

2024 年寒假八下数学讲义

逮着一只大白

January 14, 2025

Contents

Contents	2
1 平行四边形	1
1.1 回忆：轴对称图形	1
1.2 绘制轴对称和中心对称图形	3
1.3 平行四边形的性质	4
1.4 平行四边形的性质—课时练习	7
1.4.1 基础：利用性质求角度、长度、面积、坐标	7
1.4.2 拔高：性质相关证明问题	10
1.5 课堂内容回忆—需上交	12

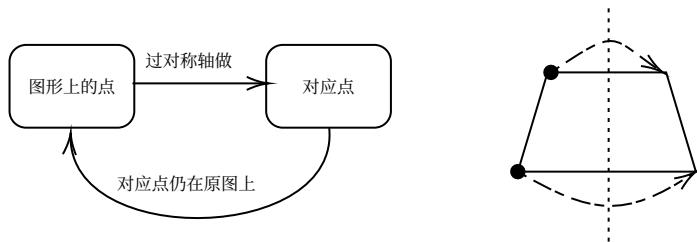
平行四边形

1.1 回忆：轴对称图形

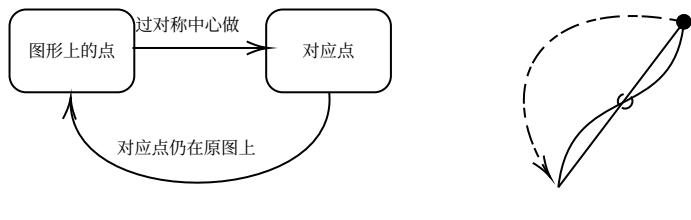
八上部分，我们已经学习了两大对称图形中的一种 — 轴对称图形。简单说，轴对称图形就是沿着一条直线翻折后，直线两边的部分能够完全重合的图形，建立在全等、垂直平分线的基础上，我们可以很容易的发现轴对称图形的性质：一轴二点垂直等距：

- ▶ “一轴二点”：对称轴和对称轴两侧的对应点
- ▶ “等距”：对应点到对称轴的距离相等
- ▶ “垂直”：对应点的连线垂直于对称轴

基于这样的“性质”，我们就可以发展出对轴对称图形的“判定”。



由上面的分析，判断一个图形是否“轴对称”图形的关键是，对应点是否在原图上。我们借由这一判定规则发现等腰三角形、正方形、矩形，都是轴对称图形。当然，自然界还有一种对称 — “中心对称”！顾名思义，这个图形不是关于一个轴，而是关于一个中心点对称。



Definition 1.1.1 轴对称图形：图形上任意一点，关于对称轴的对应点（等效于沿对称轴翻折）在原图上。

Definition 1.1.2 中心对称图形：图形上任意一点，关于对称中心的对应点（等效于旋转 180° ）在原图上。

1.1 回忆：轴对称图形	1
1.2 绘制轴对称和中心对称图形	3
1.3 平行四边形的性质	4
1.4 平行四边形的性质—课时练习	7
1.4.1 基础：利用性质求角度、长度、面积、坐标	7
1.4.2 拔高：性质相关证明问题	10
1.5 课堂内容回忆—需上交	12



