

数学物理方法课程作业

Homework of Mathematical Physics Methods

丁毅

中国科学院大学，北京 100049

Yi Ding

University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

## 序言

本文为笔者本科时的“数学物理方法”课程作业 (Homework of Mathematical Physics Methods, 2024.9-2025.1)。由于个人学识浅陋, 认识有限, 文中难免有不妥甚至错误之处, 望读者不吝指正, 在此感谢。

我的邮箱是 [dingyi233@mails.ucas.ac.cn](mailto:dingyi233@mails.ucas.ac.cn)。

---

## 目录

序言	I
目录	I
1 2024.8.26 - 2024.9.1	1
2 2024.9.2 - 2024.9.8	3
3 2024.9.9 - 2024.9.15	6
4 2024.9.16 - 2024.9.22	10
5 2024.9.23 - 2024.9.29	12

## Homework 1: 2024.8.26 - 2024.9.1

### 1.1 计算

(1)  $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{(1+i)(2+i)}{5}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{-8+6i}{25}$$

(2)  $(1+i)^n + (1-i)^n$

首先得到:

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad 1-i = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$

$$\implies I = 2^{\frac{n}{2}} (e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}})$$

于是有:

$$I = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}+1}, & n = 0 + 4k \\ 2^{\frac{n+1}{2}}, & n = 1 + 4k \\ 0, & n = 2 + 4k \\ -2^{\frac{n}{2}+1}, & n = 3 + 4k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}$$

习题课补:

$$I = 2^{\frac{n}{2}} (e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}})$$

$$= 2^{\frac{n}{2}} \left( \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\frac{n\pi}{4} + \cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right) \right)$$

$$= 2^{\frac{n}{2}+1} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

(3)  $\sqrt[4]{1+i}$

$$\sqrt[4]{1+i} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{\pi}{16}}$$

习题课补: 在复数域中, 开根号是多值函数, 这里四次根在复数域中应有四个复根, 设  $x = \sqrt[4]{1+i}$ , 则原式等价于方程:

$$x^4 = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \implies |x| = 2^{\frac{1}{8}}, \quad \arg x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3$$

### 1.2 将复数化为三角或指数形式

(1)  $\frac{5}{-3+i}$

$$\frac{5}{-3+i} = \frac{5e^{i0}}{\sqrt{10}e^{i(\arctan(-\frac{1}{3})+\pi)}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot e^{-i(\arctan(-\frac{1}{3})+\pi)}$$

(2)  $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$

$$\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}e^{i\arctan(\frac{1}{2})}}{\sqrt{13}e^{i\arctan(-\frac{2}{3})}}\right)^2 = \frac{5}{13}e^{2i(\arctan(\frac{1}{2})-\arctan(-\frac{2}{3}))}$$

### 1.3 求极限 $\lim_{z \rightarrow i} \frac{1+z^6}{1+z^{10}}$

作不完全因式分解:

$$1+z^6 = z^6 - i^6 = (z^3 - i^3)(z^3 + i^3) = (z-i)(z^2 + iz + i^2)(z^3 + i^3)$$

$$\begin{aligned}
1 + z^{10} &= z^{10} - i^{10} = (z^5 - i^5)(z^5 + i^5) = (z - i)(z^4 + iz^3 + i^2z^2 + i^3z + i^4)(z^5 + i^5) \\
\implies L &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1 + z^6}{1 + z^{10}} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z - i)(z^2 + iz + i^2)(z^3 + i^3)}{(z - i)(z^4 + iz^3 + i^2z^2 + i^3z + i^4)(z^5 + i^5)} \\
&= \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z^2 + iz + i^2)(z^3 + i^3)}{(z^4 + iz^3 + i^2z^2 + i^3z + i^4)(z^5 + i^5)} \\
&= \frac{(-3) \times (-2i)}{5i} = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

事实上, 实数域上的洛必达法则 (L'Hospital) 可以推广到复数域的解析函数, 下面给出  $\frac{0}{0}$  型的证明。设复变函数  $f(z), g(z)$  在  $z = z_0$  解析, 且  $f(z_0) = g(z_0) = 0$ , 则有:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

特别地, 若  $f'(z_0)$  与  $g'(z_0)$  存在且不为零, 就有  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$

