

数学物理方法笔记

Notes of Mathematical Physics Methods

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

## 序言

本文为笔者本科时的“数学物理方法”课程笔记 (Notes of Mathematical Physics Methods, 2024.9 - 2025.1)。读者可在笔者的个人网站 <https://yidingg.github.io/YiDingg/#/Notes/Math/MathematicalPhysicsMathods> 上找到课程信息、教材、教辅和作业答案等相关资料。

由于个人学识浅陋, 认识有限, 文中难免有不妥甚至错误之处, 望读者不吝指正。读者可以将错误发送到我的邮箱 [dingyi233@mailsucas.ac.cn](mailto:dingyi233@mailsucas.ac.cn), 也可以到笔者的 [GitHub \(https://github.com/YiDingg/LatexNotes\)](https://github.com/YiDingg/LatexNotes) 上提 issue, 衷心感谢。

# 目录

目录	IV
<b>1 复数与复数运算</b>	<b>1</b>
1.1 预备知识	1
1.2 复数序列	1
1.3 复变函数	2
1.4 无穷远点	2
1.5 复变函数可视化	3
<b>2 解析函数</b>	<b>4</b>
2.1 复变函数的极限和连续	4
2.2 可导与可微	4
2.3 解析函数	4
2.3.1 解析的概念与判定	4
2.3.2 已知实虚部求原函数	5
2.3.3 实虚部关系可视化	5
2.4 初等函数	6
2.5 解析函数的保角性 (略)	7
2.6 多值函数	7
2.6.1 基本概念	7
2.6.2 “有理”函数的分支点	8
2.6.3 单值分支	8
2.6.4 常见多值函数	8
2.7 部分复变函数可视化	9
2.8 常见函数总结	10
<b>3 复变积分</b>	<b>11</b>
3.1 复变积分的概念	11
3.2 Cauchy 定理	11
3.2.1 Cauchy-Goursat 定理	11
3.2.2 Cauchy 定理的推广	11
3.2.3 Cauchy 定理推论	12
3.3 圆弧定理	12
3.4 Cauchy 积分公式	13
3.5 Cauchy 型积分与含参量积分的解析性	13
3.6 Poisson 公式	14
<b>4 无穷级数</b>	<b>15</b>
4.1 复变函数项级数	15
4.1.1 复数项级数	15

4.1.2	实变级数的判别法	15
4.1.3	复变级数的判别法	17
4.1.4	复变函数项级数	17
4.2	二重级数	18
4.3	幂级数	19
4.4	含参量反常积分的解析性	19
4.5	发散级数与渐近级数 (略)	19
5	解析函数的局域性展开	20
5.1	解析函数的 Talor 展开	20
5.2	解析函数的零点	20
5.3	解析函数的 Laurent 展开	21
5.4	单值函数的孤立奇点	21
5.5	解析延拓	21
5.6	Bernoulli 数和 Euler 数 (略)	22
6	留数定理	23
6.1	留数定理及其求法	23
6.1.1	留数定理	23
6.1.2	求有界点的留数	24
6.1.3	求无穷点的留数	24
6.2	数物期中复习	24
	参考文献	25
	附录 A 数物方法 Q & A	26
A.1	第一章	26
A.1.1	三角反函数或双曲反函数中, 开根时为什么只取了正号?	26
A.1.2	问题 2	26
A.2	第二章	26
A.2.1	如何快速而准确地判断一个函数是否解析?	26
A.2.2	解析域一定是开集, 为什么会说 “在有界闭域 $\overline{G}$ 上解析”?	26
A.2.3	分支点一定不解析吗?	26
A.2.4	如何求出 (或判断) 多值函数的分支点?	26
A.2.5	已知多值函数的分支点, 作割线的意义是什么?	27
A.3	第三章	27
A.3.1	为什么解析函数的积分与路径无关?	27
A.3.2	如何使用 ( $n$ 阶) Cauchy 积分公式?	27
A.3.3	如何理解 Cauchy 型积分揭示的 “解析函数在 (分段) 光滑曲线上的值决定了它在整个复平面上的值”?	28
A.4	第五章	28
A.4.1	如何求一个函数在某点的 Laurent 展开式, 是否有通法?	28
A.4.2	$\ln(z+i)$ 在点 $z_0=0$ 有级数展开 (对 $ z <1$ 成立), 那么在 $ z >1$ 上是否可展开为幂级数?	28

A.4.3 $\ln z$ 在点 $z_0 = 0$ 是否可展开为幂级数?	28
附录 B Matlab 代码	29
B.1 图 2.3 和图 2.4 源码	29

# 第1章 复数与复数运算

## §1.1 预备知识

复数定义:

一个有序实数对  $(x, y)$  称为复数如果其满足如下运算:

$$\begin{aligned} \text{加法} \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \text{乘法} \quad (x_1, y_1)(x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \end{aligned} \quad (1.1)$$

记作  $z = x + iy$ , 其中  $x = \Re z$ ,  $y = \Im z$ ,  $i^2 = -1$ .

相关概念:

下面是一些相关概念:

- ① 复数的三种表示:  $z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$
- ② 模:  $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- ③ 幅角:  $\arg z = \theta \in [0, 2\pi)$  称为幅角主值 (或  $[-\pi, \pi)$ ),  $\text{Arg } z = \theta + 2k\pi$  称为幅角补值,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- ④ 0 与  $\infty$ : 是两个特殊的复数, 分别表示复平面中模为 0 和无穷大而幅角任意的“一个点”。在复平面的球表示中, 0 对应南极,  $\infty$  对应北极。
- ⑤ 扩充复平面: 称包含无穷远点  $\infty$  的复平面  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  为扩充复平面。
- ⑥ 共轭复数:  $z = x + iy, z^* = x - iy$
- ⑦ 复数除法: 设  $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ , 则:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{1}{|z_2|^2} [(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)] \quad (1.2)$$

用棣莫弗定理更易理解复数除法: 设  $z_1 = r_1e^{i\theta_1}, z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ , 则:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (1.3)$$

- ⑧ 复数乘法:  $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

## §1.2 复数序列

相关概念:

一个复数序列  $\{z_n\}$  完全等价于两个实数序列  $\{x_n\}$  和  $\{y_n\}$

- ① 聚点: 给点复序列  $\{z_n\}$ , 若存在  $z \in \mathbb{C}$ , 使  $\forall \varepsilon > 0$ , 恒有无穷多个  $n$  使得  $|z_n - z| < \varepsilon$  则称  $z$  为序列  $\{z_n\}$  的一个聚点。  
例如序列  $\{(-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}_+\} = \{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \dots, (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}, \dots\}$  有两个聚点 1, -1.
- ② 有界 / 无界序列: 序列  $\{z_n\}$  称为有界的如果  $\exists M > 0$  s.t.  $|z_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}_+$ , 否则称为无界的。
- ③ 极限: 称序列  $\{z_n\}$  收敛于  $z \in \mathbb{C}$  如果  $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$  s.t.  $|z - z_n| < \varepsilon, \forall n > N$ , 记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ , 否则称为发散序列。极限的必要条件是有一聚点, 无界序列不可能收敛

**Theorem. 1 (Bolzano - Weierstrass 定理):** 任意有界序列至少有一个聚点。<sup>①</sup>

**Theorem. 2 (Cauchy 判别法):** 序列收敛的等价条件是:  $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$  s.t.  $|z_{N+p} - z_N| < \varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}_+$ .

<sup>①</sup>Theorem.1 告诉我们有界序列必有聚点, 事实上, 在扩充复数域  $\bar{\mathbb{C}}$  中, 这对无界序列也成立 ( $\infty$  必为聚点), 也即任意序列都必有聚点。

## § 1.3 复变函数

相关概念：

如下：

- ① 点集：复平面内点的集合
- ② 区域：复点集称为区域如果全部由内点组成，且具有连通性<sup>②</sup>
- ③ 单连通 / 多联通区域：区域称为单连通的如果在其内作任何简单闭合围道（自身不相交的闭合曲线），围道内的点都属于该区域，否则称为多联通区域（也称复联通区域）  
例如，图 1.1 中的 (a) 区域就属于单连通区域，而图 1.1 中的 (b) 区域则为多连通区域。区域定义的条件之一就是仅包含内点，因此区域必是开集， $\overline{G} = G \cup \partial G$  表示区域并上边界，称为闭域。
- ④ 边界：区域  $G$  的全体边界点构成其边界，记为  $\partial G$
- ⑤ 边界方向：沿着区域的边界前进，区域恒保持在边界的左侧，则此走向称为边界的正向

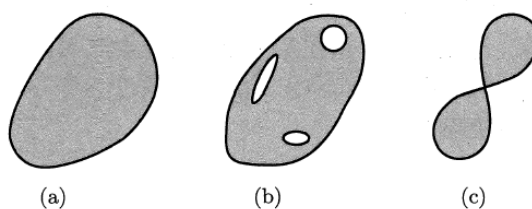


图 1.1: (a) (b) 构成区域，(c) 不构成区域

复变函数：

复变函数  $f$  是复数域子域  $G \subseteq \mathbb{C}$  到复数域的映射，记作  $f: z \mapsto \mathbb{C}$ ，或者  $f(z) = w, z \in G$ 。区域  $G$  称为函数  $f$  的定义域。事实上，复变函数等价于两个实变函数的有序组合。特别地，多值函数允许一个自变量对应多个函数值，我们在第二章会讨论。

## § 1.4 无穷远点

Riemann 球面：

如图 1.2，过扩充的复平面  $\overline{\mathbb{C}}$  中的原点  $(0,0)$  作直径为 1 的球面，使之与  $\overline{\mathbb{C}}$  相切，切点称为南极 S，南极直径另一端称为北极 N。 $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$ ，将它和复数球面的北极 N 相连，连线和球面有且仅有一个交点，因此存在一一对应关系。容易理解，0 对应南极 S 而  $\infty$  对应北极 N。

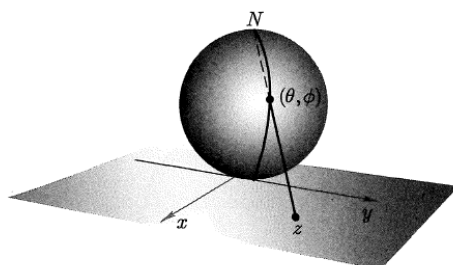


图 1.2: Riemann 球面（复数球面）

<sup>②</sup>连通性：集合中任意两点都可以用一条折线连接起来，且折线上的点全部属于此点集

## § 1.5 复变函数可视化

图 1.3 (a) 是函数  $f(z) = z^2$  的可视化, 图 1.3 (b) 是  $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$  的可视化。其中坐标  $(x, y)$  对应  $z = x + iy$ , 箭头的长度代表  $|f(z)|$ , 方向代表  $\arg f(z)$ 。等高线表示模长相等。

