《导航电子地图》课程
《卫星导航定位算法与程序设计》 课程
常用参数和常用公式一览

编 制 人：刘晖
最后更新：2015 年 03 月 04 日

1、常用参考框架的几何和物理参数

1.1 ITRFyy 主要的大地测量常数

长半轴a=6.3781366×10^6m；
地球引力常数（含大气层）GM=3.986004418×10^{14} m^3/s^2；
地球动力因子 J_2=1.0826359×10^{-3}；
地球自转角速度 ω=7.292115×10^{-5} rad/s。
扁率 $1/f$ =298.25642；
椭球正常重力位 U_0=6.26368560×10^7 m^2/s^2；
赤道正常重力γ_e =9.7803278 m/s^2；
光速 c=2.99792458×10^8 m/s。

1.2 GTRF 主要的大地测量常数

长半轴 a=6.37813655×10^6 m；
地球引力常数 GM=3.986004415×10^{14} m^3/s^2；
地球动力因子 J_2=1.0826267×10^{-3}；
扁率 $1/f$ =298.25769。

1.3 WGS84（Gwwww）主要的大地测量常数

长半轴 a=6.3781370×10^6 m；
地球引力常数（含大气层）GM=3.986004418×10^{14} m^3/s^2；
地球自转角速度 ω=7.292115×10^{-5} rad/s。
扁率 $1/f$ =298.257223563；
椭球正常重力位 U_0=62636860.8497 m^2/s^2；
赤道正常重力γ_e =9.7803267714m/s^2；
短半轴 b=6356752.3142m；
引力位二阶谐系数$\overline{C}_{2,0}$ =-484.16685×10^{-6}；
第一偏心率平方 e^2 =0.00669437999013；
第二偏心率平方 e'^2 =0.006739496742227。

1.4 PZ90 主要的大地测量常数

长半轴 a=6.378136×10^6m；

地球引力常数 GM=3.9860044×10^{14} m^3/s^2；
地球大气引力常数 fM_a =3.5×10^8 m^3/s^2；
地球自转角速度 ω=7.292115×10^{-5} rad/s。
扁率 $1/f$ =298.257839303；
椭球正常重力位 U_0=6.2636861074×10^7 m^2/s^2；
赤道正常重力 γ_e =9.780328 m/s^2；
光速 c=2.99792458×10^8 m/s；
引力位二阶带谐项系数 J_2^0 =1.0826257×10^{-3}；
引力位四阶带谐项系数 J_4^0 =-2.3709×10^{-6}；
海平面上由大气引起的重力改正 -0.9 m/s^2。

1.5 2000 国家大地坐标系主要的大地测量常数

长半轴 a=6378137m；
地球引力常数 GM=3.986004418×$10^{14}$$m^3/s^2$；
地球自转角速度 ω=7.292115×10^{-5}rad/s；
扁率 f =1/298.257222101。

1.6 1954 年北京坐标系主要的大地测量常数

长半轴 a=6.378245×10^6m；
短半轴 b=6.3568630188×10^6m；
扁率 $1/f$ =298.3；
第一偏心率平方 e^2 =6.693421622966×10^{-3}；
第二偏心率平方 e'^2 =6.738525414683×10-3。

1.7 1980 西安坐标系主要的大地测量常数

长半轴 a=6.378140×10^6m；
地球引力常数（含大气层）GM=3.986005×10^{14} m^3/s^2；
引力位二阶带谐系数 J_2=1.08263×10^{-3}；
地球自转角速度 ω=7.292115×10^{-5} rad/s。
扁率 $1/f$ =298.257；
椭球正常重力位 U_0=6.2636830×10^{-7} m^2/s^2；
赤道正常重力 γ_0 =9.78032 m/s^2。
第一偏心率平方 e^2 =6.69438499959×10^{-3}；
第二偏心率平方 e'^2 =6.73950181947×10^{-3}；

2、课程程序常用常数

```
double    PI    = ( 3.14159265358979323846264338327950 );
double    D2R = ( 0.0174532925199432957692222222222222 ); //    PI/180.0
double    R2D = ( 57.295779513082320876846364344191 );     //    180/PI
double    FREQ_L1 = ( 1575.42E6);                          //    L1 Frequency in Hz
double    FREQ_L2 = ( 1227.60E6);                          //    L2 Frequency in Hz
double    SPEED_OF_LIGHT=( 299792458.0          );          //    Speed of Light m/s
double    EARTH_ROTATE    =( 7.2921151467E-5 );             //    Earth rotation (r/s)
double    GM = 3.9860047e14;
double omega= 7.2921151467E-5;                             //  地球自转角速度
```

3、坐标系转换公式

3.1 大地坐标换算到高斯平面坐标

高斯投影中，某点的大地坐标到高斯平面坐标的转换公式组如下：

$$
\begin{aligned}
x &= X_0 + \frac{N}{2}\sin B\cos Bl^2 + \frac{N}{24}\sin B\cos^3 B(5-t^2+9\eta^2+4\eta^4)l^4 \\
&\quad + \frac{N}{720}\sin B\cos^5 B(61-58t^2+t^4)l^6 \\
y &= N\cos Bl + \frac{N}{6}\cos^3 B(1-t^2+\eta^2)l^3 \\
&\quad + \frac{N}{120}\cos^5 B(5-18t^2+t^4+14\eta^2-58\eta^2t^2)l^5
\end{aligned}
\qquad \text{…….（B.1）}
$$

