专题 2-2 费马点与加权费马点详细总结

01 题型·解读

知识点梳理

【常规费马点】

【加权费马点】

题型一　普通费马点最值问题

题型二　加权费马点·单系数型

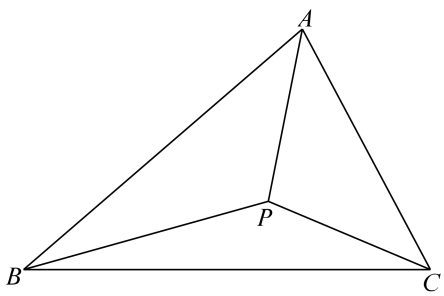
题型三　加权费马点·多系数型

02 满分·技巧

知识点梳理

【常规费马点】

【问题提出】如图△ABC 所有的内角都小于 120 度，在△ABC 内部有一点 P，连接 PA、PB、PC，当 $PA+PB+PC$ 的值最小时，求此时∠APB 与∠APC 的度数.



【问题处理】如图1，将△ACP绕着点C顺时针旋转60度得到△$A'CP'$，则△ACP≌△$A'CP'$，$CP=CP'$，$AP=A'P'$，又∵∠PCP' ＝60°，∴△PCP'是等边三角形，∴$PP'=PC$，　∴$PA+PB+PC=P'A'+PB+PP'$，

如图2，当且仅当点B、P、P'、A'共线时，$PA+PB+PC$最小，最小值为$A'B$，此时$\angle BPC=\angle APC=\angle APB=120°$

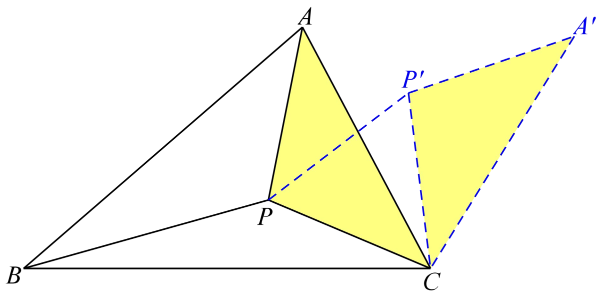


图1

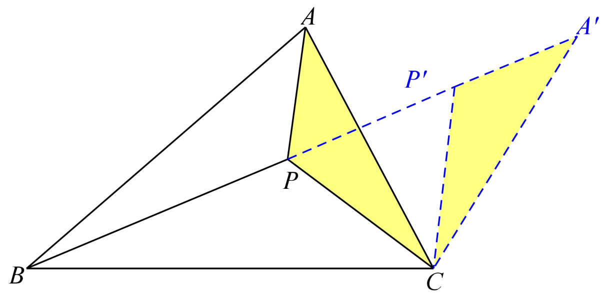


图2

【问题归纳】如费马点就是到三角形的三个顶点的距离之和最小的点．费马点结论：

① 对于一个各角不超过120°的三角形，费马点是对各边的张角都是120°的点，所以三角形的费马点也叫三角形的等角中心；

② 对于有一个角超过120°的三角形，费马点就是这个内角的顶点．

【如何作费马点】如图3，连接AA'，我们发现$\triangle ACA'$为等边三角形，点P在$A'B$上，同理，我们可以得到等边$\triangle BAB'$，点P也在CB'上，因此，我们可以以$\triangle ABC$三角形任意两边为边向外构造等边三角形，相应连线的交点即为费马点。（最大角小于120°时）

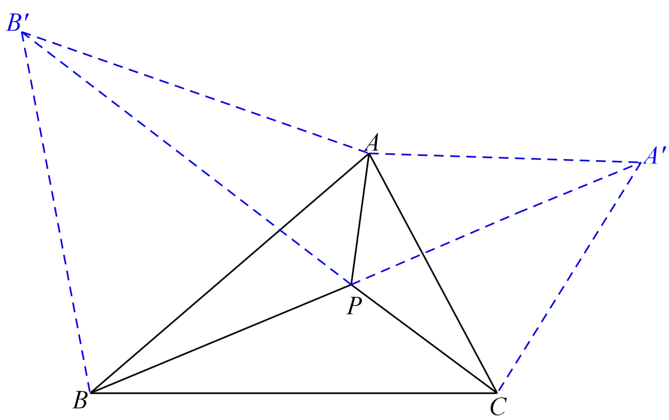
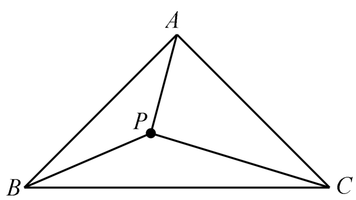


图3

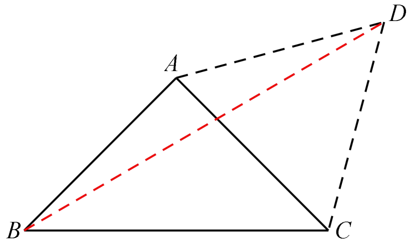
【例1】如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AB=AC=1$，P是$\triangle ABC$内一点，求$PA+PB+PC$的最小值．



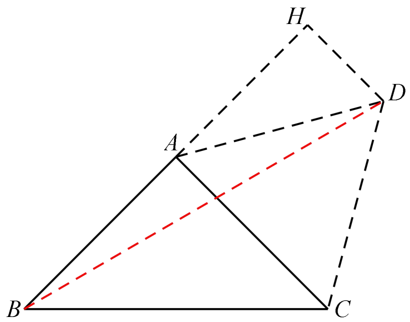
【答案】$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

【分析】如图，以AC为边构造等边$\triangle ACD$，连接BD，BD的长即为$PA+PB+PC$的最小值．至于点P的位

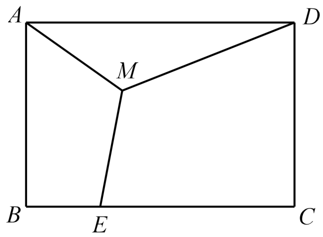
置？这不重要！



如何求 BD？考虑到△ABC 和△ACD 都是特殊的三角形，过点 D 作 DH⊥BA 交 BA 的延长线于 H 点，根据勾股定理，$BD^2 = BH^2 + DH^2$ 即可得出结果.

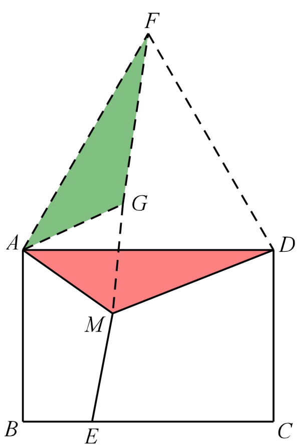


【练习 1】如图，已知矩形 *ABCD*，*AB*=4，*BC*=6，点 *M* 为矩形内一点，点 *E* 为 *BC* 边上任意一点，则 *MA*+*MD*+*ME* 的最小值为______.



【分析】依然构造 60°旋转，将三条折线段转化为一条直线段.

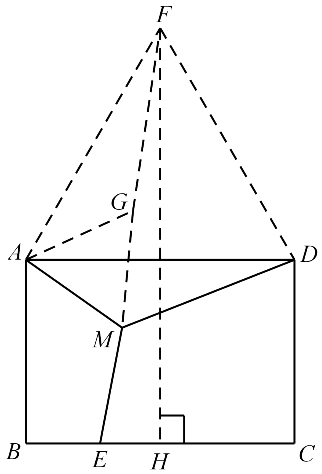
分别以 *AD*、*AM* 为边构造等边△*ADF*、等边△*AMG*，连接 *FG*，



易证△*AMD*≌△*AGF*，∴*MD*=*GF*

∴*ME*+*MA*+*MD*=*ME*+*EG*+*GF*

过 F 作 $FH\perp BC$ 交 BC 于 H 点，线段 FH 的长即为所求的最小值.



【加权费马点】

如果所求最值中三条线段的系数有不为1的情况，我们把这类问题归为加权费马点问题，解决方法类似，也是通过旋转进行线段转化，只不过要根据系数的情况选择不同的旋转或放缩方法。

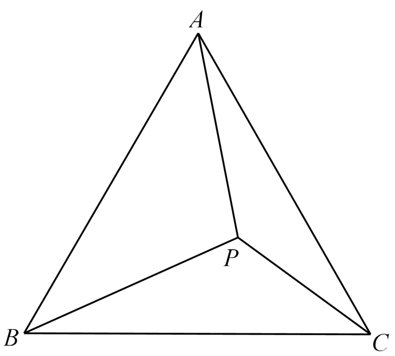
【类型一 单系数类】

当只有一条线段带有不为 1 的系数时，相对较为简单，一般有两种处理手段，

一种是旋转特殊角度：$\sqrt{2}$ 对应旋转 90°，$\sqrt{3}$ 对应旋转 120°

另一种是旋转放缩，对应三角形三边之比

【例3】在等边三角形ABC中，边长为4，P为三角形ABC内部一点，求 $AP+BP+\sqrt{2}PC$ 的最小值



原图

【简析】本题有 2 种解题策略，旋转特殊角和旋转放缩

【策略一：旋转特殊角】如图 1，$\triangle APC$ 绕点 C 逆时针旋转 90°，易知 $P'P=\sqrt{2}PC$， $A'B$ 即为所求

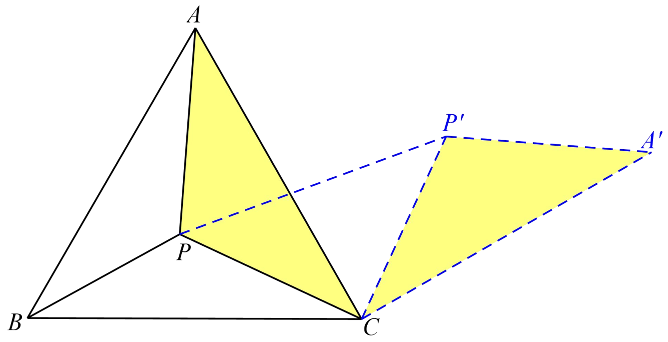


图1

方法一：如图 2，B，P，P'，A'共线时取最小，此时$\angle BPC=\angle APC=135°$，易知$BP=A'P'=2\sqrt{2}$，$PC=CH-PH=2\sqrt{3}-2$，$\therefore PP'=2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$，$PB+PP'+A'P'=2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$

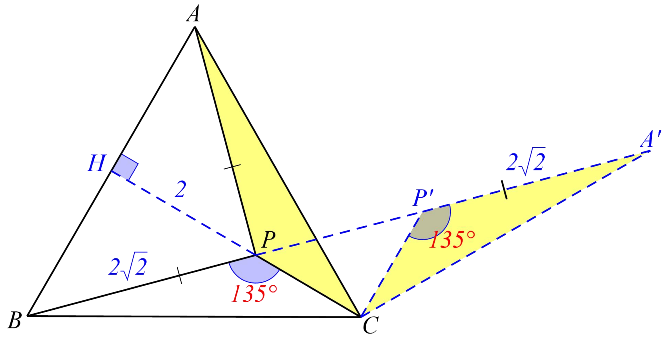


图2

方法二：作$AH\perp BC$于H，易知$\angle A'CH=30°$，$\therefore AH=2$，$CH=2\sqrt{3}\Rightarrow BH=4+2\sqrt{3}$，由勾股可得$A'B=2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$

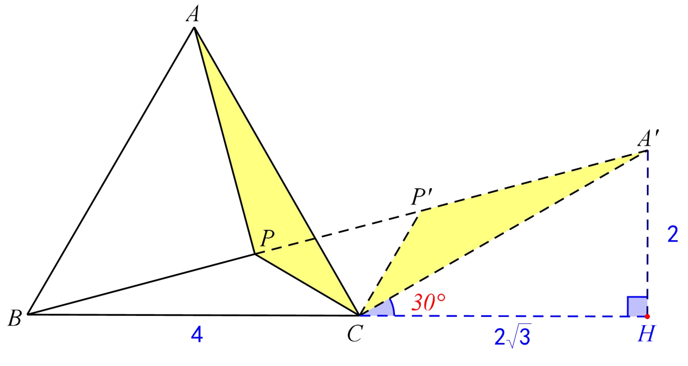


图3

【策略二：旋转放缩】可按如下方法去旋转放缩（方法不唯一）

如图 4，将三角形 BPC 绕点 B 旋转 45°，再扩大为原来的$\sqrt{2}$倍，得到$\triangle BP'C'$

则 $AP+BP+\sqrt{2}PC=AP+PP'+P'C\geq AC'$

补充：也可以按图 5 方式旋转

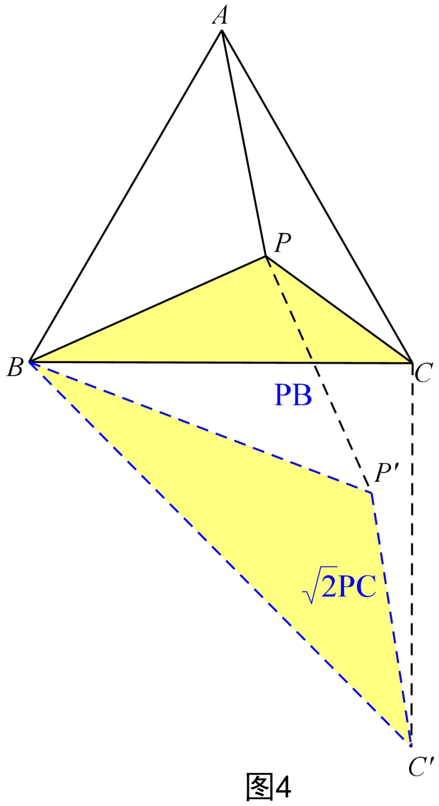
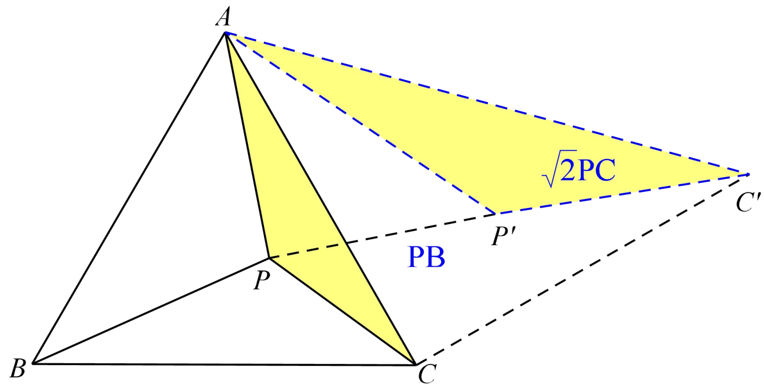
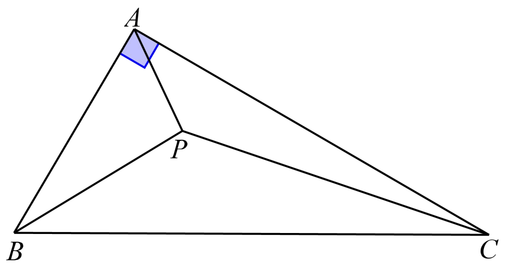


