2025年寒假八下数学讲义

Contents

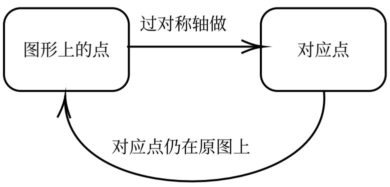
第一讲：平行四边形的性质 1

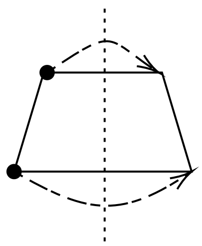
1.1 轴对称与中心对称

八上部分，我们已经学习了两大对称图形中的一种 – 轴对称图形。简单说，轴对称图形就是沿着一条直线翻折后，直线两边的部分能够完全重合的图形，建立在全等、垂直平分线的基础上，我们可以很容易的发现轴对称图形的性质：**一轴二点垂直等距**:

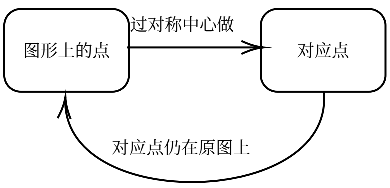
- “一轴二点”：对称轴和对称轴两侧的对应点
- “等距”：对应点到对称轴的距离相等
- “垂直”：对应点的连线垂直于对称轴

基于这样的“性质”，我们就可以发展出对轴对称图形的“判定”。





由上面的分析，判断一个图形是否“轴对称”图形的关键是，**对应点是否在原图上**。我们借由这一判定规则发现等腰三角形、正方形、矩形，都是轴对称图形。当然，自然界还有一种对称 – “中心对称”！顾名思义，这个图形不是关于一个轴，而是关于一个中心点对称。



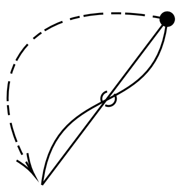


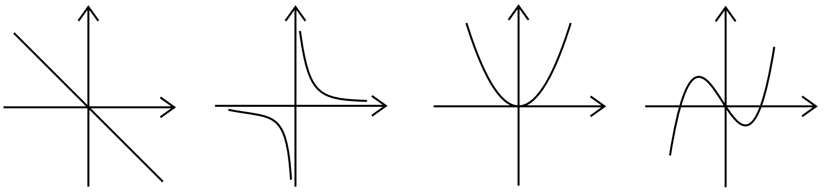
Figure 1.1: 扑克牌中的中心对称

Definition 1.1.1 **轴对称图形**：图形上任意一点，关于对称轴的对应点（等效于沿对称轴翻折）在原图上。

Definition 1.1.2 **中心对称图形**：图形上任意一点，关于对称中心的对应点（等效于旋转 180^o）在原图上。

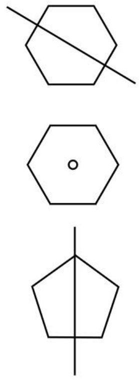
Example 1.1.1 “翻折”产生“轴对称”；“旋转”产生“中心对称”！不论轴对称还是中心对称，在数学和物理中都有着广泛的应用，比如下面四个函数图像。观察图像，识别抽对称或中心对称。

对应点是否在原图上
- 关于线对称
- 关于点对称

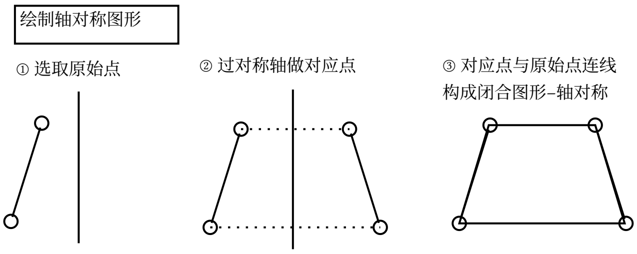


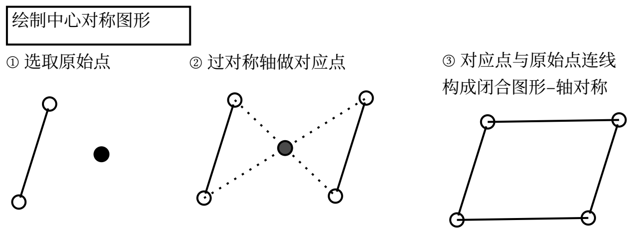
Example 1.1.2 图中其中既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）

