1 Introduction

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

2 Main Part

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

3 第一章第一节

向后加权隐式格式：

将向前差分与向后差分加权组合起来，得到：

$$\frac{u_j^k-u_j^{k-1}}{h_t}=a\theta\frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h_x^2}+a(1-\theta)\frac{u_{j+1}^{k-1}-2u_j^{k-1}+u_{j-1}^{k-1}}{h_x^2} \tag{1}$$

其中 $\theta\in[0,1]$ 为权重，其截断误差 $R=a\left(\frac{1}{2}-\theta\right)h_t\left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right]_j^k+O(h_t^2+h_x^2)$，因此当 $\theta=\frac{1}{2}$ 时，方程具有 $O(h_t^2+h_x^2)$ 精度，称为 Crank-Nicolson 格式（CN 格式）。

公式 1 的增长因子及稳定性条件为：

$$G(h_t,\sigma)=\frac{1-4(1-\theta)ar\sin^2\frac{\sigma h}{2}}{1+4\theta ar\sin^2\frac{\sigma h}{2}},\quad\begin{cases}r\leqslant\frac{1}{2a(1-2\theta)}, & \theta\in[0,\frac{1}{2})\\ \text{无条件稳定}, & \theta\in[\frac{1}{2},1]\end{cases} \tag{2}$$

Theorem. 1 （这是一个 Line Theorem）： 你好你好你好

Theorem. 2 （这是一个 Block Theorem）：
你好你好你好

定理 2 的证明：
你好你好你好

表格：表格：表格：表格：表格：表格：表格：表格：表格：表格：表格：表格：表格：表格：表格：

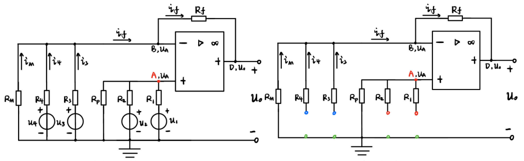
表 1: 符号含义与约定

符号	符号含义	单位
符号 1	含义 1	单位 1
符号 2	含义 2	单位 2
符号 3	含义 3	单位 3
符号 4	含义 4	单位 4

3.1 线性运算器（自设计）

图 1 是在加法器、减法器的基础上，自己设计的线性运算器，它可以实现任意数量的输入（电压）信号的任意线性运算。事实上，在此线性运算器中，电阻 R_M 和电阻 R_P 是关键，因为在正相信号间的比例、反相信号间的比例分别确定时，这两个电阻实现了正信号和负信号之间的比例调整，使得最终输出的正、负信号可以任意大或任意小（最小即为 0，不占任何比例）。

图中，红色端是加法信号，蓝色端是减法信号，绿色端为公共地（可只保留一个）。



(a) 线性运算器电路图 (b) 接线端示意图

图 1: 自设计线性运算器

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

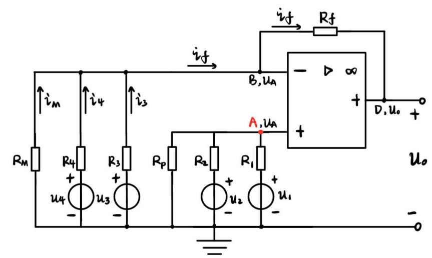


图 2: 这里是图注

我们先研究图 1 (a) 的输出特性，再讨论如果没有电阻 R_M 或 R_P，输出电压会受到什么限制。输出电压的推导是简单的，先考虑点 A 的电势 u_A，求得：

$$u_A=\frac{\frac{u_1}{R_1}+\frac{u_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_p}} \tag{3}$$

u_A 的推导，除了列 KCL, KVL 硬解之外，还可以这样：先将 R_p 断路，这样 u_2, R_2, u_1, R_1 构成并联的两个实际电压源（自带电阻），容易求得此时点 A 的电势 u_A，并做数学上的形式变换：

$$u_A=\frac{R_2u_1+R_1u_2}{R_1+R_2}=\frac{\frac{u_1}{R_1}+\frac{u_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} \tag{4}$$

于是，我们再并联一个实际电压源 P 后，由数学上直接推广，可以得到 u_A 为：

$$u_A=\frac{\frac{u_1}{R_1}+\frac{u_2}{R_2}+\frac{u_p}{R_p}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_p}} \tag{5}$$

