

光学笔记

Optics Notes

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

序言

本文为笔者本科时的“光学”课程笔记（Optics Notes, 2024.8 - 2025.1）。

读者可以到网址 <https://www.123865.com/s/0y0pTd-1GKj3> 下载相关资料，也可在笔者的个人网站上找到课程信息、作业答案和教材教辅等资料: <https://yidingga.github.io/YiDingg/#/Notes/Phisics/OpticsNotes>。

出于学习兴趣，笔记中许多内容都不在光学奚婷婷老师的考试范围内，另外，为了方便查阅和复习，每章最后都会有章末总结。本书主要参考了经典的光学教材 [1] *Optics (Eugene Hecht)*, 其次是 [2] *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light (Born M., Wolf E.)*、[3] 物理光学 (梁铨廷)，以及 [4] 新概念物理教程. 光学 (赵凯华)。所有的教材教辅和参考文献都会在课程结束后上传到网址 <https://www.123865.com/s/0y0pTd-1GKj3>，读者可自由下载。其它科目的笔记和作业答案，例如热学、电磁学、电路原理和数学物理方法等，也可以在我的 GitHub > LatexNotes 仓库上找到。

在正式学习之前，建议先跳转至“附录 A 波理论”部分，学习必要的前置知识（否则可能难以理解）。

由于个人学识浅陋，认识有限，文中难免有不妥甚至错误之处，望读者不吝指正。读者可以将错误发送到我的邮箱 dingyi233@mails.ucas.ac.cn，也可以到笔者的 GitHub (<https://github.com/YiDingg/LatexNotes>) 上提 issue，衷心感谢。

目录

序言	I
目录	V
1 光的基本原理	1
1.1 光学发展简史（略）	1
1.2 光的几何传播规律	1
1.3 惠更斯原理与费马原理	2
1.4 成像	2
1.4.1 物像的共轭性（可逆性）	3
1.4.2 折射球面与反射球面	3
1.4.3 像的放大率	4
1.5 薄透镜	4
1.6 光度学基本概念	4
1.6.1 辐射度学基本概念	5
1.6.2 明视觉曲线	5
1.6.3 光度学基本概念	5
1.7 特殊发光体（略）	7
1.8 章末总结	7
2 光的反射与折射	8
2.1 菲涅尔公式	8
2.2 反射时的相位变化	8
2.3 完全偏振反射光	10
2.4 反射折射时的能量关系	10
2.5 全反射时的隐失波与穿透深度	11
2.6 古斯-亨欣位移（Goos-Hanchen Shift）	12
2.7 全反射时的相位变化	12
2.8 折射时的相位变化	13
2.9 倒逆关系	13
2.10 章末总结	14
3 光的干涉	16
3.1 叠加原理	16
3.2 同频率光波的干涉	16
3.2.1 两个同频波源的干涉	16
3.2.2 多个同频波源的干涉	20
3.3 不同频率光的干涉（略）	20
3.4 产生干涉的前提条件	20
3.5 分波前干涉	21

3.5.1	杨氏双缝干涉实验	21
3.5.2	杨氏实验中光源位置和宽度对干涉条纹的影响	23
3.6	分振幅干涉	24
3.6.1	多光束薄膜干涉	24
3.6.2	双光束薄膜干涉	26
3.6.3	等倾干涉	26
3.6.4	等厚干涉	27
3.7	迈克尔逊干涉仪 (Michelson Interferometer)	27
3.7.1	理想单色迈克尔逊干涉	27
3.7.2	双色分立谱迈克尔逊干涉	29
3.7.3	(均匀) 连续谱迈克尔逊干涉	29
3.7.4	马赫-曾德尔干涉	30
3.8	光场的空间相干性与时间相干性	30
3.8.1	波列长度、发光线度与光谱宽度	30
3.8.2	相干孔径角与空间相干性	30
3.9	法布里-珀罗干涉仪 (Fabry-Perot Interferometer)	31
3.9.1	单色光谱	31
3.9.2	双色光谱	32
3.9.3	连续光谱	33
3.9.4	光学谐振腔	34
3.10	激光 (略)	34
3.11	章末总结	35
4	光的衍射	38
4.1	衍射发生的条件	38
4.1.1	惠更斯-菲涅尔原理	38
4.1.2	菲涅尔衍射与夫琅禾费衍射	38
4.2	全同振子阵列与理想线光源	39
4.2.1	全同振子阵列	39
4.2.2	理想线光源	40
4.3	夫琅禾费衍射	41
4.3.1	单缝远场衍射	41
4.3.2	双缝远场衍射	43
4.3.3	多缝远场衍射	44
4.3.4	小孔远场衍射	45
4.3.5	矩形孔远场衍射	45
4.3.6	圆孔远场衍射	47
4.3.7	成像系统的分辨率	49
4.3.8	衍射光栅	49
4.3.9	光栅光谱学	49
4.4	二维和三维光栅	50
4.5	菲涅尔衍射	50
4.5.1	球面波的传播 (菲涅尔波带法)	50

4.5.2 圆孔近场衍射	51
4.5.3 圆盘近场衍射	53
4.5.4 菲涅尔波带片	54
4.5.5 矩形孔近场衍射	55
参考文献	58
附录 A 波理论	59
A.1 一维波	59
A.1.1 n 维波的概念	59
A.1.2 波动方程	59
A.2 谐波	59
A.2.1 相位和相速度	59
A.2.2 谐波的概念	59
A.2.3 空间频率 κ 与空间角频率 k	60
A.3 复数表示	60
A.4 相矢量	61
A.4.1 分离 x 并随 t 旋转	61
A.4.2 分离 t 并随 x 旋转	61
A.5 多元微分与三维波动方程	61
A.5.1 内积、叉乘与矩阵乘法	61
A.5.2 微分算子	62
A.5.3 拉普拉斯算子	62
A.5.4 矢量微分	63
A.5.5 波动方程	63
A.6 平面波、柱面波与球面波	63
A.6.1 平面波	63
A.6.2 球面波	64
A.6.3 柱面波	64
A.7 波的能量与动量	64
A.7.1 前置知识	64
A.7.2 波印廷矢量	65
A.7.3 辐照度	65
附录 B Matlab 代码	66
B.1 图 2.1 源码	66
B.2 图 2.6 源码	67
B.3 图 2.7 源码	71
B.4 图 2.8 源码	72
B.5 图 3.2 源码	73
B.6 图 3.3 源码	74
B.7 图 3.4 (b) 与图 3.5 源码	76
B.8 图 3.6 源码	78
B.9 图 3.8 源码	79

B.10 图 3.14 源码 79

第1章 光的基本原理

本章的内容较为简略，多为结论性的内容，读者只需在阅读教材的基础上，快速浏览本章内容，建立正确基本观念即可。至于一些具体的结论，需要时（例如做题或考试前）再回头复习即可。

§ 1.1 光学发展简史（略）

§ 1.2 光的几何传播规律

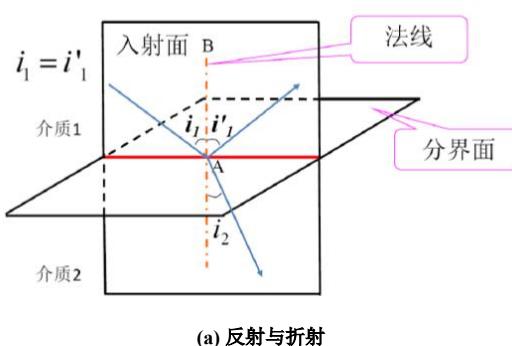
光传播的基本原理：

- (1) 直线传播：光在均匀介质里沿直线传播^①
- (2) 反射定律：光线入射到两种不同的均匀介质的分界面上反射线位于入射面内，反射线和入射线分居法线两侧，反射角等于入射角。
- (3) 折射定律（斯涅尔定律）：折射线位于入射面内，折射线与入射线分居法线两侧，入射角的正弦与折射角的正弦之比为一与入射角无关的常数

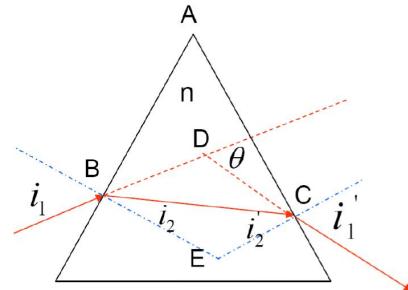
$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad (1.1)$$

- (4) 光路可逆性：光沿反方向传播时，必定沿原光路返回^②
- (5) 独立传播：光在传播过程中与其他光束相遇时，各光束都各自独立传播，不改变其传播方向
- (6) 全反射：光线从光密介质入射到光疏介质^③，当入射角大于某临界值时，折射光完全消失，只剩下反射光。该临界角度称为全反射临界角。

$$i_C = \arcsin \left(\frac{n_1}{n_2} \right), \quad n_1 < n_2 \quad (1.2)$$



(a) 反射与折射



(b) 三棱镜最小偏向角

图 1.1: 反射与折射、三棱镜最小偏向角

特别地，作为色散的一个例子，我们考虑三棱镜的最小偏向角。如图 1.1 (b) 所示，最小偏向角 $\theta_0 = (i_1 - i_1')_{\min}$ 满足：

$$\theta_0 = 2i_1 - A, \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \frac{\theta_0 + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \quad (1.3)$$

^①对高功率激光，此定律不成立

^②也即在几何光学中，任何光路都是可逆的

^③折射率较大的一侧称为光密介质；较小的一侧称为光疏介质

§ 1.3 惠更斯原理与费马原理

Theorem.1 (惠更斯原理): 由振源发出的波动在 t 时刻传播到一个波面 S , 波面上的每一个面元可认为是次波的波源。由面元发出的次波向四面八方传播。在以后的时刻 t' 形成次波面。这些次波面的包络面 S' 就是 t' 时刻总扰动的波面。

其中:

(1) 波面: 在同一振源的波场中, 扰动同时到达的各点具有相同的相位, 这些点的轨迹构成一个曲面, 称为波面 (也称为等相位面)。

(2) 波线: 与波面处处正交的曲线称为波线, 其切线方向为光的传播方向
几何光学的定律需要前提条件:

(1) 必须是均匀介质, 即同一介质的折射率处处相等, 折射率不是位置的函数。

(2) 必须是各向同性介质, 即光在介质中传播时各个方向的折射率相等, 折射率不是方向的函数。

(3) 光强不能太强, 否则巨大的光能量会使线性叠加原理不再成立而出现非线性情况。

(4) 光学元件的线度应比光的波长大得多, 否则不能把光束简化为光线。

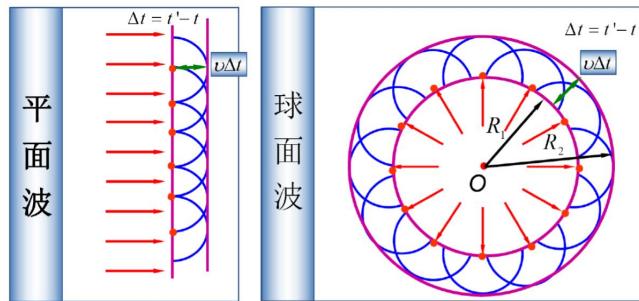


图 1.2: 惠更斯原理

Theorem.2 (费马原理):

光从空间中一点传播到另一点时, 总是沿光程 (Optical Length, OPL) 平稳的路径传播^①。写成公式即为:

$$d\text{OPL} = d \left(\int_Q^P n dl \right) = 0 \implies \frac{d\text{OPL}}{d\varphi} = \frac{d\text{OPL}}{ds} = 0 \quad (1.4)$$

由费马原理可以导出诸多推论, 包括我们熟知的几条基本原理, 还有物像之间的等光程性 (例如凸透镜): 在物点 Q 与像点 Q' 之间, 不管光线经何路径, 凡是由 Q 通过同样的光学系统到达 Q' 的光线, 都是等光程的。

§ 1.4 成像

理想的像与物体在形状上一致, 大小成比例。物与像之间的关系: 本质上是一系列物点与像点的点点对应, 推广至线条、面面对应。

同心光束: 各光线本身或其延长线交于同一点的光束称为同心光束, 在各向同性介质中, 它对应于球面波。

由若干反射面或折射面组成的光学系统称为光具组。

^①这里的平稳相当于“极值”, 可以是极小值、极大值或常数, 一般情况下, 实际光程大多取极小值。极大值 (如凹面镜成像)、拐点 (如椭球面镜、凸透镜) 的例子, 可以参考 知乎: 浅谈几何光学 (1)——费马原理

- (1) 实物: 发散的同心入射光束的“心”
- (2) 虚物: 汇聚的同心入射光束的“心”
- (3) 实像: 发散的同心出射光束的“心”
- (4) 虚像: 汇聚的同心出射光束的“心”

1.4.1 物像的共轭性（可逆性）

若 P 为物体 P (可实可虚) 的像点, 则反之, 当物点为 P 时, 像点必在点 P' (实际光路可能不同)。是光路可逆性的必然结果。

计算由物到像的 OPL 时, 若为实线 (实物、实像) 则取正, 称为实光程, 若为虚线 (虚物、虚像) 则取负, 称为虚光程。

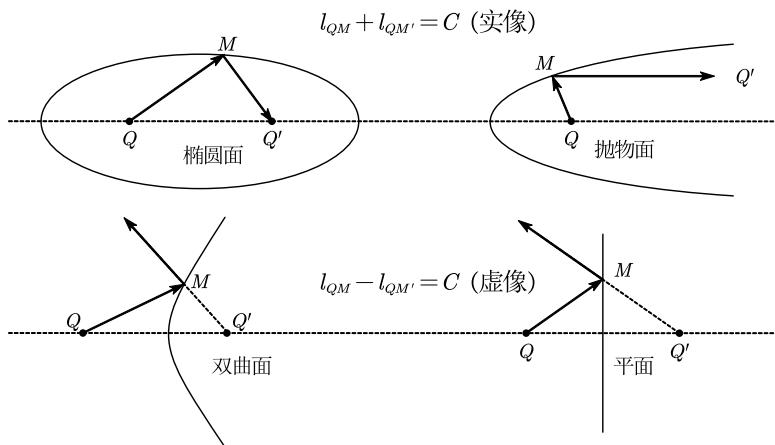


图 1.3: 光程恒定的例子

1.4.2 折射球面与反射球面

对于折射球面, 存在一对恰好成像的共轭点, 称为齐明点。在齐明点处, 可以证明 Q 到 Q' 的光程 (即物像间的 OPL) $l_{QQ'}$ 。

$$\begin{aligned} \text{折射球面公式: } & \frac{n_1}{l_1} + \frac{n_2}{l_2} = \frac{1}{R} \left(\frac{n_2 s_2}{l_2} - \frac{n_1 s_1}{l_1} \right) \implies \frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \quad (\text{傍轴}) \\ \text{反射球面公式: } & \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = -\frac{2}{R} \left(\frac{s_1}{l_1} + \frac{s_2}{l_2} \right) \implies \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = -\frac{2}{r} \quad (\text{傍轴}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

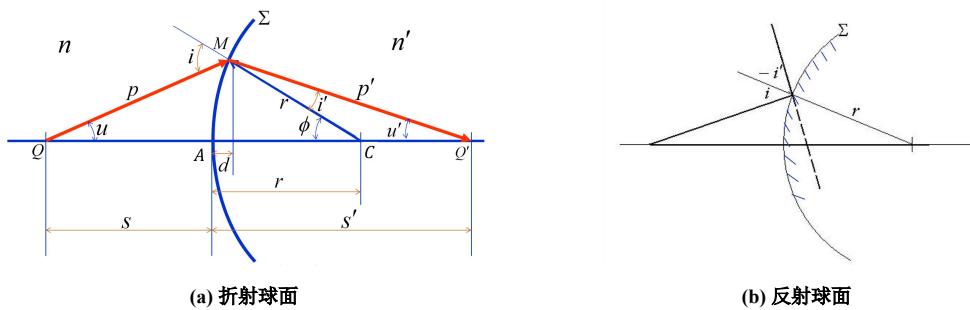


图 1.4: 折射球面与反射球面

1.4.3 像的放大率

放大率公式:

$$\frac{n_1|y_1|}{s_1} = \frac{n_2|y_2|}{s_2} \quad (1.6)$$

Lagrange-Helmholtz 恒等式:

$$n_1 u_1 y_1 = n_2 u_2 y_2 \quad (1.7)$$

上式的 u 和 y 是有正负的, 例如折射球面中 $u_1 > 0, y_1 > 0$ 而 $u_2 < 0, y_2 < 0$ 。

§ 1.5 薄透镜

透镜是由两个共轴折射球面构成的光具组, 球面间距远远小于球面半径和物距像距的透镜称为薄透镜, 也即 $d \ll |R_1|, |R_2|, |s|, |s'|$ 。此时可以认为两球面顶点重合, 称为光心。

薄透镜成像公式 (物像距公式):

$$\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2} \quad (1.8)$$

$$s' = \infty \implies f = \frac{n}{\frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}} \quad \text{物方焦距} \quad (1.9)$$

$$s = \infty \implies f' = \frac{n'}{\frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}} \quad \text{像方焦距} \quad (1.10)$$

故物像焦距满足 $\frac{f}{n} = \frac{f'}{n'}$ 。特别地, 当物像方折射率都为 1 时 (真空), 我们有磨镜者公式和像的横向放大率:

$$f = f' = \frac{1}{(n_L - 1)(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})}, \quad V = -\frac{\frac{s'}{n'}}{\frac{s}{n}} = -\frac{f s'}{f' s} = -\frac{s'}{s} \quad (1.11)$$

将公式 1.9 和公式 1.10 代入式 1.8 中, 可以得到 Gauss 物像公式:

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1 \stackrel{n=n'}{\implies} \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (1.12)$$

令 $s = x + f, s' = x' + f'$, 代入公式 1.12, 可以得到 Newton 物像公式:

$$x x' = f f' \quad (1.13)$$

§ 1.6 光度学基本概念

在学习光度学之前, 需要区分辐射度学与光度学中的基本概念。辐射度学研究的是辐射能量对实际物体的影响, 而光度学研究的是辐射能量对人眼的影响, 是基于人眼实验数据的学科, 例如 Luminous Efficiency Function。它们的概念相互对应 (可以相互转化) 但并不相同, 如下表所示:

表 1.1: 光度学与辐射度学概念对应关系

学科范围	基本概念						
	辐射能 Q_e	辐射通量 Φ_e	辐射强度 I_e	辐射亮度 L_e	辐射照度 E_e	辐射出射度 M_e	辐射通量谱密度 $\Phi_{e,\lambda}$
辐射度学							
光度学	光量 Q_v	光通量 Φ_v	光强度 I_v	光亮度 L_v	光照度 E_v	光出射度 M_v	光通量谱密度 $\Phi_{v,\lambda}$

1.6.1 辐射度学基本概念

下表展示了辐射度学的一些基本概念：

表 1.2: 辐射度学基本概念

名称	符号	定义式	单位	概念描述
辐射能	Q_e	-	J	以辐射形式传播的能量
辐通量	Φ_e	$\Phi_e = \frac{dQ_e}{dt}$	W	单位时间内流过某截面的辐射能量
辐强度	I_e	$I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega}$	$W \cdot sr^{-1}$	点辐射源在某方向上单位立体角 ^① 内的辐射通量
辐照度	E_e	$E_e = \frac{d\Phi_e}{dA}$	$W \cdot m^{-2}$	被辐射体单位面积上的辐射通量
辐亮度	L_e	$L_e = \frac{dI_e}{dA \cos \theta}$	$W \cdot sr^{-1} \cdot m^{-2}$	单位面积的面辐射源在某方向上的辐射强度
辐出射度	M_e	$M_e = \frac{d\Phi_e}{dA}$	$W \cdot m^{-2}$	辐射体单位面积向半球空间发射的辐射通量
辐谱密度	ϕ_e	$\phi_e = \frac{\Delta\Phi_{e,\lambda}}{\Delta\lambda}$	$W \cdot m^{-1}$	辐射能(通量)在频谱中的分布

其中 $\Delta\Phi_{e,\lambda}$ 表示波长为 λ (也可认为是 $[\lambda, \lambda + \Delta\lambda]$) 的部分所贡献的辐射通量。

1.6.2 明视觉曲线

人眼对不同波长的光具有不同的明亮感觉程度^②, 称为明视觉光谱光视效率曲线^③ (函数), 常简称为“明视觉曲线”或“视觉曲线”, 记为 $V = V(\lambda)$ 。

光谱光效能 K , 表示在某一波长上每一瓦辐射通量可以产生多少流明的光通量。光谱光视效率 $V = V(\lambda)$, 就是归一化的光谱光效能:

$$K = \frac{\Delta\Phi_{v,\lambda}}{\Delta\Phi_{e,\lambda}} = \frac{\phi_v(\lambda)}{\phi_e(\lambda)}, \quad V(\lambda) = \frac{K(\lambda)}{K_{\max}} = \frac{1}{K_{\max}} \cdot \frac{\phi_v(\lambda)}{\phi_e(\lambda)} \quad (1.14)$$

$K_{\max} = 683 \text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$ 在波长约 555.0 nm 取到, 因此 $V = V(\lambda)$ 也表示在相同辐射通量下, 波长为 λ 的光与 555.0 nm 的光所产生的亮暗感觉比值。

另外, 公式 1.14 建立了辐射度学参量与光度学参量之间的转化关系:

$$\Phi_v(\lambda) = \int \phi_v(\lambda) d\lambda = \int K_{\max} V(\lambda) \phi_e(\lambda) d\lambda \quad (1.15)$$

1.6.3 光度学基本概念

表 1.3 展示了光度学的一些基本概念, 它们^④之间的转化关系:

$$\text{与光通量的转换: } \Phi_v = \int E_v dA = \int I_v d\Omega = \iint L_v \cos \theta dA d\Omega \quad (1.16)$$

$$\text{与光强的转换: } I_v = r^2 E_v = \int L_v \cos \theta dA = \int L_v dA_{\perp} \quad (1.17)$$

计算时的常用微分:

$$\begin{aligned} \text{直角坐标系: } dA &= dx dy & d\Omega &= \frac{dA}{r^2} \\ \text{球坐标系: } dA &= r^2 \sin \theta d\theta d\phi & d\Omega &= \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (1.18)$$

^②参考 新旧明视觉光谱光视效率曲线.pdf。

^③参考 ANSI E1.48 - 2014 (A Recommended Luminous Efficiency Function for Stage and Studio Luminaire Photometry), 国际照明委员会 (CIE) 规定的标准光谱光视效率函数 Luminous Efficiency Functions 或者 知乎: 光通量与光辐照度之间的换算。

^④参考 知乎: 如何区分并记忆光度、照度、发光强度、光强、亮度等

表 1.3: 光度学基本概念

名称	符号	定义式	单位	概念描述
光量	Q_v	$Q_v(\lambda) = V(\lambda) \cdot Q_e(\lambda)$	$\text{cd} \cdot \text{sr} \cdot \text{s}$	辐射能的光度量大小
光通量	Φ_v	$\Phi_v = \frac{dQ_v}{dt}$	$\text{lm} = \text{cd} \cdot \text{sr}$	单位时间内流过某截面的光度学光量
光强度	I_v	$I_v = \frac{d\Phi_v}{d\Omega}$	cd	点辐射源在某方向上单位立体角内的光通量
光照度	E_v	$E_v = \frac{d\Phi_v}{dA}$	$\text{lm} \cdot \text{m}^{-2}$	被辐射体单位面积上的光通量
光亮度	L_v	$L_v = \frac{dI_v}{dA \cos \theta}$	$\text{cd} \cdot \text{m}^{-2}$	单位面积的面辐射源在某方向上的光强度
光出射度	M_v	$M_v = \frac{d\Phi_v}{dA}$	$\text{lm} \cdot \text{m}^{-2}$	辐射体单位面积向半球空间发射的光通量
光谱密度	ϕ_v	$\phi_v = \frac{\Delta\Phi_{v,\lambda}}{\Delta\lambda}$	$\text{lm} \cdot \text{m}^{-1}$	光量（光通量）在频谱中的分布

§ 1.7 特殊发光体（略）

§ 1.8 章末总结

电磁波的四个恒等式:

$$\begin{cases} nv = c \\ \epsilon\mu v^2 = 1 \\ \epsilon_r \mu_r = n^2 \\ E = vB \end{cases} \quad (1.19)$$

波印廷与辐照度:

$$\begin{cases} S = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \epsilon w = \epsilon v E^2 \\ I = \langle S \rangle_T \stackrel{\text{简谐}}{=} \frac{1}{2} \epsilon v E^2 \end{cases} \quad (1.20)$$

光压(吸收): $pc = I = \langle S \rangle \stackrel{\text{简谐}}{\Rightarrow} p = \frac{\epsilon v E^2}{2c}$ (1.21)

惠更斯原理: 波阵面上每一点都是次波源, 次波面的包络面是新波阵面 (1.22)

费马原理: 光沿光程平稳的路径传播, 即光程取极值 (1.23)

三棱镜最小偏向角:

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (1.24)$$

发光体:

$$\begin{cases} \text{点光源照度 } E : E = \frac{\cos\theta}{r^2} \cdot I \\ \text{半球面亮度 } B \text{ 与照度 } E : E = \pi B \end{cases} \quad (1.25)$$

光路方程:

$$\begin{cases} \text{一维: } y'' = \frac{1}{2n_0^2 \cos^2 \theta_0} \cdot \frac{dn^2}{dy} = A \cdot \frac{dA}{dy}, \quad A = \frac{n}{n_0 \cos \theta_0} \\ \text{三维: } \nabla n = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dr}{ds} \right) \end{cases} \quad (1.26)$$

球面焦距:

$$\begin{cases} \text{折射球面: } \begin{cases} f = n \cdot \frac{r}{n' - n} \\ f' = n' \cdot \frac{r}{n' - n} \end{cases} \\ \text{反射球面: } f = f' = -\frac{r}{2} \end{cases} \quad (1.27)$$

薄透镜:

$$\begin{cases} f = n \cdot \frac{1}{\frac{n_L - n}{r} - \frac{n_L - n'}{r'}} \\ f' = n' \cdot \frac{1}{\frac{n_L - n}{r} - \frac{n_L - n'}{r'}} \end{cases} \quad \text{磨镜者公式 } (n = n' = 1) : f = f' = \frac{1}{(n_L - 1)(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'})} \quad (1.28)$$

成像公式:

$$\begin{cases} \text{Gauss 公式: } \frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1 \\ \text{Newton 公式: } xx' = ff' \\ \text{亥姆霍兹公式: } yn \tan u = y'n' \tan u' \\ \text{横向放大率: } \frac{ny}{s} + \frac{n'y'}{s'} = 0 \implies V = \frac{y'}{y} = -\frac{ns'}{n's} = -\frac{fs'}{f's} \\ \text{角放大率: } W = \frac{\tan u'}{\tan u}, \quad VW = \frac{f}{f'} \\ \text{密接透镜组: } \frac{1}{f} = \sum \frac{1}{f_i} \end{cases} \quad (1.29)$$

第2章 光的反射与折射

在本章，我们先以一定的顺序，依次对反射折射过程中所出现的现象或相关物理量进行讨论，最后给出所有现象的总结。

§ 2.1 菲涅尔公式

Theorem. 3 (菲涅尔公式, Fresnel Formula):

光线在通过两介质分界面时通常会同时发生折射（透射）和反射现象，设入射光（incident ray）介质折射率 η_i ，入射角 θ_i ，透射光（transmitted ray）介质折射率 η_t ，透射角（折射角） θ_t ，则有^①：

类型	振幅反射系数 r		振幅透射系数 t	
s 波	$r_s = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$	$-\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$	$t_s = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$	$\frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$
p 波	$r_p = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t}$	$+\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$	$t_p = \frac{2n_t \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i}$	$\frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}$

注意， t_p 分子上的两个角标都是 i ，这意味着有 $(-r_s) + t_s = 1$ ，但并没有 $r_p + t_p = 1$ ，而应该是：

$$r_p + \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \cdot t_p = 1 \quad (2.1)$$

折射角 θ_t 、s 波通量反射率 R_s 、p 波通量反射率 R_p 和总通量反射率 R 为：

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \left(\frac{n_i}{n_t} \sin \theta_i \right)^2}, \quad R_s = r_s^2, \quad R_p = r_p^2, \quad R = \frac{1}{2} (R_s + R_p) \quad (2.2)$$

总强度反射率 R 的严格证明见下一节。特别地，若 $1 - \left(\frac{n_i}{n_t} \sin \theta_i \right)^2 < 0$ ，则发生全反射，此时 $R = 1$ 。另外，需要指出菲涅尔公式的适用条件，也即推导时所做的一些假设，如下：

- (1) 介质为绝缘介质，无表面自由电荷或传导电流
- (2) 介质为各向同性的光学线性介质（弱光强）
- (3) 介质磁导率（约）等于真空磁导率^② $\mu_i = \mu_t = \mu_0$ ，其中 μ_0 为真空磁导率。

§ 2.2 反射时的相位变化

菲涅尔公式的推导以矢量分析为基础，因此公式中系数 r_s 的正负具有明确物理意义，它标识着方向。若为负，则反射后的方向与原方向相反，否则相同。各系数正负情况见表 2.1，其中 o 表示可正可负。

从波的角度，方向相反可以等价地视为相位发生了 π 的前移（或后移），称为相位突变。 $n_i < n_t$ 时，相位突变要么是 0，要么是 π ， $n_i > n_t$ 时的相位变化比较复杂，我们不深究。在 $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$ 时， r_p 的正负发生变化，p 波的反射波相位也发生突变，称此时 θ_i 的角度为布儒斯特角（Brewster angle），记为 θ_B ，也称为偏振角或起偏角。

表 2.1: 振幅系数的正负情况

折射率	r_s	r_p	t_s	t_p
$n_i < n_t$	-	o	+	+
$n_i > n_t$	o	o	+	+

^①对于金属材质（非绝缘材质），需要引入消光系数 k_t 来修正菲涅尔公式（绝缘材质等价于 $k_t = 0$ ），具体参见 知乎：菲涅尔公式

^②对于介质磁导率不等于真空磁导率的情况，详见参考文献 [1] Page 144

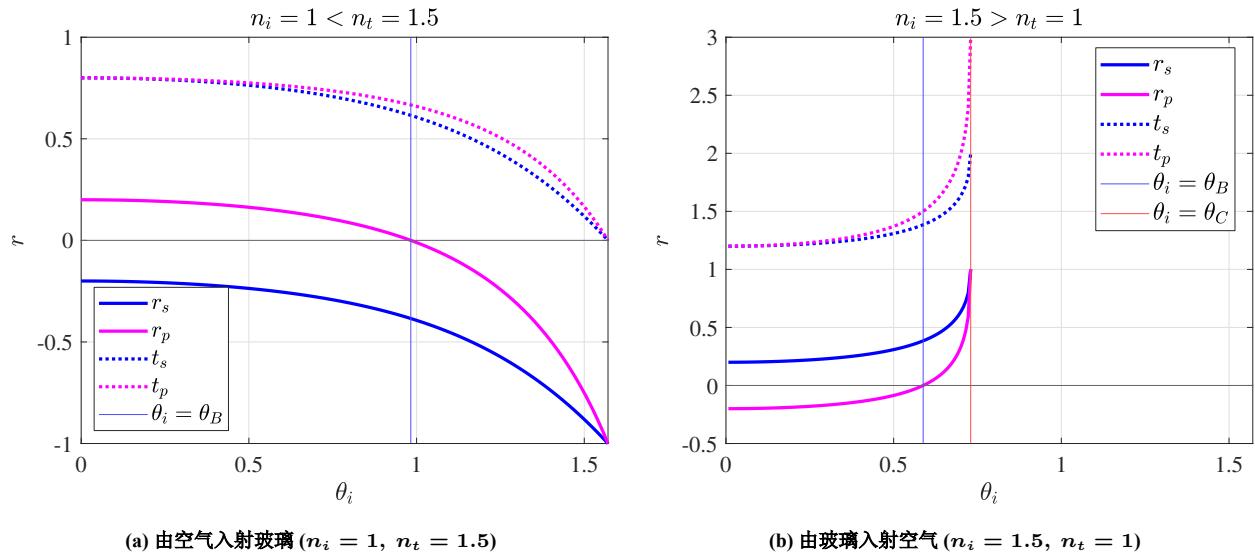


图 2.1: 振幅系数 r 随入射角 θ_i 的变化

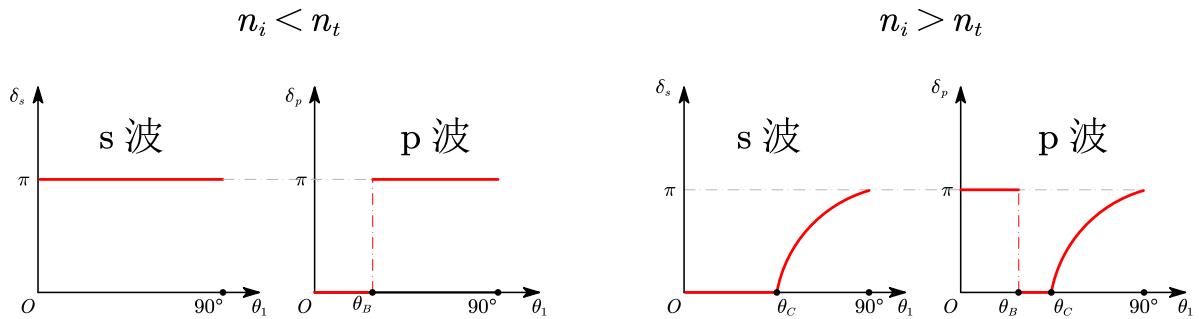


图 2.2: s 波和 p 波在反射时的相位变化

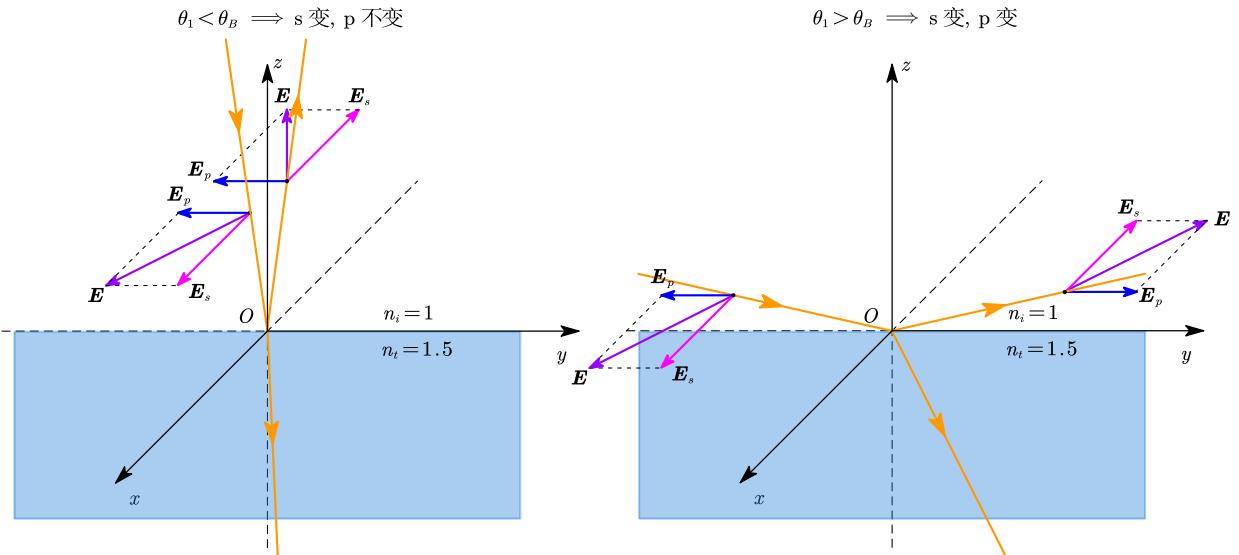


图 2.3: 由空气入射玻璃的光线示意图

可以推得 Brewster angle 的值为:

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (2.3)$$

具体的振幅系数变化见图 2.1^①, 相位增量见图 2.2, 反射示意图见图 2.3。

由菲涅尔公式, 当 $n_i < n_t$ 时, 我们还有如下结论:

$$\begin{aligned} \theta_i = 0 \text{ 时: } \quad r_p &= (-r_s) = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}, \quad t_p = t_s = \frac{2n_i}{n_i + n_t} \\ \theta_i = \frac{\pi}{2} \text{ 时: } \quad r_p &= r_s = -1, \quad t_p = t_s = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

这表明, 即使是正射 (垂直于介质分界面的入射, $\theta_i = 0$), 一般也存在部分反射光。总之, 当 $n_i < n_t$ 时, 入射光的 s 分量在反射中一定会相位跃变, p 分量都有可能。

另外, 菲涅尔公式还可写成:

$$\begin{aligned} (-r_s) + t_s &= 1, & r_p + t_p &= 1 \\ r_s &= \frac{\cos \theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}, & r_p &= \frac{n_{ti}^2 \cos \theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}{n_{ti}^2 \cos \theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

§ 2.3 完全偏振反射光

当光波由布儒斯特角 θ_B 入射时, 由 Fresnel Formula, $r_p = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} = 0$, 也即反射光的 p 分量为 0, 仅存在 s 分量。这说明反射光是完全偏振光, \mathbf{E} 的方向 (称为振动方向) 垂直于入射面。

但此时反射光能量占比 F 很小^②, 例如, 空气 ($n = 1$) 入射玻璃 ($n = 1.5$) 时, $\theta_B = 56.310^\circ$, $F = 0.0740$; 玻璃入射空气时, $\theta_B = 33.690^\circ$, $F = 0.0740$ 。

§ 2.4 反射折射时的能量关系

在 Fresnel Formula 中可以发现, $r_s^2 + t_s^2 \neq 1$, $r_p^2 + t_p^2 \neq 1$, 是能量不守恒了吗? 显然不是。那么, 反射光和透射光的能量关系是怎样的? 这需要借助辐射度学的相关概念。

如图, 圆形光束从空气入射到分界面上的一个面元 \mathbf{A} (界面下是玻璃), 以此面元为研究对象。考虑玻印亭矢量 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$, 即单位时间内通过单位面积的电磁辐射能量 (单位面积辐射功率), 于是瞬时辐射照度 \mathbf{E}_e :

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{S} = c^2 \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad E_e = \epsilon_0 c E^2 \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_r}{\mu_r}} = \frac{\epsilon_0 c}{\mu_r} \cdot n E^2 \quad (2.6)$$

其中 ϵ_r , μ_r 分别为相对介电常量、相对磁导率, 对空气近似有 $\epsilon_r = \mu_r = 1$, 于是

核心思想是 $dQ_e = (\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{A}) dt$ 。入射、反射、透射光束的截面面积分别为 $A \cos \theta_i$, $A \cos \theta_r$, $A \cos \theta_t$, 设其瞬时辐射照度分别为 \mathbf{E}_i , \mathbf{E}_r , \mathbf{E}_t , 则辐射通量为:

$$\Phi_{e,k} = E_{e,k} A \cos \theta_k = \frac{\epsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_k \cos \theta_k E_k^2, \quad k = i, r, t \quad (2.7)$$

