专题1—6　二倍角的解题策略：倍半角模型与绝配角

导语：见到2倍角的条件，首先想到“导”，将图形中的角度都推导出来，挖掘出隐藏边的信息，再观察角度的位置，结合其他条件，这里做题的经验，总结了六个字：翻、延、倍、分、导、造

题型·归纳

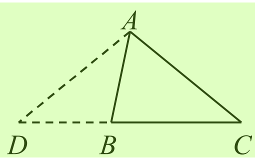
目录

知识点·梳理

知识点梳理

策略一：向外构造等腰（大角减半）

已知条件：如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=2\angle ACB$

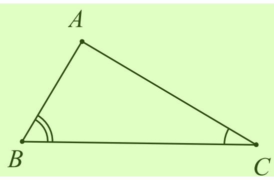


辅助线作法：延长CB到D，使$BD=BA$，连接AD

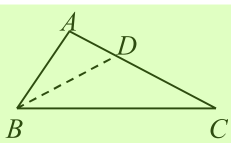
结论：$AD=AC$，$\triangle BDA\backsim\triangle ADC$

策略二：向内构造等腰（小角加倍或大角减半）

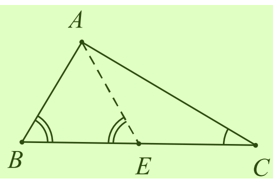
已知条件：如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=2\angle B$



辅助线作法：法一：作$\angle ABC$的平分线交AC于点D，结论：$\angle DBC=\angle C$，$DB=DC$



法二：在BC上取一点E，使$AE=CE$，则$\angle AEB=2\angle C=\angle B$（作$AC$中垂线得到点$E$）

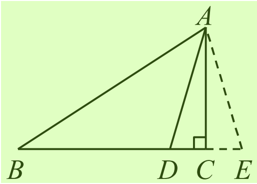


总结：策略一和策略二都是当2倍角和1倍角共边时对应的构造方法，下面我们再来看看不在同一个三角

形中时该如何处理

策略三：沿直角边翻折半角（小角加倍）

已知条件：如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，点 D 为边 BC 上一点，连接 AD，$\angle B=2\angle CAD$

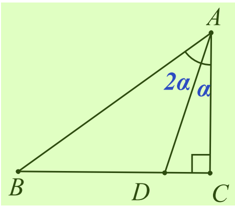


辅助线作法：沿 AC 翻折$\triangle ACD$ 得到$\triangle ACE$

结论：$AD=AE$，$\angle DAE=\angle B$，$BA=BE$，$\triangle ADE\backsim\triangle BAE$

策略四：邻二倍角的处理

已知条件：如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，点 D 为边 BC 上一点，$\angle BAD=2\angle CAD$

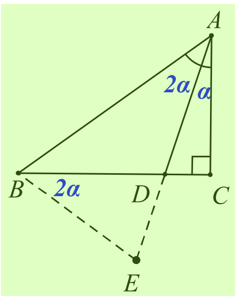


辅助线作法：

法一：向外构造等腰（导角得相似）

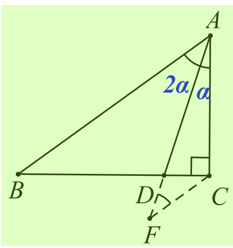
延长 AD 到 E，使 $AE=AB$，连接 BE

结论：$BD=BE$，$\angle DBE=\angle BAD$，$\triangle BDE\backsim\triangle ABE$



法二：作平行线，把二倍角转到同一个三角形中

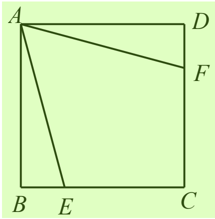
延长 AD 到 F，使 $CE/\!/AB$，则$\angle F=\angle BAD$



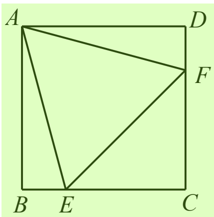
【经典例题讲解】

例题 1 如图，在正方形 $ABCD$ 中，$AB=1$，点 E、F 分别在边 BC 和 CD 上，$AE=AF$，$\angle EAF=60°$，则 CF 的长是(　　)

A. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\sqrt{3}-1$　　D. $\dfrac{2}{3}$



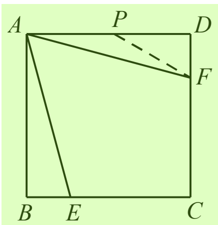
【简析】(1)方法一(常规解法)：如图，连接 EF，易证△AEF 为等边三角形，



且△ADF≌△ABE(HL)，则 $DF=BE$，从而 $CF=CE$，即△CEF 为等腰直角三角形；设 $CF=x$，则 $DF=1-x$，$AF=EF=\sqrt{2}x$，在 Rt△ADF 中，由勾股定理可得 $1+(1-x)^2=2x^2$，

解得 $x=\sqrt{3}-1$($x=-\sqrt{3}-1$ 舍去)，故选 C；

方法二(倍半角模型)：如图，在边 AD 上取点 P，使 $AP=PF$，



同上可得△ADF≌△ABE(HL)，则 $\angle DAF=\angle BAE=15°$，从而 $\angle DPF=30°$；设 $DF=x$，则 $PD=\sqrt{3}x$，$AP=PF=2x$，故 $AD=(2+\sqrt{3})x=1$，解得 $x=2-\sqrt{3}$，$\therefore CF=\sqrt{3}-1$，选 C

例题 2 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 E 是 CD 的中点，AF 平分 $\angle BAE$，交 BC 于点 F，将△ADE 绕点 A 顺时针旋转 90° 得△ABG，则 CF 的长为____________.

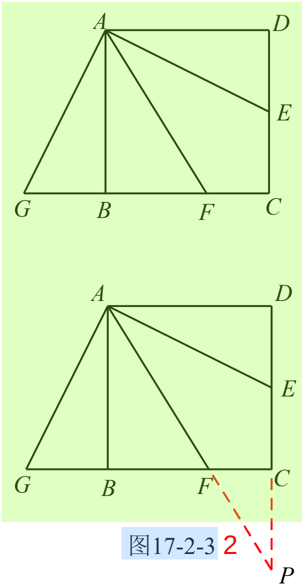


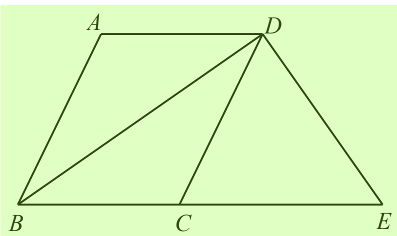
图17-2-3

【简析】(1)方法一(常规解法)：由题可得$\angle AFG=\angle DAF=\angle DAE+\angle EAF=\angle BAG+\angle BAF=\angle FAG$，即$\angle AFG=\angle FAG$，故$FG=AG=AE=2\sqrt{5}$，从而$CF=CG-FG=6-2\sqrt{5}$；

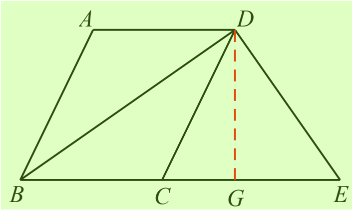
方法二(倍半角模型)：如图17—2—3，延长AF、DC交于点P，易得$\angle P=\angle BAF=\angle EAF$，则$PE=AE=2\sqrt{5}$，故$CP=2\sqrt{5}-2$，$DP=2\sqrt{5}+2$；又易证$\triangle PCF\backsim\triangle PDA$，故$\dfrac{CF}{DA}=\dfrac{CP}{DP}$，即$\dfrac{CF}{4}=\dfrac{2\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}+2}$，从而$CF=6-\sqrt{5}$；

【反思】方法一的关键是通过导角得到等腰$\triangle AFG$，方法二由“倍角$\angle AED$”造“半角$\angle P$”，并且这里的构造是通过“角平分线＋平行线➞等腰三角形”自然衍生出来的

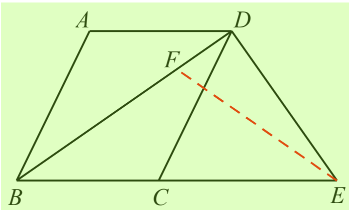
例题 3 如图，面积为24的$\square ABCD$中，对角线BD平分$\angle ABC$，过点D作$DE\perp BD$交BC的延长线于点E，$DE=6$，则$\sin\angle DCE$的值为(　　)



【简析】方法一(常规解法)：如图，作$DG\perp BE$于点G，由题易得$\angle CBD=\angle ABD=\angle CDB$，则$BC=CD$；进一步由$DE\perp BD$，可得$\angle CDE=\angle E$，则$CD=CE=BC$，从而$S_{\square ABCD}=2S_{\triangle BCD}=S_{\triangle BDE}$，即$S_{\triangle BDE}=24$，故$BD=8$，$BE=10$，所以$DG=\dfrac{24}{5}$，$CD=5$，$\sin\angle DCE=\dfrac{24}{5}$，选A

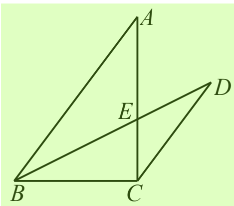


方法二(倍半角模型)：如图，在 BD 上取点 F，使 $EF=BF$，易证$\angle DFE=2\angle EBF$，$\angle DCE=2\angle EBF$，故$\angle DFE=\angle DCE$，要求 $\sin\angle DCE$ 的值，只需求 $\sin\angle DFE$；设 $EF=BF=x$，同上可得 $BD=8$，则 $DF=8-x$，在 Rt$\triangle DEF$ 中，由勾股定理可得 $36+(8-x)^2=x^2$，解得 $x=\frac{24}{5}$，从面 $\sin\angle DFE=\frac{DE}{EF}=\frac{24}{5}$，即 $\sin\angle DCE=\frac{24}{5}$，选 A.



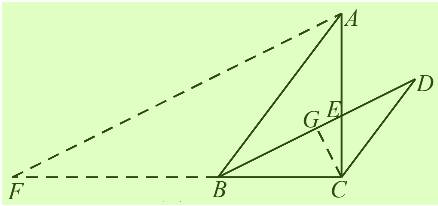
【反思】方法一通过作高是线构造 Rt$\triangle CDG$，结合面积法求解，方法二由“半角$\angle CBD$”造“倍角$\angle DFE$”，结合勾股定理列方程求.

例题 4 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AB=10$，$BC=6$，$CD\parallel AB$，$\angle ABC$ 的平分线 BD 交 AC 于点 E，则 $DE=$_________.



简析(1)方法一(常规解法)：由题得$\angle CBD=\angle ABD=\angle D$，则 $CD=BC=6$；又易得$\triangle CDE\backsim\triangle ABE$，则$\frac{CE}{AE}=\frac{DE}{BE}=\frac{CD}{AB}=\frac{3}{5}$，故 $CE=\frac{3}{8}AC=3$，从而 $BE=3\sqrt{5}$，$DE=\frac{3}{5}BE=\frac{9\sqrt{5}}{5}$；

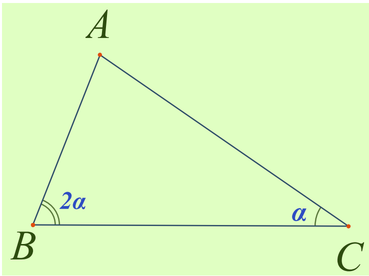
方法二(倍半角模型)：如图，延长 CB 至点 F，使 $BF=AB=10$，连接 AF，由题可得 $AC=8$，$CF=16$，则 $\tan\angle F=\frac{1}{2}$；又易得$\angle CBE=\angle F$，故 $\tan\angle CBE=\frac{1}{2}$，即$\frac{CE}{BC}=\frac{1}{2}$，从而 $CE=3$，$BE=3\sqrt{5}$；再作 $CG\perp BD$ 于点 G，易得 $BG=\frac{2}{\sqrt{5}}BC=\frac{12\sqrt{5}}{5}$；同上可得 $CB=CD$，故 $BD=2BG=\frac{24\sqrt{5}}{5}$，因此 $DE=BD-BE=\frac{9\sqrt{5}}{5}$；



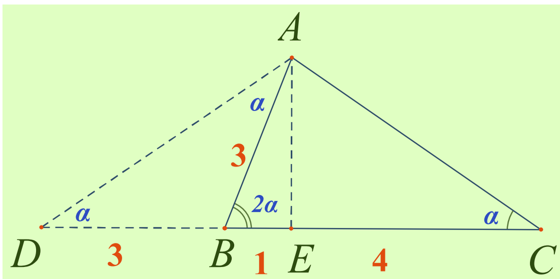
总结：具体问题具体对待，并非哪一种方法绝对简单，需根据问题特征选取较为合适的方法.

【一题多解 1】围绕 2 倍角条件，解法围绕“翻”“延”倍”“分”

如图，在△*ABC* 中，∠*ABC*＝2∠*ACB*，*AB*＝3，*BC*＝5，求线段 *AC* 的长.

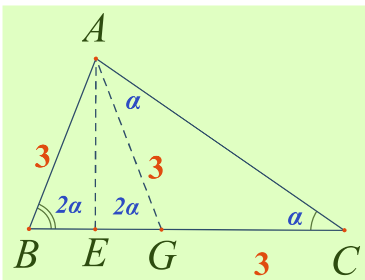


法 1：延长或翻折向外构造等腰（双等腰）

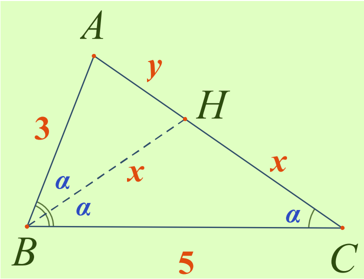


易知 $AE=2\sqrt{2}\Rightarrow AC=2\sqrt{6}$

法 2：翻折或取点向内构造等腰（双等腰）

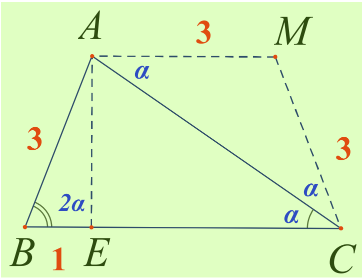


法 3：作角平分线



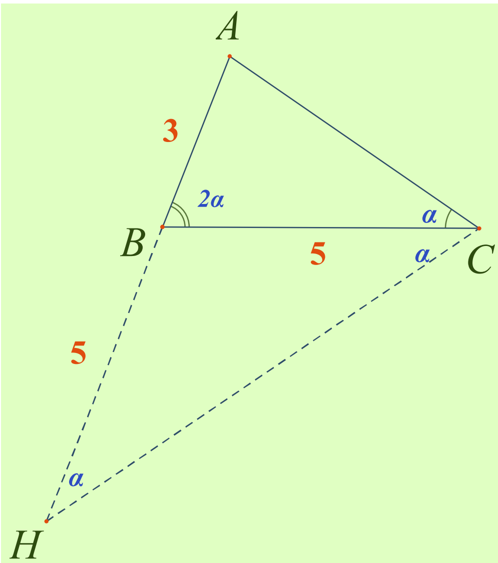
易知△ABH∽△ACB | $\frac{3}{x+y}=\frac{y}{3}=\frac{x}{5}$

法 4：翻折一边+平行线向外作等腰(补成等腰梯形)



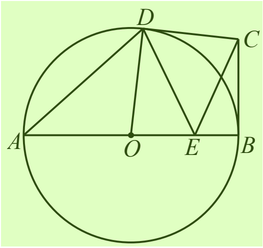
法 5：向外延长作等腰

易知△ABC∽△ADC



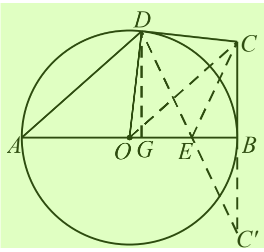
【一题多解 2】常规法与倍半角处理对比

如图，AB 为⊙O 的直径，BC、CD 是⊙O 的切线，切点分别为点 B、D，点 E 为线段 OB 上的一个动点，连接 OD、CE、DE，已知 $AB=2\sqrt{5}$，$BC=2$，当 $CE+DE$ 的值最小时，则 $\frac{CE}{DE}$ 的值为(　　)

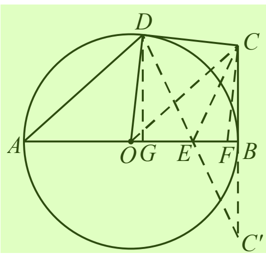


A. $\frac{9}{10}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

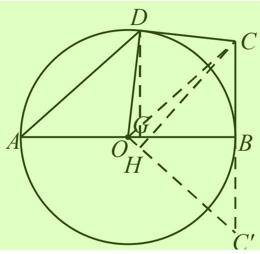
简析(1)**方法一**(常规解法)：如图，作点C关于AB的对称点C'，连接$C'D$，交AB于点E，连接CE，此时$CE+DE$取得最小值，且$\frac{CE}{DE}=\frac{C'E}{DE}$；再作$DG\perp AB$于点$G$，连接$OC$、$BD$，易证$\triangle OBC\cong\triangle ODC$，则$\angle BOC=\angle DOC=\angle A$，故$\sin\angle A=\sin\angle BOC=\frac{2}{3}$，$\cos\angle A=\cos\angle BOC=\frac{\sqrt{5}}{3}$，从而$BD=AB\cdot\sin\angle A=\frac{4\sqrt{5}}{3}$；又易证$\angle BDG=\angle A$，故$DG=BD\cdot\cos\angle BDG=BD\cdot\cos\angle A=\frac{4\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{20}{9}$；由$\triangle C'BE\backsim\triangle DGE$，可得$\frac{C'E}{DE}=\frac{C'B}{DG}=\frac{9}{10}$，因此$\frac{CE}{DE}=10$，选$A$；



方法二(倍半角模型)：如图17—4—3，同上作相关辅助线，易得$\angle DOG=2\angle BOC$；在OB上取点F，使$OF=CF$，则$\angle BFC=2\angle BOC=\angle DOG$；设$OF=CF=x$，则$BF=\sqrt{5}-x$，在Rt$\triangle BCF$中，由勾股定理得$4+(\sqrt{5}-x)^2=x^2$，解得$x=\frac{9\sqrt{5}}{10}$，故$\sin\angle DOG=\sin\angle BFC=\frac{4\sqrt{5}}{9}$，从而$DG=OD\cdot\sin\angle DOG=\frac{20}{9}$，下略；



方法三(面积法)：如图17—4—4，同上作相关辅助线(为说理方便，省去部分线段)，则$\angle DOG=2\angle BOC=\angle COC'$；再作$CH\perp OC'$于点$H'$，易得$CH=\frac{CC'\cdot OB}{OC'}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$，故$\sin\angle DOG=\sin\angle COC'=\frac{4\sqrt{5}}{9}$，下略.



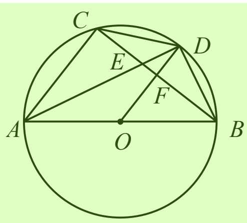
反思：本题结构相当于已知“半角$\angle BOC$”求“倍角$\angle DOG$”，方法一通过作高法，构造直角三角形求解；方法二构造“倍半角模型”，结合勾股定理列方程求解；方法三依然基于导角分析，借助对称性，结合面积法求解．以上提供的三种方法都是“倍半角”处理的常见方法．

如图，AB为$\odot O$的直径，D是弧BC的中点，BC与AD、OD分别交于点E、F.

