专题 3-3 二次函数面积定值、比例问题以及米勒角问题

01 题型·解读

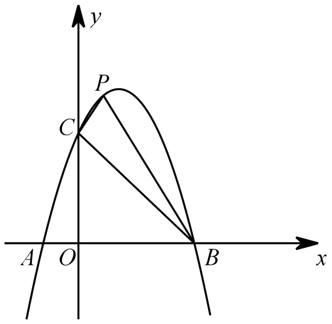
02 满分·技巧

一、面积定值与等值问题

1 .定值问题

【问题描述】

如图，抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 左侧），与 y 轴交于点 C，连接 BC，抛物线在线段 BC 上方部分取一点 P，连接 PB、PC，若△PBC 面积为 3，求点 P 坐标.



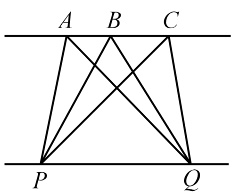
思路1：铅垂法列方程解.

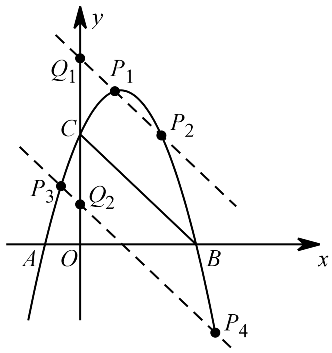
根据B、C两点坐标得直线BC解析式：y=-x+3，设点P坐标为$\left(m,-m^2+2m+3\right)$，

过点P作$PQ\perp x$轴交BC于点Q，则点Q坐标为（m，-m+3），

$PQ=\left|\left(-m^2+2m+3\right)-\left(-m+3\right)\right|=\left|-m^2+3m\right|$，$S_{\triangle PBC}=\dfrac{1}{2}\times 3\times\left|-m^2+3m\right|=3$，分类讨论去绝对值解方程即可得$m$的值.

思路2：构造等积变形





同底等高三角形面积相等.

取BC作水平宽可知水平宽为3，根据△PBC面积为3，可知铅垂高为2，

在y轴上取点Q使得CQ=2，过点Q作BC的平行线，交点即为满足条件的P点.

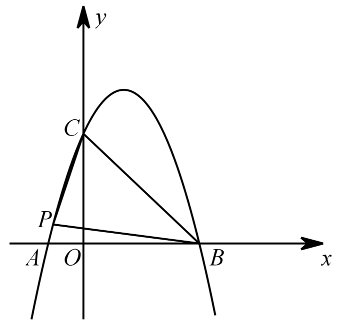
当点Q坐标为（0,5）时，PQ解析式为：y=-x+5，联立方程：$-x^2+2x+3=-x+5$，解之即可.

当点Q坐标为（0,1）时，PQ解析式为：y=-x+1，联立方程：$-x^2+2x+3=-x+1$，解之即可.

2．等值问题

【问题描述】

如图，抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 左侧），与 y 轴交于点 C，连接 BC，抛物线上存在一点 P 使得△PBC 的面积等于△BOC 的面积，求点 P 坐标．



思路 1：铅垂法

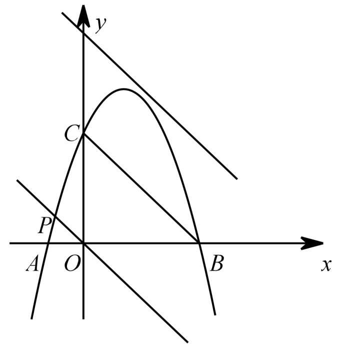
计算出△BOC 面积，将"等积问题"转化为"定积问题"，用铅垂法可解．

思路 2：构造等积变形

过点 O 作 BC 的平行线，与抛物线交点即为所求 P 点，

另外作点 O 关于点 C 的对称点 M，过点 M 作 BC 平行线与抛物线的交点亦为所求 P 点．

先求直线解析式，再联立方程即可求得 P 点坐标．



二、面积比例问题

1、方法突破

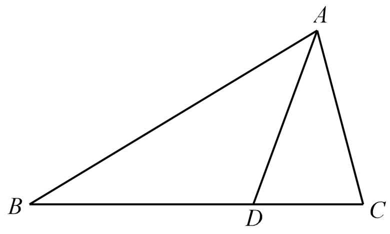
除了三角形、四边形面积计算之外，面积比例也是中考题中常见的条件或结论，对面积比例的分析，往往比求面积要复杂得多，这也算是面积问题中最难的一类．

大部分题目的处理方法可以总结为两种：（1）计算；（2）转化．

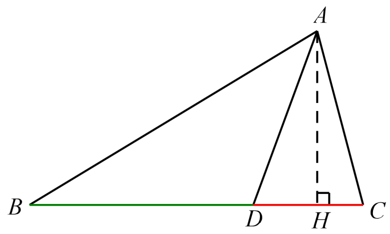
策略一：运用比例计算类

策略二：转化面积比

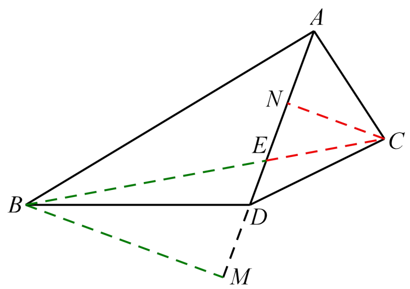
如图，B、D、C 三点共线，考虑$\triangle ABD$ 和$\triangle ACD$ 面积之比．



转化为底：共高，面积之比化为底边之比：则 $S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ACD}=BD:CD$．



更一般地，对于共边的两三角形$\triangle ABD$ 和$\triangle ACD$，连接 BC，与 AD 交于点 E，则 $S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ACD}=BM:CN=BE:CE$．

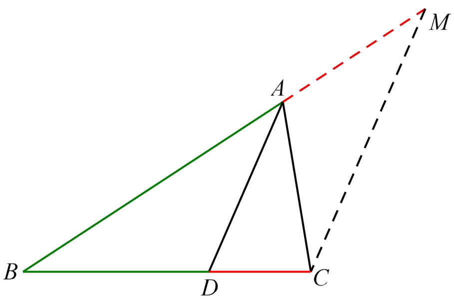


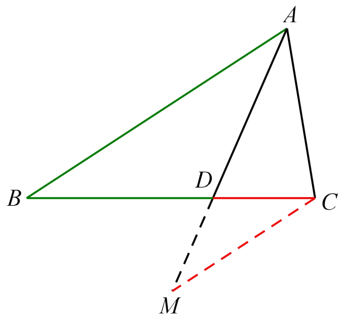
策略三：进阶版转化

在有些问题中，高或底边并不容易表示，所以还需在此基础上进一步转化为其他线段比值，比如常见有："A"字型线段比、"8"字型线段比．

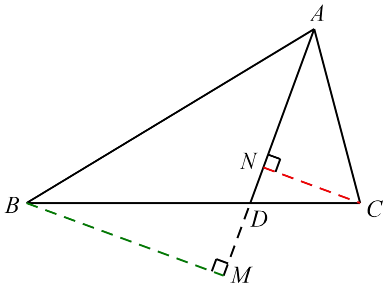
"A"字型线段比：$S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ACD}=BD:CD=BA:AM$．

"8"字型线段比：$S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ACD}=BD:CD=AB:CM$．





转化为垂线：共底，面积之比化为高之比：$S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ACD}=BD:CD=BM:CN$．



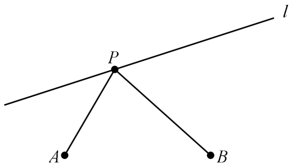
总结：面积能算那就算，算不出来就转换；底边不行就作高，还有垂线和平行．

三、米勒角问题（最大张角）

【问题描述】

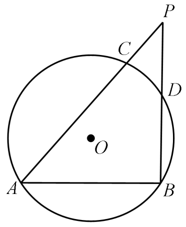
1471 年，德国数学家米勒向诺德尔提出这样一个问题：

如图，点 A、B 直线 l 的同一侧，在直线 l 上取一点 P，使得 $\angle APB$ 最大，求 P 点位置．

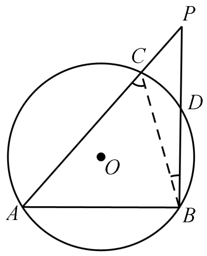


【问题铺垫】

圆外角：如图，像 $\angle APB$ 这样顶点在圆外，两边和圆相交的角叫圆外角．



相关结论：圆外角等于这个角所夹两条弧的度数差（大减小）的一半.

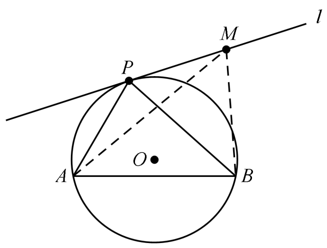


如图，$\angle P=\angle ACB-\angle PBC=\dfrac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD}}{2}$.

换句话说，对同一个圆而言，圆周角>圆外角.

【问题解决】

结论：当点 P 不与 A、B 共线时，作△PAB 的外接圆，当圆与直线 l 相切时，$\angle APB$ 最大.



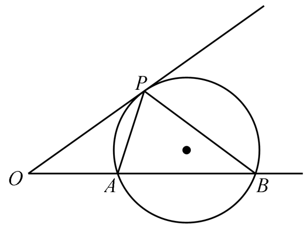
证明：在直线 l 上任取一点 M（不与点 P 重合），连接 AM、BM,

$\angle AMB$ 即为圆 O 的圆外角，

∴ $\angle APB>\angle AMB$，$\angle APB$ 最大.

∴当圆与直线 l 相切时，$\angle APB$ 最大.

特别地，若点 A、B 与 P 分别在一个角的两边，如下图，则有 $OP^2=OA\cdot OB$.（切割线定理）



证明：∵ $\angle POA=\angle BOP$，$\angle OPA=\angle OBP$（弦切角定理）

∴ $\triangle AOP\backsim\triangle POB$，∴ $\dfrac{OA}{OP}=\dfrac{OP}{OB}$，∴ $OP^2=OA\cdot OB$．

即可通过 OA、OB 线段长确定 OP 长，便知 P 点位置．

03 核心·题型

03 核心·题型

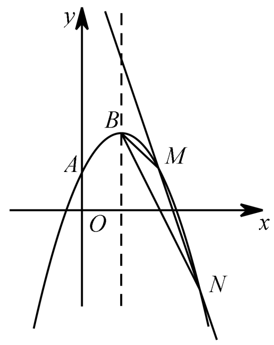
【题型 1】作铅垂高解决面积定值问题

例 1—1 湖北武汉市·中考真题

1．抛物线 L：$y=-x^2+bx+c$ 经过点 A（0，1），与它的对称轴直线 $x=1$ 交于点 B．

（1）直接写出抛物线 L 的解析式；

（2）如图 1，过定点的直线 $y=kx-k+4(k<0)$ 与抛物线 L 交于点 M、N．若 $\triangle BMN$ 的面积等于 1，求 k 的值．



【分析】

（1）解析式：$y=-x^2+2x+1$；

（2）考虑到直线过定点 Q（1，4），且 M、N 均为动点，故考虑用割补法.

$S_{\triangle BMN}=S_{\triangle QBN}-S_{\triangle QBM}$，分别过 M、N 作对称轴的垂线，垂足分别记为 G、H，

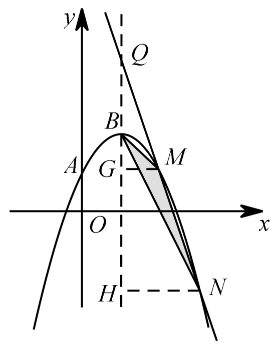
$S_{\triangle BMN}=\frac{1}{2}QB\times NH-\frac{1}{2}QB\times MG=\frac{1}{2}QB(NH-MG)=\frac{1}{2}QB(x_N-x_M)$，

考虑 x_N-x_M：联立方程：$-x^2+2x+1=kx-k+4$，化简得 $x^2+(k-2)x-k+3=0$，

$x_N-x_M=\sqrt{(k-2)^2-4(-k+3)}=\sqrt{k^2-8}$，$\therefore S_{\triangle BMN}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{k^2-8}=1$，

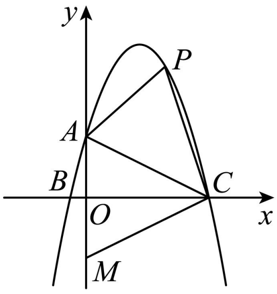
解得：$k_1=-3$，$k_2=3$（舍）.

