分组号:2-05

《基础物理实验》预习报告

实验名称 RLC 电路的谐振与暂态过程 指导教师

姓 名 丁毅 学号 2023K8009908031 专 业 电子信息工程 班级 02-05 座号 6

实验日期 2024 年 12 月 24 日 实验地点 教 709 是否调课补课 否 成绩评定

1 实验目的

1. 通过观察示波器中的波形研究 RLC 电路的谐振现象。
2. 了解 RLC 电路的相频特性与振幅特性。
3. 通过示波器中的波形观察 RLC 串联电路的暂态过程。

2 实验仪器与用具

标准电感、标准电容，$100\,\Omega$ 标准电阻，电阻箱，电感箱，函数发生器，示波器，数字多用表，导线等。

3 实验原理

3.1 RLC 串联谐振电路

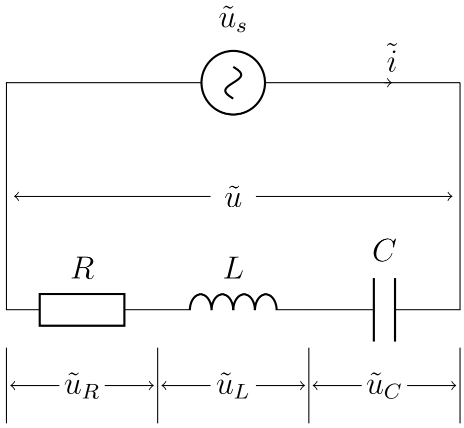

图 1: RLC 串联谐振电路

RLC 串联谐振电路如上图所示，利用复数法[①]分析电路可求得电容 C、电感 L、电阻 R 的复阻抗分别为

$$\tilde{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}, \quad \tilde{Z}_L = j\omega L, \quad \tilde{Z}_R = R$$

[①]本实验报告中复数法记法约定 $\tilde{x}$ 表示复变量，x 表示其模长，虚单位为 $j = \sqrt{-1}$。

进而可求得电路的总复阻抗与总阻抗：

$$\tilde{Z}=R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\Longrightarrow Z=\left|\tilde{Z}\right|=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

电流 i 的大小为

$$i=\frac{u}{Z}=\frac{1}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

路端电压 u 与电流 i 的相位差为

$$\varphi=\arctan\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$$

以上诸式中 $\omega=2\pi f$ 为交变电压 u 的角频率，f 为其频率。可见 Z,φ,i 均为 f 的函数，即当电路中其他元件参量确定的情况下，电路特性将完全取决于频率的大小。

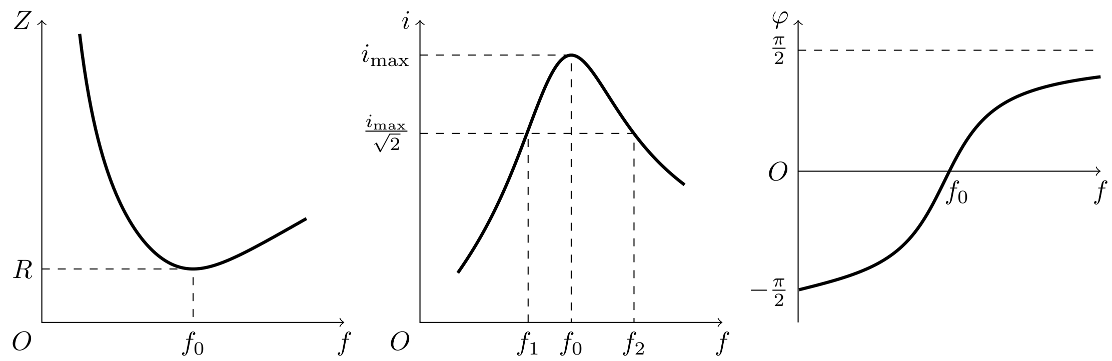

图 2: RLC 串联电路的频率特性

1. 当 $\operatorname{Im}\tilde{Z}=0$，即 $\omega L-\frac{1}{\omega C}=0$ 时，总阻抗呈电阻性，且总阻抗达到最小值 $Z_0=R$，电压与电路的相位差 $\varphi=0$，电流达到最大值 $i_{\max}=\frac{u}{R}$，这种状态称为串联谐振。此时的角频率 ω_0 称为谐振角频率，相应地此时频率 f_0 称为谐振频率，其具体大小为

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}},\quad f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

谐振时，有

$$u_L=i_{\max}Z_L=\frac{\omega_0 L}{R}u,\quad \frac{u_L}{u}=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

而

$$u_C=i_{\max}Z_C=\frac{u}{R\omega_0 C},\quad \frac{u_C}{u}=\frac{1}{R\omega_0 C}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

令

$$Q=\frac{u_L}{u}=\frac{u_C}{u}=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{R\omega_0 C}$$