再令 $u_p=0$，即得图 1 中的原始 u_A。

再考虑左侧的电流组，并利用虚断：

$$\begin{cases}i_3=\frac{1}{R_3}(u_3-u_A)\\ i_4=\frac{1}{R_4}(u_4-u_A)\\ i_m=\frac{1}{R_m}(0-u_A)\\ i_f=i_3+i_4+i_m\end{cases}\Longrightarrow u_o=u_A-R_fi_f=u_A-R_f(i_3+i_4+i_m) \tag{6}$$

$$\Longrightarrow u_o=u_A-R_f\left[\frac{u_3}{R_3}+\frac{u_4}{R_4}-u_A\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_m}\right)\right] \tag{7}$$

$$=\left[1+R_f\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_m}\right)\right]u_A-R_f\left(\frac{u_3}{R_3}+\frac{u_4}{R_4}\right) \tag{8}$$

代入 u_A，整理得到：

$$\boxed{u_o=\frac{1+\frac{R_f}{R_m}\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)}{\frac{1}{R_p}+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}\cdot\left(\frac{u_1}{R_1}+\frac{u_2}{R_2}\right)-R_f\cdot\left(\frac{u_3}{R_3}+\frac{u_4}{R_4}\right)} \tag{9}$$

这样，对于所有加法信号，可以通过 R_1, R_2 间的比例来调整它们在加法中的输出比例，类似地，减法信号通过 R_3, R_4 间的比例来调整它们在减法中的输出比例。最后通过 R_f, R_m, R_p 来调整加法、减法之间的输出比例。在 R_f, R_m, R_p 都可变时，易证（减法占比）$R_f\in[0,\infty)$，（加法占比）$\frac{1+R_f\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_m}\right)}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_p}}\in[0,\infty)$，于是全部系数都具有任意性，此线性运算器能够实现任意的线性运算。

上面的电路容易推广到任意输入信号个数的情形。假设有 m 个加法信号 $u_{s_1},\ldots,u_{s_m}$，它们对应的串联电阻分别 $R_{s_1},\ldots,R_{s_m}$；以及 n 个减法信号 $u_{r_1},\ldots,u_{r_n}$，它们对应的串联阻值分别 $R_{r_1},\ldots,R_{r_n}$。直接由数学上推广出去，得到输出电压 u_o 的表达式为：

$$\boxed{u_o=\left(\frac{1+\frac{R_f}{R_m}+R_f\sum_{i=s_1}^{i=s_m}\frac{1}{R_i}}{\frac{1}{R_p}+\sum_{i=r_1}^{i=r_n}\frac{1}{R_i}}\right)\cdot\sum_{i=s_1}^{i=s_m}\frac{u_i}{R_i}-R_f\cdot\sum_{i=r_1}^{i=r_n}\frac{u_i}{R_i}} \tag{10}$$

此线性运算器的具体仿真示例见 Homework 3.

4 对于正入射的情况，写出菲涅尔公式

菲涅尔公式如下：

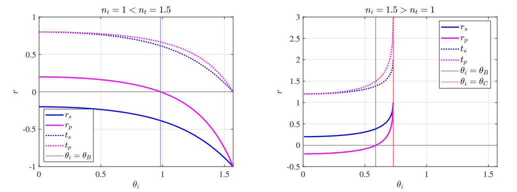
类型	振幅反射系数 r		振幅透射系数 t	
s 波	$r_s=\frac{n_i\cos\theta_i-n_t\cos\theta_t}{n_i\cos\theta_i+n_t\cos\theta_t}$	$-\frac{\sin(\theta_i-\theta_t)}{\sin(\theta_i+\theta_t)}$	$t_s=\frac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_i+n_t\cos\theta_t}$	$+\frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)}$
p 波	$r_p=\frac{n_t\cos\theta_i-n_i\cos\theta_t}{n_t\cos\theta_i+n_i\cos\theta_t}$	$+\frac{\tan(\theta_i-\theta_t)}{\tan(\theta_i+\theta_t)}$	$t_p=\frac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_t+n_t\cos\theta_i}$	$+\frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)\cos(\theta_i-\theta_t)}$

