

光学笔记

Optics Notes

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

序言

本文为笔者本科时的“光学”课程笔记 (Optics Notes, 2024.8-2025.1)。课程信息、作业和相关资料可在笔者的个人网站上找到: [Notes > Physics > Optics \(https://yidingg.github.io/YiDingg/#/Notes/Physics/OpticsNotes\)](https://yidingg.github.io/YiDingg/#/Notes/Physics/OpticsNotes), 也可以到网址 ([课程结束后更新](#)) 下载全部相关资料。由于个人学识浅陋, 认识有限, 文中难免有不妥甚至错误之处, 望读者不吝指正。读者可以到笔者的 [GitHub 笔记库 \(https://github.com/YiDingg/LatexNotes\)](https://github.com/YiDingg/LatexNotes) 上提 issue, 也可以将错误发送到我的邮箱 dingyi233@mails.ucas.ac.cn, 衷心感谢。

在正式学习之前, 建议先跳转至附录 A “波理论”部分, 学习必要的前置知识 (否则可能难以理解)。

目录

| | |
|---------------------------------|-----------|
| 序言 | I |
| 目录 | III |
| 1 光学导言 | 1 |
| 1.1 光学发展简史（略） | 1 |
| 1.2 光的几何传播规律 | 1 |
| 1.3 惠更斯原理与费马原理 | 2 |
| 1.4 成像 | 2 |
| 1.5 光学仪器 | 4 |
| 1.6 光波的描述（略） | 4 |
| 1.7 光度学基本概念 | 4 |
| 1.8 特殊发光体（略） | 6 |
| 2 光的反射与折射 | 7 |
| 2.1 菲涅尔公式 | 7 |
| 2.2 反射时的相位变化 | 7 |
| 2.3 完全偏振反射光 | 9 |
| 2.4 反射折射时的能量关系 | 9 |
| 2.5 全反射时的隐失波与穿透深度 | 10 |
| 2.6 古斯-亨欣位移（Goos-Hanchen Shift） | 11 |
| 2.7 全反射时的相位变化 | 11 |
| 2.8 折射时的相位变化 | 12 |
| 2.9 反射折射总结 | 12 |
| 3 光的干涉 | 15 |
| 3.1 叠加原理 | 15 |
| 3.2 同频率光波的干涉 | 15 |
| 3.3 不同频率光的干涉 | 19 |
| 3.4 产生干涉的实际条件 | 19 |
| 3.5 分波前干涉 | 20 |
| 3.6 分振幅干涉 | 23 |
| 3.7 迈克尔逊干涉 | 26 |
| 3.8 光场的空间相干性与时间相干性 | 29 |
| 3.9 多光束干涉 | 29 |
| 3.10 激光 | 29 |
| 参考文献 | 30 |

| | |
|-------------------------|-----------|
| 附录 A 波理论 | 31 |
| A.1 一维波 | 31 |
| A.2 谐波 | 31 |
| A.3 复数表示 | 32 |
| A.4 相矢量 | 33 |
| A.5 多元微分与三维波动方程 | 33 |
| A.6 平面波、柱面波与球面波 | 35 |
| A.7 波的能量与动量 | 36 |
| 附录 B Matlab 代码 | 38 |
| B.1 图 2.1 源码 | 38 |
| B.2 图 2.6 源码 | 39 |
| B.3 图 2.7 源码 | 43 |
| B.4 图 2.8 源码 | 44 |
| B.5 图 3.2 源码 | 45 |
| B.6 图 3.3 源码 | 46 |
| B.7 图 3.4 (b) 与图 3.5 源码 | 48 |
| B.8 图 3.6 源码 | 50 |
| B.9 图 3.8 源码 | 51 |

第1章 光学导言

§1.1 光学发展简史 (略)

§1.2 光的几何传播规律

1.2.1 光传播的基本原理

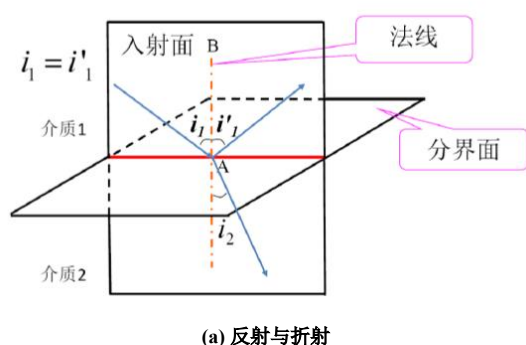
光传播的常见基本原理:

- (1) 直线传播: 光在均匀介质里沿直线传播^①
- (2) 反射定律: 光线入射到两种不同的均匀介质的分界面上反射线位于入射面内, 反射线和入射线分居法线两侧, 反射角等于入射角。
- (3) 折射定律 (斯涅尔定律): 折射线位于入射面内, 折射线与入射线分居法线两侧, 入射角的正弦与折射角的正弦之比为一与入射角无关的常数

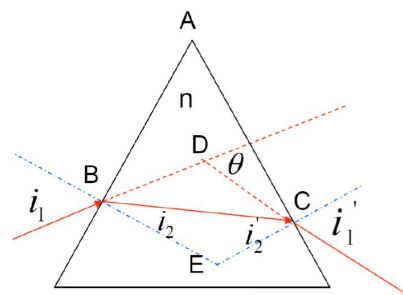
$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad (1.1)$$

- (4) 光路可逆性: 光沿反方向传播时, 必定沿原光路返回^②
- (5) 独立传播: 光在传播过程中与其他光束相遇时, 各光束都各自独立传播, 不改变其传播方向
- (6) 全反射: 光线从光密介质入射到光疏介质^③, 当入射角大于某临界值时, 折射光完全消失, 只剩下反射光。该临界角度称为全反射临界角。

$$i_C = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right), \quad n_1 < n_2 \quad (1.2)$$



(a) 反射与折射



(b) 三棱镜最小偏向角

图 1.1: 反射与折射、三棱镜最小偏向角

1.2.2 三棱镜最小偏向角

如图 1.1 (b) 所示, 最小偏向角 $\theta_0 = (i_1 - i_1')_{\min}$ 满足:

$$\theta_0 = 2i_1 - A, \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \frac{\theta_0 + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \quad (1.3)$$

^①对高功率激光, 此定律不成立

^②也即在几何光学中, 任何光路都是可逆的

^③折射率较大的一侧称为光密介质; 较小的一侧称为光疏介质

§ 1.3 惠更斯原理与费马原理

Theorem. 1 (惠更斯原理): 由振源发出的波动在 t 时刻传播到一个波面 S , 波面上的每一个面元可认为是次波的波源。由面元发出的次波向四面八方传播。在以后的时刻 t' 形成次波面。这些次波面的包络面 S' 就是 t' 时刻总扰动的波面。

其中:

- (1) 波面: 在同一振源的波场中, 扰动同时到达的各点具有相同的相位, 这些点的轨迹构成一个曲面, 称为波面 (也称为等相位面)。
- (2) 波线: 与波面处处正交的曲线称为波线, 其切线方向为光的传播方向

几何光学的定律需要前提条件:

- (1) 必须是均匀介质, 即同一介质的折射率处处相等, 折射率不是位置的函数。
- (2) 必须是各向同性介质, 即光在介质中传播时各个方向的折射率相等, 折射率不是方向的函数。
- (3) 光强不能太强, 否则巨大的光能量会使线性叠加原理不再成立而出现非线性情况。
- (4) 光学元件的线度应比光的波长大多, 否则不能把光束简化为光线。

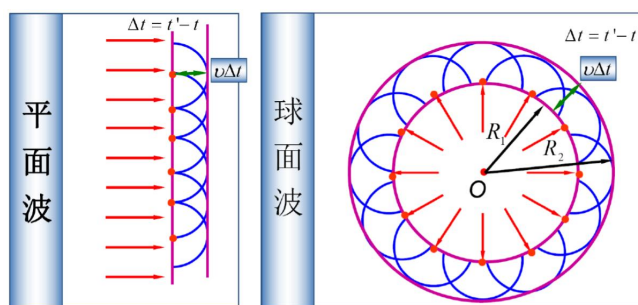


图 1.2: 惠更斯原理

Theorem. 2 (费马原理):

光从空间中一点传播到另一点时, 总是沿光程 (optical length, OPL) 取极值的路径传播^④, 公式:

$$\delta \text{OPL} = \delta \left(\int_Q^P n dl \right) = 0 \implies \frac{d \text{OPL}}{d\varphi} = \frac{d \text{OPL}}{ds} = 0 \quad (1.4)$$

由费马原理可以导出诸多推论, 包括我们熟知的几条基本原理, 还有物像之间的等光程性 (例如凸透镜): 在物点 Q 与像点 Q' 之间, 不管光线经何路径, 凡是由 Q 通过同样的光学系统到达 Q' 的光线, 都是等光程的。

§ 1.4 成像

理想的像与物体在形状上一致, 大小成比例。物与像之间的关系: 本质上是一系列物点与像点的点点对应, 推广至线线、面面对应。

同心光束: 各光线本身或其延长线交于同一点的光束称为同心光束, 在各向同性介质中, 它对应于球面波。

由若干反射面或折射面组成的光学系统称为光具组。

^④这里的“极值”可以是极小值、极大值或常数, 一般情况下, 实际光程大多取极小值。极大值 (如凹面镜成像)、拐点 (如椭球面镜、凸透镜) 的例子, 可以参考 [知乎: 浅谈几何光学 \(1\)——费马原理](#)

- (1) 实物：发散的同心入射光束的“心”
- (2) 虚物：汇聚的同心入射光束的“心”
- (3) 实像：发散的同心出射光束的“心”
- (4) 虚像：汇聚的同心出射光束的“心”

1.4.1 物像的共轭性（可逆性）

若 P 为物体 P （可实可虚）的像点，则反之，当物点为 P 时，像点必在点 P' （实际光路可能不同）。是光路可逆性的必然结果。

计算由物到像的 OPL 时，若为实线（实物、实像）则取正，称为实光程，若为虚线（虚物、虚像）则取负，称为虚光程。

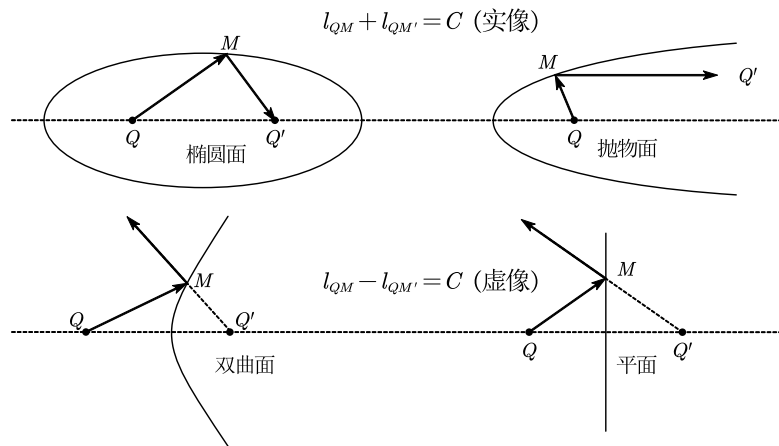


图 1.3: 光程恒定的例子

1.4.2 折射球面与反射球面

对于折射球面，存在一对恰好成像的共轭点，称为齐明点。在齐明点处，可以证明 Q 到 Q' 的光程（即物像间的 OPL） $l_{QQ'}$ 。

$$\begin{aligned}
 \text{折射球面公式: } \frac{n_1}{l_1} + \frac{n_2}{l_2} &= \frac{1}{R} \left(\frac{n_2 s_2}{l_2} - \frac{n_1 s_1}{l_1} \right) \Rightarrow \frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \quad (\text{傍轴}) \\
 \text{反射球面公式: } \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} &= -\frac{2}{R} \left(\frac{s_1}{l_1} + \frac{s_2}{l_2} \right) \Rightarrow \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = -\frac{2}{R} \quad (\text{傍轴})
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

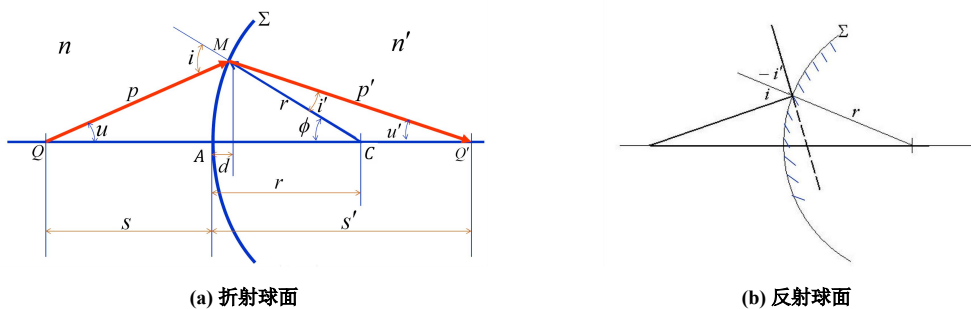


图 1.4: 折射球面与反射球面

1.4.3 像的放大率

放大率公式:

$$\frac{n_1|y_1|}{s_1} = \frac{n_2|y_2|}{s_2} \quad (1.6)$$

Lagrange-Helmholtz 恒等式:

$$n_1 u_1 y_1 = n_2 u_2 y_2 \quad (1.7)$$

上式的 u 和 y 是有正负的, 例如折射球面中 $u_1 > 0$, $y_1 > 0$ 而 $u_2 < 0$, $y_2 < 0$ 。

§ 1.5 光学仪器

1.5.1 薄透镜

透镜是由两个共轴折射球面构成的光具组, 球面间距远远小于球面半径和物距像距的透镜称为薄透镜, 也即 $d \ll |R_1|, |R_2|, |s|, |s'|$ 。此时可以认为两球面顶点重合, 称为光心。

薄透镜成像公式 (物像距公式):

$$\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2} \quad (1.8)$$

$$s' = \infty \implies f = \frac{n}{\frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}} \quad \text{物方焦距} \quad (1.9)$$

$$s = \infty \implies f' = \frac{n'}{\frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}} \quad \text{像方焦距} \quad (1.10)$$

故物像焦距满足 $\frac{f}{n} = \frac{f'}{n'}$ 。特别地, 当物像方折射率都为 1 时 (真空), 我们有磨镜者公式和像的横向放大率:

$$f = f' = \frac{1}{(n_L - 1)(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})}, \quad V = -\frac{\frac{s'}{n'}}{\frac{s}{n}} = -\frac{f s'}{f' s} = -\frac{s'}{s} \quad (1.11)$$

将公式 1.9 和公式 1.10 代入式 1.8 中, 可以得到 Gauss 物像公式:

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1 \xrightarrow{n=n'} \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (1.12)$$

令 $s = x + f$, $s' = x' + f'$, 代入公式 1.12, 可以得到 Newton 物像公式:

$$xx' = ff' \quad (1.13)$$

1.5.2 其它仪器

投影仪器、照相机、眼睛、放大镜、显微镜、望远镜

§ 1.6 光波的描述 (略)

§ 1.7 光度学基本概念

在学习光度学之前, 需要区分辐射度学与光度学中的基本概念。辐射度学研究的是辐射能量对实际物体的影响, 而光度学研究的是辐射能量对人眼的影响, 是基于人眼实验数据的学科, 例如 Luminous Efficiency Function。它们的概念相互对应 (可以相互转化) 但并不相同, 如下表所示:

表 1.1: 光度学与辐射度学概念对应关系

| 学科范围 | 基本概念 | | | | | | |
|------|-----------|---------------|------------|------------|------------|-------------|----------------------------|
| 辐射度学 | 辐射能 Q_e | 辐射通量 Φ_e | 辐射强度 I_e | 辐射亮度 L_e | 辐射照度 E_e | 辐射出射度 M_e | 辐射通量谱密度 $\Phi_{e,\lambda}$ |
| 光度学 | 光量 Q_v | 光通量 Φ_v | 光强度 I_v | 光亮度 L_v | 光照度 E_v | 光出射度 M_v | 光通量谱密度 $\Phi_{v,\lambda}$ |

1.7.1 辐射度学基本概念

表 1.2: 辐射度学基本概念

| 名称 | 符号 | 定义式 | 单位 | 概念描述 |
|------|----------|---|---|------------------------------------|
| 辐射能 | Q_e | - | J | 以辐射形式传播的能量 |
| 辐通量 | Φ_e | $\Phi_e = \frac{dQ_e}{dt}$ | W | 单位时间内流过某截面的辐射能量 |
| 辐强度 | I_e | $I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega}$ | $\text{W} \cdot \text{sr}^{-1}$ | 点辐射源在某方向上单位立体角 ^⑤ 内的辐射通量 |
| 辐照度 | E_e | $E_e = \frac{d\Phi_e}{dA}$ | $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ | 被辐射体单位面积上的辐射通量 |
| 辐亮度 | L_e | $L_e = \frac{dI_e}{dA \cos \theta}$ | $\text{W} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ | 单位面积的面辐射源在某方向上的辐射强度 |
| 辐出射度 | M_e | $M_e = \frac{d\Phi_e}{dA}$ | $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ | 辐射体单位面积向半球空间发射的辐射通量 |
| 辐谱密度 | ϕ_e | $\phi_e = \frac{\Delta\Phi_{e,\lambda}}{\Delta\lambda}$ | $\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$ | 辐射能（通量）在频谱中的分布 |

其中 $\Delta\Phi_{e,\lambda}$ 表示波长为 λ （也可认为是 $[\lambda, \lambda + \Delta\lambda]$ ）的部分所贡献的辐射通量。

1.7.2 明视觉曲线

人眼对不同波长的光具有不同的明亮感觉程度^⑥，称为明视觉光谱光视效率曲线^⑦（函数），常简称为“明视觉曲线”或“视觉曲线”，记为 $V = V(\lambda)$ 。

光谱光效能 K ，表示在某一波长上每一瓦辐射通量可以产生多少流明的光通量。光谱光视效率 $V = V(\lambda)$ ，就是归一化的光谱光效能：

$$K = \frac{\Delta\Phi_{v,\lambda}}{\Delta\Phi_{e,\lambda}} = \frac{\phi_v(\lambda)}{\phi_e(\lambda)}, \quad V(\lambda) = \frac{K(\lambda)}{K_{\max}} = \frac{1}{K_{\max}} \cdot \frac{\phi_v(\lambda)}{\phi_e(\lambda)} \quad (1.14)$$

$K_{\max} = 683 \text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$ 在波长约 555.0 nm 取到，因此 $V = V(\lambda)$ 也表示在相同辐射通量下，波长为 λ 的光与 555.0 nm 的光所产生的亮暗感觉比值。

另外，公式 1.14 建立了辐射度学参量与光度学参量之间的转化关系：

$$\Phi_v(\lambda) = \int \phi_v(\lambda) d\lambda = \int K_{\max} V(\lambda) \phi_e(\lambda) d\lambda \quad (1.15)$$

^⑤参考 新旧明视觉光谱光视效率曲线.pdf。

^⑦参考 ANSI E1.48 - 2014 (A Recommended Luminous Efficiency Function for Stage and Studio Luminaire Photometry)，国际照明委员会（CIE）规定的标准光谱光视效率函数 Luminous Efficiency Functions 或者 知乎：光通量与光辐照度之间的换算。

1.7.3 光度学基本概念

表 1.3: 光度学基本概念

| 名称 | 符号 | 定义式 | 单位 | 概念描述 |
|------|----------|---|--|---------------------|
| 光量 | Q_v | $Q_v(\lambda) = V(\lambda) \cdot Q_e(\lambda)$ | $\text{cd} \cdot \text{sr} \cdot \text{s}$ | 辐射能的光度量大小 |
| 光通量 | Φ_v | $\Phi_v = \frac{dQ_v}{dt}$ | $\text{lm} = \text{cd} \cdot \text{sr}$ | 单位时间内流过某截面的光度学光量 |
| 光强度 | I_v | $I_v = \frac{d\Phi_v}{d\Omega}$ | cd | 点辐射源在某方向上单位立体角内的光通量 |
| 光照度 | E_v | $E_v = \frac{d\Phi_v}{dA}$ | $\text{lm} \cdot \text{m}^{-2}$ | 被辐射体单位面积上的光通量 |
| 光亮度 | L_v | $L_v = \frac{dI_v}{dA \cos \theta}$ | $\text{cd} \cdot \text{m}^{-2}$ | 单位面积的面辐射源在某方向上的光强度 |
| 光出射度 | M_v | $M_v = \frac{d\Phi_v}{dA}$ | $\text{lm} \cdot \text{m}^{-2}$ | 辐射体单位面积向半球空间发射的光通量 |
| 光谱密度 | ϕ_v | $\phi_v = \frac{\Delta\Phi_{v,\lambda}}{\Delta\lambda}$ | $\text{lm} \cdot \text{m}^{-1}$ | 光量 (光通量) 在频谱中的分布 |

它们[®]之间的转化关系:

$$\text{与光通量的转换: } \Phi_v = \int E_v dA = \int I_v d\Omega = \iint L_v \cos \theta dA d\Omega \quad (1.16)$$

$$\text{与光强的转换: } I_v = r^2 E_v = \int L_v \cos \theta dA = \int L_v dA_{\perp} \quad (1.17)$$

计算时的常用微分:

$$\begin{aligned} \text{直角坐标系: } dA &= dx dy, & d\Omega &= \frac{dA}{r^2} \\ \text{球坐标系: } dA &= r^2 \sin \theta d\theta d\phi, & d\Omega &= \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (1.18)$$

§ 1.8 特殊发光体 (略)

1.8.1 余弦发光体 (朗伯发光体)

1.8.2 定向发光体

[®]参考 知乎: 如何区分并记忆光度、照度、发光强度、光强、亮度等

第2章 光的反射与折射

在本章，我们先以一定的顺序，依次对反射折射过程中所出现的现象或相关物理量进行讨论，最后给出所有现象的总结。

§2.1 菲涅尔公式

Theorem. 3 (菲涅尔公式, Fresnel Formula):

光线在通过两介质分界面时通常会同时发生折射（透射）和反射现象，设入射光（incident ray）介质折射率 n_i ，入射角 θ_i ，透射光（transmitted ray）介质折射率 n_t ，透射角（折射角） θ_t ，则有^①：

| 类型 | 振幅反射系数 r | | 振幅透射系数 t | |
|-------|---|--|--|--|
| s 波 | $r_s = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$ | $-\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$ | $t_s = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$ | $+\frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$ |
| p 波 | $r_p = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t}$ | $+\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$ | $t_p = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i}$ | $+\frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}$ |

