线性代数(2024春)(Linear Algebra)

作业12

1. 设U是有限维辛空间V的非零真子空间。证明U在有正交补子空间$U^{\perp} = \{v \in V \mid$ 对任意 $u \in U,\ [u|v] = 0\}$ (即$V = U \oplus U^{\perp}$)的充分必要条件是U关于$[\cdot|\cdot]$也构成一个辛空间。举出$V \neq U \oplus U^{\perp}$的例子。

2. 设φ是$2m$维辛空间V的辛算子且它有$2m$个不同的特征值。证明存在V的一组基$\{u_1, u_2, ..., u_{2m}\}$ 使得φ在它下的矩阵是对角矩阵并且$[\cdot|\cdot]$在它下的矩阵为

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

3. 在次数$\leq n-1$的复系数多项式全体$\mathcal{P}_n[x]$，定义

$$\langle f|g\rangle = \sum_{r=1}^{n} f(r)\overline{g(r)}.$$

证明$\mathcal{P}_n[x]$关于$\langle\cdot|\cdot\rangle$构成酉空间。

4. 设

$$A = B + iC \in M_{n\times n}(\mathbb{C}), \qquad \text{其中}\ \ B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

证明A是一个酉矩阵的充分必要条件是$B\,{}^{t}C$是一个对称矩阵并且$B\,{}^{t}B + C\,{}^{t}C = I_n$。