专题 1-5　正方形基本型（母题溯源）

01 题型·解读

模型解读 1

【模型一】中点+折叠 2

【模型二】双中点（十字架模型拓展） 4

【模型三】对角线模型 11

【模型四】半角模型 11

题型一　中点+折叠模型 15

题型二　双中点模型（十字架拓展） 19

2023·东营·中考真题 19

2203·绥化·中考真题 22

题型三　对角线模型 27

2023·攀枝花·中考真题 34

2023·四川宜宾·统考中考真题 35

题型四　半角模型（七个性质） 37

2023·重庆·中考真题 37

2023·眉山·中考真题 38

2022 达州·中考真题 40

02 满分·技巧

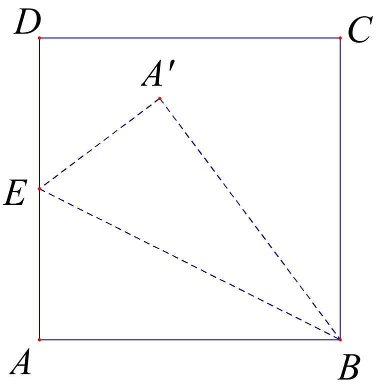
【淘宝店铺：向阳百分百】

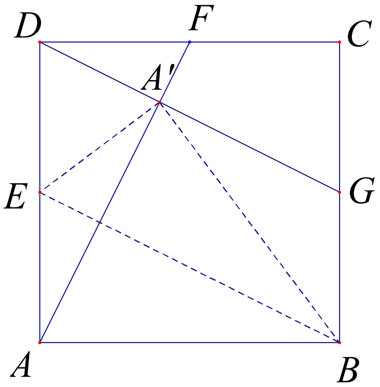
模型解读

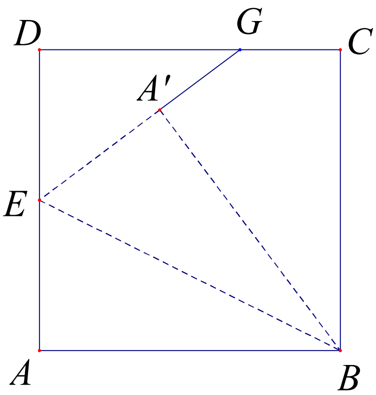
【模型一】中点+折叠

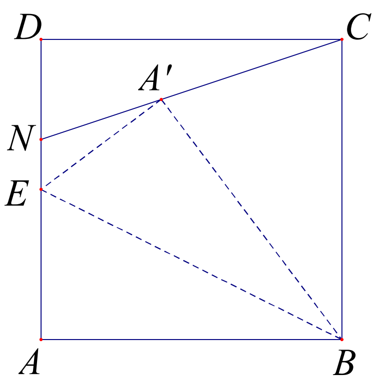
性质一：$AA'\perp A'D$；性质二：F，G 为中点；性质三：$A'G\perp CG$;性质四：$\angle EBG=45°$；

性质五：$DG=2CG$；性质六：$\tan\angle DCN=\dfrac{1}{3}$



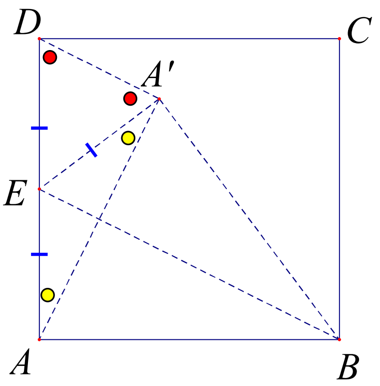




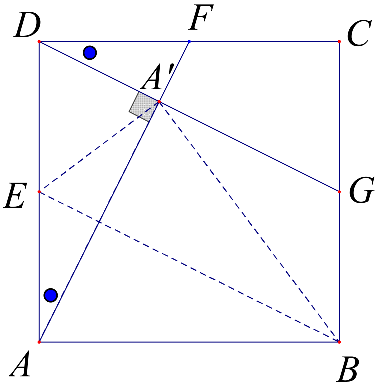


性质一证明： $AA'\perp A'D$

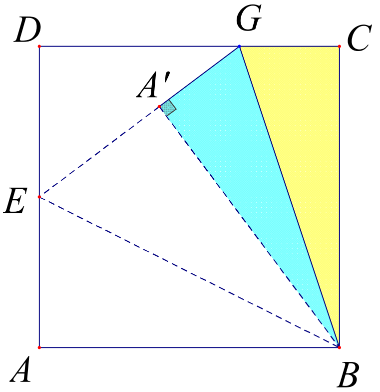
【淘宝店铺：向阳百分百】

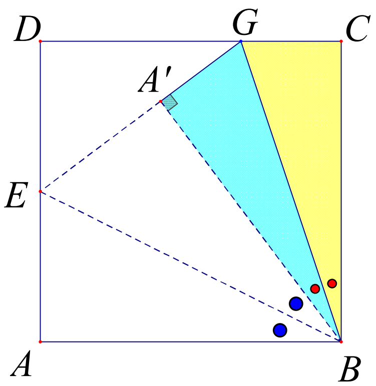


性质二证明：G 是 BC 中点

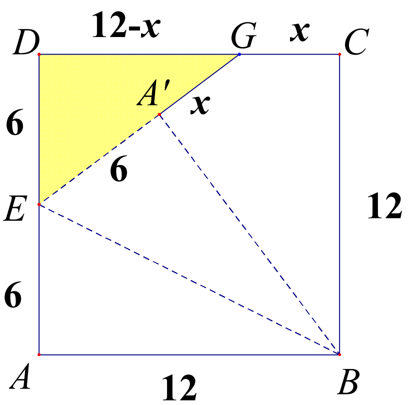


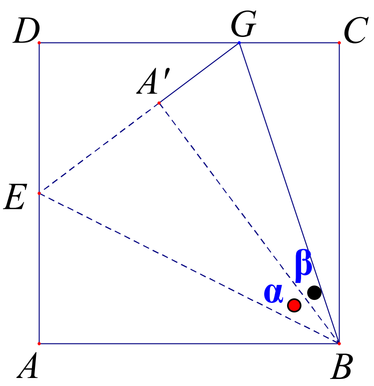
性质三，四证明：HL 全等





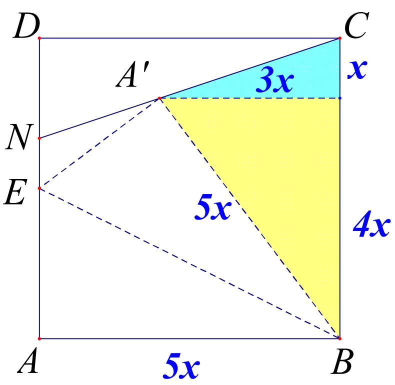
性质五证明：勾股，或“12345”模型





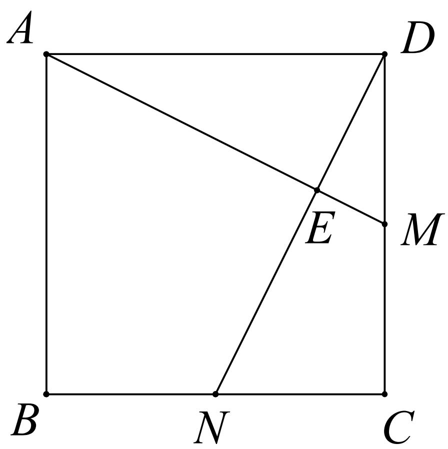
【12345 模型说明】易知 $\alpha+\beta=45°$，　$\tan\alpha=\frac{1}{2}$，故 $\tan\beta=\frac{1}{3}$，记 $\mathbf{AB}=\mathbf{12}\Rightarrow CG=4, DG=8$

性质六证明：12345 模型

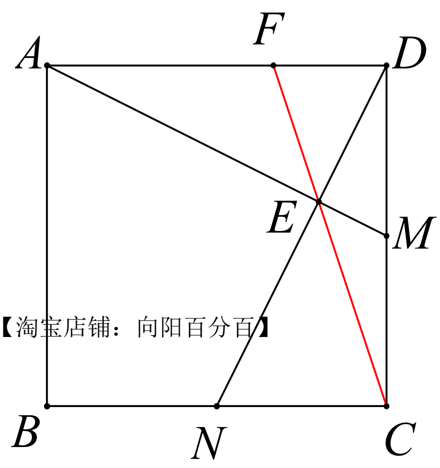


【模型二】双中点（十字架模型拓展）

(1)知 2 推 1：①M 中点；②N 是中点；③AM⊥DN



(2)已知：M 是中点，N 是中点，连接 CE 并延长，交 AD 于 F



【淘宝店铺：向阳百分百】

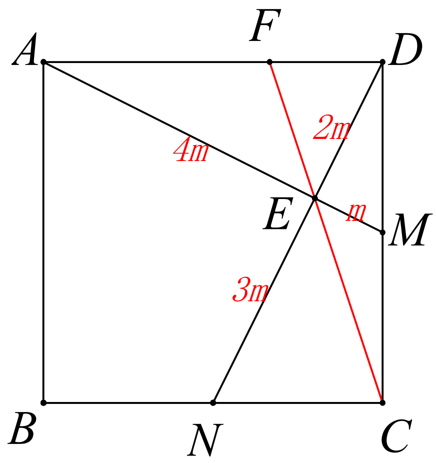
① 求 $EM:ED:EN:AE=$________

② 证明：EC 平分∠NEM

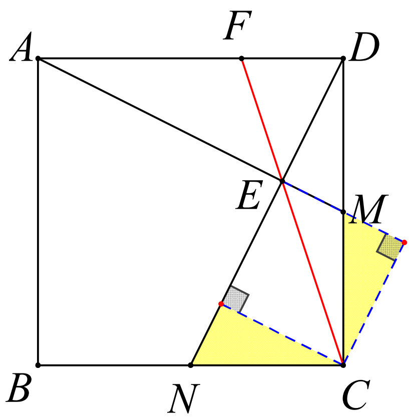
③ 求 $\dfrac{DF}{AF}$

【解析】

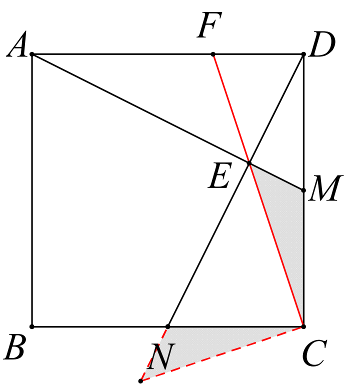
① $ED:EN:AE=1:2:3:4$



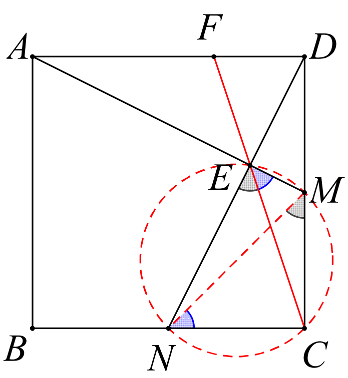
证明：法一：角平分线逆定理



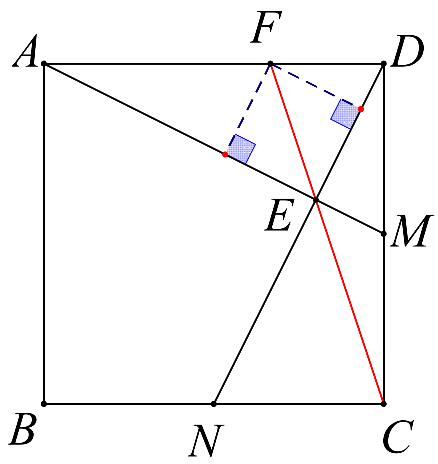
法二：旋转相似（手拉手模型）



法三：四点共圆



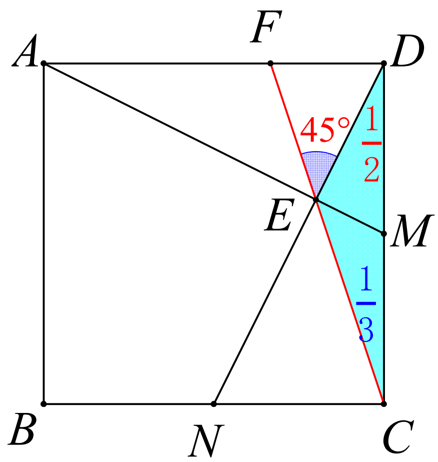
② 法一：角平分线定理



F在角平分线上，过F作角两边垂线

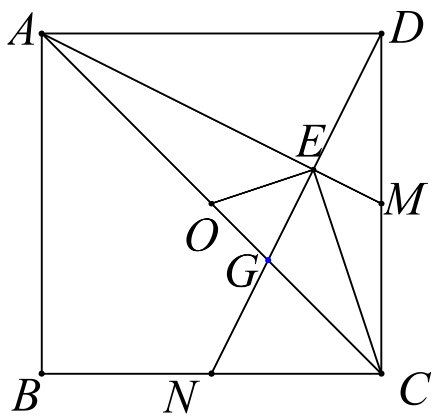
$\therefore \dfrac{DF}{AF}=\dfrac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle AEF}}=\dfrac{DE}{AE}=\dfrac{1}{2}$（角平分线定理2）

法二：12345 模型（正切和角公式）

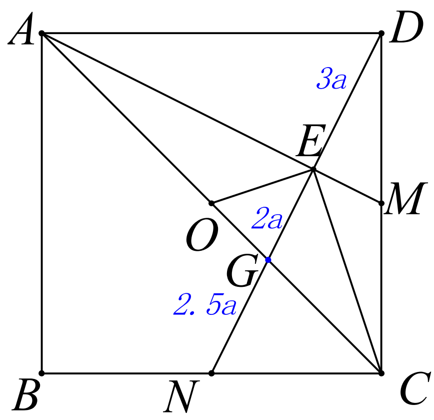


$\angle DEF=45°$，$\angle EDC=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \tan\angle DCF=\dfrac{1}{3}$

（3）已知：M，N 是中点，O 是中心，连接 OE，①求 DE:EG:GN ;②证∠OEC=90°



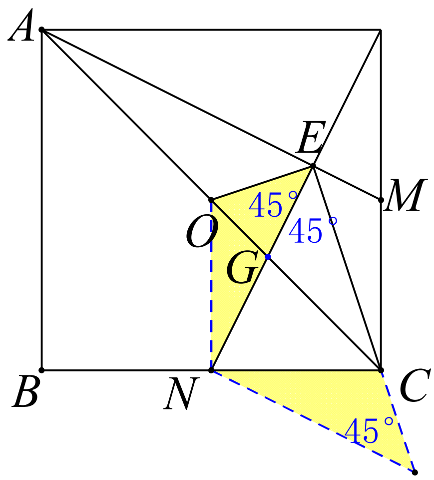
【解析】第一问



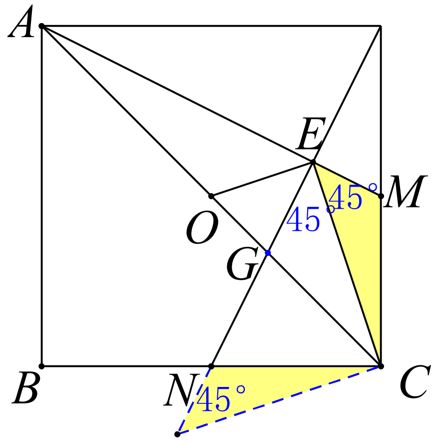
$\frac{DE}{NE}=\frac{2}{3}$, $\frac{NG}{DG}=\frac{1}{2}$ ro 12345模型