式中：

x, y——该点的高斯投影坐标，单位为米（m）；

X_0——子午线弧长，单位为米（m）；

$$X_0 = a(1-e^2)\left(A'B - \frac{B'}{2}\sin 2B + \frac{C'}{4}\sin 4B - \frac{D'}{6}\sin 6B + \frac{E'}{8}\sin 8B\right)$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}' &= 1 + \frac{3}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{45}{64}\mathrm{e}^4 + \frac{175}{256}\mathrm{e}^6 + \frac{11025}{16384}\mathrm{e}^8 + \frac{43659}{65536}\mathrm{e}^{10} \\
\mathrm{B}' &= \frac{3}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{15}{16}\mathrm{e}^4 + \frac{525}{512}\mathrm{e}^6 + \frac{2205}{2048}\mathrm{e}^8 + \frac{72765}{65536}\mathrm{e}^{10} \\
\mathrm{C}' &= + \frac{15}{64}\mathrm{e}^4 + \frac{105}{256}\mathrm{e}^6 + \frac{2205}{4096}\mathrm{e}^8 + \frac{10395}{16384}\mathrm{e}^{10} \\
\mathrm{D}' &= \frac{35}{512}\mathrm{e}^6 + \frac{315}{2048}\mathrm{e}^8 + \frac{31185}{131072}\mathrm{e}^{10} \\
\mathrm{E}' &= + \frac{315}{16384}\mathrm{e}^8 + \frac{3645}{65536}\mathrm{e}^{10}
\end{aligned}
$$

N——卯酉圈曲率半径，单位为米（m），$N = \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}$；

B, L——该点的大地纬度和大地经度，单位为弧度（rad）；

L_0——高斯投影带的中央子午线大地经度，单位为弧度（rad）；

l——该点大地经度与投影带中央子午线大地经度的经度差，$l = L - L_0$ 单位为弧度（rad）；

a, b——参考椭球的长半轴和短半轴，单位为米（m）；

e^2——椭球第一偏心率的平方，$e^2 = \dfrac{a^2-b^2}{a^2}$，无量纲；

e'^2——椭球第二偏心率的平方，$e'^2 = \dfrac{a^2-b^2}{b^2}$，无量纲。

t——该点纬度的正切函数值，$t=\tan B$，无量纲；

η——参变量，$\eta = e'^2 \cos^2 B$，无量纲。

当$\Delta L < 3.5^{\circ}$时，按式（B. 1）进行投影的坐标转换，精度约为0. 001m。

3. 2 高斯平面坐标换算到大地坐标

某点的高斯平面坐标到大地坐标的转换公式如下：

$$B = B_f - \frac{y^2}{2M_f N_f} t_f \left[1 - \frac{y^2}{12N_f^2}(5+\eta_f^2+3t_f^2-9\eta_f^2 t_f^2) + \frac{y^4}{360N_f^4}(61+90t_f^2+45t_f^2) \right] \cdots$$

$$L = L_0 + \frac{y}{N_f \cos B_f} \left[1 - \frac{y^2}{6N_f^2}(1+\eta_f^2+2t_f^2) + \frac{y^4}{120N_f^4}(5+6\eta_f^2+28t_f^2+8\eta_f^2 t_f^2+24t_f^4) \right]$$

（B.2）

式（B.2）中：

B, L——该点的大地纬度和大地经度，单位为弧度（rad)；

L_0——高斯投影带中央子午线大地经度，$\Delta L = L - L_0$，单位为弧度（rad）；

B_f——横坐标(y)在高斯投影带中央子午线上的垂足点的纬度（底点纬度)，单位为弧度（rad)；

M_f——底点纬度B_f处的子午圈曲率半径，$M_f = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2 B_f)^2}}$，单位为米（m）；

N_f——底点纬度B_f处的卯酉圈曲率半径，$N_f = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B_f}}$，单位为米（m）；

a, b——参考椭球的长半轴和短半轴，单位为米（m）；

e^2——椭球第一偏心率的平方，$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$，无量纲；

e'^2——椭球第二偏心率的平方，$e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}$，无量纲。

t_f——纬度B_f的正切函数值，$t_f = \tan B_f$，无量纲；

η_f——参变量，$\eta_f = e'^2 \cos^2 B_f$，无量纲。

式（B.2）中的B_f可采用以下迭代方式计算：

a) 初值$(B_f)_0 = \frac{x}{aA(1-e^2)}$；

b) 按下式迭代：

$$\left(B_f\right)_1 = \frac{x}{aA(1-e^2)} + \frac{1}{A}\left[\frac{B}{2}\sin 2\left(B_f\right)_0 - \frac{C}{4}\sin 4\left(B_f\right)_0 + \frac{D}{6}\sin 6\left(B_f\right)_0 - \frac{E}{8}\sin 8\left(B_f\right)_0 \right]$$

