数学物理方法课程作业

Homework of Mathematical Physics Methods

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

序言

本文为笔者本科时的“数学物理方法”课程作业（Homework of Mathematical Physics Methods, 2024.9-2025.1）。由于个人学识浅陋，认识有限，文中难免有不妥甚至错误之处，望读者不吝指正，在此感谢。

我的邮箱是 dingyi233@mails.ucas.ac.cn。

目录

Homework 1: 2024.8.26 - 2024.9.1

1.1 计算

(1) $(\frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}})^2$

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2=\left(\frac{(1+i)(2+i)}{5}\right)^2=\left(\frac{1+3i}{5}\right)^2=\frac{-8+6i}{25}$$

(2) $(1+i)^n+(1-i)^n$

首先得到：

$$1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},\ 1-i=\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$
$$\Longrightarrow I=2^{\frac{n}{2}}\left(e^{i\frac{n\pi}{4}}+e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right)$$

于是有：

$$I=\begin{cases}2^{\frac{n}{2}+1}, & n=0+4k\\ 2^{\frac{n+1}{2}}, & n=1+4k\\ 0\quad, & n=2+4k\\ -2^{\frac{n}{2}+1}, & n=3+4k\end{cases}\quad,\quad k\in\mathbb{N}$$

习题课补：

$$\begin{aligned}I&=2^{\frac{n}{2}}\left(e^{i\frac{n\pi}{4}}+e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right)\\&=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos(\frac{n\pi}{4})+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos(-\frac{n\pi}{4})+i\sin(-\frac{n\pi}{4})\right)\\&=2^{\frac{n}{2}+1}\cos(\frac{n\pi}{4})\end{aligned}$$

(3) $\sqrt[4]{1+i}$

$$\sqrt[4]{1+i}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{\pi}{16}}$$

习题课补：在复数域中，开根号是多值函数，这里四次根在复数域中应有四个复根，设 $x=\sqrt[4]{1+i}$，则原式等价于方程：

$$x^4=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\Longrightarrow|x|=2^{\frac{1}{8}},\quad\arg x=\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{2},k=0,1,2,3$$

1.2 将复数化为三角或指数形式

(1) $\frac{5}{-3+i}$

$$\frac{5}{-3+i}=\frac{5e^{i0}}{\sqrt{10}e^{i(\arctan(-\frac{1}{3})+\pi)}}=\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot e^{-i(\arctan(-\frac{1}{3})+\pi)}$$

(2) $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$

$$\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}e^{i\arctan(\frac{1}{2})}}{\sqrt{13}e^{i\arctan(-\frac{2}{3})}}\right)^2=\frac{5}{13}e^{2i\left(\arctan(\frac{1}{2})-\arctan(-\frac{2}{3})\right)}$$

1.3 求极限 $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{1+z^6}{1+z^{10}}$

作不完全因式分解：

$$
\begin{aligned}
1+z^6 &= z^6-i^6=(z^3-i^3)(z^3+i^3)=(z-i)(z^2+iz+i^2)(z^3+i^3)\\
1+z^{10} &= z^{10}-i^{10}=(z^5-i^5)(z^5+i^5)=(z-i)(z^4+iz^3+i^2z^2+i^3z+i^4)(z^5+i^5)\\
\Longrightarrow L=\lim_{z\to i}\frac{1+z^6}{1+z^{10}} &= \lim_{z\to i}\frac{(z-i)(z^2+iz+i^2)(z^3+i^3)}{(z-i)(z^4+iz^3+i^2z^2+i^3z+i^4)(z^5+i^5)}\\
&= \lim_{z\to i}\frac{(z^2+iz+i^2)(z^3+i^3)}{(z^4+iz^3+i^2z^2+i^3z+i^4)(z^5+i^5)}\\
&= \frac{(-3)\times(-2i)}{5i}=\frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

事实上，实数域上的洛必达法则（L'Hospital）可以推广到复数域的解析函数，下面给出 $\dfrac{0}{0}$ 型的证明。设复变函数 $f(z),g(z)$ 在 $z=z_0$ 解析，且 $f(z_0)=g(z_0)=0$，则有：

$$
\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}
$$

特别地，若 $f'(z_0)$ 与 $g'(z_0)$ 存在且不为零，就有 $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$

1.4 讨论函数在原点的连续性

(1) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2i}(\dfrac{z}{z^*}-\dfrac{z^*}{z}), & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$

令 $z=x+iy, x,y\in\mathbb{R}$，则 $\forall\,(x,y)\neq(0,0)$:

$$
f(x,y)=\frac{1}{2i}\left(\frac{x+iy}{x-iy}-\frac{x-iy}{x+iy}\right)=\frac{1}{2i}\cdot\frac{4ixy}{x^2+y^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}
$$

令 $k=\dfrac{y}{x}$，则：

$$
L=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2k}{1+k^2}
$$

显然，L 随着 k 的变化而变化，因此极限不存在，$f(z)$ 在 0 处不连续。

(2) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{Im} z}{1+|z|}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$

令 $z=x+iy$ 和 $k=\dfrac{y}{x}$，则 $\forall\,(x,y)\neq(0,0)$:

$$
f(x,y)=\frac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\Longrightarrow\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\frac{0}{1+0}=0=f(0,0)
$$

因此 $f(z)$ 在 0 处连续。

(3) $f(z)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{Re} z^2}{|z^2|}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$

同理令 $z = x + iy$ 和 $k = \dfrac{y}{x}$，则 $\forall\,(x, y) \neq (0, 0)$：

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}$$

因此 $f(z)$ 在 0 处不连续。

1.5 恒等式证明（附加题）

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left|a_i b_j^* - a_j b_i^*\right|^2$$

Homework 2：2024.9.2 - 2024.9.8

2.1 下列函数在何处可导，何处解析

(1) $f(z) = z \cdot \mathrm{Re}\, z$

设 $z = x + iy$，则 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = x^2 + ixy$。$\forall\, z \in C$，$u(x,y) = x^2$ 和 $v(x,y) = xy$ 在 $\mathbb{C}$ 上有连续一阶偏导，下面考虑 C-R 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x \tag{2.2}$$

联立 C-R 条件，得 $(x,y) = (0,0)$，因此 f 在 $(0,0)$ 处可导，在 $\mathbb{C}$ 上不解析。不在点 $(0,0)$ 上解析是因为在某点解析是指在此点的有心邻域上解析，显然这里不满足，因此 $(0,0)$ 为奇点。