故 k 的值为－3.



2023·齐齐哈尔·中考真题（删减）

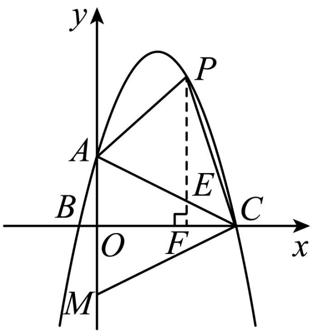
2．如图，抛物线 $y=-x^2+\frac{7}{2}x+2$ 上的点 A，C 坐标分别为 $(0,2)$，$(4,0)$，抛物线与 x 轴负半轴交于点 B，点 M 为 y 轴负半轴上一点，且 $OM=2$，连接 AC，CM，点 P 是抛物线位于第一象限图象上的动点，连接 AP，CP，当 $S_{\triangle PAC}=S_{\triangle ACM}$ 时，求点 P 的坐标



【答案】$P(2,5)$

【分析】过点 P 作 $PF\perp x$ 轴于点 F，交线段 AC 于点 E，用待定系数法求得直线 AC 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+2$，设点 P 的横坐标为 $p(0<p<4)$，则 $P\left(p,-p^2+\frac{7}{2}p+2\right)$，$E\left(p,-\frac{1}{2}p+2\right)$，故 $PE=-p^2+4p(0<p<4)$，先求得 $S_{\triangle ACM}=8$，从而得到 $S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}PE\cdot OC=-2p^2+8p=8$，解出 p 的值，从而得出点 P 的坐标；

【详解】解：过点 P 作 $PF\perp x$ 轴于点 F，交线段 AC 于点 E，



设直线 AC 的解析式为 $y=kx+m(k\neq 0)$，

将 $A(0,2)$，$C(4,0)$ 代入 $y=kx+m$，得

$\begin{cases}m=2\\4k+m=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=-\frac{1}{2}\\m=2\end{cases}$，∴直线 AC 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+2$

设点 P 的横坐标为 $p(0<p<4)$

则 $P\left(p,-p^2+\frac{7}{2}p+2\right)$，$E\left(p,-\frac{1}{2}p+2\right)$，

$\therefore PE=-p^2+\frac{7}{2}p+2-\left(-\frac{1}{2}p+2\right)=-p^2+4p(0<p<4)$

$\because S_{\triangle ACM}=8$，$\therefore S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}PE\cdot OC=-2p^2+8p=8$，解得 $p_1=p_2=2$，$\therefore P(2,5)$

南通·中考真题

3．定义：若一个函数图象上存在横、纵坐标相等的点，则称该点为这个函数图象的“等值点”．例如，

点 $(1,1)$ 是函数 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 的图象的“等值点”.

（1）分别判断函数 $y=x+2$，$y=x^2-x$ 的图象上是否存在“等值点”？如果存在，求出“等值点”的坐标；如果不存在，说明理由；

（2）设函数 $y=\frac{3}{x}(x>0)$，$y=-x+b$ 的图象的“等值点”分别为点 A，B，过点 B 作 $BC\perp x$ 轴，垂足为 C．当 ΔABC 的面积为 3 时，求 b 的值；

解：（1）在 $y=x+2$ 中，令 $x=x+2$，得 $0=2$ 不成立，

$\therefore$ 函数 $y=x+2$ 的图象上不存在“等值点”；

在 $y=x^2-x$ 中，令 $x^2-x=x$，

解得：$x_1=0$，$x_2=2$，

$\therefore$ 函数 $y=x^2-x$ 的图象上有两个“等值点” $(0,0)$ 或 $(2,2)$；

（2）在函数 $y=\frac{3}{x}(x>0)$ 中，令 $x=\frac{3}{x}$，

解得：$x=\sqrt{3}$，

$\therefore A(\sqrt{3}$，$\sqrt{3})$，

在函数 $y=-x+b$ 中，令 $x=-x+b$，

解得：$x=\frac{1}{2}b$，

$\therefore B(\frac{1}{2}b$，$\frac{1}{2}b)$，

$\because BC\perp x$ 轴，

$\therefore C(\frac{1}{2}b$，$0)$，

$\therefore BC=\frac{1}{2}|b|$，

$\because \Delta ABC$ 的面积为 3，

$\therefore \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}|b|\times|\sqrt{3}-\frac{1}{2}b|=3$，

当 $b<0$ 时，$b^2-2\sqrt{3}b-24=0$，

解得 $b=-2\sqrt{3}$，

当 $0 \bullet b<2\sqrt{3}$ 时，$b^2-2\sqrt{3}b+24=0$，

$\because \triangle=(-2\sqrt{3})^2-4\times1\times24=-84<0$，

$\therefore$ 方程 $b^2-2\sqrt{3}b+24=0$ 没有实数根，

当 b开$2\sqrt{3}$ 时，$b^2-2\sqrt{3}b-24=0$，

解得：$b=4\sqrt{3}$，综上所述，b 的值为 $-2\sqrt{3}$ 或 $4\sqrt{3}$

2023·**山东泰安·中考真题**

4．如图 1，二次函数 $y=ax^2+bx+4$ 的图象经过点 $A(-4,0),B(-1,0)$．

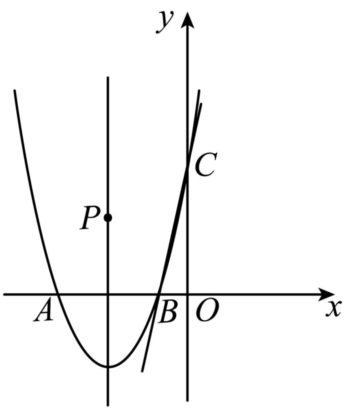


图1

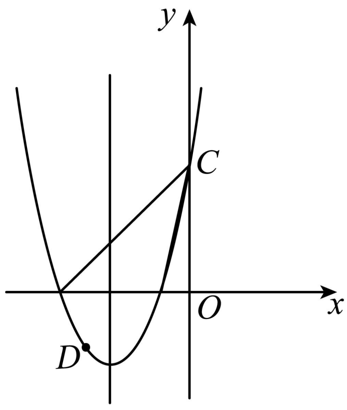


图2

(1)求二次函数的表达式；

(2)若点 P 在二次函数对称轴上，当 $\triangle BCP$ 面积为 5 时，求 P 坐标；

(3)小明认为，在第三象限抛物线上有一点 D，使 $\angle DAB+\angle ACB=90°$；请判断小明的说法是否正确，如果正确，请求出 D 的坐标；如果不正确，请说明理由．

【答案】(1) $y=x^2+5x+4$

(2) $\left(-\dfrac{5}{2},4\right)$ 或 $\left(-\dfrac{5}{2},-16\right)$

【分析】（1）直接运用待定系数法求解即可；

（2）首先求出直线 BC 解析式，然后通过设 P 点坐标，并表示对应 Q 点坐标，从而利用"割补法"计算 $\triangle BCP$ 的面积表达式并建立方程求解即可；

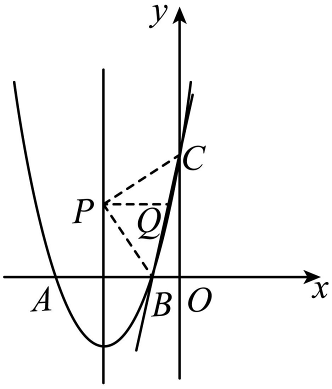
【详解】（1）解：将 $A(-4,0),B(-1,0)$ 代入 $y=ax^2+bx+4$ 得：

$\begin{cases}16a-4b+4=0\\a-b+4=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=1\\b=5\end{cases}$，∴抛物线解析式为：$y=x^2+5x+4$；

（2）解：由抛物线 $y=x^2+5x+4$ 可知，其对称轴为直线 $x=-\dfrac{5}{2}$，$C(0,4)$，

设直线 BC 解析式为：$y=kx+c$，将 $B(-1,0)$，$C(0,4)$ 代入解得：$\begin{cases}k=4\\c=4\end{cases}$，

∴直线 BC 解析式为：$y=4x+4$，此时，如图所示，作 $PQ/\!/x$ 轴，交 BC 于点 Q，



∵点 P 在二次函数对称轴上，∴设 $P\left(-\frac{5}{2},m\right)$，则 $Q\left(\frac{m-4}{4},m\right)$，

∴ $PQ=\left|\frac{m-4}{4}-\left(-\frac{5}{2}\right)\right|=\left|\frac{m+6}{4}\right|$，∴ $S_{\triangle BCP}=\frac{1}{2}PQ\left(y_C-y_B\right)=\frac{1}{2}\times\left|\frac{m+6}{4}\right|\times 4=\left|\frac{m+6}{2}\right|$，

∵要使得 $\triangle BCP$ 面积为 5，∴ $\left|\frac{m+6}{2}\right|=5$，解得：$m=4$ 或 $m=-16$，

∴ P 的坐标为 $\left(-\frac{5}{2},4\right)$ 或 $\left(-\frac{5}{2},-16\right)$

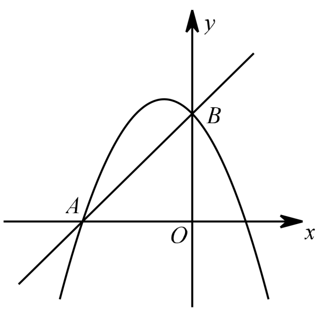
【题型 2】作平行线解决面积问题

例 2—1 山东省临沂市·中考真题

5．在平面直角坐标系中，直线 $y=x+2$ 与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B，抛物线 $y=ax^2+bx+c(a<0)$ 经过点 A、B.

（1）求 a、b 满足的关系式及 c 的值.

（2）如图，当 $a=-1$ 时，在抛物线上是否存在点 P，使 ΔPAB 的面积为 1？若存在，请求出符合条件的所有点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.



【分析】

（1）点 A 坐标为（−2，0），点 B 坐标为（0，2），

代入解析式可得：$c=2$，$4a-2b+2=0$

（2）考虑A、B水平距离为2，$\triangle PAB$的面积为1，故对应的铅垂高为1.

当$a=-1$时，可得$b=-1$，抛物线解析式为$y=-x^2-x+2$.

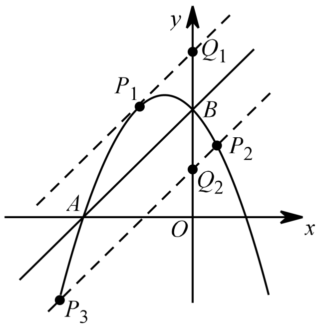
取点C（0，3）作AB的平行线，其解析式为：$y=x+3$，

联立方程$-x^2-x+2=x+3$，解得$x=-1$，故点P_1坐标为（−1，2）

取点D（0，1）作AB的平行线，其解析式为：$y=x+1$，

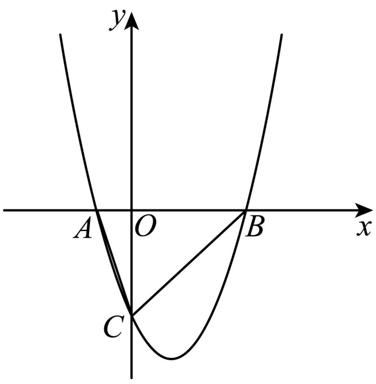
联立方程$-x^2-x+2=x+1$，解得$x_1=-1+\sqrt{2}$，$x_2=-1-\sqrt{2}$.

