专题 1-1　一网打尽全等三角形模型（10 个模型）

导语：熟悉模型，补全结构

条件不足另外凑，凑不出来挠挠头，下次考试再来秀

01 题型·解读

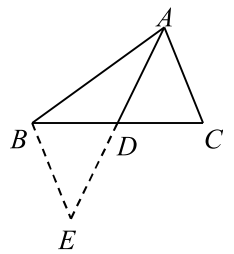
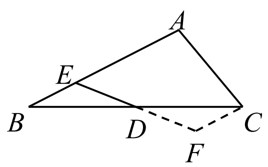
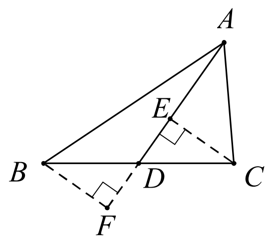
目录

02 满分·技巧

模型梳理

模型 1　倍长中线模型

（一）基本模型

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>已知：在△ABC 中，AD 是 BC 边上的中线，延长 AD 到点 E，使 ED＝AD，连接 BE．</td></tr>
<tr><td>结论 1：△ACD≌△EBD．</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>已知：在△ABC 中，点 D 是 BC 边的中点，点 E 是 AB 边上一点，连接 ED，延长 ED 到点 F，使 DF＝DE，连接 CF．</td></tr>
<tr><td>结论 2：△BDE≌△CDF．</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>已知：在△ABC 中，点 D 是 BC 边的中点，作 $CE\perp AD$ 于 E，$BF\perp AD$ 于 F，</td></tr>
<tr><td>结论 3：易证：$\triangle CDE\cong\triangle BDF$（$SAS$）</td></tr>
</table>

（二）结论推导

结论 1：△ACD≌△EBD．

证明：∵AD 是 BC 边上的中线，∴CD＝BD．

∵∠ADC＝∠EDB，AD＝ED，∴△ACD≌△EBD．

结论 2：△BDE≌△CDF．

证明：∵点 D 是 BC 边的中点，∴BD＝CD．

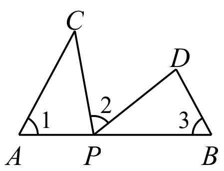
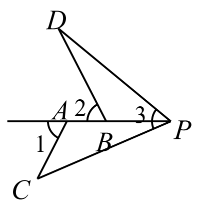
∵∠BDE＝∠CDF，DE＝DF，∴△BDE≌△CDF．

（三）解题技巧

遇到中点或中线，则考虑使用“倍长中线模型”，即延长中线，使所延长部分与中线相等，然后连接相应的顶点，构造出全等三角形.

模型 2 一线三等角模型

（一）基本模型

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>已知：点 P 在线段 AB 上，$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，$AP=BD$（或 $AC=BP$ 或 $CP=PD$）.</td></tr>
<tr><td>结论 1：$\triangle CAP\cong\triangle PBD$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>已知：点 P 在 AB 的延长线上，$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，$AP=BD$（或 $AC=BP$ 或 $CP=PD$）.</td></tr>
<tr><td>结论 2：$\triangle APC\cong\triangle BDP$.</td></tr>
</table>

（二）结论推导

结论 1：△CAP≌△PBD.

证明：∵∠1＋∠C＋∠APC＝180°，∠2＋∠BPD＋∠APC＝180°，∠1＝∠2，∴∠C＝∠BPD.

∵∠1＝∠3，AP＝BD（或 AC＝BP 或 CP＝PD），∴△CAP≌△PBD.

结论 2：△APC≌△BDP.

证明：∵∠1＝∠C＋∠APC，∠2＝∠BPD＋∠D，∠3＝∠BPD＋∠APC，∠1＝∠2＝∠3，

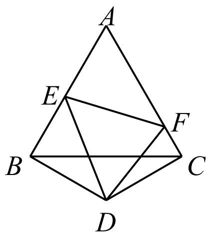
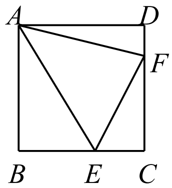
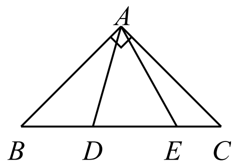
∴∠C＝∠BPD，∠APC＝∠D．∵AP＝BD（或 AC＝BP 或 CP＝PD），∴△APC≌△BDP.

（三）解题技巧

在一条线段上出现三个相等的角，且有一组边相等时，则考虑使用一线三等角全等模型．找准三个等角，再根据平角性质、三角形内角和进行等角代换，判定三角形全等，然后利用全等三角形的性质解题．一线三等角模型常以等腰三角形、等边三角形、四边形（正方形或矩形）为背景，在几何综合题中考查.

模型 3 半角模型

（一）基本模型

<table>
<tr><td rowspan="2">等边三角形含半角
</td><td>已知：△ABC 是等边三角形，D 为△ABC 外一点，∠BDC＝120°，BD＝CD，点 E，F 分别在 AB，AC 上，∠EDF＝60°.</td></tr>
<tr><td>结论 1：EF＝BE＋CF，
∠DEB＝∠DEF，∠DFC＝∠DFE.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">正方形含半角
</td><td>已知：四边形 ABCD 是正方形，点 E，F 分别在 BC，CD 上，∠EAF＝45°.</td></tr>
<tr><td>结论 2：EF＝BE＋DF，
∠AEB＝∠AEF，∠AFD＝∠AFE.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">等腰直角三角形含半角
</td><td>已知：△ABC 是等腰直角三角形，∠BAC＝90°，点 D，E 在 BC 上，∠DAE＝45°.</td></tr>
<tr><td>结论 3：$DE^2=BD^2+CE^2$.</td></tr>
</table>

（二）结论推导

结论 1： *EF*＝*BE*＋*CF*，∠*DEB*＝∠*DEF*，∠*DFC*＝∠*DFE*.

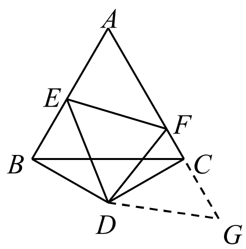
证明：延长 *AC* 到点 *G*，使 *CG*＝*BE*，连接 *DG*.

∵△*ABC* 是等边三角形，∴∠*ABC*＝∠*ACB*＝60°.

∵∠*BDC*＝120°，*BD*＝*CD*，∴∠*DBC*＝∠*DCB*＝30°，

∴∠*DBE*＝∠*DCF*＝90°，∴∠*DBE*＝∠*DCG*＝90°，

∴△*BDE*≌△*CDG*，∴*DE*＝*DG*，∠*DEB*＝∠*G*，∠*BDE*＝∠*CDG*.



∵∠*EDF*＝60°，∴∠*BDE*＋∠*CDF*＝60°，

∴∠*CDG*＋∠*CDF*＝60°，即∠*GDF*＝60°.

∵*DF*＝*DF*，∴△*DEF*≌△*DGF*，

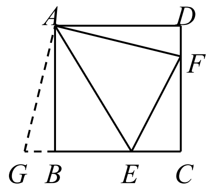
∴*EF*＝*FG*，∠*DEF*＝∠*G*，∠*DFC*＝∠*DFE*.

$\therefore \angle DEB = \angle DEF$.

$\because FG = CG + CF$，$\therefore EF = BE + CF$.

结论 2： $EF = BE + DF$，$\angle AEB = \angle AEF$，$\angle AFD = \angle AFE$.

证明：延长 CB 到点 G，使 $BG = DF$，连接 AG.



$\because$ 正方形 $ABCD$，$\therefore \angle ABG = \angle D = 90°$，$AB = AD$，

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF$，$\therefore AG = AF$，$\angle G = \angle AFD$，$\angle BAG = \angle DAF$.

$\because \angle EAF = 45°$，$\therefore \angle BAE + \angle DAF = 45°$，

$\therefore \angle BAE + \angle BAG = 45°$，即 $\angle EAG = 45°$.

$\because AE = AE$，$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AEG$，

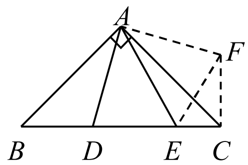
$\therefore EF = EG$，$\angle AEB = \angle AEF$，$\angle AFE = \angle G$.

$\therefore \angle AFD = \angle AFE$.

$\because EG = BE + BG$，$\therefore EF = BE + DF$.

结论 3： $DE^2 = BD^2 + CE^2$.

证明：将 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转 $90°$ 到 $\triangle ACF$，连接 EF.



$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\angle BAC = 90°$，

$\therefore \angle B = \angle ACB = 45°$，$\therefore \angle ACF = \angle B = 45°$，

$\therefore \angle ECF = 90°$，$\therefore EF^2 = CF^2 + CE^2 = BD^2 + CE^2$，

$\because \angle DAE = 45°$，$\therefore \angle BAD + \angle CAE = 45°$，

$\therefore \angle CAF + \angle CAE = 45°$，即 $\angle FAE = 45°$.

$\because AE = AE$，$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AED$，

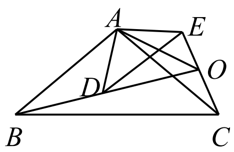
$\therefore EF = DE$，$\therefore DE^2 = BD^2 + CE^2$.

（三）解题技巧

对于半角模型，一般情况下都需要做辅助线（延长或旋转），构造全等，通过等量代换得到相关的结论.

模型 4 手拉手模型

（一）基本模型

<table>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>已知：在△ABC 和△ADE 中，$AB=AC$，$AD=AE$，$\angle BAC=\angle DAE$，连接 BD，CE 相交于 O，连接 OA．</td></tr>
<tr><td>结论 1：△ABD≌△ACE，$BD=CE$，
结论 2：$\angle BOC=\angle BAC$，
结论 3：OA 平分$\angle BOE$．</td></tr>
</table>

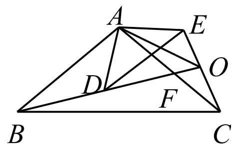
（二）结论推导

结论 1：△ABD≌△ACE，$BD=CE$．

证明：∵$\angle BAC=\angle DAE$，∴$\angle BAD=\angle CAE$．

∵$AB=AC$，$AD=AE$，∴△ABD≌△ACE，

∴$BD=CE$．



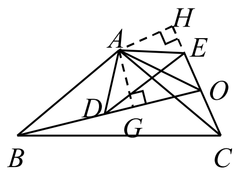
结论 2：$\angle BOC=\angle BAC$．

证明：设 OB 与 AC 相交于点 F．

∵△ABD≌△ACE，∴$\angle ABD=\angle ACE$．

∵$\angle AFB=\angle OFC$，∴$\angle BOC=\angle BAC$．

结论 3：OA 平分$\angle BOE$．



证明：过点 A 分别做 BD，CE 的垂线，垂足为 G，H．

∵△ABD≌△ACE，∴$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACE}$，

∴$\frac{1}{2}BD\cdot AG=\frac{1}{2}CE\cdot AH$．

∵$BD=CE$，∴$AG=AH$，

∴OA 平分$\angle BOE$．

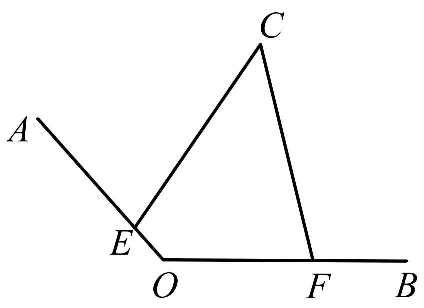
（三）解题技巧

如果题目中出现两个等腰三角形，可以考虑连接对应的顶点，用旋转全等模型；如果只出现一个等腰三角形，可以用旋转的方法构造旋转全等．

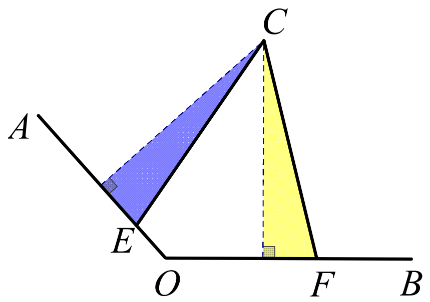
模型 5 对角互补+邻边相等模型

模型解读：通过做垂线或者利用旋转构造全等三角形解决问题。

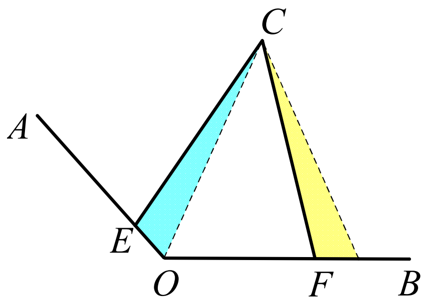
如图，$\angle EOF+\angle ECF=180°$，$CE=CF$



作垂线

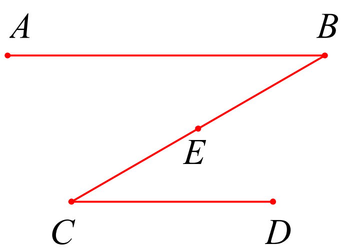


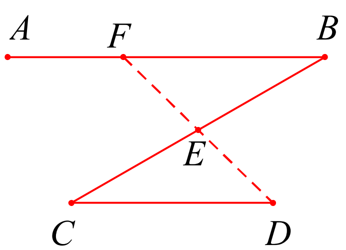
旋转



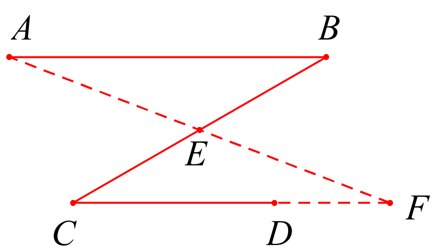
模型 6 平行线夹中点模型

如图，$AB//CD$，点 E 是 BC 的中点.





图①



图②

【模型分析】

如图①，延长 DE 交 AB 于点 F，易证：$\triangle DCE\cong\triangle FBE$（$AAS$）。

如图②，延长 AE 交 CD 延长线于点 F，易证：$\triangle ABE\cong\triangle FCE$（$AAS$）

口诀：有中点，有平行，轻轻延长就能行

模型 7 截长补短模型

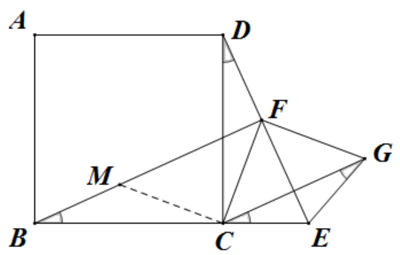
【模型解读】截长补短的方法适用于求证线段的和差倍分关系。截长：指在长线段中截取一段等于已知线段：补短：指将短线段延长，延长部分等于已知线段。该类题目中常出现等服三角形、角平分线等关键词句，可以采用截长补短法构造全等三角形来完成证明过程，截长补短法(往往需证 2 次全等) 。

①**截长**：在较长的线段上截取另外两条较短的线段。

如图所示，在 BF 上截取 BM=DF，易证△BMC≌△DFC（SAS），则 MC=FC=FG，∠BCM=∠DCF，

可得△MCF 为等腰直角三角形，又可证∠CFE=45°，∠CFG=90°，

∠CFG=∠MCF，FG∥CM，可得四边形 CGFM 为平行四边形，则 CG=MF，于是 BF=BM+MF=DF+CG.



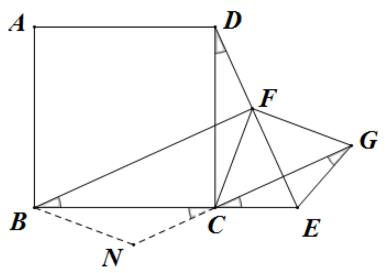
②**补短**：选取两条较短线段中的一条进行延长，使得较短的两条线段共线并寻求解题突破。

如图所示，延长 GC 至 N，使 CN=DF，易证△CDF≌△BCN（SAS），

可得 CF=FG=BN，∠DFC=∠BNC=135°，

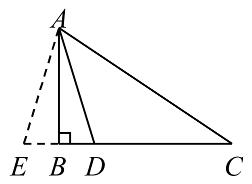
又知∠FGC=45°，可证 BN∥FG，于是四边形 BFGN 为平行四边形，得 BF=NG，

所以 BF=NG=NC+CG=DF+CG.



模型8 绝配角模型

（一）基本模型

<table>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>已知：在△ABC中，∠ABC＝90°，点D为边BC上一点，∠C＝2∠BAD，延长DB到点E，使BE＝BD，连接AE.</td></tr>
<tr><td>结论：AC＝EC.</td></tr>
</table>

（二）结论推导

结论：AC＝EC.

证明：∵∠ABC＝90°，BE＝BD，∴AE＝AD，

∴∠E＝∠ADE，∠BAE＝∠BAD，∴∠EAD＝2∠BAD.

∵∠C＝2∠BAD，∴∠EAD＝∠C，

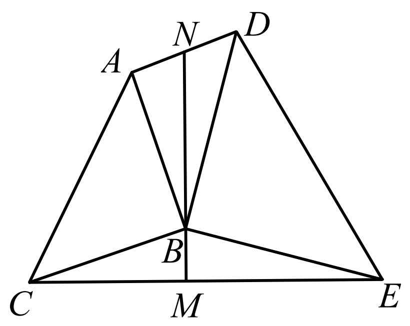
∴∠CAE＝∠ADE＝∠E，∴AC＝EC.

（三）解题技巧

如果题目中出现二倍角，可以考虑用绝配角模型，构造等腰三角形，绝配角＋等腰三角形＋全等三角形一般同时出现，然后用勾股定理或相似求解．构造等腰三角形是这类绝配角问题的重要方法．

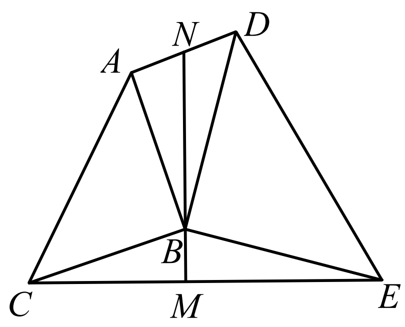
模型9 婆罗摩笈模型

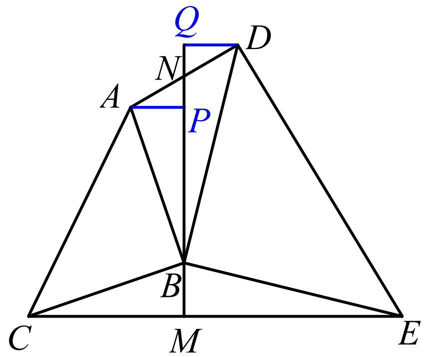
如图，△ABC和△DBE是等腰直角三角形，连接AD，CE，M，N分别在AD，CE上，且MN经过点B

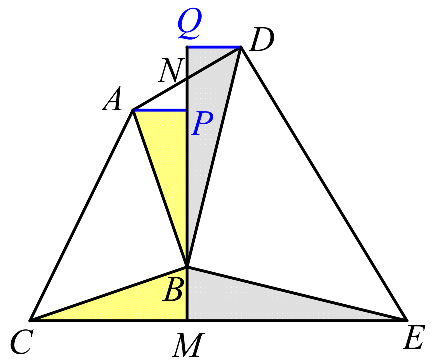


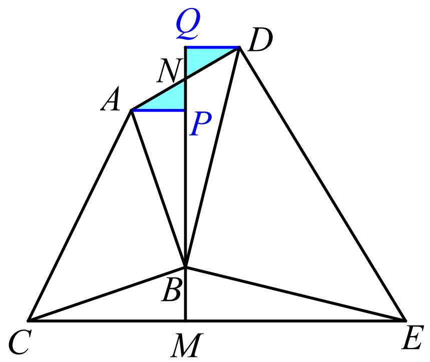
【性质 1：垂直得中点】若 $MN\perp CE$，则①点 N 是 AD 的中点，② $S_{\triangle CBE}=S_{\triangle ABD}$，③$CE=2BN$.

【证明】如图，（知垂直得中点，一线三垂直）









过 A 作 AP⊥MN，垂足为 P，过 D 作 DQ⊥MN 交 MN 的延长线于 Q，

易证：△ABP≌△BCM,AP＝BM,△DQB≌△BME,DQ＝BM

∴AP＝DQ

易证：△APN≌△DQN

∴AN＝DN

②如图，由①知，$S_{\triangle CBM}=S_{\triangle BAP}$，$S_{\triangle EBM}=S_{\triangle BDQ}$，$S_{\triangle APN}=S_{\triangle DQN}$

$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABN}+S_{\triangle DBN}=S_{\triangle BAP}+S_{\triangle APN}+S_{\triangle BDQ}-S_{\triangle DQN}$

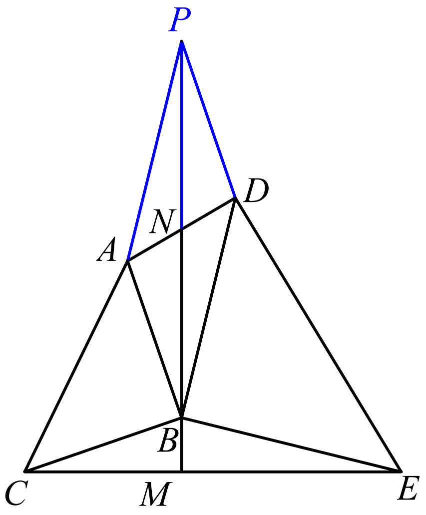
$=S_{\triangle BAP}+S_{\triangle BDQ}=S_{\triangle CBM}+S_{\triangle EBM}=S_{\triangle CBE}$，即 $S_{\triangle CBE}=S_{\triangle ABD}$，得证.

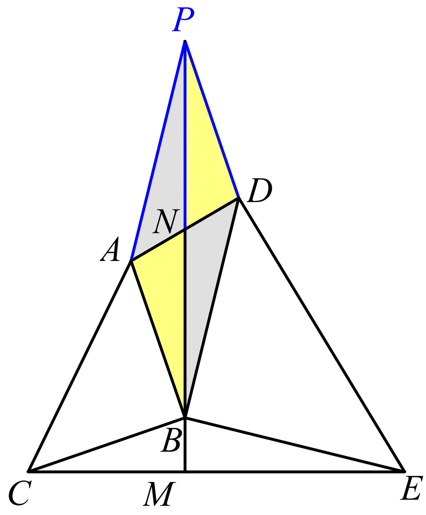
③如图，由①得，PN＝QN，

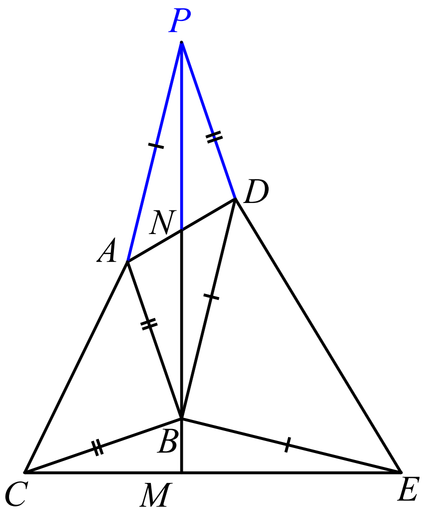
∴CE＝CM＋EM＝BP＋BQ＝BN－NP＋BN＋QN＝2BN，得证.

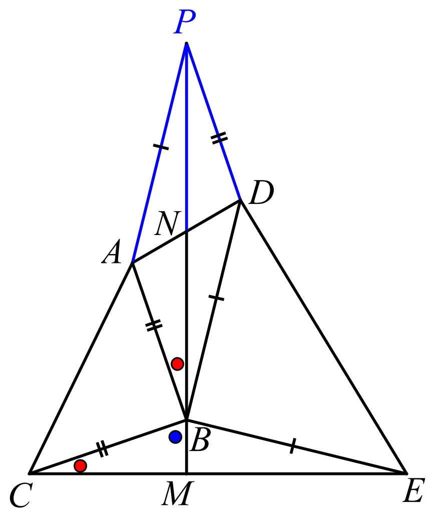
【性质 2：中点得垂直】若点 N 是 AD 的中点，则①$MN \perp CE$.

【证明】如图，（知中点得垂直，倍长中线）









证明：延长 BN 至点 P，使 BN＝PN，连结 PN，

易证：△PAD≌BDA

∴BC＝PD，BE=PA

∵PA∥BD，∴∠PAB＋∠ABD＝180°，

又∵∠ABC＝∠DBE＝90°∴∠CBE＋∠ABD＝180°，∴∠CBE＝∠PAB，

易证：△CBE≌△PAB，

∴∠BCM＝∠ABN，

∵∠ABN＋∠CBM＝90°∴∠BCM＋∠CBM＝90°

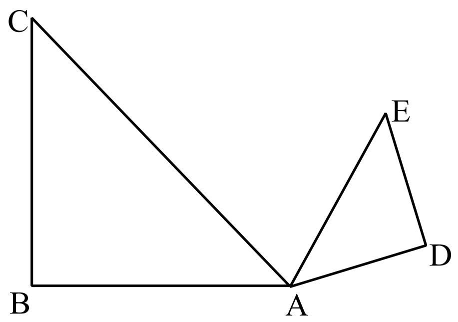
∴∠BMC＝90°

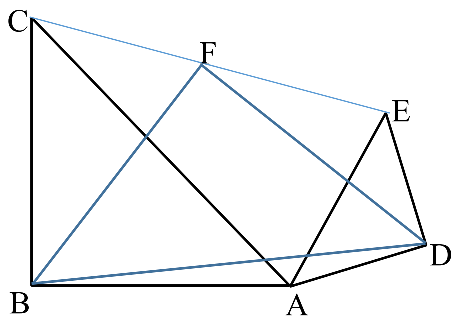
模型 10 脚蹬脚模型（海盗埋宝藏）

模型成立条件：等腰三角形顶角互补

已知：△ABC、△ADE 为等腰直角三角形，∠B=∠D=90°，AB=CB，AD=ED，点 F 为 CE 的中点，

则△BFD 是等腰直角三角形.