^①源码见附录 B.1

^②可以使用玻璃片堆得到强度较大的偏振光

分别写出入射、反射、透射光的辐射通量:

$$\Phi_{e,i} = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_i \cos \theta_i E_i^2 = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_i \cos \theta_i (E_{i,s}^2 + E_{i,p}^2) \quad (2.8)$$

$$\Phi_{e,r} = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_i \cos \theta_i E_r^2 = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_i \cos \theta_i (r_s^2 E_{i,s}^2 + r_p^2 E_{i,p}^2) \quad (2.9)$$

$$\Phi_{e,t} = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_t \cos \theta_t E_t^2 = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_t \cos \theta_t (t_s^2 E_{i,s}^2 + t_p^2 E_{i,p}^2) \quad (2.10)$$

由于入射光可分解为 s 波与 p 波, 我们自然想到它们俩在入射前后应该是能量守恒的, 这指导我们分别作数学上的处理。对 s 波, 由菲涅尔定律 (这说明已经做了近似 $\mu_r = 1$), 做减法得到:

$$\begin{aligned} & n_i \cos \theta_i E_{i,s}^2 - n_i \cos \theta_i r_{i,s}^2 E_{i,s}^2 - n_t \cos \theta_t t_s^2 E_{i,s}^2 \\ &= E_{i,s}^2 \left[n_i \cos \theta_i \left(1 - \frac{(n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t)^2}{(n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t)^2} \right) - n_t \cos \theta_t \cdot \frac{(2n_i \cos \theta_i)^2}{(n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t)^2} \right] \\ &= \frac{E_{i,s}^2}{(n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t)^2} [n_i \cos \theta_i \cdot (4n_i \cos \theta_i \cdot n_t \cos \theta_t) - 4n_t \cos \theta_t \cdot n_i^2 \cos^2 \theta_i] \\ &= 0 \end{aligned}$$

同理, 考虑 p 分量, 作减法可得到:

$$n_i \cos \theta_i E_{i,p}^2 - n_i \cos \theta_i r_{i,p}^2 E_{i,p}^2 - n_t \cos \theta_t t_p^2 E_{i,p}^2 = 0 \quad (2.11)$$

代入即得:

$$\Phi_{e,i} - \Phi_{e,r} - \Phi_{e,t} = 0 \implies \Phi_{e,i} = \Phi_{e,r} + \Phi_{e,t} \quad (2.12)$$

这便验证了入射前后的能量是守恒的。

由此, 我们可以定义一些能量系数:

$$\begin{aligned} \text{强度反射率 } R: \quad R &= \frac{1}{2}(R_s + R_p), \quad R_s = r_s^2, \quad R_p = r_p^2 \\ \text{强度透射率 } T: \quad T &= \frac{1}{2}(T_s + T_p), \quad T_s = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \cdot t_s^2, \quad T_p = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \cdot t_p^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

这样, 它们具有下面的性质, 方便我们计算能量关系:

$R_s + T_s = 1, \quad R_p + T_p = 1, \quad R + T = 1$	
$\Phi_{e,r} = R\Phi_{e,i}, \quad \Phi_{e,r,s} = R_s \Phi_{e,i,s}, \quad \Phi_{e,r,p} = R_p \Phi_{e,i,p}$	
$\Phi_{e,t} = T\Phi_{e,i}, \quad \Phi_{e,t,s} = T_s \Phi_{e,i,s}, \quad \Phi_{e,t,p} = T_p \Phi_{e,i,p}$	

(2.14)

§ 2.5 全反射时的隐失波与穿透深度

假设现在由光密介质射向光疏介质, 即 $n_i > n_t$, 则有临界角 $\theta_C = \arcsin n_{ti}$ 。当 $\theta_i > \theta_C$ 时, 发生全反射, $R = 1, T = 0$, 若简单地认为没有任何透射光, 是不满足电磁场边界条件的。具体来讲, \mathbf{E} 的切向分量连续告诉我们, 在透射介质中一定存在振荡场, 它在平行于界面上的分量具有时间频率 ω (与入射光相同)。

进一步的推导表明^①, 在透射介质中存在一种波 (称为隐失波), 其波函数如下:

$$\mathbf{E} = (e^{-\beta y} \mathbf{E}_{t,0}) \cdot e^{i(\frac{\sin \theta_i}{n_{ti}} k_t x - \omega t)}, \quad \text{衰减系数 } \beta = k_t \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{n_{ti}^2} - 1} = k_i \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2} \quad (2.15)$$

^①详见参考文献 [1] 的 Page 158

这是一个不均匀波，其振幅在 y 方向上极速衰减，只在几个波长的距离上就可以忽略不计。且它同时有纵波成分和横波成分，不是简单的简谐横波。

我们将振幅下降到 $\frac{1}{e}$ 的深度称为**穿透深度**，记为 $\delta = \frac{1}{\beta}$ ，它通常在一个波长以内。

对于此过程的能量守恒问题，更详尽广泛的讨论表明（利用波印廷矢量 \mathbf{S} ），能量实际上是跨过界面往复循环，最终使透向第二介质的净流量为零。就现阶段，可以理解为能量从入射波流到隐失波再回到反射波，或者说隐失波沿入射波又绕回了反射波。

§ 2.6 古斯-亨欣位移（Goos-Hanchen Shift）

一束被全反射的光，入射点会与（反射后的）出射点存在微小偏移（事实上既有平行偏移也有垂直偏移），称为 Goos-Hanchen Shift。较为严谨的推导表明^①，沿入射方向、与分界线平行的偏移量如下（又称为侧向偏移）：

$$\delta_{\perp} = \frac{\lambda_i \sin \theta_i}{\pi \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}}, \quad \Delta x = \frac{\lambda_i \tan \theta_i}{\pi \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}} = 2\delta \tan \theta_i \quad (2.16)$$

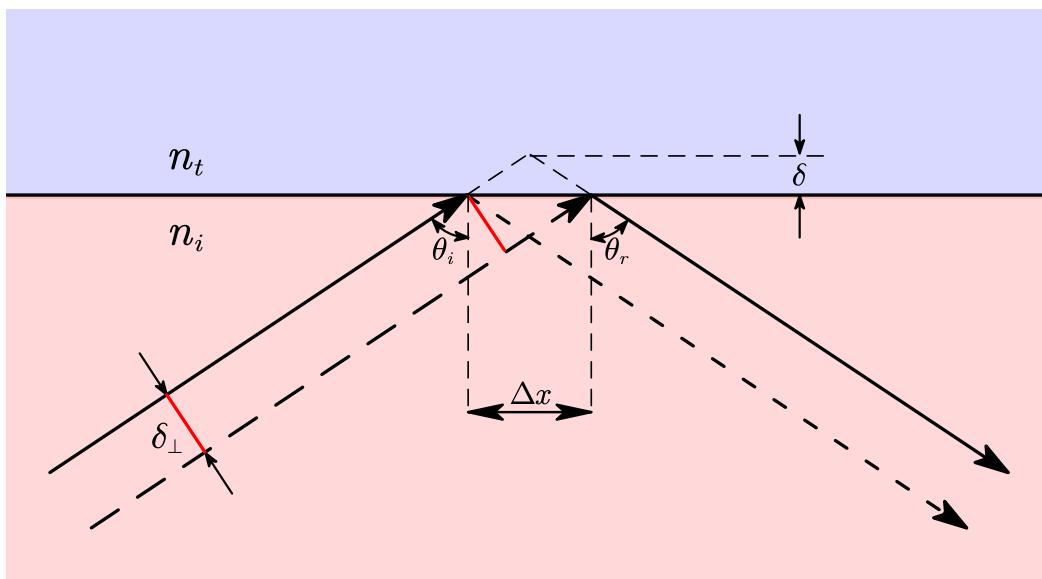


图 2.4: Goos-Hanchen Shift

§ 2.7 全反射时的相位变化

发生全内反射时^②，入射波 s 分量、p 分量的相位变化并非简单的 0 或 π ，下面作推导。

对入射光的波函数 $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{i,0} \cdot e^{i\theta} = \mathbf{E}_{i,0} \cdot e^{i(kx - \omega t)}$ ，若反射光满足 $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_i \cdot \lambda e^{i\delta}$ ，则表明相对于入射光，反射光的振幅变为了原来的 λ 倍，且相位增加了 δ 。特别地， $\lambda < 0$ 时，可以等价于 $\lambda > 0$ 且相位增加 $\delta + \pi$ 或 $\delta - \pi$ 。

由菲涅尔定律，我们有 $\mathbf{E}_{r,s} = r_s \mathbf{E}_{i,s}$ ， $\mathbf{E}_{r,p} = r_p \mathbf{E}_{i,p}$ 。可以发现，在全反射时， $r_s, r_p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ，并且 $|r_s| = |r_p| = 1$ ，振幅不变，于是可以令 $r = e^{i\delta}$ 。为了反解相位增量 δ ，一种自然的想法是考虑

$$e^{i\delta} = \cos \delta + i \lambda \sin \delta = a + ib \implies \delta = \arctan \left(\frac{b}{a} \right) \quad (2.17)$$

^①详见参考文献 [5]，或者 知乎：古斯汉欣位移产生的原因，以及 知乎：古斯汉森位移的原理是什么

^②全内反射是指，由光疏介质射向光密介质且入射角大于临界角时发生的全反射现象

这样做虽然可行，但由于 \arctan 函数的局限性，其值域范围在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ，而 δ 的取值范围在 $[0, \pi]$ 或者 $[-\pi, 0]$ 。因此，最终得到的 δ 仅在部分区域上正确，对另一部分需做数学上的平移修正。因此，我们考虑另一种方法。在全反射时，注意到 r_s 和 r_p 的形式为 $r = \frac{a-bi}{a+bi}$ ，其中 $a, b \in \mathbb{R}$ ，有如下过程：

$$\frac{a-bi}{a+bi} = e^{i\theta} \implies e^{i\frac{\theta}{2}} = \pm \frac{a-bi}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tan \frac{\delta}{2} = -\frac{b}{a}, \frac{\delta}{2} = \arctan \left(-\frac{b}{a} \right) \quad (2.18)$$

这样得到的 $\frac{\delta}{2}$ 便是全范围正确的，无需修正。分别令 $r = r_s, r_p$ ，代入即得：

$$\delta_{r,s} = -2 \arctan \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}}{\cos \theta_i} \right), \quad \delta_{r,p} = -2 \arctan \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}}{n_{21}^2 \cos \theta_i} \right) \quad (2.19)$$

§ 2.8 折射时的相位变化

入射光不发生全反射时，由菲涅尔定律， $t_s, t_p \in (0, \frac{2n_i}{n_i+n_t}) \subset \mathbb{R}$ ，恒为正实数，因此相位不发生任何变化。当入射光发生全反射时，折射光（透射光）以隐失波的形式存在，我们前面已经提过，隐失波同时含有横波纵波成分，它与入射光不再是同一种波，此时谈论相位变化自然没有意义。

§ 2.9 倒逆关系

如图 2.5，考虑光路可逆性，假设反射光、折射光振幅不变而方向置反，则合成出的光也应是原来的入射光（左下角合成后为 0），得到斯托克斯倒逆关系：

$$r' + r = 1, \quad tt' + rr' = 1 \quad (2.20)$$

由于没有涉及电场的方向，上式对 s 波、 p 波均成立，可以角标同时为 s ，也可以角标同时为 p 。

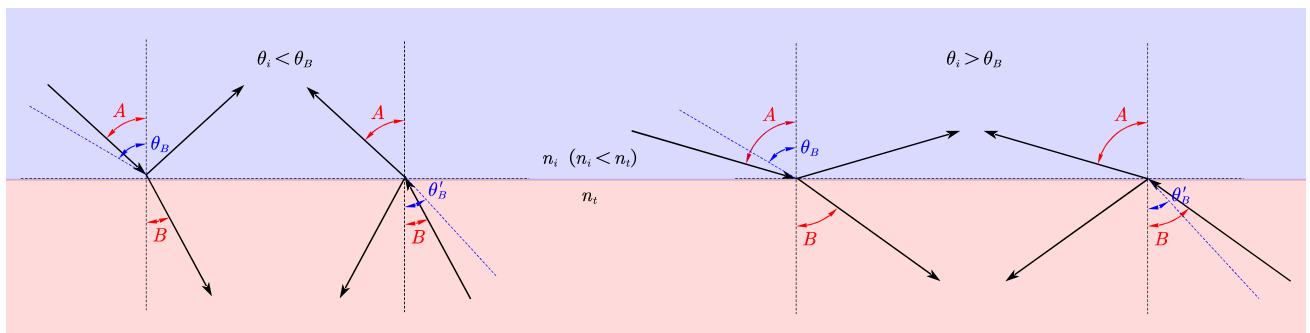


图 2.5: 光路可逆性下的振幅与能量系数

保持各角度不变，结合菲涅尔公式，可得对称前后（到逆前后）的各物理量变化：

$$r'_s = -r_s, \quad r'_p = -r_p \quad (2.21)$$

$$t'_s = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \cdot t_s, \quad t'_p = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \cdot t_p \quad (2.22)$$

$$R_s, R_p, R, T_s, T_p, T \text{ 均不变} \quad (2.23)$$

式中的 n_i 、 n_t 、 θ_i 和 θ_t 都是倒逆之前的原始值。

§ 2.10 章末总结

本章的所有结论基于电磁场的边界条件和麦克斯韦方程组，由菲涅尔定律推导而来，从波的角度揭示了光在反射折射时发生的变化，包括振幅、相位、能量、位移等关系。

$$\text{反射波: } \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{r,s} + \mathbf{E}_{r,p} = r_s \mathbf{E}_{i,s} + r_p \mathbf{E}_{i,p}, \quad r \in \mathbb{C} \quad (2.24)$$

$$\text{透射波: } \mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{t,s} + \mathbf{E}_{t,p} = t_s \mathbf{E}_{i,s} + t_p \mathbf{E}_{i,p}, \quad t \in \mathbb{R}, \theta_i < \theta_C \quad (2.25)$$

$$\text{反射系数: } \begin{cases} r_s = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}} \\ r_p = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t} = \frac{n_{ti}^2 \cos \theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}{n_{ti}^2 \cos \theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}} \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\text{透射系数: } (-r_s) + t_s = 1, \quad r_p + \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \cdot t_p = 1 \quad (2.27)$$

$$\text{能量关系: } \begin{cases} R = \frac{1}{2}(R_s + R_p), \quad R_s = |r_s|^2, \quad R_p = |r_p|^2 \\ T = \frac{1}{2}(T_s + T_p), \quad T_s = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \cdot t_s^2, \quad T_p = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \cdot t_p^2 \\ R + T = 1, \quad R_s + T_s = 1, \quad R_p + T_p = 1 \\ \Phi_{e,r} = R \Phi_{e,i}, \quad \Phi_{e,t} = T \Phi_{e,i} \end{cases} \quad (2.28)$$

$$s \text{ 波反射相位增量: } \delta_{r,s} = \begin{cases} -\pi, & n_i < n_t \\ \begin{cases} 0, & \theta_i \in (0, \theta_C) \\ -2 \arctan \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}}{\cos \theta_i} \right), & \theta_i > \theta_C \end{cases}, & n_i > n_t \end{cases} \quad (2.29)$$

$$p \text{ 波反射相位增量: } \delta_{r,p} = \begin{cases} \begin{cases} 0, & \theta_i \in (0, \theta_B) \\ -\pi & \theta_i \in (\theta_B, \frac{\pi}{2}) \end{cases}, & n_i < n_t \\ \begin{cases} -\pi, & \theta_i \in (0, \theta_B) \\ 0, & \theta_i \in (\theta_B, \theta_C) \\ -2 \arctan \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}}{n_{ti}^2 \cos \theta_i} \right), & \theta_i \in (\theta_C, \frac{\pi}{2}) \end{cases}, & n_i > n_t \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\text{隐失波: } \mathbf{E}_t = (e^{-\beta y} \mathbf{E}_{t,0}) \cdot e^{i(\frac{\sin \theta_i}{n_{ti}} k_i x - \omega t)}, \quad \beta = k_i \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2} = \frac{2\pi}{\lambda_i} \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}, \quad \delta = \frac{1}{\beta} \quad (2.31)$$

$$\text{Goos-Hanchen Shift: } \Delta x = 2\delta \tan \theta_i = \frac{2 \tan \theta_i}{k_i \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}} = \frac{\lambda_i \tan \theta_i}{\pi \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}} \quad (2.32)$$

$$\text{倒逆关系: } \begin{cases} r'_s = -r_s, \quad r'_p = -r_p \\ t'_s = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \cdot t_s, \quad t'_p = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \cdot t_p \\ R_s, R_p, R, T_s, T_p, T \text{ 均不变} \end{cases} \quad (2.33)$$

在下一页中给出了上面结论的相关图像。图 2.6^① 展示了反射折射光的振幅 r_s, r_p, t_s, t_p 、能量 R_s, R_p, R 随入射角 θ_i 的变化。图 2.7^② 展示了反射光的 s 分量与 p 分量的相位增量 $\delta_{r,s}, \delta_{r,p}$ 随入射角 θ_i 的变化。特别地，当图 2.7 (b) 中 $\theta_i > \theta_C$ 时，发生全（内）反射，此时 $r_s, r_p, t_s, t_p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ，图中展示的是它们的模长，即 $|r_s|, |r_p|, |t_s|, |t_p|$ 。图 2.8^③ 展示了隐失波穿透深度 δ 和 GH Shift Δx 随入射角 θ_i 的变化。

^①源码见附录 B.2

^②源码见附录 B.3

^③源码见附录 B.4

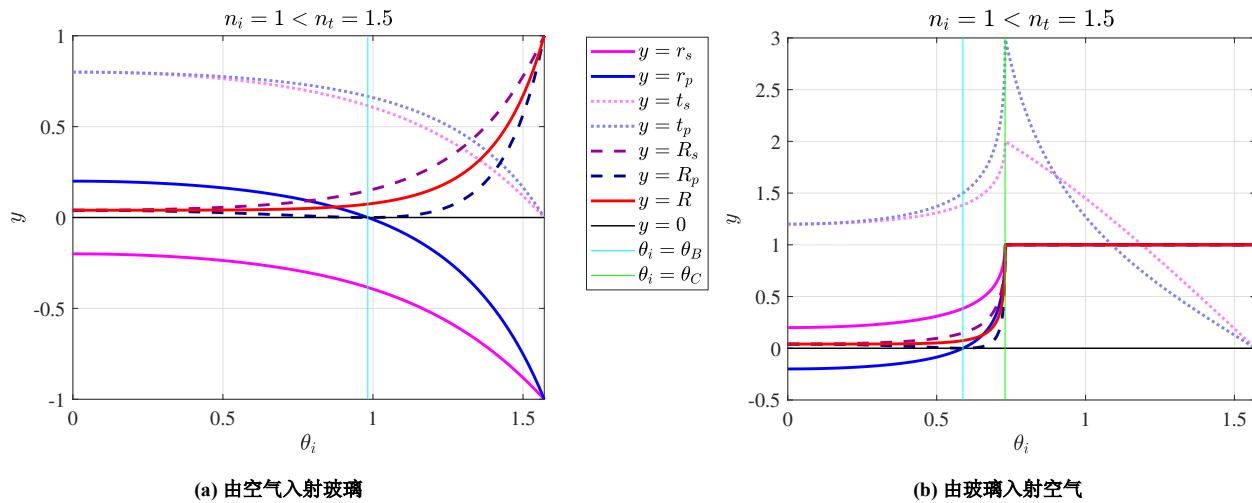


图 2.6: 反射折射光的振幅与能量变化

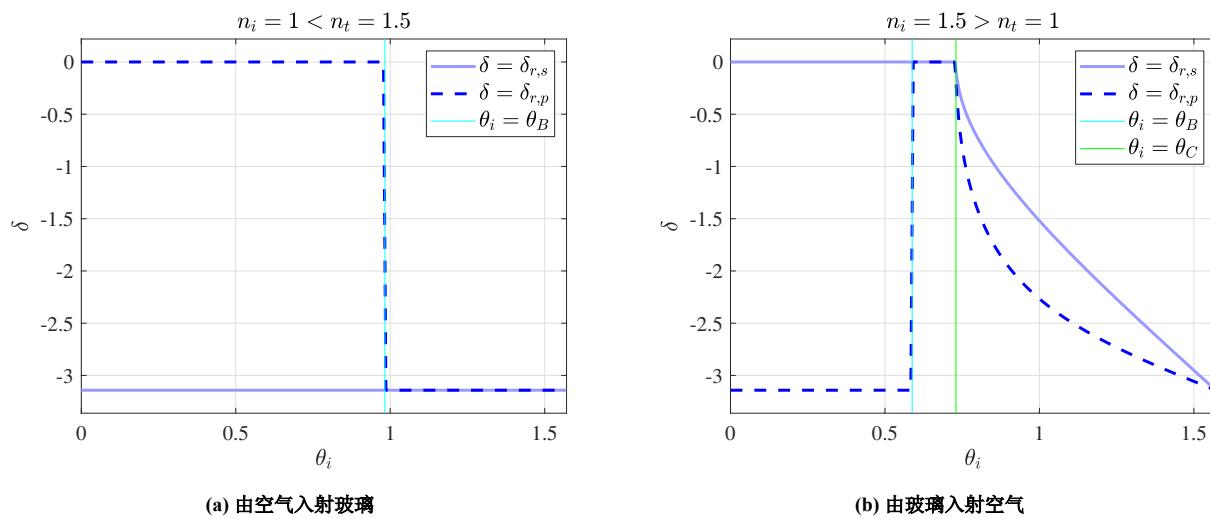


图 2.7: 反射光 s 分量与 p 分量的相位增量

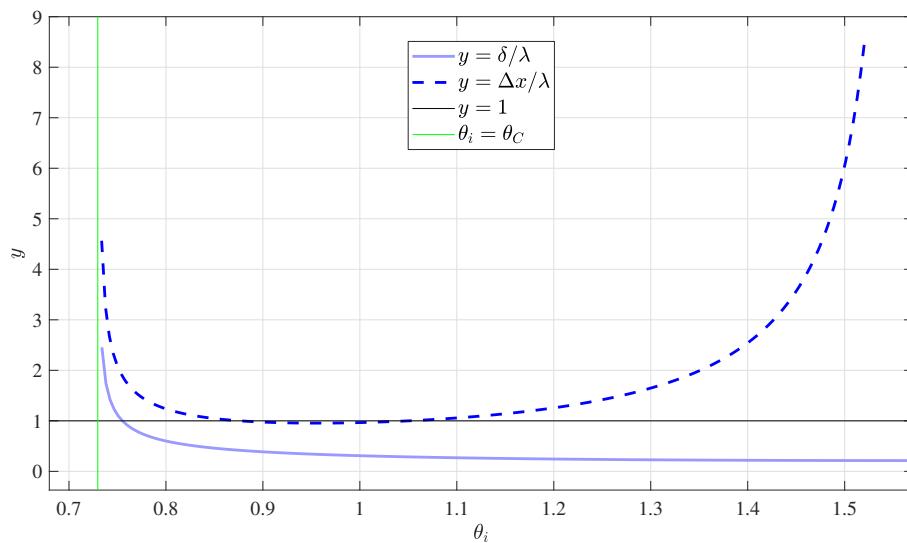


图 2.8: 隐失波穿透深度与 GH Shift (玻璃入射空气)

第3章 光的干涉

通常将平面波与球面波^①是光波的基元，当两个光源（或两束光波）间存在某种关联，波的叠加会引起强度的重新分布，若相互叠加的波满足某些特定条件，使得叠加后产生了稳定的强度分布，则称发生了光的干涉。

换句话说，研究干涉现象，就是讨论当两个或多个（光）波在空间中的某区域相遇时，它们如何相互叠加，会产生怎样的新波动现象，了解各个波的特性（振幅、频率、相位、波的类型等）如何影响叠加后的波的性质。

§3.1 叠加原理

只要波在空间中某点相遇，就会发生叠加，但不一定会产生干涉。也就是说，叠加是无条件的，干涉则要求形成稳定的、新的强度分布。

回想波动方程^②，它的一个重要特性是：方程是线性的。因此，如果 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ 各自是波动方程的解，那么它们的任意线性组合也是方程的解，即：

$$\psi = \sum a_i \psi_i \quad (3.1)$$

这个性质称为叠加原理，它表明：介质中任何一点的合扰动是各个单独波组分的代数和。另外，需要注意，叠加原理仅在均匀、线性、各向同性的介质中成立，有极大振幅的波（能量极大），无论是纵波（声波）或横波（电磁波），都可以产生非线性的效应，此时叠加原理不再适用。

在许多情况下，无需考虑光波的矢量性，例如多个光波的电场方向都始终在一条直线上时，可以将电场 E 处理为具有正负的标量 E 。本章我们研究的都是基于上述处理的光波，这表明它们的传播方向都在同一平面内，这样即降低了讨论的难度，又具有相当高的普适性和推广性（利用旋转对称性或平移对称性）。

§3.2 同频率光波的干涉

3.2.1 两个同频波源的干涉

两源干涉原理：

现在，我们讨论均匀介质的两个波源（频率相同）的干涉情况，为了提高普适性，我们并不事先假设波源的类似，它可以是平面波、球面波或柱面波。设两波源分别为 S_A, S_B ，波函数分别为 ψ_A, ψ_B ，不妨假设它们都沿各自的正向传播，借助相矢量的思想^③，将位矢 x （和初相位 ε ）分离后，它们的波函数可写为：

$$E_A = E_{A,0} \cdot e^{i(-\omega t + \alpha_A)}, \quad E_B = E_{B,0} \cdot e^{i(-\omega t + \alpha_B)} \quad (3.2)$$

其中 $\alpha_A = \alpha_A(x)$, $\alpha_B = \alpha_B(x)$ 是位矢的函数， $E_{A,0}, E_{B,0}$ 可能是位矢的函数。对于平面中任意一点 P ，合扰动为：

$$E = E_A + E_B = E_{A,0} \cdot e^{i(-\omega t + \alpha_A)} + E_{B,0} \cdot e^{i(-\omega t + \alpha_B)} \quad (3.3)$$

^① 即平面电磁波与球面电磁波，详见附录 A.6，也可参考 知乎：球面光波与平面光波 和 知乎：高斯光束，平面波，球面波三者间有什么关系

^② 详见附录 A.5

^③ 详见附录 A.4

作数学上的处理，得到合扰动：

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t + \alpha)} \quad (3.4)$$

$$E_0 = \sqrt{E_{A,0}^2 + E_{B,0}^2 + 2E_{A,0}E_{B,0} \cos(\alpha_A - \alpha_B)}, \quad \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{E_0} (E_{A,0} \sin \alpha_A + E_{B,0} \sin \alpha_B) \\ \cos \alpha = \frac{1}{E_0} (E_{A,0} \cos \alpha_A + E_{B,0} \cos \alpha_B) \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin \left[\frac{1}{E_0} (E_{A,0} \sin \alpha_A + E_{B,0} \sin \alpha_B) \right] & , \cos \alpha \geq 0 \\ \pi - \arcsin \left[\frac{1}{E_0} (E_{A,0} \sin \alpha_A + E_{B,0} \sin \alpha_B) \right] & , \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

E_0 与 α 的取值可以由相矢量相加来理解。在给定的位置 P , A 波的相矢量为 $E_{A,0}\angle\alpha_A$, B 波的相矢量为 $E_{B,0}\angle\alpha_B$, 在复平面中将它们相加 (平行四边形法则), 即得到合扰动的相矢量 $E_0\angle\alpha$, 这样, E_0 的大小就是合相矢量的模长, α 是合相矢量与 x 轴的夹角。

在光学中, 常用干涉条纹对比度 γ 来描述干涉情况是否明显, 它定义为:

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{E_{0,\max}^2 - E_{0,\min}^2}{E_{0,\max}^2 + E_{0,\min}^2} \quad (3.7)$$

其中 I 表示光强, 也即光通量密度。在两波源产生的干涉中, 有:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\alpha_A - \alpha_B) \quad (3.8)$$

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}, \quad I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (3.9)$$

则对比度为:

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt{\frac{I_1}{I_2}} + \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{E_{A,0,\max}^2}{E_{B,0,\max}^2}} + \sqrt{\frac{E_{B,0,\max}^2}{E_{A,0,\max}^2}}} \quad (3.10)$$

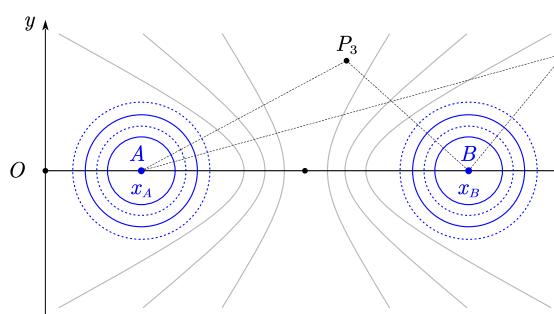
因此, 两波源电场的振幅越接近, 干涉对比度越高, 也就越明显。

示例一：两球面波

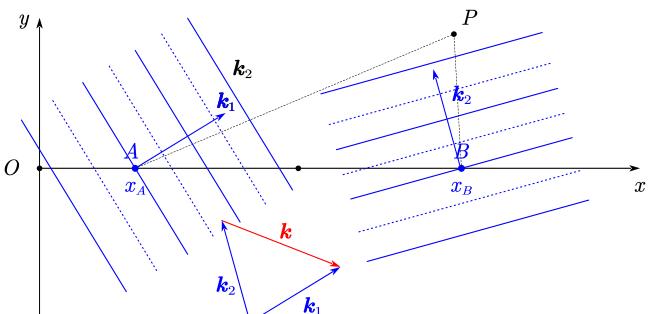
如图 3.1 (a), 考虑两个相同的球面波源在 $x-y$ 平面上的干涉情况, 相同的波源 (理想单频波源) 保证了两束波的物理参数相同, 如波长、频率和振幅等。设两波源位置分别为 x_{OA} , x_{OB} , 简记 $r_1 = |\mathbf{x}_{AP}|$ 和 $r_2 = |\mathbf{x}_{BP}|$, 则波函数可写为:

$$E_A = \frac{A}{r_1} \cdot e^{i(-\omega t + kr_1 + \varepsilon_A)}, \quad E_{A,0} = \frac{A}{r_1}, \quad \alpha_A = kr_1 + \varepsilon_A \quad (3.11)$$

$$E_B = \frac{B}{r_2} \cdot e^{i(-\omega t + kr_2 + \varepsilon_B)}, \quad E_{B,0} = \frac{B}{r_2}, \quad \alpha_B = kr_2 + \varepsilon_B \quad (3.12)$$



(a) 两球面波源或两柱面波源



(b) 两平面波源

图 3.1: 两个同频波源的干涉

方便起见，不妨令 $\varepsilon_A = \varepsilon_B$ ，则合扰动为：

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t + \alpha)}, \quad E_0 = \sqrt{\frac{A^2}{r_1^2} + \frac{B^2}{r_2^2} + \frac{2AB}{r_1 r_2} \cos(k(r_1 - r_2))} \quad (3.13)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{r_1} \sin \alpha_A + \frac{B}{r_2} \sin \alpha_B \right), \quad \cos \alpha = \frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{r_1} \cos \alpha_A + \frac{B}{r_2} \cos \alpha_B \right) \quad (3.14)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin \left[\frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{r_1} \sin \alpha_A + \frac{B}{r_2} \sin \alpha_B \right) \right] & , \cos \alpha \geq 0 \\ \pi - \arcsin \left[\frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{r_1} \sin \alpha_A + \frac{B}{r_2} \sin \alpha_B \right) \right] & , \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

对于可见光，其波长在 nm 级别，空间频率 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 极高。为方便可视化，我们取波长 $\lambda = 0.4\pi$ m，即 $k = 5$ 的微波，并令振幅系数 $A = 50$, $B = 50$ ，作出图像。图 3.2^① 展示了单个波源在平面上的振荡情况 ($t = 0$)。对两波源的干涉，我们令两波源位置分别为 $(-2, 0)$, $(2, 0)$ ，作出图像，图 3.3^② 展示了它们的干涉情况 ($t = 0$)。单波源和双波源随时间的振动详见 GIF 动图链接 <https://www.123pan.com/s/0y0pTd-QwKj3>。

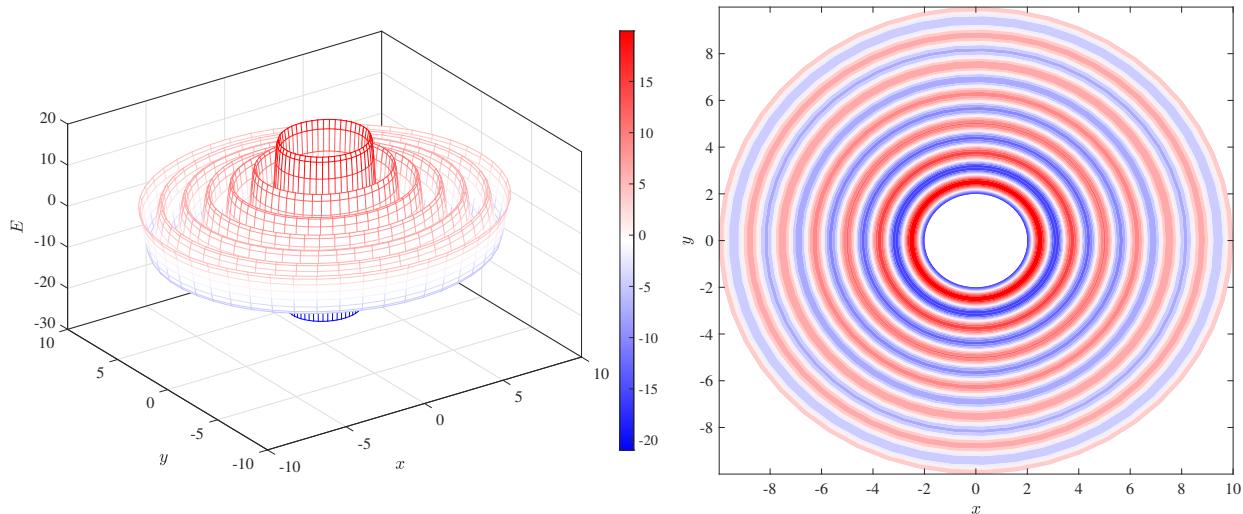


图 3.2: 单个球面波源在平面上的振荡情况

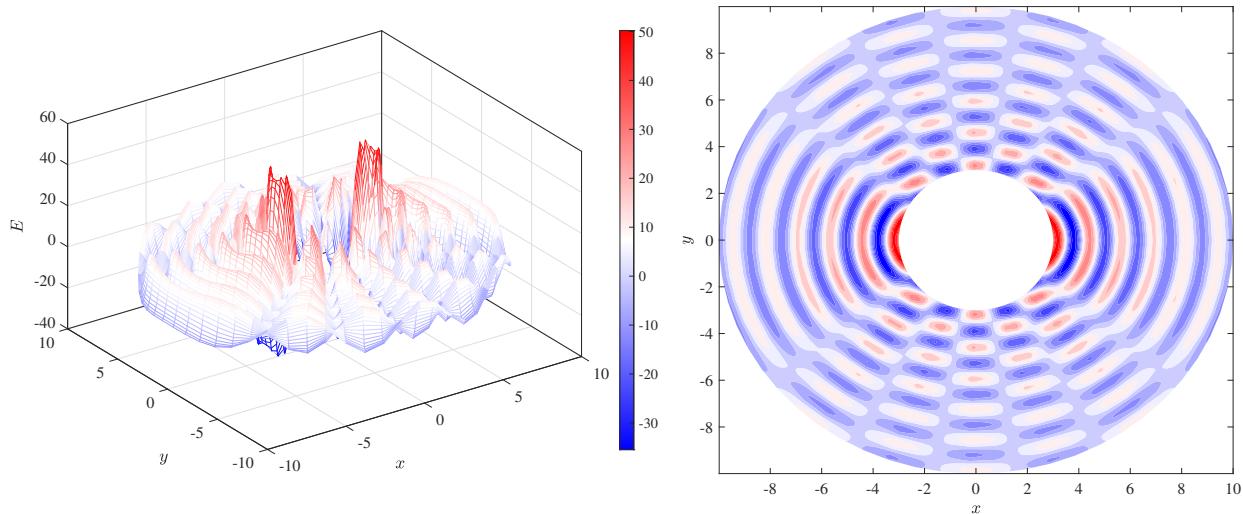


图 3.3: 两个球面波源在平面上的干涉情况

^① 源码见附录 B.5

^② 源码见附录 B.6

当点 P 离波源极远时, 近似有 $\frac{r_1}{r_2} = 1$ (这与近似有 $r_1 - r_2 = 0$ 不同), 将距离记为 r , 则振幅的位置分布为 $E_0 = \frac{1}{r} \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(k(r_1 - r_2))}$ 。若可以认为 $\frac{1}{r}$ 近似不变, 则此时, 具有相同振幅大小的点, 等价于 $\cos(k(r_1 - r_2))$ 具有相同的值, 也即:

$$|r_1 - r_2| = \frac{1}{k}(\theta + 2\pi n), \quad \theta \in [0, 2\pi), n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

对每个给定的 n , 上述方程表示一条双曲线 (焦点为两波源), 因此上述方程构成一个双曲线族 (空间中构成旋转双曲面族), 如图 3.1 (a) 中的灰色曲线所示。特别地, 令 $\theta = 0$ 可以得到最大振幅对应的双曲线族, 令 $\theta = \pi$, 得到最小振幅对应的双曲线族。

由于球面波的旋转对称性, 只需绕 x 轴旋转一圈, 即可得到整个空间上的振幅分布情况, 也即两波源干涉情况。振幅的位置分布是较为重要的内容, 在后文的干涉实验部分, 我们将再次讨论这个问题。

示例二: 两柱面波

考虑两柱面波的干涉情况, 其中柱体的高与 x - y 平面垂直。容易发现, 这与球面波在 x - y 平面的行为是相同的, 仅需修改波源的振幅衰减系数。同样地, 不妨令初相位 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, 得到合扰动:

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t + \alpha)}, \quad E_0 = \sqrt{\frac{A^2}{r_1} + \frac{B^2}{r_2} + \frac{2AB}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos(k(r_1 - r_2))} \quad (3.17)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{\sqrt{r_1}} \sin \alpha_A + \frac{B}{\sqrt{r_2}} \sin \alpha_B \right), \quad \cos \alpha = \frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{\sqrt{r_1}} \cos \alpha_A + \frac{B}{\sqrt{r_2}} \cos \alpha_B \right) \quad (3.18)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin \left[\frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{\sqrt{r_1}} \sin \alpha_A + \frac{B}{\sqrt{r_2}} \sin \alpha_B \right) \right] & , \cos \alpha \geq 0 \\ \pi - \arcsin \left[\frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{\sqrt{r_1}} \sin \alpha_A + \frac{B}{\sqrt{r_2}} \sin \alpha_B \right) \right] & , \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

由于柱面波的平移对称性, 只需沿 z 轴进行平移, 即可得到整个空间上的干涉情况。在平面内的其它性质与球面波类似。

示例三: 两平面波

考虑两平面波的干涉情况, 如图 3.1 (b), 平面波函数为:

$$E_A = E_{A,0} \cdot e^{i(-\omega t + kr_1 + \varepsilon_A)}, \quad \alpha_A = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_{AP} + \varepsilon_A \quad (3.20)$$

$$E_B = E_{B,0} \cdot e^{i(-\omega t + kr_2 + \varepsilon_B)} \quad \alpha_B = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_{BP} + \varepsilon_B \quad (3.21)$$

