

# 2024 年寒假八下数学讲义

逮着一只大白

January 14, 2025

# Contents

<b>Contents</b>	<b>2</b>
<b>1 平行四边形</b>	<b>1</b>
1.1 回忆：轴对称图形 . . . . .	1
1.2 绘制轴对称和中心对称图形 . . . . .	3
1.3 平行四边形的性质 . . . . .	4
1.4 平行四边形的性质—课时练习 . . . . .	7
1.4.1 基础：利用性质求角度、长度、面积、坐标	7
1.4.2 拔高：性质相关证明问题 . . . . .	10
1.5 课堂内容回忆—需上交 . . . . .	12

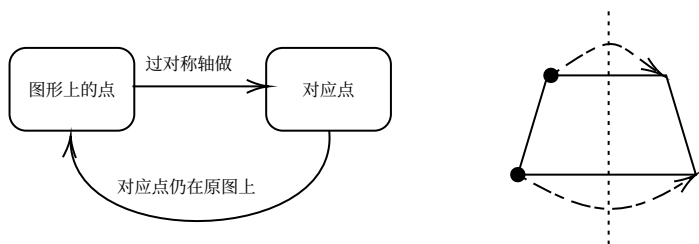
# 平行四边形 1

## 1.1 回忆：轴对称图形

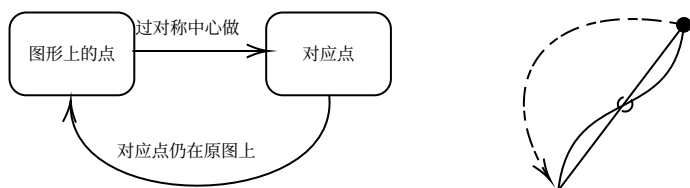
八上部分，我们已经学习了两大对称图形中的一种——轴对称图形。简单说，轴对称图形就是沿着一条直线翻折后，直线两边的部分能够完全重合的图形，建立在全等、垂直平分线的基础上，我们可以很容易的发现轴对称图形的性质：一轴二点垂直等距：

- ▶ “一轴二点”：对称轴和对称轴两侧的对对应点
- ▶ “等距”：对应点到对称轴的距离相等
- ▶ “垂直”：对应点的连线垂直于对称轴

基于这样的“性质”，我们就可以发展出对轴对称图形的“判定”。



由上面的分析，判断一个图形是否“轴对称”图形的关键是，对应点是否在原图上。我们借由这一判定规则发现等腰三角形、正方形、矩形，都是轴对称图形。当然，自然界还有一种对称——“中心对称”！顾名思义，这个图形不是关于一个轴，而是关于一个中心点对称。



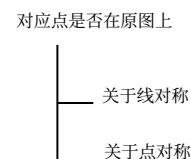
**Definition 1.1.1 轴对称图形**：图形上任意一点，关于对称轴的对应点（等效于沿对称轴翻折）在原图上。

**Definition 1.1.2 中心对称图形**：图形上任意一点，关于对称中心的对应点（等效于旋转  $180^\circ$ ）在原图上。

1.1 回忆：轴对称图形 . . . .	1
1.2 绘制轴对称和中心对称图形 . . . . .	3
1.3 平行四边形的性质 . . . .	4
1.4 平行四边形的性质—课时练习 . . . . .	7
1.4.1 基础：利用性质求角度、长度、面积、坐标 . . . . .	7
1.4.2 拔高：性质相关证明问题	10
1.5 课堂内容回忆—需上交 . .	12



