作业：P17

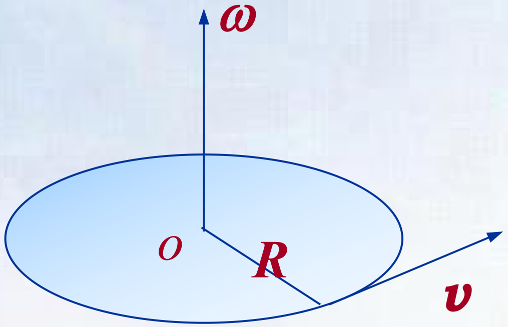
2-9，2-10

P18 2-16

P36 3-12，3-17，3-18

质点做匀变速圆周运动时，运动方程为：

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \beta t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

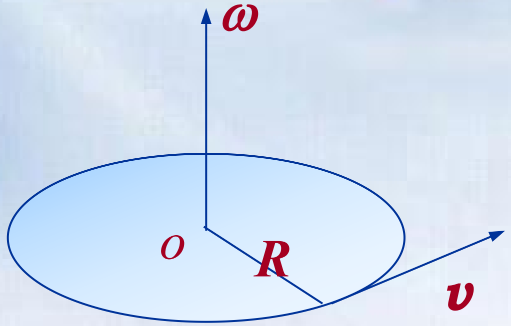


$\boldsymbol{\omega}$的方向按右手螺旋法则确定，定义角加速度矢量为：

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

则线量与角量的关系为*：

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{a}_\tau = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}) \end{cases}$$

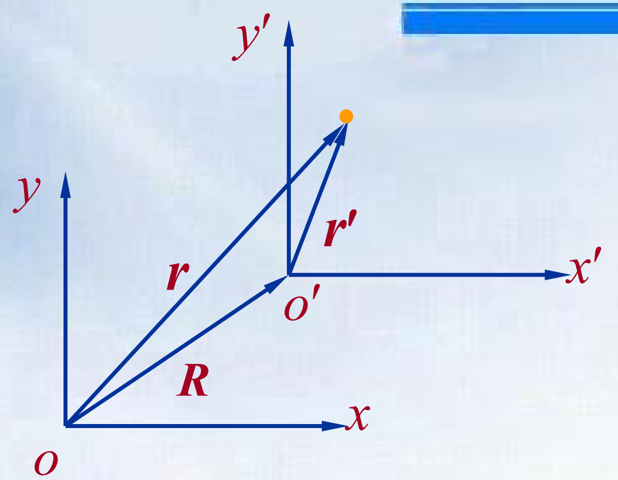


§1.6　相对运动

一、经典力学的伽利略变换

设参照系K和K'之间有相对运动，但坐标轴的方向保持不变，则：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{R} \quad ①$$



上式对时间 t 求导：

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{R}}{dt}$$

在经典力学中，$t = t'$ 则：

$$\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt'} = \boldsymbol{v}'$$

因而有：$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}$ ②

绝对速度等于相对速度和牵连速度的矢量和。

对速度矢量求导，得：

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}+\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$$ 即： $$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}_I$$ ③

绝对加速度等于相对加速度和牵连加速度的矢量和。

①②③称为**经典的伽利略变换。**

如果K'系相对K系以恒定速度$\boldsymbol{u}$沿x轴正向运动，且$t=0$时两坐标系重合，则伽利略变换为：

$$x = x' + ut$$

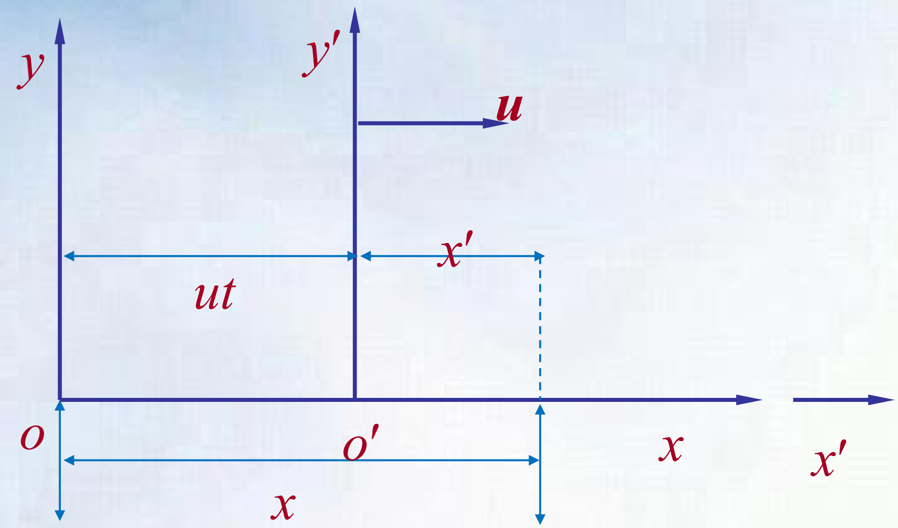
$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$\upsilon_x = \upsilon'_x + u$$

