2024 年寒假八下数学讲义

逮着一只大白

January 6, 2025

Contents

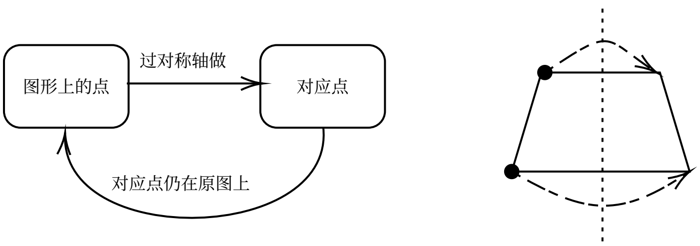
平行四边形 1

1.1 回忆：轴对称图形

八上部分，我们已经学习了两大对称图形中的一种 – 轴对称图形。简单说，轴对称图形就是沿着一条直线翻折后，直线两边的部分能够完全重合的图形，建立在全等、垂直平分线的基础上，我们可以很容易的发现轴对称图形的性质：**一轴二点垂直等距**:

- “一轴二点”：对称轴和对称轴两侧的对应点
- “等距”：对应点到对称轴的距离相等
- “垂直”：对应点的连线垂直于对称轴

基于这样的“性质”，我们就可以发展出对轴对称图形的“判定”。



由上面的分析，判断一个图形是否“轴对称”图形的关键是，**对应点是否在原图上**。我们借由这一判定规则发现等腰三角形、正方形、矩形，都是轴对称图形。当然，自然界还有一种对称 – “中心对称”！顾名思义，这个图形不是关于一个轴，而是关于一个中心点对称。

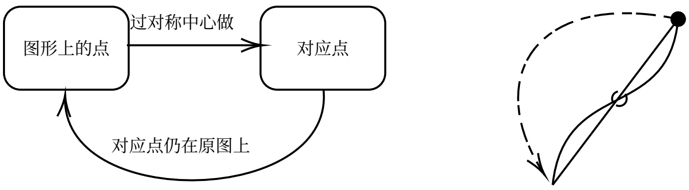
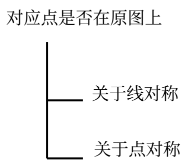


Figure 1.1: 扑克牌中的中心对称



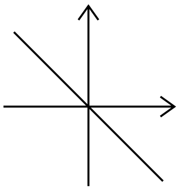
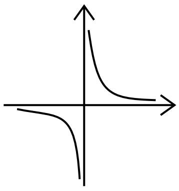
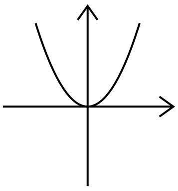
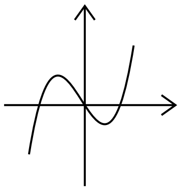
Definition 1.1.1 轴对称图形：图形上任意一点，关于对称轴的对应点（等效于沿对称轴翻折）在原图上。

Definition 1.1.2 中心对称图形：图形上任意一点，关于对称中心的对应点（等效于旋转 180^o）在原图上。

体会中点坐标公式对于坐标系内的轴对称和中心对称的重要作用！

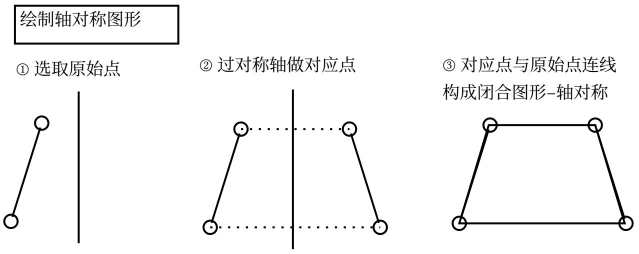
- 已知对称中心（对称轴），求对应点；
- 已知对应点，求对称中心（对称轴）。

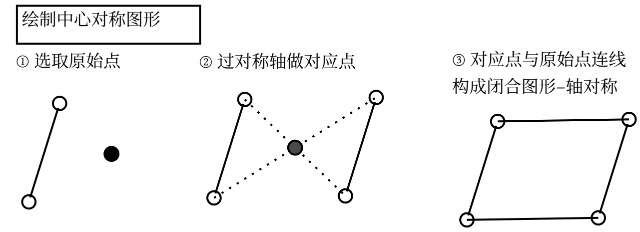
“翻折”产生“轴对称”；“旋转”产生“中心对称”！不论轴对称还是中心对称，在数学和物理中都有着广泛的应用，比如下面四个函数图像。观察图像，识别抽对称或中心对称。