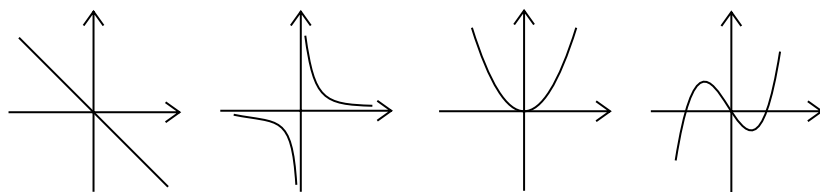
Figure 1.1: 扑克牌中的中心对称



“翻折”产生“轴对称”；“旋转”产生“中心对称”！不论轴对称还是中心对称，在数学和物理中都有着广泛的应用，比如下面四个函数图像。观察图像，识别轴对称或中心对称。

体会中点坐标公式对于坐标系内的轴对称和中心对称的重要作用！

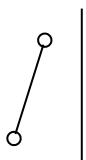
- ▶ 已知对称中心（对称轴），求对应点；
- ▶ 已知对应点，求对称中心（对称轴）。



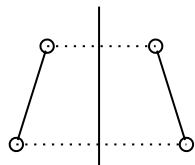
## 1.2 绘制轴对称和中心对称图形

绘制轴对称图形

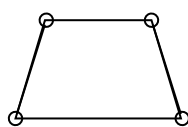
① 选取原始点



② 过对称轴做对应点



③ 对应点与原始点连线构成闭合图形-轴对称

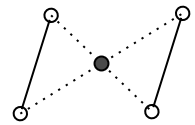


绘制中心对称图形

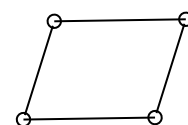
① 选取原始点



② 过对称轴做对应点



③ 对应点与原始点连线构成闭合图形-轴对称



1. 第一步：确定对称轴或对称中心。
2. 第二步：根据对称轴或对称中心绘制对应点。
3. 第三步：连接对应点，完成对称图形。

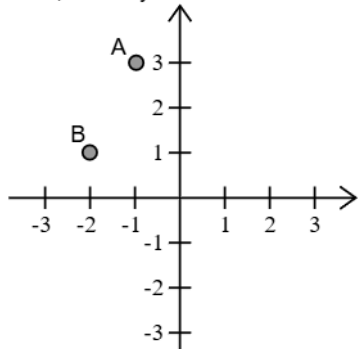
请进一步思考下面 3 个问题：

- ▶ 你绘制图形的过程中有没有注意到“中点”的出现，谁是中点，中点坐标公式是什么？
- ▶ 你绘制的图形是轴对称图形么，请根据上面介绍的轴对称规则回答。
- ▶ 请根据初一初二所学内容，总结这种图形的特点。

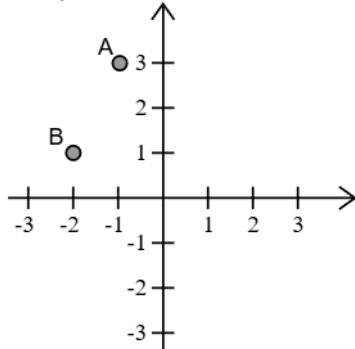
**Example 1.2.1** 以下坐标系中，我们已经预先设计好了两个点，请分别以  $y$  轴为对称轴，以原点为对称中心，画出对称点。并且在这个过程中体会：

1. 中点坐标公式的运用？
2. 平行的判定和性质的运用？
3. 每个对应点是如何绘制出的？

绘制关于  $y$  轴对称的对应点



绘制关于原点对称的对应点

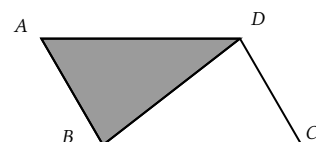
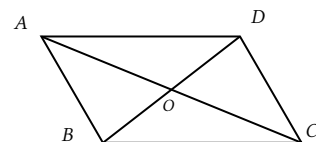
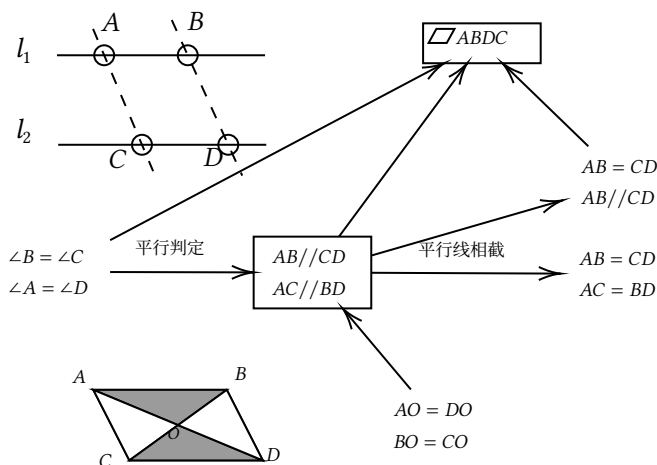