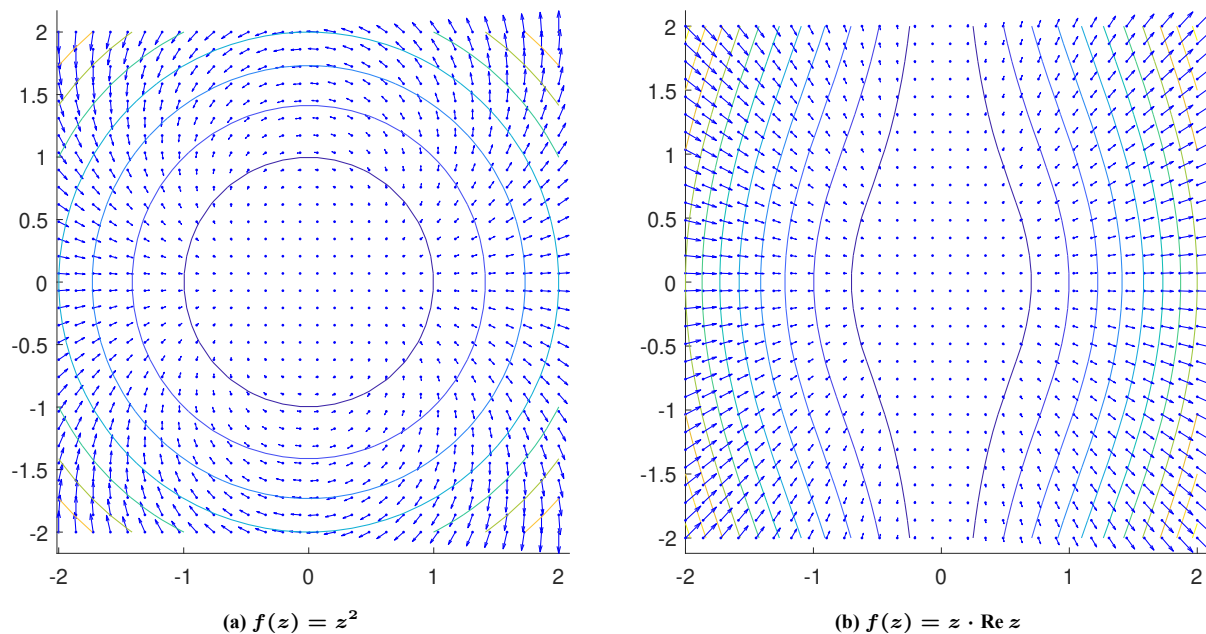


图 1.3: 复变函数可视化

图 1.4 (a) 是  $f(z) = e^{iz}$ , 图 1.4 (b) 是  $f(z) = \cos(z)$ 。

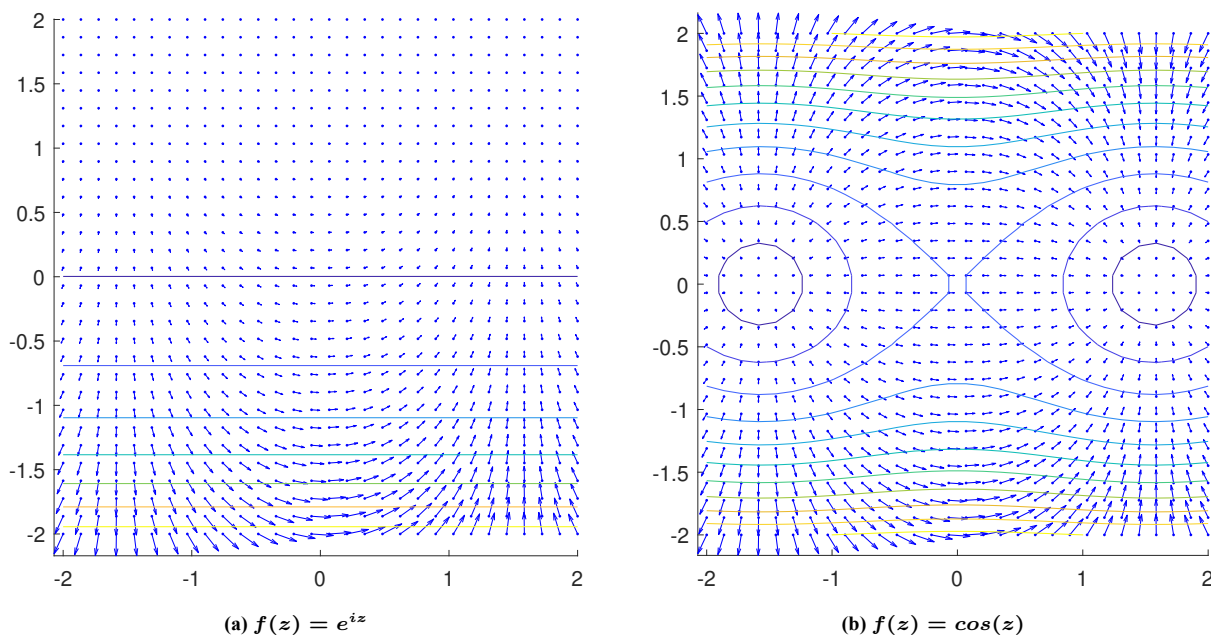


图 1.4: 复变函数可视化



## 第2章 解析函数

### § 2.1 复变函数的极限和连续

极限:

设复变函数  $f(z)$  在  $z_0$  的空心邻域  $U_\delta^\circ(z_0)$  中有定义<sup>①</sup>, 若  $\exists A \in \mathbb{C}$  满足  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  s.t.  $|f(z) - A| < \varepsilon, \forall 0 < |z - z_0| < \delta$ , 则称  $z \rightarrow z_0$  时  $f(z)$  存在极限  $A$ , 记作:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \quad (2.1)$$

并且, 设  $f(z) = u(z) + iv(z)$ ,  $u, v$  是  $\mathbb{C}$  到  $\mathbb{R}$  的函数, 可以证明:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} u(z) + i \lim_{z \rightarrow z_0} v(z) \quad (2.2)$$

连续:

设复变函数  $f(z)$  在  $z_0$  的邻域  $U_\delta(z_0)$  中有定义, 且  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ , 则称  $f(z)$  在  $z_0$  处连续。

在有界必域  $\overline{G}$  中连续的函数  $f(z)$  具有两个重要性质:

- ①  $|f(z)|$  在  $\overline{G}$  中有界, 并且上下界可取到
- ②  $f(x)$  在  $\overline{G}$  中一致连续, 即  $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon, \forall |z_1 - z_2| < \delta$

### § 2.2 可导与可微

单值复变函数  $f(z)$  在  $z_0$  处可导如果  $\lim_{\Delta z} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = C \in \mathbb{R}^{\text{②}}$ , 记为  $f'(z)$ 。

容易证明, 高等数学中的各种求导公式都可以直接搬到复变函数。

Cauchy-Riemann 条件是函数可导的必要条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.3)$$

极坐标中的 C-R 条件:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \quad (2.4)$$

若存在  $A = A(z) \in \mathbb{C}$  s.t.  $\Delta f(z) = A(z) \cdot \Delta z + O(\Delta z)$ , 则称  $f(z)$  在  $z_0$  处可微, 记作  $df = A dz$ , 或  $df = A(dx + i dy)$

注意, 与实变函数不同, 在复变函数中, 可导与可微是完全等价的:

$$f \text{ 可导} \iff f \text{ 可微} \iff u, v \text{ 可导且满足 C-R 条件} \quad (2.5)$$

### § 2.3 解析函数

#### 2.3.1 解析的概念与判定

函数  $f$  称为  $G$  上的解析函数如果  $f$  在区域  $G$  内每一点都可导, 又称为  $f$  在  $G$  上解析。

<sup>①</sup>  $z_0$  的空心邻域是指以  $z_0$  为圆心的环境  $0 < |z - z_0| < \varepsilon$

<sup>②</sup> 这要求  $\Delta z$  以任意方式趋于零, 此极限都存在, 类似二元函数的导数。

可以证明，函数  $f$  在任意一点解析的充要条件是：

$$f \text{ 在点 } z \in \mathbb{C} \text{ 解析} \iff f \text{ 在点 } z \text{ 可微且满足 Cauchy-Riemann 方程} \quad (2.6)$$

在实际的操作中，我们常用下面定理来判断函数的解析性：

### Theorem.3 (解析函数判别法)：

设  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  是区域  $G$  上的单值复变函数，则：

$$u \text{ 和 } v \text{ 在 } G \text{ 上可微，且处处满足 C-R 条件} \iff f \text{ 在 } G \text{ 上可导} \iff f \text{ 在 } G \text{ 内解析} \quad (2.7)$$

$$u \text{ 和 } v \text{ 在 } G \text{ 上有连续一阶偏导，且处处满足 C-R 条件} \implies f \text{ 在 } G \text{ 上可导} \iff f \text{ 在 } G \text{ 内解析} \quad (2.8)$$

对于第一行， $u$  和  $v$  在  $G$  上可微并不能直接得到  $f$  可微，例如  $u = 2x, v = -y$ ，还有加上 C-R 条件才能得到可微。对于第二行， $u$  有一阶连续偏导  $\implies u$  可微（多元实变函数的结论），后面同理

## 2.3.2 已知实虚部求原函数

在  $G$  内解析的函数必满足 Cauchy-Riemann 方程（因为处处可导），因此只要知道实虚部其中之一，例如  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$  的实部  $u(x, y)$ ，就可以唯一地确定其虚部（可加减实常数），这是因为：

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (2.9)$$

$$\implies v(x, y) = \int \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \quad (2.10)$$

为求此原函数，设  $v(x, y) = g_1(x, y) + g_2(y)$ ，则：

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g_1}{\partial x} \implies g_1(x, y) = \int \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \implies g_2(y) = \int \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) dy = \int \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) dy \quad (2.12)$$

最后相加即得  $v(x, y)$ 。

这也就是说，先考虑  $\frac{\partial v}{\partial x}$  对  $x$  的积分，得到  $g_1(x, y)$ ，然后考虑  $\frac{\partial v}{\partial y}$ ，将其含  $x$  的项全部舍弃（因为它们属于  $g_1$ ），再对  $y$  作积分。两积分结果相加即得  $v(x, y)$ 。

特别地，当已知  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  时，欲求  $f(z)$  的表达式（而不是  $f(x, y)$ ），只需直接令表达式  $u + iv$  的  $(x, y) = (z, 0)$ ，也即：

$$f(z) = [u(x, y) + iv(x, y)]_{x=z, y=0} = u(z, 0) + iv(z, 0) \quad (2.13)$$

具体原因我们会在第五章“解析延拓”处讨论。

## 2.3.3 实虚部关系可视化

解析函数实部与虚部之间的这种依赖关系，还可以形象地表现出来。在  $x - y$  平面中，分别作出  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  的等高线图，在任意一点  $(x, y)$ ，由 Cauchy-Reimann 方程，两者方向矢量的内积为零：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.14)$$

因此两者的等高线图处处正交（表现为曲线处处正交）。

例如  $f(z) = z^2$ , 则:

$$f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)i \implies u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy$$

它们的等高线图如图 2.1 所示:

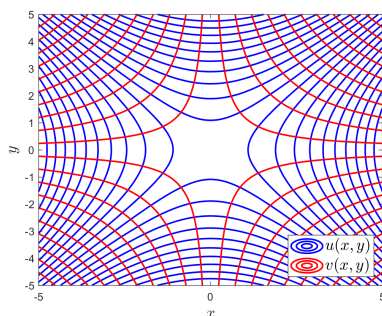


图 2.1: 解析函数  $f(z) = z^2$  实虚部示意图

之后我们会证明, 解析函数  $f$  的实部  $u(x, y)$  和虚部  $v(x, y)$  的二阶偏导一定存在且连续, 并且满足二维 Laplace 方程<sup>③</sup>, 这表明解析函数的实部和虚部构成一对共轭的调和函数<sup>④</sup>。

$$\Delta u = \Delta v = 0 \iff \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (2.15)$$

函数的解析性总是和给点区域联系在一起, 有时也称函数在  $z_0$  点解析, 也即在邻域  $U_\delta(z_0)$  内解析。讨论解析函数的各种特殊性质, 就是复变函数论的中心课题。

## § 2.4 初等函数

一些实初等函数推广到复数域时会有比较的特殊性质, 下面进行讨论。

**幂函数  $z^n$ :**

当  $n \in \mathbb{N}$  时,  $z^n$  在  $\mathbb{C}$  内解析, 并且当  $n \in \mathbb{N}^*$  时,  $z^n$  在  $\infty$  不解析; 当  $n \in -\mathbb{N}^*$  时,  $z^n$  在  $z = 0$  不解析, 在  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$  内解析。

**指数函数  $e^z$ :**

复指数函数在  $\mathbb{C}$  内解析, 但在  $\infty$  无意义, 因为极限  $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$  不存在

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \quad (2.16)$$

**三角函数  $\sin z, \cos z, \dots$ :**

复三角函数是用复指数函数定义的, 如下:

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = \frac{1}{2i} \cdot \left[ \left( e^y - \frac{1}{e^y} \right) \cos x + i \left( e^y + \frac{1}{e^y} \right) \sin x \right] \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = \frac{1}{2} \cdot \left[ \left( e^y + \frac{1}{e^y} \right) \cos x - i \left( e^y - \frac{1}{e^y} \right) \sin x \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

$\sin z, \cos z$  在  $\mathbb{C}$  内解析, 唯一奇点是  $z = \infty$ 。可以证明, 实三角函数的各种恒等式对复三角函数仍成立 (包括和差化积、万能公式等)。

<sup>③</sup>这样的函数  $f$  称为调和函数

<sup>④</sup>共轭是因为满足 Cauchy-Riemann 方程

双曲函数  $\sinh z, \cosh z, \dots$ :

双曲函数也是通过复指数函数来定义的, 如下

$$\begin{aligned} \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y = \frac{1}{2} \cdot \left[ \left( \frac{1}{e^x} - e^x \right) \cos y + \left( \frac{1}{e^x} + e^x \right) \sin y \right] \\ \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y = \frac{1}{2} \cdot \left[ \left( \frac{1}{e^x} + e^x \right) \cos y + \left( \frac{1}{e^x} - e^x \right) \sin y \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{cosh} z = \frac{1}{\sinh z}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} \quad (2.19)$$

由定义可知, 双曲函数和三角函数能够互化:

$$\sinh z = -i \sin iz, \quad \cosh z = \cos iz, \quad \tanh z = -i \tan iz. \quad (2.20)$$

通过上面的式子, 我们也能很容易知道, 在复数域上, 三角函数不再是有界的函数了。另外注意导数公式:

$$(\sinh z)' = \cosh z, \quad (\cosh z)' = \sinh z, \quad (\tanh z)' = \operatorname{sech}^2 z \quad (2.21)$$

其它结论:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad 1 - \tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z \quad (2.22)$$

$$\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2 \quad (2.23)$$

$$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2 \quad (2.24)$$

## § 2.5 解析函数的保角性 (略)

## § 2.6 多值函数

### 2.6.1 基本概念

多值函数的概念:

$f$  称为区域  $G \subseteq \mathbb{C}$  上的多值函数如果  $\forall z \in G$  存在多个  $w \in \mathbb{C}$  使得  $f(z) = w_1 = w_2 = \dots$ 。许多函数的逆运算都是多值函数。

宗量、分支点:

考虑  $z - a$  的开方  $w = \sqrt{z - a}$ , 设  $w = \rho_1 e^{i\alpha}$  而  $z - a = \rho_2 e^{i\theta}$ , 代入解得:

$$w = \sqrt{|z - a|} e^{i\frac{\theta}{2} + n\pi}, \quad n \in \mathbb{Z} \iff |w| = \sqrt{|z - a|}, \quad \arg w = \frac{1}{2} \arg(z - a) \quad (2.25)$$

$\omega$  的多值性来源于  $z - a$  幅角的多样性, 我们把这样的量称为宗量<sup>⑤</sup> (而不是自变量)。

为了进一步揭示多值函数  $w = \sqrt{z - a}$  的性质, 我们讨论“还原”与“不还原”。在  $z$  复平面上依次画两个圆, 如图 2.2 左侧, 第一个圆在点  $a$  外, 第二个圆包含了点  $a$ 。

对第一种情况,  $z$  沿路径  $C_1$  逆时针旋转一圈后, 由于  $a$  在圆外, 因此旋转前后的  $\arg(z - a)$  不变,  $\arg w = \frac{1}{2} \arg(z - a)$  也不变, 从而使得旋转前后  $w$  也不变, 称为  $w$  值“还原”。对第二种情况,  $z$  沿路径  $C_2$  逆时针旋转一圈后, 由于  $a$  在圆内,  $\arg(z - a)$  增加了  $2\pi$  但  $\arg w = \frac{1}{2} \arg(z - a)$  使得  $\arg w$  仅增加  $\pi$ , 从而使得旋转前后  $w$  未回到原点, 称为  $w$  值“不还原”。

<sup>⑤</sup>宗量通常不同于自变量。例如, 多值函数  $\sqrt{z - a}$  的宗量就是  $z - a$ , 多值函数  $\sqrt[3]{(z - a)(z - b)}$  的宗量就是  $(z - a)(z - b)$ 。当然, 也有宗量就是自变量的情形。例如多值函数  $\sqrt{z}$  的宗量就是自变量  $z$ 。

因此, 点  $a$  对多值函数  $w = \sqrt{z-a}$  有特殊意义, 它是否位于简单闭合路径内就决定了当  $z$  沿这个路径行进一周回到原处时, 相应的  $w$  值是否能还原。对于无法还原的点, 我们称为**分支点**<sup>⑥</sup>。也即, 如果  $\exists r > 0$ , 当  $z$  沿圆周  $|z - z_0| = r$  绕一圈回到原处时,  $w$  不还原, 且当  $r \mapsto 0$  时,  $w$  始终不还原, 这样的点  $z_0$  就称为多值函数  $w(z)$  的分支点。

例如,  $z = a, \infty$  是  $f(z) = \sqrt{z-a}$  的分支点,  $z = a, b, c, \infty$  是  $f(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$  的分支点,  $z = 0, \infty$  是  $f(z) = \text{Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg } z$  的分支点。

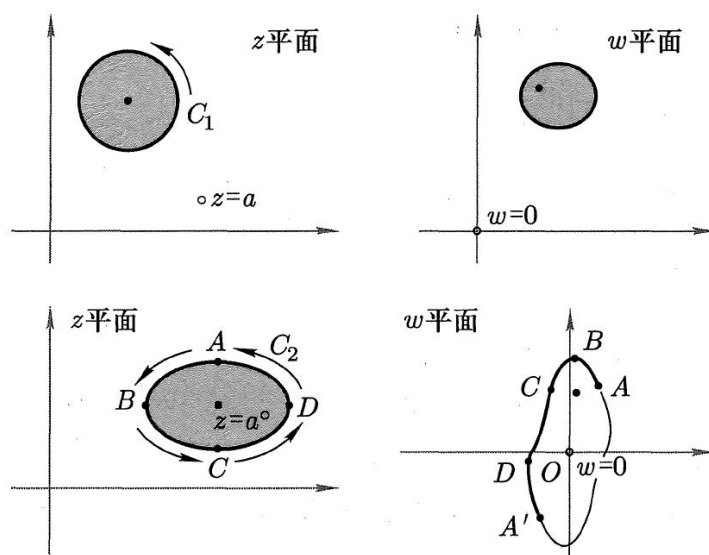


图 2.2:  $z$  沿闭合曲线一周回到原处时,  $w = \sqrt{z-a}$  值的不同变化

## 2.6.2 “有理”函数的分支点

“有理”函数  $f(z)$ :

$$f(z) = \sqrt[k]{\frac{(z-z_{i1})^{r1}(z-z_{i2})^{r2} \cdots (z-z_{im})^{r_m}}{(z-z_{j1})^{s1}(z-z_{j2})^{s2} \cdots (z-z_{jn})^{s_n}}} \quad (2.26)$$

- (1) 对  $a$ : 若因式  $(z-a)^b$  的幂指数  $b$  不能被根指数  $k$  整除, 即  $b \not\equiv 0 \pmod{k}$ , 则  $a$  为分支点, 否则不是分支点。
- (2) 对  $\infty$ : 若  $(\sum r_i - \sum s_i) \not\equiv 0 \pmod{k}$ , 则  $\infty$  为分支点, 否则不是分支点。

## 2.6.3 单值分支

为了得到多值函数的单值分支, 我们可以限制宗量的幅角范围 (常通过“割线”来实现)。这样, 宗量幅角范围的各个周期, 给出多值函数的各个单值分支。另一种自然的方法是规定初始值和连续变化路线 (移动路线)。

## 2.6.4 常见多值函数

最常见的多值函数是开根, 在实际做题中, 如果遇到开根  $\sqrt[n]{z}$ , 便是默认取  $z \in [0, 2\pi]$  的单值分支。这里之所以取闭区间, 是因为  $2\pi$  可以取到, 并且其值与 0 不同。特别地, 令  $z = x + iy = re^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , 则

<sup>⑥</sup>分支点描述的是函数的多值性质, 与函数的解析性无关

$\sqrt{z}$  可以写为:

$$\sqrt{z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \text{sgn}(\pi - \theta) \sqrt{|z| + x} + i \sqrt{|z| - x} \right) \quad (2.27)$$

对数函数和幂函数也是一种常见的多值函数:

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad \text{Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg } z \quad (2.28)$$

包括幂函数<sup>⑦</sup>、三角函数在内的很多常见的多值函数都可以通过  $\text{Ln } z$  和根号来定义:

$$\text{Arcsin } z = \frac{1}{i} \text{Ln} (iz + \sqrt{1 - z^2}), \quad \text{Arccos } z = \frac{1}{i} \text{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1}) \quad (2.29)$$

$$\text{Arctan } z = \frac{1}{2i} \text{Ln} \left( \frac{1 + iz}{1 - iz} \right), \quad z^\alpha = e^{\alpha \text{Ln } z} = |z|^\alpha \cdot e^{i(\alpha \text{Arg } z)}, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (2.30)$$