上式中：

a——参考椭球的长半轴和短半轴，单位为米（m）；

e^2——第一偏心率的平方，$e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$，无量纲；

$$\begin{aligned}
A &= 1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+\frac{11025}{16384}e^8+\frac{43659}{65536}e^{10}\\
B &= \frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\frac{525}{512}e^6+\frac{2205}{2048}e^8+\frac{72765}{65536}e^{10}\\
C &= +\frac{15}{64}e^4+\frac{105}{256}e^6+\frac{2205}{4096}e^8+\frac{10395}{16384}e^{10}\\
D &= \frac{35}{512}e^6+\frac{315}{2048}e^8+\frac{31185}{131072}e^{10}\\
E &= +\frac{315}{16384}e^8+\frac{3645}{65536}e^{10}
\end{aligned}$$

c) 检查迭代结果，若$\left|\left(B_f\right)_i-\left(B_f\right)_{i-1}\right|<0.0001''$（$i$=1,2,3,……）则退出，否则返回b)继续迭代。

当$\Delta L<3.5^\circ$时，按式（B.2）进行投影坐标转换，转换精度约为0.0001"。

3.3 空间直角坐标与大地坐标相互转换的数学模型

同一坐标系统的空间直角坐标（X,Y,Z）与大地坐标（B,L,H）的转换关系见下式：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (N+H)\cos B\cos L \\ (N+H)\cos B\sin L \\ (N(1-e^2)+H)\sin B \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（A.4）$$

$$\begin{bmatrix} B \\ L \\ H \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \arctan\dfrac{Z+N\cdot e^2\sin B}{\sqrt{(X^2+Y^2)}} \\ \arctan\dfrac{Y}{X} \\ \dfrac{\sqrt{(X^2+Y^2)}}{\cos B}-N \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots（A.5）$$

式（A.4）和（A.5）中：

$\begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T$——空间直角坐标，单位为米（m）；

N——卯酉圈曲率半径，单位为米（m），$N=\dfrac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}$；

B——大地纬度，单位为弧度（rad）；

L——大地经度，单位为弧度（rad）；

H——大地高，单位为米（m）；

e——椭球第一偏心率，$e^2=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}$；

a——椭球长半轴，单位为米（m）；

b——椭球短半轴，单位为米（m）。

3.4 地心坐标系与站心坐标系的转换关系

设：点$A\left(X_A,Y_A,Z_A\right)$，点$B\left(X_B,Y_B,Z_B\right)$

求：以A为原点的站心地平坐标系下B点的坐标

算法：

$$1.\quad \begin{cases}\Delta X_{AB}=X_B-X_A\\ \Delta Y_{AB}=Y_B-Y_A\\ \Delta Z_{AB}=Z_B-Z_A\end{cases}$$

$$2.\quad \left(X_A,Y_A,Z_A\right)\rightarrow\left(B_A,L_A,H_A\right)$$

$$3.\quad \begin{bmatrix}N_B\\ E_B\\ U_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin B_A\cos L_A & -\sin B_A\sin L_A & \cos B_A\\ -\sin L_A & \cos L_A & 0\\ \cos B_A\cos L_A & \cos B_A\sin L_A & \sin B_A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta X_{AB}\\ \Delta Y_{AB}\\ \Delta Z_{AB}\end{bmatrix}$$

3.5 站心直角坐标系与站心极坐标系的转换关系

$$S_{AB}=\sqrt{N_{AB}{}^2+E_{AB}{}^2+U_{AB}{}^2}$$

$$A_{AB}=\arctan\left(\frac{E_{AB}}{N_{AB}}\right)$$

$$E_{AB}=\arcsin\left(\frac{U_{AB}}{S_{AB}}\right)$$

其中：

S_{AB}为A到B的距离；

A_{AB}为A到B的方位角；

E_{AB}为A到B的高度角。

3.6 三参数三维转换数学模型

某点从坐标系统1到坐标系统2 的三参数数学模型如下：

$$\begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix}_2=\begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix}_1+\begin{bmatrix}\Delta X_0\\ \Delta Y_0\\ \Delta Z_0\end{bmatrix}$$

式中：

$\left[X\quad Y\quad Z\right]_2^T$——该点在坐标系统2下的坐标，单位为米（m）；

$\left[X\quad Y\quad Z\right]_1^T$——该点在坐标系统1下的坐标，单位为米（m）；

$\left[\Delta X_0\quad \Delta Y_0\quad \Delta Z_0\right]^T$——坐标系统2原点相对于坐标系统1原点的平移量，单位为米（m）；

