

# 光学笔记

## Optics Notes

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

## 序言

本文为笔者本科时的“光学”课程笔记 (Notes of Optics, 2024.8-2025.1)。由于个人学识浅陋，认识有限，文中难免有不妥甚至错误之处，望读者不吝指正，在此感谢。我的邮箱是 [dingyi233@mails.ucas.ac.cn](mailto:dingyi233@mails.ucas.ac.cn)。为了更好地学习光学，建议先跳转至附录部分，了解相关理论知识。

# 目录

# 第1章 光学导言

## § 1.1 光学发展简史 (略)

## § 1.2 光的几何传播规律

光传播的基本原理:

光传播的常见基本原理:

- (1) 直线传播: 光在均匀介质里沿直线传播<sup>①</sup>
- (2) 反射定律: 光线入射到两种不同的均匀介质的分界面上反射线位于入射面内, 反射线和入射线分居法线两侧, 反射角等于入射角
- (3) 折射定律 (斯涅尔定律): 折射线位于入射面内, 折射线与入射线分居法线两侧, 入射角的正弦与折射角的正弦之比为一与入射角无关的常数<sup>②</sup>

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad (1.1)$$

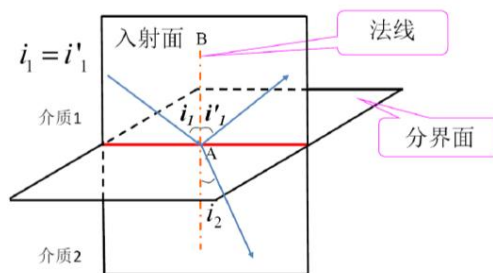


图 1.1: 反射与折射

- (4) 光路可逆性: 光沿反方向传播时, 必定沿原光路返回<sup>③</sup>
- (5) 独立传播: 光在传播过程中与其他光束相遇时, 各光束都各自独立传播, 不改变其传播方向
- (6) 全反射: 光线从光密介质入射到光疏介质, 当入射角大于某临界值时, 折射光完全消失, 只剩下反射光。该临界角度称为全反射临界角。

$$i_C = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right) \quad n_1 < n_2 \quad (1.2)$$

彩虹:

三棱镜最小偏向角:

最小偏向角  $\theta_0 = (i_1 - i'_1)_{\min}$  满足:

$$\theta_0 = 2i_1 - A, \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \frac{\theta_0 + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \quad (1.3)$$

<sup>①</sup>对高功率激光, 此定律不成立

<sup>②</sup>折射率较大的一侧称为光密介质; 较小的一侧称为光疏介质

<sup>③</sup>也即在几何光学中, 任何光路都是可逆的

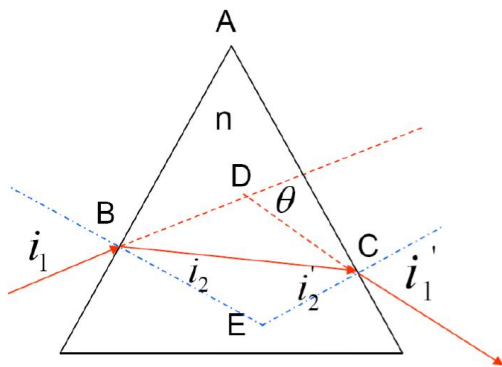


图 1.2: 三棱镜最小偏向角

### § 1.3 惠更斯原理与费马原理

**Theorem. 1 (惠更斯原理):** 由振源发出的波动在  $t$  时刻传播到一个波面  $S$ , 波面上的每一个面元可认为是次波的波源。由面元发出的次波向四面八方传播。在以后的时刻  $t'$  形成次波面。这些次波面的包络面  $S'$  就是  $t'$  时刻总扰动的波面。

其中:

- (1) 波面: 在同一振源的波场中, 扰动同时到达的各点具有相同的相位, 这些点的轨迹构成一个曲面, 称为波面 (也称为等相位面)。
- (2) 波线: 与波面处处正交的曲线称为波线, 其切线方向为光的传播方向

几何光学的定律需要前提条件:

- (1) 必须是均匀介质, 即同一介质的折射率处处相等, 折射率不是位置的函数。
- (2) 必须是各向同性介质, 即光在介质中传播时各个方向的折射率相等, 折射率不是方向的函数。
- (3) 光强不能太强, 否则巨大的光能量会使线性叠加原理不再成立而出现非线性情况。
- (4) 光学元件的线度应比光的波长大得多, 否则不能把光束简化为光线。

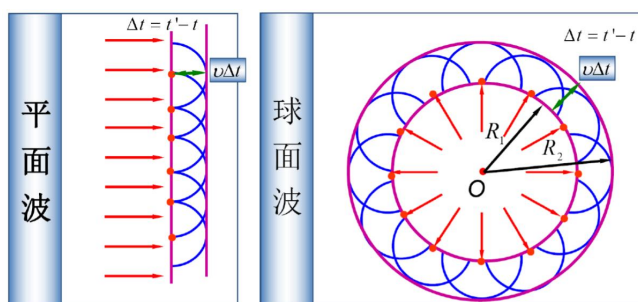


图 1.3: 惠更斯原理

**Theorem. 2 (费马原理):**

光从空间中一点传播到另一点时, 总是沿光程 (optical length, OPL) 取极值的路径传播<sup>④</sup>, 公式:

$$d \text{ OPL} = d \left( \int_Q^P n dl \right) = 0 \implies \frac{d \text{ OPL}}{d \varphi} = \frac{d \text{ OPL}}{ds} = 0 \quad (1.4)$$

<sup>④</sup>这里的“极值”可以是极小值、极大值或常数, 一般情况下, 实际光程大多取极小值。极大值 (如凹面镜成像)、拐点 (如椭球面镜、凸透镜) 的例子, 可以参考 [知乎: 浅谈几何光学 \(1\)——费马原理](#)

由费马原理可以导出诸多推论，包括我们熟知的几条基本原理，还有物像之间的等光程性（例如凸透镜）：在物点  $Q$  与像点  $Q'$  之间，不管光线经何路径，凡是由  $Q$  通过同样的光学系统到达  $Q'$  的光线，都是等光程的。

## § 1.4 成像

理想的像与物体在形状上一致，大小成比例。物与像之间的关系：本质上是一系列物点与像点的点对点，推广至线线、面面对应。

同心光束：各光线本身或其延长线交于同一点的光束称为同心光束，在各向同性介质中，它对应于球面波。

由若干反射面或折射面组成的光学系统称为光具组

- (1) 实物：发散的同心入射光束的“心”
- (2) 虚物：汇聚的同心入射光束的“心”
- (3) 实像：发散的同心出射光束的“心”
- (4) 虚像：汇聚的同心出射光束的“心”

**物像的共轭性（可逆性）**：若  $P$  为物体  $P$ （可实可虚）的像点，则反之，当物点为  $P$  时，像点必在点  $P'$ （实际光路可能不同）。是光路可逆性的必然结果。

计算由物到像的 OPL 时，若为实线（实物、实像）则取正，称为实光程，若为虚线（虚物、虚像）则取负，称为虚光程。

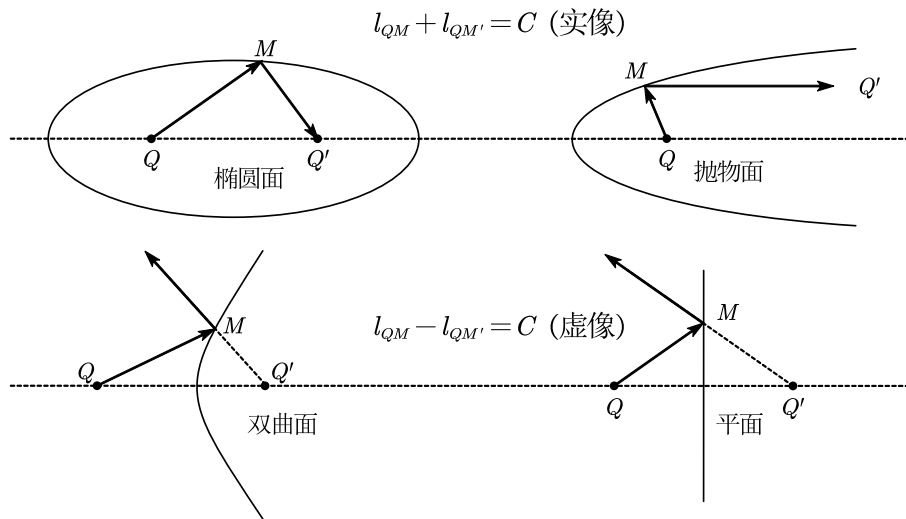


图 1.4: 光程恒定的例子

### 折射球面与反射球面：

对于折射球面，存在一对恰好成像的共轭点，称为齐明点。在齐明点处，可以证明  $Q$  到  $Q'$  的光程（即物像间的 OPL） $l_{QQ'}$ 。

折射球面公式：

$$\frac{n_1}{l_1} + \frac{n_2}{l_2} = \frac{1}{R} \left( \frac{n_2 s_2}{l_2} - \frac{n_1 s_1}{l_1} \right) \quad (1.5)$$

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \quad (\text{傍轴}) \quad (1.6)$$

反射球面公式:

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = -\frac{2}{R} \left( \frac{s_1}{l_1} + \frac{s_2}{l_2} \right) \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = -\frac{2}{R} \quad (\text{傍轴}) \quad (1.8)$$

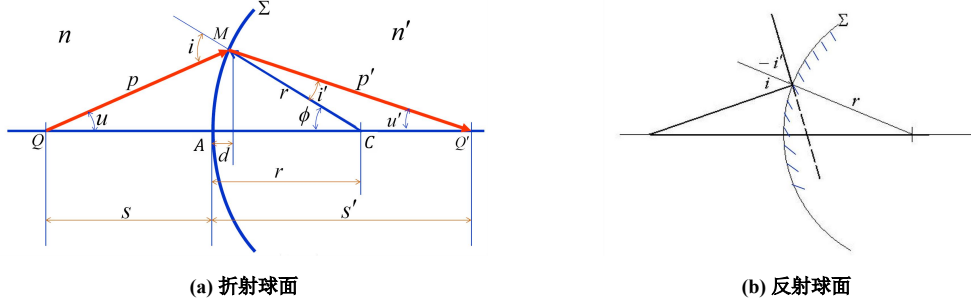


图 1.5: 折射球面与反射球面

像的放大率:

放大率公式:

$$\frac{n_1 |y_1|}{s_1} = \frac{n_2 |y_2|}{s_2} \quad (1.9)$$

Lagrange-Helmholtz 恒等式:

$$n_1 u_1 y_1 = n_2 u_2 y_2 \quad (1.10)$$

上式的  $u$  和  $y$  是有正负的, 例如折射球面中  $u_1 > 0$ ,  $y_1 > 0$  而  $u_2 < 0$ ,  $y_2 < 0$ 。

## § 1.5 光学仪器

### 1.5.1 薄透镜

透镜是由两个共轴折射球面构成的光具组, 球面间距远远小于球面半径和物距像距的透镜称为薄透镜, 也即  $d \ll |R_1|, |R_2|, |s|, |s'|$ 。此时可以认为两球面顶点重合, 称为光心。

薄透镜成像公式 (物像距公式):

$$\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2} \quad (1.11)$$

$$s' = \infty \implies f = \frac{n}{\frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}} \quad \text{物方焦距} \quad (1.12)$$

$$s = \infty \implies f' = \frac{n'}{\frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}} \quad \text{像方焦距} \quad (1.13)$$

故物像焦距满足  $\frac{f}{n} = \frac{f'}{n'}$ 。特别地, 当物像方折射率都为 1 时 (真空), 我们有磨镜者公式和像的横向放大率:

$$f = f' = \frac{1}{(n_L - 1)(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})}, \quad V = -\frac{\frac{s'}{n'}}{\frac{s}{n}} = -\frac{f s'}{f' s} = -\frac{s'}{s} \quad (1.14)$$

将公式 ?? 和公式 ?? 代入式 ?? 中, 可以得到 Gauss 物像公式:

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1 \xrightarrow{n=n'} \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (1.15)$$

令  $s = x + f$ ,  $s' = x' + f'$ , 代入公式 ??, 可以得到 Newton 物像公式:

$$xx' = ff' \quad (1.16)$$

## 1.5.2 其它仪器

投影仪器、照相机、眼睛、放大镜、显微镜、望远镜

## § 1.6 光波的描述

## § 1.7 光度学基本概念

在学习光度学之前，需要区分辐射度学与光度学中的基本概念。辐射度学研究的是辐射能量对实际物体的影响，而光度学研究的是辐射能量对人眼的影响，是基于人眼实验数据的学科，例如 Luminous Efficiency Function。它们的概念相互对应（可以相互转化）但并不相同，如下表所示：

表 1.1: 光度学与辐射度学概念对应关系

学科范围	基本概念						
辐射度学	辐射能 $Q_e$	辐射通量 $\Phi_e$	辐射强度 $I_e$	辐射亮度 $L_e$	辐射照度 $E_e$	辐射出射度 $M_e$	辐射通量谱密度 $\Phi_{e,\lambda}$
光度学	光量 $Q_v$	光通量 $\Phi_v$	光强度 $I_v$	光亮度 $L_v$	光照度 $E_v$	光出射度 $M_v$	光通量谱密度 $\Phi_{v,\lambda}$

### 1.7.1 辐射度学基本概念

表 1.2: 辐射度学基本概念

名称	符号	定义式	单位	概念描述
辐射能	$Q_e$	-	J	以辐射形式传播的能量
辐通量	$\Phi_e$	$\Phi_e = \frac{dQ_e}{dt}$	W	单位时间内流过某截面的辐射能量
辐强度	$I_e$	$I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega}$	$\text{W} \cdot \text{sr}^{-1}$	点辐射源在某方向上单位立体角 <sup>⑤</sup> 内的辐射通量
辐照度	$E_e$	$E_e = \frac{d\Phi_e}{dA}$	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$	被辐射体单位面积上的辐射通量
辐亮度	$L_e$	$L_e = \frac{dI_e}{dA \cos \theta}$	$\text{W} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$	单位面积的面辐射源在某方向上的辐射强度
辐出射度	$M_e$	$M_e = \frac{d\Phi_e}{dA}$	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$	辐射体单位面积向半球空间发射的辐射通量
辐谱密度	$\phi_e$	$\phi_e = \frac{\Delta\Phi_{e,\lambda}}{\Delta\lambda}$	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$	辐射能（通量）在频谱中的分布

其中  $\Delta\Phi_{e,\lambda}$  表示波长为  $\lambda$ （也可认为是  $[\lambda, \lambda + \Delta\lambda]$ ）的部分所贡献的辐射通量。

### 1.7.2 明视觉曲线

人眼对不同波长的光具有不同的明亮感觉程度<sup>⑥</sup>，称为明视觉光谱光视效率曲线<sup>⑦</sup>（函数），常简称为“明视觉曲线”或“视觉曲线”，记为  $V = V(\lambda)$ 。

光谱光效能  $K$ ，表示在某一波长上每一瓦辐射通量可以产生多少流明的光通量。光谱光视效率  $V = V(\lambda)$ ，就是归一化的光谱光效能：

$$K = \frac{\Delta\Phi_{v,\lambda}}{\Delta\Phi_{e,\lambda}} = \frac{\phi_v(\lambda)}{\phi_e(\lambda)}, \quad V(\lambda) = \frac{K(\lambda)}{K_{\max}} = \frac{1}{K_{\max}} \cdot \frac{\phi_v(\lambda)}{\phi_e(\lambda)} \quad (1.17)$$

<sup>⑥</sup>参考 新旧明视觉光谱光视效率曲线.pdf。

<sup>⑦</sup>参考 ANSI E1.48 - 2014 (A Recommended Luminous Efficiency Function for Stage and Studio Luminaire Photometry)，国际照明委员会（CIE）规定的标准光谱光视效率函数 Luminous Efficiency Functions 或者 知乎：光通量与光辐照度之间的换算。



$K_{\max} = 683 \text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$  在波长约 555.0 nm 取到, 因此  $V = V(\lambda)$  也表示在相同辐射通量下, 波长为  $\lambda$  的光与 555.0 nm 的光所产生的亮暗感觉比值。

另外, 公式 ?? 建立了辐射度学参量与光度学参量之间的转化关系:

$$\Phi_v(\lambda) = \int \phi_v(\lambda) d\lambda = \int K_{\max} V(\lambda) \phi_e(\lambda) d\lambda \quad (1.18)$$

### 1.7.3 光度学基本概念

表 1.3: 光度学基本概念

名称	符号	定义式	单位	概念描述
光量	$Q_v$	$Q_v(\lambda) = V(\lambda) \cdot Q_e(\lambda)$	$\text{cd} \cdot \text{sr} \cdot \text{s}$	辐射能的光度量大小
光通量	$\Phi_v$	$\Phi_v = \frac{dQ_v}{dt}$	$\text{lm} = \text{cd} \cdot \text{sr}$	单位时间内流过某截面的光度学光量
光强度	$I_v$	$I_v = \frac{d\Phi_v}{d\Omega}$	$\text{cd}$	点辐射源在某方向上单位立体角内的光通量
光照度	$E_v$	$E_v = \frac{d\Phi_v}{dA}$	$\text{lm} \cdot \text{m}^{-2}$	被辐射体单位面积上的光通量
光亮度	$L_v$	$L_v = \frac{dI_v}{dA \cos \theta}$	$\text{cd} \cdot \text{m}^{-2}$	单位面积的面辐射源在某方向上的光强度
光出射度	$M_v$	$M_v = \frac{d\Phi_v}{dA}$	$\text{lm} \cdot \text{m}^{-2}$	辐射体单位面积向半球空间发射的光通量
光谱密度	$\phi_v$	$\phi_v = \frac{\Delta \Phi_{v,\lambda}}{\Delta \lambda}$	$\text{lm} \cdot \text{m}^{-1}$	光量 (光通量) 在频谱中的分布

它们<sup>®</sup>之间的转化关系:

$$\text{与光通量的转换: } \Phi_v = \int E_v dA = \int I_v d\Omega = \iint L_v \cos \theta dA d\Omega \quad (1.19)$$

$$\text{与光强的转换: } I_v = r^2 E_v = \int L_v \cos \theta dA = \int L_v dA_{\perp} \quad (1.20)$$

计算时的常用微分:

$$\begin{aligned} \text{直角坐标系: } dA &= dx dy, & d\Omega &= \frac{dA}{r^2} \\ \text{球坐标系: } dA &= r^2 \sin \theta d\theta d\phi, & d\Omega &= \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (1.21)$$

