光学笔记

Optics Notes

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

序言

本文为笔者本科时的“光学”课程笔记（Optics Notes, 2024.8-2025.1）。课程信息、作业和相关资料可在笔者的个人网站上找到: Notes > Phisics > Optics (https://yidingg.github.io/YiDingg/#/Notes/Phisics/OpticsNotes)，也可以到网址（课程结束后更新） 下载全部相关资料。由于个人学识浅陋，认识有限，文中难免有不妥甚至错误之处，望读者不吝指正。读者可以到笔者的 GitHub 笔记库 (https://github.com/YiDingg/LatexNotes) 上提 issue，也可以将错误发送到我的邮箱 dingyi233@mails.ucas.ac.cn，衷心感谢。

在正式学习之前，建议先跳转至附录 A “波理论”部分，学习必要的前置知识（否则可能难以理解）。

目录

第 1 章 光学导言

§ 1.1 光学发展简史（略）

§ 1.2 光的几何传播规律

1.2.1 光传播的基本原理

光传播的常见基本原理：

(1) 直线传播：光在均匀介质里沿直线传播[1]

(2) 反射定律：光线入射到两种不同的均匀介质的分界面上反射线位于入射面内，反射线和入射线分居法线两侧，反射角等于入射角。

(3) 折射定律（斯涅尔定律）：折射线位于入射面内，折射线与入射线分居法线两侧，入射角的正弦与折射角的正弦之比为一与入射角无关的常数

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \tag{1.1}$$

(4) 光路可逆性：光沿反方向传播时，必定沿原光路返回[2]

(5) 独立传播：光在传播过程中与其他光束相遇时，各光束都各自独立传播，不改变其传播方向

(6) 全反射：光线从光密介质入射到光疏介质[3]，当入射角大于某临界值时，折射光完全消失，只剩下反射光。该临界角度称为全反射临界角。

$$i_C = \arcsin(\frac{n_1}{n_2}), \quad n_1 < n_2 \tag{1.2}$$

(a) 反射与折射

(b) 三棱镜最小偏向角

图 1.1: 反射与折射、三棱镜最小偏向角

1.2.2 三棱镜最小偏向角

如图 1.1 (b) 所示，最小偏向角 $\theta_0 = (i_1 - i'_1)_{\min}$ 满足：

$$\theta_0 = 2i_1 - A, \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \frac{\theta_0 + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \tag{1.3}$$

[1] 对高功率激光，此定律不成立

[2] 也即在几何光学中，任何光路都是可逆的

[3] 折射率较大的一侧称为光密介质；较小的一侧称为光疏介质

§ 1.3 惠更斯原理与费马原理

Theorem. 1 (惠更斯原理): 由振源发出的波动在 t 时刻传播到一个波面 S，波面上的每一个面元可认为是次波的波源。由面元发出的次波向四面八方传播。在以后的时刻 t' 形成次波面。这些次波面的包络面 S' 就是 t' 时刻总扰动的波面。

其中：

(1) 波面：在同一振源的波场中，扰动同时到达的各点具有相同的相位，这些点的轨迹构成一个曲面，称为波面（也称为等相位面）。

(2) 波线：与波面处处正交的曲线称为波线，其切线方向为光的传播方向

几何光学的定律需要前提条件：

(1) 必须是均匀介质，即同一介质的折射率处处相等，折射率不是位置的函数。

(2) 必须是各向同性介质，即光在介质中传播时各个方向的折射率相等，折射率不是方向的函数。

(3) 光强不能太强，否则巨大的光能量会使线性叠加原理不再成立而出现非线性情况。

(4) 光学元件的线度应比光的波长大得多，否则不能把光束简化为光线。

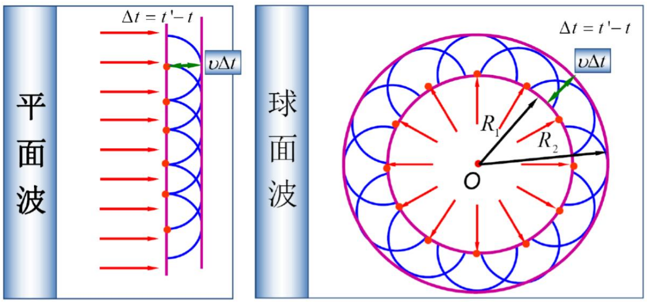


图 1.2: 惠更斯原理

Theorem. 2 (费马原理):

光从空间中一点传播到另一点时，总是沿光程（optical length, OPL）取极值的路径传播 [4]，公式：

$$\mathrm{d\,OPL} = \mathrm{d}\left(\int_Q^P n dl\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d\,OPL}}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}OPL}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{1.4}$$

由费马原理可以导出诸多推论，包括我们熟知的几条基本原理，还有物像之间的等光程性（例如凸透镜）：在物点 Q 与像点 Q’ 之间，不管光线经何路径，凡是由 Q 通过同样的光学系统到达 Q’ 的光线，都是等光程的。

§ 1.4 成像

理想的像与物体在形状上一致，大小成比例。物与像之间的关系：本质上是一系列物点与像点的点点对应，推广至线线、面面对应。

同心光束：各光线本身或其延长线交于同一点的光束称为同心光束，在各向同性介质中，它对应于球面波。

由若干反射面或折射面组成的光学系统称为光具组。

[4] 这里的“极值”可以是极小值、极大值或常数，一般情况下，实际光程大多取极小值。极大值（如凹面镜成像）、拐点（如椭球面镜、凸透镜）的例子，可以参考 知乎：浅谈几何光学 (1)——费马原理

(1) 实物：发散的同心入射光束的“心”
(2) 虚物：汇聚的同心入射光束的“心”
(3) 实像：发散的同心出射光束的“心”
(4) 虚像：汇聚的同心出射光束的“心”

1.4.1 物像的共轭性（可逆性）

若 P 为物体 P（可实可虚）的像点，则反之，当物点为 P 时，像点必在点 P'（实际光路可能不同）。是光路可逆性的必然结果。

计算由物到像的 OPL 时，若为实线（实物、实像）则取正，称为实光程，若为虚线（虚物、虚像）则取负，称为虚光程。

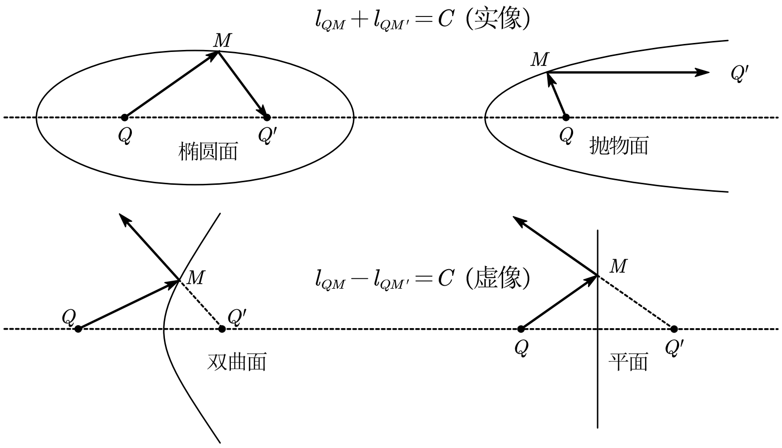


图 1.3: 光程恒定的例子

1.4.2 折射球面与反射球面

的对于折射球面，存在一对恰好成像的共轭点，称为齐明点。在齐明点处，可以证明 Q 到 Q' 的光程（即物像间的 OPL）$l_{QQ'}$。

$$\begin{aligned} &\text{折射球面公式:} \quad \frac{n_1}{l_1}+\frac{n_2}{l_2}=\frac{1}{R}\left(\frac{n_2 s_2}{l_2}-\frac{n_1 s_1}{l_1}\right) \implies \frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r} \quad \text{(傍轴)} \\ &\text{反射球面公式:} \quad \frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}=-\frac{2}{R}\left(\frac{s_1}{l_1}+\frac{s_2}{l_2}\right) \implies \frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}=-\frac{2}{R} \quad \text{(傍轴)} \end{aligned} \tag{1.5}$$

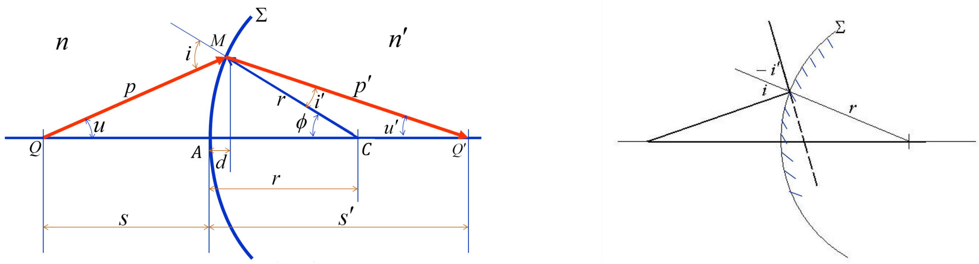


图 1.4: 折射球面与反射球面

1.4.3 像的放大率

放大率公式：

$$\frac{n_1|y_1|}{s_1}=\frac{n_2|y_2|}{s_2} \tag{1.6}$$

Lagrange-Helmholtz 恒等式：

$$n_1u_1y_1=n_2u_2y_2 \tag{1.7}$$

上式的 u 和 y 是有正负的，例如折射球面中 $u_1>0$, $y_1>0$ 而 $u_2<0$, $y_2<0$。

§ 1.5 光学仪器

1.5.1 薄透镜

透镜是由两个共轴折射球面构成的光具组，球面间距远远小于球面半径和物距像距的透镜称为薄透镜，也即 $d\ll|R_1|,|R_2|,|s|,|s'|$。此时可以认为两球面顶点重合，称为光心。

薄透镜成像公式（物像距公式）：

$$\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'}=\frac{n_L-n}{r_1}+\frac{n'-n_L}{r_2} \tag{1.8}$$

$$s'=\infty\Longrightarrow f=\frac{n}{\frac{n_L-n}{r_1}+\frac{n'-n_L}{r_2}}\quad \text{物方焦距} \tag{1.9}$$

$$s=\infty\Longrightarrow f'=\frac{n'}{\frac{n_L-n}{r_1}+\frac{n'-n_L}{r_2}}\quad \text{像方焦距} \tag{1.10}$$

故物像焦距满足 $\frac{f}{n}=\frac{f'}{n'}$。特别地，当物像方折射率都为 1 时（真空），我们有磨镜者公式和像的横向放大率：

$$f=f'=\frac{1}{(n_L-1)(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})},\quad V=-\frac{\frac{s'}{n'}}{\frac{s}{n}}=-\frac{fs'}{f's}=-\frac{s'}{s} \tag{1.11}$$

将公式 1.9 和公式 1.10 代入式 1.8 中，可以得到 Gauss 物像公式：

$$\frac{f}{s}+\frac{f'}{s'}=1\quad\stackrel{n=n'}{\Longrightarrow}\quad\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \tag{1.12}$$

令 $s=x+f$，$s'=x'+f'$，代入公式 1.12，可以得到 Newton 物像公式：

$$xx=ff' \tag{1.13}$$

1.5.2 其它仪器

投影仪器、照相机、眼睛、放大镜、显微镜、望远镜

§ 1.6 光波的描述（略）

§ 1.7 光度学基本概念

在学习光度学之前，需要区分辐射度学与光度学中的基本概念。辐射度学研究的是辐射能量对实际物体的影响，而光度学研究的是辐射能量对人眼的影响，是基于人眼实验数据的学科，例如 Luminous Efficiency Function。它们的概念相互对应（可以相互转化）但并不相同，如下表所示:

表 1.1: 光度学与辐射度学概念对应关系

学科范围	基本概念						
辐射度学	辐射能 Q_e	辐射通量 Φ_e	辐射强度 I_e	辐射亮度 L_e	辐射照度 E_e	辐射出射度 M_e	辐射通量谱密度 $\Phi_{e,\lambda}$
光度学	光量 Q_v	光通量 Φ_v	光强度 I_v	光亮度 L_v	光照度 E_v	光出射度 M_v	光通量谱密度 $\Phi_{v,\lambda}$

1.7.1 辐射度学基本概念

表 1.2: 辐射度学基本概念

名称	符号	定义式	单位	概念描述
辐射能	Q_e	-	J	以辐射形式传播的能量
辐通量	Φ_e	$\Phi_e = \frac{\mathrm{d}Q_e}{\mathrm{d}t}$	W	单位时间内流过某截面的辐射能量
辐强度	$\boldsymbol{I}_e$	$\boldsymbol{I}_e = \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}\Omega}$	$\mathrm{W \cdot sr^{-1}}$	点辐射源在某方向上单位立体角[5]内的辐射通量
辐照度	$\boldsymbol{E}_e$	$\boldsymbol{E}_e = \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}$	$\mathrm{W \cdot m^{-2}}$	被辐射体单位面积上的辐射通量
辐亮度	$\boldsymbol{L}_e$	$\boldsymbol{L}_e = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}_e}{\mathrm{d}A\cos\theta}$	$\mathrm{W \cdot sr^{-1} \cdot m^{-2}}$	单位面积的面辐射源在某方向上的辐射强度
辐出射度	M_e	$M_e = \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}A}$	$\mathrm{W \cdot m^{-2}}$	辐射体单位面积向半球空间发射的辐射通量
辐谱密度	ϕ_e	$\phi_e = \frac{\Delta\Phi_{e,\lambda}}{\Delta\lambda}$	$\mathrm{W \cdot m^{-1}}$	辐射能（通量）在频谱中的分布

其中 $\Delta\Phi_{e,\lambda}$ 表示波长为 λ（也可认为是 $[\lambda,\ \lambda+\Delta\lambda]$）的部分所贡献的辐射通量。

1.7.2 明视觉曲线

人眼对不同波长的光具有不同的明亮感觉程度[6]，称为明视觉光谱光视效率曲线[7]（函数），常简称为“明视觉曲线”或“视觉曲线”，记为 $V = V(\lambda)$。

光谱光效能 K，表示在某一波长上每一瓦辐射通量可以产生多少流明的光通量。光谱光视效率 $V = V(\lambda)$，就是归一化的光谱光效能：

$$K = \frac{\Delta\Phi_{v,\lambda}}{\Delta\Phi_{e,\lambda}} = \frac{\phi_v(\lambda)}{\phi_e(\lambda)}, \quad V(\lambda) = \frac{K(\lambda)}{K_{\max}} = \frac{1}{K_{\max}} \cdot \frac{\phi_v(\lambda)}{\phi_e(\lambda)} \tag{1.14}$$

$K_{\max} = 683\ \mathrm{lm \cdot W^{-1}}$ 在波长约 555.0 nm 取到，因此 $V = V(\lambda)$ 也表示在相同辐射通量下，波长为 λ 的光与 555.0 nm 的光所产生的亮暗感觉比值。

另外，公式 1.14 建立了辐射度学参量与光度学参量之间的转化关系：

$$\Phi_v(\lambda) = \int \phi_v(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \int K_{\max}V(\lambda)\phi_e(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{1.15}$$

[6] 参考 新旧明视觉光谱光视效率曲线.pdf。

[7] 参考 ANSI E1.48 - 2014 (A Recommended Luminous Efficiency Function for Stage and Studio Luminaire Photometry)，国际照明委员会（CIE）规定的标准光谱光视效率函数 Luminous Efficiency Functions 或者 知乎：光通量与光辐照度之间的换算。

1.7.3 光度学基本概念

表 1.3: 光度学基本概念

名称	符号	定义式	单位	概念描述
光量	Q_v	$Q_v(\lambda) = V(\lambda) \cdot Q_e(\lambda)$	cd · sr · s	辐射能的光度量大小
光通量	Φ_v	$\Phi_v = \frac{\mathrm{d}Q_v}{\mathrm{d}t}$	lm = cd · sr	单位时间内流过某截面的光度学光量
光强度	$\boldsymbol{I}_v$	$\boldsymbol{I}_v = \frac{\mathrm{d}\Phi_v}{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}$	cd	点辐射源在某方向上单位立体角内的光通量
光照度	$\boldsymbol{E}_v$	$\boldsymbol{E}_v = \frac{\mathrm{d}\Phi_v}{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}$	$\mathrm{lm \cdot m^{-2}}$	被辐射体单位面积上的光通量
光亮度	$\boldsymbol{L}_v$	$\boldsymbol{L}_v = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}_v}{\mathrm{d}A\cos\theta}$	$\mathrm{cd \cdot m^{-2}}$	单位面积的面辐射源在某方向上的光强度
光出射度	M_v	$M_v = \frac{\mathrm{d}\Phi_v}{\mathrm{d}A}$	$\mathrm{lm \cdot m^{-2}}$	辐射体单位面积向半球空间发射的光通量
光谱密度	ϕ_v	$\phi_v = \frac{\Delta\Phi_{v,\lambda}}{\Delta\lambda}$	$\mathrm{lm \cdot m^{-1}}$	光量（光通量）在频谱中的分布

它们[8]之间的转化关系：

$$\text{与光通量的转换：}\Phi_v = \int \boldsymbol{E}_v \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int \boldsymbol{I}_v \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} = \iint \boldsymbol{L}_v \cos\theta \, \mathrm{d}A \, \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \tag{1.16}$$

$$\text{与光强的转换：}\boldsymbol{I}_v = r^2 \boldsymbol{E}_v = \int \boldsymbol{L}_v \cos\theta \, \mathrm{d}A = \int \boldsymbol{L}_v \mathrm{d}A_\perp \tag{1.17}$$

计算时的常用微分：

$$\begin{aligned} &\text{直角坐标系：} && \mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y && , \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{r^2} \\ &\text{球坐标系：} && \mathrm{d}A = r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi && , \mathrm{d}\Omega = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \end{aligned} \tag{1.18}$$

§ 1.8 特殊发光体（略）

1.8.1 余弦发光体（朗伯发光体）

1.8.2 定向发光体

[8]参考 知乎：如何区分并记忆光度、照度、发光强度、光强、亮度等

第 2 章　光的反射与折射

在本章，我们先以一定的顺序，依次对反射折射过程中所出现的现象或相关物理量进行讨论，最后给出所有现象的总结。

§ 2.1　菲涅尔公式

Theorem. 3 (菲涅尔公式, Fresnel Formula):

光线在通过两介质分界面时通常会同时发生折射（透射）和反射现象，设入射光（incident ray）介质折射率 η_i，入射角 θ_i，透射光（transmitted ray）介质折射率 η_t，透射角（折射角）θ_t，则有[①]：

类型	振幅反射系数 r		振幅透射系数 t	
s 波	$r_s = \dfrac{n_i\cos\theta_i - n_t\cos\theta_t}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t}$	$-\dfrac{\sin(\theta_i-\theta_t)}{\sin(\theta_i+\theta_t)}$	$t_s = \dfrac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t}$	$+\dfrac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)}$
p 波	$r_p = \dfrac{n_t\cos\theta_i - n_i\cos\theta_t}{n_t\cos\theta_i + n_i\cos\theta_t}$	$+\dfrac{\tan(\theta_i-\theta_t)}{\tan(\theta_i+\theta_t)}$	$t_p = \dfrac{2n_i\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_t + n_t\cos\theta_i}$	$+\dfrac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)\cos(\theta_i-\theta_t)}$

折射角 θ_t、s 波通量反射率 R_s、p 波通量反射率 R_p 和总通量反射率 R 为：

$$\cos\theta_t = \sqrt{1-\left(\frac{n_i}{n_t}\sin\theta_i\right)^2},\quad R_s = r_s^2,\ R_p = r_p^2,\quad R = \frac{1}{2}(R_s+R_p) \tag{2.1}$$

总强度反射率 R 的严格证明见下一节。特别地，若 $1-\left(\frac{n_i}{n_t}\sin\theta_i\right)^2 < 0$，则发生全反射，此时 $R = 1$。另外，需要指出菲涅尔公式的适用条件，也即推导时所做的一些假设，如下：

(1) 介质为绝缘介质，无表面自由电荷或传导电流

(2) 介质为各向同性的光学线性介质（弱光强）

(3) 介质磁导率（约）等于真空磁导率[②] $\mu_i = \mu_t = \mu_0$，其中 μ_0 为真空磁导率。

§ 2.2　反射时的相位变化

菲涅尔公式的推导以矢量分析为基础，因此公式中系数 r_s 的正负具有明确物理意义，它标识着方向。若为负，则反射后的方向与原方向相反，否则相同。各系数正负情况见表 2.1，其中 o 表示可正可负。

从波的角度，方向相反可以等价地视为相位发生了 π 的前移（或后移），称为相位突变。$n_i < n_t$ 时，相位突变要么是 0，要么是 π，$n_i > n_t$ 时的相位变化比较复杂，我们不深究。在 $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$ 时，r_p 的正负发生变化，p 波的反射波相位也发生突变，称此时 θ_i 的角度为布儒斯特角（Brewster angle），记为 θ_B，也称为偏振角或起偏角。

