) = -\frac{u_0}{2a}x + u_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-48}{(2n-1)^4\pi^4}\cdot\frac{\sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{b}x\right)}{\sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{b}a\right)}\cdot\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{b}y\right)$$

3. 求解细杆的导热问题. 杆长为 l，两端点 $x = 0, l$ 均保持零度，初始温度分布为 $\dfrac{1}{l^2}bx(l-x)$ ℃.

等价于求下面的定解问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (0,l),\ t \in (0,+\infty) \\ \text{初始条件}: u(x,0) = b\dfrac{x(l-x)}{l^2}, & x \in [0,l] \\ \text{边界条件}: u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \in [0,+\infty) \end{cases}$$

设 $u(x,t) = X(x)T(t)$，代入得 $\dfrac{1}{a^2}\dfrac{T'}{T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$，

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

$\lambda \le 0$ 时仅有零解，$\lambda > 0$ 时，有：$X = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$

由初始条件，$A = 0$，$\sqrt{\lambda}l = n\pi$，本征值 $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$，本征函数

$X_n = B_n\sin\left(\dfrac{n\pi}{l}x\right)$. 将 λ_n 代回，有：

$$\begin{cases} T' + \lambda_n a^2 T = 0 \\ T(0) = C \ne 0 \end{cases} \implies T_n = C_ne^{-a^2\lambda_n t}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

于是 u 的全解为：

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_nT_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)e^{-a^2\lambda_n t}$$

由初始条件 $f(x) = u(x,0)$，可得：$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$，由正弦函数的正交性：

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

在本题，$f(x) = b\dfrac{x(l-x)}{l^2}$，求定积分得：

$$a_n = \frac{2b}{n^3\pi^3}\left[4\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \pi n\sin(n\pi)\right] = \begin{cases} \dfrac{8b}{n^3\pi^3}, & n = 1,3,5,\cdots \\ 0, & n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

$$\implies a_{2n+1} = \frac{4bl}{(2n+1)^3\pi^3}, \quad n \in \mathbb{N}$$

于是全解为：

$$u(x,t) = \frac{8b}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x}{(2n+1)^3}\exp\left(-(2n+1)^2\frac{\pi^2a^2}{l^2}t\right), \quad x \in (0,l),\ t \in (0,+\infty)$$

Homework 15 : 2024.12.03 - 2024.12.09

1.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ x\in(0,l), \ t\in(0,+\infty) \\ u|_{x=0} = \cos(\frac{\pi a}{l}t), \ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \cos(\frac{\pi}{l}x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sin(\frac{\pi}{2l}x) \end{cases}$$

方程齐次，边界条件第二类且非齐次，考虑辅助函数法.

设 $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$，其中 v 满足方程和边界条件. 令 $v = f(x)\cos(\frac{\pi a}{l}t)$

$$\begin{cases} -f(x)(\frac{\pi a}{l})^2\cos(\frac{\pi a}{l}t) - a^2 f''(x)\cos(\frac{\pi a}{l}t) = 0 \\ f(0) = 1, \ f'(l) = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow f(x) = \cos(\frac{\pi}{l}x)$, $v(x,t) = \cos(\frac{\pi}{l}x)\cos(\frac{\pi a}{l}t)$，则 w 满足:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ w|_{x=0} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0 \\ w|_{t=0} = 0, \ \dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sin(\frac{\pi}{2l}x) \end{cases}$$

方程和边界条件都齐次，考虑分离变量法，设 $w = X(x)T(t)$，则:

$$X'' = -\lambda X, \quad X(0) = X'(l) = 0$$

① $\lambda > 0$ 时，$X = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$，$A = 0$

$X' = \sqrt{\lambda}B\cos(\sqrt{\lambda}x)$，$\sqrt{\lambda}l = \frac{\pi}{2} + n\pi$

也即 $X_n = B_n\sin(\sqrt{\lambda_n}x)$，$\sqrt{\lambda_n} = \frac{\frac{\pi}{2}+n\pi}{l} = \frac{(2n+1)\pi}{2l}$，$n = 0,1,2,\cdots$

② $\lambda = 0$ 时: $X = Ax + B$，$A = B = 0$ 为零解.