后补：

$$u,v \text{ 有一阶连续偏导且满足 C-R 条件} \Longrightarrow u,v \text{ 可微且满足 C-R 条件} \Longleftrightarrow f \text{ 可微} \Longleftrightarrow f \text{ 可导}$$

(2) $f(x,y) = (x-y)^2 + 2i(x+y)$

$\forall\, z \in C$，$u(x,y) = (x-y)^2$ 和 $v(x,y) = 2(x+y)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有连续一阶偏导，下面验证 C-R 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x-y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2(x-y) \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \tag{2.4}$$

联立 C-R 条件后无解，因此 f 在 $\mathbb{C}$ 上不可导，在 $\mathbb{C}$ 上不解析。

2.2 求下列函数的解析区域

(1) $f(z) = xy + iy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

欲满足 C-R 条件，则：

$$y = 1,\ x = 0 \Longrightarrow f \text{ 在全平面不解析}$$

不在点 $(0,1)$ 上解析是因为在某点解析是指在此点的有心邻域上解析，显然这里不满足。

(2) $f(z) = \begin{cases} |z| \cdot z, & |z| < 1 \\ z^2, & |z| \geqslant 1 \end{cases}$

设 $z = x + iy$，则：

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \begin{cases} (x\sqrt{x^2+y^2}) + i(y\sqrt{x^2+y^2}), & \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ (x^2-y^2) + i(2xy), & \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow u(x,y) = \begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2}, & \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ x^2-y^2, & \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 1 \end{cases}, \quad v(x,y) = \begin{cases} y\sqrt{x^2+y^2}, & \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ 2xy, & \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 1 \end{cases}$$

分别求偏导得到：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}, \quad \sqrt{x^2+y^2} < 1 \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x, & \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y, & \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x \end{cases}, \quad \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 1$$

偏导要满足 C-R 条件，代入得到：

$$x^2 = y^2,\ 2xy = 0, \quad \forall \sqrt{x^2+y^2} < 1, x^2+y^2 \neq 0$$
$$2x = 2x,\ -2y = -2y, \quad \forall \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 1$$
$$\Longrightarrow f(z) \text{ 在 } \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geqslant 1\} \text{ 上解析}$$

不在点 $(0,0)$ 上解析是因为在某点解析是指在此点的有心领域上解析，显然这里不满足。

后补：解析区域必须是开集（因为受"有心邻域"限制），f 的解析区域应为 $\{z \mid |z|>1\}$。另外，$|z|=1$ 代表的圆周上也不可微，这是因为 f 在 $|z|=1$ 上不连续（内部是一倍幅角，外部是二倍幅角），所以可微区域也为 $\{z \mid |z|>1\}$。

2.3 已知解析函数 $f(z)$ 的实部如下，求 $f(z)$

(1) $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$

$$v'_x = -u'_y = 2y, \quad v'_y = u'_x = 2x+1$$
$$\Longrightarrow v(x,y) = \int 2y\ \mathrm{d}x + \int \mathrm{d}y = 2xy + y + C$$
$$\Longrightarrow f(x,y) = (x^2+y^2+x) + i(2xy+y) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

(2) $u(x,y) = e^y \cos x$

$$v'_x = -u'_y = -e^y \cos x, \quad v'_y = u'_x = -e^y \sin x$$
$$\Longrightarrow v(x,y) = \int -e^y \cos x\ \mathrm{d}x + \int 0\ \mathrm{d}y = -e^y \sin x + C$$
$$\Longrightarrow f(x,y) = (e^y \cos x) + i(-e^y \sin x) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

2.4 f 解析，且 $u - v = (x-y)(x^2+4xy+y^2)$，求 $f(z)$

两边分别对 x, y 求导，得到：

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2+6xy-3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2-6xy-3y^2$$

联立 C-R 条件，可以解出：

$$v'_x = -3x^2+3y^2, \quad v'_y = 6xy$$
$$u'_x = 6xy, \quad u'_y = 3x^2-3y^2$$
$$\Longrightarrow v(x,y) = -x^3+3xy^2+C, \quad u(x,y) = 3x^2y-y^3+C$$
$$\Longrightarrow f(x,y) = (3x^2y-y^3) + i(-x^3+3xy^2) + C(1+i),\ C \in \mathbb{R}$$

后补：u 和 v 中的实常数 C 其实是同一个！这是因为题目中 $u-v$ 没有常数项，说明两者积分常数相同。

2.5 极坐标 C-R 条件

证明极坐标下的 C-R 条件为：

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

极坐标变换：

$$x=x(r,\theta)=r\cos\theta,\quad y=y(r,\theta)=r\sin\theta$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta,\ \frac{\partial x}{\partial \theta}=-r\sin\theta,\ \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta,\ \frac{\partial y}{\partial \theta}=r\cos\theta$$

由复合函数的求导法则：

$$\frac{\partial}{\partial r}u\left(x(r,\theta),y(r,\theta)\right)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot\cos\theta+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\cdot\sin\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}v\left(x(r,\theta),y(r,\theta)\right)=\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\cdot r\sin\theta+\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\cdot r\cos\theta$$

联立 C-R 条件，化简得到：

$$v'_r=-u'_y\cos\theta+u'_x\sin\theta=\frac{1}{r}u'_\theta$$

同理，由偏导关系：

$$\frac{\partial}{\partial \theta}u\left(x(r,\theta),y(r,\theta)\right)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}=-\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot r\sin\theta+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\cdot r\cos\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r}v\left(x(r,\theta),y(r,\theta)\right)=\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\cdot\cos\theta+\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\cdot\sin\theta$$