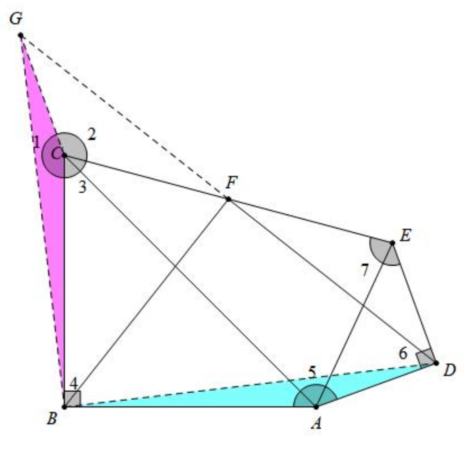
【证明】法一：倍长中线

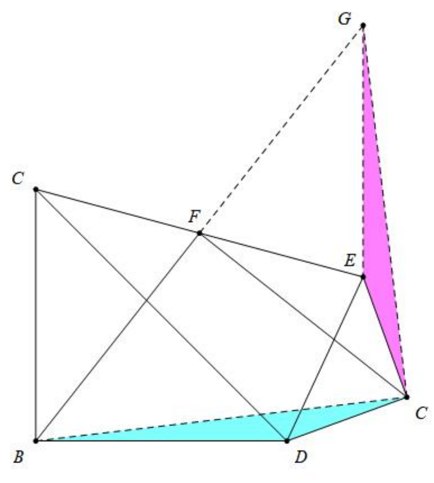
延长 DF 至点 G，使得 FG=FD，易证△DEF≌△GCF（SAS）；

所以 CG=ED=AD，∠2=∠7；

又∠1+∠2+∠3=360°，

∠3+∠4+∠5+∠6+∠7=540°（五边形内角和），





∠4=∠6=90°；

所以∠3+∠5+∠7=∠1+∠2+∠3，

所以∠1=∠5；

则△BCG≌△BAD（SAS），

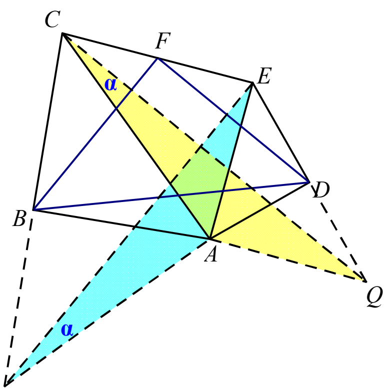
所以∠DBG=90°，BG=BD；

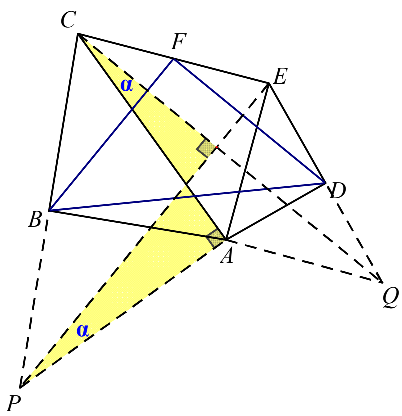
所以 BF=$\frac{1}{2}$DG=DF，BF⊥DF。

法二：构造手拉手模型

将△ABC 沿 AB 对称，将△ADE 沿 AD 对称

连接 PE，CQ，易知△ACQ≌△APE，进而得出 PE=CQ 且 PE⊥CQ，而 BE 是△CPE 的中位线，CD 是△CQE 的中位线，故 BF=DF，且 BF⊥FD

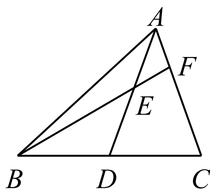




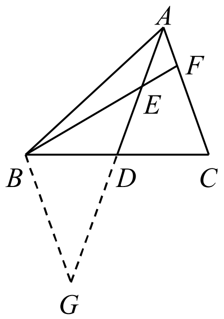
03 核心·题型

题型一 倍长中线模型

1．如图，在△ABC 中，AD 是 BC 边上的中线，点 E 是 AD 上一点，BE＝AC，BE 的延长线交 AC 于点 F，求证：AF＝EF．



证明：延长 AD 到点 G，使 $DG=AD$，连接 BG．



∵AD 是 BC 边上的中线，∴$CD=BD$．

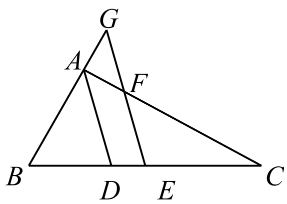
∵$\angle ADC=\angle GDB$，∴$\triangle ADC\cong\triangle GDB$，

∴$AC=BG$，$\angle DAC=\angle G$，

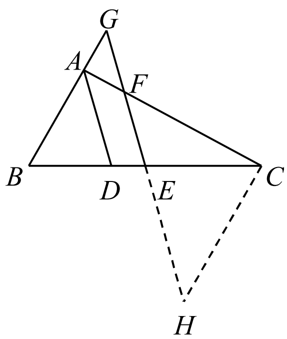
∵$BE=AC$，∴$BE=BG$，∴$\angle G=\angle BED$．

∵$\angle AEF=\angle BED$，∴$\angle DAC=\angle AEF$，

2．如图，在△ABC 中，AD 平分∠BAC，点 E 是 BC 的中点，过点 E 作 $EF\parallel AD$，交 AC 于点 F，交 BA 的延长线于点 G，求证：$BG=CF$．



证明：延长 GE 到点 H，使 EH＝EG，连接 CH．



∵点 E 是 BC 的中点，∴BE＝CE．

∵∠BEG＝∠CEH，∴△BEG≌△CEH，

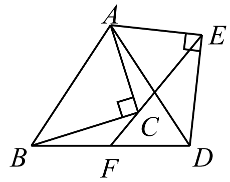
∴BG＝CH，∠G＝∠H．

∵EF∥AD，∴∠G＝∠BAD，∠CFE＝∠DAC．

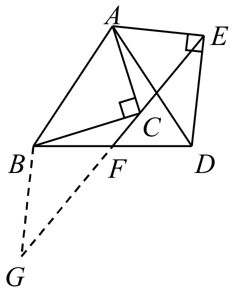
∵AD 平分∠BAC，∠BAD＝∠DAC，

∴∠H＝∠CFE，∴CF＝CH，∴BG＝CF．

3．如图，△*ABC*≌△*ADE*，∠*ACB*＝∠*AED*＝90°，连接 *EC* 并延长，交 *BD* 于点 *F*，求证：*F* 为 *BD* 的中点．



证明：过点 B 作 BG∥DE，交 EF 的延长线于点 G．



则∠G＝∠DEF，∠GBF＝∠EDF．

∵△ABC≌△ADE，∴AC＝AE，BC＝DE，

∴∠ACE＝∠AEC．

∵∠ACB＝∠AED＝90°，∴∠BCF＝∠DEF，

∴∠G＝∠BCF，∴BG＝BC，∴BG＝DE，

∴△BGF≌△DEF，∴BF＝DF，

即 F 为 BD 的中点．

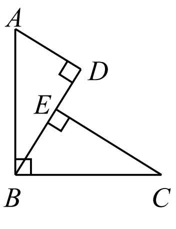
考点分析：全等三角形的判定与性质，平行线的判定与性质，等腰三角形的判定与性质．

思路点拨：过点 B 作 BG∥DE，交 EF 的延长线于点 G．先根据△ABC≌△ADE，得 AC＝AE，BC＝DE，再证 BG＝BC，最后证△BGF≌△DEF 即可．

题型三　一线三等角模型

基础篇

1．如图，∠*ABC*＝90°，*AB*＝*BC*，*AD*⊥*BD* 于点 *D*，*CE*⊥*BD* 于点 *E*，求证：*CE*＝*BD*．



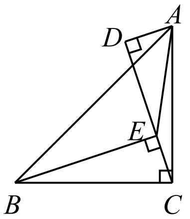
证明：∵∠*ABC*＝90°，∴∠*ABD*＋∠*EBC*＝90°．

∵*AD*⊥*BD*，*CE*⊥*BD*，∴∠*ADB*＝∠*BEC*＝90°，

∴∠*A*＋∠*ABD*＝90°，∴∠*A*＝∠*EBC*．

∵$AB=BC$，∴$\triangle ABD\cong\triangle BCE$，∴$CE=BD$．

2．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，$AD\perp CD$于点D，$BE\perp CD$于点E，若$BE=6$，$DE=4$，则$\triangle ACE$的面积为_________．



【答案】2

【解析】∵$AD\perp CD$，$BE\perp CD$，∴$\angle D=\angle BEC=90°$，

∴$\angle EBC+\angle ECB=90°$．

∵$\angle ACB=90°$，∴$\angle DCA+\angle ECB=90°$

∴$\angle DCA=\angle EBC$．

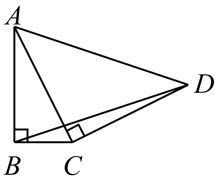
∵$AC=BC$，∴$\triangle CDA\cong\triangle BEC$，

∴$AD=CE$，$CD=BE=6$．

∵$DE=4$，∴$AD=CE=2$，

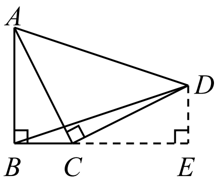
∴$S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}CE\cdot AD=\frac{1}{2}\times2\times2=2$．

3．如图，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°$，$BC=1$，$AC=\sqrt{5}$，以AC为直角边向外作等腰Rt$\triangle ACD$，连接BD，则BD的长为_________．



【答案】$\sqrt{10}$

【解析】过点D作DE⊥BC于点E．



∵$\angle ABC=90°$，$BC=1$，$AC=\sqrt{5}$，

∴$AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=2$，$\angle BAC+\angle ACB=90°$，

∵$\angle ACD=90°$，∴$\angle ECD+\angle ACB=90°$，

∴$\angle BAC=\angle ECD$．

∵$\angle ABC=\angle E=90°$，$AC=CD$，

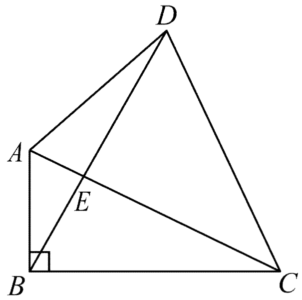
∴$\triangle ABC=\triangle CED$，∴$DE=BC=1$，$CE=AB=2$，

∴$BE=3$，∴$BD=\sqrt{BE^2+DE^2}=\sqrt{10}$．

考点分析：等腰直角三角形的性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理.

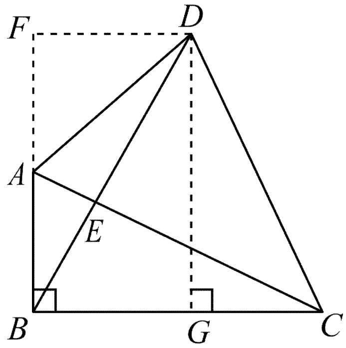
思路点拨：过点 D 作 DE⊥BC 于点 E，先证△ABC≌△CED，再在 Rt△BDE 中用勾股定理求解.

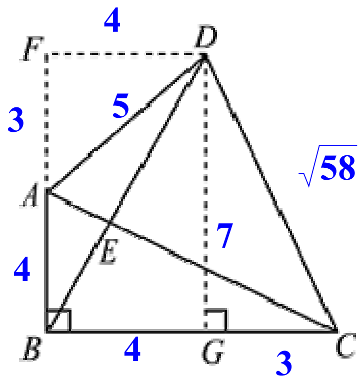
4．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ABC=90°$，过点 B 作 $BE\perp AC$，延长 BE 到点 D，使得 $BD=AC$，连接 AD，CD，若 $AB=4$，$AD=5$，则 CD 的长为________.



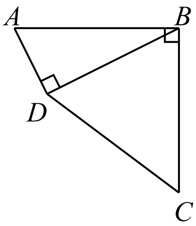
【答案】$\sqrt{58}$

【详解】解：过 D 点分别作 $DG\perp BC$ 于点 G，$DF\perp AB$ 交 BA 的延长线于点 F，勾股即可

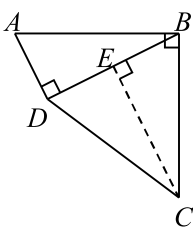




5．如图，已知 $AB=BC$，$AB\perp BC$，$AD\perp BD$，$BD=2AD$，求证：$CD=AB$.



证明：过点 C 作 $CE\perp BD$ 于点 E.



∵$AB\perp BC$，∴$\angle ABC=90°$，

∴$\angle ABD+\angle CBE=90°$.

∵$AD\perp BD$，$CE\perp BD$，∴$\angle ADB=\angle BEC=90°$，

∴$\angle ABD+\angle BAD=90°$，∴$\angle BAD=\angle CBE$．

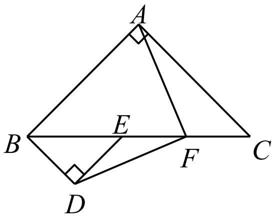
∵$AB=BC$，∴$\triangle ABD\cong\triangle BCE$，∴$AD=BE$．

∵$BD=2AD$，∴$BD=2BE$，∴$BE=DE$，

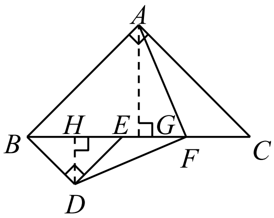
∴$BC=CD$，∴$CD=AB$．

提高篇

6．如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle BDE$ 都是等腰直角三角形，$\angle BAC=\angle BDE=90°$，点 E 在 BC 上，点 F 是 CE 的中点，连接 AF，DF，求证：$AF=DF$ 且 $AF\perp DF$．



【解析】证明：过点 A 作 AG⊥BC 于点 G，过点 D 作 DH⊥BC 于点 H．



∵$\triangle ABC$ 和 $\triangle BDE$ 都是等腰直角三角形，∴$AG=\frac{1}{2}BC$，$BH=\frac{1}{2}BE$．

∵点 F 是 CE 的中点，∴$CF=\frac{1}{2}CE$，

∴$FH=BC-BH-CF=BC-\frac{1}{2}BE-\frac{1}{2}CE=\frac{1}{2}BC$，

∴$AG=FH$，∴$FG=FH-GH=AG-GH=BG-GH=BH=DH$．

∵$\angle AGF=\angle FHD=90°$，∴$\triangle AFG\cong\triangle FDH$，

∴$AF=DF$，$\angle AFG=\angle FDH$．

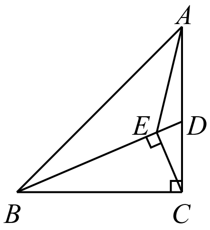
∵$\angle DFH+\angle FDH=90°$，∴$\angle DFH+\angle AFG=90°$，

∴$\angle AFD=90°$，∴$AF\perp DF$．

考点分析：等腰直角三角形的性质、全等三角形的判定与性质．

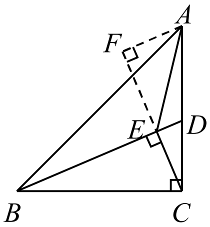
思路点拨：过点 A 作 $AG\perp BC$ 于点 G，过点 D 作 $DH\perp BC$ 于点 H．先根据等腰直角三角形的性质推导等线段，再证$\triangle AFG\cong\triangle FDH$，即可得到结论．

7．如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，D 为 AC 上一点，$CE\perp BD$ 于点 E，连接 AE，若 $CE=4$，则$\triangle ACE$ 的面积为_________．



【答案】8

【解析】过点 A 作 AF⊥CE，交 CE 的延长线于点 F.



∵CE⊥BD，AF⊥CE，∴∠BEC＝∠CFA＝90°，

∴∠EBC＋∠BCE＝90°.

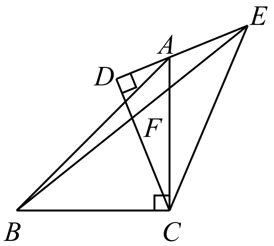
∵∠ACB＝90°，∴∠FCA＋∠BCE＝90°，

∴∠FCA＝∠EBC.

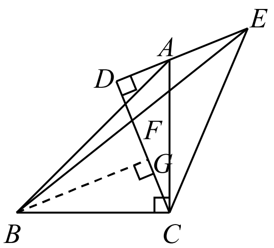
∵AC＝BC，∴△CAF≌△BCE，

∴AF＝CE＝4，∴S△ACE $=\frac{1}{2}$CE・AF＝$\frac{1}{2}$×4×4＝8.

8．如图，△*ABC* 和△*CDE* 都是等腰直角三角形，∠*ACB*＝∠*CDE*＝90°，点 *A* 在边 *DE* 上，连接 *BE* 交 *CD* 于点 *F*，求证：*AE*＝2*DF*.



【答案】证明：过点 *B* 作 *BG*⊥*CD* 于点 *G*．则∠*BGC*＝∠*CDA*＝90°，



∴∠*GBC*＋∠*GCB*＝90°.

∵∠*ACB*＝90°，∴∠*DCA*＋∠*GCB*＝90°，

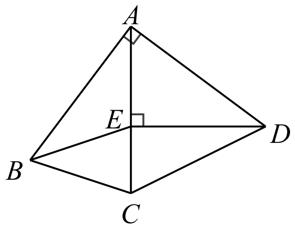
∴∠*DCA*＝∠*GBC*.

∵*AC*＝*BC*，∴△*CAD*≌△*BCG*，

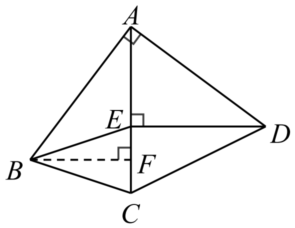
∴*AD*＝*CG*，*CD*＝*BG*.

∵$CD=DE$，∴$AE=DG$，$BG=DE$．
∵$\angle BFG=\angle EFD$，$\angle BGF=\angle EDF=90°$，
∴$\triangle BFG\cong\triangle EFD$，∴$FG=DF$，
∴$AE=DG=2DF$．

9．如图，把两个腰长相等的等腰三角形拼接在一起，$AB=AC=AD$，$\angle BAD=90°$，过点 D 作 $DE\perp AC$ 于点 E，若 $BE=BC$，$DE=8$，求 AE 的长．

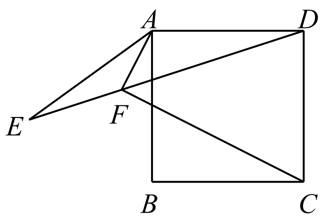


解：过点 B 作 $BF\perp AC$ 于点 F．

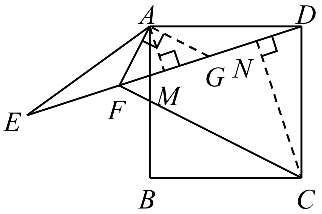


∵$\angle BAD=90°$，∴$\angle BAF+\angle DAE=90°$．
∵$\angle AFB=90°$，∴$\angle BAF+\angle ABF=90°$，
∴$\angle ABF=\angle DAE$．
∵$\angle AFB=\angle DEA=90°$，∴$\triangle ABF\cong\triangle DAE$，
∴$AF=DE=8$．
∵$BE=BC$，$BF\perp AC$，∴$EF=CF$．
设 $EF=CF=x$，则 $AE=8-x$，$AD=AC=8+x$．
在 $Rt\triangle AED$ 中，$8^2+(8-x)^2=(8+x)^2$，
解得 $x=2$，∴$AE=8-x=6$．

10．如图，E 为正方形 $ABCD$ 外一点，连接 AE，DE，$AE=AB$，AF 平分 $\angle BAE$ 交 DE 于点 F，连接 CF．
（1）求 $\angle AFD$ 的度数；
（2）求证：$AF\perp CF$．



【答案】解：（1）过点 A 作 $AG\perp AF$ 交 DE 于点 G．



∵正方形 $ABCD$，∴$AB=AD$，$\angle BAD=90°$，

∴$\angle FAG=\angle BAD$，∴$\angle FAB=\angle GAD$.

∵AF 平分 $\angle BAE$，∴$\angle FAB=\angle FAE$，

∴$\angle FAE=\angle GAD$.

∵$AE=AB$，∴$AE=AD$，∴$\angle E=\angle ADG$.

∴$\triangle AEF\cong\triangle ADG$，∴$AF=AG$，

∴$\angle AFD=\angle AGF=45°$.

（2）分别过点 A，C 作 DE 的垂线，垂足为 M，N.

则$\angle AMD=\angle DNC=90°$，∴$\angle ADM+\angle DAM=90°$.

∵正方形 $ABCD$，∴$AD=DC$，$\angle ADC=90°$，

∴$\angle ADM+\angle CDN=90°$，∴$\angle DAM=\angle CDN$，

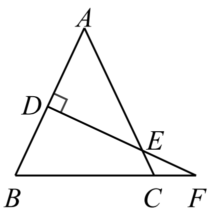
∴$\triangle ADM\cong\triangle DCN$，∴$AM=DN$，$DM=CN$.

∵$\angle AMF=90°$，$\angle AFD=45°$，∴$AM=FM$，

∴$DN=FM$，∴$DM=FN$，∴$CN=FN$，

∴$\angle CFN=45°$，∴$\angle AFC=90°$，∴$AF\perp CF$.

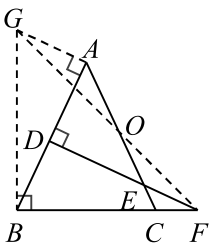
11．如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点 D 在 AB 上，$DE\perp AB$，交 AC 于点 E，交 BC 的延长线于点 F，若 $DF=AC$，$AB=m$，$AE=n$，求 $AD+DE$ 的值（用含 m，n 的式子表示）.



解：过点 A 作 $AG\perp AB$，过点 B 作 $BG\perp BC$，AG 与 BG 交于点 G，

连接 GF 与 AC 交于点 O，则$\angle GAB=\angle BDF=90°$.

∴$\angle GBA+\angle AGB=\angle GBA+\angle DBF=90°$，



∴$\angle AGB=\angle DBF$.

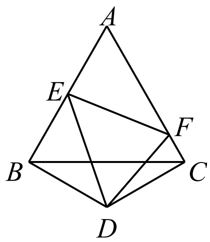
∵$AB=AC=DF$，∴$\triangle AGB\cong\triangle DBF$，

∴∠AGB＝∠ABC，AG＝DB，∴∠BGF＝∠BFG＝45°．
设∠BAC＝2x，则∠ABC＝∠ACB＝90°－x，∠GAO＝90°＋2x，
∴∠AGB＝∠ABC＝90°－x，∴∠AGO＝45°－x，
∴∠AOG＝45°－x，∴∠AGO＝∠AOG，
∴AG＝AO，∴DB＝AO．
∵AG⊥AB，DF⊥AB，∴AG∥DF，∠AGO＝∠EFO．
∵∠AOG＝∠EOF，∴∠EFO＝∠EOF，EF＝EO，
∴AD＋DE＝AB－DB－DF－EF＝m－AO－m－OE
＝2m－AE＝2m－n．

题型三　半角模型

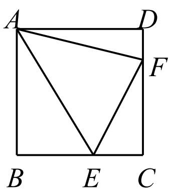
例题

例 1　如图，△ABC 是边长为 1 的等边三角形，D 为△ABC 外一点，BD＝CD，∠BDC＝120°，点 E，F 分别在 AB，AC 上，且∠EDF＝60°，则△AEF 的周长为_________.



考点分析：等边三角形的性质、全等三角形的判定与性质．
思路点拨：由半角模型可知 EF＝BE＋CF，则△AEF 的周长＝AE＋AF＋EF＝AE＋AF＋BE＋CF＝AB＋AC＝2AB＝2．
【解析】由半角模型可知 EF＝BE＋CF，则△AEF 的周长＝AE＋AF＋EF＝AE＋AF＋BE＋CF＝AB＋AC＝2AB＝2．

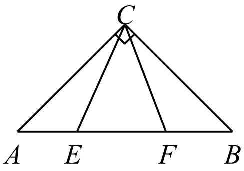
例 2　如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在 BC，CD 上，∠EAF＝45°，△CEF 的周长为 2，则正方形 $ABCD$ 的边长为_________.



【答案】 1
【解析】由半角模型可知 EF＝BE＋DF，则△CEF 的周长＝CE＋CF＋EF＝CE＋CF＋BE＋DF＝BC＋CD＝2BC＝2，BC＝1，即正方形 $ABCD$ 的边长为 1．
思路点拨：由半角模型可知 EF＝BE＋DF，则△CEF 的周长＝CE＋CF＋EF＝CE＋CF＋BE＋DF＝BC

＋CD＝$2BC$＝2，BC＝1，即正方形 $ABCD$ 的边长为 1．

例 3 如图，在 Rt△ABC 中，∠ACB＝90°，AC＝BC，点 E，F 在 AB 上，∠ECF＝45°，AE＝2，EF＝3，则 BF 的长为_________．



【答案】$\sqrt{5}$

【解析】由半角模型可知 EF^2＝AE^2＋BF^2，则 BF＝$\sqrt{EF^2-AE^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$．

思路点拨：由半角模型可知 EF^2＝AE^2＋BF^2，则 BF＝$\sqrt{EF^2-AE^2}=\sqrt{5}$．

2022 • 山东日照真题

例 4 如图 1，△ABC 是等腰直角三角形，AC＝BC＝4，∠ACB＝90°，M，N 分别是边 AC，BC 上的点，以 CM，CN 为邻边作矩形 $PMCN$，交 AB 于点 E，F．设 CM＝a，CN＝b，且 ab＝8．

（1）判断由线段 AE，EF，BF 组成的三角形的形状，并说明理由；

（2）①如图 2，当 a＝b 时，求∠ECF 的度数；

②当 a≠b 时，①中的结论是否成立？并说明理由．

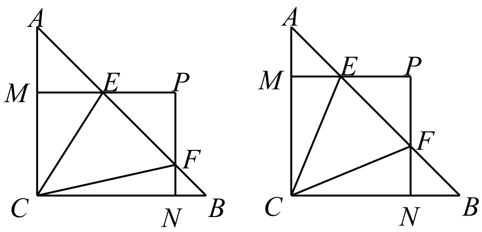


图 1　　图 2

思路点拨：(1) 由条件可得 S 矩形 PMCN ＝S△ABC，则 S△PEF ＝S△AEM ＋ S△BFN，$EF^2=AE^2+BF^2$，由线段 AE，EF，BF 组成的三角形是直角三角形；(2) ①过点 C 作 CH⊥EF 于点 H．当 a＝b 时，可得 CM＝CN＝CH，△CEM≌△CEH，△CFN≌△CFH，则∠ECM＝∠ECH，∠FCN＝∠FCH，∠ECF＝∠ECH＋∠FCH＝$\frac{1}{2}$∠ACB＝45°；②将△ACE 绕点 C 顺时针旋转 90°得到△BCG，连接 FG．可证△CEF≌△CGF，则①中的结论成立．

【解析】(1) 由线段 AE，EF，BF 组成的三角形是直角三角形，理由如下：

∵S△ABC＝$\frac{1}{2}\times4\times4$＝8，S 矩形 PMCN ＝ab＝8，

∴S△ABC＝S 矩形 PMCN，∴S△PEF ＝S△AEM ＋ S△BFN，

∴ $\frac{1}{4}EF^2=\frac{1}{4}AE^2+\frac{1}{4}BF^2$，∴ $EF^2=AE^2+BF^2$，

∴由线段 AE，EF，BF 组成的三角形是直角三角形．

（2）①当 a＝b 时，$a^2=8$，∴CM＝CN＝a＝$2\sqrt{2}$．

如图 1，过点 C 作 CH⊥EF 于点 H．

∵AC＝BC＝4，∴CH＝$2\sqrt{2}$，∴CM＝CN＝CH，

∴△CEM≌△CEH，△CFN≌△CFH，

∴∠ECM＝∠ECH，∠ECN＝∠FCH，

∴∠ECF＝∠ECH＋∠FCH＝$\frac{1}{2}$∠ACB＝45°．

②当 a≠b 时，①中的结论仍然成立，理由如下：

如图 2，将△ACE 绕点 C 顺时针旋转 90°得到△BCG，连接 FG．

则∠FBG＝90°，∴ $FG^2=BG^2+BF^2=AE^2+BF^2$．

∵ $EF^2=AE^2+BF^2$，∴EF＝FG．

∵CE＝CG，CF＝CF，∴△CEF≌△CGF，

∴∠ECF＝∠GCF＝$\frac{1}{2}$∠ECG＝$\frac{1}{2}$∠ACB＝45°．

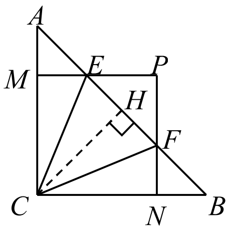


图 1

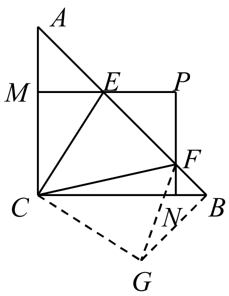
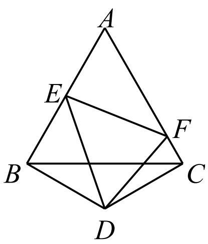


图 2

基础

1．如图，D 为等边△ABC 外一点，BD＝CD，∠BDC＝120°，点 E，F 分别在 AB，AC 上，且∠EDF＝60°，若 BE＝1，△AEF 的周长为 4，则 AE 的长为_________．



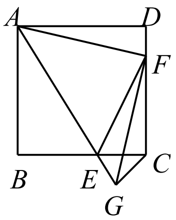
【答案】1

【解析】由半角模型可知 EF＝BE＋CF，则△AEF 的周长＝AE＋AF＋EF＝AE＋AF＋BE＋CF＝AB＋AC＝2AB＝4，∴AB＝2．∵BE＝1，∴AE＝1．

2．如图，在正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 BC，DC 上的点，且 EF＝BE＋DF．

（1）求证：∠EAF＝45°；

（2）作∠EFC 的平分线 FG 交 AE 的延长线于 G，连接 CG．探究 BC，CF 与 CG 的数量关系，并证明．



【解析】解：（1）延长 CB 到点 P，使 $BP=DF$，连接 AP.

∵正方形 $ABCD$，∴$\angle ABP=\angle D=90°$，$AB=AD$，

∴$\triangle ABP\cong\triangle ADF$，∴$AP=AF$，$\angle BAP=\angle DAF$.

∴$\angle PAF=\angle BAD=90°$.

∵$EF=BE+DF$，$EP=BE+BP$，∴$EF=EP$.

∵$AE=AE$，∴$\triangle AEF\cong\triangle AEP$，

∴$\angle EAF=\angle EAP=45°$.

（2）过点 G 作 $GH\perp DC$ 于点 H.

∵$\triangle ABP\cong\triangle ADF$，∴$\angle P=\angle AFD$.

∵$\triangle AEF\cong\triangle AEP$，$\angle AEF=\angle P$，∴$\angle AEF=\angle AFD$.

