

数学物理方法笔记

Notes of Mathematical Physics Methods

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

序言

本文为笔者本科时的“数学物理方法”课程笔记 (Notes of Mathematical Physics Methods, 2024.9 – 2025.1)。课程信息、作业与相关资料可以在笔者的个人网站上找到: [Notes > Math > Mathematical Physics Methods](#) (<https://yidingg.github.io/YiDingg/#/Notes/Math/MathematicalPhysicsMethods>), 参考文献会在课程结束后统一上传到网址 (待更新)。

由于个人学识浅陋, 认识有限, 文中难免有不妥甚至错误之处, 望读者不吝指正。可以将错误发送到我的邮箱 dingyi233@mails.ucas.ac.cn, 也可以到笔者的 [GitHub](#) 笔记库 (<https://github.com/YiDingg/LatexNotes>) 提 issue, 衷心感谢。

目录

序言	I
目录	II
1 复数与复数运算	1
1.1 预备知识	1
1.2 复数序列	1
1.3 复变函数	2
1.4 无穷远点	2
1.5 复变函数可视化	3
2 解析函数	4
2.1 复变函数的极限和连续	4
2.2 可导与可微	4
2.3 解析函数	4
2.3.1 解析的概念与判定	4
2.3.2 已知实虚部求原函数	5
2.3.3 实虚部关系可视化	5
2.4 初等函数	6
2.5 解析函数的保角性（略）	7
2.6 多值函数	7
2.6.1 基本概念	7
2.6.2 “有理”函数的分支点	8
2.6.3 单值分支	8
2.6.4 常见多值函数	8
3 复变积分	9
3.1 复变积分的概念	9
3.2 Cauchy 定理	9
3.2.1 Cauchy-Goursat 定理	9
3.2.2 Cauchy-Goursat 的推广	9
3.3 圆弧定理	10
3.4 Cauchy 积分公式	10
3.5 Cauchy 型积分与含参量积分的解析性	11
3.6 Poisson 公式	11
3.7 常见积分结果汇总	12
参考文献	13

附录 A 数物方法 Q & A	14
A.1 第一章	14
A.1.1 问题 1	14
A.1.2 问题 2	14
A.2 第二章	14
A.2.1 如何快速而大致准确地判断一个函数是否解析?	14
A.2.2 解析域一定是开集, 为什么会说“在有界闭域 \overline{G} 上解析”?	14
A.2.3 分支点一定不解析吗?	14
A.3 第三章	14
A.3.1 为什么解析函数的积分与路径无关?	14
A.3.2 如何使用 (n 阶) Cauchy 积分公式?	15
A.3.3 如何理解 Cauchy 型积分揭示的“解析函数在 (分段) 光滑曲线上的值决定了它在整个复平面上的值”	15

第1章 复数与复数运算

§1.1 预备知识

复数定义：

一个有序实数对 (x, y) 称为复数如果其满足如下运算：

$$\begin{aligned} \text{加法} \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \text{乘法} \quad (x_1, y_1)(x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \end{aligned} \quad (1.1)$$

记作 $z = x + iy$, 其中 $x = \Re z$, $y = \Im z$, $i^2 = -1$ 。

相关概念：

下面是一些相关概念：

- ① 复数的三种表示： $z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$
- ② 模： $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- ③ 幅角： $\arg z = \theta \in [0, 2\pi)$ 称为幅角主值（或 $[-\pi, \pi)$ ）， $\text{Arg } z = \theta + 2k\pi$ 称为幅角补值， $k \in \mathbb{Z}$ 。
- ④ 0 与 ∞ ：是两个特殊的复数，分别表示复平面中模为 0 和无穷大而幅角任意的“一个点”。在复平面的球表示中，0 对应南极， ∞ 对应北极。
- ⑤ 扩充复平面：称包含无穷远点 ∞ 的复平面 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 为扩充复平面。
- ⑥ 共轭复数： $z = x + iy, z^* = x - iy$
- ⑦ 复数除法：设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ ，则：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{1}{|z_2|^2} [(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)] \quad (1.2)$$

用棣莫弗定理更易理解复数除法：设 $z_1 = r_1e^{i\theta_1}, z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ ，则：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (1.3)$$

- ⑧ 复数乘法： $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

§1.2 复数序列

相关概念：

一个复数序列 $\{z_n\}$ 完全等价于两个实数序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$

- ① 聚点：给点复序列 $\{z_n\}$ ，若存在 $z \in \mathbb{C}$ ，使 $\forall \varepsilon > 0$ ，恒有无穷多个 n 使得 $|z_n - z| < \varepsilon$ 则称 z 为序列 $\{z_n\}$ 的一个聚点。

例如序列 $\{(-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}_+\} = \{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}, \dots\}$ 有两个聚点 1, -1。

- ② 有界 / 无界序列：序列 $\{z_n\}$ 称为有界的如果 $\exists M > 0$ s.t. $|z_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}_+$ ，否则称为无界的。
- ③ 极限：称序列 $\{z_n\}$ 收敛于 $z \in \mathbb{C}$ 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ s.t. $|z - z_n| < \varepsilon, \forall n > N$ ，记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ ，否则称为发散序列。极限的必要条件是有一聚点，无界序列不可能收敛

