四、 定轴转动的角动量守恒定律

$$M = 0 \Rightarrow \quad J\omega = \text{常量}$$

若定轴转动的质点系所受对转轴的合外力矩为零，则质点系对该转轴的角动量守恒—定轴转动的角动量守恒定律。

平动和转动的比较：

平动和转动的公式列表

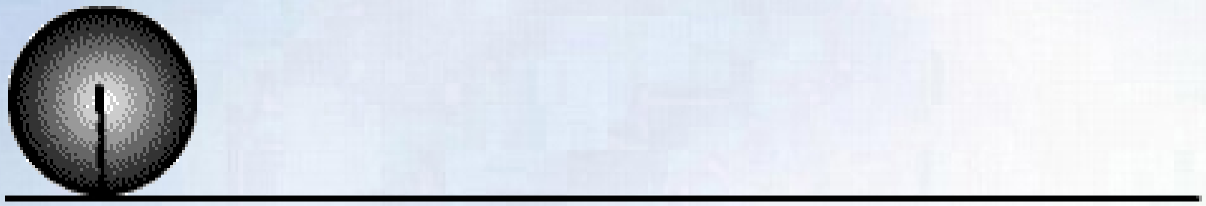
质点直线运动（刚体的平动）	刚体的定轴转动
速度 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$	角速度 $\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
加速度 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$	角加速度 $\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$
匀速直线运动 $s=vt$	匀角速转动 $\theta=\omega t$
匀变速直线运动 $v=v_0+at$ $s=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$ $v^2-v_0^2=2as$	匀变速转动 $\omega=\omega_0+\beta t$ $\theta=\omega_0t+\dfrac{1}{2}\beta t^2$ $\omega^2-\omega_0^2=2\beta\theta$

力F，质量 m 牛顿第二定律 $F=ma$	力矩 M，转动惯量 J 转动定律 $M=J\beta$
动量mv，冲量Ft（常力） 动量定理 $Ft=mv-mv_0$（常力）	角动量 $J\omega$，冲量矩 Mt（常力矩） 角动量定理 $Mt=J\omega-J_0\omega_0$（常力矩）
动量守恒定律 $\sum mv=$常量	角动量守恒定律 $\sum J\omega=$常量
平动动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 常力的功 $A=Fs$ 动能定理 $Fs=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$	转动动能 $\frac{1}{2}J\omega^2$ 常力矩的功 $A=M\theta$ 动能定理 $M\theta=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$

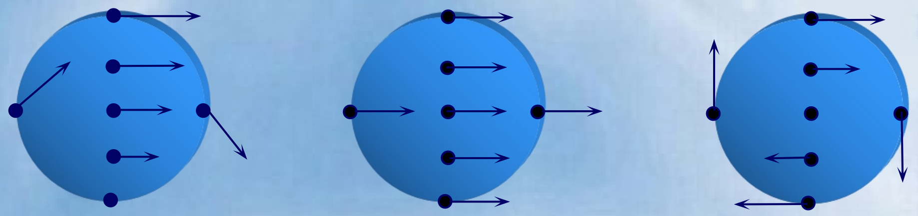
§ 3.6 刚体的平面运动 *

一、刚体平面运动的特征

刚体中的所有质量元都在一些平行平面中运动。例如：圆柱体沿一个二维平面的滚动，研究时通常只要取一个剖面。



从运动叠加原理，任何刚体的平面运动均可分解成随质心的平动和绕质心轴的转动。



（a）刚体平面运动（b）随质心的平动 （c）绕质心轴的转动

刚体上任一点的速度：

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{iC}$$

特别注意： 绕质心轴和绕其他轴的角速度是相同的。

二、刚体平面运动的基本动力学方程

$$\begin{cases} \text{质心的平动} & \sum \boldsymbol{F}_{外} = m\boldsymbol{a}_C \\ \text{绕质心的转动} & \sum \boldsymbol{M}_{C外} = J_C \boldsymbol{\beta} \end{cases}$$

三、刚体平面运动中的动能

刚体作平面运动时，其动能等于随质心平动的动能与绕质心轴转动的动能之和：

$$E_K = \frac{1}{2} m \upsilon_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2$$

