1 作业 10

1.1. ☞ 在欧几里得空间 $\mathbb{R}^4$ 中：

（*1*）求 $u = (1, 1, 1, 2)$ 和 $v = (3, 1, -1, 0)$ 之间的夹角；

（*2*）求一单位向量与

$$u = (1, 1, -1, 1),\ v = (1, -1, -1, 1),\ w = (2, 1, 1, 3)$$

正交。

解.（1）设 u, v 的夹角为 θ，

$$\cos\theta = \frac{(u|v)}{||u||||v||} = \frac{3}{\sqrt{77}} \Longrightarrow \theta = \arccos\frac{3}{\sqrt{77}}.$$

（2）设向量 (x_1, x_2, x_3, x_4) 与 u, v, w 正交，则有

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

解出方程的基础解系为 $\{(4, 0, 1, -3)\}$，与 u, v, w 正交的单位向量是

$$\pm(\frac{4}{\sqrt{26}}, 0, \frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{-3}{\sqrt{26}}).$$

□

1.2. ☞ 求齐次线性方程组

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0$$

的解空间（$\subset \mathbb{R}^5$）的标准正交基。

解. 先解得该线性方程组的基础解系

$$u_1 = (0, 1, 1, 0, 0),\ u_2 = (-1, 1, 0, 1, 0),\ u_3 = (4, -5, 0, 0, 1).$$

施密特正交化，

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 = (0, 1, 1, 0, 0), \\ v_2 &= u_2 - \frac{(u_2|v_1)}{(v_1|v_1)}v_1 = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0), \\ v_3 &= u_3 - \frac{(u_3|v_1)}{(v_1|v_1)}v_1 - \frac{(u_3|v_2)}{(v_2|v_2)}v_2 = (\frac{7}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{13}{5}, 1). \end{aligned}$$

得到标准正交基，

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \frac{v_1}{||v_1||} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0), \\
w_2 &= \frac{v_2}{||v_2||} = (-\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, 0), \\
w_3 &= \frac{v_3}{||v_3||} = (\frac{7}{3\sqrt{35}}, -\frac{2}{\sqrt{35}}, \frac{2}{\sqrt{35}}, \frac{13}{3\sqrt{35}}, \frac{5}{3\sqrt{35}}).
\end{aligned}
$$

□

1.3. ☞ 求

$$V = Span\{1, \sin x, \sin 2x, \sin 3x\} \subset C[0, \pi]$$

的标准正交基。

解. 易知 $\sin x, \sin 2x, \sin 3x$ 正交，令

$$u_4 = 1 - \frac{\int_0^\pi \sin x dx}{\int_0^\pi \sin^2 x dx} \sin x - \frac{\int_0^\pi \sin 2x dx}{\int_0^\pi \sin^2 2x dx} \sin 2x - \frac{\int_0^\pi \sin 3x dx}{\int_0^\pi \sin^2 3x dx} \sin 3x = 1 - \frac{4}{\pi} \sin x - \frac{4}{3\pi} \sin 3x.$$

得到标准正交基

$$v_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{\int_0^\pi \sin^2 x dx}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x,\ v_2 = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\int_0^\pi \sin^2 2x dx}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2x,\ v_3 = \frac{\sin 3x}{\sqrt{\int_0^\pi \sin^2 3x dx}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 3x,$$
$$v_4 = \frac{u_4}{||u_4||} = \frac{1 - \frac{4}{\pi} \sin x - \frac{4}{3\pi} \sin 3x}{\sqrt{\pi - \frac{80}{9\pi}}}$$

□

1.4. ☞ 证明任意非退化矩阵 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 可写成 $A = BC$，其中 B 是 $n \times n$ 正交矩阵而 C 是 $n \times n$ 上三角矩阵满足 $\det C = \pm \det A$。

证明. 既然 A 非退化，对 A 的列向量 $\vec{a}^1, \vec{a}^2, \cdots, \vec{a}^n$ 进行标准正交化，得到标准正交的向量组 $\vec{b}^1, \vec{b}^2, \cdots, \vec{b}^n$。有正交矩阵

$$B = \begin{pmatrix} \vec{b}^1 & \vec{b}^2 & \cdots & \vec{b}^n \end{pmatrix}$$

由正交化的过程知 $\vec{b}_i$ 是 $\{\vec{a}^1, \vec{a}^2, \cdots, \vec{a}^i\}$ 的线性组合，存在非退化的上三角矩阵 D 使

$$B = AD.$$

令 $C = D^{-1}$，就有

$$A = BC, \quad \det C = (\det B)^{-1} \det A = \pm \det A.$$

□

1.5. ☞ 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 且 $\vec{a}_{(1)},\vec{a}_{(2)},\cdots,\vec{a}_{(n)}$ 为其行向量。证明：

（1）如果 $\vec{a}_{(1)},\vec{a}_{(2)},\cdots,\vec{a}_{(n)}$ 相互正交，则

$$|\det A| = ||\vec{a}_{(1)}||\cdot||\vec{a}_{(2)}||\cdots||\vec{a}_{(n)}||;$$

（2）对一般情况，我们有阿达马不等式

$$|\det A| \leqslant ||\vec{a}_{(1)}||\cdot||\vec{a}_{(2)}||\cdots||\vec{a}_{(n)}||.$$

证明.（1）

$$|\det A|^2 = \det A^tA = \det\left(\begin{pmatrix}\vec{a}_{(1)}\\ \vec{a}_{(2)}\\ \vdots\\ \vec{a}_{(n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{}^t\vec{a}_{(1)} & {}^t\vec{a}_{(2)} & \cdots & {}^t\vec{a}_{(n)}\end{pmatrix}\right) = ||\vec{a}_{(1)}||^2\cdot||\vec{a}_{(2)}||^2\cdots||\vec{a}_{(n)}||^2.$$

因此

$$|\det A| = ||\vec{a}_{(1)}||\cdot||\vec{a}_{(2)}||\cdots||\vec{a}_{(n)}||.$$

（2）如果 $\det A=0$，不等式显然成立。

如果 A 退化，则 A^tA 正定，根据作业 5 第 6 题的结论，

$$|\det A|^2 = \det A^tA \leqslant ||\vec{a}_{(1)}||^2\cdot||\vec{a}_{(2)}||^2\cdots||\vec{a}_{(n)}||^2.$$

另证：如果 A 非退化，仿照第 4 题，对 A 的行向量标准正交化，存在下三角矩阵 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 和正交矩阵 B 满足 $A=CB$。那么

$$\vec{a}_{(i)} = \sum_{j=1}^{i} c_{ij}\vec{b}_{(j)},\ i=1,2,\cdots,n.$$

其中 $\vec{b}_{(1)},\vec{b}_{(2)},\cdots,\vec{b}_{(n)}$ 是 B 的行向量。那么

$$\prod_{i=1}^{n}||\vec{a}_{(i)}|| = \prod_{i=1}^{n}\sqrt{c_{i1}^2+c_{i2}^2+\cdots+c_{ii}^2} \geqslant \prod_{i=1}^{n}|c_{ii}| = |\det C| = |\det A|.$$

等号成立当且仅当 C 是对角矩阵，即 $\vec{a}_{(1)},\vec{a}_{(2)},\cdots,\vec{a}_{(n)}$ 两两正交。 □

1.6. ☞ 设 φ 是 n 维欧几里得空间 V 的自同构。证明 $\chi_\varphi(x)=\pm x^n\chi_\varphi(x^{-1})$。

证明. φ 在某组标准正交基下的矩阵 A 是一个正交矩阵。

$$|xI_n - A||{}^tA| = |x{}^tA - I_n| = x^n|{}^tA - x^{-1}I_n| \Longrightarrow \chi_\varphi(x) = \pm x^n\chi_\varphi(x^{-1}).$$

□

2 作业 11

2.1. ☞ 设 U 是有限维辛空间 V 的非零真子空间。证明 U 有正交补子空间 $U^\perp = \{v \in U \mid [u|v] = 0,\ \forall u \in V\}$ 的充分必要条件是 U 关于 $[\cdot|\cdot]$ 也构成一个辛空间。举出 $V \neq U \oplus U^\perp$ 的例子。

证明. （必要性）$[\cdot|\cdot]$ 限制到 U 上依然是斜对称的双线性型，只需证明它非退化。设 $u_0 \in U$ 满足 $[u_0|u] = 0,\ \forall u \in U$。对任意 $v \in V$，将 v 写成 $v = v_1 + v_2, v_1 \in U, v_2 \in U^\perp$。那么 $[u_0|v] = [u_0|v_1] + [u_0|v_2] = 0$。从 $[\cdot|\cdot]$ 在 V 上非退化可知 $u_0 = 0$。

（充分性）令 $W = \{v \in V \mid [u|v] = 0,\ \forall u \in U\}$，则 $W \cap U = R_{[\cdot|\cdot]} = \{0\}$。取 U 的一组基 $\{u_1, u_2, \cdots, u_{2m}\}$ 使 $[\cdot|\cdot]$ 在这组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

对于 $v \in V$，令

$$w = v + \sum_{i=1}^{m} [v|u_i] u_{i+m} - \sum_{i=m+1}^{2m} [v|u_i] u_{i-m}.$$

那么对 $j = 1, 2 \cdots, 2m$ 都有 $[w|u_j] = [v|u_j] - [v|u_j] = 0$，所以 $w \in W$。于是

$$v = w - \sum_{i=1}^{m} [v|u_i] u_{i+m} + \sum_{i=m+1}^{2m} [v|u_i] u_{i-m} \in W \oplus U.$$

