专题1-5　正方形基本型（母题溯源）

01 题型·解读

02 满分·技巧

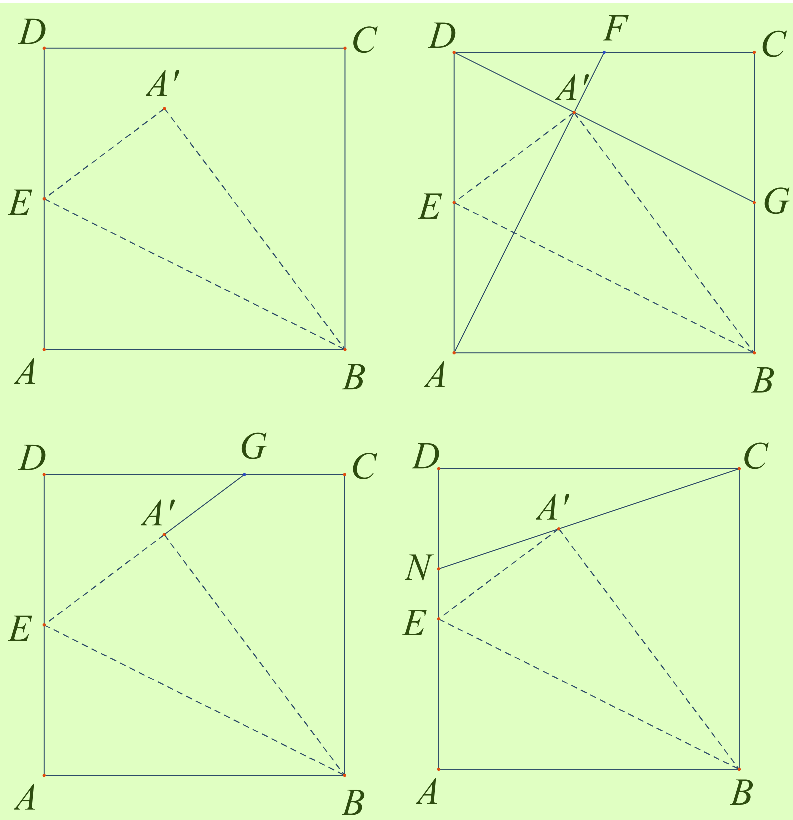
【淘宝店铺：向阳百分百】

模型解读

【模型一】中点+折叠

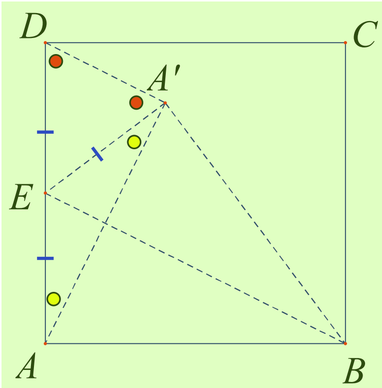
性质一：$AA'\perp A'D$；性质二：F，G 为中点；性质三：$A'G\perp CG$;性质四：$\angle EBG=45°$；

性质五：$DG=2CG$；性质六：$\tan\angle DCN=\dfrac{1}{3}$



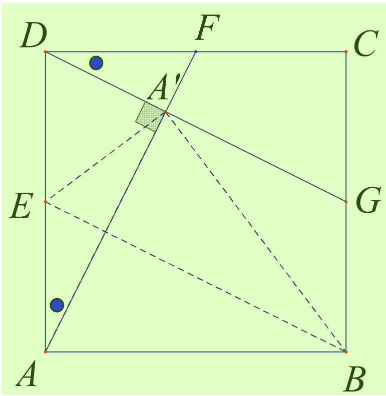
性质一证明：$AA'\perp A'D$

【淘宝店铺：向阳百分百】



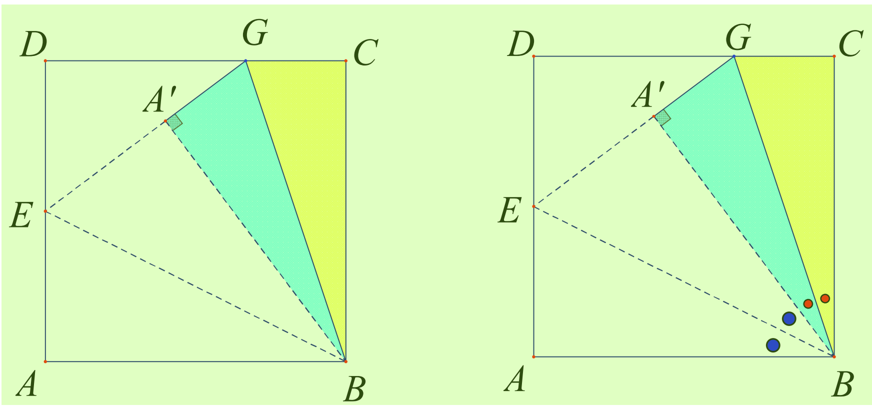
1

性质二证明：G 是 BC 中点 2



3

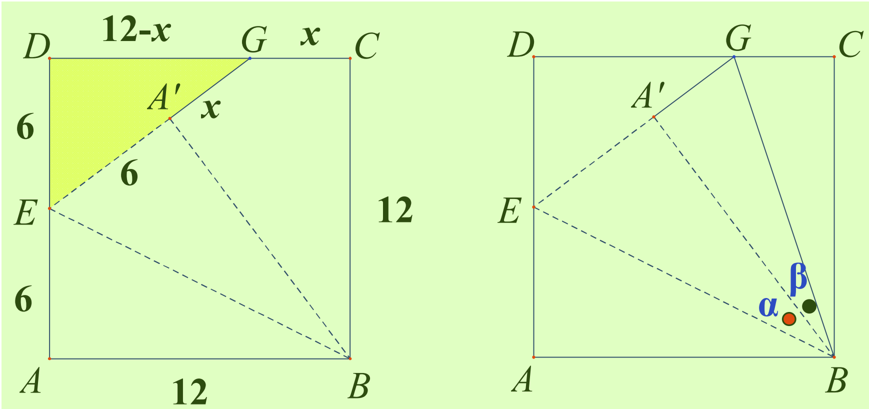
性质三，四证明：HL 全等 4



5

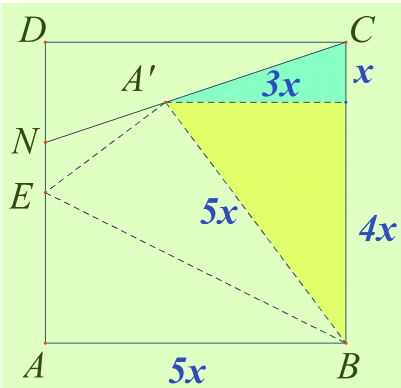
性质五证明：勾股，或“12345”模型 6

【淘宝店铺：向阳百分百】



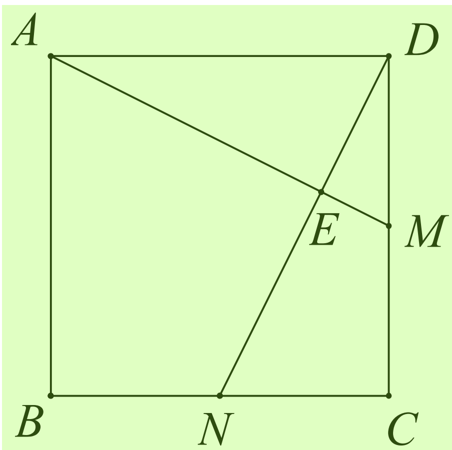
【12345 模型说明】易知 $\alpha+\beta=45°$， $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，故 $\tan\beta=\frac{1}{3}$，记 $\mathbf{AB}=\mathbf{12}\Rightarrow CG=4, DG=8$

性质六证明：12345 模型

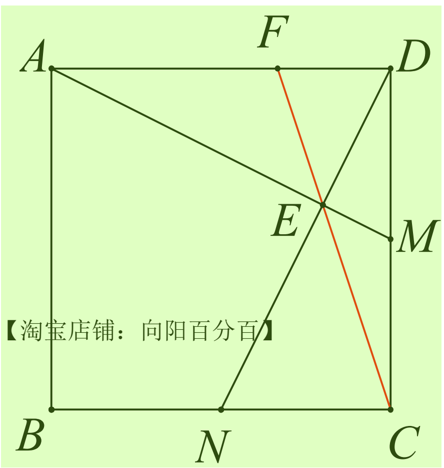


【模型二】双中点（十字架模型拓展）

(1)知 2 推 1：①M 中点；②N 是中点；③AM⊥DN



(2)已知：M 是中点，N 是中点，连接 CE 并延长，交 AD 于 F



【淘宝店铺：向阳百分百】

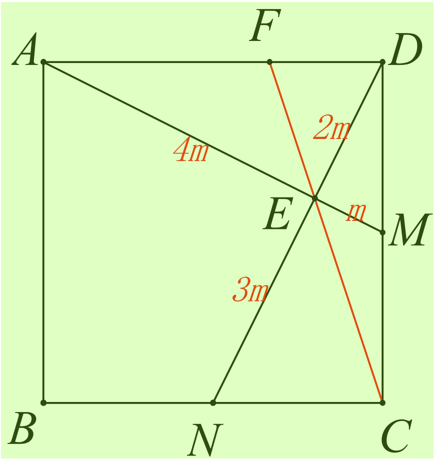
① 求 $EM:ED:EN:AE=$________

② 证明：EC 平分∠NEM

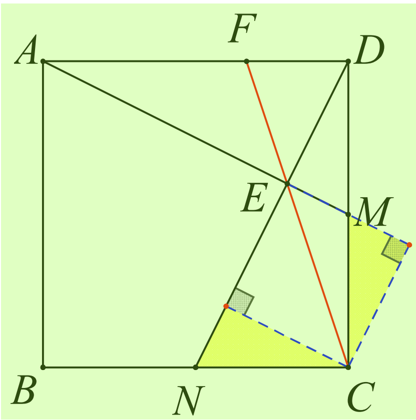
③ 求 $\dfrac{DF}{AF}$

【解析】

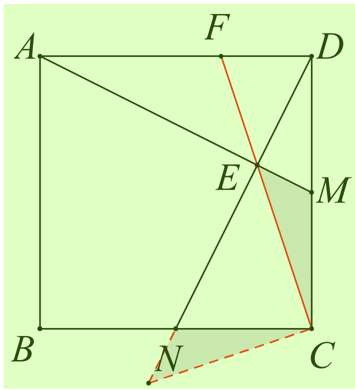
① $ED:EN:AE=1:2:3:4$



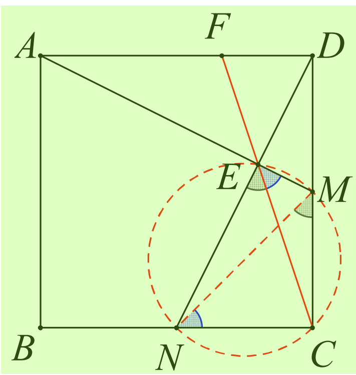
证明：法一：角平分线逆定理



法二：旋转相似（手拉手模型）

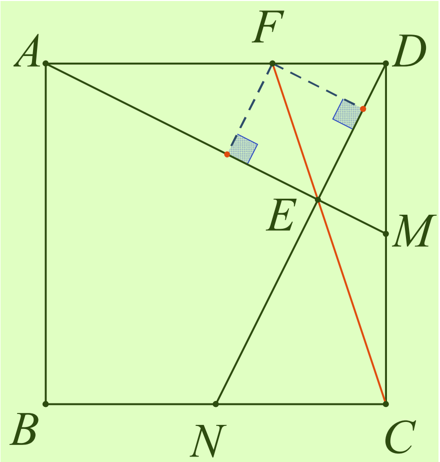


法三：四点共圆



② 法一：角平分线定理

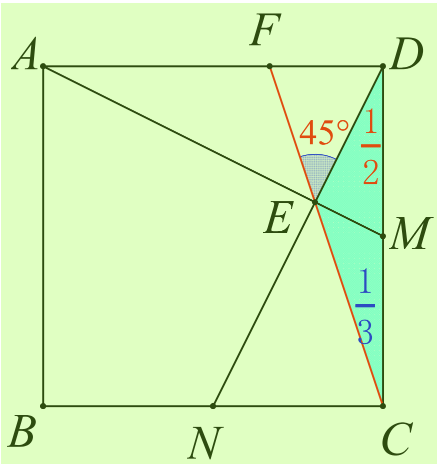
【淘宝店铺：向阳百分百】



F在角平分线上，过F作角两边垂线

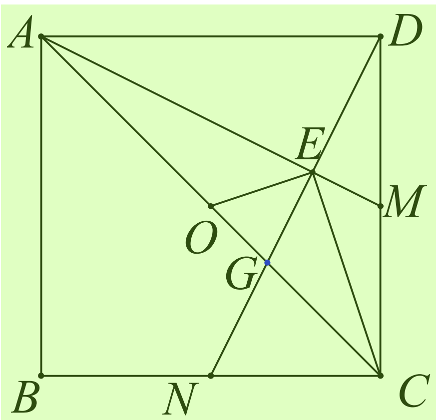
$\therefore \dfrac{DF}{AF}=\dfrac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle AEF}}=\dfrac{DE}{AE}=\dfrac{1}{2}$（角平分线定理2）

法二：12345 模型（正切和角公式）

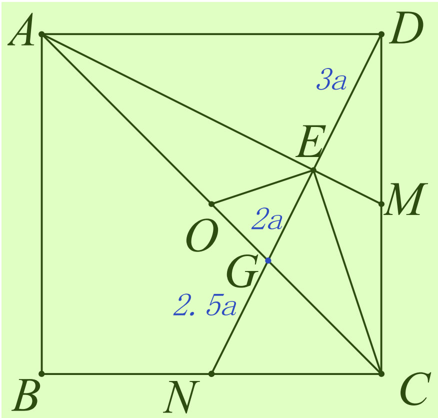


$\angle DEF=45^\circ$，$\angle EDC=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \tan\angle DCF=\dfrac{1}{3}$