## § 1.8 特殊发光体

### 1.8.1 余弦发光体 (朗伯发光体)

### 1.8.2 定向发光体

<sup>®</sup>参考 知乎: 如何区分并记忆光度、照度、发光强度、光强、亮度等

## 第2章 光的反射与折射

在本章，我们先以一定的顺序，依次对反射折射过程中所出现的现象或相关物理量进行讨论，最后给出所有现象的总结。

### §2.1 菲涅尔公式

**Theorem. 3 (菲涅尔公式, Fresnel Formula):**

光线在通过两介质分界面时通常会同时发生折射（透射）和反射现象，设入射光（incident ray）介质折射率  $n_i$ ，入射角  $\theta_i$ ，透射光（transmitted ray）介质折射率  $n_t$ ，透射角（折射角） $\theta_t$ ，则有<sup>①</sup>：

类型	振幅反射系数 $r$		振幅透射系数 $t$	
$s$ 波	$r_s = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$	$-\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$	$t_s = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}$	$+\frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$
$p$ 波	$r_p = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t}$	$+\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$	$t_p = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i}$	$+\frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}$

折射角  $\theta_t$ 、 $s$  波通量反射率  $R_s$ 、 $p$  波通量反射率  $R_p$  和总通量反射率  $R$  为：

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \left(\frac{n_i}{n_t} \sin \theta_i\right)^2}, \quad R_s = r_s^2, \quad R_p = r_p^2, \quad R = \frac{1}{2}(R_s + R_p) \quad (2.1)$$

总强度反射率  $R$  的严格证明见下一节。特别地，若  $1 - \left(\frac{n_i}{n_t} \sin \theta_i\right)^2 < 0$ ，则发生全反射，此时  $R = 1$ 。另外，需要指出菲涅尔公式的适用条件，也即推导时所做的一些假设，如下：

- (1) 介质为绝缘介质，无表面自由电荷或传导电流
- (2) 介质为各向同性的光学线性介质（弱光强）
- (3) 介质磁导率（约）等于真空磁导率<sup>②</sup>  $\mu_i = \mu_t = \mu_0$ ，其中  $\mu_0$  为真空磁导率。

### §2.2 反射时的相位变化

菲涅尔公式的推导以矢量分析为基础，因此公式中系数  $r_s$  的正负具有明确物理意义，它标识着方向。若为负，则反射后的方向与原方向相反，否则相同。各系数正负情况见表 ??，其中 o 表示可正可负。

从波的角度，方向相反可以等价地视为相位发生了  $\pi$  的前移（或后移），称为相位突变。 $n_i < n_t$  时，相位突变要么是 0，要么是  $\pi$ ， $n_i > n_t$  时的相位变化比较复杂，我们不深究。在  $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$  时， $r_p$  的正负发生变化， $p$  波的反射波相位也发生突变，称此时  $\theta_i$  的角度为布儒斯特角（Brewster angle），记为  $\theta_B$ ，也称为偏振角或起偏角。

表 2.1: 振幅系数的正负情况

折射率	$r_s$	$r_p$	$t_s$	$t_p$
$n_i < n_t$	—	o	+	+
$n_i > n_t$	o	o	+	+

可以推得 Brewster angle 的值为：

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (2.2)$$

<sup>①</sup>对于金属材料（非绝缘材质），需要引入消光系数  $k_t$  来修正菲涅尔公式（绝缘材质等价于  $k_t = 0$ ），具体参见 知乎: 菲涅尔公式

<sup>②</sup>对于介质磁导率不等于真空磁导率的情况，参考 Optics (Eugene Hecht, 尤金) Page 144

具体的振幅系数变化见图 ??，见图 ??， $n_i < n_t$  时的反射示意图见图 ??。

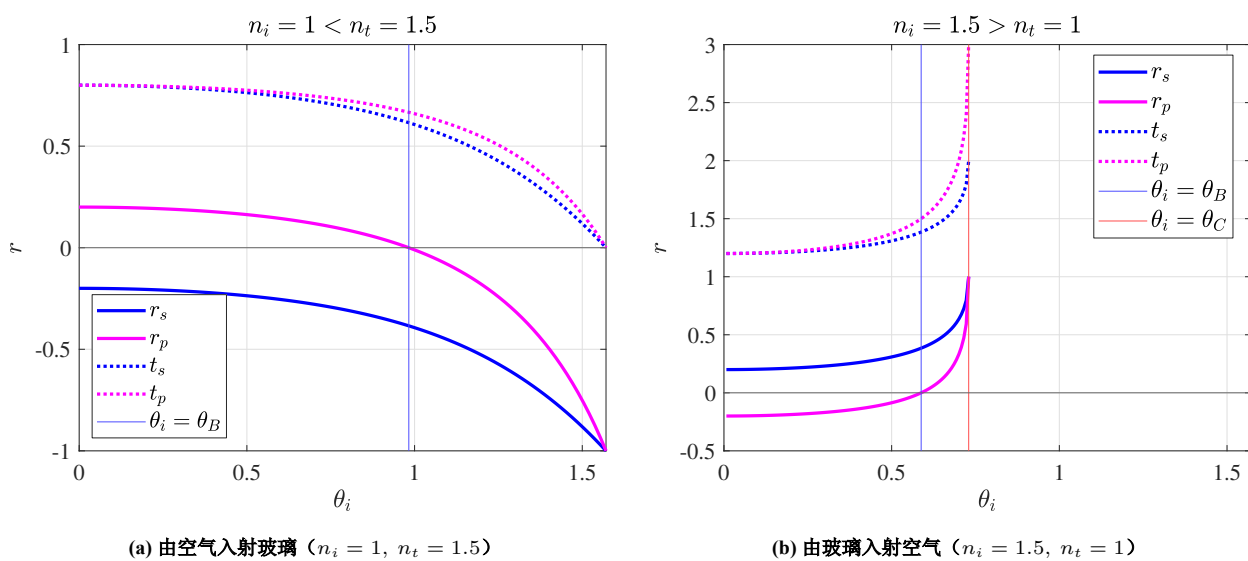


图 2.1: 振幅系数  $r$  随入射角  $\theta_i$  的变化

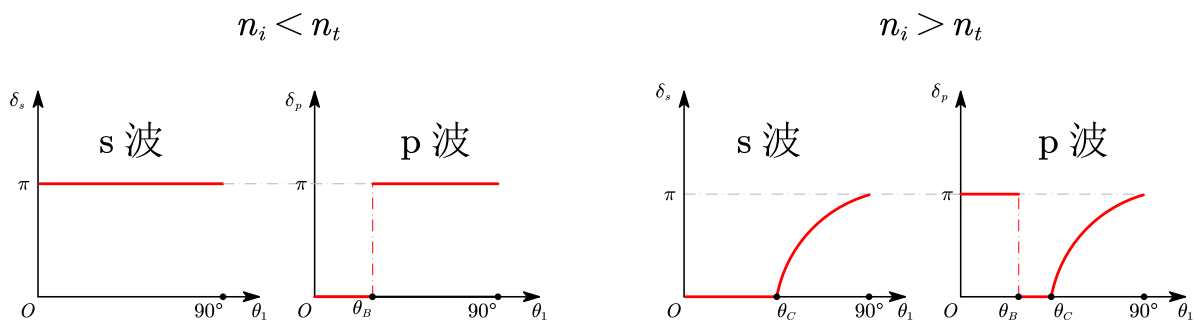


图 2.2:  $s$  波和  $p$  波在反射时的相位变化

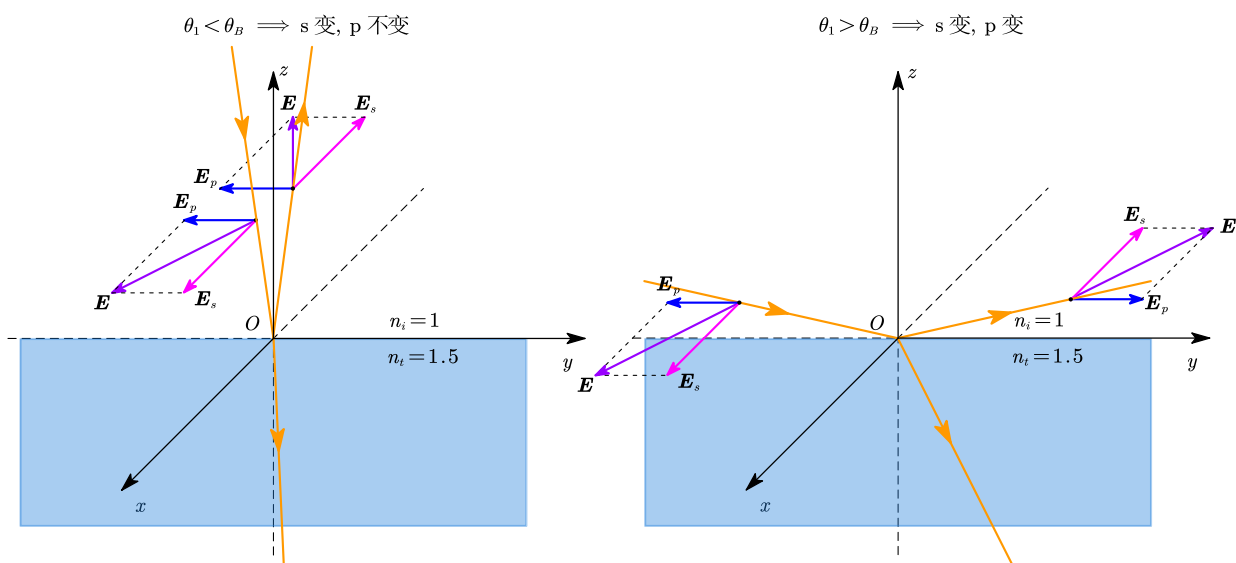


图 2.3: 由空气入射玻璃的光线示意图

由菲涅尔公式，当  $n_i < n_t$  时，我们还有如下结论：

$$\begin{aligned} \theta_i = 0 \text{ 时: } \quad r_p &= (-r_s) = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}, \quad t_p = t_s = \frac{2n_i}{n_i + n_t} \\ \theta_i = \frac{\pi}{2} \text{ 时: } \quad r_p &= r_s = -1, \quad t_p = t_s = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

这表明，即使是正射（垂直于介质分界面的入射， $\theta_i = 0$ ），一般也存在部分反射光。总之，当  $n_i < n_t$  时，入射光的 s 分量在反射中一定会相位跃变，p 分量都有可能。

另外，菲涅尔公式还可写成：

$$\begin{aligned} (-r_s) + t_s &= 1, & r_p + t_p &= 1 \\ r_s &= \frac{\cos \theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}, & r_p &= \frac{n_{ti}^2 \cos \theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}{n_{ti}^2 \cos \theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

## §2.3 完全偏振反射光

当光波由布儒斯特角  $\theta_B$  入射时，由 Fresnel Formula,  $r_p = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} = 0$ ，也即反射光的 p 分量为 0，仅存在 s 分量。这说明反射光是完全偏振光， $\mathbf{E}$  的方向（称为振动方向）垂直于入射面。

但此时反射光能量占比  $F$  很小<sup>③</sup>，例如，空气（ $n = 1$ ）入射玻璃（ $n = 1.5$ ）时， $\theta_B = 56.310^\circ$ ， $F = 0.0740$ ；玻璃入射空气时， $\theta_B = 33.690^\circ$ ， $F = 0.0740$ 。

## §2.4 反射折射时的能量关系

在 Fresnel Formula 中可以发现， $r_s^2 + t_s^2 \neq 1$ ， $r_p^2 + t_p^2 \neq 1$ ，是能量不守恒了吗？显然不是。那么，反射光和透射光的能量关系是怎样的？这需要借助辐射度学的相关概念。

如图，圆形光束从空气入射到分界面上的一个面元  $\mathbf{A}$ （界面下是玻璃），以此面元为研究对象。考虑玻印亭矢量  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ，即单位时间内通过单位面积的电磁辐射能量（单位面积辐射功率），于是瞬时辐射照度  $\mathbf{E}_e$ ：

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{S} = c^2 \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad E_e = \varepsilon_0 c E^2 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}} = \frac{\varepsilon_0 c}{\mu_r} \cdot n E^2 \quad (2.5)$$

其中  $\varepsilon_r$ ， $\mu_r$  分别为相对介电常量、相对磁导率，对空气近似有  $\varepsilon_r = \mu_r = 1$ ，于是

核心理想是  $dQ_e = (\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{A}) dt$ 。入射、反射、透射光束的截面面积分别为  $A \cos \theta_i$ ， $A \cos \theta_r$ ， $A \cos \theta_t$ ，设其瞬时辐射照度分别为  $\mathbf{E}_i$ ， $\mathbf{E}_r$ ， $\mathbf{E}_t$ ，则辐射通量为：

$$\Phi_{e,k} = E_{e,k} A \cos \theta_k = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_k \cos \theta_k E_k^2, \quad k = i, r, t \quad (2.6)$$

分别写出入射、反射、透射光的辐射通量：

$$\Phi_{e,i} = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_i \cos \theta_i E_i^2 = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_i \cos \theta_i (E_{i,s}^2 + E_{i,p}^2) \quad (2.7)$$

$$\Phi_{e,r} = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_i \cos \theta_i E_r^2 = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_i \cos \theta_i (r_s^2 E_{i,s}^2 + r_p^2 E_{i,p}^2) \quad (2.8)$$

$$\Phi_{e,t} = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_t \cos \theta_t E_t^2 = \frac{\varepsilon_0 c A}{\mu_r} \cdot n_t \cos \theta_t (t_s^2 E_{i,s}^2 + t_p^2 E_{i,p}^2) \quad (2.9)$$

<sup>③</sup>可以使用玻璃片堆得到强度较大的偏振光

由于入射光可分解为  $s$  波与  $p$  波，我们自然想到它们俩在入射前后应该是能量守恒的，这指导我们分别作数学上的处理。对  $s$  波，由菲涅尔定律（这说明已经做了近似  $\mu_r = 1$ ），做减法得到：

$$\begin{aligned} & n_i \cos \theta_i E_{i,s}^2 - n_i \cos \theta_i r_{i,s}^2 E_{i,s}^2 - n_t \cos \theta_t t_s^2 E_{i,s}^2 \\ &= E_{i,s}^2 \left[ n_i \cos \theta_i \left( 1 - \frac{(n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t)^2}{(n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t)^2} \right) - n_t \cos \theta_t \cdot \frac{(2n_i \cos \theta_i)^2}{(n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t)^2} \right] \\ &= \frac{E_{i,s}^2}{(n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t)^2} [n_i \cos \theta_i \cdot (4n_i \cos \theta_i \cdot n_t \cos \theta_t) - 4n_t \cos \theta_t \cdot n_i^2 \cos^2 \theta_i] \\ &= 0 \end{aligned}$$

同理，考虑  $p$  分量，作减法可得到：

$$n_i \cos \theta_i E_{i,p}^2 - n_i \cos \theta_i r_{i,p}^2 E_{i,p}^2 - n_t \cos \theta_t t_p^2 E_{i,p}^2 = 0 \quad (2.10)$$

代入即得：

$$\Phi_{e,i} - \Phi_{e,r} - \Phi_{e,t} = 0 \implies \Phi_{e,i} = \Phi_{e,r} + \Phi_{e,t} \quad (2.11)$$

这便验证了入射前后的能量是守恒的。

由此，我们可以定义一些能量系数：

$$\begin{aligned} \text{强度反射率 } R: \quad R &= \frac{1}{2}(R_s + R_p), \quad R_s = r_s^2, \quad R_p = r_p^2 \\ \text{强度透射率 } T: \quad T &= \frac{1}{2}(T_s + T_p), \quad T_s = \left( \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right)^2 t_s^2, \quad T_p = \left( \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right)^2 t_p^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

这样，它们具有下面的性质，方便我们计算能量关系：

$$\begin{aligned} R_s + T_s &= 1, & R_p + T_p &= 1, & R + T &= 1 \\ \Phi_{e,r} &= R\Phi_{e,i}, & \Phi_{e,r,s} &= R_s\Phi_{e,i,s}, & \Phi_{e,r,p} &= R_p\Phi_{e,i,s} \\ \Phi_{e,t} &= T\Phi_{e,i}, & \Phi_{e,t,s} &= T_s\Phi_{e,i,s}, & \Phi_{e,t,p} &= T_p\Phi_{e,i,s} \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中  $\Phi_{e,r} = R\Phi_{e,i}$  和  $\Phi_{e,t} = T\Phi_{e,i}$  是怎么来的？

## §2.5 全反射时的隐失波与穿透深度

假设现在由光密介质射向光疏介质，即  $n_i > n_t$ ，则有临界角  $\theta_C = \arcsin n_{ti}$ 。当  $\theta_i > \theta_C$  时，发生全反射， $R = 1$ ,  $T = 0$ ，若简单地认为没有任何透射光，是不满足电磁场边界条件的。具体来讲， $\mathbf{E}$  的切向分量连续告诉我们，在透射介质中一定存在振荡场，它在平行于界面上的分量具有时间频率  $\omega$ （与入射光相同）。

进一步的推导表明<sup>④</sup>，在透射介质中存在一种波（称为隐失波），其波函数如下：

$$\mathbf{E} = (e^{-\beta y} \mathbf{E}_{t,0}) \cdot e^{i\left(\frac{\sin \theta_i}{n_{ti}} k_t x - \omega t\right)}, \quad \text{衰减系数 } \beta = k_t \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{n_{ti}^2} - 1} = k_i \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2} \quad (2.14)$$

这是一个不均匀波，其振幅在  $y$  方向上极速衰减，只在几个波长的距离上就可以忽略不计。且它同时有纵波成分和横波成分，不是简单的简谐横波。

我们将振幅下降到  $\frac{1}{e}$  的深度称为**穿透深度**，记为  $\delta = \frac{1}{\beta}$ ，它通常在一个波长以内。

对于此过程的能量守恒问题，更详尽广泛的讨论表明（利用波印廷矢量  $\mathbf{S}$ ），能量实际上是跨过界面往复循环，最终使透向第二介质的净流量为零。就现阶段，可以理解为能量从入射波流到隐失波再回到反射波，或者说隐失波沿入射波又绕回了反射波。

<sup>④</sup>详见参考文献 [?] 的 Page 158

## § 2.6 古斯-亨欣位移 (Goos-Hanchen Shift)

一束被全反射的光，入射点会与（反射后的）出射点存在微小偏移（事实上既有平行偏移也有垂直偏移），称为 Goos-Hanchen Shift。较为严谨的推导表明<sup>⑥</sup>，沿入射方向、与分界线平行的偏移量如下（又称为侧向偏移）：

$$\delta_{\perp} = \frac{\lambda_i \sin \theta_i}{\pi \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}}, \quad \Delta x = \frac{\lambda_i \tan \theta_i}{\pi \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}} = 2\delta \tan \theta_i \quad (2.15)$$

