力　学

经典力学中隐含三条假设：

(1)无限精细的经验可能性；

(2)计算要素与观察要素等同；

(3)确定论的预言。

第一章 质点运动学

§1.1 质点 参照系

一、质点

一个具有质量而没有大小和形状的理想物体称为质点。

物体各部分运动完全相同（平动物体，如抽屉的运动），或物体各部分运动的差别在研究的问题中可以忽略（如地球绕太阳的运动，地球半径比地球绕太阳公转的半径小得多），就可以用一个点来代表这个物体，这个点集中了物体的质量，称为质点。

研究物理现象时，常常需抓住主要因素，忽略次要因素，把复杂的研究对象简化成理想模型。

二、参照系

研究物体运动时所参照的物体（或彼此不做相对运动的物体群）称为参照系。

- 举例：运动车厢内静止小球的自由下落。

- 运动学中选择参照系以描述简单为原则，而在动力学中选择参照系有一定限制，因为有许多定律只有在惯性系中成立。

- 为了定量确定物体的位置，还要在参照系上选取一个坐标系。

三、时间、空间的计量问题的历史变革

国际计量大会近几十年先后修改多个基本计量单位的定义。最近的是26届，2018年11月，巴黎

时间计量

定义：1 秒为太阳平均日的1/86400。

在太阳系各种运动中，可做时钟的有：地球的自转和公转；月球绕地球的公转；木星、金星绕太阳的公转；木星四个卫星绕木星的公转。研究发现地球的自转在变慢，经一个世纪一天的长短增加0.001秒。

1967年第十三届国际计量大会定义：

1秒是铯133原子两个超精细能级之间跃迁所对应辐射周期的9192631770倍。

跃迁频率测量精确度可达10^{-12}。

现代天文学的研究表明：脉冲星射电辐射的频率可作为更高精确度的时间基准。

长度计量

1898年第一届国际计量大会定义：

国际计量局保存的铂铱合金米原器在0^0C时两条刻线间的距离为1米。

1960年第十一届国际计量大会定义：

1米是氪86原子发出的一个特征频率的光的波长的1650763.73倍；精确度4×10^{-9}。

1983年第十七届国际计量大会定义：

1米是光在真空中1/299792458秒时间内所传播的距离。

2018年， 以量子力学中用于计算光子能量的普朗克常数作为新标准，并使用最精确的瓦特天平（Watt Balance）重新定义“千克”。

- 时间尺度和空间尺度

空间尺度：哈勃半径10^{27}～核子线度10^{-15}m

时间尺度：宇宙年龄10^{18}～微观粒子寿命10^{-24}s

数 量 级 概 念

因数	词头名称		符号	因数	词头名称		符号
	英文	中文			英文	中文	
10^{-1}	deci	分	d	10	deca	十	da
10^{-2}	centi	厘	c	10^{2}	hecto	百	h
10^{-3}	milli	毫	m	10^{3}	kilo	千	k
10^{-6}	micro	微	μ	10^{6}	mega	兆	M
10^{-9}	nano	纳(诺)	n	10^{9}	giga	吉(咖)	G
10^{-12}	pico	皮(可)	p	10^{12}	tera	太(拉)	T
10^{-15}	femto	飞(母托)	f	10^{15}	peta	拍(它)	P
10^{-18}	atto	阿(托)	a	10^{18}	exa	艾(可萨)	E
10^{-21}	zepto	仄(普托)	z	10^{21}	zetta	泽(它)	Z
10^{-24}	yocto	幺(科托)	y	10^{24}	yotta	尧(它)	Y

