专题 2-6　逆等线之乾坤大挪移

01 题型·解读

题型一　平移，对称或构造平行四边形

2022 年四川省内江中考

2022 滨州中考

题型二　构造 SAS 型全等拼接线段

2022·贵州遵义·统考中考真题

2023·日照·二模

2023·咸阳·二模

2023·深圳中学联考

2023·甘肃武威中考真题拆解

2023·黄冈中考真题拆解

题型三　构造相似求加权线段和

2023 年成都市天府新区二模

2022·广州中考真题（7 种解法）

2023·湖北黄石中考拆解

题型四　取到最小值时对其它量进行计算

湖北武汉·中考真题

02 满分·技巧

一、什么是逆等线段。

两个动点分别在直线上运动，且它们各自到某一定点的距离始终相等,那么这两条始终相等的线段称为逆等线段。

二、解题步骤:

1.找三角形。找一条逆等线段，一条动线段构成的三角形。(图中本身就有的三角形，不要添加辅助线以后构成的三角形)

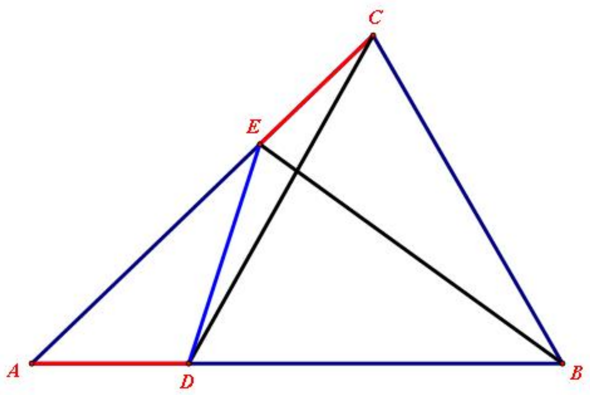
2.确定该三角形的不变量。在动点移动过程中，该三角形有一个边长度不变，有一个角的大小不变。

3.从另一逆等线段的定点引一条线。使得线段长度等于第二步中的那个不变的边长，与这个逆等线段的夹角等于第二步中那个不变的角。

4.问题转化为将军饮马问题求最值。

【模型解读】

△ABC 中，D、E 分别是 AB、AC 上的动点，且 AD=CE，即逆向相等，则称 AD 和 CE 为逆等线，就是怎么别扭怎么来。

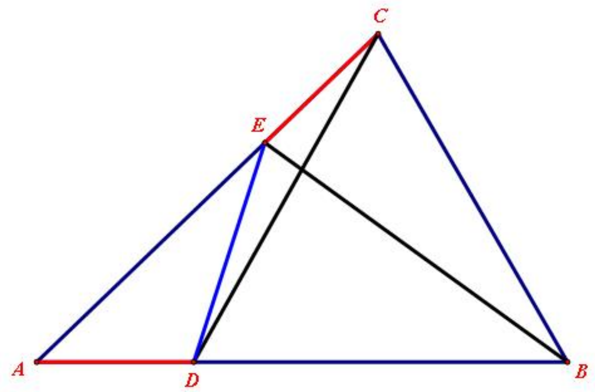


一般情况下，题目中有两个没有首尾相连的线段相等，即两定两动，也归为逆等线问题。

观察图形，我们很容易发现，AD 和 CE 没有首尾相连，所以，一般通过平移或者作平行等方法构造全等三角形来实现线段转移，从而使逆等线段产生关系，最终解决问题。

这样解释很笼统很枯燥，我们以具体例题来描述

如图，在△ABC 中，∠ABC＝60°，BC=8，AC=10，点 D、E 分别是 AB、AC 上的动点，且 AD=CE，求 CD+BE 的最小值。



分析思路：

① AD 在△ADC 中，那么我们就以 CD 为一边构造另一个三角形与之全等，这个

也叫做一边一角造全等。

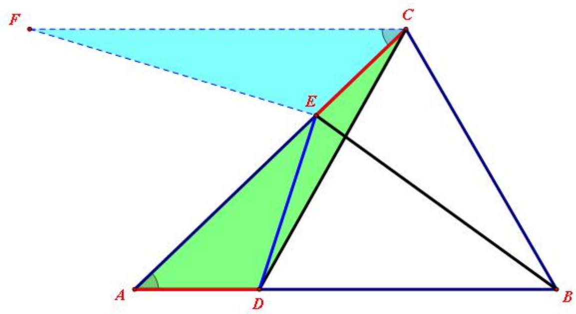
② 即过点 C 作 CF//AB，且 CF=AC。（构造一边一角，得全等）

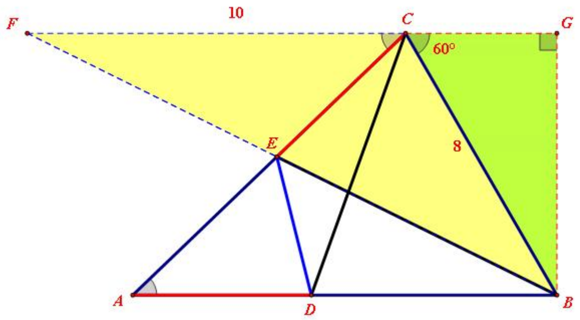
③ 构造出△ADC≌△CEF (SAS),证出 EF=CD

④ CD+BE=EF+BE，根据两点之间，线段最短，连接 BF，则 BF 即为所求

此时，B、E、F 三点共线，本题中，也可以利用三角形三边关系去求最值

⑤ 求 BF



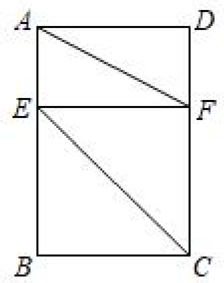


03 核心·题型

题型一　平移，对称或构造平行四边形

2022 年四川省内江中考

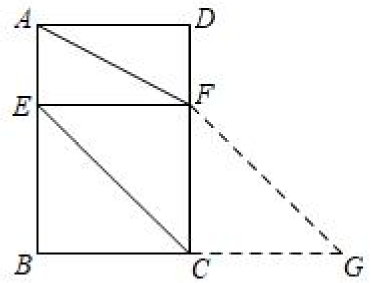
1．如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$AD=4$，点 E、F 分别是 AB、DC 上的动点，$EF\parallel BC$，则 $AF+CE$ 的最小值是 _____.



【答案】10

【分析】延长 BC 到 G，使 $CG=EF$，连接 FG，证明四边形 $EFGC$ 是平行四边形，得出 $CE=FG$，得出当点 A、F、G 三点共线时，$AF+CE$ 的值最小，根据勾股定理求出 AG 即可.

【详解】解：延长 BC 到 G，使 $CG=EF$，连接 FG，



∵ $EF\parallel CG$，$EF=CG$，

∴四边形 $EFGC$ 是平行四边形，

∴$CE=FG$，

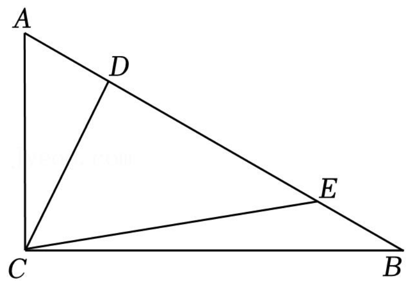
∴$AF+CE=AF+FG$，

∴当点 A、F、G 三点共线时，$AF+CE$ 的值最小为 AG，

由勾股定理得，$AG=\sqrt{AB^2+BG^2}=\sqrt{6^2+(4+4)^2}=10$，

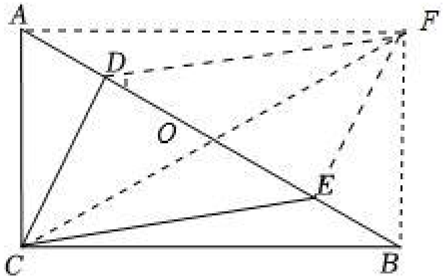
∴$AF+CE$ 的最小值为 10

2．如图，Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$\angle B=30°$，D，E 为 AB 边上的两个动点，且 $AD=BE$，连接 CD，CE，若 $AC=2$，则 $CD+CE$ 的最小值为 _______.



【答案】4

解：如图：



构造矩形 ACBF，连接 DF，EF，CF 交 AB 于点 O，

则 OF＝OC，OA＝OB，AB＝CF，

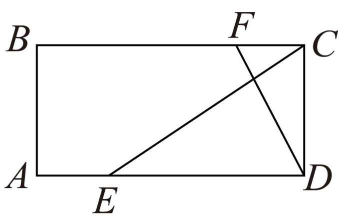
∵AD＝BF， ∴OD＝OE，∴四边形 CEFD 为平行四边形，

∴DF＝CE， ∴CD+CE＝CD+DF≥CF，

∵Rt△ABC 中，∠ACB＝90°，∠B＝30°，

∴AB＝2AC＝4，∴CD+CE≥4， 故答案为：4.

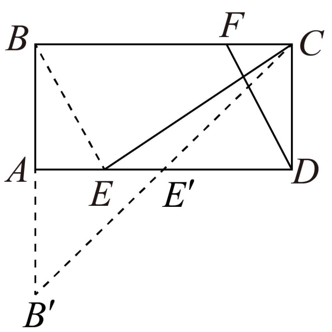
3．如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AD=2$，点 E 在 AD 上，点 F 在 BC 上，且 $AE=CF$，连结 CE，DF，则 $CE+DF$ 的最小值为____________.



【答案】$2\sqrt{2}$

【分析】证 $\triangle BAE\cong\triangle DCF$ 得 $CE+DF=CE+BE$，作点 B 关于 AD 的对称点 B'，则 $CE+BE=CE+B'E\geq CB'$，据此即可求解.

【详解】解：连接 BE，作点 B 关于 AD 的对称点 B'，连接 CB'，EB'



由题意得：$AB=CD, \angle BAE=DCF=90°$

∵ $AE=CF$

∴ $\triangle BAE \cong \triangle DCF$

∴ $BE=DF$，$CE+DF=CE+BE$

∵ $BE=B'E$，

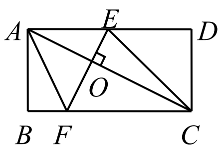
∴ $CE+BE=CE+B'E \geq CB'$

$CB'=\sqrt{CB^2+BB'^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

∴ $CE+DF$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$

2022 滨州中考

4．如图，在矩形 $ABCD$ 中，AB＝5，AD＝10，点 E 是边 AD 上的一个动点，过点 E 作 $EF\perp AC$，分别交对角线 AC，直线 BC 于点 O，F，则在点 E 移动的过程中，$AF+FE+EC$ 的最小值为_________．



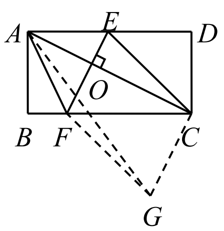
【答案】$\dfrac{25+5\sqrt{5}}{2}$

【解析】∵AB＝5，AD＝10，∴AC＝$\sqrt{5^2+10^2}$＝$5\sqrt{5}$．

∵EF⊥AC，∴由矩形内十字架模型可知，

$\dfrac{EF}{AC}=\dfrac{AB}{AD}$，∴ $\dfrac{EF}{5\sqrt{5}}=\dfrac{5}{10}$，∴EF＝$\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$．

以 EF，EC 为邻边作▱EFGC，则 EC＝FG，CG＝EF＝$\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$，



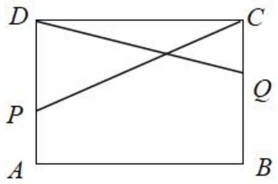
∠ACG＝∠EOC＝90°．

在 Rt△ACG 中，AG＝$\sqrt{AC^2+CG^2}$＝$\dfrac{25}{2}$，

∴AF＋FE＋EC＝AF＋FG＋FE≥AG＋FE＝$\dfrac{25+5\sqrt{5}}{2}$，

∴AF＋FE＋EC 的最小值为 $\dfrac{25+5\sqrt{5}}{2}$．

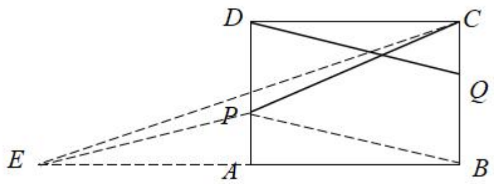
5．如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$AD=5$，点 P 在边 AD 上，点 Q 在边 BC 上，且 $AP=CQ$，连接 CP，QD，则 $PC+QD$ 的最小值为__________．



【答案】13

【分析】连接 BP，在 BA 的延长线上截取 $AE=AB=6$，连接 PE，CE，$PC+QD=PC+PB$，则 $PC+QD$ 的最小值转化为 $PC+PB$ 的最小值，在 BA 的延长线上截取 $AE=AB=6$，则 $PC+QD=PC+PB=PC+PE\geq CE$，根据勾股定理可得结果.