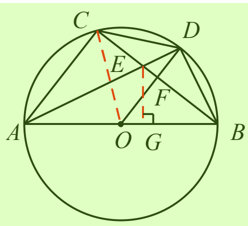
(1)求证：$DO//AC$;

(2)求证：$DE\cdot DA=DC^2$

(3)若$\tan\angle CAD=\frac{1}{2}$，求$\sin\angle CDA$的值。



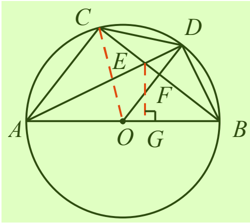
简析(1)如图，连接OC，易证$DO\perp BC$且$AC\perp BC$，故$DO//AC$;



(2)由题可得$\angle BCD=\angle CAD$，故$\triangle DCE\backsim\triangle DAC$，进一步可证$DE\cdot DA=DC^2$；

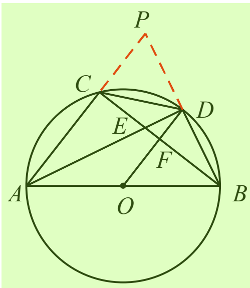
(3)方法一(母子型相似)：由$\tan\angle CAD=\frac{1}{2}$，可得$\frac{CE}{AC}=\frac{1}{2}$；又$\triangle DCE\backsim\triangle DAC$，故$\frac{DE}{DC}=\frac{DC}{DA}=\frac{1}{AC}=\frac{1}{2}$；设$DE=k$，则$DC=2k$，$DA=4k$，$AE=3k$；又易证$\frac{FE}{CE}=\frac{DE}{AE}$，故$\frac{FE}{CE}=\frac{1}{3}$；由此再设$FE=m$，则$CE=3m$，$CF=4m$，从而$BC=8m$，$AC=6m$，因此$AB=10m$，$\sin\angle B=\frac{3}{5}$，即$\sin\angle CDA=\frac{3}{5}$；

方法二(角平分线之双垂法)：如，作$EG\perp AB$于点G，易证$\triangle AEC\cong\triangle AEG$；由$\tan\angle CAD=\frac{1}{2}$，



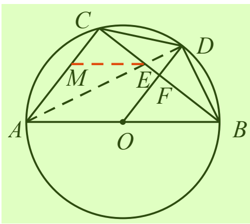
可设 $CE=1$，$AC=2$，则 $EG=1$，$AG=2$；又易得$\triangle BEG\backsim\triangle BAC$，$\dfrac{BC}{BG}=\dfrac{BA}{BE}=\dfrac{AC}{EG}=2$,；再设 $BG=x$，则 $BC=2x$，$BA=BG+AG=x+2$，$BE=BC-CE=2x-1$，从而有 $x+2=2(2x-1)$，解得 $x=\dfrac{4}{3}$, 所以 $AB=\dfrac{10}{3}$, $\sin\angle B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{3}{5}$，即 $\sin\angle CDA=\dfrac{3}{5}$；

方法三(角平分线之对称策略)：如图，连接 BD 并延长，交 AC 的延长线于点 P，由题可设 $BD=PD=1$，



则 $AD=2$，$AB=AP=\sqrt{5}$；又 $\sin\angle PBC=\sin\angle PAD=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，故 $PC=PB\cdot\sin\angle PBC=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 从而 $AC=AP-CP=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ 因此 $\sin\angle B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{3}{5}$, 即 $\sin\angle CDA=\dfrac{3}{5}$

方法四(倍半角模型)：如图 17—14—4，在 AC 上取点 M，使 $AM=EM$，则 $\angle CME=2\angle CAD=\angle BAC$；



由题可设 $CE=1$, $AC=2$, 再设 $AM=ME=x$, 则 $CM=2-x$, 在 Rt$\triangle CME$ 中，由勾股定理可得$1+(2-x)^2=x^2$，解得 $x=\dfrac{5}{4}$，从而 $CM=\dfrac{3}{4}$，故 $\cos\angle CME=\dfrac{CM}{ME}=\dfrac{3}{5}$，即 $\cos\angle BAC=\dfrac{3}{5}$，所以 $\sin\angle B=\dfrac{3}{5}$，$\sin\angle CDA=\dfrac{3}{5}$.

反思：本题的结构为已知“半角 $\angle CAD$"求"倍角 $\angle BAC$"，从而转化为其余角 $\angle CDA$。以上提供的前三种方法都是借助相似或三角函数等进行计算，属常规思路，方法四基于导角分析，构造“倍半角模型”，显得尤为简单、直接，直指问题本质。

策略五：绝配角模型

【释义】当 m，n 两个角满足 $m+2n=180°$ 时，称其为一对绝配角，或者：半角的余角与它本身称为绝配

角

【举例】常见的剧配角组合如下：

绝配角	组合 1	组合 2	组合 3	组合 4	组合 5
m	2α	$90+2\alpha$	$90-2\alpha$	$60+2\alpha$	$60-2\alpha$
n	$90-\alpha$	$45-\alpha$	$45+\alpha$	$60-\alpha$	$60-\alpha$

【解 决】

思路(一)：根据三角形内角和是 180°，构造等腰三角形。

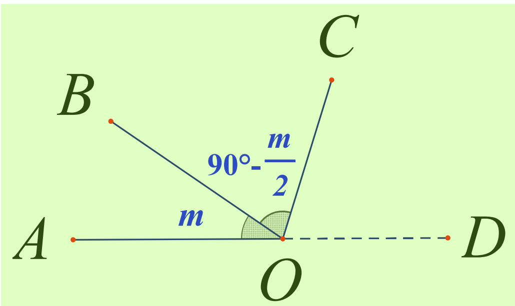
思路(二)：根据平角是 180°，m 和 2 个 n 构成一个平角(有两条边在同一直线上)

用一句话概括为：有等腰找等腰，没等腰造等腰

其中“等腰”指的是以 m 为顶角、以 n 为底角的等腰三角形，了解绝配角模型，可以给我们提供一些辅助线思路

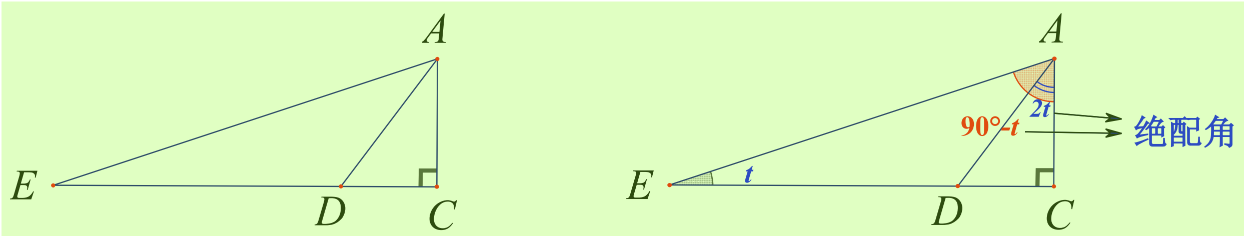
（一）共顶共边|翻折

当两个角满足两个角满足 $m+2n=180^\circ$ 时，且共顶点共一边，这样的两个角是什么样的呢？



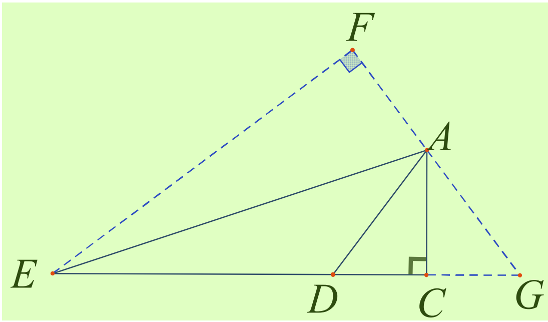
发现 OD 为$\angle AOB$邻补角的平分线，此时处理问题一般用翻折，把 OB 沿 OD 翻折.

例题 1：已知 Rt$\triangle ABC$ 中$\angle C=90^\circ$，$DE=3DC$，$2\angle E=\angle CAD$，求 $\dfrac{AE}{AD}$ 的值.



1

方法一：分析：$\angle EAC$ 与∠DAC 是共点 A 的绝配角，2
绝配角重叠，要翻折两次.



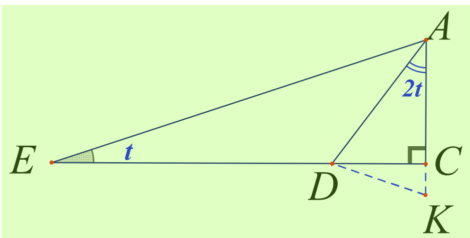
3

解：将△AEC 关于 AE 作轴对称图形，将△ADC 关于 AC 作轴对称图形，如图，△EFG 为直角三角形 4
设 $DC=x$， $DE=3x$, 则 $EF=4x$, $CG=x \Rightarrow EG=5x \Rightarrow FG=3x$

$\vartriangle GAC \sim \vartriangle GEF \Rightarrow AC=\dfrac{4}{3}x, AD=\dfrac{5}{3}x$， $AE=\dfrac{4\sqrt{10}}{3}x$

即可求出 $\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

方法二：分析：由于∠CAD＝2t，构造一个以∠A 为顶点的等腰△ADK，然后出现△ECA~△DCK 5



6

解：构造以∠A 为顶点的等腰△ADK(AD＝AK). 7
导角易得∠CDK＝∠AEC，△ECA~ADCK

$\therefore \dfrac{AC}{CK}=\dfrac{EC}{DC}=4$，设 CK＝x，AC＝4x，AD＝5x，DC＝3x，ED＝9x

$AE=4\sqrt{10}x, \dfrac{AE}{AD}=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

(二)共三角形|等腰 8

(1)若 $m, n=90^{\circ}-\dfrac{m}{2}$ 为同一个三角形的内角，则此时三角形为等腰三角形. 9

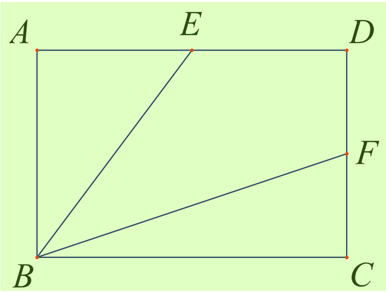
(2)若 $m,n=90^{\circ}+\dfrac{m}{2}$ 分别为同一个三角形的内角和外角，则另一内角为 $90^{0}-\dfrac{m}{2}$，此时三角形为等腰三角形

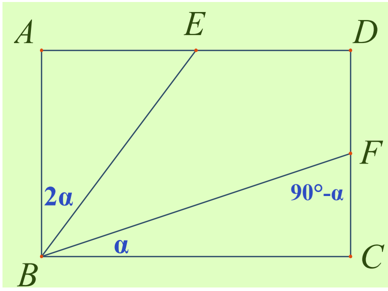
(3)若 $m,n=90^{\circ}-\dfrac{m}{2}$ 分别为同一个三角形的内角和外角，此时可以以 m 为顶角作等腰三角形，此时会构成另一个相似的等腰三角形.

(4)若 $m,n=90^{\circ}+\dfrac{m}{2}$ 为同一个三角形的内角，与(3)的情况相同.

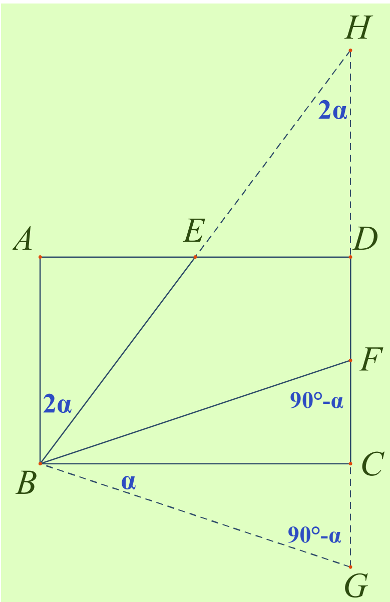
总结："半角的余角，等腰形来找"

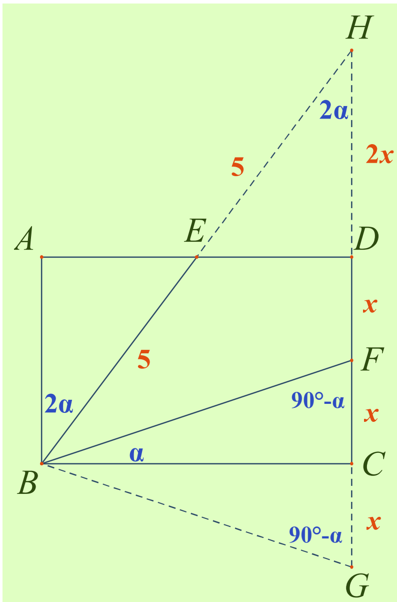
例题 2：如图在矩形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别为 AD，CD 的中点，连接 BE，BF，且 $\angle ABE=2\angle FBC$，若 $BE=5$，则 BF 的长度为 __________.





解法一：将△BFC 沿 CB 翻折，交 DC 的延长线于点 G，延长 CD 交 BE 的延长线于点 H，$\angle G=\angle BFC=90-\alpha$，$\angle H=2\alpha$，△$BHG$ 为等腰，$5x=10$，$x=2$，$AE=3$，$BC=6$，$BF=3\sqrt{5}$.

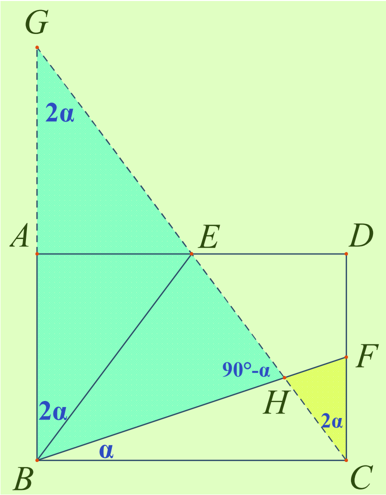


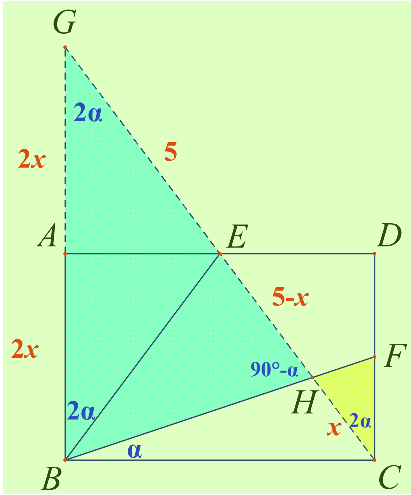


解法二：

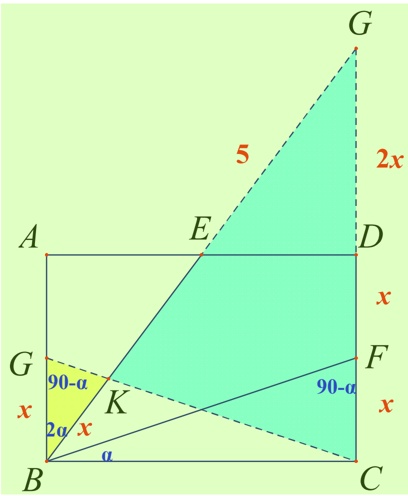
连接并延长交 BA 的延长导角，得出△FHC 为等腰三角形，平行不改变形状，△GBH 为等腰三角形。根据腰

等得出 $10-x=4x$，可求 $BF=3\sqrt{5}$



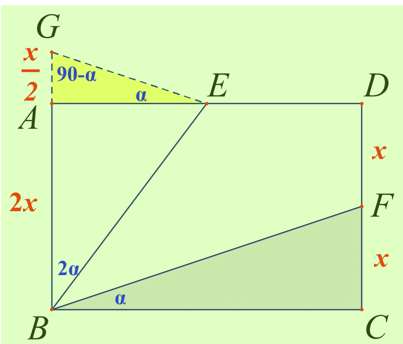


解法三：取 AB 中点 G，连接 CG，延长 BE 交 CD 的延长线于点 H，得到$\triangle BCF\cong\triangle CBG$，导角得出$\triangle BGK$ 为等腰平行不改变形状，$\triangle HKC$ 也为等腰。根据腰等得出 $10-x=4x$，可求 BF



以上三种解法都是利用造全等，转移角，构等腰，得出边的等量关系来求解。
此题还可以构直接造等腰。用相似得出边的数量关系求解。请看解法四

解法四：可以直接利用∠ABE=2α，构等腰△GBE，△BCF∽△EAG $\frac{AE}{BC}=\frac{GA}{CF}$.根据腰等得出 $\frac{5}{2}x=5$，可求 BF

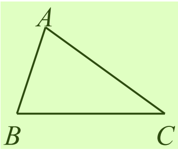


资料整理【淘宝店铺：向阳百分百】

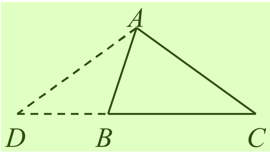
重点题型·归类精练

题型一　向外构造等腰三角形（大角减半）

1．如图，在△ABC 中，∠ABC＝2∠C，BC＝a，AC＝b，AB＝c，探究 a，b，c 满足的关系．



解：延长 CB 到 D，使 BD＝AB＝c，连接 AD．



则∠BAD＝∠D，∴∠ABC＝2∠D．

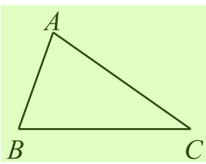
∵∠ABC＝2∠C，∴∠D＝∠C，

∴AD＝AC＝b，△BAD∽△ACD，

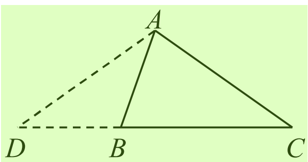
∴$\frac{AD}{BD}=\frac{CD}{AD}$，∴$\frac{b}{c}=\frac{a+c}{b}$，

∴$b^2=c(a+c)$．

2．如图，在△ABC 中，∠ABC＝2∠C，AB＝3，AC＝$2\sqrt{6}$，求 BC 的长．



解：延长 CB 到 D，使 DB＝AB＝3，连接 AD．



则∠D＝∠DAB，∴∠ABC＝2∠D．

∵∠ABC＝2∠C，∴∠C＝∠D＝∠DAB，

∴AD＝AC＝$2\sqrt{6}$，△BDA∽△ADC，

∴$\frac{AD}{BD}=\frac{CD}{AD}$，∴$\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{CD}{2\sqrt{6}}$，

∴$CD=8$，∴$BC=5$.

2023·深圳南山区联考二模

3．一副三角板按如图1放置，图2为简图，D为AB中点，E、F分别是一个三角板与另一个三角板直角边AC、BC的交点，已知$AE=2$，$CE=5$，连接DE，M为BC上一点，且满足$\angle CME=2\angle ADE$，$EM=$____.

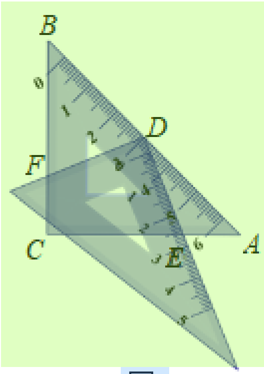


图1

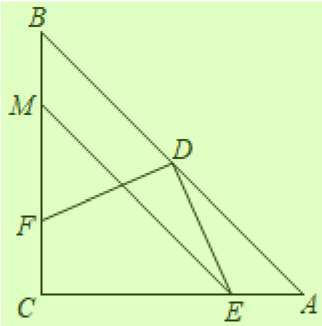
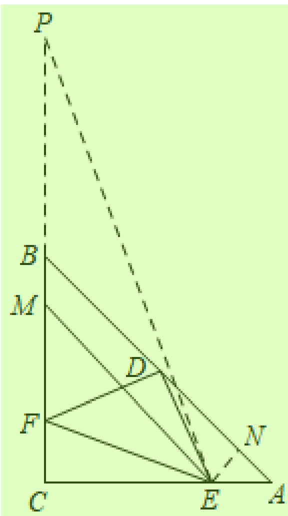


图2

【答案】$\frac{29}{4}$

【分析】由CE=5，AE=2，得AC=7，利用勾股定理，得到AD的长度，过E作EN⊥AD于N，求出EN和DN的长度，由于∠CME=2∠ADE，延长MB至P，是MP=ME，可以证明$\triangle DNE\sim\triangle PCE$，MP=x，在$Rt\triangle MCE$中，利用勾股定理列出方程，即可求解.

【详解】解：如图，过E作EN⊥AD于N，



$\therefore\angle END=\angle ENA=90°$,

$\therefore\angle NEA=\angle A=45°$,

∴NE= NA，

$\because AE=\sqrt{NE^2+NA^2}=\sqrt{2}NA$,

$\therefore NE = NA = \dfrac{AE}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

同理， $AD = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore DN = AD - NA = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$,

延长 MB 至 P，使 MP=ME，连接 PE，

∴可设 $\angle MPE = \angle MEP = x$,

$\therefore \angle EMC = \angle MPE + \angle MEP = 2x$,

$\because \angle EMC = 2\angle ADE$,

$\therefore \angle ADE = \angle MPE = x$,

又 $\angle DNE = \angle PCE = 90°$,

$\therefore \triangle DNE \sim \triangle PCE$,

$\therefore \dfrac{CE}{PE} = \dfrac{NE}{DN} = \dfrac{\sqrt{2}}{\frac{5\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{5}$,

$\therefore PC = \dfrac{25}{2}$,

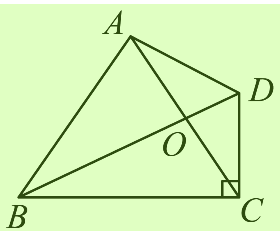
设 $MP = ME = x$, 则 $CM = \dfrac{25}{2} - x$,

在 $Rt\triangle MCE$ 中， $ME^2 = CM^2 + CE^2$,

$\therefore \left(\dfrac{25}{2} - x\right)^2 + 25 = x^2$, $\therefore x = \dfrac{29}{4}$,

2023·山西·统考中考真题

4．如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle BCD = 90°$，对角线 AC, BD 相交于点 O．若 $AB = AC = 5, BC = 6, \angle ADB = 2\angle CBD$，则 AD 的长为__________．

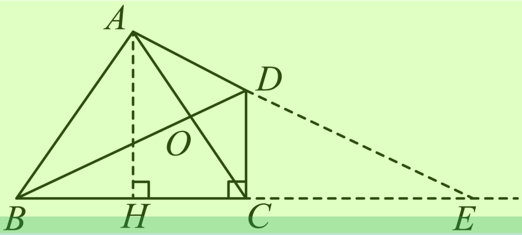


【答案】$\dfrac{\sqrt{97}}{3}$

【思路点拨】过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H，延长 AD， BC 交于点 E，根据等腰三角形性质得出 $BH = HC = \dfrac{1}{2}BC = 3$，根据勾股定理求出 $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = 4$，证明 $\angle CBD = \angle CED$，得出 $DB = DE$，根据等腰三角形性质得出 $CE = BC = 6$，证明 $CD \parallel AH$，得出 $\dfrac{CD}{AH} = \dfrac{CE}{HE}$，求出 $CD = \dfrac{8}{3}$，根据勾股定理求出

$DE=\sqrt{CE^2+CD^2}=\sqrt{6^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{97}}{3}$，根据 $CD // AH$，得出 $\frac{DE}{AD}=\frac{CE}{CH}$，即 $\frac{\frac{2\sqrt{97}}{3}}{AD}=\frac{6}{3}$，求出结果即可.

