
Rapport de BE de Commande Optimale

Suspension semi-active ou active

Réalisé par
Lenny Laffargue & Yiannis Manzo

Travail présenté à Marie-Véronique Lelann

Département de génie électronique et informatique - INSA Toulouse

28 Mai 2021

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 2 |
| 2 | Établissement du modèle | 2 |
| 2.1 | Description du système "1/4 de véhicule" | 2 |
| 2.2 | Modèle mécanique | 3 |
| 3 | Analyse en boucle ouverte | 4 |
| 4 | Commande Optimale : Minimisation d'un critère quadratique | 6 |
| 4.1 | Fonctions de transfert idéales | 6 |
| 4.2 | Commande LQR - Estimation des coefficients de Q | 6 |
| 4.3 | Amélioration des coefficients q_i | 8 |
| 4.3.1 | q_1 - Déflexion (liée à la caisse) | 8 |
| 4.3.2 | q_2 - Confort des passagers (lié à la caisse) | 8 |
| 4.3.3 | q_3 - Tenue de route (liée à la roue) | 8 |
| 4.3.4 | Résultats de la commande LQR finale | 9 |
| 5 | Conclusion | 10 |
| A | ANNEXES | 11 |
| A.1 | Tracés de Bode | 11 |
| A.2 | Comparaison boucle ouverte / LQR version 1 / LQR finale | 13 |
| A.3 | Amélioration des coefficients q_i - Courbes | 14 |

1 Introduction

Dans ce Bureau d'Etude, il nous est demandé de travailler sur un système "1/4 de véhicule" pour en améliorer son système de suspensions, initialement passives. Notre but est donc de concevoir des suspensions semi-actives ou actives.

Dans un premier temps, nous analyserons le comportement du système en l'état actuel. Nous mettrons ensuite en place une commande optimale de manière à créer une suspension semi-active/active. Enfin, nous essaierons de trouver un moyen d'optimiser plus encore cette commande.

2 Établissement du modèle

2.1 Description du système "1/4 de véhicule"

La Figure 1 présente le système "1/4 de véhicule". C'est en fait une modélisation des suspensions d'un véhicule, dont l'étude se focalise sur une seule roue. Il y a deux parties principales dont nous allons observer le déplacement par rapport à la route : la caisse et la roue.

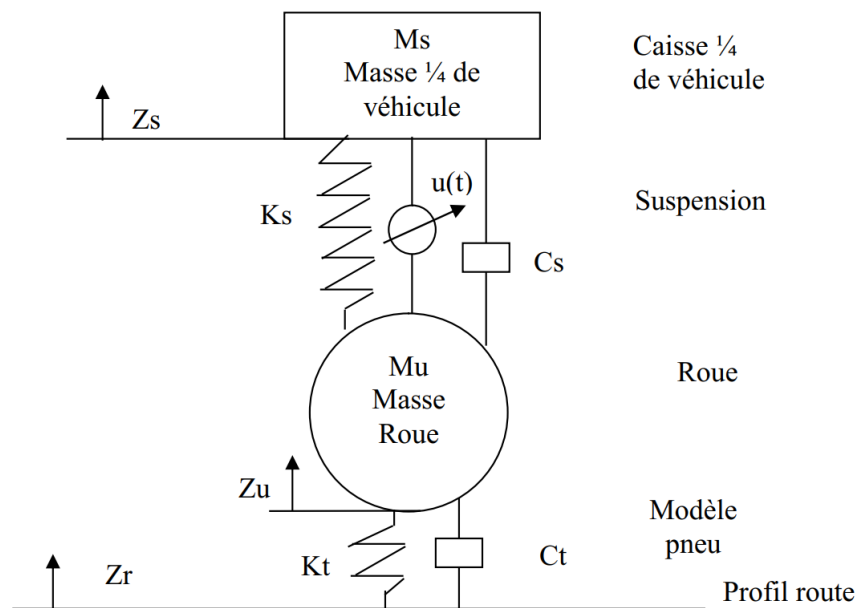


FIGURE 1 – Schéma de la suspension 1/4 de véhicule

Les notations utilisées sur ce schéma sont décrites ci-dessous :

- Z_s - déplacement vertical de la caisse par rapport à la position d'équilibre
- Z_u - déplacement vertical de la roue par rapport à la position d'équilibre
- Z_r - entrée de route (profil de la route)
- $K_s = 20000 N/m$ - raideur du ressort de suspension
- $C_s = 100 N \cdot s/m$ - coefficient de frottement de l'amortisseur
- $K_t = 150000 N/m$ - raideur du pneu
- $C_t = 0.0$ - coefficient d'amortissement du pneu
- $M_s = 1120/4 kg$ - masse de la caisse
- $M_u = 45 kg$ - masse de la roue

2.2 Modèle mécanique

On peut mettre en équation ce modèle grâce à la seconde loi de Newton : $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