Q 称为谐振电路的品质因数，是标志和衡量谐振电路性能优劣的重要参量。Q 可衡量的电路

性能有：

(1) 储耗能特性：Q 值越大，相对的储能耗能越小，储能效率越高；

(2) 电压分配特性：谐振时 $u_L = u_C = Qu$，电感、电容上的电压均为总电压的 Q 倍，因此有时称串联谐振为电压谐振。利用电压谐振，可在某些传感器、信息接收中显著提高灵敏度或效率，但在某些应用场合，它对系统和人员却具有一定不安全性，故而在设计与操作中应予以注意。

(3) 频率选择性：设 f_1, f_2 为谢振峰两侧 $i = \frac{i_{\max}}{\sqrt{2}}$ 处对应频率，则 $\Delta f = f_2 - f_1$ 称为通频带宽度，简称带宽。不难证明有

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

当 Q 值越大时，带宽越窄，峰越尖锐，频率选择性越好。

2. 当 $\operatorname{Im}\tilde{Z} > 0$，即 $\omega L - \frac{1}{\omega C} > 0$ 时，总阻抗呈电感性，此时电压与电流相位差 $\varphi > 0$，交变电压频率 $f > f_0$，并且随着 f 的增大，φ 趋近于 $\frac{\pi}{2}$，阻抗越大，电流越小。

3. 当 $\operatorname{Im}\tilde{Z} < 0$，即 $\omega L - \frac{1}{\omega C} < 0$ 时，总阻抗呈电感性，此时电压与电流相位差 $\varphi < 0$，交变电压频率 $f < f_0$，并且随着 f 的减小，φ 趋近于 $-\frac{\pi}{2}$，阻抗越大，电流越小。

3.2 RLC 并联谐振电路

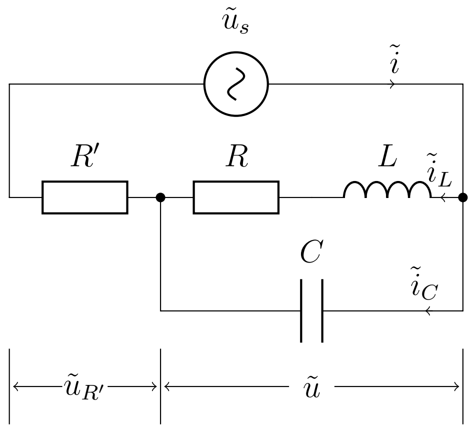

图 3: RLC 并联谐振电路

利用复数法分析上图电路，电容 C、电感 L、电阻 R 的复阻抗分别为

$$\tilde{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}, \quad \tilde{Z}_L = j\omega L, \quad \tilde{Z}_R = R$$

那么电路并联部分的总复阻抗为

$$\tilde{Z}_p = \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}} = \frac{R + j\omega L}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega CR}$$

从而可求得电路并联部分总电阻为

$$Z_p = \left|\tilde{Z}_p\right| = \sqrt{\frac{R^2 + (\omega R)^2}{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}}$$

并联部分电压 u 与干路电流 i 的相位差为

$$\varphi = \arctan\frac{\omega L - \omega C[R^2 + (\omega L)^2]}{R}$$

并联部分电压 u 大小为

$$u = iZ_p = \frac{u_{R'}}{R'} Z_p$$

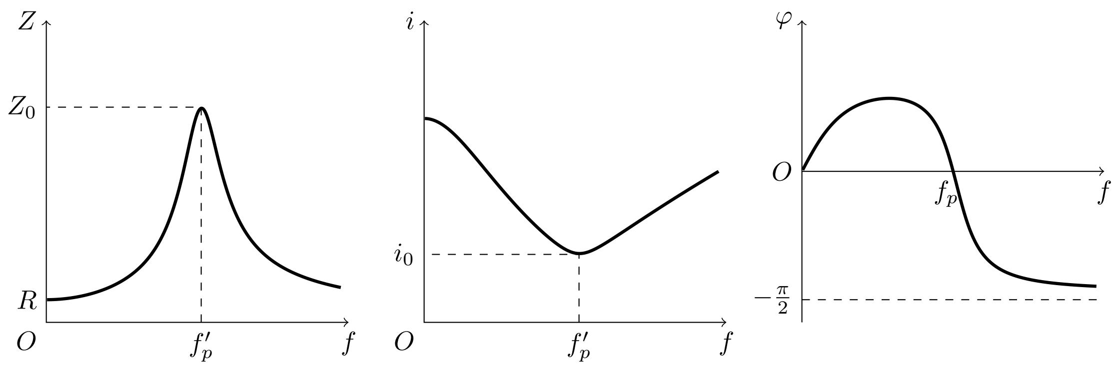

图 4: RLC 并联电路的频率特性

1. 当 $\operatorname{Im}\tilde{Z}_p = 0$，即 $\varphi = 0$ 时，总阻抗呈纯电阻性，可求得其并联谐振的角频率 ω_p 与频率 f_p 为

