专题 1-5　正方形基本型（母题溯源）

01 题型·解读

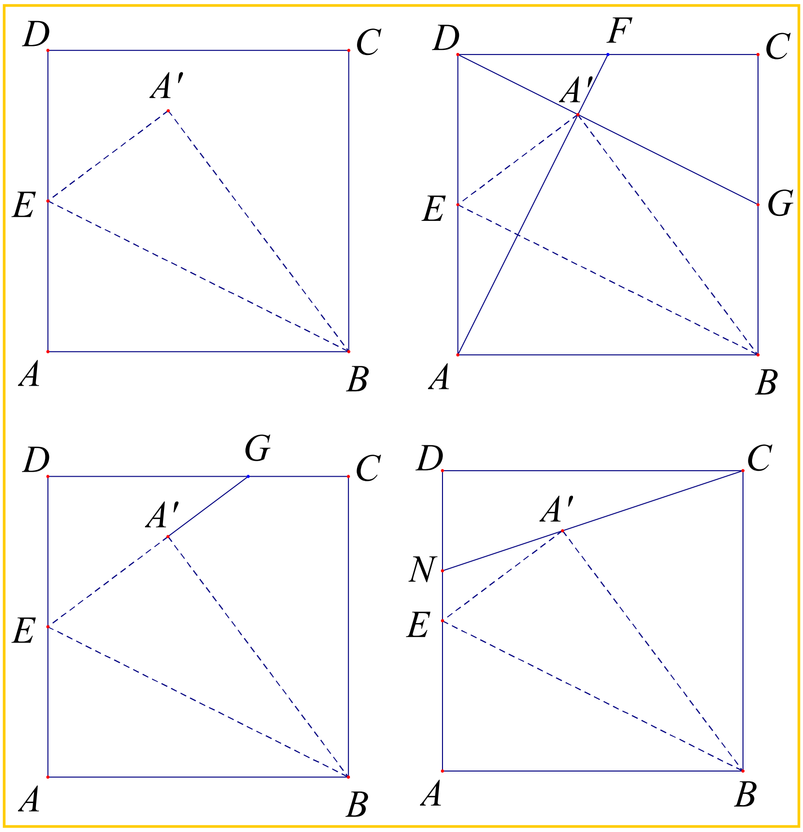
02 满分·技巧

模型解读

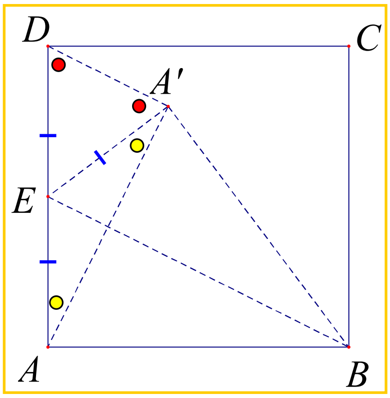
【模型一】中点+折叠

性质一：$AA'\perp A'D$；性质二：F，G 为中点；性质三：$A'G\perp CG$;性质四：$\angle EBG=45°$;

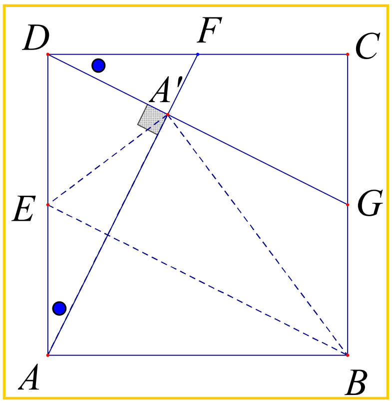
性质五：$DG=2CG$；性质六：$\tan\angle DCN=\frac{1}{3}$



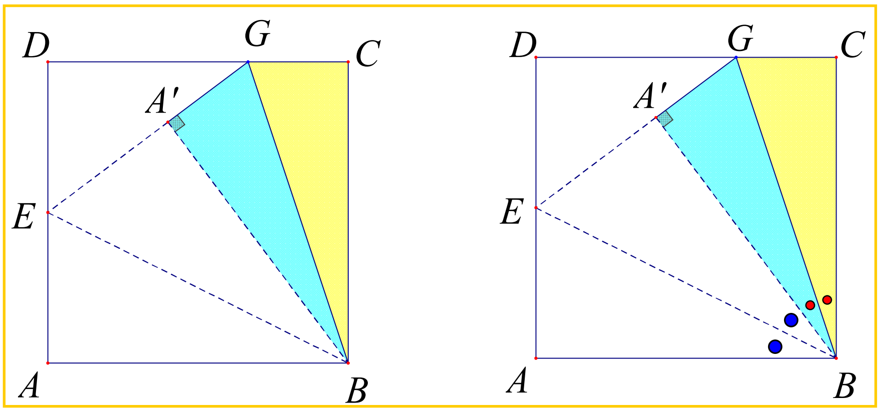
性质一证明： $AA'\perp A'D$



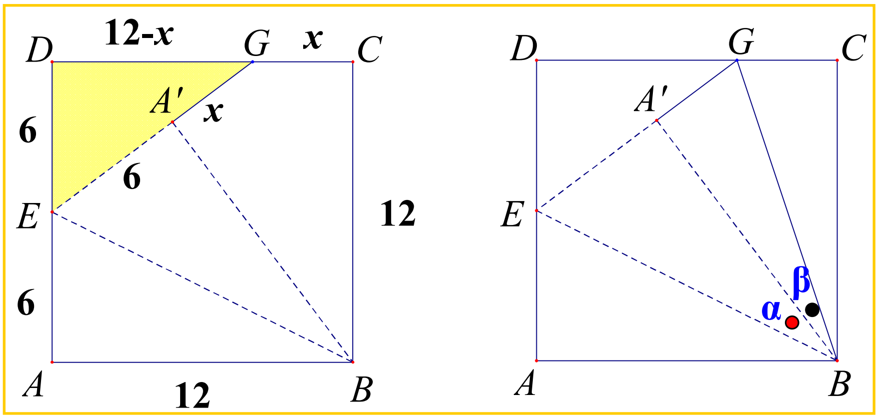
性质二证明：G是 BC 中点



性质三，四证明：HL全等

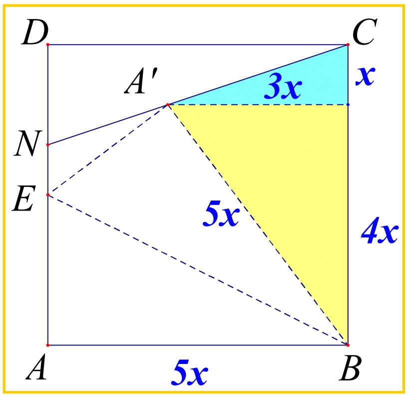


性质五证明：勾股，或“12345”模型



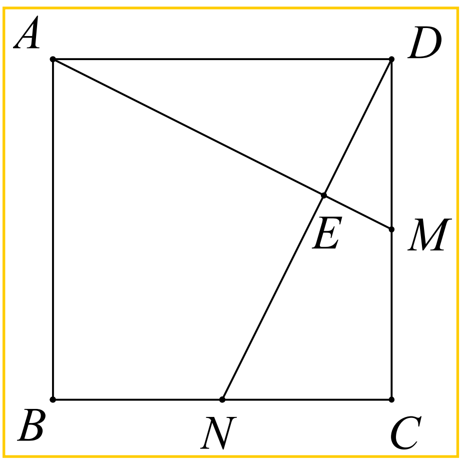
【12345 模型说明】易知$\alpha+\beta=45^\circ$， $\tan\alpha=\frac{1}{2}$， 故$\tan\beta=\frac{1}{3}$，记$\mathbf{AB=12}\Rightarrow CG=4,DG=8$

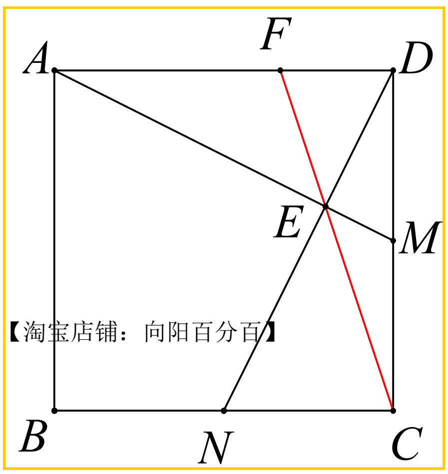
性质六证明：12345 模型



【模型二】双中点（十字架模型拓展）

(1)知 2 推 1：①M 中点；②N 是中点；③AM⊥DN





(2)已知：M 是中点，N 是中点，连接 CE 并延长，交 AD 于 F

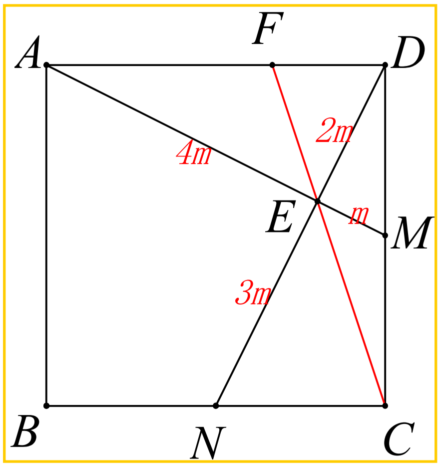
① 求 $EM:ED:EN:AE=$________

② 证明：EC 平分∠NEM

③ 求 $\dfrac{DF}{AF}$

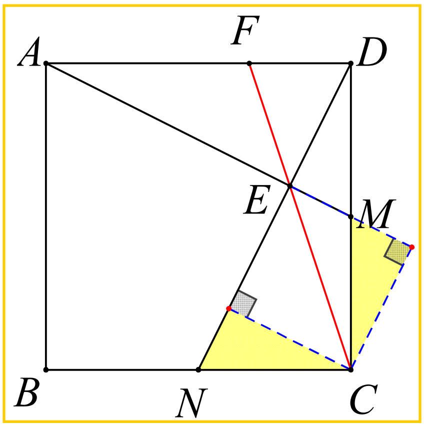
【解析】

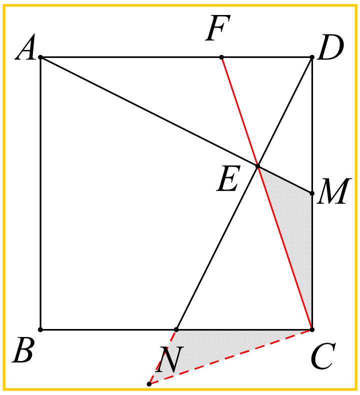
① $ED:EN:AE=1:2:3:4$



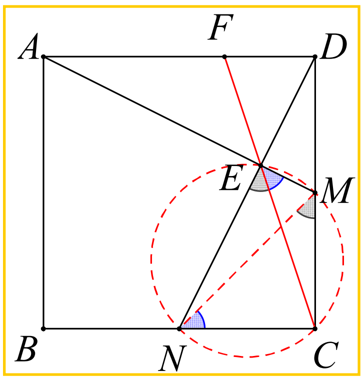
证明：法一：角平分线逆定理

法二：旋转相似（手拉手模型）

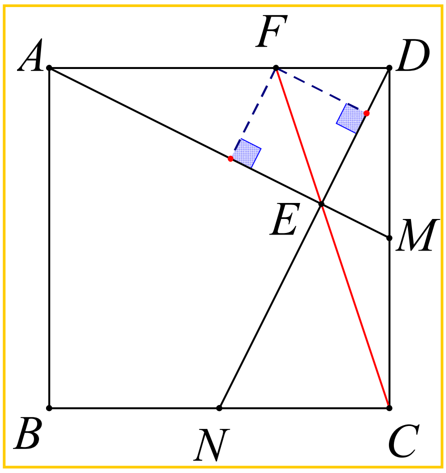




法三：四点共圆



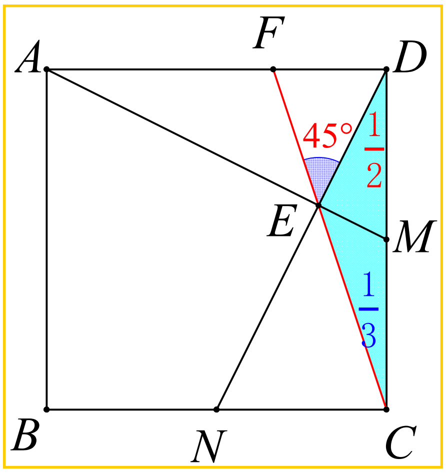
② 法一：角平分线定理



F在角平分线上，过F作角两边垂线

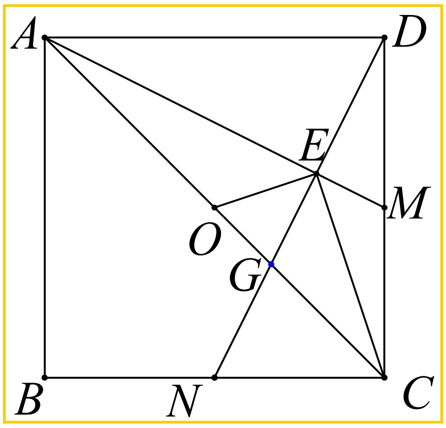
$\therefore \dfrac{DF}{AF}=\dfrac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle AEF}}=\dfrac{DE}{AE}=\dfrac{1}{2}$（角平分线定理2）

法二：12345 模型（正切和角公式）

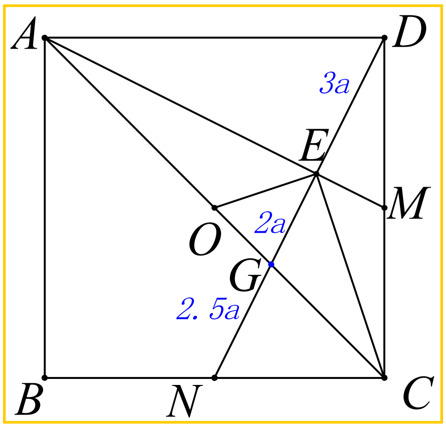


$\angle DEF=45°$，$\angle EDC=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \tan\angle DCF=\dfrac{1}{3}$

（3）已知：M，N是中点，O是中心，连接OE，①求DE:EG:GN ②证∠OEC=90°



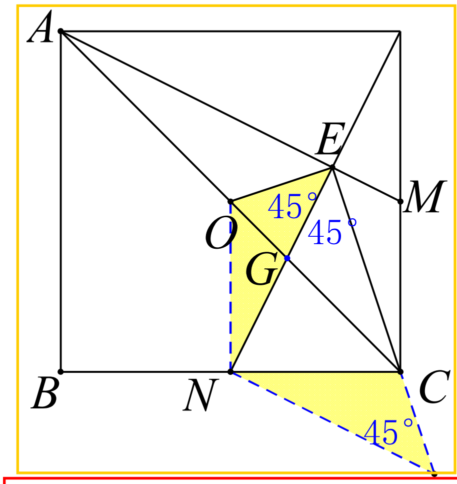
【解析】第一问



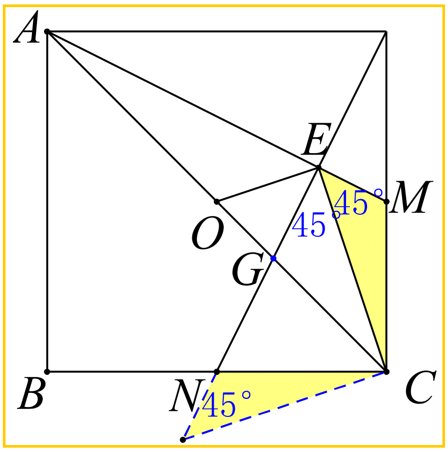
$\frac{DE}{NE}=\frac{2}{3}$, $\frac{NG}{DG}=\frac{1}{2}$ ro 12345模型

