# 数学物理方法笔记

# Notes of Mathematical Physics Methods

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.9 – 2025.1

# 序言

本文为笔者本科时的数学物理方法笔记笔记, 总结了数学物理方法中的主要知识，也有适当的拓展延伸。同时，对一些晦涩的概念或公式，给出了笔者的个人理解，以帮助阅读。

由于个人精力及知识水平有限，书中难免有不妥、错误之处，望不吝指正，在此感谢。我的邮箱是 dingyi233@mails.ucas.ac.cn 。

# 目录

# 第1章 复数与复数运算

## §1.1 预备知识

**复数定义：**

一个有序实数对 $(x, y)$ 称为复数如果其满足如下运算：

$$\begin{aligned} &\text{加法} \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &\text{乘法} \quad (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \end{aligned} \tag{1.1}$$

记作 $z = x + iy$，其中 $x = \operatorname{Re} z$，$y = \operatorname{Im} z$，$i^2 = 1$。

**相关概念：**

下面是一些相关概念：

① 复数的三种表示：$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$

② 模：$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

③ 幅角：$\arg z = \theta \in (-\pi, \pi]$ 称为幅角主值，$\operatorname{Arg} z = \theta + 2k\pi$ 称为幅角补值，$k \in \mathbb{Z}$。

④ 0 与 $\infty$：是两个特殊的复数，分别表示复平面中模为 0 和无穷大而幅角任意的“一个点”。在复平面的球表示中，0 对应南极，$\infty$ 对应北极。

⑤ 扩充复平面：称包含无穷远点 $\infty$ 的复平面 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 为扩充复平面。

⑥ 共轭复数：$z = x + iy, z^* = x - iy$

⑦ 复数除法：设 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$，则：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} = \frac{1}{|z_2|^2}\left[(x_1x_2 + y_1y_2) + \mathrm{i}(y_1x_2 - x_1y_2)\right] \tag{1.2}$$

用棣莫弗定理更易理解复数除法：设 $z_1 = r_1e^{i\theta_1}, z_2 = r_2e^{i\theta_2}$，则：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \tag{1.3}$$

⑧ 复数乘法：$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

## §1.2 复数序列

**相关概念：**

一个复数序列 $\{z_n\}$ 完全等价于两个实数序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$

① 聚点：给点复序列 $\{z_n\}$，若存在 $z \in \mathbb{C}$，使 $\forall\, \varepsilon > 0$，恒有无穷多个 $n$ 使得 $|z_n - z| < \varepsilon$ 则称 $z$ 为序列 $\{z_n\}$ 的一个聚点。

例如序列 $\{(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}_+\} = \{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \cdots, (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}, \cdots\}$ 有两个聚点 $1, -1$

② 有界 / 无界序列：序列 $\{z_n\}$ 称为有界的如果 $\exists\, M > 0$ s.t. $|z_n| < M, \forall\, n \in \mathbb{N}_+$，否则称为无界的。

③ 极限：称序列 $\{z_n\}$ 收敛于 $z \in \mathbb{C}$ 如果 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N > 0$ s.t. $|z - z_n| < \varepsilon, \forall\, n > N$，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$，否则称为发散序列。极限的必要条件是唯一聚点，无界序列不可能收敛

**Theorem. 1 (Bolzano - Weierstrass 定理)：** 任意有界序列至少有一个聚点。

**Theorem. 2 (Cauchy 判别法)：** 序列收敛的等价条件是：$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N = N(\varepsilon)$ s.t. $|z_{N+p} - z_N| < \varepsilon, \forall\, p \in \mathbb{N}_+$。

## § 1.3　复变函数

**相关概念：**

如下：

① 点集：复平面内点的集合

② 区域：复点集称为区域如果全部由内点组成，且具有连通性

连通性：集合中任意两点都可以用一条折线连接起来，且折线上的点全部属于此点集

③ 单连通 / 多联通区域：区域称为单连通的如果在其内作任何简单闭合围道（自身不相交的闭合曲线），围道内的点都属于该区域，否则称为多联通区域（也称复联通区域）

图 1.1 中的 (a) 区域就属于单连通区域，而图 1.1 中的 (b) 区域则为多连通区域.

④ 边界：区域 $G$ 的全体边界点构成其边界，记为 $\partial G$

⑤ 边界方向：沿着区域的边界前进，区域恒保持在边界的左侧，则此走向称为边界的正向

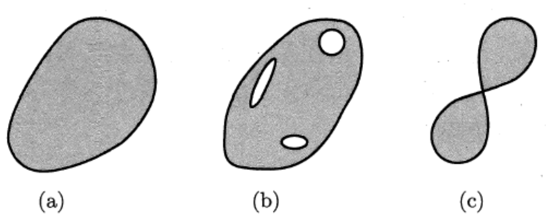


**图 1.1: (a) (b) 构成区域，(c) 不构成区域**

**复变函数：**

复变函数 $f$ 是复数域子域 $G \subseteq \mathbb{C}$ 到复数域的映射，记作 $f: z \longmapsto \mathbb{C}$，或者 $f(z) = w$, $z \in G$。区域 $G$ 称为函数 $f$ 的定义域。事实上，复变函数等价于两个实变函数的有序组合。特别地，多值函数允许一个自变量对应多个函数值，我们在第二章会讨论。

## § 1.4　无穷远点

**Riemann 球面：**

如图 1.2，过扩充的复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 中的原点 $(0, 0)$ 作直径为 1 的球面，使之与 $\overline{\mathbb{C}}$ 相切，切点称为南极 S，南极直径另一端称为北极 N。$\forall\, z \in \overline{\mathbb{C}}$，将它和复数球面的北极 N 相连，连线和球面有且仅有一个交点，因此存在一一对应关系。容易理解，0 对应南极 S 而 $\infty$ 对应北极 N。

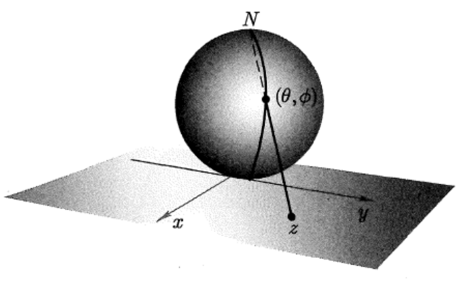


**图 1.2: Riemann 球面（复数球面）**

Theorem.1 告诉我们有界序列必有聚点，事实上，在扩充复数域 $\overline{\mathbb{C}}$ 中，这对无界序列也成立（$\infty$ 必为聚点）。

# 第 2 章　解析函数

## § 2.1　复变函数的极限和连续

# 参考文献

[1] 吴崇试. 数学物理方法. 北京大学出版社, 3 edition, 5 2019.