第 四 周

第4章 能量·能量守恒定理

§4.2； §4.3； §4.4

第7章 万有引力 §7.4

第5章 角动量·角动量守恒定理

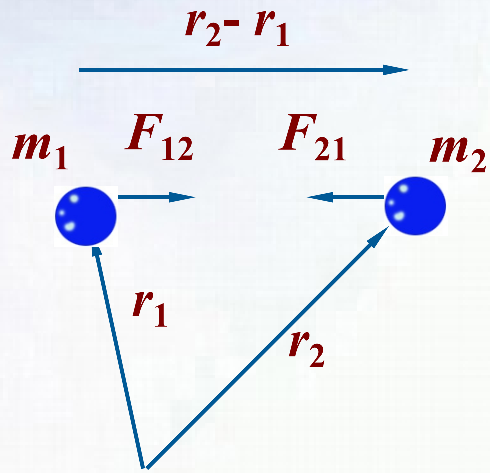
§5.1； §5.2； §5.3（一般了解）

§ 2.8 势 能 &

一、一对作用力和反作用力所做的功

两质点的作用力和反作用力做功之和：

$$dA = \boldsymbol{F}_{12} \cdot d\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{F}_{21} \cdot d\boldsymbol{r}_2$$



由于 $\boldsymbol{F}_{12}$= - $\boldsymbol{F}_{21}$，因此：

$$dA = \boldsymbol{F}_{21} \cdot (d\boldsymbol{r}_2 - d\boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{F}_{21} \cdot d(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$$

$(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$ 是质点$\boldsymbol{m}_2$相对质点$\boldsymbol{m}_1$的位矢，$d(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$ 是质点$\boldsymbol{m}_2$相对质点$\boldsymbol{m}_1$的元位移。

上式表明：一对作用力和反作用力做功之和仅与两质点的相对位移有关，与参照系选取无关。

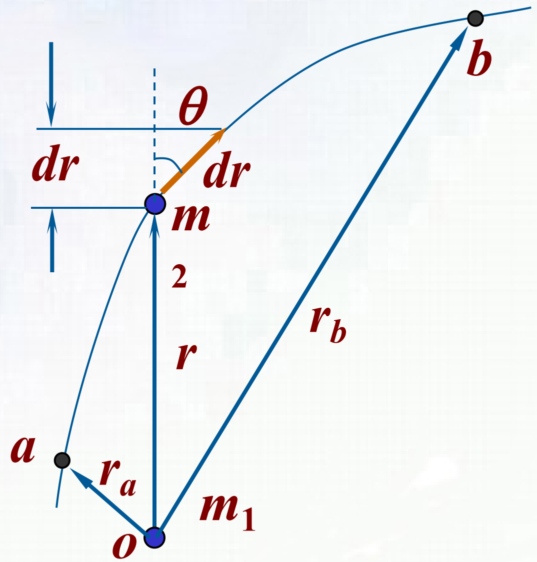
- 通常 $dr_2 \neq dr_1$，作用力和反作用力做功之和一般不等于零。
- 若取相对于 $\boldsymbol{m}_1$ 静止的参照系，则 $\boldsymbol{F}_{12}$ 不做功，$\boldsymbol{F}_{21}$ 所做的功等于作用力和反作用力做功的总和。

二、保守力和非保守力

沿任意闭合回路做功为零的力，叫做保守力，否则就是非保守力。

给出保守力的一些充分条件：1.对于一维运动，凡是位置x的单值函数的力都是保守力（如弹性力）。2.对于一维以上的运动，大小和方向都与位置无关的力（如重力mg）是保守力。3.凡是“有心力”都是保守力。

以万有引力为例：设m_1、m_2组成的两质点系统，仅受引力作用，以m_1为参照系原点，则引力对m_2所做的功等于这对作用力和反作用力所做的功的总和。m_2所受的引力为：

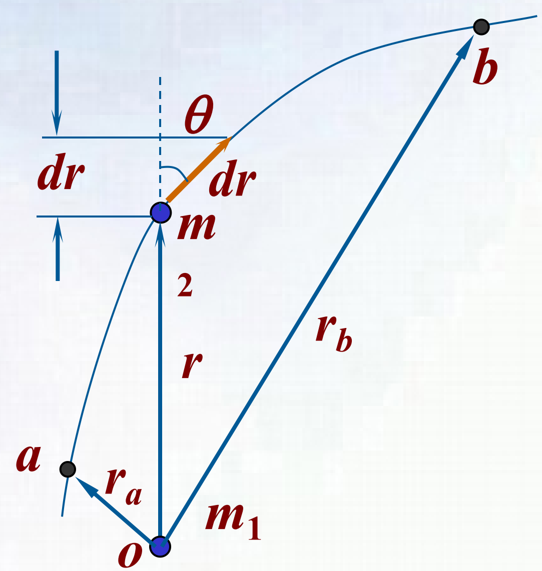


$$\boldsymbol{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

m_2沿 ab 任意路径，引力做功：

$$A = \int_{(a)}^{(b)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(a)}^{(b)} -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot d\boldsymbol{r}$$

由于 $\hat{\boldsymbol{r}}\cdot d\boldsymbol{r} = 1|d\boldsymbol{r}|\cos\theta = dr$，故



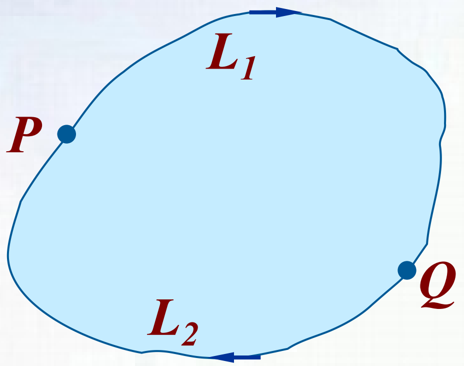
$$A = \int_{(a)}^{(b)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(a)}^{(b)} -G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr$$

$$= -[(-G\frac{m_1 m_2}{r_b}) - (-G\frac{m_1 m_2}{r_a})]$$

上式表明：引力做功只决定于始末态的位置，而与路径无关。若m_2沿任意闭合路径移动一周回到起点，则引力做功为零：

$$\oint_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{P\,(L_1)}^{Q} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{Q\,(L_2)}^{P} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

$$= \int_{P\,(L_1)}^{Q} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} - \int_{P\,(L_2)}^{Q} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$



由于做功与路径L_1、L_2无关，上式恒等于0，即：

$$\boxed{\oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = 0}$$

保守力的定义：凡成对作用力和反作用力做功之和与路径无关，只决定于始末相对位置的力，称为保守力。

做功与路径有关的力，称为非保守力。如摩擦力做功为：

$$A = \oint \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = -\mu mgl \neq 0$$

除了摩擦力，通常爆炸力、涡旋电场力、磁力和非弹性冲击力等均为非保守力。

三、势能与保守力的关系 &

由于成对保守力做功只决定于始末态的位置，可引进一个由位置决定的状态函数，势能 E_p。定义：系统相对位置变化的过程中，成对保守内力做功之和等于系统势能增量的负值。

$$A=\int_{(a)}^{(b)}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=-(E_{pb}-E_{pa})=-\Delta E_p$$

若选择b点为势能零点s，则任意位置a点的势能：

$$E_{pa}=\int_{(a)}^{(s)}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

系统在任意位置的势能等于从该位置沿任意路径变到势能零点的过程中保守内力所做的功。

- 势能零点选择不同，势能值也不同，但势能差与零点选择无关。
- 势能属于整个质点系统。
- 只有内力是保守力，才能引入势能。

用微分的方法从势能求保守内力：

$$-dE_p = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = (F_x \boldsymbol{i} + F_y \boldsymbol{j} + F_z \boldsymbol{k}) \cdot (dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k})$$

$$= F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

由上式可知：

$$F_x = -\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{y,z} = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) = -\nabla E_p}$$

保守内力等于势能梯度的负值。

一维： $F = -dE_p / dx$

保守力的判据： *

1. 由保守力定义： $\oint \boldsymbol{F}_{保} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$

2. 保守力： $\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x}$ （二维）

例*：在 XY 平面上运动的质点受变力 F 的作用，F 与质点坐标 x, y 的函数关系分别为

(1) $F_1=xyi+(x+y)j$　　(2) $F_2=4xyi+2x^2j$

(3) $F_3=xyi+x^2j$　　(4) $F_4=(-3x^2+6y)i+(-4y+6x)j$

判断 F 是否是保守力的结论是：

(A) 四个力都是保守力；　　(B) 只有 F_2、F_4 是保守力；

(C) 只有 F_1、F_2 是保守力；　　(D) 只有 F_3、F_4 是保守力。

请选择正确答案：

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}$$

B正确

例：对功的概念有以下几种说法：

(1) 保守力做正功时，系统内相应的势能增加。

(2) 质点运动经一闭合路径，保守力对质点做的功为零。

(3) 作用力和反作用力大小相等，方向相反，所以两者所做的功的代数和为零。

在上述说法中

(A) (1),(2)是正确的；

(B) (2),(3)是正确的；

(C) 只有(2)是正确的；

(D) 只有(3)是正确的。

请选择正确答案：

C正确

例题17

一双原子分子的势能函数为：

$$E_{\mathrm{p}}(x)=\varepsilon_0[(\frac{x_0}{x})^{12}-2(\frac{x_0}{x})^6]$$

式中ε_0和x_0为常量，x为原子间距离。求：（1）原子间相互作用力为零时的距离；（2）当分子总能量为E时，分子动能的最大值。

解：(1)由保守内力等于势能梯度的负值：

$$-\frac{dE_p}{dx}=-\varepsilon_0(-12\frac{x_0^{12}}{x^{13}}+12\frac{x_0^6}{x^7})=0，知\ x=x_0$$

(2)当分子动能为最大值时，势能应该为最小值。现已知$x=x_0$ 为极值；判断x_0是否为极小值：对势能函数求二阶导数：

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}=12\varepsilon_0(13\frac{x_0^{12}}{x^{14}}-7\frac{x_0^6}{x^8})_{x=x_0}=12\varepsilon_0(13-7)\frac{1}{x_0^2}>0$$