【解析】第二问

法一：由（2）可知∠NEC=45°，故构造手拉手模型可得△黄≌△黄(SAS)，从而可得∠NEO=45°，得证



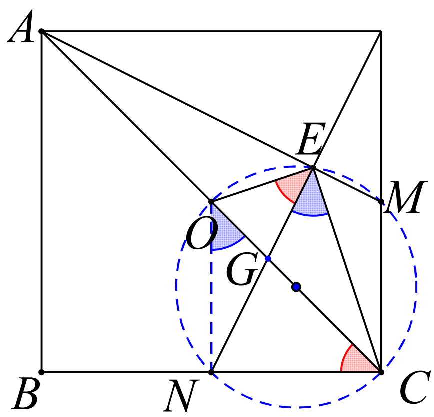
或者换个方向也可以， 像这种方方正正的图形也可以试试建系

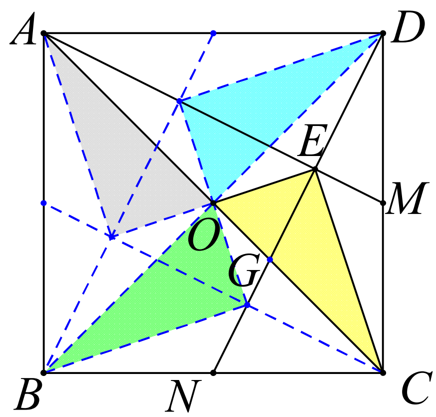


法二：四点共圆

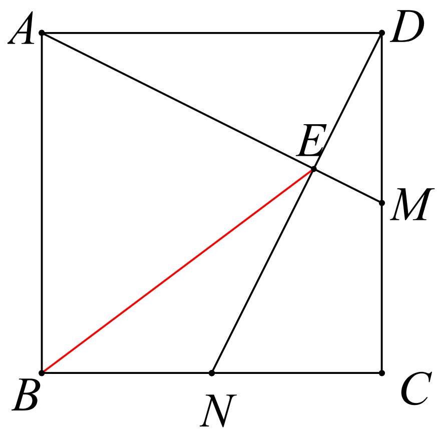
法三：补成玄图 易知∠OEG=45°

【淘宝店铺：向阳百分百】

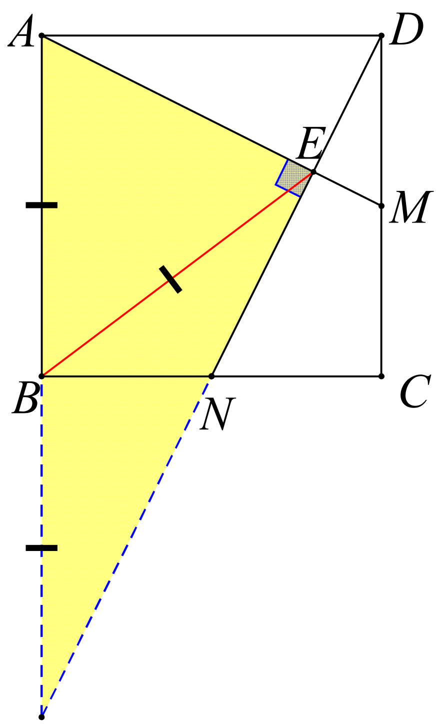




（4）已知：M，N 是中点,连接 BE，证 BE=CD

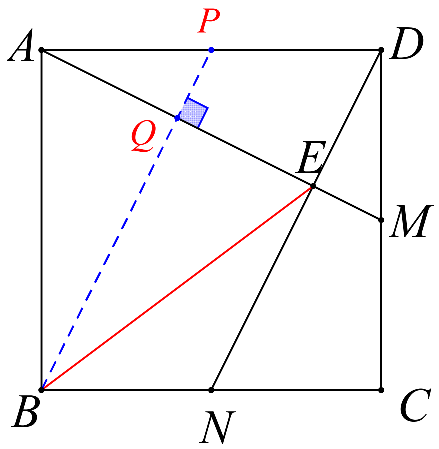


【解析】法一　斜边上的中线等于斜边一般

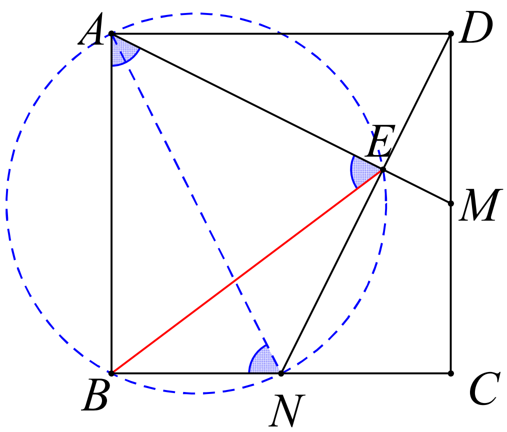


【淘宝店铺：向阳百分百】

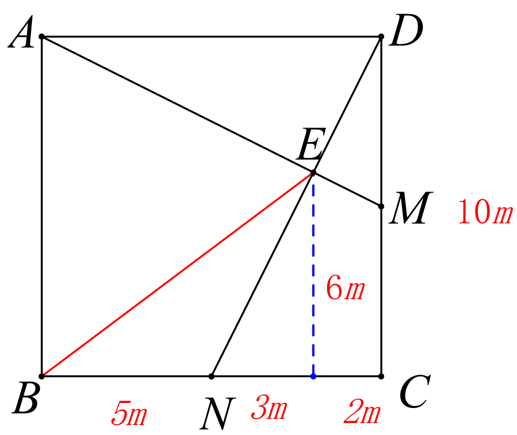
法二：过 AD 的中点 P 作 AE 垂线，交 AM 于 Q，可得 Q 是 AE 中点，则 BQ 垂直平分 AE，故 AB=BE



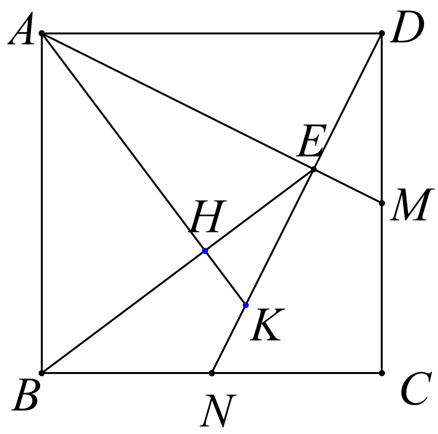
法三：对角互补得四点共圆，导角得等腰



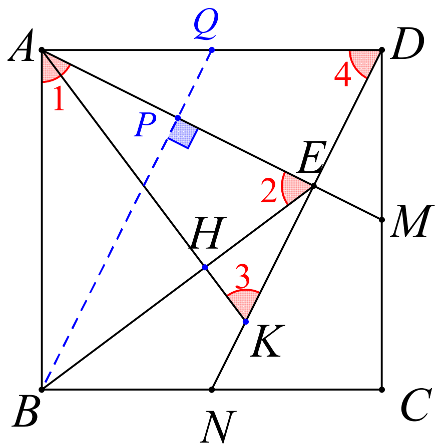
法四：勾股定理，由（2）可知 DE：NE=2:3，设值求值即可



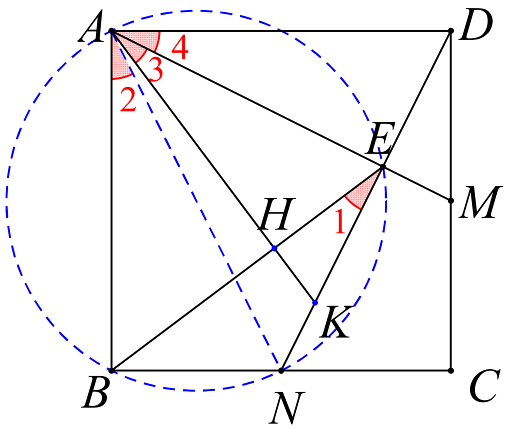
（5）已知：M，N 是中点,连接 BE，AH⊥BE 于 H，交 DN 于 K，证 AK=CD



【解析】法一：构造玄图导等腰



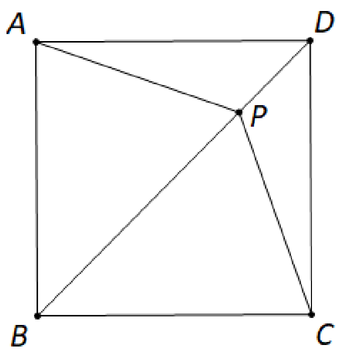
法二：四点共圆



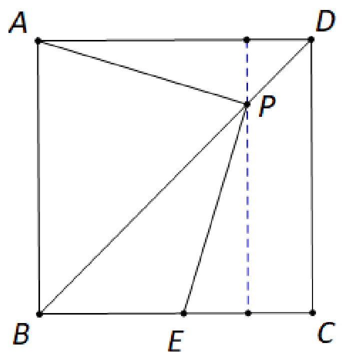
$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$

法三：建系求坐标（略）

【模型三】对角线模型



PA=PC



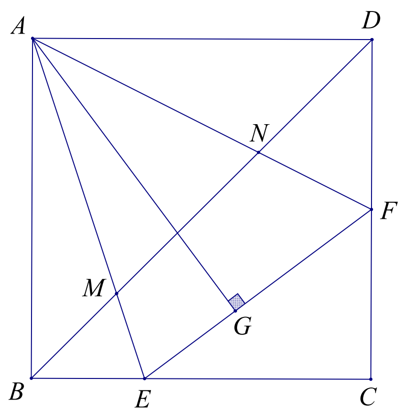
互推关系

①PA⊥PE⇒*PA=PE*

②*PA=PE*⇒*PA*⊥*PE*

【模型四】半角模型

如图，已知 ABCD 为正方形，∠FAE=45°，对角线 BD 交 AE 于 M，交 AF 与 N，AG⊥EF



5 个条件知 1 推 4

① ∠EAF=45°

② $BE+DF=EF$

③ $AG\perp EF$，AG=AB

④ AE 平分∠BEF

⑤ AF 平分∠DFE

【性质一】5 个条件知 1 推 4（全等）

【性质二】$BM^2+ND^2=MN^2$（勾股证）

【性质三】$\angle MGN=90^\circ$

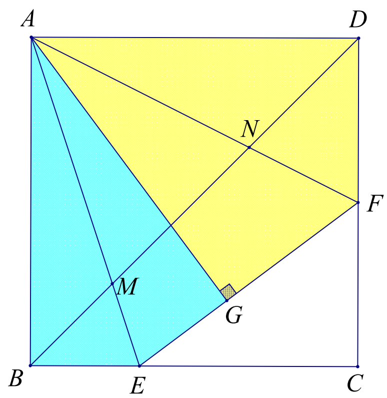
【性质四】①$AM^2=MN\cdot MD$；②$AN^2=NM\cdot NB$；③$S_{ABCD}=BN\cdot DM$（2 组子母，1 共享型相似）

【性质五】△ANE，△AMF，是 2 个隐藏的等腰直角三角形（反 8 字相似或四点共圆）

【性质六】△AMN∽△AFE，且相似比为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$（用全等导角）

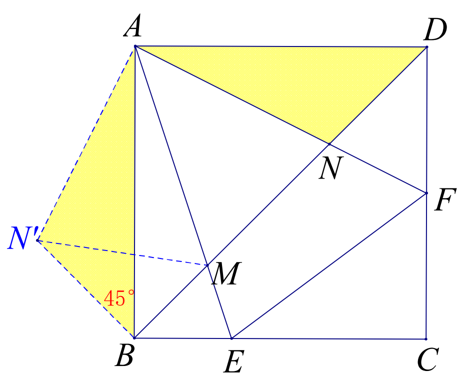
【性质七】$\frac{ND}{EC}=\frac{BM}{FC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$（旋转相似）

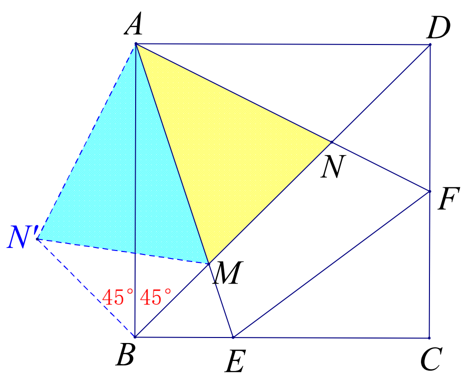
【性质一】*DF*＋*BE*＝*EF*



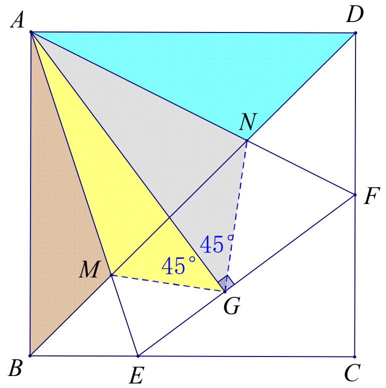
易证△ABE≌△AGE，易证△AGF≌△ADF

【性质二】$BM^2+ND^2=MN^2$ 简证，如图





【性质三】$\angle MGN=90^\circ$ 简证，如图：两组全等

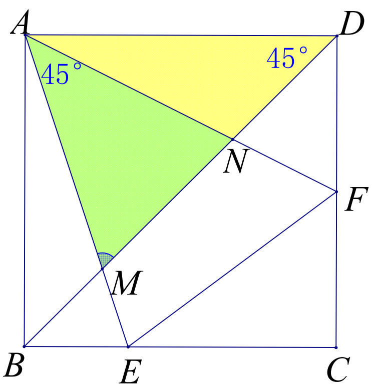


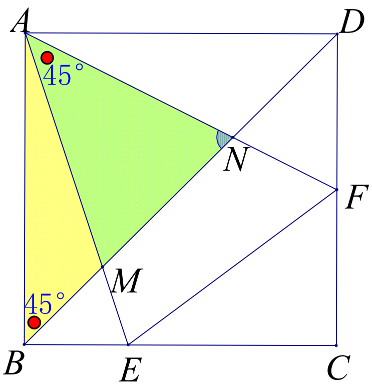
【性质四】①$AM^2=MN\cdot MD$；②$AN^2=NM\cdot NB$；③$S_{ABCD}=BN\cdot DM$ **（2组子母，1共享型相似）**