联立 C-R 条件，化简得到：

$$u'_r=u'_x\cos\theta+u'_y\sin\theta=\frac{1}{r}v'_\theta$$

反之也可以化为原 C-R 条件，因此 C-R 条件在极坐标下的形式为：

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}\quad\square$$

2.6 证明 $f(z)$ 和 $\overline{f(\overline{z})}$ 同解析或同不解析

(1) $f(z)$ 解析 $\Longrightarrow$ $\overline{f(\overline{z})}$ 解析

假设 $f(z)$ 在点 $z=z_0$ 解析，即 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在有心邻域 $U_\delta(z_0)$ 上解析，这等价于 $f(z)$ 有一阶导，且在邻域内满足 C-R 条件。设 $g(z)=\overline{f(\overline{z})}=u(x,-y)-iv(x,-y)$，也即：

$$g(z)=u_g(x,y)+iv_g(x,y),\quad u_g(x,y)=u(x,-y),\ v_g(x,y)=-v(x,-y)$$

容易验证 $g(z)$ 有一阶偏导，下面验证 C-R 条件：

$$\frac{\partial u_g}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}(x,-y),\quad \frac{\partial u_g}{\partial y}=\frac{\partial u(x,-y)}{\partial(-y)}\cdot\frac{\partial(-y)}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial y}(x,-y)$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,-y),\quad \frac{\partial v_g}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,-y)}{\partial(-y)}\cdot\frac{\partial(-y)}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}(x,-y)$$

联立 u 和 v 的 C-R 条件，得到：

$$\frac{\partial u_g}{\partial x}-\frac{\partial v_g}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}(x,-y)-\frac{\partial v}{\partial y}(x,-y)=0\Longrightarrow\frac{\partial u_g}{\partial x}=\frac{\partial v_g}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u_g}{\partial y}+\frac{\partial v_g}{\partial x}=-\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,-y)+\frac{\partial v}{\partial x}(x,-y)\right]=0\Longrightarrow\frac{\partial u_g}{\partial y}=-\frac{\partial v_g}{\partial x}$$

因此 $g(z)=\overline{f(\overline{z})}$ 也解析。

(2) $f(z)$ 解析 $\Longleftarrow$ $\overline{f(\bar{z})}$ 解析

假设 $\overline{f(\bar{z})}$ 解析，令 $g(z)=\overline{f(\bar{z})}$，则 $f(z)=\overline{g(\bar{z})}$，由 (1) 的结论，$g(z)$ 解析 $\Longrightarrow f(z)=\overline{g(\bar{z})}$ 也解析。

证毕。$\square$

Homework 3: 2024.9.9 - 2024.9.15

3.1 若 $f(z)$ 解析，arg $f(z)$ 是否为调和函数？

注：下面的过程仅讨论了 $\arg f(z)$ 的解析性，未能揭示其调和性，正确的解答见后文补充的灰色小字。

(1) 当 $f(z) = C \in \mathbb{C}, \forall\, z \in G$，也即 $f(z)$ 恒为常量时：$\arg f(z)$ 也为常量，设 $\arg f(z) = a + ib$，则 $a = \arg f(z) \in R$ 而 $b = 0$，自然满足 $\Delta\, a = \Delta\, b = 0$，因此 $\arg f(z)$ 为调和函数。

(2) 当 $f(z)$ 是非常量函数时：

由 $\ln z = \ln|z| + i\arg z$，移项，并作映射 $z \to f(z)$，则有：

$$\arg f(z) = \frac{1}{i}\left(\ln f(z) - \ln\rho\right)$$

函数 ln 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上解析，但对于函数 $\rho = \rho(z)$：

$$\rho = \sqrt{u^2+v^2} \Longrightarrow u_\rho = \sqrt{u^2+v^2}, v_\rho = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial x} = \frac{uu_x'}{\sqrt{u^2+v^2}} + \frac{vv_x'}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \frac{\partial u_\rho}{\partial y} = \frac{uu_y'}{\sqrt{u^2+v^2}} + \frac{vv_y'}{\sqrt{u^2+v^2}} \tag{3.2}$$

假设 ρ 满足 C-R 条件，代入得到：

$$\begin{cases} uu_x' + vv_x' = 0 \\ uu_y' + vv_y' = 0 \\ \sqrt{u^2+v^2} \neq 0 \end{cases}$$

由于 $f(z)$ 解析，满足 C-R 条件 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$，代入后整理得到：

$$\begin{cases} v(v_y'^2 - u_y'^2) = 0 \\ u(u_y'^2 + v_y'^2) = 0 \end{cases}$$

$f(z)$ 非常量，因此 u, v 非常量，因此只能有：

$$v_y' = u_y' = 0 \Longrightarrow u_x' = v_x' = 0 \Longrightarrow u \text{ 和 } v \text{ 为常量函数}$$

这使得 $f(z) = u + iv$ 是常量，矛盾！因此 $\arg f(z)$ 不解析（这能否推出不调和？解析是调和的充分条件，但是充要的吗？事实上并不是，因此并不能揭示调和性）。

后补：即使仅从解析性的角度来看，上面的过程也没有抓到主要矛盾，是舍本逐末了。因为无论 $f(z)$ 的性质如何，$\arg f(z)$ 始终是 $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ 的函数，这表明 $\arg f(z)$ 是实部是它本身而虚部恒为 0，因此，由 C-R 条件可知 $\arg f(z)$ 解析的必要条件是实部为常数，而这也是充分条件。

对 $\arg f(z)$ 的调和性，我们有如下推导：

$$\arg f(z) = \arctan\frac{u(x,y)}{v(x,y)} + A, \quad A \in \{0, \pi\} \tag{3.3}$$

令 $g(z) = \arg f(z)$，则有：

$$g_x' = \frac{uv_x' - u_x'v}{u^2+v^2}, \quad g_{xx}'' = \frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left[(u^2+v^2)(uv_{xx}'' + u_{xx}''v) - 2uv(v_x^2 - u_x^2) - 2(u^2-v^2)u_x'v_x'\right] \tag{3.4}$$

对 y 求导也是同理，只需将上面的角标 x 换为 y，于是有 $\Delta\, g$:

$$\begin{aligned}\Delta\, g &= g_{xx}'' + g_{yy}'' \\ &= \frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left[(u^2+v^2)(u(v_{xx}''+v_{yy}'') + (u_{xx}''+u_{yy}'')v) - 2uv(v_x^2+v_y^2-u_x^2-u_y^2) - 2(u^2-v^2)(u_x'v_x' + u_y'v_y')\right]\end{aligned}$$

f 解析意味着 u, v 构成一对共轭调和函数，有 $\Delta\, u = \Delta\, v = 0$，代入上式，再代入 C-R 条件，容易验证右边为 0，也即证明了 $\Delta\, g = 0$，因此 $\arg f(z)$ 为调和函数。对 $u^2 + v^2 = 0$ 的情况，我们不再赘述，只关心普遍结论。