$$\upsilon_y = \upsilon'_y$$

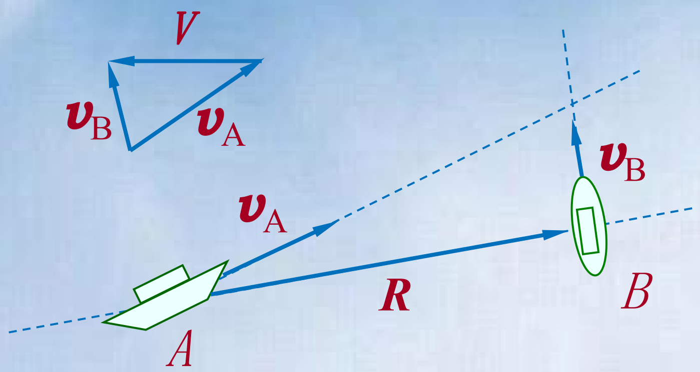
$$\upsilon_z = \upsilon'_z$$



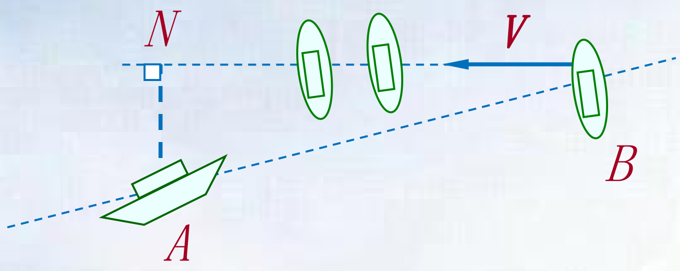
$$a_x = a'_x \qquad a_y = a'_y \qquad a_z = a'_z$$

例题六：

两船A和B各以$\boldsymbol{v}_A$和$\boldsymbol{v}_B$行驶，他们会不会相碰？



a　湖面的视角



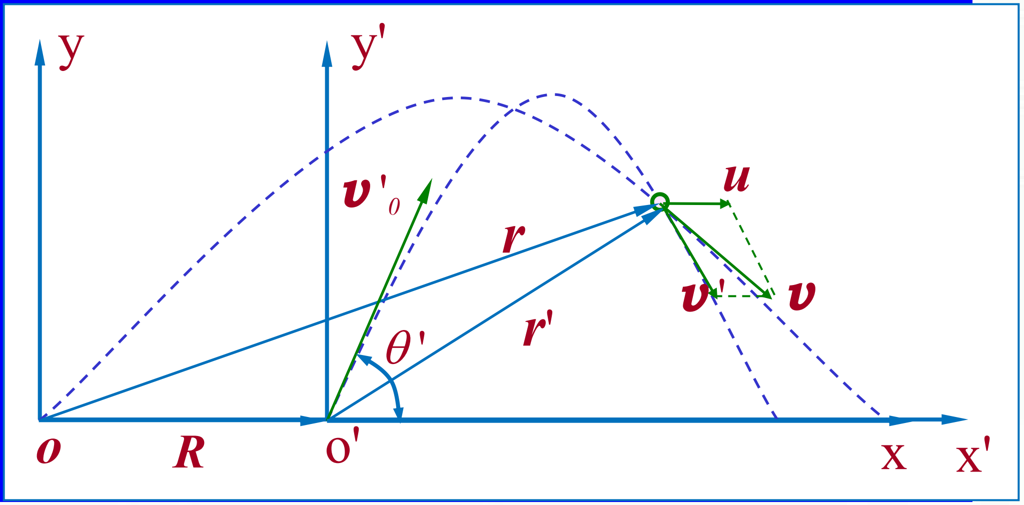
b　A 的视角

解：取地面为参照系K，船A为参照系K'，船B相对于船A的速度 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A$ ($\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{V}+\boldsymbol{v}_A$)，从B引一平行于$\boldsymbol{V}$方向的直线，它不与A相交，这表明，两船不会相碰。若由A做此直线的垂线AN，其长度就是两船相靠最近的距离。

例题七：

车以 4m/s 沿水平路面作匀速直线运动，一个人坐在车上，相对于车以20m/s的速率与车前进方向成75^0角抛出一个小球。若以地面为K系，车为K'系，并从抛出时开始计时，此时，两坐标系恰好重合。求在K系中 (1)小球的速度和位矢；(2)小球的轨道方程；

(3)其他条件不变，要使小球落回抛出点，小球在车上应以多大倾角被抛出？



解：(1)在K′系中，小球的速度和位矢为：

$$\boldsymbol{v}' = v'_0\cos\theta'\boldsymbol{i}+(v'_0\sin\theta'-gt)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}' = v'_0\cos\theta' t\,\boldsymbol{i}+(v'_0\sin\theta' t-1/2gt^2)\boldsymbol{j}$$

在K系中，车的速度和位矢为：

$$\boldsymbol{u}=u\boldsymbol{i} \qquad \boldsymbol{R}=ut\boldsymbol{i}$$

由伽利略变换可知，在K系中，t时刻小球的速度和位矢为：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' +\boldsymbol{u}= (v'_0\cos\theta'+u)\boldsymbol{i}+(v'_0\sin\theta'-gt)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' +\boldsymbol{R}= (v'_0\cos\theta'+u)t\,\boldsymbol{i}+(v'_0\sin\theta' t-1/2gt^2)\boldsymbol{j}$$

(2)在K系中，小球运动方程的分量式为：

$$x=(\upsilon'_0\cos\theta'+u)t$$

$$y=\upsilon'_0\sin\theta' t-1/2gt^2$$

消去t，即得轨道方程：

$$y=\left(\frac{\upsilon'_0\sin\theta'}{\upsilon'_0\cos\theta'+u}\right)x-\left(\frac{g}{2(\upsilon'_0\cos\theta'+u)^2}\right)x^2$$

