

数学物理方法课程作业

Homework of Mathematical Physics Methods

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

## 序言

本文为笔者本科时的“数学物理方法”课程作业 (Homework of Mathematical Physics Methods, 2024.9-2025.1)。由于个人学识浅陋, 认识有限, 文中难免有不妥甚至错误之处, 望读者不吝指正, 在此感谢。

我的邮箱是 dingyi233@mails.ucas.ac.cn。

---

## 目录

序言	I
目录	I
1 Homework 1: 2024.8.26 - 2024.9.1	1
2 Homework 2: 2024.9.2 - 2024.9.8	3
3 Homework 3: 2024.9.9 - 2024.9.15	6
4 Homework 4: 2024.9.16 - 2024.9.22	10
5 Homework 5: 2024.9.23 - 2024.9.29	12
6 Homework 6: 2024.10.8 - 2024.10.14	15
7 Homework 7: 2024.10.15 - 2024.10.16 (略)	19
8 Homework 8: 2024.10.15 - 2024.10.21	20

## Homework 1: 2024.8.26 - 2024.9.1

### 1.1 计算

(1)  $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{(1+i)(2+i)}{5}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{-8+6i}{25}$$

(2)  $(1+i)^n + (1-i)^n$

首先得到:

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, 1-i = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$

$$\implies I = 2^{\frac{n}{2}} (e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}})$$

于是有:

$$I = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}+1}, & n = 0 + 4k \\ 2^{\frac{n+1}{2}}, & n = 1 + 4k \\ 0, & n = 2 + 4k \\ -2^{\frac{n}{2}+1}, & n = 3 + 4k \end{cases}, k \in \mathbb{N}$$

习题课补:

$$I = 2^{\frac{n}{2}} (e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}})$$

$$= 2^{\frac{n}{2}} \left( \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\frac{n\pi}{4} + \cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right) \right)$$

$$= 2^{\frac{n}{2}+1} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

(3)  $\sqrt[4]{1+i}$

$$\sqrt[4]{1+i} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{\pi}{16}}$$

习题课补: 在复数域中, 开根号是多值函数, 这里四次根在复数域中应有四个复根, 设  $x = \sqrt[4]{1+i}$ , 则原式等价于方程:

$$x^4 = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \implies |x| = 2^{\frac{1}{8}}, \arg x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3$$

### 1.2 将复数化为三角或指数形式

(1)  $\frac{5}{-3+i}$

$$\frac{5}{-3+i} = \frac{5e^{i0}}{\sqrt{10}e^{i(\arctan(-\frac{1}{3})+\pi)}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot e^{-i(\arctan(-\frac{1}{3})+\pi)}$$

(2)  $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$

$$\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}e^{i\arctan(\frac{1}{2})}}{\sqrt{13}e^{i\arctan(-\frac{2}{3})}}\right)^2 = \frac{5}{13}e^{2i(\arctan(\frac{1}{2})-\arctan(-\frac{2}{3}))}$$

### 1.3 求极限 $\lim_{z \rightarrow i} \frac{1+z^6}{1+z^{10}}$

作不完全因式分解:

$$1+z^6 = z^6 - i^6 = (z^3 - i^3)(z^3 + i^3) = (z-i)(z^2 + iz + i^2)(z^3 + i^3)$$

$$\begin{aligned}
 1 + z^{10} &= z^{10} - i^{10} = (z^5 - i^5)(z^5 + i^5) = (z - i)(z^4 + iz^3 + i^2z^2 + i^3z + i^4)(z^5 + i^5) \\
 \implies L &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1 + z^6}{1 + z^{10}} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z - i)(z^2 + iz + i^2)(z^3 + i^3)}{(z - i)(z^4 + iz^3 + i^2z^2 + i^3z + i^4)(z^5 + i^5)} \\
 &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z^2 + iz + i^2)(z^3 + i^3)}{(z^4 + iz^3 + i^2z^2 + i^3z + i^4)(z^5 + i^5)} \\
 &= \frac{(-3) \times (-2i)}{5i} = \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

事实上, 实数域上的洛必达法则 (L'Hospital) 可以推广到复数域的解析函数, 下面给出  $\frac{0}{0}$  型的证明。设复变函数  $f(z), g(z)$  在  $z = z_0$  解析, 且  $f(z_0) = g(z_0) = 0$ , 则有:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

特别地, 若  $f'(z_0)$  与  $g'(z_0)$  存在且不为零, 就有  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$

## 1.4 讨论函数在原点的连续性

$$(1) f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2i} \left( \frac{z}{z^*} - \frac{z^*}{z} \right), & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

令  $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ , 则  $\forall (x, y) \neq (0, 0)$ :

$$f(x, y) = \frac{1}{2i} \left( \frac{x + iy}{x - iy} - \frac{x - iy}{x + iy} \right) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{4ixy}{x^2 + y^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

令  $k = \frac{y}{x}$ , 则:

$$L = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{2k}{1 + k^2}$$

显然,  $L$  随着  $k$  的变化而变化, 因此极限不存在,  $f(z)$  在 0 处不连续。

$$(2) f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Im} z}{1 + |z|}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

令  $z = x + iy$  和  $k = \frac{y}{x}$ , 则  $\forall (x, y) \neq (0, 0)$ :

$$f(x, y) = \frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} \implies \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \frac{0}{1 + 0} = 0 = f(0, 0)$$

因此  $f(z)$  在 0 处连续。

$$(3) f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z^2}{|z|^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

同理令  $z = x + iy$  和  $k = \frac{y}{x}$ , 则  $\forall (x, y) \neq (0, 0)$ :

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}$$

因此  $f(z)$  在 0 处不连续。

## 1.5 恒等式证明 (附加题)

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^n |b_i|^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i b_j^* - a_j b_i^*|^2$$

## Homework 2: 2024.9.2 - 2024.9.8

### 2.1 下列函数在何处可导，何处解析

(1)  $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$

设  $z = x + iy$ , 则  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 + ixy$ .  $\forall z \in C$ ,  $u(x, y) = x^2$  和  $v(x, y) = xy$  在  $\mathbb{C}$  上有连续一阶偏导, 下面考虑 C-R 条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x \quad (2.2)$$

联立 C-R 条件, 得  $(x, y) = (0, 0)$ , 因此  $f$  在  $(0, 0)$  处可导, 在  $\mathbb{C}$  上不解析. 不在点  $(0, 0)$  上解析是因为在某点解析是指在此点的有心邻域上解析, 显然这里不满足, 因此  $(0, 0)$  为奇点.

后补:

$u, v$  有一阶连续偏导且满足 C-R 条件  $\implies u, v$  可微且满足 C-R 条件  $\iff f$  可微  $\iff f$  可导

(2)  $f(x, y) = (x - y)^2 + 2i(x + y)$

$\forall z \in C$ ,  $u(x, y) = (x - y)^2$  和  $v(x, y) = 2(x + y)$  在  $\mathbb{C}$  上有连续一阶偏导, 下面验证 C-R 条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x - y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2(x - y) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \quad (2.4)$$

联立 C-R 条件后无解, 因此  $f$  在  $\mathbb{C}$  上不可导, 在  $\mathbb{C}$  上不解析.