③ $\lambda < 0$ 时: $X = A\exp(\sqrt{-\lambda}x) + B\exp(-\sqrt{-\lambda}x)$，$A = B = 0$ 为零解.

于是 $w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}[A_n\cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + B_n\sin(a\sqrt{\lambda_n}t)]\sin(\sqrt{\lambda_n}x)$

$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty}a\sqrt{\lambda_n}[-A_n\cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + B_n\cos(a\sqrt{\lambda_n}t)]\sin(\sqrt{\lambda_n}x)$

由初始条件，$A_n \equiv 0$，$\sum_{n=0}^{\infty}a\sqrt{\lambda_n}B_n\sin(\sqrt{\lambda_n}x) = \sin(\frac{\pi}{2l}x)$

$$\Longrightarrow a\sqrt{\lambda_n}B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \sin(\frac{\pi}{2l}x)\sin(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x)\,dx$$
$$= \frac{2}{l}\cdot\frac{2l}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin((2n+1)x)\,dx$$
$$= \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \geq 1 \end{cases}$$

事实上，$\{\sin(\frac{(2n+1)\pi}{l}x)\}_{n=0}^{\infty}$ 构成一个标准正交系. 因此当且仅当它与自身内积时值非零，且为 1.

代回 $u(x,t)$ 得:

$$u(x,t) = v(x,t) + \sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)X_n(x) \Longrightarrow$$
$$u(x,t) = \cos(\frac{\pi}{l}x)\cos(\frac{\pi a}{l}t) + \frac{2l}{a\pi}\sin(\frac{a\pi}{2l}t)\sin(\frac{\pi}{2l}x)$$

2.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ x\in(0,l), \ t\in(0,+\infty), \ a>0 \\ u|_{x=0} = Ae^{i\omega t}, \ u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

设 $u = v + w$，其中 $v(x,t) = f(x)Ae^{i\omega t}$ 满足方程和边界条件，则:

$$\begin{cases} i\omega f(x) - af''(x) = 0 \longrightarrow f(x) = C_1e^{\sqrt{\frac{i\omega}{a}}x} + C_2e^{-\sqrt{\frac{i\omega}{a}}x} \\ f(0) = 1, \ f(l) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{e^{\sqrt{\frac{i\omega}{a}}x}}{1-e^{2\sqrt{\frac{i\omega}{a}}l}} + \frac{e^{-\sqrt{\frac{i\omega}{a}}x}}{1-e^{-2\sqrt{\frac{i\omega}{a}}l}},$$

也即 $v(x,t) = Ae^{i\omega t}\left[\frac{e^{\sqrt{\frac{i\omega}{a}}x}}{1-e^{2\sqrt{\frac{i\omega}{a}}l}} + \frac{e^{-\sqrt{\frac{i\omega}{a}}x}}{1-e^{-2\sqrt{\frac{i\omega}{a}}l}}\right]$

则 w 满足:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \ x\in(0,l), \ t\in(0,+\infty), \ a>0 \\ w|_{x=0} = 0, \ w|_{x=l} = 0 \\ w|_{t=0} = -v|_{t=0} = -A\left[\dfrac{e^{\sqrt{\frac{i\omega}{a}}x}}{1-e^{2\sqrt{\frac{i\omega}{a}}l}} + \dfrac{e^{-\sqrt{\frac{i\omega}{a}}x}}{1-e^{-2\sqrt{\frac{i\omega}{a}}l}}\right] = h(x) \end{cases}$$

由分离变量法可得 $\sqrt{\lambda_n}l = n\pi$，$n \geq 1$，且 $w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}B_ne^{-a\lambda_nt}\sin(\frac{n\pi}{l}x)$

由初始条件: $\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(\frac{n\pi}{l}x) = h(x)$

$$\Longrightarrow B_n = \frac{2}{l}\int_0^l h(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)\,dx$$
$$= \frac{2}{l}\int_0^l -A\sin(\frac{n\pi}{l}x)\left[\frac{e^{\sqrt{\frac{i\omega}{a}}x}}{1-e^{2\sqrt{\frac{i\omega}{a}}l}} + \frac{e^{-\sqrt{\frac{i\omega}{a}}x}}{1-e^{-2\sqrt{\frac{i\omega}{a}}l}}\right]dx$$
$$=$$