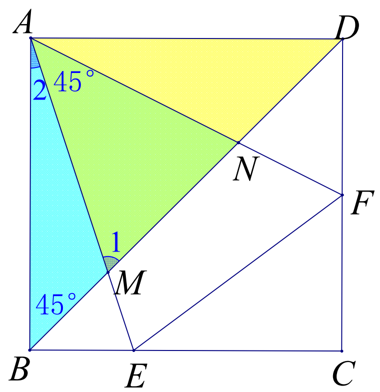
简证③，如图

$S_{ABCD}=\mathrm{BN}\cdot\mathrm{DM}$（共享型相似）

∠1=45°+∠2=∠BAN⇒△BAN∽△DMA⇒BN•DM=AB•AD

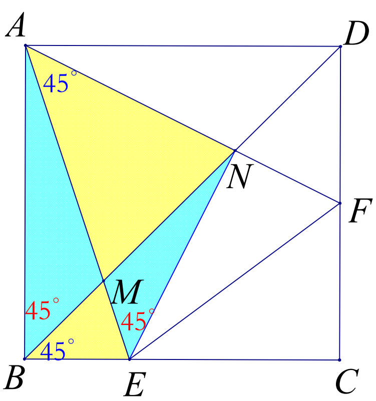


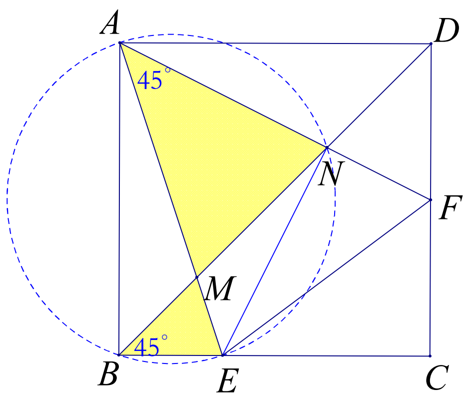




【性质五】△ANE，△AMF，是2个隐藏的等腰直角三角形

简证，以△ANE为例，△AMF方法相同





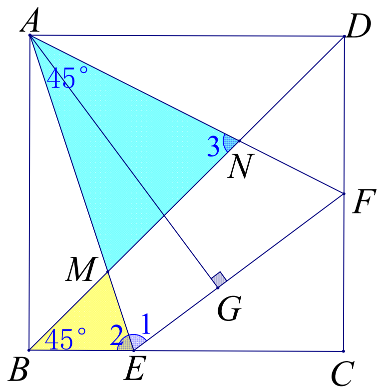
法一：两次相似△AMN∽△BME⇒$\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{NM}{EM}$｜△BMA∽△EMN｜∠ABM=∠NEM=45°

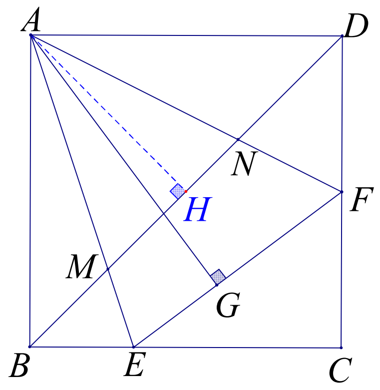
法二：ABEN四点共圆，对角互补∠ABE+∠ANE=180°或∠ABN=∠AEN

【性质六】△AMN∽△AFE，且相似比为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

先证相似，易知∠1=∠2=∠3，故相似成立

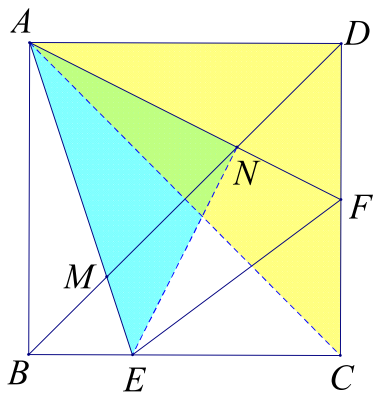
相似比为：$\frac{AH}{AG}=\frac{AH}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

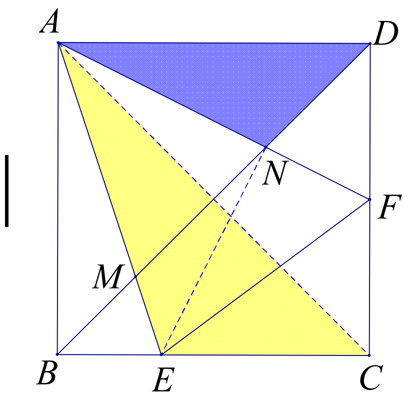




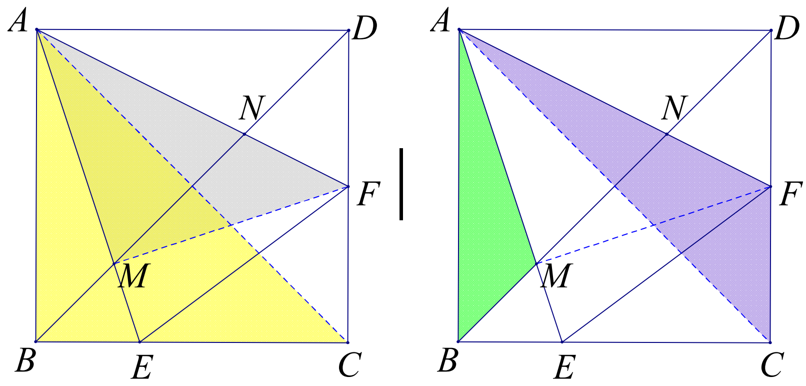
【性质七】$\frac{ND}{EC}=\frac{BM}{FC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

① $\frac{ND}{EC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$





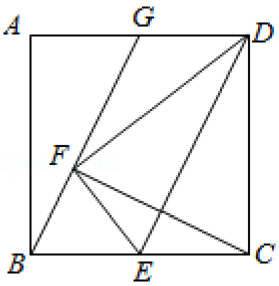
② $\frac{ND}{EC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$



03 核心·题型

题型一　中点+折叠模型

1．如图，在边长 4 的正方形 $ABCD$ 中，E 是边 BC 的中点，将 ΔCDE 沿直线 DE 折叠后，点 C 落在点 F 处，再将其打开、展平，得折痕 DE．连接 CF、BF、EF，延长 BF 交 AD 于点 G．则下列结论：① $BG=DE$；② $CF\perp BG$；③ $\sin\angle DFG=\dfrac{1}{2}$；④ $S_{\Delta DFG}=\dfrac{12}{5}$，其中正确的有(　　)



A．1 个　　　　B．2 个　　　　C．3 个　　　　D．4 个

【解答】解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=BC=AD=CD=4$，$\angle ABC=\angle BCD=90^{\circ}$，

$\because E$ 是边 BC 的中点，

$\therefore BE=CE=2$，

$\because$ 将 ΔCDE 沿直线 DE 折叠得到 ΔDFE，

$\therefore DF=CD=4$，$EF=CE=2$，$\angle DFE=\angle DCE=90^{\circ}$，$\angle DEF=\angle DEC$，

$\therefore EF=EB$，

$\therefore \angle EBF=\angle BFE$，

$\because \angle EBF=\angle BFE=\dfrac{1}{2}(180^{\circ}-\angle BEF)$，$\angle CED=\angle FED=\dfrac{1}{2}(180^{\circ}-\angle BEF)$，

$\therefore \angle GBE=\angle DEC$，

$\therefore BG//DE$，

$\because BE//DG$，

$\therefore$四边形$BEDG$是平行四边形，

$\therefore BG=DE$，故①正确；

$\because EF=CE$，

$\therefore \angle EFC=\angle ECF$，

$\therefore \angle FBE+\angle BCF=\angle BFE+\angle CFE=\frac{1}{2}\times 180^{\circ}=90^{\circ}$，

$\therefore \angle BFC=90^{\circ}$，

$\therefore CF\perp BG$，故②正确；

$\because \angle ABG+\angle CBG=\angle BFE+\angle DFG=90^{\circ}$，

$\therefore \angle ABG=\angle DFG$，

$\because AB=4$，$DG=BE=2$，

$\therefore AG=2$，

$\therefore BG=2\sqrt{5}$，

$\therefore \sin\angle DFG=\sin\angle ABG=\frac{AG}{BG}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，故③错误；

过G作$GH\perp DF$于H，

$\because \tan\angle GFH=\tan\angle ABG=\frac{1}{2}$，

$\therefore$设$GH=x$，则$FH=2x$，

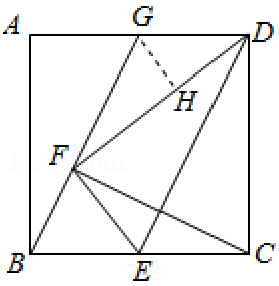
$\because DH=\sqrt{DG^{2}-x^{2}}$，

$\therefore DF=FH+DH=2x+\sqrt{DG^{2}-x^{2}}=4$，

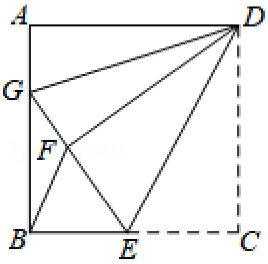
解得：$x=1.2$，$x=2$（舍去），

$\therefore GH=1.2$，

$\therefore S_{\Delta DFG}=\frac{1}{2}\times 4\times 1.2=\frac{12}{5}$，故④正确；



2．如图，正方形$ABCD$中，$AB=12$，点E在边BC上，$BE=EC$，将ΔDCE沿DE对折至ΔDFE，延长EF交边AB于点G，连接DG，BF，给出以下结论：①$\Delta DAG\cong\Delta DFG$；②$BG=2AG$；③$BF//DE$；④$S_{\Delta BEF}=\frac{72}{5}$．其中所有正确结论的个数是(　　)



A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【解答】解：如图，由折叠可知，$DF=DC=DA$，$\angle DFE=\angle C=90^{\circ}$，

$\therefore \angle DFG=\angle A=90^{\circ}$，

在 RtΔADG 和 RtΔFDG 中，

$\begin{cases} AD=DF \\ DG=DG \end{cases}$，

$\therefore \mathrm{Rt}\Delta \mathrm{ADG} \cong \mathrm{Rt}\Delta \mathrm{FDG}(\mathrm{HL})$，故①正确；

$\because$ 正方形边长是 12，

$\therefore BE=EC=EF=6$，

设 $AG=FG=x$，则 $EG=x+6$，$BG=12-x$，

由勾股定理得：$EG^2=BE^2+BG^2$，

即：$(x+6)^2=6^2+(12-x)^2$，

解得：$x=4$

$\therefore AG=GF=4$，$BG=8$，$BG=2AG$，故②正确，

$\because EF=EC=EB$，

$\therefore \angle EFB=\angle EBF$，

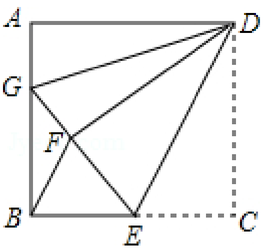
$\because \angle DEC=\angle DEF$，$\angle CEF=\angle EFB+\angle EBF$，

$\therefore \angle DEC=\angle EBF$，

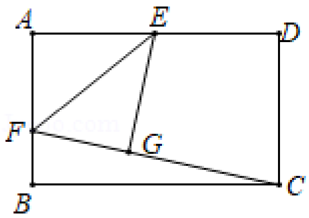
$\therefore BF//DE$，故③正确；

$S_{\Delta GBE}=\dfrac{1}{2}\times 6\times 8=24$，$S_{\Delta BEF}=\dfrac{EF}{EG}\cdot S_{\Delta GBE}=\dfrac{6}{10}\times 24=\dfrac{72}{5}$，故④正确．

综上可知正确的结论的是 4 个



3．如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=3\sqrt{6}$，$BC=12$，E 为 AD 中点，F 为 AB 上一点，将 ΔAEF 沿 EF 折叠后，点 A 恰好落到 CF 上的点 G 处，则折痕 EF 的长是__$2\sqrt{15}$__．



【解答】解：如图，连接 EC，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore \angle A=\angle D=90^\circ$，$BC=AD=12$，$DC=AB=3\sqrt{6}$，

$\because E$ 为 AD 中点，

$\therefore AE=DE=\frac{1}{2}AD=6$

由翻折知，$\Delta AEF\cong\Delta GEF$，

$\therefore AE=GE=6$，$\angle AEF=\angle GEF$，$\angle EGF=\angle EAF=90^\circ=\angle D$，

$\therefore GE=DE$，

$\therefore EC$ 平分 $\angle DCG$，

$\therefore \angle DCE=\angle GCE$，

$\because \angle GEC=90^\circ-\angle GCE$，$\angle DEC=90^\circ-\angle DCE$，

$\therefore \angle GEC=\angle DEC$，

$\therefore \angle FEC=\angle FEG+\angle GEC=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$，

$\therefore \angle FEC=\angle D=90^\circ$，

又$\because \angle DCE=\angle GCE$，

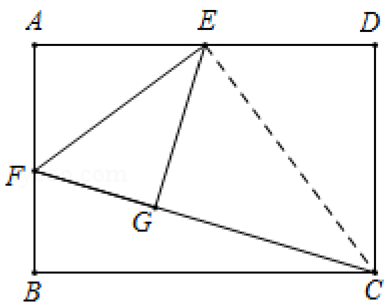
$\therefore \Delta FEC\backsim\Delta EDC$，

$\therefore \frac{FE}{DE}=\frac{EC}{DC}$，

$\because EC=\sqrt{DE^2+DC^2}=\sqrt{6^2+(3\sqrt{6})^2}=3\sqrt{10}$，

$\therefore \frac{FE}{6}=\frac{3\sqrt{10}}{3\sqrt{6}}$，

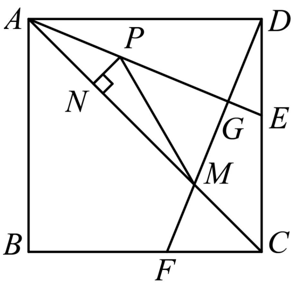
$\therefore FE=2\sqrt{15}$



题型二　双中点模型（十字架拓展）

2023·东营·中考真题

1．如图，正方形$ABCD$的边长为4，点E，F分别在边DC，BC上，且$BF=CE$，AE平分$\angle CAD$，连接DF，分别交AE，AC于点G，M，P是线段AG上的一个动点，过点P作$PN\perp AC$垂足为N，连接PM，有下列四个结论：①AE垂直平分DM；②$PM+PN$的最小值为$3\sqrt{2}$；③$CF^2=GE\cdot AE$；④$S_{\triangle ADM}=6\sqrt{2}$．其中正确的是（　　）



A．①②　　　B．②③④　　　C．①③④　　　D．①③

【答案】D

【详解】解：$\because ABCD$为正方形，

$\therefore BC=CD=AD$，$\angle ADE=\angle DCF=90^\circ$，

$\because BF=CE$，

$\therefore DE=FC$，

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle DCF(\text{SAS})$．

$\therefore \angle DAE=\angle FDC$，

$\because \angle ADE=90^\circ$，

$\therefore \angle ADG+\angle FDC=90^\circ$，

$\therefore \angle ADG+\angle DAE=90^\circ$，

$\therefore \angle AGD=\angle AGM=90^\circ$．

$\because AE$平分$\angle CAD$，

$\therefore \angle DAG=\angle MAG$．

$\because AG=AG$，

$\therefore \triangle ADG\cong\triangle AMG(\text{ASA})$．

$\therefore DG=GM$，

$\because \angle AGD=\angle AGM=90^\circ$，

$\therefore AE$垂直平分DM，

故①正确．

由①可知，$\angle ADE=\angle DGE=90^\circ$，$\angle DAE=\angle GDE$，

$\therefore \triangle ADE\sim\triangle DGE$，

$\therefore \dfrac{DE}{GE}=\dfrac{AE}{DE}$，

$\therefore DE^2=GE\cdot AE$，

由①可知 $DE=CF$，

$\therefore CF^2=GE\cdot AE$.

故③正确.

$\because ABCD$ 为正方形，且边长为 4，

$\therefore AB=BC=AD=4$，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{2}AB=4\sqrt{2}$.

