文章编号: 1008-6390(2003)06-0009-02

单调函数单侧极限存在的判别法

谭 伟 明
(梧州市教育学院数学系, 广西梧州 543000)

摘 要: 由数列极限存在的一个判别定理——单调有界原理, 联想到函数极限存在是否也有类似的判别定理, 于是推出了定理 1~ 定理 4. 另外, 在 Heine 定理中, 如果函数 $f(x)$ 是单调函数, 那么就有定理 6~ 定理 8. 我们可应用这几个定理把单调函数极限的问题化为数列极限问题来解决, 对我们判别单调函数极限的存在及计算单调函数的极限都较为方便.

关键词: 单调; 函数; 有界; 极限
中图分类号: O171 文献标识码: A

1 问题的提出

在许多数学分析教材中[1-3], 关于数列极限存在的判别, 一般都给出三种判别方法: 夹逼定理、单调有界原理、柯西收敛准则. 而对函数极限存在的判别, 只给出两种判别方法: 夹逼定理、柯西准则. 那么, 关于函数极限的存在性, 是否有与单调有界原理相应的判别法呢? 我们有下面的定理.

定理 1 若函数 $f(x)$ 在区间 $(a, a+\delta)$ 单调增加(减少) 且有下界(上界), 则函数 $f(x)$ 在点 a 存在右极限.

证明 不妨设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, a+\delta)$ 单调增加且有下界, 则数集 $E=\{f(x) \mid x\in(a, a+\delta)\}$ 有下确界. 设 $\inf E=b$. 下面证明 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=b$.

由下确界的定义, $\forall x\in(a, a+\delta)$, 有 $f(x)\geqslant b$, 且 $\forall \varepsilon>0$, $\exists c\in(a, a+\delta)$, 使 $f(c)<b+\varepsilon$.
所以, $\forall \varepsilon>0$, 取 $\delta'=c-a$, $\forall x: a<x<a+\delta'=c$, 有 $b-\varepsilon<b\leqslant f(x)\leqslant f(c)<b+\varepsilon$, 即 $|f(x)-b|<\varepsilon$,
所以 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=b$ (证毕).

同理可以得到下列的定理.

定理 2 若函数 $f(x)$ 在区间 $(a-\delta, a)$ 单调增加(减少) 且有上界(下界), 则函数 $f(x)$ 在点 a 存在左极限.

定理 3 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, a)$ 单调增加(减少) 且有下界(上界), 则极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 是存在的.

定理 4 若函数 $f(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 单调增加(减少) 且有上界(下界), 则极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 是存在的.

上述定理 2 至定理 4 可仿照定理 1 的方法证明, 在此从略.

2 数列极限与函数极限关系的沟通

在极限理论中, 有一个沟通数列极限与函数极限关系的定理——Heine 定理.[4]

定理 5 函数 $f(x)$ 在点 a 的极限为 A, 当且仅当对任意的数列 $\{x_n\}$: $x_n\to a$, $x_n\neq a$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

很显然, 对在点 a 的左、右极限, 我们也有相应的结论:

定理 5′ 函数 $f(x)$ 在点 a 的右极限为 A, 当且仅当对任意的数列 $\{x_n\}$: $x_n\to a$, $x_n\neq a$, 且 $x_n\geqslant a$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

定理 5″ 函数 $f(x)$ 在点 a 的左极限为 A, 当且仅当对任意的数列 $\{x_n\}$: $x_n\to a$, $x_n\neq a$, 且 $x_n\leqslant a$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

定理 5′ 和定理 5″ 的证明可仿照各数学分析材料中的 Heine 定理的证明进行, 此略. 在定理 5′ 和定理 5″ 中, 如果函数 $f(x)$ 为单调函数, 那么它们的条件是否可以降低些呢? 我们有下列的定理.

收稿日期: 2003-07-29
作者简介: 谭伟明(1962—), 男, 广西梧州市人, 梧州教育学院数学系, 讲师, 主要从事数学分析和数学教育研究.

定理 6　设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, a+\delta)$ 单调, 则函数 $f(x)$ 在点 a 的右极限为 A, 当且仅当对某个数列 $\{x_n\}\subset(a, a+\delta)$: $x_n\to a, x_n\neq a$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

证明　不妨设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, a+\delta)$ 单调增加. 必要性可直接由定理 5′ 得到. 下面证明充分性.