Figure 1.1: 扑克牌中的中心对称

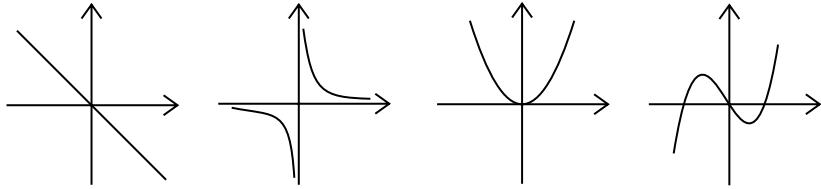
对应点是否在原图上



“翻折”产生“轴对称”；“旋转”产生“中心对称”！不论轴对称还是中心对称，在数学和物理中都有着广泛的应用，比如下面四个函数图像。观察图像，识别轴对称或中心对称。

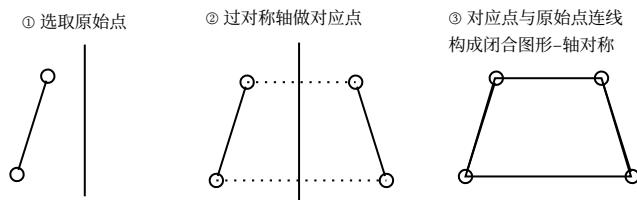
体会中点坐标公式对于坐标系内的轴对称和中心对称的重要作用！

- ▶ 已知对称中心（对称轴），求对应点；
- ▶ 已知对应点，求对称中心（对称轴）。

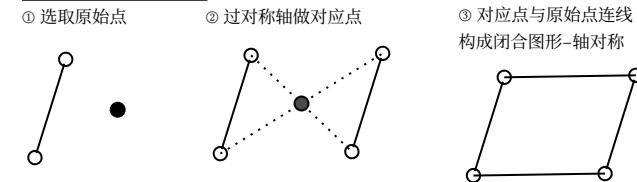


1.2 绘制轴对称和中心对称图形

绘制轴对称图形



绘制中心对称图形



Example 1.2.1 以下坐标系中，我们已经预先设计好了两个点，请分别以 y 轴为对称轴，以原点为对称中心，画出对称点。并且在这个过程中体会：

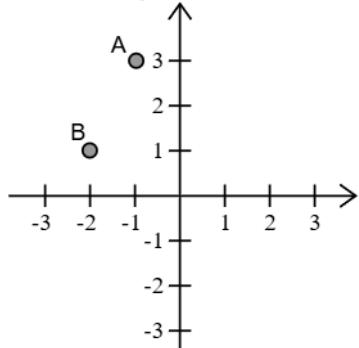
1. 中点坐标公式的运用？
2. 平行的判定和性质的运用？
3. 每个对应点是如何绘制出的？

1. 第一步：确定对称轴或对称中心。
2. 第二步：根据对称轴或对称中心绘制对应点。
3. 第三步：连接对应点，完成对称图形。

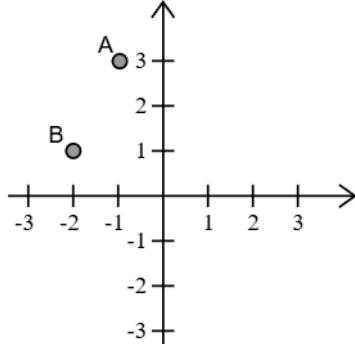
请进一步思考下面 3 个问题：

- ▶ 你绘制图形的过程中有没有注意到“中点”的出现，谁是中点，中点坐标公式是什么？
- ▶ 你绘制的图形是轴对称图形么，请根据上面介绍的轴对称规则回答。
- ▶ 请根据初一初二所学内容，总结这种图形的特点。

绘制关于 y 轴对称的对应点



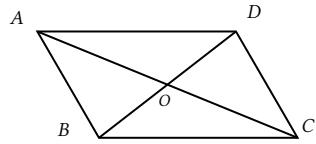
绘制关于原点对称的对应点



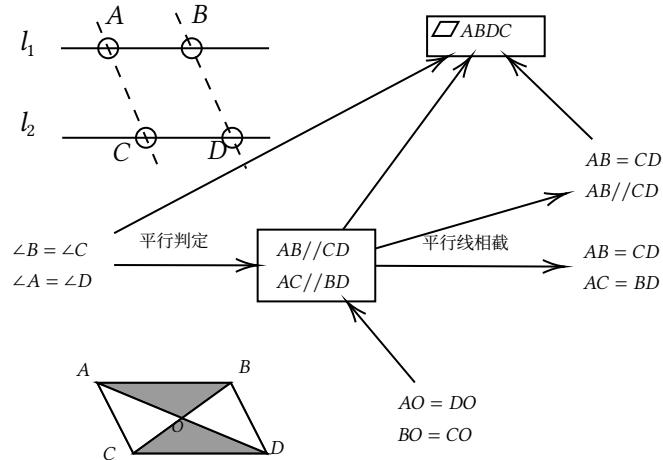
1.3 平行四边形的性质

Definition 1.3.1 平行四边形的定义

两组对边分别平行的四边形。用“ \square ”表示。例如：平行四边形 $ABCD$ 表示为 “ $\square ABCD$ ”，读作“平行四边形 $ABCD$ ”