由①可知，$\triangle ADG\cong\triangle AMG(\mathrm{ASA})$，

$\therefore AM=AD=4$，

$\therefore CM=AC-AM=4\sqrt{2}-4$.

由图可知，$\triangle DMC$ 和 $\triangle ADM$ 等高，设高为 h，

$\therefore S_{\triangle ADM}=S_{\triangle ADC}-S_{\triangle DMC}$，

$\therefore \dfrac{4\times h}{2}=\dfrac{4\times 4}{2}-\dfrac{(4\sqrt{2}-4)\cdot h}{2}$，

$\therefore h=2\sqrt{2}$，

$\therefore S_{\triangle ADM}=\dfrac{1}{2}\cdot AM\cdot h=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

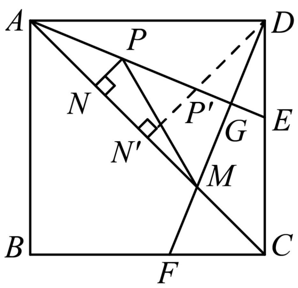
故④不正确.

由①可知，$\triangle ADG\cong\triangle AMG(\mathrm{ASA})$，

$\therefore DG=GM$，

$\therefore M$ 关于线段 AG 的对称点为 D，过点 D 作 $DN'\perp AC$，交 AC 于 N'，交 AE 于 P'，

$\therefore PM+PN$ 最小即为 DN'，如图所示，



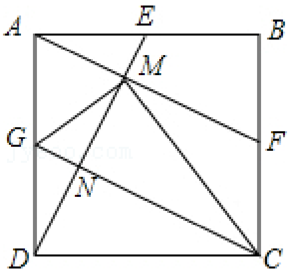
由④可知 $\triangle ADM$ 的高 $h=2\sqrt{2}$ 即为图中的 DN'，

$\therefore DN'=2\sqrt{2}$.

故②不正确.

综上所述，正确的是①③

2．如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E、F、G 分别为边 AB、BC、AD 上的中点，连接 AF、DE 交于点 M，连接 GM、CG，CG 与 DE 交于点 N，则结论① $GM\perp CM$；② $CD=DM$；③四边形 $AGCF$ 是平行四边形；④ $\angle CMD=\angle AGM$ 中，正确的有(　　)个．



A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】B

【解答】解：$\because AG//FC$ 且 $AG=FC$，

$\therefore$ 四边形 $AGCF$ 为平行四边形，故③正确；

$\therefore \angle GAF=\angle FCG=\angle DGC$，$\angle AMN=\angle GND$

在 ΔADE 和 ΔBAF 中，

$\because \begin{cases} AE=BF \\ \angle DAE=\angle ABF \\ AD=AB \end{cases}$，

$\therefore \Delta ADE\cong\Delta BAF(SAS)$，

$\therefore \angle ADE=\angle BAF$，

$\because \angle ADE+\angle AEM=90^{\circ}$

$\therefore \angle EAM+\angle AEM=90^{\circ}$

$\therefore \angle AME=90^{\circ}$

$\therefore \angle GND=90^{\circ}$

$\therefore \angle DE\perp AF$，$DE\perp CG$．

$\because G$ 点为 AD 中点，

$\therefore GN$ 为 ΔADM 的中位线，

即 CG 为 DM 的垂直平分线，

$\therefore GM=GD$，$CD=CM$，故②错误；

在 ΔGDC 和 ΔGMC 中，

$\because \begin{cases} DG=MG \\ CD=CM \\ CG=CG \end{cases}$，

$\therefore \Delta GDC\cong\Delta GMC(SSS)$，

$\therefore \angle CDG=\angle CMG=90^{\circ}$，

$\angle MGC=\angle DGC$，

$\therefore GM\perp CM$，故①正确；

$\because \angle CDG=\angle CMG=90^{\circ}$，

$\therefore G$、D、C、M 四点共圆，

$\therefore \angle AGM=\angle DCM$，

$\because CD=CM$，

$\therefore \angle CMD=\angle CDM$，

在 RtΔAMD 中，$\angle AMD=90^{\circ}$，

$\therefore DM < AD$，

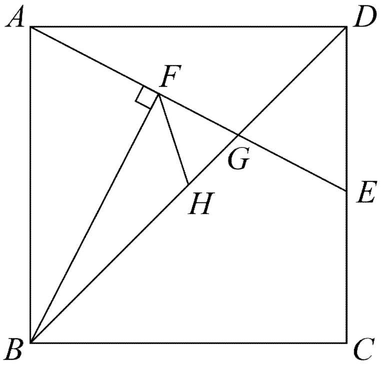
$\therefore DM < CD$，

$\therefore \angle DMC \neq \angle DCM$，

$\therefore \angle CMD \neq \angle AGM$，故④错误．

2203·绥化·中考真题

3．如图，在正方形$ABCD$中，点E为边CD的中点，连接AE，过点B作$BF \perp AE$于点F，连接BD交AE于点G，FH平分$\angle BFG$交BD于点H．则下列结论中，正确的个数为（　）



①$AB^2 = BF \cdot AE$；②$S_{\triangle BGF} : S_{\triangle BAF} = 2:3$；③当$AB = a$时，$BD^2 - BD \cdot HD = a^2$

A．0个　　　B．1个　　　C．2个　　　D．3个

【答案】D

【详解】∵四边形$ABCD$是正方形，

∴$\angle BAD = \angle ADE = 90°$，$AB = AD$

∵$BF \perp AE$

∴$\angle ABF = 90° - \angle BAF = \angle DAE$

∴$\cos\angle ABF = \cos\angle EAD$

即$\dfrac{BF}{AB} = \dfrac{AD}{AE}$，又$AB = AD$，

∴$AB^2 = BF \cdot AE$，故①正确；

设正方形的边长为a，

∵点E为边CD的中点，

∴$DE = \dfrac{a}{2}$，

∴$\tan\angle ABF = \text{tans}\,\angle EAD = \dfrac{1}{2}$，

在Rt$\triangle ABE$中，$AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{5}AF = a$，

∴$AF = \dfrac{\sqrt{5}}{5}a$

在Rt$\triangle ADE$中，$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \dfrac{\sqrt{5}a}{2}$

$\therefore EF=AE-AF=\frac{\sqrt{5}}{2}a-\frac{\sqrt{5}}{5}a=\frac{3\sqrt{5}}{10}a$，

$\because AB // DE$

$\therefore \triangle GAB \backsim \triangle GED$

$\therefore \frac{AG}{GE}=\frac{AB}{DE}=2$

$\therefore GE=\frac{1}{3}AE=\frac{\sqrt{5}}{6}a$

$\therefore FG=AE-AF-GE=\frac{\sqrt{5}}{2}a-\frac{\sqrt{5}}{5}a-\frac{\sqrt{5}}{6}a=\frac{2\sqrt{5}}{15}a$

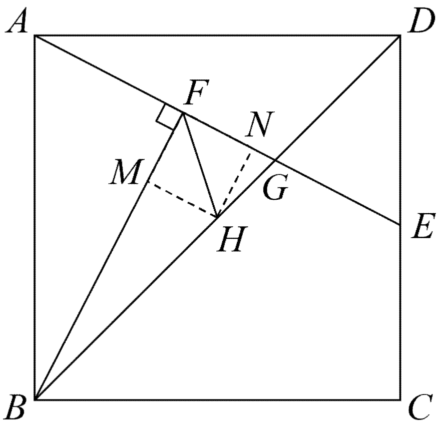
$\therefore \frac{AF}{FG}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{5}a}{\frac{2\sqrt{5}}{15}a}=\frac{3}{2}$

$\therefore S_{\triangle BGF}:S_{\triangle BAF}=2:3$，故②正确；

$\because AB=a$，

$\therefore BD^2=AB^2+AD^2=2a^2$，

如图所示，过点H分别作BF,AE的垂线，垂足分别为M,N，



又$\because BF\perp AE$，

$\therefore$四边形$FMHN$是矩形，

$\because FH$是$\angle BFG$的角平分线，

$\therefore HM=HN$，

$\therefore$四边形$FMHN$是正方形，

$\therefore FN=HM=HN$

$\because BF=2AF=\frac{2\sqrt{5}}{5}a, FG=\frac{2\sqrt{5}}{15}a$

$\therefore \frac{MH}{BM}=\frac{FG}{BF}=\frac{1}{3}$

设$MH=b$，则$BF=BM+FM=BM+MH=3b+b=4b$

在$\mathrm{Rt}\triangle BMH$中，$BH=\sqrt{BM^2+MH^2}=\sqrt{10}b$，

$\because BF=\frac{2\sqrt{5}}{5}a$

$\therefore \dfrac{2\sqrt{5}}{5}a = 4b$

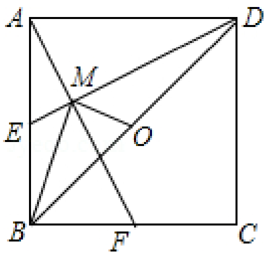
解得：$b = \dfrac{\sqrt{5}}{10}a$

$\therefore BH = \sqrt{10} \times \dfrac{\sqrt{5}}{10}a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，

$\therefore BD^2 - BD \cdot HD = 2a^2 - \sqrt{2}a \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}a = a^2$，故④正确

4．如图，已知 E，F 分别为正方形 $ABCD$ 的边 AB，BC 的中点，AF 与 DE 交于点 M，O 为 BD 的中点，则下列结论：

①$\angle AME = 90°$；②$\angle BAF = \angle EDB$；③$\angle BMO = 90°$；④$MD = 2AM = 4EM$；⑤$AM = \dfrac{2}{3}MF$．其中正确结论的是(　　)



A．①③④　　B．②④⑤　　C．①③④⑤　　D．①③⑤

【解答】解：在正方形 $ABCD$ 中，$AB = BC = AD$，$\angle ABC = \angle BAD = 90°$，

$\because E$、F 分别为边 AB，BC 的中点，

$\therefore AE = BF = \dfrac{1}{2}BC$，

在 ΔABF 和 ΔDAE 中，

$\begin{cases} AE = BF \\ \angle ABC = \angle BAD \\ AB = AD \end{cases}$，

$\therefore \Delta ABF \cong \Delta DAE(SAS)$，

$\therefore \angle BAF = \angle ADE$，

$\because \angle BAF + \angle DAF = \angle BAD = 90°$，

$\therefore \angle ADE + \angle DAF = \angle BAD = 90°$，

$\therefore \angle AMD = 180° - (\angle ADE + \angle DAF) = 180° - 90° = 90°$，

$\therefore \angle AME = 180° - \angle AMD = 180° - 90° = 90°$，故①正确；

$\because DE$ 是 ΔABD 的中线，

$\therefore \angle ADE \neq \angle EDB$，

$\therefore \angle BAF \neq \angle EDB$，故②错误；

$\because \angle BAD = 90°$，$AM \perp DE$，

$\therefore \Delta AED \backsim \Delta MAD \backsim \Delta MEA$，

$\therefore \dfrac{AM}{EM}=\dfrac{MD}{AM}=\dfrac{AD}{AE}=2$,

$\therefore AM=2EM$， $MD=2AM$，

$\therefore MD=2AM=4EM$，故④正确；

设正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$，则 $BF=a$，

在 RtΔABF 中， $AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{5}a$，

$\because \angle BAF=\angle MAE$， $\angle ABC=\angle AME=90^\circ$，

$\therefore \Delta AME \backsim \Delta ABF$，

$\therefore \dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AE}{AF}$，

即 $\dfrac{AM}{2a}=\dfrac{a}{\sqrt{5}a}$，

解得 $AM=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$，

$\therefore MF=AF-AM=\sqrt{5}a-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}a$，

$\therefore AM=\dfrac{2}{3}MF$，故⑤正确；

如图，过点 M 作 $MN\perp AB$ 于 N，

则 $\dfrac{MN}{BF}=\dfrac{AN}{AB}=\dfrac{AM}{AF}$，

即 $\dfrac{MN}{a}=\dfrac{AN}{2a}=\dfrac{\frac{2\sqrt{5}}{5}a}{\sqrt{5}a}$，

解得 $MN=\dfrac{2}{5}a$， $AN=\dfrac{4}{5}a$，

$\therefore NB=AB-AN=2a-\dfrac{4}{5}a=\dfrac{6}{5}a$，

根据勾股定理， $BM=\sqrt{BN^2+MN^2}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}a$，

过点 M 作 $GH//AB$，过点 O 作 $OK\perp GH$ 于 K，

则 $OK=a-\dfrac{2}{5}a=\dfrac{3}{5}a$， $MK=\dfrac{6}{5}a-a=\dfrac{1}{5}a$，

在 RtΔMKO 中， $MO=\sqrt{MK^2+OK^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}a$，

根据正方形的性质， $BO=2a\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}a$，

$\because BM^2+MO^2=(\dfrac{2\sqrt{10}}{5}a)^2+(\dfrac{\sqrt{10}}{5}a)^2=2a^2$，

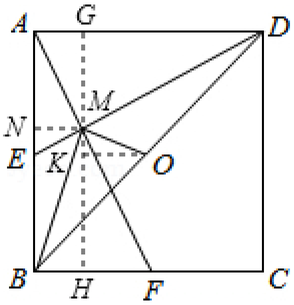
$BO^2=(\sqrt{2}a)^2=2a^2$，

$\therefore BM^2+MO^2=BO^2$，

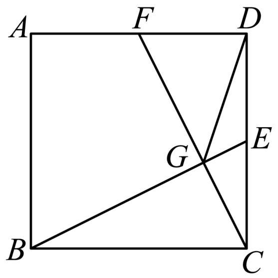
【淘宝店铺：向阳百分百】

$\therefore \Delta BMO$ 是直角三角形，$\angle BMO = 90°$，故③正确；

综上所述，正确的结论有①③④⑤共 4 个



5．如图，在正方形 $ABCD$ 中，E、F 分别在 CD、AD 边上，且 $CE = DF$，连接 BE、CF 相交于 G 点．则下列结论：① $BE = CF$；② $S_{\triangle BCG} = S_{四边形DFGE}$；③ $CG^2 = BG \cdot GE$；④当 E 为 CD 中点时，连接 DG，则 $\angle FGD = 45°$，正确的结论是__________．（填序号）



【答案】①②③④

【分析】①由“SAS”可证 $\triangle BCE \cong \triangle CDF$，可得 $BE = CF$；

②由全等三角形的性质可得 $S_{\triangle BCQ} = S_{\triangle CDF}$，由面积和差关系可得 $S_{\triangle BCG} = S_{四边形DFGE}$；

③通过证明 $\triangle BCG \backsim \triangle CEG$，可得 $\dfrac{CG}{BG} = \dfrac{GE}{GC}$，可得结论；

④通过证明点 D，点 E，点 G，点 F 四点共圆，可证 $\angle DEF = \angle DGF = 45°$．

【详解】解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore BC = CD$，$\angle BCD = \angle CDF = 90°$，

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases} BC = CD \\ \angle BCD = \angle CDF = 90° \\ CE = DF \end{cases},$$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle CDF(\mathrm{SAS})$，