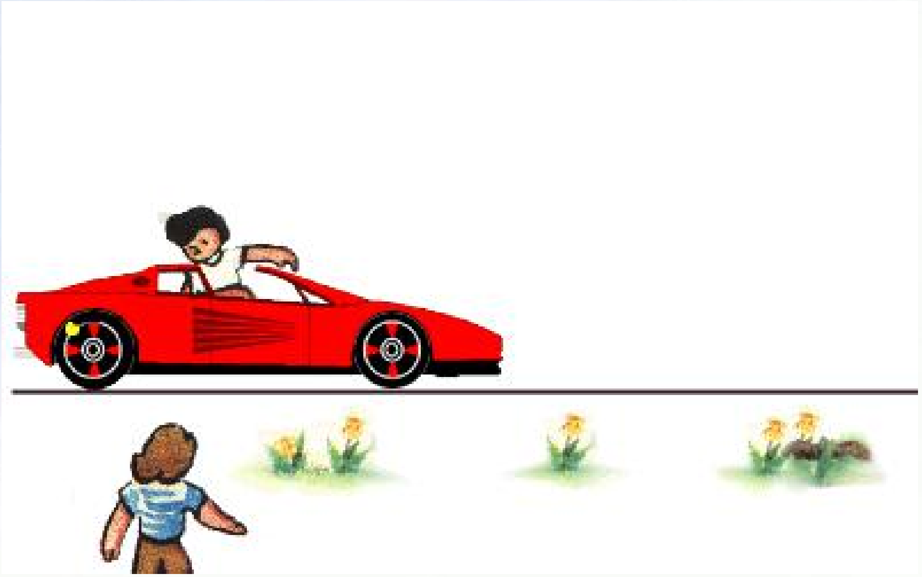
(3)要使小球落回K系中的抛出点，必须使小球在K系中速度在x轴上的分量为零：

$$v_x = v_0' \cos\theta' + u = 0$$

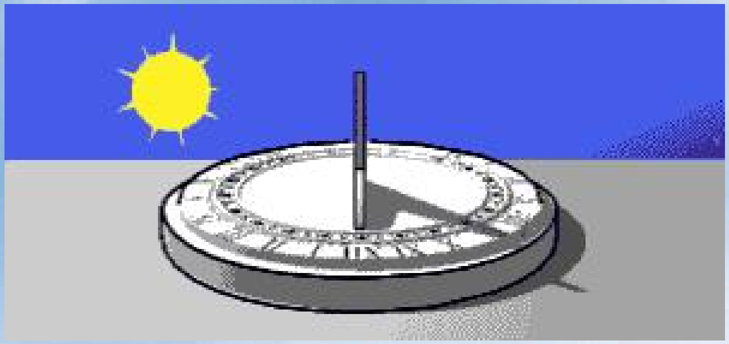
得：

$$\theta' = \arccos(-\frac{u}{v_0'}) = \arccos(-\frac{4}{20}) = 101.5^0$$

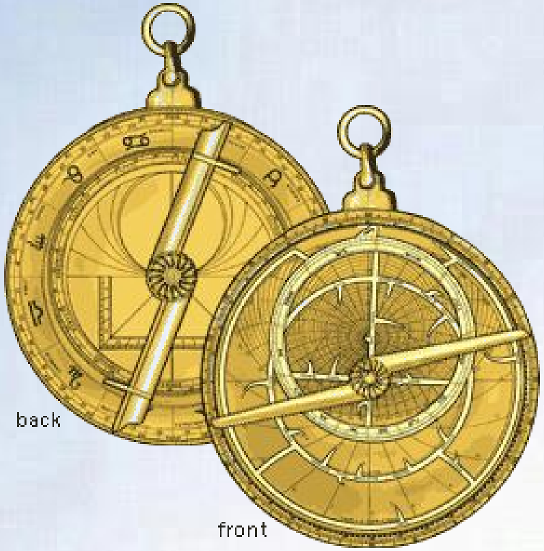
即应与车前进方向成101.5^0角抛出，或与车前进的反方向成78.5^0角抛出。