3.2 从已知的实虚部求出解析函数 $f(z)$

(1) $u = e^x(x\cos y - y\sin y) + 2\sin x \cdot \sinh y + x^3 - 3xy^2 + y$

$$u'_x = e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y) + 2\cos x \sinh y + 3x^2 - 3y^2 \tag{3.5}$$
$$u'_y = e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y) + 2\sin x\cosh y - 6xy + 1 \tag{3.6}$$

由 C-R 条件，$v'_x = -u'_y$, $v'_y = u'_x$，于是得到：

$$v(x,y) = \int(-u'_y)\mathrm{d}x + \int(-3y^2)\mathrm{d}y \tag{3.7}$$
$$= (x-1)e^x\sin y + (\sin y + y\cos y)e^x + 2\cos x\cosh y + 3x^2y - x - y^3 + C \tag{3.8}$$
$$= (x\sin y + y\cos y)e^x + 2\cos x\cosh y + 3x^2y - x - y^3 + C,\ C\in\mathbb{R} \tag{3.9}$$

令 $(x,y) = (z,0)$，得到：

$$u(z,0) = ze^z + z^3,\quad v(z,0) = 2\cos z - z + C,\ C\in\mathbb{R} \tag{3.10}$$

于是得到 $f(x,y)$:

$$f(z) = [u(x,y) + iv(x,y)]_{x=z,y=0} = (ze^z + z^3) + i(2\cos z - z + C),\ C\in\mathbb{R}$$

(2) $v = \ln(x^2+y^2) + x - 2y$

$$v'_x = \frac{2x}{x^2+y^2} + 1,\quad v'_y = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2$$

由 C-R 条件，$u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$，于是得到：

$$u(x,y) = \int v'_y\mathrm{d}x + \int(-1)\mathrm{d}y = 2\arctan\frac{x}{y} - 2x - y + C \tag{3.11}$$

$$f(x,y) = u + iv = (2\arctan\frac{x}{y} - 2x - y + C) + i(\ln(x^2+y^2) + x - 2y),\ C\in\mathbb{R}$$

后补，这里之所以没有令 $(x,y) = (z,0)$ 得到 $f(z)$，是因为函数 $\arctan\frac{x}{y}$ 在实轴附近是不连续的，例如在正实轴 $x>0$ 附近，$\lim\limits_{y\to0^+}$ 时趋于 $+\infty$ 而 $\lim\limits_{y\to0^-}$ 时趋于 $-\infty$。而映射 $(x,y) = (z,0)$ 的必要条件是解析域中包含实轴，这涉及到解析延拓的内容，我们不提。只需要写到 $f(x,y)$ 的形式就这样放着即可。

3.3 求下列函数的值

(1) $\cos(2+i)$

由 $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$，可得：

$$\cos(2+i) = \frac{1}{2}\left[e^{i(2+i)} + e^{i(2-i)}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{2i-1} + e^{1-2i}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[(\frac{1}{e} + e)\cos 2 + i(\frac{1}{e} - e)\sin 2\right]$$

(2) $\operatorname{Ln}(2-3i)$

由 $\operatorname{Ln} z = \ln a + i\operatorname{Arg} z$，可得：

$$\operatorname{Ln}(2-3i) = \ln|2-3i| + i\operatorname{Arg}(2-3i) = \frac{1}{2}\ln 13 + i\left(\arctan(-\frac{3}{2}) + 2k\pi\right),\quad k\in\mathbb{Z}$$

(3) $\text{Arccos}\,(\frac{3+i}{4})$

$\arccos z = -i\ln(z+\sqrt{z^2-1})$，于是：

$$\begin{aligned}\text{Arccos}\,(\frac{3+i}{4}) &= -i\,\text{Ln}\left(\frac{3+i}{4}+\sqrt{(\frac{3+i}{4})^2-1}\right) = -i\,\text{Ln}\left(\frac{3+i}{4}+\frac{\sqrt{-8+6i}}{4}\right)\\ &= -i\,\text{Ln}\left(\frac{3+i}{4}\pm\frac{1+3i}{4}\right) = -i\,\text{Ln}\,(1+i)\text{ 或 } -i\,\text{Ln}\,(\frac{1-i}{2})\\ &= (\frac{\pi}{4}+2k\pi)-i\frac{\ln 2}{2}\text{ 或 } -(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i\frac{\ln 2}{2},\quad k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

(4) $\text{Arctan}\,(1+2i)$

由 $\text{Arctan}\,z = \frac{1}{2i}\,\text{Ln}\,\frac{1+iz}{1-iz}$，得：

$$\begin{aligned}\text{Arctan}\,(1+2i) &= \frac{1}{2i}\,\text{Ln}\left(\frac{1+i(1+2i)}{1-i(1+2i)}\right) = \frac{1}{2i}\,\text{Ln}\left(\frac{-1+i}{3-i}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\left(\,\text{Ln}\,(-2+i)-\ln 5\right) = \frac{1}{2i}\left[-\frac{\ln 5}{2}+i\left(\pi-\arctan(-\frac{1}{2})+2k\pi\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(\pi-\arctan(-\frac{1}{2})+2k\pi\right)+i\frac{\ln 5}{4},\quad k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

3.4 判断下列函数是单值还是多值函数

(1) $\sin\sqrt{z}$

多值函数。$\sqrt{z}$ 为双值函数，$a^2 = z \Longrightarrow \sqrt{z} = \pm a$，而 sin 为奇函数，$\sin a \neq \sin(-a)$，故为多值函数。

(2) $\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$

单值函数。$\dfrac{\sin a}{a} = \dfrac{\sin(-a)}{-a}$，因此为单值函数。

(3) $\dfrac{\cos\sqrt{z}}{z}$

单值函数。$\dfrac{\cos a}{a} = \dfrac{\cos(-a)}{a}$，故为单值函数。

3.5 解方程：$2\cosh^2 z - 3\cosh z + 1 = 0$

原方程等价于：

$$(2\cosh z-1)(\cosh z-1) = 0 \Longrightarrow \cosh z = \frac{1}{2}\text{ 或 }1 \tag{3.12}$$

$$\xRightarrow{\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}} e^z = \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\text{ 或 }1 \tag{3.13}$$

$$\Longrightarrow z = i(\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi)\text{ 或 }i(0+2k\pi),\quad k\in\mathbb{Z} \tag{3.14}$$

