专题1—6　二倍角的解题策略：倍半角模型与绝配角

导语：见到2倍角的条件，首先想到“导”，将图形中的角度都推导出来，挖掘出隐藏边的信息，再观察角度的位置，结合其他条件，这里做题的经验，总结了六个字：翻、延、倍、分、导、造

题型・归纳

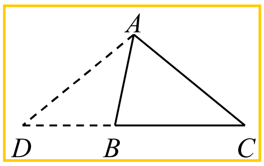
目录

知识点·梳理

知识点梳理

策略一：向外构造等腰（大角减半）

已知条件：如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=2\angle ACB$

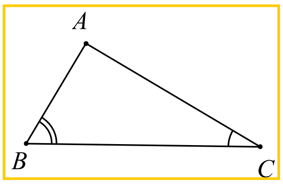


辅助线作法：延长CB到D，使$BD=BA$，连接AD

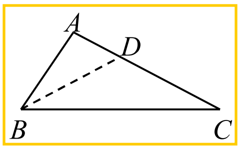
结论：$AD=AC$，$\triangle BDA\backsim\triangle ADC$

策略二：向内构造等腰（小角加倍或大角减半）

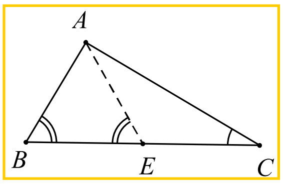
已知条件：如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=2\angle B$



辅助线作法：法一：作$\angle ABC$的平分线交AC于点D，结论：$\angle DBC=\angle C$，$DB=DC$



法二：在BC上取一点E，使$AE=CE$，则$\angle AEB=2\angle C=\angle B$（作$AC$中垂线得到点$E$）

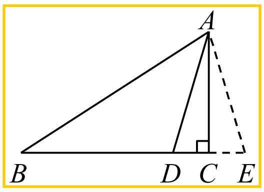


总结：策略一和策略二都是当2倍角和1倍角共边时对应的构造方法，下面我们再来看看不在同一个三角

形中时该如何处理

策略三：沿直角边翻折半角（小角加倍）

已知条件：如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，点 D 为边 BC 上一点，连接 AD，$\angle B=2\angle CAD$

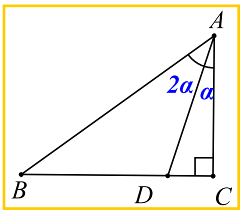


辅助线作法：沿 AC 翻折△ACD 得到△ACE

结论：$AD=AE$，$\angle DAE=\angle B$，$BA=BE$，△ADE∽△BAE

策略四：邻二倍角的处理

已知条件：如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，点 D 为边 BC 上一点，$\angle BAD=2\angle CAD$

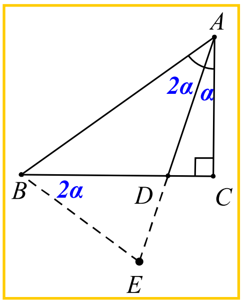


辅助线作法：

法一：向外构造等腰（导角得相似）

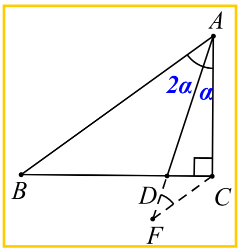
延长 AD 到 E，使 $AE=AB$，连接 BE

结论：$BD=BE$，$\angle DBE=\angle BAD$，△BDE∽△ABE



法二：作平行线，把二倍角转到同一个三角形中

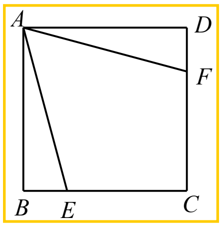
延长 AD 到 F，使 $CE // AB$，则 $\angle F=\angle BAD$



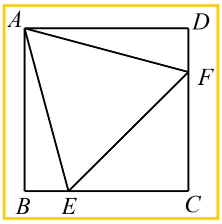
【经典例题讲解】

例题 1 如图，在正方形 $ABCD$ 中，$AB=1$，点 E、F 分别在边 BC 和 CD 上，$AE=AF$，$\angle EAF=60°$，则 CF 的长是(　　)

A．$\frac{\sqrt{3}+1}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\sqrt{3}-1$　　D．$\frac{2}{3}$

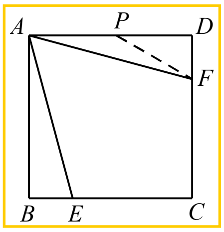


【简析】(1)方法一(常规解法)：如图，连接 EF，易证△AEF 为等边三角形，



且△ADF≌△ABE(HL)，则 $DF=BE$，从而 $CF=CE$，即△CEF 为等腰直角三角形；设 $CF=x$，则 $DF=1-x$，$AF=EF=\sqrt{2}x$，在 Rt△ADF 中，由勾股定理可得 $1+(1-x)^2=2x^2$，解得 $x=\sqrt{3}-1(x=-\sqrt{3}-1$ 舍去)，故选 C；

方法二(倍半角模型)：如图，在边 AD 上取点 P，使 $AP=PF$，



同上可得△ADF≌△ABE(HL)，则 $\angle DAF=\angle BAE=15°$，从而 $\angle DPF=30°$；设 $DF=x$，则 $PD=\sqrt{3}x$，$AP=PF=2x$，故 $AD=(2+\sqrt{3})x=1$，解得 $x=2-\sqrt{3}$，∴$CF=\sqrt{3}-1$，选 C

例题 2 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 E 是 CD 的中点，AF 平分∠BAE，交 BC 于点 F，将△ADE 绕点 A 顺时针旋转 90° 得△ABG，则 CF 的长为____________．

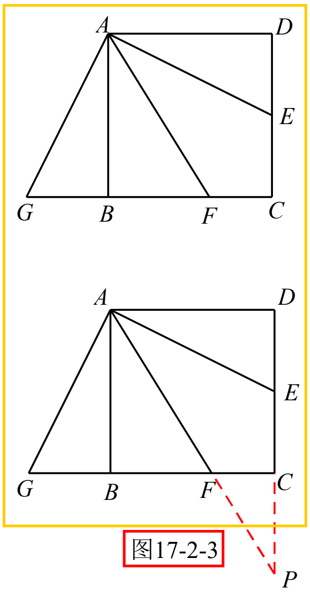


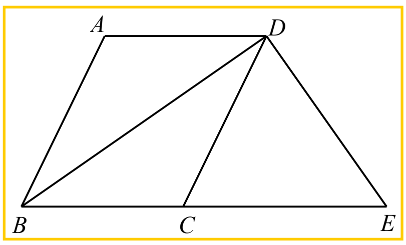
图17-2-3

【简析】(1)方法一(常规解法)：由题可得$\angle AFG=\angle DAF=\angle DAE+\angle EAF=\angle BAG+\angle BAF=\angle FAG$，即$\angle AFG=\angle FAG$，故$FG=AG=AE=2\sqrt{5}$，从而$CF=CG-FG=6-2\sqrt{5}$；

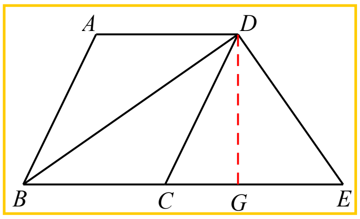
方法二(倍半角模型)：如图17−2−3，延长AF、DC交于点P，易得$\angle P=\angle BAF=\angle EAF$，则$PE=AE=2\sqrt{5}$，故$CP=2\sqrt{5}-2$，$DP=2\sqrt{5}+2$；又易证$\triangle PCF\backsim\triangle PDA$，故$\dfrac{CF}{DA}=\dfrac{CP}{DP}$，即$\dfrac{CF}{4}=\dfrac{2\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}+2}$，从而$CF=6-\sqrt{5}$；

【反思】方法一的关键是通过导角得到等腰$\triangle AFG$，方法二由“倍角$\angle AED$”造“半角$\angle P$”，并且这里的构造是通过“角平分线＋平行线→等腰三角形”自然衍生出来的

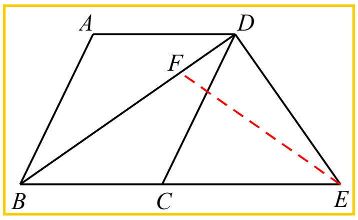
例题 3 如图，面积为24的▱$ABCD$中，对角线BD平分$\angle ABC$，过点D作$DE\perp BD$交BC的延长线于点E，$DE=6$，则$\sin\angle DCE$的值为(　　)



【简析】方法一(常规解法)：如图，作$DG\perp BE$于点G，由题易得$\angle CBD=\angle ABD=\angle CDB$，则$BC=CD$；进一步由$DE\perp BD$，可得$\angle CDE=\angle E$，则$CD=CE=BC$，从而$S_{▱ABCD}=2S_{\triangle BCD}=S_{\triangle BDE}$，即$S_{\triangle BDE}=24$，故$BD=8$，$BE=10$，所以$DG=\dfrac{24}{5}$，$CD=5$，$\sin\angle DCE=\dfrac{24}{5}$，选$A$

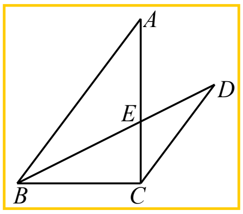


方法二(倍半角模型)：如图，在 BD 上取点 F，使 $EF=BF$，易证 $\angle DFE=2\angle EBF$，$\angle DCE=2\angle EBF$，故 $\angle DFE=\angle DCE$，要求 $\sin\angle DCE$ 的值，只需求 $\sin\angle DFE$；设 $EF=BF=x$，同上可得 $BD=8$，则 $DF=8-x$，在 Rt△DEF 中，由勾股定理可得 $36+(8-x)^2=x^2$，解得 $x=\frac{24}{5}$，从面 $\sin\angle DFE=\frac{DE}{EF}=\frac{24}{5}$，即 $\sin\angle DCE=\frac{24}{5}$，选 A.



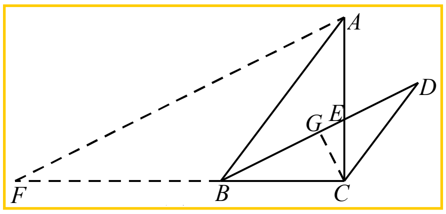
【反思】方法一通过作高是线构造 Rt△CDG，结合面积法求解，方法二由“半角 $\angle CBD$”造“倍角 $\angle DFE$”，结合勾股定理列方程求.

例题 4 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AB=10$，$BC=6$，$CD\,/\!/\,AB$，$\angle ABC$ 的平分线 BD 交 AC 于点 E，则 $DE=$________.



简析(1)方法一(常规解法)：由题得 $\angle CBD=\angle ABD=\angle D$，则 $CD=BC=6$；又易得 $\triangle CDE\backsim\triangle ABE$，则 $\frac{CE}{AE}=\frac{DE}{BE}=\frac{CD}{AB}=\frac{3}{5}$，故 $CE=\frac{3}{8}AC=3$，从而 $BE=3\sqrt{5}$，$DE=\frac{3}{5}BE=\frac{9\sqrt{5}}{5}$；

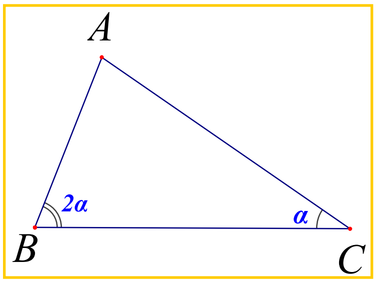
方法二(倍半角模型)：如图，延长 CB 至点 F，使 $BF=AB=10$，连接 AF，由题可得 $AC=8$，$CF=16$，则 $\tan\angle F=\frac{1}{2}$；又易得 $\angle CBE=\angle F$，故 $\tan\angle CBE=\frac{1}{2}$，即 $\frac{CE}{BC}=\frac{1}{2}$，从而 $CE=3$，$BE=3\sqrt{5}$；再作 $CG\perp BD$ 于点 G，易得 $BG=\frac{2}{\sqrt{5}}BC=\frac{12\sqrt{5}}{5}$；同上可得 $CB=CD$，故 $BD=2BG=\frac{24\sqrt{5}}{5}$，因此 $DE=BD-BE=\frac{9\sqrt{5}}{5}$.



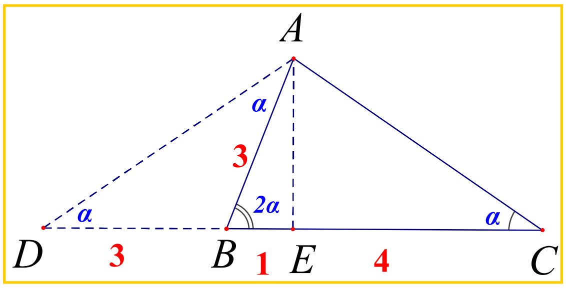
总结：具体问题具体对待，并非哪一种方法绝对简单，需根据问题特征选取较为合适的方法.

【一题多解 1】围绕 2 倍角条件，解法围绕“翻”“延”倍”“分”

如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=2\angle ACB$，$AB=3$，$BC=5$，求线段 AC 的长.

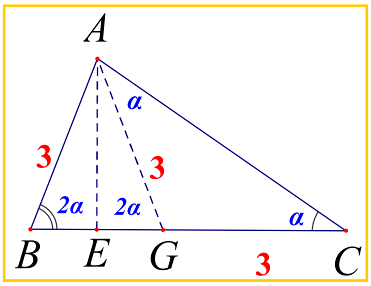


法 1：延长或翻折向外构造等腰（双等腰）

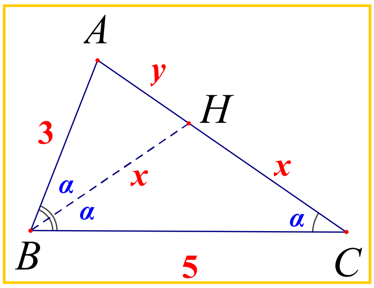


易知$AE=2\sqrt{2}\Rightarrow AC=2\sqrt{6}$

法 2：翻折或取点向内构造等腰（双等腰）

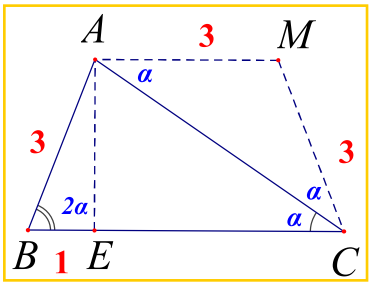


法 3：作角平分线



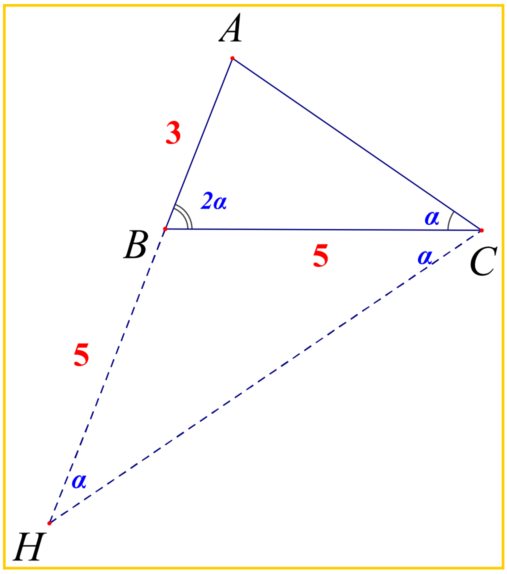
易知△ABH∽△ACB｜$\frac{3}{x+y}=\frac{y}{3}=\frac{x}{5}$

法 4：翻折一边+平行线向外作等腰(补成等腰梯形)



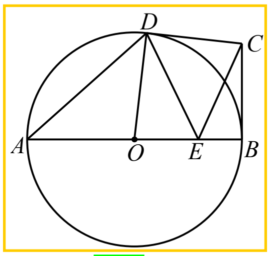
法 5：向外延长作等腰

易知△ABC∽△ADC



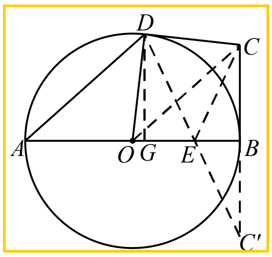
【一题多解 2】常规法与倍半角处理对比

如图，AB为⊙O的直径，BC、CD是⊙O的切线，切点分别为点B、D，点E为线段OB上的一个动点，连接OD、CE、DE，已知$AB=2\sqrt{5}$，$BC=2$，当$CE+DE$的值最小时，则$\frac{CE}{DE}$的值为(　　)

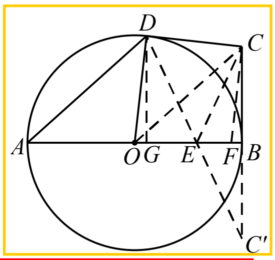


A. $\frac{9}{10}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

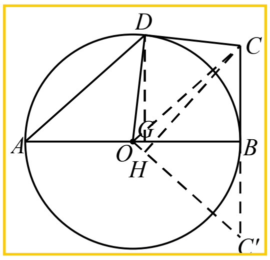
简析(1)**方法一**(常规解法)：如图，作点C关于AB的对称点C'，连接$C'D$，交AB于点E，连接CE，此时$CE+DE$取得最小值，且$\frac{CE}{DE}=\frac{C'E}{DE}$；再作$DG\perp AB$于点$G$，连接$OC$、$BD$，易证$\triangle OBC\cong\triangle ODC$，则$\angle BOC=\angle DOC=\angle A$，故$\sin\angle A=\sin\angle BOC=\frac{2}{3}$，$\cos\angle A=\cos\angle BOC=\frac{\sqrt{5}}{3}$，从而$BD=AB\cdot\sin\angle A=\frac{4\sqrt{5}}{3}$；又易证$\angle BDG=\angle A$，故$DG=BD\cdot\cos\angle BDG=BD\cdot\cos\angle A=\frac{4\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{20}{9}$；由$\triangle C'BE\backsim\triangle DGE$，可得$\frac{C'E}{DE}=\frac{C'B}{DG}=\frac{9}{10}$，因此$\frac{CE}{DE}=10$，选$A$；



方法二(倍半角模型)：如图17—4—3，同上作相关辅助线，易得$\angle DOG=2\angle BOC$；在OB上取点F，使$OF=CF$，则$\angle BFC=2\angle BOC=\angle DOG$；设$OF=CF=x$，则$BF=\sqrt{5}-x$，在$\mathrm{Rt}\triangle BCF$中，由勾股定理得$4+(\sqrt{5}-x)^2=x^2$，解得$x=\frac{9\sqrt{5}}{10}$，故$\sin\angle DOG=\sin\angle BFC=\frac{4\sqrt{5}}{9}$，从而$DG=OD\cdot\sin\angle DOG=\frac{20}{9}$，下略；



方法三(面积法)：如图17—4—4，同上作相关辅助线(为说理方便，省去部分线段)，则$\angle DOG=2\angle BOC=\angle COC'$；再作$CH\perp OC'$于点$H'$，易得$CH=\frac{CC'\cdot OB}{OC'}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$，故$\sin\angle DOG=\sin\angle COC'=\frac{4\sqrt{5}}{9}$，下略.



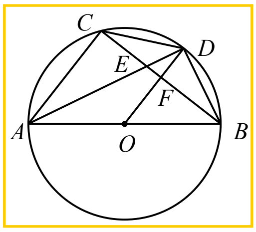
反思：本题结构相当于已知“半角∠BOC”求“倍角∠DOG”，方法一通过作高法，构造直角三角形求解；方法二构造“倍半角模型”，结合勾股定理列方程求解；方法三依然基于导角分析，借助对称性，结合面积法求解．以上提供的三种方法都是“倍半角”处理的常见方法．

如图，AB为$\odot O$的直径，D是弧BC的中点，BC与AD、OD分别交于点E、F.