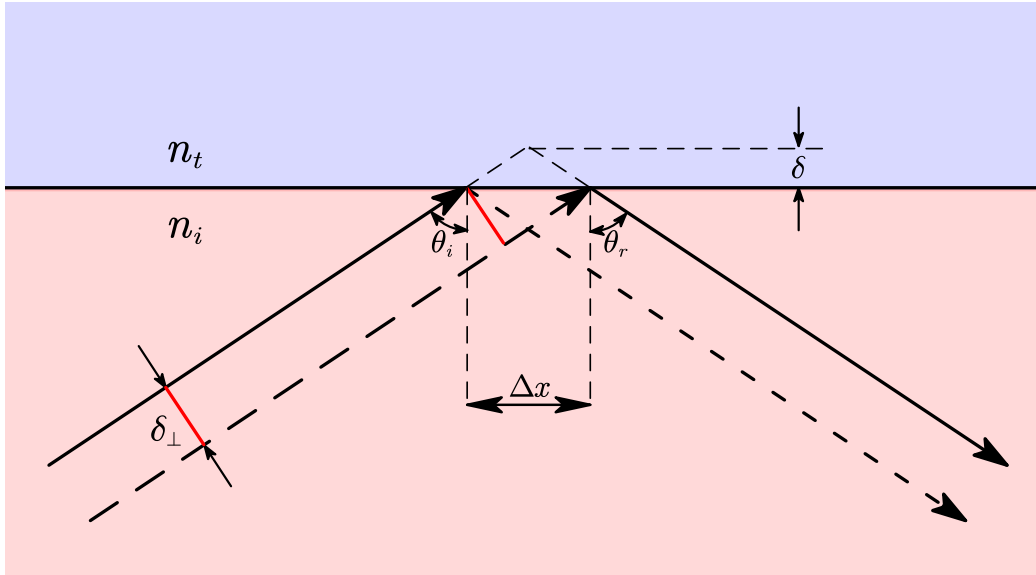


图 2.4: Goos-Hanchen Shift

## § 2.7 全反射时的相位变化

发生全内反射时<sup>⑥</sup>，入射波 s 分量、p 分量的相位变化并非简单的 0 或  $\pi$ ，下面作推导。

对入射光的波函数  $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{i,0} \cdot e^{i\theta} = \mathbf{E}_{i,0} \cdot e^{i(kx - \omega t)}$ ，若反射光满足  $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_i \cdot \lambda e^{i\delta}$ ，则表明相对于入射光，反射光的振幅变为了原来的  $\lambda$  倍，且相位增加了  $\delta$ 。特别地， $\lambda < 0$  时，可以等价于  $\lambda > 0$  且相位增加  $\delta + \pi$  或  $\delta - \pi$ 。

由菲涅尔定律，我们有  $\mathbf{E}_{r,s} = r_s \mathbf{E}_{i,s}$ ， $\mathbf{E}_{r,p} = r_p \mathbf{E}_{i,p}$ 。可以发现，在全反射时， $r_s, r_p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ，并且  $|r_s| = |r_p| = 1$ ，振幅不变，于是可以令  $r = e^{i\delta}$ 。为了反解相位增量  $\delta$ ，一种自然的想法是考虑

$$e^{i\delta} = \cos \delta + i \lambda \sin \delta = a + ib \implies \delta = \arctan \left( \frac{b}{a} \right) \quad (2.16)$$

这样做虽然可行，但由于  $\arctan$  函数的局限性，其值域范围在  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ，而  $\delta$  的取值范围在  $[0, \pi]$  或者  $[-\pi, 0]$ 。因此，最终得到的  $\delta$  仅在部分区域上正确，对另一部分需做数学上的平移修正。因此，我们考虑另一种方法。在全反射时，注意到  $r_s$  和  $r_p$  的形式为  $r = \frac{a-bi}{a+bi}$ ，其中  $a, b \in \mathbb{R}$ ，有如下过程：

$$\frac{a-bi}{a+bi} = e^{i\theta} \implies e^{i\frac{\theta}{2}} = \pm \frac{a-bi}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \tan \frac{\delta}{2} = -\frac{b}{a}, \quad \frac{\delta}{2} = \arctan \left( -\frac{b}{a} \right) \quad (2.17)$$

<sup>⑥</sup> 详见参考文献 [?], 或者 知乎: 古斯汉欣位移产生的原因 (<https://www.zhihu.com/question/446676895/answer/3407740051>), 以及 知乎: 古斯汉森位移的原理是什么 (<https://www.zhihu.com/question/620522351/answer/3209865128>)

<sup>⑦</sup> 全内反射是指，由光疏介质射向光密介质且入射角大于临界角时发生的全反射现象

这样得到的  $\frac{\delta}{2}$  便是全范围正确的，无需修正。分别令  $r = r_s, r_p$ ，代入即得：

$$\delta_{r,s} = -2 \arctan \left( \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}}{\cos \theta_i} \right), \quad \delta_{r,p} = -2 \arctan \left( \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}}{n_{21}^2 \cos \theta_i} \right) \quad (2.18)$$

## § 2.8 折射时的相位变化

入射光不发生全反射时，由菲涅尔定律， $t_s, t_p \in (0, \frac{2n_i}{n_i+n_t}) \subset \mathbb{R}$ ，恒为正实数，因此相位不发生变化。当入射光发生全反射时，折射光（透射光）以隐失波的形式存在，我们前面已经提过，隐失波同时含有横波纵波成分，它与入射光不再是同一种波，此时谈论相位变化自然没有意义。

## § 2.9 反射折射总结

到此，我们已经讨论了目前可能接触到的所有情况，包括光疏射向光密、光密射向光疏、小于或大于临界角时的折射反射振幅、相位以及能量关系等，终于可以给出反射折射的总结。

整个结论由菲涅尔定律推导而来，基于电磁场的边界条件和麦克斯韦方程组，从波的角度揭示了光在反射折射时发生的变化，包括振幅、相位、能量、位移等关系。

$$\text{反射波: } \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{r,s} + \mathbf{E}_{r,p} = r_s \mathbf{E}_{i,s} + r_p \mathbf{E}_{i,p}, \quad r \in \mathbb{C} \quad (2.19)$$

$$\text{透射波: } \mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{t,s} + \mathbf{E}_{t,p} = t_s \mathbf{E}_{i,s} + t_p \mathbf{E}_{i,p}, \quad t \in \mathbb{R}, \theta_i < \theta_C \quad (2.20)$$

$$\text{反射系数: } r_s = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}, \quad r_p = \frac{n_{ti}^2 \cos \theta_i - \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}}{n_{ti}^2 \cos \theta_i + \sqrt{n_{ti}^2 - \sin^2 \theta_i}} \quad (2.21)$$

$$\text{透射系数: } (-r_s) + t_s = 1, \quad r_p + t_p = 1 \quad (2.22)$$

$$\text{能量关系: } \begin{cases} R = \frac{1}{2}(R_s + R_p), \quad R_s = |r_s|^2, \quad R_p = |r_p|^2 \\ T = \frac{1}{2}(T_s + T_p), \quad T_s = \left( \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right)^2 t_s^2, \quad T_p = \left( \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right)^2 t_p^2 \\ R + T = 1, \quad R_s + T_s = 1, \quad R_p + T_p = 1 \\ \Phi_{e,r} = R \Phi_{e,i}, \quad \Phi_{e,t} = T \Phi_{e,i} \end{cases} \quad (2.23)$$

$$s \text{ 波反射相位增量: } \delta_{r,s} = \begin{cases} -\pi, & n_i < n_t \\ \begin{cases} 0, & \theta_i \in (0, \theta_C) \\ -2 \arctan \left( \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}}{\cos \theta_i} \right), & \theta_i > \theta_C \end{cases}, & n_i > n_t \end{cases} \quad (2.24)$$

$$p \text{ 波反射相位增量: } \delta_{r,p} = \begin{cases} \begin{cases} 0, & \theta_i \in (0, \theta_B) \\ -\pi, & \theta_i \in (\theta_B, \frac{\pi}{2}) \end{cases}, & n_i < n_t \\ \begin{cases} -\pi, & \theta_i \in (0, \theta_B) \\ 0, & \theta_i \in (\theta_B, \theta_C) \\ -2 \arctan \left( \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}}{n_{ti}^2 \cos \theta_i} \right), & \theta_i \in (\theta_C, \frac{\pi}{2}) \end{cases}, & n_i > n_t \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\text{隐失波: } \mathbf{E}_t = (e^{-\beta y} \mathbf{E}_{t,0}) \cdot e^{i \left( \frac{\sin \theta_i}{n_{ti}} k_t x - \omega t \right)}, \quad \beta = k_i \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2} = \frac{2\pi}{\lambda_i} \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}, \quad \delta = \frac{1}{\beta} \quad (2.26)$$

$$\text{Goos-Hanchen Shift: } \Delta x = 2\delta \tan \theta_i = \frac{2 \tan \theta_i}{k_i \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}} = \frac{\lambda_i \tan \theta_i}{\pi \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{ti}^2}} \quad (2.27)$$

另外, 如图 ?? 考虑一束光由光疏介质射向光密介质 ( $n_i < n_t$ ), 发生透射、反射。保持各角度不变, 将透射光方向置反, 射向光疏介质, 由菲涅尔公式, 可得对称前后的振幅与能量系数变化:

$$\theta_i < \theta_B : \begin{cases} \text{反射振幅与强度:} & \frac{r'_s}{r_s} = \frac{r'_p}{r_p} = 1, \quad \frac{R'}{R} = \frac{R'_s}{R_s} = \frac{R'_p}{R_p} = 1 \\ \text{透射振幅与强度:} & \frac{t'_s}{t_s} = \frac{t'_p}{t_p} = \frac{\tan A}{\tan B}, \quad \frac{T'}{T} = \frac{T'_s}{T_s} = \frac{T'_p}{T_p} = \frac{1}{n_{ti}^2} \cdot \frac{\sin^2 2A}{\sin^2 2B} \\ \text{反射光相位增量:} & \delta_{r,s} = -\pi, \delta_{r,p} = 0, \quad \delta'_{r,s} = 0, \delta'_{r,p} = -\pi \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\theta_i > \theta_B : \begin{cases} \text{反射振幅与强度:} & \frac{r'_s}{r_s} = \frac{r'_p}{r_p} = 1, \quad \frac{R'}{R} = \frac{R'_s}{R_s} = \frac{R'_p}{R_p} = 1 \\ \text{透射振幅与强度:} & \frac{t'_s}{t_s} = \frac{t'_p}{t_p} = \frac{\tan A}{\tan B}, \quad \frac{T'}{T} = \frac{T'_s}{T_s} = \frac{T'_p}{T_p} = \frac{1}{n_{ti}^2} \cdot \frac{\sin^2 2A}{\sin^2 2B} \\ \text{反射光相位增量:} & \delta_{r,s} = -\pi, \delta_{r,p} = -\pi, \quad \delta'_{r,s} = 0, \delta'_{r,p} = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

上面最左侧的图中, 考虑光路可逆性, 假设反射光、折射光振幅不变而方向置反, 则合成出的光也应是原来的入射光 (左下角合成后为 0), 得到斯托克斯倒逆关系:

$$r' + r = 1, \quad tt' + rr' = 1 \quad (2.30)$$

由于没有涉及电场的方向, 上式对  $s$  波、 $p$  波均成立, 可以角标同时为  $s$ , 也可以角标同时为  $p$ 。

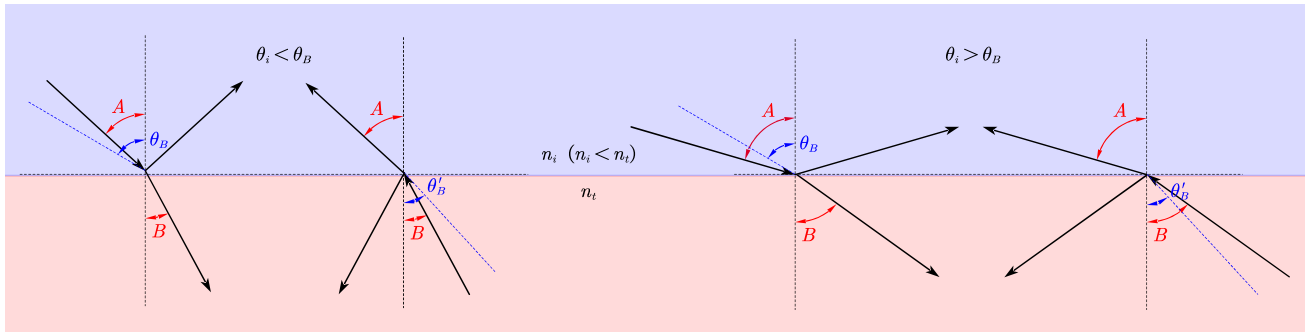


图 2.5: 光路可逆性下的振幅与能量系数

图 ?? 展示了反射折射光的振幅  $r_s, r_p, t_s, t_p$ 、能量  $R_s, R_p, R$  随入射角  $\tan \theta_i$  的变化<sup>⑦</sup>, 其中 (a) 图为空气入射玻璃 ( $n_i = 1, n_t = 1.5$ ), (b) 图为玻璃入射空气 ( $n_i = 1.5, n_t = 1$ )。

图 ?? 展示了反射光的  $s$  分量与  $p$  分量的相位增量  $\delta_{r,s}, \delta_{r,p}$  随入射角  $\theta_i$  的变化<sup>⑧</sup>, 其中 (a) 图为空气入射玻璃 ( $n_i = 1, n_t = 1.5$ ), (b) 图为玻璃入射空气 ( $n_i = 1.5, n_t = 1$ )。特别地, 当 (b) 图中  $\theta_i > \theta_C$  时, 发生全 (内) 反射, 此时  $r_s, r_p, t_s, t_p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , 图中展示的是它们的模长, 即  $|r_s|, |r_p|, |t_s|, |t_p|$ 。

图 ?? 展示了隐失波穿透深度  $\delta$  和 GH Shift  $\Delta x$  随入射角  $\theta_i$  的变化<sup>⑨</sup>。

<sup>⑦</sup>源码见附录 ??

<sup>⑧</sup>源码见附录 ??

<sup>⑨</sup>源码见附录 ??



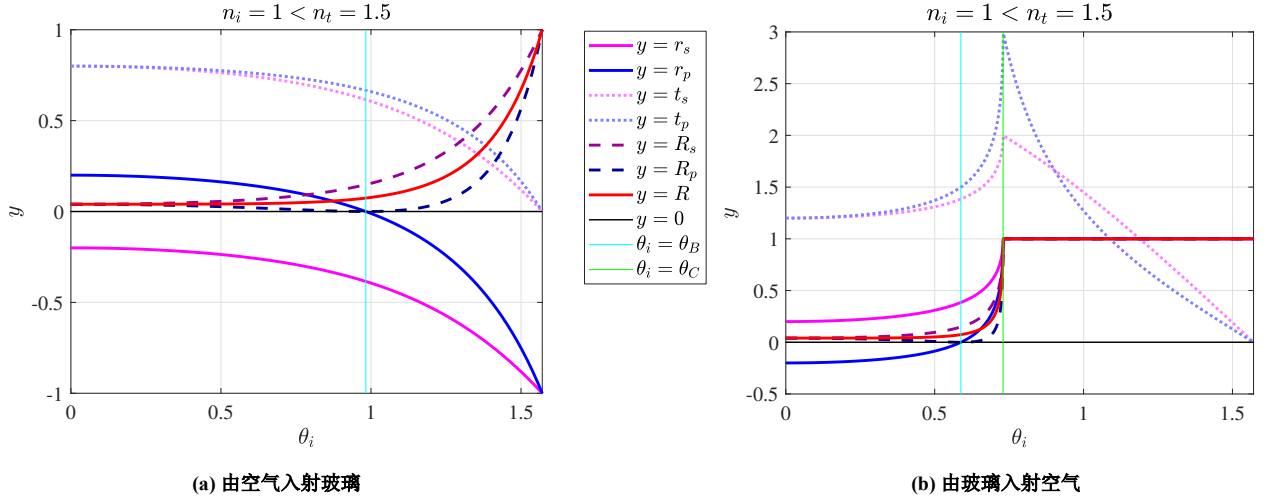


图 2.6: 反射折射光的振幅与能量变化

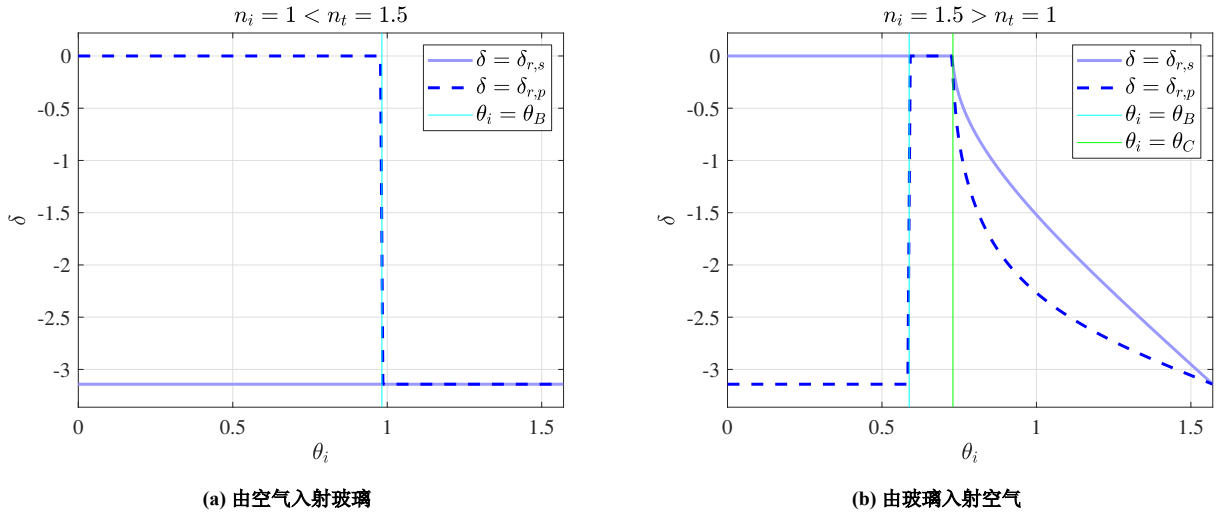


图 2.7: 反射光 s 分量与 p 分量的相位增量

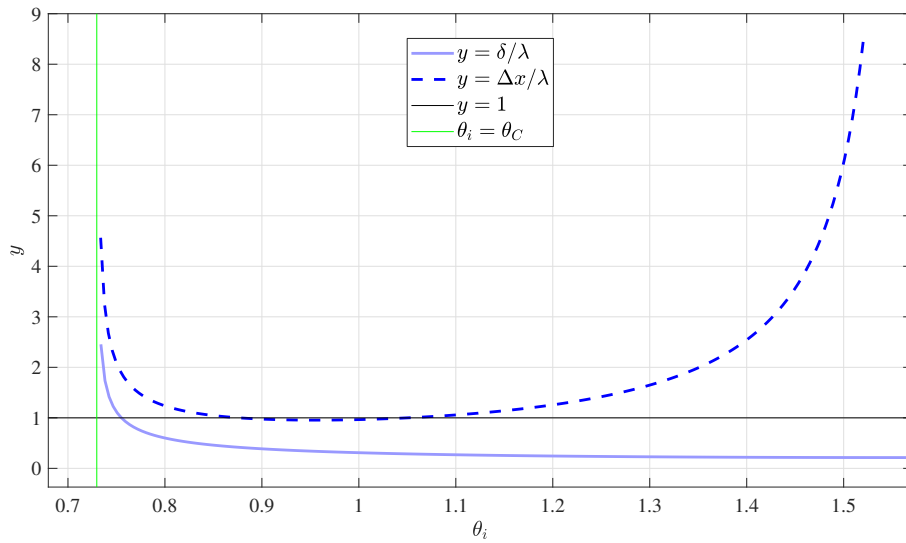


图 2.8: 隐失波穿透深度与 GH Shift (玻璃入射空气)