（3）已知：M，N 是中点，O 是中心，连接 OE，①求 DE:EG:GN ;②证∠OEC=90°



【解析】第一问

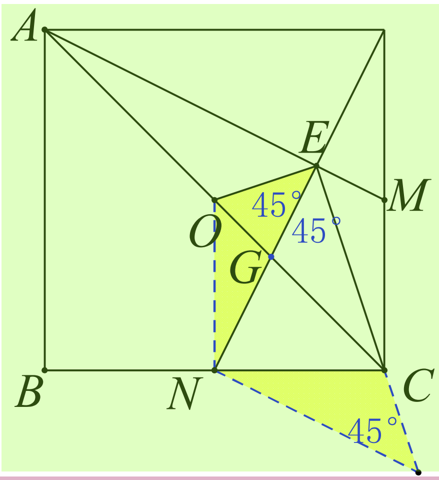


1

$\frac{DE}{NE}=\frac{2}{3}$，$\frac{NG}{DG}=\frac{1}{2}$ ro 12345模型 2

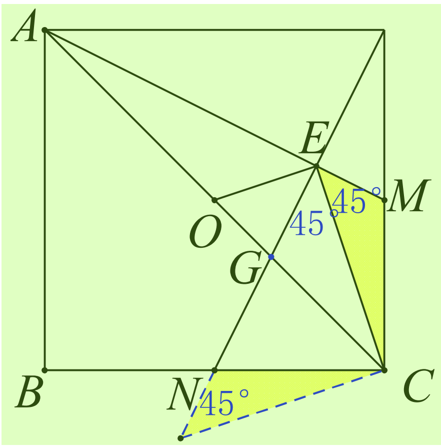
【解析】第二问

法一：由（2）可知∠NEC=45°，故构造手拉手模型可得△黄≌△黄(SAS)，从而可得∠NEO=45°，得证 3



4

或者换个方向也可以， 像这种方方正正的图形也可以试试建系 5

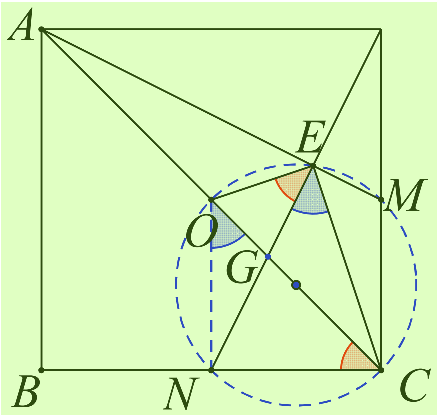


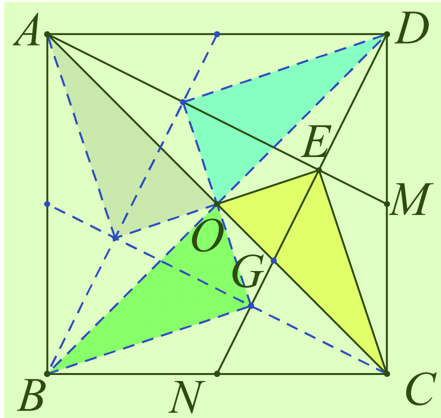
6

法二：四点共圆 7

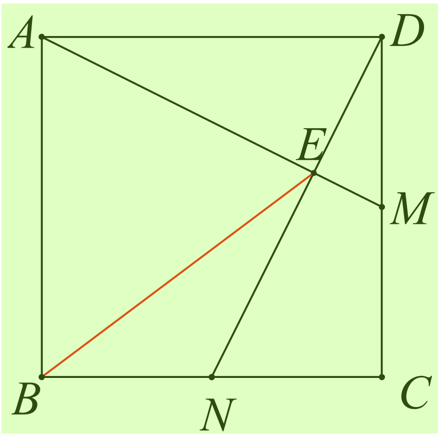
法三：补成玄图 易知∠OEG=45°

【淘宝店铺：向阳百分百】

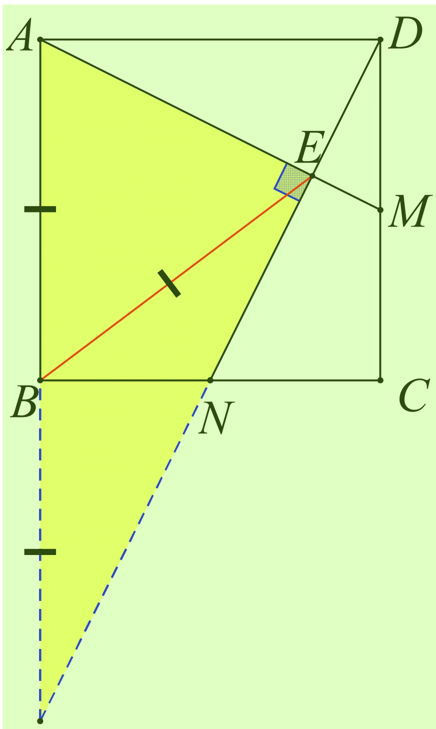




（4）已知：M，N 是中点,连接 BE，证 BE=CD

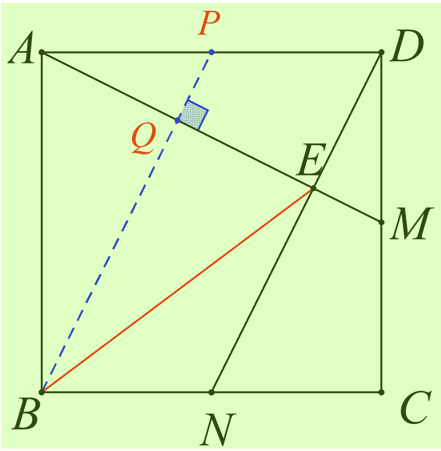


【解析】法一　斜边上的中线等于斜边一般



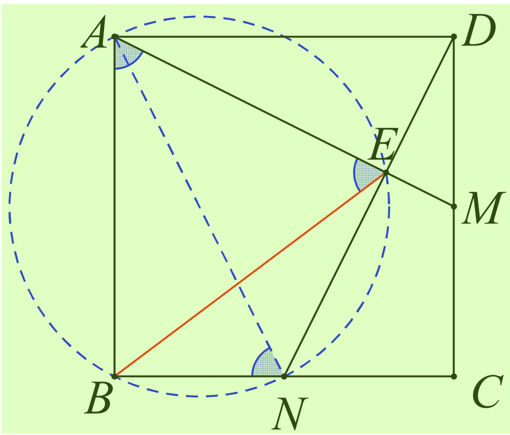
【淘宝店铺：向阳百分百】

法二：过 AD 的中点 P 作 AE 垂线，交 AM 于 Q，可得 Q 是 AE 中点，则 BQ 垂直平分 AE，故 AB=BE 1



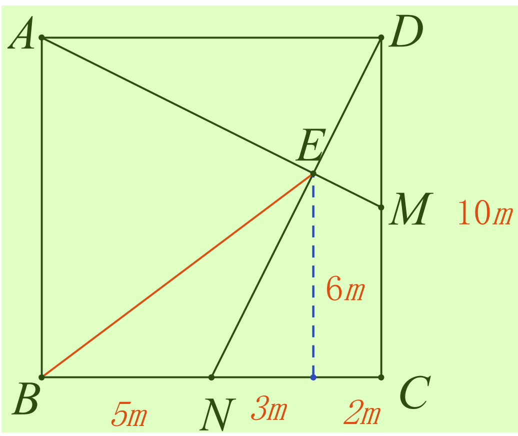
2

法三：对角互补得四点共圆，导角得等腰 3



4

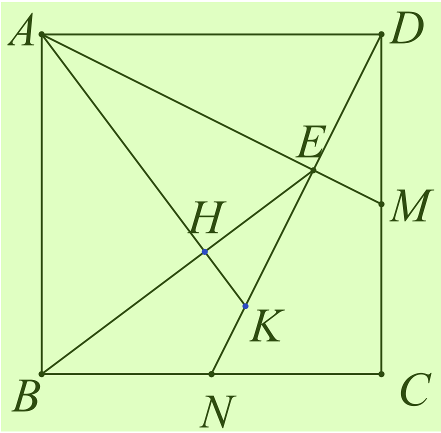
法四：勾股定理，由（2）可知 DE：NE=2:3，设值求值即可 5



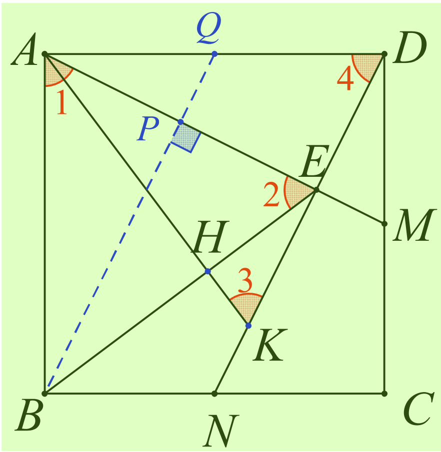
6

（5）已知：M，N 是中点,连接 BE，AH⊥BE 于 H，交 DN 于 K，证 AK=CD 7

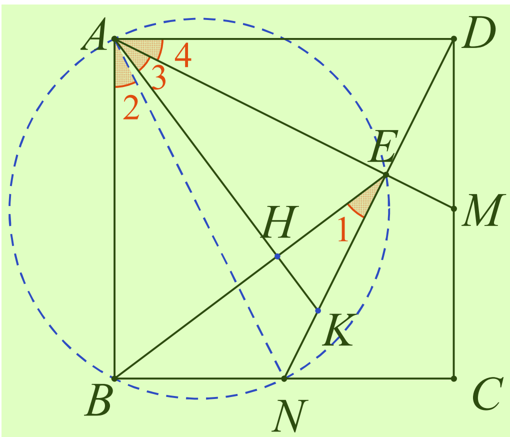
【淘宝店铺：向阳百分百】



【解析】法一：构造玄图导等腰



法二：四点共圆

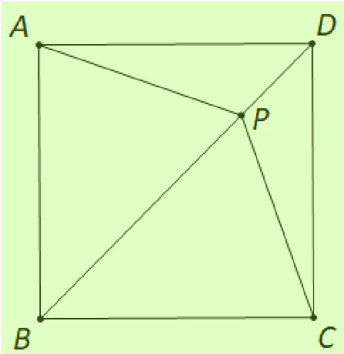


$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$

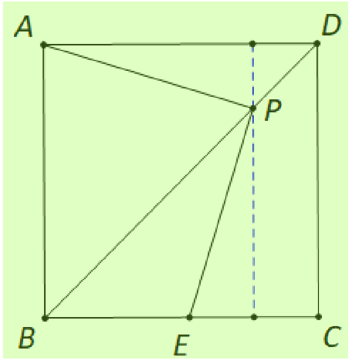
法三：建系求坐标（略）

【淘宝店铺：向阳百分百】

【模型三】对角线模型



$PA=PC$



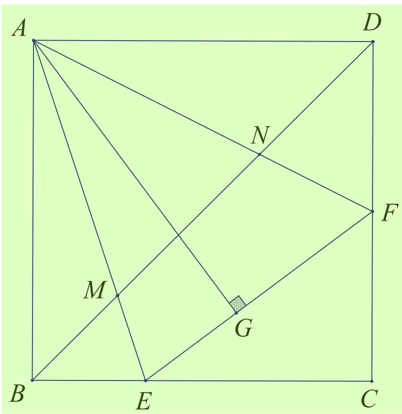
互推关系

①$PA \perp PE \Rightarrow PA=PE$

②$PA=PE \Rightarrow PA \perp PE$

【模型四】半角模型

如图，已知 ABCD 为正方形，∠FAE=45°，对角线 BD 交 AE 于 M，交 AF 与 N，AG⊥EF



5 个条件知 1 推 4

① ∠EAF=45°

② $BE+DF=EF$

③ $AG \perp EF$，AG=AB

④ AE 平分∠BEF

⑤ AF 平分∠DFE

【性质一】5 个条件知 1 推 4（全等）

【性质二】$BM^2+ND^2=MN^2$（勾股证）

【性质三】∠MGN=90°

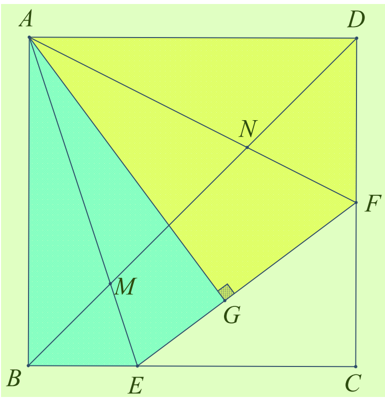
【性质四】①$AM^2=MN\cdot MD$；②$AN^2=NM\cdot NB$；③$S_{ABCD}=BN\cdot DM$（2 组子母，1 共享型相似）

【性质五】△ANE，△AMF，是 2 个隐藏的等腰直角三角形（反 8 字相似或四点共圆）

【性质六】△AMN∽△AFE，且相似比为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$（用全等导角）

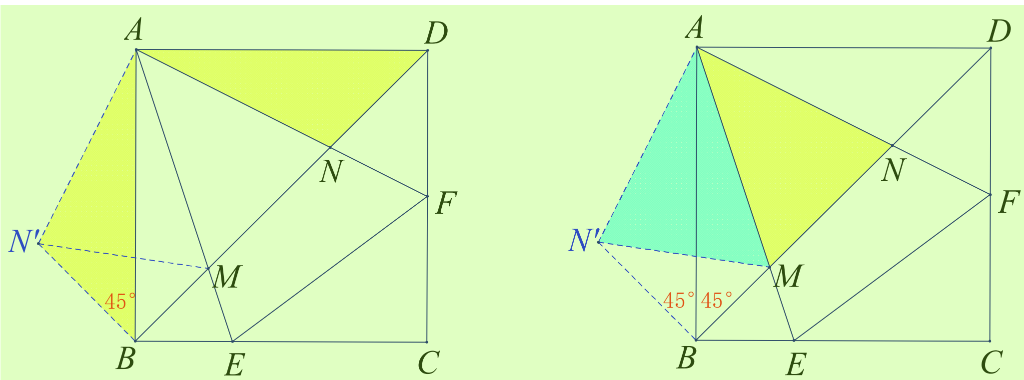
【性质七】$\frac{ND}{EC}=\frac{BM}{FC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$（旋转相似）

【性质一】DF＋BE＝EF



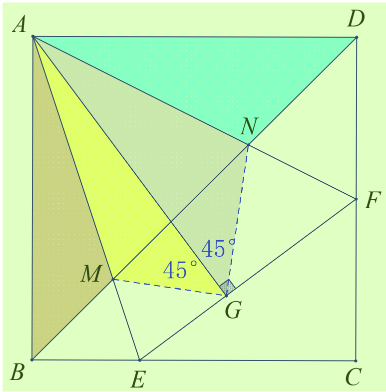
易证△ABE≌△AGE，易证△AGF≌△ADF

【性质二】$BM^2+ND^2=MN^2$ 简证，如图



【性质三】∠MGN=90° 简证，如图：两组全等

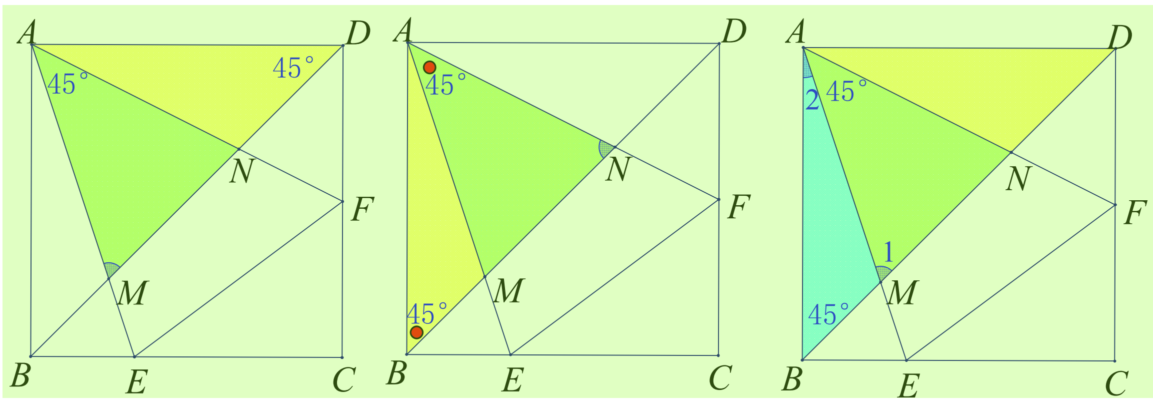
【淘宝店铺：向阳百分百】



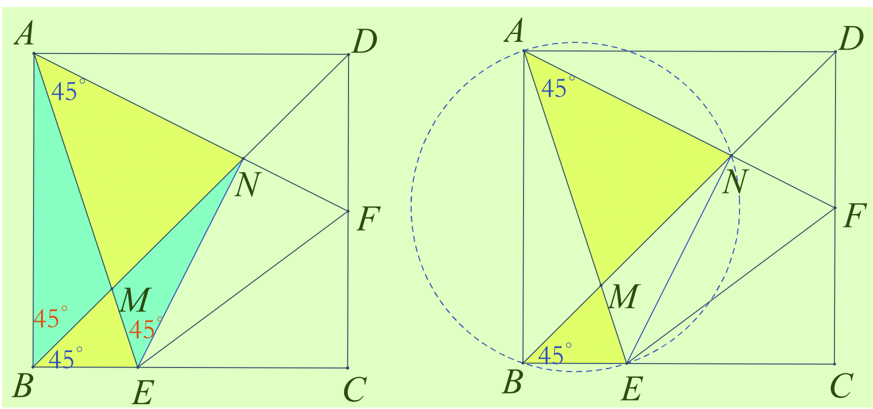
【性质四】①$AM^2=MN\cdot MD$；②$AN^2=NM\cdot NB$；③$S_{ABCD}=BN\cdot DM$ **（2组子母，1共享型相似）**
简证③，如图