正入射时，$\theta_i=\theta_t=0$，于是有：

$$r_p=(-r_s)=\frac{n_t-n_i}{n_t+n_i},\quad t_p=t_s=\frac{2n_i}{n_i+n_t} \tag{11}$$

$$F=R_s=R_p=\left(\frac{n_t-n_i}{n_t+n_i}\right)^2 \tag{12}$$

不妨作出相关的图像，图 3 是 s 波、p 波振幅系数关于入射角 θ_i 的变化情况。



(a) 由空气入射玻璃（$n_i=1$） (b) 由玻璃入射空气（$n_i=1.5$）

图 3: 振幅系数 r 随入射角 θ_i 的变化

5 一自然光以 Brewster Angle 入射到空气中的一块玻璃，已知功率透射率为 0.86。

(1) 求功率的反射率

$T=0.86$，由能量守恒，功率反射率 $R=0.14$。

(2) 若输入为 1000 W，求透射光 s 分量上的功率

光束为自然光，因此 s 分量和 p 分量的功率相同，都为 500 W，也即 $\Phi_{e,i,s}=\Phi_{e,i,p}=500$ W。又由 Brewster Angle 入射，因此反射光的 p 分量为0，也即 $R_p=0$，于是：

$$T_p=1-R_p=1,\quad T_s=2T-T_p=0.72 \tag{13}$$

由此可求得透射光 s 分量上的辐射通量（即辐射功率）：

$$\Phi_{e,t,s}=T_s\Phi_{e,i,s}=0.72\times500\ \text{W}=360\ \text{W} \tag{14}$$

(3) 求玻璃的折射率

虽然题目并未要求，但我们不妨求解一下玻璃的折射率 n_t。在题设条件下，$R=0.14$，默认空气折射率为 1，则唯一的未知量是玻璃折射率 n_t，这是可以求解的，方程如下：

$$R=\frac{1}{2}(R_s+R_p)=0.14,\quad\theta_i=\theta_B=\arctan\left(\frac{n_t}{n_i}\right),\quad n_i=1\Longrightarrow \tag{15}$$

$$\left[\frac{\cos(\arctan n_t)-\sqrt{n_t^2-\sin^2(\arctan n_t)}}{\cos(\arctan n_t)+\sqrt{n_t^2-\sin^2(\arctan n_t)}}\right]^2 \tag{16}$$

$$+\left[\frac{n_t^2\cos(\arctan n_t)-\sqrt{n_t^2-\sin^2(\arctan n_t)}}{n_t^2\cos(\arctan n_t)+\sqrt{n_t^2-\sin^2(\arctan n_t)}}\right]^2=2\times0.14 \tag{17}$$

此方程有唯一未知量 n_t，用 Matlab 解此非线性方程组，得到玻璃折射率 n_t，以及其它参量：

$$\begin{cases}n_t=0.554902,\quad\theta_i=\theta_B=29.025970^\circ\\ \theta_t=60.974030^\circ,\quad\theta_C=33.703947^\circ\\ R=0.1400,\quad R_s=0.280000,\ R_p=0.000000\\ T=0.8600,\quad T_s=0.720000,\ T_p=1.000000\end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases}n_t=1.802121,\quad\theta_i=\theta_B=60.974030^\circ\\ \theta_t=29.025970^\circ,\quad\theta_C=90.000000^\circ\\ R=0.1400,\quad R_s=0.280000,\ R_p=0.000000\\ T=0.8600,\quad T_s=0.720000,\ T_p=1.000000\end{cases} \tag{19}$$

也即上述方程有两解，考虑 $n_{ti}\in[0,2]$，令方程左边为 $f(n_{ti})$，作出图像如右。图 4 说明了我们并没有漏掉其它解。

一般玻璃的折射率在 1.5 左右，即使是特殊玻璃（例如高折射率镜片），也基本在 1.3 至 1.9 之间，0.5 的玻璃折射率显然是不合理的，即使是考虑介质折射率关于波长的变化（如 X 射线或 Gamma 射线），也不会达到如此低的折射率。因此舍去 $n_t=0.554902$，最终得 $n_t=1.802121$。