则函数在x_0有极小值，将 $x=x_0$代入势能函数：

$$E_{p\min}=-\varepsilon_0$$

$$E_{k\max}=E-E_{p\min}=E+\varepsilon_0$$

四、力学中的几种势能

1. 引力势能

取无穷远处为势能零点，则：

$$E_p = \int_r^{\infty} -G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

2. 重力势能

在引力势能表达式中：$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r} + C$

取 ***r*=*R*** 处为势能零点，此时 $C = G\frac{mM}{R}$

当小球离地面高度为 ***h*** 时，

$$E_p = -G\frac{mM}{R+h} + G\frac{mM}{R}$$

地面附近 $\boldsymbol{h \ll R}$，故

$$E_p = m\frac{GM}{R(R+h)}h \approx m\frac{GM}{R^2}h, \qquad \frac{GM}{R^2} = g$$

则：

$$\boxed{E_P = mgh}$$

3. 弹性势能

取平衡位置为势能零点时，弹性势能：

$$E_P = \int_x^0 -kxdx = \frac{1}{2}kx^2$$

§ 2.9 功能原理 机械能守恒定律

一、质点系动能定律

质点系内各质点的受力可分为外力和内力，应用质点动能定理，有：

$$A_{1外} + A_{1内} = E_{K1} - E_{K10}$$

$$A_{2外} + A_{2内} = E_{K2} - E_{K20}$$

$$\vdots$$

$$A_{n外} + A_{n内} = E_{Kn} - E_{Kn0}$$

将上述各式相加：

$$\sum A_{i外} + \sum A_{i内} = \sum E_{Ki} - \sum E_{Ki0}$$

对于成对内力的矢量和 $\sum \boldsymbol{F}_{i内} = 0$，但 $\sum A_{i内} \neq 0$

定义 有：

$$A_{外} = \sum A_{i外}, \quad A_{内} = \sum A_{i内}$$

$$A_{外} + A_{内} = E_K - E_{K0}$$

上式称质点系的动能定理：外力作功和内力作功之和等于质点系动能的增量。

二、功能原理

质点系内力的作功可分为保守内力的功和非保守内力的功：

$$A_{内}=A_{内保}+A_{内非} \qquad \text{而：} \qquad A_{内保}=-(E_p-E_{p0})$$

代入质点系动能定理：

$$A_{外}+A_{内非}=(E_K+E_p)-(E_{K0}+E_{p0})$$

质点系的动能和势能之和称为系统的机械能。

上式称为功能原理：外力作功和非保守内力作功之和等于系统机械能的增量。

上式中$A_{外}$是外力对每个质点所作功的总和：

$$A_{外}=\sum A_{i外}=\sum[\int \boldsymbol{F}_{i外}\cdot d\boldsymbol{r}_i]$$

$A_{内非}$是非保守内力对每个质点所作功的总和：

$$A_{内非}=\sum A_{i内非}=\sum[\int \boldsymbol{F}_{i内非}\cdot d\boldsymbol{r}_i]$$

非保守内力有两类，一类是 $\boldsymbol{F}_{i内非}\cdot d\boldsymbol{r}_i \le 0$ ，（如摩擦力）称为耗散力，另一类 $\boldsymbol{F}_{i内非}\cdot d\boldsymbol{r}_i > 0$ （如爆炸力）。前者做功使机械能转化为热能，后者做功使其他形式的能量（如化学能）转化为机械能。

功能原理的等式中$A_{内保}$*已被势能增量的负值代替*。功能原理适用于惯性系，对于非惯性系在等号左边需加一项惯性力的功。

三、机械能守恒定律

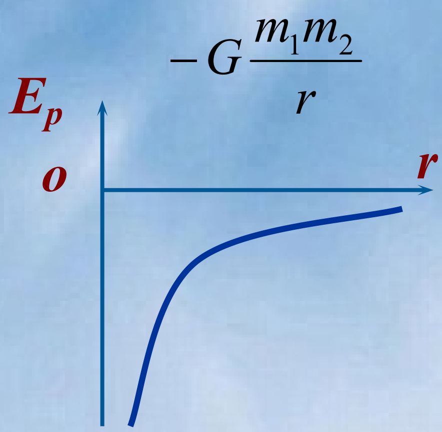
当外力和非保守内力对系统不作功时，系统的机械能保持不变：

$$若\ A_{外}+A_{内非}=0,\ 则\ E_K+E_P=E_{K0}+E_{P0}=常量$$

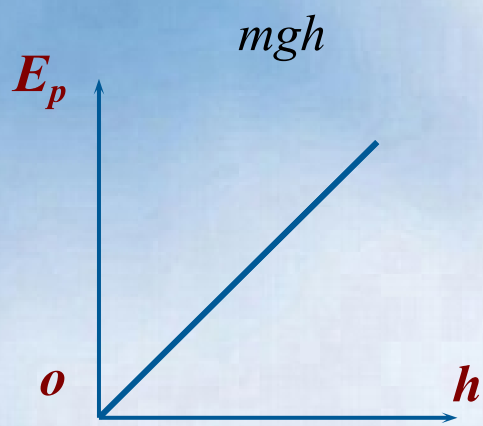
$$或\ E_K-E_{K0}=-(E_P-E_{P0})$$

上式为机械能守恒定律：如果只有保守内力作功，而外力和非保守内力不作功，那么，系统的动能和势能可以相互转换，但总机械能保持不变。

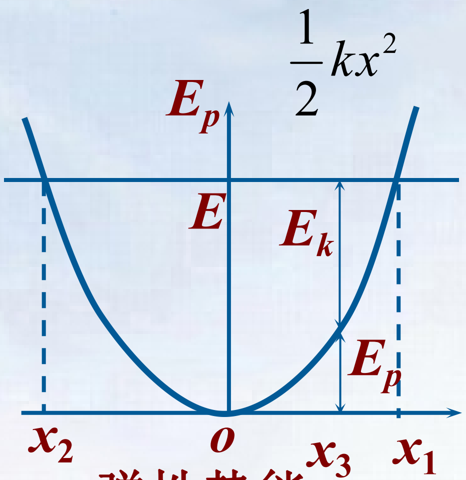
四、势能曲线



引力势能



重力势能



弹性势能

根据势能曲线可以判断保守内力的大小和方向：

保守内力的方向指向势能减小的方向，大小等于曲线的斜率的绝对值。$F=-dE_p/dx$

以弹性势能为例，保守内力与势能之间的关系：

$$F=-\frac{dE_p}{dx}=-kx$$

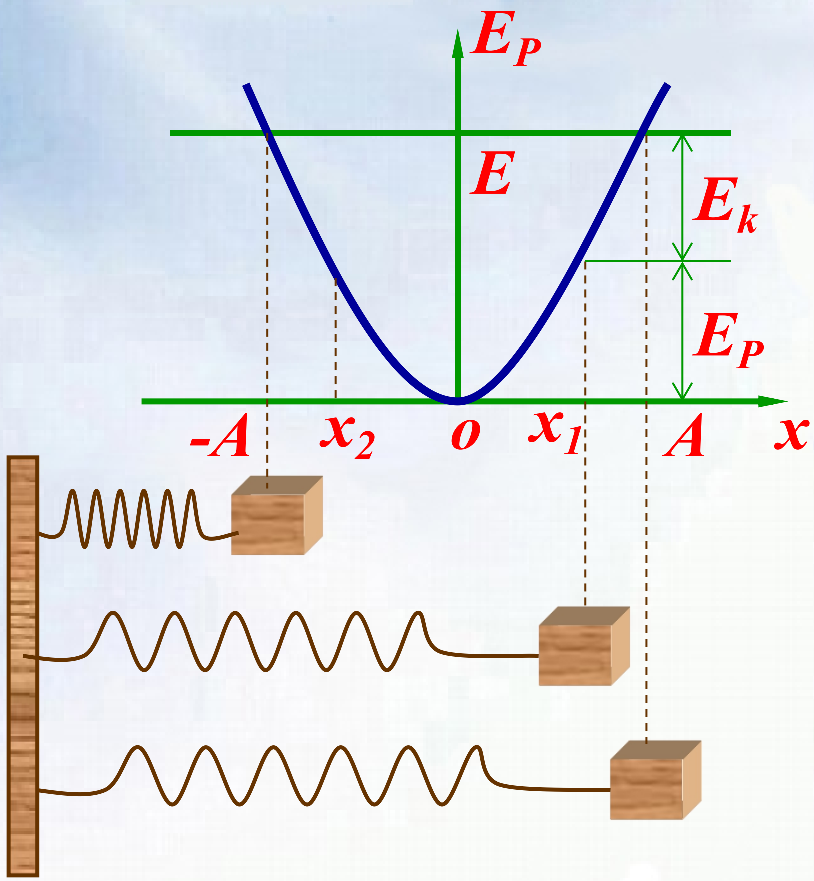
在 $x=0$ 处， $-\frac{dE_p}{dx}=0$

弹性力为零；

$x=x_1$处， $(-\frac{dE_p}{dx})<0$

弹性力指向平衡位置（x轴负向）。

$x=x_2$处， $(-\frac{dE_p}{dx})>0$



弹性力也指向平衡位置（x轴正向）。

在弹性势能曲线中E代表总机械能，E_p为势能，E_k为动能。

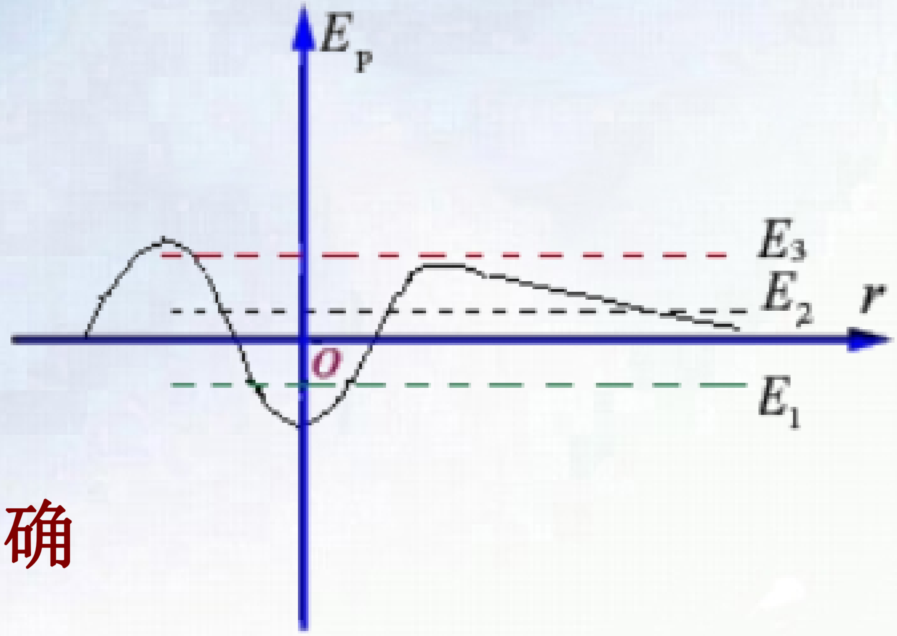
五、能量守恒定律

当外界不对系统做功，也不向系统传递热量时，系统内部各种形式的能量之间可以相互转换，但各种形式能量的总和保持不变——能量守恒定律。与外界没有物质和能量交换的系统称为孤立系统。能量守恒定律也可表达为：孤立系统内部各种形式的能量之间可以相互转换，但其总能量保持不变。