表 2.1: 振幅系数的正负情况

折射率	r_s	r_p	t_s	t_p
$n_i < n_t$	$-$	o	$+$	$+$
$n_i > n_t$	o	o	$+$	$+$

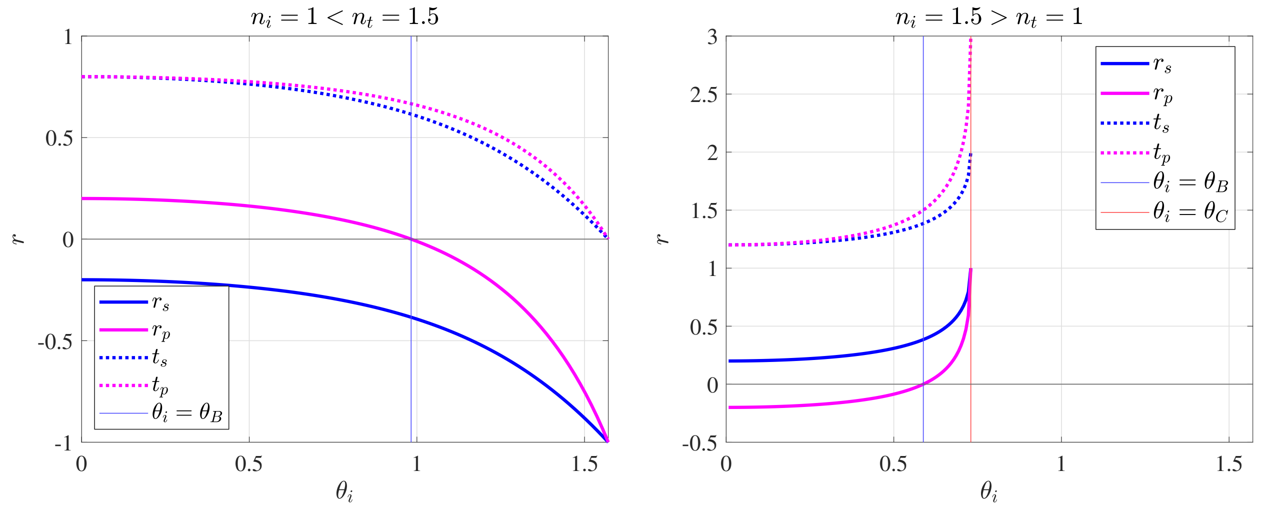
可以推得 Brewster angle 的值为：

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \tag{2.2}$$

[①] 对于金属材质（非绝缘材质），需要引入消光系数 k_t 来修正菲涅尔公式（绝缘材质等价于 $k_t = 0$），具体参见 知乎: 菲涅尔公式

[②] 对于介质磁导率不等于真空磁导率的情况，详见参考文献 [1] Page 144

具体的振幅系数变化见图 2.1[③]，相位增量见图 2.2，反射示意图见图 2.3。



(a) 由空气入射玻璃（$n_i = 1$, $n_t = 1.5$）

(b) 由玻璃入射空气（$n_i = 1.5$, $n_t = 1$）

图 2.1: 振幅系数 r 随入射角 θ_i 的变化

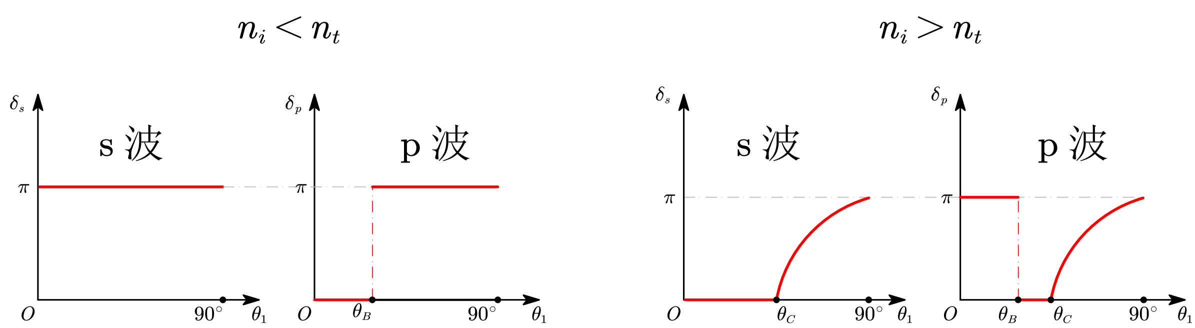


图 2.2: s 波和 p 波在反射时的相位变化

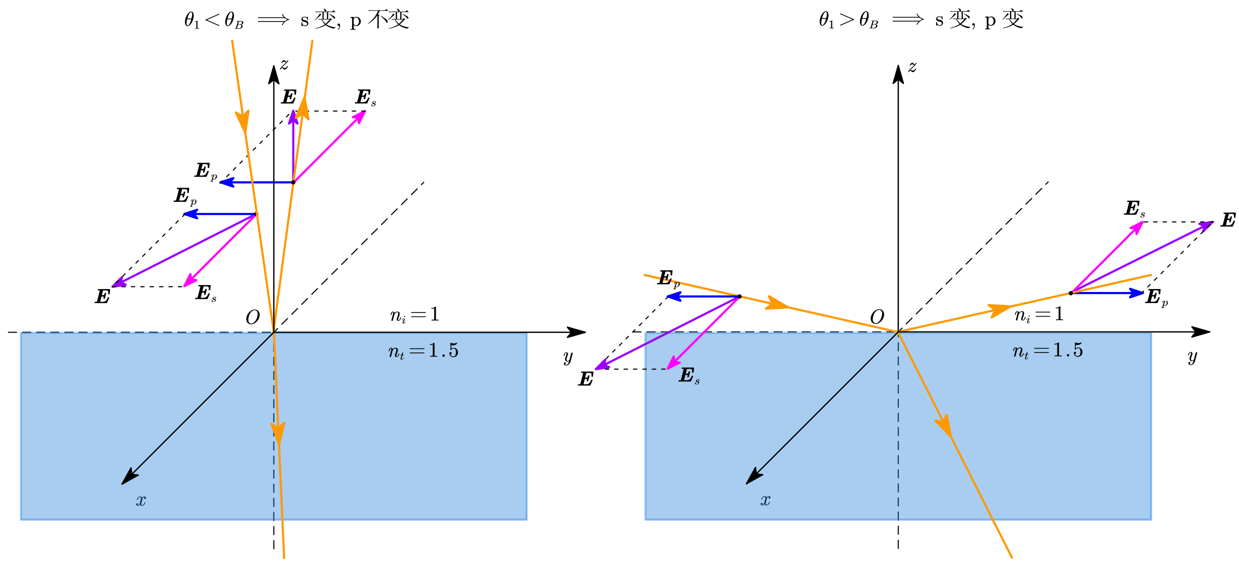


图 2.3: 由空气入射玻璃的光线示意图

[③]源码见附录 B.1

由菲涅尔公式，当 $n_i < n_t$ 时，我们还有如下结论：

$$\begin{aligned} &\theta_i = 0 \text{ 时：} && r_p = (-r_s) = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}, && t_p = t_s = \frac{2n_i}{n_i + n_t} \\ &\theta_i = \frac{\pi}{2} \text{ 时：} && r_p = r_s = -1, && t_p = t_s = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

这表明，即使是正射（垂直于介质分界面的入射，$\theta_i = 0$），一般也存在部分反射光。总之，当 $n_i < n_t$ 时，入射光的 s 分量在反射中一定会相位跃变，p 分量都有可能。

另外，菲涅尔公式还可写成：

$$\boxed{\begin{aligned} &(-r_s) + t_s = 1, && r_p + t_p = 1 \\ &r_s = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}, && r_p = \frac{n_{ti}^2\cos\theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}{n_{ti}^2\cos\theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}} \end{aligned}} \tag{2.4}$$

§ 2.3 完全偏振反射光

当光波由布儒斯特角 θ_B 入射时，由 Fresnel Formula，$r_p = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} = 0$，也即反射光的 p 分量为 0，仅存在 s 分量。这说明反射光是完全偏振光，$\boldsymbol{E}$ 的方向（称为振动方向）垂直于入射面。

但此时反射光能量占比 F 很小[4]，例如，空气（$n = 1$）入射玻璃（$n = 1.5$）时，$\theta_B = 56.310°$，$F = 0.0740$；玻璃入射空气时，$\theta_B = 33.690°$，$F = 0.0740$。

§ 2.4 反射折射时的能量关系

在 Fresnel Formula 中可以发现，$r_s^2 + t_s^2 \neq 1$，$r_p^2 + t_p^2 \neq 1$，是能量不守恒了吗？显然不是。那么，反射光和透射光的能量关系是怎样的？这需要借助辐射度学的相关概念。

如图，圆形光束从空气入射到分界面上的一个面元 $\boldsymbol{A}$（界面下是玻璃），以此面元为研究对象。考虑玻印亭矢量 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$，即单位时间内通过单位面积的电磁辐射能量（单位面积辐射功率），于是瞬时辐射照度 $\boldsymbol{E}_e$:

$$\boldsymbol{E}_e = \boldsymbol{S} = c^2\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}, \quad E_e = \varepsilon_0 c E^2 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}} = \frac{\varepsilon_0 c}{\mu_r} \cdot nE^2 \tag{2.5}$$

其中 ε_r，μ_r 分别为相对介电常量、相对磁导率，对空气近似有 $\varepsilon_r = \mu_r = 1$，于是

核心思想是 $\mathrm{d}Q_e = (\boldsymbol{E}_e \cdot \boldsymbol{A})\,\mathrm{d}t$。入射、反射、透射光束的截面面积分别为 $A\cos\theta_i$, $A\cos\theta_r$, $A\cos\theta_t$，设其瞬时辐射照度分别为 $\boldsymbol{E}_i$, $\boldsymbol{E}_r$, $\boldsymbol{E}_t$ ，则辐射通量为：

$$\Phi_{e,k} = E_{e,k} A\cos\theta_k = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_k \cos\theta_k\, E_k^2, \quad k = i, r, t \tag{2.6}$$

分别写出入射、反射、透射光的辐射通量：

$$\Phi_{e,i} = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_i \cos\theta_i\, E_i^2 = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_i \cos\theta_i\, \left(E_{i,s}^2 + E_{i,p}^2\right) \tag{2.7}$$

$$\Phi_{e,r} = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_i \cos\theta_i\, E_r^2 = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_i \cos\theta_i\, \left(r_s^2 E_{i,s}^2 + r_p^2 E_{i,p}^2\right) \tag{2.8}$$

$$\Phi_{e,t} = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_t \cos\theta_t\, E_t^2 = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_t \cos\theta_t\, \left(t_s^2 E_{i,s}^2 + t_p^2 E_{i,p}^2\right) \tag{2.9}$$

[4] 可以使用玻璃片堆得到强度较大的偏振光

由于入射光可分解为 s 波与 p 波，我们自然想到它们俩在入射前后应该是能量守恒的，这指导我们分别作数学上的处理。对 s 波，由菲涅尔定律（这说明已经做了近似 $\mu_r = 1$），做减法得到：

$$
\begin{aligned}
& n_i \cos\theta_i E_{i,s}^2 - n_i \cos\theta_i r_{i,s}^2 E_{i,s}^2 - n_t \cos\theta_t t_s^2 E_{i,s}^2 \\
&= E_{i,s}^2 \left[n_i \cos\theta_i \left(1 - \frac{(n_i \cos\theta_i - n_t \cos\theta_t)^2}{(n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t)^2} \right) - n_t \cos\theta_t \cdot \frac{(2n_i \cos\theta_i)^2}{(n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t)^2} \right] \\
&= \frac{E_{i,s}^2}{(n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t)^2} \left[n_i \cos\theta_i \cdot (4n_i \cos\theta_i \cdot n_t \cos\theta_t) - 4n_t \cos\theta_t \cdot n_i^2 \cos^2\theta_i \right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

同理，考虑 p 分量，作减法可得到：

$$
n_i \cos\theta_i E_{i,p}^2 - n_i \cos\theta_i r_{i,p}^2 E_{i,p}^2 - n_t \cos\theta_t t_p^2 E_{i,p}^2 = 0 \tag{2.10}
$$

代入即得：

$$
\Phi_{e,i} - \Phi_{e,r} - \Phi_{e,t} = 0 \Longrightarrow \Phi_{e,i} = \Phi_{e,r} + \Phi_{e,t} \tag{2.11}
$$

这便验证了入射前后的能量是守恒的。

由此，我们可以定义一些能量系数：

$$
\begin{aligned}
&\text{强度反射率 } R: \quad R = \frac{1}{2}(R_s + R_p), \quad R_s = r_s^2, \qquad R_p = r_p^2 \\
&\text{强度透射率 } T: \quad T = \frac{1}{2}(T_s + T_p), \quad T_s = \left(\frac{n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i} \right)^2 t_s^2, \quad T_p = \left(\frac{n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i} \right)^2 t_p^2
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

这样，它们具有下面的性质，方便我们计算能量关系：

$$
\boxed{
\begin{array}{lll}
R_s + T_s = 1, & R_p + T_p = 1, & R + T = 1 \\
\Phi_{e,r} = R\Phi_{e,i}, & \Phi_{e,r,s} = R_s \Phi_{e,i,s}, & \Phi_{e,r,p} = R_p \Phi_{e,i,s} \\
\Phi_{e,t} = T\Phi_{e,i}, & \Phi_{e,t,s} = T_s \Phi_{e,i,s}, & \Phi_{e,t,p} = T_p \Phi_{e,i,s}
\end{array}
} \tag{2.13}
$$

其中 $\Phi_{e,r} = R\Phi_{e,i}$ 和 $\Phi_{e,t} = T\Phi_{e,i}$ 是怎么来的？

§ 2.5 全反射时的隐失波与穿透深度

假设现在由光密介质射向光疏介质，即 $n_i > n_t$，则有临界角 $\theta_C = \arcsin n_{ti}$。当 $\theta_i > \theta_C$ 时，发生全反射，$R = 1, T = 0$，若简单地认为没有任何透射光，是不满足电磁场边界条件的。具体来讲，$\boldsymbol{E}$ 的切向分量连续告诉我们，在透射介质中一定存在振荡场，它在平行于界面上的分量具有时间频率 ω（与入射光相同）。

进一步的推导表明[5]，在透射介质中存在一种波（称为隐失波），其波函数如下：

$$
\boldsymbol{E} = \left(e^{-\beta y} \boldsymbol{E_{t,0}} \right) \cdot e^{i\left(\frac{\sin\theta_i}{n_{ti}} k_t x - \omega t \right)}, \quad \text{衰减系数 } \beta = k_t \sqrt{\frac{\sin^2\theta_i}{n_{ti}^2} - 1} = k_i \sqrt{\sin^2\theta_i - n_{ti}^2} \tag{2.14}
$$

这是一个不均匀波，其振幅在 y 方向上极速衰减，只在几个波长的距离上就可以忽略不计。且它同时有纵波成分和横波成分，不是简单的简谐横波。

我们将振幅下降到 $\frac{1}{e}$ 的深度称为**穿透深度**，记为 $\delta = \frac{1}{\beta}$，它通常在一个波长以内。

对于此过程的能量守恒问题，更详尽广泛的讨论表明（利用波印廷矢量 $\boldsymbol{S}$），能量实际上是跨过界面往复循环，最终使透向第二介质的净流量为零。就现阶段，可以理解为能量从入射波流到隐失波再回到反射波，或者说隐失波沿入射波又绕回了反射波。

[5] 详见参考文献 [1] 的 Page 158

§ 2.6 古斯-亨欣位移（Goos-Hanchen Shift）

一束被全反射的光，入射点会与（反射后的）出射点存在微小偏移（事实上既有平行偏移也有垂直偏移），称为 Goos-Hanchen Shift。较为严谨的推导表明[6]，沿入射方向、与分界线平行的偏移量如下（又称为侧向偏移）：

$$\delta_\perp = \frac{\lambda_i \sin\theta_i}{\pi\sqrt{\sin^2\theta_i - n_{ti}^2}}, \quad \Delta x = \frac{\lambda_i \tan\theta_i}{\pi\sqrt{\sin^2\theta_i - n_{ti}^2}} = 2\delta\tan\theta_i \tag{2.15}$$

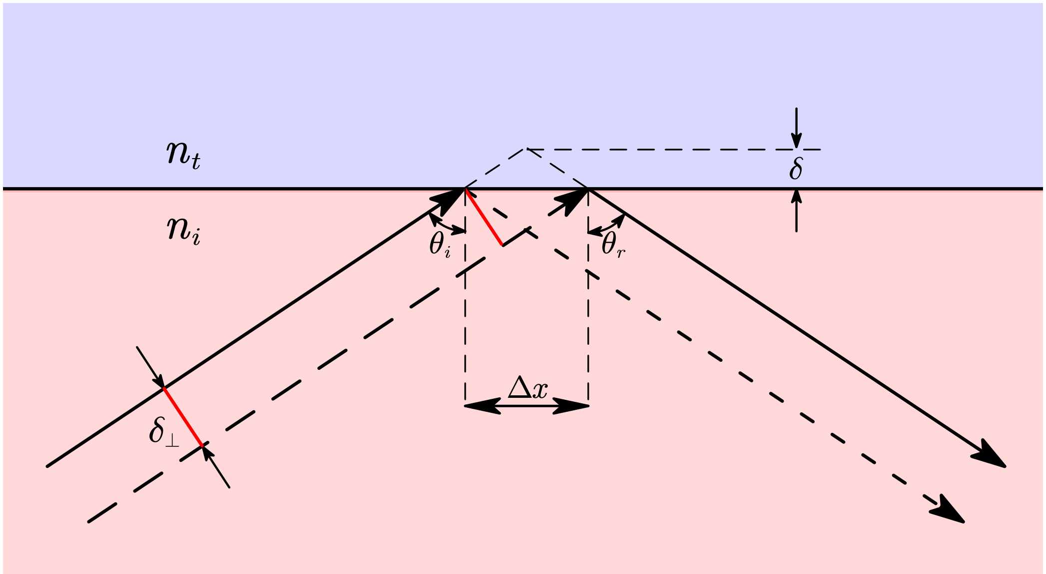


图 2.4: Goos-Hanchen Shift

§ 2.7 全反射时的相位变化

发生全内反射时[7]，入射波 s 分量、p 分量的相位变化并非简单的 0 或 π，下面作推导。

对入射光的波函数 $\boldsymbol{E_i} = \boldsymbol{E_{i,0}} \cdot e^{i\theta} = \boldsymbol{E_{i,0}} \cdot e^{i(kx-\omega t)}$，若反射光满足 $\boldsymbol{E_r} = \boldsymbol{E_i} \cdot \lambda e^{i\delta}$，则表明相对于入射光，反射光的振幅变为了原来的 λ 倍，且相位增加了 δ。特别地，$\lambda < 0$ 时，可以等价于 $\lambda > 0$ 且相位增加 $\delta + \pi$ 或 $\delta - \pi$。

由菲涅尔定律，我们有 $\boldsymbol{E_{r,s}} = r_s \boldsymbol{E_{i,s}}$， $\boldsymbol{E_{r,p}} = r_p \boldsymbol{E_{i,p}}$。可以发现，在全反射时，$r_s, r_p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，并且 $|r_s| = |r_p| = 1$，振幅不变，于是可以令 $r = e^{i\delta}$。为了反解相位增量 δ，一种自然的想法是考虑

$$e^{i\delta} = \cos\delta + i\lambda\sin\delta = a + ib \Longrightarrow \delta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \tag{2.16}$$

这样做虽然可行，但由于 arctan 函数的局限性，其值域范围在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，而 δ 的取值范围在 $[0, \pi]$ 或者 $[-\pi, 0]$。因此，最终得到的 δ 仅在部分区域上正确，对另一部分需做数学上的平移修正。因此，我们考虑另一种方法。在全反射时，注意到 r_s 和 r_p 的形式为 $r = \frac{a-bi}{a+bi}$，其中 $a, b \in \mathbb{R}$，有如下过程：

$$\frac{a-bi}{a+bi} = e^{i\theta} \Longrightarrow e^{i\frac{\theta}{2}} = \pm\frac{a-bi}{\sqrt{a^2+b^2}}, \ \tan\frac{\delta}{2} = -\frac{b}{a}, \ \frac{\delta}{2} = \arctan\left(-\frac{b}{a}\right) \tag{2.17}$$

[6]详见参考文献 [2]，或者 知乎：古斯汉欣位移产生的原因，以及 知乎：古斯汉森位移的原理是什么

[7]全内反射是指，由光疏介质射向光密介质且入射角大于临界角时发生的全反射现象

这样得到的 $\frac{\delta}{2}$ 便是全范围正确的，无需修正。分别令 $r = r_s, r_p$，代入即得：

$$\delta_{r,s} = -2\arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i - n_{ti}^2}}{\cos\theta_i}\right), \quad \delta_{r,p} = -2\arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i - n_{ti}^2}}{n_{21}^2\cos\theta_i}\right) \tag{2.18}$$

§ 2.8 折射时的相位变化

入射光不发生全反射时，由菲涅尔定律，$t_s, t_p \in (0, \frac{2n_i}{n_i+n_t}) \subset \mathbb{R}$，恒为正实数，因此相位不发生任何变化。当入射光发生全反射时，折射光（透射光）以隐失波的形式存在，我们前面已经提过，隐失波同时含有横波纵波成分，它与入射光不再是同一种波，此时谈论相位变化自然没有意义。