【解析】第二问

法一：由（2）可知∠NEC=45°，故构造手拉手模型可得△黄≌△黄(SAS)，从而可得∠NEO=45°，得证

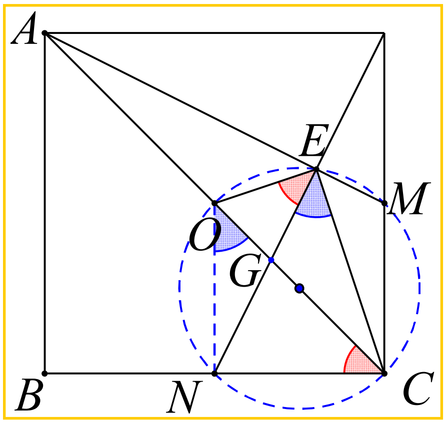


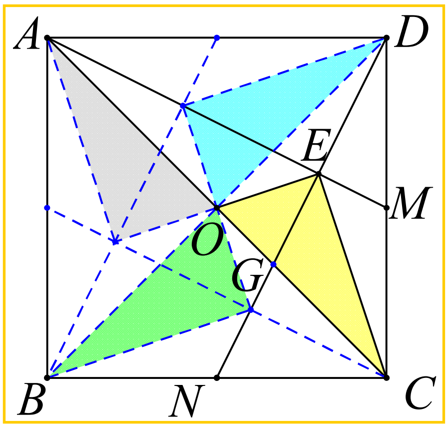
或者换个方向也可以， 像这种方方正正的图形也可以试试建系



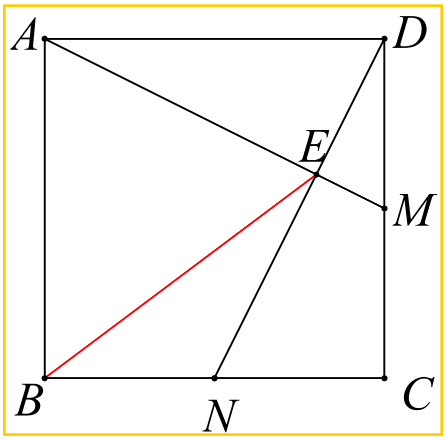
法二：四点共圆

法三：补成玄图 易知∠OEG=45°

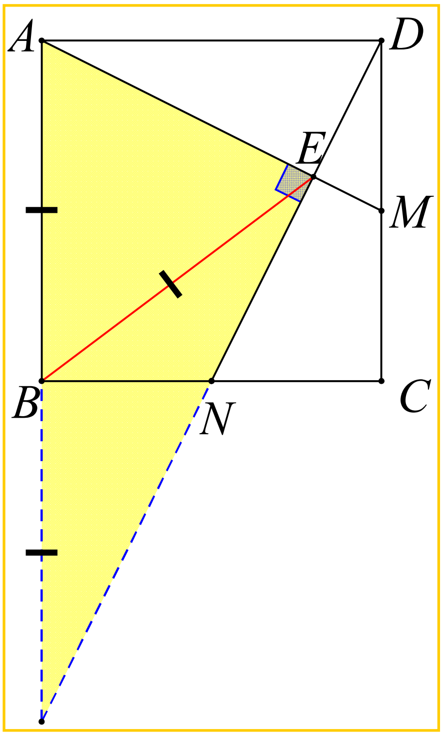




（4）已知：M，N 是中点,连接 BE，证 BE=CD

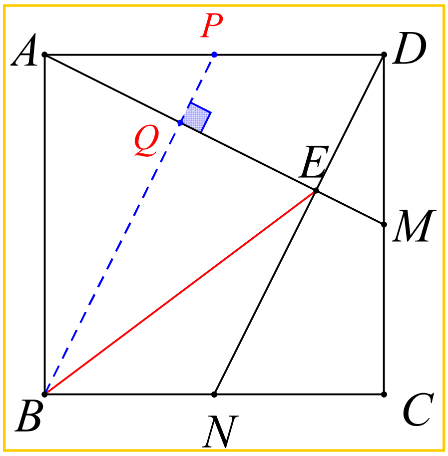


【解析】法一　斜边上的中线等于斜边一般

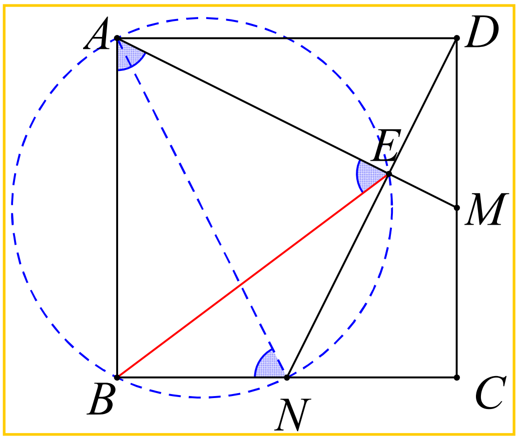


【淘宝店铺：向阳百分百】

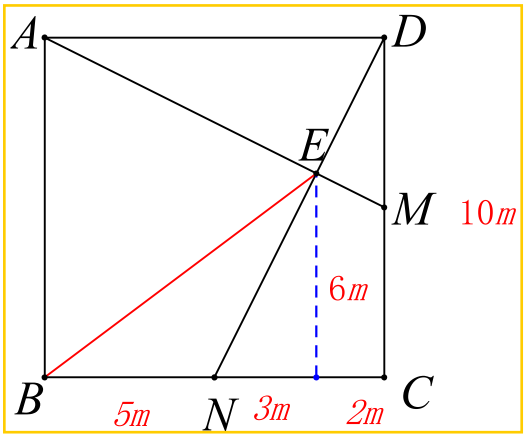
法二：过 AD 的中点 P 作 AE 垂线，交 AM 于 Q，可得 Q 是 AE 中点，则 BQ 垂直平分 AE，故 AB=BE



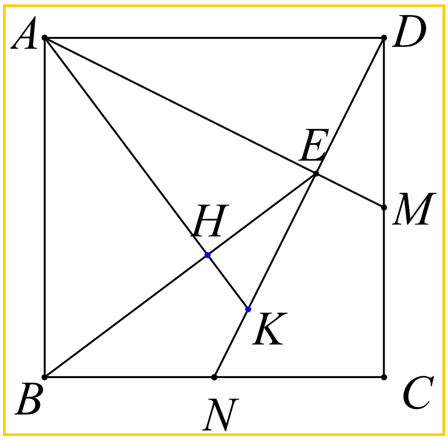
法三：对角互补得四点共圆，导角得等腰



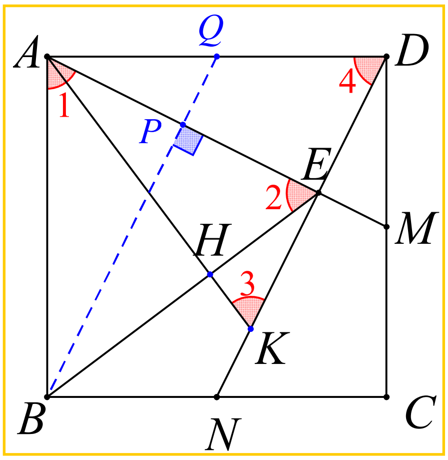
法四：勾股定理，由（2）可知 DE：NE=2:3，设值求值即可



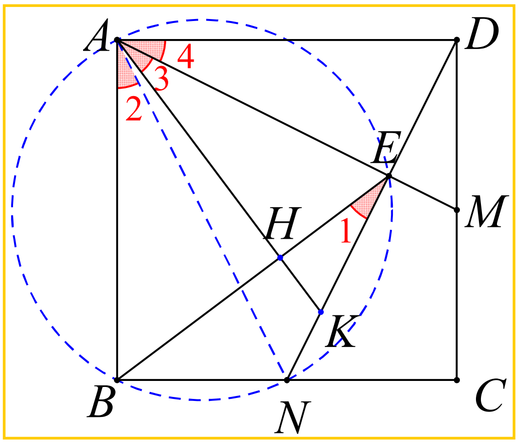
（5）已知：M，N 是中点,连接 BE，AH⊥BE 于 H，交 DN 于 K，证 AK=CD



【解析】法一：构造玄图导等腰



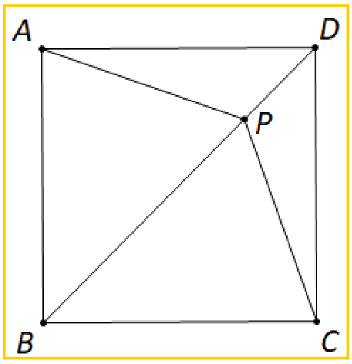
法二：四点共圆



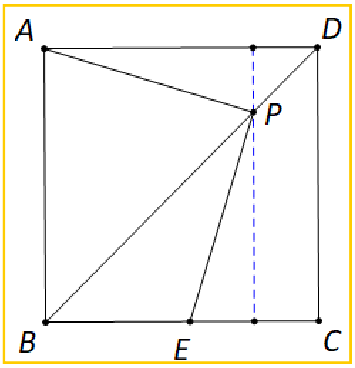
$\boxed{\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4}$

法三：建系求坐标（略）

【模型三】对角线模型



$PA=PC$



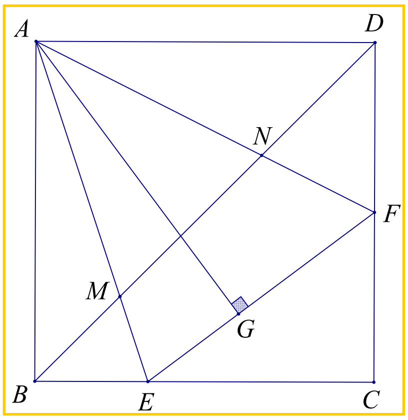
互推关系

①PA⊥PE⇒$PA=PE$

②$PA=PE$⇒$PA\perp PE$

【模型四】半角模型

如图，已知 ABCD 为正方形，∠FAE=45°，对角线 BD 交 AE 于 M，交 AF 与 N，AG⊥EF



5 个条件知 1 推 4

① ∠EAF=45°

② $BE+DF=EF$

③ $AG\perp EF$，AG=AB

④ AE 平分∠BEF

⑤ AF 平分∠DFE

【性质一】5 个条件知 1 推 4（全等）

【性质二】$BM^2+ND^2=MN^2$（勾股证）

【性质三】$\angle MGN=90^\circ$

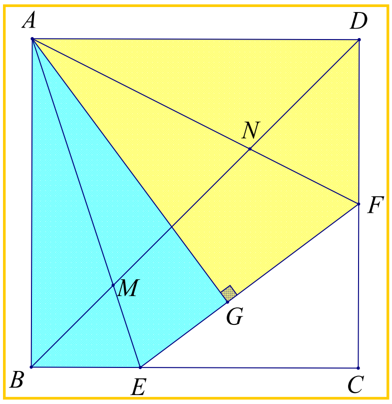
【性质四】①$AM^2=MN\cdot MD$；②$AN^2=NM\cdot NB$；③$S_{ABCD}=BN\cdot DM$（2 组子母，1 共享型相似）

【性质五】△ANE，△AMF，是 2 个隐藏的等腰直角三角形（反 8 字相似或四点共圆）

【性质六】△AMN∽△AFE，且相似比为$\frac{\sqrt{2}}{2}$（用全等导角）

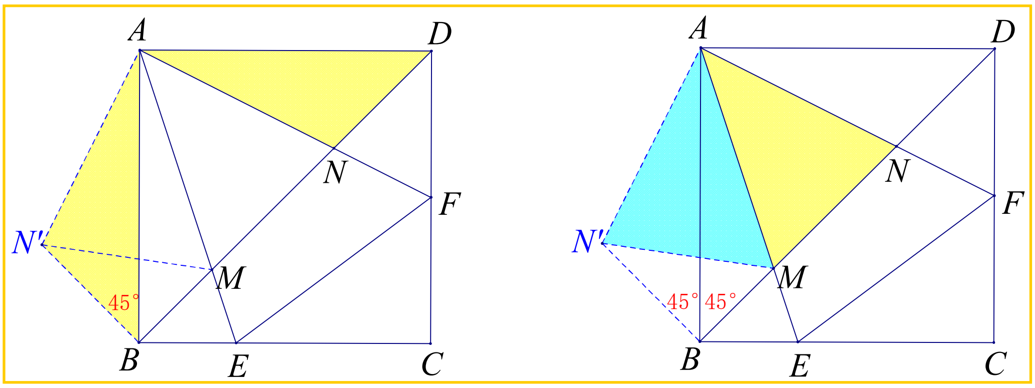
【性质七】$\frac{ND}{EC}=\frac{BM}{FC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$（旋转相似）