S_{ABCD} = BN·DM（共享型相似）

∠1=45°+∠2=∠BAN⇒△BAN∽△DMA⇒BN•DM=AB•AD



【性质五】△ANE，△AMF，是2个隐藏的等腰直角三角形
简证，以△ANE为例，△AMF方法相同



法一：两次相似△AMN∽△BME⇒$\frac{AM}{BM}=\frac{NM}{EM}$ |△BMA∽△EMN| ∠ABM=∠NEM=45°

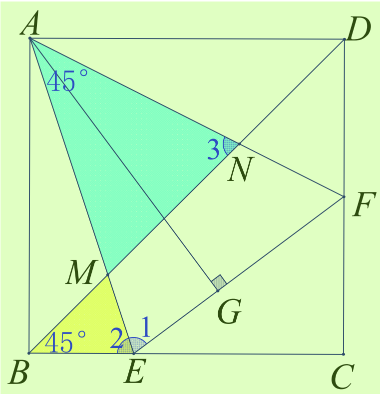
法二：ABEN四点共圆，对角互补∠ABE+∠ANE=180°或∠ABN=∠AEN

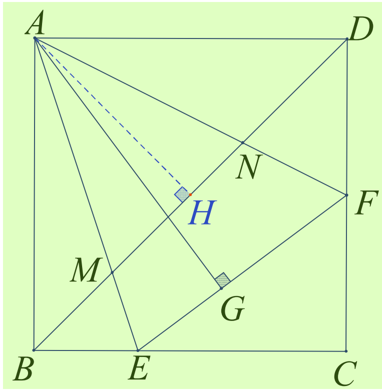
【淘宝店铺：向阳百分百】

【性质六】△AMN∽△AFE，且相似比为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

先证相似，易知∠1=∠2=∠3，故相似成立

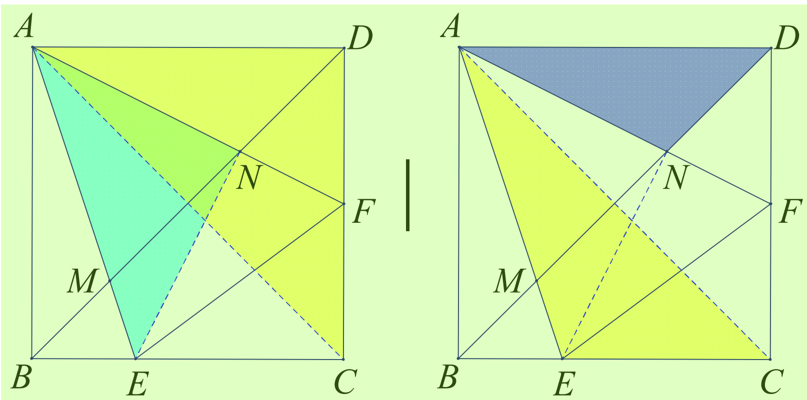
相似比为：$\frac{AH}{AG}=\frac{AH}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$





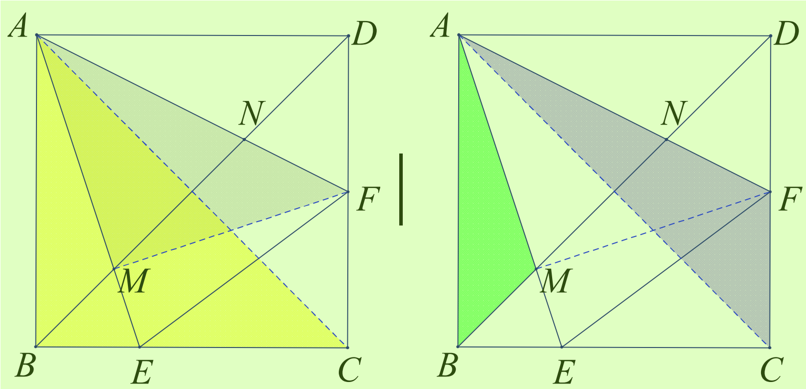
【性质七】 $\frac{ND}{EC}=\frac{BM}{FC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

① $\frac{ND}{EC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$



② $\frac{ND}{EC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

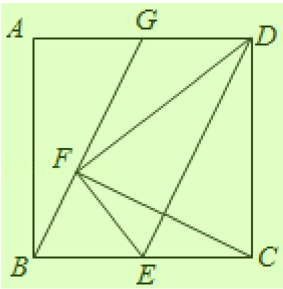
【淘宝店铺：向阳百分百】



03 核心·题型

题型一　中点+折叠模型

1．如图，在边长 4 的正方形 $ABCD$ 中，E 是边 BC 的中点，将 ΔCDE 沿直线 DE 折叠后，点 C 落在点 F 处，再将其打开、展平，得折痕 DE．连接 CF、BF、EF，延长 BF 交 AD 于点 G．则下列结论：① $BG=DE$；② $CF\perp BG$；③ $\sin\angle DFG=\frac{1}{2}$；④ $S_{\Delta DFG}=\frac{12}{5}$，其中正确的有(　　)



A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

【解答】解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=BC=AD=CD=4$，$\angle ABC=\angle BCD=90^\circ$，

$\because E$ 是边 BC 的中点，

$\therefore BE=CE=2$，

$\because$ 将 ΔCDE 沿直线 DE 折叠得到 ΔDFE，

$\therefore DF=CD=4$，$EF=CE=2$，$\angle DFE=\angle DCE=90^\circ$，$\angle DEF=\angle DEC$，

$\therefore EF=EB$，

$\therefore \angle EBF=\angle BFE$，

$\because \angle EBF=\angle BFE=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BEF)$，$\angle CED=\angle FED=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BEF)$，

$\therefore \angle GBE=\angle DEC$，

$\therefore BG//DE$，

【淘宝店铺：向阳百分百】

$\because BE//DG$，

$\therefore$ 四边形 $BEDG$ 是平行四边形，

$\therefore BG=DE$， 故①正确；

$\because EF=CE$，

$\therefore \angle EFC=\angle ECF$，

$\therefore \angle FBE+\angle BCF=\angle BFE+\angle CFE=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$，

$\therefore \angle BFC=90^\circ$，

$\therefore CF\perp BG$， 故②正确；

$\because \angle ABG+\angle CBG=\angle BFE+\angle DFG=90^\circ$，

$\therefore \angle ABG=\angle DFG$，

$\because AB=4$， $DG=BE=2$，

$\therefore AG=2$，

$\therefore BG=2\sqrt{5}$，

$\therefore \sin\angle DFG=\sin\angle ABG=\frac{AG}{BG}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$， 故③错误；

过 G 作 $GH\perp DF$ 于 H，

$\because \tan\angle GFH=\tan\angle ABG=\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 设 $GH=x$， 则 $FH=2x$，

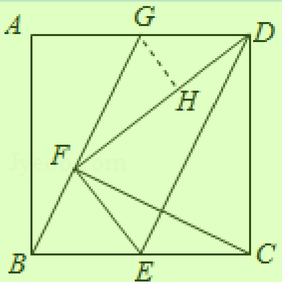
$\because DH=\sqrt{DG^2-x^2}$，

$\therefore DF=FH+DH=2x+\sqrt{DG^2-x^2}=4$，

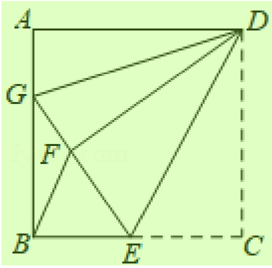
解得： $x=1.2$， $x=2$ （舍去），

$\therefore GH=1.2$，

$\therefore S_{\Delta DFG}=\frac{1}{2}\times 4\times 1.2=\frac{12}{5}$， 故④正确；



2．如图，正方形 $ABCD$ 中， $AB=12$，点 E 在边 BC 上， $BE=EC$，将 ΔDCE 沿 DE 对折至 ΔDFE，延长 EF 交边 AB 于点 G， 连接 DG， BF， 给出以下结论：① $\Delta DAG\cong\Delta DFG$；② $BG=2AG$；③ $BF//DE$；④ $S_{\Delta BEF}=\frac{72}{5}$． 其中所有正确结论的个数是(　　)



A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

【解答】解：如图，由折叠可知，$DF=DC=DA$，$\angle DFE=\angle C=90^{\circ}$，

$\therefore \angle DFG=\angle A=90^{\circ}$，

在 $Rt\Delta ADG$ 和 $Rt\Delta FDG$ 中，

$\begin{cases}AD=DF\\DG=DG\end{cases}$，

$\therefore Rt\Delta ADG\cong Rt\Delta FDG(HL)$，故①正确；

$\because$ 正方形边长是 12，

$\therefore BE=EC=EF=6$，

设 $AG=FG=x$，则 $EG=x+6$，$BG=12-x$，

由勾股定理得：$EG^{2}=BE^{2}+BG^{2}$，

即：$(x+6)^{2}=6^{2}+(12-x)^{2}$，

解得：$x=4$

$\therefore AG=GF=4$，$BG=8$，$BG=2AG$，故②正确，

$\because EF=EC=EB$，

$\therefore \angle EFB=\angle EBF$，

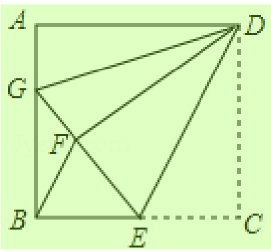
$\because \angle DEC=\angle DEF$，$\angle CEF=\angle EFB+\angle EBF$，

$\therefore \angle DEC=\angle EBF$，

$\therefore BF//DE$，故③正确；

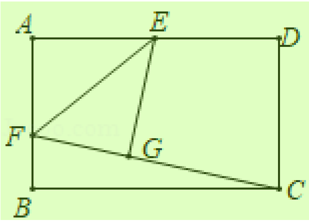
$S_{\Delta GBE}=\frac{1}{2}\times 6\times 8=24$，$S_{\Delta BEF}=\frac{EF}{EG}\cdot S_{\Delta GBE}=\frac{6}{10}\times 24=\frac{72}{5}$，故④正确．

综上可知正确的结论的是 4 个



3．如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=3\sqrt{6}$，$BC=12$，E 为 AD 中点，F 为 AB 上一点，将 ΔAEF 沿 EF 折叠后，点 A 恰好落到 CF 上的点 G 处，则折痕 EF 的长是__$2\sqrt{15}$__．

【淘宝店铺：向阳百分百】



【解答】解：如图，连接 EC，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore \angle A=\angle D=90^{\circ}$，$BC=AD=12$，$DC=AB=3\sqrt{6}$，

$\because E$ 为 AD 中点，

$\therefore AE=DE=\dfrac{1}{2}AD=6$

由翻折知，$\Delta AEF\cong\Delta GEF$，

$\therefore AE=GE=6$，$\angle AEF=\angle GEF$，$\angle EGF=\angle EAF=90^{\circ}=\angle D$，

$\therefore GE=DE$，

$\therefore EC$ 平分 $\angle DCG$，

$\therefore \angle DCE=\angle GCE$，

$\because \angle GEC=90^{\circ}-\angle GCE$，$\angle DEC=90^{\circ}-\angle DCE$，

$\therefore \angle GEC=\angle DEC$，

$\therefore \angle FEC=\angle FEG+\angle GEC=\dfrac{1}{2}\times180^{\circ}=90^{\circ}$，

$\therefore \angle FEC=\angle D=90^{\circ}$，

又 $\because \angle DCE=\angle GCE$，

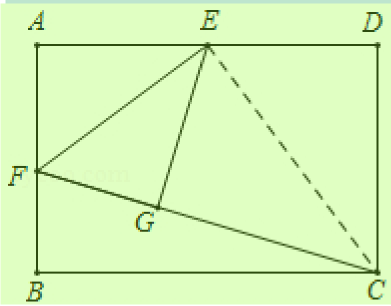
$\therefore \Delta FEC\backsim\Delta EDC$，

$\therefore \dfrac{FE}{DE}=\dfrac{EC}{DC}$，

$\because EC=\sqrt{DE^{2}+DC^{2}}=\sqrt{6^{2}+(3\sqrt{6})^{2}}=3\sqrt{10}$，

$\therefore \dfrac{FE}{6}=\dfrac{3\sqrt{10}}{3\sqrt{6}}$，

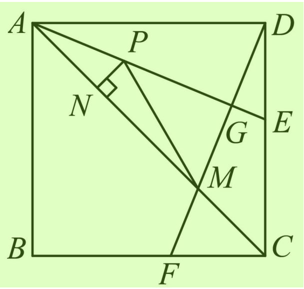
$\therefore FE=2\sqrt{15}$



题型二　双中点模型（十字架拓展）

2023·东营·中考真题

1．如图，正方形$ABCD$的边长为4，点E，F分别在边DC，BC上，且$BF=CE$，AE平分$\angle CAD$，连接DF，分别交AE，AC于点G，M，P是线段AG上的一个动点，过点P作$PN\perp AC$垂足为N，连接PM，有下列四个结论：①AE垂直平分DM；②$PM+PN$的最小值为$3\sqrt{2}$；③$CF^2=GE\cdot AE$；④$S_{\triangle ADM}=6\sqrt{2}$．其中正确的是（　　）



A．①②　　　B．②③④　　　C．①③④　　　D．①③

【答案】D

【详解】解：$\because ABCD$为正方形，

$\therefore BC=CD=AD$，$\angle ADE=\angle DCF=90^\circ$，

$\because BF=CE$，

$\therefore DE=FC$，

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle DCF(\text{SAS})$．

$\therefore \angle DAE=\angle FDC$，

$\because \angle ADE=90^\circ$，

$\therefore \angle ADG+\angle FDC=90^\circ$，

$\therefore \angle ADG+\angle DAE=90^\circ$，

$\therefore \angle AGD=\angle AGM=90^\circ$．

$\because AE$平分$\angle CAD$，

$\therefore \angle DAG=\angle MAG$．

$\because AG=AG$，

$\therefore \triangle ADG\cong\triangle AMG(\text{ASA})$．

$\therefore DG=GM$，

$\because \angle AGD=\angle AGM=90^\circ$，

$\therefore AE$垂直平分DM，

故①正确．

由①可知，$\angle ADE=\angle DGE=90^\circ$，$\angle DAE=\angle GDE$，

$\therefore \triangle ADE\sim\triangle DGE$，

$\therefore \dfrac{DE}{GE}=\dfrac{AE}{DE}$，

$\therefore DE^2=GE\cdot AE$，

由①可知 $DE=CF$，

$\therefore CF^2=GE\cdot AE$.