【详解】解：如图，连接 BP，



在矩形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AD=BC$，

∵$AP=CQ$，

∴$AD-AP=BC-CQ$，

∴$DP=QB$，$DP\parallel BQ$，

∴四边形 $DPBQ$ 是平行四边形，

∴$PB\parallel DQ$，$PB=DQ$，

则 $PC+QD=PC+PB$，则 $PC+QD$ 的最小值转化为 $PC+PB$ 的最小值，

在 BA 的延长线上截取 $AE=AB=6$，连接 PE，

∵$PA\perp BE$，

∴PA 是 BE 的垂直平分线，

∴$PB=PE$，

∴$PC+PB=PC+PE$，

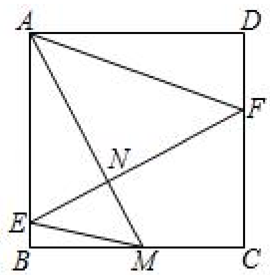
连接 CE，则 $PC+QD=PC+PB=PC+PE\geq CE$，

∵$BE=2AB=12$，$BC=AD=5$，

∴$CE=\sqrt{BE^2+BC^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$.

∴$PC+PB$ 的最小值为 13

6．如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，M 是 BC 的中点，N 是 AM 上的动点，过点 N 作 $EF\perp AM$ 分别交 AB，CD 于点 E，F.



（1）AM 的长为_____；

（2）$EM+AF$ 的最小值为_____．

【答案】 $\sqrt{5}$ $\sqrt{10}$

【分析】(1)根据正方形的性质求得 AB 与 BM，再由勾股定理求得 AM；

(2)过 F 作 $FG\perp AB$ 于 G，证明△ABM≌△FGE 得 $AM=EF$，再将 EF 沿 EM 方向平移至 MH，连接 FH，当 A、F、H 三点共线时，$EM+AF=FH+AF=AH$ 的值最小，由勾股定理求出此时的 AH 的值便可．

【详解】解：(1)∵正方形 $ABCD$ 的边长为 2，

∴$AB=BC=2$，$\angle ABC=90°$，

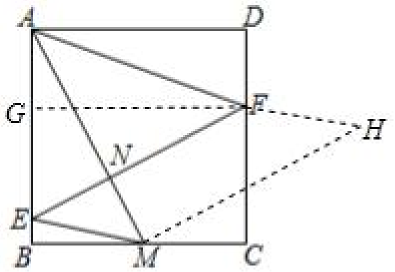
∵M 是 BC 的中点，

∴$BM=\frac{1}{2}BC=1$，

∴ $AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=\sqrt{5}$，

故答案为：$\sqrt{5}$；

(2)过 F 作 $FG\perp AB$ 于 G，则 $FG=BC=AB$，$\angle ABM=\angle FGE=90°$，



∵$EF\perp AM$，

∴$\angle BAM+\angle AEN=\angle AEN+\angle GFE=90°$，

∴$\angle BAM=\angle GFE$，

∴△ABM≌△FGE(ASA)，

∴$AM=EF$，

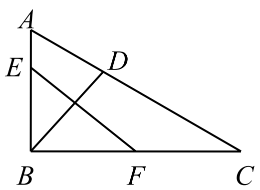
将 EF 沿 EM 方向平移至 MH，连接 FH，则 $EF=MH$，$\angle AMH=90°$，$EM=FH$，

当 A、F、H 三点共线时，$EM+AF=FH+AF=AH$ 的值最小，

此时 $EM+AF=AH=\sqrt{AM^2+MH^2}=\sqrt{5+5}=\sqrt{10}$，∴$EM+AF$ 的最小值为 $\sqrt{10}$

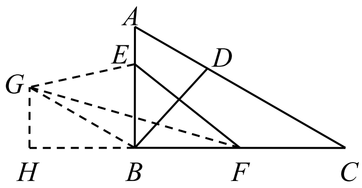
题型二　构造 SAS 型全等拼接线段

7．如图，在△ABC 中，$\angle ABC=90°$，$\angle A=60°$，$AB=2$，D、E 分别是 AC、AB 上的动点，且 $AD=BE$，F 是 BC 的中点，则 $BD+EF$ 的最小值为___________．



【答案】$\sqrt{13}$

提示：作 $BG\parallel AC$ 且 $BG=AB$，连接 GE，作 $GH\perp BC$ 于 H



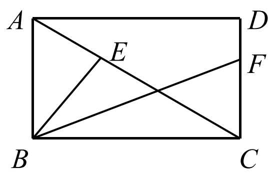
则 $\angle GBH=\angle C=30°$，$GH=1$，$HB=\sqrt{3}$

$BF=\sqrt{3}$，$HF=2\sqrt{3}$，$GF=\sqrt{13}$

$\triangle ABD\cong\triangle BGE$（SAS），$BD=GE$

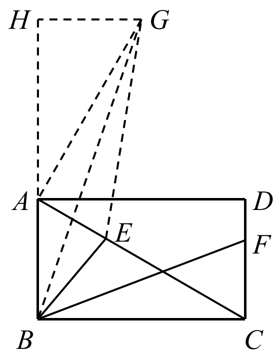
$BD+EF=GE+EF\geqslant GF=\sqrt{13}$，最小值为 $\sqrt{13}$

8．如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$AD=3\sqrt{3}$，点 E、F 分别是对角线 AC 和边 CD 上的动点，且 $AE=CF$，则 $BE+BF$ 的最小值是___________.



【答案】$3\sqrt{7}$

提示：作 $AG\perp AC$ 且 $AG=BC$，连接 BG、EG

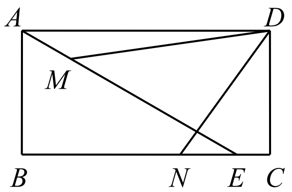


则 $\triangle GAE\cong\triangle BCF$，$BF=GE$

$BE+BF=BE+GE\geqslant BG$

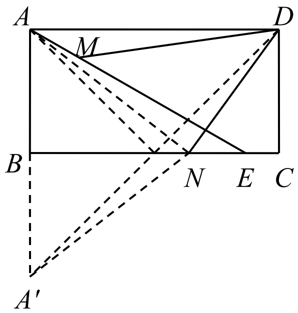
解 $\triangle ABG$ 得 $BG=3\sqrt{7}$，$BE+BF$ 的最小值是 $3\sqrt{7}$

9．如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=4$，E 为边 BC 上一点，$AE=AD$，M、N 分别为线段 AE、BE 上的动点，且 $AM=EN$，连接 DM、DN，则 $DM+DN$ 的最小值为___________.



【答案】$4\sqrt{2}$

提示：连接 AN



由题意，$AD=AE$，$\angle DAM=\angle AEN=30^\circ$，$AM=EN$

$\therefore\triangle ADM\cong\triangle EAN$，$\therefore DM=AN$

延长 AB 至点 A'，使 $A'B=AB$，连接 $A'N$、$A'D$

则 $AN=A'N$，$\therefore DM+DN=AN+DN=A'N+DN\geqslant A'D$

当 A'、N、D 三点共线时 $DM+DN$ 的值最小

此时 $A'N=DN$，$\therefore AN=\dfrac{1}{2}A'D=DN$

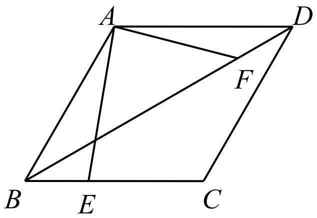
$\therefore$点 N 在线段 AD 的垂直平分线上

$\therefore BN=\dfrac{1}{2}BC=2$，$\therefore AN=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$

$\therefore DM+DN\geqslant A'D=2AN=4\sqrt{2}$

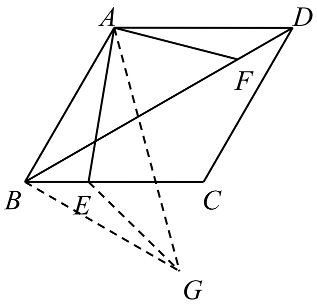
即 $DM+DN$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$

10．如图，菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60^\circ$，$AB=2$，E、F 分别是边 BC 和对角线 BD 上的动点，且 $BE=DF$，则 $AE+AF$ 的最小值为___________.



【答案】$2\sqrt{2}$

提示：作 $BG\perp AB$ 且 $BG=AB$，连接 AG、EG



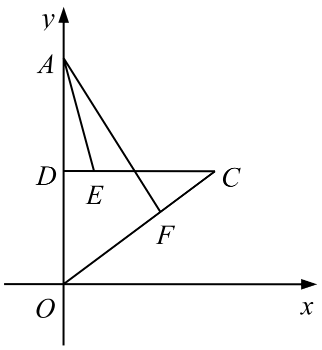
则 $AD=BG$，$\angle ADF=\angle GBE=30^\circ$

又$\because DF=BE$，$\therefore\triangle ADF\cong\triangle GBE$，$\therefore AF=EG$

$\therefore AE+AF=AE+EG\geqslant AG=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$

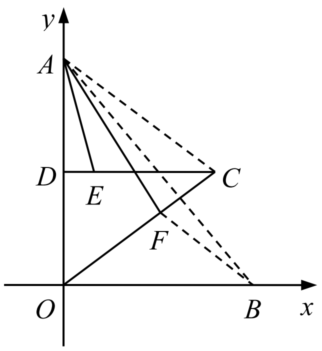
即 $AE+AF$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$

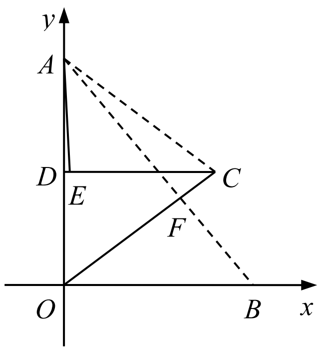
11．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A（0，6），C（4，3），$CD\perp y$ 轴于 D，连接 OC，E、F 分别是线段 CD、OC 上的动点，且 $CE=OF$，连接 AE、AF，则 $AE+AF$ 的最小值为__________，此时点 E 的坐标为__________．



