

# yiddishkop latex 学习一 — 数 学表达式

John Doe

2025 年 10 月 13 日



# 1 数学公式

## 1.1 三种基本公式

这是一个行内公式：  $E = mc^2$

这是一个居中公式：

$$E = mc^2$$

这是一个带编号的居中公式：

$$E = mc^2 \tag{1.1}$$

## 1.2 多行公式对齐

解方程过程：

$$2x + 3y = 6 \tag{1.2}$$

$$2x = 4 \tag{1.3}$$

$$x = 2 \tag{1.4}$$

二项式公式：

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1.5}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{1.6}$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \tag{1.7}$$

## 1.3 居中对齐的多行公式

$$E = mc^2 \tag{1.8}$$

$$F = ma \tag{1.9}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1.10}$$

## 1.4 多列对齐的公式

$$x = y \quad (\text{由条件 1}) \tag{1.11}$$

$$a = b \quad (\text{由条件 2}) \tag{1.12}$$

$$m = n \quad (\text{由条件 3}) \tag{1.13}$$

## 1.5 矩阵表示

无括号矩阵：

$$\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}$$

圆括号矩阵：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

方括号矩阵：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

行列式：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

大括号矩阵：

$$\begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix}$$

## 1.6 分块矩阵

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array} \right]$$

或者是用 `pmatrix` 环境：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

## 1.7 分段函数

绝对值函数：

$$|x| = \begin{cases} x & \text{如果 } x \geq 0 \\ -x & \text{如果 } x < 0 \end{cases}$$

符号函数：

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x > 0 \\ 0 & \text{当 } x = 0 \\ -1 & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

阶梯函数：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{对于 } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{对于 } x > 0 \end{cases}$$

## 1.8 定理环境使用

这是一个定义：

**Definition 1.8.1** (平行四边形) 如果一个四边形的两组对边分别平行，那么这个四边形就是一个平行四边形。

这是一个定理：

**Theorem 1.8.1** (平行四边形性质) 在平行中：

1. 对边相等
2. 对角相等
3. 对角线互相平分

这是一个证明：

证明. 设平行四边形  $ABCD$ , 连接对角线  $AC$ . 在  $\triangle ABC$  和  $\triangle CDA$  中:

$$\begin{array}{ll} \angle BAC = \angle DCA & (\text{对顶角}) \\ \angle BCA = \angle CDA & (\text{对顶角}) \\ AB = CD & (\text{对边相等}) \end{array}$$

因此  $\triangle ABC \cong \triangle CDA$  (ASA), 所以  $AC$  平分  $\angle BAD$  和  $\angle BCD$ . □

这是一个证明（使用 alignat）

证明. 设平行四边形  $ABCD$ , 连接对角线  $AC$ . 在  $\triangle ABC$  和  $\triangle CDA$  中:

$$\angle BAC = \angle DCA \quad (\text{对顶角}) \quad (1.14)$$

$$\angle BCA = \angle CDA \quad (\text{对顶角}) \quad (1.15)$$

$$AB = CD \quad (\text{对边相等}) \quad (1.16)$$

因此  $\triangle ABC \cong \triangle CDA$  (ASA), 所以  $AC$  平分  $\angle BAD$  和  $\angle BCD$ .  $\square$

这是一个例子:

**Example 1.8.1** 设  $ABCD$  是一个平行四边形, 证明  $AB \parallel CD$ .

这是一个答案:

**Theorem 1.8.2** 由于  $ABCD$  是平行四边形, 定义中已经说明  $AB \parallel CD$ .

$$\angle C = \angle A \quad (\text{对顶角})$$

$$\angle B = \angle D = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ \quad (\text{对顶角})$$

## 2 数学符号和特殊字体

### 2.1 数学字体

普通字体:  $a, b, c, x, y, z$

黑板粗体:  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  用于数集:  $\mathbb{R}, \mathbb{X}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$

手写体:  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$

无衬线体:  $\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{x}, \text{y}, \text{z}$

打字机体:  $\texttt{A}, \texttt{B}, \texttt{C}, \texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{z}$

### 2.2 常用数学符号

数集:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

运算符:  $+, -, \times, \div, \cdot, *, \star$

关系符:  $\sim, \approx, \simeq, \cong, \equiv, \propto$

箭头:  $\rightarrow, \Rightarrow, \leftarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow, \mapsto$

几何符号:  $\angle, \triangle, \square, \parallel, \perp, \cong$

2024

设  $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n, k = 0, 1, 2, \dots, x^* \in \mathbb{R}^n, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

(1) 给出向量序列  $x^{(k)} (k = 0, 1, 2, \dots)$  收敛于向量  $x^*$  的定义;

(2) 设  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*$ , 证明:  $\lim_{k \rightarrow \infty} Bx^{(k)} = Bx^*$ .

设  $\|\cdot\|$  为  $\mathbb{R}^n$  中的一种范数.

(1) 如果

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - x^*\| = 0,$$

则称向量序列  $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  收敛于向量  $x^*$ .

