2025 年寒假八下数学讲义 (3)

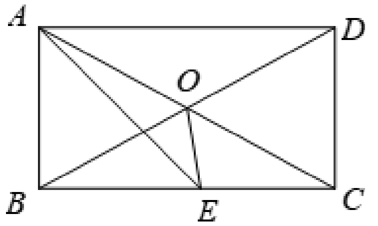
January 26, 2025

Contents

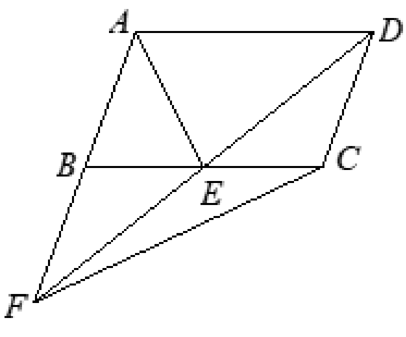
课堂小测 3：矩形的相关性质与证明 1

姓名：____________ 成绩：____________

Exercise 1.0.1 如图，矩形 $ABCD$ 中，AC, BD 相交于点 O, AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于 E , 若 $\angle CAE = 15°$, 求 $\angle BOE =$ ______



Exercise 1.0.2 如图，平行四边形 ABCD 中，E 是 BC 的中点，DE、AB 的延长线交于点 F，连接 AE、CF．求证：$S_{\Delta ABE} = S_{\Delta EFC}$．



易证$\Delta BEF \cong \Delta CED$，

$\therefore BF = CD = AB$

$\therefore \Delta ABE$和ΔFBE是以AB、BF为底的等底等高三角形.

$\therefore S_{\Delta ABE} = S_{\Delta FBE}$

$\because \Delta FBE$和ΔFCE是以BE、CE为底的等底等高三角形.

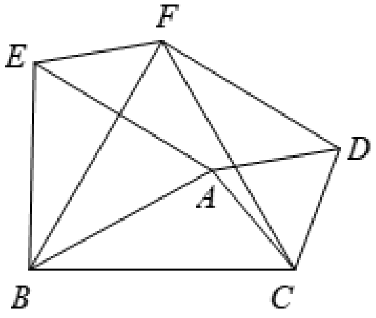
$\therefore S_{\Delta FBE} = S_{\Delta FCE}$，$\therefore S_{\Delta ABE} = S_{\Delta EFC}$.

Exercise 1.0.3 如图，ΔACD、ΔABE、ΔBCF 均为直线 BC 同侧的等边三角形．当 AB≠AC 时，

（1）求证：△BEF ≅ △BAC

（2）求证：四边形 ADFE 为平行四边形

（3）若 AB=3，AC=2，∠BAC=120°，求四边形 AEFD 的面积．



（1）BA=BE ， BC=BF ， ∠CBF=∠ABE=60° ，

□∠CBA=∠FBE□△BEF□△BAC,

（2）□ΔABE、ΔBCF 为等边三角形，

□AB=BE=AE，BC=CF=FB，∠ABE=∠CBF=60°.

□∠FBE=∠CBA.

□ΔFBE□ΔCBA.

□EF=AC.

又 □ΔADC 为等边三角形，

□CD=AD=AC.

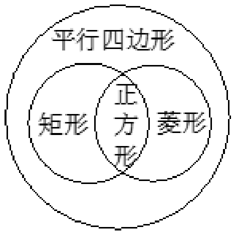
□EF=AD.

同理可得 AE=DF.

□ 四边形 AEFD 是平行四边形.

（3）∠DAE=120°，AE=AB=3 ， AC=AD=2，过 D 点作出 AE 边上的高，就可求得面积为 3√3.

第三讲：特殊的平行四边形—菱形与正方形 2



2.1 菱形的基本概念

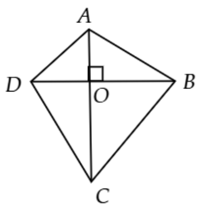
Definition 2.1.1 **菱形的定义**: 有一组**邻边相等** 的平行四边形叫做菱形.

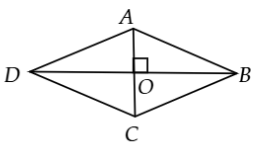
Theorem 2.1.1 **菱形的性质**: 菱形是特殊的平行四边形, 它具有平行四边形的所有性质，还具有自己独特的性质：

- 边的性质：平四 + 临边相等（菱形独有).
- 角的性质：邻角互补，对角相等（平四共有).
- 对角线性质：平四 + 对角线垂直且每条对角线平分一组对角（菱形独有).
- 对称性：平四是中心对称图形 + 菱形是轴对称图形（菱形独有).

Theorem 2.1.2 **对角线互相垂直和面积**:

- 菱形的面积等于底乘以高，等于对角线乘积的一半.
- 重要推论：任意四边形**对角线互相垂直**，则有，**对角线乘积等于四边形面积的 *2* 倍**.