“平行线间的平行线段相等”。平行四边形从性质到判定的所有定理，都可以通过定义和平行线间线段性质来推导。



Theorem 1.3.1 平行四边形的性质

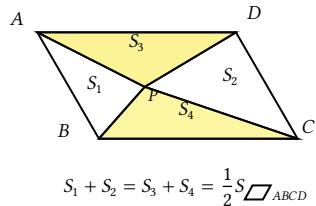
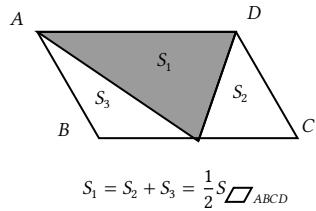
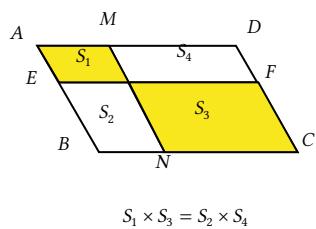
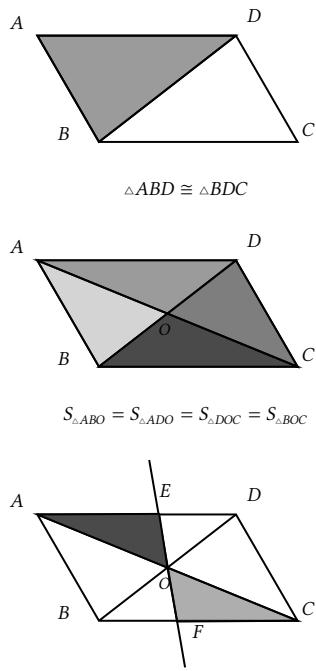
- ▶ 性质 1-对边：1 组对边平行且相等，或 2 组对边平行，或 2 组对边相等
- ▶ 性质 2-对角：2 组对角相等
- ▶ 性质 3-临边：无关
- ▶ 性质 4-临角：无关
- ▶ 性质 5-对角线：对角线相互平分
- ▶ 性质 6-对称性：平行四边形不是轴对称图形，是中心对称图形

Theorem 1.3.2 平行四边形重要结论：对角线与过 O 直线

- ▶ 结论：单对角线分全等
- ▶ 结论：双对角线分四个等面积三角形
- ▶ 结论：过 O 直线与对角线形成全等三角形

Theorem 1.3.3 平行四边形重要结论：关于面积

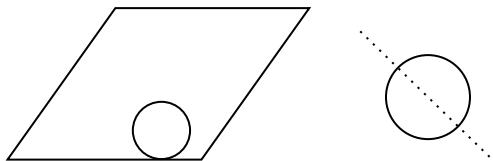
- ▶ 结论：过 O 直线平分面积与周长
- ▶ 结论：如图
- ▶ 结论：如图
- ▶ 结论：如图



Example 1.3.1 在一块平行四边形的稻田里有一圆形的水池，为了给稻田浇水，并使稻田里的水量趋于均匀，现要从水池引一条笔直的水渠（水渠的宽度忽略不计），请你设计一种方案，使水渠两侧的稻田面积相等，并说明你的理由。

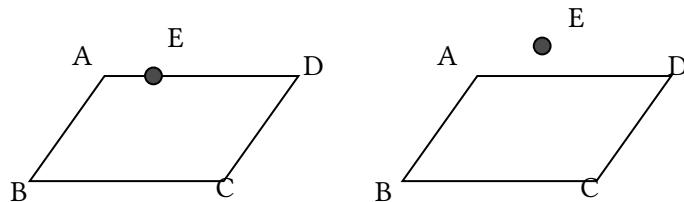
【提示】

过圆心的直线总是平分圆的周长和面积，实际上任何一个中心对称图形都有这个性质：过对称中心的直线，平分周长和面积。



Exercise 1.3.1 已知平行四边形 ABCD 是中心对称图形，点 E 是平面上一点，请仅用无刻度直尺画出点 E 关于 ABCD 对称中心的对称点 F。

- (1) 如图 1，点 E 在 ABCD 的边 AD 上；
- (2) 如图 2，点 E 在 ABCD 外。

**Example 1.3.2**

- (1) 如图 1，点 A, B, C, D 均在格点上，在 AC 上找点 E，使 $DE \parallel AB$ ；
- (2) 如图 2，点 A, B, C 均在格点上，作平行四边形 ABCD，再在 CD 上作点 N，使 $CN = AM$ ；
- (3) 如图 3，过点 C 作 $CD \perp AB$ ；
- (4) 如图 4，作点 F，使得 $EF = \sqrt{10}$ （每个小正方形的边长为 1）。

