数学物理方法课程作业
Homework of Mathematical Physics Methods

丁毅
中国科学院大学，北京 100049
Yi Ding
University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

2024.8 – 2025.1

序言

本文为笔者本科时的“数学物理方法”课程作业（Homework of Mathematical Physics Methods, 2024.9-2025.1）。由于个人学识浅陋，认识有限，文中难免有不妥甚至错误之处，望读者不吝指正，在此感谢。

我的邮箱是 dingyi233@mails.ucas.ac.cn。

目录

Homework 1: 2024.8.26 - 2024.9.1

1.1 计算

(1) $(\frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}})^2$

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^2 = \left(\frac{(1+i)(2+i)}{5}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{-8+6i}{25}$$

(2) $(1+i)^n + (1-i)^n$

首先得到：

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},\ 1-i = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$$
$$\Longrightarrow I = 2^{\frac{n}{2}}\left(e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right)$$

于是有：

$$I = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}+1}, & n = 0+4k \\ 2^{\frac{n+1}{2}}, & n = 1+4k \\ 0\quad, & n = 2+4k \\ -2^{\frac{n}{2}+1}, & n = 3+4k \end{cases}\quad,\quad k\in\mathbb{N}$$

习题课补：

$$\begin{aligned} I &= 2^{\frac{n}{2}}\left(e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right) \\ &= 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos(\frac{n\pi}{4}) + i\sin\frac{n\pi}{4} + \cos(-\frac{n\pi}{4}) + i\sin(-\frac{n\pi}{4})\right) \\ &= 2^{\frac{n}{2}+1}\cos(\frac{n\pi}{4}) \end{aligned}$$

(3) $\sqrt[4]{1+i}$

$$\sqrt[4]{1+i} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{\pi}{16}}$$

习题课补：在复数域中，开根号是多值函数，这里四次根在复数域中应有四个复根，设 $x = \sqrt[4]{1+i}$，则原式等价于方程：

$$x^4 = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Longrightarrow |x| = 2^{\frac{1}{8}},\quad \arg x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, k = 0,1,2,3$$

1.2 将复数化为三角或指数形式

(1) $\frac{5}{-3+i}$

$$\frac{5}{-3+i} = \frac{5e^{i0}}{\sqrt{10}e^{i(\arctan(-\frac{1}{3})+\pi)}} = \sqrt{\frac{5}{2}}\cdot e^{-i(\arctan(-\frac{1}{3})+\pi)}$$

(2) $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$

$$\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}e^{i\arctan(\frac{1}{2})}}{\sqrt{13}e^{i\arctan(-\frac{2}{3})}}\right)^2 = \frac{5}{13}e^{2i\left(\arctan(\frac{1}{2})-\arctan(-\frac{2}{3})\right)}$$

1.3 求极限 $\lim_{z\to i}\frac{1+z^6}{1+z^{10}}$

作不完全因式分解：

$$1+z^6 = z^6 - i^6 = (z^3-i^3)(z^3+i^3) = (z-i)(z^2+iz+i^2)(z^3+i^3)$$

$$
\begin{aligned}
1+z^{10}=z^{10}-i^{10}=(z^5-i^5)(z^5+i^5)=(z-i)(z^4+iz^3+i^2z^2+i^3z+i^4)(z^5+i^5) \\
\Longrightarrow L=\lim_{z\to i}\frac{1+z^6}{1+z^{10}}&=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)(z^2+iz+i^2)(z^3+i^3)}{(z-i)(z^4+iz^3+i^2z^2+i^3z+i^4)(z^5+i^5)} \\
&=\lim_{z\to i}\frac{(z^2+iz+i^2)(z^3+i^3)}{(z^4+iz^3+i^2z^2+i^3z+i^4)(z^5+i^5)} \\
&=\frac{(-3)\times(-2i)}{5i}=\frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

事实上，实数域上的洛必达法则（L'Hospital）可以推广到复数域的解析函数，下面给出 $\frac{0}{0}$ 型的证明。设复变函数 $f(z),g(z)$ 在 $z=z_0$ 解析，且 $f(z_0)=g(z_0)=0$，则有：

$$
\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}
$$

特别地，若 $f'(z_0)$ 与 $g'(z_0)$ 存在且不为零，就有 $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$