§1.2 位置矢量 运动方程 位移

一、位置矢量

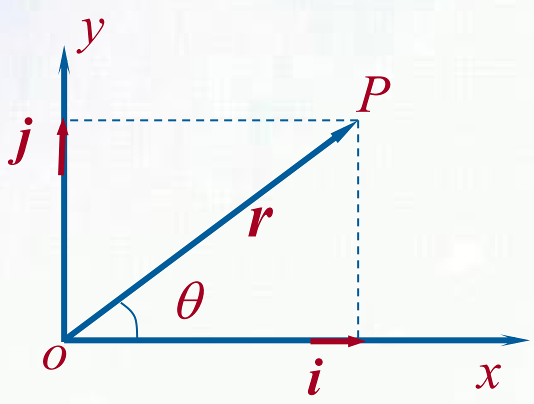
在直角坐标系中，质点的位置矢量（位矢）可表示为：

$\boldsymbol{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ (二维)　　$\boldsymbol{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ (三维)

i、**j**、**k** 称为单位矢量，$\boldsymbol{r}$ 的大小 r 称为模：

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



方向角：$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ （二维）

方向余弦：$\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ $\cos\beta = \dfrac{y}{r}$ $\cos\gamma = \dfrac{z}{r}$ （三维）

二、运动方程

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(\mathrm{t}) = x(\mathrm{t})\mathbf{i} + y(\mathrm{t})\mathbf{j} + z(\mathrm{t})\mathbf{k}$$

上述方程给出任一时刻质点的位置，反映了质点运动的规律，称为质点的运动方程。

运动方程的分量式：

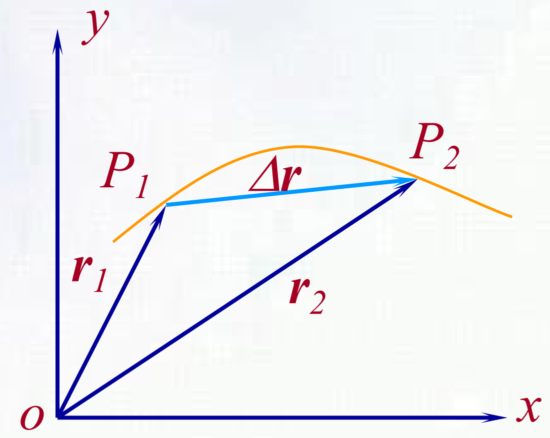
$$x = x(\mathrm{t}),\quad y = y(\mathrm{t}),\quad z = z(\mathrm{t})$$

$\boldsymbol{r}$ 的末端描出的曲线称为质点运动的轨道，消去时间 t，称为质点运动的轨道方程。

三、位移

位移矢量是终点位矢与起点位矢之差：

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$$



路程：运动质点所经历轨道长度。

位移和路程的单位为 m。

用 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 表示位移的大小，一般情况它与路程不相等。

§1.3 速 度

描述质点运动快慢和运动方向的物理量称为**速度**。

一、平均速度

在时间间隔 $t \sim t+\Delta t$ 内，质点位移 $\Delta \boldsymbol{r}$，则定义平均速度为：

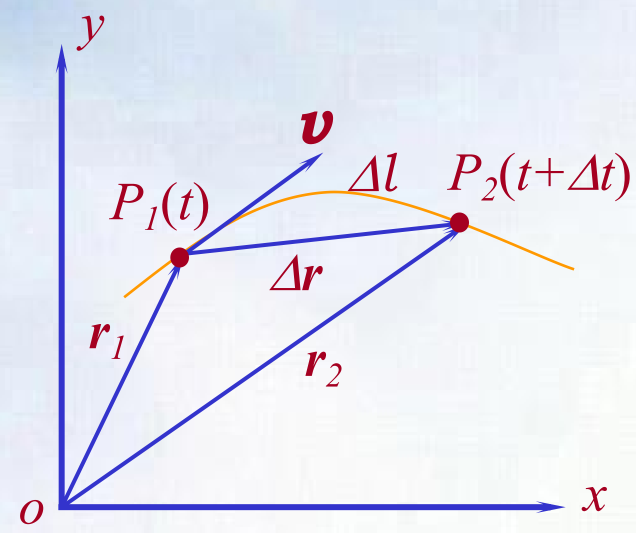
$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

$\bar{\boldsymbol{v}}$ 是矢量，方向与 $\Delta \boldsymbol{r}$ 相同。

二、瞬时速度

当$\Delta t \to 0$时，平均速度的极限称该时刻的**瞬时速度**：

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$



在直角坐标系中：

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}$$

分量式为:

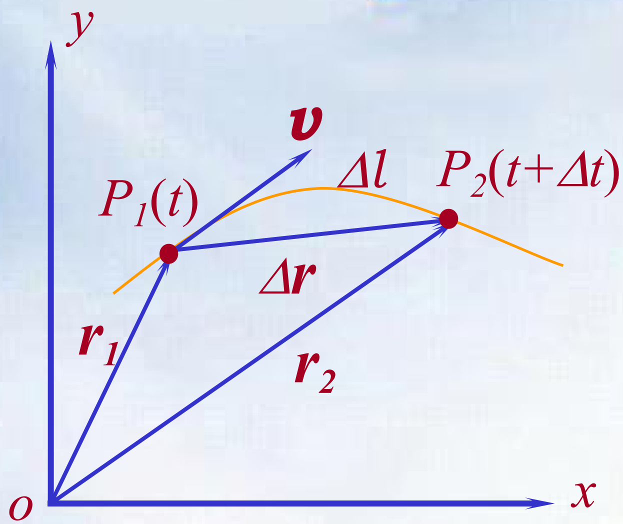
$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

当$\Delta t \to 0$时，$\Delta \boldsymbol{r}$ 趋向轨道的切向，质点的瞬时速度、质点的运动方向都在切向。

三、速率

路程Δl 与时间Δt的比称为平均速率。当$\Delta t \to 0$时，称瞬时速率：

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{dl}{dt}$$



由于$\Delta t \to 0$时$|\Delta \boldsymbol{r}| = \Delta l$，故

$$|\boldsymbol{\upsilon}| = \frac{|d\boldsymbol{r}|}{dt} = \frac{dl}{dt} = \upsilon$$

