

线性代数(2024春)(Linear Algebra)

作业13

1. 设 φ 和 ψ 是酉空间 V 上两个Hermitian算子。证明:

(1) $\varphi\psi + \psi\varphi$ 和 $i(\varphi\psi - \psi\varphi)$ 都是 V 上两个Hermitian算子;

(2) $\varphi\psi$ 是一个Hermitian算子的充分必要条件是 $\varphi\psi = \psi\varphi$ 。

2. 设 φ 是有限维酉空间 V 上的一个正规算子满足 $\varphi^2 = -e_V$ 。证明 $\varphi^* = -\varphi$ 。

3. 设 v_1, v_2, \dots, v_m 是欧几里得空间 V 的 m 个向量。证明它们线性无关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} (v_1|v_1) & (v_1|v_2) & \cdots & (v_1|v_m) \\ (v_2|v_1) & (v_2|v_2) & \cdots & (v_2|v_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (v_m|v_1) & (v_m|v_2) & \cdots & (v_m|v_m) \end{vmatrix} \neq 0.$$

4. 证明如果两个实对称矩阵 A 和 B 相似, 则它们必正交相似。

5. 给定 \mathbb{R}^4 上两个实二次型

$$q_1(u) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_3x_4 + x_4^2, \quad q_2(u) = x_1x_3 - x_2x_4,$$

其中 $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ 。求 \mathbb{R}^4 的一组基使得 q_1 和 q_2 在它下的矩阵都是对角矩阵。

6. 设有限维酉空间 V 上的一个正规算子 φ 与线性算子 ψ 可交换。证明 φ 与 ψ^* 可交换。