【详解】解：过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H，延长 AD，BC 交于点 E，如图所示：



则 $\angle AHC=\angle AHB=90^\circ$，

$\because AB=AC=5, BC=6$，

$\therefore BH=HC=\frac{1}{2}BC=3$，

$\therefore AH=\sqrt{AC^2-CH^2}=4$，

$\because \angle ADB=\angle CBD+\angle CED$，$\angle ADB=2\angle CBD$，

$\therefore \angle CBD=\angle CED$，

$\therefore DB=DE$，

$\because \angle BCD=90^\circ$，

$\therefore DC\perp BE$，

$\therefore CE=BC=6$，

$\therefore EH=CE+CH=9$，

$\because DC\perp BE$，$AH\perp BC$，

$\therefore CD // AH$，

$\therefore \triangle ECD\sim\triangle EHA$，

$\therefore \frac{CD}{AH}=\frac{CE}{HE}$，

即 $\frac{CD}{4}=\frac{6}{9}$，

解得：$CD=\frac{8}{3}$，

$\therefore DE=\sqrt{CE^2+CD^2}=\sqrt{6^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{97}}{3}$，

$\because CD // AH$，

$\therefore \frac{DE}{AD}=\frac{CE}{CH}$，

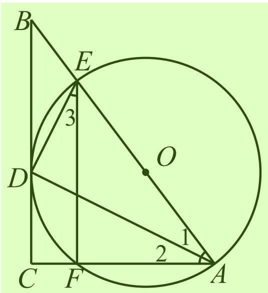
即 $\frac{\frac{2\sqrt{97}}{3}}{AD}=\frac{6}{3}$，

解得：$AD=\frac{\sqrt{97}}{3}$

5．如图，在 Rt△ABC 中，∠ACB＝90°，AC＝6，BC＝8，AD 平分∠BAC，AD 交 BC 于点 D，ED⊥AD 交 AB 于点 E，△ADE 的外接圆⊙O 交 AC 于点 F，连接 EF.

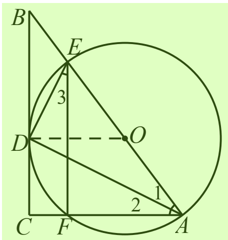
(1)求证：BC 是⊙O 的切线；

(2)求⊙O 的半径 r 及∠3 的正切值.

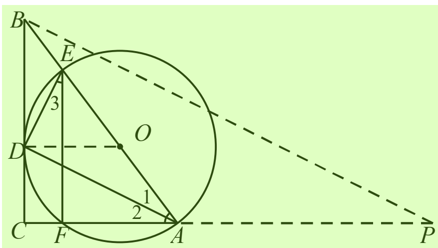


简析(1)如图，连接 OD，由题易得∠2＝∠1＝∠ODA，则 OD∥AC，故∠ODB＝∠C＝90°，即 OD⊥BC，所以 BC 是⊙O 的切线；

(2)**方法一**(常规解法)：由 OD∥AC，可得△BOD∽△BAC，则 $\frac{OD}{AC}=\frac{OB}{AB}$，即 $\frac{r}{6}=\frac{10-r}{10}$，解得 $r=\frac{15}{4}$；又可 $\frac{BD}{BC}=\frac{OD}{AC}$，故 $\frac{BD}{BC}=\frac{5}{8}$，从而 $\frac{CD}{BC}=\frac{3}{8}$，即 $CD=\frac{3}{8}BC=3$，所以 tan∠3＝tan∠2＝$\frac{CD}{AC}=\frac{1}{2}$；



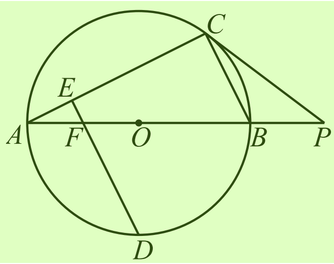
方法二(倍半角模型)：如图 17—8—3，延长 CA 至点 P，使 AP＝AB＝10，易证∠3＝∠2＝∠1＝∠P，故 tan∠3＝tan∠P＝$\frac{BC}{PC}=\frac{1}{2}$；又由 tan∠2＝$\frac{1}{2}$，可得 CD＝3，故 BD＝5，从而易得 $r=OD=\frac{3}{4}BD=\frac{15}{4}$.



6．如图，AB 为⊙O 的直径，点 P 在 AB 的延长线上，点 C 在⊙O 上，且 $PC^2=PB\cdot PA$.

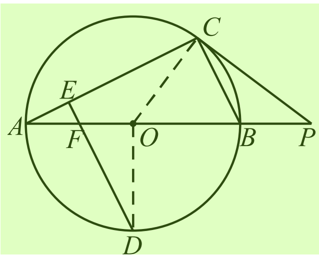
(1)求证：PC 是⊙O 的切线；

(2)已知 PC＝20，PB＝10，点 D 是弧 AB 的中点，DE⊥AC，垂足为 E，DE 交 AB 于点 F，求 EF 的长.



简析(1)如图，连接 OC，由 $PC^2=PB\cdot PA$，可得 $\dfrac{PC}{PA}=\dfrac{PB}{PC}$，又 $\angle P=\angle P$，故 $\triangle PCB\backsim\triangle PAC$，从而 $\angle PCB=\angle A=\angle ACO$，进一步可证 $\angle OCP=\angle ACB=90^\circ$，即 $OC\perp CP$，所以 PC 是⊙O 的切线；

(2)方法一(常规解法)：连接 OD，易证 $OD\perp AB$；由 $PC^2=PB\cdot PA$，可得 $PA=40$，$AB=30$；又由 $\triangle PCB\backsim\triangle PAC$，可得 $\dfrac{CB}{AC}=\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{1}{2}$，故 $\tan\angle D=\tan\angle A=\dfrac{1}{2}$，从而 $OF=\dfrac{1}{2}OD=\dfrac{15}{2}$，$AF=OA-OF=\dfrac{15}{2}$，进一步可得 $EF=AF\cdot\sin\angle A=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$；



方法二(倍半角模型)：同上可得 $AB=30$，则 $OC=15$，$OP=25$，即 $OC:CP:OP=3:4:5$；如图 17－9－3，延长 CO 至点 Q，使 $OQ=OP$，易得 $\tan\angle D=\tan\angle A=\tan\angle Q=\dfrac{1}{2}$，下略.

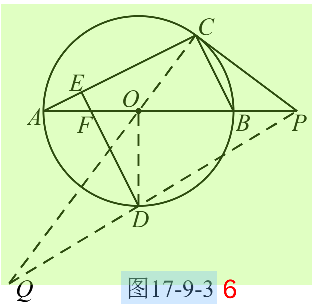
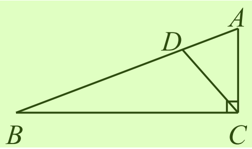


图17-9-3

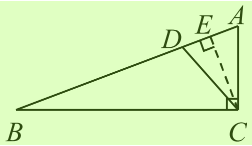
反思：这是一个确定性问题，其结构相当于已知“倍角 $\angle POC$”求“半角 $\angle A$”，方法一利用“母子型相思似”求解，方法二构造“倍半角模型”求解，相对而言，前者更简单，后者更通用

题型二　向内构造等腰（小角加倍或大角减半）

7．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，点 D 为边 AB 上一点，$\angle ACD=2\angle B$，$\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{1}{3}$，求 $\cos B$ 的值.



解： 过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E.



$\because \angle ACB=90°$，$\therefore \angle ACE=90°-\angle BCE=\angle B$.

$\because \angle ACD=2\angle B$，$\therefore \angle ACD=2\angle ACE$，

$\therefore \angle ACE=\angle DCE$，$\therefore \angle A=\angle CDE$，

$\therefore AC=DC$，$\therefore AE=DE$.

设 $AE=DE=a$，则 $AD=2a$，$BD=6a$，$BE=7a$.

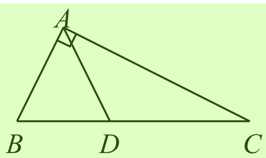
$\because \angle ACE=\angle B$，$\angle AEC=\angle CEB=90°$，

$\therefore \triangle CEA\backsim\triangle BEC$，$\therefore \dfrac{AE}{CE}=\dfrac{CE}{BE}$，

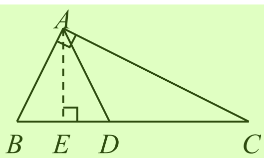
$\therefore \dfrac{a}{CE}=\dfrac{CE}{7a}$，$\therefore CE=\sqrt{7}a$，$\therefore BC=\sqrt{BE^2+CE^2}=2\sqrt{14}a$，

$\therefore \cos B=\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{7a}{2\sqrt{14}a}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

8．如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，点 D 为边 BC 上一点，$\angle BAD=2\angle C$，$BD=2$，$CD=3$，求 AD 的长.



解： 过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E.



$\because \angle BAC=90°$，$\therefore \angle BAE=90°-\angle CAE=\angle C$.

$\because \angle BAD=2\angle C$，$\therefore \angle BAD=2\angle BAE$，

$\therefore \angle BAE=\angle DAE$，$\therefore \angle B=\angle ADE$，

$\therefore AB=AD$，$\therefore BE=DE=\dfrac{1}{2}BD=1$，$\therefore CE=4$.

$\because \angle BAE=\angle C$，$\angle AEB=\angle CEA=90°$，

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle CAE$，$\therefore \dfrac{AE}{BE}=\dfrac{CE}{AE}$，

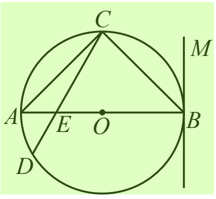
$\therefore \dfrac{AE}{1}=\dfrac{4}{AE}$，$\therefore AE=2$，$\therefore AD=\sqrt{DE^2+AE^2}=\sqrt{5}$.

9．如图，BM 是以 AB 为直径的⊙O 的切线，B 为切点，BC 平分$\angle ABM$，弦 CD 交 AB 于点 E，$DE=OE$.

(1)求证：$\triangle ACB$ 是等腰直角三角形；

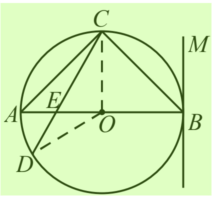
(2)求证：$OA^2=OE\cdot DC$；

(3)求 $\tan\angle ACD$ 的值.

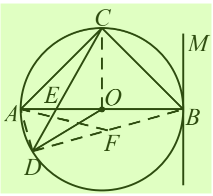


简析(1)由题易得$\angle ABC=45°$，从而易证$\triangle ACB$ 是等腰直角三角形；

(2)如图，连接 OC、OD，易证$\angle DOE=\angle D=\angle OCD$，故$\triangle DOE\backsim\triangle DCO$，从而易得 $OD^2=DE\cdot DC$，即 $OA^2=OE\cdot DC$；



(3)方法一(倍半角模型)：如图，连接 AD、BD，设$\angle ACD=x$，则$\angle ABD=x$，$\angle AOD=2x$，从而$\angle CEO=4x$，$\angle CAE=3x=45°$，所以 $x=15°$；在 BD 上取点 F，使 $AF=BF$，则$\angle AFD=30°$；由此可设 $AD=k$，则 $DF=\sqrt{3}k$，$AF=BF=2k$，从而 $BD=(2+\sqrt{3})k$，故 $\tan\angle ABD=\dfrac{AD}{BD}=2-\sqrt{3}$，即 $\tan\angle ACD=2-\sqrt{3}$；



方法二(解三角形)：同上可得$\angle ACD=15°$，则$\angle BCE=75°$，$\angle BEC=60°$；如图 17－10－4，作 $EG\perp BC$ 于点 G，可设 $OE=1$，则 $OB=OC=\sqrt{3}$，$BC=\sqrt{6}$，$BE=\sqrt{3}+1$，从而 $BG=EG=\dfrac{BE}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，$CG=BC-BG=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，故 $\tan\angle ACD=\tan\angle CEG=\dfrac{CG}{EG}=2-\sqrt{3}$.

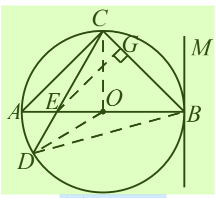
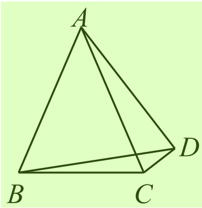


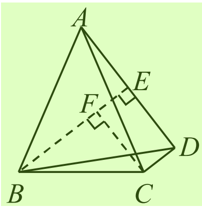
图17-10-4

反思：(2)主要通过换边，结合相似证乘积式；(3)通过导角得到 15°，方法一借助“倍半角模型”，由特殊角 30°求“特殊半角”15°，方法二的本质是解△BCE，显然前者更为简便

10．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABD=2\angle BDC$，$AB=AC=BD=4$，$CD=1$，求 BC 的长．



解： 过点 B 作 $BE\perp AD$ 于点 E，过点 C 作 $CF\perp BE$ 于点 F．



$\because AB=BD$，$\therefore AE=DE$，$\angle ABE=2\angle DBE$，

$\therefore \angle ABD=2\angle DBE$．

$\because \angle ABD=2\angle BDC$，$\therefore \angle BDC=\angle DBE$，

$\therefore CD\parallel BE$，$\therefore CD\perp AD$，

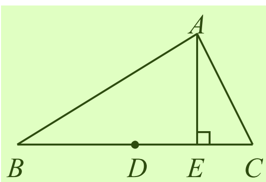
$\therefore$ 四边形 $CDEF$ 是矩形，$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{15}$，

$\therefore EF=CD=1$，$AE=DE=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，

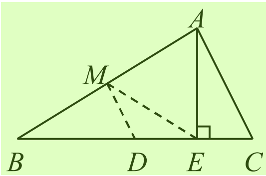
$\therefore BE=\sqrt{BD^2-DE^2}=\dfrac{7}{2}$，$\therefore BF=BE-EF=\dfrac{5}{2}$，

$\therefore BC=\sqrt{BF^2+CF^2}=\sqrt{10}$．

11．如图，在△ABC 中，$\angle C=2\angle B$，点 D 是 BC 的中点，AE 是 BC 边上的高，若 $AE=4$，$CE=2$，求 DE 的长．



解： 取 AB 的中点 M，连接 MD，ME．



∵点 D 是 BC 中点，∴MD 是△ABC 的中位线，

∴$MD/\!/AC$，$MD=\dfrac{1}{2}AC$，∴$\angle BDM=\angle C$.

∵$\angle C=2\angle B$，∴$\angle BDM=2\angle B$.

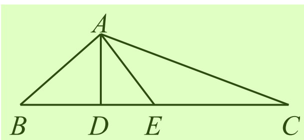
∵AE 是 BC 边上的高，∴$\angle AEB=90^\circ$，

∴$ME=\dfrac{1}{2}AB=MB$，∴$\angle B=\angle MED$，

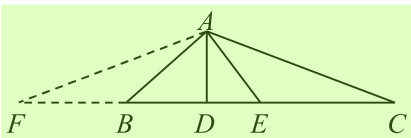
∴$\angle BDM=2\angle MED$，∴$\angle DME=\angle MED$，

∴$DE=DM=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}\sqrt{AE^2+CE^2}=\sqrt{5}$.

12．如图，在△ABC 中，$\angle ABC=2\angle C$，$AD\perp BC$ 于点 D，AE 为 BC 边上的中线，$BD=3$，$DE=2$，求 AE 的长.



解：延长 CB 到 F，使 $BF=AB$，连接 AF.



则$\angle F=\angle BAF$，∴$\angle ABC=2\angle F$.

∵AE 是中线，∴$BE=EC$，∴$BD+DE=EC$.

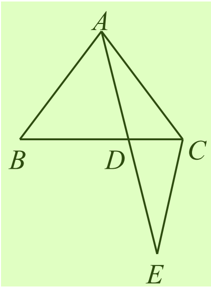
∵$\angle ABC=2\angle C$，∴$\angle F=\angle C$，∴$AF=AC$.

∵$AD\perp BC$，∴$DF=DC$，∴$BF+BD=DE+EC$，

∴$AB+BD=DE+BD+DE$，∴$AB=2DE=4$，

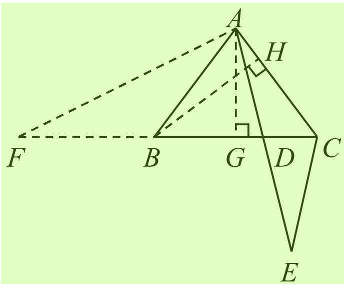
∴$AD^2=AB^2-BD^2=7$，∴$AE=\sqrt{DE^2+AD^2}=\sqrt{11}$.

13．如图，在△ABC 中，$AB=AC=5$，点 D 为 BC 边上一点，$BD=2DC$，点 E 在 AD 的延长线上，$\angle ABC=2\angle DEC$，$AD\cdot DE=18$，求 $\sin\angle BAC$ 的值.



解： 延长 CB 到 F，使 $BE=AB$，连接 AF，过点 A 作 $AG\perp BC$ 于点 G，过点 B 作 $BH\perp AC$ 于点 H.

则 $\angle F=\angle BAF$，$\therefore \angle ABC=2\angle F$.



$\because \angle ABC=2\angle DEC$，$\therefore \angle F=\angle DEC$.

$\because \angle ADF=\angle CDE$，$\therefore \dfrac{AD}{DF}=\dfrac{CD}{DE}$，

$\therefore CD\cdot DF=AD\cdot DE=18$.

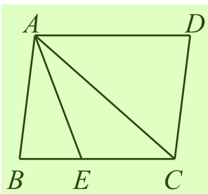
设 $CD=a$，则 $BD=2a$，$DF=2a+5$，

$\therefore a(2a+5)=18$，解得 $a=-\dfrac{9}{2}$（舍去）或 $a=2$，

$\therefore BC=3a=6$，$\therefore BG=CG=3$，$\therefore AG=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

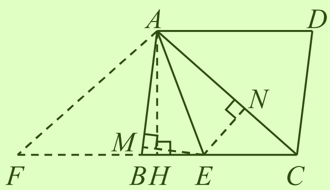
$\therefore BH=\dfrac{4}{5}BC=\dfrac{24}{5}$，$\therefore \sin\angle BAC=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{24}{25}$.

14．如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle D=2\angle ACB$，AE 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 E，若 $BE=2$，$CE=3$，求 AE 的长.



解： 延长 CB 到 F，使 $BF=AB$，连接 AF，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H，

过点 E 作 $EM\perp AB$ 于点 M，$EN\perp AC$ 于点 N.



则$\angle F=\angle BAF$，∴$\angle ABC=2\angle F$.

∵四边形$ABCD$是平行四边形，∴$\angle ABC=\angle$D.

∵$\angle D=2\angle ACB$，∴$\angle ABC=2\angle ACB$，

∴$\angle F=\angle ACB$，∴$AF=AC$，$\triangle ABF\backsim\triangle CAF$，∴$\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{CF}{AF}$.

∵AE平分$\angle BAC$，∴$EM=EN$，

∴$\dfrac{BE}{CE}=\dfrac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACE}}=\dfrac{\frac{1}{2}AB\cdot EM}{\frac{1}{2}AC\cdot EN}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{2}{3}$，∴$\dfrac{AB}{AF}=\dfrac{2}{3}$.

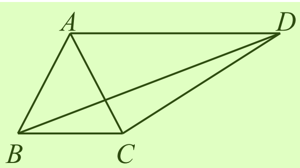
设$AB=2x$，则$BF=2x$，$AF=3x$，$CF=2x+5$，

∴$\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{2x+5}{3x}$，解得$x=2$，∴$CF=9$，$AB=BF=4$，

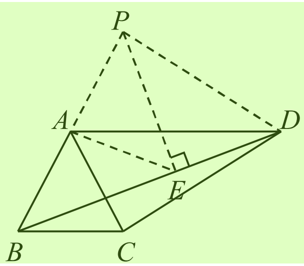
∴$FH=\dfrac{9}{2}$，∴$BH=\dfrac{1}{2}$，∴$EH=\dfrac{3}{2}$，$AH^2=AB^2-BH^2=\dfrac{63}{4}$，

∴$AE=\sqrt{AH^2+EH^2}=3\sqrt{2}$

15．如图，在四边形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，$AB=AC=4$，$CD=2\sqrt{11}$，$\angle ABD=2\angle DBC$，求BD的长.