1.2 绘制轴对称和中心对称图形

1. 第一步：确定对称轴或对称中心。
2. 第二步：根据对称轴或对称中心绘制对应点。
3. 第三步：连接对应点，完成对称图形。



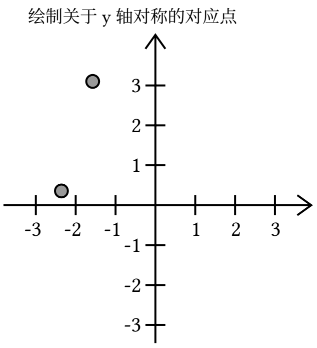


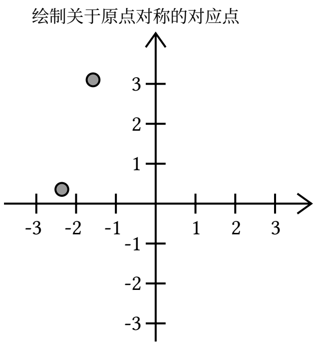
请进一步思考下面 3 个问题:

- 你绘制图形的过程中有没有注意到“中点”的出现，谁是中点，中点坐标公式是什么?
- 你绘制的图形是轴对称图形么，请根据上面介绍的轴对称规则回答。
- 请根据初一初二所学内容，总结这种图形的特点。

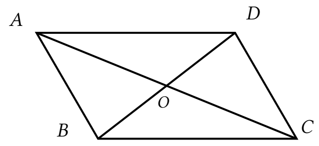
Example 1.2.1 以下坐标系中，我们已经预先设计好了两个点，请分别以 y 轴为对称轴，以原点为对称中心，画出对称点。并且在这个过程中体会:

1. 中点坐标公式的运用?
2. 平行的判定和性质的运用?
3. 每个对应点是如何绘制出的?



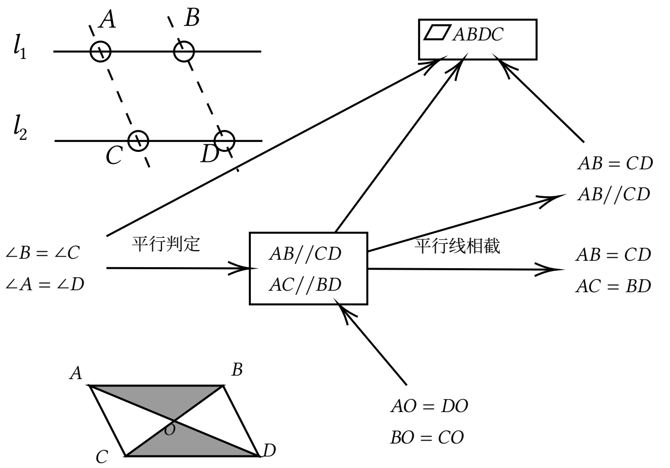


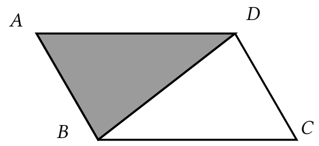
1.3 平行四边形的性质



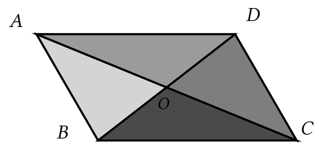
Definition 1.3.1 平行四边形的定义
两组对边分别平行的四边形。用“▱”表示。例如:平行四边形 $ABCD$ 表示为“▱$ABCD$”, 读作“平行四边形 $ABCD$”

“平行线间的平行线段相等”。平行四边形从性质到判定的所有定理,都可以通过定义和平行线间线段性质来推导。





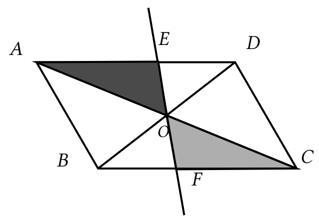
$\triangle ABD \cong \triangle BDC$



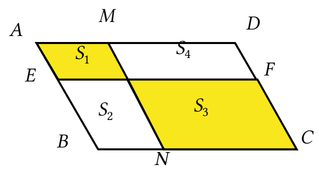
$S_{\triangle ABO} = S_{\triangle ADO} = S_{\triangle DOC} = S_{\triangle BOC}$

Theorem 1.3.1 平行四边形的性质

- 性质 1-对边:1 组对边平行且相等, 或 2 组对边平行, 或 2 组对边相等
- 性质 2-对角:2 组对角相等
- 性质 3-临边: 无关系
- 性质 4-临角: 无关系
- 性质 5-对角线: 对角线相互平分
- 性质 6-对称性: 平行四边形不是轴对称图形, 是中心对称图形