§ 2.9 反射折射总结

到此，我们已经讨论了目前可能接触到的所有情况，包括光疏射向光密、光密射向光疏、小于或大于临界角时的折射反射振幅、相位以及能量关系等，终于可以给出反射折射的总结。

整个结论由菲涅尔定律推导而来，基于电磁场的边界条件和麦克斯韦方程组，从波的角度揭示了光在反射折射时发生的变化，包括振幅、相位、能量、位移等关系。

$$\text{反射波：}\quad \boldsymbol{E_r} = \boldsymbol{E_{r,s}} + \boldsymbol{E_{r,p}} = r_s\boldsymbol{E_{i,s}} + r_p\boldsymbol{E_{i,p}}, \quad r \in \mathbb{C} \tag{2.19}$$

$$\text{透射波：}\quad \boldsymbol{E_t} = \boldsymbol{E_{t,s}} + \boldsymbol{E_{t,p}} = t_s\boldsymbol{E_{i,s}} + t_p\boldsymbol{E_{i,p}}, \quad t \in \mathbb{R},\ \theta_i < \theta_C \tag{2.20}$$

$$\text{反射系数：} r_s = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}, \quad r_p = \frac{n_{ti}^2\cos\theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}}{n_{ti}^2\cos\theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2\theta_i}} \tag{2.21}$$

$$\text{透射系数：} (-r_s) + t_s = 1, \quad r_p + t_p = 1 \tag{2.22}$$

$$\text{能量关系：}\begin{cases} R = \frac{1}{2}(R_s + R_p) \quad R_s = |r_s|^2,\ R_p = |r_p|^2 \\ T = \frac{1}{2}(T_s + T_p), \quad T_s = \left(\frac{n_t\cos\theta_t}{n_i\cos\theta_i}\right)^2 t_s^2, T_p = \left(\frac{n_t\cos\theta_t}{n_i\cos\theta_i}\right)^2 t_p^2 \\ R + T = 1,\ R_s + T_s = 1,\ R_p + T_p = 1 \\ \Phi_{e,r} = R\Phi_{e,i},\ \Phi_{e,t} = T\Phi_{e,i} \end{cases} \tag{2.23}$$

$$s\text{ 波反射相位增量：} \delta_{r,s} = \begin{cases} -\pi, & n_i < n_t \\ \begin{cases} 0, & \theta_i \in (0, \theta_C) \\ -2\arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i - n_{ti}^2}}{\cos\theta_i}\right), & \theta_i > \theta_C \end{cases}, & n_i > n_t \end{cases} \tag{2.24}$$

$$p\text{ 波反射相位增量：} \delta_{r,p} = \begin{cases} \begin{cases} 0, & \theta_i \in (0, \theta_B) \\ -\pi & \theta_i \in (\theta_B, \frac{\pi}{2}) \end{cases}, & n_i < n_t \\ \begin{cases} -\pi, & \theta_i \in (0, \theta_B) \\ 0, & \theta_i \in (\theta_B, \theta_C) \\ -2\arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2\theta_i - n_{ti}^2}}{n_{ti}^2\cos\theta_i}\right), & \theta_i \in (\theta_C, \frac{\pi}{2}) \end{cases}, & n_i > n_t \end{cases} \tag{2.25}$$

$$\text{隐失波：} \boldsymbol{E_t} = \left(e^{-\beta y}\boldsymbol{E_{t,0}}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\sin\theta_i}{n_{ti}}k_t x - \omega t\right)}, \quad \beta = k_i\sqrt{\sin^2\theta_i - n_{ti}^2} = \frac{2\pi}{\lambda_i}\sqrt{\sin^2\theta_i - n_{ti}^2}, \quad \delta = \frac{1}{\beta} \tag{2.26}$$

$$\text{Goos-Hanchen Shift: } \Delta x = 2\delta\tan\theta_i = \frac{2\tan\theta_i}{k_i\sqrt{\sin^2\theta_i - n_{ti}^2}} = \frac{\lambda_i\tan\theta_i}{\pi\sqrt{\sin^2\theta_i - n_{ti}^2}} \tag{2.27}$$

另外，如图 2.5 考虑一束光由光疏介质射向光密介质（$n_i < n_t$），发生透射、反射。保持各角度不变，将透射光方向置反，射向光疏介质，由菲涅尔公式，可得对称前后的振幅与能量系数变化：

$$\theta_i < \theta_B: \begin{cases} \text{反射振幅与强度:} & \dfrac{r_s'}{r_s} = \dfrac{r_p'}{r_p} = 1, \quad \dfrac{R'}{R} = \dfrac{R_s'}{R_s} = \dfrac{R_p'}{R_p} = 1 \\ \text{透射振幅与强度:} & \dfrac{t_s'}{t_s} = \dfrac{t_p'}{t_p} = \dfrac{\tan A}{\tan B}, \quad \dfrac{T'}{T} = \dfrac{T_s'}{T_s} = \dfrac{T_p'}{T_p} = \dfrac{1}{n_{ti}^2} \cdot \dfrac{\sin^2 2A}{\sin^2 2B} \\ \text{反射光相位增量:} & \delta_{r,s} = -\pi, \ \delta_{r,p} = 0, \quad \delta_{r,s}' = 0, \ \delta_{r,p}' = -\pi \end{cases} \tag{2.28}$$

$$\theta_i > \theta_B: \begin{cases} \text{反射振幅与强度:} & \dfrac{r_s'}{r_s} = \dfrac{r_p'}{r_p} = 1, \quad \dfrac{R'}{R} = \dfrac{R_s'}{R_s} = \dfrac{R_p'}{R_p} = 1 \\ \text{透射振幅与强度:} & \dfrac{t_s'}{t_s} = \dfrac{t_p'}{t_p} = \dfrac{\tan A}{\tan B}, \quad \dfrac{T'}{T} = \dfrac{T_s'}{T_s} = \dfrac{T_p'}{T_p} = \dfrac{1}{n_{ti}^2} \cdot \dfrac{\sin^2 2A}{\sin^2 2B} \\ \text{反射光相位增量:} & \delta_{r,s} = -\pi, \ \delta_{r,p} = -\pi, \quad \delta_{r,s}' = 0, \ \delta_{r,p}' = 0 \end{cases} \tag{2.29}$$

上面最左侧的图中，考虑光路可逆性，假设反射光、折射光振幅不变而方向置反，则合成出的光也应是原来的入射光（左下角合成后为 0），得到斯托克斯倒逆关系:

$$r' + r = 1, \quad tt' + rr' = 1 \tag{2.30}$$

由于没有涉及电场的方向，上式对 s 波、p 波均成立，可以角标同时为 s，也可以角标同时为 p。

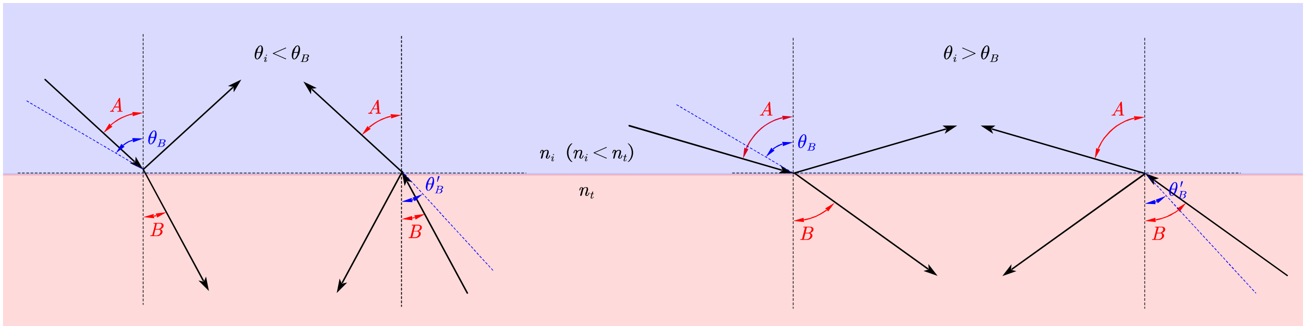


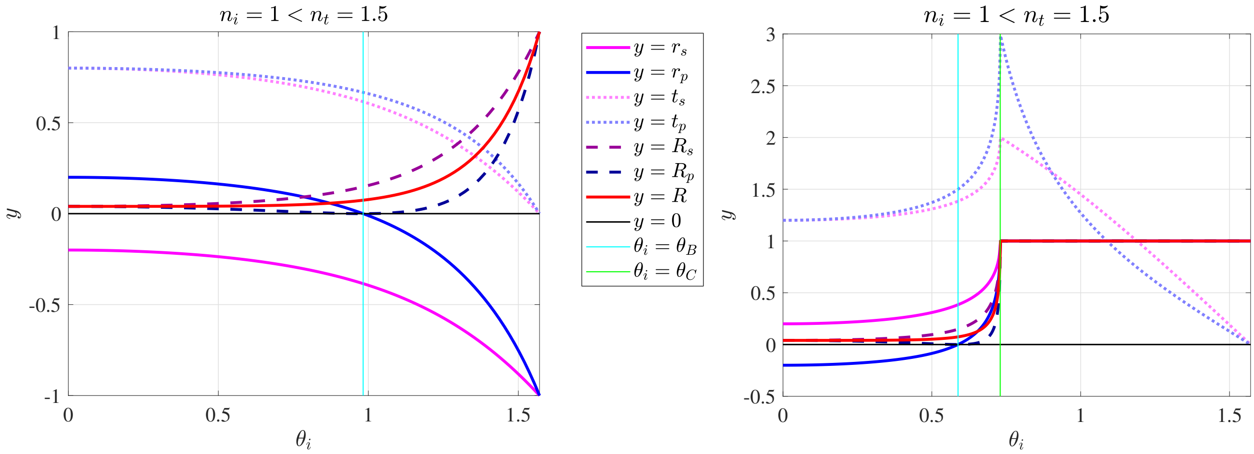
图 2.5: 光路可逆性下的振幅与能量系数

在下一页中给出了上面结论的图像。图 2.6[⑧] 展示了反射折射光的振幅 r_s, r_p, t_s, t_p、能量 R_s, R_p, R 随入射角 $\tan\theta_i$ 的变化，其中 (a) 图为空气入射玻璃（$n_i = 1, n_t = 1.5$），(b) 图为玻璃入射空气（$n_i = 1.5, n_t = 1$）。

图 2.7[⑨] 展示了反射光的 s 分量与 p 分量的相位增量 $\delta_{r,s}, \delta_{r,p}$ 随入射角 θ_i 的变化，其中 (a) 图为空气入射玻璃（$n_i = 1, n_t = 1.5$），(b) 图为玻璃入射空气（$n_i = 1.5, n_t = 1$）。特别地，当 (b) 图中 $\theta_i > \theta_C$ 时，发生全（内）反射，此时 $r_s, r_p, t_s, t_p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，图中展示的是它们的模长，即 $|r_s|, |r_p|, |t_s|, |t_p|$。

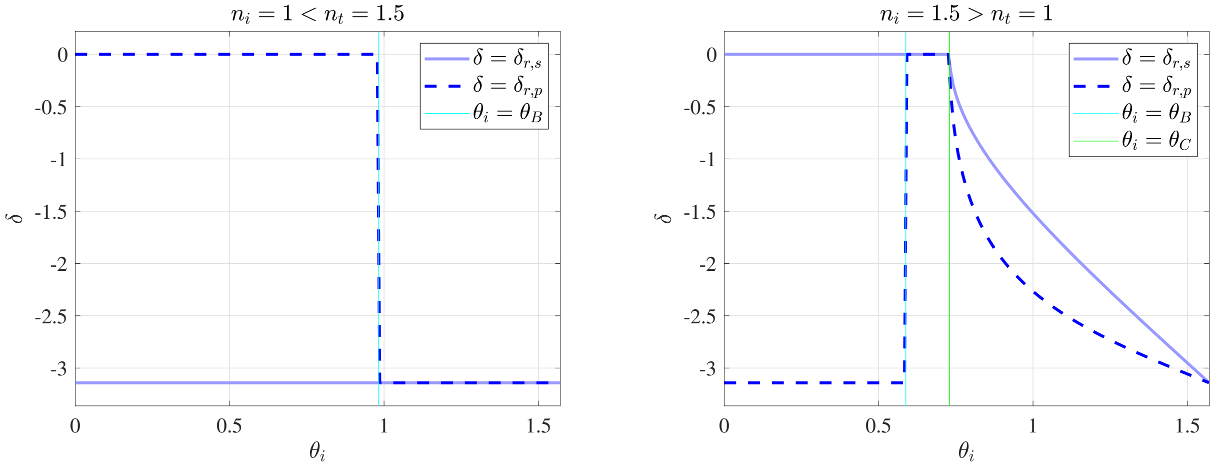
图 2.8[⑩] 展示了隐失波穿透深度 δ 和 GH SHift Δx 随入射角 θ_i 的变化。

[⑧] 源码见附录 B.2
[⑨] 源码见附录 B.3
[⑩] 源码见附录 B.4



(a) 由空气入射玻璃 **(b) 由玻璃入射空气**

图 2.6: 反射折射光的振幅与能量变化



(a) 由空气入射玻璃 **(b) 由玻璃入射空气**

图 2.7: 反射光 s 分量与 p 分量的相位增量

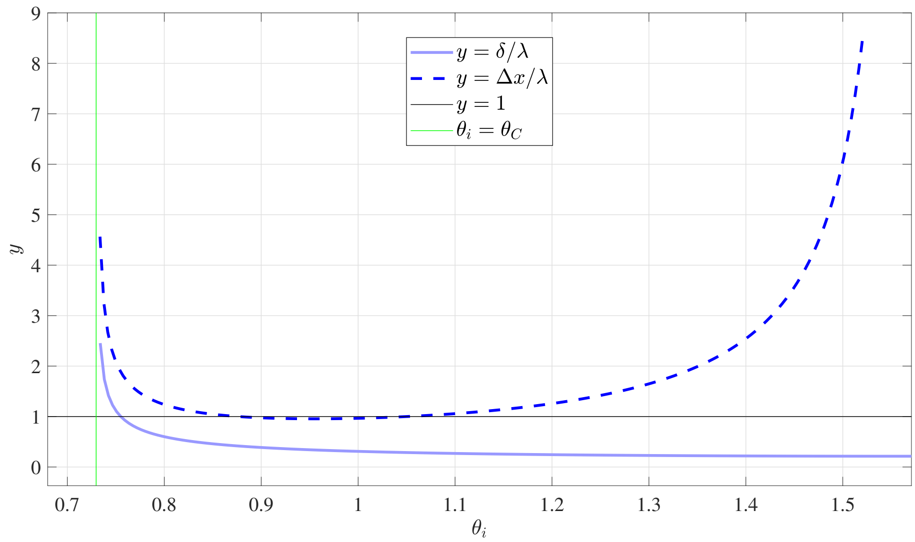


图 2.8: 隐失波穿透深度与 GH Shift（玻璃入射空气）

第 3 章 光的干涉

通常将平面波与球面波[①]是光波的的基元，当两个光源（或两束光波）间存在某种关联，波的叠加会引起强度的重新分布，若相互叠加的波满足某些特定条件，使得叠加后产生了稳定的强度分布，则称发生了光的干涉。

换句话说，研究干涉现象，就是讨论当两个或多个（光）波在空间中的某区域相遇时，它们如何相互叠加，会产生怎样的新波动现象，了解各个波的特性（振幅、频率、相位、波的类型等）如何影响叠加后的波的性质。

§ 3.1 叠加原理

只要波在空间中某点相遇，就会发生叠加，但不一定会产生干涉。也就是说，叠加是无条件的，干涉则要求形成稳定的、新的强度分布。

回想波动方程[②]，它的一个重要特性是：方程是线性的。因此，如果 $\boldsymbol{\psi_1}$, $\boldsymbol{\psi_2}$, ..., $\boldsymbol{\psi_n}$ 各自是波动方程的解，那么它们的任意线性组合也是方程的解，即：

$$\boldsymbol{\psi} = \sum a_i \boldsymbol{\psi_i} \tag{3.1}$$

这个性质称为叠加原理，它表面：介质中任何一点的合扰动是各个单独波组分的代数和。另外，需要注意，叠加原理仅在均匀、线性、各向同性的介质中成立，有极大振幅的波（能量极大），无论是纵波（声波）或横波（电磁波），都可以产生非线性的效应，此时叠加原理不再适用。

在许多情况下，无需考虑光波的矢量性，例如多个光波的电场方向都始终在一条直线上时，可以将电场 $\boldsymbol{E}$ 处理为具有正负的标量 E。本章我们研究的都是基于上述处理的光波，这表明它们的传播方向都在同一平面内，这样即降低了讨论的难度，又具有相当高的普适性和推广性（利用旋转对称性或平移对称性）。

§ 3.2 同频率光波的干涉

3.2.1 两个同频波源的干涉

两源干涉原理：

现在，我们讨论均匀介质的两个波源（频率相同）的干涉情况，为了提高普适性，我们并不事先假设波源的类似，它可以是平面波、球面波或柱面波。设两波源分别为 S_A, S_B，波函数分别为 ψ_A, ψ_B，不妨假设它们都沿各自的正向传播，借助相矢量的思想[③]，将位矢 $\boldsymbol{x}$ （和初相位 ε）分离后，它们的波函数可写为：

$$E_A = E_{A,0} \cdot e^{i(-\omega t+\alpha_A)}, \quad E_B = E_{B,0} \cdot e^{i(-\omega t+\alpha_B)} \tag{3.2}$$

其中 $\alpha_A = \alpha_A(\boldsymbol{x})$，$\alpha_B = \alpha_B(\boldsymbol{x})$ 是位矢的函数，$E_{A,0}, E_{B,0}$ 可能是位矢的函数。对于平面中任意一点 P，合扰动为：

$$E = E_A + E_B = E_{A,0} \cdot e^{i(-\omega t+\alpha_A)} + E_{B,0} \cdot e^{i(-\omega t+\alpha_B)} \tag{3.3}$$

[①]即平面电磁波与球面电磁波，详见附录 A.6，也可参考 知乎：球面光波与平面光波 (https://www.zhihu.com/question/267133640/answer/319531458) 和 知乎：高斯光束，平面波，球面波三者间有什么关系 (https://www.zhihu.com/question/534511391/answer/2501271591)

[②]详见 A.5

[③]详见附录 A.4

作数学上的处理，得到合扰动：

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t+\alpha)} \tag{3.4}$$

$$E_0 = \sqrt{E_{A,0}^2 + E_{B,0}^2 + 2E_{A,0}E_{B,0}\cos(\alpha_A - \alpha_B)}, \quad \begin{cases} \sin\alpha = \frac{1}{E_0}\left(E_{A,0}\sin\alpha_A + E_{B,0}\sin\alpha_B\right) \\ \cos\alpha = \frac{1}{E_0}\left(E_{A,0}\cos\alpha_A + E_{B,0}\cos\alpha_B\right) \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin\left[\frac{1}{E_0}\left(E_{A,0}\sin\alpha_A + E_{B,0}\sin\alpha_B\right)\right] & ,\cos\alpha \geqslant 0 \\ \pi - \arcsin\left[\frac{1}{E_0}\left(E_{A,0}\sin\alpha_A + E_{B,0}\sin\alpha_B\right)\right] & ,\cos\alpha < 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

E_0 与 α 的取值可以由相矢量相加来理解。在给定的位置 P，A 波的相矢量为 $E_{A,0}\measuredangle\alpha_A$，$B$ 波的相矢量为 $E_{B,0}\measuredangle\alpha_B$，在复平面中将它们相加（平行四边形法则），即得到合扰动的相矢量 $E_0\measuredangle\alpha$，这样，E_0 的大小就是合相矢量的模长，α 是合相矢量与 x 轴的夹角。

在光学中，常用干涉条纹对比度 γ 来描述干涉情况是否明显，它定义为：

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{E_{0,\max}^2 - E_{0,\min}^2}{E_{0,\max}^2 + E_{0,\min}^2} \tag{3.7}$$

其中 I 表示光强，也即光通量密度。在两波源产生的干涉中，有：

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\alpha_A - \alpha_B) \tag{3.8}$$

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}, \quad I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \tag{3.9}$$

则对比度为：

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt{\frac{I_1}{I_2}} + \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{E_{A,0,\max}^2}{E_{B,0,\max}^2}} + \sqrt{\frac{E_{B,0,\max}^2}{E_{A,0,\max}^2}}} \tag{3.10}$$

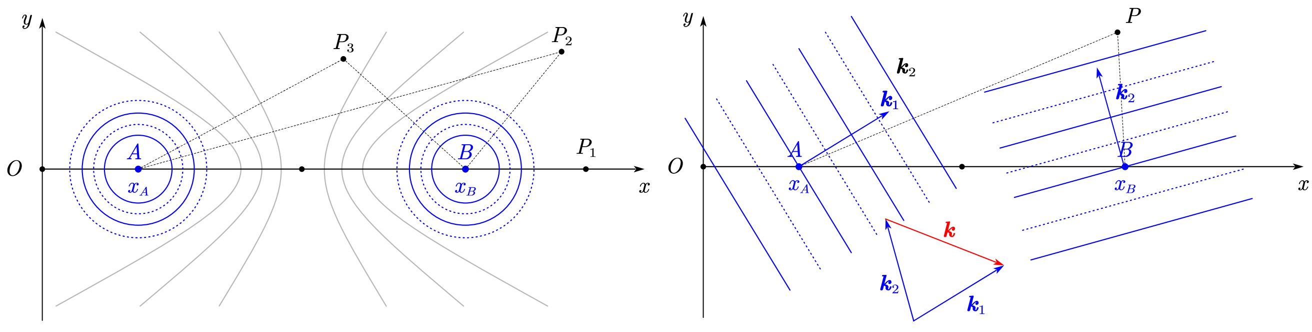
因此，两波源电场的振幅越接近，干涉对比度越高，也就越明显。

示例一：两球面波

如图 3.1 (a)，考虑两个相同的球面波源在 x-y 平面上的干涉情况，相同的波源（理想单频波源）保证了两束波的物理参数相同，如波长、频率和振幅等。设两波源位置分别为 $\boldsymbol{x_{OA}}$，$\boldsymbol{x_{OB}}$，简记 $r_1 = |\boldsymbol{x}_{AP}|$ 和 $r_2 = |\boldsymbol{x}_{BP}|$，则波函数可写为：

$$E_A = \frac{A}{r_1} \cdot e^{i(-\omega t + kr_1 + \varepsilon_A)}, \quad E_{A,0} = \frac{A}{r_1},\ \alpha_A = kr_1 + \varepsilon_A \tag{3.11}$$

$$E_B = \frac{B}{r_2} \cdot e^{i(-\omega t + kr_2 + \varepsilon_B)} \quad E_{B,0} = \frac{B}{r_2},\ \alpha_B = kr_2 + \varepsilon_B \tag{3.12}$$



(a) 两球面波源或两柱面波源

(b) 两平面波源

图 3.1: 两个同频波源的干涉

方便起见，不妨令 $\varepsilon_A = \varepsilon_B$，则合扰动为：

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t+\alpha)}, \quad E_0 = \sqrt{\frac{A^2}{r_1^2} + \frac{B^2}{r_2^2} + \frac{2AB}{r_1 r_2}\cos(k(r_1 - r_2))} \tag{3.13}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{E_0}\left(\frac{A}{r_1}\sin\alpha_A + \frac{B}{r_2}\sin\alpha_B\right), \quad \cos\alpha = \frac{1}{E_0}\left(\frac{A}{r_1}\cos\alpha_A + \frac{B}{r_2}\cos\alpha_B\right) \tag{3.14}$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin\left[\frac{1}{E_0}\left(\frac{A}{r_1}\sin\alpha_A + \frac{B}{r_2}\sin\alpha_B\right)\right] & , \cos\alpha \geqslant 0 \\ \pi - \arcsin\left[\frac{1}{E_0}\left(\frac{A}{r_1}\sin\alpha_A + \frac{B}{r_2}\sin\alpha_B\right)\right] & , \cos\alpha < 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