### 2.2 求下列函数的解析区域

(1)  $f(z) = xy + iy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

欲满足 C-R 条件, 则:

$$y = 1, x = 0 \implies f \text{ 在全平面不解析}$$

不在点  $(0, 1)$  上解析是因为在某点解析是指在此点的有心邻域上解析, 显然这里不满足.

(2)  $f(z) = \begin{cases} |z| \cdot z, & |z| < 1 \\ z^2, & |z| \geq 1 \end{cases}$

设  $z = x + iy$ , 则:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \begin{cases} (x\sqrt{x^2+y^2}) + i(y\sqrt{x^2+y^2}), & \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ (x^2 - y^2) + i(2xy), & \sqrt{x^2+y^2} \geq 1 \end{cases}$$

$$\iff u(x, y) = \begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2}, & \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ x^2 - y^2, & \sqrt{x^2+y^2} \geq 1 \end{cases}, \quad v(x, y) = \begin{cases} y\sqrt{x^2+y^2}, & \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ 2xy, & \sqrt{x^2+y^2} \geq 1 \end{cases}$$

分别求偏导得到:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}, \quad \sqrt{x^2+y^2} < 1 \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, & \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, & \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \end{cases}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1$$

偏导要满足 C-R 条件，代入得到：

$$\begin{aligned} x^2 = y^2, \quad 2xy = 0, \quad \forall \sqrt{x^2 + y^2} < 1, x^2 + y^2 \neq 0 \\ 2x = 2x, \quad -2y = -2y, \quad \forall \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1 \\ \implies f(z) \text{ 在 } \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1\} \text{ 上解析} \end{aligned}$$

不在点 (0,0) 上解析是因为在某点解析是指在此点的有心邻域上解析，显然这里不满足。

后补：解析区域必须是开集（因为受“有心邻域”限制）， $f$  的解析区域应为  $\{z \mid |z| > 1\}$ 。另外， $|z| = 1$  代表的圆周上也不可微，这是因为  $f$  在  $|z| = 1$  上不连续（内部是一倍幅角，外部是二倍幅角），所以可微区域也为  $\{z \mid |z| > 1\}$ 。

### 2.3 已知解析函数 $f(z)$ 的实部如下，求 $f(z)$

(1)  $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$

$$\begin{aligned} v'_x = -u'_y = 2y, \quad v'_y = u'_x = 2x + 1 \\ \implies v(x, y) = \int 2y \, dx + \int dy = 2xy + y + C \\ \implies f(x, y) = (x^2 + y^2 + x) + i(2xy + y) + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(2)  $u(x, y) = e^y \cos x$

$$\begin{aligned} v'_x = -u'_y = -e^y \cos x, \quad v'_y = u'_x = -e^y \sin x \\ \implies v(x, y) = \int -e^y \cos x \, dx + \int 0 \, dy = -e^y \sin x + C \\ \implies f(x, y) = (e^y \cos x) + i(-e^y \sin x) + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

### 2.4 $f$ 解析，且 $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ ，求 $f(z)$

两边分别对  $x, y$  求导，得到：

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 + 6xy - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 6xy - 3y^2$$

联立 C-R 条件，可以解出：

$$\begin{aligned} v'_x = -3x^2 + 3y^2, \quad v'_y = 6xy \\ u'_x = 6xy, \quad u'_y = 3x^2 - 3y^2 \\ \implies v(x, y) = -x^3 + 3xy^2 + C, \quad u(x, y) = 3x^2y - y^3 + C \\ \implies f(x, y) = (3x^2y - y^3) + i(-x^3 + 3xy^2) + C(1 + i), \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

后补： $u$  和  $v$  中的实常数  $C$  其实是同一个！这是因为题目中  $u - v$  没有常数项，说明两者积分常数相同。

### 2.5 极坐标 C-R 条件

证明极坐标下的 C-R 条件为：

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

极坐标变换:

$$\begin{aligned} x &= x(r, \theta) = r \cos \theta, & y &= y(r, \theta) = r \sin \theta \\ \implies \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \theta, & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r \sin \theta, & \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos \theta \end{aligned}$$

由复合函数的求导法则:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} u(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial \theta} u(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot r \sin \theta + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot r \cos \theta \end{aligned}$$

联立 C-R 条件, 化简得到:

$$v'_r = -u'_\theta \cos \theta + u'_x \sin \theta = \frac{1}{r} u'_\theta$$

同理, 由偏导关系:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} u(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot r \sin \theta + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot r \cos \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} v(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cdot \sin \theta \end{aligned}$$

联立 C-R 条件, 化简得到:

$$u'_r = u'_x \cos \theta + u'_y \sin \theta = \frac{1}{r} v'_\theta$$

反之也可以化为原 C-R 条件, 因此 C-R 条件在极坐标下的形式为:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \square$$

## 2.6 证明 $f(z)$ 和 $\overline{f(\bar{z})}$ 同解析或同不解析

(1)  $f(z)$  解析  $\implies \overline{f(\bar{z})}$  解析

假设  $f(z)$  在点  $z = z_0$  解析, 即  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在有心邻域  $U_\delta(z_0)$  上解析, 这等价于  $f(z)$  有一阶导, 且在邻域内满足 C-R 条件. 设  $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = u(x, -y) - iv(x, -y)$ , 也即:

$$g(z) = u_g(x, y) + iv_g(x, y), \quad u_g(x, y) = u(x, -y), \quad v_g(x, y) = -v(x, -y)$$

容易验证  $g(z)$  有一阶偏导, 下面验证 C-R 条件:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_g}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, -y), & \frac{\partial u_g}{\partial y} &= \frac{\partial u(x, -y)}{\partial(-y)} \cdot \frac{\partial(-y)}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, -y) \\ \frac{\partial v_g}{\partial x} &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x, -y), & \frac{\partial v_g}{\partial y} &= -\frac{\partial v(x, -y)}{\partial(-y)} \cdot \frac{\partial(-y)}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}(x, -y) \end{aligned}$$

联立  $u$  和  $v$  的 C-R 条件, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_g}{\partial x} - \frac{\partial v_g}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, -y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x, -y) = 0 \implies \frac{\partial u_g}{\partial x} = \frac{\partial v_g}{\partial y} \\ \frac{\partial u_g}{\partial y} + \frac{\partial v_g}{\partial x} &= -\left[ \frac{\partial u}{\partial y}(x, -y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, -y) \right] = 0 \implies \frac{\partial u_g}{\partial y} = -\frac{\partial v_g}{\partial x} \end{aligned}$$

