yiddishkop latex 学习一 – 数学表达式

John Doe

2025 年 10 月 9 日

1 数学公式

1.1 三种基本公式

这是一个行内公式：$E = mc^2$

这是一个居中公式：

$$E = mc^2$$

这是一个带编号的居中公式：

$$E = mc^2 \tag{1.1}$$

1.2 多行公式对齐

解方程过程：

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \quad (1.2) \\ 2x &= 4 \quad (1.3) \\ x &= 2 \quad (1.4) \end{aligned}$$

二项式公式：

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \quad (1.5) \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \quad (1.6) \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \quad (1.7) \end{aligned}$$

1.3 居中对齐的多行公式

$$\begin{gathered} E = mc^2 \quad (1.8) \\ F = ma \quad (1.9) \\ a^2 + b^2 = c^2 \quad (1.10) \end{gathered}$$

1.4 多列对齐的公式

$$\begin{aligned} x &= y && \text{(由条件 1)} \quad (1.11) \\ a &= b && \text{(由条件 2)} \quad (1.12) \\ m &= n && \text{(由条件 3)} \quad (1.13) \end{aligned}$$

1.5 矩阵表示

无括号矩阵：

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

圆括号矩阵：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

方括号矩阵：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

行列式：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

大括号矩阵：

$$\begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix}$$

1.6 分块矩阵

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right]$$

或者是用 pmatrix 环境：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

1.7 分段函数

绝对值函数:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{如果} x \geq 0 \\ -x & \text{如果} x < 0 \end{cases}$$

符号函数:

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{当} x > 0 \\ 0 & \text{当} x = 0 \\ -1 & \text{当} x < 0 \end{cases}$$

阶梯函数:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{对于} x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{对于} x > 0 \end{cases}$$

1.8 定理环境使用

这是一个定义:

Definition 1.8.1 (平行四边形) 如果一个四边形的两组对边分别平行，那么这个四边形就是一个平行四边形。

这是一个定理:

Theorem 1.8.1 (平行四边形性质) *在平行中:*

1. 对边相等
2. 对角相等
3. 对角线互相平分

这是一个证明:

证明. 设平行四边形 $ABCD$, 连接对角线 AC. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中:

$$\begin{aligned} \angle BAC &= \angle DCA && \text{(对顶角)} \\ \angle BCA &= \angle CDA && \text{(对顶角)} \\ AB &= CD && \text{(对边相等)} \end{aligned}$$

因此 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (ASA), 所以 AC 平分 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$. □

这是一个证明（使用 alignat）

证明. 设平行四边形 $ABCD$, 连接对角线 AC. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中:

$$\angle BAC = \angle DCA \quad (\text{对顶角}) \tag{1.14}$$

$$\angle BCA = \angle CDA \quad (\text{对顶角}) \tag{1.15}$$

$$AB = CD \quad (\text{对边相等}) \tag{1.16}$$

因此 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (ASA), 所以 AC 平分 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$. □

这是一个例子:

Example 1.8.1 设 $ABCD$ 是一个平行四边形，证明 $AB \parallel CD$.

这是一个答案:

Theorem 1.8.2 由于 $ABCD$ 是平行四边形，定义中已经说明 $AB \parallel CD$.

$$\angle C = \angle A \quad (\text{对顶角})$$

$$\angle B = \angle D = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ \quad (\text{对顶角})$$

2 数学符号和特殊字体

2.1 数学字体

普通字体：a, b, c, x, y, z

黑板粗体：$\mathbb{ABC}$ 用于数集: $\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$

手写体：$\mathscr{ABC}, \mathcal{ABC}$

无衬线体：$\mathsf{ABCabcxyz}$

打字机体：$\mathtt{ABCabcxyz}$

2.2 常用数学符号

数集：$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

运算符：$\pm, \mp, \times, \div, \cdot, *, \star$

关系符：$\sim, \approx, \simeq, \cong, \equiv, \propto$

箭头：$\to, \rightarrow, \leftarrow, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \mapsto$

几何符号：$\angle, \triangle, \square, \parallel, \perp, \cong$

2024

设 $x^{(k)} \in \mathbf{R}^n, k = 0, 1, 2, \cdots, x^* \in \mathbf{R}^n, B \in \mathbf{R}^{n\times n}$.
(1) 给出向量序列 $x^{(k)}(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 收敛于向量 x^* 的定义;
(2) 设 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$, 证明: $\lim\limits_{k\to\infty} Bx^{(k)} = Bx^*$.

设 $\|\cdot\|$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一种范数.
(1) 如果

$$\lim_{k\to\infty} \left\|x^{(k)} - x^*\right\| = 0,$$

则称向量序列 $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于向量 x^*.
(2) 因 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty} \left\|x^{(k)} - x^*\right\| = 0$. 又

$$\left\|Bx^{(k)} - Bx^*\right\| = \left\|B\left(x^{(k)} - x^*\right)\right\| \leqslant \|B\| \cdot \left\|x^{(k)} - x^*\right\|,$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left\|Bx^{(k)}-Bx^*\right\| &\leqslant \lim_{k\to\infty}\|B\|\cdot\left\|x^{(k)}-x^*\right\| \\ &=\|B\|\lim_{k\to\infty}\left\|x^{(k)}-x^*\right\|=0,\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty}Bx^{(k)}=Bx^*$.