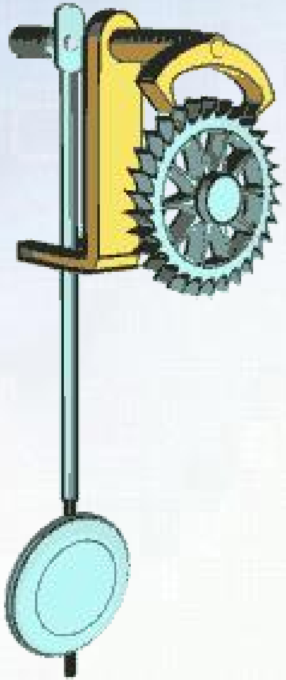

Z
参照系
O
X
Y



3500 BC

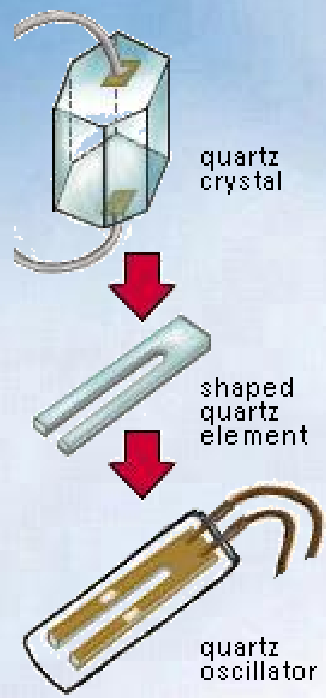


1762年 误差1秒每3天



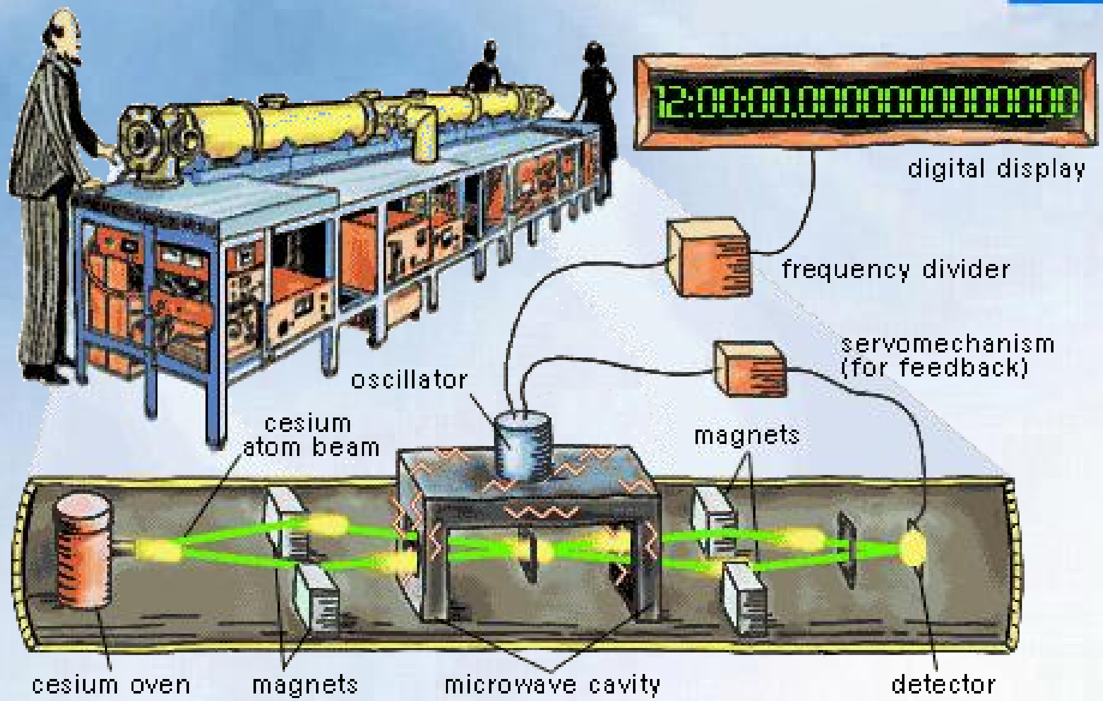
C17年 误差10秒每天

1930s 误差1
秒每3年



误差1秒每30年

1980s 误差1秒
每30万年



1955年 误差1秒每300年

1995 误差1秒每1500万年

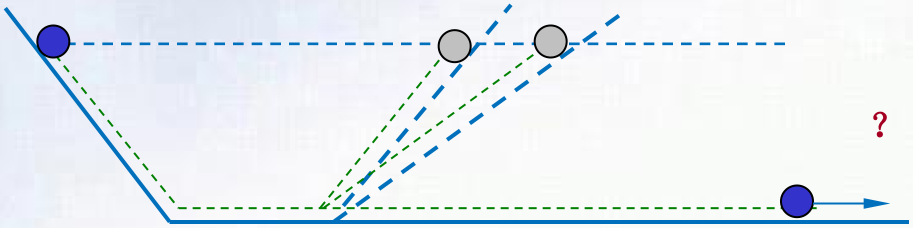
第二章 质点动力学

§2.1 牛顿第一定律（惯性定律）

一、惯性定律

亚里士多德学派理论：静止是水平地面上物体的“自然状态”，运动源于作用力，力增加→运动速度增加。

伽利略的斜面实验：



小球沿斜面滚下后再向上滚，高度不变 (高度的微小差异是由于摩擦)。对面斜面的斜率减小，小球向上滚的高度不变。斜率越小，小球滚动越远。若斜面放平，小球可能永远滚下去。牛顿将上述实验总结出一条最基本的定律：

任何物体，只要没有外力改变它的状态，便将永远保持静止或匀速直线运动状态。这就是牛顿第一定律（惯性定律）。一种较现代的表示：**自由粒子永远保持静止或匀速直线运动状态。**

- 惯性定律是抽象思维的产物，不能用实验验证
- 惯性定律也适用于运动的一个独立分量

二、惯性参照系

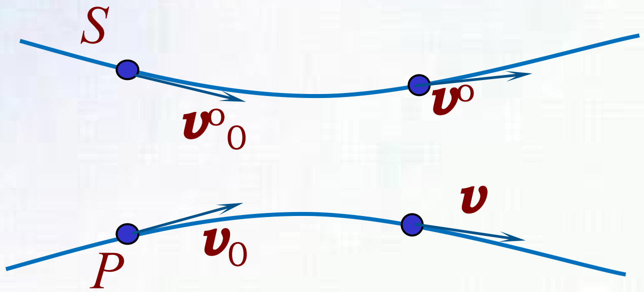
研究物体运动离不开参照系，但惯性定律在有的参照系（如加速的汽车）中不成立。因此定义：**惯性定律成立的参照系为惯性参照系。**