例子：U 关于 $[\cdot|\cdot]$ 退化即可。如在 $V = \mathbb{R}^2$ 上，$[u|v] = x_1 y_2 - x_2 y_1$。取 $U = \{(a, 0) | a \in \mathbb{R}\}$。

□

2.2. ☞ 设 φ 是 $2m$ 维辛空间 V 的辛算子且它有 $2m$ 个不同的特征值。证明存在 V 的一组基 $\{u_1, u_2, \cdots, u_{2m}\}$ 使得 φ 在它下的矩阵是对角矩阵并且 $[\cdot|\cdot]$ 在它下的矩阵为

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

证明. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{2m}$ 是 φ 的 $2m$ 个不同的特征值，对每个特征值 λ_i 取一个特征向量 u_i，则 $\{u_1, u_2, \cdots, u_{2m}\}$ 构成 V 的一组基。

首先我们证明 ± 1 不是 φ 的特征值。如果 1 是 φ 的特征值，不妨设 $\lambda_1 = 1$。

$$[u_1|u_i] = [\varphi(u_1)|\varphi(u_i)] = \lambda_i [u_1|u_i]$$

当 $i \neq 1$ 时，$\lambda_i \neq 1$，所以 $[u_1|u_i] = 0$，这与 $[\cdot|\cdot]$ 非退化矛盾。同理 -1 不是 φ 的特征值。

不妨设 $\lambda_{i+m} = \lambda_i^{-1}, i = 1, 2, \cdots, m$。我们有

$$[u_i|u_j] = [\varphi(u_i)|\varphi(u_j)] = \lambda_i \lambda_j [u_i|u_j], \quad \forall i, j = 1, 2, \cdots, 2m.$$

所以当 $|i-j|\neq m$ 时，$[u_i|u_j]=0$；当 $|i-j|=m$ 时，$[\cdot|\cdot]$ 非退化意味着 $[u_i|u_j]\neq 0$。令

$$v_i=\begin{cases}\dfrac{u_i}{[u_i|u_{i+m}]}, & 1\leqslant i\leqslant m,\\ u_i, & m<i\leqslant 2m.\end{cases}$$

那么在基 $\{v_1,v_2,\cdots,v_{2m}\}$ 下，φ 的矩阵是对角矩阵，$[\cdot|\cdot]$ 的矩阵是 J_0。 □

3 作业 12

3.1. 在次数 $\leqslant n-1$ 的复系数多项式全体 $\mathcal{P}_n[x]$，定义

$$\langle f|g\rangle=\sum_{r=1}^{n}f(r)\overline{g(r)}.$$

证明 $\mathcal{P}_n[x]$ 关于 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 构成酉空间。

证明. 即证明 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 是一个正定 Hermitian 型。

$$\langle f|g\rangle=\sum_{r=1}^{n}f(r)\overline{g(r)}=\overline{\sum_{r=1}^{n}g(r)\overline{f(r)}}=\overline{\langle g|f\rangle},$$

$$\langle af+bg|h\rangle=\sum_{r=1}^{n}(af(r)+bg(r))\overline{h(r)}=a\sum_{r=1}^{n}f(r)\overline{h(r)}+b\sum_{r=1}^{n}g(r)\overline{h(r)}=a\langle f|h\rangle+b\langle g|h\rangle,$$

对于任意 $f\neq 0$，由于 $\deg f<n$，则

$$\langle f|f\rangle=\sum_{r=1}^{n}f(r)\overline{f(r)}=\sum_{r=1}^{n}|f(r)|^2>0.$$

其中 $f,g,h\in\mathcal{P}_n[x]$，$a,b\in\mathbb{C}$。因此 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 是一个正定的 Hermitian 型。 □

3.2. 设

$$A=B+iC\in M_{n\times n}(\mathbb{C}),\quad 其中\ B,C\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

证明 A 是一个酉矩阵的充分必要条件是 B^tC 是一个对称矩阵并且 $B^tB+C^tC=I_n$。

证明.

$$\begin{aligned}AA^*=(B+iC)({}^tB-i^tC)=B^tB+C^tC+i(C^tB-B^tC)=I_n\\ \Longleftrightarrow B^tB+C^tC=I_n,\ C^tB=B^tC.\end{aligned}$$

□

3.3. 设 φ 和 ψ 是酉空间 V 上两个 *Hermitian* 算子。证明

(1)$\varphi\psi+\psi\varphi$ 和 $i(\varphi\psi-\psi\varphi)$ 都是 V 上两个 *Hermitian* 算子；

(2)$\varphi\psi$ 是一个 *Hermitian* 算子的充分必要条件是 $\varphi\psi=\psi\varphi$。

证明. (1)

$$
\begin{aligned}
(\varphi\psi+\psi\varphi)^* &= \psi^*\varphi^*+\varphi^*\psi^* = \psi\varphi+\varphi\psi,\\
[i(\varphi\psi-\psi\varphi)]^* &= -i(\psi^*\varphi^*-\varphi^*\psi^*) = i(\varphi\psi-\psi\varphi).
\end{aligned}
$$

(2)

$$(\varphi\psi)^* = \varphi\psi \Longleftrightarrow \psi^*\varphi^* = \varphi\psi \Longleftrightarrow \psi\varphi = \varphi\psi.$$

□

3.4. ☞ 设 φ 是有限维酉空间 V 上的一个正规算子满足 $\varphi^2=-e_V$。证明 $\varphi^*=-\varphi$。

证明. φ 在 V 的某组标准正交基下是对角矩阵

$$diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

从 $\varphi^2=-e_V$ 推出 $\lambda_r^2=-1, r=1,2,\cdots,n$，则 $\lambda_r=\pm i$。在同一组基下 φ^* 的矩阵是

$$diag(\bar\lambda_1,\bar\lambda_2,\cdots,\bar\lambda_n) = -diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

所以 $\varphi^*=-\varphi$。 □

3.5. ☞ 设 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 是欧几里得空间 V 的 m 个向量。证明它们线性无关的充分必要条件是

$$
\begin{vmatrix}
(v_1|v_1) & (v_1|v_2) & \cdots & (v_1|v_m)\\
(v_2|v_1) & (v_2|v_2) & \cdots & (v_2|v_m)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
(v_2|v_1) & (v_2|v_2) & \cdots & (v_2|v_m)
\end{vmatrix} \neq 0
$$

证明. (充分性) 反证法,假设 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 线性相关,则存在不全为零的常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使得

$$\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\cdots+\lambda_mv_m=0,$$

则

$$\lambda_1(v_r|v_1)+\cdots+\lambda_m(v_r|v_m) = (v_r|\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_mv_m)=0$$

所以行列式的列是线性相关的，矛盾！

(必要性) 如果 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 线性无关，则构成子空间 $U=Span\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$ 的一组基。$((v_i|v_j))_{m\times m}$ 是 $(\cdot|\cdot)$ 限制在 U 上在基 $\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$ 下的矩阵，由正定性知其行列式大于 0。 □

4 作业 13

4.1. ☞ 证明如果两个实对称矩阵 A 和 B 相似，则它们必正交相似。

证明. 既然 A 和 B 是相似的，则它们特征值相同。由于是实对称的，则它们正交相似于同一个实对角矩阵，因而它们正交相似。 □

4.2. ☞ 给定 $\mathbb{R}^4$ 上两个实二次型

$$q_1(u) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_3x_4 + x_4^2, \quad q_2(u) = x_1x_3 - x_2x_4,$$

其中 $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$。求 $\mathbb{R}^4$ 的一组基使得 q_1 和 q_2 在它下的矩阵都是对角矩阵。

证明. 写出 q_1, q_2 对应的对称双线性型

$$f_1(u,v) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 5x_3y_3 - 2x_3y_4 - 2x_4y_3 + x_4y_4,$$
$$f_2(u,v) = \tfrac{1}{2}x_1y_3 + \tfrac{1}{2}x_3y_1 - \tfrac{1}{2}x_2y_4 - \tfrac{1}{2}x_4y_2.$$

其中 $u = (x_1, x_2, x_3, x_4), v = (y_1, y_2, y_3, y_4)$。$f_1$ 是正定的，将其作为 $\mathbb{R}^4$ 上的内积 $(\cdot|\cdot)$，对 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 正交化单位化得到 $(\mathbb{R}, (\cdot|\cdot))$ 的一组标准正交基

$$u_1 = (1,0,0,0),\ u_2 = (-1,1,0,0),$$
$$u_3 = (0,0,\tfrac{\sqrt{5}}{5},0),\ u_3 = (0,0,\tfrac{2\sqrt{5}}{5},\sqrt{5}).$$

计算 f_1 在这组基下的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{10} & -\frac{7\sqrt{5}}{10} \\ \frac{\sqrt{5}}{10} & -\frac{\sqrt{5}}{10} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{7\sqrt{5}}{10} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵 A 在标准正交基 $\vec{u}$ 下确定了一个 $\mathbb{R}^4$ 上的自伴随算子 φ。下面将 φ 正交对角化。

$$\chi_\varphi(x) = |xI_4 -^t A| = x^4 - \frac{11}{4}x^2 + \frac{1}{16},$$

解出 φ 有 4 个不同的特征值

$$\frac{\pm 3 \pm \sqrt{13}}{4}.$$

每个特征值有一维的特征子空间，不同特征值的特征向量相互正交

$$\lambda_1 = \tfrac{3+\sqrt{13}}{4}, \quad v_1 = \left(\tfrac{-\sqrt{65}+4\sqrt{5}}{3}, \tfrac{-\sqrt{65}+\sqrt{5}}{6}, \tfrac{-17+5\sqrt{13}}{6}, 1\right),$$
$$\lambda_2 = -\tfrac{3+\sqrt{13}}{4}, \quad v_2 = \left(\tfrac{\sqrt{65}-4\sqrt{5}}{3}, \tfrac{\sqrt{65}-\sqrt{5}}{6}, \tfrac{-17+5\sqrt{13}}{6}, 1\right),$$
$$\lambda_3 = \tfrac{3-\sqrt{13}}{4}, \quad v_3 = \left(\tfrac{\sqrt{65}+4\sqrt{5}}{3}, \tfrac{\sqrt{65}+\sqrt{5}}{6}, -\tfrac{17+5\sqrt{13}}{6}, 1\right),$$
$$\lambda_4 = \tfrac{-3+\sqrt{13}}{4}, \quad v_4 = \left(-\tfrac{\sqrt{65}+4\sqrt{5}}{3}, -\tfrac{\sqrt{65}+\sqrt{5}}{6}, -\tfrac{17+5\sqrt{13}}{6}, 1\right).$$