代回 $u(x,t)$ 即得:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$
$$= Ae^{i\omega t}\left[\frac{e^{\sqrt{\frac{i\omega}{a}}x}}{1-e^{2\sqrt{\frac{i\omega}{a}}l}} + \frac{e^{-\sqrt{\frac{i\omega}{a}}x}}{1-e^{-2\sqrt{\frac{i\omega}{a}}l}}\right] + \sum_{n=1}^{\infty}B_ne^{-a\lambda_nt}\sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

3.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ x\in(0,l), \ t\in(0,+\infty), \ a>0 \\ u|_{x=0} = Ae^{-\alpha^2at}, \ u|_{x=l} = Be^{-\beta^2at} \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

设 $u = v + w$，其中 $v(x,t) = Af(x)e^{-\alpha^2at} + Bg(x)e^{-\beta^2at}$ 满足方程和边界条件，则:

$$\begin{cases} f''(x) = -\alpha^2 f \\ f(0) = 1, \ f(l) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} g''(x) = -\beta^2 g(x) \\ g(0) = 0, \ g(l) = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{\sin\alpha(l-x)}{\sin\alpha l}, \quad g(x) = \frac{\sin\beta x}{\sin\beta l}$$

于是 $w(x,t)$ 满足:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ x\in(0,l), \ t\in(0,+\infty), \ a>0 \\ w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0 \\ w|_{t=0} = -v|_{t=0} = -A\dfrac{\sin\alpha(l-x)}{\sin\alpha l} - B\dfrac{\sin\beta x}{\sin\beta l} \longrightarrow \text{记为 } h(x) \end{cases}$$

考虑分离变量法，设 $w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$，则:

本征值 λ_n 满足 $\sqrt{\lambda_n}l = n\pi$，$\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{l}$，本征函数 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sin(\sqrt{\lambda_n}x)\}_{n=1}^{\infty}$.

代入 $\frac{1}{a}\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$，$T'(t) = -\lambda a\,T(t) \Longrightarrow T(t) = Ce^{-\lambda at}$

于是 $w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}C_n\sin(\frac{n\pi}{l}x)e^{-\lambda at}$，$w|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty}C_n\sin(\frac{n\pi}{l}x) = h(x)$.

由正交性:

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l h(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)\,dx$$
$$= \frac{-2A}{l\sin\alpha l}\int_0^l \sin\alpha(l-x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)\,dx + \frac{-2B}{l\sin\beta l}\int_0^l \sin\beta x\sin(\frac{n\pi}{l}x)\,dx$$
$$= \frac{-2A}{l\sin\alpha l}I_1 + \frac{-2B}{l\sin\beta l}I_2$$

下面做这两个积分，先考虑 I_2: $\sin x\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^l[\cos(\beta - \frac{n\pi}{l})x - \cos(\beta + \frac{n\pi}{l})x]\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\beta l - n\pi)}{\beta - \frac{n\pi}{l}} - \frac{\sin(\beta l + n\pi)}{\beta + \frac{n\pi}{l}}\right]$$
$$= \frac{(-1)^n\sin\beta l}{2}\left[\frac{1}{\beta - \frac{n\pi}{l}} - \frac{1}{\beta + \frac{n\pi}{l}}\right]$$
$$= \frac{(-1)^n n\pi l\sin\beta l}{(\beta l)^2 - (n\pi)^2}$$

同理，$I_1 = \frac{n\pi l\sin\alpha l}{(n\pi)^2 - (\alpha l)^2}$，于是:

$$C_n = \frac{-2A}{l\sin\alpha l}\cdot\frac{n\pi l\sin\alpha l}{(n\pi)^2 - (\alpha l)^2} + \frac{-2B}{l\sin\beta l}\cdot\frac{(-1)^n n\pi l\sin\beta l}{(\beta l)^2 - (n\pi)^2}$$
$$= \frac{-2n\pi A}{(n\pi)^2 - (\alpha l)^2} + \frac{(-1)^n 2n\pi B}{(n\pi)^2 - (\beta l)^2}, \quad (n\pi \neq \alpha l, \ n\pi \neq \beta l)$$