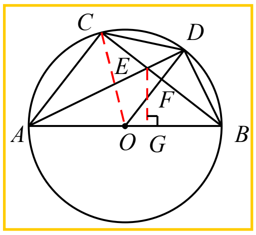
(1)求证：$DO//AC$;

(2)求证：$DE\cdot DA=DC^2$

(3)若$\tan\angle CAD=\frac{1}{2}$，求$\sin\angle CDA$的值。



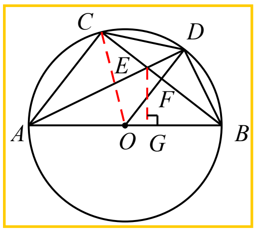
简析(1)如图，连接OC，易证$DO\perp BC$且$AC\perp BC$，故$DO//AC$;



(2)由题可得$\angle BCD=\angle CAD$，故$\triangle DCE\backsim\triangle DAC$，进一步可证$DE\cdot DA=DC^2$;

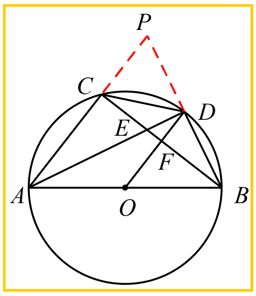
(3)方法一(母子型相似)：由$\tan\angle CAD=\frac{1}{2}$可得$\frac{CE}{AC}=\frac{1}{2}$；又$\triangle DCE\backsim\triangle DAC$，故$\frac{DE}{DC}=\frac{DC}{DA}=\frac{1}{AC}=\frac{1}{2}$；设$DE=k$，则$DC=2k$，$DA=4k$，$AE=3k$；又易证$\frac{FE}{CE}=\frac{DE}{AE}$，故$\frac{FE}{CE}=\frac{1}{3}$；由此再设$FE=m$，则$CE=3m$，$CF=4m$，从而$BC=8m$，$AC=6m$，因此$AB=10m$，$\sin\angle B=\frac{3}{5}$，即$\sin\angle CDA=\frac{3}{5}$;

方法二(角平分线之双垂法)：如，作$EG\perp AB$于点G，易证$\triangle AEC\cong\triangle AEG$；由$\tan\angle CAD=\frac{1}{2}$，



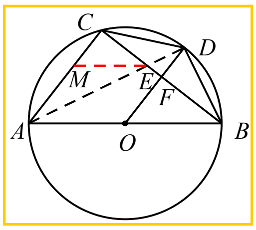
可设$CE=1$，$AC=2$，则$EG=1$，$AG=2$；又易得$\triangle BEG\backsim\triangle BAC$，$\frac{BC}{BG}=\frac{BA}{BE}=\frac{AC}{EG}=2$；再设$BG=x$，则$BC=2x$，$BA=BG+AG=x+2$，$BE=BC-CE=2x-1$，从而有$x+2=2(2x-1)$，解得$x=\frac{4}{3}$，所以$AB=\frac{10}{3}$，$\sin\angle B=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$，即$\sin\angle CDA=\frac{3}{5}$；

方法三(角平分线之对称策略)：如图，连接BD并延长，交AC的延长线于点P，由题可设$BD=PD=1$，



则$AD=2$，$AB=AP=\sqrt{5}$；又$\sin\angle PBC=\sin\angle PAD=\frac{\sqrt{5}}{5}$，故$PC=PB\cdot\sin\angle PBC=\frac{2\sqrt{5}}{5}$从而$AC=AP-CP=\frac{3\sqrt{5}}{5}$因此$\sin\angle B=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$，即$\sin\angle CDA=\frac{3}{5}$

方法四(倍半角模型)：如图17—14—4，在AC上取点M，使$AM=EM$，则$\angle CME=2\angle CAD=\angle BAC$；



由题可设$CE=1$，$AC=2$，再设$AM=ME=x$，则$CM=2-x$，在Rt$\triangle CME$中，由勾股定理可得$1+(2-x)^2=x^2$，解得$x=\frac{5}{4}$，从而$CM=\frac{3}{4}$，故$\cos\angle CME=\frac{CM}{ME}=\frac{3}{5}$，即$\cos\angle BAC=\frac{3}{5}$，所以$\sin\angle B=\frac{3}{5}$，$\sin\angle CDA=\frac{3}{5}$

反思：本题的结构为已知“半角$\angle CAD$"求"倍角$\angle BAC$"，从而转化为其余角$\angle CDA$。以上提供的前三种方法都是借助相似或三角函数等进行计算，属常规思路，方法四基于导角分析，构造“倍半角模型”，显得尤为简单、直接，直指问题本质。

策略五：绝配角模型

【释义】当m，n两个角满足$m+2n=180°$时，称其为一对绝配角，或者：半角的余角与它本身称为绝配

角

【举例】常见的剧配角组合如下:

绝配角	组合 1	组合 2	组合 3	组合 4	组合 5
m	2α	$90+2\alpha$	$90-2\alpha$	$60+2\alpha$	$60-2\alpha$
n	$90-\alpha$	$45-\alpha$	$45+\alpha$	$60-\alpha$	$60-\alpha$

【解 决】

思路(一)：根据三角形内角和是 $180°$，构造等腰三角形。

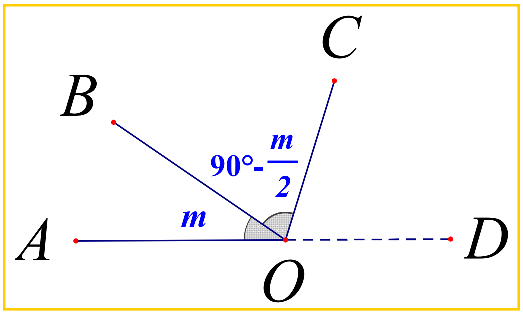
思路(二)：根据平角是 $180°$，m 和 2 个 n 构成一个平角(有两条边在同一直线上)

用一句话概括为：有等腰找等腰，没等腰造等腰

其中“等腰”指的是以 m 为顶角、以 n 为底角的等腰三角形，了解绝配角模型，可以给我们提供一些辅助线思路

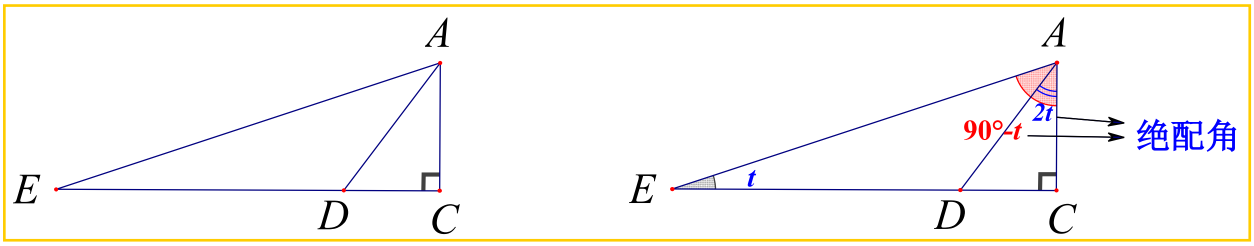
（一）共顶共边|翻折

当两个角满足两个角满足 $m+2n=180°$ 时，且共顶点共一边，这样的两个角是什么样的呢?

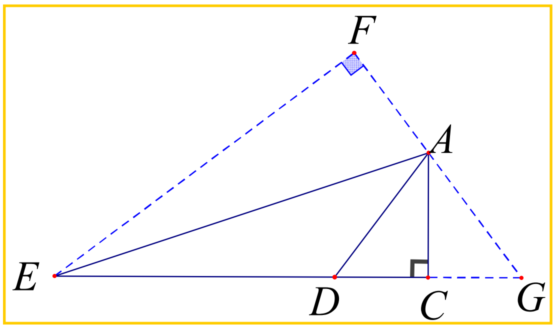


发现 OD 为 $\angle AOB$ 邻补角的平分线，此时处理问题一般用翻折，把 OB 沿 OD 翻折.

例题 1：已知 Rt△ABC 中 $\angle C=90°$，$DE=3DC$，$2\angle E=\angle CAD$，求 $\frac{AE}{AD}$ 的值.



方法一：分析：$\angle EAC$与∠DAC 是共点 A 的绝配角，绝配角重叠，要翻折两次.



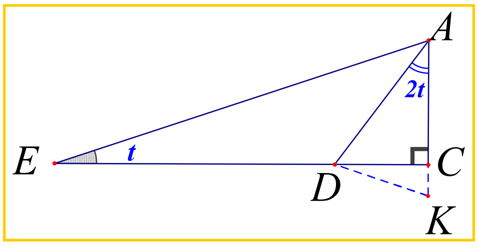
解：将△AEC 关于 AE 作轴对称图形，将△ADC 关于 AC 作轴对称图形，如图，△EFG 为直角三角形

设$DC = x$，$DE = 3x$,则$EF = 4x$,$CG = x \Rightarrow EG = 5x \Rightarrow FG = 3x$

$\triangle GAC \sim \triangle GEF \Rightarrow AC = \dfrac{4}{3}x, AD = \dfrac{5}{3}x$，$AE = \dfrac{4\sqrt{10}}{3}x$

即可求出$\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

方法二：分析：由于∠CAD＝2t，构造一个以∠A为顶点的等腰△ADK，然后出现△ECA~△DCK



解：构造以∠A为顶点的等腰△ADK(AD＝AK).

导角易得∠CDK＝∠AEC，△ECA~ADCK

$\therefore \dfrac{AC}{CK} = \dfrac{EC}{DC} = 4$，设CK＝x，AC＝4x，AD＝5x，DC＝3x，ED＝9x

$AE = 4\sqrt{10}x, \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{4\sqrt{10}}{5}$

(二)共三角形|等腰

(1)若$m, n = 90^{\circ} - \dfrac{m}{2}$为同一个三角形的内角，则此时三角形为等腰三角形.

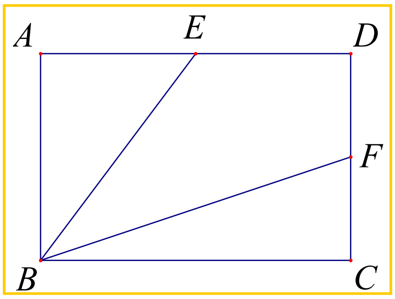
(2)若$m,n=90^{\circ}+\frac{m}{2}$分别为同一个三角形的内角和外角，则另一内角为$90^{0}-\frac{m}{2}$，此时三角形为等腰三角形

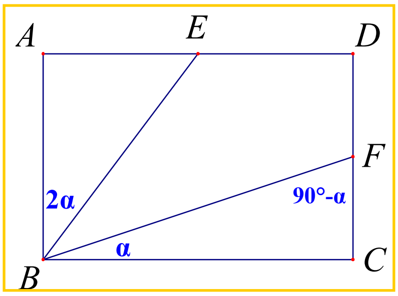
(3)若$m,n=90^{\circ}-\frac{m}{2}$分别为同一个三角形的内角和外角，此时可以以$m$为顶角作等腰三角形，此时会构成另一个相似的等腰三角形.

(4)若$m,n=90^{\circ}+\frac{m}{2}$为同一个三角形的内角，与(3)的情况相同.

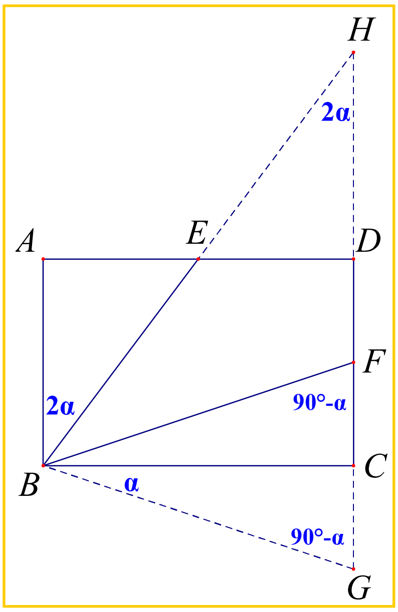
总结：“半角的余角，等腰形来找”

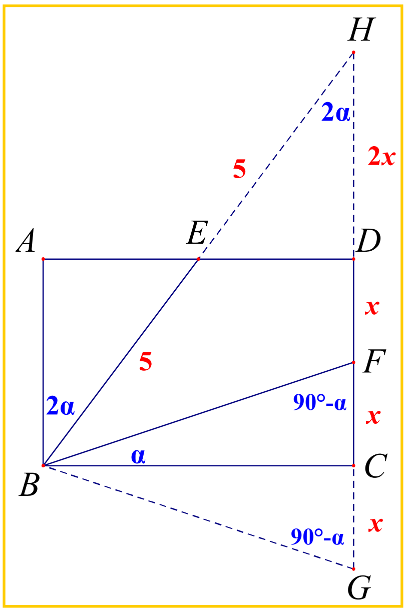
例题 2：如图在矩形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别为 AD，CD 的中点，连接 BE，BF，且$\angle ABE=2\angle FBC$，若 $BE=5$，则 BF 的长度为 __________.





解法一：将$\triangle BFC$ 沿 CB 翻折，交 DC 的延长线于点 G，延长 CD 交 BE 的延长线于点 H，$\angle G=\angle BFC=90-\alpha$，$\angle H=2\alpha$，$\triangle BHG$ 为等腰，$5x=10$，$x=2$，$AE=3$，$BC=6$，$BF=3\sqrt{5}$.

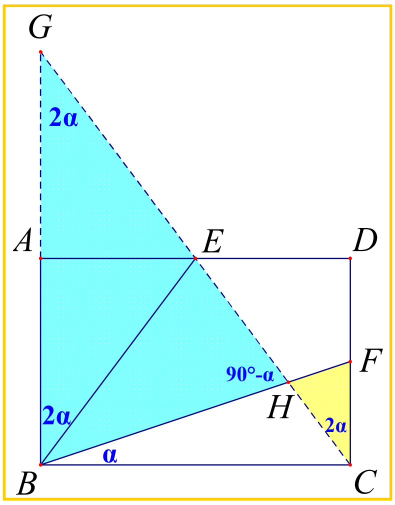


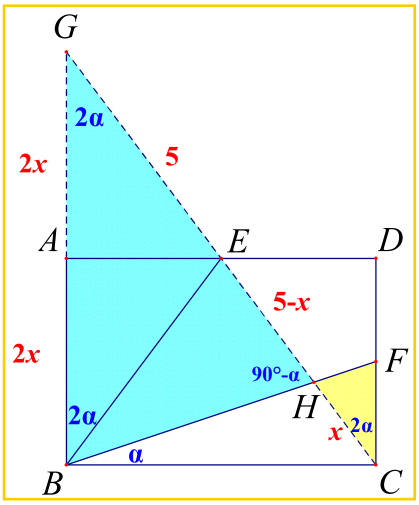


解法二：

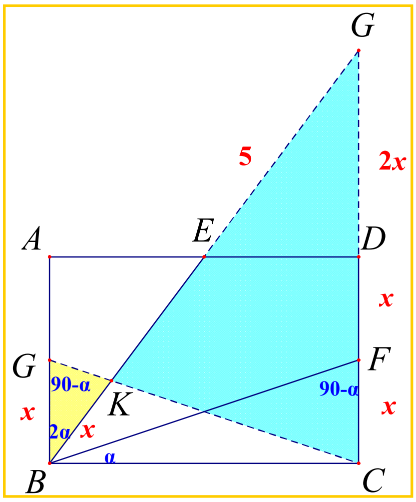
连接并延长交 BA 的延长导角，得出$\triangle FHC$ 为等腰三角形，平行不改变形状，$\triangle GBH$ 为等腰三角形。根据腰

等得出$10-x=4x$，可求$BF=3\sqrt{5}$





解法三：取AB中点G，连接CG，延长BE交CD的延长线于点H，得到$\triangle BCF\cong\triangle CBG$，导角得出$\triangle BGK$为等腰平行不改变形状，$\triangle HKC$也为等腰。根据腰等得出$10-x=4x$，可求$BF$

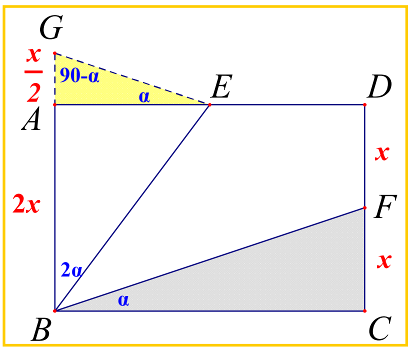


以上三种解法都是利用造全等，转移角，构等腰，得出边的等量关系来求解。

此题还可以构直接造等腰。用相似得出边的数量关系求解。请看解法四

解法四：可以直接利用$\angle ABE=2\alpha$,构等腰△GBE，$\triangle BCF\sim\triangle EAG\left|\ \dfrac{AE}{BC}=\dfrac{GA}{CF}\right.$.根据腰等得出$\dfrac{5}{2}x=5$,

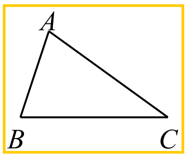
可求 BF



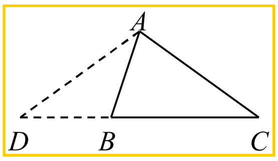
重点题型·归类精练

题型一　向外构造等腰三角形（大角减半）

1．如图，在△ABC中，$\angle ABC=2\angle C$，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，探究a，b，c满足的关系．



解：延长CB到D，使$BD=AB=c$，连接AD．



则$\angle BAD=\angle D$，∴$\angle ABC=2\angle D$．

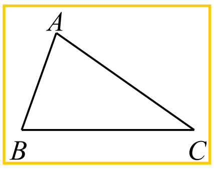
∵$\angle ABC=2\angle C$，∴$\angle D=\angle C$，

∴$AD=AC=b$，$\triangle BAD\backsim\triangle ACD$，

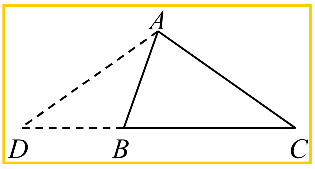
∴$\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{CD}{AD}$，∴$\dfrac{b}{c}=\dfrac{a+c}{b}$，

∴$b^2=c(a+c)$．

2．如图，在△ABC中，$\angle ABC=2\angle C$，$AB=3$，$AC=2\sqrt{6}$，求BC的长．



解：延长CB到D，使$DB=AB=3$，连接AD．



则$\angle D=\angle DAB$，∴$\angle ABC=2\angle D$．

∵$\angle ABC=2\angle C$，∴$\angle C=\angle D=\angle DAB$，

∴$AD=AC=2\sqrt{6}$，$\triangle BDA\backsim\triangle ADC$，

∴$\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{CD}{AD}$，∴$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}=\dfrac{CD}{2\sqrt{6}}$，

∴$CD=8$，∴$BC=5$.

2023·深圳南山区联考二模

3．一副三角板按如图1放置，图2为简图，D为AB中点，E、F分别是一个三角板与另一个三角板直角边AC、BC的交点，已知$AE=2$，$CE=5$，连接DE，M为BC上一点，且满足$\angle CME=2\angle ADE$，$EM=$____.

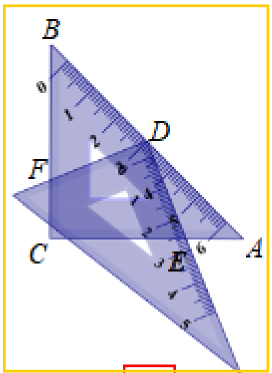


图1

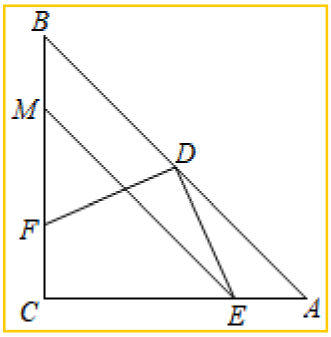
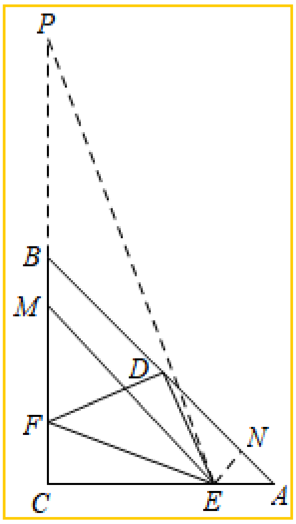


图2

【答案】$\frac{29}{4}$

【分析】由$CE=5$，$AE=2$，得$AC=7$，利用勾股定理，得到AD的长度，过E作EN⊥AD于N，求出EN和DN的长度，由于$\angle CME=2\angle ADE$，延长MB至P，是$MP=ME$，可以证明$\triangle DNE\sim\triangle PCE$，$MP=x$，在$Rt\triangle MCE$中，利用勾股定理列出方程，即可求解.

【详解】解：如图，过E作EN⊥AD于N，



∴$\angle END=\angle ENA=90°$，

∵$\angle NEA=\angle A=45°$，

∴$NE=NA$，

∴$AE=\sqrt{NE^2+NA^2}=\sqrt{2}NA$，

$\therefore NE=NA=\frac{AE}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,

同理，$AD=\frac{AC}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore DN=AD-NA=\frac{5\sqrt{2}}{2}$,

延长 MB 至 P，使 MP=ME，连接 PE，

∴可设 $\angle MPE=\angle MEP=x$，

$\therefore \angle EMC=\angle MPE+\angle MEP=2x$,

$\because \angle EMC=2\angle ADE$,

$\therefore \angle ADE=\angle MPE=x$,

又 $\angle DNE=\angle PCE=90°$，

$\therefore \triangle DNE\sim\triangle PCE$,

$\therefore \frac{CE}{PE}=\frac{NE}{DN}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{5\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{5}$,

$\therefore PC=\frac{25}{2}$,

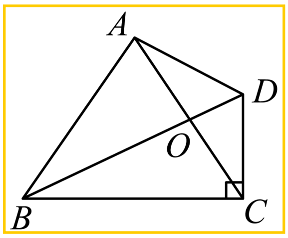
设 $MP=ME=x$，则 $CM=\frac{25}{2}-x$,

在 $Rt\triangle MCE$ 中，$ME^2=CM^2+CE^2$,

$\therefore \left(\frac{25}{2}-x\right)^2+25=x^2,\therefore x=\frac{29}{4}$,

2023·山西·统考中考真题

4．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BCD=90°$，对角线 AC,BD 相交于点 O．若 $AB=AC=5,BC=6,\angle ADB=2\angle CBD$，则 AD 的长为____________．

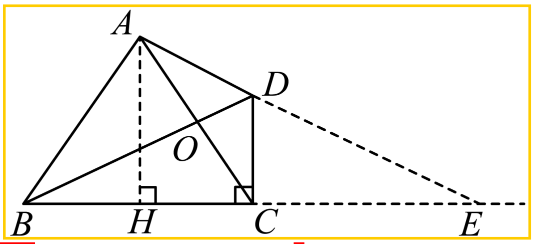


【答案】$\frac{\sqrt{97}}{3}$

【思路点拨】过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H，延长 AD，BC 交于点 E，根据等腰三角形性质得出 $BH=HC=\frac{1}{2}BC=3$，根据勾股定理求出 $AH=\sqrt{AC^2-CH^2}=4$，证明 $\angle CBD=\angle CED$，得出 $DB=DE$，根据等腰三角形性质得出 $CE=BC=6$，证明 $CD\parallel AH$，得出 $\frac{CD}{AH}=\frac{CE}{HE}$，求出 $CD=\frac{8}{3}$，根据勾股定理求出

$DE=\sqrt{CE^2+CD^2}=\sqrt{6^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{97}}{3}$，根据 $CD\parallel AH$，得出 $\frac{DE}{AD}=\frac{CE}{CH}$，即 $\frac{\frac{2\sqrt{97}}{3}}{AD}=\frac{6}{3}$，求出结果即可.