## 1.4 讨论函数在原点的连续性

$$(1) f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2i} \left( \frac{z}{z^*} - \frac{z^*}{z} \right), & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

令  $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ , 则  $\forall (x, y) \neq (0, 0)$ :

$$f(x, y) = \frac{1}{2i} \left( \frac{x + iy}{x - iy} - \frac{x - iy}{x + iy} \right) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{4ixy}{x^2 + y^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

令  $k = \frac{y}{x}$ , 则:

$$L = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{2k}{1 + k^2}$$

显然,  $L$  随着  $k$  的变化而变化, 因此极限不存在,  $f(z)$  在 0 处不连续。

$$(2) f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Im} z}{1 + |z|}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

令  $z = x + iy$  和  $k = \frac{y}{x}$ , 则  $\forall (x, y) \neq (0, 0)$ :

$$f(x, y) = \frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} \implies \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \frac{0}{1 + 0} = 0 = f(0, 0)$$

因此  $f(z)$  在 0 处连续。

$$(3) f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z^2}{|z|^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

同理令  $z = x + iy$  和  $k = \frac{y}{x}$ , 则  $\forall (x, y) \neq (0, 0)$ :

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}$$

因此  $f(z)$  在 0 处不连续。

## 1.5 恒等式证明 (附加题)

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^n |b_i|^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i b_j^* - a_j b_i^*|^2$$

## Homework 2: 2024.9.2 - 2024.9.8

### 2.1 下列函数在何处可导, 何处解析

(1)  $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$

设  $z = x + iy$ , 则  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 + ixy$ .  $\forall z \in C$ ,  $u(x, y) = x^2$  和  $v(x, y) = xy$  在  $\mathbb{C}$  上有连续一阶偏导, 下面考虑 C-R 条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x \quad (2.2)$$

联立 C-R 条件, 得  $(x, y) = (0, 0)$ , 因此  $f$  在  $(0, 0)$  处可导, 在  $\mathbb{C}$  上不解析。不在点  $(0, 0)$  上解析是因为在某点解析是指在此点的有心邻域上解析, 显然这里不满足, 因此  $(0, 0)$  为奇点。

后补:

$u, v$  有一阶连续偏导且满足 C-R 条件  $\implies u, v$  可微且满足 C-R 条件  $\iff f$  可微  $\iff f$  可导

(2)  $f(x, y) = (x - y)^2 + 2i(x + y)$

$\forall z \in C$ ,  $u(x, y) = (x - y)^2$  和  $v(x, y) = 2(x + y)$  在  $\mathbb{C}$  上有连续一阶偏导, 下面验证 C-R 条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x - y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2(x - y) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \quad (2.4)$$

联立 C-R 条件后无解, 因此  $f$  在  $\mathbb{C}$  上不可导, 在  $\mathbb{C}$  上不解析。

### 2.2 求下列函数的解析区域

(1)  $f(z) = xy + iy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

欲满足 C-R 条件, 则:

$$y = 1, x = 0 \implies f \text{ 在全平面不解析}$$

不在点  $(0, 1)$  上解析是因为在某点解析是指在此点的有心邻域上解析, 显然这里不满足。

(2)  $f(z) = \begin{cases} |z| \cdot z, & |z| < 1 \\ z^2, & |z| \geq 1 \end{cases}$

设  $z = x + iy$ , 则:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \begin{cases} (x\sqrt{x^2+y^2}) + i(y\sqrt{x^2+y^2}), & \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ (x^2 - y^2) + i(2xy), & \sqrt{x^2+y^2} \geq 1 \end{cases}$$

$$\iff u(x, y) = \begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2}, & \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ x^2 - y^2, & \sqrt{x^2+y^2} \geq 1 \end{cases}, \quad v(x, y) = \begin{cases} y\sqrt{x^2+y^2}, & \sqrt{x^2+y^2} < 1 \\ 2xy, & \sqrt{x^2+y^2} \geq 1 \end{cases}$$

分别求偏导得到:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}, \quad \sqrt{x^2+y^2} < 1 \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, & \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, & \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \end{cases}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1$$