A.  B.  C.  D. 



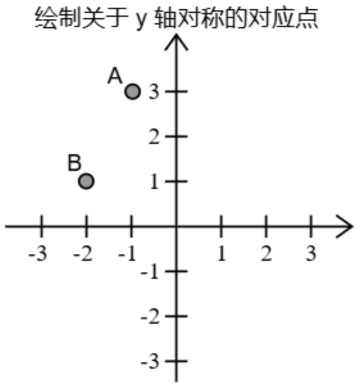
1.2 绘制轴对称和中心对称图形

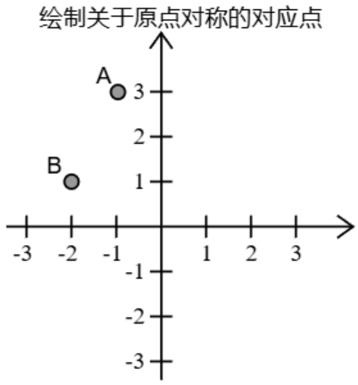




1. 第一步：确定对称轴或对称中心。
2. 第二步：根据对称轴或对称中心绘制对应点。
3. 第三步：连接对应点，完成对称图形。

Example 1.2.1 以下坐标系中，我们已经预先设计好了两个点，请分别以 y 轴为对称轴，以原点为对称中心，画出对称点。





【复习】体会中点坐标公式对于坐标系内的轴对称和中心对称的重要作用！

- 已知原始点和对称中心（对称轴），求对应点；
  已知 A(-1, 3), 原点 O(0,0), 对应点 A' =______
  进一步，已知 A(m,n)，原点 O(a,b)，对应点 A'=______

- 已知原始点和对应点，求对称中心（对称轴）。
  已知 A(-1, 3), 对应点 A'(1,-3), 对称中心 =______
  进一步，已知 A(m,n)，对应点 A'(a,b)，对称中心 =______

【引入】请进一步思考下面 3 个问题:

- 你绘制图形的过程中有没有注意到“中点”的出现，谁是中点，中点坐标公式是什么？
- 你绘制的图形是轴对称或者中心对称图形么，请根据上面介绍的对称规则回答。
- 在第二张图形中有没有发现全等三角形的踪迹？由三角形全等我们可以得到哪些推论？
- 连接 AA', BB' 我们可以得到一个平行四边形，由以上这些问题，你能推断出平四形的哪些性质？

1.3 平行四边形的性质及重要推论—“22234”

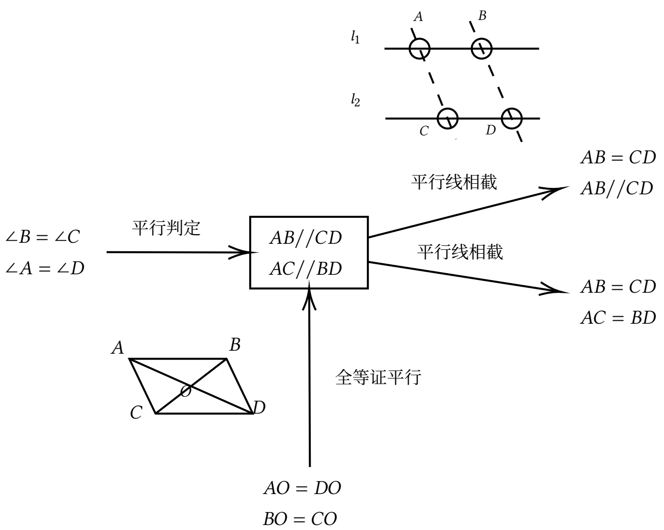
为什么要研究平四的性质？为了判定和证明一个图形是平四！
就像我们八上学过的“三线合一”以及“斜中定理”，他们原本是等腰三角形和直角三角形的**性质**，但我们可以**逆用性质**来**判定**一个三角形是否等腰三角形或者直角三角形.
由“性质”到“判定”，是我们研究平行线、三角形、四边形、圆形四大图形的基本思路。