综上，我们有:

$$u(x,t) = v(x,t) + \sum_{n=0}^{\infty}C_n\sin(\frac{n\pi}{l}x)e^{-a\lambda_nt}$$
$$= A\frac{\sin\alpha(l-x)}{\sin\alpha l}e^{-\alpha^2at} + B\frac{\sin\beta x}{\sin\beta l}e^{-\beta^2at}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}2n\pi\left[\frac{(-1)^nB}{(n\pi)^2 - (\beta l)^2} - \frac{A}{(n\pi)^2 - (\alpha l)^2}\right]\sin(\frac{n\pi}{l}x)e^{-a(\frac{n\pi}{l})^2t}$$

4. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Ae^{-\beta x}, x\in(0,l), \ t\in(0,+\infty) \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = T_0 \end{cases}$$

设 $u = v(x) + w(x,t)$，其中 $v(x)$ 满足边界条件和非齐次方程，也即：

$$\begin{cases} a^2 v'' = -Ae^{-\beta x} \\ v(0) = v(l) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow v(x) = -\frac{A}{a^2\beta^2}e^{-\beta x} + Cx + D，其中 C, D 满足：$$

$$\begin{cases} -\dfrac{A}{a^2\beta^2} + D = 0 \\ -\dfrac{A}{a^2\beta^2}e^{-\beta l} + Cl + D = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C = \dfrac{A}{la^2\beta^2}(e^{-\beta l} - 1) \\ D = \dfrac{A}{a^2\beta^2} \end{cases}$$

于是 $w(x,t)$ 满足：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0 \\ w|_{t=0} = T_0 - v(x) \end{cases}$$

考虑分离变量法，设 $w(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$，则 $\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$.

本征值 λ_n 有 $\sqrt{\lambda_n}\, l = n\pi$，函数 $X_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x) = \sin(\frac{n\pi}{l}x)$.

$$T' = -\lambda a^2 T \Longrightarrow T_n(t) = B_n e^{-\lambda_n a^2 t}$$

代回 w，得到：

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)e^{-\lambda_n a^2 t},$$

$$w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = T_0 - v(x)$$，由正交性：

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{l}\int_0^l (T_0 - v(x))\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \\ &= \frac{2}{l}\int_0^l \left(T_0 - D - Cx + \frac{A}{a^2\beta^2}e^{-\beta x}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \\ &= [1-(-1)^n]\cdot\frac{2(T_0-D)}{n\pi} + C\cdot\frac{(-1)^n 2l}{n\pi} + \frac{A}{a^2\beta^2}\cdot\frac{2n\pi}{(\beta l)^2+(n\pi)^2}[(-1)^n e^{-\beta l} - 1] \end{aligned}$$

代入 $u(x,t)$ 即得：

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v(x) + w(x,t) \\ &= -\frac{A}{a^2\beta^2}e^{-\beta x} + \frac{A(e^{-\beta l}-1)}{la^2\beta^2}x + \frac{A}{a^2\beta^2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \end{aligned}$$

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l T_0\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx = \frac{2T_0}{n\pi}\int_0^{n\pi}\sin y\,dy = \frac{2T_0}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

即 $B_n = \begin{cases} \frac{4T_0}{n\pi}, & n为奇数 \\ 0, & n为偶数 \end{cases}$，代回 w，得：

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x\, e^{-\left[\frac{a(2n+1)\pi}{l}\right]^2 t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4T_0}{(2n+1)\pi}\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x\, e^{-\left[\frac{a(2n+1)\pi}{l}\right]^2 t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v(x) + w(x,t) \\ &= -\frac{A}{a^2\beta^2}e^{-\beta x} + \frac{A(e^{-\beta l}-1)}{la^2\beta^2}x + \frac{A}{a^2\beta^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4T_0}{(2n+1)\pi}\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x\, e^{-\left[\frac{a(2n+1)\pi}{l}\right]^2 t} \end{aligned}$$