【性质一】**DF＋BE＝EF**

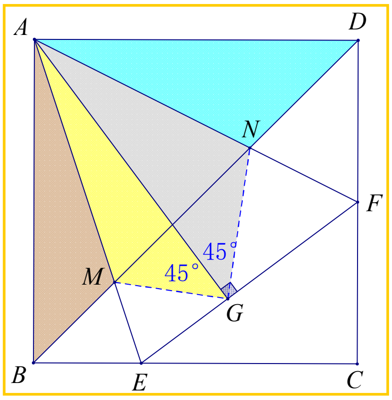


易证△ABE≌△AGE，易证△AGF≌△ADF

【性质二】$BM^2+ND^2=MN^2$简证，如图



【性质三】$\angle MGN=90^\circ$ 简证，如图：两组全等

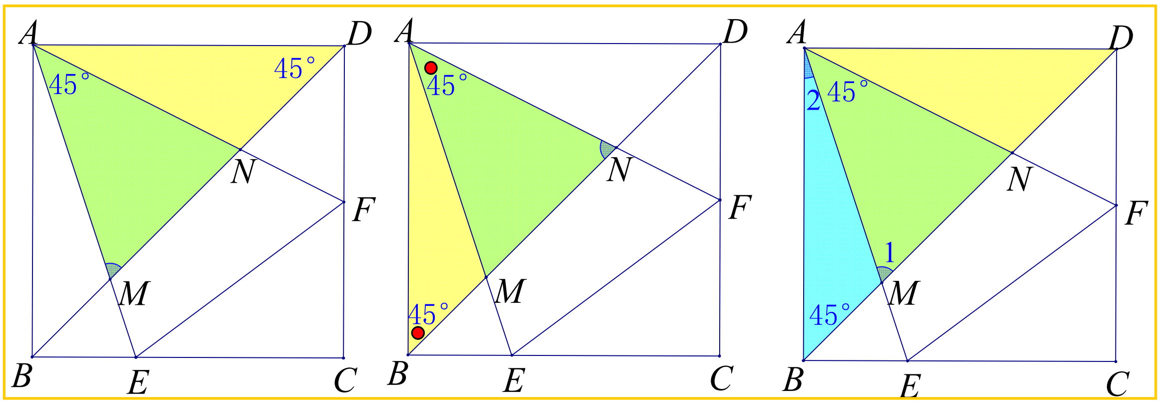


【性质四】①$AM^2=MN\cdot MD$；②$AN^2=NM\cdot NB$；③$S_{ABCD}=BN\cdot DM$（2 组子母，1 共享型相似）

简证③，如图

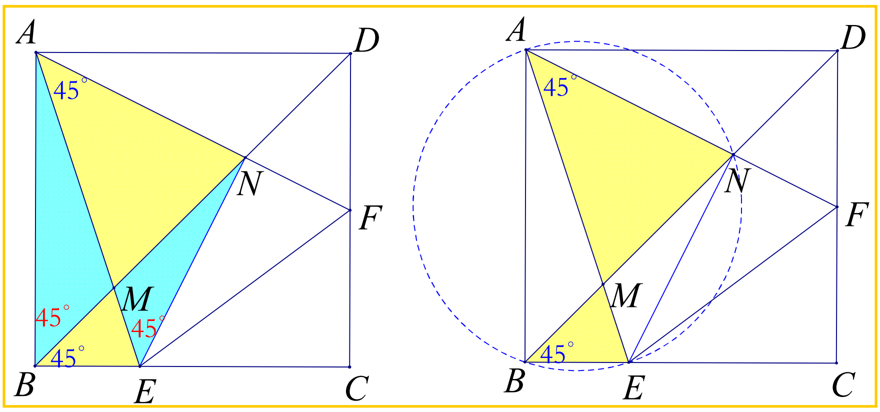
$S_{ABCD}=BN\cdot DM$（共享型相似）

∠1=45°+∠2=∠BAN⇒△BAN∽△DMA⇒BN•DM=AB•AD



【性质五】△ANE，△AMF，是 2 个隐藏的等腰直角三角形

简证，以△ANE 为例，△AMF 方法相同



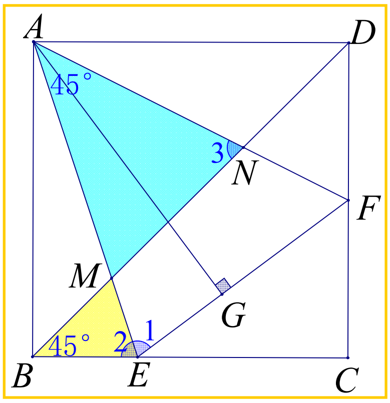
法一：两次相似△AMN∽△BME⇒$\frac{AM}{BM}=\frac{NM}{EM}$ | △BMA∽△EMN | ∠ABM=∠NEM=45°

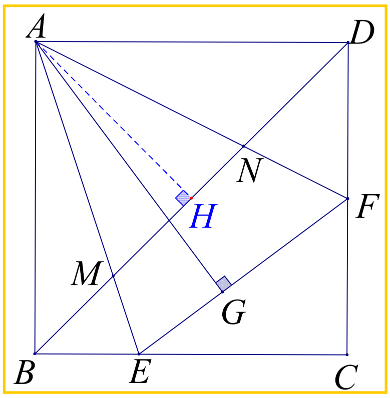
法二：ABEN 四点共圆，对角互补∠ABE+∠ANE=180°或∠ABN=∠AEN

【性质六】△AMN∽△AFE，且相似比为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

先证相似，易知$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，故相似成立

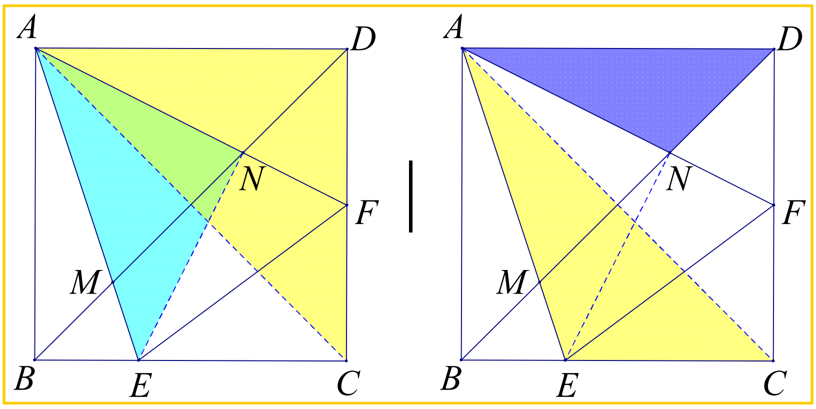
相似比为：$\frac{AH}{AG}=\frac{AH}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$



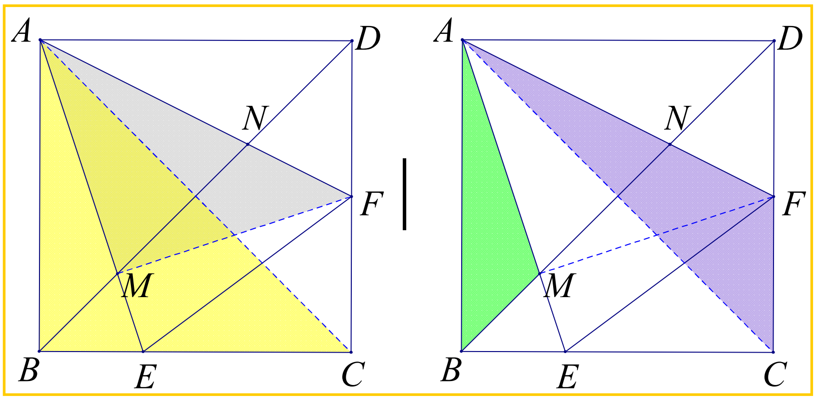


【性质七】$\frac{ND}{EC}=\frac{BM}{FC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

① $\frac{ND}{EC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$



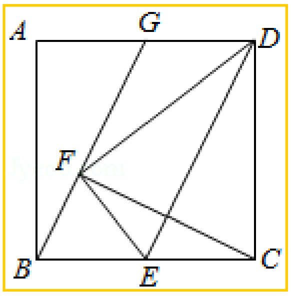
② $\frac{ND}{EC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$



03 核心·题型

题型一　中点+折叠模型

1．如图，在边长 4 的正方形 $ABCD$ 中，E 是边 BC 的中点，将 ΔCDE 沿直线 DE 折叠后，点 C 落在点 F 处，再将其打开、展平，得折痕 DE．连接 CF、BF、EF，延长 BF 交 AD 于点 G．则下列结论：① $BG=DE$；② $CF\perp BG$；③ $\sin\angle DFG=\dfrac{1}{2}$；④ $S_{\Delta DFG}=\dfrac{12}{5}$，其中正确的有(　　)



A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

【解答】解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=BC=AD=CD=4$，$\angle ABC=\angle BCD=90^\circ$，

$\because E$ 是边 BC 的中点，

$\therefore BE=CE=2$，

$\because$ 将 ΔCDE 沿直线 DE 折叠得到 ΔDFE，

$\therefore DF=CD=4$，$EF=CE=2$，$\angle DFE=\angle DCE=90^\circ$，$\angle DEF=\angle DEC$

$\therefore EF=EB$，

$\therefore \angle EBF=\angle BFE$，

$\because \angle EBF=\angle BFE=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle BEF)$，$\angle CED=\angle FED=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle BEF)$，

$\therefore \angle GBE=\angle DEC$，

$\therefore BG//DE$，

$\because BE//DG$，

$\therefore$ 四边形 $BEDG$ 是平行四边形，

$\therefore BG=DE$，故①正确；

$\because EF=CE$，

$\therefore \angle EFC=\angle ECF$，

$\therefore \angle FBE+\angle BCF=\angle BFE+\angle CFE=\frac{1}{2}\times 180^{\circ}=90^{\circ}$，

$\therefore \angle BFC=90^{\circ}$，

$\therefore CF\perp BG$，故②正确；

$\because \angle ABG+\angle CBG=\angle BFE+\angle DFG=90^{\circ}$，

$\therefore \angle ABG=\angle DFG$，

$\because AB=4$，$DG=BE=2$，

$\therefore AG=2$，

$\therefore BG=2\sqrt{5}$，

$\therefore \sin\angle DFG=\sin\angle ABG=\frac{AG}{BG}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，故③错误；

过 G 作 $GH\perp DF$ 于 H，

$\because \tan\angle GFH=\tan\angle ABG=\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 设 $GH=x$，则 $FH=2x$，

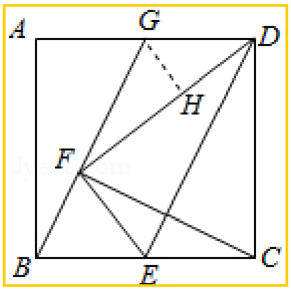
$\therefore DH=\sqrt{DG^{2}-x^{2}}$，

$\therefore DF=FH+DH=2x+\sqrt{DG^{2}-x^{2}}=4$

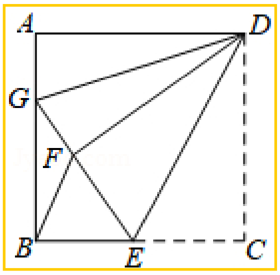
解得：$x=1.2$，$x=2$（舍去），

$\therefore GH=1.2$，

$\therefore S_{\Delta DFG}=\frac{1}{2}\times 4\times 1.2=\frac{12}{5}$，故④正确；



2．如图，正方形 $ABCD$ 中，$AB=12$，点 E 在边 BC 上，$BE=EC$，将 ΔDCE 沿 DE 对折至 ΔDFE，延长 EF 交边 AB 于点 G，连接 DG，BF，给出以下结论：① $\Delta DAG\cong\Delta DFG$；② $BG=2AG$；③ $BF//DE$；④ $S_{\Delta BEF}=\frac{72}{5}$．其中所有正确结论的个数是（　　）



A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【解答】解：如图，由折叠可知，$DF=DC=DA$，$\angle DFE=\angle C=90^{\circ}$，

$\therefore \angle DFG=\angle A=90^{\circ}$，

在 RtΔADG 和 RtΔFDG 中，

$\begin{cases} AD=DF \\ DG=DG \end{cases}$，

$\therefore \mathrm{Rt}\Delta \mathrm{ADG} \cong \mathrm{Rt}\Delta \mathrm{FDG(HL)}$，故①正确；

$\because$ 正方形边长是 12，

$\therefore BE=EC=EF=6$，

设 $AG=FG=x$，则 $EG=x+6$，$BG=12-x$，

由勾股定理得：$EG^2=BE^2+BG^2$，

即：$(x+6)^2=6^2+(12-x)^2$，

解得：$x=4$

$\therefore AG=GF=4$，$BG=8$，$BG=2AG$，故②正确，

$\because EF=EC=EB$，

$\therefore \angle EFB=\angle EBF$，

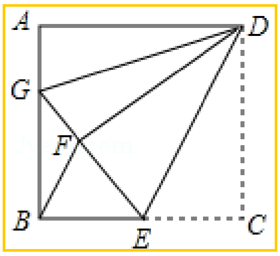
$\because \angle DEC=\angle DEF$，$\angle CEF=\angle EFB+\angle EBF$，

$\therefore \angle DEC=\angle EBF$，

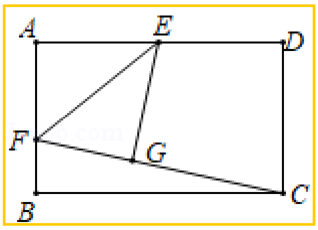
$\therefore BF//DE$，故③正确；

$S_{\Delta GBE}=\frac{1}{2}\times 6\times 8=24$，$S_{\Delta BEF}=\frac{EF}{EG}\cdot S_{\Delta GBE}=\frac{6}{10}\times 24=\frac{72}{5}$，故④正确．

综上可知正确的结论的是 4 个



3．如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=3\sqrt{6}$，$BC=12$，E 为 AD 中点，F 为 AB 上一点，将 ΔAEF 沿 EF 折叠后，点 A 恰好落到 CF 上的点 G 处，则折痕 EF 的长是__$2\sqrt{15}$__．



【解答】解：如图，连接EC，

$\because$四边形$ABCD$为矩形，

$\therefore \angle A=\angle D=90^\circ$，$BC=AD=12$，$DC=AB=3\sqrt{6}$，

$\because E$为AD中点，

$\therefore AE=DE=\frac{1}{2}AD=6$

由翻折知，$\Delta AEF\cong\Delta GEF$，

$\therefore AE=GE=6$，$\angle AEF=\angle GEF$，$\angle EGF=\angle EAF=90^\circ=\angle D$，

$\therefore GE=DE$，

$\therefore EC$平分$\angle DCG$，

$\therefore \angle DCE=\angle GCE$，

$\because \angle GEC=90^\circ-\angle GCE$，$\angle DEC=90^\circ-\angle DCE$，

$\therefore \angle GEC=\angle DEC$，

$\therefore \angle FEC=\angle FEG+\angle GEC=\frac{1}{2}\times180^\circ=90^\circ$，

$\therefore \angle FEC=\angle D=90^\circ$，

又$\because \angle DCE=\angle GCE$，

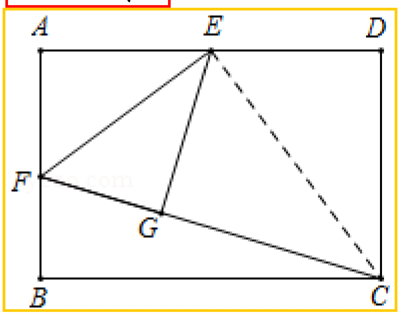
$\therefore \Delta FEC\backsim\Delta EDC$，

$\therefore \frac{FE}{DE}=\frac{EC}{DC}$，

$\because EC=\sqrt{DE^2+DC^2}=\sqrt{6^2+(3\sqrt{6})^2}=3\sqrt{10}$，

$\therefore \frac{FE}{6}=\frac{3\sqrt{10}}{3\sqrt{6}}$，

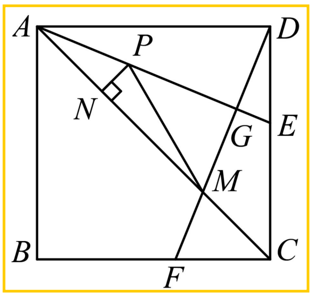
$\therefore FE=2\sqrt{15}$



题型二　双中点模型（十字架拓展）

2023·东营·中考真题

1．如图，正方形$ABCD$的边长为4，点E，F分别在边DC，BC上，且$BF=CE$，AE平分$\angle CAD$，连接DF，分别交AE，AC于点G，M，P是线段AG上的一个动点，过点P作$PN\perp AC$垂足为N，连接PM，有下列四个结论：①AE垂直平分DM；②$PM+PN$的最小值为$3\sqrt{2}$；③$CF^2=GE\cdot AE$；④$S_{\triangle ADM}=6\sqrt{2}$．其中正确的是（　　）



A．①②　　B．②③④　　C．①③④　　D．①③

【答案】D

【详解】解：$\because ABCD$为正方形，

$\therefore BC=CD=AD$，$\angle ADE=\angle DCF=90°$，

$\because BF=CE$，

$\therefore DE=FC$，

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle DCF(\text{SAS})$，

$\therefore \angle DAE=\angle FDC$，

$\because \angle ADE=90°$，

$\therefore \angle ADG+\angle FDC=90°$，

$\therefore \angle ADG+\angle DAE=90°$，

$\therefore \angle AGD=\angle AGM=90°$，

$\because AE$平分$\angle CAD$，

$\therefore \angle DAG=\angle MAG$，

$\because AG=AG$，

$\therefore \triangle ADG\cong\triangle AMG(\text{ASA})$，

$\therefore DG=GM$，

$\because \angle AGD=\angle AGM=90°$，

$\therefore AE$垂直平分DM，

故①正确．

由①可知，$\angle ADE=\angle DGE=90°$，$\angle DAE=\angle GDE$，

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle DGE$，

$\therefore \dfrac{DE}{GE}=\dfrac{AE}{DE}$，

$\therefore DE^2=GE\cdot AE$，

由①可知$DE=CF$.

