

目录

1	问题重述	3
2	问题分析	3
3	模型假设	4
4	定义和符号说明	4
5	数学基础	4
5.1	正态分布	4
5.2	多元随机变量	5
6	模型建立、求解和分析	5
6.1	问题一	5
6.1.1	数据的正态性检验	5
6.1.2	统计分析	7
6.2	问题二	9
6.2.1	模型建立	9
6.2.2	模型求解	9
6.2.3	模型分析	9
6.3	问题三	9
6.3.1	模型建立	9
6.3.2	模型求解	10
6.3.3	3	10
6.4	问题四	10
6.4.1	模型建立	10
6.4.2	模型求解	10
6.4.3	3	10
6.5	问题五	10
6.5.1	模型建立	10
6.5.2	模型求解	11
6.5.3	3	11
7	模型评价	11

8 参考文献	11
9 附录	11

1 问题重述

各国为控制疫情研发新冠疫苗。若干种疫苗需要顺序经过若干个工作位生产。考虑到疫苗在不同工作位生产的时间和顺序，我们需要根据疫苗生产的条件和要求，对不同环境的疫苗生产进行建模，以保证疫苗生产的高效性和有序性。

首先疫苗生产有严格的限制条件：同一类型 100 剂疫苗为一箱进行处理；每种疫苗按照 CJ1-CJ2-CJ3-CJ4 的顺序在 4 个工作位进行了加工；每个工作位不能同时生产不同类型的疫苗，疫苗生产不允许插队，即进入第一个工作位安排的每类疫苗的生产顺序决定整体生产顺序。其次有 YM1-YM10 等 10 种不同类型的疫苗需要生产。

考虑以上影响因素，我们需要解决以下问题。

问题一：对每箱疫苗在所有工作位上的生产时间进行均值、方差、最值、概率分布等统计分析，掌握每个工作位生产疫苗的能力水平。

问题二：在最短时间内，生产 YM1-YM10 各 100 剂疫苗，建立数学模型，求出疫苗生产的顺序和生产总时间，并将结果填入表 1。

问题三：考虑疫苗实际生产时间的随机性。要求总时间比问题 2 给定的最短时间缩短 5%，建立数学模型，以最大的概率完成这个任务为目标，确定生产顺序，并给出缩短的时间比例与最大概率之间的关系。

问题四：附件 2 中规定了不同规模的 10 种类型的生产任务。在每个工作位每天生产的时间不能超过 16 小时和每种类型疫苗的生产任务不可以拆分的情况下，建立数学模型，使得可靠性为 90%，求出完成任务的最少天数。

问题五：对于附件 2 中的疫苗生产任务，在生产时间限制在 100 天内、每个工作位每天生产的时间不能超过 16 小时和每种类型疫苗的生产任务可以适当拆分的情况下，建立数学模型，安排生产计划，使得销售额达到最大值。

2 问题分析

对问题一的分析：问题一要对多组数据进行多种统计分析，考虑数据处理的方便性，我们先对数据进行预处理，采取部分数据确定其概率分布方式，再定义一个求取一组数据均值、方差、最值和确定分布方式的函数，最后使用函数对每组数据进行统计分析。

对问题二的分析：问题二要制定疫苗的生产顺序和计算生产总时间。考虑到题目中的加工工作位顺序和生产不允许排队的限制条件是非线性的，因此可以先用程序搜索出满足要求的可行的生产方案，从而解除非线性约束。根据可行的生产方案，我们采用启发式算法搜索最优解，即最短生产时间，并不断检查是否满足剩余的两项的限制条件，注意记录最优解的疫苗生产顺序。

对问题三的分析：问题三要制定缩短时间下最大概率疫苗的生产顺序，以及给出缩短的时间比例与最大概率之间的关系。在问题二的基础上，将约束条件改成生产时间缩短 5%，用程序搜索满足对应的条件的可行方案，再采用启发式算法求最优解，但与问题二不同，最优解改成求最大概率，并注意记录最优解的疫苗产生顺序。启发式算法求最优解的过程，同样也是求最大概率与缩短时间的关系。

对问题四的分析：

对问题五的分析：

3 模型假设

为了简化问题，便于分析和求解，对模型进行以下合理的假设：

1.