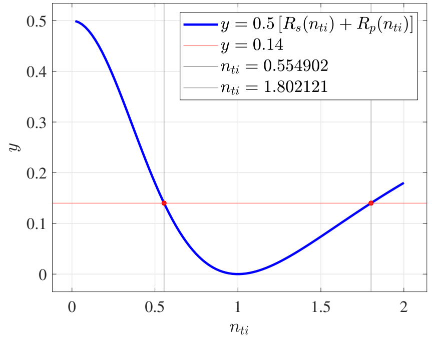


图 4: 方程 15 左边函数值随 n_{ti} 的变化情况

6 上题改编：一自然光由空气入射玻璃，玻璃折射率为 1.5，已知功率透射率为 0.86。

(1) 求功率的反射率：

$T=0.86$，由能量守恒，功率反射率 $R=0.14$。

(2) 若输入为 1000 W，求透射光 s 分量上的功率

光束为自然光，因此 s 分量和 p 分量的功率相同，都为 500 W。先求解入射角 θ_i，由菲涅尔定理和能量关系：

$$R=\frac{1}{2}(R_s+R_p),\ R_s=\left[\frac{\cos\theta_i-\sqrt{n_{ti}^2-\sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i+\sqrt{n_{ti}^2-\sin^2\theta_i}}\right]^2 \tag{20}$$

$$R_p=\left[\frac{n_{ti}^2\cos\theta_i-\sqrt{n_{ti}^2-\sin^2\theta_i}}{n_{ti}^2\cos\theta_i+\sqrt{n_{ti}^2-\sin^2\theta_i}}\right]^2 \tag{21}$$

其中 $n_i=1$，$n_t=1.5$，因此 $n_{ti}=1.5$，代入即得：

$$\left[\frac{\cos\theta_i-\sqrt{1.5^2-\sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i+\sqrt{1.5^2-\sin^2\theta_i}}\right]^2+\left[\frac{1.5^2\cos\theta_i-\sqrt{1.5^2-\sin^2\theta_i}}{1.5^2\cos\theta_i+\sqrt{1.5^2-\sin^2\theta_i}}\right]^2=2\times0.14 \tag{22}$$

用 Matlab 解此非线性方程组，得到入射角 θ_i 和其它参量：

$$\begin{gathered}\theta_i=1.173220\ \text{rad}=67.220559^\circ\\ R=0.140000,\quad R_s=0.256933,\ R_p=0.023067\\ T=0.860000,\quad T_s=0.743067,\ T_p=0.976933\end{gathered} \tag{23}$$

于是透射光 s 分量上的辐射通量为：

$$\Phi_{e,t,s}=T_s\Phi_{e,i,s}=0.743067\times500\ \text{W}=371.5335\ \text{W} \tag{24}$$

7 光束垂直入射到玻璃-空气界面，玻璃折射率 1.5，求出能量反射率和透射率

$\theta_i=0$ 时，由菲涅尔定律和能量关系，有：

$$R=\frac{1}{2}(R_s+R_p),\quad T=1-R \tag{25}$$

$$R_s=\left[\frac{\cos\theta_i-\sqrt{n_{ti}^2-\sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i+\sqrt{n_{ti}^2-\sin^2\theta_i}}\right]^2=\left[\frac{1-n_{ti}}{1+n_{ti}}\right]^2 \tag{26}$$

$$R_p=\left[\frac{n_{ti}^2\cos\theta_i-\sqrt{n_{ti}^2-\sin^2\theta_i}}{n_{ti}^2\cos\theta_i+\sqrt{n_{ti}^2-\sin^2\theta_i}}\right]^2=\left[\frac{n_{ti}^2-n_{ti}}{n_{ti}^2+n_{ti}}\right]^2 \tag{27}$$

由空气入射玻璃时，$n_{ti}=1.5$，由玻璃入射空气时，$n_{ti}=\frac{2}{3}$，代入得到：

空气入射玻璃：$R=0.04,\quad T=0.96$

玻璃入射空气：$R=0.04,\quad T=0.96$

也即无论从哪边入射，能量反射率和透射率分别为 0.04 和 0.96。

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus.Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus.Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus.Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus.Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus.Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auc- tor lorem non justo. Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auc- tor lorem non justo.