Definition 1.3.1 平行四边形的定义
两组对边 分别平行的四边形。用“▱”表示。例如: 平行四边形 *ABCD* 表示为“▱*ABCD*”, 读作“平行四边形 *ABCD*”

“平行线间的平行线段相等”。平行四边形从性质到判定的所有定理，都可以通过定义和平行线间线段性质来推导。

Theorem 1.3.1 平行四边形的性质—*”222”*

- 性质 *1*-对边：
  - *1* 组对边**平行且相等**
  - *2* 组对边**平行**
  - *2* 组对边**相等**
- 性质 *2*-对角：*2* 组对角**相等**
- 性质 *3*-对角线：*2* 条对角线**相互平分**
- 性质 *4*-临边：无此性质
- 性质 *5*-临角：无关性质



平行四边形的性质最容易与**等腰梯形** 混淆，我们通过下面两道题，来研究等腰梯形的性质！

在四边形 ABCD 中，AD//BC

如图 1，若 $AB=CD$，
求证：$\angle B=\angle C$.

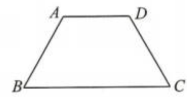


图 1

结论：一边平行 + 另一边相等 $\not\Rightarrow$ 平四

如图 2，若 $BD=AC$，
求证：$AB=CD$.

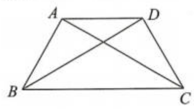


图 2

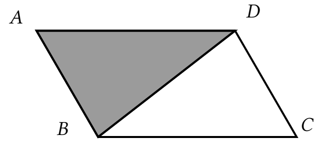
结论：一边平行 + 对角线相等 $\not\Rightarrow$ 平四

Theorem 1.3.2 平行四边形重要推论：对角线与过 O 直线—“4”

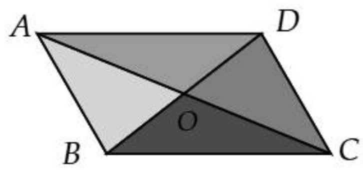
- 结论：单对角线分两等—全等
- 结论：双对角线分四等—等面积
- 结论：过 O 直线与对角线成全等
- 结论：过 O 直线平分面积与周长

Theorem 1.3.3 平行四边形重要推论：关于面积—“3”

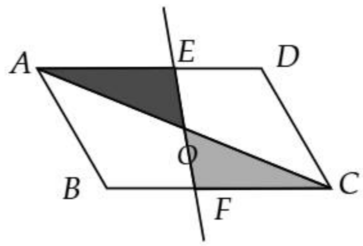
- 结论：十字平行分
- 结论：顶点对边分
- 结论：四顶点加一点分



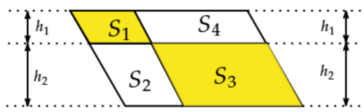
对角线推论 1：$\triangle ABD \cong \triangle BDC$



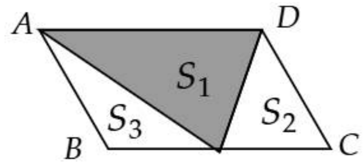
面积推论 2：$S_{\triangle ABO} = S_{\triangle ADO} = S_{\triangle DOC} = S_{\triangle BOC}$



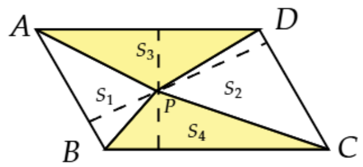
过 O 直线推论 3：$\triangle AEO \cong \triangle CFO$



面积推论 4：$S_1 \times S_3 = S_2 \times S_4$



过 O 直线推论 5：$S_1 = S_2 + S_3 = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$



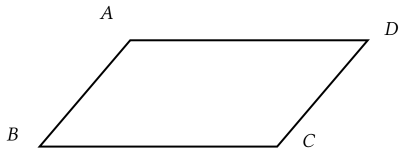
面积推论 6：$S_1 + S_2 = S_3 + S_4 = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$