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}, \quad f_p = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}$$

即并联谐振频率 f_p 与串联谐振频率 f_0 稍有不同，当 $Q \gg 1$ 时，$\omega_p \approx \omega_0$，$f_p \approx f_0$。

2. 当 $f < f_p$ 时，$\varphi > 0$，电流相位落后于电压，整个电路呈电感性。

3. 当 $f > f_p$ 时，$\varphi < 0$，电流相位超前于电压，整个电路呈电容性。

在谐振频率两侧区域，并联电路的电抗特性与串联电路相反。在 $f = f'_p$[②]处总阻抗达到极大值，总电流达到极小值。而在 f'_p 两侧，随 f 偏离 f'_p 越远，阻抗越小，电流越大。

与串联谐振类似，可用品质因数

$$Q_1 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C}, \quad Q_2 = \frac{i_C}{i} \approx \frac{i_L}{i}, \quad Q_3 = \frac{f_0}{\Delta f}$$

来标志并联谐振电路的性能优劣，有时也称并联谐振为电流谐振。

[②] f'_p 与 f_p 稍有不同。

3.3 RLC 电路的暂态过程

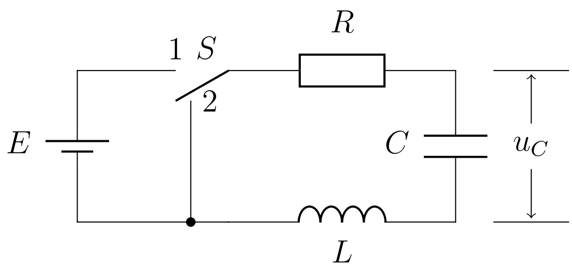

图 5: RLC 串联振荡电路

在 RLC 串联振荡电路中，开关拨向不同的端口，电路呈现为两种状态：当开关 S 拨向 1 时，电源 E 接入电路，为电容 C 进行充电；当开关 S 拨向 2 时，电容在 RLC 串联电路中放电。在放电过程中，根据实际电路可列出常微分方程

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+u_C=0$$

电容存储的电荷量 $q=Cu_C$，那么电路中的电流为

$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

将其代入电路常微分方程即得到关于 u_C 的二阶齐次常微分方程

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$

考虑初始条件即可得到方程组：

$$\begin{cases}LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0\\u_C=E\qquad(t=0)\\C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=0\qquad(t=0)\end{cases}$$

引入阻尼系数 $\zeta=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$，则可将方程组的解分为三种情况：

1. 当 $\zeta<1$，即 $R^2<\frac{4L}{C}$ 时，阻尼不足，上述方程组的解为

$$u_C=\sqrt{\frac{4L}{4L-R^2C}}E\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\cos(\omega t+\varphi)$$

其中时间常量 $\tau=\frac{2L}{R}$，衰减振动的角频率为 $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1-\frac{R^2C}{4L}}$。$\tau$ 的大小决定了振幅衰减的快慢，τ 越小，振幅衰减越迅速。

若 $R^2 \ll \frac{4L}{C}$，振幅的衰减很缓慢，此时

$$\omega \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

近似为 LC 电路自由振动，ω_0 为 $R=0$ 时 LC 回路的固有频率。衰减振动的周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\pi\sqrt{LC}$$

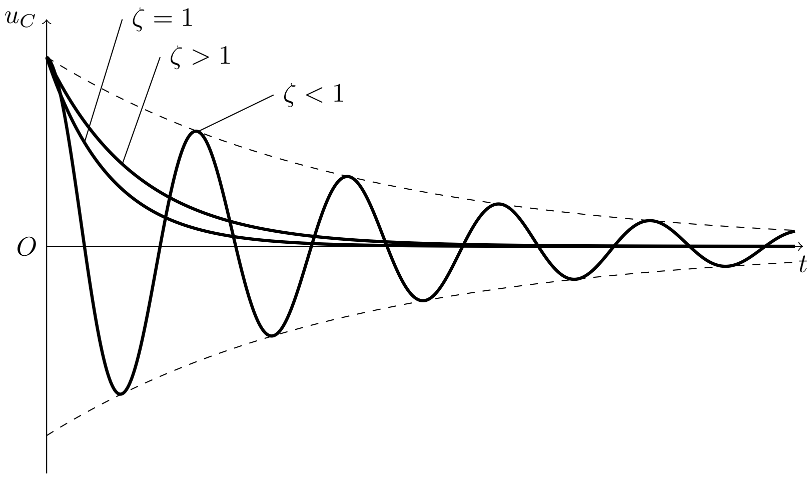

图 6: RLC 暂态过程中的三种阻尼曲线

2. 当 $\zeta > 1$，即 $R^2 > \frac{4L}{C}$ 时，对应过阻尼状态，方程组的解为

$$u_C = \sqrt{\frac{4L}{R^2C - 4L}} E\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \sinh(\beta t + \varphi)$$