3.7 七参数三维转换数学模型

某点从坐标系统1至坐标系统2 的七参数模型如下：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{bmatrix} + (1+m) \cdot R_1(\varepsilon_X) \cdot R_2(\varepsilon_Y) \cdot R_3(\varepsilon_Z) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1$$

$$R_X(\varepsilon_X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon_X & \sin\varepsilon_X \\ 0 & -\sin\varepsilon_X & \cos\varepsilon_X \end{bmatrix},$$

$$R_Y(\varepsilon_Y) = \begin{bmatrix} \cos\varepsilon_Y & 0 & -\sin\varepsilon_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varepsilon_Y & 0 & \cos\varepsilon_Y \end{bmatrix},$$

$$R_Z(\varepsilon_Z) = \begin{bmatrix} \cos\varepsilon_Z & \sin\varepsilon_Z & 0 \\ -\sin\varepsilon_Z & \cos\varepsilon_Z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中：

$\begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}_2^T$——该点在坐标系统2下的坐标，单位为米（m）；

$\begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}_1^T$——该点在坐标系统1下的坐标，单位为米（m）；

$\begin{bmatrix} \Delta X_0 & \Delta Y_0 & \Delta Z_0 \end{bmatrix}^T$——坐标系统2原点相对于坐标系统1原点的平移量，单位为米（m）；

$\varepsilon_X, \varepsilon_Y, \varepsilon_Z$——坐标系统2和坐标系统1间的三个欧拉角，单位为弧度（rad）；

m——两个坐标系统间的尺度参数，10^{-9}（ppb）。

一般情况下，ε_X，ε_Y，ε_Z 均为微小角，因此式（A.2）可简化为下式：

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{bmatrix} + (1+m) \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_Y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y & -\varepsilon_X & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1$$

式中：

$\begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}_2^T$——该点在坐标系统2下的坐标，单位为米（m）；

$\begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}_1^T$——该点在坐标系统1下的坐标，单位为米（m）；

$\begin{bmatrix} \Delta X_0 & \Delta Y_0 & \Delta Z_0 \end{bmatrix}^T$——坐标系统2原点相对于坐标系统1原点的平移量，单位为米（m）；

$\varepsilon_X, \varepsilon_Y, \varepsilon_Z$——坐标系统2和坐标系统1间的三个欧拉角，单位为弧度（rad）；

m——两个坐标系统间的尺度参数，10^{-9}（ppb）。

3.8 二维转换数学模型

某点从平面坐标系统1到平面坐标系统2的二维相似变换数学模型如下：

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = (1+m) \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix}$$

式中：

$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix}^T$——该点在坐标系统1下的坐标，单位为米（m）；

$\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \end{bmatrix}^T$——该点在坐标系统2下的坐标，单位为米（m）；

$\begin{bmatrix} \Delta x_0 & \Delta y_0 \end{bmatrix}^T$——坐标系统2原点相对于坐标系统1原点的平移量，单位为米（m）；

α——坐标系统1与坐标系统2间的夹角，单位为弧度（rad）；

m——两个坐标系统间的尺度参数，10^{-9}（ppb）。

4、不同时间标识法之间的转换公式

4.1 通用时转换到儒略日

$$JD = \mathrm{INT}\left[365.25y\right] + \mathrm{INT}\left[30.6001(m+1)\right] + D + UT/24 + 1720981.5$$

$$MJD = \mathrm{INT}\left[365.25y\right] + \mathrm{INT}\left[30.6001(m+1)\right] + D + UT/24\text{-}679019.0$$

其中：

如果$M \le 2$，则$y = Y - 1$，$m = M + 12$;

如果$M > 2$，则$y = Y$，$m = M$；

JD为儒略日，实数；

MJD为新儒略日，实数；

Y为年，M为月，D为日，UT为日内小时数；

$\mathrm{INT}[\ ]$表示取实数的整数部分。

4.2 儒略日转换到通用时

$a = \mathrm{INT}\left[JD + 0.5\right]$或者 $a = \mathrm{INT}[MJD + 2400000.5 + 0.5]$

$b = a + 1537$

$c = \mathrm{INT}\left[(b - 122.1)/365.25\right]$

$d = \mathrm{INT}\left[365.25 \times \mathrm{c}\right]$

$e = \mathrm{INT}\left[(b - d)/30.6001\right]$

$D = b - d - \mathrm{INT}\left[30.6001 \times e\right] + \mathrm{FRAC}\left[JD + 0.5\right]$ （日）

$M = e - 1 - 12 \cdot \mathrm{INT}\left[e/14\right]$ （月）

$Y = c - 4715 - \mathrm{INT}\left[(7 + M)/10\right]$ （年）

$N = \mathrm{mod}\left\{\mathrm{INT}\left[JD + 0.5\right], 7\right\}$ （星期几。$N = 0$,星期一；$N = 1$,星期二;...）