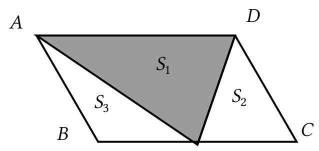
$\triangle AEO \cong \triangle CFO$



$S_1 \times S_3 = S_2 \times S_4$

Theorem 1.3.2 平行四边形重要结论:对角线与过 O 直线

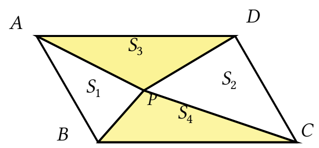
- 结论: 单对角线分全等
- 结论: 双对角线分四个等面积三角形
- 结论: 过 O 直线与对角线形成全等三角形



$S_1 = S_2 + S_3 = \frac{1}{2} S_{▱ABCD}$

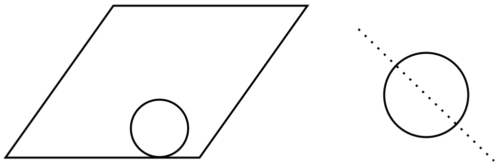
Theorem 1.3.3 平行四边形重要结论:关于面积

- 结论: 过 O 直线平分面积与周长
- 结论: 如图
- 结论: 如图
- 结论: 如图



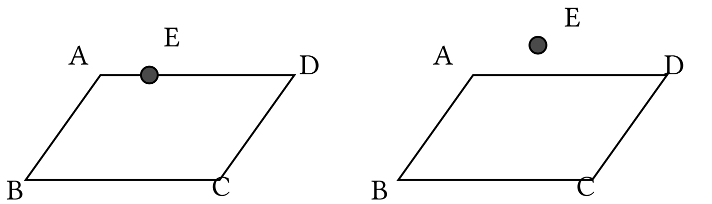
$S_1 + S_2 = S_3 + S_4 = \frac{1}{2} S_{▱ABCD}$

Example 1.3.1 在一块平行四边形的稻田里有一圆形的水池，为了给稻田浇水，并使稻田里的水量趋于均匀，现要从水池引一条笔直的水渠 (水渠的宽度忽略不计)，请你设计一种方案，使水渠两侧的稻田面积相等，并说明你的理由.

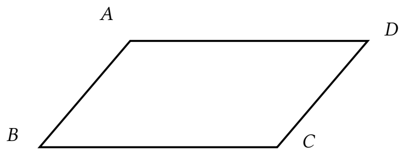


【提示】过圆心的直线总是平分圆的周长和面积, 实际上任何一个中心对称图形都有这个性质。

Exercise 1.3.1 已知平行四边形 ABCD 是中心对称图形，点 E 是平面上一点，请仅用无刻度直尺画出点 E 关于 ABCD 对称中心的对称点 F.
(1) 如图 1，点 E 在 ABCD 的边 AD 上；
(2) 如图 2，点 E 在 ABCD 外.



Example 1.3.2 如图所示,已知四边形 ABCD,从 ⑴AB//DC；⑵AB=DC；⑶AD//BC；⑷AD=BC；⑸∠A=∠C；⑹∠B=∠D 中取两个条件加以组合，能推出四边形 ABCD 是平行四边形的有哪几种情形？请写出具体组合。



1.4 平行四边形的性质—课时练习

1.4.1 基础：利用性质求角度、长度、面积、坐标

Example 1.4.1 有下列说法：① 平行四边形具有四边形的所有性质；② 平行四边形是中心对称图形；③ 平行四边形的任一条对角线可把平行四边形分成两个全等的三角形；④ 平行四边形的两条对角线把平行四边形分成 4 个面积相等的小三角形. 其中正确说法的序号是（ ）

A. ①②④ B. ①③④ C. ①②③ D. ①②③④

Exercise 1.4.1 下面关于平行四边形的性质描述正确的是（　　）

A. 平行四边形的对称中心是对角线的交点

B. 平行四边形的对称轴是对角线所在直线

C. 平行四边形不是中心对称图形

D. 平行四边形既不是中心对称图形，也不是轴对称图形

Exercise 1.4.2 平行四边形具有而一般四边形不具有的性质是（ ）

A. 外角和等于

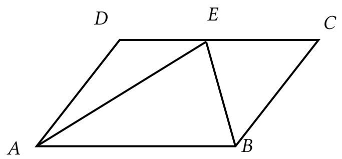
B. 对角线互相平分

C. 内角和等于

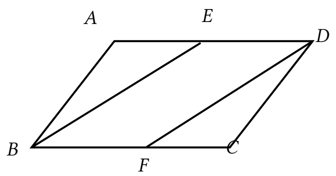
D. 有两条对角线

Example 1.4.2 在平行四边形 ABCD 中，$\angle B-\angle A=20^o$ 则 $\angle D$ 的度数是?