刚体动能定律、角动量定律例题

思考题、 1、2、3、4、5

例题一、 人、重物、滑轮系统

例题二、 发射考察探测器的着陆速度

例题三、 均匀细棒在竖直平面内的转动

思考题 1

一刚体以每分钟60转绕 Z 轴做匀速转动（ $\vec{\omega}$ 沿 Z 轴正方向)。设某时刻刚体上一点 P 的位置矢量为 $\vec{r}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$， 其单位为 “$10^{-2}m$ ”，若以 “$10^{-2}m\cdot s^{-1}$ ” 为速度单位，则该时刻 P 点的速度为：

（A） $\vec{v}=94.2\vec{i}+125.6\vec{j}+157.0\vec{k}$

（B） $\vec{v}=-25.1\vec{i}+18.8\vec{j}$

（C） $\vec{v}=-25.1\vec{i}-18.8\vec{j}$

（D） $\vec{v}=31.4\vec{k}$

答 B

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}(x\text{、}y\text{分量})=(\frac{60}{60}\cdot 2\pi)\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}(x\text{、}y\text{分量})$$

思考题 2

如图所示，一匀质细杆可绕通过上端与杆垂直的水平光滑固定轴 O 转动，初始状态为静止悬挂。现有一个小球自左方水平打击细杆，设小球与细杆之间为非弹性碰撞，则在碰撞过程中对细杆与小球这一系统

（A）只有机械能守恒

（B）只有动量守恒

（C）只有对转轴 O 的角动量守恒

（D）机械能、动量和角动量均守恒

答　C　　外力通过转轴，合外力矩为零

思考题 3

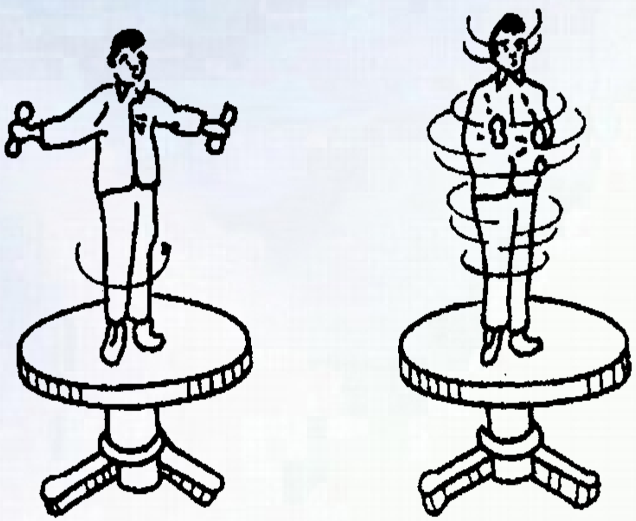
一个人站在有固定转轴(无摩擦)的转动平台上，双臂水平地举二哑铃。在该人把此二哑铃水平收缩到胸前的过程中，人、哑铃与转动平台组成的系统的

（A）机械能守恒，角动量不守恒

（B）机械能守恒，角动量守恒

（C）机械能不守恒，角动量守恒

（D）机械能不守恒，角动量也不守恒



答 C

外力平行转轴，$M=0, J\omega=$ 常量

$1/2J\omega^2 \neq$ 常量, ω 增加, $1/2J\omega\cdot\omega$ 增加

思考题 4

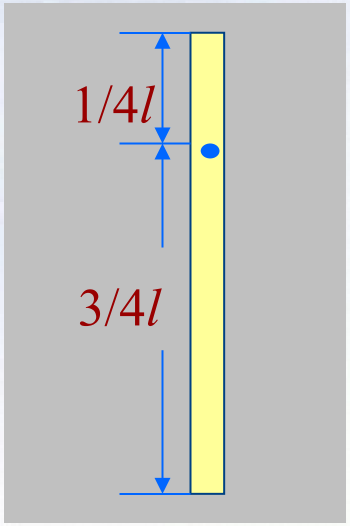
一均匀细杆可绕垂直它而离其一端$l/4$ (l 为杆长)的水平轴O在竖直平面转动，杆的质量为m，当杆自由垂挂时，给它一个起始角速度ω_0，如杆能持续转动而不做往复摆动(一切摩擦不计)，则需要：