Theorem. 1 (Bolzano - Weierstrass 定理)： 任意有界序列至少有一个聚点。^①

Theorem. 2 (Cauchy 判别法)： 序列收敛的等价条件是： $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$ s.t. $|z_{N+p} - z_N| < \varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}_+$ 。

^①Theorem.1 告诉我们有界序列必有聚点，事实上，在扩充复数域 $\overline{\mathbb{C}}$ 中，这对无界序列也成立（ ∞ 必为聚点），也即任意序列都必有聚点。

§ 1.3 复变函数

相关概念：

如下：

- ① 点集：复平面内点的集合
- ② 区域：复点集称为区域如果全部由内点组成，且具有连通性^②
- ③ 单连通 / 多联通区域：区域称为单连通的如果在其内作任何简单闭合围道（自身不相交的闭合曲线），围道内的点都属于该区域，否则称为多联通区域（也称复联通区域）
例如，图 1.1 中的 (a) 区域就属于单连通区域，而图 1.1 中的 (b) 区域则为多连通区域。区域定义的条件之一就是仅包含内点，因此区域必是开集， $\overline{G} = G \cup \partial G$ 表示区域并上边界，称为闭域。
- ④ 边界：区域 G 的全体边界点构成其边界，记为 ∂G
- ⑤ 边界方向：沿着区域的边界前进，区域恒保持在边界的左侧，则此走向称为边界的正向

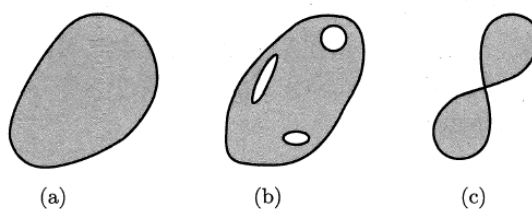


图 1.1: (a) (b) 构成区域，(c) 不构成区域

复变函数：

复变函数 f 是复数域子域 $G \subseteq \mathbb{C}$ 到复数域的映射，记作 $f: z \mapsto \mathbb{C}$ ，或者 $f(z) = w, z \in G$ 。区域 G 称为函数 f 的定义域。事实上，复变函数等价于两个实变函数的有序组合。特别地，多值函数允许一个自变量对应多个函数值，我们在第二章会讨论。

§ 1.4 无穷远点

Riemann 球面：

如图 1.2，过扩充的复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 中的原点 $(0,0)$ 作直径为 1 的球面，使之与 $\overline{\mathbb{C}}$ 相切，切点称为南极 S，南极直径另一端称为北极 N。 $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$ ，将它和复数球面的北极 N 相连，连线和球面有且仅有一个交点，因此存在一一对应关系。容易理解，0 对应南极 S 而 ∞ 对应北极 N。

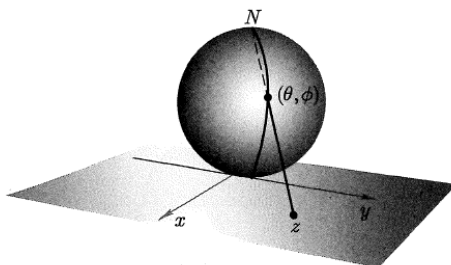


图 1.2: Riemann 球面（复数球面）

^②连通性：集合中任意两点都可以用一条折线连接起来，且折线上的点全部属于此点集

§ 1.5 复变函数可视化

图 1.3 (a) 是函数 $f(z) = z^2$ 的可视化, 图 1.3 (b) 是 $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$ 的可视化。其中坐标 (x, y) 对应 $z = x + iy$, 箭头的长度代表 $|f(z)|$, 方向代表 $\arg f(z)$ 。等高线表示模长相等。