折射角 θ_t 、 s 波通量反射率 R_s 、 p 波通量反射率 R_p 和总通量反射率 R 为：

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \left(\frac{n_i}{n_t} \sin \theta_i\right)^2}, \quad R_s = r_s^2, \quad R_p = r_p^2, \quad R = \frac{1}{2}(R_s + R_p) \quad (2.1)$$

总强度反射率 R 的严格证明见下一节。特别地，若 $1 - \left(\frac{n_i}{n_t} \sin \theta_i\right)^2 < 0$ ，则发生全反射，此时 $R = 1$ 。另外，需要指出菲涅尔公式的适用条件，也即推导时所做的一些假设，如下：

- (1) 介质为绝缘介质，无表面自由电荷或传导电流
- (2) 介质为各向同性的光学线性介质（弱光强）
- (3) 介质磁导率（约）等于真空磁导率^② $\mu_i = \mu_t = \mu_0$ ，其中 μ_0 为真空磁导率。

§2.2 反射时的相位变化

菲涅尔公式的推导以矢量分析为基础，因此公式中系数 r_s 的正负具有明确物理意义，它标识着方向。若为负，则反射后的方向与原方向相反，否则相同。各系数正负情况见表 2.1，其中 o 表示可正可负。

从波的角度，方向相反可以等价地视为相位发生了 π 的前移（或后移），称为相位突变。 $n_i < n_t$ 时，相位突变要么是 0，要么是 π ， $n_i > n_t$ 时的相位变化比较复杂，我们不深究。在 $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$ 时， r_p 的正负发生变化， p 波的反射波相位也发生突变，称此时 θ_i 的角度为布儒斯特角（Brewster angle），记为 θ_B ，也称为偏振角或起偏角。

表 2.1: 振幅系数的正负情况

| 折射率 | r_s | r_p | t_s | t_p |
|-------------|-------|-------|-------|-------|
| $n_i < n_t$ | - | o | + | + |
| $n_i > n_t$ | o | o | + | + |

可以推得 Brewster angle 的值为：

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (2.2)$$

^①对于金属材料（非绝缘材质），需要引入消光系数 k_t 来修正菲涅尔公式（绝缘材质等价于 $k_t = 0$ ），具体参见 知乎: 菲涅尔公式

^②对于介质磁导率不等于真空磁导率的情况，详见参考文献 [1] Page 144

具体的振幅系数变化见图 2.1^③，相位增量见图 2.2，反射示意图见图 2.3。

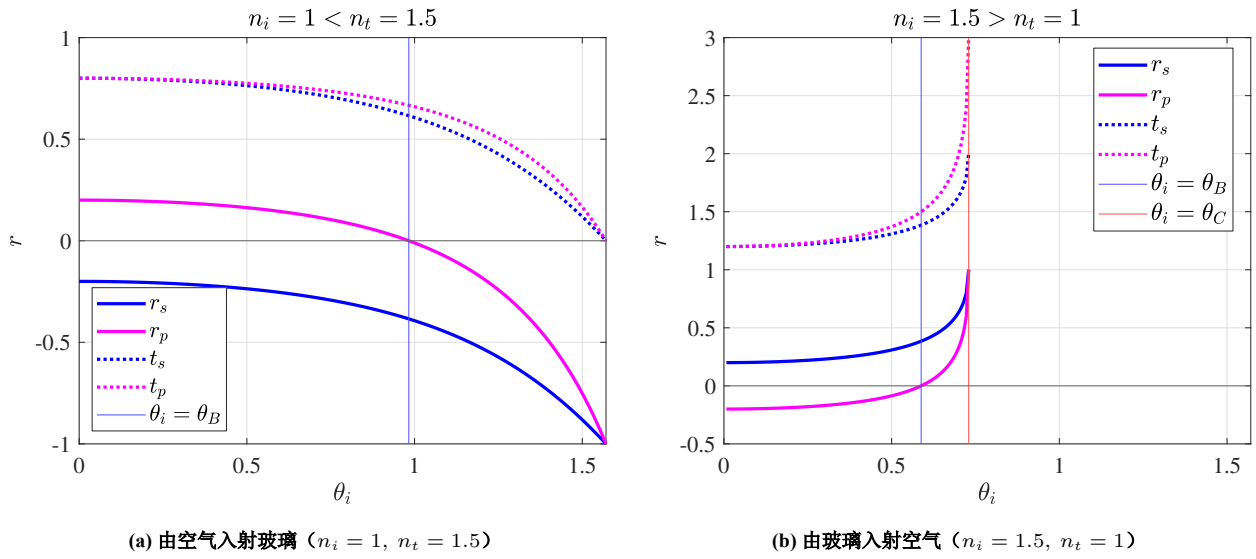


图 2.1: 振幅系数 r 随入射角 θ_i 的变化

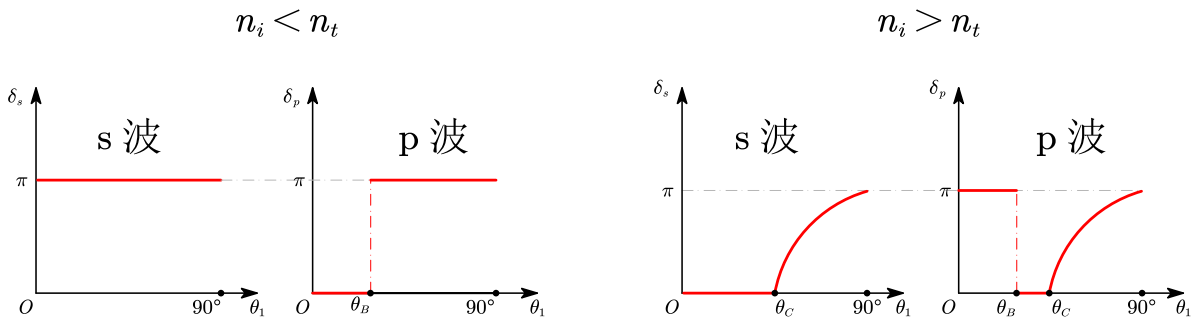


图 2.2: s 波和 p 波在反射时的相位变化

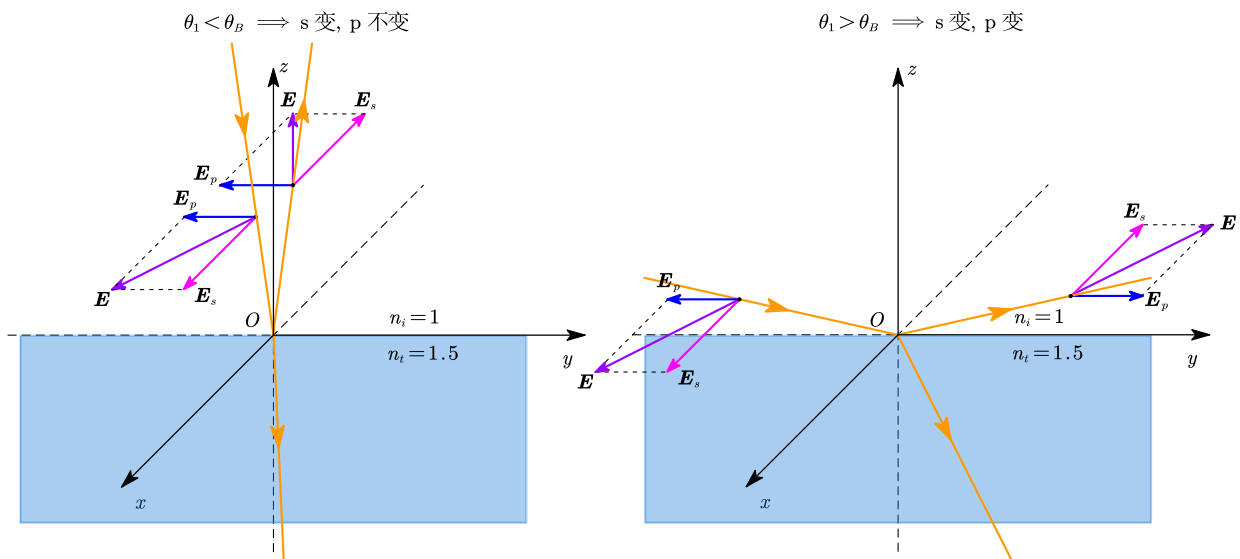


图 2.3: 由空气入射玻璃的光线示意图

^③ 源码见附录 B.1

由菲涅尔公式，当 $n_i < n_t$ 时，我们还有如下结论：

$$\begin{aligned} \theta_i = 0 \text{ 时: } \quad r_p &= (-r_s) = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}, \quad t_p = t_s = \frac{2n_i}{n_i + n_t} \\ \theta_i = \frac{\pi}{2} \text{ 时: } \quad r_p &= r_s = -1, \quad t_p = t_s = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

这表明，即使是正射（垂直于介质分界面的入射， $\theta_i = 0$ ），一般也存在部分反射光。总之，当 $n_i < n_t$ 时，入射光的 s 分量在反射中一定会相位跃变，p 分量都有可能。

另外，菲涅尔公式还可写成：

$$\begin{aligned} (-r_s) + t_s &= 1, & r_p + t_p &= 1 \\ r_s &= \frac{\cos \theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}, & r_p &= \frac{n_{ti}^2 \cos \theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}{n_{ti}^2 \cos \theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

§2.3 完全偏振反射光

当光波由布儒斯特角 θ_B 入射时，由 Fresnel Formula, $r_p = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} = 0$ ，也即反射光的 p 分量为 0，仅存在 s 分量。这说明反射光是完全偏振光， \mathbf{E} 的方向（称为振动方向）垂直于入射面。

但此时反射光能量占比 F 很小^④，例如，空气（ $n = 1$ ）入射玻璃（ $n = 1.5$ ）时， $\theta_B = 56.310^\circ$ ， $F = 0.0740$ ；玻璃入射空气时， $\theta_B = 33.690^\circ$ ， $F = 0.0740$ 。

§2.4 反射折射时的能量关系

在 Fresnel Formula 中可以发现， $r_s^2 + t_s^2 \neq 1$ ， $r_p^2 + t_p^2 \neq 1$ ，是能量不守恒了吗？显然不是。那么，反射光和透射光的能量关系是怎样的？这需要借助辐射度学的相关概念。

如图，圆形光束从空气入射到分界面上的一个面元 \mathbf{A} （界面下是玻璃），以此面元为研究对象。考虑玻印亭矢量 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ，即单位时间内通过单位面积的电磁辐射能量（单位面积辐射功率），于是瞬时辐射照度 \mathbf{E}_e ：

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{S} = c^2 \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad E_e = \varepsilon_0 c E^2 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}} = \frac{\varepsilon_0 c}{\mu_r} \cdot n E^2 \quad (2.5)$$

其中 ε_r ， μ_r 分别为相对介电常量、相对磁导率，对空气近似有 $\varepsilon_r = \mu_r = 1$ ，于是

核心理想是 $dQ_e = (\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{A}) dt$ 。入射、反射、透射光束的截面面积分别为 $A \cos \theta_i$ ， $A \cos \theta_r$ ， $A \cos \theta_t$ ，设其瞬时辐射照度分别为 \mathbf{E}_i ， \mathbf{E}_r ， \mathbf{E}_t ，则辐射通量为：

$$\Phi_{e,k} = E_{e,k} A \cos \theta_k = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_k \cos \theta_k E_k^2, \quad k = i, r, t \quad (2.6)$$

分别写出入射、反射、透射光的辐射通量：

$$\Phi_{e,i} = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_i \cos \theta_i E_i^2 = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_i \cos \theta_i (E_{i,s}^2 + E_{i,p}^2) \quad (2.7)$$

$$\Phi_{e,r} = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_i \cos \theta_i E_r^2 = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_i \cos \theta_i (r_s^2 E_{i,s}^2 + r_p^2 E_{i,p}^2) \quad (2.8)$$

$$\Phi_{e,t} = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_t \cos \theta_t E_t^2 = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_t \cos \theta_t (t_s^2 E_{i,s}^2 + t_p^2 E_{i,p}^2) \quad (2.9)$$

^④可以使用玻璃片堆得到强度较大的偏振光

由于入射光可分解为 s 波与 p 波，我们自然想到它们俩在入射前后应该是能量守恒的，这指导我们分别作数学上的处理。对 s 波，由菲涅尔定律（这说明已经做了近似 $\mu_r = 1$ ），做减法得到：

$$\begin{aligned} & n_i \cos \theta_i E_{i,s}^2 - n_i \cos \theta_i r_{i,s}^2 E_{i,s}^2 - n_t \cos \theta_t t_s^2 E_{i,s}^2 \\ &= E_{i,s}^2 \left[n_i \cos \theta_i \left(1 - \frac{(n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t)^2}{(n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t)^2} \right) - n_t \cos \theta_t \cdot \frac{(2n_i \cos \theta_i)^2}{(n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t)^2} \right] \\ &= \frac{E_{i,s}^2}{(n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t)^2} [n_i \cos \theta_i \cdot (4n_i \cos \theta_i \cdot n_t \cos \theta_t) - 4n_t \cos \theta_t \cdot n_i^2 \cos^2 \theta_i] \\ &= 0 \end{aligned}$$

同理，考虑 p 分量，作减法可得到：

$$n_i \cos \theta_i E_{i,p}^2 - n_i \cos \theta_i r_{i,p}^2 E_{i,p}^2 - n_t \cos \theta_t t_p^2 E_{i,p}^2 = 0 \quad (2.10)$$

代入即得：

$$\Phi_{e,i} - \Phi_{e,r} - \Phi_{e,t} = 0 \implies \Phi_{e,i} = \Phi_{e,r} + \Phi_{e,t} \quad (2.11)$$

这便验证了入射前后的能量是守恒的。

由此，我们可以定义一些能量系数：

$$\begin{aligned} \text{强度反射率 } R: \quad R &= \frac{1}{2}(R_s + R_p), \quad R_s = r_s^2, \quad R_p = r_p^2 \\ \text{强度透射率 } T: \quad T &= \frac{1}{2}(T_s + T_p), \quad T_s = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right)^2 t_s^2, \quad T_p = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right)^2 t_p^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

这样，它们具有下面的性质，方便我们计算能量关系：

$$\begin{aligned} R_s + T_s &= 1, & R_p + T_p &= 1, & R + T &= 1 \\ \Phi_{e,r} &= R\Phi_{e,i}, & \Phi_{e,r,s} &= R_s\Phi_{e,i,s}, & \Phi_{e,r,p} &= R_p\Phi_{e,i,s} \\ \Phi_{e,t} &= T\Phi_{e,i}, & \Phi_{e,t,s} &= T_s\Phi_{e,i,s}, & \Phi_{e,t,p} &= T_p\Phi_{e,i,s} \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中 $\Phi_{e,r} = R\Phi_{e,i}$ 和 $\Phi_{e,t} = T\Phi_{e,i}$ 是怎么来的？

§2.5 全反射时的隐失波与穿透深度

假设现在由光密介质射向光疏介质，即 $n_i > n_t$ ，则有临界角 $\theta_C = \arcsin n_{ti}$ 。当 $\theta_i > \theta_C$ 时，发生全反射， $R = 1$, $T = 0$ ，若简单地认为没有任何透射光，是不满足电磁场边界条件的。具体来讲， \mathbf{E} 的切向分量连续告诉我们，在透射介质中一定存在振荡场，它在平行于界面上的分量具有时间频率 ω （与入射光相同）。

进一步的推导表明^⑤，在透射介质中存在一种波（称为隐失波），其波函数如下：

$$\mathbf{E} = (e^{-\beta y} \mathbf{E}_{t,0}) \cdot e^{i\left(\frac{\sin \theta_i}{n_{ti}} k_t x - \omega t\right)}, \quad \text{衰减系数 } \beta = k_t \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{n_{ti}^2} - 1} = k_i \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2} \quad (2.14)$$

这是一个不均匀波，其振幅在 y 方向上极速衰减，只在几个波长的距离上就可以忽略不计。且它同时有纵波成分和横波成分，不是简单的简谐横波。

我们将振幅下降到 $\frac{1}{e}$ 的深度称为**穿透深度**，记为 $\delta = \frac{1}{\beta}$ ，它通常在一个波长以内。

对于此过程的能量守恒问题，更详尽广泛的讨论表明（利用波印廷矢量 \mathbf{S} ），能量实际上是跨过界面往复循环，最终使透向第二介质的净流量为零。就现阶段，可以理解为能量从入射波流到隐失波再回到反射波，或者说隐失波沿入射波又绕回了反射波。

^⑤ 详见参考文献 [1] 的 Page 158

§ 2.6 古斯-亨欣位移 (Goos-Hanchen Shift)

一束被全反射的光，入射点会与（反射后的）出射点存在微小偏移（事实上既有平行偏移也有垂直偏移），称为 Goos-Hanchen Shift。较为严谨的推导表明^⑥，沿入射方向、与分界线平行的偏移量如下（又称为侧向偏移）：

$$\delta_{\perp} = \frac{\lambda_i \sin \theta_i}{\pi \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}}, \quad \Delta x = \frac{\lambda_i \tan \theta_i}{\pi \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}} = 2\delta \tan \theta_i \quad (2.15)$$

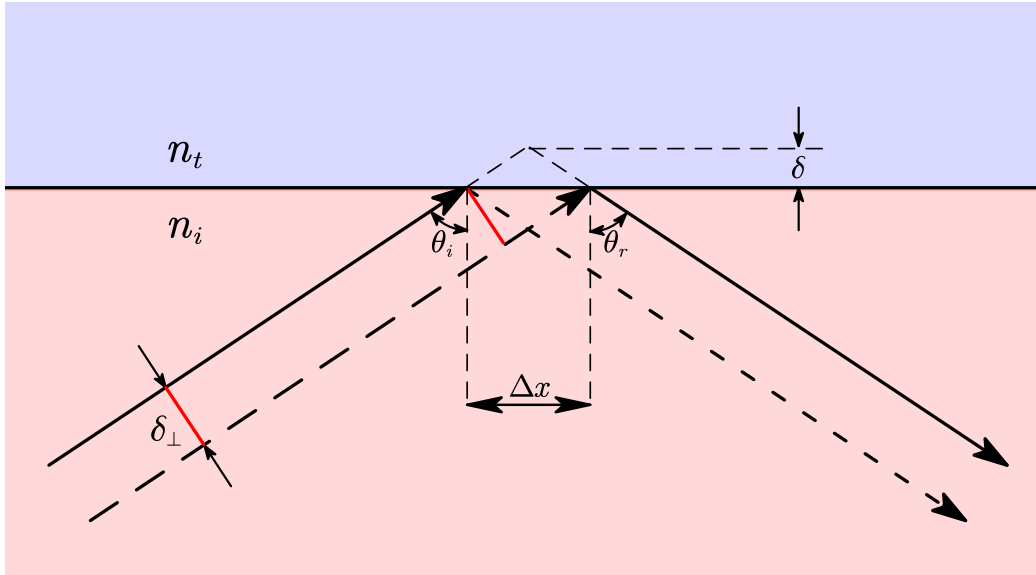


图 2.4: Goos-Hanchen Shift

§ 2.7 全反射时的相位变化

发生全内反射时^⑦，入射波 s 分量、p 分量的相位变化并非简单的 0 或 π ，下面作推导。

对入射光的波函数 $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{i,0} \cdot e^{i\theta} = \mathbf{E}_{i,0} \cdot e^{i(kx - \omega t)}$ ，若反射光满足 $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_i \cdot \lambda e^{i\delta}$ ，则表明相对于入射光，反射光的振幅变为了原来的 λ 倍，且相位增加了 δ 。特别地， $\lambda < 0$ 时，可以等价于 $\lambda > 0$ 且相位增加 $\delta + \pi$ 或 $\delta - \pi$ 。

由菲涅尔定律，我们有 $\mathbf{E}_{r,s} = r_s \mathbf{E}_{i,s}$ ， $\mathbf{E}_{r,p} = r_p \mathbf{E}_{i,p}$ 。可以发现，在全反射时， $r_s, r_p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ，并且 $|r_s| = |r_p| = 1$ ，振幅不变，于是可以令 $r = e^{i\delta}$ 。为了反解相位增量 δ ，一种自然的想法是考虑

$$e^{i\delta} = \cos \delta + i \lambda \sin \delta = a + ib \implies \delta = \arctan \left(\frac{b}{a} \right) \quad (2.16)$$

这样做虽然可行，但由于 \arctan 函数的局限性，其值域范围在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ，而 δ 的取值范围在 $[0, \pi]$ 或者 $[-\pi, 0]$ 。因此，最终得到的 δ 仅在部分区域上正确，对另一部分需做数学上的平移修正。因此，我们考虑另一种方法。在全反射时，注意到 r_s 和 r_p 的形式为 $r = \frac{a-bi}{a+bi}$ ，其中 $a, b \in \mathbb{R}$ ，有如下过程：

$$\frac{a-bi}{a+bi} = e^{i\theta} \implies e^{i\frac{\theta}{2}} = \pm \frac{a-bi}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \tan \frac{\delta}{2} = -\frac{b}{a}, \quad \frac{\delta}{2} = \arctan \left(-\frac{b}{a} \right) \quad (2.17)$$

^⑥ 详见参考文献 [2]，或者 知乎：古斯汉欣位移产生的原因，以及 知乎：古斯汉森位移的原理是什么

^⑦ 全内反射是指，由光疏介质射向光密介质且入射角大于临界角时发生的全反射现象

这样得到的 $\frac{\delta}{2}$ 便是全范围正确的，无需修正。分别令 $r = r_s, r_p$ ，代入即得：

$$\delta_{r,s} = -2 \arctan \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}}{\cos \theta_i} \right), \quad \delta_{r,p} = -2 \arctan \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}}{n_{21}^2 \cos \theta_i} \right) \quad (2.18)$$

§ 2.8 折射时的相位变化

入射光不发生全反射时，由菲涅尔定律， $t_s, t_p \in (0, \frac{2n_i}{n_i+n_t}) \subset \mathbb{R}$ ，恒为正实数，因此相位不发生变化。当入射光发生全反射时，折射光（透射光）以隐失波的形式存在，我们前面已经提过，隐失波同时含有横波纵波成分，它与入射光不再是同一种波，此时谈论相位变化自然没有意义。