∵FG 平分 $\angle EFC$，∴$\angle EFG=\angle GFH$，

∴$\angle AFE+\angle EFG=\angle AFD+\angle GFH=90$.

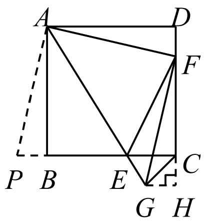
∵$\angle EAF=45°$，∴$AF=FG$，∴$\triangle ADF\cong\triangle FHG$，

∴$AD=FH$，$DF=GH$.

∵$AD=DC$，∴$FH=DC$，

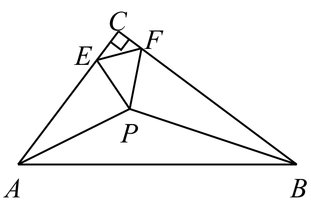
∴$CH=DF$，$CH=GH=\frac{\sqrt{2}}{2}CG$，

∴$FH-CF=\frac{\sqrt{2}}{2}CG$，∴$BC-CF=\frac{\sqrt{2}}{2}CG$.



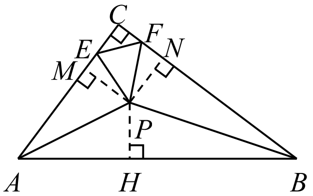
提高

3．如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=6$，$BC=8$，$AB=10$，两锐角的角平分线交于点 P，点 E，F 分别在边 AC，BC 上，且 $\angle EPF=45°$，则$\triangle CEF$ 的周长为_________.



【答案】 4

【解析】过点 P 作 AC，BC，AB 的垂线，垂足为 M，N，H.



∵两锐角的角平分线交于点 P，∴PM＝PH＝PN，

∴四边形 PMCN 是正方形，∴CM＝CN＝PM＝PN.

∵∠EPF＝45°，∴EF＝EM＋FN.

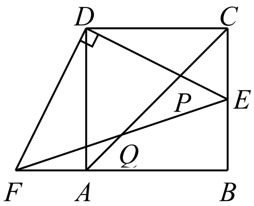
∵S△ABC $=\frac{1}{2}AC\cdot PM+\frac{1}{2}BC\cdot PN+\frac{1}{2}AB\cdot PH=\frac{1}{2}AC\cdot BC$，

∴PM(AC＋BC＋AB)＝$AC\cdot BC$，

∴PM(6＋8＋10)＝6×8，∴PM＝2，CM＝CN＝2，

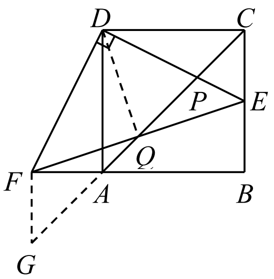
∴△CEF 的周长＝CE＋CF＋EF＝CE＋CF＋EM＋FN＝CM＋CN＝2＋2＝4.

4．如图，正方形 *ABCD* 的边长是 4，点 *E* 是 *BC* 的中点，连接 *DE*，*DF*⊥*DE* 交 *BA* 的延长线于点 *F*，连接 *EF*，*AC*，*DE*，*EF* 分别与 *AC* 交于点 *P*，*Q*，则 *PQ*＝_________.



【答案】$\frac{5\sqrt{2}}{3}$

【解答】连接 DQ，过点 F 作 FG⊥FB，交 CA 的延长线于点 G.



∵正方形 ABCD，∴DA＝DC，∠DAF＝∠DCE＝∠ADC＝∠B＝90°，∠QCE＝45°，

∴FG∥BC，∴∠G＝∠QCE＝45°，∴AF＝FG.

∵DF⊥DE，∴∠FDE＝90°，∴∠ADF＝∠CDE，

∴△ADF≌△CDE，∴AF＝CE，DF＝DE，

∴FG＝CE，∴△FQG≌△EQC，

∴QE＝QF，QG＝QC，∴∠QDE＝45°，

∴AQ 2＋CP 2＝PQ 2.

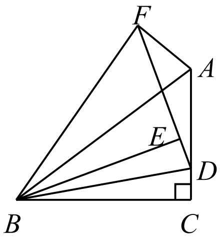
∵正方形 ABCD 的边长是 4，点 E 是 BC 的中点，

∴AC＝$4\sqrt{2}$，AF＝CE＝2，∴AG＝$2\sqrt{2}$，

∴CG＝$6\sqrt{2}$，∴QG＝QC＝$3\sqrt{2}$，∴AQ＝$\sqrt{2}$，

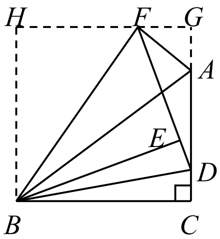
$\therefore (\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2}-PQ)^2=PQ^2$，解得 PQ＝$\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$.

5．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=6$，$BC=8$，D 为边 AC 上一点，将△BCD 沿 BD 翻折得到△BED，延长 DE 到点 F，使$\angle DBF=45°$，若 $S_{\triangle ADF}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle BEF}$，则 CD^2+EF^2 的值是_________.



【答案】33

【解析】将四边形 $AFBC$ 补成矩形 $GHBC$，使点 F 在 GH 上.



∵ $\angle DBF=45°$，∴ $\angle HBF+\angle DBC=\angle EBF+\angle DBE$.

∵ $\angle DBC=\angle DBE$，∴ $\angle HBF=\angle EBF$.

∵ $\angle H=\angle BEF=90°$，$BF=BF$，∴△BHF≌△BEF，

∴$BH=BE=BC=8$，∴$HF=EF$，四边形 $GHBC$ 是正方形，

∴$DF=DE+EF=CD+HF$.

设 $CD=a$，$HF=b$，则 $DF=a+b$，$DG=8-a$，$FG=8-b$，

在 Rt△DFG 中，$(8-a)^2+(8-b)^2=(a+b)^2$，

整理得 $64-8a-8b=ab$.　　　①

∵$S_{\triangle ADF}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle BEF}$，∴$S_{\triangle BHF}=S_{\triangle BEF}=4S_{\triangle ADF}$，

∴$8b=4(6-a)(8-b)$，

整理得 $8a+8b-48=ab$.　　　②

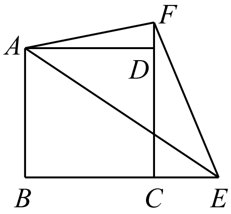
由①②解得 $a+b=7$，$ab=8$，

∴$CD^2+EF^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=7^2-2\times 8=33$.

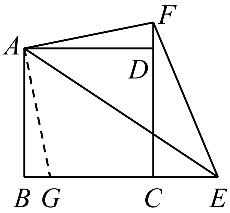
6．如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在 BC，CD 的延长线上，且$\angle EAF=45°$.

（1）探究 EF，BE，DF 之间的数量关系，并证明；

（2）若 $CE=5$，$DF=2$，求正方形 $ABCD$ 的边长.



【解析】(1)证明：在 BC 上截取 BG＝DF，连接 AG．



∵正方形 ABCD，∴AB＝AD，∠ABG＝∠ADF＝90°，

∴△ABG≌△ADF，∴AG＝AF，∠BAG＝∠DAF．

∵∠BAD＝90°，∴∠BAG＋∠DAG＝90°，

∴∠DAF＋∠DAG＝90°，∴∠GAF＝90°．

∵∠EAF＝45°，∴∠EAG＝∠EAF＝45°，

∵AE＝AE，∴△AEG≌△AEF，

∴EF＝EG＝BE－BG＝BE－DF．

(2)设正方形 ABCD 的边长为 x．

则 CF＝x＋2，EF＝BE－DF＝BC＋CE－DF＝x＋5－2＝x＋3．

在 Rt△CEF 中，5 2＋(x＋2)2＝(x＋3)2，

解得 x＝10，即 ABCD 的边长为 10．

7. (1)**问题背景**：如图 1，在△ABC 中，∠BAC＝90°，AB＝AC，点 E、F 在线段 BC 上，∠EAF＝45°，用等式表示线段 BE，EF 与 CF 的数量关系，并证明；

(2)**拓展应用**：如图 2，在△ABC 中，∠BAC＝90°，AB＝AC，点 E 在线段 BC 上，点 F 在 BC 的延长线上，∠EAF＝45°，若 EC＝1，CF＝2，求 BE 的长．

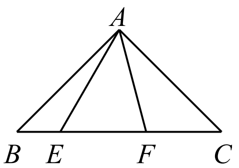


图 1

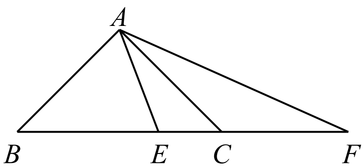


图 2

【答案】(1)$BE^2+CF^2=EF^2$．

证明：如图 1，将△ABE 绕点 A 逆时针旋转 90°到△ACD，连接 DF．

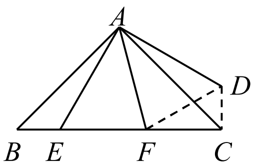


图 1

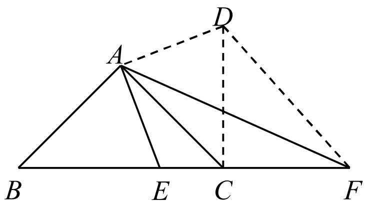


图 2

∵ $\angle BAC=90°$，$AB=AC$，∴ $\angle B=\angle ACB=45°$，
∴ $\angle ACD=\angle B=45°$，∴ $\angle DCF=90°$，
∴ $CD^2+CF^2=DF^2$，∴ $BE^2+CF^2=DF^2$.
∵ $\angle BAC=90°$，$\angle EAF=45°$，∴ $\angle BAE+\angle CAF=45°$，
∴ $\angle CAD+\angle CAF=45°$，∴ $\angle EAF=\angle DAF=45°$.
∵ $AE=AD$，$AF=AF$，∴ $\triangle AEF\cong\triangle ADF$，
∴ $DF=EF$，∴ $BE^2+CF^2=EF^2$.
（2）如图 2，将$\triangle ABE$绕点 A 逆时针旋转 90°到$\triangle ACD$，连接 DF.
则 $\angle ACD=\angle B=45°$，$\angle DAE=90°$.
∵ $\angle BAC=90°$，$AB=AC$，∴ $\angle B=\angle ACB=45°$，
∴ $\angle ACD=\angle B=45°$，∴ $\angle BCD=90°$，∴ $\angle DCF=90°$.
∵ $\angle EAF=45°$，∴ $\angle EAF=\angle DAF$，
∵ $AE=AD$，$AF=AF$，∴ $\triangle AEF\cong\triangle ADF$，
∴ $DF=EF=EC+CF=1+2=3$，
∴ $BE=CD=\sqrt{DF^2-CF^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$.

8．在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=5$，点 E 是 CD 边上一点，将$\triangle BCE$沿 BE 折叠得到$\triangle BFE$，$\angle ABF$ 的平分线与 EF 的延长线交于点 G.

（1）如图 1，当点 F 落在 AD 边上时，求 DF 的长；

（2）如图 2，若 $\dfrac{EF}{FG}=\dfrac{3}{10}$，求 CE 的长；

（3）当点 E 从点 C 运动到点 D 时，直接写出点 G 运动的路径长.

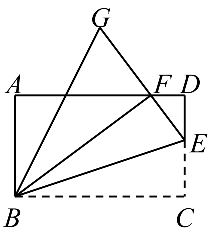


图 1

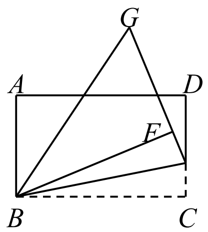
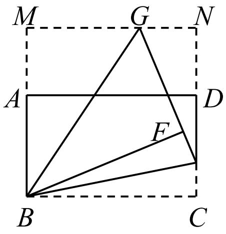


图 2

解：（1）由题意，$AD=BF=BC=5$，
∴ $AF=\sqrt{BF^2-AB^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，
∴ $DF=AD-AF=5-4=1$.

（2）过点 G 作 BC 的平行线 MN，分别与 BA，CD 的延长线交于点 M，N.



则 $\angle BMG=\angle BFG=90°$.

$\because \angle MBG=\angle FBG$，$BG=BG$，

$\therefore \triangle BMG\cong\triangle BFG$，$\therefore MG=FG$，$BM=BF=BC$，

$\therefore$ 四边形 $BCNM$ 为正方形.

由 $\dfrac{EF}{FG}=\dfrac{3}{10}$，可设 $EF=3x$，则 $CE=3x$，$MG=FG=10x$，

$GE=13x$，$GN=5-10x$，$EN=5-3x$.

在 Rt$\triangle GEN$ 中，$(5-10x)^2+(5-3x)^2=(13x)^2$，

解得 $x=-\dfrac{5}{2}$（舍去）或 $x=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore CE=3x=1$.

（3）点 G 运动的路径长为 $\dfrac{15}{4}$.

提示：当点 E 与点 C 重合时，$EF=CE=0$，$EN=5$，

$GE=FG=MG=5-GN$.

在 Rt$\triangle GEN$ 中，$5^2+GN^2=(5-GN)^2$，

解得 $GN=0$.

当点 E 与点 D 重合时，$EF=CE=CD=3$，$EN=2$，

$FG=MG=5-GN$，$GE=EF+FG=8-GN$.

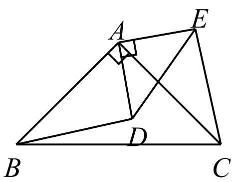
在 Rt$\triangle GEN$ 中，$2^2+GN^2=(8-GN)^2$，

解得 $GN=\dfrac{15}{4}$，点 G 运动的路径长为 $\dfrac{15}{4}$.

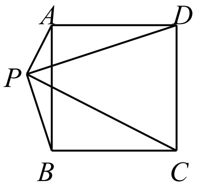
题型四　手拉手模型

例题

例 1 在$\triangle ABC$ 和$\triangle ADE$ 中，$AB=AC$，$AD=AE$，$\angle BAC=\angle DAE=90°$，探究且 BD 与 CE 的数量关系和位置关系，并证明.



例 2 如图，P 为正方形 $ABCD$ 外一点，$\angle APD=45°$，求证：$\angle BPC=45°$．



例 3 已知△ABC 为等边三角形．

（1）如图 1，P 为△ABC 外一点，$\angle BPC=120°$，连接 PA，PB，PC，求证：$PA=PB+PC$；

（2）如图 2，P 为△ABC 内一点，$PB>PC$，$\angle BPC=150°$，若 $PA=4$，△PBC 的面积为 $\sqrt{3}$，求△ABC 的面积．

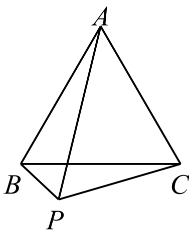


图 1

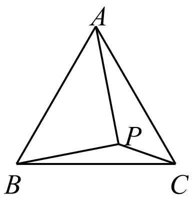
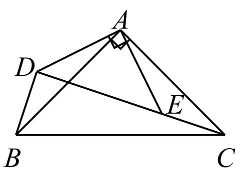


图 2

思路点拨：（1）将△ABP 绕点 A 逆时针旋转 $60°$ 到△ACQ；（2）将△ABP 绕点 A 逆时针旋转 $60°$ 到△ACQ，连接 PQ，证△ACQ 和△PCQ 都是直角三角形，△PCQ 的面积为△PBC 的面积的两倍，△ABC 的面积＝△APQ 的面积＋△PCQ 的面积＋△PBC 的面积．

基础篇

1．如图，△ABC 和△ADE 都是等腰直角三角形，$\angle BAC=\angle BAC=90°$，$D$，$E$，$C$ 三点在一条直线上，$BD=1$，$BC=\sqrt{10}$，求 DE 的长．



【答案】解：∵$\angle BAC=\angle DAE$，∴$\angle BAD=\angle CAE$．

∵$AB=AC$，$AD=AE$，∴△ABD≌△ACE，

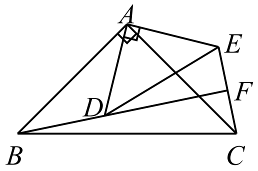
∴$BD=CE=1$，$\angle ABD=\angle ACE$，

∴$\angle BDC=\angle BAC=90°$，∴$DC=\sqrt{BC^2-BD^2}=3$，

∴$DE=DC-CE=3-1=2$．

2．如图，△ABC 和△ADE 都是等腰直角三角形，$\angle BAC=\angle DAE=90°$，点 D 在△ABC 内，BD 的延长线

与 CE 交于点 F，若点 F 为 CE 的中点，$AD=3$，$BD=2\sqrt{2}$，求 DF 的长．



【答案】解：∵∠BAC＝∠DAE，∴∠BAD＝∠CAE．

∵AB＝AC，AD＝AE，∴△ABD≌△ACE，

∴CE＝BD＝$2\sqrt{2}$，∠ABD＝∠ACE，

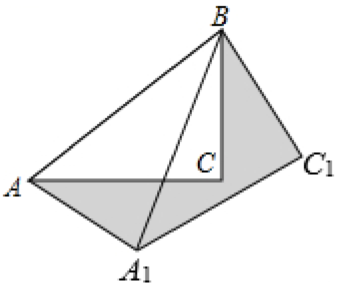
∴∠BFC＝∠BAC＝90°．

∵点 F 为 CE 的中点，∴EF＝$\sqrt{2}$．

∵∠DAE＝90°，AD＝3，∴DE＝$3\sqrt{2}$．

∴DF＝$\sqrt{DE^2-EF^2}$ ＝4

3．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=8$，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 按逆时针方向旋转30°后得到 $\triangle A_1BC_1$，则阴影部分面积为________．



【答案】16

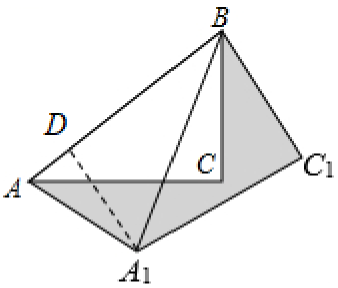
【详解】解：∵在△*ABC* 中，*AB*=8，将△*ABC* 绕点 *B* 按逆时针方向旋转 30°后得到△A_1BC_1，

∴△*ABC*≌△A_1BC_1，

∴$A_1B=AB=8$，

∴△A_1BA 是等腰三角形，∠A_1BA=30°，

过点 A_1 作 $A_1D\perp AB$ 于点 D



∴ $A_1D=\frac{1}{2}A_1B=4$

∴ $S_{\triangle A_1BA}=\frac{1}{2}$ ×8×4=16，

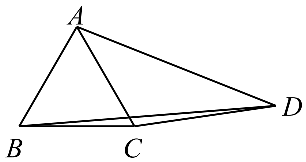
又∵ $S_{阴影}=S_{\triangle A_1BA}+S_{\triangle A_1BC_1}-S_{\triangle ABC}$，

$S_{\triangle A_1BC_1}=S_{\triangle ABC}$，

∴ $S_{阴影}=S_{\triangle A_1BA}$=16．

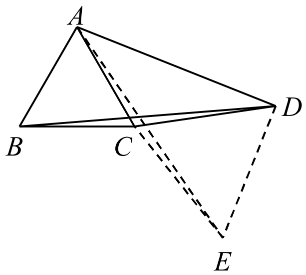
提高篇

4．如图，△*ABC* 是等边三角形，*D* 为△*ABC* 外一点，∠*ADC*＝30°，*AD*＝3，*CD*＝2，则 *BD* 的长为_________．



【答案】 $\sqrt{13}$

【解析】将△*BCD* 绕点 *C* 顺时针旋转 60°到△*ACE*，连接 *DE*．



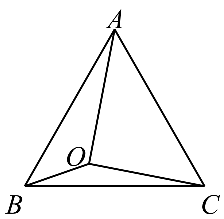
则 *BD*＝*AE*，△*CDE* 为等边三角形，*DE*＝*CD*＝2，∴∠*ADE*＝∠*ADC*＋∠*CDE*＝30°＋60°＝90°，

∴*BD*＝*AE*＝$\sqrt{AD^2+DE^2}$＝$\sqrt{3^2+2^2}$＝$\sqrt{13}$

2022·张家界真题

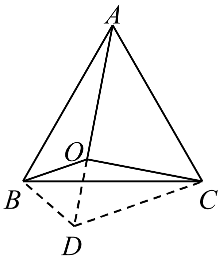
5．如图，点 *O* 是等边三角形 *ABC* 内一点，*OA*＝2，*OB*＝1，*OC*＝$\sqrt{3}$，则△*AOB* 与△*BOC* 的面积之和为（　　）．

A．$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　D．$\sqrt{3}$



【答案】C

【解析】将△*AOB* 绕点 *B* 顺时针旋转 60°得到△*CDB*，连接 *OD*．



则 $CD=OA=2$，$\triangle BOD$ 是等边三角形，$\therefore OD=OB=1$.

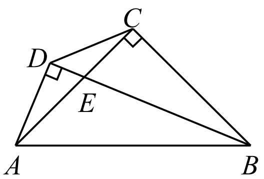
$\because OC=\sqrt{3}$，$\therefore OC^2+OD^2=CD^2$，

$\therefore \angle DOC=90°$，$\therefore S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$S_{\triangle BOD}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}=S_{\triangle CDB}+S_{\triangle BOC}=S_{\triangle BOD}+S_{\triangle COD}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

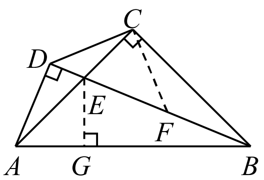
2022·贵阳中考

6．如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 E，$AC=BC=6$，$\angle ACB=\angle ADB=90°$，若 $BE=2AD$，则$\triangle ABE$ 的面积是__________.



【答案】$36-18\sqrt{2}$

【解析】过点 C 作 CF⊥CD，交 BE 于点 F.



则△ACD≌△BCF，∴AD=BF，CD=CF，

∴∠CDF=∠CFD=45°.

∵BE=2AD，∴BE=2BF，∴BF=EF，

∴CF=BF，∴∠BCF=∠CBF=22.5°，

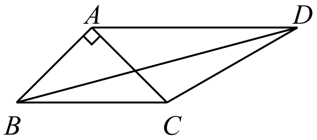
∴∠ABF=∠CBF=22.5°.

过点 E 作 EG⊥AB 于点 G.

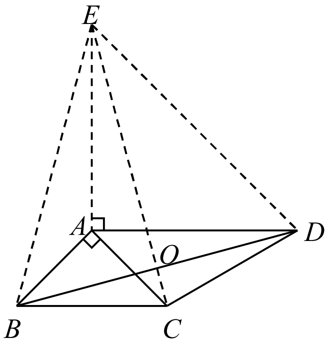
∴EG=EC，∴AE=$\sqrt{2}EG=\sqrt{2}EC$，

∴S△ABE $=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$S△ABC $=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\times\frac{1}{2}\times6\times6=36-18\sqrt{2}$.

7．如图，在四边形$ABCD$中，$AD/\!/BC$，$AB=AC$，$AB\perp AC$，若$\angle ABD=30°$，求$\angle ACD$的度数．



解：将$\triangle ABD$绕点A逆时针旋转$90°$得到$\triangle ACE$，连接BE，CE，DE，CE交BD于点O．



$\because AB=AC$，$AB\perp AC$，$\therefore \angle BAC=90°$，$\angle ABC=\angle ACB=45°$．

$\because AD/\!/BC$，$\therefore \angle BAD=135°$，$\therefore \angle CAE=135°$，

$\therefore \angle BAE=135°$，$\therefore \angle BAD=\angle BAE$．

$\because AB=AB$，$AD=AE$，$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ABE$，

$\therefore BD=BE$，$\angle ABE=\angle ABD=30°$，

$\therefore \angle DBE=60°$，$\therefore \triangle BDE$是等边三角形．

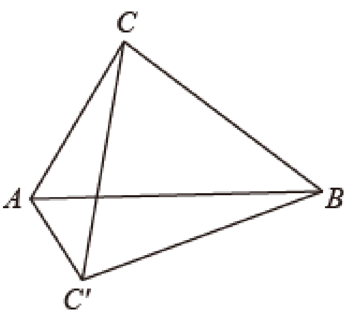
$\because \angle ADB=\angle AEC$，$\therefore \angle EOD=\angle EAD=90°$，

$\therefore OB=OD$，$\therefore BC=CD$，$\therefore \angle BDC=\angle DBC$．

$\because \angle ABC=45°$，$\angle ABD=30°$，$\therefore \angle DBC=15°$

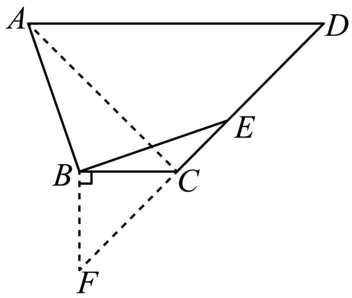
$\therefore \angle BDC=15°$，$\therefore \angle BCD=150°$，$\therefore \angle ACD=105°$．

8．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle CAB=60°$，$AB=10$，$AC=6$，将线段BC绕着点B逆时针旋转$60°$得到AC'，CC'，则$\triangle ABC'$的面积为______．



【答案】$2\sqrt{2}$

【详解】过B点作$BF\perp BC$交DC延长线于点F，连接AC，如图，



根据旋转有：$\angle ABE=90^\circ$， $AB=AE$，

∵ $\angle D=45^\circ$， $AD\parallel BC$，

∴ $\angle BCF=45^\circ$，

∵ $BF\perp BC$，

∴ $\angle CBF=90^\circ$， 即 $\angle BCF=\angle BFC=45^\circ$，

∴ $BF=BC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CF$， 即 $CF=2\sqrt{2}$，

∵ $\angle ABE=90^\circ$， $\angle CBF=90^\circ$，

∴ $\angle ABC=\angle EBF$，

又∵ $AB=AE$，

∴ $\triangle ABC\cong\triangle EBF$，

∴ $\angle BCA=\angle BFE=45^\circ$， $AC=FE$，

∴ $\angle ACF=\angle BCA+\angle BCF=90^\circ$，

又 $\angle D=45^\circ$，

∴ $\triangle ACD$ 为等腰直角三角形，

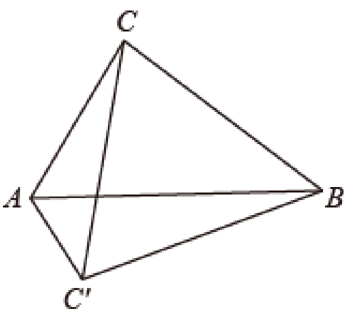
∴ $AC=CD$，

∴ $EF=CD$，

∴ $EC+CF=CE+ED$，

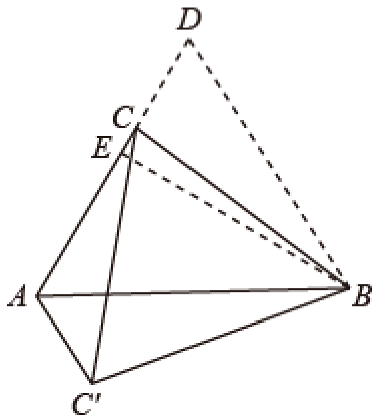
∴ $CF=DE=2\sqrt{2}$

9．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle CAB=60^\circ$，$AB=10$，$AC=6$，将线段 BC 绕着点 B 逆时针旋转 60°得到 AC'，CC'，则 $\triangle ABC'$ 的面积为______.



【答案】$10\sqrt{3}$

【详解】延长 AC 至 D，使得 $AD=BD$， 连接 BD， 如图



$\because \angle CAB = 60^\circ$

$\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形

$\because BC$ 绕着点 B 逆时针旋转 60° 得到 BC'

$\therefore \triangle BCC'$ 为等边三角形

$\therefore BC = BC'$， $\angle CBC' = 60^\circ$

$\because \angle DBA - \angle ABC = \angle CBC' - \angle ABC$

即 $\angle DBC = \angle ABC'$

在 $\triangle DBC$ 和 $\triangle ABC'$ 中

$$\begin{cases} DB = DB \\ \angle DBC = \angle ABC' \\ BC = BC' \end{cases}$$

$\therefore \triangle DBC \cong \triangle ABC'$（$SAS$）

$\therefore S_{\triangle DBC} = S_{\triangle ABC'}$

过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E

$\therefore \angle DBE = 90^\circ - \angle D = 30^\circ$

$\therefore DE = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB = 5$

$\therefore BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = 5\sqrt{3}$， $DC = AD - AC = 10 - 6 = 4$

$\therefore S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot BE = \frac{1}{2} \times 4 \times 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

$\therefore S_{\triangle ABC'} = 10\sqrt{3}$

10．已知△ABC 是等边三角形，PA＝5，PB＝3．

（1）如图 1，点 P 是△ABC 内一点，且 PC＝4，求∠BPC 的度数；

（2）如图 2，点 P 是△ABC 外一点，且∠APB＝60°，求 PC 的长．

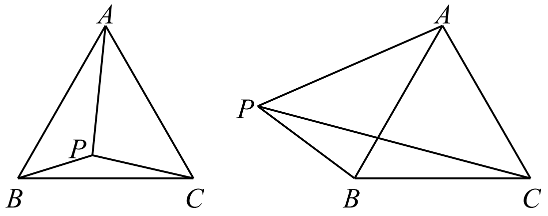


图 1　　　　　　图 2

【解答】（1）如图 1，将△BPC 绕点 C 顺时针旋转 60°到△AQC，连接 PQ.