1.4 讨论函数在原点的连续性

(1) $f(z)=\begin{cases}\frac{1}{2i}(\frac{z}{z^*}-\frac{z^*}{z}), & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$

令 $z=x+iy, x,y\in\mathbb{R}$，则 $\forall\,(x,y)\neq(0,0)$:

$$
f(x,y)=\frac{1}{2i}\left(\frac{x+iy}{x-iy}-\frac{x-iy}{x+iy}\right)=\frac{1}{2i}\cdot\frac{4ixy}{x^2+y^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}
$$

令 $k=\frac{y}{x}$，则：

$$
L=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2k}{1+k^2}
$$

显然，L 随着 k 的变化而变化，因此极限不存在，$f(z)$ 在 0 处不连续。

(2) $f(z)=\begin{cases}\frac{\operatorname{Im} z}{1+|z|}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$

令 $z=x+iy$ 和 $k=\frac{y}{x}$，则 $\forall\,(x,y)\neq(0,0)$:

$$
f(x,y)=\frac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\Longrightarrow\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\frac{0}{1+0}=0=f(0,0)
$$

因此 $f(z)$ 在 0 处连续。

(3) $f(z)=\begin{cases}\frac{\operatorname{Re} z^2}{|z^2|}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$

同理令 $z=x+iy$ 和 $k=\frac{y}{x}$，则 $\forall\,(x,y)\neq(0,0)$:

$$
f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}
$$

因此 $f(z)$ 在 0 处不连续。

1.5 恒等式证明（附加题）

$$
\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right|^2=\sum_{i=1}^n|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^n|b_i|^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left|a_ib_j^*-a_jb_i^*\right|^2
$$

Homework 2：2024.9.2 - 2024.9.8

2.1 下列函数在何处可导，何处解析

(1) $f(z) = z \cdot \mathrm{Re}\, z$

设 $z = x + iy$，则 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 + ixy$。$\forall\, z \in C$，$u(x, y) = x^2$ 和 $v(x, y) = xy$ 在 $\mathbb{C}$ 上有连续一阶偏导，下面考虑 C-R 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x \tag{2.2}$$

联立 C-R 条件，得 $(x, y) = (0, 0)$，因此 f 在 $(0, 0)$ 处可导，在 $\mathbb{C}$ 上不解析。不在点 $(0, 0)$ 上解析是因为在某点解析是指在此点的有心邻域上解析，显然这里不满足，因此 $(0, 0)$ 为奇点。

后补：

$$u, v \text{ 有一阶连续偏导且满足 C-R 条件} \Longrightarrow u, v \text{ 可微且满足 C-R 条件} \Longleftrightarrow f \text{ 可微} \Longleftrightarrow f \text{ 可导}$$

(2) $f(x, y) = (x - y)^2 + 2i(x + y)$

$\forall\, z \in C$，$u(x, y) = (x - y)^2$ 和 $v(x, y) = 2(x + y)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有连续一阶偏导，下面验证 C-R 条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x - y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2(x - y) \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \tag{2.4}$$

联立 C-R 条件后无解，因此 f 在 $\mathbb{C}$ 上不可导，在 $\mathbb{C}$ 上不解析。

2.2 求下列函数的解析区域

(1) $f(z) = xy + iy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

欲满足 C-R 条件，则：

$$y = 1,\ x = 0 \Longrightarrow f \text{ 在全平面不解析}$$

不在点 $(0, 1)$ 上解析是因为在某点解析是指在此点的有心邻域上解析，显然这里不满足。

(2) $f(z) = \begin{cases} |z| \cdot z, & |z| < 1 \\ z^2, & |z| \geqslant 1 \end{cases}$

设 $z = x + iy$，则：

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \begin{cases} (x\sqrt{x^2 + y^2}) + i(y\sqrt{x^2 + y^2}), & \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \\ (x^2 - y^2) + i(2xy), & \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow u(x, y) = \begin{cases} x\sqrt{x^2 + y^2}, & \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \\ x^2 - y^2, & \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 1 \end{cases}, \quad v(x, y) = \begin{cases} y\sqrt{x^2 + y^2}, & \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \\ 2xy, & \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 1 \end{cases}$$