因此  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$  也解析。

(2)  $f(z)$  解析  $\iff \overline{f(\bar{z})}$  解析

假设  $\overline{f(\bar{z})}$  解析, 令  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ , 则  $f(z) = \overline{g(\bar{z})}$ , 由 (1) 的结论,  $g(z)$  解析  $\implies f(z) = \overline{g(\bar{z})}$  也解析. 证毕.  $\square$

## Homework 3: 2024.9.9 - 2024.9.15

### 3.1 若 $f(z)$ 解析, $\arg f(z)$ 是否为调和函数?

注: 下面的过程仅讨论了  $\arg f(z)$  的解析性, 未能揭示其调和性, 正确的解答见后文补充的灰色小字。

(1) 当  $f(z) = C \in \mathbb{C}, \forall z \in G$ , 也即  $f(z)$  恒为常量时:  $\arg f(z)$  也为常量, 设  $\arg f(z) = a + ib$ , 则  $a = \arg f(z) \in \mathbb{R}$  而  $b = 0$ , 自然满足  $\Delta a = \Delta b = 0$ , 因此  $\arg f(z)$  为调和函数。

(2) 当  $f(z)$  是非常量函数时:

由  $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ , 移项, 并作映射  $z \rightarrow f(z)$ , 则有:

$$\arg f(z) = \frac{1}{i} (\ln f(z) - \ln \rho)$$

函数  $\ln$  在  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  上解析, 但对于函数  $\rho = \rho(z)$ :

$$\rho = \sqrt{u^2 + v^2} \implies u_\rho = \sqrt{u^2 + v^2}, v_\rho = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial x} = \frac{uu'_x}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{vv'_x}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \frac{\partial u_\rho}{\partial y} = \frac{uu'_y}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{vv'_y}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (3.2)$$

假设  $\rho$  满足 C-R 条件, 代入得到:

$$\begin{cases} uu'_x + vv'_x = 0 \\ uu'_y + vv'_y = 0 \\ \sqrt{u^2 + v^2} \neq 0 \end{cases}$$

由于  $f(z)$  解析, 满足 C-R 条件  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ , 代入后整理得到:

$$\begin{cases} v(v_y'^2 - u_y'^2) = 0 \\ u(u_y'^2 + v_y'^2) = 0 \end{cases}$$

$f(z)$  非常量, 因此  $u, v$  非常量, 因此只能有:

$$v_y' = u_y' = 0 \implies u_x' = v_x' = 0 \implies u \text{ 和 } v \text{ 为常量函数}$$

这使得  $f(z) = u + iv$  是常量, 矛盾! 因此  $\arg f(z)$  不解析 (这能否推出不调和? 解析是调和的充分条件, 但是充要的吗? 事实上并不是, 因此并不能揭示调和性)。

后补: 即使仅从解析性的角度来看, 上面的过程也没有抓到主要矛盾, 是舍本逐末了。因为无论  $f(z)$  的性质如何,  $\arg f(z)$  始终是  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  的函数, 这表明  $\arg f(z)$  是实部是它本身而虚部恒为 0, 因此, 由 C-R 条件可知  $\arg f(z)$  解析的必要条件是实部为常数, 而这也是充分条件。

对  $\arg f(z)$  的调和性, 我们有如下推导:

$$\arg f(z) = \arctan \frac{u(x, y)}{v(x, y)} + A, \quad A \in \{0, \pi\} \quad (3.3)$$

令  $g(z) = \arg f(z)$ , 则有:

$$g'_x = \frac{uv'_x - u'_x v}{u^2 + v^2}, \quad g''_{xx} = \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} [(u^2 + v^2)(uv''_{xx} + u''_{xx}v) - 2uv(v_x'^2 - u_x'^2) - 2(u^2 - v^2)u'_x v'_x] \quad (3.4)$$

对  $y$  求导也是同理, 只需将上面的角标  $x$  换为  $y$ , 于是有  $\Delta g$ :

$$\begin{aligned} \Delta g &= g''_{xx} + g''_{yy} \\ &= \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} [(u^2 + v^2)(u(v''_{xx} + v''_{yy}) + (u''_{xx} + u''_{yy})v) - 2uv(v_x'^2 + v_y'^2 - u_x'^2 - u_y'^2) - 2(u^2 - v^2)(u'_x v'_x + u'_y v'_y)] \end{aligned}$$

$f$  解析意味着  $u, v$  构成一对共轭调和函数, 有  $\Delta u = \Delta v = 0$ , 代入上式, 再代入 C-R 条件, 容易验证右边为 0, 也即证明了  $\Delta g = 0$ , 因此  $\arg f(z)$  为调和函数。对  $u^2 + v^2 = 0$  的情况, 我们不再赘述, 只关心普遍结论。



### 3.2 从已知的实虚部求出解析函数 $f(z)$

(1)  $u = e^x(x \cos y - y \sin y) + 2 \sin x \cdot \sinh y + x^3 - 3xy^2 + y$

$$u'_x = e^x(x \cos y - y \sin y + \cos y) + 2 \cos x \sinh y + 3x^2 - 3y^2 \quad (3.5)$$

$$u'_y = e^x(-x \sin y - \sin y - y \cos y) + 2 \sin x \cosh y - 6xy + 1 \quad (3.6)$$

由 C-R 条件,  $v'_x = -u'_y$ ,  $v'_y = u'_x$ , 于是得到:

$$v(x, y) = \int (-u'_y) dx + \int (-3y^2) dy \quad (3.7)$$

$$= (x-1)e^x \sin y + (\sin y + y \cos y)e^x + 2 \cos x \cosh y + 3x^2 y - x - y^3 + C \quad (3.8)$$

$$= (x \sin y + y \cos y)e^x + 2 \cos x \cosh y + 3x^2 y - x - y^3 + C, C \in \mathbb{R} \quad (3.9)$$

令  $(x, y) = (z, 0)$ , 得到:

$$u(z, 0) = ze^z + z^3, \quad v(z, 0) = 2 \cos z - z + C, C \in \mathbb{R} \quad (3.10)$$

于是得到  $f(x, y)$ :

$$f(z) = [u(x, y) + iv(x, y)]_{x=z, y=0} = (ze^z + z^3) + i(2 \cos z - z + C), C \in \mathbb{R}$$

(2)  $v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$

$$v'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2} + 1, \quad v'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2} - 2$$

由 C-R 条件,  $u'_x = v'_y$ ,  $u'_y = -v'_x$ , 于是得到:

$$u(x, y) = \int v'_y dx + \int (-1) dy = 2 \arctan \frac{x}{y} - 2x - y + C \quad (3.11)$$

$$f(x, y) = u + iv = (2 \arctan \frac{x}{y} - 2x - y + C) + i(\ln(x^2 + y^2) + x - 2y), C \in \mathbb{R}$$

后补, 这里之所以没有令  $(x, y) = (z, 0)$  得到  $f(z)$ , 是因为函数  $\arctan \frac{x}{y}$  在实轴附近是不连续的, 例如在正实轴  $x > 0$  附近,  $\lim_{y \rightarrow 0^+}$  时趋于  $+\infty$  而  $\lim_{y \rightarrow 0^-}$  时趋于  $-\infty$ . 而映射  $(x, y) = (z, 0)$  的必要条件是解析域中包含实轴, 这涉及到解析延拓的内容, 我们不提. 只需要写到  $f(x, y)$  的形式就这样放着即可.