Négligeant les poids (considérés constants dans notre étude), on obtient alors les deux équations suivantes, relatives respectivement à la caisse et à la roue :

$$M_s \ddot{Z}_s = -C_s(\dot{Z}_s - \dot{Z}_u) - K_s(Z_s - Z_u) + u(t) \quad (1)$$

$$M_u \ddot{Z}_u = C_s(\dot{Z}_s - \dot{Z}_u) + K_s(Z_s - Z_u) - C_t(\dot{Z}_u - \dot{Z}_r) - K_t(Z_u - Z_r) - u(t) \quad (2)$$

On choisit comme variables d'état :

$X_1 = Z_s - Z_u$: déplacement relatif caisse/roue

$X_2 = \dot{Z}_s$: vitesse absolue verticale de la caisse

$X_3 = Z_u - Z_r$: déplacement relatif roue/sol

$X_4 = \dot{Z}_u$: vitesse absolue verticale de la roue

L'espace d'état associé est de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu + E\dot{Z}_r \\ Y &= CX \end{aligned}$$

Avec :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{K_s}{m_s} & -\frac{C_s}{m_s} & 0 & \frac{C_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_s}{m_u} & \frac{C_s}{m_u} & -\frac{K_t}{m_u} & -\frac{C_s - C_t}{m_u} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{1}{m_u} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{C_t}{m_u} \end{bmatrix} \dot{Z}_r$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

3 Analyse en boucle ouverte

On s'intéresse à présent au système avec suspensions passives, à savoir $u = 0$. L'espace d'état devient donc :

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + E\dot{Z}_r \\ Y &= CX\end{aligned}$$

Avec Matlab, on obtient les fonctions de transfert associées (Figure 2) :

```
tf_caisse =

          1.19e04 s + 2.381e05
-----
s^4 + 25.79 s^3 + 3849 s^2 + 1.19e04 s + 2.381e05

Continuous-time transfer function.

tf_roue =

      3333 s^2 + 1.19e04 s + 2.381e05
-----
s^4 + 25.79 s^3 + 3849 s^2 + 1.19e04 s + 2.381e05
```

FIGURE 2 – Fonctions de transfert en boucle ouverte de la caisse ($\frac{Z_s}{Z_r}$) et de la roue ($\frac{Z_u}{Z_r}$)

On peut effectuer les tracés de Bode des deux fonctions de transfert (cf. Figure 8). On peut également simuler le franchissement d'un trottoir en faisant l'étude de la réponse à un échelon de 0.08 (8 cm). Les résultats sont présentés sur la Figure 3.

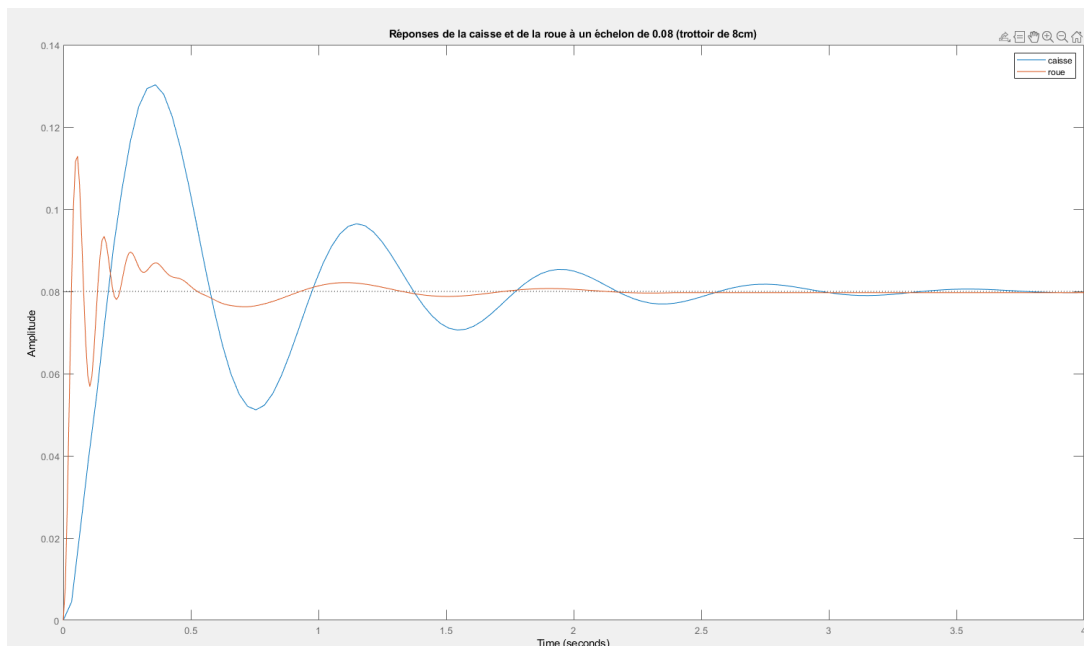


FIGURE 3 – Réponse indicielle (0.08) du système en boucle ouverte

Regroupons les résultats et faisons-en une analyse :

| Caractéristiques | Caisse | Roue |
|-------------------------------------|------------------------|------------------------|
| Temps d'établissement t_s (à 95%) | 2.04s | 0.41s |
| Dépassement PO | 62.8% | 41.1% |
| Pulsation de résonance ω_1 | $7.67rad \cdot s^{-1}$ | $7.42rad \cdot s^{-1}$ |
| Pulsation de résonance ω_1 | $58.3rad \cdot s^{-1}$ | $60.1rad \cdot s^{-1}$ |