分别求偏导得到：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}, \quad \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, & \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, & \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \end{cases}, \quad \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 1$$

偏导要满足 C-R 条件，代入得到：

$$x^2 = y^2,\ 2xy = 0, \quad \forall \sqrt{x^2+y^2} < 1, x^2+y^2 \neq 0$$
$$2x = 2x,\ -2y = -2y, \quad \forall \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 1$$
$$\Longrightarrow f(z) \text{ 在 } \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geqslant 1\} \text{ 上解析}$$

不在点 $(0,0)$ 上解析是因为在某点解析是指在此点的有心领域上解析，显然这里不满足。

后补：解析区域必须是开集（因为受“有心邻域”限制），f 的解析区域应为 $\{z \mid |z| > 1\}$。另外，$|z| = 1$ 代表的圆周上也不可微，这是因为 f 在 $|z| = 1$ 上不连续（内部是一倍幅角，外部是二倍幅角），所以可微区域也为 $\{z \mid |z| > 1\}$。

2.3 已知解析函数 $f(z)$ 的实部如下，求 $f(z)$

(1) $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$

$$v'_x = -u'_y = 2y, \quad v'_y = u'_x = 2x+1$$
$$\Longrightarrow v(x,y) = \int 2y\ \mathrm{d}x + \int \mathrm{d}y = 2xy + y + C$$
$$\Longrightarrow f(x,y) = (x^2 + y^2 + x) + i(2xy + y) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

(2) $u(x,y) = e^y \cos x$

$$v'_x = -u'_y = -e^y \cos x, \quad v'_y = u'_x = -e^y \sin x$$
$$\Longrightarrow v(x,y) = \int -e^y \cos x\ \mathrm{d}x + \int 0\ \mathrm{d}y = -e^y \sin x + C$$
$$\Longrightarrow f(x,y) = (e^y \cos x) + i(-e^y \sin x) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

2.4 f 解析，且 $u - v = (x-y)(x^2+4xy+y^2)$，求 $f(z)$

两边分别对 x, y 求导，得到：

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 + 6xy - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 6xy - 3y^2$$

联立 C-R 条件，可以解出：

$$v'_x = -3x^2 + 3y^2, \quad v'_y = 6xy$$
$$u'_x = 6xy, \quad u'_y = 3x^2 - 3y^2$$
$$\Longrightarrow v(x,y) = -x^3 + 3xy^2 + C, \quad u(x,y) = 3x^2y - y^3 + C$$
$$\Longrightarrow f(x,y) = (3x^2y - y^3) + i(-x^3 + 3xy^2) + C(1+i),\ C \in \mathbb{R}$$

后补：u 和 v 中的实常数 C 其实是同一个！这是因为题目中 $u - v$ 没有常数项，说明两者积分常数相同。

2.5 极坐标 C-R 条件

证明极坐标下的 C-R 条件为：

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

极坐标变换：

$$x = x(r,\theta) = r\cos\theta, \quad y = y(r,\theta) = r\sin\theta$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta,\ \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta,\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta,\ \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

由复合函数的求导法则：

$$\frac{\partial}{\partial r}u\left(x(r,\theta),y(r,\theta)\right) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\cdot\sin\theta$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta}v\left(x(r,\theta),y(r,\theta)\right) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\cdot r\sin\theta + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\cdot r\cos\theta$$

联立 C-R 条件，化简得到：

$$v'_r = -u'_y\cos\theta + u'_x\sin\theta = \frac{1}{r}u'_\theta$$

同理，由偏导关系：

$$\frac{\partial}{\partial \theta}u\left(x(r,\theta),y(r,\theta)\right) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot r\sin\theta + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\cdot r\cos\theta$$
$$\frac{\partial}{\partial r}v\left(x(r,\theta),y(r,\theta)\right) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\cdot\sin\theta$$