解： 延长BA到P，使$PA=AB$，过点P作$PE\perp BD$于点E，连接AE，PD.



∵$AD\parallel BC$，∴$\angle ADB=\angle DBC$.

∵$\angle ABD=2\angle DBC$，∴$\angle ABD=2\angle ADB$.

∵$AD\parallel BC$，∴$\angle PAD=\angle ABC$，$\angle CAD=\angle ACB$.

∵$AB=AC$，∴$PA=AC$，$\angle ABC=\angle ACB$，∴$\angle PAD=\angle CAD$.

$\because AD=AD$，$\therefore \triangle PAD\cong\triangle CAD$，$\therefore PD=CD=2\sqrt{11}$.

$\because PA=AB$，$\angle PEB=90°$，$\therefore AE=\dfrac{1}{2}PB=AB=4$，

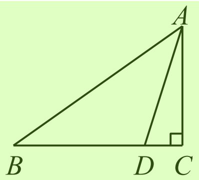
$\therefore \angle AEB=\angle ABD=2\angle ADB$，$\therefore \angle ADB=\angle DAE$，

$\therefore DE=AE=4$，$\therefore PE^2=PD^2-DE^2=28$，

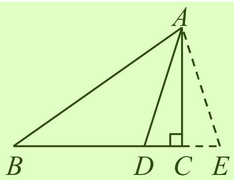
$\therefore BE=\sqrt{PB^2-PE^2}=6$，$\therefore BD=BE+DE=10$.

题型三　沿直角边翻折半角（小角加倍）

16．如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，点 D 为边 BC 上一点，$\angle B=2\angle CAD$，$AB\cdot CD=5$，求 AD 的长.



解：延长 BC 到 E，使 $CE=CD$，连接 AE.



$\because \angle ACB=90°$，$\therefore AD=AE$，

$\therefore \angle CAD=\angle CAE$，$\angle ADC=\angle E$.

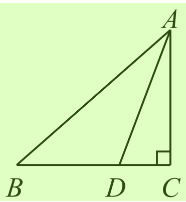
$\because \angle B=2\angle CAD$，$\therefore \angle B=\angle DAE$，

$\therefore \angle BAE=\angle ADE=\angle E$，$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle DAE$，$BE=AB$，

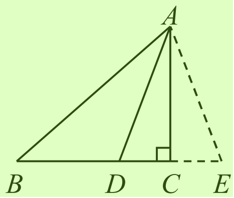
$\therefore \dfrac{AE}{DE}=\dfrac{BE}{AE}$，$\therefore AE^2=BE\cdot DE=BE\cdot 2CD=10$，

$\therefore AD=AE=\sqrt{10}$.

17．如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，点 D 为 BC 边上一点，$BD=2CD$，$\angle B=2\angle DAC$，$AB=4$，求 AD 的长.



解：延长 BC 到 E，使 $CE=CD$，连接 AE.



∵ $\angle ACB=90°$，∴ $AD=AE$，

∴ $\angle ADE=\angle E$，$\angle DAC=\angle EAC$.

∵ $\angle B=2\angle DAC$，∴ $\angle B=\angle DAE$，

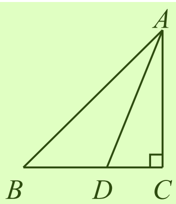
∴ $\angle BAE=\angle ADE=\angle E$，∴ $BE=AB=4$.

设 $CE=CD=x$，则 $BD=2x$，$BE=4x$，

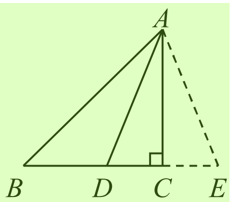
∴ $4x=4$，∴ $x=1$，∴ $BC=3$，∴ $AC^2=4^2-3^2=7$，

∴ $AD=\sqrt{CD^2+AC^2}=2\sqrt{2}$.

18．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，点 D 为边 BC 上一点，$\angle B=2\angle DAC$，$BD=3$，$DC=2$，求 AD 的长.



解：延长 BC 到点 E，使 $CE=CD$，连接 AE.



∵ $AC\perp BC$，∴ $AD=AE$，

∴ $\angle ADE=\angle E$，$\angle DAC=\angle EAC$.

∵ $\angle B=2\angle DAC$，∴ $\angle B=\angle DAE$，

∴ $\angle BAE=\angle ADE=\angle E$，∴ $AB=BE$，△ABE∽△DAE，

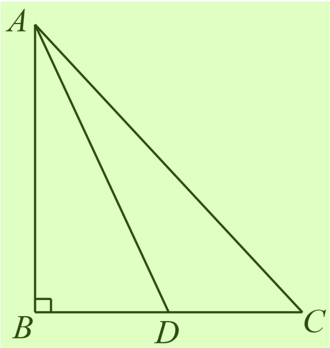
∴ $\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{DE}{AE}$.

∵ $BD=3$，$DC=2$，∴ $DE=4$，$BE=7$，

∴ $\dfrac{AE}{7}=\dfrac{4}{AE}$，∴ $AD=AE=2\sqrt{7}$.

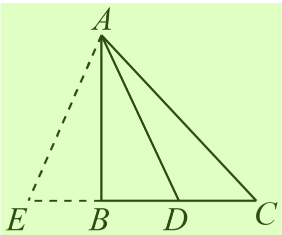
2023 • **深圳宝安区二模**

19．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle B=90°$，点 D 为 BC 中点，$\angle C=2\angle BAD$，则 $\dfrac{AD}{AC}$ 的值为__________.



【答案】$\frac{\sqrt{6}}{3}$

【详解】解：延长 CB 至 E，使 $BE=BD$，连接 AE，设 $BD=a$，



$\because \angle B=90^\circ$，

$\therefore \angle ABD=\angle ABE$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABD\cong \mathrm{Rt}\triangle ABE(\mathrm{HL})$，

$\therefore \angle E=\angle ADE$，　$AE=AD$，

$\because \angle C=2\angle BAD$，

$\therefore \angle C=\angle EAD$，

$\because \angle D=\angle C+\angle DAC$，

$\therefore \angle E=\angle ADE=\angle EAC$，

$\therefore AC=CE=3a$，

$\because \angle E=\angle ADE=\angle EAC$，　$\angle C=\angle EAD$，

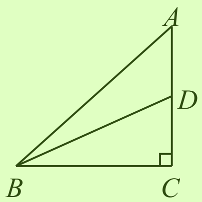
$\therefore \triangle ECA\backsim\triangle EAD$，

$\therefore \frac{CA}{AD}=\frac{AD}{ED}$，即 $\frac{3a}{AD}=\frac{AD}{2a}$，

$\therefore AD=\sqrt{6}a$，又 $AC=3a$，

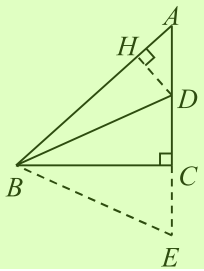
$\therefore \frac{AD}{AC}=\frac{\sqrt{6}a}{3a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故答案为：$\frac{\sqrt{6}}{3}$．

20．如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，点 D 为 AC 的中点，连接 BD，$\angle A=2\angle DBC$，求 $\tan\angle ABD$ 的值．



【答案】

解：延长 AC 到 E，使 $CE=CD$，连接 BE，过点 D 作 $DH\perp AB$ 于点 H.



$\because \angle ACB=90°$，$\therefore BD=BE$，

$\therefore \angle DBC=\angle EBC$，$\angle BDC=\angle E$，

$\therefore \angle DBE=2\angle DBC$.

$\because \angle A=2\angle DBC$，$\therefore \angle A=\angle DBE$，

$\therefore \angle ABE=\angle BDE=\angle E$，$\therefore AB=AE$，$\triangle ABE\backsim\triangle BDE$，

$\therefore \frac{AB}{BE}=\frac{BD}{DE}$，$\therefore \frac{AE}{BD}=\frac{BD}{DE}$.

设 $AD=CD=CE=a$，则 $AB=AE=3a$，$DE=2a$，

$\therefore \frac{3a}{BD}=\frac{BD}{2a}$，$\therefore BD=\sqrt{6}a$，$\therefore BC=\sqrt{5}a$.

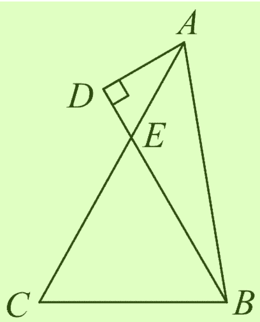
$\because \sin A=\frac{DH}{AD}=\frac{BC}{AB}$，$\therefore \frac{DH}{a}=\frac{\sqrt{5}a}{3a}$，

$\therefore DH=\frac{\sqrt{5}}{3}a$，$AH=\frac{2}{3}a$，$BH=\frac{7}{3}a$，

$\therefore \tan\angle ABD=\frac{DH}{BH}=\frac{\sqrt{5}}{7}$.

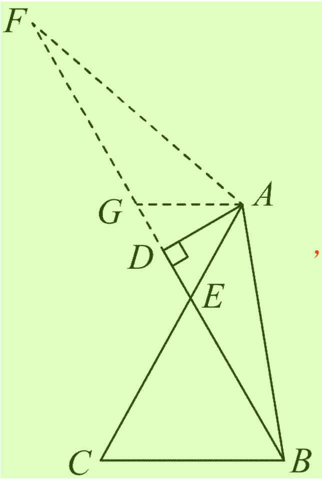
2023 • 深圳中学联考二模

21．如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 E 在边 AC 上，$EC=EB$，$\angle C=2\angle ABE$，$AD\perp BE$ 交 BE 的延长线于点 D，若 $AC=22$，$BD=16$，则 $AB=$______.



【答案】$8\sqrt{5}$

【详解】解：如图所示，延长 BD 至 F 使 $DF=BD$，作 $AG // BC$ 交 DF 于 G，



$\because BD=DF$， $AD\perp BE$，

$\therefore AF=AB$，$\angle F=\angle ABD$，

$\because AG // BC$，

$\therefore \angle AGD=\angle EBC$，$\angle GAE=\angle C$，

$\because EB=EC$，

$\therefore \angle EBC=\angle C$，

$\therefore \angle C=\angle EBC=\angle AGD=\angle GAE$，

$\therefore AE=EG$，

$\because \angle C=2\angle ABE$，

$\therefore \angle AGD=2\angle ABE=2\angle F$，

$\therefore FG=AG$，

$\because AC=22$， $BD=16$，

$\therefore BG=BE+GE=CE+AE=AC=22$，

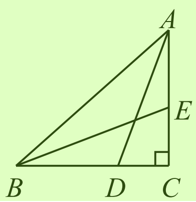
$\therefore AG=FG=BF-BD=2BD-BG=2\times 16-22=10$，

$\therefore DG=DF-FG=16-10=6$，

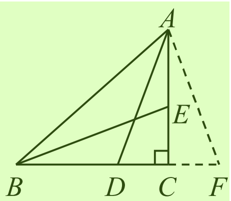
$\therefore AD=\sqrt{AG^2-DG^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

$\therefore AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{8^2+16^2}=8\sqrt{5}$

22．如图，在△ABC 中，∠ACB＝90°，BE 平分∠ABC，点 D 为 BC 边上一点，BD＝2CD，∠ABC＝2∠DAC，求 $\dfrac{AE}{EC}$ 的值．



解：延长 BC 到 F，使 CF＝CD，连接 AF．



∵∠ACB＝90°，∴AD＝AF，

∴∠ADF＝∠F，∠DAC＝∠FAC．

∵∠ABC＝2∠DAC，∴∠ABC＝∠DAF，

∴∠BAF＝∠ADF＝∠F，∴AB＝BF，△ABF∽△DAF，

$\therefore \dfrac{AF}{BF}=\dfrac{DF}{AF}$．

设 CF＝CD＝a，则 BD＝2a，DF＝2a，BF＝4a，

$\therefore \dfrac{AF}{4a}=\dfrac{2a}{AF}$，$\therefore AF^2=8a^2$，$\therefore AC=\sqrt{AF^2-CF^2}=\sqrt{7}a$．

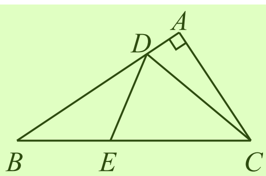
∵BE 平分∠ABC，∴∠EBC＝∠FAC．

∵∠BCE＝∠ACF＝90°，∴△BCE∽△ACF，

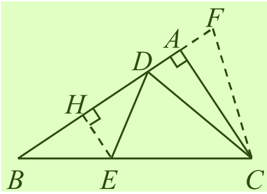
$\therefore \dfrac{CE}{CF}=\dfrac{BC}{AC}$，$\therefore \dfrac{CE}{a}=\dfrac{3a}{\sqrt{7}a}$，$\therefore CE=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}a$，

$\therefore AE=\dfrac{4\sqrt{7}}{7}a$，$\therefore \dfrac{AE}{EC}=\dfrac{4}{3}$

23．如图，在△Rt△ABC 中，∠BAC＝90°，D，E 分别是边 AB，BC 上的点，DC 平分∠ADE，∠B＝2∠ACD，求 CE 的长．



解：延长 BA 到 F，使 AF＝AD，连接 CF，过点 E 作 EH⊥AB 于点 H．



∵$\angle BAC=90°$，∴$CD=CF$，∴$\angle F=\angle CDF$，$\angle ACD=\angle ACF$.

∵$\angle B=2\angle ACD$，∴$\angle B=\angle DCF$，∴$\angle BCF=\angle CDF=\angle F$，

∴$BF=BC$.

设$\angle ACD=\alpha$，则$\angle B=2\alpha$，$\angle EDC=\angle ADC=90°-\alpha$，$\angle BDE=2\alpha$，

∴$\angle B=\angle BDE$，∴$BE=DE$，∴$BH=DH$.

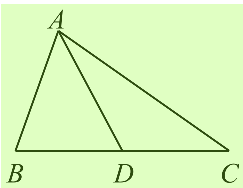
设 $CE=2x$，则 $BF=BC=2x+12$，∴$BH=DH=x+1$，$AH=x+6$.

∵$EH\perp AB$，$\angle BAC=90°$，∴$EH\parallel AC$，

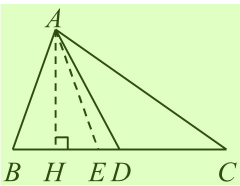
∴$\dfrac{BH}{AH}=\dfrac{BE}{CE}$，∴$\dfrac{x+1}{x+6}=\dfrac{12}{2x}$，解得 $x=-4$（舍去）或 $x=9$，

∴$CE=2x=18$.

24．如图，在△ABC 中，$\angle B=2\angle C$，AD 是中线，$AB=6$，$AD=\sqrt{41}$，求 BC，AC 的长.



解：过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H，在 HC 上截取 $HE=BH$，连接 AE.



则 $AE=AB=6$，∴$\angle AEB=\angle B=2\angle C$，

∴$\angle EAC=\angle C$，∴$CE=AE=6$.

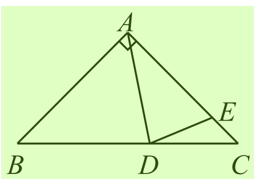
设 $BH=EH=x$，则 $BC=2x+6$，$BD=CD=x+3$，

∴$DH=3$，∴$AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=4\sqrt{2}$，

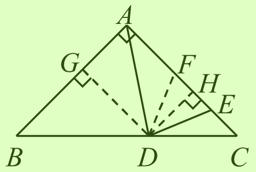
∴$BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=2$，∴$BC=10$，$CH=8$，

∴$AC=\sqrt{AH^2+CH^2}=4\sqrt{6}$.

25．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，点 D，E 分别为边 BC，AC 上的点，连接 AD，DE，$\angle AED=2\angle DAE$，$CE=7$，$BD=18\sqrt{2}$，求 DE 的长.



解：过点 D 作 $DG\perp AB$ 于点 G，$DH\perp AC$ 点 H，



在 AH 上截取 $FH=EH$，连接 DF.

则 $DE=DF$，∴$\angle DFE=\angle AED=2\angle DAE$，

∴$\angle DFE=\angle AED$，∴$AF=DF$.

∵$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，∴$\angle B=\angle C=45°$，

∴$AH=DG=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BD=18$，$CH=DH$.

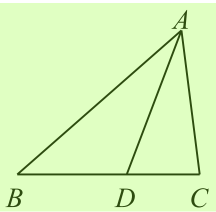
设 $CH=DH=x$，则 $FH=EH=x-7$，$DF=AF=25-x$，

在 Rt$\triangle DFH$ 中，$DH^2+FH^2=DF^2$，

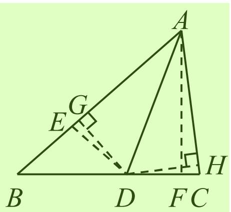
∴$x^2+(x-7)^2=(25-x)^2$，解得 $x=-48$（舍去）或 $x=12$，

∴$DE=DF=25-x=13$.

26．如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=2\angle B$，AD 平分$\angle BAC$，$BD=3$，$CD=2$，求 AD 的长.



解：在 AB 上截取 $AE=AC$，连接 DE，过点 A 作 $AF\perp BC$ 于点 F，过点 D 作 $DG\perp AB$ 于点 G，$DH\perp AC$ 于点 H.



∵$\angle DAE=\angle DAC$，$AD=AD$，∴$\triangle ADE\cong\triangle ADC$，

∴$DE=CD=2$，$\angle AED=\angle C=2\angle B$，

∴$\angle EDB=\angle B$，∴$BE=DE=2$.

∵$\angle DAE=\angle DAC$，∴$DG=DH$，

∴$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\dfrac{\frac{1}{2}AB\cdot DG}{\frac{1}{2}AC\cdot DH}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AC+2}{AC}=\dfrac{3}{2}$，

∴$AC=4$，∴$AB=6$.

∵$AF^2=AB^2-BF^2=AC^2-CF^2$，

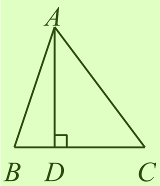
$\therefore 6^2-BF^2=4^2-(5-BF)$，解得 $BF=\frac{9}{2}$，

$\therefore DF=\frac{3}{2}$，$AF^2=6^2-BF^2=\frac{63}{4}$，

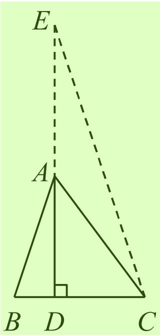
$\therefore AD=\sqrt{DF^2+AF^2}=3\sqrt{2}$.

题型四　邻二倍角的处理

27．如图，在△ABC 中，$AD\perp BC$ 于点 D，$\angle DAC=2\angle DAB$，$BD=4$，$DC=9$，求 AD 的长.



解：延长 DA 到 E，使 $AE=AC$，连接 EC.



则$\angle E=\angle ACE$，$\therefore \angle DAC=2\angle E$.

$\because \angle DAC=2\angle DAB$，$\therefore \angle DAB=\angle E$.

$\because \angle ADB=\angle EDC=90°$，$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle ECD$，

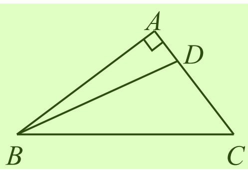
$\therefore \frac{AD}{ED}=\frac{BD}{CD}=\frac{4}{9}$.

设 $AD=4m$，则 $ED=9m$，$AC=AE=5m$，

$\therefore CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=3m=9$，$\therefore m=3$，

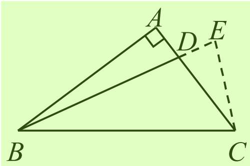
$\therefore AD=4m=12$.

28．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle A=90°$，点 D 为边 AC 上一点，$\angle DBC=2\angle ABD$，$CD=3$，$BC=7$，求 BD 的长.



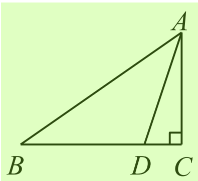
例 1

解：延长 BD 到 E，使 $BE=BC$，连接 CE.

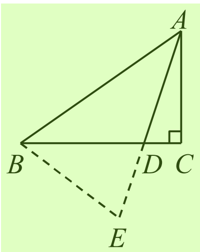


设$\angle ABD=\alpha$，则$\angle DBC=2\alpha$，$\angle BCE=\angle E=90°-\alpha$，
$\angle CDE=\angle ADB=90°-\alpha$，
$\therefore\angle CDE=\angle E=\angle BCE$，$\therefore CE=CD=3$，$\triangle CDE\backsim\triangle BCE$，
$\therefore\dfrac{CE}{DE}=\dfrac{BE}{CE}$，$\therefore\dfrac{3}{DE}=\dfrac{7}{3}$，$\therefore DE=\dfrac{9}{7}$，
$\therefore BD=BE-DE=7-\dfrac{9}{7}=\dfrac{40}{7}$.