1.4 课堂随练

本节的重点在于:“两条对边，一个对称中心，两条对角线”，理解**对边平行** 是平四的核心性质, **对称中心** 是平四最重要的几何中心 (作图、面积题常用)，**对角线** 对于整个四边形的分割起核心作用 (证明题常用)。

1.4.1 基础：性质、角度、长度、面积、坐标

Example 1.4.1 如图所示,已知四边形 ABCD,从 ⑴AB//DC;⑵AB=DC;⑶AD//BC；⑷AD=BC；⑸∠A=∠C；⑹∠B=∠D 中取两个条件加以组合，能推出四边形 ABCD 是平行四边形的有哪几种情形？请写出具体组合。



总共 9 种：① ⑴，⑶；② ⑵，⑷；③ ⑸，⑹；④ ⑴，⑵；⑤ ⑶，⑷；⑥ ⑴，⑸；⑦ ⑴，⑹；⑧ ⑶，⑸；⑨ ⑶，⑹.

Example 1.4.2 有下列说法:
① 平行四边形具有四边形的所有性质;
② 平行四边形是中心对称图形;
③ 平行四边形的任一条对角线可把平行四边形分成两个全等的三角形;
④ 平行四边形的两条对角线把平行四边形分成 4 个面积相等的小三角形.
其中正确说法的序号是（ ）
A. ①②④ B. ①③④ C. ①②③ D. ①②③④

【答案】D 【分析】本题考查平行四边形的性质，根据平行四边形的性质逐个判断即可得到答案. 【详解】解：平行四边形具有四边形的所有性质，故 ① 正确，平行四边形是中心对称图形，故 ② 正确，平行四边形的任意一条对角线可把平行四边形分成两个全等的三角形，故 ③ 正确，平行四边形的两条对角线把平行四边形分成 4 个面积相等的小三角形，故 ④ 正确，故选：D.

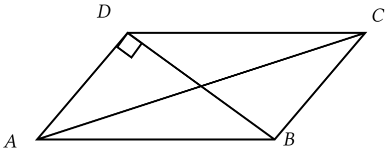
Example 1.4.3 下面关于平行四边形的性质描述正确的是（ ）
A. 平行四边形的对称中心是对角线的交点
B. 平行四边形的对称轴是对角线所在直线

C. 平行四边形不是中心对称图形

D. 平行四边形既不是中心对称图形，也不是轴对称图形

Example 1.4.4 在平行四边形 ABCD 中，$\angle B - \angle A = 20^o$ 则 $\angle D$ 的度数是?

Example 1.4.5 如图，在平行四边形 ABCD 中，已知 ∠ODA=90°，AC=10cm，BD=6cm，则 AD 的长为（ ）



A. 4cm B. 5cm C. 6cm D. 8cm

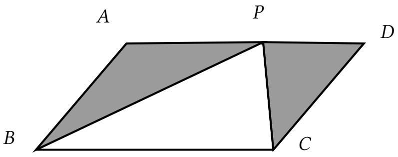
故答案为: A

Example 1.4.6 在平行四边形 ABCD 中，AD=10，AE 平分 ∠BAD 交 BC 于点 E，DF 平分 ∠ADC 交 BC 于点 F，且 EF=2，则 AB 的长为 ( )

A. 4 B. 6 C. 6 或 8 D. 4 或 6

当点 F 在点 E 的左侧时：BC=BE-EF+CF=2AB-EF=10，⊠AB=6；
当点 F 在点 E 的右侧时，BC=BE+EF+CF=2AB+EF=10，⊠AB=4

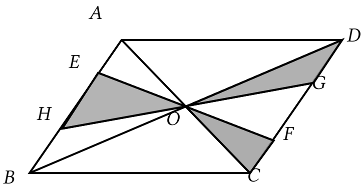
Example 1.4.7 如图, 在平行四边形 ABCD 中, P 是 AD 边上一点. 已知 $S_{\triangle ABP} = 3.5cm^2$，$S_{\triangle CDP} = 2.5cm^2$，则 ABCD 的面积是 ______cm2.