联立 C-R 条件，化简得到：

$$u'_r = u'_x\cos\theta + u'_y\sin\theta = \frac{1}{r}v'_\theta$$

反之也可以化为原 C-R 条件，因此 C-R 条件在极坐标下的形式为：

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \square$$

2.6 证明 $f(z)$ 和 $\overline{f(\bar{z})}$ 同解析或同不解析

(1) $f(z)$ 解析 $\Longrightarrow$ $\overline{f(\bar{z})}$ 解析

假设 $f(z)$ 在点 $z = z_0$ 解析，即 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在有心邻域 $U_\delta(z_0)$ 上解析，这等价于 $f(z)$ 有一阶导，且在邻域内满足 C-R 条件。设 $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = u(x,-y) - iv(x,-y)$，也即：

$$g(z) = u_g(x,y) + iv_g(x,y), \quad u_g(x,y) = u(x,-y),\ v_g(x,y) = -v(x,-y)$$

容易验证 $g(z)$ 有一阶偏导，下面验证 C-R 条件：

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,-y), \quad \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{\partial u(x,-y)}{\partial(-y)}\cdot\frac{\partial(-y)}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,-y)$$
$$\frac{\partial v_g}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,-y), \quad \frac{\partial v_g}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,-y)}{\partial(-y)}\cdot\frac{\partial(-y)}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}(x,-y)$$

联立 u 和 v 的 C-R 条件，得到：

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} - \frac{\partial v_g}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,-y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x,-y) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u_g}{\partial x} = \frac{\partial v_g}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u_g}{\partial y} + \frac{\partial v_g}{\partial x} = -\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,-y) + \frac{\partial v}{\partial x}(x,-y)\right] = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u_g}{\partial y} = -\frac{\partial v_g}{\partial x}$$

因此 $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ 也解析。

(2) $f(z)$ 解析 $\Longleftarrow$ $\overline{f(\bar{z})}$ 解析

假设 $\overline{f(\bar{z})}$ 解析，令 $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$，则 $f(z) = \overline{g(\bar{z})}$，由 (1) 的结论，$g(z)$ 解析 $\Longrightarrow$ $f(z) = \overline{g(\bar{z})}$ 也解析。证毕。□

Homework 3：2024.9.9 - 2024.9.15

3.1 若 $f(z)$ 解析，$\arg f(z)$ 是否为调和函数？

注：下面的过程仅讨论了 $\arg f(z)$ 的解析性，未能揭示其调和性，正确的解答见后文补充的灰色小字。

(1) 当 $f(z) = C \in \mathbb{C}, \forall\, z \in G$，也即 $f(z)$ 恒为常量时：$\arg f(z)$ 也为常量，设 $\arg f(z) = a + ib$，则 $a = \arg f(z) \in R$ 而 $b = 0$，自然满足 $\Delta\, a = \Delta\, b = 0$，因此 $\arg f(z)$ 为调和函数。

(2) 当 $f(z)$ 是非常量函数时：

由 $\ln z = \ln|z| + i\arg z$，移项，并作映射 $z \to f(z)$，则有：

$$\arg f(z) = \frac{1}{i}\left(\ln f(z) - \ln\rho\right)$$

函数 ln 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上解析，但对于函数 $\rho = \rho(z)$：

$$\rho = \sqrt{u^2+v^2} \Longrightarrow u_\rho = \sqrt{u^2+v^2}, v_\rho = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial x} = \frac{uu'_x}{\sqrt{u^2+v^2}} + \frac{vv'_x}{\sqrt{u^2+v^2}},\quad \frac{\partial u_\rho}{\partial y} = \frac{uu'_y}{\sqrt{u^2+v^2}} + \frac{vv'_y}{\sqrt{u^2+v^2}} \tag{3.2}$$

假设 ρ 满足 C-R 条件，代入得到：

$$\begin{cases} uu'_x + vv'_x = 0 \\ uu'_y + vv'_y = 0 \\ \sqrt{u^2+v^2} \neq 0 \end{cases}$$

由于 $f(z)$ 解析，满足 C-R 条件 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$，代入后整理得到：

$$\begin{cases} v(v'^2_y - u'^2_y) = 0 \\ u(u'^2_y + v'^2_y) = 0 \end{cases}$$

$f(z)$ 非常量，因此 u, v 非常量，因此只能有：

$$v'_y = u'_y = 0 \Longrightarrow u'_x = v'_x = 0 \Longrightarrow u \text{ 和 } v \text{ 为常量函数}$$

