专题 2-5 最值模型之阿氏圆与胡不归

01 题型·解读

知识点梳理

模块一 胡不归模型

【题型 1】胡不归模型·已有相关角直接作垂线

【题型 2】胡不归模型·构造相关角再作垂线

【题型 3】胡不归模型·取最值时对其它量进行计算

模块二 阿氏圆模型

【题型 4】点在圆外：向内取点（系数小于 1）

【题型 5】点在圆内：向外取点（系数大于 1）

【题型 6】一内一外提系数

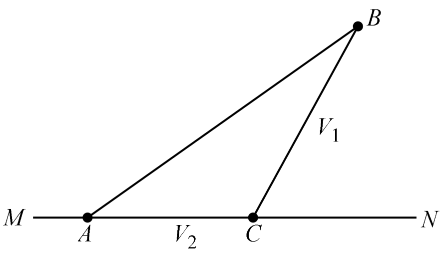
【题型 7】隐圆型阿氏圆

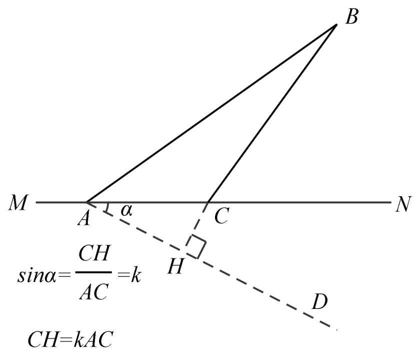
02 满分·技巧

知识点梳理

一、胡不归模型讲解

如图，一动点 P 在直线 MN 外的运动速度为 V_1，在直线 MN 上运动的速度为 V_2，且 $V_1<V_2$，A、B 为定点，点 C 在直线 MN 上，确定点 C 的位置使 $\frac{AC}{V_2}+\frac{BC}{V_1}$ 的值最小．





$\dfrac{AC}{V_2}+\dfrac{BC}{V_1}=\dfrac{1}{V_1}\left(BC+\dfrac{V_1}{V_2}AC\right)$，记 $k=\dfrac{V_1}{V_2}$，即求 $BC+kAC$ 的最小值．

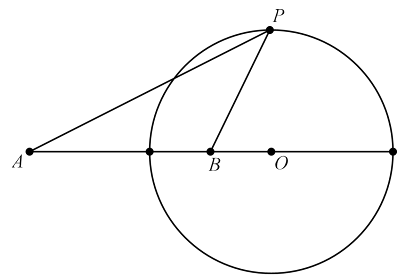
构造射线 AD 使得 $\sin\angle DAN=k$，$CH/AC=k$，$CH=kAC$．

将问题转化为求 $BC+CH$ 最小值，过 B 点作 $BH\perp AD$ 交 MN 于点 C，交 AD 于 H 点，此时 $BC+CH$ 取到最小值，即 $BC+kAC$ 最小．

二、阿氏圆模型讲解

【模型来源】

所谓阿圆，就是动点到两定点距离之比为定值，那么动点的轨迹就是圆，这个圆，称为阿波罗尼斯圆，简称为阿圆．其本质就是通过构造母子相似，化去比例系数，转化为两定一动将军饮马型求最值，难点在于如何构造母子相似．



【模型建立】

如图 1 所示，⊙O 的半径为 R，点 A、B 都在⊙O 外，P 为⊙O 上一动点，已知 $R=\dfrac{2}{5}OB$，

连接 PA、PB，则当“$PA+\dfrac{2}{5}PB$”的值最小时，P 点的位置如何确定？

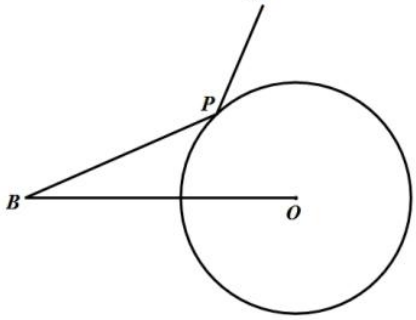


图1

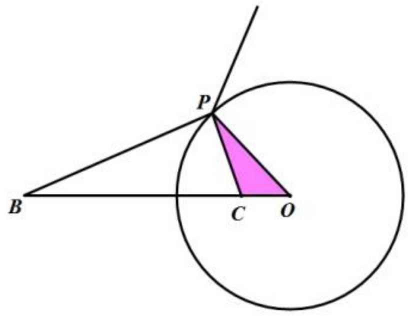


图2

解决办法：如图 2，在线段 OB 上截取 OC 使 $OC=\dfrac{2}{5}R$，则可说明△BPO 与△PCO 相似，则有 $\dfrac{2}{5}PB$

$=PC$。故本题求“$PA+\frac{2}{5}PB$”的最小值可以转化为“$PA+PC$”的最小值，其中与 A 与 C 为定点，P 为动点，故当 A、P、C 三点共线时，“$PA+PC$”值最小。

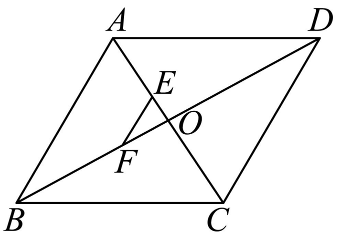
03 核心•题型

模块一 胡不归模型

【题型 1】胡不归模型·已有相关角直接作垂线

2023·西安·二模

1．如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60°$，$AD=6$，对角线 AC、BD 相交于点 O，点 E 在线段 AC 上，且 $AE=2$，点 F 为线段 BD 上的一个动点，则 $EF+\frac{1}{2}BF$ 的最小值为 ________．



【答案】$2\sqrt{3}$

【分析】过 F 作 $FM\perp BC$，由菱形 $ABCD$，$\angle ABC=60°$，得到 BD 为 $\angle ABC$ 平分线，求出 $\angle FBM=30°$，在 $\mathrm{Rt}\triangle FBM$ 中，利用 $30°$ 角所对的直角边等于斜边的一半，得到 $FM=\frac{1}{2}F$，故 $EF+\frac{1}{2}BF=EF+FM$，求出 $EF+FM$ 的最小值即为所求最小值，当 E、F、M 三点共线时最小，求出即可．

【详解】解：过 F 作 $FM\perp BC$，

$\because$ 菱形 $ABCD$，$\angle ABC=60°$，

$\therefore \angle FBM=\frac{1}{2}\angle ABC=30°$，$AB=BC$，即 $\triangle ABC$ 为等边三角形，$\angle ACM=60°$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle FBM$ 中，$FM=\frac{1}{2}BF$，

$\therefore EF+\frac{1}{2}BF=EF+FM$，

$\therefore$ 当 E、F、M 三点共线时，取得最小值，

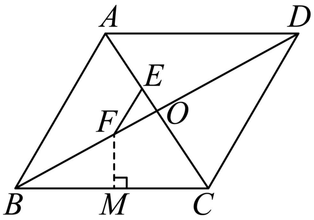
$\because AE=2$，$AC=AB=BC=6$，

$\therefore EC=AC-AE=6-2=4$，

在$Rt\triangle ECM$中，$EM = EC \cdot \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$，

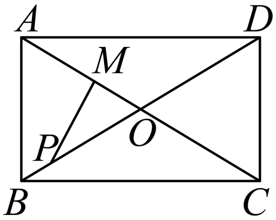
则$EF + \frac{1}{2}BF$的最小值为$2\sqrt{3}$．

故答案为：$2\sqrt{3}$．



2023·保定·一模

2．如图，在矩形$ABCD$中，对角线AC，BD交于点O，$AB = OB = 3$，点M在线段AC上，且$AM = 2$．点P为线段OB上的一个动点．



（1）$\angle OBC =$__________°；

（2）$MP + \frac{1}{2}PB$的最小值为__________．

【答案】 30 2

【分析】(1) 由矩形的性质得到$OA = OB = OC = OD$，$\angle ABC = 90^\circ$，又由$AB = OB$得到$\triangle OAB$是等边三角形，则$\angle ABO = 60^\circ$，即可得到答案；

(2) 过点P作$PE \perp BC$于点E，过点M作$MF \perp BC$于点F，证明$MP + \frac{1}{2}PB = MP + PE \geq MF$，进一求解$MF$即可得到答案．

【详解】解：(1) ∵四边形$ABCD$是矩形，

∴$OA = OB = OC = OD$，$\angle ABC = 90^\circ$，

∵$AB = OB$，

∴$AB = OB = OA$，

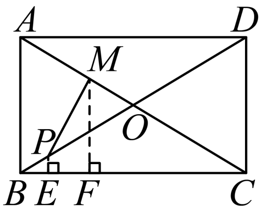
∴$\triangle OAB$是等边三角形，

∴$\angle ABO = 60^\circ$，

∴$\angle OBC = \angle ABC - \angle ABO = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$，

故答案为：30．

(2) 过点P作$PE \perp BC$于点E，过点M作$MF \perp BC$于点F，



在Rt△BPE中，

由（1）知：$\angle PBE=30^{\circ}$，

∴ $PE=\frac{1}{2}PB$，

∴ $MP+\frac{1}{2}PB=MP+PE\geq MF$，

在矩形$ABCD$中，

$AC=2OA=2OB=6$，

∵ $AM=2$，

∴ $CM=AC-AM=6-2=4$，

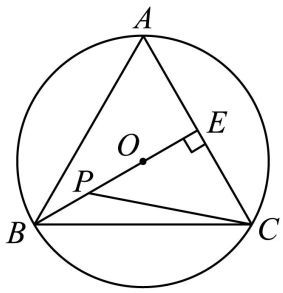
在Rt△CMF中，$\angle MCF=\angle OBC=30^{\circ}$，

∴ $MF=\frac{1}{2}CM=2$，

∴ $MP+\frac{1}{2}PB$的最小值为2

2023·湘西·中考真题

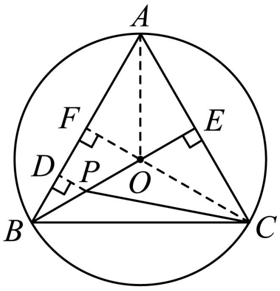
3．如图，⊙O是等边三角形ABC的外接圆，其半径为4．过点B作$BE\perp AC$于点E，点P为线段BE上一动点（点P不与B，E重合），则$CP+\frac{1}{2}BP$的最小值为__________．



【答案】6

【分析】过点P作$PD\perp AB$，连接CO并延长交AB于点F，连接AO，根据等边三角形的性质和圆内接三角形的性质得到$OA=OB=4$，$CF\perp AB$，然后利用含30°角直角三角形的性质得到$OE=\frac{1}{2}OA=2$，进而求出$BE=BO+EO=6$，然后利用$CP+\frac{1}{2}BP=CP+PD\leq CF$代入求解即可．

【详解】如图所示，过点P作$PD\perp AB$，连接CO并延长交AB于点F，连接AO



∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形， $BE \perp AC$

∴ $\angle ABE = \angle CBE = \frac{1}{2}\angle ABC = 30^\circ$

∵ $\odot O$ 是等边三角形 ABC 的外接圆，其半径为 4

∴ $OA = OB = 4$， $CF \perp AB$，

∴ $\angle OBA = \angle OAB = 30^\circ$

∴ $\angle OAE = \angle OAB = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ$

∵ $BE \perp AC$

∴ $OE = \frac{1}{2}OA = 2$

∴ $BE = BO + EO = 6$

∵ $PD \perp AB$， $\angle ABE = 30^\circ$

∴ $PD = \frac{1}{2}PB$

∴ $CP + \frac{1}{2}BP = CP + PD \leq CF$

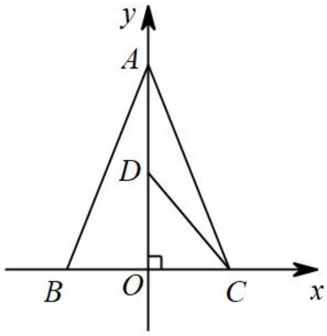
∴ $CP + \frac{1}{2}BP$ 的最小值为 CF 的长度

∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形， $BE \perp AC$， $CF \perp AB$

∴ $CF = BE = 6$

∴ $CP + \frac{1}{2}BP$ 的最小值为 6

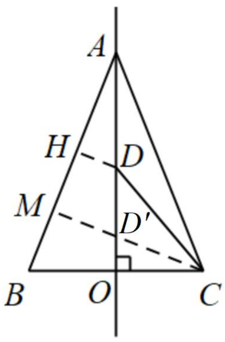
4．如图， $AB = AC$， $A\left(0,\sqrt{15}\right)$，$C$（1，0），$D$ 为射线 AO 上一点，一动点 P 从 A 出发，运动路径为 $A-D-C$，在 AD 上的速度为 4 个单位/秒，在 CD 上的速度为 1 个单位/秒，则整个运动时间最少时，D 的坐标为__________.