【答案】（$\frac{2}{13}$，0）

提示：在 x 轴上取点 B（5，0），连接 AB、AC、BF





∵A（0，6），C（4，3），$CD\perp y$ 轴，∴$AD=OD=3$

∴$AC=5=BO$，CD 是 AO 的垂直平分线，∴$CA=CO$

∴$\angle ACE=\angle OCE=\angle BOF$

又∵$CE=OF$，∴$\triangle ACE\cong\triangle BOF$（SAS），∴$AE=BF$

∵A（0，6），B（5，0），∴$AB=\sqrt{61}$

∴$AE+AF=AF+BF\geqslant AB=\sqrt{61}$，即 $AE+AF$ 的最小值为 $\sqrt{61}$

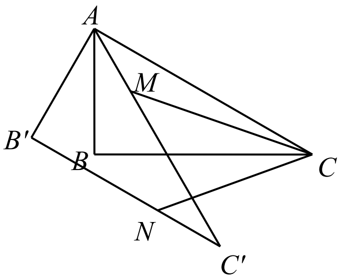
此时点 F 落在线段 AB 上，即直线 AB 与 OC 的交点

易求直线 AB：$y=-\frac{6}{5}x+6$，直线 OC：$y=\frac{3}{4}x$

可得 F（$\frac{40}{13}$，$\frac{30}{13}$），$CE=OF=\frac{50}{13}$，$DE=CD-CE=4-\frac{50}{13}=\frac{2}{13}$

∴此时点 E 的坐标为（$\frac{2}{13}$，0）

12．如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，$\angle ACB=30°$，$AB=2$，将$\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 30°到$\triangle AB'C'$，M、N 分别为边 AC'、$B'C'$ 上的动点，且 $AM=C'N$，连接 CM、CN，则 $CM+CN$ 的最小值为__________．



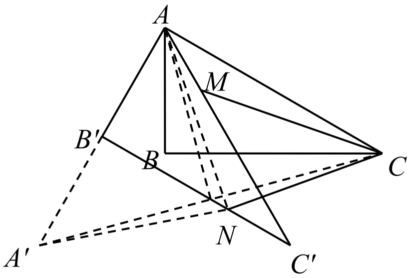
【答案】$4\sqrt{2}$

提示：连接 AN

由题意，$AM=C'N$，$\angle C'=\angle ACB=\angle CAC'=30°$，$AC=AC'$

$\therefore\triangle ACM\cong\triangle C'AN$，$\therefore CM=AN$

延长 AB' 至点 A'，使 $A'B'=AB'$，连接 $A'N$、$A'C$



则 $AN=A'N$，$\therefore CM+CN=AN+CN=A'N+CN\geqslant A'C$

当 A'、N、C 三点共线时 $CM+CN$ 的值最小

此时 $A'N=CN$，$\therefore AN=\frac{1}{2}A'C=CN$

$\therefore$点 N 在线段 AC 的垂直平分线上

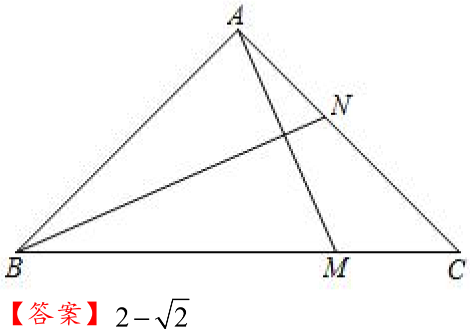
$\therefore B'N=\frac{1}{2}AC=AB=AB'$，$\therefore AN=\sqrt{2}AB'=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$

$\therefore CM+CN\geqslant A'C=2AN=4\sqrt{2}$

即 $CM+CN$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$

2022·贵州遵义·统考中考真题

13．如图，在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle BAC=90°$，点 M，N 分别为 BC，AC 上的动点，且 $AN=CM$，$AB=\sqrt{2}$．当 $AM+BN$ 的值最小时，CM 的长为__________．



【答案】$2-\sqrt{2}$

【分析】过点 A 作 $AD\parallel BC$，且 $AD=AC$，证明 $\triangle AND\cong\triangle CMA$，可得 $AM=DN$，当 B,N,D 三点共线时，$BN+AM$ 取得最小值，证明 $AB=BM$，即可求解．

【详解】如图，过点A作 $AD // BC$，且 $AD=AC$，连接 DN，如图1所示，

$\therefore \angle DAN=\angle ACM$，

又 $AN=CM$，

$\therefore \triangle AND \cong \triangle CMA$，

$\therefore AM=DN$，

$\therefore BN+AM=BN+DN \geq BD$，

当 B,N,D 三点共线时，$BN+AM$ 取得最小值，

此时如图2所示，

$\because$ 在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle BAC=90°$，$AB=\sqrt{2}$

$\therefore BC=\sqrt{2}AB=2$，

$\because \triangle AND \cong \triangle CMA$，

$\therefore \angle ADN=\angle CAM$，

$\because AD=AC=AB$，

$\therefore \angle ADN=\angle ABN$，

$\because AD // BC$，

$\therefore \angle ADN=\angle MBN$，

$\therefore \angle ABN=\angle MBN$，

设 $\angle MAC=\alpha$，

$\therefore \angle BAM=\angle BAC-\alpha=90°-\alpha$，

$\therefore \angle ABM=\angle ABN+\angle NBM=2\alpha=45°$，

$\therefore \alpha=22.5°$，

$\therefore \angle AMB=180°-\angle BAM-\angle ABM=180°-90°+\alpha-45°=67.5°$，$\angle BAM=90°-22.5°=67.5°$，

$\therefore AB=BM=\sqrt{2}$，

$\therefore CM=BC-BM=2-\sqrt{2}$，

即 $BN+AM$ 取得最小值时，CM的长为 $2-\sqrt{2}$，

故答案为：$2-\sqrt{2}$．

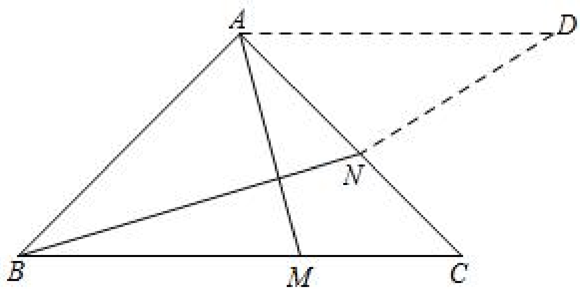


图1

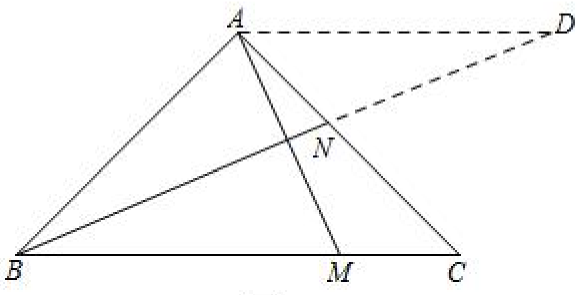
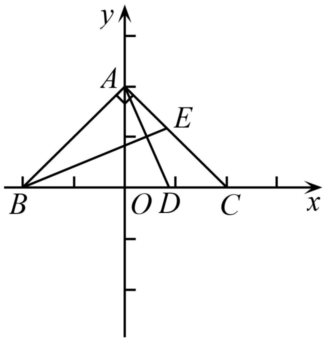


图2

2023·日照·二模

14．如图，在平面直角坐标系中，等腰Rt△ABC 三个顶点在坐标轴上，$\angle BAC=90°$，点 D，E 分别为 BC，AC 上的两个动点，且 $AE=CD, AC=2\sqrt{2}$．当 $AD+BE$ 的值最小时，则点 D 的坐标为_______．



【答案】$\left(2\sqrt{2}-2,0\right)$/$\left(-2+2\sqrt{2},0\right)$

【分析】如图：过点 C 作 $CB'\perp BC$ 使 $CB'=AB$，连接 $B'D$；证 $\triangle ABE\cong\triangle CB'D(\text{SAS})$ 可得 $DB'=BE$，$AB=CB'$；将 $AD+BE$ 最小值可转化成 $AD+CB'$ 最小值，则当 A、D、B 在同一直线上时，$AD+BE$ 最小，即 AB' 长度;；再根据 $AC=2\sqrt{2}$ 求得 $AB=CB'=AC=2\sqrt{2}$、$OA=OC=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2\sqrt{2}=2$，即 $A(0,2),B'\left(2,-2\sqrt{2}\right)$；再运用待定系数法求得直线 AB' 表达式，最后将 $y=0$ 代入表达式求得 x 的值即可解答．

【详解】解：如图：过点 C 作 $CB'\perp BC$ 使 $CB'=AB$，连接 $B'D$，

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CB'D$ 中，

$$\begin{cases} AB=CB' \\ \angle BAE=\angle B'CD \\ AE=CD \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CB'D(\text{SAS})$，

$\therefore DB'=BE$，$AB=CB'$，

$\therefore AD+BE$ 最小值可转化成 $AD+CB'$ 最小值，

当 A、D、B 在同一直线上时，$AD+BE$ 最小，即 AB' 长度；

$\because AC=2\sqrt{2}$，

$\therefore AB=CB'=AC=2\sqrt{2}$，$OA=OC=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2\sqrt{2}=2$

$\therefore A(0,2),B'\left(2,-2\sqrt{2}\right)$

设 AB' 表达式为:$y=kx+b(k<0)$，由题意可得：

$$\begin{cases} b=2 \\ 2k+b=-2\sqrt{2} \end{cases},$$

解得：$\begin{cases} b=2 \\ k=-\sqrt{2}-1 \end{cases}$，

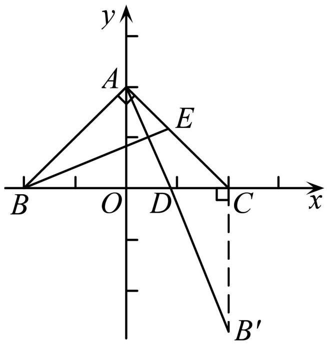
$\therefore AB'$ 表达式为:$y=-\left(\sqrt{2}+1\right)x+2$，

将 $y=0$ 代入得：$0=-\left(\sqrt{2}+1\right)x+2$，

解得：$x=2\sqrt{2}-2$，

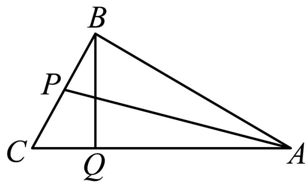
$\therefore D$ 点坐标为 $\left(2\sqrt{2}-2,0\right)$．

故答案为：$\left(2\sqrt{2}-2,0\right)$.



2023·咸阳·二模

15．如图，在Rt△ABC中，$AC=2$，$BC=1$，$\angle ABC=90^\circ$，点P是边BC上的动点，在边AC上截取$CQ=BP$，连接AP、BQ，则$AP+BQ$的最小值为 ________.



【答案】$\sqrt{7}$

【分析】由“SAS”可证$\triangle ABP\cong\triangle DCQ$，可得$AP=DQ$，则$AP+BQ$的最小值为$BD$，由勾股定理可求解.