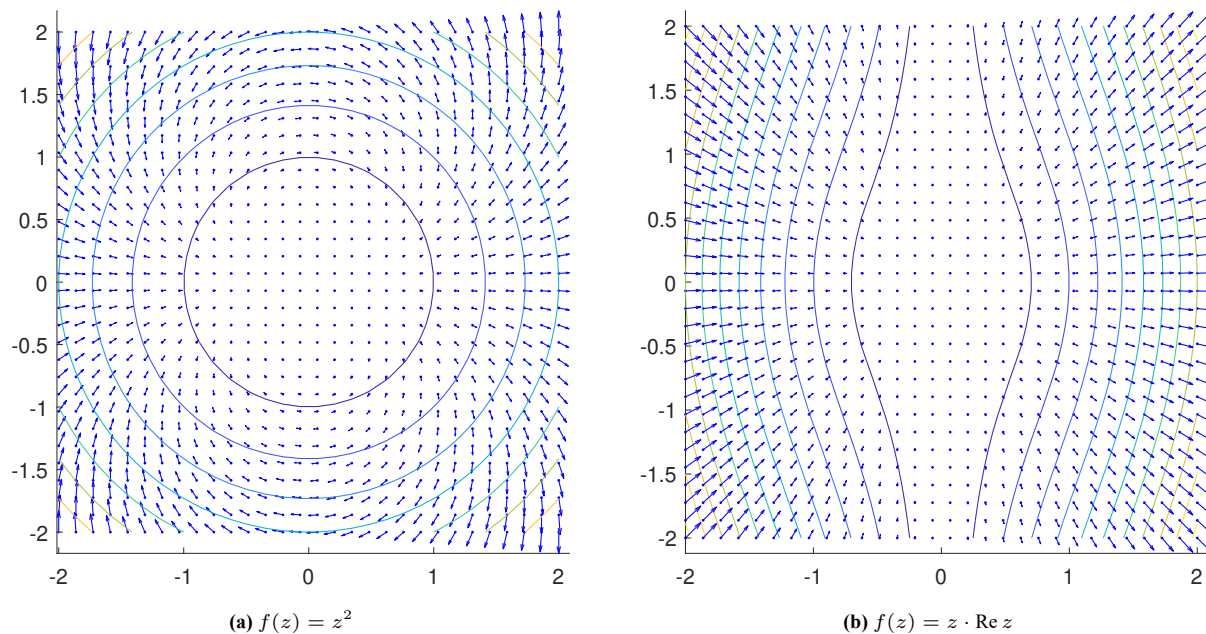


图 1.3: 复变函数可视化

图 1.4 (a) 是 $f(z) = e^{iz}$, 图 1.4 (b) 是 $f(z) = \cos(z)$ 。

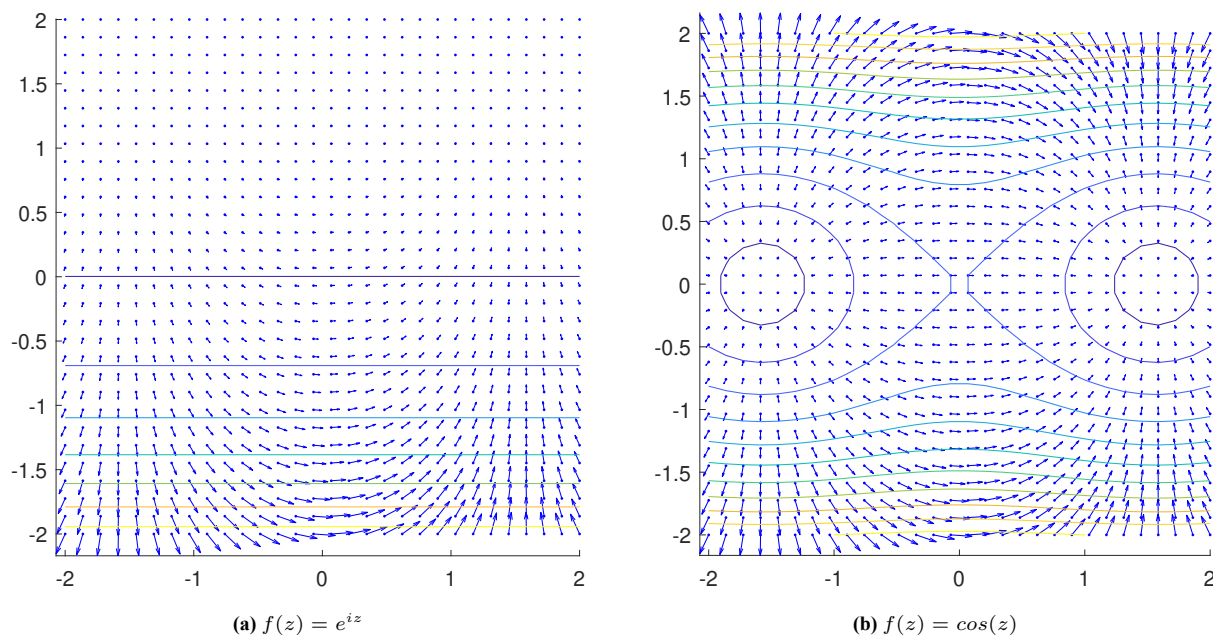


图 1.4: 复变函数可视化

第2章 解析函数

§ 2.1 复变函数的极限和连续

极限:

设复变函数 $f(z)$ 在 z_0 的空心邻域 $U_\delta^\circ(z_0)$ 中有定义^①, 若 $\exists A \in \mathbb{C}$ 满足 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ s.t. $|f(z) - A| < \varepsilon, \forall 0 < |z - z_0| < \delta$, 则称 $z \rightarrow z_0$ 时 $f(z)$ 存在极限 A , 记作:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \quad (2.1)$$

并且, 设 $f(z) = u(z) + iv(z)$, u, v 是 \mathbb{C} 到 \mathbb{R} 的函数, 可以证明:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} u(z) + i \lim_{z \rightarrow z_0} v(z) \quad (2.2)$$

连续:

设复变函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域 $U_\delta(z_0)$ 中有定义, 且 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续。

在有界闭域 \overline{G} 中连续的函数 $f(z)$ 具有两个重要性质:

- ① $|f(z)|$ 在 \overline{G} 中有界, 并且上下界可取到
- ② $f(x)$ 在 \overline{G} 中一致连续, 即 $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon, \forall |z_1 - z_2| < \delta$

§ 2.2 可导与可微

单值复变函数 $f(z)$ 在 z_0 处可导如果 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = C \in \mathbb{R}^{\text{②}}$, 记为 $f'(z)$ 。

容易证明, 高等数学中的各种求导公式都可以直接搬到复变函数。

Cauchy-Riemann 条件是函数可导的必要条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.3)$$

极坐标中的 C-R 条件:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \quad (2.4)$$

若存在 $A = A(z) \in \mathbb{C}$ s.t. $\Delta f(z) = A(z) \cdot \Delta z + O(\Delta z)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微, 记作 $df = A dz$, 或 $df = A(dx + i dy)$