势能曲线练习题

1.一维势能函数如图所示，图中E_1、E_2、E_3分别代表粒子1、2、3具有的总能量。设三个粒子开始都在$x = 0$处，则向正方向运动不受限制的粒子

(A) 只有粒子1
(B) 只有粒子2
(C) 只有粒子3
(D) 粒子2和粒子3
请选择正确答案：



C正确

2.由图中所示势能曲线分析物体的运动情况如下，请指出哪个说法正确

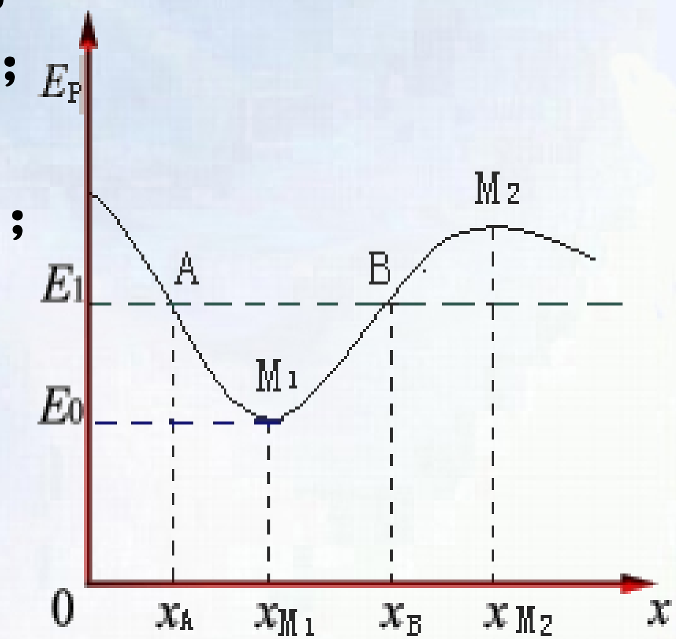
(A) 在曲线M_1至M_2段物体受力$f(x)>0$；

(B) 曲线上的一点M_1是非稳定平衡点；

(C) 开始在x_A与x_B之间的、总能量为E_1的物体运动范围是在x_A与x_B之间；

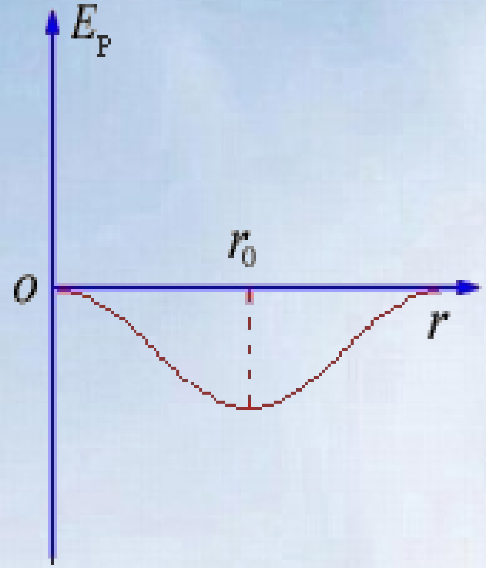
(D) 总能量为E_1的物体运动范围是0—∞之间。

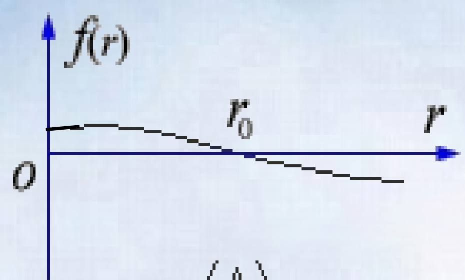
请选择正确答案：



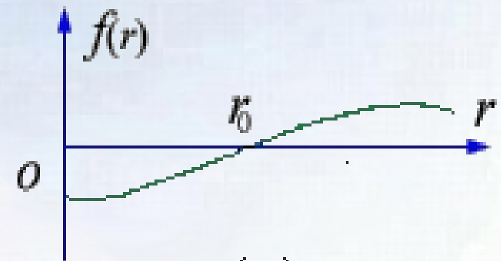
C正确

3.一个两体系统的势能曲线如图，图中r是两体之间的距离，问(A)、(B)、(C)、(D)四个图中哪一个正确地表示了该两体系统的内力？

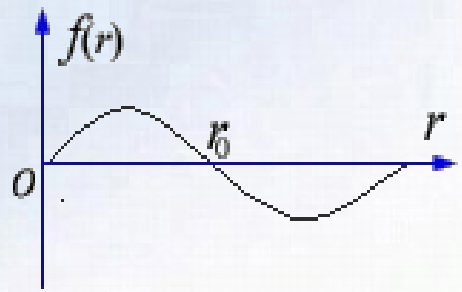




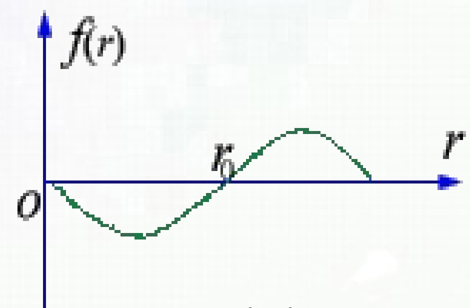
(A)



(B)



(C)



(D)

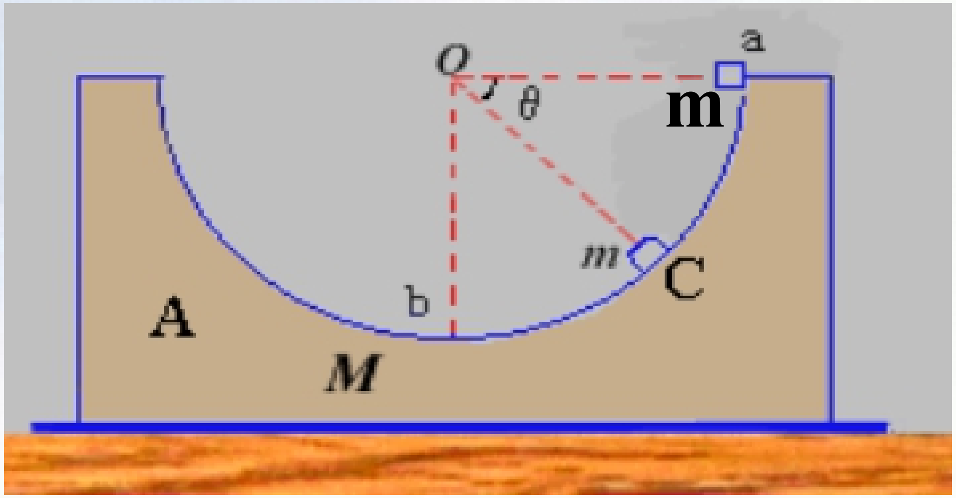
C正确

例题18

质量为M的半圆形光滑槽放在光滑的桌面上，另有一质量为m的物体可在槽内滑动，如图所示：

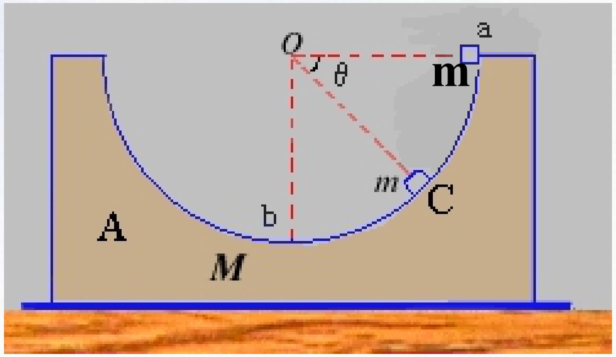
(1) 当物体m从a点静止释放，沿半圆形槽向下滑至任一位置c时，M相对于桌面的速率及m相对于M的速率各为多少？

(2) 当m从a点滑到槽的最低点b时，M移动多少距离？



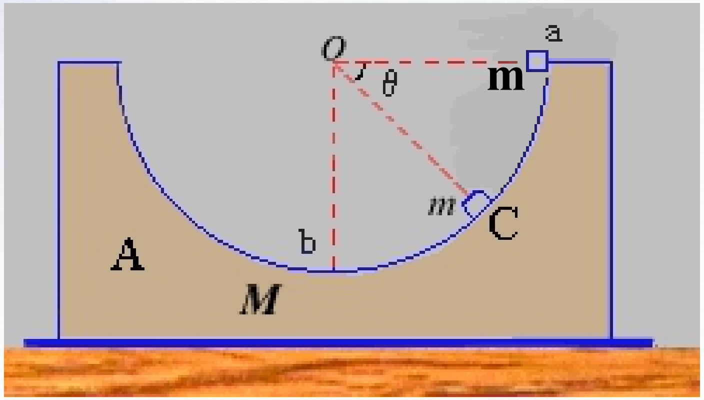
(3) 当m从a点滑到槽的最低点b时，m对槽的压力是多少？
(4) 当m从a点滑到槽的最低点b时，对于桌面参考系，m的轨道在该点的曲率半径ρ等于多少？