4 定义和符号说明

符号	说明
$YM1 \sim YM10$	疫苗
$CJ1 \sim CJ4$	工位
T_{ij}	第 i 个疫苗在第 j 个工位上的生产用时（符合正态分布）
μ_{ij}	均值
σ_{ij}	方差
T_{Σ}	总用时
α_{ij}	加权系数
T_W	等待时间
M	销售额
m_i	疫苗 i 的单价
n_i	疫苗 i 的产量

表 1: 表格标题

5 数学基础

5.1 正态分布

若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

(1)

则称 X 服从参数为 μ, σ 的正态分布，记为 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (2)$$

5.2 多元随机变量

多个相互独立的正态分布随机变量的线性组合也符合正态分布。

6 模型建立、求解和分析

6.1 问题一

6.1.1 数据的正态性检验

- 偏度和峰度

1. 偏度：描述数据分布不对称的方向及其程度

当偏度 0 时，可认为分布是对称的，服从正态分布；

当偏度 >0 时，分布为右偏，即拖尾在右边，峰尖在左边，也称为正偏态；

当偏度 <0 时，分布为左偏，即拖尾在左边，峰尖在右边，也称为负偏态；

2. 峰度：描述数据分布形态的陡缓程度

当峰度 0 时，可认为分布的峰态合适，服从正态分布（不胖不瘦）；

当峰度 >0 时，分布的峰态陡峭（高尖）；

当峰度 <0 时，分布的峰态平缓（矮胖）；

3. Z 分数（Z-score）

偏度 Z-score = 偏度值/标准误，峰度 Z-score = 峰度值/标准误。在 $\alpha=0.05$ 的检验水平下，若 Z-score 在 ± 1.96 之间，则可认为资料服从正态分布。

通过 SPSS 处理部分数据得到的结果如下图：

统计					
		V1	V2	V3	V4
个案数	有效	50	50	50	50
	缺失	0	0	0	0
偏度		.068329	.417305	.262848	.116095
偏度标准误差		.336601	.336601	.336601	.336601
峰度		.720694	-.155885	.036927	.478430
峰度标准误差		.661908	.661908	.661908	.661908

图 1: 偏度与峰度

由图中数据计算可得可得 Z-Score 均处于 ± 1.96 之间, 可认为四组数据均服从正态分布。

- 图形判断

1. 直方图: 表示连续性变量的频数分布, 可以用来考察是否服从正态分布

通过 SPSS 处理部分数据得到的结果如下图:

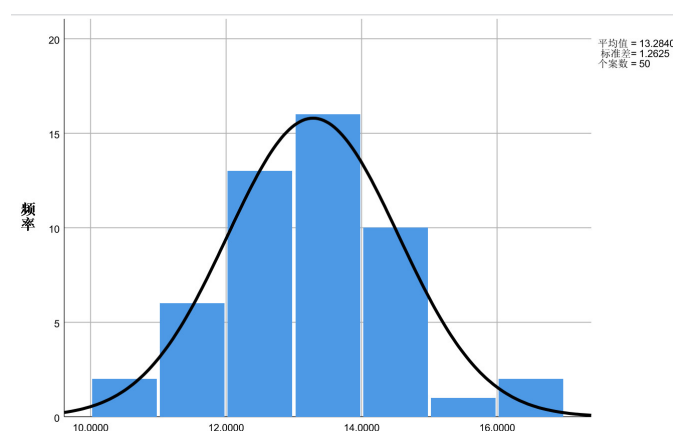
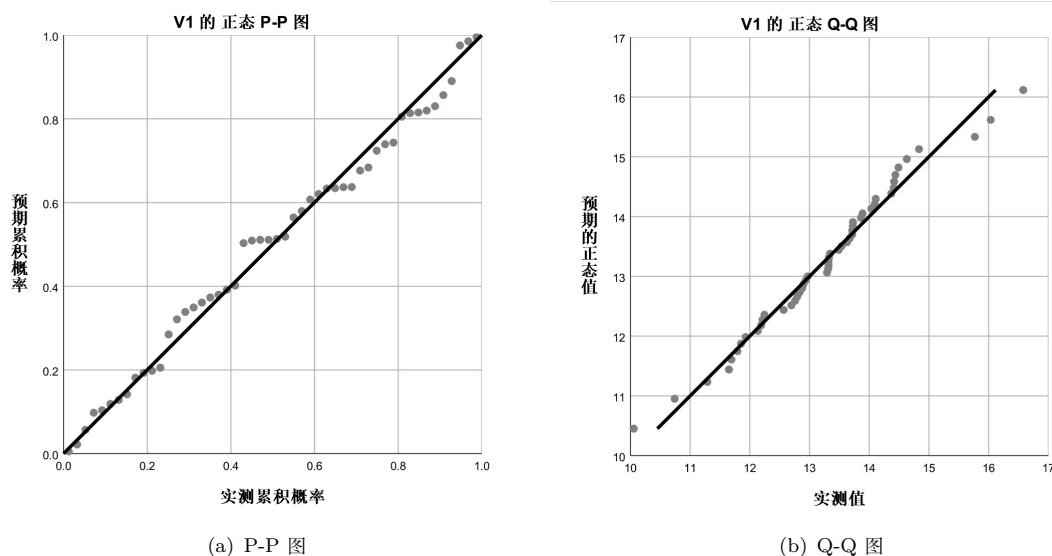


图 2: 直方图

2.P-P 图和 Q-Q 图

P-P 图反映了变量的实际累积概率与理论累积概率的符合程度, Q-Q 图反映了变量的实际分布与理论分布的符合程度。若数据点与理论直线 (即对角线) 基本重合, 就认为数据服从正态分布。