Homework 16: 2024.12.10 - 2024.12.16

1. 用Fourier变法法求非齐次弦振动初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & x\in(-\infty,+\infty),\ t\in(0,+\infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), & x\in(-\infty,+\infty) \end{cases}$$

对 x 作 Fourier 变换，有：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = -a^2w^2\tilde{u} + \tilde{f}(w,t) \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(w),\ \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \tilde{\psi}(w) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \text{齐次解 } \tilde{u}_h = \tilde{u}_h(w,t) = A\underbrace{e^{iwat}}_{\tilde{u}_1} + B\underbrace{e^{-iwat}}_{\tilde{u}_2}$$

由常数变易法：

$$\tilde{u} = \underbrace{C_1\tilde{u}_1 + C_2\tilde{u}_2}_{\text{齐次解}} + \overbrace{\tilde{u}_2\int_0^t \frac{\tilde{f}(t)\tilde{u}_1(t)}{\Delta(t)}dt - \tilde{u}_1\int_0^t \frac{\tilde{f}(t)\tilde{u}_2(t)}{\Delta(t)}dt}^{\text{特解}}$$

其中 $\Delta = \begin{vmatrix} \tilde{u}_1 & \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_1' & \tilde{u}_2' \end{vmatrix} = e^{iwat}\cdot(-iwa\cdot e^{-iwat}) - e^{-iwat}\cdot(iwa\cdot e^{iwat})$

$\Longrightarrow \Delta = -2iwa.$ 为确定 C_1, C_2，上式对 t 求导：

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = iwaC_1e^{iwat} - iwaC_2e^{-iwat} + \frac{1}{\Delta}\left[-iwae^{-iwat}\int_0^t \tilde{f}(t)e^{iwat}dt + \tilde{f}(t)\right] - \frac{1}{\Delta}\left[iwae^{iwat}\int_0^t \tilde{f}(t)e^{-iwat}dt + \tilde{f}(t)\right]$$

$$= iwa(C_1e^{iwat} - C_2e^{-iwat}) + \frac{1}{2}\left[e^{-iwat}\int_0^t \tilde{f}(t)e^{iwat}dt + e^{iwa}\int_0^t \tilde{f}(t)e^{-iwat}dt\right]$$

$\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\Big|_{t=0} = iwa(C_1 - C_2) = \tilde{\psi}(w)$，$\tilde{u}|_{t=0} = C_1 + C_2 = \tilde{\varphi}(w)$，联立解得：

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(\tilde{\varphi}(w) + \frac{\tilde{\psi}(w)}{iwa}\right),\quad C_2 = \frac{1}{2}\left(\tilde{\varphi}(w) - \frac{\tilde{\psi}(w)}{iwa}\right).$$

现在可以对 $\tilde{u}$ 作 $\mathscr{F}^{-1}$，一项一项考虑：

$\mathscr{F}^{-1}\{\tilde{\varphi}(w)\tilde{u}_1\} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\varphi}(w)\cdot e^{iwat}\cdot e^{iwt}dw = \varphi(x+at)$ （延迟定理）

$\mathscr{F}^{-1}\{\tilde{\varphi}(w)\tilde{u}_2\} = \varphi(x-at)$. 对于 $\dfrac{\tilde{\psi}(w)}{iwa}$，由积分定理：

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{\tilde{\psi}(w)}{iwa}\right\} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x}\psi(\xi)d\xi \xrightarrow{\text{延迟}} \mathscr{F}\left\{\frac{\tilde{\psi}(w)}{iwa}e^{iwat}\right\} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x+at}\psi(\xi)d\xi，\text{于是：}$$

$$\mathscr{F}^{-1}\{C_1\tilde{u}_1 + C_2\tilde{u}_2\} = \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \quad ①$$

$$\text{而 } \mathscr{F}^{-1}\left\{\tilde{u}_2\int_0^t \frac{\tilde{f}(t)\tilde{u}_1(t)}{\Delta(t)}dt\right\} = \mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{e^{-iwat}}{-2iwa}\int_0^t \tilde{f}(t)e^{iwa\tau}d\tau\right\}$$

$$= \frac{1}{-2a}\int_0^t \mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{\tilde{f}(t)}{jw}e^{-iwa(t-\tau)}\right\}d\tau = \frac{1}{-2a}\int_0^t\int_{-\infty}^{x-a(t-\tau)} f(\xi,t)\,d\xi\,d\tau \quad ②$$

$$\text{同理 } \mathscr{F}^{-1}\left\{\tilde{u}_1\int_0^t \frac{\tilde{f}(t)\tilde{u}_2(t)}{\Delta(t)}dt\right\} = \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{-\infty}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,t)\,d\xi\,d\tau \quad ③$$