En l'état actuel, le système ne répond absolument pas aux contraintes imposées. En effet, l'important dépassement et les oscillations que décrit la courbe liée à la caisse empêche le confort du passager. De plus, il faut plus de 2 secondes pour atteindre une forme de stabilisation (à 95%). Concernant la courbe liée à la roue, elle n'augure elle non plus rien de bon, notamment en termes de tenue de route : un tel dépassement peut faire perdre l'adhérence de la roue au sol, ce qui est source d'accident. On peut donc en conclure que ce système est actuellement inutilisable.

Par conséquent, nous allons tenter de corriger ces défauts.

4 Commande Optimale : Minimisation d'un critère quadratique

4.1 Fonctions de transfert idéales

Idéalement, on voudrait que :

- la caisse reste toujours à une même hauteur de référence $\Rightarrow \forall Z_r, Z_s = 0 \Rightarrow \frac{Z_s}{Z_r} = 0$
- la roue suit parfaitement le relief de la route $\Rightarrow \forall Z_r, Z_u = Z_r \Rightarrow \frac{Z_u}{Z_r} = 1$

Mais dans la réalité, c'est impossible. Toutefois, on peut mettre en oeuvre une commande optimale qui vise à se rapprocher de ces aspirations idéales.

4.2 Commande LQR - Estimation des coefficients de Q

On cherche donc à minimiser le critère quadratique suivant :

$$\min J = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u + 2x^T N u) \cdot dt$$

Ce qui, dans notre cas, revient à résoudre :

$$\begin{aligned} \min J &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty (X^2 Q + u^2 R) \cdot dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty (X_1^2 q_1 + X_2^2 q_2 + X_3^2 q_3 + X_4^2 q_4 + u^2 r_1) \cdot dt \end{aligned}$$

Car on a choisi : $R = [r1] = 1$ et $N = 0$

Le but est d'ajuster les coefficients q_i de sorte que l'on satisfasse les contraintes attendues. Or on sait que :

- q_1 agit sur X_1 , c'est-à-dire la déflexion de l'amortisseur (que l'on veut faible) ;
- q_2 agit sur X_2 , c'est-à-dire la vitesse de déplacement vertical de la caisse, donc le confort des passagers ;
- q_3 agit sur X_3 , c'est-à-dire le déplacement de la roue vis-à-vis de la route, donc la tenue de route ;
- q_4 agit sur X_4 - pas de contrainte.

Pour trouver une approximation valable de ces coefficients, on peut repartir de l'équation (2) :

$$M_u \ddot{Z}_u = C_s(\dot{Z}_s - \dot{Z}_u) + K_s(Z_s - Z_u) - C_t(\dot{Z}_u - \dot{Z}_r) - K_t(Z_u - Z_r) - u(t)$$

La commande $u(t)$ permettant d'annuler les effets des composantes X_1, X_2, X_3 serait donc :

$$0 = C_s(X_2 - X_4) + K_s X_1 - C_t(X_4 - \dot{Z}_r) - K_t X_3 - u(t)$$

Soit,

$$u(t) = K_s X_1 + C_s X_2 - K_t X_3 \text{ car } C_t = 0 \text{ et on ne se préoccupe pas de } X_4$$

On voit alors clairement que, dans notre critère quadratique où les X_i sont au carré, q_1, q_2, q_3 doivent être de l'ordre de grandeur de K_s^2, C_s^2, K_t^2 (respectivement). On prendra donc par la suite :

- $q_1 = 4 \cdot 10^8$
- $q_2 = 1 \cdot 10^6$
- $q_3 = 2.25 \cdot 10^{10}$
- $q_4 = 0$

On a donc : $Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix}$

Avec Matlab, on obtient les fonctions de transfert associées (Figure 4) :

```
tf_caisse_LQ =

          -241.3 s^2 + 2.724e04 s + 3.367e05
-----
s^4 + 64.09 s^3 + 5564 s^2 + 4.418e04 s + 3.367e05

Continuous-time transfer function.

tf_roue_LQ =

          4835 s^2 + 4.418e04 s + 3.367e05
-----
s^4 + 64.09 s^3 + 5564 s^2 + 4.418e04 s + 3.367e05
```

FIGURE 4 – Fonctions de transfert avec commande LQR de la caisse et de la roue

Les résultats obtenus sont clairement meilleurs. Le Bode (Figure 9) présente toujours deux fréquences de résonance mais leur gain a considérablement baissé. Les réponses indicielles (Figure 5) sont elles aussi bien plus intéressantes. Les oscillations ont presque été supprimées et le temps de réponse a bien été amélioré. Bien qu'attenué aussi, le dépassement reste quant à lui encore un peu haut. On va donc essayer d'affiner les valeurs de q_i de manière à avoir une suspension semi-active/active encore plus efficace.