图4



原5

【练习2】在Rt△ABC中，AC＝3，BC＝$2\sqrt{3}$，P为三角形ABC内部一点，求 $AP+BP+\sqrt{3}PC$ 的最小值



【策略一：旋转特殊角】如图 1，△APC 绕点 C 逆时针旋转 120°，则有 $PP'=\sqrt{3}PC$，

$AP+BP+PC=AP'+BP+PP'\le A'B=2\sqrt{7}$

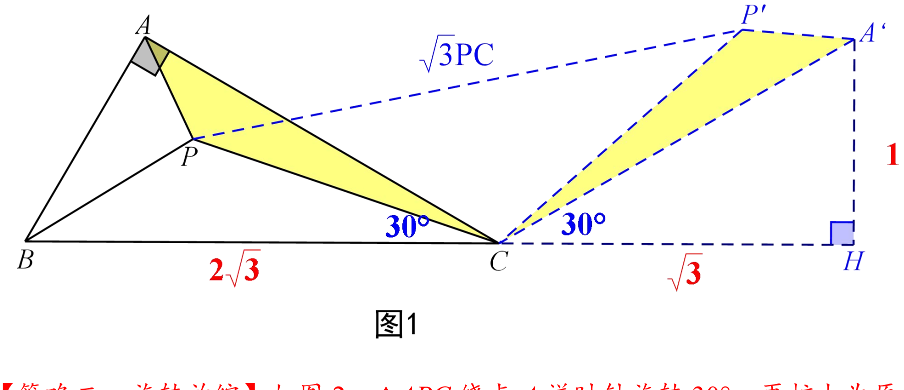


图1

【策略二：旋转放缩】如图 2，△APC 绕点 A 逆时针旋转 30°，再扩大为原来的 $\sqrt{3}$ 倍，

则 $AP+BP+\sqrt{3}PC=PP'+BP+P'C'\geq BC'$，计算略

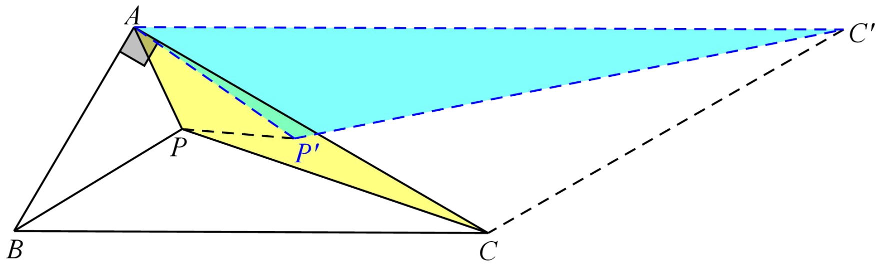


图2

【类型二 多系数类】

其实当三条线段的三个系数满足勾股数的关系时，都是符合加权费马点的条件的。

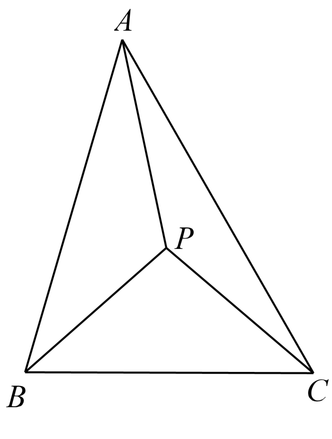
以不同的点为旋转中心，旋转不同的三角形得到的系数是不同的，对于给定的系数，我们该如何选取旋转中心呢？我们总结了以下方法：

1. 将最小系数提到括号外；

2. 中间大小的系数确定放缩比例；

3. 最大系数确定旋转中心（例如最大系数在 PA 前面，就以 A 为旋转中心），旋转系数不为 1 的两条线段所在的三角形。

【例 3】如图，在△ABC 中，$\angle ACB=60°$，$BC=3$，$AC=4$，在△ABC 内部有一点 P，连接 PA，PB，PC，则（1）$\frac{1}{2}PA+\frac{\sqrt{3}}{2}PB+PC$ 的最小值为________；（2）$\frac{\sqrt{3}}{2}PA+\frac{1}{2}PB+PC$ 的最小值为________



【简答】（1）将最小系数 $\frac{1}{2}$ 提到括号外，得到 $\frac{1}{2}(PA+\sqrt{3}PB+2PC)$

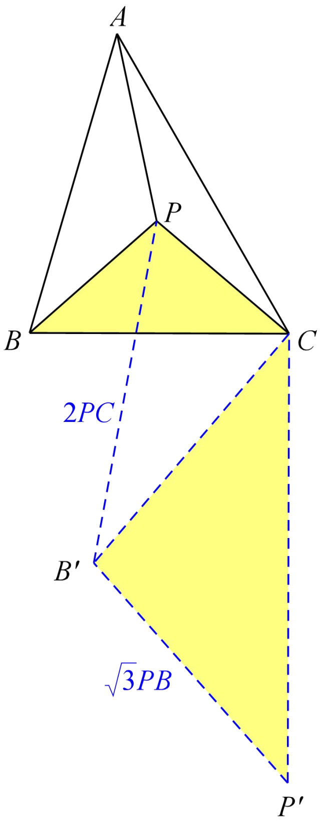


图1

中间大小系数为$\sqrt{3}$，故放大倍数为$\sqrt{3}$倍，最大系数在PC前面，故以点C为旋转中心，旋转△PBC.

如图1，将△PBC绕点C逆时针旋转90°，并放大为$\sqrt{3}$倍，$B'P'=\sqrt{3}BP$，$PP'=2PC$.

$$\frac{1}{2}\left(PA+\sqrt{3}PB+2PC\right)=\frac{1}{2}\left(PA+PP'+P'B'\right)\geq\frac{1}{2}AB'=\frac{\sqrt{79}}{2}.$$

（2）将最小系数$\frac{1}{2}$提到括号外，得到$\frac{1}{2}(\sqrt{3}PA+PB+2PC)$，

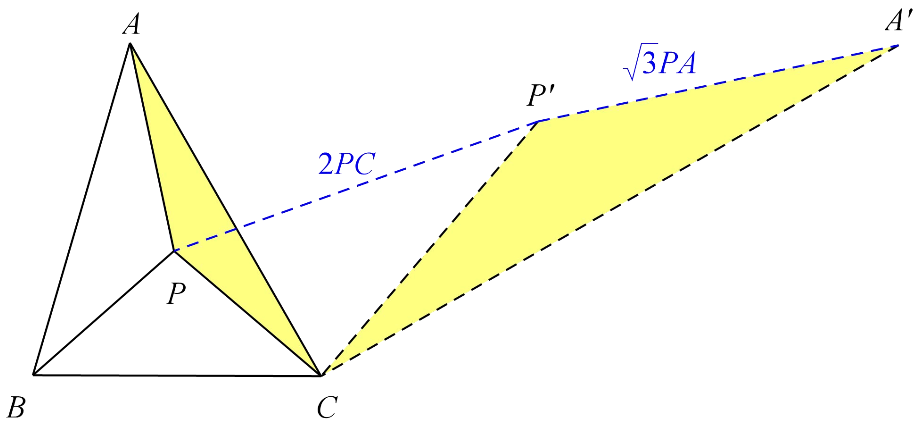
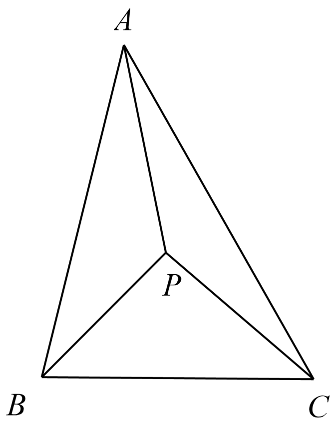


图2

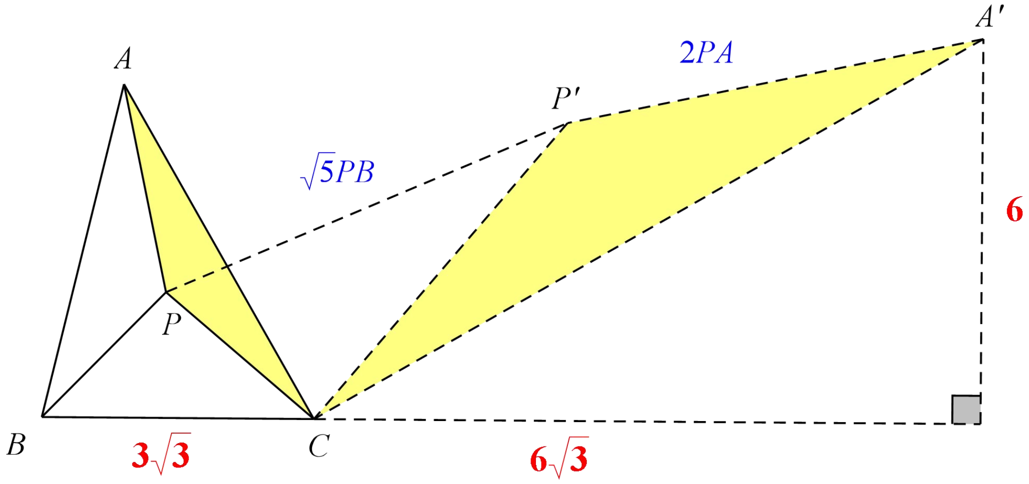
如图2，将△APB绕点C逆时针旋转90°，并放大为$\sqrt{3}$倍，$A'P'=\sqrt{3}AP$，$PP'=2PC$.

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3}PA+PB+2PC)=\frac{1}{2}\left(A'P'+BP+PP'\right)\geq\frac{1}{2}A'B=\sqrt{93}$$

【练习 3】如图，在△ABC 中，$ACB=60^{\circ}$，$BC=3\sqrt{3}$，$AC=6$，在△ABC 内部有一点 P，连接 PA，PB，PC，则 $2PA+PB+\sqrt{5}PC$ 的最小值为________.



【简答】将△PAC 绕点 C 顺时针旋转 90° 并放大 2 倍，得到△$P'A'C$，$P'A'=2PA$，$PP'=\sqrt{5}PC$



$\therefore 2PA+PB+\sqrt{5}PC=A'P'+P'P+PB\geq A'B$，$\because A'C=2AC=12$，$\angle A'CB=90^{\circ}+60^{\circ}=150^{\circ}$，

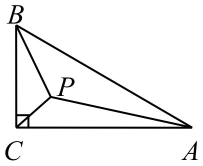
$\therefore AH=\frac{1}{2}A'C=6$，$CH=\frac{\sqrt{3}}{2}A'C=6\sqrt{3}$，$BH=9\sqrt{3}$，由勾股定理可得 $A'B=3\sqrt{31}$，

$2PA+PB+\sqrt{5}PC$ 的最小值为 $3\sqrt{31}$.

03 核心•题型

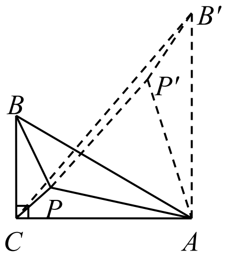
题型一 普通费马点最值问题

1．（2021 滨州）如图，在△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC=30°$，$AB=2$，点 P 是△ABC 内一点，则 $PA+PB+PC$ 的最小值为_________.



【答案】$\sqrt{7}$

【解析】将△ABP 绕点 A 顺时针旋转 60°到△AB′P′，连接 P′P，B′C.



则 AB′＝AB＝2，PB＝P′B′，∠BAB′＝60°，PA＝P′A，∠PAP′＝60°，

∴△P′PA 是等边三角形，∴PA＝P′P.

∵∠BAC＝30°，∴∠B′AC＝90°，

∵∠ACB＝90°，∴AC＝$\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\sqrt{3}$，

∴B′C＝$\sqrt{AC^2+B'A^2}=\sqrt{7}$.

∵PA＋PB＋PC＝P′P＋P′B′＋PC≥B′C，

∴PA＋PB＋PC 的最小值为 $\sqrt{7}$.

2．问题背景：如图 1，将△ABC 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到△ADE，DE 与 BC 交于点 P，可推出结论：$PA+PC=PE$.

问题解决：如图 2，在△MNG 中，$MN=6$，$\angle M=75°$，$MG=4\sqrt{2}$，点 O 是△MNG 内一点，则点 O 到△MNG 三个顶点的距离和的最小值是______.