故③正确.

$\because ABCD$ 为正方形，且边长为 4，

$\therefore AB=BC=AD=4$，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{2}AB=4\sqrt{2}$.

由①可知，$\triangle ADG\cong\triangle AMG(\mathrm{ASA})$，

$\therefore AM=AD=4$，

$\therefore CM=AC-AM=4\sqrt{2}-4$.

由图可知，$\triangle DMC$ 和 $\triangle ADM$ 等高，设高为 h，

$\therefore S_{\triangle ADM}=S_{\triangle ADC}-S_{\triangle DMC}$，

$\therefore \frac{4\times h}{2}=\frac{4\times 4}{2}-\frac{(4\sqrt{2}-4)\cdot h}{2}$，

$\therefore h=2\sqrt{2}$，

$\therefore S_{\triangle ADM}=\frac{1}{2}\cdot AM\cdot h=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

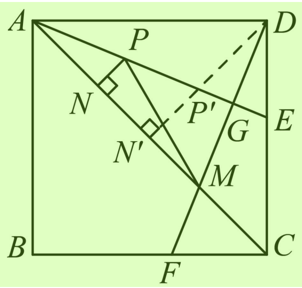
故④不正确.

由①可知，$\triangle ADG\cong\triangle AMG(\mathrm{ASA})$，

$\therefore DG=GM$，

$\therefore M$ 关于线段 AG 的对称点为 D，过点 D 作 $DN'\perp AC$，交 AC 于 N'，交 AE 于 P'，

$\therefore PM+PN$ 最小即为 DN'，如图所示，



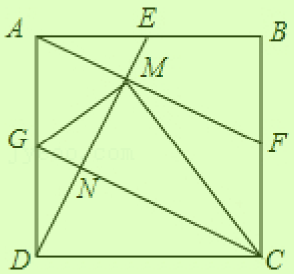
由④可知 $\triangle ADM$ 的高 $h=2\sqrt{2}$ 即为图中的 DN'，

$\therefore DN'=2\sqrt{2}$.

故②不正确.

综上所述，正确的是①③

2．如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E、F、G 分别为边 AB、BC、AD 上的中点，连接 AF、DE 交于点 M，连接 GM、CG，CG 与 DE 交于点 N，则结论① $GM\perp CM$；② $CD=DM$；③四边形 $AGCF$ 是平行四边形；④ $\angle CMD=\angle AGM$ 中，正确的有(　　)个.



A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

【答案】B

【解答】解：$\because AG//FC$ 且 $AG=FC$，

$\therefore$ 四边形 $AGCF$ 为平行四边形，故③正确；

$\therefore \angle GAF=\angle FCG=\angle DGC$，$\angle AMN=\angle GND$

在 ΔADE 和 ΔBAF 中，

$$\because \begin{cases} AE=BF \\ \angle DAE=\angle ABF \\ AD=AB \end{cases},$$

$\therefore \Delta ADE\cong\Delta BAF(SAS)$，

$\therefore \angle ADE=\angle BAF$，

$\because \angle ADE+\angle AEM=90^\circ$

$\therefore \angle EAM+\angle AEM=90^\circ$

$\therefore \angle AME=90^\circ$

$\therefore \angle GND=90^\circ$

$\therefore \angle DE\perp AF$，$DE\perp CG$．

$\because G$ 点为 AD 中点，

$\therefore GN$ 为 ΔADM 的中位线，

即 CG 为 DM 的垂直平分线，

$\therefore GM=GD$，$CD=CM$，故②错误；

在 ΔGDC 和 ΔGMC 中，

$$\because \begin{cases} DG=MG \\ CD=CM \\ CG=CG \end{cases},$$

$\therefore \Delta GDC\cong\Delta GMC(SSS)$，

$\therefore \angle CDG=\angle CMG=90^\circ$，

$\angle MGC=\angle DGC$，

$\therefore GM\perp CM$，故①正确；

$\because \angle CDG=\angle CMG=90^\circ$，

$\therefore G$、D、C、M 四点共圆，

$\therefore \angle AGM=\angle DCM$，

$\because CD=CM$，

$\therefore \angle CMD=\angle CDM$，

在 $\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{AMD}$ 中，$\angle AMD=90^\circ$，

【淘宝店铺：向阳百分百】

$\therefore DM < AD$，

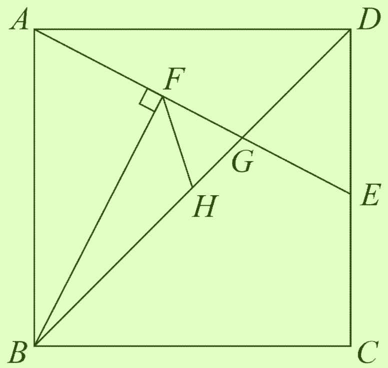
$\therefore DM < CD$，

$\therefore \angle DMC \neq \angle DCM$，

$\therefore \angle CMD \neq \angle AGM$，故④错误.

2203·绥化·中考真题

3．如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 为边 CD 的中点，连接 AE，过点 B 作 $BF \perp AE$ 于点 F，连接 BD 交 AE 于点 G，FH 平分 $\angle BFG$ 交 BD 于点 H．则下列结论中，正确的个数为（　　）



① $AB^2 = BF \cdot AE$；② $S_{\triangle BGF} : S_{\triangle BAF} = 2:3$；③当 $AB = a$ 时，$BD^2 - BD \cdot HD = a^2$

A．0 个　　B．1 个　　C．2 个　　D．3 个

【答案】D

【详解】∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $\angle BAD = \angle ADE = 90°$，$AB = AD$

∵ $BF \perp AE$

∴ $\angle ABF = 90° - \angle BAF = \angle DAE$

∴ $\cos \angle ABF = \cos \angle EAD$

即 $\dfrac{BF}{AB} = \dfrac{AD}{AE}$，又 $AB = AD$，

∴ $AB^2 = BF \cdot AE$，故①正确；

设正方形的边长为 a，

∵点 E 为边 CD 的中点，

∴ $DE = \dfrac{a}{2}$，

∴ $\tan \angle ABF = \text{tans} \angle EAD = \dfrac{1}{2}$，

在 Rt△ABE 中，$AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{5}AF = a$，

∴ $AF = \dfrac{\sqrt{5}}{5}a$

在 Rt△ADE 中，$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \dfrac{\sqrt{5}a}{2}$

【淘宝店铺：向阳百分百】

$\therefore EF = AE - AF = \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{\sqrt{5}}{5}a = \frac{3\sqrt{5}}{10}a$，

$\because AB \parallel DE$

$\therefore \triangle GAB \backsim \triangle GED$

$\therefore \frac{AG}{GE} = \frac{AB}{DE} = 2$

$\therefore GE = \frac{1}{3}AE = \frac{\sqrt{5}}{6}a$

$\therefore FG = AE - AF - GE = \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{\sqrt{5}}{5}a - \frac{\sqrt{5}}{6}a = \frac{2\sqrt{5}}{15}a$

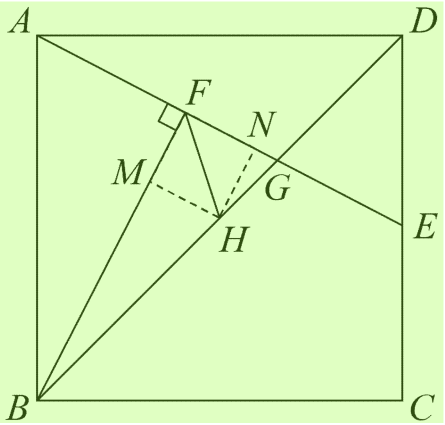
$\therefore \frac{AF}{FG} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}a}{\frac{2\sqrt{5}}{15}a} = \frac{3}{2}$

$\therefore S_{\triangle BGF} : S_{\triangle BAF} = 2:3$，故②正确；

$\because AB = a$，

$\therefore BD^2 = AB^2 + AD^2 = 2a^2$，

如图所示，过点H分别作BF, AE的垂线，垂足分别为M, N，



又$\because BF \perp AE$，

$\therefore$四边形$FMHN$是矩形，

$\because FH$是$\angle BFG$的角平分线，

$\therefore HM = HN$，

$\therefore$四边形$FMHN$是正方形，

$\therefore FN = HM = HN$

$\because BF = 2AF = \frac{2\sqrt{5}}{5}a, FG = \frac{2\sqrt{5}}{15}a$

$\therefore \frac{MH}{BM} = \frac{FG}{BF} = \frac{1}{3}$

设$MH = b$，则$BF = BM + FM = BM + MH = 3b + b = 4b$

在$\mathrm{Rt}\triangle BMH$中，$BH = \sqrt{BM^2 + MH^2} = \sqrt{10}b$，

$\because BF = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$

【淘宝店铺：向阳百分百】

$\therefore \frac{2\sqrt{5}}{5}a = 4b$

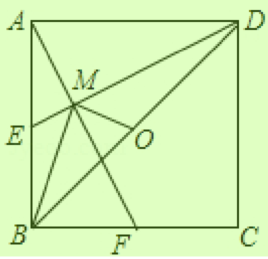
解得：$b = \frac{\sqrt{5}}{10}a$

$\therefore BH = \sqrt{10} \times \frac{\sqrt{5}}{10}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a$，

$\therefore BD^2 - BD \cdot HD = 2a^2 - \sqrt{2}a \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = a^2$，故④正确

4．如图，已知 E，F 分别为正方形 $ABCD$ 的边 AB，BC 的中点，AF 与 DE 交于点 M，O 为 BD 的中点，则下列结论：

①$\angle AME = 90^\circ$；②$\angle BAF = \angle EDB$；③$\angle BMO = 90^\circ$；④$MD = 2AM = 4EM$；⑤$AM = \frac{2}{3}MF$．其中正确结论的是(　　)



A．①③④　　B．②④⑤　　C．①③④⑤　　D．①③⑤

【解答】解：在正方形 $ABCD$ 中，$AB = BC = AD$，$\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$，

$\because E$、F 分别为边 AB，BC 的中点，

$\therefore AE = BF = \frac{1}{2}BC$，

在 ΔABF 和 ΔDAE 中，

$$\begin{cases} AE = BF \\ \angle ABC = \angle BAD \\ AB = AD \end{cases}，$$

$\therefore \Delta ABF \cong \Delta DAE(SAS)$，

$\therefore \angle BAF = \angle ADE$，

$\because \angle BAF + \angle DAF = \angle BAD = 90^\circ$，

$\therefore \angle ADE + \angle DAF = \angle BAD = 90^\circ$，

$\therefore \angle AMD = 180^\circ - (\angle ADE + \angle DAF) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$，

$\therefore \angle AME = 180^\circ - \angle AMD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$，故①正确；

$\because DE$ 是 ΔABD 的中线，

$\therefore \angle ADE \neq \angle EDB$，

$\therefore \angle BAF \neq \angle EDB$，故②错误；

$\because \angle BAD = 90^\circ$，$AM \perp DE$，

$\therefore \Delta AED \backsim \Delta MAD \backsim \Delta MEA$，

$\therefore \dfrac{AM}{EM}=\dfrac{MD}{AM}=\dfrac{AD}{AE}=2$，

$\therefore AM=2EM$， $MD=2AM$，

$\therefore MD=2AM=4EM$， 故④正确；

设正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$， 则 $BF=a$，

在 RtΔABF 中， $AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{5}a$，

$\because \angle BAF=\angle MAE$， $\angle ABC=\angle AME=90^\circ$，

$\therefore \Delta AME\backsim\Delta ABF$，

$\therefore \dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AE}{AF}$，

即 $\dfrac{AM}{2a}=\dfrac{a}{\sqrt{5}a}$，

解得 $AM=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$，

$\therefore MF=AF-AM=\sqrt{5}a-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}a$，

$\therefore AM=\dfrac{2}{3}MF$， 故⑤正确；

如图， 过点 M 作 $MN\perp AB$ 于 N，

则 $\dfrac{MN}{BF}=\dfrac{AN}{AB}=\dfrac{AM}{AF}$，

即 $\dfrac{MN}{a}=\dfrac{AN}{2a}=\dfrac{\frac{2\sqrt{5}}{5}a}{\sqrt{5}a}$，

解得 $MN=\dfrac{2}{5}a$， $AN=\dfrac{4}{5}a$，

$\therefore NB=AB-AN=2a-\dfrac{4}{5}a=\dfrac{6}{5}a$，

根据勾股定理， $BM=\sqrt{BN^2+MN^2}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}a$，

过点 M 作 $GH//AB$， 过点 O 作 $OK\perp GH$ 于 K，

则 $OK=a-\dfrac{2}{5}a=\dfrac{3}{5}a$， $MK=\dfrac{6}{5}a-a=\dfrac{1}{5}a$，

在 RtΔMKO 中， $MO=\sqrt{MK^2+OK^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}a$，

根据正方形的性质， $BO=2a\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}a$，

$\because BM^2+MO^2=(\dfrac{2\sqrt{10}}{5}a)^2+(\dfrac{\sqrt{10}}{5}a)^2=2a^2$，

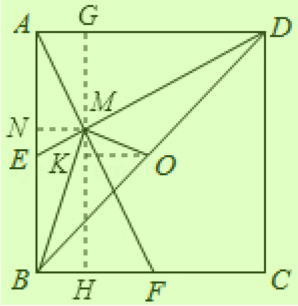
$BO^2=(\sqrt{2}a)^2=2a^2$，

$\therefore BM^2+MO^2=BO^2$，

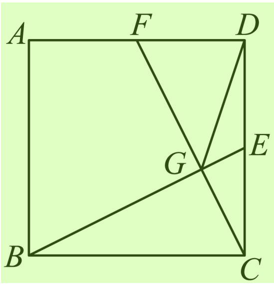
【淘宝店铺：向阳百分百】

$\therefore \Delta BMO$ 是直角三角形，$\angle BMO = 90°$，故③正确；

综上所述，正确的结论有①③④⑤共 4 个



5．如图，在正方形 $ABCD$ 中，E、F 分别在 CD、AD 边上，且 $CE = DF$，连接 BE、CF 相交于 G 点．则下列结论：① $BE = CF$；② $S_{\triangle BCG} = S_{四边形DFGE}$；③ $CG^2 = BG \cdot GE$；④当 E 为 CD 中点时，连接 DG，则 $\angle FGD = 45°$，正确的结论是___________．（填序号）



【答案】①②③④

【分析】①由“SAS”可证 $\triangle BCE \cong \triangle CDF$，可得 $BE = CF$；

②由全等三角形的性质可得 $S_{\triangle BCQ} = S_{\triangle CDF}$，由面积和差关系可得 $S_{\triangle BCG} = S_{四边形DFGE}$；

③通过证明 $\triangle BCG \backsim \triangle CEG$，可得 $\dfrac{CG}{BG} = \dfrac{GE}{GC}$，可得结论；

④通过证明点 D，点 E，点 G，点 F 四点共圆，可证 $\angle DEF = \angle DGF = 45°$．

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore BC = CD$，$\angle BCD = \angle CDF = 90°$，

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases} BC = CD \\ \angle BCD = \angle CDF = 90° \\ CE = DF \end{cases},$$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle CDF (\text{SAS})$，