## 第3章 光的干涉

通常将平面波与球面波<sup>①</sup>是光波的基元，当两个光源（或两束光波）间存在某种关联，波的叠加会引起强度的重新分布，若相互叠加的波满足某些特定条件，使得叠加后产生了稳定的强度分布，则称发生了光的干涉。

换句话说，研究干涉现象，就是讨论当两个或多个（光）波在空间中的某区域相遇时，它们如何相互叠加，会产生怎样的新波动现象，了解各个波的特性（振幅、频率、相位、波的类型等）如何影响叠加后的波的性质。

### §3.1 叠加原理

只要波在空间中某点相遇，就会发生叠加，但不一定会产生干涉。也就是说，叠加是无条件的，干涉则要求形成稳定的、新的强度分布。

回想波动方程<sup>②</sup>，它的一个重要特性是：方程是线性的。因此，如果  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  各自是波动方程的解，那么它们的任意线性组合也是方程的解，即：

$$\psi = \sum a_i \psi_i \quad (3.1)$$

这个性质称为叠加原理，它表面：介质中任何一点的合扰动是各个单独波组分的代数和。另外，需要注意，叠加原理仅在均匀、线性、各向同性的介质中成立，有极大振幅的波（能量极大），无论是纵波（声波）或横波（电磁波），都可以产生非线性的效应，此时叠加原理不再适用。

在许多情况下，无需考虑光波的矢量性，例如多个光波的电场方向都始终在一条直线上时，可以将电场  $\mathbf{E}$  处理为具有正负的标量  $E$ 。本章我们研究的都是基于上述处理的光波，这表明它们的传播方向都在同一平面内，这样即降低了讨论的难度，又具有相当高的普适性和推广性（利用旋转对称性或平移对称性）。

### §3.2 同频率光波的干涉

#### 3.2.1 两个同频波源的干涉

两源干涉原理：

现在，我们讨论均匀介质的两个波源（频率相同）的干涉情况，为了提高普适性，我们并不事先假设波源的类似，它可以是平面波、球面波或柱面波。设两波源分别为  $S_A, S_B$ ，波函数分别为  $\psi_A, \psi_B$ ，不妨假设它们都沿各自的正向传播，借助相矢量的思想<sup>③</sup>，将位矢  $\mathbf{x}$ （和初相位  $\varepsilon$ ）分离后，它们的波函数可写为：

$$E_A = E_{A,0} \cdot e^{i(-\omega t + \alpha_A)}, \quad E_B = E_{B,0} \cdot e^{i(-\omega t + \alpha_B)} \quad (3.2)$$

其中  $\alpha_A = \alpha_A(\mathbf{x})$ ,  $\alpha_B = \alpha_B(\mathbf{x})$  是位矢的函数， $E_{A,0}, E_{B,0}$  可能是位矢的函数。对于平面中任意一点  $P$ ，合扰动为：

$$E = E_A + E_B = E_{A,0} \cdot e^{i(-\omega t + \alpha_A)} + E_{B,0} \cdot e^{i(-\omega t + \alpha_B)} \quad (3.3)$$

<sup>①</sup>即平面电磁波与球面电磁波，详见附录 ??，也可参考 知乎：球面光波与平面光波 (<https://www.zhihu.com/question/267133640/answer/319531458>) 和 知乎：高斯光束，平面波，球面波三者间有什么关系 (<https://www.zhihu.com/question/534511391/answer/2501271591>)

<sup>②</sup>详见 ??

<sup>③</sup>详见附录 ??

作数学上的处理，得到合扰动：

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t + \alpha)} \quad (3.4)$$

$$E_0 = \sqrt{E_{A,0}^2 + E_{B,0}^2 + 2E_{A,0}E_{B,0}\cos(\alpha_A - \alpha_B)}, \quad \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{E_0} (E_{A,0} \sin \alpha_A + E_{B,0} \sin \alpha_B) \\ \cos \alpha = \frac{1}{E_0} (E_{A,0} \cos \alpha_A + E_{B,0} \cos \alpha_B) \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin \left[ \frac{1}{E_0} (E_{A,0} \sin \alpha_A + E_{B,0} \sin \alpha_B) \right] & , \sin \alpha \geq 0 \\ \pi - \arcsin \left[ \frac{1}{E_0} (E_{A,0} \sin \alpha_A + E_{B,0} \sin \alpha_B) \right] & , \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

$E_0$  与  $\alpha$  的取值可以由相矢量相加来理解。在给定的位置  $P$ ， $A$  波的相矢量为  $E_{A,0} \angle \alpha_A$ ， $B$  波的相矢量为  $E_{B,0} \angle \alpha_B$ ，在复平面中将它们相加（平行四边形法则），即得到合扰动的相矢量  $E_0 \angle \alpha$ ，这样， $E_0$  的大小就是合相矢量的模长， $\alpha$  是合相矢量与  $x$  轴的夹角。

在光学中，常用干涉条纹对比度  $\gamma$  来描述干涉情况是否明显，它定义为：

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{E_{0,\max}^2 - E_{0,\min}^2}{E_{0,\max}^2 + E_{0,\min}^2} \quad (3.7)$$

其中  $I$  表示光强，也即光通量密度。在两波源产生的干涉中，有：

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\alpha_A - \alpha_B) \quad (3.8)$$

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}, \quad I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (3.9)$$

则对比度为：

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt{\frac{I_1}{I_2}} + \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{E_{A,0,\max}^2}{E_{B,0,\max}^2}} + \sqrt{\frac{E_{B,0,\max}^2}{E_{A,0,\max}^2}}} \quad (3.10)$$

因此，两波源电场的振幅越接近，干涉对比度越高，也就越明显。

### 示例一：两球面波

如图 ?? (a)，考虑两个相同的球面波源在  $x$ - $y$  平面上的干涉情况，相同的波源（理想单频波源）保证了两束波的物理参数相同，如波长、频率和振幅等。设两波源位置分别为  $x_{OA}$ ， $x_{OB}$ ，简记  $r_1 = |x_{AP}|$  和  $r_2 = |x_{BP}|$ ，则波函数可写为：

$$E_A = \frac{A}{r_1} \cdot e^{i(-\omega t + kr_1 + \varepsilon_A)}, \quad E_{A,0} = \frac{A}{r_1}, \quad \alpha_A = kr_1 + \varepsilon_A \quad (3.11)$$

$$E_B = \frac{B}{r_2} \cdot e^{i(-\omega t + kr_2 + \varepsilon_B)}, \quad E_{B,0} = \frac{B}{r_2}, \quad \alpha_B = kr_2 + \varepsilon_B \quad (3.12)$$

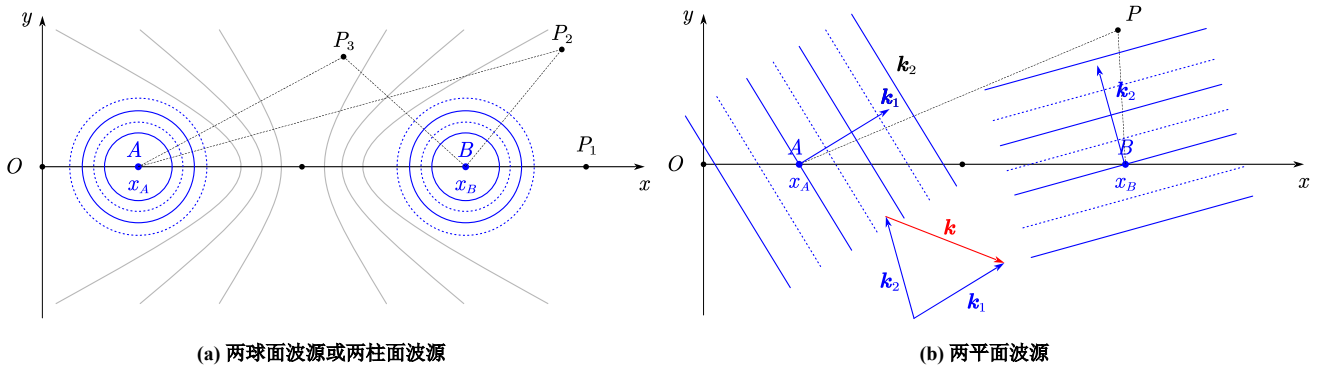


图 3.1: 两个同频波源的干涉

方便起见，不妨令  $\varepsilon_A = \varepsilon_B$ ，则合扰动为：

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t + \alpha)}, \quad E_0 = \sqrt{\frac{A^2}{r_1^2} + \frac{B^2}{r_2^2} + \frac{2AB}{r_1 r_2} \cos(k(r_1 - r_2))} \quad (3.13)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{E_0} \left( \frac{A}{r_1} \sin \alpha_A + \frac{B}{r_2} \sin \alpha_B \right), \quad \cos \alpha = \frac{1}{E_0} \left( \frac{A}{r_1} \cos \alpha_A + \frac{B}{r_2} \cos \alpha_B \right) \quad (3.14)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin \left[ \frac{1}{E_0} \left( \frac{A}{r_1} \sin \alpha_A + \frac{B}{r_2} \sin \alpha_B \right) \right] & , \cos \alpha \geq 0 \\ \pi - \arcsin \left[ \frac{1}{E_0} \left( \frac{A}{r_1} \sin \alpha_A + \frac{B}{r_2} \sin \alpha_B \right) \right] & , \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

对于可见光，其波长在 nm 级别，空间频率  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  极高。为方便可视化，我们取波长  $\lambda = 0.4\pi$  m，即  $k = 5$  的微波，并令振幅系数  $A = 50$ ， $B = 50$ ，作出图像。图 ?? 展示了单个波源在平面上的振荡情况 ( $t = 0$ )。对两波源的干涉<sup>④</sup>，我们令两波源位置分别为  $(-2, 0)$ ， $(2, 0)$ ，作出图像，图 ?? 展示了它们的干涉情况 ( $t = 0$ )<sup>⑤</sup>。单波源和双波源随时间的振动详见 GIF 动图链接 <https://www.123pan.com/s/0y0pTd-QwKj3>。

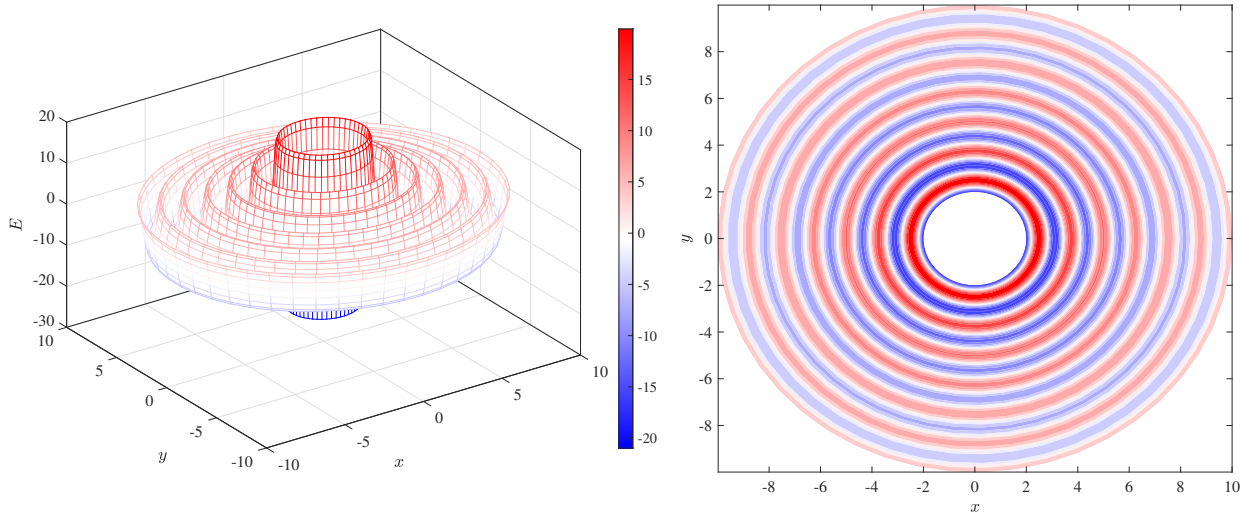


图 3.2: 单个球面波源在平面上的振荡情况

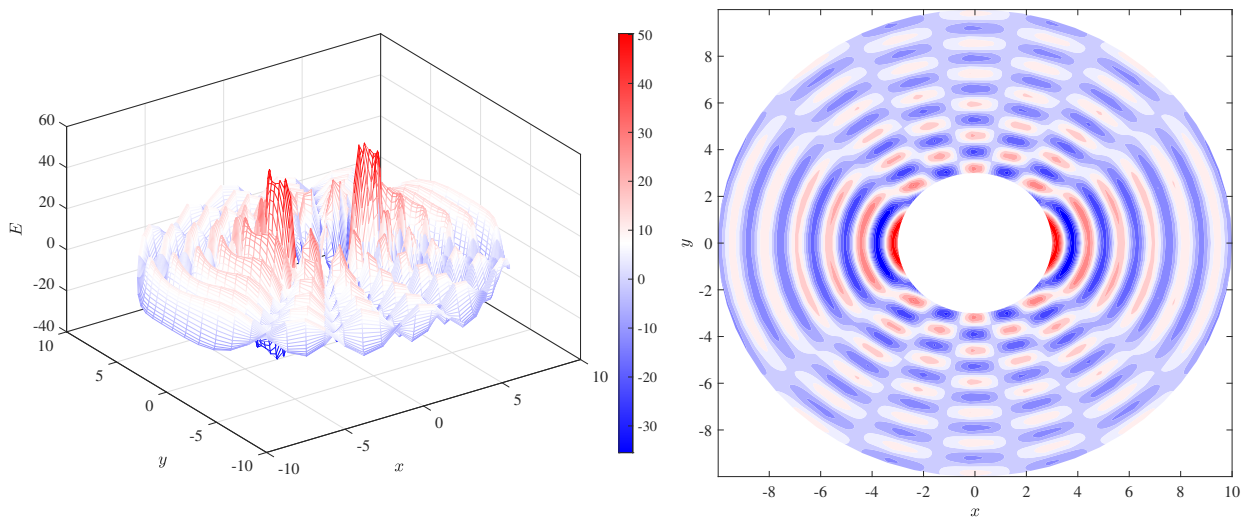


图 3.3: 两个球面波源在平面上的干涉情况

<sup>④</sup>源码见附录 ??

<sup>⑤</sup>源码见附录 ??