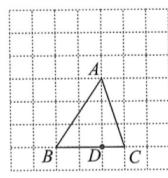


图 1

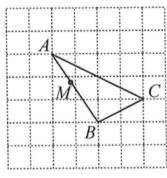


图 2

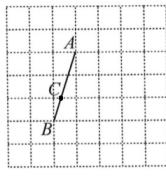


图 3

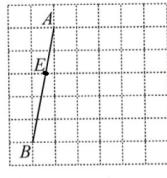


图 4

Example 1.3.3

如图1, $\square ABCD$, O 为 AB 中点, 过点 B 作 AC 的平行线.

变式. 依照上述方法, 如图2, 3, 点 A, B 在格点上, 点 C 在格线上, 过点 C 作 $CD // AB$.

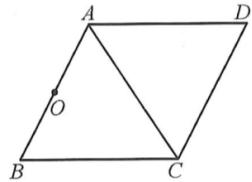


图 1

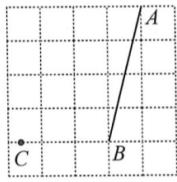


图 2

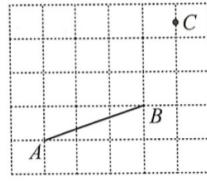
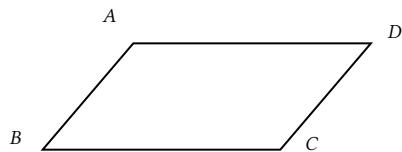


图 3

Example 1.3.4 如图所示, 已知四边形 $ABCD$, 从 (1) $AB // DC$; (2) $AB = DC$; (3) $AD // BC$; (4) $AD = BC$; (5) $\angle A = \angle C$; (6) $\angle B = \angle D$ 中取两个条件加以组合, 能推出四边形 $ABCD$ 是平行四边形的有哪几种情形? 请写出具体组合。



1.4 平行四边形的性质—课时练习

1.4.1 基础：利用性质求角度、长度、面积、坐标

Example 1.4.1 有下列说法：① 平行四边形具有四边形的所有性质；
② 平行四边形是中心对称图形；③ 平行四边形的任一条对角线可把平行四边形分成两个全等的三角形；④ 平行四边形的两条对角线把平行四边形分成 4 个面积相等的小三角形。其中正确说法的序号是（ ）

- A. ①②④ B. ①③④ C. ①②③ D. ①②③④

Exercise 1.4.1 下面关于平行四边形的性质描述正确的是（ ）

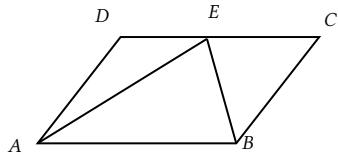
- A. 平行四边形的对称中心是对角线的交点
B. 平行四边形的对称轴是对角线所在直线
C. 平行四边形不是中心对称图形
D. 平行四边形既不是中心对称图形，也不是轴对称图形

Exercise 1.4.2 平行四边形具有而一般四边形不具有的性质是（ ）

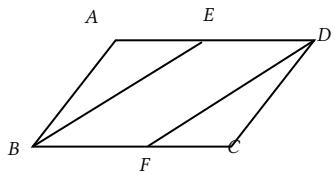
- A. 外角和等于
B. 对角线互相平分
C. 内角和等于
D. 有两条对角线

Example 1.4.2 在平行四边形 ABCD 中， $\angle B - \angle A = 20^\circ$ 则 $\angle D$ 的度数是？

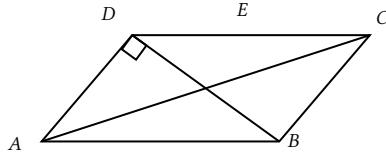
Exercise 1.4.3 如图, 在平行四边形 ABCD 中, $\angle D = 100^\circ$, $\angle DAB$ 的平分线 AE 交 CD 于点 E, 连接 BE, 若 $AE = AB$, 则 $\angle EBC$ 的度数为 ____.