8 Introduction

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

9 Main Part

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

10 第一章第一节

向后加权隐式格式:

将向前差分与向后差分加权组合起来，得到:

$$\frac{u_j^k-u_j^{k-1}}{h_t}=a\theta\frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h_x^2}+a(1-\theta)\frac{u_{j+1}^{k-1}-2u_j^{k-1}+u_{j-1}^{k-1}}{h_x^2} \tag{28}$$

其中 $\theta\in[0,1]$ 为权重，其截断误差 $R=a\left(\frac{1}{2}-\theta\right)h_t\left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right]_j^k+O(h_t^2+h_x^2)$，因此当 $\theta=\frac{1}{2}$ 时，方程具有 $O(h_t^2+h_x^2)$ 精度，称为 Crank-Nicolson 格式（CN 格式）。

公式 1 的增长因子及稳定性条件为:

$$G(h_t,\sigma)=\frac{1-4(1-\theta)ar\sin^2\frac{\sigma h}{2}}{1+4\theta ar\sin^2\frac{\sigma h}{2}},\quad\begin{cases}r\leqslant\frac{1}{2a(1-2\theta)}, & \theta\in[0,\frac{1}{2})\\ \text{无条件稳定}, & \theta\in[\frac{1}{2},1]\end{cases} \tag{29}$$

Theorem. 3（这是一个 Line Theorem）: 你好你好你好

Theorem. 4（这是一个 Block Theorem）:

你好你好你好

> **定理 2 的证明:**
> 你好你好你好

表格：表格：表格：表格：表格：表格：表格：表格：表格：表格：表格：表格：表格：表格：表格：

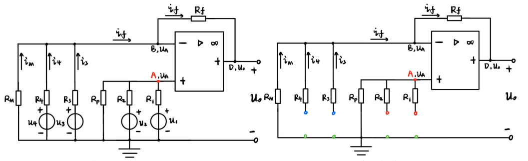
表 2: 符号含义与约定

符号	符号含义	单位
符号 1	含义 1	单位 1
符号 2	含义 2	单位 2
符号 3	含义 3	单位 3
符号 4	含义 4	单位 4

10.1 线性运算器（自设计）

图 1 是在加法器、减法器的基础上，自己设计的线性运算器，它可以实现任意数量的输入（电压）信号的任意线性运算。事实上，在此线性运算器中，电阻 R_M 和电阻 R_P 是关键，因为在正相信号间的比例、反相信号间的比例分别确定时，这两个电阻实现了正信号和负信号之间的比例调整，使得最终输出的正、负信号可以任意大或任意小（最小即为 0，不占任何比例）。

图中，红色端是加法信号，蓝色端是减法信号，绿色端为公共地（可只保留一个）。



(a) 线性运算器电路图 (b) 接线端示意图

图 5: 自设计线性运算器

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

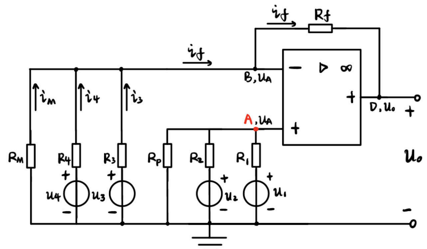


图 6: 这里是图注

我们先研究图 1 (a) 的输出特性，再讨论如果没有电阻 R_M 或 R_P，输出电压会受到什么限制。输出电压的推导是简单的，先考虑点 A 的电势 u_A，求得:

$$u_A=\frac{\frac{u_1}{R_1}+\frac{u_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_p}} \tag{30}$$

u_A 的推导，除了列 KCL, KVL 硬解之外，还可以这样：先将 R_p 断路，这样 u_2, R_2, u_1, R_1 构成串联的两个实际电压源（自带电阻），容易求得此时点 A 的电势 u_A，并做数学上的形式变换:

$$u_A=\frac{R_2u_1+R_1u_2}{R_1+R_2}=\frac{\frac{u_1}{R_1}+\frac{u_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} \tag{31}$$

于是，我们再并联一个实际电压源 P 后，由数学上直接推广，可以得到 u_A 为:

$$u_A=\frac{\frac{u_1}{R_1}+\frac{u_2}{R_2}+\frac{u_p}{R_p}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_p}} \tag{32}$$