$\therefore BE = CF$，故①正确，

$\because \triangle BCE \cong \triangle CDF$，

$\therefore S_{\triangle BCE} = S_{\triangle CDF}$，

$\therefore S_{\triangle BCG} = S_{四边形DFGE}$；故②正确，

$\because \triangle BCE \cong \triangle CDF$，

$\therefore \angle DCF = \angle EBC$，

$\because \angle DCF + \angle BCG = 90°$，

$\therefore \angle EBC+\angle BCG=90^{\circ}$，

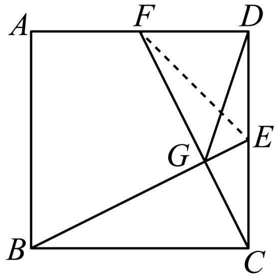
$\therefore \angle BGC=\angle EGC=90^{\circ}$，

$\therefore \triangle BCG \backsim \triangle CEG$，

$\therefore \dfrac{CG}{BG}=\dfrac{GE}{GC}$，

$\therefore CG^{2}=BG \cdot GE$；故③正确；

如图，连接 EF，



$\because$点 E 是 CD 中点，

$\therefore DE=CE$，

$\because CE=DF$，

$\therefore DF=CE=DE$，

$\therefore \angle DFE=\angle DEF=45^{\circ}$，

$\because \angle ADC=\angle EGF=90^{\circ}$，

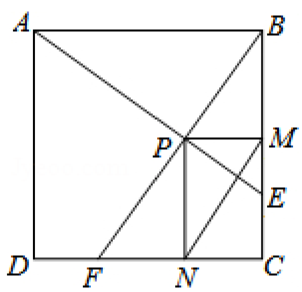
$\therefore$点 D，点 E，点 G，点 F 四点共圆，

$\therefore \angle DEF=\angle DGF=45^{\circ}$，故④正确；

综上所述：正确的有①②③④

题型三　对角线模型

1．如图，在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，动点 F，E 分别以相同的速度从 D，C 两点同时出发向 C 和 B 运动（任何一个点到达即停止），连接 AE、BF 交于点 P，过点 P 作 $PM//CD$ 交 BC 于 M 点，$PN//BC$ 交 CD 于 N 点，连接 MN，在运动过程中则下列结论：① $\Delta ABE \cong \Delta BCF$；② $AE=BF$；③ $AE \perp BF$；④ $CF^{2}=PE \bullet BF$；⑤线段 MN 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{5}-2}{2}$．其中正确的结论有(　　)



A．2 个　　B．3 个　　C．4 个　　D．5 个

【解答】解：$\because$动点 F，E 的速度相同，

$\therefore DF=CE$，

又$\because CD=BC$，

$\therefore CF=BE$，

在ΔABE和ΔBCF中，

$$\begin{cases} AB=BC \\ \angle ABE=\angle BCF=90^{\circ} \\ BE=CF \end{cases}$$

$\therefore \Delta ABE\cong \Delta BCF(SAS)$，故①正确；

$\therefore \angle BAE=\angle CBF$，$AE=BF$，故②正确；

$\because \angle BAE+\angle BEA=90^{\circ}$，

$\therefore \angle CBF+\angle BEA=90^{\circ}$，

$\therefore \angle APB=90^{\circ}$，故③正确；

在ΔBPE和ΔBCF中，

$\because \angle BPE=\angle BCF$，$\angle PBE=\angle CBF$，

$\therefore \Delta BPE\backsim \Delta BCF$，

$\therefore \dfrac{PE}{CF}=\dfrac{BE}{BF}$，

$\therefore CF\bullet BE=PE\bullet BF$，

$\because CF=BE$，

$\therefore CF^{2}=PE\bullet BF$，故④正确；

$\because$点P在运动中保持$\angle APB=90^{\circ}$，

$\therefore$点P的路径是一段以AB为直径的弧，

如图，设AB的中点为G，连接CG交弧于点P，此时CP的长度最小，

在RtΔBCG中，$CG=\sqrt{BC^{2}+BG^{2}}=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

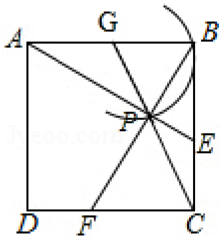
$\because PG=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore MN=CP=CG-PG=\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

即线段MN的最小值为$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，故⑤错误；

综上可知正确的有4个，

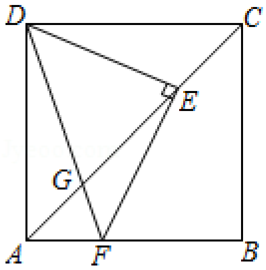
故选：C.



2．如图，正方形 $ABCD$ 中， $AB=3$，点 E 是对角线 AC 上的一点，连接 DE，过点 E 作 $EF\perp DE$，交 AB 于点 F，连接 DF 交 AC 于点 G，下列结论：

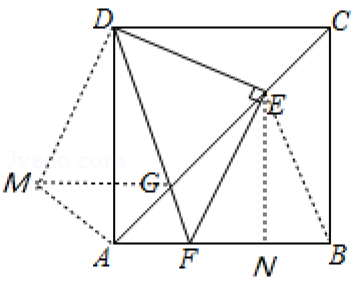
① $DE=EF$；② $\angle ADF=\angle AEF$；③ $DG^2=GE\bullet GC$；④若 $AF=1$，则 $EG=\dfrac{5}{4}\sqrt{2}$，其中结论正确的个数是

(　　)



A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【解答】解：如图，连接 BE，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore CB=CD$， $\angle BCE=\angle DCE=45^\circ$，

在 ΔBEC 和 ΔDEC 中，

$$\begin{cases} DC=BC \\ \angle DCE=\angle BCE \\ CE=CE \end{cases},$$

$\therefore \Delta DCE\cong\Delta BCE(SAS)$，

$\therefore DE=BE$， $\angle CDE=\angle CBE$，

$\therefore \angle ADE=\angle ABE$，

$\because \angle DAB=90^\circ$， $\angle DEF=90^\circ$，

$\therefore \angle ADE+\angle AFE=180^\circ$，

$\because \angle AFE+\angle EFB=180^\circ$，

$\therefore \angle ADE = \angle EFB$，

$\therefore \angle ABE = \angle EFB$，

$\therefore EF = BE$，

$\therefore DE = EF$，故①正确；

$\because \angle DEF = 90^\circ$，$DE = EF$，

$\therefore \angle EDF = \angle DFE = 45^\circ$，

$\because \angle DAC = 45^\circ$，$\angle AGD = \angle EGF$，

$\therefore \angle ADF = \angle AEF$，故②正确；

$\because \angle GDE = \angle DCG = 45^\circ$，$\angle DGE = \angle CGD$，

$\therefore \Delta DGE \backsim \Delta CGD$，

$\therefore \dfrac{DG}{EG} = \dfrac{CG}{DG}$，

即 $DG^2 = GE \cdot CG$，故③正确；

如图，过点 E 作 $EN \perp AB$ 于点 N，

$\because AF = 1$，$AB = 3$，

$\therefore BF = 2$，$AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$，

$\because BE = EF$，

$\therefore FN = BN = 1$，

$\therefore AN = 2$，

$\therefore AE = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$，

$\therefore CE = AC - AE = \sqrt{2}$，

将 ΔDEC 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到 ΔDMA，连接 MG，

易证 $\Delta DMG \cong \Delta DEG(SAS)$，$\Delta AMG$ 是直角三角形，

$\therefore MG = GE$，

$\therefore MG^2 = EG^2 = AM^2 + AG^2 = CE^2 + AG^2$，

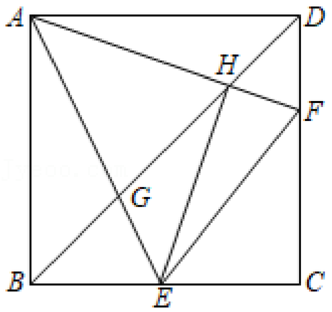
设 $EG = x$，则 $AG = 2\sqrt{2} - x$，

$\therefore (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} - x)^2 = x^2$，

解得：$x = \dfrac{5}{4}\sqrt{2}$，即 $EG = \dfrac{5}{4}\sqrt{2}$，故④正确.

故选：D.

3．如图，正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别为边 BC，CD 上的点，连接 AE，AF，与对角线 BD 分别交于点 G，H，连接 EH．若 $\angle EAF = 45^\circ$，则下列判断错误的是(　　)



A. $BE+DF=EF$　　　　B. $BG^2+HD^2=GH^2$

C. E，F 分别为边 BC，CD 的中点　　　　D. $AH\perp EH$

【解答】解：如图 1，将 ΔADF 绕点 A 顺时针旋转 $90°$ 得到 ΔABM，此时 AB 与 AD 重合，

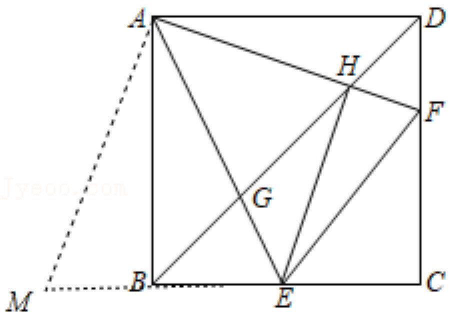


图1

由旋转可得：$AB=AD$，$BM=DF$，$\angle DAF=\angle BAM$，$\angle ABM=\angle D=90°$，$AM=AF$，

$\therefore \angle ABM+\angle ABE=90°+90°=180°$，

$\therefore$ 点 M，B，E 在同一条直线上．

$\because \angle EAF=45°$，

$\therefore \angle DAF+\angle BAE=\angle BAD-\angle EAE=90°-45°=45°$．

$\because \angle BAE=\angle DAF$，

$\therefore \angle BAM+\angle BAE=45°$．

即 $\angle MAE=\angle FAE$．

在 ΔAME 与 ΔAFE 中，

$$\begin{cases} AM=AF \\ \angle MAE=\angle FAE \\ AE=AE \end{cases},$$

$\therefore \Delta AME\cong\Delta AFE(SAS)$，

$\therefore ME=EF$，

$\therefore EF=BE+DF$，故 A 选项不合题意，

如图 2，将 ΔADH 绕点 A 顺时针旋转 $90°$ 得到 ΔABN，此时 AB 与 AD 重合，

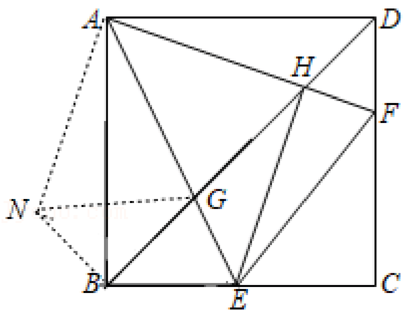


图2

$\therefore \Delta ADH \cong \Delta ABN$，

$\therefore AN = AH$， $\angle BAN = \angle DAH$， $\angle ADH = \angle ABN = 45°$， $DH = BN$，

$\therefore \angle NBG = 90°$，

$\therefore BN^2 + BG^2 = NG^2$，

$\because \angle EAF = 45°$，

$\therefore \angle DAF + \angle BAE = 45°$，

$\therefore \angle BAN + \angle BAE = 45° = \angle NAE$，

$\therefore \angle NAE = \angle EAF$，

又$\because AN = AH$， $AG = AG$，

$\therefore \Delta ANG \cong \Delta AHG(SAS)$，

$\therefore GH = NG$，

$\therefore BN^2 + BG^2 = NG^2 = GH^2$，

$\therefore DH^2 + BG^2 = GH^2$，故 B 选项不合题意；

$\because \angle EAF = \angle DBC = 45°$，

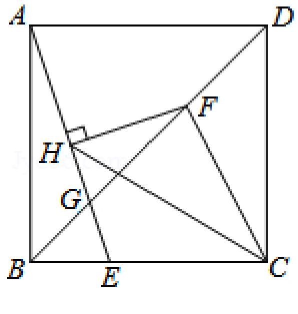
$\therefore$ 点 A，点 B，点 E，点 H 四点共圆，

$\therefore \angle AHE = \angle ABE = 90°$，

$\therefore AH \perp HE$，故 D 选项不合题意，

故选：C．

4．在正方形 $ABCD$ 中，点 E 为 BC 边上一点且 $CE = 2BE$，点 F 为对角线 BD 上一点且 $BF = 2DF$，连接 AE 交 BD 于点 G，过点 F 作 $FH \perp AE$ 于点 H，连接 CH、CF，若 $HG = 2cm$，则 ΔCHF 的面积是__$\frac{56}{5}$__cm^2．



【淘宝店铺：向阳百分百】

【解答】解：如图，过 F 作 $FI\perp BC$ 于 I，连接 FE，FA，

$\therefore FI//CD$，

$\because CE=2BE$，$BF=2DF$，

$\therefore$ 设 $BE=EI=IC=a$，$CE=FI=2a$，$AB=3a$，

$\therefore$ 则 $FE=FC=FA=\sqrt{5}a$，

$\therefore H$ 为 AE 的中点，

$\therefore HE=\frac{1}{2}AE=\frac{\sqrt{10}a}{2}$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore BG$ 平分 $\angle ABC$，

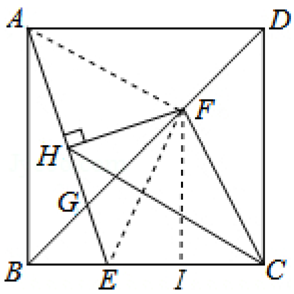
$\therefore \frac{EG}{AG}=\frac{BE}{AB}=\frac{1}{3}$，

$\therefore HG=\frac{1}{4}AE=\frac{\sqrt{10}}{4}a=2$，

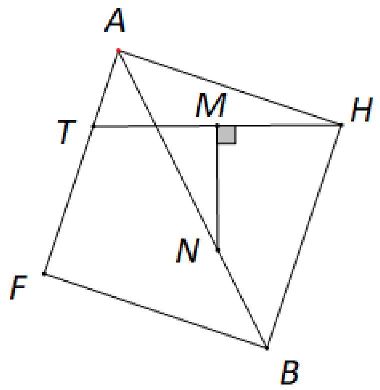
$\therefore a=\frac{4}{5}\sqrt{10}$，

$\therefore S_{\Delta CHF}=S_{\Delta HEF}+S_{\Delta CEF}-S_{\Delta CEH}=\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{10}}{2}a)^2+\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a-\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\frac{3}{2}a=\frac{7}{4}a^2=\frac{56}{5}$，

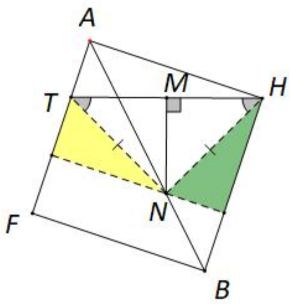
故答案为：$\frac{56}{5}$．



5.如图，正方形 AFBH,点 T 是边 AF 上一动点,M 是 HT 的中点,MN⊥HT 交 AB 于 N,当点 T 在 AF 上运动时,$\frac{MN}{HT}$的值是否发生改变?若改变求出其变化范围:若不改变请求出其值并给出你的证明

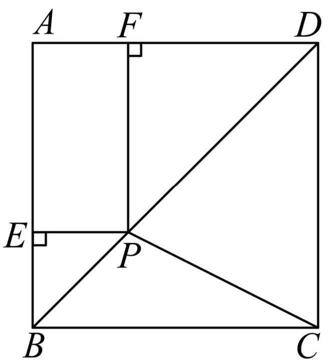


【解析】易知 NT=HN，证明∠TNH=90° 即可



2023·攀枝花·中考真题

6．如图，已知正方形$ABCD$的边长为3，点P是对角线BD上的一点，$PF \perp AD$于点F，$PE \perp AB$于点E，连接PC，当$PE:PF=1:2$时，则$PC=$（　）