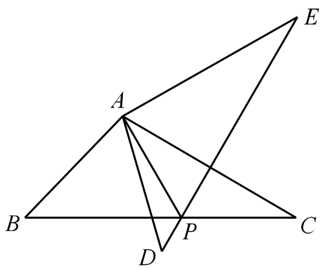


图1

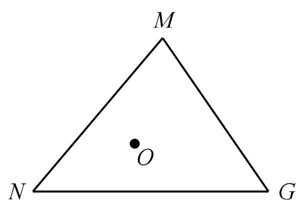
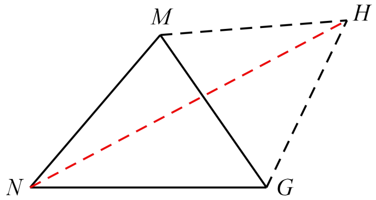
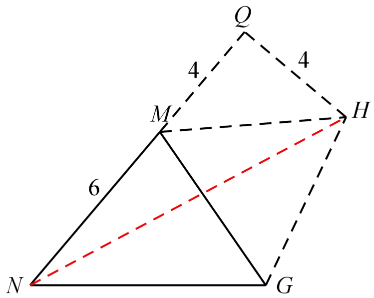


图2

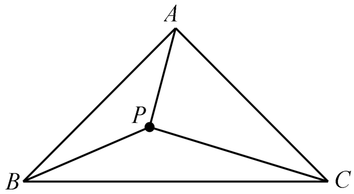
【解析】过点 H 作 $HQ\perp NM$ 交 NM 延长线于 Q 点，根据 $\angle NMG=75°$，$\angle GMH=60°$，可得 $\angle HMQ=45°$，

∴△MHQ是等腰直角三角形，∴$MQ=HQ=4$，∴$NH=\sqrt{NQ^2+HQ^2}=\sqrt{100+16}=2\sqrt{29}$





4．如图，在△*ABC* 中，∠*CAB*＝90°，*AB*＝*AC*＝2，*P* 是△*ABC* 内一点，求 *PA*＋*PB*＋*PC* 的最小值．



【解析】如图 1，以 *AD* 为边构造等边△*ACD*，连接 *BD*，*BD* 的长即为 *PA*＋*PB*＋*PC* 的最小值．
考虑到△*ABC* 和△*ACD* 都是特殊的三角形，所以构造特殊直角三角形
如图 2，过点 *D* 作 *DH*⊥*BA* 交 *BA* 的延长线于 *H* 点，根据勾股定理，$BD^2=BH^2+DH^2=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

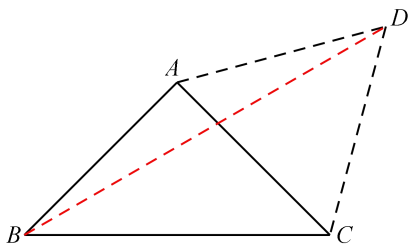


图 1

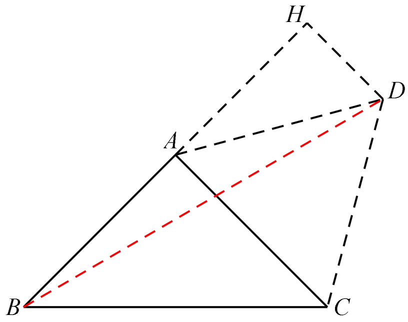
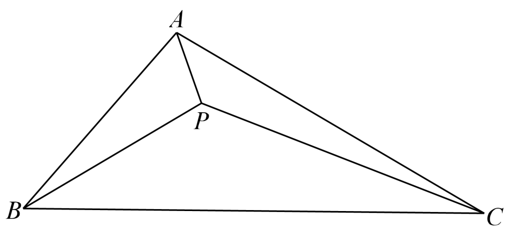


图 2

5．已知，在△*ABC* 中，∠*ACB*＝30°，*AC*＝4，*AB*＝$\sqrt{7}(CB>CA)$ 点 *P* 是△*ABC* 内一动点，则 *PA*＋*PB*＋*PC* 的最小值为________



原图

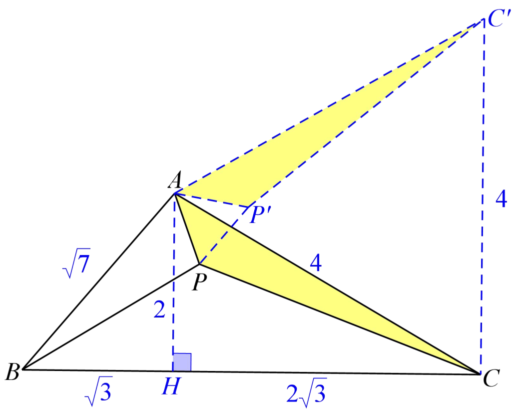
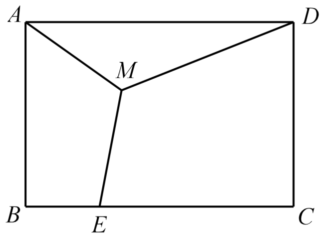


图 1

【解析】如图 1，将△*APC* 逆时针旋转 30°，得△*AP'C'*，*BC'* 即 *PA*＋*PB*＋*PC* 最小值，考虑到∠*BCA*＝30°，∴∠*BCC'*＝90°，作 *AH*⊥*BC*，可得 *BC*＝$3\sqrt{3}$，∴*BC'*＝$\sqrt{43}$

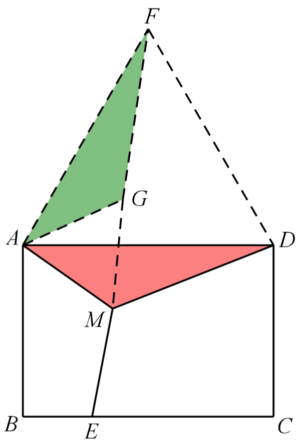
6．如图，已知矩形 *ABCD*，*AB*＝4，*BC*＝6，点 *M* 为矩形内一点，点 *E* 为 *BC* 边上任意一点，则 *MA*＋*MD*＋

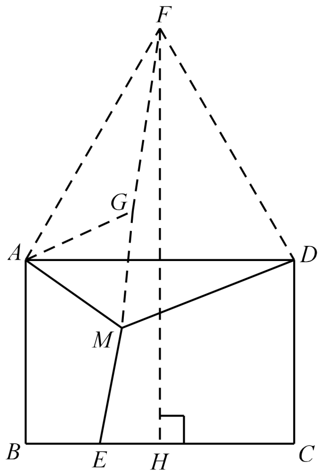
ME 的最小值为______.



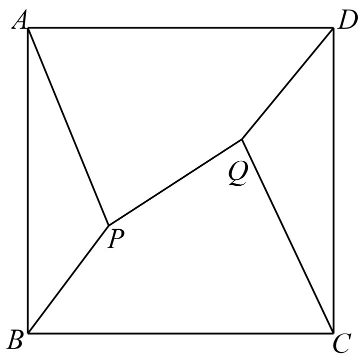
【解析】如图 1，依然构造 60°旋转，将三条折线段转化为一条直线段．分别以 AD、AM 为边构造等边△ADF、等边△AMG，连接 FG，易证△AMD≌△AGF，∴$MD=GF$∴$ME+MA+MD=ME+EG+GF$

如图 2，过 F 作 $FH\perp BC$ 交 BC 于 H 点，线段 FH 的长即为所求的最小值．$FG=4+2\sqrt{3}$





7．A、B、C、D 四个城市恰好为一个边长为 $2a$ 正方形的四个顶点，要建立一个公路系统使得每两个城市之间都有公路相通，并使整个公路系统的总长度（$AP+BP+PQ+DQ+CQ$）最小，则应当如何修建？最小长度是多少？



【解析】如图 1，△ABP 绕点 B 逆时针旋转 60°，得到△$A'P'B$；同样，将△DCQ 绕点 C 顺时针旋转 60°，得到△$D'CQ'$，连结 $A'A$、$D'D$，则△ABA'、 △DCD'均为等边三角形，连结 PP'、QQ'，则△BPP'，△QCQ'均为等边三角形， $AP+BP+PQ+DQ+CQ=A'P'+PP'+PQ+QQ'+DQ'$

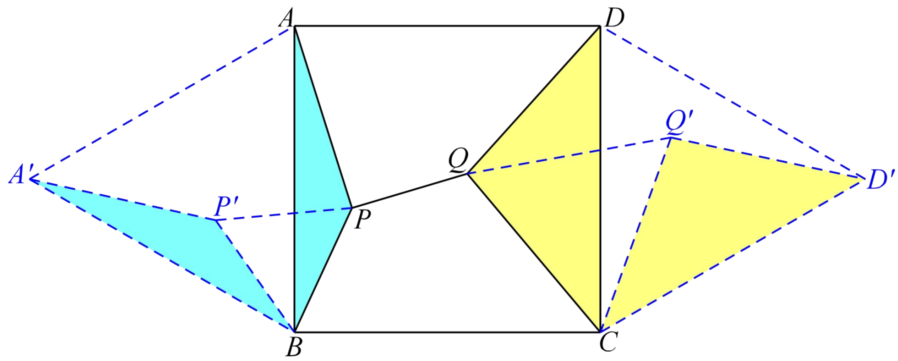


图1

如图 2，当点 A’，P’，P，Q，Q’，D’共线时，整个公路系统的总长取到最小值，为线段 A’D’的长，此时点 P，Q 在 A’D’上，最小值为 $\left(2+2\sqrt{3}\right)a$．

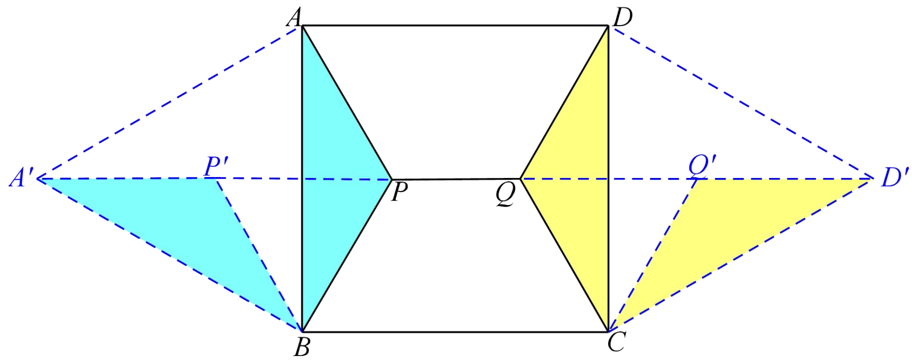


图2

2023·随州中考真题

8．1643 年，法国数学家费马曾提出一个著名的几何问题：给定不在同一条直线上的三个点 A，B，C，求平面上到这三个点的距离之和最小的点的位置，意大利数学家和物理学家托里拆利给出了分析和证明，该点也被称为“费马点”或“托里拆利点”，该问题也被称为“将军巡营”问题．

(1)下面是该问题的一种常见的解决方法，请补充以下推理过程：（其中①处从“直角”和“等边”中选择填空，②处从“两点之间线段最短”和“三角形两边之和大于第三边”中选择填空，③处填写角度数，④处填写该三角形的某个顶点）

当$\triangle ABC$的三个内角均小于$120°$时，

如图 1，将$\triangle APC$绕，点 C 顺时针旋转$60°$得到$\triangle A'P'C$，连接PP'，

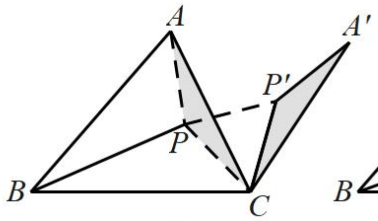


图1

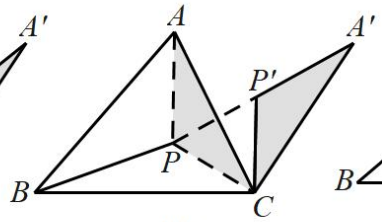


图2

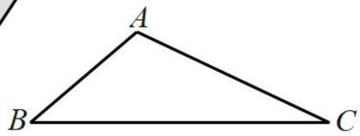


图3

由 $PC=P'C$，$\angle PCP'=60^\circ$，可知△PCP' 为__①__三角形，故 $PP'=PC$，又 $P'A'=PA$，故

$PA+PB+PC=PA'+PB+PP'\geq A'B$，

由__②__可知，当 B，P，P'，A 在同一条直线上时，$PA+PB+PC$ 取最小值，如图 2，最小值为 $A'B$，此时的 P 点为该三角形的“费马点”，且有 $\angle APC=\angle BPC=\angle APB=$__③__；

已知当 $\triangle ABC$ 有一个内角大于或等于 120° 时，“费马点”为该三角形的某个顶点．如图 3，若 $\angle BAC\geq 120^\circ$，则该三角形的“费马点”为__④__点．

(2)如图 4，在 $\triangle ABC$ 中，三个内角均小于 120°，且 $AC=3$，$BC=4$，$\angle ACB=30^\circ$，已知点 P 为 $\triangle ABC$ 的“费马点”，求 $PA+PB+PC$ 的值；

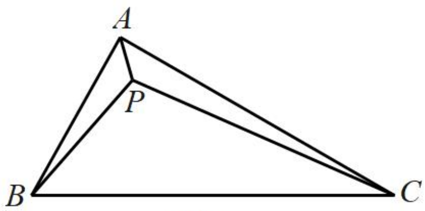


图4

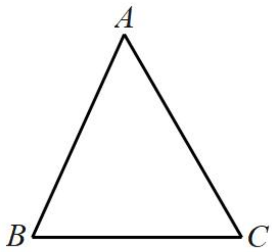
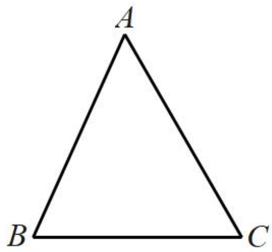


图5



(3)如图 5，设村庄 A，B，C 的连线构成一个三角形，且已知 $AC=4\text{km}$，$BC=2\sqrt{3}\text{km}$，$\angle ACB=60^\circ$．现欲建一中转站 P 沿直线向 A，B，C 三个村庄铺设电缆，已知由中转站 P 到村庄 A，B，C 的铺设成本分别为 a 元/km，a 元/km，$\sqrt{2}a$ 元/km，选取合适的 P 的位置，可以使总的铺设成本最低为___________元．（结果用含 a 的式子表示）

【答案】(1)①等边；②两点之间线段最短；③$120^\circ$；④A．

(2)5

(3)$2\sqrt{13}a$

【解题思路】（1）根据旋转的性质和两点之间线段最短进行推理分析即可得出结论；

（2）根据（1）的方法将△APC 绕，点 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle A'P'C$，即可得出可知当 B，P，P'，A 在同一条直线上时，$PA+PB+PC$ 取最小值，最小值为 $A'B$，在根据 $\angle ACB=30^\circ$ 可证明 $\angle ACA'=\angle A'CP'+\angle BCP+\angle PCP'=90^\circ$，由勾股定理求 $A'B$ 即可，

（3）由总的铺设成本 $=a(PA+PB+\sqrt{2}PC)$，通过将△APC 绕，点 C 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A'P'C$，得到等腰直角 $\triangle PP'C$，得到 $\sqrt{2}PC=PP'$，即可得出当 B，P，P'，A 在同一条直线上时，$P'A'+PB+PP'$ 取最小值，

即 $PA+PB+\sqrt{2}PC$ 取最小值为 $A'B$，然后根据已知和旋转性质求出 $A'B$ 即可.