| Caractéristiques | Caisse | Roue |
|-------------------------------------|--------|-------|
| Temps d'établissement t_s (à 95%) | 0.58s | 0.26s |
| Dépassement PO | 24.2% | 24.0% |

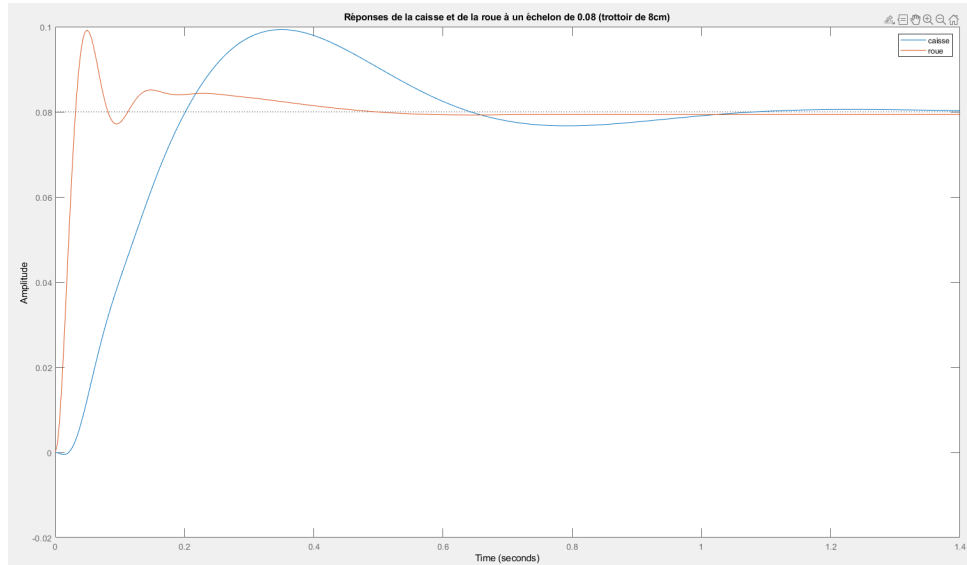


FIGURE 5 – Réponses indicielles (0.08) des fonctions de transfert de la caisse et de la roue avec commande LQR (q_i approximatifs)

4.3 Amélioration des coefficients q_i

Nous avons fait varier chaque coefficient de manière à ce qu'ils restent dans le même ordre de grandeur. Par conséquent, nous les multiplions par un facteur 100 au maximum. Notons aussi que les coefficients q_1, q_2 agissant sur la caisse (et q_3 sur la roue), nous ne nous contenterons d'étudier que la réponse liée à la fonction de transfert de la caisse (resp. de la roue)

4.3.1 q_1 - Déflexion (liée à la caisse)

Les résultats (Figure 12 en Annexes) tendent à montrer qu'un facteur 10 sur q_1 permet d'atténuer le dépassement et donc de faire chuter la déflexion, ce que nous recherchons. En outre, le temps d'établissement est diminué. On prendra donc :

$$q_1 = 4 \cdot 10^9$$

4.3.2 q_2 - Confort des passagers (lié à la caisse)

Le but est ici de supprimer les oscillations et d'éviter au maximum un dépassement de manière à garantir le confort des passagers. D'après les résultats de la Figure 13 en Annexes, on prendra donc :

$$q_2 = 3 \cdot 10^7$$

4.3.3 q_3 - Tenue de route (liée à la roue)

Ici, on va surtout chercher à diminuer au maximum le dépassement qui peut être à l'origine d'une perte d'adhérence de la roue. Les résultats (Figure 14 en Annexes) tendent à montrer qu'un facteur 100 est adapté pour cette spécification. On prendra donc :

$$q_3 = 2.25 \cdot 10^{12}$$

4.3.4 Résultats de la commande LQR finale

En prenant les coefficients affinés, on obtient les fonctions de transfert suivantes :

```
tf_caisse_LQ_var =
      -4857 s^2 + 9.744e04 s + 7.897e05
-----
s^4 + 252.8 s^3 + 3.527e04 s^2 + 2.362e05 s + 7.897e05

Continuous-time transfer function.

tf_roue_LQ_var =
      3.356e04 s^2 + 2.362e05 s + 7.897e05
-----
s^4 + 252.8 s^3 + 3.527e04 s^2 + 2.362e05 s + 7.897e05
```

FIGURE 6 – Fonctions de transfert avec commande LQR finale de la caisse et de la roue

Les mêmes tests que précédemment sont effectués et les résultats (Figures 10 et 7) sont maintenant très bons. En plus d'améliorer encore le temps de réponse de la roue (légère augmentation de celui de la caisse), on a des tracés de Bode qui ne font presque plus apparaître de fréquences de résonance, et on a des dépassements très faibles, ce que nous attendions particulièrement pour le confort des passagers et la bonne tenue de route.

| Caractéristiques | Caisse | Roue |
|-------------------------------------|--------|-------|
| Temps d'établissement t_s (à 95%) | 0.89s | 0.03s |
| Dépassement PO | 7.57% | 6.07% |