令 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, 得到合扰动:

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t + \alpha)} \quad (3.22)$$

$$E_0 = \sqrt{E_{A,0}^2 + E_{B,0}^2 + 2 \cos(\Delta\alpha)}, \quad \Delta\alpha = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_B - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_A) \quad (3.23)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{E_0} [E_{A,0} \sin(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_{AP}) + E_{B,0} \sin(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_{BP})] \quad (3.24)$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{E_0} [E_{A,0} \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_{AP}) + E_{B,0} \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_{BP})] \quad (3.25)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin \left[\frac{1}{E_0} (E_{A,0} \sin \alpha_A + E_{B,0} \sin \alpha_B) \right] & , \cos \alpha \geq 0 \\ \pi - \arcsin \left[\frac{1}{E_0} (E_{A,0} \sin \alpha_A + E_{B,0} \sin \alpha_B) \right] & , \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

由于 $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_A$ 和 $\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_B$ 是定值, 而 $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ 构成一个新的传播矢量, 因此合成后的波仍是平面波 (但不均匀, 振幅是位置的函数), 或者说每个等相面仍构成一个平面。

类似地, 由平面波的平移对称性, 沿 z 轴平移即可得全空间的合成情况。

3.2.2 多个同频波源的干涉

上面的结论容易推广到任意 n 个扰动叠加，即：

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t + \alpha)} \quad (3.27)$$

$$E_0 = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n E_{i,0} \sin \alpha_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n E_{i,0} \cos \alpha_i\right)^2} \quad (3.28)$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n E_{i,0}^2 + \sum_{1 <= i < j <= n} 2E_{i,0}E_{j,0} \cos(\alpha_i - \alpha_j)}, \quad (3.29)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{E_0} \sum_{i=1}^n E_{i,0} \sin \alpha_i, \quad \cos \alpha = \frac{1}{E_0} \sum_{i=1}^n E_{i,0} \cos \alpha_i \quad (3.30)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{1}{E_0} \sum_{i=1}^n E_{i,0} \sin \alpha_i\right) & , \cos \alpha \geq 0 \\ \pi - \arcsin\left(\frac{1}{E_0} \sum_{i=1}^n E_{i,0} \cos \alpha_i\right) & , \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

$$I = \sum_{i=1}^n I_i + \sum_{1 <= i < j <= n} 2\sqrt{I_i I_j} \cos(\alpha_i - \alpha_j) \quad (3.32)$$

§ 3.3 不同频率光的干涉（略）

§ 3.4 产生干涉的前提条件

前面我们已经提到，在叠加（或干涉）问题中，电场的振幅通常只是位置的函数，而与时间无关，其实这也是观察到干涉图样的必要条件。观察干涉图样，无非是用照片（视频等同于照片）、人眼、辐射计以及类似的传感器，它们都有一定的“曝光时间”，我们只能观察到在曝光时间内，光强或辐射强度的平均值。其中 τ 为仪器的曝光时间。可见光的简谐周期 $T = \frac{\lambda}{v}$ 在 10^{-15} s 级别，因此曝光时间 τ 通常远大于 T ，于是我们只能观察到平均光强，而无法观察到光强的瞬时变化，即：

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos(\Delta\alpha) dt = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \langle \cos \Delta\alpha \rangle_\tau \quad (3.33)$$

如果 $\Delta\alpha$ 与时间无关（这对波列长度有要求），或者在曝光时间内几乎保持不变，那么就能得到（观察到）稳定的干涉图样。否则恒有 $I = I_1 + I_2$ ，是平凡的叠加，称为非相干叠加。另外，若两波源的振动方向垂直，电场也仅是平凡的叠加，而不会产生干涉。因此，干涉现象要求两波源振动方向不能垂直。

以能发射单频波的普通光源为例，光是由光源中的原子发生能级跃迁时发出的，原子跃迁时发出的波列长都有限，且初相位随机，持续时间 τ_0 通常短于 10 ns，在此时段内，光场振荡约百万次。对于探测设备来讲，10 ns 通常极短，远远小于曝光时间，也即 $\tau \ll \tau_0 \ll T$ 。

现在假设光源的单色性极好，考虑被分波前或分振幅而导致具有光程差的两束相干光的叠加，此时，相位差 $\Delta\alpha$ 随时间 t 的变化仅取决于波列长度 $L_0 = c\tau_0$ 。设两相干光的光程差为 ΔL ，其小于波列长度 L_0 时，同一波列中的重合部分占比为 $\frac{L_0 - \Delta L}{L_0}$ ，也即实际相干时间占比为 $\frac{L_0 - \Delta L}{L_0}$ ；当 $\Delta L \geq L_0$ 时，由波列初相位的随机性，在曝光时间内干涉项的时间平均为 0（积分值为 0），不存在干涉现象。综合考虑，仅有重合部分对干涉项有贡献，得到条纹对比度上限 γ_{\max} ：

$$\gamma_{\max} = \begin{cases} \left(\frac{L_0 - \Delta L}{L_0}\right)^2 & , \Delta L \in [0, L_0) \\ 0 & , \Delta L \in [L_0, \infty) \end{cases} \implies \text{产生干涉的前提条件: } \Delta L < L_0 = c\tau_0 \quad (3.34)$$

并且，随着 $\Delta L \in [0, L_0]$ 的增大，相干占比降低，干涉项逐渐向 0 靠拢，条纹对比度不断降低，直至完全消失。这一结论很好的解释了许多干涉实验中央对比度高而边缘对比度低，并且干涉条纹仅在有限范围内存在的现象（例如杨氏双缝干涉）。

我们称波列持续时间 τ_0 为相干时间，波列长度 $L_0 = c\tau_0$ 为相干长度。上面讨论了观察干涉的原理，以及波列长度对干涉性的影响（这是产生干涉的必要条件）。在 3.8 节“光场的空间相干性与时间相干性”，我们还会讨论光源的空间相干性与时间相干性，前者与光源的线度有关（例如发光宽度），后者与光源的发光光谱有关（例如多色光源）。

§ 3.5 分波前干涉

波前，即波面，也称波阵面或等相面。“分波前”干涉，是依据惠更斯原理，将一个波面分为两个（或多个）波面，最终产生干涉现象。

3.5.1 杨氏双缝干涉实验

杨氏双缝干涉装置如图 3.4 (a)， S 为一狭缝， S_1 和 S_2 为一对狭缝，最右侧的屏为观察屏。由惠更斯原理，一平面波（可借助激光器和透镜产生）传播到狭缝 S 时，以柱面波形式出射，在遇到双缝屏时，分化为两个柱面波继续前进，从而产生干涉，并在观察屏上显现出来。与杨氏实验原理类似的有洛埃德镜实验、菲涅尔双棱镜、菲涅尔双面镜等，它们的 GIF 动图见链接 <https://www.123pan.com/s/0y0pTd-5wKj3>。

如果杨氏实验中双缝屏上的双缝对称分布，一般可认为分化的两个柱面波具有相同的初相位和振幅。装置中各参量的典型值是：

$$d = 100 \mu\text{m}, R = 5 \text{ cm}, D = 1 \text{ m}, L = 4 \text{ cm}, D \gg L \gg d \quad (3.35)$$

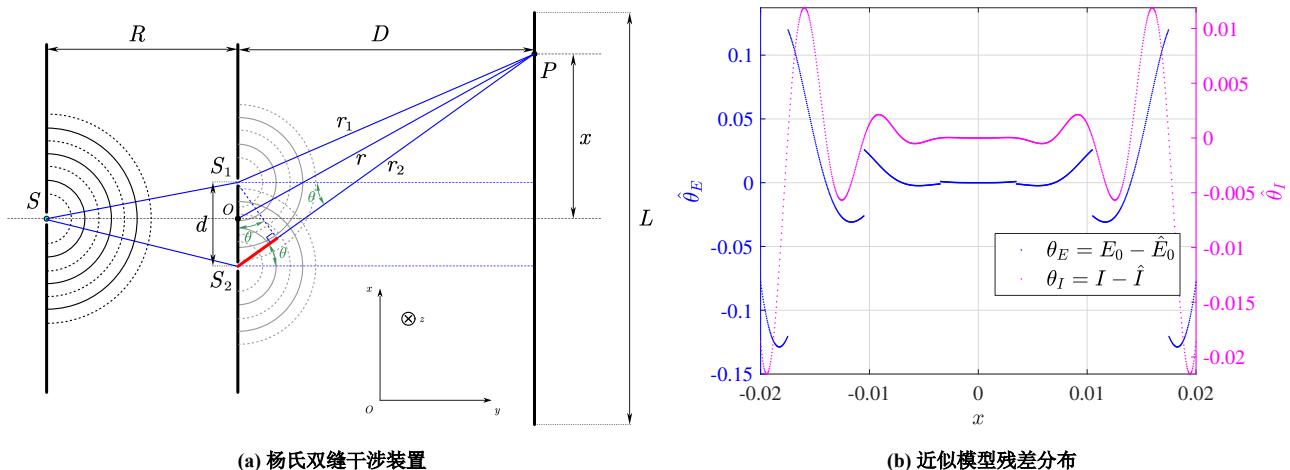


图 3.4: 杨氏双缝干涉装置与近似模型残差分布

设通过双缝屏后，两柱面波的振幅系数相同，都为 A ，真空介电常量 $\varepsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ ，真空磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ ，则两波的光强度分别为

$$I_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{1,0}^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{A^2}{r_1}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{A^2}{r_2} \quad (3.36)$$

那么，接受屏上的振幅和强度分布为：

$$E_0 = A \sqrt{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{2}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)\right)}, \quad I = A^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)\right)}{\sqrt{r_1 r_2}} \right]} \quad (3.37)$$

装置参数在典型值附近时，可以有近似：

$$\frac{r_1}{D} = \frac{r_2}{D} = 1, \quad r_2 - r_1 = \frac{d}{\sin \theta} = \frac{d}{\sin \theta} = \frac{xd}{D}, \quad I_1 = I_2 \quad (3.38)$$

得到近似后的振幅和强度分布如下，其中 $\Delta x = \frac{D}{d}\lambda$ 称为条纹间距。

$$E_0(x) = \frac{\sqrt{2}A}{\sqrt{D}} \cdot \sqrt{1 + \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda D}x\right)} = \frac{\sqrt{2}A}{\sqrt{D}} \cdot \sqrt{1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{\Delta x}\right)} \quad (3.39)$$

$$I(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{A^2}{D} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda D}x\right)\right] = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{A^2}{D} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{\Delta x}\right)\right] \quad (3.40)$$

图 3.5^① 展示了未近似和近似时，振幅、光强在接受屏上的分布情况，图 3.4 (b) 是近似与未近似模型的残差分布，其中装置参数采取典型值。计算得到一些误差参数（对横坐标均匀离散 1000 个点）如下^②：

$$\begin{aligned} 1 - R_{E_0}^2 &= 0.0000030505, & 1 - R_I^2 &= 0.0000024290 \\ 1 - R_{\text{adj}, E_0}^2 &= 0.0000030536, & 1 - R_{\text{adj}, I}^2 &= 0.0000024314 \\ MAPE_{E_0} &= 0.0020522069, & MAPE_I &= 0.00415721554 \\ MyMAPE_{E_0} &= 0.0017294036, & MyMAPE_I &= 0.0010723717 \\ RMSE_{E_0} &= 0.0534542000, & RMSE_I &= 0.0071984799 \\ fitness_{\text{adj}, E_0} &= 0.0534543632, & fitness_{\text{adj}, I} &= 0.0071984975 \\ SAAE_{E_0} &= 0.0005185186, & SAAE_I &= 0.0006493885 \end{aligned} \quad (3.41)$$

由图 3.4 (b)，图 3.5 和列出的误差参数可以看到，近似效果很好。

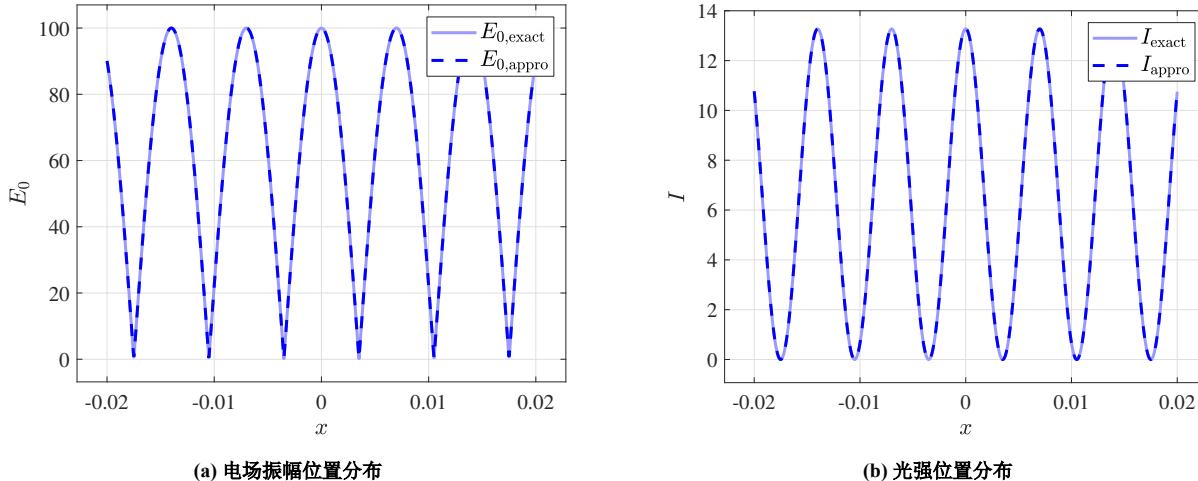


图 3.5: 近似模型与非近似模型的比较

杨氏双缝干涉的特点：

(1) 非定域干涉：在干涉场中离双孔不太近也不太远的区域处处有干涉

(2) 自相干：相干光波来自同一波源

(3) 定态干涉：振幅（或强度）在干涉场中的分布仅与位置有关，与时间无关

白光光源与其他补充内容详见 [PHY C15: Double Slit Interference](#)、[University of Louisville: Double Slit Interference](#) 以及 [知乎：双缝干涉实验](#)，我们不多赘述。从另一个角度，也可以利用双曲线的定义杨氏干涉的精确模型 + 近似模型，详见 [知乎：杨氏干涉的条纹间距](#)。

^①图 3.4 (b) 与图 3.5 源码见附录 B.7

^②这些误差参数的定义详见 [YiDingg > Notes > Else > Goodness of Fit](#)

3.5.2 杨氏实验中光源位置和宽度对干涉条纹的影响

为提高分析效率，此节的推导都采用近似模型。接受屏上相邻明（暗）条纹的间距 Δx 为：

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{d} \quad (3.42)$$

取 $\lambda = 700.0 \text{ nm}$ 的红光， $\Delta x = 7 \text{ mm}$ ，可被人眼分辨。称 $\frac{\Delta x}{2}$ 为条纹宽度，此时条纹宽度为 3.5 mm 。

下面依次讨论光源位置、光源宽度对干涉条纹的影响。先考虑理想点光源的微小移动引起的干涉条纹移动。当点光源位于中轴线上时，0 级明纹也在轴上，假设光源 S 向下移动距离 $\delta_s > 0$ ，也即向上移动 $(-\delta_s)$ ，在近似条件 3.38 下，以及 $R \gg d$ 时近似有 $R_1 - R_2 = \frac{d(-\delta_s)}{R}$ ，得到 0 级明纹向上移动的距离 δ_x 如下，其中负号表示两者移动方向相反。

$$\delta_x = -\frac{D}{R}\delta_s \quad (3.43)$$

实际光源并非是理想的点光源，而是有一定的光源宽度，虽然对干涉条纹位置影响不大，但会对条纹对比度产生明显的影响。理想点光源不在中央时，屏幕上的强度分布大小可以近似不变，仅是发生上下平移。记点光源位置为 δ_s ，在公式 3.39 中作映射 $x \rightarrow x - \delta_x$ ，并简记接受屏上的最大光强为 $I_{\max} = 2\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \cdot \frac{A^2}{r}$ ，简记 x 前的系数为 $\eta = \frac{2\pi}{\Delta x}$ ，得到新的强度分布：

$$I(x) = \frac{I_{\max}}{2} [1 + \cos(\eta(x - \delta_x))] = \frac{I_{\max}}{2} \left[1 + \cos\left(\eta x + \eta \frac{D}{R} \delta_s\right) \right] \quad (3.44)$$

$$= \frac{I_{\max}}{2} \left[1 + \cos(\eta x) \cos\left(\eta \frac{D}{R} \delta_s\right) - \sin(\eta x) \sin\left(\eta \frac{D}{R} \delta_s\right) \right], \quad \eta = \frac{2\pi}{\Delta x} \quad (3.45)$$

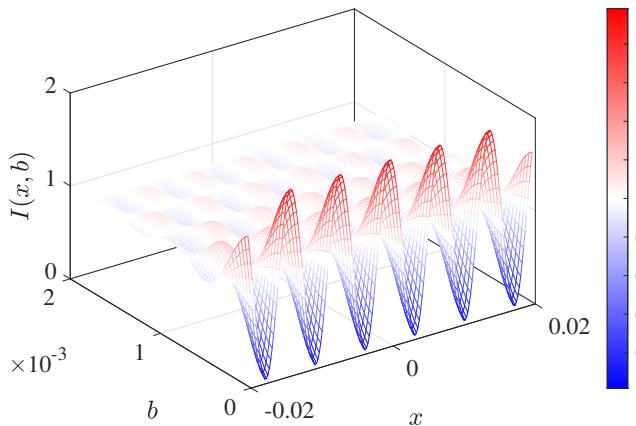
设光源在中央且宽度为 b （即发光区域在 $[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$ ），光源均匀发光（事实上这个条件比较苛刻，现实中的激光器无法做到，需要对光线进行处理），屏幕上的强度分布 $I(x, b)$ 和条纹对比度为：

$$I(x, b) = \frac{I_{\max}}{2b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[1 + \cos(\eta x) \cos\left(\eta \frac{D}{R} \delta_s\right) - \sin(\eta x) \sin\left(\eta \frac{D}{R} \delta_s\right) \right] d\delta_s \quad (3.46)$$

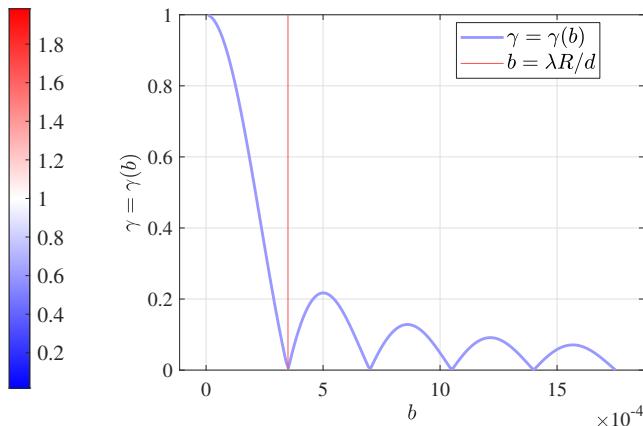
$$= \frac{I_{\max}}{2} \left[1 + \frac{\sin\left(\frac{\eta D}{2R} b\right)}{\frac{\eta D}{2R} b} \cdot \cos(\eta x) \right] = \frac{I_{\max}}{2} \left[1 + \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi d}{\lambda R} b\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{\Delta x}\right) \right] \quad (3.47)$$

$$\gamma = \gamma(b) = \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda R} b\right)}{\frac{\pi d}{\lambda R} b} \right| = \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi d}{\lambda R} b\right) \right| \quad (3.48)$$

强度分布 $I(x, b)$ 与干涉条纹对比度 $\gamma(b)$ 如图 3.6 所示^①，当 $b = \frac{\lambda R}{d}$ 时，条纹对比度第一次为 0，称为光源极限宽度 b_0 ，此时认为光源完全不相干。总之，对任意的光源线度 b 和双缝间距 d ，有限制 $bd < \lambda R$ 。



(a) 光强分布随光源宽度的变化



(b) 干涉条纹对比度随光源宽度的变化

图 3.6: 光源宽度对干涉条纹的影响

^① 源码见附录 B.8

§ 3.6 分振幅干涉

3.6.1 多光束薄膜干涉

如图 3.7 (a) 所示, 一入射光接近垂直入射到一薄膜时 ($\theta_i < \theta_B$), 发生多次反射、透射, 下面讨论其能量与干涉情况。

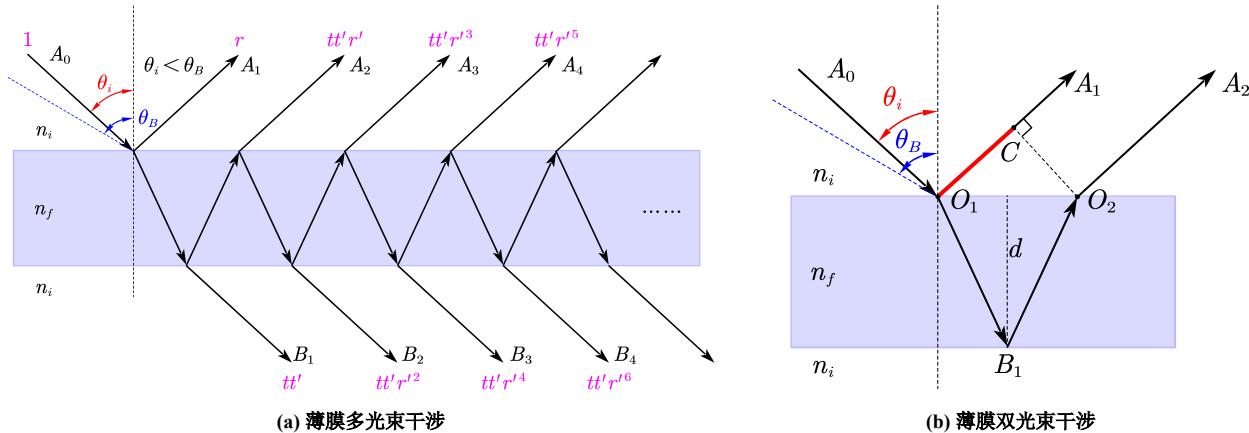


图 3.7: 薄膜干涉

由于没有发生全反射, 相位变化是平凡的 (透射无相变, 反射只能是 $-\pi$ 或零), 而反射光的相位变化已经包含在振幅反射系数 r 中了 (由其正负表示)。因此, 在分析多光束干涉时, 只需考虑各光 (有正负) 的振幅以及光程差, 处理波函数的表达式的叠加即可。

记相邻两束反射 (透射) 光的光程差为 Δl , 光程差带来的相位差为 δ (无需考虑反射相位突变, 因为它涵盖在了振幅的正负中), 由图 3.7 (b) 所示, 可求得:

$$\Delta l = l_2 - l_1 = 2n_f \cdot \overline{O_1 B_1} - n_i \cdot \overline{O_1 C} = \frac{2n_f d}{\cos \theta_f} - 2n_i \sin \theta_i \tan \theta_f d = 2n_f d \cos \theta_f \quad (3.49)$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_i} \Delta l = \frac{4\pi n_f d \cos \theta_f}{\lambda_i} \quad (3.50)$$

由公式 2.20 (斯托克斯倒逆关系), $r + r' = 1$, $tt' + rr' = 1$, 结合等比数列极限 ($n \rightarrow \infty$), 可得反射波的总振幅系数 r_A 、透射波的总振幅系数 t_B :

$$r_A = r + tt' r' e^{i\delta} (1 + r'^2 e^{i\delta} + r'^4 e^{2i\delta} + \dots) = r + \frac{tt' r' e^{i\delta}}{1 - r'^2 e^{i\delta}} = r \left(\frac{1 - e^{i\delta}}{1 - r^2 e^{i\delta}} \right) \quad (3.51)$$

$$t_B = tt' (1 + r'^2 e^{i\delta} + r'^4 e^{2i\delta} + \dots) = \frac{tt'}{1 - r'^2 e^{i\delta}} = \frac{1 - r^2}{1 - r^2 e^{i\delta}} \quad (3.52)$$

由于上述推导与角标 s 或 p 无关, 因此对 s 波和 p 波都成立。

也即得到:

$$r_{A,s} = \frac{\mathbf{E}_{r,s}}{\mathbf{E}_{i,s}} = r_s \left(\frac{1 - e^{i\delta}}{1 - r_s^2 e^{i\delta}} \right), \quad r_{B,p} = \frac{\mathbf{E}_{r,p}}{\mathbf{E}_{i,p}} = r_p \left(\frac{1 - e^{i\delta}}{1 - r_p^2 e^{i\delta}} \right) \quad (3.53)$$

$$t_{B,s} = \frac{\mathbf{E}_{t,s}}{\mathbf{E}_{i,s}} = \frac{1 - r_s^2}{1 - r_s^2 e^{i\delta}}, \quad t_{B,p} = \frac{\mathbf{E}_{t,p}}{\mathbf{E}_{i,p}} = \frac{1 - r_p^2}{1 - r_p^2 e^{i\delta}} \quad (3.54)$$

据此, 可以定义光学经过薄膜时的能量系数 $R_{F-P,s}$, $R_{F-P,p}$, $T_{F-P,s}$, $T_{F-P,p}$ (与菲涅尔公式中的能量系数

类似，但物理意义不同）：

$$R_{F-P,s} = |r_{A,s}|^2 = \frac{4R_s \sin^2 \frac{\delta}{2}}{(1 - R_s)^2}, \quad R_{F-P,p} = |r_{A,p}|^2 = \frac{4R_p \sin^2 \frac{\delta}{2}}{(1 - R_p)^2} \quad (3.55)$$

$$T_{F-P,s} = \frac{n_1 \cos \theta_1}{n_3 \cos \theta_3} |t_{B,s}|^2 = \frac{(1 - R_s)^2}{(1 - R_s \cos \delta)^2 + R_s^2 \sin^2 \delta} \quad (3.56)$$

$$T_{F-P,p} = \frac{n_1 \cos \theta_1}{n_3 \cos \theta_3} |t_{B,p}|^2 = \frac{(1 - R_p)^2}{(1 - R_p \cos \delta)^2 + R_p^2 \sin^2 \delta} \quad (3.57)$$

其中 $\theta_1 = \theta_3 = \theta_i$, $n_1 = n_3 = n_i$ 。角标 $F - P$ 指 Fabry-Perot Interferometer（法布里-珀罗干涉仪），是一种利用薄膜产生干涉现象的仪器。定义 $F_s = \frac{4R_s}{(1-R_s)^2}$, $F_p = \frac{4R_p}{(1-R_p)^2}$, 称为精细度，则上式可简写为：

$$R_{F-P,s} = \frac{F_s \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + F_s \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad R_{F-P,p} = \frac{F_p \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + F_p \sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad (3.58)$$

$$T_{F-P,s} = \frac{1}{1 + F_s \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad T_{F-P,p} = \frac{1}{1 + F_p \sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad (3.59)$$

$$\delta = \frac{4\pi n_f d \cos \theta_f}{\lambda_i}, \quad F_s = \frac{4R_s}{(1 - R_s)^2}, \quad F_p = \frac{4R_p}{(1 - R_p)^2} \quad (3.60)$$

其中 n_f 是薄膜的折射率，容易验证上式满足能量守恒。在实际操作中，基本都会选取接近垂直的入射光，此时 s 波 p 波（近似）具有相同的能量系数 $R = R_s = R_p$ ，因此又常写为下面的式子：

$$R_{F-P} = \frac{F \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad T_{F-P} = \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad F = \frac{4R}{(1 - R)^2}, \quad \delta = \frac{4\pi n_f d \cos \theta_f}{\lambda_i} \quad (3.61)$$

$T_{F-P} = T_{F-P}(F, \delta)$ 的图像如下所示^①， F 越大，透射光的对比度越高，在干涉现象中形成的条纹越明显，且 F 增大时，透射峰的宽度减小，亮条纹变细变锐利。

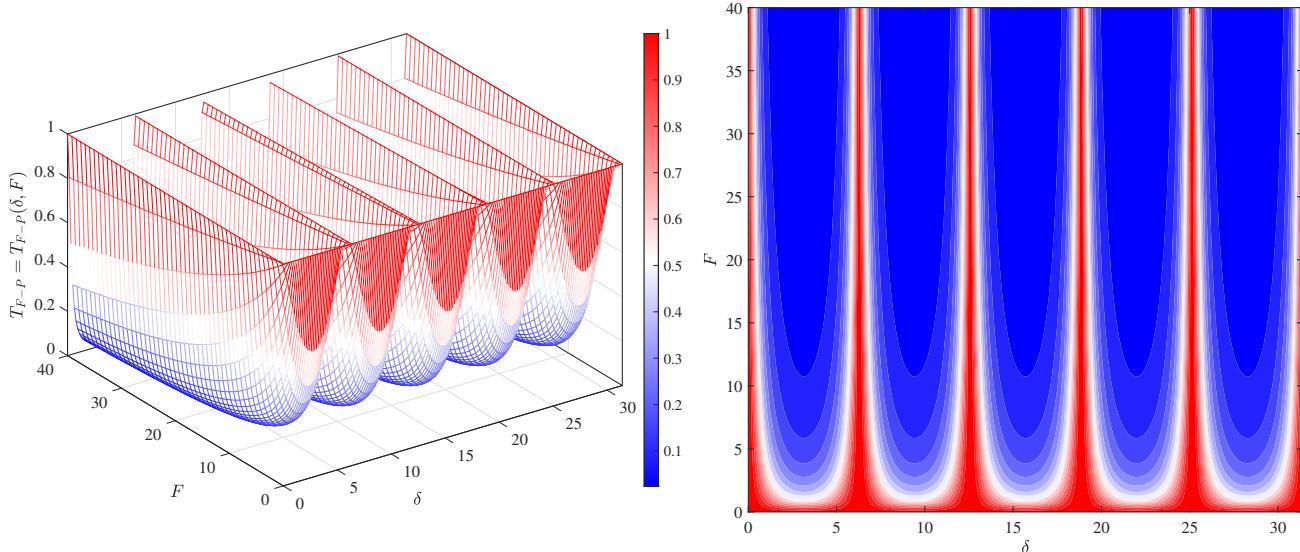


图 3.8: 精细度对透射率的影响

实际中常基于上面理论，设计出增透膜、增反膜等薄膜，实现光的选择性透射、反射。如果遇到，直接利用反射相位突变进行分析即可。

更多有关多光束薄膜干涉（法布里-珀罗干涉仪 Fabry-Perot Interferometer）的内容见 [知乎: Fabry-Perot Interferometer](#)，以及 [知乎: F-P 干涉仪](#)。

^①源码见附录 B.9

3.6.2 双光束薄膜干涉

当振幅反射率 r 较小时, A 光的振幅衰减很快, 可以仅考虑双光束干涉 (A_1 与 A_2), 而忽略剩余反射光带来的影响, 如图 3.7 (b)。实际操作中, 也常用薄透镜将两束出射光汇聚于一点, 而不会引起附加的相位差。反射后光线 O_1A_1 与 O_2A_2 的光程差 Δl 为:

$$\Delta l = l_2 - l_1 = 2n_f \cdot \overline{O_1B_1} - n_i \cdot \overline{O_1C} = \frac{2n_f d}{\cos \theta_t} - 2n_i \sin \theta_i \tan \theta_t d = 2n_f d \cos \theta_f \quad (3.62)$$

即 A_2 比 A_1 多走了 Δl 的光程, 相当于相位增量 $-\omega \frac{\Delta l}{c}$, 算上反射时 A_2 与 A_1 之间的相位增量 $-\pi$ (事实上 s 波是 $-\pi$ 而 p 波是 π), 总光程差 OPD (Optical Path Difference, 常记为 ΔL) (A_2 的减去 A_1) 和总相位增量 $\Delta \alpha$ 为:

$$\boxed{\Delta L = 2n_f d \cos \theta_f + \frac{\lambda}{2}}, \quad \Delta \alpha = - \left(1 + \frac{4n_f \cos \theta_t}{\lambda} \cdot d \right) \pi = - \left[1 + \frac{4n_f \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta_i}{n_i} \right)^2}}{\lambda} \cdot d \right] \pi \quad (3.63)$$

随参数 θ_i 、 d 的改变, 不同位置上会有不同的 ΔL , 得到不同的振幅大小, 从而产生干涉条纹。

3.6.3 等倾干涉

等倾干涉实验装置如图 3.9 所示, 其干涉条纹特征为:

- (1) 亮条纹: $\Delta L = k\lambda \Rightarrow \cos \theta_t = \frac{\lambda}{2n_f d} \cdot (k - \frac{1}{2})$, $k = 1, 2, 3, \dots$
- (2) 暗条纹: $\Delta L = (k + \frac{1}{2})\lambda \Rightarrow \cos \theta_t = \frac{\lambda}{2n_f d} \cdot k$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$
- (3) r 较小时, 等倾双光束强度近似相等, 干涉条纹对比度接近 1
- (4) 称中心暗条纹为 0 级暗纹, 往外依次是 1 级亮纹、1 级暗纹、2 级亮纹、2 级暗纹……
- (5) 等倾条纹内疏外密。这是因为:

$$\cos \theta_{t,n+1} - \cos \theta_{t,n} = \frac{\lambda}{2n_f d}, \quad \frac{\cos \theta_{t,n+1} - \cos \theta_{t,n}}{\theta_{t,n+1} - \theta_{t,n}} \approx \frac{d \cos \theta}{d\theta} = -\sin \theta_n \quad (3.64)$$

$$\Rightarrow \Delta r = (r_{n+1} - r_n) \propto (\theta_{t,n+1} - \theta_{t,n}) = -\frac{\lambda}{2d \sin \theta_{t,n}} \quad (3.65)$$

随着 r 的增大, 入射光指在薄膜 (半反射镜) 上的点由中心向外移动, θ_i 增大, θ_t 增大, 于是 $|\Delta r|$ 减小, 条纹逐渐变密。

- (6) 增加薄膜厚度, 条纹向外移动。薄膜厚度连续增大时, 中心位置强度周期性变化, 且不断生出新条纹向外移动, 可以利用这一特点精确测量薄膜厚度的改变量。

使用扩展光源 (有宽度光源) 时, 条纹对比度不受影响, 但条纹的强度增大, 干涉图样更加明亮。

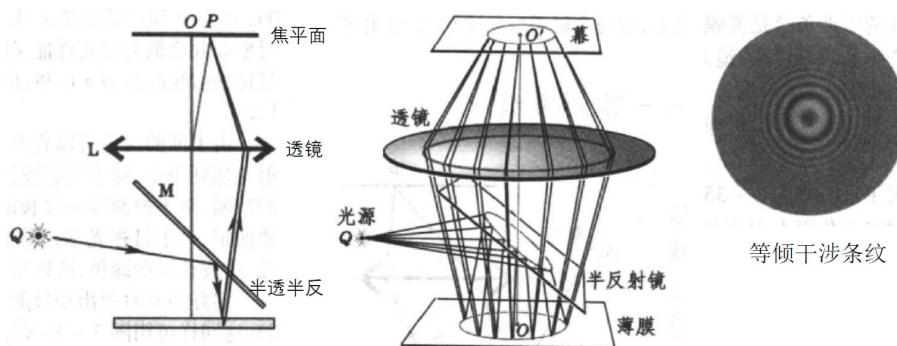


图 3.9: 等倾干涉实验装置

等倾干涉实验动图见链接 <https://www.123pan.com/s/0y0pTd-MgKj3>。

3.6.4 等厚干涉

等厚干涉，也称等厚条纹干涉，是指由薄膜厚度不均匀而引起的干涉现象，它的主要变量（参数）是光学厚度 $n_f d$ 而不是 θ_i （即 θ_t ）。等厚干涉产生的条纹一般是等厚位置的条纹，例如劈尖干涉、牛顿环等。

劈尖干涉：

两块（几乎）平行的玻璃板，夹角为 θ 极小，中间是空气层，即薄膜是空气，观察反射光的干涉现象。由 $R_{F-P} = \frac{F \sin^2(\frac{\delta}{2})}{1+F \sin^2(\frac{\delta}{2})}$ 可知，明条纹对应 $\frac{\delta}{2} = (k + \frac{1}{2})\pi$ ，这等价于 $2n_f d \cos \theta_f + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$ ，而暗条纹对应 $\frac{\delta}{2} = k\pi$ 。作近似 $n_f = 1$ ， $\cos \theta_f = 1$ ，得到：

$$\text{明条纹: } d_k = (1 + 2k) \cdot \frac{\lambda}{4}, \quad \text{暗条纹: } d_k = (2k) \cdot \frac{\lambda}{4}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.66)$$

$$\text{条纹间距: } \Delta d = \frac{\lambda}{2}, \quad \Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} \quad (3.67)$$

可借此求出夹在玻璃板之间引起 θ 角的细小物体的直径。

牛顿环：

把一个曲率半径很大的凸透镜至于平面玻璃片上，两者接触的地方形成厚度不均匀的空气薄膜，得到的干涉条纹是一系列同心圆环。设凸透镜的半径为 R ，以接触点为圆心 O ，类似劈尖干涉中的近似，得到：

$$\text{明条纹: } r_k = \sqrt{\left(k + \frac{1}{2}\right) R \lambda}, \quad \text{暗条纹: } r_k = \sqrt{k R \lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.68)$$

中心为 0 级暗纹，往外级数增大，干涉条纹逐渐变密。

§ 3.7 迈克尔逊干涉仪 (Michelson Interferometer)

我们需要认识到，绝大多数的干涉现象，本质都是空间上两个（甚至多个）不同位置的球面波源（或其他类型的波）在某点的叠加。随着目标位置点 P 的移动，发生叠加的两波（两束光）的 OPD（即 ΔL ）不断改变，得到不同的振幅大小，从而产生干涉图样。本节所介绍的几种干涉，其本质也是如此，只是具体实现方式不同。

3.7.1 理想单色迈克尔逊干涉

迈克尔逊干涉仪如图 3.10 所示，图中反射镜 M_1 与 M'_2 （虚镜）水平（此时的干涉现象类似等倾干涉），下方是接收屏或接受仪，图中的虚线光路表示出射向无穷远处（不被观察屏接收），或振幅较小而可以忽略的光线。

可以证明，从出射开始，分束所得到的两束光的空间光程差为 $\Delta l = 2d \cos \theta$ ，其中 θ 是光束射向反射镜 M 的入射角（光源平行出射时， $\theta = 0$ ）。再考虑上在分束镜 G 处发生的相位突变（半波损失），与等倾干涉的结论类似，此时的条纹内疏外密，类似等倾干涉时的图 3.9。

$$\begin{aligned} \text{OPD:} & \quad \Delta L = 2d \cos \theta + \frac{\lambda}{2} \\ \text{亮条纹:} & \quad \Delta L = k\lambda \implies \cos \theta_k = \frac{\lambda}{2n_f d} \cdot (k - \frac{1}{2}), \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ \text{暗条纹:} & \quad \Delta L = (k + \frac{1}{2})\lambda \implies \cos \theta_k = \frac{\lambda}{2n_f d} \cdot k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \text{条纹间距:} & \quad |\Delta r| \propto \frac{\lambda}{2d \sin \theta_k} \end{aligned} \quad (3.69)$$