注意, 与实变函数不同, 在复变函数中, 可导与可微是完全等价的:

$$f \text{ 可导} \iff f \text{ 可微} \iff u, v \text{ 可导且满足 C-R 条件} \quad (2.5)$$

§ 2.3 解析函数

2.3.1 解析的概念与判定

函数 f 称为 G 上的解析函数如果 f 在区域 G 内每一点都可导, 又称为 f 在 G 上解析。

^① z_0 的空心邻域是指以 z_0 为圆心的环域 $0 < |z - z_0| < \varepsilon$

^② 这要求 Δz 以任意方式趋于零, 此极限都存在, 类似二元函数的导数。

可以证明, 函数 f 在任意一点解析的充要条件是:

$$f \text{ 在点 } z \in \mathbb{C} \text{ 解析} \iff f \text{ 在点 } z \text{ 可微且满足 Cauchy-Riemann 方程} \quad (2.6)$$

在实际的操作中, 我们常用下面定理来判断函数的解析性:

Theorem.3 (解析函数判别法):

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 是区域 G 上的单值复变函数, 则:

$$u \text{ 和 } v \text{ 在 } G \text{ 上可微, 且处处满足 C-R 条件} \iff f \text{ 在 } G \text{ 上可导} \iff f \text{ 在 } G \text{ 内解析} \quad (2.7)$$

$$u \text{ 和 } v \text{ 在 } G \text{ 上有连续一阶导, 且处处满足 C-R 条件} \implies f \text{ 在 } G \text{ 上可导} \iff f \text{ 在 } G \text{ 内解析} \quad (2.8)$$

对于第一行, u 和 v 在 G 上可微并不能直接得到 f 可微, 例如 $u = 2x, v = -y$, 还有加上 C-R 条件才能得到可微。对于第二行, u 有一阶连续偏导 $\implies u$ 可微 (多元实变函数的结论), 后面同理

2.3.2 已知实虚部求原函数

在 G 内解析的函数必满足 Cauchy-Riemann 方程 (因为处处可导), 因此只要知道实虚部其中之一, 例如 $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ 的实部 $u(x, y)$, 就可以唯一地确定其虚部 (可加减实常数), 这是因为:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (2.9)$$

$$\implies v(x, y) = \int \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \quad (2.10)$$

为求此原函数, 设 $v(x, y) = g_1(x, y) + g_2(y)$, 则:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g_1}{\partial x} \implies g_1(x, y) = \int \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \implies g_2(y) = \int \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) dy = \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) dy \quad (2.12)$$

最后相加即得 $v(x, y)$ 。

这也就是说, 先考虑 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 对 x 的积分, 得到 $g_1(x, y)$, 然后考虑 $\frac{\partial v}{\partial y}$, 将其含 x 的项全部舍弃 (因为它们属于 g_1), 再对 y 作积分。两积分结果相加即得 $v(x, y)$ 。

特别地, 当已知 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 时, 欲求 $f(z)$ 的表达式 (而不是 $f(x, y)$), 只需直接令表达式 $u + iv$ 的 $(x, y) = (z, 0)$, 也即:

$$f(z) = [u(x, y) + iv(x, y)]_{x=z, y=0} = u(z, 0) + iv(z, 0) \quad (2.13)$$

具体原因我们会在第五章“解析延拓”处讨论。

2.3.3 实虚部关系可视化

解析函数实部与虚部之间的这种依赖关系, 还可以形象地表现出来。在 $x-y$ 平面中, 分别作出 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 的等高线图, 在任意一点 (x, y) , 由 Cauchy-Reimann 方程, 两者方向矢量的内积为零:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.14)$$

因此两者的等高线图处处正交 (表现为曲线处处正交)。

例如 $f(z) = z^2$, 则:

$$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)i \implies u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy$$

它们的等高线图如图 2.1 所示:

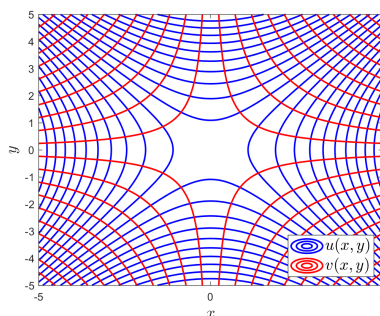


图 2.1: 解析函数 $f(z) = z^2$ 实虚部示意图

之后我们会证明, 解析函数 f 的实部 $u(x, y)$ 和虚部 $v(x, y)$ 的二阶偏导一定存在且连续, 并且满足二维 Laplace 方程^③, 这表明解析函数的实部和虚部构成一对共轭的调和函数^④。

$$\Delta u = \Delta v = 0 \iff \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (2.15)$$

函数的解析性总是和给点区域联系在一起, 有时也称函数在 z_0 点解析, 也即在邻域 $U_\delta(z_0)$ 内解析。讨论解析函数的各种特殊性质, 就是复变函数论的中心课题。

§ 2.4 初等函数

一些实初等函数推广到复数域时会有比较的特殊性质, 下面进行讨论。

幂函数 z^n :

当 $n \in \mathbb{N}$ 时, z^n 在 \mathbb{C} 内解析, 并且当 $n \in \mathbb{N}^*$ 时, z^n 在 ∞ 不解析; 当 $n \in -\mathbb{N}^*$ 时, z^n 在 $z = 0$ 不解析, 在 $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ 内解析。