$AC \times DB = (AO + OC) \times (DO + OB)$
$= AO \cdot DO + AO \cdot OB + OC \cdot DO + OC \cdot OB$
$= 2 \times (\frac{1}{2}AO \cdot DO + \frac{1}{2}AO \cdot OB + \frac{1}{2}OC \cdot DO + \frac{1}{2}OC \cdot OB)$
$= 2 \times (S_{\triangle ODA} + S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OCD} + S_{\triangle OCB})$
$= 2 \times S_{\square ABCD}$

Theorem 2.1.3 **菱形的判定**:

- 一组邻边相等的平行四边形是菱形.
- 对角线互相垂直的平行四边形是菱形.
- 四边相等的四边形是菱形.

2.2 菱形相关习题

Example 2.2.1 如图 1 所示，菱形 ABCD 中，对角线 AC、BD 相交于点 O，H 为 AD 边中点，菱形 ABCD 的周长为 24，则 OH 的长等于______.

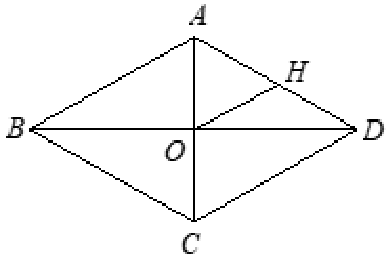
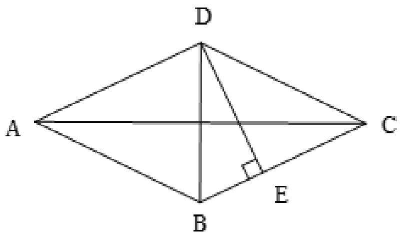


图1

3

Example 2.2.2 如图，已知菱形 ABCD 的对角线 AC=8 cm， BD=4 cm， DE⊥BC 于点 E，则 DE 的长为 ______.



Example 2.2.3 菱形 ABCD 中，∠A:∠B = 1:5，若周长为 8，则此菱形的高等于 ______.

1/2

Example 2.2.4 如图 2，一活动菱形衣架中，菱形的边长均为 16cm 若墙上钉子间的距离 AB=BC=16cm，则 ∠1= ______ 度.

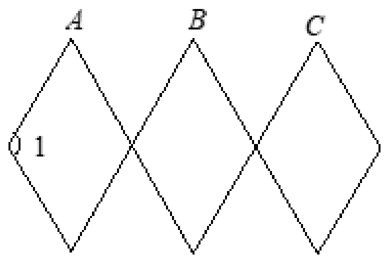
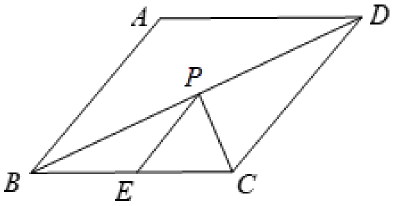


图2

120°

Example 2.2.5 如图，在菱形 ABCD 中，AB=4a，E 在 BC 上，BE=2a，∠BAD=120°，P 点在 BD 上，则 PE+PC 的最小值为 ______.



$2\sqrt{3}a$

2.3 正方形的相关概念

Definition 2.3.1 **正方形的定义**: 有一组邻边相等，并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形.

Theorem 2.3.1 **正方形的性质**:

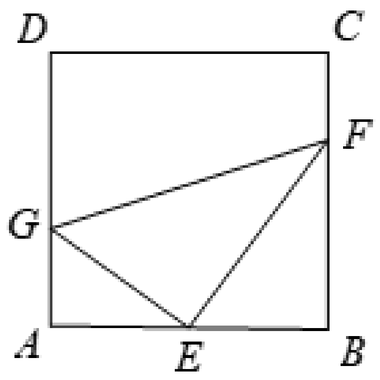
- 边的性质：对边平行，四条边都相等.
- 角的性质：四个角都是直角.
- 对角线性质：两条对角线互相**垂直平分且相等**，每条对角线平分一组对角.
- 对称性：正方形是中心对称图形，也是轴对称图形.

Theorem 2.3.2 **正方形的判定**:

- 有一组邻边相等的矩形是正方形.
- 有一个角是直角的菱形是正方形.

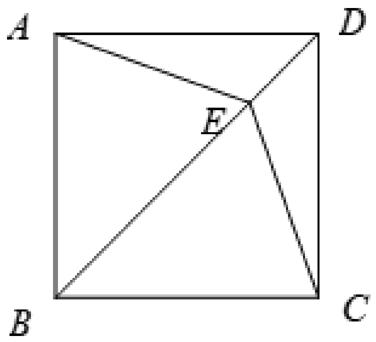
2.4 正方形相关习题

Example 2.4.1 如图，在正方形 ABCD 中，E 为 AB 边的中点，G，F 分别为 AD，BC 边上的点，若 AG=1，BF=2，∠GEF=90°，则 GF 的长为 ______.