对于可见光，其波长在 nm 级别，空间频率 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 极高。为方便可视化，我们取波长 $\lambda = 0.4\pi$ m，即 $k = 5$ 的微波，并令振幅系数 $A = 50$，$B = 50$，作出图像。图 3.2 展示了单个波源在平面上的振荡情况（$t = 0$）。对两波源的干涉[④]，我们令两波源位置分别为 $(-2, 0)$，$(2, 0)$，作出图像，图 3.3 展示了它们的干涉情况（$t = 0$）[⑤]。单波源和双波源随时间的振动详见 GIF 动图链接 https://www.123pan.com/s/0y0pTd-QwKj3。

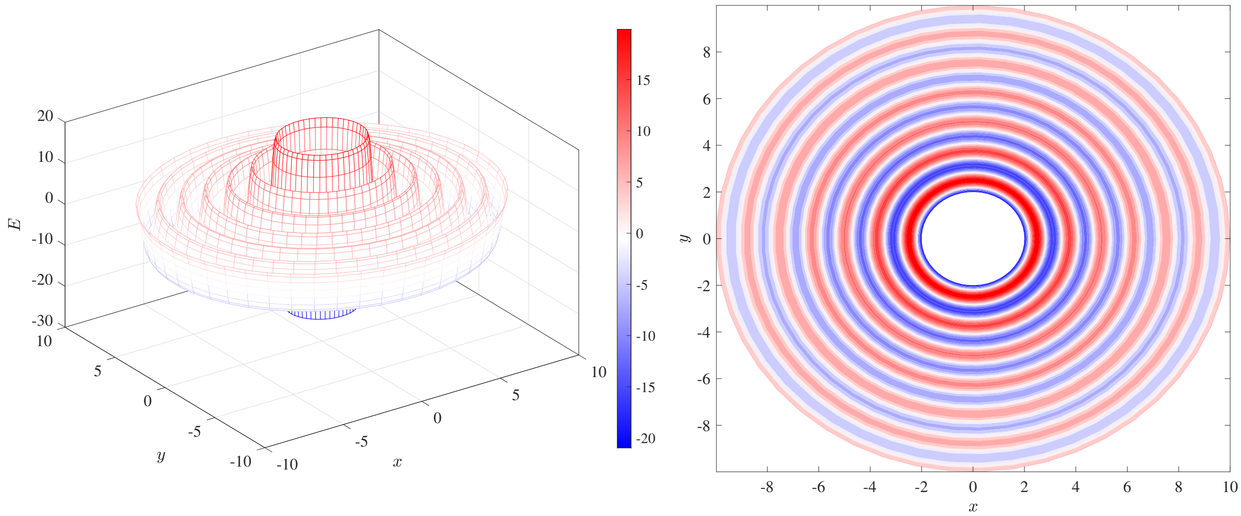


图 3.2: 单个球面波源在平面上的振荡情况

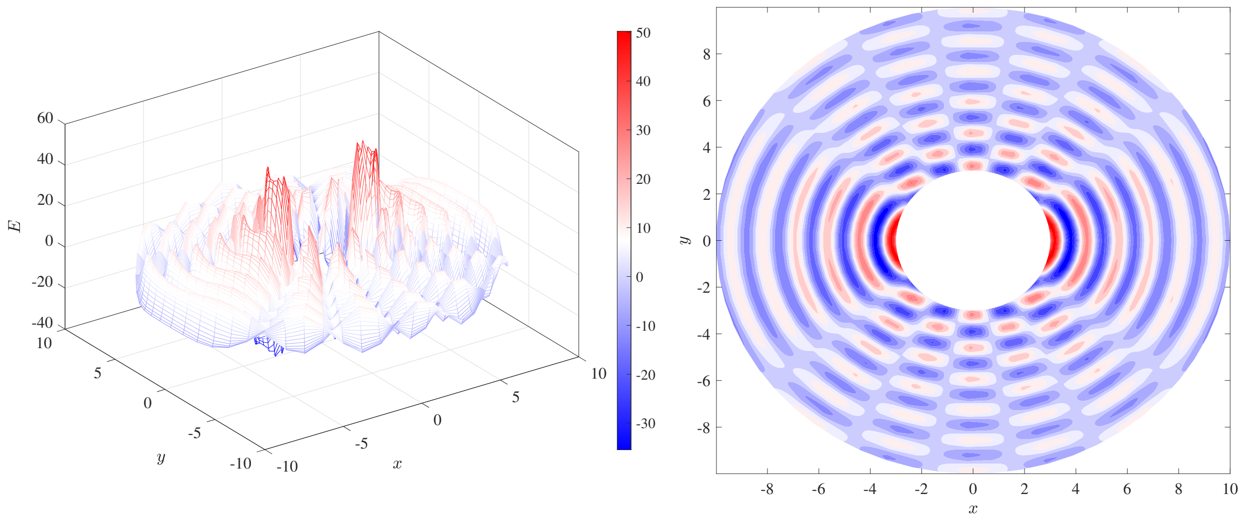


图 3.3: 两个球面波源在平面上的干涉情况

④源码见附录 B.5

⑤源码见附录 B.6

当点 P 离波源极远时，近似有 $\frac{r_1}{r_2}=1$（这与近似有 $r_1-r_2=0$ 不同），将距离记为 r，则振幅的位置分布为 $E_0=\frac{1}{r}\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos(k(r_1-r_2))}$。若可以认为 $\frac{1}{r}$ 近似不变，则此时，具有相同振幅大小的点，等价于 $\cos(k(r_1-r_2))$ 具有相同的值，也即：

$$|r_1-r_2|=\frac{1}{k}(\theta+2\pi n),\quad \theta\in[0,2\pi),\ n=0,1,2,\cdots \tag{3.16}$$

对每个给定的 n，上述方程表示一条双曲线（焦点为两波源），因此上述方程构成一个双曲线族（空间中构成旋转双曲面族），如图 3.1 (a) 中的灰色曲线所示。特别地，令 $\theta=0$ 可以得到最大振幅对应的双曲线族，令 $\theta=\pi$，得到最小振幅对应的双曲线族。

由于球面波的旋转对称性，只需绕 x 轴旋转一圈，即可得到整个空间上的振幅分布情况，也即两波源干涉情况。振幅的位置分布是较为重要的内容，在后文的干涉实验部分，我们将再次讨论这个问题。

示例二：两柱面波

考虑两柱面波的干涉情况，其中柱体的高与 x-y 平面垂直。容易发现，这与球面波在 x-y 平面的行为是相同的，仅需修改波源的振幅衰减系数。同样地，不妨令初相位 $\varepsilon_1=\varepsilon_2$，得到合扰动：

$$E=E_0\cos(-\omega t+\alpha)=E_0\cdot e^{i(-\omega t+\alpha)},\quad E_0=\sqrt{\frac{A^2}{r_1}+\frac{B^2}{r_2}+\frac{2AB}{\sqrt{r_1r_2}}\cos(k(r_1-r_2))} \tag{3.17}$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{E_0}\left(\frac{A}{\sqrt{r_1}}\sin\alpha_A+\frac{B}{\sqrt{r_2}}\sin\alpha_B\right),\quad \cos\alpha=\frac{1}{E_0}\left(\frac{A}{\sqrt{r_1}}\cos\alpha_A+\frac{B}{\sqrt{r_2}}\cos\alpha_B\right) \tag{3.18}$$

$$\alpha=\begin{cases}\arcsin\left[\frac{1}{E_0}\left(\frac{A}{\sqrt{r_1}}\sin\alpha_A+\frac{B}{\sqrt{r_2}}\sin\alpha_B\right)\right] & ,\cos\alpha\geqslant 0\\ \pi-\arcsin\left[\frac{1}{E_0}\left(\frac{A}{\sqrt{r_1}}\sin\alpha_A+\frac{B}{\sqrt{r_2}}\sin\alpha_B\right)\right] & ,\cos\alpha<0\end{cases} \tag{3.19}$$

由于柱面波的平移对称性，只需沿 z 轴进行平移，即可得到整个空间上的干涉情况。在平面内的其它性质与球面波类似。

示例三：两平面波

考虑两平面波的干涉情况，如图 3.1 (b)，平面波函数为：

$$E_A=E_{A,0}\cdot e^{i(-\omega t+kr_1+\varepsilon_A)},\quad \alpha_A=\boldsymbol{k_1}\cdot\boldsymbol{x}_{AP}+\varepsilon_A \tag{3.20}$$

$$E_B=E_{B,0}\cdot e^{i(-\omega t+kr_2+\varepsilon_B)}\quad \alpha_B=\boldsymbol{k_2}\cdot\boldsymbol{x}_{BP}+\varepsilon_B \tag{3.21}$$

令 $\varepsilon_1=\varepsilon_2$，得到合扰动：

$$E=E_0\cos(-\omega t+\alpha)=E_0\cdot e^{i(-\omega t+\alpha)} \tag{3.22}$$

$$E_0=\sqrt{E_{A,0}^2+E_{B,0}^2+2\cos(\Delta\alpha)},\quad \Delta\alpha=(\boldsymbol{k_1}-\boldsymbol{k_2})\cdot\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{k_2}\cdot\boldsymbol{x}_B-\boldsymbol{k_1}\cdot\boldsymbol{x}_A) \tag{3.23}$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{E_0}\left[E_{A,0}\sin(\boldsymbol{k_1}\cdot\boldsymbol{x}_{AP})+E_{B,0}\sin(\boldsymbol{k_2}\cdot\boldsymbol{x}_{BP})\right] \tag{3.24}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{E_0}\left[E_{A,0}\cos(\boldsymbol{k_1}\cdot\boldsymbol{x}_{AP})+E_{B,0}\cos(\boldsymbol{k_2}\cdot\boldsymbol{x}_{BP})\right] \tag{3.25}$$

$$\alpha=\begin{cases}\arcsin\left[\frac{1}{E_0}\left(E_{A,0}\sin\alpha_A+E_{B,0}\sin\alpha_B\right)\right] & ,\cos\alpha\geqslant 0\\ \pi-\arcsin\left[\frac{1}{E_0}\left(E_{A,0}\sin\alpha_A+E_{B,0}\sin\alpha_B\right)\right] & ,\cos\alpha<0\end{cases} \tag{3.26}$$

由于 $\boldsymbol{k_1}\cdot\boldsymbol{x}_A$ 和 $\boldsymbol{k_2}\cdot\boldsymbol{x}_B$ 是定值，而 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k_1}-\boldsymbol{k_2}$ 构成一个新的传播矢量，因此合成后的波仍是平面波（但不均匀，振幅是位置的函数），或者说每个等相面仍构成一个平面。

类似地，由平面波的平移对称性，沿 z 轴平移即可得全空间的合成情况。

3.2.2 多个同频波源的干涉

上面的结论容易推广到任意 n 个扰动叠加，即：

$$E = E_0 \cos\left(-\omega t + \alpha\right) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t+\alpha)} \tag{3.27}$$

$$E_0 = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} E_{i,0}\sin\alpha_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} E_{i,0}\cos\alpha_i\right)^2} \tag{3.28}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} E_{i,0}^2 + \sum_{1<=i<j<=n} 2E_{i,0}E_{j,0}\cos(\alpha_i-\alpha_j)}, \tag{3.29}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{E_0}\sum_{i=1}^{n} E_{i,0}\sin\alpha_i, \quad \cos\alpha = \frac{1}{E_0}\sum_{i=1}^{n} E_{i,0}\cos\alpha_i \tag{3.30}$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{1}{E_0}\sum_{i=1}^{n} E_{i,0}\sin\alpha_i\right) & ,\cos\alpha \geqslant 0 \\ \pi - \arcsin\left(\frac{1}{E_0}\sum_{i=1}^{n} E_{i,0}\cos\alpha_i\right) & ,\cos\alpha < 0 \end{cases} \tag{3.31}$$

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i + \sum_{1<=i<j<=n} 2\sqrt{I_iI_j}\cos(\alpha_i-\alpha_j) \tag{3.32}$$

§ 3.3 不同频率光的干涉

§ 3.4 产生干涉的实际条件

前面我们已经提到，在叠加（或干涉）问题中，电场的振幅通常只是位置的函数，而与时间无关，其实这也是观察到干涉图样的必要条件。观察干涉图样，无非是用照片（视频等同于照片）、人眼、辐射计以及类似的传感器，它们都有一定的“曝光时间”，我们只能观察到在曝光时间内，光强或辐射强度的平均值，即：

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cdot\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\cos(\Delta\alpha)\mathrm{d}t \tag{3.33}$$

其中 τ 为仪器的曝光时间。对可见光而言，其振荡周期 $T=\frac{\lambda}{v}$ 在 10^{-15} s 级别，因此 τ 通常远大于 T，这样，我们只能观察到平均光强，而无法观察到光强的瞬时变化。如果 $\Delta\alpha$ 与时间无关，或者在曝光时间内几乎保持不变，那么就能得到（观察到）稳定的干涉图样。否则恒有 $I=I_1+I_2$，是平凡的叠加，称为非相干叠加。

另外，若两波源的振动方向垂直，电场也仅是平凡的叠加，而不会产生干涉。因此，干涉现象要求两波源振动方向不能垂直。

以能发射单频波的普通光源为例，光是由光源中的原子、分子发生能级跃迁时发出的，跃迁时发出的波列长都有限，且初相位随机，持续时间 τ_0 通常短于 10 ns，在此时段内，光场振荡约百万次。对于探测设备来讲，10 ns 通常极短，远远小于曝光时间。由波列初相位的随机性，在曝光时间内的上万个波列的平均下，积分项 $\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\cos(\Delta\alpha)\mathrm{d}t$ 为 0，$I=I_1+I_2$，导致观察到的强度分布仅为平凡的叠加，无法观察到干涉。上面的普通光源，不断发出初相位随机的波列，并且波列持续时间 τ_0 极短（相对于曝光时间），不能得到任何干涉图样，称为时间不相干。称波列持续时间 τ_0 为相干时间，称波列长度 $l_0=c\tau_0$ 为相干长度。

有一些光源，它们具有一定的发光宽度，不能看作理想的点光源。当光源宽度较大时，光源不同部分发出的光的叠加，会导致条纹的对比度降低（甚至为 0），称为空间不相干。

还有一些光源是多频光源（或具有一定宽度的光谱），波长差别极小时（通常是 10^{-2} nm 级），不同波长相互叠加导致条纹对比度降低，波长差别较大时，$\cos(\Delta\alpha)$ 的周期远小于 τ，积分项为零，也只能发生非相干叠

加。以两频光源为例，发出时间角频率为 ω_1 和 ω_2 的光，则在同一位置，相位差 $\Delta\alpha = (k_2 - k_1)x - (\omega_2 - \omega_1)t$ 是 t 的函数，当曝光时间 τ 远大于调制周期 $T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ 时，积分项 $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos(\Delta\alpha)\mathrm{d}t$ 趋于 0，得到 $I = I_1 + I_2$，也是非相干叠加。

总而言之，影响相干性的条件大致有三个方面：波列持续时间 τ_0、光源宽度 d 和发光光谱 $i = i(\lambda)$。现实中没有任何一种光源在上面三个方面都做到极好，因此，在设计干涉实验时，需要依据选定光源的特性，选择合适的实验方案，或者依据实验弱化了哪些因素的影响，选择合适的光源。

§ 3.5 分波前干涉

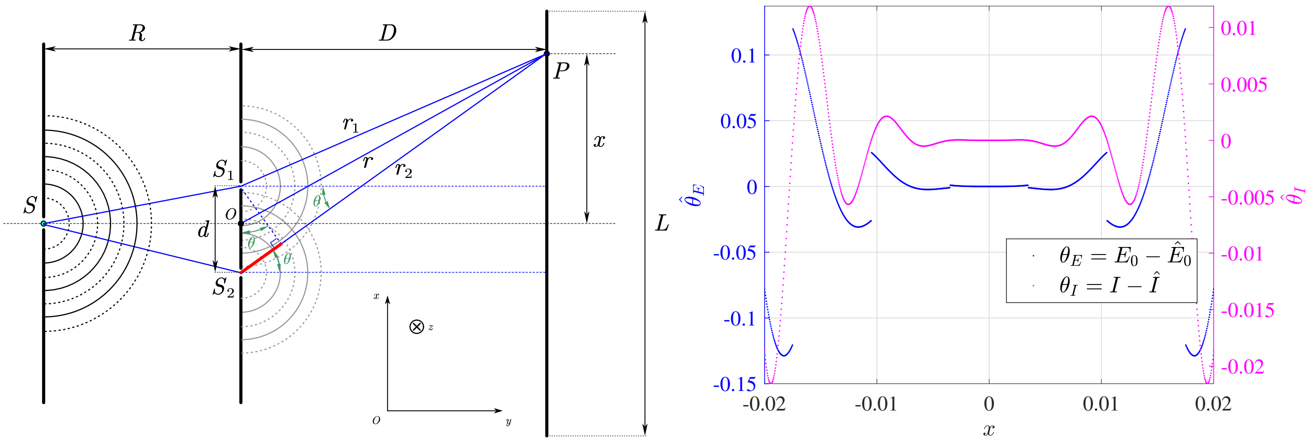
波前，即波面，也称波阵面或等相面。“分波前”干涉，是依据惠更斯原理，将一个波面分为两个（或多个）波面，最终产生干涉现象。

3.5.1 杨氏双缝干涉实验

杨氏双缝干涉装置如图 3.4 (a)，S 为一狭缝，S_1 和 S_2 为一对狭缝，最右侧的屏为观察屏。由惠更斯原理，一平面波（可借助激光器和透镜产生）传播到狭缝 S 时，以柱面波形式出射，在遇到双缝屏时，分化为两个柱面波继续前进，从而产生干涉，并在观察屏上显现出来。与杨氏实验原理类似的有洛埃德镜实验、菲涅尔双棱镜、菲涅尔双面镜等，它们的 GIF 动图见链接 https://www.123pan.com/s/0y0pTd-5wKj3。

如果杨氏实验中双缝屏上的双缝对称分布，一般可认为分化的两个柱面波具有相同的初相位和振幅。装置中各参量的典型值是：

$$d = 100\ \mu\text{m},\ R = 5\ \text{cm},\ D = 1\ \text{m},\ L = 4\ \text{cm},\quad D \gg L \gg d \tag{3.34}$$



(a) 杨氏双缝干涉装置 (b) 近似模型残差分布

图 3.4: 杨氏双缝干涉装置与近似模型残差分布

设通过双缝屏后，两柱面波的振幅系数相同，都为 A，真空介电常量 $\varepsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12}\ \text{F}\cdot\text{m}^{-1}$，真空磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{N}\cdot\text{A}^{-2}$，则两波的光强度分别为

$$I_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{1,0}^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cdot\frac{A^2}{r_1},\quad I_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cdot\frac{A^2}{r_2} \tag{3.35}$$

那么，接受屏上的振幅和强度分布为：

$$E_0 = A\sqrt{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{2}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)\right)},\quad I = A^2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)\right)}{\sqrt{r_1 r_2}}\right] \tag{3.36}$$

装置参数在典型值附近时，可以有近似：

$$\frac{r_1}{D}=\frac{r_2}{D}=1,\quad r_2-r_1=\frac{d}{\sin\theta}=\frac{d}{\sin\theta}=\frac{xd}{D},\quad I_1=I_2 \tag{3.37}$$

得到近似后的振幅和强度分布如下，其中 $\Delta x=\frac{\lambda D}{b}$ 称为条纹间距。

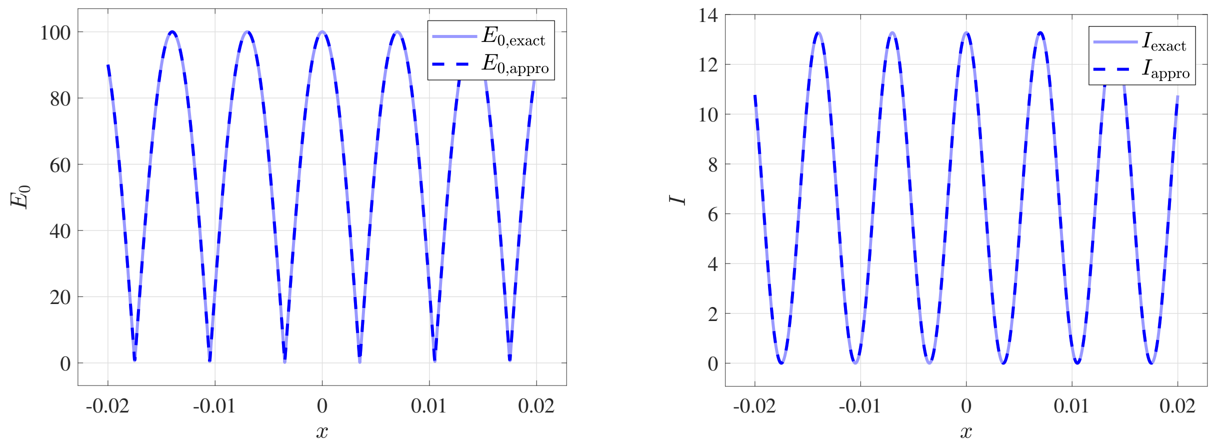
$$E_0(x)=\frac{\sqrt{2}A}{\sqrt{D}}\cdot\sqrt{1+\cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda D}x\right)}=\frac{\sqrt{2}A}{\sqrt{D}}\cdot\sqrt{1+\cos\left(\frac{2\pi x}{\Delta x}\right)} \tag{3.38}$$

$$I(x)=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cdot\frac{A^2}{D}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda D}x\right)\right]=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cdot\frac{A^2}{D}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi x}{\Delta x}\right)\right] \tag{3.39}$$