【详解】解：过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H，延长 AD，BC 交于点 E，如图所示：



则 $\angle AHC=\angle AHB=90^\circ$，

$\because AB=AC=5, BC=6$，

$\therefore BH=HC=\frac{1}{2}BC=3$，

$\therefore AH=\sqrt{AC^2-CH^2}=4$，

$\because \angle ADB=\angle CBD+\angle CED$，$\angle ADB=2\angle CBD$，

$\therefore \angle CBD=\angle CED$，

$\therefore DB=DE$，

$\because \angle BCD=90^\circ$，

$\therefore DC\perp BE$，

$\therefore CE=BC=6$，

$\therefore EH=CE+CH=9$，

$\because DC\perp BE$，$AH\perp BC$，

$\therefore CD\parallel AH$，

$\therefore \triangle ECD\sim\triangle EHA$，

$\therefore \frac{CD}{AH}=\frac{CE}{HE}$，

即 $\frac{CD}{4}=\frac{6}{9}$，

解得：$CD=\frac{8}{3}$，

$\therefore DE=\sqrt{CE^2+CD^2}=\sqrt{6^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{97}}{3}$，

$\because CD\parallel AH$，

$\therefore \frac{DE}{AD}=\frac{CE}{CH}$，

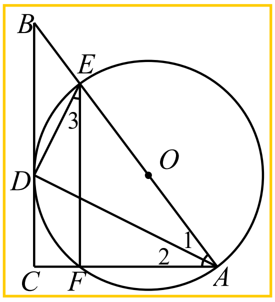
即 $\frac{\frac{2\sqrt{97}}{3}}{AD}=\frac{6}{3}$，

解得：$AD=\frac{\sqrt{97}}{3}$

5．如图，在Rt△ABC中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=6$，$BC=8$，AD平分$\angle BAC$，AD交BC于点D，$ED\perp AD$交AB于点E，△ADE的外接圆⊙O交AC于点F，连接EF.

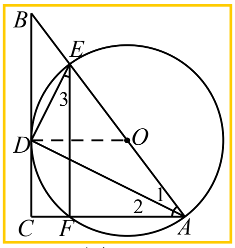
(1)求证：BC是⊙O的切线；

(2)求⊙O的半径r及∠3的正切值.

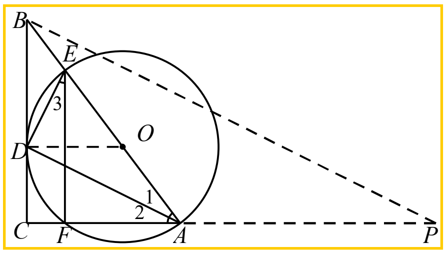


简析(1)如图，连接OD，由题易得$\angle 2=\angle 1=\angle ODA$，则$OD\parallel AC$，故$\angle ODB=\angle C=90^\circ$，即$OD\perp BC$，所以$BC$是⊙$O$的切线；

(2)**方法一**(常规解法)：由$OD\parallel AC$，可得△BOD∽△BAC，则$\dfrac{OD}{AC}=\dfrac{OB}{AB}$，即$\dfrac{r}{6}=\dfrac{10-r}{10}$，解得$r=\dfrac{15}{4}$；又可$\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{OD}{AC}$，故$\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{5}{8}$，从而$\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{3}{8}$，即$CD=\dfrac{3}{8}BC=3$，所以$\tan\angle 3=\tan\angle 2=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{1}{2}$；



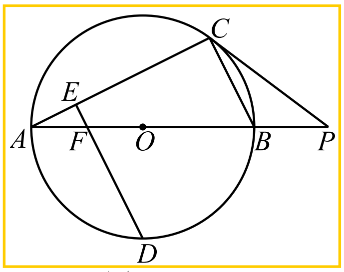
方法二(倍半角模型)：如图17—8—3，延长CA至点P，使$AP=AB=10$，易证$\angle 3=\angle 2=\angle 1=\angle P$，故$\tan\angle 3=\tan\angle P=\dfrac{BC}{PC}=\dfrac{1}{2}$；又由$\tan\angle 2=\dfrac{1}{2}$，可得$CD=3$，故$BD=5$，从而易得$r=OD=\dfrac{3}{4}BD=\dfrac{15}{4}$.



6．如图，AB为⊙O的直径，点P在AB的延长线上，点C在⊙O上，且$PC^2=PB\cdot PA$.

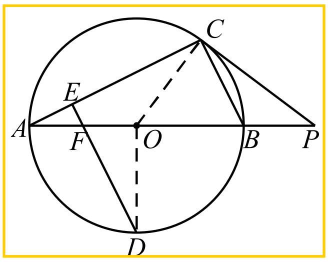
(1)求证：PC是⊙O的切线；

(2)已知$PC=20$，$PB=10$，点D是弧AB的中点，$DE\perp AC$，垂足为E，DE交AB于点F，求EF的长.



简析(1)如图，连接OC，由$PC^2=PB\cdot PA$，可得$\dfrac{PC}{PA}=\dfrac{PB}{PC}$，又$\angle P=\angle P$，故$\triangle PCB\backsim\triangle PAC$，从而$\angle PCB=\angle A=\angle ACO$，进一步可证$\angle OCP=\angle ACB=90°$，即$OC\perp CP$，所以$PC$是$\odot O$的切线；

(2)方法一(常规解法)：连接OD，易证$OD\perp AB$；由$PC^2=PB\cdot PA$，可得$PA=40$，$AB=30$；又由$\triangle PCB\backsim\triangle PAC$，可得$\dfrac{CB}{AC}=\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{1}{2}$，故$\tan\angle D=\tan\angle A=\dfrac{1}{2}$，从而$OF=\dfrac{1}{2}OD=\dfrac{15}{2}$，$AF=OA-OF=\dfrac{15}{2}$，进一步可得$EF=AF\cdot\sin\angle A=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$；



方法二(倍半角模型)：同上可得$AB=30$，则$OC=15$，$OP=25$，即$OC:CP:OP=3:4:5$；如图17—9—3，延长CO至点Q，使$OQ=OP$，易得$\tan\angle D=\tan\angle A=\tan\angle Q=\dfrac{1}{2}$，下略.

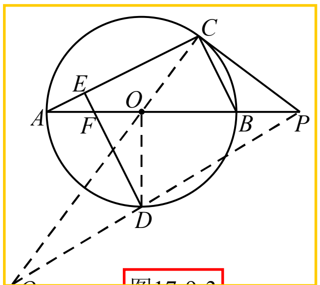
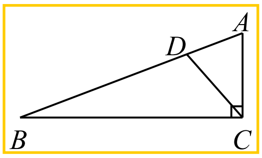


图17-9-3

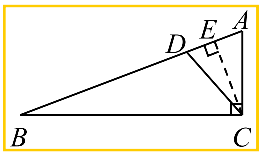
反思：这是一个确定性问题，其结构相当于已知“倍角$\angle POC$”求“半角$\angle A$”，方法一利用“母子型相思似”求解，方法二构造“倍半角模型”求解，相对而言，前者更简单，后者更通用

题型二　向内构造等腰（小角加倍或大角减半）

7．如图，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，点D为边AB上一点，$\angle ACD=2\angle B$，$\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{1}{3}$，求$\cos B$的值.



解：过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E.



$\because \angle ACB=90^{\circ}$，$\therefore \angle ACE=90^{\circ}-\angle BCE=\angle B$.

$\because \angle ACD=2\angle B$，$\therefore \angle ACD=2\angle ACE$，

$\therefore \angle ACE=\angle DCE$，$\therefore \angle A=\angle CDE$，

$\therefore AC=DC$，$\therefore AE=DE$.

设 $AE=DE=a$，则 $AD=2a$，$BD=6a$，$BE=7a$.

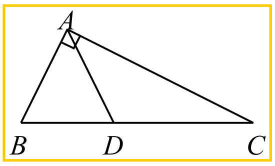
$\because \angle ACE=\angle B$，$\angle AEC=\angle CEB=90^{\circ}$，

$\therefore \triangle CEA\backsim\triangle BEC$，$\therefore \dfrac{AE}{CE}=\dfrac{CE}{BE}$，

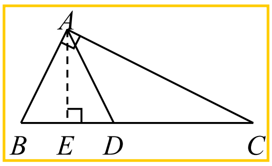
$\therefore \dfrac{a}{CE}=\dfrac{CE}{7a}$，$\therefore CE=\sqrt{7}a$，$\therefore BC=\sqrt{BE^{2}+CE^{2}}=2\sqrt{14}a$，

$\therefore \cos B=\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{7a}{2\sqrt{14}a}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

8．如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^{\circ}$，点 D 为边 BC 上一点，$\angle BAD=2\angle C$，$BD=2$，$CD=3$，求 AD 的长.



解：过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E.



$\because \angle BAC=90^{\circ}$，$\therefore \angle BAE=90^{\circ}-\angle CAE=\angle C$.

$\because \angle BAD=2\angle C$，$\therefore \angle BAD=2\angle BAE$，

$\therefore \angle BAE=\angle DAE$，$\therefore \angle B=\angle ADE$，

$\therefore AB=AD$，$\therefore BE=DE=\dfrac{1}{2}BD=1$，$\therefore CE=4$.

$\because \angle BAE=\angle C$，$\angle AEB=\angle CEA=90^{\circ}$

$\therefore \triangle ABE \backsim \triangle CAE$，$\therefore \dfrac{AE}{BE}=\dfrac{CE}{AE}$，

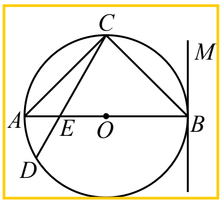
$\therefore \dfrac{AE}{1}=\dfrac{4}{AE}$，$\therefore AE=2$，$\therefore AD=\sqrt{DE^2+AE^2}=\sqrt{5}$.

9．如图，BM 是以 AB 为直径的$\odot O$ 的切线，B 为切点，BC 平分$\angle ABM$，弦 CD 交 AB 于点 E，$DE=OE$.

(1) 求证：$\triangle ACB$ 是等腰直角三角形；

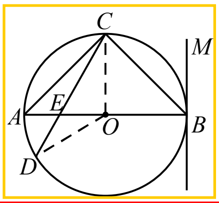
(2) 求证：$OA^2=OE\cdot DC$；

(3) 求 $\tan\angle ACD$ 的值.

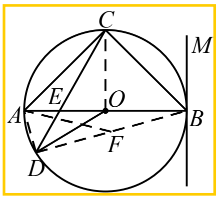


简析(1)由题易得$\angle ABC=45°$，从而易证$\triangle ACB$ 是等腰直角三角形；

(2)如图，连接 OC、OD，易证$\angle DOE=\angle D=\angle OCD$，故$\triangle DOE\backsim\triangle DCO$，从而易得 $OD^2=DE\cdot DC$，即 $OA^2=OE\cdot DC$；



(3)方法一(倍半角模型)：如图，连接 AD、BD，设$\angle ACD=x$，则$\angle ABD=x$，$\angle AOD=2x$，从而$\angle CEO=4x$，$\angle CAE=3x=45°$，所以 $x=15°$；在 BD 上取点 F，使 $AF=BF$，则$\angle AFD=30°$；由此可设 $AD=k$，则 $DF=\sqrt{3}k$，$AF=BF=2k$，从而 $BD=(2+\sqrt{3})k$，故 $\tan\angle ABD=\dfrac{AD}{BD}=2-\sqrt{3}$，即 $\tan\angle ACD=2-\sqrt{3}$；



方法二(解三角形)：同上可得$\angle ACD=15°$，则$\angle BCE=75°$，$\angle BEC=60°$；如图 17－10－4，作 $EG\perp BC$ 于点 G，可设 $OE=1$，则 $OB=OC=\sqrt{3}$，$BC=\sqrt{6}$，$BE=\sqrt{3}+1$，从而 $BG=EG=\dfrac{BE}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，$CG=BC-BG=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，故 $\tan\angle ACD=\tan\angle CEG=\dfrac{CG}{EG}=2-\sqrt{3}$.

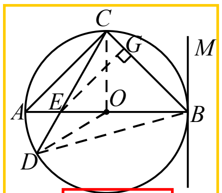
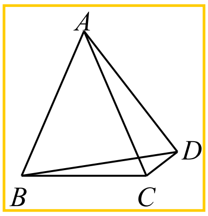


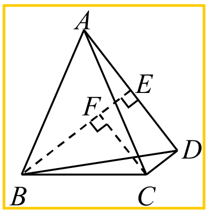
图17-10-4

反思：(2)主要通过换边，结合相似证乘积式；(3)通过导角得到 $15°$，方法一借助“倍半角模型”，由特殊角 $30°$ 求“特殊半角” $15°$，方法二的本质是解 $\triangle BCE$，显然前者更为简便

10．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABD=2\angle BDC$，$AB=AC=BD=4$，$CD=1$，求 BC 的长．



解：过点 B 作 $BE\perp AD$ 于点 E，过点 C 作 $CF\perp BE$ 于点 F．



$\because AB=BD$，$\therefore AE=DE$，$\angle ABE=2\angle DBE$，

$\therefore \angle ABD=2\angle DBE$．

$\because \angle ABD=2\angle BDC$，$\therefore \angle BDC=\angle DBE$，

$\therefore CD\parallel BE$，$\therefore CD\perp AD$，

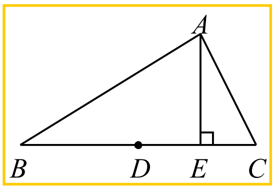
$\therefore$ 四边形 $CDEF$ 是矩形，$AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{15}$，

$\therefore EF=CD=1$，$AE=DE=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，

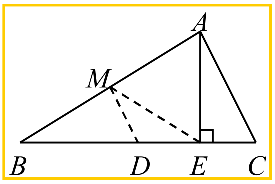
$\therefore BE=\sqrt{BD^2-DE^2}=\dfrac{7}{2}$，$\therefore BF=BE-EF=\dfrac{5}{2}$，

$\therefore BC=\sqrt{BF^2+CF^2}=\sqrt{10}$．

11．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=2\angle B$，点 D 是 BC 的中点，AE 是 BC 边上的高，若 $AE=4$，$CE=2$，求 DE 的长．



解：取 AB 的中点 M，连接 MD，ME．



∵点 D 是 BC 中点，∴MD 是△ABC 的中位线，

∴$MD\parallel AC$，$MD=\frac{1}{2}AC$，∴$\angle BDM=\angle C$．

∵$\angle C=2\angle B$，∴$\angle BDM=2\angle B$．

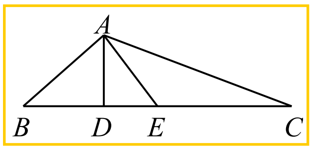
∵AE 是 BC 边上的高，∴$\angle AEB=90°$，

∴$ME=\frac{1}{2}AB=MB$，∴$\angle B=\angle MED$，

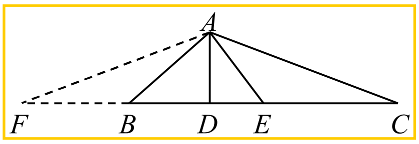
∴$\angle BDM=2\angle MED$，∴$\angle DME=\angle MED$，

∴$DE=DM=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\sqrt{AE^2+CE^2}=\sqrt{5}$．

12．如图，在△ABC 中，$\angle ABC=2\angle C$，$AD\perp BC$ 于点 D，AE 为 BC 边上的中线，$BD=3$，$DE=2$，求 AE 的长．



解：延长 CB 到 F，使 $BF=AB$，连接 AF．



则 $\angle F=\angle BAF$，∴$\angle ABC=2\angle F$．

∵AE 是中线，∴$BE=EC$，∴$BD+DE=EC$．

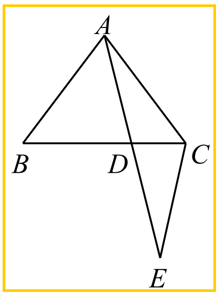
∵$\angle ABC=2\angle C$，∴$\angle F=\angle C$，∴$AF=AC$．

∵$AD\perp BC$，∴$DF=DC$，∴$BF+BD=DE+EC$，

∴$AB+BD=DE+BD+DE$，∴$AB=2DE=4$，

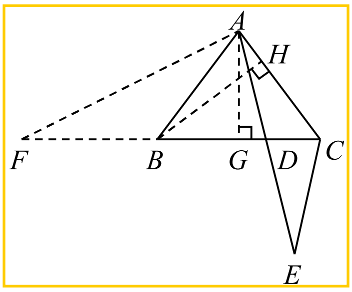
∴$AD^2=AB^2-BD^2=7$，∴$AE=\sqrt{DE^2+AD^2}=\sqrt{11}$．

13．如图，在△ABC 中，$AB=AC=5$，点 D 为 BC 边上一点，$BD=2DC$，点 E 在 AD 的延长线上，$\angle ABC=2\angle DEC$，$AD\cdot DE=18$，求 $\sin\angle BAC$ 的值．



解：延长 CB 到 F，使 $BE=AB$，连接 AF，过点 A 作 $AG\perp BC$ 于点 G，过点 B 作 $BH\perp AC$ 于点 H.

则 $\angle F=\angle BAF$，$\therefore\angle ABC=2\angle F$.



$\because\angle ABC=2\angle DEC$，$\therefore\angle F=\angle DEC$.

$\because\angle ADF=\angle CDE$，$\therefore\dfrac{AD}{DF}=\dfrac{CD}{DE}$，

$\therefore CD\cdot DF=AD\cdot DE=18$.

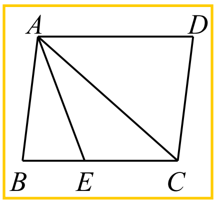
设 $CD=a$，则 $BD=2a$，$DF=2a+5$，

$\therefore a(2a+5)=18$，解得 $a=-\dfrac{9}{2}$（舍去）或 $a=2$，

$\therefore BC=3a=6$，$\therefore BG=CG=3$，$\therefore AG=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

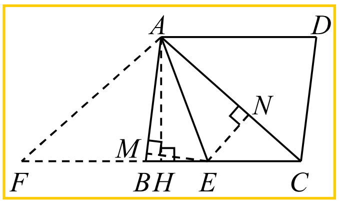
$\therefore BH=\dfrac{4}{5}BC=\dfrac{24}{5}$，$\therefore\sin\angle BAC=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{24}{25}$.

14．如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle D=2\angle ACB$，AE 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 E，若 $BE=2$，$CE=3$，求 AE 的长.



解：延长 CB 到 F，使 $BF=AB$，连接 AF，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H，

过点 E 作 $EM\perp AB$ 于点 M，$EN\perp AC$ 于点 N.