将其单位化，得到 V 的一组标准正交基 $\left\{\frac{v_1}{|v_1|}, \frac{v_2}{|v_2|}, \frac{v_3}{|v_3|}, \frac{v_4}{|v_4|}\right\}$，其中

$$|v_1| = |v_2| = \frac{\sqrt{325 - 85\sqrt{13}}}{3},\ |v_3| = |v_4| = \frac{\sqrt{325 + 85\sqrt{13}}}{3}.$$

在这组基下，q_1, q_2 同时对角化。（注：可以不单位化） □

4.3. ☞ 设 φ 和 ψ 是欧几里得空间 V 上两个正定自伴随算子且 $\varphi\psi = \psi\varphi$。证明 $\varphi\psi$ 也是一个正定自伴随算子。

证明. $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^* = \psi\varphi = \varphi\psi \Longrightarrow \varphi\psi$ 是自伴随算子。且对任意 $0 \neq v \in V$，

$$(\varphi\psi(v)|v) = (\varphi\sqrt{\psi}\sqrt{\psi}(v)|v) = (\sqrt{\psi}\varphi\sqrt{\psi}(v)|v) = (\varphi\sqrt{\psi}(v)|\sqrt{\psi}(v)) > 0,$$

因此 $\varphi\psi$ 是正定的。 □

4.4. ☞ 设有限维酉空间 V 上的一个正规算子 φ 与线性算子 ψ 可交换。证明 φ 和 ψ^* 可交换。

证明.

$$\varphi\psi = \psi\varphi \Longrightarrow \psi^*\varphi^* = \varphi^*\psi^*.$$

由谱定理，设

$$\varphi = \sum_{r=1}^{k} \lambda_r \mathscr{P}_r,$$

则

$$\varphi^* = \sum_{r=1}^{k} \overline{\lambda_r} \mathscr{P}_r.$$

用 Lagrange 插值公式可以找到多项式 $f(x)$ 满足 $f(\overline{\lambda_r}) = \lambda_r,\ r = 1, \cdots, k$，则 $f(\varphi^*) = \varphi$。即 φ 可以写成 φ^* 的多项式，所以与 ψ^* 可交换。 □

4.5. ☞ 给定

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

求 2×2 的正定 *Hermitian* 矩阵 Q 和酉矩阵 T 使得 $A = QT$（极化分解）。

解.

$$AA^* = QTT^*Q^* = Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\Longrightarrow Q = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},\ T = Q^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ \frac{\sqrt{2}}{2}i & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

□

4.6. ☞ 给定

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

求 2×2 的正定矩阵 Q 和正交矩阵 T 使得 $A = QT$（极化分解）。

解.

$$A^t A = QT^t T^t Q = Q^2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

求出 $A^t A$ 的特征值和相应的正交的单位特征向量，

$$|xI_2 - A^t A| = x^2 - 7x + 9 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \frac{7+\sqrt{13}}{2},\ \lambda_2 = \frac{7-\sqrt{13}}{2}.$$

和相应的正交的单位特征向量，

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{13-3\sqrt{13}}} \\ -\sqrt{\frac{11-3\sqrt{13}}{13-3\sqrt{13}}} \end{pmatrix},\quad v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{13+3\sqrt{13}}} \\ \sqrt{\frac{11+3\sqrt{13}}{13+3\sqrt{13}}}, \end{pmatrix}$$

令

$$O_1 = (v_1\ v_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{13-3\sqrt{13}}} & \sqrt{\frac{2}{13+3\sqrt{13}}} \\ -\sqrt{\frac{11-3\sqrt{13}}{13-3\sqrt{13}}} & \sqrt{\frac{11+3\sqrt{13}}{13+3\sqrt{13}}} \end{pmatrix},$$

则

$$A^t A = O_1 \begin{pmatrix} \frac{7+\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7-\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix} {}^tO_1,$$

$$Q = O_1 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{13}+1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{13}-1}{2} \end{pmatrix} {}^tO_1 = \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{13}} & -\frac{1}{\sqrt{13}} \\ -\frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{5}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}.$$

$$T = Q^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

□

5 作业 14

5.1. ☞ 如果有限维欧几里得空间 V 上的一个正规算子 φ 的特征值为

$$1, -1, 2, 3, 2+3i, 2-3i, 5+7i, 5-7i.$$

求它的标准型 $J[\varphi]$。

答.

$$diag(1,-1,2,3) \dotplus \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

□

5.2. ☞ 证明 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 是正规的充分必要条件是存在 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ 使得 ${}^tA = f(A)$。

证明.（充分性）如果 ${}^tA$ 可以写成 A 的多项式，那么 ${}^tA$ 与 A 可交换，所以 A 正规。

（必要性）。如果 A 是正规的，那么存在酉矩阵 $T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 使得

$$A = T\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_1, \cdots, \lambda_r, \mu_1, \overline{\mu_1}, \cdots, \mu_s, \overline{\mu_s})T^*$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 是 A 的**不同的**实特征值，$\mu_1, \overline{\mu_1}, \cdots, \mu_s, \overline{\mu_s}$ 是 A 的**不同的**复特征值。令

$$\begin{aligned} f(x) = & \sum_{k=1}^{r} \frac{\lambda_k \prod\limits_{l\neq k}(x-\lambda_l) \prod\limits_{p=1}^{s}(x-\mu_p)(x-\overline{\mu_p})}{\prod\limits_{l\neq k}(\lambda_k-\lambda_l) \prod\limits_{p=1}^{s}(\lambda_k-\mu_p)(\lambda_k-\overline{\mu_p})} \\ & + \sum_{q=1}^{s} \frac{\overline{\mu_q}(x-\overline{\mu_q}) \prod\limits_{l=1}^{r}(x-\lambda_l) \prod\limits_{p\neq q}(x-\mu_p)(x-\overline{\mu_p})}{(\mu_q-\overline{\mu_q}) \prod\limits_{l=1}^{r}(\mu_q-\lambda_l) \prod\limits_{p\neq q}(\mu_q-\mu_p)(\mu_q-\overline{\mu_p})} \\ & + \sum_{q=1}^{s} \frac{\mu_q(x-\mu_q) \prod\limits_{l=1}^{r}(x-\lambda_l) \prod\limits_{p\neq q}(x-\mu_p)(x-\overline{\mu_p})}{(\overline{\mu_q}-\mu_q) \prod\limits_{l=1}^{r}(\overline{\mu_q}-\lambda_l) \prod\limits_{p\neq q}(\overline{\mu_q}-\mu_p)(\overline{\mu_q}-\overline{\mu_p})} \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} (x-\mu_p)(x-\overline{\mu_p}) &= x^2 - (\mu_p+\overline{\mu_p})x + |\mu_p|^2 \in \mathbb{R}[x], \\ (\lambda_k-\mu_p)(\lambda_k-\overline{\mu_p}) &= \lambda_k^2 - (\mu_p+\overline{\mu_p})\lambda_k + |\mu_p|^2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

以及

$$\overline{(\mu_q-\overline{\mu_q}) \prod_{l=1}^{r}(\mu_q-\lambda_l) \prod_{p\neq q}(\mu_q-\mu_p)(\mu_q-\overline{\mu_p})} = (\overline{\mu_q}-\mu_q) \prod_{l=1}^{r}(\overline{\mu_q}-\lambda_l) \prod_{p\neq q}(\overline{\mu_q}-\mu_p)(\overline{\mu_q}-\overline{\mu_p})$$

所以 $f(x)$ 是实系数多项式。而且我们有

$$\begin{aligned} f(A) =& T\mathrm{diag}(f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_r), f(\mu_1), f(\overline{\mu_1}), \cdots, f(\mu_s), f(\overline{\mu_s}))T^* \\ & T\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_r, \overline{\mu_1}, \mu_1, \cdots, \overline{\mu_s}, \mu_s)T^* = A^* = {}^tA. \end{aligned}$$

或着!!! 找到复系数多项式 $f(x)$ 满足 $f(A) = {}^tA$，设 $f(x) = g(x) + ih(x)$，其中 g, h 是实系数多项式，那么

$$g(A) + ih(A) = {}^tA$$

这要求 $ih(A) = 0,\ g(A) = {}^tA$。 □

注 5.1. *A 可能有重数大于 1 的特征值，但是在用 Lagrange 插值公式构造 $f(x)$ 时每个特征值只选一次。*

5.3. 👉 设 $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, \dot{s}$ 是仿射空间 $(\mathbb{A}, V)$ 的 4 个不同的点。证明点 $\dot{q}, \dot{r}, \dot{s}$ 共线的充分必要条件是存在不全为零的元素 $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}$ 使得

$$a_1\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}} + a_2\overrightarrow{\dot{p}\dot{r}} + a_3\overrightarrow{\dot{p}\dot{s}} = 0,\ a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