【详解】(1) 解：∵ $PC=P'C$，$\angle PCP'=60°$，

∴ $\triangle PCP'$ 为等边三角形；

∴ $PP'=PC$，$\angle P'PC=\angle PP'C=60°$，

又 $P'A'=PA$，故 $PA+PB+PC=PA'+PB+PP'\geq A'B$，

由两点之间线段最短可知，当 B，P，P'，A 在同一条直线上时，$PA+PB+PC$ 取最小值，最小值为 $A'B$，此时的 P 点为该三角形的"费马点"，

∴ $\angle BPC+\angle P'PC=180°$，$\angle A'P'C+\angle PP'C=180°$，

∴ $\angle BPC=120°$，$\angle A'P'C=120°$，

又∵ $\triangle APC\cong\triangle A'P'C$，

∴ $\angle APC=\angle AP'C=120°$，

∴ $\angle APB=360°-\angle APC-\angle BPC=120°$，

∴ $\angle APC=\angle BPC=\angle APB=120°$；

∵ $\angle BAC\geq 120°$，

∴ $BC>AC$，$BC>AB$，

∴ $BC+AB>AC+AB$，$BC+AC>AB+AC$，

∴三个顶点中，顶点 A 到另外两个顶点的距离和最小.

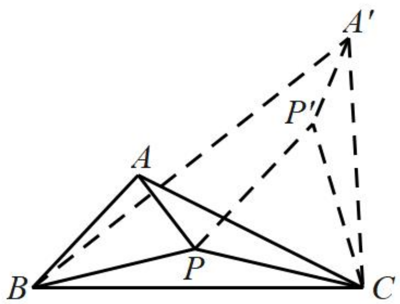
又∵已知当 $\triangle ABC$ 有一个内角大于或等于 $120°$ 时，"费马点"为该三角形的某个顶点.

∴该三角形的"费马点"为点 A，

故答案为：①等边；②两点之间线段最短；③$120°$；④A.

(2) 将 $\triangle APC$ 绕，点 C 顺时针旋转 $60°$ 得到 $\triangle A'P'C$，连接 PP'，

由 (1) 可知当 B，P，P'，A 在同一条直线上时，$PA+PB+PC$ 取最小值，最小值为 $A'B$，



∵ $\angle ACP=\angle A'CP'$，

∴ $\angle ACP+\angle BCP=\angle A'CP'+\angle BCP=\angle ACB=30°$，

又∵ $\angle PCP'=60°$

∴ $\angle BCA'=\angle A'CP'+\angle BCP+\angle PCP'=90°$，

由旋转性质可知：$AC=A'C=3$，

∴ $A'B=\sqrt{BC^2+A'C^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

∴ $PA+PB+PC$ 最小值为 5，

(3) ∵总的铺设成本 $=PA\bullet a+PB\bullet a+PC\bullet\sqrt{2}a=a(PA+PB+\sqrt{2}PC)$

∴当 $PA+PB+\sqrt{2}PC$ 最小时，总的铺设成本最低，

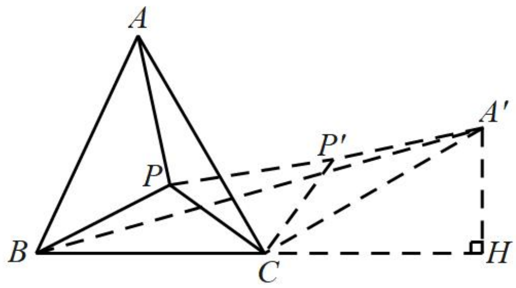
将 $\triangle APC$ 绕，点 C 顺时针旋转 $90°$ 得到 $\triangle A'P'C$，连接 PP'，$A'B$

由旋转性质可知：$P'C=PC$，$\angle PCP'=\angle ACA'=90°$，$P'A'=PA$，$A'C=AC=4\text{km}$，

∴ $PP' = \sqrt{2}PC$，

∴ $PA + PB + \sqrt{2}PC = P'A' + PB + PP'$，

当 B，P，P'，A 在同一条直线上时，$P'A' + PB + PP'$ 取最小值，即 $PA + PB + \sqrt{2}PC$ 取最小值为 $A'B$，



过点 A' 作 $A'H \perp BC$，垂足为 H，

∵ $\angle ACB = 60°$，$\angle ACA' = 90°$，

∴ $\angle A'CH = 30°$，

∴ $A'H = \frac{1}{2}A'C = 2\text{km}$，

∴ $HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}(\text{km})$，

∴ $BH = BC + CH = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}(\text{km})$，

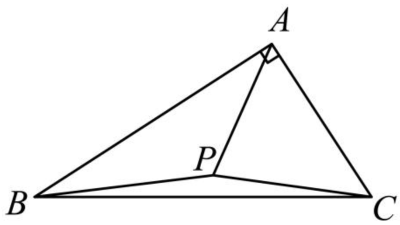
∴ $A'B = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 2^2} = 2\sqrt{13}(\text{km})$

$PA + PB + \sqrt{2}PC$ 的最小值为 $2\sqrt{13}\text{km}$

总的铺设成本 $= PA \cdot a + PB \cdot a + PC \cdot \sqrt{2}a = a(PA + PB + \sqrt{2}PC) = 2\sqrt{13}a$（元）

广东省江门市一模

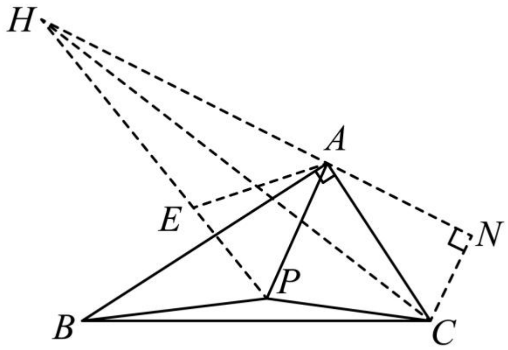
9．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = 90°, AB = 5, AC = 2\sqrt{3}$，点 P 为 $\triangle ABC$ 内部一点，则点 P 到 $\triangle ABC$ 三个顶点之和的最小值是____________.



【答案】$\sqrt{67}$

【分析】将 $\triangle ABP$ 绕着点 A 顺时针旋转 $60°$，得到 $\triangle AEH$，连接 EP，CH，过点 C 作 $CN \perp AH$，交 HA 的延长线于 N，由旋转的性质可得 $\angle BAP = \angle HAE$，$AE = AP$，$AH = AB = 5$，$\angle BAH = 60°$，$BP = HE$，易得 $\triangle AEP$ 是等边三角形，可得 $AE = AP = EP$，进而得到 $AP + BP + PC = EP + EH + PC$，当点 H、E、P、C 共线时，$AP + BP + PC$ 有最小值 HC，再求出 CN 和 HN 的长度，由勾股定理可求解.

【详解】解：将 $\triangle ABP$ 绕着点 A 顺时针旋转 $60°$，得到 $\triangle AEH$，连接 EP，CH，过点 C 作 $CN \perp AH$，交 HA 的延长线于 N，



∴ $\angle BAP=\angle HAE$， $AE=AP$， $AH=AB=5$， $\angle BAH=60°$， $BP=HE$，

∴ $\angle HAB=\angle EAP=60°$，

∴ $\triangle AEP$ 是等边三角形，

∴ $AE=AP=EP$，

∴ $AP+BP+PC=EP+EH+PC$，

∴当点 H、E、P、C 共线时， $AP+BP+PC$ 有最小值 HC .

∵ $\angle NAC=180°-\angle BAH-\angle BAC=180°-60°-90°=30°$， $AC=2\sqrt{3}$，

∴ $CN=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}$，

∴ $AN=\sqrt{AC^2-CN^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3$，

∴ $HN=AH+AN=5+3=8$.

在 $Rt\triangle CNH$ 中， $CH=\sqrt{HN^2+CN^2}=\sqrt{8^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{67}$，

即点 P 到 $\triangle ABC$ 三个顶点之和的最小值是 $\sqrt{67}$

武汉中考

10．问题背景：如图 1，将△ABC 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到△ADE，DE 与 BC 交于点 P，可推出结论：$PA+PC=PE$．

问题解决：如图 2，在△MNG 中，$MN=6$，$\angle M=75°$，$MG=4\sqrt{2}$，点 O 是△MNG 内一点，则点 O 到△MNG 三个顶点的距离和的最小值是______．

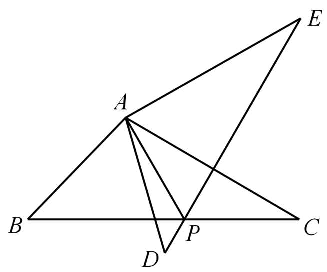


图1

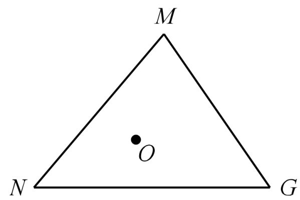
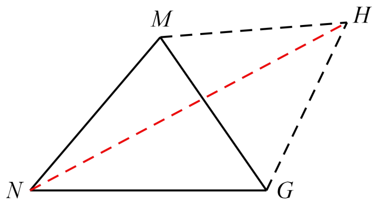


图2

【答案】$2\sqrt{29}$

【分析】本题的问题背景实际上是提示了解题思路，构造 60° 的旋转，当然如果已经了解了费马点问题，直接来解决就好了！

如图，以 MG 为边作等边△MGH，连接 NH，则 NH 的值即为所求的点 O 到△MNG 三个顶点的距离和的最小值.（此处不再证明）



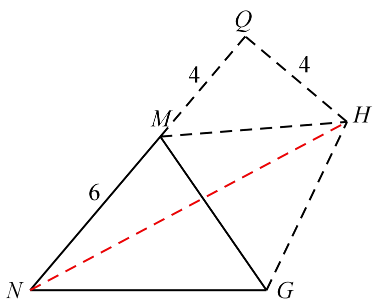
过点 H 作 HQ⊥NM 交 NM 延长线于 Q 点，

根据∠NMG=75°，∠GMH=60°，可得∠HMQ=45°，

∴△MHQ 是等腰直角三角形，

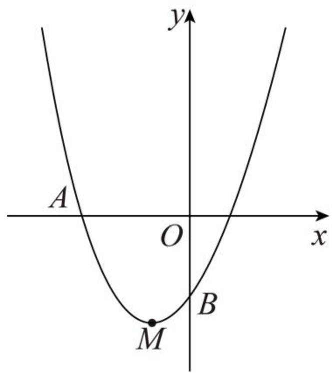
∴MQ=HQ=4，

∴NH= $\sqrt{NQ^2+HQ^2}=\sqrt{100+16}=2\sqrt{29}$.



2023·四川宜宾·中考真题

11．如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $A(-3,0)$，顶点为 $M(-1,m)$，且抛物线与 y 轴的交点 B 在 $(0,-2)$ 和 $(0,-3)$ 之间（不含端点），则下列结论：



①当 $-3\le x\le 1$ 时，$y\le 0$；

②当 $\triangle ABM$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 时，$a=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

③当 $\triangle ABM$ 为直角三角形时，在 $\triangle AOB$ 内存在唯一一点 P，使得 $PA+PO+PB$ 的值最小，最小值的平方为

$18+9\sqrt{3}$.

其中正确的结论是___________.（填写所有正确结论的序号）

【答案】①②

【解题思路】根据条件可求抛物线与 x 轴的另一交点坐标，结合图象即可判断①；设抛物线为 $y=a(x-1)(x+3)$，即可求出点 M 的坐标，根据割补法求面积，判断②；分三种情况讨论，然后以点 O 为旋转中心，将 $\triangle AOB$ 顺时针旋转 $60°$ 至 $\triangle AOA'$，连接 AA'，PP'，$A'B$，得到 $PA+PO+PB=P'A+PP'+PB\geq A'B$，判断③.

【详解】解：∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $A(-3,0)$，顶点为 $M(-1,m)$，

∴对称轴 $x=-1$，

∴抛物线与 x 轴的另一交点坐标为 $(1,0)$，

由图象可得：当 $-3\leq x\leq 1$ 时，$y\leq 0$；

∴①正确，符合题意；

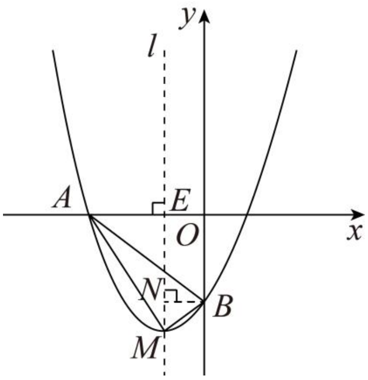
∵抛物线与 x 轴的另一交点坐标为 $(1,0)$，

∴设抛物线为 $y=a(x-1)(x+3)$，

当 $x=-1$ 时，$y=-4a$，当 $x=0$ 时，$y=-3a$，

∴ $M(-1,-4a)$，$B(0,-3a)$，

如图所示，过点 M 作平行于 y 轴的直线 l，过点 A 作 $AE\perp l$，过点 B 作 $BN\perp l$，



∴ $S_{\triangle ABM}=S_{\triangle AMF}+S_{\triangle BMF}=\frac{1}{2}\times MF\times AO=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

设直线 AB 的解析式为 $y=k'x+b'$，

把 $B(0,-3a)$，$A(-3,0)$ 代入得：$\begin{cases}-3k'+b'=0\\ b'=-3a\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k'=-a\\ b'=-3a\end{cases}$，

∴直线 AB 的解析式为 $y=-ax-3a$，

当 $x=-1$ 是，$y=-2a$，

∴ $F(-1,-2a)$，

∴ $MF=2a$，

∴ $\frac{1}{2}\times 2a\times 3=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

解得：$a=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故②正确；

∵点 B 是抛物线与 y 轴的交点，

∴当 $x=0$ 时，$y=-3a$，

∴ $B(0,-3a)$，

∵ $\triangle ABM$ 为直角三角形，

当 $\angle AMB=90°$ 时，

∴ $AM^2+BM^2=AB^2$，

∵ $AM=\sqrt{(-2)^2+(-4a)^2}=\sqrt{4+16a^2}$，$BM=\sqrt{(-1)^2+(-a)^2}=\sqrt{1+a^2}$，$AB=\sqrt{(-3)^2+(-3a)^2}=\sqrt{9+9a^2}$，

∴ $4+16a^2+1+a^2=9+9a^2$，整理得：$8a^2=4$，

解得：$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$（舍）

∴ $B\left(0,-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$，

当 $\angle ABM=90°$ 时，

∴ $AB^2+BM^2=AM^2$，

∴ $4+16a^2=9+9a^2+1+a^2$，整理得：$6a^2=6$

解得：$a=1$ 或 -1（舍）

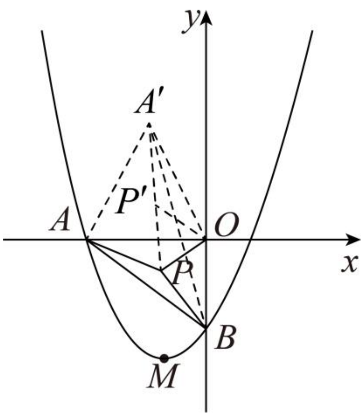
∴ $B(0,-3)$，

当 $\angle MAB=90°$ 时，

∴ $AB^2+AM^2=BM^2$，

∴ $4+16a^2+1+a^2=9+9a^2$，无解；

以点 O 为旋转中心，将 $\triangle AOB$ 顺时针旋转 $60°$ 至 $\triangle AOA'$，连接 AA'，PP'，$A'B$，如图所示，



则 $\triangle AOA'$，$\triangle POP'$ 为等边三角形，

∴ $OP=PP'$，$AP=AP'$，

∴ $PA+PO+PB=P'A'+PP'+PB\geq A'B$，

∵ $\triangle AOA'$ 为等边三角形，$A(-3,0)$

$\therefore x_{A'}=-\frac{3}{2}$， $y_{A'}=\frac{3}{2}\times\tan60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore A'\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，

当 $B\left(0,-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，

$\because A'B^2=\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{54}{4}+\frac{9\sqrt{6}}{2}$，

当 $B(0,-3)$ 时，

$A'B^2=\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+3\right)^2=18+9\sqrt{3}$，此时不符合题意，故③错误；

故答案为：①②.