则$\angle F=\angle BAF$，$\therefore \angle ABC=2\angle F$．

$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，$\therefore \angle ABC=\angle D$．

$\because \angle D=2\angle ACB$，$\therefore \angle ABC=2\angle ACB$，

$\therefore \angle F=\angle ACB$，$\because AF=AC$，$\triangle ABF\backsim\triangle CAF$，$\therefore \dfrac{AF}{BF}=\dfrac{CF}{AF}$．

$\because AE$平分$\angle BAC$，$\therefore EM=EN$，

$\therefore \dfrac{BE}{CE}=\dfrac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACE}}=\dfrac{\frac{1}{2}AB\cdot EM}{\frac{1}{2}AC\cdot EN}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{2}{3}$，$\therefore \dfrac{AB}{AF}=\dfrac{2}{3}$．

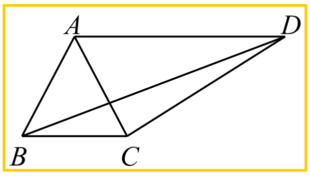
设$AB=2x$，则$BF=2x$，$AF=3x$，$CF=2x+5$，

$\therefore \dfrac{3x}{2x}=\dfrac{2x+5}{3x}$，解得$x=2$，$\therefore CF=9$，$AB=BF=4$，

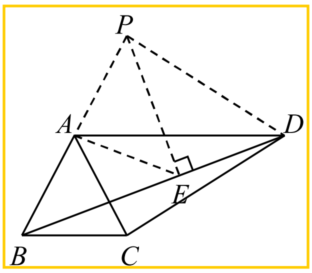
$\therefore FH=\dfrac{9}{2}$，$\therefore BH=\dfrac{1}{2}$，$\therefore EH=\dfrac{3}{2}$，$AH^2=AB^2-BH^2=\dfrac{63}{4}$，

$\therefore AE=\sqrt{AH^2+EH^2}=3\sqrt{2}$

15．如图，在四边形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，$AB=AC=4$，$CD=2\sqrt{11}$，$\angle ABD=2\angle DBC$，求BD的长．



解：延长BA到P，使$PA=AB$，过点P作$PE\perp BD$于点E，连接AE，PD．



$\because AD\parallel BC$，$\therefore \angle ADB=\angle DBC$．

$\because \angle ABD=2\angle DBC$，$\therefore \angle ABD=2\angle ADB$．

$\because AD\parallel BC$，$\therefore \angle PAD=\angle ABC$，$\angle CAD=\angle ACB$．

$\because AB=AC$，$\therefore PA=AC$，$\angle ABC=\angle ACB$，$\therefore \angle PAD=\angle CAD$．

$\because AD=AD$，$\therefore \triangle PAD\cong\triangle CAD$，$\therefore PD=CD=2\sqrt{11}$.

$\because PA=AB$，$\angle PEB=90°$，$\therefore AE=\frac{1}{2}PB=AB=4$，

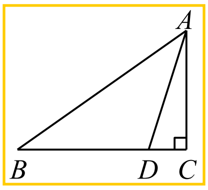
$\therefore \angle AEB=\angle ABD=2\angle ADB$，$\therefore \angle ADB=\angle DAE$，

$\therefore DE=AE=4$，$\therefore PE^2=PD^2-DE^2=28$，

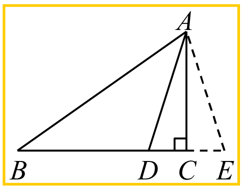
$\therefore BE=\sqrt{PB^2-PE^2}=6$，$\therefore BD=BE+DE=10$.

题型三　沿直角边翻折半角（小角加倍）

16．如图，在 Rt△*ABC* 中，$\angle ACB=90°$，点 D 为边 BC 上一点，$\angle B=2\angle CAD$，$AB\cdot CD=5$，求 AD 的长．



解：延长 BC 到 E，使 $CE=CD$，连接 AE.



$\because \angle ACB=90°$，$\therefore AD=AE$，

$\therefore \angle CAD=\angle CAE$，$\angle ADC=\angle E$.

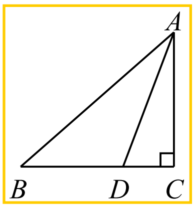
$\because \angle B=2\angle CAD$，$\therefore \angle B=\angle DAE$，

$\therefore \angle BAE=\angle ADE=\angle E$，$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle DAE$，$BE=AB$，

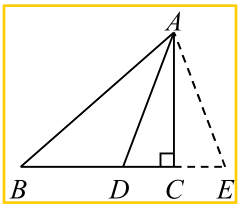
$\therefore \frac{AE}{DE}=\frac{BE}{AE}$，$\therefore AE^2=BE\cdot DE=BE\cdot 2CD=10$，

$\therefore AD=AE=\sqrt{10}$.

17．如图，在 Rt△*ABC* 中，$\angle ACB=90°$，点 D 为 BC 边上一点，$BD=2CD$，$\angle B=2\angle DAC$，$AB=4$，求 AD 的长．



解：延长 BC 到 E，使 $CE=CD$，连接 AE.



∵$\angle ACB=90°$，∴$AD=AE$，

∴$\angle ADE=\angle E$，$\angle DAC=\angle EAC$.

∵$\angle B=2\angle DAC$，∴$\angle B=\angle DAE$，

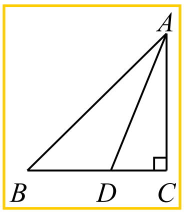
∴$\angle BAE=\angle ADE=\angle E$，∴$BE=AB=4$.

设$CE=CD=x$，则$BD=2x$，$BE=4x$，

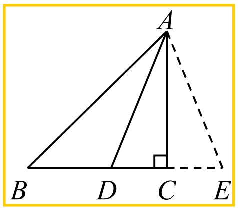
∴$4x=4$，∴$x=1$，∴$BC=3$，∴$AC^2=4^2-3^2=7$，

∴$AD=\sqrt{CD^2+AC^2}=2\sqrt{2}$.

18．如图，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，点D为边BC上一点，$\angle B=2\angle DAC$，$BD=3$，$DC=2$，求AD的长．



解：延长BC到点E，使$CE=CD$，连接AE.



∵$AC\perp BC$，∴$AD=AE$，

∴$\angle ADE=\angle E$，$\angle DAC=\angle EAC$.

∵$\angle B=2\angle DAC$，∴$\angle B=\angle DAE$，

∴$\angle BAE=\angle ADE=\angle E$，∴$AB=BE$，$\triangle ABE\backsim\triangle DAE$，

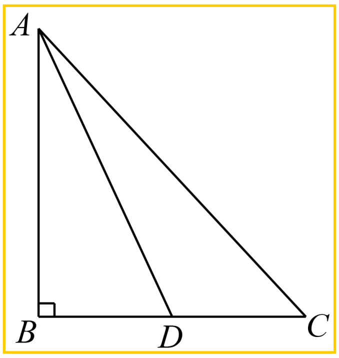
∴$\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{DE}{AE}$.

∵$BD=3$，$DC=2$，∴$DE=4$，$BE=7$，

∴$\dfrac{AE}{7}=\dfrac{4}{AE}$，∴$AD=AE=2\sqrt{7}$.

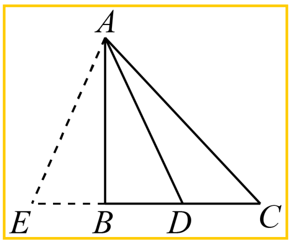
2023 • 深圳宝安区二模

19．如图，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle B=90°$，点D为BC中点，$\angle C=2\angle BAD$，则$\dfrac{AD}{AC}$的值为__________.



【答案】$\frac{\sqrt{6}}{3}$

【详解】解：延长CB至E，使$BE=BD$，连接AE，设$BD=a$，



$\because \angle B=90^\circ$，

$\therefore \angle ABD=\angle ABE$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABD \cong \mathrm{Rt}\triangle ABE(\mathrm{HL})$，

$\therefore \angle E=\angle ADE$，$AE=AD$，

$\because \angle C=2\angle BAD$，

$\therefore \angle C=\angle EAD$，

$\because \angle D=\angle C+\angle DAC$，

$\therefore \angle E=\angle ADE=\angle EAC$

$\therefore AC=CE=3a$，

$\because \angle E=\angle ADE=\angle EAC$，$\angle C=\angle EAD$，

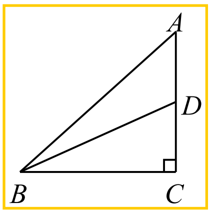
$\therefore \triangle ECA \backsim \triangle EAD$，

$\therefore \frac{CA}{AD}=\frac{AD}{ED}$，即$\frac{3a}{AD}=\frac{AD}{2a}$，

$\therefore AD=\sqrt{6}a$，又$AC=3a$，

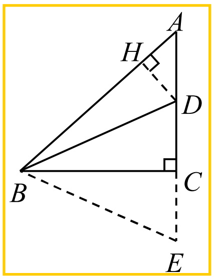
$\therefore \frac{AD}{AC}=\frac{\sqrt{6}a}{3a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故答案为：$\frac{\sqrt{6}}{3}$．

20．如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，点D为AC的中点，连接BD，$\angle A=2\angle DBC$，求 $\tan\angle ABD$的值．



【答案】

解： 延长 AC 到 E，使 $CE=CD$，连接 BE，过点 D 作 $DH\perp AB$ 于点 H.



$\because \angle ACB=90^\circ$，$\therefore BD=BE$，

$\therefore \angle DBC=\angle EBC$，$\angle BDC=\angle E$，

$\therefore \angle DBE=2\angle DBC$.

$\because \angle A=2\angle DBC$，$\therefore \angle A=\angle DBE$.

$\therefore \angle ABE=\angle BDE=\angle E$，$\therefore AB=AE$，$\triangle ABE\backsim\triangle BDE$，

$\therefore \dfrac{AB}{BE}=\dfrac{BD}{DE}$，$\therefore \dfrac{AE}{BD}=\dfrac{BD}{DE}$.

设 $AD=CD=CE=a$，则 $AB=AE=3a$，$DE=2a$，

$\therefore \dfrac{3a}{BD}=\dfrac{BD}{2a}$，$\therefore BD=\sqrt{6}a$，$\therefore BC=\sqrt{5}a$.

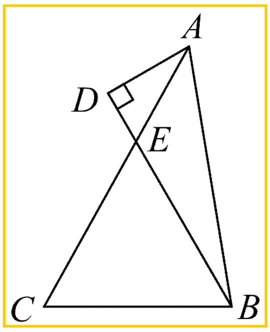
$\because \sin A=\dfrac{DH}{AD}=\dfrac{BC}{AB}$，$\therefore \dfrac{DH}{a}=\dfrac{\sqrt{5}a}{3a}$，

$\therefore DH=\dfrac{\sqrt{5}}{3}a$，$AH=\dfrac{2}{3}a$，$BH=\dfrac{7}{3}a$，

$\therefore \tan\angle ABD=\dfrac{DH}{BH}=\dfrac{\sqrt{5}}{7}$.

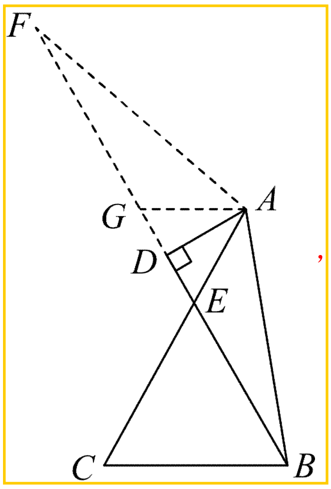
2023·深圳中学联考二模

21．如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 E 在边 AC 上，$EC=EB$，$\angle C=2\angle ABE$，$AD\perp BE$ 交 BE 的延长线于点 D，若 $AC=22$，$BD=16$，则 $AB=$______.



【答案】$8\sqrt{5}$

【详解】解：如图所示，延长BD至F使$DF=BD$，作$AG\parallel BC$交DF于G，



，

$\because BD=DF$，$AD\perp BE$，

$\therefore AF=AB$，$\angle F=\angle ABD$，

$\because AG\parallel BC$，

$\therefore \angle AGD=\angle EBC$，$\angle GAE=\angle C$，

$\because EB=EC$，

$\therefore \angle EBC=\angle C$，

$\therefore \angle C=\angle EBC=\angle AGD=\angle GAE$，

$\therefore AE=EG$，

$\because \angle C=2\angle ABE$，

$\therefore \angle AGD=2\angle ABE=2\angle F$，

$\therefore FG=AG$，

$\because AC=22$，$BD=16$，

$\therefore BG=BE+GE=CE+AE=AC=22$，

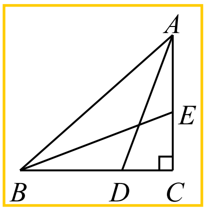
$\therefore AG=FG=BF-BD=2BD-BG=2\times16-22=10$，

$\therefore DG=DF-FG=16-10=6$，

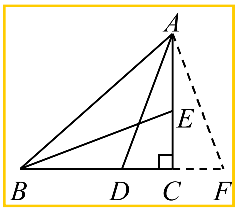
$\therefore AD=\sqrt{AG^2-DG^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$，

$\therefore AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{8^2+16^2}=8\sqrt{5}$

22．如图，在△ABC 中，$\angle ACB=90°$，BE 平分 $\angle ABC$，点 D 为 BC 边上一点，$BD=2CD$，$\angle ABC=2\angle DAC$，求 $\frac{AE}{EC}$ 的值．



解：延长 BC 到 F，使 $CF=CD$，连接 AF．



∵$\angle ACB=90°$，∴$AD=AF$，

∴$\angle ADF=\angle F$，$\angle DAC=\angle FAC$．

∵$\angle ABC=2\angle DAC$，∴$\angle ABC=\angle DAF$，

∴$\angle BAF=\angle ADF=\angle F$，∴$AB=BF$，△$ABF$∽△$DAF$，

∴$\frac{AF}{BF}=\frac{DF}{AF}$．

设 $CF=CD=a$，则 $BD=2a$，$DF=2a$，$BF=4a$，

∴$\frac{AF}{4a}=\frac{2a}{AF}$，∴$AF^2=8a^2$，∴$AC=\sqrt{AF^2-CF^2}=\sqrt{7}a$．

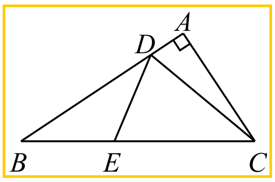
∵BE 平分 $\angle ABC$，∴$\angle EBC=\angle FAC$．

∵$\angle BCE=\angle ACF=90°$，∴△$BCE$∽△$ACF$，

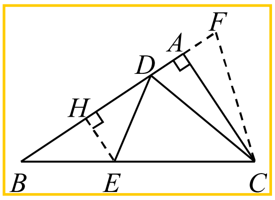
∴$\frac{CE}{CF}=\frac{BC}{AC}$，∴$\frac{CE}{a}=\frac{3a}{\sqrt{7}a}$，∴$CE=\frac{3\sqrt{7}}{7}a$，

∴$AE=\frac{4\sqrt{7}}{7}a$，∴$\frac{AE}{EC}=\frac{4}{3}$

23．如图，在△Rt△ABC 中，$\angle BAC=90°$，D，E 分别是边 AB，BC 上的点，DC 平分 $\angle ADE$，$\angle B=2\angle ACD$，求 CE 的长．



解：延长 BA 到 F，使 $AF=AD$，连接 CF，过点 E 作 $EH\perp AB$ 于点 H．



∵$\angle BAC=90^\circ$，∴$CD=CF$，∴$\angle F=\angle CDF$，$\angle ACD=\angle ACF$.

∵$\angle B=2\angle ACD$，∴$\angle B=\angle DCF$，∴$\angle BCF=\angle CDF=\angle F$，

∴$BF=BC$.

设$\angle ACD=\alpha$，则$\angle B=2\alpha$，$\angle EDC=\angle ADC=90^\circ-\alpha$，$\angle BDE=2\alpha$，

∴$\angle B=\angle BDE$，∴$BE=DE$，∴$BH=DH$.

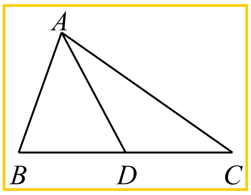
设$CE=2x$，则$BF=BC=2x+12$，∴$BH=DH=x+1$，$AH=x+6$.

∵$EH\perp AB$，$\angle BAC=90^\circ$，∴$EH\parallel AC$，

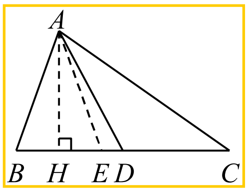
∴$\frac{BH}{AH}=\frac{BE}{CE}$，∴$\frac{x+1}{x+6}=\frac{12}{2x}$，解得$x=-4$（舍去）或$x=9$，

∴$CE=2x=18$.

24．如图，在△ABC中，$\angle B=2\angle C$，AD是中线，$AB=6$，$AD=\sqrt{41}$，求BC，AC的长.



解：过点A作$AH\perp BC$于点H，在HC上截取$HE=BH$，连接AE.



则$AE=AB=6$，∴$\angle AEB=\angle B=2\angle C$，

∴$\angle EAC=\angle C$，∴$CE=AE=6$.

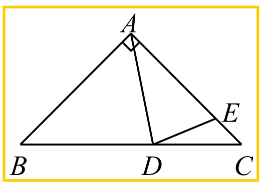
设$BH=EH=x$，则$BC=2x+6$，$BD=CD=x+3$，

∴$DH=3$，∴$AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=4\sqrt{2}$，

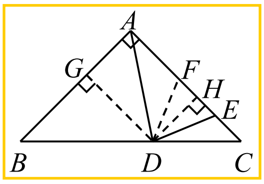
∴$BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=2$，∴$BC=10$，$CH=8$，

∴$AC=\sqrt{AH^2+CH^2}=4\sqrt{6}$.

25．如图，在Rt△ABC中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC$，点D，E分别为边BC，AC上的点，连接AD，DE，$\angle AED=2\angle DAE$，$CE=7$，$BD=18\sqrt{2}$，求DE的长.



解：过点 D 作 $DG\perp AB$ 于点 G，$DH\perp AC$ 点 H，



在 AH 上截取 $FH=EH$，连接 DF.

则 $DE=DF$，$\therefore\angle DFE=\angle AED=2\angle DAE$，

$\therefore\angle DFE=\angle AED$，$\therefore AF=DF$.

$\because\angle BAC=90°$，$AB=AC$，$\therefore\angle B=\angle C=45°$，

$\therefore AH=DG=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BD=18$，$CH=DH$.

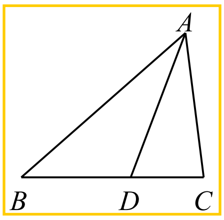
设 $CH=DH=x$，则 $FH=EH=x-7$，$DF=AF=25-x$，

在 $Rt\triangle DFH$ 中，$DH^2+FH^2=DF^2$，

$\therefore x^2+(x-7)^2=(25-x)^2$，解得 $x=-48$（舍去）或 $x=12$，

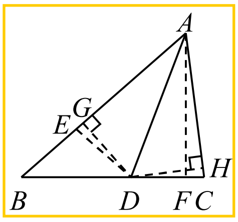
$\therefore DE=DF=25-x=13$.

26．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=2\angle B$，AD 平分 $\angle BAC$，$BD=3$，$CD=2$，求 AD 的长．



解：在 AB 上截取 $AE=AC$，连接 DE，过点 A 作 $AF\perp BC$ 于点 F，

过点 D 作 $DG\perp AB$ 于点 G，$DH\perp AC$ 于点 H.



$\because\angle DAE=\angle DAC$，$AD=AD$，$\therefore\triangle ADE\cong\triangle ADC$，

$\therefore DE=CD=2$，$\angle AED=\angle C=2\angle B$，

$\therefore\angle EDB=\angle B$，$\therefore BE=DE=2$.

$\because\angle DAE=\angle DAC$，$\therefore DG=DH$，

$\therefore\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\dfrac{\frac{1}{2}AB\cdot DG}{\frac{1}{2}AC\cdot DH}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AC+2}{AC}=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore AC=4$，$\therefore AB=6$.

$\because AF^2=AB^2-BF^2=AC^2-CF^2$，

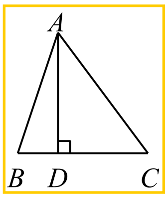
$\therefore 6^2-BF^2=4^2-(5-BF)^2$，解得 $BF=\dfrac{9}{2}$，

$\therefore DF=\dfrac{3}{2}$，$AF^2=6^2-BF^2=\dfrac{63}{4}$，

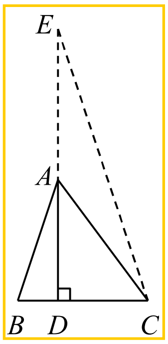
$\therefore AD=\sqrt{DF^2+AF^2}=3\sqrt{2}$．

题型四　邻二倍角的处理

27．如图，在△ABC 中，$AD\perp BC$ 于点 D，$\angle DAC=2\angle DAB$，$BD=4$，$DC=9$，求 AD 的长．



解：延长 DA 到 E，使 $AE=AC$，连接 EC．



则 $\angle E=\angle ACE$，$\therefore \angle DAC=2\angle E$．

$\because \angle DAC=2\angle DAB$，$\therefore \angle DAB=\angle E$．

$\because \angle ADB=\angle EDC=90°$，$\therefore$△$ABD\backsim$△$ECD$，

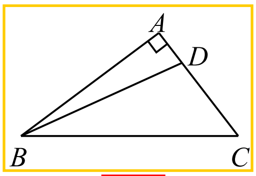
$\therefore \dfrac{AD}{ED}=\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{4}{9}$，

设 $AD=4m$，则 $ED=9m$，$AC=AE=5m$，

$\therefore CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=3m=9$，$\therefore m=3$．

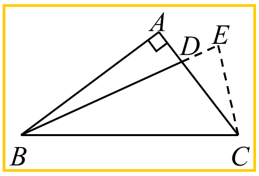
$\therefore AD=4m=12$．

28．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle A=90°$，点 D 为边 AC 上一点，$\angle DBC=2\angle ABD$，$CD=3$，$BC=7$，求 BD 的长．



例 1

解：延长 BD 到 E，使 $BE=BC$，连接 CE.