证明. 根据讲义 27 讲定理 2 的证明，$\dot{s}$ 在过点 $\dot{q}, \dot{r}$ 的直线上当且仅当存在 $t \in \mathbb{F}$ 使得

$$\overrightarrow{\dot{p}\dot{s}} = (1-t)\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}} + t\overrightarrow{\dot{p}\dot{r}}$$

这等价于

$$\overrightarrow{\dot{p}\dot{s}} + (t-1)\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}} - t\overrightarrow{\dot{p}\dot{r}} = 0$$

反之，若存在不全为零的元素 $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}$ 使得

$$a_1\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}} + a_2\overrightarrow{\dot{p}\dot{r}} + a_3\overrightarrow{\dot{p}\dot{s}} = 0,\ a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

不妨设 $a_3 \neq 0$，那么

$$\overrightarrow{\dot{p}\dot{s}} = -\frac{a_1}{a_3}\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}} - \frac{a_2}{a_3}\overrightarrow{\dot{p}\dot{r}} = (1 + \frac{a_2}{a_3})\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}} - \frac{a_2}{a_3}\overrightarrow{\dot{p}\dot{r}}$$

□

注 5.2. *对于定理 2，我们要求 $char\mathbb{F} \neq 2$。考虑 $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$，$X = \{[0,0],[1,0],[0,1]\} \subset \mathbb{Z}_2^2$。$X$ 显然包含过任意两点的直线：因为过点 $\dot{p}, \dot{q}$ 的直线就是*

$$\{\dot{p} + t\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}} | t \in \mathbb{Z}_2\} = \{\dot{p}, \dot{q}\}$$

但是 X 不构成 $\mathbb{Z}_2^2$ 的仿射子空间：选定 $\dot{p} = [0,0] \in X$，令

$$U = \{\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}} | \dot{q} \in X\} = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$$

U 不是 $\mathbb{Z}_2^2$ 的子空间。

注 5.3. *设 X 是仿射空间 $\mathbb{A}$ 的一个子集，X 是仿射子空间当且仅当 X 包含它的任意有限子集的重心组合。*

证明. 必要性显然，下证充分性。取 $\dot{p} \in X$，令

$$U = \{\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}} | \dot{q} \in X\}$$

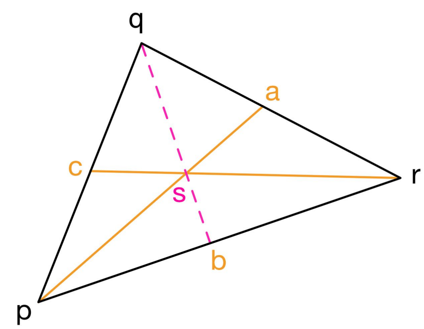
$\forall u, v \in U,\ a, b \in \mathbb{F}$，

$$\dot{p} + au + bv = a(\dot{p} + u) + b(\dot{p} + v) + (1-a-b)\dot{p} \in X$$

所以 $au + bv \in U$，U 是 V 的子空间。 □

5.4. 用点和向量证明一个三角形的三条中线必相交于一点。

证明. 设三角形的三个顶点为 p,q,r，三个中点为 a,b,c。设中线 pa 与 rc 交于点 s，下证 q,s,b 共线。



首先我们有

$$\overrightarrow{qb}=\overrightarrow{qp}+\frac{1}{2}\overrightarrow{pr}=\overrightarrow{qp}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{pq}+\overrightarrow{qr})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{qp}+\overrightarrow{qr}).$$

设 $s=p+\lambda\overrightarrow{pa}=r+\mu\overrightarrow{rc}$，将 $\overrightarrow{pa}=\overrightarrow{pr}+\frac{1}{2}\overrightarrow{rq}$, $\overrightarrow{rc}=\overrightarrow{rp}+\frac{1}{2}\overrightarrow{pq}$ 代入并变形可得

$$(\lambda+\frac{1}{2}\mu-1)\overrightarrow{pr}=\frac{1}{2}(\mu-\lambda)\overrightarrow{rq},$$

既然 $\overrightarrow{pr}$ 与 $\overrightarrow{rq}$ 线性无关，这要求

$$\lambda+\frac{1}{2}\mu-1=0,\ \mu-\lambda=0\Longrightarrow\lambda=\mu=\frac{2}{3}.$$

于是

$$\overrightarrow{qs}=\overrightarrow{qp}+\frac{2}{3}\overrightarrow{pa}=\overrightarrow{pq}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{pq}+\frac{1}{2}\overrightarrow{qr})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{qp}+\overrightarrow{qr})=\frac{2}{3}\overrightarrow{qb},$$

所以 q,s,b 共线。 □

5.5. 设 $\varphi:\mathbb{A}\longrightarrow\mathbb{A}'$ 和 $\psi:\mathbb{A}'\longrightarrow\mathbb{A}''$ 是仿射映射。证明 $D(\psi\varphi)=D\psi\cdot D\varphi$。

证明. 设 V 是与 $\mathbb{A}$ 相伴的向量空间。对任意 $u\in V$，取点 $\dot{p}\in\mathbb{A}$，令 $\dot{q}=\dot{p}+u$，则 $u=\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}$。

$$D\psi\cdot D\varphi(u)=D\psi(\overrightarrow{\varphi(\dot{p})\varphi(\dot{q})})=\overrightarrow{\psi\varphi(\dot{p})\psi\varphi(\dot{q})}=D(\psi\varphi)(u),$$
$$\Longrightarrow D(\psi\varphi)=D\psi\cdot D\varphi.$$

□

5.6. 证明仿射空间 $(\mathbb{A},V)$ 的仿射子空间 $\Pi(\dot{p},U)$ 和 $\Pi(\dot{q},W)$ 相交的充分必要条件是 $\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}\in U+W$。

证明.（必要性）取点 $\dot{r}\in\Pi(\dot{p},U)\cap\Pi(\dot{q},W)$，那么 $\overrightarrow{\dot{p}\dot{r}}\in U$, $\overrightarrow{\dot{q}\dot{r}}\in W$，所以

$$\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}=\overrightarrow{\dot{p}\dot{r}}-\overrightarrow{\dot{q}\dot{r}}\in U+W.$$

（充分性）设 $\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}=u+w$, $u\in U,w\in W$，则

$$\dot{p}+u=\dot{q}-\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}+u=\dot{q}-w.$$

上式左边 $\in\Pi(\dot{p},U)$，右边 $\in\Pi(\dot{q},W)$。 □

6 作业 15

6.1. ☞ 设 $X=\{\dot{p_0},\dot{p_1},\cdots,\dot{p_n}\}$ 是仿射空间 $(\mathbb{A},V)$ 的点集。证明 X 的有限多个重心组合的重心组合仍然是一个重心组合。

证明. 设 $\sum\limits_{i=0}^{n} a_{ki}\dot{p}_i, k=1,2,\cdots,m$ 是 m 个重心组合，这 m 个点的重心组合为

$$\sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=0}^{n} a_{ji}\dot{p}_i = \sum_{j=1}^{m} b_j(\dot{p}+\sum_{i=0}^{n} a_{ji}\overrightarrow{\dot{p}\dot{p}_i}) = \dot{p}+\sum_{i=0}^{n}(\sum_{j=1}^{m} b_j)a_{ji}\overrightarrow{\dot{p}\dot{p}_i}. \qquad 🕷$$

且

$$\sum_{i=0}^{n}(\sum_{j=1}^{m} b_j a_{ji}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{n} b_j a_{ji} = \sum_{j=1}^{m} b_j = 1.$$

因此🕷仍然是 X 的重心组合。 □

6.2. ☞ 设 $\Pi_1,\cdots,\Pi_m$ 是 n 维仿射空间 $(\mathbb{A},V)$ 的 m 条直线。求它们的仿射包络 $A(\Pi_1,\cdots,\Pi_m)=\mathbb{A}$ 的最小 m。

证明. 首先我们证明任意 m 条直线 $\Pi_1,\cdots,\Pi_m$ 都满足 $\dim V(\Pi_1,\cdots,\Pi_m)\leqslant 2m-1$。取每条直线上不同的两个点 $\dot{p}_i,\dot{q}_i,i=1,\cdots,m$，则有

$$V(\Pi_1,\cdots,\Pi_m)=Span\{\overrightarrow{\dot{p}_1\dot{q}_1},\overrightarrow{\dot{p}_2\dot{q}_2},\cdots,\overrightarrow{\dot{p}_m\dot{q}_m},\overrightarrow{\dot{p}_1\dot{p}_2},\cdots,\overrightarrow{\dot{p}_{m-1}\dot{p}_m}\}.$$

这是因为 $\forall\dot{p}\in\Pi_i,\dot{q}\in\Pi_j,1\leqslant i<j\leqslant m$，存在 $x,y\in\mathbb{F}$，

$$\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}=\dot{q}-\dot{p}=\dot{p}_j+x\overrightarrow{\dot{p}_j\dot{q}_j}-(\dot{p}_i+y\overrightarrow{\dot{p}_i\dot{q}_i})=\overrightarrow{\dot{p}_i\dot{p}_j}+x\overrightarrow{\dot{p}_j\dot{q}_j}-y\overrightarrow{\dot{p}_i\dot{q}_i}=\overrightarrow{\dot{p}_i\dot{p}_{i+1}}+\cdots+\overrightarrow{\dot{p}_{j-1}\dot{p}_j}+x\overrightarrow{\dot{p}_j\dot{q}_j}-y\overrightarrow{\dot{p}_i\dot{q}_i}.$$