地面不是一个严格的惯性参照系，但是一个近似程度相当好的惯性参照系——基本参照系。

三、质量

描述物体惯性大小的物理量——质量m

设有标准质量m°的质点S，和任意质点P，它们之间有相互作用，但与其他质点无相互作用。实验发现，在任意时间间隔内，它们的速度增量的大小成正比，方向相反，即：

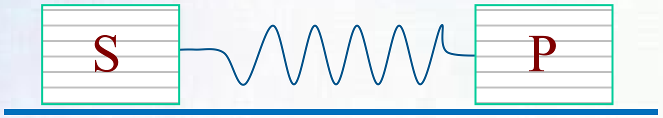


$$\vec{v}^{\circ}-\vec{v}_0^{\circ}=-k(\vec{v}-\vec{v}_0)$$

定义质点P的质量：

$$m = km^{\circ} = -\frac{\vec{v}^{\circ} - \vec{v}_0^{\circ}}{\vec{v} - \vec{v}_0} m^{\circ}$$

设质点S质量为1kg，和质点P用弹簧连接。拉长、静止后释放，一段时间后，质点S的速率为1m/s，质点P的速率为0.5m/s，则质点P的质量为：



$$m = km^{\circ} = \frac{\left|\vec{v}^{\circ} - \vec{v}_0^{\circ}\right|}{\left|\vec{v} - \vec{v}_0\right|} m^{\circ} = \frac{1}{0.5} \times 1 = 2(\mathrm{kg})$$

P的质量越大，速度改变量越小，这样定义的质量反映了物体惯性的大小，所以，质量是物体平动惯性大小的量度。质量的基准是国际计量局中的一个铂铱合金圆柱体，称为千克原器，其质量为1kg。

四、高速运动物体的质量

相对论的结果表明，物体质量与本身的速度有关：

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$

§2.2 牛顿第二定律和牛顿第三定律

一、牛顿第二定律

定义：质点质量m与速度$\boldsymbol{v}$的乘积为**动量**，用 $\boldsymbol{p}$ 表示：

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$ 单位kg·m/s

物体之间的相互作用称为力。质点的动量$\boldsymbol{p}$对时间t的导数，是质点所受合力$\boldsymbol{F}$的量度，定义：

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} \qquad ①$$

在经典物理中m为常量，则：

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{a} \qquad ②$$

质点所受的合力等于质点的动量对时间的变化率。

质点所受的合力$\boldsymbol{F}$等于质点的质量m乘以加速度$\boldsymbol{a}$。

②式在高速运动的情况下不适用，①式仍然成立。

①、②式均为牛顿第二定律的表达式。

- 牛顿第二定律仅适用于惯性系中的质点。
- 牛顿第二定律建立的是一种瞬态关系。
- 牛顿第二定律是矢量式。

三、牛顿第三定律

在质量定义式中可得：

$$m_1(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_{10})=-m_2(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_{20})$$

则在时间Δt内动量的平均变化率：

$$\frac{\Delta\boldsymbol{p}_1}{\Delta t}=-\frac{\Delta\boldsymbol{p}_2}{\Delta t}$$

当$\Delta t\to 0$时，上式极限为：

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt}=-\frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt}$$

上式中 $\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt}$ 是质点2对质点1的作用力$\boldsymbol{F}_{12}$，$\frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt}$ 为质点1对质点2的作用力$\boldsymbol{F}_{21}$，即**牛顿第三定律**：

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$$

作用力与反作用力大小相等，方向相反，作用在同一直线上。作用力与反作用力属同一性质的力，且作用在两个物体上。同时产生和同时消失。

三、力学中常见的力

自然界中存在四种力：万有引力（重力）、电磁力（摩擦力、弹性力）、弱相互作用力、强相互作用力。其中万有引力、电磁力为长程力，弱相互作用力、强相互作用力为短程力。

1．万有引力

在任何两质点之间，都存在着相互吸引力，引力的方向沿两质点的连线，大小与两质点m_1、m_2的乘积成正比、与两质点距离r的平方成反比，即：

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

引力常数$G=6.67\times10^{-11}\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$, $\hat{\boldsymbol{r}}$为位矢方向的单位矢量，负号表示力的方向与 $\hat{\boldsymbol{r}}$的方向始终相反。万有引力是两质点间的引力，它们通过引力场作用，地面附近空间的引力场称为**重力场**。

引力质量与惯性质量：

牛顿第二定律中的质量称为惯性质量，而万有引力定律中的质量称为引力质量。以千克原器为两者的共同基准，即：$m^0{}_{引}= m^0{}_{惯}=1\mathrm{kg}$，则对任意物体的引力质量和惯性质量，在同一地点，它们的重力分别为：

$$p^{\circ} = G\frac{m^{\circ}_{引}M}{R^2} = m^{\circ}_{惯}g_0 \qquad p = G\frac{m_{引}M}{R^2} = m_{惯}g_0$$

上式中M为地球质量，R为地球半径。实验表明，不同物体的g_0都相等，比较以上两式，有：

$$\frac{m_{引}}{m_{惯}} = \frac{m^{\circ}_{引}}{m^{\circ}_{惯}} = 1$$

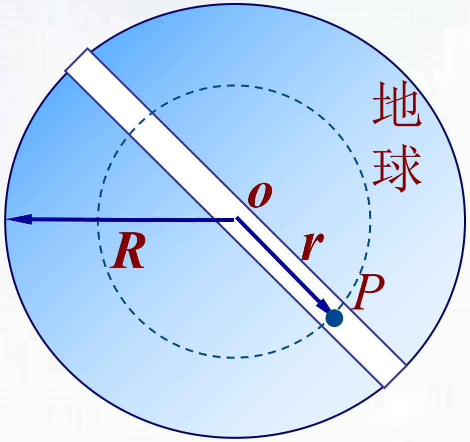
引力质量和惯性质量相等。

例题1

如图所示，若使邮件沿着地球的某一直径的隧道传递，试求邮件通过地心时的速率。已知地球的半径为6.4×10^6m，密度约为$5.5\times10^3\text{kg/m}^3$。