## 1.3 平行四边形的性质

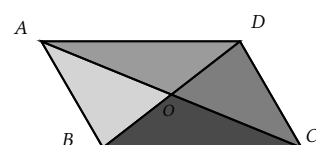
### Definition 1.3.1 平行四边形的定义

两组对边分别平行的四边形。用“ $\square$ ”表示。例如：平行四边形  $ABCD$  表示为“ $\square ABCD$ ”，读作“平行四边形  $ABCD$ ”

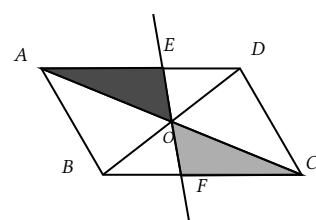
“平行线间的平行线段相等”。平行四边形从性质到判定的所有定理，都可以通过定义和平行线间线段性质来推导。



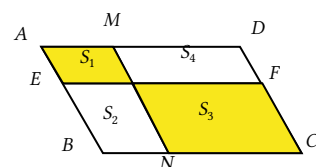
$$\triangle ABD \cong \triangle BDC$$



$$S_{\triangle ABO} = S_{\triangle ADO} = S_{\triangle BOC} = S_{\triangle COD}$$



$$\triangle AEO \cong \triangle CFO$$



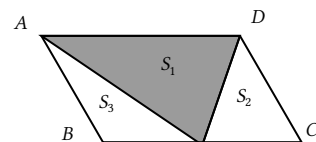
$$S_1 \times S_3 = S_2 \times S_4$$

### Theorem 1.3.1 平行四边形的性质

- ▶ 性质 1-对边: 1 组对边平行且相等, 或 2 组对边平行, 或 2 组对边相等
- ▶ 性质 2-对角: 2 组对角相等
- ▶ 性质 3-临边: 无关系
- ▶ 性质 4-临角: 无关系
- ▶ 性质 5-对角线: 对角线相互平分
- ▶ 性质 6-对称性: 平行四边形不是轴对称图形, 是中心对称图形

### Theorem 1.3.2 平行四边形重要结论: 对角线与过 O 直线

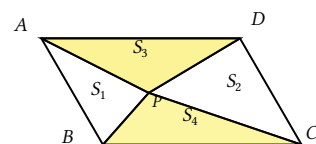
- ▶ 结论: 单对角线分全等
- ▶ 结论: 双对角线分四个等面积三角形
- ▶ 结论: 过 O 直线与对角线形成全等三角形



$$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$$

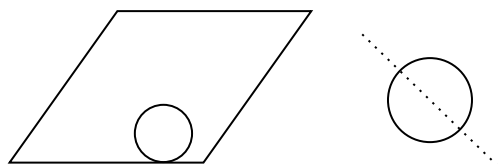
### Theorem 1.3.3 平行四边形重要结论: 关于面积

- ▶ 结论: 过 O 直线平分面积与周长
- ▶ 结论: 如图
- ▶ 结论: 如图
- ▶ 结论: 如图



$$S_1 + S_2 = S_3 + S_4 = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$$

**Example 1.3.1** 在一块平行四边形的稻田里有一圆形的水池, 为了给稻田浇水, 并使稻田里的水量趋于均匀, 现要从水池引一条笔直的水渠 (水渠的宽度忽略不计), 请你设计一种方案, 使水渠两侧的稻田面积相等, 并说明你的理由.