29．如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，点 D 为 BC 边上一点，$\angle BAD=2\angle CAD$，$BD=10$，$DC=3$，求 AD 的长.

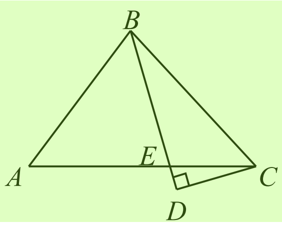


解：延长 AD 到 E，使 $AE=AB$，连接 BE.



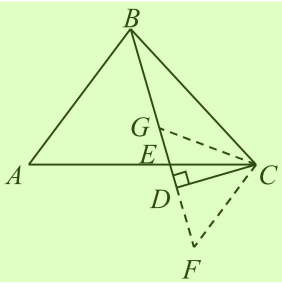
设$\angle CAD=\alpha$，则$\angle BAD=2\alpha$，$\angle ABE=\angle E=90°-\alpha$，
$\angle BDE=\angle ADC=90°-\alpha$，
$\therefore\angle BDE=\angle E=\angle ABE$，$\therefore BE=BD=10$，$\triangle BDE\backsim\triangle ABE$，
$\therefore\dfrac{BE}{DE}=\dfrac{AE}{BE}$，$\therefore AE\cdot DE=BE^2=100$，
$\therefore DE(AD+DE)=100$，$\therefore 2DE^2+2AD\cdot DE=200$.
$\because AC^2=AB^2-BC^2=AD^2-DC^2$，
$\therefore(AD+DE)^2-13^2=AD^2-3^2$，
$\therefore DE^2+2AD\cdot DE=160$，$\therefore DE^2+160=200$，
$\therefore DE^2=40$，$DE=2\sqrt{10}$，$\therefore 2\sqrt{10}AE=100$，
$\therefore AE=5\sqrt{10}$，$\therefore AD=3\sqrt{10}$.

30．如图，在$\triangle ABC$ 中，点 E 在边 AC 上，$EB=EA$，$\angle A=2\angle CBE$，$CD\perp BE$ 交 BE 的延长线于点 D，$BD=8$，$AC=11$，则 BC 的长为__________.



【答案】$4\sqrt{5}$

【解析】过点 C 作 $CF /\!/ AB$ 交 BD 的延长线于点 F.



则 $\angle ECF=\angle A$，$\angle F=\angle ABE$.

$\because EB=EA$，$\therefore \angle A=\angle ABE$，

$\therefore \angle ECF=\angle F$，$\therefore EF=EC$，

$\therefore BF=AC=11$，$\therefore DF=BF-BD=11-8=3$.

在 BD 上取点 G，使 $DG=DF$，连接 CG.

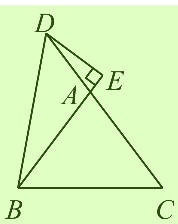
则 $CF=CG$，$\therefore \angle CGF=\angle F=\angle ECF=\angle A=2\angle CBE$，

$\therefore \angle CBG=\angle BCG$，$\therefore CG=BG=BD-DG=5$，

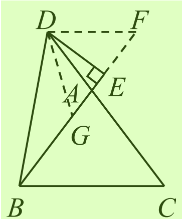
$\therefore CD=\sqrt{CG^2-DG^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

$\therefore BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$.

31．如图，在△ABC 中，$AB=AC$，点 D 在 CA 的延长线上，$\angle ABC=2\angle DBA$，$DE\perp BA$ 交 BA 的延长线于点 E，若 $BE=8$，$CD=11$，求 BD 的长.



解：过点 D 作 $DF /\!/ BC$ 交 BE 的延长线于点 F，在 EB 上截取 $EG=EF$，连接 DG.



则$\angle F=\angle ABC=2\angle DBA$，$\angle ADF=\angle C$.

$\because AB=AC$，$\therefore \angle ABC=\angle C$，

$\therefore \angle F=\angle ADF$，$\therefore AF=AD$，$\therefore BF=CD=11$，

$\therefore EG=EF=BF-BE=11-8=3$.

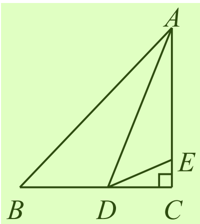
$\because DE\perp BA$，$\therefore DF=DG$，$\therefore \angle DGE=\angle F=2\angle DBA$，

$\therefore \angle BDG=\angle DBA$，$\therefore DG=BG=BE-EG=5$，

$\therefore DE=\sqrt{DG^2-EG^2}=4$，$\therefore BD=\sqrt{BE^2+DE^2}=4\sqrt{5}$.

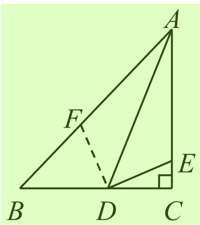
题型五　绝配角

32．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，点 D，E 分别为 BC，AC 上的点，$\angle B=2\angle CDE$，$\angle ADE=45°$，$AB=5$，$AE=3$，则 BD 的长为__________.



【答案】2

【解析】在 BA 上截取 $BF=BD$，连接 DF.



则$\angle BFD=\angle BDF=90°-\dfrac{1}{2}\angle B=90°-\angle CDE=\angle CED$，

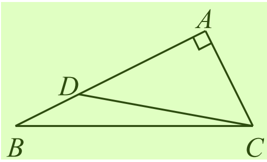
$\therefore \angle AFD=\angle AED$，$\angle BDF+\angle CDE=90°$，

$\therefore \angle EDF=90°$，$\angle ADF=\angle ADE=45°$.

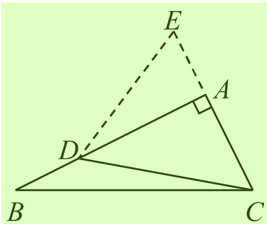
$\because AD=AD$，$\therefore \triangle ADF\cong\triangle ADE$，

$\therefore AF=AE=3$，$\therefore BD=BF=AB-AF=5-3=2$.

33．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle BAC=90°$，点 D 为边 AB 上一点，$\angle ACD=2\angle B$，若 $BD=2$，$AD=4$，求 CD 的长．



解：延长 CA 到点 E，连接 DE，使 $\angle ADE=\angle B$．



∵$AD=3$，$BD=1$，∴$AB=4$．

∵$\angle ADE=\angle B$，$\angle DAE=\angle BAC=90°$．

∴△ADE∽△ABC，∴$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{2}{3}$．

设$\angle ADE=\angle B=\alpha$，则$\angle ACD=2\alpha$，

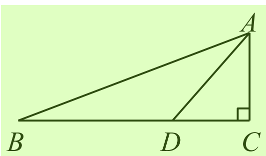
$\angle ADC=90°-2\alpha$，$\angle CDE=\angle E=90°-\alpha$，

∴$CD=CE$．

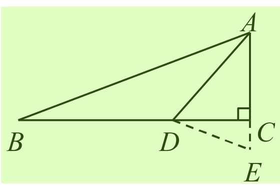
设 $AE=2x$，则 $AC=3x$，$CD=CE=5x$，

$AD=4x=4$，∴$x=1$，∴$CD=5x=5$．

34．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，点 D 为边 BC 上一点，$BD=2CD$，$\angle DAC=2\angle B$，$AD=\sqrt{2}$，求 AB 的长．



解：延长 AC 到 E，使 $AE=AD$，连接 DE．



设$\angle B=\alpha$，则$\angle DAC=2\alpha$，$\angle ADE=\angle E=90°-\alpha$，

$\angle CDE=\alpha$，$\therefore \angle B=\angle CDE$.

$\because \angle ACB=\angle ECD=90°$，$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle EDC$，

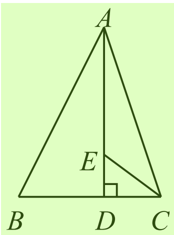
$\therefore \dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{CE}=\dfrac{BC}{DC}=3$.

设 $CE=a$，则 $AC=3a$，$AD=AE=4a=\sqrt{2}$，

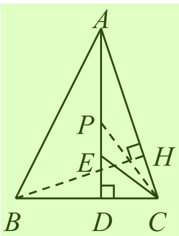
$\therefore a=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$\therefore AC=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，$\therefore DC=\sqrt{AD^2-AC^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$，

$\therefore DE=\sqrt{DC^2+CE^2}=1$，$\therefore AB=3DE=3$.

35．如图，在△ABC 中，$\angle BAC=45°$，$AD\perp BC$ 于点 D，点 E 在线段 AD 上，$\angle CED=2\angle BAD$，若 $AE=9$，$DE=3$，求 BC 的长.



解：在 AD 上取点 P，连接 PC，使 $PC=AP$，过点 B 作 $BH\perp AC$ 于点 H.



则 $\angle PAC=\angle ACP$.

设 $\angle BAD=\alpha$，则 $\angle CED=2\alpha$，$\angle DCE=90°-2\alpha$，

$\angle PAC=\angle ACP=45°-\alpha$，$\angle DPC=90°-2\alpha$，

$\therefore \angle DCE=\angle DPC$.

$\because \angle CDE=\angle PDC$，$\therefore \triangle CDE\backsim\triangle PDC$，

$\therefore \dfrac{CD}{DE}=\dfrac{PD}{CD}$，$\therefore CD^2=DE\cdot PD$.

设 $PE=x$，则 $PD=x+3$，$PC=AP=9-x$，

$CD^2=(9-x)^2-(x+3)^2$，

$\therefore (9-x)^2-(x+3)^2=3(x+3)$，解得 $x=\dfrac{7}{3}$，

$\therefore CD^2=3(x+3)=16$，$\therefore CD=4$，

$\therefore AC=\sqrt{CD^2+AD^2}=4\sqrt{10}$.

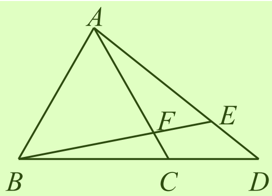
$\because \angle BCH=\angle ACD$，$\angle BHC=\angle ADC=90°$，

$\therefore \triangle BCH\backsim\triangle ACD$，$\therefore \dfrac{BH}{CH}=\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{12}{4}=3$，

$\therefore AH=BH=3CH=\dfrac{3}{4}AC=3\sqrt{10}$，

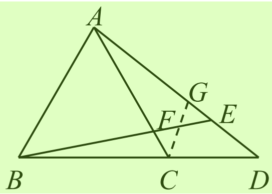
$\therefore AB^2=2AH^2=180$，$\therefore BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=6$，
$\therefore BC=BD+CD=6+4=10$．

36．如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D 在 BC 的延长线上，点 E 在线段 AD 上，$\angle DAC=2\angle DBE$，BE 与 AC 交于点 F，若 $CF=1$，$DE=2$，则 CD 的长为__________．



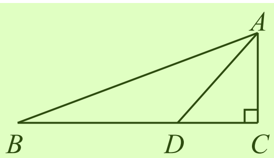
【答案】3

【解析】在 AD 上截取 $DG=DC$，连接 CG．



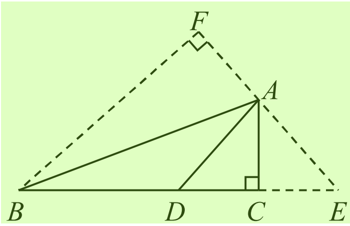
设 $\angle DBE=x$，则 $\angle DAC=2x$，$\angle BAD=60°+2x$，
$\angle ABE=\angle AEB=60°-x$，$\angle D=60°-2x$，
$\angle DGC=\angle EFC=60°+x$，
$\therefore AE=AB=AC$，$\angle AGC=\angle AFE$．
$\because \angle CAG=\angle EAF$，$\therefore \triangle ACG\cong\triangle AEF$，
$\therefore AG=AF$，$\therefore EG=CF=1$，
$\therefore CD=DG=DE+EG=2+1=3$

37．如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，点 D 为边 BC 上一点，$BD=2CD$，$\angle DAC=2\angle ABC$，若 $AD=\sqrt{2}$，求 AB 的长．



【答案】3

解：延长 BC 到点 E，使 $CE=CD$，连接 AE，过点 B 作 AE 的垂线，垂足为 F．



∵ $\angle ACB=90°$，∴$AE=AD$，∴$\angle EAC=\angle DAC=2\angle ABC$.

∵ $\angle FBE=\angle EAC=90°-\angle E$，∴$\angle FBE=2\angle ABC$，

∴$\angle ABF=\angle ABC$，∴$AF=AC$，∴$BF=BC$.

设 $CD=a$，则 $BD=2a$，$BF=BC=3a$，$BE=4a$，

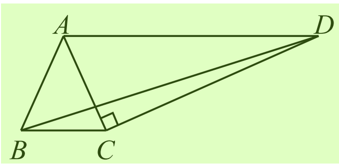
在$\triangle ABE$ 中，由面积法得 $BE\cdot AC=AE\cdot BF$，

∴$4a\cdot AC=AE\cdot 3a$，∴$\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{3}{4}$.

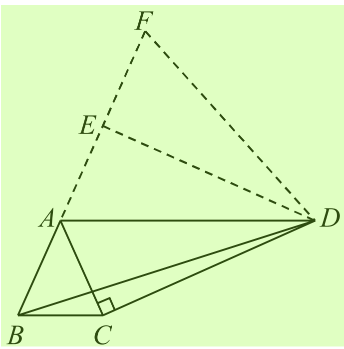
设 $AC=3m$，则 $AD=AE=4m$，$CD=\sqrt{7}m$，

$BC=3\sqrt{7}m$，$AB=6\sqrt{2}m=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}AD=3$

38．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AC\perp CD$，$AB=AC$，$\angle ABD=2\angle ADC$，$CD=2\sqrt{5}$，求 AD 的长.



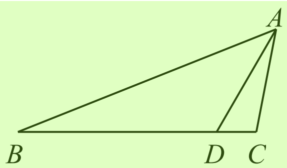
解：延长 BA 到点 E，使 $AE=AC$，延长 AE 到点 F，使 $EF=AE$，连接 DE，DF.



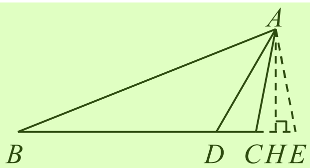
∵$AD\parallel BC$，∴$\angle DAE=\angle ABC$，$\angle DAC=\angle ACB$.
∵$AB=AC$，∴$\angle ABC=\angle ACB$，∴$\angle DAE=\angle DAC$.
∵$AD=AD$，∴$\triangle ADE\cong\triangle ADC$，
∴$DE=CD=2\sqrt{5}$，$\angle AED=\angle ACD=90°$，$\angle ADE=\angle ADC$，
∴$AD=FD$，∴$\angle F=\angle DAE$，$\angle ADE=\angle FDE$，
∵$\angle ABD=2\angle ADC$，∴$\angle ABD=2\angle ADE=\angle ADF$，
∴$\angle BDF=\angle DAE=\angle F$，∴$BD=BF$.
设 $AB=AC=x$，则 $BE=2x$，$BD=BF=3x$，

$\therefore DE=\sqrt{BD^2-BE^2}=\sqrt{5}x=2\sqrt{5}$，$\therefore x=2$，
$\therefore AE=2$，$\therefore AD=\sqrt{AE^2+AD^2}=2\sqrt{6}$.

39．如图，在△ABC 中，点 D 为边 BC 上一点，$\angle ADC=60°$，$\angle BAD=2\angle CAD$，$BD=5$，$CD=1$，求 AD 的长.

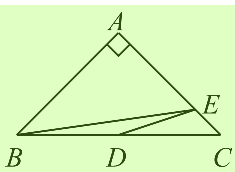


解：延长 BC 到 E，使 $BE=BA$，连接 AE，过点 A 作 $AH\perp CE$ 于点 H.

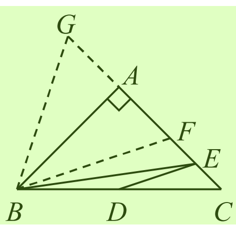


设$\angle CAD=\alpha$，则$\angle BAD=2\alpha$，$\angle B=60°-2\alpha$，
$\angle BAE=\angle E=60°+\alpha$，$\angle CAE=60°-2\alpha$，
$\therefore \angle CAE=\angle B$，$\therefore \angle ACE=\angle BAE=\angle E$，
$\therefore AC=AE$，$\triangle ACE\backsim\triangle BAE$，
$\therefore CH=EH$，$\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{BE}{AE}$，$\therefore AE^2=CE\cdot BE$.
设 $CH=EH=x$，则 $DH=x+1$，$AH=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$，$CE=2x$，
$BE=2x+6$，$AE^2=x^2+(\sqrt{3}x+\sqrt{3})^2$，
$\therefore x^2+(\sqrt{3}x+\sqrt{3})^2=2x(2x+6)$，解得 $x=\dfrac{1}{2}$，
$\therefore AD=2DH=2x+2=3$.

40．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，点 D 是 BC 的中点，点 E 是边 AC 上一点，连接 BE，DE，$\angle ABE=2\angle EDC$，$AE=3$，求 DE 的长.



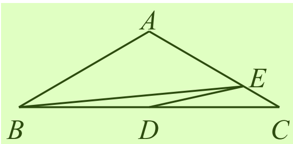
解：在 EA 上截取 $EF=EC$，延长 CA 到 G，使 $AG=AF$，连接 BF，BG.



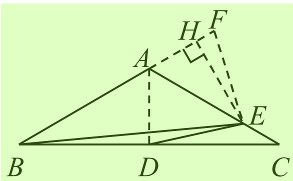
$\because \angle BAC=90°$，$\therefore BF=BG$，$\therefore \angle G=\angle AFB$.

∵点 D 是 BC 的中点，∴DE 是$\triangle BCF$ 的中位线，∴$DE\parallel BF$.
∵$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，∴$\angle ABC=\angle C=45°$.
设$\angle EDC=\alpha$，则$\angle ABE=2\alpha$，$\angle G=\angle AFB=\angle AED=45°+\alpha$，
$\angle ABG=45°-\alpha$，$\angle EBG=45°+\alpha$，
∴$\angle G=\angle EBG$，∴$BE=GE$.
设 $EF=EC=x$，则 $AG=AF=3-x$，$AB=AC=3+x$，
$BE=GE=6-x$.
在 Rt$\triangle ABE$ 中，$(3+x)^2+3^2=(6-x)^2$，
解得 $x=1$，∴$AF=2$，$AB=4$，
∴$BF=\sqrt{AB^2+AF^2}=2\sqrt{5}$，∴$DE=\dfrac{1}{2}BF=\sqrt{5}$.

41．如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=120°$，$AB=AC$，点 D 是 BC 的中点，点 E 是边 AC 上一点，连接 BE，DE，$\angle ABE=2\angle EDC$，$CE=2\sqrt{6}$，求 AE 的长.

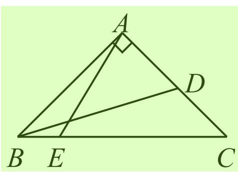


解：延长 BA 到 F，使 $BF=BE$，连接 AD，EF，过点 E 作 $EH\perp AF$ 于点 H.

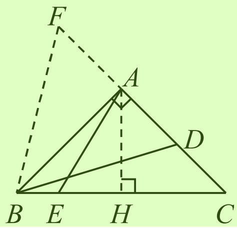


∵$\angle BAC=120°$，$AB=AC$，∴$\angle EAF=60°$，$\angle ABC=\angle C=30°$.
∵点 D 是 BC 的中点，∴$\angle BAD=\angle EAD=60°$，$\angle ADC=90°$，
∴$\angle EAD=\angle EAF$.
设$\angle EDC=\alpha$，则$\angle ABE=2\alpha$，$\angle F=\angle BEF=90°-\alpha$，
$\angle ADE=90°-\alpha$，∴$\angle ADE=\angle F$.
∵$AE=AE$，∴$\triangle ADE\cong\triangle AFE$，∴$AD=AF$.
设 $AE=2x$，则 $AH=x$，$EH=\sqrt{3}x$，$AB=AC=2x+2\sqrt{6}$，
$BH=3x+2\sqrt{6}$，$AF=AD=x+\sqrt{6}$，$BE=BF=3x+3\sqrt{6}$.
在 Rt$\triangle BEH$ 中，$BH^2+EH^2=BE^2$，
∴$(3x+2\sqrt{6})^2+(\sqrt{3}x)^2=(3x+3\sqrt{6})^2$，
解得 $x=\sqrt{6}-4$（舍去）或 $x=\sqrt{6}+4$，
∴$AE=2x=2\sqrt{6}+8$.

42．如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，点 D，E 分别为边 AC，BC 上的点，$\angle ABD=2\angle BAE$，$BE=3\sqrt{2}$，$CD=7$，求 BD 的长.



解：延长 CA 到 F，使 $DF=BD$，连接 BF，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H.



$\because \angle BAC=90°$，$AB=AC$，$\therefore \angle ABC=\angle C=45°$.

设 $\angle BAE=\alpha$，则 $\angle AEH=45°+\alpha$，$\angle ABD=2\alpha$，

$\angle ADB=90°-2\alpha$，$\angle F=\angle DBF=45°+\alpha$，

$\therefore \angle AEH=\angle F$.