则△PQC 是等边三角形，$AQ=PB=3$，

∴$\angle PQC=60°$，$PQ=PC=4$.

∵$PA=5$，∴$AQ^2+PQ^2=PA^2$，∴$\angle AQP=90°$，

∴$\angle BPC=\angle AQC=\angle AQP+\angle PQC=90°+60°=150°$.

（2）如图 2，将△BPC 绕点 C 顺时针旋转 60°到△AQC，连接 PQ.

则△PQC 是等边三角形，$AQ=PB=3$，

$\angle PAQ=360°-\angle PAC-\angle QAC=360°-\angle PAC-\angle PBC$

$=\angle APB+\angle ACB=60°+60°=120°$.

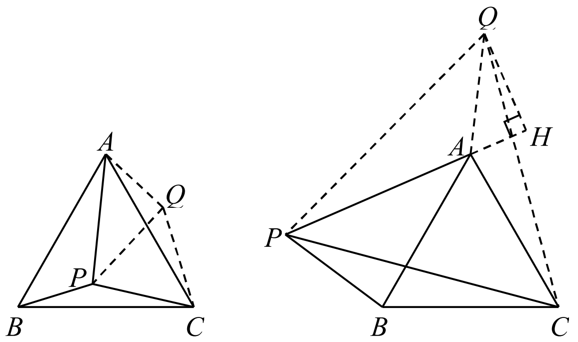


图 1　　　　　　图 2

过点 Q 作 $QH\perp PA$ 交 PA 的延长线于点 H.

则$\angle QAH=60°$，∴$AH=\frac{1}{2}AQ=\frac{3}{2}$，$QH=\sqrt{3}AH=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

∴$PH=\frac{13}{2}$，$PC=QC=\sqrt{PH^2+QH^2}=7$.

11．△ABC 和△DEC 是等腰直角三角形，$\angle ACB=\angle DCE=90°$，$AC=BC$，$CD=CE$.

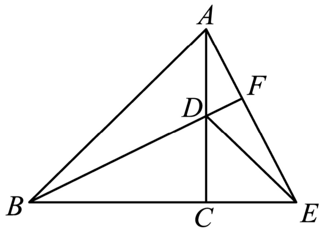


图1

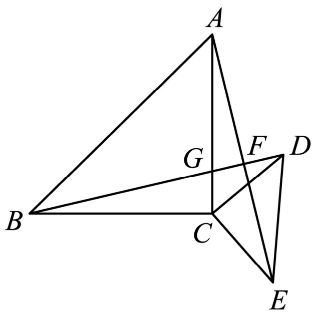


图2

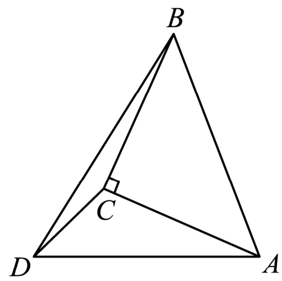


图3

(1)【观察猜想】当$\triangle ABC$和$\triangle DEC$按如图1所示的位置摆放，连接BD、AE，延长BD交AE于点F，猜想线段BD和AE有怎样的数量关系和位置关系．

(2)【探究证明】如图2，将$\triangle DCE$绕着点C顺时针旋转一定角度$\alpha\left(0°<\alpha<90°\right)$，线段$BD$和线段$AE$的数量关系和位置关系是否仍然成立？如果成立，请证明：如果不成立，请说明理由．

(3)【拓展应用】如图3，在$\triangle ACD$中，$\angle ADC=45°$，$CD=\sqrt{2}$，$AD=4$，将AC绕着点C逆时针旋转$90°$至BC，连接BD，求BD的长．

【答案】(1) $BD=AE$，$BD\perp AE$；(2)成立，理由见解析；(3) $2\sqrt{5}$

【详解】（1）$BD=AE$，$BD\perp AE$，证明如下：

在$\triangle BCD$和$\triangle ACE$中，

$\because \angle ACB=\angle DCE=90°$，$AC=BC$，$CD=CE$，

$\therefore \triangle BCD\cong\triangle ACE$，

$\therefore BD=AE, \angle CBD=\angle CAE$，

$\because \angle ACB=90°$，

$\therefore \angle CBD+\angle BDC=90°$，

$\because \angle BDC=\angle ADF$，

$\therefore \angle CAE+\angle ADF=90°$，

$\therefore BD\perp AE$；

（2）成立，理由如下：

$\because \angle ACB=\angle DEC$，

$\therefore \angle ACB+\angle ACD=\angle DCE+\angle ACD$，即$\angle BCD=\angle ACE$，

在$\triangle BCD$和$\triangle ACE$中，

$\because AC=BC$，$\angle BCD=\angle ACE$，$CD=CE$，

$\therefore \triangle BCD\cong\triangle ACE$，

$\therefore BD=AE$，$\angle CBD=\angle CAE$，

$\because \angle BGC=\angle AGF$，

$\therefore \angle CBD+\angle BGC=\angle CAE+\angle AGF$，

$\because \angle ACB=90°$，

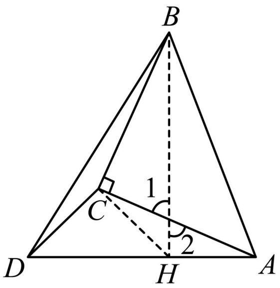
$\therefore \angle CBD+\angle BGC=90°$，

$\therefore \angle CAE+\angle AGF=90°$，

$\therefore \angle AFB = 90°$，

$\therefore BD \perp AE$；

（3）如图，过点 C 作 $CH \perp CD$，垂足为 C，交 AD 于点 H，



由旋转性质可得：$\angle ACB = 90°$，$AC = BC$，

$\because CH \perp CD$，

$\therefore \angle DCH = 90°$，

$\because \angle ADC + \angle CHD = 90°$，且 $\angle ADC$=45°，

$\therefore \angle CHD = 45°$，

$\therefore \angle CHD = \angle ADC$，

$\therefore CD = CH = \sqrt{2}$，

在 $Rt\triangle DCH$ 中：$DH = \sqrt{CD^2 + CH^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2$，

$\because \angle ACB = \angle DCH = 90°$，

$\therefore \angle ACB + \angle ACH = \angle DCH + \angle ACH$，即 $\angle ACD = \angle BCH$，

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCH$ 中，

$\because AC = BC$，$\angle ACD = \angle BCH$，$CD = CH$，

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCH$，

$\therefore BH = AD = 4$，$\angle CBH = \angle DAC$，

$\therefore \angle CBH + \angle 1 = \angle DAC + \angle 2$，

$\because \angle ACB = 90°$，

$\therefore \angle CBH + \angle 1 = 90°$，

$\therefore \angle DAC + \angle 2 = 90°$，

$\therefore \angle BHA = 90°$，

$\therefore BH \perp AD$，

$\therefore \triangle BHD$ 是直角三角形，

在 $Rt\triangle BDH$ 中，$BD = \sqrt{BH^2 + DH^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$．

12．如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DCE$ 都是等腰直角三角形，$\angle ACB=\angle DCE=90^{\circ}$．

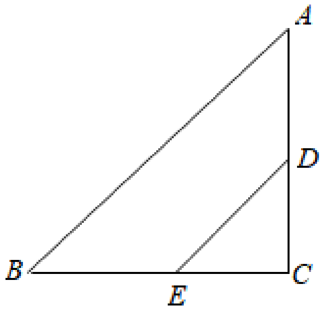


图1

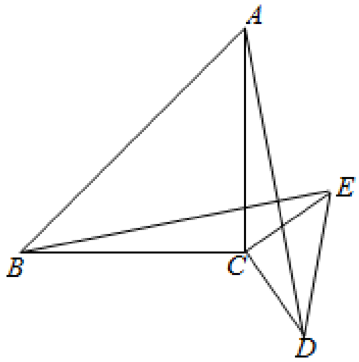
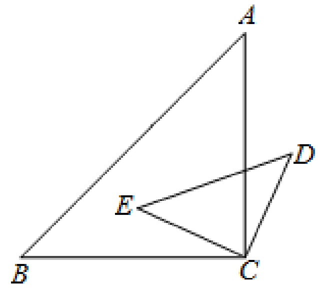


图2



备用图

（1）猜想：如图 1，点 E 在 BC 上，点 D 在 AC 上，线段 BE 与 AD 的数量关系是______，位置关系是______；

（2）探究：把 $\triangle CDE$ 绕点 C 旋转到如图 2 的位置，连接 AD，BE，（1）中的结论还成立吗？说明理由；

（3）拓展：把 $\triangle CDE$ 绕点 C 在平面内自由旋转，若 $AC=BC=26$，$DE=20$，当 A，E，D 三点在同一直线上时，则 AE 的长是______．

【答案】（1） $BE=AD$，$BE\perp AD$；（2）成立，理由见解析；（3）34 或 14

【详解】解：（1）∵△ABC 和△DCE 都是等腰直角三角形，∠ACB=∠DCE=90°，

∴BC=AC，EC=DC，

∴BC-EC=AC-DC，

∴BE=AD，

∵点 E 在 BC 上，点 D 在 AC 上，且∠ACB=90°，

∴BE⊥AD，

故答案为 BE=AD，BE⊥AD；

（2）（1）中结论仍然成立，理由：

由旋转知，∠BCE=∠ACD，

∵BC=AC，EC=DC，

∴△BCE≌△ACD（SAS），

∴BE=AD，∠CBE=∠CAD，

如图 2， BE 与 AC 的交点记作点 H，BE 与 AD 的交点记作点 G，

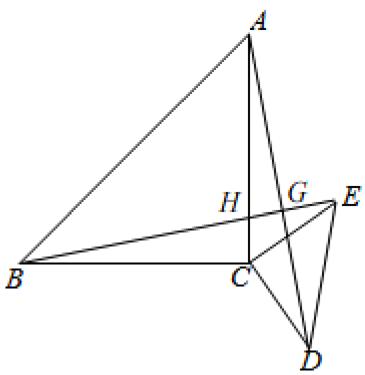


图2

∵∠ACB=90°，

∴∠CBE+∠BHC=90°,
∴∠CAD+∠BHC=90°,
∵∠BHC=∠AHG,
∴∠CAD+∠AHG=90°,
∴∠AGH=90°,
∴BE⊥AD;
（3）①当点 E 在线段 AD 上时，如图 3，过点 C 作 CM⊥AD 于 M，

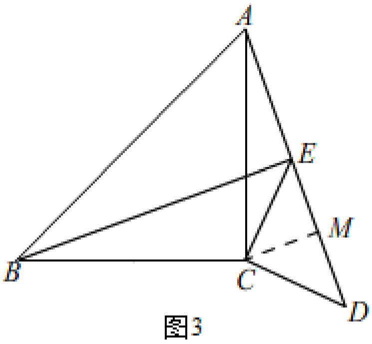


图3

∵△CDE 时等腰直角三角形，且 DE=20，
∴EM=CM=$\frac{1}{2}$DE=10，
在 Rt△AMC 中，AC=26，
根据勾股定理得，$AM=\sqrt{AC^2-CM^2}=\sqrt{26^2-10^2}=24$，
∴AE=AM-EM=24-10=14；
②当点 D 在线段 AD 的延长线上时，如图 4，过点 C 作 CN⊥AD 于 N，

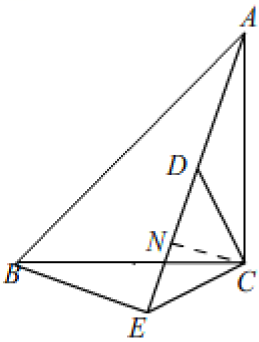
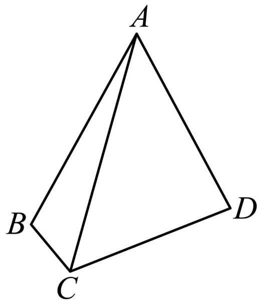


图4

∵△CDE 时等腰直角三角形，且 DE=20，
∴EN=CN=$\frac{1}{2}$DE=10，
在 Rt△ANC 中，AC=26，
根据勾股定理得 $AN=\sqrt{AC^2-CN^2}=\sqrt{26^2-10^2}=24$，
∴AE=AN+EN=24+10=34；
综上，AE 的长为 14 或 34

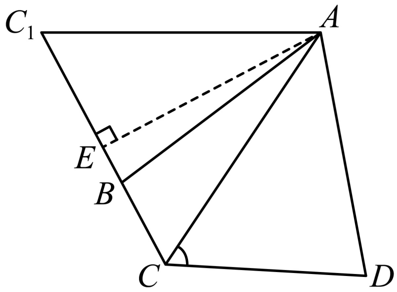
题型五 对角互补+邻边相等模型

1．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B+\angle D=180°$，$AB=AD$，$AC=2$，$\angle BAD=60°$，则四边形 $ABCD$ 的面积等于________.



【答案】$\sqrt{3}$

【详解】解：∵$\angle BAD=60°$，$AB=AD$，将$\triangle ACD$绕点A逆时针旋转$60°$，得$\triangle ABC_1$，如图所示，



∴$\angle ABC_1=\angle D$，$AC=AC_1$，

∴$\angle CAC_1=60°$，

∵$\angle ABC+\angle D=180°$，则$\angle ABC+\angle ABC_1=180°$，

∴点C_1在CB的延长线上，且$AC_1=AC$，$\angle CAC_1=60°$，

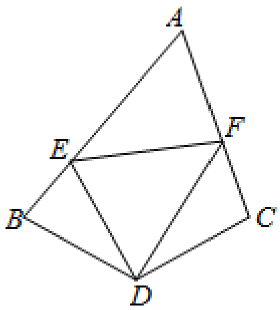
∴$\triangle ACC_1$是等边三角形，过点A作$AE\perp BC_1$于E，$AC=2$，

∴$CC_1=2$，$AE=\sqrt{3}$，

∴$S_{\triangle ACC_1=}=\frac{1}{2}CC_1\bullet AE=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$，

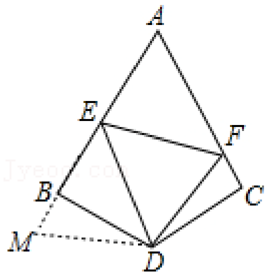
∴$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ACC_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}AC^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$

2．如图，在四边形 $ABDC$ 中，$\angle B+\angle C=180°$，$DB=DC$，$\angle BDC=120°$，以 D 为顶点作一个 $60°$ 角，角的两边分别交 AB、AC 于 E、F 两点，连接 EF，探索线段 BE、CF、EF 之间的数量关系，并加以证明.



【解答】如图，结论：EF＝EB+FC，

理由如下：延长 AB 到 M，使 BM＝CF，



∵∠ABD+∠C＝180°，又∠ABD+∠MBD＝180°，

∴∠MBD＝∠C，

在△BDM 和△CDF 中，

$$\begin{cases} BD = CD \\ \angle MBD = \angle C \\ BM = CF \end{cases}$$

，

∴△BDM≌△CDF（SAS），

∴DM＝DF，∠BDM＝∠CDF，

∴∠EDM＝∠EDB+∠BDM＝∠EDB+∠CDF＝∠CDB﹣∠EDF＝120°﹣60°＝60°＝∠EDF，

在△DEM 和△DEF 中，

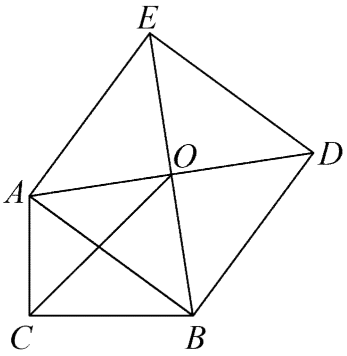
$$\begin{cases} DE = DE \\ \angle EDM = \angle EDF \\ MM = DF \end{cases}，$$

∴△DEM≌△DEF（SAS），

∴EF＝EM，

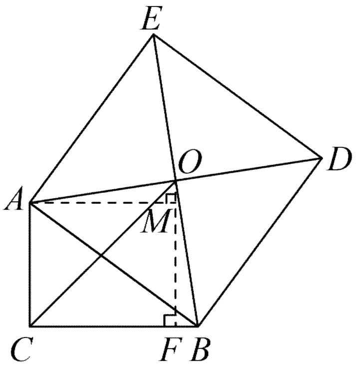
∴EF＝EM＝BE+BM＝EB+CF

3．如图，已知 Rt△ABC 中，$\angle ACB = 90°$，以斜边 AB 为边向外作正方形 $ABDE$，且正方形的对角线交于点 O，连接 OC．已知 $AC = 5$，$OC = 6\sqrt{2}$，则另一直角边 BC 的长为____________．



【答案】7

【详解】解：如图，过点O作$OF\perp BC$于F，过点A作$AM\perp OF$于M，



$\because$四边形$ABDE$为正方形，

$\therefore$ $\angle AOB=90^\circ$， $OA=OB$，

$\therefore\angle AOM+\angle BOF=90^\circ$，

由$\because\angle AMO=90^\circ$，

$\therefore\angle AOM+\angle OAM=90^\circ$，

$\therefore\angle BOF=\angle OAM$，

在$\triangle AOM$和$\triangle BOF$中，

$$\begin{cases}\angle AMO=\angle OFB=90^\circ\\ \angle OAM=\angle BOF\\ OA=OB\end{cases},$$

$\therefore\triangle AOM\cong\triangle OBF\left(\text{AAS}\right)$，

$\therefore AM=OF$， $OM=FB$，

又$\because\angle ACB=\angle AMF=\angle CFM=90^\circ$，

$\therefore$四边形$ACFM$为矩形，

$\therefore AM=CF$， $AC=MF=5$，

$\therefore OF=CF$，

$\therefore\triangle OCF$为等腰直角三角形，

$\because OC=6\sqrt{2}$，

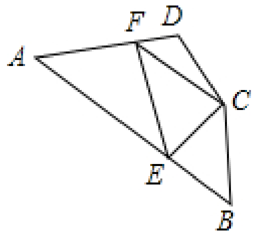
$\therefore CF^2+OF^2=OC^2$，

解得：$CF=OF=6$，

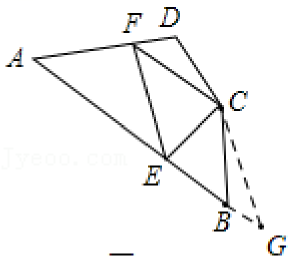
$\therefore FB=OM=OF-FM=6-5=1$，

则 $BC = CF + BF = 6 + 1 = 7$

4．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ECF = \alpha$（$0^\circ < \alpha < 90^\circ$），$\angle B + \angle D = 180$，$CB = CD$，且 $BE + DF = EF$，则 $\angle BCD =$_____（用含α的代数式表示）．



【解答】如图，延长 AB 至点 G，使 BG＝DF，连接 CG，



可得△CBG≌△CDF，

∴$CG = CF$，$\angle BCG = \angle DCF$，

若 $BE + DF = EF$，

则 $EG = EF$，

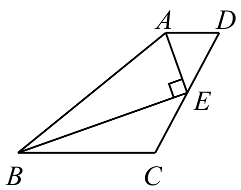
∴△ECF≌△ECG（SSS），

∴$\angle ECG = \angle ECF$，

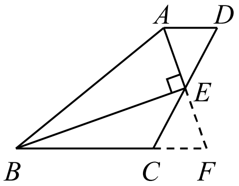
∴$\angle BCD = 2\angle ECF = 2\alpha$

题型六　平行线夹中点模型

1．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，点 E 是 CD 的中点，$AE \perp BE$，求证：$AB = AD + BC$．



证明：延长 AE 交 BC 的延长线于点 F．



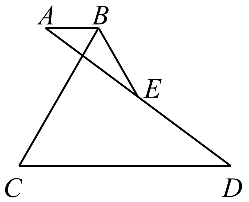
∵$AD // BC$，∴$\angle DAE=\angle F$，$\angle D=\angle ECF$.

∵点 E 是 CD 的中点，∴$DE=CE$，

∴$\triangle ADE\cong\triangle FCE$，∴$AD=CF$，$AE=EF$.

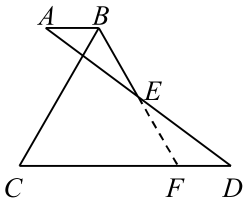
∵$AE\perp BE$，∴$AB=BF=BC+CF=AD+BC$.

2．如图，$AB // CD$，$\angle BCD=60°$，点 E 为 AD 的中点，若 $AB=2$，$BC=6$，$CD=8$，则 BE 的长为__________.



【答案】3

【解析】延长 BE 交 CD 于点 F.



∵$AB // CD$，∴$\angle A=\angle D$，$\angle ABE=\angle DFE$.

∵点 E 为 AD 的中点，∴$AE=DE$，

∴$\triangle ABE\cong\triangle DFE$，∴$BE=EF$，$DF=AB=2$.

∵$CD=8$，∴$CD=6$.

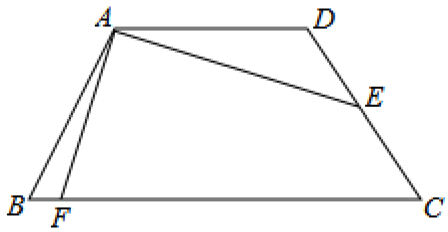
∵$BC=6$，$\angle BCD=60°$，∴$\triangle BCF$ 是等边三角形，

∴$BF=BC=6$，∴$BE=3$.

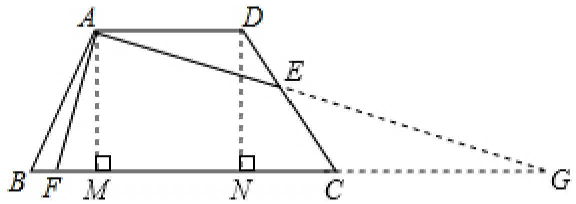
深圳中考

3．如图，已知四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，$AD // BC$，$AB=CD$，$AD=\sqrt{2}$，E 为 CD 中点，连接 AE，且 $AE=2\sqrt{3}$，$\angle DAE=30°$，作 $AE\perp AF$ 交 BC 于 F，则 $BF=$（　　）

A．1　　B．$3-\sqrt{3}$　C．$\sqrt{5}-1$　 D．$4-2\sqrt{2}$



【解答】解：如图，延长 AE 交 BC 的延长线于 G，



∵E 为 CD 中点，

∴$CE=DE$，

∵$AD\parallel BC$，

∴$\angle DAE=\angle G=30°$，

在$\triangle ADE$ 和$\triangle GCE$ 中，

$\begin{cases}\angle DAE=\angle G\\ \angle AED=\angle GEC\\ CE=DE\end{cases}$，

∴$\triangle ADE\cong\triangle GCE(AAS)$，

∴$CG=AD=\sqrt{2}$,$AE=EG=2\sqrt{3}$

∴$AG=AE+EG=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$，

∵$AE\perp AF$，

∴$AF=\dfrac{\sqrt{3}}{3}AG=4\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=4$，

$GF=AG\div\cos30°=4\sqrt{3}\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}=8$，

过点 A 作 $AM\perp BC$ 于 M，过点 D 作 $DN\perp BC$ 于 N，

则 $MN=AD=\sqrt{2}$，

∵四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，

∴$BM=CN$，

∵$MG=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AG=4\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6$，

∴$CN=MG-MN-CG=6-\sqrt{2}-\sqrt{2}=6-2\sqrt{2}$，

∵$AF\perp AE$，$AM\perp BC$，

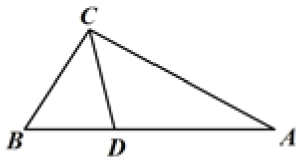
∴$\angle FAM=\angle G=30°$，

∴$FM=\dfrac{1}{2}AF=4\times\dfrac{1}{2}=2$，

∴$BF=BM-MF=6-2\sqrt{2}-2=4-2\sqrt{2}$.

题型七　截长补短模型

1．如图，△ABC中，∠B=2∠A，∠ACB的平分线CD交AB于点D，已知AC=16，BC=9，则BD的长为________



【答案】7

【详解】解：如图，在CA上截取$CN=CB$，连接DN，

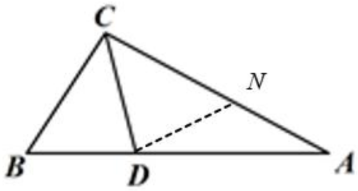
$\because CD$平分$\angle ACB$，

$\therefore \angle BCD=\angle NCD$，

$\because CD=CD$，

$\therefore \triangle CBD\cong\triangle CND(SAS)$，

$\therefore BD=ND$，$\angle B=\angle CND$，$CB=CN$，



$\because BC=9$，$AC=16$，

$\therefore CN=9$，$AN=AC-CN=7$，

$\because \angle CND=\angle NDA+\angle A$，

$\therefore \angle B=\angle NDA+\angle A$，

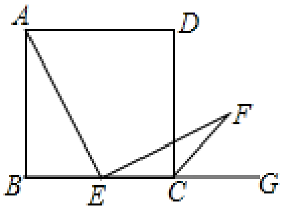
$\because \angle B=2\angle A$，

$\therefore \angle A=\angle NDA$，

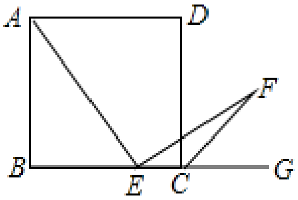
$\therefore ND=NA$，$\therefore BD=AN=7$．

2．如图，正方形$ABCD$中，E是BC的中点，$EF\perp AE$交$\angle DCE$外角的平分线于F．

（1）求证：$AE=EF$；



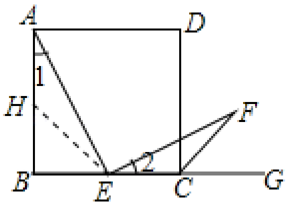
（2）如图，当E是BC上任意一点，而其它条件不变，$AE=EF$是否仍然成立？若成立，请证明，若不成立，请说明理由．



【分析】(1) 取 AB 的中点 H，连接 EH，根据已知及正方形的性质利用 ASA 判定 $\triangle AHE \cong \triangle ECF$，从而得到 $AE = EF$；(2) 成立，在 AB 上取 $BH = BE$，连接 EH，根据已知及正方形的性质利用 ASA 判定 $\triangle AHE \cong \triangle ECF$，从而得到 $AE = EF$.

【详解】

(1) 证明：取 AB 的中点 H，连接 EH，如图；



$\because ABCD$ 是正方形，

$AE \perp EF$；

$\therefore \angle 1 + \angle AEB = 90^\circ$，

$\angle 2 + \angle AEB = 90^\circ$

$\therefore \angle 1 = \angle 2$，

$\because BH = BE$，

$\therefore \angle BHE = 45^\circ$，

又 $\because \angle FCG = 45^\circ$，

$\therefore \angle AHE = \angle ECF = 135^\circ$，

在 $\triangle AHE$ 和 $\triangle ECF$ 中

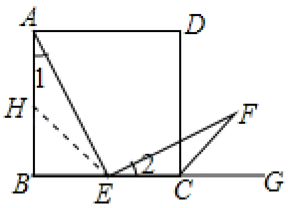
$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ AH = EC \\ \angle AHE = \angle ECF \end{cases},$$

$\therefore \triangle AHE \cong \triangle ECF$，

$\therefore AE = EF$；

(2) 解：成立.