3.6 求下列多值函数的分支点

(1) $\sqrt{1-z^3}$ 的分支点：$1, -\frac{1}{2}+i\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}-i\frac{3}{2}, \infty$

$1-z^3 = (1-z)[(-\frac{1}{2}+i\frac{3}{2})-z][(-\frac{1}{2}-i\frac{3}{2})-z]$，不妨记为 $1-z^3 = (z_1-z)(z_2-z)(z_3-z)$。支点仅可能在宗量的零点、奇点处出现，下面分别考察 z_1, z_2, z_3, ∞ 四点。

对 z_1，取仅包含点 z_1 的简单闭合曲线，曲线上一点 z 沿逆时针绕一圈回到原处，因子 (z_1-z) 的幅角增加了 2π，因子 (z_2-z) 和 z_3-z 的幅角增加了 0，因此整个宗量的幅角增加 2π，开根后，函数值幅角增加 π，前后不相等。因此点 z_1 是分支点。同理可得 z_2 和 z_3 是分支点。

对 ∞，取包含点 z_1,z_2,z_3 的简单闭合曲线，曲线上一点 z 沿顺时针（不是逆时针）绕一圈回到原处，整个宗量的幅角增加了 -6π，开根后函数值幅角增加 -3π，因此 ∞ 也是分支点。

(2) $\mathrm{Ln}\cos z$ 的分支点：$\infty,\ \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$。

可以证明，$\mathrm{Ln} f(z)$ 的分支点等价于方程 $f(z)=0$ 和 $f(z)=\infty$ 的解[1]。于是分别令 $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ 为 0 和 ∞，解得：

$$z=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\text{ 或}z=\infty \tag{3.15}$$

(3) $\sqrt{\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}}$ 的分支点：$0,1,2,\infty$

考虑点 $0,1,2$，取仅包含点 0 的简单闭合曲线，曲线上一点 z 逆时针绕一圈后，宗量整体幅角增加 2π，函数值幅角增加 π，因此点 0 是分支点。同理点 1 和 2 也是分支点。

对 ∞，取包含点 $0,1,2$ 的简单闭合曲线，曲线上一点 z 顺时针绕一圈后，宗量整体幅角增加 -2π，函数值也不发生变化，∞ 不是分支点。

(4) $\mathrm{Ln}\dfrac{(z-a)(z-b)}{(z-c)}$ 的分支点：a,b,c,∞

与 (2) 同理，考虑宗量 $\dfrac{(z-a)(z-b)}{(z-c)}$ 的零点和无穷点，得到 $z=a,b,c,\infty$，即为所求分支点。

[1]这是助教在习题课上给出的结论，并未给出具体证明。但是我们可以证明 $\mathrm{Ln}\,z$ 的分支点为 0 和 ∞，这是因为 $\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}\,z$，当 z 绕原点逆时针转一圈时，$\mathrm{Arg}\,z$ 增加 2π 而不是回到原来的函数值，因此 0 为分支点；无穷点同理。

Homework 4: 2024.9.16 - 2024.9.22

4.1 计算下列积分

(1) $\oint_{|z+i|=1} \frac{e^z}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$

被积函数 $\frac{e^z}{1+z^2}$ 在圆周 $|z+i|=1$ 内有且仅有 $z=-i$ 一个奇点，由 Cauthy 定理和 Cauthy 积分公式：

$$I = \oint_{|z+i|=1} \frac{e^z}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left[\frac{e^z}{z-i}\right]_{z=-i} = -\pi e^{-i} \tag{4.1}$$

结果化简到上面一步即可。

(2) $\oint_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1}\,\mathrm{d}z,\ a>1$

被积函数 $\frac{z}{z^4-1}$ 在圆周 $|z-a|=a$ 内有且仅有 $z=1$ 一个奇点，由 Cauthy 定理和 Cauthy 积分公式：

$$I = \oint_{|z-1|=\delta} \frac{z}{z^4-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \left[\frac{z}{z^3+z^2+z+1}\right]_{z=1} = \frac{\pi i}{2}$$

(3) $\oint_{|z|=2} \frac{z^2-1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$

被积函数在圆周 $|z|=2$ 内有且仅有 $z=\pm i$ 两个奇点，由 Cauthy 定理和 Cauthy 积分公式：

$$I = \oint_{|z+i|=\delta_1} \frac{z^2-1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z + \oint_{|z-i|=\delta_2} \frac{z^2-1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \left[\frac{z^2-1}{z-i}\right]_{z=-i} + 2\pi i \cdot \left[\frac{z^2-1}{z+i}\right]_{z=i} = 0$$

(4) $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2(z^2+16)}\,\mathrm{d}z$

被积函数在圆周 $|z|=2$ 内有且仅有 $z=0$ 一个奇点，由 Cauthy 定理和 Cauthy 积分公式：

$$I = \oint_{|z|=\delta} \frac{1}{z^2(z^2+16)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \left[\frac{1}{z^2+16}\right]^{(1)}_{z=0} = 2\pi i \cdot \left[-\frac{2z}{(z^2+16)^2}\right]_{z=0} = 0$$

4.2 计算下列积分

(1) $\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$

被积函数在圆周 $|z|=R$ 内有且仅有 $z=1$ 一个奇点，则：

$$I = 2\pi i \cdot \left[\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}\right]_{z=1} = \frac{\sqrt{2}\pi i}{2}$$

(2) $\lim\limits_{R\to+\infty} \oint_{|z|=R} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$

被积函数在圆周 $|z|=R$ 内有且仅有 $z=\pm 1$ 两个奇点，则：

$$I = 2\pi i \cdot \left[\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z-1}\right]_{z=-1} + 2\pi i \cdot \left[\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}\right]_{z=1} = \sqrt{2}\pi i$$

(3) $\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$

被积函数在圆周 $|z|=R$ 内有且仅有 $z=-1$ 一个奇点，则：

$$I = 2\pi i \cdot \left[\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z-1}\right]_{z=-1} = \frac{\sqrt{2}\pi i}{2}$$