$\because \angle AHE=\angle BAF=90°$，$\therefore \triangle AEH\backsim\triangle BFA$，

$\therefore \dfrac{AF}{EH}=\dfrac{AB}{AH}=\sqrt{2}$，$\therefore AF=\sqrt{2}EH$.

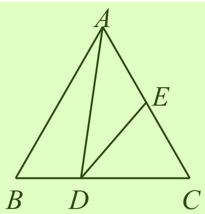
设 $EH=\sqrt{2}x$，则 $AF=2x$，$AH=BH=\sqrt{2}x+3\sqrt{2}$，

$AB=AC=2x+6$，$AD=2x-1$，$BD=DF=AD+AF=4x-1$，

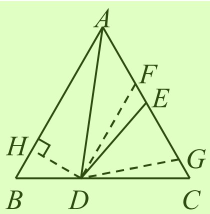
在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$(2x+6)^2+(2x-1)^2=(4x-1)^2$，

解得 $x=-1$ 或 $x=\dfrac{9}{2}$，$\therefore BD=4x-1=17$

43．如图，在等边$\triangle ABC$ 中，点 D，E 分别为边 BC，AC 上的点，连接 AD，DE，$\angle ADB=2\angle CDE$，$BD=3$，$CE=4$，求 CD 的长．



解：在 AC 上截取 $AF=BD$，在 CE 上截取 $CG=EF$，连接 DF，DG，过点 D 作 $DH\perp AB$ 于点 H.



$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore AC=BC$，$\angle C=60°$，

$\therefore CF=CD$，$\therefore \triangle CDF$ 是等边三角形，

$\therefore DF=DC$，$\angle DFE=\angle C$，$\therefore \triangle DEF\cong\triangle DGC$，

$\therefore DE=DG$，$\angle EDF=\angle GDC$，

$\therefore \angle DEG=\angle DGE$，$\angle GDF=\angle CDE$.

设 $\angle GDF=\angle CDE=\alpha$，则 $\angle ADB=2\alpha$，

$\angle DGE=\angle DEG=120°-\alpha$，$\angle EDG=2\alpha-60°$，

$\angle DAG=2\alpha-60°$，$\therefore \angle EDG=\angle DAG$，

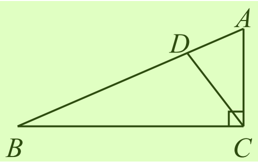
∴$\angle ADG=\angle DEG=\angle DGE$，

∴$AD=AG=AF+FG=BD+CE=3+4=7$．

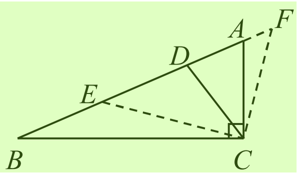
$BH=\frac{1}{2}BD=\frac{3}{2}$，$DH=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，∴$AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=\frac{13}{2}$，

∴$BC=AB=AH+BH=8$，∴$CD=BC-BD=5$．

44．如图，在Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，点D为AB边上一点，$AD<BD$，$\angle ADC=2\angle ACD$，$AB=8$，$CD=3$，求AD的长．



解：在DB上截取$DE=DC$，延长BA到F，使$DF=DC$，连接CE，CF.



则$\angle DCE=\angle AEC$，$\angle DCF=\angle F$.

设$\angle ACD=\alpha$，则$\angle BCD=90°-\alpha$，$\angle ADC=2\alpha$，

$\angle DCE=\angle AEC=\alpha$，$\angle DCF=\angle F=90°-\alpha$，

∴$\angle ACD=\angle AEC$，$\angle BCD=\angle F$.

∵$\angle CAD=\angle EAC$，$\angle CBD=\angle FBC$，

∴△ACD∽△AEC，△BCD∽△BFC，

∴$\frac{AC}{AD}=\frac{AE}{AC}$，$\frac{BC}{BD}=\frac{BF}{BC}$，

∴$AC^2=AD\cdot AE$，$BC^2=BD\cdot BF$.

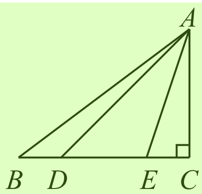
设$AD=x$，则$AE=x+3$，$BD=8-x$，$BF=11-x$，

∴$AC^2=x(x+3)$，$BC^2=(8-x)(11-x)$，

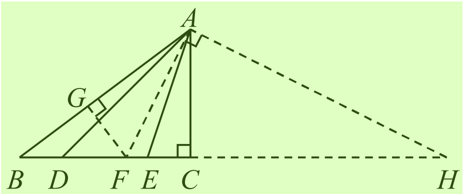
∵$AC^2+BC^2=AB^2$，∴$x(x+3)+(8-x)(11-x)=8^2$，

解得$x=2$或$x=6$（舍去），即AD的长为2.

45．如图，在Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，$AC=6$，$BC=8$，点D，E为边BC上两点（点D在点E左侧），且$BD=CE$，$\angle DAE=\frac{1}{2}\angle BAC$，求$DE$的长．



解：作$\angle BAC$的角平分线AF交BC于点F，过点F作$FG\perp AB$于点G，



过点 A 作 $AH\perp AF$ 交 BC 的延长线于点 G.

∵ $\angle ACB=90°$，∴ $FG=FC$，$\angle H=\angle CAF=90°-\angle AFC$.

∵ $AC=6$，$BC=8$，∴ $AB=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

设 $FG=FC=x$，则 $BF=8-x$.

∵ $S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}AB\cdot FG=\frac{1}{2}BF\cdot AC$，∴ $AB\cdot FG=BF\cdot AC$，

∴ $10x=6(8-x)$，解得 $x=3$，∴ $FC=3$，

∴ $\frac{AC}{CH}=\tan H=\tan\angle CAF=\frac{FC}{AC}=\frac{1}{2}$，∴ $CH=2AC=12$.

设 $BD=CE=x$，则 $DE=8-2x$，$DC=8-x$，$DH=20-x$，

∴ $AD^2=(8-x)^2+6^2$.

∵ $\angle DAE=\frac{1}{2}\angle BAC$，∴ $\angle DAE=\angle CAF=\angle H$.

∵ $\angle ADE=\angle HDA$，∴ $\triangle ADE\backsim\triangle HDA$，∴ $\frac{AD}{DE}=\frac{DH}{AD}$，

∴ $AD^2=DE\cdot DH$，∴ $(8-x)^2+6^2=(8-2x)(20-x)$，

解得 $x=30$（舍去）或 $x=2$，∴ $DE=8-2x=4$.

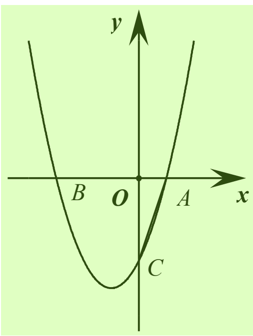
题型六　坐标系中的二倍角问题

宿迁·中考

46．如图，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 交 x 轴于 A、B 两点，其中点 A 坐标为 $(1,0)$，与 y 轴交于点 $C(0,-3)$。

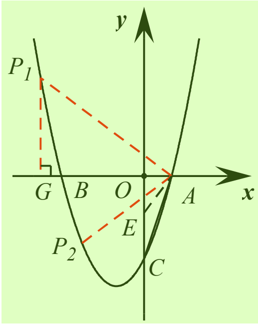
(1) 求抛物线的函数表达式；

(2) 连接 AC，点 P 在抛物线上，且满足 $\angle PAB=2\angle ACO$，求点 P 的坐标；



简析(1)抛物线的函数表达式为 $y=x^2+2x-3$

(2)如图，在 OC 上取点 E，使 $AE=CE$，则 $\angle AEO=2\angle ACO=\angle PAB$；设 $OE=t$，则 $AE=3-t$，在 Rt$\triangle AOE$ 中，由勾股定理可得 $1+t^2=(3-t)^2$，解得 $t=\frac{4}{3}$，故 $\tan\angle AEO=\frac{OA}{OE}=\frac{3}{4}$，即 $\tan\angle PAB=\frac{3}{4}$；



①当点 P 在 x 轴上方时，作 $PG\perp x$ 轴于点 G，则 $\dfrac{PG}{AG}=\dfrac{3}{4}$；设 $PG=3m>0$，则 $AG=4m$，点 P 的坐标为$(1-4m，3m)$，将其代人抛物线的解析式，可得 $3m=(1-4m)^2+2(1-4m)-3$，解得 $m=\dfrac{19}{16}$($m=0$ 舍去)，故点 P 的坐标为$((-\dfrac{15}{4},\dfrac{57}{16})$

②当点 P 在 x 轴下方时，同理可得 $P\left(-\dfrac{9}{4},-\dfrac{39}{16}\right)$

综上所述：点 P 的坐标为 $\left(-\dfrac{15}{4},\dfrac{57}{16}\right)$)或($\left(-\dfrac{9}{4},-\dfrac{39}{16}\right)$

盐城·中考

47．如图，二次函数 $y=k(x-1)^2+2$ 的图像与一次函数 $y=kx-k+2$ 的图像交于 A、B 两点，点 B 在点 A 的右侧，直线 AB 分别与 x 轴、y 轴交于 C、D 两点，其中 $k<0$．

(1)求 AB 两点的横坐标；

(2)二次函数图像的对称轴与 x 轴交于点 E，是否存在实数 k，使得 $\angle ODC=2\angle BEC$？若存在，求出 k 的值；若不存在，说明理由。

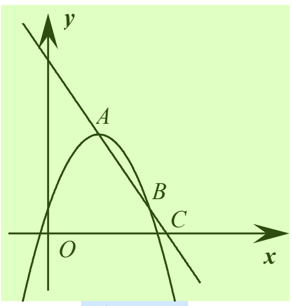
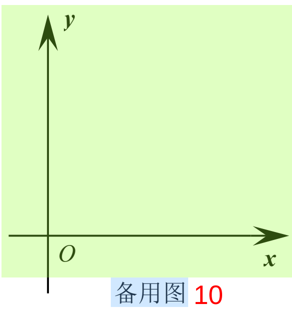


图17-17-1



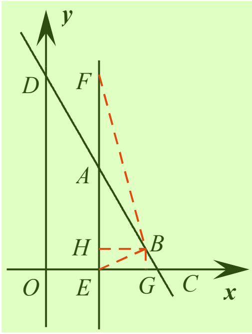
备用图

简析

(1)令 $k(x-1)^2+2=kx-k+2$，即 $(x-1)^2=x-1$，解得 $x=1$ 或 2，即 A、B 两点的横坐标分别为 1、2；

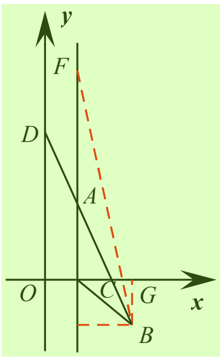
(2)由前知 $A(1，2)$，$B(2，k+2)$；

①情形一：当 $k+2>0$，即 $-2<k<0$ 时，点 B 在 x 轴上方，



如图(已隐去抛物线)过点 B 分别向 x 轴、对称轴作垂线，垂足依次为 G、H，则 $\tan\angle BEC=\dfrac{BG}{EG}=k+2$；在 EA 的延长线上取点 F，使 $AF=AB$，连接 BF，则 $\angle BAH=2\angle BFH$，又 $\angle BAH=\angle ODC=2\angle BEC$，故 $\angle BFH=\angle BEC$；易得 $BH=1$，$AH=-k$，则 $AF=AB=\sqrt{k^2+1}$,，从而 $FH=\sqrt{k^2+1}-k$，故 $\tan\angle BFH=\dfrac{BH}{FH}=\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}-k}=\sqrt{k^2+1}+k$，所以有 $k+2=\sqrt{k^2+1}+k$.，解得 $k=-\sqrt{3}$($k=\sqrt{3}$ 舍去)；

②情形二：当 $k+2<0$，即 $k<-2$ 时，点 B 在 x 轴下方，



如图(已隐去抛物线)，同上作相关辅助线，同理有 $\tan\angle BEC=\dfrac{BG}{EG}=-k-2, \tan\angle BFH=\sqrt{k^2+1}+k$，从而 $-k-2=\sqrt{k^2+1}+k$，解得 $k=\dfrac{-4-\sqrt{7}}{3}$($k=\dfrac{-4+\sqrt{7}}{3}>-2$，故舍去)；

综上所述：k 的值为 $-\sqrt{3}$ 或 $\dfrac{-4-\sqrt{7}}{3}$.

反思：（2）是一个等腰三角形存在性问题，可借助代数方法盲解盲算，这里并未展开；（3）中存在“倍半角”关系，这里首先利用平行导角，将 $\angle ODC$ 转化为 $\angle BAH$，借助 A、B 两点的坐标来刻画其正切值，然后构造其“半角” $\angle BFH$，最后列方程求解需。要特别提醒的是，这里根据点 B 的纵坐标的正负性，即点 B 与 x 轴的位置关系分两类讨论，很容易漏解。另外，本题还有其他解法，请自行探究。

河 南 • 中 考

48．如图，抛物线 $y=ax^2+6x+c$ 交 x 轴于 A、B 两点，交 y 轴于点 C。直线 $y=x-5$ 经过点 B、C。

（1）求抛物线的解析式；

（2）过点 A 的直线交直线 BC 于点 M，连接 AC，当直线 AM 与直线 BC 的夹角等于 $\angle ACB$ 的 2 倍时，请直接写出点 M 的坐标。

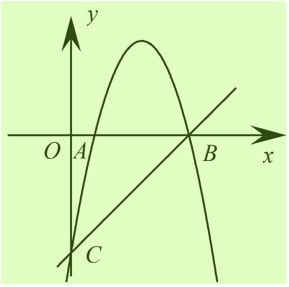
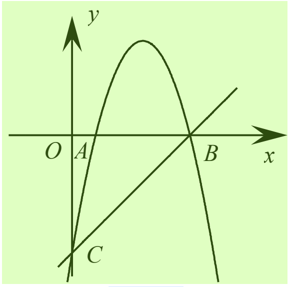


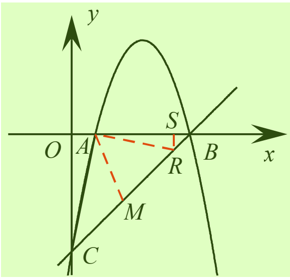
图17-18-1



备用图

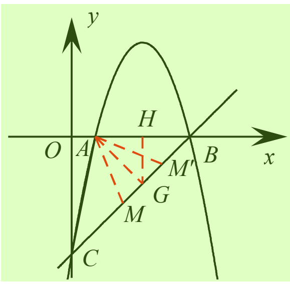
简析：(1)抛物线的解析式为 $y=-x^2+6x-5$

(2)如图，当∠ACM=∠CAM 时，有∠AMB=2∠ACB，此时点 M 符合题意；再过点 A 作 AC 的垂线，交直线 BC 于点 R，作 RS⊥x 轴于点 S，



易证 $\tan\angle RAS=\tan\angle ACO=\frac{1}{5}$，即 $\frac{RS}{AS}=\frac{1}{5}$；又易证 $RS=BS$，故 $\frac{BS}{AS}=\frac{1}{5}$，从而 $BS=\frac{1}{6}AB=\frac{2}{3}$，点 R 的坐标为 $(\frac{13}{3},-\frac{2}{3})$；易证点 M 为 CR 的中点，所以点 M 的坐标 $(\frac{13}{6},-\frac{17}{6})$

如图，作 AG⊥BC 于点 G，再作 AM 关于直线 AG 的对称线段 AM'，

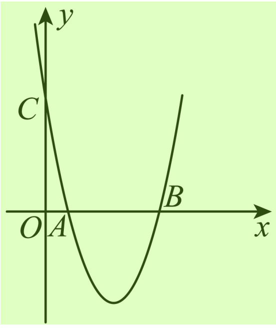


则∠$AM'M$=∠AMM'=2∠ACB，故点 M' 是符合题意的另一个点；作 GH⊥x 轴于点 H，易证 $GH=AH=BH=2$，则点 G 的坐标为(3，－2)；因为点 G 为 MM 的中点，所以点 M 的坐标为 $\left(\frac{23}{6},-\frac{7}{6}\right)$；因此，点 M 的坐标为 $(\frac{13}{6},-\frac{17}{6})$)或($\left(\frac{23}{6},-\frac{7}{6}\right)$

反思：第(2)问看似"倍半角"问题，却采取了"垂直处理"策略，结合中点坐标公式加以解决。"成也模型，败也模型"，切勿形成思维定式，盲目套用模型。当然，这两个问题都还有其他的处理方式，可自行探索。总结的话：数学中转化思想无处不在，所谓"倍半角"问题，其解题策略大体也是围绕着转化思想进行的，或将"倍角"变为"半角"，或将"半角"变为"倍角"，最终转化为等角问题，当然变化手段可能不一，比如作"倍角"的角平分线或者构造等腰三角形，再如将"半角"翻折等。总之，具体问题需要具体对待，并无绝对的通法、简法，一切都要依据题目的条件以及结论去分析、构造，以至于解决。

2023·内蒙古赤峰·统考中考真题

49．如图，抛物线 $y=x^2-6x+5$ 与 x 轴交于点 A，B，与 y 轴交于点 C，点 $D(2,m)$ 在抛物线上，点 E 在直线 BC 上，若 $\angle DEB=2\angle DCB$，则点 E 的坐标是____________.



【答案】$(\frac{17}{5},\frac{8}{5})$ 和 $(\frac{33}{5},-\frac{8}{5})$

【分析】先根据题意画出图形，先求出 D 点坐标，当 E 点在线段 BC 上时：$\angle DEB$ 是 $\triangle DCE$ 的外角，$\angle DEB=2\angle DCB$，而 $\angle DEB=\angle DCE+\angle CDE$，所以此时 $\angle DCE=\angle CDE$，有 $CE=DE$，可求出 BC 所在直线的解析式 $y=-x+5$，设 E 点 $(a,-a+5)$ 坐标，再根据两点距离公式，$CE=DE$，得到关于 a 的方程，求解 a 的值，即可求出 E 点坐标；当 E 点在线段 CB 的延长线上时，根据题中条件，可以证明 $BC^2+BD^2=DC^2$，得到 $\angle DBC$ 为直角三角形，延长 EB 至 E'，取 $BE'=BE$，此时，$\angle DE'E=\angle DEE'=2\angle DCB$，从而证明 E' 是要找的点，应为 $OC=OB$，$\triangle OCB$ 为等腰直角三角形，点 E 和 E' 关于 B 点对称，可以根据 E 点坐标求出 E' 点坐标.