$\therefore CF^2=GE\cdot AE$.

故③正确.

$\because ABCD$为正方形，且边长为4，

$\therefore AB=BC=AD=4$，

$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$AC=\sqrt{2}AB=4\sqrt{2}$.

由①可知，$\triangle ADG\cong\triangle AMG(\mathrm{ASA})$，

$\therefore AM=AD=4$，

$\therefore CM=AC-AM=4\sqrt{2}-4$

由图可知，$\triangle DMC$和$\triangle ADM$等高，设高为h，

$\therefore S_{\triangle ADM}=S_{\triangle ADC}-S_{\triangle DMC}$，

$\therefore \dfrac{4\times h}{2}=\dfrac{4\times 4}{2}-\dfrac{(4\sqrt{2}-4)\cdot h}{2}$，

$\therefore h=2\sqrt{2}$，

$\therefore S_{\triangle ADM}=\dfrac{1}{2}\cdot AM\cdot h=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

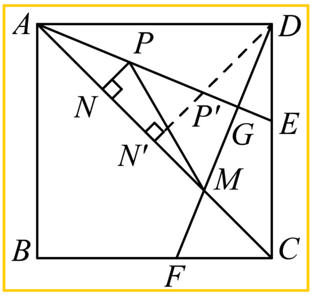
故④不正确.

由①可知，$\triangle ADG\cong\triangle AMG(\mathrm{ASA})$，

$\therefore DG=GM$，

$\therefore M$关于线段AG的对称点为D，过点D作$DN'\perp AC$，交AC于N'，交AE于P'，

$\therefore PM+PN$最小即为DN'，如图所示，



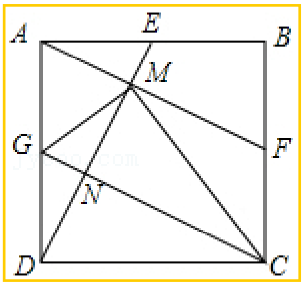
由④可知$\triangle ADM$的高$h=2\sqrt{2}$即为图中的DN'，

$\therefore DN'=2\sqrt{2}$.

故②不正确.

综上所述，正确的是①③

2．如图，正方形$ABCD$中，点E、F、G分别为边AB、BC、AD上的中点，连接AF、DE交于点M，连接GM、CG，CG与DE交于点N，则结论①$GM\perp CM$；②$CD=DM$；③四边形$AGCF$是平行四边形；④$\angle CMD=\angle AGM$中，正确的有(　　)个.



A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】B

【解答】解：$\because AG//FC$且$AG=FC$，

$\therefore$四边形$AGCF$为平行四边形，故③正确；

$\therefore \angle GAF=\angle FCG=\angle DGC$，$\angle AMN=\angle GND$

在ΔADE和ΔBAF中，

$\because \begin{cases} AE=BF \\ \angle DAE=\angle ABF \\ AD=AB \end{cases}$，

$\therefore \Delta ADE\cong\Delta BAF(SAS)$，

$\therefore \angle ADE=\angle BAF$，

$\because \angle ADE+\angle AEM=90^\circ$

$\therefore \angle EAM+\angle AEM=90^\circ$

$\therefore \angle AME=90^\circ$

$\therefore \angle GND=90^\circ$

$\therefore \angle DE\perp AF$，$DE\perp CG$．

$\because G$点为AD中点，

$\therefore GN$为ΔADM的中位线，

即CG为DM的垂直平分线，

$\therefore GM=GD$，$CD=CM$，故②错误；

在ΔGDC和ΔGMC中，

$\because \begin{cases} DG=MG \\ CD=CM \\ CG=CG \end{cases}$，

$\therefore \Delta GDC\cong\Delta GMC(SSS)$，

$\therefore \angle CDG=\angle CMG=90^\circ$，

$\angle MGC=\angle DGC$，

$\therefore GM\perp CM$，故①正确；

$\because \angle CDG=\angle CMG=90^\circ$，

$\therefore G$、D、C、M四点共圆，

$\therefore \angle AGM=\angle DCM$，

$\because CD=CM$，

$\therefore \angle CMD=\angle CDM$，

在$Rt\Delta AMD$中，$\angle AMD=90^\circ$，

$\therefore DM < AD$，

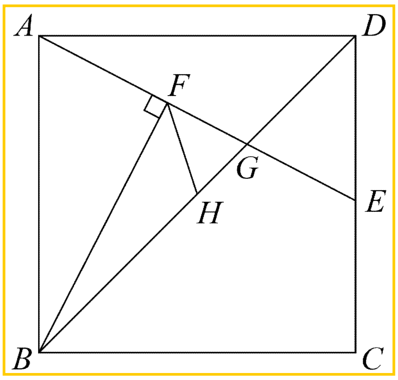
$\therefore DM < CD$，

$\therefore \angle DMC \neq \angle DCM$，

$\therefore \angle CMD \neq \angle AGM$，故④错误．

2203·绥化·中考真题

3．如图，在正方形$ABCD$中，点E为边CD的中点，连接AE，过点B作$BF \perp AE$于点F，连接BD交AE于点G，FH平分$\angle BFG$交BD于点H．则下列结论中，正确的个数为（　）



①$AB^2 = BF \cdot AE$；②$S_{\triangle BGF} : S_{\triangle BAF} = 2:3$；③当$AB = a$时，$BD^2 - BD \cdot HD = a^2$

A．0个　　B．1个　　C．2个　　D．3个

【答案】D

【详解】∵四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore \angle BAD = \angle ADE = 90^\circ$，$AB = AD$

$\because BF \perp AE$

$\therefore \angle ABF = 90^\circ - \angle BAF = \angle DAE$

$\therefore \cos \angle ABF = \cos \angle EAD$

即$\dfrac{BF}{AB} = \dfrac{AD}{AE}$，又$AB = AD$，

$\therefore AB^2 = BF \cdot AE$，故①正确；

设正方形的边长为a，

∵点E为边CD的中点，

$\therefore DE = \dfrac{a}{2}$，

$\therefore \tan \angle ABF = \operatorname{tans} \angle EAD = \dfrac{1}{2}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ABE$中，$AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{5}AF = a$，

$\therefore AF = \dfrac{\sqrt{5}}{5}a$

在$\mathrm{Rt}\triangle ADE$中，$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \dfrac{\sqrt{5}a}{2}$

$\therefore EF = AE - AF = \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{\sqrt{5}}{5}a = \frac{3\sqrt{5}}{10}a$,

$\because AB // DE$

$\therefore \triangle GAB \backsim \triangle GED$

$\therefore \frac{AG}{GE} = \frac{AB}{DE} = 2$

$\therefore GE = \frac{1}{3}AE = \frac{\sqrt{5}}{6}a$

$\therefore FG = AE - AF - GE = \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{\sqrt{5}}{5}a - \frac{\sqrt{5}}{6}a = \frac{2\sqrt{5}}{15}a$

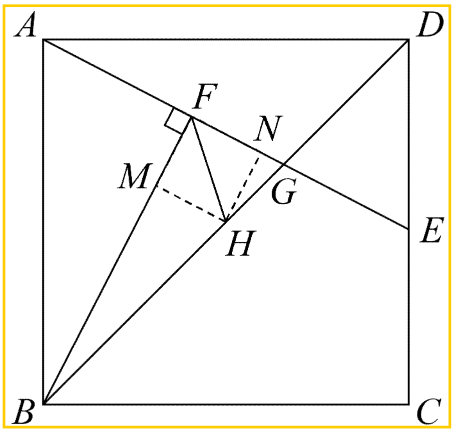
$\therefore \frac{AF}{FG} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}a}{\frac{2\sqrt{5}}{15}a} = \frac{3}{2}$

$\therefore S_{\triangle BGF} : S_{\triangle BAF} = 2:3$，故②正确；

$\because AB = a$，

$\therefore BD^2 = AB^2 + AD^2 = 2a^2$，

如图所示，过点H分别作BF, AE的垂线，垂足分别为M, N，



又$\because BF \perp AE$，

$\therefore$四边形$FMHN$是矩形，

$\because FH$是$\angle BFG$的角平分线，

$\therefore HM = HN$，

$\therefore$四边形$FMHN$是正方形，

$\therefore FN = HM = HN$

$\because BF = 2AF = \frac{2\sqrt{5}}{5}a, FG = \frac{2\sqrt{5}}{15}a$

$\therefore \frac{MH}{BM} = \frac{FG}{BF} = \frac{1}{3}$

设$MH = b$，则$BF = BM + FM = BM + MH = 3b + b = 4b$

在$\text{Rt}\triangle BMH$中，$BH = \sqrt{BM^2 + MH^2} = \sqrt{10}b$，

$\because BF = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$

$\therefore \dfrac{2\sqrt{5}}{5}a=4b$

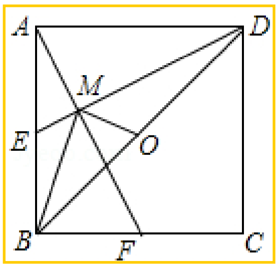
解得：$b=\dfrac{\sqrt{5}}{10}a$

$\therefore BH=\sqrt{10}\times\dfrac{\sqrt{5}}{10}a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，

$\therefore BD^2-BD\cdot HD=2a^2-\sqrt{2}a\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}a=a^2$，故④正确

4．如图，已知E，F分别为正方形$ABCD$的边AB，BC的中点，AF与DE交于点M，O为BD的中点，则下列结论：

①$\angle AME=90^\circ$；②$\angle BAF=\angle EDB$；③$\angle BMO=90^\circ$；④$MD=2AM=4EM$；⑤$AM=\dfrac{2}{3}MF$．其中正确结论的是(　　)



A．①③④　　B．②④⑤　　C．①③④⑤　　D．①③⑤

【解答】解：在正方形$ABCD$中，$AB=BC=AD$，$\angle ABC=\angle BAD=90^\circ$，

$\because E$、F分别为边AB，BC的中点，

$\therefore AE=BF=\dfrac{1}{2}BC$，

在ΔABF和ΔDAE中，

$$\begin{cases}AE=BF\\ \angle ABC=\angle BAD\\ AB=AD\end{cases}，$$

$\therefore \Delta ABF\cong\Delta DAE(SAS)$

$\therefore \angle BAF=\angle ADE$，

$\because \angle BAF+\angle DAF=\angle BAD=90^\circ$，

$\therefore \angle ADE+\angle DAF=\angle BAD=90^\circ$，

$\therefore \angle AMD=180^\circ-(\angle ADE+\angle DAF)=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

$\therefore \angle AME=180^\circ-\angle AMD=180^\circ-90^\circ=90^\circ$，故①正确；

$\because DE$是ΔABD的中线，

$\therefore \angle ADE\neq\angle EDB$，

$\therefore \angle BAF\neq\angle EDB$，故②错误；

$\because \angle BAD=90^\circ$，$AM\perp DE$，

$\therefore \Delta AED\backsim\Delta MAD\backsim\Delta MEA$，

$\therefore \frac{AM}{EM}=\frac{MD}{AM}=\frac{AD}{AE}=2$,

$\therefore AM=2EM$，$MD=2AM$,

$\therefore MD=2AM=4EM$，故④正确;

设正方形$ABCD$的边长为$2a$，则$BF=a$,

在Rt△ABF中，$AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{5}a$,

$\because \angle BAF=\angle MAE$，$\angle ABC=\angle AME=90°$,

$\therefore \Delta AME \backsim \Delta ABF$,

$\therefore \frac{AM}{AB}=\frac{AE}{AF}$,

即$\frac{AM}{2a}=\frac{a}{\sqrt{5}a}$,

解得$AM=\frac{2\sqrt{5}}{5}a$,

$\therefore MF=AF-AM=\sqrt{5}a-\frac{2\sqrt{5}}{5}a=\frac{3\sqrt{5}}{5}a$,

$\therefore AM=\frac{2}{3}MF$，故⑤正确;

如图，过点M作$MN\perp AB$于N,

则$\frac{MN}{BF}=\frac{AN}{AB}=\frac{AM}{AF}$,

即$\frac{MN}{a}=\frac{AN}{2a}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}a}{\sqrt{5}a}$,

解得$MN=\frac{2}{5}a$，$AN=\frac{4}{5}a$,

$\therefore NB=AB-AN=2a-\frac{4}{5}a=\frac{6}{5}a$,

根据勾股定理，$BM=\sqrt{BN^2+MN^2}=\frac{2\sqrt{10}}{5}a$,

过点M作$GH // AB$，过点O作$OK\perp GH$于K,

则$OK=a-\frac{2}{5}a=\frac{3}{5}a$，$MK=\frac{6}{5}a-a=\frac{1}{5}a$,

在Rt△MKO中，$MO=\sqrt{MK^2+OK^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}a$,

根据正方形的性质，$BO=2a\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}a$,

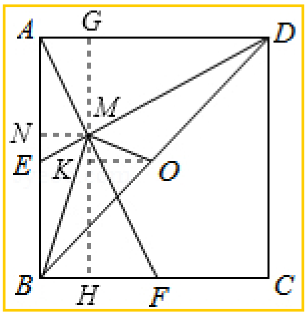
$\because BM^2+MO^2=(\frac{2\sqrt{10}}{5}a)^2+(\frac{\sqrt{10}}{5}a)^2=2a^2$,

$BO^2=(\sqrt{2}a)^2=2a^2$,

$\therefore BM^2+MO^2=BO^2$,

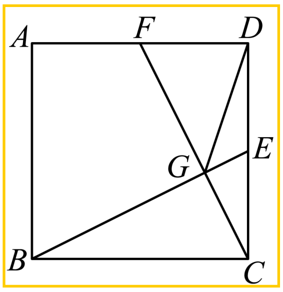
$\therefore \Delta BMO$ 是直角三角形，$\angle BMO = 90°$，故③正确；

综上所述，正确的结论有①③④⑤共 4 个



5．如图，在正方形 $ABCD$ 中，E、F 分别在 CD、AD 边上，且 $CE = DF$，连接 BE、CF 相交于 G 点．则下列结论：① $BE = CF$；② $S_{\triangle BCG} = S_{四边形DFGE}$；③ $CG^2 = BG \cdot GE$；④当 E 为 CD 中点时，连接 DG，则 $\angle FGD = 45°$，

正确的结论是________．（填序号）



【答案】①②③④

【分析】①由“SAS”可证 $\triangle BCE \cong \triangle CDF$，可得 $BE = CF$；

②由全等三角形的性质可得 $S_{\triangle BCQ} = S_{\triangle CDF}$，由面积和差关系可得 $S_{\triangle BCG} = S_{四边形DFGE}$；

③通过证明 $\triangle BCG \backsim \triangle CEG$，可得 $\dfrac{CG}{BG} = \dfrac{GE}{GC}$，可得结论；