4.3 计算积分 $\int_L \frac{1}{(z-a)^n}\,\mathrm{d}z$，其中 L 为以 a 为圆心，r 为半径的上半圆周

作变换 $z \to z+a$，则原积分化为 $\int_{L'} \frac{1}{z^n}\,\mathrm{d}z$，其中 L' 是以 0 为圆心，r 为半径的上半圆周。当 $n=1$，时，$\frac{1}{z}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 内解析，$I(n) = [\ln z]_{z=r}^{z=-r} = \ln(-1) = i\pi$；当 $n \in \mathbb{Z}\setminus\{1\}$ 时，$\frac{1}{z^n}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 内解析，$I(n) = \left[\frac{z^{1-n}}{1-n}\right]_{z=r}^{z=-r} = \frac{1}{1-n}\left[(-r)^{1-n} - r^{1-n}\right]$。综上，我们有：

$$I(n) = \int_L \frac{1}{(z-a)^n}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} i\pi, & n=1 \\ \left[(-1)^{1-n}-1\right]\cdot \dfrac{r^{1-n}}{1-n}, & n \in \mathbb{Z}\setminus\{1\} \end{cases}$$

4.4 计算积分 $\oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)}\,\mathrm{d}z$，其中 a,b 不在圆周 $|z|=R$ 上，n 为正整数

令 $G=\{z \mid |z|=R\}$，共有四种情况，总结如下：

$$I = \oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & a,b \notin G \\ \dfrac{(-1)^{n-1}2\pi i}{(a-b)^n}, & a\in G, b\notin G \\ \dfrac{2\pi i}{(b-a)^n}, & b\in G, a\notin G \\ 0, & a,b\in G \end{cases}$$

4.5 （附加题）$f(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析，求证 $I(r) = \int_0^{2\pi} f(r\cdot e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$ 与 r 无关，$\forall\, r \in (0,R)$

设 $f(z)$ 在 G 内解析，由 Cauthy 积分公式：

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial G} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z$$

在上式中，取 $G=\{z \mid |z-a|=r,\ r\in(0,R)\}$，也即以 a 为圆心，r 为半径的圆周，则有 $z-a = r\cdot e^{i\theta}$, $\mathrm{d}z = ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$，代入即得：

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial G} \frac{f(z)}{r\cdot e^{i\theta}}\, ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi} f(z)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi} f(r\cdot e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$$
$$\Longrightarrow \oint_0^{2\pi} f(r\cdot e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta = 2\pi f(a), \quad \forall\, r\in(0,R) \quad \square$$

Homework 5: 2024.9.23 - 2024.9.29

!!! 不要忘了 $2\pi i$!!!

5.1 求积分 $\oint_C \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\mathrm{d}z$，$C:\ x^2+y^2-2x=0$

$C:\ (x-1)^2+y^2=1$，因此：

$$I = 2\pi i\left[\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}\right]_{z=1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i \tag{5.1}$$

5.2 求下列积分的值，积分路径均沿直线

(1) $\int_0^i \frac{z}{z+1}\,\mathrm{d}z$

$$I = \int_0^i \left(1-\frac{1}{z+1}\right)\,\mathrm{d}z = [z-\ln(z+1)]_0^i = i-\ln(1+i) = -\frac{\ln 2}{2}+i\left(1-\frac{\pi}{4}\right) \tag{5.2}$$

(2) $\int_0^{1+i} z^2\sin z\,\mathrm{d}z$

$$\begin{aligned} I &= \left[-z^2\cos z+2z\sin z+2\cos z\right]_0^{1+i} \\ &= (2-2i)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{e}+e\right)\cos 1+\left(\frac{1}{e}-e\right)\sin 1\right]+2(1+i)\cdot\frac{1}{2i}\cdot\left[\left(\frac{1}{e}-e\right)\cos 1+\left(\frac{1}{e}+e\right)\sin 1\right]-2 \\ &= \frac{2(1-i)}{e}(\cos 1+i\sin 1)-2 \end{aligned}$$

(3) $\int_{-1}^i \frac{1}{z^2+z-2}\,\mathrm{d}z$

$$I = \frac{1}{3}\int_{-1}^i\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+2}\right)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{3}[\ln(z-1)-\ln(z+2)]_{-1}^i = -\frac{1}{3}\left[\frac{\ln 10}{2}+i\left(\arctan\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{5.3}$$

5.3 讨论下列各积分的值，其中积分路径是圆周 $|z|=r$

(1) $\oint_{|z|=r}\frac{z^3}{(z-1)(z^2+2z+3)}\,\mathrm{d}z$

记 $z^2+2z+3=0$ 的两个根分别为 $z_1=-1+i\sqrt{2}$, $z_2=-1-i\sqrt{2}$，先考虑 $r\in(\sqrt{3},+\infty)$，此时积分围道内有三个奇点 1, z_1, z_2。由 Cauthy 定理，可得：

$$I = 2\pi i\left\{\left[\frac{z^3}{(z-z_1)(z-z_2)}\right]_{z=1}+\left[\frac{z^3}{(z-1)(z-z_2)}\right]_{z=z_1}+\left[\frac{z^3}{(z-1)(z-z_1)}\right]_{z=z_2}\right\} \tag{5.4}$$

$$= 2\pi i\left[\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{7-i4\sqrt{2}}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{7+i4\sqrt{2}}{3}\right)\right] = -2\pi i \tag{5.5}$$

当 $r\in(0,1)$ 时，无奇点，$I=0$；当 $r\in(1\sqrt{3})$ 时，有唯一奇点 $z=1$，$I=2\pi i\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{\pi}{3}i$。综上有：

$$I=I(r)=\begin{cases}0 & ,r\in(0,1)\\ \dfrac{\pi}{3}i & ,r\in(1,\sqrt{3})\\ -2\pi i & ,r\in(\sqrt{3},+\infty)\end{cases} \tag{5.6}$$

(2) $\displaystyle\oint_{|z|=r}\frac{1}{z^3(z+1)(z+2)}\,\mathrm{d}z$

先考虑 $r\in(2,+\infty)$ 的情况，此时围道内有三个奇点 $0,-1,-2$，但我们不需要具体求解，直接由大圆弧定理：

$$\lim_{z\to\infty}\left(z\cdot\frac{1}{z^3(z+1)(z+2)}\right)=0\Longrightarrow I=2\pi i\cdot 0=0 \tag{5.7}$$