§ 2.9 反射折射总结

到此，我们已经讨论了目前可能接触到的所有情况，包括光疏射向光密、光密射向光疏、小于或大于临界角时的折射反射振幅、相位以及能量关系等，终于可以给出反射折射的总结。

整个结论由菲涅尔定律推导而来，基于电磁场的边界条件和麦克斯韦方程组，从波的角度揭示了光在反射折射时发生的变化，包括振幅、相位、能量、位移等关系。

$$\text{反射波: } \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{r,s} + \mathbf{E}_{r,p} = r_s \mathbf{E}_{i,s} + r_p \mathbf{E}_{i,p}, \quad r \in \mathbb{C} \quad (2.19)$$

$$\text{透射波: } \mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{t,s} + \mathbf{E}_{t,p} = t_s \mathbf{E}_{i,s} + t_p \mathbf{E}_{i,p}, \quad t \in \mathbb{R}, \theta_i < \theta_C \quad (2.20)$$

$$\text{反射系数: } r_s = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}, \quad r_p = \frac{n_{ti}^2 \cos \theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}{n_{ti}^2 \cos \theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}} \quad (2.21)$$

$$\text{透射系数: } (-r_s) + t_s = 1, \quad r_p + t_p = 1 \quad (2.22)$$

$$\text{能量关系: } \begin{cases} R = \frac{1}{2}(R_s + R_p), \quad R_s = |r_s|^2, \quad R_p = |r_p|^2 \\ T = \frac{1}{2}(T_s + T_p), \quad T_s = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right)^2 t_s^2, \quad T_p = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right)^2 t_p^2 \\ R + T = 1, \quad R_s + T_s = 1, \quad R_p + T_p = 1 \\ \Phi_{e,r} = R \Phi_{e,i}, \quad \Phi_{e,t} = T \Phi_{e,i} \end{cases} \quad (2.23)$$

$$s \text{ 波反射相位增量: } \delta_{r,s} = \begin{cases} -\pi, & n_i < n_t \\ \begin{cases} 0, & \theta_i \in (0, \theta_C) \\ -2 \arctan \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}}{\cos \theta_i} \right), & \theta_i > \theta_C \end{cases}, & n_i > n_t \end{cases} \quad (2.24)$$

$$p \text{ 波反射相位增量: } \delta_{r,p} = \begin{cases} \begin{cases} 0, & \theta_i \in (0, \theta_B) \\ -\pi, & \theta_i \in (\theta_B, \frac{\pi}{2}) \end{cases}, & n_i < n_t \\ \begin{cases} -\pi, & \theta_i \in (0, \theta_B) \\ 0, & \theta_i \in (\theta_B, \theta_C) \\ -2 \arctan \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}}{n_{ti}^2 \cos \theta_i} \right), & \theta_i \in (\theta_C, \frac{\pi}{2}) \end{cases}, & n_i > n_t \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\text{隐失波: } \mathbf{E}_t = (e^{-\beta y} \mathbf{E}_{t,0}) \cdot e^{i \left(\frac{\sin \theta_i}{n_{ti}} k_t x - \omega t \right)}, \quad \beta = k_i \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2} = \frac{2\pi}{\lambda_i} \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}, \quad \delta = \frac{1}{\beta} \quad (2.26)$$

$$\text{Goos-Hanchen Shift: } \Delta x = 2\delta \tan \theta_i = \frac{2 \tan \theta_i}{k_i \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}} = \frac{\lambda_i \tan \theta_i}{\pi \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}} \quad (2.27)$$

另外, 如图 2.5 考虑一束光由光疏介质射向光密介质 ($n_i < n_t$), 发生透射、反射。保持各角度不变, 将透射光方向置反, 射向光疏介质, 由菲涅尔公式, 可得对称前后的振幅与能量系数变化:

$$\theta_i < \theta_B : \begin{cases} \text{反射振幅与强度:} & \frac{r'_s}{r_s} = \frac{r'_p}{r_p} = 1, \quad \frac{R'}{R} = \frac{R'_s}{R_s} = \frac{R'_p}{R_p} = 1 \\ \text{透射振幅与强度:} & \frac{t'_s}{t_s} = \frac{t'_p}{t_p} = \frac{\tan A}{\tan B}, \quad \frac{T'}{T} = \frac{T'_s}{T_s} = \frac{T'_p}{T_p} = \frac{1}{n_{ti}^2} \cdot \frac{\sin^2 2A}{\sin^2 2B} \\ \text{反射光相位增量:} & \delta_{r,s} = -\pi, \delta_{r,p} = 0, \quad \delta'_{r,s} = 0, \delta'_{r,p} = -\pi \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\theta_i > \theta_B : \begin{cases} \text{反射振幅与强度:} & \frac{r'_s}{r_s} = \frac{r'_p}{r_p} = 1, \quad \frac{R'}{R} = \frac{R'_s}{R_s} = \frac{R'_p}{R_p} = 1 \\ \text{透射振幅与强度:} & \frac{t'_s}{t_s} = \frac{t'_p}{t_p} = \frac{\tan A}{\tan B}, \quad \frac{T'}{T} = \frac{T'_s}{T_s} = \frac{T'_p}{T_p} = \frac{1}{n_{ti}^2} \cdot \frac{\sin^2 2A}{\sin^2 2B} \\ \text{反射光相位增量:} & \delta_{r,s} = -\pi, \delta_{r,p} = -\pi, \quad \delta'_{r,s} = 0, \delta'_{r,p} = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

上面最左侧的图中, 考虑光路可逆性, 假设反射光、折射光振幅不变而方向置反, 则合成出的光也应是原来的入射光 (左下角合成后为 0), 得到斯托克斯倒逆关系:

$$r' + r = 1, \quad tt' + rr' = 1 \quad (2.30)$$

由于没有涉及电场的方向, 上式对 s 波、 p 波均成立, 可以角标同时为 s , 也可以角标同时为 p 。

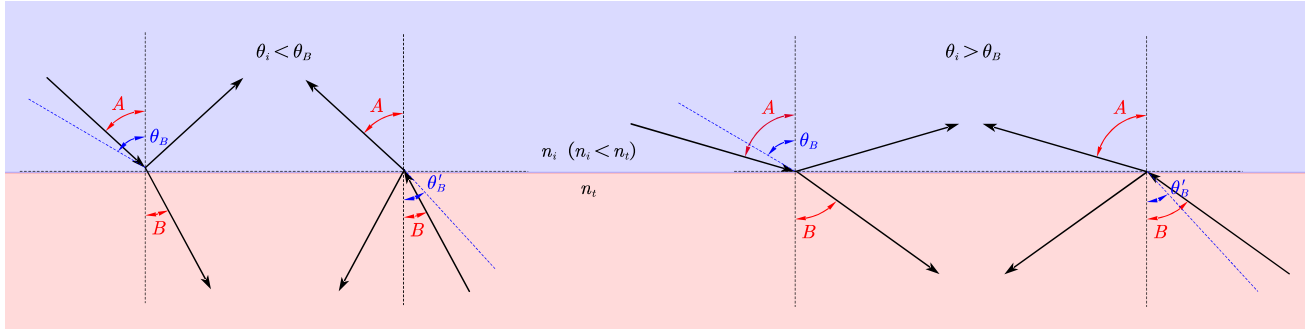


图 2.5: 光路可逆性下的振幅与能量系数

在下一页中给出了上面结论的图像。图 2.6[®] 展示了反射折射光的振幅 r_s, r_p, t_s, t_p 、能量 R_s, R_p, R 随入射角 $\tan \theta_i$ 的变化, 其中 (a) 图为空气入射玻璃 ($n_i = 1, n_t = 1.5$), (b) 图为玻璃入射空气 ($n_i = 1.5, n_t = 1$)。

图 2.7[®] 展示了反射光的 s 分量与 p 分量的相位增量 $\delta_{r,s}, \delta_{r,p}$ 随入射角 θ_i 的变化, 其中 (a) 图为空气入射玻璃 ($n_i = 1, n_t = 1.5$), (b) 图为玻璃入射空气 ($n_i = 1.5, n_t = 1$)。特别地, 当 (b) 图中 $\theta_i > \theta_C$ 时, 发生全 (内) 反射, 此时 $r_s, r_p, t_s, t_p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, 图中展示的是它们的模长, 即 $|r_s|, |r_p|, |t_s|, |t_p|$ 。

图 2.8[®] 展示了隐失波穿透深度 δ 和 GH SHift Δx 随入射角 θ_i 的变化。

[®] 源码见附录 B.2

[®] 源码见附录 B.3

[®] 源码见附录 B.4

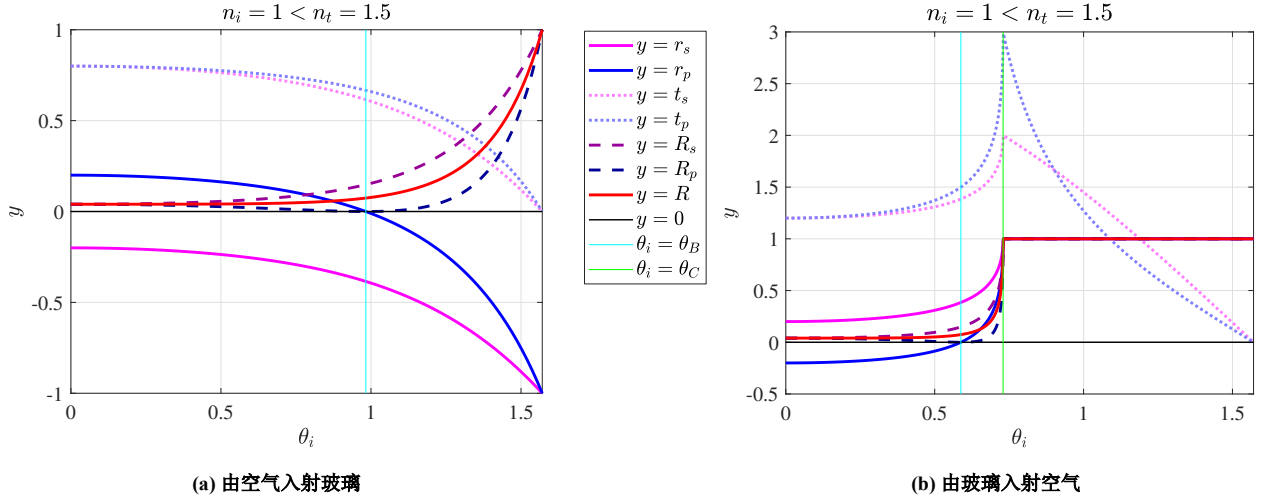


图 2.6: 反射折射光的振幅与能量变化

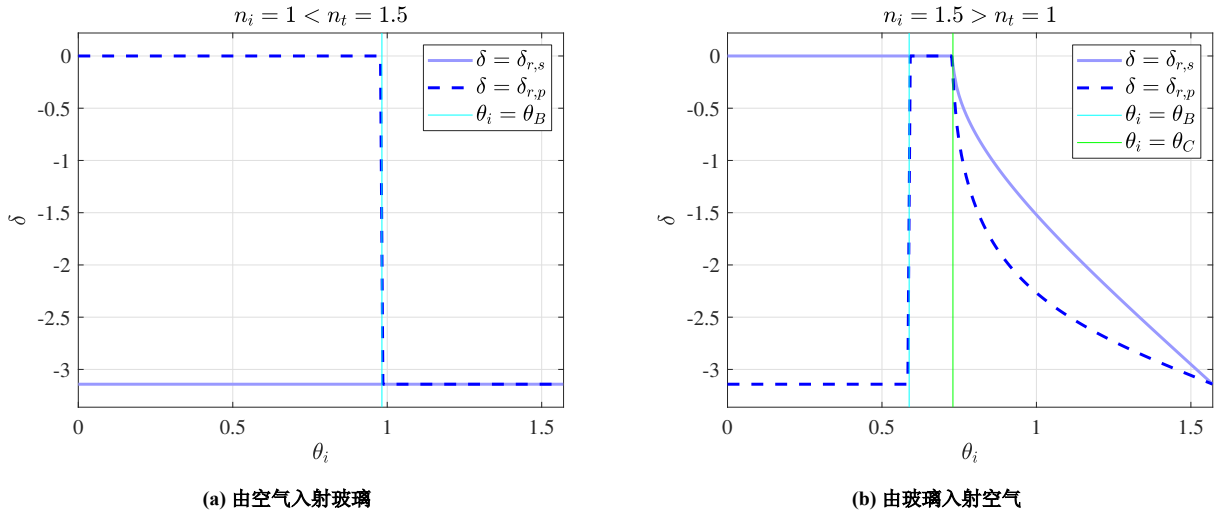


图 2.7: 反射光 s 分量与 p 分量的相位增量

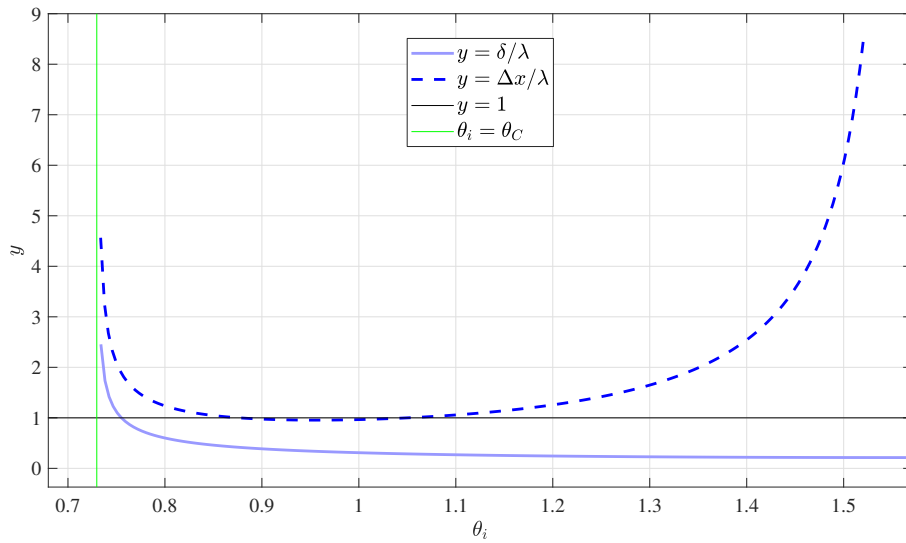


图 2.8: 隐失波穿透深度与 GH Shift (玻璃入射空气)

第3章 光的干涉

通常将平面波与球面波^①是光波的基元，当两个光源（或两束光波）间存在某种关联，波的叠加会引起强度的重新分布，若相互叠加的波满足某些特定条件，使得叠加后产生了稳定的强度分布，则称发生了光的干涉。

换句话说，研究干涉现象，就是讨论当两个或多个（光）波在空间中的某区域相遇时，它们如何相互叠加，会产生怎样的新波动现象，了解各个波的特性（振幅、频率、相位、波的类型等）如何影响叠加后的波的性质。

§3.1 叠加原理

只要波在空间中某点相遇，就会发生叠加，但不一定会产生干涉。也就是说，叠加是无条件的，干涉则要求形成稳定的、新的强度分布。

回想波动方程^②，它的一个重要特性是：方程是线性的。因此，如果 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ 各自是波动方程的解，那么它们的任意线性组合也是方程的解，即：

$$\psi = \sum a_i \psi_i \quad (3.1)$$

这个性质称为叠加原理，它表面：介质中任何一点的合扰动是各个单独波组分的代数和。另外，需要注意，叠加原理仅在均匀、线性、各向同性的介质中成立，有极大振幅的波（能量极大），无论是纵波（声波）或横波（电磁波），都可以产生非线性的效应，此时叠加原理不再适用。

在许多情况下，无需考虑光波的矢量性，例如多个光波的电场方向都始终在一条直线上时，可以将电场 \mathbf{E} 处理为具有正负的标量 E 。本章我们研究的都是基于上述处理的光波，这表明它们的传播方向都在同一平面内，这样即降低了讨论的难度，又具有相当高的普适性和推广性（利用旋转对称性或平移对称性）。

§3.2 同频率光波的干涉

3.2.1 两个同频波源的干涉

两源干涉原理：

现在，我们讨论均匀介质的两个波源（频率相同）的干涉情况，为了提高普适性，我们并不事先假设波源的类似，它可以是平面波、球面波或柱面波。设两波源分别为 S_A, S_B ，波函数分别为 ψ_A, ψ_B ，不妨假设它们都沿各自的正向传播，借助相矢量的思想^③，将位矢 \mathbf{x} （和初相位 ε ）分离后，它们的波函数可写为：

$$E_A = E_{A,0} \cdot e^{i(-\omega t + \alpha_A)}, \quad E_B = E_{B,0} \cdot e^{i(-\omega t + \alpha_B)} \quad (3.2)$$

其中 $\alpha_A = \alpha_A(\mathbf{x})$, $\alpha_B = \alpha_B(\mathbf{x})$ 是位矢的函数， $E_{A,0}, E_{B,0}$ 可能是位矢的函数。对于平面中任意一点 P ，合扰动为：

$$E = E_A + E_B = E_{A,0} \cdot e^{i(-\omega t + \alpha_A)} + E_{B,0} \cdot e^{i(-\omega t + \alpha_B)} \quad (3.3)$$

^①即平面电磁波与球面电磁波，详见附录 A.6，也可参考 知乎：球面光波与平面光波 (<https://www.zhihu.com/question/267133640/answer/319531458>) 和 知乎：高斯光束，平面波，球面波三者间有什么关系 (<https://www.zhihu.com/question/534511391/answer/2501271591>)

^②详见 A.5

^③详见附录 A.4

作数学上的处理，得到合扰动：

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t + \alpha)} \quad (3.4)$$

$$E_0 = \sqrt{E_{A,0}^2 + E_{B,0}^2 + 2E_{A,0}E_{B,0}\cos(\alpha_A - \alpha_B)}, \quad \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{E_0} (E_{A,0} \sin \alpha_A + E_{B,0} \sin \alpha_B) \\ \cos \alpha = \frac{1}{E_0} (E_{A,0} \cos \alpha_A + E_{B,0} \cos \alpha_B) \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin \left[\frac{1}{E_0} (E_{A,0} \sin \alpha_A + E_{B,0} \sin \alpha_B) \right] & , \cos \alpha \geq 0 \\ \pi - \arcsin \left[\frac{1}{E_0} (E_{A,0} \sin \alpha_A + E_{B,0} \sin \alpha_B) \right] & , \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

E_0 与 α 的取值可以由相矢量相加来理解。在给定的位置 P ， A 波的相矢量为 $E_{A,0} \angle \alpha_A$ ， B 波的相矢量为 $E_{B,0} \angle \alpha_B$ ，在复平面中将它们相加（平行四边形法则），即得到合扰动的相矢量 $E_0 \angle \alpha$ ，这样， E_0 的大小就是合相矢量的模长， α 是合相矢量与 x 轴的夹角。

在光学中，常用干涉条纹对比度 γ 来描述干涉情况是否明显，它定义为：

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{E_{0,\max}^2 - E_{0,\min}^2}{E_{0,\max}^2 + E_{0,\min}^2} \quad (3.7)$$

其中 I 表示光强，也即光通量密度。在两波源产生的干涉中，有：

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\alpha_A - \alpha_B) \quad (3.8)$$

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}, \quad I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (3.9)$$

则对比度为：

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt{\frac{I_1}{I_2}} + \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{E_{A,0,\max}^2}{E_{B,0,\max}^2}} + \sqrt{\frac{E_{B,0,\max}^2}{E_{A,0,\max}^2}}} \quad (3.10)$$

因此，两波源电场的振幅越接近，干涉对比度越高，也就越明显。

示例一：两球面波

如图 3.1 (a)，考虑两个相同的球面波源在 x - y 平面上的干涉情况，相同的波源（理想单频波源）保证了两束波的物理参数相同，如波长、频率和振幅等。设两波源位置分别为 x_{OA} ， x_{OB} ，简记 $r_1 = |x_{AP}|$ 和 $r_2 = |x_{BP}|$ ，则波函数可写为：

$$E_A = \frac{A}{r_1} \cdot e^{i(-\omega t + kr_1 + \varepsilon_A)}, \quad E_{A,0} = \frac{A}{r_1}, \quad \alpha_A = kr_1 + \varepsilon_A \quad (3.11)$$

$$E_B = \frac{B}{r_2} \cdot e^{i(-\omega t + kr_2 + \varepsilon_B)}, \quad E_{B,0} = \frac{B}{r_2}, \quad \alpha_B = kr_2 + \varepsilon_B \quad (3.12)$$

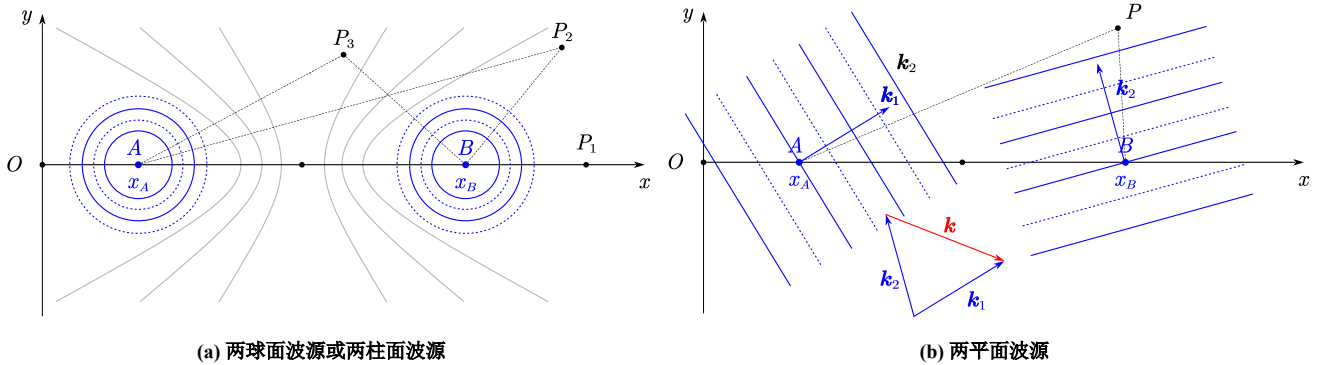


图 3.1: 两个同频波源的干涉

方便起见, 不妨令 $\varepsilon_A = \varepsilon_B$, 则合扰动为:

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t + \alpha)}, \quad E_0 = \sqrt{\frac{A^2}{r_1^2} + \frac{B^2}{r_2^2} + \frac{2AB}{r_1 r_2} \cos(k(r_1 - r_2))} \quad (3.13)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{r_1} \sin \alpha_A + \frac{B}{r_2} \sin \alpha_B \right), \quad \cos \alpha = \frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{r_1} \cos \alpha_A + \frac{B}{r_2} \cos \alpha_B \right) \quad (3.14)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin \left[\frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{r_1} \sin \alpha_A + \frac{B}{r_2} \sin \alpha_B \right) \right] & , \cos \alpha \geq 0 \\ \pi - \arcsin \left[\frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{r_1} \sin \alpha_A + \frac{B}{r_2} \sin \alpha_B \right) \right] & , \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

对于可见光, 其波长在 nm 级别, 空间频率 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 极高。为方便可视化, 我们取波长 $\lambda = 0.4\pi$ m, 即 $k = 5$ 的微波, 并令振幅系数 $A = 50$, $B = 50$, 作出图像。图 3.2 展示了单个波源在平面上的振荡情况 ($t = 0$)。对两波源的干涉^④, 我们令两波源位置分别为 $(-2, 0)$, $(2, 0)$, 作出图像, 图 3.3 展示了它们的干涉情况 ($t = 0$)^⑤。单波源和双波源随时间的振动详见 GIF 动图链接 <https://www.123pan.com/s/0y0pTd-QwKj3>。

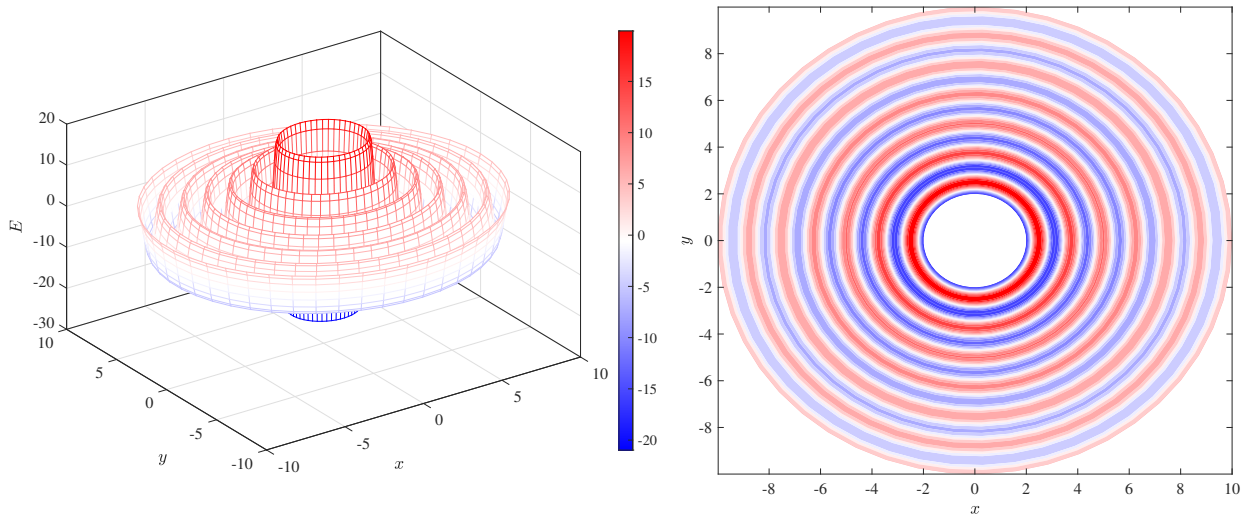


图 3.2: 单个球面波源在平面上的振荡情况

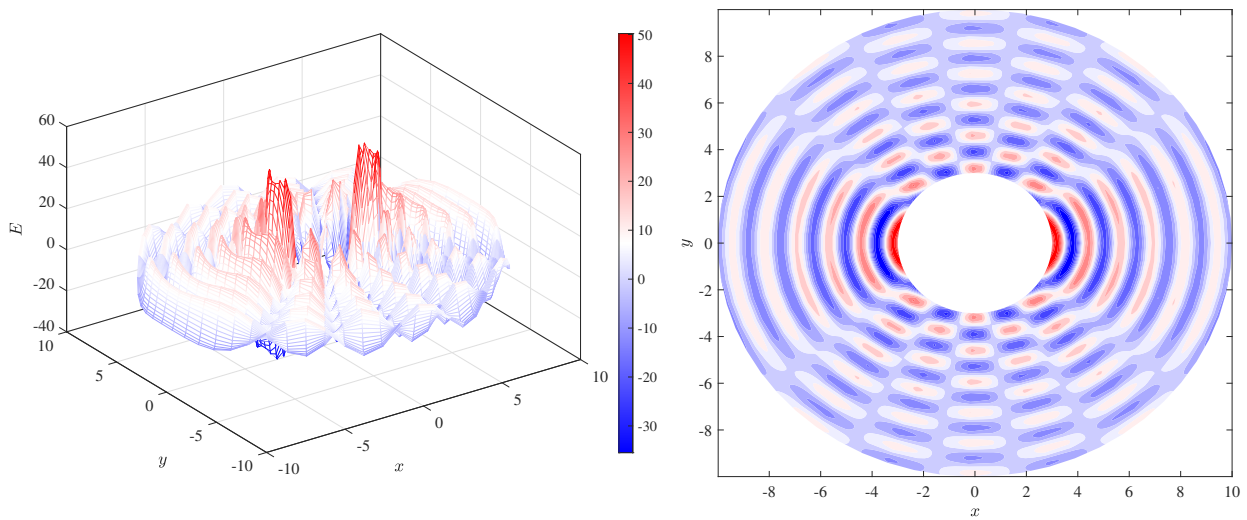


图 3.3: 两个球面波源在平面上的干涉情况

^④源码见附录 B.5

^⑤源码见附录 B.6

当点 P 离波源极远时, 近似有 $\frac{r_1}{r_2} = 1$ (这与近似有 $r_1 - r_2 = 0$ 不同), 将距离记为 r , 则振幅的位置分布为 $E_0 = \frac{1}{r} \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(k(r_1 - r_2))}$ 。若可以认为 $\frac{1}{r}$ 近似不变, 则此时, 具有相同振幅大小的点, 等价于 $\cos(k(r_1 - r_2))$ 具有相同的值, 也即:

$$|r_1 - r_2| = \frac{1}{k}(\theta + 2\pi n), \quad \theta \in [0, 2\pi), n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

对每个给定的 n , 上述方程表示一条双曲线 (焦点为两波源), 因此上述方程构成一个双曲线族 (空间中构成旋转双曲线族), 如图 3.1 (a) 中的灰色曲线所示。特别地, 令 $\theta = 0$ 可以得到最大振幅对应的双曲线族, 令 $\theta = \pi$, 得到最小振幅对应的双曲线族。

由于球面波的旋转对称性, 只需绕 x 轴旋转一圈, 即可得到整个空间上的振幅分布情况, 也即两波源干涉情况。振幅的位置分布是较为重要的内容, 在后文的干涉实验部分, 我们将再次讨论这个问题。

示例二: 两柱面波

考虑两柱面波的干涉情况, 其中柱体的高与 $x-y$ 平面垂直。容易发现, 这与球面波在 $x-y$ 平面的行为是相同的, 仅需修改波源的振幅衰减系数。同样地, 不妨令初相位 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, 得到合扰动:

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t + \alpha)}, \quad E_0 = \sqrt{\frac{A^2}{r_1} + \frac{B^2}{r_2} + \frac{2AB}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos(k(r_1 - r_2))} \quad (3.17)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{\sqrt{r_1}} \sin \alpha_A + \frac{B}{\sqrt{r_2}} \sin \alpha_B \right), \quad \cos \alpha = \frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{\sqrt{r_1}} \cos \alpha_A + \frac{B}{\sqrt{r_2}} \cos \alpha_B \right) \quad (3.18)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin \left[\frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{\sqrt{r_1}} \sin \alpha_A + \frac{B}{\sqrt{r_2}} \sin \alpha_B \right) \right] & , \cos \alpha \geq 0 \\ \pi - \arcsin \left[\frac{1}{E_0} \left(\frac{A}{\sqrt{r_1}} \sin \alpha_A + \frac{B}{\sqrt{r_2}} \sin \alpha_B \right) \right] & , \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

由于柱面波的平移对称性, 只需沿 z 轴进行平移, 即可得到整个空间上的干涉情况。在平面内的其它性质与球面波类似。

示例三: 两平面波

考虑两平面波的干涉情况, 如图 3.1 (b), 平面波函数为:

$$E_A = E_{A,0} \cdot e^{i(-\omega t + k r_1 + \varepsilon_A)}, \quad \alpha_A = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_{AP} + \varepsilon_A \quad (3.20)$$

$$E_B = E_{B,0} \cdot e^{i(-\omega t + k r_2 + \varepsilon_B)}, \quad \alpha_B = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_{BP} + \varepsilon_B \quad (3.21)$$

令 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, 得到合扰动:

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t + \alpha)} \quad (3.22)$$

$$E_0 = \sqrt{E_{A,0}^2 + E_{B,0}^2 + 2 \cos(\Delta \alpha)}, \quad \Delta \alpha = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_B - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_A) \quad (3.23)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{E_0} [E_{A,0} \sin(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_{AP}) + E_{B,0} \sin(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_{BP})] \quad (3.24)$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{E_0} [E_{A,0} \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_{AP}) + E_{B,0} \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_{BP})] \quad (3.25)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin \left[\frac{1}{E_0} (E_{A,0} \sin \alpha_A + E_{B,0} \sin \alpha_B) \right] & , \cos \alpha \geq 0 \\ \pi - \arcsin \left[\frac{1}{E_0} (E_{A,0} \sin \alpha_A + E_{B,0} \sin \alpha_B) \right] & , \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

由于 $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_A$ 和 $\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_B$ 是定值, 而 $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ 构成一个新的传播矢量, 因此合成后的波仍是平面波 (但不均匀, 振幅是位置的函数), 或者说每个等相面仍构成一个平面。

类似地, 由平面波的平移对称性, 沿 z 轴平移即可得全空间的合成情况。

3.2.2 多个同频波源的干涉

上面的结论容易推广到任意 n 个扰动叠加，即：

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t + \alpha)} \quad (3.27)$$

$$E_0 = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n E_{i,0} \sin \alpha_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n E_{i,0} \cos \alpha_i\right)^2} \quad (3.28)$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n E_{i,0}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2E_{i,0}E_{j,0} \cos(\alpha_i - \alpha_j)}, \quad (3.29)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{E_0} \sum_{i=1}^n E_{i,0} \sin \alpha_i, \quad \cos \alpha = \frac{1}{E_0} \sum_{i=1}^n E_{i,0} \cos \alpha_i \quad (3.30)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{1}{E_0} \sum_{i=1}^n E_{i,0} \sin \alpha_i\right) & , \cos \alpha \geq 0 \\ \pi - \arcsin\left(\frac{1}{E_0} \sum_{i=1}^n E_{i,0} \sin \alpha_i\right) & , \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

$$I = \sum_{i=1}^n I_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2\sqrt{I_i I_j} \cos(\alpha_i - \alpha_j) \quad (3.32)$$

§ 3.3 不同频率光的干涉

§ 3.4 产生干涉的实际条件

前面我们已经提到，在叠加（或干涉）问题中，电场的振幅通常只是位置的函数，而与时间无关，其实这也是观察到干涉图样的必要条件。观察干涉图样，无非是用照片（视频等同于照片）、人眼、辐射计以及类似的传感器，它们都有一定的“曝光时间”，我们只能观察到在曝光时间内，光强或辐射强度的平均值，即：

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos(\Delta\alpha) dt \quad (3.33)$$

其中 τ 为仪器的曝光时间。对可见光而言，其振荡周期 $T = \frac{\lambda}{v}$ 在 10^{-15} s 级别，因此 τ 通常远大于 T ，这样，我们只能观察到平均光强，而无法观察到光强的瞬时变化。如果 $\Delta\alpha$ 与时间无关，或者在曝光时间内几乎保持不变，那么就能得到（观察到）稳定的干涉图样。否则恒有 $I = I_1 + I_2$ ，是平凡的叠加，称为非相干叠加。

另外，若两波源的振动方向垂直，电场也仅是平凡的叠加，而不会产生干涉。因此，干涉现象要求两波源振动方向不能垂直。

以能发射单频波的普通光源为例，光是由光源中的原子、分子发生能级跃迁时发出的，跃迁时发出的波列长都有限，且初相位随机，持续时间 τ_0 通常短于 10 ns，在此时段内，光场振荡约百万次。对于探测设备来讲，10 ns 通常极短，远远小于曝光时间。由波列初相位的随机性，在曝光时间内的上万个波列的平均下，积分项 $\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos(\Delta\alpha) dt$ 为 0， $I = I_1 + I_2$ ，导致观察到的强度分布仅为平凡的叠加，无法观察到干涉。上面的普通光源，不断发出初相位随机的波列，并且波列持续时间 τ_0 极短（相对于曝光时间），不能得到任何干涉图样，称为**时间不相干**。称波列持续时间 τ_0 为相干时间，称波列长度 $l_0 = c\tau_0$ 为相干长度。

有一些光源，它们具有一定的发光宽度，不能看作理想的点光源。当光源宽度较大时，光源不同部分发出的光的叠加，会导致条纹的对比度降低（甚至为 0），称为**空间不相干**。

还有一些光源是多频光源（或具有一定宽度的光谱），波长差别极小时（通常是 10^{-2} nm 级），不同波长相互叠加导致条纹对比度降低，波长差别较大时， $\cos(\Delta\alpha)$ 的周期远小于 τ ，积分项为零，也只能发生非相干叠

加。以两频光源为例，发出时间角频率为 ω_1 和 ω_2 的光，则在同一位置，相位差 $\Delta\alpha = (k_2 - k_1)x - (\omega_2 - \omega_1)t$ 是 t 的函数，当曝光时间 τ 远大于调制周期 $T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ 时，积分项 $\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos(\Delta\alpha) dt$ 趋于 0，得到 $I = I_1 + I_2$ ，也是非相干叠加。

总而言之，影响相干性的条件大致有三个方面：波列持续时间 τ_0 、光源宽度 d 和发光光谱 $i = i(\lambda)$ 。现实中没有任何一种光源在上面三个方面都做到极好，因此，在设计干涉实验时，需要依据选定光源的特性，选择合适的实验方案，或者依据实验弱化了哪些因素的影响，选择合适的光源。

§3.5 分波前干涉

波前，即波面，也称波阵面或等相面。“分波前”干涉，是依据惠更斯原理，将一个波面分为两个（或多个）波面，最终产生干涉现象。

3.5.1 杨氏双缝干涉实验

杨氏双缝干涉装置如图 3.4 (a)， S 为一狭缝， S_1 和 S_2 为一对狭缝，最右侧的屏为观察屏。由惠更斯原理，一平面波（可借助激光器和透镜产生）传播到狭缝 S 时，以柱面波形式出射，在遇到双缝屏时，分化为两个柱面波继续前进，从而产生干涉，并在观察屏上显现出来。与杨氏实验原理类似的有洛埃德镜实验、菲涅尔双棱镜、菲涅尔双面镜等，它们的 GIF 动图见链接 <https://www.123pan.com/s/0y0pTd-5wKj3>。

如果杨氏实验中双缝屏上的双缝对称分布，一般可认为分化的两个柱面波具有相同的初相位和振幅。装置中各参量的典型值是：

$$d = 100 \mu\text{m}, R = 5 \text{ cm}, D = 1 \text{ m}, L = 4 \text{ cm}, \quad D \gg L \gg d \quad (3.34)$$

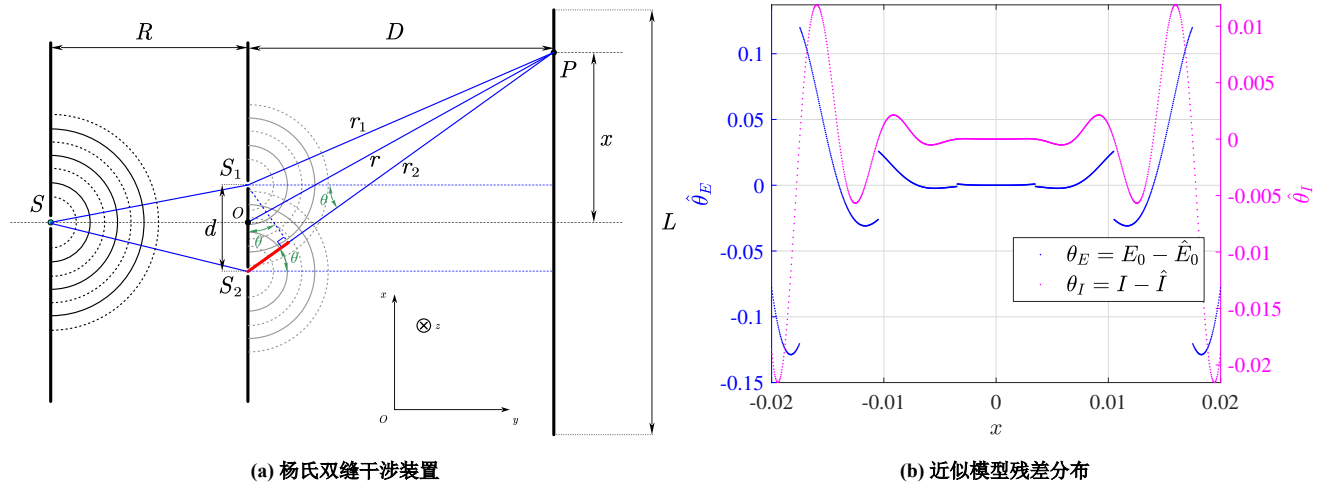


图 3.4: 杨氏双缝干涉装置与近似模型残差分布

设通过双缝屏后，两柱面波的振幅系数相同，都为 A ，真空介电常量 $\varepsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ ，真空磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ ，则两波的光强度分别为

$$I_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{1,0}^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{A^2}{r_1}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{A^2}{r_2} \quad (3.35)$$

那么，接受屏上的振幅和强度分布为：

$$E_0 = A \sqrt{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{2}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)\right)}, \quad I = A^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)\right)}{\sqrt{r_1 r_2}} \right] \quad (3.36)$$

装置参数在典型值附近时，可以有近似：

$$\frac{r_1}{D} = \frac{r_2}{D} = 1, \quad r_2 - r_1 = \frac{d}{\sin \theta} = \frac{d}{\sin \theta} = \frac{xd}{D}, \quad I_1 = I_2 \quad (3.37)$$

得到近似后的振幅和强度分布如下，其中 $\Delta x = \frac{\lambda D}{b}$ 称为条纹间距。

$$E_0(x) = \frac{\sqrt{2}A}{\sqrt{D}} \cdot \sqrt{1 + \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda D}x\right)} = \frac{\sqrt{2}A}{\sqrt{D}} \cdot \sqrt{1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{\Delta x}\right)} \quad (3.38)$$

$$I(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{A^2}{D} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda D}x\right) \right] = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{A^2}{D} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{\Delta x}\right) \right] \quad (3.39)$$

图 3.5^⑥ 展示了未近似和近似时，振幅、光强在接受屏上的分布情况，图 3.4 (b) 是近似与未近似模型的残差分布，其中装置参数采取典型值。计算得到一些误差参数（对横坐标均匀离散 1000 个点）如下^⑦：

$$\begin{aligned} 1 - R_{E_0}^2 &= 0.0000030505, & 1 - R_I^2 &= 0.0000024290 \\ 1 - R_{\text{adj}, E_0}^2 &= 0.0000030536, & 1 - R_{\text{adj}, I}^2 &= 0.0000024314 \\ \text{MAPE}_{E_0} &= 0.0020522069, & \text{MAPE}_I &= 0.00415721554 \\ \text{MyMAPE}_{E_0} &= 0.0017294036, & \text{MyMAPE}_I &= 0.0010723717 \\ \text{RMSE}_{E_0} &= 0.0534542000, & \text{RMSE}_I &= 0.0071984799 \\ \text{fitness}_{\text{adj}, E_0} &= 0.0534543632, & \text{fitness}_{\text{adj}, I} &= 0.0071984975 \\ \text{SAAE}_{E_0} &= 0.0005185186, & \text{SAAE}_I &= 0.0006493885 \end{aligned} \quad (3.40)$$

由图 3.4 (b)，图 3.5 和列出的误差参数可以看到，近似效果很好。

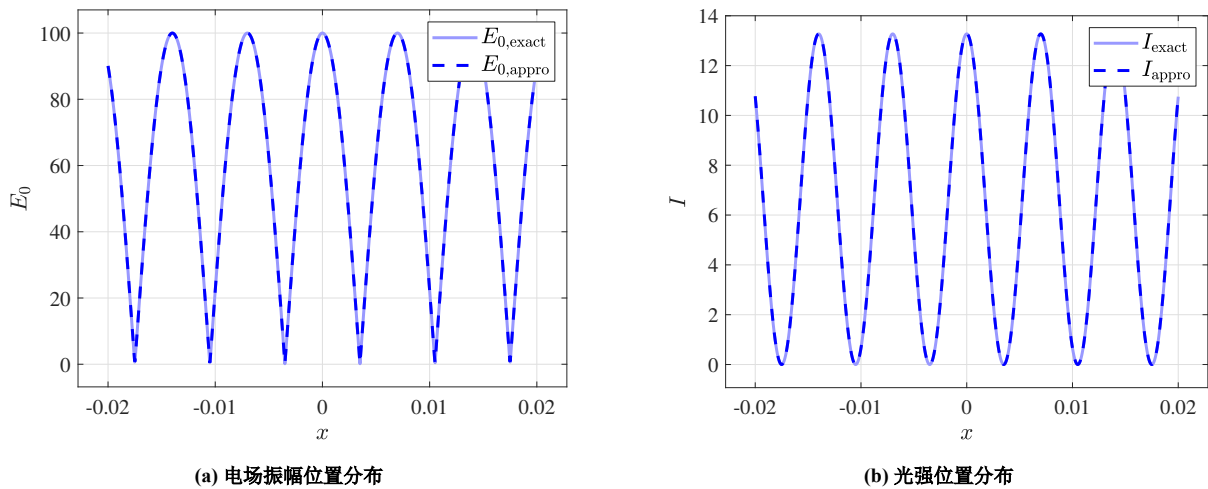


图 3.5: 近似模型与非近似模型的比较

杨氏双缝干涉的特点：

- (1) 非定域干涉：在干涉场中离双孔不太近也不太远的区域处处有干涉
- (2) 自相干：相干光波来自同一波源
- (3) 定态干涉：振幅（或强度）在干涉场中的分布仅与位置有关，与时间无关