分析： (1)M、m系统，水平方向不受外力，水平方向动量守恒，m沿槽下滑时，槽将向右平动，m到达b点，M、m都达到最大速率。(2) M、m、地球系统，外力、非保守内力不作功，机械能守恒。



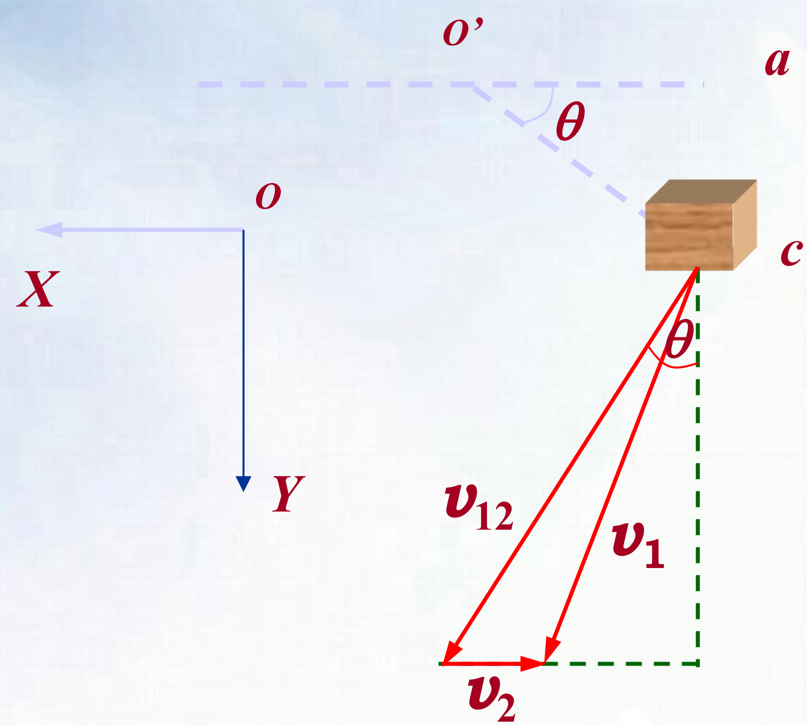
(3) m下滑过程中，相对M的轨迹是圆，但M一般情况下是非惯性系，应用牛顿定律需要考虑惯性力，可是当m到达b点的瞬间， M、m间的相互作用力沿竖直方向，M的加速度为零，这个瞬时，选M为参考系，是惯性系，牛顿定律成立，而且此时，在地面参考系中，M、m间的相互作用力也与该时刻的轨迹相垂直的（ m沿水平方向运动）。这是本题的一个难点。

(4) 本题的另一个难点是物体m在任一点c时速度的方向及相对速度的合成—即相对运动问题。



解：设m相对地的速度为$\boldsymbol{v}_1$，相对M的速度为$\boldsymbol{v}_{12}$，M相对地的速度为$\boldsymbol{v}_2$，m到达c点时三者的关系如图所示，

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_{12} + \boldsymbol{v}_2$$



取如图的坐标

$$v_{1x} = v_{12}\sin\theta - v_2 \qquad (1)$$

$$v_{1y} = v_{12}\cos\theta \qquad (2)$$

1. 对M、m系统, 由 a→c 过程中，水平方向动量守恒

$$m\upsilon_{1x} - M\upsilon_2 = m(\upsilon_{12}\sin\theta - \upsilon_2) - M\upsilon_2 = 0 \quad (3)$$

以M、m、地球为系统，机械能守恒

$$mgR\sin\theta = \frac{1}{2}M\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}m(\upsilon_{1x}^2 + \upsilon_{1y}^2) \quad (4)$$

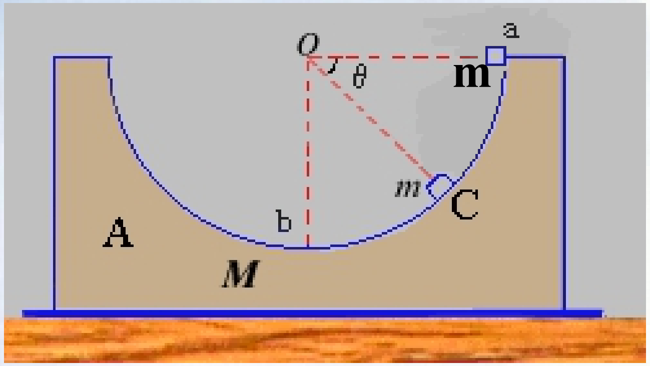
由上面四式得：

$(\upsilon_{1x}, \upsilon_{1y}, \upsilon_{12}, \upsilon_2)$

$$\upsilon_{12} = \sqrt{\frac{(m+M)2gR\sin\theta}{(m+M) - m\sin^2\theta}}$$

$$\upsilon_2 = \frac{m}{M+m}\upsilon_{12}\sin\theta = \frac{m}{M+m}\sin\theta\sqrt{\frac{(m+M)2gR\sin\theta}{(m+M) - m\sin^2\theta}}$$

2. 设m由 a→b，M相对地的水平位移为Δx_2，m相对地的水平位移Δx_1，由水平方向动量守恒



$$mv_{1x} - Mv_2 = 0$$

$$\therefore \quad v_{1x} = \frac{M}{m} v_2$$

$$\therefore \quad \Delta x_1 = \int v_{1x} dt = \frac{M}{m} \int v_2 dt = \frac{M}{m} \Delta x_2 \qquad \textbf{(1)}$$

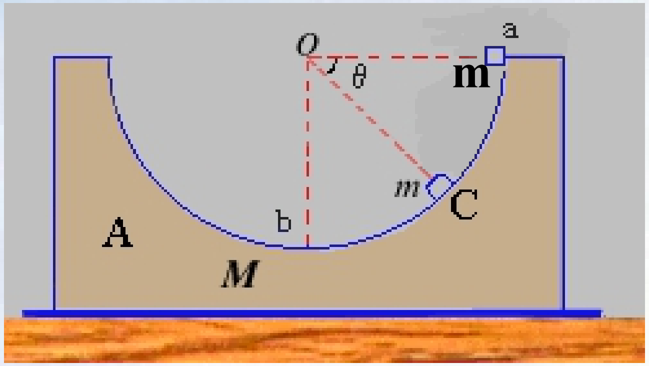
$$\because \quad \Delta \vec{r}_1 = \Delta \vec{r}_{12} + \Delta \vec{r}_2 \qquad \Delta x_1 = R - \Delta x_2 \qquad \textbf{(2)}$$

$$\therefore \quad \Delta x_2 = \frac{m}{m+M} R$$

3. 在物块m由a滑到b的过程中，由动量守恒和机械能守恒

$$m\upsilon_1 - M\upsilon_2 = 0$$

$$mgR = \frac{1}{2} m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2} M\upsilon_2^2$$



可求得m在b点时，m和M相对地面的速度：

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2MgR}{m+M}} \qquad \upsilon_2 = m\sqrt{\frac{2gR}{M(m+M)}}$$

当m滑到b点的时刻， m对M的压力竖直向下，则M相对 地的加速度为零，此时滑块M是惯性系，在参考系M中m作圆周运动：

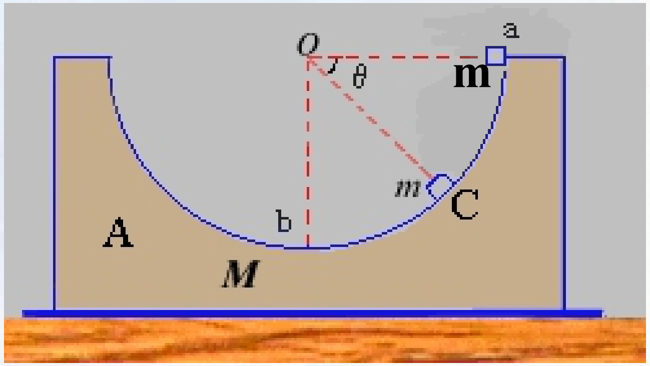
$$N - mg = m\frac{\upsilon_{12}^2}{R} = m\frac{(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2}{R} \qquad \textbf{(5)}$$

$$(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2 = \left(\sqrt{\frac{2MgR}{m+M}} + \sqrt{\frac{2m^2 gR}{M(m+M)}}\right)^2 = 2\frac{m+M}{M}gR$$

$$N = \frac{3mM + 2m^2}{M}g = \frac{3M + 2m}{M}mg$$

4. m滑至b点时，相对地的速度为$\boldsymbol{v}_1$，沿水平方向 ($\boldsymbol{v}_{12}$ 和 $\boldsymbol{v}_2$沿水平方向)，说明m相对地面轨迹在b点的切线沿水平方向，故a_n方向竖直向上，而此时N-mg竖直向上，故有：

$$N - mg = m\frac{v_1^2}{\rho} \qquad \textbf{(6)}$$



由(5)式和(6)式，得

$$\rho = \frac{v_1^2}{(v_1 + v_2)^2} R = \left(\frac{M}{m+M}\right)^2 R$$

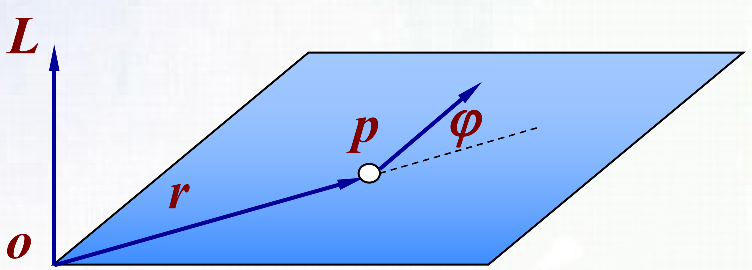
§2.11 角动量定理 角动量守恒定律

一、质点角动量定理

1.质点对点的角动量

质点对惯性系中某一固定点的角动量 (angular momentum) $\boldsymbol{L}$定义为位矢$\boldsymbol{r}$与动量$\boldsymbol{p}$的矢积:

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$$

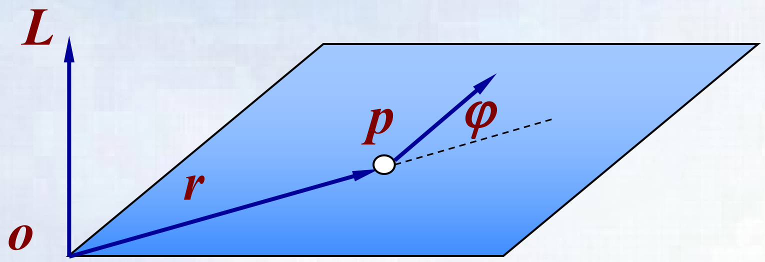


质点角动量的大小为:

$$L=rp\sin\varphi=mrv\sin\varphi$$

L的方向满足右手螺旋法则。

如质点做圆周运动，
r和***p***始终垂直，
$L=pr=mvr$ 。角动量的单位为：$kg \cdot m^2/s$



某些物体角动量的数量级

某些物体角动量的数量级 (单位：$kg \cdot m^2/s$) (下述值是对特定参考点而言)

电子绕核运动	1.05×10^{-34}	汽车车轮	10^{2}
地球绕太阳公转	2.7×10^{40}	玩具陀螺	10^{-1}
地球的自转	5.8×10^{33}	唱片	6×10^{-3}
步枪子弹的自转	2×10^{-3}	电风扇	1
电子的自旋	5.3×10^{-35}	飞机螺旋桨	5×10^{4}

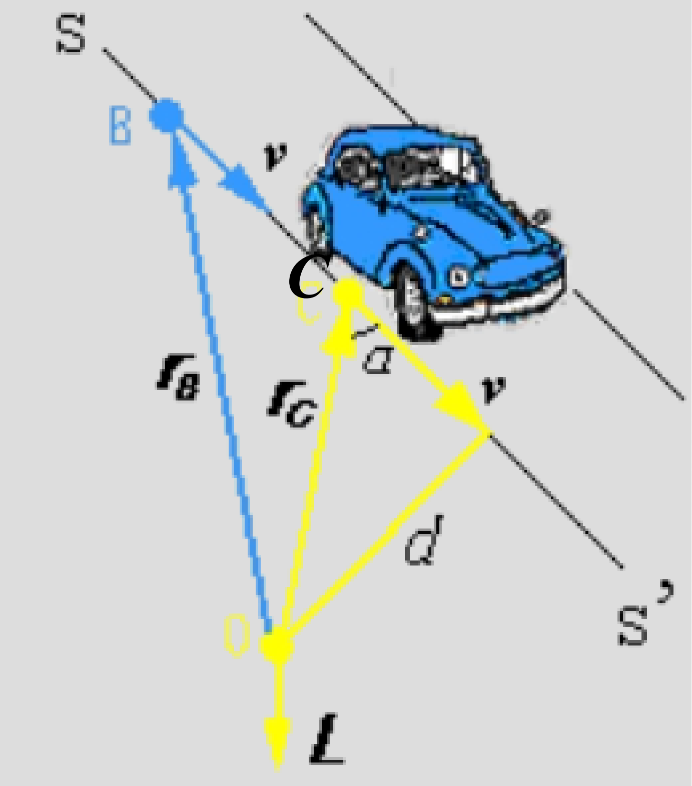
例题19

一质量为m的汽车以匀速度v沿一平直公路行驶，求汽车对公路一侧距公路为d的固定点O的角动量是多少？ 对公路上任一点的角动量又是多少？

解答 (1) 设 SS’ 表示汽车运动的轨迹直线，汽车的动量为 $m\boldsymbol{v}$，汽车运动经过任一点C时，汽车对公路固定点 O 的角动量为

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_c \times m\boldsymbol{v}$，其大小：

$|\boldsymbol{L}| = r_c m v \sin(\pi - \alpha) = m v d$



其方向是垂直于$\boldsymbol{r}_c$和 $\boldsymbol{v}$ 所决定的平面，也就是固定点O与SS’所决定的平面，方向如图所示，此方向在汽车运动过程中是不变的。

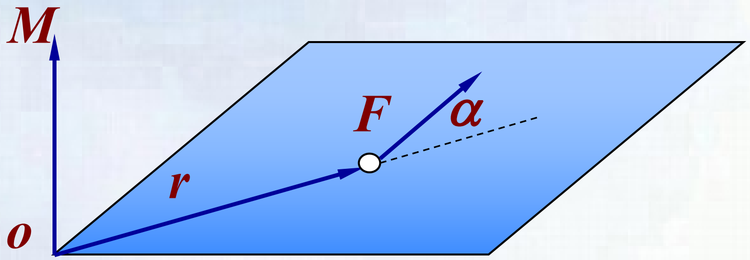
(2) 对公路上任一点的角动量是 0，这是由于$d=0$的缘故。

讨论：若再取公路上的任一点 B，研究汽车经过 B 点时的角动量，其值大小仍为 mvd，方向仍是垂直于 O 与 SS’所决定平面，方向如上图所示。由此可见：一个质点运动时，如果它所受合外力为零，运动轨迹是匀速直线运动，则它对任一固定点的角动量随时间保持不变。

2.力对点的力矩

定义力对固定点的力矩为：

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$



力矩的大小为：

$$M = rF\sin\alpha$$

***M*的方向满足右手螺旋法则**，单位为：**N·m**

3.质点角动量定理

将质点的角动量对时间求导：

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

由于 $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{v}\times(\mathrm{m}\boldsymbol{v})=\mathbf{0},$ $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$ 为质点所受的合力$\boldsymbol{F}$，

$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ 为质点所受的合力矩，则有：

$$\boxed{\boldsymbol{M}=\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}}$$

质点角动量对时间的变化率等于质点所受的合力矩。将上式积分，得：

$$\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{M} dt = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}_0$$

上式中 $\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{M} dt$ 称为合力的冲量矩，

国际单位为：**N·m·s**

二、质点角动量守恒定律

$$若\ \boldsymbol{M} = 0,\ 则\ \boldsymbol{L} = 常矢量$$

对某一固定点若质点所受的合力矩为零，则质点对该固定点的角动量守恒——质点角动量守恒定律。

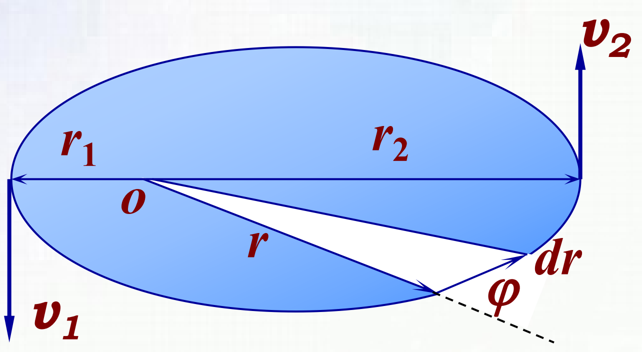
质点在中心力作用下的力矩始终为零，故质点对力中心的角动量守恒。

r 与 F 共线

例题20

1.证单位时间内卫星对地心位矢扫过的面积为常量。
2.求卫星在近地点和远地点时的速度，卫星周期为T。

解：(1) 卫星所受地球引力始终指向地心，对地心O，卫星所受的合力矩为零，卫星对地心的角动量守恒：



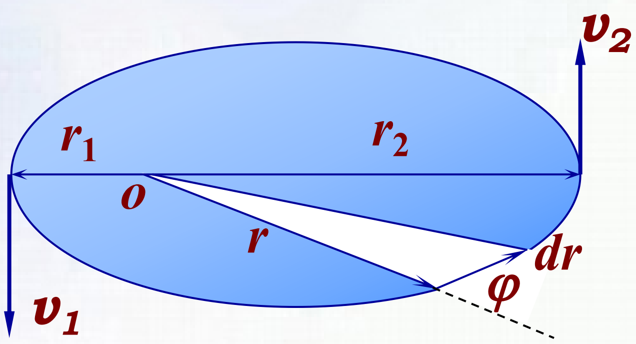
$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = 常矢量$$

卫星角动量方向保持不变，其轨道在一个平面内，角动量大小不变可证明位矢在单位时间内扫过的面积为常量：

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\frac{1}{2} r\left|d\boldsymbol{r}\right|\sin\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r v \sin\varphi = \frac{L}{2m} = 常量$$

上式就是开普勒第二定律。

(2) 在近地点和远地点，速度和位矢垂直，故：



$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r_1 v_1 = \frac{1}{2} r_2 v_2$$

而： $\frac{dS}{dt} = \pi ab / T$ 解得：

$$v_1 = \frac{2\pi ab}{Tr_1} \qquad v_2 = \frac{2\pi ab}{Tr_2}$$

其中a, b分别为椭圆的长半轴和短半轴。

三、质点系角动量定理和角动量守恒定律

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}, \quad \boldsymbol{M} = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \quad \boldsymbol{L} = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$$