一题四问，从特殊到一般

12．背景资料：在已知 $\triangle ABC$ 所在平面上求一点 P，使它到三角形的三个顶点的距离之和最小.这个问题是法国数学家费马 1640 年前后向意大利物理学家托里拆利提出的，所求的点被人们称为“费马点”．如图 1，当 $\triangle ABC$ 三个内角均小于 120°时，费马点 P 在 $\triangle ABC$ 内部，当 $\angle APB=\angle APC=\angle CPB=120^\circ$ 时，则 $PA+PB+PC$ 取得最小值.

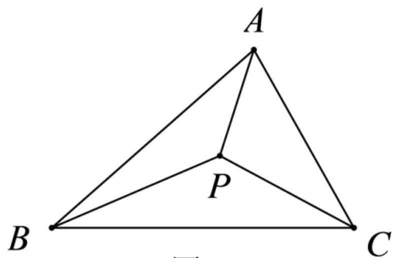


图1

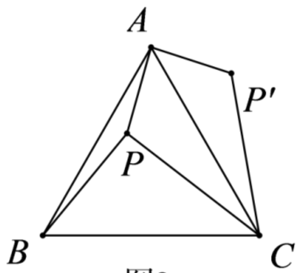


图2

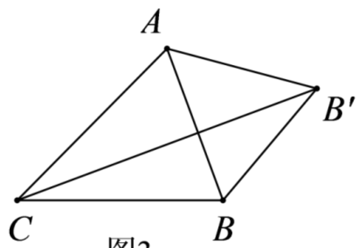


图3

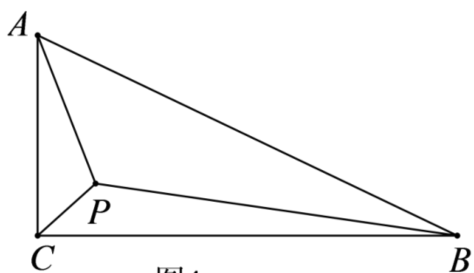


图4

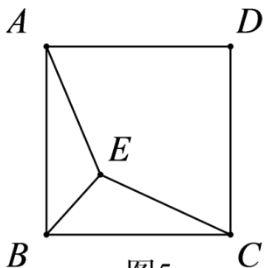


图5

(1)如图 2，等边$\triangle ABC$内有一点 P，若点 P 到顶点 A、B、C 的距离分别为 3，4，5，求$\angle APB$的度数，为了解决本题，我们可以将$\triangle ABP$绕顶点 A 旋转到$\triangle ACP'$处，此时$\triangle ACP' \cong \triangle ABP$这样就可以利用旋转变换，将三条线段$PA$、$PB$、$PC$转化到一个三角形中，从而求出$\angle APB =$________；

知识生成：怎样找三个内角均小于 120°的三角形的费马点呢？为此我们只要以三角形一边在外侧作等边三角形并连接等边三角形的顶点与$\triangle ABC$的另一顶点，则连线通过三角形内部的费马点．请同学们探索以下问题．

(2)如图 3，$\triangle ABC$三个内角均小于 120°，在$\triangle ABC$外侧作等边三角形$\triangle ABB'$，连接CB'，求证：CB'过$\triangle ABC$的费马点．

(3)如图 4，在$RT\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，$AC = 1$，$\angle ABC = 30°$，点 P 为$\triangle ABC$的费马点，连接AP、BP、CP，求$PA + PB + PC$的值．

(4)如图 5，在正方形$ABCD$中，点 E 为内部任意一点，连接AE、BE、CE，且边长$AB = 2$；求$AE + BE + CE$的最小值．

【答案】(1)150°；(2)见详解；(3)$\sqrt{7}$；(4)$\sqrt{6}+\sqrt{2}$．

【分析】(1)根据旋转性质得出$\triangle ABP \cong \triangle ACP'$，得出$\angle BAP=\angle CAP'$，$\angle APB=\angle AP'C$，$AP=AP'=3$，$BP=CP'=4$，根据$\triangle ABC$为等边三角形，得出$\angle BAC=60°$，可证$\triangle APP'$为等边三角形，$PP'=AP=3$，$\angle AP'P=60°$，根据勾股定理逆定理$PP'^2 + P'C^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = PC^2$，得出$\triangle PP'C$是直角三角形，$\angle PP'C=90°$，可求$\angle AP'C=\angle APP+\angle PPC=60°+90°=150°$即可；

（2）将$\triangle APB$逆时针旋转 60°，得到$\triangle AB'P'$，连结PP'，根据$\triangle APB\cong\triangle AB'P'$，$AP=AP'$，$PB=PB'$，$AB=AB'$，根据$\angle PAP'=\angle BAB'=60°$，$\triangle APP'$和$\triangle ABB'$均为等边三角形，得出$PP'=AP$，根据$PA + PB + PC = PP' + P'B' + PC$，根据两点之间线段最短得出点 C，点 P，点 P'，点 B'四点共线时，$PA + PB + PC$ $_{\text{最小}}=CB'$，点 P 在 CB'上即可；

（3）将$\triangle APB$逆时针旋转 60°，得到$\triangle AP'B'$，连结BB'，PP'，得出$\triangle APB\cong\triangle AP'B'$，可证$\triangle APP'$和$\triangle ABB'$均为等边三角形，得出$PP'=AP$，$BB'=AB$，$\angle ABB'=60°$，根据$PA + PB + PC = PP' + P'B' + PC$，可得点 C，点 P，点 P'，点 B'四点共线时，$PA + PB + PC$ $_{\text{最小}}=CB'$，利用 30°直角三角形性质得出$AB=2AC=2$，根据勾股定理$BC=\sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$，可求$BB'=AB=2$，根据$\angle CBB'=\angle ABC+\angle ABB'=30°+60°=90°$，在$Rt\triangle CBB'$中，$B'C=\sqrt{BC^2 + BB'^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{7}$即可；

（4）将$\triangle BCE$逆时针旋转 60°得到$\triangle CE'B'$，连结EE'，BB'，过点 B'作 $B'F\perp AB$，交 AB 延长线于 F，得出$\triangle BCE\cong\triangle CE'B'$，$BE=B'E'$，$CE=CE'$，$CB=CB'$，可证$\triangle ECE'$与$\triangle BCB'$均为等边三角形，得出$EE'=EC$，$BB'=BC$，$\angle B'BC=60°$，$AE + BE + CE = AE + EE' + E'B'$，得出点 C，点 E，点 E'，点 B'四点共线时，$AE + BE + CE = AE + EE' + E'B'$ $_{\text{最小}}=AB'$，根据四边形 $ABCD$ 为正方形，得出$AB=BC=2$，$\angle ABC=90°$，可求$\angle FBB'=180°-\angle ABC-\angle CBB'=180°-90°-60°=30°$，根据 30°直角三角形性质得出$BF=\frac{1}{2}BB' = \frac{1}{2}\times 2 = 1$，勾股定理$BF=\sqrt{BB'^2 - B'F^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$，可求$AF=AB+BF=2+\sqrt{3}$，再根据勾股定理$AB'=\sqrt{AF^2 + B'F^2} = \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$即可．

【详解】（1）解：连结 PP'，

∵ $\triangle ABP\cong\triangle ACP'$，

∴ $\angle BAP=\angle CAP'$，$\angle APB=\angle AP'C$，$AP=AP'=3$，$BP=CP'=4$，

∵ $\triangle ABC$ 为等边三角形，

∴ $\angle BAC=60°$

∴ $\angle PAP'=\angle PAC+\angle CAP'=\angle PAC+\angle BAP=60°$，

∴ $\triangle APP'$为等边三角形，

,∴ $PP'=AP=3$，$\angle AP'P=60°$，

在 $\triangle P'PC$ 中，$PC=5$，

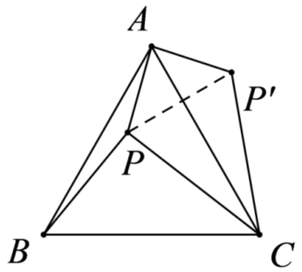
$PP'^2+P'C^2=3^2+4^2=25=PC^2$，

∴ $\triangle PP'C$ 是直角三角形，$\angle PP'C=90°$，

∴ $\angle AP'C=\angle APP+\angle PPC=60°+90°=150°$，

∴ $\angle APB=\angle AP'C=150°$，

故答案为 150°；



（2）证明：将 $\triangle APB$ 逆时针旋转 60°，得到 $\triangle AB'P'$，连结 PP'，

∵ $\triangle APB\cong\triangle AB'P'$，

∴ $AP=AP'$，$PB=PB'$，$AB=AB'$，

∵ $\angle PAP'=\angle BAB'=60°$，

∴ $\triangle APP'$和 $\triangle ABB'$均为等边三角形，

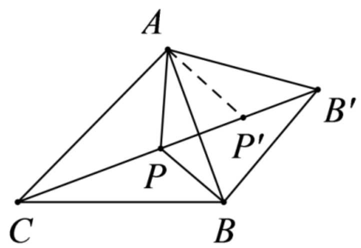
∴ $PP'=AP$，

∵ $PA+PB+PC=PP'+P'B'+PC$，

∴点 C，点 P，点 P'，点 B'四点共线时，$PA+PB+PC$ 最小 $=CB'$，

∴点 P 在 CB'上，

∴ CB' 过 $\triangle ABC$ 的费马点.



（3）解：将 $\triangle APB$ 逆时针旋转 60°，得到 $\triangle AP'B'$，连结 BB'，PP'，

∴ $\triangle APB\cong\triangle AP'B'$，

∴ $AP'=AP$，$AB'=AB$，

∵ $\angle PAP'=\angle BAB'=60°$,

∴△APP'和△ABB'均为等边三角形,

∴$PP'=AP$，$BB'=AB$，$\angle ABB'=60°$,

∵ $PA+PB+PC=PP'+P'B'+PC$

∴点 C，点 P，点 P'，点 B'四点共线时，$PA+PB+PC_{最小}=CB'$,

∵ $\angle C=90°$，$AC=1$，$\angle ABC=30°$，

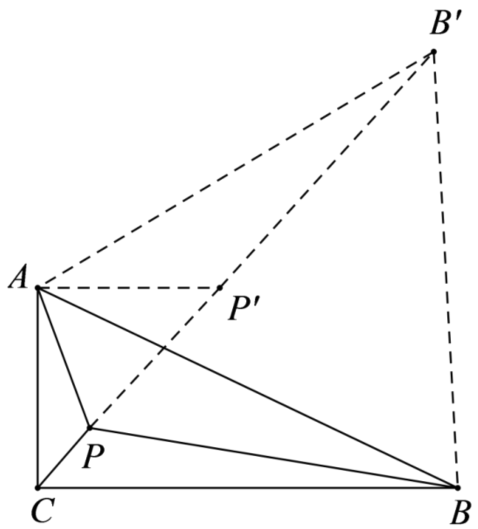
∴$AB=2AC=2$，根据勾股定理 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

∴$BB'=AB=2$,

∵ $\angle CBB'=\angle ABC+\angle ABB'=30°+60°=90°$,

∴在 Rt△CBB'中，$B'C=\sqrt{BC^2+BB'^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{7}$

∴ $PA+PB+PC_{最小}=CB'=\sqrt{7}$；



（4）解：将△BCE 逆时针旋转 60°得到△$CE'B'$，连结 EE'，BB'，过点 B'作 $B'F\perp AB$，交 AB 延长线于 F,

∴△BCE≌△$CE'B'$,

∴$BE=B'E'$，$CE=CE'$，$CB=CB'$,

∵ $\angle ECE'=\angle BCB'=60°$,

∴△ECE'与△BCB'均为等边三角形,

∴$EE'=EC$，$BB'=BC$，$\angle B'BC=60°$,

∵ $AE+BE+CE=AE+EE'+E'B'$，

∴点 C，点 E，点 E'，点 B'四点共线时，$AE+BE+CE=AE+EE'+E'B'_{最小}=AB'$,

∵四边形 $ABCD$ 为正方形,

∴$AB=BC=2$，$\angle ABC=90°$,

∴ $\angle FBB'=180°-\angle ABC-\angle CBB'=180°-90°-60°=30°$,

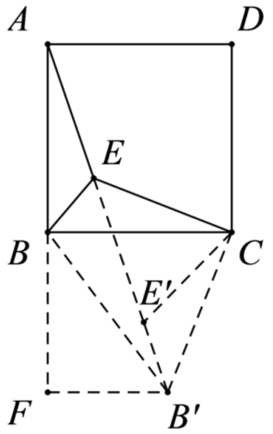
∵$B'F\perp AF$,

∴$BF=\frac{1}{2}BB'=\frac{1}{2}\times 2=1$，$BF=\sqrt{BB'^2-B'F^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

∴$AF=AB+BF=2+\sqrt{3}$，

$\therefore AB'=\sqrt{AF^2+B'F^2}=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，

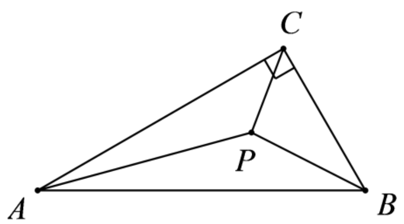
$\therefore AE+BE+CE_{最小}=AB'=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.