在 AB 上取 $BH = BE$，连接 EH，如图，



$\because ABCD$ 为正方形，

$\therefore AB = BC$，

，

$\therefore AH = EC$，$\angle BHE = \angle BEH = 45^\circ$，

又 $\because \angle FCG = 45^\circ$，

$\therefore \angle AHE = \angle ECF = 135°$，

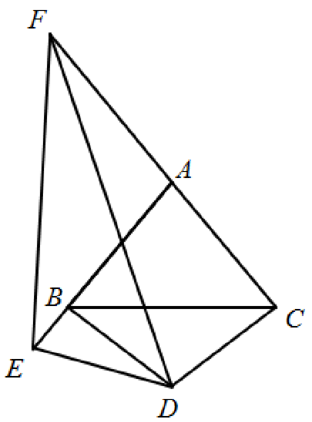
在$\triangle AHE$和$\triangle ECF$中

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ AH = EC \\ \angle AHE = \angle ECF \end{cases}，$$

$\therefore \triangle AHE \cong \triangle ECF$，

$\therefore AE = EF$.

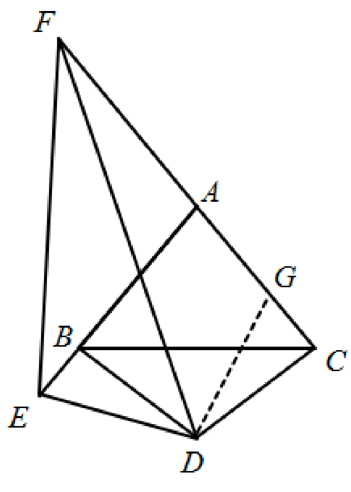
3．如图，$\triangle ABC$和$\triangle BDC$是等腰三角形，且$AB = AC$，$BD = CD$，$\angle BAC = 80°$，$\angle BDC = 100°$，以D为顶点作一个 $50°$角，角的两边分别交边AB，AC于点E、F，连接EF，点E、F分别在AB、CA 延长线上，则BE、EF、FC之间存在什么样的关系？并说明理由．



【答案】）EF=FC-BE．

【分析】在 CA 上截取 CG=BE,连接 DG，由等腰三角形的性质，可得$\angle ABC = \angle ACB = 50°$，$\angle DBC = \angle DCB = 40°$，进而证明$\triangle BED \cong \triangle CGD(SAS)$得到$DG = DE$，据此方法再证明$\triangle EDF \cong \triangle GDF(SAS)$，最后根据全等三角形的性质解题即可．

【详解】在 CA 上截取 CG=BE,连接 DG



$\because \triangle ABC$是等腰三角形，$\angle BAC = 80°$

$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 50°$

$\because \angle BDC = 100°$，$BD = CD$

$\therefore \angle DBC = \angle DCB = 40°$

$\therefore \angle EBD = \angle GCD = 90°$

$\because CG = BE$，$BD = CD$

在$\triangle BED$和$\triangle CGD$中，

$\because$CG=BE，$\angle EBD = \angle GCD$，$BD = CD$

$\therefore \triangle BED \cong \triangle CGD(SAS)$

$\therefore DG = DE$

在$\triangle EDF$和$\triangle GDF$中，

$\because$FD=FD，$\angle GDF = \angle EDF$，$ED = GD$

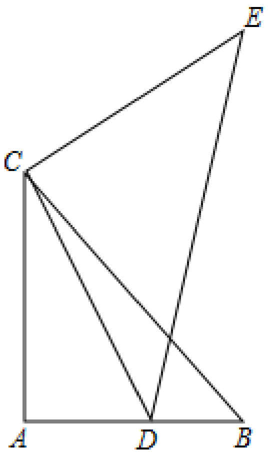
$\therefore \triangle EDF \cong \triangle GDF(SAS)$

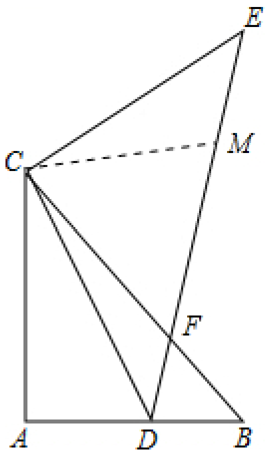
$\therefore EF = FG = FC - CG = FC - BE$

4．如图，$\triangle ABC$为等腰直角三角形，$AB=AC$，$\angle BAC=90°$，点D在线段AB上，连接CD，$\angle ADC=60°$，$AD=2$，过C作$CE\perp CD$，且$CE=CD$，连接DE，交BC于F.

（1）求$\triangle CDE$的面积；

（2）证明：$DF+CF=EF$.





（1）解：在Rt$\triangle ADC$中，$\because AD=2$，$\angle ADC=60°$，

$\therefore \angle ACD=30°$，

$\therefore CD=CE=2AD=4$，

$\because EC\perp CD$，

$\therefore \angle ECD=90°$，

$\therefore S_{\triangle ECD}=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot CE=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$.

（2）证明：在EF上取一点M，使得EM＝DF，

$\because$EC＝CD，$\angle E=\angle CDF=45°$，

$\therefore \triangle ECM\cong\triangle DCF$，

$\therefore$CM＝CF，

$\because \angle ADC=60°$，

∠FDB＝180°－60°－45°＝75°，

∴∠DFB＝∠CFM＝180°－75°－45°＝60°，

∴△CFM 是等边三角形，

∴CF＝MF，

∴EF＝EM+MF＝DF+CF．

5．在△ABC中，BE，CD 为△ABC的角平分线，BE，CD 交于点 F．

（1）求证：$\angle BFC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$；

（2）已知$\angle A=60^\circ$．

①如图 1，若$BD=4$，$BC=6.5$，求 CE 的长；

②如图 2，若$BF=AC$，求$\angle AEB$的大小．

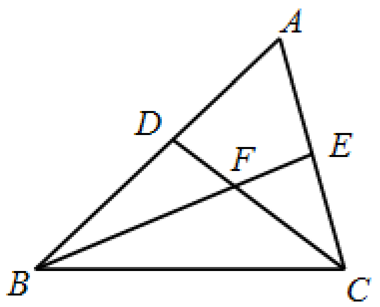


图 1

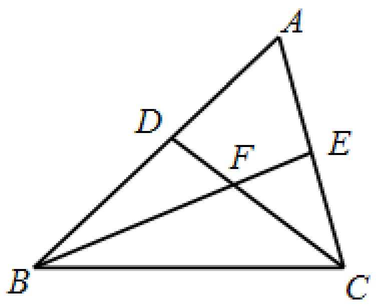


图 2

【答案】（1）证明见解析；（2）2.5；（3）100°．

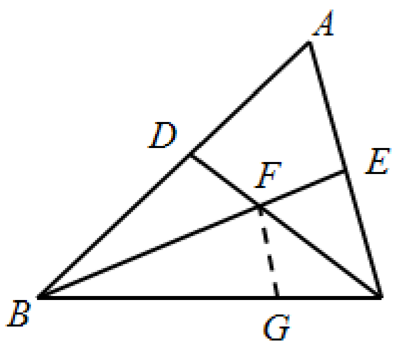
【详解】解：（1）∵BE、CD分别是$\angle ABC$与$\angle ACB$的角平分线，

$\therefore \angle FBC+\angle FCB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$，

$\therefore \angle BFC=180^\circ-(\angle FBC+\angle FCB)=180^\circ-(90^\circ-\frac{1}{2}\angle A)$，

$\therefore \angle BFC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$，

（2）如解（2）图，在 BC 上取一点 G 使 BG=BD，



解（2）图

由（1）得$\angle BFC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$，

$\because \angle BAC = 60°$，

$\therefore \angle BFC = 120°$，

$\therefore \angle BFD = \angle EFC = 180° - \angle BFC = 60°$，

在$\triangle BFG$与$\triangle BFD$中，

$\begin{cases} BF = BF \\ \angle FBG = \angle FBD \\ BD = BG \end{cases}$，

$\therefore \triangle BFG \cong \triangle BFD$（SAS）

$\therefore \angle BFD = \angle BFG$，

$\therefore \angle BFD = \angle BFG = 60°$，

$\therefore \angle CFG = 120° - \angle BFG = 60°$，

$\therefore \angle CFG = \angle CFE = 60°$

在$\triangle FEC$与$\triangle FGC$中，

$\begin{cases} \angle CFE = \angle CFG \\ CF = CF \\ \angle ECF = \angle GCF \end{cases}$，

$\therefore \triangle FEC \cong \triangle FGC(ASA)$，

$\therefore CE = CG$，

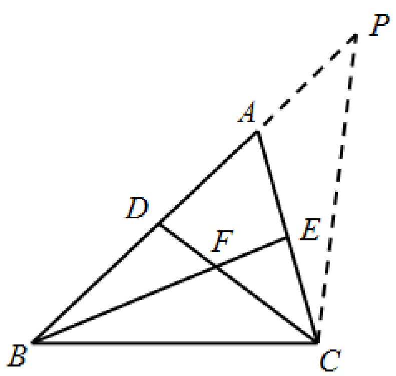
$\because BC = BG + CG$，

$\therefore BC = BD + CE$；

$\because BD = 4$，$BC = 6.5$，

$\therefore CE = 2.5$

（3）如解（3）图，延长 BA 到 P，使 AP=FC，



解（3）图

$\because \angle BAC = 60°$，

$\therefore \angle PAC = 180° - \angle BAC = 120°$，

在$\triangle BFC$与$\triangle CAP$中，

$\begin{cases} BF = AC \\ \angle BFC = \angle CAP = 120° \\ CF = PA \end{cases}$，

$\therefore \triangle BFC \cong \triangle CAP$（SAS）

$\therefore \angle P = \angle BCF$，$BC = PC$，

$\therefore \angle P = \angle ABC$，

又$\because \angle P = \angle BCF = \frac{1}{2}\angle ACB$，

$\therefore \angle ACB = 2\angle ABC$,

又$\because \angle ACB + \angle ABC + \angle A = 180°$,

$\therefore 3\angle ABC + 60° = 180°$,

$\therefore \angle ABC = 40°$，$\angle ACB = 80°$,

$\therefore \angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABC = 20°$，$\angle AEB = 180° - (\angle ABE + \angle A) = 180° - (20° + 60°) = 100°$

6．课堂上，老师提出了这样一个问题：

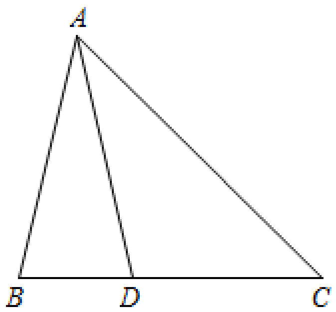


图1

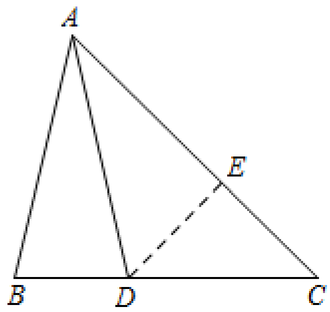


图2

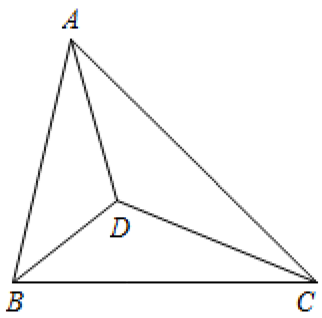


图3

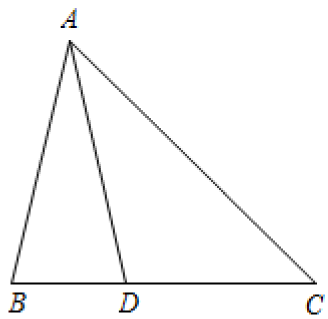


图4

如图 1，在$\triangle ABC$中，AD平分$\angle BAC$交BC于点D，且$AB+BD=AC$，求证：$\angle ABC=2\angle ACB$，小明的方法是：如图 2，在AC上截取AE，使$AE=AB$，连接DE，构造全等三角形来证明．

(1)小天提出，如果把小明的方法叫做“截长法”，那么还可以用“补短法”通过延长线段AB构造全等三角形进行证明．辅助线的画法是：延长AB至F，使$BF=$______，连接DF请补全小天提出的辅助线的画法，并在图 1 中画出相应的辅助线；

(2)小芸通过探究，将老师所给的问题做了进一步的拓展，给同学们提出了如下的问题：

如图 3，点D在$\triangle ABC$的内部，AD，BD，CD分别平分$\angle BAC$，$\angle ABC$，$\angle ACB$，且$AB+BD=AC$．求证：$\angle ABC=2\angle ACB$．请你解答小芸提出的这个问题（书写证明过程）；

(3)小东将老师所给问题中的一个条件和结论进行交换，得到的命题如下：

如果在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=2\angle ACB$，点D在边BC上，$AB+BD=AC$，那么AD平分$\angle BAC$小东判断这个命题也是真命题，老师说小东的判断是正确的．请你利用图4对这个命题进行证明．

【分析】(1)延长AB至F，使$BF=BD$，连接DF，根据三角形的外角性质得到$\angle ABC=2\angle F$，则可利用SAS证明$\triangle ADF\cong\triangle ADC$，根据全等三角形的性质可证明结论；

（2）在AC上截取AE，使$AE=AB$，连接DE，则可利用SAS证明$\triangle ADB\cong\triangle ADE$，根据全等三角形的性质即可证明结论；

（3）延长AB至G，使$BG=BD$，连接DG，则可利用SSS证明$\triangle ADG\cong\triangle ADC$，根据全等三角形的性质、角平分线的定义即可证明结论．

【解析】(1）证明：（1）如图1，延长AB至F，使$BF=BD$，连接DF，则$\angle BDF=\angle F$，

∴$\angle ABC=\angle BDF+\angle F=2\angle F$，

∵AD平分$\angle BAC$

∴$\angle BAD=\angle CAD$，

∵$AB+BD=AC$，$BF=BD$，

∴$AF=AC$，

在$\triangle ADF$和$\triangle ADC$中，

$$\begin{cases}AF=AC\\ \angle BAD=\angle CAD\\ AD=AD\end{cases},$$

∴$\triangle ADF\cong\triangle ADC$（SAS），

∴$\angle ACB=\angle F$，

∴$\angle ABC=2\angle ACB$．

故答案为：BD．

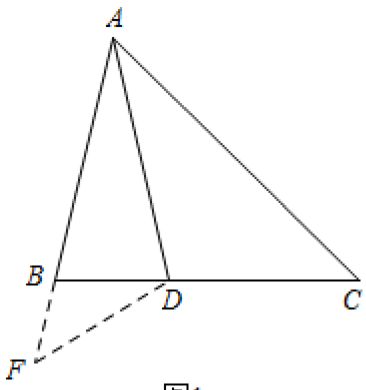


图1

（2）证明：如图3，在AC上截取AE，使$AE=AB$，连接DE

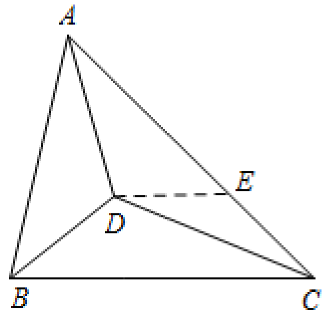


图3

∵ AD，BD，CD 分别平分 $\angle BAC$，$\angle ABC$，$\angle ACB$，

∴ $\angle DAB=\angle DAE$，$\angle DBA=\angle DBC$，$\angle DCA=\angle DCB$，

∵ $AB+BD=AC$，$AE=AB$，

∴ $DB=CE$，

在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle ADE$ 中，

$$\begin{cases} AB=AE \\ \angle DAB=\angle DAE \\ AD=AD \end{cases},$$

∴ $\triangle ADB\cong\triangle ADE$（SAS），

∴ $BD=DE$，$\angle ABD=\angle AED$，

∴ $DE=CE$，

∴ $\angle EDC=\angle ECD$，

∴ $\angle AED=2\angle ECD$，

∴ $\angle ABD=2\angle ECD$，

∴ $\angle ABC=2\angle ACB$．

（3）证明：如图 4：延长 AB 至 G，使 $BG=BD$，连接 DG，则 $\angle BDG=\angle AGD$，

∴ $\angle ABC=\angle BDG+\angle AGD=2\angle AGD$，

∵ $\angle ABC=2\angle ACB$，

∴ $\angle AGD=\angle ACB$，

∵ $AB+BD=AC$，$BG=BD$，

∴ $AG=AC$，

∴ $\angle AGC=\angle ACG$，

∴ $\angle DGC=\angle DCG$，

∴ $DG=DC$，

在 $\triangle ADG$ 和 $\triangle ADC$ 中，

$$\begin{cases} AG=AC \\ DG=DC \\ AD=AD \end{cases},$$

∴ $\triangle ADG\cong\triangle ADC$（SSS），

∴ $\angle DAG=\angle DAC$，即 AD 平分 $\angle BAC$．

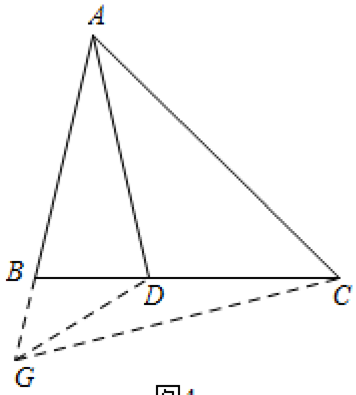
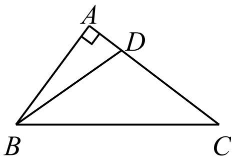


图4

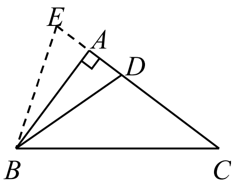
题型八　绝配角模型

例题

【例 1】如图，在 Rt△ABC 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=3$，$AC=4$，点 D 在边 AC 上，$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle C$，求 AD 的长．



解：延长 DA 到点 E，使 $AE=AD$，连接 BE．



∵$\angle BAC=90^\circ$，∴$BE=BD$，

∴$\angle E=\angle BDE$，$\angle ABE=\angle ABD$，

∴$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle EBD$．

∵$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle C$，∴$\angle EBD=\angle C$，

∴$\angle EBC=\angle BDE$，∴$\angle E=\angle EBC$，

∴$EC=BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

∴$AD=AE=EC-AC=5-4=1$．

考点分析：线段垂直平分线的性质、等腰三角形的性质、勾股定理．

思路点拨：延长 DA 到点 E，使 $AE=AD$，连接 BE，证 $\angle E=\angle EBC$．

【例 2】如图 1，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC$，点 D 为 AB 的中点，点 E 是 BC 上一点，连接 DE，过点 D 作 $DF\perp DE$，交 AC 于点 F．

（1）求证：$BE=CF$；

（2）如图 2，点 M 为 AC 上一点，且$\angle EMC=2\angle BDE$，$BE=2$，$CE=5$，求 EM 的长．

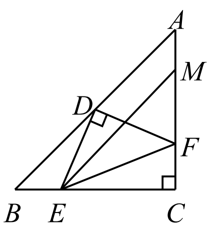


图 1

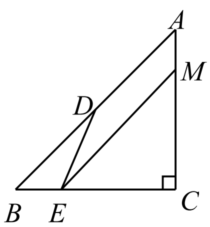


图 2

解：（1）如图 1，连接 CD．

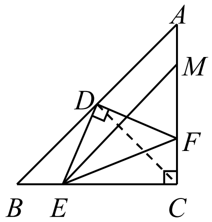


图 1

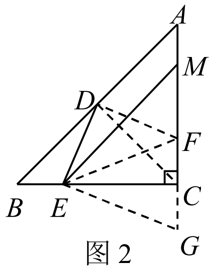
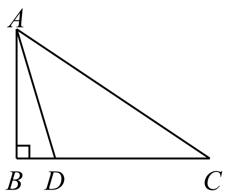


图 2

∵∠ACB＝90°，AC＝BC，点 D 为 AB 的中点，
∴BD＝CD，∠B＝∠DCF＝45°，∠BDC＝90°．
∵DF⊥DE，∴∠EDF＝90°，∴∠BDE＝∠CDF，
∴△BDE≌△CDF，∴BE＝CF．
（2）如图 2，在 AC 上取点 F，使 CF＝BE，延长 AC 到点 G，使 CG＝CF，连接 EF，EG．
则 EF＝EG，∴∠G＝∠EFG，∠CEF＝∠CEG，
∴∠FEG＝2∠CEF．
连接 CD，DF．
则△BDE≌△CDF，∴DE＝DF，∠BDE＝∠CDF，
∴∠DFE＝∠DEF＝45°，∴∠DFE＝∠DCE，
∴∠CDF＝∠CEF，∴∠BDE＝∠CEF，
∴∠FEG＝2∠BDE．
∵∠EMC＝2∠BDE，∴∠FEG＝∠EMC，
∴∠MEG＝∠EFG＝∠G，∴EM＝MG．
设 EM＝MG＝x，则 MC＝x－2．
在 Rt△EMC 中，5 2＋(x－2)2＝x 2，
解得 $x=\frac{29}{4}$，即 EM 的长为 $\frac{29}{4}$．
考点分析：线段垂直平分线的性质、等腰三角形的性质、勾股定理．
思路点拨：（1）连接 *CD*，△*BDE*≌△*CDF*；（2）在 *AC* 上取点 *F*，使 *CF*＝*BE*，延长 *AC* 到点 *G*，使 *CG*＝*CF*，连接 *EF*，*EG*，导角证 *EM*＝*MG*，在 Rt△*EMC* 中用勾股定理列方程求出 *EM* 的长．

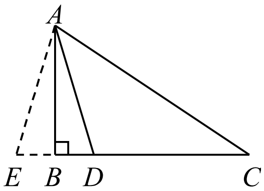
基础篇

1．如图，在 Rt△*ABC* 中，∠*ABC*＝90°，点 *D* 是边 *BC* 上一点，$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle C$，*AC*＝6，*BD*＝1，则 *CD* 的长为_________．



【答案】4

【解析】延长 CB 到点 E，使 $BE=BD$，连接 AE.



∵ $\angle ABC=90°$，∴ $AE=AD$，

∴ $\angle E=\angle ADE$，$\angle BAE=\angle BAD$，

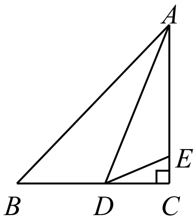
∴ $\angle BAD=\frac{1}{2}\angle EAD$.

∵ $\angle BAD=\frac{1}{2}\angle C$，∴ $\angle EAD=\angle C$，

∴ $\angle CAE=\angle ADE$，∴ $\angle E=\angle CAE$，

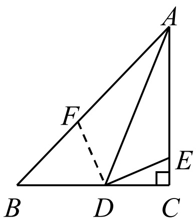
∴ $EC=AC=6$，∴ $CD=EC-2BD=6-2\times1=4$.

2．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，点 D，E 分别为 BC，AC 上的点，$\angle B=2\angle CDE$，$\angle ADE=45°$，$AB=5$，$AE=3$，则 BD 的长为__________.



【答案】2

【解析】在 BA 上截取 $BF=BD$，连接 DF.



则 $\angle BFD=\angle BDF=90°-\frac{1}{2}\angle B=90°-\angle CDE=\angle CED$，

∴ $\angle AFD=\angle AED$，$\angle BDF+\angle CDE=90°$，

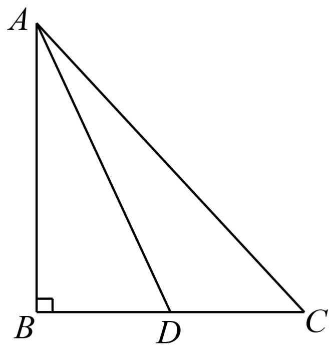
∴ $\angle EDF=90°$，$\angle ADF=\angle ADE=45°$.

∵ $AD=AD$，∴ $\triangle ADF\cong\triangle ADE$，

∴ $AF=AE=3$，∴ $BD=BF=AB-AF=5-3=2$.

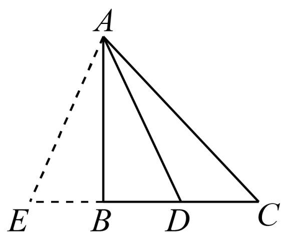
2023·深圳宝安区二模

3．如图，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle B=90^{\circ}$，点D为BC中点，$\angle C=2\angle BAD$，则$\dfrac{AD}{AC}$的值为__________．（后续计算用到相似）



【答案】$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

【详解】解：延长CB至E，使$BE=BD$，连接AE，设$BD=a$，



$\because \angle B=90^{\circ}$，

$\therefore \angle ABD=\angle ABE$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABD\cong \mathrm{Rt}\triangle ABE(\mathrm{HL})$，

$\therefore \angle E=\angle ADE$，$AE=AD$，

$\because \angle C=2\angle BAD$，

$\therefore \angle C=\angle EAD$，

$\because \angle D=\angle C+\angle DAC$，

$\therefore \angle E=\angle ADE=\angle EAC$，

$\therefore AC=CE=3a$，

$\because \angle E=\angle ADE=\angle EAC$，$\angle C=\angle EAD$，

$\therefore \triangle ECA\backsim\triangle EAD$，

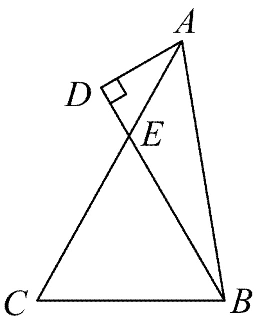
$\therefore \dfrac{CA}{AD}=\dfrac{AD}{ED}$，即$\dfrac{3a}{AD}=\dfrac{AD}{2a}$，

$\therefore AD=\sqrt{6}a$，又$AC=3a$，

$\therefore \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{\sqrt{6}a}{3a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，故答案为：$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．

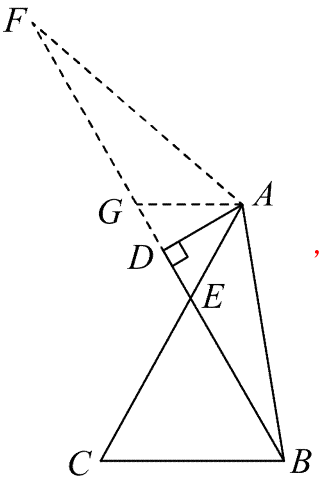
2023 • 深圳中学联考二模

4．如图，在$\triangle ABC$中，点E在边AC上，$EC=EB$，$\angle C=2\angle ABE$，$AD\perp BE$交BE的延长线于点D，若$AC=22$，$BD=16$，则$AB=$______.



【答案】$8\sqrt{5}$

【详解】解：如图所示，延长BD至F使$DF=BD$，作$AG\parallel BC$交DF于G，



，

$\because BD=DF$，$AD\perp BE$，

$\therefore AF=AB,\ \angle F=\angle ABD$，

$\because AG\parallel BC$，

$\therefore \angle AGD=\angle EBC,\ \angle GAE=\angle C$，

$\because EB=EC$，

$\therefore \angle EBC=\angle C$，

$\therefore \angle C=\angle EBC=\angle AGD=\angle GAE$，

$\therefore AE=EG$，

$\because \angle C=2\angle ABE$，

$\therefore \angle AGD=2\angle ABE=2\angle F$，

$\therefore FG=AG$，

$\because AC=22$，$BD=16$，

$\therefore BG=BE+GE=CE+AE=AC=22$，

$\therefore AG=FG=BF-BD=2BD-BG=2\times16-22=10$，

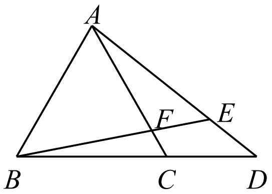
$\therefore DG=DF-FG=16-10=6$，

$\therefore AD=\sqrt{AG^2-DG^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

$\therefore AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{8^2+16^2}=8\sqrt{5}$

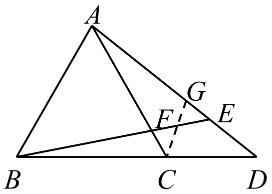
提高篇

5．如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D 在 BC 的延长线上，点 E 在线段 AD 上，$\angle DAC=2\angle DBE$，BE 与 AC 交于点 F，若 $CF=1$，$DE=2$，则 CD 的长为__________.



【答案】3

【解析】在 AD 上截取 $DG=DC$，连接 CG.



设 $\angle DBE=x$，则 $\angle DAC=2x$，$\angle BAD=60°+2x$，

$\angle ABE=\angle AEB=60°-x$，$\angle D=60°-2x$，

$\angle DGC=\angle EFC=60°+x$，

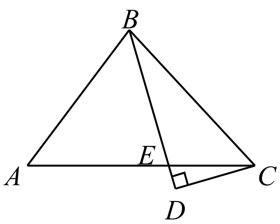
$\therefore AE=AB=AC$，$\angle AGC=\angle AFE$.