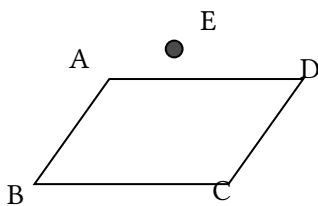
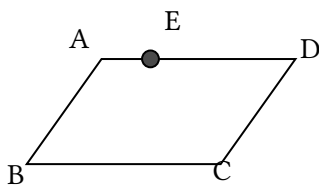


【提示】

过圆心的直线总是平分圆的周长和面积, 实际上任何一个中心对称图形都有这个性质: 过对称中心的直线, 平分周长和面积.

**Exercise 1.3.1** 已知平行四边形  $ABCD$  是中心对称图形, 点  $E$  是平面上一点, 请仅用无刻度直尺画出点  $E$  关于  $ABCD$  对称中心的对称点  $F$ .

- (1) 如图 1, 点  $E$  在  $ABCD$  的边  $AD$  上;
- (2) 如图 2, 点  $E$  在  $ABCD$  外.



**Example 1.3.2**

- (1) 如图 1, 点  $A, B, C, D$  均在格点上, 在  $AC$  上找点  $E$ , 使  $DE \parallel AB$ ;
- (2) 如图 2, 点  $A, B, C$  均在格点上, 作平行四边形  $ABCD$ , 再在  $CD$  上作点  $N$ , 使  $CN = AM$ ;
- (3) 如图 3, 过点  $C$  作  $CD \perp AB$ ;
- (4) 如图 4, 作点  $F$ , 使得  $EF = \sqrt{10}$  (每个小正方形的边长为 1).

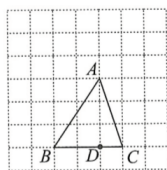


图 1

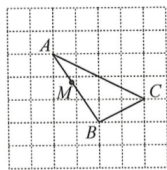


图 2

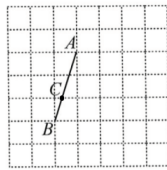


图 3

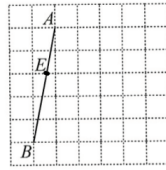


图 4

**Example 1.3.3**

如图1,  $\square ABCD$ ,  $O$  为  $AB$  中点, 过点  $B$  作  $AC$  的平行线.

变式. 依照上述方法, 如图2, 3, 点  $A, B$  在格点上, 点  $C$  在格线上, 过点  $C$  作  $CD \parallel AB$ .

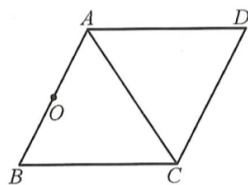


图 1

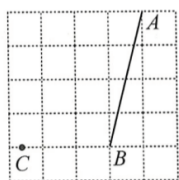


图 2

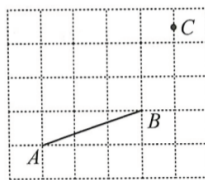
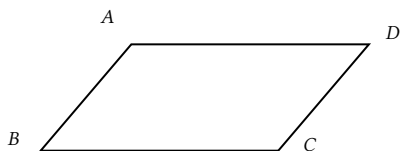


图 3

**Example 1.3.4** 如图所示, 已知四边形  $ABCD$ , 从 (1)  $AB \parallel DC$ ; (2)  $AB = DC$ ; (3)  $AD \parallel BC$ ; (4)  $AD = BC$ ; (5)  $\angle A = \angle C$ ; (6)  $\angle B = \angle D$  中取两个条件加以组合, 能推出四边形  $ABCD$  是平行四边形的有哪几种情形? 请写出具体组合。





