2025 年寒假八下数学讲义 (4)

February 5, 2025

Contents

第四讲：反比例函数–初识 1

1.1 反比例函数的定义

反比例函数是相对正比例函数而言的，正比例函数的图像是一条直线，而反比例函数的图像是一条曲线，这条曲线叫做双曲线。双曲线是一种非常重要的曲线。

正比例函数描述的是一种“同盟关系”—“你增加我就增加，你减少我也减少”；而反比例关系描述的则是一种“敌对关系”—“你增加我就减少，你减少我则增加”！

正比例函数与反比例函数的形式也是对应的，保证 k 是常数，我们给出如下表达式：

正比例函数

$$y = k \cdot x, \qquad k \neq 0$$

反比例函数

反比例函数成立的条件：

- $k \neq 0$
- x 的系数必须是-1

$$y = \frac{k}{x}, \qquad k \neq 0$$

我们对反比例函数进行一下变形可以得到反比例函数的变形[1]

1: 反比例函数的变形形式是 $\boxed{\text{y·x=k}}$，这种形式更加直观，更容易理解。

$$y \cdot x = k, \qquad k \neq 0$$

x 与 y 这两个变量在这个式子中展现的是一种敌对的争抢关系，因为 k 是固定的。这种关系在生活中也是非常常见的.

Example 1.1.1 下列关于 x 的函数中：①$y = 2/x$ ②$y = (-4)/3x$ ③$y = k/x$ ④$y = (m^2 + 2)/x$ 中一定是反比例函数的有 ( )

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

注意 k 非零

Example 1.1.2 已知 y 与 x^2 成反比例，当 x=3 时，y=4，则 y 是 x 的 ( )

A. 正比例函数 B. 一次函数 C. 反比例函数 D. 以上都不是

注意 x 系数为 -1

Example 1.1.3 已知 $y = (m^2 + 2m)x^{m^2+m-1}$ 是关于 x 的反比例函数，求 m 的值及函数的解析式。

1.2 生活中的反比例函数

1.2.1 速度与时间成反比

描述：在一段固定的距离内，行驶速度与所需时间成反比例关系。
案例：从徐州到上海，车速提高一倍，那么所需时间就会减少一半。
公式：$\boxed{\mathrm{v \cdot t = k}}$，其中 v 为速度，t 为时间，k 为常数。

1.2.2 力臂与力成反比

描述：杠杆平衡时，动力臂与阻力臂成反比例关系。
案例：使用撬棍撬动物体时，动力臂越长，所需的动力就越小。
公式：$\boxed{\mathrm{F \cdot l = k}}$，其中 F 为力，l 为力臂，k 为常数。

1.2.3 浓度与体积成反比

描述：在溶质质量不变的情况下，溶液的浓度与体积成反比例关系。
案例：将一定量的糖溶解在水中，增加水的体积，糖水的浓度就会降低。
公式：$\boxed{\mathrm{C \cdot V = k}}$，其中 C 为浓度，V 为体积，k 为常数。

Example 1.2.1 写出下列各题中所要求的两个相关量之间的函数关系式，并指出函数的类别.
(1) 商场推出分期付款购电脑活动，每台电脑 12000 元，首付 4000 元，以后每月付 y 元，x 个月全部付清，则 y 与 x 的关系式为 ____________，是 ______ 函数.

(2) 某种灯的使用寿命为 1000 小时，它的使用天数 y 与平均每天使用的小时数 x 之间的关系式为 ____________，是 ______ 函数.

(3) 设三角形的底边、对应高、面积分别为 a、h、S.
当 a=10 时，S 与 h 的关系式为 ____________，是 ______ 函数；
当 S=18 时，a 与 h 的关系式为 ____________，是 ______ 函数.

(4) 某工人承包运输粮食的总数是 W 吨，每天运 x 吨，共运了 y 天，则 y 与 x 的关系式为 ____________，是 ______ 函数.