故答案为: 12

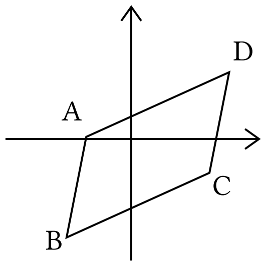
Example 1.4.8 如图，平行四边形 ABCD 的对角线 AC，BD 相交于点 O，EF，GH 过点 O，且点 E，H 在边 AB 上，点 G，F 在边 CD 上，则阴影部分的面积与 ABCD 的面积比值是（　　）.

A. 1/2 B. 1/3 C. 1/4 D. 1/5



阴影部分的面积与 ⊠ABCD 的面积比值是 1/4．故选：C.

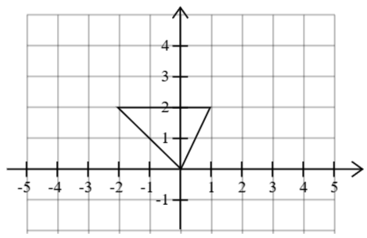
Example 1.4.9 如图, 在平面直角坐标系中, 若平行四边形 ABCD 的三个顶点的坐标分别是 A(-1,0)、B(-2,-3)、D(3,2)，则顶点 C 的坐标是 ______.



故答案为: (2,-1).

Example 1.4.10 以三角形的三个顶点作平行四边形, 最多可以作（ ）
A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

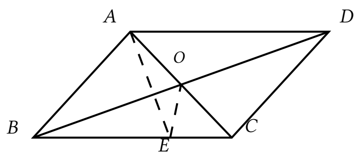
【探索】请你尝试利用下图坐标系，画出符合要求的平行四边形。【注意】这个问题叫平四存在性问题，是八下其中的常考内容，题目会要求你回答能与已知三点构成平四的第四个点的坐标。



答案 B，3 个

1.4.2 提高：性质相关证明问题

Example 1.4.11 如图，平行四边形 ABCD 的对角线 AC，BD 交于点 O，AE 平分 ∠BAD，交 BC 于点 E，且 ∠ADC=60°, $AB = \frac{1}{2}BC$，连接 OE，下列结论
①∠CAD=30°；
②OE⊥AC；
③$BD = \sqrt{7}AB$；
④$S_{▱ABOE} = \frac{3}{2}S_{\triangle OCD}$；
其中成立的个数是（ ）
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个



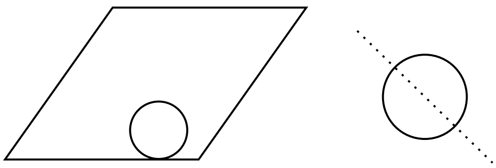
D 【分析】结合平行四边形的性质可证明 △ABE 为等边三角形，由 BC=AD=2AB，可判断 ①，由 EC=AE，AO=CO，得 OE⊥AC，故 ② 正确，设，则 BC=2x，对"Rt"△BAC，"Rt"△ABO 运用勾股定理即可判断 ③，利用三角形中线的性质结合三角形的面积可求解判断 ④.

1.4.3 提高：绘图专题

Example 1.4.12 [1] 在一块平行四边形的稻田里有一圆形的水池，为了给稻田浇水，并使稻田里的水量趋于均匀，现要从水池引一条笔直的水渠 (水渠的宽度忽略不计)，请你设计一种方案，使水渠两侧的稻田面积相等，并说明你的理由.

1: 【提示】

- 过圆心的直线总是平分圆的周长和面积, 实际上任何一个中心对称图形都有这个性质: 过对称中心的直线，平分周长和面积。
- 想想如果一条线要同时平分两个中心对称图形的面积和周长, 该怎么办?



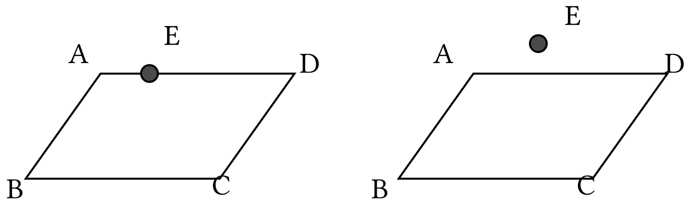
Example 1.4.13 [2] 已知平行四边形 ABCD 是中心对称图形，点 E 是平面上一点，请仅用无刻度直尺画出点 E 关于 ABCD 对称中心的对称点 F.