点P_2坐标为$\left(-1+\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$、点$P_3$坐标为$\left(-1-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$.



2023·**四川甘孜·中考真题**

6．已知抛物线$y=x^2+bx+c$与x轴相交于$A\left(-1,0\right)$，B两点，与y轴相交于点$C\left(0,-3\right)$.



(1)求b，c的值；

(2)P为第一象限抛物线上一点，$\triangle PBC$的面积与$\triangle ABC$的面积相等，求直线AP的解析式

【答案】(1)$\begin{cases}b=-2,\\c=-3.\end{cases}$，(2) $y=x+1$

(3)存在，点P'的坐标为$\left(1+\sqrt{21},-2+\sqrt{21}\right)$或$\left(1-\sqrt{21},-2-\sqrt{21}\right)$

【分析】（1）由待定系数法即可求解；

（2）$S_{\triangle PBC}=S_{\triangle ABC}$得到$AP/\!/BC$，即可求解；

（3）由题意的：$\angle AEP=\angle AEP',P'E=PE$，即可求解.

【详解】（1）由题意，得$\begin{cases}1-b+c=0,\\ c=-3.\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}b=-2,\\ c=-3.\end{cases}$

（2）由（1）得抛物线的解析式为$y=x^2-2x-3$.

令$y=0$，则$x^2-2x-3=0$，得$x_1=-1$，$x_2=3$.

∴B点的坐标为$(3,0)$.

$\because S_{\triangle PBC}=S_{\triangle ABC}$，

∴$AP/\!/BC$.

∵$B(3,0)$，$C(0,\ -3)$，

∴直线BC的解析式为$y=x-3$.

∵$AP/\!/BC$，

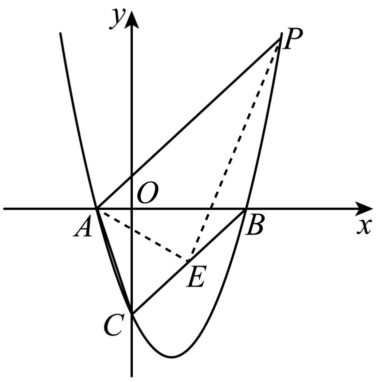
∴可设直线AP的解析式为$y=x+m$.

∵$A(-1,0)$在直线AP上，

∴$0=-1+m$.

∴$m=1$.

∴直线AP的解析式为$y=x+1$.



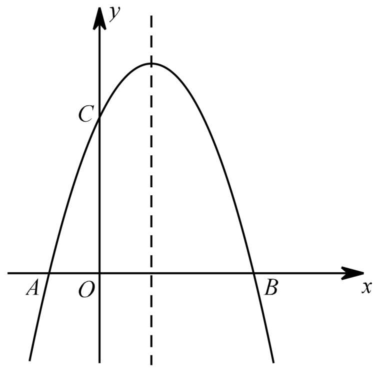
四川凉山州·中考真题

7．如图，抛物线$y=ax^2+bx+c$的图象过点$A(-1,0)$、$B(3,0)$、$C(0,3)$.

（1）求抛物线的解析式；

（2）在抛物线的对称轴上是否存在一点P，使得ΔPAC的周长最小，若存在，请求出点P的坐标及ΔPAC的周长；若不存在，请说明理由；

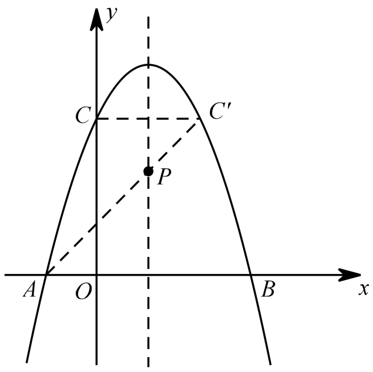
（3）在（2）的条件下，在x轴上方的抛物线上是否存在点M（不与C点重合），使得$S_{\Delta PAM}=S_{\Delta PAC}$？若存在，请求出点$M$的坐标；若不存在，请说明理由．



【分析】

（1）抛物线解析式为：$y=-x^2+2x+3$；

（2）将军饮马问题，作点 C 关于对称轴的对称点 C'（2，3），连接 AC'，与对称轴交点即为所求 P 点，可得 P 点坐标为（1，2），$\triangle PAC$ 的周长亦可求．

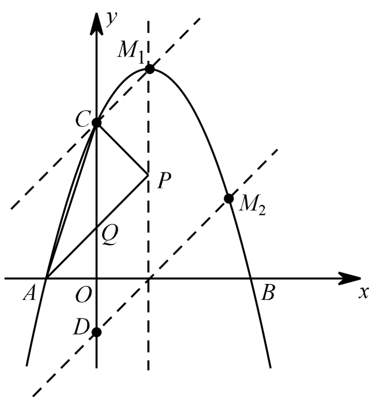


（3）过点 C 作 AP 平行线与抛物线交点即为 M 点，联立方程得解；

记 AP 与 y 轴交点为 Q 点，作点 C 关于 Q 点的对称点点 D，

过点 D 作 AP 的平行线，与抛物线在 x 轴上方部分的交点即为所求 M 点，

联立方程得解．

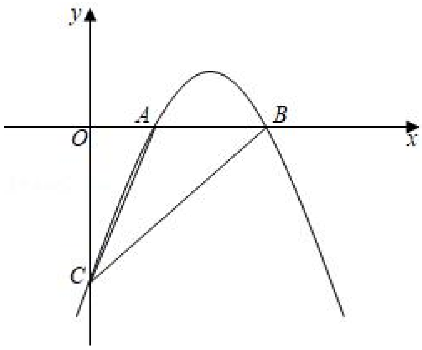


连云港·中考真题

8．如图，抛物线 $y = mx^2 + (m^2+3)x - (6m+9)$ 与 x 轴交于点 A 、B ，与 y 轴交于点 C ，已知 $B(3,0)$.

（1）求 m 的值和直线 BC 对应的函数表达式；

（2） P 为抛物线上一点，若 $S_{\Delta PBC} = S_{\Delta ABC}$ ，请直接写出点 P 的坐标；



解：（1）将 $B(3,0)$ 代入 $y = mx^2 + (m^2+3)x - (6m+9)$ ，化简得， $m^2 + m = 0$ ，

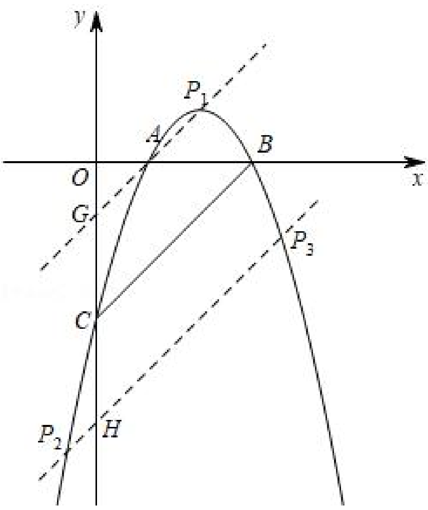
则 $m = 0$ （舍）或 $m = -1$ ， $\therefore m = -1$ ， $\therefore y = -x^2 + 4x - 3$.

$\therefore C(0,-3)$ ，设直线 BC 的函数表达式为 $y = kx + b$ ，

将 $B(3,0)$ ， $C(0,-3)$ 代入表达式，可得， $\begin{cases} 0 = 3k + b \\ -3 = b \end{cases}$ ，解得， $\begin{cases} k = 1 \\ b = -3 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 直线 BC 的函数表达式为 $y = x - 3$.

（2）如图，过点 A 作 $AP_1 // BC$ ，设直线 AP_1 交 y 轴于点 G ，将直线 BC 向下平移 GC 个单位，得到直线 P_2P_3 .



由（1）得直线 BC 的表达式为 $y = x - 3$ ， $A(1,0)$ ，

$\therefore$ 直线 AG 的表达式为 $y = x - 1$ ，

联立$\begin{cases}y=x-1\\y=-x^2+4x-3\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$，或$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$，

$\therefore P_1(2,1)$ 或 $(1,0)$，

由直线 AG 的表达式可得 $G(0,-1)$，

$\therefore GC=2$， $CH=2$，

$\therefore$ 直线 P_2P_3 的表达式为： $y=x-5$，

联立$\begin{cases}y=x-5\\y=-x^2+4x-3\end{cases}$，

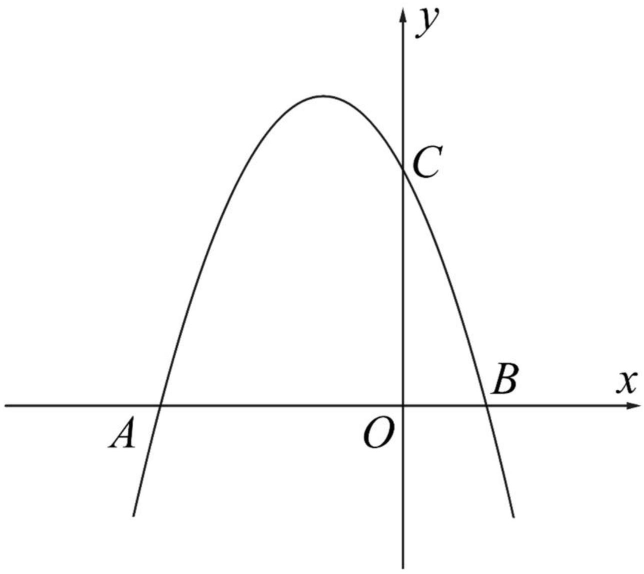
解得，$\begin{cases}x=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\\y=\dfrac{-7-\sqrt{17}}{2}\end{cases}$，或，$\begin{cases}x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\\y=\dfrac{-7+\sqrt{17}}{2}\end{cases}$，

$\therefore P_2(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$，$\dfrac{-7-\sqrt{17}}{2})$，$P_3(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$，$\dfrac{-7+\sqrt{17}}{2})$，;

综上可得，符合题意的点 P 的坐标为：$(2,1)$，$(1,0)$，$(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$，$\dfrac{-7-\sqrt{17}}{2})$，$(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$，$\dfrac{-7+\sqrt{17}}{2})$

2023·**黑龙江·中考真题**

9．如图，抛物线$y=ax^2+bx+3$与x轴交于$A(-3,0),B(1,0)$两点，交y轴于点C．



(1)求抛物线的解析式．

(2)抛物线上是否存在一点P，使得$S_{\triangle PBC}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，若存在，请直接写出点$P$的坐标；若不存在，请说明理由．

【答案】(1) $y=-x^2-2x+3$

(2)存在，点 P 的坐标为 $(-2,3)$ 或 $(3,-12)$

【分析】(1) 采用待定系数法，将点A和点 B 坐标直接代入抛物线 $y=ax^2+bx+3$，即可求得抛物线的解析式.

(2) 过线段 AB 的中点 D，且与 BC 平行的直线上的点与点 B，点 C 连线组成的三角形的面积都等于 $\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，则此直线与抛物线的交点即为所求；求出此直线的解析式，与抛物线解析式联立，即可求得答案.