指数函数 e^z :

复指数函数在 \mathbb{C} 内解析, 但在 ∞ 无意义, 因为极限 $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$ 不存在

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \quad (2.16)$$

三角函数 $\sin z, \cos z, \dots$:

复三角函数是用复指数函数定义的, 如下:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (2.17)$$

$\sin z, \cos z$ 在 \mathbb{C} 内解析, 唯一奇点是 $z = \infty$ 。可以证明, 实三角函数的各种恒等式对复三角函数仍成立 (包括和差化积、万能公式等)。

^③ 这样的函数 f 称为调和函数

^④ 共轭是因为满足 Cauchy-Riemann 方程

双曲函数 $\sinh z, \cosh z, \dots$:

双曲函数也是通过复指数函数来定义的, 如下

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad (2.18)$$

$$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \quad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z} \quad (2.19)$$

由定义可知, 双曲函数和三角函数能够互化:

$$\sinh z = -i \sin iz, \quad \cosh z = \cos iz, \quad \tanh z = -i \tan iz. \quad (2.20)$$

另外注意导数公式:

$$(\sinh z)' = \cosh z, \quad (\cosh z)' = \sinh z, \quad (\tanh z)' = \operatorname{sech}^2 z \quad (2.21)$$

其它结论:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad 1 - \tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z \quad (2.22)$$

$$\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2 \quad (2.23)$$

$$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2 \quad (2.24)$$

§ 2.5 解析函数的保角性 (略)

§ 2.6 多值函数

2.6.1 基本概念

多值函数的概念:

f 称为区域 $G \subseteq \mathbb{C}$ 上的多值函数如果 $\forall z \in G$ 存在多个 $w \in \mathbb{C}$ 使得 $f(z) = w_1 = w_2 = \dots$ 。许多函数的逆运算都是多值函数。

宗量、分支点:

考虑 $z - a$ 的开方 $w = \sqrt{z - a}$, 设 $w = \rho_1 e^{i\alpha}$ 而 $z - a = \rho_2 e^{i\theta}$, 代入解得:

$$w = \sqrt{|z - a|} e^{i\frac{\theta}{2} + n\pi}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.25)$$

$$\iff |w| = \sqrt{|z - a|}, \quad \arg w = \frac{1}{2} \arg(z - a) \quad (2.26)$$

w 的多值性来源于 $z - a$ 幅角的多样性, 我们把这样量称为**宗量**^⑤ (而不是自变量)。

为了进一步揭示多值函数 $w = \sqrt{z - a}$ 的性质, 我们讨论“还原”与“不还原”。在 z 复平面上依次画两个圆, 如图 2.2 左侧, 第一个圆在点 a 外, 第二个圆包含了点 a 。

对第一种情况, z 沿路径 C_1 逆时针旋转一圈后, 由于 a 在圆外, 因此旋转前后的 $\arg(z - a)$ 不变, $\arg w = \frac{1}{2} \arg(z - a)$ 也不变, 从而使得旋转前后 w 也不变, 称为 w 值“还原”。对第二种情况, z 沿路径 C_2 逆时针旋转一圈后, 由于 a 在圆内, $\arg(z - a)$ 增加了 2π 但 $\arg w = \frac{1}{2} \arg(z - a)$ 使得 $\arg w$ 仅增加 π , 从而使得旋转前后 w 未回到原点, 称为 w 值“不还原”。

因此, 点 a 对多值函数 $w = \sqrt{z - a}$ 有特殊意义, 它是否位于简单闭合路径内就决定了当 z 沿这个路径行进一周回到原处时, 相应的 w 值是否能还原。对于无法还原的点, 我们称为**分支点**^⑥。也即, 如果 $\exists r > 0$,

^⑤宗量通常不同于自变量. 例如, 多值函数 $\sqrt{z - a}$ 的宗量就是 $z - a$, 多值函数 $\sqrt[3]{(z - a)(z - b)}$ 的宗量就是 $(z - a)(z - b)$ 。当然, 也有宗量就是自变量的情形. 例如多值函数 \sqrt{z} 的宗量就是自变量 z 。

^⑥分支点描述的是函数的多值性质, 与函数的解析性无关

当 z 沿圆周 $|z - z_0| = r$ 绕一圈回到原处时, w 不还原, 且当 $r \mapsto 0$ 时, w 始终不还原, 这样的点 z_0 就称为多值函数 $w(z)$ 的分支点。

例如, $z = a, \infty$ 是 $f(z) = \sqrt{z - a}$ 的分支点, $z = a, b, c, \infty$ 是 $f(z) = \sqrt{(z - a)(z - b)(z - c)}$ 的分支点, $z = 0, \infty$ 是 $f(z) = \text{Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg } z$ 的分支点。