解： 设邮件在隧道P点，如图所示，其在距离地心为$\boldsymbol{r}$处所受到的万有引力为：

$$f=-G\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\cdot m}{r^2}=-(\frac{4}{3}\pi G\rho m)r$$



式中负号表示$\boldsymbol{f}$与$\boldsymbol{r}$方向相反，m为邮件的质量。由牛顿第二定律：

$$-(\frac{4}{3}\pi G\rho m)r=m\frac{d^2r}{dt^2}$$

即： $$\frac{d^2r}{dt^2} = -(\frac{4}{3}\pi G\rho)r = -\omega^2 r \quad ①$$

其中： $\omega^2 = (\frac{4}{3}\pi G\rho)$ 。为简化计算，设邮件刚进入隧道开始记时[$r(t=0)=R$, $\upsilon(t=0)=0$]，则方程①的解可表示为：

$$r = R\cos\omega t \qquad ②$$

式中R为地球半径，式②对时间求导，得传递速度：

$$\upsilon = -R\omega\sin\omega t \qquad ③$$

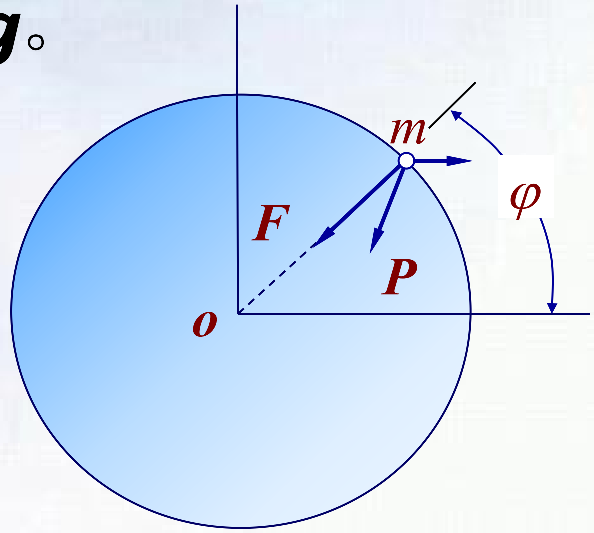
邮件通过地心时速率最大，即：

$$\upsilon_m = R\omega = R\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho} = 7.9\times10^3(\mathrm{m/s})$$

2. 重力

重力是引力 $F=G\dfrac{mM}{R^2}$（方向指向地心）和物体随地球自转做匀速圆周运动的离心力的合力，重力$\boldsymbol{P}$使物体产生重力加速度$\boldsymbol{g}$。

$$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{g}$$



由于地球的自转，使$\boldsymbol{g}$的大小随纬度有微小变化，可证明：

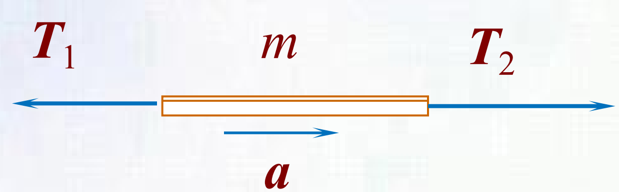
$$P=G\frac{mM}{R^2}(1-\frac{\cos^2\varphi}{290})=mg_0(1-\frac{\cos^2\varphi}{290})$$

3．弹性力

形变的物体有恢复原来形状的趋势，而对它接触的物体产生作用力，称为弹性力。

弹性力服从胡克定律，$F=-kx$，x为离开平衡位置的位移，负号表示力与位移方向相反。

绳子拉紧时各段之间的弹性力称为张力，对某一小段应用牛顿第二定律：$T_2 - T_1 = ma$，当绳子质量可忽略时，绳子内张力处处相等。

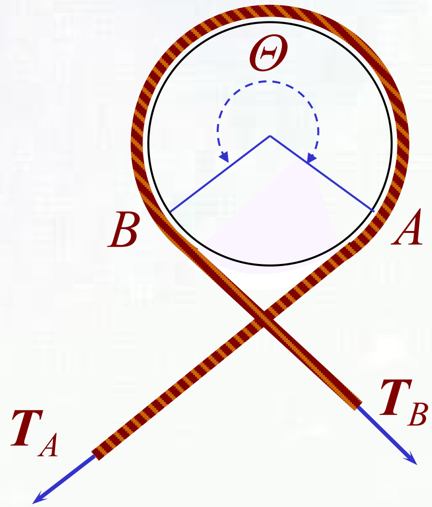


4．摩擦力

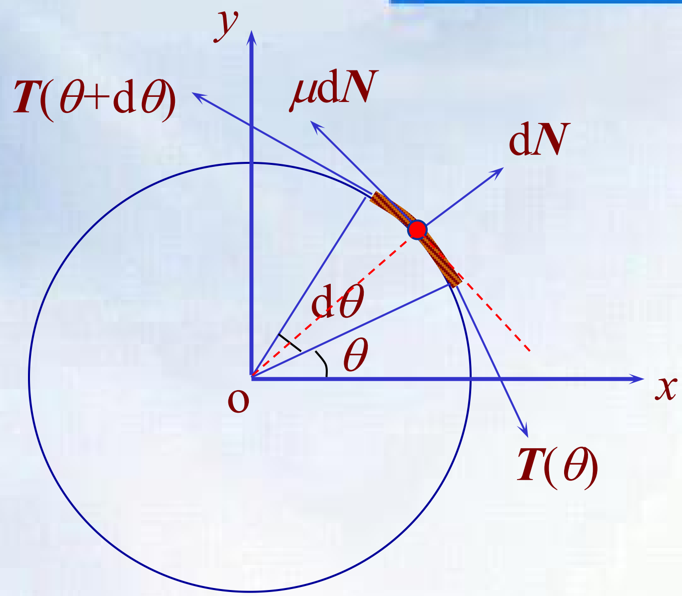
当两个接触的物体作相对运动或有相对运动的趋势时，它们之间就有摩擦力。最大静摩擦力$f_{s,max}=\mu_s N$，μ_s—静摩擦系数；滑动摩擦力$f=\mu N$，μ—滑动摩擦系数。速度不太大时，μ略小于μ_s，一般可认为$\mu=\mu_s$。