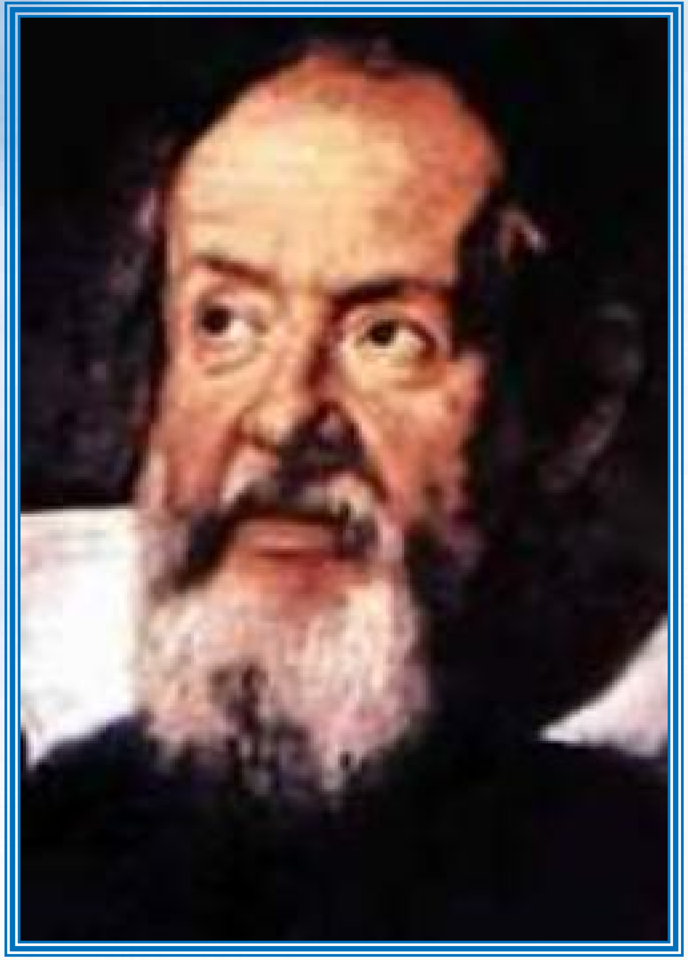
即**瞬时速度的大小等于瞬时速率**。

§ 1.4 加速度

一、加速度

伽利略（Galileo）

1564-1642



成就：天文学、宇宙论、数学、物理学

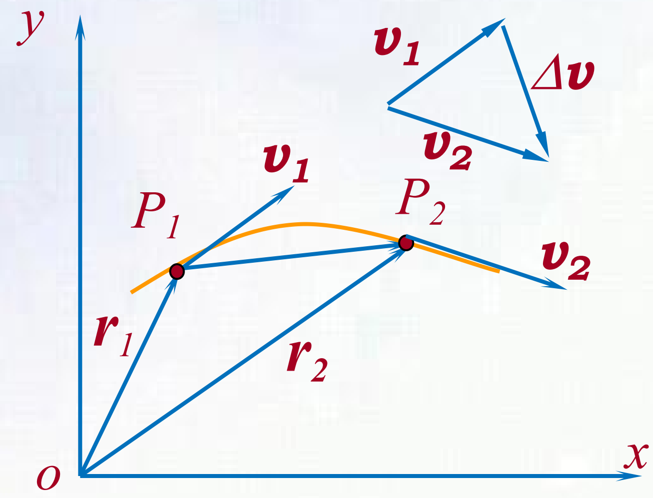
在运动学方面的贡献：研究了自由落体运动，首先提出加速度的概念。

平均加速度：Δt 时间内速度的增量 $\Delta\boldsymbol{v}$，则 $\Delta\boldsymbol{v}$ 与Δt 之比为时间 t 到 $t+\Delta t$ 时间内的平均加速度：

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

$\Delta t\to 0$时，**瞬时加速度为**：

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

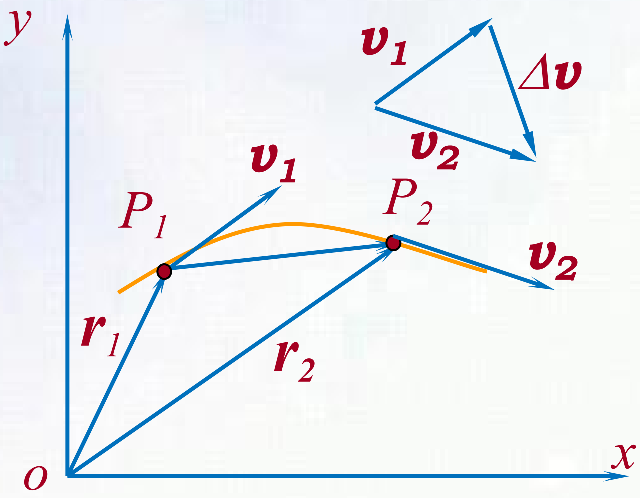


瞬时加速度等于速度对时间的一阶导数，或位置矢量对时间的二阶导数。

加速度的方向是：

$\Delta t \to 0$ 时速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 的极限方向。在直角坐标系中，加速度可表示为：

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dv_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dv_z}{dt}\boldsymbol{k}$$



例题一：

已知质点的运动方程为：$\boldsymbol{r} = 5t^3\boldsymbol{i} + e^{2t}\boldsymbol{j}$，式中各量的单位均为SI单位。求$t$=0.4s时质点的加速度。

解： 按速度和加速度的定义：

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 15t^2\vec{i} + 2e^{2t}\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 30t\ \vec{i} + 4e^{2t}\vec{j}$$

故t=0.4s时的加速度为： $\boldsymbol{a} = 12\,\boldsymbol{i} + 8.9\,\boldsymbol{j}$ (m/s^2)

t=0.4s时的加速度的大小和方向为：

$$a=\sqrt{12^2+8.9^2}=14.9 \qquad \theta=\arctan\frac{8.9}{12}=36.6^{\circ}(与x轴的夹角)$$

二、匀加速运动

匀加速运动，即加速度为常矢量的运动。

运动学问题1：已知运动方程求速度或加速度。

运动学问题2：已知速度或加速度求运动方程。

在第二类问题中：若$t=0$ 时 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0$， $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$， 则：

$$\int_{\boldsymbol{v}_0}^{\boldsymbol{v}} d\boldsymbol{v}=\int_0^t \boldsymbol{a}dt$$