其中：

JD为儒略日，实数；

MJD为新儒略日，实数；

Y为年，M为月，D为日，UT为日内小时数（时）；

$\mathrm{INT}[\ ]$表示取实数的整数部分；

FRAC[]表示取实数部分的小数部分。

4.3 儒略日转换到 GPS 时间

$$GPS\ WEEK = \mathrm{INT}\left[(JD - 2444244.5)/7\right]$$

$$GPS\ SECOND = (JD - 2444244.5)*3600*24 - GPS\ WEEK*3600*24*7$$

其中：

JD为儒略日，实数；如果采用新儒略日计算，则$MJD = JD - 2400000.5$

4.4 通用时转换到 GPS 时间

第一步：通用时转换到儒略日（***JD***）或新儒略日（***MJD***）

第二步：儒略日（***JD***）或新儒略日（***MJD***）转换到 GPS 时间

4.5 新儒略日（*MJD*）与儒略日（*JD*）的关系

$$MJD = JD - 2400000.5$$

5、根据广播星历计算卫星位置和速度

5.1 卫星位置计算流程

1、计算轨道长半轴 *A*

$A=\left(\sqrt{A}\right)^2$，其中$\sqrt{A}$来自广播星历参数

2、计算平均运动角速度 n_0

$n_0=\sqrt{\dfrac{GM}{A^3}}$，其中 GM 为地球引力常数，**本课程中设定参数值为 3.9860047e14。**

3、计算相对于星历参考历元的时间 t_k

$$t_k=t-t_{oe}\text{，}\quad t_k=\begin{cases} t_k-604800, & \text{当} t_k>302400 \\ t_k+604800, & \text{当} t_k<-302400 \\ t_k, & \text{其它情况} \end{cases}\text{，}$$

t 为所计算卫星位置的时刻，t_{oe} 为星历中的星历参考时刻。

4、对平均运动角速度进行改正 *n*

$n=n_0+\Delta n$，其中Δn来自广播星历。

5、计算平近点角 M_k

$M_k=M_0+n\cdot t_k$，其中 M_0 来自广播星历。

6、计算偏近点角 E_k

$M_k=E_k-e\cdot\sin E_k$，其中 e 来自广播星历

7、计算真近点角 *f*

$f=\arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-e^2}\sin E_k}{\cos E_k-e}\right)$，其中 e 来自广播星历，E_k 来自第 6 步。

8、计算升交角距 u'

$u'=f+\omega$，其中ω来自广播星历（omega）

9、计算升交角距改正数 δu_k，向径改正数 δr_k，轨道倾角改正数 δi_k

$$\begin{cases} \delta u_k=C_{us}\sin 2u'+C_{uc}\cos 2u' \\ \delta r_k=C_{rs}\sin 2u'+C_{rc}\cos 2u' \\ \delta i_k=C_{is}\sin 2u'+C_{ic}\cos 2u' \end{cases}$$

10、 计算改正后的升交角距 u_k，向径 r_k 和轨道倾角 i_k

$$\begin{cases} u_k = u' + \delta u_k \\ r_k = A\left(1 - e \cdot \cos E_k\right) + \delta r_k \\ i_k = i_0 + \delta i_k + \left(IDOT\right) \cdot t_k \end{cases},$$

其中 e，i_0，*IODT* 来自广播星历

11、 计算卫星在轨道平面上的位置(x_k,y_k)

$$\begin{cases} x_k = r_k \cos u_k \\ y_k = r_k \sin u_k \end{cases}$$

12、 计算改正后的升交点经度 L_k

$$L_k = \Omega_0 + \left(\dot{\Omega} - \omega_{earth}\right)t - \dot{\Omega}t_{oe} = \Omega_0 + \left(\dot{\Omega} - \omega_{earth}\right)\left(t - t_{oe}\right) - \omega_{earth}t_{oe},$$

其中:

Ω_0 来自星历（OMEGA），$\dot{\Omega}$ 来自星历（OMEGADot）;

ω_{earth} 为地球自转角速度，数值为 7.292115e10-5，

t 为计算的历元时刻（周秒），t_{oe} 为星历参考时刻（周秒）。

13、 计算卫星在地心坐标系下的坐标（*X,Y,Z*）

$$\begin{cases} X = x_k \cos L_k - y_k \cos i_k \sin L_k \\ Y = x_k \sin L_k + y_k \cos i_k \cos L_k \\ Z = y_k \sin i_k \end{cases}$$

5.2 根据广播星历计算卫星速度

计算卫星速度时，需要用到计算卫星位置的一些量，下述公式中符号的含义与 4.1 相同。

1、计算偏近点角的时间导数 $\dot{E}_k$

$$\dot{E}_k = \frac{n}{1 - e\cos E_k}$$

2、计算真近点角的时间导数 $\dot{f}$

$$\dot{f} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2} \frac{\cos^2 \dfrac{f}{2}}{\cos^2 \dfrac{E_k}{2}} \dot{E}_k$$

3、计算升交角距的时间导数 $\dot{u}'$

$$\dot{u}' = \dot{f}$$

4、计算升交角距向径和轨道倾角的时间导数

$$\begin{cases}\dot{u}_k = \dot{u}'\left(1+2C_{us}\cos 2u' - 2C_{uc}\sin 2u'\right)\\ \dot{r}_k = \dot{E}_k Ae\sin E_k + 2\dot{u}'\left(C_{rs}\cos 2u' - C_{rc}\sin 2u'\right)\\ \dot{I}_k = IODT + 2\dot{u}'\left(C_{is}\cos 2u' - C_{ic}\sin 2u'\right)\end{cases}$$