图 3.5[6] 展示了未近似和近似时，振幅、光强在接受屏上的分布情况，图 3.4 (b) 是近似与未近似模型的残差分布，其中装置参数采取典型值。计算得到一些误差参数（对横坐标均匀离散 1000 个点）如下[7]：

$$\begin{aligned}
&1-R^2_{E_0}=0.0000030505, && 1-R^2_I=0.0000024290\\
&1-R^2_{\text{adj},E_0}=0.0000030536, && 1-R^2_{\text{adj},I}=0.0000024314\\
&MAPE_{E_0}=0.0020522069, && MAPE_I=0.00415721554\\
&MyMAPE_{E_0}=0.0017294036, && MyMAPE_I=0.0010723717\\
&RMSE_{E_0}=0.0534542000, && RMSE_I=0.0071984799\\
&fitness_{\text{adj},E_0}=0.0534543632, && fitness_{\text{adj},I}=0.0071984975\\
&SAAE_{E_0}=0.0005185186, && SAAE_I=0.0006493885
\end{aligned} \tag{3.40}$$

由图 3.4 (b)，图 3.5 和列出的误差参数可以看到，近似效果很好。



(a) 电场振幅位置分布　　(b) 光强位置分布

图 3.5: 近似模型与非近似模型的比较

杨氏双缝干涉的特点：

(1) 非定域干涉：在干涉场中离双孔不太近也不太远的区域处处有干涉

(2) 自相干：相干光波来自同一波源

(3) 定态干涉：振幅（或强度）在干涉场中的分布仅与位置有关，与时间无关

白光光源与其他补充内容详见 PHY C15: Double Slit Interference、University of Louisville: Double Slit Interference 以及 知乎：双缝干涉实验，我们不多赘述。从另一个角度，也可以利用双曲线的定义杨氏干涉的精确模型 + 近似模型，详见 知乎：杨氏干涉的条纹间距。

[6] 图 3.4 (b) 与图 3.5 源码见附录 B.7

[7] 这些误差参数的定义详见 YiDingg > Notes > Else > Goodness of Fit

3.5.2 杨氏实验中光源位置和宽度对干涉条纹的影响

为提高分析效率，此节的推导都采用近似模型。接受屏上相邻明（暗）条纹的间距 Δx 为：

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{d} \tag{3.41}$$

取 $\lambda = 700.0\ \mathrm{nm}$ 的红光，$\Delta x = 7\ \mathrm{mm}$，可被人眼分辨。称 $\frac{\Delta x}{2}$ 为条纹宽度，此时条纹宽度为 3.5 mm。

下面依次讨论光源位置、光源宽度对干涉条纹的影响。先考虑理想点光源的微小移动引起的干涉条纹移动。当点光源位于中轴线上时，0 级明纹也在轴上，假设光源 S 向下移动距离 $|\delta_s|$，也即向上移动 $(-\delta_s)$，在近似条件 3.37 下，以及 $R \gg d$ 时近似有 $R_1 - R_2 = \frac{d(-\delta_s)}{R}$，得到 0 级明纹向上移动的距离 δ_x 如下，其中负号表示两者移动方向相反。

$$\delta_x = -\frac{D}{R}\delta_s \tag{3.42}$$

实际光源并非是理想的点光源，而是有一定的光源宽度，虽然对干涉条纹位置影响不大，但会对条纹对比度产生明显的影响。理想点光源不在中央时，屏幕上的强度分布大小可以近似不变，仅是发生上下平移。记点光源位置为 δ_s，在公式 3.38 中作映射 $x \longrightarrow x - \delta_x$，并简记接受屏上的最大光强为 $I_{\max} = 2\frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \cdot \frac{A^2}{r}$，简记 x 前的系数为 $\eta = \frac{2\pi}{\Delta x}$，得到新的强度分布：

$$I(x) = \frac{I_{\max}}{2}\left[1 + \cos\left(\eta(x - \delta_x)\right)\right] = \frac{I_{\max}}{2}\left[1 + \cos\left(\eta x + \eta\frac{D}{R}\delta_s\right)\right] \tag{3.43}$$

$$= \frac{I_{\max}}{2}\left[1 + \cos(\eta x)\cos\left(\eta\frac{D}{R}\delta_s\right) - \sin(\eta x)\sin\left(\eta\frac{D}{R}\delta_s\right)\right], \quad \eta = \frac{2\pi}{\Delta x} \tag{3.44}$$

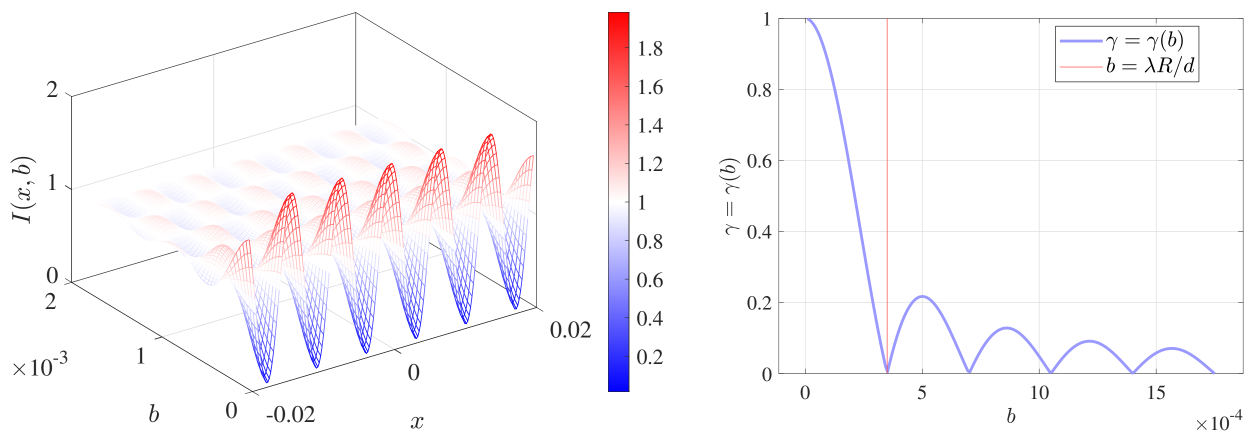
设光源在中央且宽度为 b（即发光区域在 $[-\frac{2}{b},\ \frac{2}{b}]$），光源均匀发光（事实上这个条件比较苛刻，现实中的激光器无法做到，需要对光线进行处理），屏幕上的强度分布 $I(x,b)$ 和条纹对比度为：

$$I(x,b) = \frac{I_{\max}}{2b}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[1 + \cos(\eta x)\cos\left(\eta\frac{D}{R}\delta_s\right) - \sin(\eta x)\sin\left(\eta\frac{D}{R}\delta_s\right)\right]\mathrm{d}\delta_s \tag{3.45}$$

$$= \frac{I_{\max}}{2}\left[1 + \frac{\sin\left(\frac{\eta D}{2R}b\right)}{\frac{\eta D}{2R}b}\cdot\cos(\eta x)\right] = \frac{I_{\max}}{2}\left[1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda R}b\right)}{\frac{\pi d}{\lambda R}b}\cdot\cos\left(\frac{2\pi x}{\Delta x}\right)\right] \tag{3.46}$$

$$\gamma = \gamma(b) = \left|\frac{\sin u}{u}\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda R}b\right)}{\frac{\pi d}{\lambda R}b}\right| \tag{3.47}$$

其中 $u = \frac{\pi d}{\lambda R}b$。强度分布 $I(x,b)$ 与干涉条纹对比度 $\gamma(b)$ 如图 3.6 所示[8]，当 $b = \frac{\lambda R}{d}$ 时，对比度为 0，完全看不到干涉条纹，将其称为光源极限宽度，此时认为光源完全不相干。



(a) 光强分布随光源宽度的变化　　**(b) 干涉条纹对比度随光源宽度的变化**

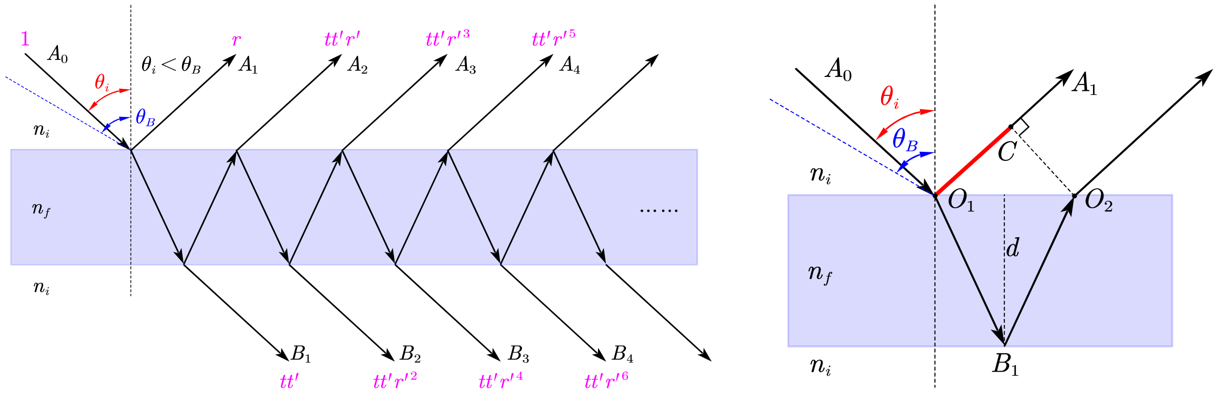
图 3.6: 光源宽度对干涉条纹的影响

[8] 源码见附录 B.8

§ 3.6 分振幅干涉

3.6.1 多光束薄膜干涉

如图 3.7 (a) 所示，一入射光接近垂直入射到一薄膜时（$\theta_i < \theta_B$），发生多次反射、透射，下面讨论其能量与干涉情况。



(a) 薄膜多光束干涉 (b) 薄膜双光束干涉

图 3.7: 薄膜干涉

由于没有发生全反射，相位变化是平凡的（透射无相变，反射只能是 $-\pi$ 或零），而反射光的相位变化已经包含在振幅反射系数 r 中了（由其正负表示）。因此，在分析多光束干涉时，只需考虑各光（有正负）的振幅以及光程差，处理波函数的表达式的叠加即可。

记相邻两束反射（透射）光的光程差为 Δl，光程差带来的相位差为 δ（无需考虑反射相位突变，因为它涵盖在了振幅的正负中），由图 3.7 (b) 所示，可求得：

$$\Delta l = l_2 - l_1 = 2n_f \cdot \overline{O_1B_1} - n_i \cdot \overline{O_1C} = \frac{2n_f d}{\cos\theta_t} - 2n_i \sin\theta_i \tan\theta_t d = 2n_f d\cos\theta_f \tag{3.48}$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_i}\Delta l = \frac{4\pi n_f d\cos\theta_f}{\lambda_i} \tag{3.49}$$

由公式 2.30（斯托克斯倒逆关系），$r + r' = 1$, $tt' + rr' = 1$，结合等比数列极限（$n \to \infty$），可得反射波的总振幅系数 r_A、透射波的总振幅系数 t_B:

$$r_A = r + tt'r'e^{i\delta}\left(1 + r'^2e^{i\delta} + r'^4e^{2i\delta} + \cdots\right) = r + \frac{tt'r'e^{i\delta}}{1 - r'^2e^{i\delta}} = r\left(\frac{1 - e^{i\delta}}{1 - r^2e^{i\delta}}\right) \tag{3.50}$$

$$t_B = tt'\left(1 + r'^2e^{i\delta} + r'^4e^{2i\delta} + \cdots\right) = \frac{tt'}{1 - r'^2e^{i\delta}} = \frac{1 - r^2}{1 - r^2e^{i\delta}} \tag{3.51}$$

由于上述推导与角标 s 或 p 无关，因此对 s 波和 p 波都成立。

也即得到：

$$r_{A,s} = \frac{\boldsymbol{E_{r,s}}}{\boldsymbol{E_{i,s}}} = r_s\left(\frac{1 - e^{i\delta}}{1 - r_s^2e^{i\delta}}\right), \quad r_{B,p} = \frac{\boldsymbol{E_{r,p}}}{\boldsymbol{E_{i,p}}} = r_p\left(\frac{1 - e^{i\delta}}{1 - r_p^2e^{i\delta}}\right) \tag{3.52}$$

$$t_{B,s} = \frac{\boldsymbol{E_{t,s}}}{\boldsymbol{E_{i,s}}} = \frac{1 - r_s^2}{1 - r_s^2e^{i\delta}}, \quad t_{B,p} = \frac{\boldsymbol{E_{t,p}}}{\boldsymbol{E_{i,p}}} = \frac{1 - r_p^2}{1 - r_p^2e^{i\delta}} \tag{3.53}$$

据此，可以定义光学经过薄膜时的能量系数 $R_{F-P,s}$，$R_{F-P,p}$，$T_{F-P,s}$，$T_{F-P,p}$（与菲涅尔公式中的能量系数

类似，但物理意义不同）：

$$R_{F-P,s} = |r_{A,s}|^2 = \frac{4R_s \sin^2 \frac{\delta}{2}}{(1-R_s)^2}, \quad R_{F-P,p} = |r_{A,p}|^2 = \frac{4R_p \sin^2 \frac{\delta}{2}}{(1-R_p)^2} \tag{3.54}$$

$$T_{F-P,s} = \frac{n_1 \cos\theta_1}{n_3 \cos\theta_3} |t_{B,s}|^2 = \frac{(1-R_s)^2}{(1-R_s\cos\delta)^2 + R_s^2 \sin^2\delta} \tag{3.55}$$

$$T_{F-P,p} = \frac{n_1 \cos\theta_1}{n_3 \cos\theta_3} |t_{B,p}|^2 = \frac{(1-R_p)^2}{(1-R_p\cos\delta)^2 + R_p^2 \sin^2\delta} \tag{3.56}$$

其中 $\theta_1 = \theta_3 = \theta_i$，$n_1 = n_3 = n_i$。角标 $F-P$ 指 Fabry-Perot Interferometer（法布里-珀罗干涉仪），是一种利用薄膜产生干涉现象的仪器。定义 $F_s = \frac{4R_s}{(1-R_s)^2}$，$F_p = \frac{4R_p}{(1-R_p)^2}$，称为精细度，则上式可简写为：

$$R_{F-P,s} = \frac{F_s \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + F_s \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad R_{F-P,p} = \frac{F_p \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + F_p \sin^2 \frac{\delta}{2}} \tag{3.57}$$

$$T_{F-P,s} = \frac{1}{1 + F_s \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad T_{F-P,p} = \frac{1}{1 + F_p \sin^2 \frac{\delta}{2}} \tag{3.58}$$

$$\delta = \frac{4\pi n_f d \cos\theta_f}{\lambda_i}, \quad F_s = \frac{4R_s}{(1-R_s)^2}, \quad F_p = \frac{4R_p}{(1-R_p)^2} \tag{3.59}$$

其中 n_f 是薄膜的折射率，容易验证上式满足能量守恒。在实际操作中，基本都会选取接近垂直的入射光，此时 s 波 p 波（近似）具有相同的能量系数 $R = R_s = R_p$，因此又常写为下面的式子：

$$R_{F-P} = \frac{F \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad T_{F-P} = \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad F = \frac{4R}{(1-R)^2}, \quad \delta = \frac{4\pi n_f d \cos\theta_f}{\lambda_i} \tag{3.60}$$

$T_{F-P} = T_{F-P}(F, \delta)$ 的图像如下所示[⑨]，F 越大，透射光的对比度越高，在干涉现象中形成的条纹越明显，且 F 增大时，透射峰的宽度减小，亮条纹变细变锐利。

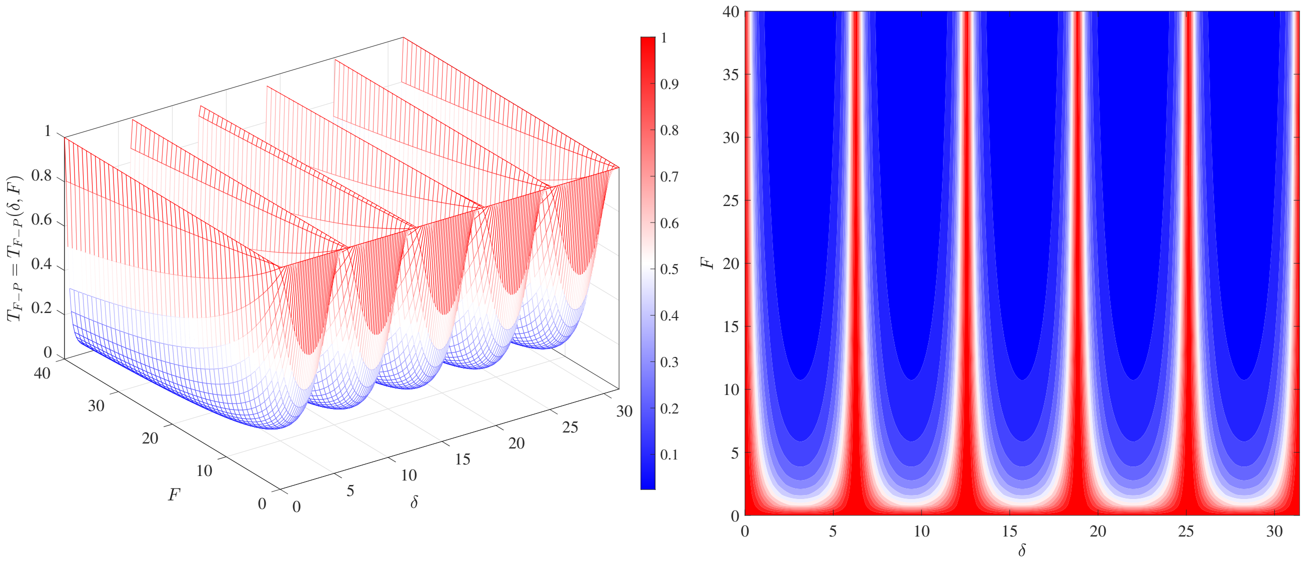


图 3.8: 精细度对透射率的影响

实际中常基于上面理论，设计出增透膜、增反膜等薄膜，实现光的选择性透射、反射。如果遇到，直接利用反射相位突变进行分析即可。

更多有关多光束薄膜干涉（法布里-珀罗干涉仪 Fabry-Perot Interferometer）的内容见 Fabry-Perot Interferometer (https://zhuanlan.zhihu.com/p/579184206)，以及 F-P 干涉仪 (https://zhuanlan.zhihu.com/p/453978087)。

[⑨] 源码见附录 B.9

3.6.2 双光束薄膜干涉

当振幅反射率 r 较小时，A 光的振幅衰减很快，可以仅考虑双光束干涉（A_1 与 A_2），而忽略剩余反射光带来的影响，如图 3.7 (b)。实际操作中，也常用薄透镜将两束出射光汇聚于一点，而不会引起附加的相位差。反射后光线 O_1A_1 与 O_2A_2 的光程差 Δl 为：

$$\Delta l = l_2 - l_1 = 2n_f \cdot \overline{O_1B_1} - n_i \cdot \overline{O_1C} = \frac{2n_f d}{\cos\theta_t} - 2n_i \sin\theta_i \tan\theta_t d = 2n_f d\cos\theta_f \tag{3.61}$$

即 A_2 比 A_1 多走了 Δl 的光程，相当于相位增量 $-\omega\frac{\Delta l}{c}$，算上反射时 A_2 与 A_1 之间的相位增量 $-\pi$（事实上 s 波是 $-\pi$ 而 p 波是 π），总光程差 OPD (Optical Path Difference, 常记为 ΔL)（A_2 的减去 A_1）和总相位增量 $\Delta\alpha$ 为：

$$\boxed{\Delta L = 2n_f d\cos\theta_f + \frac{\lambda}{2}},\quad \Delta\alpha = -\left(1 + \frac{4n_f\cos\theta_t}{\lambda}\cdot d\right)\pi = -\left[1 + \frac{4n_f\sqrt{1-\left(\frac{\sin\theta_i}{n_{ti}}\right)^2}}{\lambda}\cdot d\right]\pi \tag{3.62}$$

随参数 θ_i、d 的改变，不同位置上会有不同的 ΔL，得到不同的振幅大小，从而产生干涉条纹。

3.6.3 等倾干涉

等倾干涉实验装置如图 3.9 所示，其干涉条纹特征为：

(1) 亮条纹：$\Delta L = k\lambda \Longrightarrow \cos\theta_t = \frac{\lambda}{2n_f d}\cdot(k-\frac{1}{2}),\quad k = 1,2,3,...$

(2) 暗条纹：$\Delta L = (k+\frac{1}{2})\lambda \Longrightarrow \cos\theta_t = \frac{\lambda}{2n_f d}\cdot k,\quad k = 0,1,2,3,...$

(3) r 较小时，等倾双光束强度近似相等，干涉条纹对比度接近 1

(4) 称中心暗条纹为 0 级暗纹，往外依次是 1 级亮纹、1 级暗纹、2 级亮纹、2 级暗纹……

(5) 等倾条纹内疏外密。这是因为：

$$\cos\theta_{t,n+1} - \cos\theta_{t,n} = \frac{\lambda}{2n_f d},\quad \frac{\cos\theta_{t,n+1} - \cos\theta_{t,n}}{\theta_{t,n+1} - \theta_{t,n}} \approx \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta_n \tag{3.63}$$

$$\Longrightarrow \Delta r = (r_{n+1} - r_n) \propto (\theta_{t,n+1} - \theta_n) = -\frac{\lambda}{2d\sin\theta_{t,n}} \tag{3.64}$$