$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$, $\quad\therefore\forall\varepsilon>0, \exists N\in N, \forall n>N$, 有 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$, 即 $A-\varepsilon<f(x_n)<A+\varepsilon$.

$\forall x\in(a, a+\delta)$, 则 $x>a$, 故 $\lim x_n=a<x$. $\quad\therefore\exists k\in N$ (不妨设 $k>N$), $\forall n>k$, 有 $x_n<x$, 从而 $n>k$ 时, 有 $A-\varepsilon<f(x_n)\leqslant f(x)$.

由 ε 的任意性, 可知 $\forall x\in(a, a+\delta)$, 有 $f(x)\geqslant A$. 可以看到 A 是数集 $E=\{f(x)|x\in(a, a+\delta)\}$ 的下确界. 根据定理 1 及其证明, 可知函数 $f(x)$ 在点 a 的右极限为 A. (证毕)

同理我们可以得到下面的定理.

定理 6′　设函数 $f(x)$ 在区间 $(a-\delta, a)$ 单调, 则函数 $f(x)$ 在点 a 的左极限为 A, 当且仅当对某个数列 $\{x_n\}\subset(a-\delta, a)$: $x_n\to a, x_n\neq a$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=A$.

综合定理 6 和定理 6′, 我们可以得到下面的定理.

定理 7　设函数 $f(x)$ 在点 a 的左、右两侧附近分别单调, 则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, 当且仅当且对点 a 左侧某个数列 $\{x_n\}$ 及点 a 右侧某个数列 $\{y_n\}$: $x_n\to a, x_n\neq a, y_n\to a, y_n\neq a$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=A$.

定理 8　设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 单调, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 当且仅当对某个数列 $\{x_n\}\subset(a, +\infty)$, $x_n\to+\infty$, 有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x_n)=A$.

定理 8′　设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, a)$ 单调, 则 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$, 当且仅当对某个数列 $\{x_n\}\subset(-\infty, a)$, $x_n\to-\infty$, 有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x_n)=A$.

3　把单调函数极限问题转化为数列极限问题

应用上述各定理的充分性, 可把单调函数极限的问题转化为数列极限的问题来解决.

例 1　证明函数 $y=a^x$ 在 R 上连续.

证明　函数 $f(x)=a^x$ 在 R 上显然是单调的. 取 $x_n=x_0-1/n$, $y_n=x_0+1/n$, 则数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 满足定理 7 的条件, 在数列极限中已知: $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$, 于是, 我们有

$$\lim_{n\to\infty}a^{x_n}=\lim_{n\to\infty}a^{x_0-\frac{1}{n}}=a^{x_0}\lim_{n\to\infty}a^{-\frac{1}{n}}=a^{x_0};\quad \lim_{n\to\infty}a^{y_n}=\lim_{n\to\infty}a^{x_0+\frac{1}{n}}=a^{x_0}\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=a^{x_0}.$$

由定理 3, 可知 $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$. 所以, 函数 $f(x)=a^x$ 在 R 上连续.

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x$.

解　设 $f(x)=x^x$, 则 $f'(x)=x^x(1+\ln x)$.

令 $f'(x)=0$ 得稳定点 $x=1/e$, 且 $0<x<1/e$ 时, $f'(x)<0$, 从而 $f(x)$ 在 $(0, 1/e)$ 单调减少. 取 $x_n=1/n(n=3, 4, \dots)$, 则 $\{x_n\}\subset(0, 1/e)$: $x_n\to0, x_n\neq0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x^x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$.

从上述两例知, 定理 6~定理 8 提供了一种解决函数极限问题的方法. 用 Heine 定理的充分性把函数极限化为数列极限, 需要考察任意满足定理条件的数列; 而用定理 6~定理 8 的充分性把函数极限化为数列极限, 只需考察某一数列即可, 解决问题是比较方便的.

参　考　文　献

[1]　刘玉琏, 傅沛仁. 数学分析讲义(上册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1992.

[2]　吉林大学数学系. 数学分析(中册)[M]. 北京: 人民教育出版社, 1978.

[3]　复旦大学数学系. 数学分析(上册)[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1962.

[4]　梁俊奇, 张庆政. Heine 定理的等价命题及其应用[J]. 高等教育研究, 2002, 5(3): 20.

[责任编辑　曾　静]