## 1.4 平行四边形的性质—课时练习

### 1.4.1 基础：利用性质求角度、长度、面积、坐标

**Example 1.4.1** 有下列说法：① 平行四边形具有四边形的所有性质；② 平行四边形是中心对称图形；③ 平行四边形的任一条对角线可把平行四边形分成两个全等的三角形；④ 平行四边形的两条对角线把平行四边形分成 4 个面积相等的小三角形. 其中正确说法的序号是 ( )

A. ①②④ B. ①③④ C. ①②③ D. ①②③④

**Exercise 1.4.1** 下面关于平行四边形的性质描述正确的是 ( )

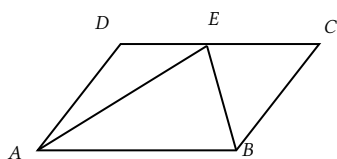
- A. 平行四边形的对称中心是对角线的交点
- B. 平行四边形的对称轴是对角线所在直线
- C. 平行四边形不是中心对称图形
- D. 平行四边形既不是中心对称图形，也不是轴对称图形

**Exercise 1.4.2** 平行四边形具有而一般四边形不具有的性质是 ( )

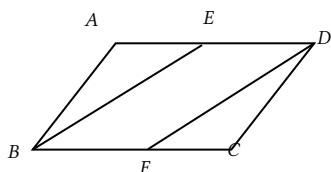
- A. 外角和等于
- B. 对角线互相平分
- C. 内角和等于
- D. 有两条对角线

**Example 1.4.2** 在平行四边形 ABCD 中， $\angle B - \angle A = 20^\circ$  则  $\angle D$  的度数是？

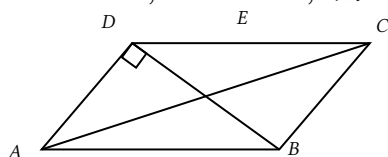
**Exercise 1.4.3** 如图, 在平行四边形  $ABCD$  中,  $\angle D = 100^\circ$ ,  $\angle DAB$  的平分线  $AE$  交  $CD$  于点  $E$ , 连接  $BE$ , 若  $AE = AB$ , 则  $\angle EBC$  的度数为\_\_\_\_\_.



**Exercise 1.4.4** 如图, 四边形  $ABCD$  是平行四边形,  $\angle ABC = 70^\circ$ ,  $BE$  平分  $\angle ABC$  且交  $AD$  于点  $E$ ,  $DF \parallel BE$  且交  $BC$  于点  $F$ , 则  $\angle ADF$  的度数为\_\_\_\_\_.



**Exercise 1.4.5** 如图, 在平行四边形  $ABCD$  中, 已知  $\angle ODA = 90^\circ$ ,  $AC = 10$  "cm",  $BD = 6$  "cm", 则  $AD$  的长为 ( )



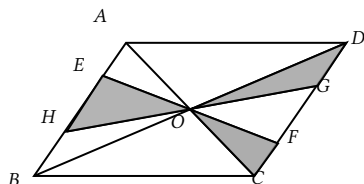
A. 4cm B. 5cm C. 6cm D. 8cm

**Exercise 1.4.6** 在平行四边形  $ABCD$  中,  $AD = 10$ ,  $AE$  平分  $\angle BAD$  交  $BC$  于点  $E$ ,  $DF$  平分  $\angle ADC$  交  $BC$  于点  $F$ , 且  $EF = 2$ , 则  $AB$  的长为 ( )

A. 4 B. 6 C. 6 或 8 D. 4 或 6

**Example 1.4.3** 如图, 平行四边形  $ABCD$  的对角线  $AC$ ,  $BD$  相交于点  $O$ ,  $EF$ ,  $GH$  过点  $O$ , 且点  $E$ ,  $H$  在边  $AB$  上, 点  $G$ ,  $F$  在边  $CD$  上, 则阴影部分的面积与  $ABCD$  的面积比值是 ( ).