$\therefore BE = CF$，故①正确，

$\because \triangle BCE \cong \triangle CDF$，

$\therefore S_{\triangle BCE} = S_{\triangle CDF}$，

$\therefore S_{\triangle BCG} = S_{四边形DFGE}$；故②正确，

$\because \triangle BCE \cong \triangle CDF$，

$\therefore \angle DCF = \angle EBC$，

$\because \angle DCF + \angle BCG = 90°$，

$\therefore \angle EBC+\angle BCG=90^{\circ}$，

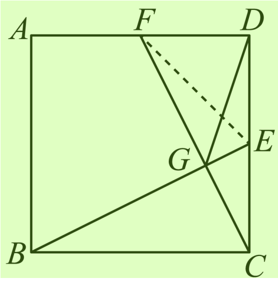
$\therefore \angle BGC=\angle EGC=90^{\circ}$，

$\therefore \triangle BCG \backsim \triangle CEG$，

$\therefore \dfrac{CG}{BG}=\dfrac{GE}{GC}$，

$\therefore CG^{2}=BG \cdot GE$；故③正确；

如图，连接 EF，



$\because$ 点 E 是 CD 中点，

$\therefore DE=CE$，

$\because CE=DF$，

$\therefore DF=CE=DE$，

$\therefore \angle DFE=\angle DEF=45^{\circ}$，

$\because \angle ADC=\angle EGF=90^{\circ}$，

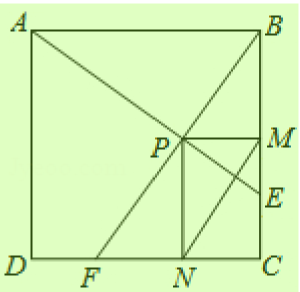
$\therefore$ 点 D，点 E，点 G，点 F 四点共圆，

$\therefore \angle DEF=\angle DGF=45^{\circ}$，故④正确；

综上所述：正确的有①②③④

题型三　对角线模型

1．如图，在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，动点 F，E 分别以相同的速度从 D，C 两点同时出发向 C 和 B 运动（任何一个点到达即停止），连接 AE、BF 交于点 P，过点 P 作 $PM//CD$ 交 BC 于 M 点，$PN//BC$ 交 CD 于 N 点，连接 MN，在运动过程中则下列结论：① $\Delta ABE \cong \Delta BCF$；② $AE=BF$；③ $AE \perp BF$；④ $CF^{2}=PE \cdot BF$；⑤线段 MN 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{5}-2}{2}$．其中正确的结论有(　　)



A．2 个　　B．3 个　　C．4 个　　D．5 个

【解答】解：$\because$ 动点 F，E 的速度相同，

$\therefore DF=CE$，

又$\because CD=BC$，

$\therefore CF=BE$，

在ΔABE和ΔBCF中，

$$\begin{cases} AB=BC \\ \angle ABE=\angle BCF=90^\circ \\ BE=CF \end{cases}$$

$\therefore \Delta ABE\cong \Delta BCF(SAS)$，故①正确；

$\therefore \angle BAE=\angle CBF$，$AE=BF$，故②正确；

$\because \angle BAE+\angle BEA=90^\circ$，

$\therefore \angle CBF+\angle BEA=90^\circ$，

$\therefore \angle APB=90^\circ$，故③正确；

在ΔBPE和ΔBCF中，

$\because \angle BPE=\angle BCF$，$\angle PBE=\angle CBF$，

$\therefore \Delta BPE\backsim \Delta BCF$，

$\therefore \dfrac{PE}{CF}=\dfrac{BE}{BF}$，

$\therefore CF\bullet BE=PE\bullet BF$，

$\because CF=BE$，

$\therefore CF^2=PE\bullet BF$，故④正确；

$\because$点P在运动中保持$\angle APB=90^\circ$，

$\therefore$点P的路径是一段以AB为直径的弧，

如图，设AB的中点为G，连接CG交弧于点P，此时CP的长度最小，

在RtΔBCG中，$CG=\sqrt{BC^2+BG^2}=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

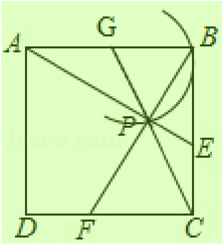
$\because PG=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore MN=CP=CG-PG=\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

即线段MN的最小值为$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，故⑤错误；

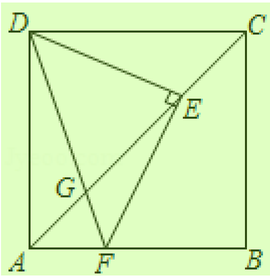
综上可知正确的有 4 个，

故选：C．



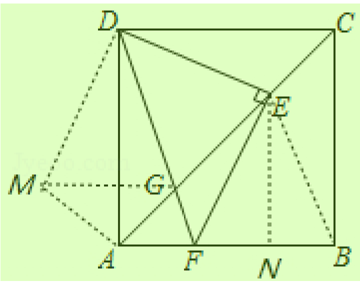
2．如图，正方形 $ABCD$ 中， $AB=3$，点 E 是对角线 AC 上的一点，连接 DE，过点 E 作 $EF\perp DE$，交 AB 于点 F，连接 DF 交 AC 于点 G，下列结论：

①$DE=EF$；②$\angle ADF=\angle AEF$；③$DG^2=GE\bullet GC$；④若 $AF=1$，则 $EG=\dfrac{5}{4}\sqrt{2}$，其中结论正确的个数是(　　)



A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

【解答】解：如图，连接 BE，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore CB=CD$， $\angle BCE=\angle DCE=45^\circ$，

在 ΔBEC 和 ΔDEC 中，

$$\begin{cases} DC=BC \\ \angle DCE=\angle BCE \\ CE=CE \end{cases}，$$

$\therefore \Delta DCE\cong\Delta BCE(SAS)$，

$\therefore DE=BE$， $\angle CDE=\angle CBE$，

$\therefore \angle ADE=\angle ABE$，

$\because \angle DAB=90^\circ$， $\angle DEF=90^\circ$，

$\therefore \angle ADE+\angle AFE=180^\circ$，

$\because \angle AFE+\angle EFB=180^\circ$，

$\therefore \angle ADE=\angle EFB$， 1

$\therefore \angle ABE=\angle EFB$，

$\therefore EF=BE$，

$\therefore DE=EF$，故①正确；

$\because \angle DEF=90^{\circ}$，$DE=EF$，

$\therefore \angle EDF=\angle DFE=45^{\circ}$，

$\because \angle DAC=45^{\circ}$，$\angle AGD=\angle EGF$，

$\therefore \angle ADF=\angle AEF$，故②正确；

$\because \angle GDE=\angle DCG=45^{\circ}$，$\angle DGE=\angle CGD$，

$\therefore \Delta DGE \backsim \Delta CGD$，

$\therefore \dfrac{DG}{EG}=\dfrac{CG}{DG}$，

即 $DG^{2}=GE \cdot CG$，故③正确；

如图，过点 E 作 $EN \perp AB$ 于点 N，

$\because AF=1$，$AB=3$，

$\therefore BF=2$，$AC=\sqrt{3^{2}+3^{2}}=3\sqrt{2}$，

$\because BE=EF$，

$\therefore FN=BN=1$，

$\therefore AN=2$，

$\therefore AE=\sqrt{2^{2}+2^{2}}=2\sqrt{2}$，

$\therefore CE=AC-AE=\sqrt{2}$，

将 ΔDEC 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到 ΔDMA，连接 MG，

易证 $\Delta DMG \cong \Delta DEG(SAS)$，$\Delta AMG$ 是直角三角形，

$\therefore MG=GE$，

$\therefore MG^{2}=EG^{2}=AM^{2}+AG^{2}=CE^{2}+AG^{2}$，

设 $EG=x$，则 $AG=2\sqrt{2}-x$，

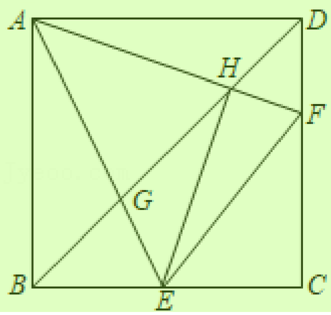
$\therefore (\sqrt{2})^{2}+(2\sqrt{2}-x)^{2}=x^{2}$，

解得：$x=\dfrac{5}{4}\sqrt{2}$，即 $EG=\dfrac{5}{4}\sqrt{2}$，故④正确．

故选：D．

3．如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别为边 BC，CD 上的点，连接 AE，AF，与对角线 BD 分别交于点 G，H，连接 EH．若 $\angle EAF=45^{\circ}$，则下列判断错误的是(　　) 2

【淘宝店铺：向阳百分百】



A． $BE+DF=EF$　　　　　　　　B． $BG^2+HD^2=GH^2$

C． E， F 分别为边 BC， CD 的中点　　　　D． $AH\perp EH$

【解答】解：如图 1，将 ΔADF 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 ΔABM， 此时 AB 与 AD 重合，

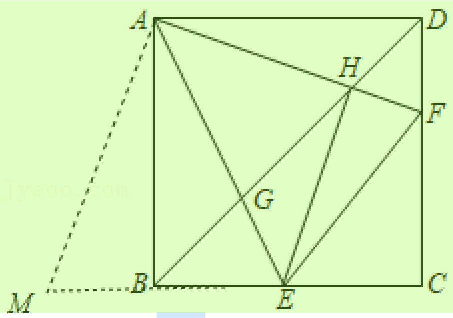


图1

由旋转可得： $AB=AD$， $BM=DF$， $\angle DAF=\angle BAM$， $\angle ABM=\angle D=90^\circ$， $AM=AF$，

$\therefore \angle ABM+\angle ABE=90^\circ+90^\circ=180^\circ$，

$\therefore$ 点 M， B， E 在同一条直线上．

$\because \angle EAF=45^\circ$，

$\therefore \angle DAF+\angle BAE=\angle BAD-\angle EAE=90^\circ-45^\circ=45^\circ$．

$\because \angle BAE=\angle DAF$，

$\therefore \angle BAM+\angle BAE=45^\circ$．

即 $\angle MAE=\angle FAE$．

在 ΔAME 与 ΔAFE 中，

$$\begin{cases} AM=AF \\ \angle MAE=\angle FAE \\ AE=AE \end{cases}，$$

$\therefore \Delta AME\cong\Delta AFE(SAS)$，

$\therefore ME=EF$，

$\therefore EF=BE+DF$， 故 A 选项不合题意，

如图 2，将 ΔADH 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 ΔABN， 此时 AB 与 AD 重合，

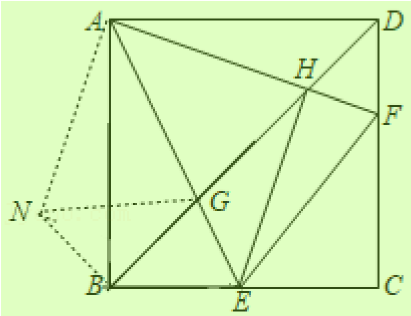


图2

$\therefore \Delta ADH \cong \Delta ABN$，

$\therefore AN = AH$， $\angle BAN = \angle DAH$， $\angle ADH = \angle ABN = 45°$， $DH = BN$，

$\therefore \angle NBG = 90°$，

$\therefore BN^2 + BG^2 = NG^2$，

$\because \angle EAF = 45°$，

$\therefore \angle DAF + \angle BAE = 45°$，

$\therefore \angle BAN + \angle BAE = 45° = \angle NAE$，

$\therefore \angle NAE = \angle EAF$，

又$\because AN = AH$， $AG = AG$，

$\therefore \Delta ANG \cong \Delta AHG(SAS)$，

$\therefore GH = NG$，

$\therefore BN^2 + BG^2 = NG^2 = GH^2$，

$\therefore DH^2 + BG^2 = GH^2$，故 B 选项不合题意；

$\because \angle EAF = \angle DBC = 45°$，

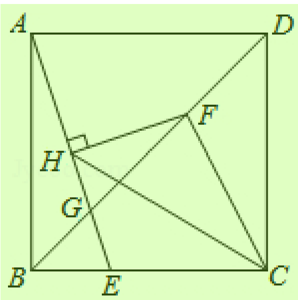
$\therefore$ 点 A，点 B，点 E，点 H 四点共圆，

$\therefore \angle AHE = \angle ABE = 90°$，

$\therefore AH \perp HE$，故 D 选项不合题意，

故选：C．

4．在正方形 $ABCD$ 中，点 E 为 BC 边上一点且 $CE = 2BE$，点 F 为对角线 BD 上一点且 $BF = 2DF$，连接 AE 交 BD 于点 G，过点 F 作 $FH \perp AE$ 于点 H，连接 CH、CF，若 $HG = 2cm$，则 ΔCHF 的面积是__$\frac{56}{5}$__cm^2．



【淘宝店铺：向阳百分百】

【解答】解：如图，过 F 作 $FI\perp BC$ 于 I，连接 FE， FA， 1

$\therefore FI//CD$，

$\because CE=2BE$， $BF=2DF$，

$\therefore$ 设 $BE=EI=IC=a$， $CE=FI=2a$， $AB=3a$，

$\therefore$ 则 $FE=FC=FA=\sqrt{5}a$，

$\therefore H$ 为 AE 的中点，

$\therefore HE=\dfrac{1}{2}AE=\dfrac{\sqrt{10}a}{2}$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore BG$ 平分 $\angle ABC$，

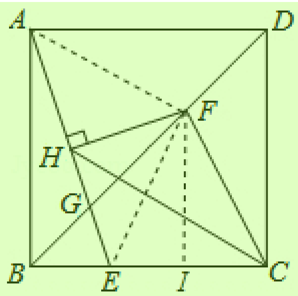
$\therefore \dfrac{EG}{AG}=\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore HG=\dfrac{1}{4}AE=\dfrac{\sqrt{10}}{4}a=2$，

$\therefore a=\dfrac{4}{5}\sqrt{10}$，

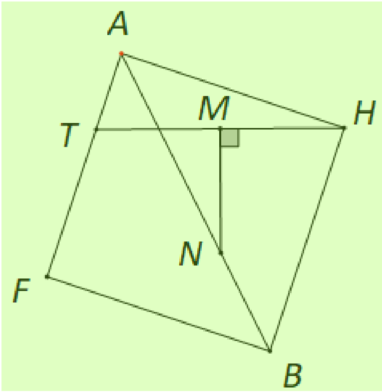
$\therefore S_{\Delta CHF}=S_{\Delta HEF}+S_{\Delta CEF}-S_{\Delta CEH}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\sqrt{10}}{2}a)^2+\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a-\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot\dfrac{3}{2}a=\dfrac{7}{4}a^2=\dfrac{56}{5}$，

故答案为： $\dfrac{56}{5}$.