【答案】$\left(0,\frac{\sqrt{15}}{15}\right)$

【分析】如图，作 $DH\perp AB$ 于 H，$CM\perp AB$ 于 M，交 AO 于 D'．运动时间 $t=\frac{AD}{4}+\frac{CD}{1}=\frac{AD}{4}+CD$，由 $\triangle AHD\backsim\triangle AOB$，推出 $DH=\frac{1}{4}AD$，可得 $\frac{1}{4}AD+CD=CD+DH$，推出当 C，D，H 共线且和 CM 重合时，运动时间最短．

【详解】如图，作 $DH\perp AB$ 于 H，$CM\perp AB$ 于 M，交 AO 于 $D¢$．



∵运动时间 $t=\frac{AD}{4}+\frac{CD}{1}=\frac{AD}{4}+CD$，

∵ $AB=AC$， $AO\perp BC$，

∴ $BO=OC=1$，

∵ $A(0,\sqrt{15})$，C（1，0），$AB=AC$， $AO\perp BC$，

∴ $AB=AC=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{15+1}=4$，

∵ $\angle DAH=\angle BAO$， $\angle DHA=\angle AOB=90°$，

∴ $\triangle AHD\backsim\triangle AOB$，

∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{DH}{OB}$，

∴ $DH=\frac{1}{4}AD$，

∴ $\frac{1}{4}AD+CD=CD+DH$，

∴当 C，D，H 共线且和 CM 重合时，运动时间最短，

$\therefore \frac{1}{2}BC\cdot AO=\frac{1}{2}AB\cdot CM$，

$\therefore CM=\frac{\sqrt{15}}{2}$，

$\therefore AM=\sqrt{AC^2-CM^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}=\frac{7}{2}$，

$\because AD'=4MD'$，设 $MD'=m$，则 $AD'=4m$，

则有：$16m^2-m^2=\frac{49}{4}$

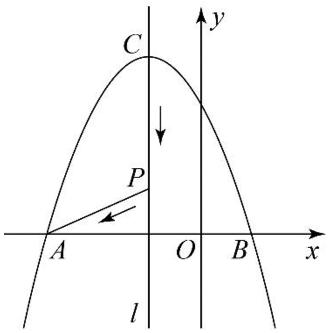
$\therefore m=\frac{7\sqrt{15}}{30}$ 或 $-\frac{7\sqrt{15}}{30}$（舍去），

$\therefore AD'=\frac{14\sqrt{15}}{15}$

$\therefore D\left(0,\frac{\sqrt{15}}{15}\right)$

2023·江苏宿迁中考模拟

5．如图，二次函数 $y=ax^2+2ax-3a$ 与 x 轴交于点 A，B，对称轴为直线 l，顶点 C 到 x 轴的距离为 $2\sqrt{3}$．点 P 为直线 l 上一动点，另一点从 C 出发，先以每秒 2 个单位长度的速度沿 CP 运动到点 P，再以每秒 1 个单位长度的速度沿 PA 运动到点 A 停止，则时间最短为________秒．



【答案】$2\sqrt{3}$

【分析】如图，连接 AC,BC，作 $AD\perp BC$ 于点 D，AD 与 EC 交点即为符合题意的点 P，可得 $AB=AC=BC$，利用 $30°$ 角所对的直角边等于斜边的一半得到动点运动的时间为 $\frac{CP}{2}+AP$ 解题即可．

【详解】如图，连接 AC,BC，作 $AD\perp BC$ 于点 D，AD 与 EC 交点即为符合题意的点 P，

令 $y=0$，则 $ax^2+2ax-3a=0$，

解得 $x=-3$ 或 $x=1$，

$\therefore A$，B 两点坐标为 $(-3,0)$，$(1,0)$，

$\therefore AB=4$，

$\because A$，B 两点关于 l 对称，

$\therefore AE=BE=2$，

$\because$顶点 C 到 x 轴的距离为 $2\sqrt{3}$，

$\therefore AC=BC=\sqrt{EA^2+EC^2}=4$

$\therefore AB=AC=BC$，

$\because AD, CE$ 都是 $\triangle ABC$ 的高，

$\therefore AD=CE=2\sqrt{3}$，

由题意得动点运动的时间为 $\frac{CP}{2}+AP$，

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，$CE\perp AB$，

$\therefore \angle PCD=\frac{1}{2}\angle ACB=30^\circ$，

$\because$作 $PD\perp CD$，

$\therefore PD=\frac{1}{2}CP$，

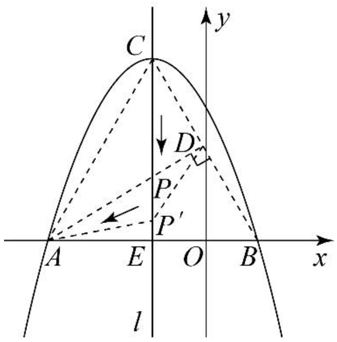
$\therefore \frac{1}{2}CP+AP=PD+AP=2\sqrt{3}$，

显然在 l 上另取一点 P'，连接 $P'A$，$P'D$，

$\because P'A+P'D\geq AD$，

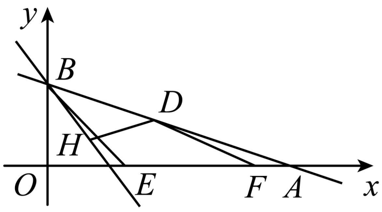
$\therefore$当 $PA+PD=AD$ 时，运动时间最短为 $2\sqrt{3}$，

故答案为：$2\sqrt{3}$．



2023·四川自贡·统考中考真题

6．如图，直线 $y=-\frac{1}{3}x+2$ 与 x 轴，y 轴分别交于 A，B 两点，点 D 是线段 AB 上一动点，点 H 是直线 $y=-\frac{4}{3}x+2$ 上的一动点，动点 $E(m,0)$，$F(m+3,0)$，连接 BE，DF，HD．当 $BE+DF$ 取最小值时，$3BH+5DH$ 的最小值是 ________．



【答案】$\frac{39}{2}$

【分析】作出点$C(3,-2)$，作$CD\perp AB$于点D，交x轴于点F，此时$BE+DF$的最小值为CD的长，利用解直角三角形求得$F\left(\frac{11}{3},0\right)$，利用待定系数法求得直线$CD$的解析式，联立即可求得点D的坐标，过点D作$DG\perp y$轴于点G，此时$3BH+5DH$的最小值是$5DG$的长，据此求解即可．

【详解】解：∵直线$y=-\frac{1}{3}x+2$与x轴，y轴分别交于A，B两点，

∴$B(0,2)$，$A(6,0)$，

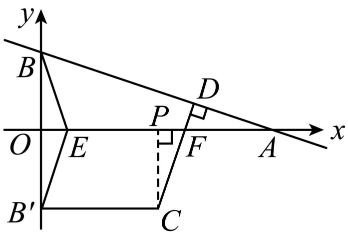
作点B关于x轴的对称点$B'(0,-2)$，把点B'向右平移3个单位得到$C(3,-2)$，

作$CD\perp AB$于点D，交x轴于点F，过点B'作$B'E\,//\,CD$交x轴于点E，则四边形$EFCB'$是平行四边形，

此时，$BE=B'E=CF$，

∴$BE+DF=CF+DF=CD$有最小值，

作$CP\perp x$轴于点P，



则$CP=2$，$OP=3$，

∵$\angle CFP=\angle AFD$，

∴$\angle FCP=\angle FAD$，

∴$\tan\angle FCP=\tan\angle FAD$，

∴$\frac{PF}{PC}=\frac{OB}{OA}$，即$\frac{PF}{2}=\frac{2}{6}$，

∴$PF=\frac{2}{3}$，则$F\left(\frac{11}{3},0\right)$，

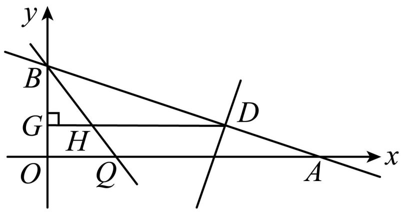
设直线CD的解析式为$y=kx+b$，

则$\begin{cases}3k+b=-2\\ \frac{11}{3}k+b=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=3\\ b=-11\end{cases}$，

∴直线CD的解析式为$y=3x-11$，

联立，$\begin{cases}y=3x-11\\ y=-\frac{1}{3}x+2\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=\frac{39}{10}\\ y=\frac{7}{10}\end{cases}$，即$D\left(\frac{39}{10},\frac{7}{10}\right)$；

过点 D 作 $DG\perp y$ 轴于点 G,



直线 $y=-\frac{4}{3}x+2$ 与 x 轴的交点为 $Q\left(\frac{3}{2},0\right)$，则 $BQ=\sqrt{OQ^2+OB^2}=\frac{5}{2}$,

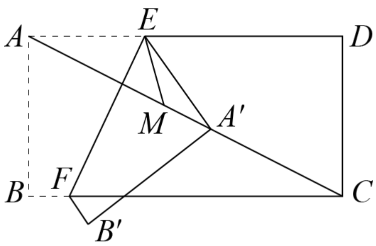
∴ $\sin\angle OBQ=\frac{OQ}{BQ}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{3}{5}$，∴ $HG=BH\sin\angle GBH=\frac{3}{5}BH$,

∴ $3BH+5DH=5\left(\frac{3}{5}BH+DH\right)=5(HG+DH)=5DG$,

即 $3BH+5DH$ 的最小值是 $5DG=5\times\frac{39}{10}=\frac{39}{2}$

2023 • 成都市七中校考

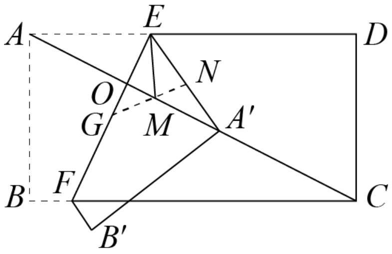
7．如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=8$，点 E，F 分别在边 AD，BC 上，且 $AE=3$，沿直线 EF 翻折，点 A 的对应点 A' 恰好落在对角线 AC 上，点 B 的对应点为 B'，点 M 为线段 AA' 上一动点，则 $EM+\frac{\sqrt{5}}{5}A'M$ 的最小值为______.