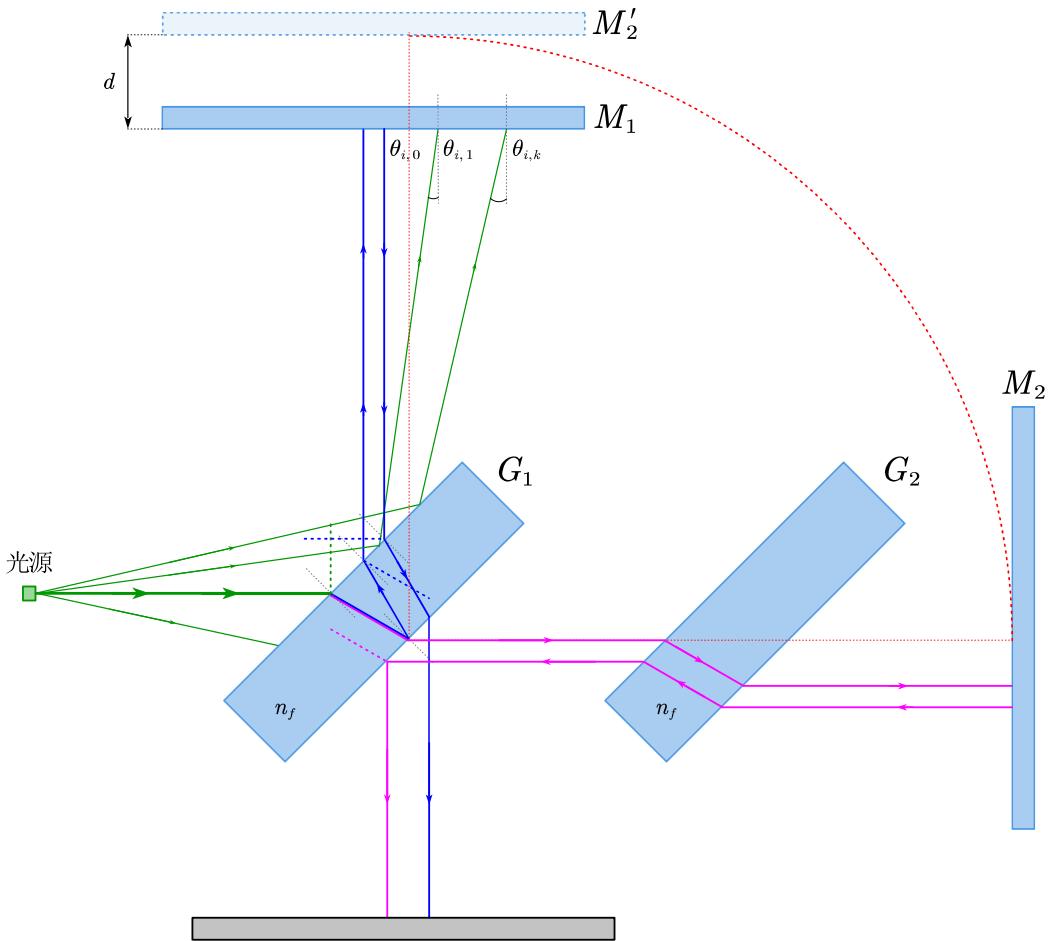


图 3.10: 迈克尔逊干涉仪

对给定的第 k 条亮纹，在图 3.10 的情况下（ M_1 在 M'_2 下方），将 M_1 向上移动， d 减小， $\cos \theta_k$ 增加， θ_k 减小，条纹向中心移动，直至完全收缩并消失。并且，随着 d 越来越小，条纹间距 $|\Delta r|$ 越来越大，直至 $d \rightarrow 0$ 时 $|\Delta r| \rightarrow \infty$ ，中心条纹布满整个观察屏。继续向上移动 M_1 ，“穿过” M'_2 后，干涉条纹重新出现。

记中心点 ($\theta_0 = 0$) 处的条纹为中心（零号）条纹（它可能既不是极大值也不是极小值），对于给定的 d ，得到与中心条纹相差 λ 的第 k 号条纹：

$$2d(1 - \cos \theta_k) = k\lambda \implies \theta_k = \sqrt{\frac{k\lambda}{d}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.70)$$

关于如何将迈克尔逊干涉仪看作是具有两个不同位置波源的仪器，详见参考文献 [1] Page 516，了解这一部分有助于我们理解干涉仪器的内涵。当 M_1 与 M'_2 不平行时，会发生类似等厚干涉的现象，出现平行直条纹。并且，从数学上可以证明，调整 M_1 和 M'_2 的方向，可以产生直线、圆、椭圆、抛物线或双曲线形的干涉条纹，这一部分我们不深究。

移动反射镜 M_1 、 M_2 ，或者在光路中插入其它介质，可以改变光程差，从而使干涉条纹发生移动。当光程差 OPD 的改变量达到 λ 时，每条干涉条纹都会移动一个条纹间距，移动到原先的相邻条纹处，这种方法可以用来测量镜面的微小移动距离，也可以测量插入介质的折射率。设镜面移动的距离或插入介质的厚度为 Δd ，则有：

$$2n\Delta d = N\lambda_0 \quad (3.71)$$

其中 n 是插入介质的折射率（移动镜面时相当于 $n = 1$ ）， λ_0 是光源发出的光在空气中的波长， N 是移动的条纹数。

3.7.2 双色分立谱迈克尔逊干涉

假设光源是双色光源，且两色的强度相同，对任意给定的 ΔL （相当于给定位置 P ），我们有：

$$I_1(\Delta L) = 2I_0 [1 + \cos(k_1 \Delta L)], \quad I_2(\Delta L) = 2I_0 [1 + \cos(k_2 \Delta L)] \quad (3.72)$$

$$\Rightarrow I(\Delta L) = 4I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{\Delta k}{2} \Delta L\right) \cos(\bar{k} \Delta L) \right], \quad \Delta k = k_1 - k_2, \quad \bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (3.73)$$

$$\gamma = \gamma(\Delta L) = \left| \cos\left(\frac{1}{2} \Delta k \Delta L\right) \right| \quad (3.74)$$

其中 Δk 称为调制（空间角）频率， \bar{k} 为平均（空间角）频率， $\Delta k \ll \bar{k}$ 时，可以观察到条纹对比度 γ 随 ΔL 周期性变化，在 $\Delta L = \frac{1}{2} \frac{\lambda_0^2}{\Delta \lambda}$ 第一次下降到 0。

例如， $\lambda_1 = 550.0 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 600.0 \text{ nm}$ 时的情况如图 3.11 所示。

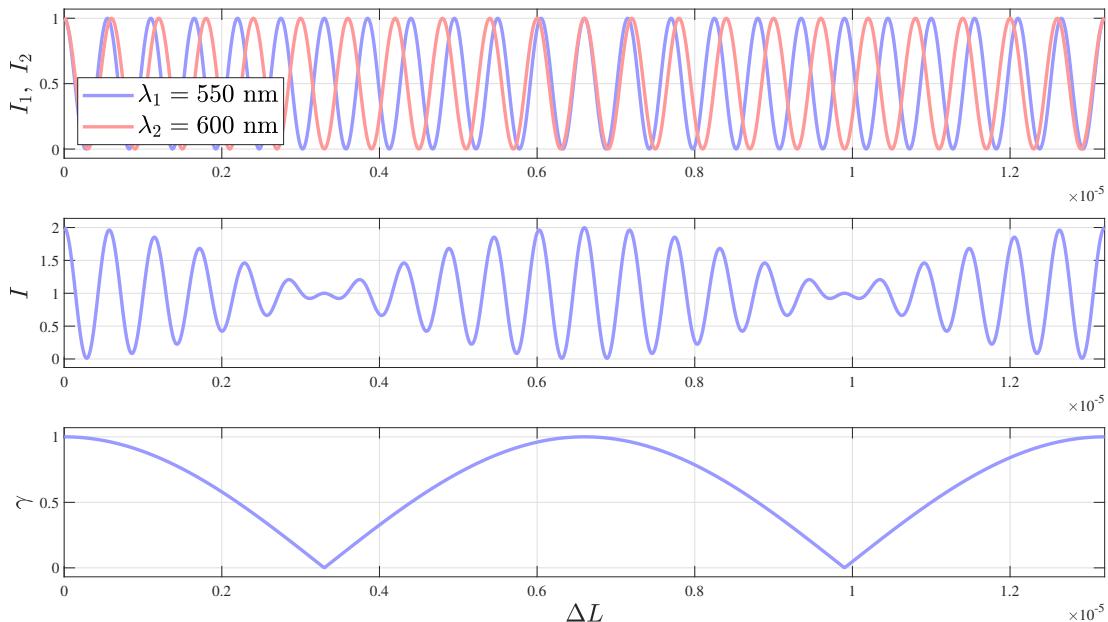


图 3.11: 双色光源的对比度分布情况

设一个周期的条纹数为 N (γ 从 1 到 0 再回到 1)，则：

$$N \cdot \lambda = \frac{2\pi}{\frac{1}{2} \Delta k} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{\lambda_0^2}{\Delta \lambda} \right) \Rightarrow N = \frac{\lambda_0}{\Delta \lambda} \quad (3.75)$$

3.7.3 (均匀) 连续谱迈克尔逊干涉

上面考虑的是线光谱，对于连续光谱，有光谱密度 $i = i(\lambda)$ ，总光强 $I = \int i(\lambda) d\lambda$ 。当然，也可以用空间角频率 k 作变量。考虑以 k_0 为中心，宽为 Δk 的均匀连续光谱 $i(k)$ ，我们有：

$$i(k) = \begin{cases} \frac{I_0}{\Delta k}, & |k - k_0| < \frac{\Delta k}{2}, \\ 0, & |k - k_0| > \frac{\Delta k}{2}, \end{cases} \quad \gamma = \gamma(\Delta L) = \left| \frac{\sin\left(\frac{\Delta k \Delta L}{2}\right)}{\frac{\Delta k \Delta L}{2}} \right| = \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2} \Delta k \Delta L\right) \right| \quad (3.76)$$

$$I = \int i(k) [1 + \cos(k \Delta L)] dk = I_0 \left[1 + \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{2} \Delta k \Delta L\right) \cdot \cos(k_0 \Delta L) \right] \quad (3.77)$$

上面的结果与 3.5.2 节“杨氏实验中光源位置和宽度对干涉条纹的影响”中光源宽度对干涉条纹的影响完全同构，图像也是同构的。我们定义最大光程差 $\Delta L_{\max} = \frac{2\pi}{\Delta k} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}$ ，这是条纹对比度第一次下降到 0 时对应的光程差。

3.7.4 马赫-曾德尔干涉

原理与迈克尔逊干涉仪类似，我们不多赘述。

§ 3.8 光场的空间相干性与时间相干性

3.8.1 波列长度、发光线度与光谱宽度

在杨氏双缝干涉中，我们讨论了光源的线度（宽度）对干涉图样的影响，得到了极限宽度 $b_0 = \frac{\lambda R}{d}$ ，它是中心条纹对比度第一次为 0 时的光源宽度；在迈克尔逊干涉中，我们又讨论了发光光谱对干涉图样的影响，得到了最大光程差 $\Delta L_{\max} = \frac{2\pi}{\Delta k} = \approx \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}$ ，这是条纹对比度第一次下降到 0 时对应的光程差。

上面的例子告诉我们，光源的发光线度与光谱宽度会对干涉性产生影响，前者影响的是空间相干性，描述同一时刻不同位置的条纹对比度变化情况，后者影响的是时间相干性，描述同一位置不同时刻的条纹对比度变化情况。另外，光源的波列长度也会影响其干涉性（详见 3.4 节“产生干涉的前提条件”）

现实中常可以见到这样的例子：有一些光源，它们具有一定的发光宽度，不能看作理想的点光源。当光源宽度较大时，光源不同部分发出的光的叠加，会导致条纹的对比度降低（甚至为 0），称为空间不相干。

还有一些光源是多频光源（或具有一定光谱宽度，详见表 3.1）。波长差别极小时（通常是 10^{-2} nm 级），不同波长相互叠加导致条纹对比度降低（但仍可见）；波长差别较大时， $\cos(\Delta\alpha)$ 的周期远小于 τ ，积分项为零，也只能发生非相干叠加。以两频光源为例，发出时间角频率为 ω_1 和 ω_2 的光，则在同一位置，相位差 $\Delta\alpha = (k_2 - k_1)x - (\omega_2 - \omega_1)t$ 是 t 的函数，当曝光时间 τ 远大于调制周期 $T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ 时，积分项 $\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos(\Delta\alpha) dt$ 趋于 0，得到 $I = I_1 + I_2$ ，也是非相干叠加。

总而言之，影响光源相干性的条件大致有三个方面：波列持续时间 τ_0 、光源宽度 d 和发光光谱 $i = i(\lambda)$ 。现实中的光源总是有一定发光线度、一定光谱宽度、且波列长度有限的，没有任何一种光源在上面三个方面都做到极好。因此，在设计干涉实验时，需要依据光源的特性，选择合适的实验方案，或者依据实验弱化了哪些因素的影响，选择合适的光源。

表 3.1: 光谱宽度对光源单色性的影响

光谱宽度 $\Delta\lambda$	光源单色性
10 nm	极差
1 nm	较差
10^{-3} nm	较好
10^{-6} nm	极好

3.8.2 相干孔径角与空间相干性

在杨氏双缝干涉中，即相干孔径角 $\Delta\theta_0 \approx \tan(\Delta\theta_0) = \frac{d}{R}$ 为双孔对光源中心所张角度。记光源面积为 A_s ，则距离光源 R 处的相干面积 A_c ：

$$A_c = \frac{\lambda^2}{A_s} R^2 \quad (3.78)$$

相干面积 A_c 与光源面积 A_s 成反比，在相干面积内，取两点作为双孔（次波源），可以得到一定的相干性。这是空间相干性的具体体现之一。

§ 3.9 法布里-珀罗干涉仪 (Fabry-Perot Interferometer)

在 3.6.1 节“多光束薄膜干涉”中，我们讨论过多光束薄膜干涉的原理，法布里-珀罗干涉仪就是一种利用多光束薄膜干涉的仪器。

3.9.1 单色光谱

法布里-珀罗干涉仪如图 3.12 所示，两片玻璃板中间夹有介质（可以是空气），玻璃片内侧表面镀银以增强反射率。需要注意，应将夹在中间的介质视为薄膜，而不是玻璃板，并且镀银相当于改变了薄膜的反射率。细致的讨论表明，在分析的过程中忽略玻璃板和反射膜带来的额外影响（包括相位差、反射透射率等），仍可得到正确且精度极高的结论^①。因此，在后文我们只考虑“空气-薄膜-空气”模型，并视 R 为薄膜表面的反射率。

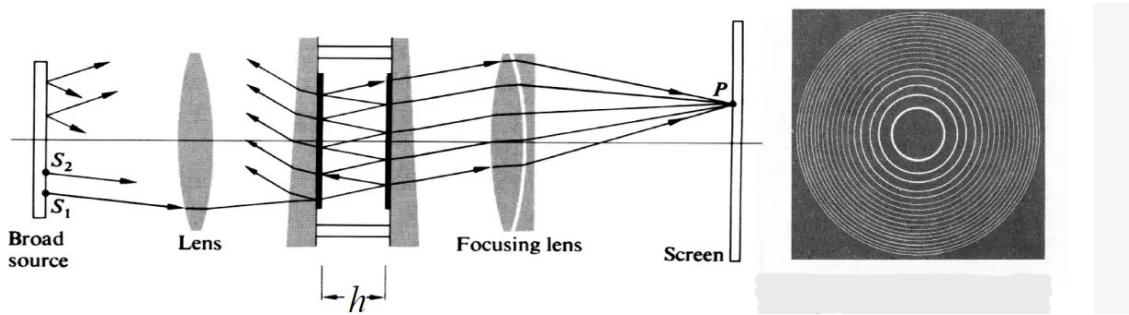


图 3.12: 法布里-珀罗干涉仪

如果以单色扩展光源入射，透射光汇聚到屏幕上，得到等倾干涉条纹（由 θ_k 提供相位变化）。与迈克尔逊干涉条纹相比，两者都是同心圆，但 F-P 条纹要细锐得多。设薄膜宽度为 h ，折射率 n_f ，空气折射率为 1，则薄膜干涉的关键公式如下：

$$T_{F-P} = \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad R_{F-P} = \frac{F \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad F = \frac{4R}{(1-R)^2}, \quad \delta = \frac{4\pi n_f d \cos \theta_f}{\lambda_i}, \quad m = \frac{\delta}{2} \quad (3.79)$$

在本节后文，我们简记 $\lambda = \lambda_i$ 为光波在空气中的波长， n_f 为玻璃板之间薄膜的折射率， $\theta = \theta_k$ 为薄膜中的折射角（即内角），并称入射角 θ_i 为外角。则 δ 可写为 $\delta = \frac{4\pi n_f d \cos \theta}{\lambda}$ 。

透射峰的性质可由半峰宽 ε 、半峰内角宽度 $\Delta\theta_f$ 和半峰外角宽度 $\Delta\theta_i$ 来描述。其中，半峰宽指给定 R 时，FP 透射率 $T_{F-P} = T(\delta)$ 图像中 $T_{F-P} = 0.5$ 对应的峰宽，如图 3.13 所示。而内角宽度是图像 $T_{F-P} = T(\theta_f)$ 的半峰宽、外角宽度是 $T_{F-P} = T(\theta_i)$ 的半峰宽。半峰内角宽度也常简称为角宽度，记为 ε_{θ_f} ^a。

$$\varepsilon_\delta = 4 \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{F}} \right) \quad (3.80)$$

$$\varepsilon_{\theta_f} = \frac{\lambda}{\pi n d \sin \theta_f \sqrt{F}} \quad (3.81)$$

$$\varepsilon_{\theta_i} = \frac{n \lambda}{\pi d \sin \theta_i \sqrt{F}} \quad (3.82)$$

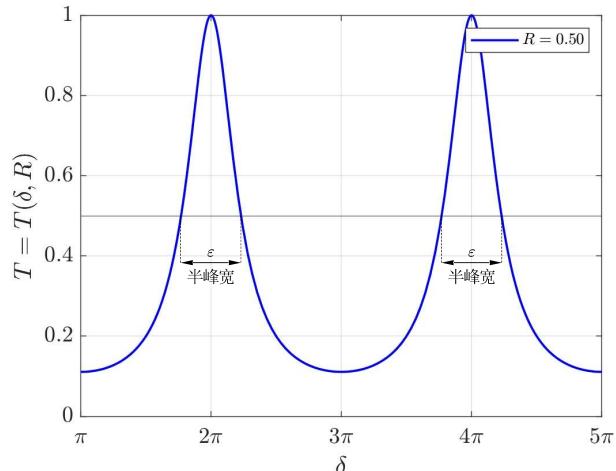


图 3.13: 半峰宽 ε_δ

^a有的教材中也记作 $\Delta\theta_f$ 。

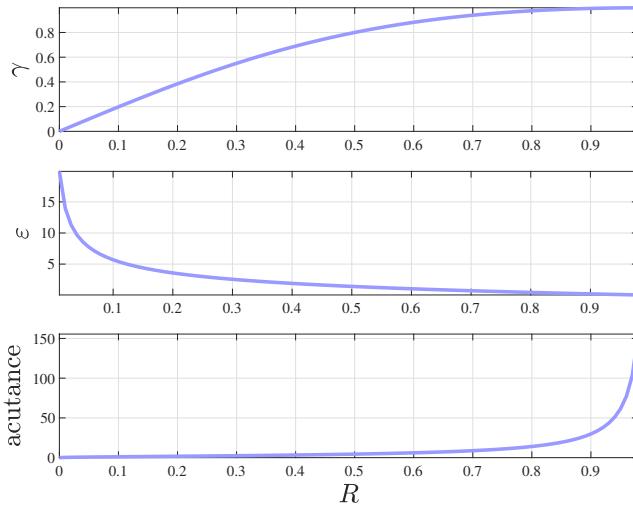
^①详见参考文献 [1] Page 530

通常情况下，镀膜后的 R 在 $[0.895, 0.94]$ 内，在此区间内 $F \in [324.7166, 1044.4444]$ 相当大，此时可近似 $\varepsilon_\delta \approx \frac{4}{\sqrt{F}}$ ，所得半峰宽 ε_δ 的误差不超过 1.1409×10^{-4} 。常见的法布里-珀罗干涉仪在可见光波段的锐度 \mathcal{F} 约为 30（对应 $R = 0.9006$ ），也有特殊的能做到 1000。

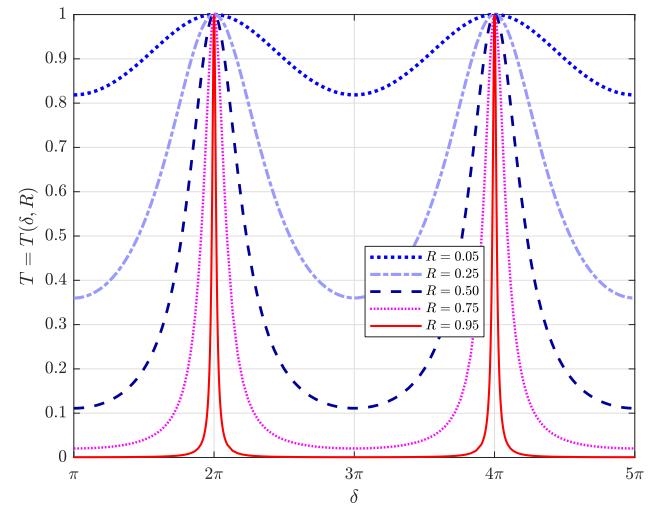
所得干涉条纹的明显程度可由透射光对比度 $\gamma_{T_{F-P}}$ （简记为 γ ）和锐度 \mathcal{F} 来描述。

$$\gamma = \frac{2R}{1+R^2}, \quad \mathcal{F} = \frac{2\pi}{\varepsilon_\delta} = \frac{\pi}{2 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\right)} \quad (3.83)$$

图 3.14 (a) 展示了对比度 γ 、半峰宽 ε_δ 和锐度 \mathcal{F} 随反射率 R 的变化情况；图 3.14 (b)^① 展示了透射率 $T = T(\delta, R)$ 的变化情况。



(a) 对比度 γ 、半峰宽 ε_δ 和锐度 \mathcal{F} 随反射率 R 的变化情况



(b) 透射率 $T = T(\delta, R)$ 随 R 和 δ 的变化情况

图 3.14: 法布里-珀罗干涉仪各参数变化

3.9.2 双色光谱

当光源不可视为单色光时，例如两个波长相近的双色光，所形成的等倾干涉条纹（F-P 条纹）就会有稍微不同的半径。这个现象可以用于分辨精细谱线，因此有必要讨论条纹的色分辨能力。

两谱线第 m 级亮纹间的内角距离记作 $\delta\theta_f^m$ （注意不是 $\delta \cdot \theta$ ，而是类似 $\Delta\theta$ 的记法），或者简记为 $\delta\theta_m$ ，并简记第 m 级亮纹的内角宽度 $\varepsilon_{\theta_{f,m}}$ 为 ε_{θ_m} ，则有：

$$\delta\theta_m = \frac{m\Delta\lambda}{2nd \sin \theta_m}, \quad \varepsilon_{\theta_m} = \frac{\lambda}{\pi nd \sin \theta_m \sqrt{F}} \quad (3.84)$$

判断能否分辨两谱线，通常采用泰勒判据或瑞丽判据^②，如下：

$$\text{Taylor Criterion: } \delta\theta_m \geq \varepsilon_{\theta_m} \implies m \geq \frac{2\lambda_0}{\pi\sqrt{F}\Delta\lambda} \quad (3.85)$$

$$\text{Rayleigh Criterion: } \delta\theta_m \geq \frac{4.2}{\sqrt{F}} \implies m \geq \frac{8.4nh \sin \theta_m}{\Delta\lambda\sqrt{F}} \quad (3.86)$$

在泰勒判据下，当条纹级数 m 满足判据时，此条纹可以被分辨。需要注意，上面的所称的各级亮纹，其 0 级亮纹不在观察屏中心，而是在无穷远处。这是因为多光束薄膜干涉中， $\delta = \frac{4\pi n_f d \cos \theta_f}{\lambda_i}$ ， $\theta_f = 0$ 时， δ 有

^①图 3.14 源码见附录 B.10

^②此处列出的瑞丽判据是大 F 下的近似判据，详见参考文献 [1] Page 532。实际中主要采用泰勒判据。

最大值, $\theta_f \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, $\delta \rightarrow 0$ 。而习惯上我们称 $\delta = 0$ 的位置为 0 级条纹, 因此在这里, 0 级条纹无穷远, 随着 m 的增大, 条纹逐渐向中心靠拢。

并且可以知道, $\theta_f = 0$ 时对应的最高级条纹 (位于屏幕最中间的条纹, 不一定是中心点) 为:

$$m_{\max} = \left\lfloor \frac{\delta}{2\pi} \right\rfloor_{\theta_f=0} = \left\lfloor \frac{2nd}{\lambda_0} \right\rfloor, \quad \text{或 } m_{\max} = \frac{2nd}{\lambda_0} \quad (3.87)$$

依泰勒判据, 当所有条纹都可分辨时 ($\forall m \geq 1$), 得到 $\Delta\lambda \geq \frac{2\lambda_0}{1 \cdot \pi \sqrt{F}}$, 将后者称为可分辨的最小波长差; 存在可分辨条纹时 ($\exists m \geq 1$), 得到 $\Delta\lambda \geq \frac{2\lambda_0}{m_{\max} \cdot \pi \sqrt{F}}$, 将后者称为极限波长差。

$$(\Delta\lambda)_{\min} = \frac{1}{\textcolor{red}{1}} \cdot \frac{2\lambda_0}{\pi\sqrt{F}} = \frac{2\lambda_0}{\pi\sqrt{F}}, \quad (\Delta\lambda)_{\lim} = \frac{1}{\textcolor{red}{m_{\max}}} \cdot \frac{2\lambda_0}{\pi\sqrt{F}} = \frac{\lambda_0^2}{\pi n d \sqrt{F}} \quad (3.88)$$

$\Delta\lambda$ 越大时, 谱线越容易被分辨, 但当其大到一定程度时, 会发生条纹的越级。由于波长短的条纹更密, 所以临界情况是 $\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}$ 的最高级条纹 (m_{\max}) 越过 $\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}$ 的次级条纹 ($m_{\max} - 1$)。记此时的波长宽为自由光谱范围 (Free Spectral Range), 记作 $(\Delta\lambda)_{fsr}$ 。由于中心处 $\theta = 0$, 且 $m = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{2nd}{\lambda}$, 得到:

$$\begin{cases} \lambda + \frac{\Delta\lambda}{2} : & m_{\max} = \frac{2nd}{\lambda + (\Delta\lambda)_{fsr}} \\ \lambda - \frac{\Delta\lambda}{2} : & m_{\max} - 1 = \frac{2nd}{\lambda - (\Delta\lambda)_{fsr}} \end{cases} \implies (\Delta\lambda)_{fsr} = \frac{\lambda_0}{m_{\max}} = \frac{\lambda_0^2}{2nd} \quad (3.89)$$

也就是说, 要在不发生条纹越级的条件下分辨谱线, 谱宽 $\Delta\lambda$ 需要小于自由光谱宽度 $(\Delta\lambda)_{fsr}$ 。在此前提下, $\Delta\lambda$ 越大, 谱线的分辨性越好。

进一步地, 对任意一个光谱仪, 我们可以定义它的色分辨本领为 $\mathcal{R} = \frac{\lambda_0}{(\Delta\lambda)_{\lim}}$, 色分辨本领越高, 表示仪器对谱线的分辨能力越强, 分辨率越高。特别地, F-P 干涉仪也可看作是一种光谱仪, 有:

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda_0}{(\Delta\lambda)_{\lim}} = \frac{\lambda_0}{\frac{\lambda_0^2}{\pi n d \sqrt{F}}} = m_{\max} \cdot \frac{\pi \sqrt{F}}{2} = \frac{\pi n d \sqrt{F}}{\lambda_0} \quad (3.90)$$

3.9.3 连续光谱

本节仅考虑 $\theta \rightarrow 0$ 的情况。当光源具有自由光谱时, F-P 薄膜 (也称为 F-P 腔) 具有“选频”的效果。具体表现是, 光在 F-P 腔内多次相干叠加, 使透射光谱结构明显区别于入射光谱, 将连续光谱变为离散的准分立谱, 也即最终接收到的光谱, 如图 3.15 所示。

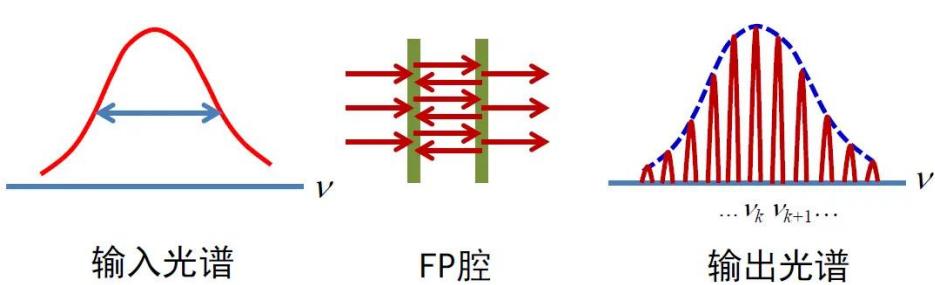


图 3.15: F-P 腔对连续谱的选择作用

出现纵模的波长满足 $2nd = m\lambda_m$, 因此谱线具有相同的纵模间距 (“纵模”即为谱线中的“峰”), 且可以计算其半峰频宽:

$$\nu_m = \frac{mc}{2nd}, \quad \Delta\nu = \nu_{m+1} - \nu_m = \frac{c}{2nd}, \quad \varepsilon_{\nu,m} = \frac{2c}{m\pi\lambda\sqrt{F}} = \frac{c}{\lambda^2} \cdot \frac{(\Delta\lambda)_{\min}}{m} \quad (3.91)$$

由此可以发现, $\varepsilon_{\nu,m}$ 对应的波长宽度 $\varepsilon_{\lambda,m} = \frac{\lambda^2}{c} \varepsilon_{\nu,m}$ 恰好是 $\frac{(\Delta\lambda)_{\min}}{m}$ 。

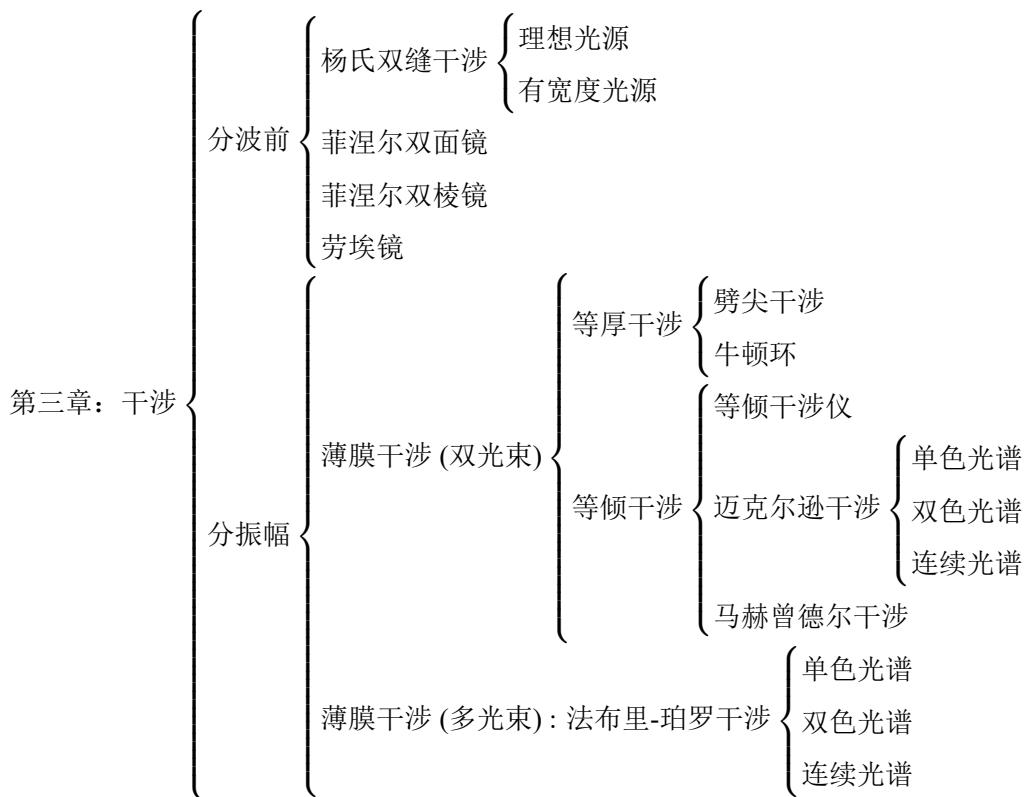
3.9.4 光学谐振腔

上面的法布里-珀罗干涉仪，也常称为 F-P 标准具，或简称为标准具。光学谐振腔本质上也是一个 F-P 标准具，只是光学谐振腔的腔体结构更加特殊。通常情况下，谐振腔的两侧是一对的高反射镜（也可以是平面镜、球面镜等），光源在腔体内部，发出的光在腔内来回反射，最终形成透射光谱。详见 [知乎：光学微腔和光学谐振腔有什么区别](#) 以及 [ThorLabs: 法布里-珀罗干涉仪教程](#)。

§ 3.10 激光（略）

§ 3.11 章末总结

本章的内容框架大致为：



下面给出相关的公式：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{常识} \\ \text{可见光范围} \\ \left\{ \begin{array}{l} 400 \text{ nm} \sim 750 \text{ nm} \\ 4.0 \times 10^{14} \text{ Hz} \sim 7.5 \times 10^{14} \text{ Hz} \end{array} \right. \\ \text{典型折射率: } n_{\text{水}} = \frac{4}{3} = 1.33, n_{\text{玻璃}} = 1.5 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{杨氏双缝干涉} \\ \Delta L = \frac{nd}{D}x = \frac{d}{D}x \quad (n=1) \\ \Delta x = \frac{D}{nd}\lambda = \frac{D}{d}\lambda \quad (n=1) \\ \delta x = -\frac{D}{R}\lambda \\ b_0 = \frac{R}{nd}\lambda = \frac{R}{d}\lambda \quad (n=1) \\ bd < \lambda R \end{array} \right. , \text{ 菲涅尔双面/棱镜} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x = \frac{D}{d}\lambda \\ D = B + C \\ d = \theta B \\ l = \theta C \\ \theta = \begin{cases} 2\alpha & , \text{双面镜} \\ 2(n_L - 1)\alpha & , \text{双棱镜} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{劳埃镜} \\ d = 2a \\ l \text{ 用相似三角形计算} \end{array} \right.$$

光场相干性	$\left\{ \begin{array}{l} \text{空间相干性} \\ \text{时间相干性} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{孔径角: } \theta_0 = \frac{\lambda}{b} \\ \text{相干面积: } A = (R\theta_0)^2 = \frac{R^2\lambda^2}{b^2} \\ \text{波列宽: } \Delta L < l_0 = c_0\tau_0 \\ \text{光谱宽: } \Delta L < l_0 = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \end{array} \right.$
等厚干涉	$\left\{ \begin{array}{l} \Delta L = 2n_f d \cos \theta_f + \frac{\lambda}{2} \\ \Delta l = 2n_f d \cos \theta_f \\ m_{\max} = \frac{2n_f d}{\lambda} \end{array} \right.$
牛顿环	$\left\{ \begin{array}{l} \Delta d = \frac{\lambda}{2} \\ \Delta x = \frac{\Delta d}{\tan \alpha} \approx \frac{\lambda}{2\alpha} \\ \text{暗: } d_m = \frac{\lambda}{2} \cdot m \\ \text{明: } d_m = \frac{\lambda}{2} \cdot (m + \frac{1}{2}) \end{array} \right.$
等倾干涉仪	$\left\{ \begin{array}{l} \text{暗: } r_m = \sqrt{R\lambda m} \\ \text{明: } r_m = \sqrt{R\lambda(m + \frac{1}{2})} \\ \Delta r_m = \sqrt{R\lambda} \left(\sqrt{m + \frac{1}{2}} - \sqrt{m} \right) = \sqrt{R\lambda} \cdot \frac{1}{2(\sqrt{m + \frac{1}{2}} + \sqrt{m})} \end{array} \right.$
等倾干涉 ($n_f = 1$)	$\left\{ \begin{array}{l} \text{亮: } \Delta L = m\lambda \Rightarrow \cos \theta_m = \frac{\lambda}{2nd} \cdot (m - \frac{1}{2}) \\ \text{暗: } \Delta L = (m + \frac{1}{2})\lambda \Rightarrow \cos \theta_m = \frac{\lambda}{2nd} \cdot m \\ r_m = A \cdot \tan \theta_m \approx A\theta_m \\ \Delta r_m = A\Delta\theta_m = A \cdot \frac{\lambda}{2d \sin \theta_m} = \frac{A\lambda}{2d\theta_k} \end{array} \right.$
迈克尔逊干涉	$\left\{ \begin{array}{l} \text{单色谱} \\ \text{双色谱} \\ \text{连续谱} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{以中心为零级: } \left\{ \begin{array}{l} 2d(1 - \cos \theta_m) = \lambda m \\ \theta_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{d}} \end{array} \right. \\ \text{精密测长: } 2n\Delta d = N\lambda \\ \gamma = \cos(\frac{1}{2}\Delta k \Delta L) \\ (\Delta L)_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \\ N_{\text{circle}} = \frac{2(\Delta L)_{\max}}{\lambda} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \\ \gamma = \text{sinc}(\frac{1}{2}\Delta k \Delta L) \\ (\Delta L)_{\max} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \\ N_{\text{circle}} = \frac{2(\Delta L)_{\max}}{\lambda} = \frac{2\lambda}{\Delta\lambda} \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Delta l = 2n_f d \cos \theta_f \\
 \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta l = \frac{4\pi n_f d \cos \theta_f}{\lambda} \\
 F = \frac{4R}{(1-R)^2} \\
 T_{F-P} = \frac{1}{1+F \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad R_{F-P} = 1 - T_{F-P} = \frac{F \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1+F \sin^2 \frac{\delta}{2}} \\
 \\
 \text{薄膜干涉 (多光束):} \\
 \\
 \text{法布里-珀罗干涉} \\
 \\
 \text{单色谱} \left\{ \begin{array}{l}
 \text{半峰宽: } \varepsilon_\delta = 4 \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{F}} \right) \\
 \text{内角宽: } \varepsilon_{\theta_f} = \frac{1}{n \sin \theta_f} \cdot \frac{\lambda}{\pi d \sqrt{F}} = \frac{1}{\sin \theta_i} \cdot \frac{\lambda}{\pi d \sqrt{F}} \\
 \text{外角宽: } \varepsilon_{\theta_i} = \frac{n}{\sin \theta_i} \cdot \frac{n \lambda}{\pi d \sqrt{F}} \\
 \text{对比度: } \gamma = \frac{2R}{1+R^2} \\
 \text{锐度: } \mathcal{F} = \frac{2\pi}{\varepsilon_\delta} \\
 \text{内角距离: } \delta \theta_m = \frac{1}{n \sin \theta_{f,m}} \cdot m \cdot \frac{\Delta \lambda}{2d} \\
 \text{Talor 判据: } \delta \theta_m \geq \varepsilon_{\theta_m} \implies m \geq \frac{2\lambda_0}{\pi \sqrt{F} \Delta \lambda} = \frac{1}{\frac{\pi \sqrt{F}}{2}} \cdot \frac{\lambda}{\Delta \lambda_0} \\
 \text{最小分辨率: } (\Delta \lambda)_{\min} = \frac{2\lambda_0}{\pi \sqrt{F}} \\
 \text{极限分辨率: } (\Delta \lambda)_{\lim} = \frac{(\Delta \lambda)_{\min}}{m_{\max}} = \frac{\lambda_0^2}{\pi n d \sqrt{F}} \\
 \text{自由光谱宽度: } (\Delta \lambda)_{fsr} = \frac{\lambda_0^2}{2nd} \\
 \text{色分辨本领: } \mathcal{R} = \frac{\lambda_0}{(\Delta \lambda)_{\lim}} = \frac{m_{\max} \pi \sqrt{F}}{2} = \frac{\pi n d \sqrt{F}}{\lambda_0} \\
 \text{纵模波长: } m \lambda = 2nd \implies \lambda = \frac{2nd}{m} \\
 \text{纵模频率: } \nu_m = \frac{c}{\lambda_m} = \frac{mc}{2nd} \\
 \text{纵模间距: } \Delta \nu = \frac{c}{2nd} \\
 \text{半峰频宽: } \varepsilon_{\nu,m} = \frac{c}{\lambda^2} (\Delta \lambda)_{\min} \cdot \frac{1}{m} = \frac{2c}{m \pi \lambda \sqrt{F}}
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{双色谱} \\
 \\
 \text{连续谱}
 \end{array} \right.$$