④通过证明点 D，点 E，点 G，点 F 四点共圆，可证 $\angle DEF = \angle DGF = 45°$．

【详解】解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore BC = CD$，$\angle BCD = \angle CDF = 90°$，

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases} BC = CD \\ \angle BCD = \angle CDF = 90° \\ CE = DF \end{cases},$$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle CDF(\text{SAS})$，

$\therefore BE = CF$，故①正确，

$\because \triangle BCE \cong \triangle CDF$，

$\therefore S_{\triangle BCE} = S_{\triangle CDF}$，

$\therefore S_{\triangle BCG} = S_{四边形DFGE}$；故②正确，

$\because \triangle BCE \cong \triangle CDF$，

$\therefore \angle DCF = \angle EBC$，

$\because \angle DCF + \angle BCG = 90°$，

$\therefore \angle EBC+\angle BCG=90^{\circ}$，

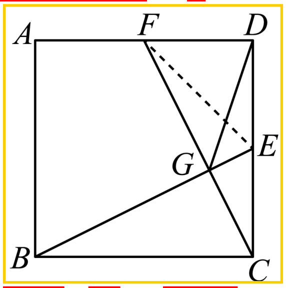
$\therefore \angle BGC=\angle EGC=90^{\circ}$，

$\therefore \triangle BCG \backsim \triangle CEG$，

$\therefore \dfrac{CG}{BG}=\dfrac{GE}{GC}$，

$\therefore CG^{2}=BG \cdot GE$；故③正确；

如图，连接EF，



$\because$点E是CD中点，

$\therefore DE=CE$，

$\because CE=DF$，

$\therefore DF=CE=DE$，

$\therefore \angle DFE=\angle DEF=45^{\circ}$，

$\because \angle ADC=\angle EGF=90^{\circ}$，

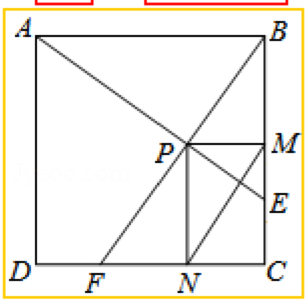
$\therefore$点D，点E，点G，点F四点共圆，

$\therefore \angle DEF=\angle DGF=45^{\circ}$，故④正确；

综上所述：正确的有①②③④

题型三　对角线模型

1．如图，在边长为1的正方形$ABCD$中，动点F，E分别以相同的速度从D，C两点同时出发向C和B运动（任何一个点到达即停止），连接AE、BF交于点P，过点P作$PM//CD$交BC于M点，$PN//BC$交CD于N点，连接MN，在运动过程中则下列结论：①$\Delta ABE \cong \Delta BCF$；②$AE=BF$；③$AE \perp BF$；④$CF^{2}=PE \bullet BF$；⑤线段$MN$的最小值为$\dfrac{\sqrt{5}-2}{2}$．其中正确的结论有(　　)



A．2个　　B．3个　　C．4个　　D．5个

【解答】解：$\because$动点F，E的速度相同，

$\therefore DF=CE$，

又$\because CD = BC$，

$\therefore CF = BE$，

在ΔABE和ΔBCF中，

$$\begin{cases} AB = BC \\ \angle ABE = \angle BCF = 90^\circ \\ BE = CF \end{cases}$$

$\therefore \Delta ABE \cong \Delta BCF(SAS)$，故①正确；

$\therefore \angle BAE = \angle CBF$，$AE = BF$，故②正确；

$\because \angle BAE + \angle BEA = 90^\circ$，

$\therefore \angle CBF + \angle BEA = 90^\circ$，

$\therefore \angle APB = 90^\circ$，故③正确；

在ΔBPE和ΔBCF中，

$\because \angle BPE = \angle BCF$，$\angle PBE = \angle CBF$

$\therefore \Delta BPE \backsim \Delta BCF$，

$\therefore \dfrac{PE}{CF} = \dfrac{BE}{BF}$，

$\therefore CF \bullet BE = PE \bullet BF$，

$\because CF = BE$，

$\therefore CF^2 = PE \bullet BF$，故④正确；

$\because$点P在运动中保持$\angle APB = 90^\circ$，

$\therefore$点P的路径是一段以AB为直径的弧，

如图，设AB的中点为G，连接CG交弧于点P，此时CP的长度最小，

在RtΔBCG中，$CG = \sqrt{BC^2 + BG^2} = \sqrt{1 + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

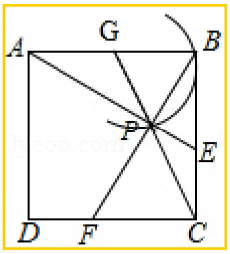
$\because PG = \dfrac{1}{2} AB = \dfrac{1}{2}$，

$\therefore MN = CP = CG - PG = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

即线段MN的最小值为$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，故⑤错误；

综上可知正确的有 4 个，

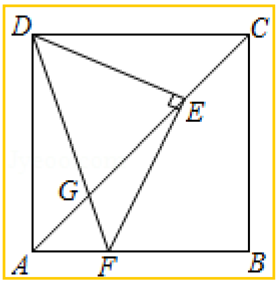
故选：C.



2．如图，正方形 $ABCD$ 中，$AB=3$，点 E 是对角线 AC 上的一点，连接 DE，过点 E 作 $EF\perp DE$，交 AB 于点 F，连接 DF 交 AC 于点 G，下列结论：

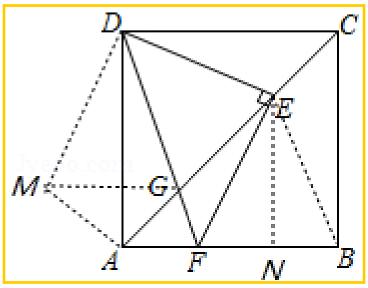
①$DE=EF$；②$\angle ADF=\angle AEF$；③$DG^{2}=GE\bullet GC$；④若 $AF=1$，则 $EG=\dfrac{5}{4}\sqrt{2}$，其中结论正确的个数是

(　　)



A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

【解答】解：如图，连接 BE，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore CB=CD$，$\angle BCE=\angle DCE=45^{\circ}$

在 ΔBEC 和 ΔDEC 中，

$$\begin{cases} DC=BC \\ \angle DCE=\angle BCE \\ CE=CE \end{cases},$$

$\therefore \Delta DCE\cong\Delta BCE(SAS)$，

$\therefore DE=BE$，$\angle CDE=\angle CBE$，

$\therefore \angle ADE=\angle ABE$，

$\because \angle DAB=90^{\circ}$，$\angle DEF=90^{\circ}$，

$\therefore \angle ADE+\angle AFE=180^{\circ}$，

$\because \angle AFE+\angle EFB=180^{\circ}$，

$\therefore \angle ADE=\angle EFB$，

$\therefore \angle ABE=\angle EFB$，

$\therefore EF=BE$，

$\therefore DE=EF$，故①正确；

$\because \angle DEF=90^\circ$，$DE=EF$，

$\therefore \angle EDF=\angle DFE=45^\circ$，

$\because \angle DAC=45^\circ$，$\angle AGD=\angle EGF$，

$\therefore \angle ADF=\angle AEF$，故②正确；

$\because \angle GDE=\angle DCG=45^\circ$，$\angle DGE=\angle CGD$，

$\therefore \Delta DGE\backsim\Delta CGD$，

$\therefore \dfrac{DG}{EG}=\dfrac{CG}{DG}$，

即$DG^2=GE\cdot CG$，故③正确；

如图，过点E作$EN\perp AB$于点N，

$\because AF=1$，$AB=3$，

$\therefore BF=2$，$AC=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，

$\because BE=EF$，

$\therefore FN=BN=1$，

$\therefore AN=2$，

$\therefore AE=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore CE=AC-AE=\sqrt{2}$，

将ΔDEC绕点A逆时针旋转90°得到ΔDMA，连接MG，

易证$\Delta DMG\cong\Delta DEG(SAS)$，$\Delta AMG$是直角三角形，

$\therefore MG=GE$，

$\therefore MG^2=EG^2=AM^2+AG^2=CE^2+AG^2$，

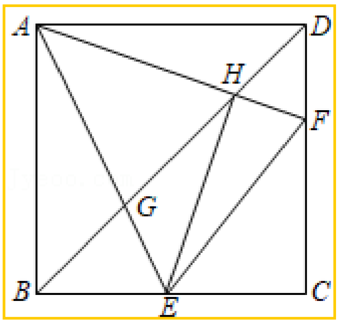
设$EG=x$，则$AG=2\sqrt{2}-x$，

$\therefore (\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2}-x)^2=x^2$，

解得：$x=\dfrac{5}{4}\sqrt{2}$，即$EG=\dfrac{5}{4}\sqrt{2}$，故④正确．

故选：D．

3．如图，正方形$ABCD$中，点E，F分别为边BC，CD上的点，连接AE，AF，与对角线BD分别交于点G，H，连接EH．若$\angle EAF=45^\circ$，则下列判断错误的是(　　)



A．$BE+DF=EF$　　　　B．$BG^2+HD^2=GH^2$

C．E，F分别为边BC，CD的中点　　　　D．$AH\perp EH$

【解答】解：如图1，将ΔADF绕点A顺时针旋转$90°$得到ΔABM，此时AB与AD重合，

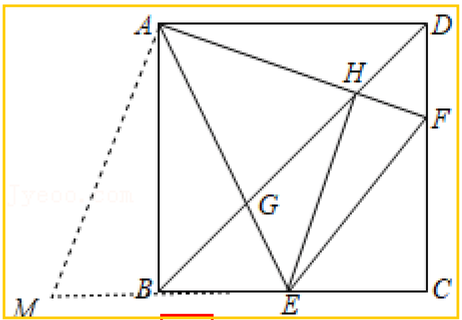


图1

由旋转可得：$AB=AD$，$BM=DF$，$\angle DAF=\angle BAM$，$\angle ABM=\angle D=90°$，$AM=AF$，

$\therefore \angle ABM+\angle ABE=90°+90°=180°$，

$\therefore$点M，B，E在同一条直线上．

$\because \angle EAF=45°$，

$\therefore \angle DAF+\angle BAE=\angle BAD-\angle EAE=90°-45°=45°$．

$\because \angle BAE=\angle DAF$，

$\therefore \angle BAM+\angle BAE=45°$

即$\angle MAE=\angle FAE$．

在ΔAME与ΔAFE中，

$$\begin{cases} AM=AF \\ \angle MAE=\angle FAE \\ AE=AE \end{cases}$$，

$\therefore \Delta AME\cong\Delta AFE(SAS)$

$\therefore ME=EF$，

$\therefore EF=BE+DF$，故A选项不合题意，

如图2，将ΔADH绕点A顺时针旋转$90°$得到ΔABN，此时AB与AD重合，

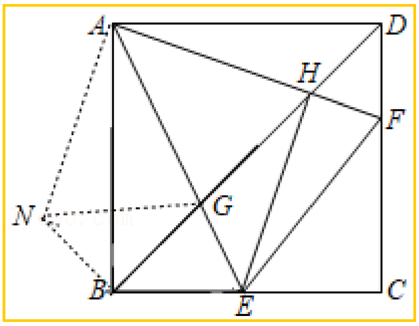


图2

$\therefore \Delta ADH \cong \Delta ABN$，

$\therefore AN = AH$，$\angle BAN = \angle DAH$，$\angle ADH = \angle ABN = 45°$，$DH = BN$，

$\therefore \angle NBG = 90°$，

$\therefore BN^2 + BG^2 = NG^2$，

$\because \angle EAF = 45°$，

$\therefore \angle DAF + \angle BAE = 45°$，

$\therefore \angle BAN + \angle BAE = 45° = \angle NAE$，

$\therefore \angle NAE = \angle EAF$，

又$\because AN = AH$，$AG = AG$，

$\therefore \Delta ANG \cong \Delta AHG(SAS)$，

$\therefore GH = NG$，

$\therefore BN^2 + BG^2 = NG^2 = GH^2$，

$\therefore DH^2 + BG^2 = GH^2$，故$B$选项不合题意；

$\because \angle EAF = \angle DBC = 45°$，

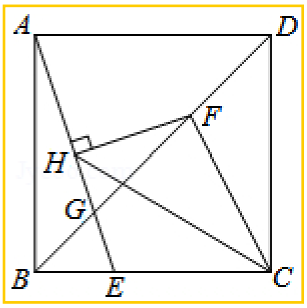
$\therefore$点A，点B，点E，点H四点共圆，

$\therefore \angle AHE = \angle ABE = 90°$，

$\therefore AH \perp HE$，故D选项不合题意，

故选：C．

4．在正方形$ABCD$中，点E为BC边上一点且$CE = 2BE$，点F为对角线BD上一点且$BF = 2DF$，连接AE交BD于点G，过点F作$FH \perp AE$于点H，连接CH、CF，若$HG = 2cm$，则ΔCHF的面积是__$\dfrac{56}{5}$__cm^2．



【解答】解：如图，过F作$FI\perp BC$于I，连接FE，FA，

$\therefore FI//CD$，

$\because CE=2BE$，$BF=2DF$，

$\therefore$设$BE=EI=IC=a$，$CE=FI=2a$，$AB=3a$，

$\therefore$则$FE=FC=FA=\sqrt{5}a$，

$\therefore H$为AE的中点，

$\therefore HE=\frac{1}{2}AE=\frac{\sqrt{10}a}{2}$，

$\because$四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore BG$平分$\angle ABC$，

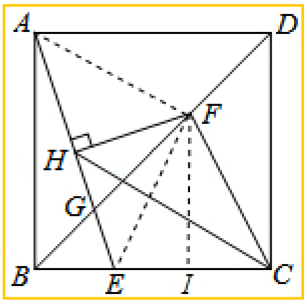
$\therefore \frac{EG}{AG}=\frac{BE}{AB}=\frac{1}{3}$，

$\therefore HG=\frac{1}{4}AE=\frac{\sqrt{10}}{4}a=2$，

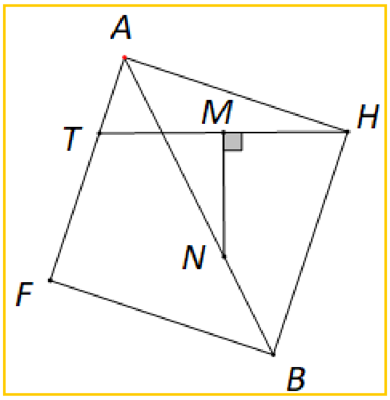
$\therefore a=\frac{4}{5}\sqrt{10}$，

$\therefore S_{\Delta CHF}=S_{\Delta HEF}+S_{\Delta CEF}-S_{\Delta CEH}=\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{10}}{2}a)^2+\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a-\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\frac{3}{2}a=\frac{7}{4}a^2=\frac{56}{5}$，

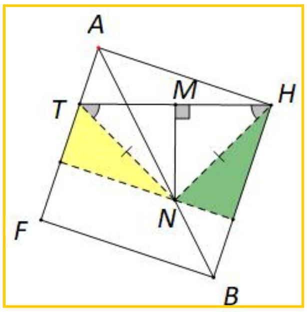
故答案为：$\frac{56}{5}$.