【答案】$\frac{12}{5}$

【分析】过点 M 作 $MN\perp A'E$ 于点 N，作点 E 关于 AC 的对称点 G，连接 MG．由勾股定理求出 AD 的长，根据锐角三角函数的知识可得 $MN=\frac{\sqrt{5}}{5}A'E$，从而可得当 G，M，N 三点共线时 $GM+MN$ 取得最小值，即 $EM+\frac{\sqrt{5}}{5}A'M$ 取得最小值，然后利用锐角三角函数和勾股定理可求出 GN 的长．

【详解】解：如图，过点 M 作 $MN\perp A'E$ 于点 N，作点 E 关于 AC 的对称点 G，连接 MG，则 $EM=MG$．



由折叠的性质可知，$EF \perp AC$，$AE = A'E$，$\angle AEF = \angle A'EF$，

∴$\angle DAC = \angle AA'E$．∵四边形$ABCD$是矩形，∴$CD = AB = 4$，$\angle D = 90°$．

∴$AD = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 4\sqrt{5}$．

∵$\sin\angle DAC = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$，∴$\sin\angle AA'E = \dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{MN}{A'M}$，∴$MN = \dfrac{\sqrt{5}}{5}A'M$，

∴$EM + \dfrac{\sqrt{5}}{5}A'M = GM + MN$，

∴当G，M，N三点共线时$GM + MN$取得最小值，即$EM + \dfrac{\sqrt{5}}{5}A'M$取得最小值，

∵$\angle DAC + \angle AEF = 90°$，$\angle EGN + \angle A'EF = 90°$，∴$\angle EGN = \angle DAC$，

∴$\sin\angle EGN = \sin\angle DAC = \dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{EN}{GE}$．

∵$\sin\angle DAC = \dfrac{OE}{AE} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$AE = 3$，∴$OE = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，∴$GE = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$，∴$\dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{EN}{\frac{6\sqrt{5}}{5}}$，∴$EN = \dfrac{6}{5}$，

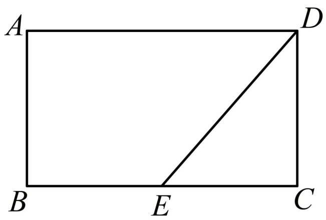
∴$GN = \sqrt{\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{6}{5}\right)^2} = \dfrac{12}{5}$．

即$EM + \dfrac{\sqrt{5}}{5}A'M$取得最小值是$\dfrac{12}{5}$．

【题型2】胡不归模型•构造相关角再作垂线

8．如图，在长方形$ABCD$中，$AB = 2$，$AD = 2\sqrt{3}$，点E在BC上，连接DE，在点E的运动过程中，

$BE + \sqrt{2}DE$的最小值为______．



【答案】$2 + 2\sqrt{3}$ / $2\sqrt{3} + 2$

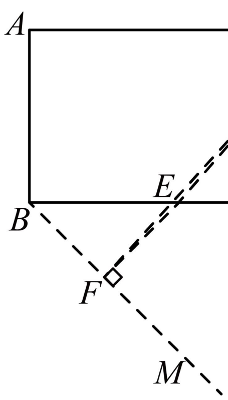
【分析】在线段BC下方作$\angle CBM$=45°，过点E作$EF \perp BM$于点F，连接DF，求出此时的DF的长度便可．

【详解】解：∵四边形$ABCD$是矩形，$AB = 2$，$AD = 2\sqrt{3}$，

∴ $\angle DCE = 90°$，$CD = AB = 2$，$BC = AD = 2\sqrt{3}$，

∴ $BE = 2\sqrt{3} - CE$，

在线段 BC 下方作 $\angle CBM$=45°，过点 E 作 $EF \perp BM$ 于点 F，连接 DF，



∴ $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}BE$，

∴ $\frac{\sqrt{2}}{2}BE + DE = EF + DE \geq DF$，

当 D、E、F 三点共线时，$\frac{\sqrt{2}}{2}BE+DE = EF+DE = DF$ 的值最小，

此时 $\angle DEC = \angle BEF = 45°$，

∴ $CE = CD = 2$，

∴ $BE = 2\sqrt{3} - 2$，$DE = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$，

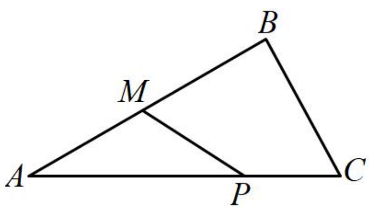
∴ $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}BE = \sqrt{6} - \sqrt{2}$，

∴ $\frac{\sqrt{2}}{2}BE + DE$ 的最小值为：$EF+DE = \sqrt{2} + \sqrt{6}$，

∴ $BE + \sqrt{2}DE$ 的最小值为 $BE + \sqrt{2}DE = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}BE + DE\right) = 2 + 2\sqrt{3}$

2023·广西二模

9．如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 30°$，M 为线段 AB 上一定点，P 为线段 AC 上一动点．当点 P 在运动的过程中，满足 $PM + \frac{1}{2}AP$ 的值最小时，则 $\angle APM =$______．



【答案】120°

【详解】解：作 $\angle CAF = \angle CAB$，过 M 作 $MD \perp AF$ 交 AC 于一点即为点 P，

∵ $\angle CAB = 30°$，

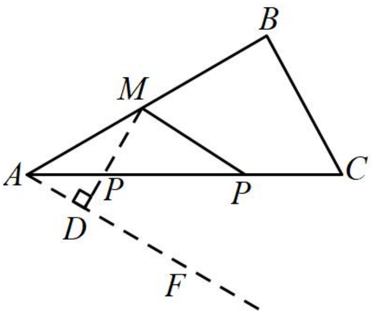
∴ $\angle CAF=\angle CAB=30^{\circ}$，

∴ $DP=\frac{1}{2}AP$，

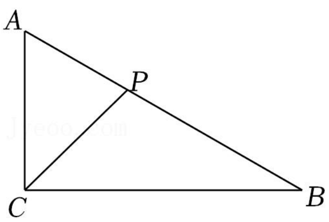
∴当 $MD\perp AF$ 时 $PM+\frac{1}{2}AP$ 的值最小，

∴在△ADP 中，$\angle APM=90^{\circ}+30^{\circ}=120^{\circ}$，

故答案为120°；



10．如图，$\angle ACB=90^{\circ}$，$AC=2$，$AB=4$，点 P 为 AB 上一点，连接 PC，则 $PC+\frac{1}{2}PB$ 的最小值为 __3__．



【答案】3

【解答】解：作 $\angle ABE=30^{\circ}$，过点 C 作 $CD\perp BE$ 于点 D，

则此时 $PC+\frac{1}{2}PB$ 最小，

∵ $\angle ACB=90^{\circ}$，$AC=2$，$AB=4$，

∴ $\sin\angle CBA=\frac{AC}{AB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，$BC=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

∴ $\angle CBA=30^{\circ}$，

∴ $DP=\frac{1}{2}PB$，

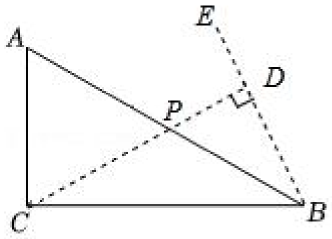
∴ $\angle CBE=60^{\circ}$，

∴ $\sin 60^{\circ}=\frac{DC}{BC}=\frac{CD}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

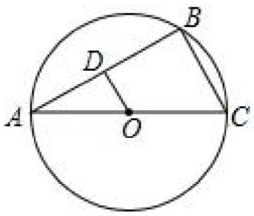
解得：$DC=3$，

∴ $PC+\frac{1}{2}PB=DC=3$．

故答案为：3．



11．如图，AC 是圆 O 的直径，$AC=4$，弧 $BA=120^{\circ}$，点 D 是弦 AB 上的一个动点，那么 $OD+\frac{1}{2}BD$ 的最小值为(　　)



A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$1+\sqrt{3}$

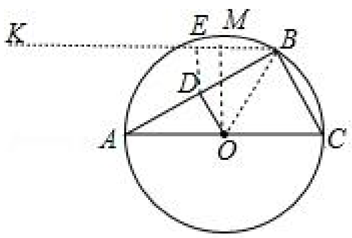
【答案】B

【解答】解：$\because \widehat{BA}$ 的度数为 120°，$\therefore \angle C=60^{\circ}$，$\because AC$ 是直径，$\therefore \angle ABC=90^{\circ}$，

$\therefore \angle A=30^{\circ}$，作 $BK//CA$，$DE\perp BK$ 于 E，$OM\perp BK$ 于 M，连接 OB．

$\because BK//AC$，$\therefore \angle DBE=\angle BAC=30^{\circ}$，在 $\mathrm{Rt}\Delta DBE$ 中，$DE=\frac{1}{2}BD$，

$\therefore OD+\frac{1}{2}BD=OD+DE$，



根据垂线段最短可知，当点 E 与 M 重合时，$OD+\frac{1}{2}BD$ 的值最小，最小值为 OM，

$\because \angle BAO=\angle ABO=30^{\circ}$，

$\therefore \angle OBM=60^{\circ}$，

在 $\mathrm{Rt}\Delta OBM$ 中，

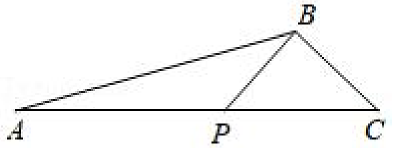
$\because OB=2$，$\angle OBM=60^{\circ}$，

$\therefore OM=OB\cdot \sin 60^{\circ}=\sqrt{3}$，

$\therefore \frac{1}{2}DB+OD$ 的最小值为 $\sqrt{3}$，故选：B．

12．如图，在 ΔABC 中，$\angle A=15^{\circ}$，$AB=10$，P 为 AC 边上的一个动点（不与 A、C 重合），连接 BP，

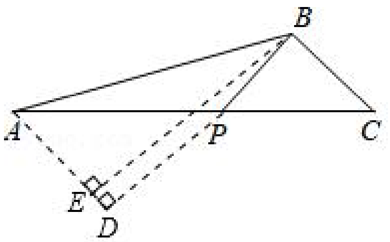
则 $\frac{\sqrt{2}}{2}AP+PB$ 的最小值是 (　　)



A． $5\sqrt{2}$　　　　B． $5\sqrt{3}$　　　　C． $\frac{10\sqrt{3}}{3}$　　　　D． 8

【答案】 B

【解答】解：如图，以 AP 为斜边在 AC 下方作等腰 $\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ADP}$，过 B 作 $BE\perp AD$ 于 E，



$\because \angle PAD=45^{\circ}$，

$\therefore \sin\angle PAD=\frac{DP}{AP}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore DP=\frac{\sqrt{2}}{2}AP$，

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}AP+PB=DP+PB\geq BE$，

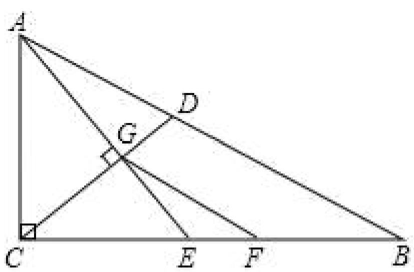
$\because \angle BAC=15^{\circ}$，

$\therefore \angle BAD=60^{\circ}$，

$\therefore BE=AB\sin 60^{\circ}=5\sqrt{3}$，

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}AP+PB$ 的最小值为 $5\sqrt{3}$．故选： B．

13．如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$\angle B=30^{\circ}$，$AB=4$，点 D、F 分别是边 AB，BC 上的动点，连接 CD，过点 A 作 $AE\perp CD$ 交 BC 于点 E，垂足为 G，连接 GF，则 $GF+\frac{1}{2}FB$ 的最小值是__



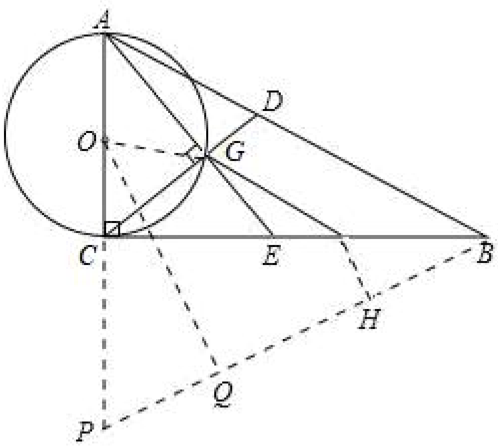
【答案】 $\frac{3\sqrt{3}}{2}-1$

【分析】由 $\frac{1}{2}FB$ 联想到给 FB 构造含 30° 角的直角三角形，故把 $Rt\triangle ABC$ 补成等边 $\triangle ABP$，过 F 作

BP 的垂线 FH，$GF+\frac{1}{2}FB=GF+FH$，易得当 G、F、H 成一直线时，$GF+\frac{1}{2}FB$ 最短，又由于点 G 为动点，易证点 G 在以 AC 为直径的圆上，求点 G 到 PB 的最短距离即当点 G 在点 O 到 BP 的垂线段上时，GQ 的长度．

【详解】延长 AC 到点 P，使 $CP=AC$，连接 BP，过点 F 作 $FH\perp BP$ 于点 H，取 AC 中点 O，连接 OG，过点 O 作 $OQ\perp BP$ 于点 Q，

∵ $\angle ACB=90°$，$\angle ABC=30°$，$AB=4$



∴$AC=CP=2$ ，$BP=AB=4$

∴$\triangle ABP$ 是等边三角形

∴ $\angle FBH=30°$

∴ $Rt\triangle FHB$ 中，$FH=\frac{1}{2}FB$

∴当 G、F、H 在同一直线上时，

$GF+\frac{1}{2}FB=GF+FH=GH$ 取得最小值

∵$AE\perp CD$ 于点 G

∴ $\angle AGC=90°$

∵O 为 AC 中点

∴$OA=OC=OG=\frac{1}{2}AC$

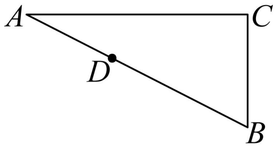
∴A、C、G 三点共圆，圆心为 O，即点 G 在⊙O 上运动，

∴当点 G 运动到 OQ 上时，GH 取得最小值

∵$Rt\triangle OPQ$ 中，$\angle P=60°$，$OP=3$，$\sin\angle P=\frac{OQ}{OP}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ $OQ=\frac{\sqrt{3}}{2}OP=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ∴GH 最小值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$-1

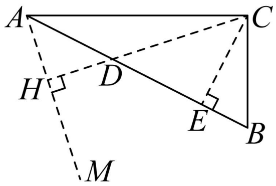
14．如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=4$，$BC=3$，点 D 是斜边 AB 上的动点，则 $CD+\frac{\sqrt{2}}{2}AD$ 的最小值为______________.