(A) $\omega_0 \geq 4\sqrt{\dfrac{3g}{7l}}$

(B) $\omega_0 \geq 4\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

(C) $\omega_0 \geq \dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

(D) $\omega_0 \geq \sqrt{\dfrac{12g}{l}}$



答　A　机械能守恒，$1/2J\omega_0^2 = mgL/2,\ J = 7/48ml^2$

思考题 5

一个物体正在绕固定光滑轴自由转动

（A）它受热膨胀或遇冷收缩时，角速度不变

（B）它受热时角速度变大，遇冷时角速度变小

（C）它受热或遇冷时，角速度均变大

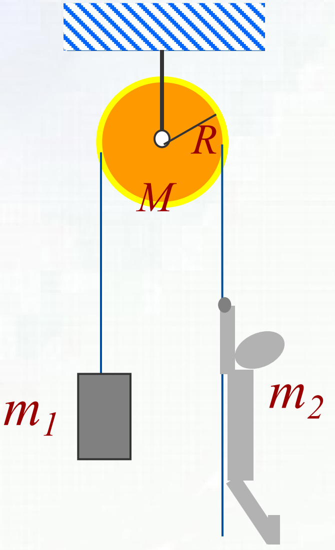
（D）它受热时角速度变小，遇冷时角速度变大

答 D 角动量$J\omega$守恒，受热J增加，ω减小

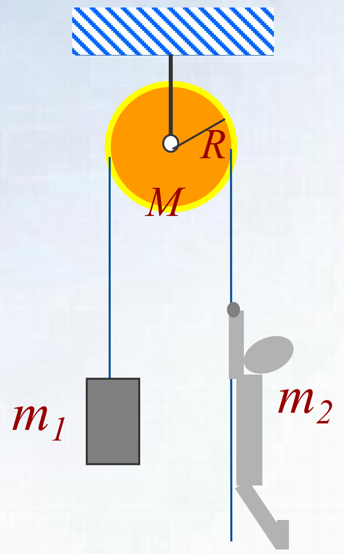
人、重物、滑轮系统

轻绳跨过质量为M，半径为R的圆柱形定滑轮，一端挂一质量为m_1的物体，质量为m_2的人抓住绳的另一端从静止开始上爬，若人相对绳以速率υ上爬，则物体以多大速度上升？（设绳与滑轮间无相对滑动，滑轮与转轴间摩擦可忽略。 $m_1 = m_2 = m$）

解：滑轮的重力和轴对滑轮的约束力通过转轴，不产生力矩，人和物体的重力产生的力矩相互抵消，系统角动量守恒。设物体以V向上运动，滑轮角速度为ω，在地面参照系中，人向上运动的速率为$(\upsilon - V)$。以顺时针为正方向，由定轴转动角动量守恒定律：