白光光源与其他补充内容详见 [PHY C15: Double Slit Interference](#)、[University of Louisville: Double Slit Interference](#) 以及 [知乎：双缝干涉实验](#)，我们不多赘述。从另一个角度，也可以利用双曲线的定义杨氏干涉的精确模型 + 近似模型，详见 [知乎：杨氏干涉的条纹间距](#)。

^⑥图 3.4 (b) 与图 3.5 源码见附录 B.7

^⑦这些误差参数的定义详见 [YiDing > Notes > Else > Goodness of Fit](#)

3.5.2 杨氏实验中光源位置和宽度对干涉条纹的影响

为提高分析效率，此节的推导都采用近似模型。接受屏上相邻明（暗）条纹的间距 Δx 为：

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{d} \quad (3.41)$$

取 $\lambda = 700.0 \text{ nm}$ 的红光， $\Delta x = 7 \text{ mm}$ ，可被人眼分辨。称 $\frac{\Delta x}{2}$ 为条纹宽度，此时条纹宽度为 3.5 mm 。

下面依次讨论光源位置、光源宽度对干涉条纹的影响。先考虑理想点光源的微小移动引起的干涉条纹移动。当点光源位于中轴线上时，0 级明纹也在轴上，假设光源 S 向下移动距离 $|\delta_s|$ ，也即向上移动 $(-\delta_s)$ ，在近似条件 3.37 下，以及 $R \gg d$ 时近似有 $R_1 - R_2 = \frac{d(-\delta_s)}{R}$ ，得到 0 级明纹向上移动的距离 δ_x 如下，其中负号表示两者移动方向相反。

$$\delta_x = -\frac{D}{R}\delta_s \quad (3.42)$$

实际光源并非理想的点光源，而是有一定的光源宽度，虽然对干涉条纹位置影响不大，但会对条纹对比度产生明显的影响。理想点光源不在中央时，屏幕上的强度分布大小可以近似不变，仅是发生上下平移。记点光源位置为 δ_s ，在公式 3.38 中作映射 $x \rightarrow x - \delta_x$ ，并简记接受屏上的最大光强为 $I_{\max} = 2\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \cdot \frac{A^2}{r}$ ，简记 x 前的系数为 $\eta = \frac{2\pi}{\Delta x}$ ，得到新的强度分布：

$$I(x) = \frac{I_{\max}}{2} [1 + \cos(\eta(x - \delta_x))] = \frac{I_{\max}}{2} \left[1 + \cos\left(\eta x + \eta \frac{D}{R}\delta_s\right) \right] \quad (3.43)$$

$$= \frac{I_{\max}}{2} \left[1 + \cos(\eta x) \cos\left(\eta \frac{D}{R}\delta_s\right) - \sin(\eta x) \sin\left(\eta \frac{D}{R}\delta_s\right) \right], \quad \eta = \frac{2\pi}{\Delta x} \quad (3.44)$$

设光源在中央且宽度为 b （即发光区域在 $[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$ ），光源均匀发光（事实上这个条件比较苛刻，现实中的激光器无法做到，需要对光线进行处理），屏幕上的强度分布 $I(x, b)$ 和条纹对比度为：

$$I(x, b) = \frac{I_{\max}}{2b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[1 + \cos(\eta x) \cos\left(\eta \frac{D}{R}\delta_s\right) - \sin(\eta x) \sin\left(\eta \frac{D}{R}\delta_s\right) \right] d\delta_s \quad (3.45)$$

$$= \frac{I_{\max}}{2} \left[1 + \frac{\sin\left(\frac{\eta D}{2R}b\right)}{\frac{\eta D}{2R}b} \cdot \cos(\eta x) \right] = \frac{I_{\max}}{2} \left[1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda R}b\right)}{\frac{\pi d}{\lambda R}b} \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{\Delta x}\right) \right] \quad (3.46)$$

$$\gamma = \gamma(b) = \left| \frac{\sin u}{u} \right| = \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda R}b\right)}{\frac{\pi d}{\lambda R}b} \right| \quad (3.47)$$

其中 $u = \frac{\pi d}{\lambda R}b$ 。强度分布 $I(x, b)$ 与干涉条纹对比度 $\gamma(b)$ 如图 3.6 所示[®]，当 $b = \frac{\lambda R}{d}$ 时，对比度为 0，完全看不到干涉条纹，将其称为光源极限宽度，此时认为光源完全不相干。

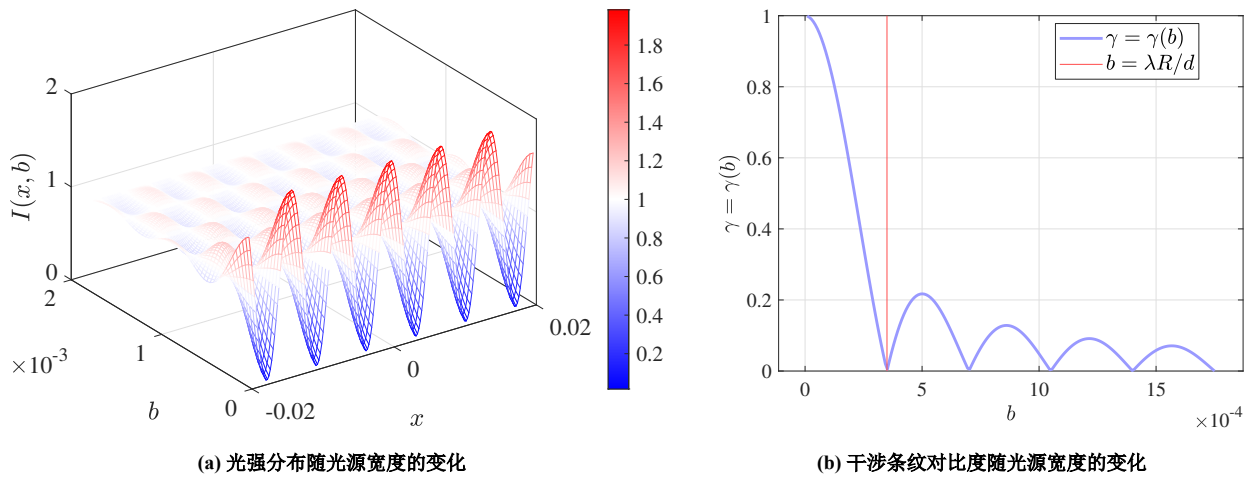


图 3.6: 光源宽度对干涉条纹的影响

[®] 源码见附录 B.8

§3.6 分振幅干涉

3.6.1 多光束薄膜干涉

如图 3.7 (a) 所示, 一入射光接近垂直入射到一薄膜时 ($\theta_i < \theta_B$), 发生多次反射、透射, 下面讨论其能量与干涉情况。

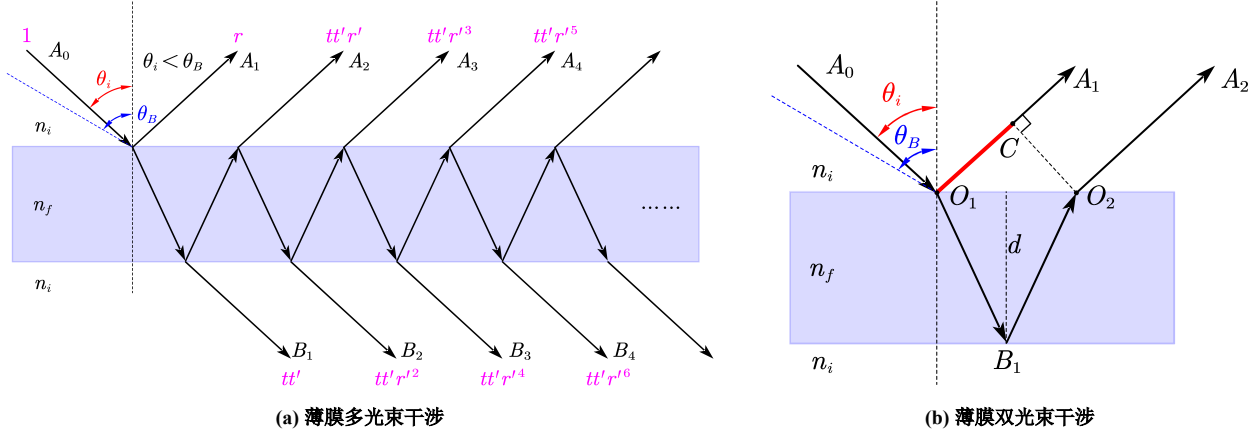


图 3.7: 薄膜干涉

由于没有发生全反射, 相位变化是平凡的 (透射无相变, 反射只能是 $-\pi$ 或零), 而反射光的相位变化已经包含在振幅反射系数 r 中了 (由其正负表示)。因此, 在分析多光束干涉时, 只需考虑各光 (有正负) 的振幅以及光程差, 处理波函数的表达式的叠加即可。

记相邻两束反射 (透射) 光的光程差为 Δl , 光程差带来的相位差为 δ (无需考虑反射相位突变, 因为它涵盖在了振幅的正负中), 由图 3.7 (b) 所示, 可求得:

$$\Delta l = l_2 - l_1 = 2n_f \cdot \overline{O_1 B_1} - n_i \cdot \overline{O_1 C} = \frac{2n_f d}{\cos \theta_t} - 2n_i \sin \theta_i \tan \theta_t d = 2n_f d \cos \theta_f \quad (3.48)$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_i} \Delta l = \frac{4\pi n_f d \cos \theta_f}{\lambda_i} \quad (3.49)$$

由公式 2.30 (斯托克斯倒逆关系), $r + r' = 1$, $tt' + rr' = 1$, 结合等比数列极限 ($n \rightarrow \infty$), 可得反射波的总振幅系数 r_A 、透射波的总振幅系数 t_B :

$$r_A = r + tt'r'e^{i\delta} (1 + r'^2 e^{i\delta} + r'^4 e^{2i\delta} + \dots) = r + \frac{tt'r'e^{i\delta}}{1 - r'^2 e^{i\delta}} = r \left(\frac{1 - e^{i\delta}}{1 - r'^2 e^{i\delta}} \right) \quad (3.50)$$

$$t_B = tt' (1 + r'^2 e^{i\delta} + r'^4 e^{2i\delta} + \dots) = \frac{tt'}{1 - r'^2 e^{i\delta}} = \frac{1 - r^2}{1 - r'^2 e^{i\delta}} \quad (3.51)$$

由于上述推导与角标 s 或 p 无关, 因此对 s 波和 p 波都成立。

也即得到:

$$r_{A,s} = \frac{\mathbf{E}_{r,s}}{\mathbf{E}_{i,s}} = r_s \left(\frac{1 - e^{i\delta}}{1 - r_s^2 e^{i\delta}} \right), \quad r_{B,p} = \frac{\mathbf{E}_{r,p}}{\mathbf{E}_{i,p}} = r_p \left(\frac{1 - e^{i\delta}}{1 - r_p^2 e^{i\delta}} \right) \quad (3.52)$$

$$t_{B,s} = \frac{\mathbf{E}_{t,s}}{\mathbf{E}_{i,s}} = \frac{1 - r_s^2}{1 - r_s^2 e^{i\delta}}, \quad t_{B,p} = \frac{\mathbf{E}_{t,p}}{\mathbf{E}_{i,p}} = \frac{1 - r_p^2}{1 - r_p^2 e^{i\delta}} \quad (3.53)$$

据此, 可以定义光学经过薄膜时的能量系数 $R_{F-P,s}$, $R_{F-P,p}$, $T_{F-P,s}$, $T_{F-P,p}$ (与菲涅尔公式中的能量系数

类似，但物理意义不同)：

$$R_{F-P,s} = |r_{A,s}|^2 = \frac{4R_s \sin^2 \frac{\delta}{2}}{(1 - R_s)^2}, \quad R_{F-P,p} = |r_{A,p}|^2 = \frac{4R_p \sin^2 \frac{\delta}{2}}{(1 - R_p)^2} \quad (3.54)$$

$$T_{F-P,s} = \frac{n_1 \cos \theta_1}{n_3 \cos \theta_3} |t_{B,s}|^2 = \frac{(1 - R_s)^2}{(1 - R_s \cos \delta)^2 + R_s^2 \sin^2 \delta} \quad (3.55)$$

$$T_{F-P,p} = \frac{n_1 \cos \theta_1}{n_3 \cos \theta_3} |t_{B,p}|^2 = \frac{(1 - R_p)^2}{(1 - R_p \cos \delta)^2 + R_p^2 \sin^2 \delta} \quad (3.56)$$

其中 $\theta_1 = \theta_3 = \theta_i$, $n_1 = n_3 = n_i$ 。角标 $F - P$ 指 Fabry-Perot Interferometer (法布里-珀罗干涉仪)，是一种利用薄膜产生干涉现象的仪器。定义 $F_s = \frac{4R_s}{(1-R_s)^2}$, $F_p = \frac{4R_p}{(1-R_p)^2}$ ，称为精细度，则上式可简写为：

$$R_{F-P,s} = \frac{F_s \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + F_s \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad R_{F-P,p} = \frac{F_p \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + F_p \sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad (3.57)$$

$$T_{F-P,s} = \frac{1}{1 + F_s \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad T_{F-P,p} = \frac{1}{1 + F_p \sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad (3.58)$$

$$\delta = \frac{4\pi n_f d \cos \theta_f}{\lambda_i}, \quad F_s = \frac{4R_s}{(1 - R_s)^2}, \quad F_p = \frac{4R_p}{(1 - R_p)^2} \quad (3.59)$$

其中 n_f 是薄膜的折射率，容易验证上式满足能量守恒。在实际操作中，基本都会选取接近垂直的入射光，此时 s 波 p 波 (近似) 具有相同的能量系数 $R = R_s = R_p$ ，因此又常写为下面的式子：

$$R_{F-P} = \frac{F \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad T_{F-P} = \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad F = \frac{4R}{(1 - R)^2}, \quad \delta = \frac{4\pi n_f d \cos \theta_f}{\lambda_i} \quad (3.60)$$

$T_{F-P} = T_{F-P}(F, \delta)$ 的图像如下所示^⑨， F 越大，透射光的对比度越高，在干涉现象中形成的条纹越明显，且 F 增大时，透射峰的宽度减小，亮条纹变细变锐利。

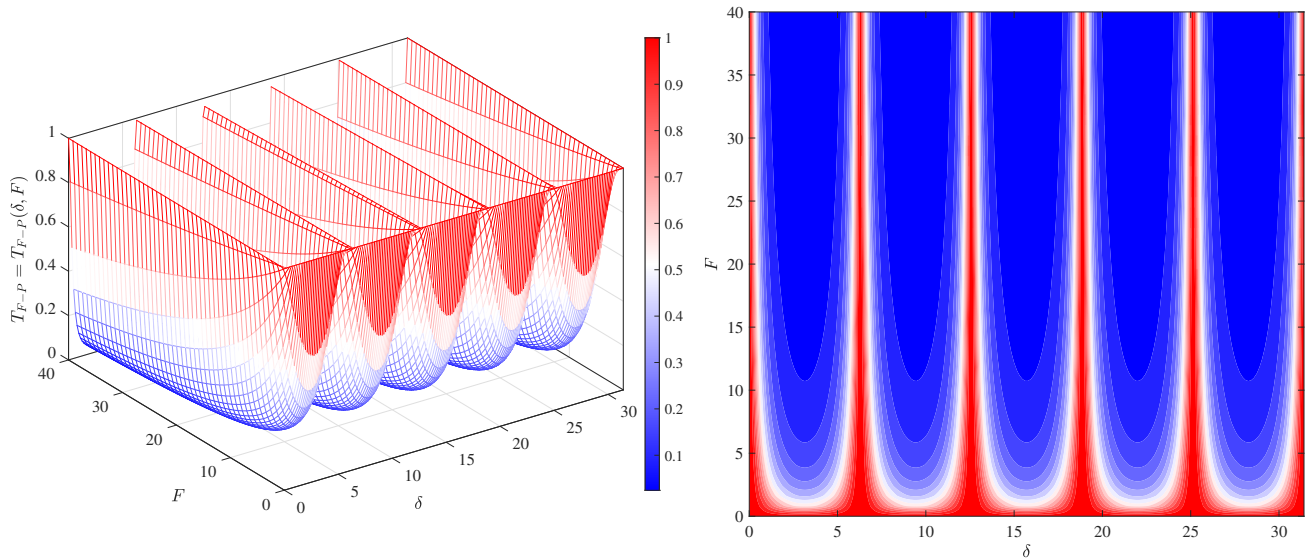


图 3.8: 精细度对透射率的影响

实际中常基于上面理论，设计出增透膜、增反膜等薄膜，实现光的选择性透射、反射。如果遇到，直接利用反射相位突变进行分析即可。

更多有关多光束薄膜干涉 (法布里-珀罗干涉仪 Fabry-Perot Interferometer) 的内容见 [Fabry-Perot Interferometer \(https://zhuanlan.zhihu.com/p/579184206\)](https://zhuanlan.zhihu.com/p/579184206)，以及 [F-P 干涉仪 \(https://zhuanlan.zhihu.com/p/453978087\)](https://zhuanlan.zhihu.com/p/453978087)。

^⑨ 源码见附录 B.9

3.6.2 双光束薄膜干涉

当振幅反射率 r 较小时, A 光的振幅衰减很快, 可以仅考虑双光束干涉 (A_1 与 A_2), 而忽略剩余反射光带来的影响, 如图 3.7 (b)。实际操作中, 也常用薄透镜将两束出射光汇聚于一点, 而不会引起附加的相位差。反射后光线 O_1A_1 与 O_2A_2 的光程差 Δl 为:

$$\Delta l = l_2 - l_1 = 2n_f \cdot \overline{O_1B_1} - n_i \cdot \overline{O_1C} = \frac{2n_f d}{\cos \theta_t} - 2n_i \sin \theta_i \tan \theta_t d = 2n_f d \cos \theta_f \quad (3.61)$$

即 A_2 比 A_1 多走了 Δl 的光程, 相当于相位增量 $-\omega \frac{\Delta l}{c}$, 算上反射时 A_2 与 A_1 之间的相位增量 $-\pi$ (事实上 s 波是 $-\pi$ 而 p 波是 π), 总光程差 OPD (Optical Path Difference, 常记为 ΔL) (A_2 的减去 A_1) 和总相位增量 $\Delta \alpha$ 为:

$$\Delta L = 2n_f d \cos \theta_f + \frac{\lambda}{2}, \quad \Delta \alpha = - \left(1 + \frac{4n_f \cos \theta_t}{\lambda} \cdot d \right) \pi = - \left[1 + \frac{4n_f \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta_i}{n_{ti}} \right)^2}}{\lambda} \cdot d \right] \pi \quad (3.62)$$

随参数 θ_i 、 d 的改变, 不同位置上会有不同的 ΔL , 得到不同的振幅大小, 从而产生干涉条纹。

3.6.3 等倾干涉

等倾干涉实验装置如图 3.9 所示, 其干涉条纹特征为:

- (1) 亮条纹: $\Delta L = k\lambda \Rightarrow \cos \theta_t = \frac{\lambda}{2n_f d} \cdot (k - \frac{1}{2})$, $k = 1, 2, 3, \dots$
- (2) 暗条纹: $\Delta L = (k + \frac{1}{2})\lambda \Rightarrow \cos \theta_t = \frac{\lambda}{2n_f d} \cdot k$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$
- (3) r 较小时, 等倾双光束强度近似相等, 干涉条纹对比度接近 1
- (4) 称中心暗条纹为 0 级暗纹, 往外依次是 1 级亮纹、1 级暗纹、2 级亮纹、2 级暗纹……
- (5) 等倾条纹内疏外密。这是因为:

$$\cos \theta_{t,n+1} - \cos \theta_{t,n} = \frac{\lambda}{2n_f d}, \quad \frac{\cos \theta_{t,n+1} - \cos \theta_{t,n}}{\theta_{t,n+1} - \theta_{t,n}} \approx \frac{d \cos \theta}{d\theta} = -\sin \theta_n \quad (3.63)$$

$$\Rightarrow \Delta r = (r_{n+1} - r_n) \propto (\theta_{t,n+1} - \theta_n) = -\frac{\lambda}{2d \sin \theta_{t,n}} \quad (3.64)$$

随着 r 的增大, 入射光指在薄膜 (半反射镜) 上的点由中心向外移动, θ_i 增大, θ_t 增大, 于是 $|\Delta r|$ 减小, 条纹逐渐变密。

- (6) 增加薄膜厚度, 条纹向外移动。薄膜厚度连续增大时, 中心位置强度周期性变化, 且不断生出新条纹向外移动, 可以利用这一特点精确测量薄膜厚度的改变量。

使用扩展光源 (有宽度光源) 时, 条纹对比度不受影响, 但条纹的强度增大, 干涉图样更加明亮。

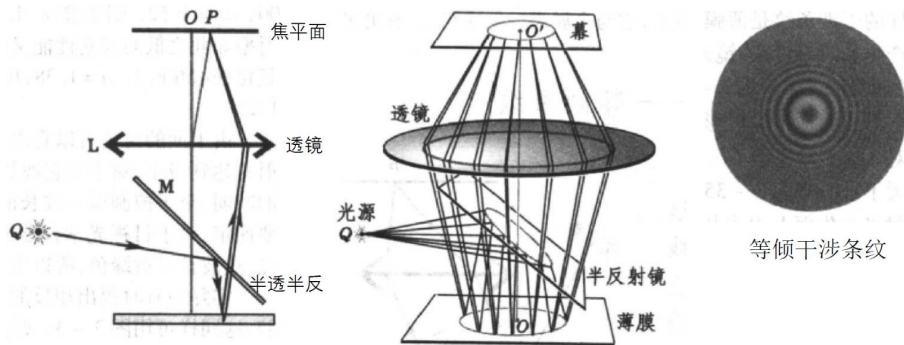


图 3.9: 等倾干涉实验装置

等倾干涉实验动图见链接 <https://www.123pan.com/s/0y0pTd-MgKj3>。

3.6.4 等厚干涉

等厚干涉，也称等厚条纹干涉，是指由薄膜厚度不均匀而引起的干涉现象，它的主要变量（参数）是光学厚度 $n_f d$ 而不是 θ_i （即 θ_t ）。等厚干涉产生的条纹一般是等厚位置的条纹，例如劈尖干涉、牛顿环等。