【答案】$\frac{14\sqrt{2}}{5}$

【分析】根据两点之间线段最短画出图形，再根据锐角三角函数及相似三角形判定可知$\triangle BCE\backsim\triangle BAC$，最后利用相似三角形的性质及直角三角形的性质即可解答.

【详解】解：过点A做$\angle BAM=45°$，过点D作$DH\perp AM$于H，过点C作$CE\perp AB$于点E，



$\therefore DH=AD\cdot\sin\angle DAH=AD\cdot\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}AD$，

$\therefore CD+\frac{\sqrt{2}}{2}AD=CD+DH$，

$\because$两点之间线段最短，

$\therefore$当C、D、H共线时，$CD+DH$的值最小，

即$CD+DH$的最小值为CH，

【法一：正切和角公式】详情见本专辑1-3 “12345模型”

$\tan\angle CAH=\frac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=7$，故△AHC的三边之比为$1:7:5\sqrt{2}$，则答案为$\frac{14\sqrt{2}}{5}$

【法二：常规法】

$\because\angle ACB=90°$，$AC=4$，$BC=3$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5$，

$\because CE\perp AB$，

$\therefore\angle CEB=\angle ACB=90°$，

$\because\angle B=\angle B$，

$\therefore\triangle BCE\backsim\triangle BAC$，

$\therefore\frac{CE}{AC}=\frac{BE}{BC}=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$，

$\therefore CE=\frac{3}{5}\times4=\frac{12}{5}$，$BE=\frac{3}{5}\times3=\frac{9}{5}$，

$\because\angle CDE=\angle ADH=45°$，$\therefore DE=CE=\frac{12}{5}$，

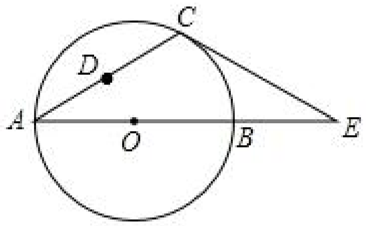
$\therefore CD=\sqrt{2}CE=\frac{12\sqrt{2}}{5}$，$AD=AB-DE-BE=5-\frac{12}{5}-\frac{9}{5}=\frac{4}{5}$，

$\therefore DH=\frac{\sqrt{2}}{2}AD=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$，$\therefore CH=CD+DH=\frac{12\sqrt{2}}{5}+\frac{2\sqrt{2}}{5}=\frac{14\sqrt{2}}{5}$，故答案为$\frac{14\sqrt{2}}{5}$.

【题型 3】胡不归模型·取最值时对其它量进行计算

2023·广东深圳·统考三模

15．如图，在△ACE 中，$CA=CE$，$\angle CAE=30°$，⊙O 经过点 C，且圆的直径 AB 在线段 AE 上．



（1）试说明 CE 是⊙O 的切线；

（2）若△ACE 中 AE 边上的高为 h，试用含 h 的代数式表示⊙O 的直径 AB；

（3）设点 D 是线段 AC 上任意一点（不含端点），连接 OD，当 $\frac{1}{2}CD+OD$ 的最小值为 6 时，求⊙O 的直径 AB 的长．

【答案】（1）证明见试题解析；（2）$AB=\frac{4\sqrt{3}}{3}h$；（3）$8\sqrt{3}$．

【详解】解：（1）连接 OC，如图 1，∵$CA=CE$，$\angle CAE=30°$，

∴$\angle E=\angle CAE=30°$，$\angle COE=2\angle A=60°$，

∴$\angle OCE=90°$，

∴CE 是⊙O 的切线；

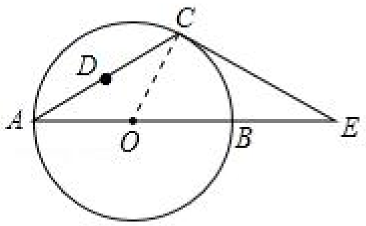


图1

（2）过点 C 作 $CH\perp AB$ 于 H，连接 OC，

如图 2，由题可得 $CH=h$，在 Rt△OHC 中，$CH=OC\bullet\sin\angle COH$，

∴$h=OC\bullet\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}OC$，∴$OC=\frac{2h}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}h$，

∴$AB=2OC=\frac{4\sqrt{3}}{3}h$；

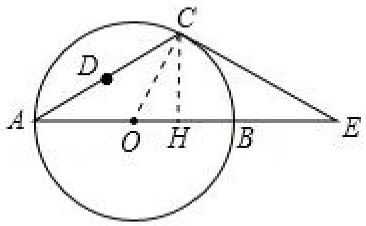


图2

（3）作 OF 平分 $\angle AOC$，交⊙O 于 F，连接 AF、CF、DF，

如图 3，则 $\angle AOF=\angle COF=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}$（$180°-60°$）$=60°$，

∵$OA=OF=OC$，∴△AOF、△COF 是等边三角形，

∴$AF=AO=OC=FC$，∴四边形 $AOCF$ 是菱形，

∴根据对称性可得 $DF=DO$，过点 D 作 $DH\perp OC$ 于 H，∵$OA=OC$，∴$\angle OCA=\angle OAC=30°$，

∴$DH=DC\bullet \sin\angle DCH=DC\bullet \sin 30°=\frac{1}{2}DC$，

∴$\frac{1}{2}CD+OD=DH+FD$．

根据两点之间线段最短可得：当 F、D、H 三点共线时，$DH+FD$（即 $\frac{1}{2}CD+OD$）最小，此时 $FH=OF\bullet \sin\angle FOH=\frac{\sqrt{3}}{2}OF=6$，则 $OF=4\sqrt{3}$，$AB=2OF=8\sqrt{3}$，

∴当 $\frac{1}{2}CD+OD$ 的最小值为 6 时，⊙O 的直径 AB 的长为 $8\sqrt{3}$．

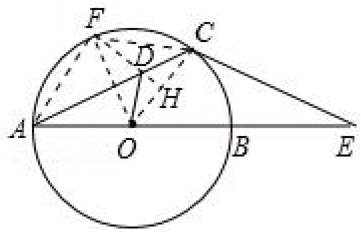


图3

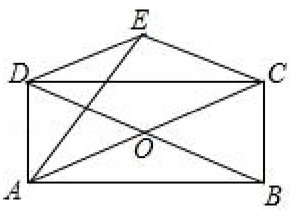
16．如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 O，ΔCOD 关于 CD 的对称图形为 ΔCED．

（1）求证：四边形 $OCED$ 是菱形；

（2）连接 AE，若 $AB=6cm$，$BC=\sqrt{5}cm$．

①求 $\sin\angle EAD$ 的值；

②若点 P 为线段 AE 上一动点（不与点 A 重合），连接 OP，一动点 Q 从点 O 出发，以 $1cm/s$ 的速度沿线段 OP 匀速运动到点 P，再以 $1.5cm/s$ 的速度沿线段 PA 匀速运动到点 A，到达点 A 后停止运动，当点 Q 沿上述路线运动到点 A 所需要的时间最短时，求 AP 的长和点 Q 走完全程所需的时间．



【解答】（1）证明：$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形．

$\therefore OD=OB=OC=OA$，

$\because \Delta EDC$ 和 ΔODC 关于 CD 对称，

$\therefore DE=DO$， $CE=CO$，

$\therefore DE=EC=CO=OD$，

$\therefore$四边形 $CODE$ 是菱形．

（2）①设 AE 交 CD 于 K．

$\because$四边形 $CODE$ 是菱形，

$\therefore DE//AC$， $DE=OC=OA$，

$\therefore \dfrac{DK}{KC}=\dfrac{DE}{AC}=\dfrac{1}{2}$

$\because AB=CD=6$，

$\therefore DK=2$， $CK=4$，

在 RtΔADK 中， $AK=\sqrt{AD^2+DK^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=3$，

$\therefore \sin\angle DAE=\dfrac{DK}{AK}=\dfrac{2}{3}$，

②作 $PF\perp AD$ 于 F．易知 $PF=AP\cdot\sin\angle DAE=\dfrac{2}{3}AP$，

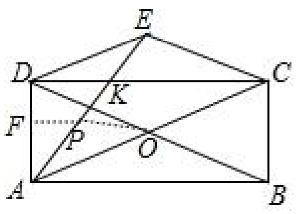
$\because$点 Q 的运动时间 $t=\dfrac{OP}{1}+\dfrac{AP}{\frac{3}{2}}=OP+\dfrac{2}{3}AP=OP+PF$，

$\therefore$当 O、 P、 F 共线时， $OP+PF$ 的值最小，此时 OF 是 ΔACD 的中位线，

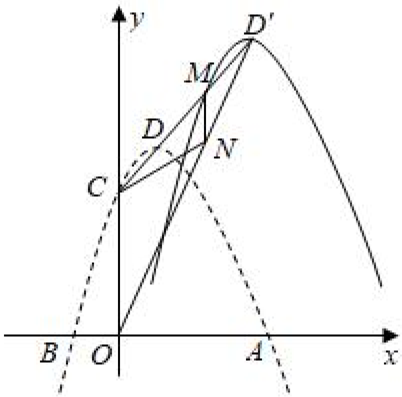
$\therefore OF=\dfrac{1}{2}CD=3$． $AF=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$， $PF=\dfrac{1}{2}DK=1$，

$\therefore AP=\sqrt{(\dfrac{\sqrt{5}}{2})^2+1^2}=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore$当点 Q 沿上述路线运动到点 A 所需要的时间最短时， AP 的长为 $\dfrac{3}{2}cm$，点 Q 走完全程所需的时间为 $3s$．



17．抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A、 B 两点，与 y 轴交于点 C，且 $B(-1,0)$， $C(0,3)$．



（1）求抛物线的解析式；

（2）如图，点 D 是抛物线的顶点，将抛物线沿 CD 方向平移，使点 D 落在点 D' 处，且 $DD'=2CD$，点 M 是平移后所得抛物线上位于 D' 左侧的一点，$MN//y$ 轴交直线 OD' 于点 N，连结 CN．当 $\frac{\sqrt{5}}{5}D'N+CN$ 的值最小时，求 MN 的长．

【解答】解：（1）$\because y=-x^2+bx+c$ 经过 $B(-1,0)$，$C(0,3)$，

$\therefore \begin{cases} c=3 \\ -1-b+c=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} b=2 \\ c=3 \end{cases}$，$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+3$．

（2）如图，连接 AD'，过点 N 作 $NJ\perp AD'$ 于 J，过点 C 作 $CT\perp AD'$ 于 T．

$\because$ 抛物线 $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$，$\therefore$ 顶点 $D(1,4)$，$\because C(0,3)$，