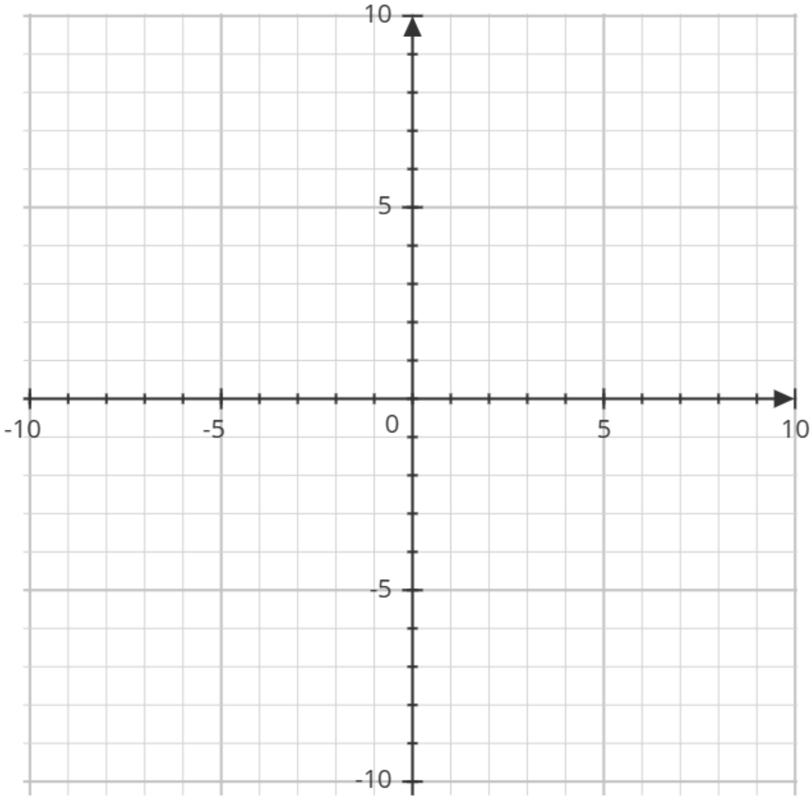
1.2.4 长方形的长与宽成反比

最后我们考虑长方形。长方形的面积是长与宽的乘积，如果面积固定，长与宽成反比例关系。
公式：$\boxed{l \cdot w = k}$，其中 l 为长，w 为宽，k 为常数。

【注意】可以看出这里的 k 表示的就是长方形的面积，**"*k* 就是面积"** 将成为我们探究反比例函数的**金钥匙**。这一点会在之后的教学中进一步说明。但是现在请大家记住：

- **面积** 对于**反比例函数** 非常重要！
- 对 k 的讨论等效于讨论**长方形的面积**

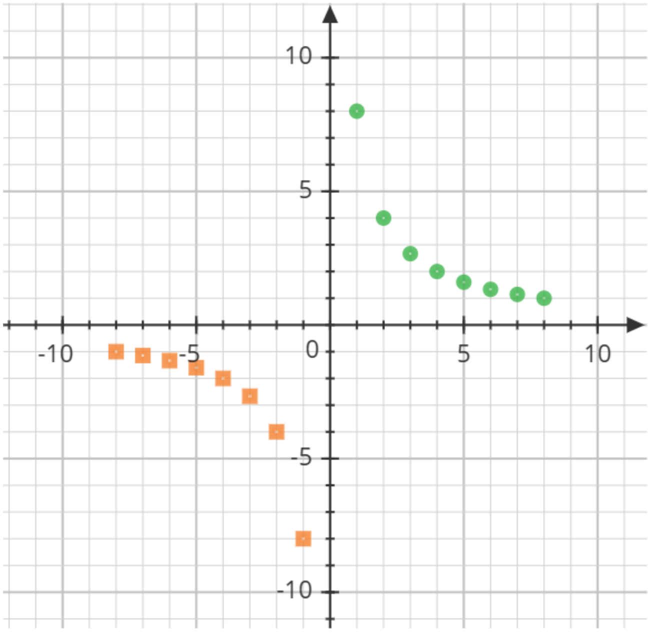
Example 1.2.2 现在假设长方形的面积始终是 8，以 x 轴的坐标作为长，请在同一个坐标系内绘制长为 1 到 8 的整数长度的长方形图形。