题型二　加权费马点·单系数型

2023·武汉·慧泉中学校月考

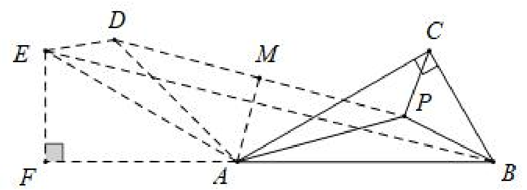
13．如图，Rt△ABC中，$\angle CAB=30°$，$BC=\frac{3}{2}$，点 P 为△ABC 内一点，连接 PA,PB,PC，则 $PC+PB+\sqrt{3}PA$ 的最小值为__________.



【答案】$\frac{3}{2}\sqrt{13}$

【分析】作辅助线如详解图，根据等腰三角形的性质和勾股定理可求得 $DP=\sqrt{3}AP$，于是所求 $PC+PB+\sqrt{3}PA$ 的最小值转化为求 $DE+PD+PB$ 的最小值，根据两点之间线段最短可得 $DE+PD+PB$ 的最小值即为线段 EB 的长，然后求出 EB 的长即可解决问题.

【详解】解：将△ACP 绕点 A 逆时针旋转$120°$，得到△AED，连接 DP,EB，过点 E 作 $EF\perp BA$ 交 BA 的延长线于点 F，过点 A 作 $AM\perp DP$ 于点 M，如图，



则 $AD=AP,DE=CP,\angle DAP=120°,\angle EAC=120°$，

∵ $AM\perp DP$，

∴ $DM=PM,\angle ADM=\angle APM=30°$，

∴ $AM=\frac{1}{2}AP$，

∴ $PM=\sqrt{AP^2-AM^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}AP$，

∴ $DP=2PM=\sqrt{3}AP$，

∴ $PC+PB+\sqrt{3}PA=DE+PD+PB\geq EB$，即 $PC+PB+\sqrt{3}PA$ 的最小值为 EB 的长（当点 E、D、P、B 四点共线时取最小值），

∵ $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle CAB=30°$，$BC=\frac{3}{2}$，

∴ $AB=2BC=3,AC=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，

∴ $AE=AC=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

∵ $\angle CAB=30°,\angle EAC=120°$，

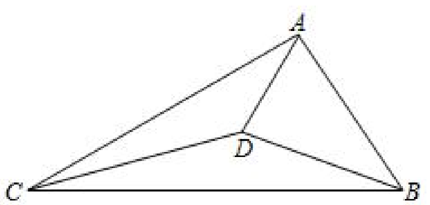
∴ $\angle EAF=30°$，

则在直角三角形 AEF 中，$EF=\frac{1}{2}AE=\frac{3\sqrt{3}}{4},AF=\sqrt{3}EF=\frac{9}{4}$，

∴ $BF=3+\frac{9}{4}=\frac{21}{4}$，∴ $BE=\sqrt{BF^2+EF^2}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{21}{4}\right)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{13}$

西安市铁一中二模

14．已知，如图在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=30°$，$BC=5$，$AC=6$，在 $\triangle ABC$ 内部有一点 D，连接 DA、DB、DC. 则 $DA+DB+\sqrt{2}DC$ 的最小值是__________.



【答案】$\sqrt{91}$.

【分析】把△CDB 顺时针旋转 90°到△$CD'B'$，过 B'作 $B'E\perp AC$，交 AC 延长于 E，则 $CD=CD'$，$BD=B'D'$，$\angle CDD'=\angle CD'D=45°$，可求 $DD'=\sqrt{2}CD$，在 $Rt\triangle CEB'$中，可求 $CE=\frac{5}{2}$，$AE=\frac{17}{2}$，$BE=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，当点 A、D、

D'、B'四点在一直线时，AB'最短，可求 $AB'=BD+\sqrt{2}CD+AD=\sqrt{91}$.

【详解】解：把$\triangle CDB$顺时针旋转90°到$\triangle CD'B'$，过B'作$B'E\perp AC$，交AC延长于E，

则$CD=CD'$，$BD=B'D'$，$\angle CDD'=\angle CD'D=45°$，

$\therefore DD'=CD\div\cos45°=\sqrt{2}CD$，

$\because \angle ACB=30°$，$\angle B'CB=90°$，

$\therefore \angle B'CE=180°-\angle ACB-\angle BCB'=180°-30°-90°=60°$，

在$Rt\triangle CEB'$中，

$\therefore CE=B'C\cdot\cos60°=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$，

$\therefore AE=AC+CE=6+\frac{5}{2}=\frac{17}{2}$，

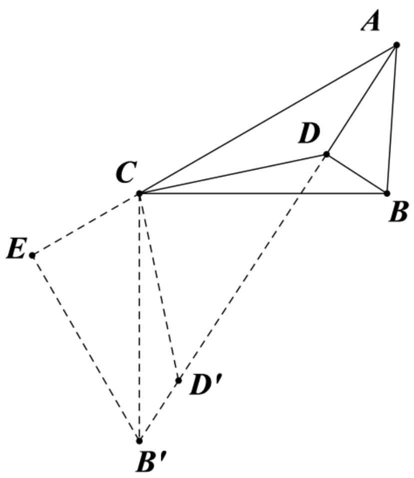
$\therefore BE=B'C\cdot\sin60°=5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，

当点A、D、D'、B'四点在一直线时，AB'最短，

$\therefore AB'_{最短}=\sqrt{AE^2+B'E^2}=\sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2+\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{364}}{2}=\sqrt{91}$，

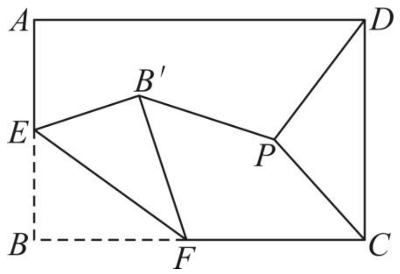
$AB'=B'D'+D'D+AD=BD+\sqrt{2}CD+AD=\sqrt{91}$.

故答案为：$\sqrt{91}$.



2023·成都市郫都区中考二模

15．如图，矩形$ABCD$中，$AB=2$，$BC=3$，点E是AB的中点，点F是BC边上一动点．将$\triangle BEF$沿着EF翻折，使得点B落在点B'处，若点P是矩形内一动点，连接PB'、PC、PD，则$PB'+\sqrt{2}PC+PD$的最小值为______.



【答案】$\sqrt{26}-1$

【分析】将$\triangle CDP$绕点C顺时针旋转$90°$得到$\triangle CDP'$，连接PP'，连接ED'，由等腰三角形CPP'得出$PP'=\sqrt{2}PC$，再由折叠得出点B'的轨迹在点E为圆心，EB为半径的圆周上，所以$EB'+PB'+PP'+P'D'$的最小值为ED'，即$PB'+\sqrt{2}PC+PD$的最小值为$ED'-EB'$，经计算答出答案即可．

【详解】解：将$\triangle CDP$绕点C顺时针旋转$90°$得到$\triangle CDP'$，

连接PP'，连接ED'，

则B，C，D'共线，$PD=P'D'$，

$\therefore CD'=CD=AB=2$，

$\therefore PP'=\sqrt{2}PC$，

$\because$ 点E是AB的中点，

$\therefore EB=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times2=1$，

$\because BD'=BC+CD'=3+2=5$，

$\therefore ED'=\sqrt{BE^2+D'B^2}$

$=\sqrt{1^2+5^2}$

$=\sqrt{26}$，

由$\triangle BEF$折叠成$\triangle B'EF$，

$\therefore EB=EB'=EA$，

$\therefore$ 点B在以点E为圆心，EB为半径的圆上，

$\therefore EB'=1$，

$\because$ 两点间线段最短，

$\therefore ED'\le EB'+PB'+PP'+P'D'$，

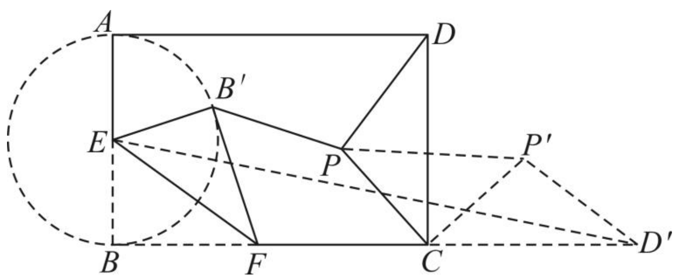
即$ED'\le EB'+PB'+\sqrt{2}PC+PD$

$\therefore \sqrt{26}\le1+PB'+\sqrt{2}PC+PD$，

$\therefore PB'+\sqrt{2}PC+PD\ge\sqrt{26}-1$，

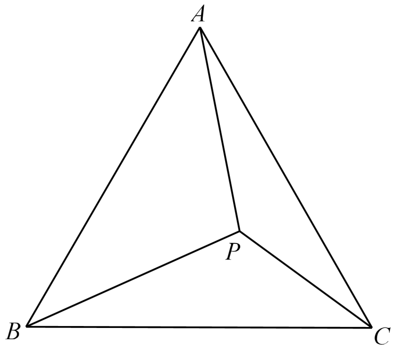
则$PB'+\sqrt{2}PC+PD$的最小值为$\sqrt{26}-1$．

故答案为：$\sqrt{26}-1$．



题型三　加权费马点·多系数型

16．在边长为4的正△ABC中有一点P，连接PA、PB、PC，求（$\frac{1}{2}AP+BP+\frac{\sqrt{5}}{2}PC$）^{2}的最小值



原图

【解析】如图1，△APC绕点C逆时针旋转90°，取$P'C$，$A'C$的中点M，N

易知$PM=\frac{\sqrt{5}}{2}PC$，　$MN=\frac{1}{2}P'A'=\frac{1}{2}PA$，

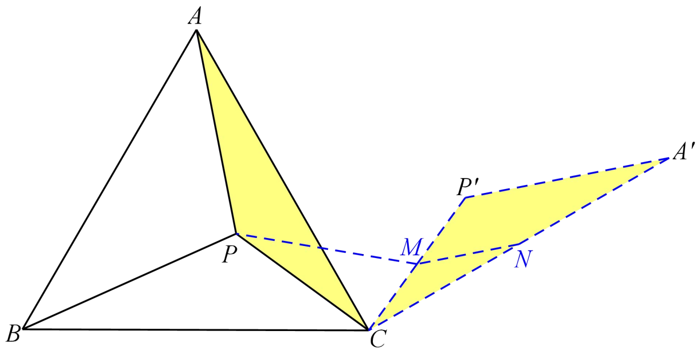
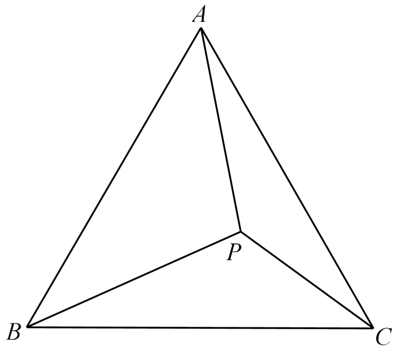


图1

则$\frac{1}{2}AP+BP+\frac{\sqrt{5}}{2}PC=MN+BP+PM\leqslant BN$，$BN^2=20+8\sqrt{3}$即为所求

17．在等边三角形 ABC 中，边长为 4，P 为三角形 ABC 内部一点，求 $3AP+4BP+5PC$ 的最小值



原图

【解析】如图1，△APC 绕点 C 逆时针旋转 90°，在 $P'C$，$A'C$ 上取 M，N，使 $CM=\frac{3}{4}CP'$，$CN=\frac{3}{4}CA'$，

易知 $PM=\frac{5}{4}PC$， $MN=\frac{3}{4}P'A'=\frac{3}{4}PA$， $3AP+4BP+5PC=4$（$MN+BP+PM$）$\leqslant BN$

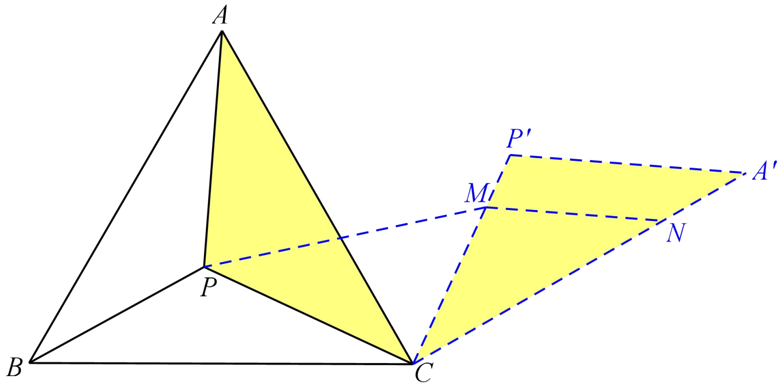
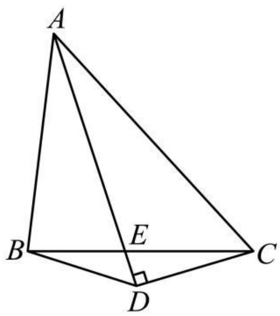


图1

成都七中育才学校月考

18．在△ABC 中，$AB=3$，$AC=4$，$\angle BAC$ 的角平分线交 BC 于 E，过 C 作射线 AE 的垂线，垂足为 D，连接 BD，当 $S_{\triangle ACE}-S_{\triangle BED}$ 取大值时，在△ACD 内部取点 P，则 $\frac{3PC+4PD+5PA}{4}$ 的最小值是___________．

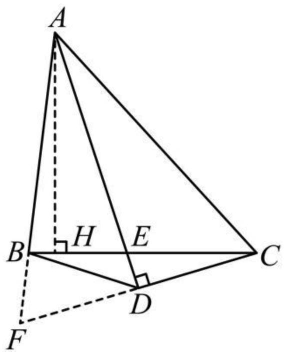


【答案】$\sqrt{29}$

【分析】延长 CD 交 AB 于点 F，过点A作 BC 边上的高 AH，得出△ADF≌△ADC，则 $BF=1$，根据 AD 是

$\angle BAC$的角平分线，得出$\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{3}{4}$，设$S_{\triangle BDE}=3S$，则$S_{\triangle EDC}=4S$，过点$D$分别作$AF,AC$的垂线，垂足为$M,N$，得出$S=\dfrac{1}{42}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle ACE}-S_{\triangle BED}=21S$，则当$S_{\triangle ABC}$最大时，$S_{\triangle ACE}-S_{\triangle BED}$取得最大值，进而可得当$\angle CAB=90^\circ$时，$S_{\triangle ABC}$取得最大值，则$\angle CAD=45^\circ$，延长$BA$至$C'$，使得$AC'=\dfrac{3}{4}AC=3$，作$P'A\perp PA$，$AP'=\dfrac{3}{4}AP$，连接$P'P,C'P'$，构造$\triangle C'AP'\backsim\triangle CAP$，可得$\dfrac{3PC+4PD+5PA}{4}=P'C'+PP'+PD\geq C'D$，进而勾股定理，即可求解.