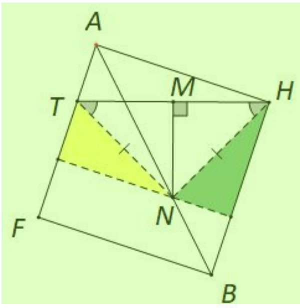


2

5.如图，正方形 AFBH,点 T 是边 AF 上一动点,M 是 HT 的中点,MN⊥HT 交 AB 于 N,当点 T 在 AF 上运动时, $\dfrac{MN}{HT}$ 的值是否发生改变?若改变求出其变化范围:若不改变请求出其值并给出你的证明 3



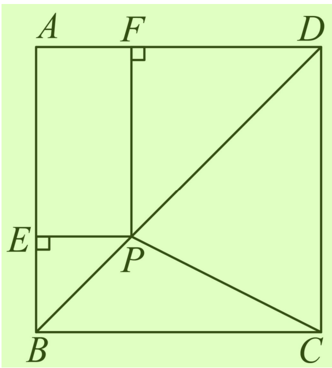
【解析】易知 NT=HN，证明∠TNH=90° 即可



TN=HN⇒TN⊥HN

2023·攀枝花·中考真题

6．如图，已知正方形$ABCD$的边长为 3，点P是对角线BD上的一点，$PF\perp AD$于点F，$PE\perp AB$于点E，连接PC，当$PE:PF=1:2$时，则$PC=$（　）



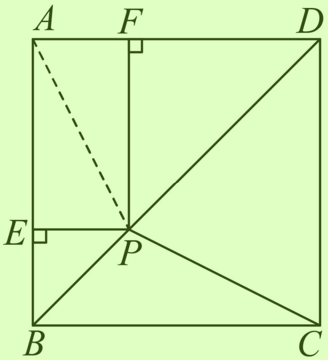
A．$\sqrt{3}$　　　B．2　　　C．$\sqrt{5}$　　　D．$\frac{5}{2}$

【答案】C

【分析】先证四边形$AEPF$是矩形，可得$PE=AF$，$\angle PFD=90°$，由等腰直角三角形的性质可得$PF=DF$，可求AF，DF的长，由勾股定理可求AP的长，由“SAS”可证$\triangle ABP\cong\triangle CBP$，可得$AP=PC=\sqrt{5}$．

【淘宝店铺：向阳百分百】

【详解】解：如图：



连接 AP，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=AD=3$， $\angle ADB=45^{\circ}$，

$\because PF\perp AD$， $PE\perp AB$， $\angle BAD=90^{\circ}$，

$\therefore$ 四边形 $AEPF$ 是矩形，

$\therefore PE=AF$， $\angle PFD=90^{\circ}$，

$\therefore \triangle PFD$ 是等腰直角三角形，

$\therefore PF=DF$，

$\because PE:PF=1:2$，

$\therefore AF:DF=1:2$，

$\therefore AF=1$， $DF=2=PF$，

$\therefore AP=\sqrt{AF^{2}+PF^{2}}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$，

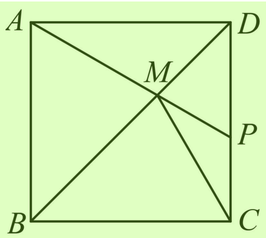
$\because AB=BC$， $\angle ABD=\angle CBD=45^{\circ}$， $BP=BP$，

$\therefore \triangle ABP\cong\triangle CBP(\mathrm{SAS})$，

$\therefore AP=PC=\sqrt{5}$

2023·四川宜宾·统考中考真题

7. 如图，边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中，M 为对角线 BD 上的一点，连接 AM 并延长交 CD 于点 P. 若 $PM=PC$，则 AM 的长为（　　）



A. $3\left(\sqrt{3}-1\right)$　　B. $3\left(3\sqrt{3}-2\right)$　　C. $6\left(\sqrt{3}-1\right)$　　D. $6\left(3\sqrt{3}-2\right)$

【答案】C

【详解】解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形，

$\therefore AD=CD=6,\angle ADC=90^{\circ},\angle ADM=\angle CDM=45^{\circ}$， 1

在$\triangle ADM$和$VCDM$中，$\begin{cases} DM = DM \\ \angle ADM = \angle CDM = 45^\circ \\ AD = CD \end{cases}$，

$\therefore \triangle ADM \cong \triangle CDM(\text{SAS})$，

$\therefore \angle DAM = \angle DCM$，

$\because PM = PC$，

$\therefore \angle CMP = \angle DCM$，

$\therefore \angle APD = \angle CMP + \angle DCM = 2\angle DCM = 2\angle DAM$，

又$\because \angle APD + \angle DAM = 180^\circ - \angle ADC = 90^\circ$，

$\therefore \angle DAM = 30^\circ$，

设$PD = x$，则$AP = 2PD = 2x$，$PM = PC = CD - PD = 6 - x$，

$\therefore AD = \sqrt{AP^2 - PD^2} = \sqrt{3}x = 6$，

解得$x = 2\sqrt{3}$，

$\therefore PM = 6 - x = 6 - 2\sqrt{3}$，$AP = 2x = 4\sqrt{3}$，

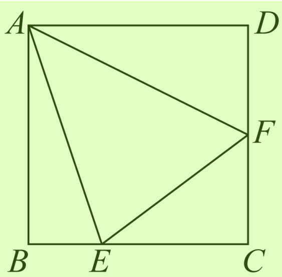
$\therefore AM = AP - PM = 4\sqrt{3} - (6 - 2\sqrt{3}) = 6(\sqrt{3} - 1)$

【淘宝店铺：向阳百分百】

题型四　半角模型（七个性质）

2023·重庆·中考真题

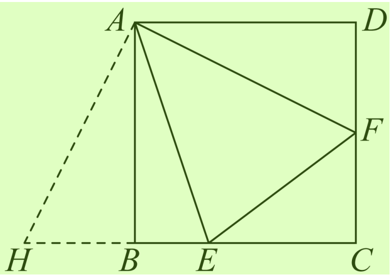
1. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在 BC，CD 上，连接 AE，AF，EF，$\angle EAF=45^\circ$．若 $\angle BAE=\alpha$，则 $\angle FEC$ 一定等于（ ）



A．2α　　B．$90^\circ-2\alpha$　　C．$45^\circ-\alpha$　　D．$90^\circ-\alpha$

【答案】A

【详解】将 $\triangle ADF$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ABH$，



∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $AB=AD$，$\angle ABC=\angle D=\angle BAD=\angle C=90^\circ$，

由旋转性质可知：$\angle DAF=\angle BAH$，$\angle D=\angle ABH=90^\circ$，$AF=AH$，

∴ $\angle ABH+\angle ABC=180^\circ$，

∴点 H，B，C 三点共线，

∵ $\angle BAE=\alpha$，$\angle EAF=45^\circ$，$\angle BAD=\angle HAF=90^\circ$，

∴ $\angle DAF=\angle BAH=45^\circ-\alpha$，$\angle EAF=\angle EAH=45^\circ$，

∵ $\angle AHB+\angle BAH=90^\circ$，

∴ $\angle AHB=45^\circ+\alpha$，

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AEH$ 中

$$\begin{cases} AF=AH \\ \angle FAE=\angle HAE \\ AE=AE \end{cases},$$

∴ $\triangle AFE\cong\triangle AHE(SAS)$，

∴ $\angle AHE=\angle AFE=45^\circ+\alpha$，

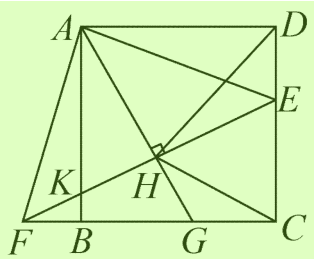
∴ $\angle AHE=\angle AFD=\angle AFE=45^\circ+\alpha$，

【淘宝店铺：向阳百分百】

$\therefore \angle DFE=\angle AFD+\angle AFE=90^{\circ}+2\alpha$，
$\because \angle DFE=\angle FEC+\angle C=\angle FEC+90^{\circ}$，
$\therefore \angle FEC=2\alpha$

2023·眉山·中考真题

2．如图，在正方形$ABCD$中，点E是CD上一点，延长CB至点F，使$BF=DE$，连结AE,AF,EF，EF交AB于点K，过点A作$AG\perp EF$，垂足为点H，交CF于点G，连结HD，HC．下列四个结论：①$AH=HC$；②$HD=CD$；③$\angle FAB=\angle DHE$；④$AK\cdot HD=\sqrt{2}HE^{2}$．其中正确结论的个数为（　　）



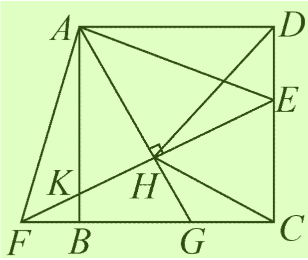
A．1个　　　　B．2个　　　　C．3个　　　　D．4个

【答案】C

【分析】根据正方形$ABCD$的性质可由SAS定理证$\triangle ABF\cong\triangle ADE$，即可判定$\triangle AEF$是等腰直角三角形，进而可得$HE=HF=AH=\frac{1}{2}EF$，由直角三角形斜边中线等于斜边一半可得$HC=\frac{1}{2}EF$；由此即可判断①正确；再根据$\angle ADH+\angle EAD=\angle DHE+\angle AEH$，可判断③正确，进而证明$\triangle AFK\sim\triangle HDE$，可得$\frac{AF}{HD}=\frac{AK}{HE}$，结合$AF=\sqrt{2}AH=\sqrt{2}HE$，即可得出结论④正确，由$\angle AED$随着$DE$长度变化而变化，不固定，可 判断②$HD=CD$不一定成立．

【详解】解：$\because$正方形$ABCD$，
$\therefore AB=AD$，$\angle ADC=\angle ABC=\angle BAD=\angle BCD=90^{\circ}$，
$\therefore \angle ABF=\angle ADC=90^{\circ}$，
$\because BF=DE$，
$\therefore \triangle ABF\cong\triangle ADE$（SAS），
$\therefore \angle BAF=\angle DAE$，$AF=AE$，
$\therefore \angle FAE=\angle BAF+\angle BAE=\angle DAE+\angle BAE=\angle BAD=90^{\circ}$，
$\therefore \triangle AEF$是等腰直角三角形，$\angle AEF=\angle AFE=45^{\circ}$，
$\because AH\perp EF$，
$\therefore HE=HF=AH=\frac{1}{2}EF$，
$\because \angle DCB=90^{\circ}$，
$\therefore CH=HE=\frac{1}{2}EF$，
$\therefore CH=AH$，故①正确；

【淘宝店铺：向阳百分百】



又∵ $AD=CD$，$HD=HD$，

∴ $\triangle AHD\cong\triangle CHD(SSS)$，

∴ $\angle ADH=\angle CDH=\dfrac{1}{2}\angle ADC=45^\circ$，

∵ $\angle ADH+\angle EAD=\angle DHE+\angle AEH$，即：$45^\circ+\angle EAD=\angle DHE+45^\circ$，

∴ $\angle EAD=\angle DHE$，

∴ $\angle FAB=\angle DHE=\angle EAD$，故③正确，

又∵ $\angle AFE=\angle ADH=45^\circ$，

∴ $\triangle AFK\sim\triangle HDE$，

∴ $\dfrac{AF}{HD}=\dfrac{AK}{HE}$，

又∵ $AF=\sqrt{2}AH=\sqrt{2}HE$，

∴ $AK\cdot HD=\sqrt{2}HE^2$，故④正确，

∵若 $HD=CD$，则 $\angle DHC=\angle DCH=\dfrac{180^\circ-45^\circ}{2}=67.5^\circ$，

又∵ $CH=HE$，

∴ $\angle HCE=\angle HEC=67.5^\circ$，

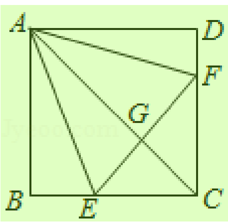
而点 E 是 CD 上一动点，$\angle AED$ 随着 DE 长度变化而变化，不固定，

而 $\angle HEC=180^\circ-\angle AED-45^\circ=135^\circ-\angle AED$，

则故 $\angle HEC=67.5^\circ$ 不一定成立，故②错误；

综上，正确的有①③④共 3 个

3．如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在 BC，CD 上，$AE=AF$，AC 与 EF 相交于点 G．下列结论：① AC 垂直平分 EF；② $BE+DF=EF$；③当 $\angle DAF=15^\circ$ 时，ΔAEF 为等边三角形；④当 $\angle EAF=60^\circ$ 时，$\angle AEB=\angle AEF$．其中正确的结论是(　　)



A．①③　　B．②④　　C．①③④　　D．②③④

【解答】解：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $AB=AD=BC=CD$，$\angle B=\angle D=90^\circ$，$\angle ACD=\angle ACB=45^\circ$，

∵ $AB=AD$，$AE=AF$，

【淘宝店铺：向阳百分百】

$\therefore \mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ABE} \cong \mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ADF}(\mathrm{HL})$，

$\therefore BE = DF$，

$\therefore CE = CF$，

又$\because \angle ACD = \angle ACB = 45^\circ$，

$\therefore AC$ 垂直平分 EF，故①正确；

$\because CE = CF$，$\angle BCD = 90^\circ$，AC 垂直平分 EF，

$\therefore EG = GF$，

当 AE 平分 $\angle BAC$ 时，$BE = EG$，即 $BE + DF = EF$，故②错误；

$\because \mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ABE} \cong \mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ADF}$，

$\therefore \angle DAF = \angle BAE = 15^\circ$，

$\therefore \angle EAF = 60^\circ$，

又$\because AE = AF$，

$\therefore \Delta AEF$ 是等边三角形，故③正确；

$\because AE = AF$，$\angle EAF = 60^\circ$，

$\therefore \Delta AEF$ 是等边三角形，

$\therefore \angle AEF = 60^\circ$，

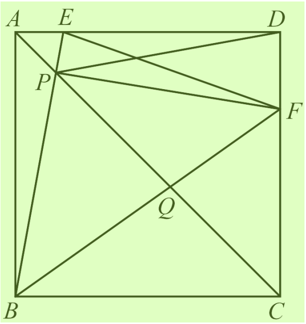
$\because \angle BAC = 45^\circ$，$\angle CAE = 30^\circ$，

$\therefore \angle BAE = 15^\circ$，

$\therefore \angle AEB = 75^\circ \neq \angle AEF$，故④错误.

2022 达州·中考真题

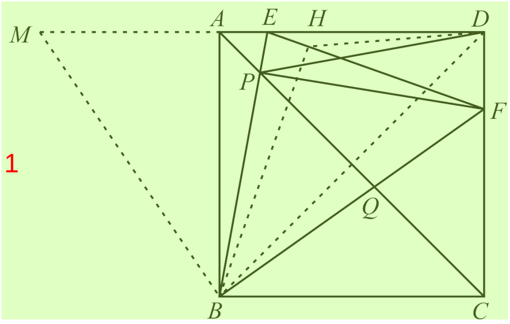
4．如图，在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别为 AD，CD 边上的动点（不与端点重合），连接 BE，BF，分别交对角线 AC 于点 P，Q．点 E，F 在运动过程中，始终保持 $\angle EBF = 45^\circ$，连接 EF，PF，PD．以下结论：① $PB = PD$；② $\angle EFD = 2\angle FBC$；③ $PQ = PA + CQ$；④ $\triangle BPF$ 为等腰直角三角形；⑤若过点 B 作 $BH \perp EF$，垂足为 H，连接 DH，则 DH 的最小值为 $2\sqrt{2}-2$．其中所有正确结论的序号是____．



【答案】①②④⑤

【分析】连接 BD，延长 DA 到 M，使 $AM=CF$，连接 BM，根据正方形的性质及线段垂直平分线的性质定理即可判断①正确；通过证明 $\triangle BCF \cong \triangle BAM(SAS)$，$\triangle EBF \cong \triangle EBM(SAS)$，可证明②正确；作 $\angle CBN = \angle ABP$，交 AC 的延长线于 K，在 BK 上截取 $BN=BP$，连接 CN，通过证明 $\triangle ABP \cong \triangle CBN$，可判断③错误；通过证明 $\triangle BQP \sim \triangle CQF$，$\triangle BCQ \sim \triangle PFQ$，利用相似三角形的性质即可证明④正确；当点 B、H、D 三点共线时，DH 的值最小，分别求解即可判断⑤正确.

