# 偏微分方程数值解法笔记
# Numerical Methods for PDE Notes


丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China


2024.8 – 2025.1

# 序言

本文为笔者本科时的偏微分方程数值解法（Numerical Methods for PDE）笔记。用灰色字体或灰色方框等表示对主干内容的补充、对晦涩概念的理解、定理的具体证明过程等，采用红色字体对重点部分进行强调，同时适当配有插图。这样的颜色和结构安排既突出了知识的主要框架，也保持了笔记的深度和广度，并且不会因为颜色过多而导致难以锁定文本内容，乃是尝试了多种安排后挑选出的最佳方案。如果读者有更佳的颜色和排版方案，可以将建议发送到笔者邮箱 dingyi233@mails.ucas.ac.cn，在此感谢。另外，由于个人自学能力有限，部分内容将会直接跳过。

由于个人学识浅陋，认识有限，书中难免有不妥甚至错误之处，望读者不吝指正，在此感谢。

# 目录

# 第 1 章　基础知识

## § 1.1　偏微分方程基本概念

**相关概念：**

① 阶数：未知函数导数的最高阶数

② 次数：最高阶导数的幂次

③ 线性：对未知函数及其各阶导数是线性（一次）的

④ 拟线性：对最高阶导数是线性的

⑤ 非线性：略

⑥ 自由项：不含有未知函数及其导数的项

⑦ 齐次：自由项恒为 0，否则称为非齐次

例如 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3=2xy$ 是二阶、一次（不是三次）、拟线性、齐次 PDE，$\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2$ 是一阶、一次、拟线性、非齐次 PDE。

**方程分类：**

考虑二元二阶偏微分方程：

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+f=0 \tag{1.1}$$

其中 $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ 可以是常数，也可以是 $x$, $y$, , $u$ 及其导数的函数。$a,...,f$ 仅是 $x,y$ 的函数时（包括常数），方程是线性的，$a,b,c$ 是 $x,y,u,u'_x,u'_y$ 的函数时，方程是拟线性的，其它情况都是非线性的。

$$\begin{cases} b^2-4ac<0, & \text{椭圆型方程} \\ b^2-4ac=0, & \text{抛物型方程} \\ b^2-4ac>0, & \text{双曲型方程} \end{cases}$$

方程系数取值也范围会影响方程的类型，例如，下面方程在单位圆内是椭圆型，在单位元外是双曲型：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1-x^2-y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

**方程的特征线：**

在方程 1.1 可以

**方程组的分类：**

**定解条件：**

## § 1.2　矩阵基本概念

耳熟能详的概念我们不再赘述，这里提一些不熟悉的概念。

**对角占优矩阵：**

矩阵; 若$a_{ij}=0(i\neq j)$, 则称$A$ 为对角矩阵; 若$|a_{ii}|\geqslant\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|$ 对任何$i$ 都成立, 则称$A$ 为对角占优; 若$|a_{ii}|>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|$ 对任何$i$ 都成立, 则称$A$ 为严格对角占优;

**置换矩阵：**

置换矩阵 $P=(p_{ij})_{n\times n}$ 是对单位矩阵做行重排（或列重排）而得到的矩阵，这意味着 $p_{ij}\in\{0,1\}$ 且每行每列有且仅有一个非零值。例如：

$$P_{21}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ P_{32}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\ P_{32}P_{21}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},$$

置换矩阵 $P$ 是一种特殊的正交矩阵（$PP^T=I$）。

**规定：**

$\boldsymbol{x},\vec{x}$ 默认为列向量，且基底为标准正交基时，$(x_1,...,x_n)$ 与 $\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ 等价。

## § 1.3 矩阵重要性质与定理

**二阶差分方程通解（数列）：**

二阶齐次常系数线性差分方程（可以理解为数列）及其通解为：

$$ax_{j+1}+bx_j+cx_{j-1}=0$$
$$x_j=C_1\mu_1^j+C_2\mu_2^j,\quad j=1,2,...,n,...$$

其中 $\mu_1,\mu_2$ 是特征方程 $a\mu^2+b\mu+c=0$ 的两个根，$C_1,C_2$ 是待定常数（由初始值 $x_1,x_2$ 确定）。

**三对角矩阵：**

矩阵 $A$ 称为三对角矩阵如果有如下形式：

$$A=\begin{bmatrix}a&b&&\\c&a&\ddots&\\&\ddots&\ddots&b\\&&c&a\end{bmatrix}_{n\times n}$$

其特征值为：

$$\lambda_j=a+2\sqrt{bc}\cdot\cos\frac{j\pi}{n+1},j=1,2,...,n$$

右特征向量（$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$）构成右特征矩阵（$AX=\lambda X$）的列：

$$X=(x_{jk})_{n\times n}=\left[\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{j}{2}}\sin\frac{jk\pi}{n+1}\right]_{n\times n},\quad j,k=1,2,...,n$$

左特征向量（$\boldsymbol{y}^TA=\boldsymbol{y}^T\lambda$）构成左特征矩阵（$YA=Y\lambda$）的行：

$$Y = X^{-1} = (y_{jk})_{n\times n} = \left[\frac{2}{n+1}\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{j}{2}} \sin\frac{jk\pi}{n+1}\right]_{n\times n}, \quad j,k = 1,2,...,n$$

**Theorem. 1 ( Gerschgorin 圆盘定理 ):**
矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n} \in C^{n\times n}$ 的特征值都位于复平面上 $n$ 个的并集内：

$$|\lambda - a_{jj}| \leqslant \sum_{k=1,k\neq j}^{n} |a_{jk}|, \quad s = 1,2,...,n$$

**Theorem. 2 ( Taussky 定理 ):**
若矩阵 $A \in M(\mathbb{C})_{n\times n}$ 是严格对角占优矩阵，则 $A$ 非奇异（满秩）。

**你好：**