通过 SPSS 处理部分数据得到的结果如下图:



由图可知 P-P 图和 Q-Q 图的数据点都与应与对角线基本重合，所以认为数据符合正态分布。

经过上述对部分数据的正态性检验,我们可以认为附件 1 中每组数据均服从正态分布。统计分析中的概率分布均采用正态分布进行处理。

使用 EXCEL 对数据进行对数据进行分列处理和简单的数据清洗,将数据以矩阵形式输入 MATLAB。矩阵每行数据为某类疫苗在某个工位模拟处加工 50 次的生产时间。

在 MATLAB 中使用求平均数、方差、最值的函数对输入数据的矩阵逐行处理并储存, 结果如表 2-5 显示, 结果定量地体现了每个工位对 10 种疫苗不同的生产水平, 对疫苗生产具有重要参考价值。

[illegible]

表 3: 工位 CJ2 的疫苗生产水平

	YM1	YM2	YM3	YM4	YM5	YM6	YM7	YM8	YM9	YM10
均值										
方差										
最小值										
最大值										

表 4: 工位 CJ3 的疫苗生产水平

	YM1	YM2	YM3	YM4	YM5	YM6	YM7	YM8	YM9	YM10
均值										
方差										
最小值										
最大值										

表 5: 工位 CJ4 的疫苗生产水平

	YM1	YM2	YM3	YM4	YM5	YM6	YM7	YM8	YM9	YM10
均值										
方差										
最小值										
最大值										

对于概率分析，经正态性检验可知，数据服从正态分布，由均值和方差我们可以画出每组数据的正态分布曲线，近似于数据本身的概率分布曲线。结果如图显示。从概率分布曲线我们可以更宏观且直观地了解每个工位生产疫苗的能力水平。

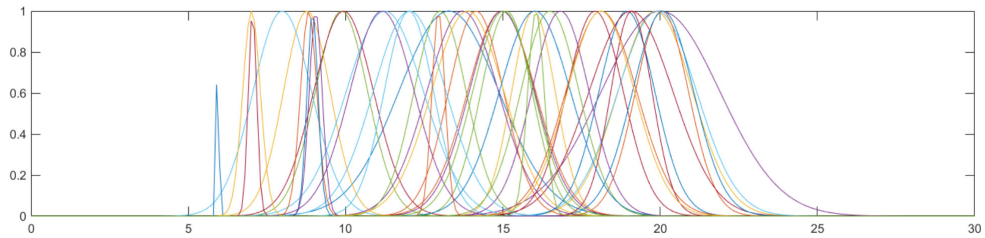


图 4: 概率分布曲线

在统计分析中，我们采用数据表格和曲线图像两种方式，定性和定量地全面分析了不同工位对不同疫苗的生产能力水平，有利于直观明了地掌握掌握工位生产疫苗的能力水平，为疫苗生产提供参考。

6.2 问题二

6.2.1 模型建立

建立优化模型如下

$$\begin{aligned} \min & T \\ \text{s.t.} & \end{aligned} \quad (3)$$

总时间的求解算法

6.2.2 模型求解

我们使用模拟退火算法求解
结果

6.2.3 模型分析

6.3 问题三

6.3.1 模型建立

考虑其随机性，每个工位生产每种疫苗的所需时间 T_{ij} 均符合正态分布，即

$$T_{ij} \sim \mathcal{N}(\mu_{ij}, \sigma_{ij}) \quad (4)$$

类似于流水线工作，如图所示虽然每个工位生产每种疫苗的耗时有随机性，但是其大小对比关系基本不变。因此我们用均值总用时是 T_{ij} 的线性组合。也符合正态分布。

$$T_{\Sigma} = \sum_{i,j} \alpha_{ij} T_{ij} \quad (5)$$

$$T_{\Sigma} \sim \mathcal{N}(\mu_{\Sigma}, \sigma_{\Sigma}) \quad (6)$$

我们求出其正态分布的参数 $\mu_{\Sigma} = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \mu_{ij}, \sigma_{\Sigma} = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \sigma_{ij}$

建立优化模型：

$$\max P(T_{\Sigma} < 0.95T_{\min}) \quad (7)$$

6.3.2 模型求解

我们首先求得在既定生产顺序下以最大的概率完成这个任务，生产的最优顺序为

6.3.3 3

6.4 问题四

6.4.1 模型建立

每种疫苗的生产用时由其耗时最多的工位决定。

6.4.2 模型求解

6.4.3 3

6.5 问题五

6.5.1 模型建立

建立优化模型目标函数为销售额 M 每个疫苗的最大产量不超过任务数量

$$M = \sum_i n_i m_i \tag{8}$$

不考虑随机性，将均值即为每种疫苗的生产用时。总时间为

$$T = \sum_i n_i t_i \tag{9}$$

$$aa \tag{10}$$

优化目标为销售额

6.5.2 模型求解

6.5.3 3

7 模型评价

8 参考文献

9 附录