【详解】(1) 解：因为抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 经过点 $A(-3,0)$ 和点 $B(1,0)$ 两点，所以

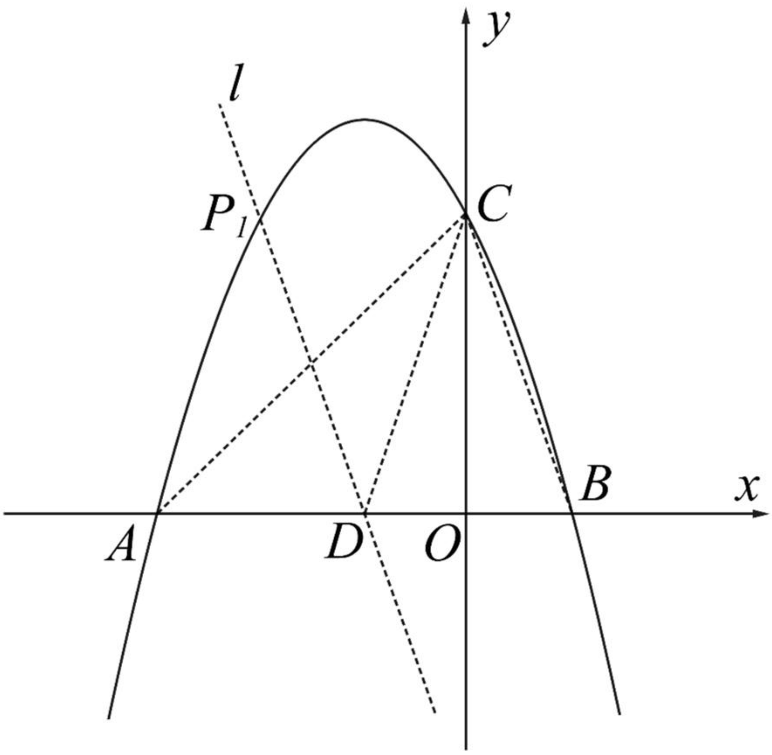
$$\begin{cases}9a-3b+3=0\\a+b+3=0\end{cases},$$

解得

$$\begin{cases}a=-1\\b=-2\end{cases},$$

所以抛物线解析式为：$y=-x^2-2x+3$.

(2) 解：如图，设线段 AB 的中点为 D，可知点 D 的坐标为 $(-1,0)$，过点 D 作与 BC 平行的直线 l，假设与抛物线交于点 P_1， P_2 (P_1 在 P_2 的左边)，(P_2 在图中未能显示).



设直线 BC 的函数解析式为 $y=kx+b_1\,(k\neq 0)$.

因为直线 BC 经过点 $B(1,0)$ 和 $C(0,3)$，所以

$$\begin{cases}k+b_1=0\\b_1=3\end{cases},$$

解得 $\begin{cases}k=-3\\b_1=3\end{cases}$，

所以，直线BC的函数解析式为：$y=-3x+3$.

又$P_1P_2//BC$，

可设直线P_1P_2的函数解析式为$y=-3x+b_2$，

因为直线P_1P_2经过点D $(-1,0)$，所以

$3+b_2=0$.

解得$b_2=-3$.

所以，直线P_1P_2的函数解析式为$y=-3x-3$.

根据题意可知，

$S_{\triangle DBC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

又$P_1P_2//BC$，

所以，直线P_1P_2上任意一点P'与点B，点C连线组成的$\triangle P'BC$的面积都满足$S_{\triangle P'BC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

所以，直线P_1P_2与抛物线$y=-x^2-2x+3$的交点P_1，P_2即为所求，可得

$-3x-3=-x^2-2x+3$，

化简，得

$x^2-x-6=0$，

解得$x_1=3$，$x_2=-2$，

所以，点P_1的坐标为$(-2,3)$，点P_2的坐标为$(3,-12)$.

故答案为：存在，点P的坐标为$(-2,3)$或$(3,-12)$.

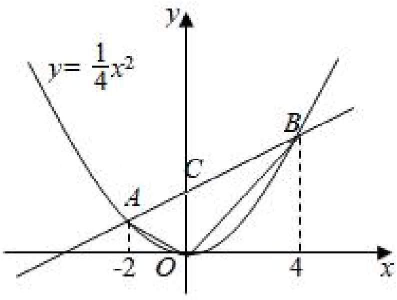
江苏徐州·中考真题

10．如图，点A、B在$y=\frac{1}{4}x^2$的图象上．已知A、B的横坐标分别为-2、4，直线AB与y轴交于点C，连接OA、OB．

（1）求直线AB的函数表达式；

（2）求ΔAOB的面积；

（3）若函数$y=\frac{1}{4}x^2$的图象上存在点P，使ΔPAB的面积等于ΔAOB的面积的一半，则这样的点P共有 ____个．



解：(1) $\because$ 点 A 、B 在 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的图象上，A 、B 的横坐标分别为 -2 、4，

$\therefore A(-2,1)$ ，$B(4,4)$ ，

设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$ ，

$\therefore \begin{cases}-2k+b=1\\4k+b=4\end{cases}$ ，解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{2}\\b=2\end{cases}$ ，

$\therefore$ 直线 AB 为 $y=\frac{1}{2}x+2$ ；

(2) 在 $y=\frac{1}{2}x+2$ 中，令 $x=0$ ，则 $y=2$ ，

$\therefore C$ 的坐标为 $(0,2)$ ，

$\therefore OC=2$ ，

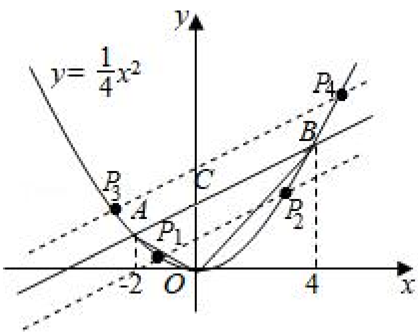
$\therefore S_{\Delta AOB}=S_{\Delta AOC}+S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}\times 2\times 2+\frac{1}{2}\times 2\times 4=6$.

(3) 过 OC 的中点，作 AB 的平行线交抛物线两个交点 P_1 、P_2 ，此时 $\triangle P_1AB$ 的面积和 $\triangle P_2AB$ 的面积等于 ΔAOB 的面积的一半，

作直线 P_1P_2 关于直线 AB 的对称直线，交抛物线两个交点 P_3 、P_4 ，此时 $\triangle P_3AB$ 的面积和 $\triangle P_4AB$ 的面积等于 ΔAOB 的面积的一半，

所以这样的点 P 共有 4 个，

故答案为 4.



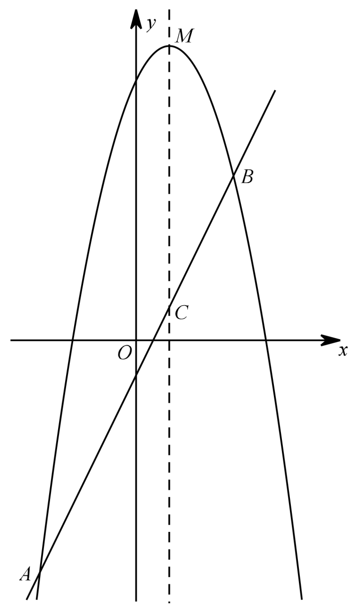
【题型3】面积比例问题的转化定值问题或函数表达式

例3—1 内蒙古通辽市·中考真题

11．已知，如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的顶点为 $M(1,9)$，经过抛物线上的两点 $A(-3,-7)$ 和 $B(3,m)$ 的直线交抛物线的对称轴于点 C．

（1）求抛物线的解析式和直线 AB 的解析式．

（2）在抛物线上 A、M 两点之间的部分（不包含 A、M 两点），是否存在点 D，使得 $S_{\Delta DAC}=2S_{\Delta DCM}$？若存在，求出点 D 的坐标；若不存在，请说明理由．



【分析】

（1）设顶点式，代入 A 点坐标，可得解析式为：$y=-x^2+2x+8$．

当 x＝3 时，y＝5，故点 B 坐标为（3，5），∴直线 AB 的解析式为：y＝$2x$－1．

（2）铅垂法表示△ACD 的面积：

设点 D 坐标为 $\left(m,-m^2+2m+8\right)$，过点 D 作 $DP\perp x$ 轴交 AB 于 P 点，

则 P 点坐标为 $\left(m,2m-1\right)$，线段 DP＝$-m^2+9$，

$S_{\vartriangle ACD}=\dfrac{1}{2}\times 4\times\left(-m^2+9\right)=-2m^2+18$，

面积公式表示△MCD 的面积：

过点 D 作 $DQ\perp MC$ 交 MC 于点 Q，则 DQ＝1－m，

$S_{\vartriangle MCD}=\dfrac{1}{2}\times MC\times DQ=\dfrac{1}{2}\times 8\times\left(1-m\right)=-4m+4$

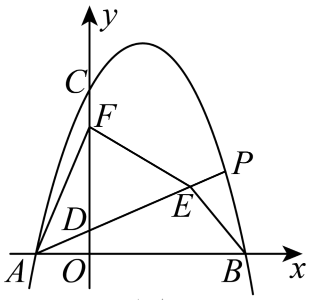
$S_{\vartriangle DAC}=2S_{\vartriangle DCM}$，$-2m^2+18=2\left(-4m+4\right)$

解得：m＝5 或－1．考虑 D 点在 A、M 之间的抛物线上，故 m＝－1．

D 点坐标为（－1，5）．

2023·辽宁盘锦·中考真题

12．如图，抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 与 x 轴交于点 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，与 y 轴交于点 C．



(1)求抛物线的解析式．

(2)如图，点 E 是第一象限内一点，连接 AE 交 y 轴于点 D，AE 的延长线交抛物线于点 P，点 F 在线段 CD 上，且 $CF=OD$，连接 FA，FE，BE，BP，若 $S_{\triangle AFE}=S_{\triangle ABE}$，求 $\triangle PAB$ 面积．

【答案】(1) $y=-x^2+2x+3$，(2) $Q(2,3)$，(3) $\frac{7}{2}$

【分析】（1）将点 $A(-1,0)$，$B(3,0)$ 代入抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 得到 $\begin{cases}a-b+3=0\\9a+3b+3=0\end{cases}$，解方程组即可得到答案；

（2）设 $MN=4m$，$BN=3m$，则 $BM=QM=5m$，则 $QN=9m$，$ON=3-3m$，从而表示出点 Q 的坐标为 $(3-3m,9m)$，代入抛物线解析式，求出 m 的值即可得到答案；

（3）求出直线 AP 的表达式，利用 $S_{\triangle AFE}=S_{\triangle ABE}$，得到 $\frac{1}{2}DF\cdot(x_A-x_E)=\frac{1}{2}AB\cdot y_E$，求出点 P 的坐标，再根据 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}AB\times y_P$ 进行计算即可得到答案．

【详解】（1）解：$\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 与 x 轴交于点 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，

$\therefore\begin{cases}a-b+3=0\\9a+3b+3=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=-1\\b=2\end{cases}$，$\therefore$ 抛物线的解析式为：$y=-x^2+2x+3$；

（2）解：设点 $P(m,-m^2+2m+3)$，直线 AP 的解析式为 $y=kx+b$，

$\because A(-1,0)$，$\therefore\begin{cases}-k+b=0\\km+b=-m^2+2m+3\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=-(m-3)\\b=-(m-3)\end{cases}$，

$\therefore$ 直线 AP 的解析式为 $y=-(m-3)x-(m-3)$，当 $x=0$ 时，$y=-(m-3)=3-m$，

$\therefore(0,3-m)$，$\therefore OD=3-m$，$\therefore CF=OD=3-m$，

在抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 中，当 $x=0$ 时，$y=3$，$\therefore C(0,3)$，$\therefore OC=3$，

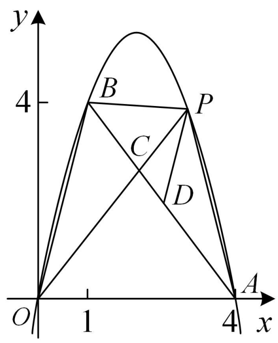
$\therefore DF=OC-OD-CF=3-(3-m)-(3-m)=2m-3$，

设点 E 的坐标为 $(t,-(m-3)t-(m-3))$，$\because A(-1,0)$，$B(3,0)$，$\therefore AB=4$，$\because S_{\triangle AFE}=S_{\triangle ABE}$，

$\therefore \frac{1}{2}DF\cdot\left(x_A-x_E\right)=\frac{1}{2}AB\cdot y_E$，$\therefore \frac{1}{2}\times(2m-3)\times(t+1)=\frac{1}{2}\times4\times\left[-(m-3)t-(m-3)\right]$，