【详解】解：过点C作$CD\perp AC$，并截取$CD=AB$，连接DQ、BD，设BD交AC于点E，

∵$AC=2$，$BC=1$，$\angle ABC=90^\circ$，

∴$AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，$\cos\angle ACB=\dfrac{1}{2}$，

∴$\angle ACB=60^\circ$，

∵$AB=CD=\sqrt{3}$，$\angle ABP=\angle DCQ=90^\circ$，$BP=CQ$，

∴$\triangle ABP\cong\triangle DCQ(\text{SAS})$，

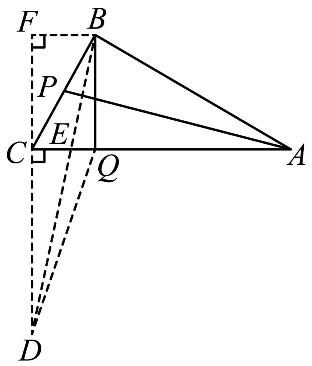
∴$AP=DQ$，

∴$AP+BQ=DQ+BQ$，

在△BDQ中，$BQ+DQ>BD$，

∴$AP+BQ$的最小值为BD，

如图，过点B作$BF\perp CD$于F，



$\therefore BF \parallel AC$，

$\therefore \angle FBC = \angle ACB = 60^\circ$，

$\therefore \angle BCF = 30^\circ$，

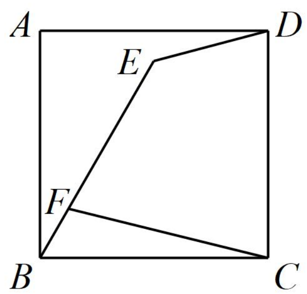
$\therefore BF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}$， $CF = \frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore FD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore BD = \sqrt{BF^2 + FD^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{7}$

2023·深圳中学联考

16．如图，点E是正方形$ABCD$内部一个动点，且$AD = EB = 8$， $BF = 2$，则$DE + CF$的最小值为（　）

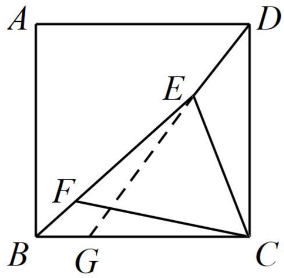


A．10　　B．$3\sqrt{11}$　　C．$7\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{97}$

【答案】A

【分析】取$BG = BF = 2$，则$CG = 8 - 2 = 6$，证明$\triangle BGE \cong \triangle BFC$得出$\angle BEG = \angle BCF$，进而证明$\angle FCE = \angle GEC$，即可证明$\triangle FCE \cong \triangle GEC$，得出$EG = CF$，则当$E, G, D$三点共线时，$DE + CF$取得最小值，最小值为$DG$的长，勾股定理即可求解．

【详解】解：如图所示，取$BG = BF = 2$，则$CG = 8 - 2 = 6$，连接EG，



∵ $AD=EB=8$， $BF=2$，

∴点 E 在以 B 为圆心 8 为半径的圆上运动，点 F 在以 B 为圆心 2 为半径的圆上运动，

在 $\triangle BGE$,$\triangle BFC$ 中，

$$\begin{cases} BF=BG \\ \angle EBG=\angle CBF \\ BE=BC \end{cases},$$

∴ $\triangle BGE\cong\triangle BFC$，

∴ $\angle BEG=\angle BCF$， $\angle BGE=\angle BFC$

∴ $\angle FGC=\angle CFE$，

∵ $BE=BC=8$，

∴ $\angle BEC=\angle BCE$，

即 $\angle FEC=\angle GCE$，

∴ $\angle FCE=\angle GEC$，

又 $CG=EF=6$， $\angle FGC=\angle CFE$，

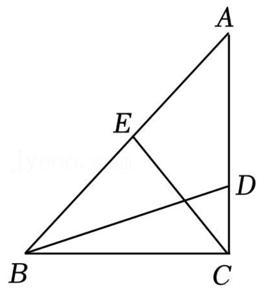
∴ $\triangle FCE\cong\triangle GEC$，

∴ $EG=FC$，

当 $EG=FC$ 时，则当 E,G,D 三点共线时， $DE+CF$ 取得最小值，最小值为 DG 的长，

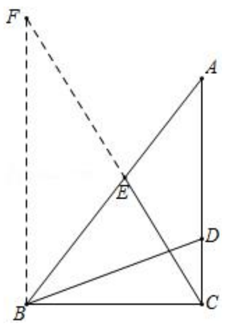
在Rt△CDG 中， $DG=\sqrt{DC^2+CG^2}=10$

17．如图，在Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AB=6$，$BC=4$，D，E 分别是 AC，AB 上的动点，且 $AD=BE$，连结 BD，CE，则 $BD+CE$ 的最小值为 ______.



【答案】$2\sqrt{13}$

解：过 B 作 $BF\parallel AC$，在平行线上取 $BF=AB$，连接 EF，如图：



∴$\angle EBF=\angle A$，

∵$BF=AB$，$BE=AD$，

∴$\triangle BEF\cong\triangle ADB$（SAS），　∴$EF=BD$，　∴$BD+CE=EF+CE$，

当 C，E，F 共线时，$EF+CE$ 最小，即 $BD+CE$ 最小，最小值即为 CF 的长度，

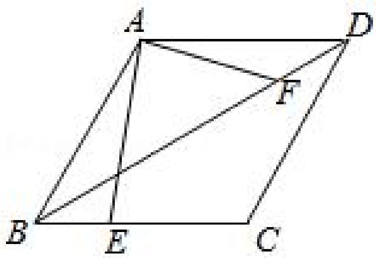
∵$BF\parallel AC$，$\angle ACB=90^\circ$，

∴$\angle FBC=90^\circ$，

∴$CF=\sqrt{Bc^2+BF^2}=2\sqrt{13}$，

∴$BD+CE$ 最小为$2\sqrt{13}$，　故答案为：$2\sqrt{13}$．

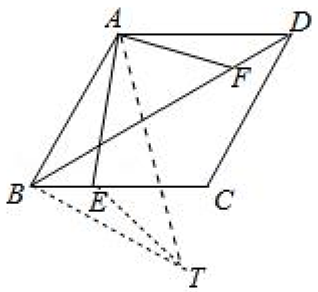
18．如图，菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60^\circ$，$AB=2$，E、F 分别是边 BC 和对角线 BD 上的动点，且 $BE=DF$，则 $AE+AF$ 的最小值为 ______．



【答案】$2\sqrt{2}$

【详解】解：如图，BC 的下方作$\angle CBT=30^\circ$，在 BT 上截取 BT，使得 $BT=AD$，连接 ET，AT.

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60^\circ$，



∴∠ADC＝∠ABC＝60°，∠ADF＝$\frac{1}{2}$∠ADC＝30°，

∵AD＝BT，∠ADF＝∠TBE＝30°，DF＝BE，

∴△ADF≌△TBE（SAS），∴AF＝ET，

∵∠ABT＝∠ABC+∠CBT＝60°+30°＝90°，AB＝AD＝BT＝2，

∴AT＝$\sqrt{AB^2+BT^2}=2\sqrt{2}$，∴AE+AF＝AE+ET，∵AE+ET⩾AT，∴AE+AF⩾$2\sqrt{2}$，

∴AE+AF 的最小值为$2\sqrt{2}$，故答案为$2\sqrt{2}$．

2023·甘肃武威中考真题拆解

19．如图 1，抛物线 $y=-x^2+bx$ 与 x 轴交于点 A，与直线 $y=-x$ 交于点 $B(4,-4)$，点 $C(0,-4)$ 在 y 轴上．点 P 从点 B 出发，沿线段 BO 方向匀速运动，运动到点 O 时停止．

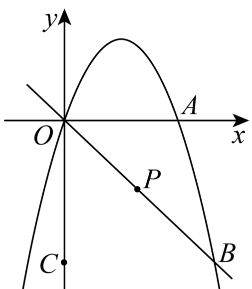


图1

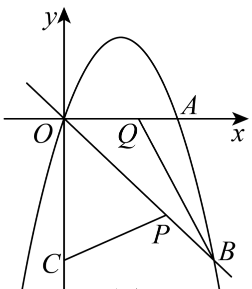


图2

(1)求抛物线 $y=-x^2+bx$ 的表达式；

(2)如图 2，点 P 从点 B 开始运动时，点 Q 从点 O 同时出发，以与点 P 相同的速度沿 x 轴正方向匀速运动，点 P 停止运动时点 Q 也停止运动．连接 BQ，PC，求 $CP+BQ$ 的最小值．

【答案】(1) $y=-x^2+3x$

(2) $4\sqrt{3}$

【分析】（1）用待定系数法求二次函数解析式即可；

（2）由题意得，$BP=OQ$，连接 BC．在 OA 上方作 $\triangle OMQ$，使得 $\angle MOQ=45°$，$OM=BC$，证明 $\triangle CBP \cong \triangle MOQ(\text{SAS})$，根据 $CP+BQ=MQ+BQ \geq MB$ 得出 $CP+BQ$ 的最小值为 MB，利用勾股定理求得 MB，即可得解．

【详解】（1）解：∵抛物线 $y=-x^2+bx$ 过点 $B(4,-4)$，

∴ $-16+4b=-4$，

∴ $b=3$，

∴ $y=-x^2+3x$；

（2）如图 2，由题意得，$BP=OQ$，连接 BC．

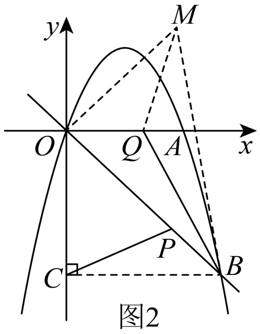


图2

在 OA 上方作 $\triangle OMQ$，使得 $\angle MOQ=45^{\circ}$， $OM=BC$，

$\because OC=BC=4$， $BC\perp OC$，

$\therefore \angle CBP=45^{\circ}$，

$\therefore \angle CBP=\angle MOQ$，

$\because BP=OQ$， $\angle CBP=\angle MOQ$， $BC=OM$，

$\therefore \triangle CBP\cong\triangle MOQ(\mathrm{SAS})$，

$\therefore CP=MQ$，

$\therefore CP+BQ=MQ+BQ\geq MB$（当 M， Q， B 三点共线时最短），

$\therefore CP+BQ$ 的最小值为 MB，

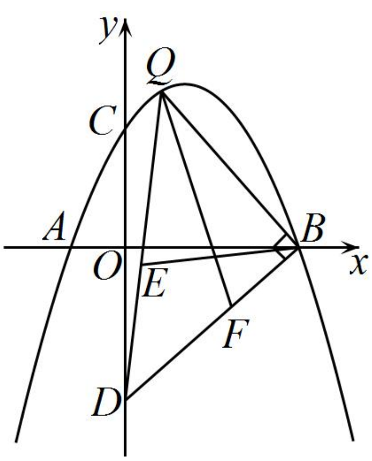
$\because \angle MOB=\angle MOQ+\angle BOQ=45^{\circ}+45^{\circ}=90^{\circ}$，

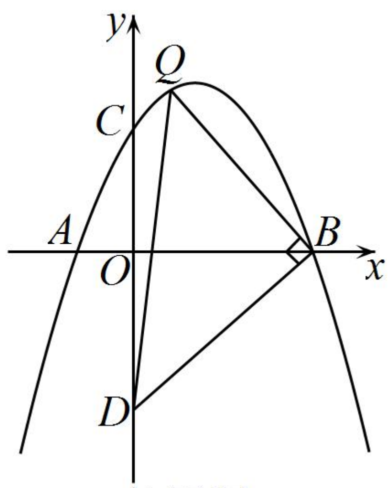
$\therefore MB=\sqrt{OM^{2}+OB^{2}}=\sqrt{4^{2}+\left(4\sqrt{2}\right)^{2}}=4\sqrt{3}$，

即 $CP+BQ$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$．

2023·黄冈中考真题拆解

20．已知抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^{2}+\frac{3}{2}x+2$ 与 x 轴交于 $A,B(4,0)$ 两点，与 y 轴交于点 $C(0,2)$，点 P 为第一象限抛物线上的点，连接 CA,CB,PB,PC．





备用图

如图 2，点 D 在 y 轴负半轴上，$OD=OB$，点 Q 为抛物线上一点，$\angle QBD=90^{\circ}$，点 E,F 分别为 $\triangle BDQ$

的边 DQ,DB 上的动点，$QE=DF$，记 $BE+QF$ 的最小值为 m.