## § 2.7 部分复变函数可视化

图 2.3 是  $f(z) = e^z$  与  $f(z) = \cos(z)$  的可视化, 图 2.4<sup>⑧</sup> 是多值函数  $f(z) = \sqrt{z}$  和  $f(z) = \text{Ln } z$  的单值分支的可视化, 图中等高线表示模长相等。

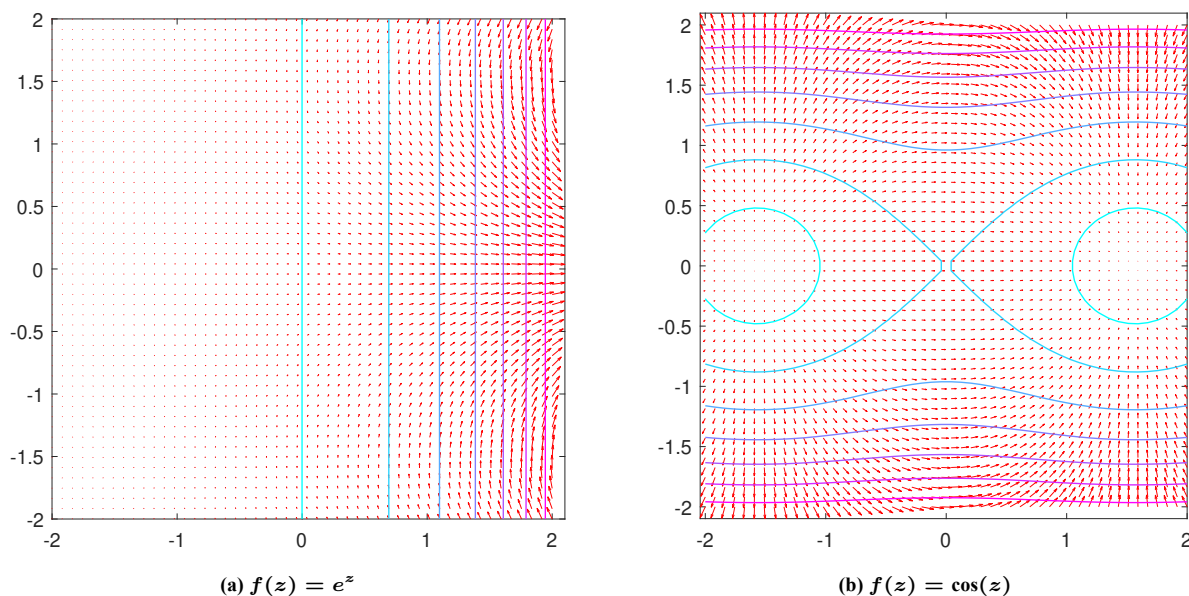


图 2.3: 单值复变函数可视化

<sup>⑦</sup>在后文, 除非特殊说明, 都默认  $z^\alpha$  是取  $z \in [0, 2\pi]$  时的单值分支, 即  $z^\alpha|_{z=1} = 1$

<sup>⑧</sup>图 2.3 和图 2.4 源码见附录 B.1

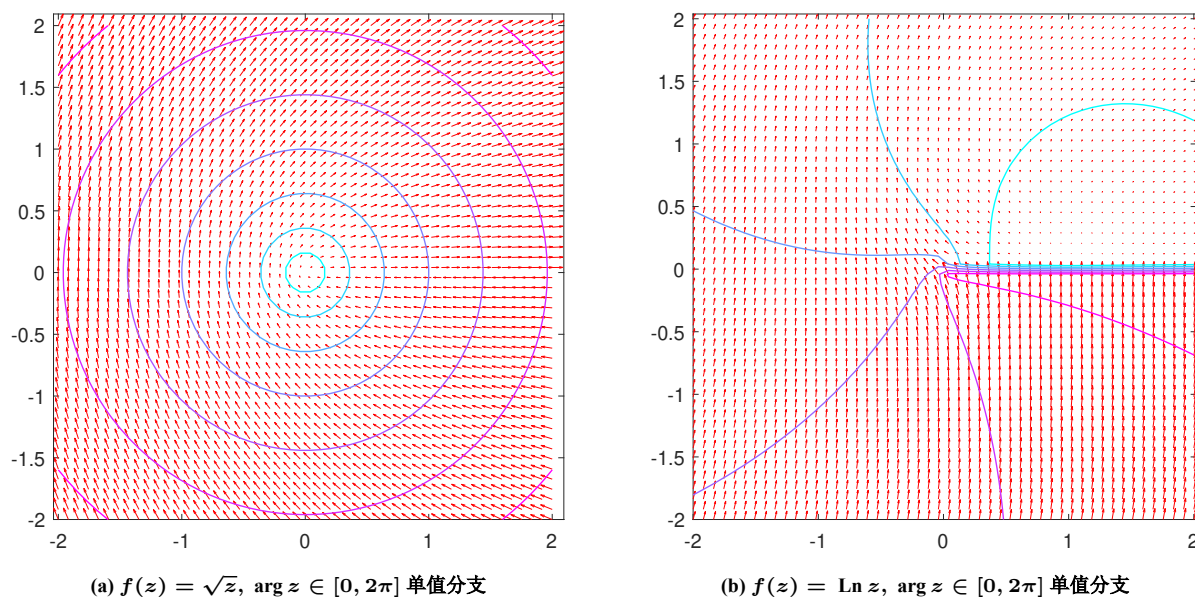


图 2.4: 多值复变函数可视化

## § 2.8 常见函数总结

三角函数及其反函数:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \quad (2.31)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \quad (2.32)$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i \cdot \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} \quad (2.33)$$

$$\arcsin z = -i \cdot \ln \left( iz + \sqrt{1 - z^2} \right) \quad (2.34)$$

$$\arccos z = -i \cdot \ln \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \quad (2.35)$$

$$\arctan z = -\frac{i}{2} \ln \left( \frac{1 + iz}{1 - iz} \right) \quad (2.36)$$

双曲函数及其反函数:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y \quad (2.37)$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \quad (2.38)$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} \quad (2.39)$$

$$\operatorname{arcsinh} z = \ln \left( z + \sqrt{z^2 + 1} \right) \quad (2.40)$$

$$\operatorname{arccosh} z = \ln \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \quad (2.41)$$

$$\operatorname{arctanh} z = \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{1 + z}{1 - z} \right) \quad (2.42)$$



## 第3章 复变积分

### §3.1 复变积分的概念

复变积分是  $\mathbb{C}$  上的线积分，沿某条路径，由点 A 至点 B 的复变积分定义为：

$$I = \lim_{\max |\Delta z_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta z_i = \int_{C_{AB}} f(z) dz \quad (3.1)$$

如果路径是闭合的，也常称为积分围道。一个复变积分实际上是两个实变线积分的线性组合，因此，若  $C$  是分段光滑曲线，且  $f(z)$  在路径  $C$  上连续，则复变积分一定存在。

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy) \quad (3.2)$$

### §3.2 Cauchy 定理

#### 3.2.1 Cauchy-Goursat 定理

**Theorem. 4 (Cauchy 定理<sup>①</sup>):**

若  $f(z)$  在有界开域  $G$  上单值解析，在  $\partial G$  上连续<sup>②</sup>，则：

$$\oint_{\partial G} f(z) dz = 0 \quad (3.3)$$

对单连通区域， $\partial G$  即为外围边界线（沿逆时针）；对多连通区域，外围边界线沿逆时针积分，内部边界线沿顺时针积分<sup>③</sup>。

#### 3.2.2 Cauchy 定理的推广

**Theorem. 5 (Cauchy 定理推广 1):**

连续函数  $f$  在有界复连通区域  $G$  上单值解析，则：

$$\oint_{C_0} f(z) dz = \sum_{i=1}^{i=n} \oint_{C_i^{(-)}} f(z) dz \quad (3.4)$$

路径上的负号表示路径沿反相，在这里即沿逆时针。也就是所有路径（包括  $C_0$ ）都沿逆时针。

**Theorem. 6 (Cauchy 定理推广 2):**

连续函数  $f$  在有界单连通区域  $G$  上单值解析，则：

$$\oint_C f(z) dz, C \subset G \text{ 与路径无关, 也即 } f(z) \text{ 存在原函数} \quad (3.5)$$

**Theorem. 7 (Cauchy 定理推广 3):**

$C$  为  $G$  的边界，任取简单闭合曲线  $C' \subset G$ ，若连续函数  $f(z)$  在构成的新有界复连通区域上解析，则：

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C'} f(z) dz \quad (3.6)$$

<sup>①</sup>也称 Cauchy-Goursat 定理

<sup>②</sup>有的教材称上述两个条件是“在闭域  $\bar{G}$  中解析”，详见附录 A.2.2

<sup>③</sup>始终保持区域在自身左侧的走向称为正向。



### 3.2.3 Cauchy 定理推论

#### Theorem.8 (Morera 定理):

设  $f$  在闭域  $\overline{G}$  中连续, 且对  $G$  中任意闭合围道  $C$ , 都有  $\oint_C f(z)dz = 0$ , 则  $f$  在  $G$  中解析. 结合 Cauchy 定理的正表述, 也即:

$$f(z) \text{ 在 } \overline{G} \text{ 内解析} \iff \oint_C f(z)dz = 0, \forall C \subset \overline{G} \iff \text{积分} \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz \text{ 与路径无关}, z_1, z_2 \in \overline{G} \quad (3.7)$$

Morera 定理可以理解为 Cauchy 定理的逆定理, 用于判别函数在某区域上的解析性。

**Theorem.9 (最大模原理):** 设  $f(z)$  在  $\overline{G}$  中解析, 则模  $|f(z)|$  的最大值一定在边界  $\partial G$  上。

#### Theorem.10 (Cauchy 不等式):

设函数  $f$  在  $\overline{G}$  中解析, 则有不等式:

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi d^{n+1}} \cdot Ml, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8)$$

其中  $M = \sup\{|f(z)|, z \in \partial G\}$  是  $|f(z)|$  在边界取值的上界,  $l = \int_{\partial G} ds$  是边界  $\partial G$  的长度,  $d = \inf\{\rho(z, \partial G)\}$  是  $z$  点到边界  $\partial G$  的距离 (距离即为下界)。事实上, 由于  $\overline{G}$  是闭域, 这里的上界、下界均可取到, 因此分别是最大值、最小值。

特别地, 当边界是以  $z$  为圆心,  $R$  为半径的圆时, 不等式变为:

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!M}{R^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

**Theorem.11 (Liouville 定理):** 若  $f(z)$  在全平面上解析, 且  $\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| < \infty$ , 则  $f(z)$  是常数函数。

#### Theorem.12 (均值定理):

设  $f(z)$  在  $\overline{G}$  内解析, 则  $f$  在  $G$  内任意一点  $z_0$  的函数值是它在圆周上取值的算术平均:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta})d\theta \quad (3.10)$$