随着 r 的增大，入射光指在薄膜（半反射镜）上的点由中心向外移动，θ_i 增大，θ_t 增大，于是 $|\Delta r|$ 减小，条纹逐渐变密。

(6) 增加薄膜厚度，条纹向外移动。薄膜厚度连续增大时，中心位置强度周期性变化，且不断生出新条纹向外移动，可以利用这一特点精确测量薄膜厚度的改变量。

使用扩展光源（有宽度光源）时，条纹对比度不受影响，但条纹的强度增大，干涉图样更加明亮。

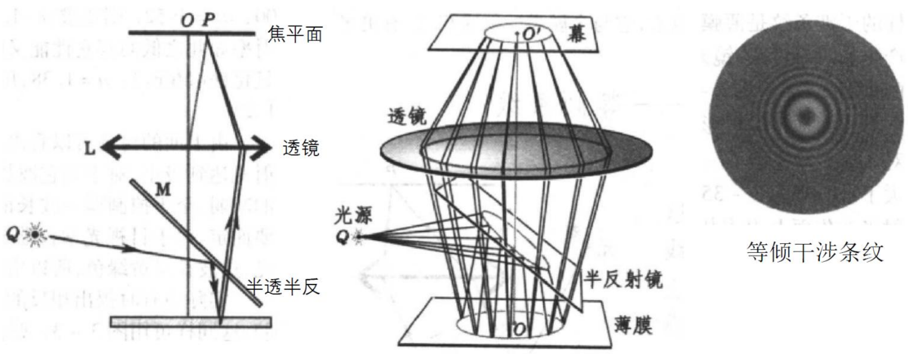


图 3.9: 等倾干涉实验装置

等倾干涉实验动图见链接 https://www.123pan.com/s/0y0pTd-MgKj3。

3.6.4 等厚干涉

等厚干涉，也称等厚条纹干涉，是指由薄膜厚度不均匀而引起的干涉现象，它的主要变量（参数）是光学厚度 $n_f d$ 而不是 θ_i（即 θ_t）。等厚干涉产生的条纹一般是等厚位置的条纹，例如劈尖干涉、牛顿环等。

劈尖干涉：

两块（几乎）平行的玻璃板，夹角为 θ 极小，中间是空气层，即薄膜是空气，观察反射光的干涉现象。由 $R_{F-P} = \frac{F\sin^2(\frac{\delta}{2})}{1+F\sin^2(\frac{\delta}{2})}$ 可知，明条纹对应 $\frac{\delta}{2} = (k+\frac{1}{2})\pi$，这等价于 $2n_f d\cos\theta_f + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$，而暗条纹对应 $\frac{\delta}{2} = k\pi$。作近似 $n_f = 1$，$\cos\theta_f = 1$，得到：

$$\text{明条纹：} d = (1+2k)\cdot\frac{\lambda}{4}, \quad \text{暗条纹：} d = (2k)\cdot\frac{\lambda}{4}, \quad k = 0,1,2,... \tag{3.65}$$

$$\text{相邻亮（暗）纹：} \Delta d = \frac{\lambda}{2}, \quad \Delta x = \frac{\lambda}{2\sin\theta} \tag{3.66}$$

可借此求出夹在玻璃板之间引起 θ 角的细小物体的直径。

牛顿环：

把一个曲率半径很大的凸透镜至于平面玻璃片上，两者接触的地方形成厚度不均匀的空气薄膜，得到的干涉条纹是一系列同心圆环。设凸透镜的半径为 R，以接触点为圆心 O，类似劈尖干涉中的近似，得到：

$$\text{明条纹：} r = \sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)R\lambda}, \quad \text{暗条纹：} r = \sqrt{kR\lambda}, \quad k = 0,1,2,... \tag{3.67}$$

中心为 0 级暗纹，往外级数增大，干涉条纹逐渐变密。

§ 3.7 迈克尔逊干涉

我们需要认识到，绝大多数的干涉现象，本质都是空间上两个（甚至多个）不同位置的球面波源（或其他类型的波）在某点的叠加。随着目标位置点 P 的移动，发生叠加的两波（两束光）的 OPD（即 ΔL）不断改变，得到不同的振幅大小，从而产生干涉图样。本节所介绍的几种干涉，其本质也是如此，只是具体实现方式不同。

3.7.1 单色光源迈克尔逊干涉：

迈克尔逊干涉仪如图 3.10 所示，图中反射镜 M_1 与 M_2'（虚镜）水平（此时的干涉现象类似等倾干涉），下方是接收屏或接受仪，图中的虚线光路表示出射向无穷远处（不被观察屏接收），或振幅较小而可以忽略的光线。

可以证明，从出射开始，分束所得到的两束光的空间光程差为 $\Delta l = 2d\cos\theta$，其中 θ 是光束射向反射镜 M 的入射角（光源平行出射时，$\theta = 0$）。再考虑上在分束镜 G 处发生的相位突变（半波损失），与等倾干涉的结论类似，此时的条纹内疏外密，类似等倾干涉时的图 3.9。

$$\begin{array}{cc} \text{OPD:} & \Delta L = 2d\cos\theta + \frac{\lambda}{2} \\ \text{亮条纹：} & \Delta L = k\lambda \Longrightarrow \cos\theta_k = \frac{\lambda}{2n_f d}\cdot(k-\frac{1}{2}), \quad k = 1,2,3,... \\ \text{暗条纹：} & \Delta L = (k+\frac{1}{2})\lambda \Longrightarrow \cos\theta_k = \frac{\lambda}{2n_f d}\cdot k, \quad k = 0,1,2,3,... \\ \text{条纹间距：} & |\Delta r| \propto \frac{\lambda}{2d\sin\theta_k} \end{array} \tag{3.68}$$

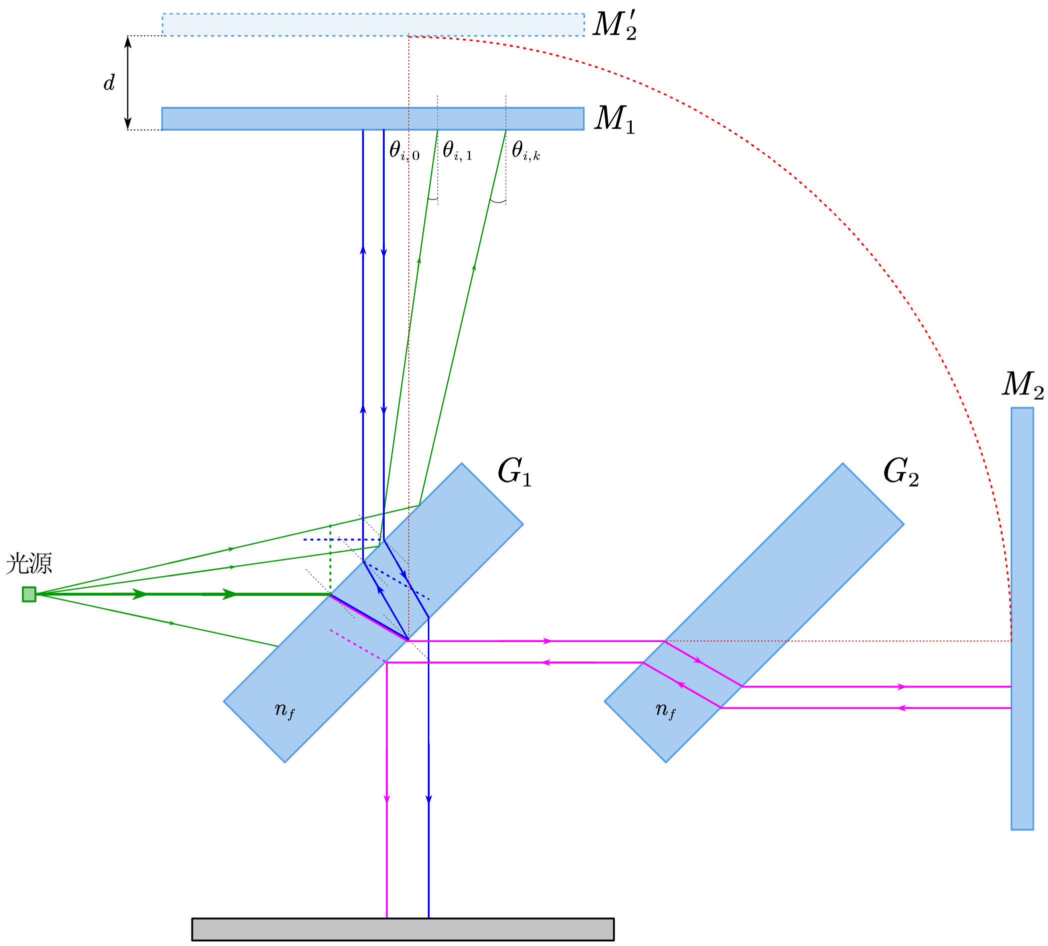


图 3.10: 迈克尔逊干涉仪

对给定的第 k 条亮纹，在图 3.10 的情况下（M_1 在 M_2' 下方），将 M_1 向上移动，d 减小，$\cos\theta_k$ 增加，θ_k 减小，条纹向中心移动，直至完全收缩并消失。并且，随着 d 越来越小，条纹间距 $|\Delta r|$ 越来越大，直至 $d\to 0$ 时 $|\Delta r|\to\infty$，中心条纹布满整个观察屏。继续向上移动 M_1，“穿过” M_2' 后，干涉条纹重新出现。

记中心点（$\theta_0=0$）处的条纹为中心（零号）条纹（它可能既不是极大值也不是极小值），对于给定的 d，得到与中心条纹相差 λ 的第 k 号条纹：

$$2d(1-\cos\theta_k)=k\lambda \Longrightarrow \theta_k=\sqrt{\frac{k\lambda}{d}},\quad k=0,1,2,3,\ldots \tag{3.69}$$

关于如何将迈克尔逊干涉仪看作是具有两个不同位置波源的仪器，详见参考文献 [1] Page 516，了解这一部分有助于我们理解干涉仪器的内涵。当 M_1 与 M_2' 不平行时，会发生类似等厚干涉的现象，出现平行直条纹。并且，从数学上可以证明，调整 M_1 和 M_2' 的方向，可以产生直线、圆、椭圆、抛物线或双曲线形的干涉条纹，这一部分我们不深究。

移动反射镜 M_1、M_2，或者在光路中插入其它介质，可以改变光程差，从而使干涉条纹发生移动。当光程差 OPD 的改变量达到 λ 时，每条干涉条纹都会移动一个条纹间距，移动到原先的相邻条纹处，这种方法可以用来测量镜面的微小移动距离，也可以测量插入介质的折射率。设镜面移动的距离或插入介质的厚度为 Δd，则有：

$$2n\Delta d=N\lambda_0 \tag{3.70}$$

其中 n 是插入介质的折射率（移动镜面时相当于 $n=1$），λ_0 是光源发出的光在空气中的波长，N 是移动的条纹数。

3.7.2 多色光源迈克尔逊干涉：

假设光源是双色光源，且两色的强度相同，对任意给定的 ΔL（相当于给定位置 P），我们有：

$$I_1(\Delta L) = 2I_0\left[1+\cos\left(k_1\Delta L\right)\right],\quad I_2(\Delta L) = 2I_0\left[1+\cos\left(k_2\Delta L\right)\right] \tag{3.71}$$

$$\Longrightarrow I(\Delta L) = 4I_0\left[1+\cos\left(\frac{\Delta k}{2}\Delta L\right)\cos(\bar{k}\Delta L)\right],\quad \Delta k = k_1 - k_2,\ \bar{k} = \frac{k_1+k_2}{2} \tag{3.72}$$

其中 Δk 称为调制（空间角）频率，$\bar{k}$ 为平均（空间角）频率，$\Delta k \ll \bar{k}$ 时，可以观察到条纹对比度 γ 随 ΔL 周期性变化。例如，$\lambda_1 = 550.0\ \mathrm{nm}$，$\lambda_2 = 555.0\ \mathrm{nm}$ 时的情况如图 3.11 所示。

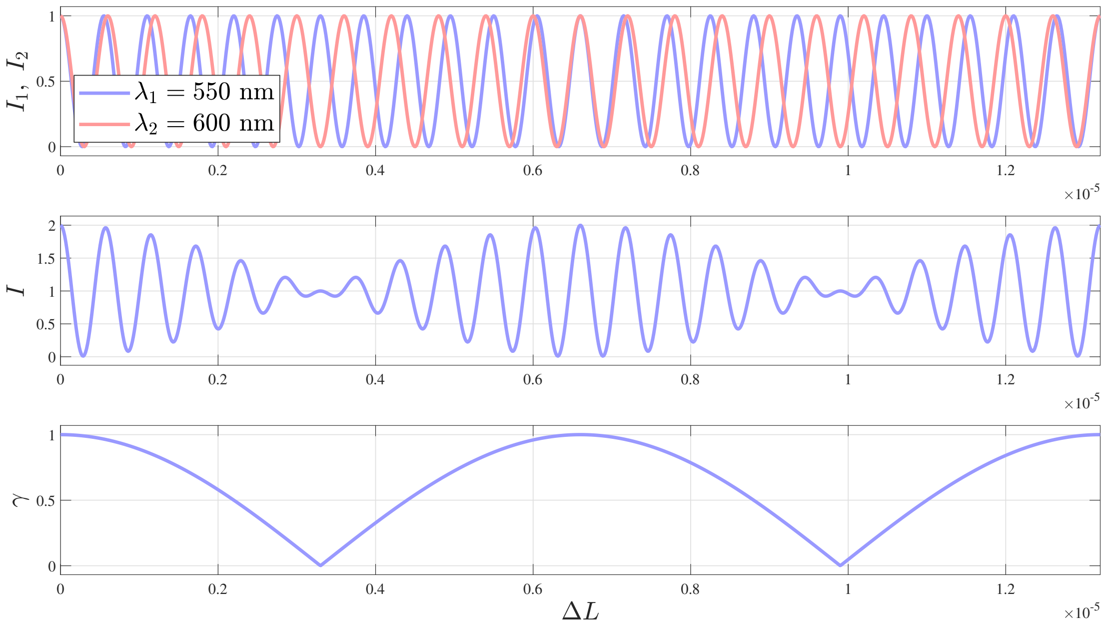


图 3.11: 双色光源的对比度分布情况

上面考虑的是线光谱，对于连续光谱，有光谱密度 $i = i(\lambda)$，总光强 $I = \int i(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$。当然，也可以用空间角频率 k 作变量。考虑以 k_0 为中心，宽为 Δk 的均匀光谱 $i(k)$，我们有：

$$i(k) = \begin{cases} \frac{I_0}{\Delta k}, & |k-k_0| < \frac{\Delta k}{2} \\ 0, & |k-k_0| > \frac{\Delta k}{2} \end{cases},\quad \gamma = \gamma(\Delta L) = \left|\frac{\sin\left(\frac{\Delta k\Delta L}{2}\right)}{\frac{\Delta k\Delta L}{2}}\right| \tag{3.73}$$

$$I = \int i(k)\left[1+\cos(k\Delta L)\right]\,\mathrm{d}k = I_0\left[1+\frac{\sin\left(\frac{\Delta k\Delta L}{2}\right)}{\frac{\Delta k\Delta L}{2}}\cdot\cos(k_0\Delta L)\right] \tag{3.74}$$

上面的结果与 3.5.2 节“杨氏实验中光源位置和宽度对干涉条纹的影响”中光源宽度对干涉条纹的影响完全同构，图像也是同构的。在讨论光源宽度时，我们定义了光源极限宽度 $b_{\max} = \frac{\lambda R}{d}$，类似地，在这里我们定义最大光程差 $\Delta L_{\max} = \frac{2\pi}{\Delta k} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$，这是条纹对比度第一次下降到 0 时对应的光程差。

3.7.3 马赫-曾德尔干涉

原理与迈克尔逊干涉仪类似，我们不多赘述。

§3.8 光场的空间相干性与时间相干性

§3.9 多光束干涉

§3.10 激光

参考文献

[1] (美) Eugene Hecht 著；秦克诚，林福成译. *Optics*. 电子工业出版社, 北京, 5 edition, 6 2019.

[2] 罗昌由. 电磁可控 goos-hänchen 位移理论研究. 博士论文, 湖南大学, 2015.

附录 A　波理论

光的真实本性是光学的全部讨论的中心问题，在本书中我们从头到尾都得对待这个问题。“光究竟是一种波动现象还是一种粒子现象？”这个似乎干脆利索的问题，远比它初看之下复杂得多。

因为对光的经典讨论和量子力学讨论都要用到波的数学描述，本章要为这两种表述所需要的东西打好基础。下面叙说的想法将用于一切物理波，从一杯茶的表面张力皱波，到从某个遥远的星系照到我们的光脉冲。

A.1 一维波

A.1.1　n 维波的概念

一维波指的是在一维空间中传播的波，或者可以看作在一维空间中传播的波。例如一束光在空间中传播，沿其传播方向建立 x 轴，则有 $E = E_0 e^{kx-\omega t}$（具有正负），这束光便可视为一维波。

一维波函数的最一般的形式：

$$\psi(x,t) = f(x - vt) = g(kx - \omega t) \tag{A.1}$$

具体而言，对于给定的波形（波的形状），我们只需令 $t = 0$，拍一张“照片”（例如 $\psi(x) = \frac{3}{10x^2+1}$），得到 $\psi(x,0) = f(x)$，然后将 $f(x)$ 中的 x 换为 $x - vt$，即可得到一个以速度 v（可为负）向 x 轴正方向运动的波 $\psi(x,t) = f(x - vt) = g(kx - \omega t)$。

绳索的上下振动是在第二个维度上的，但振动导出的波仍是一维波。

A.1.2　波动方程

线性、各向同性、无损耗介质中的波动方程（也称波动微分方程）为：

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{A.2}$$

如果代表一个波的函数 ψ 是这个方程的解，它将同时是 $(x - vt)$ 的函数（即 $kx - \omega t$ 的函数），它还是一个可以同时对 x 和 t 以非平庸方式求二次微商的函数。特别地，我们有结论：ψ 是一维波函数 $\Longleftrightarrow \psi$ 是 $(x - vt)$ 的二次可微函数 $\Longleftrightarrow \psi$ 是 $(kx - \omega t)$ 的二次可微函数。

A.2 谐波

A.2.1　相位和相速度

考虑任何一个一维波函数 $\psi(x,t) = A\cos(\phi(x,t)) = A\cos(kx - \omega t + \phi_0)$，其中 $\phi = kx + vt + \phi_0$ 称为相位，ϕ_0 称为初相（也常用 ε 表示）。只要相位中的 kx 与 ωt 符号相反，即 $(kx - \omega t)$ 或 $(\omega t - kx)$，则波沿 x 轴正方向传播，否则沿 x 轴负方向。

A.2.2　谐波的概念

谐波，指简谐波、正弦波，其轮廓图是正弦曲线，是最简单的波形。在后续的傅里叶变换一节我们可以看到，任何波形都可以由谐波叠加合成，因此谐波具有特殊的意义。考虑如下波形：

$$\psi(x,\, t)\big|_{t=0} = \psi(x) = A\,\sin kx = f(x) \tag{A.3}$$

其中 $k>0$ 是一个常数，称为传播数（空间角频率），且 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$（λ 为波长），A 称为波的振幅。

谐波函数有多种等价形式，其中最常见的是：

$$\psi(x,t)=A\sin(kx\mp\omega t),\quad \psi(x,t)=A\sin\left(\kappa(x\mp vt)\right) \tag{A.4}$$

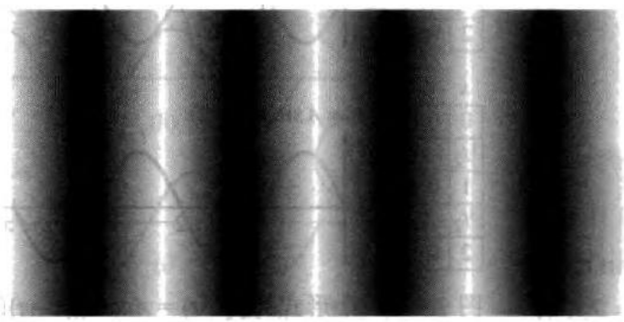
在本书中，如无特殊需求，我们都采用前者，也即 $\psi=A\sin(kx\mp\omega t)$，有时也采用 $\psi=A\cos(kx\mp\omega t)$。当然，三维谐波（在三维空间中传播的谐波）可写为：

$$\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi_0}\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\mp\omega t) \tag{A.5}$$

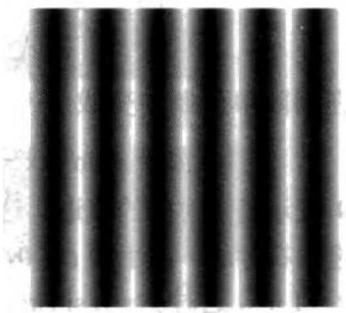
A.2.3 空间频率 κ 与空间角频率 k

光学中常用的长度单位是纳米 nm、微米 μm 和埃米 1 Å $=10^{-10}$ m。本文规定，若无特殊情况，一般用 λ 表示波长，τ 或 T 表示周期，$\nu=\frac{1}{\tau}$ 表示时间频率，$\omega=2\pi\nu$ 表示时间角频率，空间频率（波数）$\kappa=\frac{1}{\lambda}$，空间角频率（传播数）$k=2\pi\kappa$。

光学信息可以以一种周期性方式散布在空间里，很像一个波的截图，我们可以将其视作静止（$v=0$）的波，并用空间频率 κ 来描述它们。



(a) 空间频率较低的正弦亮度分布



(b) 空间频率较高的正弦亮度分布

图 A.12: 正弦亮度分布

A.3 复数表示

在之后的学习会看到，用余弦或正弦函数描述波函数会带来很多不便，而复数表示在大多时候显得尤为有效，因此引入复数表示是极有必要的。在本书中，为表示某个变量（物理量）是复数，我们在其上加一波浪号，例如 $\tilde{z}$ 或 $\tilde{E}$。

习惯上，我们用复数的实部来描述谐波，例如将 $\psi=A\cos(kx-wt+\varepsilon)$ 写为 $\psi=\mathrm{Re}\left[Ae^{i(kx-wt+\varepsilon)}\right]$。为了方便，常常把 Re 省略不写，即：

$$\psi(x,t)=Ae^{i\theta}=Ae^{i(kx-wt+\varepsilon)} \tag{A.6}$$

在后文，我们也采用此简写。需要时刻谨记，真实的波是实部，虚部没有物理意义。

另外，虽然复数表示在物理中十分常见，但应用它时需要时刻小心，只有运算限于加法、减法、乘除实数、对实变量进行微分和积分时，才能恢复实部。乘法运算（包括数乘、点乘和叉乘）必须仅与实数进行，否则会得到错误结论[10]。例如 $\mathrm{Re}\,\tilde{z}_1\cdot\mathrm{Re}\,\tilde{z}_2\neq\mathrm{Re}\,(\tilde{z}_1\cdot\tilde{z}_2)$，$\mathrm{Re}\,\boldsymbol{\tilde{A}_1}\cdot\mathrm{Re}\,\boldsymbol{\tilde{A}_2}\neq\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\tilde{A}_1}\cdot\boldsymbol{\tilde{A}_2})$。