偏导要满足 C-R 条件, 代入得到:

$$\begin{aligned} x^2 = y^2, \quad 2xy = 0, \quad \forall \sqrt{x^2 + y^2} < 1, x^2 + y^2 \neq 0 \\ 2x = 2x, \quad -2y = -2y, \quad \forall \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1 \\ \implies f(z) \text{ 在 } \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1\} \text{ 上解析} \end{aligned}$$

不在点 (0, 0) 上解析是因为在某点解析是指在此点的有心邻域上解析, 显然这里不满足。

后补: **解析区域必须是开集** (因为受“有心邻域”限制),  $f$  的解析区域应为  $\{z \mid |z| > 1\}$ 。另外,  $|z| = 1$  代表的圆周上也不可微, 这是因为  $f$  在  $|z| = 1$  上不连续 (内部是一倍幅角, 外部是二倍幅角), 所以可微区域也为  $\{z \mid |z| > 1\}$ 。

### 2.3 已知解析函数 $f(z)$ 的实部如下, 求 $f(z)$

(1)  $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$

$$\begin{aligned} v'_x = -u'_y = 2y, \quad v'_y = u'_x = 2x + 1 \\ \implies v(x, y) = \int 2y \, dx + \int dy = 2xy + y + C \\ \implies f(x, y) = (x^2 + y^2 + x) + i(2xy + y) + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(2)  $u(x, y) = e^y \cos x$

$$\begin{aligned} v'_x = -u'_y = -e^y \cos x, \quad v'_y = u'_x = -e^y \sin x \\ \implies v(x, y) = \int -e^y \cos x \, dx + \int 0 \, dy = -e^y \sin x + C \\ \implies f(x, y) = (e^y \cos x) + i(-e^y \sin x) + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

### 2.4 $f$ 解析, 且 $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ , 求 $f(z)$

两边分别对  $x, y$  求导, 得到:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 + 6xy - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 6xy - 3y^2$$

联立 C-R 条件, 可以解出:

$$\begin{aligned} v'_x = -3x^2 + 3y^2, \quad v'_y = 6xy \\ u'_x = 6xy, \quad u'_y = 3x^2 - 3y^2 \\ \implies v(x, y) = -x^3 + 3xy^2 + C, \quad u(x, y) = 3x^2y - y^3 + C \\ \implies f(x, y) = (3x^2y - y^3) + i(-x^3 + 3xy^2) + C(1 + i), \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

后补:  $u$  和  $v$  中的实常数  $C$  其实是同一个! 这是因为题目中  $u - v$  没有常数项, 说明两者积分常数相同。

### 2.5 极坐标 C-R 条件

证明极坐标下的 C-R 条件为:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

极坐标变换:

$$\begin{aligned} x &= x(r, \theta) = r \cos \theta, \quad y = y(r, \theta) = r \sin \theta \\ \implies \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \end{aligned}$$

由复合函数的求导法则:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} u(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial \theta} u(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot r \sin \theta + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot r \cos \theta \end{aligned}$$

联立 C-R 条件, 化简得到:

$$v'_r = -u'_\theta \cos \theta + u'_x \sin \theta = \frac{1}{r} u'_\theta$$

同理, 由偏导关系:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} u(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \cdot r \sin \theta + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \cdot r \cos \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} v(x(r, \theta), y(r, \theta)) &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \cdot \cos \theta + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \cdot \sin \theta \end{aligned}$$

联立 C-R 条件, 化简得到:

$$u'_r = u'_x \cos \theta + u'_y \sin \theta = \frac{1}{r} v'_\theta$$

反之也可以化为原 C-R 条件, 因此 C-R 条件在极坐标下的形式为:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \square$$

## 2.6 证明 $f(z)$ 和 $\overline{f(\bar{z})}$ 同解析或同不解析

### (1) $f(z)$ 解析 $\implies \overline{f(\bar{z})}$ 解析

假设  $f(z)$  在点  $z = z_0$  解析, 即  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在有心邻域  $U_\delta(z_0)$  上解析, 这等价于  $f(z)$  有一阶导, 且在邻域内满足 C-R 条件. 设  $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = u(x, -y) - iv(x, -y)$ , 也即:

$$g(z) = u_g(x, y) + iv_g(x, y), \quad u_g(x, y) = u(x, -y), \quad v_g(x, y) = -v(x, -y)$$