1.3 反比例函数的基本图像

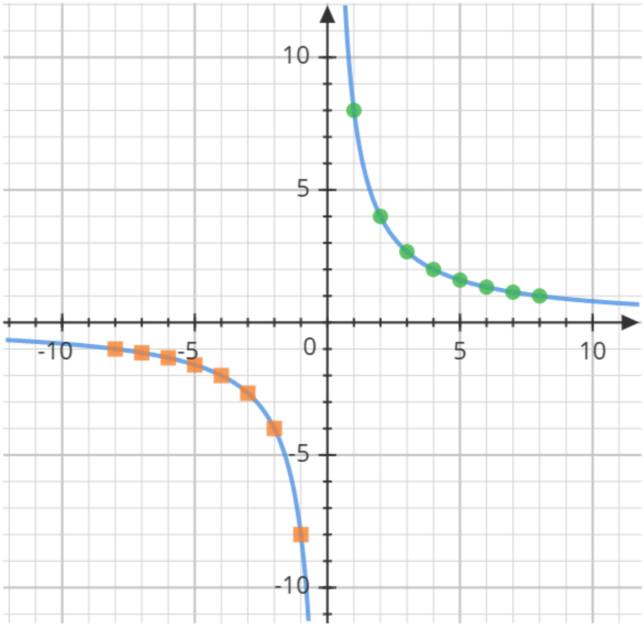
1.3.1 k>0 的情况

如果你画的图形是对的话，他大概的样子应该如下图所示。



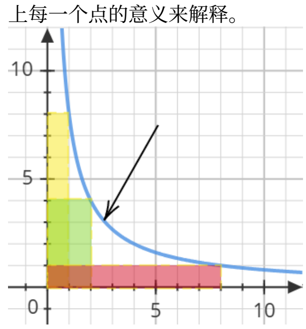
现在请你**用你认为最合适的线（曲线或者直线）将这些点连接起来**

他大概应该是这样的：



请思考：

- 回忆一下这个图形的作图过程，他代表的是什么？请尝试从图像上每一个点的意义来解释。



____

____

____

- 如果长方形的面积是 4 或者 16（k=4, k=16），那么这个双曲线会是什么样子，你能猜出来么？

____

____

____

Definition 1.3.1 反比例函数的图像是一种**曲线**，这种曲线包含两个分支，我们叫它**双曲线**。

就像永远把一次函数想象成不同倾斜程度的直线一样，反比例函数永远带着“**面积**”的想法在大脑中绘图，这是他的基因！

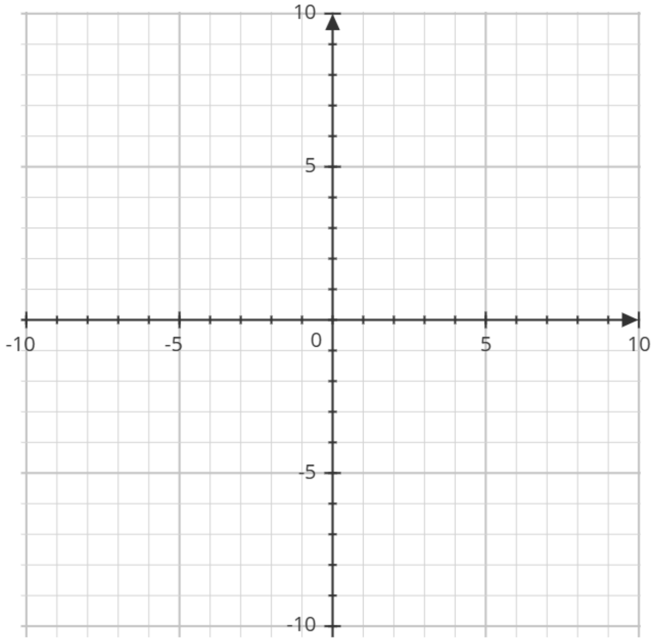
1.3.2 k<0 的情况

同理当 k=-8 时，请再次画出反比例函数的图像，注意先画点再/描线！

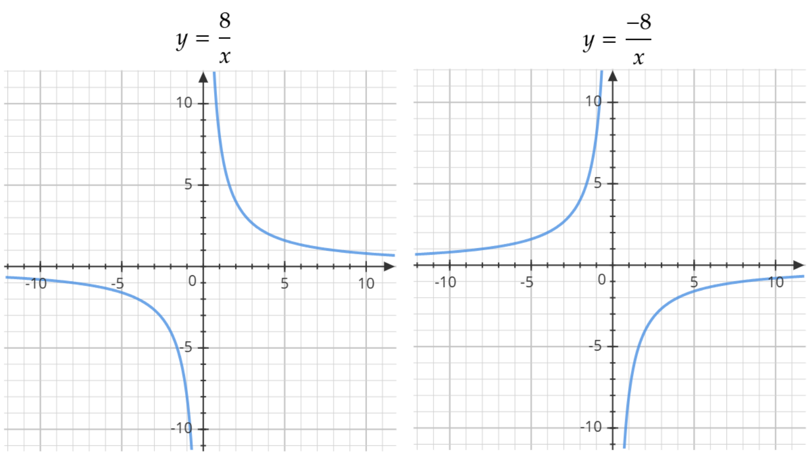
我们分析函数的性质主要包括以下三个方面

- 对称性：中心对称和轴对称图形的函数表达式是什么样子
- 增减性：一个函数在某个区间内是增还是减
- 周期性：（超纲）高中学习

现在反比例函数的图像你已经学会绘制了，请你就 1、2 两个方面进行分析。



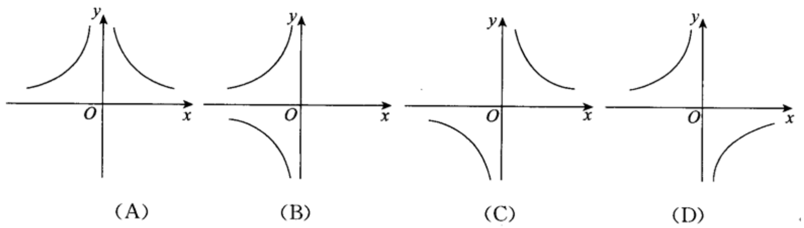
请绘制完图像后对比下图：



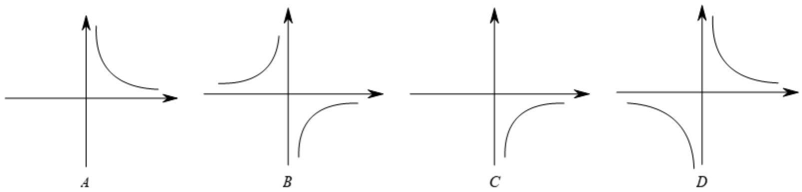
Theorem 1.3.1 我们能得出的结论是：

- 当 $k>0$ 时，图像经过第一、三象限。
- 当 $k<0$ 时，图像经过第二、四象限。

Example 1.3.1 反比例函数 $y=\frac{-1}{x}$ 的图象大致是图中的 ( ).



Example 1.3.2 在下图中，反比例函数 $y=\frac{k^2+1}{x}$ 的图像大致是（）



Example 1.3.3 已知点 P (1，a) 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ (k≠0) 的图像上，其中 $a=m^2+2m+3$ (m 为实数)，则这个函数的图像在第 ______ 象限.