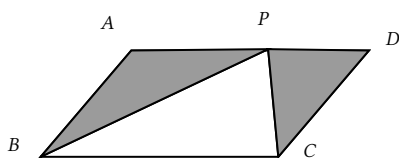
A.  $1/2$  B.  $1/3$  C.  $1/4$  D.  $1/5$



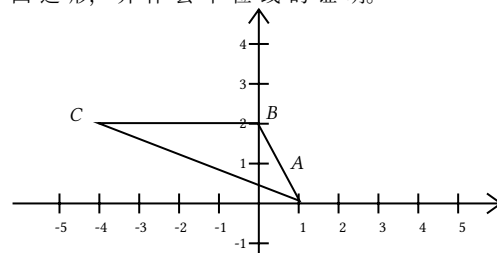
**Example 1.4.4** 以三角形的三个顶点作平行四边形，最多可以作（ ）

A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

**Exercise 1.4.7** 如图，在平行四边形 ABCD 中，P 是 AD 边上一点. 已知  $S_{\triangle ABP} = 3.5\text{cm}^2$ ,  $S_{\triangle CDP} = 2.5\text{cm}^2$ , 则 ABCD 的面积是 \_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$ .

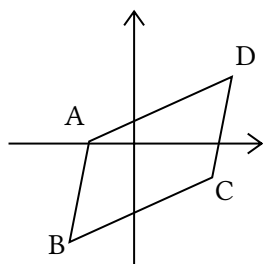


**【探索】** 请你尝试在利用下图坐标系，画出符合要求的平行四边形，并体会中位线的证明。



**Example 1.4.5** 在平行四边形 ABCD 中，对角线 AC, BD 相交于点 O, 以点 O 为坐标原点建立平面直角坐标系，其中  $A(a,b)$ ,  $B(a-1,b+2)$ ,  $C(3,1)$ , 则点 D 的坐标是 \_\_\_\_\_.

**Exercise 1.4.8** 如图，在平面直角坐标系中，若平行四边形 ABCD 的三个顶点的坐标分别是  $A(-1,0)$ 、 $B(-2,-3)$ 、 $D(3,2)$ , 则顶点 C 的坐标是 \_\_\_\_\_.



**Exercise 1.4.9** 在平面直角坐标系里， $A(1,0)$ ,  $B(0,2)$ ,  $C(-4,2)$ , 若以 A、B、C、D 为顶点的四边形是平行四边形，则点 D 的坐标为 \_\_\_\_\_.

## 1.4.2 拔高：性质相关证明问题

**Example 1.4.6** 如图，平行四边形  $ABCD$  的对角线  $AC$ ， $BD$  交于点  $O$ ， $AE$  平分  $\angle BAD$ ，交  $BC$  于点  $E$ ，且  $\angle ADC=60^\circ$ ， $AB = \frac{1}{2}BC$ ，连接  $OE$ ，下列结论

①  $\angle CAD=30^\circ$ ；

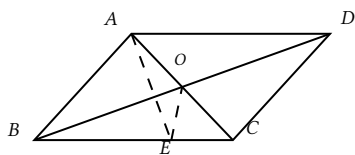
②  $OE \perp AC$ ；

③  $BD = \sqrt{7}AB$ ；

④  $S_{\square ABOE} = \frac{3}{2}S_{\triangle OCD}$ ；

其中成立的个数是 ( )

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个



**Example 1.4.7** 如图， $E$  是  $\square ABCD$  内一点， $ED \perp CD$ ， $EB \perp BC$ ， $\angle AED=135^\circ$ ，连接  $AC$ ， $BD$ ，下列结论：

①  $\angle ADE = \angle ABE$ ；

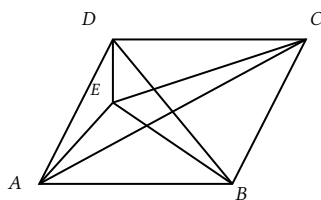
②  $\triangle BCE$  为等腰直角三角形；

③  $DE + AB = \sqrt{2}BD$ ；

④  $AE^2 + AB^2 = AC^2$ ，

其中正确的个数有 ( )