容易验证  $g(z)$  有一阶偏导, 下面验证 C-R 条件:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_g}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, -y), \quad \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{\partial u(x, -y)}{\partial(-y)} \cdot \frac{\partial(-y)}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, -y) \\ \frac{\partial v_g}{\partial x} &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x, -y), \quad \frac{\partial v_g}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, -y)}{\partial(-y)} \cdot \frac{\partial(-y)}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}(x, -y) \end{aligned}$$

联立  $u$  和  $v$  的 C-R 条件, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_g}{\partial x} - \frac{\partial v_g}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, -y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x, -y) = 0 \implies \frac{\partial u_g}{\partial x} = \frac{\partial v_g}{\partial y} \\ \frac{\partial u_g}{\partial y} + \frac{\partial v_g}{\partial x} &= -\left[ \frac{\partial u}{\partial y}(x, -y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, -y) \right] = 0 \implies \frac{\partial u_g}{\partial y} = -\frac{\partial v_g}{\partial x} \end{aligned}$$

因此  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$  也解析。

### (2) $f(z)$ 解析 $\iff \overline{f(\bar{z})}$ 解析

假设  $\overline{f(\bar{z})}$  解析, 令  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ , 则  $f(z) = \overline{g(\bar{z})}$ , 由 (1) 的结论,  $g(z)$  解析  $\implies f(z) = \overline{g(\bar{z})}$  也解析. 证毕.  $\square$

## Homework 3: 2024.9.9 - 2024.9.15

### 3.1 若 $f(z)$ 解析, $\arg f(z)$ 是否为调和函数?

注: 下面的过程仅讨论了  $\arg f(z)$  的解析性, 未能揭示其调和性, 正确的解答见后文补充的灰色小字。

(1) 当  $f(z) = C \in \mathbb{C}, \forall z \in G$ , 也即  $f(z)$  恒为常量时:  $\arg f(z)$  也为常量, 设  $\arg f(z) = a + ib$ , 则  $a = \arg f(z) \in \mathbb{R}$  而  $b = 0$ , 自然满足  $\Delta a = \Delta b = 0$ , 因此  $\arg f(z)$  为调和函数。

(2) 当  $f(z)$  是非常量函数时:

由  $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ , 移项, 并作映射  $z \rightarrow f(z)$ , 则有:

$$\arg f(z) = \frac{1}{i} (\ln f(z) - \ln \rho)$$

函数  $\ln$  在  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  上解析, 但对于函数  $\rho = \rho(z)$ :

$$\rho = \sqrt{u^2 + v^2} \implies u_\rho = \sqrt{u^2 + v^2}, v_\rho = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial x} = \frac{uu'_x}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{vv'_x}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \frac{\partial u_\rho}{\partial y} = \frac{uu'_y}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{vv'_y}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (3.2)$$

假设  $\rho$  满足 C-R 条件, 代入得到:

$$\begin{cases} uu'_x + vv'_x = 0 \\ uu'_y + vv'_y = 0 \\ \sqrt{u^2 + v^2} \neq 0 \end{cases}$$

由于  $f(z)$  解析, 满足 C-R 条件  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ , 代入后整理得到:

$$\begin{cases} v(v_y'^2 - u_y'^2) = 0 \\ u(u_y'^2 + v_y'^2) = 0 \end{cases}$$

$f(z)$  非常量, 因此  $u, v$  非常量, 因此只能有:

$$v_y' = u_y' = 0 \implies u_x' = v_x' = 0 \implies u \text{ 和 } v \text{ 为常量函数}$$

这使得  $f(z) = u + iv$  是常量, 矛盾! 因此  $\arg f(z)$  不解析 (这能否推出不调和? 解析是调和的充分条件, 但是充要的吗? 事实上并不是, 因此并不能揭示调和性)。

后补: 即使仅从解析性的角度来看, 上面的过程也没有抓到主要矛盾, 是舍本逐末了。因为无论  $f(z)$  的性质如何,  $\arg f(z)$  始终是  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  的函数, 这表明  $\arg f(z)$  是实部是它本身而虚部恒为 0, 因此, 由 C-R 条件可知  $\arg f(z)$  解析的必要条件是实部为常数, 而这也是充分条件。