【详解】



如图 1，连接 BD，延长 DA 到 M，使 $AM=CF$，连接 BM，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AC$ 垂直平分 BD，$BA=BC, \angle BCF=90^\circ=\angle BAD=\angle ABC$，

$\therefore PB=PD$，$\angle BCF=\angle BAM$，$\angle FBC=90^\circ-\angle BFC$，故①正确；

$\therefore \triangle BCF\cong\triangle BAM(SAS)$，

$\therefore \angle CBF=\angle ABM, BF=BM, \angle M=\angle BFC$，

$\because \angle EBF=45^\circ$，

$\therefore \angle ABE+\angle CBF=45^\circ$，

$\therefore \angle ABE+\angle ABM=45^\circ$，

即 $\angle EBM=\angle EBF$，

$\because BE=BE$，

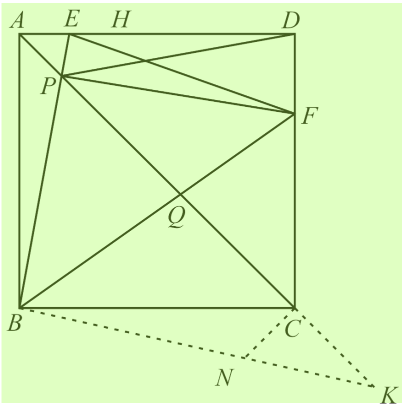
$\therefore \triangle EBF\cong\triangle EBM(SAS)$，

$\therefore \angle M=\angle EFB, \angle MEB=\angle FEB$，

$\therefore \angle EFB=\angle CFB$，

$\therefore \angle EFD=180^\circ-(\angle EFB+\angle CFB)=180^\circ-2\angle BFC$，

$\therefore \angle EFD=2\angle FBC$，故②正确；



如图 2，作 $\angle CBN=\angle ABP$，交 AC 的延长线于 K，在 BK 上截取 $BN=BP$，连接 CN，

$\therefore \triangle ABP\cong\triangle CBN$，

$\therefore \angle BAP=\angle BCN=45^\circ$，

$\because \angle ACB=45^\circ$，

$\therefore \angle NCK=90^\circ$，

$\therefore \angle CNK\neq\angle K$，即 $CN\neq CK$，

$\therefore PQ\neq PA+CQ$，故③错误；

如图 1，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

【淘宝店铺：向阳百分百】

$\therefore \angle EBF=\angle BCP=\angle FCP=45^\circ$,

$\because \angle BQP=\angle CQF$,

$\therefore \triangle BQP \sim \triangle CQF$,

$\therefore \dfrac{BQ}{CQ}=\dfrac{PQ}{FQ}$,

$\because \angle BQC=\angle PQF$,

$\therefore \triangle BCQ \sim \triangle PFQ$,

$\therefore \angle BCQ=\angle PFQ=45^\circ$,

$\therefore \angle PBF=\angle PFB=45^\circ$,

$\therefore \angle BPF=90^\circ$,

$\therefore \triangle BPF$ 为等腰直角三角形，故④正确；

如图 1，当点 B、H、D 三点共线时，DH 的值最小，

$\therefore BD=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

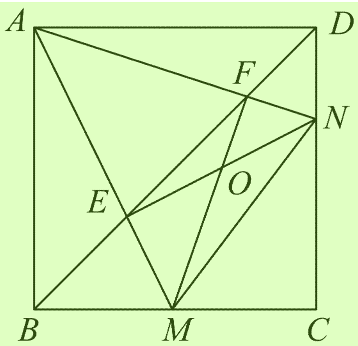
$\because \angle BAE=\angle BHE=90^\circ, BE=BE$,

$\therefore \triangle BAE \cong \triangle BHE(AAS)$,

$\therefore BA=BH=2$,

$\therefore DH=BD-BH=2\sqrt{2}-2$，故⑤正确

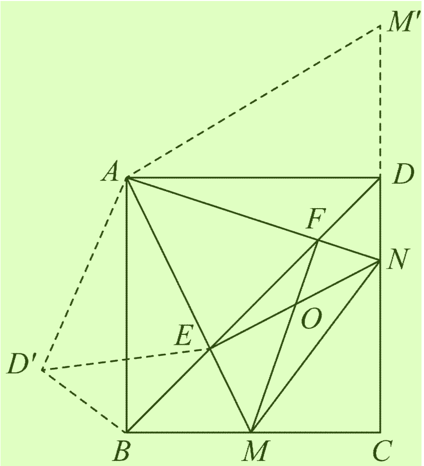
5. 如图，点 M、N 分别是正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上的两个动点，在运动过程中保持 $\angle MAN=45^\circ$，AM、AN 分别与对角线 BD 交于点 E、F，连接 EN、FM 相交于点 O，以下结论：① $MN=BM+DN$；② $BE^2+DF^2=EF^2$；③ $BC^2=BF\cdot DE$；④ $OM=\sqrt{2}OF$，一定成立的是__________.



【答案】①②③

【分析】由旋转的性质可得 $AM'=AM$，$BM=DM'$，$\angle BAM=\angle DAM'$，$\angle MAM'=90^\circ$，$\angle ABM=\angle ADM'=90^\circ$，由 SAS 可证 $\triangle AMN \cong \triangle AM'N$，可得 $MN=NM'$，可得 $MN=BM+DN$，故①正确；由 SAS 可证 $\triangle AEF \cong \triangle AED'$，可得 $EF=D'E$，由勾股定理可得 $BE^2+DF^2=EF^2$；故②正确；通过证明 $\triangle DAE \backsim \triangle BFA$，可得 $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{AD}{BF}$，可证 $BC^2=BF\cdot DE$，故③正确；通过证明点 A，点 B，点 M，点 F 四点共圆，$\angle ABM=\angle AFM=90^\circ$，$\angle AMF=\angle ABF=45^\circ$，$\angle BAM=\angle BFM$，可证 $MO=\sqrt{2}EO$，由 $\angle BAM\neq\angle DAN$，可得 $OE\neq OF$，故④错误，即可求解.

【详解】解：将 $\triangle ABM$ 绕点 A 逆时针旋转 90°，得到 $\triangle ADM'$，将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90°，得到 $\triangle ABD'$，



$\therefore AM'=AM$，$BM=DM'$，$\angle BAM=\angle DAM'$，$\angle MAM'=90^\circ$，$\angle ABM=\angle ADM'=90^\circ$，

$\therefore \angle ADM'+\angle ADC=180^\circ$，

$\therefore$ 点 M' 在直线 CD 上，

$\because \angle MAN=45^\circ$，

$\therefore \angle DAN+\angle MAB=45^\circ=\angle DAN+\angle DAM'=\angle M'AN$，

$\therefore \angle M'AN=\angle MAN=45^\circ$，

又 $\because AN=AN$，$AM=AM'$，

$\therefore \triangle AMN\cong\triangle AM'N$（$SAS$），

$\therefore MN=NM'$，

$\therefore M'N=M'D+DN=BM+DN$，

$\therefore MN=BM+DN$；故①正确；

$\because$ 将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90°，得到 $\triangle ABD'$，

$\therefore AF=AD'$，$DF=D'B$，$\angle ADF=\angle ABD'=45^\circ$，$\angle DAF=\angle BAD'$，

$\therefore \angle D'BE=90^\circ$，

$\because \angle MAN=45^\circ$，

$\therefore \angle BAE+\angle DAF=45^\circ=\angle BAD'+\angle BAE=\angle D'AE$，

$\therefore \angle D'AE=\angle EAF=45^\circ$，

又 $\because AE=AE$，$AF=AD'$，

$\therefore \triangle AEF\cong\triangle AED'$（$SAS$），

$\therefore EF=D'E$，

$\because D'E^2=BE^2+D'B^2$，

$\therefore BE^2+DF^2=EF^2$；故②正确；

$\because \angle BAF=\angle BAE+\angle EAF=\angle BAE+45^\circ$，$\angle AEF=\angle BAE+\angle ABE=45^\circ+\angle BAE$，

$\therefore \angle BAF=\angle AEF$，

又 $\because \angle ABF=\angle ADE=45^\circ$，

$\therefore \triangle DAE\backsim\triangle BFA$，

$\therefore \dfrac{DE}{AB}=\dfrac{AD}{BF}$，

又 $\because AB=AD=BC$，

$\therefore BC^2=DE\cdot BF$，故③正确；

$\because \angle FBM=\angle FAM=45^\circ$，

【淘宝店铺：向阳百分百】

∴点 A，点 B，点 M，点 F 四点共圆，

∴$\angle ABM=\angle AFM=90^\circ$，$\angle AMF=\angle ABF=45^\circ$，$\angle BAM=\angle BFM$，

同理可求 $\angle AEN=90^\circ$，$\angle DAN=\angle DEN$，

∴$\angle EOM=45^\circ=\angle EMO$，

∴$EO=EM$，

∴$MO=\sqrt{2}\ EO$，

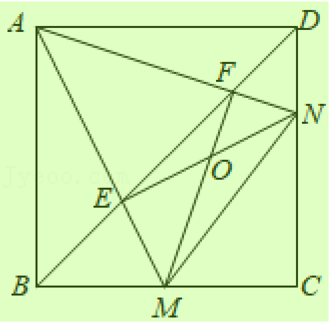
∵$\angle BAM\neq\angle DAN$，

∴$\angle BFM\neq\angle DEN$，

∴$EO\neq FO$，

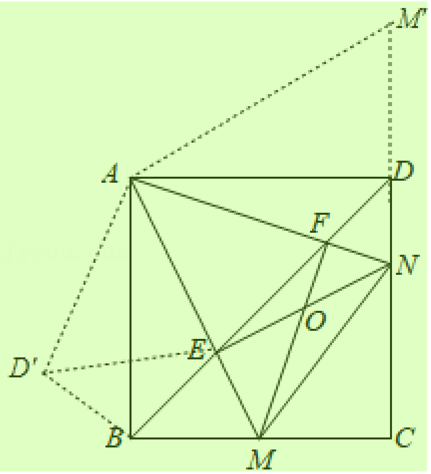
∴$OM\neq\sqrt{2}FO$，故④错误

6．如图，点 M、N 分别是正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上的两个动点，在运动过程中保持 $\angle MAN=45^\circ$，AM、AN 分别与对角线 BD 交于点 E、F，连接 EN、FM 相交于点 O，以下结论：① $MN=BM+DN$；② $BE^2+DF^2=EF^2$；③ $BC^2=BF\cdot DE$；④ $OM=\sqrt{2}OF$，一定成立的是(　　)



A．①②③　　B．①②④　　C．②③④　　D．①②③④

【解答】解：将 ΔABM 绕点 A 逆时针旋转 90°，得到 $\Delta ADM'$，将 ΔADF 绕点 A 顺时针旋转 90°，得到 $\Delta ABD'$，



∴$AM'=AM$，$BM=DM'$，$\angle BAM=\angle DAM'$，$\angle MAM'=90^\circ$，$\angle ABM=\angle ADM'=90^\circ$，

∴$\angle ADM'+\angle ADC=180^\circ$，

∴点 M' 在直线 CD 上，

∵$\angle MAN=45^\circ$，

∴$\angle DAN+\angle MAB=45^\circ=\angle DAN+\angle DAM'=\angle M'AN$，

∴$\angle M'AN=\angle MAN=45^\circ$，

又∵$AN=AN$，$AM=AM'$，

【淘宝店铺：向阳百分百】

$\therefore \Delta AMN \cong \triangle AM'N(SAS)$，

$\therefore MN = NM'$，

$\therefore M'N = M'D + DN = BM + DN$，

$\therefore MN = BM + DN$；故①正确；

$\because$ 将 ΔADF 绕点 A 顺时针旋转 $90°$，得到 $\Delta ABD'$，

$\therefore AF = AD'$，$DF = D'B$，$\angle ADF = \angle ABD' = 45°$，$\angle DAF = \angle BAD'$，

$\therefore \angle D'BE = 90°$，

$\because \angle MAN = 45°$，

$\therefore \angle BAE + \angle DAF = 45° = \angle BAD' + \angle BAE = \angle D'AE$，

$\therefore \angle D'AE = \angle EAF = 45°$，

又 $\because AE = AE$，$AF = AD'$，

$\therefore \Delta AEF \cong \Delta AED'(SAS)$，

$\therefore EF = D'E$，

$\because D'E^2 = BE^2 + D'B^2$，

$\therefore BE^2 + DF^2 = EF^2$；故②正确；

$\because \angle BAF = \angle BAE + \angle EAF = \angle BAE + 45°$，$\angle AEF = \angle BAE + \angle ABE = 45° + \angle BAE$，

$\therefore \angle BAF = \angle AEF$，

又 $\because \angle ABF = \angle ADE = 45°$，

$\therefore \Delta DAE \backsim \Delta BFA$，

$\therefore \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{AD}{BF}$，

又 $\because AB = AD = BC$，

$\therefore BC^2 = DE \cdot DF$，故③正确；

$\because \angle FBM = \angle FAM = 45°$，

$\therefore$ 点 A，点 B，点 M，点 F 四点共圆，

$\therefore \angle ABM = \angle AFM = 90°$，$\angle AMF = \angle ABF = 45°$，$\angle BAM = \angle BFM$，

同理可求 $\angle AEN = 90°$，$\angle DAN = \angle DEN$，

$\therefore \angle EOM = 45° = \angle EMO$，

$\therefore EO = EM$，

$\therefore MO = \sqrt{2}EO$，

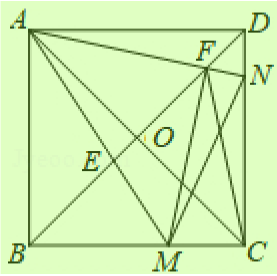
$\because \angle BAM \neq \angle DAN$，

$\therefore \angle BFM \neq \angle DEN$，

$\therefore EO \neq FO$，

$\therefore OM \neq \sqrt{2}FO$，故④错误

7．如图，正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，点 M，N 分别是边 BC，CD 上的动点（不与点 B，C，D 重合），AM，AN 分别交 BD 于 E，F 两点，且 $\angle MAN = 45°$，则下列结论：① $MN = BM + DN$；② $\Delta AEF \backsim \Delta BEM$；③ $\dfrac{AF}{AM} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$；④ ΔFMC 是等腰三角形．其中正确的有(　　)



A．1个　　　B．2个　　　C．3个　　　D．4个

【解答】解：将ΔABM绕点A逆时针旋转90°至$\Delta ADM'$，

$\because \angle M'AN=\angle DAN+\angle MAB=45^\circ$，$AM'=AM$，$BM=DM'$，

$\because \angle M'AN=\angle MAN=45^\circ$，$AN=AN$，

$\therefore \Delta AMN\cong\triangle AM'N'(SAS)$，

$\therefore MN=NM'$，

$\therefore M'N=M'D+DN=BM+DN$，

$\therefore MN=BM+DN$；故①正确；

$\because \angle FDM'=135^\circ$，$\angle M'AN=45^\circ$，

$\therefore \angle M'+\angle AFD=180^\circ$，

$\because \angle AFE+\angle AFD=180^\circ$，

$\therefore \angle AFE=\angle M'$，

$\because \angle AMB=\angle M'$，

$\therefore \angle AMB=\angle AFE$，

$\because \angle EAF=\angle EBM=45^\circ$，

$\therefore \Delta AEF\backsim\Delta BEM$，故②正确；

$\therefore \dfrac{AE}{BE}=\dfrac{EF}{EM}$，即$\dfrac{AE}{EF}=\dfrac{BE}{EM}$，

$\because \angle AEB=\angle MEF$，

$\therefore \Delta AEB\backsim\Delta FEM$，

$\therefore \angle EMF=\angle ABE=45^\circ$，

$\therefore \Delta AFM$是等腰直角三角形，

$\therefore \dfrac{AF}{AM}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；故③正确；