解得：$m=\frac{5}{2}$，$\therefore$点 P 的坐标为 $\left(\frac{5}{2},\frac{7}{4}\right)$，　　$\therefore S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}AB\times y_P=\frac{1}{2}\times4\times\frac{7}{4}=\frac{7}{2}$．

13．在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y=ax^2+bx$ 经过 A（4，0），B（1，4）两点．P 是抛物线上一点，且在直线 AB 的上方．



(1)求抛物线的解析式；

(2)若△OAB 面积是△PAB 面积的 2 倍，求点 P 的坐标

【答案】(1) $y=-\frac{4}{3}x^2+\frac{16}{3}x$，(2)存在，$\left(2,\frac{16}{3}\right)$ 或（3，4）

【分析】(1) 待定系数法求解析式即可求解；

(2) 待定系数法求得直线 AB 的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}$，过点 P 作 $PM\perp x$ 轴，垂足为 M，PM 交 AB 于点 N．过点 B 作 $BE\perp PM$，垂足为 E．可得 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PNB}+S_{\triangle PNA}=\frac{3}{2}PN$，设 $P\left(m,-\frac{4}{3}m^2+\frac{16}{3}m\right)(1<m<4)$，则 $N\left(m,-\frac{4}{3}m+\frac{16}{3}\right)$．由 $PN=\left(-\frac{4}{3}m^2+\frac{16}{3}m\right)-\left(-\frac{4}{3}m+\frac{16}{3}\right)=\frac{8}{3}$，解方程求得 m 的值，进而即可求解；

【详解】(1) 解：(1) 将 A（4，0），B（1，4）代入 $y=ax^2+bx$，

得 $\begin{cases}16a+4b=0\\a+b=4\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-\frac{4}{3}\\b=\frac{16}{3}\end{cases}$．所以抛物线的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x^2+\frac{16}{3}x$．

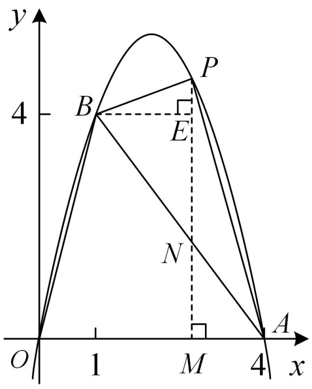
(2) 设直线 AB 的解析式为 $y=kx+t(k\neq0)$，

将 A（4，0），B（1，4）代入 $y=kx+t$，

得 $\begin{cases}4k+t=0\\k+t=4\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=-\frac{4}{3}\\t=\frac{16}{3}\end{cases}$．所以直线 AB 的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}$．

过点 P 作 $PM\perp x$ 轴，垂足为 M，PM 交 AB 于点 N．

过点 B 作 $BE\perp PM$，垂足为 E．



所以 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PNB}+S_{\triangle PNA}=\frac{1}{2}PN\times BE+\frac{1}{2}PN\times AM=\frac{1}{2}PN\times\left(BE+AM\right)=\frac{3}{2}PN$．

因为 A（4，0），B（1，4），所以 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times4\times4=8$．

因为△OAB 的面积是△PAB 面积的 2 倍，所以 $2\times\frac{3}{2}PN=8$，$PN=\frac{8}{3}$．

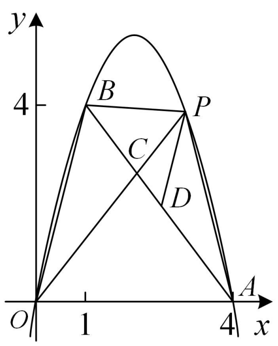
设 $P\left(m,-\frac{4}{3}m^2+\frac{16}{3}m\right)(1<m<4)$，则 $N\left(m,-\frac{4}{3}m+\frac{16}{3}\right)$．

所以 $PN=\left(-\frac{4}{3}m^2+\frac{16}{3}m\right)-\left(-\frac{4}{3}m+\frac{16}{3}\right)=\frac{8}{3}$，即 $-\frac{4}{3}m^2+\frac{20}{3}m-\frac{16}{3}=\frac{8}{3}$，

解得 $m_1=2$，$m_2=3$．所以点 P 的坐标为 $\left(2,\frac{16}{3}\right)$ 或（3，4）．zz

2022·福建·统考模拟预测

14．在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y=ax^2+bx$ 经过 A（4，0），B（1，4）两点．P 是抛物线上一点，且在直线 AB 的上方．



(1)求抛物线的解析式；

(2)若△OAB 面积是△PAB 面积的 2 倍，求点 P 的坐标；

【答案】(1) $y=-\frac{4}{3}x^2+\frac{16}{3}x$

(2)存在，$\left(2,\frac{16}{3}\right)$ 或（3，4）

【分析】(1) 待定系数法求解析式即可求解；

(2) 待定系数法求得直线 AB 的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}$，过点 P 作 $PM\perp x$ 轴，垂足为 M，PM 交 AB 于点 N. 过点 B 作 $BE\perp PM$，垂足为 E. 可得 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PNB}+S_{\triangle PNA}=\frac{3}{2}PN$，设 $P\left(m,-\frac{4}{3}m^2+\frac{16}{3}m\right)(1<m<4)$，则 $N\left(m,-\frac{4}{3}m+\frac{16}{3}\right)$. 由 $PN=\left(-\frac{4}{3}m^2+\frac{16}{3}m\right)-\left(-\frac{4}{3}m+\frac{16}{3}\right)=\frac{8}{3}$，解方程求得 m 的值，进而即可求解；

【详解】(1) 解：(1) 将 A（4，0），B（1，4）代入 $y=ax^2+bx$，

得 $\begin{cases}16a+4b=0\\a+b=4\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-\frac{4}{3}\\b=\frac{16}{3}\end{cases}$. 所以抛物线的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x^2+\frac{16}{3}x$.

(2) 设直线 AB 的解析式为 $y=kx+t(k\neq0)$，

将 A（4，0），B（1，4）代入 $y=kx+t$，

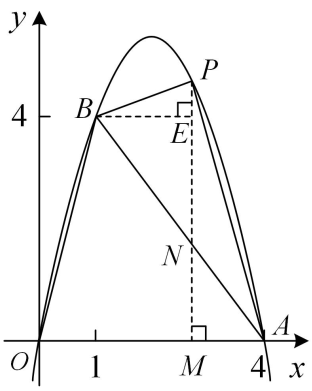
得 $\begin{cases}4k+t=0\\k+t=4\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}k=-\frac{4}{3}\\t=\frac{16}{3}\end{cases}$.

所以直线 AB 的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}$.

过点 P 作 $PM\perp x$ 轴，垂足为 M，PM 交 AB 于点 N.

过点 B 作 $BE\perp PM$，垂足为 E.



所以 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PNB}+S_{\triangle PNA}=\frac{1}{2}PN\times BE+\frac{1}{2}PN\times AM=\frac{1}{2}PN\times(BE+AM)=\frac{3}{2}PN$.

因为 A（4，0），B（1，4），所以 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times4\times4=8$.

因为△OAB 的面积是△PAB 面积的 2 倍，

所以 $2\times\frac{3}{2}PN=8$，$PN=\frac{8}{3}$.

设 $P\left(m,-\frac{4}{3}m^2+\frac{16}{3}m\right)(1<m<4)$，则 $N\left(m,-\frac{4}{3}m+\frac{16}{3}\right)$.

所以 $PN=\left(-\frac{4}{3}m^2+\frac{16}{3}m\right)-\left(-\frac{4}{3}m+\frac{16}{3}\right)=\frac{8}{3}$，

即 $-\frac{4}{3}m^2+\frac{20}{3}m-\frac{16}{3}=\frac{8}{3}$，

解得 $m_1=2$， $m_2=3$.

所以点 P 的坐标为 $\left(2,\frac{16}{3}\right)$ 或（3，4）.

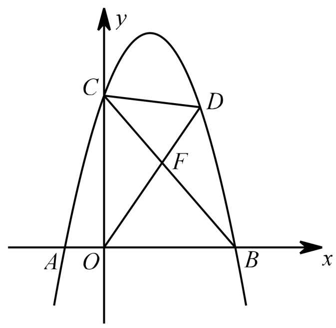
【题型 4】面积比例问题的转化为线段比

例 4—1

15．如图，抛物线 $y=ax^2+2x+c(a<0)$ 与 x 轴交于点 A 和点 B（点 A 在原点的左侧，点 B 在原点的右侧），与 y 轴交于点 C， $OB=OC=3$.

（1）求该抛物线的函数解析式.

（2）如图，连接 BC，点 D 是直线 BC 上方抛物线上的点，连接 OD， CD． OD 交 BC 于点 F，当 $S_{\Delta COF}:S_{\Delta CDF}=3:2$ 时，求点 D 的坐标.



【分析】

（1）解析式： $y=-x^2+2x+3$

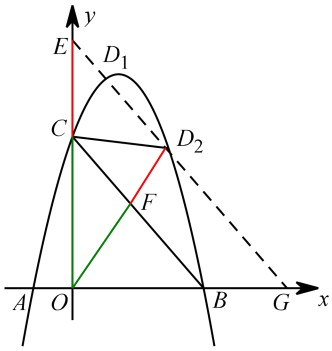
（2）显然△COF 和△CDF 共高，可将面积之比化为底边之比.

$OF:DF=S_{\vartriangle COF}:S_{\vartriangle CDF}=3:2$，

思路 1：转化底边之比为“A”字型线段比

在 y 轴上取点 E（0，5)，(为何是这个点？因此此时 OC：CE＝3：2)

过点 E 作 BC 的平行线交 x 轴于 G 点，



EG 与抛物线交点即为所求 D 点，

根据平行线分线段成比例，OF：FD＝OC：CE＝3：2.

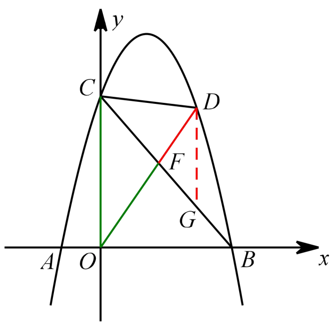
直线 EG 解析式为：$y=-x+5$，

与抛物线联立方程，得：$-x^2+2x+3=-x+5$，

解得：$x_1=1$，$x_2=2$.

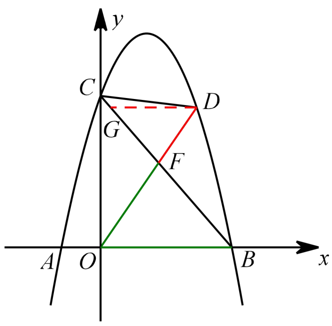
故 D 点坐标为（1，4）或（2，3）.

思路 2：转化底边之比为"8"字型线段比



过点 D 作 DG∥y 轴交 BC 边于点 G，则 $\dfrac{OF}{FD}=\dfrac{OC}{DG}$，又 OC＝3，故点 G 满足 DG＝2 即可．这个问题设 D 点坐标即可求解.

也可以构造水平"8"字，过点 D 作 DG∥x 轴交 BC 于点 G，则 $\dfrac{OF}{FD}=\dfrac{OB}{DG}$，又 OB＝3，∴DG＝2 即可.但此处问题在于水平线段不如竖直线段易求，方法可行但不建议.



其实本题分析点的位置也能解：

思路 3：设点 D 坐标为 $\left(m,-m^2+2m+3\right)$，

根据 OF：DF＝3：2，可得 F 点坐标为 $\left(\frac{3}{5}m,-\frac{3}{5}m^2+\frac{6}{5}m+\frac{9}{5}\right)$，

点 F 在直线 BC 上，将点坐标代入直线 BC 解析式：y＝－x+3，

$-\frac{3}{5}m^2+\frac{6}{5}m+\frac{9}{5}=-\frac{3}{5}m+3$，

解得 $m_1=1$， $m_2=2$，

故 D 点坐标为（1，4）或（2，3）.