对于 n 维的仿射空间 $(\mathbb{A},V)$，我们取一个仿射无关的子集 $\{\dot{s}_0,\dot{s}_1,\cdots,\dot{s}_n\}$，则 $\dim A(\dot{s}_0,\cdots,\dot{s}_n)=n$。

当 n 是奇数时，

$$\mathbb{A}=A(\dot{s}_0,\cdots,\dot{s}_n)\subseteq A(\overline{\dot{s}_0\dot{s}_1},\overline{\dot{s}_2\dot{s}_3},\cdots,\overline{\dot{s}_{n-1}\dot{s}_n})\subseteq\mathbb{A}.$$

m 最小可取 $\frac{n+1}{2}$。

当 n 是偶数时

$$\mathbb{A}=A(\dot{s}_0,\cdots,\dot{s}_n)\subseteq A(\overline{\dot{s}_0\dot{s}_1},\overline{\dot{s}_2\dot{s}_3},\cdots,\overline{\dot{s}_{n-2}\dot{s}_{n-1}},\overline{\dot{s}_n\dot{s}_0})\subseteq\mathbb{A}.$$

m 最小可取 $\frac{n}{2}+1$。 □

6.3. ☞ 设 $(\mathbb{A},V)$ 是 n 维仿射空间。证明一个映射 $\varphi:\mathbb{A}\longrightarrow\mathbb{A}$ 是仿射映射的充分必要条件是它把重心组合映成重心组合。(这题目不太对，参看柯斯特利金书上的第 *4* 章第 *1* 节第 *5* 题)

证明. (必要性) 设 $\dot{p}_0,\cdots,\dot{p}_m\in\mathbb{A}$，常数满足 $\sum\limits_{i=0}^m a_i=1$。

$$\begin{aligned}&\varphi(\sum_{i=0}^m a_i\dot{p}_i)=\varphi(\dot{p}+\sum_{i=0}^m a_i\overrightarrow{\dot{p}\dot{p}_i})=\varphi(\dot{p})+D\varphi(\sum_{i=0}^m a_i\overrightarrow{\dot{p}\dot{p}_i})\\=&\varphi(\dot{p})+\sum_{i=0}^m D\varphi(\overrightarrow{\dot{p}\dot{p}_i})=\varphi(\dot{p})+\sum_{i=0}^m a_i\overrightarrow{\varphi(\dot{p})\varphi(\dot{p}_i)}=\sum_{i=0}^m a_i\varphi(\dot{p}_i)\end{aligned}$$

(充分性)$\forall\dot{p},\dot{q}\in\mathbb{A},v\in V$，

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\varphi(\dot{p})\varphi(\dot{p}+v)}=\varphi(\dot{p}+v)-\varphi(\dot{p})=\varphi(\dot{q}+v+\dot{p}-\dot{q})-\varphi(\dot{p})\\=&\varphi(\dot{q}+v)+\varphi(\dot{p})-\varphi(\dot{q})-\varphi(\dot{p})=\varphi(\dot{q}+v)-\varphi(\dot{q})=\overrightarrow{\varphi(\dot{q})\varphi(\dot{q}+v)}\end{aligned}$$

这说明 $\overrightarrow{\varphi(\dot{p})\varphi(\dot{p}+v)}$ 与点 $\dot{p}$ 的选取无关。我们固定点 $\dot{p}$，定义 $\nu:V\longrightarrow V$ 为 $\nu(v)=\overrightarrow{\varphi(\dot{p})\varphi(\dot{p}+v)}$，那么

$$\varphi(\dot{q}+v)=\varphi(\dot{q})+\nu(v),\quad\forall\dot{q}\in\mathbb{A},v\in V.$$

下证 ν 是线性映射，于是 φ 是仿射映射。$\forall u,v\in V,\ a,b\in\mathbb{F}$，

$$\begin{aligned}&\nu(au+bv)=\varphi(\dot{p}+au+bv)-\varphi(\dot{p})\\=&\varphi(a(\dot{p}+u)+b(\dot{p}+v)+(1-a-b)\dot{p})-\varphi(\dot{p})\\=&a\varphi(\dot{p}+u)+b\varphi(\dot{p}+v)-(a+b)\varphi(\dot{p})\\=&a\overrightarrow{\varphi(\dot{p})\varphi(\dot{p}+u)}+b\overrightarrow{\varphi(\dot{p})\varphi(\dot{p}+v)}\\=&a\nu(u)+b\nu(v).\end{aligned}$$

□

6.4. ☞ 在 $\dot{\mathbb{A}}^4$ 中，求点 $\dot{p}=[2,1,-3,4]$ 到平面

$$\Pi:2x_1-4x_2-8x_3+13x_4+19=0,\ x_1+x_2-x_3+2x_4-1=0$$

的距离。

解. 先解出平面 Π，线性方程组的增广矩阵

$$\begin{pmatrix}2&-4&-8&13&-19\\1&1&-3&2&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-2&\frac{7}{2}&-\frac{5}{2}\\0&1&1&-\frac{3}{2}&\frac{7}{2}\end{pmatrix}$$

解得

$$\Pi=[-\frac{5}{2},\frac{7}{2},0,0]+\mathrm{Span}\{(2,-1,1,0),\ (-\frac{7}{2},\frac{3}{2},0,1)\}$$

找到 $\mathrm{Span}\{(2,-1,1,0),\ (-\frac{7}{2},\frac{3}{2},0,1)\}$ 的一组正交基

$$e_1=(2,-1,1,0),\ e_2=(-\frac{2}{3},\frac{1}{12},\frac{17}{12},1).$$

记 $\dot{q}=[-\frac{5}{2},\frac{7}{2},0,0]$，点 $\dot{p}$ 到平面 Π 的距离为

$$\rho(\dot{p},\Pi)=||\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}-\frac{(\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}|e_1)}{(e_1|e_1)}e_1-\frac{(\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}|e_2)}{(e_2|e_2)}e_2||=||(-1,1,3,-5)||=6.$$

□

6.5. ☞ **在 $\dot{\mathbb{R}}^5$ 中，求平面**

$$\Pi_1: x_1+x_3+x_4-2x_5-2=0,\ x_2+x_3-x_4-x_5-3=0,\ x_1-x_2+2x_3-x_5-3=0$$

和平面

$$\Pi_2=\{[1,-2,5,8,2]+s(0,1,2,1,2)+t(2,1,2,-1,1)|s,t\in\mathbb{R}\}$$

的距离。

解. 平面

$$\Pi_1=[0,1,2,0,0]+\mathrm{Span}\{(-2,0,1,1,0),\ (2,1,0,0,1)\}.$$

求出 $U+W=\mathrm{Span}\{(-2,0,1,1,0),\ (2,1,0,0,1),\ (0,1,2,1,2),\ (2,1,2,-1,1)\}$ 的正交补空间，即下面线性方程组的解空间，

$$\begin{aligned}-2y_1+y_3+y_4&=0,\\2y_1+y_2+y_5&=0,\\y_2+2y_3+y_4+2y_5&=0,\\2y_1+y_2+2y_3-y_4+y_5&=0.\end{aligned}$$

解得 $(U+W)^\perp=\mathrm{Span}\{e=(-\frac{3}{2},2,-1,-2,1)\}$，计算 $\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}=(1,-3,3,8,2)$ 在 $(U+W)^\perp$ 上的投影

$$u=\frac{(\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}|e)}{(e|e)}e=(3,-4,2,4,-2).$$

所以

$$\rho(\Pi_1,\Pi_2)=||u||=7.$$

□

7 作业 16

7.1. ☞ **在 $\dot{\mathbb{R}}^3$ 中，求点 $\dot{p}=[3,2,1]$ 到平面 $P: 3x-4y-5z+1=0$ 的距离。**

解. 利用定理 4 给出的公式，

$$\rho(\dot{p},P)=\frac{|3\times3-4\times2-5\times1+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+(-5)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{10}.$$

□

7.2. ☞ 在 $\dot{\mathbb{R}}^3$ 中，求下列夹角：

(1). 平面 $3x-4y-5z-4=0$ 和平面 $4x+y-z+5=0$ 的夹角；

(2). 直线

$$\mathscr{L}_1:\quad x+y+z-1=0,\quad x+y+2z+1=0$$

和直线

$$\mathscr{L}_2:\quad 3x+y+1=0,\quad y+3z+2=0$$

的夹角；

(3). 直线

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$$

与平面 $x-2y+4z-1=0$ 的夹角。

解. (1). 两个平面的法向量分别为 $u=(3,-4,-5),\ v=(4,1,-1)$，两个平面的夹角 θ 满足

$$\cos\theta=\frac{(u|v)}{||u||\cdot||v||}=\frac{3\times 4+(-4)\times 1+(-5)\times(-1)}{\sqrt{3^2+(-4)^2+(-5)^2}\times\sqrt{4^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{13}{30},$$

所以 $\theta=\arccos\frac{13}{30}$。

(2). 两条直线的方向向量为 $u=(-1,1,0),\ v=(1,-3,1)$，两条直线的夹角 θ 满足

$$\cos\theta=\frac{(u|v)}{||u||\cdot||v||}=\frac{2\sqrt{22}}{11},$$

所以 $\theta=\arccos\frac{2\sqrt{22}}{11}$。

(3). 直线的方向向量为 $u=(2,1,-1)$，平面的法向量为 $n=(1,-2,4)$，它们的夹角 θ 满足

$$\sin\theta=\frac{(u|n)}{||u||\cdot||n||}=\frac{2\sqrt{14}}{21},$$

所以 $\theta=\arcsin\frac{2\sqrt{14}}{21}$。 □

7.3. ☞ 设 $\dot{p}_1=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，$\dot{p}_2=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$ 和 $\dot{p}_3=[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]$ 是 $\dot{\mathbb{R}}^3$ 中三个不共线的三个点。证明