劈尖干涉：

两块（几乎）平行的玻璃板，夹角为 θ 极小，中间是空气层，即薄膜是空气，观察反射光的干涉现象。由 $R_{F-P} = \frac{F \sin^2(\frac{\delta}{2})}{1 + F \sin^2(\frac{\delta}{2})}$ 可知，明条纹对应 $\frac{\delta}{2} = (k + \frac{1}{2})\pi$ ，这等价于 $2n_f d \cos \theta_f + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$ ，而暗条纹对应 $\frac{\delta}{2} = k\pi$ 。作近似 $n_f = 1$ ， $\cos \theta_f = 1$ ，得到：

$$\text{明条纹: } d = (1 + 2k) \cdot \frac{\lambda}{4}, \quad \text{暗条纹: } d = (2k) \cdot \frac{\lambda}{4}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.65)$$

$$\text{相邻亮（暗）纹: } \Delta d = \frac{\lambda}{2}, \quad \Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} \quad (3.66)$$

可借此求出夹在玻璃板之间引起 θ 角的细小物体的直径。

牛顿环：

把一个曲率半径很大的凸透镜至于平面玻璃片上，两者接触的地方形成厚度不均匀的空气薄膜，得到的干涉条纹是一系列同心圆环。设凸透镜的半径为 R ，以接触点为圆心 O ，类似劈尖干涉中的近似，得到：

$$\text{明条纹: } r = \sqrt{\left(k + \frac{1}{2}\right) R \lambda}, \quad \text{暗条纹: } r = \sqrt{k R \lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.67)$$

中心为 0 级暗纹，往外级数增大，干涉条纹逐渐变密。

§ 3.7 迈克尔逊干涉

我们需要认识到，绝大多数的干涉现象，本质都是空间上两个（甚至多个）不同位置的球面波源（或其他类型的波）在某点的叠加。随着目标位置点 P 的移动，发生叠加的两波（两束光）的 OPD（即 ΔL ）不断改变，得到不同的振幅大小，从而产生干涉图样。本节所介绍的几种干涉，其本质也是如此，只是具体实现方式不同。

3.7.1 单色光源迈克尔逊干涉：

迈克尔逊干涉仪如图 3.10 所示，图中反射镜 M_1 与 M'_2 （虚镜）水平（此时的干涉现象类似等倾干涉），下方是接收屏或接受仪，图中的虚线光路表示出射向无穷远处（不被观察屏接收），或振幅较小而可以忽略的光线。

可以证明，从出射开始，分束所得到的两束光的空间光程差为 $\Delta l = 2d \cos \theta$ ，其中 θ 是光束射向反射镜 M 的入射角（光源平行出射时， $\theta = 0$ ）。再考虑上在分束镜 G 处发生的相位突变（半波损失），与等倾干涉的结论类似，此时的条纹内疏外密，类似等倾干涉时的图 3.9。

$$\begin{aligned} \text{OPD:} \quad & \Delta L = 2d \cos \theta + \frac{\lambda}{2} \\ \text{亮条纹:} \quad & \Delta L = k\lambda \implies \cos \theta_k = \frac{\lambda}{2n_f d} \cdot \left(k - \frac{1}{2}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ \text{暗条纹:} \quad & \Delta L = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \implies \cos \theta_k = \frac{\lambda}{2n_f d} \cdot k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \text{条纹间距:} \quad & |\Delta r| \propto \frac{\lambda}{2d \sin \theta_k} \end{aligned} \quad (3.68)$$

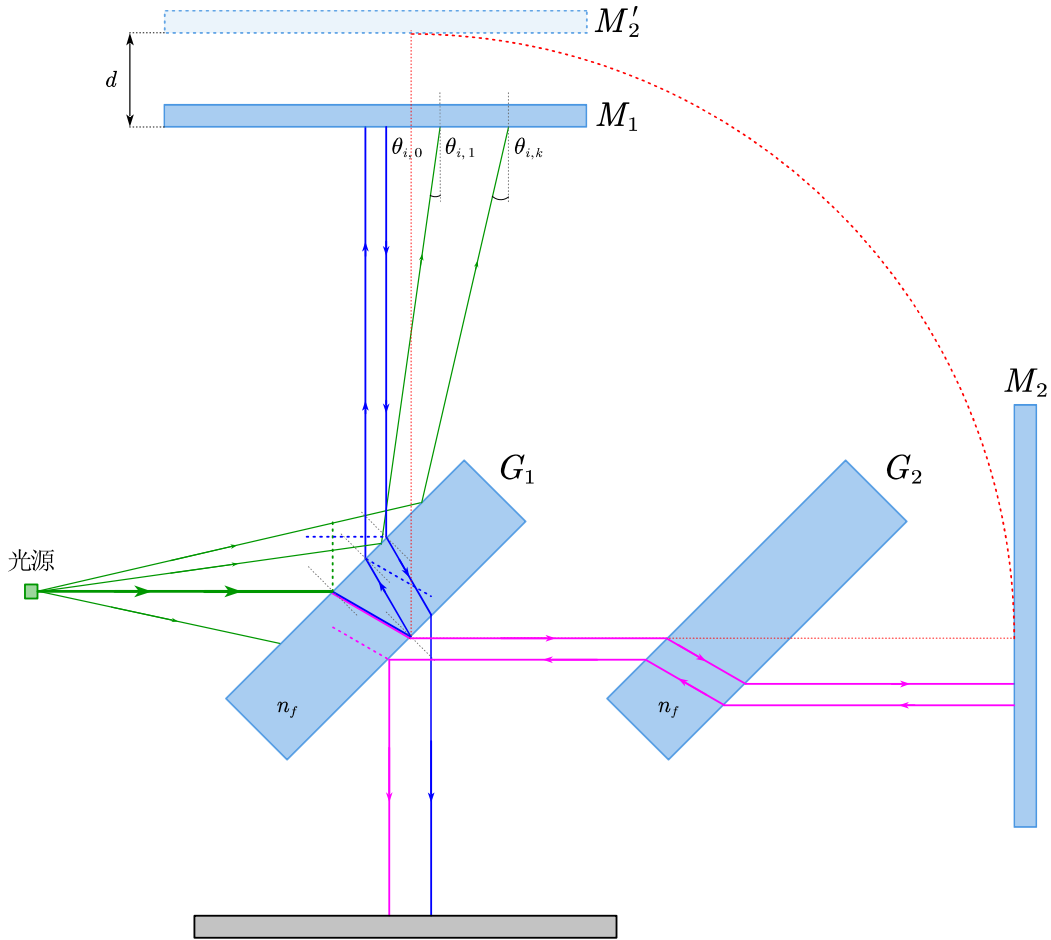


图 3.10: 迈克尔逊干涉仪

对给定的第 k 条亮纹，在图 3.10 的情况下 (M_1 在 M'_2 下方)，将 M_1 向上移动， d 减小， $\cos \theta_k$ 增加， θ_k 减小，条纹向中心移动，直至完全收缩并消失。并且，随着 d 越来越小，条纹间距 $|\Delta r|$ 越来越大，直至 $d \rightarrow 0$ 时 $|\Delta r| \rightarrow \infty$ ，中心条纹布满整个观察屏。继续向上移动 M_1 ，“穿过” M'_2 后，干涉条纹重新出现。

记中心点 ($\theta_0 = 0$) 处的条纹为中心 (零号) 条纹 (它可能既不是极大值也不是极小值)，对于给定的 d ，得到与中心条纹相差 λ 的第 k 号条纹：

$$2d(1 - \cos \theta_k) = k\lambda \implies \theta_k = \sqrt{\frac{k\lambda}{d}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.69)$$

关于如何将迈克尔逊干涉仪看作是具有两个不同位置波源的仪器，详见参考文献 [1] Page 516，了解这一部分有助于我们理解干涉仪器的内涵。当 M_1 与 M'_2 不平行时，会发生类似等厚干涉的现象，出现平行直条纹。并且，从数学上可以证明，调整 M_1 和 M'_2 的方向，可以产生直线、圆、椭圆、抛物线或双曲线形的干涉条纹，这一部分我们不深究。

移动反射镜 M_1 、 M_2 ，或者在光路中插入其它介质，可以改变光程差，从而使干涉条纹发生移动。当光程差 OPD 的改变量达到 λ 时，每条干涉条纹都会移动一个条纹间距，移动到原先的相邻条纹处，这种方法可以用来测量镜面的微小移动距离，也可以测量插入介质的折射率。设镜面移动的距离或插入介质的厚度为 Δd ，则有：

$$2n\Delta d = N\lambda_0 \quad (3.70)$$

其中 n 是插入介质的折射率 (移动镜面时相当于 $n = 1$)， λ_0 是光源发出的光在空气中的波长， N 是移动的条纹数。

3.7.2 多色光源迈克尔逊干涉:

假设光源是双色光源, 且两色的强度相同, 对任意给定的 ΔL (相当于给定位置 P), 我们有:

$$I_1(\Delta L) = 2I_0 [1 + \cos(k_1 \Delta L)], \quad I_2(\Delta L) = 2I_0 [1 + \cos(k_2 \Delta L)] \quad (3.71)$$

$$\Rightarrow I(\Delta L) = 4I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{\Delta k}{2} \Delta L\right) \cos(\bar{k} \Delta L) \right], \quad \Delta k = k_1 - k_2, \quad \bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (3.72)$$

其中 Δk 称为调制 (空间角) 频率, \bar{k} 为平均 (空间角) 频率, $\Delta k \ll \bar{k}$ 时, 可以观察到条纹对比度 γ 随 ΔL 周期性变化。例如, $\lambda_1 = 550.0 \text{ nm}$, $\lambda_2 = 555.0 \text{ nm}$ 时的情况如图 3.11 所示。

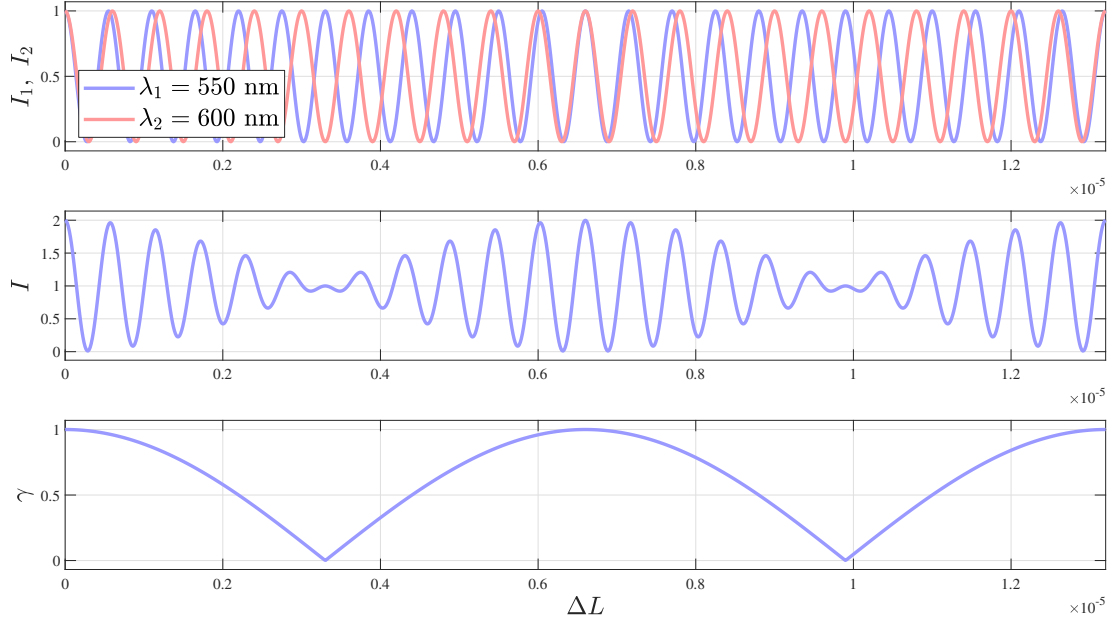


图 3.11: 双色光源的对比度分布情况

上面考虑的是线光谱, 对于连续光谱, 有光谱密度 $i = i(\lambda)$, 总光强 $I = \int i(\lambda) d\lambda$ 。当然, 也可以用空间角频率 k 作变量。考虑以 k_0 为中心, 宽为 Δk 的均匀光谱 $i(k)$, 我们有:

$$i(k) = \begin{cases} \frac{I_0}{\Delta k}, & |k - k_0| < \frac{\Delta k}{2} \\ 0, & |k - k_0| > \frac{\Delta k}{2} \end{cases}, \quad \gamma = \gamma(\Delta L) = \left| \frac{\sin\left(\frac{\Delta k \Delta L}{2}\right)}{\frac{\Delta k \Delta L}{2}} \right| \quad (3.73)$$

$$I = \int i(k) [1 + \cos(k \Delta L)] dk = I_0 \left[1 + \frac{\sin\left(\frac{\Delta k \Delta L}{2}\right)}{\frac{\Delta k \Delta L}{2}} \cdot \cos(k_0 \Delta L) \right] \quad (3.74)$$

上面的结果与 3.5.2 节 “杨氏实验中光源位置和宽度对干涉条纹的影响” 中光源宽度对干涉条纹的影响完全同构, 图像也是同构的。在讨论光源宽度时, 我们定义了光源极限宽度 $b_{\max} = \frac{\lambda R}{d}$, 类似地, 在这里我们定义最大光程差 $\Delta L_{\max} = \frac{2\pi}{\Delta k} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}$, 这是条纹对比度第一次下降到 0 时对应的光程差。

3.7.3 马赫-曾德尔干涉

原理与迈克尔逊干涉仪类似, 我们不多赘述。

§ 3.8 光场的空间相干性与时间相干性

§ 3.9 多光束干涉

§ 3.10 激光

参考文献

- [1] (美) Eugene Hecht 著; 秦克诚, 林福成译. *Optics*. 电子工业出版社, 北京, 5 edition, 6 2019.
- [2] 罗昌由. 电磁可控 goos-hänchen 位移理论研究. 博士论文, 湖南大学, 2015.

附录 A 波理论

光的真实本性是光学的全部讨论的中心问题，在本书中我们从头到尾都得对待这个问题。“光究竟是一种波动现象还是一种粒子现象？”这个似乎干脆利索的问题，远比它初看之下复杂得多。

因为对光的经典讨论和量子力学讨论都要用到波的数学描述，本章要为这两种表述所需要的东西打好基础。下面叙说的想法将用于一切物理波，从一杯茶的表面张力波，到从某个遥远的星系照到我们的光脉冲。

A.1 一维波

A.1.1 n 维波的概念

一维波指的是在一维空间中传播的波，或者可以看作在一维空间中传播的波。例如一束光在空间中传播，沿其传播方向建立 x 轴，则有 $E = E_0 e^{kx - \omega t}$ (具有正负)，这束光便可视为一维波。

一维波函数的最一般的形式：

$$\psi(x, t) = f(x - vt) = g(kx - \omega t) \quad (\text{A.1})$$

具体而言，对于给定的波形 (波的形状)，我们只需令 $t = 0$ ，拍一张“照片” (例如 $\psi(x) = \frac{3}{10x^2 + 1}$)，得到 $\psi(x, 0) = f(x)$ ，然后将 $f(x)$ 中的 x 换为 $x - vt$ ，即可得到一个以速度 v (可为负) 向 x 轴正方向运动的波 $\psi(x, t) = f(x - vt) = g(kx - \omega t)$ 。

绳索的上下振动是在第二个维度上的，但振动导出的波仍是一维波。

A.1.2 波动方程

线性、各向同性、无损耗介质中的波动方程 (也称波动微分方程) 为：

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (\text{A.2})$$

如果代表一个波的函数 ψ 是这个方程的解，它将同时是 $(x - vt)$ 的函数 (即 $kx - \omega t$ 的函数)，它还是一个可以同时 x 和 t 以非平庸方式求二次微商的函数。特别地，我们有结论： ψ 是一维波函数 $\iff \psi$ 是 $(x - vt)$ 的二次可微函数 $\iff \psi$ 是 $(kx - \omega t)$ 的二次可微函数。

A.2 谐波

A.2.1 相位和相速度

考虑任何一个一维波函数 $\psi(x, t) = A \cos(\phi(x, t)) = A \cos(kx - \omega t + \phi_0)$ ，其中 $\phi = kx - \omega t + \phi_0$ 称为相位， ϕ_0 称为初相 (也常用 ε 表示)。只要相位中的 kx 与 ωt 符号相反，即 $(kx - \omega t)$ 或 $(\omega t - kx)$ ，则波沿 x 轴正方向传播，否则沿 x 轴负方向。

A.2.2 谐波的概念

谐波，指简谐波、正弦波，其轮廓图是正弦曲线，是最简单的波形。在后续的傅里叶变换一节我们可以看到，任何波形都可以由谐波叠加合成，因此谐波具有特殊的意义。考虑如下波形：

$$\psi(x, t)|_{t=0} = \psi(x) = A \sin kx = f(x) \quad (\text{A.3})$$

其中 $k > 0$ 是一个常数, 称为传播数 (空间角频率), 且 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (λ 为波长), A 称为波的振幅。

谐波函数有多种等价形式, 其中最常见的是:

$$\psi(x, t) = A \sin(kx \mp \omega t), \quad \psi(x, t) = A \sin(\kappa(x \mp vt)) \quad (\text{A.4})$$

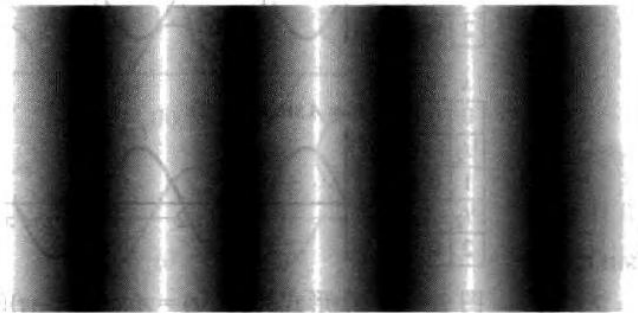
在本书中, 如无特殊需求, 我们都采用前者, 也即 $\psi = A \sin(kx \mp \omega t)$, 有时也采用 $\psi = A \cos(kx \mp \omega t)$ 。当然, 三维谐波 (在三维空间中传播的谐波) 可写为:

$$\psi = \psi_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \mp \omega t) \quad (\text{A.5})$$

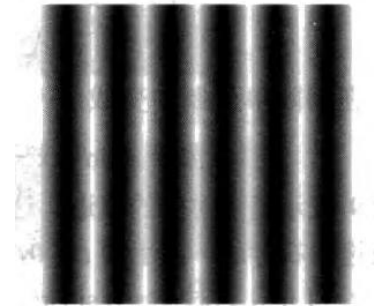
A.2.3 空间频率 κ 与空间角频率 k

光学中常用的长度单位是纳米 nm、微米 μm 和埃米 $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ 。本文规定, 若无特殊情况, 一般用 λ 表示波长, τ 或 T 表示周期, $\nu = \frac{1}{\tau}$ 表示时间频率, $\omega = 2\pi\nu$ 表示时间角频率, 空间频率 (波数) $\kappa = \frac{1}{\lambda}$, 空间角频率 (传播数) $k = 2\pi\kappa$ 。

光学信息可以以一种周期性方式散布在空间里, 很像一个波的截图, 我们可以将其视作静止 ($v = 0$) 的波, 并用空间频率 κ 来描述它们。



(a) 空间频率较低的正弦亮度分布



(b) 空间频率较高的正弦亮度分布

图 A.12: 正弦亮度分布

A.3 复数表示

在之后的学习会看到, 用余弦或正弦函数描述波函数会带来很多不便, 而复数表示在大多时候显得尤为有效, 因此引入复数表示是极有必要的。在本书中, 为表示某个变量 (物理量) 是复数, 我们在其上加一波浪号, 例如 \tilde{z} 或 \tilde{E} 。

习惯上, 我们用复数的实部来描述谐波, 例如将 $\psi = A \cos(kx - \omega t + \varepsilon)$ 写为 $\psi = \text{Re}[Ae^{i(kx - \omega t + \varepsilon)}]$ 。为了方便, 常常把 Re 省略不写, 即:

$$\psi(x, t) = Ae^{i\theta} = Ae^{i(kx - \omega t + \varepsilon)} \quad (\text{A.6})$$

在后文, 我们也采用此简写。需要时刻谨记, 真实的波是实部, 虚部没有物理意义。

另外, 虽然复数表示在物理中十分常见, 但应用它时需要时刻小心, 只有运算限于加法、减法、乘除实数、对实变量进行微分和积分时, 才能恢复实部。乘法运算 (包括数乘、点乘和叉乘) 必须仅与实数进行, 否则会得出错误结论^⑩。例如 $\text{Re} \tilde{z}_1 \cdot \text{Re} \tilde{z}_2 \neq \text{Re}(\tilde{z}_1 \cdot \tilde{z}_2)$, $\text{Re} \tilde{\mathbf{A}}_1 \cdot \text{Re} \tilde{\mathbf{A}}_2 \neq \text{Re}(\tilde{\mathbf{A}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_2)$ 。

^⑩这里有一个疑问, 在 2.7 节 (全反射时的相位变化), 推导反射光相位变化时, 我们利用了 $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_i \cdot \lambda e^{i\delta}$ 所带来的相位变化, 如何保证或说明这样做能得到正确的结果?