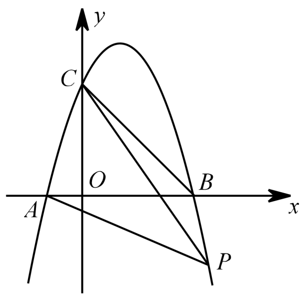
这个计算的方法要求能理解比例与点坐标之间的关系，即由 D 点坐标如何得到 F 点坐标.

深圳市中考真题

16．如图抛物线经 $y=ax^2+bx+c$ 过点 $A(-1,0)$，点 $C(0,3)$，且 $OB=OC$．

（1）求抛物线的解析式及其对称轴；

（2）点 P 为抛物线上一点，连接 CP，直线 CP 把四边形 $CBPA$ 的面积分为 $3:5$ 两部分，求点 P 的坐标．



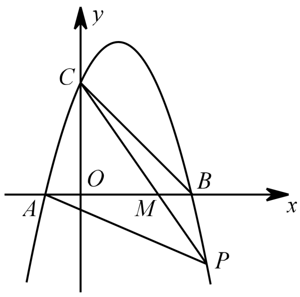
【分析】

（1）解析式为 $y=-x^2+2x+3$，对称轴为直线 x＝1.

（2）连接 CP，可将四边形 $CBPA$ 分为△CAP 和△CBP.

即 $S_{\triangle CAP}:S_{\triangle CBP}=3:5$ 或 $S_{\triangle CAP}:S_{\triangle CBP}=5:3$．

考虑△CAP 和△CBP 共底边 CP，记 CP 与 x 轴交于点 M，则 $S_{\triangle CAP}:S_{\triangle CBP}=AM:BM$



①AM：BM＝5：3，点 M 坐标为 $\left(\frac{3}{2},0\right)$，

根据 C、M 坐标求解直线 CM 解析式： $y=-2x+3$，

联立方程： $-x^2+2x+3=-2x+3$，解得： $x_1=0$（舍）， $x_2=4$．

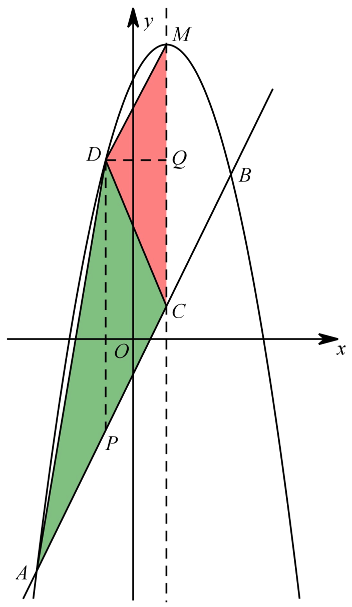
故 P 点坐标为（4，－5）.

②AM：BM＝3：5，点 M 坐标为 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，

根据 C、M 坐标求解直线 CM 解析式为：$y=-6x+3$，

联立方程：$-x^2+2x+3=-6x+3$，解得：$x_1=0$（舍），$x_2=8$．

故 P 点坐标为（8，－45）．



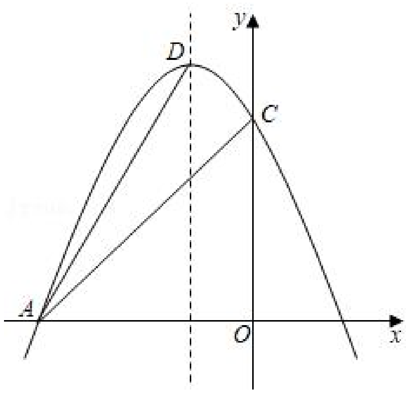
牡丹江中考真题

17．抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过点 $A(-3,0)$ 和点 $C(0,3)$．

（1）求此抛物线所对应的函数解析式，并直接写出顶点 D 的坐标；

（2）若过顶点 D 的直线将 ΔACD 的面积分为 $1:2$ 两部分，并与 x 轴交于点 Q，则点 Q 的坐标为 ____．

注：抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的顶点坐标 $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$



解：(1) 把点 $A(-3,0)$ 和点 $C(0,3)$ 代入 $y=-x^2+bx+c$ 得：$\begin{cases}-9-3b+c=0\\c=3\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}b=-2\\c=3\end{cases}$，$\therefore y=-x^2-2x+3$，$\because y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$，

$\therefore$ 顶点 $D(-1,4)$.

(2) 取线段 AC 的三等分点 E、F，连接 DE、DF 交 x 轴于点 Q_1、Q_2，则：

$S_{\Delta DAE}:S_{\Delta DEC}=1:2$，$S_{\Delta DAF}:S_{\Delta DFC}=2:1$，$\because$ 点 $A(-3,0)$，点 $C(0,3)$，

$\therefore E(-2,1)$，$F(-1,2)$，$\therefore DF\perp x$ 轴于点 Q_2，$\therefore Q_2(-1,0)$，

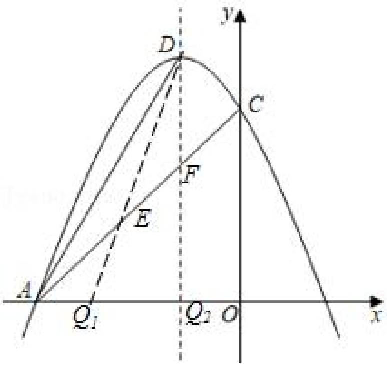
设直线 DE 的解析式为：$y=kx+b(k\neq 0)$，

把点 $D(-1,4)$，$E(-2,1)$ 代入，得：$\begin{cases}-k+b=4\\-2k+b=1\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=3\\b=7\end{cases}$，

$\therefore$ 直线 DE 的表达式为：$y=3x+7$，

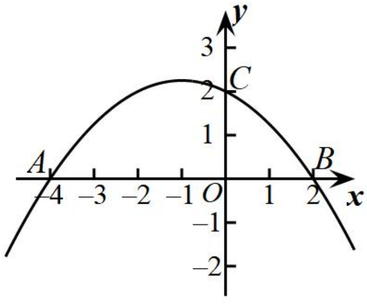
当 $y=0$ 时，$x=-\frac{7}{3}$，$\therefore Q_1(-\frac{7}{3}，0)$.

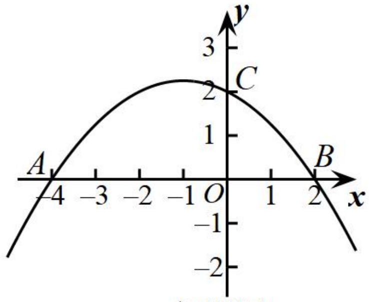
故答案为：$Q_1(-\frac{7}{3}，0)$，$Q_2(-1,0)$.



2022·四川内江中考真题

18．如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A（－4，0），B（2，0），与 y 轴交于点 C（0，2）.





备用图

(1)求这条抛物线所对应的函数的表达式；

(2)点 P 为抛物线上一点，连接 CP，直线 CP 把四边形 $CBPA$ 的面积分为 1：5 两部分，求点 P 的坐

标．

【答案】(1) $y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+2$，(2)点 P 的坐标为（6，－10）或（－$\frac{14}{3}$，－$\frac{10}{9}$）．

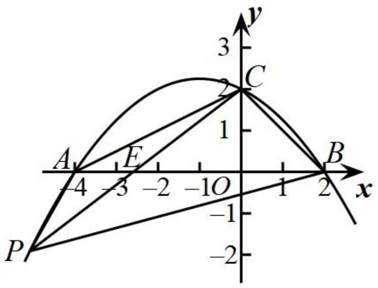
【分析】(1）运用待定系数法即可解决问题；

（2）过点 D 作 $DH\perp AB$ 于 H，交直线 AC 于点 G，过点 D 作 $DE\perp AC$ 于 E，可用待定系数法求出直线 AC 的解析式，设点 D 的横坐标为 m，则点 G 的横坐标也为 m，从而可以用 m 的代数式表示出 DG，然后利用 $\cos\angle EDG=\cos\angle CAO$ 得到 $DE=\frac{2\sqrt{5}}{5}DG$，可得出关于 m 的二次函数，运用二次函数的最值即可解决问题

【详解】(1）∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A（－4，0），B（2，0），与 y 轴交于点 C（0，2）．

∴$\begin{cases}16a-4b+c=0\\4a+2b+c=0\\c=2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=-\frac{1}{4}\\b=-\frac{1}{2}\\c=2\end{cases}$，∴抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+2$；

（2）如图，设直线 CP 交 x 轴于点 E，



直线 CP 把四边形 $CBPA$ 的面积分为 1：5 两部分，

又∵$S_{\triangle PCB}$：$S_{\triangle PCA}$＝$\frac{1}{2}EB\times(y_C-y_P):\frac{1}{2}AE\times(y_C-y_P)=EB:AE$，

则 EB：AE＝1：5 或 5：1

则 AE＝5 或 1，

即点 E 的坐标为（1，0）或（－3，0），

将点 E 的坐标代入直线 CP 的表达式：$y=nx+2$，

解得：n＝－2 或 $\frac{2}{3}$，

故直线 CP 的表达式为：y＝－2x+2 或 $y=\frac{2}{3}x+2$，

联立方程组 $\begin{cases}y=-2x+2\\y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y=\frac{2}{3}x+2\\y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+2\end{cases}$，

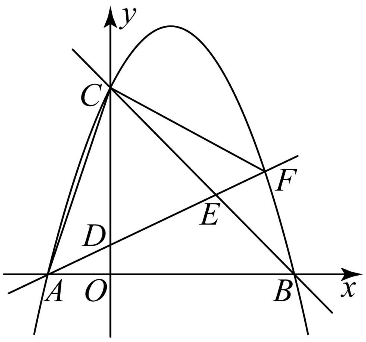
解得：x＝6 或－$\frac{14}{3}$（不合题意值已舍去），

故点 P 的坐标为（6，－10）或（－$\frac{14}{3}$，－$\frac{10}{9}$）．

2023·**四川泸州中考真题**

19．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y=ax^2+2x+c$ 与坐标轴分别相交于点 A，B，

$C(0,6)$ 三点，其对称轴为 $x=2$．



(1)求该抛物线的解析式；

(2)点 F 是该抛物线上位于第一象限的一个动点，直线 AF 分别与 y 轴，直线 BC 交于点 D，E．

①当 $CD=CE$ 时，求 CD 的长；

②若 $\triangle CAD$，$\triangle CDE$，$\triangle CEF$ 的面积分别为 S_1，S_2，S_3，且满足 $S_1+S_3=2S_2$，求点 F 的坐标．

【答案】(1) $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$

(2)① $8-2\sqrt{2}$；② $F(4,6)$

【分析】(1) 根据抛物线对称轴为 $x=2$，可得 $-\frac{2}{2a}=2$，求得 $a=-\frac{1}{2}$，再将 $C(0,6)$ 代入抛物线，根据待定系数法求得 c，即可解答；

(2) ①求出点 B，点 A 的坐标，即可得到直线 BC 的解析式为 $y=-x+6$，设 $CD=a$，则 $D(0,6-a)$，求得 AD 的解析式，列方程求出点 E 的坐标，最后根据 $CD=CE$ 列方程，即可求出 CD 的长；

②过 E,F 分别作 AB 的垂线段，交 AB 于点 G,H，过点 D 作 EG 的垂线段，交 EG 于点 I，根据 $S_1+S_3=2S_2$，可得 $AD+EF=2DE$，即 $\frac{DE}{AF}=\frac{1}{3}$，证明 $\triangle DEI \backsim \triangle AFB$，设 $F\left(h,-\frac{1}{2}h^2+2h+6\right)$，得到直线 AF 的解析式，求出点 D 的坐标，即可得到点 E 的坐标，将点 E 的坐标代入 $y=-x+6$ 解方程，即可解答．