①②③式相加，我们有：

$u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\{\tilde{u}(t)\}$

$$= \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,t)\,d\xi$$

2. 用Fourier变法法求初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial u}{\partial x} + cu, & x\in(-\infty,+\infty),\ t\in(0,+\infty) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x\in(-\infty,+\infty) \end{cases}$$

对 x 作 Fourier 变换，有：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -a^2w^2\tilde{u} - iwb\tilde{u} + c\tilde{u} \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(w) \end{cases} \Longrightarrow u = A\exp[(c - a^2w^2 - ibw)t]$$

$\tilde{\varphi}(w) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,t)e^{-iwx}dx$

由初始条件，$\tilde{u} = \tilde{\varphi}(w)\exp[(c - a^2w^2 - ibw)t]$

$$\Longrightarrow u = \mathscr{F}^{-1}\{\tilde{u}\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\varphi}(w)\exp[(c - a^2w^2 - ibw)t]\cdot e^{iwx}dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\exp[(c - a^2w^2 - ibw)t + iwx]\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,t)e^{-iwx}dx\right\}dw$$

3. 用 Laplace 变换法求定解问题

$$\begin{cases} \text{Eq} & \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x\in(0,+\infty),\ t\in(0,+\infty) \\ \text{BC} & u|_{x=0} = 0,\ u|_{x\to+\infty} = 1, & t\in[0,+\infty) \\ \text{IC} & u|_{t=0} = 1, & x\in[0,+\infty) \end{cases}$$

对问题作 Laplace 变换，设 $\mathscr{L}\{u(x,t)\} = F(x,s)$，得到拉氏域中的定解问题：

$$\begin{cases} sF - u|_{t=0} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ F|_{x=0} = 0,\ F|_{x\to+\infty} = \dfrac{1}{s} \\ u|_{t=0} = 1 \end{cases} \Longrightarrow F(x,s) = \frac{1}{s} + Ae^{\sqrt{s}x} + Be^{-\sqrt{s}x}$$

利用 BC 得 $F(x,s) = \dfrac{1}{s}(1 - e^{-\sqrt{s}x}) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s}e^{-\sqrt{s}x}$.

由于 $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}e^{-\alpha\sqrt{s}}\right\} = \operatorname{erfc}\left(\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$，令 $\alpha = x$，得到：

$$u(x,t) = 1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right),\quad t\geq 0,\ x\in(0,+\infty)$$

$\operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\xi^2}d\xi$ 为高斯误差函数

4. 用 Laplace 变换法求定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2\cos wt, & x\in(0,+\infty),\ t\in(0,+\infty) \\ u|_{x=0} = 0, & t\in[0,+\infty) \\ u|_{t=0} = \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, & x\in[0,+\infty) \end{cases}$$

设 $\mathscr{L}\{u(x,t)\} = U(x,s)$，对问题作 Laplace 变换，并代入IC，得到：

$$\begin{cases} s^2U = a^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a^2\dfrac{s}{s^2+w^2} \\ U|_{x=0} = 0,\ U|_{x\to+\infty} \text{ 有界} \end{cases}$$

特解 $U_0 = \dfrac{a^2}{s(s^2+w^2)} = \dfrac{a^2}{w^2}\left[\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s+iw} + \dfrac{1}{s-iw}\right)\right]$

齐次解 $U_h = Ae^{\frac{sx}{a}} + Be^{-\frac{sx}{a}}$，相加，利用BC得：$U = U_0(1 - e^{-\frac{sx}{a}})$