对  $\arg f(z)$  的调和性, 我们有如下推导:

$$\arg f(z) = \arctan \frac{u(x, y)}{v(x, y)} + A, \quad A \in \{0, \pi\} \quad (3.3)$$

令  $g(z) = \arg f(z)$ , 则有:

$$g'_x = \frac{uv'_x - u'_x v}{u^2 + v^2}, \quad g''_{xx} = \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} [(u^2 + v^2)(uv''_{xx} + u''_{xx}v) - 2uv(v_x'^2 - u_x'^2) - 2(u^2 - v^2)u'_x v'_x] \quad (3.4)$$

对  $y$  求导也是同理, 只需将上面的角标  $x$  换为  $y$ , 于是有  $\Delta g$ :

$$\begin{aligned} \Delta g &= g''_{xx} + g''_{yy} \\ &= \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} [(u^2 + v^2)(u(v''_{xx} + v''_{yy}) + (u''_{xx} + u''_{yy})v) - 2uv(v_x'^2 + v_y'^2 - u_x'^2 - u_y'^2) - 2(u^2 - v^2)(u'_x v'_x + u'_y v'_y)] \end{aligned}$$

$f$  解析意味着  $u, v$  构成一对共轭调和函数, 有  $\Delta u = \Delta v = 0$ , 代入上式, 再代入 C-R 条件, 容易验证右边为 0, 也即证明了  $\Delta g = 0$ , 因此  $\arg f(z)$  为调和函数。对  $u^2 + v^2 = 0$  的情况, 我们不再赘述, 只关心普遍结论。



### 3.2 从已知的实虚部求出解析函数 $f(z)$

(1)  $u = e^x(x \cos y - y \sin y) + 2 \sin x \cdot \sinh y + x^3 - 3xy^2 + y$

$$u'_x = e^x(x \cos y - y \sin y + \cos y) + 2 \cos x \sinh y + 3x^2 - 3y^2 \quad (3.5)$$

$$u'_y = e^x(-x \sin y - \sin y - y \cos y) + 2 \sin x \cosh y - 6xy + 1 \quad (3.6)$$

由 C-R 条件,  $v'_x = -u'_y$ ,  $v'_y = u'_x$ , 于是得到:

$$v(x, y) = \int (-u'_y) dx + \int (-3y^2) dy \quad (3.7)$$

$$= (x-1)e^x \sin y + (\sin y + y \cos y)e^x + 2 \cos x \cosh y + 3x^2 y - x - y^3 + C \quad (3.8)$$

$$= (x \sin y + y \cos y)e^x + 2 \cos x \cosh y + 3x^2 y - x - y^3 + C, C \in \mathbb{R} \quad (3.9)$$

令  $(x, y) = (z, 0)$ , 得到:

$$u(z, 0) = ze^z + z^3, \quad v(z, 0) = 2 \cos z - z + C, C \in \mathbb{R} \quad (3.10)$$

于是得到  $f(x, y)$ :

$$f(z) = [u(x, y) + iv(x, y)]_{x=z, y=0} = (ze^z + z^3) + i(2 \cos z - z + C), C \in \mathbb{R}$$

(2)  $v = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$

$$v'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2} + 1, \quad v'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2} - 2$$

由 C-R 条件,  $u'_x = v'_y$ ,  $u'_y = -v'_x$ , 于是得到:

$$u(x, y) = \int v'_y dx + \int (-1) dy = 2 \arctan \frac{x}{y} - 2x - y + C \quad (3.11)$$

$$f(x, y) = u + iv = (2 \arctan \frac{x}{y} - 2x - y + C) + i(\ln(x^2 + y^2) + x - 2y), C \in \mathbb{R}$$

后补, 这里之所以没有令  $(x, y) = (z, 0)$  得到  $f(z)$ , 是因为函数  $\arctan \frac{x}{y}$  在实轴附近是不连续的, 例如在正实轴  $x > 0$  附近,  $\lim_{y \rightarrow 0^+}$  时趋于  $+\infty$  而  $\lim_{y \rightarrow 0^-}$  时趋于  $-\infty$ . 而映射  $(x, y) = (z, 0)$  的必要条件是解析域中包含实轴, 这涉及到解析延拓的内容, 我们不提。只需要写到  $f(x, y)$  的形式就这样放着即可。