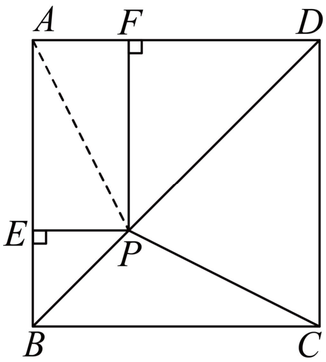
A．$\sqrt{3}$　　　B．2　　　C．$\sqrt{5}$　　　D．$\frac{5}{2}$

【答案】C

【分析】先证四边形$AEPF$是矩形，可得$PE=AF$，$\angle PFD=90°$，由等腰直角三角形的性质可得$PF=DF$，可求AF，DF的长，由勾股定理可求AP的长，由“SAS”可证$\triangle ABP \cong \triangle CBP$，可得$AP=PC=\sqrt{5}$．

【淘宝店铺：向阳百分百】

【详解】解：如图：



连接 AP，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=AD=3$，$\angle ADB=45°$，

$\because PF\perp AD$，$PE\perp AB$，$\angle BAD=90°$，

$\therefore$ 四边形 $AEPF$ 是矩形，

$\therefore PE=AF$，$\angle PFD=90°$，

$\therefore \triangle PFD$ 是等腰直角三角形，

$\therefore PF=DF$，

$\because PE:PF=1:2$，

$\therefore AF:DF=1:2$，

$\therefore AF=1$，$DF=2=PF$，

$\therefore AP=\sqrt{AF^2+PF^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$，

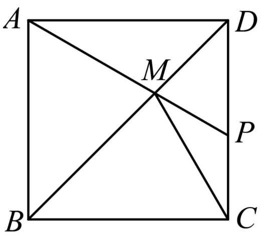
$\because AB=BC$，$\angle ABD=\angle CBD=45°$，$BP=BP$，

$\therefore \triangle ABP\cong\triangle CBP(\mathrm{SAS})$，

$\therefore AP=PC=\sqrt{5}$

2023·四川宜宾·统考中考真题

7. 如图，边长为6的正方形 $ABCD$ 中，M 为对角线 BD 上的一点，连接 AM 并延长交 CD 于点 P. 若 $PM=PC$，则 AM 的长为（　　）



A. $3\left(\sqrt{3}-1\right)$　　B. $3\left(3\sqrt{3}-2\right)$　　C. $6\left(\sqrt{3}-1\right)$　　D. $6\left(3\sqrt{3}-2\right)$

【答案】C

【详解】解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形，

$\therefore AD=CD=6, \angle ADC=90°, \angle ADM=\angle CDM=45°$，

在$\triangle ADM$和$\triangle CDM$中，$\begin{cases} DM = DM \\ \angle ADM = \angle CDM = 45^\circ \\ AD = CD \end{cases}$，

$\therefore \triangle ADM \cong \triangle CDM\left(\mathrm{SAS}\right)$，

$\therefore \angle DAM = \angle DCM$，

$\because PM = PC$，

$\therefore \angle CMP = \angle DCM$，

$\therefore \angle APD = \angle CMP + \angle DCM = 2\angle DCM = 2\angle DAM$，

又$\because \angle APD + \angle DAM = 180^\circ - \angle ADC = 90^\circ$，

$\therefore \angle DAM = 30^\circ$，

设$PD = x$，则$AP = 2PD = 2x$，$PM = PC = CD - PD = 6 - x$，

$\therefore AD = \sqrt{AP^2 - PD^2} = \sqrt{3}x = 6$，

解得$x = 2\sqrt{3}$，

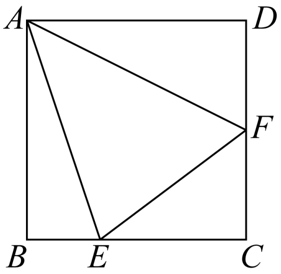
$\therefore PM = 6 - x = 6 - 2\sqrt{3}$，$AP = 2x = 4\sqrt{3}$，

$\therefore AM = AP - PM = 4\sqrt{3} - \left(6 - 2\sqrt{3}\right) = 6\left(\sqrt{3} - 1\right)$

题型四　半角模型（七个性质）

2023·重庆·中考真题

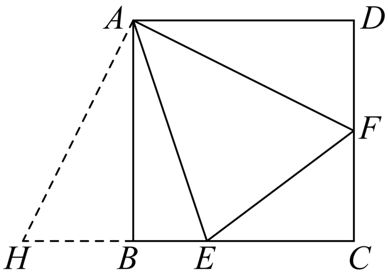
1．如图，在正方形$ABCD$中，点E，F分别在BC，CD上，连接AE，AF，EF，$\angle EAF=45^\circ$．若$\angle BAE=\alpha$，则$\angle FEC$一定等于（ ）



A．2α　　B．$90^\circ-2\alpha$　　C．$45^\circ-\alpha$　　D．$90^\circ-\alpha$

【答案】A

【详解】将$\triangle ADF$绕点A逆时针旋转90°至$\triangle ABH$，



∵四边形$ABCD$是正方形，

∴$AB=AD$，$\angle ABC=\angle D=\angle BAD=\angle C=90^\circ$，

由旋转性质可知：$\angle DAF=\angle BAH$，$\angle D=\angle ABH=90^\circ$，$AF=AH$，

∴$\angle ABH+\angle ABC=180^\circ$，

∴点H，B，C三点共线，

∵$\angle BAE=\alpha$，$\angle EAF=45^\circ$，$\angle BAD=\angle HAF=90^\circ$，

∴$\angle DAF=\angle BAH=45^\circ-\alpha$，$\angle EAF=\angle EAH=45^\circ$，

∵$\angle AHB+\angle BAH=90^\circ$，

∴$\angle AHB=45^\circ+\alpha$，

在$\triangle AEF$和$\triangle AEH$中

$$\begin{cases}AF=AH\\ \angle FAE=\angle HAE\\ AE=AE\end{cases},$$

∴$\triangle AFE\cong\triangle AHE(SAS)$，

∴$\angle AHE=\angle AFE=45^\circ+\alpha$，

∴$\angle AHE=\angle AFD=\angle AFE=45^\circ+\alpha$，

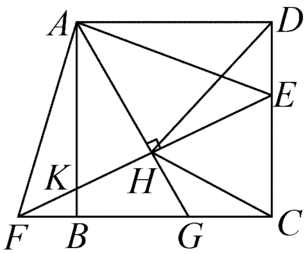
∴ $\angle DFE = \angle AFD + \angle AFE = 90° + 2\alpha$，

∵ $\angle DFE = \angle FEC + \angle C = \angle FEC + 90°$，

∴ $\angle FEC = 2\alpha$

2023·眉山·中考真题

2．如图，在正方形$ABCD$中，点E是CD上一点，延长CB至点F，使$BF = DE$，连结AE, AF, EF，EF交AB于点K，过点A作$AG \perp EF$，垂足为点H，交CF于点G，连结HD，HC．下列四个结论：①$AH = HC$；②$HD = CD$；③$\angle FAB = \angle DHE$；④$AK \cdot HD = \sqrt{2}HE^2$．其中正确结论的个数为（　）



A．1个　　　B．2个　　　C．3个　　　D．4个

【答案】C

【分析】根据正方形$ABCD$的性质可由SAS定理证$\triangle ABF \cong \triangle ADE$，即可判定$\triangle AEF$是等腰直角三角形，进而可得$HE = HF = AH = \frac{1}{2}EF$，由直角三角形斜边中线等于斜边一半可得$HC = \frac{1}{2}EF$；由此即可判断①正确；再根据$\angle ADH + \angle EAD = \angle DHE + \angle AEH$，可判断③正确，进而证明$\triangle AFK \sim \triangle HDE$，可得$\frac{AF}{HD} = \frac{AK}{HE}$，结合$AF = \sqrt{2}AH = \sqrt{2}HE$，即可得出结论④正确，由$\angle AED$随着$DE$长度变化而变化，不固定，可 判断②$HD = CD$不一定成立．

【详解】解：∵正方形$ABCD$，

∴ $AB = AD$，$\angle ADC = \angle ABC = \angle BAD = \angle BCD = 90°$，

∴ $\angle ABF = \angle ADC = 90°$，

∵ $BF = DE$，

∴ $\triangle ABF \cong \triangle ADE$（SAS），

∴ $\angle BAF = \angle DAE$，$AF = AE$，

∴ $\angle FAE = \angle BAF + \angle BAE = \angle DAE + \angle BAE = \angle BAD = 90°$，

∴ $\triangle AEF$是等腰直角三角形，$\angle AEF = \angle AFE = 45°$，

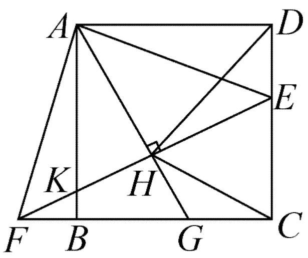
∵ $AH \perp EF$，

∴ $HE = HF = AH = \frac{1}{2}EF$，

∵ $\angle DCB = 90°$，

∴ $CH = HE = \frac{1}{2}EF$，

∴ $CH = AH$，故①正确；



又$\because$ $AD=CD$，$HD=HD$，

$\therefore \triangle AHD\cong\triangle CHD(\text{SSS})$，

$\therefore \angle ADH=\angle CDH=\dfrac{1}{2}\angle ADC=45^\circ$，

$\because$ $\angle ADH+\angle EAD=\angle DHE+\angle AEH$，即：$45^\circ+\angle EAD=\angle DHE+45^\circ$，

$\therefore \angle EAD=\angle DHE$，

$\therefore \angle FAB=\angle DHE=\angle EAD$，故③正确，

又$\because$ $\angle AFE=\angle ADH=45^\circ$，

$\therefore \triangle AFK\sim\triangle HDE$，

$\therefore \dfrac{AF}{HD}=\dfrac{AK}{HE}$，

又$\because$ $AF=\sqrt{2}AH=\sqrt{2}HE$，

$\therefore$ $AK\cdot HD=\sqrt{2}HE^2$，故④正确，

$\because$若$HD=CD$，则$\angle DHC=\angle DCH=\dfrac{180^\circ-45^\circ}{2}=67.5^\circ$，

又$\because$ $CH=HE$，

$\therefore \angle HCE=\angle HEC=67.5^\circ$，

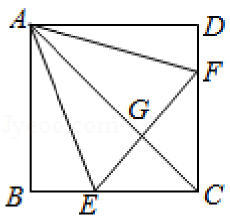
而点E是CD上一动点，$\angle AED$随着DE长度变化而变化，不固定，

而$\angle HEC=180^\circ-\angle AED-45^\circ=135^\circ-\angle AED$，

则故$\angle HEC=67.5^\circ$不一定成立，故②错误；

综上，正确的有①③④共 3 个

3．如图，在正方形$ABCD$中，点E，F分别在BC，CD上，$AE=AF$，AC与EF相交于点G．下列结论：①AC垂直平分EF；②$BE+DF=EF$；③当$\angle DAF=15^\circ$时，ΔAEF为等边三角形；④当$\angle EAF=60^\circ$时，$\angle AEB=\angle AEF$．其中正确的结论是(　　)



A．①③　　B．②④　　C．①③④　　D．②③④

【解答】解：$\because$四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore AB=AD=BC=CD$，$\angle B=\angle D=90^\circ$，$\angle ACD=\angle ACB=45^\circ$，

$\because AB=AD$，$AE=AF$，

$\therefore \mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ABE} \cong \mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ADF}(\mathrm{HL})$，

$\therefore BE = DF$，

$\therefore CE = CF$，

又$\because \angle ACD = \angle ACB = 45°$，

$\therefore AC$ 垂直平分 EF，故①正确；

$\because CE = CF$，$\angle BCD = 90°$，AC 垂直平分 EF，

$\therefore EG = GF$，

当 AE 平分 $\angle BAC$ 时，$BE = EG$，即 $BE + DF = EF$，故②错误；

$\because \mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ABE} \cong \mathrm{Rt}\Delta\mathrm{ADF}$，

$\therefore \angle DAF = \angle BAE = 15°$，

$\therefore \angle EAF = 60°$，

又$\because AE = AF$，

$\therefore \Delta AEF$ 是等边三角形，故③正确；

$\because AE = AF$，$\angle EAF = 60°$，

$\therefore \Delta AEF$ 是等边三角形，

$\therefore \angle AEF = 60°$，

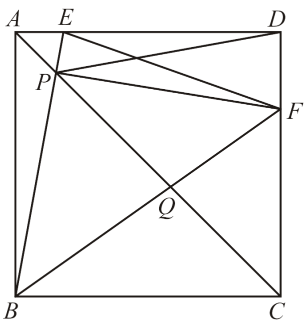
$\because \angle BAC = 45°$，$\angle CAE = 30°$，

$\therefore \angle BAE = 15°$，

$\therefore \angle AEB = 75° \neq \angle AEF$，故④错误.

2022 达州·中考真题

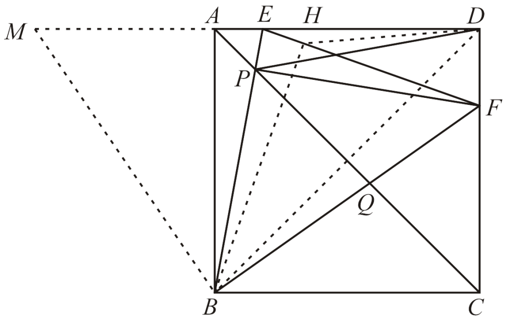
4．如图，在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别为 AD，CD 边上的动点（不与端点重合），连接 BE，BF，分别交对角线 AC 于点 P，Q．点 E，F 在运动过程中，始终保持 $\angle EBF = 45°$，连接 EF，PF，PD．以下结论：①$PB = PD$；②$\angle EFD = 2\angle FBC$；③$PQ = PA + CQ$；④$\triangle BPF$ 为等腰直角三角形；⑤若过点 B 作 $BH \perp EF$，垂足为 H，连接 DH，则 DH 的最小值为 $2\sqrt{2}-2$．其中所有正确结论的序号是____．



【答案】①②④⑤

【分析】连接 BD，延长 DA 到 M，使 $AM=CF$，连接 BM，根据正方形的性质及线段垂直平分线的性质定理即可判断①正确；通过证明 $\triangle BCF \cong \triangle BAM(SAS)$，$\triangle EBF \cong \triangle EBM(SAS)$，可证明②正确；作 $\angle CBN = \angle ABP$，交 AC 的延长线于 K，在 BK 上截取 $BN=BP$，连接 CN，通过证明 $\triangle ABP \cong \triangle CBN$，可判断③错误；通过证明 $\triangle BQP \sim \triangle CQF$，$\triangle BCQ \sim \triangle PFQ$，利用相似三角形的性质即可证明④正确；当点 B、H、D 三点共线时，DH 的值最小，分别求解即可判断⑤正确.