第4章 光的衍射

什么是衍射？衍射是波动现象的一个普遍特征，每逢波阵面（不论是声波、物质波还是光波）的一部分以某种方式受到阻碍时就会发生，如果在遇到障碍物（不论是透明的还是不透明的）的进程中，波阵面上一个区域的振幅或相位受到改变，波就会偏离直线传播的方向，这种现象叫做“衍射”。

越过障碍物的波阵面的各区段因干涉而引起特定的能量密度分布，叫做“衍射图样”。干涉和衍射之间并不存在实质性的物理差别。然而习惯上（虽然并不总是恰当），当考虑的只是几个波源的叠加时说是干涉，而讨论大量波源（可以是无限个）的叠加则说是衍射。尽管如此，同一现象在有些地方叫做多光束干涉，而在另一地方则叫做光栅衍射。

§ 4.1 衍射发生的条件

4.1.1 惠更斯-菲涅尔原理

惠更斯原理揭示了波在空间中传播时的姿态（即波阵面的形状和传播反向等），但它与波长无关，这无法解释为什么声波容易绕过障碍物而激光却不易。惠更斯-菲涅尔原理可以解释这一现象：

Theorem. 4 (惠更斯-菲涅尔原理): 在给定时刻，波阵面上每一未被阻挡的点起着次级球面子波（频率与初波相同）波源的作用。对障碍物外任一点，各子波在这一点的振幅和相位通常不同，此点的振幅（电磁波即电场）是所有这些子波的相干叠加。

从之前的方法来看，我们可以将障碍物或小孔看作是有宽度的光源，或 N 个全同的波源 (N 趋于无穷)，它们的行为将在后文进行讨论。定性地说，当障碍物的线度在几个波长的尺度时，衍射现象将十分明显。障碍物线度再变小，例如 0.1 个波长，电磁场的边界效应将成为主要部分，这不在本课讨论的范围内。

应当指出，求一个特定衍射问题的严格解是光学中最难处理的问题之一，这涉及到许多更为复杂的理论。就目前的学习而言，惠更斯-菲涅尔原理是简单且足够精确的。

4.1.2 菲涅尔衍射与夫琅禾费衍射

对其上有一小孔的不透明屏幕，小孔附近的衍射现象（近场）与远场截然不同（尽管后者是前者的一个特例）。我们将小孔附近的衍射现象称为菲涅尔衍射（近场衍射），将离小孔足够远处衍射现象称为夫琅禾费衍射（远场衍射）。

孔径的线度是否发生夫琅禾费衍射的决定性判据。作为一条经验定则，设孔径（或障碍物）的最大宽度为 b ，小孔到光源 S 和观察点 P 的距离分别为 d_S 、 d_P ，则发生夫琅禾费衍射的充分条件是：

$$d_S > \frac{b^2}{\lambda}, \quad d_P > \frac{b^2}{\lambda} \quad (4.1)$$

当满足判据，发生夫琅禾费衍射时，可以认为所有的子波源在 P 点振幅都相同，而菲涅尔衍射通常不能作这样的近似。

如图 4.1 所示，左半边从下至上逐渐从近场过渡到远场，右半边显示了衍射角 θ_0 与小孔宽度 b 的关系：

$$\theta_0 = \frac{\lambda}{b} \quad (4.2)$$

小孔宽度 b 越小，衍射角越大，所有子波叠加之后越接近球面波。由于远场衍射更为简单，后文我们会先讨论远场，再讨论近场。

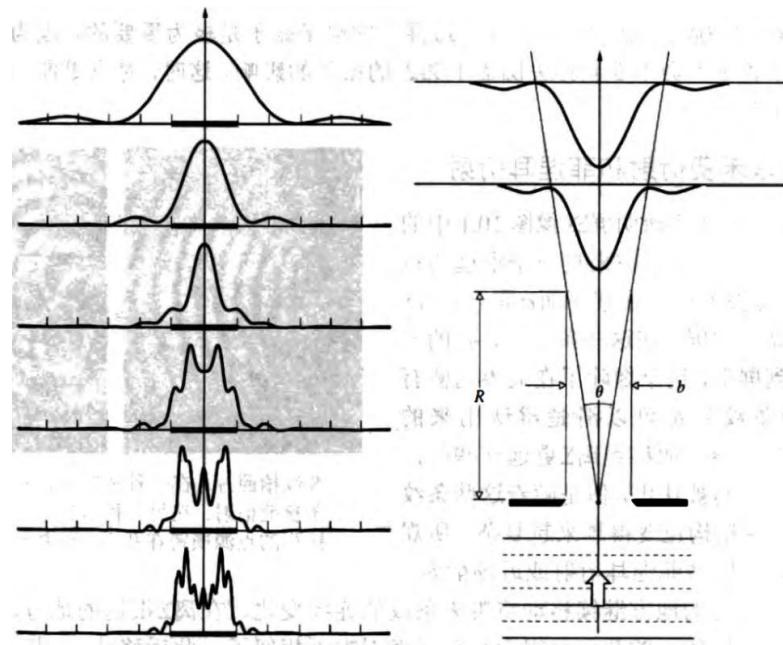


图 4.1: 近场和远场的不同衍射现象

§ 4.2 全同振子阵列与理想线光源

4.2.1 全同振子阵列

如图 4.2 (a), 考虑 N 个相干的点源振子构成的直线阵列, 各个振子在一切方面(包括偏振方向)都完全相同, 并且认为振子间没有固定的相位差。

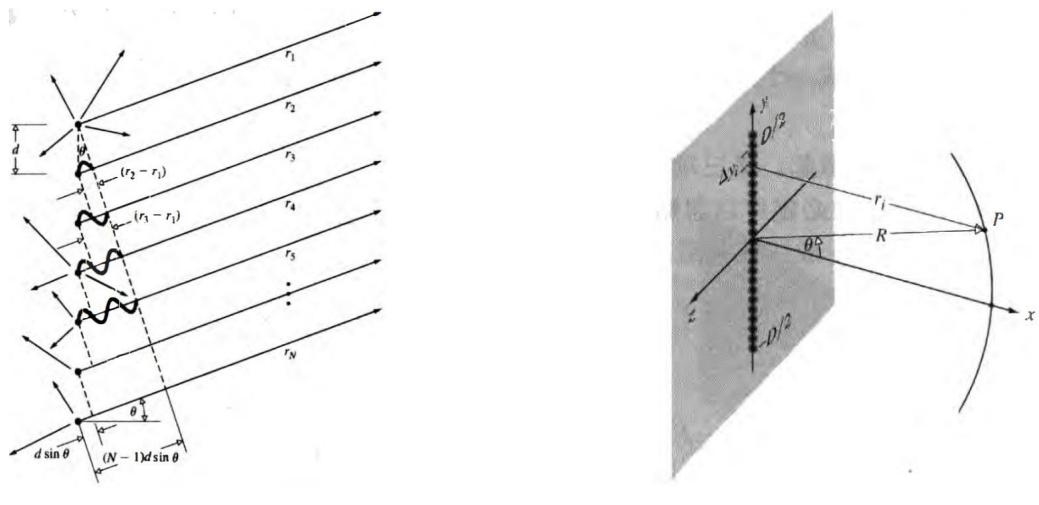


图 4.2: 单缝衍射的理想模型

对远场中的一点 P , 可以认为各子波在此点有相同的振幅, 即 $E_0(r) = E_0(r_1) = \dots = E_0(r_N)$, 总电场强度是 N 个振子的场强叠加:

$$E = \sum_{m=1}^N E_0(r) e^{i(kr_m - \omega t)} = E_0(r) e^{-i\omega t} e^{ikr_1} \sum_{m=1}^N e^{ik(r_m - r_1)} \quad (4.3)$$

记相邻点远之间的相差为 δ , 则 $\delta = kd \sin \theta \Rightarrow k(r_m - r_1) = (m - 1)\delta$, 于是:

$$E = E_0(r)e^{-i\omega t}e^{ikr_1} \sum_{m=1}^N e^{i(m-1)\delta} = E_0(r)e^{-i\omega t}e^{ikr_1} \frac{e^{iN\delta} - 1}{e^{i\delta} - 1} \quad (4.4)$$

$$= E_0(r)e^{-i\omega t}e^{ikr_1} e^{i(\frac{(N-1)}{2}\delta)} \left(\frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \right) = E_0(r)e^{i(kr_1 + \frac{N-1}{2}\delta - \omega t)} \left(\frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \right) \quad (4.5)$$

$$= E_0(r) \left(\frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \right) \cdot e^{i(kR - \omega t)} \quad (4.6)$$

其中 $R = \frac{1}{2}(N-1)d \sin \theta + r_1$ 是阵列中心到 P 点的距离。于是可以得到辐照度（通量密度）的分布:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{N\delta}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)} = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{Nkd}{2} \sin \theta \right)}{\sin^2 \left(\frac{kd}{2} \sin \theta \right)}, \quad \sin \theta \approx \frac{y}{R} \quad (4.7)$$

其中 I_0 是任意一个波源在距离为 r 时的辐照度。 $N = 0$ 时 $I = 0$, $N = 1$ 时 $I = I_0$, $N = 2$ 时 $I = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2} = 2I_0(1 + \cos \delta)$, 这些与之前的内容都是相符的。

由表达式可以知道, I_0 的主极大出现在 $\frac{\delta}{2} = m\pi, m = 0, \pm 1, \dots$ 的方向上, 也即 $d \sin \theta_m = m\lambda$ 。并且相邻两个主极大之间有 $(N-2)$ 个副极大, 即相邻两个主峰之间有 $(N-2)$ 个辅峰。

令 $\lambda = 1 \text{ m}$, $d = 5 \text{ m}$, 作出 I_0 随 $\sin \theta$ 的变化情况, 如图 4.3 所示。可以看到, 随着 N 的增大, 辐照度的最大值 $I_{\max} = N^2 I_0$ 越大.

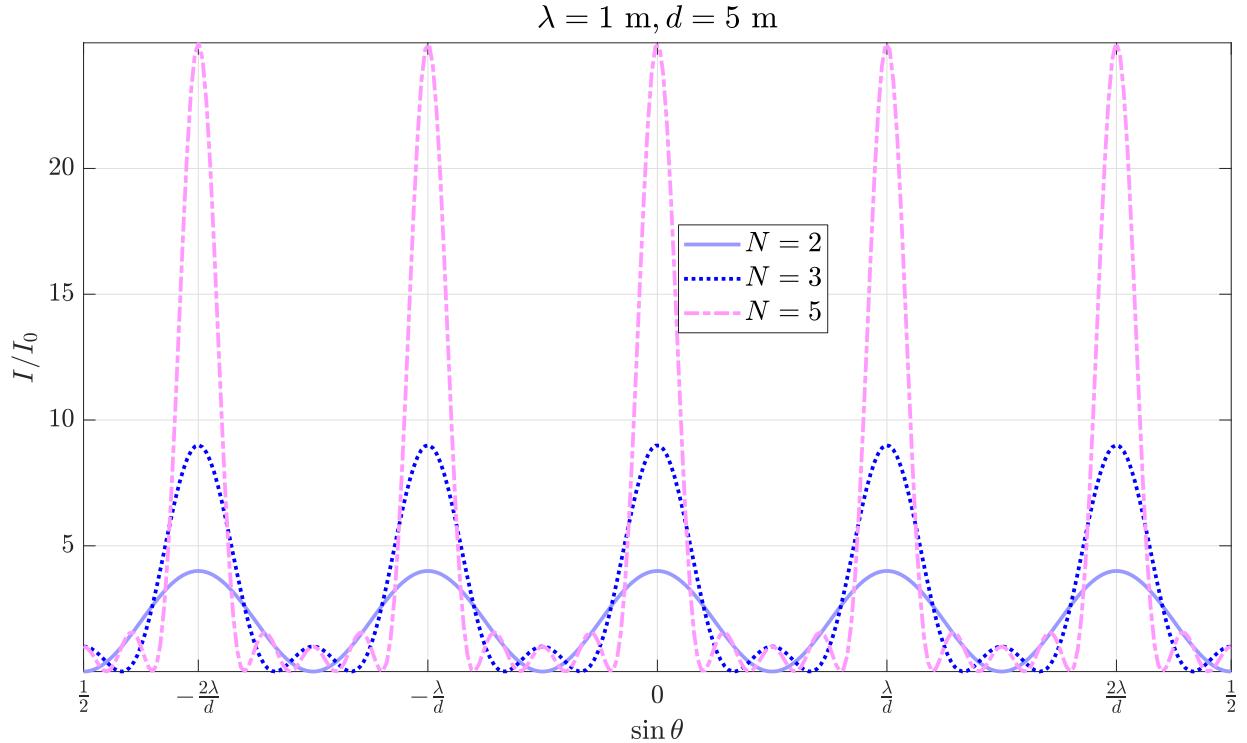


图 4.3: 全同振子阵列的辐照度分布

4.2.2 理想线光源

如图 4.2 (b), 考虑一个宽度为 D 的理想线光源 (例如平面波照射宽度远小于 λ 的长狭缝), 它可以视为无限个全同振子, 每一点发射一个球面子波, 子波方程为:

$$E_{\text{sub}} = \frac{\epsilon_0}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad (4.8)$$

其中 ε_0 称为波源强度（也称光源强度，注意不是真空介电常量）。取阵列上的一段微元 dy ，其上包含 $\frac{dy}{D}N$ 个波源（稍后我们会令 $N \rightarrow \infty$ ），则这一段微元对 P 点电场的贡献为：

$$dE = \frac{N dy}{D} \cdot \frac{\varepsilon_0}{r} e^{i(kr - \omega t)} = \frac{N \varepsilon_0}{Dr} e^{i(kr - \omega t)} dy = \frac{\varepsilon_L}{r} e^{i(kr - \omega t)} dy, \quad \varepsilon_L = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N \varepsilon_0}{D} \quad (4.9)$$

其中 ε_L 称为单位长度上的波源强度。作积分即得：

$$E = \varepsilon_L \int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} dy, \quad r = r(y) \quad (4.10)$$

对不同位置的点 P ，上式的近似方式也不同，从而得到不同的结果。相干的线光源现在还不存在物理实体，但它可以为我们提供数学上的启发。

§ 4.3 夫琅禾费衍射

4.3.1 单缝远场衍射

设相比于光源宽度 D ，观察点 P 离线光源很远，即 $R \gg D$ ，有近似 $r = R - y \sin \theta$ ，代入公式 (4.10) 进行积分，得到：

$$E = \frac{\varepsilon_L D}{R} \cdot \text{sinc} \left(\frac{1}{2} k D \sin \theta \right) e^{i(kR - \omega t)} = \frac{\varepsilon_L D \text{sinc} \beta}{R} e^{i(kR - \omega t)}, \quad \beta = \frac{1}{2} k D \sin \theta = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta \quad (4.11)$$

$$I = I(\theta) = \langle E^2 \rangle_T = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_L D}{R} \right)^2 \text{sinc}^2 \beta, \quad I = I(0) \text{sinc}^2 \beta \quad (4.12)$$

因为 $\beta = \frac{1}{2} k D \sin \theta = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta$ ，当 $D \gg \lambda$ 时，随着 θ 的增大， β 急剧增大， $\text{sinc}^2 \beta$ 迅速趋近于 0。反之，如果 $D \ll \lambda$ ， β 对一切 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 都可近似为 0，此时 $I \equiv I(0)$ 不变（由能量守恒，此值也会趋近于 0），线源就化为一个发射球面波的点源。

在处理单缝衍射时，设缝宽较小而缝长较大，呈竖直方向。那么狭缝的“每一横”（横向的微元）都可视作一个理想线光源，线光源宽度 D 即为狭缝的宽度 b 。基于此，仍可得到与上面一致的结果。特别地，单缝衍射辐照度的极值发生在：

$$\text{极小值 (为 0): } \beta = m\pi, m = \pm 1, \pm 2, \dots \Rightarrow b \sin \theta = m\lambda, m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.13)$$

$$\text{极大值: } \tan \beta = \beta \Rightarrow \beta \approx 1.43\pi, 2.46\pi, 3.47\pi, \dots \quad (4.14)$$

下表列出了部分极值的角度和相对辐照度大小，以供形成直观的认识。

表 4.1: 单缝夫琅禾费衍射的极大值

β (rad)	归一化振幅 $E_{0,r}$	归一化照度 I_r
0	1	1
1.4303π	-0.217	0.047
2.4590π	0.128	0.016
3.4707π	0.091	0.008

表 4.2: 单缝夫琅禾费衍射的极小值

β (rad)	归一化振幅 $E_{0,r}$	归一化照度 I_r
π	0	0
2π	0	0
3π	0	0
4π	0	0

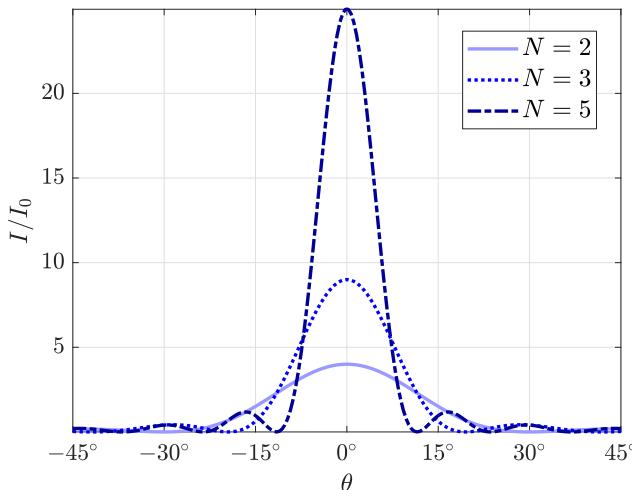
对实验装置而言，如果我们使用能以单缝为轴自由旋转的辐照度计（始终指向狭缝中心），便可以方便的改变角度 θ ，此时应选择使 $N = \frac{b}{\lambda}$ 较小的狭缝宽度 (b 通常在几个波长)，以使得主要的图像较好地分布在给定的 θ 范围内，例如 $[-50^\circ, 50^\circ]$ 。作为一个例子，我们固定 $\lambda = 3 \text{ cm}$ 不变，作出辐照度 I 随 $\theta \in [-45^\circ, 45^\circ]$

的分布情况，如图 4.4 (a) 所示。同时还可讨论中央极大的全峰角宽度 ξ_θ ：

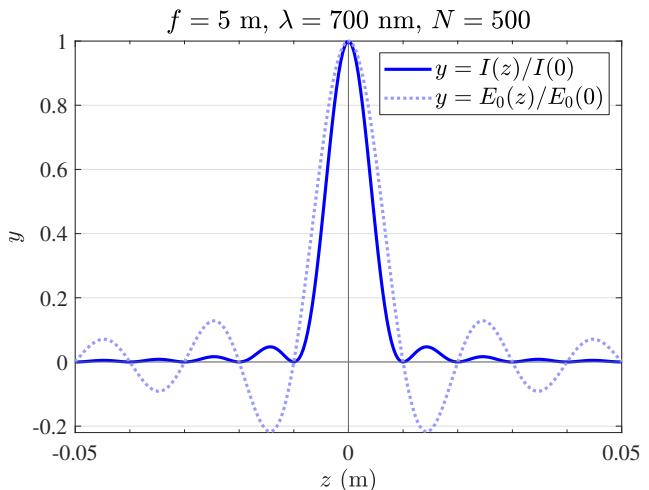
$$I = I(0) \operatorname{sinc}^2 \beta = I(0) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \right) = I(0) \operatorname{sinc}^2 (N\pi \sin \theta) \quad (4.15)$$

$$b \sin \theta_0 = \lambda \implies \xi_\theta = 2\theta_0 = 2 \arcsin \left(\frac{\lambda}{b} \right) = 2 \arcsin \left(\frac{1}{N} \right) \quad (4.16)$$

从公式和图 4.4 (a) 中可以看到， N 越大，角宽度就越小，若固定 λ 不变，缝宽 b 减小则会使照度的幅度减小。



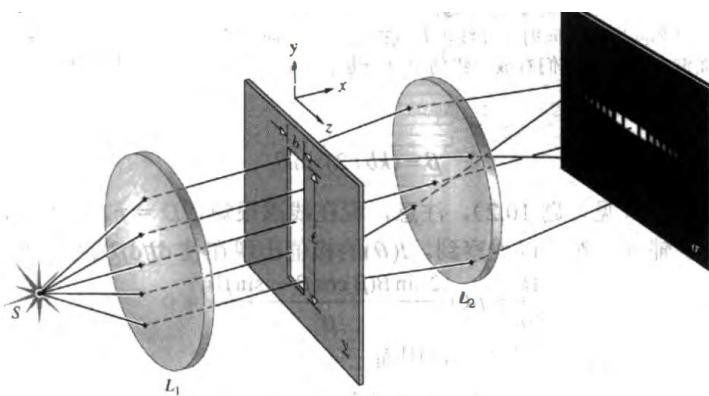
(a) 辐照度随角度 θ 的变化



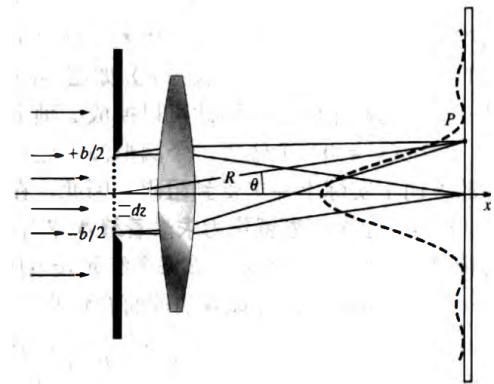
(b) 辐照度随位置 z 的变化

图 4.4: 单缝夫琅禾费衍射

如果采用固定在中轴线上的观察板，由于实际的距离 R 不可能无穷大，因此可以采用图 4.5 中的装置。其中，单缝与观察屏之间的透镜 L_2 应紧挨单缝，其线度和焦距都要远大于单缝宽度 b ，并且观察屏恰好放在 L_2 的焦距处。另外，为了使主要图像集中在观潮屏对应的极小角度范围内， N 应该较大（对可见光而言，通常是几百个波长）。这样，既实现了 $R \rightarrow \infty$ ，又能在接受屏上有较好的衍射现象。



(a) 三维图



(b) 横剖面

图 4.5: 用屏幕观察单缝衍射的实验装置

借助狭缝中心点在屏幕上的成像，可以帮助我们推导辐照度随位置 z 的分布。依据图 4.5，可以计算

$I = I(z)$ 的表示式, 以及中央极大的全峰宽度 ξ_z :

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{z}{f} \implies I = I(z) = I(0) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{N\pi}{f} z \right) \quad (4.17)$$

$$\sin \theta_0 = \frac{\lambda}{b} \implies \xi_z = 2f \tan \theta_0 = 2f \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{2f}{\sqrt{N^2 - 1}} \quad (4.18)$$

不妨作出 $z \in [-5 \text{ cm}, 5 \text{ cm}]$ 时, 电场的幅度 E_0 和辐照度 I 的变化情况, 如图 4.4 (b) 所示。

4.3.2 双缝远场衍射

假设现在有两个宽为 b 的长狭缝, 从中心到中心的距离为 a , 这构成一个由单缝衍射调制过的快速变化的双缝干涉系统, 所得到的辐照度分布是双缝衍射后的相干叠加。

如图在远场近似下, 积分公式 (4.10) 变为:

$$E = E(z) = \varepsilon_L \left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} F(z) dz + \int_{a-\frac{b}{2}}^{a+\frac{b}{2}} F(z) dz \right], \quad F(z) = \sin(kR - \omega t + kz \sin \theta) \quad (4.19)$$

$$\implies E = b \varepsilon_L \operatorname{sinc} \beta [\sin(kR - \omega t) + \sin(kR - \omega t + 2\alpha)] = b \varepsilon_L \operatorname{sinc} \beta \cos \alpha \cdot e^{i(kR - \omega t + \alpha)} \quad (4.20)$$

$$\implies I = 4I_0 \operatorname{sinc}^2 \beta \cos^2 \alpha, \quad \alpha = \frac{1}{2}ka \sin \theta = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta, \quad \beta = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \quad (4.21)$$

其中 I_0 是只有单条狭缝时的最大辐照度, 系数 4 是因为电场变为两倍时, 辐照度变为 4 倍。

在上式中, 若 b 非常小 ($kb \rightarrow 0$), 则化为理想杨氏实验的表达式; 若 $a = 0$, 则化为单缝衍射的表达式。记 $m = \frac{a}{b}$, 即 $a = mb$, 则衍射主峰中可以观察到 $2m - 1$ 个极大亮纹, 也即除中央亮纹外, 两边还各有 $m - 1$ 条亮纹。最边缘的两个亮纹事实上被“分割”过, 我们没有将其算在辅峰中, 称为缺级, 如果算入, 则应有 $2m + 1$ 个极大峰。

固定 $b = 0.35 \text{ mm}$ 不变, 考虑不同 m 下的衍射图样 ($a = mb$), 如图 4.7 和图 4.6 所示。

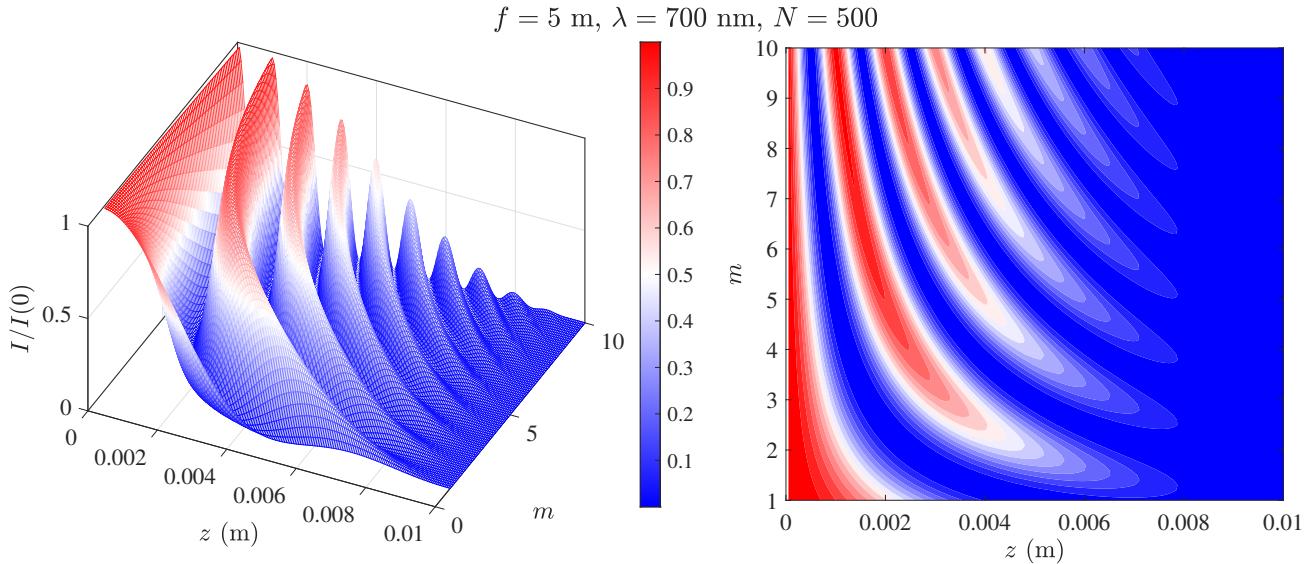


图 4.6: 单缝主峰内双缝衍射图样随 m 的变化情况

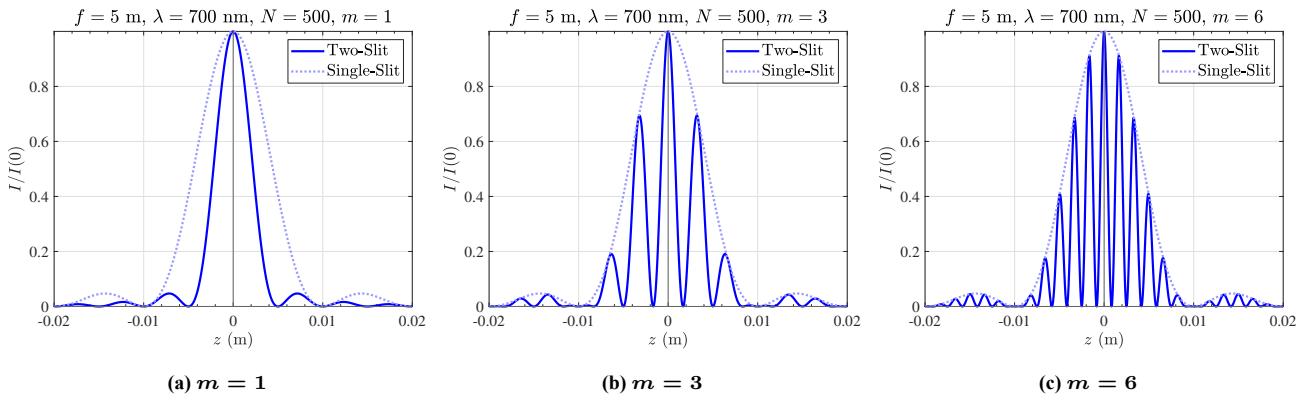


图 4.7: 不同 m 下的双缝衍射图样

4.3.3 多缝远场衍射

现在设狭缝的数目为 N_{slit} ($N_{\text{slit}} \geq 2$), 或简记为 N_s , 且相邻狭缝之间的中心距离都为 a , 则积分式变为:

$$E = \varepsilon_L \sum_{j=0}^{N_s-1} \int_{(j-1)a - \frac{b}{2}}^{(j-1)a + \frac{b}{2}} F(z) \, dz = b \varepsilon_L \operatorname{sinc} \beta \sum_{j=0}^{N_s-1} \sin(kR - \omega t + 2\alpha \cdot j) \quad (4.22)$$

$$= b \varepsilon_L \operatorname{sinc} \beta e^{i(kR - \omega t)} \operatorname{Im} \left[\sum_{j=0}^{N_s-1} (e^{i2\alpha})^j \right] = b \varepsilon_L \operatorname{sinc} \beta \left(\frac{\sin N_s \alpha}{\sin \alpha} \right) \cdot e^{i(kR - \omega t + (N-1)\alpha)} \quad (4.23)$$

$$\Rightarrow I = I_0 (\operatorname{sinc} \beta)^2 \left(\frac{\sin N_s \alpha}{\sin \alpha} \right)^2, \quad \alpha = \frac{1}{2} k a \sin \theta = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta, \quad \beta = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \quad (4.24)$$

其中 I_0 是仅有单缝时的辐照度，注意 $I(0) = N_s^2 I_0$ 。主极大峰发生在 $\alpha = m\pi, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 的位置（角度）上，这等价于 $a \sin \theta_m = m\lambda$ ，此时 $\frac{\sin N_s \alpha}{\sin \alpha} = N_s$ 。相邻两个主峰之间有 $(N_s - 2)$ 个副峰。

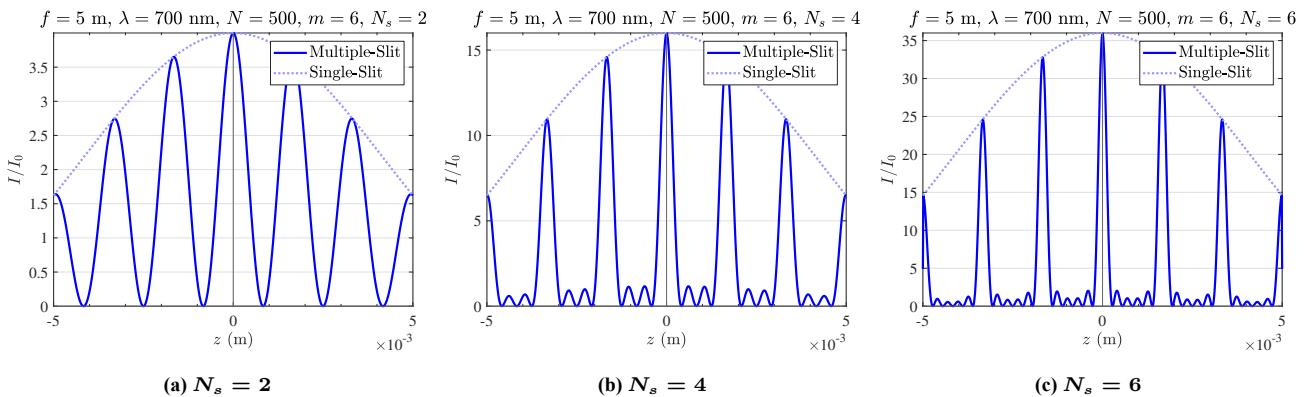


图 4.8: 不同 N_s 下的多缝衍射图样

从单缝到双缝，是加入了单缝衍射调制后的峰（可以认为是主峰），从双缝再到多峰，便是在这些主峰之间又加入了 $(N_s - 2)$ 个辅峰，并且辅峰得到的能量很少。

4.3.4 小孔远场衍射

在研究具体的矩形孔、圆孔之前，我们先给出小孔衍射的理论基础。仍在夫琅禾费衍射情形下作推导，如图 4.9 所示。将小孔视为无限个具有面积 dA 的点光源（发出球面波），我们有：

$$dE = \frac{\varepsilon_A}{r} \cdot e^{i(kr - \omega t)} dA, \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (4.25)$$

$$r = R \cdot \sqrt{1 - \frac{2(yY + zZ)}{R^2} + \frac{y^2 + z^2}{R^2}} \approx R \left(1 - \frac{(yY + zZ)}{R^2}\right) = R - \frac{yY + zZ}{R} \quad (4.26)$$

于是到达 P 点的电场叠加为：

$$E = \frac{\varepsilon_A e^{i(kR - \omega t)}}{R} \iint_A e^{ik(\frac{yY + zZ}{R})} dA \quad (4.27)$$

这便是小孔远场衍射的积分公式。此式没有通解，对于不同类型的小孔，我们可以取不同的近似方法，进而得到具体的结果。

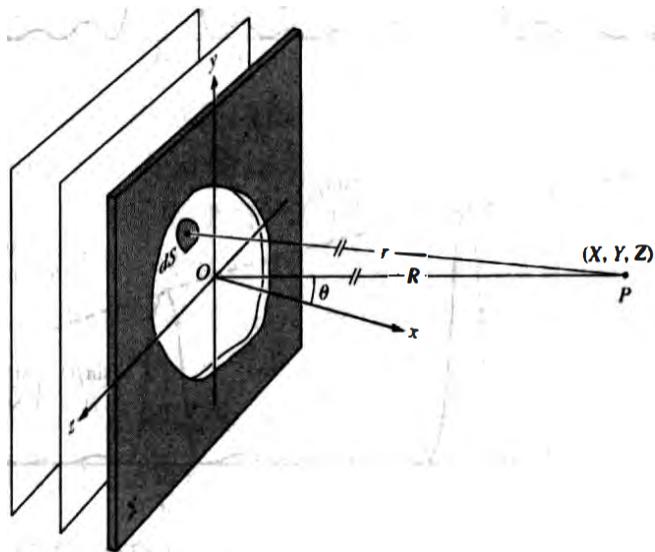


图 4.9: 任意小孔的夫琅禾费衍射

4.3.5 矩形孔远场衍射

当小孔是横宽 a ，纵高为 b 的矩形孔时，如图 4.10 (a)。

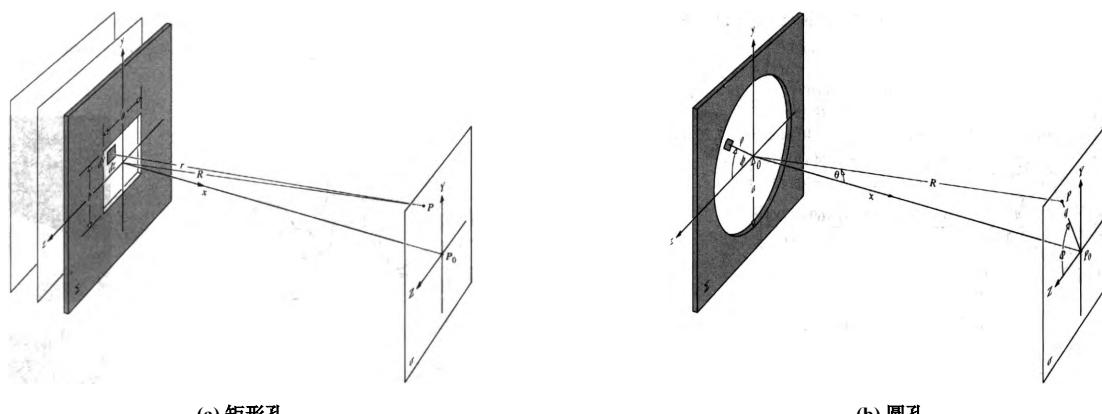


图 4.10: 小孔衍射的具体例子

则积分式 (4.27) 变为:

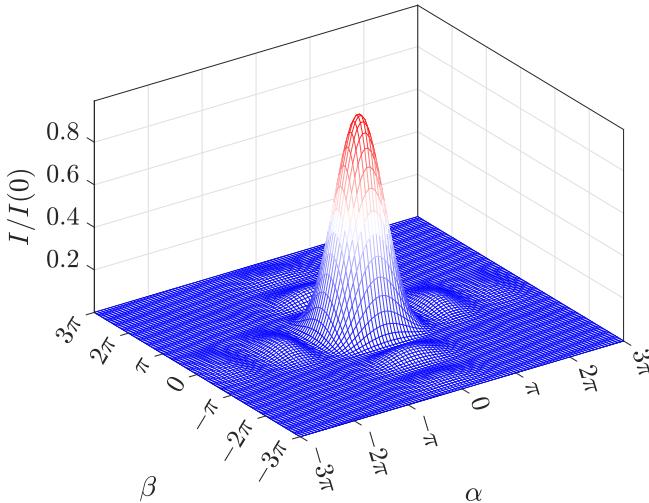
$$E = \frac{\varepsilon_A e^{i(kR - \omega t)}}{R} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{ik \cdot \frac{yY}{R}} dy \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{ik \cdot \frac{zZ}{R}} dz \Rightarrow \quad (4.28)$$

$$E = \frac{A\varepsilon_A}{R} \operatorname{sinc} \alpha' \operatorname{sinc} \beta' \cdot e^{i(kR - \omega t)} \quad (4.29)$$