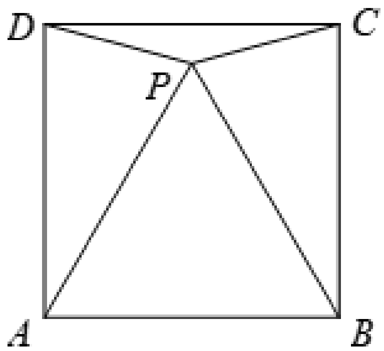
3

Example 2.4.2 如图，E 是正方形 ABCD 对角线 BD 上的一点，求证：AE=CE.



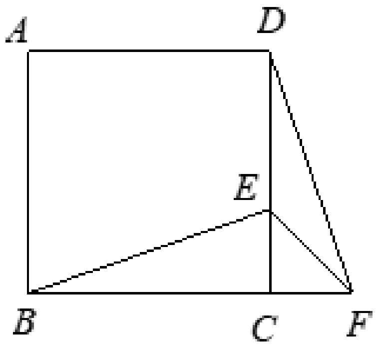
因为四边形 ABCD 是正方形
所以 AB=BC
∠ABD=∠CBD
又 BE 是公共边
所以 ΔABE⊠ΔCBE
所以 AE=CE

Example 2.4.3 如图，已知 P 是正方形 ABCD 内的一点，且 ΔABP 为等边三角形，那么 ∠DCP= ______.



15°

Example 2.4.4 如图，在正方形 ABCD 中，E 为 CD 边上的一点，F 为 BC 延长线上的一点，CE=CF，∠FDC=30°，求 ∠BEF 的度数.



$\because CE=CF$，$BC=CD$，$BC\perp CD$，$CF\perp CD$

$\therefore \Delta BCE\cong\Delta DCF$

$\therefore \angle BEC=\angle DFC$

$\because \angle FDC=30^\circ$

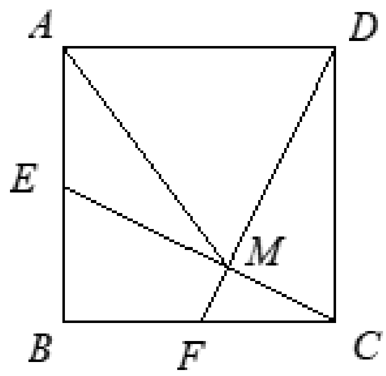
$\therefore \angle BEC=\angle DFC=60^\circ$

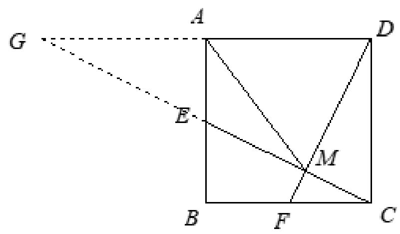
$\because CF\perp CD$，$CE=CF$

$\therefore \angle CEF=45^\circ$

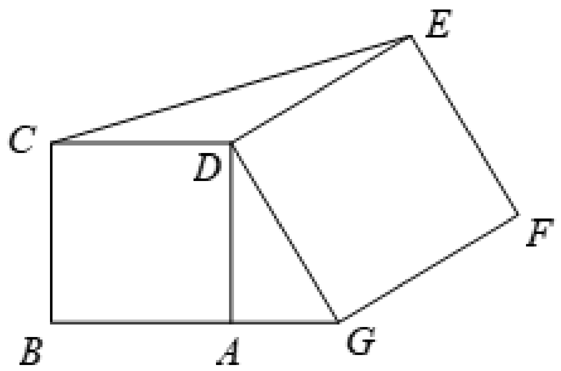
$\therefore \angle BEF=105^\circ$

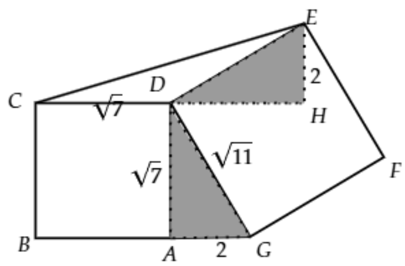
Example 2.4.5 如图，在正方形 ABCD 中，E、F 分别是 AB、BC 的中点，求证：AM=AD.



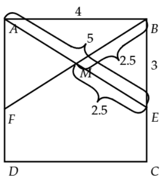


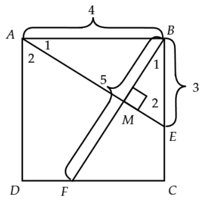
Example 2.4.6 如图，A 在线段 BG 上，ABCD 和 DEFG 都是正方形，面积分别为 7 cm^2 和 11 cm^2，则 ΔCDE 的面积为______.