Exercise 1.4.4 如图, 四边形 ABCD 是平行四边形, $\angle ABC=70^\circ$, BE 平分 $\angle ABC$ 且交 AD 于点 E, DF//BE 且交 BC 于点 F, 则 $\angle ADF$ 的度数为 ____.



Exercise 1.4.5 如图, 在平行四边形 ABCD 中, 已知 $\angle ODA=90^\circ$, $AC=10\text{cm}$, $BD=6\text{cm}$, 则 AD 的长为 ()



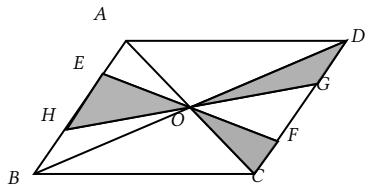
- A. 4cm B. 5cm C. 6cm D. 8cm

Exercise 1.4.6 在平行四边形 ABCD 中, $AD=10$, AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于点 E, DF 平分 $\angle ADC$ 交 BC 于点 F, 且 $EF=2$, 则 AB 的长为 ()

- A. 4 B. 6 C. 6 或 8 D. 4 或 6

Example 1.4.3 如图, 平行四边形 ABCD 的对角线 AC, BD 相交于点 O, EF, GH 过点 O, 且点 E, H 在边 AB 上, 点 G, F 在边 CD 上, 则阴影部分的面积与 ABCD 的面积比值是 ().

- A. $1/2$ B. $1/3$ C. $1/4$ D. $1/5$

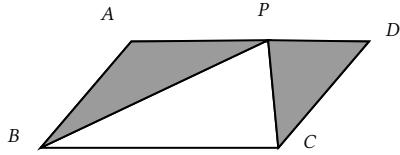


Example 1.4.4 以三角形的三个顶点作平行四边形，最多可以作（ ）

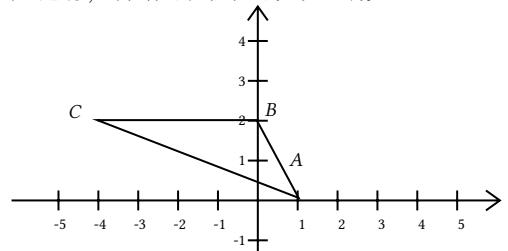
- A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个

Exercise 1.4.7 如图，在平行四边形 ABCD 中，P 是 AD 边上一点。

已知 $S_{\triangle ABP} = 3.5 \text{ cm}^2$, $S_{\triangle CDP} = 2.5 \text{ cm}^2$, 则 ABCD 的面积是 _____ cm^2 .



【探索】 请你尝试在利用下图坐标系，画出符合要求的平行四边形，并体会中位线的证明。



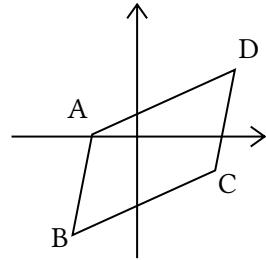
Example 1.4.5 在平行四边形 ABCD 中，对角线 AC, BD 相交于点 O，

以点 O 为坐标原点建立平面直角坐标系，其中 A(a, b), B(a-1, b+2),

C(3, 1)，则点 D 的坐标是 _____.

Exercise 1.4.8 如图，在平面直角坐标系中，若平行四边形 ABCD

的三个顶点的坐标分别是 A(-1, 0)、B(-2, -3)、D(3, 2)，则顶点 C 的坐标是 _____.



Exercise 1.4.9 在平面直角坐标系里，A(1, 0), B(0, 2), C(-4, 2)，若以 A、

B、C、D 为顶点的四边形是平行四边形，则点 D 的坐标为 _____.