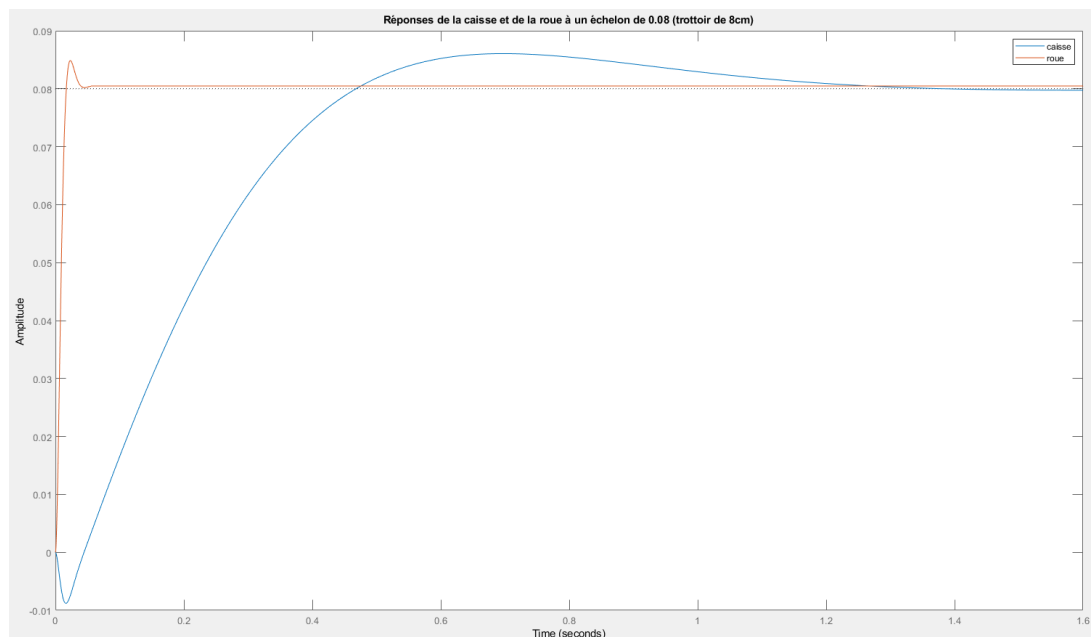


FIGURE 7 – Réponses indicielles (0.08) des fonctions de transfert de la caisse et de la roue avec commande LQR finale

5 Conclusion

Après une analyse en boucle ouverte de ce système, nous avons implémenté une commande optimale (commande LQR) que nous avons affinée par la suite. Cette commande semble fonctionnelle et efficace en simulation. Suite au retard pris en séances de cours et TDs, nous n'avons pas eu le temps de nous pencher sérieusement sur la commande par placement de pôles. Nous aurions pu comparer les deux méthodes.

Ce Bureau d'Etude nous a donné l'occasion de mettre en pratique des notions de Commande Optimale mais également de Programmation Linéaire (vue plus tôt dans le semestre) au travers de la minimisation d'un critère sous plusieurs contraintes. De plus, nous avons pu nous ré-exercer sur Matlab et découvrir de nouvelles commandes (telles que *lqr*) appliquées à l'asservissement de systèmes électroniques.

Notre code-source Matlab est accessible au [lien GitHub suivant](#).