①求 m 的值；

②设 $\triangle PCB$ 的面积为 S，若 $S=\frac{1}{4}m^2-k$，请直接写出 k 的取值范围.

【答案】$m=2\sqrt{17}$， $13\le k<17$

【分析】①作 $DH\perp DQ$，且使 $DH=BQ$，连接 FH．根据 SAS 证明 $\triangle BQE\cong\triangle HDF$，可得 $BE+QF=FH+QF\ge QH$，即 Q，F，H 共线时，$BE+QF$ 的值最小．作 $QG\perp AB$ 于点 G，设 $G(n,0)$，则 $Q\left(n,-\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+2\right)$，根据 $QG=BG$ 求出点 Q 的坐标，燃然后利用勾股定理求解即可；

②作 $PT\parallel y$ 轴，交 BC 于点 T，求出 BC 解析式，设 $T\left(a,-\frac{1}{2}a+2\right)$，$P\left(a,-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}a+2\right)$，利用三角形面积公式表示出 S，利用二次函数的性质求出 S 的取值范围，结合①中结论即可求解.

【详解】解：①如图 2，作 $DH\perp DQ$，且使 $DH=BQ$，连接 FH.

∵ $\angle BQD+\angle BDQ=90^\circ$， $\angle HDF+\angle BDQ=90^\circ$，

∴ $\angle QD=\angle HDF$，

∵ $QE=DF$， $DH=BQ$，

∴ $\triangle BQE\cong\triangle HDF(\mathrm{SAS})$，

∴ $BE=FH$，

∴ $BE+QF=FH+QF\ge QH$，

∴Q，F，H 共线时，$BE+QF$ 的值最小．作 $QG\perp AB$ 于点 G，

∵ $OB=OD$， $\angle BOD=90^\circ$，

∴ $\angle OBD=45^\circ$，

∵ $\angle QBD=90^\circ$，

∴ $\angle QBG=45^\circ$，

∴ $QG=BG$.

设 $G(n,0)$，则 $Q\left(n,-\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+2\right)$，

∴ $-\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+2=4-n$，解得 $n=1$ 或 $n=4$（舍去），

∴ $Q(2,3)$，

∴ $QG=BG=4-1=3$，

∴ $BQ=DH=3\sqrt{2}$， $QD=5\sqrt{2}$，

∴ $m=QH=\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2+\left(5\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{17}$；

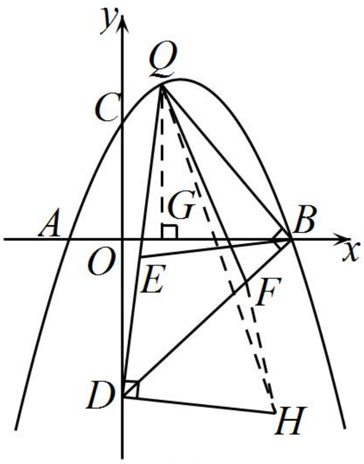


图2

②如图 3，作 $PT \parallel y$ 轴，交 BC 于点 T，待定系数法可求 BC 解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+2$，

设 $T\left(a,-\frac{1}{2}a+2\right)$，$P\left(a,-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}a+2\right)$，

则 $S=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}a+2+\frac{1}{2}a-2\right)\times 4=-(a-2)^2+4$，

$\therefore 0<S\le 4$，

$\therefore 0<\frac{1}{4}m^2-k\le 4$，

$\therefore 0<17-k\le 4$，

$\therefore 13\le k<17$．

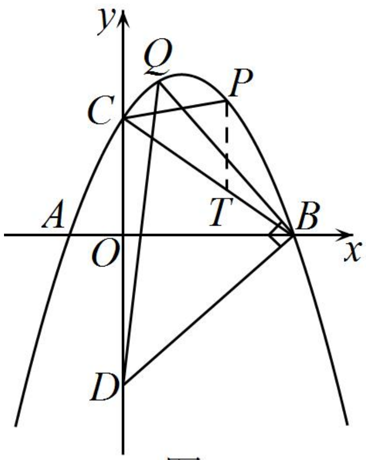
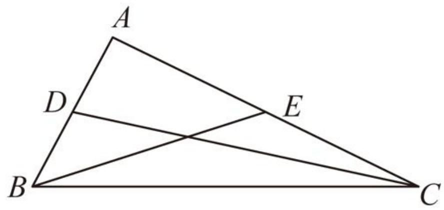


图3

题型三　构造相似求加权线段和

2023 年成都市天府新区二模

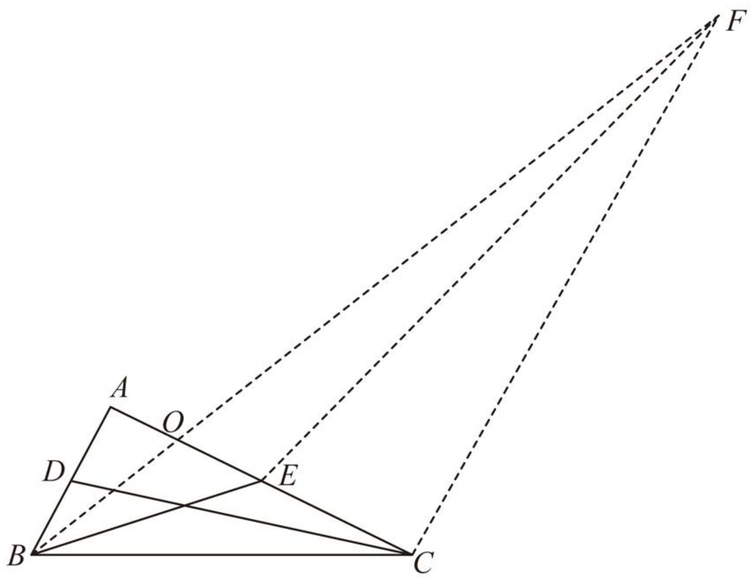
21．如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=1$，$AC=2$．D，E 分别是边 AB，AC 上的动点，且 $CE=2AD$，则 $BE+2CD$ 的最小值为__________．



【答案】$\sqrt{29}$

【分析】过 C 作 $CF \perp AC$ 于 F，使 $CF = 2AC = 4$，连接 EF、BF，即可得到 $EF = 2CD$，$BE + 2CD = BE + EF \geq BF$，即最小值为 BF 的长.

【详解】方法一：过 C 作 $CF \perp AC$ 于 F，使 $CF = 2AC = 4$，连接 EF、BF，



∵ $CE = 2AD$，

∴ $\dfrac{CE}{AD} = \dfrac{CF}{AC} = 2$，

∵ $\angle DAC = \angle FAC = 90°$，

∴ $\triangle DAC \sim \triangle ECF$，

∴ $\dfrac{CE}{AD} = \dfrac{CF}{AC} = \dfrac{EF}{CD} = 2$，即 $EF = 2CD$，

∴ $BE + 2CD = BE + EF \geq BF$，

∴当 B、E、F 三点共线时 $BE + 2CD$ 有最小值，最小值为 BF 的长

∵ $\angle DAC = \angle FAC = 90°$

∴ $AB \parallel CF$，

∴ $\dfrac{OB}{OF} = \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{AB}{CF}$，

∵ $AB = 1$，$AC = 2$，$CF = 2AC = 4$

∴ $\dfrac{OB}{OF} = \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{AB}{CF} = \dfrac{1}{4}$，

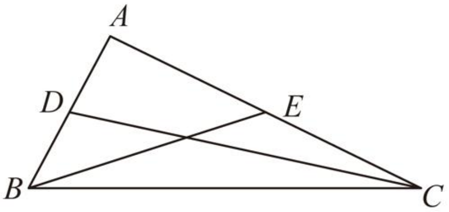
∴ $BF = \dfrac{5}{4}OF, OC = \dfrac{4}{5}AC = \dfrac{8}{5}$，

∴ $OF=\sqrt{OC^2+CF^2}=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+4^2}=\frac{4}{5}\sqrt{29}$，

∴ $BF=\frac{5}{4}OF=\sqrt{29}$

∴ $BE+2CD$ 的最小值为 $\sqrt{29}$

方法二：$AD=x$，则 $CE=2AD=2x$，$AE=AC-CE=2-2x$，



∴ $BE=\sqrt{AE^2+AB^2}=\sqrt{(2-2x)^2+1^2}$，$CD=\sqrt{AD^2+AC^2}=\sqrt{x^2+2^2}$

设 $2y=BE+2CD$，

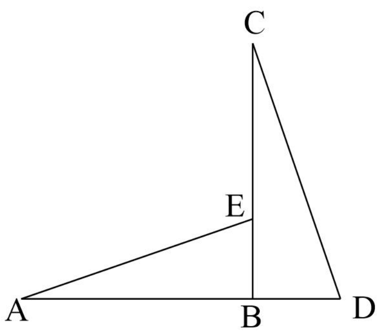
∴ $y=\frac{1}{2}BE+CD=\frac{1}{2}\sqrt{(2-2x)^2+1^2}+\sqrt{x^2+2^2}=\sqrt{(x-1)^2+\frac{1}{4}}+\sqrt{x^2+4}$

$=\sqrt{(x-1)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(0+2)^2}$

∴ y 可以看成点 $M(x,0)$ 到点 $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 和 $B(0,-2)$ 的距离之和，

∴当 $M(x,0)$、$A\left(1,\frac{1}{2}\right)$、$B(0,-2)$ 三点共线时 y 最小，最小值 $y=AB=\sqrt{(0-1)^2+\left(-2-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$

22．如图，已知 $BC\perp AB$，$BC=AB=3$，E 为 BC 边上一动点，连接 AE，D 点在 AB 延长线上，且 $CE=2BD$，则 $AE+2CD$ 的最小值为________