1.4.2 拔高：性质相关证明问题

Example 1.4.6 如图，平行四边形 ABCD 的对角线 AC, BD 交于点 O, AE 平分 $\angle BAD$, 交 BC 于点 E, 且 $\angle ADC=60^\circ$, $AB = \frac{1}{2}BC$, 连接 OE, 下列结论

① $\angle CAD=30^\circ$;

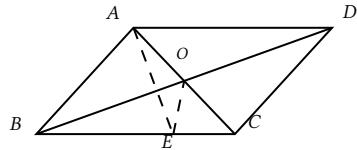
② $OE \perp AC$;

③ $BD = \sqrt{7}AB$;

④ $S_{\square ABOE} = \frac{3}{2}S_{\triangle OCD}$;

其中成立的个数是 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个



Example 1.4.7 如图, E 是 $\square ABCD$ 内一点, $ED \perp CD$, $EB \perp BC$, $\angle AED=135^\circ$, 连接, AC, BD, 下列结论:

① $\angle ADE=\angle ABE$;

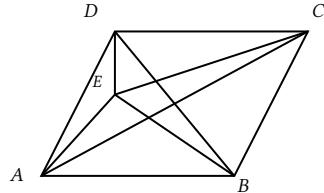
② $\triangle BCE$ 为等腰直角三角形;

③ $DE + AB = \sqrt{2}BD$;

④ $AE^2 + AB^2 = AC^2$,

其中正确的个数有 ()

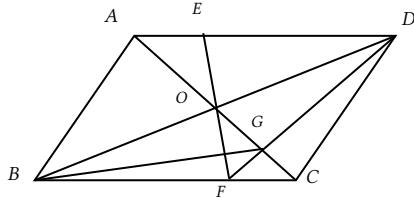
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个



Exercise 1.4.10 如图, 在平行四边形 ABCD 中, 对角线 AC, BD 交于点 O, AB=2, $\angle ABC = 60^\circ$, 直线 EF 过点 O, 连接 DF, 交 AC 于点 G, 连 BG, $\triangle DCF$ 的周长等于 6, 下列说法正确的个数为 0

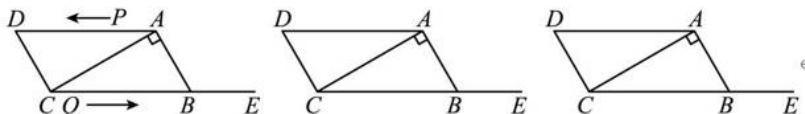
- ① $\angle EOD = 90^\circ$;
- ② $S_{\triangle DFC} = 2S_{\triangle AEO}$
- ③ $S_{\triangle ABG} + S_{\triangle DGC} = \frac{1}{2}S_{\square ABCD}$;
- ④ $AE = \frac{6}{5}$.

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个



Exercise 1.4.11 如图, 在平行四边形 ABCD 中, $\angle BAC=90^\circ$, $\angle B=60^\circ$, $AB=6$. 动点 P 从点 A 出发沿 AD 以 1cm/s 速度向终点 D 运动, 同时点 Q 从点 C 出发, 以 4cm/s 速度沿射线 CB 运动, 当点 P 到达终点时, 点 Q 也随之停止运动, 设点 P 运动的时间为 t 秒.

- (1) 用含 t 的代数式表示 $BQ= \underline{\hspace{2cm}}$;
- (2) 当 $PQ \perp BC$ 时, 求 t 的值;
- (3) 请问是否存在 t 的值, 使得 A, B, P, Q 为顶点的四边形为平行四边形? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.



1.5 课堂内容回忆—需上交

姓名: _____ 日期: _____

Exercise 1.5.1 课堂回忆

1. 我们一开始回忆了八上的什么概念 _____, 他的定义是什么? _____.
2. 他与我们今天学习的内容有什么区别, 今天学习的对称叫什么, 定义是什么 _____.

Exercise 1.5.2 课堂回忆

1. 已知轴对称图形上的点坐标 (a,b) 及其对应点 (m,n) , 能否求出对称轴的表达式 _____
2. 已知中心对称图形上的点坐标 (a,b) 及其对应点 (m,n) 能否求出对称中心的坐标 _____

Exercise 1.5.3 课堂回忆

如何绘制轴对称图形, 以及中心对称图形。以一条线段为例进行说明 (请绘制出坐标系、及任意一条线段并绘图说明)。

Exercise 1.5.4 课堂回忆

1. 平行四边形的定义什么? _____
2. 平行四边形的性质, 可以归结为两个核心性质, 他们是 _____ 和 _____
3. 其中“两组对边分别平行”可以推出:
(1) _____ (2) _____ (3) _____

Exercise 1.5.5 课堂回忆

关于平四的四个重要面积推论 (请绘图说明):

1.

2.

3.

4.