A ANNEXES

A.1 Tracés de Bode

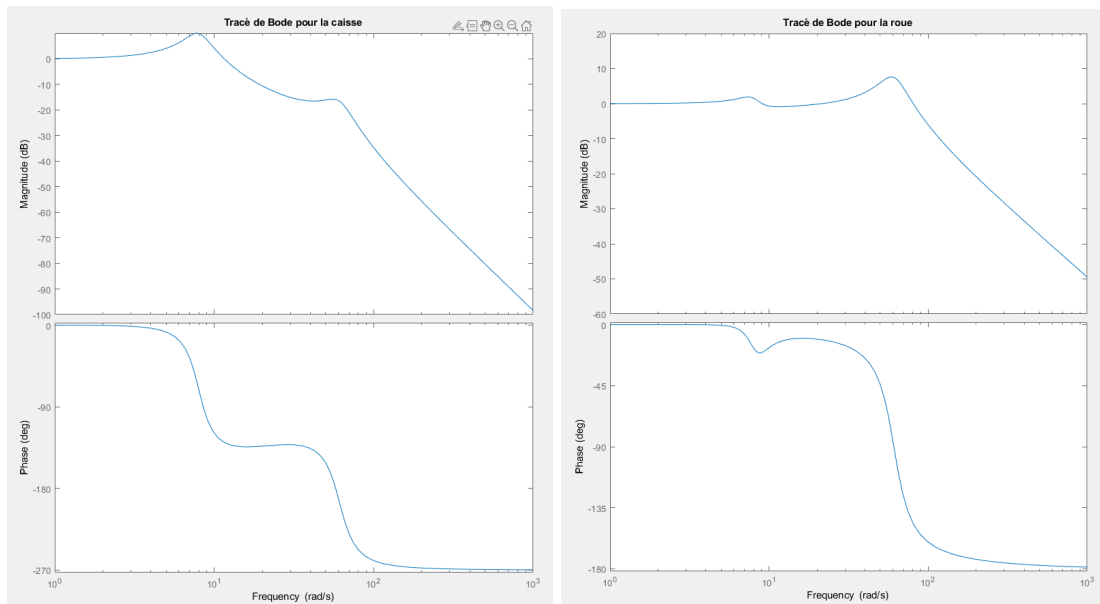


FIGURE 8 – Tracés de Bode du système en boucle ouverte

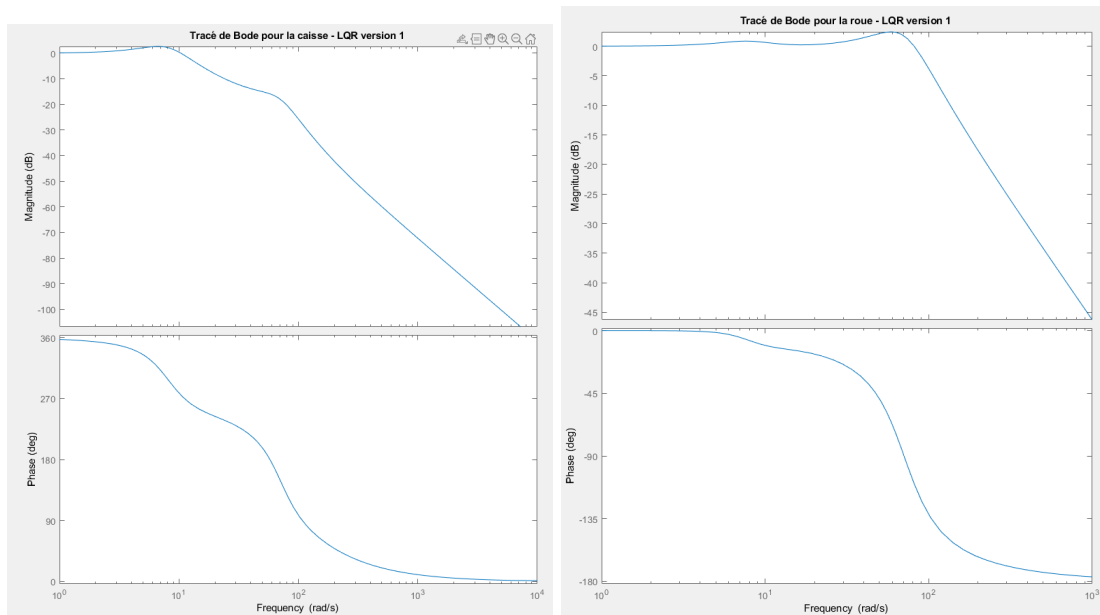


FIGURE 9 – Tracés de Bode du système avec commande LQR (q_i approximatifs)