Example 1.3.4 如果点 (-t,-2t) 在双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上，那么 k______0，双曲线在第 ______ 象限.

Example 1.3.5 已知 $y=(a-1)x^a$ 是反比例函数，则它的图象在 ( ).
A. 第一、三象限　B. 第二、四象限
C. 第一、二象限　D. 第三、四象限

Example 1.3.6 在反比例函数 $y=\frac{k-5}{x}$ 图象的每一支曲线上，y 都随 x 的增大而减小，则 k 的取值范围是（ ）
A．k>5　　B．k>0　　C．k<5　　D．k<0

1.4 反比例函数作业 1

Exercise 1.4.1 已知反比例函数 $y = k/x$ 的图像在第二、第四象限内，函数图像上有两点 $A(2\sqrt{7}, y_1)$,$B(5, y_2)$，则 y_1 与 y_2 的大小关系为 ( )

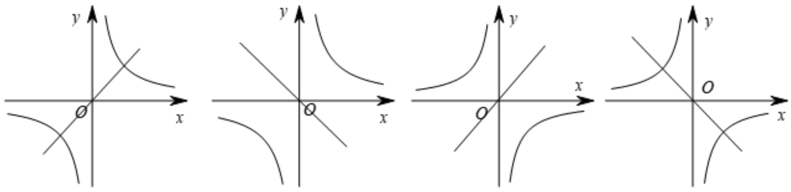
A.$y_1 > y_2$　　B. $y_1 = y_2$　　C. $y_1 < y_2$　　D. 无法确定

Exercise 1.4.2 若点 $A(-1, y_1)$、$B(2, y_2)$、$C(\pi, y_3)$ 都是反比例函数 $y = (k^2 + 1)/x$ 的图像上，试比较 y_1、y_2、y_3 的大小关系____________.

Exercise 1.4.3 反比例函数 $y = (2m - 1)x^{m^2-2}$，当 x>0 时，y 随 x 的增大而增大，则 m 的值是 ( ).

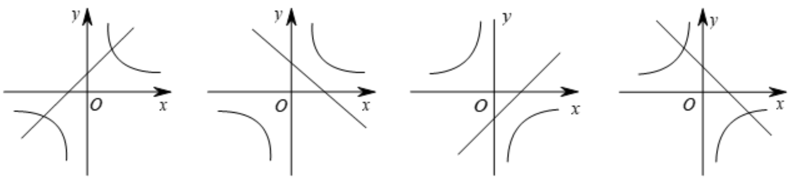
A.±1　　B. 小于 1/2 的实数　　C.-1　　D.1

Exercise 1.4.4 在同一坐标系中，$y = (m - 1)x$ 与 $y = -m/x$ 的图象的大致位置不可能的是 ( ).



A　　B　　C　　D

Example 1.4.1 函数 $y = ax - a$ 与 $y = a/x, (a \neq 0)$ 在同一直角坐标系中的图象可能是（）



A .　　B.　　C.　　D.

Exercise 1.4.5 在对物体做功一定的情况下，力 F (牛) 与此物体在力的方向上移动的距离 s (米) 成反比例函数关系，其图像如图所示，P(5,1) 在图像上，则当力达到 10 牛时，物体在力的方向上移动的距离是 ______ 米.