其中  $R$  是以  $z_0$  为圆心, 位于  $\overline{G}$  内的任一圆周的半径。注意积分前的系数是  $\frac{1}{2\pi}$  而不是  $\frac{1}{2\pi i}$ 。

## §3.3 圆弧定理

#### Theorem.13 (小圆弧定理):

若  $f(z)$  在  $a$  的空心邻域  $U_\delta^\circ(a)$  上连续, 且在  $\arg(z - a) \in [\theta_1, \theta_2]$  时,  $(z - a)f(z)$  一致收敛于  $k$  ( $|z - a| \rightarrow 0$ ), 则:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} f(z)dz = ik(\theta_2 - \theta_1) \quad (3.11)$$

其中  $C_\delta$  是以  $a$  为圆心,  $\delta$  为半径, 张角为  $\theta_2 - \theta_1$  的小圆弧。

#### Theorem.14 (大圆弧定理):

若  $f(z)$  在  $\infty$  的空心邻域  $U_\delta^\circ(\infty)$  上连续, 且在  $\arg(z - a) \in [\theta_1, \theta_2]$  时,  $(z - a)f(z)$  一致收敛于  $k$  ( $|z - a| \rightarrow \infty$ ), 则:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)dz = ik(\theta_2 - \theta_1) \quad (3.12)$$

其中  $C_R$  是以  $a$  为圆心,  $R$  为半径, 张角为  $\theta_2 - \theta_1$  的大圆弧。

## §3.4 Cauchy 积分公式

### Theorem. 15 (Cauchy 积分公式):

若  $f(z)$  在  $\overline{G}$  中解析<sup>④</sup>, 则  $f(z)$  在  $G$  上有任意阶导数, 且它们都是  $\overline{G}$  上的解析函数。

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad \forall z \in G \quad (3.13)$$

特别地, 当  $n = 0$  时, 得到 Cauchy 积分公式<sup>⑤</sup>:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta, \quad \forall z \in G \quad (3.14)$$

闭域  $\overline{G}$  可以是复联通区域, 积分路径仍沿正向, 即内部顺时针, 最外围逆时针。

### Theorem. 16 (Cauchy 定理的推广):

在计算回路积分时, Theorem. 15 使用起来不太方便, 由小圆弧定理和 Cauchy 定理, 我们可以证明下面命题, 方便我们使用。

若  $f(z)$  在  $\overline{G}$  上有唯一奇点  $z = a$ , 且  $(z - a)^n f(z)$  在  $\overline{G}$  上解析, 则:

$$I = \oint_{\partial G} f(z) dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{(n-1)!} [(z-a)^n f(z)]_{z=a}^{(n-1)} \quad (3.15)$$

特别地, 当  $n = 1$  时, 得到 Cauchy 积分公式。当  $n = 1$  时,  $z = a$  可能是可去奇点, 此时  $z = a$  是指  $\lim_{z \rightarrow a}$ 。

### Theorem. 17 (无界区域上的 Cauchy 积分公式):

若  $f(z)$  在  $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$  中解析, 则  $f(z)$  在  $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$  上有任意阶导数, 且它们都是  $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$  上的解析函数。

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

## §3.5 Cauchy 型积分与含参量积分的解析性

### Theorem. 18 (Cauchy 型积分):

设函数  $\phi$  在分段光滑曲线  $L \in \mathbb{C}$  上连续 ( $L$  可闭合或不闭合), 则下面函数在  $\mathbb{C} \setminus L$  上解析, 在全平面上连续:

$$f(z) = \begin{cases} \phi(z) & , z \in L \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta & , z \in \mathbb{C} \setminus L \end{cases} \quad (3.17)$$

且它在  $\mathbb{C} \setminus L$  上的导数可由 Cauchy 积分公式得到:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus L, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.18)$$

### Theorem. 19 (含参量积分的解析性):

设含参函数  $f = f(t, z)$  分别对  $t \in L$  和  $z \in \overline{G}$  连续<sup>⑥</sup> (对两个变量都连续), 其中  $\overline{G}$  是有界闭域。且  $\forall t \in L$ ,  $f(t, z)$  是  $\overline{G}$  上的单值解析函数, 则函数  $F(z) = \int_L f(t, z) dt$  在  $G$  内解析, 且  $F'(z) = \int_L \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} dt$ 。

<sup>④</sup>解析域一定是开集, 为什么这里会说在闭域上解析? 详见附录 A.2.2

<sup>⑤</sup>事实上是由  $n = 0$  和归纳法证明的  $n$  阶导数 Cauchy 积分公式

<sup>⑥</sup>这与在  $L \times \overline{G}$  上连续不同。

### §3.6 Poisson 公式

Cauchy 积分公式告诉我们, 对于在  $\overline{G}$  上解析的函数  $f(z)$ , 函数在  $\overline{G}$  内任意一条曲线上的值 (可以是边界  $\partial G$ ) 就完全唯一地决定了  $f$  在  $G$  内任意一点的值. 特别地, 当  $G = \mathbb{C}$  时, 若已知  $f$  在  $\mathbb{C}$  内任意一条 (分段光滑) 曲线  $L$  上的值, 都可求出  $f$  在全平面的值.

#### Theorem. 20 (上半平面 Poisson 公式):

如果  $f(z)$  在上半平面解析, 且  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ , 则可依据它 (或者它的实部或虚部) 在实轴上的值, 求出它在整个上半平面的值:

$$\begin{aligned} \text{已知 } f(z), z \in \mathbb{R}: \quad f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\xi - x)f(\xi)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ \text{已知 } u \text{ 或 } v: \quad f(z) &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi, 0)}{\xi - (x + iy)} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(\xi, 0)}{\xi - (x + iy)} d\xi, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ u(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yu(\xi, 0)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\xi - x)v(\xi, 0)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ v(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\xi - x)u(\xi, 0)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yv(\xi, 0)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.19)$$

#### Theorem. 21 (圆内 Poisson 公式):

取  $G$  为半径是  $a$  的圆, 可以得到圆内 Poisson 公式:

$$f(r, \phi) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(ae^{i\theta})}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\phi - \theta)} d\theta, \quad \forall r \leq a, \phi \in [0, 2\pi) \quad (3.20)$$

$$u(r, \phi) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(a, \theta)}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\phi - \theta)} d\theta, \quad \forall r \leq a, \phi \in [0, 2\pi) \quad (3.21)$$

$$v(r, \phi) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{v(a, \theta)}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\phi - \theta)} d\theta, \quad \forall r \leq a, \phi \in [0, 2\pi) \quad (3.22)$$

## 第4章 无穷级数

### §4.1 复变函数项级数

#### 4.1.1 复数项级数

收敛:

复数级数  $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  称为收敛的如果它的部分和  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$  是收敛的, 否则称其发散。特别地, 由于  $\sum u_n = \sum a_n + i \sum b_n$  (不涉及交换求和次序), 因此, 一个复数级数完全等价于两个实数级数的有序组合。收敛的级数满足加法结合律, 即可以任意添加括号 (但不能随意去掉括号)

**Theorem. 22 (Cauchy 判别法):**

级数  $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛的等价条件是:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \text{ s.t. } \forall n > m > N, |S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n u_k \right| < \varepsilon \quad (4.1)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \text{ s.t. } \forall n > N, p \in N^*, |S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon \quad (4.2)$$

绝对收敛:

复数级数  $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  称为绝对收敛的如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛。绝对收敛  $\implies$  收敛, 反之不然。

绝对收敛的级数具有下列性质:

- (1) 结合律: 可以任意加括号 (只要收敛即可), 组成新的求和项
- (2) 交换律: 可以任意改换求和次序
- (3) 子级数收敛: 把绝对收敛级数拆成多个子级数, 每个子级数仍然收敛
- (4) 积收敛: 两个绝对收敛级数之积 (是一个二重级数) 仍然绝对收敛

#### 4.1.2 实变级数的判别法

复变级数的收敛性等价于实虚部对应两个实变级数的收敛性, 考察一个复变函数的 (绝对) 收敛性时, 常常会转化为实变级数的收敛性, 因此重新温习实变级数判别法是十分必要的。本小节中所有数列均为实变数列。

实变数列可以分为正项级数和交错级数 (一般级数)。正项级数有三种最常见的判别方法: 比较判别法、比式判别法 (d'Alembert 判别法) 和根式判别法 (Cauchy 根值判别法)。

**Theorem. 23 (比较判别法):**

比较判别法有常规形式、极限形式和上下极限形式, 这里只介绍极限形式。后续的几种判别法也只给出极限形式。

设正项数列  $v_n$  和  $u_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho \in \overline{\mathbb{R}}$ 。若  $\rho \in (0, +\infty)$ , 则  $\sum u_n$  与  $\sum v_n$  同敛散; 若  $\rho = 0$  且  $\sum v_n$  收敛, 则  $\sum u_n$  收敛; 若  $\rho = +\infty$  且  $\sum v_n$  发散, 则  $\sum u_n$  发散。

**Theorem. 24 (比式判别法):** 设正项级数  $\sum u_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$ 。若  $\rho \in [0, 1)$  则  $\sum u_n$  收敛; 若  $\rho > 1$  则  $\sum u_n$  发散;  $\rho = 1$  时无法判断。

**Theorem. 25 (根式判别法<sup>①</sup>):** 设正项级数  $u_n$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ 。若  $\rho \in [0, 1)$  则  $\sum u_n$  收敛; 若  $\rho > 1$  则  $\sum u_n$  发散;  $\rho = 1$  时无法判断。

交错级数有三种常见的判别方法: Leibniz 判别法、Abel 判别法和 Dirichlet 判别法, 其中 Abel 判别法最常用 (尽管 Dirichlet 的适用范围比它广)。

**Theorem. 26 (交错级数的 Leibniz 判别法):**

设正项数列  $a_n$  构成交错级数  $\sum (-1)^{n-1} a_n$ , 若  $a_n$  严格单调递减且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 则:

$$\text{级数 } S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \in [0, a_1] \subset \mathbb{R} \text{ 收敛, 且 } 0 \leq (-1)^n (S - S_n) \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (4.3)$$

后面的不等式给出了  $S$  与  $S_n$  之间的误差估计。

**Theorem. 27 (一般级数的 Abel 判别法):**

设有界数列  $\{v_n\}$  从某项开始单调, 且  $\sum u_n$  收敛, 则级数  $\sum u_n v_n$  收敛。用公式表示为:

$$\begin{cases} \sup_n |v_n| < \infty, v_n \text{ 单调} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = S_u \in \mathbb{R} \end{cases} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k v_k \in \mathbb{R} \quad (4.4)$$

**Theorem. 28 (一般级数的 Dirichlet 判别法):**

设极限为 0 的数列  $\{v_n\}$  从某项开始单调, 且  $\sum u_n$  有界, 则级数  $\sum u_n v_n$  收敛。用公式表示为:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0, v_n \text{ 单调} \\ \sup_n \left| \sum_{k=1}^n u_k \right| < \infty \end{cases} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k v_k \in \mathbb{R} \quad (4.5)$$