【详解】解：如图所示，延长CD交AB于点F，过点A作BC边上的高AH，



$\because\angle BAC$的角平分线交BC于E，$AD\perp CF$

$\therefore\angle FAD=\angle CAD,\angle ADC=\angle ADF$

又$AD=AD$

$\therefore\triangle ADF\cong\triangle ADC$，

$\therefore AF=AC=4$，$DC=DF$

则$BF=1$

$\because AD$是$\angle BAC$的角平分线，设E到AB的距离为d，则E到AC的距离也为d，

$\therefore\dfrac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle AEC}}=\dfrac{\frac{1}{2}BE\times AH}{\frac{1}{2}EC\times AH}=\dfrac{\frac{1}{2}AB\times d}{\frac{1}{2}AC\times d}$

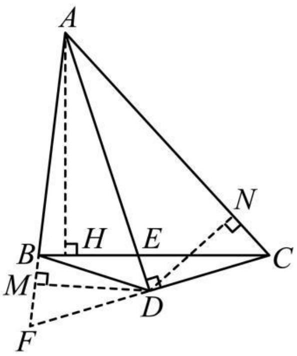
$\therefore\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{3}{4}$，

设$S_{\triangle BDE}=3S$，则$S_{\triangle EDC}=4S$

$\because DC=DF$

$\therefore S_{\triangle BDF}=S_{\triangle BDC}=7S$，

过点D分别作AF,AC的垂线，垂足为M,N



$\therefore DM = DN = \dfrac{2\times 7S}{1} = 14S$，

$\therefore S_{\triangle ABD} = \dfrac{1}{2}\times 3\times 14S = 21S, S_{\triangle ADC} = \dfrac{1}{2}\times 4\times 14S = 28S$

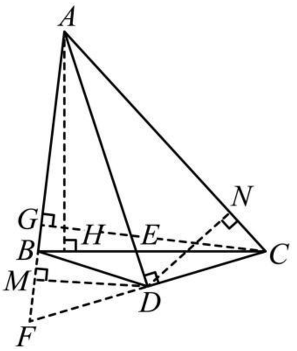
$\therefore S_{\triangle AEC} = S_{\triangle ADC} - S_{\triangle AEC} = 28S - 4S = 24S$， $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ADC} - S_{\triangle FBC} = 2\times 28S - 2\times 7S = 42S$

$\therefore S_{\triangle ACE} - S_{\triangle BED} = 24S - 3S = 21S$

$\because S = \dfrac{1}{42}S_{\triangle ABC}$

$\therefore$当 $S_{\triangle ABC}$ 最大时， $S_{\triangle ACE} - S_{\triangle BED}$ 取得最大值，

设 AB 边上的高为 CG



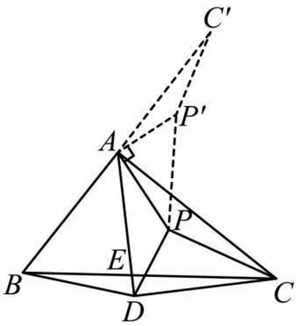
$\therefore CG = AC\times \sin\angle CAB$

$\therefore S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB\times AC\times \sin\angle CAB$

$\therefore$当 $\angle CAB = 90^\circ$ 时， $S_{\triangle ABC}$ 取得最大值，

则 $\angle CAD = 45^\circ$，则 $\triangle ADC$ 是等腰直角三角形，则 $AD = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AC = 2\sqrt{2}$，

如图所示，延长 BA 至 C'，使得 $AC' = \dfrac{3}{4}AC = 3$，作 $P'A\perp PA$， $AP' = \dfrac{3}{4}AP$，连接 $P'P, C'P'$



∴ $\angle C'AP'=\angle CAP$

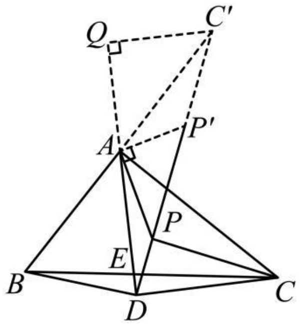
∴ $\triangle C'AP' \backsim \triangle CAP$

∴ $P'C'=\dfrac{3}{4}PC$

在 $\mathrm{Rt}\triangle APP'$ 中， $PP'=\sqrt{AP'^2+AP^2}=\dfrac{5}{4}AP$

∴ $\dfrac{3PC+4PD+5PA}{4}=P'C'+PP'+PD\ge C'D$

当 P,P',C' 三点共线时， $C'D$ 最小，此时如图所示，过点 C' 作 $C'Q\perp DA$ 于点 Q，



∵ $\angle CAQ=\angle BAD=45°$， $AC=3$

∴ $AQ=C'Q=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

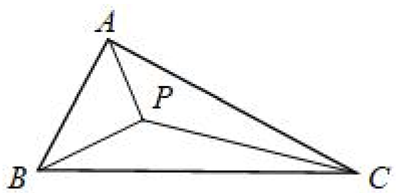
∴ $DQ=AD+AQ=2\sqrt{2}+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}=\dfrac{7}{2}\sqrt{2}$

在 $\mathrm{Rt}\triangle QDC'$ 中， $DC'=\sqrt{QC'^2+QD^2}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2+\left(\dfrac{7}{2}\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{29}$

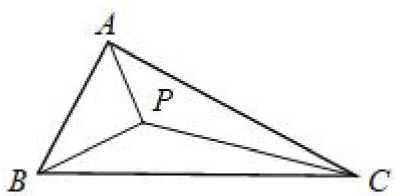
一题八问，练到位

19．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=30°,BC=6,AC=5$，在 $\triangle ABC$ 内部有一点 P，连接 PA 、 PB 、 PC .（加权费马点）求：

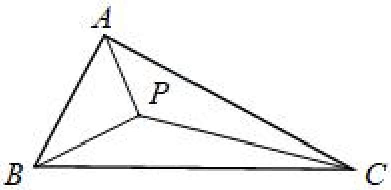
（1） $PA+PB+PC$ 的最小值；



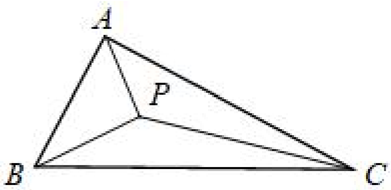
（2） $PA+PB+\sqrt{2}PC$ 的最小值



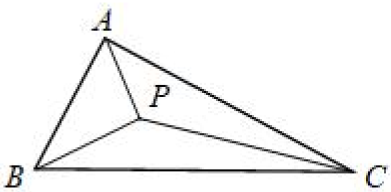
（3）$PA+PB+\sqrt{3}PC$ 的最小值；



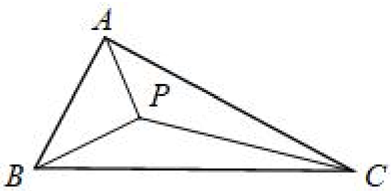
（4）$2PA+PB+\sqrt{3}PC$ 的最小值



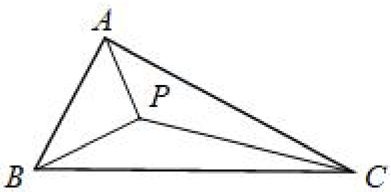
（5）$\frac{1}{2}PA+PB+\frac{\sqrt{3}}{2}PC$ 的最小值；



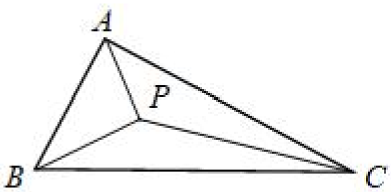
（6）$2PA+4PB+2\sqrt{3}PC$ 的最小值



（7）$4PA+2PB+2\sqrt{3}PC$ 的最小值；



（8）$3PA+4PB+5PC$ 的最小值



【答案】（1）$\sqrt{61}$；（2）$\sqrt{91}$；（3）$\sqrt{61+30\sqrt{3}}$；（4）$2\sqrt{34}$；（5）$\frac{13}{2}$；（6）26；（7）$4\sqrt{34}$；（8）21

【分析】（1）将$\triangle BPC$绕点B顺时针旋转60°得到$\triangle BP'C'$，则$BP'=BP$，$P'C=PC$，$\angle PBP'=60^{\circ}$，可以推出$\triangle BPP'$为等边三角形，得到$BP=PP'$，则$PA+PB+PC=PA+PP'+PC'$，即可得到A、P、P'、C'四点

共线时，$PA+PB+PC$ 最小，最小值为 AC'，然后证明 $\angle ACC'=\angle ACB+\angle BCC'=90^{\circ}$，由此利用勾股定理求解即可；

（2）将 $\triangle BPC$ 绕点 C 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle CP'B'$，则可证明 $PP'=\sqrt{2}PC$，从而得到 $PA+PB+\sqrt{2}PC=PA+PP'+P'B$，则当 A、P、P'、B' 四点共线时 $PA+PB+PC$ 最小，最小值为 AB'，过点 A 再作 $B'C$ 的垂线，垂足为 E，利用勾股定理求出 $AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，$B'E=B'C+EC=\frac{17}{2}$，由此即可得到答案；

（3）将 $\triangle BPC$ 绕点 C 逆时针旋转 120° 得到 $\triangle B'PC'$，则可证明 $PP'=\sqrt{3}CP$，则 $PA+PB+\sqrt{3}PC=PA+PP'+P'B'$，故当 A、P、P'、B' 四点共线时 $PA+PB+\sqrt{3}PC$ 最小，最小值为 AB'，过点 A 再作 $B'C$ 的垂线，垂足为 E，利用勾股定理求出 $CE=\sqrt{AC^2-AE^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，$B'E=CE+CB'=\frac{12+5\sqrt{3}}{2}$，由此即可得到答案；

(4) 将 $\triangle BPC$ 绕点 C 顺时针旋转 60°，得到 $\triangle CP'A'$，再将 $\triangle CP'A'$ 以点 C 为位似中心放大 2 倍，得到 $\triangle CP''A''$，连接 PP'，先证明 $P''P=\sqrt{3}CP$，则可以得到 $2PA+PB+\sqrt{3}PC=A''P''+P''P+PB$，故当 A''，P''，P，B 共线时 $2PA+PB+\sqrt{3}PC$ 最小，最小为 $A''B$，然后证明 $\angle BCA''=\angle ACB+\angle ACA''=90^{\circ}$，即可利用勾股定理求解；

(5) 将 $\triangle BPC$ 绕点 C 顺时针旋转 60°，得到 $\triangle CP'A'$，再将 $\triangle CP'A'$ 以点 C 为位似中心缩小 2 倍，得到 $\triangle CP''A''$，同（4）原理可证得当 A''，P''，P，B 共线时 $\frac{1}{2}PA+PB+\frac{\sqrt{3}}{2}PC$ 最小，最小为 $A''B$，然后证明 $\angle BCA''=\angle ACB+\angle ACA''=90^{\circ}$，由此求解即可；

（6）由 $2PA+4PB+2\sqrt{3}PC=4\left(\frac{1}{2}PA+PB+\frac{\sqrt{3}}{2}PC\right)$ 可由（5）得：$2PA+4PB+2\sqrt{3}PC$ 的最小值为 26；

（7）由 $4PA+2PB+2\sqrt{3}PC=2(2PA+PB+\sqrt{3}PC)$ 可由（4）得 $4PA+2PB+2\sqrt{3}PC$ 的最小值为 $4\sqrt{34}$；

(8) 将 $\triangle BPC$ 绕点 C 顺时针旋转 90°，得到 $\triangle CP'A'$，再将 $\triangle CP'A'$ 以点 C 为位似中心缩小 $\frac{3}{4}$ 倍，得到 $\triangle CP''A''$，同理可以证得当 A、P、P''、A''，共线时 $3PA+4PB+5PC$ 的值最小．在 $\triangle BCA''$ 中，$\angle BCA''=\angle ACB+\angle ACA''=120^{\circ}$，$A''C=\frac{3}{4}CA=\frac{15}{4}$，过点 A'' 作 $A''E\perp BC$ 交 BC 延长线于 E，然后求出 EA''，BE 的长，由此即可求解.

