第 1 章　基础知识

§ 1.1　第一章第一节

向后加权隐式格式：

将向前差分与向后差分加权组合起来，得到：

$$\frac{u_j^k - u_j^{k-1}}{h_t} = a\theta \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h_x^2} + a(1-\theta)\frac{u_{j+1}^{k-1} - 2u_j^{k-1} + u_{j-1}^{k-1}}{h_x^2} \tag{1.1}$$

其中 $\theta \in [0,1]$ 为权重，其截断误差 $R = a\left(\frac{1}{2} - \theta\right) h_t \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right]_j^k + O(h_t^2 + h_x^2)$，因此当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时，方程具有 $O(h_t^2 + h_x^2)$ 精度，称为 Crank-Nicolson 格式（CN 格式）。

公式 1.1 的增长因子及稳定性条件为：

$$G(h_t, \sigma) = \frac{1 - 4(1-\theta)ar\sin^2\frac{\sigma h}{2}}{1 + 4\theta ar\sin^2\frac{\sigma h}{2}}, \quad \begin{cases} r \leqslant \frac{1}{2a(1-2\theta)}, & \theta \in [0, \frac{1}{2}) \\ \text{无条件稳定}, & \theta \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \tag{1.2}$$

Theorem. 1 (这是一个 Line Theorem)： 你好你好你好

Theorem. 2 (这是一个 Block Theorem)：
你好你好你好

定理 2 的证明：
你好你好你好

表格：

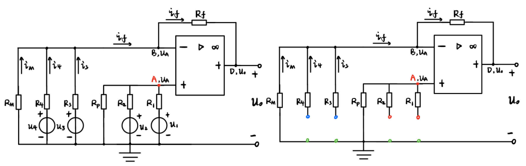
表 1.1: 符号含义与约定

符号	符号含义	单位
符号 1	含义 1	单位 1
符号 2	含义 2	单位 2
符号 3	含义 3	单位 3
符号 4	含义 4	单位 4

1.1.1　线性运算器（自设计）

图 1.1 是在加法器、减法器的基础上，自己设计的线性运算器，它可以实现任意数量的输入（电压）信号的任意线性运算。事实上，在此线性运算器中，电阻 R_M 和电阻 R_P 是关键，因为在正相信号间的比例、反相信号间的比例分别确定时，这两个电阻实现了正信号和负信号之间的比例调整，使得最终输出的正、负信号可以任意大或任意小（最小即为 0，不占任何比例）。

图中，红色端是加法信号，蓝色端是减法信号，绿色端为公共地（可只保留一个）。



(a) 线性运算器电路图　　(b) 接线端示意图

图 1.1: 自设计线性运算器

我们先研究图 1.1 (a) 的输出特性，再讨论如果没有电阻 R_M 或 R_P，输出电压会受到什么限制。输出电压的推导是简单的，先考虑点 A 的电势 u_A，求得：

$$u_A = \frac{\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_p}} \tag{1.3}$$

u_A 的推导，除了列 KCL, KVL 硬解之外，还可以这样：先将 R_p 断路，这样 u_2, R_2, u_1, R_1 构成并联的两个实际电压源（自带电阻），容易求得此时点 A 的电势 u_A，并做数学上的形式变换：

$$u_A = \frac{R_2 u_1 + R_1 u_2}{R_1 + R_2} = \frac{\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \tag{1.4}$$

于是，我们再并联一个实际电压源 P 后，由数学上直接推广，可以得到 u_A 为：

$$u_A = \frac{\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_p}{R_p}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_p}} \tag{1.5}$$

再令 $u_p = 0$，即得图 1.1 中的原始 u_A。

再考虑左侧的电流组，并利用虚断：

$$\begin{cases} i_3 = \frac{1}{R_3}(u_3 - u_A) \\ i_4 = \frac{1}{R_4}(u_4 - u_A) \\ i_m = \frac{1}{R_m}(0 - u_A) \\ i_f = i_3 + i_4 + i_m \end{cases} \implies u_o = u_A - R_f i_f = u_A - R_f(i_3 + i_4 + i_m) \tag{1.6}$$

$$\implies u_o = u_A - R_f\left[\frac{u_3}{R_3} + \frac{u_4}{R_4} - u_A\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_m}\right)\right] \tag{1.7}$$

$$= \left[1 + R_f\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_m}\right)\right] u_A - R_f\left(\frac{u_3}{R_3} + \frac{u_4}{R_4}\right) \tag{1.8}$$

代入 u_A，整理得到：

$$\boxed{u_o = \frac{1 + \frac{R_f}{R_m}\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)}{\frac{1}{R_p} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)} \cdot \left(\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2}\right) - R_f \cdot \left(\frac{u_3}{R_3} + \frac{u_4}{R_4}\right.} \tag{1.9}$$

这样，对于所有加法信号，可以通过 R_1, R_2 间的比例来调整它们在加法中的输出比例，类似地，减法信号通过 R_3, R_4 间的比例来调整它们在减法中的输出比例。最后通过 R_f, R_m, R_p 来调整加法、减法之间的输出比例。在 R_f, R_m, R_p 都可变时，易证（减法占比）$R_f \in [0, \infty)$，（加法占比）$\frac{1+R_f\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_m}\right)}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_p}} \in [0, \infty)$，于是全部系数都具有任意性，此线性运算器能够实现任意的线性运算。

上面的电路容易推广到任意输入信号个数的情形。假设有 m 个加法信号 $u_{s_1}, \ldots, u_{s_m}$，它们对应的串联电阻分别 $R_{s_1}, \ldots, R_{s_m}$；以及 n 个减法信号 $u_{r_1}, \ldots, u_{r_n}$，它们对应的串联阻值分别 $R_{r_1}, \ldots, R_{r_n}$。直接由数学上推广出去，得到输出电压 u_o 的表达式为：

$$\boxed{u_o = \left(\frac{1 + \frac{R_f}{R_m} + R_f \sum\limits_{i=s_1}^{i=s_m} \frac{1}{R_i}}{\frac{1}{R_p} + \sum\limits_{i=r_1}^{i=r_n} \frac{1}{R_i}}\right) \cdot \sum_{i=s_1}^{i=s_m} \frac{u_i}{R_i} - R_f \cdot \sum_{i=r_1}^{i=r_n} \frac{u_i}{R_i}} \tag{1.10}$$

此线性运算器的具体仿真示例见 Homework 3.