

线性代数(2024春)(Linear Algebra)

作业14

1. 设 φ 和 ψ 是欧几里得空间 V 上两个正定自伴随算子且 $\varphi\psi = \psi\varphi$ 。证明 $\varphi\psi$ 也是一个正定自伴随算子。

2. 给定

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

求 2×2 的正定Hermitian矩阵 Q 和酉矩阵 T 使得 $A = QT$ (极化分解)。

3. 给定

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

求 2×2 的正定矩阵 Q 和正交矩阵 T 使得 $A = QT$ (极化分解)。

4. 如果有限维欧几里得空间 V 上的一个正规算子 φ 的特征值为

$$1, -1, 2, 3, 2 + 3i, 2 - 3i, 5 + 7i, 5 - 7i.$$

求它的标准型 $J[\varphi]$ 。

5. 证明 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ 是正规的充分必要条件是存在 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ 使得 $tA = f(A)$ 。