线性代数(2024春)(Linear Algebra)

作业8

1. 设V是$\mathbb{F}$上的n维向量空间且$\varphi \in \mathscr{L}(V)$满足$\{e_V, \varphi^1, \varphi^2, ..., \varphi^{n-1}\}$线性无关。证明存在$v \in V$使得$\{v, \varphi(v), \varphi^2(v), ..., \varphi^{n-1}(v)\}$是$V$的一组基(提示：对任意$u \in V$，研究满足$\mu_u(\varphi)(u) = 0$的次数最小的首一多项式$\mu_u(x) \in \mathbb{F}[x]$)。

2. 设$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$是实向量空间V的一组基且线性算子φ在该基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

求φ的所有特征值和相应的特征向量。

3. 设$A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$且$n > 3$。写出特征多项式$|xI_n - A|$中$x, x^{n-2}$和$x^{n-1}$的系数以及常数项。

4. 将矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

对角化并求A^m。

5. 设V是$\mathbb{C}$上的有限维向量空间且$\varphi \in \mathscr{L}(V)$。证明$\varphi$可对角化的充分必要条件是$V$的任意一个关于$\varphi$不变的子空间都有关于$\varphi$不变的补空间。

6. 设V是$\mathbb{C}$上的有限维向量空间且$\varphi, \psi \in \mathscr{L}(V)$。如果$\varphi\psi = \psi\varphi$，证明存在$\varphi$的$\psi$的共同的特征向量。

7. 如果φ和ψ是有限维向量空间V上的两个可交换($\varphi\psi = \psi\varphi$)且可对角化的线性算子，证明存在$V$的一组基使得它们在该基下的矩阵都是对角矩阵(也称$\varphi$和$\psi$可同时对角化)。