(2) 因  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*$ , 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - x^*\| = 0$ . 又

$$\|Bx^{(k)} - Bx^*\| = \|B(x^{(k)} - x^*)\| \leq \|B\| \cdot \|x^{(k)} - x^*\|,$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \|Bx^{(k)} - Bx^*\| &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|B\| \cdot \|x^{(k)} - x^*\| \\ &= \|B\| \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - x^*\| = 0,\end{aligned}$$

所以  $\lim_{k \rightarrow \infty} Bx^{(k)} = Bx^*$ .

2024

1. 解方程  $12 - 3x + 2 \cos x = 0$  的迭代格式为  $x_{n+1} = 4 + \frac{2}{3} \cos x_n$ .

(1) 证明: 对任意  $x_0 \in \mathbf{R}$ , 均有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$  ( $x^*$  为方程的根);

(2) 此迭代法的收敛阶是多少?

(1) 迭代函数  $\varphi(x) = 4 + \frac{2}{3} \cos x$ , 对任意  $x \in \mathbf{R}$

$$4 - \frac{2}{3} \leq 4 + \frac{2}{3} \cos x \leq 4 + \frac{2}{3}, \quad x \in (+\infty, -\infty)$$

$$\varphi(x) \in \left[4 - \frac{2}{3}, 4 + \frac{2}{3}\right] \subset (-\infty, +\infty)$$

又因为:

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{3} \sin x, \quad L = \max_{-\infty < x < \infty} |\varphi'(x)| = \frac{2}{3} < 1$$

故迭代公式在  $(-\infty, \infty)$  满足收敛性定理, 即  $\{x_k\}$  收敛于方程的根  $x^*$ .

(2) 由

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^* - x_{k+1}}{x^* - x_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x^*) - \varphi(x_k)}{x^* - x_k} = \varphi'(x^*) = -\frac{2}{3} \sin x^* \neq 0$$

可知迭代线性收敛.

2024

设  $A$  为  $n$  阶非奇异矩阵且有分解式  $A = LU$ , 其中  $L$  是单位下三角阵,  $U$  为上三角阵, 求证  $A$  的所有顺序主子式均不为零.

证明: 由题意可知, 若将  $A = LU$  分解式中的  $L$  与  $U$  分块

$$L = \begin{bmatrix} L_{k \times k} & 0_{k \times (n-k)} \\ L_{(n-k) \times k} & L_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_{k \times k} & U_{k \times (n-k)} \\ 0_{(n-k) \times k} & U_{(n-k) \times (n-k)} \end{bmatrix}$$

其中,  $L_{k \times k}$  为  $k$  阶单位下三角阵,  $U_{k \times k}$  为  $k$  阶上三角阵, 则  $A$  的  $k$  阶顺序主子式为  $A_k = L_{k \times k} U_{k \times k}$ , 又由  $A$  为  $n$  阶非奇异矩



阵, 因此  $|A| = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{nn}^{(n)} \neq 0$ , 则

$$|A_k| = |L_{k \times k}| \cdot |U_{k \times k}| = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{kk}^{(k)} \neq 0$$

证得  $A$  的所有顺序主子式均不为零.

2024-03-05

4. 为了使  $\sqrt{11}$  的近似值的相对误差不超过 0.1%, 至少应取几位有效数字

设近似数  $x^*$  表示为

$$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_l \times 10^{-(l-1)}),$$

其中  $a_i (i = 1, 2, \dots, l)$  是 0 到 9 中的一个数字,  $a_1 \neq 0, m$  为整数. 若  $x^*$  具有  $n$  位有效数字, 则其相对误差限

$$\epsilon_r^* \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}$$

设取  $n$  位有效数字, 由上可知  $\epsilon_r^* \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$ . 由于  $\sqrt{11} = 3.3 \dots$ , 知  $a_1 = 3$ ,

$$\epsilon_r(x^*) \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{1-n} = \frac{1}{6} \times 10^{(1-n)}$$

根据题意我们有  $\frac{1}{6} \times 10^{1-n} \leq 0.1\%$ , 解得  $n \geq 3.22$ , 故取  $n = 4$ , 即只要对  $\sqrt{11}$  的近似值取 4 位有效数字, 其相对误差限就小于 0.1%.

### 填空题

1. 证明: 求解常微分方程初值问题的改进 Euler 方法具有 \_\_\_\_\_ 阶精度.
2. 已知  $f(2) = 3, f(3) = 5, f(5) = 4$ , 则函数  $f(x)$  在此三点的插值多项式为 \_\_\_\_\_.
2. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $\text{cond}_1(A) = \underline{\hspace{2cm}}$
4. 迭代法  $X^{(k+1)} = BX^{(k)} + f$  求解线性方程组对任意  $X^{(0)}$  和  $f$  均收敛的充要条件为 \_\_\_\_\_
5. 定积分的 Simpson 数值求积公式具有 \_\_\_\_\_ 次代数精度.

### 解答题

证明: 当  $x_0 = 1.5$  时, 迭代法  $x_{k+1} = \sqrt{\frac{10}{4+x_k}}$  收敛于方程  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$  在区间  $[1, 2]$  内唯一实根  $x^*$ .

首先，我们建立迭代公式：