另外, 还有一些其他的定理, 如下:

**Theorem. 29 (正项级数的 Raabe 判别法):**

**Theorem. 30 (正项级数的 Bertrand 判别法):**

**Theorem. 31 (正项级数的 Gauss 判别法):**

**Theorem. 32 (特殊级数的 Kronecker 定理):**

设极限为 0 的正项数列  $v_n$  从某项开始严格单调递增, 且  $\sum u_n$  收敛, 则极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n} \sum_{k=1}^n u_k v_k$  收

<sup>①</sup>相比于比式判别法, 根式判别法的适用范围更广。这是因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = A \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} = A$ , 因此, 比式可以使用的场合, 根式一定可以使用。

敛。用公式表示为：

$$\begin{cases} v_n > 0, v_n \uparrow, \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0 \\ \sup_n \left| \sum_{k=1}^n u_k \right| < \infty \end{cases} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{v_n} \sum_{k=1}^n u_k v_k \in \mathbb{R} \quad (4.6)$$

**Theorem.33 (实变级数与反常积分的收敛关系):**

若非负函数  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上单调 (递减), 则:

$$\text{级数 } \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ 与反常积分 } \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ 同敛散} \quad (4.7)$$

### 4.1.3 复变级数的判别法

判断复数级数是否绝对收敛, 由于取模后皆为正实数, 因此与正项级数的收敛判别完全等价, 常见的方法有比较判别法、比式判别法、根式判别法和 Gauss 判别法。只用于判断绝对收敛性的判别法等价于实变级数判别法, 我们不再重复叙述, 这里只给出其它几种判别法。

**Theorem.34 (Gauss 判别法):** 假设存在  $\zeta \in \mathbb{C}$ ,  $p > 1$  使得序列  $u_n$  满足:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\zeta}{n} + O\left(\frac{1}{n^p}\right), \quad \zeta \in \mathbb{C}, p > 1 \quad (4.8)$$

若  $\operatorname{Re} \zeta > 1$ , 则  $\sum |u_n|$  收敛; 若  $\operatorname{Re} \zeta \leq 1$ , 则  $\sum |u_n|$  发散。

**Theorem.35 (Dirichlet 判别法):** 设级数  $\sum c_n$  有界,  $\sum (z_{n+1} - z_n)$  绝对收敛且  $\lim z_n = 0$ , 则级数  $\sum c_n z_n$  收敛。

**Theorem.36 (Weierstrass 判别法<sup>②</sup>):**

假设存在  $\zeta \in \mathbb{C}$ ,  $p > 1$  使得序列  $u_n$  满足:

$$\frac{z_n}{z_{n+1}} = 1 + \frac{\zeta}{n} + O\left(\frac{1}{n^p}\right), \quad \zeta \in \mathbb{C}, p > 1 \quad (4.9)$$

设  $\zeta = \alpha + i\beta$ , 则:

- (1) 若  $\alpha > 1$ , 则  $\sum z_n$  收敛;
- (2) 若  $\alpha = 1$  且  $\beta \neq 0$ , 则  $\sum z_n$  振荡 (发散的一种)。
- (3) 若  $\alpha \in (0, 1)$ , 则  $\sum z_n$  发散。
- (4) 若  $\alpha \leq 0$  则  $z_n$  不趋于 0, 于是  $\sum z_n$  必发散。

### 4.1.4 复变函数项级数

**收敛与一致收敛:**

复变函数项级数的 (逐点) 收敛、发散与实变函数项级数完全一致, 这里不提。

一致收敛定义为: 若存在函数  $S(z)$  使得复变函数项  $S_n(z)$  满足  $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \text{ s.t. } \forall n > N, z \in G, |S_n(z) - S(z)| < \varepsilon$ , 则称其在  $G$  上一致收敛于  $S(z)$ , 记作  $S_n(z) \rightrightarrows S(z)$ 。

<sup>②</sup>Theorem.34 (Gauss 判别法) 是 Theorem.36 (Weierstrass 判别法) 的特殊情形。

在  $G$  上逐点收敛与在  $G$  上一致收敛的区别如下:

$$\text{逐点收敛: } \forall z \in G, \lim_{n \rightarrow \infty} |S(z) - S_n(z)| = 0 \quad (4.10)$$

$$\text{一致收敛: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in G} |S(z) - S_n(z)| = 0 \quad (4.11)$$

**一致收敛的性质:**

一致收敛函数列具有很好的性质 (只需内闭一致收敛即可):

(1) 极限换序定理: 设  $f_n(z)$  在  $z_0$  的空心邻域  $U_\delta^\circ(z_0)$  上内闭一致收敛, 则有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{z \rightarrow z_0} f_n(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) \quad (4.12)$$

(2) 极限微分换序 I: 设  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(z)$  是单值解析函数, 且  $f_n$  在  $G$  上一致收敛, 则:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{d}{dz} f_n(z) \right) = \frac{d}{dz} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) \right) \quad (4.13)$$

(3) 极限微分换序 II: 设函数列  $\{f_n(z)\}$  在  $G$  上单值解析, 且  $f'_n$  在  $G$  上内闭一致收敛, 则  $f_n(z)$  在  $G$  上内闭一致收敛, 且:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{d}{dz} f_n(z) \right) = \frac{d}{dz} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) \right) \quad (4.14)$$

(4) 极限积分换序:

若函数列  $\{f_n\}$  在  $G$  上内闭一致收敛, 则:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_L f_n(z) dz = \int_L \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz \quad (4.15)$$

将极限换序定理运用到级数上, 即得到逐项求极限; 将极限微分换序 I、II 运用到级数上, 即得到逐项微分; 将极限积分换序运用到级数上, 即得到逐项积分。

## § 4.2 二重级数

二重级数, 指的是排列成下面形式的方阵:

$$\begin{aligned} & a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + \cdots + a_{1n} + \cdots \\ & + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + \cdots + a_{2n} + \cdots \\ & + \cdots \\ & + a_{m1} + a_{m2} + a_{m3} + a_{m4} + \cdots + a_{mn} + \cdots \\ & + \cdots \end{aligned} \quad (4.16)$$

方阵的右端和下端都是无限的, 记  $S_{mn}$  为  $m \times n$  方阵的和, 称为部分和序列, 并定义二重级数收敛的条件:

$$S_{mn} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq l \leq n}} a_{kl}, \quad S = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} S_{mn} \quad (4.17)$$

上式中并没有规定求和顺序, 常见的求和顺序有次对角线求和、累次求和 (先行后列或先列后行)。需要注意, 即使二重级数收敛, 某些行或列的和也不一定存在, 因此累次求和的结果也不一定存在。二重积分的和是否依赖于求和方式, 原则上与级数是否绝对收敛有关, 若绝对收敛, 则所有求和方式结果相同。

## § 4.3 幂级数

幂级数是指通项为幂函数的函数项级数，即：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (4.18)$$

**Theorem. 37 (Abel 第一定理):**

若级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$  在点  $z_0$  收敛，则其在圆  $|z-a| < |z_0-a|$  内绝对收敛且内闭一致收敛<sup>③</sup>。圆内区域称为幂级数的收敛圆，收敛圆的半径称为收敛半径。

推论：若级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$  在点  $z_0$  发散，则在圆外（即  $|z-a| > |z_0-a|$ ）处处发散。

求幂级数的收敛半径有两个常用方法：

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \quad (4.19)$$

前者称为 Cauchy-Hadamard 公式，是普遍成立的，后者称为 d'Alembert 公式，在极限存在时成立，但计算通常更简单。

**Theorem. 38 (Abel 第二定理):**

设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$  在收敛圆内收敛到  $f(z)$ ，且在收敛圆周上某点  $z_0$  也收敛，和为  $S(z_0)$  则当由收敛圆内趋于  $z_0$  时，只要保持在以  $z_0$  为顶点、张角为  $2\phi < \pi$  的范围内（见图 4.1）， $f(z)$  就一定趋于  $S(z_0)$ ，也即：

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ 2\phi < \pi}} f(z) = S(z_0) \quad (4.20)$$

## § 4.4 含参量反常积分的解析性

**Theorem. 39 (含参量反常积分的解析性):**

设含参函数  $f = f(t, z)$  满足：

(1)  $f(t, z)$  分别对  $t \in [a, \infty) \subset \mathbb{R}$  和  $z \in \overline{G} \subseteq \mathbb{C}$  连续<sup>④</sup>

(2)  $\forall t \in [a, \infty)$ ,  $f(t, z)$  在  $\overline{G}$  上单值解析

(3)  $F(z) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t, z) dt$  在  $\overline{G}$  上一致收敛，即  $h(b, z) = \int_a^b f(t, z) dt$  满足  $\lim_{b \rightarrow \infty} \sup_z h(b, z) \in \mathbb{C} < \infty$

则反常积分  $F(z) = \int_a^{+\infty} f(t, z) dt$  在  $G$  内解析，且：

$$F'(z) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} dt \quad (4.21)$$

## § 4.5 发散级数与渐近级数（略）

<sup>③</sup>在圆上的收敛性未知，需要依据级数来具体判断。

<sup>④</sup>这与在  $[a, \infty) \times \overline{G}$  上连续不同。



## 第5章 解析函数的局域性展开

### §5.1 解析函数的 Talor 展开

**Theorem. 40 (Talor Expansion):**

设  $G = \{z \mid |z - z_0| < r\}$  是以  $z_0$  为圆心的圆盘开域, 若  $f$  在  $\overline{G}$  上解析, 则  $f$  可在  $z_0 \in G$  点展开为:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in G \quad (5.1)$$

$$a_n = a_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (5.2)$$

一个解析函数在给定点有唯一的 Talor 展开式, 即展开系数是唯一确定的。

由于公式的形式与实变函数中完全相同, 因此可以将实变函数的结果直接搬到复变函数中。求函数的 Talor 级数时, 除了直接搬用, 还可以利用级数乘法和待定系数法<sup>①</sup>。

### §5.2 解析函数的零点

设  $f(z)$  在  $z_0$  的邻域内解析, 且不恒为 0, 若  $f(z_0) = 0$ , 则称  $z = z_0$  为  $f$  的零点。由于  $f$  的解析性, 考虑 Talor 展开  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ , 则  $f(z_0) = a_0 = 0$ , 因此  $z_0$  为  $f$  的零点等价于  $a_0 = 0$ 。由此引出  $m$  阶零点的定义:  $z = z_0$  称为  $f$  的  $m$  阶零点如果

$$f^{(0)}(z_0) = f^{(1)}(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0 \quad (5.3)$$

$$\iff a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0, \quad a_m \neq 0 \quad (5.4)$$

**Theorem. 41 (解析函数的零点孤立性):**

若  $z = z_0$  是  $f$  的零点, 且  $f$  在  $z_0$  的邻域内不恒为零, 则一定存在  $z_0$  的空心邻域  $U_\delta(z_0)$ , 使  $f$  在  $U_\delta(z_0)$  内没有零点。

下面是零点孤立性的几条推论:

- (1) 设  $f(z)$  在  $G = \{z \mid |z - a| < r\}$  内解析。若在  $G$  内存在  $f(z)$  的无穷多个互不相等的零点  $\{z_n\}$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$  但  $z_n \neq a$ , 则在  $G$  内  $f(z) \equiv 0$ 。
- (2) 设  $f(z)$  在  $G = \{z \mid |z - a| < r\}$  内解析。若在  $G$  内存在过  $a$  点的一段弧或含有  $a$  的一个子区域  $g$ , 在其上  $f(z) \equiv 0$ , 则在  $G$  内  $f(z) \equiv 0$ 。
- (3) 设  $f(z)$  在区域  $G$  内解析。若在  $G$  内存在过  $a$  点的一段弧或含有  $a$  的一个子区域  $g$ , 在其上  $f(z) \equiv 0$ , 则在  $G$  内  $f(z) \equiv 0$ 。
- (4) 设  $f_1$  和  $f_2$  在  $G$  内解析, 且在  $G$  内的一段弧或一个子区域上相等, 则在  $G$  内  $f_1(z) \equiv f_2(z)$ 。

上面的推论 (1) 也可改写为解析函数的唯一性定理:

**Theorem. 42 (解析函数的唯一性定理):**

设  $f_1$  和  $f_2$  是区域  $G$  上的两个解析函数, 且在  $G$  内存在序列  $\{z_n\}$  使得  $f_1(z_n) = f_2(z_n), \forall n$ 。若  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \in G$ , 则在  $G$  内有  $f_1(z) \equiv f_2(z)$ 。

<sup>①</sup> 详见参考文献 [1] Page 66

## §5.3 解析函数的 Laurent 展开

### Theorem. 43 (Laurent Expansion):

若  $f$  在以  $z_0$  为圆心的环形区域  $G: R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2$  中单值解析, 则  $f$  可在环域内 (不包含边界) 展开为:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2 \quad (5.5)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in [-m, +\infty) \quad (5.6)$$

其中  $m$  可以是 0、正整数或正无穷,  $C$  是圆环内绕点  $z_0$  一周的任意一条闭合曲线。Laurent Expansion 中的正幂项在大圆以内收敛, 称为正则部分; 负幂项在小圆以外收敛, 称为主要部分,  $a_n$  称为 Laurent 系数。Laurent 级数在环形区域内绝对且内闭一致收敛。

需要注意, 对于 Laurent Expansion, 幂级数的系数 (即使是正则部分的系数)  $a_n \neq \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ 。与 Talor Expansion 类似, Laurent Expansion 也具有唯一性。

## §5.4 单值函数的孤立奇点

设单值函数  $f(z)$  在  $z_0$  点不解析, 则称  $z_0$  为  $f$  的奇点。如果  $f$  在  $z_0$  的任意空心邻域  $U_\delta^\circ(b): 0 < |z - z_0| < r$  上解析, 则称  $z_0$  为孤立奇点, 否则称为非孤立奇点。

孤立奇点意味着  $f$  可在环域  $G: 0 < |z - z_0| < R$  内展开为 Laurent 级数。孤立奇点又分为三种<sup>②</sup>: 可去奇点、极点和本性奇点。下面是一些等价的条件:

- (1) 可去奇点: 若  $f$  在  $z_0$  的邻域内有界且不恒为零, 则称  $z_0$  为可去奇点。这等价于 Laurent Expansion 中没有负幂项, 即  $m = 0$ 。
- (2) 极点: 若  $f$  在  $z_0$  的邻域内无界, 则称  $z_0$  为极点。这等价于 Laurent Expansion 中含有限个负幂项, 即  $m \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ , 称  $z_0$  为  $m$  阶极点。
- (3) 本性奇点: 若  $f$  在  $z_0$  的邻域内无界, 则称  $z_0$  为本性奇点。本性奇点的 Laurent 展开中有无限项。

$$\begin{cases} \text{可去奇点:} & \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A < \infty \iff m = 0 \\ (m \text{ 阶}) \text{ 极点:} & \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \iff m \in \mathbb{N}^* \\ \text{本性奇点:} & \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \text{NaN} \iff m = +\infty \end{cases} \quad (5.7)$$

特别地, 考虑无穷远点  $\infty$  是否为函数  $f(z)$  的奇点 (或者是什么奇点), 等价于考虑  $g(z) = f(\frac{1}{z})$  在  $z = 0$  处的奇点性质。例如  $z = \infty$  是  $e^z, \sin z, \cos z$  的本性奇点。

## §5.5 解析延拓

设函数  $f_1(z)$  和  $f_2(z)$  分别在  $G_1$  和  $G_2$  上解析, 且  $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ 。若在  $G_1 \cap G_2$  上  $f_1(z) \equiv f_2(z)$ , 则称  $f_1(z)$  是  $f_2(z)$  在  $G_1$  上的解析延拓, 反之称  $f_2(z)$  是  $f_1(z)$  在  $G_2$  上的解析延拓。

解析延拓的目的是为了使得函数在更大的区域内解析, 从而更好地研究函数的性质。

<sup>②</sup>在本书, 我们也称可去奇点为“0 阶极点”, 称本性奇点为“无穷阶极点”。

## § 5.6 Bernoulli 数和 Euler 数（略）

## 第6章 留数定理

### §6.1 留数定理及其求法

#### 6.1.1 留数定理

**Theorem. 44 (留数定理):**

设游街区域  $G$  的边界  $\partial G$  为分段光滑的简单闭合曲线。若除有限个孤立奇点  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset G$  外, 函数  $f$  在  $\overline{G}$  上单值解析, 则:

$$\oint_{\partial G} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res } f(b_k) \quad (6.1)$$

其中  $\text{res } f(b_k)$  称为  $f$  在  $b_k$  处的留数, 也常记作  $\text{Res } [f(z), b_k]$ , 本书采用后一种记法 (后者方便表示变换)。它等价于  $f(z)$  在  $b_k$  点的 Laurent Expansion 中的系数  $a_{-1}$  (即原形式), 也等价于  $(z-b)^m f(z)$  的 Talor Expansion 中的系数  $a_{m-1}$ :

$$\text{Res } [f(z), b_k] = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-b)^m f(z)] \right\}_{z=b} \quad (6.2)$$

特别地, 当奇点为一阶极点时 ( $m=1$ ), 无需求导:

$$\text{Res } [f(z), b_k] = \lim_{z \rightarrow b} [(z-b)f(z)] \quad (6.3)$$

常见的情况列在下表<sup>①</sup>:

表 6.1: 常见的留数计算方法

函数	给定条件	极点阶数	留数 $\text{Res } [f(z), z_0]$
$f(z)$	$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$	0	0
$f(z)$	$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) \neq 0$	1	$\lim_{z \rightarrow z} (z - z_0)f(z)$
$f(z)$	$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{k-1} f(z) = \infty$ $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) \neq 0$	$k$	$\frac{1}{(k-1)!} \cdot \left\{ \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-b)^k f(z)] \right\}_{z=b}$
$\frac{f(z)}{g(z)}$	$f(z_0) \neq 0$ $g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$	1 (特殊)	$\lim_{z \rightarrow z} \left[ (z - z_0) \frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$
$\frac{f(z)}{g(z)}$	$z_0$ 是 $f(z), g(z)$ 的同阶零点	0	0
$\frac{f(z)}{g(z)}$	$z_0$ 是 $f(z)$ 的 $m$ 阶零点 是 $g(z)$ 的 $m+n$ 阶零点	$n$	$\frac{1}{(k-1)!} \cdot \left\{ \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[ (z-b)^k \frac{f(z)}{g(z)} \right] \right\}_{z=b}$

另外, 留数还可用于讨论有理函数的部分分式展开, 例如函数  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-3}$  的常数  $A, B, C$  正好就是  $f(z)$  在一阶极点  $z=1, 2, 3$  处的留数, 即:

$$A = \text{Res } [f(z), 1] = \frac{1}{2}, \quad B = \text{Res } [f(z), 2] = -1, \quad C = \text{Res } [f(z), 3] = \frac{1}{2} \quad (6.4)$$

<sup>①</sup> 详见参考文献 [1] Page 86

### 6.1.2 求有界点的留数

设  $z_0$  是  $n$  阶极点，常用的两种：

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} [f(z), z_0] &= c_{-1} && (\text{Laurent 中 } \frac{1}{z} \text{ 项的系数, 与极点阶数无关}) \\ &= [(z - z_0)^n f(z)]_{z=z_0}^{(n)} && (\text{常规法, 最常用}) \end{aligned} \quad (6.5)$$

### 6.1.3 求无穷点的留数

求无穷原点  $\infty$  处的留数有多种方法，常用的有以下几种：

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} [f(z), \infty] &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\infty)} f(z) dz && (\text{定义}) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_R} f(z) dz && (\text{直接法}) \\ &= -\sum_{i=1}^n \operatorname{Res} [f(z), z_i] && (\text{间接法}) \\ &= -K && (\text{大圆弧, 需要 } zf(z) \rightarrow K) \\ &= -\operatorname{Res} \left[ \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0 \right] && (\text{换元, 最常用}) \end{aligned} \quad (6.6)$$

## § 6.2 数物期中复习

“数物期中典题复习 (2024 秋)” 详见网址 <https://www.123865.com/s/0y0pTd-4IKj3>。

## 参考文献

- [1] 吴崇试, 高春媛. 数学物理方法. 北京大学出版社, 北京, 3 edition, 5 2019.
- [2] 吴崇试. 数学物理方法习题指导. 北京大学出版社, 北京, 2 edition, 10 2020.