$\therefore$ 直线 CD 的解析式为 $y=x+3$，$CD=\sqrt{2}$，

$\because DD'=2CD$，$\because DD'=2\sqrt{2}$，$CD'=3\sqrt{2}$，$\therefore D'(3,6)$，$\because A(3,0)$，

$\therefore AD'\perp x$ 轴，$\therefore OD'=\sqrt{OA^2+D'A^2}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$，

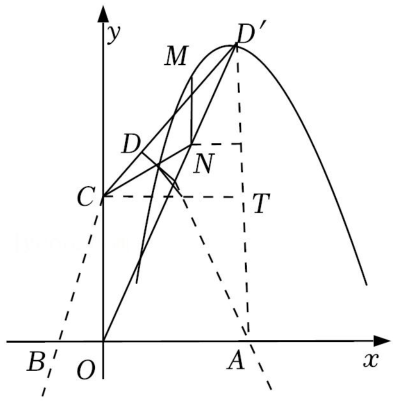
$\therefore \sin\angle OD'A=\frac{OA}{OD'}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\because CT\perp AD'$，$\therefore CT=3$，$\because NJ\perp AD'$，

$\therefore NJ=ND'\cdot\sin\angle OD'A=\frac{\sqrt{5}}{5}D'N$，$\therefore \frac{\sqrt{5}}{5}D'N+CN=CN+NJ$，$\because CN+NJ$开$CT$，

$\therefore \frac{\sqrt{5}}{5}D'N+CN$开$3$，$\therefore \frac{\sqrt{5}}{5}D'N+CN$ 的最小值为 3，此时 N 为 OD' 与 CT 的交点，$\therefore N(1.5,3)$，

$\because$ 平移后抛物线的解析式为 $y=-(x-3)^2+6$，MN 平行 y 轴，将 $x=1.5$ 代入抛物线解析式，

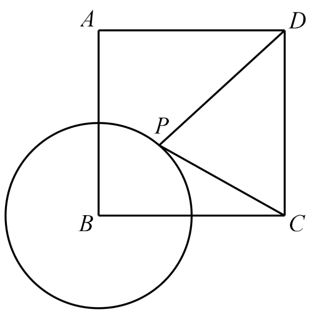
$\therefore M(1.5,3.75)$，$\therefore MN=0.75$



模块二　阿氏圆模型

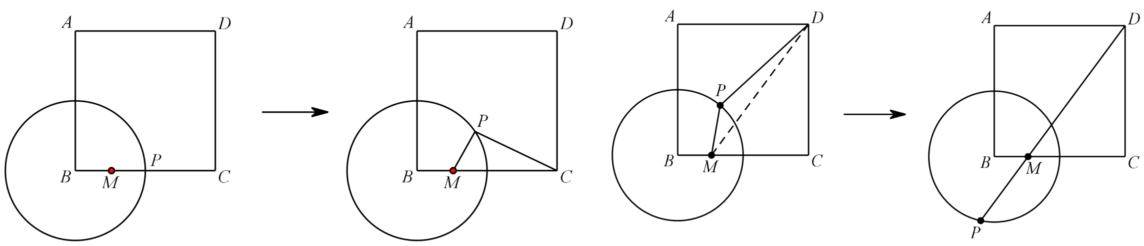
【题型 4】点在圆外：向内取点（系数小于 1）

18．如图，已知正方 ABCD 的边长为 6，圆 B 的半径为 3，点 P 是圆 B 上的一个动点，则 $PD-\frac{1}{2}PC$ 的最大值为_______.



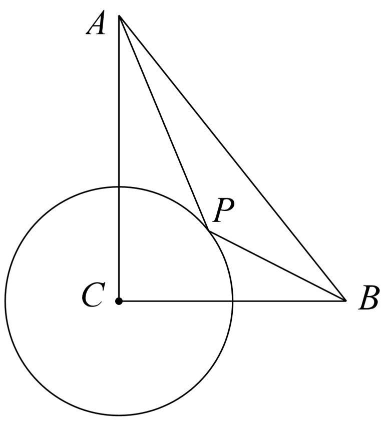
【答案】$\frac{15}{2}$

【分析】当 P 点运动到 BC 边上时，此时 PC=3，根据题意要求构造 $\frac{1}{2}PC$，在 BC 上取 M 使得此时 PM=$\frac{3}{2}$，则在点 P 运动的任意时刻，均有 PM=$\frac{1}{2}PC$，从而将问题转化为求 PD-PM 的最大值．连接 PD，对于△PDM，PD-PM＜DM，故当 D、M、P 共线时，PD-PM=DM 为最大值 $\frac{15}{2}$．

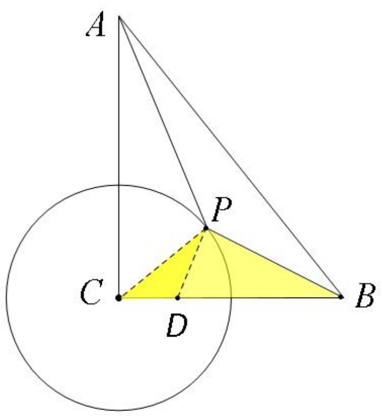


19．如图，在 RtΔABC 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$CB=4$，$CA=6$，圆 C 的半径为 2，点 P 为圆上一动点，连接 AP，BP．

求① $AP+\frac{1}{2}BP$；② $2AP+BP$；③ $\frac{1}{3}AP+BP$；④ $AP+3BP$ 的最小值．



【解答】解：①取 CE 的中点 D，连结 PD，AD，



$\because CD=1$，$CB=4$，$CP=2$，$\therefore \frac{CD}{CP}=\frac{CP}{BC}=\frac{1}{2}$，

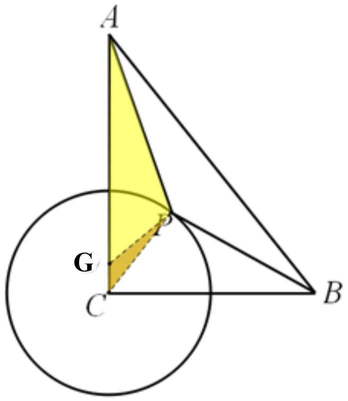
$\because \angle PCD=\angle BCP$，$\therefore \Delta PCD\backsim\Delta BCP$，$\therefore \frac{PD}{PB}=\frac{CD}{CP}=\frac{1}{2}$，$\therefore PD=\frac{1}{2}PB$，

$\therefore AP+\frac{1}{2}PB=AP+PD$，当 P 在 AD 上时，$AP+PD$ 最小，

最小值为 AF 的长，$AF=\sqrt{AC^2+CF^2}=\sqrt{37}$，$AP+\frac{1}{2}BP$ 的最小值为 $\sqrt{37}$，

②$\because 2AP+BP=2(AP+\frac{1}{2}BP)$，$\therefore 2AP+BP$ 的最小值为 $2\sqrt{37}$，

③在 DC 取一点 G，使 $CG=\frac{1}{3}DC=\frac{2}{3}$



$\because \dfrac{CG}{PC}=\dfrac{\frac{2}{3}}{2}=\dfrac{1}{3},\dfrac{CP}{AC}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore \dfrac{CG}{PC}=\dfrac{CP}{AC}$，

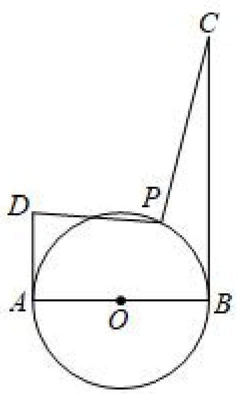
$\because \angle ACP=\angle PCG$，$\therefore \Delta CGP \backsim \Delta CPA$，$\therefore \dfrac{GP}{AP}=\dfrac{CG}{PC}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore GP=\dfrac{1}{3}AP$，

$\therefore \dfrac{1}{3}AP+BP=GP+BP$干$BG$，当 P 在 BG 上 B，$GP+BP=BG$，

$BG=\sqrt{BC^2+CG^2}=\sqrt{\dfrac{148}{9}}=\dfrac{2\sqrt{37}}{3}$，$\therefore \dfrac{1}{3}AP+BP$ 的最小值为 $\dfrac{2\sqrt{37}}{3}$，

④$\because AP+3BP=3(\dfrac{1}{3}AP+BP)$，$\therefore AP+3BP$ 的最小值为 $2\sqrt{37}$.

20．如图，AB 为⊙O 的直径，AB=2，点 C 与点 D 在 AB 的同侧，且 $AD\perp AB$，$BC\perp AB$，AD=1，BC=3，点 P 是⊙O 上的一动点，则 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}PD+PC$ 的最小值为_____.

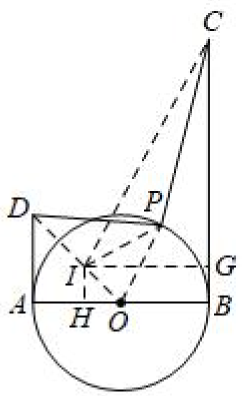


【答案】$\dfrac{\sqrt{34}}{2}$

【分析】连接 OD，先利用勾股定理求得 $OD=\sqrt{2}$，$\angle AOD=45^\circ$，在 OD 上截取 $OI=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，过 I 作 $IH\perp AB$ 于 H，$IG\perp BC$ 于 G，求得 $BG=IH=\dfrac{1}{2}$，$IG=BH=\dfrac{3}{2}$，$CG=\dfrac{5}{2}$，进而求得 $CI=\dfrac{\sqrt{34}}{2}$，证

明$\triangle POI\backsim\triangle DOP$求得$PI=\frac{\sqrt{2}}{2}PD$，利用两点之间线段最短得到$\frac{\sqrt{2}}{2}PD+PC=PI+PC\geq IC$，当$C$、$P$、$I$共线时取等号，即可求解.

【详解】解：连接OD，$\because AB$为$\odot O$的直径，$AB=2$，



$\therefore OA=OB=1$，　$\because$在$Rt\triangle AOD$中，$OA=AD=1$，

$\therefore OD=\sqrt{AD^2+OA^2}=\sqrt{2}$，$\angle AOD=45^\circ$，

在OD上截取$OI=\frac{\sqrt{2}}{2}$，过I作$IH\perp AB$于H，$IG\perp BC$于G，连接IP、IC，

$\therefore$四边形$IHBG$是矩形，$IH=OH=\frac{\sqrt{2}}{2}OI=\frac{1}{2}$，

$\therefore BG=IH=\frac{1}{2}$，$IG=BH=OH+OB=\frac{3}{2}$，

$\therefore CG=BC-BG=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$，

在$Rt\triangle CIG$中，$CI=\sqrt{IG^2+CG^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$，

$\because \frac{OI}{OP}=\frac{OP}{OD}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\angle POD$是公共角，

$\therefore \triangle POI\backsim\triangle DOP$，

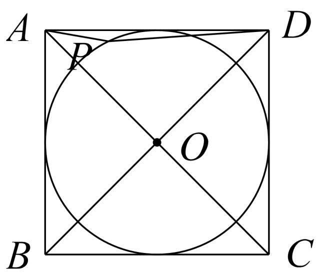
$\therefore \frac{PI}{PD}=\frac{OP}{OD}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$PI=\frac{\sqrt{2}}{2}PD$，

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}PD+PC=PI+PC\geq IC$，当$C$、$P$、$I$共线时取等号，

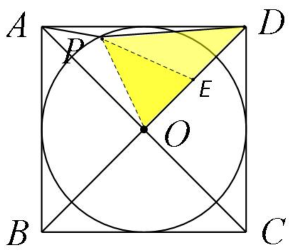
故$\frac{\sqrt{2}}{2}PD+PC$的最小值为$CI=\frac{\sqrt{34}}{2}$，

故答案为：$\frac{\sqrt{34}}{2}$.

21．如图，正方形$ABCD$边长为$2\sqrt{2}$，内切圆O上一动点P，连接AP、DP，则$AP+\frac{\sqrt{2}}{2}PD$的最小值为______.