于是 $u(x,t) = \mathscr{L}^{-1}\{U_0(s)(1 - e^{\frac{sx}{a}})\}$

$$= \mathscr{L}^{-1}\{U_0(s)\} - \mathscr{L}^{-1}\{U_0(s)e^{\frac{sx}{a}}\}$$

$$= \frac{a^2}{w^2}(1 - \cos wt) - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{a^2e^{\frac{sx}{a}}}{s(s^2+w^2)}\right\}$$

$$= \frac{a^2}{w^2}\left[1 - \cos wt + H(t - \tfrac{x}{a})\cdot(1 - \cos w(t - \tfrac{x}{a}))\right]$$

Homework 17: 2024.12.17 - 2024.12.23

1. 用格林函数法求解热传导问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \ x\in(-\infty,+\infty), \ t>0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

无界热传导. 考虑平移后的格林函数 $G(x,t) = G(x,t;0,0)$, 它满足:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t} - k\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0, \ x\in(-\infty,+\infty), \ t>0 \\ G|_{t=0} = \delta(x) \end{cases}$$

则 u 可表示为: $u = \varphi(x) * G(x,t) + \int_0^t f(x,\tau) * G(x,t-\tau)\, d\tau$

下面先求 $G(x,t)$. 对 x 作 Fourier 变换, 有:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{G}}{\partial t} - k(i\omega)^2 \hat{G} = 0 \\ \hat{G}|_{t=0} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \hat{G} = e^{-kt\omega^2}, \quad G = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{G}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

代入即得: $u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) G(x-\xi,t)\, d\xi + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau)\, G(x-\xi,t-\tau)\, d\xi$

只要边界齐次, 就能使用 Green 函数法

直接将 eq=0, 然后初始条件如下即可:

波动, 无界: $G|_{t=0} = \delta(x)$

波动, 有界: $G|_{t=\tau} = \delta(x-\xi)$

热传, 无界: $G|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial G}{\partial t}|_{t=0} = \delta(x)$

热传, 有界: $G|_{t=\tau} = 0$, $\frac{\partial G}{\partial t}|_{t=\tau} = \delta(x-\xi)$

2. 用格林函数法求解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A\sin(wt) \to f(x,t), \ x\in(0,l), \ t>0 \\ u|_{x=0} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \longrightarrow \varphi(x) \end{cases}$$

有界热传导. 考虑作了时间平移的格林函数 $G = G(x,t;x_0,0)$, 它满足:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0, \ x\in(0,l), \ t>0 \\ G|_{x=0} = 0, \quad \dfrac{\partial G}{\partial x}|_{x=l} = 0 \\ G|_{t=0} = \delta(x-x_0) \end{cases}$$

考虑分离变量法求解, 设 $G = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$, 本征值 $\lambda_n > 0$ (否则为平凡解), 且满足 $\sqrt{\lambda_n}\, l = n\pi - \frac{\pi}{2}$, 本征函数 $X_n = \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x)$, 从而 $T_n = A_n e^{-\lambda a^2 t}$, 代入得到:

$G = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n a^2 t} \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x)$, $G|_{t=0} = \delta(x-x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x)$, 由系数一致性:

$$\Longrightarrow A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \delta(x-x_0)\sin(\sqrt{\lambda_n}\, x)\, dx = \frac{2}{l}\sin(\sqrt{\lambda_n}\, x_0)$$

于是 $G(x,t;x_0,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \exp\left(-\frac{a^2}{l^2}(n\pi - \frac{\pi}{2})t\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi - \frac{\pi}{2}}{l} x_0\right) \sin\left(\frac{n\pi-\frac{\pi}{2}}{l} x\right)$, 于是:

$$u = \int_0^l \varphi(\xi) G(x,t;\xi,0)\, d\xi + \int_0^t d\tau \int_0^l f(\xi,\tau)\, G(x,t;\xi,\tau)\, d\xi$$

$$= \int_0^t d\tau \int_0^l A\sin(w\tau) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \exp\left(-\frac{a^2}{l^2}(n\pi-\frac{\pi}{2})(t-\tau)\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi-\frac{\pi}{2}}{l}\xi\right) \sin\left(\frac{n\pi-\frac{\pi}{2}}{l}x\right) d\xi$$

积分核为繁琐, 我们就不做了. 实际工作中利用计算软件即可.