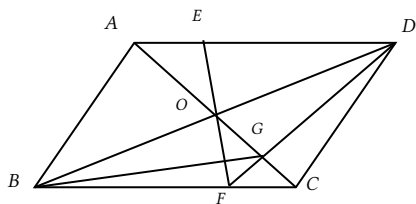
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个



**Exercise 1.4.10** 如图, 在平行四边形  $ABCD$  中, 对角线  $AC$ ,  $BD$  交于点  $O$ ,  $AB=2$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ , 直线  $EF$  过点  $O$ , 连接  $DF$ , 交  $AC$  于点  $G$ , 连  $BG$ ,  $\triangle DCF$  的周长等于 6, 下列说法正确的个数为 ( )

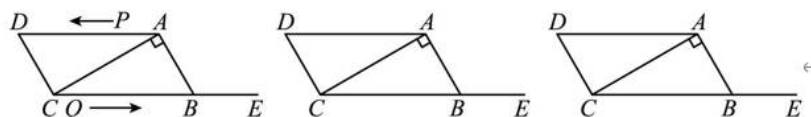
- ①  $\angle EOD = 90^\circ$ ;  
 ②  $S_{\triangle DFC} = 2S_{\triangle AEO}$   
 ③  $S_{\triangle ABG} + S_{\triangle DGC} = \frac{1}{2}S_{\square ABCD}$ ;  
 ④  $AE = \frac{6}{5}$ .

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个



**Exercise 1.4.11** 如图, 在平行四边形  $ABCD$  中,  $\angle BAC=90^\circ$ ,  $\angle B=60^\circ$ ,  $AB=6$ . 动点  $P$  从点  $A$  出发沿  $AD$  以  $1\text{cm/s}$  速度向终点  $D$  运动, 同时点  $Q$  从点  $C$  出发, 以  $4\text{cm/s}$  速度沿射线  $CB$  运动, 当点  $P$  到达终点时, 点  $Q$  也随之停止运动, 设点  $P$  运动的时间为  $t$  秒.

- (1) 用含  $t$  的代数式表示  $BQ=$  \_\_\_\_\_;  
 (2) 当  $PQ \perp BC$  时, 求  $t$  的值;  
 (3) 请问是否存在  $t$  的值, 使得  $A, B, P, Q$  为顶点的四边形为平行四边形? 若存在, 求出  $t$  的值; 若不存在, 请说明理由.



## 1.5 课堂内容回忆—需上交

姓名: \_\_\_\_\_ 日期: \_\_\_\_\_

### Exercise 1.5.1 课堂回忆

1. 我们一开始回忆了八上的什么概念 \_\_\_\_\_, 他的定义是什么? \_\_\_\_\_.
2. 他与我们今天学习的内容有什么区别, 今天学习的对称叫什么, 定义是什么 \_\_\_\_\_.

### Exercise 1.5.2 课堂回忆

1. 已知轴对称图形上的点坐标  $(a,b)$  及其对应点  $(m,n)$ , 能否求出对称轴的表达式 \_\_\_\_\_
2. 已知中心对称图形上的点坐标  $(a,b)$  及其对应点  $(m,n)$  能否求出对称中心的坐标 \_\_\_\_\_

### Exercise 1.5.3 课堂回忆

如何绘制轴对称图形, 以及中心对称图形。以一条线段为例进行说明 (请绘制出坐标系、及任意一条线段并绘图说明)。

### Exercise 1.5.4 课堂回忆

1. 平行四边形的定义什么? \_\_\_\_\_
2. 平行四边形的性质, 可以归结为两个核心性质, 他们是 \_\_\_\_\_ 和 \_\_\_\_\_
3. 其中“两组对边分别平行”可以推出:  
(1) \_\_\_\_\_ (2) \_\_\_\_\_ (3) \_\_\_\_\_

### Exercise 1.5.5 课堂回忆

关于平四的四个重要面积推论 (请绘图说明):

1.

2.

3.

4.