【答案】$\sqrt{5}$



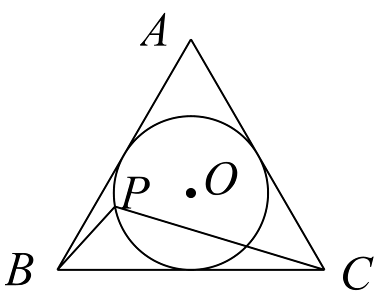
作$EO=\frac{1}{2}DO=1$

$\because\triangle OEP\sim\triangle OPD$

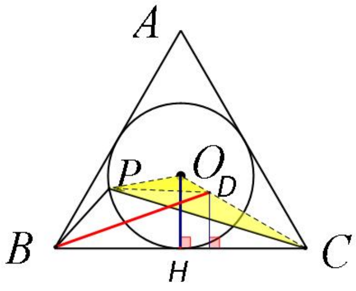
$\therefore\frac{\sqrt{2}}{2}PD=EP$

$\frac{\sqrt{2}}{2}PD+AP=EP+AP\geq AE=\sqrt{5}$

22．如图，等边三角形 ABC 边长为 $4\sqrt{3}$，圆 O 是△ABC 的内切圆，P 是圆 O 上一动点，连接 PB、PC，则 $BP+\frac{1}{2}CP$ 的最小值为______________.



【答案】$\sqrt{21}$



易知$CO=4$，$OH=2$

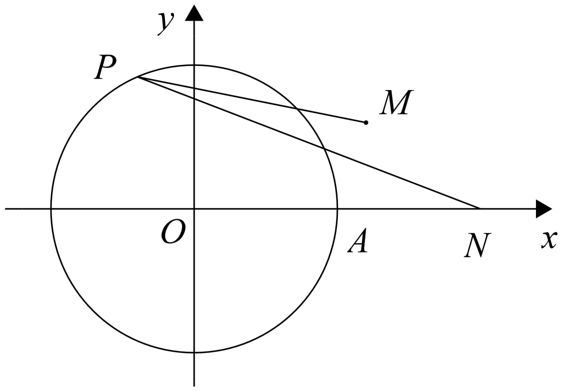
作$OD=\frac{1}{4}OC=1$

$\because\triangle ODP\sim\triangle OPC$

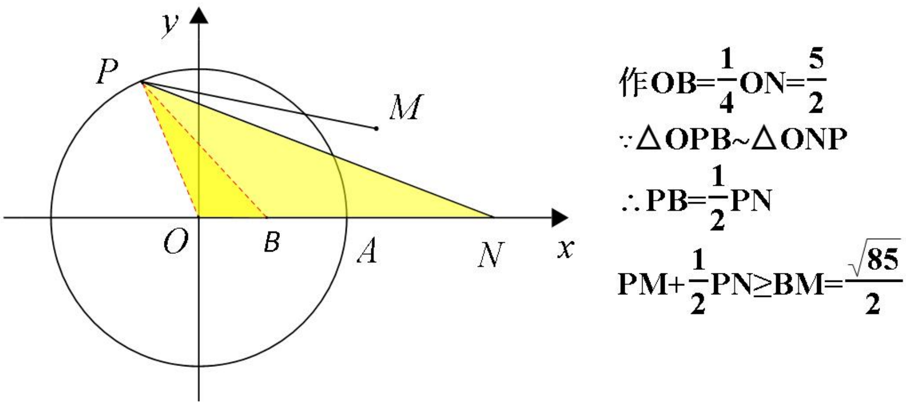
$\therefore PD=\frac{1}{2}PC$

$BP=\frac{1}{2}PC=BP+DP\geq BD=\sqrt{21}$

23．如图，在平面直角坐标系中，$M(6，3)$，$N(10，0)$，$A(5，0)$，点 P 为以 OA 为半径的圆 O 上一动点，则 $PM+\frac{1}{2}PN$ 的最小值为______________

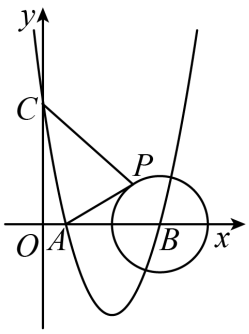


【答案】$\frac{\sqrt{85}}{2}$



2023·山东烟台·统考中考真题

24．如图，抛物线$y=x^2-6x+5$与x轴交于A,B两点，与y轴交于点$C,AB=4$，以点B为圆心，画半径为2的圆，点P为$\odot B$上一个动点，请求出$PC+\frac{1}{2}PA$的最小值．



【答案】$\sqrt{41}$

【分析】在AB上取点F，使$BF=1$，连接CF，证得$\frac{BF}{PB}=\frac{PB}{AB}$，又$\angle PBF=\angle ABP$，得到$\triangle PBF\backsim\triangle ABP$，

推出 $PF=\frac{1}{2}PA$，进而得到当点 C、P、F 三点共线时，$PC+\frac{1}{2}PA$ 的值最小，即为线段 CF 的长，利用勾股定理求出 CF 即可．

【详解】如图，在 AB 上取点 F，使 $BF=1$，连接 CF，

$\because PB=2$，

$\therefore \frac{BF}{PB}=\frac{1}{2}$，

$\because \frac{PB}{AB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，、

$\therefore \frac{BF}{PB}=\frac{PB}{AB}$，

又$\because \angle PBF=\angle ABP$，

$\therefore \triangle PBF\backsim\triangle ABP$，

$\therefore \frac{PF}{PA}=\frac{BF}{PB}=\frac{1}{2}$，即 $PF=\frac{1}{2}PA$，

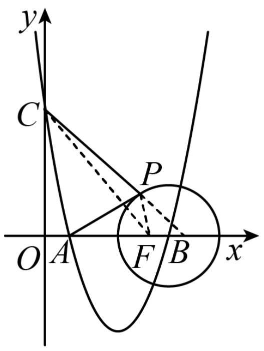
$\therefore PC+\frac{1}{2}PA=PC+PF\geq CF$，

$\therefore$当点 C、P、F 三点共线时，$PC+\frac{1}{2}PA$ 的值最小，即为线段 CF 的长，

$\because OC=5, OF=OB-1=5-1=4$，

$\therefore CF=\sqrt{OC^2+OF^2}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$，

$\therefore PC+\frac{1}{2}PA$ 的最小值为 $\sqrt{41}$．



25．如图 1，抛物线 $y=ax^2+(a+3)x+3$ 与 x 轴交于点 A（4，0），与 y 轴交于点 B，点 E 是线段 OA 上的一个动点，过点 E 作 x 轴的垂线交直线 AB 于点 N，交抛物线于点 P，过点 P 作 $PM\perp AB$ 于点 M．

（1）求抛物线的函数表达式；

（2）当 $\frac{MN}{NE}=\frac{6}{5}$ 时，求点 E 的坐标；

（3）如图 2，在（2）条件下，将线段 OE 绕点 O 逆时针旋转得到 OE'，连接 $E'A$、$E'B$，求 $E'A+\frac{2}{3}E'B$ 的最小值．

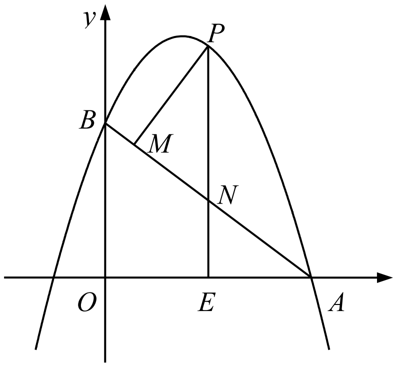


图 1

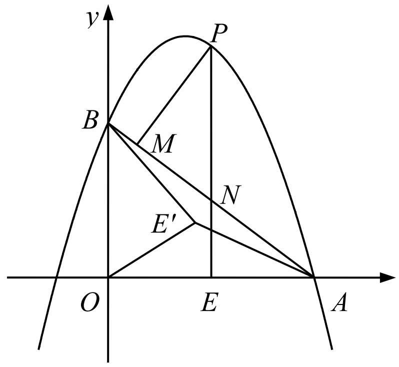


图 2

【答案】(1) ∵抛物线 $y=ax^2+(a+3)x+3$ 与 x 轴交于点 A（4，0）

∴$16a+4(a+3)+3=0$，解得 $a=-\frac{3}{4}$

∴抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x+3$

(2) ∵A（4，0），∴$OA=4$

∵$y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x+3$，∴$B$（0，3），∴$OB=3$

∴$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$

∵$PE\perp OA$，$PM\perp AB$，∴$\angle PMN=\angle AEN=90°$，$\angle PNM=\angle ANE$

∴$\triangle PMN\backsim\triangle AEN$，∴$\frac{PN}{AN}=\frac{MN}{NE}=\frac{6}{5}$

设直线 AB 的函数表达式为 $y=kx+b$

∴$\begin{cases}4k+b=0\\ b=3\end{cases}$　　解得 $\begin{cases}k=-\frac{3}{4}\\ b=3\end{cases}$

∴直线 AB 的函数表达式为 $y=-\frac{3}{4}x+3$

设 E（m，0），则 P（m，$-\frac{3}{4}m^2+\frac{9}{4}m+3$），$N$（$m$，$-\frac{3}{4}m+3$）

∴$PN=-\frac{3}{4}m^2+\frac{9}{4}m+3-(-\frac{3}{4}m+3)=-\frac{3}{4}m^2+3m=-3m(\frac{1}{4}m-1)$

∵$\angle AEN=\angle AOB=90°$，$\angle NAE=\angle BAO$

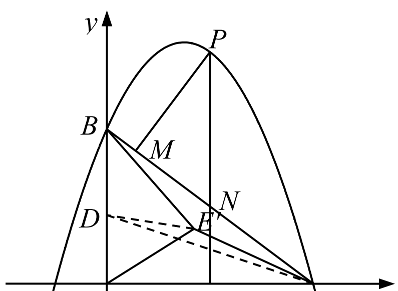
∴$\triangle AEN\backsim\triangle AOB$，∴$\frac{AN}{NE}=\frac{AB}{BO}=\frac{5}{3}$

∴$AN=\frac{5}{3}NE=\frac{5}{3}(-\frac{3}{4}m+3)=-\frac{5}{4}m+5=-5(\frac{1}{4}m-1)$

∴$\frac{-3m(\frac{1}{4}m-1)}{-5(\frac{1}{4}m-1)}=\frac{6}{5}$，∴$\frac{3m}{5}=\frac{6}{5}$

∴$3m=6$，∴$m=2$，∴E（2，0）

(3) 在 OB 上取点 D，连接 $E'D$、AD，使 $\angle OE'D=\angle OBE'$



则$\triangle OE'D\backsim\triangle OBE'$，$\therefore\dfrac{E'D}{E'B}=\dfrac{OD}{OE'}=\dfrac{OE'}{OB}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore E'D=\dfrac{2}{3}E'B$，$OD=\dfrac{2}{3}OE'=\dfrac{4}{3}$

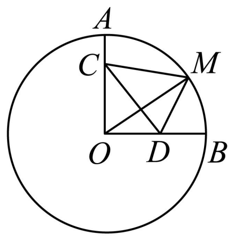
$\therefore E'A+\dfrac{2}{3}E'B=E'A+E'D\geqslant AD$

$\because AD=\sqrt{OA^2+OD^2}=\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$，$\therefore E'A+\dfrac{2}{3}E'B\geqslant\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$

即$E'A+\dfrac{2}{3}E'B$的最小值为$\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$

【题型5】点在圆内：向外取点（系数大于1）

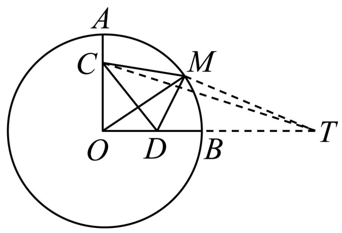
26．如图，在$\odot O$中，点A、点B在$\odot O$上，$\angle AOB=90^\circ$，$OA=6$，点C在OA上，且$OC=2AC$，点D是OB的中点，点M是劣弧AB上的动点，则$CM+2DM$的最小值为____________.