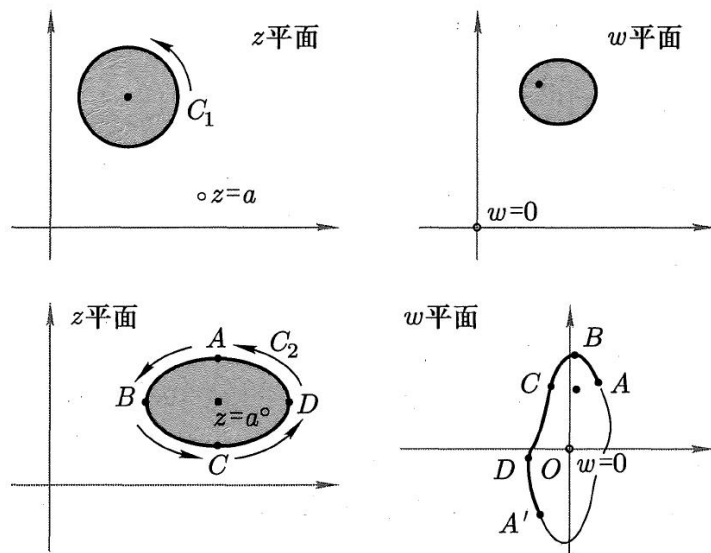


图 2.2: z 沿闭合曲线一周回到原处时, $w = \sqrt{z - a}$ 值的不同变化

2.6.2 “有理”函数的分支点

“有理”函数 $f(z)$:

$$f(z) = \sqrt[k]{\frac{(z - z_{i_1})^{r_1} (z - z_{i_2})^{r_2} \cdots (z - z_{i_m})^{r_m}}{(z - z_{j_1})^{s_1} (z - z_{j_2})^{s_2} \cdots (z - z_{j_n})^{s_n}}} \quad (2.27)$$

1. 对 a : 若因式 $(z - a)^b$ 的幂指数 b 不能被根指数 k 整除, 即 $b \not\equiv 0 \pmod{k}$, 则 a 为分支点, 否则不是分支点。
2. 对 ∞ : 若 $(\sum r_i - \sum s_i) \not\equiv 0 \pmod{k}$, 则 ∞ 为分支点, 否则不是分支点。

2.6.3 单值分支

为了得到多值函数的单值分支, 我们可以限制宗量的幅角范围 (常通过“割线”来实现)。这样, 宗量幅角范围的各个周期, 给出多值函数的各个单值分支。另一种自然的方法是规定初始值和连续变化路线 (移动路线)。

2.6.4 常见多值函数

最常见的多值函数是取对和开根。

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad \text{Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg } z \quad (2.28)$$

许多多值函数都可以通过 $\text{Ln } z$ 和根号来定义:

$$\arcsin z = \frac{1}{i} \text{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}), \quad \arccos z = \frac{1}{i} \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}) \quad (2.29)$$

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \text{Ln}\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right), \quad z^\alpha = e^{\alpha \text{Ln } z}, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (2.30)$$

第3章 复变积分

§3.1 复变积分的概念

复变积分是 \mathbb{C} 上的线积分，沿某条路径，由点 A 至点 B 的复变积分定义为：

$$I = \lim_{\max |\Delta z_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta z_i = \int_{C_{AB}} f(z) dz \quad (3.1)$$

如果路径是闭合的，也常称为积分围道。一个复变积分实际上是两个实变线积分的线性组合，因此，若 C 是分段光滑曲线，且 $f(z)$ 在路径 C 上连续，则复变积分一定存在。

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy) \quad (3.2)$$

§3.2 Cauchy 定理

3.2.1 Cauchy-Goursat 定理

Theorem. 4 (Cauchy 定理):

若 $f(z)$ 在有界区域 G 上单值解析，在 \overline{G} 上连续^①，则：

$$\oint_{\partial G} f(z) dz = 0 \quad (3.3)$$

对单连通区域， ∂G 即为外围边界线（沿逆时针）；对多连通区域，外围边界线沿逆时针积分，内部边界线沿顺时针积分^②。

3.2.2 Cauchy-Goursat 的推广

Theorem. 5 (Cauchy 定理推广 1):

连续函数 f 在有界复连通区域 G 上单值解析，则：

$$\oint_{C_0} f(z) dz = \sum_{i=1}^{i=n} \oint_{C_i^{(-)}} f(z) dz \quad (3.4)$$

路径上的负号表示路径沿反相，在这里即沿逆时针。也就是所有路径（包括 C_0 ）都沿逆时针。

Theorem. 6 (Cauchy 定理推广 2):

连续函数 f 在有界单连通区域 G 上单值解析，则：

$$\oint_C f(z) dz, C \subset G \text{ 与路径无关, 也即 } f(z) \text{ 存在原函数} \quad (3.5)$$

Theorem. 7 (Cauchy 定理推广 3):

C 为 G 的边界，任取简单闭合曲线 $C' \subset G$ ，若连续函数 $f(z)$ 在构成的新有界复连通区域上解析，则：

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C'} f(z) dz \quad (3.6)$$

^①如何理解在 \overline{G} 上解析？ ∂G 上的解析性如何定义？

^②始终保持区域在自身左侧的走向称为正向。

§ 3.3 圆弧定理

Theorem. 8 (小圆弧定理):

若 $f(z)$ 在 a 的空心邻域 $U_\delta^\circ(a)$ 上连续, 且在 $\arg(z-a) \in [\theta_1, \theta_2]$ 时, $(z-a)f(z)$ 一致收敛于 k ($|z-a| \rightarrow 0$), 则:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} f(z) dz = ik(\theta_2 - \theta_1) \quad (3.7)$$

其中 C_δ 是以 a 为圆心, δ 为半径, 张角为 $\theta_2 - \theta_1$ 的小圆弧。

Theorem. 9 (大圆弧定理):