### 3.3 求下列函数的值

(1)  $\cos(2 + i)$

由  $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ , 可得:

$$\begin{aligned} \cos(2 + i) &= \frac{1}{2} [e^{i(2+i)} + e^{i(2-i)}] = \frac{1}{2} [e^{2i-1} + e^{1-2i}] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{e} + e \right) \cos 2 + i \left( \frac{1}{e} - e \right) \sin 2 \right] \end{aligned}$$

(2)  $\text{Ln}(2 - 3i)$

由  $\text{Ln} z = \ln a + i \text{Arg} z$ , 可得:

$$\text{Ln}(2 - 3i) = \ln |2 - 3i| + i \text{Arg}(2 - 3i) = \frac{1}{2} \ln 13 + i \left( \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + 2k\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

(3)  $\operatorname{Arccos}\left(\frac{3+i}{4}\right)$ 

$\arccos z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$ , 于是:

$$\begin{aligned}\operatorname{Arccos}\left(\frac{3+i}{4}\right) &= -i \operatorname{Ln}\left(\frac{3+i}{4} + \sqrt{\left(\frac{3+i}{4}\right)^2 - 1}\right) = -i \operatorname{Ln}\left(\frac{3+i}{4} + \frac{\sqrt{-8+6i}}{4}\right) \\ &= -i \operatorname{Ln}\left(\frac{3+i}{4} \pm \frac{1+3i}{4}\right) = -i \operatorname{Ln}(1+i) \text{ 或 } -i \operatorname{Ln}\left(\frac{1-i}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) - i\frac{\ln 2}{2} \text{ 或 } -\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\frac{\ln 2}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

(4)  $\operatorname{Arctan}(1+2i)$ 

由  $\operatorname{Arctan} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}$ , 得:

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctan}(1+2i) &= \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{1+i(1+2i)}{1-i(1+2i)}\right) = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}\left(\frac{-1+i}{3-i}\right) \\ &= \frac{1}{2i} (\operatorname{Ln}(-2+i) - \ln 5) = \frac{1}{2i} \left[-\frac{\ln 5}{2} + i\left(\pi - \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\pi - \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi\right) + i\frac{\ln 5}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

## 3.4 判断下列函数是单值还是多值函数

(1)  $\sin \sqrt{z}$ 

多值函数。 $\sqrt{z}$  为双值函数,  $a^2 = z \implies \sqrt{z} = \pm a$ , 而  $\sin$  为奇函数,  $\sin a \neq \sin(-a)$ , 故为多值函数。

(2)  $\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ 

单值函数。 $\frac{\sin a}{a} = \frac{\sin(-a)}{-a}$ , 因此为单值函数。

(3)  $\frac{\cos \sqrt{z}}{z}$ 

单值函数。 $\frac{\cos a}{a} = \frac{\cos(-a)}{a}$ , 故为单值函数。

3.5 解方程:  $2 \cosh^2 z - 3 \cosh z + 1 = 0$ 

原方程等价于:

$$(2 \cosh z - 1)(\cosh z - 1) = 0 \implies \cosh z = \frac{1}{2} \text{ 或 } 1 \quad (3.12)$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \implies e^z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \text{ 或 } 1 \quad (3.13)$$

$$\implies z = i\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \text{ 或 } i(0 + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.14)$$

## 3.6 求下列多值函数的分支点

(1)  $\sqrt{1-z^3}$  的分支点:  $1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty$ 

$1 - z^3 = (1 - z)\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - z\right]\left[-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - z\right]$ , 不妨记为  $1 - z^3 = (z_1 - z)(z_2 - z)(z_3 - z)$ 。支点仅可能在宗量的零点、奇点处出现, 下面分别考察  $z_1, z_2, z_3, \infty$  四点。

对  $z_1$ , 取仅包含点  $z_1$  的简单闭合曲线, 曲线上一点  $z$  沿逆时针绕一圈回到原处, 因子  $(z_1 - z)$  的幅角增加了  $2\pi$ , 因子  $(z_2 - z)$  和  $z_3 - z$  的幅角增加了  $0$ , 因此整个宗量的幅角增加  $2\pi$ , 开根后, 函数值幅角增加  $\pi$ , 前后不相等。因此点  $z_1$  是分支点。同理可得  $z_2$  和  $z_3$  是分支点。