(1) 如图 1，点 E 在 ABCD 的边 AD 上;

(2) 如图 2，点 E 在 ABCD 外.

2: 【提示】

- 平四作图最常用的就是“对称中心”，经常构造新的中心对称图形解决问题
- 如何找对称中心就是需要考虑的第一步, 第二步是如何构造中心对称图形
- 对于“找点”，两线交一点；对于“找线”，两点定一线。



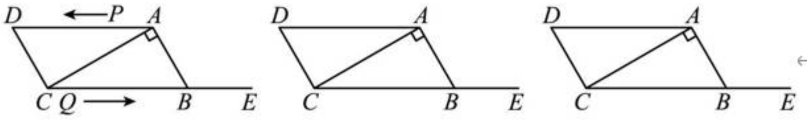
1.4.4 提高：动点问题

Example 1.4.14 如图，在平行四边形 ABCD 中，∠BAC=90°，∠B=60°，AB=6．动点 P 从点 A 出发沿 AD 以 1cm/s 速度向终点 D 运动，同时点 Q 从点 C 出发，以 4cm/s 速度沿射线 CB 运动，当点 P 到达终点时，点 Q 也随之停止运动，设点 P 运动的时间为 t 秒.

(1) 用含 t 的代数式表示 BQ= ______；

(2) 当 PQ⊥BC 时，求 t 的值；

(3) 请问是否存在 t 的值，使得 A，B，P，Q 为顶点的四边形为平行四边形？若存在，求出 t 的值；若不存在，请说明理由.



(1)BQ=12-4t(0≤t≤3) 或 BQ=4t-12(3<t≤12) (2)9/5, AP=QH, t=9-4t, t=9/5 (3) 存在, 12/5 或 4, (1) 当 AB 为边时, AP=BQ, t=12-4t, 四边形 ABQP 是平行四边形, (2) 当 AB 为对角线时, AP=BQ, , t=4t-12, 四边形 APBQ 是平四。

1.5 课堂内容回忆

姓名: ____________ **日期:** ____________

Exercise 1.5.1 课堂回忆

1. 我们一开始回忆了八上的什么概念____________，他的定义是什么？ __________________.
2. 他与我们今天学习的内容有什么区别，今天学习的对称叫什么，定义是什么 __________________.

Exercise 1.5.2 课堂回忆

1. 已知轴对称图形上的点坐标（a,b）及其对应点（m,n），能否求出对称轴的表达式 ____________
2. 已知中心对称图形上的点坐标 (a,b) 及其对应点（m,n）能否求出对称中心的坐标 ____________

Exercise 1.5.3 课堂回忆
如何绘制轴对称图形，以及中心对称图形。以一条线段为例进行说明（请绘制出坐标系、及任意一条线段并绘图说明）。

Exercise 1.5.4 课堂回忆

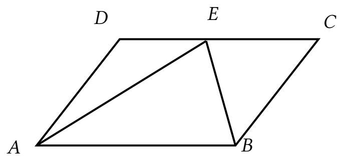
1. 平行四边形的定义什么？ __________________
2. 平行四边形的性质,可以归结为两个核心性质,他们是 ____________ 和 ____________
3. 其中“两组对边分别平行”可以推出：
   (1) ____________(2) ____________(3) ____________

Exercise 1.5.5 课堂回忆
关于平四的“4+3”个重要推论 (请绘图说明):

1.6 课后作业

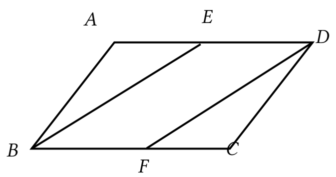
Exercise 1.6.1 平行四边形具有而一般四边形不具有的性质是（ ）
A. 外角和等于
B. 对角线互相平分
C. 内角和等于
D. 有两条对角线

Exercise 1.6.2 如图，在平行四边形 ABCD 中，$\angle D = 100^o$，∠DAB 的平分线 AE 交 CD 于点 E，连接 BE, 若 $AE = AB$，则 ∠EBC 的度数为____.