$$m_1VR - m_2(\upsilon - V)R + \frac{1}{2}MR^2\omega = 0$$



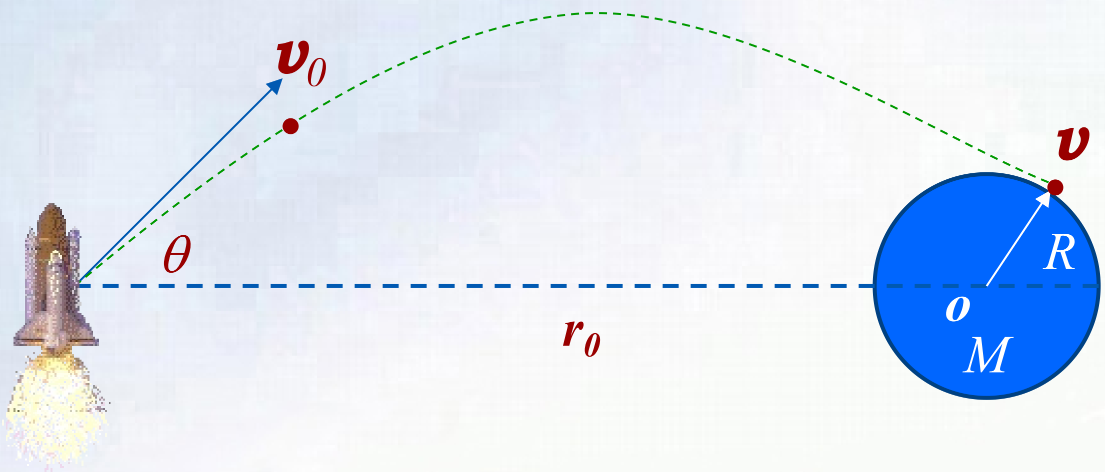
绳与滑轮间无相对滑动，则 $V = \omega R$

解得：

$$\boxed{V = (\frac{m}{2m + \frac{1}{2}M})\upsilon}$$

发射考察探测器的着陆速度

发射一宇宙飞船去某行星考察，此行星的质量为M，半径为R。飞船静止，距行星中心r_0。现以速度$\boldsymbol{v}_0$发射一质量为$m(m<<M)$的仪器，要使此仪器恰好贴着行星表面着陆，试问发射仰角θ应为多少？着陆滑行初速度v会有多大？(设$r_0=4R$)



考虑以下问题：

（1）探测器处在行星的有心力场中，因此探测器对行星中心：

①√角动量守恒　②动量守恒　③动能守恒

（2）探测器受行星引力属于保守力场，因此探测器与行星系统：

①√机械能守恒　②动能守恒　③动量守恒

解答：

考虑到探测仪器处在行星的有心力场中，故探测仪器对行星中心的角动量守恒，所以有：

$m\upsilon_0 r_0 \sin(\pi-\theta) = m\upsilon R$，　得：

$$\upsilon = \frac{\upsilon_0 r_0 \sin\theta}{R} = \frac{\upsilon_0 4R \sin\theta}{R} = 4\upsilon_0 \sin\theta \qquad (1)$$

又由于行星引力是保守力场，故仪器的机械能也守恒

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GMm}{R} \qquad (2)$$

将①式代入②式得：

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \frac{GMm}{4R} = \frac{1}{2}m(4\upsilon_0 \sin\theta)^2 - \frac{GMm}{R}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{16} + \frac{3}{32}\frac{GM}{Rv_0^2} \qquad \sin\theta = \frac{1}{4}\sqrt{1+\frac{3GM}{2Rv_0^2}}$$

$$\theta = \arcsin\frac{1}{4}\sqrt{1+\frac{3GM}{2Rv_0^2}}$$

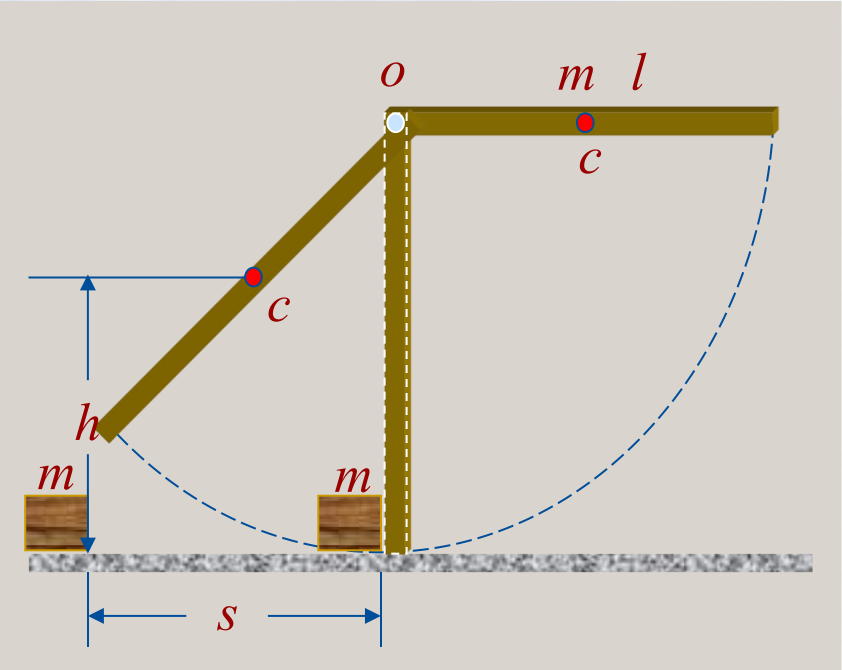
由①式：

$$v = 4v_0\sin\theta = v_0\sqrt{1+\frac{3GM}{2Rv_0^2}}$$

(式中G为引力常数)