$\because \angle CAG=\angle EAF$，$\therefore \triangle ACG\cong\triangle AEF$，

$\therefore AG=AF$，$\therefore EG=CF=1$，

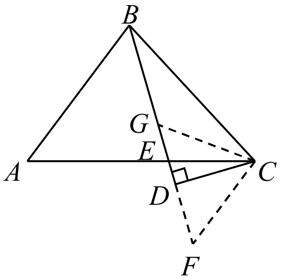
$\therefore CD=DG=DE+EG=2+1=3$

6．如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 E 在边 AC 上，$EB=EA$，$\angle A=2\angle CBE$，$CD\perp BE$ 交 BE 的延长线于点 D，$BD=8$，$AC=11$，则 BC 的长为__________.



【答案】$4\sqrt{5}$

【解析】过点 C 作 $CF/\!/AB$ 交 BD 的延长线于点 F.



则∠ECF＝∠A，∠F＝∠ABE．

∵EB＝EA，∴∠A＝∠ABE，

∴∠ECF＝∠F，∴EF＝EC，

∴BF＝AC＝11，∴DF＝BF−BD＝11−8＝3．

在 BD 上取点 G，使 DG＝DF，连接 CG．

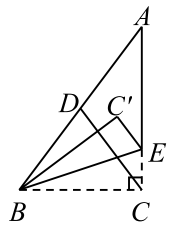
则 CF＝CG，∴∠CGF＝∠F＝∠ECF＝∠A＝2∠CBE，

∴∠CBG＝∠BCG，∴CG＝BG＝BD−DG＝5，

∴CD＝$\sqrt{CG^2-DG^2}$＝$\sqrt{5^2-3^2}$＝4，

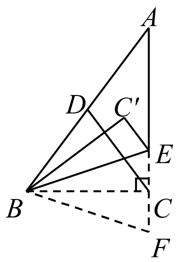
∴BC＝$\sqrt{BD^2+CD^2}$＝$\sqrt{8^2+4^2}$＝$4\sqrt{5}$．

7．如图，在△ABC 中，∠ACB＝90°，点 D 为 AB 中点，点 E 在 AC 边上，AE＝BC＝2，将△BCE 沿 BE 折叠至△BC'E，当 C'E∥CD 时，CE 的长为_________．



【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】延长 AC 到点 F，使 CF＝CE，连接 BF．



∵∠ACB＝90°，∴BE＝BF，∴∠F＝∠BEF．

∵点 D 为 AB 中点，∴CD＝AD，∴∠A＝∠ACD．

∵C′ E∥CD，∴∠AEC'＝∠ACD，

∴∠A＝∠AEC'＝180°−2∠BEF＝180°−2∠F，

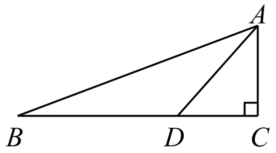
∴∠ABF＝∠F，∴AB＝AF．

设 CE＝CF＝x，则 AC＝x＋2，AB＝AF＝2x＋2．

在 Rt△ABC 中，2 2＋(x＋2)2＝(2x＋2)2，

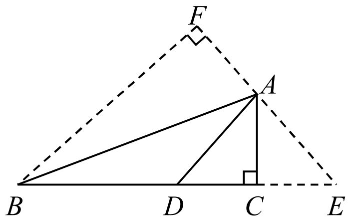
解得 x＝－2（舍去）或 x＝$\frac{2}{3}$，∴CE 的长为$\frac{2}{3}$.

8．如图，在△ABC 中，∠ACB＝90°，点 D 为边 BC 上一点，BD＝2CD，∠DAC＝2∠ABC，若 AD＝$\sqrt{2}$，求 AB 的长．



【答案】3

解：延长 BC 到点 E，使 CE＝CD，连接 AE，过点 B 作 AE 的垂线，垂足为 F.



∵∠ACB＝90°，∴AE＝AD，∴∠EAC＝∠DAC＝2∠ABC.

∵∠FBE＝∠EAC＝90°－∠E，∴∠FBE＝2∠ABC，

∴∠ABF＝∠ABC，∴AF＝AC，∴BF＝BC.

设 CD＝a，则 BD＝2a，BF＝BC＝3a，BE＝4a，

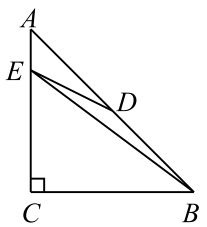
在△ABE 中，由面积法得 BE・AC＝AE・BF，

∴4a・AC＝AE・3a，∴$\frac{AC}{AE}=\frac{3}{4}$.

设 AC＝3m，则 AD＝AE＝4m，CD＝$\sqrt{7}m$，

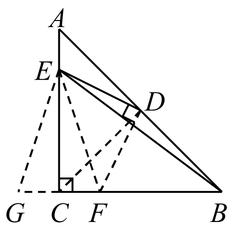
BC＝$3\sqrt{7}m$，AB＝$6\sqrt{2}m=\frac{3\sqrt{2}}{2}AD$＝3.

9．如图，在 Rt△ABC 中，∠ACB＝90°，AC＝BC＝8，点 D 是 AB 的中点，点 E 是 AC 上一点，∠EBC＝2∠ADE，求 AE 的长．



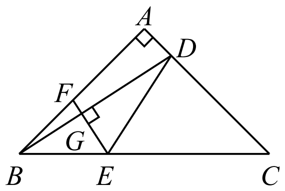
【答案】2

【解析】解：过点 D 作 DF⊥DE，交 BC 于点 F，延长 BC 到点 G，使 CG＝CF，连接 CD，EF，EG.



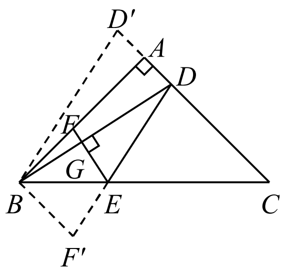
∵∠ACB＝90°，AC＝BC，点 D 是 AB 的中点，
∴AD＝BD＝CD，CD⊥AB，∠DAE＝∠DCE＝∠DCF＝45°，
∴∠ADE＝∠CDF，∴△ADE≌△CDF，
∴AE＝CF，DE＝DF，∴∠DEF＝∠DFE＝45°，
∴∠DCE＝∠DFE，∴∠CEF＝∠CDF＝∠ADE．
∵∠EBC＝2∠ADE，∴∠EBC＝2∠CEF．
∵∠ACB＝90°，CG＝CF，∴EG＝EF，
∴∠CEG＝∠CEF，∠G＝∠EFG，∴∠EBC＝∠GEF，
∴∠BEG＝∠EFG＝∠G，∴BG＝BE．
设 AE＝x，则 CG＝CF＝x，BE＝BG＝8＋x，EC＝8－x，
在 Rt△EBC 中，8 2＋(8－x)2＝(8＋x)2，
解得 x＝2，即 AE 的长为 2．

10．如图，在 Rt△*ABC* 中，∠*BAC*＝90°，*AB*＝*AC*，点 *D*，*E* 分别在 *AC*，*BC* 上，∠*BDE*＝2∠*ABD*，*EF*⊥*BD* 于点 *G*，交 *AB* 于点 *F*，用等式表示线段 *BF* 与 *AD* 的数量关系，并证明．



【答案】*BF*＝2*AD*

【解析】证明：延长 *DA* 到点 *D*′，使 *AD*′＝*AD*，连接 *D*′*B*．



∵∠*BAC*＝90°，∴*BD*＝*BD*′，
∴∠*ABD*＝∠*ABD*′，∴∠*D*′*BD*＝2∠*ABD*．
∵∠*BDE*＝2∠*ABD*，∴∠*D*′*BD*＝∠*BDE*，∴*D*′*B*∥*DE*．
过点 *B* 作 *BF*′∥*AC* 交 *DE* 的延长线于点 *F*′．
则∠*F*′*BE*＝∠*C*＝∠*FBE*，四边形 *D*′*BF*′*D* 为平行四边形，
∴*BF*′＝*D*′*D*＝2*AD*，∠*F*′＝∠*D*′＝∠*BDD*′．
∵∠*FAD*＝∠*FGD*＝90°，∴∠*BDD*′＝∠*BFE*，
∴∠*F*′＝∠*BFE*．
∵*BE*＝*BE*，∴△*BEF*′≌△*BEF*，
∴*BF*′＝*BF*，∴*BF*＝2*AD*．

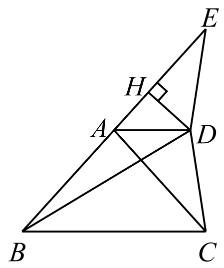
11．如图，在四边形 *ABCD* 中，*AD*∥*BC*，*AB*＝*AC*，∠*ACD*＝2∠*ABD*，延长 *BA* 到点 *E*，使 *AE*＝*AB*，连接

DE，过点 D 作 $DH\perp AE$ 于点 H.

（1）求证：$\triangle ADE\cong\triangle ADC$；

（2）用等式表示线段 AH 与 CD 的数量关系，并证明；

（3）若 $AD=2\sqrt{5}$，$CD=6$，求 AB 的长.



【解析】证明：（1）$\because AD\parallel BC$，$\therefore\angle EAD=\angle ABC$，$\angle CAD=\angle ACB$.

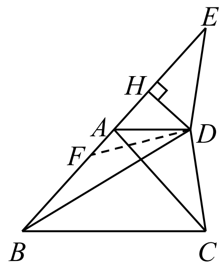
$\because AB=AC$，$\therefore AE=AC$，$\angle ABC=\angle ACB$，

$\therefore\angle EAD=\angle CAD$.

$\because AD=AD$，$\therefore\triangle ADE\cong\triangle ADC$.

（2）$CD=2AH$.

在 HB 上截取 $HF=HE$，连接 DF.



则 $DF=DE$，$\therefore\angle E=\angle DFA$.

$\because\triangle ADE\cong\triangle ADC$，$\therefore\angle E=\angle ACD$，$ED=CD$，

$\therefore\angle DFA=\angle ACD$.

$\because\angle ACD=2\angle ABD$，$\therefore\angle DFA=2\angle ABD$，

$\therefore\angle ABD=\angle BDF$，$\therefore BF=DF=DE=CD$，

$\therefore AF+BF=AH+HE=AH+AF+AH$，

$\therefore BF=2AH$，$\therefore CD=2AH$.

（3）$\because CD=6$，$\therefore AH=3$，$ED=6$，

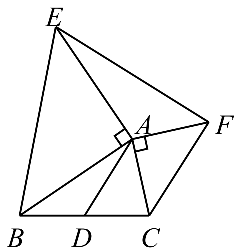
$\therefore DH^2=AD^2-AH^2=(2\sqrt{5})^2-3^2=11$，

$\therefore EH^2=ED^2-DH^2=6^2-11=25$，

$\therefore EH=5$，$\therefore AB=AH+EH=3+5=8$.

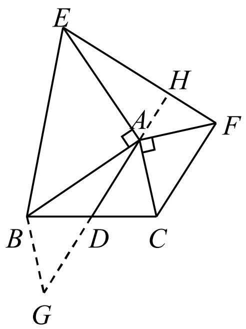
题型九　婆罗摩笈模型

1．如图，$\triangle ABE$ 和$\triangle ACF$ 都是等腰直角三角形，$\angle BAE=\angle CAF=90°$，连接 BC，EF，AD 是 BC 边上的中线，猜想 AD 与 EF 的数量关系与位置关系，并证明．



【答案】猜想：$AD=\frac{1}{2}EF$，$AD\perp EF$．

【解析】证明：延长 AD 到点 G，使 DG＝AD，连接 BG．



∵AD 是 BC 边上的中线，∴CD＝BD．

∵$\angle ADC=\angle GDB$，∴$\triangle ADC\cong\triangle GDB$，

∴AC＝BG，$\angle DAC=\angle G$，

∴AC∥BG，∴$\angle BAC+\angle ABG=180°$．

∵AC＝AF，∴BG＝AF．

∵$\angle BAE=\angle CAF=90°$，∴$\angle BAC+\angle EAF=180°$，

∴$\angle ABG=\angle EAF$．

∵AB＝AE，∴$\triangle ABG\cong\triangle EAF$，

∴AG＝EF，$\angle G=\angle AFE$，

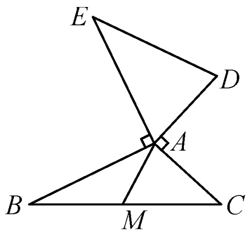
∴$AD=\frac{1}{2}AG=\frac{1}{2}EF$，$\angle DAC=\angle AFE$．

延长 DA 交 EF 于点 H．

∵$\angle CAF=90°$，∴$\angle DAC+\angle HAF=90°$，

∴$\angle AFE+\angle HAF=90°$，∴$\angle AHF=90°$，∴$AD\perp EF$．

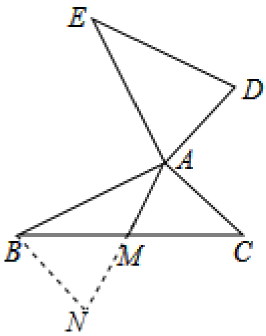
2．如图，AB＝AE，AB⊥AE，AD＝AC，AD⊥AC，点 M 为 BC 的中点，



求证：DE＝2AM.

【答案】见解析.

【详解】延长 AM 至 N，使 MN＝AM，连接 BN，



∵点 M 为 BC 的中点，

∴CM=BM，

在△AMC 和△NMB 中

$$\begin{cases} AM=MN \\ \angle AMC=\angle NMB \\ CM=BM \end{cases}$$

∴△AMC≌△NMB（SAS），

∴AC=BN，∠C=∠NBM，

∵AB⊥AE，AD⊥AC，

∴∠EAB=∠DAC=90°，

∴∠EAD+∠BAC=180°，

∴∠ABN=∠ABC+∠C=180°-∠BAC=∠EAD，

在△EAD 和△ABN 中

∵$\begin{cases} AE=AB \\ \angle EAD=\angle ABN \\ AD=BN \end{cases}$，

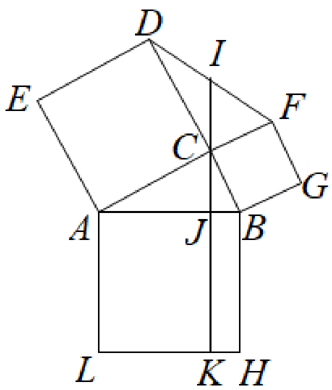
∴△ABN≌△EAD（SAS），

∴DE=AN=2MN.

2022 武汉·中考真题

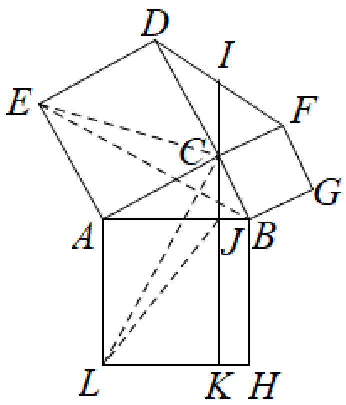
3．如图，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AC>BC$，分别以$\triangle ABC$的三边为边向外作三个正方形$ABHL$，$ACDE$，$BCFG$，连接DF．过点C作AB的垂线CJ，垂足为J，分别交DF，LH于点I，K．若$CI=5$，$CJ=4$，

则四边形 $AJKL$ 的面积是__________.



【答案】80

【详解】连接 LC、EC、EB，LJ，



在正方形 $ABHL$， $ACDE$， $BCFG$ 中

$\angle ALK=\angle LAB=\angle EAC=\angle ACD=\angle BCF=90°$， $AL=AB, EA=AC, BC=CF, AC=CD, AE \parallel CD$， $AB \parallel LH$，

$S_{\text{正方形}ACDE}=2S_{\triangle EAC}$．

∵ $CK \perp LH$，

∴ $\angle CKL=90°$， $CK \perp AB$

∴ $\angle CKL+\angle ALK=180°$， $\angle CJA=\angle CJB=90°$

∴ $CK \parallel AL$，

∴ $S_{\triangle CAL}=S_{\triangle JAL}$．

∵ $\angle JKL=\angle ALK=\angle JAL=90°$，

∴四边形 $ALKJ$ 是矩形，

∴ $S_{\text{矩形}ALKJ}=2S_{\triangle ALJ}$．

∵ $\angle LAB=\angle EAC$，

∴ $\angle LAB+\angle BAC=\angle EAC+\angle BAC$，

∴ $\angle EAB=\angle CAL$，

∵ $AL=AB, EA=AC$，

∴ $\triangle CAL \cong \triangle EAB$，

∴ $S_{\triangle CAL}=S_{\triangle EAB}$．

∵ $AE \parallel CD$，

∴ $S_{\triangle EAB} = S_{\triangle EAC}$．

∴ $S_{\triangle JAL} = S_{\triangle CAL} = S_{\triangle BAE} = S_{\triangle EAC}$

∴ $S_{矩形ALKJ} = 2S_{\triangle EAC} = S_{正方形ACDE} = AC^2$．

∵ $\angle DCA = \angle BCF = 90°, \angle DCF = \angle BCD$．

∴ $\angle DCF = \angle BCD = 90°$，

∵ $BC = CF, AC = CD,$

∴ $\triangle ABC \cong \triangle DCF$，

∴ $\angle CAB = \angle CDF, AB = DF$，

∵ $\angle ACB = 90°, \angle CJB = 90°$，

∴ $\angle CAB + \angle ABC = 90°, \angle JCB + \angle CBJ = 90°$，

∴ $\angle CAB = \angle JCB$，

∵ $\angle DCI = \angle JCB$，

∴ $\angle DCI = \angle IDC$，

∴ $ID = CI = 5$，

∵ $\angle IDC + \angle DFC = 90°, \angle DIC + \angle ICF = 90°$，

∴ $\angle ICF = \angle IFC$，

∴ $IF = CI = 5$，

∴ $DF = 10$，

∴ $AB = 10$．

设 $AJ = x, BJ = 10 - x$，

∵ $\angle CAJ = \angle BCJ, \angle CJA = \angle CJB,$

∴ $\triangle ACJ \sim \triangle CBJ$，

∴ $\frac{CJ}{BJ} = \frac{AJ}{CJ}$，

∴ $\frac{4}{10-x} = \frac{x}{4}$，

∴ $x_1 = 2$，$x_2 = 8$,

∵ $AC > BC$，

∴ $AJ > BJ$，

∴ $x > 10 - x$，

∴ $x > 5$，

∴ $x = 8$．

∴ $AC^2 = CJ^2 + AJ^2 = 4^2 + 8^2 = 80$，

∴ $S_{矩形ALKJ} = AC^2 = 80$．

4．我们定义：如图 1，在△ABC 中，把 AB 绕点 A 顺时针旋转α（0°＜α＜180°）得到 AB'，把 AC 绕点 A 逆时针旋转β得到 AC'，连接 $B'C'$，当 $\alpha+\beta$＝180°时，我们称△$AB'C'$是△ABC 的“旋补三角形”，△$AB'C$ 边

$B'C'$上的中线 AD 叫做△ABC 的“旋补中线”.

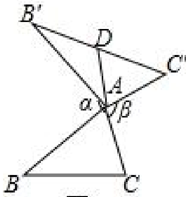


图1

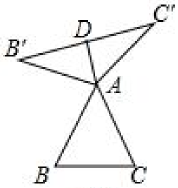


图2

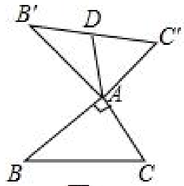


图3

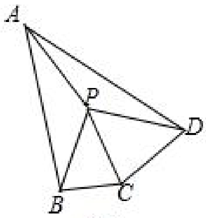


图4

(1)[特例感知]在图 2，图 3 中，△$AB'C'$是△ABC 的“旋补三角形”，AD 是△ABC 的“旋补中线”.

①如图 2，当△ABC 为等边三角形，且 BC＝6 时，则 AD 长为____.

②如图 3，当∠BAC＝90°，且 BC＝7 时，则 AD 长为____.

(2)[猜想论证]在图 1 中，当△ABC 为任意三角形时，猜想 AD 与 BC 的数量关系，并给予证明.（如果你没有找到证明思路，可以考虑延长 AD 或延长 $B'A$，…）

(3)[拓展应用]如图 4，在四边形 $ABCD$ 中，∠BCD＝150°，AB＝12，CD＝6，以 CD 为边在四边形 $ABCD$ 内部作等边△PCD，连接 AP，BP．若△PAD 是△PBC 的“旋补三角形”，请直接写出△PBC 的“旋补中线”长及四边形 $ABCD$ 的边 AD 长.

【答案】(1)①3；②3.5

(2)$AD=\frac{1}{2}BC$，证明见解析

(3)旋补中线长为 $\sqrt{3}$，$AD=2\sqrt{39}$

【分析】(1) ①首先证明$\triangle ADB'$是含有30°是直角三角形，可得$AD=\frac{1}{2}AB'$即可解决问题.

②首先证明$\triangle BAC\cong\triangle B'AC'$，根据直角三角形斜边中线定理即可解决问题.

(2)结论：$AD=\frac{1}{2}BC$．如图 1 中，延长 AD 到 M，使得 $AD=DM$，连接$B'M$，$C'M$，首先证明四边形$AC'MB'$是平行四边形，再证明$\triangle BAC\cong\triangle AB'M$，即可解决问题.

(3) 如图 4 中，过点 P 作 $PH\perp AB$ 于 H，取 BC 的中点 J，连接 PJ．解直角三角形求出 BC，PJ，利用 (2) 中结论解决问题即可.

(1)

解：①如图 2 中，

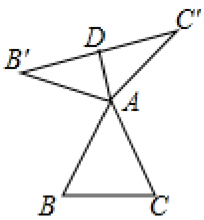


图2

∵ $\triangle ABC$是等边三角形，

∴ $AB=BC=AC=AB'=AC'$，

∵ $DB'=DC'$，

∴ $AD\perp B'C'$，

$\because \angle BAC = 60°$，$\angle BAC + \angle B'AC' = 180°$，

$\therefore \angle B'AC' = 120°$，

$\therefore \angle B' = \angle C' = 30°$，

$\therefore AD = \frac{1}{2}AB' = \frac{1}{2}BC = 3$，

故答案为：3．

②如图 3 中，

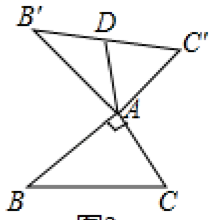


图3

$\because \angle BAC = 90°$，$\angle BAC + \angle B'AC' = 180°$，

$\therefore \angle B'AC' = \angle BAC = 90°$，

$\because AB = AB'$，$AC = AC'$，

$\therefore \triangle BAC \cong \triangle B'AC'(SAS)$，

$\therefore BC = B'C'$，

$\because B'D = DC'$，

$\therefore AD = \frac{1}{2}B'C' = \frac{1}{2}BC = 3.5$，

故答案为：3.5．

(2)

结论：$AD=\frac{1}{2}BC$．

理由：如图 1 中，延长 AD 到 M，使得 $AD=DM$，连接 $B'M$，$C'M$

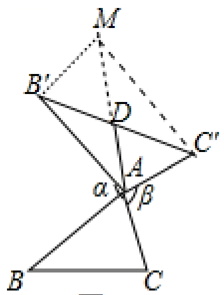


图1

$\because B'D = DC'$，$AD = DM$，

$\therefore$四边形 $AC'MB'$ 是平行四边形，

$\therefore AC' = B'M = AC$，

$\because \angle BAC + \angle B'AC' = 180°$，$\angle B'AC' + \angle AB'M = 180°$，

$\therefore \angle BAC = \angle MB'A$，

$\because AB = AB'$，

$\therefore \triangle BAC \cong \triangle AB'M(SAS)$，

$\therefore BC = AM$，

∴ $AD=\frac{1}{2}BC$.

(3)

如图 4 中，过点 P 作 $PH\perp AB$ 于 H，取 BC 的中点 J，连接 PJ.

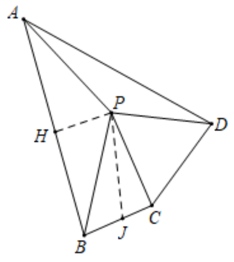


图4

∵ $\triangle PCD$ 是等边三角形，

∴ $PC=CD=PD=6$，$\angle PCD=\angle CPD=60^{\circ}$ ，

∵ $\angle BCD=150^{\circ}$，

∴ $\angle PCB=90^{\circ}$，

∵ $\triangle PAD$ 是 $\triangle$PBC 的"旋补三角形"，

∴ $\angle APB=180^{\circ}-60^{\circ}=120^{\circ}$，$PA=PB$ ，

∵ $PH\perp AB$，

∴ $AH=HB=6$，$\angle APH=\angle BPH=60^{\circ}$ ，

∴ $\sin 60^{\circ}=\frac{BH}{PB}$ ，

∴ $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{6}{PB}$ ，

∴ $PB=4\sqrt{3}$ ，

∴ $BC=\sqrt{PB^{2}-PC^{2}}=\sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^{2}-6^{2}}=2\sqrt{3}$ ，

∴ $\triangle$PBC 的"旋补中线"长 $=\frac{1}{2}BC=\sqrt{3}$ ，

∵ $BJ=CJ=\sqrt{3}$ ，

∴ $PJ=\sqrt{PC^{2}+CJ^{2}}=\sqrt{39}$ ，

∵ $\triangle$PBC 也是 $\triangle PAD$ 的"旋补三角形"，

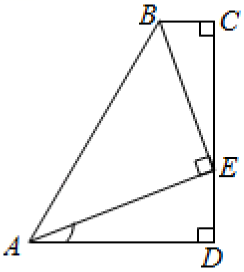
∴ $AD=2PJ=2\sqrt{39}$.

2020·宿迁中考真题

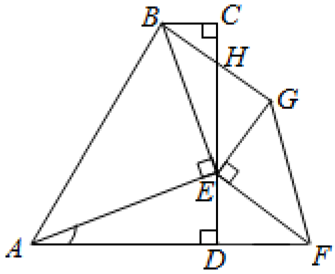
5．【感知】(1)如图①，在四边形 ABCD 中，∠C=∠D=90°，点 E 在边 CD 上，∠AEB=90°，求证：$\frac{AE}{EB}=\frac{DE}{CB}$.