5.如图，正方形 AFBH,点 T 是边 AF 上一动点,M 是 HT 的中点,MN⊥HT 交 AB 于 N,当点 T 在 AF 上运动时,$\frac{MN}{HT}$的值是否发生改变?若改变求出其变化范围:若不改变请求出其值并给出你的证明



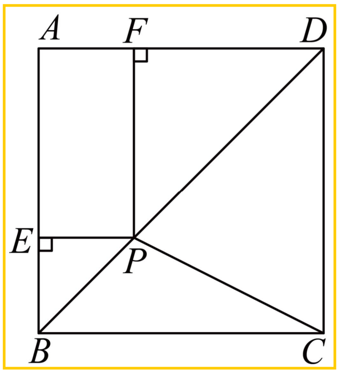
【解析】易知NT=HN，证明∠TNH=90°即可



TN=HN⇒TN⊥HN

2023·攀枝花·中考真题

6．如图，已知正方形$ABCD$的边长为3，点P是对角线BD上的一点，$PF \perp AD$于点F，$PE \perp AB$于点E，连接PC，当$PE:PF=1:2$时，则$PC=$（　）

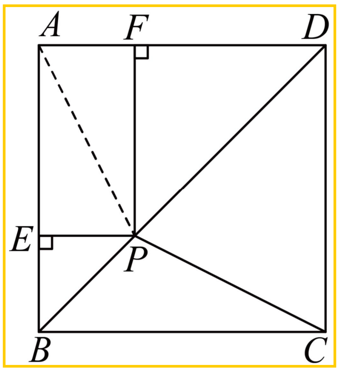


A．$\sqrt{3}$　　B．2　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\frac{5}{2}$

【答案】C

【分析】先证四边形$AEPF$是矩形，可得$PE=AF$，$\angle PFD=90°$，由等腰直角三角形的性质可得$PF=DF$，可求AF，DF的长，由勾股定理可求AP的长，由"SAS"可证$\triangle ABP \cong \triangle CBP$，可得$AP=PC=\sqrt{5}$．

【详解】解：如图：



连接AP，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB = AD = 3$，$\angle ADB = 45°$，

$\because PF \perp AD$，$PE \perp AB$，$\angle BAD = 90°$，

$\therefore$ 四边形 $AEPF$ 是矩形，

$\therefore PE = AF$，$\angle PFD = 90°$，

$\therefore \triangle PFD$是等腰直角三角形，

$\therefore PF = DF$，

$\because PE : PF = 1:2$，

$\therefore AF : DF = 1:2$，

$\therefore AF = 1$，$DF = 2 = PF$，

$\therefore AP = \sqrt{AF^2 + PF^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$，

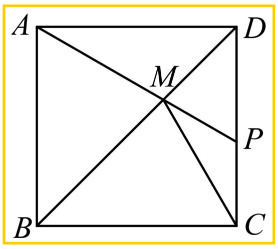
$\because AB = BC$，$\angle ABD = \angle CBD = 45°$，$BP = BP$，

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle CBP(\mathrm{SAS})$，

$\therefore AP = PC = \sqrt{5}$

2023·四川宜宾·统考中考真题

7．如图，边长为 6 的正方形$ABCD$中，M为对角线BD上的一点，连接AM并延长交CD于点P．若$PM = PC$，则 AM 的长为（　　）



A．$3\left(\sqrt{3}-1\right)$　　B．$3\left(3\sqrt{3}-2\right)$　　C．$6\left(\sqrt{3}-1\right)$　　D．$6\left(3\sqrt{3}-2\right)$

【答案】C

【详解】解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形，

$\therefore AD = CD = 6, \angle ADC = 90°, \angle ADM = \angle CDM = 45°$，

在$\triangle ADM$和$\triangle CDM$中，$\begin{cases} DM = DM \\ \angle ADM = \angle CDM = 45^\circ \\ AD = CD \end{cases}$，

$\therefore \triangle ADM \cong \triangle CDM(\text{SAS})$，

$\therefore \angle DAM = \angle DCM$，

$\because PM = PC$，

$\therefore \angle CMP = \angle DCM$，

$\therefore \angle APD = \angle CMP + \angle DCM = 2\angle DCM = 2\angle DAM$，

又$\because \angle APD + \angle DAM = 180^\circ - \angle ADC = 90^\circ$，

$\therefore \angle DAM = 30^\circ$，

设$PD = x$，则$AP = 2PD = 2x$，$PM = PC = CD - PD = 6 - x$，

$\therefore AD = \sqrt{AP^2 - PD^2} = \sqrt{3}x = 6$，

解得$x = 2\sqrt{3}$，

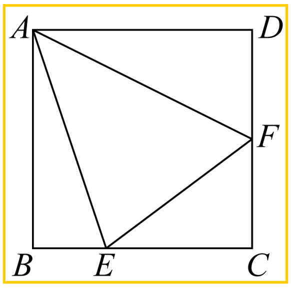
$\therefore PM = 6 - x = 6 - 2\sqrt{3}$，$AP = 2x = 4\sqrt{3}$，

$\therefore AM = AP - PM = 4\sqrt{3} - (6 - 2\sqrt{3}) = 6(\sqrt{3} - 1)$

题型四　半角模型（七个性质）

2023·重庆·中考真题

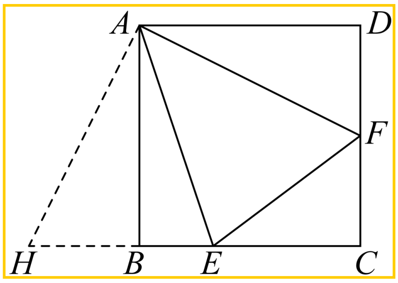
1. 如图，在正方形$ABCD$中，点E，F分别在BC，CD上，连接AE，AF，EF，$\angle EAF=45^\circ$．若$\angle BAE=\alpha$，则$\angle FEC$一定等于（ ）



A．2α　　B．$90^\circ-2\alpha$　　C．$45^\circ-\alpha$　　D．$90^\circ-\alpha$

【答案】A

【详解】将$\triangle ADF$绕点A逆时针旋转90°至$\triangle ABH$，



∵四边形$ABCD$是正方形，

∴$AB=AD$，$\angle ABC=\angle D=\angle BAD=\angle C=90^\circ$，

由旋转性质可知：$\angle DAF=\angle BAH$，$\angle D=\angle ABH=90^\circ$，$AF=AH$，

∴$\angle ABH+\angle ABC=180^\circ$，

∴点H，B，C三点共线，

∵$\angle BAE=\alpha$，$\angle EAF=45^\circ$，$\angle BAD=\angle HAF=90^\circ$，

∴$\angle DAF=\angle BAH=45^\circ-\alpha$，$\angle EAF=\angle EAH=45^\circ$，

∵$\angle AHB+\angle BAH=90^\circ$，

∴$\angle AHB=45^\circ+\alpha$，

在$\triangle AEF$和$\triangle AEH$中

$$\begin{cases}AF=AH\\ \angle FAE=\angle HAE\\ AE=AE\end{cases},$$

∴$\triangle AFE\cong\triangle AHE(SAS)$，

∴$\angle AHE=\angle AFE=45^\circ+\alpha$，

∴$\angle AHE=\angle AFD=\angle AFE=45^\circ+\alpha$，

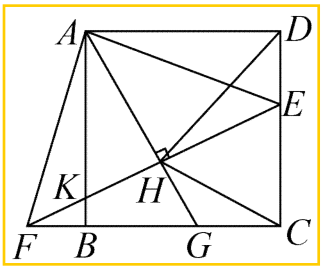
$\therefore \angle DFE = \angle AFD + \angle AFE = 90° + 2\alpha$，

$\because \angle DFE = \angle FEC + \angle C = \angle FEC + 90°$

$\therefore \angle FEC = 2\alpha$

2023·眉山·中考真题

2．如图，在正方形$ABCD$中，点E是CD上一点，延长CB至点F，使$BF = DE$，连结AE, AF, EF，EF交AB于点K，过点A作$AG \perp EF$，垂足为点H，交CF于点G，连结HD，HC．下列四个结论：① $AH = HC$；② $HD = CD$；③ $\angle FAB = \angle DHE$；④ $AK \cdot HD = \sqrt{2}HE^2$．其中正确结论的个数为（　）



A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．4个

【答案】C

【分析】根据正方形$ABCD$的性质可由SAS定理证$\triangle ABF \cong \triangle ADE$，即可判定$\triangle AEF$是等腰直角三角形，进而可得$HE = HF = AH = \frac{1}{2}EF$，由直角三角形斜边中线等于斜边一半可得$HC = \frac{1}{2}EF$；由此即可判断①正确；再根据$\angle ADH + \angle EAD = \angle DHE + \angle AEH$，可判断③正确，进而证明$\triangle AFK \sim \triangle HDE$，可得$\frac{AF}{HD} = \frac{AK}{HE}$，结合$AF = \sqrt{2}AH = \sqrt{2}HE$，即可得出结论④正确，由$\angle AED$随着$DE$长度变化而变化，不固定，可 判断② $HD = CD$不一定成立.

【详解】解：$\because$正方形$ABCD$，

$\therefore AB = AD$，$\angle ADC = \angle ABC = \angle BAD = \angle BCD = 90°$，

$\therefore \angle ABF = \angle ADC = 90°$，

$\because BF = DE$，

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle ADE$（SAS），

$\therefore \angle BAF = \angle DAE$，　$AF = AE$，

$\therefore \angle FAE = \angle BAF + \angle BAE = \angle DAE + \angle BAE = \angle BAD = 90°$，

$\therefore \triangle AEF$是等腰直角三角形，$\angle AEF = \angle AFE = 45°$，

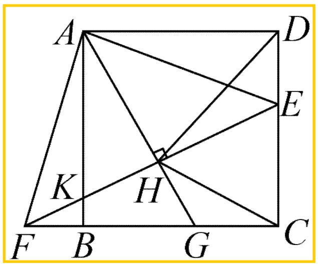
$\because AH \perp EF$，

$\therefore HE = HF = AH = \frac{1}{2}EF$，

$\because \angle DCB = 90°$，

$\therefore CH = HE = \frac{1}{2}EF$，

$\therefore CH = AH$，故①正确；



又∵$AD=CD$，$HD=HD$，

∴$\triangle AHD\cong\triangle CHD(SSS)$，

∴$\angle ADH=\angle CDH=\frac{1}{2}\angle ADC=45^\circ$，

∵$\angle ADH+\angle EAD=\angle DHE+\angle AEH$，即：$45^\circ+\angle EAD=\angle DHE+45^\circ$，

∴$\angle EAD=\angle DHE$，

∴$\angle FAB=\angle DHE=\angle EAD$，故③正确，

又∵$\angle AFE=\angle ADH=45^\circ$，

∴$\triangle AFK\sim\triangle HDE$，

∴$\frac{AF}{HD}=\frac{AK}{HE}$，

又∵$AF=\sqrt{2}AH=\sqrt{2}HE$，

∴$AK\cdot HD=\sqrt{2}HE^2$，故④正确，

∵若$HD=CD$，则$\angle DHC=\angle DCH=\frac{180^\circ-45^\circ}{2}=67.5^\circ$，

又∵$CH=HE$，

∴$\angle HCE=\angle HEC=67.5^\circ$，

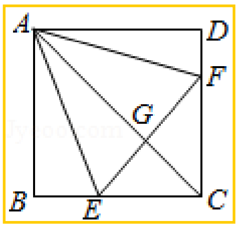
而点E是CD上一动点，$\angle AED$随着DE长度变化而变化，不固定，

而$\angle HEC=180^\circ-\angle AED-45^\circ=135^\circ-\angle AED$，

则故$\angle HEC=67.5^\circ$不一定成立，故②错误；

综上，正确的有①③④共3个

3．如图，在正方形$ABCD$中，点E，F分别在BC，CD上，$AE=AF$，AC与EF相交于点G．下列结论：①AC垂直平分EF；②$BE+DF=EF$；③当$\angle DAF=15^\circ$时，ΔAEF为等边三角形；④当$\angle EAF=60^\circ$时，$\angle AEB=\angle AEF$．其中正确的结论是(　　)



A．①③　　B．②④　　C．①③④　　D．②③④

【解答】解：∵四边形$ABCD$是正方形，

∴$AB=AD=BC=CD$，$\angle B=\angle D=90^\circ$，$\angle ACD=\angle ACB=45^\circ$，

∵$AB=AD$，$AE=AF$，

$\therefore \mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ABE} \cong \mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ADF}(\mathrm{HL})$，

$\therefore BE = DF$，

$\therefore CE = CF$，

又$\because \angle ACD = \angle ACB = 45°$，

$\therefore AC$垂直平分EF，故①正确；

$\because CE = CF$，$\angle BCD = 90°$，AC垂直平分EF，

$\therefore EG = GF$，

当AE平分$\angle BAC$时，$BE = EG$，即$BE + DF = EF$，故②错误；

$\because \mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ABE} \cong \mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ADF}$，

$\therefore \angle DAF = \angle BAE = 15°$，

$\therefore \angle EAF = 60°$，

又$\because AE = AF$，

$\therefore \Delta AEF$是等边三角形，故③正确；

$\because AE = AF$，$\angle EAF = 60°$，

$\therefore \Delta AEF$是等边三角形，

$\therefore \angle AEF = 60°$，

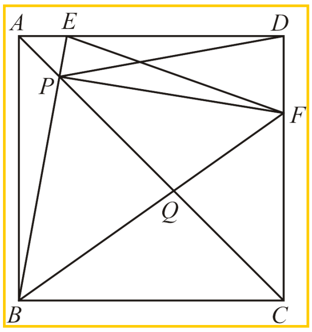
$\because \angle BAC = 45°$，$\angle CAE = 30°$，

$\therefore \angle BAE = 15°$，

$\therefore \angle AEB = 75° \neq \angle AEF$，故④错误.

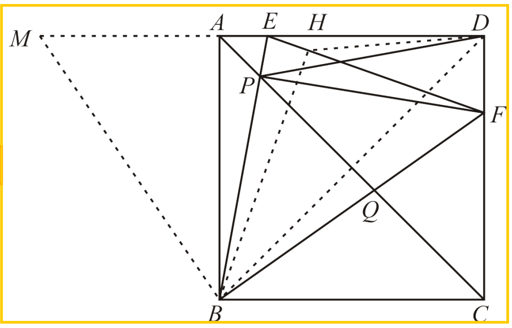
2022 达州·中考真题

4．如图，在边长为 2 的正方形$ABCD$中，点E，F分别为AD，CD边上的动点（不与端点重合），连接BE，BF，分别交对角线AC于点P，Q．点E，F在运动过程中，始终保持$\angle EBF = 45°$，连接EF，PF，PD．以下结论：①$PB = PD$；②$\angle EFD = 2\angle FBC$；③$PQ = PA + CQ$；④$\triangle BPF$为等腰直角三角形；⑤若过点B作$BH \perp EF$，垂足为H，连接DH，则DH的最小值为$2\sqrt{2}-2$．其中所有正确结论的序号是____.



【答案】①②④⑤

【分析】连接BD，延长DA到M，使$AM=CF$，连接BM，根据正方形的性质及线段垂直平分线的性质定理即可判断①正确；通过证明$\triangle BCF \cong \triangle BAM(SAS)$，$\triangle EBF \cong \triangle EBM(SAS)$，可证明②正确；作$\angle CBN = \angle ABP$，交$AC$的延长线于$K$，在$BK$上截取$BN=BP$，连接$CN$，通过证明$\triangle ABP \cong \triangle CBN$，可判断③错误；通过证明$\triangle BQP \sim \triangle CQF$，$\triangle BCQ \sim \triangle PFQ$，利用相似三角形的性质即可证明④正确；当点$B$、$H$、$D$三点共线时，$DH$的值最小，分别求解即可判断⑤正确.