其中 $\alpha = \frac{R}{2L}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R^2C}{4L} - 1}$。此时振幅将缓慢地衰减为 0。若固定 L, C。

3. 当 $\zeta = 1$，即 $R^2 = \frac{4L}{C}$ 时，对应临界阻尼状态，方程组的解为

$$u_C = E\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

其中 $\tau = \frac{2L}{R}$，其为从过阻尼到阻尼振动过渡的分界点。

对于充电过程，考虑初始条件，电路方程组变为

$$\begin{cases} LC\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E \\ u_C = 0 \qquad (t = 0) \\ \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad (t = 0) \end{cases}$$

当 $R^2 < \frac{4L}{C}$ 时，方程组的解为

$$u_C = E\left[1 - \sqrt{\frac{4L}{4L - R^C}}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\cos(\omega t + \varphi)\right]$$

当 $R^2 > \frac{4L}{C}$ 时，方程组的解为

$$u_C = E\left[1 - \sqrt{\frac{4L}{R^2C - 4L}}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\sinh(\beta t + \varphi)\right]$$

当 $R^2 = \frac{4L}{C}$ 时，方程组的解为

$$u_C = E\left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]$$

可以看出，充电过程与放电过程十分类似，只是最后趋向的平衡位置不同。

4 实验内容

4.1 测 RLC 串联电路的相频特性曲线和幅频特性曲线

取 $u_{pp} = 2.0\,\mathrm{V}$, $L = 0.1\,\mathrm{H}$, $C = 0.05\,\mu\mathrm{F}$, $R = 100\,\Omega$ 时，用示波器 CH1、CH2 通道分别观测 RLC 串联电路的总电压 u 和电阻两端电压 u_R。注意限制总电压峰值不超过 3.0 V（或有效值不超过 0.1 V），防止串联谐振时产生有危险的高电压。

1. 调谐振，改变函数发生器的输出频率，通过 CH1 与 CH2 相位差为 0，CH2 幅度最大来判断谐振与否，记录谐振时的频率 f_0.

2. 用万用表记录谐振时的电感、电容两端的电压 u_L, u_C，和电源路端电压 u 并计算 Q 值。

3. 保持 CH1 的幅度为 2 V 不变，按照建议的频率点测量 CH1 与 CH2 的相位差、CH2 的幅度值，并绘制相频曲线和幅频曲线，即 $\varphi - f$ 图象、$i - f$ 图象。

4.2 测 RLC 并联电路的相频特性和幅频特性曲线

取 $u + u_{R'} = 2.0\,\mathrm{V}$, $L = 0.1\,\mathrm{H}$, $C = 0.05\,\mu\mathrm{F}$, $R' = 5\,\mathrm{k}\Omega$。为观测电感与电容并联部分的电压和相位，用 CH1 测量总电压，用 CH2 测量 R' 两端电压，两通道测量电压值相减即为并联部分的电压 u，可通过示波器面板上的“MATH”键实现两通道波形相减。

1. 调节函数发生器频率，通过观察 CH1−CH2 与 CH2 相位差为 0，CH2 的幅度最小来判断谐振点，记录此时的频率。

2. 保持 CH1 总电压幅度值 2 V 不变（不同频率点需要调节函数发生器），按照建议的频

率点测量 CH1−CH2 与 CH2 的相位差，与 CH1−CH2、CH2 的幅度值，绘制相频曲线与幅频曲线，即 $\varphi - f$ 图象、$i - f$ 图象、$u - f$ 图象。

4.3 观测 RLC 串联电路的暂态过程

由函数发生器产生方波，为便于观察，需将方波的低电平调整至与示波器的扫描基线一致。由低电平到高电平相当于充电，由高电平到低电平相当于放电。函数发生器各参数可设置为：频率 50 Hz，电压峰峰值 $u_{pp} = 2.0\,\mathrm{V}$，偏移 1 V。示波器 CH1 通道用于测量总电压，CH2 用来测量电容两端电压 u_C，注意两个通道必须共地。实验中 $L = 0.1\,\mathrm{H}$, $C = 0.2\,\mu\mathrm{F}$.

1. 当 $R = 0\,\Omega$ 时，测量 u_C 波形；

2. 调节 R 测得临界电阻 R_C，并与理论值比较；

3. 记录 $R = 2\,\mathrm{k}\Omega$, $20\,\mathrm{k}\Omega$ 的 u_C 波形。函数发生器频率可设置为 250 Hz（$R = 2\,\mathrm{k}\Omega$）和 20 Hz（$R = 20\,\mathrm{k}\Omega$）.

5 实验结果与数据处理