在ΔADF与ΔCDF中，$\begin{cases}AD=CD\\ \angle ADF=\angle CDF=45^\circ\\ DF=DF\end{cases}$，

$\therefore \Delta ADF\cong\Delta CDF(SAS)$，

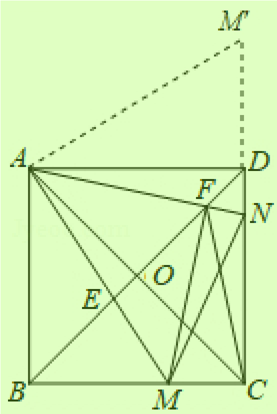
$\therefore AF=CF$，

$\because AF=MF$，

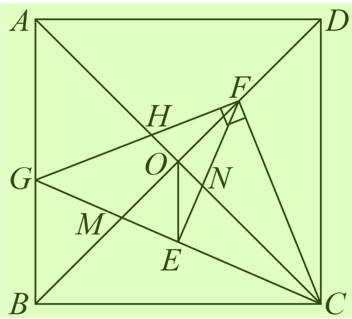
$\therefore FM=FC$，

$\therefore \Delta FMC$是等腰三角形，故④正确；

【淘宝店铺：向阳百分百】



8．如图，在正方形$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，F是线段OD上的动点（点F不与点O，D重合）连接CF，过点F作$FG\perp CF$分别交AC，AB于点H，G，连接CG交BD于点M，作$OE\parallel CD$交CG于点E，EF交AC于点N．有下列结论：①当$BG=BM$时，$AG=\sqrt{2}BG$；②$CN^2=BM^2+DF^2$；③$\angle GFM=\angle GCH$时，$CF^2=CN\cdot BC$；④$\frac{OH}{OM}=\frac{OF}{OC}$．其中正确的是________（填序号）．



【答案】①②③

【分析】①正确．利用面积法证明$\frac{AG}{BG}=\frac{AC}{BC}=\sqrt{2}$即可；

②正确．如图3中，将$\triangle CBM$绕点C顺时针旋转$90°$得到$\triangle CDW$，连接FW．则$CM=CW$，$BM=DW$，$\angle MCW=90°$，$\angle CBM=\angle CDW=45°$，证明$FM=FW$，利用勾股定理，即可解决问题；

③正确．如图2中，过点M作$MP\perp BC$于P，$MQ\perp AB$于Q，连接AF．想办法证明$CM=CF$，再利用相似三角形的性质，解决问题即可；

④错误．假设成立，推出$\angle OFH=\angle OCM$，显然不符合条件．

【详解】解：如图1中，过点G作$GT\perp AC$于T．

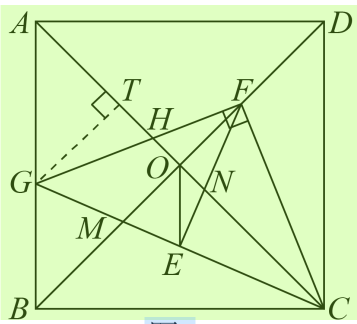


图1

【淘宝店铺：向阳百分百】

$\because BG = BM$,

$\therefore \angle BGM = \angle BMG$,

$\because \angle BGM = \angle GAC + \angle ACG$， $\angle BMG = \angle MBC + \angle BCM$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore \angle GAC = \angle MBC = 45°$， $AC = \sqrt{2}BC$,

$\therefore \angle ACG = \angle BCG$,

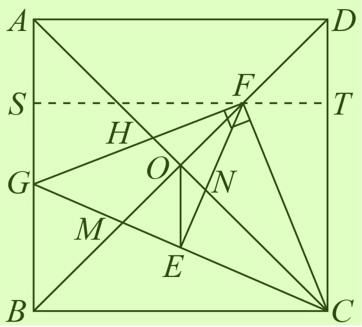
$\because GB \perp CB$， $GT \perp AC$,

$\therefore GB = GT$,

$$\because \frac{S_{\triangle BCG}}{S_{\triangle ACG}} = \frac{BG}{AG} = \frac{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot GB}{\frac{1}{2}\cdot AC\cdot GT} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$\therefore AG = \sqrt{2}BG$， 故①正确,

过点 F 作 $ST \parallel AD$， 如图所示:



$\therefore$ 四边形 $ASTD$ 是矩形,

$\because \angle BDC = 45°$,

$\therefore DT = FT$,

在正方形 $ABCD$ 中， $AD = CD = ST$,

$\therefore ST - FT = CD - DT$， 即 $SF = CT$,

$\because \angle SFG + \angle TFC = \angle TFC + \angle TCF = 90°$,

$\therefore \angle SFG = \angle TCF$,

$\because \angle GSF = \angle FTC = 90°$,

$\therefore \triangle SFG \cong \triangle TCF$,

$\therefore FG = FC$,

$\therefore \angle FCG = 45°$,

如图 3 中，将 $\triangle CBM$ 绕点 C 顺时针旋转 $90°$ 得到 $\triangle CDW$，连接 FW．则 $CM = CW$， $BM = DW$， $\angle MCW = 90°$，

$\angle CBM = \angle CDW = 45°$,

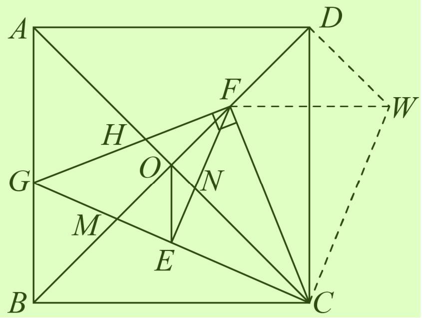


图3

$\because \angle FCW=\angle MCW-\angle FCG=90^{\circ}-45^{\circ}=45^{\circ}$，

$\therefore \angle FCG=\angle FCW=45^{\circ}$，

$\because CM=CW$， $CF=CF$，

$\therefore \triangle CFM \cong \triangle CFW(\mathrm{SAS})$，

$\therefore FM=FW$ ，

$\because \angle FDW=\angle FDC+\angle CDW=45^{\circ}+45^{\circ}=90^{\circ}$，

$\therefore FW^{2}=DF^{2}+DW^{2}$，

$\therefore FM^{2}=BM^{2}+DF^{2}$，

$\because BD\perp AC$， $FG\perp CF$，

$\therefore \angle COF=90^{\circ}$， $\angle CFG=90^{\circ}$，

$\therefore \angle FCN+\angle OFC=90^{\circ}$， $\angle OFC+\angle GFM=90^{\circ}$，

$\therefore \angle FCN=\angle GFM$ ，

$\because OE\parallel CD$， $AB\parallel CD$，O 为 AC 的中点，

$\therefore \dfrac{CE}{GE}=\dfrac{OC}{OA}=1$， 即 $CE=GE$，

$\therefore FE\perp CG$，

$\because FC=FG$，

$\therefore \angle EFC=\angle EFG=45^{\circ}$；

$\because \angle NFC=\angle FGM=45^{\circ}$， $FG=CF$，

$\therefore \triangle CFN \cong \triangle FGM(\mathrm{ASA})$，

$\therefore CN=FM$ ，

$\therefore CN^{2}=BM^{2}+DF^{2}$， 故②正确，

如图 2 中，过点 M 作 $MP\perp BC$ 于 P， $MQ\perp AB$ 于 Q， 连接 AF．

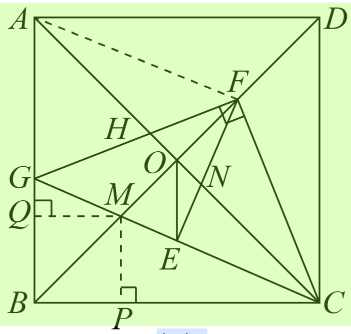


图2

$\because \angle OFH+\angle FHO=90^{\circ}$， $\angle FHO+\angle FCO=90^{\circ}$，

$\therefore \angle OFH=\angle FCO$，

【淘宝店铺：向阳百分百】

$\because AB=CB$，$\angle ABF=\angle CBF$，$BF=BF$， 1

$\therefore \triangle ABF\cong\triangle CBF(\text{SAS})$，

$\therefore AF=CF$，$\angle BAF=\angle BCF$，

$\because \angle CFG=\angle CBG=90°$，

$\therefore \angle BCF+\angle BGF=180°$，

$\because \angle BGF+\angle AGF=180°$，

$\therefore \angle AGF=\angle BCF=\angle GAF$，

$\therefore AF=FG$，

$\therefore FG=FC$，

$\therefore \angle FCG=\angle BCA=45°$，

$\therefore \angle ACF=\angle BCG$，

$\because MQ//CB$，

$\therefore \angle GMQ=\angle BCG=\angle ACF=\angle OFH$，

$\because \angle MQG=\angle FOH=90°$，$FH=MG$，

$\therefore \triangle FOH\cong\triangle MQG(\text{AAS})$，

$\therefore MQ=OF$，

$\because \angle BMP=\angle MBQ$，$MQ\perp AB$，$MP\perp BC$，

\ $MQ=MP$，

$\therefore MP=OF$，

$\because \angle CPM=\angle COF=90°$，$\angle PCM=\angle OCF$，

$\therefore \triangle CPM\cong\triangle COF(\text{AAS})$，

$\therefore CM=CF$，

$\because OE//AG$，$OA=OC$，

$\therefore EG=EC$，

$\because \triangle FCG$是等腰直角三角形，

$\therefore \angle GCF=45°$，

$\therefore \angle CFN=\angle CBM$，

$\because \angle FCN=\angle BCM$，

$\therefore \triangle BCM\backsim\triangle FCN$，

$\therefore \dfrac{CM}{CN}=\dfrac{CB}{CF}$，即$CM\cdot CF=CN\cdot CB$，

$\therefore CF^2=CB\cdot CN$，故③正确，

假设$\dfrac{OH}{OM}=\dfrac{OF}{OC}$成立，

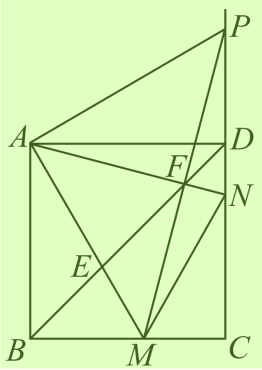
$\because \angle FOH=\angle COM$，

$\therefore \triangle FOH\backsim\triangle COM$，

$\therefore \angle OFH=\angle OCM$，显然这个条件不成立，故④错误

9．（2023·广东深圳·校联考模拟预测）如图，等腰直角$\triangle AMP$中，$\angle PAM=90°$，顶点M，P在正方形$ABCD$的BC边及CD边的延长线上动点．BD交MP于点F，连接AF并延长，交CD于N，AM交BD于点E．以 2

下结论：① $MN=MB+DN$ ② $BE^2+DF^2=EF^2$ ③ $BC^2=EB\cdot DB$ ④若 $\tan\angle PMN=\frac{1}{3}$，则 $\frac{BM}{CM}=1$，其中正确的是________.（填写正确的序号）



【答案】①②③④

【分析】由正方形及等腰直角三角形的性质，可证得 $\triangle ABM\cong\triangle ADP$，$\angle ABD=\angle CBD=\angle AMF=45°$，可证得 $BM=DP$，点 A、B、M、F 四点共圆，$\angle MAN=\angle PAN=45°$，由SAS可证 $\triangle AMN\cong\triangle APN$，可得 $MN=PN$，可得 $MN=BM+DN$，故①正确；由SAS可证 $\triangle AEF\cong\triangle AED'$，可得 $EF=D'E$，由勾股定理可得 $BE^2+DF^2=EF^2$；故②正确；通过证明 $\triangle DAE\backsim\triangle BFA$，可得 $\frac{DE}{BA}=\frac{AD}{FB}$，故③正确；由 $MN=PN$ 可得 $\tan\angle PMN=\tan\angle MPC=\frac{1}{3}$，设正方形的边长为 a，可得 $\frac{MC}{a+a-MC}=\frac{1}{3}$，$MC=\frac{1}{2}a$，故④正确，即可求解.

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，$\triangle AMP$ 是等腰直角三角形，

∴ $\angle ABD=\angle CBD=\angle AMF=45°$，$AB=AD$，$AM=AP$，

∴ $\triangle ABM\cong\triangle ADP(\text{HL})$，点 A、B、M、F 四点共圆，

∴ $BM=DP$，$\angle MAN=\angle FBM=45°$，

∵ $\angle PAM=90°$

∴ $\angle PAN=\angle MAN=45°$，

又∵ $AN=AN$，$AM=AP$，

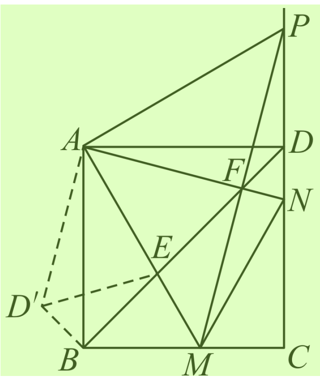
∴ $\triangle AMN\cong\triangle APN(\text{SAS})$，

∴ $MN=PN$，

∵ $PN=PD+DN=BM+DN$，

∴ $MN=BM+DN$，故①正确；

如图：将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 $90°$，得到 $\triangle ABD'$，连接 $D'E$，



∴ $AF=AD'$，$DF=D'B$，$\angle ADF=\angle ABD'=45°$，$\angle DAF=\angle BAD'$，

【淘宝店铺：向阳百分百】

1

$\therefore \angle D'BE = 90^\circ$,

$\because \angle MAN = 45^\circ$,

$\therefore \angle BAE + \angle DAF = 45^\circ = \angle BAD' + \angle BAE = \angle D'AE$,

$\therefore \angle D'AE = \angle EAF = 45^\circ$,

又$\because AE = AE$， $AF = AD'$,

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AED'(\text{SAS})$,

$\therefore EF = D'E$,

$\because D'E^2 = BE^2 + D'B^2$

$\therefore BE^2 + DF^2 = EF^2$；故②正确；

$\because \angle BAF = \angle BAE + \angle EAF = \angle BAE + 45^\circ$， $\angle AEF = \angle BAE + \angle ABE = 45^\circ + \angle BAE$,

$\therefore \angle BAF = \angle AEF$,

又$\because \angle ABF = \angle ADE = 45^\circ$,

$\therefore \triangle DAE \backsim \triangle BFA$,

$\therefore \dfrac{DE}{BA} = \dfrac{AD}{BF}$,

又$\because AB = AD = BC$,

$\therefore BC^2 = DE \cdot BF$，故③正确；

$\because MN = PN$,

$\therefore \angle PMN = \angle MPC$,

$\because \tan \angle PMN = \dfrac{1}{3}$

$\therefore \tan \angle PMN = \tan \angle MPC = \dfrac{MC}{PC} = \dfrac{1}{3}$,

设正方形的边长为a,

$\therefore \dfrac{MC}{PC} = \dfrac{MC}{a + BM} = \dfrac{MC}{a + a - MC} = \dfrac{1}{3}$,

解得$MC = \dfrac{1}{2}a$,

$\therefore MB = MC$,

$\therefore \dfrac{BM}{CM} = 1$，故④正确

【淘宝店铺：向阳百分百】