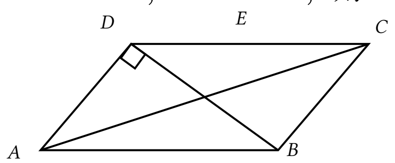
Exercise 1.4.3 如图，在平行四边形 ABCD 中，$\angle D = 100^o$，∠DAB 的平分线 AE 交 CD 于点 E，连接 BE, 若 $AE = AB$，则 ∠EBC 的度数为____.



Exercise 1.4.4 如图，四边形 ABCD 是平行四边形，∠ABC=70°，BE 平分 ∠ABC 且交 AD 于点 E，DF//BE 且交 BC 于点 F，则 ∠ADF 的度数为______.



Exercise 1.4.5 如图，在平行四边形 ABCD 中，已知 ∠ODA=90°，AC=10"cm"，BD=6"cm"，则 AD 的长为（ ）



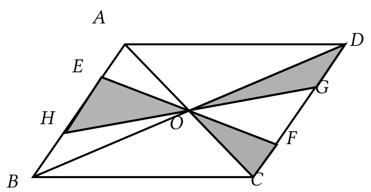
A. 4cm B. 5cm C. 6cm D. 8cm

Exercise 1.4.6 在平行四边形 ABCD 中，AD=10，AE 平分 ∠BAD 交 BC 于点 E，DF 平分 ∠ADC 交 BC 于点 F，且 EF=2，则 AB 的长为 ( )

A． 4 B． 6 C． 6 或 8 D． 4 或 6

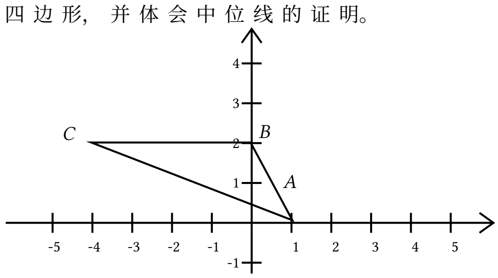
Example 1.4.3 如图，平行四边形 ABCD 的对角线 AC，BD 相交于点 O，EF，GH 过点 O，且点 E，H 在边 AB 上，点 G，F 在边 CD 上，则阴影部分的面积与 ABCD 的面积比值是（ ）.

A． 1/2 B． 1/3 C． 1/4 D． 1/5

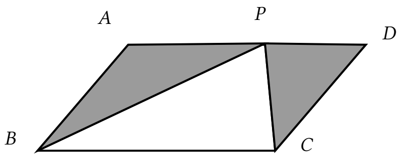


Example 1.4.4 以三角形的三个顶点作平行四边形，最多可以作（ ）
A．2 个 B．3 个 C．4 个 D．5 个

【探索】请你尝试在利用下图坐标系，画出符合要求的平行四边形，并体会中位线的证明。

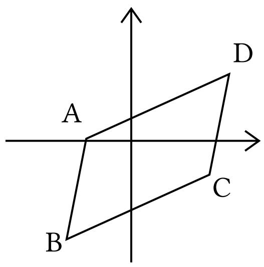


Exercise 1.4.7 如图，在平行四边形 ABCD 中，P 是 AD 边上一点. 已知 $S_{\triangle ABP} = 3.5cm^2$, $S_{\triangle CDP} = 2.5cm^2$, 则 ABCD 的面积是 ______cm2.



Example 1.4.5 在平行四边形 ABCD 中, 对角线 AC, BD 相交于点 O, 以点 O 为坐标原点建立平面直角坐标系，其中 A(a,b)，B(a-1,b+2)，C(3,1)，则点 D 的坐标是______.

Exercise 1.4.8 如图，在平面直角坐标系中，若平行四边形 ABCD 的三个顶点的坐标分别是 A(-1,0)、B(-2,-3)、D(3,2)，则顶点 C 的坐标是 ______.



Exercise 1.4.9 在平面直角坐标系里，A(1,0),B(0,2),C(-4,2)，若以 A、B、C、D 为顶点的四边形是平行四边形，则点 D 的坐标为______.