2024

1. 解方程 $12-3x+2\cos x=0$ 的迭代格式为 $x_{n+1}=4+\frac{2}{3}\cos x_n$.
(1) 证明: 对任意 $x_0\in\mathbf{R}$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$ (x^* 为方程的根);
(2) 此迭代法的收敛阶是多少?

(1) 迭代函数 $\varphi(x)=4+\frac{2}{3}\cos x$, 对任意 $x\in\mathbf{R}$

$$4-\frac{2}{3}\leqslant 4+\frac{2}{3}\cos x\leqslant 4+\frac{2}{3},\quad x\in(+\infty,-\infty)$$

$$\varphi(x)\in\left[4-\frac{2}{3},4+\frac{2}{3}\right]\subset(-\infty,+\infty)$$

又因为:

$$\varphi'(x)=-\frac{2}{3}\sin x,\quad L=\max_{-\infty<x<\infty}|\varphi'(x)|=\frac{2}{3}<1$$

故迭代公式在 $(-\infty,\infty)$ 满足收敛性定理, 即 $\{x_k\}$ 收敛于方程的根 x^*.
(2) 由

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi\left(x^*\right)-\varphi\left(x_k\right)}{x^*-x_k}=\varphi'\left(x^*\right)=-\frac{2}{3}\sin x^*\neq 0$$

可知迭代线性收敛.

2024

设 A 为 n 阶非奇异矩阵且有分解式 $A=LU$, 其中 L 是单位下三角阵, U 为上三角阵, 求证 A 的所有顺序主子式均不为零.

证明: 由题意可知, 若将 $A=LU$ 分解式中的 L 与 U 分块

$$L=\begin{bmatrix}L_{k\times k} & 0_{k\times(n-k)}\\ L_{(n-k)\times k} & L_{(n-k)\times(n-k)}\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}U_{k\times k} & U_{k\times(n-k)}\\ 0_{(n-k)\times k} & U_{(n-k)\times(n-k)}\end{bmatrix}$$

其中, $L_{k\times k}$ 为 k 阶单位下三角阵, $U_{k\times k}$ 为 k 阶上三角阵, 则 A 的 k 阶顺序主子式为 $A_k=L_{k\times k}U_{k\times k}$, 又由 A 为 n 阶非奇异矩

阵, 因此 $|A| = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{nn}^{(n)} \neq 0$, 则

$$|A_k| = |L_{k\times k}| \cdot |U_{k\times k}| = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{kk}^{(k)} \neq 0$$

证得 A 的所有顺序主子式均不为零.

2024-03-05

4. 为了使 $\sqrt{11}$ 的近似值的相对误差不超过 0.1%, 至少应取几位有效数字

设近似数 x^* 表示为

$$x^* = \pm 10^m \times \left(a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_l \times 10^{-(l-1)}\right),$$

其中 $a_i (i = 1, 2, \cdots, l)$ 是 0 到 9 中的一个数字, $a_1 \neq 0, m$ 为整数. 若 x^* 具有 n 位有效数字, 则其相对误差限

$$\varepsilon_r^* \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}$$

设取 n 位有效数字, 由上可知 $\varepsilon_r^* \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$. 由于 $\sqrt{11} = 3.3\cdots$, 知 $a_1 = 3$,

$$\varepsilon_r(x^*) \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{1-n} = \frac{1}{6} \times 10^{(1-n)}$$

根据题意我们有 $\frac{1}{6} \times 10^{1-n} \leqslant 0.1\%$, 解得 $n \geqslant 3.22$, 故取 $n = 4$, 即只要对 $\sqrt{11}$ 的近似值取 4 位有效数字, 其相对误差限就小于 0.1%.

填空题

1. 证明: 求解常微分方程初值问题的改进 Euler 方法具有 ______ 阶精度.
2. 已知 $f(2) = 3, f(3) = 5, f(5) = 4$, 则函数 $f(x)$ 在此三点的插值多项式为 ______.
2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\mathrm{cond}_1(A) =$ ______
4. 迭代法 $X^{(k+1)} = BX^{(k)} + f$ 求解线性方程组对任意 $X^{(0)}$ 和 f 均收敛的充要条件为 ______
5. 定积分的 Simpson 数值求积公式具有 ______ 次代数精度.

解答题

证明: 当 $x_0 = 1.5$ 时, 迭代法 $x_{k+1} = \sqrt{\frac{10}{4+x_k}}$ 收敛于方程 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 在区间 $[1, 2]$ 内唯一实根 x^*.

首先，我们建立迭代公式：