【详解】解：在 $y=x^2-6x+5$ 中，当 $x=0$ 时，$y=5$，则有 $C(0,5)$，

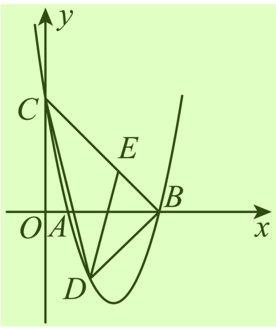
令 $y=0$，则有 $x^2-6x+5=0$，

解得：$x_1=1, x_2=6$，

$\therefore A(1,0)$，$B(5,0)$，

根据 D 点坐标，有 $m=2^2-6\times2+5=-3$

所以 D 点坐标 $(2,-3)$



设 BC 所在直线解析式为 $y=kx+b$，其过点 $C(0,5)$、$B(5,0)$

有 $\begin{cases}b=5\\5k+b=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=-1\\b=5\end{cases}$

∴ BC 所在直线的解析式为： $y=-x+5$

当 E 点在线段 BC 上时，设 $E(a,-a+5)$

$\angle DEB=\angle DCE+\angle CDE$

而 $\angle DEB=2\angle DCB$

∴ $\angle DCE=\angle CDE$

∴ $CE=DE$

因为： $E(a,-a+5)$， $C(0,5)$， $D(2,-3)$

有 $\sqrt{a^2+(-a+5-5)^2}=\sqrt{(a-2)^2+[-a+5-(-3)]^2}$

解得： $a=\dfrac{17}{5}$， $-a+5=\dfrac{8}{5}$

所以 E 点的坐标为: $(\dfrac{17}{5},\dfrac{8}{5})$

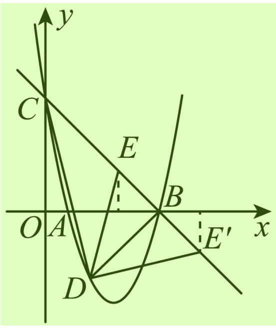
当 E 在 CB 的延长线上时，

在 $\triangle BDC$ 中， $BD^2=(5-2)^2+3^2=18$， $BC^2=5^2+5^2=50$，$DC^2=(5+3)^2+2^2=68$

∴ $BD^2+BC^2=DC^2$

∴ $BD\perp BC$

如图延长 EB 至 E'， 取 $BE'=BE$，



则有 $\triangle DEE'$ 为等腰三角形， $DE=DE'$，

∴ $\angle DEE'=\angle DE'E$

又∵ $\angle DEB=2\angle DCB$

∴ $\angle DE'E=2\angle DCB$

则 E' 为符合题意的点，

∵ $OC=OB=5$

∴ $\angle OBC=45^\circ$

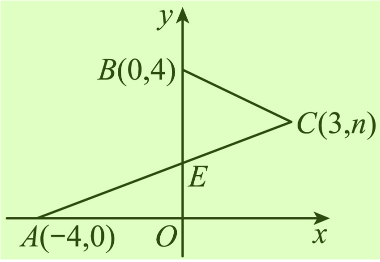
E' 的横坐标： $5+(5-\dfrac{17}{5})=\dfrac{33}{5}$， 纵坐标为 $-\dfrac{8}{5}$；

综上 E 点的坐标为： $(\dfrac{17}{5},\dfrac{8}{5})$ 或 $(\dfrac{33}{5},-\dfrac{8}{5})$，

故答案为： $\left(\dfrac{17}{5},\dfrac{8}{5}\right)$ 或 $\left(\dfrac{33}{5},-\dfrac{8}{5}\right)$

江苏苏州·统考中考真题

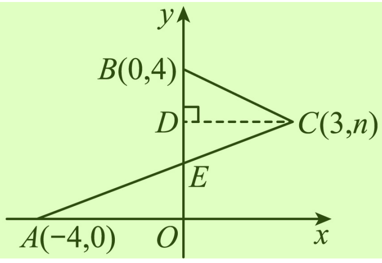
50．如图，在平面直角坐标系中，点 A、B 的坐标分别为$(-4,0)$、$(0,4)$，点$C(3,n)$在第一象限内，连接AC、BC．已知$\angle BCA=2\angle CAO$，则$n=$_________．



【答案】$\frac{14}{5}$

【分析】过点 C 作 CD⊥y 轴，交 y 轴于点 D，则 CD∥AO，先证△CDE≌△CDB（ASA），进而可得 DE＝DB＝4－n，再证△AOE∽△CDE，进而可得$\frac{4}{3}=\frac{2n-4}{4-n}$，由此计算即可求得答案．

【详解】解：如图，过点 C 作 CD⊥y 轴，交 y 轴于点 D，则 CD∥AO，



∴∠DCE＝∠CAO，
∵∠BCA＝2∠CAO，
∴∠BCA＝2∠DCE，
∴∠DCE＝∠DCB，
∵CD⊥y 轴，
∴∠CDE＝∠CDB＝90°，
又∵CD＝CD，
∴△CDE≌△CDB（ASA），
∴DE＝DB，
∵B（0，4），C（3，n），
∴CD＝3，OD＝n，OB＝4，
∴DE＝DB＝OB－OD＝4－n，
∴OE＝OD－DE
＝n－（4－n）
＝2n－4，
∵A（－4，0），
∴AO＝4，
∵CD∥AO，

∴△AOE∽△CDE，

∴$\frac{AO}{CD}=\frac{OE}{DE}$，

∴$\frac{4}{3}=\frac{2n-4}{4-n}$，

解得：$n=\frac{14}{5}$

内蒙古鄂尔多斯·统考中考真题

51．如图1，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 交 x 轴于 A，B 两点，其中点 A 的坐标为(1，0)，与 y 轴交于点 C（(0，－3).

（1）求抛物线的函数解析式；

（2）如图2，连接 AC，点 P 在抛物线上，且满足∠PAB＝2∠ACO，求点 P 的坐标.

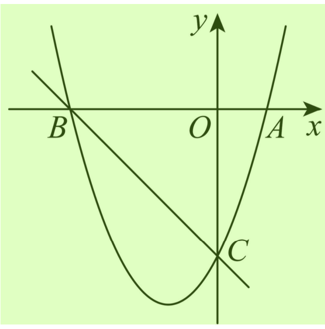


图1

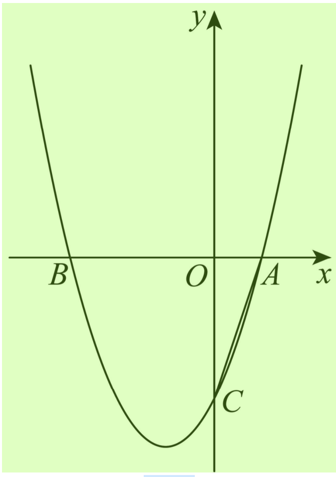


图2

【答案】（1）$y=x^2+2x-3$；（2）$\left(-\frac{15}{4},\frac{57}{16}\right)$，$\left(-\frac{9}{4},-\frac{39}{16}\right)$

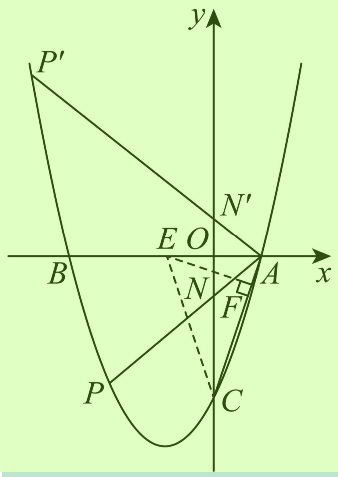
【分析】（1）将点 A，点 C 坐标代入解析式可求解；

（2）在 BO 上截取 OE＝OA，连接 CE，过点 E 作 EF⊥AC，由“SAS”可证△OCE≌△OCA，可得∠ACO＝∠ECO，CE＝AC＝$\sqrt{10}$，由面积法可求 EF 的长，由勾股定理可求 CF 的长，可求 tan∠ECA＝tan∠PAB＝$\frac{3}{4}$，分点 P 在 AB 上方和下方两种情况讨论，求出 AP 解析式，联立方程组可求点 P 坐标.

【详解】解：（1）∵抛物线 $y=x^2+bx+c$ 交 x 轴于点 A（1，0），与 y 轴交于点 C（0，－3），

∴$\begin{cases}0=1+b+c\\c=-3\end{cases}$，解得：$\begin{cases}b=2\\c=-3\end{cases}$，∴抛物线解析式为：$y=x^2+2x-3$；

（2）如图，在 BO 上截取 OE＝OA，连接 CE，过点 E 作 EF⊥AC，



∵点 A（1，0），点 C（0，－3），

∴OA＝1，OC＝3，

∴AC＝$\sqrt{OA^2+OC^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$，

∵OE＝OA，∠COE＝∠COA＝90°，OC＝OC，

∴△OCE≌△OCA（SAS），

∴∠ACO＝∠ECO，CE＝AC＝$\sqrt{10}$，

∴∠ECA＝2∠ACO，

∵∠PAB＝2∠ACO，

∴∠PAB＝∠ECA，

∵$S_{\triangle AEC}$＝$\frac{1}{2}$AE×OC＝$\frac{1}{2}$AC×EF，

∴EF＝$\frac{2\times3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$，

∴CF＝$\sqrt{CE^2-EF^2}=\sqrt{10-\frac{18}{5}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$，

∴tan∠ECA＝$\frac{EF}{CF}=\frac{3}{4}$，

如图 2，当点 P 在 AB 的下方时，设 AO 与 y 轴交于点 N，

∵∠PAB＝∠ECA，

∴tan∠ECA＝tan∠PAB＝$\frac{ON}{AO}=\frac{3}{4}$，

∴ON＝$\frac{3}{4}$，

∴点 N（0，$\frac{3}{4}$），

又∵点 A（1，0），

∴直线 AP 解析式为：y＝$\frac{3}{4}$x－$\frac{3}{4}$，

联立方程组得：$\begin{cases} y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4} \\ y=x^2+2x-3 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases}x_1=1\\y_1=0\end{cases}$或$\begin{cases}x_2=-\dfrac{9}{4}\\y_2=-\dfrac{39}{16}\end{cases}$，

∴点 P 坐标为：（$-\dfrac{9}{4}$，$-\dfrac{39}{16}$）

当点 P 在 AB 的上方时，同理可求直线 AP 解析式为：$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}$，

联立方程组得：$\begin{cases}y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}\\y=x^2+2x-3\end{cases}$，

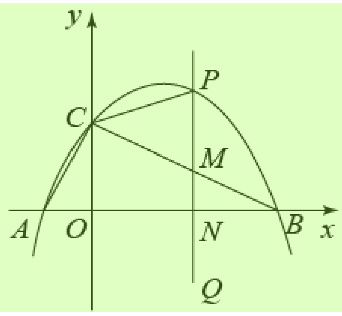
解得：$\begin{cases}x_1=1\\y_1=0\end{cases}$或$\begin{cases}x_2=-\dfrac{15}{4}\\y_2=\dfrac{57}{16}\end{cases}$，

∴点 P 坐标为：（$-\dfrac{15}{4}$，$\dfrac{57}{16}$），

综上所述：点 P 的坐标为（$-\dfrac{15}{4}$，$\dfrac{57}{16}$），（$-\dfrac{9}{4}$，$-\dfrac{39}{16}$）

2022·内蒙古呼和浩特·统考中考真题

52．如图，抛物线$y=-\dfrac{1}{2}x^2+bx+c$经过点$B(4,0)$和点$C(0,2)$，与x轴的另一个交点为A，连接AC、BC．



(1)求抛物线的解析式及点 A 的坐标；

(2)如图，点P是第一象限内抛物线上的动点，过点P作$PQ\,//\,y$轴，分别交BC、x轴于点M、N，当$\triangle PMC$中有某个角的度数等于$\angle OBC$度数的 2 倍时，请求出满足条件的点P的横坐标．

【答案】(1)$y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+2$；$A$（-1，0）；

(2)2 或$\dfrac{3}{2}$

【分析】（1）利用待定系数法解答，即可求解；

（2）先求出$\tan\angle OBC=\dfrac{OC}{OB}=\dfrac{1}{2}$，再求出直线$BC$的解析式，然后设点$P\left(a,-\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{3}{2}a+2\right)$，则

$M\left(a,-\frac{1}{2}a+2\right)$，$CF=a$，可得 $PM=-\frac{1}{2}a^2+2a$，再分三种情况讨论：若∠PCM=2∠OBC，过点 C 作 CF∥x 轴交 PM 于点 F；若∠PMC=2∠OBC；若∠CPM=2∠OBC，过点 P 作 PG 平分∠CPM，则∠MPG=∠OBC，即可求解．

【详解】(1) 解：把点 $B(4,0)$ 和点 $C(0,2)$ 代入，得：

$\begin{cases}-\frac{1}{2}\times16+4b+c=0\\c=2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}b=\frac{3}{2}\\c=2\end{cases}$，

∴抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$，

令 y=0，则 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$，

解得：$x_1=-1,x_2=4$，

∴点 A（-1，0）；

（2）解：∵点 B（4，0），C（0，2），

∴OB=4，OC=2，

∴ $\tan\angle OBC=\frac{OC}{OB}=\frac{1}{2}$，

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b_1\left(k\neq0\right)$，

把点 B（4，0），C（0，2）代入得：

$\begin{cases}4k+b_1=0\\b_1=2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=-\frac{1}{2}\\b_1=2\end{cases}$，

∴直线 BC 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+2$，

设点 $P\left(a,-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}a+2\right)$，则 $M\left(a,-\frac{1}{2}a+2\right)$，$CF=a$，

∴ $PM=\left(-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}a+2\right)-\left(-\frac{1}{2}a+2\right)=-\frac{1}{2}a^2+2a$，

若∠PCM=2∠OBC，过点 C 作 CF∥x 轴交 PM 于点 F，如图甲所示，

∴∠FCM=∠OBC，即 $\tan\angle FCM=\tan\angle OBC=\frac{1}{2}$，

∴∠PCF=∠FCM，

∵ PQ∥y 轴，

∴$CF\perp PQ$，

∴PM=2FM，

∴ $FM=-\frac{1}{4}a^2+a$，

∴ $\frac{-\frac{1}{4}a^2+a}{a}=\frac{1}{2}$，解得：解得：$a$=2 或 0（舍去），

∴点 P 的横坐标为 2；

若$\angle PMC=2\angle OBC$，

∵$\angle PMC=\angle BMN$，

∴$\angle BMN=2\angle OBC$，

∵$\angle OBC+\angle BMN=90°$，

∴$\angle OBC=30°$，与$\tan\angle OBC=\dfrac{OC}{OB}=\dfrac{1}{2}$相矛盾，不合题意，舍去；

若$\angle CPM=2\angle OBC$，如图乙所示，过点P作PG平分$\angle CPM$，则$\angle MPG=\angle OBC$，

∵$\angle PMG=\angle BMN$，

∴$\triangle PMG\backsim\triangle BMN$，

∴$\angle PGM=\angle BNM=90°$，

∴$\angle PGC=90°$，

∵PG平分$\angle CPM$，即$\angle MPG=\angle CPG$，

∴$\angle PCM=\angle PMC$，

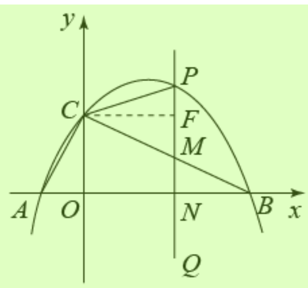
∴$PC=PM$，

∴$-\dfrac{1}{2}a^2+2a=\sqrt{a^2+\left(-\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{3}{2}a+2-2\right)^2}$，

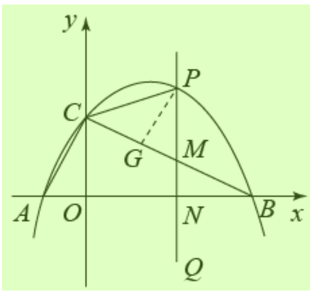
解得：$a=\dfrac{3}{2}$或0（舍去），

∴点P的横坐标为$\dfrac{3}{2}$；

综上所述，点P的横坐标为2或$\dfrac{3}{2}$．



图甲



图乙

2023·湖北黄冈·统考中考真题

53．已知抛物线$y=-\dfrac{1}{2}x^2+bx+c$与x轴交于$A,B(4,0)$两点，与y轴交于点$C(0,2)$，点P为第一象限抛物线上的点，连接CA,CB,PB,PC．

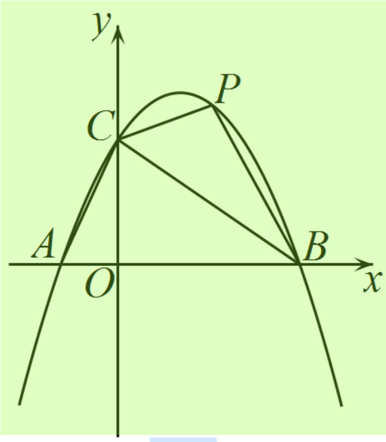
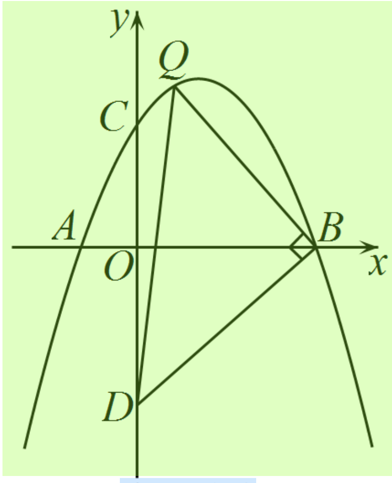


图1



备用图

(1)直接写出结果；$b=$_____，$c=$_____，点 A 的坐标为_____，$\tan\angle ABC=$______；

(2)如图 1，当 $\angle PCB=2\angle OCA$ 时，求点 P 的坐标；

【答案】(1)$\frac{3}{2}$，2，$(-1,0)$，$\frac{1}{2}$；(2)$(2,3)$

【分析】(1) 利用待定系数法求二次函数解析式即可求得 $b=\frac{3}{2}$、$c=2$，从而可得 $OB=4$，$OC=2$，由 $y=0$，可得 $-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2=0$，求得 $A(-1,0)$，在 $Rt\triangle COB$ 中，根据正切的定义求值即可；

(2) 过点 C 作 $CD\,//\,x$ 轴，交 BP 于点 D，过点 P 作 $PE\,//\,x$ 轴，交 y 轴于点 E，由 $\tan\angle OCA=\tan\angle ABC=\frac{1}{2}$，即 $\angle OCA=\angle ABC$，再由 $\angle PCB=2\angle ABC$，可得 $\angle EPC=ABC$，证明 $\triangle PEC\sim\triangle BOC$，可得 $\frac{EP}{OB}=\frac{EC}{OC}$，设点 P 坐标为 $\left(t,-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t+2\right)$，可得 $\frac{t}{4}=\frac{-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t}{2}$，再进行求解即可；

【详解】(1) 解：∵抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 经过点 $B(4,0)$，$C(0,2)$，

∴ $\begin{cases}-8+4b+c=0\\c=2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}b=\frac{3}{2}\\c=2\end{cases}$，

∴抛物线解析式为：$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$，

∵抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A、$B(4,0)$ 两点，

∴ $y=0$ 时，$-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2=0$，解得：$x_1=-1$，$x_2=4$，

∴ $A(-1,0)$，

∴ $OB=4$，$OC=2$，

在 $Rt\triangle COB$ 中，$\tan\angle ABC=\frac{OC}{OB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，

故答案为：$\frac{3}{2}$，2，$(-1,0)$，$\frac{1}{2}$；

（2）解：过点 C 作 CD // x 轴，交 BP 于点 D，过点 P 作 PE // x 轴，交 y 轴于点 E，

∵ $AO=1$，$OC=2$，$OB=4$，

∴ $\tan\angle OCA=\frac{AO}{CO}=\frac{1}{2}$，

由（1）可得，$\tan\angle ABC=\frac{1}{2}$，即 $\tan\angle OCA=\tan\angle ABC$，

∴ $\angle OCA=\angle ABC$，

∵ $\angle PCB=2\angle OCA$，

∴ $\angle PCB=2\angle ABC$，

∵ CD // x 轴，EP // x 轴，

∴ $\angle ACB=\angle DCB$，$\angle EPC=\angle PCD$，

∴ $\angle EPC=ABC$，

又∵ $\angle PEC=\angle BOC=90°$，

∴ $\triangle PEC\backsim\triangle BOC$，

∴ $\frac{EP}{OB}=\frac{EC}{OC}$，

设点 P 坐标为 $\left(t,-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t+2\right)$，则 $EP=t$，$EC=-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t+2-2=-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t$，

∴ $\frac{t}{4}=\frac{-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t}{2}$，解得：$t=0$（舍），$t=2$，

∴点 P 坐标为 $(2,3)$．

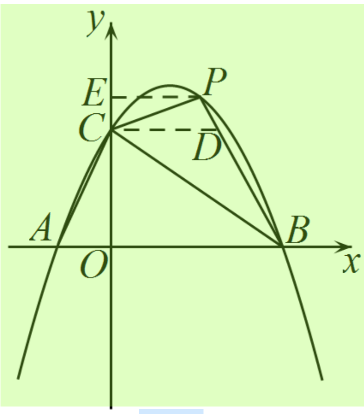
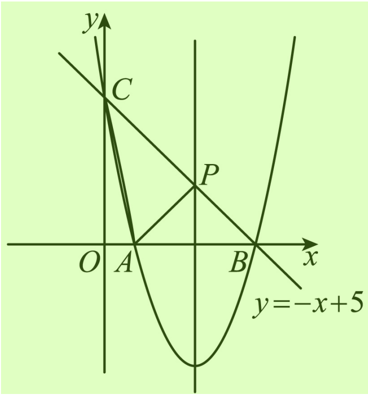


图1

54．（2020·湖南张家界·中考真题）如图，抛物线 $y=ax^2-6x+c$ 交 x 轴于 A,B 两点，交 y 轴于点 C．直线 $y=-x+5$ 经过点 B,C．



（1）求抛物线的解析式；

（2）在直线 BC 上是否存在点 M，使 AM 与直线 BC 的夹角等于 $\angle ACB$ 的 2 倍？若存在，请求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由．

【答案】（1） $y=x^2-6x+5$；

（2）存在使 AM 与直线 BC 的夹角等于 $\angle ACB$ 的 2 倍的点，且坐标为 M_1（$\frac{13}{6},\frac{17}{6}$），$M_2$（$\frac{23}{6}$，$\frac{7}{6}$）.

【分析】（1）先根据直线 $y=-x+5$ 经过点 B,C，即可确定 B、C 的坐标，然后用带定系数法解答即可；

（2）作 AN⊥BC 于 N，NH⊥x 轴于 H，作 AC 的垂直平分线交 BC 于 M1，AC 于 E；然后说明△ANB 为等腰直角三角形，进而确定 N 的坐标；再求出 AC 的解析式，进而确定 M_1E 的解析式；然后联立直线 BC 和 M_1E 的解析式即可求得 M_1 的坐标；在直线 BC 上作点 M_1 关于 N 点的对称点 M_2，利用中点坐标公式即可确定点 M_2 的坐标

【详解】解：（1）∵直线 $y=-x+5$ 经过点 B,C

∴当 x=0 时，可得 y=5，即 C 的坐标为（0,5）

当 y=0 时，可得 x=5，即 B 的坐标为（5,0）

∴$\begin{cases}5=a\cdot0^2-6\times0+c\\0=5^2a-6\times5+c\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1\\c=5\end{cases}$

∴该抛物线的解析式为 $y=x^2-6x+5$

（2）如图：作 AN⊥BC 于 N，NH⊥x 轴于 H，作 AC 的垂直平分线交 BC 于 M1，AC 于 E，

∵$M_1A=M_1C$，

∴$\angle ACM_1=\angle CAM_1$

∴$\angle AM_1B=2\angle ACB$

∵△ANB 为等腰直角三角形.

