

数列极值的一道好题

设实数列  $(a_n)$  满足:  $a_1 = 1$ , 且

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{na_n} \quad (n \geq 1).$$

- (1) 证明  $a_n^2$  单调增加; (2) 求证: 存在常数  $C$  使得  $a_n = \sqrt{2 \ln n + C} + o(1)$ ;  
(3) 给出一个对  $a_{1000}$  的三位小数近似。

💡💡💡: 可先考虑  $b_n = a_n^2$  的增量; 再用积分比较估计  $\sum \frac{1}{na_n}$ 。