【详解】

如图1，连接BD，延长DA到M，使$AM=CF$，连接BM，

∵四边形$ABCD$是正方形，

∴AC垂直平分BD，$BA=BC,\angle BCF=90°=\angle BAD=\angle ABC$，

∴$PB=PD$，$\angle BCF=\angle BAM$，$\angle FBC=90°-\angle BFC$，故①正确；

∴$\triangle BCF\cong\triangle BAM(SAS)$，

∴$\angle CBF=\angle ABM, BF=BM, \angle M=\angle BFC$

∵$\angle EBF=45°$，

∴$\angle ABE+\angle CBF=45°$，

∴$\angle ABE+\angle ABM=45°$，

即$\angle EBM=\angle EBF$，

∵$BE=BE$，

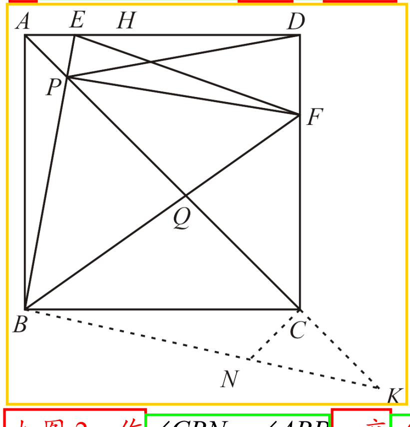
∴$\triangle EBF\cong\triangle EBM(SAS)$，

∴$\angle M=\angle EFB, \angle MEB=\angle FEB$，

∴$\angle EFB=\angle CFB$，

∴$\angle EFD=180°-(\angle EFB+\angle CFB)=180°-2\angle BFC$，

∴$\angle EFD=2\angle FBC$，故②正确；



如图2，作$\angle CBN=\angle ABP$，交AC的延长线于K，在BK上截取$BN=BP$，连接CN，

∴$\triangle ABP\cong\triangle CBN$，

∴$\angle BAP=\angle BCN=45°$，

∵$\angle ACB=45°$，

∴$\angle NCK=90°$，

∴$\angle CNK\neq\angle K$，即$CN\neq CK$，

∴$PQ\neq PA+CQ$，故③错误；

如图1，

∵四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore \angle EBF=\angle BCP=\angle FCP=45^\circ$

$\because \angle BQP=\angle CQF$

$\therefore \triangle BQP\sim\triangle CQF$

$\therefore \frac{BQ}{CQ}=\frac{PQ}{FQ}$,

$\because \angle BQC=\angle PQF$,

$\therefore \triangle BCQ\sim\triangle PFQ$,

$\therefore \angle BCQ=\angle PFQ=45^\circ$,

$\therefore \angle PBF=\angle PFB=45^\circ$,

$\therefore \angle BPF=90^\circ$,

$\therefore \triangle BPF$为等腰直角三角形，故④正确；

如图 1，当点B、H、D三点共线时，DH的值最小，

$\therefore BD=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

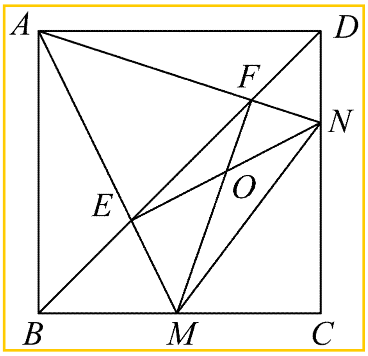
$\because \angle BAE=\angle BHE=90^\circ, BE=BE$，

$\therefore \triangle BAE\cong\triangle BHE(AAS)$，

$\therefore BA=BH=2$，

$\therefore DH=BD-BH=2\sqrt{2}-2$，故⑤正确

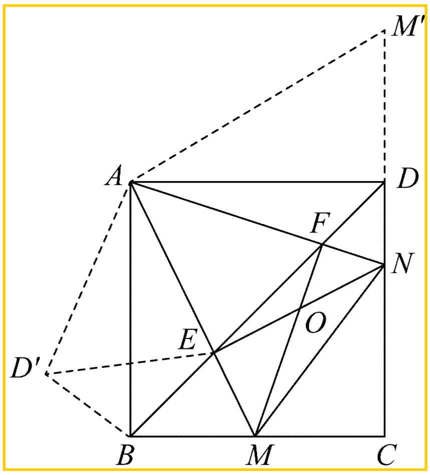
5．如图，点M、N分别是正方形$ABCD$的边BC、CD上的两个动点，在运动过程中保持$\angle MAN=45^\circ$，AM、AN分别与对角线BD交于点E、F，连接EN、FM相交于点O，以下结论：①$MN=BM+DN$；②$BE^2+DF^2=EF^2$；③$BC^2=BF\cdot DE$；④$OM=\sqrt{2}OF$，一定成立的是__________．



【答案】①②③

【分析】由旋转的性质可得 $AM'=AM$，$BM=DM'$，$\angle BAM=\angle DAM'$，$\angle MAM'=90^\circ$，$\angle ABM=\angle ADM'=90^\circ$，由$SAS$可证$\triangle AMN\cong\triangle AM'N$，可得$MN=NM'$，可得$MN=BM+DN$，故①正确；由 SAS 可证$\triangle AEF\cong\triangle AED'$，可得$EF=D'E$，由勾股定理可得$BE^2+DF^2=EF^2$；故②正确；通过证明$\triangle DAE\backsim\triangle BFA$，可得$\frac{DE}{AB}=\frac{AD}{BF}$，可证$BC^2=BF\cdot DE$，故③正确；通过证明点 A，点$B$，点$M$，点$F$四点共圆，$\angle ABM=\angle AFM=90^\circ$，$\angle AMF=\angle ABF=45^\circ$，$\angle BAM=\angle BFM$，可证$MO=\sqrt{2}EO$，由$\angle BAM\neq\angle DAN$，可得$OE\neq OF$，故④错误，即可求解．

【详解】解：将$\triangle ABM$绕点 A 逆时针旋转90°，得到$\triangle ADM'$，将$\triangle ADF$绕点 A 顺时针旋转90°，得到$\triangle ABD'$，



$\therefore AM' = AM$，$BM = DM'$，$\angle BAM = \angle DAM'$，$\angle MAM' = 90^\circ$，$\angle ABM = \angle ADM' = 90^\circ$，

$\therefore \angle ADM' + \angle ADC = 180^\circ$，

$\therefore$点M'在直线CD上，

$\because \angle MAN = 45^\circ$，

$\therefore \angle DAN + \angle MAB = 45^\circ = \angle DAN + \angle DAM' = \angle M'AN$

$\therefore \angle M'AN = \angle MAN = 45^\circ$，

又$\because AN = AN$，$AM = AM'$，

$\therefore \triangle AMN \cong \triangle AM'N$（$SAS$），

$\therefore MN = NM'$，

$\therefore M'N = M'D + DN = BM + DN$

$\therefore MN = BM + DN$；故①正确；

$\because$将$\triangle ADF$绕点A顺时针旋转90°，得到$\triangle ABD'$，

$\therefore AF = AD'$，$DF = D'B$，$\angle ADF = \angle ABD' = 45^\circ$，$\angle DAF = \angle BAD'$

$\therefore \angle D'BE = 90^\circ$，

$\because \angle MAN = 45^\circ$，

$\therefore \angle BAE + \angle DAF = 45^\circ = \angle BAD' + \angle BAE = \angle D'AE$，

$\therefore \angle D'AE = \angle EAF = 45^\circ$，

又$\because AE = AE$，$AF = AD'$，

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AED'$（$SAS$），

$\therefore EF = D'E$，

$\because D'E^2 = BE^2 + D'B^2$，

$\therefore BE^2 + DF^2 = EF^2$；故②正确；

$\because \angle BAF = \angle BAE + \angle EAF = \angle BAE + 45^\circ$，$\angle AEF = \angle BAE + \angle ABE = 45^\circ + \angle BAE$，

$\therefore \angle BAF = \angle AEF$，

又$\because \angle ABF = \angle ADE = 45^\circ$，

$\therefore \triangle DAE \backsim \triangle BFA$，

$\therefore \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{AD}{BF}$，

又$\because AB = AD = BC$，

$\therefore BC^2 = DE \cdot BF$，故③正确；

$\because \angle FBM = \angle FAM = 45^\circ$，

∴点 A，点 B，点 M，点 F 四点共圆，

∴$\angle ABM=\angle AFM=90^\circ$，$\angle AMF=\angle ABF=45^\circ$，$\angle BAM=\angle BFM$，

同理可求 $\angle AEN=90^\circ$，$\angle DAN=\angle DEN$，

∴$\angle EOM=45^\circ=\angle EMO$，

∴$EO=EM$，

∴$MO=\sqrt{2}\ EO$，

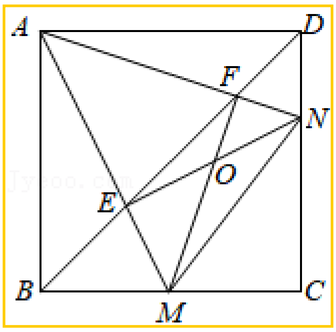
∵$\angle BAM\neq\angle DAN$，

∴$\angle BFM\neq\angle DEN$，

∴$EO\neq FO$，

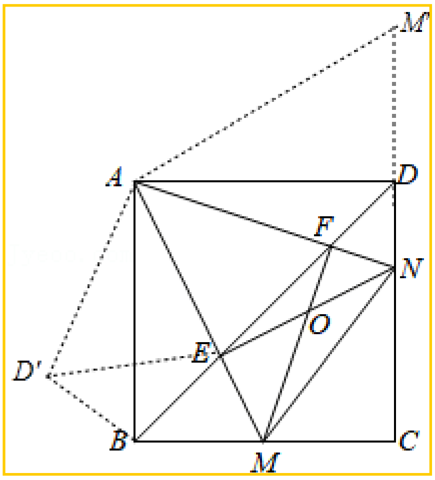
∴$OM\neq\sqrt{2}FO$，故④错误

6．如图，点 M、N 分别是正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上的两个动点，在运动过程中保持 $\angle MAN=45^\circ$，AM、AN 分别与对角线 BD 交于点 E、F，连接 EN、FM 相交于点 O，以下结论：① $MN=BM+DN$；② $BE^2+DF^2=EF^2$；③ $BC^2=BF\cdot DE$；④ $OM=\sqrt{2}OF$，一定成立的是(　　)



A．①②③　　B．①②④　　C．②③④　　D．①②③④

【解答】解：将 ΔABM 绕点 A 逆时针旋转 90°，得到 $\Delta ADM'$，将 ΔADF 绕点 A 顺时针旋转 90°，得到 $\Delta ABD'$，



∴$AM'=AM$，$BM=DM'$，$\angle BAM=\angle DAM'$，$\angle MAM'=90^\circ$，$\angle ABM=\angle ADM'=90^\circ$，

∴$\angle ADM'+\angle ADC=180^\circ$，

∴点 M' 在直线 CD 上，

∵$\angle MAN=45^\circ$，

∴$\angle DAN+\angle MAB=45^\circ=\angle DAN+\angle DAM'=\angle M'AN$，

∴$\angle M'AN=\angle MAN=45^\circ$，

又∵$AN=AN$，$AM=AM'$，

$\therefore \Delta AMN \cong \triangle AM'N(SAS)$,

$\therefore MN = NM'$,

$\therefore M'N = M'D + DN = BM + DN$,

$\therefore MN = BM + DN$；故①正确；

$\because$将ΔADF绕点A顺时针旋转$90°$，得到$\Delta ABD'$，

$\therefore AF = AD'$，$DF = D'B$，$\angle ADF = \angle ABD' = 45°$，$\angle DAF = \angle BAD'$，

$\therefore \angle D'BE = 90°$，

$\because \angle MAN = 45°$，

$\therefore \angle BAE + \angle DAF = 45° = \angle BAD' + \angle BAE = \angle D'AE$，

$\therefore \angle D'AE = \angle EAF = 45°$，

又$\because AE = AE$，$AF = AD'$，

$\therefore \Delta AEF \cong \Delta AED'(SAS)$，

$\therefore EF = D'E$，

$\because D'E^2 = BE^2 + D'B^2$，

$\therefore BE^2 + DF^2 = EF^2$；故②正确；

$\because \angle BAF = \angle BAE + \angle EAF = \angle BAE + 45°$，$\angle AEF = \angle BAE + \angle ABE = 45° + \angle BAE$，

$\therefore \angle BAF = \angle AEF$，

又$\because \angle ABF = \angle ADE = 45°$，

$\therefore \Delta DAE \backsim \Delta BFA$，

$\therefore \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{AD}{BF}$，

又$\because AB = AD = BC$，

$\therefore BC^2 = DE \cdot DF$，故③正确；

$\because \angle FBM = \angle FAM = 45°$，

$\therefore$点A，点B，点M，点F四点共圆，

$\therefore \angle ABM = \angle AFM = 90°$，$\angle AMF = \angle ABF = 45°$，$\angle BAM = \angle BFM$，

同理可求$\angle AEN = 90°$，$\angle DAN = \angle DEN$，

$\therefore \angle EOM = 45° = \angle EMO$，

$\therefore EO = EM$，

$\therefore MO = \sqrt{2}EO$，

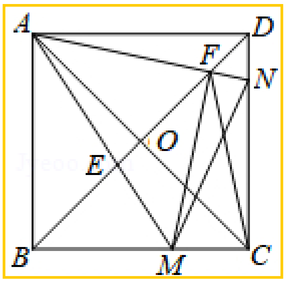
$\because \angle BAM \neq \angle DAN$，

$\therefore \angle BFM \neq \angle DEN$，

$\therefore EO \neq FO$，

$\therefore OM \neq \sqrt{2}FO$，故④错误

7．如图，正方形$ABCD$的对角线相交于点O，点M，N分别是边BC，CD上的动点（不与点B，C，D重合），AM，AN分别交BD于E，F两点，且$\angle MAN = 45°$，则下列结论：①$MN = BM + DN$；②$\Delta AEF \backsim \Delta BEM$；③$\dfrac{AF}{AM} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$；④$\Delta FMC$是等腰三角形．其中正确的有(　　)



A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

【解答】解：将 ΔABM 绕点 A 逆时针旋转 $90°$ 至 $\Delta ADM'$，

$\because \angle M'AN=\angle DAN+\angle MAB=45°$，$AM'=AM$，$BM=DM'$，

$\because \angle M'AN=\angle MAN=45°$，$AN=AN$，

$\therefore \Delta AMN\cong\triangle AM'N'(SAS)$，

$\therefore MN=NM'$，

$\because M'N=M'D+DN=BM+DN$，

$\therefore MN=BM+DN$；故①正确；

$\because \angle FDM'=135°$，$\angle M'AN=45°$，

$\therefore \angle M'+\angle AFD=180°$，

$\because \angle AFE+\angle AFD=180°$，

$\therefore \angle AFE=\angle M'$，

$\because \angle AMB=\angle M'$，

$\therefore \angle AMB=\angle AFE$，

$\because \angle EAF=\angle EBM=45°$，

$\therefore \Delta AEF\backsim\Delta BEM$，故②正确；

$\therefore \dfrac{AE}{BE}=\dfrac{EF}{EM}$，即 $\dfrac{AE}{EF}=\dfrac{BE}{EM}$，

$\because \angle AEB=\angle MEF$，

$\therefore \Delta AEB\backsim\Delta FEM$，

$\therefore \angle EMF=\angle ABE=45°$，

$\therefore \Delta AFM$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \dfrac{AF}{AM}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；故③正确；