【探究】(2)如图②，在四边形 ABCD 中，∠C=∠ADC=90°，点 E 在边 CD 上，点 F 在边 AD 的延长线上，∠FEG=∠AEB=90°，且 $\frac{EF}{EG}=\frac{AE}{EB}$ ，连接 BG 交 CD 于点 H．求证：BH=GH．

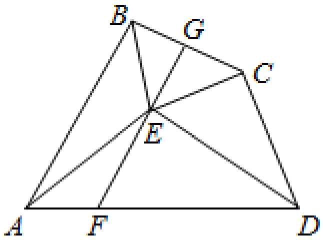
【拓展】（3）如图③，点 E 在四边形 ABCD 内，∠AEB+∠DEC=180°，且 $\frac{AE}{EB}=\frac{DE}{EC}$，过 E 作 EF 交 AD 于点 F，若∠EFA=∠AEB，延长 FE 交 BC 于点 G．求证：BG=CG．



图①



图②



图③

【答案】（1）见解析　（2）见解析　（3）见解析

【详解】（1）∵∠C=∠D=∠AEB=90°，

∴∠BEC+∠AED=∠AED+∠EAD=90°，

∴∠BEC=∠EAD，

∴Rt△AED∽Rt△EBC，

∴$\frac{AE}{EB}=\frac{DE}{CB}$；

（2）如图 1，过点 G 作 GM⊥CD 于点 M，

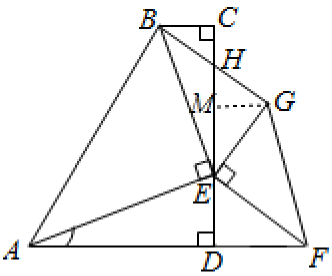


图1

同（1）的理由可知：$\frac{EF}{EG}=\frac{DE}{GM}$，

∵$\frac{EF}{EG}=\frac{AE}{EB}$，$\frac{AE}{EB}=\frac{DE}{CB}$，

∴$\frac{DE}{GM}=\frac{DE}{CB}$，

∴CB=GM，

在△BCH 和△GMH 中，

$$\begin{cases}\angle CHB=\angle MHG\\ \angle C=\angle GMH=90^\circ\\ CB=GM\end{cases},$$

∴△BCH≌△GMH（AAS），

∴BH=GH；

（3）证明：如图 2，在 EG 上取点 M，使∠BME=∠AFE，

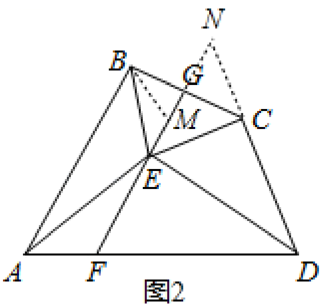


图2

过点 C 作 CN∥BM，交 EG 的延长线于点 N，则∠N=∠BMG，

∵∠EAF+∠AFE+∠AEF=∠AEF+∠AEB+∠BEM=180°，∠EFA=∠AEB，

∴∠EAF=∠BEM，

∴△AEF∽△EBM，

∴$\frac{AE}{BE}=\frac{EF}{BM}$，

∵∠AEB+∠DEC=180°，∠EFA+∠DFE=180°，

而∠EFA=∠AEB，

∴∠CED=∠EFD，

∵∠BMG+∠BME=180°，

∴∠N=∠EFD，

∵∠EFD+∠EDF+∠FED=∠FED+∠DEC+∠CEN=180°，

∴∠EDF=∠CEN，

∴△DEF∽△ECN，

∴$\frac{DE}{EC}=\frac{EF}{CN}$，

又∵$\frac{AE}{EB}=\frac{DE}{EC}$，

∴$\frac{EF}{BM}=\frac{EF}{CN}$，

∴BM=CN，

在△BGM 和△CGN 中，

$$\begin{cases}\angle BGM=\angle CGN\\ \angle BMG=\angle N\\ BM=CN\end{cases}，$$

∴△BGM≌△CGN（AAS），

∴BG=CG．

6．如图 1，2，3，△*ABC* 中，分别以 *AB*，*AC* 为边作 *Rt*△*ABE* 和 *Rt*△*ACD*，*AB*＝*AE*，*AC*＝*AD*，∠*BAE*＝∠*CAD*＝90°，则有下列结论：

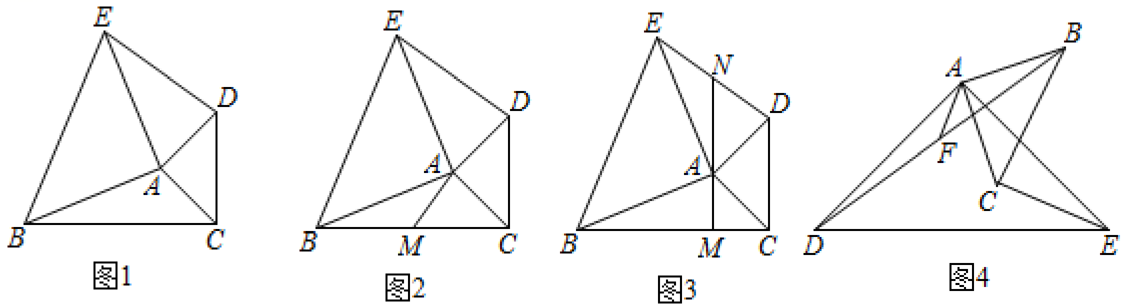
①图 1 中 $S_{\triangle}ABC=S_{\triangle}ADE$；

②如图 2 中，若 *AM* 是边 *BC* 上的中线，则 *ED*＝2*AM*；

③如图 3 中，若 *AM*⊥*BC*，则 *MA* 的延长线平分 *ED* 于点 *N*．

（1）上述三个结论中请你选择一个感兴趣的结论进行证明，写出证明过程；

（2）能力拓展：将上述图形中的某一个直角三角形旋转到如图 4 所示的位置：△ABC 与△ADE 均为等腰直角三角形，∠BAC＝∠DAE＝90°，连接 BD，CE，若 F 为 BD 的中点，连接 AF，求证：2AF＝CE.



【答案】(1) ①证明见详解；②证明见详解；③证明见详解；(2) 证明见详解.

【详解】(1) ①图 1 中 $S_{\triangle}ABC$＝$S_{\triangle}ADE$；

证明：取 DE 中点 F，过 E 作 EG∥AD，交射线 AF 于 G，

∵点 F 为 DE 中点，

∴EF=DF，

∵EG∥AD，

∴∠GEF=∠ADF，∠GEA+∠EAD=180°，

在△GEF 和△ADF 中，

$$\begin{cases}\angle GFE=\angle AFD\\ \angle GEF=\angle ADF\\ EF=DF\end{cases},$$

∴△GEF≌△ADF（AAS），

∴GE=AD，∠G=∠DAF，

∴$S_{\triangle}GEF$=$S_{\triangle}ADF$，

∴$S_{\triangle}EAD$=$S_{\triangle}GEA$，

∵∠BAE＝∠CAD＝90°，

∴∠BAC+∠EAD=360°-∠BAE-∠CAD=180°

∴∠BAC+∠EAD=∠GEA+∠EAD=180°

∴∠BAC =∠GEA，

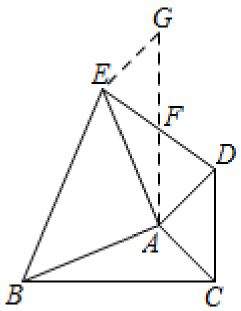
∴GE=AD=AC，

在△GEA 和△CAB 中，

$$\begin{cases}GE=CA\\ \angle GEA=\angle CAB\\ EA=AB\end{cases},$$

∴△GEA≌△CAB（SAS），

∴$S_{\triangle}ABC$＝$S_{\triangle GEA}$=$S_{\triangle}ADE$；



②如图 2 中，若 AM 是边 BC 上的中线，则 $ED=2AM$；

证明：取 DE 中点 F，过 E 作 $EG\parallel AD$，交射线 AF 于 G，

∵点 F 为 DE 中点，

∴$EF=DF$，

∵$EG\parallel AD$，

∴$\angle GEF=\angle ADF$，$\angle GEA+\angle EAD=180°$，

在△GEF 和△ADF 中，

$$\begin{cases}\angle GFE=\angle AFD\\ \angle GEF=\angle ADF\\ EF=DF\end{cases},$$

∴△GEF≌△ADF（AAS），

∴$GE=AD$，$GF=AF=\dfrac{1}{2}AG$

∵$\angle BAE=\angle CAD=90°$，

∴$\angle BAC+\angle EAD=360°-\angle BAE-\angle CAD=180°$

∴$\angle BAC+\angle EAD=\angle GEA+\angle EAD=180°$

∴$\angle BAC=\angle GEA$，

∴$GE=AD=AC$，

在△GEA 和△CAB 中，

$$\begin{cases}GE=CA\\ \angle GEA=\angle CAB\\ EA=AB\end{cases},$$

∴△GEA≌△CAB（SAS），

∴$\angle EAG=\angle ABC$，$AC=AG$，

∵AM 是边 BC 上的中线，

∴$BM=CM=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}AG=AF$，

在△EAF 和△ABM 中，

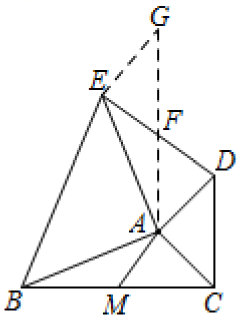
$$\begin{cases}EA=AB\\ \angle EAF=\angle ABM\\ AF=BM\end{cases},$$

∴△EAF≌△ABM（SAS），

∴$EF=AM$，

∵点 F 为 DE 中点，

∴$DE=2EF=2AM$，



③如图 3 中，若 $AM\perp BC$，则 MA 的延长线平分 ED 于点 N.

证明：过 E 作 $EP\perp MN$ 交 MN 延长线于 O，过 D 作 $DO\perp MN$ 于 O，

∵$\angle BAE=90°$，$\angle DAC=90°$，

∴$\angle BAM+\angle EAP=90°$，$\angle MAC+\angle DAO=90°$，

∵$AM\perp BC$，

∴$\angle ABM+\angle BAM=90°$，$\angle MCA+\angle MAC=90°$

∴$\angle ABM=\angle EAP$，$\angle MCA=\angle OAD$，

∵$EP\perp MN$，

∴$\angle EPA=90°$

在△EAP 和△ABM 中，

$$\begin{cases}\angle EPA=\angle AMB=90° \\ \angle EAP=\angle ABM \\ EA=AB\end{cases},$$

∴△EAP≌△ABM（AAS），

∴$EP=AM$，

∵$DO\perp MN$，

∴$\angle AOD=90°$，

在△CAM 和△ADO 中，

$$\begin{cases}\angle CMA=\angle AOD \\ \angle MCA=\angle OAD \\ AC=DA\end{cases},$$

∴△CAM≌△ADO（AAS）

∴$AM=DO$，

∴$EP=DO=AM$，

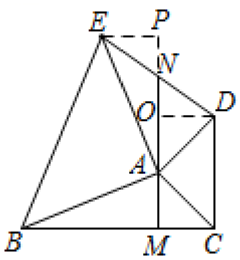
在△EPN 和△DON 中，

$$\begin{cases}\angle EPN=\angle DON=90° \\ \angle ENP=\angle DNO \\ EP=DO\end{cases}$$

∴△EPN≌△DON（AAS），

∴$EN=DN$，

∴MA 的延长线平分 ED 于点 N.



（2）延长 AF，使 $FQ=AF$，连接 DQ，将△ACE 绕点 A 逆时针旋转 90°，得△ARD

∵点 F 为 BD 中点，

∴$DF=BF$，

在△DQF 和△BAF 中，

$$\begin{cases} QF = AF \\ \angle DFQ = \angle BFA \\ DF = BF \end{cases}$$

∴△DQF≌△BAF（SAS），

∴$DQ=BA=AC$，$\angle FDQ=\angle FBA$，

∴$DQ \parallel BA$，

∵△ACE 绕点 A 逆时针旋转 90°得△ARD

∴△ACE≌△ARD，$\angle RAC=90°$，

∴$AR=AC=AB=QD$，$RD=CE$，

∵$\angle CAB=90°$，

∴$\angle RAB=\angle RAC+\angle CAB=90°+90°=180°$，

∴R、A、B 三点共线，

∵$DQ \parallel BA$，

∴$\angle QDA=\angle RAD$，

在△DQA 和△ARD 中，

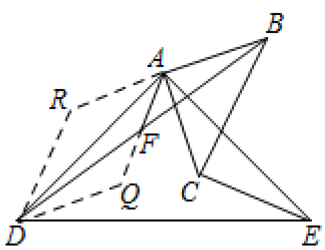
$$\begin{cases} DQ = AR \\ \angle QDA = \angle RAD \\ DA = AD \end{cases}$$

∴△DQA≌△ARD（SAS），

∴$AQ=DR$，

∴$2AF=AG=DR=CE$，

∴$2AF=CE$.



7．综合与实践

以$\triangle ABC$的两边AB、AC为边，向外作正方形$ABDE$和正方形$ACFG$，连接EG，过点A作$AM\perp BC$于M，延长MA交EG于点N.

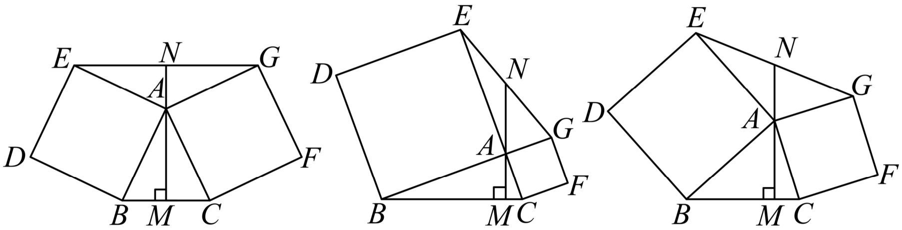


图1　　图2　　图3

(1)如图①，若$AB=AC$，证明：$EN=GN$；

(2)如图②，$\angle BAC=90°$，（1）中结论，是否成立，若成立，请证明；若不成立，写出你的结论，并说明理由；

(3)如图③，$\angle BAC\neq 90°$，$AB=5$，$AC=\sqrt{10}$，且$AM=3$，则$S_{\triangle AEG}=$________________.

【详解】（1）$\because AB=AC$，$AM\perp BC$，

$\therefore \angle BAM=\angle CAM$

$\because$以$\triangle ABC$的两边AB、AC为边，向外作正方形$ABDE$和正方形$ACFG$，

$\therefore AE=AB=AC=AG$，$\angle EAB=\angle GAC=90°$，

$\therefore \angle EAN=\angle GAN$，

$\therefore EN=GN$；

（2）过点E作$EP\perp AN$交AN的延长线于P，过点G作 $GQ\perp AM$于Q，

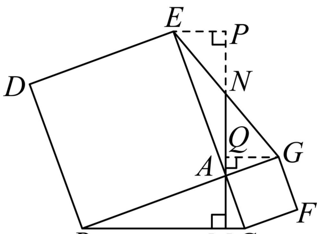


图2

$\because$四边形$ABDE$是正方形，

$\therefore AB=AE,\angle BAE=90°$，

$\therefore \angle EAP+\angle BAM=180°-90°=90°$，

$\because AM\perp BC$，

$\therefore$? ABM ? BAM 90?，

$\therefore \angle ABM=\angle EAP$，

在$\triangle ABM$和$\triangle EAP$中，

$$\begin{cases}\angle ABM=\angle EAP\\ \angle AMB=\angle P\\ AB=AE\end{cases},$$

$\therefore \triangle ABM\cong\triangle EAP(\text{AAS})$，

$\therefore EP=AM$；

同理可得$GQ=AM$，

∴ $EP=GQ$；

在$\triangle EPN$和$\triangle GQN$中，

$$\begin{cases}\angle P=\angle NQG \\ \angle ENP=\angle GNQ \\ EP=GQ\end{cases},$$

∴ $\triangle EPN\cong\triangle GQN(\mathrm{AAS})$，

∴ $EN=NG$；

即（1）中的结论成立；

（3）在$\mathrm{Rt}\triangle ABM$中，$AB=5$，$AM=3$，

∴ $BM=\sqrt{AB^2-AM^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ACM$中，$AC=\sqrt{10}$，$AM=3$，

∴ $CM=\sqrt{AC^2-AM^2}=\sqrt{10-3^2}=1$，

过点E作$EP\perp AN$交AN的延长线于P，过点G作 $GQ\perp AM$于Q，

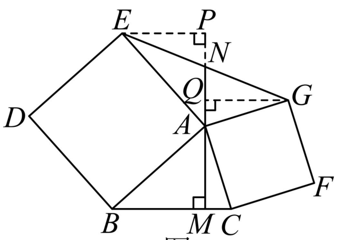


图3

∵四边形$ABDE$是正方形，

∴ $AB=AE,\angle BAE=90^\circ$，

∴ $\angle EAP+\angle BAM=180^\circ-90^\circ=90^\circ$，

∵ $AM\perp BC$，

∴ $\angle ABM+\angle BAM=90^\circ$，

∴ $\angle ABM=\angle EAP$，

在$\triangle ABM$和$\triangle EAP$中，

$$\begin{cases}\angle ABM=\angle EAP \\ \angle AMB=\angle P \\ AB=AE\end{cases},$$

∴ $\triangle ABM\cong\triangle EAP(\mathrm{AAS})$

∴ $EP=AM$，$AP=BM=4$，

同理可得$GQ=AM$，

∴ $EP=GQ$；

在$\triangle EPN$和$\triangle GQN$中，

$$\begin{cases}\angle P=\angle NQG \\ \angle ENP=\angle GNQ \\ EP=GQ\end{cases}$$

∴ $\triangle EPN\cong\triangle GQN(\mathrm{AAS})$

∴ $NP=NQ$，

∵ $\angle CAG=90^\circ$，

∴ $\angle QAG+\angle CAM=180^\circ-90^\circ=90^\circ$，

∵ $AM\perp BC$，

∴ $\angle ACM+\angle CAM=90^\circ$，

∴ $\angle ACM=\angle QAG$，

在$\triangle QAG$和$\triangle MCA$中，

$$\begin{cases}\angle QAG=\angle MCA\\ \angle AQG=\angle CMA\\ AG=AC\end{cases}，$$

∴ $\triangle QAG\cong\triangle MCA(\text{AAS})$，

∴ $AQ=CM=1$，

∴ $PQ=AP-AQ=4-1=3$，

∴ $NP=NQ=\dfrac{3}{2}$，

∴ $AN=AQ+NQ=1+\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$，

∴ $S_{\triangle AEG}=\dfrac{1}{2}AN\cdot EP+\dfrac{1}{2}\cdot AN\cdot GQ=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\times(3+3)=\dfrac{15}{2}$，

8．我们定义：如图1，在$\triangle ABC$中，把AB绕点A顺时针旋转$\alpha(0^\circ<\alpha<180^\circ)$得到$AB'$，把$AC$绕点$A$逆时针旋转$\beta$得到$AC'$，连接$B'C'$．当$\alpha+\beta=180^\circ$时，我们称$\triangle AB'C'$是$\triangle ABC$的“旋补三角形”，$\triangle AB'C'$边$B'C'$上的中线$AD$叫做$\triangle ABC$的“旋补中线”，点$A$叫做“旋补中心”．

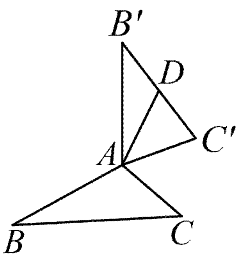


图1

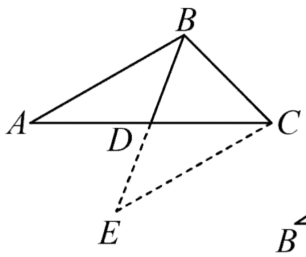


图2

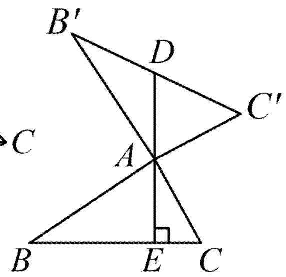


图3

(1)【探索一】如图1，$\triangle AB'C'$是$\triangle ABC$的“旋补三角形”，AD是$\triangle ABC$的“旋补中线”，探索AD与BC的数量关系．

在探索这个问题之前，请先阅读材料：

【材料】如图2在$\triangle ABC$中，若$AB=10$，$BC=8$．求AC边上的中线BD的取值范围．是这样思考的：延长BD至E，使$DE=BD$，连结CE．利用全等将边AB转化到CE，在$\triangle BCE$中利用三角形三边关系即可求出中线BD的取值范围．中线BD的取值范围是___．

请仿照上面材料中的方法，猜想图1中AD与BC的数量关系，并给予证明．

(2)【探索二】如图 3，当 $\alpha=\beta=90^{\circ}$ 时，$\triangle AB'C'$ 是 $\triangle ABC$ 的“旋补三角形”，$AE\perp BC$，垂足为点 E，AE 的反向延长线交 $B'C'$ 于点 D，探索 AD 是否是 $\triangle ABC$ 的“旋补中线”，如果是，请给出证明，如果不是，请说明理由．

【答案】(1)$1<BD<9$；$BC=2AD$，证明见解析；(2) AD 是 $\triangle ABC$ 的“旋补中线”，证明见解析

【详解】（1）解：材料：由题意得：$AB=CE=10$，$BC=8$，$BE=2BD$，

由三角形三边关系可得：$CE-BC<BE<CE+BC$，即 $2<2BD<18$，

∴$1<BD<9$，

故答案为：$1<BD<9$；

探索一：$BC=2AD$；

证明：如图 1，延长 AD 至点 E 使 $AD=DE$，连接 $C'E$，

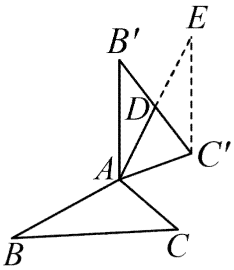


图1

∵ AD 是 $\triangle ABC$ 的“旋补中线”，

∴ AD 是 $\triangle AB'C'$ 的中线，即 $B'D=CD$，

又∵ $\angle B'DA=\angle C'DE$，

∴ $\triangle B'DA\cong\triangle C'DE(\mathrm{SAS})$，

∴ $AB'=C'E$，$\angle B'AD=\angle E$，

∵ $AB'=AB$，

∴ $AB=C'E$，

∵ AD 是 $\triangle ABC$ 的“旋补中线”，

∴ $\angle BAC+\angle B'AC'=\angle BAC+\angle B'AD+\angle EAC=180^{\circ}$，

∵ $\angle AC'E+\angle E+\angle EAC=180^{\circ}$，$\angle B'AD=\angle E$，

∴ $\angle BAC=\angle AC'E$，

∵ $AC=AC'$，$\angle BAC=\angle AC'E$，$AB=C'E$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle C'EA(\mathrm{SAS})$，

∴ $BC=AE=2AD$．

（2）AD 是 $\triangle ABC$ 的“旋补中线”；

证明：如图，作 $C'H\perp AD$ 于 H，作 $B'F\perp AD$ 交 AD 延长线于 F，

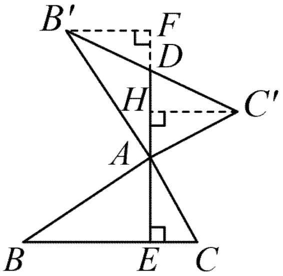


图3

∵ $AE \perp BC$,

∴ $\angle F = \angle BEA = 90^\circ$,

∴ $\angle BAE + \angle B = 90^\circ$,

∵ $\alpha = \beta = 90^\circ$, 即 $\angle BAB' = \angle CAC' = 90^\circ$,

∴ $\angle BAE + \angle B'AF = 90^\circ$,

∴ $\angle B = \angle B'AF$,

又∵ $BA = AB'$,

∴ $\triangle ABE \cong \triangle B'AF(\mathrm{AAS})$,

∴ $B'F=AE$,

又∵ $\angle AEC = \angle C'HA = 90^\circ$, $\angle CAC' = 90^\circ$,

∴ $\angle CAE + \angle C = 90^\circ$, $\angle CAE + \angle C'AH = 90^\circ$,

∴ $\angle C = \angle C'AH$,

∵ $CA = AC'$,

∴ $\triangle ACE \cong \triangle C'AH(\mathrm{AAS})$,

∴ $AE=C'H$,

∴ $B'F=C'H$,

∵ $\angle F = \angle C'HD = 90^\circ$, $\angle B'DF = \angle C'DH$,

∴ $\triangle B'DF \cong \triangle C'DH(\mathrm{AAS})$,

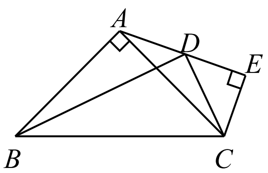
∴ $B'D = C'D$,

∴ AD 是 $\triangle AB'C'$ 的中线,

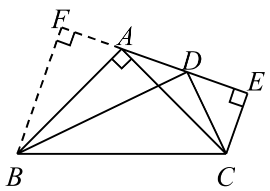
∴ AD 是 $\triangle ABC$ 的"旋补中线".

题型十　脚蹬脚模型（海盗埋宝藏）

1．如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等腰直角三角形，$\angle BAC=\angle DEC=90^\circ$，$A$，$D$，$E$ 三点在一条直线上，求证：$\angle BDC=90^\circ$.

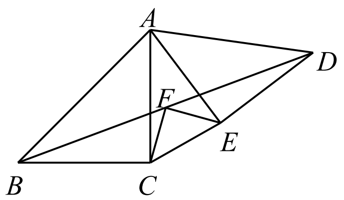


【解析】证明：过点 B 作 $BF \perp AE$ 交 EA 的延长线于点 F.

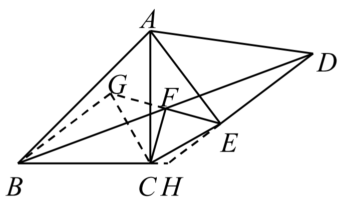


则∠F＝∠AEC＝90°，∴∠ABF＋∠BAF＝90°．
∵∠BAC＝90°，∴∠BAF＋∠CAE＝90°，
∴∠ABF＝∠CAE．
∵AB＝AC，∴△ABF≌△CAE，
∴AF＝CE，BF＝AE，
∵DE＝CE，∴AF＝DE，∴DF＝AE，
∴BF＝DF，∴∠BDF＝45°．
∵∠DEC＝90°，DE＝CE，∴∠CDE＝45°，
∴∠BDC＝90°．

2．如图，△ABC 和△ADE 都是等腰直角三角形，∠ACB＝∠AED＝90°，连接 BD，点 F 为 BD 的中点，连接 CE，CF，EF，求证：△CEF 是等腰直角三角形．

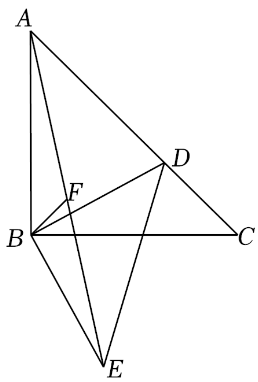


【解析】证明：延长 EF 到点 G，使 FG＝EF，连接 BG，CG，CE，设直线 BC 与 DE 相交于点 H．

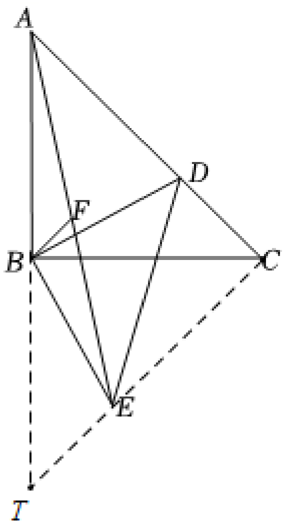


则△BFG≌△DFE，∴BG＝DE＝AE，∠GBF＝∠EDF，
∴∠GBC＝∠GBF＋∠FBC＝∠EDF＋∠FBC＝180°－∠H＝∠EAC．
∵AC＝BC，∴△ACE≌△BCG，
∴CE＝CG，∠ACE＝∠BCG，
∴∠ECG＝∠ACB＝90°，
∴△CEG 是等腰直角三角形．
∵EF＝FG，∴CF＝EF 且 CF⊥EF，
∴△CEF 是等腰直角三角形．

3．如图，在 Rt△ABC 中，∠ABC＝90°，AB＝BC，点 D 是线段 AC 上一点，连接 BD．以 BD 直角边作等腰直角△BDE，∠DBE＝90°，连接 AE，点 F 为 AE 中点，若 AB＝4，BF＝1，则 AD 的长为 __$4\sqrt{2}-2$__．



解：连接 CE，延长 AB、CE 交于 T，



∵$\angle ABC=\angle DBE$，

∴$\angle ABD=\angle CBE$，

∵$AB=BC$，$DB=EB$，

∴$\triangle ABD\cong\triangle CBE$（$SAS$），

∴$\angle BCE=\angle BAD=45°$，$\angle ADB=\angle BEC$，

∴$BC=BT=AB$，

∵点 F 是 AE 的中点，

∴BT 是$\triangle AET$ 的中位线，

∴$TE=2BF=2$，

∵$\angle ADB=\angle BEC$，

∴$\angle BDC=\angle BET$，

∵$\angle T=\angle BCD$，$BT=BC$，

∴$\triangle BDC\cong\triangle BET$（$AAS$），

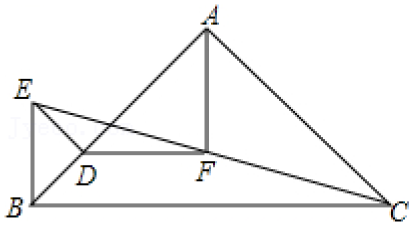
∴$CD=ET=2$，

∴$AD=AC-CD=4\sqrt{2}-2$，

故答案为：$4\sqrt{2}-2$．

4．如图，$\triangle ABC$ 与$\triangle BDE$ 均为等腰直角三角形，$BA\perp AC$，$DE\perp BD$，点 D 在 AB 边上，连接 EC，取 EC 中点 F，求证：