其中，其中 *IDOT*，C_{is}，C_{ic}, C_{us}，C_{uc}, C_{rs}，C_{rc} 来均自广播星历

5、计算卫星轨道平面位置的时间导数

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_k\\ \dot{y}_k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos u_k & -r_k\sin u_k\\ \sin u_k & r_k\cos u_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{r}_k\\ \dot{u}_k\end{bmatrix}$$

6、计算卫星在地心坐标系下的速度

$$\begin{bmatrix}\dot{X}\\ \dot{Y}\\ \dot{Z}\end{bmatrix} = \dot{\mathbf{R}}\begin{bmatrix}\dot{x}_k\\ \dot{y}_k\\ \dot{L}_k\\ \dot{I}_k\end{bmatrix}$$

其中：

$$\dot{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix}\cos L_k & -\sin L_k\cos i_k & -\left(x'_k\sin L_k + y'_k\cos L_k\cos i_k\right) & y'_k\sin L_k\sin i_k\\ \sin L_k & \cos L_k\cos i_k & \left(x'_k\cos L_k - y'_k\sin L_k\cos i_k\right) & -y'_k\cos L_k\sin i_k\\ 0 & \sin i_k & 0 & y'_k\cos i_k\end{bmatrix}$$

$\dot{L}_k = \dot{\Omega} - \omega_{earth}$,其中 $\dot{\Omega}$ 来自广播星历，ω_{earth} 为地球自转角速度。

5.3 计算卫星高度角和方位角

设：原点位于测站 *P*，*Z* 轴与 *P* 点的椭球法线重合，*X* 轴垂直于 *Z* 轴并指向椭球短轴，*Y* 轴垂直于 *XPZ* 平面向东，构成左手系。

1、卫星 *S* 在以 *P* 点为原点的站心平面直角坐标的坐标（*N,E,U*）$_S$ 表示为

$$\begin{bmatrix}N\\ E\\ U\end{bmatrix}_S = H\begin{bmatrix}\Delta X\\ \Delta Y\\ \Delta Z\end{bmatrix}_{SP} = H\left(\begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix}_S - \begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix}_P\right)$$

$$H = \begin{bmatrix}-\sin B_p\cos L_p & -\sin B_p\sin L_p & \cos B_p\\ -\sin L_p & \cos L_p & 0\\ \cos B_p\cos L_p & \cos B_p\sin L_p & \sin B_p\end{bmatrix}$$

其中：

$\begin{bmatrix}X & Y & Z\end{bmatrix}_s^T$ 为卫星的地心坐标系坐标；

$\begin{bmatrix}X & Y & Z\end{bmatrix}_p^T$ 为观测站的地心坐标系坐标；

B_p, L_p 为测站的大地纬度和大地经度。

2，卫星 S 相对于测站 P 的方位角和高度角、距离为：

$$\begin{cases} r=\sqrt{N^2+E^2+U^2} \\ A=\arctan\dfrac{E}{N} \\ E=\arctan\dfrac{U}{\sqrt{N^2+E^2}}=\arcsin\dfrac{U}{r} \end{cases}$$

其中：r 为卫星到测站 P 的距离，A 为方位角，E 为高度角

6、地球自转改正

由于地球自转，卫星位置将发生变化，设（X_S,Y_S,Z_S）为卫星在某时刻的位置，则由于地球自转而对卫星坐标带来的变化量$(\Delta X_S, \Delta Y_S, \Delta Z_S)$：

$$\begin{bmatrix} \Delta X_S \\ \Delta Y_S \\ \Delta Z_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega\tau & 0 \\ -\omega\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix}$$

对星站距离带来的变化$\Delta\rho_\omega$为：

$$\Delta\rho_\omega = \frac{\omega}{c}[(X_S - X_R)Y_S - (Y_S - Y_R)X_S]$$

其中：ω为地球自转角速度；

(X_S, Y_S, Z_S)为卫星在信号发射时刻t_1的地心坐标；

(X_R, Y_R, Z_R)为接收机的地心坐标；

$(\Delta X_S, \Delta Y_S, \Delta Z_S)$为信号到到用户接收机的时刻（$t_2$），卫星位置的改正数；

$\tau = t_2 - t_1$，为信号传播时间。

$$\begin{bmatrix} X_S^{'} \\ Y_S^{'} \\ Z_S^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau) & \sin(\omega\tau) & 0 \\ -\sin(\omega\tau) & \cos(\omega\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix}$$

其中：ω为地球自转角速度；

(X_S, Y_S, Z_S)为卫星在信号发射时刻t_1的地心坐标；

$(X_S^{'}, Y_S^{'}, Z_S^{'})$为卫星在信号接收时刻$t_2$的改正后的地心坐标；

$\tau = t_2 - t_1$，为信号传播时间。

7、对流层改正模型

7.1 Hopfield 模型

直接得到视线方向路径上的对流层改正量

$$\Delta_{Trop}=\Delta_d+\Delta_w=\frac{K_d}{\sin\left(\sqrt{E^2+6.25}\right)}+\frac{K_w}{\sin\left(\sqrt{E^2+2.25}\right)}$$

$$\begin{cases}K_d=155.2\cdot 10^{-7}\cdot\dfrac{P_s}{T_s}\left(h_d-H_s\right)\\ K_w=155.2\cdot 10^{-7}\cdot\dfrac{4810}{T_s^2}e_s\left(h_w-H_s\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}h_d=40136+148.72\left(T_0-273.16\right)\quad[\mathrm{m}]\\ h_w=11000\ \mathrm{m}\end{cases}$$