### 3.3 求下列函数的值

(1)  $\cos(2+i)$

由  $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ , 可得:

$$\begin{aligned} \cos(2+i) &= \frac{1}{2} [e^{i(2+i)} + e^{i(2-i)}] = \frac{1}{2} [e^{2i-1} + e^{1-2i}] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{e} + e \right) \cos 2 + i \left( \frac{1}{e} - e \right) \sin 2 \right] \end{aligned}$$

(2)  $\text{Ln}(2-3i)$

由  $\text{Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg } z$ , 可得:

$$\text{Ln}(2-3i) = \ln |2-3i| + i \text{Arg}(2-3i) = \frac{1}{2} \ln 13 + i \left( \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

(3)  $\operatorname{Arccos}\left(\frac{3+i}{4}\right)$

$\arccos z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$ , 于是:

$$\begin{aligned}\operatorname{Arccos}\left(\frac{3+i}{4}\right) &= -i \operatorname{Ln}\left(\frac{3+i}{4} + \sqrt{\left(\frac{3+i}{4}\right)^2 - 1}\right) = -i \operatorname{Ln}\left(\frac{3+i}{4} + \frac{\sqrt{-8+6i}}{4}\right) \\ &= -i \operatorname{Ln}\left(\frac{3+i}{4} \pm \frac{1+3i}{4}\right) = -i \operatorname{Ln}(1+i) \text{ 或 } -i \operatorname{Ln}\left(\frac{1-i}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) - i\frac{\ln 2}{2} \text{ 或 } -\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\frac{\ln 2}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

(4)  $\operatorname{Arctan}(1+2i)$

由  $\operatorname{Arctan} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}$ , 得:

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctan}(1+2i) &= \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{1+i(1+2i)}{1-i(1+2i)}\right) = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{-1+i}{3-i}\right) \\ &= \frac{1}{2i} (\operatorname{Ln}(-2+i) - \ln 5) = \frac{1}{2i} \left[-\frac{\ln 5}{2} + i\left(\pi - \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\pi - \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi\right) + i\frac{\ln 5}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

### 3.4 判断下列函数是单值还是多值函数

(1)  $\sin \sqrt{z}$

多值函数。 $\sqrt{z}$  为双值函数,  $a^2 = z \implies \sqrt{z} = \pm a$ , 而  $\sin$  为奇函数,  $\sin a \neq \sin(-a)$ , 故为多值函数。

(2)  $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$

单值函数。 $\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin(-a)}{-a}$ , 因此为单值函数。

(3)  $\frac{\cos \sqrt{z}}{z}$

单值函数。 $\frac{\cos a}{a^2} = \frac{\cos(-a)}{(-a)^2}$ , 故为单值函数。

### 3.5 解方程: $2 \cosh^2 z - 3 \cosh z + 1 = 0$

原方程等价于:

$$(2 \cosh z - 1)(\cosh z - 1) = 0 \implies \cosh z = \frac{1}{2} \text{ 或 } 1 \quad (3.12)$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \implies e^z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \text{ 或 } 1 \quad (3.13)$$

$$\implies z = i\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \text{ 或 } i(0 + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.14)$$

### 3.6 求下列多值函数的分支点

(1)  $\sqrt{1-z^3}$  的分支点:  $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \infty$

宗量  $1-z^3$  不妨记为  $1-z^3 = (z_1-z)(z_2-z)(z_3-z)$ 。支点仅可能在宗量的零点、奇点处出现, 下面分别考察  $z_1, z_2, z_3, \infty$  四点。

对  $z_1$ , 取仅包含点  $z_1$  的简单闭合曲线, 曲线上一一点  $z$  沿逆时针绕一圈回到原处, 因子  $(z_1-z)$  的幅角增加了  $2\pi$ , 因子  $(z_2-z)$  和  $z_3-z$  的幅角增加了  $0$ , 因此整个宗量的幅角增加  $2\pi$ , 开根后, 函数值幅角增加  $\pi$ , 前后不相等。因此点  $z_1$  是分支点。同理可得  $z_2$  和  $z_3$  是分支点。

对  $\infty$ , 取包含点  $z_1, z_2, z_3$  的简单闭合曲线, 曲线上一点  $z$  沿顺时针 (不是逆时针) 绕一圈回到原处, 整个宗量的幅角增加了  $-6\pi$ , 开根后函数值幅角增加  $-3\pi$ , 因此  $\infty$  也是分支点。

(2)  $\text{Ln} \cos z$  的分支点:  $\infty, \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 。

可以证明,  $\text{Ln} f(z)$  的分支点等价于方程  $f(z) = 0$  和  $f(z) = \infty$  的解<sup>①</sup>。于是分别令  $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$  为 0 和  $\infty$ , 解得:

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ 或 } z = \infty \quad (3.15)$$

(3)  $\sqrt{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}$  的分支点:  $0, 1, 2, \infty$

考虑点  $0, 1, 2$ , 取仅包含点 0 的简单闭合曲线, 曲线上一点  $z$  逆时针绕一圈后, 宗量整体幅角增加  $2\pi$ , 函数值幅角增加  $\pi$ , 因此点 0 是分支点。同理点 1 和 2 也是分支点。

对  $\infty$ , 取包含点  $0, 1, 2$  的简单闭合曲线, 曲线上一点  $z$  顺时针绕一圈后, 宗量整体幅角增加  $-2\pi$ , 函数值也不发生变化,  $\infty$  不是分支点。

(4)  $\text{Ln} \frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)}$  的分支点:  $a, b, c, \infty$

与 (2) 同理, 考虑宗量  $\frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)}$  的零点和无穷点, 得到  $z = a, b, c, \infty$ , 即为所求分支点。

<sup>①</sup>这是助教在习题课上给出的结论, 并未给出具体证明。但是我们可以证明  $\text{Ln} z$  的分支点为 0 和  $\infty$ , 这是因为  $\text{Ln} z = \ln |z| + i \text{Arg} z$ , 当  $z$  绕原点逆时针转一圈时,  $\text{Arg} z$  增加  $2\pi$  而不是回到原来的函数值, 因此 0 为分支点; 无穷点同理。