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 1\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 1\end{vmatrix}=0$$

是 $\dot{\mathbb{R}}^3$ 中过点 $\dot{p}_1,\dot{p}_2$ 和 $\dot{p}_3$ 的平面的方程。

解. 易知

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 1\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 1\end{vmatrix}=0$$

是一个关于 x,y,z 的系数不全为零的线性方程，所以是一个 $\dot{\mathbb{R}}^3$ 中的平面的方程，将点 $\dot{p}_1,\dot{p}_2$ 和 $\dot{p}_3$ 的坐标代入方程都成立，因此该平面过点 $\dot{p}_1,\dot{p}_2$ 和 $\dot{p}_3$。 □

7.4. ☛ 给定 $\dot{\mathbb{R}}^3$ 中两条直线

$$\mathscr{L}_1: \quad 3x+y-3=0, \quad y+z=0$$

和

$$\mathscr{L}_2: \quad x+z=0, \quad x-2y=0.$$

求它们的公垂线。

解. $\mathscr{L}_1$ 的一个点 $\dot{p}=[1,0,0]$ 和方向向量 $u=(1,-3,3)$，$\mathscr{L}_2$ 的一个点 $\dot{q}=[0,0,0]$ 和方向向量 $v=(2,1,-2)$。我们有公垂线的方向向量

$$w=u\times v=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}=(3,8,7).$$

公垂线上的点 $\dot{r}=(x,y,z)$ 满足

$$\Delta(\overrightarrow{\dot{p}\dot{r}},u,w)=\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & -3 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix}=-45x+2y+17z+45=0,$$

和

$$\Delta(\overrightarrow{\dot{q}\dot{r}},v,w)=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix}=23x-20y+13z=0.$$

所以公垂线的方程为

$$-45x+2y+17z+45=0,\ 23x-20y+13z=0.$$

□

7.5. ☛ 如果仿射空间 $\mathbb{A}$ 含两个交错的二维仿射子空间，则 $\mathbb{A}$ 的维数至少是多少？

解. 设两个交错的二维仿射子空间为 $\Pi_1=\dot{p}+U,\ \Pi_2=\dot{q}+W$。既然 Π_1,Π_2 不平行，那么 $U\nsubseteq W,\ W\nsubseteq U$，因此 $\dim(U+W)\geqslant 3$。又因为 Π_1,Π_2 不相交，根据第 14 次作业第 6 题，$\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}\notin U+W$，所以 $\dim\mathbb{A}\geqslant 4$。

下面考虑 $\dot{\mathbb{F}}^4$，取 $\mathbb{F}^4$ 的标准基 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$。令

$$\Pi_1=[0,0,0,0]+\mathrm{Span}\{e_1,e_2\},\ \Pi_2=[0,0,0,1]+\mathrm{Span}\{e_1,e_3\}$$

易知 Π_1,Π_2 不平行，而且 $[0,0,0,1]-[0,0,0,0]=e_4\notin\mathrm{Span}\{e_1,e_2\}+\mathrm{Span}\{e_1,e_3\}$，则 Π_1,Π_2 也不相交。所以 $\mathbb{A}$ 的维数至少是 4。 □

注 7.1. 一般地，如果 $\mathbb{A}$ 有交错的 n 维仿射子空间 $\dot{p}+U$ 和 m 维仿射子空间 $\dot{q}+W$，则 $\dim\mathbb{A}$ 至少是 $\max\{n,m\}+2$。不妨设 $n\geqslant m$，

$$\dim\mathbb{A}\geqslant\dim(U+W+\mathbb{F}\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}})\geqslant n+2.$$

若 $\dim\mathbb{A}=n+2$，假设 $\{e_1,\cdots,e_{n+2}\}$ 是与 $\mathbb{A}$ 相伴的向量空间的一组基。取 $\dot{p}\in\mathbb{A}$，令

$$\dot{q}=\dot{p}+e_{n+2},\ U=Span\{e_1,\ldots,e_n\},\ W=Span\{e_1,\ldots,e_{m-1},e_{n+1}\},$$

那么从 U 与 W 无包含关系，以及 $\overrightarrow{\dot{p}\dot{q}}=e_{n+2}\notin U+W$ 推出 $\dot{p}+U$ 与 $\dot{q}+W$ 是交错的。

命题 7.1. 设 $\dot{p}+U$ 和 $\dot{q}+W$ 是 $\mathbb{A}$ 的两个不相交的超平面，则 $U=W$。

证明. 根据注即得。 □

7.6. ☞ 证明欧几里得点空间中两个仿射子空间 Π 和 Π' 的以下性质等价：

(1). Π 中的直线与 Π' 中的直线都垂直；

(2). Π 和 Π' 垂直且至多有一个交点。

证明. 如果 (1) 成立。假设 Π 和 Π' 不垂直，那么存在 $u\in U,u'\in U'$ 且 u 和 u' 不垂直（U,U' 分别是 Π,Π' 相伴的向量空间），取 $\dot{p}\in\Pi$, $\dot{q}\in\Pi'$，则直线 $\dot{p}+tu$ 与 $\dot{q}+tu'$ 不垂直，矛盾。假设 Π 和 Π' 交于两点，则过这两点的直线既在 Π 中，也在 Π' 中，但直线不与自身垂直，矛盾。

如果 (2) 成立。任取 Π 的一条直线其方向向量为 $u\in U$，任取 Π' 的一条直线其方向向量为 $u'\in U'$，从 $U\perp U'$ 推出 $u\perp u'$。 □

8 作业 17

8.1. ☞ 设 Γ_1 和 Γ_2 为 n 维仿射空间 $\mathbb{A}$ 的两个平行六面体，其中 $n>3$。证明存在 $\psi\in \mathit{Aff}(\mathbb{A})$ 使得 $\psi(\Gamma_1)=\Gamma_2$。

证明. 设

$$\Gamma_1=\{\dot{p}+x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3|0\leqslant x_1,x_2,x_3\leqslant 1\},$$
$$\Gamma_2=\{\dot{q}+y_1v_1+y_2v_2+y_3v_3|0\leqslant y_1,y_2,y_3\leqslant 1\},$$

且 $\{u_1,u_2,u_3\}$ 和 $\{v_1,v_2,v_3\}$ 都是 V 的线性无关组，则

$$X=\{\dot{p},\dot{p}+u_1,\dot{p}+u_2,\dot{p}+u_3\},\quad Y=\{\dot{q},\dot{q}+v_1,\dot{q}+v_2,\dot{q}+v_3\}$$

是 $\mathbb{A}$ 的仿射无关子集。根据讲义第 120 页的论述，存在 $\varphi\in\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ 使得 $\varphi(X)=Y$，$\varphi(\Gamma_1)=\Gamma_2$。 □

注 8.1. 一般地，如果

$$\Gamma_1 = \{\dot{p} + x_1u_1 + \cdots + x_mu_m | 0 \leqslant x_1, \cdots, x_m \leqslant 1\},$$
$$\Gamma_2 = \{\dot{q} + y_1v_1 + \cdots + y_mv_m | 0 \leqslant y_1, \cdots, y_m \leqslant 1\},$$

是 $\mathbb{A}$ 的两个平行多面体，那么存在 $\varphi \in A\mathit{ff}(\mathbb{A})$ 使得 $\varphi(\Gamma_1) = \Gamma_2$。

8.2. ☞ 对任意 $m+1$ 个点 $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \cdots, \dot{p}_m \in \mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}$ 上的一个仿射线性函数 f，证明

$$\min\{f(\dot{q}) | \dot{q} \in \mathcal{C}(\dot{p}_0, \dot{p}_1, \cdots, \dot{p}_m)\} = \min\{f(\dot{p}_0), f(\dot{p}_1), \cdots, f(\dot{p}_m)\}.$$

证明.

$$\begin{aligned} \min\{f(\dot{q}) | \dot{q} \in \mathcal{C}(\dot{p}_0, \dot{p}_1, \cdots, \dot{p}_m)\} &= -\max\{-f(\dot{q}) | \dot{q} \in \mathcal{C}(\dot{p}_0, \dot{p}_1, \cdots, \dot{p}_m)\} \\ = -\max\{-f(\dot{p}_0), -f(\dot{p}_1), \cdots, -f(\dot{p}_m)\} &= \min\{f(\dot{p}_0), f(\dot{p}_1), \cdots, f(\dot{p}_m)\}. \end{aligned}$$

第二个等号来自定理 6。 □

8.3. ☞ 在 $\dot{\mathbb{R}}^2$ 上，仿射线性函数 $f([x, y]) = 6x - 7y + 3$ 且

$$\dot{p}_1 = [0, 6],\ \dot{p}_2 = [4, 2],\ \dot{p}_3 = [2, -1],\ \dot{p}_4 = [-2, -1],\ \dot{p}_5 = [-4, 2].$$

令 D 是以 $\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3, \dot{p}_4, \dot{p}_5$ 为顶点的五角星区域。求 $\min\{f(\dot{q}) | \dot{q} \in D\}$。

解.

$$\begin{aligned} \min\{f(\dot{q}) | \dot{q} \in D\} \geqslant & \min\{f(\dot{q}) | \dot{q} \in \mathcal{C}(\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3, \dot{p}_4, \dot{p}_5)\} \\ = & \min\{f(\dot{p}_1), f(\dot{p}_2), f(\dot{p}_3), f(\dot{p}_4), f(\dot{p}_5)\} \\ = & f(\dot{p}_1) = -39. \end{aligned}$$