若 $f(z)$ 在 ∞ 的空心邻域 $U_\delta^\circ(\infty)$ 上连续, 且在 $\arg(z-a) \in [\theta_1, \theta_2]$ 时, $(z-a)f(z)$ 一致收敛于 k ($|z-a| \rightarrow \infty$), 则:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = ik(\theta_2 - \theta_1) \quad (3.8)$$

其中 C_R 是以 a 为圆心, R 为半径, 张角为 $\theta_2 - \theta_1$ 的大圆弧。

§ 3.4 Cauchy 积分公式

Theorem. 10 (Cauchy 积分公式):

若 $f(z)$ 在 \overline{G} 中解析^③, 则 $f(z)$ 在 G 上有任意阶导数, 且它们都是 \overline{G} 上的解析函数。

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad \forall z \in G \quad (3.9)$$

特别地, 当 $n = 0$ 时, 得到 Cauchy 积分公式^④:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta, \quad \forall z \in G \quad (3.10)$$

Theorem. 11 (Cauchy 定理的推广):

在计算回路积分时, Theorem. 10 使用起来不太方便, 由小圆弧定理和 Cauchy 定理, 我们可以证明下面命题, 方便我们使用。

若 $f(z)$ 在 \overline{G} 上有唯一奇点 $z = a$, 且 $(z-a)^n f(z)$ 在 \overline{G} 上解析, 则:

$$I = \oint_{\partial G} f(z) dz = \frac{2\pi i}{(\underline{n}-1)!} \lim_{z \rightarrow a} (z-a)^n f^{(\underline{n}-1)}(z) = \frac{2\pi i}{(\underline{n}-1)!} [(z-a)^n f^{(\underline{n}-1)}(z)]_{z=a} \quad (3.11)$$

特别地, 当 $n = 1$ 时, 得到 Cauchy 积分公式。

Theorem. 12 (无界区域上的 Cauchy 积分公式):

若 $f(z)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ 中解析, 则 $f(z)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ 上有任意阶导数, 且它们都是 $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ 上的解析函数。

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

^③解析域闭为开集, 至于为什么说在闭域上解析, 详见附录 A.2.2

^④事实上是由 $n = 0$ 和归纳法证明的 n 阶导数 Cauchy 积分公式

§3.5 Cauchy 型积分与含参量积分的解析性

Theorem. 13 (Cauchy 型积分):

设函数 ϕ 在分段光滑曲线 $L \in \mathbb{C}$ 上连续 (L 可闭合或不闭合), 则下面函数在 $\mathbb{C} \setminus L$ 上解析, 在全平面上连续:

$$f(z) = \begin{cases} \phi(z) & , z \in L \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta & , z \in \mathbb{C} \setminus L \end{cases} \quad (3.13)$$

且它在 $\mathbb{C} \setminus L$ 上的导数可由 Cauchy 积分公式得到:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus L, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.14)$$

Theorem. 14 (含参量积分的解析性):

设 $f = f(t, z)$ 是定义在 $L \times \overline{G}$ 上的连续函数 (对两个变量都连续), 其中 \overline{G} 是有界闭域。且 $\forall t \in L$, $f(t, z)$ 是 \overline{G} 上的单值解析函数, 则函数 $F(z) = \int_L f(t, z) dt$ 在 G 内解析, 且 $F'(z) = \int_L \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} dt$ 。

§3.6 Poisson 公式

Cauchy 积分公式告诉我们, 对于在 \overline{G} 上解析的函数 $f(z)$, 函数在 \overline{G} 内任意一条曲线上的值 (可以是边界 ∂G) 就完全唯一地决定了 f 在 G 内任意一点的值。特别地, 当 $G = \mathbb{C}$ 时, 若已知 f 在 \mathbb{C} 内任意一条 (分段光滑) 曲线 L 上的值, 都可求出 f 在全平面的值。

Theorem. 15 (上半平面 Poisson 公式):

如果 $f(z)$ 在上半平面解析, 且 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, 则可依据它 (或者它的实部或虚部) 在实轴上的值, 求出它在整个上半平面的值:

$$\begin{aligned} \text{已知 } f(z), z \in \mathbb{R}: \quad f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\xi - x)f(\xi)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \end{aligned}$$

已知 u 或 v :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi, 0)}{\xi - (x + iy)} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(\xi, 0)}{\xi - (x + iy)} d\xi, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ u(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yu(\xi, 0)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\xi - x)v(\xi, 0)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ v(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\xi - x)u(\xi, 0)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yv(\xi, 0)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Theorem. 16 (圆内 Poisson 公式):

取 G 为半径是 a 的圆, 可以得到圆内 Poisson 公式:

$$f(r, \phi) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(ae^{i\theta})}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\phi - \theta)} d\theta, \quad \forall r \leq a, \phi \in [0, 2\pi) \quad (3.16)$$

$$u(r, \phi) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(a, \theta)}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\phi - \theta)} d\theta, \quad \forall r \leq a, \phi \in [0, 2\pi) \quad (3.17)$$

$$v(r, \phi) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{v(a, \theta)}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\phi - \theta)} d\theta, \quad \forall r \leq a, \phi \in [0, 2\pi) \quad (3.18)$$

§ 3.7 常见积分结果汇总

$$(1) \oint_C (z-a)^n dz = \begin{cases} i(2\pi) & , n = -1 \text{ \& } a \in G \\ 0 & , \text{else} \end{cases}$$

参考文献

- [1] 吴崇试, 高春媛. 数学物理方法. 北京大学出版社, 北京, 3 edition, 5 2019.
- [2] 吴崇试. 数学物理方法习题指导. 北京大学出版社, 北京, 2 edition, 10 2020.