$r\in(1,2)$ 时，有两奇点 $0,\ -1$，于是：

$$I=2\pi i\left\{\frac{1}{2!}\cdot\left[\frac{1}{(z+1)(z+2)}\right]^{(2)}_{z=0}+\left[\frac{1}{z^3(z+2)}\right]_{z=-1}\right\}=2\pi i\left[\frac{7}{8}+(-1)\right]=-\frac{1}{4}\pi i \tag{5.8}$$

再考虑上 $r\in(0,1)$，综上有：

$$I=I(r)=\begin{cases}\dfrac{7}{4}\pi i & ,r\in[0,1)\\ -\dfrac{1}{4}\pi i & ,r\in(1,2)\\ 0 & ,r\in(2,+\infty)\end{cases} \tag{5.9}$$

5.4 设 $f(z)=\displaystyle\oint_{|\zeta|=2}\frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$，求 $f''(1+i)$

由 Cauthy 积分公式：

$$f(z)=2\pi i\left[3z^2+7z+1\right],\quad\Longrightarrow f''(1+i)=2\pi i\cdot 6=12\pi i \tag{5.10}$$

5.5 计算积分 $f(z)=\displaystyle\oint_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$，其中 $|z|\neq 1$

$|\zeta|=1$ 时有 $\overline{\zeta}=\dfrac{1}{\zeta}$，$z=0$ 的情况需单独计算，综合有：

$$f(z)=\oint_{|\zeta|=1}\frac{1}{\zeta(\zeta-z)}\,\mathrm{d}\zeta=\begin{cases}0 & ,|z|\in[0,1)\\ -\dfrac{2\pi i}{z} & ,|z|\in(1,+\infty)\end{cases} \tag{5.11}$$

5.6 计算积分 $f(z)=\displaystyle\oint_{|\zeta|=2}\frac{\overline{\zeta}^2e^{\zeta}}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$，其中 $|z|\neq 2$

$|\zeta|=2$ 时 $\overline{\zeta}=\dfrac{4}{\zeta}$，于是 $|z|<2$ 时：

$$I=16\oint_{|\zeta|=2}\frac{e^{\zeta}}{\zeta^2(\zeta-z)}\,\mathrm{d}\zeta=16\cdot 2\pi i\left\{\left[\frac{e^{\zeta}}{\zeta-z}\right]^{(1)}_{\zeta=0}+\left[\frac{e^{\zeta}}{\zeta^2}\right]_{\zeta=z}\right\} \tag{5.12}$$

$$=32\pi i\left[\left(-\frac{z+1}{z^2}\right)+\frac{e^z}{z^2}\right]=32\pi i\cdot\frac{e^z-z-1}{z^2} \tag{5.13}$$

$|z|=0$ 时 $I = 16\oint_{|\zeta|=2}\frac{e^\zeta}{\zeta^3}\,\mathrm{d}\zeta = 16\pi i$，再考虑上 $|z|>2$，综合有：

$$I = f(z) = \begin{cases} 16\pi i & ,|z|=0 \\ 32\pi i\cdot\dfrac{e^z-z-1}{z^2} & ,|z|\in(0,2) \\ -32\pi i\cdot\dfrac{z+1}{z^2} & ,|z|\in(2,+\infty) \end{cases} \tag{5.14}$$

5.7 计算积分 $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^3}\,\mathrm{d}z$

由高阶导数公式：

$$I = 2\pi i\cdot\frac{1}{2!}\cdot[e^z]^{(2)}_{z=0} = \pi i \tag{5.15}$$

5.8 求 a 的值使得函数 $F(z)=\int_{z_0}^{z} e^z\left(\frac{1}{z}+\frac{a}{z^3}\right)\mathrm{d}z$ 是单值的

$F(z)$ 是单值的，也即积分与路径无关，这等价于被积函数是解析函数，由于没有限制 z 的范围，也即 $z\in\mathbb{C}$，因此：

$$\oint_{\partial G}\left(\frac{e^z}{z}+a\frac{e^z}{z^3}\right)\mathrm{d}z = 0,\quad \forall\, G\subset\mathbb{C} \tag{5.16}$$

计算左边的积分：

$$I = 2\pi i\left\{[e^z]_{z=0}+\frac{a}{2!}\cdot[e^z]^{(2)}_{z=0}\right\} = 2\pi i\left(1+\frac{a}{2}\right) = 0 \Longrightarrow a=-2 \tag{5.17}$$

Homework 6: 2024.10.8 - 2024.10.14

求幂级数的收敛半径有两个常用方法：

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \tag{6.1}$$

前者称为 Cauchy-Hadamard 公式，是普遍成立的，后者称为 d'Alembert 公式，在极限存在时成立，但通常计算更简单。

6.1 确定下列幂级数的收敛半径

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Longrightarrow R = 1 \tag{6.2}$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \infty \cdot e \Longrightarrow R = 0 \tag{6.3}$$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$, ???

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n}$

$$\text{级数} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \text{ 的收敛半径 } r = 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n} \text{ 的收敛半径为 } R = \sqrt{r} = 1\text{。} \tag{6.4}$$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[3+(-1)^n\right]^n z^n$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[3+(-1)^n\right] = 4 \Longrightarrow R = \frac{1}{4} \tag{6.5}$$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} cos(in)\cdot z^n$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\cos(in+i)}{\cos(in)}\right| = \lim_{n\to\infty} |\cos i - \sin i \cdot \tan(in)| = |\cos i - i\sin i| = |e^{i(-i)}| = e \Longrightarrow R = \frac{1}{e} \tag{6.6}$$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n+a^n) z^n$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)+a^{n+1}}{n+a^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1+a\cdot\left(\frac{a^n}{n}\right)}{1+\left(\frac{a^n}{n}\right)}\right| = \begin{cases} 1, & |a| \leqslant 1 \\ a, & |a| > 1 \end{cases} \Longrightarrow R = \begin{cases} 1, & |a| \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{|a|}, & |a| > 1 \end{cases} \tag{6.7}$$

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^n z^n$

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1\Longrightarrow R=1 \tag{6.8}$$

6.2 设幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n$ 的收敛半径为 $R\in(0,\infty)$，求下列幂级数的收敛半径