当点  $P$  离波源极远时, 近似有  $\frac{r_1}{r_2} = 1$  (这与近似有  $r_1 - r_2 = 0$  不同), 将距离记为  $r$ , 则振幅的位置分布为  $E_0 = \frac{1}{r} \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(k(r_1 - r_2))}$ 。若可以认为  $\frac{1}{r}$  近似不变, 则此时, 具有相同振幅大小的点, 等价于  $\cos(k(r_1 - r_2))$  具有相同的值, 也即:

$$|r_1 - r_2| = \frac{1}{k}(\theta + 2\pi n), \quad \theta \in [0, 2\pi), n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

对每个给定的  $n$ , 上述方程表示一条双曲线 (焦点为两波源), 因此上述方程构成一个双曲线族 (空间中构成旋转双曲线族), 如图 ?? (a) 中的灰色曲线所示。特别地, 令  $\theta = 0$  可以得到最大振幅对应的双曲线族, 令  $\theta = \pi$ , 得到最小振幅对应的双曲线族。

由于球面波的旋转对称性, 只需绕  $x$  轴旋转一圈, 即可得到整个空间上的振幅分布情况, 也即两波源干涉情况。振幅的位置分布是较为重要的内容, 在后文的干涉实验部分, 我们将再次讨论这个问题。

### 示例二: 两柱面波

考虑两柱面波的干涉情况, 其中柱体的高与  $x-y$  平面垂直。容易发现, 这与球面波在  $x-y$  平面的行为是相同的, 仅需修改波源的振幅衰减系数。同样地, 不妨令初相位  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , 得到合扰动:

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t + \alpha)}, \quad E_0 = \sqrt{\frac{A^2}{r_1} + \frac{B^2}{r_2} + \frac{2AB}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos(k(r_1 - r_2))} \quad (3.17)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{E_0} \left( \frac{A}{\sqrt{r_1}} \sin \alpha_A + \frac{B}{\sqrt{r_2}} \sin \alpha_B \right), \quad \cos \alpha = \frac{1}{E_0} \left( \frac{A}{\sqrt{r_1}} \cos \alpha_A + \frac{B}{\sqrt{r_2}} \cos \alpha_B \right) \quad (3.18)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin \left[ \frac{1}{E_0} \left( \frac{A}{\sqrt{r_1}} \sin \alpha_A + \frac{B}{\sqrt{r_2}} \sin \alpha_B \right) \right] & , \cos \alpha \geq 0 \\ \pi - \arcsin \left[ \frac{1}{E_0} \left( \frac{A}{\sqrt{r_1}} \sin \alpha_A + \frac{B}{\sqrt{r_2}} \sin \alpha_B \right) \right] & , \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

由于柱面波的平移对称性, 只需沿  $z$  轴进行平移, 即可得到整个空间上的干涉情况。在平面内的其它性质与球面波类似。

### 示例三: 两平面波

考虑两平面波的干涉情况, 如图 ?? (b), 平面波函数为:

$$E_A = E_{A,0} \cdot e^{i(-\omega t + k r_1 + \varepsilon_A)}, \quad \alpha_A = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_{AP} + \varepsilon_A \quad (3.20)$$

$$E_B = E_{B,0} \cdot e^{i(-\omega t + k r_2 + \varepsilon_B)}, \quad \alpha_B = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_{BP} + \varepsilon_B \quad (3.21)$$

令  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , 得到合扰动:

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t + \alpha)} \quad (3.22)$$

$$E_0 = \sqrt{E_{A,0}^2 + E_{B,0}^2 + 2 \cos(\Delta \alpha)}, \quad \Delta \alpha = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{x} + (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_B - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_A) \quad (3.23)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{E_0} [E_{A,0} \sin(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_{AP}) + E_{B,0} \sin(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_{BP})] \quad (3.24)$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{E_0} [E_{A,0} \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_{AP}) + E_{B,0} \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_{BP})] \quad (3.25)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin \left[ \frac{1}{E_0} (E_{A,0} \sin \alpha_A + E_{B,0} \sin \alpha_B) \right] & , \cos \alpha \geq 0 \\ \pi - \arcsin \left[ \frac{1}{E_0} (E_{A,0} \sin \alpha_A + E_{B,0} \sin \alpha_B) \right] & , \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

由于  $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_A$  和  $\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_B$  是定值, 而  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$  构成一个新的传播矢量, 因此合成后的波仍是平面波 (但不均匀, 振幅是位置的函数), 或者说每个等相面仍构成一个平面。

类似地, 由平面波的平移对称性, 沿  $z$  轴平移即可得全空间的合成情况。

### 3.2.2 多个同频波源的干涉

上面的结论容易推广到任意  $n$  个扰动叠加，即：

$$E = E_0 \cos(-\omega t + \alpha) = E_0 \cdot e^{i(-\omega t + \alpha)} \quad (3.27)$$

$$E_0 = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n E_{i,0} \sin \alpha_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n E_{i,0} \cos \alpha_i\right)^2} \quad (3.28)$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n E_{i,0}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2E_{i,0}E_{j,0} \cos(\alpha_i - \alpha_j)}, \quad (3.29)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{E_0} \sum_{i=1}^n E_{i,0} \sin \alpha_i, \quad \cos \alpha = \frac{1}{E_0} \sum_{i=1}^n E_{i,0} \cos \alpha_i \quad (3.30)$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{1}{E_0} \sum_{i=1}^n E_{i,0} \sin \alpha_i\right) & , \cos \alpha \geq 0 \\ \pi - \arcsin\left(\frac{1}{E_0} \sum_{i=1}^n E_{i,0} \sin \alpha_i\right) & , \cos \alpha < 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

$$I = \sum_{i=1}^n I_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2\sqrt{I_i I_j} \cos(\alpha_i - \alpha_j) \quad (3.32)$$

## § 3.3 不同频率光的干涉

## § 3.4 产生干涉的实际条件

前面我们已经提到，在叠加（或干涉）问题中，电场的振幅通常只是位置的函数，而与时间无关，其实这也是观察到干涉图样的必要条件。观察干涉图样，无非是用照片（视频等同于照片）、人眼、辐射计以及类似的传感器，它们都有一定的“曝光时间”，我们只能观察到在曝光时间内，光强或辐射强度的平均值，即：

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \cos(\Delta\alpha) dt \quad (3.33)$$

其中  $\tau$  为仪器的曝光时间。对可见光而言，其振荡周期  $T = \frac{\lambda}{v}$  在  $10^{-15}$  s 级别，因此  $\tau$  通常远大于  $T$ ，这样，我们只能观察到平均光强，而无法观察到光强的瞬时变化。如果  $\Delta\alpha$  与时间无关，或者在曝光时间内几乎保持不变，那么就能得到（观察到）稳定的干涉图样。否则恒有  $I = I_1 + I_2$ ，是平凡的叠加，观察不到干涉现象。

另外，若两波源的振动方向垂直，电场也仅是平凡的叠加，而不会产生干涉。因此，干涉现象要求两波源振动方向不能垂直。

还有一种情况是，实际中的波源（光源）大多不能产生理想的、初相位不变的单频波。

例如，对普通光源（如白炽灯），光是由光源中的原子、分子发生能级跃迁时发出的，跃迁时发出的波列都是有限长的，且初相位随机，持续时间通常短于 10 ns，在此时段内，光场振荡约百万次。对于外界的探测设备来讲，10 ns 仍是一个极短的时间，通常远远小于曝光时间。因此，即使每个波列的初相位都相同，在曝光时间内的上万个波列的平均下，积分项  $\int_0^\tau \cos(\Delta\alpha) dt$  为 0， $I = I_1 + I_2$ ，导致观察到的强度分布仅为平凡的叠加，无法观察到干涉。

上面光源发出的光的初相位是时间的函数，随着时间快速变化，无法产生干涉，称其为不相干光源。在实际中，还有一些光源，并不能达到完美的点光源，而是有一定的光源宽度，当宽度较大时，不同位置上光的叠加，会导致条纹的对比度降低（甚至为 0），称为空间不相干。另外有一些光源，发出的光具有多个波长（或者频谱较均匀），不同波长相互叠加导致相干性降低，称为时间不相干。

### §3.5 分波前干涉

波前，即波面，也称波阵面或等相面。“分波前”干涉，是依据惠更斯原理，将一个波面分为两个（或多个）波面，最终产生干涉现象。

#### 3.5.1 杨氏双缝干涉实验

杨氏双缝干涉装置如图 ?? (a)， $S$  为一狭缝， $S_1$  和  $S_2$  为一对狭缝，最右侧的屏为观察屏。由惠更斯原理，一平面波（可借助激光器和透镜产生）传播到狭缝  $S$  时，以柱面波形式出射，在遇到双缝屏时，分化为两个柱面波继续前进，从而产生干涉，并在观察屏上显现出来。与杨氏实验原理类似的有洛埃德镜实验、菲涅尔双棱镜、菲涅尔双面镜等，它们的 GIF 动图见链接 <https://www.123pan.com/s/0y0pTd-5wKj3>。

如果杨氏实验中双缝屏上的双缝对称分布，一般可认为分化的两个柱面波具有相同的初相位和振幅。装置中各参量的典型值是：

$$d = 100 \mu\text{m}, R = 5 \text{ cm}, D = 1 \text{ m}, L = 4 \text{ cm}, \quad D \gg L \gg d \quad (3.34)$$

设通过双缝屏后，两柱面波的振幅系数相同，都为  $A$ ，真空介电常量  $\varepsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ ，真空磁导率  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ ，则两波的光强度分别为

$$I_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{1,0}^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{A^2}{r_1}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{A^2}{r_2} \quad (3.35)$$

那么，接受屏上的振幅和强度分布为：

$$E_0 = A \sqrt{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{2}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)\right)}, \quad I = A^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)\right)}{\sqrt{r_1 r_2}} \right] \quad (3.36)$$

装置参数在典型值附近时，可以有近似：

$$\frac{r_1}{D} = \frac{r_2}{D} = 1, \quad r_2 - r_1 = \frac{d}{\sin\theta} = \frac{d}{\sin\theta} = \frac{xd}{D}, \quad I_1 = I_2 \quad (3.37)$$

得到近似后的振幅和强度分布如下，其中  $\Delta x = \frac{\lambda D}{b}$  称为条纹间距。

$$E_0(x) = \frac{\sqrt{2}A}{\sqrt{D}} \cdot \sqrt{1 + \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda D}x\right)} = \frac{\sqrt{2}A}{\sqrt{D}} \cdot \sqrt{1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{\Delta x}\right)} \quad (3.38)$$

$$I(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{A^2}{D} \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda D}x\right) \right] = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{A^2}{D} \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{\Delta x}\right) \right] \quad (3.39)$$

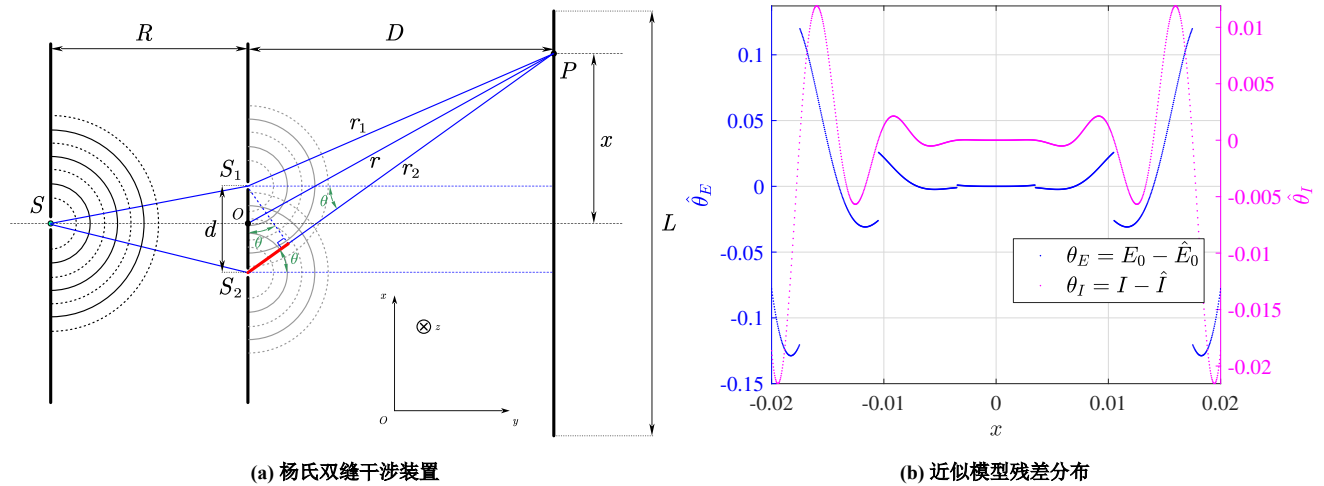


图 3.4: 杨氏双缝干涉装置与近似模型残差分布



图 ?? 展示了未近似和近似时，振幅、光强在接受屏上的分布情况，图 ?? (b) 是近似与未近似模型的残差分布<sup>⑥</sup>，其中装置参数采取典型值。计算得到一些误差参数（对横坐标均匀离散 1000 个点）如下<sup>⑦</sup>：

$$\begin{aligned}
 &\text{相对平均值误差: } \text{RME}_{E_0} = 0.0001336621, \quad \text{RME}_I = 0.0002192205 \\
 &\text{决定系数: } R_{E_0}^2 = 0.9999969495, \quad R_I^2 = 0.9999975710 \\
 &\text{调整决定系数: } R_{\text{adj}, E_0}^2 = 0.9999969464, \quad R_{\text{adj}, I}^2 = 0.9999975686 \\
 &\text{平均标准绝对残差: } \text{RS}_{E_0} = 0.0005191648, \quad \text{RS}_I = 0.0006515739 \\
 &\text{平均标准平方残差: } \text{RSS}_{E_0} = 0.0000007426, \quad \text{RSS}_I = 0.0000012850 \\
 &\text{标准面积误差: } \text{SAE}_{E_0} = 0.0005185186, \quad \text{SAE}_I = 0.0006493885
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

由图 ?? (b)，图 ?? 和几个误差参数可以看到，近似效果较好。

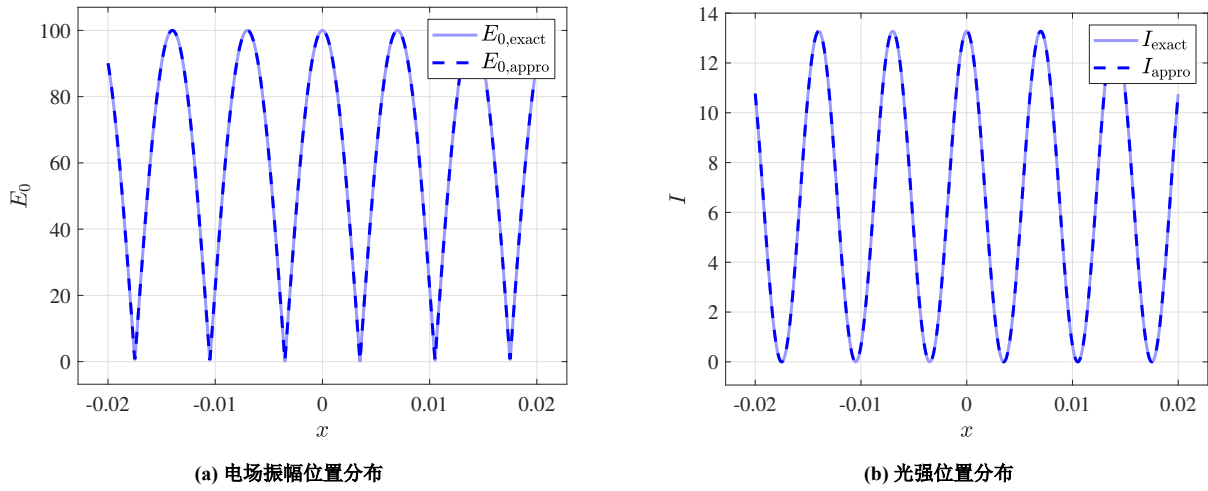


图 3.5: 近似模型与非近似模型的比较

杨氏双缝干涉的特点：

- (1) 非定域干涉：在干涉场中离双孔不太近也不太远的区域处处有干涉
- (2) 自相干：相干光波来自同一波源
- (3) 定态干涉：振幅（或强度）在干涉场中的分布仅与位置有关，与时间无关

白光光源与其他补充内容详见 [PHY C15: Double Slit Interference](#)、[University of Louisville: Double Slit Interference](#) 以及 [知乎：双缝干涉实验](#)。我们不多赘述。

### 3.5.2 杨氏实验中干涉条纹的移动

为提高分析效率，此节的推导都采用近似模型。接受屏上相邻明（暗）条纹的间距  $\Delta x$  为：

$$\Delta x = \frac{D\lambda}{d} \tag{3.41}$$

取  $\lambda = 700.0 \text{ nm}$  的红光， $\Delta x = 7 \text{ mm}$ ，可被人眼分辨。称  $\frac{\Delta x}{2}$  为条纹宽度，此时条纹宽度为  $3.5 \text{ mm}$ 。

下面依次讨论光源位置、光源宽度对干涉条纹的影响。先考虑理想点光源的微小移动引起的干涉条纹移动。当点光源位于中轴线上时，0 级明纹也在轴上，假设光源 S 向下移动距离  $|\delta_s|$ ，也即向上移动  $(-\delta_s)$ ，在近似条件 ?? 下，以及  $R \gg d$  时近似有  $R_1 - R_2 = \frac{d(-\delta_s)}{R}$ ，得到 0 级明纹向上移动的距离  $\delta_x$ ：

$$\delta_x = -\frac{D}{R}\delta_s \tag{3.42}$$

<sup>⑥</sup>图 ?? (b) 与图 ?? 源码见附录 ??

<sup>⑦</sup>这些误差参数的定义见附录 ?? 或网址 ([here](#))



负号表示两者移动方向相反。

实际光源并非是理想的点光源，而是有一定的光源宽度，虽然对干涉条纹位置影响不大，但会对条纹对比度产生明显的影响。理想点光源不在中央时，屏幕上的强度分布大小可以近似不变，仅是发生上下平移。记点光源位置为  $\delta_s$ ，在公式 ?? 中作映射  $x \rightarrow x - \delta_s$ ，并简记接受屏上的最大光强为  $I_{\max} = 2 \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} \cdot \frac{A^2}{r}$ ，简记  $x$  前的系数为  $\eta = \frac{2\pi}{\Delta x}$ ，得到新的强度分布：

$$I(x) = \frac{I_{\max}}{2} [1 + \cos(\eta(x - \delta_s))] = \frac{I_{\max}}{2} \left[ 1 + \cos\left(\eta x + \eta \frac{D}{R} \delta_s\right) \right] \quad (3.43)$$

$$= \frac{I_{\max}}{2} \left[ 1 + \cos(\eta x) \cos\left(\eta \frac{D}{R} \delta_s\right) - \sin(\eta x) \sin\left(\eta \frac{D}{R} \delta_s\right) \right], \quad \eta = \frac{2\pi}{\Delta x} \quad (3.44)$$

设光源在中央且宽度为  $b$ （即发光区域在  $[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$ ），光源均匀发光（事实上这个条件比较苛刻，现实中的激光器无法做到，需要对光线进行处理），屏幕上的强度分布  $I(x, b)$  为：

$$I(x, b) = \frac{I_{\max}}{2b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[ 1 + \cos(\eta x) \cos\left(\eta \frac{D}{R} \delta_s\right) - \sin(\eta x) \sin\left(\eta \frac{D}{R} \delta_s\right) \right] d\delta_s \quad (3.45)$$

$$= \frac{I_{\max}}{2} \left[ 1 + \frac{\sin\left(\frac{\eta D}{2R} b\right)}{\frac{\eta D}{2R} b} \cdot \cos(\eta x) \right] = \frac{I_{\max}}{2} \left[ 1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda R} b\right)}{\frac{\pi d}{\lambda R} b} \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{\Delta x}\right) \right] \quad (3.46)$$

对任意给定的光源宽度  $b$ ，光强的最大最小值为  $1 \pm \left| \frac{\sin u}{u} \right|$ ，其中  $u = \frac{\pi d}{\lambda R} b$ ，于是干涉条纹对比度  $\gamma$ ：

$$\gamma = \gamma(b) = \left| \frac{\sin u}{u} \right| = \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda R} b\right)}{\frac{\pi d}{\lambda R} b} \right| \quad (3.47)$$

强度分布  $I(x, b)$  与干涉条纹对比度  $\gamma(b)$  如图 ?? 所示<sup>®</sup>，当  $b = \frac{\lambda R}{d}$  时，对比度为 0，完全看不到干涉条纹，将其称为光源极限宽度，此时认为光源完全不相干。

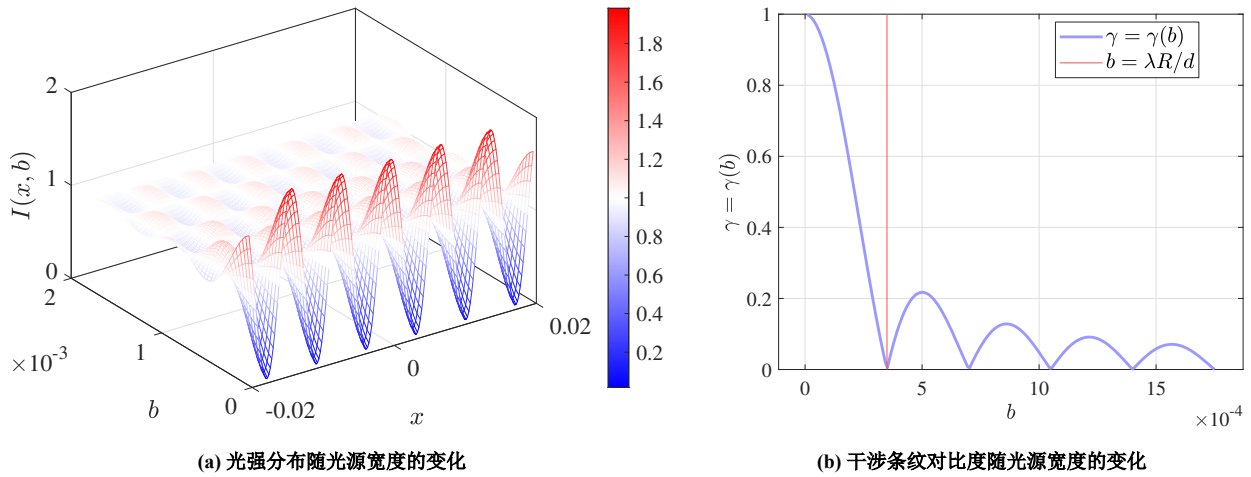


图 3.6: 光源宽度对干涉条纹的影响

<sup>®</sup>源码见附录 ??