A.4 相矢量

相矢量（也称复振幅、旋转矢量）是将谐波 $\psi = Ae^{i(kx - \omega t + \varepsilon)}$ 中的位置变量 x 或时间变量 t 分离出来，以得到复平面上的矢量，常用于计算振幅^①等。

A.4.1 分离 x 并随 t 旋转

考虑谐波 $\psi = \psi_0 e^{i(kx - \omega t + \varepsilon)}$ ，对于任意给定的 x ，令 $\alpha = kx + \varepsilon$ ，谐波可写为 $\psi = \psi_0 e^{i(-\omega t + \alpha)} = (\psi_0 e^{i\alpha}) \cdot e^{i(-\omega t)}$ 是 t 的函数，则此时的相矢量定义为 $\psi_0 \angle \alpha = \psi_0 e^{i\alpha}$ ，也常记为 $\psi_0 \angle \alpha$ 。

相矢量是复平面中的一个矢量（即一个复数）， ψ_0 表示其模长， α 表示其幅角，真实的波是它在实轴上的投影。对于 $\psi = \psi_0 e^{i(-\omega t + \alpha)}$ ，随着 t 增大，波的相位减小，代表相矢量在复平面中顺时针旋转， ωt 即为沿顺时针旋转的角度。对于 $\psi = \psi_0 e^{i(\omega t + \alpha)}$ （也即沿 x 轴负方向传播的波），相矢量在复平面中逆时针旋转， ωt 即为沿逆时针转过的角度。也就是说，将 x （以及初相 ε ）分离为相矢量后，我们可以方便的研究 x 这一点上，波关于时间 t 的变化情况。

当然，对于波的正弦表示 $\psi = A \sin(kx - \omega t + \varepsilon)$ ，也可令 $\alpha = kx + \varepsilon$ ，得到相矢量 $\psi_0 \angle \alpha = \psi_0 e^{i\alpha}$ ，只不过此时真实的波是它在虚轴上的投影。

例如，振动 $E_1 = 5 \cos(-\omega t)$ ， $E_2 = 10 \sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$ 的相矢量分别为 $5 \angle 0$ ， $10 \angle \frac{\pi}{3}$ ，前者顺时针旋转，向实轴投影，后者逆时针旋转，向虚轴投影。

A.4.2 分离 t 并随 x 旋转

类似地，考虑谐波 $\psi = \psi_0 e^{i(kx \pm \omega t + \varepsilon)}$ 。对于任意给定的 t ，令 $\alpha = \pm \omega t + \varepsilon$ ，谐波可写为 $\psi = \psi_0 e^{i(kx + \alpha)} = (\psi_0 e^{i\alpha}) \cdot e^{i(kx)}$ 是 x 的函数，则此时的相矢量定义为 $\psi_0 \angle \alpha = \psi_0 e^{i\alpha}$ 。将 t 分离为相矢量后，我们可以方便的研究 t 这一时刻，波关于位置 x 的变化情况。

习惯上，我们只考虑 $\psi_0 e^{i(kx + \alpha)}$ ，而不考虑 $\psi_0 e^{i(-kx + \alpha)}$ 的情况，后者可以通过三角变换，等价的改变初相 ϕ_0 的值转化为前者。

例如，对振动 $E_3 = 5 \cos(kx)$ ， $E_4 = 10 \sin(kx + \frac{\pi}{2})$ ，其相矢量分别为 $5 \angle 0$ ， $10 \angle \frac{\pi}{2}$ ，两者都逆时针旋转，前者向实轴投影，后者向虚轴投影。

A.5 多元微分与三维波动方程

在介绍波动方程之前，先给出本文默认的一些符号规定，以及一些运算符的定义。

A.5.1 内积、叉乘与矩阵乘法

在本文，一切矢量运算皆使用矩阵运算。并且，若无特殊说明，矢量都等价于列向量，也即下面两种写法等价：

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

^①我们将在 3.1 节讨论波的叠加时使用相矢量，并讨论相矢量相加时所代表的意义

用点乘符号 ‘ \cdot ’ 表示两向量的内积，例如 $\mathbf{A}_1 = (A_{1,x}, A_{2,x}, A_{3,x})$, $\mathbf{A}_2 = (A_{1,y}, A_{2,y}, A_{3,y})$, 则:

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = (A_{1,x}, A_{2,x}, A_{3,x}) \cdot (A_{1,y}, A_{2,y}, A_{3,y}) = \begin{bmatrix} A_{1,x} \\ A_{2,x} \\ A_{3,x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{1,y} \\ A_{2,y} \\ A_{3,y} \end{bmatrix} = A_{1,x}A_{1,y} + A_{2,x}A_{2,y} + A_{3,x}A_{3,y} \quad (\text{A.8})$$

在后文，点乘符号 ‘ \cdot ’ 皆表示内积，叉乘符号 ‘ \times ’ 表示外积，矩阵乘法不用特殊符号，如有必要会使用 ‘ \odot ’ 来表示矩阵乘法。

A.5.2 微分算子

下面依次给出微分算子 ∇ 、拉普拉斯算子 Δ 和矢量微分的定义。

假设 $f = f(\mathbf{x})$ 是三维空间中的标量函数， $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) = (A_x(\mathbf{x}), A_y(\mathbf{x}), A_z(\mathbf{x}))$ 是三维空间中的矢量（数学上称为自变量为 3 维的 3 维向量值函数），设 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) (B_1(x, y, z), B_1(x, y, z), B_1(x, y, z))$ 是三个矢量构成的张量（可视为 3×3 矩阵），如下：

$$f = f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} A_x(\mathbf{x}) \\ A_y(\mathbf{x}) \\ A_z(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x(x, y, z) \\ A_y(x, y, z) \\ A_z(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} B_1(\mathbf{x}) \\ B_2(\mathbf{x}) \\ B_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1,x}(\mathbf{x}) & B_{1,y}(\mathbf{x}) & B_{1,z}(\mathbf{x}) \\ B_{2,x}(\mathbf{x}) & B_{2,y}(\mathbf{x}) & B_{2,z}(\mathbf{x}) \\ B_{3,x}(\mathbf{x}) & B_{3,y}(\mathbf{x}) & B_{3,z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

定义微分算子 ∇ :

$$\begin{aligned} \text{微分算子: } \nabla &= \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \\ \text{梯度: } \nabla f &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] \\ \text{广义梯度: } \nabla \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \nabla A_x \\ \nabla A_y \\ \nabla A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \text{旋度: } \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \text{广义旋度: } \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot B_1 \\ \nabla \cdot B_2 \\ \nabla \cdot B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_{1,x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{1,y}}{\partial y} + \frac{\partial B_{1,z}}{\partial z} \\ \frac{\partial B_{2,x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{2,y}}{\partial y} + \frac{\partial B_{2,z}}{\partial z} \\ \frac{\partial B_{3,x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{3,y}}{\partial y} + \frac{\partial B_{3,z}}{\partial z} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

A.5.3 拉普拉斯算子

并以此定义拉普拉斯算子 Δ :

$$\begin{aligned} \text{拉普拉斯算子: } \Delta &= \nabla \cdot (\nabla) = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \text{拉普拉斯运算: } \Delta f &= \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

广义拉普运算：
$$\Delta \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A}) = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \nabla A_x \\ \nabla A_y \\ \nabla A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot (\nabla A_x) \\ \nabla \cdot (\nabla A_y) \\ \nabla \cdot (\nabla A_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (\text{A.15})$$

也可理解为：
$$\Delta \mathbf{A} = \Delta \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

例如，对于三维空间中的矢量 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}) = (E_x(\mathbf{x}), E_y(\mathbf{x}), E_z(\mathbf{x}))$ ，我们有：

$$\Delta \mathbf{E} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{E}) = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \nabla E_x \\ \nabla E_y \\ \nabla E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot (\nabla E_x) \\ \nabla \cdot (\nabla E_y) \\ \nabla \cdot (\nabla E_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (\text{A.16})$$

A.5.4 矢量微分

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

A.5.5 波动方程

定义好上述工具后，可以给出三维空间中的波动方程：

$$\Delta \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (\text{A.18})$$

例如，对矢量 \mathbf{E} ，上面方程表示：

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \iff \begin{bmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{bmatrix} = \frac{1}{v^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \Delta E_x = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \Delta E_y = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \Delta E_z = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

上面几种表示是等价的。

A.6 平面波、柱面波与球面波

平面波、柱面波与球面波是最具有实际意义的波形，因为它们在最容易实现^②。

A.6.1 平面波

三维空间中的平面波^③：

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A} \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \mp \omega t + \varepsilon)} \quad (\text{A.20})$$

^③其推导详见参考文献 [1] 的 Page 47-56，以及 知乎：电磁波的平面波、柱面波和球面波的表达式与推导 (<https://zhuanlan.zhihu.com/p/693746762>)，这里不多赘述

^②平面波概念的引入详见参考文献 [1] 的 Page 30，这里不再赘述

每个等相面由下式给出：

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \text{const} \quad (\text{A.21})$$

此扰动的每个等相面（也称波阵面）都是一个平面，且波矢 \mathbf{k} 垂直于等相面， $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$ 时沿 \mathbf{k} 传播， $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t)$ 时沿 \mathbf{k} 的反方向传播。在一切三维波中，只有平面波（可以是谐波也可以是非谐波）穿过空间传播时其截面轮廓（等相面）保持不变。

有时， \mathbf{A} 是 \mathbf{x} 的函数，称为非均匀波（例如 2.5 节介绍的隐失波）。

A.6.2 球面波

在球坐标系 (r, ϕ, θ) 下，可以解得球面波方程：

$$\psi = \psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(r) \cdot e^{i(kr \mp \omega t + \varepsilon)} = \frac{A}{r} \cdot e^{i(kr \mp \omega t + \varepsilon)} \quad (\text{A.22})$$

每个波阵面（等相面）由下式给出：

$$kr = \text{const} \quad (\text{A.23})$$

注意，任何球面波的振幅 ψ_0 都是 r 的函数，因为球面波的振幅随着距离的增加而减小（能量守恒的必然结果）。当它从原点向外传播时，波阵面是逐渐扩张为更大的圆。

A.6.3 柱面波

在柱坐标系 (r, θ, z) 下，可以解得柱面波方程：

$$\psi = \psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(r) \cdot e^{i(kr \mp \omega t + \varepsilon)} = \frac{A}{\sqrt{r}} \cdot e^{i(kr \mp \omega t + \varepsilon)} \quad (\text{A.24})$$

每个等相面由下式给出：

$$kr = \text{const} \quad (\text{A.25})$$

平面波投射到具有细长狭缝的不透明屏幕上，就会通过此狭缝发出与柱面波相似的扰动，目前大多采用此方法产生柱面光波。

A.7 波的能量与动量

本章只对具体结论和必要思维进行总结，更详细的内容可转至参考文献 [1] Page 63-80。

A.7.1 前置知识

在本课程，若无特殊说明，都默认介质是均匀、线性、各向同性的。假设介质的绝对介电常量、绝对磁导率分别为 $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ 、 $\mu = \mu_r \mu_0$ ，其中 ε_r 、 μ_r 分别是相对介电常量和相对磁导率， ε_0 、 μ_0 分别为真空介电常量、真空磁导率。

$$\varepsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2} \quad (\text{A.26})$$

对任意介质，设其折射率为 n ，电磁波在其中的波速为 v ，则有以下恒等式：

$$\boxed{nv = c, \quad \varepsilon\mu v^2 = 1, \quad \varepsilon_r \mu_r = n^2} \quad (\text{A.27})$$

特别地，对于真空，上面三个式子变为：

$$1 \cdot c = c, \quad (1 \cdot \varepsilon_0)(\mu_0)c^2 = 1, \quad 1^2 = 1 \cdot 1 \quad (\text{A.28})$$

电磁场的能量密度 w ：

$$w = \frac{1}{2} \left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right) \quad (\text{A.29})$$

A.7.2 波印廷矢量

对任意的电磁波，我们都有 $\mathbf{E} = v\mathbf{B}$ ，其中 v 是电磁波在介质中的波速（真空即为 c ）， E 和 B 可以是瞬时值，也可以是场的振幅值 E_0 和 B_0 。

于是，电磁波（不是电磁场）的能量密度为：

$$w = \frac{1}{2} \left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{E^2}{v^2} \right) = \varepsilon E^2 \quad (\text{A.30})$$

波印廷矢量 \mathbf{S} 定义为：

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} = v^2 \varepsilon \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{S} = v\mathbf{w} = \varepsilon v \mathbf{E}^2 \quad (\text{A.31})$$

\mathbf{S} 的方向即为波的传播方向，与 \mathbf{k} 方向相同，它的大小事实上就是能量的时间通量 $v\mathbf{w}$ 。

A.7.3 辐照度

辐射照度，简称辐照度，是指单位时间内落在单位面积上的辐射能量，在辐射度学中用 \mathbf{E}_e 表示；类似的有光照度，指单位时间内落在单位面积上的光量（辐射能的光度量大小，详见 1.3 节），在光度学中用 \mathbf{E}_v 表示。在不需要区分时“照度”和“强度”[•]时，常用 \mathbf{I} 来表示照度。

辐照度是波印廷矢量的时间平均，即 $\mathbf{I} = \langle \mathbf{S} \rangle_T$ ，我们直接给出简谐函数平均值的计算公式：

$$\langle e^{i\omega t} \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} e^{i\omega t} dt = \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right) e^{i\omega t} \quad (\text{A.32})$$

比值 $\frac{\sin x}{x}$ 在光学中很常见，也很重要，被专门定义为 $\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$ ，我们直接给出相关结论：

$$\langle \cos \omega t \rangle_T = \text{sinc} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \cdot \cos \omega t, \quad \langle \sin \omega t \rangle_T = \text{sinc} \left(\frac{\omega T}{2} \right) \cdot \sin \omega t \quad (\text{A.33})$$

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle_T = \frac{1}{2} (1 + \text{sinc } \omega T \cos 2\omega t), \quad \langle \sin^2 \omega t \rangle_T = \frac{1}{2} (1 - \text{sinc } \omega T \cos 2\omega t) \quad (\text{A.34})$$

在简谐电磁波 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ 下，我们有：

$$\mathbf{S} = \varepsilon v \mathbf{E}^2 = \varepsilon v E_0^2 \cdot \cos^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \implies \mathbf{I} = \langle \mathbf{S} \rangle_T = \frac{1}{2} \varepsilon v E_0^2 \quad (\text{A.35})$$

上面的介质要求是线性、均匀、各向同性介质。

[•]过去常用“强度”来代表单位时间内落在单位面积上的能量，也即现在的“照度”，但国际上此概念已经默认归照度所有，而强度用于描述点辐射源在某方向上单位立体角内的能量通量。

附录 B Matlab 代码

B.1 图 2.1 源码

```

1  %% 菲涅尔公式中的振幅系数，空气入射玻璃和玻璃入射空气两种情况 %%
2  clc, clear, close all
3  %% 空气入射玻璃 %%
4  global n_i n_t
5  n_i = 1;
6  n_t = 1.5;
7
8  theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
9  r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
10 r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
11 t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
12 t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*cos
    (theta_i - theta_t) );
13 theta_B = atan(n_t/n_i);
14 theta_C = asin(n_t/n_i);
15
16 theta_array = linspace(-0.1, pi/2, 101);
17 Y = [
18     r_s(theta_array, theta_t(theta_array))
19     r_p(theta_array, theta_t(theta_array))
20     t_s(theta_array, theta_t(theta_array))
21     t_p(theta_array, theta_t(theta_array))
22 ];
23 stc = MyPlot(theta_array, Y);
24 xline(theta_B, 'b')
25 yline(0)
26 xlim([0, pi/2])
27 ylim([-1, 1])
28 stc.legend.String = ["$r_s$"; "$r_p$"; "$t_s$"; "$t_p$"; "$\theta_i = \theta_B$"];
29 stc.legend.Interpreter = "latex";
30 stc.legend.FontSize = 14;
31 stc.legend.Location = "southwest";
32 stc.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
33 stc.axes.Title.Interpreter = "latex";
34 stc.label.x.String = '$\theta_i$';
35 stc.label.y.String = '$r$';
36 MyColors = GetMyColors;
37 stc.plot.plot_1.Color = MyColors{2};
38 stc.plot.plot_2.LineStyle = "-";
39 stc.plot.plot_2.Color = MyColors{6};
40 stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
41 stc.plot.plot_3.Color = 'b';
42 stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
43 stc.plot.plot_4.Color = [1 0 1];

```

```

44
45 %% 玻璃入射空气 %%
46 n_i = 1.5;
47 n_t = 1;
48
49 theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
50 r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
51 r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
52 t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
53 t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*cos
    (theta_i - theta_t) );
54 theta_B = atan(n_t/n_i);
55 theta_C = asin(n_t/n_i);
56
57
58 theta_array = linspace(0, theta_C, 101);
59 Y = [
60     r_s(theta_array, theta_t(theta_array))
61     r_p(theta_array, theta_t(theta_array))
62     t_s(theta_array, theta_t(theta_array))
63     t_p(theta_array, theta_t(theta_array))
64 ];
65 stc = MyPlot(theta_array, Y);
66 xline(theta_B, 'b')
67 xline(theta_C, 'r')
68 yline(0)
69 xlim([0, pi/2])
70 ylim([-0.5, 3])
71 stc.legend.String = ["$r_s$"; "$r_p$"; "$t_s$"; "$t_p$"; "$\theta_i = \theta_B$"; "$\theta_i = \theta_C$"];
72 stc.legend.Interpreter = "latex";
73 stc.axes.Title.String = '$n_i = 1.5 > n_t = 1$';
74 stc.axes.Title.Interpreter = "latex";
75 stc.label.x.String = '$\theta_i$';
76 stc.label.y.String = '$r$';
77 stc.plot.plot_1.Color = MyColors{2};
78 stc.plot.plot_2.LineStyle = "-";
79 stc.plot.plot_2.Color = MyColors{6};
80 stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
81 stc.plot.plot_3.Color = 'b';
82 stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
83 stc.plot.plot_4.Color = [1 0 1];
84 %MyExport_pdf

```

B.2 图 2.6 源码

```

1 %% 菲涅尔公式中反射折射光的振幅与能量变化 %%
2 clc, clear, close all

```

```

3  global n_i n_t
4
5  %% 反射折射光振幅与能量变化 (空气入射玻璃) %%
6  MyColor = num2cell( ...
7      [
8          "#ff8080" "#ff0000" "#990000" "#190000"
9          "#80ff80" "#00ff00" "#009900" "#001900"
10         "#8080ff" "#0000ff" "#000099" "#000019"
11         "#ff80ff" "#ff00ff" "#990099" "#190019"
12         "#ffff80" "#ffff00" "#999900" "#191900"
13         "#80ffff" "#00ffff" "#009999" "#001919"
14         "#ffffff" "#bbbbbb" "#999999" "#191919"
15     ]...
16 );
17 n_i = 1;
18 n_t = 1.5;
19
20 theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
21 r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
22 r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
23 t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
24 t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*cos
    (theta_i - theta_t) );
25 theta_B = atan(n_t/n_i);
26 theta_C = asin(n_t/n_i);
27
28 theta_array_2 = linspace(-0.1, pi/2, 101);
29 Y = [
30     r_s(theta_array_2, theta_t(theta_array_2))
31     r_p(theta_array_2, theta_t(theta_array_2))
32     t_s(theta_array_2, theta_t(theta_array_2))
33     t_p(theta_array_2, theta_t(theta_array_2))
34     r_s(theta_array_2, theta_t(theta_array_2)).^2
35     r_p(theta_array_2, theta_t(theta_array_2)).^2
36     0.5 * ( r_s(theta_array_2, theta_t(theta_array_2)).^2 + r_p(theta_array_2, theta_t(
    theta_array_2)).^2 )
37 ];
38
39 stc = MyPlot(theta_array_2, Y);
40 yline(0, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 1)
41 xline(theta_B, 'Color', [0 1 1], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.7)
42 xlim([0, pi/2])
43 ylim([-1, 1])
44 stc.legend.Interpreter = 'latex';
45 stc.legend.FontSize = 15;
46 stc.legend.Location = 'southwest';
47 stc.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
48 stc.axes.Title.Interpreter = 'latex';
49 stc.label.x.String = '$\theta_i$';

```

```

50     stc.label.y.String = '$y$';
51     %stc.leg.String = ["$y=r_s$"; "$y=r_p$"; "$y=t_s$"; "$y=t_p$"; "$y=R_s$"; "$y=R_p$";
    "$y=R$"; "$y=0$"; "$\theta_i = \theta_B$"];
52     stc.leg.Visible = 'off';
53
54     stc.plot.plot_2.LineStyle = "-";
55     stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
56     stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
57     stc.plot.plot_5.LineStyle = "--";
58     %stc.plot.plot_5.LineWidth = 0.7;
59     stc.plot.plot_6.LineStyle = "--";
60     %stc.plot.plot_6.LineWidth = 0.7;
61     stc.plot.plot_7.LineStyle = "-";
62
63     stc.plot.plot_1.Color = MyColor{4, 2};
64     stc.plot.plot_3.Color = MyColor{4, 1};
65     stc.plot.plot_5.Color = MyColor{4, 3};
66     stc.plot.plot_2.Color = MyColor{3, 2};
67     stc.plot.plot_4.Color = MyColor{3, 1};
68     stc.plot.plot_6.Color = MyColor{3, 3};
69     stc.plot.plot_7.Color = [1 0 0];
70     %MyExport_pdf
71     %MyExport_pdf_docked
72     %MyExport_svg_docked
73
74
75     %% 反射折射光振幅与能量变化 (玻璃入射空气) %%
76     n_i = 1.5;
77     n_t = 1;
78
79     theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
80     r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
81     r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
82     t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
83     t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*cos
        (theta_i - theta_t) );
84     theta_B = atan(n_t/n_i);
85     theta_C = asin(n_t/n_i);
86
87     theta_array_2 = linspace(-0.1, theta_C, 250);
88     theta_array_all = [linspace(-0.1, 0.65, 100), linspace(0.65, 0.74, 50), linspace(0.74,
        pi/2, 100)];
89
90     X = [
91         theta_array_all
92         theta_array_all
93         theta_array_all
94         theta_array_all
95         theta_array_all