设 $\angle ABD=\alpha$，则 $\angle DBC=2\alpha$，$\angle BCE=\angle E=90°-\alpha$，

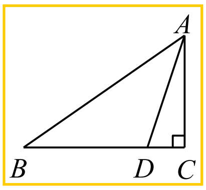
$\angle CDE=\angle ADB=90°-\alpha$，

$\therefore \angle CDE=\angle E=\angle BCE$，$\therefore CE=CD=3$，$\triangle CDE\backsim\triangle BCE$，

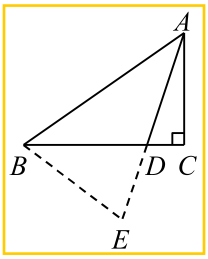
$\therefore \dfrac{CE}{DE}=\dfrac{BE}{CE}$，$\therefore \dfrac{3}{DE}=\dfrac{7}{3}$，$\therefore DE=\dfrac{9}{7}$，

$\therefore BD=BE-DE=7-\dfrac{9}{7}=\dfrac{40}{7}$.

29．如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，点 D 为 BC 边上一点，$\angle BAD=2\angle CAD$，$BD=10$，$DC=3$，求 AD 的长．



解：延长 AD 到 E，使 $AE=AB$，连接 BE.



设 $\angle CAD=\alpha$，则 $\angle BAD=2\alpha$，$\angle ABE=\angle E=90°-\alpha$，

$\angle BDE=\angle ADC=90°-\alpha$，

$\therefore \angle BDE=\angle E=\angle ABE$，$\therefore BE=BD=10$，$\triangle BDE\backsim\triangle ABE$，

$\therefore \dfrac{BE}{DE}=\dfrac{AE}{BE}$，$\therefore AE\cdot DE=BE^2=100$，

$\therefore DE(AD+DE)=100$，$\therefore 2DE^2+2AD\cdot DE=200$.

$\because AC^2=AB^2-BC^2=AD^2-DC^2$

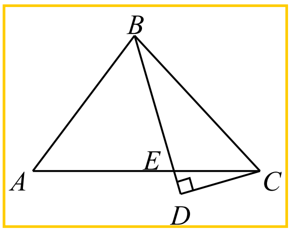
$\therefore (AD+DE)^2-13^2=AD^2-3^2$

$\therefore DE^2+2AD\cdot DE=160$，$\therefore DE^2+160=200$，

$\therefore DE^2=40$，$DE=2\sqrt{10}$，$\therefore 2\sqrt{10}AE=100$，

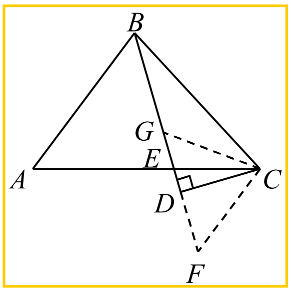
$\therefore AE=5\sqrt{10}$，$\therefore AD=3\sqrt{10}$.

30．如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 E 在边 AC 上，$EB=EA$，$\angle A=2\angle CBE$，$CD\perp BE$ 交 BE 的延长线于点 D，$BD=8$，$AC=11$，则 BC 的长为__________.



【答案】$4\sqrt{5}$

【解析】过点 C 作 $CF∥AB$ 交 BD 的延长线于点 F.



则 $∠ECF=∠A$，$∠F=∠ABE$.

∵ $EB=EA$，∴ $∠A=∠ABE$，

∴ $∠ECF=∠F$，∴ $EF=EC$，

∴ $BF=AC=11$，∴ $DF=BF-BD=11-8=3$，

在 BD 上取点 G，使 $DG=DF$，连接 CG.

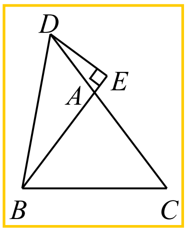
则 $CF=CG$，∴ $∠CGF=∠F=∠ECF=∠A=2∠CBE$，

∴ $∠CBG=∠BCG$，∴ $CG=BG=BD-DG=5$，

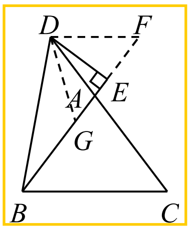
∴ $CD=\sqrt{CG^2-DG^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

∴ $BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$.

31．如图，在△ABC 中，$AB=AC$，点 D 在 CA 的延长线上，$∠ABC=2∠DBA$，$DE⊥BA$ 交 BA 的延长线于点 E，若 $BE=8$，$CD=11$，求 BD 的长．



解：过点 D 作 $DF∥BC$ 交 BE 的延长线于点 F，在 EB 上截取 $EG=EF$，连接 DG.



则$\angle F=\angle ABC=2\angle DBA$，$\angle ADF=\angle C$.

$\because AB=AC$，$\therefore \angle ABC=\angle C$，

$\therefore \angle F=\angle ADF$，$\therefore AF=AD$，$\therefore BF=CD=11$，

$\therefore EG=EF=BF-BE=11-8=3$.

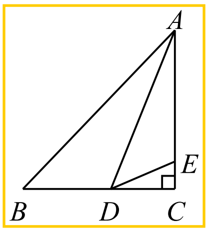
$\because DE\perp BA$，$\therefore DF=DG$，$\therefore \angle DGE=\angle F=2\angle DBA$，

$\therefore \angle BDG=\angle DBA$，$\therefore DG=BG=BE-EG=5$，

$\therefore DE=\sqrt{DG^2-EG^2}=4$，$\therefore BD=\sqrt{BE^2+DE^2}=4\sqrt{5}$.

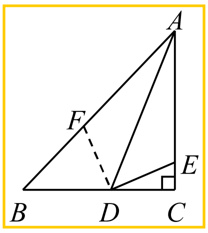
题型五　绝配角

32．如图，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，点D，E分别为BC，AC上的点，$\angle B=2\angle CDE$，$\angle ADE=45°$，$AB=5$，$AE=3$，则BD的长为__________.



【答案】2

【解析】在BA上截取$BF=BD$，连接DF.



则$\angle BFD=\angle BDF=90°-\frac{1}{2}\angle B=90°-\angle CDE=\angle CED$，

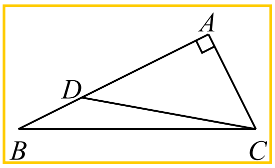
$\therefore \angle AFD=\angle AED$，$\angle BDF+\angle CDE=90°$，

$\therefore \angle EDF=90°$，$\angle ADF=\angle ADE=45°$.

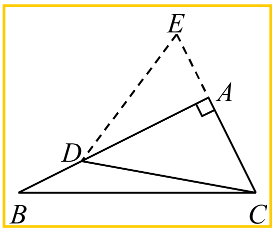
$\because AD=AD$，$\therefore \triangle ADF\cong\triangle ADE$，

$\therefore AF=AE=3$，$\therefore BD=BF=AB-AF=5-3=2$.

33．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle BAC=90°$，点 D 为边 AB 上一点，$\angle ACD=2\angle B$，若 $BD=2$，$AD=4$，求 CD 的长．



解：延长 CA 到点 E，连接 DE，使 $\angle ADE=\angle B$．



∵$AD=3$，$BD=1$，∴$AB=4$．

∵$\angle ADE=\angle B$，$\angle DAE=\angle BAC=90°$．

∴$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，∴$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{2}{3}$．

设 $\angle ADE=\angle B=\alpha$，则 $\angle ACD=2\alpha$，

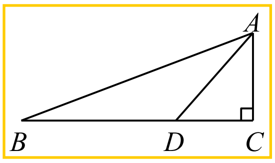
$\angle ADC=90°-2\alpha$，$\angle CDE=\angle E=90°-\alpha$，

∴$CD=CE$．

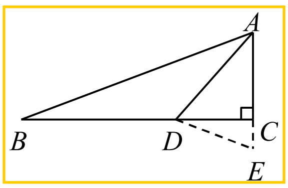
设 $AE=2x$，则 $AC=3x$，$CD=CE=5x$，

$AD=4x=4$，∴$x=1$，∴$CD=5x=5$．

34．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，点 D 为边 BC 上一点，$BD=2CD$，$\angle DAC=2\angle B$，$AD=\sqrt{2}$，求 AB 的长．



解：延长 AC 到 E，使 $AE=AD$，连接 DE．



设 $\angle B=\alpha$，则 $\angle DAC=2\alpha$，$\angle ADE=\angle E=90°-\alpha$，

$\angle CDE=\alpha$，$\therefore \angle B=\angle CDE$.

$\because \angle ACB=\angle ECD=90°$，$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle EDC$，

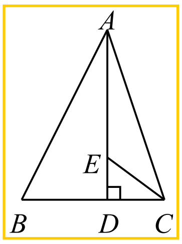
$\therefore \dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{CE}=\dfrac{BC}{DC}=3$.

设 $CE=a$，则 $AC=3a$，$AD=AE=4a=\sqrt{2}$，

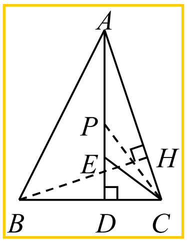
$\therefore a=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$\therefore AC=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，$\therefore DC=\sqrt{AD^2-AC^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$，

$\therefore DE=\sqrt{DC^2+CE^2}=1$，$\therefore AB=3DE=3$.

35．如图，在△*ABC* 中，$\angle BAC=45°$，$AD\perp BC$ 于点 D，点 E 在线段 AD 上，$\angle CED=2\angle BAD$，若 $AE=9$，$DE=3$，求 BC 的长．



解：在 AD 上取点 P，连接 PC，使 $PC=AP$，过点 B 作 $BH\perp AC$ 于点 H.



则 $\angle PAC=\angle ACP$.

设 $\angle BAD=\alpha$，则 $\angle CED=2\alpha$，$\angle DCE=90°-2\alpha$，

$\angle PAC=\angle ACP=45°-\alpha$，$\angle DPC=90°-2\alpha$，

$\therefore \angle DCE=\angle DPC$.

$\because \angle CDE=\angle PDC$，$\therefore \triangle CDE \backsim \triangle PDC$，

$\therefore \dfrac{CD}{DE}=\dfrac{PD}{CD}$，$\therefore CD^2=DE \cdot PD$.

设 $PE=x$，则 $PD=x+3$，$PC=AP=9-x$，

$CD^2=(9-x)^2-(x+3)^2$，

$\therefore (9-x)^2-(x+3)^2=3(x+3)$，解得 $x=\dfrac{7}{3}$，

$\therefore CD^2=3(x+3)=16$，$\therefore CD=4$，

$\therefore AC=\sqrt{CD^2+AD^2}=4\sqrt{10}$.

$\because \angle BCH=\angle ACD$，$\angle BHC=\angle ADC=90°$，

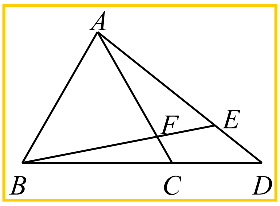
$\therefore \triangle BCH \backsim \triangle ACD$，$\therefore \dfrac{BH}{CH}=\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{12}{4}=3$.

$\therefore AH=BH=3CH=\dfrac{3}{4}AC=3\sqrt{10}$，

$\therefore AB^2=2AH^2=180$，$\therefore BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=6$，

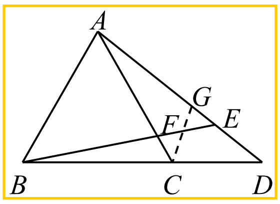
$\therefore BC=BD+CD=6+4=10$．

36．如图，$\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D 在 BC 的延长线上，点 E 在线段 AD 上，$\angle DAC=2\angle DBE$，BE 与 AC 交于点 F，若 $CF=1$，$DE=2$，则 CD 的长为________．



【答案】3

【解析】在 AD 上截取 $DG=DC$，连接 CG．



设 $\angle DBE=x$，则 $\angle DAC=2x$，$\angle BAD=60°+2x$，

$\angle ABE=\angle AEB=60°-x$，$\angle D=60°-2x$，

$\angle DGC=\angle EFC=60°+x$，

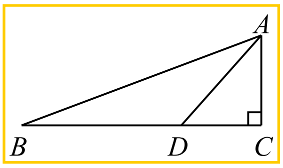
$\therefore AE=AB=AC$，$\angle AGC=\angle AFE$．

$\because \angle CAG=\angle EAF$，$\therefore \triangle ACG\cong\triangle AEF$，

$\therefore AG=AF$，$\therefore EG=CF=1$，

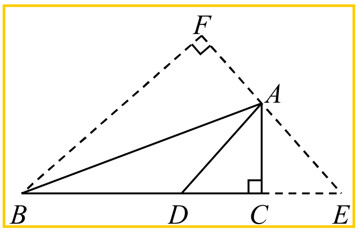
$\therefore CD=DG=DE+EG=2+1=3$

37．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，点 D 为边 BC 上一点，$BD=2CD$，$\angle DAC=2\angle ABC$，若 $AD=\sqrt{2}$，求 AB 的长．



【答案】3

解：延长 BC 到点 E，使 $CE=CD$，连接 AE，过点 B 作 AE 的垂线，垂足为 F．



∵$\angle ACB=90^{\circ}$，∴$AE=AD$，∴$\angle EAC=\angle DAC=2\angle ABC$.

∵$\angle FBE=\angle EAC=90^{\circ}-\angle E$，∴$\angle FBE=2\angle ABC$，

∴$\angle ABF=\angle ABC$，∴$AF=AC$，∴$BF=BC$.

设$CD=a$，则$BD=2a$，$BF=BC=3a$，$BE=4a$，

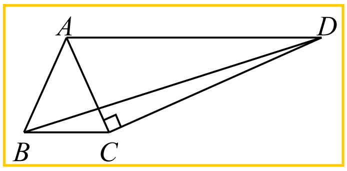
在$\triangle ABE$中，由面积法得$BE\cdot AC=AE\cdot BF$，

∴$4a\cdot AC=AE\cdot 3a$，∴$\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{3}{4}$.

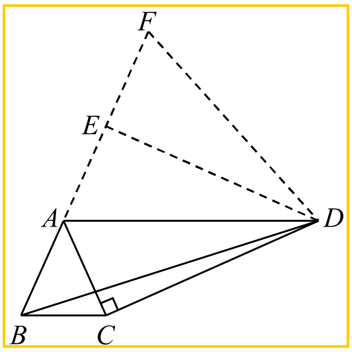
设$AC=3m$，则$AD=AE=4m$，$CD=\sqrt{7}m$，

$BC=3\sqrt{7}m$，$AB=6\sqrt{2}m=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}AD=3$

38．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AC\perp CD$，$AB=AC$，$\angle ABD=2\angle ADC$，$CD=2\sqrt{5}$，求 AD 的长.



解： 延长 BA 到点 E，使 $AE=AC$，延长 AE 到点 F，使 $EF=AE$，连接 DE，DF.



∵$AD\parallel BC$，∴$\angle DAE=\angle ABC$，$\angle DAC=\angle ACB$.

∵$AB=AC$，∴$\angle ABC=\angle ACB$，∴$\angle DAE=\angle DAC$.

∵$AD=AD$，∴$\triangle ADE\cong\triangle ADC$，

∴$DE=CD=2\sqrt{5}$，$\angle AED=\angle ACD=90^{\circ}$，$\angle ADE=\angle ADC$，

∴$AD=FD$，∴$\angle F=\angle DAE$，$\angle ADE=\angle FDE$，

∵$\angle ABD=2\angle ADC$，∴$\angle ABD=2\angle ADE=\angle ADF$，

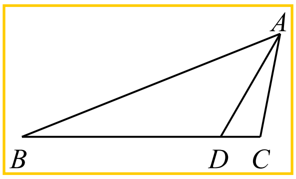
∴$\angle BDF=\angle DAE=\angle F$，∴$BD=BF$，

设$AB=AC=x$，则$BE=2x$，$BD=BF=3x$，

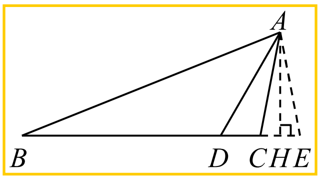
$\therefore DE=\sqrt{BD^2-BE^2}=\sqrt{5}x=2\sqrt{5}$，$\therefore x=2$，

$\therefore AE=2$，$\therefore AD=\sqrt{AE^2+AD^2}=2\sqrt{6}$.

39．如图，在$\triangle ABC$中，点D为边BC上一点，$\angle ADC=60°$，$\angle BAD=2\angle CAD$，$BD=5$，$CD=1$，求AD的长．



解：延长BC到E，使$BE=BA$，连接AE，过点A作$AH\perp CE$于点H.



设$\angle CAD=\alpha$，则$\angle BAD=2\alpha$，$\angle B=60°-2\alpha$，

$\angle BAE=\angle E=60°+\alpha$，$\angle CAE=60°-2\alpha$，

$\therefore \angle CAE=\angle B$，$\therefore \angle ACE=\angle BAE=\angle E$，

$\therefore AC=AE$，$\triangle ACE\backsim\triangle BAE$，

$\therefore CH=EH$，$\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{BE}{AE}$，$\therefore AE^2=CE\cdot BE$.

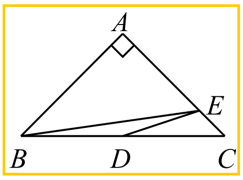
设$CH=EH=x$，则$DH=x+1$，$AH=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$，$CE=2x$，

$BE=2x+6$，$AE^2=x^2+(\sqrt{3}x+\sqrt{3})^2$，

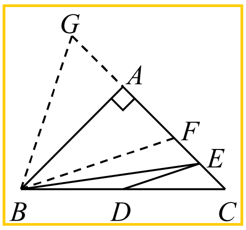
$\therefore x^2+(\sqrt{3}x+\sqrt{3})^2=2x(2x+6)$，解得$x=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore AD=2DH=2x+2=3$.

40．如图，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，点D是BC的中点，点E是边AC上一点，连接BE，DE，$\angle ABE=2\angle EDC$，$AE=3$，求DE的长．



解：在EA上截取$EF=EC$，延长CA到G，使$AG=AF$，连接BF，BG.



$\because \angle BAC=90°$，$\therefore BF=BG$，$\therefore \angle G=\angle AFB$.

∵点 D 是 BC 的中点，∴DE 是△BCF 的中位线，∴$DE // BF$.

∵$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，∴$\angle ABC=\angle C=45°$.

设$\angle EDC=\alpha$，则$\angle ABE=2\alpha$，$\angle G=\angle AFB=\angle AED=45°+\alpha$，

$\angle ABG=45°-\alpha$，$\angle EBG=45°+\alpha$，

∴$\angle G=\angle EBG$，∴$BE=GE$.

设$EF=EC=x$，则$AG=AF=3-x$，$AB=AC=3+x$，

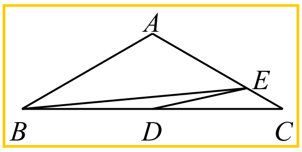
$BE=GE=6-x$.

在 Rt△ABE 中，$(3+x)^2+3^2=(6-x)^2$，

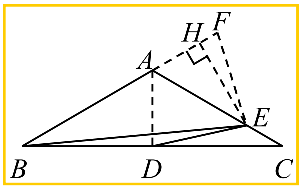
解得 $x=1$，∴$AF=2$，$AB=4$，

∴$BF=\sqrt{AB^2+AF^2}=2\sqrt{5}$，∴$DE=\frac{1}{2}BF=\sqrt{5}$.

41．如图，在△ABC 中，$\angle BAC=120°$，$AB=AC$，点 D 是 BC 的中点，点 E 是边 AC 上一点，连接 BE，DE，$\angle ABE=2\angle EDC$，$CE=2\sqrt{6}$，求 AE 的长．



解： 延长 BA 到 F，使 $BF=BE$，连接 AD，EF，过点 E 作 $EH\perp AF$ 于点 H.



∵$\angle BAC=120°$，$AB=AC$，∴$\angle EAF=60°$，$\angle ABC=\angle C=30°$.

∵点 D 是 BC 的中点，∴$\angle BAD=\angle EAD=60°$，$\angle ADC=90°$，

∴$\angle EAD=\angle EAF$.

设$\angle EDC=\alpha$，则$\angle ABE=2\alpha$，$\angle F=\angle BEF=90°-\alpha$，

$\angle ADE=90°-\alpha$，∴$\angle ADE=\angle F$.

∵$AE=AE$，∴△ADE≌△AFE，∴$AD=AF$.

设$AE=2x$，则$AH=x$，$EH=\sqrt{3}x$，$AB=AC=2x+2\sqrt{6}$，

$BH=3x+2\sqrt{6}$，$AF=AD=x+\sqrt{6}$，$BE=BF=3x+3\sqrt{6}$.

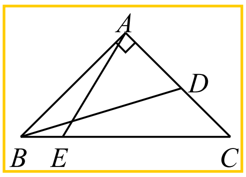
在 Rt△BEH 中，$BH^2+EH^2=BE^2$，

∴$(3x+2\sqrt{6})^2+(\sqrt{3}x)^2=(3x+3\sqrt{6})^2$，

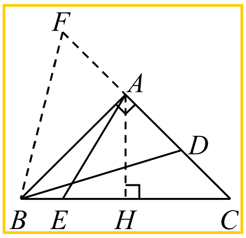
解得 $x=\sqrt{6}-4$（舍去）或 $x=\sqrt{6}+4$，

∴$AE=2x=2\sqrt{6}+8$.