【详解】(1) 解：根据抛物线的对称轴为 $x=2$，

得 $-\frac{2}{2a}=2$，

解得 $a=-\frac{1}{2}$，

将 $C(0,6)$ 代入抛物线可得 $6=c$，

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$；

（2）解：当 $y=0$ 时，得 $0=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$，

解得 $x_1=6$，$x_2=-2$，

$\therefore A(-2,0)$，$B(6,0)$，

设 CB 的解析式为 $y=kx+b$，将 $C(0,6)$，$B(6,0)$ 代入 $y=kx+b$，

得 $\begin{cases} 6=b \\ 0=6k+b \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} k=-1 \\ b=6 \end{cases}$，

$\therefore CB$ 的解析式为 $y=-x+6$，

设 $CD=a$，则 $D(0,6-a)$，

设 AD 的解析式为 $y=k_1x+b_1$，将 $D(0,6-a)$，$A(-2,0)$ 代入 $y=k_1x+b_1$，

得 $\begin{cases} 6-a=b_1 \\ 0=-2k_1+b_1 \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} k_1=\frac{6-a}{2} \\ b_1=6-a \end{cases}$，

$\therefore AB$ 的解析式为 $y=\frac{6-a}{2}x+6-a$，

联立方程 $\begin{cases} y=-x+6 \\ y=\frac{6-a}{2}x+6-a \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} x=\frac{2a}{8-a} \\ y=\frac{48-8a}{8-a} \end{cases}$，

根据 $CD=CE$，得 $a=\sqrt{\left(\frac{2a}{8-a}\right)^2+\left(\frac{48-8a}{8-a}-6\right)^2}$，

解得 $a_1=8-2\sqrt{2}$，$a_2=8+2\sqrt{2}$，

经检验，$a_1=8-2\sqrt{2}$，$a_2=8+2\sqrt{2}$ 是方程的解，

$\because$ 点 F 是该抛物线上位于第一象限的一个动点，

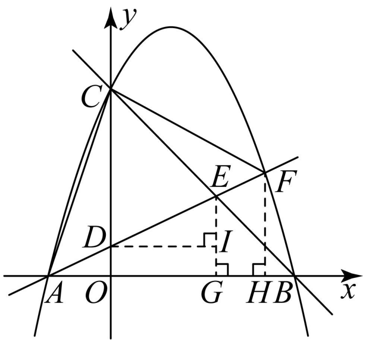
$\therefore D$ 在 y 轴正半轴，

$\therefore a<6$，

$\therefore a=8-2\sqrt{2}$

即 CD 的长为 $8-2\sqrt{2}$；

②解：如图，过 E,F 分别作 AB 的垂线段，交 AB 于点 G,H，过点 D 作 EG 的垂线段，交 EG 于点 I，



$\because S_1+S_3=2S_2$，

$\therefore AD+EF=2DE$，

$\therefore \dfrac{DE}{AF}=\dfrac{1}{3}$，

设 $F\left(h,-\dfrac{1}{2}h^2+2h+6\right)$，则 $AH=h+2$，

$\because EG\perp AB, FH\perp AB$，

$\therefore EG\,/\!/\,FH$，

$\therefore \angle DEI=\angle AFB$，

$\because DI\perp EG$，

$\therefore \angle DIE=90^\circ$，

$\therefore \triangle DEI\backsim\triangle AFB$，

$\therefore DI=\dfrac{1}{3}AB=\dfrac{1}{3}h+\dfrac{2}{3}$，即点 D 的横坐标为 $\dfrac{1}{3}h+\dfrac{2}{3}$，

$EI=\dfrac{1}{3}FH=-\dfrac{1}{6}h^2+\dfrac{2}{3}h+2$，

设 AF 的解析式为 $y=k_2x+b_2$，将 $A(-2,0)$，$F\left(h,-\dfrac{1}{2}h^2+2h+6\right)$，

代入得 $\begin{cases}0=-2k_2+b_2\\-\dfrac{1}{2}h^2+2h+6=k_2h+b_2\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}k_2=-\dfrac{1}{2}h+3\\b_2=-h+6\end{cases}$，

$\therefore AF$ 的解析式为 $y=\left(-\dfrac{1}{2}h+3\right)x-h+6$，

$\therefore D(0,-h+6)$，即 $DO=-h+6$，

$\because \angle DOG=90^\circ$，

$\therefore$ 四边形 $DOGI$ 是矩形，

$\therefore IG=DO=-h+6$，

$\therefore EG=EI+IG=-\dfrac{1}{6}h^2-\dfrac{1}{3}h+8$，即 $E\left(\dfrac{1}{3}h+\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{6}h^2-\dfrac{1}{3}h+8\right)$，

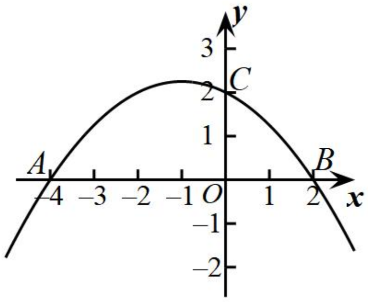
将 $E\left(\dfrac{1}{3}h+\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{6}h^2-\dfrac{1}{3}h+8\right)$ 代入 $y=-x+6$，

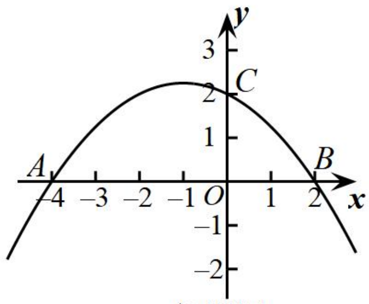
得$-\frac{1}{6}h^2-\frac{1}{3}h+8=-\frac{1}{3}h-\frac{2}{3}+6$，

解得$h_1=4$，$h_2=-4<0$（舍去），$\therefore F(4,6)$.

2022·四川内江中考真题

20．如图，抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴交于A（－4，0），B（2，0），与y轴交于点C（0，2）.





备用图

(1)求这条抛物线所对应的函数的表达式；

(2)点P为抛物线上一点，连接CP，直线CP把四边形$CBPA$的面积分为1：5两部分，求点P的坐标.

【答案】(1) $y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+2$

(2)点P的坐标为（6，－10）或（$-\frac{14}{3}$，$-\frac{10}{9}$）.

【分析】(1）运用待定系数法即可解决问题；

（2）根据$S_{\triangle PCB}$：$S_{\triangle PCA}=\frac{1}{2}EB\times(y_C-y_P):\frac{1}{2}AE\times(y_C-y_P)=BE:AE$，即可求解.

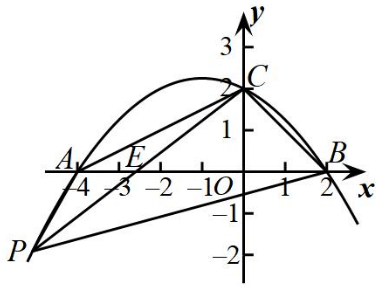
【详解】(1）∵抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴交于A（－4，0），B（2，0），与y轴交于点C（0，2）.

$$\therefore\begin{cases}16a-4b+c=0\\4a+2b+c=0\\c=2\end{cases},$$

解得：$\begin{cases}a=-\frac{1}{4}\\b=-\frac{1}{2}\\c=2\end{cases}$，

∴抛物线的解析式为$y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+2$；

（2）如图，设直线CP交x轴于点E，



直线 CP 把四边形 $CBPA$ 的面积分为 1：5 两部分，

又∵$S_{\triangle}PCB$：$S_{\triangle}PCA$＝$\frac{1}{2}EB\times(y_C-y_P):\frac{1}{2}AE\times(y_C-y_P)=EB:AE$，

则 EB：AE＝1：5 或 5：1

则 AE＝5 或 1，

即点 E 的坐标为（1，0）或（－3，0），

将点 E 的坐标代入直线 CP 的表达式：y＝nx+2，

解得：n＝－2 或$\frac{2}{3}$，

故直线 CP 的表达式为：y＝－2x+2 或 y＝$\frac{2}{3}x$+2，

联立方程组$\begin{cases} y=-2x+2 \\ y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+2 \end{cases}$或$\begin{cases} y=\frac{2}{3}x+2 \\ y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+2 \end{cases}$，

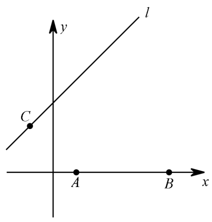
解得：x＝6 或－$\frac{14}{3}$（不合题意值已舍去），

故点 P 的坐标为（6，－10）或（－$\frac{14}{3}$，－$\frac{10}{9}$）．

【题型 5】 米勒角（最大张角问题）

例题 5-1

21．如图，在平面直角坐标系中，A（1，0）、B（5，0）直线 l 经过点 C（-1，2），点 P 是直线 l 上的动点，若∠APB 的最大值为 45°，求直线 l 的解析式．

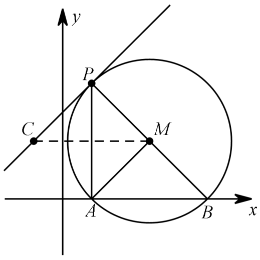


【分析】

考虑到直线 l 未知但∠APB 的最大值已知为 45°，故构造圆．

记△ABP 外接圆圆心为 M 点，则∠AMB=2∠APB=90°，

故可确定 M 点位置.



根据 A（1，0）、B（5，0），不难求得 M 点坐标为（3，2），

连接 MC、MP，考虑到圆 M 与直线 CP 相切，故 $MP\perp CP$，$\triangle CPM$ 是直角三角形.

∵$MC=4$，$MP=MA=2\sqrt{2}$，

∴ $CP=2\sqrt{2}$，即$\triangle CPM$ 是等腰直角三角形，

易求 P 点坐标为（1，4），

又 C 点坐标为（-1，2），

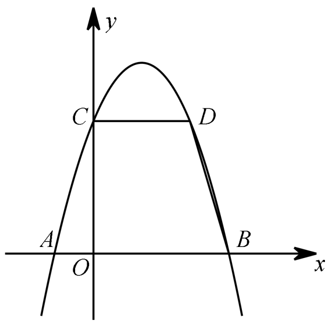
可求直线 l 的解析式为 $y=x+3$.

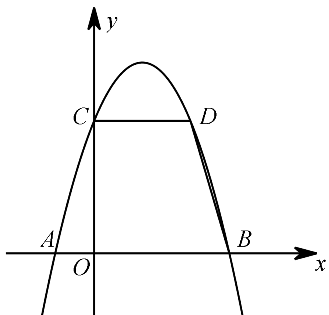
山东烟台中考真题

22．如图，抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 与 x 轴交于 A（-1，0）、B 两点，与 y 轴交于点 C，过点 C 作 $CD\perp y$ 轴交抛物线于另一点 D，作 $DE\perp x$ 轴，垂足为点 E，双曲线 $y=\dfrac{6}{x}(x>0)$ 经过点 D，BD.

（1）求抛物线的表达式；

（2）动点 P 从点 O 出发，以每秒 1 个单位长度的速度沿 OC 方向运动，运动时间为 t 秒，当 t 为何值时，$\angle BPD$ 的度数最大？（请直接写出结果）





备用图

【分析】

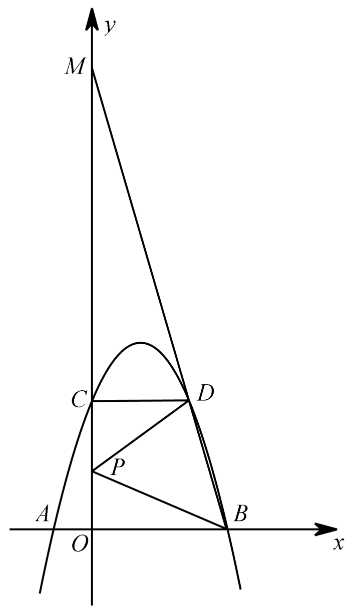
（1）考虑到点 D 纵坐标与点 C 相同，为 3，代入反比例解析式，可得 D 点坐标为（2，3），

根据 A、D 坐标可得抛物线解析式：$y=-x^2+2x+3$.

