线性代数(2024春)(Linear Algebra)

作业3

1. 设在$\mathbb{R}^4$中，

$$u_1=(1,1,1,1),\ \ u_2=(1,1,-1,-1),\ \ u_3=(1,-1,1,-1),\ \ u_4=(1,-1,-1,1).$$

证明$\{u_1,u_2,u_2,u_4\}$构成$\mathbb{R}^4$的一组基，并且求$v=(1,2,1,1)$在该基下的坐标。

2. 设在$\mathbb{R}^4$中，

$$u_1=(1,2,-1,0),\ \ u_2=(1,-1,1,1),\ \ u_3=(-1,2,1,1),\ \ u_4=(-1,-1,0,1),$$

$$v_1=(2,1,0,1),\ \ v_2=(0,1,2,2),\ \ v_3=(-2,1,1,2),\ \ v_4=(1,3,1,2).$$

求由基$\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$向基$\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$的转换矩阵T。

3. 设$2\leq n\in\mathbb{N}$和$n>k\in\mathbb{N}$。给定$A\in GL_n(\mathbb{R})$，取A的前k行组成$k\times n$矩阵B，其后$n-k$行组成$(n-k)\times n$矩阵C。令

$$U=\{\overrightarrow{x}\in {}^n\mathbb{R}\mid B\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}\},\ \ V=\{\overrightarrow{y}\in {}^n\mathbb{R}\mid C\overrightarrow{y}=\overrightarrow{0}\}.$$

证明${}^n\mathbb{R}=U\oplus V$。

4. 设$3\leq n\in\mathbb{N}$。回忆

$$\mathrm{SMag}_n(\mathbb{Q})=\{A=(a_{ij})_{n\times n}\in M_{n\times n}(\mathbb{Q})\mid \sum_{r=1}^n a_{ir}=\sum_{s=1}^n a_{sj}=\sigma(A),\ i,j=1,2,...,n\}$$

和

$$\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})=\{A=(a_{ij})_{n\times n}\in \mathrm{SMag}_n(\mathbb{Q})\mid \sum_{r=1}^n a_{r\ (n+1-r)}=\sum_{s=1}^n a_{ss}=\sigma(A)\}.$$

令

$$I_n=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}&&&1\\&&1&\\&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&&\\1&&&\end{pmatrix}.$$

证明

$$\mathrm{SMag}_n(\mathbb{Q})=\mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})\oplus\mathbb{Q}I_n\oplus\mathbb{Q}D.$$

5 (思考题，不算成绩). 求把正整数n写成$\{1,2,3\}$中数之和的个数$C(n)$ (注意：可重复，如$6=1+2+3=2+2+2$等)。