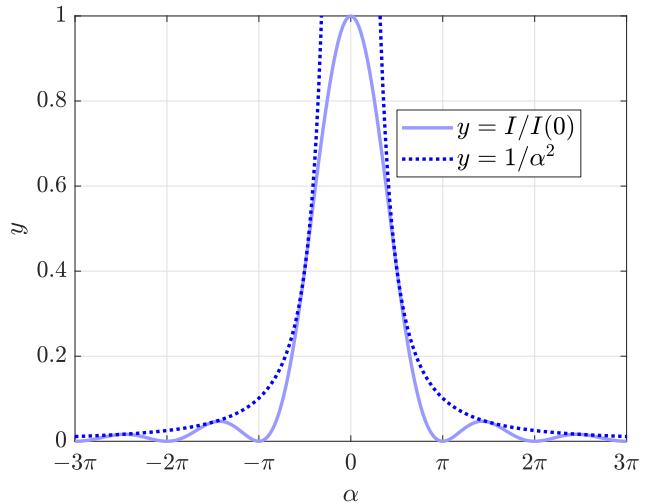
$$I = I(0) \operatorname{sinc}^2 \alpha \operatorname{sinc}^2 \beta, \quad I(0) = \frac{A^2 \varepsilon_A^2}{R^2} \quad (4.30)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}ka \sin \theta_a = \frac{1}{2}ka \cdot \frac{Z}{R}, \quad \beta = \frac{1}{2}kb \sin \theta_b = \frac{1}{2}kb \cdot \frac{Y}{R} \quad (4.31)$$

沿 a 轴方向 (α 方向) 时 $\beta = 0$, 辐照度的包络线为 $I = \frac{I(0)}{\alpha^2}$; 类似地, 沿 b 轴方向 (β 方向) 的包络线为 $I = \frac{I(0)}{\beta^2}$ 。下面的几张图展示了矩形孔的辐照度分布情况。



(a) 在观察屏上的辐照度分布



(b) 沿 α 轴的辐照度分布

图 4.11: 矩形孔的辐照度分布

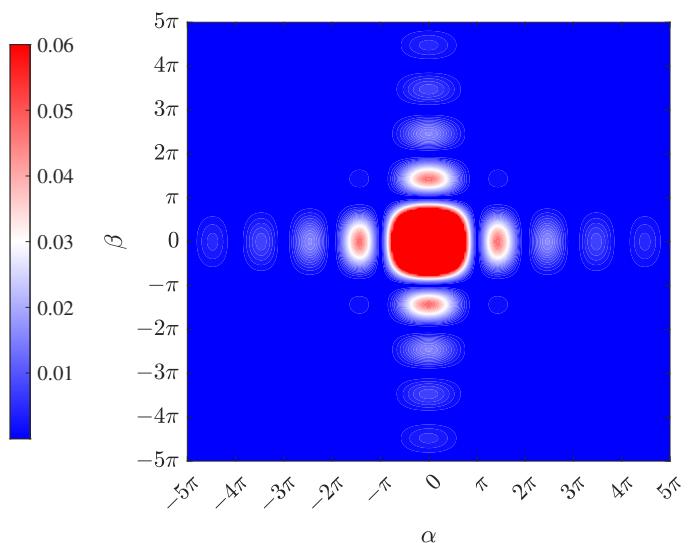
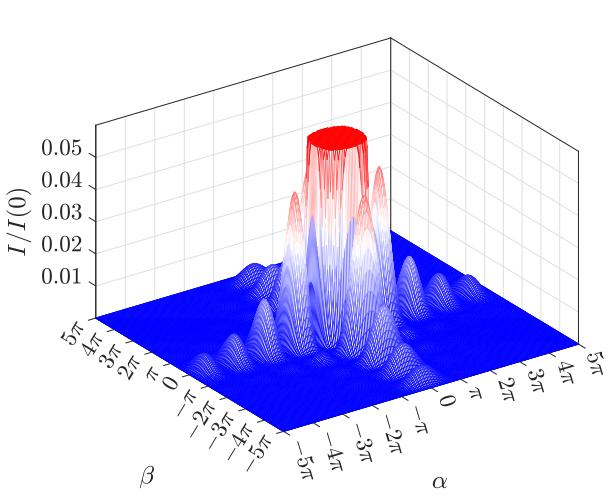
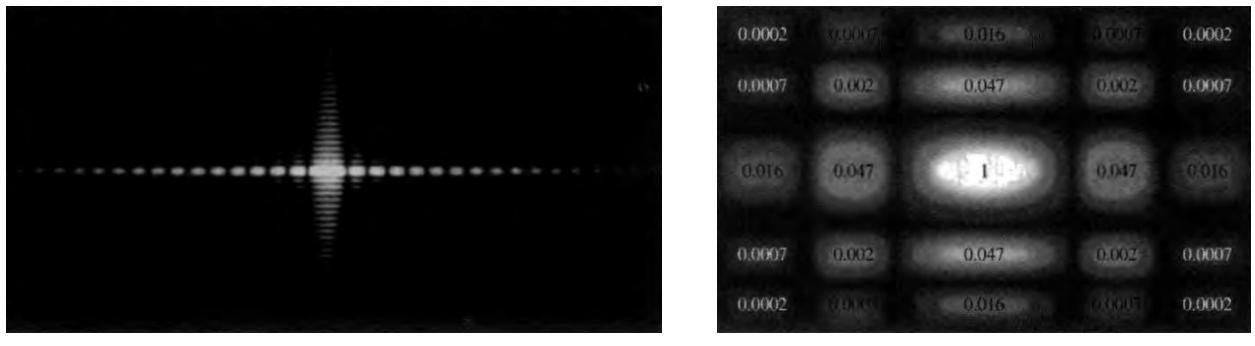


图 4.12: 辐照度分布细节放大



(a) 夫琅禾费衍射图

(b) 归一化夫琅禾费衍射图样

图 4.13: 垂直矩形孔 (竖直狭缝) 的辐照度图像

4.3.6 圆孔远场衍射

如图 4.10 (b), 对圆孔的情形, 我们采用球坐标, 则积分式 (4.27) 化为:

$$E = \frac{\varepsilon_A e^{i(kR - \omega t)}}{R} \int_{\rho=0}^{\rho=a} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} e^{i(\frac{k\rho a}{R} \cos(\phi - \Phi))} \rho \rho \phi \quad (4.32)$$

由旋转对称性, 结果必然与 Φ 无关, 因此不妨令 $\Phi = 0$ 。为求 (表示) 此积分结果, 我们需要引入 (第一类) 贝塞尔函数 J , 类似伽马函数和贝塔函数, 它也是由积分定义的, 在物理中很常见。定义 0 阶和 n 阶贝塞尔函数如下:

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \phi} d\phi, \quad J_n(x) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n\phi + x \cos \phi)} d\phi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.33)$$

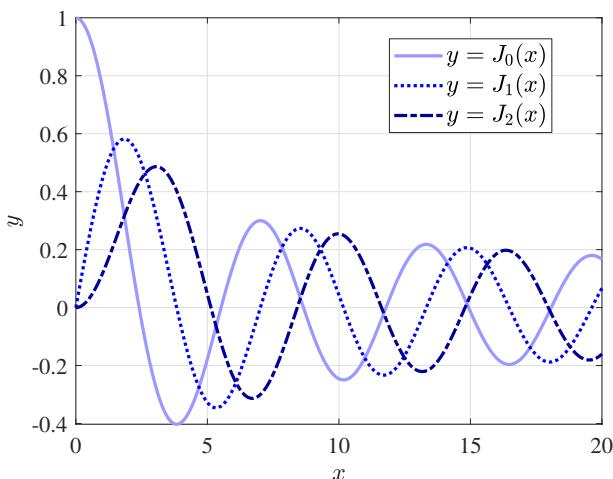
变量 x 可以是复数。它的一个重要性质是递推关系:

$$J_0(x) = J'_1(x) + \frac{J_1(x)}{x}, \quad [x^n J_n(x)]' = x^n J_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.34)$$

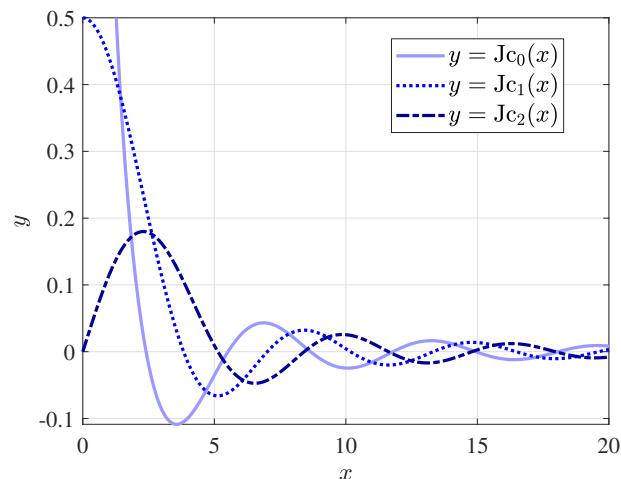
为了方便后文表示, 与依据 \sin 定义 sinc 时类似, 我们也定义 Jc 函数如下:

$$\text{Jc}_0(x) = \frac{2J_0(x)}{x}, \quad \text{Jc}_n(x) = \frac{2J_n(x)}{x}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.35)$$

分子上的 2 是为了使 Jc_1 在原点的极限值为 1 (类似 sinc 的极限值)。 $J_n(x)$ 和 $\text{Jc}_n(x)$ 在正实轴上的图像如图 4.14 所示, 偶数阶 (包括 0 阶) 时为偶函数, 奇数阶时为奇函数。



(a) (第一类) 贝塞尔函数



(b) 定义的 Jc 函数

图 4.14: 贝塞尔函数及其引申函数

继续我们的积分，并简记 $\delta = ka \cdot \frac{r}{R} \approx ka \sin \theta$ ，可以得到：

$$E = \frac{A\varepsilon_A}{R} Jc_1(\delta) \cdot e^{i(kR - \omega t)} \quad (4.36)$$

$$I = I(0) Jc_1^2(\delta), \quad I(0) = \frac{A^2 \varepsilon_A^2}{R^2}, \quad \delta = ka \cdot \frac{r}{R} \approx ka \sin \theta \quad (4.37)$$

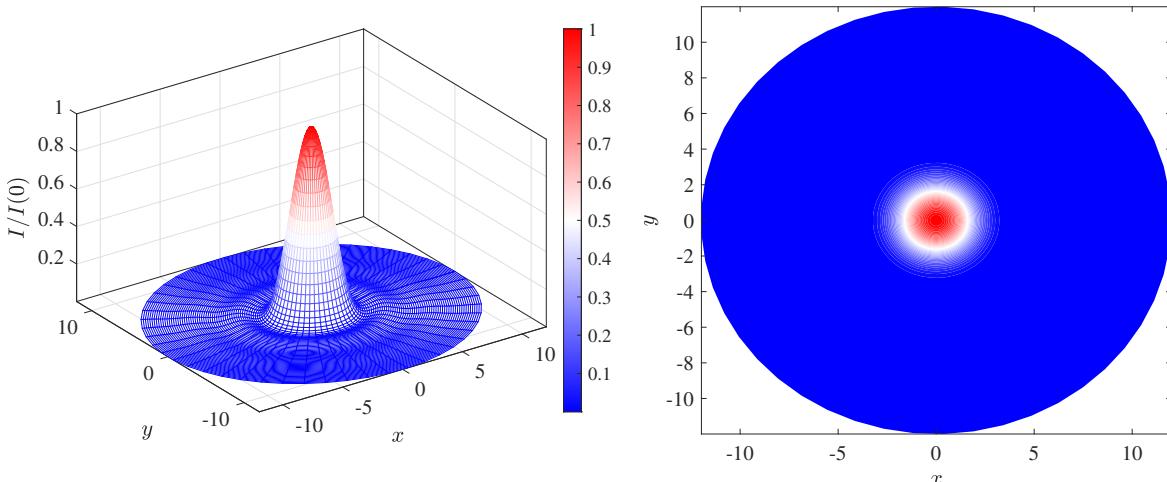


图 4.15: 在观察屏上的辐照度分布

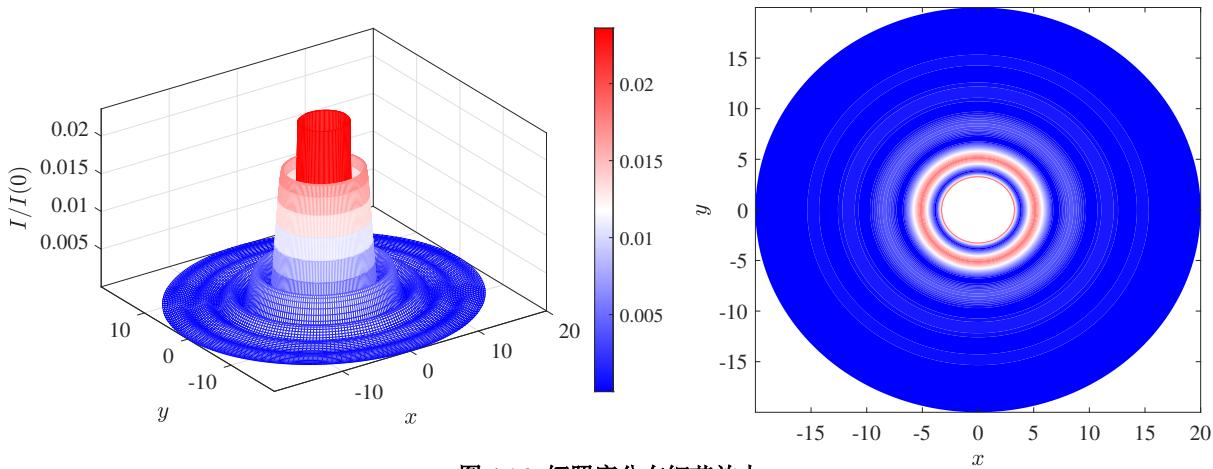
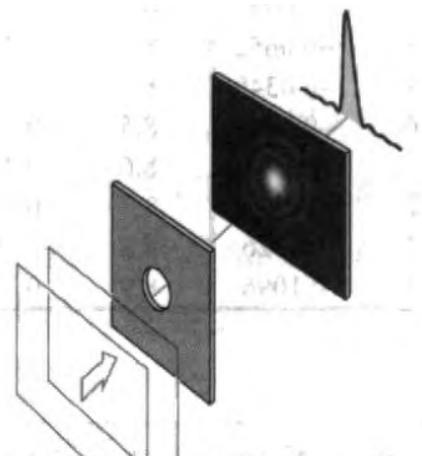
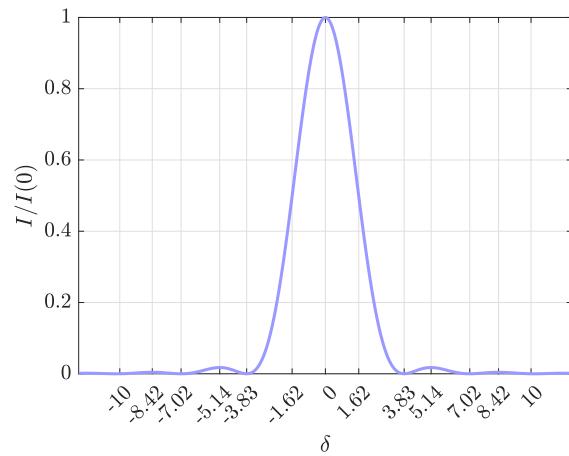


图 4.16: 辐照度分布细节放大



(a) 圆孔夫琅禾费衍射的爱里图样



(b) 辐照度随自变量 delta 的变化

图 4.17: 圆孔夫琅禾费衍射

辐照度的极小值等价于 $J_1(x)$ 的零点（0 除外），极大值等价于 $J_2(x)$ 的零点，为方便参考，我们列出前几个极值的及相对大小：

表 4.3: 圆孔夫琅禾费衍射的极大值

$\delta = kar/R$	0	5.1356	8.4172	11.6198
$I/I(0)$	1	0.0175	0.0042	0.0016

表 4.4: 圆孔夫琅禾费衍射的极小值

$\delta = kar/R$	3.8317	7.0156	10.1735	13.3237
$I/I(0)$	0	0	0	0

为了描述衍射现象的尺度，我们定义辐照度的全峰角宽度 ξ_θ ，由于辐照度的第一个极小值（零点）在 $\delta = 3.8317$ 处，因此有：

$$ka \sin \theta_0 = 3.8317 \implies \xi_\theta = 2\theta_0 = 2 \arcsin \left(\frac{3.8317}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{2a} \right) \approx \frac{1.22}{a} \lambda = \frac{2.44}{D} \lambda \quad (4.38)$$

常说的“角宽度”便是指 ξ_θ 。与单缝衍射时类似，我们使用透镜聚焦出射光，在焦平面上得到衍射图样，此时有全峰（线）宽度 $\xi_z = 2f \tan(\frac{\xi_\theta}{2}) \approx f\xi_\theta = f \frac{2.44}{D} \lambda$ 。

孔越小，峰越宽，衍射所得的图样越大（越明显），但相应辐照度的值会降低。

4.3.7 成像系统的分辨率

考虑从原处设向圆孔的两束光线，夹角为 $\Delta\phi$ ，当所成的两个像恰好可分辨时，称此时的夹角为最小分辨率 $(\Delta\phi)_{\min}$ 。这里的“恰好可分辨”，是指恰好满足瑞利判据，即像的半角宽恰好等于两个像的中心之间的角宽度，此时一个像的第一暗带正好落在另一个像的中心上，有：

$$(\Delta\phi)_{\min} = \frac{\xi_\theta}{2} = \frac{1.22}{D} \lambda \quad (4.39)$$

对应的最小分辨间距为：

$$(\Delta l)_{\min} = R (\Delta\phi)_{\min} \quad (4.40)$$

成像系统的分辨率常用 $\frac{1}{(\Delta\phi)_{\min}}$ 或 $\frac{1}{(\Delta l)_{\min}}$ 来定义。

4.3.8 衍射光栅

衍射元件（可以是透光孔缝或不透光障碍物）的重复阵列能够使得出射波的相位和振幅发生周期性的交替变化（振幅一般有衰减），这种基于衍射原理的重复阵列称为衍射光栅，光栅对入射光的作用称为“调制”。例如多缝便是一种最简单的光栅，它的调制效果是在夫琅禾费衍射图样上出现了多个主峰和辅峰。

光栅又分为透射光栅和反射光栅，但它们都满足光栅方程：

$$a(\sin \theta_m - \sin \theta_i) = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.41)$$

其中 a 是光栅常数，表示两相邻狭缝的间距，即周期长度。以垂直于光栅平面的直线为法线， θ_i 是入射角而 θ_m 是第 m 级（极大）衍射角。

4.3.9 光栅光谱学

对光栅而言，即使是理想单色光入射，出射谱线也有一定的角宽度：

$$\Delta\alpha = \Delta \left(\frac{1}{2} ka \sin \theta \right) = \frac{2\pi}{N} \implies \xi_{\theta,m} = \frac{2\lambda}{Na \cos \theta_m} \quad (4.42)$$

由光栅方程可以知道，不同波长的光入射时，极大衍射角也不同，因此光栅也可作为一种分光装置（色散装置），对光栅方程两边求微分，可得光栅第 m 级光线的角色散本领 \mathcal{D}_θ ：

$$\mathcal{D} = \frac{d\theta_m}{d\lambda} = \frac{m}{a \cos \theta_m} \quad (4.43)$$

仍定义仪器的色分辨本领为 $\mathcal{R} = \frac{\lambda_0}{(\Delta\lambda)_{\min}}$ ，对光栅的第 m 级而言，当谱峰的半角宽度 $\frac{1}{2}\xi_\theta$ 恰好等于两谱线的角距离 $\mathcal{D}\Delta\lambda$ 时（这仍是瑞丽判据），有最小可分辨波长 $(\Delta\lambda)_{\min}$ ：

$$\frac{1}{2}\xi_\theta = \mathcal{D}\Delta\lambda \implies \frac{\lambda}{Na \cos \theta_m} = \frac{m}{a \cos \theta_m} (\Delta\lambda)_{\min} \quad (4.44)$$

$$\implies (\Delta\lambda)_{\min} = \frac{\lambda_0}{mN}, \quad \mathcal{R} = mN = \frac{Na(\sin \theta_m - \sin \theta_i)}{\lambda_0} \quad (4.45)$$

实际中常取 N 为光栅的锐度，此时 $\mathcal{R} = m\mathcal{F}$ ，与 F-P 干涉仪中的情形一致，后者的 $\mathcal{F} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{F}$ 。

特别地，对于自准直装置（入射光始终垂直于光栅沟槽面）装置，我们有 $\theta_i = -\theta_m$ （负号是因为入射光与反射光在光栅的同侧），此时：

$$\mathcal{D}_{\text{auto}} = \frac{2 \tan \theta_i}{\lambda_0}, \quad \mathcal{R}_{\text{auto}} = \frac{2Na \sin \theta_i}{\lambda_0} \quad (4.46)$$

两者都与级数 m 无关，且 $\mathcal{D}_{\text{auto}}$ 还和光栅常量 a 无关。

考虑光栅的自由光谱范围，由于波长小（频率高）的光谱线更密集，当 $\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}$ 的第 $m+1$ 级与 $\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}$ 的第 m 级重合时，达到自由光谱范围 $(\Delta\lambda)_{\text{fsr}}$ ：

$$\begin{cases} a(\sin \theta_m - \sin \theta_i) = (m+1)(\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}) \\ a(\sin \theta_m - \sin \theta_i) = m(\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}) \end{cases} \implies (\Delta\lambda)_{\text{fsr}} = \frac{\lambda_0}{m} \quad (4.47)$$

上面所有公式中的级数 m 在范围 $[0, \frac{2a}{\lambda}]$ 内。由此可得到各参数在不同要求下的最值，这与当初 F-P 时的讨论类似，我们不多赘述。

§ 4.4 二维和三维光栅

此节不是本课的重点，我们仅给出经典的布拉格衍射公式（表示极大值所在角度）：

$$2d \sin \theta = m\lambda \quad (4.48)$$

§ 4.5 菲涅尔衍射

4.5.1 球面波的传播（菲涅尔波带法）

在菲涅尔衍射中，之前的许多近似都不再成立，需要建立另外一套理论基础。

由菲涅尔原理，如果每个子波向一切方向都均匀地辐射，那么除了产生一个向前进的波以外，还会出现一个向波源后退的反向波。实验上并没有发现这样的波，因此我们必须对次级发射体的辐射图样作某些修改。更详细的理论^①表明，次波源发射的光具有方向性，由倾斜因子 $K = K(\theta)$ 来描述，它是次波源在不同方向光场的振幅系数：

$$K = K(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta), \quad E = K \frac{\varepsilon_A}{R} e^{i(kr - \omega t)} \quad (4.49)$$

^① 基尔霍夫理论，详见参考文献 [1] 的 10.4 节

如图 4.18, 由波带理论, 第 m 级半波带 (后文简称“波带”) 在点 P 的电场为:

$$E_m = (-1)^{m+1} \frac{2K_m \varepsilon_0}{\rho_0 + r_0} e^{i(k(\rho_0 + r_0) - \omega t)}, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_A \rho_0 \lambda \quad (4.50)$$

式中 $\varepsilon_0 = \varepsilon_A \rho_0 \lambda$ 是波源强度, 即球面波表达式 $E = \frac{\varepsilon_0}{r} e^{i(kr - \omega t)}$ 中的 ε_0 。

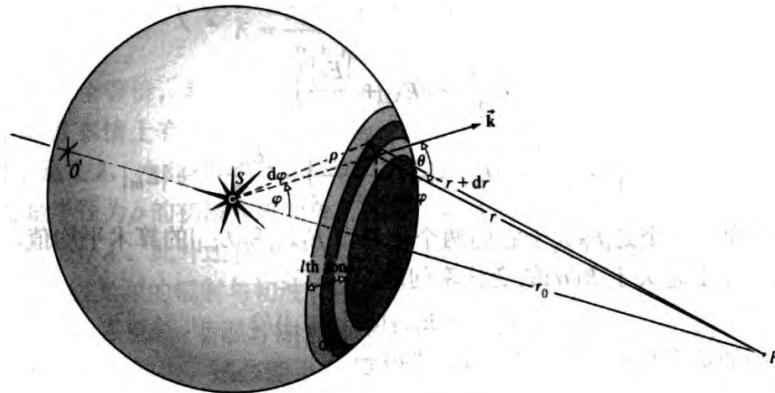


图 4.18: 球形波阵面的传播

4.5.2 圆孔近场衍射

我们指出, 虽然在数学上将半波带分为了无限多个, 但由于倾斜因子 $K(\theta)$ 的存在, 认为小孔中只能“看到”有限个半波带是合适的。通过计算给定小孔上的半波带数目 N_F , 可以得到中轴线上辐照度的一个良好近似。每个半波带的面积 A 由下式给出:

$$A = \pi \frac{r_0 \rho}{r_0 + \rho} \lambda \approx \pi r_0 \lambda \quad (4.51)$$

对圆形小孔, 半波带数目为:

$$N_F = \frac{\pi a^2}{A} = \frac{(\rho_0 + r_0)a^2}{r_0 \rho_0 \lambda} \approx \frac{a^2}{r_0 \lambda} \quad (4.52)$$

上式中 ρ 和 r_0 分别是小孔到光源和观察点的距离, a 是小孔的半径。 N_F 常称为菲涅耳数。保持小孔半径不变, 当点 P 从无穷远处向小孔靠近时, r_0 由无穷到 0, N_F 会由 0 逐渐增大为 ∞ 。

由图 4.19 (c) 可以看出在不同半波带数目下, 中轴线上的振幅情况。角度还可看出, 实际相位角与惠更斯-菲涅尔原理所预测的相位角的不同, O_s 点的切线 (向右) 是惠更斯-菲涅尔原理的相位角, 而相矢量 $\overrightarrow{O_s A_s}$ 的切线对应实际相位角。

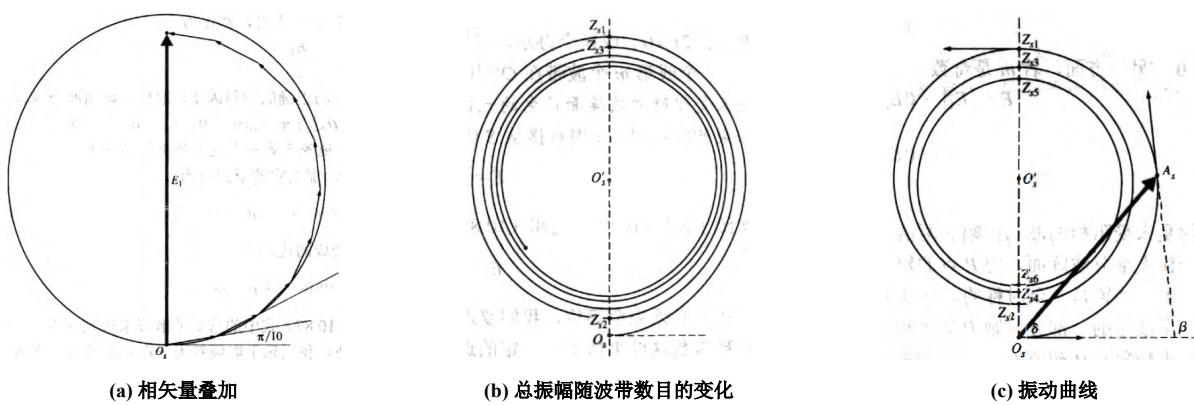
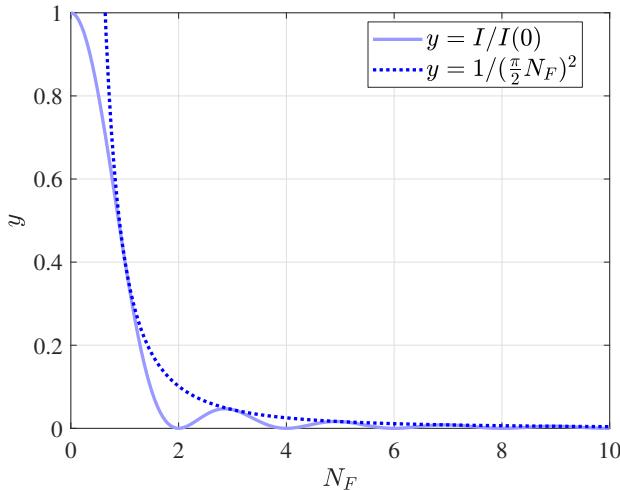
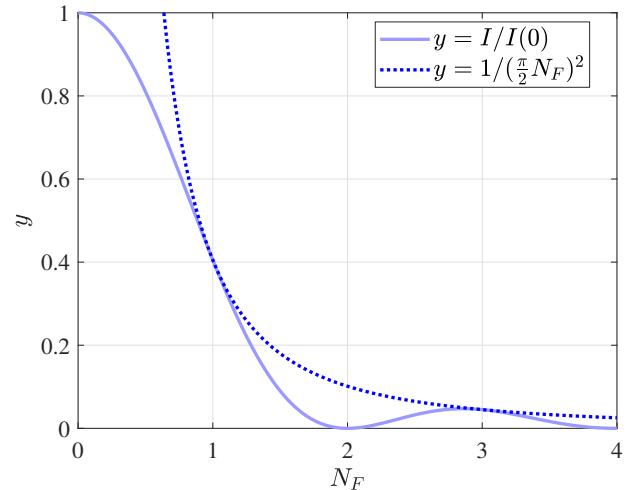


图 4.19: 利用波带和振动曲线来判断中轴线上的振幅情况

在固定直径的孔内，由于 $A = \frac{\pi a^2}{N_F}$ ，随着 N_F 的增大，每个波带的面积 A 会减小，使得轴上辐照度的极大值将依 $\frac{1}{N_F^2}$ 减小（包络线）。一个定性的近似是 $I = I(0) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi}{2} N_F\right)$ ，其中 $I(0)$ 是 $N_F = 0$ (P 点离小孔无穷远)，作出 I 关于 N_F 的变化情况，如图 4.20 所示：



(a) $N_F \in [0, 10]$



(b) $N_F \in [0, 4]$

图 4.20: 中心振幅随波带数的变化

另外，当观察点不在中轴线上时，随着点 P 向外移动，“观察”到的波带也会发生变化，如图 4.21，此时辐照度会有一系列极大与极小值，变化比较复杂。对整个观察平面而言，所得衍射图样随着 N_F 的变化而变化，如图 4.22 所示。

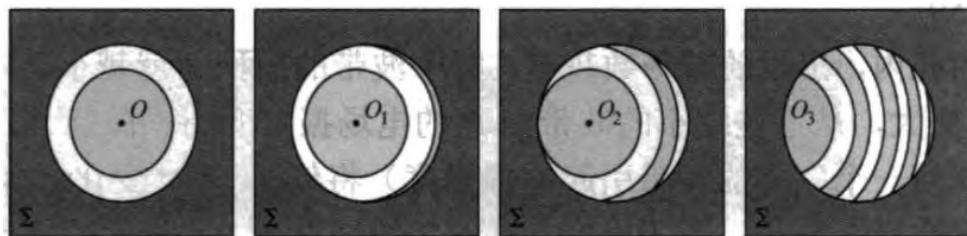


图 4.21: 圆孔内“观察”到的波带

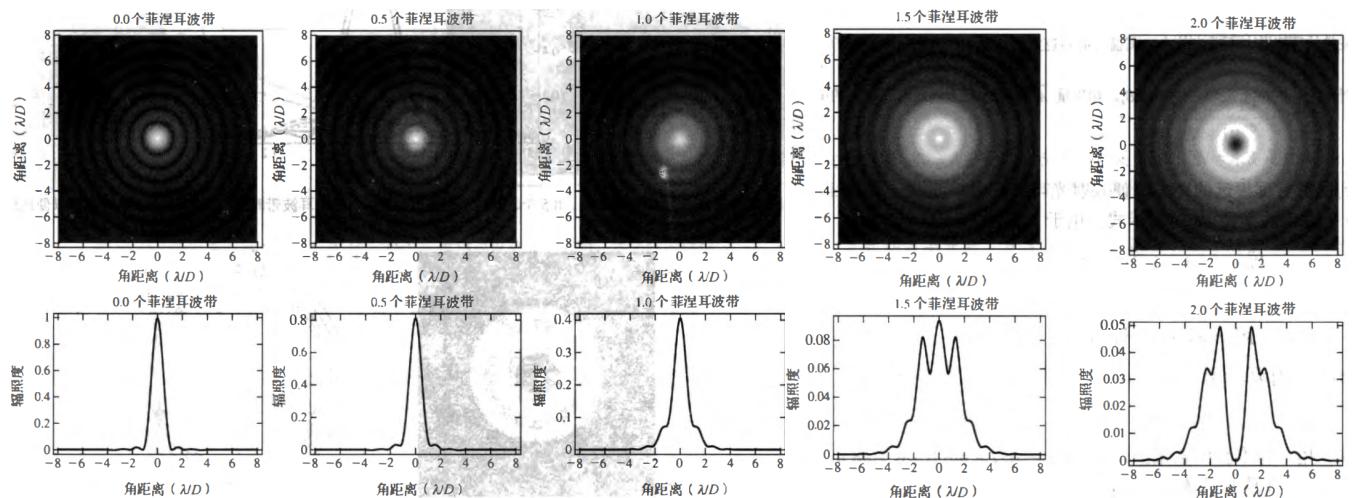


图 4.22: 不同菲涅尔数 N_F 时的圆孔衍射图样

可以看到, 当 $N_F \rightarrow 0$ 时 (即 $N_F \gg 1$), 发生夫琅禾费衍射, 这实质上是夫琅禾费衍射的另一种判别方法; 当 $N_F \geq 1$ 时, 发生菲涅尔衍射。特别地, 对于环形孔, 我们也可以借助振动曲线来分析, 如下图:

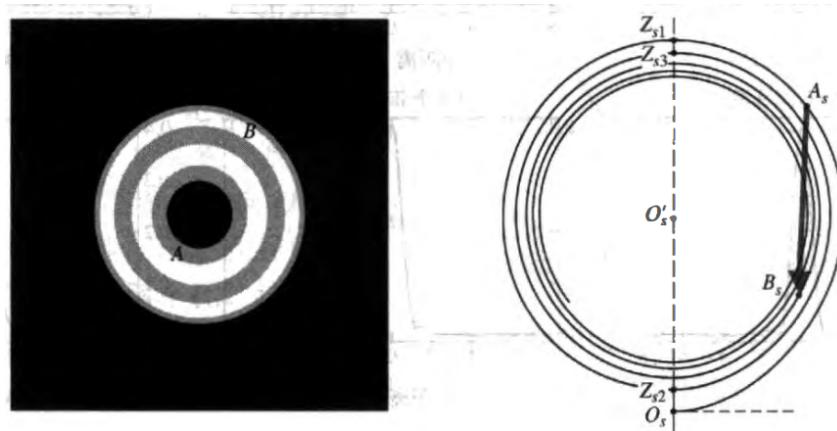


图 4.23: 透光圆环中心轴上的菲涅尔衍射情况

图 4.23 是一个包含 $\frac{1}{3} + 3 + \frac{1}{3}$ 个波带的环形孔, 中心波带 (第一波带) 被圆盘挡住大约 $\frac{2}{3}$ (剩余 $\frac{1}{3}$), 振动曲线的 A_s 和 B_s 分别对应图中 A 点和 B 点。由合成结果知道, 相矢量 $\overrightarrow{A_s B_s}$ 给出了振幅的大小和相位。

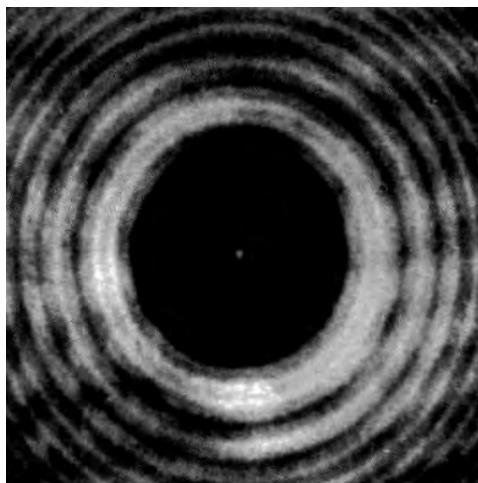
4.5.3 圆盘近场衍射

我们知道, 对于中轴线上的一点 P , 一个未受阻碍的波有无穷多个波带到达 P 点, 在此处产生一个大小为第一波带一半的电场, 即 $E \approx \frac{1}{2}E_1$ 。如果某种障碍物正好盖住第一波带, 在振动曲线中减去第一波带的贡献, 可知此时的电场 $E' = -\frac{1}{2}E_1$, 这表明障碍物的加入不会改变点 P 的亮暗状态 (仍是亮斑)。

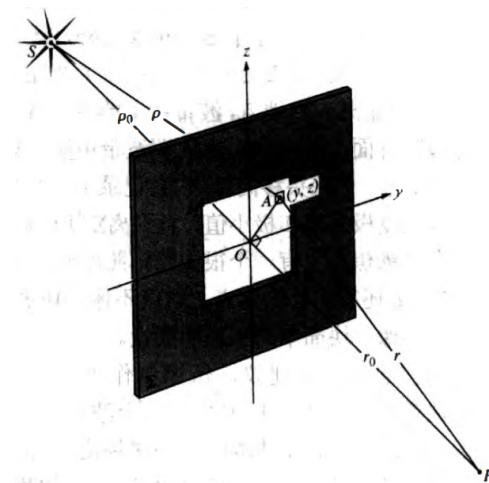
用类似地思想, 如果障碍物从 0 开始, 逐渐遮住 $1, 2, \dots, n$ 个波带, 这等价于对给定的圆屏, 点 P 由无穷远向圆盘靠近。由振动曲线可以看出, 除非 n 非常大 (P 离圆盘很近), 相矢量 $\overrightarrow{A_s B_s}$ 的振幅始终不 (近似) 为 0, 这表明除了紧挨着圆盘之后的一小段, 中轴线上处处为亮点。遮住前 n 个波带时的振幅大小约为:

$$|E| = \frac{1}{2}|E_{n+1}| = K_{n+1} \frac{\varepsilon_A \rho_0 \lambda}{\rho_0 + r_0} e^{i(k(\rho_0 + r_0) - \omega t)} = K_n \frac{\varepsilon_0}{\rho_0 + r_0} e^{i(k(\rho_0 + r_0) - \omega t)} \quad (4.53)$$