在 ΔADF 与 ΔCDF 中，$\begin{cases}AD=CD\\ \angle ADF=\angle CDF=45°\\ DF=DF\end{cases}$，

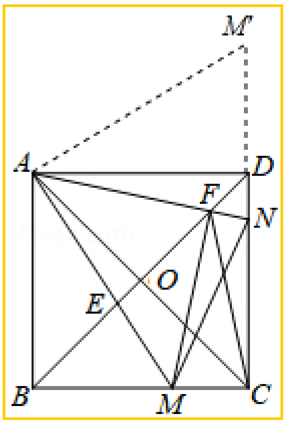
$\therefore \Delta ADF\cong\Delta CDF(SAS)$，

$\therefore AF=CF$，

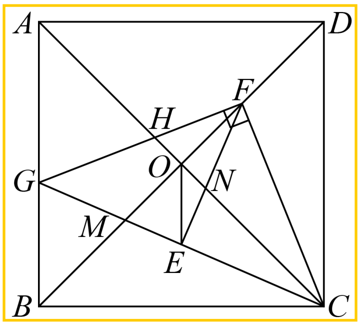
$\because AF=MF$，

$\therefore FM=FC$，

$\therefore \Delta FMC$ 是等腰三角形，故④正确；



8．如图，在正方形$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，F是线段OD上的动点（点F不与点O，D重合）连接CF，过点F作$FG\perp CF$分别交AC，AB于点H，G，连接CG交BD于点M，作$OE\parallel CD$交CG于点E，EF交AC于点N．有下列结论：①当$BG=BM$时，$AG=\sqrt{2}BG$；②$CN^2=BM^2+DF^2$；③$\angle GFM=\angle GCH$时，$CF^2=CN\cdot BC$；④$\frac{OH}{OM}=\frac{OF}{OC}$．其中正确的是________（填序号）．



【答案】①②③

【分析】①正确．利用面积法证明$\frac{AG}{BG}=\frac{AC}{BC}=\sqrt{2}$即可；

②正确．如图3中，将$\triangle CBM$绕点C顺时针旋转90°得到$\triangle CDW$，连接FW．则$CM=CW$，$BM=DW$，$\angle MCW=90^\circ$，$\angle CBM=\angle CDW=45^\circ$，证明$FM=FW$，利用勾股定理，即可解决问题；

③正确．如图2中，过点M作$MP\perp BC$于P，$MQ\perp AB$于Q，连接AF．想办法证明$CM=CF$，再利用相似三角形的性质，解决问题即可；

④错误．假设成立，推出$\angle OFH=\angle OCM$，显然不符合条件．

【详解】解：如图1中，过点G作$GT\perp AC$于T．

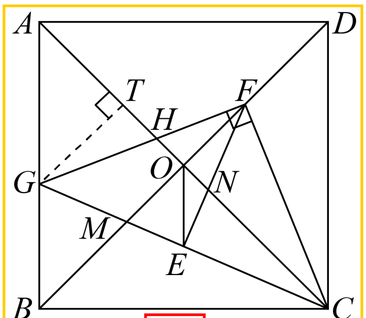


图1

$\because BG=BM$，

$\therefore \angle BGM=\angle BMG$，

$\because \angle BGM=\angle GAC+\angle ACG$，$\angle BMG=\angle MBC+\angle BCM$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle GAC=\angle MBC=45^\circ$，$AC=\sqrt{2}BC$，

$\therefore \angle ACG=\angle BCG$，

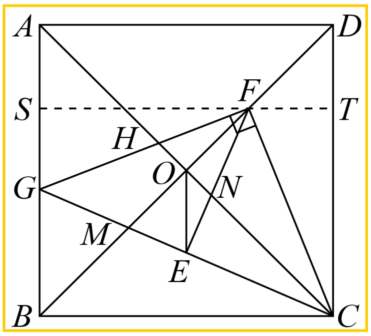
$\because GB\perp CB$，$GT\perp AC$，

$\therefore GB=GT$，

$$\because \frac{S_{\triangle BCG}}{S_{\triangle ACG}}=\frac{BG}{AG}=\frac{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot GB}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot GT}=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$\therefore AG=\sqrt{2}BG$，故①正确，

过点 F 作 $ST\parallel AD$，如图所示：



$\therefore$ 四边形 $ASTD$ 是矩形，

$\because \angle BDC=45^\circ$，

$\therefore DT=FT$，

在正方形 $ABCD$ 中，$AD=CD=ST$，

$\therefore ST-FT=CD-DT$，即 $SF=CT$，

$\because \angle SFG+\angle TFC=\angle TFC+\angle TCF=90^\circ$，

$\therefore \angle SFG=\angle TCF$，

$\because \angle GSF=\angle FTC=90^\circ$，

$\therefore \triangle SFG\cong\triangle TCF$，

$\therefore FG=FC$，

$\therefore \angle FCG=45^\circ$，

如图 3 中，将 $\triangle CBM$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle CDW$，连接 FW．则 $CM=CW$，$BM=DW$，$\angle MCW=90^\circ$，$\angle CBM=\angle CDW=45^\circ$，

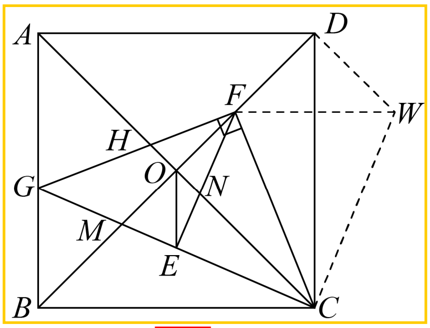


图3

$\because \angle FCW=\angle MCW-\angle FCG=90^{\circ}-45^{\circ}=45^{\circ}$

$\therefore \angle FCG=\angle FCW=45^{\circ}$

$\because CM=CW$，$CF=CF$，

$\therefore \triangle CFM \cong \triangle CFW(\mathrm{SAS})$，

$\therefore FM=FW$，

$\because \angle FDW=\angle FDC+\angle CDW=45^{\circ}+45^{\circ}=90^{\circ}$

$\therefore FW^2=DF^2+DW^2$，

$\therefore FM^2=BM^2+DF^2$，

$\because BD\perp AC$，$FG\perp CF$

$\therefore \angle COF=90^{\circ}$，$\angle CFG=90^{\circ}$，

$\therefore \angle FCN+\angle OFC=90^{\circ}$，$\angle OFC+\angle GFM=90^{\circ}$，

$\therefore \angle FCN=\angle GFM$，

$\because OE\parallel CD$，$AB\parallel CD$，O为AC的中点，

$\therefore \dfrac{CE}{GE}=\dfrac{OC}{OA}=1$，即$CE=GE$，

$\therefore FE\perp CG$，

$\because FC=FG$，

$\therefore \angle EFC=\angle EFG=45^{\circ}$，

$\because \angle NFC=\angle FGM=45^{\circ}$，$FG=CF$，

$\therefore \triangle CFN \cong \triangle FGM(\mathrm{ASA})$，

$\therefore CN=FM$，

$\therefore CN^2=BM^2+DF^2$，故②正确，

如图2中，过点M作$MP\perp BC$于P，$MQ\perp AB$于Q，连接AF．

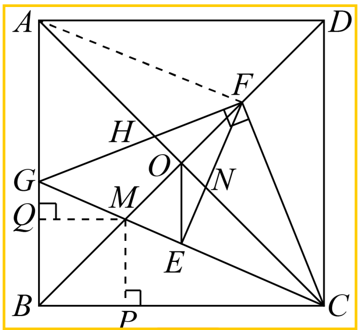


图2

$\because \angle OFH+\angle FHO=90^{\circ}$，$\angle FHO+\angle FCO=90^{\circ}$，

$\therefore \angle OFH=\angle FCO$，

【淘宝店铺：向阳百分百】

$\because AB = CB$，$\angle ABF = \angle CBF$，$BF = BF$，

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CBF(\text{SAS})$，

$\therefore AF = CF$，$\angle BAF = \angle BCF$，

$\because \angle CFG = \angle CBG = 90^\circ$，

$\therefore \angle BCF + \angle BGF = 180^\circ$，

$\because \angle BGF + \angle AGF = 180^\circ$，

$\therefore \angle AGF = \angle BCF = \angle GAF$，

$\therefore AF = FG$，

$\therefore FG = FC$，

$\therefore \angle FCG = \angle BCA = 45^\circ$，

$\therefore \angle ACF = \angle BCG$，

$\because MQ // CB$，

$\therefore \angle GMQ = \angle BCG = \angle ACF = \angle OFH$，

$\because \angle MQG = \angle FOH = 90^\circ$，$FH = MG$，

$\therefore \triangle FOH \cong \triangle MQG(\text{AAS})$，

$\therefore MQ = OF$，

$\because \angle BMP = \angle MBQ$，$MQ \perp AB$，$MP \perp BC$，

$\therefore MQ = MP$，

$\therefore MP = OF$，

$\because \angle CPM = \angle COF = 90^\circ$，$\angle PCM = \angle OCF$，

$\therefore \triangle CPM \cong \triangle COF(\text{AAS})$，

$\therefore CM = CF$，

$\because OE // AG$，$OA = OC$，

$\therefore EG = EC$，

$\because \triangle FCG$是等腰直角三角形，

$\therefore \angle GCF = 45^\circ$，

$\therefore \angle CFN = \angle CBM$，

$\because \angle FCN = \angle BCM$，

$\therefore \triangle BCM \backsim \triangle FCN$，

$\therefore \dfrac{CM}{CN} = \dfrac{CB}{CF}$，即$CM \cdot CF = CN \cdot CB$，

$\therefore CF^2 = CB \cdot CN$，故③正确，

假设$\dfrac{OH}{OM} = \dfrac{OF}{OC}$成立，

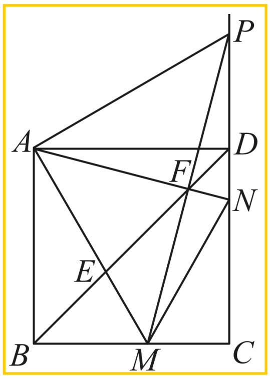
$\because \angle FOH = \angle COM$，

$\therefore \triangle FOH \backsim \triangle COM$，

$\therefore \angle OFH = \angle OCM$，显然这个条件不成立，故④错误

9．（2023·广东深圳·校联考模拟预测）如图，等腰直角$\triangle AMP$中，$\angle PAM = 90^\circ$，顶点M，P在正方形$ABCD$的BC边及CD边的延长线上动点．BD交MP于点F，连接AF并延长，交CD于N，AM交BD于点E．以

下结论：① $MN=MB+DN$ ② $BE^2+DF^2=EF^2$ ③ $BC^2=EB\cdot DB$ ④若 $\tan\angle PMN=\frac{1}{3}$，则 $\frac{BM}{CM}=1$，其中正确的是________．（填写正确的序号）



【答案】①②③④

【分析】由正方形及等腰直角三角形的性质，可证得$\triangle ABM\cong\triangle ADP$，$\angle ABD=\angle CBD=\angle AMF=45^\circ$，可证得$BM=DP$，点$A$、$B$、$M$、$F$四点共圆，$\angle MAN=\angle PAN=45^\circ$，由SAS可证$\triangle AMN\cong\triangle APN$，可得$MN=PN$，可得$MN=BM+DN$，故①正确；由SAS可证$\triangle AEF\cong\triangle AED'$，可得$EF=D'E$，由勾股定理可得$BE^2+DF^2=EF^2$；故②正确；通过证明$\triangle DAE\backsim\triangle BFA$，可得$\frac{DE}{BA}=\frac{AD}{FB}$，故③正确；由$MN=PN$可得$\tan\angle PMN=\tan\angle MPC=\frac{1}{3}$，设正方形的边长为$a$，可得$\frac{MC}{a+a-MC}=\frac{1}{3}$，$MC=\frac{1}{2}a$，故④正确，即可求解．

【详解】解：∵四边形$ABCD$是正方形，$\triangle AMP$是等腰直角三角形，

∴$\angle ABD=\angle CBD=\angle AMF=45^\circ$，$AB=AD$，$AM=AP$．

∴$\triangle ABM\cong\triangle ADP(\mathrm{HL})$，点$A$、$B$、$M$、$F$四点共圆，

∴$BM=DP$，$\angle MAN=\angle FBM=45^\circ$，

∵$\angle PAM=90^\circ$

∴$\angle PAN=\angle MAN=45^\circ$，

又∵$AN=AN$，$AM=AP$，

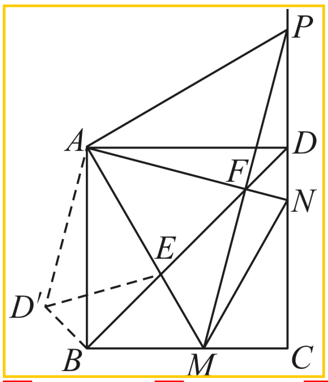
∴$\triangle AMN\cong\triangle APN(\mathrm{SAS})$

∴$MN=PN$，

∵$PN=PD+DN=BM+DN$

∴$MN=BM+DN$，故①正确；

如图：将$\triangle ADF$绕点A顺时针旋转90°，得到$\triangle ABD'$，连接$D'E$，



∴$AF=AD'$，$DF=D'B$，$\angle ADF=\angle ABD'=45^\circ$，$\angle DAF=\angle BAD'$，

$\therefore \angle D'BE = 90°$，

$\because \angle MAN = 45°$，

$\therefore \angle BAE + \angle DAF = 45° = \angle BAD' + \angle BAE = \angle D'AE$，

$\therefore \angle D'AE = \angle EAF = 45°$，

又$\because AE = AE$，$AF = AD'$，

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AED'(\text{SAS})$，

$\therefore EF = D'E$，

$\because D'E^2 = BE^2 + D'B^2$

$\therefore BE^2 + DF^2 = EF^2$；故②正确；

$\because \angle BAF = \angle BAE + \angle EAF = \angle BAE + 45°$，$\angle AEF = \angle BAE + \angle ABE = 45° + \angle BAE$，

$\therefore \angle BAF = \angle AEF$，

又$\because \angle ABF = \angle ADE = 45°$，

$\therefore \triangle DAE \backsim \triangle BFA$，

$\therefore \dfrac{DE}{BA} = \dfrac{AD}{BF}$，

又$\because AB = AD = BC$，

$\therefore BC^2 = DE \cdot BF$，故③正确；

$\because MN = PN$，

$\therefore \angle PMN = \angle MPC$，

$\because \tan \angle PMN = \dfrac{1}{3}$

$\therefore \tan \angle PMN = \tan \angle MPC = \dfrac{MC}{PC} = \dfrac{1}{3}$，

设正方形的边长为a，

$\therefore \dfrac{MC}{PC} = \dfrac{MC}{a + BM} = \dfrac{MC}{a + a - MC} = \dfrac{1}{3}$，

解得$MC = \dfrac{1}{2}a$，

$\therefore MB = MC$，

$\therefore \dfrac{BM}{CM} = 1$，故④正确