【详解】



如图 1，连接 BD，延长 DA 到 M，使 $AM=CF$，连接 BM，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AC$ 垂直平分 BD，$BA=BC,\angle BCF=90^{\circ}=\angle BAD=\angle ABC$，

$\therefore PB=PD$，$\angle BCF=\angle BAM$，$\angle FBC=90^{\circ}-\angle BFC$，故①正确；

$\therefore \triangle BCF\cong\triangle BAM(SAS)$，

$\therefore \angle CBF=\angle ABM, BF=BM, \angle M=\angle BFC$，

$\because \angle EBF=45^{\circ}$，

$\therefore \angle ABE+\angle CBF=45^{\circ}$，

$\therefore \angle ABE+\angle ABM=45^{\circ}$，

即 $\angle EBM=\angle EBF$，

$\because BE=BE$，

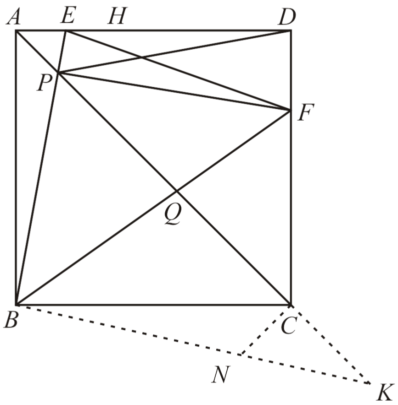
$\therefore \triangle EBF\cong\triangle EBM(SAS)$，

$\therefore \angle M=\angle EFB, \angle MEB=\angle FEB$，

$\therefore \angle EFB=\angle CFB$，

$\therefore \angle EFD=180^{\circ}-(\angle EFB+\angle CFB)=180^{\circ}-2\angle BFC$，

$\therefore \angle EFD=2\angle FBC$，故②正确；



如图 2，作 $\angle CBN=\angle ABP$，交 AC 的延长线于 K，在 BK 上截取 $BN=BP$，连接 CN，

$\therefore \triangle ABP\cong\triangle CBN$，

$\therefore \angle BAP=\angle BCN=45^{\circ}$，

$\because \angle ACB=45^{\circ}$，

$\therefore \angle NCK=90^{\circ}$，

$\therefore \angle CNK\neq\angle K$，即 $CN\neq CK$，

$\therefore PQ\neq PA+CQ$，故③错误；

如图 1，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle EBF=\angle BCP=\angle FCP=45^{\circ}$,

$\because \angle BQP=\angle CQF$,

$\therefore \triangle BQP\sim\triangle CQF$,

$\therefore \dfrac{BQ}{CQ}=\dfrac{PQ}{FQ}$,

$\because \angle BQC=\angle PQF$,

$\therefore \triangle BCQ\sim\triangle PFQ$,

$\therefore \angle BCQ=\angle PFQ=45^{\circ}$,

$\therefore \angle PBF=\angle PFB=45^{\circ}$,

$\therefore \angle BPF=90^{\circ}$,

$\therefore \triangle BPF$ 为等腰直角三角形，故④正确；

如图 1，当点 B、H、D 三点共线时，DH 的值最小，

$\therefore BD=\sqrt{2^{2}+2^{2}}=2\sqrt{2}$,

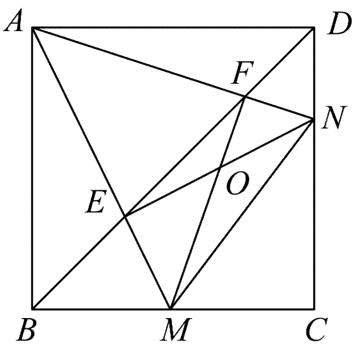
$\because \angle BAE=\angle BHE=90^{\circ}, BE=BE$,

$\therefore \triangle BAE\cong\triangle BHE(AAS)$,

$\therefore BA=BH=2$,

$\therefore DH=BD-BH=2\sqrt{2}-2$，故⑤正确

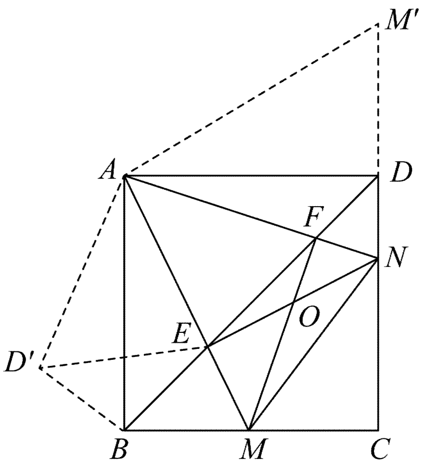
5．如图，点 M、N 分别是正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上的两个动点，在运动过程中保持 $\angle MAN=45^{\circ}$，AM、AN 分别与对角线 BD 交于点 E、F，连接 EN、FM 相交于点 O，以下结论：① $MN=BM+DN$；② $BE^{2}+DF^{2}=EF^{2}$；③ $BC^{2}=BF\cdot DE$；④ $OM=\sqrt{2}OF$，一定成立的是__________.



【答案】①②③

【分析】由旋转的性质可得 $AM'=AM$，$BM=DM'$，$\angle BAM=\angle DAM'$，$\angle MAM'=90^{\circ}$，$\angle ABM=\angle ADM'=90^{\circ}$，由 SAS 可证 $\triangle AMN\cong\triangle AM'N$，可得 $MN=NM'$，可得 $MN=BM+DN$，故①正确；由 SAS 可证 $\triangle AEF\cong\triangle AED'$，可得 $EF=D'E$，由勾股定理可得 $BE^{2}+DF^{2}=EF^{2}$；故②正确；通过证明 $\triangle DAE\backsim\triangle BFA$，可得 $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{AD}{BF}$，可证 $BC^{2}=BF\cdot DE$，故③正确；通过证明点 A，点 B，点 M，点 F 四点共圆，$\angle ABM=\angle AFM=90^{\circ}$，$\angle AMF=\angle ABF=45^{\circ}$，$\angle BAM=\angle BFM$，可证 $MO=\sqrt{2}EO$，由 $\angle BAM\neq\angle DAN$，可得 $OE\neq OF$，故④错误，即可求解.

【详解】解：将 $\triangle ABM$ 绕点 A 逆时针旋转 90°，得到 $\triangle ADM'$，将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90°，得到 $\triangle ABD'$，



$\therefore AM' = AM$， $BM = DM'$， $\angle BAM = \angle DAM'$， $\angle MAM' = 90^\circ$， $\angle ABM = \angle ADM' = 90^\circ$，

$\therefore \angle ADM' + \angle ADC = 180^\circ$，

$\therefore$点 M' 在直线 CD 上，

$\because \angle MAN = 45^\circ$，

$\therefore \angle DAN + \angle MAB = 45^\circ = \angle DAN + \angle DAM' = \angle M'AN$，

$\therefore \angle M'AN = \angle MAN = 45^\circ$，

又$\because AN = AN$， $AM = AM'$，

$\therefore \triangle AMN \cong \triangle AM'N$（$SAS$），

$\therefore MN = NM'$，

$\therefore M'N = M'D + DN = BM + DN$，

$\therefore MN = BM + DN$；故①正确；

$\because$将$\triangle ADF$绕点 A 顺时针旋转90°，得到$\triangle ABD'$，

$\therefore AF = AD'$， $DF = D'B$， $\angle ADF = \angle ABD' = 45^\circ$， $\angle DAF = \angle BAD'$，

$\therefore \angle D'BE = 90^\circ$，

$\because \angle MAN = 45^\circ$，

$\therefore \angle BAE + \angle DAF = 45^\circ = \angle BAD' + \angle BAE = \angle D'AE$，

$\therefore \angle D'AE = \angle EAF = 45^\circ$，

又$\because AE = AE$， $AF = AD'$，

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AED'$（$SAS$），

$\therefore EF = D'E$，

$\because D'E^2 = BE^2 + D'B^2$，

$\therefore BE^2 + DF^2 = EF^2$；故②正确；

$\because \angle BAF = \angle BAE + \angle EAF = \angle BAE + 45^\circ$， $\angle AEF = \angle BAE + \angle ABE = 45^\circ + \angle BAE$，

$\therefore \angle BAF = \angle AEF$，

又$\because \angle ABF = \angle ADE = 45^\circ$，

$\therefore \triangle DAE \backsim \triangle BFA$，

$\therefore \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{AD}{BF}$，

又$\because AB = AD = BC$，

$\therefore BC^2 = DE \cdot BF$，故③正确；

$\because \angle FBM = \angle FAM = 45^\circ$，

【淘宝店铺：向阳百分百】

∴点 A，点 B，点 M，点 F 四点共圆，

$\therefore \angle ABM=\angle AFM=90^{\circ}$， $\angle AMF=\angle ABF=45^{\circ}$， $\angle BAM=\angle BFM$，

同理可求 $\angle AEN=90^{\circ}$， $\angle DAN=\angle DEN$，

$\therefore \angle EOM=45^{\circ}=\angle EMO$，

$\therefore EO=EM$，

$\therefore MO=\sqrt{2}\ EO$，

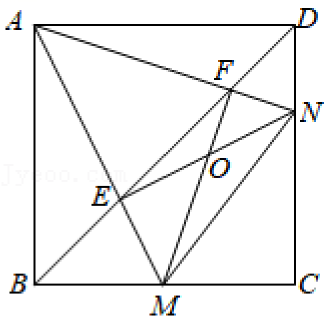
$\because \angle BAM\neq\angle DAN$，

$\therefore \angle BFM\neq\angle DEN$，

$\therefore EO\neq FO$，

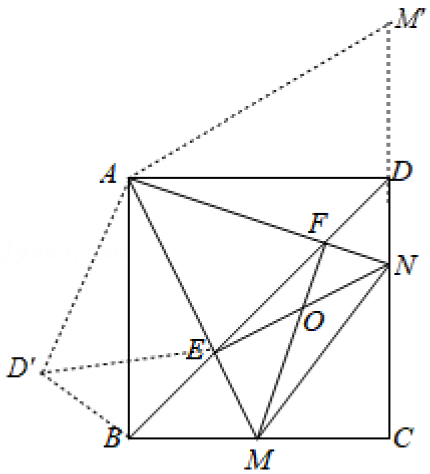
$\therefore OM\neq\sqrt{2}FO$，故④错误

6．如图，点 M、N 分别是正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上的两个动点，在运动过程中保持 $\angle MAN=45^{\circ}$，AM、AN 分别与对角线 BD 交于点 E、F，连接 EN、FM 相交于点 O，以下结论：① $MN=BM+DN$；② $BE^2+DF^2=EF^2$；③ $BC^2=BF\cdot DE$；④ $OM=\sqrt{2}OF$，一定成立的是(　　)



A．①②③　　B．①②④　　C．②③④　　D．①②③④

【解答】解：将 ΔABM 绕点 A 逆时针旋转 90°，得到 $\Delta ADM'$，将 ΔADF 绕点 A 顺时针旋转 90°，得到 $\Delta ABD'$，



$\therefore AM'=AM$， $BM=DM'$， $\angle BAM=\angle DAM'$， $\angle MAM'=90^{\circ}$， $\angle ABM=\angle ADM'=90^{\circ}$，

$\therefore \angle ADM'+\angle ADC=180^{\circ}$，

∴点 M' 在直线 CD 上，

$\because \angle MAN=45^{\circ}$，

$\therefore \angle DAN+\angle MAB=45^{\circ}=\angle DAN+\angle DAM'=\angle M'AN$，

$\therefore \angle M'AN=\angle MAN=45^{\circ}$，

又 $\because AN=AN$， $AM=AM'$，

$\therefore \Delta AMN \cong \triangle AM'N(SAS)$，

$\therefore MN = NM'$，

$\therefore M'N = M'D + DN = BM + DN$，

$\therefore MN = BM + DN$；故①正确；

$\because$将ΔADF绕点A顺时针旋转$90°$，得到$\Delta ABD'$，

$\therefore AF = AD'$，$DF = D'B$，$\angle ADF = \angle ABD' = 45°$，$\angle DAF = \angle BAD'$，

$\therefore \angle D'BE = 90°$，

$\because \angle MAN = 45°$，

$\therefore \angle BAE + \angle DAF = 45° = \angle BAD' + \angle BAE = \angle D'AE$，

$\therefore \angle D'AE = \angle EAF = 45°$，

又$\because AE = AE$，$AF = AD'$，

$\therefore \Delta AEF \cong \Delta AED'(SAS)$，

$\therefore EF = D'E$，

$\because D'E^2 = BE^2 + D'B^2$，

$\therefore BE^2 + DF^2 = EF^2$；故②正确；

$\because \angle BAF = \angle BAE + \angle EAF = \angle BAE + 45°$，$\angle AEF = \angle BAE + \angle ABE = 45° + \angle BAE$，

$\therefore \angle BAF = \angle AEF$，

又$\because \angle ABF = \angle ADE = 45°$，

$\therefore \Delta DAE \backsim \Delta BFA$，

$\therefore \dfrac{DE}{AB} = \dfrac{AD}{BF}$，

又$\because AB = AD = BC$，

$\therefore BC^2 = DE \cdot DF$，故③正确；

$\because \angle FBM = \angle FAM = 45°$，

$\therefore$点A，点B，点M，点F四点共圆，

$\therefore \angle ABM = \angle AFM = 90°$，$\angle AMF = \angle ABF = 45°$，$\angle BAM = \angle BFM$，

同理可求$\angle AEN = 90°$，$\angle DAN = \angle DEN$，

$\therefore \angle EOM = 45° = \angle EMO$，

$\therefore EO = EM$，

$\therefore MO = \sqrt{2}EO$，

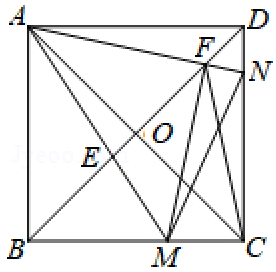
$\because \angle BAM \neq \angle DAN$，

$\therefore \angle BFM \neq \angle DEN$，

$\therefore EO \neq FO$，

$\therefore OM \neq \sqrt{2}FO$，故④错误

7．如图，正方形$ABCD$的对角线相交于点O，点M，N分别是边BC，CD上的动点（不与点B，C，D重合），AM，AN分别交BD于E，F两点，且$\angle MAN = 45°$，则下列结论：①$MN = BM + DN$；②$\Delta AEF \backsim \Delta BEM$；③$\dfrac{AF}{AM} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$；④$\Delta FMC$是等腰三角形．其中正确的有(　　)



A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

【解答】解：将 ΔABM 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\Delta ADM'$，

$\because \angle M'AN=\angle DAN+\angle MAB=45^{\circ}$，$AM'=AM$，$BM=DM'$，

$\because \angle M'AN=\angle MAN=45^{\circ}$，$AN=AN$，

$\therefore \Delta AMN\cong\triangle AM'N'(SAS)$，

$\therefore MN=NM'$，

$\therefore M'N=M'D+DN=BM+DN$，

$\therefore MN=BM+DN$；故①正确；

$\because \angle FDM'=135^{\circ}$，$\angle M'AN=45^{\circ}$，

$\therefore \angle M'+\angle AFD=180^{\circ}$，

$\because \angle AFE+\angle AFD=180^{\circ}$，

$\therefore \angle AFE=\angle M'$，

$\because \angle AMB=\angle M'$，

$\therefore \angle AMB=\angle AFE$，

$\because \angle EAF=\angle EBM=45^{\circ}$，

$\therefore \Delta AEF\backsim\Delta BEM$，故②正确；

$\therefore \dfrac{AE}{BE}=\dfrac{EF}{EM}$，即 $\dfrac{AE}{EF}=\dfrac{BE}{EM}$，

$\because \angle AEB=\angle MEF$，

$\therefore \Delta AEB\backsim\Delta FEM$，

$\therefore \angle EMF=\angle ABE=45^{\circ}$，

$\therefore \Delta AFM$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \dfrac{AF}{AM}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；故③正确；