再令 $u_P=0$，即得图 1 中的原始 u_A。

再考虑左侧的电流组，并利用虚断:

$$\begin{cases}i_3=\frac{1}{R_3}(u_3-u_A)\\ i_4=\frac{1}{R_4}(u_4-u_A)\\ i_m=\frac{1}{R_m}(0-u_A)\\ i_f=i_3+i_4+i_m\end{cases}\implies u_o=u_A-R_fi_f=u_A-R_f(i_3+i_4+i_m) \tag{33}$$

$$\implies u_o=u_A-R_f\left[\frac{u_3}{R_3}+\frac{u_4}{R_4}-u_A\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_m}\right)\right] \tag{34}$$

$$=\left[1+R_f\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_m}\right)\right]u_A-R_f\left(\frac{u_3}{R_3}+\frac{u_4}{R_4}\right) \tag{35}$$

代入 u_A，整理得到:

$$\boxed{u_o=\frac{1+\frac{R_f}{R_m}\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)}{\frac{1}{R_p}+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}\cdot\left(\frac{u_1}{R_1}+\frac{u_2}{R_2}\right)-R_f\cdot\left(\frac{u_3}{R_3}+\frac{u_4}{R_4}\right)} \tag{36}$$

这样，对于所有加法信号，可以通过 R_1, R_2 间的比例来调整它们在加法中的输出比例，类似地，减法信号通过 R_3, R_4 间的比例来调整它们在减法中的输出比例。最后通过 R_f, R_m, R_p 来调整加法、减法之间的输出比例。在 R_f, R_m, R_p 都可变时，易证（减法占比）$R_f\in[0,\ \infty)$，（加法占比）$\frac{1+R_f\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_m}\right)}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_p}}\in[0,\ \infty)$，于是全部系数都具有任意性，此线性运算器能够实现任意的线性运算。

上面的电路容易推广到任意输入信号个数的情形。假设有 m 个加法信号 $u_{s_1},\dots,u_{s_m}$，它们对应的串联电阻分别 $R_{s_1},\dots,R_{s_m}$；以及 n 个减法信号 $u_{r_1},\dots,u_{r_n}$，它们对应的串联阻值分别 $R_{r_1},\dots,R_{r_n}$。直接由数学上推广出去，得到输出电压 u_o 的表达式为:

$$\boxed{u_o=\left(\frac{1+\frac{R_f}{R_m}+R_f\sum_{i=s_1}^{i=s_m}\frac{1}{R_i}}{\frac{1}{R_p}+\sum_{i=r_1}^{i=r_n}\frac{1}{R_i}}\right)\cdot\sum_{i=s_1}^{i=s_m}\frac{u_i}{R_i}-R_f\cdot\sum_{i=r_1}^{i=r_n}\frac{u_i}{R_i}} \tag{37}$$

此线性运算器的具体仿真示例见 Homework 3.

11 对于正入射的情况，写出菲涅尔公式

菲涅尔公式如下:

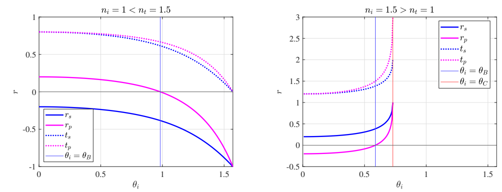
类型	振幅反射系数 r	振幅透射系数 t
s 波	$r_s=\frac{n_i\cos\theta_i-n_t\cos\theta_t}{n_i\cos\theta_i+n_t\cos\theta_t}=-\frac{\sin(\theta_i-\theta_t)}{\sin(\theta_i+\theta_t)}$	$t_s=\frac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_i+n_t\cos\theta_t}=+\frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)}$
p 波	$r_p=\frac{n_t\cos\theta_i-n_i\cos\theta_t}{n_i\cos\theta_t+n_t\cos\theta_i}=+\frac{\tan(\theta_i-\theta_t)}{\tan(\theta_i+\theta_t)}$	$t_p=\frac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_t+n_t\cos\theta_i}=+\frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)\cos(\theta_i-\theta_t)}$