例题2

一种称为绞盘的装置，绳索绕在绞盘的固定圆柱上，当绳子承受负荷巨大的拉力T_A时，人可以用小的多的力T_B拽住绳子。设绳与圆柱的摩擦系数为μ，绳子绕圆柱的张角为Θ，求T_A与T_B的关系？



用隔离体法，考虑如图线元，略去绳子质量，该线元受四个力作用，张力$T(\theta)$、$T(\theta+d\theta)$、法向力$\mathrm{d}N$、摩擦力$\mu\mathrm{d}N$、四个力合力为0，其切向分量和法向分量方程：



切向：$$[T(\theta+\mathrm{d}\theta)-T(\theta)]\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}+\mu\mathrm{d}N=0$$

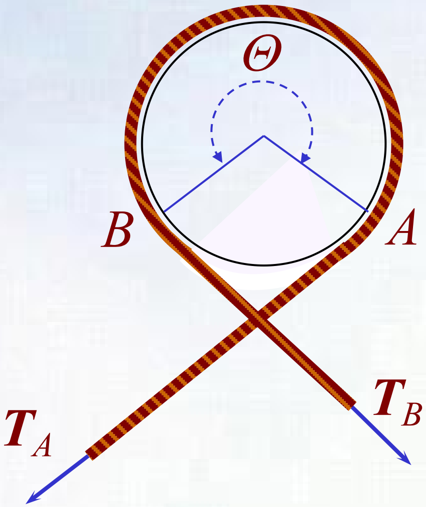
法向：$$[T(\theta+\mathrm{d}\theta)+T(\theta)]\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2}-\mathrm{d}N=0$$

因dθ 很小，$\sin(d\theta/2)\approx d\theta/2$、$\cos(d\theta/2)\approx 1$、

$T(\theta+d\theta) - T(\theta)\approx dT$， $T(\theta+d\theta)+T(\theta)\approx 2T(\theta)$，

上式可改写为：

$$\begin{cases} dT = -\mu dN \\ T d\theta = dN \end{cases}$$

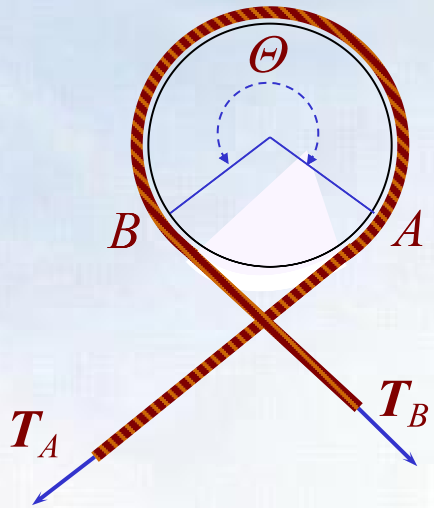


消去dN可得：

$$\frac{dT}{T} = -\mu d\theta$$

设绞盘上A、B 两点对应的θ 为θ_A和θ_B，对上式积分：

$$\int_{T_A}^{T_B}\frac{\mathrm{d}T}{T}=-\mu\int_{\theta_A}^{\theta_B}\mathrm{d}\theta$$



得：$$\ln\frac{T_B}{T_A}=-\mu(\theta_B-\theta_A)$$

即：$$\boxed{T_B=T_Ae^{-\mu\Theta}}\qquad \Theta=\theta_B-\theta_A$$

上式表明，很容易做到$T_B \ll T_A$ 。

四、国际单位和量纲

1. 国际单位制

选择几个基本（物理）量→**基本单位**，其他物理量与基本量的关系→**导出单位**。基本单位+导出单位=**单位制**。国际单位制的基本量有长度（米）、质量（千克）、时间（秒）等称**SI**制，其中力学部分为**MKS**制。

2. 量纲

在不考虑数字因素时，表示一个物理量是由哪些基本量导出，及如何导出的式子，称为此量的量纲（或量纲式）。

在**MKS**制中，基本量为长度**L**、质量**M**、时间**T**，每个物理量**Q**都可列出量纲式： $[Q]=\mathrm{L}^{\alpha}\mathrm{M}^{\beta}\mathrm{T}^{\gamma}$