【答案】$4\sqrt{10}$

【分析】延长OB到T，使得$BT=OB$，连接MT，CT，利用相似三角形的性质证明$MT=2DM$，求$CM+2DM$的最小值问题转化为求$CM+MT$的最小值．求出CT即可判断．

【详解】解：延长OB到T，使得$BT=OB$，连接MT，CT．



$\because OM=6$，$OD=DB=3$，$OT=12$，

$\therefore OM^2=OD\cdot OT$，

$\therefore\dfrac{OM}{OD}=\dfrac{OT}{OM}$，

$\because\angle MOD=\angle TOM$，

$\therefore\triangle MOD\backsim\triangle TOM$，

$\therefore\dfrac{DM}{MT}=\dfrac{OM}{OT}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore MT=2DM$，

$\because CM+2DM=CM+MT\geq CT$，

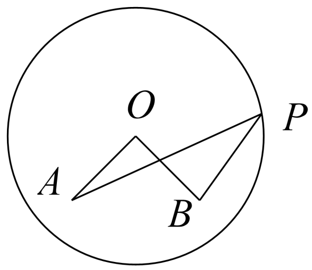
又$\because$在$\mathrm{Rt}\triangle OCT$中，$\angle COT=90^\circ$，$OC=4$，$OT=12$，

$\therefore CT=\sqrt{OC^2+OT^2}=\sqrt{4^2+12^2}=4\sqrt{10}$，

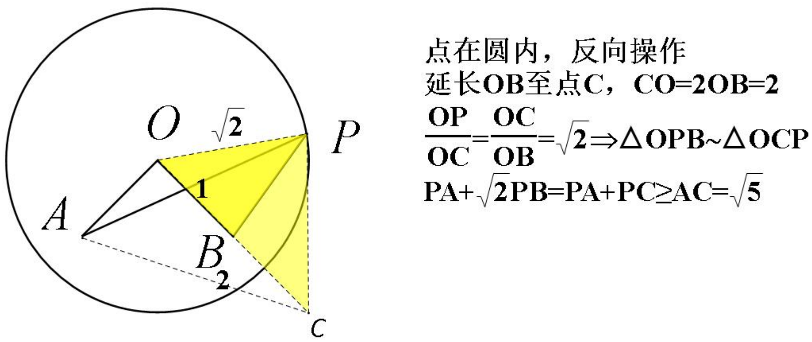
$\therefore CM+2DM\geq 4\sqrt{10}$，

$\therefore CM+2DM$ 的最小值为 $4\sqrt{10}$

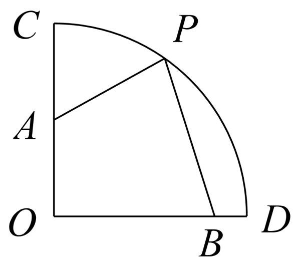
27．如图，$\angle AOB=90°$，$OA=OB=1$，圆 O 的半径为$\sqrt{2}$，P 是圆 O 上一动点，$PA+\sqrt{2}PB$ 的最小值为________.



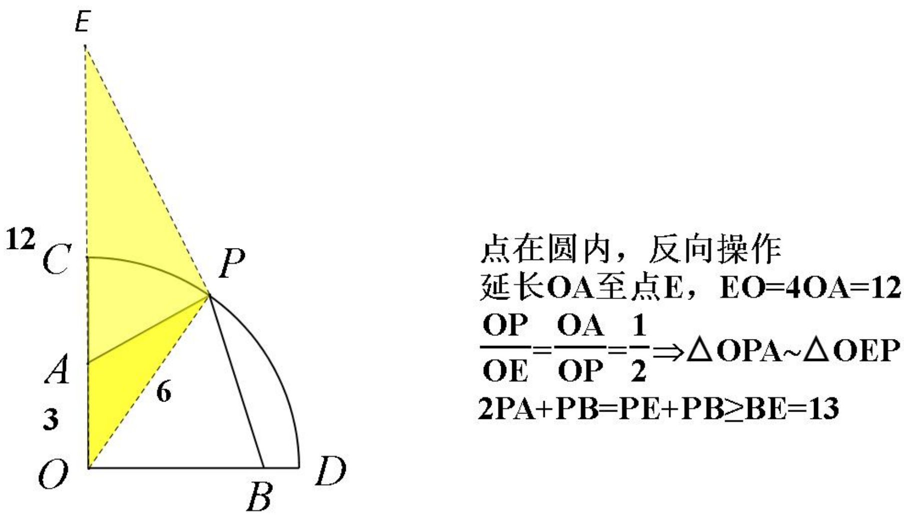
【答案】$\sqrt{5}$



28．已知扇形 COD 中，$\angle COD=90°$，$OC=6$，$OA=3$，$OB=5$，点 P 是弧 CD 上一点，$2PA+PB$ 的最小值为________.

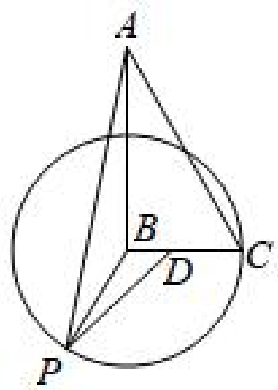


【答案】12

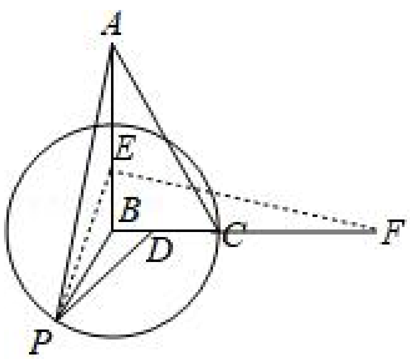


【题型 6】一内一外提系数

29．如图，在ΔABC中，$\angle ABC=90^{\circ}$，$AB=2BC=6$，$BD=1$，P在以B为圆心 3 为半径的圆上，则$AP+6PD$的最小值为 __$3\sqrt{37}$__.



【解答】解：在AB上取点E，使$BE=\frac{3}{2}$，



$\because AB=2BC=6$，

$\therefore \frac{BP}{AB}=\frac{BE}{BP}=\frac{1}{2}$，

$\because \angle PBE=\angle ABP$，

$\therefore \Delta PBE\backsim\Delta ABP$，

$\therefore \dfrac{PE}{PA}=\dfrac{BP}{AB}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore PE=\dfrac{1}{2}PA$，

在 BD 延长线上取 $BF=9$，

$\because BD=1$，

则 $\dfrac{BF}{PB}=\dfrac{BP}{BD}=3$，

又$\because \angle PBD=\angle FBP$，

$\therefore \Delta PBD\backsim\Delta FBP$，

$\therefore \dfrac{PF}{PD}=\dfrac{PB}{BD}=3$，

$\therefore PF=3PD$，

$\therefore PA+6PD=2(\dfrac{1}{2}PA+3PD)=2(PE+PF)$，

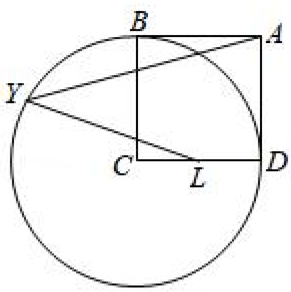
$\therefore$当 P 为 EF 和圆的交点时 $PE+PF$ 最小，即 $PA+6PD$ 最小，且值为 $2EF$，

$\because EF=\sqrt{BE^2+BF^2}=\sqrt{(\dfrac{3}{2})^2+9^2}=\dfrac{3\sqrt{37}}{2}$，

$\therefore PA+6PD$ 的最小值为 $2EF=3\sqrt{37}$，

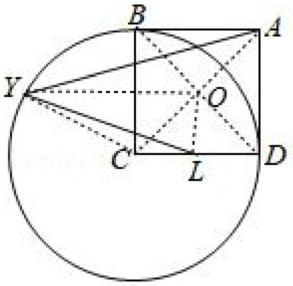
故答案为：$3\sqrt{37}$．

30．如图，正方形 $ABCD$ 边长为 4，L 是 CD 的中点，Y 在 $\odot C$ 上，$|\sqrt{2}LY-YA|$ 的最大值是 __$2\sqrt{2}$__，$2\sqrt{2}LY+YA$ 的最小值是 __$4\sqrt{10}$__



【解答】解：(1)如图，连接 AC，BD，交于点 O，连接 CY，OY，OL，

$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形，



$\therefore CY=CB=4$， $AC=\sqrt{2}BC=4\sqrt{2}$，

$\therefore \frac{CY}{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}$， $\frac{OC}{CY}=\sqrt{2}$，

$\therefore \frac{CY}{AC}=\frac{OC}{CY}$，

$\because \angle YCO=\angle ACY$，

$\therefore \Delta YCO\backsim\Delta ACY$，

$\therefore \frac{OY}{AY}=\frac{CY}{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，

$\therefore OY=\frac{\sqrt{2}}{2}AY$，

$\because |LY-OY|\ \bullet OL$，

$\therefore |LY-\frac{\sqrt{2}}{2}AY|=|LY-OY|\ \bullet OL$，

当 L、O、Y 在一条直线上时，

$|LY-OY|=OL=2$，

$\therefore |\sqrt{2}LY-AY|=\sqrt{2}|LY-\frac{\sqrt{2}}{2}AY|=2\sqrt{2}$．

(2)延长 CD 至点 H，使 CH=2CD

显然 $2\sqrt{2}LY=\sqrt{2}HY$，由（1）可知 $YA=\sqrt{2}YO$

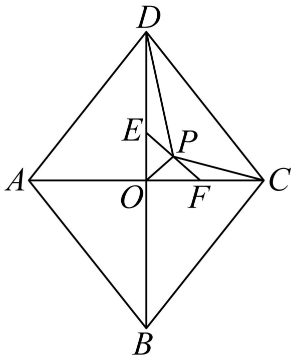
$\therefore 2\sqrt{2}LY+YA=\sqrt{2}(YH+YO)$

由勾股定理可得，$YH+YO\geq 2\sqrt{10}$，故 $2\sqrt{2}LY+YA\geq 4\sqrt{10}$．

【题型 7】隐圆型阿氏圆

2023·咸阳·三模

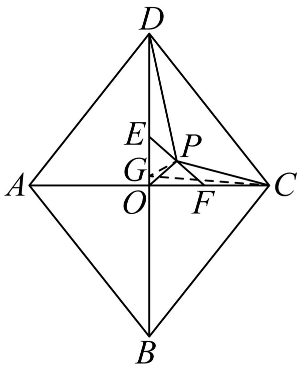
31．如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O，点 E、F 分别是 OD、OC 上的两个动点，且 $EF=4$，P 是 EF 的中点，连接 OP、PC、PD，若 $AC=12, BD=16$，则 $PC+\frac{1}{4}PD$ 的最小值为________．



【答案】$\dfrac{\sqrt{145}}{2}$

【分析】在OD上取一点G，使得$OG=\dfrac{1}{2}$，连接PG、CG．根据菱形的性质可知$OC=6,OD=8$，则$\dfrac{OG}{OP}=\dfrac{OP}{OD}=\dfrac{1}{4}$，结合$\angle GOP=\angle POD$，可得$\triangle POG\backsim\triangle DOP$，利用相似三角形的性质证得$PG=\dfrac{1}{4}PD$，根据$PC+PG\geq CG$可知$CG$的长即为$PC+\dfrac{1}{4}PD$的最小值，利用勾股定理求出$CG$便可解决问题．

【详解】解：如图，在OD上取一点G，使得$OG=\dfrac{1}{2}$，连接PG、CG．



$\because$四边形$ABCD$为菱形，$AC=12,BD=16$，

$\therefore OC=\dfrac{1}{2}AC=6$，$OD=\dfrac{1}{2}BD=8$，$AC\perp BD$，

$\because EF=4$，P是EF的中点，

$\therefore OP=\dfrac{1}{2}EF=2$，

$\therefore \dfrac{OG}{OP}=\dfrac{\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{1}{4},\dfrac{OP}{OD}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$，