均匀细棒在竖直平面内的转动

如图所示，一均匀细棒，长为l，质量为m，可绕过棒端且垂直于棒的光滑水平固定轴o在竖直平面内转动，棒被拉到水平位置从静止开始下落，当它转到竖直位置时，与放在地面上一静止质量亦为m的小滑块碰撞，碰撞时间极短，小滑块与地面间的摩擦系数为μ，碰后滑块移动距离s后停止，而棒继续沿原转动方向转动，直到达到最大摆角。



求：碰撞后棒的中点c离地面的最大高度h。

分析

本题有三个物理过程：

过程I：棒由水平转到竖直的过程，这个过程中，对棒和地球系统，外力（轴对棒）不作功，仅有保守内力作功，机械能守恒。

过程II：棒与滑块碰撞过程。由于碰撞时间极短，并且摩擦力为恒力，因此在碰撞过程中摩擦力对轴o的冲量矩可忽略（碰撞时间极短），可近似地用对o轴的角动量守恒定律求解。

过程III：碰撞之后，棒继续上摆，棒地系统机械能守恒；滑块在水平面上受摩擦力匀减速运动。

解答

过程I：棒下落过程，棒、地球系统，机械能守恒

$$mg\frac{l}{2}=\frac{1}{2}J{\omega_0}^2 \qquad (1)$$

其中 $J=\frac{1}{3}ml^2$ $\quad \therefore \omega_0=\sqrt{\frac{3g}{l}}$

过程II：棒与滑块系统碰撞过程中，对o轴的角动量守恒

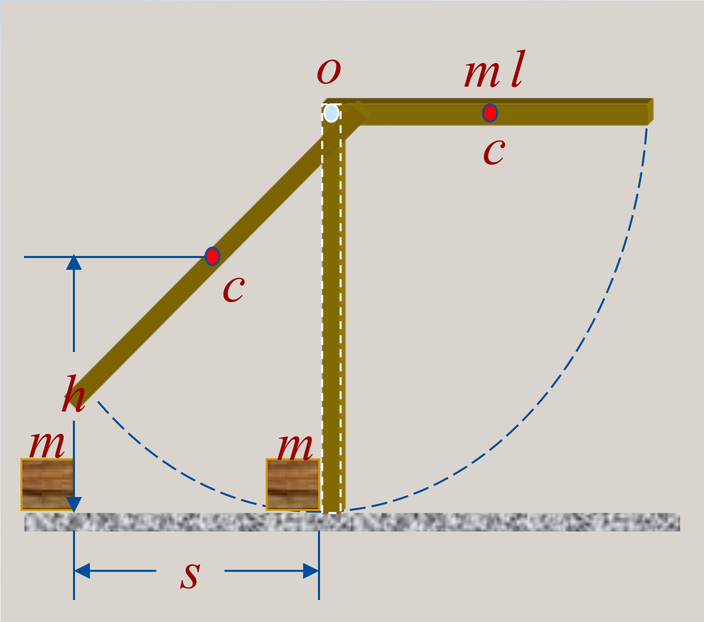
$$J\omega_0=J\omega+mv_0l \qquad (2)$$

过程III：对滑块由动能定理

$$-\mu mgs = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 \qquad (3)$$

对棒、地球系统，棒上升过程中，机械能守恒

$$\frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{1}{2} mgl = mgh \qquad (4)$$



由(1)、(2)、(3)、(4)式，得：

$$\boxed{h = l + 3\mu s - \sqrt{6\mu sl}}$$

狭义相对论基础

我国东汉古籍《书纬·考灵曜》

“地恒动而不止，而人不知，譬人在大舟中闭牖而坐. 舟行（人）不觉也”