这使得 $f(z) = u + iv$ 是常量，矛盾！因此 $\arg f(z)$ 不解析（这能否推出不调和？解析是调和的充分条件，但是充要的吗？事实上并不是，因此并不能揭示调和性）。

后补：即使仅从解析性的角度来看，上面的过程也没有抓到主要矛盾，是舍本逐末了。因为无论 $f(z)$ 的性质如何，$\arg f(z)$ 始终是 $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ 的函数，这表明 $\arg f(z)$ 是实部是它本身而虚部恒为 0，因此，由 C-R 条件可知 $\arg f(z)$ 解析的必要条件是实部为常数，而这也是充分条件。

对 $\arg f(z)$ 的调和性，我们有如下推导：

$$\arg f(z) = \arctan\frac{u(x,y)}{v(x,y)} + A,\quad A \in \{0, \pi\} \tag{3.3}$$

令 $g(z) = \arg f(z)$，则有：

$$g'_x = \frac{uv'_x - u'_x v}{u^2+v^2},\quad g''_{xx} = \frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left[(u^2+v^2)(uv''_{xx} + u''_{xx}v) - 2uv(v_x^2 - u_x^2) - 2(u^2-v^2)u'_x v'_x\right] \tag{3.4}$$

对 y 求导也是同理，只需将上面的角标 x 换为 y，于是有 $\Delta\, g$:

$$\begin{aligned}\Delta\, g &= g''_{xx} + g''_{yy} \\ &= \frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left[(u^2+v^2)(u(v''_{xx}+v''_{yy}) + (u''_{xx}+u''_{yy})v) - 2uv(v_x^2+v_y^2-u_x^2-u_y^2) - 2(u^2-v^2)(u'_x v'_x + u'_y v'_y)\right]\end{aligned}$$

f 解析意味着 u, v 构成一对共轭调和函数，有 $\Delta\, u = \Delta\, v = 0$，代入上式，再代入 C-R 条件，容易验证右边为 0，也即证明了 $\Delta\, g = 0$，因此 $\arg f(z)$ 为调和函数。对 $u^2+v^2 = 0$ 的情况，我们不再赘述，只关心普遍结论。

3.2 从已知的实虚部求出解析函数 $f(z)$

(1) $u = e^x(x\cos y - y\sin y) + 2\sin x \cdot \sinh y + x^3 - 3xy^2 + y$

$$u'_x = e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y) + 2\cos x \sinh y + 3x^2 - 3y^2 \tag{3.5}$$
$$u'_y = e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y) + 2\sin x \cosh y - 6xy + 1 \tag{3.6}$$

由 C-R 条件，$v'_x = -u'_y,\ v'_y = u'_x$，于是得到：

$$v(x,y) = \int (-u'_y)\mathrm{d}x + \int (-3y^2)\mathrm{d}y \tag{3.7}$$
$$= (x-1)e^x \sin y + (\sin y + y\cos y)e^x + 2\cos x \cosh y + 3x^2 y - x - y^3 + C \tag{3.8}$$
$$= (x\sin y + y\cos y)e^x + 2\cos x\cosh y + 3x^2y - x - y^3 + C,\ C\in\mathbb{R} \tag{3.9}$$

令 $(x,y) = (z,0)$，得到：

$$u(z,0) = ze^z + z^3,\quad v(z,0) = 2\cos z - z + C,\ C\in\mathbb{R} \tag{3.10}$$

于是得到 $f(x,y)$:

$$f(z) = [u(x,y) + iv(x,y)]_{x=z,y=0} = (ze^z + z^3) + i(2\cos z - z + C),\ C\in\mathbb{R}$$

(2) $v = \ln(x^2+y^2) + x - 2y$

$$v'_x = \frac{2x}{x^2+y^2} + 1,\quad v'_y = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2$$

由 C-R 条件，$u'_x = v'_y,\ u'_y = -v'_x$，于是得到：

$$u(x,y) = \int v'_y \mathrm{d}x + \int (-1)\mathrm{d}y = 2\arctan\frac{x}{y} - 2x - y + C \tag{3.11}$$

$$f(x,y) = u + iv = (2\arctan\frac{x}{y} - 2x - y + C) + i(\ln(x^2+y^2) + x - 2y),\ C\in\mathbb{R}$$