## Homework 4: 2024.9.16 - 2024.9.22

### 4.1 计算下列积分

(1)  $\oint_{|z+i|=1} \frac{e^z}{1+z^2} dz$

被积函数  $\frac{e^z}{1+z^2}$  在圆周  $|z+i|=1$  内有且仅有  $z=-i$  一个奇点, 由 Cauchy 定理和 Cauchy 积分公式:

$$I = \oint_{|z+i|=1} \frac{e^z}{1+z^2} dz = 2\pi i \left[ \frac{e^z}{z-i} \right]_{z=-i} = -\pi e^{-i} \quad (4.1)$$

结果化简到上面一步即可。

(2)  $\oint_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1} dz, a > 1$

被积函数  $\frac{z}{z^4-1}$  在圆周  $|z-a|=a$  内有且仅有  $z=1$  一个奇点, 由 Cauchy 定理和 Cauchy 积分公式:

$$I = \oint_{|z-1|=a} \frac{z}{z^4-1} dz = 2\pi i \cdot \left[ \frac{z}{z^3+z^2+z+1} \right]_{z=1} = \frac{\pi i}{2}$$

(3)  $\oint_{|z|=2} \frac{z^2-1}{z^2+1} dz$

被积函数在圆周  $|z|=2$  内有且仅有  $z=\pm i$  两个奇点, 由 Cauchy 定理和 Cauchy 积分公式:

$$I = \oint_{|z+i|=\delta_1} \frac{z^2-1}{z^2+1} dz + \oint_{|z-i|=\delta_2} \frac{z^2-1}{z^2+1} dz = 2\pi i \cdot \left[ \frac{z^2-1}{z-i} \right]_{z=-i} + 2\pi i \cdot \left[ \frac{z^2-1}{z+i} \right]_{z=i} = 0$$

(4)  $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2(z^2+16)} dz$

被积函数在圆周  $|z|=2$  内有且仅有  $z=0$  一个奇点, 由 Cauchy 定理和 Cauchy 积分公式:

$$I = \oint_{|z|=\delta} \frac{1}{z^2(z^2+16)} dz = 2\pi i \cdot \left[ \frac{1}{z^2+16} \right]_{z=0}^{(1)} = 2\pi i \cdot \left[ -\frac{2z}{(z^2+16)^2} \right]_{z=0} = 0$$

### 4.2 计算下列积分

(1)  $\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2-1} dz$

被积函数在圆周  $|z|=R$  内有且仅有  $z=1$  一个奇点, 则:

$$I = 2\pi i \cdot \left[ \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} \right]_{z=1} = \frac{\sqrt{2}\pi i}{2}$$

(2)  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{|z|=R} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2-1} dz$

被积函数在圆周  $|z|=R$  内有且仅有  $z=\pm 1$  两个奇点, 则:

$$I = 2\pi i \cdot \left[ \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z-1} \right]_{z=-1} + 2\pi i \cdot \left[ \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} \right]_{z=1} = \sqrt{2}\pi i$$

(3)  $\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2-1} dz$

被积函数在圆周  $|z|=R$  内有且仅有  $z=-1$  一个奇点, 则:

$$I = 2\pi i \cdot \left[ \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z-1} \right]_{z=-1} = \frac{\sqrt{2}\pi i}{2}$$

#### 4.3 计算积分 $\int_L \frac{1}{(z-a)^n} dz$ , 其中 $L$ 为以 $a$ 为圆心, $r$ 为半径的上半圆周

作变换  $z \rightarrow z+a$ , 则原积分化为  $\int_{L'} \frac{1}{z^n} dz$ , 其中  $L'$  是以 0 为圆心,  $r$  为半径的上半圆周。当  $n=1$  时,  $\frac{1}{z}$  在  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  内解析,  $I(n) = [\ln z]_{z=-r}^{z=r} = \ln(-1) = i\pi$ ; 当  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$  时,  $\frac{1}{z^n}$  在  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  内解析,  $I(n) = \left[ \frac{z^{1-n}}{1-n} \right]_{z=-r}^{z=r} = \frac{1}{1-n} [(-r)^{1-n} - r^{1-n}]$ 。综上, 我们有:

$$I(n) = \int_L \frac{1}{(z-a)^n} dz = \begin{cases} i\pi, & n=1 \\ [(-1)^{1-n} - 1] \cdot \frac{r^{1-n}}{1-n}, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\} \end{cases}$$

#### 4.4 计算积分 $\oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)} dz$ , 其中 $a, b$ 不在圆周 $|z|=R$ 上, $n$ 为正整数

令  $G = \{z \mid |z|=R\}$ , 共有四种情况, 总结如下:

$$I = \oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)} dz = \begin{cases} 0, & a, b \notin G \\ \frac{(-1)^{n-1} 2\pi i}{(a-b)^n}, & a \in G, b \notin G \\ \frac{2\pi i}{(b-a)^n}, & b \in G, a \notin G \\ 0, & a, b \in G \end{cases}$$

#### 4.5 (附加题) $f(z)$ 在 $|z| < R$ 内解析, 求证 $I(r) = \int_0^{2\pi} f(r \cdot e^{i\theta}) d\theta$ 与 $r$ 无关, $\forall r \in (0, R)$

设  $f(z)$  在  $G$  内解析, 由 Cauchy 积分公式:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

在上式中, 取  $G = \{z \mid |z-a|=r, r \in (0, R)\}$ , 也即以  $a$  为圆心,  $r$  为半径的圆周, 则有  $z-a = r \cdot e^{i\theta}$ ,  $dz = ire^{i\theta} d\theta$ , 代入即得:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(z)}{r \cdot e^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r \cdot e^{i\theta}) d\theta$$

上式中令  $a=0$ , 即得:

$$I = I(r) = \int_0^{2\pi} f(r \cdot e^{i\theta}) d\theta = 2\pi f(0), \quad \forall r \in (0, R) \quad \square \quad (4.2)$$

因此积分的值与  $r$  无关。

## Homework 5: 2024.9.23 - 2024.9.29

!!! 不要忘了  $2\pi i$  !!!

5.1 求积分  $\oint_C \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2 - 1} dz$ ,  $C: x^2 + y^2 - 2x = 0$

$C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ , 因此:

$$I = 2\pi i \left[ \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} \right]_{z=1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi i \quad (5.1)$$

5.2 求下列积分的值, 积分路径均沿直线

$$(1) \int_0^i \frac{z}{z+1} dz$$

$$I = \int_0^i \left( 1 - \frac{1}{z+1} \right) dz = [z - \ln(z+1)]_0^i = i - \ln(1+i) = -\frac{\ln 2}{2} + i \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) \quad (5.2)$$

$$(2) \int_0^{1+i} z^2 \sin z dz$$

$$\begin{aligned} I &= [-z^2 \cos z + 2z \sin z + 2 \cos z]_0^{1+i} \\ &= (2-2i) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[ \left( \frac{1}{e} + e \right) \cos 1 + \left( \frac{1}{e} - e \right) \sin 1 \right] + 2(1+i) \cdot \frac{1}{2i} \cdot \left[ \left( \frac{1}{e} - e \right) \cos 1 + \left( \frac{1}{e} + e \right) \sin 1 \right] - 2 \\ &= \frac{2(1-i)}{e} (\cos 1 + i \sin 1) - 2 \end{aligned}$$

$$(3) \int_{-1}^i \frac{1}{z^2 + z - 2} dz$$

$$I = \frac{1}{3} \int_{-1}^i \left( \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2} \right) dz = \frac{1}{3} [\ln(z-1) - \ln(z+2)]_{-1}^i = -\frac{1}{3} \left[ \frac{\ln 10}{2} + i \left( \arctan \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (5.3)$$