1.4.2 拔高：性质相关证明问题

Example 1.4.6 如图，平行四边形 ABCD 的对角线 AC，BD 交于点 O，AE 平分 ∠BAD，交 BC 于点 E，且 ∠ADC=60°, $AB = \frac{1}{2}BC$，连接 OE，下列结论

①∠CAD=30°；

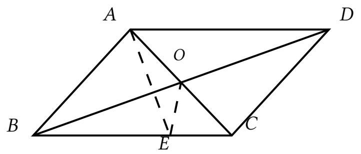
②OE⊥AC；

③$BD = \sqrt{7}AB$；

④$S_{▱ABOE} = \frac{3}{2}S_{\triangle OCD}$；

其中成立的个数是（ ）

A．1 个 B．2 个 C．3 个 D．4 个



Example 1.4.7 如图，E 是 ▱ ABCD 内一点，ED⊥CD，EB⊥BC，∠AED=135°，连接，AC，BD，下列结论：

①∠ADE=∠ABE；

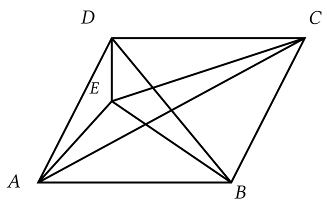
②△BCE 为等腰直角三角形；

③$DE + AB = \sqrt{2}BD$；

④ $AE^2 + AB^2 = AC^2$，

其中正确的个数有（）

A．1 个 B．2 个 C．3 个 D．4 个



Exercise 1.4.10 如图，在平行四边形 ABCD 中，对角线 AC，BD 交于点 O，AB=2，，$\angle ABC=60^{\circ}$，直线 EF 过点 O，连接 DF，交 AC 于点 G，连 BG，△DCF 的周长等于 6，下列说法正确的个数为（）

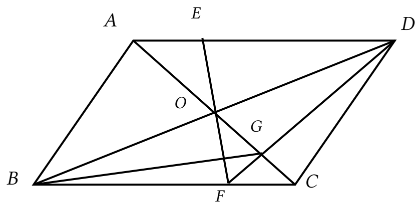
①$\angle EOD=90^{\circ}$；

② $S_{\triangle DFC}=2S_{\triangle AEO}$

③ $S_{\triangle ABG}+S_{\triangle DGC}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$；

④ $AE=\frac{6}{5}$.

A．1 个 B．2 个 C．3 个 D．4 个

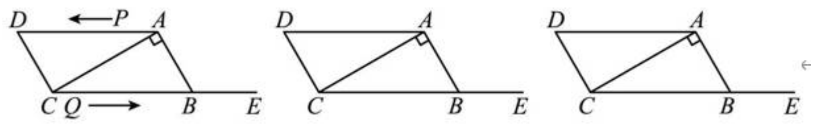


Exercise 1.4.11 如图，在平行四边形 ABCD 中，∠BAC=90°，∠B=60°，AB=6．动点 P 从点 A 出发沿 AD 以 1cm/s 速度向终点 D 运动，同时点 Q 从点 C 出发，以 4cm/s 速度沿射线 CB 运动，当点 P 到达终点时，点 Q 也随之停止运动，设点 P 运动的时间为 t 秒.

(1) 用含 t 的代数式表示 BQ= ；

(2) 当 PQ⊥BC 时，求 t 的值；

(3) 请问是否存在 t 的值，使得 A，B，P，Q 为顶点的四边形为平行四边形？若存在，求出 t 的值；若不存在，请说明理由.



1.5 课堂内容回忆—需上交

姓名*:* ____________ **日期***:* ____________

Exercise 1.5.1 课堂回忆

1. 我们一开始回忆了八上的什么概念____________，他的定义是什么？ __________________.
2. 他与我们今天学习的内容有什么区别，今天学习的对称叫什么，定义是什么 __________________.

Exercise 1.5.2 课堂回忆

1. 已知轴对称图形上的点坐标（a,b）及其对应点（m,n），能否求出对称轴的表达式 ____________
2. 已知中心对称图形上的点坐标 (a,b) 及其对应点（m,n）能否求出对称中心的坐标 ____________

Exercise 1.5.3 课堂回忆
如何绘制轴对称图形，以及中心对称图形。以一条线段为例进行说明（请绘制出坐标系、及任意一条线段并绘图说明)。

Exercise 1.5.4 课堂回忆

1. 平行四边形的定义什么？ __________________
2. 平行四边形的性质,可以归结为两个核心性质,他们是 ____________ 和 ____________
3. 其中“两组对边分别平行”可以推出：
   (1) ____________(2) ____________(3) ____________

Exercise 1.5.5 课堂回忆
关于平四的四个重要面积推论 (请绘图说明)：

1. : 1

2. : 2

3. ：3

4. ：4