42．如图，在△ABC 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，点 D，E 分别为边 AC，BC 上的点，$\angle ABD=2\angle BAE$，$BE=3\sqrt{2}$，$CD=7$，求 BD 的长．



解：延长 CA 到 F，使 $DF=BD$，连接 BF，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H.



$\because \angle BAC=90^{\circ}$，$AB=AC$，$\therefore \angle ABC=\angle C=45^{\circ}$.

设 $\angle BAE=\alpha$，则 $\angle AEH=45^{\circ}+\alpha$，$\angle ABD=2\alpha$，

$\angle ADB=90^{\circ}-2\alpha$，$\angle F=\angle DBF=45^{\circ}+\alpha$，

$\therefore \angle AEH=\angle F$.

$\because \angle AHE=\angle BAF=90^{\circ}$，$\therefore \triangle AEH\backsim\triangle BFA$，

$\therefore \dfrac{AF}{EH}=\dfrac{AB}{AH}=\sqrt{2}$，$\therefore AF=\sqrt{2}EH$，

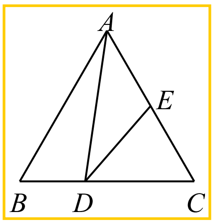
设 $EH=\sqrt{2}x$，则 $AF=2x$，$AH=BH=\sqrt{2}x+3\sqrt{2}$，

$AB=AC=2x+6$，$AD=2x-1$，$BD=DF=AD+AF=4x-1$，

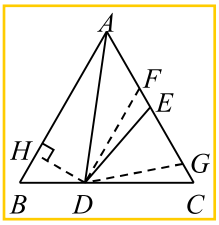
在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，$(2x+6)^{2}+(2x-1)^{2}=(4x-1)^{2}$，

解得 $x=-1$ 或 $x=\dfrac{9}{2}$，$\therefore BD=4x-1=17$

43．如图，在等边$\triangle ABC$ 中，点 D，E 分别为边 BC，AC 上的点，连接 AD，DE，$\angle ADB=2\angle CDE$，$BD=3$，$CE=4$，求 CD 的长.



解：在 AC 上截取 $AF=BD$，在 CE 上截取 $CG=EF$，连接 DF，DG，过点 D 作 $DH\perp AB$ 于点 H.



$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore AC=BC$，$\angle C=60^{\circ}$，

$\therefore CF=CD$，$\therefore \triangle CDF$ 是等边三角形，

$\therefore DF=DC$，$\angle DFE=\angle C$，$\therefore \triangle DEF\cong\triangle DGC$，

$\therefore DE=DG$，$\angle EDF=\angle GDC$，

$\therefore \angle DEG=\angle DGE$，$\angle GDF=\angle CDE$.

设 $\angle GDF=\angle CDE=\alpha$，则 $\angle ADB=2\alpha$，

$\angle DGE=\angle DEG=120^{\circ}-\alpha$，$\angle EDG=2\alpha-60^{\circ}$，

$\angle DAG=2\alpha-60^{\circ}$，$\therefore \angle EDG=\angle DAG$，

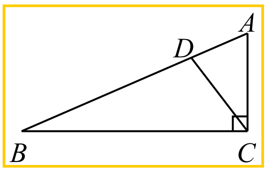
$\therefore \angle ADG=\angle DEG=\angle DGE$，

$\therefore AD=AG=AF+FG=BD+CE=3+4=7$．

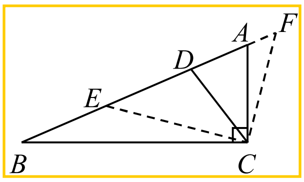
$BH=\frac{1}{2}BD=\frac{3}{2}$，$DH=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$\therefore AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=\frac{13}{2}$，

$\therefore BC=AB=AH+BH=8$，$\therefore CD=BC-BD=5$．

44．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，点 D 为 AB 边上一点，$AD<BD$，$\angle ADC=2\angle ACD$，$AB=8$，$CD=3$，求 AD 的长．



解：在 DB 上截取 $DE=DC$，延长 BA 到 F，使 $DF=DC$，连接 CE，CF．



则 $\angle DCE=\angle AEC$，$\angle DCF=\angle F$．

设 $\angle ACD=\alpha$，则 $\angle BCD=90°-\alpha$，$\angle ADC=2\alpha$，

$\angle DCE=\angle AEC=\alpha$，$\angle DCF=\angle F=90°-\alpha$，

$\therefore \angle ACD=\angle AEC$，$\angle BCD=\angle F$．

$\because \angle CAD=\angle EAC$，$\angle CBD=\angle FBC$，

$\therefore \triangle ACD\backsim\triangle AEC$，$\triangle BCD\backsim\triangle BFC$，

$\therefore \frac{AC}{AD}=\frac{AE}{AC}$，$\frac{BC}{BD}=\frac{BF}{BC}$，

$\therefore AC^2=AD\cdot AE$，$BC^2=BD\cdot BF$．

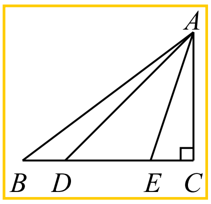
设 $AD=x$，则 $AE=x+3$，$BD=8-x$，$BF=11-x$，

$\therefore AC^2=x(x+3)$，$BC^2=(8-x)(11-x)$，

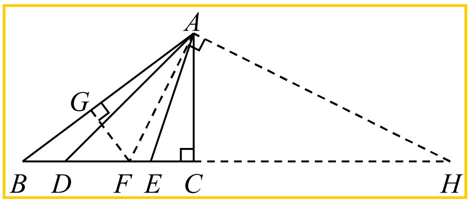
$\because AC^2+BC^2=AB^2$，$\therefore x(x+3)+(8-x)(11-x)=8^2$，

解得 $x=2$ 或 $x=6$（舍去），即 AD 的长为 2．

45．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=6$，$BC=8$，点 D，E 为边 BC 上两点（点 D 在点 E 左侧），且 $BD=CE$，$\angle DAE=\frac{1}{2}\angle BAC$，求 DE 的长．



解：作 $\angle BAC$ 的角平分线 AF 交 BC 于点 F，过点 F 作 $FG\perp AB$ 于点 G，



过点 A 作 $AH\perp AF$ 交 BC 的延长线于点 G.

$\because \angle ACB=90°$，$\therefore FG=FC$，$\angle H=\angle CAF=90°-\angle AFC$.

$\because AC=6$，$BC=8$，$\therefore AB=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

设 $FG=FC=x$，则 $BF=8-x$.

$\because S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}AB\cdot FG=\frac{1}{2}BF\cdot AC$，$\therefore AB\cdot FG=BF\cdot AC$，

$\therefore 10x=6(8-x)$，解得 $x=3$，$\therefore FC=3$，

$\because \frac{AC}{CH}=\tan H=\tan\angle CAF=\frac{FC}{AC}=\frac{1}{2}$，$\therefore CH=2AC=12$.

设 $BD=CE=x$，则 $DE=8-2x$，$DC=8-x$，$DH=20-x$.

$\therefore AD^2=(8-x)^2+6^2$.

$\because \angle DAE=\frac{1}{2}\angle BAC$，$\therefore \angle DAE=\angle CAF=\angle H$.

$\because \angle ADE=\angle HDA$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle HDA$，$\therefore \frac{AD}{DE}=\frac{DH}{AD}$，

$\therefore AD^2=DE\cdot DH$，$\therefore (8-x)^2+6^2=(8-2x)(20-x)$，

解得 $x=30$（舍去）或 $x=2$，$\therefore DE=8-2x=4$.

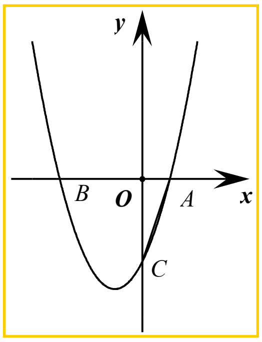
题型六 坐标系中的二倍角问题

宿迁·中考

46．如图，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 交 x 轴于 A、B 两点，其中点 A 坐标为(1，0)，与 y 轴交于点 $C(0,\ -3)$。

(1)求抛物线的函数表达式；

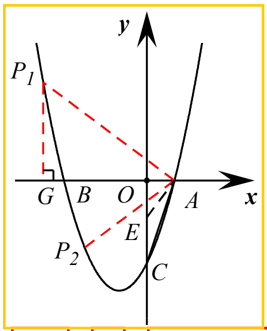
(2)连接 AC，点 P 在抛物线上，且满足 $\angle PAB=2\angle ACO$，求点 P 的坐标；



简析(1)抛物线的函数表达式为 $y=x^2+2x-3$

(2)如图，在 OC 上取点 E，使 $AE=CE$，则 $\angle AEO=2\angle ACO=\angle PAB$；设 $OE=t$，则 $AE=3-t$，在 Rt$\triangle AOE$

中，由勾股定理可得 $1+t^2=(3-t)^2$，解得 $t=\frac{4}{3}$，故 $\tan\angle AEO=\frac{OA}{OE}=\frac{3}{4}$，即 $\tan\angle PAB=\frac{3}{4}$；



①当点P在x轴上方时，作$PG\perp x$轴于点G，则$\frac{PG}{AG}=\frac{3}{4}$，设$PG=3m>0$，则$AG=4m$，点$P$的坐标为$(1-4m，3m)$，将其代入抛物线的解析式，可得$3m=(1-4m)^2+2(1-4m)-3$，解得$m=\frac{19}{16}$($m=0$舍去)，

故点P的坐标为$(-\frac{15}{4},\frac{57}{16})$

②当点P在x轴下方时，同理可得$P\left(-\frac{9}{4},-\frac{39}{16}\right)$

综上所述：点P的坐标为$\left(-\frac{15}{4},\frac{57}{16}\right)$或$\left(-\frac{9}{4},-\frac{39}{16}\right)$

盐城·中考

47．如图，二次函数$y=k(x-1)^2+2$的图像与一次函数$y=kx-k+2$的图像交于A、B两点，点B在点A的右侧，直线AB分别与x轴、y轴交于C、D两点，其中$k<0$.

(1)求AB两点的横坐标；

(2)二次函数图像的对称轴与x轴交于点E，是否存在实数k，使得$\angle ODC=2\angle BEC$？若存在，求出k的值；若不存在，说明理由。

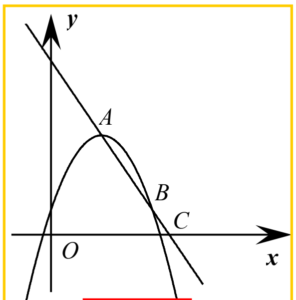
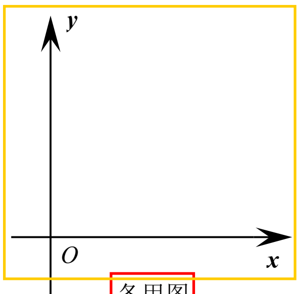


图17-17-1



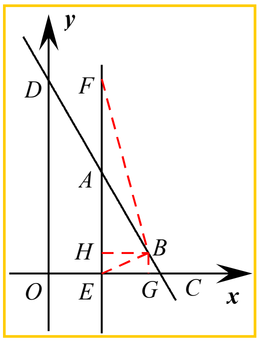
备用图

简析

(1)令$k(x-1)^2+2=kx-k+2$，即$(x-1)^2=x-1$，解得$x=1$或2，即A、B两点的横坐标分别为1、2；

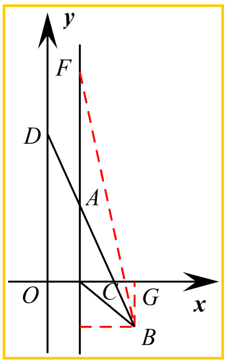
(2)由前知$A(1，2)$，$B(2，k+2)$；

①情形一：当$k+2>0$，即$-2<k<0$时，点B在x轴上方，



如图(已隐去抛物线)过点 B 分别向 x 轴、对称轴作垂线，垂足依次为 G、H，则 $\tan\angle BEC=\dfrac{BG}{EG}=k+2$；在 EA 的延长线上取点 F，使 $AF=AB$，连接 BF，则 $\angle BAH=2\angle BFH$，又 $\angle BAH=\angle ODC=2\angle BEC$，故 $\angle BFH=\angle BEC$；易得 $BH=1$，$AH=-k$，则 $AF=AB=\sqrt{k^2+1}$，从而 $FH=\sqrt{k^2+1}-k$，故 $\tan\angle BFH=\dfrac{BH}{FH}=\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}-k}=\sqrt{k^2+1}+k$，所以有 $k+2=\sqrt{k^2+1}+k$，解得 $k=-\sqrt{3}$（$k=\sqrt{3}$ 舍去）；

②情形二：当 $k+2<0$，即 $k<-2$ 时，点 B 在 x 轴下方，



如图(已隐去抛物线)，同上作相关辅助线，同理有 $\tan\angle BEC=\dfrac{BG}{EG}=-k-2, \tan\angle BFH=\sqrt{k^2+1}+k$，从而 $-k-2=\sqrt{k^2+1}+k$，解得 $k=\dfrac{-4-\sqrt{7}}{3}$（$k=\dfrac{-4+\sqrt{7}}{3}>-2$，故舍去）；

综上所述：k 的值为 $-\sqrt{3}$ 或 $\dfrac{-4-\sqrt{7}}{3}$.

反思：（2）是一个等腰三角形存在性问题，可借助代数方法盲解盲算，这里并未展开；（3）中存在“倍半角”关系，这里首先利用平行导角，将 $\angle ODC$ 转化为 $\angle BAH$，借助 A、B 两点的坐标来刻画其正切值，然后构造其“半角” $\angle BFH$，最后列方程求解需。要特别提醒的是，这里根据点 B 的纵坐标的正负性，即点 B 与 x 轴的位置关系分两类讨论，很容易漏解。另外，本题还有其他解法，请自行探究。

河南·中考

48．如图，抛物线 $y=ax^2+6x+c$ 交 x 轴于 A、B 两点，交 y 轴于点 C。直线 $y=x-5$ 经过点 B、C。

（1）求抛物线的解析式；

（2）过点 A 的直线交直线 BC 于点 M，连接 AC，当直线 AM 与直线 BC 的夹角等于 $\angle ACB$ 的 2 倍时，请直接写出点 M 的坐标。

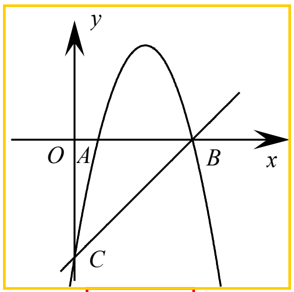
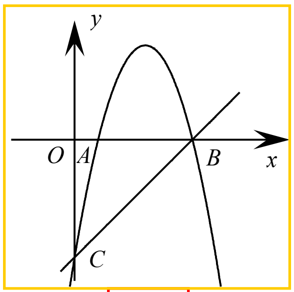


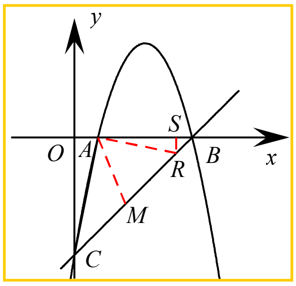
图17-18-1



备用图

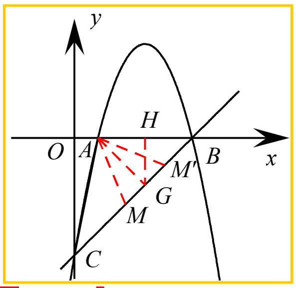
简析：(1)抛物线的解析式为 $y=-x^2+6x-5$

(2)如图，当 $\angle ACM=\angle CAM$ 时，有 $\angle AMB=2\angle ACB$，此时点 M 符合题意；再过点 A 作 AC 的垂线，交直线 BC 于点 R，作 $RS\perp x$ 轴于点 S，



易证 $\tan\angle RAS=\tan\angle ACO=\frac{1}{5}$，即 $\frac{RS}{AS}=\frac{1}{5}$；又易证 $RS=BS$，故 $\frac{BS}{AS}=\frac{1}{5}$，从而 $BS=\frac{1}{6}AB=\frac{2}{3}$，点 R 的坐标为 $(\frac{13}{3},-\frac{2}{3})$；易证点 M 为 CR 的中点，所以点 M 的坐标 $(\frac{13}{6},-\frac{17}{6})$

如图，作 $AG\perp BC$ 于点 G，再作 AM 关于直线 AG 的对称线段 AM'，



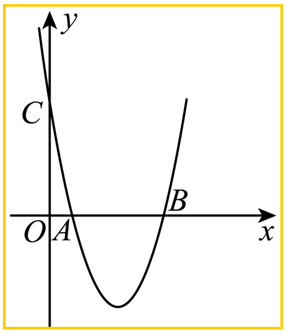
则 $\angle AM'M=\angle AMM'=2\angle ACB$，故点 M' 是符合题意的另一个点；作 $GH\perp x$ 轴于点 H，易证 $GH=AH=BH=2$，则点 G 的坐标为(3，－2)；因为点 G 为 MM 的中点，所以点 M 的坐标为 $\left(\frac{23}{6},-\frac{7}{6}\right)$；因此，点 M 的坐标为 $(\frac{13}{6},-\frac{17}{6})$ 或 $\left(\frac{23}{6},-\frac{7}{6}\right)$

反思：第(2)问看似“倍半角”问题，却采取了“垂直处理”策略，结合中点坐标公式加以解决。“成也模型，败也模型”，切勿形成思维定式，盲目套用模型。当然，这两个问题都还有其他的处理方式，可自行探索。

总结的话：数学中转化思想无处不在，所谓“倍半角”问题，其解题策略大体也是围绕着转化思想进行的，或将“倍角”变为“半角”，或将“半角”变为“倍角”，最终转化为等角问题，当然变化手段可能不一，比如作“倍角”的角平分线或者构造等腰三角形，再如将“半角”翻折等。总之，具体问题需要具体对待，并无绝对的通法、简法，一切都要依据题目的条件以及结论去分析、构造，以至于解决。

2023·内蒙古赤峰·统考中考真题

49．如图，抛物线$y=x^2-6x+5$与x轴交于点A，B，与y轴交于点C，点$D(2,m)$在抛物线上，点E在直线BC上，若$\angle DEB=2\angle DCB$，则点E的坐标是__________．



【答案】$(\frac{17}{5},\frac{8}{5})$ 和 $(\frac{33}{5},-\frac{8}{5})$

【分析】先根据题意画出图形，先求出D点坐标，当E点在线段BC上时：$\angle DEB$是△DCE 的外角，$\angle DEB=2\angle DCB$，而$\angle DEB=\angle DCE+\angle CDE$，所以此时$\angle DCE=\angle CDE$，有$CE=DE$，可求出$BC$所在直线的解析式$y=-x+5$，设$E$点$(a,-a+5)$坐标，再根据两点距离公式，$CE=DE$，得到关于$a$的方程，求解$a$的值，即可求出$E$点坐标；当$E$点在线段$CB$的延长线上时，根据题中条件，可以证明$BC^2+BD^2=DC^2$，得到$\angle DBC$为直角三角形，延长$EB$至$E'$，取$BE'=BE$，此时，$\angle DE'E=\angle DEE'=2\angle DCB$，从而证明$E'$是要找的点，应为$OC=OB$，$\triangle OCB$为等腰直角三角形，点$E$和$E'$关于$B$点对称，可以根据$E$点坐标求出$E'$点坐标．

【详解】解：在$y=x^2-6x+5$中，当$x=0$时，$y=5$，则有$C(0,5)$，

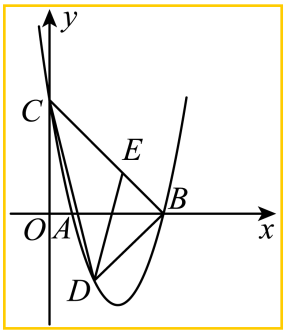
令$y=0$，则有$x^2-6x+5=0$，

解得：$x_1=1,x_2=6$，

$\therefore A(1,0)$，$B(5,0)$，

根据D点坐标，有$m=2^2-6\times2+5=-3$

所以D点坐标$(2,-3)$



设BC所在直线解析式为$y=kx+b$，其过点$C(0,5)$、$B(5,0)$

有$\begin{cases}b=5\\5k+b=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=-1\\b=5\end{cases}$