例如： $[v]=[s]/[t]=\mathrm{LT}^{-1}$

$[a]=[v]/[t]=\mathrm{LT}^{-2}$

$[p]=[\mathrm{m}]\cdot[v]=\mathrm{LMT}^{-1}$

$[f]=[\mathrm{p}]/[t]=\mathrm{LMT}^{-2}$

只有量纲相同的量才能进行加、减或相等运算，所以，通过检查等式两边各项量纲，可初步验证等式是否成立。

利用牛顿定律解题的常规步骤：

- 确定研究对象和参照系；
- 分析物体的受力情况，做各质点的受力图；
- 选择坐标系，列方程。

例题3

如图所示，质量为m的直杆可在竖直方向无摩擦上下运动，求质量为m'的斜劈的加速度a'和作用力F_n。

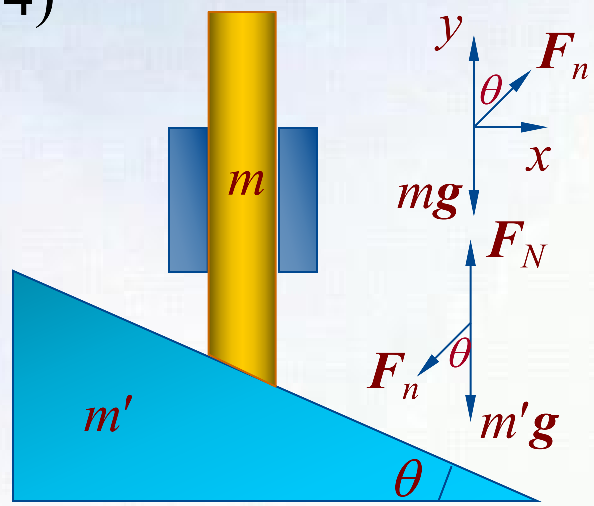
解： 首先将两物体受力画在图中，则有：

m的y方向：　$F_n \cos\theta - mg = ma_y$　(1)

m'的y方向：　$F_N - F_n \cos\theta - m'g = 0$　(2)

m'的x方向：　$-F_n \sin\theta = m'a'_x$　(3)

$dy = dx' \tan\theta,\ \ a_y = a'_x \tan\theta$　(4)



将(3), (4) 式代入(1)式可得：

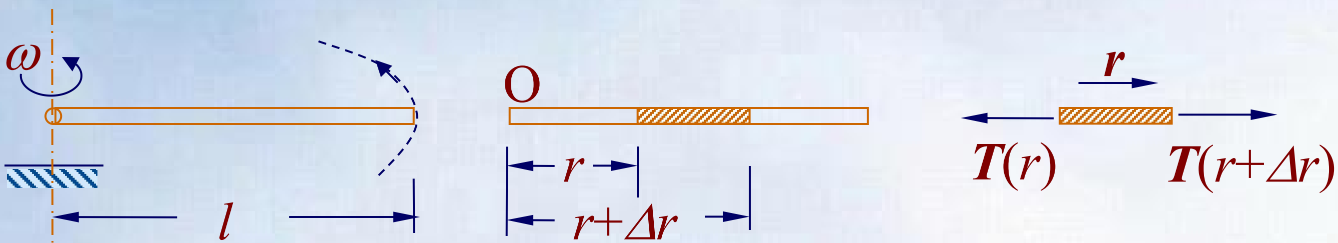
$$-m'a'_x \cot\theta - mg = m \tan\theta a'_x$$

$$a'_x = -\frac{m}{m'\cot\theta + m\tan\theta} g$$

$$F_n = -\frac{m'}{\sin\theta} a'_x = \frac{mm'\cos\theta}{m'\cos^2\theta + m\sin^2\theta} g$$

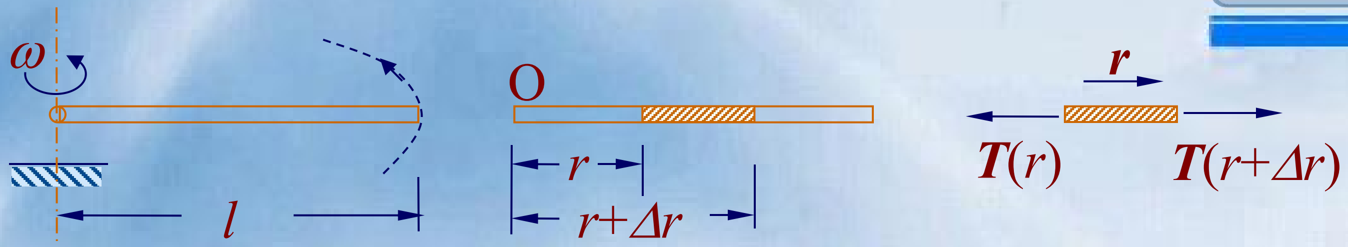
例题4

如图所示，一质量为M，长度为l的均质细杆，以匀角速度ω绕固定端旋转。设细杆不伸长，重力忽略不计。试求离固定端距离为r处杆中的张力。



(a) (b) (c)

解：以固定端为原点O，选取距O点r至$(r+\Delta r)$之间一段细杆作为研究对象，如图（b）所示，其受力情况如图（c）。设（$r+\Delta r$）处受力为$T(r+\Delta r)$，r处受力为$T(r)$，此细杆段的方程为：



(a) (b) (c)

$$T(r)-T(r+\Delta r)=\Delta m\omega^2 r=\frac{M}{l}\omega^2 r\Delta r$$

因此：
$$\frac{dT}{dr}=\lim_{\Delta r\to 0}\frac{T(r+\Delta r)-T(r)}{\Delta r}=-\frac{M\omega^2}{l}r$$

$$dT=-\frac{M\omega^2}{l}rdr$$

利用边界条件 $r=l$ 时，$T(l)=0$，有：

$$\int_0^{T(r)} dT = -\int_l^r \frac{M\omega^2}{l} r dr$$

积分可得：
$$T(r) = \frac{M\omega^2}{2l}(l^2 - r^2)$$

从上式结果看，张力T在杆中不同位置是不同的。在杆的末端附近，张力最小，在杆的固定端附近，张力最大。