后补，这里之所以没有令 $(x,y) = (z,0)$ 得到 $f(z)$，是因为函数 $\arctan\frac{x}{y}$ 在实轴附近是不连续的，例如在正实轴 $x>0$ 附近，$\lim_{y\to 0^+}$ 时趋于 $+\infty$ 而 $\lim_{y\to 0^-}$ 时趋于 $-\infty$。而映射 $(x,y) = (z,0)$ 的必要条件是解析域中包含实轴，这涉及到解析延拓的内容，我们不提。只需要写到 $f(x,y)$ 的形式就这样放着即可。

3.3 求下列函数的值

(1) $\cos(2+i)$

由 $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$，可得：

$$\begin{aligned}\cos(2+i) &= \frac{1}{2}\left[e^{i(2+i)} + e^{i(2-i)}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{2i-1} + e^{1-2i}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(\frac{1}{e}+e)\cos 2 + i(\frac{1}{e}-e)\sin 2\right]\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{Ln}\,(2-3i)$

由 $\mathrm{Ln}\,z = \ln a + i\,\mathrm{Arg}\,z$，可得：

$$\mathrm{Ln}\,(2-3i) = \ln|2-3i| + i\,\mathrm{Arg}\,(2-3i) = \frac{1}{2}\ln 13 + i\left(\arctan(-\frac{3}{2}) + 2k\pi\right),\quad k\in\mathbb{Z}$$

(3) $\mathrm{Arccos}\,(\frac{3+i}{4})$

$\arccos z = -i\ln(z+\sqrt{z^2-1})$，于是：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arccos}\,(\frac{3+i}{4}) &= -i\,\mathrm{Ln}\left(\frac{3+i}{4}+\sqrt{(\frac{3+i}{4})^2-1}\right) = -i\,\mathrm{Ln}\left(\frac{3+i}{4}+\frac{\sqrt{-8+6i}}{4}\right)\\
&= -i\,\mathrm{Ln}\left(\frac{3+i}{4}\pm\frac{1+3i}{4}\right) = -i\,\mathrm{Ln}\,(1+i) \text{ 或 } -i\,\mathrm{Ln}\,(\frac{1-i}{2})\\
&= (\frac{\pi}{4}+2k\pi)-i\frac{\ln 2}{2} \text{ 或 } -(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i\frac{\ln 2}{2}, \quad k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

(4) $\mathrm{Arctan}\,(1+2i)$

由 $\mathrm{Arctan}\,z=\frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1+iz}{1-iz}$，得：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arctan}\,(1+2i) &= \frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{1+i(1+2i)}{1-i(1+2i)}\right) = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\left(\frac{-1+i}{3-i}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\,\mathrm{Ln}\,(-2+i)-\ln 5\right) = \frac{1}{2i}\left[-\frac{\ln 5}{2}+i\left(\pi-\arctan(-\frac{1}{2})+2k\pi\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left(\pi-\arctan(-\frac{1}{2})+2k\pi\right)+i\frac{\ln 5}{4}, \quad k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

3.4 判断下列函数是单值还是多值函数

(1) $\sin\sqrt{z}$

多值函数。$\sqrt{z}$ 为双值函数，$a^2=z\Longrightarrow\sqrt{z}=\pm a$，而 sin 为奇函数，$\sin a\neq\sin(-a)$，故为多值函数。

(2) $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$

单值函数。$\frac{\sin a}{a}=\frac{\sin(-a)}{-a}$，因此为单值函数。

(3) $\frac{\cos\sqrt{z}}{z}$

单值函数。$\frac{\cos a}{a}=\frac{\cos(-a)}{a}$，故为单值函数。

3.5 解方程：$2\cosh^2 z-3\cosh z+1=0$

原方程等价于：

$$(2\cosh z-1)(\cosh z-1)=0\Longrightarrow\cosh z=\frac{1}{2}\text{ 或 }1 \tag{3.12}$$

$$\xRightarrow{\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}} e^z=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\text{ 或 }1 \tag{3.13}$$

$$\Longrightarrow z=i(\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi)\text{ 或 }i(0+2k\pi), \quad k\in\mathbb{Z} \tag{3.14}$$