其中 K_n 是第 n 级波带的法线与中轴线的夹角, 随着 n 的增大, 夹角 θ 逐渐向 π 靠近, $|E| \rightarrow 0$ 。



(a) 直径为 3 mm 滚珠的衍射图样



(b) 矩形孔的菲涅尔衍射

图 4.24: 圆形障碍物和矩形孔菲涅尔衍射

4.5.4 菲涅尔波带片

相邻两个波带的叠加可以近似抵消，那么我们不禁思考，如果挡住全部偶数波带而通过奇数波带，或者相反（挡奇通偶），是否可以观察到 P 处辐照度的惊人增大？事实上是可以的。像这样能改变每隔半个周期的波带内的光的振幅或相位的屏，叫作（菲涅尔）波带片，波带片实质上是特殊的环形衍射光栅。

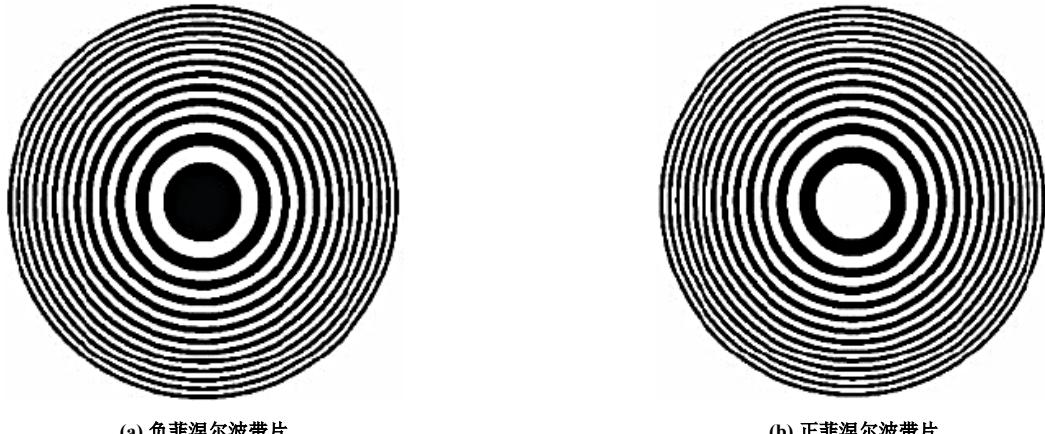


图 4.25: 菲涅尔波带片

例如，假设我们有一个波带片，它只通过前 20 个奇数波带而挡住其它所有波带，则：

$$E = \sum_{n=1}^{20} E_{2n-1} \approx 20E_1 \approx 40E_0 \quad (4.54)$$

此时辐照度将增加到无阻碍情况下的 1600 倍。

由图 4.26 (a)，我们先来计算各波带的半径。

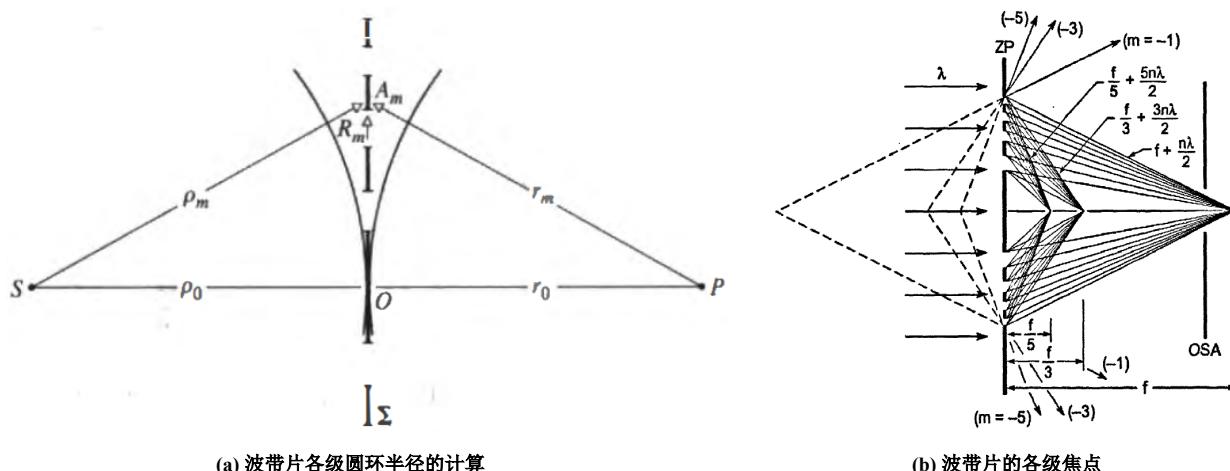


图 4.26: 波带片

将第 m 个波带的外缘标以点 A_m ，按定义，路程 $S-A_m-P$ 的光程应当比 $S-O-P$ 要大 $\frac{m\lambda}{2}$ ，也即：

$$(\rho_m + r_0) - (\rho_0 + r_0) = m\frac{\lambda}{2} \quad (4.55)$$

作泰勒展开 $\rho_m = \rho_0 + \frac{R_m^2}{2\rho_0}$ 和 $r_m = r_0 + \frac{R_m^2}{2r_0}$ ，代入得到：

$$R_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0}}} \xrightarrow{\rho_0 \rightarrow \infty} \sqrt{mr_0\lambda} \quad (4.56)$$

更精确的公式^①是 $R_m = \sqrt{mr_0\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4}}$, 式中 $\frac{m^2\lambda^2}{4}$ 代表球差。

是上面, 我们依据“在点 r_0 的各波带振幅相互加强”的原则, 得到了波带片的各级半径, 使得点 P 是中轴线上光强最大的一点, 此时点 P 称为主焦点或一级焦点, 距离 r_0 也相应的记作 f 或 f_1 , 有:

$$f_1 = \frac{R_1^2}{\lambda} \implies \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0} = \frac{1}{f} \quad (4.57)$$

与薄透镜公式有相同的形式, 因此, 用一光束准直入射给定的波带片(起到 $\rho_0 \rightarrow \infty$ 的作业), 此时中轴线上最亮的点就是主焦距, 它是辐照度分布中的一个极大值(也是最大值), 因为在 f 处波带片上的各圆环刚好和波阵面上的各波带重合。

为什么我们上面要说“一级”焦距? 因为波带片本质上还是一个光栅, 它(在中轴线上)的衍射图样是一系列的主焦点和次焦点交替出现(次焦点都比主焦点近), 如图 4.26 (b) 所示。下面我们推导这些次焦点的位置和辐照度大小。

只需考虑 $r = \frac{f}{k}, k = 2, 3, 4, \dots$ 时的情况, 其余情况介于两者中间, 可定性地判断辐照度的大小变化, 且稍后能轻易知道它们都不是极值点。对于给定的 k , 点 P 与波带距离 $r = \frac{f}{k}$, 我们保持波带片的直径 D 不变, 当距离变为原来的 $\frac{1}{k}$, 由 $R_m = \sqrt{mr\lambda}$ 知道, P 点“看到”的各波带半径变为原来的 $\frac{1}{\sqrt{k}}$ 。之前 $r = f$ 时波带片共有 n 个半径, “孔”(波带片)的直径没变, 而波带半径缩小为原来的 $\frac{1}{\sqrt{k}}$, 因此在点 P “看到”的波带由 n 个增长至 kn 个。

记 $r = \frac{f}{k}$ 时, P 点“看到”的一系列波带半径为 $R_j(k), k = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, kn$, 将它们的相对大小 $(\frac{R_j(k)}{R_1^1})$ 如表 4.5 一样列出, 一切都会变得显然:

表 4.5: $r = \frac{f}{k}, k = 1, 2, 3$, 时孔内一系列波带的相对半径及位置关系

$k = 1$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$...	\sqrt{n}
$k = 2$	$(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}, 1)$	$(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 2)$	$(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \sqrt{3})$...	$(\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2}}, \sqrt{n})$
$k = 3$	$(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}), 1$	$(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}), \sqrt{2}$	$(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}, \sqrt{3})$...	$(\frac{\sqrt{3n-1}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3n-2}}{\sqrt{3}}, \sqrt{n})$
$k = 4$	$(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}, 1)$	$(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}, \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}}, \frac{7}{\sqrt{4}}, \sqrt{2})$	$(\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}, \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4}}, \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{4}}, \sqrt{3})$...	$(\frac{\sqrt{4n-1}}{\sqrt{4}}, \frac{\sqrt{4n-2}}{\sqrt{4}}, \frac{\sqrt{4n-3}}{\sqrt{4}}, \sqrt{n})$

需要注意, 上面的“ n 级半径”并不是波带片的最大圆环半径, 对有 n_0 个圆环的挡光型波带片而言(中心圆算第一个圆环), 无穷远处不透光, 最外围的第 n_0 级圆环($R_{n_0-1} \sim R_{n_0}$)是透光的, 则式中的 $n = n_0$; 对透光型波带片而言, 无穷远处透光, 最外围的第 n 级圆环($R_{n_0-1} \sim R_{n_0}$)是不透光的, 因此需要再往外“扩张一个半径”, 式中的 $n = n_0 + 1$ 。

4.5.5 矩形孔近场衍射

矩形孔时衍射不再具有圆孔那么好的对称性。考虑图 4.24 (b), 次波源微元 dA 对点 P 的电场贡献为:

$$dE = K(\theta) \frac{\varepsilon_A \rho \lambda}{\rho r \lambda} e^{k(\rho+r)-\omega t} dA \quad (4.58)$$

只考虑孔的线度远小于 ρ_0 和 r_0 的情况, 此时系数上可以有近似 $K(\theta) \approx 1$, $r \approx r_0$ 且 $\rho \approx \rho_0$ 。对相位近似时需要更小心:

$$(\rho + r) = (\rho_0 + r_0) + (y^2 + z^2) \frac{\rho_0 + r_0}{r \rho_0 r_0} \quad (4.59)$$

^①由参考文献 [7] Page 3 给出

这个近似比夫琅禾费衍射中作的近似要更敏感，后者对应 $(Y, Z) = 0$ 的近似是 $r = R$ 没有高次项。为了简化积分，引入无量纲变量 u 和 v 如下：

$$u = y \sqrt{\frac{2(\rho_0 + r_0)}{\lambda \rho_0 r_0}}, \quad v = z \sqrt{\frac{2(\rho_0 + r_0)}{\lambda \rho_0 r_0}} \quad (4.60)$$

则积分式为：

$$E = K(\theta) \frac{\varepsilon_A \rho \lambda}{\rho r \lambda} e^{k(\rho+r)-\omega t} dA \quad (4.61)$$

$$= \frac{\varepsilon_A \rho_0 \lambda}{\rho_0 r_0 \lambda} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} e^{ik(\rho+r)} dy dz \quad (4.62)$$

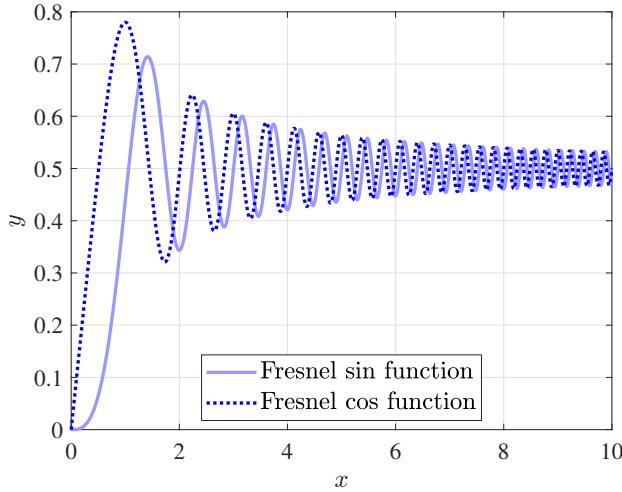
$$= \frac{\varepsilon_0}{\rho_0 r_0 \lambda} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} e^{ik(\rho+r)} dy dz \quad (4.63)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0}{\rho_0 + r_0} e^{i[k(\rho_0 + r_0) - \omega t]} \cdot \int_{u_1}^{u_2} e^{i(\frac{\pi}{2} u^2)} du \cdot \int_{v_1}^{v_2} e^{i(\frac{\pi}{2} v^2)} dv \quad (4.64)$$

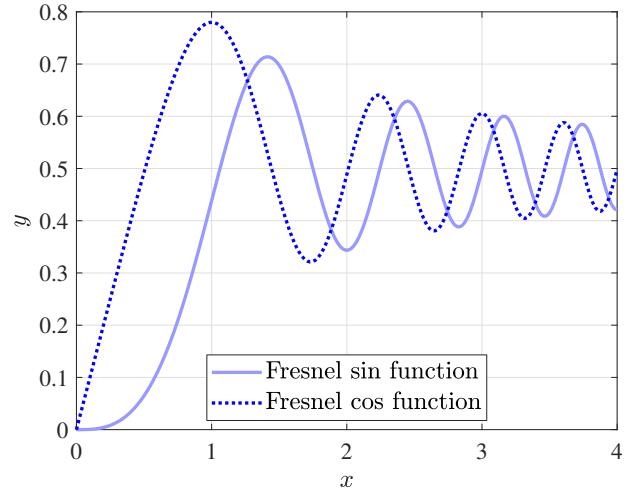
上式中的两个积分没有初等解，可以用余弦菲涅尔积分和正弦菲涅尔积分来表示，定义为：

$$\mathcal{C}(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt, \quad \mathcal{S}(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt, \quad x \in \mathbb{C} \quad (4.65)$$

这两个函数已经得到广泛的研究，Matlab 中也内置了这两个函数，分别是 `fresnels` (正弦) 和 `fresnelc` (余弦)，它们在正实轴上的值如下图所示：



(a) $x \in [0, 10]$



(b) $x \in [0, 4]$

图 4.27: 菲涅尔积分在正实轴上的值

由欧拉公式我们有：

$$\int_0^x e^{i(\frac{\pi}{2}t^2)} dt = \int_0^x [\cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)] = \mathcal{C}(x) + i \mathcal{S}(x) \quad (4.66)$$

于是 P 点的电场和辐照度 $I = \frac{1}{2}E \cdot E^*$ 为：

$$E = \frac{E_0}{2} \cdot [\mathcal{C}(u) + i \mathcal{S}(u)]_{u_1}^{u_2} \cdot [\mathcal{C}(v) + i \mathcal{S}(v)]_{v_1}^{v_2} \quad (4.67)$$

$$I = \frac{I_0}{4} \cdot \left\{ [\mathcal{C}(u_2) - \mathcal{C}(u_1)]^2 + [\mathcal{S}(u_2) - \mathcal{S}(u_1)]^2 \right\} \cdot \left\{ [\mathcal{C}(v_2) - \mathcal{C}(v_1)]^2 + [\mathcal{S}(v_2) - \mathcal{S}(v_1)]^2 \right\} \quad (4.68)$$

其中 $E_0 = \frac{\varepsilon_0}{\rho_0 + r_0} e^{i[k(\rho_0 + r_0) - \omega t]}$ 是波源未被阻挡时传到 P 点的电场。特别地, 当点 P 在中轴线上时, $u_1 = -u_2$ 且 $v_1 = -v_2$, 由菲涅尔积分是奇函数, 因此:

$$E_{\text{center}} = 2E_0 \cdot [\mathcal{C}(u_2) + i\mathcal{S}(u_2)] \cdot [\mathcal{C}(v_2) + i\mathcal{S}(v_2)] \quad (4.69)$$

$$I_{\text{center}} = I_0 \cdot [\mathcal{C}(u_2) + \mathcal{S}(u_2)]^2 \cdot [\mathcal{C}(v_2) + \mathcal{S}(v_2)]^2 \quad (4.70)$$

图 4.28 展示了逐渐增大孔径时矩形孔的衍射图样, 图样由夫琅禾费衍射向菲涅尔衍射转化。

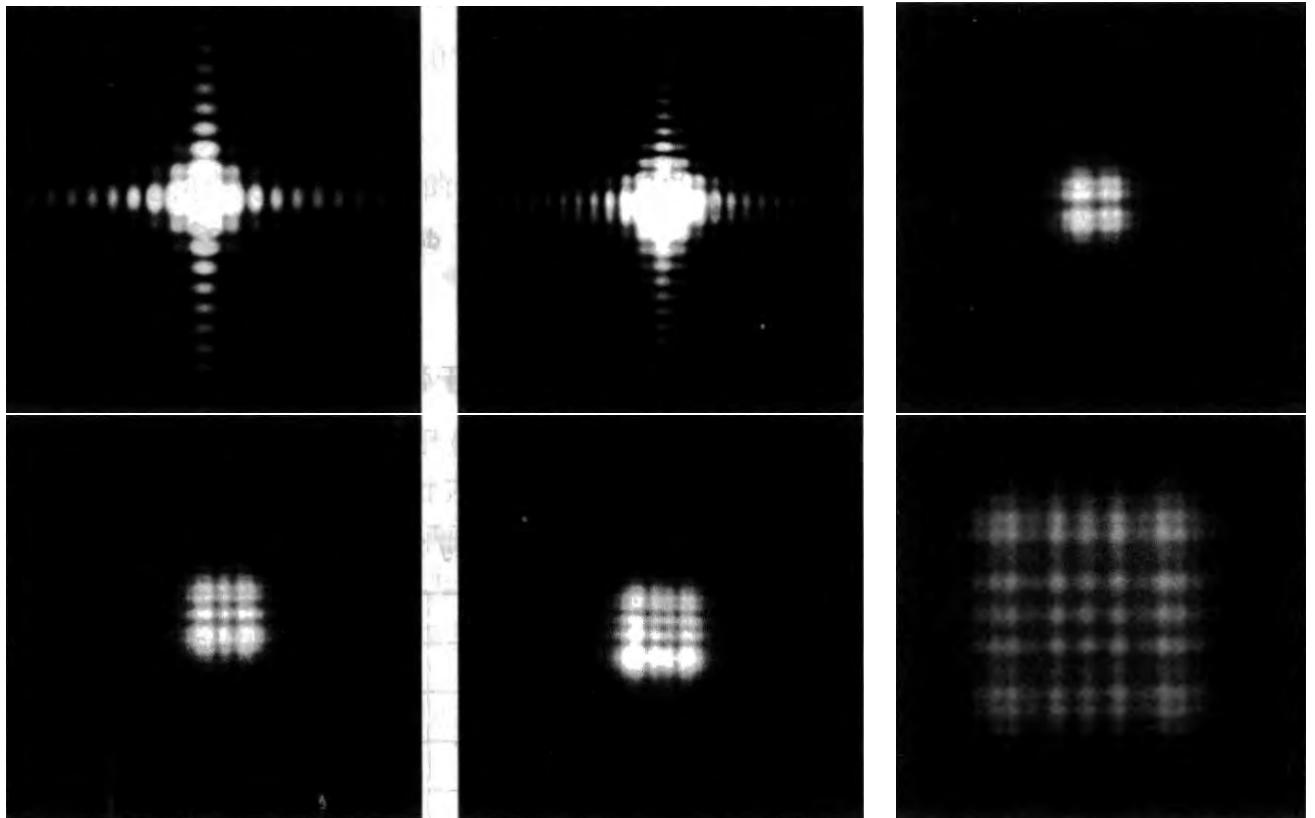


图 4.28: 逐渐增大孔径时矩形孔的衍射图样

定性计算菲涅尔积分的方法是使用考纽螺线, 详见参考文献 [1] Page 628-630, 这里不谈。

参考文献

- [1] (美) Eugene Hecht 著; 秦克诚, 林福成译. *Optics* (中译版). 电子工业出版社, 北京, 5 edition, 6 2019.
- [2] (德) Born M., (美) Wolf E. 著; 杨葭荪译. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light* (中译版). 电子工业出版社, 北京, 7 edition, 10 2009.
- [3] 梁铨廷. 物理光学. 电子工业出版社, 北京, 5 edition, 4 2018.
- [4] 赵凯华. 新概念物理教程. 光学. 高等教育出版社, 北京, 11 2004.
- [5] 罗昌由. 电磁可控 goos-hänchen 位移理论研究. 博士论文, 湖南大学, 9 2015.
- [6] 奚婷婷. 光学 PPT 课件. 9 2024.
- [7] 张斌智. 波带片的设计及其衍射特性研究. 博士论文, 浙江大学, 5 2010.

附录 A 波理论

光的真实本性是光学的全部讨论的中心问题，在本书中我们从头到尾都得对待这个问题。“光究竟是一种波动现象还是一种粒子现象？”这个似乎干脆利索的问题，远比它初看之下复杂得多。

因为对光的经典讨论和量子力学讨论都要用到波的数学描述，本章要为这两种表述所需要的东西打好基础。下面叙说的想法将用于一切物理波，从一杯茶的表面张力皱波，到从某个遥远的星系照到我们的光脉冲。

A.1 一维波

A.1.1 n 维波的概念

一维波指的是在一维空间中传播的波，或者可以看作在一维空间中传播的波。例如一束光在空间中传播，沿其传播方向建立 x 轴，则有 $E = E_0 e^{i(kx - \omega t)}$ （具有正负），这束光便可视为一维波。

一维波函数的最一般的形式：

$$\psi(x, t) = f(x - vt) = g(kx - \omega t) \quad (\text{A.1})$$

具体而言，对于给定的波形（波的形状），我们只需令 $t = 0$ ，拍一张“照片”（例如 $\psi(x) = \frac{3}{10x^2 + 1}$ ），得到 $\psi(x, 0) = f(x)$ ，然后将 $f(x)$ 中的 x 换为 $x - vt$ ，即可得到一个以速度 v （可为负）向 x 轴正方向运动的波 $\psi(x, t) = f(x - vt) = g(kx - \omega t)$ 。

绳索的上下振动是在第二个维度上的，但振动导出的波仍是一维波。

A.1.2 波动方程

线性、各向同性、无损耗介质中的波动方程（也称波动微分方程）为：

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (\text{A.2})$$

如果代表一个波的函数 ψ 是这个方程的解，它将同时是 $(x - vt)$ 的函数（即 $kx - \omega t$ 的函数），它还是一个可以同时对 x 和 t 以非平庸方式求二次微商的函数。特别地，我们有结论： ψ 是一维波函数 $\Leftrightarrow \psi$ 是 $(x - vt)$ 的二次可微函数 $\Leftrightarrow \psi$ 是 $(kx - \omega t)$ 的二次可微函数。

A.2 谐波

A.2.1 相位和相速度

考虑任何一个一维波函数 $\psi(x, t) = A \cos(\phi(x, t)) = A \cos(kx - \omega t + \phi_0)$ ，其中 $\phi = kx + vt + \phi_0$ 称为相位， ϕ_0 称为初相（也常用 ε 表示）。只要相位中的 kx 与 ωt 符号相反，即 $(kx - \omega t)$ 或 $(\omega t - kx)$ ，则波沿 x 轴正方向传播，否则沿 x 轴负方向。

A.2.2 谐波的概念

谐波，指简谐波、正弦波，其轮廓图是正弦曲线，是最简单的波形。在后续的傅里叶变换一节我们可以看到，任何波形都可以由谐波叠加合成，因此谐波具有特殊的意义。考虑如下波形：

$$\psi(x, t)|_{t=0} = \psi(x) = A \sin kx = f(x) \quad (\text{A.3})$$

其中 $k > 0$ 是一个常数，称为传播数（空间角频率），且 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (λ 为波长)， A 称为波的振幅。

谐波函数有多种等价形式，其中最常见的是：

$$\psi(x, t) = A \sin(kx \mp \omega t), \quad \psi(x, t) = A \sin(\kappa(x \mp vt)) \quad (\text{A.4})$$

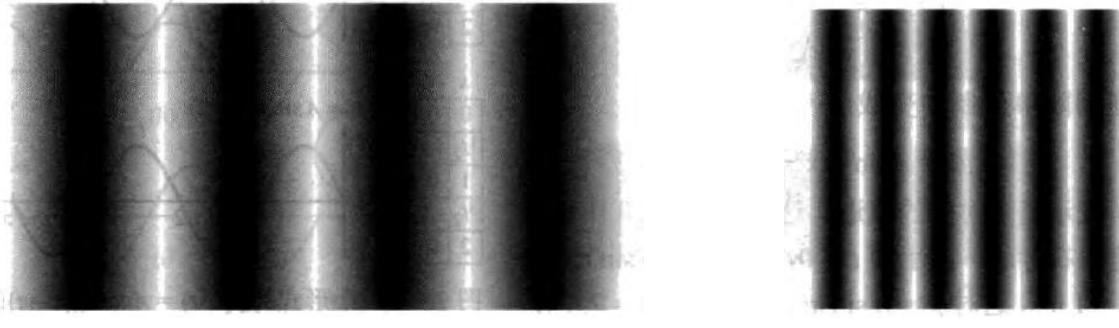
在本书中，如无特殊需求，我们都采用前者，也即 $\psi = A \sin(kx \mp \omega t)$ ，有时也采用 $\psi = A \cos(kx \mp \omega t)$ 。当然，三维谐波（在三维空间中传播的谐波）可写为：

$$\psi = \psi_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \mp \omega t) \quad (\text{A.5})$$

A.2.3 空间频率 κ 与空间角频率 k

光学中常用的长度单位是纳米 nm、微米 μm 和埃米 $1 \text{\AA} = 10^{-10} \text{ m}$ 。本文规定，若无特殊情况，一般用 λ 表示波长， τ 或 T 表示周期， $\nu = \frac{1}{\tau}$ 表示时间频率， $\omega = 2\pi\nu$ 表示时间角频率，空间频率（波数） $\kappa = \frac{1}{\lambda}$ ，空间角频率（传播数） $k = 2\pi\kappa$ 。

光学信息可以以一种周期性方式散布在空间里，很像一个波的截图，我们可以将其视作静止 ($v = 0$) 的波，并用空间频率 κ 来描述它们。



(a) 空间频率较低的正弦亮度分布

(b) 空间频率较高的正弦亮度分布

图 A.29: 正弦亮度分布

A.3 复数表示

在之后的学习会看到，用余弦或正弦函数描述波函数会带来很多不便，而复数表示在大多时候显得尤为有效，因此引入复数表示是极有必要的。在本书中，为表示某个变量（物理量）是复数，我们在其上加一波浪号，例如 \tilde{z} 或 \tilde{E} 。

习惯上，我们用复数的实部来描述谐波，例如将 $\psi = A \cos(kx - wt + \varepsilon)$ 写为 $\psi = \operatorname{Re}[Ae^{i(kx-wt+\varepsilon)}]$ 。为了方便，常常把 Re 省略不写，即：

$$\psi(x, t) = Ae^{i\theta} = Ae^{i(kx-wt+\varepsilon)} \quad (\text{A.6})$$

在后文，我们也采用此简写。需要时刻谨记，真实的波是实部，虚部没有物理意义。

另外，虽然复数表示在物理中十分常见，但应用它时需要时刻小心，只有运算限于加法、减法、乘除实数、对实变量进行微分和积分时，才能恢复实部。乘法运算（包括数乘、点乘和叉乘）必须仅与实数进行，否则会得到错误结论^①。例如 $\operatorname{Re}\tilde{z}_1 \cdot \operatorname{Re}\tilde{z}_2 \neq \operatorname{Re}(\tilde{z}_1 \cdot \tilde{z}_2)$ ， $\operatorname{Re}\tilde{\mathbf{A}}_1 \cdot \operatorname{Re}\tilde{\mathbf{A}}_2 \neq \operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{A}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_2)$ 。

^①这里有一个疑问，在 2.7 节（全反射时的相位变化），推导反射光相位变化时，我们利用了 $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_i \cdot \lambda e^{i\delta}$ 所带来的相位变化，如何保证或说明这样做能得到正确的结果？

A.4 相矢量

相矢量（也称复振幅、旋转矢量）是将谐波 $\psi = Ae^{i(kx-wt+\varepsilon)}$ 中的位置变量 x 或时间变量 t 分离出来，以得到复平面上的矢量，常用于计算振幅^①等。

A.4.1 分离 x 并随 t 旋转

考虑谐波 $\psi = \psi_0 e^{i(kx-\omega t+\varepsilon)}$ ，对于任意给定的 x ，令 $\alpha = kx + \varepsilon$ ，谐波可写为 $\psi = \psi_0 e^{i(-\omega t+\alpha)} = (\psi_0 e^{i\alpha}) \cdot e^{i(-\omega t)}$ 是 t 的函数，则此时的相矢量定义为 $\psi_0 \angle \alpha = \psi_0 e^{i\alpha}$ ，也常记为 $\psi_0 \angle \alpha$ 。

相矢量是复平面中的一个矢量（即一个复数）， ψ_0 表示其模长， α 表示其幅角，真实的波是它在实轴上的投影。对于 $\psi = \psi_0 e^{i(-\omega t+\alpha)}$ ，随着 t 增大，波的相位减小，代表相矢量在复平面中顺时针旋转， ωt 即为沿顺时针旋转的角度。对于 $\psi = \psi_0 e^{i(\omega t+\alpha)}$ （也即沿 x 轴负方向传播的波），相矢量在复平面中逆时针旋转， ωt 即为沿逆时针转过的角度。也就是说，将 x （以及初相 ε ）分离为相矢量后，我们可以方便的研究 x 这一点上，波关于时间 t 的变化情况。

当然，对于波的正弦表示 $\psi = A \sin(kx - \omega t + \varepsilon)$ ，也可令 $\alpha = kx + \varepsilon$ ，得到相矢量 $\psi_0 \angle \alpha = \psi_0 e^{i\alpha}$ ，只不过此时真实的波是它在虚轴上的投影。

例如，振动 $E_1 = 5 \cos(-\omega t)$, $E_2 = 10 \sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$ 的相矢量分别为 $5 \angle 0$, $10 \angle \frac{\pi}{3}$ ，前者顺时针旋转，向实轴投影，后者逆时针旋转，向虚轴投影。

A.4.2 分离 t 并随 x 旋转

类似地，考虑谐波 $\psi = \psi_0 e^{i(kx \pm \omega t + \varepsilon)}$ 。对于任意给定的 t ，令 $\alpha = \pm \omega t + \varepsilon$ ，谐波可写为 $\psi = \psi_0 e^{i(kx+\alpha)} = (\psi_0 e^{i\alpha}) \cdot e^{i(kx)}$ 是 x 的函数，则此时的相矢量定义为 $\psi_0 \angle \alpha = \psi_0 e^{i\alpha}$ 。将 t 分离为相矢量后，我们可以方便的研究 t 这一时刻，波关于位置 x 的变化情况。

习惯上，我们只考虑 $\psi_0 e^{i(kx+\alpha)}$ ，而不考虑 $\psi_0 e^{i(-kx+\alpha)}$ 的情况，后者可以通过三角变换，等价的改变初相 ϕ_0 的值转化为前者。

例如，对振动 $E_3 = 5 \cos(kx)$, $E_4 = 10 \sin(kx + \frac{\pi}{2})$ ，其相矢量分别为 $5 \angle 0$, $10 \angle \frac{\pi}{2}$ ，两者都逆时针旋转，前者向实轴投影，后者向虚轴投影。

A.5 多元微分与三维波动方程

在介绍波动方程之前，先给出本文默认的一些符号规定，以及一些运算符的定义。

A.5.1 内积、叉乘与矩阵乘法

在本文，一切矢量运算皆使用矩阵运算。并且，若无特殊说明，矢量都等价于列向量，也即下面两种写法等价：

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

^① 我们将在 3.1 节讨论波的叠加时使用相矢量，并讨论相矢量相加时所代表的意义

用点乘符号‘·’表示两向量的内积，例如 $\mathbf{A}_1 = (A_{1,x}, A_{2,x}, A_{3,x})$, $\mathbf{A}_2 = (A_{1,y}, A_{2,y}, A_{3,y})$, 则：

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = (A_{1,x}, A_{2,x}, A_{3,x}) \cdot (A_{1,y}, A_{2,y}, A_{3,y}) = \begin{bmatrix} A_{1,x} \\ A_{2,x} \\ A_{3,x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{1,y} \\ A_{2,y} \\ A_{3,y} \end{bmatrix} = A_{1,x}A_{1,y} + A_{2,x}A_{2,y} + A_{3,x}A_{3,y} \quad (\text{A.8})$$

在后文，点乘符号‘·’皆表示内积，叉乘符号‘×’表示外积，矩阵乘法不用特殊符号，如有必要会使用‘ \odot ’来表示矩阵乘法。

A.5.2 微分算子

下面依次给出微分算子 ∇ 、拉普拉斯算子 Δ 和矢量微分的定义。

假设 $f = f(\mathbf{x})$ 是三维空间中的标量函数， $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) = (A_x(\mathbf{x}), A_y(\mathbf{x}), A_z(\mathbf{x}))$ 是三维空间中的矢量（数学上称为自变量为 3 维的 3 维向量值函数），设 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) (\mathbf{B}_1(x, y, z), \mathbf{B}_2(x, y, z), \mathbf{B}_3(x, y, z))$ 是三个矢量构成的张量（可视为 3×3 矩阵），如下：

$$f = f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} A_x(\mathbf{x}) \\ A_y(\mathbf{x}) \\ A_z(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x(x, y, z) \\ A_y(x, y, z) \\ A_z(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{B}_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{B}_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1,x}(\mathbf{x}) & B_{1,y}(\mathbf{x}) & B_{1,z}(\mathbf{x}) \\ B_{2,x}(\mathbf{x}) & B_{2,y}(\mathbf{x}) & B_{2,z}(\mathbf{x}) \\ B_{3,x}(\mathbf{x}) & B_{3,y}(\mathbf{x}) & B_{3,z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

定义微分算子 ∇ ：

$$\begin{aligned} \text{微分算子: } \quad \nabla &= \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \\ \text{梯度: } \quad \nabla f &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] \\ \text{广义梯度: } \quad \nabla \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \nabla A_x \\ \nabla A_y \\ \nabla A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\text{旋度: } \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.13})$$

$$\text{广义旋度: } \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot \mathbf{B}_1 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_2 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_{1,x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{1,y}}{\partial y} + \frac{\partial B_{1,z}}{\partial z} \\ \frac{\partial B_{2,x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{2,y}}{\partial y} + \frac{\partial B_{2,z}}{\partial z} \\ \frac{\partial B_{3,x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{3,y}}{\partial y} + \frac{\partial B_{3,z}}{\partial z} \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

A.5.3 拉普拉斯算子

并以此定义拉普拉斯算子 Δ ：

$$\begin{aligned} \text{拉普拉斯算子: } \quad \Delta &= \nabla \cdot (\nabla) = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \text{拉普拉斯运算: } \quad \Delta f &= \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\text{广义拉普运算: } \Delta \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A}) = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \nabla A_x \\ \nabla A_y \\ \nabla A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot (\nabla A_x) \\ \nabla \cdot (\nabla A_y) \\ \nabla \cdot (\nabla A_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (\text{A.15})$$

$$\text{也可理解为: } \Delta \mathbf{A} = \Delta \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

例如, 对于三维空间中的矢量 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}) = (E_x(\mathbf{x}), E_y(\mathbf{x}), E_z(\mathbf{x}))$, 我们有:

$$\Delta \mathbf{E} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{E}) = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \nabla E_x \\ \nabla E_y \\ \nabla E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot (\nabla E_x) \\ \nabla \cdot (\nabla E_y) \\ \nabla \cdot (\nabla E_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (\text{A.16})$$

A.5.4 矢量微分

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

A.5.5 波动方程

定义好上述工具后, 可以给出三维空间中的波动方程:

$$\Delta \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (\text{A.18})$$

例如, 对矢量 \mathbf{E} , 上面方程表示:

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \iff \begin{bmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{bmatrix} = \frac{1}{v^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \Delta E_x = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \Delta E_y = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \Delta E_z = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

上面几种表示是等价的。

A.6 平面波、柱面波与球面波

平面波、柱面波与球面波是最具有实际意义的波形, 因为它们在现实中最容易实现^①。

A.6.1 平面波

三维空间中的平面波^②:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A} \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \mp \omega t + \varepsilon)} \quad (\text{A.20})$$

^①其推导详见参考文献 [1] 的 Page 47-56, 以及 知乎: 电磁波的平面波、柱面波和球面波的表达式与推导 (<https://zhuanlan.zhihu.com/p/693746762>), 这里不多赘述

^②平面波概念的引入详见参考文献 [1] 的 Page 30, 这里不再赘述

每个等相面由下式给出：

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \text{const} \quad (\text{A.21})$$

此扰动的每个等相面（也称波阵面）都是一个平面，且波矢 \mathbf{k} 垂直于等相面， $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$ 时沿 \mathbf{k} 传播， $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t)$ 时沿 \mathbf{k} 的反方向传播。在一切三维波中，只有平面波（可以是谐波也可以是非谐波）穿过空间传播时其截面轮廓（等相面）保持不变。

有时， \mathbf{A} 是 \mathbf{x} 的函数，称为非均匀波（例如 2.5 节介绍的隐失波）。

A.6.2 球面波

在球坐标系 (r, ϕ, θ) 下，可以解得球面波方程：

$$\psi = \psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(r) \cdot e^{i(kr \mp \omega t + \varepsilon)} = \frac{\mathbf{A}}{r} \cdot e^{i(kr \mp \omega t + \varepsilon)} \quad (\text{A.22})$$

每个波阵面（等相面）由下式给出：

$$kr = \text{const} \quad (\text{A.23})$$

注意，任何球面波的振幅 ψ_0 都是 r 的函数，因为球面波的振幅随着距离的增加而减小（能量守恒的必然结果）。当它从原点向外传播时，波阵面是逐渐扩张为更大的圆。

A.6.3 柱面波

在柱坐标系 (r, θ, z) 下，可以解得柱面波方程：

$$\psi = \psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(r) \cdot e^{i(kr \mp \omega t + \varepsilon)} = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{r}} \cdot e^{i(kr \mp \omega t + \varepsilon)} \quad (\text{A.24})$$

每个等相面由下式给出：

$$kr = \text{const} \quad (\text{A.25})$$

平面波投射到具有细长狭缝的不透明屏幕上，就会通过此狭缝发出与柱面波相似的扰动，目前大多采用此方法产生柱面光波。

A.7 波的能量与动量

本章只对具体结论和必要思维进行总结，更详细的内容可转至参考文献 [1] Page 63-80。

A.7.1 前置知识

在本课程，若无特殊说明，都默认介质是均匀、线性、各向同性的。假设介质的（绝对）介电常量、（绝对）磁导率^①分别为 $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ 、 $\mu = \mu_r \mu_0$ ，其中 ϵ_r 、 μ_r 分别是相对介电常量和相对磁导率， ϵ_0 、 μ_0 分别为真空介电常量、真空磁导率。

$$\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2} \quad (\text{A.26})$$

对任意介质，设其折射率为 n ，电磁波在其中的波速为 v ，则有以下恒等式：

$$nv = c, \quad \epsilon \mu v^2 = 1, \quad \epsilon_r \mu_r = n^2, \quad \mathbf{E} = \mathbf{v} \mathbf{B} \quad (\text{A.27})$$

^①事实上，介质的介电常数是相对给定电磁波而言的，详见 知乎：介电常数对频率的依赖

特别地，对于真空，上面三个式子变为：

$$1 \cdot c = c, \quad (1 \cdot \varepsilon_0)(\mu_0)c^2 = 1, \quad 1^2 = 1 \cdot 1 \quad (\text{A.28})$$

电磁场的能量密度 w :

$$w = \frac{1}{2} \left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right) \quad (\text{A.29})$$