∴AH=BH=NH=2

∴N（3，2）

设 AC 的函数解析式为 y=kx+b

∵C(0，5),A(1，0)

∴$\begin{cases}5=k\cdot0+b\\0=k+b\end{cases}$ 解得 b=5，k=-5

∴AC 的函数解析式为 y=-5x+5

设 EM_1 的函数解析式为 $y=\frac{1}{5}x+n$

∵点 E 的坐标为（$\frac{1}{2},\frac{5}{2}$）

∴ $\frac{5}{2}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+n$，解得：$n=\frac{12}{5}$

∴EM_1 的函数解析式为 $y=\frac{1}{5}x+\frac{12}{5}$

∵ $\begin{cases} y=-x+5 \\ y=\frac{1}{5}x+\frac{12}{5} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{13}{6} \\ y=\frac{17}{6} \end{cases}$

∴M_1 的坐标为（$\frac{13}{6},\frac{17}{6}$）；

在直线 BC 上作点 M_1 关于 N 点的对称点 M_2

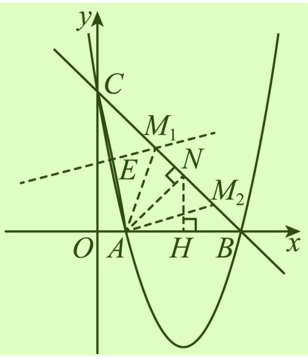
设 M_2（a，-a+5）

则有：$3=\frac{\frac{13}{6}+a}{2}$，解得 $a=\frac{23}{6}$

∴$-a+5=\frac{7}{6}$

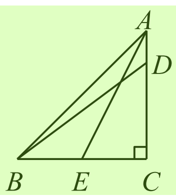
∴M_2 的坐标为（$\frac{23}{6}$，$\frac{7}{6}$）.

综上，存在使 AM 与直线 BC 的夹角等于 $\angle ACB$ 的 2 倍的点，且坐标为 M_1（$\frac{13}{6},\frac{17}{6}$），$M_2$（$\frac{23}{6}$，$\frac{7}{6}$）.

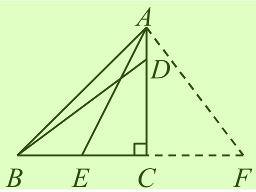


题型七　其它构造方式

55．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，点 D，E 分别在边 AC，BC 上，且 $\angle DBC=2\angle BAE$，$AE=2$，$BD=\sqrt{5}$，求 AB 的长．



解： 延长 BC 到 F，使 $CF=CD$，连接 AF．



$\because \angle ACF=\angle BCD=90°$，$AC=BC$，$\therefore \triangle ACF\cong\triangle BCD$，

$\therefore AF=BD=\sqrt{5}$，$\angle FAC=\angle DBC=2\angle BAE$.

设$\angle BAE=\alpha$，则$\angle FAC=\angle DBC=2\alpha$，

$\angle AEF=45°+\alpha$，$\angle EAC=45°-\alpha$，$\angle EAF=45°+\alpha$，

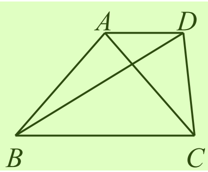
$\therefore \angle AEF=\angle EAF$，$\therefore EF=AF=\sqrt{5}$.

$\because AC^2=AE^2-EC^2=AF^2-CF^2$，

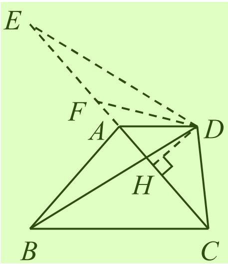
$\therefore 2^2-EC^2=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{5}-EC)^2$，解得 $EC=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore AC^2=2^2-EC^2=\dfrac{16}{5}$，$\therefore AB=AC=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

56．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AB=AC$，$\angle ACD=2\angle ABD$，$AD=19$，$CD=25$，求 AB 的长.



解：过点 D 作 $DH\perp AC$ 于点 H，延长 CA 到 F，使 $FH=CH$，连接 DF，



延长 CF 到 E，使 $EF=DF$，连接 DE.

则 $EF=DF=DC=25$，$\angle E=\angle EDF$，

$\therefore \angle DFH=\angle ACD=2\angle ABD$，$\angle DFH=2\angle E$，$\therefore \angle E=\angle ABD$.

$\because AD\parallel BC$，$\therefore \angle DAC=\angle ACB$.

$\because AB=AC$，$\therefore \angle ABC=\angle ACB$，

$\therefore \angle DAC=\angle ABC$，$\therefore \angle DAE=\angle DAB$.

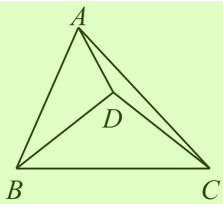
$\because AD=AD$，$\therefore \triangle ADE\cong\triangle ADB$，$\therefore AE=AB=AC$.

设 $CH=FH=x$，则 $EH=x+25$，$CE=2x+25$，$AC=AE=x+\dfrac{25}{2}$，

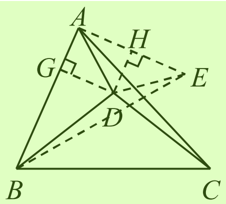
$\therefore AH=\dfrac{5}{2}$，$\therefore DH^2=AD^2-AH^2=\dfrac{819}{4}$，

$\therefore x=FH=\sqrt{DF^2-DH^2}=\dfrac{41}{2}$，$\therefore AB=AC=x+\dfrac{25}{2}=33$

57．如图，在△ABC 中，$AB=4$，$AC=5$，D 为△ABC 内一点，$\angle BDC=2\angle BAD$，$BD=CD$，求△ABD 的面积．



解：将△CDA 绕点 D 顺时针旋转到△BDE，连接 AE，过点 D 作 $DG\perp AB$ 于点 G，$DH\perp AE$ 于点 H.



则 $BE=AC=5$，$AD=DE$，$\angle ADE=\angle BDC=2\angle BAD$，

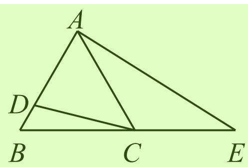
∴$AH=EH$，$\angle ADE=2\angle ADH$，∴$\angle BAD=\angle ADH$，

∴$\angle BAE=\angle BAD+\angle DAH=\angle ADH+\angle DAH=90°$，

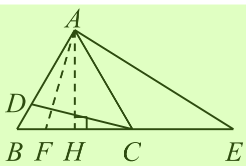
∴$AE=\sqrt{BE^2-AB^2}=3$，∴$DG=AH=EH=\frac{3}{2}$，

∴$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot DG=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{3}{2}=3$.

58．如图，在等边△ABC 中，点 D 在边 AB 上，点 E 在 BC 的延长线上，$\angle CAE=2\angle DCB$，$BD=2$，$AD=6$，求 CE 的长．



解：在 BC 上截取 $BF=BD$，连接 AF，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H.



∵△ABC 是等边三角形，∴$AB=BC$.

∵$\angle ABF=\angle CBD$，∴△ABF≌△CBD，

∴$\angle FAB=\angle DCB$，

∵$BD=2$，$AD=6$，∴$CF=6$，$AB=8$，$AH=4\sqrt{3}$.

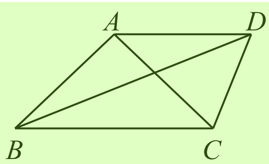
设$\angle FAB=\angle DCB=\alpha$，则$\angle CAE=2\alpha$，$\angle CAF=60°-\alpha$，

$\angle EAF=60°+\alpha$，$\angle AFE=60°+\alpha$，

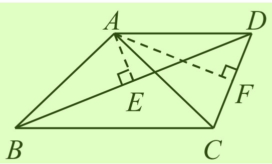
∴$AE=EF$.

设 $CE=x$，则 $AE=EF=x+6$，$EH=x+4$.
在 Rt$\triangle AHE$ 中，$AH^2+EH^2=AE^2$，
$\therefore (4\sqrt{3})^2+(x+4)^2=(x+6)^2$，解得 $x=7$，
$\therefore CE$ 的长为 7.

59．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，BD 平分$\angle ABC$，$\angle DAC=2\angle ADB$，若 $CD=4$，$BD=10$，求$\triangle ACD$ 的面积.

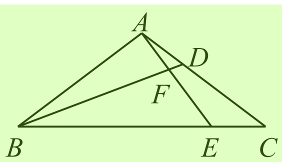


解：过点 A 作 $AE\perp BD$ 于点 E，$AF\perp CD$ 于点 F.

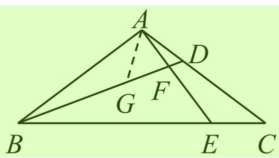


$\because AB=AD$，$\therefore \angle ABD=\angle ADB$，$BE=DE=\dfrac{1}{2}BD=5$.
$\because BD$ 平分$\angle ABC$，$\therefore \angle ABD=\angle DBC$，
$\therefore \angle ADB=\angle DBC$，$\therefore AD\parallel BC$，$\therefore \angle DAC=\angle ACB$.
$\because \angle DAC=2\angle ADB$，$\therefore \angle ACB=2\angle ADB=2\angle DBC$，
$\therefore \angle ACB=\angle ABC$，$\therefore AC=AB=AD$，
$\therefore \angle CAF=\angle DAF$，$\therefore \angle DAC=2\angle DAF$，$\therefore \angle DAF=\angle ADB$.
$\because \angle AFD=\angle DEA=90°$，$AD=DA$，$\therefore \triangle ADF\cong\triangle DAE$，
$\therefore AF=DE=5$，$\therefore S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}CD\cdot AF=\dfrac{1}{2}\times4\times5=10$.

60．如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D，E 分别是边 AC，BC 上的点，连接 AE 与 BD 交于点 F，$\angle BFE=\angle BAC=2\angle AEB$，探究 AF，EF 与 BF 的数量关系，并证明.



解：在 BD 上截取 $BG=AE$，连接 AG.



$\because AB=AC$，$\therefore \angle ABE=\angle C$，

∴$\angle BAC=180°-2\angle C$，

∴$\angle AEB=\frac{1}{2}\angle BAC=90°-\angle C$，

∴$\angle ABE+\angle AEB=90°$，∴$\angle BAE=90°$.

∵$\angle AFD=\angle BFE=\angle BAC$，∴$\angle CAE=\angle ABG$，

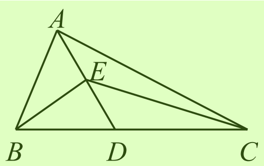
∴$\triangle ABG\cong\triangle CAE$，∴$\angle AGB=\angle AEC$，$\angle BAG=\angle C$，

∴$\angle AGF=\angle AEB=90°-\angle C$，$\angle GAF=90°-\angle BAG=90°-\angle C$，

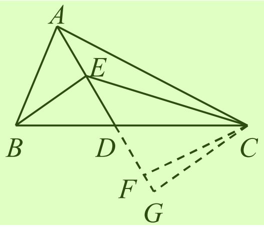
∴$\angle AGF=\angle GAF$，∴$AF=GF=BF-BG=BF-AE=BF-AF-EF$，

∴$BF=2AF+EF$.

61．如图，在$\triangle ABC$中，点D为边BC上一点，$\frac{BD}{DC}=\frac{3}{4}$，点$E$为$AD$的中点，若$\angle BAC=\angle BED=2\angle CED$，求$\frac{BE}{AD}$的值.



解：过点C作$CG\parallel BE$交AD的延长线于点G，在AG上取点F，连接CF，使$CF=CG$.



则$\triangle BDE\backsim\triangle CDG$，∴$\frac{BE}{CG}=\frac{BD}{DC}=\frac{3}{4}$.

设$\angle CED=\alpha$，则$\angle CFG=\angle G=\angle BED=\angle BAC=2\alpha$，

∴$\angle ECF=\angle CED$，$\angle AEB=\angle CFA$，$\angle BAE=\angle ACF=2\alpha-\angle CAF$，

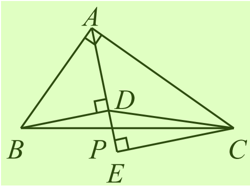
∴$EF=CF=CG$，$\triangle ABE\backsim\triangle CAF$，∴$\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{CF}=\frac{BE}{AF}$.

设$BE=3$，$AE=DE=a$，则$EF=CF=CG=4$，$DF=4-a$，$AF=a+4$，

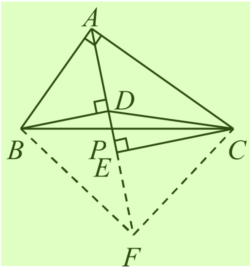
∴$\frac{a}{4}=\frac{3}{a+4}$，解得$a=-6$（舍去）或$a=2$，

∴$AF=a+4=6$，∴$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{AF}=\frac{1}{2}$.

62．如图，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，点P为BC边上一点，连接AP，分别过点B，C作AP的垂线，垂足为D，E，若$\angle ADC=2\angle ABC$，$\frac{BP}{PC}=\frac{3}{4}$，求$\tan\angle ACB$的值.



解：延长 AE 到 F，使 $DF=DC$，连接 BF，CF.



则 $\angle EFC=\angle DCF$，$\therefore \angle ADC=2\angle EFC$.

$\because \angle ADC=2\angle ABC$，$\therefore \angle EFC=\angle ABC$.

$\because \angle FEC=\angle BAC=90°$，$\therefore \triangle EFC\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \dfrac{CE}{AC}=\dfrac{CF}{BC}$，$\angle ECF=\angle ACB$，

$\therefore \angle BCF=\angle ACE$，$\therefore \triangle BCF\backsim\triangle ACE$，

$\therefore \angle CBF=\angle CAF$，$\therefore \angle DFB=\angle ACB=\angle ECF$，

$\therefore \triangle DBF\backsim\triangle EFC$，$\therefore \dfrac{BD}{EF}=\dfrac{DF}{CE}$，$\therefore DF\cdot EF=BD\cdot CE$.

$\because \angle BDP=\angle CEP=90°$，$\angle BPD=\angle CPE$，

$\therefore \triangle BDP\backsim\triangle CEP$，$\dfrac{BD}{CE}=\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{3}{4}$.

设 $BD=3$，$CE=4$，$DE=a$，$EF=b$，则 $DC=DF=a+b$，

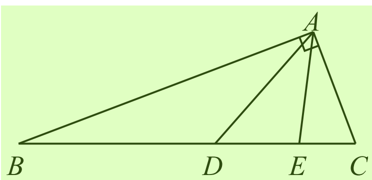
$\therefore (a+b)b=3\times 4=12$，$\therefore b^2+ab=12$，$\therefore 2ab=24-2b^2$.

$\because DC^2=CE^2+DE^2$，$\therefore (a+b)^2=16+a^2$，

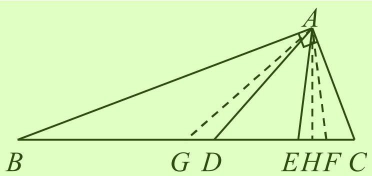
$\therefore b^2+2ab=16$，$\therefore b^2+24-2b^2=16$，$\therefore b=2\sqrt{2}$，

$\therefore \tan\angle ACB=\tan\angle ECF=\dfrac{EF}{CE}=\dfrac{b}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

63．如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，点 D，E 为边 BC 上两点（点 D 在点 E 左侧），$\angle BAD=\angle CAE$，$\angle AED=2\angle ADE$，$BD=7$，$CE=2$，求 AE，DE 的长.



解：取 BC 中点 G，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H，在 HC 上截取 $FH=EH$，连接 AG，AF.



则 $AG=BG=CG$，∴$\angle BAG=\angle B$.

设 $\angle BAD=\angle CAE=3\alpha$，则 $\angle DAE=90°-6\alpha$，$\angle ADE=30°+2\alpha$，

$\angle AED=60°+4\alpha$，$\angle BAG=\angle B=30°-\alpha$，$\angle AGE=60°-2\alpha$，

$\angle GAE=60°-2\alpha$，$\angle AFE=\angle AEF=120°-4\alpha$，$\angle DAF=30°+2\alpha$，

∴$\angle AGE=\angle GAE$，$\angle ADE=\angle DAF$，

∴$DF=AF=AE=GE$，∴$EF=DG$.

设 $DF=AF=AE=GE=x$，则 $AG=BG=CG=x+2$，

$BC=2x+4$，$EF=DG=7-(x+2)=5-x$，

$EH=FH=\frac{1}{2}EF=\frac{5-x}{2}$，$DE=x-(5-x)=2x-5$，

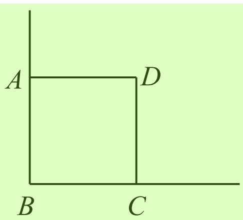
$GH=x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}x=\frac{5+x}{2}$.

∵$AH^2=AG^2-GH^2=AE^2-EH^2$，

∴$(x+2)^2-(\frac{5+x}{2})^2=x^2-(\frac{5-x}{2})^2$

解得 $x=4$，∴$AE=4$，$DE=2x-5=3$

64．如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在 BA，BC 的延长线上，连接 DE，EF，$DE=\sqrt{7}$，$EF=5$，$\angle BEF=2\angle DEF$，求 BF 的长．



解：如图 1，图 2，过点 D 作 $DG\perp DE$ 交射线 CB 于点 G，连接 EG.

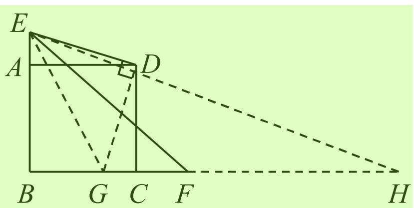


图 1

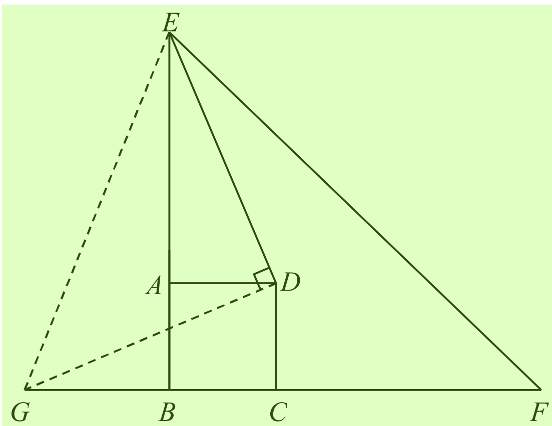


图 2

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，∴$AD=CD$，$\angle DAE=\angle DCG=\angle ADC=90°$，1
∴$\angle ADE=\angle CDG$，∴$\triangle ADE\cong\triangle CDG$，
∴$DE=DG=\sqrt{7}$，∴$EG^2=DE^2+DG^2=14$.
如图 1，当 EF 在 $\angle BED$ 内部时，延长 BF 到 H，使 $FH=EF$，连接 EH.

设 $\angle DEF=\alpha$，则 $\angle BEF=2\alpha$，$\angle EFB=90°-2\alpha$，2
$\angle FEG=45°-\alpha$，$\angle EHG=\angle FEH=45°-\alpha$，
∴$\angle FEG=\angle EHG$.
∵$\angle EGF=\angle HGE$，∴$\triangle EGF\backsim\triangle HGE$，
∴$\dfrac{EG}{GF}=\dfrac{GH}{EG}$，∴$GF\cdot GH=EG^2$，∴$GF(GF+5)=14$，
解得 $GF=-7$（舍去）或 $GF=2$.
∵$BE^2=EF^2-BF^2=EG^2-BG^2$，
∴$BF^2-BG^2=EF^2-EG^2$，
∴$BF^2-(BF-GF)^2=EF^2-EG^2$，
∴$2GF\cdot BF-GF^2=EF^2-EG^2$，
∴$4BF-2^2=5^2-14$，∴$BF=\dfrac{15}{4}$.
②如图 2，当 EF 在 $\angle BED$ 外部时
∵$\angle BEF=2\angle DEF$，∴$\angle AED=\angle DEF$.
∵$\triangle ADE\cong\triangle CDG$，∴$\angle AED=\angle CGD$，
∴$\angle DEF=\angle CGD$.
∵$DE=DG$，∴$\angle DEG=\angle DGE$，
∴$\angle GEF=\angle EGF$，∴$GF=EF=5$.
由①知，$2GF\cdot BF-GF^2=EF^2-EG^2$，
∴$10BF-5^2=5^2-14$，∴$BF=\dfrac{18}{5}$.