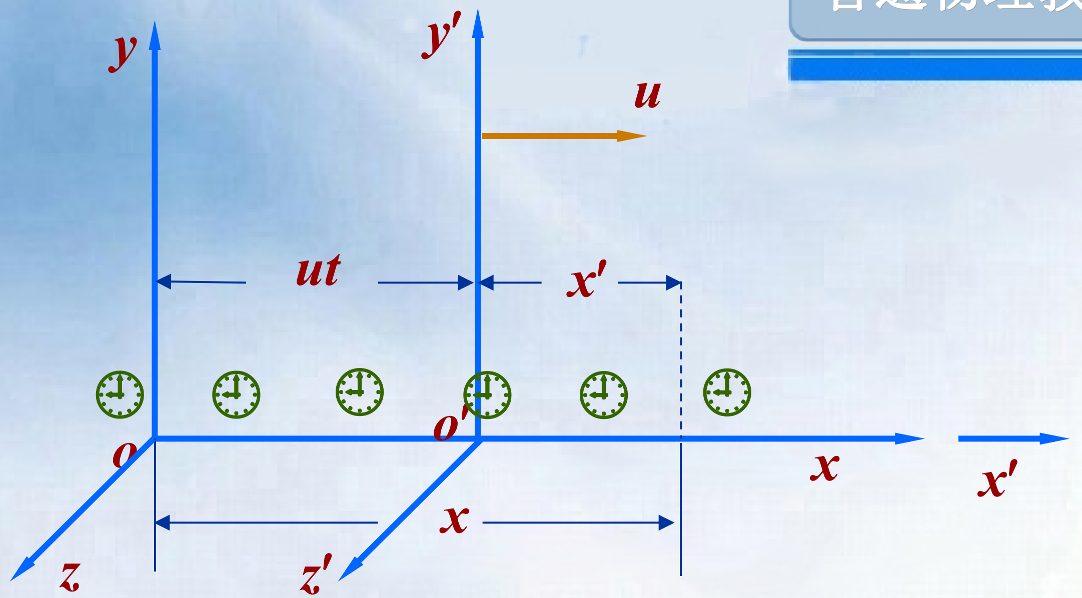
第四章 狭义相对论基础

§ 4.1 经典力学的困难

伽利略变换：

设K'系相对K系以恒定速度u沿x轴正向运动，且 $t=0$ 时两坐标系重合。若在K 系中有一事件发生于 (x, y, z, t)，同一事件在 K' 系中可以用 (x', y', z', t') 来描述。事件 (x, y, z, t) 或 (x', y', z', t') 分别由K系或K'系中的观察者记录。这里的观察者指静止于某一参考系中无数同步运行的记录钟，其位置和其相应的一个时钟读数可以构成一个事件记录。依照上述约定，伽利略变换为：

$$x = x' + ut$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = t'$$
$$v_x = v'_x + u$$
$$v_y = v'_y$$
$$v_z = v'_z \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$$



在牛顿定律成立的领域内，力与参考系无关

$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'$，由于$m$不变，$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \longrightarrow \boldsymbol{F}' = m\boldsymbol{a}'$