正入射时，$\theta_i=\theta_t=0$，于是有:

$$r_p=(-r_s)=\frac{n_t-n_i}{n_t+n_i},\quad t_p=t_s=\frac{2n_i}{n_i+n_t} \tag{38}$$

$$F=R_s=R_p=\left(\frac{n_t-n_i}{n_t+n_i}\right)^2 \tag{39}$$

不妨作出相关的图像，图 3 是 s 波、p 波振幅系数关于入射角 θ_i 的变化情况。



(a) 由空气入射玻璃（$n_i=1$） (b) 由玻璃入射空气（$n_i=1.5$）

图 7: 振幅系数 r 随入射角 θ_i 的变化

12 一自然光以 Brewster Angle 入射到空气中的一块玻璃，已知功率透射率为 0.86。

(1) 求功率的反射率

$T=0.86$，由能量守恒，功率反射率 $R=0.14$。

(2) 若输入为 1000 W，求透射光 s 分量上的功率

光束为自然光，因此 s 分量和 p 分量的功率相同，都为 500 W，也即 $\Phi_{e,i,s}=\Phi_{e,i,p}=500$ W。又由 Brewster Angle 入射，因此反射光的 p 分量为 0，也即 $R_p=0$，于是:

$$T_p=1-R_p=1,\quad T_s=2T-T_p=0.72 \tag{40}$$

由此可求得透射光 s 分量上的辐射通量（即辐射功率）:

$$\Phi_{e,t,s}=T_s\Phi_{e,i,s}=0.72\times500\,\text{W}=360\,\text{W} \tag{41}$$

(3) 求玻璃的折射率

虽然题目并未要求，但我们不妨求解一下玻璃的折射率 n_t。在题设条件下，$R=0.14$，默认空气折射率为 1，则唯一的未知量是玻璃折射率 n_t，这是可以求解的，方程如下:

$$R=\frac{1}{2}(R_s+R_p)=0.14,\quad\theta_i=\theta_B=\arctan\left(\frac{n_t}{n_i}\right),\quad n_i=1\implies \tag{42}$$

$$\left[\frac{\cos(\arctan n_t)-\sqrt{n_t^2-\sin^2(\arctan n_t)}}{\cos(\arctan n_t)+\sqrt{n_t^2-\sin^2(\arctan n_t)}}\right]^2 \tag{43}$$

$$+\left[\frac{n_t^2\cos(\arctan n_t)-\sqrt{n_t^2-\sin^2(\arctan n_t)}}{n_t^2\cos(\arctan n_t)+\sqrt{n_t^2-\sin^2(\arctan n_t)}}\right]^2=2\times0.14 \tag{44}$$

此方程有唯一未知量 n_t，用 Matlab 解此非线性方程组，得到玻璃折射率 n_t，以及其它参量:

$$\begin{cases}n_t=0.554902, & \theta_i=\theta_B=29.025970^\circ\\ \theta_t=60.974030^\circ, & \theta_C=33.703947^\circ\\ R=0.1400, & R_s=0.280000,\ R_p=0.000000\\ T=0.8600, & T_s=0.720000,\ T_p=1.000000\end{cases} \tag{45}$$

$$\begin{cases}n_t=1.802121, & \theta_i=\theta_B=60.974030^\circ\\ \theta_t=29.025970^\circ, & \theta_C=90.000000^\circ\\ R=0.1400, & R_s=0.280000,\ R_p=0.000000\\ T=0.8600, & T_s=0.720000,\ T_p=1.000000\end{cases} \tag{46}$$

也即上述方程有两解，考虑 $n_{ti}\in[0,\ 2]$，令方程左边为 $f(n_{ti})$，作出图像如右。图 4 说明了我们并没有漏掉其它解。

一般玻璃的折射率在 1.5 左右，即使是特殊玻璃（例如高折射率镜片），也基本在 1.3 至 1.9 之间，0.5 的玻璃折射率显然是不合理的，即使是考虑介质折射率关于波长的变化（如 X 射线或 Gamma 射线），也不会达到如此低的折射率。因此舍去 $n_t=0.554902$，最终得 $n_t=1.802121$。