在 ΔADF 与 ΔCDF 中，$\begin{cases}AD=CD\\ \angle ADF=\angle CDF=45^{\circ}\\ DF=DF\end{cases}$，

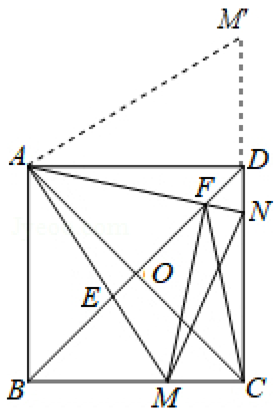
$\therefore \Delta ADF\cong\Delta CDF(SAS)$，

$\therefore AF=CF$，

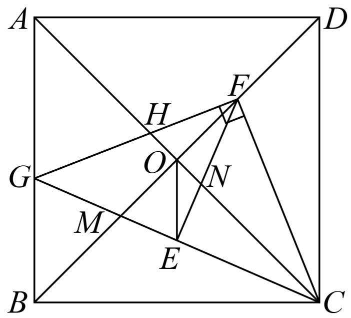
$\because AF=MF$，

$\therefore FM=FC$，

$\therefore \Delta FMC$ 是等腰三角形，故④正确；



8．如图，在正方形$ABCD$中，对角线AC，BD相交于点O，F是线段OD上的动点（点F不与点O，D重合）连接CF，过点F作$FG\perp CF$分别交AC，AB于点H，G，连接CG交BD于点M，作$OE\parallel CD$交CG于点E，EF交AC于点N．有下列结论：①当$BG=BM$时，$AG=\sqrt{2}BG$；②$CN^2=BM^2+DF^2$；③$\angle GFM=\angle GCH$时，$CF^2=CN\cdot BC$；④$\dfrac{OH}{OM}=\dfrac{OF}{OC}$．其中正确的是________（填序号）．



【答案】①②③

【分析】①正确．利用面积法证明$\dfrac{AG}{BG}=\dfrac{AC}{BC}=\sqrt{2}$即可；

②正确．如图3中，将$\triangle CBM$绕点C顺时针旋转$90°$得到$\triangle CDW$，连接FW．则$CM=CW$，$BM=DW$，$\angle MCW=90°$，$\angle CBM=\angle CDW=45°$，证明$FM=FW$，利用勾股定理，即可解决问题；

③正确．如图2中，过点M作$MP\perp BC$于P，$MQ\perp AB$于Q，连接AF．想办法证明$CM=CF$，再利用相似三角形的性质，解决问题即可；

④错误．假设成立，推出$\angle OFH=\angle OCM$，显然不符合条件．

【详解】解：如图1中，过点G作$GT\perp AC$于T．

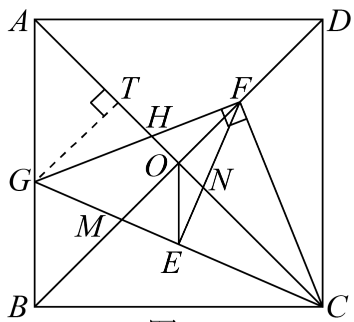


图1

$\because BG = BM$，

$\therefore \angle BGM = \angle BMG$，

$\because \angle BGM = \angle GAC + \angle ACG$， $\angle BMG = \angle MBC + \angle BCM$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle GAC = \angle MBC = 45°$， $AC = \sqrt{2}BC$，

$\therefore \angle ACG = \angle BCG$，

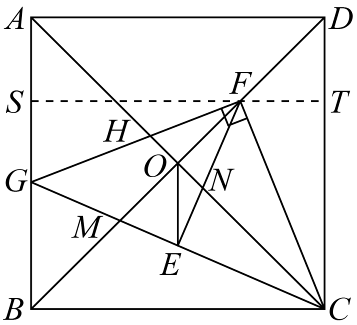
$\because GB \perp CB$， $GT \perp AC$，

$\therefore GB = GT$，

$\because \dfrac{S_{\triangle BCG}}{S_{\triangle ACG}} = \dfrac{BG}{AG} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot GB}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot GT} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

$\therefore AG = \sqrt{2}BG$， 故①正确，

过点 F 作 $ST // AD$， 如图所示：



$\therefore$ 四边形 $ASTD$ 是矩形，

$\because \angle BDC = 45°$，

$\therefore DT = FT$，

在正方形 $ABCD$ 中， $AD = CD = ST$，

$\therefore ST - FT = CD - DT$， 即 $SF = CT$，

$\because \angle SFG + \angle TFC = \angle TFC + \angle TCF = 90°$，

$\therefore \angle SFG = \angle TCF$，

$\because \angle GSF = \angle FTC = 90°$，

$\therefore \triangle SFG \cong \triangle TCF$，

$\therefore FG = FC$，

$\therefore \angle FCG = 45°$，

如图 3 中，将 $\triangle CBM$ 绕点 C 顺时针旋转 $90°$ 得到 $\triangle CDW$，连接 FW．则 $CM = CW$，$BM = DW$，$\angle MCW = 90°$，$\angle CBM = \angle CDW = 45°$，

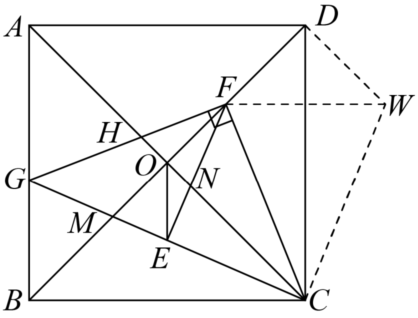


图3

$\because \angle FCW=\angle MCW-\angle FCG=90^\circ-45^\circ=45^\circ$，

$\therefore \angle FCG=\angle FCW=45^\circ$，

$\because CM=CW$， $CF=CF$，

$\therefore \triangle CFM \cong \triangle CFW(\text{SAS})$，

$\therefore FM=FW$，

$\because \angle FDW=\angle FDC+\angle CDW=45^\circ+45^\circ=90^\circ$，

$\therefore FW^2=DF^2+DW^2$，

$\therefore FM^2=BM^2+DF^2$，

$\because BD\perp AC$， $FG\perp CF$，

$\therefore \angle COF=90^\circ$， $\angle CFG=90^\circ$，

$\therefore \angle FCN+\angle OFC=90^\circ$， $\angle OFC+\angle GFM=90^\circ$，

$\therefore \angle FCN=\angle GFM$，

$\because OE\parallel CD$， $AB\parallel CD$，O 为 AC 的中点，

$\therefore \dfrac{CE}{GE}=\dfrac{OC}{OA}=1$，即 $CE=GE$，

$\therefore FE\perp CG$，

$\because FC=FG$，

$\therefore \angle EFC=\angle EFG=45^\circ$；

$\because \angle NFC=\angle FGM=45^\circ$， $FG=CF$，

$\therefore \triangle CFN \cong \triangle FGM(\text{ASA})$，

$\therefore CN=FM$，

$\therefore CN^2=BM^2+DF^2$，故②正确，

如图 2 中，过点 M 作 $MP\perp BC$ 于 P， $MQ\perp AB$ 于 Q，连接 AF．

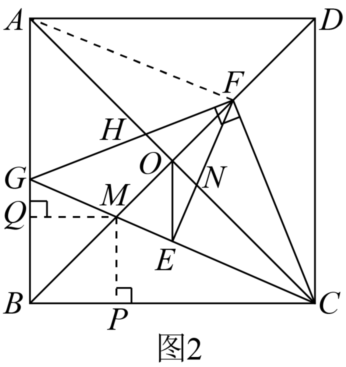


图2

$\because \angle OFH+\angle FHO=90^\circ$， $\angle FHO+\angle FCO=90^\circ$，

$\therefore \angle OFH=\angle FCO$，

【淘宝店铺：向阳百分百】

$\because AB=CB$，$\angle ABF=\angle CBF$，$BF=BF$，

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CBF(\text{SAS})$，

$\therefore AF=CF$，$\angle BAF=\angle BCF$，

$\because \angle CFG=\angle CBG=90^\circ$，

$\therefore \angle BCF+\angle BGF=180^\circ$，

$\because \angle BGF+\angle AGF=180^\circ$，

$\therefore \angle AGF=\angle BCF=\angle GAF$，

$\therefore AF=FG$，

$\therefore FG=FC$，

$\therefore \angle FCG=\angle BCA=45^\circ$，

$\therefore \angle ACF=\angle BCG$，

$\because MQ /\!/ CB$，

$\therefore \angle GMQ=\angle BCG=\angle ACF=\angle OFH$，

$\because \angle MQG=\angle FOH=90^\circ$，$FH=MG$，

$\therefore \triangle FOH \cong \triangle MQG(\text{AAS})$，

$\therefore MQ=OF$，

$\because \angle BMP=\angle MBQ$，$MQ\perp AB$，$MP\perp BC$，

\ $MQ=MP$，

$\therefore MP=OF$，

$\because \angle CPM=\angle COF=90^\circ$，$\angle PCM=\angle OCF$，

$\therefore \triangle CPM \cong \triangle COF(\text{AAS})$，

$\therefore CM=CF$，

$\because OE /\!/ AG$，$OA=OC$，

$\therefore EG=EC$，

$\because \triangle FCG$是等腰直角三角形，

$\therefore \angle GCF=45^\circ$，

$\therefore \angle CFN=\angle CBM$，

$\because \angle FCN=\angle BCM$，

$\therefore \triangle BCM \backsim \triangle FCN$，

$\therefore \dfrac{CM}{CN}=\dfrac{CB}{CF}$，即$CM\cdot CF=CN\cdot CB$，

$\therefore CF^2=CB\cdot CN$，故③正确，

假设$\dfrac{OH}{OM}=\dfrac{OF}{OC}$成立，

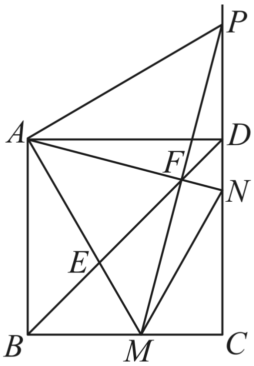
$\because \angle FOH=\angle COM$，

$\therefore \triangle FOH \backsim \triangle COM$，

$\therefore \angle OFH=\angle OCM$，显然这个条件不成立，故④错误

9．（2023·广东深圳·校联考模拟预测）如图，等腰直角$\triangle AMP$中，$\angle PAM=90^\circ$，顶点M，P在正方形$ABCD$的BC边及CD边的延长线上动点．BD交MP于点F，连接AF并延长，交CD于N，AM交BD于点E．以

下结论：①$MN=MB+DN$ ②$BE^2+DF^2=EF^2$ ③$BC^2=EB\cdot DB$ ④若$\tan\angle PMN=\frac{1}{3}$，则$\frac{BM}{CM}=1$，其中正确的是________.（填写正确的序号）



【答案】①②③④

【分析】由正方形及等腰直角三角形的性质，可证得$\triangle ABM\cong\triangle ADP$，$\angle ABD=\angle CBD=\angle AMF=45^\circ$，可证得$BM=DP$，点$A$、$B$、$M$、$F$四点共圆，$\angle MAN=\angle PAN=45^\circ$，由SAS可证$\triangle AMN\cong\triangle APN$，可得$MN=PN$，可得$MN=BM+DN$，故①正确；由SAS可证$\triangle AEF\cong\triangle AED'$，可得$EF=D'E$，由勾股定理可得$BE^2+DF^2=EF^2$；故②正确；通过证明$\triangle DAE\backsim\triangle BFA$，可得$\frac{DE}{BA}=\frac{AD}{FB}$，故③正确；由$MN=PN$可得$\tan\angle PMN=\tan\angle MPC=\frac{1}{3}$，设正方形的边长为$a$，可得$\frac{MC}{a+a-MC}=\frac{1}{3}$，$MC=\frac{1}{2}a$，故④正确，即可求解.

【详解】解：$\because$四边形$ABCD$是正方形，$\triangle AMP$是等腰直角三角形，

$\therefore\angle ABD=\angle CBD=\angle AMF=45^\circ$，$AB=AD$，$AM=AP$，

$\therefore\triangle ABM\cong\triangle ADP(\text{HL})$，点$A$、$B$、$M$、$F$四点共圆，

$\therefore BM=DP$，$\angle MAN=\angle FBM=45^\circ$，

$\because\angle PAM=90^\circ$

$\therefore\angle PAN=\angle MAN=45^\circ$，

又$\because AN=AN$，$AM=AP$，

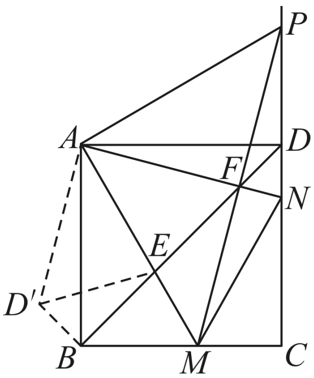
$\therefore\triangle AMN\cong\triangle APN(\text{SAS})$，

$\therefore MN=PN$，

$\because PN=PD+DN=BM+DN$，

$\therefore MN=BM+DN$，故①正确；

如图：将$\triangle ADF$绕点A顺时针旋转90°，得到$\triangle ABD'$，连接$D'E$，



$\therefore AF=AD'$，$DF=D'B$，$\angle ADF=\angle ABD'=45^\circ$，$\angle DAF=\angle BAD'$，

$\therefore \angle D'BE = 90^\circ$，

$\because \angle MAN = 45^\circ$，

$\therefore \angle BAE + \angle DAF = 45^\circ = \angle BAD' + \angle BAE = \angle D'AE$，

$\therefore \angle D'AE = \angle EAF = 45^\circ$，

又$\because AE = AE$， $AF = AD'$，

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AED'(\mathrm{SAS})$，

$\therefore EF = D'E$，

$\because D'E^2 = BE^2 + D'B^2$

$\therefore BE^2 + DF^2 = EF^2$；故②正确；

$\because \angle BAF = \angle BAE + \angle EAF = \angle BAE + 45^\circ$， $\angle AEF = \angle BAE + \angle ABE = 45^\circ + \angle BAE$，

$\therefore \angle BAF = \angle AEF$，

又$\because \angle ABF = \angle ADE = 45^\circ$，

$\therefore \triangle DAE \backsim \triangle BFA$，

$\therefore \dfrac{DE}{BA} = \dfrac{AD}{BF}$，

又$\because AB = AD = BC$，

$\therefore BC^2 = DE \cdot BF$，故③正确；

$\because MN = PN$，

$\therefore \angle PMN = \angle MPC$，

$\because \tan \angle PMN = \dfrac{1}{3}$

$\therefore \tan \angle PMN = \tan \angle MPC = \dfrac{MC}{PC} = \dfrac{1}{3}$，

设正方形的边长为 a，

$\therefore \dfrac{MC}{PC} = \dfrac{MC}{a + BM} = \dfrac{MC}{a + a - MC} = \dfrac{1}{3}$，

解得 $MC = \dfrac{1}{2}a$，

$\therefore MB = MC$，

$\therefore \dfrac{BM}{CM} = 1$，故④正确