质点系角动量对时间的变化率等于所有外力的力矩和。若$M=0$，则L守恒。

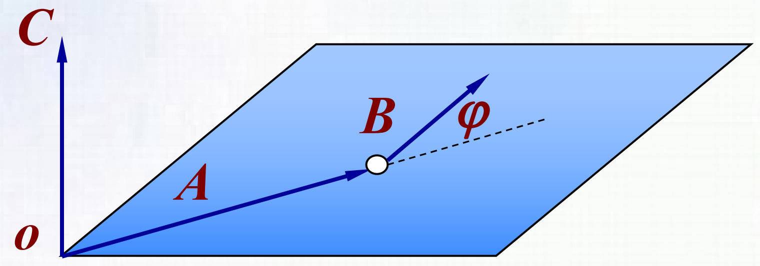
矢量积

矢量积是指矢量*A*和矢量*B* 相乘得一个矢量*C*，即：

$A \times B = C$

矢量*C*的大小为 $C=AB\sin\varphi$，其中φ是*A*和*B* 两矢量 的夹角。

矢量*C* 的方向则垂直于*A*、*B* 两矢量所组成的平面，指向由右手法则决定，即从经由小于180度的角转向时大姆指伸直时所指的方向。



第 五 周

第6章 刚体力学

§6.1， §6.2， §6.3 （1，2，3，4）

第三章 刚体力学基础

刚体模型： 在任何外力作用下，形状和大小均不发生改变的物体。

说明： (1) 理想模型；

(2) 在外力作用下，任意两点间均不发生位移；

(3) 内力无穷大的特殊质点系。

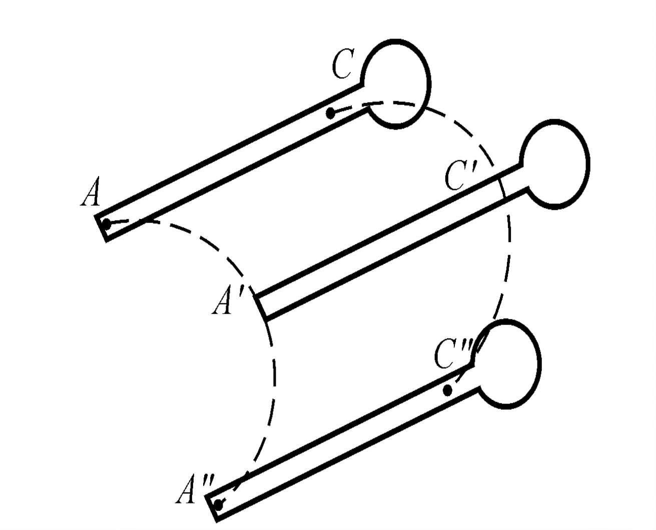
§3.1 刚体运动的描述

一、平动和转动

1. 刚体的平动

刚体上任意两点的连线始终保持平行，这种运动称为平动。如电梯的升降，活塞的往返等都是刚体的平动。

刚体上各质点的运动相同，因而刚体的平动可用质心运动描述，刚体的平动就可归结为质点运动问题。



质心运动定律 §2.5

一、质心

质点系的质量中心称为**质心**。质点系的总质量为：

$$m=\sum m_i$$

质心的位置是质点系内各质点的带权（质量）平均位置，质心的位矢为：

$$\boldsymbol{r}_C=\frac{\sum m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum m_i}=\frac{\sum m_i\boldsymbol{r}_i}{m}$$

在直角坐标系中：

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m} \qquad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m} \qquad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}$$

对质量连续分布的情况：

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\int \boldsymbol{r} dm}{\int dm} = \frac{\int \boldsymbol{r} dm}{m}$$

直角坐标系中质心位置：

$$x_C = \frac{\int x dm}{m} \qquad y_C = \frac{\int y dm}{m} \qquad z_C = \frac{\int z dm}{m}$$

质心相对于各质点的位置与坐标选择无关，对于对称物体，质心为几何中心。将坐标原点取在质心，则：$x_C = y_C = z_C = 0$，对两质点系统：

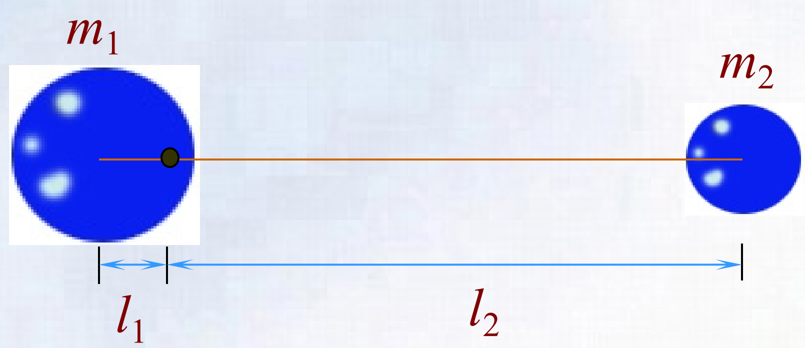
$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m} = 0 \quad 得：\quad \frac{x_1}{x_2} = -\frac{m_2}{m_1}$$

令：$l_i = |x_i| \ (i = 1,2)$ 为两质点到质心的距离，则

$$l_1 = (\frac{m_2}{m})l \qquad l_2 = (\frac{m_1}{m})l \qquad l = l_1 + l_2$$

例题

地月系统的质心：地球的质量是月球的81倍，地月距离是地球半径的60倍，所以C点实际在地球体内离地心3/4个地球半径处。



$$l_1 = \left(m_2 \middle/ 82m_2\right) \cdot 60 \cdot R_{地} \approx \frac{3}{4} R_{地}$$

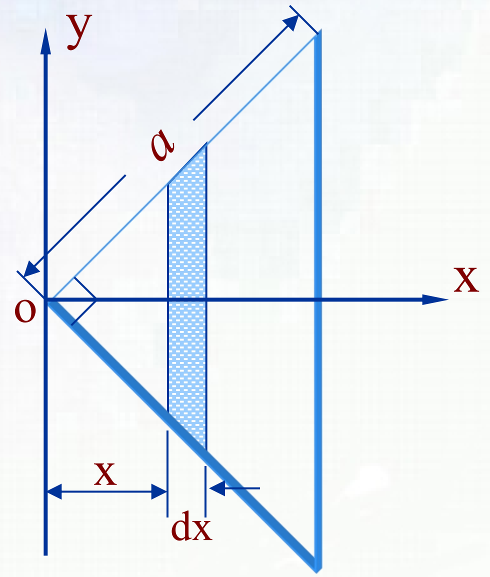
例题12

求腰长为 a 的等腰直角三角形均匀薄板的质心位置。

解：离原点x处，取宽度为dx的面元，由于面元高度为2y，所以面元面积为：2ydx=2xdx，设面密度为σ，则此面元的质量为：

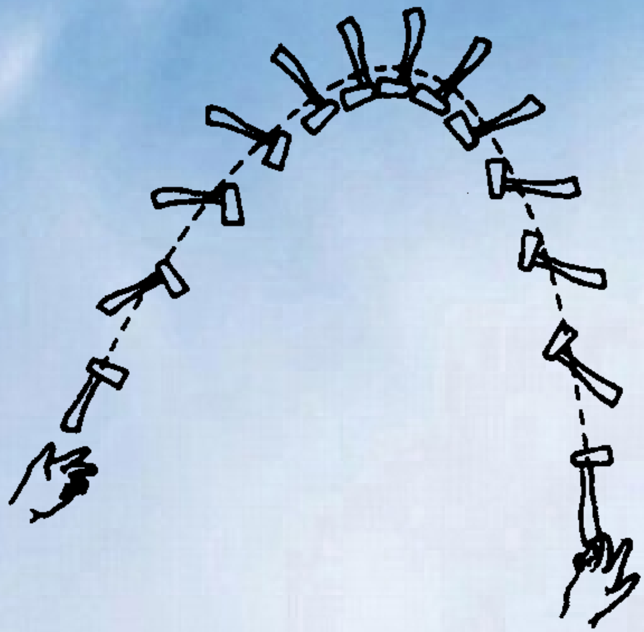
$$dm = 2\sigma x dx$$

此三角形质心坐标x_C为：

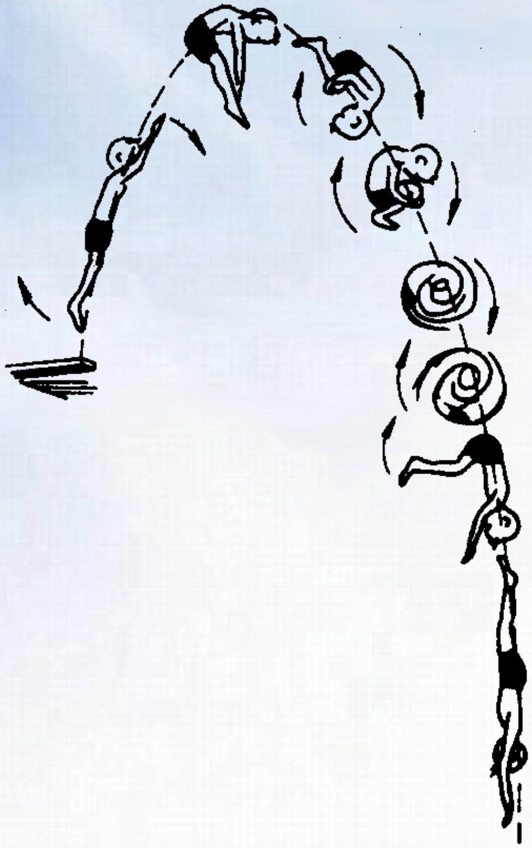


$$x_C = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int_0^{a/\sqrt{2}} 2\sigma x^2 dx}{\int_0^{a/\sqrt{2}} 2\sigma x dx} = \frac{\sqrt{2}}{3}a$$

二、质心运动定律



两人互抛斧头



跳水

对质心位矢$\boldsymbol{r}_C$求导，得：

$$\boldsymbol{v}_C=\frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt}=\frac{\sum m_i\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}}{m}=\frac{\sum m_i\boldsymbol{v}_i}{m}$$

上式可得： $m\boldsymbol{v}_C=\sum m_i\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{P}$

对上式求导，根据质点系牛顿第二定律：

$$\boxed{\boldsymbol{F}=\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=m\frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt}=m\boldsymbol{a}_C}$$

故质心运动规律与质点完全一样。

上式为质心运动定律：**质点系所受的合外力等于质点系总质量与质心加速度的乘积。**
动量守恒定律的另一种表达形式：**质点系所受的合外力为零，则质心速度保持不变。**