A.7.2 波印廷矢量

对任意的电磁波，我们都有 $\mathbf{E} = v\mathbf{B}$ ，其中 v 是电磁波在介质中的波速（真空即为 c ）， E 和 B 可以是瞬时值，也可以是场的振幅值 E_0 和 B_0 。

于是，电磁波（不是电磁场）的能量密度为：

$$w = \frac{1}{2} \left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{E^2}{v^2} \right) = \varepsilon E^2 \quad (\text{A.30})$$

波印廷矢量 \mathbf{S} 定义为：

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} = v^2 \varepsilon \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{S} = vw = \varepsilon v \mathbf{E}^2 \quad (\text{A.31})$$

\mathbf{S} 的方向即为波的传播方向，与 \mathbf{k} 方向相同，它的大小事实上就是能量的时间通量 vw 。

A.7.3 辐照度

辐射照度，简称辐照度，是指单位时间内落在单位面积上的辐射能量，在辐射度学中用 \mathbf{E}_e 表示；类似的有光辐照度，指单位时间内落在单位面积上的光量（辐射能的光度量大小，详见 1.6.3 节），在光度学中用 \mathbf{E}_v 表示。在不需要区分时“照度”和“强度”^①时，常用 I 来表示照度。

辐照度是波印廷矢量的时间平均，即 $I = \langle S \rangle_T$ ，我们直接给出简谐函数平均值的计算公式：

$$\langle e^{i\omega t} \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} e^{i\omega t} dt = \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right) e^{i\omega t} \quad (\text{A.32})$$

比值 $\frac{\sin x}{x}$ 在光学中很常见，也很重要，被专门定义为 $\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$ ，我们直接给出相关结论：

$$\langle \cos \omega t \rangle_T = \text{sinc} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \cdot \cos \omega t, \quad \langle \sin \omega t \rangle_T = \text{sinc} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \cdot \sin \omega t \quad (\text{A.33})$$

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle_T = \frac{1}{2} (1 + \text{sinc} \omega T \cos 2\omega t), \quad \langle \sin^2 \omega t \rangle_T = \frac{1}{2} (1 - \text{sinc} \omega T \cos 2\omega t) \quad (\text{A.34})$$

在简谐电磁波 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ 下，我们有：

$$S = \varepsilon v E^2 = \varepsilon v E_0^2 \cdot \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \implies I = \langle S \rangle_T = \frac{1}{2} \varepsilon v E_0^2 \quad (\text{A.35})$$

上面的介质要求是线性、均匀、各向同性介质。

^①过去常用“强度”来代表单位时间内落在单位面积上的能量，也即现在的“照度”，但国际上此概念已经默认归照度所有，而强度用于描述点辐射源在某方向上单位立体角内的能量通量。

附录 B Matlab 代码

B.1 图 2.1 源码

```

1 %% 菲涅尔公式中的振幅系数，空气入射玻璃和玻璃入射空气两种情况 %%
2 clc, clear, close all
3 %% 空气入射玻璃 %%
4 global n_i n_t
5 n_i = 1;
6 n_t = 1.5;
7
8 theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
9 r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
10 r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
11 t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
12 t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*cos
    (theta_i - theta_t) );
13 theta_B = atan(n_t/n_i);
14 theta_C = asin(n_t/n_i);
15
16 theta_array = linspace(-0.1, pi/2, 101);
17 Y = [
18     r_s(theta_array, theta_t(theta_array))
19     r_p(theta_array, theta_t(theta_array))
20     t_s(theta_array, theta_t(theta_array))
21     t_p(theta_array, theta_t(theta_array))
22 ];
23 stc = MyPlot(theta_array, Y);
24 xline(theta_B, 'b')
25 yline(0)
26 xlim([0, pi/2])
27 ylim([-1, 1])
28 stc.leg.String = ["$r_s$"; "$r_p$"; "$t_s$"; "$t_p$"; "$\theta_i = \theta_B$"];
29 stc.leg.Interpreter = "latex";
30 stc.leg.FontSize = 14;
31 stc.leg.Location = "southwest";
32 stc.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
33 stc.axes.Title.Interpreter = "latex";
34 stc.label.x.String = '$\theta_i$';
35 stc.label.y.String = '$r$';
36 MyColors = GetMyColors;
37 stc.plot.plot_1.Color = MyColors{2};
38 stc.plot.plot_2.LineStyle = "-";
39 stc.plot.plot_2.Color = MyColors{6};
40 stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
41 stc.plot.plot_3.Color = 'b';
42 stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
43 stc.plot.plot_4.Color = [1 0 1];

```

```

44
45 %% 玻璃入射空气 %%
46 n_i = 1.5;
47 n_t = 1;
48
49 theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
50 r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
51 r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
52 t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
53 t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*cos
    (theta_i - theta_t) );
54 theta_B = atan(n_t/n_i);
55 theta_C = asin(n_t/n_i);
56
57
58 theta_array = linspace(0, theta_C, 101);
59 Y = [
60     r_s(theta_array, theta_t(theta_array))
61     r_p(theta_array, theta_t(theta_array))
62     t_s(theta_array, theta_t(theta_array))
63     t_p(theta_array, theta_t(theta_array))
64 ];
65 stc = MyPlot(theta_array, Y);
66 xline(theta_B, 'b')
67 xline(theta_C, 'r')
68 yline(0)
69 xlim([0, pi/2])
70 ylim([-0.5, 3])
71 stc.leg.String = ["$r_s$"; "$r_p$"; "$t_s$"; "$t_p$"; "$\theta_i = \theta_B$"; "$\theta_i = \theta_C$"];
72 stc.leg.Interpreter = "latex";
73 stc.axes.Title.String = '$n_i = 1.5 > n_t = 1$';
74 stc.axes.Title.Interpreter = "latex";
75 stc.label.x.String = '$\theta_i$';
76 stc.label.y.String = '$r$';
77 stc.plot.plot_1.Color = MyColors{2};
78 stc.plot.plot_2.LineStyle = "-";
79 stc.plot.plot_2.Color = MyColors{6};
80 stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
81 stc.plot.plot_3.Color = 'b';
82 stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
83 stc.plot.plot_4.Color = [1 0 1];
84 %MyExport_pdf

```

B.2 图 2.6 源码

```

1 %% 菲涅尔公式中反射折射光的振幅与能量变化 %%
2 clc, clear, close all

```

```

3 | global n_i n_t
4 |
5 | %% 反射折射光振幅与能量变化 (空气入射玻璃) %%
6 | MyColor = num2cell( ...
7 | [
8 | "#ff8080" "#ff0000" "#990000" "#190000"
9 | "#80ff80" "#00ff00" "#009900" "#001900"
10 | "#8080ff" "#0000ff" "#000099" "#000019"
11 | "#ff80ff" "#ff00ff" "#990099" "#190019"
12 | "#ffff80" "#ffff00" "#999900" "#191900"
13 | "#80ffff" "#00ffff" "#009999" "#001919"
14 | "#ffffff" "#bbbbbb" "#999999" "#191919"
15 | ]...
16 );
17 n_i = 1;
18 n_t = 1.5;
19
20 theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
21 r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
22 r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
23 t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
24 t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*cos
    (theta_i - theta_t) );
25 theta_B = atan(n_t/n_i);
26 theta_C = asin(n_t/n_i);
27
28 theta_array_2 = linspace(-0.1, pi/2, 101);
29 Y = [
30     r_s(theta_array_2, theta_t(theta_array_2))
31     r_p(theta_array_2, theta_t(theta_array_2))
32     t_s(theta_array_2, theta_t(theta_array_2))
33     t_p(theta_array_2, theta_t(theta_array_2))
34     r_s(theta_array_2, theta_t(theta_array_2)).^2
35     r_p(theta_array_2, theta_t(theta_array_2)).^2
36     0.5 * ( r_s(theta_array_2, theta_t(theta_array_2)).^2 + r_p(theta_array_2, theta_t(
        theta_array_2)).^2 )
37 ];
38
39 stc = MyPlot(theta_array_2, Y);
40 yline(0, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 1)
41 xline(theta_B, 'Color', [0 1 1], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.7)
42 xlim([0, pi/2])
43 ylim([-1, 1])
44     stc.leg.Interpreter = 'latex';
45     stc.leg.FontSize = 15;
46     stc.leg.Location = 'southwest';
47     stc.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
48     stc.axes.Title.Interpreter = 'latex';
49     stc.label.x.String = '$\\theta_i$';

```

```
50 stc.label.y.String = '$y$';
51 %stc.leg.String = ["$y=r_s$"; "$y=r_p$"; "$y=t_s$"; "$y=t_p$"; "$y=R_s$"; "$y=R_p$";
52 "%$y=R$"; "$y=0$"; "$\theta_i = \theta_B$"];
53 stc.leg.Visible = 'off';
54
54 stc.plot.plot_2.LineStyle = "-";
55 stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";  

56 stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";  

57 stc.plot.plot_5.LineStyle = "--";
58 %stc.plot.plot_5.LineWidth = 0.7;
59 stc.plot.plot_6.LineStyle = "--";
60 %stc.plot.plot_6.LineWidth = 0.7;
61 stc.plot.plot_7.LineStyle = "-";
62
63 stc.plot.plot_1.Color = MyColor{4, 2};
64 stc.plot.plot_3.Color = MyColor{4, 1};
65 stc.plot.plot_5.Color = MyColor{4, 3};
66 stc.plot.plot_2.Color = MyColor{3, 2};
67 stc.plot.plot_4.Color = MyColor{3, 1};
68 stc.plot.plot_6.Color = MyColor{3, 3};
69 stc.plot.plot_7.Color = [1 0 0];
70 %MyExport_pdf
71 %MyExport_pdf_docked
72 %MyExport_svg_docked
73
74
75 %% 反射折射光振幅与能量变化 (玻璃入射空气) %%
76 n_i = 1.5;
77 n_t = 1;
78
79 theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
80 r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
81 r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
82 t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
83 t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*cos(theta_i - theta_t) );
84 theta_B = atan(n_t/n_i);
85 theta_C = asin(n_t/n_i);
86
87 theta_array_2 = linspace(-0.1, theta_C, 250);
88 theta_array_all = [linspace(-0.1, 0.65, 100), linspace(0.65, 0.74, 50), linspace(0.74,
89 pi/2, 100)];
90 X = [
91     theta_array_all
92     theta_array_all
93     theta_array_all
94     theta_array_all
95     theta_array_all
```

```
96     theta_array_all
97     theta_array_all
98 ];
99
100 Y = [
101     (theta_array_all < theta_C).*r_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)) + (
102     theta_array_all > theta_C).*abs(r_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)))
103     (theta_array_all < theta_C).*r_p(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)) + (
104     theta_array_all > theta_C).*abs(r_p(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)))
105     abs( t_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)) )
106     abs( t_p(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)) )
107     abs(r_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all))).^2
108     abs(r_p(theta_array_all, theta_t(theta_array_all))).^2
109     0.5 * ( abs(r_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all))).^2 + abs(r_p(
110     theta_array_all, theta_t(theta_array_all))).^2 )
111 ];
112
113 stc = MyPlot(X, Y);
114 yline(0, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 1)
115 xline(theta_B,'Color', [0 1 1], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.7)
116 xline(theta_C,'Color', [0 1 0], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.7)
117 xlim([0, pi/2])
118 ylim([-0.5, 3])
119 stc.leg.Interpreter = 'latex';
120 stc.leg.FontSize = 14;
121 stc.leg.Location = 'northwestoutside';
122 stc.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
123 stc.axes.Title.Interpreter = "latex";
124 stc.label.x.String = '$\theta_i$';
125 stc.label.y.String = '$y$';
126 stc.leg.String = ["$y=r_s$"; "$y=r_p$"; "$y=t_s$"; "$y=t_p$"; "$y=R_s$"; "$y=R_p$";
127     "$y=R$"; "$y=0$"; "$\theta_i = \theta_B$"; "$\theta_i = \theta_C$"];
128
129 stc.plot.plot_2.LineStyle = "-";
130 stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
131 stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
132 stc.plot.plot_5.LineStyle = "--";
133 %stc.plot.plot_5.LineWidth = 0.7;
134 stc.plot.plot_6.LineStyle = "--";
135 %stc.plot.plot_6.LineWidth = 0.7;
136 stc.plot.plot_7.LineStyle = "-";
137
138 stc.plot.plot_1.Color = MyColor{4, 2};
139 stc.plot.plot_3.Color = MyColor{4, 1};
140 stc.plot.plot_5.Color = MyColor{4, 3};
141 stc.plot.plot_2.Color = MyColor{3, 2};
142 stc.plot.plot_4.Color = MyColor{3, 1};
143 stc.plot.plot_6.Color = MyColor{3, 3};
144 stc.plot.plot_7.Color = [1 0 0];
```

```

141 %MyExport_pdf
142 %MyExport_pdf_docked
143 %MyExport_svg_docked

```

B.3 图 2.7 源码

```

1 %% 菲涅尔公式中反射光 s 分量与 p 分量的相位增量 %%
2 clc, clear, close all
3 global n_i n_t n_t_i theta_B theta_C
4
5 %% 反射光相位增量 (空气入射玻璃) %%
6 n_i = 1;
7 n_t = 1.5;
8 n_t_i = n_t/n_i;
9 theta_B = atan(n_t_i);
10
11 theta_array_2 = linspace(0, pi/2-0.001, 200);
12
13 delta_r_s = @(t) -pi ;
14 delta_r_p = @(t) (-pi).*(t > theta_B).* ( t < pi/2);
15
16 delta_r_s_kongqi = delta_r_s(theta_array_2);
17 delta_r_p_kongqi = delta_r_p(theta_array_2);
18
19 Y = [
20     zeros(size(theta_array_2)) - pi;
21     delta_r_p_kongqi;
22 ];
23
24 stc1 = MyPlot(theta_array_2, Y([1 2], :));
25 xlim([0, pi/2])
26 %yline(0, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
27 xline(theta_B, 'Color', [0 1 1], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
28 stc1.plot.plot_2.LineStyle = '--';
29 stc1.leg.Location = 'northeast';
30 stc1.leg.String = ["$\delta = \delta_{r,s}$"; "$\delta = \delta_{r,p}$"; "$\theta_i = \theta_B$"];
31 stc1.label.x.String = '$\theta_i$';
32 stc1.label.y.String = '$\delta$';
33 stc1.axes.Title.Interpreter = 'latex';
34 stc1.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
35 %MyExport_pdf
36
37 %%%%%% 反射光相位增量 (玻璃入射空气) %%%%%%
38 n_i = 1.5;
39 n_t = 1;
40 n_t_i = n_t/n_i;
41 theta_B = atan(n_t_i);

```

```

42 theta_C = asin(n_ti);
43
44
45 delta_r_s = @(t) (t>theta_C).*2.*atan( -(sqrt(sin(t).^2 - n_ti^2))./cos(t) ) ;
46 delta_r_p = @(t) ...
47     (t<theta_B).*( -pi) ...
48     + (theta_B < t).*(t<theta_C).*0 ...
49     + (theta_C < t).*( -2*atan( (sqrt(sin(t).^2 - n_ti^2))./(n_ti^2.*cos(t)) ) );
50
51 Y = [
52     zeros(size(theta_array_2)) - pi;
53     delta_r_p_kongqi;
54     delta_r_s(theta_array_2);
55     delta_r_p(theta_array_2);
56 ];
57
58
59 stc2 = MyPlot(theta_array_2, Y([3 4], :));
60 xlim([0, pi/2])
61 %yline(0, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
62 xline(theta_B, 'Color', [0 1 1], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
63 xline(theta_C, 'Color', [0 1 0], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
64 stc2.plot.plot_2.LineStyle = '--';
65 stc2.leg.String = ["$\delta = \delta_{r,s}$"; "$\delta = \delta_{r,p}$"; "$\theta_i = \theta_B$"; "$\theta_i = \theta_C$"];
66 stc2.leg.Location = 'northeast';
67 stc2.label.x.String = '$\theta_i$';
68 stc2.label.y.String = '$\delta$';
69 stc2.axes.Title.Interpreter = 'latex';
70 stc2.axes.Title.String = '$n_i = 1.5 > n_t = 1$';
71 %MyExport_pdf

```

B.4 图 2.8 源码

```

1 %% 隐失波的穿透深度和 GH Shift (玻璃入射空气) %%
2 clc, clear, close all
3 global lambda n_i n_t n_ti
4 n_i = 1.5;
5 n_t = 1;
6 n_ti = n_t/n_i;
7 theta_B = atan(n_ti);
8 theta_C = asin(n_ti);
9 lambda = 550 * 10^(-9);      % 550.0 nm 的绿色光
10 delta = @(t) 1 ./ ( 2*pi*sqrt( sin(t).^2 - n_ti^2 )/lambda );
11 Delta_x = @(t) 2*delta(t).*tan(t);
12
13 theta_array_1 = linspace(theta_C, pi/2, 200);
14 theta_array_2 = linspace(theta_C, pi/2-0.05, 200);

```

```

15
16
17 X = [
18     theta_array_1
19     theta_array_2
20 ];
21 Y = [
22     delta(theta_array_1)/lambda
23     Delta_x(theta_array_2)/lambda
24 ];
25
26 stc = MyPlot(X, Y);
27 xlim([theta_C - 0.05, pi/2+0.02])
28 yline(1, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
29 xline(theta_C,'Color', [0 1 0], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
30 stc.leg.String = ["$y = \delta / \lambda$"; "$y = \Delta x / \lambda$"; "$y = 1$";
31     "theta_i = \theta_C"; "$\theta_i = \frac{\pi}{2}$"];
32 stc.label.x.String = '$\theta$';
33 stc.label.y.String = '$y$';
34 xlim([theta_C - 0.05, pi/2])
35 %MyExport_pdf_docked

```

B.5 图 3.2 源码

```

1 %% 单个球面波源在平面上的振荡 (导出为 gif) %%
2 clc,clear,close all;
3 global lambda k omega X_OA A
4
5 lambda = 550.0 * 10^(-9); % 单位: m
6 k = 5; % k 取决于光的波长, 但在可视化中不妨令为 1
7 omega = 1; % omega 取决于光的波长, 但在可视化中不妨令为 1
8 X_OA = [ 0, 0]; % 球面波源 A 的位置
9 A = 50; % r = 1 时的振幅
10 E_A0 = @(x, y) A./sqrt( (x - X_OA(1)).^2 + (y - X_OA(2)).^2 ); % X 位置的振幅, 输入的
    x_array 为一列行向量
11 alpha_A = @(x, y) k*sqrt( (x - X_OA(1)).^2 + (y - X_OA(2)).^2 );
12 vib = @(E_0, t, alpha) E_0.*cos(-omega*t + alpha); % 振荡函数
13
14 R_array = linspace(2, 10, 100);
15 theta_array = transpose(linspace(0, 2*pi, 50));
16 x_matrix = R_array .* cos(theta_array) + X_OA(1);
17 y_matrix = R_array .* sin(theta_array) + X_OA(2);
18 E_A0_matrix = E_A0(x_matrix, y_matrix);
19 alpha_A_matrix = alpha_A(x_matrix, y_matrix);
20
21 stc = MyMesh(x_matrix, y_matrix, vib(E_A0_matrix, 0, alpha_A_matrix));
22 stc.label_left.z.String = '$E$';

```

```

23
24 figure('Color', [1 1 1])
25 h1 = surf(x_matrix, y_matrix, E_A0_matrix, 'EdgeColor', 'interp', FaceColor='interp');
26 hold on
27 surf([X_OA(1) X_OA(1)], [X_OA(2) X_OA(2)], [30 -30; 30 -30])
28 colormap(redblue);
29 zlim([-35 35]);
30 xlim([X_OA(1) - R_array(end), X_OA(1) + R_array(end)])
31 ylim([X_OA(2) - R_array(end), X_OA(2) + R_array(end)])
32 drawnow
33
34 t_array = linspace(0, 20, 200);
35 for i = 1:length(t_array)
36     h1.ZData = vib(E_A0_matrix, t_array(i), alpha_A_matrix);
37     f(i) = getframe(gcf);
38 end
39
40 numFrames = length(t_array);
41 animated(1,1,1,numFrames) = 0;
42 for i = 1:numFrames
43     if i == 1
44         [animated,cmap] = rgb2ind(f(i).cdata,256,'nodither');
45     else
46         animated(:,:,1,i) = rgb2ind(f(i).cdata,cmap,'nodither');
47     end
48 end
49 filename = '单个球面波源在平面上的振荡.gif';
50 imwrite(animated,cmap,filename,'DelayTime',1/40,'LoopCount',inf);
51 web(filename)

```

B.6 图 3.3 源码

```

1 %% 两个球面波源在平面上的干涉情况 (导出为 gif) %%
2
3 clc, clear, close all;
4 global lambda k omega X_OA X_OB A B
5
6 lambda = 550.0 * 10^(-9); % 单位: m
7 k = 5; % k 取决于光的波长, 但在可视化中不妨令为 1
8 omega = 1; % omega 取决于光的波长, 但在可视化中不妨令为 1
9 X_OA = [-2, 0]; % 球面波源 A 的位置
10 X_OB = [ 2, 0]; % 球面波源 B 的位置
11 A = 50; % r = 1 时 A 的振幅
12 B = 50; % r = 1 时 B 的振幅
13
14 E_A0 = @(x, y) A./sqrt( (x - X_OA(1)).^2 + (y - X_OA(2)).^2 ); % x 位置的振幅, 输入的
15 % X_array 为一列行向量
16 E_B0 = @(x, y) B./sqrt( (x - X_OB(1)).^2 + (y - X_OB(2)).^2 ); % x 位置的振幅, 输入的

```

```

X_array 为一列行向量
16 alpha_A = @(x, y) k*sqrt( (x - X_OA(1)).^2 + (y - X_OA(2)).^2 );
17 alpha_B = @(x, y) k*sqrt( (x - X_OB(1)).^2 + (y - X_OB(2)).^2 );
18 E_0 = @(E_A0, alpha_A, E_B0, alpha_B) sqrt( E_A0.^2 + E_B0.^2 + 2*E_A0.*E_B0.*cos(
    alpha_A - alpha_B) );
19 vib = @(E_0, t, alpha) E_0.*cos(-omega*t + alpha); % 振荡函数
20
21 R_array = linspace(4, 20, 80);
22 theta_array = transpose(linspace(0, 2*pi, 30));
23 x_matrix = R_array .* cos(theta_array);
24 y_matrix = R_array .* sin(theta_array);
25 %E_0_matrix = E_A0(x_matrix, y_matrix);
26
27 E_A0_matrix = E_A0(x_matrix, y_matrix);
28 E_B0_matrix = E_B0(x_matrix, y_matrix);
29 alpha_A_matrix = alpha_A(x_matrix, y_matrix);
30 alpha_B_matrix = alpha_B(x_matrix, y_matrix);
31 E_0_matrix = E_0(E_A0_matrix, alpha_A_matrix, E_B0_matrix, alpha_B_matrix);
32 alpha_matrix = GetAlpha(E_0_matrix, E_A0_matrix, alpha_A_matrix, E_B0_matrix,
    alpha_B_matrix);
33
34 MyMesh(x_matrix, y_matrix, vib(E_A0_matrix, 0, alpha_A_matrix));
35 MyMesh(x_matrix, y_matrix, vib(E_B0_matrix, 0, alpha_B_matrix));
36 MyMesh(x_matrix, y_matrix, vib(E_0_matrix, 0, alpha_matrix));
37
38
39 figure('Color', [1 1 1])
40 set(gca,'NextPlot','replaceChildren','box','on','color','w');
41
42 h = mesh(x_matrix, y_matrix, E_0_matrix, 'EdgeColor', 'interp', FaceColor='interp')
43 ;
44 hold on
45 surf([X_OA(1) X_OA(1)], [X_OA(2) X_OA(2)], [40 -40; 40 -40])
46 surf([X_OB(1) X_OB(1)], [X_OB(2) X_OB(2)], [40 -40; 40 -40])
47 hold off
48 view([45, 30])
49 colormap(redblue);
50 zlim([-35 35]);
51 xlim([-R_array(end), R_array(end)])
52 ylim([-R_array(end), R_array(end)])
53 drawnow
54
55 t_array = linspace(0, 20, 200);
56 numFrames = length(t_array);
57 for i = 1:numFrames
58     h.ZData = vib(E_0_matrix, t_array(i), alpha_matrix);
59     f(i) = getframe(gcf);
60 end

```

```

61 | animated(1,1,1,numFrames) = 0;
62 | for i = 1:numFrames
63 |   if i == 1
64 |     [animated,cmap] = rgb2ind(f(i).cdata,256,'nodither');
65 |   else
66 |     animated(:,:,1,i) = rgb2ind(f(i).cdata,cmap,'nodither');
67 |   end
68 | end
69 | filename = '两个球面波源在平面上的干涉情况.gif';
70 | imwrite(animated,cmap,filename,'DelayTime',1/40,'LoopCount',inf);
71 | web(filename)
72 |
73 function alpha = GetAlpha(E_0, E_A0, alpha_A, E_B0, alpha_B)
74 sin_alpha = ( E_A0.*sin(alpha_A) + E_B0.*sin(alpha_B) ) ./ E_0;
75 cos_alpha = ( E_A0.*cos(alpha_A) + E_B0.*cos(alpha_B) ) ./ E_0;
76 %
77 if cos_alpha > 0
78   alpha = acos(cos_alpha);
79   return
80 elseif cos_alpha == 0
81   sin_alpha = ( E_A_0.*sin(alpha_A) + E_B_0.*sin(alpha_B) ) ./ E_0;
82   if sin_alpha > 0
83     alpha = pi/2;
84     return
85   else
86     alpha = -pi/2;
87     return
88   end
89 else
90   alpha = pi - acos(cos_alpha);
91   return
92 end
93 %
94 alpha = (cos_alpha >= 0) .* asin(sin_alpha) + (cos_alpha < 0) .* ( pi - asin(
95 sin_alpha));
96 %alpha = acos(cos_alpha);
97 end

```

B.7 图 3.4 (b) 与图 3.5 源码

```

1 %% 杨氏双缝干涉的近似模型误差分析 %%
2 clc,clear,close all
3 global vare_0 mu_0 lambda I_1 d D R A k E_0 E_0_appro r r_1 r_2
4
5 vare_0 = 8.854187817 * 10^(-12);
6 mu_0 = 4*pi * 10^(-7);
7 A = 50;
8 I_1 = 50;

```

```

9 d = 100 * 10^(-6);
10 R = 5 * 10^(-2);
11 D = 1;
12 lambda = 700 * 10^(-9); % 700.0 nm 的红光
13 k = 2*pi/lambda;
14
15 r = @(x) sqrt( x.^2 + D.^2 );
16 r_1 = @(x) sqrt( (x - d/2).^2 + D.^2 );
17 r_2 = @(x) sqrt( (x + d/2).^2 + D.^2 );
18 E_0 = @(r_1, r_2) A * sqrt( 1./r_1 + 1./r_2 + 2./sqrt(r_1.*r_2).*cos( k.*(r_1 - r_2)
    ) );
19 E_0_appro = @(x) sqrt(2./D)*A .* sqrt( 1 + cos(k*x*d/D) );
20 I = @(r_1, r_2) A.^2 * sqrt(vare_0/mu_0) * ( 0.5*(1./r_1 + 1./r_2) + cos(k*(r_1 - r_2)
    ) ./ sqrt(r_1.*r_2) );
21 %I = @(r_1, r_2) 0.5 * sqrt(vare_0/mu_0) * E_0(r_1, r_2).^2;
22 I_appro = @(x) 0.5 * sqrt(vare_0/mu_0) * E_0_appro(x).^2;
23
24 x_array = linspace(-0.02, 0.02, 1000);
25 r_array = r(x_array);
26 r_1_array = r_1(x_array);
27 r_2_array = r_2(x_array);
28 E_0_array = E_0(r_1_array, r_2_array);
29 E_0_appro_array = E_0_appro(x_array);
30 I_array = I(r_1_array, r_2_array);
31 I_appro_array = I_appro(x_array);
32
33 plot_E = MyPlot(x_array, [E_0_array; E_0_appro_array]);
34 plot_E.label.y.String = '$E_0$';
35 plot_E.leg.Location = 'northeast';
36 plot_E.leg.String = ["$E_0$, \mathrm{exact}$"; "$E_0$, \mathrm{appro}$"];
37 %MyExport_pdf
38 plot_I = MyPlot(x_array, [I_array; I_appro_array]);
39 plot_I.label.y.String = '$I$';
40 plot_I.leg.Location = 'northeast';
41 plot_I.leg.String = ["$I$, \mathrm{exact}$"; "$I$, \mathrm{appro}$"];
42 %MyExport_pdf
43 stc_E = MyErrorAnalyzer_discrete(E_0_array, E_0_appro_array, 1);
44 stc_I = MyErrorAnalyzer_discrete(I_array, I_appro_array, 1);
45
46 stc_funcerror_E = MyErrorAnalyzer_continuous(@(x) E_0(r_1(x), r_2(x)), @(x) E_0_appro(x
    ), [-0.02, 0.02]);
47 stc_funcerror_I = MyErrorAnalyzer_continuous(@(x) I(r_1(x), r_2(x)), @(x) I_appro(x),
    [-0.02, 0.02]);
48
49 stc_yy = MyYYPlot(x_array, stc_E.Residual, x_array, stc_I.Residual);
50 stc_yy.label.y_left.String = '$\hat{\theta}_E$';
51 stc_yy.label.y_right.String = '$\hat{\theta}_I$';
52
53 stc_yy.leg.String = ["$\theta_E = E_0 - \hat{\theta}_E$"; "$\theta_I = I - \hat{\theta}_I$"];

```

```

54 stc_yy.p_left.LineStyle = 'none';
55 stc_yy.p_left.Marker = '.';
56 stc_yy.p_left.MarkerSize = 3;
57 stc_yy.p_right.LineStyle = 'none';
58 stc_yy.p_right.Marker = '.';
59 stc_yy.p_right.MarkerSize = 3;
60 %MyExport_pdf_modal

```

B.8 图 3.6 源码

```

1 %% 光源宽度对对比度位置分布的影响 %%
2 clc, clear, close all
3 global I_max d lambda R D Delta_x u
4
5 d = 100 * 10^(-6);
6 R = 5 * 10^(-2);
7 D = 1;
8 lambda = 700 * 10^(-9); % 700.0 nm 的红光
9 Delta_x = D*lambda/d;
10 I_max = 2;
11
12 I = @(x, b) I_max/2 .* ( 1 + sin( pi*d/(lambda*R)*b ) ./ ( pi*d/(lambda*R)*b ) .* cos
    (2*pi*x/Delta_x) );
13 u = @(b) pi*d/(lambda*R) * b;
14 gamma = @(b) abs( sin(u(b))/u(b) );
15
16 % I = I(x, b)
17 x_array = linspace(-0.02, 0.02, 300);
18 b_array = transpose(linspace(0, 5*lambda*R/d, 50));
19 stc1 = MyMesh(x_array, b_array, I(x_array, b_array));
20 stc1.label_left.y.String = '$b$';
21 stc1.label_left.z.String = '$I(x, b)$';
22 stc1.label_right.y.String = '$b$';
23 stc1.label_right.z.String = '$I(x, b)$';
24 %MyExport_pdf_modal
25
26 % 干涉条纹对比度
27 b_array = transpose(linspace(0, 5*lambda*R/d, 200));
28 stc2 = MyPlot(b_array', gamma(b_array)');
29 xline(lambda*R/d, 'LineWidth', 0.5, 'Color', [1 0 0]);
30 ylim([0, 1])
31 stc2.label.x.String = '$b$';
32 stc2.label.y.String = '$\gamma = \gamma(b)$';
33 stc2.leg.String = ["$\gamma = \gamma(b)$"; "$b = \lambda R / d$"];
34 %MyExport_pdf_modal

```

B.9 图3.8 源码

```

1  %% 精细度对透射率的影响 %%
2  clc, clear, close all;
3  F = @(R) 4*R ./ (1-R).^2;
4  T_FP = @(delta, F) 1 ./ (1 + sin(delta/2).^2 .* F);
5  F_array = linspace(0, 40, 50);
6  delta_array = linspace(0, 10*pi, 200);
7
8  MyPlot(linspace(0, 0.9, 100), F(linspace(0, 0.9, 100)));
9  stc = MySurf(delta_array, F_array, T_FP(delta_array, F_array));
10 stc.label_left.x.String = '$\delta$';
11 stc.label_left.y.String = '$F$';
12 stc.label_left.z.String = '$T_{F-P} = T_{F-P}(\delta, F)$';
13 stc.label_right.x.String = '$\delta$';
14 stc.label_right.y.String = '$F$';
15 %MyExport_pdf_docked
16
17 MyPlot(delta_array, T_FP(delta_array, 2));
18 MyPlot(delta_array, T_FP(delta_array, 10));
19 MyPlot(linspace(0, 10*pi, 1000), T_FP(linspace(0, 10*pi, 1000), 400));

```

B.10 图 3.14 源码

```

1  %% 法布里-珀罗干涉仪 (Fabry/Perot Interferometer) %%
2  clc, clear, close all
3  global F
4  %% 透射率 F = F(R)
5  disp(['最大误差：', num2str(1)])
6
7  F = @(R) 4*R./(1-R).^2;
8  R = linspace(0.895, 0.94, 100);
9  stc = MyPlot(R, F(R));
10 disp(['R = ', num2str(R(1)), ', ', num2str(R(end))])
11 disp(['F = ', num2str(F(R(1))), ', ', num2str(F(R(end)))])
12 disp(['最大误差：', num2str(4*(asin(1/sqrt(F(R(1)))) - 1/sqrt(F(R(1)))) ) ]])
13
14 x = fzero(@(x) x./(1-x).^2 - 900/pi^2, 0.5);
15 disp(['锐度 30 对应 R = ', num2str(x)]);
16
17 %% 透射率 T = T(delta, R)
18
19 T = @(d, R) 1 ./ (1 + F(R).*sin(d/2).^2);
20 d = linspace(pi, 5*pi, 300);
21 stc = MySurf(d, R, T(d, R));
22 stc.label_left.x.String = '$\delta$';
23 stc.label_left.y.String = '$R$';

```

```
24 stc.label_left.z.String = '$T = T(\delta, R)$';
25 stc.label_right.x.String = '$\delta$';
26 stc.label_right.y.String = '$R$';
27
28 figure('Color', [1 1 1])
29 ax = axes;
30 d1 = linspace(pi, 2*pi - 0.3, 50);
31 d2 = linspace(2*pi - 0.3, 2*pi + 0.3, 100);
32 d3 = linspace(2*pi + 0.3, 4*pi - 0.3, 50);
33 d4 = linspace(4*pi - 0.3, 4*pi + 0.3, 100);
34 d5 = linspace(4*pi + 0.3, 5*pi, 50);
35 d = [d1, d2, d3, d4, d5];
36
37 R05 = MyPlot_GivenAxes(ax, d, T(d, 0.05));
38 R25 = MyPlot_GivenAxes(ax, d, T(d, 0.25));
39 R50 = MyPlot_GivenAxes(ax, d, T(d, 0.50));
40 R75 = MyPlot_GivenAxes(ax, d, T(d, 0.75));
41 R95 = MyPlot_GivenAxes(ax, d, T(d, 0.95));
42
43 ylim(ax, [0 1])
44 xlim(ax, [d(1) d(end)])
45 xlabel(ax, '$\delta$')
46 ylabel(ax, '$T = T(\delta, R)$')
47 legend(ax, ["$R = 0.05$"; "$R = 0.25$"; "$R = 0.50$"; "$R = 0.75$"; "$R = 0.95$"], 
        Location='best', FontSize=8)
48
49 MyColors = GetMyColors;
50
51 R05.plot.plot_1.LineStyle = ":"; 
52 R05.plot.plot_1.LineWidth = 2;
53 R05.plot.plot_1.Color = MyColors{2};
54 R25.plot.plot_1.LineStyle = "-.";
55 R25.plot.plot_1.LineWidth = 1.8;
56 R25.plot.plot_1.Color = MyColors{1};
57 R50.plot.plot_1.LineStyle = "--";
58 R50.plot.plot_1.LineWidth = 1.6;
59 R50.plot.plot_1.Color = MyColors{3};
60 R75.plot.plot_1.LineStyle = ":"; 
61 R75.plot.plot_1.LineWidth = 1.4;
62 R75.plot.plot_1.Color = MyColors{6};
63 R95.plot.plot_1.LineStyle = "-"; 
64 R95.plot.plot_1.LineWidth = 1.2;
65 R95.plot.plot_1.Color = MyColors{10};
66 R05.axes.XTick = [pi, 2*pi, 3*pi, 4*pi, 5*pi];
67 R05.axes.XTickLabel = ["$\pi$"; "$2\pi$"; "$3\pi$"; "$4\pi$"; "$5\pi$"];
68 R05.axes.TickLabelInterpreter = 'latex';
69 %MyExport_pdf
70 %MyExport_jpg(200)
71
```

```

72 %% 半峰宽 varepsilon
73
74 stc = MyPlot(d, T(d, 0.5));
75 ylim([0 1])
76 xlim([d(1) d(end)])
77 xlabel('$\delta$')
78 ylabel('$T = T(\delta, R)$')
79 yline(0.5)
80 legend("$R = 0.50$", Location='northeast', FontSize=10)
81 stc.plot.plot_1.LineWidth = 1.4;
82 stc.plot.plot_1.Color = MyColors{2};
83 stc.axes.XTick = [pi, 2*pi, 3*pi, 4*pi, 5*pi];
84 stc.axes.XTickLabel = ["$\pi$"; "$2\pi$"; "$3\pi$"; "$4\pi$"; "$5\pi$"];
85 stc.axes.TickLabelInterpreter = 'latex';
86 %MyExport_jpg(200)
87
88 %% 对比度、半峰宽、锐度随反射率 R 的变化
89
90 gamma = @(R) 2*R./(1 + R.^2);
91 varepsilon = @(R) 4./sqrt(F(R));
92 aF = @(R) pi/2*sqrt(F(R));
93
94 R = linspace(0, 0.98, 100);
95 Y = [
96     gamma(R)
97     varepsilon(R)
98     aF(R)
99 ];
100
101 figure('Color', [1 1 1])
102 lay = tiledlayout(3, 1);
103
104 nexttile
105 stc = MyPlot_GivenAxes(gca, R, gamma(R));
106 stc.label.x.Visible = 'off';
107 stc.label.y.String = '$\gamma$';
108 stc.axes.XLimitMethod = 'tight';
109 stc.axes.YLimitMethod = 'tight';
110 stc.leg.Visible = 'off';
111
112 nexttile
113 stc = MyPlot_GivenAxes(gca, R, varepsilon(R));
114 stc.label.x.Visible = 'off';
115 stc.label.y.String = '$\varepsilon$';
116 stc.axes.XLimitMethod = 'tight';
117 stc.axes.YLimitMethod = 'tight';
118 stc.leg.Visible = 'off';
119
120 nexttile

```

```
121 stc = MyPlot_GivenAxes(gca, R, aF(R));  
122 stc.labelX.String = '$R$';  
123 stc.labelY.String = 'acutance';  
124 stc.axes.XLimitMethod = 'tight';  
125 stc.axes.YLimitMethod = 'tight';  
126 stc.leg.Visible = 'off';  
127  
128 %MyExport_pdf
```