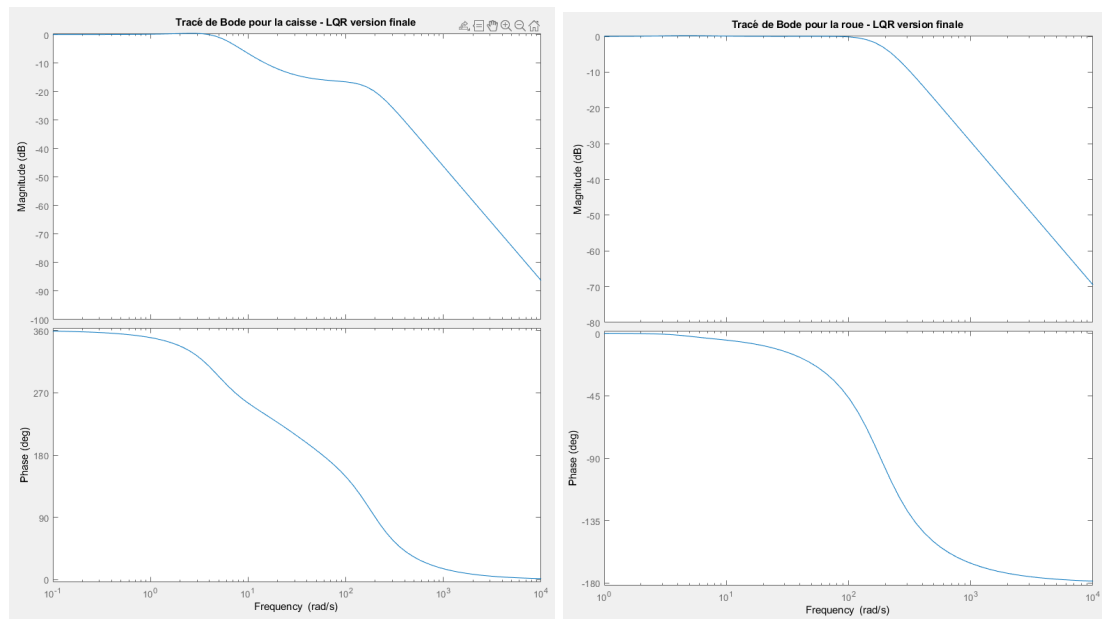


FIGURE 10 – Tracés de Bode du système avec commande LQR finale

A.2 Comparaison boucle ouverte / LQR version 1 / LQR finale

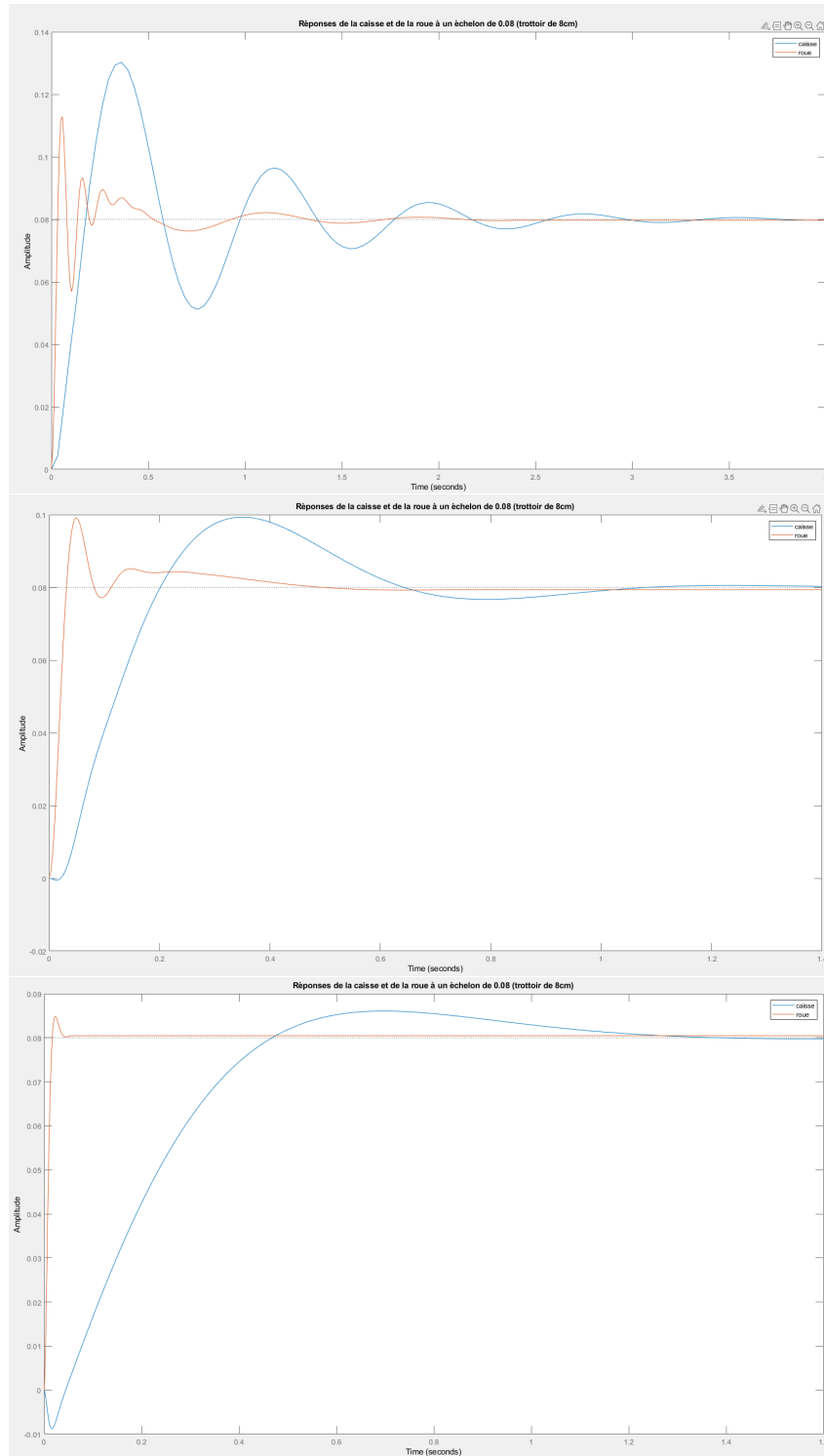


FIGURE 11 – Comparaison des fonctions de transfert (Boucle ouverte, LQR version 1 & LQR finale)