## § 3.6 分振幅干涉

### 3.6.1 薄膜干涉

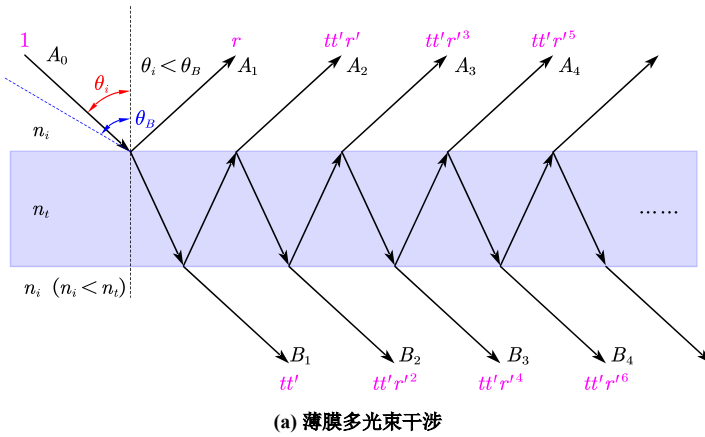
如图 ?? (a) 所示, 一入射光接近垂直入射到一薄膜时, 发生多次反射、透射, 下面讨论其能量与干涉情况。不妨设入射光相位为 0, 强度为 1, 依据公式 ??, 在图中标出各光线的强度, 它们的相位如表 ?? 所示, 其中 “ $A_s$ ” 指  $A$  光  $s$  分量的相位。需要注意,  $A_1$  与  $A_n$ ,  $k \geq 2$  的相位相差  $\pi$ , 因而叠加后强度应相减。由公式 ?? (斯托克斯倒逆关系),  $r + r' = 1$ ,  $tt' + rr' = 1$ , 令  $n \rightarrow \infty$ , 由等比数列极限可得:

表 3.1: 薄膜干涉光线的相位

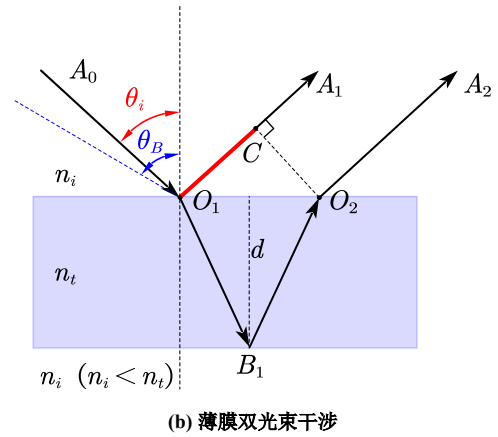
序号	$A_s$	$A_p$	$B_s$	$B_p$
0	0	0	-	-
1	$-\pi$	0	0	0
2	0	$-\pi$	0	$-2\pi$
3	0	$-3\pi$	0	$-4\pi$
4	0	$-5\pi$	0	$-6\pi$

$$\text{反射光 } A \text{ 的振幅系数: } r_A = r + (1 - r^2)(r + r^3 + r^5 + \cdots) = r + (1 - r^2) \cdot \frac{r}{1 - r^2} = r^2 + 2r \quad (3.48)$$

$$\text{透射光 } B \text{ 的振幅系数: } t_B = (1 - r^2)(1 + r^2 + r^4 + \cdots) = \frac{1 - r^2}{1 - r^2} = 1 + r \quad (3.49)$$



(a) 薄膜多光束干涉



(b) 薄膜双光束干涉

图 3.7: 薄膜干涉

同理, 上式对  $s$  波  $p$  波都成立。

当振幅反射率  $r$  较小时,  $A$  光的振幅衰减很快, 可以仅考虑双光束干涉 ( $A_1$  与  $A_2$ ), 而忽略剩余反射光带来的影响, 如图 ?? (b)。实际操作中, 也常用薄透镜将两束出射光汇聚于一点, 而不会引起附加的相位差。反射后光线  $O_1A_1$  与  $O_2A_2$  的光程差  $\Delta L$  为:

$$\Delta L = l_2 - l_1 = 2n_t \cdot \overline{O_1B_1} - n_i \cdot \overline{O_1C} = \frac{2n_t d}{\cos \theta_t} - 2n_i \sin \theta_i \tan \theta_t d = 2n_t d \cos \theta_t \quad (3.50)$$

即  $A_2$  比  $A_1$  多走了  $\Delta L$  的光程, 相当于相位增量  $-\omega \frac{\Delta L}{c}$ , 算上反射时  $A_2$  与  $A_1$  之间的相位增量  $-\pi$  (事实上  $s$  波是  $-\pi$  而  $p$  波是  $\pi$ ), 总光程差 OPD (Optical Path Difference) ( $A_2$  的减去  $A_1$  D) 和总相位增量  $\Delta\alpha$  为:

$$\text{OPD} = 2n_t d \cos \theta_t + \frac{\lambda}{2}, \quad \Delta\alpha = -\left(1 + \frac{4n_t \cos \theta_t}{\lambda} \cdot d\right) \pi = -\left[1 + \frac{4n_t \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta_i}{n_{ti}}\right)^2}}{\lambda} \cdot d\right] \pi \quad (3.51)$$

随参数  $\theta_i$ 、 $d$  的改变, 不同位置上可以得到不同相位, 从而产生干涉条纹。

### 3.6.2 等倾干涉

等倾干涉实验装置如图 ?? 所示，其干涉条纹特征为：

- (1) 亮条纹： $\Delta L = k\lambda \implies \cos \theta_t = \frac{\lambda}{2n_t d} \cdot (k - \frac{1}{2})$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$
- (2) 暗条纹： $\Delta L = (k + \frac{1}{2})\lambda \implies \cos \theta_t = \frac{\lambda}{2n_t d} \cdot k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$
- (3)  $r$  较小时，等倾双光束强度近似相等，干涉条纹对比度接近 1
- (4) 称中心暗条纹为 0 级暗纹，往外依次是 1 级亮纹、1 级暗纹、2 级亮纹、2 级暗纹……
- (5) 等倾条纹 **内疏外密**

使用扩展光源（有宽度光源）时，条纹对比度不受影响，但条纹的强度增大，干涉图样更加明亮。

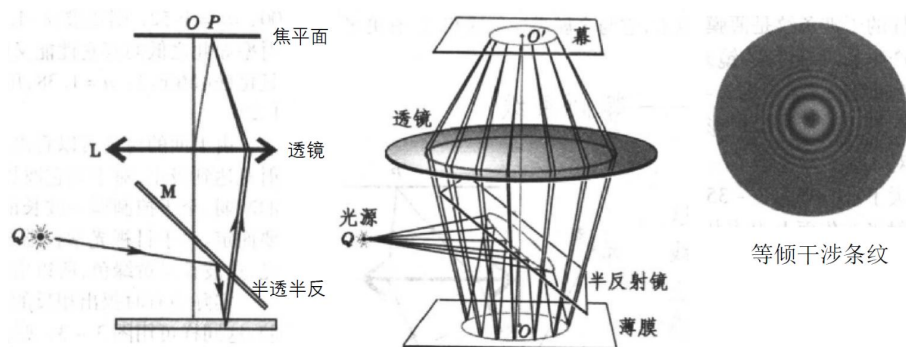


图 3.8: 等倾干涉实验装置

等倾干涉实验动图见链接 <https://www.123pan.com/s/0y0pTd-MgKj3>。

### 3.6.3 等厚干涉

等厚干涉，也称等厚条纹干涉，是指由薄膜厚度不均匀而引起的干涉现象，产生的条纹是等厚位置的条纹，例如劈尖干涉、牛顿环等。

## §3.7 迈克尔逊干涉与曾德尔干涉

## §3.8 光场的空间相干性与时间相干性

## §3.9 多光束干涉

## §3.10 激光

## 附录 A 波理论

光的真实本性是光学的全部讨论的中心问题，在本书中我们从头到尾都得对待这个问题。“光究竟是一种波动现象还是一种粒子现象？”这个似乎干脆利索的问题，远比它初看之下复杂得多。

因为对光的经典讨论和量子力学讨论都要用到波的数学描述，本章要为这两种表述所需要的东西打好基础。下面叙说的想法将用于一切物理波，从一杯茶的表面张力波，到从某个遥远的星系照到我们的光脉冲。

### A.1 一维波

#### A.1.1 $n$ 维波的概念

一维波指的是在一维空间中传播的波，或者可以看作在一维空间中传播的波。例如一束光在空间中传播，沿其传播方向建立  $x$  轴，则有  $E = E_0 e^{kx - \omega t}$  (具有正负)，这束光便可视为一维波。

一维波函数的最一般的形式：

$$\psi(x, t) = f(x - vt) = g(kx - \omega t) \quad (52)$$

具体而言，对于给定的波形 (波的形状)，我们只需令  $t = 0$ ，拍一张“照片” (例如  $\psi(x) = \frac{3}{10x^2 + 1}$ )，得到  $\psi(x, 0) = f(x)$ ，然后将  $f(x)$  中的  $x$  换为  $x - vt$ ，即可得到一个以速度  $v$  (可为负) 向  $x$  轴正方向运动的波  $\psi(x, t) = f(x - vt) = g(kx - \omega t)$ 。

绳索的上下振动是在第二个维度上的，但振动导出的波仍是一维波。

#### A.1.2 波动方程

线性、各向同性、无损耗介质中的波动方程 (也称波动微分方程) 为：

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (53)$$

如果代表一个波的函数  $\psi$  是这个方程的解，它将同时是  $(x - vt)$  的函数 (即  $kx - \omega t$  的函数)，它还是一个可以同时  $x$  和  $t$  以非平庸方式求二次微商的函数。特别地，我们有结论： $\psi$  是一维波函数  $\iff \psi$  是  $(x - vt)$  的二次可微函数  $\iff \psi$  是  $(kx - \omega t)$  的二次可微函数。

### A.2 谐波

#### A.2.1 相位和相速度

考虑任何一个一维波函数  $\psi(x, t) = A \cos(\phi(x, t)) = A \cos(kx - \omega t + \phi_0)$ ，其中  $\phi = kx - \omega t + \phi_0$  称为相位， $\phi_0$  称为初相 (也常用  $\varepsilon$  表示)。只要相位中的  $kx$  与  $\omega t$  符号相反，即  $(kx - \omega t)$  或  $(\omega t - kx)$ ，则波沿  $x$  轴正方向传播，否则沿  $x$  轴负方向。

#### A.2.2 谐波的概念

谐波，指简谐波、正弦波，其轮廓图是正弦曲线，是最简单的波形。在后续的傅里叶变换一节我们可以看到，任何波形都可以由谐波叠加合成，因此谐波具有特殊的意义。考虑如下波形：

$$\psi(x, t)|_{t=0} = \psi(x) = A \sin kx = f(x) \quad (54)$$

其中  $k > 0$  是一个常数，称为传播数（空间角频率），且  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ （ $\lambda$  为波长）， $A$  称为波的振幅。

谐波函数有多种等价形式，其中最常见的是：

$$\psi(x, t) = A \sin(kx \mp \omega t), \quad \psi(x, t) = A \sin(\kappa(x \mp vt)) \quad (55)$$

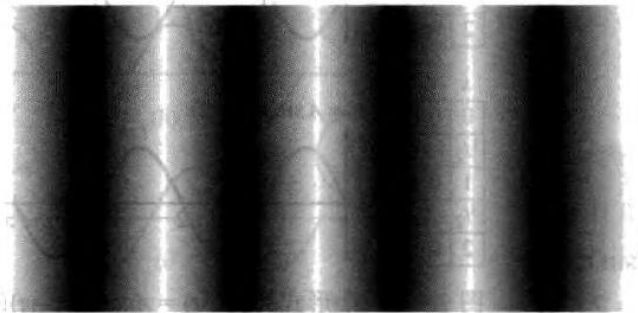
在本书中，如无特殊需求，我们都采用前者，也即  $\psi = A \sin(kx \mp \omega t)$ ，有时也采用  $\psi = A \cos(kx \mp \omega t)$ 。当然，三维谐波（在三维空间中传播的谐波）可写为：

$$\psi = \psi_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \mp \omega t) \quad (56)$$

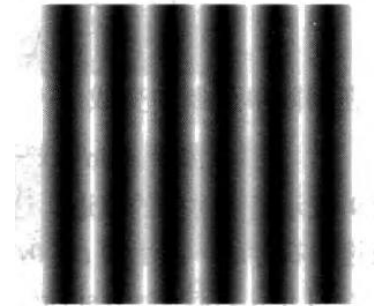
### A.2.3 空间频率 $\kappa$ 与空间角频率 $k$

光学中常用的长度单位是纳米 nm、微米  $\mu\text{m}$  和埃米  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ 。本文规定，若无特殊情况，一般用  $\lambda$  表示波长， $\tau$  或  $T$  表示周期， $\nu = \frac{1}{\tau}$  表示时间频率， $\omega = 2\pi\nu$  表示时间角频率，空间频率（波数） $\kappa = \frac{1}{\lambda}$ ，空间角频率（传播数） $k = 2\pi\kappa$ 。

光学信息可以以一种周期性方式散布在空间里，很像一个波的截图，我们可以将其视作静止（ $v = 0$ ）的波，并用空间频率  $\kappa$  来描述它们。



(a) 空间频率较低的正弦亮度分布



(b) 空间频率较高的正弦亮度分布

图 A.9: 正弦亮度分布

## A.3 复数表示

在之后的学习会看到，用余弦或正弦函数描述波函数会带来很多不便，而复数表示在大多时候显得尤为有效，因此引入复数表示是极有必要的。在本书中，为表示某个变量（物理量）是复数，我们在其上加一波浪号，例如  $\tilde{z}$  或  $\tilde{E}$ 。

习惯上，我们用复数的实部来描述谐波，例如将  $\psi = A \cos(kx - \omega t + \varepsilon)$  写为  $\psi = \text{Re}[Ae^{i(kx - \omega t + \varepsilon)}]$ 。为了方便，常常把  $\text{Re}$  省略不写，即：

$$\psi(x, t) = Ae^{i\theta} = Ae^{i(kx - \omega t + \varepsilon)} \quad (57)$$

在后文，我们也采用此简写。需要时刻谨记，真实的波是实部，虚部没有物理意义。

另外，虽然复数表示在物理中十分常见，但应用它时需要时刻小心，只有运算限于加法、减法、乘除实数、对实变量进行微分和积分时，才能恢复实部。乘法运算（包括数乘、点乘和叉乘）必须仅与实数进行，否则会得到错误结论<sup>⑨</sup>。例如  $\text{Re} \tilde{z}_1 \cdot \text{Re} \tilde{z}_2 \neq \text{Re}(\tilde{z}_1 \cdot \tilde{z}_2)$ ， $\text{Re} \tilde{\mathbf{A}}_1 \cdot \text{Re} \tilde{\mathbf{A}}_2 \neq \text{Re}(\tilde{\mathbf{A}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_2)$ 。

<sup>⑨</sup>这里有一个疑问，在 ?? 节（全反射时的相位变化），推导反射光相位变化时，我们利用了  $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_i \cdot \lambda e^{i\delta}$  所带来的相位变化，如何保证或说明这样做能得到正确的结果？

## A.4 相矢量

相矢量（也称复振幅、旋转矢量）是将谐波  $\psi = Ae^{i(kx - \omega t + \varepsilon)}$  中的位置变量  $x$  或时间变量  $t$  分离出来，以得到复平面上的矢量，常用于计算振幅<sup>⑩</sup>等。

### A.4.1 分离 $x$ 并随 $t$ 旋转

考虑谐波  $\psi = \psi_0 e^{i(kx - \omega t + \varepsilon)}$ ，对于任意给定的  $x$ ，令  $\alpha = kx + \varepsilon$ ，谐波可写为  $\psi = \psi_0 e^{i(-\omega t + \alpha)} = (\psi_0 e^{i\alpha}) \cdot e^{i(-\omega t)}$  是  $t$  的函数，则此时的相矢量定义为  $\psi_0 \angle \alpha = \psi_0 e^{i\alpha}$ ，也常记为  $\psi_0 \angle \alpha$ 。

相矢量是复平面中的一个矢量（即一个复数）， $\psi_0$  表示其模长， $\alpha$  表示其幅角，真实的波是它在实轴上的投影。对于  $\psi = \psi_0 e^{i(-\omega t + \alpha)}$ ，随着  $t$  增大，波的相位减小，代表相矢量在复平面中顺时针旋转， $\omega t$  即为沿顺时针旋转的角度。对于  $\psi = \psi_0 e^{i(\omega t + \alpha)}$ （也即沿  $x$  轴负方向传播的波），相矢量在复平面中逆时针旋转， $\omega t$  即为沿逆时针转过的角度。也就是说，将  $x$ （以及初相  $\varepsilon$ ）分离为相矢量后，我们可以方便的研究  $x$  这一点上，波关于时间  $t$  的变化情况。