因为 $\dot{p}_1 \in D$，所以

$$\min\{f(\dot{q}) | \dot{q} \in D\} = -39.$$

□

8.4. ☞ 设 U 和 V 是 $\mathbb{F}$ 上的向量空间且 $\dim U = m, \dim V = n < \infty$。设线性算子 $\varphi \in \mathscr{L}_{\mathbb{F}}(U)$ 有 m 个不同的特征值 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 和 $\psi \in \mathscr{L}_{\mathbb{F}}(V)$ 有 n 个不同的特征值 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$。定义 $\varphi \otimes \psi \in \mathscr{L}_{\mathbb{F}}(U \otimes V)$ 为

$$(\varphi \otimes \psi)(u \otimes v) = \varphi(u) \otimes \psi(v), \quad \forall u \in U,\ v \in V.$$

求 $\varphi \otimes \psi$ 的特征值。

解. 根据题意，φ 和 ψ 均可对角化。设 $u_1, \cdots, u_m$ 是 φ 的特征值为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 的特征向量且构成 U 的一组基，$v_1, \cdots, v_n$ 是 ψ 的特征值为 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 的特征向量且构成 V 的一组基。那么 $\{u_i \otimes v_j | 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ 是 $U \otimes V$ 的一组基。

$$\varphi \otimes \psi(u_i \otimes v_j) = \varphi(u_i) \otimes \psi(v_j) = \alpha_i u_i \otimes \beta_j v_j = \alpha_i \beta_j (u_i \otimes v_j),$$

于是 $\varphi\otimes\psi$ 在基 $\{u_i\otimes v_j|1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n\}$ 下的矩阵是对角的，$\varphi\otimes\psi$ 的所有特征值为

$$\{\alpha_i\beta_j \mid 1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n\}.$$

□

8.5. ☞ 设 U 和 V 是 $\mathbb{F}$ 上的向量空间且 $\dim U=m$，$\dim V=n<\infty$。设线性算子 $\varphi\in\mathscr{L}_{\mathbb{F}}(U)$ 的行列式为 a 和 $\psi\in\mathscr{L}_{\mathbb{F}}(V)$ 的行列式为 b。求 $\varphi\otimes\psi$ 的行列式。

解. 取 U 的一组基 $\{u_1,\cdots,u_m\}$，φ 在这组基下的矩阵为 $A=(a_{ij})_{m\times m}$，取 V 的一组基 $\{v_1,\cdots,v_n\}$，ψ 在这组基下的矩阵为 $B=(b_{ij})_{n\times n}$。

$$(\varphi\otimes\psi)(u_i\otimes v_j)=\varphi(u_i)\otimes\psi(v_j)=(\sum_{k=1}^m a_{ik}u_k)\otimes(\sum_{l=1}^n b_{jl}v_l)=\sum_{k,l}a_{ik}b_{jl}(u_k\otimes v_l).$$

所以 $\varphi\otimes\psi$ 在 $U\otimes V$ 的基

$$u_1\otimes v_1,\cdots,u_1\otimes v_n,\cdots,u_m\otimes v_1,\cdots,u_m\otimes v_n$$

下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mm}B \end{pmatrix} \qquad \bigstar$$

如果我们取 φ 的 Jordan 基使得 A 是 φ 的 Jordan 标准型，那么矩阵 ★ 是分块上三角的，并且对角线上的元素是 α_iB，其中 $\alpha_i\in\overline{\mathbb{F}}$ 是 φ 的特征值。于是

$$\det(\varphi\otimes\psi)=\prod_{i=1}^m|\alpha_iB|=\prod_{i=1}^m\alpha_i^n|B|=|A|^n|B|^m=a^nb^m.$$

□

8.6. ☞ 设 U 和 V 为 $\mathbb{F}$ 上维数大于 1 的向量空间。证明 $U\otimes V$ 中，存在不具有形式 $u\otimes v$ 的元素，其中 $u\in U$ 和 $v\in V$。

证明. 取 U 的一组基 $\{u_i|i\in I\}$，V 的一组基 $\{v_j|j\in J\}$，其中 I,J 是指标集。则 $\{u_i\otimes v_j|i\in I,j\in J\}$ 是 $U\otimes V$ 的一组基，假设

$$u_1\otimes v_1+u_2\otimes v_2=u\otimes v=(\sum_{i\in I}a_iu_i)\otimes(\sum_{j\in J}b_jv_j)=\sum_{i,j}a_ib_j(u_i\otimes v_j)$$

那么

$$a_1b_1=a_2b_2=1,\ a_1b_2=0.$$

这不可能。

□

9 作业 18

9.1. 设 $V=\mathbb{R}^4$。写出 $\mathbb{T}^2(V)$ 的一组基。

解. 取 V 的标准基 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$，那么

$$e_i\otimes e_j,\ 1\leqslant i,j\leqslant 4$$

构成 $\mathbb{T}^2(V)$ 的一组基。 □

9.2. 证明作为结合代数

$$M_{m\times m}(\mathbb{F})\otimes M_{n\times n}(\mathbb{F})\cong M_{mn\times mn}(\mathbb{F}).$$

证明. 取 $M_{m\times m}(\mathbb{F})$ 的一组基 $\{E_{ij}|1\leqslant i,j\leqslant m\}$，$M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的一组基 $\{E'_{rs}|1\leqslant r,s\leqslant n\}$，那么 $\{E_{ij}\otimes E'_{rs}|1\leqslant i,j\leqslant m;1\leqslant r,s\leqslant n\}$ 构成 $M_{m\times m}(\mathbb{F})\otimes M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的一组基，从作业 17 的第 5 题的过程受启发，定义映射 $\varphi: M_{m\times m}(\mathbb{F})\otimes M_{n\times n}(\mathbb{F})\longrightarrow M_{mn\times mn}(\mathbb{F})$ 为

$$\varphi(\sum_{i,j,r,s}a_{ijrs}(E_{ij}\otimes E'_{rs}))=\sum_{i,j,r,s}a_{ijrs}E''_{(i-1)n+r,(j-1)n+s}.$$

由于 $\{E''_{pq}|1\leqslant p,q\leqslant mn\}$ 构成 $M_{mn\times mn}(\mathbb{F})$ 的一组基。于是 φ 是一个线性同构。更进一步，

$$\begin{aligned}\varphi((E_{i_1j_1}\otimes E'_{r_1s_1})(E_{i_2j_2}\otimes E'_{r_2s_2}))&=\varphi(E_{i_1j_1}E_{i_2j_2}\otimes E'_{r_1s_1}\otimes E'_{r_2s_2})\\&=\varphi(\delta_{j_1i_2}\delta_{s_1r_2}E_{i_1j_2}\otimes E_{r_1s_2})=\delta_{j_1i_2}\delta_{s_1r_2}E''_{(i_1-1)n+r_1,(j_2-1)n+s_2}\\\varphi(E_{i_1j_1}\otimes E'_{r_1s_1})\varphi(E_{i_2j_2}\otimes E'_{r_2s_2})&=E''_{(i_1-1)n+r_1,(j_1-1)n+s_1}E''_{(i_2-1)n+r_2,(j_2-1)n+s_2}\\&=\delta_{(j_1-1)n+s_1,(i_2-1)n+r_2}E''_{(i_1-1)n+r_1,(j_2-1)n+s_2}.\end{aligned}$$

既然 $\delta_{(j_1-1)n+s_1,(i_2-1)n+r_2}=\delta_{j_1i_2}\delta_{s_1r_2}$，$1\leqslant j_1,i_2\leqslant m;1\leqslant s_1,r_2\leqslant n$，我们有

$$\varphi((E_{i_1j_1}\otimes E'_{r_1s_1})(E_{i_2j_2}\otimes E'_{r_2s_2}))=\varphi(E_{i_1j_1}\otimes E'_{r_1s_1})\varphi(E_{i_2j_2}\otimes E'_{r_2s_2})$$

所以 φ 是一个代数同态，从而是一个代数同构。 □

注 9.1. 从线性算子的角度。令 V,U 分别是 m,n 的向量空间，通过向量空间的一组基，我们有同构 $\mathscr{L}(V)\otimes\mathscr{L}(U)\cong M_{m\times m}(\mathbb{F})\otimes M_{n\times n}(\mathbb{F})\cong M_{mn\times mn}(\mathbb{F})\cong\mathscr{L}(V\otimes U)$。

9.3. 设 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 是 $\mathbb{F}$ 上向量空间 V 的一组基。令 $\omega=v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_n$。对任意 $u\in V$，证明

$$v_1\wedge\cdots\wedge v_{r-1}\wedge u\wedge v_{r+1}\wedge\cdots\wedge v_n=\lambda_r\omega,\ \lambda_r\in\mathbb{F},\ r=1,2,\cdots,n$$

并且 $u=\sum\limits_{r=1}^{n}\lambda_rv_r$。

证明. 设 $u=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i v_i$，对任意 $r=1,2,\cdots,n$，由多重线性性和斜对称性，我们有

$$v_1\wedge\cdots\wedge v_{r-1}\wedge u\wedge v_{r+1}\wedge\cdots\wedge v_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_1\wedge\cdots\wedge v_{r-1}\wedge v_i\wedge v_{r+1}\wedge\cdots\wedge v_n=\lambda_r\omega.$$