$\therefore BC$所在直线的解析式为：$y=-x+5$

当E点在线段BC上时，设$E(a,-a+5)$

$\angle DEB=\angle DCE+\angle CDE$

而$\angle DEB=2\angle DCB$

$\therefore \angle DCE=\angle CDE$

$\therefore CE=DE$

因为：$E(a,-a+5)$，$C(0,5)$，$D(2,-3)$

有$\sqrt{a^2+(-a+5-5)^2}=\sqrt{(a-2)^2+[-a+5-(-3)]^2}$

解得：$a=\frac{17}{5}$，$-a+5=\frac{8}{5}$

所以E点的坐标为：$(\frac{17}{5},\frac{8}{5})$

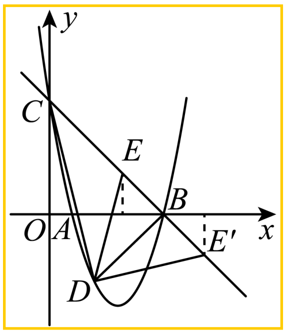
当E在CB的延长线上时，

在$\triangle BDC$中，$BD^2=(5-2)^2+3^2=18$，$BC^2=5^2+5^2=50$，$DC^2=(5+3)^2+2^2=68$

$\therefore BD^2+BC^2=DC^2$

$\therefore BD\perp BC$

如图延长EB至E'，取$BE'=BE$，



则有$\triangle DEE'$为等腰三角形，$DE=DE'$，

$\therefore \angle DEE'=\angle DE'E$

又$\because \angle DEB=2\angle DCB$

$\therefore \angle DE'E=2\angle DCB$

则E'为符合题意的点，

$\because OC=OB=5$

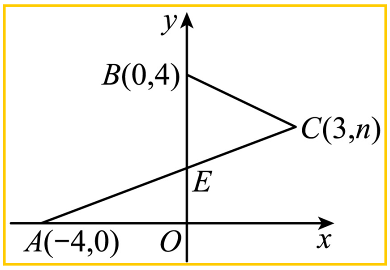
$\therefore \angle OBC=45^\circ$

E'的横坐标：$5+(5-\frac{17}{5})=\frac{33}{5}$，纵坐标为$-\frac{8}{5}$；

综上E点的坐标为：$(\frac{17}{5},\frac{8}{5})$或$(\frac{33}{5},-\frac{8}{5})$，

故答案为：$\left(\frac{17}{5},\frac{8}{5}\right)$或$\left(\frac{33}{5},-\frac{8}{5}\right)$

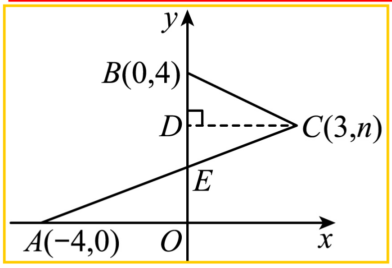
50．如图，在平面直角坐标系中，点A、B的坐标分别为$(-4,0)$、$(0,4)$，点$C(3,n)$在第一象限内，连接AC、BC．已知$\angle BCA=2\angle CAO$，则$n=$__________．



【答案】$\frac{14}{5}$

【分析】过点C作CD⊥y轴，交y轴于点D，则CD∥AO，先证△CDE≌△CDB（ASA），进而可得DE＝DB＝4－n，再证△AOE∽△CDE，进而可得$\frac{4}{3}=\frac{2n-4}{4-n}$，由此计算即可求得答案．

【详解】解：如图，过点C作CD⊥y轴，交y轴于点D，则CD∥AO，



∴∠DCE＝∠CAO，

∵∠BCA＝2∠CAO，

∴∠BCA＝2∠DCE，

∴∠DCE＝∠DCB，

∵CD⊥y轴，

∴∠CDE＝∠CDB＝90°，

又∵CD＝CD，

∴△CDE≌△CDB（ASA），

∴DE＝DB，

∵B（0，4），C（3，n），

∴CD＝3，OD＝n，OB＝4，

∴DE＝DB＝OB－OD＝4－n，

∴OE＝OD－DE

＝n－（4－n）

＝2n－4，

∵A（－4，0），

∴AO＝4，

∵CD∥AO，

∴△AOE∽△CDE，

∴$\frac{AO}{CD}=\frac{OE}{DE}$，

∴$\frac{4}{3}=\frac{2n-4}{4-n}$，

解得：$n=\frac{14}{5}$

内蒙古鄂尔多斯·统考中考真题

51．如图1，抛物线$y=x^2+bx+c$交x轴于A，B两点，其中点A的坐标为(1，0)，与y轴交于点C（(0，－3)．

（1）求抛物线的函数解析式；

（2）如图2，连接AC，点P在抛物线上，且满足∠PAB＝2∠ACO，求点P的坐标．

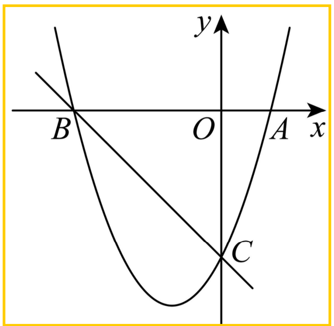


图1

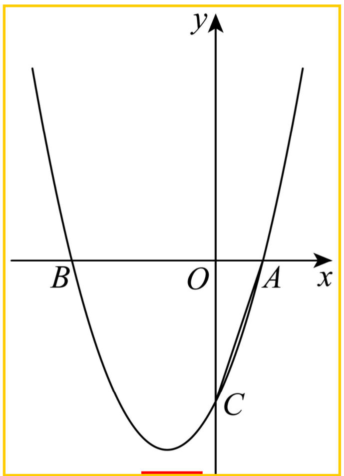


图2

【答案】（1）$y=x^2+2x-3$；（2）$(-\frac{15}{4}，\frac{57}{16})$，$(-\frac{9}{4}，-\frac{39}{16})$

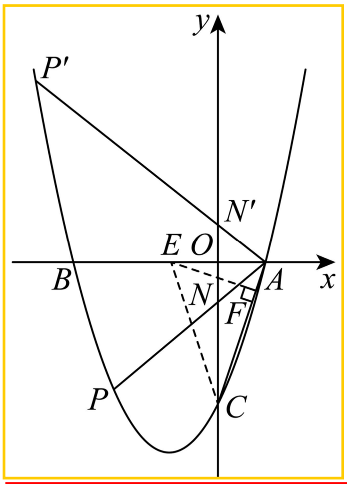
【分析】（1）将点A，点C坐标代入解析式可求解；

（2）在BO上截取OE＝OA，连接CE，过点E作EF⊥AC，由"SAS"可证△OCE≌△OCA，可得∠ACO＝∠ECO，CE＝AC＝$\sqrt{10}$，由面积法可求EF的长，由勾股定理可求CF的长，可求tan∠ECA＝tan∠PAB＝$\frac{3}{4}$，分点P在AB上方和下方两种情况讨论，求出AP解析式，联立方程组可求点P坐标．

【详解】解：（1）∵抛物线$y=x^2+bx+c$交x轴于点A（1，0），与y轴交于点C（0，－3），

∴$\begin{cases}0=1+b+c\\c=-3\end{cases}$，解得：$\begin{cases}b=2\\c=-3\end{cases}$，∴抛物线解析式为：$y=x^2+2x-3$；

（2）如图，在BO上截取OE＝OA，连接CE，过点E作EF⊥AC，



∵点 A（1，0），点 C（0，－3），

∴OA＝1，OC＝3，

∴AC＝$\sqrt{OA^2+OC^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$，

∵OE＝OA，∠COE＝∠COA＝90°，OC＝OC，

∴△OCE≌△OCA（SAS），

∴∠ACO＝∠ECO，CE＝AC＝$\sqrt{10}$，

∴∠ECA＝2∠ACO，

∵∠PAB＝2∠ACO，

∴∠PAB＝∠ECA，

∵$S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}$AE×OC＝$\frac{1}{2}$AC×EF

∴EF＝$\frac{2\times3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$，

∴CF＝$\sqrt{CE^2-EF^2}=\sqrt{10-\frac{18}{5}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$，

∴tan∠ECA＝$\frac{EF}{CF}=\frac{3}{4}$，

如图 2，当点 P 在 AB 的下方时，设 AO 与 y 轴交于点 N，

∵∠PAB＝∠ECA，

∴tan∠ECA＝tan∠PAB＝$\frac{ON}{AO}=\frac{3}{4}$，

∴ON＝$\frac{3}{4}$，

∴点 N（0，$\frac{3}{4}$），

又∵点 A（1，0），

∴直线 AP 解析式为：y＝$\frac{3}{4}$x－$\frac{3}{4}$，

联立方程组得：$\begin{cases} y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4} \\ y=x^2+2x-3 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases}x_1=1\\y_1=0\end{cases}$或$\begin{cases}x_2=-\dfrac{9}{4}\\y_2=-\dfrac{39}{16}\end{cases}$，

∴点 P 坐标为：$(-\frac{9}{4}, -\frac{39}{16})$

当点 P 在 AB 的上方时，同理可求直线 AP 解析式为：$y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$，

联立方程组得：$\begin{cases}y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}\\y=x^2+2x-3\end{cases}$，

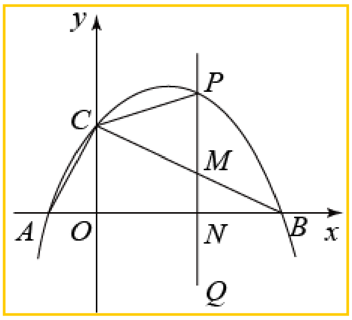
解得：$\begin{cases}x_1=1\\y_1=0\end{cases}$或$\begin{cases}x_2=-\dfrac{15}{4}\\y_2=\dfrac{57}{16}\end{cases}$，

∴点 P 坐标为：$(-\frac{15}{4}, \frac{57}{16})$，

综上所述：点 P 的坐标为$(-\frac{15}{4}, \frac{57}{16})$，$(-\frac{9}{4}, -\frac{39}{16})$

2022·内蒙古呼和浩特·统考中考真题

52．如图，抛物线$y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$经过点$B(4,0)$和点$C(0,2)$，与x轴的另一个交点为 A，连接AC、BC.



(1)求抛物线的解析式及点 A 的坐标；

(2)如图，点P是第一象限内抛物线上的动点，过点P作$PQ // y$轴，分别交BC、x轴于点M、N，当△PMC中有某个角的度数等于$\angle OBC$度数的 2 倍时，请求出满足条件的点P的横坐标.

【答案】(1)$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$；$A$（-1，0）；

(2)2 或$\frac{3}{2}$

【分析】(1）利用待定系数法解答，即可求解；

(2）先求出$\tan\angle OBC=\frac{OC}{OB}=\frac{1}{2}$，再求出直线 BC 的解析式，然后设点$P\left(a,-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}a+2\right)$，则

$M\left(a,-\frac{1}{2}a+2\right)$，$CF=a$，可得 $PM=-\frac{1}{2}a^2+2a$，再分三种情况讨论：若∠PCM=2∠OBC，过点 C 作 CF∥x 轴交 PM 于点 F；若∠PMC=2∠OBC；若∠CPM=2∠OBC，过点 P 作 PG 平分∠CPM，则∠MPG=∠OBC，即可求解.

【详解】(1) 解：把点 $B(4,0)$ 和点 $C(0,2)$ 代入，得：

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}\times16+4b+c=0\\ c=2\end{cases}$$，解得：$$\begin{cases}b=\frac{3}{2}\\ c=2\end{cases}$$，

∴抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$；

令 $y=0$，则 $-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2=0$，

解得：$x_1=-1, x_2=4$，

∴点 A（-1，0）；

(2) 解：∵点 B（4，0），C（0，2），

∴OB=4，OC=2，

∴ $\tan\angle OBC=\frac{OC}{OB}=\frac{1}{2}$，

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b_1\left(k\neq0\right)$，

把点 B（4，0），C（0，2）代入得：

$$\begin{cases}4k+b_1=0\\ b_1=2\end{cases}$$，解得：$$\begin{cases}k=-\frac{1}{2}\\ b_1=2\end{cases}$$

∴直线 BC 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+2$，

设点 $P\left(a,-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}a+2\right)$，则 $M\left(a,-\frac{1}{2}a+2\right)$，CF=a，

∴ $PM=\left(-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}a+2\right)-\left(-\frac{1}{2}a+2\right)=-\frac{1}{2}a^2+2a$，

若∠PCM=2∠OBC，过点 C 作 CF∥x 轴交 PM 于点 F，如图甲所示，

∴∠FCM=∠OBC，即 $\tan\angle FCM=\tan\angle OBC=\frac{1}{2}$，

∴∠PCF=∠FCM，

∵PQ∥y 轴，

∴CF⊥PQ，

∴PM=2FM，

∴ $FM=-\frac{1}{4}a^2+a$，

∴ $\frac{-\frac{1}{4}a^2+a}{a}=\frac{1}{2}$，解得：解得：a=2 或 0（舍去），

∴点 P 的横坐标为 2；

若$\angle PMC=2\angle OBC$，

$\because\angle PMC=\angle BMN$，

$\therefore\angle BMN=2\angle OBC$，

$\because\angle OBC+\angle BMN=90°$，

$\therefore\angle OBC=30°$，与$\tan\angle OBC=\frac{OC}{OB}=\frac{1}{2}$相矛盾，不合题意，舍去；

若$\angle CPM=2\angle OBC$，如图乙所示，过点P作PG平分$\angle CPM$，则$\angle MPG=\angle OBC$，

$\because\angle PMG=\angle BMN$，

$\therefore\triangle PMG\backsim\triangle BMN$，

$\therefore\angle PGM=\angle BNM=90°$，

$\therefore\angle PGC=90°$，

$\because PG$平分$\angle CPM$，即$\angle MPG=\angle CPG$，

$\therefore\angle PCM=\angle PMC$，

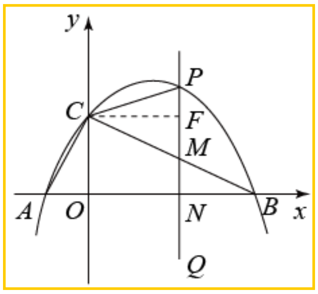
$\therefore PC=PM$，

$\therefore -\frac{1}{2}a^2+2a=\sqrt{a^2+\left(-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}a+2-2\right)^2}$，

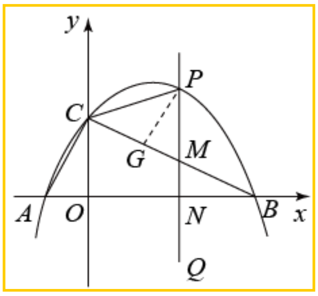
解得：$a=\frac{3}{2}$或0（舍去），

$\therefore$点P的横坐标为$\frac{3}{2}$；

综上所述，点P的横坐标为2或$\frac{3}{2}$.



图甲



图乙

2023·湖北黄冈·统考中考真题

53．已知抛物线$y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$与x轴交于$A,B(4,0)$两点，与y轴交于点$C(0,2)$，点P为第一象限抛物线上的点，连接CA,CB,PB,PC.

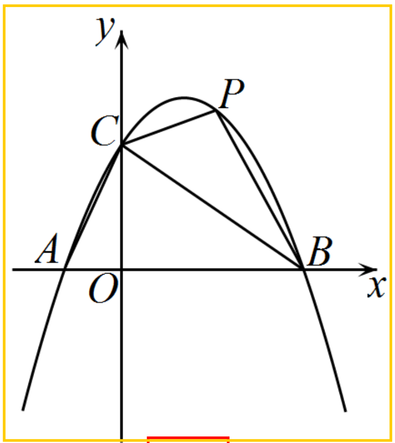
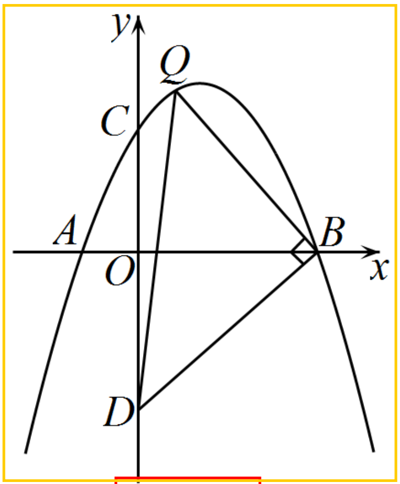


图1



备用图

(1)直接写出结果；$b=$______，$c=$______，点A的坐标为______，$\tan\angle ABC=$______；

(2)如图1，当$\angle PCB=2\angle OCA$时，求点P的坐标；

【答案】(1)$\frac{3}{2}$，2，$(-1,0)$，$\frac{1}{2}$；(2)$(2,3)$

【分析】(1)利用待定系数法求二次函数解析式即可求得$b=\frac{3}{2}$、$c=2$，从而可得$OB=4$，$OC=2$，由$y=0$，可得$-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2=0$，求得$A(-1,0)$，在$Rt\triangle COB$中，根据正切的定义求值即可；

(2)过点C作$CD\,//\,x$轴，交BP于点D，过点P作$PE\,//\,x$轴，交y轴于点E，由$\tan\angle OCA=\tan\angle ABC=\frac{1}{2}$，即$\angle OCA=\angle ABC$，再由$\angle PCB=2\angle ABC$，可得$\angle EPC=ABC$，证明$\triangle PEC\sim\triangle BOC$，可得$\frac{EP}{OB}=\frac{EC}{OC}$，设点$P$坐标为$\left(t,-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t+2\right)$，可得$\frac{t}{4}=\frac{-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t}{2}$，再进行求解即可；

【详解】(1)解：∵抛物线$y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$经过点$B(4,0)$，$C(0,2)$，

$\therefore\begin{cases}-8+4b+c=0\\c=2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}b=\frac{3}{2}\\c=2\end{cases}$，

∴抛物线解析式为：$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$，

∵抛物线$y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$与x轴交于A、$B(4,0)$两点，

∴$y=0$时，$-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2=0$，解得：$x_1=-1$，$x_2=4$，

$\therefore A(-1,0)$，

$\therefore OB=4$，$OC=2$，

在$Rt\triangle COB$中，$\tan\angle ABC=\frac{OC}{OB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$；

故答案为：$\frac{3}{2}$，2，$(-1,0)$，$\frac{1}{2}$；

（2）解：过点C作$CD // x$轴，交BP于点D，过点P作$PE // x$轴，交y轴于点E，

$\because AO=1$，$OC=2$，$OB=4$，

$\therefore \tan\angle OCA=\frac{AO}{CO}=\frac{1}{2}$，

由（1）可得，$\tan\angle ABC=\frac{1}{2}$，即$\tan\angle OCA=\tan\angle ABC$，

$\therefore \angle OCA=\angle ABC$，

$\because \angle PCB=2\angle OCA$，

$\therefore \angle PCB=2\angle ABC$，

$\because CD // x$轴，$EP // x$轴，

$\therefore \angle ACB=\angle DCB$，$\angle EPC=\angle PCD$，

$\therefore \angle EPC=ABC$，

又$\because \angle PEC=\angle BOC=90°$，

$\therefore \triangle PEC\backsim\triangle BOC$，

$\therefore \frac{EP}{OB}=\frac{EC}{OC}$，

设点P坐标为$\left(t,-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t+2\right)$，则$EP=t$，$EC=-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t+2-2=-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t$，

$\therefore \frac{t}{4}=\frac{-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t}{2}$，解得：$t=0$（舍），$t=2$，

$\therefore$点P坐标为$(2,3)$．

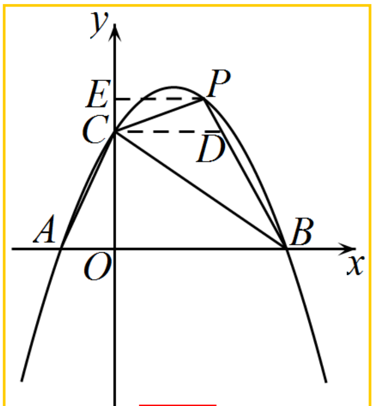
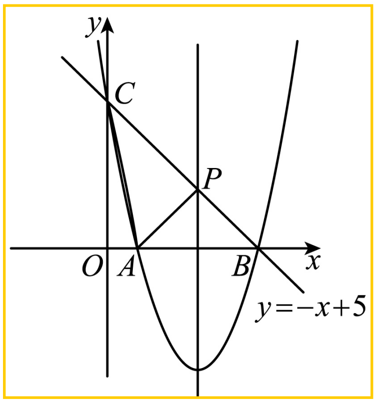


图1

54．（2020·湖南张家界·中考真题）如图，抛物线$y=ax^2-6x+c$交x轴于A,B两点，交y轴于点C．直线$y=-x+5$经过点B,C．



（1）求抛物线的解析式；

（2）在直线BC上是否存在点M，使AM与直线BC的夹角等于$\angle ACB$的2倍？若存在，请求出点M的坐标；若不存在，请说明理由.

【答案】（1）$y=x^2-6x+5$；

（2）存在使AM与直线BC的夹角等于$\angle ACB$的2倍的点，且坐标为M_1（$\frac{13}{6},\frac{17}{6}$），$M_2$（$\frac{23}{6}$，$\frac{7}{6}$）.

【分析】（1）先根据直线$y=-x+5$经过点B,C，即可确定B、C的坐标，然后用带定系数法解答即可；

（2）作AN⊥BC于N，NH⊥x轴于H，作AC的垂直平分线交BC于M1，AC于E；然后说明△ANB为等腰直角三角形，进而确定N的坐标；再求出AC的解析式，进而确定M_1E的解析式；然后联立直线BC和M_1E的解析式即可求得M_1的坐标；在直线BC上作点M_1关于N点的对称点M_2，利用中点坐标公式即可确定点M_2的坐标

【详解】解：（1）∵直线$y=-x+5$经过点B,C

∴当x=0时，可得y=5，即C的坐标为（0,5）

当y=0时，可得x=5，即B的坐标为（5,0）

∴$\begin{cases}5=a\cdot 0^2-6\times 0+c\\0=5^2a-6\times 5+c\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1\\c=5\end{cases}$

∴该抛物线的解析式为$y=x^2-6x+5$

（2）如图：作AN⊥BC于N，NH⊥x轴于H，作AC的垂直平分线交BC于M1，AC于E，

∵$M_1A=M_1C$，

∴$\angle ACM_1=\angle CAM_1$

∴$\angle AM_1B=2\angle ACB$

∵△ANB为等腰直角三角形.