【答案】$3\sqrt{10}$

解：作 CF⊥CB，且使得 CF=6，连接 EF

过点 A 做 AG⊥CF，交 FC 延长线于点 G

∵ $\frac{CF}{CB}=\frac{CE}{BD}=2$，

∴△FCE∽△CBD，EF=2CD

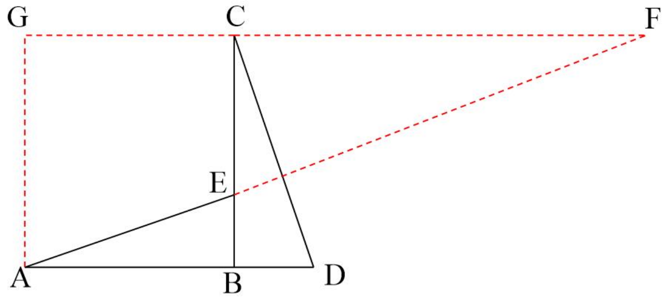
∴AE+2CD=AE+EF

当 A、E、F 三点一线时，AE+EF 取到最小值，此时 AE+EF=AF

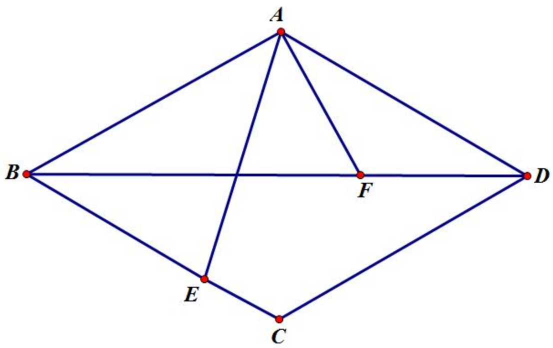
易知：四边形 ABCG 为正方形　AG=3,CG=3

FG=9 在 Rt△FAG 中，由勾股定理得 AF=$3\sqrt{10}$

AE+2CD 的最小值为 $3\sqrt{10}$

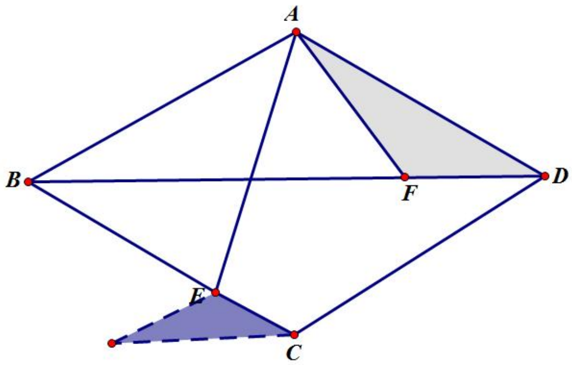


23．如图，菱形 ABCD 的边长为 1，∠ABC＝60°．E，F 分别是 BC，BD 上的动点，且 CE＝DF，则 AE+AF 的最小值为_______。



【答案】$\sqrt{2}$

【解答】解：如图，连接 AC，过点 C 作 CT⊥CA，使得 CT＝AD＝1，连接 AT.



∵四边形 ABCD 是菱形，

∴AB＝CB＝CD＝AD，∠ABC＝∠ADC＝60°，∠ADB＝$\frac{1}{2}$∠ADC＝30°，

∴△ABC 是等边三角形，

∴∠ACB＝60°，AC＝AB＝1，

∵AC⊥CT，

∴∠ECT＝30°，

∴∠ADF＝∠ECT，

∵CE＝DF，CT＝DA，

∴△ADF≌△TCE（SAS），

∴AF＝ET，

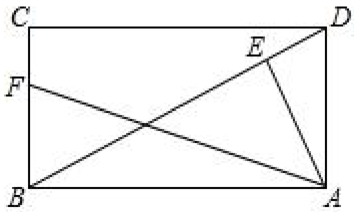
∴AE+AF＝AE+ET≥AT，

∵∠ACT＝90°，AC＝CT＝1，

∴AT＝$\sqrt{AC^2+CT^2}$＝$\sqrt{1^2+1^2}$＝$\sqrt{2}$，

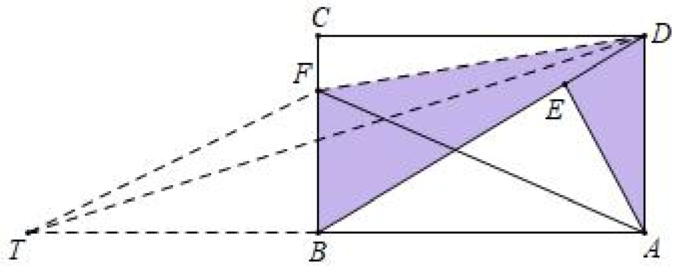
∴AE+AF≥$\sqrt{2}$，∴AE+AF 的最小值为$\sqrt{2}$.

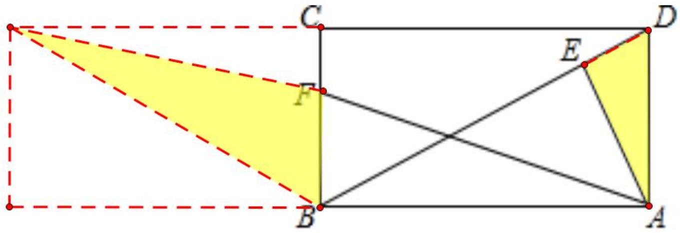
24．如图，在矩形 ABCD 中，AD＝4，AB＝$4\sqrt{3}$，E，F 分别是 BD，BC 上的一动点，且 BF＝2DE，则 AF+2AE 的最小值是_______。



【答案】$4\sqrt{13}$

【解答】解：连接 DF，延长 AB 到 T，使得 BT＝AB，连接 DT.





∵四边形 ABCD 是矩形，

∴∠BAD＝∠ABC＝90°，BC∥AD，

∴tan∠DBA＝$\frac{AD}{AB}$＝$\frac{\sqrt{3}}{3}$，∠ADE＝∠DBF，

∴∠DBA＝30°，

∴BD＝2AD，

∵BF＝2DE，

∴$\frac{BD}{AD}$＝$\frac{BF}{DE}$＝2，

∴△DBF∽△ADE，

∴ $\dfrac{DF}{AE}=\dfrac{BD}{AD}$＝2，

∴DF＝2AE，

∴AF+2AE＝AF+DF，

∵FB⊥AT，BA＝BT，

∴FA＝FT，

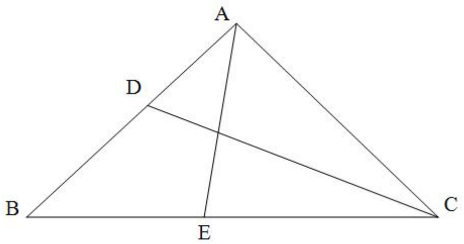
∴AF+2AE＝DF+FT⩾DT，

∵DT＝ $\sqrt{AT^2+AD^2}$ ＝$4\sqrt{13}$

∴AF+2AE⩾$4\sqrt{13}$，

∴AF+2AE 的最小值为$4\sqrt{13}$

25．如图，等腰直角△ABC 中，斜边 BC=2，点 D、E 分别为线段 A B 和 B C 上的动点，$BE=\sqrt{2}AD$ ，求$\mathrm{AE}+\sqrt{2}\mathrm{CD}$的最小值.



【答案】$\sqrt{10}$

解：作 BF⊥BC 并且使得 BF=2，连接 EF

∵$\frac{BE}{AD}=\frac{BF}{AC}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ ∴△BEF∽△ADC

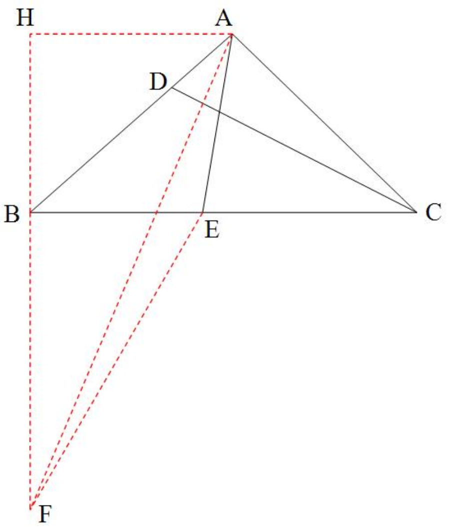
∴EF=$\sqrt{2}$ CD ∴AE+$\sqrt{2}$CD=AE+EF

当 A、E、F 三点共线时，AE+EF 取到最小值，此时 AE+EF=AF

反向延长 BF，过点 A 作 AH⊥BF 于点 H

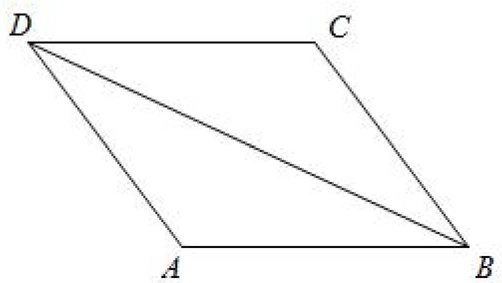
在 Rt△AHF 中，由勾股定理易得：AF=$\sqrt{10}$

∴AE+$\sqrt{2}$CD 的最小值为$\sqrt{10}$



2022·广州中考真题（7 种解法）

26．如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=120°$，$AB=6$，连接 BD ．



(1)求 BD 的长；

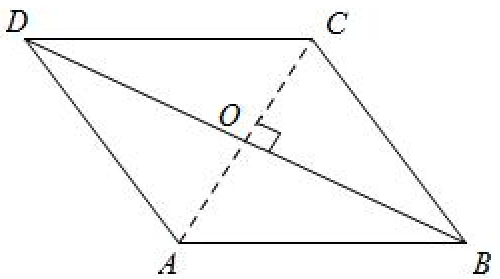
(2)点 E 为线段 BD 上一动点（不与点 B，D 重合）， 点 F 在边 AD 上，且 $BE=\sqrt{3}DF$，当四边形 $ABEF$ 的面积取得最小值时，$CE+\sqrt{3}CF$ 的值是否也最小？如果是，求 $CE+\sqrt{3}CF$ 的最小值；如果不是，请说明理由．

【答案】(1) $BD=6\sqrt{3}$；(2)最小值为 12

【分析】(1）证明△ABC 是等边三角形，可得 $BO=3\sqrt{3}$，即可求解；

（2）过点 E 作 AD 的垂线，分别交 AD 和 BC 于点 M，N， 根据菱形的面积可求出 $MN=3\sqrt{3}$，设 $BE=x$，则 $EN=\frac{1}{2}x$，从而得到 $EM=MN-EN=3\sqrt{3}-\frac{1}{2}x$，再由 $BE=\sqrt{3}DF$，可得 $DF=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，从而得到四边形 $ABEF$ 的面积 $s=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle DEF}=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-3\sqrt{3}\right)^2+\frac{27\sqrt{3}}{4}$，作 $CH\perp AD$ 于 H，可得当点 E 和 F 分别到达点 O 和点 H 位置时，CF 和 CE 分别达到最小值；再由 $s=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-3\sqrt{3}\right)^2+\frac{27\sqrt{3}}{4}$，可得当 $x=3\sqrt{3}$，即 $BE=3\sqrt{3}$ 时， s 达到最小值，从而得到此时点 E 恰好在点 O 的位置，而点 F 也恰好在点 H 位置，即可求解．

【详解】(1）解：连接 AC，设 AC 与 BD 的交点为 O，如图，



∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$AC\perp BD$ ， $OA=OC$，$AB\parallel CD$，AC 平分$\angle DAB$，