匀加速运动：

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{a}t$$

$$\int_{r_0}^{r} d\boldsymbol{r}=\int_0^t(\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{a}t)dt$$

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{v}_0t+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$

例题二：

已知一质点由静止出发，它的加速度在 X 和 Y 轴的分量分别为 $a_x=10t$ 和 $a_y=15t^2$(SI制)。试求5s时质点的速度和位置。

解： 取质点的出发点为坐标原点。由题意知

$$\mathrm{d}\upsilon_x = a_x\mathrm{d}t = 10t\mathrm{d}t \qquad \mathrm{d}\upsilon_y = a_y\mathrm{d}t = 15t^2\mathrm{d}t \qquad (1)$$

由初始条件$t=0$时$\upsilon_{0x}=\upsilon_{0y}=0$，对上式进行积分，有

$$\upsilon_x = \int_0^t 10t\mathrm{d}t = 5t^2 \qquad \upsilon_y = \int_0^t 15t^2\mathrm{d}t = 5t^3 \qquad (2)$$

即： $\vec{\upsilon} = 5t^2\,\vec{i} + 5t^3\,\vec{j}$

将t=5s代入，有 $\vec{\upsilon} = (125\vec{i} + 625\vec{j})(\mathrm{m/s})$

由初始条件t=0时，$x_0=y_0=0$，对下式积分

$$dx = \upsilon_x dt, \qquad dy = \upsilon_y dt$$

$$x = \int_0^t 5t^2\mathrm{d}t = \frac{5}{3}t^3 \qquad y = \int_0^t 5t^3\mathrm{d}t = \frac{5}{4}t^4 \qquad (3)$$

即：

$$\vec{r} = \frac{5}{3}t^3\vec{i} + \frac{5}{4}t^4\vec{j} \qquad (4)$$

将t=5s代入(4)式，有

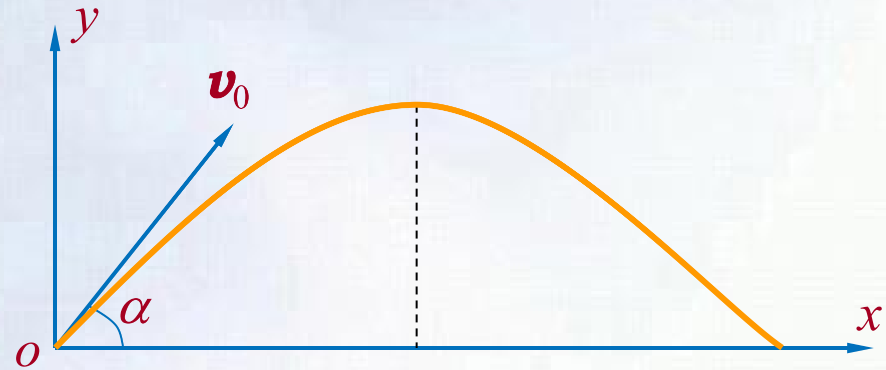
$$\vec{r} = (\frac{625}{3}\vec{i} + \frac{3125}{4}\vec{j})(\mathrm{m})$$

抛体运动

匀加速运动的特例为抛体运动：在地球表面附近，g可看成是常数。如图取直角坐标系，抛体运动在x轴方向无加速度，

沿y轴方向为 $-g$ 。

在任何时刻 t，抛体运动的速度分量为：



$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\alpha \\ v_y &= v_0 \sin\alpha - gt \end{aligned}\right\}$$

积分后，得t时刻的坐标为：

$$\left.\begin{aligned} x &= (v_0 \cos\alpha)t \\ y &= (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\}$$