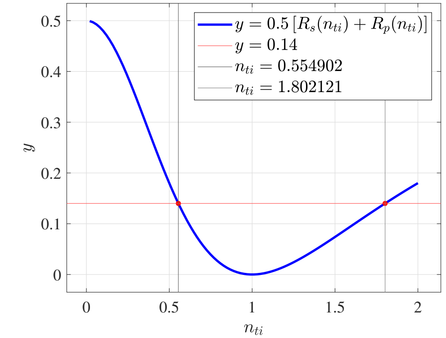


图 8: 方程 15 左边函数值随 n_{ti} 的变化情况

13 上题改编：一自然光由空气入射玻璃，玻璃折射率为 1.5，已知功率透射为 0.86。

(1) 求功率的反射率:

$T=0.86$，由能量守恒，功率反射率 $R=0.14$。

(2) 若输入为 1000 W，求透射光 s 分量上的功率

光束为自然光，因此 s 分量和 p 分量的功率相同，都为 500 W。先求解入射角 θ_i，由菲涅尔定理和能量关系:

$$R=\frac{1}{2}(R_s+R_p),\ R_s=\left[\frac{\cos\theta_i-\sqrt{n_{ti}^2-\sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i+\sqrt{n_{ti}^2-\sin^2\theta_i}}\right]^2 \tag{47}$$

$$R_p=\left[\frac{n_{ti}^2\cos\theta_i-\sqrt{n_{ti}^2-\sin^2\theta_i}}{n_{ti}^2\cos\theta_i+\sqrt{n_{ti}^2-\sin^2\theta_i}}\right]^2 \tag{48}$$

其中 $n_i=1$，$n_t=1.5$，因此 $n_{ti}=1.5$，代入即得:

$$\left[\frac{\cos\theta_i-\sqrt{1.5^2-\sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i+\sqrt{1.5^2-\sin^2\theta_i}}\right]^2+\left[\frac{1.5^2\cos\theta_i-\sqrt{1.5^2-\sin^2\theta_i}}{1.5^2\cos\theta_i+\sqrt{1.5^2-\sin^2\theta_i}}\right]^2=2\times0.14 \tag{49}$$

用 Matlab 解此非线性方程组，得到入射角 θ_i 和其它参量:

$$\begin{gathered}\theta_i=1.173220\ \text{rad}=67.220559^\circ\\ R=0.140000,\quad R_s=0.256933,\ R_p=0.023067\\ T=0.860000,\quad T_s=0.743067,\ T_p=0.976933\end{gathered} \tag{50}$$

于是透射光 s 分量上的辐射通量为:

$$\Phi_{e,t,s}=T_s\Phi_{e,i,s}=0.743067\times500\,\text{W}=371.5335\,\text{W} \tag{51}$$

14 光束垂直入射到玻璃-空气界面，玻璃折射率 1.5，求出能量反射率和透射率

$\theta_i=0$ 时，由菲涅尔定律和能量关系，有:

$$R=\frac{1}{2}(R_s+R_p),\quad T=1-R \tag{52}$$

$$R_s=\left[\frac{\cos\theta_i-\sqrt{n_{ti}^2-\sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i+\sqrt{n_{ti}^2-\sin^2\theta_i}}\right]^2=\left[\frac{1-n_{ti}}{1+n_{ti}}\right]^2 \tag{53}$$

$$R_p=\left[\frac{n_{ti}^2\cos\theta_i-\sqrt{n_{ti}^2-\sin^2\theta_i}}{n_{ti}^2\cos\theta_i+\sqrt{n_{ti}^2-\sin^2\theta_i}}\right]^2=\left[\frac{n_{ti}^2-n_{ti}}{n_{ti}^2+n_{ti}}\right]^2 \tag{54}$$

由空气入射玻璃时，$n_{ti}=1.5$，由玻璃入射空气时，$n_{ti}=\frac{2}{3}$，代入得到:

$$\begin{gathered}\text{空气入射玻璃: } R=0.04,\quad T=0.96\\ \text{玻璃入射空气: } R=0.04,\quad T=0.96\end{gathered}$$

也即无论从哪边入射，能量反射率和透射率分别为 0.04 和 0.96。

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus.Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus.Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus.Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus.Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus.Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus.Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auc- tor lorem non justo. Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auc- tor lorem non justo.