（2）求 t 即求 P 点位置.

思路 2：切割线定理

延长 BD 交 y 轴于 M 点，则当 $MP^2=MD\cdot MB$ 时，∠BPD 最大.



考虑到B（3，0）、D（2，3），可得直线BD解析式：$y=-3x+9$，

故直线BD与y轴交点M点坐标为（0，9），

$MD=2\sqrt{10}$，$MB=3\sqrt{10}$，

∴ $MP^2=MD\cdot MB=60$，

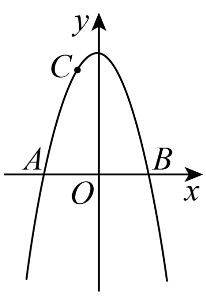
∴ $MP=2\sqrt{15}$，

∴P点坐标为$\left(0,9-2\sqrt{15}\right)$，

故t的值为$9-2\sqrt{15}$.

2023·四川宜宾中考真题

23．如图，抛物线$y=ax^2+bx+c$与x轴交于点$A\left(-4,0\right)$、$B\left(2,0\right)$，且经过点$C\left(-2,6\right)$.



(1)求抛物线的表达式；

(2)在x轴上方的抛物线上任取一点N，射线AN、BN分别与抛物线的对称轴交于点P、Q，点Q关于x轴的对称点为Q'，求$\triangle APQ'$的面积；

(3)点M是y轴上一动点，当$\angle AMC$最大时，求M的坐标.

【答案】(1) $y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x+6$

(2) $S_{\triangle APQ'}=\frac{81}{4}$

(3) $M\left(0,12-4\sqrt{5}\right)$

【分析】(1) 设抛物线的解析式为 $y=a(x+4)(x-2)$，代入点 C 的坐标，确定 a 值即可.

(2) 设 $N\left(m,-\frac{3}{4}m^2-\frac{3}{2}m+6\right)$，直线 AN 的解析式为 $y=kx+b$，直线 BN 的解析式为 $y=px+q$，表示出 P，Q，Q' 的坐标，进而计算即可.

(3) 当 M 是 y 轴与经过 A，C，M 三点的圆的切点是最大计算即可.

【详解】(1) ∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 $A(-4,0)$、$B(2,0)$，

∴设抛物线的解析式为 $y=a(x+4)(x-2)$，

∵经过点 $C(-2,6)$，

∴ $6=a(-2+4)(-2-2)$，

解得 $a=-\frac{3}{4}$，

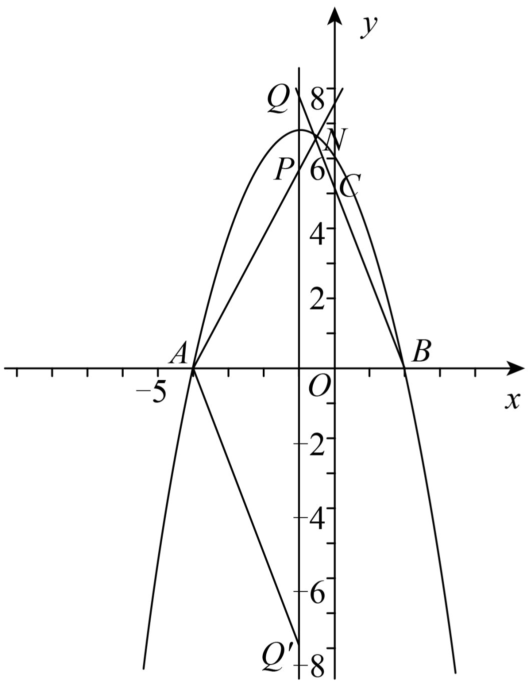
∴ $y=-\frac{3}{4}(x+4)(x-2)$，

∴ $y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x+6$.

(2) 如图，当点 N 在对称轴的右侧时，

∵ $y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x+6=-\frac{3}{4}(x+1)^2+\frac{27}{4}$，

∴对称轴为直线 $x=-1$，



设 $N\left(m,-\frac{3}{4}m^2-\frac{3}{2}m+6\right)$，直线 AN 的解析式为 $y=kx+b$，直线 BN 的解析式为 $y=px+q$，

∴ $\begin{cases}-4k+b=0\\ mk+b=-\frac{3}{4}m^2-\frac{3}{2}m+6\end{cases}$，$\begin{cases}2p+q=0\\ mp+q=-\frac{3}{4}m^2-\frac{3}{2}m+6\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=\dfrac{-\frac{3}{4}m^2-\frac{3}{2}m+6}{m+4}\\ b=\dfrac{-3m^2-6m+24}{m+4}\end{cases}$，$\begin{cases}p=\dfrac{-\frac{3}{4}m^2-\frac{3}{2}m+6}{m-2}\\ q=\dfrac{\frac{3}{2}m^2+3m-12}{m-2}\end{cases}$，

∴直线 AN 的解析式为 $y=\dfrac{-\frac{3}{4}m^2-\frac{3}{2}m+6}{m+4}x+\dfrac{-3m^2-6m+24}{m+4}$，直线 BN 的解析式为 $y=\dfrac{-\frac{3}{4}m^2-\frac{3}{2}m+6}{m-2}x+\dfrac{\frac{3}{2}m^2+3m-12}{m-2}$，

当 $x=-1$ 时，$y=\dfrac{-\frac{3}{4}m^2-\frac{3}{2}m+6}{m+4}\times(-1)+\dfrac{-3m^2-6m+24}{m+4}=\dfrac{-\frac{9}{4}m^2-\frac{9}{2}m+18}{m+4}=-\frac{9}{4}(m-2)$，

$y=\dfrac{-\frac{3}{4}m^2-\frac{3}{2}m+6}{m-2}\times(-1)+\dfrac{\frac{3}{2}m^2+3m-12}{m-2}=\dfrac{\frac{9}{4}m^2+\frac{9}{2}m-18}{m-2}=\frac{9}{4}(m+4)$，

∴ $P\left(-1,-\frac{9}{4}(m-2)\right)$，$Q\left(-1,\frac{9}{4}(m+4)\right)$，$Q'\left(-1,-\frac{9}{4}(m+4)\right)$，

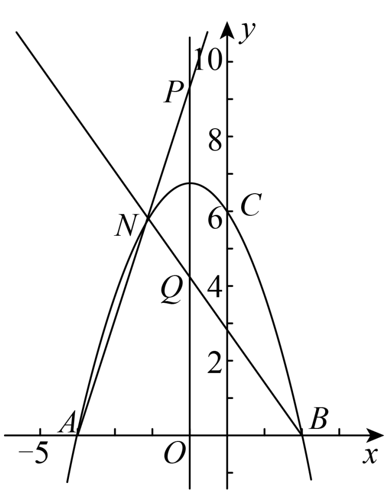
∴ $PQ'=-\frac{9}{4}(m-2)+\frac{9}{4}(m+4)=\frac{27}{2}$，

∴ $S_{\triangle APQ'}=\frac{1}{2}\times\frac{27}{2}\times3=\frac{81}{4}$.

如图，当点 N 在对称轴的左侧时，

∵ $y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x+6=-\frac{3}{4}(x+1)^2+\frac{27}{4}$，

∴对称轴为直线 $x=-1$，



设 $N\left(m,-\frac{3}{4}m^2-\frac{3}{2}m+6\right)$，$P\left(-1,-\frac{9}{4}(m-2)\right)$，$Q\left(-1,\frac{9}{4}(m+4)\right)$，$Q'\left(-1,-\frac{9}{4}(m+4)\right)$，

∴ $PQ'=-\frac{9}{4}(m-2)+\frac{9}{4}(m+4)=\frac{27}{2}$，

∴ $S_{\triangle APQ'}=\frac{1}{2}\times\frac{27}{2}\times3=\frac{81}{4}$．

综上所述，$S_{\triangle APQ'}=\frac{81}{4}$．

（3）当 $\triangle AMC$ 的外接圆与 OM 相切，切点为 M 时，$\angle AMC$ 最大，

设外接圆的圆心为 E，Q 是异于点 M 的一点，连接 QA，QC，QA 交圆于点 T，

则 $\angle AMC=\angle ATC$，根据三角形外角性质，得 $\angle ATC>\angle AQC$，故 $\angle AMC>\angle AQC$，

∴ $\angle AMC$ 最大，

设 OA 与圆交于点 H，连接 MH，ME，根据切线性质，

∴ $\angle EMO=\angle MOA=90°$，

作直径 HN，连接 MN，

∴ $\angle HMN=90°$，$\angle MNH=\angle MAH$，

∵ $EM=EH$，

∴ $\angle EMH=\angle EHM$，

∴ $90°-\angle EMH=90°-\angle EHM$，

∴ $\angle OMH=\angle MNH=\angle MAH$，

∴ $\triangle OMH\backsim\triangle OAM$，

∴ $\frac{OM}{OA}=\frac{OH}{OM}$，

∴ $OM^2=OA\cdot OH$，

设 $OM=y,OH=x$，则 $AH=4-x$，

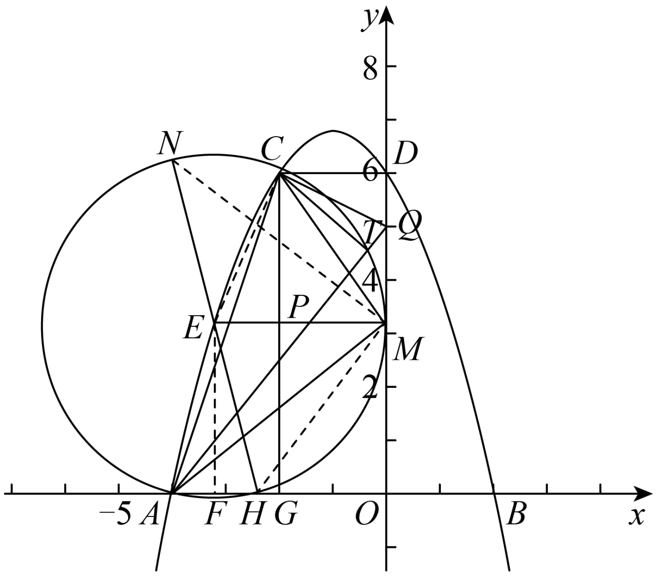
∴ $y^2=4x$，

∴ $y=2\sqrt{x}$，

过点 E 作 $EF\perp OA$，垂足为 F，过点 C 作 $CG\perp OA$，垂足为 G，交 EM 于点 P，

根据垂径定理，得 $AF=FH=\frac{4-x}{2}$，四边形 $EMOF$ 是矩形，

∴ $EC=EM=OF=x+\frac{4-x}{2}=\frac{4+x}{2}$，



根据$C(-2,6)$，得$CD=PM=OG=2$，$CG=6$

$\therefore PE=EM-PM=\dfrac{4+x}{2}-2=\dfrac{x}{2}$，

$\therefore CP=CG-PG=CG-OM=6-2\sqrt{x}$，

在直角三角形PEC中，

$\therefore (\dfrac{x}{2})^2+(6-2\sqrt{x})^2=(\dfrac{4+x}{2})^2$，

$\therefore x+16=12\sqrt{x}$，

$\therefore (x+16)^2=(12\sqrt{x})^2$，

$\therefore x^2-112x+256=0$，

解得$x_1=56-24\sqrt{5}$，$x_2=56+24\sqrt{5}>4$（舍去），

$\therefore y=2\sqrt{x}=2\sqrt{56-24\sqrt{5}}=2\sqrt{\left(6-2\sqrt{5}\right)^2}=2\left(6-2\sqrt{5}\right)=12-4\sqrt{5}$，

故$OM=12-4\sqrt{5}$，$\therefore$当$\angle AMC$最大时，$M\left(0,12-4\sqrt{5}\right)$.