又$\because \angle GOP=\angle POD$，

$\therefore \triangle POG\backsim\triangle DOP$，

$\therefore \dfrac{GP}{PD}=\dfrac{1}{4}$，即$GP=\dfrac{1}{4}PD$，

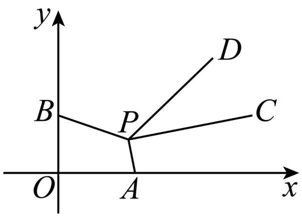
$\because PC+PG\geq CG$，

∴当点 G、P、C 在同一直线上时，$PC+\frac{1}{4}PD$ 取得最小值，

此时 $PC+\frac{1}{4}PD=PC+PG=CG=\sqrt{OC^2+OG^2}=\frac{\sqrt{145}}{2}$

2023·宿迁·三模

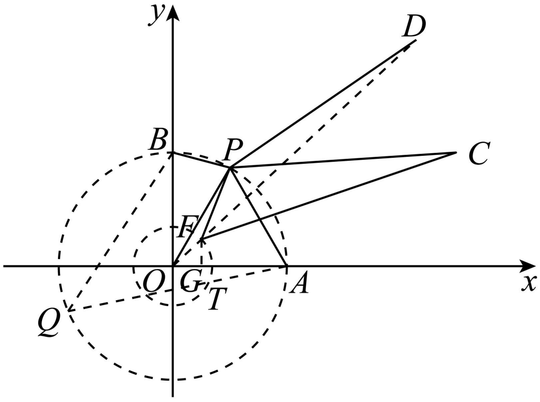
32．如图，在平面直角坐标系中，$A(2,0)$、$B(0,2)$、$C(5,2)$、$D(4,4)$，点 P 在第一象限，且 $\angle APB=135°$，则 $\sqrt{2}PD+4PC$ 的最小值为______．



【答案】$6\sqrt{10}$

【分析】取一点 $T\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，以 O 为圆心，$OT$ 为半径作圆，与 OD 交于点 F，连接 PF，PC，FC，首先利用四点共圆证明 $OP=2$，再利用相似三角形的性质证明 $\sqrt{2}PD=4PF$，推出 $\sqrt{2}PD+4PC=4PF+4PC=4(PF+PC)$，根据 $PF+PC\geq FC$，利用两点之间的距离公式，即可求出 FC 的最小值，即可得．

【详解】解：如图所示，取一点 $T\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，以 O 为圆心，$OT$ 为半径作圆，与 OD 交于点 F，连接 PF，PC，FC，



∵ $A(2,0)$、$B(0,2)$，$D(4,4)$，

∴ $OA=OB=2$，$OD=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，

以 O 为圆心，OA 为半径作 $\odot O$，在优弧 AB 上取一点 Q，连接 QB，QA，

∵ $\angle Q=\frac{1}{2}\angle AOB=45°$，$\angle APB=135°$，

∴ $\angle Q+\angle APB=45°+135°=180°$，

∴A，P，B，Q 四点共圆，

∴ $OP=OA=2$，

∵ $OP=2$，$OF=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$OD=4\sqrt{2}$，

∴ $OP^2=OF\bullet OD$，

∴ $\frac{OP}{OF}=\frac{OD}{OP}$，

∵ $\angle POF=\angle POD$，

∴ $\triangle POF\backsim\triangle DOP$，

∴ $\frac{PF}{PD}=\frac{OF}{OP}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

∴ $\sqrt{2}PD=4PF$，

∴ $\sqrt{2}PD+4PC=4PF+4PC=4(PF+PC)$，

过点 F 作 $FG\perp OA$ 于点 G，

∵ $D(4,4)$，$OF=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴ $\angle DOG=45°$

∴点 F 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

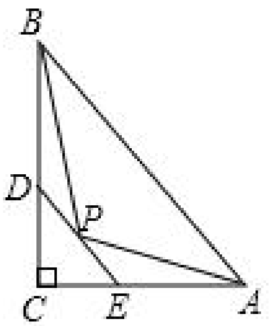
∵ $C(5,2)$，

∴ $FC=\sqrt{\left(5-\frac{1}{2}\right)^2+\left(2-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$

∵ $PF+PC\geq FC$，即 $\sqrt{2}PD+4PC=4(PF+PC)\geq 4FC=6\sqrt{10}$,

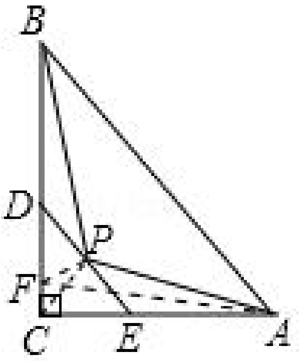
∴ $\sqrt{2}PD+4PC$ 的最小值是 $6\sqrt{10}$

33．如图，在 RtΔABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=6$，$BC=8$，D、E 分别是边 BC、AC 上的两个动点，且 $DE=4$，P 是 DE 的中点，连接 PA，PB，则 $PA+\frac{1}{4}PB$ 的最小值为 ____.



【答案】$\frac{\sqrt{145}}{2}$

【解答】解：如图，在 CB 上取一点 F，使得 $CF=\frac{1}{2}$，连接 PF，AF．



$\because \angle DCE = 90°$，$DE = 4$，$DP = PE$，

$\therefore PC = \frac{1}{2}DE = 2$，

$\because \frac{CF}{CP} = \frac{1}{4}$，$\frac{CP}{CB} = \frac{1}{4}$，

$\therefore \frac{CF}{CP} = \frac{CP}{CB}$，

$\because \angle PCF = \angle BCP$，

$\therefore \Delta PCF \backsim \Delta BCP$，

$\therefore \frac{PF}{PB} = \frac{CF}{CP} = \frac{1}{4}$，

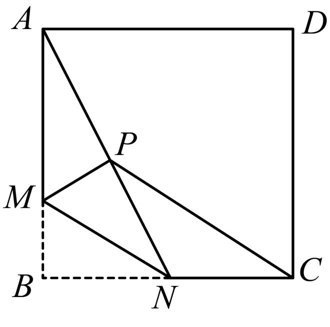
$\therefore PF = \frac{1}{4}PB$，

$\therefore PA + \frac{1}{4}PB = PA + PF$，

$\because PA + PF \geqslant AF$，$AF = \sqrt{CF^2 + AC^2} = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 6^2} = \frac{\sqrt{145}}{2}$，

$\therefore PA + \frac{1}{4}PB \geqslant \frac{\sqrt{145}}{2}$，$\therefore PA + \frac{1}{4}PB$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{145}}{2}$

34．如图，在边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中，M 为 AB 上一点，且 $BM = 2$，N 为边 BC 上一动点．连接 MN，将 $\triangle BMN$ 沿 MN 翻折得到 $\triangle PMN$，点 P 与点 B 对应，连接 PA，PC，则 $PA + 2PC$ 的最小值为____________．



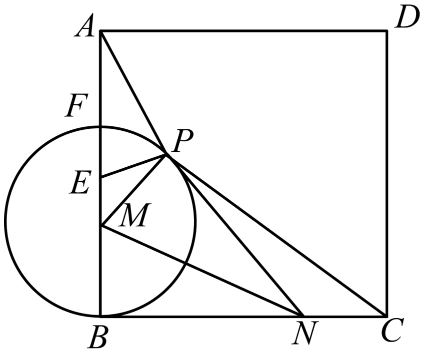
【答案】$6\sqrt{5}$

【分析】由折叠的性质可得，点P在以M为圆心，以2为半径的圆上，在线段MA上取一点E，使得$ME=1$，利用相似三角形的性质得到$PE=\frac{1}{2}PA$，从而得到$PA+2PC=2\left(\frac{1}{2}PA+PC\right)=2(PE+PC)\geq 2CE$，当且仅当$P$、$C$、$E$三点共线时，取得最小值$2CE$，即可求解.

【详解】解：由题意可得：$PM=BM=2$

∴点P在以M为圆心，以2为半径的圆上，

在线段MA上取一点E，使得$ME=1$，则$BE=3$



∵$AM=AB-BM=4$，$MP=2$

∴$\frac{MP}{AM}=\frac{ME}{PM}=\frac{1}{2}$

又∵$\angle EMP=\angle PMA$

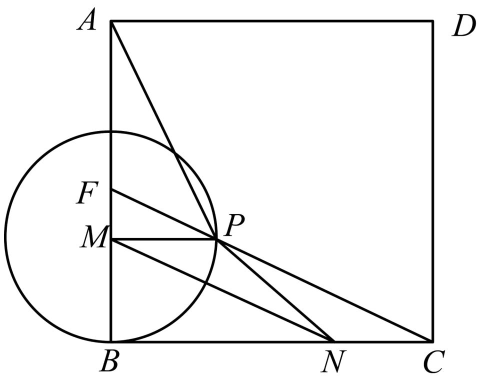
∴$\triangle EMP\backsim\triangle PMA$

∴$\frac{PE}{PA}=\frac{ME}{PM}=\frac{1}{2}$

∴$PE=\frac{1}{2}PA$

∴$PA+2PC=2\left(\frac{1}{2}PA+PC\right)=2(PE+PC)\geq 2CE$

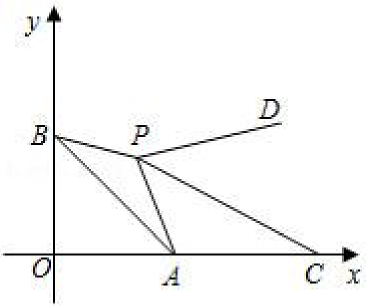
如下图所示，当且仅当P、C、E三点共线时，取得最小值$2CE$



$CE=\sqrt{BE^2+BC^2}=3\sqrt{5}$，

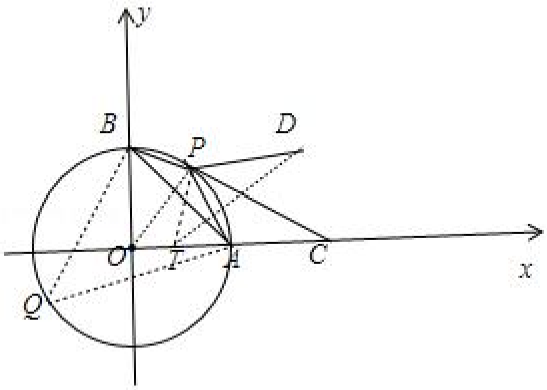
∴$PA+2PC$的最小值为：$6\sqrt{5}$

35．如图，在平面直角坐标系中，$A(2,0)$、$B(0,2)$、$C(4,0)$、$D(3,2)$，P 是 ΔAOB 外部的第一象限内一动点，且 $\angle BPA=135^{\circ}$，则 $2PD+PC$ 的最小值是________.



【答案】$4\sqrt{2}$

【解答】解：如图，取一点 $T(1,0)$，连接 OP，PT，TD，



$\because A(2,0)$、$B(0,2)$、$C(4,0)$，

$\therefore OA=OB=2$，$OC=4$，

以 O 为圆心 OA 为半径作 $\odot O$，在优弧 AB 上取一点 Q，连接 QB，QA，

$\because \angle Q=\frac{1}{2}\angle AOB=45^{\circ}$，$\angle APB=135^{\circ}$，

$\therefore \angle Q+\angle APB=180^{\circ}$，

$\therefore A$、P、B、Q 四点共圆，

$\therefore OP=OA=2$，

$\because OP=2$，$OT=1$，$OC=4$，

$\therefore OP^2=OC\cdot OT$，

$\therefore \frac{OP}{OC}=\frac{OT}{OP}$，

$\because \angle POT=\angle POC$，

$\therefore \Delta POT \backsim \Delta POC$，

$\therefore \frac{PT}{PC}=\frac{OP}{OC}=\frac{1}{2}$，

$\therefore PT=\frac{1}{2}PC$，

$\therefore 2PD+PC=2(PD+\frac{1}{2}PC)=2(PD+PT)$，

$\because PD+PT \geq DT$，$DT=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore 2PD+PC \geq 4\sqrt{2}$，

$\therefore 2PD+PC$ 的最小值是 $4\sqrt{2}$