[10]这里有一个疑问，在 2.7 节（全反射时的相位变化），推导反射光相位变化时，我们利用了 $\boldsymbol{E_r}=\boldsymbol{E_i}\cdot\lambda e^{i\delta}$ 所带来的相位变化，如何保证或说明这样做能得到正确的结果？

A.4 相矢量

相矢量（也称复振幅、旋转矢量）是将谐波 $\psi = Ae^{i(kx-wt+\varepsilon)}$ 中的位置变量 x 或时间变量 t 分离出来，以得到复平面上的矢量，常用于计算振幅[1]等。

A.4.1 分离 x 并随 t 旋转

考虑谐波 $\psi = \psi_0 e^{i(kx-\omega t+\varepsilon)}$，对于任意给定的 x，令 $\alpha = kx+\varepsilon$，谐波可写为 $\psi = \psi_0 e^{i(-wt+\alpha)} = (\psi_0 e^{i\alpha}) \cdot e^{i(-wt)}$ 是 t 的函数，则此时的相矢量定义为 $\psi_0 \measuredangle \alpha = \psi_0 e^{i\alpha}$，也常记为 $\psi_0 \angle \alpha$。

相矢量是复平面中的一个矢量（即一个复数），ψ_0 表示其模长，α 表示其幅角，真实的波是它在实轴上的投影。对于 $\psi = \psi_0 e^{i(-wt+\alpha)}$，随着 t 增大，波的相位减小，代表相矢量在复平面中顺时针旋转，ωt 即为沿顺时针旋转的角度。对于 $\psi = \psi_0 e^{i(wt+\alpha)}$（也即沿 x 轴负方向传播的波），相矢量在复平面中逆时针旋转，ωt 即为沿逆时针转过的角度。也就是说，将 x（以及初相 ε）分离为相矢量后，我们可以方便的研究 x 这一点上，波关于时间 t 的变化情况。

当然，对于波的正弦表示 $\psi = A\sin(kx-wt+\varepsilon)$，也可令 $\alpha = kx+\varepsilon$，得到相矢量 $\psi_0 \measuredangle \alpha = \psi_0 e^{i\alpha}$，只不过此时真实的波是它在虚轴上的投影。

例如，振动 $E_1 = 5\cos(-\omega t)$，$E_2 = 10\sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$ 的相矢量分别为 $5\measuredangle 0$，$10\measuredangle \frac{\pi}{3}$，前者顺时针旋转，向实轴投影，后者逆时针旋转，向虚轴投影。

A.4.2 分离 t 并随 x 旋转

类似地，考虑谐波 $\psi = \psi_0 e^{i(kx\pm\omega t+\varepsilon)}$。对于任意给定的 t，令 $\alpha = \pm\omega t+\varepsilon$，谐波可写为 $\psi = \psi_0 e^{i(kx+\alpha)} = (\psi_0 e^{i\alpha}) \cdot e^{i(kx)}$ 是 x 的函数，则此时的相矢量定义为 $\psi_0 \measuredangle \alpha = \psi_0 e^{i\alpha}$。将 t 分离为相矢量后，我们可以方便的研究 t 这一时刻，波关于位置 x 的变化情况。

习惯上，我们只考虑 $\psi_0 e^{i(kx+\alpha)}$，而不考虑 $\psi_0 e^{i(-kx+\alpha)}$ 的情况，后者可以通过三角变换，等价的改变初相 ϕ_0 的值转化为前者。

例如，对振动 $E_3 = 5\cos(kx)$，$E_4 = 10\sin(kx + \frac{\pi}{2})$，其相矢量分别为 $5\measuredangle 0$，$10\measuredangle \frac{\pi}{2}$，两者都逆时针旋转，前者向实轴投影，后者向虚轴投影。

A.5 多元微分与三维波动方程

在介绍波动方程之前，先给出本文默认的一些符号规定，以及一些运算符的定义。

A.5.1 内积、叉乘与矩阵乘法

在本文，一切矢量运算皆使用矩阵运算。并且，若无特殊说明，矢量都等价于列向量，也即下面两种写法等价：

$$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

[1] 我们将在 3.1 节讨论波的叠加时使用相矢量，并讨论相矢量相加时所代表的意义

用点乘符号 ‘$\cdot$’ 表示两向量的内积，例如 $\boldsymbol{A_1} = (A_{1,x}, A_{2,x}, A_{3,x})$，$\boldsymbol{A_2} = (A_{1,y}, A_{2,y}, A_{3,y})$，则：

$$\boldsymbol{A_1} \cdot \boldsymbol{A_2} = (A_{1,x}, A_{2,x}, A_{3,x}) \cdot (A_{1,y}, A_{2,y}, A_{3,y}) = \begin{bmatrix} A_{1,x} \\ A_{2,x} \\ A_{3,x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{1,y} \\ A_{2,y} \\ A_{3,y} \end{bmatrix} = A_{1,x}A_{1,y} + A_{2,x}A_{2,y} + A_{3,x}A_{3,y} \tag{A.8}$$

在后文，点乘符号 ‘$\cdot$’ 皆表示内积，叉乘符号 ‘$\times$’ 表示外积，矩阵乘法不用特殊符号，如有必要会使用 ‘$\odot$’ 来表示矩阵乘法。

A.5.2 微分算子

下面依次给出微分算子 ∇、拉普拉斯算子 Δ 和矢量微分的定义。

假设 $f = f(\boldsymbol{x})$ 是三维空间中的标量函数，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = (A_x(\boldsymbol{x}), A_y(\boldsymbol{x}), A_z(\boldsymbol{x}))$ 是三维空间中的矢量（数学上称为自变量为 3 维的 3 维向量值函数），设 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{B_1}(x,y,z), \boldsymbol{B_1}(x,y,z), \boldsymbol{B_1}(x,y,z))$ 是三个矢量构成的张量（可视为 3×3 矩阵），如下：

$$f = f(\boldsymbol{x}) = f(x,y,z) \tag{A.9}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} A_x(\boldsymbol{x}) \\ A_y(\boldsymbol{x}) \\ A_z(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x(x,y,z) \\ A_y(x,y,z) \\ A_z(x,y,z) \end{bmatrix} \tag{A.10}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B_1}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{B_2}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{B_3}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1,x}(\boldsymbol{x}) & B_{1,y}(\boldsymbol{x}) & B_{1,z}(\boldsymbol{x}) \\ B_{2,x}(\boldsymbol{x}) & B_{2,y}(\boldsymbol{x}) & B_{2,z}(\boldsymbol{x}) \\ B_{3,x}(\boldsymbol{x}) & B_{3,y}(\boldsymbol{x}) & B_{3,z}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \tag{A.11}$$

定义微分算子 ∇:

$$\begin{aligned} &\text{微分算子：} && \nabla = \left[\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}, \tfrac{\partial}{\partial z}\right] \\ &\text{梯度：} && \nabla f = \left[\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}, \tfrac{\partial f}{\partial z}\right] \\ &\text{广义梯度：} && \nabla \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \nabla A_x \\ \nabla A_y \\ \nabla A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{bmatrix}_{3\times 3} \end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned} &\text{旋度：} && \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \left[\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}, \tfrac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &\text{广义旋度：} && \nabla \cdot \boldsymbol{B} = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{B_1} \\ \boldsymbol{B_2} \\ \boldsymbol{B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot \boldsymbol{B_1} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B_2} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_{1,x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{1,y}}{\partial y} + \frac{\partial B_{1,z}}{\partial z} \\ \frac{\partial B_{2,x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{2,y}}{\partial y} + \frac{\partial B_{2,z}}{\partial z} \\ \frac{\partial B_{3,x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{3,y}}{\partial y} + \frac{\partial B_{3,z}}{\partial z} \end{bmatrix}_{3\times 1} \end{aligned} \tag{A.13}$$

A.5.3 拉普拉斯算子

并以此定义拉普拉斯算子 Δ:

$$\begin{aligned} &\text{拉普拉斯算子：} && \Delta = \nabla \cdot (\nabla\quad) = \left[\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}, \tfrac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}, \tfrac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &\text{拉普拉斯运算：} && \Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \left[\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}, \tfrac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \left[\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}, \tfrac{\partial f}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\text{广义拉普运算:}\quad \Delta\boldsymbol{A} = \nabla\cdot(\nabla\boldsymbol{A}) = \nabla\cdot\begin{bmatrix}\nabla A_x\\ \nabla A_y\\ \nabla A_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\nabla\cdot(\nabla A_x)\\ \nabla\cdot(\nabla A_y)\\ \nabla\cdot(\nabla A_z)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\end{bmatrix}_{3\times1}$$
$$\text{也可理解为:}\quad \Delta\boldsymbol{A} = \Delta\begin{bmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Delta A_x\\ \Delta A_y\\ \Delta A_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\end{bmatrix}_{3\times1} \tag{A.15}$$

例如，对于三维空间中的矢量 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = (E_x(\boldsymbol{x}), E_y(\boldsymbol{x}), E_z(\boldsymbol{x}))$，我们有：

$$\Delta\boldsymbol{E} = \nabla\cdot(\nabla\boldsymbol{E}) = \nabla\cdot\begin{bmatrix}\nabla E_x\\ \nabla E_y\\ \nabla E_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\nabla\cdot(\nabla E_x)\\ \nabla\cdot(\nabla E_y)\\ \nabla\cdot(\nabla E_z)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\end{bmatrix}_{3\times1} \tag{A.16}$$

A.5.4 矢量微分

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial A_x}{\partial x}\\ \frac{\partial A_y}{\partial x}\\ \frac{\partial A_z}{\partial x}\end{bmatrix},\quad \frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\boldsymbol{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{bmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}\end{bmatrix} \tag{A.17}$$

A.5.5 波动方程

定义好上述工具后，可以给出三维空间中的波动方程：

$$\Delta\boldsymbol{\psi} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} \tag{A.18}$$

例如，对矢量 $\boldsymbol{E}$，上面方程表示：

$$\Delta\boldsymbol{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix}\Delta E_x\\ \Delta E_y\\ \Delta E_z\end{bmatrix} = \frac{1}{v^2}\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}\\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}\\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}\end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases}\Delta E_x = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}\\ \Delta E_y = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}\\ \Delta E_z = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}\end{cases} \tag{A.19}$$

上面几种表示是等价的。

A.6 平面波、柱面波与球面波

平面波、柱面波与球面波是最具有实际意义的波形，因为它们在现实中最容易实现[2]。

A.6.1 平面波

三维空间中的平面波[3]：

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{A}\cdot e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}\mp\omega t+\varepsilon)} \tag{A.20}$$

[2] 其推导详见参考文献 [1] 的 Page 47-56，以及 知乎：电磁波的平面波、柱面波和球面波的表达式与推导 (https://zhuanlan.zhihu.com/p/693746762)，这里不多赘述

[3] 平面波概念的引入详见参考文献 [1] 的 Page 30，这里不再赘述

每个等相面由下式给出：

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}=\text{const} \tag{A.21}$$

此扰动的每个等相面（也称波阵面）都是一个平面，且波矢 $\boldsymbol{k}$ 垂直于等相面，$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)$ 时沿 $\boldsymbol{k}$ 传播，$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+\omega t)$ 时沿 $\boldsymbol{k}$ 的反方向传播。在一切三维波中，只有平面波（可以是谐波也可以是非谐波）穿过空间传播时其截面轮廓（等相面）保持不变。

有时，$\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的函数，称为非均匀波（例如 2.5 节介绍的隐失波）。

A.6.2 球面波

在球坐标系 (r,ϕ,θ) 下，可以解得球面波方程：

$$\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{\psi_0}(r)\cdot e^{i(kr\mp\omega t+\varepsilon)}=\frac{\boldsymbol{A}}{r}\cdot e^{i(kr\mp\omega t+\varepsilon)} \tag{A.22}$$

每个波阵面（等相面）由下式给出：

$$kr=\text{const} \tag{A.23}$$

注意，任何球面波的振幅 $\boldsymbol{\psi_0}$ 都是 r 的函数，因为球面波的振幅随着距离的增加而减小（能量守恒的必然结果）。当它从原点向外传播时，波阵面是逐渐扩张为更大的圆。

A.6.3 柱面波

在柱坐标系 (r,θ,z) 下，可以解得柱面波方程：

$$\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{\psi_0}(r)\cdot e^{i(kr\mp\omega t+\varepsilon)}=\frac{\boldsymbol{A}}{\sqrt{r}}\cdot e^{i(kr\mp\omega t+\varepsilon)} \tag{A.24}$$

每个等相面由下式给出：

$$kr=\text{const} \tag{A.25}$$

平面波投射到具有细长狭缝的不透明屏幕上，就会通过此狭缝发出与柱面波相似的扰动，目前大多采用此方法产生柱面光波。

A.7 波的能量与动量

本章只对具体结论和必要思维进行总结，更详细的内容可转至参考文献 [1] Page 63-80。

A.7.1 波印廷矢量

对任意的电磁波，我们都有 $E=vB$，其中 v 是电磁波在介质中的波速（真空即为 c），E 和 B 可以是瞬时值，也可以是场的振幅值 E_0 和 B_0。

于是，电磁场的能量密度为：

$$w=\frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2+\frac{1}{\mu}B^2\right)=\varepsilon E^2=\frac{1}{\mu}B^2 \tag{A.26}$$

波印廷矢量 $\boldsymbol{S}$ 定义为：

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=c^2\varepsilon\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\frac{c^2\varepsilon_0}{\mu_r}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \tag{A.27}$$

$\boldsymbol{S}$ 的方向即为波的传播方向，与 $\boldsymbol{k}$ 方向相同。在大多数情况下，我们都有 $\mu_r = 1$，于是得到常用形式：

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = c^2\varepsilon_0\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}, \quad S = EH = \frac{1}{\mu_0}EB = c^2\varepsilon_0 EB = vw \tag{A.28}$$

我们直接给出简谐函数平均值的计算公式：

$$\langle e^{i\omega t}\rangle_T = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)e^{i\omega t} \tag{A.29}$$

比值 $\frac{\sin x}{x}$ 在光学中很常见，也很重要，被专门定义为 $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$，我们直接给出相关结论：

$$\langle\cos\omega t\rangle_T = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)\cdot\cos\omega t, \quad \langle\sin\omega t\rangle_T = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)\cdot\sin\omega t \tag{A.30}$$

$$\langle\cos^2\omega t\rangle_T = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{sinc}\omega T\cos 2\omega t\right), \quad \langle\sin^2\omega t\rangle_T = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{sinc}\omega T\cos 2\omega t\right) \tag{A.31}$$

A.7.2 辐照度

辐射照度，简称辐照度，是指单位时间内落在单位面积上的辐射能量，在辐射度学中用 $\boldsymbol{E}_e$ 表示；类似的有光照度，指单位时间内落在单位面积上的光量（辐射能的光度量大小，详见 1.3 节），在光度学中用 $\boldsymbol{E}_v$ 表示。在不需要区分时“照度”和“强度”[4]时，常用 $\boldsymbol{I}$ 来表示照度。

在简谐电磁场下，我们有：

$$S = c^2\varepsilon_0|\boldsymbol{E_0}\times\boldsymbol{B_0}|\cdot\cos^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t) \Longrightarrow I = \langle S\rangle_T = \varepsilon_0 c\langle E^2\rangle_T = \frac{c}{\mu_0}\langle B^2\rangle_T \tag{A.32}$$

$$\text{真空：} I = \frac{\varepsilon_0 c}{2}\cdot E_0^2 = \frac{c}{2\mu_0}\cdot B_0^2 \tag{A.33}$$

$$\text{介质：} I = \frac{\varepsilon_0 v}{2}\cdot E_0^2 = \frac{\varepsilon_0 c}{2n}\cdot E_0^2 \tag{A.34}$$

上面的介质要求是线性、均匀、各向同性介质。

[4] 过去常用“强度”来代表单位时间内落在单位面积上的能量，也即现在的“照度”，但国际上此概念已经默认归照度所有，而强度用于描述点辐射源在某方向上单位立体角内的能量通量。

附录 B Matlab 代码

B.1 图 2.1 源码

```matlab
%% 菲涅尔公式中的振幅系数，空气入射玻璃和玻璃入射空气两种情况 %%
clc, clear, close all
%% 空气入射玻璃 %%
global n_i n_t
n_i = 1;
n_t = 1.5;

theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*cos
    (theta_i - theta_t) );
theta_B = atan(n_t/n_i);
theta_C = asin(n_t/n_i);

theta_array = linspace(-0.1, pi/2, 101);
Y = [
    r_s(theta_array, theta_t(theta_array))
    r_p(theta_array, theta_t(theta_array))
    t_s(theta_array, theta_t(theta_array))
    t_p(theta_array, theta_t(theta_array))
    ];
stc = MyPlot(theta_array, Y);
xline(theta_B, 'b')
yline(0)
xlim([0, pi/2])
ylim([-1, 1])
stc.leg.String = ["$r_s$"; "$r_p$"; "$t_s$"; "$t_p$"; "$\theta_i = \theta_B$"];
stc.leg.Interpreter = "latex";
stc.leg.FontSize = 14;
stc.leg.Location = "southwest";
stc.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
stc.axes.Title.Interpreter = "latex";
stc.label.x.String = '$\theta_i$';
stc.label.y.String = '$r$';
MyColors = GetMyColors;
stc.plot.plot_1.Color = MyColors{2};
stc.plot.plot_2.LineStyle = "-";
stc.plot.plot_2.Color = MyColors{6};
stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
stc.plot.plot_3.Color = 'b';
stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
stc.plot.plot_4.Color = [1 0 1];
```

```
%% 玻璃入射空气 %%
n_i = 1.5;
n_t = 1;

theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*cos
    (theta_i - theta_t) );
theta_B = atan(n_t/n_i);
theta_C = asin(n_t/n_i);


theta_array = linspace(0, theta_C, 101);
Y = [
    r_s(theta_array, theta_t(theta_array))
    r_p(theta_array, theta_t(theta_array))
    t_s(theta_array, theta_t(theta_array))
    t_p(theta_array, theta_t(theta_array))
    ];
stc = MyPlot(theta_array, Y);
xline(theta_B, 'b')
xline(theta_C, 'r')
yline(0)
xlim([0, pi/2])
ylim([-0.5, 3])
stc.leg.String = ["$r_s$"; "$r_p$"; "$t_s$"; "$t_p$"; "$\theta_i = \theta_B$"; "$\
    theta_i = \theta_C$"];
stc.leg.Interpreter = "latex";
stc.axes.Title.String = '$n_i = 1.5 > n_t = 1$';
stc.axes.Title.Interpreter = "latex";
stc.label.x.String = '$\theta_i$';
stc.label.y.String = '$r$';
stc.plot.plot_1.Color = MyColors{2};
stc.plot.plot_2.LineStyle = "-";
stc.plot.plot_2.Color = MyColors{6};
stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
stc.plot.plot_3.Color = 'b';
stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
stc.plot.plot_4.Color = [1 0 1];
%MyExport_pdf
```