当然，对于波的正弦表示  $\psi = A \sin(kx - \omega t + \varepsilon)$ ，也可令  $\alpha = kx + \varepsilon$ ，得到相矢量  $\psi_0 \angle \alpha = \psi_0 e^{i\alpha}$ ，只不过此时真实的波是它在虚轴上的投影。

例如，振动  $E_1 = 5 \cos(-\omega t)$ ， $E_2 = 10 \sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$  的相矢量分别为  $5 \angle 0$ ， $10 \angle \frac{\pi}{3}$ ，前者顺时针旋转，向实轴投影，后者逆时针旋转，向虚轴投影。

### A.4.2 分离 $t$ 并随 $x$ 旋转

类似地，考虑谐波  $\psi = \psi_0 e^{i(kx \pm \omega t + \varepsilon)}$ 。对于任意给定的  $t$ ，令  $\alpha = \pm \omega t + \varepsilon$ ，谐波可写为  $\psi = \psi_0 e^{i(kx + \alpha)} = (\psi_0 e^{i\alpha}) \cdot e^{i(kx)}$  是  $x$  的函数，则此时的相矢量定义为  $\psi_0 \angle \alpha = \psi_0 e^{i\alpha}$ 。将  $t$  分离为相矢量后，我们可以方便的研究  $t$  这一时刻，波关于位置  $x$  的变化情况。

习惯上，我们只考虑  $\psi_0 e^{i(kx + \alpha)}$ ，而不考虑  $\psi_0 e^{i(-kx + \alpha)}$  的情况，后者可以通过三角变换，等价的改变初相  $\phi_0$  的值转化为前者。

例如，对振动  $E_3 = 5 \cos(kx)$ ， $E_4 = 10 \sin(kx + \frac{\pi}{2})$ ，其相矢量分别为  $5 \angle 0$ ， $10 \angle \frac{\pi}{2}$ ，两者都逆时针旋转，前者向实轴投影，后者向虚轴投影。

## A.5 三维波动方程

在介绍波动方程之前，先给出本文默认的一些符号规定，以及一些运算符的定义。

### A.5.1 内积、叉乘与矩阵乘法

在本文，一切矢量运算皆使用矩阵运算。并且，若无特殊说明，矢量都等价于列向量，也即下面两种写法等价：

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (58)$$

<sup>⑩</sup>我们将在 3.1 节讨论波的叠加时使用相矢量，并讨论相矢量相加时所代表的意义

用点乘符号 ‘ $\cdot$ ’ 表示两向量的内积，例如  $\mathbf{A}_1 = (A_{1,x}, A_{2,x}, A_{3,x})$ ,  $\mathbf{A}_2 = (A_{1,y}, A_{2,y}, A_{3,y})$ , 则:

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = (A_{1,x}, A_{2,x}, A_{3,x}) \cdot (A_{1,y}, A_{2,y}, A_{3,y}) = \begin{bmatrix} A_{1,x} \\ A_{2,x} \\ A_{3,x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{1,y} \\ A_{2,y} \\ A_{3,y} \end{bmatrix} = A_{1,x}A_{1,y} + A_{2,x}A_{2,y} + A_{3,x}A_{3,y} \quad (59)$$

在后文，点乘符号 ‘ $\cdot$ ’ 皆表示内积，叉乘符号 ‘ $\times$ ’ 表示外积，矩阵乘法不用特殊符号，如有必要会使用 ‘ $\odot$ ’ 来表示矩阵乘法。

### A.5.2 微分算子

下面依次给出微分算子  $\nabla$ 、拉普拉斯算子  $\Delta$  和矢量微分的定义。

假设  $f = f(\mathbf{x})$  是三维空间中的标量函数， $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) = (A_x(\mathbf{x}), A_y(\mathbf{x}), A_z(\mathbf{x}))$  是三维空间中的矢量（数学上称为自变量为 3 维的 3 维向量值函数），设  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) (B_1(x, y, z), B_1(x, y, z), B_1(x, y, z))$  是三个矢量构成的张量（可视为  $3 \times 3$  矩阵），如下：

$$f = f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) \quad (60)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} A_x(\mathbf{x}) \\ A_y(\mathbf{x}) \\ A_z(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x(x, y, z) \\ A_y(x, y, z) \\ A_z(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{B}_2(\mathbf{x}) \\ \mathbf{B}_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1,x}(\mathbf{x}) & B_{1,y}(\mathbf{x}) & B_{1,z}(\mathbf{x}) \\ B_{2,x}(\mathbf{x}) & B_{2,y}(\mathbf{x}) & B_{2,z}(\mathbf{x}) \\ B_{3,x}(\mathbf{x}) & B_{3,y}(\mathbf{x}) & B_{3,z}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (62)$$

定义微分算子  $\nabla$ :

$$\begin{aligned} \text{微分算子: } \nabla &= \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \\ \text{梯度: } \nabla f &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] \\ \text{广义梯度: } \nabla \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \nabla A_x \\ \nabla A_y \\ \nabla A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \text{旋度: } \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \text{广义旋度: } \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot \mathbf{B}_1 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_2 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_{1,x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{1,y}}{\partial y} + \frac{\partial B_{1,z}}{\partial z} \\ \frac{\partial B_{2,x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{2,y}}{\partial y} + \frac{\partial B_{2,z}}{\partial z} \\ \frac{\partial B_{3,x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{3,y}}{\partial y} + \frac{\partial B_{3,z}}{\partial z} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \end{aligned} \quad (64)$$

### A.5.3 拉普拉斯算子

并以此定义拉普拉斯算子  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} \text{拉普拉斯算子: } \Delta &= \nabla \cdot (\nabla) = \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \text{拉普拉斯运算: } \Delta f &= \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (65)$$

广义拉普运算:  $\Delta \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A}) = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \nabla A_x \\ \nabla A_y \\ \nabla A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot (\nabla A_x) \\ \nabla \cdot (\nabla A_y) \\ \nabla \cdot (\nabla A_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}_{3 \times 1}$  (66)

也可理解为:  $\Delta \mathbf{A} = \Delta \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}_{3 \times 1}$

例如, 对于三维空间中的矢量  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}) = (E_x(\mathbf{x}), E_y(\mathbf{x}), E_z(\mathbf{x}))$ , 我们有:

$$\Delta \mathbf{E} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{E}) = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \nabla E_x \\ \nabla E_y \\ \nabla E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot (\nabla E_x) \\ \nabla \cdot (\nabla E_y) \\ \nabla \cdot (\nabla E_z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (67)$$

#### A.5.4 矢量微分

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} \end{bmatrix} \quad (68)$$

#### A.5.5 波动方程

定义好上述工具后, 可以给出三维空间中的波动方程:

$$\Delta \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (69)$$

例如, 对矢量  $\mathbf{E}$ , 上面方程表示:

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \iff \begin{bmatrix} \Delta E_x \\ \Delta E_y \\ \Delta E_z \end{bmatrix} = \frac{1}{v^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \Delta E_x = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \Delta E_y = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \Delta E_z = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{cases} \quad (70)$$

上面几种表示是等价的。

### A.6 平面波、柱面波与球面波

平面波、柱面波与球面波是最具有实际意义的波形, 因为它们在最容易实现<sup>①</sup>。

#### A.6.1 平面波

三维空间中的平面波<sup>②</sup>:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A} \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \mp \omega t + \varepsilon)} \quad (71)$$

<sup>①</sup>其推导详见参考文献[?]的 Page 47-56, 以及 知乎: 电磁波的平面波、柱面波和球面波的表达式与推导 (<https://zhuanlan.zhihu.com/p/693746762>), 这里不多赘述

<sup>②</sup>平面波概念的引入详见参考文献[?]的 Page 30, 这里不再赘述



每个等相面由下式给出：

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \text{const} \quad (72)$$

此扰动的每个等相面（也称波阵面）都是一个平面，且波矢  $\mathbf{k}$  垂直于等相面， $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$  时沿  $\mathbf{k}$  传播， $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t)$  时沿  $\mathbf{k}$  的反方向传播。在一切三维波中，只有平面波（可以是谐波也可以是非谐波）穿过空间传播时其截面轮廓（等相面）保持不变。

有时， $\mathbf{A}$  是  $\mathbf{x}$  的函数，称为非均匀波（例如 2.5 节介绍的隐失波）。

### A.6.2 球面波

在球坐标系  $(r, \phi, \theta)$  下，可以解得球面波方程：

$$\psi = \psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(r) \cdot e^{i(kr \mp \omega t + \varepsilon)} = \frac{\mathbf{A}}{r} \cdot e^{i(kr \mp \omega t + \varepsilon)} \quad (73)$$

每个波阵面（等相面）由下式给出：

$$kr = \text{const} \quad (74)$$

注意，任何球面波的振幅  $\psi_0$  都是  $r$  的函数，因为球面波的振幅随着距离的增加而减小（能量守恒的必然结果）。当它从原点向外传播时，波阵面是逐渐扩张为更大的圆。

### A.6.3 柱面波

在柱坐标系  $(r, \theta, z)$  下，可以解得柱面波方程：

$$\psi = \psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(r) \cdot e^{i(kr \mp \omega t + \varepsilon)} = \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{r}} \cdot e^{i(kr \mp \omega t + \varepsilon)} \quad (75)$$

每个等相面由下式给出：

$$kr = \text{const} \quad (76)$$

平面波投射到具有细长狭缝的不透明屏幕上，就会通过此狭缝发出与柱面波相似的扰动，目前大多采用此方法产生柱面光波。

## 附录 B Matlab 代码

### B.1 图 ?? 源码

```

1  %%%%%%%%% 空气入射玻璃 %%%%%%%%%
2  global n_i n_t
3  n_i = 1;
4  n_t = 1.5;
5
6  theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
7  r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
8  r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
9  t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
10 t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*
    cos(theta_i - theta_t) );
11 theta_B = atan(n_t/n_i);
12 theta_C = asin(n_t/n_i);
13
14 theta_array = linspace(-0.1, pi/2, 101);
15 Y = [
16     r_s(theta_array, theta_t(theta_array))
17     r_p(theta_array, theta_t(theta_array))
18     t_s(theta_array, theta_t(theta_array))
19     t_p(theta_array, theta_t(theta_array))
20 ];
21 stc = MyPlot(theta_array, Y);
22 xline(theta_B, 'b')
23 yline(0)
24 xlim([0, pi/2])
25 ylim([-1, 1])
26 stc.legend.String = ["$r_s$"; "$r_p$"; "$t_s$"; "$t_p$"; "$\theta_i = \theta_B$"];
27 stc.legend.Interpreter = "latex";
28 stc.legend.FontSize = 14;
29 stc.legend.Location = "southwest";
30 stc.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
31 stc.axes.Title.Interpreter = "latex";
32 stc.label.x.String = '$\theta_i$';
33 stc.label.y.String = '$r$';
34 stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
35 stc.plot.plot_3.Color = 'b';
36 stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
37 stc.plot.plot_4.Color = [1 0 1];
38 %MyExport_pdf
39
40 %%%%%%%%% 玻璃入射空气 %%%%%%%%%
41 n_i = 1.5;
42 n_t = 1;
43

```

```

44 theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
45 r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
46 r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
47 t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
48 t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*
    cos(theta_i - theta_t) );
49 theta_B = atan(n_t/n_i);
50 theta_C = asin(n_t/n_i);
51
52
53 theta_array = linspace(0, theta_C, 101);
54 Y = [
55     r_s(theta_array, theta_t(theta_array))
56     r_p(theta_array, theta_t(theta_array))
57     t_s(theta_array, theta_t(theta_array))
58     t_p(theta_array, theta_t(theta_array))
59 ];
60 stc = MyPlot(theta_array, Y);
61 xline(theta_B, 'b')
62 xline(theta_C, 'r')
63 yline(0)
64 xlim([0, pi/2])
65 ylim([-0.5, 3])
66 stc.legend.String = ["$r_s$"; "$r_p$"; "$t_s$"; "$t_p$"; "$\theta_i = \theta_B$"; "$\theta_i = \theta_C$"];
67 stc.legend.Interpreter = "latex";
68 stc.axes.Title.String = '$n_i = 1.5 > n_t = 1$';
69 stc.axes.Title.Interpreter = "latex";
70 stc.label.x.String = '$\theta_i$';
71 stc.label.y.String = '$r$';
72 stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
73 stc.plot.plot_3.Color = 'b';
74 stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
75 stc.plot.plot_4.Color = [1 0 1];
76 %MyExport_pdf

```

## B.2 图 ?? 源码

```

1 global n_i n_t
2 %%%%%%%%% 反射折射光振幅与能量变化 (空气入射玻璃) %%%%%%%%%
3 MyColor = num2cell( ...
4     [
5     "#ff8080" "#ff0000" "#990000" "#190000"
6     "#80ff80" "#00ff00" "#009900" "#001900"
7     "#8080ff" "#0000ff" "#000099" "#000019"
8     "#ff80ff" "#ff00ff" "#990099" "#190019"
9     "#ffff80" "#ffff00" "#999900" "#191900"
10    "#80ffff" "#00ffff" "#009999" "#001919"

```

```

11 "##### "##### "##### "#####191919"
12     ]...
13 );
14 n_i = 1;
15 n_t = 1.5;
16
17 theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
18 r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
19 r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
20 t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
21 t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*
    cos(theta_i - theta_t) );
22 theta_B = atan(n_t/n_i);
23 theta_C = asin(n_t/n_i);
24
25 theta_array_2 = linspace(-0.1, pi/2, 101);
26 Y = [
27     r_s(theta_array_2, theta_t(theta_array_2))
28     r_p(theta_array_2, theta_t(theta_array_2))
29     t_s(theta_array_2, theta_t(theta_array_2))
30     t_p(theta_array_2, theta_t(theta_array_2))
31     r_s(theta_array_2, theta_t(theta_array_2)).^2
32     r_p(theta_array_2, theta_t(theta_array_2)).^2
33     0.5 * ( r_s(theta_array_2, theta_t(theta_array_2)).^2 + r_p(theta_array_2, theta_t
    (theta_array_2)).^2 )
34 ];
35
36 stc = MyPlot(theta_array_2, Y);
37 yline(0, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 1)
38 xline(theta_B, 'Color', [0 1 1], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.7)
39 xlim([0, pi/2])
40 ylim([-1, 1])
41 stc.legend.Interpreter = 'latex';
42 stc.legend.FontSize = 15;
43 stc.legend.Location = 'southwest';
44 stc.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
45 stc.axes.Title.Interpreter = 'latex';
46 stc.label.x.String = '$\theta_i$';
47 stc.label.y.String = '$y$';
48 %stc.legend.String = ['$y=r_s$'; '$y=r_p$'; '$y=t_s$'; '$y=t_p$'; '$y=R_s$'; '$y=R_p$
    '; '$y=R$'; '$y=0$'; '$\theta_i = \theta_B$'];
49 stc.legend.Visible = 'off';
50
51 stc.plot.plot_2.LineStyle = "-";
52 stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
53 stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
54 stc.plot.plot_5.LineStyle = "--";
55 %stc.plot.plot_5.LineWidth = 0.7;
56 stc.plot.plot_6.LineStyle = "--";

```

```

57 %stc.plot.plot_6.LineWidth = 0.7;
58 stc.plot.plot_7.LineStyle = "-";
59
60 stc.plot.plot_1.Color = MyColor{4, 2};
61 stc.plot.plot_3.Color = MyColor{4, 1};
62 stc.plot.plot_5.Color = MyColor{4, 3};
63 stc.plot.plot_2.Color = MyColor{3, 2};
64 stc.plot.plot_4.Color = MyColor{3, 1};
65 stc.plot.plot_6.Color = MyColor{3, 3};
66 stc.plot.plot_7.Color = [1 0 0];
67 %MyExport_pdf
68 %MyExport_pdf_docked
69 %MyExport_svg_docked
70
71
72 %%%%%%%%% 反射折射光振幅与能量变化 (玻璃入射空气) %%%%%%%%%
73 n_i = 1.5;
74 n_t = 1;
75
76 theta_t = @(theta_i) asin(n_i/n_t*sin(theta_i));
77 r_s = @(theta_i, theta_t) - sin(theta_i - theta_t)./sin(theta_i + theta_t);
78 r_p = @(theta_i, theta_t) + tan(theta_i - theta_t)./tan(theta_i + theta_t);
79 t_s = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i)./sin(theta_i + theta_t);
80 t_p = @(theta_i, theta_t) 2*sin(theta_t).*cos(theta_i) ./ ( sin(theta_i + theta_t).*
    cos(theta_i - theta_t) );
81 theta_B = atan(n_t/n_i);
82 theta_C = asin(n_t/n_i);
83
84 theta_array_2 = linspace(-0.1, theta_C, 250);
85 theta_array_all = [linspace(-0.1, 0.65, 100), linspace(0.65, 0.74, 50), linspace(0.74,
    pi/2, 100)];
86
87 X = [
88     theta_array_all
89     theta_array_all
90     theta_array_all
91     theta_array_all
92     theta_array_all
93     theta_array_all
94     theta_array_all
95 ];
96
97 Y = [
98     (theta_array_all < theta_C).*r_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)) + (
99     theta_array_all > theta_C).*abs(r_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)))
100     (theta_array_all < theta_C).*r_p(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)) + (
101     theta_array_all > theta_C).*abs(r_p(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)))
102     abs( t_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)) )
103     abs( t_p(theta_array_all, theta_t(theta_array_all)) )

```

```

102     abs(r_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all))).^2
103     abs(r_p(theta_array_all, theta_t(theta_array_all))).^2
104     0.5 * ( abs(r_s(theta_array_all, theta_t(theta_array_all))).^2 + abs(r_p(
theta_array_all, theta_t(theta_array_all))).^2    )
105 ];
106
107 stc = MyPlot(X, Y);
108 yline(0, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 1)
109 xline(theta_B, 'Color', [0 1 1], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.7)
110 xline(theta_C, 'Color', [0 1 0], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.7)
111 xlim([0, pi/2])
112 ylim([-0.5, 3])
113     stc.leg.Interpreter = 'latex';
114     stc.leg.FontSize = 14;
115     stc.leg.Location = 'northwestoutside';
116     stc.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
117     stc.axes.Title.Interpreter = "latex";
118     stc.label.x.String = '$\theta_i$';
119     stc.label.y.String = '$y$';
120     stc.leg.String = ["$y=r_s$"; "$y=r_p$"; "$y=t_s$"; "$y=t_p$"; "$y=R_s$"; "$y=R_p$";
"$y=R$"; "$y=0$"; "$\theta_i = \theta_B$"; "$\theta_i = \theta_C$"];
121
122     stc.plot.plot_2.LineStyle = "-";
123     stc.plot.plot_3.LineStyle = ":";
124     stc.plot.plot_4.LineStyle = ":";
125     stc.plot.plot_5.LineStyle = "--";
126     %stc.plot.plot_5.LineWidth = 0.7;
127     stc.plot.plot_6.LineStyle = "--";
128     %stc.plot.plot_6.LineWidth = 0.7;
129     stc.plot.plot_7.LineStyle = "-";
130
131     stc.plot.plot_1.Color = MyColor{4, 2};
132     stc.plot.plot_3.Color = MyColor{4, 1};
133     stc.plot.plot_5.Color = MyColor{4, 3};
134     stc.plot.plot_2.Color = MyColor{3, 2};
135     stc.plot.plot_4.Color = MyColor{3, 1};
136     stc.plot.plot_6.Color = MyColor{3, 3};
137     stc.plot.plot_7.Color = [1 0 0];
138 %MyExport_pdf
139 %MyExport_pdf_docked
140 %MyExport_svg_docked