∴AH=BH=NH=2

∴N（3，2）

设AC的函数解析式为y=kx+b

∵C(0，5),A(1，0)

∴$\begin{cases}5=k\cdot 0+b\\0=k+b\end{cases}$解得b=5，k=-5

∴AC的函数解析式为y=-5x+5

设EM₁的函数解析式为$y=\frac{1}{5}x+n$

∵点E的坐标为$(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$

∴$\frac{5}{2}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+n$，解得：$n=\frac{12}{5}$

∴EM₁的函数解析式为$y=\frac{1}{5}x+\frac{12}{5}$

∵$\begin{cases} y=-x+5 \\ y=\frac{1}{5}x+\frac{12}{5} \end{cases}$ 解得$\begin{cases} x=\frac{13}{6} \\ y=\frac{17}{6} \end{cases}$

∴M_1的坐标为$(\frac{13}{6},\frac{17}{6})$；

在直线BC上作点M_1关于N点的对称点M_2

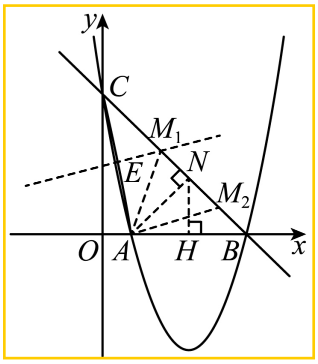
设M_2（a，-a+5）

则有：$3=\frac{\frac{13}{6}+a}{2}$，解得$a=\frac{23}{6}$

∴$-a+5=\frac{7}{6}$

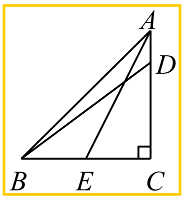
∴M_2的坐标为$(\frac{23}{6}，\frac{7}{6})$.

综上，存在使AM与直线BC的夹角等于$\angle ACB$的2倍的点，且坐标为$M_1(\frac{13}{6},\frac{17}{6})$，$M_2(\frac{23}{6}，\frac{7}{6})$.

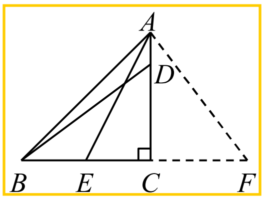


题型七 其它构造方式

55．如图，在Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，点D，E分别在边AC，BC上，且$\angle DBC=2\angle BAE$，$AE=2$，$BD=\sqrt{5}$，求AB的长．



解：延长BC到F，使$CF=CD$，连接AF.



$\because\angle ACF=\angle BCD=90°$，$AC=BC$，$\therefore\triangle ACF\cong\triangle BCD$，

$\therefore AF=BD=\sqrt{5}$，$\angle FAC=\angle DBC=2\angle BAE$.

设$\angle BAE=\alpha$，则$\angle FAC=\angle DBC=2\alpha$，

$\angle AEF=45°+\alpha$，$\angle EAC=45°-\alpha$，$\angle EAF=45°+\alpha$，

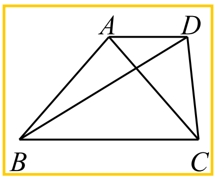
$\therefore\angle AEF=\angle EAF$，$\therefore EF=AF=\sqrt{5}$.

$\because AC^2=AE^2-EC^2=AF^2-CF^2$，

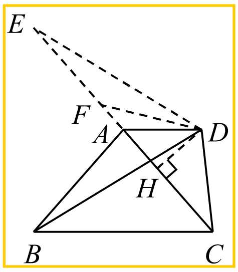
$\therefore 2^2-EC^2=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{5}-EC)^2$，解得$EC=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore AC^2=2^2-EC^2=\dfrac{16}{5}$，$\therefore AB=AC=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

56．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AB=AC$，$\angle ACD=2\angle ABD$，$AD=19$，$CD=25$，求 AB 的长．



解：过点 D 作 $DH\perp AC$ 于点 H，延长 CA 到 F，使 $FH=CH$，连接 DF，



延长 CF 到 E，使 $EF=DF$，连接 DE.

则$EF=DF=DC=25$，$\angle E=\angle EDF$，

$\therefore\angle DFH=\angle ACD=2\angle ABD$，$\angle DFH=2\angle E$，$\therefore\angle E=\angle ABD$.

$\because AD\parallel BC$，$\therefore\angle DAC=\angle ACB$.

$\because AB=AC$，$\therefore\angle ABC=\angle ACB$，

$\therefore\angle DAC=\angle ABC$，$\therefore\angle DAE=\angle DAB$.

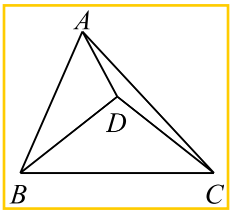
$\because AD=AD$，$\therefore\triangle ADE\cong\triangle ADB$，$\therefore AE=AB=AC$.

设$CH=FH=x$，则$EH=x+25$，$CE=2x+25$，$AC=AE=x+\dfrac{25}{2}$.

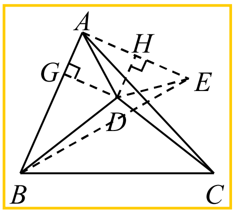
$\therefore AH=\dfrac{5}{2}$，$\therefore DH^2=AD^2-AH^2=\dfrac{819}{4}$，

$\therefore x=FH=\sqrt{DF^2-DH^2}=\dfrac{41}{2}$，$\therefore AB=AC=x+\dfrac{25}{2}=33$

57．如图，在△ABC 中，$AB=4$，$AC=5$，D 为△ABC 内一点，$\angle BDC=2\angle BAD$，$BD=CD$，求△ABD 的面积.



解：将△CDA 绕点 D 顺时针旋转到△BDE，连接 AE，过点 D 作 $DG\perp AB$ 于点 G，$DH\perp AE$ 于点 H.



则 $BE=AC=5$，$AD=DE$，$\angle ADE=\angle BDC=2\angle BAD$，

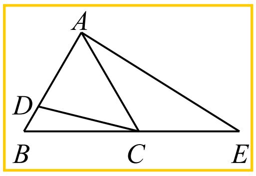
∴$AH=EH$，$\angle ADE=2\angle ADH$，∴$\angle BAD=\angle ADH$，

∴$\angle BAE=\angle BAD+\angle DAH=\angle ADH+\angle DAH=90°$，

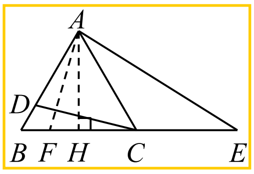
∴$AE=\sqrt{BE^2-AB^2}=3$，∴$DG=AH=EH=\dfrac{3}{2}$，

∴$S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot DG=\dfrac{1}{2}\times4\times\dfrac{3}{2}=3$.

58．如图，在等边△ABC 中，点 D 在边 AB 上，点 E 在 BC 的延长线上，$\angle CAE=2\angle DCB$，$BD=2$，$AD=6$，求 CE 的长.



解：在 BC 上截取 $BF=BD$，连接 AF，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H.



∵△ABC 是等边三角形，∴$AB=BC$.

∵$\angle ABF=\angle CBD$，∴△ABF≌△CBD，

∴$\angle FAB=\angle DCB$，

∵$BD=2$，$AD=6$，∴$CF=6$，$AB=8$，$AH=4\sqrt{3}$.

设 $\angle FAB=\angle DCB=\alpha$，则 $\angle CAE=2\alpha$，$\angle CAF=60°-\alpha$，

$\angle EAF=60°+\alpha$，$\angle AFE=60°+\alpha$，

∴$AE=EF$.

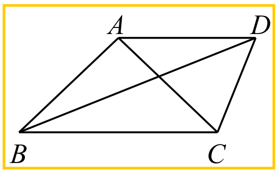
设 $CE=x$，则 $AE=EF=x+6$，$EH=x+4$.

在 Rt△AHE 中，$AH^2+EH^2=AE^2$，

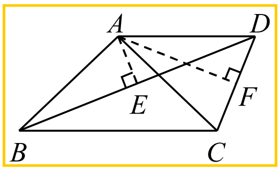
∴$(4\sqrt{3})^2+(x+4)^2=(x+6)^2$，解得 $x=7$，

∴CE 的长为 7.

59．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，BD 平分∠ABC，∠$DAC=2$∠ADB，若 $CD=4$，$BD=10$，求△ACD 的面积.



解：过点 A 作 $AE\perp BD$ 于点 E，$AF\perp CD$ 于点 F.



∵$AB=AD$，∴∠ABD=∠ADB，$BE=DE=\frac{1}{2}BD=5$

∵BD 平分∠ABC，∴∠ABD=∠DBC，

∴∠ADB=∠DBC，∴$AD\parallel BC$，∴∠DAC=∠ACB.

∵∠$DAC=2$∠ADB，∴∠$ACB=2$∠$ADB=2$∠DBC，

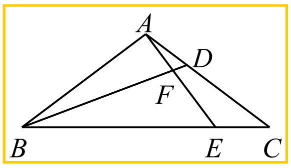
∴∠ACB=∠ABC，∴$AC=AB=AD$，

∴∠CAF=∠DAF，∴∠$DAC=2$∠DAF，∴∠DAF=∠ADB.

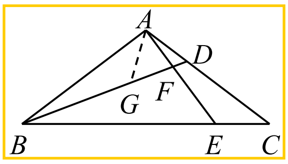
∵∠AFD=∠$DEA=90°$，$AD=DA$，∴△ADF≌△DAE，

∴$AF=DE=5$，∴$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}CD\cdot AF=\frac{1}{2}\times4\times5=10$.

60．如图，在△ABC 中，$AB=AC$，点 D，E 分别是边 AC，BC 上的点，连接 AE 与 BD 交于点 F，∠BFE=∠$BAC=2$∠AEB，探究 AF，EF 与 BF 的数量关系，并证明.



解：在 BD 上截取 $BG=AE$，连接 AG.



∵$AB=AC$，∴∠ABE=∠C，

$\therefore \angle BAC=180°-2\angle C$，

$\therefore \angle AEB=\frac{1}{2}\angle BAC=90°-\angle C$，

$\therefore \angle ABE+\angle AEB=90°$，$\therefore \angle BAE=90°$．

$\because \angle AFD=\angle BFE=\angle BAC$，$\therefore \angle CAE=\angle ABG$，

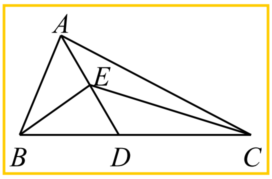
$\therefore \triangle ABG\cong\triangle CAE$，$\therefore \angle AGB=\angle AEC$，$\angle BAG=\angle C$，

$\therefore \angle AGF=\angle AEB=90°-\angle C$，$\angle GAF=90°-\angle BAG=90°-\angle C$，

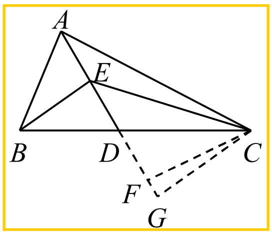
$\therefore \angle AGF=\angle GAF$，$\therefore AF=GF=BF-BG=BF-AE=BF-AF-EF$，

$\therefore BF=2AF+EF$．

61．如图，在$\triangle ABC$中，点D为边BC上一点，$\frac{BD}{DC}=\frac{3}{4}$，点$E$为$AD$的中点，若$\angle BAC=\angle BED=2\angle CED$，求$\frac{BE}{AD}$的值．



解：过点C作$CG\parallel BE$交AD的延长线于点G，在AG上取点F，连接CF，使$CF=CG$．



则$\triangle BDE\backsim\triangle CDG$，$\therefore \frac{BE}{CG}=\frac{BD}{DC}=\frac{3}{4}$．

设$\angle CED=\alpha$，则$\angle CFG=\angle G=\angle BED=\angle BAC=2\alpha$，

$\therefore \angle ECF=\angle CED$，$\angle AEB=\angle CFA$，$\angle BAE=\angle ACF=2\alpha-\angle CAF$，

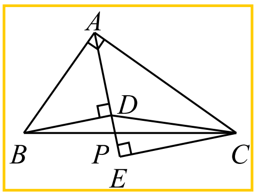
$\therefore EF=CF=CG$，$\triangle ABE\backsim\triangle CAF$，$\therefore \frac{AB}{AC}=\frac{AE}{CF}=\frac{BE}{AF}$

设$BE=3$，$AE=DE=a$，则$EF=CF=CG=4$，$DF=4-a$，$AF=a+4$，

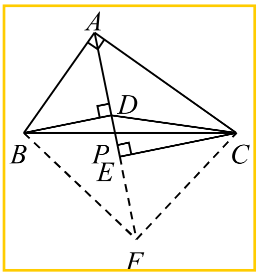
$\therefore \frac{a}{4}=\frac{3}{a+4}$，解得$a=-6$（舍去）或$a=2$，

$\therefore AF=a+4=6$，$\therefore \frac{AB}{AC}=\frac{BE}{AF}=\frac{1}{2}$．

62．如图，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，点P为BC边上一点，连接AP，分别过点B，C作AP的垂线，垂足为D，E，若$\angle ADC=2\angle ABC$，$\frac{BP}{PC}=\frac{3}{4}$，求$\tan\angle ACB$的值．



解：延长AE到F，使$DF=DC$，连接BF，CF.



则$\angle EFC=\angle DCF$，$\therefore \angle ADC=2\angle EFC$.

$\because \angle ADC=2\angle ABC$，$\therefore \angle EFC=\angle ABC$.

$\because \angle FEC=\angle BAC=90°$，$\therefore \triangle EFC\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \dfrac{CE}{AC}=\dfrac{CF}{BC}$，$\angle ECF=\angle ACB$，

$\therefore \angle BCF=\angle ACE$，$\therefore \triangle BCF\backsim\triangle ACE$，

$\therefore \angle CBF=\angle CAF$，$\therefore \angle DFB=\angle ACB=\angle ECF$，

$\therefore \triangle DBF\backsim\triangle EFC$，$\therefore \dfrac{BD}{EF}=\dfrac{DF}{CE}$，$\therefore DF\cdot EF=BD\cdot CE$.

$\because \angle BDP=\angle CEP=90°$，$\angle BPD=\angle CPE$，

$\therefore \triangle BDP\backsim\triangle CEP$，$\dfrac{BD}{CE}=\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{3}{4}$.

设$BD=3$，$CE=4$，$DE=a$，$EF=b$，则$DC=DF=a+b$，

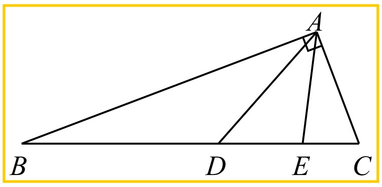
$\therefore (a+b)b=3\times4=12$，$\therefore b^2+ab=12$，$\therefore 2ab=24-2b^2$.

$\because DC^2=CE^2+DE^2$，$\therefore (a+b)^2=16+a^2$，

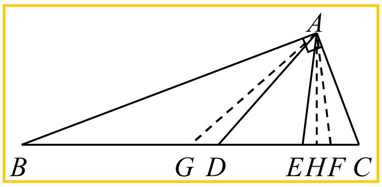
$\therefore b^2+2ab=16$，$\therefore b^2+24-2b^2=16$，$\therefore b=2\sqrt{2}$，

$\therefore \tan\angle ACB=\tan\angle ECF=\dfrac{EF}{CE}=\dfrac{b}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

63．如图，在Rt$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，点D，E为边BC上两点（点D在点E左侧），$\angle BAD=\angle CAE$，$\angle AED=2\angle ADE$，$BD=7$，$CE=2$，求AE，DE的长.



解：取BC中点G，过点A作$AH\perp BC$于点H，在HC上截取$FH=EH$，连接AG，AF.



则 $AG=BG=CG$，∴$\angle BAG=\angle B$.

设 $\angle BAD=\angle CAE=3\alpha$，则 $\angle DAE=90°-6\alpha$，$\angle ADE=30°+2\alpha$，

$\angle AED=60°+4\alpha$，$\angle BAG=\angle B=30°-\alpha$，$\angle AGE=60°-2\alpha$，

$\angle GAE=60°-2\alpha$，$\angle AFE=\angle AEF=120°-4\alpha$，$\angle DAF=30°+2\alpha$，

∴$\angle AGE=\angle GAE$，$\angle ADE=\angle DAF$，

∴$DF=AF=AE=GE$，∴$EF=DG$.

设 $DF=AF=AE=GE=x$，则 $AG=BG=CG=x+2$，

$BC=2x+4$，$EF=DG=7-(x+2)=5-x$，

$EH=FH=\frac{1}{2}EF=\frac{5-x}{2}$，$DE=x-(5-x)=2x-5$，

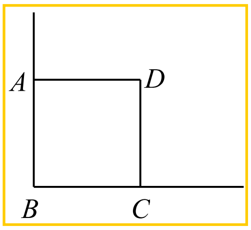
$GH=x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}x=\frac{5+x}{2}$.

∵$AH^2=AG^2-GH^2=AE^2-EH^2$

∴$(x+2)^2-(\frac{5+x}{2})^2=x^2-(\frac{5-x}{2})^2$

解得 $x=4$，∴$AE=4$，$DE=2x-5=3$

64．如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别在 BA，BC 的延长线上，连接 DE，EF，$DE=\sqrt{7}$，$EF=5$，$\angle BEF=2\angle DEF$，求 BF 的长.



解： 如图 1，图 2，过点 D 作 $DG\perp DE$ 交射线 CB 于点 G，连接 EG.

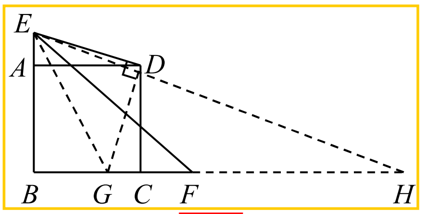


图 1

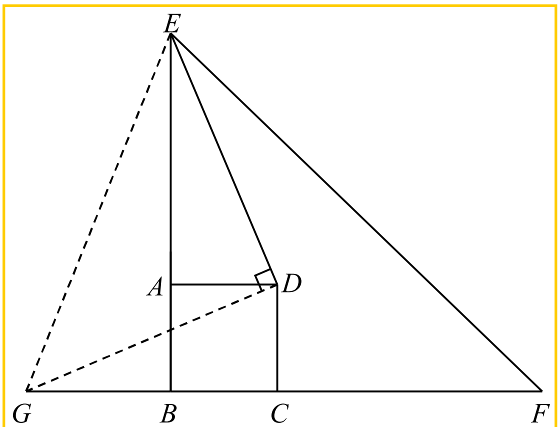


图 2

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，∴$AD=CD$，$\angle DAE=\angle DCG=\angle ADC=90°$，

∴$\angle ADE=\angle CDG$，∴$\triangle ADE\cong\triangle CDG$，

∴$DE=DG=\sqrt{7}$，∴$EG^2=DE^2+DG^2=14$.

如图 1，当 EF 在 $\angle BED$ 内部时，延长 BF 到 H，使 $FH=EF$，连接 EH.

设 $\angle DEF=\alpha$，则 $\angle BEF=2\alpha$，$\angle EFB=90°-2\alpha$，

$\angle FEG=45°-\alpha$，$\angle EHG=\angle FEH=45°-\alpha$，

∴$\angle FEG=\angle EHG$.

∵$\angle EGF=\angle HGE$，∴$\triangle EGF\backsim\triangle HGE$，

∴$\dfrac{EG}{GF}=\dfrac{GH}{EG}$，∴$GF\cdot GH=EG^2$，∴$GF(GF+5)=14$，

解得 $GF=-7$（舍去）或 $GF=2$.

∵$BE^2=EF^2-BF^2=EG^2-BG^2$，

∴$BF^2-BG^2=EF^2-EG^2$，

∴$BF^2-(BF-GF)^2=EF^2-EG^2$，

∴$2GF\cdot BF-GF^2=EF^2-EG^2$，

∴$4BF-2^2=5^2-14$，∴$BF=\dfrac{15}{4}$.

②如图 2，当 EF 在 $\angle BED$ 外部时，

∵$\angle BEF=2\angle DEF$，∴$\angle AED=\angle DEF$.

∵$\triangle ADE\cong\triangle CDG$，∴$\angle AED=\angle CGD$，

∴$\angle DEF=\angle CGD$.

∵$DE=DG$，∴$\angle DEG=\angle DGE$，

∴$\angle GEF=\angle EGF$，∴$GF=EF=5$.

由①知，$2GF\cdot BF-GF^2=EF^2-EG^2$，

∴$10BF-5^2=5^2-14$，∴$BF=\dfrac{18}{5}$.