对  $\infty$ , 取包含点  $z_1, z_2, z_3$  的简单闭合曲线, 曲线上一点  $z$  沿顺时针 (不是逆时针) 绕一圈回到原处, 整个宗量的幅角增加了  $-6\pi$ , 开根后函数值幅角增加  $-3\pi$ , 因此  $\infty$  也是分支点。

(2)  $\text{Ln} \cos z$  的分支点:  $\infty, \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 。

可以证明,  $\text{Ln} f(z)$  的分支点等价于方程  $f(z) = 0$  和  $f(z) = \infty$  的解<sup>①</sup>。于是分别令  $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$  为 0 和  $\infty$ , 解得:

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ 或 } z = \infty \quad (3.15)$$

(3)  $\sqrt{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}$  的分支点:  $0, 1, 2, \infty$

考虑点  $0, 1, 2$ , 取仅包含点 0 的简单闭合曲线, 曲线上一点  $z$  逆时针绕一圈后, 宗量整体幅角增加  $2\pi$ , 函数值幅角增加  $\pi$ , 因此点 0 是分支点。同理点 1 和 2 也是分支点。

对  $\infty$ , 取包含点  $0, 1, 2$  的简单闭合曲线, 曲线上一点  $z$  顺时针绕一圈后, 宗量整体幅角增加  $-2\pi$ , 函数值也不发生变化,  $\infty$  不是分支点。

(4)  $\text{Ln} \frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)}$  的分支点:  $a, b, c, \infty$

与 (2) 同理, 考虑宗量  $\frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)}$  的零点和无穷点, 得到  $z = a, b, c, \infty$ , 即为所求分支点。

<sup>①</sup>这是助教在习题课上给出的结论, 并未给出具体证明。但是我们可以证明  $\text{Ln} z$  的分支点为 0 和  $\infty$ , 这是因为  $\text{Ln} z = \ln |z| + i \text{Arg} z$ , 当  $z$  绕原点逆时针转一圈时,  $\text{Arg} z$  增加  $2\pi$  而不是回到原来的函数值, 因此 0 为分支点; 无穷点同理。

## Homework 4: 2024.9.16 - 2024.9.22

### 4.1 计算下列积分

$$(1) \oint_{|z+i|=1} \frac{e^z}{1+z^2} dz$$

被积函数  $\frac{e^z}{1+z^2}$  在圆周  $|z+i|=1$  内有且仅有  $z=-i$  一个奇点, 由 Cauchy 定理和 Cauchy 积分公式:

$$I = \oint_{|z+i|=1} \frac{e^z}{1+z^2} dz = 2\pi i \left[ \frac{e^z}{z-i} \right]_{z=-i} = -\pi e^{-i} \quad (4.1)$$

结果化简到上面一步即可。

$$(2) \oint_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1} dz, a > 1$$

被积函数  $\frac{z}{z^4-1}$  在圆周  $|z-a|=a$  内有且仅有  $z=1$  一个奇点, 由 Cauchy 定理和 Cauchy 积分公式:

$$I = \oint_{|z-1|=a} \frac{z}{z^4-1} dz = 2\pi i \cdot \left[ \frac{z}{z^3+z^2+z+1} \right]_{z=1} = \frac{\pi i}{2}$$

$$(3) \oint_{|z|=2} \frac{z^2-1}{z^2+1} dz$$

被积函数在圆周  $|z|=2$  内有且仅有  $z=\pm i$  两个奇点, 由 Cauchy 定理和 Cauchy 积分公式:

$$I = \oint_{|z+i|=\delta_1} \frac{z^2-1}{z^2+1} dz + \oint_{|z-i|=\delta_2} \frac{z^2-1}{z^2+1} dz = 2\pi i \cdot \left[ \frac{z^2-1}{z-i} \right]_{z=-i} + 2\pi i \cdot \left[ \frac{z^2-1}{z+i} \right]_{z=i} = 0$$

$$(4) \oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2(z^2+16)} dz$$

被积函数在圆周  $|z|=2$  内有且仅有  $z=0$  一个奇点, 由 Cauchy 定理和 Cauchy 积分公式:

$$I = \oint_{|z|=\delta} \frac{1}{z^2(z^2+16)} dz = 2\pi i \cdot \left[ \frac{1}{z^2+16} \right]_{z=0}^{(1)} = 2\pi i \cdot \left[ -\frac{2z}{(z^2+16)^2} \right]_{z=0} = 0$$