上式中消去t得轨迹方程：

$$y = x \tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2$$

上述方程中，若$g=0$ 则：

$$\left.\begin{aligned} x &= (v_0 \cos\alpha)t \\ y &= (v_0 \sin\alpha)t \end{aligned}\right\}$$

$$y = x\tan\alpha$$

取消重力，抛体将沿初始方向直线前进。重力的作用是在此基础上叠加一个自由下落运动 $(-\frac{1}{2}gt^2)$ 项。

抛体运动水平、垂直两方向运动相互独立的特点可解释猎人与猴子的古老演示。

猎人瞄准猴子，

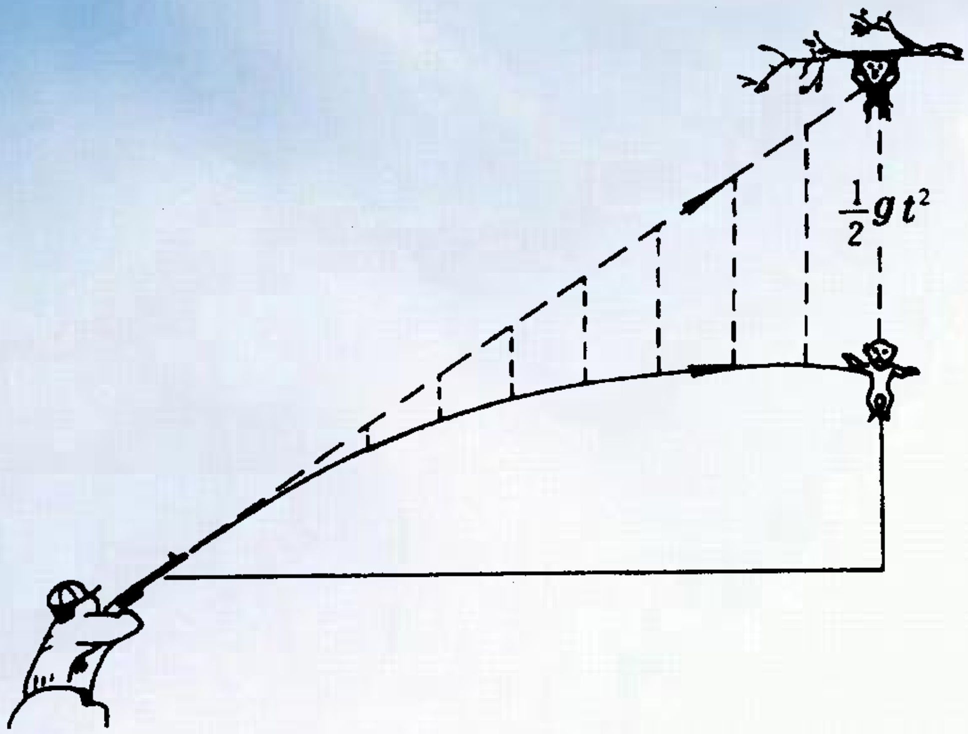
猴子见猎枪火光

立即跳离树枝，

这时子弹、猴子

同时向下位移

$-\frac{1}{2}gt^2$ 距离。