A.3 Amélioration des coefficients q_i - Courbes

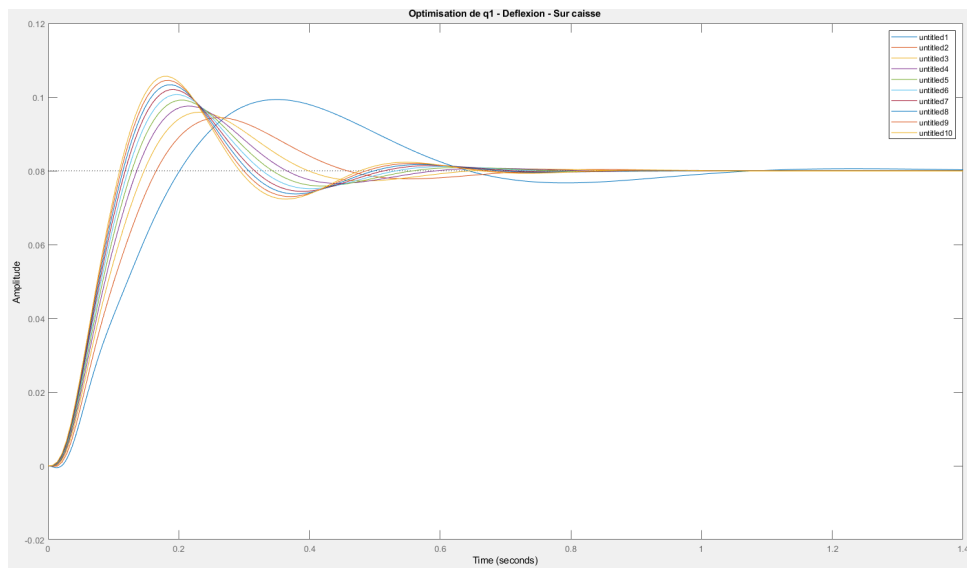


FIGURE 12 – Réponses indicielles (0.08) de la fonction de transfert de la caisse avec q_1 variable (entre 1 et 100)

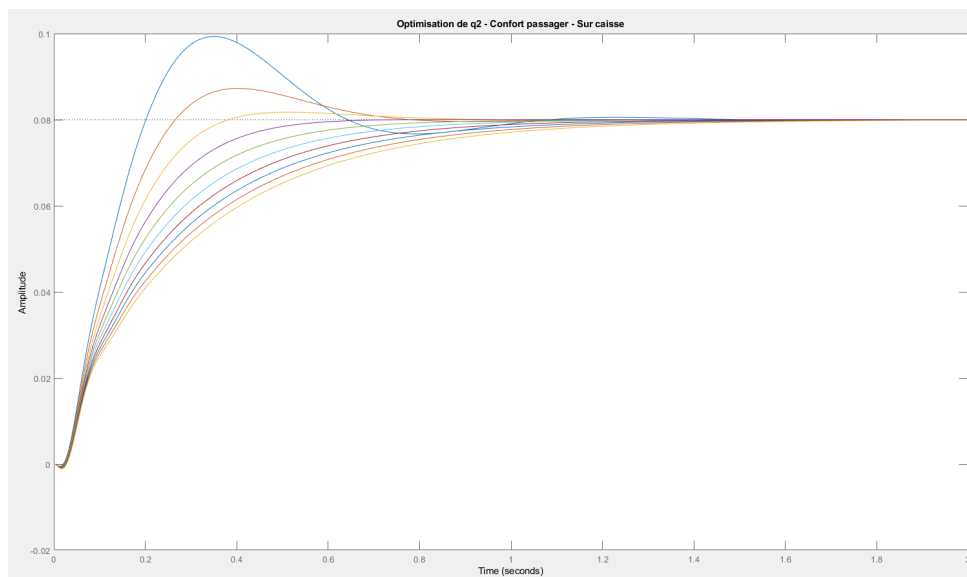


FIGURE 13 – Réponses indicielles (0.08) de la fonction de transfert de la caisse avec q_2 variable (entre 1 et 100)

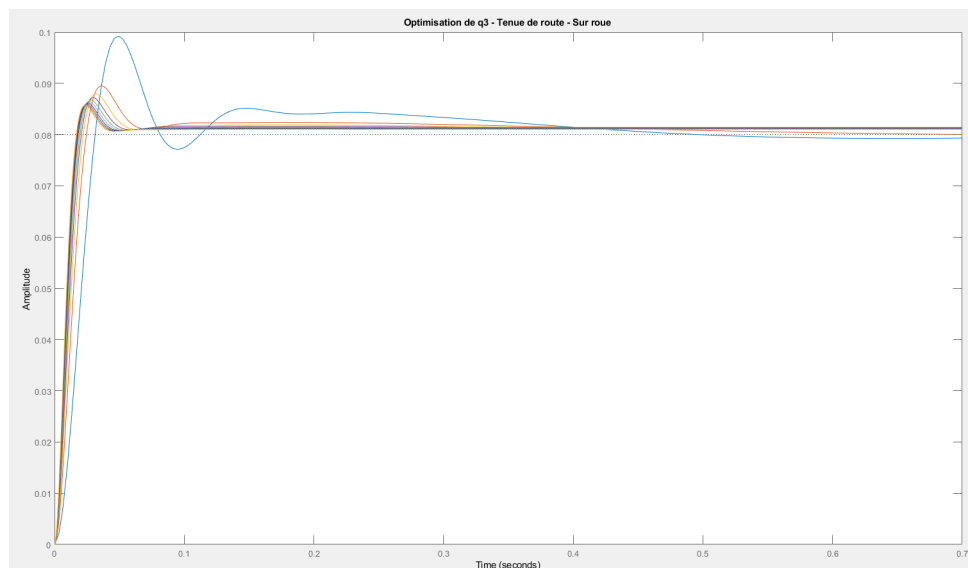


FIGURE 14 – Réponses indicielles (0.08) de la fonction de transfert de la roue avec q_3 variable (entre 1 et 100)