∵$\angle BAD=120°$，

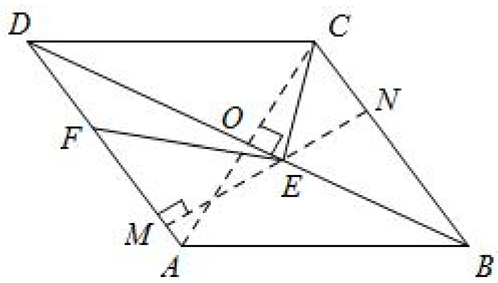
∴$\angle CAB=60°$，

∴△ABC 是等边三角形，

∴$BO=AB$•$\sin60°=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$，

∴$BD=2BO=6\sqrt{3}$；

（2）解：如图，过点 E 作 AD 的垂线，分别交 AD 和 BC 于点 M，N，



∵△ABC 是等边三角形，

∴$AC=AB=6$，

由（1）得：$BD=6\sqrt{3}$；

菱形 $ABCD$ 中，对角线 BD 平分 $\angle ABC$，$AB\parallel CD$，$BC=AB=6$，

∴$MN\perp BC$，

∵$\angle BAD=120°$，

∴$\angle ABC=60°$，

∴$\angle EBN=30°$；

∴$EN=\frac{1}{2}BE$

∵$S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=MN\cdot BC$，

∴$MN=3\sqrt{3}$，

设 $BE=x$，则 $EN=\frac{1}{2}x$，

∴$EM=MN-EN=3\sqrt{3}-\frac{1}{2}x$，

∵$S_{菱形}ABCD=AD$•$MN=6\times3\sqrt{3}=18\sqrt{3}$，

∴$S_{\triangle}ABD=\frac{1}{2}S_{菱形}ABCD=9\sqrt{3}$，

∵$BE=\sqrt{3}DF$，

∴$DF=\frac{BE}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

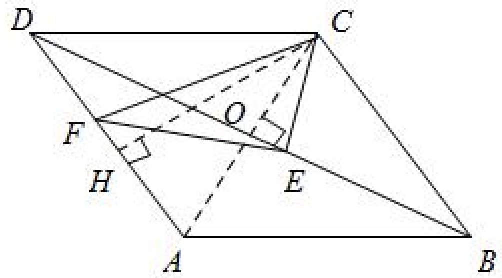
∴$S_{\triangle}DEF=\frac{1}{2}DF$•$EM=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}x\left(3\sqrt{3}-\frac{1}{2}x\right)=-\frac{\sqrt{3}}{12}x^2+\frac{3}{2}x$，

记四边形 $ABEF$ 的面积为 s，

∴$s=S_{\triangle}ABD-S_{\triangle}DEF=9\sqrt{3}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{12}x^2+\frac{3}{2}x\right)=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-3\sqrt{3}\right)^2+\frac{27\sqrt{3}}{4}$，

∵点 E 在 BD 上，且不在端点，∴$0<BE<BD$，即 $0<x<6\sqrt{3}$；

作 $CH\perp AD$ 于 H，如图，



∵$CO\perp BD$，$CH\perp AD$，而点 E 和 F 分别在 BD 和 AD 上，

∴当点 E 和 F 分别到达点 O 和点 H 位置时，CF 和 CE 分别达到最小值；

在菱形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AD=CD$，∵$\angle BAD=120°$，∴$\angle ADC=60°$，

∴△ACD 是等边三角形，∴$AH=DH=3$，∴$CH=3\sqrt{3}$，

∵ $s=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\left(x-3\sqrt{3}\right)^2+\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$，∴当 $x=3\sqrt{3}$，即 $BE=3\sqrt{3}$ 时，s 达到最小值，

∵$BE=\sqrt{3}DF$，∴$DF=3$，此时点 E 恰好在点 O 的位置，而点 F 也恰好在点 H 位置，

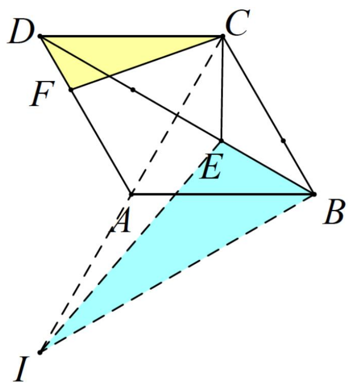
∴当四边形 $ABEF$ 面积取得最小值时，CE 和 CF 也恰好同时达到最小值，

∴$CE+\sqrt{3}CF$ 的值达到最小，其最小值为 $CO+\sqrt{3}CH=3+\sqrt{3}\times3\sqrt{3}=12$．

【其它几何构造方法】

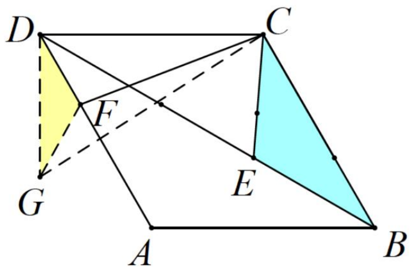
法 2：$EE+\sqrt{3}CF$ 核心是处理 $\sqrt{3}CF$，刚好有 $BE=\sqrt{3}DF$，还有 CE 和 CF 两个动点需要拼一起，所以考虑把△CDF 放大 $\sqrt{3}$ 倍后拼到 BE 处

过 B 作 $BI\perp BC, BI-BD=\sqrt{3}CD\Rightarrow\triangle CDF\backsim\triangle IBE\ |CE+\sqrt{3}CF=CE+IE\geq CI=2BC=12$

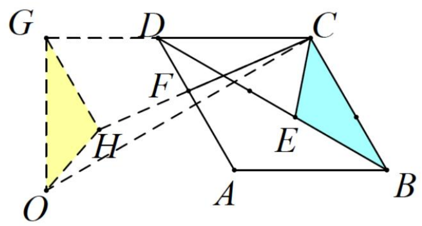


法 3：过 D 作 $DG\perp CD$，取 $DG=\dfrac{\sqrt{3}}{3}CD\Rightarrow\triangle DGF\backsim\triangle BCE$

则 $CE+\sqrt{3}CF=\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}CE+CF\right)=\sqrt{3}\left(GF+CF\right)\geq\sqrt{3}CG=12$

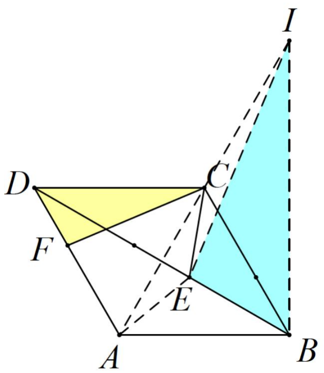


法 4：先把 DF 放大 $\sqrt{3}$ 倍，再把△CBE 拼过来，延长 CD 到 G 使 CG＝BD，作 GH∥AD 交 CF 于 H，作 GO⊥CG 且 $GO=AB=6\Rightarrow\triangle CDF\sim\triangle CGH$ ，下略



法 5：CE 对称转化为 AE，过 B 作 BI⊥AB，BI＝BD＝ $\sqrt{3}$ AB⇒△CDF∽△IBE

由于对称性，CE＝AE，所以拼在上面也可以~这个算凑数吧



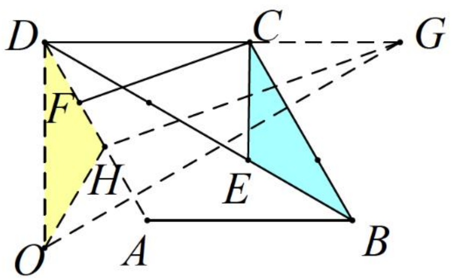
法 6：先把 DF 放大 $\sqrt{3}$ 倍，再把△CBE 拼过来

延长 DC 到 G 使 $DG=BD$, 作 $GH//CF$ 交 AD 于 H

作 DO⊥DC，且 DO＝AB＝6⇒△CDF∽△GDH，

$DH=\sqrt{3}DF=BE, GH=\sqrt{3}CF$ ⇒△DOH≌△BCE，CE＝OH

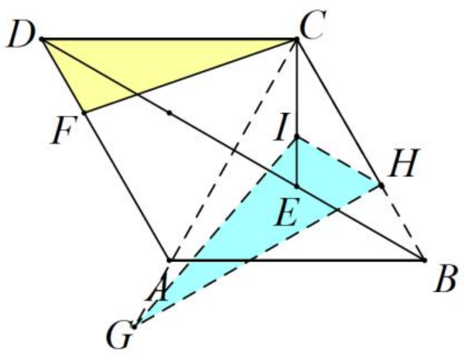
则有 $CE+\sqrt{3}CF=OH+GH\geq OG=12$



法 7：先把 BE 缩小放大 $\sqrt{3}$ 倍到 IH，再把△CDF 拼过来

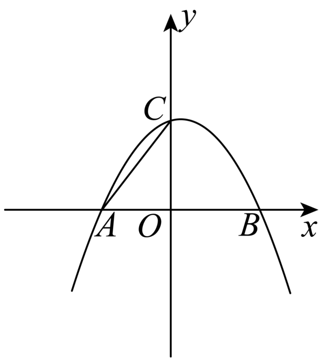
在 BC 上取 $CH=2\sqrt{3}$，过 H 作 $HI \parallel BD$ 交 CE 于 I，作 $HG\perp BC$，则 $HG=AB\Rightarrow\triangle CIH\backsim\triangle CEB$，$BE=\sqrt{3}HI$，$HI=DF\Rightarrow\triangle CDF\cong\triangle GHI\Rightarrow CF=GH$

故 $CE+\sqrt{3}CF=\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}CE+CF\right)=\sqrt{3}(CI+GI)\geq\sqrt{3}CG=12$



2023·湖北黄石中考拆解

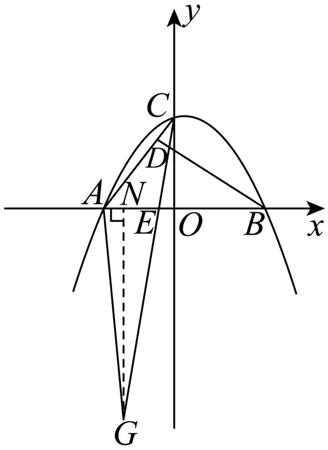
27．如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+4$ 与 x 轴交于两点 $A(-3,0),B(4,0)$，与 y 轴交于点 $C(0,4)$．若点 D，E 分别是线段 AC，AB 上的动点，且 $AE=2CD$，求 $CE+2BD$ 的最小值．



【答案】$\sqrt{233}$．

【分析】作 $\angle EAG=\angle BCD$，证明 $\triangle BCD\backsim\triangle GAE$ 且相似比为 $1:2$，故当 C、E、G 共线时，$CE+2BD=CE+EG=CG$ 为最小，进而求解．

【详解】解：作 $\angle EAG=\angle BCD$，



设 $AG=2BC=2\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$，

$\because AE=2CD$，

$\therefore\triangle BCD\backsim\triangle GAE$ 且相似比为 $1:2$，

则 $EG=2BD$，

故当 C、E、G 共线时，$CE+2BD=CE+EG=CG$ 为最小，

在 $\triangle ABC$ 中，设 AC 边上的高为 h，

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AC\cdot h=\frac{1}{2}\times AB\times CO$，

即 $5h=4\times7$，解得：$h=\frac{28}{5}$，

则 $\sin\angle ACD=\frac{h}{BC}=\frac{\frac{28}{5}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{98}}{10}=\sin\angle EAG$，则 $\tan\angle EAG=7$，

过点 G 作 $GN\perp x$ 轴于点 N，则 $NG=AG\cdot\sin\angle EAG=\frac{56}{5}$，即点 G 的纵坐标为：$-\frac{56}{5}$，

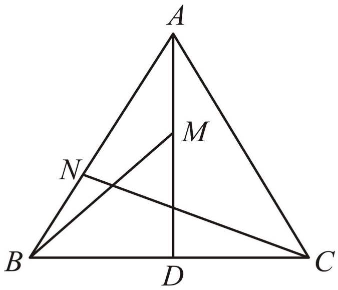
同理可得，点 G 的横坐标为：$-\frac{7}{5}$，即点 $G\left(-\frac{7}{5},-\frac{56}{5}\right)$，

由点 C、G 的坐标得，$CG=\sqrt{\left(0+\frac{7}{5}\right)^2+\left(4+\frac{56}{5}\right)^2}=\sqrt{233}$，

即 $CE+2BD$ 的最小值为 $\sqrt{233}$.