牛顿定律和其它力学规律在伽利略变换下形式不变，这就是力学的相对性原理。

伽利略变换在根本上依赖于时间和空间的观念：

牛顿关于绝对时间和空间的定义：

绝对空间，就其性质来说，与此外的任何事物无关，永远是相同的和不动的……。

绝对的、真正的和数学的时间自己均匀地流逝着，并与此外的任何事物无关……。

即：长度的量度与参照系无关，时间的量度与参照系无关，且时间和空间是分离的。

伽利略变换的主要结果：

1. 两个事件A、B的时间间隔是：

$$t'_A - t'_B = t_A - t_B$$

若在K'系中 $t'_A = t'_B$ 将导致K系中 $t_A = t_B$

在一个惯性系中同时发生的事件，在所有惯性系中都是同时的。

2. 两点之间的空间间隔是：

$$x'_A - x'_B = (x_A - ut_A) - (x_B - ut_B)$$
$$= x_A - x_B - u(t_A - t_B)$$

若在同一时刻测量，则： $x'_A - x'_B = x_A - x_B$

即在不同惯性系中长度测量结果相同。

在牛顿时空观中速度是相对的、加速度是绝对的。总之：在所有惯性系中力学定律都是相同的；或力学定律在伽利略变换下是不变的。

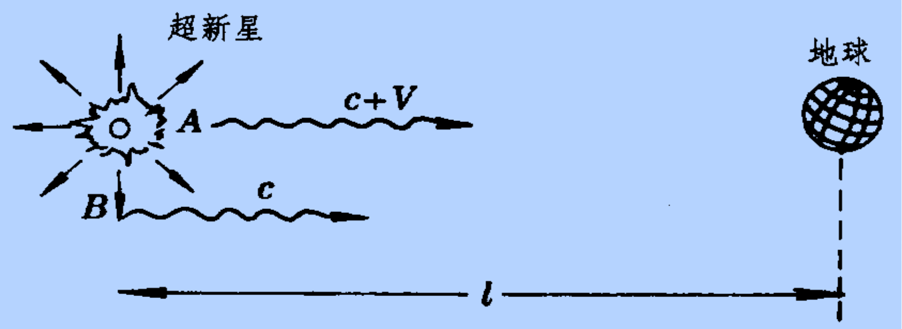
经典力学时空观的困难：

(1)速度合成律的问题

设一人相对于自己以速度 u 掷球，而又以速度 V 相对地面跑动，则球出手后相对地面的速度为：$v = u + V$，但此算法运用到光的传播问题时就会产生矛盾。

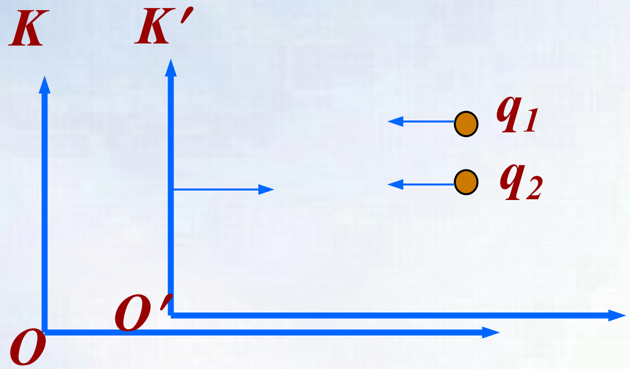
设想两个人玩排球。甲击球给乙，乙看到球，是因为球发出的光到达了乙的眼睛。设甲乙两人之间的距离为l，球发出的光相对于球的传播速度是c。在甲即将击球之前，球暂时处于静止状态，乙看到此情景的时刻比实际时刻晚$\Delta t = l / c$。在极短冲击力作用下，球出手时速度达到V，按上述速度的合成律，此刻由球发出的光相对于地面的速度为$c + V$，乙看到球出手的时刻比它实际时刻晚$\Delta t' = l / (c+V)$。显然$\Delta t' < \Delta t$，这就是说，乙先看到球出手，后看到甲即将击球！这种因果颠倒的现象如何解释。

1731年一英国天文爱好者在金牛座上发现蟹状星云。人们相信它是900多年前一次超新星爆发出的气体壳层，而这次爆发在我国的《宋会要》中的记载得到证实。爆发时间从1054（北宋至和元年）延续到1056（嘉右元年）。超新星爆发时其外围物质向四周飞散，可分为纵向和横向，设纵向速度为*V*，按经典速度合成率计算，（*V*=1500km/s, *l*=5000光年）Δ*t*´比 Δ*t* 短25年。我们将会在25年内持续看到超新星爆发所发出的强光，而史书记载不到两年。这如何解释？



(2)电磁学定律的伽利略变换

在K系中两静止的点电荷，只有静电场，而在K'系看来，则两运动电荷间还有磁场，且与速度有关。看来伽利略变换不适合电磁学。



按照电磁场理论：

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E} = 0 \qquad \nabla^2 \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{B} = 0$$

如果伽利略变换适用，它的一维方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = 0$$

将变为： $(x = x' + ut,\quad t = t')$

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\varphi + \frac{2u}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}\varphi - \frac{u^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\varphi = 0$$

即在不同的惯性系中波动方程呈现不同的形式。另外，按伽利略变换，在不同的惯性系中（相对速率为u），光以$c+u$和$c-u$传播。

(3)以太风实验:

为了在经典力学的框架内解释上述矛盾，法国

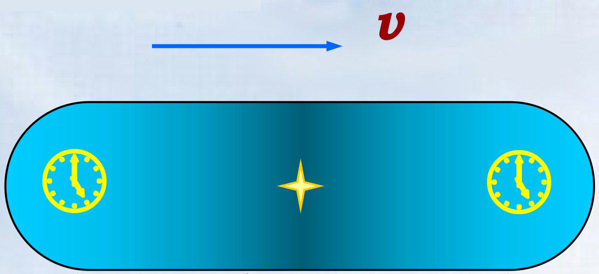
物理学家菲涅耳提出“以太”理论，在与“以太”介质相对静止的参照系中光以速度 c 运动。

“以太”的性质：没有质量、完全透明、对运动物体没有阻力。

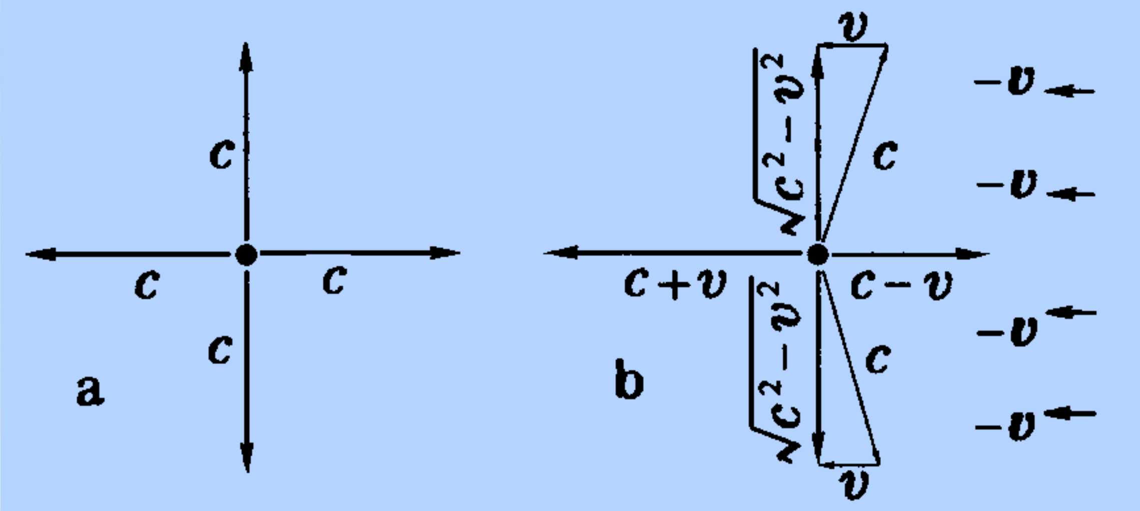
设想在惯性系中测量光速，飞船以速度 $\boldsymbol{v}$ 相对以太运动，飞船中间发出闪光，光相对船头观察者速度 $c-\boldsymbol{v}$，光相对船尾观察者速度 $c+\boldsymbol{v}$；只要测出船头船尾观察者接受到光信号的时间，就可确定飞船相对以太的运动速度 $\boldsymbol{v}$。

$$l/[2(c-v)]=\Delta t_1 \quad l/[2(c+v)]=\Delta t_2$$

假设地面相对静止坐标系(以太)的运动速度为v，若以太确实存在，则在地面各处测得的光速如下图所示：



在绝对静止的以太中



想象中的以太风对光速的影响

迈克耳逊和莫雷按上面的思路作了精密实验，即著名的迈克耳逊-莫雷实验，结果没有观察到预期结果，说明“以太”不存在。

迈克尔孙—莫

(4)质量与速度的关系

按照牛顿力学，物体的质量是常量。但**1901**年考夫曼（**W.Kaufmann**）在确定镭发出的β射线（高速运动的电子束）荷质比e/m的实验中首先观察到，电子的荷质比e/m与速度有关。他假设电子的电荷e不随速度而改变，则它的质量m就要随速度的增加而增大。这类实验后来被更多人用愈来愈精密的测量不断地证实。

由于在经典物理中遇到以上所介绍的困难，物理学家开始寻求伽利略变换以外的新变换。 这方面的工作有：

1892年爱尔兰的菲兹哲罗和荷兰的洛伦兹提出运动长度缩短的概念。

1899年洛伦兹提出运动时钟变慢的概念。

1904年法国庞加莱提出物体质量随其速率的增加而增加，速度极限为真空光速。

1905年爱因斯坦提出狭义相对论。