抛体运动最大高度称为射高，以y_m表示。其特征是v_y=0，可求得： $t = v_0 \sin\alpha / g$ ，从而：

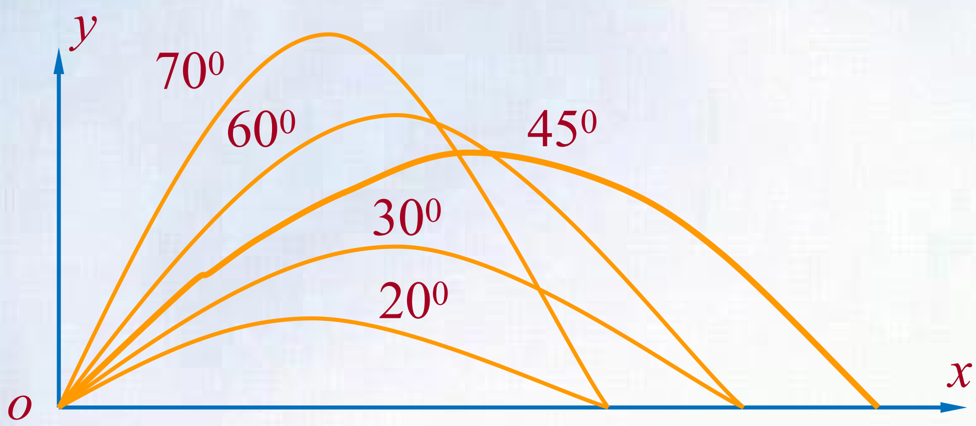
$$y_m = v_0^2 \sin^2\alpha / 2g$$

α=90^{0}时有最大射高。

抛体运动最远点称为射程，以x_m表示，特征是y=0，则： $t = 2v_0 \sin\alpha / g$ ， 从而得：

$$x_m = 2v_0^{\ 2}\sin\alpha\cos\alpha/g = v_0^{\ 2}\sin 2\alpha/g$$

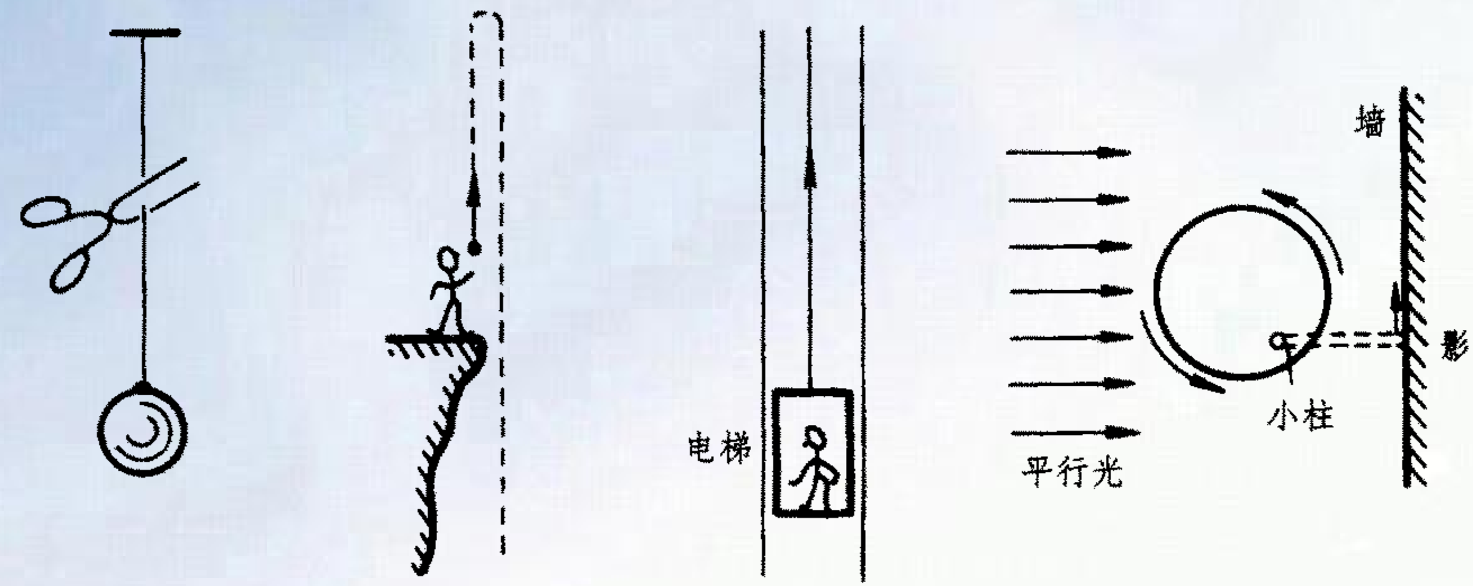
$\alpha=45^0$时，有最大射程。由于$\sin2\alpha$在$\alpha=45^0$时两侧对称：$\sin[2(90^0-\alpha)]=\sin2\alpha$，有：