```

```

96     theta_array_all
97     theta_array_all
98 ];
99
100 Y = [
101     (theta_array_all < theta_C).*r_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)) + (
102     theta_array_all > theta_C).*abs(r_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)))
103     (theta_array_all < theta_C).*r_p(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)) + (
104     theta_array_all > theta_C).*abs(r_p(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)))
105     abs( t_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)) )
106     abs( t_p(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)) )
107     abs(r_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all))).^2
108     abs(r_p(theta_array_all, theta_t(theta_array_all))).^2
109     0.5 * ( abs(r_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all))).^2 + abs(r_p(
110     theta_array_all, theta_t(theta_array_all))).^2 )
111 ];
112
113 stc = MyPlot(X, Y);
114 yline(0, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 1)
115 xline(theta_B, 'Color', [0 1 1], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.7)
116 xline(theta_C, 'Color', [0 1 0], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.7)
117 xlim([0, pi/2])
118 ylim([-0.5, 3])
119
120 stc.legend.Interpreter = 'latex';
121 stc.legend.FontSize = 14;
122 stc.legend.Location = 'northwestoutside';
123 stc.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
124 stc.axes.Title.Interpreter = "latex";
125 stc.label.x.String = '$\theta_i$';
126 stc.label.y.String = '$y$';
127 stc.legend.String = ['$y=r_s$'; '$y=r_p$'; '$y=t_s$'; '$y=t_p$'; '$y=R_s$'; '$y=R_p$';
128 '$y=R$'; '$y=0$'; '$\theta_i = \theta_B$'; '$\theta_i = \theta_C$'];
129
130 stc.plot.plot_2.LineStyle = "-";
131 stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
132 stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
133 stc.plot.plot_5.LineStyle = "--";
134 %stc.plot.plot_5.LineWidth = 0.7;
135 stc.plot.plot_6.LineStyle = "--";
136 %stc.plot.plot_6.LineWidth = 0.7;
137 stc.plot.plot_7.LineStyle = "-";
138
139 stc.plot.plot_1.Color = MyColor{4, 2};
140 stc.plot.plot_3.Color = MyColor{4, 1};
141 stc.plot.plot_5.Color = MyColor{4, 3};
142 stc.plot.plot_2.Color = MyColor{3, 2};
143 stc.plot.plot_4.Color = MyColor{3, 1};
144 stc.plot.plot_6.Color = MyColor{3, 3};
145 stc.plot.plot_7.Color = [1 0 0];

```

```

141 %MyExport_pdf
142 %MyExport_pdf_docked
143 %MyExport_svg_docked

```

B.3 图 2.7 源码

```

1 %% 菲涅尔公式中反射光 s 分量与 p 分量的相位增量 %%
2 clc, clear, close all
3 global n_i n_t n_ti theta_B theta_C
4
5 %% 反射光相位增量 (空气入射玻璃) %%
6 n_i = 1;
7 n_t = 1.5;
8 n_ti = n_t/n_i;
9 theta_B = atan(n_ti);
10
11 theta_array_2 = linspace(0, pi/2-0.001, 200);
12
13 delta_r_s = @(t) -pi ;
14 delta_r_p = @(t) (-pi).*(t > theta_B).*( t < pi/2);
15
16 delta_r_s_kongqi = delta_r_s(theta_array_2);
17 delta_r_p_kongqi = delta_r_p(theta_array_2);
18
19 Y = [
20     zeros(size(theta_array_2)) - pi;
21     delta_r_p_kongqi;
22 ];
23
24 stc1 = MyPlot(theta_array_2, Y([1 2], :));
25 xlim([0, pi/2])
26 %yline(0, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
27 xline(theta_B, 'Color', [0 1 1], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
28 stc1.plot.plot_2.LineStyle = '--';
29 stc1.legend.Location = 'northeast';
30 stc1.legend.String = ["$\delta = \delta_{r,s}$"; "$\delta = \delta_{r,p}$"; "$\theta_i = \theta_B$"];
31 stc1.label.x.String = '$\theta_i$';
32 stc1.label.y.String = '$\delta$';
33 stc1.axes.Title.Interpreter = 'latex';
34 stc1.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
35 %MyExport_pdf
36
37 %%%%%%%%% 反射光相位增量 (玻璃入射空气) %%%%%%%%%
38 n_i = 1.5;
39 n_t = 1;
40 n_ti = n_t/n_i;
41 theta_B = atan(n_ti);

```

```

42 theta_C = asin(n_ti);
43
44
45 delta_r_s = @(t) (t>theta_C).*2.*atan( -(sqrt(sin(t).^2 - n_ti^2))./cos(t) );
46 delta_r_p = @(t) ...
47     (t<theta_B).*(-pi) ...
48     + (theta_B<t).*(t<theta_C).*0 ...
49     + (theta_C<t).*( -2*atan( (sqrt(sin(t).^2 - n_ti^2))./(n_ti^2.*cos(t)) ) );
50
51 Y = [
52     zeros(size(theta_array_2)) - pi;
53     delta_r_p_kongqi;
54     delta_r_s(theta_array_2);
55     delta_r_p(theta_array_2);
56 ];
57
58
59 stc2 = MyPlot(theta_array_2, Y([3 4], :));
60 xlim([0, pi/2])
61 %yline(0, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
62 xline(theta_B, 'Color', [0 1 1], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
63 xline(theta_C, 'Color', [0 1 0], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
64 stc2.plot.plot_2.LineStyle = '--';
65 stc2.legend.String = ["$\delta = \delta_{r,s}$"; "$\delta = \delta_{r,p}$"; "$\theta_i = \theta_B$"; "$\theta_i = \theta_C$"];
66 stc2.legend.Location = 'northeast';
67 stc2.label.x.String = '$\theta_i$';
68 stc2.label.y.String = '$\delta$';
69 stc2.axes.Title.Interpreter = 'latex';
70 stc2.axes.Title.String = '$n_i = 1.5 > n_t = 1$';
71 %MyExport_pdf

```

B.4 图 2.8 源码

```

1 %% 隐失波的穿透深度和 GH Shift (玻璃入射空气) %%
2 clc, clear, close all
3 global lambda n_i n_t n_ti
4 n_i = 1.5;
5 n_t = 1;
6 n_ti = n_t/n_i;
7 theta_B = atan(n_ti);
8 theta_C = asin(n_ti);
9 lambda = 550 * 10^(-9); % 550.0 nm 的绿色光
10 delta = @(t) 1 ./ ( 2*pi*sqrt( sin(t).^2 - n_ti^2 )/lambda );
11 Delta_x = @(t) 2*delta(t).*tan(t);
12
13 theta_array_1 = linspace(theta_C, pi/2, 200);
14 theta_array_2 = linspace(theta_C, pi/2-0.05, 200);

```



```

15
16
17 X = [
18     theta_array_1
19     theta_array_2
20 ];
21 Y = [
22     delta(theta_array_1)/lambda
23     Delta_x(theta_array_2)/lambda
24 ];
25
26 stc = MyPlot(X, Y);
27 xlim([theta_C - 0.05, pi/2+0.02])
28 yline(1, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
29 xline(theta_C, 'Color', [0 1 0], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
30 stc.legend.String = ["$y = \delta / \lambda$"; "$y = \Delta x / \lambda$"; "$y = 1$"; "$\theta_i = \theta_C$"; "$\theta_i = \frac{\pi}{2}$"];
31 stc.label.x.String = '$\theta_i$';
32 stc.label.y.String = '$y$';
33 xlim([theta_C - 0.05, pi/2])
34
35 %MyExport_pdf_docked

```

B.5 图 3.2 源码

```

1 %% 单个球面波源在平面上的振荡 (导出为 gif) %%
2 clc,clear,close all;
3 global lambda k omega X_OA A
4
5 lambda = 550.0 * 10^(-9); % 单位: m
6 k = 5; % k 取决于光的波长,但在可视化中不妨令为 1
7 omega = 1; % omega 取决于光的波长,但在可视化中不妨令为 1
8 X_OA = [ 0, 0]; % 球面波源 A 的位置
9 A = 50; % r = 1 时的振幅
10 E_A0 = @(x, y) A./sqrt((x - X_OA(1)).^2 + (y - X_OA(2)).^2); % X 位置的振幅,输入的
    X_array 为一列行向量
11 alpha_A = @(x, y) k*sqrt((x - X_OA(1)).^2 + (y - X_OA(2)).^2);
12 vib = @(E_0, t, alpha) E_0.*cos(-omega*t + alpha); % 振荡函数
13
14 R_array = linspace(2, 10, 100);
15 theta_array = transpose(linspace(0, 2*pi, 50));
16 x_matrix = R_array .* cos(theta_array) + X_OA(1);
17 y_matrix = R_array .* sin(theta_array) + X_OA(2);
18 E_A0_matrix = E_A0(x_matrix, y_matrix);
19 alpha_A_matrix = alpha_A(x_matrix, y_matrix);
20
21 stc = MyMesh(x_matrix, y_matrix, vib(E_A0_matrix, 0, alpha_A_matrix));
22 stc.label_left.z.String = '$E$';

```

```

23
24 figure('Color', [1 1 1])
25 h1 = surf(x_matrix, y_matrix, E_A0_matrix, 'EdgeColor', 'interp', FaceColor='interp');
26 hold on
27 surf([X_OA(1) X_OA(1)], [X_OA(2) X_OA(2)], [30 -30; 30 -30])
28 colormap(redblue);
29 zlim([-35 35]);
30 xlim([X_OA(1) - R_array(end), X_OA(1) + R_array(end)])
31 ylim([X_OA(2) - R_array(end), X_OA(2) + R_array(end)])
32 drawnow
33
34 t_array = linspace(0, 20, 200);
35 for i = 1:length(t_array)
36     h1.ZData = vib(E_A0_matrix, t_array(i), alpha_A_matrix);
37     f(i) = getframe(gcf);
38 end
39
40 numFrames = length(t_array);
41 animated(1,1,1,numFrames) = 0;
42 for i = 1:numFrames
43     if i == 1
44         [animated,cmap] = rgb2ind(f(i).cdata,256,'nodither');
45     else
46         animated(:,:,1,i) = rgb2ind(f(i).cdata,cmap,'nodither');
47     end
48 end
49 filename = '单个球面波源在平面上的振荡.gif';
50 imwrite(animated,cmap,filename,'DelayTime',1/40,'LoopCount',inf);
51 web(filename)

```

B.6 图 3.3 源码

```

1 %% 两个球面波源在平面上的干涉情况 (导出为 gif) %%
2
3 clc, clear, close all;
4 global lambda k omega X_OA X_OB A B
5
6 lambda = 550.0 * 10^(-9); % 单位: m
7 k = 5; % k 取决于光的波长, 但在可视化中不妨令为 1
8 omega = 1; % omega 取决于光的波长, 但在可视化中不妨令为 1
9 X_OA = [-2, 0]; % 球面波源 A 的位置
10 X_OB = [ 2, 0]; % 球面波源 B 的位置
11 A = 50; % r = 1 时 A 的振幅
12 B = 50; % r = 1 时 B 的振幅
13
14 E_A0 = @(x, y) A./sqrt((x - X_OA(1)).^2 + (y - X_OA(2)).^2); % X 位置的振幅, 输入的
    X_array 为一列行向量
15 E_B0 = @(x, y) B./sqrt((x - X_OB(1)).^2 + (y - X_OB(2)).^2); % X 位置的振幅, 输入的

```

x_array 为一列行向量

```

16 alpha_A = @(x, y) k*sqrt( (x - X_OA(1)).^2 + (y - X_OA(2)).^2 );
17 alpha_B = @(x, y) k*sqrt( (x - X_OB(1)).^2 + (y - X_OB(2)).^2 );
18 E_0 = @(E_A0, alpha_A, E_B0, alpha_B) sqrt( E_A0.^2 + E_B0.^2 + 2*E_A0.*E_B0.*cos(
    alpha_A - alpha_B ) );
19 vib = @(E_0, t, alpha) E_0.*cos(-omega*t + alpha); % 振荡函数
20
21 R_array = linspace(4, 20, 80);
22 theta_array = transpose(linspace(0, 2*pi, 30));
23 x_matrix = R_array .* cos(theta_array);
24 y_matrix = R_array .* sin(theta_array);
25 %E_0_matrix = E_A0(x_matrix, y_matrix);
26
27 E_A0_matrix = E_A0(x_matrix, y_matrix);
28 E_B0_matrix = E_B0(x_matrix, y_matrix);
29 alpha_A_matrix = alpha_A(x_matrix, y_matrix);
30 alpha_B_matrix = alpha_B(x_matrix, y_matrix);
31 E_0_matrix = E_0(E_A0_matrix, alpha_A_matrix, E_B0_matrix, alpha_B_matrix);
32 alpha_matrix = GetAlpha(E_0_matrix, E_A0_matrix, alpha_A_matrix, E_B0_matrix,
    alpha_B_matrix);
33
34 MyMesh(x_matrix, y_matrix, vib(E_A0_matrix, 0, alpha_A_matrix));
35 MyMesh(x_matrix, y_matrix, vib(E_B0_matrix, 0, alpha_B_matrix));
36 MyMesh(x_matrix, y_matrix, vib(E_0_matrix, 0, alpha_matrix));
37
38
39 figure('Color', [1 1 1])
40 set(gca, 'NextPlot', 'replaceChildren', 'box', 'on', 'color', 'w');
41
42 h = mesh(x_matrix, y_matrix, E_0_matrix, 'EdgeColor', 'interp', 'FaceColor','interp')
43 ;
44 hold on
45 surf([X_OA(1) X_OA(1)], [X_OA(2) X_OA(2)], [40 -40; 40 -40])
46 surf([X_OB(1) X_OB(1)], [X_OB(2) X_OB(2)], [40 -40; 40 -40])
47 hold off
48 view([45, 30])
49 colormap(redblue);
50 zlim([-35 35]);
51 xlim([-R_array(end), R_array(end)])
52 ylim([-R_array(end), R_array(end)])
53 drawnow
54
55 t_array = linspace(0, 20, 200);
56 numFrames = length(t_array);
57 for i = 1:numFrames
58     h.ZData = vib(E_0_matrix, t_array(i), alpha_matrix);
59     f(i) = getframe(gcf);
60 end

```

```

61 animated(1,1,1,numFrames) = 0;
62 for i = 1:numFrames
63     if i == 1
64         [animated,cmap] = rgb2ind(f(i).cdata,256,'nodither');
65     else
66         animated(:, :, 1,i) = rgb2ind(f(i).cdata,cmap,'nodither');
67     end
68 end
69 filename = '两个球面波源在平面上的干涉情况.gif';
70 imwrite(animated,cmap,filename,'DelayTime',1/40,'LoopCount',inf);
71 web(filename)
72
73 function alpha = GetAlpha(E_0, E_A0, alpha_A, E_B0, alpha_B)
74     sin_alpha = ( E_A0.*sin(alpha_A) + E_B0.*sin(alpha_B) ) ./ E_0;
75     cos_alpha = ( E_A0.*cos(alpha_A) + E_B0.*cos(alpha_B) ) ./ E_0;
76     %{
77         if cos_alpha > 0
78             alpha = acos(cos_alpha);
79             return
80         elseif cos_alpha == 0
81             sin_alpha = ( E_A0.*sin(alpha_A) + E_B0.*sin(alpha_B) ) ./ E_0;
82             if sin_alpha > 0
83                 alpha = pi/2;
84                 return
85             else
86                 alpha = -pi/2;
87                 return
88             end
89         else
90             alpha = pi - acos(cos_alpha);
91             return
92         end
93     %}
94     alpha = (cos_alpha >= 0) .* asin(sin_alpha) + (cos_alpha < 0) .* ( pi - asin(
95         sin_alpha));
96     %alpha = acos(cos_alpha);
97 end

```

B.7 图 3.4 (b) 与图 3.5 源码

```

1 %% 杨氏双缝干涉的近似模型误差分析 %%
2 clc,clear,close all
3 global vare_0 mu_0 lambda I_1 d D R A k E_0 E_0_appro r r_1 r_2
4
5 vare_0 = 8.854187817 * 10^(-12);
6 mu_0 = 4*pi * 10^(-7);
7 A = 50;
8 I_1 = 50;

```

```

9  d = 100 * 10^(-6);
10 R = 5 * 10^(-2);
11 D = 1;
12 lambda = 700 * 10^(-9); % 700.0 nm 的红光
13 k = 2*pi/lambda;
14
15 r = @(x) sqrt( x.^2 + D^2 );
16 r_1 = @(x) sqrt( (x - d/2).^2 + D^2 );
17 r_2 = @(x) sqrt( (x + d/2).^2 + D^2 );
18 E_0 = @(r_1, r_2) A * sqrt( 1./r_1 + 1./r_2 + 2./sqrt(r_1.*r_2).*cos( k.*(r_1 - r_2)
    ) );
19 E_0_appro = @(x) sqrt(2./D)*A .* sqrt( 1 + cos(k*x*d/D) );
20 I = @(r_1, r_2) A^2 * sqrt(vare_0/mu_0) * ( 0.5*(1./r_1 + 1./r_2) + cos(k*(r_1 - r_2)
    ) ./ sqrt(r_1.*r_2) );
21 %I = @(r_1, r_2) 0.5 * sqrt(vare_0/mu_0) * E_0(r_1, r_2).^2;
22 I_appro = @(x) 0.5 * sqrt(vare_0/mu_0) * E_0_appro(x).^2;
23
24 x_array = linspace(-0.02, 0.02, 1000);
25 r_array = r(x_array);
26 r_1_array = r_1(x_array);
27 r_2_array = r_2(x_array);
28 E_0_array = E_0(r_1_array, r_2_array);
29 E_0_appro_array = E_0_appro(x_array);
30 I_array = I(r_1_array, r_2_array);
31 I_appro_array = I_appro(x_array);
32
33 plot_E = MyPlot(x_array, [E_0_array; E_0_appro_array]);
34 plot_E.label.y.String = '$E_0$';
35 plot_E.legend.Location = 'northeast';
36 plot_E.legend.String = ["$E_{0,\mathrm{exact}}$"; "$E_{0,\mathrm{appro}}$"];
37 %MyExport_pdf
38 plot_I = MyPlot(x_array, [I_array; I_appro_array]);
39 plot_I.label.y.String = '$I$';
40 plot_I.legend.Location = 'northeast';
41 plot_I.legend.String = ["$I_{\mathrm{exact}}$"; "$I_{\mathrm{appro}}$"];
42 %MyExport_pdf
43 stc_E = MyErrorAnalyzer_discrete(E_0_array, E_0_appro_array, 1);
44 stc_I = MyErrorAnalyzer_discrete(I_array, I_appro_array, 1);
45
46 stc_funcerror_E = MyErrorAnalyzer_continuous(@(x) E_0(r_1(x), r_2(x)), @(x) E_0_appro(x), [-0.02, 0.02]);
47 stc_funcerror_I = MyErrorAnalyzer_continuous(@(x) I(r_1(x), r_2(x)), @(x) I_appro(x), [-0.02, 0.02]);
48
49 stc_yy = MyYYPlot(x_array, stc_E.Residual, x_array, stc_I.Residual);
50 stc_yy.label.y_left.String = '$\hat{\theta}_E$';
51 stc_yy.label.y_right.String = '$\hat{\theta}_I$';
52
53 stc_yy.legend.String = ["$\theta_E = E_0 - \hat{E}_0$"; "$\theta_I = I - \hat{I}$"];

```

```

54 stc_yy.p_left.LineStyle = 'none';
55 stc_yy.p_left.Marker = '.';
56 stc_yy.p_left.MarkerSize = 3;
57 stc_yy.p_right.LineStyle = 'none';
58 stc_yy.p_right.Marker = '.';
59 stc_yy.p_right.MarkerSize = 3;
60 %MyExport_pdf_modal

```

B.8 图 3.6 源码

```

1 %% 光源宽度对对比度位置分布的影响 %%
2 clc, clear, close all
3 global I_max d lambda R D Delta_x u
4
5 d = 100 * 10^(-6);
6 R = 5 * 10^(-2);
7 D = 1;
8 lambda = 700 * 10^(-9); % 700.0 nm 的红光
9 Delta_x = D*lambda/d;
10 I_max = 2;
11
12 I = @(x, b) I_max/2 .* ( 1 + sin( pi*d/(lambda*R)*b ) ./ ( pi*d/(lambda*R)*b ) .* cos
    (2*pi*x/Delta_x) );
13 u = @(b) pi*d/(lambda*R) * b;
14 gamma = @(b) abs( sin(u(b))./u(b) );
15
16 % I = I(x, b)
17 x_array = linspace(-0.02, 0.02, 300);
18 b_array = transpose(linspace(0, 5*lambda*R/d, 50));
19 stc1 = MyMesh(x_array, b_array, I(x_array, b_array));
20 stc1.label_left.y.String = '$b$';
21 stc1.label_left.z.String = '$I(x, b)$';
22 stc1.label_right.y.String = '$b$';
23 stc1.label_right.z.String = '$I(x, b)$';
24 %MyExport_pdf_modal
25
26 % 干涉条纹对比度
27 b_array = transpose(linspace(0, 5*lambda*R/d, 200));
28 stc2 = MyPlot(b_array, gamma(b_array));
29 xline(lambda*R/d, 'LineWidth', 0.5, 'Color', [1 0 0]);
30 ylim([0, 1])
31 stc2.label.x.String = '$b$';
32 stc2.label.y.String = '$\gamma = \gamma(b)$';
33 stc2.legend.String = ["$\gamma = \gamma(b)$"; "$b = \lambda R / d$"];
34 %MyExport_pdf_modal

```

B.9 图3.8 源码

```
1 %% 精细度对透射率的影响 %%
2 clc, clear, close all;
3 F = @(R) 4*R ./ (1-R).^2;
4 T_FP = @(delta, F) 1 ./ ( 1 + sin(delta/2).^2 .* F );
5 F_array = linspace(0, 40, 50);
6 delta_array = linspace(0, 10*pi, 200);
7
8 MyPlot(linspace(0, 0.9,100), F(linspace(0, 0.9,100)));
9 stc = MySurf(delta_array, F_array, T_FP(delta_array, F_array'));
10 stc.label_left.x.String = '$\delta$';
11 stc.label_left.y.String = '$F$';
12 stc.label_left.z.String = '$T_{F-P} = T_{F-P}(\delta, F)$';
13 stc.label_right.x.String = '$\delta$';
14 stc.label_right.y.String = '$F$';
15 %MyExport_pdf_docked
16
17 MyPlot(delta_array, T_FP(delta_array, 2));
18 MyPlot(delta_array, T_FP(delta_array, 10));
19 MyPlot(linspace(0, 10*pi, 1000), T_FP(linspace(0, 10*pi, 1000), 400));
```