□

9.4. 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上 n 维向量空间。设

$$w_r\in\bigwedge^{r}(V),\quad r=0,1,\cdots,n.$$

证明 $w=\sum\limits_{i=0}^{n}w_i$ 是 $\bigwedge(V)$ 中的可逆元的充分必要条件是 $w_0\neq 0$。

证明. (必要性) 设 $w^{-1}=\sum_{j=1}^{n}u_j$，$u_j\in\bigwedge^{j}(V)$，则

$$1=w\wedge w^{-1}=\sum_{i,j=1}^{n}w_i\wedge u_j,$$

由于 $w_i\wedge u_j\in\bigwedge^{i+j}(V)$，因此

$$w_0\wedge u_0=1\Longrightarrow w_0\neq 0.$$

(充分性) 设 $k=\max\{r|w_r\neq 0\}$，我们对 k 归纳。当 $k=0$ 时，$w^{-1}=w_0^{-1}$。当 $k\geqslant 1$ 时，由归纳假设知 $\sum\limits_{i=0}^{k-1}w_i$ 可逆，设 u 是它的逆。既然

$$w_k\wedge u\in\bigoplus_{i=k}^{n}\bigwedge^{i}(V),$$

则当 m 足够大时，$\bigwedge^{m}(w_k\wedge u)=0$。令

$$\tilde{u}=u\wedge(1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\bigwedge^{m}(w_k\wedge u))$$

则

$$w\wedge\tilde{u}=(1+w_k\wedge u)\wedge(1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\bigwedge^{m}(w_k\wedge u))=1$$

□

9.5. . 设 f 是有限维向量空间 V 上的非退化的对称双线性型且 $1\leqslant m\leqslant\dim V$。定义 $\bigwedge^{m}(V)$ 上的双线性型 $f^{\wedge m}$ 为

$$f^{\wedge m}(u_1\wedge\cdots\wedge u_m,v_1\wedge\cdots\wedge v_m)=\begin{vmatrix}f(u_1,v_1)&f(u_1,v_2)&\cdots&f(u_1,v_m)\\f(u_2,v_1)&f(u_2,v_2)&\cdots&f(u_2,v_m)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\f(u_m,v_1)&f(u_m,v_2)&\cdots&f(u_m,v_m)\end{vmatrix}$$

证明 $f^{\wedge m}$ 是 $\bigwedge^{m}(V)$ 上的非退化的对称双线性型。

证明. 按定义容易证明它是对称双线性型。设 f 在 V 的标准基下矩阵为 A，设 $v_1, \cdots, v_m$ 线性无关且 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_m \in R_{f^{\wedge m}}$，记

$$B = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} A \left({}^t v_1, \cdots, {}^t v_m \right)$$

对任意 $u_1, \cdots, u_m \in V$，$\det B = 0$。取 $u_i = v_i A^{-1}, i = 1, \cdots, m$ 就导出矛盾。(参考作业 12 第 5 题) □

10 (无关)

10.1. 在 $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 中给定内积

$$(A|B) = Tr(A\ {}^t B)$$

令 S 是全体 n 阶实对称矩阵构成的子空间，求 $S^\perp$。

证明. 设 T 是所有斜对称矩阵构成的子空间。首先我们从 $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = S \oplus T$ 推出 $\dim T = \dim M_{n\times n}(\mathbb{R}) - \dim S = \dim S^\perp$。其次，对任意 $A \in S,\ B \in T$ 有

$$(A|B) = \mathrm{Tr}(A\ {}^t B) = -\mathrm{Tr}(AB),\ (B|A) = \mathrm{Tr}(B\ {}^t A) = \mathrm{Tr}(BA).$$

因此 $(A|B) = 0 \Longrightarrow B \in S^\perp \Longrightarrow T \subseteq S^\perp \Longrightarrow T = S^\perp$。 □

10.2. 对任意 $f(x) \in C[0, 2\pi]$，证明

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx\right)^2 + \left(\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx\right)^2\right] \leqslant \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx - \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(x)dx\right)^2$$

证明. 定义内积

$$(f|g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x \quad f, g \in C[0, 2\pi]$$

由 Bessel 不等式可得。 □

10.3. 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 的所有特征值。证明

1. 存在酉矩阵 T 使得 TAT^{-1} 是上三角矩阵；
2. A 是正规矩阵当且仅当

$$\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2.$$

证明. 1. 取 $\mathbb{C}^n$ 的标准基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$，定义一个 $\mathbb{C}^n$ 上的线性算子 φ:

$$\varphi \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n. \end{pmatrix}$$

那么本题等价于找到 $\mathbb{C}^n$ 的一组标准正交基，使得 φ 在这组基下的矩阵是上三角的。我们对 n 作归纳法。$n=1$ 时命题是平凡的。当 $n>1$ 时，设 u_1 是 φ^* 的一个特征值为 $\bar{\lambda}_1$ 的单位特征向量，对任意 $v\perp u_1$ 有

$$\langle\varphi(v)|u_1\rangle=\langle v|\varphi^*(u_1)\rangle=\lambda_1\langle v|u\rangle=0,$$

所以 $U=\mathrm{Span}\{u_1\}^{\perp}$ 是 φ 的一个不变子空间且 $\mathbb{C}^n=U\oplus\mathrm{Span}\{u_1\}$。根据归纳假设，存在 U 的一组标准正交基 $\{u_2,\cdots,u_n\}$ 使 $\varphi|_U$ 的矩阵是上三角的。显然 $\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的标准正交基，而且 φ 在这组基下的矩阵下就是上三角的。

2. 如果 A 是正规矩阵，则存在酉矩阵 U 使得

$$A=U\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)U^{-1},$$

所以

$$AA^*=U\mathrm{diag}(|\lambda_1|^2,\cdots,|\lambda_n|^2)U^{-1}$$

我们有

$$\sum_{i,j=m}^{n}|a_{ij}|^2=\mathrm{Tr}AA^*=\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2.$$

反之，根据 1，存在酉矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 是上三角矩阵，易知其对角线上的元素恰好是 A 的特征值，即

$$A=T\begin{pmatrix}\lambda_1&x_{12}&\cdots&x_{1n}\\0&\lambda_2&\cdots&x_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}T^{-1}.$$

那么

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2=&\sum_{i,j=m}^{n}|a_{ij}|^2=\mathrm{Tr}AA^*\\=&\mathrm{Tr}T\begin{pmatrix}\lambda_1&x_{12}&\cdots&x_{1n}\\0&\lambda_2&\cdots&x_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1&0&\cdots&0\\\bar{x}_{12}&\bar{\lambda}_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\bar{x}_{1n}&\bar{x}_{2n}&\cdots&\bar{\lambda}_n\end{pmatrix}T^{-1}\\=&\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2+\sum_{1\leqslant s<t\leqslant n}|x_{st}|^2.\end{aligned}$$

这要求 $x_{st}=0,\ 1\leqslant s<t\leqslant n$，于是 $A=T\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)T^{-1}$ 是正规矩阵。 □

10.4. 设 A 是 n 阶正定矩阵，B 是 n 阶半正定矩阵，证明 $|A+B|\geqslant|A|+|B|$。

证明. 既然 A 是正定的，则存在可逆矩阵 T，使得

$${}^tTAT=I_n,\ {}^tTBT=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n \geqslant 0$。那么

$$|A| = \frac{1}{|T|^2},\ |B| = \frac{\prod_{i=1}^{n}\lambda_i}{|T|^2}$$

且

$$|A+B| = \frac{\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+1)}{|T|^2} \geqslant \frac{1+\prod_{i=1}^{n}\lambda_i}{|T|^2} = |A|+|B|.$$

□

10.5. 在 $\mathbb{R}[x]$ 中给定内积

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

求 x^4 到次数小于 4 的多项式子空间 $\mathcal{P}_4$ 的距离。

证明. 对 $\{1,x,x^2,x^3\}$ 正交化求得 $\mathcal{P}_4$ 的一组标准基

$$f_1 = 1,\ f_2 = x,\ f_3 = x^2 - \frac{1}{3},\ f_4 = x^3 - \frac{3}{5}x.$$

所以

$$\rho(x^4,\mathcal{P}_4) = ||x^4 - \sum_{i=1}^{4}\frac{(x^4|f_i)}{(f_i|f_i)}f_i|| = ||x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}|| = \frac{8\sqrt{2}}{105}$$

□

10.6. 对于 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in M_{n\times n}(\mathbb{F}), B=(b_{ij})_{m\times m}\in M_{m\times m}(\mathbb{F})$，定义

$$A\otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

证明

1. $A\otimes B$ 与 $B\otimes A$ 相似；
2. 如果 A,B 都可对角化，那么 $A\otimes B$ 也可以对角化。

证明. 1. 设 V 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 维向量空间，其一组基为 $\{v_1,\cdots,v_n\}$，在这组基下，矩阵 A 定义了一个线性算子 $\varphi\in\mathscr{L}(V)$。同样的，在 m 维向量空间 U 的一组基 $\{u_1,\cdots,u_m\}$ 下，B 定义了线性算子 $\psi\in\mathscr{L}(U)$。易知 $\varphi\otimes\psi\in\mathscr{L}(V\otimes U)$ 在基

$$v_1\otimes u_1,\cdots,v_1\otimes u_m,\cdots,v_n\otimes u_1,\cdots,v_n\otimes u_m$$

下的矩阵就是 $A\otimes B$，在基

$$v_1\otimes u_1,\cdots,v_n\otimes u_1,\cdots,v_1\otimes u_m,\cdots,v_n\otimes u_m$$

下的矩阵是 $B \otimes A$，所以 $A \otimes B$ 与 $B \otimes A$ 相似。

2. 设

$$PAP^{-1} = D_1,\ QBQ^{-1} = D_2,$$

其中 $P \in GL_n(\mathbb{F}), Q \in GL_m(\mathbb{F})$，$D_1, D_2$ 是对角矩阵，那么

$$(P \otimes Q)(A \otimes B)(P \otimes Q)^{-1} = PAP^{-1} \otimes QBQ^{-1} = D_1 \otimes D_2,$$

易知 $D_1 \otimes D_2$ 是对角矩阵。 $\square$