5.3 讨论下列各积分的值, 其中积分路径是圆周  $|z| = r$

$$(1) \oint_{|z|=r} \frac{z^3}{(z-1)(z^2+2z+3)} dz$$

记  $z^2 + 2z + 3 = 0$  的两个根分别为  $z_1 = -1 + i\sqrt{2}$ ,  $z_2 = -1 - i\sqrt{2}$ , 先考虑  $r \in (\sqrt{3}, +\infty)$ , 此时积分围道内有三个奇点  $1, z_1, z_2$ 。由 Cauchy 定理, 可得:

$$I = 2\pi i \left\{ \left[ \frac{z^3}{(z-z_1)(z-z_2)} \right]_{z=1} + \left[ \frac{z^3}{(z-1)(z-z_2)} \right]_{z=z_1} + \left[ \frac{z^3}{(z-1)(z-z_1)} \right]_{z=z_2} \right\} \quad (5.4)$$

$$= 2\pi i \left[ \frac{1}{6} + \left( -\frac{1}{4} \cdot \frac{7-i4\sqrt{2}}{3} \right) + \left( -\frac{1}{4} \cdot \frac{7+i4\sqrt{2}}{3} \right) \right] = -2\pi i \quad (5.5)$$

当  $r \in (0, 1)$  时, 无奇点,  $I = 0$ ; 当  $r \in (1, \sqrt{3})$  时, 有唯一奇点  $z = 1$ ,  $I = 2\pi i \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}i$ 。综上有:

$$I = I(r) = \begin{cases} 0 & , r \in (0, 1) \\ \frac{\pi}{3}i & , r \in (1, \sqrt{3}) \\ -2\pi i & , r \in (\sqrt{3}, +\infty) \end{cases} \quad (5.6)$$

$$(2) \oint_{|z|=r} \frac{1}{z^3(z+1)(z+2)} dz$$

先考虑  $r \in (2, +\infty)$  的情况, 此时围道内有三个奇点  $0, -1, -2$ , 但我们不需要具体求解, 直接由大圆弧定理:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left( z \cdot \frac{1}{z^3(z+1)(z+2)} \right) = 0 \implies I = 2\pi i \cdot 0 = 0 \quad (5.7)$$

$r \in (1, 2)$  时, 有两奇点  $0, -1$ , 于是:

$$I = 2\pi i \left\{ \frac{1}{2!} \cdot \left[ \frac{1}{(z+1)(z+2)} \right]_{z=0}^{(2)} + \left[ \frac{1}{z^3(z+2)} \right]_{z=-1} \right\} = 2\pi i \left[ \frac{7}{8} + (-1) \right] = -\frac{1}{4}\pi i \quad (5.8)$$

再考虑上  $r \in (0, 1)$ , 综上有:

$$I = I(r) = \begin{cases} \frac{7}{4}\pi i & , r \in [0, 1) \\ -\frac{1}{4}\pi i & , r \in (1, 2) \\ 0 & , r \in (2, +\infty) \end{cases} \quad (5.9)$$

$$5.4 \text{ 设 } f(z) = \oint_{|\zeta|=2} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta, \text{ 求 } f''(1+i)$$

由 Cauchy 积分公式:

$$f(z) = 2\pi i [3z^2 + 7z + 1], \implies f''(1+i) = 2\pi i \cdot 6 = 12\pi i \quad (5.10)$$

$$5.5 \text{ 计算积分 } f(z) = \oint_{|\zeta|=1} \frac{\bar{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta, \text{ 其中 } |z| \neq 1$$

$|\zeta| = 1$  时有  $\bar{\zeta} = \frac{1}{\zeta}$ ,  $z = 0$  的情况需单独计算, 综合有:

$$f(z) = \oint_{|\zeta|=1} \frac{1}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta = \begin{cases} 0 & , |z| \in [0, 1) \\ -\frac{2\pi i}{z} & , |z| \in (1, +\infty) \end{cases} \quad (5.11)$$

$$5.6 \text{ 计算积分 } f(z) = \oint_{|\zeta|=2} \frac{\bar{\zeta}^2 e^\zeta}{\zeta - z} d\zeta, \text{ 其中 } |z| \neq 2$$

$|\zeta| = 2$  时  $\bar{\zeta} = \frac{4}{\zeta}$ , 于是  $|z| < 2$  时:

$$I = 16 \oint_{|\zeta|=2} \frac{e^\zeta}{\zeta^2(\zeta - z)} d\zeta = 16 \cdot 2\pi i \left\{ \left[ \frac{e^\zeta}{\zeta - z} \right]_{\zeta=0}^{(1)} + \left[ \frac{e^\zeta}{\zeta^2} \right]_{\zeta=z} \right\} \quad (5.12)$$

$$= 32\pi i \left[ \left( -\frac{z+1}{z^2} \right) + \frac{e^z}{z^2} \right] = 32\pi i \cdot \frac{e^z - z - 1}{z^2} \quad (5.13)$$

$|z| = 0$  时  $I = 16 \oint_{|\zeta|=2} \frac{e^\zeta}{\zeta^3} d\zeta = 16\pi i$ , 再考虑上  $|z| > 2$ , 综合有:

$$I = f(z) = \begin{cases} 16\pi i & , |z| = 0 \\ 32\pi i \cdot \frac{e^z - z - 1}{z^2} & , |z| \in (0, 2) \\ -32\pi i \cdot \frac{z+1}{z^2} & , |z| \in (2, +\infty) \end{cases} \quad (5.14)$$

### 5.7 计算积分 $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3} dz$

由高阶导数公式：

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{2!} \cdot [e^z]_{z=0}^{(2)} = \pi i \quad (5.15)$$

### 5.8 求 $a$ 的值使得函数 $F(z) = \int_{z_0}^z e^z \left( \frac{1}{z} + \frac{a}{z^3} \right) dz$ 是单值的

$F(z)$  是单值的，也即积分与路径无关，这等价于被积函数是解析函数，由于没有限制  $z$  的范围，也即  $z \in \mathbb{C}$ ，因此：

$$\oint_{\partial G} \left( \frac{e^z}{z} + a \frac{e^z}{z^3} \right) dz = 0, \quad \forall G \subset \mathbb{C} \quad (5.16)$$