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^R c_n z^n$

$$\frac{1}{R_1}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^R c_{n+1}}{n^R c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^R\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=1\cdot\frac{1}{R}\Longrightarrow R_1=R \tag{6.9}$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)c_n z^n$

$$\frac{1}{R_2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n-1}{2^n-1}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=2\cdot\frac{1}{R}\Longrightarrow R_2=\frac{R}{2} \tag{6.10}$$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(c_n)^k z^n$

$$\frac{1}{R_3}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|^k=\frac{1}{R^k}\Longrightarrow R_3=R^k \tag{6.11}$$

6.3 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$ 在 $|z|\neq 1$ 上收敛，并求其和函数

$$S_n(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{z^{k-1}}{(1-z^k)(1-z^{k+1})}=\frac{1}{z(1-z)}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1-z^k}-\frac{1}{1-z^{k+1}}\right)=\frac{1}{z(1-z)}\cdot\left[\frac{1}{z^{n+1}-1}-\frac{1}{z-1}\right]$$

$$\Longrightarrow S(z)=\lim_{n\to\infty}S_n(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-z)^2} & ,|z|<1\\ \dfrac{1}{z(1-z)^2} & ,|z|>1\end{cases}$$

因此级数在 $|z|\neq 1$ 上收敛。

6.4 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}-\frac{2z^{2n+3}}{2n+3}\right)$ 的和函数 $S=S(z)$ 在 $z=1$ 不连续

容易知道上面级数在 $|z|<1$ 收敛而在 $|z|>1$ 发散，因此在 $|z|=1$ 处不连续 $\Longrightarrow$ 在 $z=1$ 点不连续。但我们不妨求解一下和函数。

先求和函数 $S(z)$, $|z|<1$。级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}$ 和 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^{2n+3}}{2n+3}$ 的收敛半径都为 1，, 因此当 $|z|<1$ 时，由一致收敛性有：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}=\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)\right]\,\mathrm{d}z=\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right]\,\mathrm{d}z=\int\frac{1}{1-z}\,\mathrm{d}z=-\ln(z-1)+C_1 \tag{6.12}$$

$z=0$ 时级数为 0，因此 $C_1=\ln(-1)$。同理可得：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^{2n+3}}{2n+3}=2\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^{2n+3}}{2n+3}\right)\right]\,\mathrm{d}z=2\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^2\right)^{n+1}\right]\,\mathrm{d}z=2\int\frac{z^2}{1-z^2}\,\mathrm{d}z \tag{6.13}$$

$$=2\int\left[-1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)\right]\,\mathrm{d}z=-2z-\ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+C_2 \tag{6.14}$$

$z=0$ 时级数为 0，因此 $C_2=0$。由于原级数在 $|z|<1$ 内绝对收敛，可以任意交换求和次序，因此有：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}-\frac{2z^{2n+3}}{2n+3}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^{2n+3}}{2n+3}=-\left[\ln(z-1)+2z+\ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right]+\ln(-1) \tag{6.15}$$

于是极限 $\lim\limits_{z\to1}S(z)$ 不存在，自然不可能连续。

6.5 对 $|z|<1$，求下列级数的和

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^n$

级数的收敛半径为 1，由绝对收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}nz^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n-\sum_{n=1}^{\infty}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n-\frac{z}{1-z} \tag{6.16}$$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径仍为 1，由一致收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)z^n=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int(n+1)z^n\,\mathrm{d}z\right)\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\sum_{n=1}^{\infty}z^{n+1}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{z^2}{1-z}\right]=\frac{z(2-z)}{(1-z)^2} \tag{6.17}$$

综上有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}nz^n=\frac{z(2-z)}{(1-z)^2}-\frac{z}{1-z}=\frac{z}{(1-z)^2} \tag{6.18}$$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$

由一致收敛性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}=\int\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^{2n+1}}{2n+1}\right)\right]\,\mathrm{d}z=\int\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(z^2\right)^{n}\right]\,\mathrm{d}z=\int\frac{z^2}{1-z^2}\,\mathrm{d}z \tag{6.19}$$

$$=\int\left[-1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)\right]\,\mathrm{d}z=-z-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right)+C \tag{6.20}$$

$z=0$ 时级数为 0，因此 $C=0$。

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{z^n}{n}$

由一致收敛性：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}=\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)\right]\,\mathrm{d}z=\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right]\,\mathrm{d}z=\int\frac{1}{1-z}\,\mathrm{d}z=-\ln(z-1)+C_1 \tag{6.21}$$

$z=0$ 时级数为 0，因此 $C_1=\ln(-1)$。

6.6 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z+n}$ 在不包含负整数的任意闭圆上一致收敛

首先有两个引理：

Theorem. 1（Dirichlet 判别法）: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有界，$\sum_{n=1}^{\infty}(v_{n+1}-v_n)$ 绝对收敛且 $\lim v_n = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ 收敛。

Theorem. 2（级数收敛）: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛，但不绝对收敛。证明略。

在 Theorem.2 的基础上，由 Theorem.1 (Dirichlet 判别法) 知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z+n}$ 收敛，可以任意加括号。给定不包含负整数的任意闭圆 G，记 $r=|z|$，$N_0=\sup\limits_{z}\left\lceil\frac{|z|+1}{2}\right\rceil$，则有：

$$S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z+n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+2n-1}-\frac{1}{z+2n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+2n-1)(z+2n)} \tag{6.22}$$

$$\Longrightarrow |S(z)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|}=\sum_{n=1}^{N_0-1}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|}+\sum_{n=N_0}^{\infty}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|} \tag{6.23}$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|2n-1-r|\cdot|2n-r|}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|2n-1-r|^2}<\infty \tag{6.24}$$

$$S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z+n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+2n-1}-\frac{1}{z+2n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+2n-1)(z+2n)} \tag{6.25}$$

$$\Longrightarrow |S(z)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|}=\sum_{n=1}^{N_0-1}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|}+\sum_{n=N_0}^{\infty}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|} \tag{6.26}$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{N_0-1}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|}+\sum_{n=N_0}^{\infty}\frac{1}{|2n-1-r|\cdot|2n-r|} \tag{6.27}$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{N_0-1}\frac{1}{|z+2n-1|\cdot|z+2n|}+\sum_{n=N_0}^{\infty}\frac{1}{|2n-1-r|^2} \tag{6.28}$$

对给定的区域 G，前一项是有限和，自然收敛，后一项是收敛级数，因此原级数在 G 上一致收敛。 □