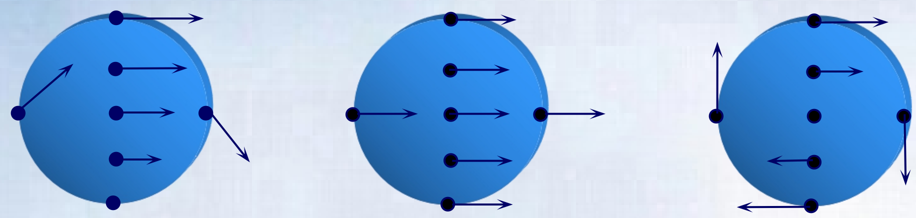
三、质心参照系

原点选在质心上的平动参照系，称为**质心参照系**(与惯性系只有相对平动)。质心参照系的特点：

①在质心参照系中质心速度恒为零：$\boldsymbol{v}'_C = 0$

②质心参照系的总动量恒为零：$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}'_C = 0$

一质点系相对地面参照系的运动可分解为随质心的整体运动和各质点相对质心的运动。如车轮的滚动，可分解为随质心运动和相对质心运动。



（a）车轮的滚动　（b）随质心的运动　（c）相对质心的运动

例题13

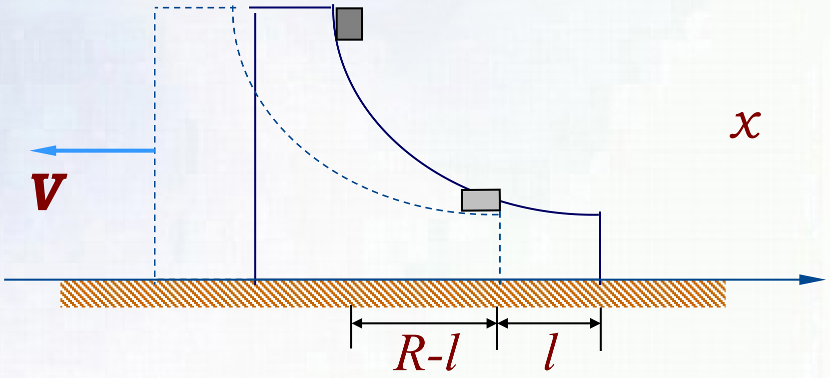
应用质心概念和质心运动定律解小物沿四分之一圆弧下滑问题。

解： 系统在水平方向受力（$F_x=0$），故质心水平位矢分量x_C始终不变。设开始下滑时，两物坐标为：x_{10}、x_{20}。小物滑到槽底时两物坐标为：x_1、x_2

则：
$$x_C=\frac{mx_{10}+Mx_{20}}{m+M}=\frac{mx_1+Mx_2}{m+M} \quad ①$$

设槽向左移动的距离为l：

$$l=x_{20}-x_2 \quad ②$$



小物向右移的水平距离为：

$$x_1-x_{10}=R-l \quad ③$$

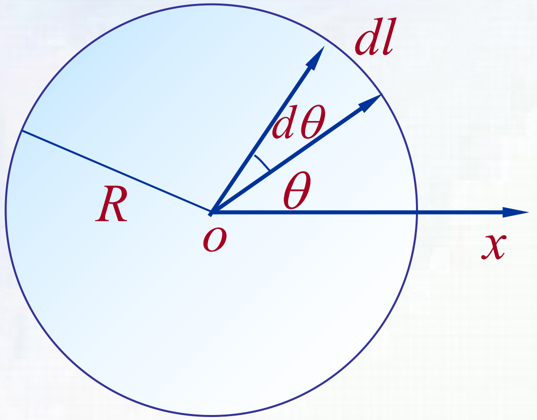
联立①②③式，可解得： $l=\dfrac{mR}{M+m}$

质点圆周运动的角量描述 §1.5

圆周运动质点的位置可用位置矢量与x轴之间的夹角θ描述，称θ为角坐标。角坐标对时间的一阶导数称角速度：

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

单位 (rad/s)



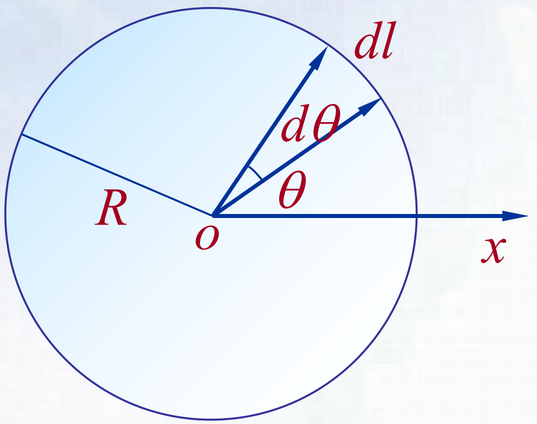
角坐标对时间的二阶导数称角加速度：

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

单位（rad/s^2）

由于弧长 $dl = Rd\theta$，线量与角量的关系为：

质点的速度大小：$\upsilon = \dfrac{dl}{dt} = \omega R$



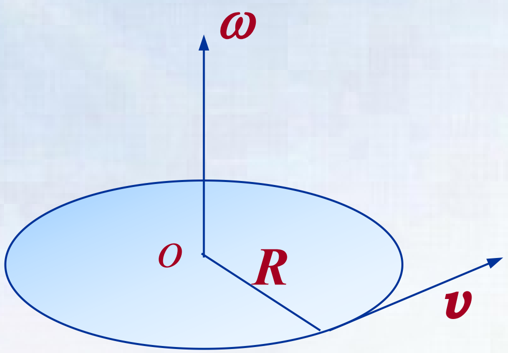
切向和法向加速度大小：

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \beta R \qquad a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R$$

当ω=常量时，质点做匀速圆周运动，当β= 常量时，质点做匀变速圆周运动。

质点做匀变速圆周运动时，运动方程为：

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \beta t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

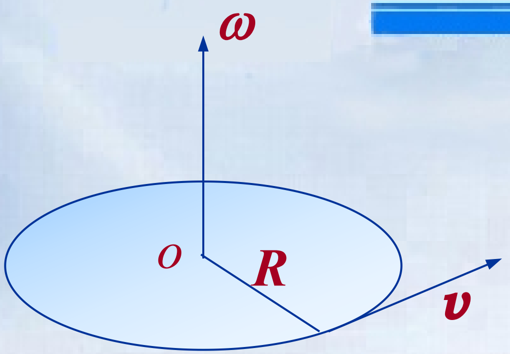


$\boldsymbol{\omega}$的方向按右手螺旋法则确定，定义角加速度矢量为：

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

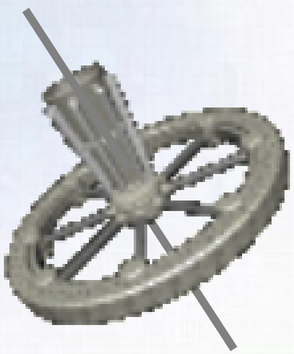
则线量与角量的关系为*：

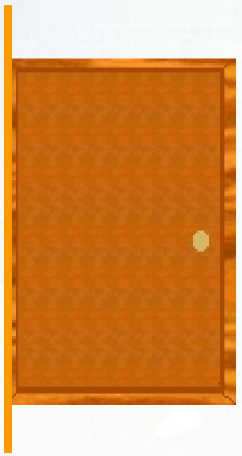
$$
\begin{cases}
\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R} \\
\boldsymbol{a}_{\tau} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{R} \\
\boldsymbol{a}_{n} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R})
\end{cases}
$$



2. 刚体的定轴转动

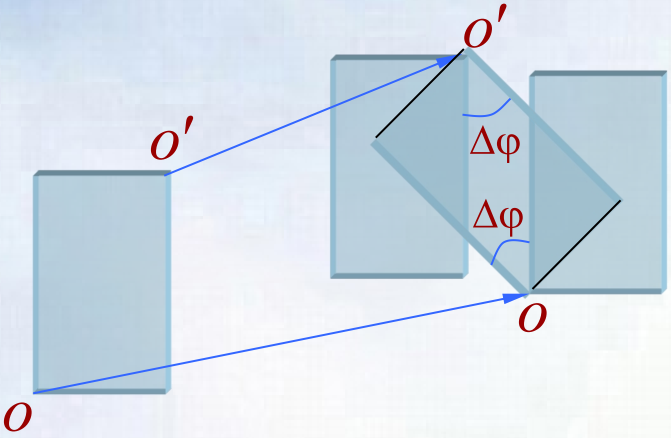
刚体中各质点都绕某一直线做圆周运动，这种运动称为定轴转动。





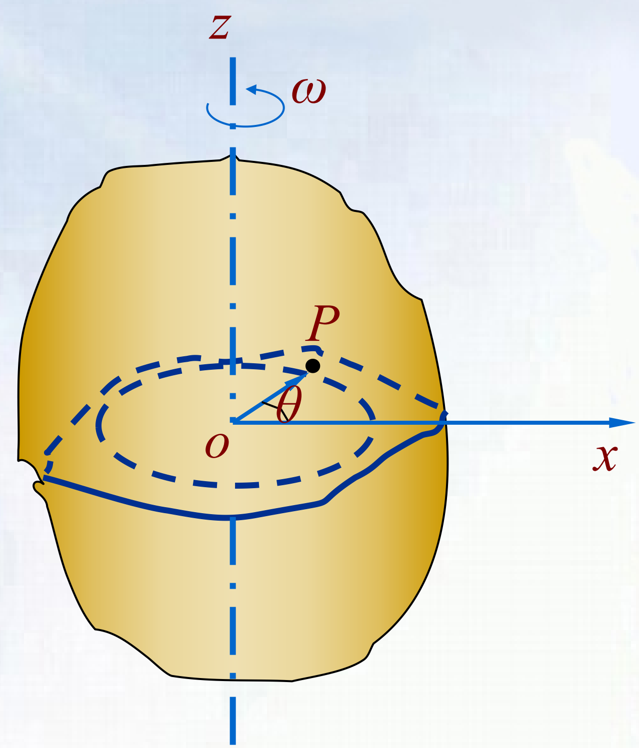
刚体的一般运动可看作平动和转动的合成。

由于转轴位置的选择不同，可以有多种平动和转动的分解方式，但转动的角位移总是相同的，和转轴位置无关。



二、刚体定轴转动的描述

刚体内取一点P，做转轴的垂足O，通过OP并与转轴垂直的平面，称为**转动平面**。刚体绕转轴转动时，质点P在转动平面内做圆周运动，可用圆周运动的角量描述。刚体中任意一点的角位移、角速度、角加速度，可代表整个刚体的角量运动。角量与线量基本关系：



$$\upsilon = \frac{dl}{dt} = \frac{R \cdot d\theta}{dt} = \omega R$$

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \beta R$$

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R$$

匀变速定轴转动：

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \beta t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

刚体转动方向的正负规定：逆时针转为角坐标θ的正方向。$\omega>0$，表示逆时针方向转动；$\omega<0$，表示顺时针方向转动。$\beta>0$，角加速度为正方向；$\beta<0$，角加速度为负方向。

例：刚体做定轴转动，角速度为$\omega=6t^2$。求：（1）$t=1s$时的角加速度；（2）在$t=1$s到$t=2$s这段时间内，刚体转过的角度。

解：（1）按定义：$\beta=\dfrac{d\omega}{dt}=12t$　$t=1s$时，$\beta=12\mathrm{rad/s^2}$

（2）按角速度定义：

$$\theta-\theta_0=\int_{\theta_0}^{\theta}d\theta=\int_1^2\omega dt=\int_1^2 6t^2dt$$