其中：

Δ_{Trop}——测站到卫星视线方向对流层总延迟量，单位：米；

H_s——测站高度，单位：米；

T_s——测站上的绝对温度，单位：开氏温度；

P_s——测站上的大气压，单位：毫巴；

RH_s——测站的相对湿度，无单位；

e_s——测站上的水汽压，单位：毫巴；

T_0——参考面的绝对温度，单位：开氏温度；

E——卫星相对于测站的高度角，单位：度。

投影函数在编程中应按照下式计算(式中E的单位为度）：

$$\begin{cases}\sin\sqrt{\left(E^2+6.25\right)}=\sin\left(\left(\sqrt{E^2+6.25}\right)*\pi/180.0\right)\\ \sin\sqrt{\left(E^2+2.25\right)}=\sin\left(\left(\sqrt{E^2+2.25}\right)*\pi/180.0\right)\end{cases}$$

若给出某参考面上的温度、气压和湿度，则测站处的气象元素由以下公式计算得到：

$$\begin{cases}T_s=T_0-0.0065\cdot\left(H_s-H_0\right)\\ P_s=P_0\cdot\left(1-0.0000226\cdot\left(H_s-H_0\right)\right)^{5.225}\\ RH_s=RH_0\cdot\exp\left(-0.0006396\cdot\left(H_s-H_0\right)\right)\\ e_s=RH_0\cdot\exp\left(-37.2465+0.213166T_s-0.000256908T_s^2\right)\end{cases}$$

其中：

H_0——参考面的高度，单位：米；

T_0——参考面的绝对温度，单位：开氏温度；

P_0——参考面的大气压，单位：毫巴；

RH_0——参考面的相对湿度，无单位；

7.2 简化的Hopfield模型

简化模型，计算得到测站到卫星视线方向的对流层总延迟量：

$$d_{Trop} = 2.47 \frac{1}{\sin E + 0.0121}$$

其中：

d_{Trop}——视线方向对流层总延迟量，单位：米；

E——卫星高度角，单位：弧度

7.3 改进的Hopfield 模型

视线方向的对流层延迟计算公式为：

$$\Delta_{Trop} = \Delta_{dry} + \Delta_{wet}$$

$$\begin{cases} \Delta_{dry} = 10^{-6} N_{dry} \left[\sum_{k=1}^{9} \left[\frac{a_{k,dry}}{k} r_{dry}^{k} \right] \right] \\ \Delta_{wet} = 10^{-6} N_{wet} \left[\sum_{k=1}^{9} \left[\frac{a_{k,wet}}{k} r_{wet}^{k} \right] \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{dry} = 0.776 \times 10^{-4} \frac{P_s}{T_s} \\ N_{wet} = 0.373 \frac{e_s}{T_s^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_{dry} = \sqrt{\left(r_0 + h_{dry}\right)^2 - \left(r_0 \cos E\right)^2} - r_0 \sin E \\ r_{wet} = \sqrt{\left(r_0 + h_{wet}\right)^2 - \left(r_0 \cos E\right)^2} - r_0 \sin E \\ r_0 = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_{dry} = \left(40136 + 148.72\left(T_0 - 273.16\right)\right) / 1000.0[km] \\ h_{wet} = 11000 / 1000.0[km] \end{cases}$$

公式中的系数：

$$\begin{cases} a_{1,dry} = 1 \\ a_{2,dry} = 4a_{dry} \\ a_{3,dry} = 6a_{dry}^2 + 4b_{dry} \\ a_{4,dry} = 4a_{dry}\left(a_{dry}^2 + 3b_{dry}\right) \\ a_{5,dry} = a_{dry}^4 + 12a_{dry}^2 b_{dry} + 6b_{dry}^2 \\ a_{6,dry} = 4a_{dry} b_{dry}\left(a_{dry}^2 + 3b_{dry}\right) \\ a_{7,dry} = b_{dry}^2\left(6a_{dry}^2 + 4b_{dry}\right) \\ a_{8,dry} = 4a_{dry} b_{dry}^3 \\ a_{9,dry} = b_{dry}^4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{1,wet} = 1 \\ a_{2,wet} = 4a_{wet} \\ a_{3,wet} = 6a_{wet}^2 + 4b_{wet} \\ a_{4,wet} = 4a_{wet}\left(a_{wet}^2 + 3b_{wet}\right) \\ a_{5,wet} = a_{wet}^4 + 12a_{wet}^2 b_{wet} + 6b_{wet}^2 \\ a_{6,wet} = 4a_{wet} b_{wet}\left(a_{wet}^2 + 3b_{wet}\right) \\ a_{7,wet} = b_{wet}^2\left(6a_{wet}^2 + 4b_{wet}\right) \\ a_{8,wet} = 4a_{wet} b_{wet}^3 \\ a_{9,wet} = b_{wet}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{dry} = -\dfrac{\sin E}{h_{dry}} \\ b_{dry} = -\dfrac{\cos^2 E}{2h_{dry}r_0} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{wet} = -\dfrac{\sin E}{h_{wet}} \\ b_{wet} = -\dfrac{\cos^2 E}{2h_{wet}r_0} \end{cases}$$