（1）$AF=DF$；（2）$AF\perp DF$．



证明：（1）连接 BF，延长 DF 交 AC 于点 G，

∵$\angle EBD=\angle ABC=45°$，

∴$\angle EBC=90°$，

在 $RT\triangle EBC$ 中，F 为斜边中点，

∴$BF=EF$，

∴$\angle FBC=\angle FCB$，

∴$\angle DFE=\angle DFB$，

∵$\angle EFB=\angle FBC+\angle FCB$，

∴$\angle DFE+\angle DFB=\angle FBC+\angle FCB$，

∴$2\angle DFB=2\angle FBC$，

则$\angle DFB=\angle FBC$，

∴$DG\parallel BC$，

∵$\triangle BAC$ 为等腰直角三角形，且 $DG\parallel BC$，$AB=AC$，

∴$AD=AG$，$BD=CG$，

∵$BD=DE$，

∴$DE=CG$，

∵$\angle BDE=\angle CAB=90°$，

∴$DE\parallel AC$，

∴$\angle DEF=\angle GCF$，

在$\triangle DEF$ 和$\triangle GCF$ 中，

$$\begin{cases} EF=CF \\ \angle DEF=\angle GCF \\ DE=CG \end{cases}$$

∴$\triangle DEF\cong\triangle GCF$（$SAS$），

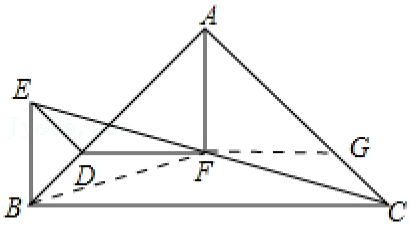
∴$DF=FG$，

∵$\triangle DAG$ 为等腰直角三角形，

∴$AF\perp DG$；

（2）∵F 为 DG 中点，

∴在 $RT\triangle DAG$ 中，$AF=DF$．

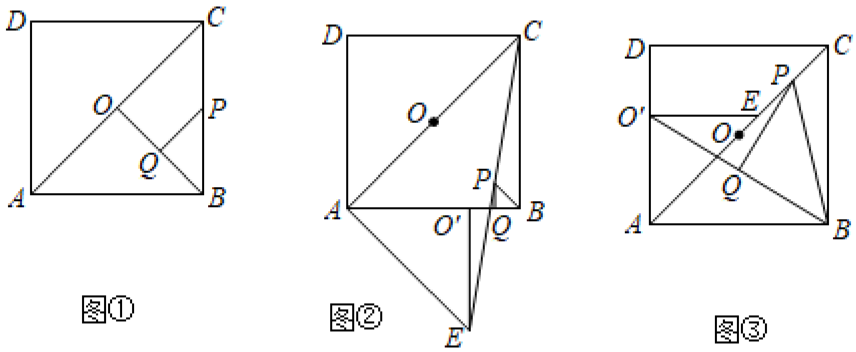


5．如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，点 O 为对角线 AC 的中点．

（1）问题解决：如图①，连接 BO，分别取 CB，BO 的中点 P，Q，连接 PQ，则 PQ 与 BO 的数量关系是_____，位置关系是_____；

（2）问题探究：如图②，$\triangle AO'E$ 是将图①中的$\triangle AOB$ 绕点 A 按顺时针方向旋转 45°得到的三角形，连接 CE，点 P，Q 分别为 CE，BO'的中点，连接 PQ，PB．判断$\triangle PQB$ 的形状，并证明你的结论；

（3）拓展延伸：如图③，$\triangle AO'E$ 是将图①中的$\triangle AOB$ 绕点 A 按逆时针方向旋转 45°得到的三角形，连接 BO'，点 P，Q 分别为 CE，BO'的中点，连接 PQ，PB．若正方形 $ABCD$ 的边长为 1，求$\triangle PQB$ 的面积．



图①　　图②　　图③

【答案】（1）$PQ=\frac{1}{2}BO$，$PQ\perp BO$；（2）$\triangle PQB$ 的形状是等腰直角三角形．理由见解析；（3）$\frac{3}{16}$

【详解】解:（1）∵点 O 为对角线 AC 的中点，

∴$BO\perp AC$，$BO=CO$，

∵P 为 BC 的中点，Q 为 BO 的中点，

∴$PQ\parallel OC$，$PQ=\frac{1}{2}OC$，

∴$PQ\perp BO$，$PQ=\frac{1}{2}BO$；

故答案为：$PQ=\frac{1}{2}BO$，$PQ\perp BO$．

（2）$\triangle PQB$ 的形状是等腰直角三角形．理由如下：

连接 $O'P$ 并延长交 BC 于点 F，

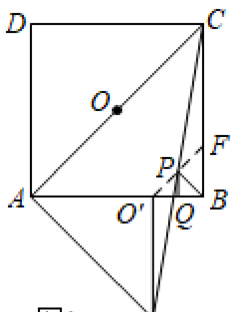


图1

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AB=BC$，$\angle ABC=90°$，

∵将△AOB 绕点 A 按顺时针方向旋转 45°得到△$AO'E$，

∴△$AO'E$ 是等腰直角三角形，$O'E\parallel BC$，$O'E=O'A$，

∴$\angle O'EP=\angle FCP$，$\angle PO'E=\angle PFC$，

又∵点 P 是 CE 的中点，

∴$CP=EP$，

在△O'PE 和△FPC 中

$$\begin{cases}\angle O'EP=\angle FCP\\ \angle PO'E=\angle PFC\\ PE=PC\end{cases},$$

∴△$O'PE$≌△FPC（AAS），

∴$O'E=FC=O'A$，$O'P=FP$，

∴$AB-O'A=CB-FC$，

∴$BO'=BF$，

∴△$O'BF$ 为等腰直角三角形．

∴$BP\perp O'F$，$O'P=BP$，

∴△BPO'也为等腰直角三角形．

又∵点 Q 为 $O'B$ 的中点，

∴$PQ\perp O'B$，且 $PQ=BQ$，

∴△PQB 的形状是等腰直角三角形；

（3）延长 $O'E$ 交 BC 边于点 G，连接 PG，$O'P$．

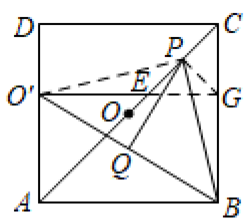


图2

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，AC 是对角线，

∴$\angle ECG=45°$，

由旋转得，四边形 $O'ABG$ 是矩形，

∴$O'G=AB=BC$，$\angle EGC=90°$，

∴$\triangle EGC$为等腰直角三角形.

∵点P是CE的中点，

∴$PC=PG=PE$，$\angle CPG=90°$，$\angle EGP=45°$，

在$\triangle O'GP$和$\triangle BCP$中，

$$\begin{cases} O'G=BC \\ \angle O'GP=\angle BCP \\ PG=PC \end{cases},$$

∴$\triangle O'GP\cong\triangle BCP$（$SAS$），

∴$\angle O'PG=\angle BPC$，$O'P=BP$，

∴$\angle O'PG-\angle GPB=\angle BPC-\angle GPB=90°$，

∴$\angle O'PB=90°$，

∴$\triangle O'PB$为等腰直角三角形，

∵点Q是$O'B$的中点，

∴$PQ=\frac{1}{2}O'B=BQ$，$PQ\perp O'B$，

∵$AB=1$，

∴$O'A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$O'B=\sqrt{O'A^2+AB^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+1^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

∴$BQ=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

∴$S_{\triangle}PQB=\frac{1}{2}BQ\cdot PQ=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{3}{16}$.

6．已知两个等腰$\mathrm{Rt}\triangle ABC$,$\mathrm{Rt}\triangle CEF$有公共顶点C，$\angle ABC=\angle CEF=90°$，连接$AF$，$M$是$AF$的中点，连接$MB$、$ME$、$CM$.

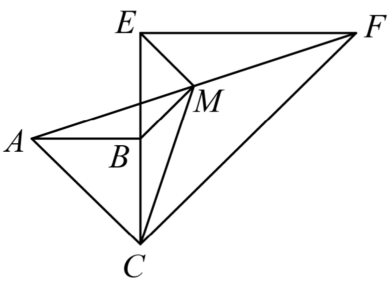


图 1

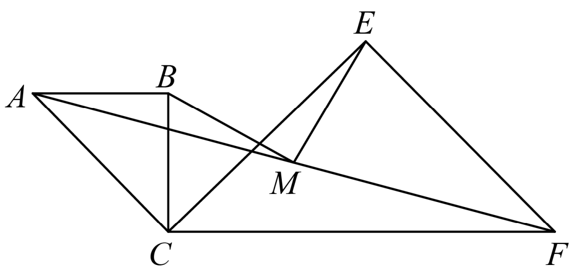


图 2

(1)如图 1，当C，B，E三点共线时，若$CE=10$，B为CE中点，求CM的长；

(2)如图 1， 探索线段BM与EM的关系，并说明理由；

(3)将图 1 中$\triangle CEF$绕点C顺时针旋转$45°$至图 2 所示，（2）中的结论是否仍然成立，若成立，请证明；若不

成立，请说明理由．

【答案】(1) $\frac{5\sqrt{10}}{2}$；(2) $BM=EM$，理由见解析；(3)成立，证明见解析

【详解】（1）解：∵ $\triangle ABC,\triangle CEF$ 是等腰直角三角形，

∴ $AB=BC,CE=EF$， $\angle ACB=45°,\angle ECF=45°$，

∴ $\angle ACF=90°$，

∵ $CE=10$，B 为 CE 中点，

∴ $CE=EF=10$， $AB=BC=5$，

∴ $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5\sqrt{2}$， $CF=\sqrt{CE^2+EF^2}=10\sqrt{2}$，

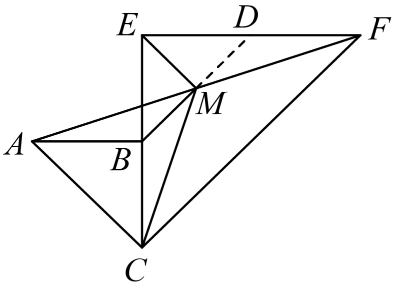
∴ $AF=\sqrt{AC^2+CF^2}=5\sqrt{10}$，

∵M 是 AF 的中点，

∴ $CM=\frac{1}{2}AF=\frac{5\sqrt{10}}{2}$；

（2）解：$BM=EM$，理由如下：

如图，延长 BM 交 EF 于点 D，



∵ $\angle ABC=\angle CEF=90°$，

∴ $AB\,//\,EF$，

∴ $\angle BAM=\angle DFM$，

∵M 是 AF 的中点，

∴ $\mathrm{AM}=\mathrm{FM}$，

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle FDM$ 中，

$$\begin{cases}\angle BAM=\angle DFM\\ AM=FM\\ \angle AMB=\angle FMD\end{cases},$$

∴ $\triangle ABM\cong\triangle FDM(\mathrm{ASA})$，

∴ $AB=DF$， $BM=DM$，

∵ $BE=CE-BC,DE=EF-DF$，

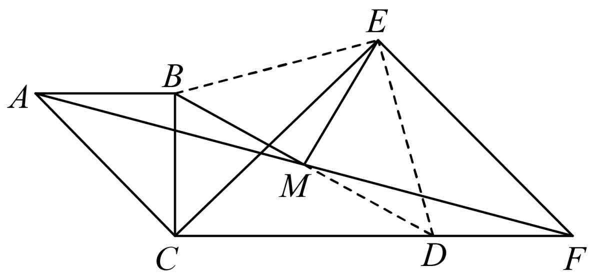
∴ $BM=DE$，

∴ $\triangle BDE$ 是等腰直角三角形，

∴ $EM=BM$；

（3）解：成立，证明如下：

如图，延长 BM 交 CF 于点 D，连接 BE，



根据题意得：$\angle BCE=45^{\circ}$，

∵$\triangle ABC,\triangle CEF$是等腰直角三角形，

∴$AB=BC,CE=EF$，$\angle BAC=\angle ACB=45^{\circ},\angle ECF=45^{\circ}$，

∴$\angle ACF=135^{\circ}$，

∴$\angle BAC+\angle ACF=180^{\circ}$，

∴$AB\parallel CF$，

∴$\angle BAM=\angle DFM$，

∵M是AF的中点，

∴$\mathrm{AM}=\mathrm{FM}$，

在$\triangle ABM$和$\triangle FDM$中，

$$\begin{cases}\angle BAM=\angle DFM\\ AM=FM\\ \angle AMB=\angle FMD\end{cases},$$

∴$\triangle ABM\cong\triangle FDM(\mathrm{ASA})$，

∴$AB=DF$，$BM=DM$，

∴$AB=BC=DF$，

在$\triangle BCE$和$\triangle DFE$中，

$$\begin{cases}BC=DF\\ \angle BCE=\angle DFE=45^{\circ}\\ CE=FE\end{cases},$$

∴$\triangle BCE\cong\triangle DFE(\mathrm{SAS})$，

∴$BE=DE,\angle BEC=\angle DEF$，

∴$\angle BED=\angle BEC+\angle CED=\angle DEF+\angle CED=\angle CEF=90^{\circ}$，

∴$\triangle BDE$是等腰直角三角形，

∴$BM=EM$．

7．已知两个等腰$\mathrm{Rt}\triangle ABC,\mathrm{Rt}\triangle CEF$有公共顶点$C$，$\angle ABC=\angle CEF=90^{\circ}$，连接$AF,M$是$AF$的中点，连接$MB,ME$．

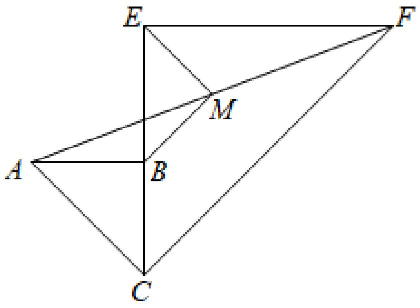


图1

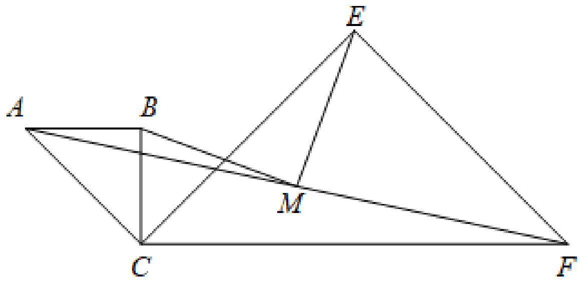


图2

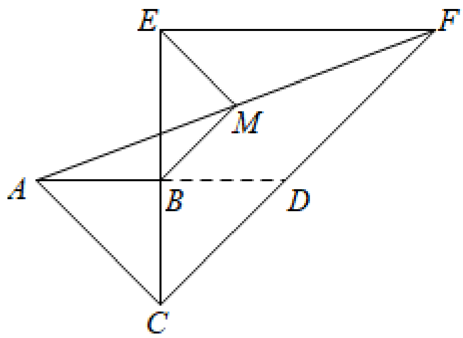
(1)如图1，当CB与CE在同一直线上时，求证：$MB \parallel CF$；

(2)如图2，当$\angle BCE = 45°$时，求证：$BM = ME$．

【分析】（1）法一：延长AB交CF于点D，易证$\triangle CBD$为等腰直角三角形，得到$AB = BC = BD$，进而得到BM为$\triangle ADF$的中位线，即可得证；法二：延长BM交EF于D，证明$\triangle ABM \cong \triangle FDM(\text{ASA})$，进而推出$\triangle BDE$是等腰直角三角形，得到$\angle EBM = 45°$，进而得到$\angle EBM = \angle ECF$，即可得证；

（2）法一：延长AB交CE于点D，连接DF，易得$BM = \frac{1}{2}DF$，$ME = \frac{1}{2}AG$，证明$\triangle ACG \cong \triangle DCF(\text{SAS})$，得到$DF = AG$，即可得证；法二：延长$BM$交$CF$于$D$，连接$BE$、$DE$，分别证明$\triangle ABM \cong \triangle FDM(\text{ASA})$，$\triangle BCE \cong \triangle DFE(\text{SAS})$推出$\triangle BDE$是等腰直角三角形，进而得证．

【详解】（1）解：法一：



如图：延长AB交CF于点D，

∵等腰$\text{Rt}\triangle ABC, \text{Rt}\triangle CEF$有公共顶点$C$，$\angle ABC = \angle CEF = 90°$，

∴$\angle ECD = 45°$，$\angle CBD = 90°$，$AB = BC$，

∴$\angle BDC = 90° - 45° = 45° = \angle BCD$，

∴$AB = BC = BD$，

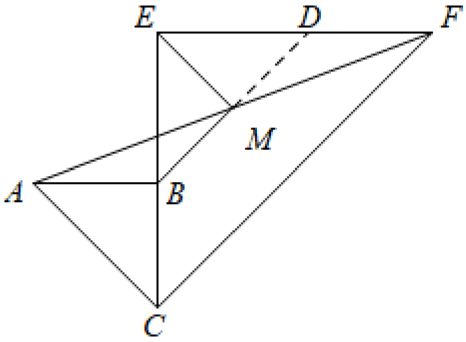
∴点B为线段AD的中点，

又∵点M为线段AF的中点，

∴BM为$\triangle ADF$的中位线，

∴$BM \parallel CF$；

法二：



如图，延长BM交EF于D，

$\because \angle ABC=\angle CEF=90^{\circ}$，

$\therefore AB\perp CE, EF\perp CE$，

$\therefore AB /\!/ EF$，

$\therefore \angle BAM=\angle DFM$，

$\because M$是AF的中点，

$\therefore AM=MF$，

在$\triangle ABM$和$\triangle FDM$中，

$$\begin{cases}\angle BAM=\angle DFM \\ AM=FM \\ \angle AMB=\angle FMD\end{cases},$$

$\therefore \triangle ABM\cong\triangle FDM(\text{ASA})$，

$\therefore AB=DF$，

$\because BE=CE-BC, DE=EF-DF$，

$\therefore BE=DE$，

$\therefore \triangle BDE$是等腰直角三角形，

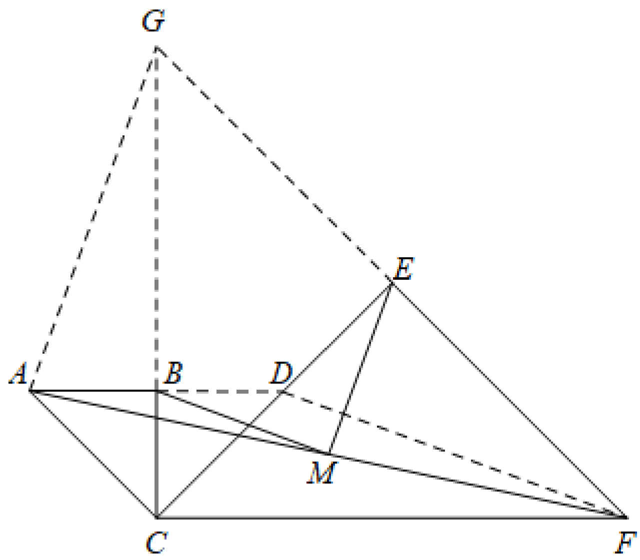
$\therefore \angle EBM=45^{\circ}$，

$\because$在等腰直角$\triangle CEF$中，$\angle ECF=45^{\circ}$，

$\therefore \angle EBM=\angle ECF$，

$\therefore MB /\!/ CF$；.

（2）法一：



如图，延长 AB 交 CE 于点 D，连接 DF，则：$\angle CBD=90^{\circ}$，

$\because \angle BCE=45^{\circ}$，

$\therefore \angle BDC=90^{\circ}-45^{\circ}=45^{\circ}=\angle BCD$，

$\therefore BD=BC$，

$\because \triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

$\therefore AB=BC$，

$\therefore AB=BC=BD$，$AC=CD$，

$\therefore$点 B 为 AD 中点，又点 M 为 AF 中点，

$\therefore BM=\dfrac{1}{2}DF$．

延长 FE 与 CB 交于点 G，连接 AG，

同法可得：$CE=EF=EG$，$CF=CG$，

$\therefore$点 E 为 FG 中点，又点 M 为 AF 中点，

$\therefore ME=\dfrac{1}{2}AG$．

在 $\triangle ACG$ 与 $\triangle DCF$ 中，

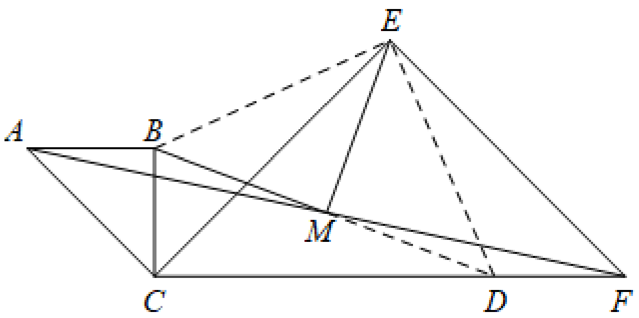
$$\begin{cases} AC=CD \\ \angle ACG=\angle DCF=45^{\circ} \\ CG=CF \end{cases}，$$

$\therefore \triangle ACG\cong\triangle DCF(\text{SAS})$，

$\therefore DF=AG$，

$\therefore BM=ME$．

法二：



如图，延长 BM 交 CF 于 D，连接 BE 、 DE ，

∵ $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形， $\triangle ECF$ 为等腰直角三角形，

∴ $\angle ACB=\angle BAC=45°$ ， $\angle ECF=45°$ ，

∵ $\angle BCE=45°$ ，

∴ $\angle ACD=45°\times 2+45°=135°$ ，

∴ $\angle BAC+\angle ACF=45°+135°=180°$ ，

∴ $AB \parallel CF$ ，

∴ $\angle BAM=\angle DFM$ ，

∵ M 是 AF 的中点，

∴ $\mathrm{AM}=\mathrm{FM}$ ，

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle FDM$ 中，

$$\begin{cases}\angle BAM=\angle DFM\\ AM=FM\\ \angle AMB=\angle FMD\end{cases},$$

∴ $\triangle ABM \cong \triangle FDM(\mathrm{ASA})$ ，

∴ $AB=DF, BM=DM$ ，

∴ $AB=BC=DF$ ，

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle DFE$ 中，

$$\begin{cases}BC=DF\\ \angle BCE=\angle DFE=45°\\ CE=FE\end{cases},$$

∴ $\triangle BCE \cong \triangle DFE(\mathrm{SAS})$ ，

∴ $BE=DE$ ， $\angle BEC=\angle DEF$ ，

∴ $\angle BED=\angle BEC+\angle CED=\angle DEF+\angle CED=\angle CEF=90°$ ，

∴ $\triangle BDE$ 是等腰直角三角形，

又∵ $BM=DM$ ，

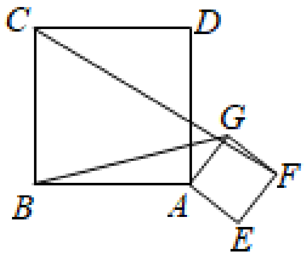
∴ $BM=ME=\frac{1}{2}BD$ ，

∴ $BM=ME$.

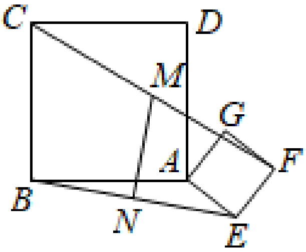
8．已知正方形 $ABCD$ 与正方形 $AEFG$，正方形 $AEFG$ 绕点 A 旋转一周．

（1）如图①，连接 BG、CF，求$\frac{CF}{BG}$的值；

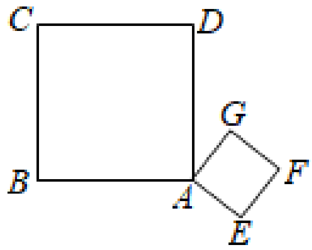
（2）当正方形 $AEFG$ 旋转至图②位置时，连接 CF、BE，分别取 CF、BE 的中点 M、N，连接 MN、试探究：MN 与 BE 的关系，并说明理由；



图①

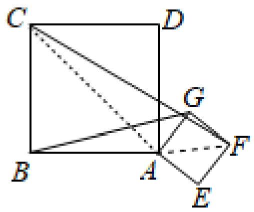


图②



备用图

解：（1）如图①，连接 AF，AC，



图①

∵四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 都是正方形，

∴$AC=\sqrt{2}AB$，$AF=\sqrt{2}AG$，$\angle CAB=\angle GAF=45°$，$\angle BAD=90°$，

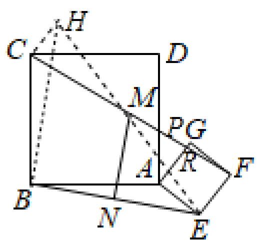
∴$\angle CAF=\angle BAG$，$\frac{AC}{AB}=\frac{AF}{AG}$，

∴$\triangle CAF\backsim\triangle BAG$，

∴$\frac{CF}{BG}=\sqrt{2}$；

（2）$BE=2MN$，$MN\perp BE$，

理由如下：如图②，连接 ME，过点 C 作 $CH\parallel EF$，交直线 ME 于 H，连接 BH，设 CF 与 AD 交点为 P，CF 与 AG 交点为 R，



图②

∵$CH\parallel EF$，

∴$\angle FCH=\angle CFE$，

∵点 M 是 CF 的中点，

∴$CM=MF$，

又∵$\angle CMH=\angle FME$，

∴$\triangle CMH\cong\triangle FME$（ASA），

∴$CH=EF$，$ME=HM$，

∴$AE=CH$，

∵$CH\parallel EF$，$AG\parallel EF$，

∴$CH\parallel AG$，

∴$\angle HCF=\angle CRA$，

∵$AD\parallel BC$，

∴$\angle BCF=\angle APR$，

∴$\angle BCH=\angle BCF+\angle HCF=\angle APR+\angle ARC$，

∵$\angle DAG+\angle APR+\angle ARC=180°$，$\angle BAE+\angle DAG=180°$，

∴$\angle BAE=\angle BCH$，

又∵$BC=AB$，$CH=AE$，

∴$\triangle BCH\cong\triangle BAE$（SAS），

∴$BH=BE$，$\angle CBH=\angle ABE$，

∴$\angle HBE=\angle CBA=90°$，

∵$MH=ME$，点 N 是 BE 中点，

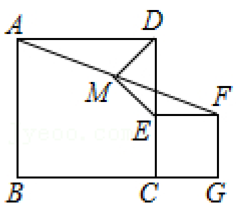
∴$BH=2MN$，$MN\parallel BH$，

∴$BE=2MN$，$MN\perp BE$；

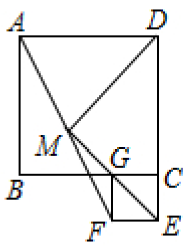
9．已知正方形 $ABCD$ 与正方形 $CEFG$，M 是 AF 的中点，连接 DM，EM．

（1）如图 1，点 E 在 CD 上，点 G 在 BC 的延长线上，请判断 DM，EM 的数量关系与位置关系，并直接写出结论；

（2）如图 2，点 E 在 DC 的延长线上，点 G 在 BC 上，（1）中结论是否仍然成立？请证明你的结论．



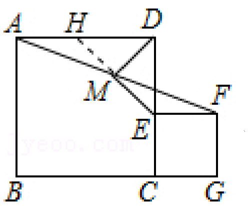
(图1)



(图2)

【解答】解：（1）结论：$DM\perp EM$，$DM=EM$．

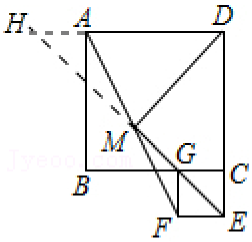
理由：如图 1 中，延长 EM 交 AD 于 H．



(图1)

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，四边形 $EFGC$ 是正方形，
∴$\angle ADE=\angle DEF=90^\circ$，$AD=CD$，
∴$AD\parallel EF$，
∴$\angle MAH=\angle MFE$，
∵$AM=MF$，$\angle AMH=\angle FME$，
∴$\triangle AMH\cong\triangle FME$（$AAS$），
∴$MH=ME$，$AH=EF=EC$，
∴$DH=DE$，
∵$\angle EDH=90^\circ$，
∴$DM\perp EM$，$DM=ME$；

（2）如图 2 中，结论不变．$DM\perp EM$，$DM=EM$．



(图2)

理由：如图 2 中，延长 EM 交 DA 的延长线于 H．
∵四边形 $ABCD$ 是正方形，四边形 $EFGC$ 是正方形，
∴$\angle ADE=\angle DEF=90^\circ$，$AD=CD$，
∴$AD\parallel EF$，
∴$\angle MAH=\angle MFE$，
∵$AM=MF$，$\angle AMH=\angle FME$，
∴$\triangle AMH\cong\triangle FME$，
∴$MH=ME$，$AH=EF=EC$，
∴$DH=DE$，
∵$\angle EDH=90^\circ$，
∴$DM\perp EM$，$DM=ME$．