3. 求满足下列定解问题的格林函数 $G(x,t;x_0,t_0)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(x-x_0)\delta(t-t_0), \ x, x_0\in(0,l), \ t>t_0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad \dfrac{\partial G}{\partial x}|_{x=l} = 0, \quad t\geq 0 \\ G|_{t<t_0} = 0, \quad \dfrac{\partial G}{\partial t}|_{t<t_0} = 0, \quad x\in[0,l] \end{cases}$$

是有界波动方程的 Green 函数, 不妨作时间平移, 令 $G = G(x,t;x_0,0)$, 满足:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 G}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0, \ x, x_0\in(0,l), \ t>0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad \dfrac{\partial G}{\partial x}|_{x=l} = 0, \quad t\geq 0 \\ G|_{t<0} = 0, \quad \dfrac{\partial G}{\partial t}|_{t<0} = \delta(x-x_0), \quad x\in[0,l] \end{cases}$$

仍用分离变量法, 设 $G = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(t)$, 则本征值 λ_n 满足:

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda_n}\, l = 0, & n=0 \\ \sqrt{\lambda_n}\, l = n\pi, & \text{else} \end{cases}, \text{相应地本征函数 } X_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ \cos(\sqrt{\lambda_n}\, x), & \text{else} \end{cases},$$

$$T_n(t) = \begin{cases} ct+d, & n=0 \\ A_n\sin(a\sqrt{\lambda_n}\, t) + B_n\cos(a\sqrt{\lambda_n}\, t), & \text{else} \end{cases}, \text{ 代入 } G \text{ 得到:}$$

$$G = ct + d + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n\sin(a\sqrt{\lambda_n}\, t) + B_n\cos(a\sqrt{\lambda_n}\, t)\right]\cos(\sqrt{\lambda_n}\, x)$$

$$G|_{t=0} = 0 = d + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\cos(\sqrt{\lambda_n}\, x) \Longrightarrow d = B_n \equiv 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}|_{t=0} = \delta(x-x_0) = c + \sum_{n=1}^{\infty} a\sqrt{\lambda_n} A_n\cos(\sqrt{\lambda_n}\, x)$$

$$\Longrightarrow c = \frac{1}{l}\int_0^l \delta(x-x_0)\, dx = \frac{1}{l}, \quad a\sqrt{\lambda_n} A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \delta(x-x_0)\cos(\sqrt{\lambda_n}\, x) = \frac{2}{l}\cos(\sqrt{\lambda_n}\, x_0).$$

全部代入, 得到:

$$G = \frac{t}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos(\sqrt{\lambda_n}\, x_0)}{a\sqrt{\lambda_n}\, l} \sin(a\sqrt{\lambda_n}\, t)\cos(\sqrt{\lambda_n}\, x)$$

$$= \frac{t}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos(\frac{n\pi}{l}x_0)}{n\pi a} \sin\left(\frac{an\pi}{l}t\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

还原时间平移, 得到 $G(x,t;x_0,t_0) = \frac{t-t_0}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos(\frac{n\pi}{l}x_0)}{n\pi a} \sin\left(\frac{an\pi}{l}(t-t_0)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$

4. 用格林函数法求解有界弦振动问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)\sin(wt), \ x\in(0,l), \ t\in(0,+\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \dfrac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0 \\ \underset{\to\varphi(x)}{u|_{t=0}} = \underset{\to\psi(x)}{\dfrac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}} = 0 \end{cases}$$

考虑格林函数, 若 $G(x,t;x_0,t_0)$ 已知, 则 u 可表示为:

$$u = \int_0^l \psi(\xi) G(x,t;\xi,0)\, d\xi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^l \varphi(\xi) G(x,t;\xi,0)\, d\xi\right) + \int_0^t d\tau\int_0^l f(\xi,\tau)\, G(x,t;\xi,\tau)\, d\xi$$

直接利用上题的 $G(x,t;x_0,t_0)$, 得到:

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^l \left\{A\cos\left(\frac{\pi\xi}{l}\right)\sin(w\tau)\left[\frac{t-\tau}{l} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos(\frac{n\pi}{l}\xi)}{n\pi a}\sin\left(\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right]\right\} d\xi$$