其中：

Δ_{Trop}——测站到卫星视线方向对流层总延迟量，单位：米；

Δ_{dry}——对流层延迟量的干分量，单位：米；

Δ_{wet}——对流层延迟量的湿分量，单位：米；

H_s——测站高度，单位：米；

T_s——测站上的绝对温度，单位：开氏温度；

P_s——测站上的大气压，单位：毫巴；

RH_s——测站的相对湿度，无单位；

e_s——测站上的水汽压，单位：毫巴；

T_0——参考面的绝对温度，单位：开氏温度；

E——卫星相对于测站的高度角，单位：弧度；

r_0——地心向径，单位：米；

若给出某参考面上的气象元素（温度、气压和湿度）则测站处的气象元素由以下公式计算得到。

$$\begin{cases} T_s = T_0 - 0.0065 \cdot \left(H_s - H_0\right) \\ P_s = P_0 \cdot \left(1 - 0.0000226 \cdot \left(H_s - H_0\right)\right)^{5.225} \\ RH_s = RH_0 \cdot \exp\left(-0.0006396 \cdot \left(H_s - H_0\right)\right) \\ e_s = RH_0 \cdot \exp\left(-37.2465 + 0.213166 T_s - 0.000256908 T_s^{\,2}\right) \end{cases}$$

其中：

H_0——参考面的高度，单位：米；

T_0——参考面的绝对温度，单位：开氏温度；

P_0——参考面的大气压，单位：毫巴；

RH_0——参考面的相对湿度，无单位；

7、电离层改正模型

7.1 KLOBUCHAR 模型

KLOBUCHAR 模型由美国科学家 John Klobuchar 于 1987 年提出并被作为广播星历的一部分播发给 GPS 用户。该模型将夜晚的电离层延迟看作常数，而使用余弦函数中正的部分逼近电离层延迟月平均日周期变化，于是天顶电离层延迟可表示为

$$dIon = DC + A \cdot cos\left(\frac{2\pi\left(t - t_0\right)}{P}\right)$$

其中

DC： 夜间电离层延迟；

A： 余弦函数振幅；

t_0：余弦函数峰值点对应的地方时，可看作该余弦函数的初始相位；

P： 余弦函数周期；

t： 输入参数，为信号穿刺点的地方时。

显然，为确定 $dIon$，必须先确定以上五个参数。通过对不同纬度的大量数据分析，Klobuchar 认为可以将 DC 与 t_0 视为常数，分别取 5ns 和地方时 14 点，然后使用两个三阶多项式分别拟合该余弦函数的振幅 A 与周期 P。该多项式的系数一般通过 10 天的数据计算得到，然后上传给 GPS 卫星并通过广播星历播发给用户，当电离层异常活跃时，该系数可能更新的更频繁[22]。

求得该穿刺点处的 $dIon$ 后即可由投影函数 3-1 获得斜路径上的电离层延迟。假设用户近似地理经纬度分别为 Φ_u，λ_u，卫星高度角和方位角分别为 E，A，广播星历中电离层改正系数为 α_n、β_n $\left(n = 1,2,3,4\right)$，则使用 KLOBUCHAR 模型计算电离层延迟的步骤为

1） 计算地心角

$$\Psi = \frac{0.0137}{E + 0.11} - 0.022$$

2） 计算穿刺点地理纬度

$$\Phi_I = \Phi_u + \Psi \cos A$$

$$\Phi_I = \begin{cases} +0.416, & \Phi_I > +0.416 \\ -0.416, & \Phi_I < -0.416 \end{cases}$$

3） 计算穿刺点地理经度

$$\lambda_I = \lambda_u + \frac{\Psi \sin A}{\cos \Phi_I}$$

4） 计算穿刺点地磁纬度

$$\Phi_m = \Phi_I + 0.064\cos\left(\lambda_I - 1.617\right)$$

5） 计算穿刺点地方时

$$t = 4.32 \times 10^4 \lambda_I + GPS\ time$$

$$t = \begin{cases} t - 86400, & t > 86400 \\ t + 86400, & t < 0 \end{cases}$$

6） 计算投影系数

$$F = 1.0 + 16.0 \times (0.53 - E)^3$$

7） 计算电离层延迟

$$dIon = F \times \left[5 \times 10^{-9} + \sum_{n=0}^{3} \alpha_n \Phi_m^n \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) \right]$$

其中：

$$x = \frac{2\pi\left(t - 50400\right)}{\sum_{n=0}^{3} \beta_n \Phi_m^n}$$

需要注意的是在以上计算 KLOBUCHAR 模型改正的公式中，角度单位为半圆、时间单位为秒，最后获得的 $dIon$ 为 L1 频率上测距码的时间延迟。