3.6 求下列多值函数的分支点

(1) $\sqrt{1-z^3}$ 的分支点：$1,-\frac{1}{2}+i\frac{3}{2},-\frac{1}{2}-i\frac{3}{2},\infty$

$1-z^3=(1-z)[(-\frac{1}{2}+i\frac{3}{2})-z][(-\frac{1}{2}-i\frac{3}{2})-z]$，不妨记为 $1-z^3=(z_1-z)(z_2-z)(z_3-z)$。支点仅可能在宗量的零点、奇点处出现，下面分别考察 z_1,z_2,z_3,∞ 四点。

对 z_1，取仅包含点 z_1 的简单闭合曲线，曲线上一点 z 沿逆时针绕一圈回到原处，因子 (z_1-z) 的幅角增加了 2π，因子 (z_2-z) 和 z_3-z 的幅角增加了 0，因此整个宗量的幅角增加 2π，开根后，函数值幅角增加 π，前后不相等。因此点 z_1 是分支点。同理可得 z_2 和 z_3 是分支点。

对 ∞，取包含点 z_1, z_2, z_3 的简单闭合曲线，曲线上一点 z 沿顺时针（不是逆时针）绕一圈回到原处，整个宗量的幅角增加了 -6π，开根后函数值幅角增加 -3π，因此 ∞ 也是分支点。

(2) $\mathrm{Ln}\cos z$ 的分支点：∞, $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$。

可以证明，$\mathrm{Ln}\, f(z)$ 的分支点等价于方程 $f(z)=0$ 和 $f(z)=\infty$ 的解[①]。于是分别令 $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ 为 0 和 ∞，解得：

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \text{ 或} z=\infty \tag{3.15}$$

(3) $\sqrt{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}$ 的分支点：$0,1,2,\infty$

考虑点 $0,1,2$，取仅包含点 0 的简单闭合曲线，曲线上一点 z 逆时针绕一圈后，宗量整体幅角增加 2π，函数值幅角增加 π，因此点 0 是分支点。同理点 1 和 2 也是分支点。

对 ∞，取包含点 $0,1,2$ 的简单闭合曲线，曲线上一点 z 顺时针绕一圈后，宗量整体幅角增加 -2π，函数值也不发生变化，∞ 不是分支点。

(4) $\mathrm{Ln}\frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)}$ 的分支点：a,b,c,∞

与 (2) 同理，考虑宗量 $\frac{(z-a)(z-b)}{(z-c)}$ 的零点和无穷点，得到 $z=a,b,c,\infty$，即为所求分支点。

[①] 这是助教在习题课上给出的结论，并未给出具体证明。但是我们可以证明 $\mathrm{Ln}\, z$ 的分支点为 0 和 ∞，这是因为 $\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z$，当 z 绕原点逆时针转一圈时，$\mathrm{Arg}\, z$ 增加 2π 而不是回到原来的函数值，因此 0 为分支点；无穷点同理。

Homework 4: 2024.9.16 - 2024.9.22

4.1 计算下列积分

(1) $\displaystyle\oint_{|z+i|=1} \frac{\rho z}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$

没思路了。。。

(2) $\displaystyle\oint_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1}\,\mathrm{d}z,\ a>1$

被积函数 $\frac{z}{z^4-1}$ 在圆周 $|z-a|=a$ 内有且仅有 $z=1$ 一个奇点，由 Cauthy 定理和 Cauthy 积分公式：

$$I = \oint_{|z-1|=\delta} \frac{z}{z^4-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot\left[\frac{z}{z^3+z^2+z+1}\right]_{z=1} = \frac{\pi i}{2}$$

(3) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z^2-1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$

被积函数在圆周 $|z|=2$ 内有且仅有 $z=\pm i$ 两个奇点，由 Cauthy 定理和 Cauthy 积分公式：

$$I = \oint_{|z+i|=\delta_1} \frac{z^2-1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z + \oint_{|z-i|=\delta_2} \frac{z^2-1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot\left[\frac{z^2-1}{z-i}\right]_{z=-i} + 2\pi i\cdot\left[\frac{z^2-1}{z+i}\right]_{z=i} = 0$$