计算左边的积分：

$$I = 2\pi i \left\{ [e^z]_{z=0} + \frac{a}{2!} \cdot [e^z]_{z=0}^{(2)} \right\} = 2\pi i \left( 1 + \frac{a}{2} \right) = 0 \implies a = -2 \quad (5.17)$$



## Homework 6: 2024.10.8 - 2024.10.14

求幂级数的收敛半径有两个常用方法:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \quad (6.1)$$

前者称为 Cauchy-Hadamard 公式, 是普遍成立的, 后者称为 d'Alembert 公式, 在极限存在时成立, 但通常计算更简单。

### 6.1 确定下列幂级数的收敛半径

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \implies R = 1 \quad (6.2)$$

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \infty \cdot e \implies R = 0 \quad (6.3)$$

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}, \quad ???$

(4)  $\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n}$

$$\text{级数 } \sum_{n=1}^{\infty} z^n \text{ 的收敛半径 } r = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n} \text{ 的收敛半径为 } R = \sqrt{r} = 1. \quad (6.4)$$

(5)  $\sum_{n=1}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n z^n$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [3 + (-1)^n] = 4 \implies R = \frac{1}{4} \quad (6.5)$$

(6)  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(in) \cdot z^n$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\cos(in+i)}{\cos(in)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\cos i - \sin i \cdot \tan(in)| = |\cos i - i \sin i| = |e^{i(-i)}| = e \implies R = \frac{1}{e} \quad (6.6)$$

(7)  $\sum_{n=1}^{\infty} (n + a^n) z^n$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) + a^{n+1}}{n + a^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + a \cdot \left(\frac{a^n}{n}\right)}{1 + \left(\frac{a^n}{n}\right)} \right| = \begin{cases} 1, & |a| \leq 1 \\ a, & |a| > 1 \end{cases} \implies R = \begin{cases} 1, & |a| \leq 1 \\ \frac{1}{|a|}, & |a| > 1 \end{cases} \quad (6.7)$$

(8)  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^n z^n$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \implies R = 1 \quad (6.8)$$

6.2 设幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$  的收敛半径为  $R \in (0, \infty)$ , 求下列幂级数的收敛半径

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^R c_n z^n$

$$\frac{1}{R_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^R c_{n+1}}{n^R c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^R \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = 1 \cdot \frac{1}{R} \Rightarrow R_1 = R \quad (6.9)$$

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1) c_n z^n$

$$\frac{1}{R_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2^n - 1}{2^n - 1} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = 2 \cdot \frac{1}{R} \Rightarrow R_2 = \frac{R}{2} \quad (6.10)$$

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n)^k z^n$

$$\frac{1}{R_3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|^k = \frac{1}{R^k} \Rightarrow R_3 = R^k \quad (6.11)$$

6.3 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$  在  $|z| \neq 1$  上收敛, 并求其和函数

$$\begin{aligned} S_n(z) &= \sum_{k=1}^n \frac{z^{k-1}}{(1-z^k)(1-z^{k+1})} = \frac{1}{z(1-z)} \cdot \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{1-z^k} - \frac{1}{1-z^{k+1}} \right) = \frac{1}{z(1-z)} \cdot \left[ \frac{1}{z^{n+1}-1} - \frac{1}{z-1} \right] \\ \Rightarrow S(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = \begin{cases} \frac{1}{(1-z)^2} & , |z| < 1 \\ \frac{1}{z(1-z)^2} & , |z| > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

因此级数在  $|z| \neq 1$  上收敛。

6.4 证明级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z^{n+1}}{n+1} - \frac{2z^{2n+3}}{2n+3} \right)$  的和函数  $S = S(z)$  在  $z = 1$  不连续

容易知道上面级数在  $|z| < 1$  收敛而在  $|z| > 1$  发散, 因此在  $|z| = 1$  处不连续  $\Rightarrow$  在  $z = 1$  点不连续。但我们不妨求解一下和函数。

先求和函数  $S(z)$ ,  $|z| < 1$ 。级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}$  和  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n+3}}{2n+3}$  的收敛半径都为 1, 因此当  $|z| < 1$  时, 由一致收敛性有:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \int \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \left( \frac{z^{n+1}}{n+1} \right) \right] dz = \int \left[ \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right] dz = \int \frac{1}{1-z} dz = -\ln(z-1) + C_1 \quad (6.12)$$

$z = 0$  时级数为 0, 因此  $C_1 = \ln(-1)$ 。同理可得:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n+3}}{2n+3} = 2 \int \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \left( \frac{z^{2n+3}}{2n+3} \right) \right] dz = 2 \int \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (z^2)^{n+1} \right] dz = 2 \int \frac{z^2}{1-z^2} dz \quad (6.13)$$

$$= 2 \int \left[ -1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) \right] dz = -2z - \ln \left( \frac{z-1}{z+1} \right) + C_2 \quad (6.14)$$

$z = 0$  时级数为 0, 因此  $C_2 = 0$ 。由于原级数在  $|z| < 1$  内绝对收敛, 可以任意交换求和次序, 因此有:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z^{n+1}}{n+1} - \frac{2z^{2n+3}}{2n+3} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n+3}}{2n+3} = -\left[ \ln(z-1) + 2z + \ln \left( \frac{z-1}{z+1} \right) \right] + \ln(-1) \quad (6.15)$$

于是极限  $\lim_{z \rightarrow 1} S(z)$  不存在, 自然不可能连续。

## 6.5 对 $|z| < 1$ , 求下列级数的和

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$

级数的收敛半径为 1, 由绝对收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) z^n - \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) z^n - \frac{z}{1-z} \quad (6.16)$$

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) z^n$  的收敛半径仍为 1, 由一致收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{d}{dz} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int (n+1) z^n dz \right) \right] = \frac{d}{dz} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} z^{n+1} \right] = \frac{d}{dz} \left[ \frac{z^2}{1-z} \right] = \frac{z(2-z)}{(1-z)^2} \quad (6.17)$$

综上有:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z(2-z)}{(1-z)^2} - \frac{z}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2} \quad (6.18)$$

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$

由一致收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \int \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dz} \left( \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \right) \right] dz = \int \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (z^2)^n \right] dz = \int \frac{z^2}{1-z^2} dz \quad (6.19)$$

$$= \int \left[ -1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) \right] dz = -z - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{z-1}{z+1} \right) + C \quad (6.20)$$

$z=0$  时级数为 0, 因此  $C=0$ 。

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$

由一致收敛性:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \int \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \left( \frac{z^{n+1}}{n+1} \right) \right] dz = \int \left[ \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right] dz = \int \frac{1}{1-z} dz = -\ln(z-1) + C_1 \quad (6.21)$$

$z=0$  时级数为 0, 因此  $C_1 = \ln(-1)$ 。

## 6.6 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z+n}$ 在不包含负整数的任意闭圆上一致收敛

首先有两个引理:

**Theorem. 1 (Dirichlet 判别法):** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  有界,  $\sum_{n=1}^{\infty} (v_{n+1} - v_n)$  绝对收敛且  $\lim v_n = 0$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$  收敛。