附录 A 数物方法 Q & A

A.1 第一章

A.1.1 问题 1

A.1.2 问题 2

A.2 第二章

A.2.1 如何快速而大致准确地判断一个函数是否解析？

判断一个函数（在某个开集 G 上）是否解析，相当于判断它的可导性。如果一个复变函数是由初等函数构成的，不包括多值函数（包括 \sqrt{z} , $\text{Ln } z$, $\text{Arctan } z$ 等）或 $\text{Re } z$, $\text{Im } z$ 等特殊函数，那么在除去奇点（包括无定义点、不连续点和无穷点等）的开集上，一般都是解析的。例如，函数 $f(z) = \frac{z-1}{z-i}$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ 上解析，函数 $f(z) = \frac{e^z}{\cos z}$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 上解析。

在第三章及之后的章节中，若无特别声明，我们所说的函数都是指单值函数。

A.2.2 解析域一定是开集，为什么会说“在有界闭域 \overline{G} 上解析”？

这个说法是许多教材中的惯用说法^⑤，且并没有给出具体细节。我的理解是：解析区域必为开集，因此不可能是闭域，这里的意思是 f 在开集 G 上解析，且在 ∂ 上连续。

在本书中，不引起歧义的情况下，我们都说在闭域 \overline{G} 上解析。

A.2.3 分支点一定不解析吗？

首先需要区分，“解析”是单值函数的概念，而“分支点”是多值函数的概念。在讨论一个函数是否（在某点）解析时，要么这个函数本就是单值函数，要么是多值函数的某个单值分支。对于一个多值函数，分支点仅可能出现在奇点，包括无定义点、不连续点、不解析点和无穷点 ∞ 。因此，当约定好多值函数的单值分支时，对前三种情况（也即 \mathbb{C} 内的情况），分支点一定是不解析的。无穷点的情况可以做变换 $z \rightarrow \frac{1}{z}$ 转变为零点来讨论。

例如，函数 $f(z) = \sqrt{z}$ 的分支点为 $0, \infty$ ，同时也是唯二的不解析点，无穷点不解析是因为函数 $\frac{1}{\sqrt{z}}$ 在 $z = 0$ 无定义，零点不解析是因为 $f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$ 在 $z = 0$ 无定义。

A.3 第三章

A.3.1 为什么解析函数的积分与路径无关？

这是由 Cauchy 定理所保证的。只要函数在所讨论的区域上是解析的，那么 Cauchy 定理都成立，也就必定有“解析函数的积分与路径无关”。也就是说，积分的结果仅取决于起点和终点，这便自然而然地引出了“原函数”的概念。

回想力学中，重力场中的做功量与路径无关，也就是积分 $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ 的结果仅取决于起点和终点，而与路径无关，这也自然地引出了重力势能的概念。更严谨地说，在一个无旋的矢量场 \mathbf{A} 中，矢量 \mathbf{A} 与位矢的

^⑤例如教材 [1]

积分值与路径无关，仅取决于起点和终点，这是由矢量分析中的 Stokes Theorem（斯托克斯定理）所保证的，也即：

$$\oint_{\partial S} \mathbf{A} \, d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \quad (19)$$

当矢量场无旋时，上式右端恒为零。

A.3.2 如何使用（ n 阶）Cauchy 积分公式？

（ n 阶）Cauchy 积分公式（Theorem.10）为：若函数 $f(z)$ 在 \overline{G} 上解析，则 $f(z)$ 在 G 上有任意 n 阶导数，且它们都是 \overline{G} 上的解析函数。

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \zeta, \quad \forall n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \quad (20)$$

在计算（含奇点的）回路积分时，我们常常会用到上述公式，有时取 $n = 0$ ，有时又取 $n = 1$ 或其它数。事实上，上述公式的本质是：在计算含有唯一奇点的回路积分时，将奇点“挖出来”，借助 Cauchy Theorem（Theorem.4）转为绕小圆的回路积分，然后利用小圆弧定理（Theorem.8）得到最终结果。这里面的关键就是“唯一奇点”。

在 $f(z)$ 解析的情况下， $g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)}$ 有唯一奇点 a ，且 $(z-a) \cdot g(z)$ 在 \overline{G} 上解析，此时的 Cauchy 积分公式便可以写成：

$$\oint_{\partial G} g(z) = 2\pi i \cdot [(z-a) \cdot g(z)]_{z=a} \quad (21)$$

类似地，若 $g(z)$ 有唯一奇点 a ，且 $(z-a)^n \cdot g(z)$ 在 \overline{G} 上解析，便可以得到 n 阶 Cauchy 积分公式的等价形式：

$$\oint_{\partial G} g(z) = \frac{2\pi i}{n!} \cdot [(z-a)^{n+1} \cdot g(z)]_{z=a}^{(n)} \quad (22)$$

A.3.3 如何理解 Cauchy 型积分揭示的“解析函数在（分段）光滑曲线上的值决定了它在整个复平面上的值”