例题三：

画出下列情形的 s-t、v-t、a-t 图。

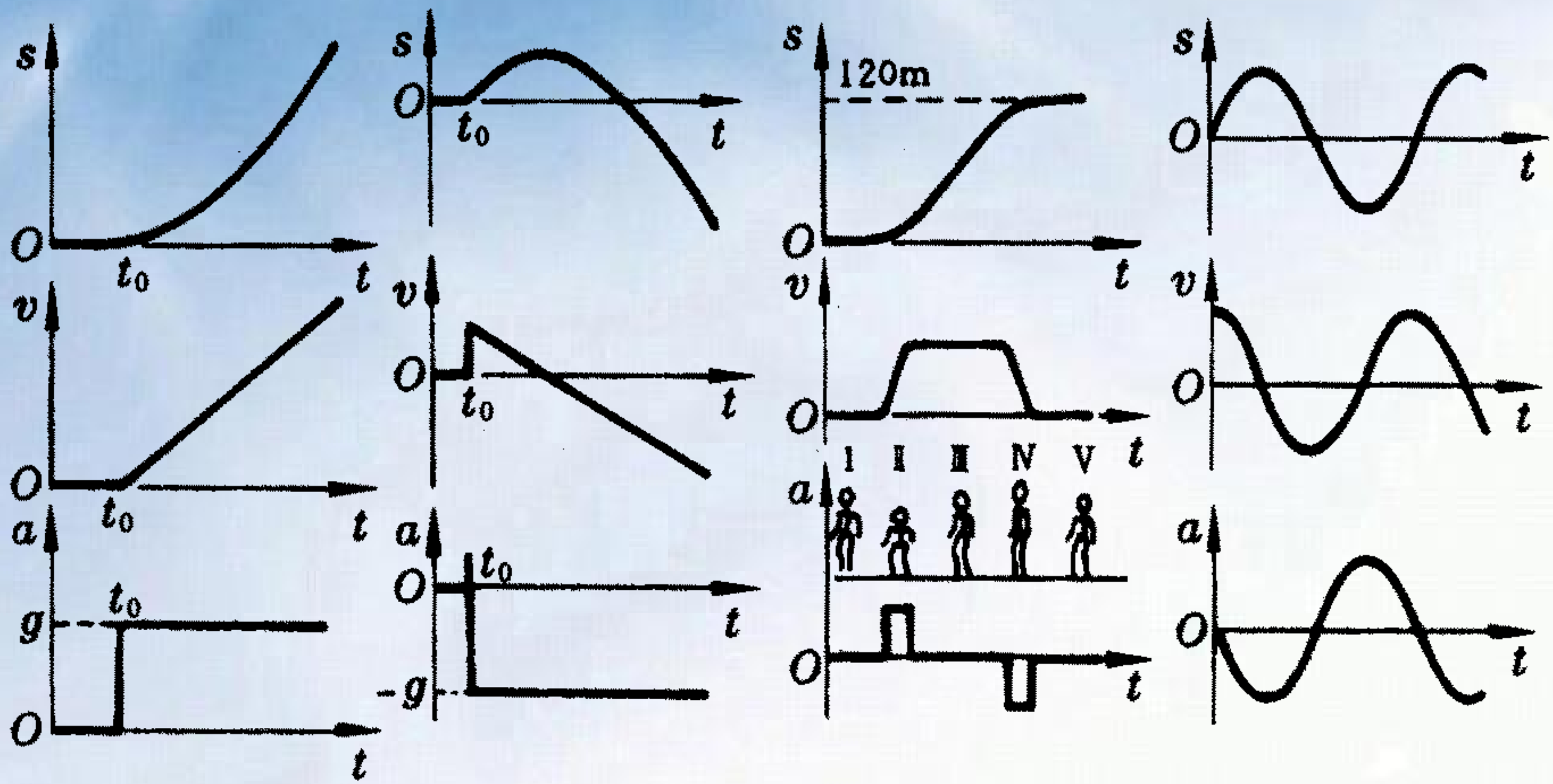
a.悬挂重物的绳子突然被剪断后重物的运动。b.从山崖边缘垂直上抛物体的运动。c.从1层上升120m到达29层电梯的运动。d.匀速旋转唱盘边缘一点的投影运动。



a　　b　　c　　d

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$$



a b c d