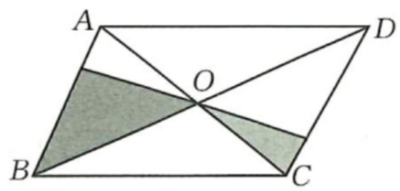


故答案为: 30 度

Exercise 1.6.3 如图，四边形 ABCD 是平行四边形，∠ABC=70°，BE 平分 ∠ABC 且交 AD 于点 E，DF//BE 且交 BC 于点 F，则 ∠ADF 的度数为______.



Exercise 1.6.4 如图, 四边形 ABCD 是平行四边形. 若 $S_{ABCD} = 12$, 则 $S_{阴影} =$ ______.



阴影面积 =3

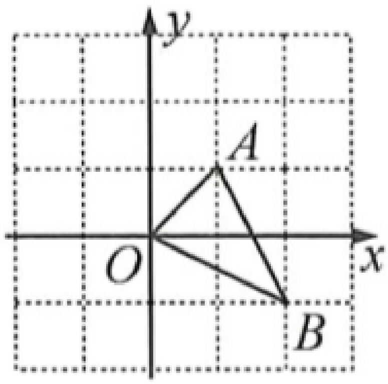
Exercise 1.6.5 在平面直角坐标系里，A(1,0),B(0,2),C(-4,2)，若以 A、B、C、D 为顶点的四边形是平行四边形，则点 D 的坐标为______.

Exercise 1.6.6 在平行四边形 ABCD 中，对角线 AC，BD 相交于点 O, 以点 O 为坐标原点建立平面直角坐标系, 其中 A(a,b), B(a-1,b+2), C(3,1)，则点 D 的坐标是______.

故答案为:（4,-1）

Exercise 1.6.7

如图, 在平面直角坐标系中, $A(1,1)$, $B(2,-1)$, 且以 A,B,O,C 为顶点的四边形为平行四边形, 则点 C 的坐标为______



Exercise 1.6.8 如图，在平行四边形 ABCD 中，对角线 AC，BD 交于点 O，AB=2, , $\angle ABC=60^{\circ}$，直线 EF 过点 O，连接 DF，交 AC 于点 G，连 BG，△DCF 的周长等于 6，下列说法正确的个数为（）

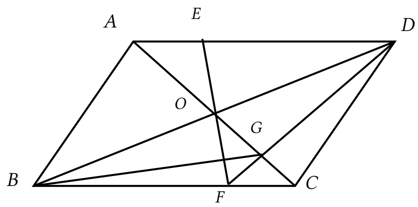
①$\angle EOD=90^{\circ}$；

② $S_{\triangle DFC}=2S_{\triangle AEO}$

③ $S_{\triangle ABG}+S_{\triangle DGC}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$；

④ $AE=\frac{6}{5}$.

A．1 个 B．2 个 C．3 个 D．4 个



Exercise 1.6.9 如图，E 是 ▱ ABCD 内一点，ED⊥CD，EB⊥BC，∠AED=135°，连接，AC，BD，下列结论：

①∠ADE=∠ABE；

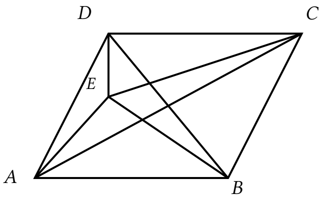
②△BCE 为等腰直角三角形；

③$DE+AB=\sqrt{2}BD$；

④ $AE^2+AB^2=AC^2$,

其中正确的个数有（）

A．1 个 B．2 个 C．3 个 D．4 个



【答案】C【分析】① 延长 DE 交 AB 于点 F，根据平行四边形性质和四边形内角和即可得到 ∠ADE=∠ABE；② 先证明 △ADF⊠△EBF，得 AD=BE，又有 AD=BC，可得 BE=BC，即可得到 △BCE 为等腰直角三角形；③ 过点 B 作交 DC 延长线于点 G，证明 △BDE⊠△BCG，再根据勾股定理及等腰直角三角形的性质，可得 DE+AB=√2 BD 成立；④ 过点 C 作 CH⊥AB 于，根据勾股定理即可证明 $AC^2 = AH^2 + CH^2 = (AB + \sqrt{2}/2AE)^2 + (AB - \sqrt{2}/2AE)^2 = 2AB^2 + AE^2$，可知结论不成立.