(4) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^2(z^2+16)}\,\mathrm{d}z$

被积函数在圆周 $|z|=2$ 内有且仅有 $z=0$ 一个奇点，由 Cauthy 定理和 Cauthy 积分公式：

$$I = \oint_{|z|=\delta} \frac{1}{z^2(z^2+16)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot\left[\frac{1}{z^2+16}\right]^{(1)}_{z=0} = 2\pi i\cdot\left[-\frac{1}{(z^2+16)^2}\right]_{z=0} = -\frac{\pi i}{128}$$

4.2 计算下列积分

(1) $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$

被积函数在圆周 $|z|=R$ 内有且仅有 $z=1$ 一个奇点，则：

$$I = 2\pi i\cdot\left[\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}\right]_{z=1} = \frac{\sqrt{2}\pi i}{2}$$

(2) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\oint_{|z|=R} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$

被积函数在圆周 $|z|=R$ 内有且仅有 $z=\pm 1$ 两个奇点，则：

$$I = 2\pi i\cdot\left[\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z-1}\right]_{z=-1} + 2\pi i\cdot\left[\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}\right]_{z=1} = \sqrt{2}\pi i$$

(3) $\displaystyle\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$

被积函数在圆周 $|z|=R$ 内有且仅有 $z=-1$ 一个奇点，则：

$$I = 2\pi i\cdot\left[\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z-1}\right]_{z=-1} = \frac{\sqrt{2}\pi i}{2}$$

4.3 计算积分 $\displaystyle\int_L \frac{1}{(z-a)^n}\,\mathrm{d}z$，其中 L 为以 a 为圆心，r 为半径的上半圆周

作变换 $z \to z + a$，则原积分化为 $\int_{L'} \frac{1}{z^n}\,\mathrm{d}z$，其中 L' 是以 0 为圆心，r 为半径的上半圆周。当 $n = 1$，时，$\frac{1}{z}$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内解析，$I(n) = [\ln z]_{z=r}^{z=-r} = \ln(-1) = i\pi$；当 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ 时，$\frac{1}{z^n}$ 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 内解析，$I(n) = \left[\frac{z^{1-n}}{1-n}\right]_{z=r}^{z=-r} = \frac{1}{1-n}\left[(-r)^{1-n} - r^{1-n}\right]$。综上，我们有：

$$I(n) = \int_L \frac{1}{(z-a)^n}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} i\pi, & n = 1 \\ \left[(-1)^{1-n} - 1\right] \cdot \frac{r^{1-n}}{1-n}, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\} \end{cases}$$

4.4 计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)}\,\mathrm{d}z$，其中 a, b 不在圆周 $|z| = R$ 上，n 为正整数

令 $G = \{z \mid |z| = R\}$，共有四种情况，总结如下：

$$I = \oint_{|z|=R} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & a, b \notin G \\ \frac{(-1)^{n-1} 2\pi i}{(a-b)^n}, & a \in G, b \notin G \\ \frac{2\pi i}{(b-a)^n}, & b \in G, a \notin G \\ 0, & a, b \in G \end{cases}$$

4.5 （附加题）$f(z)$ 在 $|z| < R$ 内解析，求证 $I(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r \cdot e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$ 与 r 无关，$\forall\, r \in (0, R)$

设 $f(z)$ 在 G 内解析，由 Cauthy 积分公式：

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z$$

在上式中，取 $G = \{z \mid |z-a| = r,\ r \in (0, R)\}$，也即以 a 为圆心，r 为半径的圆周，则有 $z - a = r \cdot e^{i\theta}$, $\mathrm{d}z = ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$，代入即得：

$$\begin{aligned} f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} \frac{f(z)}{r \cdot e^{i\theta}}\, ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} f(z)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} f(r \cdot e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta \\ \Longrightarrow \oint_0^{2\pi} f(r \cdot e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta = 2\pi f(a), \quad \forall\, r \in (0, R) \quad \square \end{aligned}$$

Homework 5: 2024.9.23 - 2024.9.29