可解得这段时间内刚体转过的角度：$\theta-\theta_0=14(\text{rad})$

§3.2 刚体定轴转动的转动定律 &

一、对轴的力矩

对于有固定转轴的刚体，平行于转轴或作用线通过转轴的力，都不能使刚体转动。设力$\boldsymbol{F}$作用于刚体中的质点P，且在转动平面内，则力$\boldsymbol{F}$对转轴的力矩定义为：

$$M=Fd$$

d 称为力臂，d与位矢的关系为：

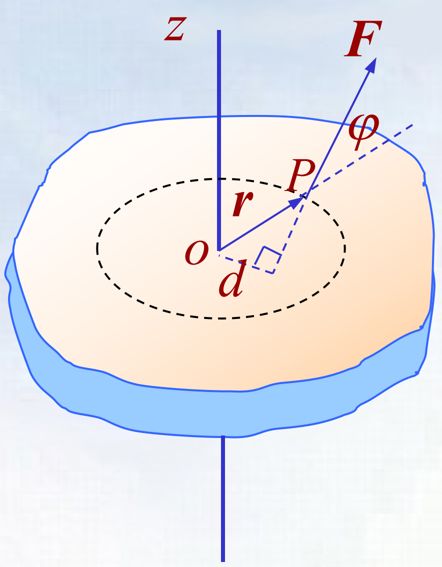
$$d = r\sin\varphi$$

因而上式可写为：

$$M = Fr\sin\varphi = F_\tau r$$

上式用矢量表示式为：

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$



- 若力不在转动平面内，则可将此力分解为与转轴的平行分量和垂直分量，其中平行分量不产生力矩。

- 刚体所受的合力矩等于各力对转轴力矩的和：

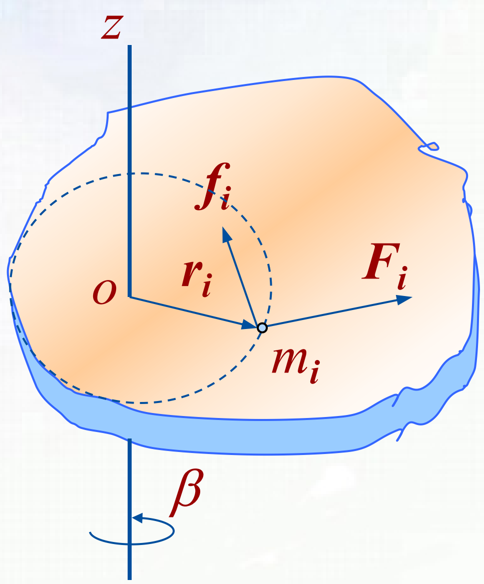
$$M=\sum F_i d_i,\quad \boldsymbol{M}=\sum \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i$$

- 可以证明，***内力的合力矩为零***，刚体所受的合力矩指外力的合力矩。

二、刚体定轴转动的转动定律

设质点m_i离转轴的垂直距离为r_i，受到外力$\boldsymbol{F}_i$和内力$\boldsymbol{f}_i$的作用，运动方程为：

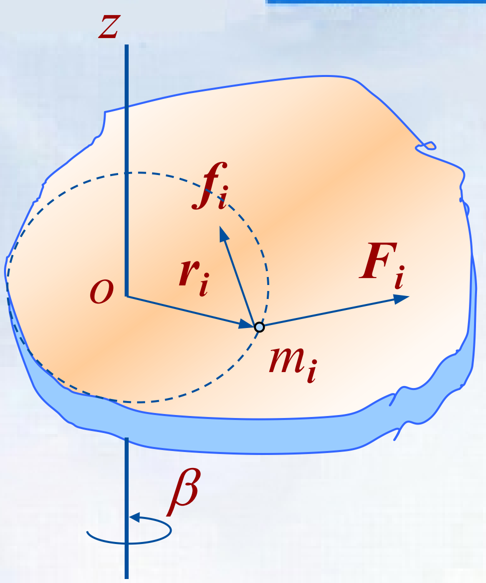
$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{f}_i=m_i\boldsymbol{a}_i$$



切向分量式为： $F_{i\tau}+f_{i\tau}=m_i a_{i\tau}$

根据线量与角量的关系，

$$a_{i\tau} = \beta r_i$$



上式可写为：

$$F_{i\tau} + f_{i\tau} = m_i r_i \beta$$

在上式两边同乘 r_i 得：

$$F_{i\tau} r_i + f_{i\tau} r_i = m_i r_i^2 \beta$$

因法向分量 F_{in}和 f_{in} 均通过转轴，不产生力矩，则 $f_{i\tau} r_i$ 、$F_{i\tau} r_i$ 分别表示内力、外力对转轴的力矩。对上式求和：

$$\sum F_{i\tau}r_i + \sum f_{i\tau}r_i = (\sum m_i r_i^2)\beta$$

外力对转轴力矩的代数和，M

内力力矩求和为零

刚体本身的性质和转轴位置有关称 **转动惯量**

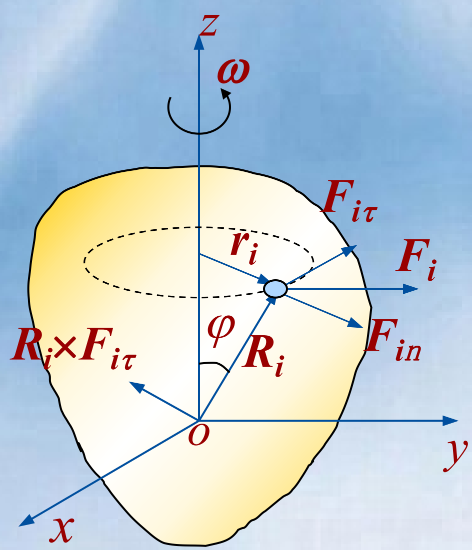
即：$M = J\beta$　　用矢量表示：$\boldsymbol{M} = J\boldsymbol{\beta}$

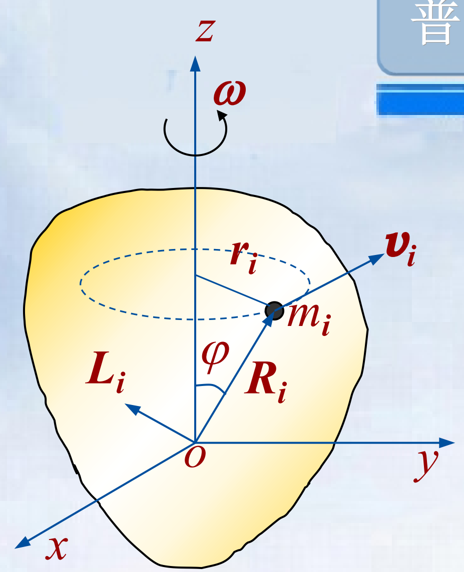
刚体定轴转动时，角加速度与合外力矩成正比，与转动惯量成反比—刚体定轴转动定律。

三、刚体定轴转动的转动定律与质点系角动量定理的关系

刚体定轴转动是刚体转动的最简形式，其一般形式为定点转动。质点系角动量定理对刚体的定轴、定点转动都适用，而定轴转动定律只是角动量定理沿转轴的一个分量式（坐标原点通过转轴）。

设刚体绕 z 轴定轴转动，现求质点系角动量定理 $\boldsymbol{M}=\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ 在 z 轴的分量式：首先求合外力矩，设$\boldsymbol{F}_i$为质点m_i所受外力的垂直分量（外力可分解为与转轴的平行分量和垂直分量，其中平行分量不产生力矩），则$\boldsymbol{F}_i$对o点的力矩：





$$\boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{R}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{R}_i \times (\boldsymbol{F}_{i\tau} + \boldsymbol{F}_{in})$$

上式中 $\boldsymbol{F}_{in}$ 产生的力矩沿z轴的分量为零。

$(\boldsymbol{R}_i \times \boldsymbol{F}_{i\tau})$ 在质点与z轴组成的平面内，并与 $\boldsymbol{R}_i$ 垂直（注：与z轴并不平行，也不垂直，夹角为 **π/2-φ**），力矩沿z轴的分量为：

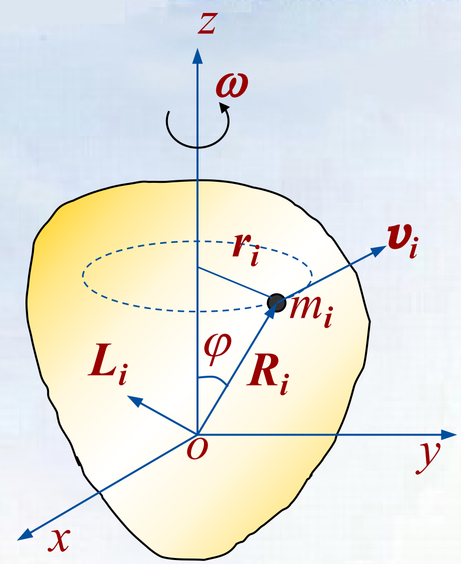
$$M_{iz} = R_i F_{i\tau} \sin\varphi = F_{i\tau} r_i$$

力矩在z轴的分量的总和：

$$M_z = \sum F_{i\tau} r_i$$

再求角动量$\boldsymbol{L}$沿z轴的分量L_z，

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{R}_i \times (m_i \boldsymbol{v}_i)$$



$\boldsymbol{L}_i$在质点与 z 轴组成的平面内，并与$\boldsymbol{R}_i$垂直，沿z轴的分量为：

$$L_{iz} = m_i R_i v_i \sin\varphi = m_i r_i^2 \omega$$

刚体总角动量$\boldsymbol{L}$在z轴分量为所有质点的L_{iz}的总和：

$$L_z = \sum m_i r_i^2 \omega$$

刚体绕 z 轴转动时，质点系角动量定理沿 z 轴的分量式：

$$M = \sum F_{i\tau} r_i = \left[M_z = \frac{dL_z}{dt} \right] = \sum m_i r_i^2 \beta = J\beta$$

即为刚体定轴转动定律。

§ 3.3 转动惯量

一、转动惯量的物理意义