【详解】解：（1）如图 3-2，将 $\triangle BPC$ 绕点 B 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle BP'C'$，

∴ $BP'=BP$，$P'C=PC$，$\angle PBP'=60^{\circ}$，

∴ $\triangle BPP'$ 为等边三角形，

∴ $BP=PP'$，

∴ $PA+PB+PC=PA+PP'+PC'$，

∴A、P、P'、C' 四点共线时，$PA+PB+PC$ 最小，最小值为 AC'

同理可证 $\triangle BCC'$ 为等边三角形，

∴ $CC'=BC=6$，$\angle BCC'=60^{\circ}$，

∴ $\angle ACC'=\angle ACB+\angle BCC'=90^{\circ}$，

∴ $AC'=\sqrt{AC^2+CC'^2}=\sqrt{61}$；

∴ $PA+PB+PC$ 的最小值为 $\sqrt{61}$；

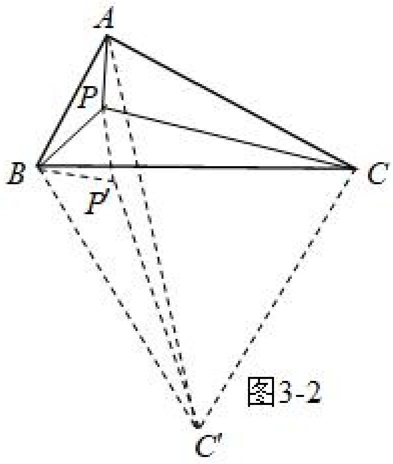


图3-2

（2）如图 3-4，将$\triangle BPC$绕点C逆时针旋转90°得到$\triangle CP'B'$，

∴ $B'P'=BP$， $P'C=PC$， $\angle PCP'=90^\circ$， $\angle P'CB'=\angle PCB$， $CB'=CB=6$，

∴ $PP'=\sqrt{PC^2+P'C^2}=\sqrt{2}PC$，

∴ $PA+PB+\sqrt{2}PC=PA+PP'+P'B$，

∴当A、P、P'、B'四点共线时，$PA+PB+PC$最小，最小值为AB'

∵ $\angle ACB=30^\circ$，

∴ $\angle ACP+\angle PCB=\angle ACP+\angle P'CB'=30^\circ$

∴ $\angle ACB'=\angle PCP'+\angle ACP+\angle P'CB'=120^\circ$，

过点A再作$B'C$的垂线，垂足为E，

∴ $\angle AEC=90^\circ$，$\angle ACE=60^\circ$，

∴ $\angle CAE=30^\circ$，

∴ $CE=\frac{1}{2}AC=\frac{5}{2}$

∴ $AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$， $B'E=B'C+EC=\frac{17}{2}$，

∴ $AB'=\sqrt{AE^2+B'E^2}=\sqrt{91}$，

∴ $PA+PB+\sqrt{2}PC$的最小值为$\sqrt{91}$；

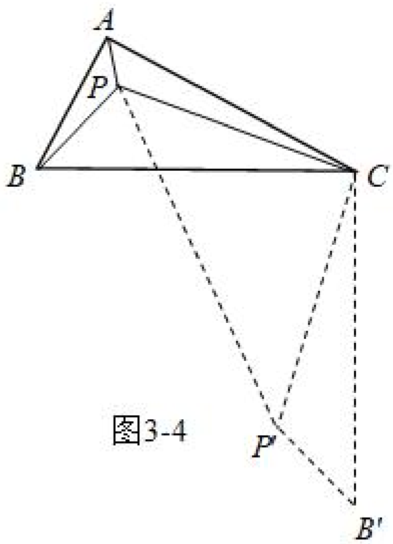


图3-4

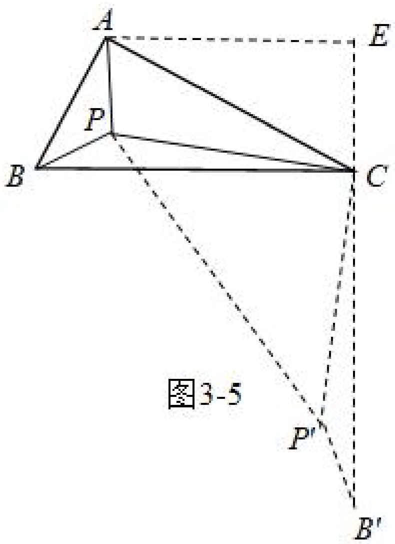


图3-5

（3）如图 3-6，将△BPC 绕点 C 逆时针旋转120°得到△$B'PC'$，

∴ $B'P'=BP$， $P'C=PC$， $\angle PCP'=120^\circ$， $\angle P'CB'=\angle PCB$， $CB'=CB=6$，

∴ $\angle CPP'=\angle CP'P=30^\circ$，

过点 C 作 $CE\perp PP'$ 于 E，

∴ $CE=\dfrac{1}{2}CP$， $PE=P'E$，

∴ $PE=\sqrt{PC^2-CE^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}CP$，

∴ $PP'=\sqrt{3}CP$，

∴ $PA+PB+\sqrt{3}PC=PA+PP'+P'B'$，

∴当 A、P、 P'、 B' 四点共线时， $PA+PB+\sqrt{3}PC$ 最小，最小值为 AB'

∵ $\angle ACB=30^\circ$，

∴ $\angle ACP+\angle PCB=\angle ACP+\angle P'CB'=30^\circ$

∴ $\angle ACB'=\angle PCP'+\angle ACP+\angle P'CB'=150^\circ$，

过点 A 再作 $B'C$ 的垂线，垂足为 E，

∴ $\angle AEC=90^\circ$， $\angle ACE=3^\circ$，

∴ $AE=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{5}{2}$

∴ $CE=\sqrt{AC^2-AE^2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$，

∴ $B'E=CE+CB'=\dfrac{12+5\sqrt{3}}{2}$

∴ $AB'=\sqrt{AE^2+B'E^2}=\sqrt{61+30\sqrt{3}}$，

∴ $PA+PB+\sqrt{3}PC$ 的最小值为 $\sqrt{61+30\sqrt{3}}$；

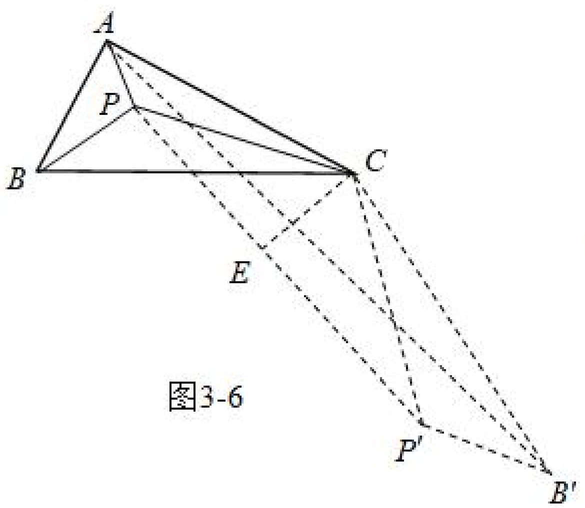


图3-6

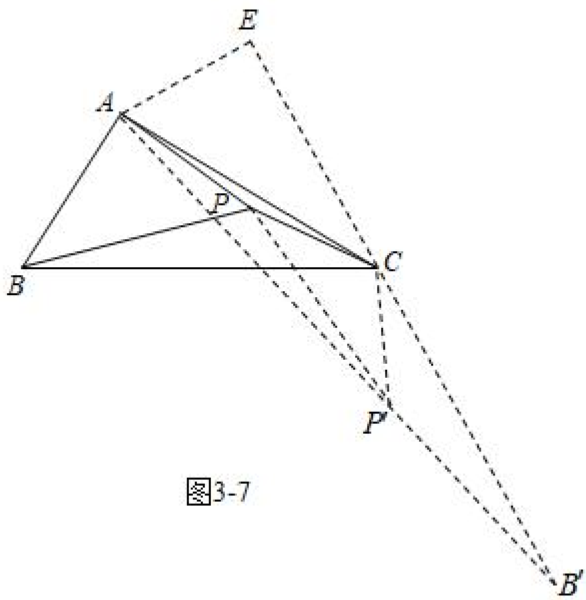


图3-7

（4）如图 3-8，将△BPC 绕点 C 顺时针旋转60°，得到$\triangle CP'A'$，再将$\triangle CP'A'$ 以点 C 为位似中心放大 2 倍，得到$\triangle CP''A''$，连接 PP'

由旋转的性质得 $CA'=CA=5$，$CP'=CP$，$PA=P'A'$，$\angle PCP'=\angle ACA'=60^{\circ}$，

$\therefore CA''=10$，$CP''=2CP$，$P''A''=2A'P'=2AP$，$\triangle PCP'$ 是等边三角形，

$\therefore PP'=P'C=P'P''$，$\angle PP'C=60^{\circ}$，

$\therefore \angle PP''P=\angle P''PP'=30^{\circ}$，

$\therefore \angle P''PC=90^{\circ}$，

$\therefore P''P=\sqrt{CP''^{2}-CP^{2}}=\sqrt{3}CP$，

$\therefore 2PA+PB+\sqrt{3}PC=A''P''+P''P+PB$，

$\therefore$ 当 A''，P''，P，B 共线时 $2PA+PB+\sqrt{3}PC$ 最小，最小为 $A''B$，

$\because \angle BCA''=\angle ACB+\angle ACA''=90^{\circ}$，

$\therefore A''B=\sqrt{BC^{2}+A''C^{2}}=2\sqrt{34}$，

$\therefore 2PA+PB+\sqrt{3}PC$ 的最小值为 $2\sqrt{34}$；

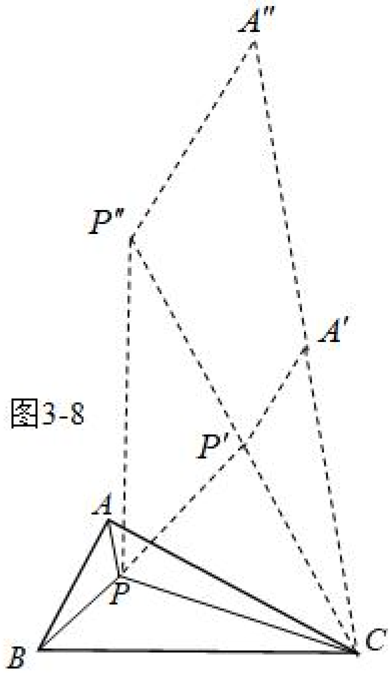


图3-8

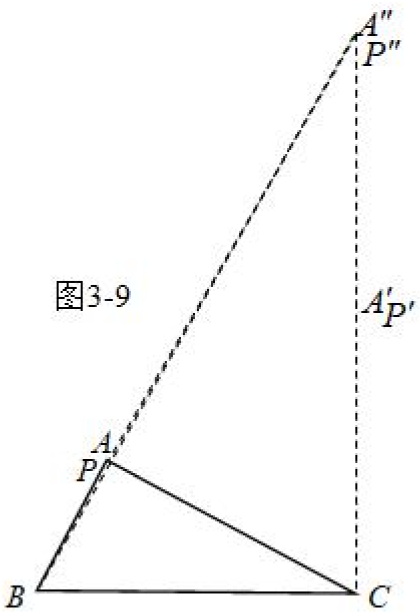


图3-9

（5）如图 3-10，将 $\triangle BPC$ 绕点 C 顺时针旋转 60°，得到 $\triangle CP'A'$，再将 $\triangle CP'A'$ 以点 C 为位似中心缩小 2 倍，得到 $\triangle CP''A''$，

同（4）原理可证得当 A''，P''，P，B 共线时 $\dfrac{1}{2}PA+PB+\dfrac{\sqrt{3}}{2}PC$ 最小，最小为 $A''B$，

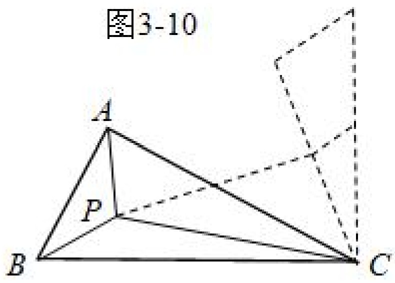


图3-10

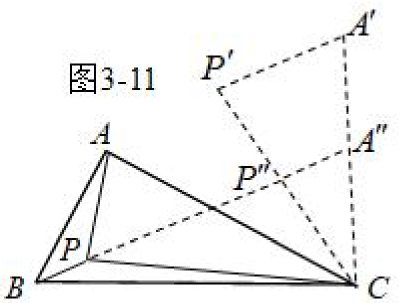


图3-11

$\because \angle BCA''=\angle ACB+\angle ACA''=90^{\circ}$，在 $Rt\triangle BCA''$ 中，$BC=6$，$CA''=\dfrac{1}{2}CA=\dfrac{5}{2}$

$BA''=\sqrt{BC^2+A''C^2}=\frac{13}{2}$，

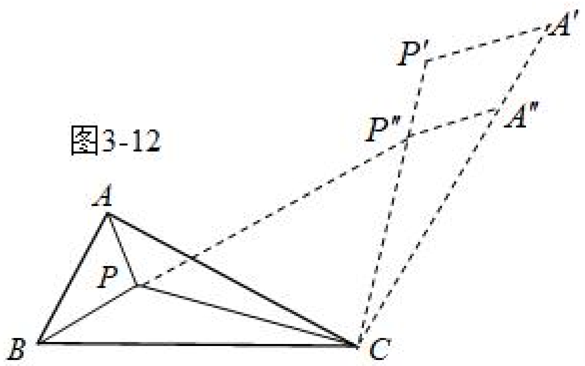
$\frac{1}{2}PA+PB+\frac{\sqrt{3}}{2}PC$ 最小为 $\frac{13}{2}$；

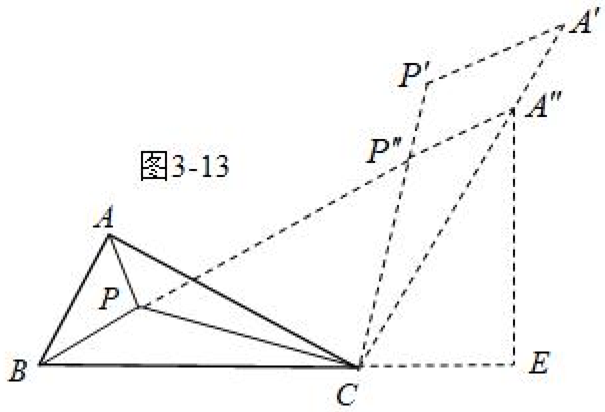
（6）∵ $2PA+4PB+2\sqrt{3}PC=4\left(\frac{1}{2}PA+PB+\frac{\sqrt{3}}{2}PC\right)$

∴由（5）得：$2PA+4PB+2\sqrt{3}PC$ 的最小值为 26；

（7）∵ $4PA+2PB+2\sqrt{3}PC=2(2PA+PB+\sqrt{3}PC)$

∴由（4）得 $4PA+2PB+2\sqrt{3}PC$ 的最小值为 $4\sqrt{34}$；





（8）如图 3-12，将 $\triangle BPC$ 绕点 C 顺时针旋转 90°，得到 $\triangle CP'A'$，再将 $\triangle CP'A'$ 以点 C 为位似中心缩小 $\frac{3}{4}$ 倍，得到 $\triangle CP''A''$，

同理可以证得当 A、P、P''、A''，共线时 $3PA+4PB+5PC$ 的值最小.

在 $\triangle BCA''$ 中，$\angle BCA''=\angle ACB+\angle ACA''=120^\circ$，$A''C=\frac{3}{4}CA=\frac{15}{4}$，

过点 A'' 作 $A''E\perp BC$ 交 BC 延长线于 E，

∴ $\angle A''CE=60^\circ$，

∴ $\angle CA''E=30^\circ$，

∴ $CE=\frac{1}{2}CA''=\frac{15}{8}$，

∴ $EA''=\sqrt{A''C^2-CE^2}=\frac{15\sqrt{3}}{8}$，$BE=BC+CE=6+\frac{15}{8}$，

∴ $BA''=\sqrt{A''E^2+BE^2}=\sqrt{\left(6+\frac{15}{8}\right)^2+\left(\frac{15\sqrt{3}}{8}\right)^2}=\frac{21}{4}$，$3PA+4PB+5PC$ 的最小值为 21 .