### 4.2 计算下列积分

$$(1) \oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2-1} dz$$

被积函数在圆周  $|z|=R$  内有且仅有  $z=1$  一个奇点, 则:

$$I = 2\pi i \cdot \left[ \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} \right]_{z=1} = \frac{\sqrt{2}\pi i}{2}$$

$$(2) \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{|z|=R} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2-1} dz$$

被积函数在圆周  $|z|=R$  内有且仅有  $z=\pm 1$  两个奇点, 则:

$$I = 2\pi i \cdot \left[ \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z-1} \right]_{z=-1} + 2\pi i \cdot \left[ \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} \right]_{z=1} = \sqrt{2}\pi i$$

$$(3) \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2-1} dz$$

被积函数在圆周  $|z|=R$  内有且仅有  $z=-1$  一个奇点, 则:

$$I = 2\pi i \cdot \left[ \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z-1} \right]_{z=-1} = \frac{\sqrt{2}\pi i}{2}$$

### 4.3 计算积分 $\int_L \frac{1}{(z-a)^n} dz$ , 其中 $L$ 为以 $a$ 为圆心, $r$ 为半径的上半圆周

作变换  $z \rightarrow z+a$ , 则原积分化为  $\int_{L'} \frac{1}{z^n} dz$ , 其中  $L'$  是以 0 为圆心,  $r$  为半径的上半圆周。当  $n=1$ , 时,  $\frac{1}{z}$  在  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  内解析,  $I(n) = [\ln z]_{z=r}^{z=-r} = \ln(-1) = i\pi$ ; 当  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$  时,  $\frac{1}{z^n}$  在  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  内解析,  $I(n) = \left[ \frac{z^{1-n}}{1-n} \right]_{z=r}^{z=-r} = \frac{1}{1-n} [(-r)^{1-n} - r^{1-n}]$ 。综上, 我们有:

$$I(n) = \int_L \frac{1}{(z-a)^n} dz = \begin{cases} i\pi, & n=1 \\ [(-1)^{1-n} - 1] \cdot \frac{r^{1-n}}{1-n}, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\} \end{cases}$$

### 4.4 计算积分 $\oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)} dz$ , 其中 $a, b$ 不在圆周 $|z|=R$ 上, $n$ 为正整数

令  $G = \{z \mid |z|=R\}$ , 共有四种情况, 总结如下:

$$I = \oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)} dz = \begin{cases} 0, & a, b \notin G \\ \frac{(-1)^{n-1} 2\pi i}{(a-b)^n}, & a \in G, b \notin G \\ \frac{2\pi i}{(b-a)^n}, & b \in G, a \notin G \\ 0, & a, b \in G \end{cases}$$

### 4.5 (附加题) $f(z)$ 在 $|z| < R$ 内解析, 求证 $I(r) = \int_0^{2\pi} f(r \cdot e^{i\theta}) d\theta$ 与 $r$ 无关, $\forall r \in (0, R)$

设  $f(z)$  在  $G$  内解析, 由 Cauchy 积分公式:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

在上式中, 取  $G = \{z \mid |z-a|=r, r \in (0, R)\}$ , 也即以  $a$  为圆心,  $r$  为半径的圆周, 则有  $z-a = r \cdot e^{i\theta}$ ,  $dz = ire^{i\theta} d\theta$ , 代入即得:

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(z)}{r \cdot e^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} f(z) d\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} f(r \cdot e^{i\theta}) d\theta \\ &\implies \oint_0^{2\pi} f(r \cdot e^{i\theta}) d\theta = 2\pi f(a), \quad \forall r \in (0, R) \quad \square \end{aligned}$$

## **Homework 5: 2024.9.23 - 2024.9.29**