题型四　取到最小值时对其它量进行计算

28．如图，AD 为等边 $\triangle ABC$ 的高，M、N 分别为线段 AD、AC 上的动点，且 $AM=BN$，当 $BM+CN$ 取得最小值时，$\angle ANC=$ ＿＿＿＿＿＿.



【答案】$105°$

【分析】解：如图，作 $BE\perp BC$，使 $BE=AB$，连接 CE 交 AB 于点 F，连接 NE，则 $\angle BCE=\angle BEC=45°$．可证 $\angle NBE=\angle MAB$，从而得证 $\triangle NBE\cong\triangle MAB(\text{AAS})$，于是 $EN=BM$，$BM+CN=EN+CN\geq EC$．当点 N 与点 F 重合时，$BM+CN$ 取最小值．于是 $\angle ANC=\angle AFC=\angle ABC+\angle ECB=105°$．

【详解】解：如图，作 $BE\perp BC$，使 $BE=AB$，连接 CE 交 AB 于点 F，连接 NE，

∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $\angle ABC=60°$，$AB=BC$．

∴ $BE=BC$，

∴ $\angle BCE=\angle BEC=45°$，

∵ $\angle EBD=\angle ADC=90°$，

∴ $EB\,/\!/\,AD$．

∴ $\angle NBE=\angle MAB$．

又∵ $BE=AB, BN=AM$，

∴ $\triangle NBE\cong\triangle MAB(\text{AAS})$．

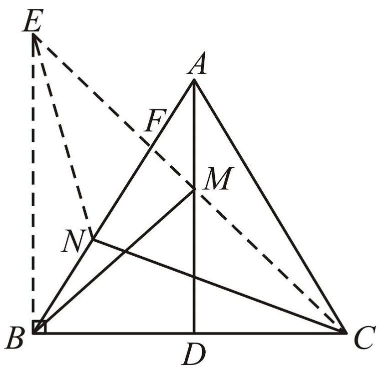
∴ $EN=BM$．

∴ $BM+CN=EN+CN\geq EC$．

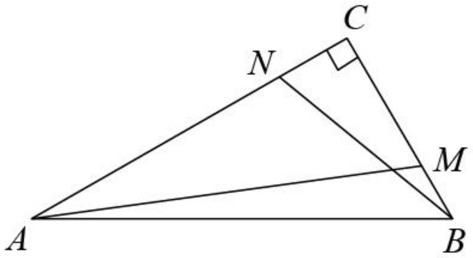
当点 N 与点 F 重合时，$EN+CN=EC$，取最小值，则 $BM+CN$ 取最小值．

此时，$\angle ANC=\angle AFC=\angle ABC+\angle ECB=60°+45°=105°$．

故答案为：$105°$



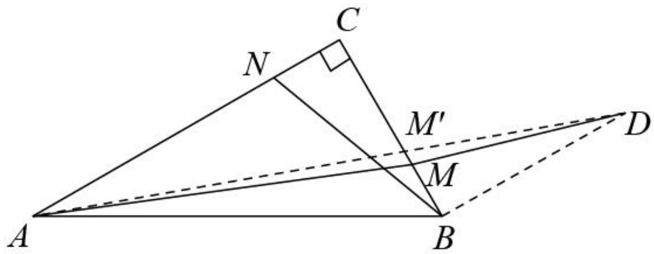
29．如图，已知 Rt△ABC，$\angle C$＝90°，$\angle CAB$＝30°，BC＝2，点 M，N 分别为 CB，CA 上的动点，且始终保持 BM＝CN，则当 AM+BN 取最小值时，CN＝___________．



【答案】$\sqrt{3}-1$

【分析】过点 B 作 $BD\parallel AC$，使 $BD=BC=2$，连接 AD 与 BC 交于点 M'，连接 DM，可证得 $\triangle CBN\cong\triangle BDM(SAS)$，得到 $BN=DM$，$AM+BN=AM+DM$，则有当 A、M、D 在同一直线上时，即 M 在 M' 点位置时，即有 $CN=BM'$，利用 $BD\parallel AC$，证得 $\triangle BDM'\sim\triangle CAM'$，得到 $\frac{BD}{AC}=\frac{BM'}{CM'}$，设 $CN=BM'=x$，则 $CM'=2-x$，再利用已知的线段长度即可求出 x，即问题得解.

【详解】过点 B 作 $BD\parallel AC$，使 $BD=BC=2$，连接 AD 与 BC 交于点 M'，连接 DM，如图：



在△CBN 与△BDM 中，

$$\begin{cases} CN=BM \\ \angle C=\angle MBD=90^\circ \\ BC=DB \end{cases},$$

∴$\triangle CBN\cong\triangle BDM(SAS)$，

∴$BN=DM$，

∴$AM+BN=AM+DM$，

∴当 A、M、D 在同一直线上时，即 M 在 M' 点位置时，$AM+BN$ 最小为 AD，

此时 $CN=BM'$，

∵$BD\parallel AC$，

∴$\triangle BDM'\sim\triangle CAM'$，

∴$\frac{BD}{AC}=\frac{BM'}{CM'}$，

∵$\angle C=90^\circ$，$\angle CAB=30^\circ$，$BC=2$，

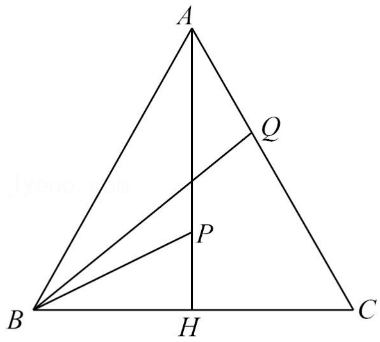
∴$AC=\frac{BC}{\tan30^\circ}=2\sqrt{3}$，

设 $CN=BM'=x$，则 $CM'=2-x$，

∴$\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{x}{2-x}$，解得 $x=\sqrt{3}-1$

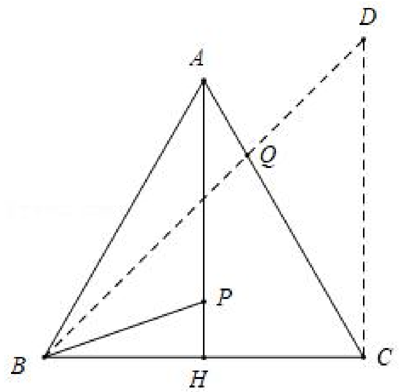
30．如图，AH 是正三角形 ABC 中 BC 边上的高，在点 A，C 处各有一只电子乌龟 P 和 Q 同时起步以相同的速度分别沿 AH，CA 向前匀速爬动．确定当两只电子乌龟到 B 点距离之和 $PB+QB$ 最小

时，$\angle PBQ$ 的度数为 ______.



【答案】30°

解：过点 C 作 CD⊥BC，取 CD＝AB，连接 BD，



∵△ABC 是等边三角形，AH 是 BC 边上的高，

∴∠ACB＝∠ABC＝60°，∠BAH＝30°，

∴∠ACD＝30°，

∴∠BAH＝∠ACD，

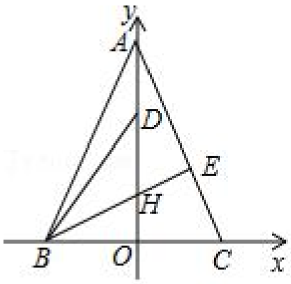
在△ABP 和△CDQ 中，$\begin{cases} AB=CD \\ \angle BAP=\angle DCQ \\ AP=CQ \end{cases}$

，∴△ABP≌△CDQ（SAS），∴BP＝DQ，∠CQD＝∠APB，

∴当 B、Q、D 共线时，PB+QB 最小，连接 BD 交 AC 于 Q，

∴∠APB＝∠AQB，∴∠PBQ＝∠QAH＝30°，故答案为：30°．

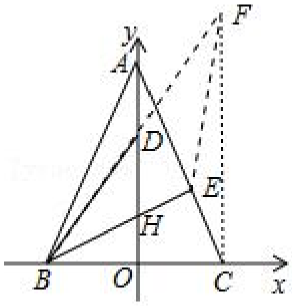
31．如图，已知直线 AB：$y=\frac{\sqrt{55}}{3}x+\sqrt{55}$ 分别交 x 轴、y 轴于点 B、A 两点，C（3，0），D、E 分别为线段 AO 和线段 AC 上一动点，BE 交 y 轴于点 H，且 $AD=CE$．当 $BD+BE$ 的值最小时，则 H 点的坐标为________



【答案】（0，4）

解：由题意 A（0，$\sqrt{55}$），B（－3，0），C（3，0），∴AB＝AC＝8，

取点 F（3，8），连接 CF，EF，BF．



∵C（3，0），∴CF∥OA，∴∠ECF＝∠CAO，

∵AB＝AC，AO⊥BC，∴∠CAO＝∠BAD，∴∠BAD＝∠ECF，

∵CF＝AB＝8，AD＝EC，

∴△ECF≌△DAB（SAS），∴BD＝EF，∴BD+BE＝BE+EF，

∵BE+EF≥BF，∴BD+BE 的最小值为线段 BF 的长，

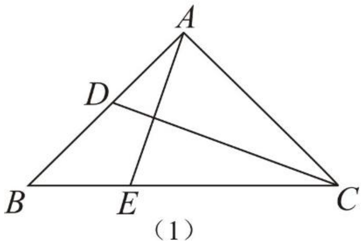
∴当 B，E，F 共线时，BD+BE 的值最小，

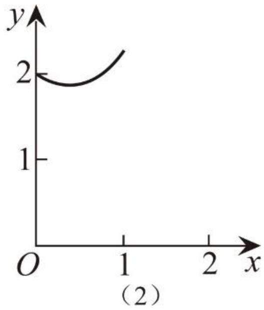
∵直线 BF 的解析式为：y＝$\frac{4}{3}$x+4，

∴H（0，4），∴当 BD+BE 的值最小时，则 H 点的坐标为（0，4）

湖北武汉·中考真题

32．如图（1），在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=90°$，边AB上的点D从顶点 A 出发，向顶点B运动，同时，边BC上的点E从顶点B出发，向顶点C运动，D，E两点运动速度的大小相等，设$x=AD$，$y=AE+CD$，y关于x的函数图象如图（2），图象过点$(0,2)$，则图象最低点的横坐标是__________．





【答案】$\sqrt{2}-1$

【分析】先根据图形可知 AE+CD=AB+AC=2，进而求得 AB=AC=1、BC=$\sqrt{2}$ 以及图象最低点的函数值即为 AE+CD 的最小值；再运用勾股定理求得 CD、AE，然后根据 AE+CD 得到 $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$ 可知其表示点（x，0）到（0,-1）与（$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$）的距离之和，然后得当三点共线时有函数值.最后求出该直线的解析式，进而求得 x 的值.

【详解】解：由图可知，当 x=0 时，AE+CD=AB+AC=2

∴AB=AC=1，BC=$\sqrt{2}$，图象最低点函数值即为 AE+CD 的最小值

由题意可得：CD=$\sqrt{x^2+1}$,AE=$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

∴AE+CD=$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$，即点（x，0）到（0,-1）与（$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$）的距离之和

∴当这三点共线时，AE+CD 最小

设该直线的解析式为 y=kx+b

$$\begin{cases}-1=b\\ \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}k+b\end{cases}$$ 解得 $$\begin{cases}k=\sqrt{2}+1\\ b=-1\end{cases}$$

∴ $y=\left(\sqrt{2}+1\right)x-1$

当 y=0 时，x=$\sqrt{2}-1$.