Example 2.4.7 若正方形 ABCD 的边长为 4, E 为 BC 边上一点, BE=3, M 为线段 AE 上一点，射线 BM 交正方形的一边于点 F，且 BF=AE，则 BM 的长为 ______.


4
A
B
5
2.5
3
M
F
2.5
E
D
C


4
A
B
2
1
1
5
3
2
M
E
D
F
C

2.5 三角形的中位线

Definition 2.5.1 **三角形的中位线**

- **中位线**：连结三角形两边的中点所得的线段叫做三角形的中位线.

中位线两种做法：

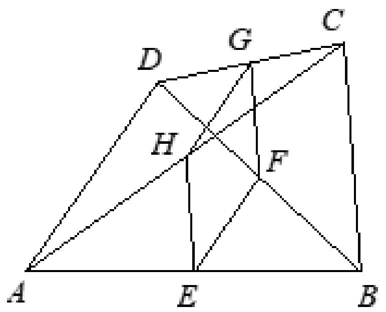
1. 过三角形一边中点作平行线与另一边交点所得线段
2. 连接三角形两边的中点所得线段

Theorem 2.5.1 **三角形的中位线性质**：

- 三角形的中位线平行第三边且长度等于第三边的一半.

2.6 三角形的中位线相关习题

Example 2.6.1 如图，在四边形 ABCD 中，AB≠CD，E、F、G、H 分别是 AB、BD、CD、AC 的中点，要使四边形 EFGH 是菱形，四边形 ABCD 还满足的一个条件是 ______，并说明理由.

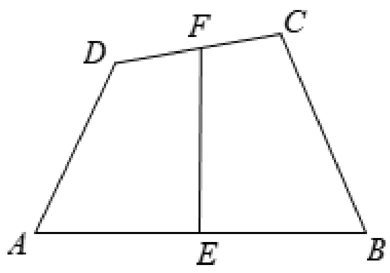


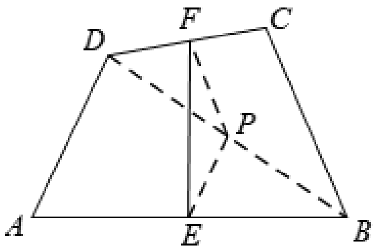
AD=BC

Example 2.6.2 如图，四边形 ABCD 中，E，F 分别是边 AB，CD 的中点，则 AD，BC 和 EF 的关系是（ ）

A. AD+BC>2EF B. AD+BC≥2EF

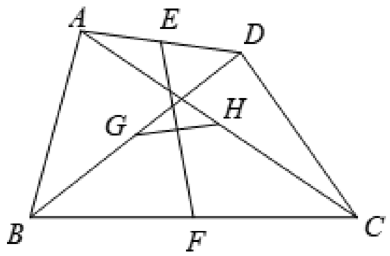
C. AD+BC<2EF D. AD+BC≤2EF

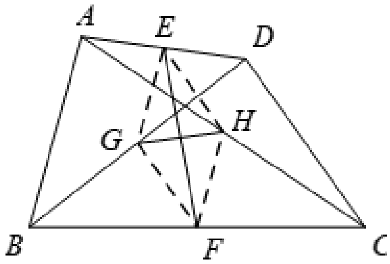




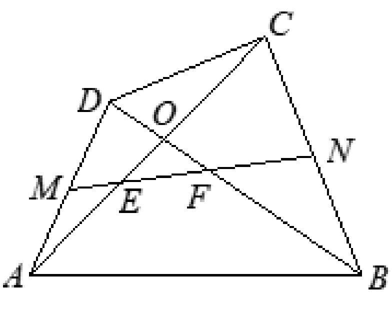
B

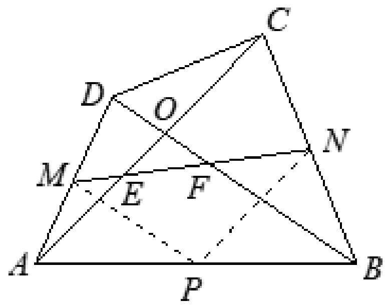
Example 2.6.3 如图，四边形 ABCD 中，AB=CD，E，F，G，H 分别是 AD，BC，BD，AC 的中点，求证：EF，GH 相互垂直平分.





Example 2.6.4 如图，在四边形 ABCD 中，M、N 分别为 AD、BC 的中点，BD=AC，BD 和 AC 相交于点 O，MN 分别与 AC、BD 相交于 E、F，求证：OE=OF.





Example 2.6.5 如图，ΔABC 中，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，$CE \perp AD$ 于 E，M 为 BC 的中点，AB=14cm，AC=10cm，则 ME 的长为 ______.