**Theorem. 2 (级数收敛):** 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  收敛, 但不绝对收敛。证明略。

在 Theorem.2 的基础上, 由 Theorem.1 (Dirichlet 判别法) 知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z+n}$  收敛, 可以任意加括号。给定不包

含负整数的任意闭圆  $G$ , 记  $r = |z|$ ,  $N_0 = \sup_z \left\lceil \frac{|z|+1}{2} \right\rceil$ , 则有:

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+2n-1} - \frac{1}{z+2n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+2n-1)(z+2n)} \quad (6.22)$$

$$\Rightarrow |S(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z+2n-1| \cdot |z+2n|} = \sum_{n=1}^{N_0-1} \frac{1}{|z+2n-1| \cdot |z+2n|} + \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{|z+2n-1| \cdot |z+2n|} \quad (6.23)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|2n-1-r| \cdot |2n-r|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|2n-1-r|^2} < \infty \quad (6.24)$$

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+2n-1} - \frac{1}{z+2n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+2n-1)(z+2n)} \quad (6.25)$$

$$\Rightarrow |S(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z+2n-1| \cdot |z+2n|} = \sum_{n=1}^{N_0-1} \frac{1}{|z+2n-1| \cdot |z+2n|} + \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{|z+2n-1| \cdot |z+2n|} \quad (6.26)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N_0-1} \frac{1}{|z+2n-1| \cdot |z+2n|} + \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{|2n-1-r| \cdot |2n-r|} \quad (6.27)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N_0-1} \frac{1}{|z+2n-1| \cdot |z+2n|} + \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{|2n-1-r|^2} \quad (6.28)$$

对给定的区域  $G$ , 前一项是有限和, 自然收敛, 后一项是收敛级数, 因此原级数在  $G$  上一致收敛。  $\square$

## **Homework 7: 2024.10.15 - 2024.10.16 (略)**

## Homework 8: 2024.10.15 - 2024.10.21

作业题目详见网址 <https://www.123865.com/s/0y0pTd-jKKj3>, 后文不再重复叙述题目。

### 8.1

- (1)  $\frac{1}{z-z^3}$ : 有  $z=0, 1, -1$  三个一阶极点
- (2)  $\cos \frac{1}{\sqrt{z}}$ : 由  $\lim_{z \rightarrow 0} z \cos \frac{1}{\sqrt{z}} = 0$  知, 有一阶极点  $z=0$
- (3)  $\frac{\sqrt{z}}{\sin \sqrt{z}}$ :  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{z}}{\sin \sqrt{z}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1$ , 因此有可去极点  $z=0$
- (4)  $\frac{1}{(z-1) \ln z}$ :  $\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 \cdot \frac{1}{(z-1) \ln z} = 1$ , 因此有二阶极点  $z=1$
- (5)  $f(z) = \int_0^z \frac{\sin \sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}} d\zeta$ : 作换元  $t = \sqrt{\zeta}$ , 可得  $f(z) = 1 - \cos t = 1 - \cos \sqrt{z}$ , 在  $\mathbb{C}$  上无奇点, 在  $\bar{\mathbb{C}}$  上有本性奇点  $z = \infty$
- (6)  $\frac{1-e^z}{2+e^z}$ :  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1-e^z}{2+e^z} = -1$ , 因此有且仅有可去奇点  $z = \infty$
- (7)  $\frac{1}{z^3(2-\cos z)}$ : 有三阶极点  $z=0$

### 8.2

- (1)  $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\cos z}{z} = 0$ , 是可去奇点
- (2) 做换元  $t = \frac{1}{z}$ , 有  $\lim_{t \rightarrow 0} t^2 \cdot \frac{1}{t \cos \frac{1}{t}} = 0$ , 因此为二阶极点。
- (3) 做换元  $t = \frac{1}{z}$ , 有  $\lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{t} - a\right)\left(\frac{1}{t} - b\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{(1-at)(1-bt)} = 1$ , 因此为一阶极点。

### 8.3

- (1)  $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-1}$ ,  $z_0 = 1$ :  
 $z_0 = 1$  为一阶极点, 因此:

$$\text{res } f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = e \quad (8.1)$$

- (2)  $f(z) = \frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$ :  
 $f(z)$  有二阶极点  $z=0$  和一阶极点  $z=1$ , 于是:

$$\text{res } f(0) = [z^2 f(z)]_{z=0}^{(1)} = \left[ \frac{2z+1}{z-1} - \frac{z^2+z-1}{(z-1)^2} \right]_{z=0} = \left[ -\frac{2z-z^2}{(z-1)^2} \right]_{z=0} = 0 \quad (8.2)$$

$$\text{res } f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = 1 \quad (8.3)$$

- (3)  $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$ :  
有一阶极点  $z = \pm 3i$  和二阶极点  $z=0$ , 因此:

$$\text{res } f(3i) = \lim_{z \rightarrow 3i} (z-3i)f(z) = -\frac{e^{3i}}{54i}, \quad \text{res } f(-3i) = \lim_{z \rightarrow -3i} (z+3i)f(z) = \frac{e^{-3i}}{54i} \quad (8.4)$$

$$\text{res } f(0) = [z^2 f(z)]_{z=0}^{(1)} = \left[ \frac{e^z(z^2-2z+9)}{(z^2+9)^2} \right]_{z=0} = \frac{1}{9} \quad (8.5)$$

- (4)  $\frac{1}{z^2 \sin z}$ ,  $z_0 = 0$ :  
 $z_0 = 0$  为三阶极点, 因此:

$$\text{res } f(0) = \frac{1}{2!} [z^3 f(z)]_{z=0}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{2z \cos(z)^2 - 2 \cos(z) \sin(z) + z \sin(z)^2}{\sin(z)^3} \right]_{z=0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad (8.6)$$

(5)  $\frac{1}{\cosh \sqrt{z}}$ ,  $z_0 = -\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2$ :

考虑  $\sqrt{z}$  满足  $\sqrt{z}|_{z=0} = 0$  的单值分支, 我们有  $\sqrt{-\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2} = i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ , 因此本题相当于求  $f(z) = \frac{1}{\cosh z}$ ,  $z_0 = i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$  处的留数, 由于

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \left( e^x + \frac{1}{e^x} \right) \cos y + i \cdot \left( e^x - \frac{1}{e^x} \right) \sin y \right] \quad (8.7)$$

我们有:

$$z = z_0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases} \implies \frac{1}{\cosh \sqrt{z_0}} = \frac{1}{\cos y} = \infty \quad (8.8)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{2(z - z_0)}{e^z - e^{-z}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{2}{e^z - e^{-z}} = \pm 1 \quad (8.9)$$

因此都是一阶极点, 有:

$$\text{res } f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \begin{cases} -i & , n = 0, 2, 4, \dots \\ i & , n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (8.10)$$