# 附录 A 数物方法 Q & A

## A.1 第一章

### A.1.1 三角反函数或双曲反函数中，开根时为什么只取了正号？

例如  $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} (iz + \sqrt{1 - z^2})$ ，可以是  $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} (iz \pm \sqrt{1 - z^2})$  吗？

### A.1.2 问题 2

## A.2 第二章

### A.2.1 如何快速而准确地判断一个函数是否解析？

判断一个函数（在某个开集  $G$  上）是否解析，相当于判断它的可导性。如果一个复变函数是由初等函数构成的，不包括多值函数（包括  $\sqrt{z}$ ,  $\operatorname{Ln} z$ ,  $\operatorname{Arctan} z$  等）或  $\operatorname{Re} z$ ,  $\operatorname{Im} z$  等特殊函数，那么在除去奇点（包括无定义点、不连续点和无穷点等）的开集上，一般都是解析的。例如，函数  $f(z) = \frac{z-1}{z-i}$  在  $\mathbb{C} \setminus \{i\}$  上解析，函数  $f(z) = \frac{e^z}{\cos z}$  在  $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  上解析。

在第三章及之后的章节中，若无特别声明，我们所说的函数都是指单值函数。

### A.2.2 解析域一定是开集，为什么会说“在有界闭域 $\overline{G}$ 上解析”？

这个说法是许多教材中的惯用说法<sup>②</sup>，并且没有给出具体含义。有的教材中，“在闭域  $\overline{G}$  上解析”是指“ $f(z)$  在开集  $G$  上解析，且在  $\partial G$  上可导”（这等价于在闭域  $\overline{G}$  上每一点都可导）。

也有的教材称“在闭域  $\overline{G}$  上解析”是等价于“ $f(z)$  在开集  $G$  上解析，且在  $\partial G$  上连续”。

在本书，不引起歧义的情况下，我们认为“在闭域  $\overline{G}$  上解析”是指“ $f(z)$  在开集  $G$  上解析，且在  $\partial G$  上连续”。

### A.2.3 分支点一定不解析吗？

首先需要区分，“解析”是单值函数的概念，而“分支点”是多值函数的概念。在讨论一个函数是否（在某点）解析时，要么这个函数本就是单值函数，要么是多值函数的某个单值分支。对于一个多值函数，分支点仅可能出现在奇点，包括无定义点、不连续点、不解析点和无穷点  $\infty$ 。因此，当约定好多值函数的单值分支时，对前三种情况（也即  $\mathbb{C}$  内的情况），分支点一定是不解析的。无穷点的情况可以做变换  $z \rightarrow \frac{1}{z}$  转变为零点来讨论。

例如，函数  $f(z) = \sqrt{z}$  的分支点为  $0, \infty$ ，同时也是唯二的不解析点，无穷点不解析是因为函数  $\frac{1}{\sqrt{z}}$  在  $z = 0$  无定义，零点不解析是因为  $f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$  在  $z = 0$  无定义。

### A.2.4 如何求出（或判断）多值函数的分支点？

分支点仅可能在宗量的零点、奇点处出现，假设现在来判断  $z_0$  是否为一个分支点，可以按照以下步骤进行：

- (1) 选定多值函数的单值分支。

<sup>②</sup>例如教材 [1]

- (2) 判断有界点  $z_0 \in \mathbb{C}$  是否为分支点时，对宗量的幅角（主值）作映射  $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ ，观察函数值是否变化。若发生变化，说明绕一圈后没有回到原点，即  $z_0$  是分支点，反之则不是分支点。
- (3) 判断无穷点  $\infty$  是否为分支点，对所有宗量（通常是多个）同时作映射  $z \rightarrow \frac{1}{z}$ ，观察函数值是否变化。若发生变化，则  $\infty$  是分支点，否则不是。

例如，设  $\ln z$  是  $\text{Ln } z|_{z=1} = 0$  时的单值分支，对于下面的多值函数：

$$f(z) = \ln \frac{(z-1)^n}{2-z} = \ln \frac{r_1^n}{r_2} + i[(n\theta_1 - \theta_2) + 2\pi \cdot (nk_1 - k_2)] \quad (\text{A.1})$$

其中  $z-1 = r_1 e^{i(\theta_1+2k_1\pi)}$ ,  $2-z = r_2 e^{i(\theta_2+2k_2\pi)}$ 。我们可以选取单值分支：

$$g(z) = \ln \frac{r_1^n}{r_2} + i(n\theta_1 - \theta_2) \quad (\text{A.2})$$

也即  $k_1 = k_2 = 0$  对应的单值分支。

在判断  $z=1$  是否为分支点时，宗量为  $z-1$ ，因此作映射  $\theta_1 \rightarrow \theta_1 + 2\pi$ ，发现  $g(z)$  的函数值发生了变化，即围绕  $z=1$  点绕一圈后，函数值没有还原，因此  $z=1$  是分支点；判断  $z=2$  是否为分支点，宗量为  $z-2$ ，作映射  $\theta_2 \rightarrow \theta_2 + 2\pi$ ，函数值也发生了变化，因此  $z=2$  也是分支点；最后判断  $\infty$ ，对两个宗量的幅角同时作映射  $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ ，可知，当  $n=1$  时，函数值还原， $\infty$  不是分支点，否则  $\infty$  是分支点。

另外，我们还有结论：

$$\text{Ln } f(z) \text{ 的分支点是且仅是方程 } f(z) = 0 \text{ 和 } f(z) = \infty \text{ 的解} \quad (\text{A.3})$$

### A.2.5 已知多值函数的分支点，作割线的意义是什么？

作割线是为了划定单值分支，这与给定多值函数在某点的函数值（通常）是等价的，更详细的讨论见知乎：复变多值函数的黎曼面 (Riemann surface)、分支点 (branch point) 与割线 (branch cut)。

## A.3 第三章

### A.3.1 为什么解析函数的积分与路径无关？

这是由 Cauchy 定理所保证的。只要函数在所讨论的区域上是解析的，那么 Cauchy 定理都成立，也就必定有“解析函数的积分与路径无关”。也就是说，积分的结果仅取决于起点和终点，这便自然而然地引出了“原函数”的概念。

回想力学中，重力场中的做功量与路径无关，也就是积分  $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$  的结果仅取决于起点和终点，而与路径无关，这也自然地引出了重力势能的概念。更严谨地说，在一个无旋的矢量场  $\mathbf{A}$  中，矢量  $\mathbf{A}$  与位矢的积分值与路径无关，仅取决于起点和终点，这是由矢量分析中的 Stokes Theorem（斯托克斯定理）所保证的，也即：

$$\oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{A.4})$$

当矢量场无旋时，上式右端恒为零。

### A.3.2 如何使用（ $n$ 阶）Cauchy 积分公式？

（ $n$  阶）Cauchy 积分公式（Theorem.15）为：若函数  $f(z)$  在  $\bar{G}$  上解析，则  $f(z)$  在  $G$  上有任意  $n$  阶导数，且它们都是  $\bar{G}$  上的解析函数。

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad \forall n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \quad (\text{A.5})$$



在计算（含奇点的）回路积分时，我们常常会用到上述公式，有时取  $n = 0$ ，有时又取  $n = 1$  或其它数。事实上，上述公式的本质是：在计算含有唯一奇点的回路积分时，将奇点“挖出来”，借助 Cauchy Theorem (Theorem.4) 转为绕小圆的回路积分，然后利用小圆弧定理 (Theorem.13) 得到最终结果。这里面的关键就是“唯一奇点”。

在  $f(z)$  解析的情况下， $g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)}$  有唯一奇点  $a$ ，且  $(z-a) \cdot g(z)$  在  $\bar{G}$  上解析，此时的 Cauchy 积分公式便可以写成：

$$\oint_{\partial G} g(z) = 2\pi i \cdot [(z-a) \cdot g(z)]_{z=a} \quad (\text{A.6})$$

类似地，若  $g(z)$  有唯一奇点  $a$ ，且  $(z-a)^n \cdot g(z)$  在  $\bar{G}$  上解析，便可以得到  $n$  阶 Cauchy 积分公式的等价形式：

$$\oint_{\partial G} g(z) = \frac{2\pi i}{n!} \cdot [(z-a)^{n+1} \cdot g(z)]_{z=a}^{(n)} \quad (\text{A.7})$$

### A.3.3 如何理解 Cauchy 型积分揭示的“解析函数在（分段）光滑曲线上的值决定了它在整个复平面上的值”？

## A.4 第五章

### A.4.1 如何求一个函数在某点的 Laurent 展开式，是否有通法？

### A.4.2 $\ln(z+i)$ 在点 $z_0 = 0$ 有级数展开（对 $|z| < 1$ 成立），那么在 $|z| > 1$ 上是否可展开为幂级数？

### A.4.3 $\ln z$ 在点 $z_0 = 0$ 是否可展开为幂级数？

结论：就目前所学， $\ln z$  在  $z_0 = 0$  不可展开为幂级数。因为  $0$  和  $\infty$  是  $\ln z$  的奇点（非解析点），

## 附录 B Matlab 代码

### B.1 图 2.3 和图 2.4 源码

```

1 %% 复变函数可视化
2 clc, clear, close all
3
4 X_array = linspace(-2, 2, 50);
5 Y_array = linspace(-2, 2, 50);
6 [GridX, GridY] = meshgrid(X_array, Y_array);
7
8 %% 单值函数  $e^z$  与  $\cos z$  %%
9
10 ez = @(x,y) exp(x).*(cos(y) + 1i*sin(y)); % 1i 即虚数 i, 是增强稳定性的写法, 转置是
    必要的
11 cosz = @(x,y) 0.5 * ( cos(x).*(exp(-y) + exp(y))' + 1i*sin(x).*(exp(-y) - exp(y))' );
12
13 figure('Color', [1 1 1])
14 quiver(GridX, GridY, real(ez(X_array, Y_array)), imag(ez(X_array, Y_array)), 'AutoScale
    ', 'on', 'Color', 'b');
15 hold on, axis equal
16 %contourf(GridX, GridY, abs(ez(X_array, Y_array)))
17 contour(GridX, GridY, abs(ez(X_array, Y_array)), LineWidth=0.7)
18 hold off, colormap("cool")
19 %MyExport_pdf
20
21 figure('Color', [1 1 1])
22 quiver(GridX, GridY, 0.03*real(cosz(X_array, Y_array)), 0.03*imag(cosz(X_array, Y_array
    )), 'AutoScale', 'on', 'Color', 'b');
23 hold on, axis equal
24 %contourf(GridX, GridY, abs(ez(X_array, Y_array)))
25 contour(GridX, GridY, abs(cosz(X_array, Y_array)), LineWidth=0.7)
26 hold off, colormap("cool")
27 %MyExport_pdf
28 %% 多值函数  $\sqrt{z}$  与  $\ln z$  的单值分支 %%
29
30
31 %  $\sqrt{z}$  取  $\arg z \in [0, 2\pi]$  的单值分支
32 %  $\zeta = \ln z$  取  $\arg \zeta \in [0, 2\pi]$  的单值分支, 也即  $\zeta = \ln z = \ln |z| + i \arg z$ 
33
34 sqrtz = @(x, y) 1/sqrt(2)* ( sign(pi - MyArcTheta(x, y')).*sqrt(abs(x + 1i*y')) + x) +
    1i*sqrt(abs(x + 1i*y')) - x );
35 lnz = @(x, y) log(abs(x + 1i*y')) + 1i* MyArcTheta(x, y');
36
37 figure('Color', [1 1 1])
38 quiver(GridX, GridY, real(sqrtz(X_array, Y_array)), imag(sqrtz(X_array, Y_array)), '
    AutoScale', 'on', 'Color', 'b');

```

```
39 hold on, axis equal
40 %contourf(GridX, GridY, abs(ez(X_array, Y_array)))
41 contour(GridX, GridY, abs(sqrtz(X_array, Y_array)), LineWidth=0.7)
42 hold off, colormap("cool")
43 %MyExport_pdf
44
45 figure('Color', [1 1 1])
46 quiver(GridX, GridY, real(lnz(X_array, Y_array)), imag(lnz(X_array, Y_array)), '
    AutoScale', 'on', 'Color', 'b');
47 hold on, axis equal
48 %contourf(GridX, GridY, abs(ez(X_array, Y_array)))
49 contour(GridX, GridY, abs(lnz(X_array, Y_array)), LineWidth=0.7)
50 hold off, colormap("cool")
51 %MyExport_pdf
```