Exercise 1.6.10 仅用无刻度直尺作图：

(1) 如图 1, 点 A, B, C, D 均在格点上, 在 AC 上找点 E, 使 DE//AB;
(2) 如图 2, 点 A, B, C 均在格点上, 作平行四边形 ABCD, 再在 CD 上作点 N , 使 CN = AM;
(3) 如图 3, 过点 C 作 CD ⊥ AB;
(4) 如图 4, 作点 EF=$\sqrt{10}$（每个小正方形的边长为 1）.

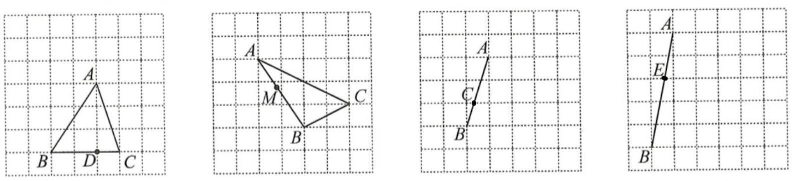


图 1 图 2 图 3 图 4

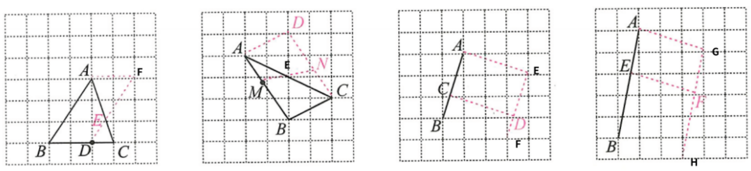


图 1 图 2 图 3 图 4

1. 3*2 长方形做平行找到格点F
2. 与 AC 交于E

1. 利用BC的1*2格点，找到AD的D点
2. 连接CD边，对角线BD与AC交于点E
3. 延长 ME, 交CD于点N

1. 利用AB格点3*1，找到AE⊥AB BF⊥AB
2. 连接EF，交B点横线于D，可证CDAE为平四
3. 连接CD，可知CD⊥EF

1. 利用勾股，1，3，√10，做AG=BH=√10
2. 连接GH交中间横线于F点
3. 可证 AEGF 平四
3. 连接EF，知EF=√10

Exercise 1.6.11

如图1, ▱$ABCD$, O 为AB 中点, 过点B 作AC 的平行线.

变式.依照上述方法, 如图2, 3, 点A, B 在格点上, 点C 在格线上, 过点C 作 $CD//AB$.

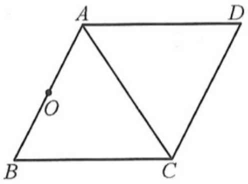


图 1

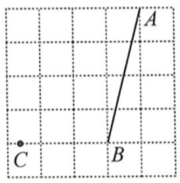


图 2

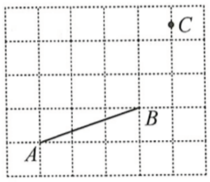


图 3

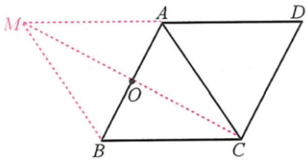


图 1

1. 延长DA
2. 延长CO交DA延长线于M
3. 连接MB

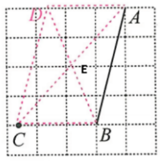


图 2

1. 连接AC交中间横线于E
2. 连接BE交A所在横线于D
3. 连接CD

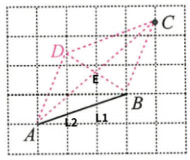


图 3

1. 连接 AC 因为AC所在“横坐标”的中间线为L1, 所以利用L1于AC交点E
2. 连接并延长 BE交AC“横坐标”的1/4 线位置L2 于 D 点