B.2 图 2.6 源码

```
%% 菲涅尔公式中反射折射光的振幅与能量变化 %%
clc, clear, close all
```

```matlab
global n_i n_t

%% 反 射 折 射 光 振 幅 与 能 量 变 化 (空 气 入 射 玻 璃) %%
MyColor = num2cell( ...
    [
"#ff8080" "#ff0000" "#990000" "#190000"
"#80ff80" "#00ff00" "#009900" "#001900"
"#8080ff" "#0000ff" "#000099" "#000019"
"#ff80ff" "#ff00ff" "#990099" "#190019"
"#ffff80" "#ffff00" "#999900" "#191900"
"#80ffff" "#00ffff" "#009999" "#001919"
"#ffffff" "#bbbbbb" "#999999" "#191919"
    ]...
);
n_i = 1;
n_t = 1.5;

theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*cos
    (theta_i - theta_t) );
theta_B = atan(n_t/n_i);
theta_C = asin(n_t/n_i);

theta_array_2 = linspace(-0.1, pi/2, 101);
Y = [
    r_s(theta_array_2, theta_t(theta_array_2))
    r_p(theta_array_2, theta_t(theta_array_2))
    t_s(theta_array_2, theta_t(theta_array_2))
    t_p(theta_array_2, theta_t(theta_array_2))
    r_s(theta_array_2, theta_t(theta_array_2)).^2
    r_p(theta_array_2, theta_t(theta_array_2)).^2
    0.5 * ( r_s(theta_array_2, theta_t(theta_array_2)).^2 + r_p(theta_array_2, theta_t(
    theta_array_2)).^2 )
    ];

stc = MyPlot(theta_array_2, Y);
yline(0, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 1)
xline(theta_B,'Color', [0 1 1], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.7)
xlim([0, pi/2])
ylim([-1, 1])
    stc.leg.Interpreter = 'latex';
    stc.leg.FontSize = 15;
    stc.leg.Location = 'southwest';
    stc.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
    stc.axes.Title.Interpreter = 'latex';
    stc.label.x.String = '$\theta_i$';
```

```
    stc.label.y.String = '$y$';
    %stc.leg.String = ["$y=r_s$"; "$y=r_p$"; "$y=t_s$"; "$y=t_p$"; "$y=R_s$"; "$y=R_p$
    "; "$y=R$"; "$y=0$";  "$\theta_i = \theta_B$";];
    stc.leg.Visible = 'off';

    stc.plot.plot_2.LineStyle = "-";
    stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
    stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
    stc.plot.plot_5.LineStyle = "--";
    %stc.plot.plot_5.LineWidth = 0.7;
    stc.plot.plot_6.LineStyle = "--";
    %stc.plot.plot_6.LineWidth = 0.7;
    stc.plot.plot_7.LineStyle = "-";

    stc.plot.plot_1.Color = MyColor{4, 2};
    stc.plot.plot_3.Color = MyColor{4, 1};
    stc.plot.plot_5.Color = MyColor{4, 3};
    stc.plot.plot_2.Color = MyColor{3, 2};
    stc.plot.plot_4.Color = MyColor{3, 1};
    stc.plot.plot_6.Color = MyColor{3, 3};
    stc.plot.plot_7.Color = [1 0 0];
%MyExport_pdf
%MyExport_pdf_docked
%MyExport_svg_docked


%% 反射折射光振幅与能量变化 (玻璃入射空气) %%
n_i = 1.5;
n_t = 1;

theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*cos
    (theta_i - theta_t) );
theta_B = atan(n_t/n_i);
theta_C = asin(n_t/n_i);

theta_array_2 = linspace(-0.1, theta_C, 250);
theta_array_all = [linspace(-0.1, 0.65, 100), linspace(0.65, 0.74, 50), linspace(0.74,
    pi/2, 100)];

X = [
    theta_array_all
    theta_array_all
    theta_array_all
    theta_array_all
    theta_array_all
```

```
    theta_array_all
    theta_array_all
];

Y = [
    (theta_array_all < theta_C).*r_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)) + (
    theta_array_all > theta_C).*abs(r_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)))
    (theta_array_all < theta_C).*r_p(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)) + (
    theta_array_all > theta_C).*abs(r_p(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)))
    abs( t_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)) )
    abs( t_p(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)) )
    abs(r_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all))).^2
    abs(r_p(theta_array_all, theta_t(theta_array_all))).^2
    0.5 * (  abs(r_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all))).^2 + abs(r_p(
    theta_array_all, theta_t(theta_array_all))).^2    )
    ];

stc = MyPlot(X, Y);
yline(0, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 1)
xline(theta_B,'Color', [0 1 1], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.7)
xline(theta_C,'Color', [0 1 0], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.7)
xlim([0, pi/2])
ylim([-0.5, 3])
    stc.leg.Interpreter = 'latex';
    stc.leg.FontSize = 14;
    stc.leg.Location = 'northwestoutside';
    stc.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
    stc.axes.Title.Interpreter = "latex";
    stc.label.x.String = '$\theta_i$';
    stc.label.y.String = '$y$';
    stc.leg.String = ["$y=r_s$"; "$y=r_p$"; "$y=t_s$"; "$y=t_p$"; "$y=R_s$"; "$y=R_p$";
     "$y=R$"; "$y=0$";  "$\theta_i = \theta_B$"; "$\theta_i = \theta_C$";];

    stc.plot.plot_2.LineStyle = "-";
    stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
    stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
    stc.plot.plot_5.LineStyle = "--";
    %stc.plot.plot_5.LineWidth = 0.7;
    stc.plot.plot_6.LineStyle = "--";
    %stc.plot.plot_6.LineWidth = 0.7;
    stc.plot.plot_7.LineStyle = "-";

    stc.plot.plot_1.Color = MyColor{4, 2};
    stc.plot.plot_3.Color = MyColor{4, 1};
    stc.plot.plot_5.Color = MyColor{4, 3};
    stc.plot.plot_2.Color = MyColor{3, 2};
    stc.plot.plot_4.Color = MyColor{3, 1};
    stc.plot.plot_6.Color = MyColor{3, 3};
    stc.plot.plot_7.Color = [1 0 0];
```

```
%MyExport_pdf
%MyExport_pdf_docked
%MyExport_svg_docked
```

B.3 图 2.7 源码

```
%% 菲涅尔公式中反射光 s 分量与 p 分量的相位增量 %%
clc, clear, close all
global n_i n_t n_ti theta_B theta_C

%% 反射光相位增量 (空气入射玻璃) %%
n_i = 1;
n_t = 1.5;
n_ti = n_t/n_i;
theta_B = atan(n_ti);

theta_array_2 = linspace(0, pi/2-0.001, 200);

delta_r_s = @(t) -pi ;
delta_r_p = @(t) (-pi).*(t > theta_B).*( t <pi/2);

delta_r_s_kongqi = delta_r_s(theta_array_2);
delta_r_p_kongqi = delta_r_p(theta_array_2);

Y = [
    zeros(size(theta_array_2)) - pi;
    delta_r_p_kongqi;
];

stc1 = MyPlot(theta_array_2, Y([1 2], :));
xlim([0, pi/2])
%yline(0, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
xline(theta_B,'Color', [0 1 1], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
stc1.plot.plot_2.LineStyle = '--';
stc1.leg.Location = 'northeast';
stc1.leg.String = ["$\delta = \delta_{r,s}$"; "$\delta = \delta_{r,p}$"; "$\theta_i = \
    theta_B$";];
stc1.label.x.String = '$\theta_i$';
stc1.label.y.String = '$\delta$';
stc1.axes.Title.Interpreter = 'latex';
stc1.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
%MyExport_pdf

%%%%%%%%%% 反射光相位增量 (玻璃入射空气) %%%%%%%%%%
n_i = 1.5;
n_t = 1;
n_ti = n_t/n_i;
theta_B = atan(n_ti);
```

```
theta_C = asin(n_ti);


delta_r_s = @(t) (t>theta_C).*2.*atan( -(sqrt(sin(t).^2 - n_ti^2))./cos(t) ) ;
delta_r_p = @(t) ...
     (t<theta_B).*(-pi) ...
   + (theta_B<t).*(t<theta_C).*0 ...
   + (theta_C<t).*( -2*atan( (sqrt(sin(t).^2 - n_ti^2))./(n_ti^2.*cos(t)) ) );

Y = [
    zeros(size(theta_array_2)) - pi;
    delta_r_p_kongqi;
    delta_r_s(theta_array_2);
    delta_r_p(theta_array_2);
];


stc2 = MyPlot(theta_array_2, Y([3 4], :));
xlim([0, pi/2])
%yline(0, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
xline(theta_B,'Color', [0 1 1], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
xline(theta_C,'Color', [0 1 0], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
stc2.plot.plot_2.LineStyle = '--';
stc2.leg.String = ["$\delta = \delta_{r,s}$"; "$\delta = \delta_{r,p}$"; "$\theta_i = \theta_B$"; "$\theta_i = \theta_C$";];
stc2.leg.Location = 'northeast';
stc2.label.x.String = '$\theta_i$';
stc2.label.y.String = '$\delta$';
stc2.axes.Title.Interpreter = 'latex';
stc2.axes.Title.String = '$n_i = 1.5 > n_t = 1$';
%MyExport_pdf
```

B.4 图 2.8 源码

```
%% 隐失波的穿透深度和 GH Shift (玻璃入射空气) %%
clc, clear, close all
global lambda n_i n_t n_ti
n_i = 1.5;
n_t = 1;
n_ti = n_t/n_i;
theta_B = atan(n_ti);
theta_C = asin(n_ti);
lambda = 550 * 10^(-9);     % 550.0 nm 的绿色光
delta = @(t) 1 ./ ( 2*pi*sqrt( sin(t).^2 - n_ti^2 )/lambda );
Delta_x = @(t) 2*delta(t).*tan(t);

theta_array_1 = linspace(theta_C, pi/2, 200);
theta_array_2 = linspace(theta_C, pi/2-0.05, 200);
```

```


X = [
    theta_array_1
    theta_array_2
];
Y = [
    delta(theta_array_1)/lambda
    Delta_x(theta_array_2)/lambda
];

stc = MyPlot(X, Y);
xlim([theta_C - 0.05, pi/2+0.02])
yline(1, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
xline(theta_C,'Color', [0 1 0], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
stc.leg.String = ["$y = \delta / \lambda$"; "$y = \Delta x / \lambda$"; "$y = 1$"; "$\
    theta_i = \theta_C$"; "$\theta_i = \frac{\pi}{2}$"];
stc.label.x.String = '$\theta_i$';
stc.label.y.String = '$y$';
xlim([theta_C - 0.05, pi/2])

%MyExport_pdf_docked
```

B.5 图 3.2 源码

```
%% 单个球面波源在平面上的振荡（导出为 gif）%%
clc,clear,close all;
global lambda k omega X_OA A

lambda = 550.0 * 10^(-9); % 单位: m
k = 5;       % k 取决于光的波长，但在可视化中不妨令为 1
omega = 1;  % omega 取决于光的波长，但在可视化中不妨令为 1
X_OA = [ 0, 0];  % 球面波源 A 的位置
A = 50; % r = 1 时的振幅
E_A0 = @(x, y) A./sqrt( (x - X_OA(1)).^2 + (y - X_OA(2)).^2 ); % X 位置的振幅，输入的
    X_array 为一列行向量
alpha_A = @(x, y) k*sqrt( (x - X_OA(1)).^2 + (y - X_OA(2)).^2 );
vib = @(E_0, t, alpha) E_0.*cos(-omega*t + alpha); % 振荡函数

R_array = linspace(2, 10, 100);
theta_array = transpose(linspace(0, 2*pi, 50));
x_matrix = R_array .* cos(theta_array) + X_OA(1);
y_matrix = R_array .* sin(theta_array) + X_OA(2);
E_A0_matrix = E_A0(x_matrix, y_matrix);
alpha_A_matrix = alpha_A(x_matrix, y_matrix);

stc = MyMesh(x_matrix, y_matrix, vib(E_A0_matrix, 0, alpha_A_matrix));
stc.label_left.z.String = '$E$';
```

```
figure('Color', [1 1 1])
h1 = surf(x_matrix, y_matrix, E_A0_matrix, 'EdgeColor', 'interp', FaceColor='interp');
hold on
surf([X_OA(1) X_OA(1)], [X_OA(2) X_OA(2)], [30 -30; 30 -30])
colormap(redblue);
zlim([-35 35]);
xlim([X_OA(1) - R_array(end), X_OA(1) + R_array(end)])
ylim([X_OA(2) - R_array(end), X_OA(2) + R_array(end)])
drawnow

t_array = linspace(0, 20, 200);
for i = 1:length(t_array)
    h1.ZData = vib(E_A0_matrix, t_array(i), alpha_A_matrix);
    f(i) = getframe(gcf);
end

numFrames = length(t_array);
animated(1,1,1,numFrames) = 0;
for i = 1:numFrames
    if i == 1
        [animated,cmap] = rgb2ind(f(i).cdata,256,'nodither');
    else
        animated(:,:,1,i) = rgb2ind(f(i).cdata,cmap,'nodither');
    end
end
filename = '单个球面波源在平面上的振荡.gif';
imwrite(animated,cmap,filename,'DelayTime',1/40,'LoopCount',inf);
web(filename)
```

B.6 图 3.3 源码

```
%% 两个球面波源在平面上的干涉情况 (导出为 gif) %%

clc, clear, close all;
global lambda k omega X_OA X_OB A B

lambda = 550.0 * 10^(-9); % 单位: m
k = 5;      % k 取决于光的波长, 但在可视化中不妨令为 1
omega = 1;  % omega 取决于光的波长, 但在可视化中不妨令为 1
X_OA = [-2, 0];  % 球面波源 A 的位置
X_OB = [ 2, 0];  % 球面波源 B 的位置
A = 50; % r = 1 时 A 的振幅
B = 50; % r = 1 时 B 的振幅

E_A0 = @(x, y) A./sqrt( (x - X_OA(1)).^2 + (y - X_OA(2)).^2 ); % X 位置的振幅, 输入的
    X_array 为一列行向量
E_B0 = @(x, y) B./sqrt( (x - X_OB(1)).^2 + (y - X_OB(2)).^2 ); % X 位置的振幅, 输入的
```

```
    X_array 为一列行向量
alpha_A = @(x, y) k*sqrt( (x - X_OA(1)).^2 + (y - X_OA(2)).^2 );
alpha_B = @(x, y) k*sqrt( (x - X_OB(1)).^2 + (y - X_OB(2)).^2 );
E_0 = @(E_A0, alpha_A, E_B0, alpha_B) sqrt( E_A0.^2 + E_B0.^2 + 2*E_A0.*E_B0.*cos(alpha_A - alpha_B) );
vib = @(E_0, t, alpha) E_0.*cos(-omega*t + alpha); % 振荡函数

R_array = linspace(4, 20, 80);
theta_array = transpose(linspace(0, 2*pi, 30));
x_matrix = R_array .* cos(theta_array);
y_matrix = R_array .* sin(theta_array);
%E_0_matrix = E_A0(x_matrix, y_matrix);

E_A0_matrix = E_A0(x_matrix, y_matrix);
E_B0_matrix = E_B0(x_matrix, y_matrix);
alpha_A_matrix = alpha_A(x_matrix, y_matrix);
alpha_B_matrix = alpha_B(x_matrix, y_matrix);
E_0_matrix = E_0(E_A0_matrix, alpha_A_matrix, E_B0_matrix, alpha_B_matrix);
alpha_matrix = GetAlpha(E_0_matrix, E_A0_matrix, alpha_A_matrix, E_B0_matrix, alpha_B_matrix);

MyMesh(x_matrix, y_matrix, vib(E_A0_matrix, 0, alpha_A_matrix));
MyMesh(x_matrix, y_matrix, vib(E_B0_matrix, 0, alpha_B_matrix));
MyMesh(x_matrix, y_matrix, vib(E_0_matrix, 0, alpha_matrix));


figure('Color', [1 1 1])
set(gca,'NextPlot','replaceChildren','box','on','color','w');

    h = mesh(x_matrix, y_matrix, E_0_matrix, 'EdgeColor', 'interp', FaceColor='interp');
    hold on
    surf([X_OA(1) X_OA(1)], [X_OA(2) X_OA(2)], [40 -40; 40 -40])
    surf([X_OB(1) X_OB(1)], [X_OB(2) X_OB(2)], [40 -40; 40 -40])
    hold off
    view([45, 30])
    colormap(redblue);
    zlim([-35 35]);
    xlim([-R_array(end), R_array(end)])
    ylim([-R_array(end), R_array(end)])
    drawnow

t_array = linspace(0, 20, 200);
numFrames = length(t_array);
for i = 1:numFrames
    h.ZData = vib(E_0_matrix, t_array(i), alpha_matrix);
    f(i) = getframe(gcf);
end

```

```
animated(1,1,1,numFrames) = 0;
for i = 1:numFrames
    if i == 1
        [animated,cmap] = rgb2ind(f(i).cdata,256,'nodither');
    else
        animated(:,:,1,i) = rgb2ind(f(i).cdata,cmap,'nodither');
    end
end
filename = '两个球面波源在平面上的干涉情况.gif';
imwrite(animated,cmap,filename,'DelayTime',1/40,'LoopCount',inf);
web(filename)

function alpha = GetAlpha(E_0, E_A0, alpha_A, E_B0, alpha_B)
    sin_alpha = ( E_A0.*sin(alpha_A) + E_B0.*sin(alpha_B) ) ./ E_0;
    cos_alpha = ( E_A0.*cos(alpha_A) + E_B0.*cos(alpha_B) ) ./ E_0;
    %{
        if cos_alpha > 0
            alpha = acos(cos_alpha);
            return
        elseif cos_alpha == 0
            sin_alpha = ( E_A_0.*sin(alpha_A) + E_B_0.*sin(alpha_B) ) ./ E_0;
            if sin_alpha > 0
                alpha = pi/2;
                return
            else
                alpha = -pi/2;
                return
            end
        else
            alpha = pi - acos(cos_alpha);
            return
        end
    %}
    alpha = (cos_alpha >= 0) .* asin(sin_alpha) + (cos_alpha < 0) .* ( pi - asin(
    sin_alpha));
    %alpha =  acos(cos_alpha);
end
```

B.7 图 3.4 (b) 与图 3.5 源码

```
%% 杨氏双缝干涉的近似模型误差分析 %%
clc,clear,close all
global vare_0 mu_0 lambda I_1 d D R A k E_0 E_0_appro r r_1 r_2

vare_0 = 8.854187817 * 10^(-12);
mu_0 = 4*pi * 10^(-7);
A = 50;
I_1 = 50;
```

```
d = 100 * 10^(-6);
R = 5 * 10^(-2);
D = 1;
lambda = 700 * 10^(-9); % 700.0 nm 的红光
k = 2*pi/lambda;

r = @(x) sqrt( x.^2 + D^2 );
r_1 = @(x) sqrt( (x - d/2).^2 + D^2 );
r_2 = @(x) sqrt( (x + d/2).^2 + D^2 );
E_0 = @(r_1, r_2)  A * sqrt(  1./r_1 + 1./r_2 + 2./sqrt(r_1.*r_2).*cos( k.*(r_1 - r_2) )  );
E_0_appro = @(x) sqrt(2./D)*A .* sqrt(  1 + cos(k*x*d/D)  );
I = @(r_1, r_2) A^2 * sqrt(vare_0/mu_0) * (  0.5*(1./r_1 + 1./r_2) + cos(k*(r_1 - r_2) ) ./ sqrt(r_1.*r_2)  );
%I = @(r_1, r_2) 0.5 * sqrt(vare_0/mu_0) * E_0(r_1, r_2).^2;
I_appro = @(x) 0.5 * sqrt(vare_0/mu_0) * E_0_appro(x).^2;

x_array = linspace(-0.02, 0.02, 1000);
r_array = r(x_array);
r_1_array = r_1(x_array);
r_2_array = r_2(x_array);
E_0_array = E_0(r_1_array, r_2_array);
E_0_appro_array = E_0_appro(x_array);
I_array = I(r_1_array, r_2_array);
I_appro_array = I_appro(x_array);

plot_E = MyPlot(x_array, [E_0_array; E_0_appro_array]);
plot_E.label.y.String = '$E_0$';
plot_E.leg.Location = 'northeast';
plot_E.leg.String = ["$E_{0,\mathrm{exact}}$"; "$E_{0,\mathrm{appro}}$"];
  %MyExport_pdf
plot_I = MyPlot(x_array, [I_array; I_appro_array]);
plot_I.label.y.String = '$I$';
plot_I.leg.Location = 'northeast';
plot_I.leg.String = ["$I_{\mathrm{exact}}$"; "$I_{\mathrm{appro}}$"];
  %MyExport_pdf
stc_E = MyErrorAnalyzer_discrete(E_0_array, E_0_appro_array, 1);
stc_I = MyErrorAnalyzer_discrete(I_array, I_appro_array, 1);

stc_funcerror_E = MyErrorAnalyzer_continuous(@(x) E_0(r_1(x), r_2(x)), @(x) E_0_appro(x), [-0.02, 0.02]);
stc_funcerror_I = MyErrorAnalyzer_continuous(@(x) I(r_1(x), r_2(x)), @(x) I_appro(x), [-0.02, 0.02]);

stc_yy = MyYYPlot(x_array, stc_E.Residual, x_array, stc_I.Residual);
stc_yy.label.y_left.String = '$\hat{\theta}_E$';
stc_yy.label.y_right.String = '$\hat{\theta}_I$';

stc_yy.leg.String = ["$\theta_E = E_0 - \hat{E}_0$"; "$\theta_I = I - \hat{I}$"];
```

```
stc_yy.p_left.LineStyle = 'none';
stc_yy.p_left.Marker = '.';
stc_yy.p_left.MarkerSize = 3;
stc_yy.p_right.LineStyle = 'none';
stc_yy.p_right.Marker = '.';
stc_yy.p_right.MarkerSize = 3;
  %MyExport_pdf_modal
```

B.8 图 3.6 源码

```
%% 光源宽度对对比度位置分布的影响 %%
clc, clear, close all
global I_max d lambda R D Delta_x u

d = 100 * 10^(-6);
R = 5 * 10^(-2);
D = 1;
lambda = 700 * 10^(-9); % 700.0 nm 的红光
Delta_x = D*lambda/d;
I_max = 2;

I = @(x, b) I_max/2 .* (  1 + sin( pi*d/(lambda*R)*b ) ./ ( pi*d/(lambda*R)*b ) .* cos
    (2*pi*x/Delta_x) );
u = @(b) pi*d/(lambda*R) * b;
gamma = @(b) abs( sin(u(b))./u(b) );

% I = I(x, b)
x_array = linspace(-0.02, 0.02, 300);
b_array = transpose(linspace(0, 5*lambda*R/d, 50));
stc1 = MyMesh(x_array, b_array, I(x_array, b_array));
stc1.label_left.y.String = '$b$';
stc1.label_left.z.String = '$I(x, b)$';
stc1.label_right.y.String = '$b$';
stc1.label_right.z.String = '$I(x, b)$';
  %MyExport_pdf_modal

% 干涉条纹对比度
b_array = transpose(linspace(0, 5*lambda*R/d, 200));
stc2 = MyPlot(b_array', gamma(b_array)');
xline(lambda*R/d, 'LineWidth', 0.5, 'Color', [1 0 0]);
ylim([0, 1])
stc2.label.x.String = '$b$';
stc2.label.y.String = '$\gamma = \gamma(b)$';
stc2.leg.String = ["$\gamma = \gamma(b)$"; "$b = \lambda R / d$"];
  %MyExport_pdf_modal
```

B.9 图3.8 源码

```
%% 精 细 度 对 透 射 率 的 影 响 %%
clc, clear, close all;
F = @(R) 4*R ./ (1-R).^2;
T_FP = @(delta, F) 1 ./ ( 1 + sin(delta/2).^2 .* F  );
F_array = linspace(0, 40, 50);
delta_array = linspace(0, 10*pi, 200);

MyPlot(linspace(0, 0.9,100), F(linspace(0, 0.9,100)));
stc = MySurf(delta_array, F_array, T_FP(delta_array, F_array'));
stc.label_left.x.String = '$\delta$';
stc.label_left.y.String = '$F$';
stc.label_left.z.String = '$T_{F-P} = T_{F-P}(\delta, F)$';
stc.label_right.x.String = '$\delta$';
stc.label_right.y.String = '$F$';
  %MyExport_pdf_docked

MyPlot(delta_array, T_FP(delta_array, 2));
MyPlot(delta_array, T_FP(delta_array, 10));
MyPlot(linspace(0, 10*pi, 1000), T_FP(linspace(0, 10*pi, 1000), 400));
```