线性代数(2024春)(Linear Algebra)

作业7

1. 设$\varphi, \psi \in \mathscr{L}(V)$为两个投影算子，而且$\varphi + \psi$也是一个投影算子。证明$\varphi\psi = 0$。

2. 设$V = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{1, e^x, e^{-x}\}$和$D = d/dx$为求导算子。回忆双曲函数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

(a) 求由基$\{1, e^x, e^{-x}\}$向基$\{1, \cosh x, \sinh x\}$的转换矩阵S; (b) 求D在基$\{1, e^x, e^{-x}\}$下的矩阵B; (c) 求D在基$\{1, \cosh x, \sinh x\}$下的矩阵A; (d) 验证$A = SBS^{-1}$.

3. 设$A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$。证明$A$和$B$相似的充分必要条件是存在$S \in GL_n(\mathbb{F})$和$T \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$使得$A = ST$和$B = TS$。

4. 设$\varphi, \psi \in \mathscr{L}(V)$满足$\varphi\psi - \psi\varphi = e_V$。证明：对任意正整数$k$, 有$\varphi^k\psi - \psi\varphi^k = k\varphi^{k-1}$。

5. 设V是$\mathbb{F}$上的有限维向量空间且$\varphi \in \mathscr{L}(V)$。假设存在正整数$m$使得 $\mathrm{Im}\,\varphi^m = \mathrm{Im}\,\varphi^{m+1}$。证明$V = \mathrm{Im}\,\varphi^m \oplus \ker_{\varphi^m}$。

6. 设$0 \neq \mathcal{D} \in \mathscr{L}(M_{n\times n}(\mathbb{F}))$满足

$$\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D}(A)\mathcal{D}(B), \qquad \forall A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F}).$$

证明存在一个可逆矩阵$T \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$使得

$$\mathcal{D}(A) = TAT^{-1}, \qquad \forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$$

(提示：利用本章定理3和$M_{n\times n}(\mathbb{F})$的标准基的乘积公式$E_{ir}E_{rj} = E_{ij}$)。