```

### B.3 图 ?? 源码

```

1 global n_i n_t n_ti theta_B theta_C
2
3 %%%%%%%%% 反射光相位增量 (空气入射玻璃) %%%%%%%%%
4 n_i = 1;

```

```

5  n_t = 1.5;
6  n_ti = n_t/n_i;
7  theta_B = atan(n_ti);
8
9  theta_array_2 = linspace(0, pi/2-0.001, 200);
10
11 delta_r_s = @(t) -pi ;
12 delta_r_p = @(t) (-pi).*(t > theta_B).*( t < pi/2);
13
14 delta_r_s_kongqi = delta_r_s(theta_array_2);
15 delta_r_p_kongqi = delta_r_p(theta_array_2);
16
17 Y = [
18     zeros(size(theta_array_2)) - pi;
19     delta_r_p_kongqi;
20 ];
21
22 stc1 = MyPlot(theta_array_2, Y([1 2], :));
23 xlim([0, pi/2])
24 yline(0, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
25 xline(theta_B, 'Color', [0 1 1], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
26 xline(pi/2, '--');
27 stc1.plot.plot_2.LineStyle = '--';
28 stc1.legend.String = ["$\delta = \delta_{r,s}$"; "$\delta = \delta_{r,p}$"; "$\delta = 0$";
29     "$\theta_i = \theta_B$"];
30 stc1.label.x.String = '$\theta_i$';
31 stc1.label.y.String = '$\delta$';
32 stc1.axes.Title.Interpreter = 'latex';
33 stc1.axes.Title.String = '$n_i = 1 < n_t = 1.5$';
34 %MyExport_pdf
35 %%%%%%%%% 反射光相位增量 (玻璃入射空气) %%%%%%%%%
36 n_i = 1.5;
37 n_t = 1;
38 n_ti = n_t/n_i;
39 theta_B = atan(n_ti);
40 theta_C = asin(n_ti);
41
42
43 delta_r_s = @(t) (t>theta_C).*2.*atan( -(sqrt(sin(t).^2 - n_ti^2))./cos(t) ) ;
44 delta_r_p = @(t) ...
45     (t<theta_B).*(-pi) ...
46     + (theta_B<t).*(t<theta_C).*0 ...
47     + (theta_C<t).*( -2*atan( (sqrt(sin(t).^2 - n_ti^2))./(n_ti^2.*cos(t)) ) );
48
49 Y = [
50     zeros(size(theta_array_2)) - pi;
51     delta_r_p_kongqi;
52     delta_r_s(theta_array_2);

```

```

53     delta_r_p(theta_array_2);
54 ];
55
56
57 stc2 = MyPlot(theta_array_2, Y([3 4], :));
58 xlim([0, pi/2])
59 yline(0, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
60 xline(theta_B, 'Color', [0 1 1], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
61 xline(theta_C, 'Color', [0 1 0], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
62 xline(pi/2, '--');
63 stc2.plot.plot_2.LineStyle = '--';
64 stc2.legend.String = ["$\delta = \delta_{r,s}$"; "$\delta = \delta_{r,p}$"; "$\delta = 0$";
65     "$\theta_i = \theta_B$"; "$\theta_i = \theta_C$"];
66 stc2.legend.Location = 'northeast';
67 stc2.label.x.String = '$\theta_i$';
68 stc2.label.y.String = '$\delta$';
69 stc2.axes.Title.Interpreter = 'latex';
70 stc2.axes.Title.String = '$n_i = 1.5 > n_t = 1$';
71 %MyExport_pdf

```

## B.4 图 ?? 源码

```

1  %%%%%%%%% 隐失波的穿透深度和 GH Shift (玻璃入射空气) %%%%%%%%%
2  global lambda n_i n_t
3  n_i = 1.5;
4  n_t = 1;
5  lambda = 550 * 10^(-9); % 550.0 nm 的绿色光
6  delta = @(t) 1 ./ ( 2*pi*sqrt( sin(t).^2 - n_ti^2 )/lambda );
7  Delta_x = @(t) 2*delta(t).*tan(t);
8
9  theta_array_1 = linspace(theta_C, pi/2, 200);
10 theta_array_2 = linspace(theta_C, pi/2-0.05, 200);
11
12
13 X = [
14     theta_array_1
15     theta_array_2
16 ];
17 Y = [
18     delta(theta_array_1)/lambda
19     Delta_x(theta_array_2)/lambda
20 ];
21
22 stc = MyPlot(X, Y);
23 xlim([theta_C - 0.05, pi/2+0.02])
24 yline(1, 'black', 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
25 xline(theta_C, 'Color', [0 1 0], 'Alpha', 1, 'LineWidth', 0.5)
26 stc.legend.String = ["$y = \delta / \lambda$"; "$y = \Delta x / \lambda$"; "$y = 1$"; "$\

```



```

theta_i = \theta_C$"; "$\theta_i = \frac{\pi}{2}$";
27 stc.label.x.String = '$\theta_i$';
28 stc.label.y.String = '$y$';
29 xlim([theta_C - 0.05, pi/2])
30
31 %MyExport_pdf_docked

```

## B.5 图 ?? 源码

```

1 %%%%%%%%% 单个球面波源在平面上的振荡 (导出为 gif) %%%%%%%%%
2 clc,clear,close all;
3 global lambda k omega X_OA A
4
5 lambda = 550.0 * 10^(-9); % 单位: m
6 k = 5; % k 取决于光的波长, 但在可视化中不妨令为 1
7 omega = 1; % omega 取决于光的波长, 但在可视化中不妨令为 1
8 X_OA = [ 0, 0]; % 球面波源 A 的位置
9 A = 50; % r = 1 时的振幅
10 E_A0 = @(x, y) A./sqrt((x - X_OA(1)).^2 + (y - X_OA(2)).^2); % x 位置的振幅, 输入的
    X_array 为一列行向量
11 alpha_A = @(x, y) k*sqrt((x - X_OA(1)).^2 + (y - X_OA(2)).^2);
12 vib = @(E_0, t, alpha) E_0.*cos(-omega*t + alpha); % 振荡函数
13
14 R_array = linspace(2, 10, 100);
15 theta_array = transpose(linspace(0, 2*pi, 50));
16 x_matrix = R_array .* cos(theta_array) + X_OA(1);
17 y_matrix = R_array .* sin(theta_array) + X_OA(2);
18 E_A0_matrix = E_A0(x_matrix, y_matrix);
19 alpha_A_matrix = alpha_A(x_matrix, y_matrix);
20
21 stc = MyMesh(x_matrix, y_matrix, vib(E_A0_matrix, 0, alpha_A_matrix), 1);
22 stc.label_left.z.String = '$E$';
23
24
25 figure
26 h1 = surf(x_matrix, y_matrix, E_A0_matrix, 'EdgeColor', 'interp', FaceColor='interp');
27 hold on
28 surf([X_OA(1) X_OA(1)], [X_OA(2) X_OA(2)], [30 -30; 30 -30])
29 colormap(redblue);
30 zlim([-35 35]);
31 xlim([X_OA(1) - R_array(end), X_OA(1) + R_array(end)])
32 ylim([X_OA(2) - R_array(end), X_OA(2) + R_array(end)])
33 drawnow
34
35 t_array = linspace(0, 20, 200);
36 for i = 1:length(t_array)
37     h1.ZData = vib(E_A0_matrix, t_array(i), alpha_A_matrix);
38     f(i) = getframe(gcf);

```

```

39 end
40
41 numFrames = length(t_array);
42 animated(1,1,1,numFrames) = 0;
43 for i = 1:numFrames
44     if i == 1
45         [animated,cmap] = rgb2ind(f(i).cdata,256,'nodither');
46     else
47         animated(:,:,1,i) = rgb2ind(f(i).cdata,cmap,'nodither');
48     end
49 end
50 filename = '单个球面波源在平面上的振荡.gif';
51 imwrite(animated,cmap,filename,'DelayTime',1/30,'LoopCount',inf);
52 web(filename)

```

## B.6 图 ?? 源码

```

1 %%%%%%%%% 两个球面波源在平面上的干涉情况 (导出为 gif) %%%%%%%%%
2
3 clc, clear, close all;
4 global lambda k omega X_OA X_OB A B
5
6 lambda = 550.0 * 10^(-9); % 单位: m
7 k = 5; % k 取决于光的波长, 但在可视化中不妨令为 1
8 omega = 1; % omega 取决于光的波长, 但在可视化中不妨令为 1
9 X_OA = [-2, 0]; % 球面波源 A 的位置
10 X_OB = [ 2, 0]; % 球面波源 B 的位置
11 A = 50; % r = 1 时 A 的振幅
12 B = 50; % r = 1 时 B 的振幅
13
14 E_A0 = @(x, y) A./sqrt((x - X_OA(1)).^2 + (y - X_OA(2)).^2); % X 位置的振幅, 输入的
    X_array 为一列行向量
15 E_B0 = @(x, y) B./sqrt((x - X_OB(1)).^2 + (y - X_OB(2)).^2); % X 位置的振幅, 输入的
    X_array 为一列行向量
16 alpha_A = @(x, y) k*sqrt((x - X_OA(1)).^2 + (y - X_OA(2)).^2);
17 alpha_B = @(x, y) k*sqrt((x - X_OB(1)).^2 + (y - X_OB(2)).^2);
18 E_0 = @(E_A0, alpha_A, E_B0, alpha_B) sqrt(E_A0.^2 + E_B0.^2 + 2*E_A0.*E_B0.*cos(
    alpha_A - alpha_B));
19 vib = @(E_0, t, alpha) E_0.*cos(-omega*t + alpha); % 振荡函数
20
21 R_array = linspace(4, 20, 80);
22 theta_array = transpose(linspace(0, 2*pi, 30));
23 x_matrix = R_array .* cos(theta_array);
24 y_matrix = R_array .* sin(theta_array);
25 %E_0_matrix = E_A0(x_matrix, y_matrix);
26
27 E_A0_matrix = E_A0(x_matrix, y_matrix);
28 E_B0_matrix = E_B0(x_matrix, y_matrix);

```

```

29 alpha_A_matrix = alpha_A(x_matrix, y_matrix);
30 alpha_B_matrix = alpha_B(x_matrix, y_matrix);
31 E_0_matrix = E_0(E_A0_matrix, alpha_A_matrix, E_B0_matrix, alpha_B_matrix);
32 alpha_matrix = GetAlpha(E_0_matrix, E_A0_matrix, alpha_A_matrix, E_B0_matrix,
    alpha_B_matrix);
33
34 MyMesh(x_matrix, y_matrix, vib(E_A0_matrix, 0, alpha_A_matrix), 1);
35 MyMesh(x_matrix, y_matrix, vib(E_B0_matrix, 0, alpha_B_matrix), 1);
36 MyMesh(x_matrix, y_matrix, vib(E_0_matrix, 0, alpha_matrix), 1);
37
38
39 figure
40 set(gca, 'NextPlot', 'replaceChildren', 'box', 'on', 'color', 'w');
41
42 h = mesh(x_matrix, y_matrix, E_0_matrix, 'EdgeColor', 'interp', FaceColor='interp'
    );
43 hold on
44 surf([X_OA(1) X_OA(1)], [X_OA(2) X_OA(2)], [40 -40; 40 -40])
45 surf([X_OB(1) X_OB(1)], [X_OB(2) X_OB(2)], [40 -40; 40 -40])
46 hold off
47 view([45, 30])
48 colormap(redblue);
49 zlim([-35 35]);
50 xlim([-R_array(end), R_array(end)])
51 ylim([-R_array(end), R_array(end)])
52 drawnow
53
54 t_array = linspace(0, 20, 200);
55 numFrames = length(t_array);
56 for i = 1:numFrames
57     h.ZData = vib(E_0_matrix, t_array(i), alpha_matrix);
58     f(i) = getframe(gcf);
59 end
60
61 animated(1,1,1,numFrames) = 0;
62 for i = 1:numFrames
63     if i == 1
64         [animated,cmap] = rgb2ind(f(i).cdata,256,'nodither');
65     else
66         animated(:,:,1,i) = rgb2ind(f(i).cdata,cmap,'nodither');
67     end
68 end
69 filename = '两个球面波源在平面上的干涉情况.gif';
70 imwrite(animated,cmap,filename,'DelayTime',1/20,'LoopCount',inf);
71 web(filename)

```

## B.7 图 ?? (b) 与图 ?? 源码

```

1  %%%%%%%%% 杨氏双缝振幅分布即近似模型误差分析 %%%%%%%%%
2  clc,clear,close all
3
4  global vare_0 mu_0 lambda I_1 d D R A k E_0 E_0_appro r r_1 r_2
5
6
7  vare_0 = 8.854187817 * 10^(-12);
8  mu_0 = 4*pi * 10^(-7);
9  A = 50;
10 I_1 = 50;
11 d = 100 * 10^(-6);
12 R = 5 * 10^(-2);
13 D = 1;
14 lambda = 700 * 10^(-9); % 700.0 nm 的红光
15 k = 2*pi/lambda;
16
17 r = @(x) sqrt( x.^2 + D^2 );
18 r_1 = @(x) sqrt( (x - d/2).^2 + D^2 );
19 r_2 = @(x) sqrt( (x + d/2).^2 + D^2 );
20 E_0 = @(r_1, r_2) A * sqrt( 1./r_1 + 1./r_2 + 2./sqrt(r_1.*r_2).*cos( k.*(r_1 - r_2)
    ) );
21 E_0_appro = @(x) sqrt(2./r(x))*A .* sqrt( 1 + cos(k*x*d/D) );
22 %I = @(r_1, r_2) A^2 * sqrt(vare_0/mu_0) * ( 0.5*(1./r_1 + 1./r_2) + cos(k*(r_1 - r_2)
    ) )/sqrt(r_1.*r_2));
23 I = @(r_1, r_2) 0.5 * sqrt(vare_0/mu_0) * E_0(r_1, r_2).^2;
24 I_appro = @(x) 0.5 * sqrt(vare_0/mu_0) * E_0_appro(x).^2;
25
26 x_array = linspace(-0.02, 0.02, 1000);
27 r_array = r(x_array);
28 r_1_array = r_1(x_array);
29 r_2_array = r_2(x_array);
30 E_0_array = E_0(r_1_array, r_2_array);
31 E_0_appro_array = E_0_appro(x_array);
32 I_array = I(r_1_array, r_2_array);
33 I_appro_array = I_appro(x_array);
34
35 plot_E = MyPlot(x_array, [E_0_array; E_0_appro_array]);
36 plot_E.label.y.String = '$E_0$';
37 plot_E.legend.Location = 'northeast';
38 plot_E.legend.String = ["$E_{0,\mathrm{exact}}$"; "$E_{0,\mathrm{appro}}$"];
39 %MyExport_pdf
40 plot_I = MyPlot(x_array, [I_array; I_appro_array]);
41 plot_I.label.y.String = '$I$';
42 plot_I.legend.Location = 'northeast';
43 plot_I.legend.String = ["$I_{\mathrm{exact}}$"; "$I_{\mathrm{appro}}$"];
44 %MyExport_pdf
45 stc_E = MyErrorAnalyzer(E_0_array, E_0_appro_array, 1);

```

```

46 stc_I = MyErrorAnalyzer(I_array, I_appro_array, 1);
47
48 stc_funcerror_E = MyErrorAnalyzer_func(@(x) E_0(r_1(x), r_2(x)), @(x) E_0_appro(x),
49     [-0.02, 0.02]);
50
51 stc_funcerror_I = MyErrorAnalyzer_func(@(x) I(r_1(x), r_2(x)), @(x) I_appro(x),
52     [-0.02, 0.02]);
53
54
55 stc_yy = MyYYPlot(x_array, stc_E.ResidualError, x_array, stc_I.ResidualError);
56 stc_yy.label.y_left.String = '$\hat{\theta}_E$';
57 stc_yy.label.y_right.String = '$\hat{\theta}_I$';
58
59 stc_yy.legend.String = ["$\theta_E = E_0 - \hat{E}_0$"; "$\theta_I = I - \hat{I}$"];
60 stc_yy.p_left.LineStyle = 'none';
61 stc_yy.p_left.Marker = '.';
62 stc_yy.p_left.MarkerSize = 3;
63 stc_yy.p_right.LineStyle = 'none';
64 stc_yy.p_right.Marker = '.';
65 stc_yy.p_right.MarkerSize = 3;
66 %MyExport_pdf_modal
67
68 function stc_error = MyErrorAnalyzer(Y, Y_hat, num_var)
69
70 stc_error.size_Y = size(Y);
71 length_Y = length(Y); stc_error.length_Y = length_Y;
72
73 % 数据准备
74 Y_bar = mean(Y); stc_error.Y_bar = mean(Y);
75 stc_error.Y_hat_bar = mean(Y_hat);
76
77
78 % 残差分布
79 ResidualError = Y - Y_hat; stc_error.ResidualError = Y - Y_hat;
80 stc_error.ResidualScatter = scatter(1:length(Y), ResidualError, 30, 'blue.');

```

```
92     disp(['RS_standard = ', num2str(stc_error.RS_standard, '%.10f')]);
93     disp(['RSS_standard = ', num2str(stc_error.RSS_standard, '%.10f')]);
94 end
95
96 function stc_error = MyErrorAnalyzer_func(f, f_hat, X_range)
97     % 标准面积误差
98     stc_error.AE_standard = integral( @(x) abs(f(x) - f_hat(x)), X_range(1), X_range(2)
99         ) / integral( @(x) abs(f(x)), X_range(1), X_range(2) );
100     disp(['AE_standard = ', num2str(stc_error.AE_standard, '%.10f')]);
101 end
```