1. 已知四面体OABC顶点$O(0,0,0)$，$A(1,2,3)$，
$B(0,-1,2)$，$C(2,1,0)$，求四面体OABC的体积及顶点C在O、A、B三点所决定的平面上投影点D的坐标。

2. 设圆C为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$与平面$x+z=a$的交线，a为正实数。求圆C在xoy平面上的投影曲线，并求圆C的圆心及半径。

3. 求曲面$S: z=x^2+\frac{1}{4}y^2+3$上平行于平面$\pi: 2x+y+z=0$ 的切平面方程。

4. 设$z=z(x,y)$是由$xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1+\sqrt{3}$所确定的隐函数，求$z=z(x,y)$在$P(1,1,1)$处的全微分。

5. 求函数$f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$的极值点。

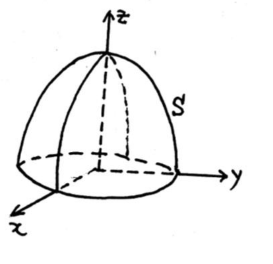
6. 设周期为2π的函数$f(x)=\begin{cases} -1, -\pi<x<0 \\ 1, 0\leq x\leq \pi \end{cases}$，求$f(x)$以$2\pi$为周期的傅里叶级数，并利用展开式求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。

7. 计算$\iint_D \max\{xy,1\}d\sigma$，其中
$D=\{(x,y):\ 0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 2\}$。

8. 计算$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dz.$

9. 设L为双纽线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$，a为正实数，求曲线积分$\oint_L |x|ds$。

10. 设S是半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$R>0$，计算曲面积分$I=\iint_S (x+y+z+1)^2dS$。



11. 设在上半平面$D=\{(x,y): y>0\}$内, 函数$f(x,y)$具有连续的一阶偏导数，且对任何$t>0$都有$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$。证明:对D内的任意分段光滑的有向简单闭曲线L，都有

$$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0.$$

12. S是曲线$\begin{cases} z=e^y \\ x=0 \end{cases}$ $(0\le y\le 1)$围绕z轴旋转生成的旋转曲面、下侧，求$I=\iint_S 4xzdydz-2yzdzdx+(x^2-z^2)dxdy$.

13. 在变力$\vec{F}=yz\vec{i}+zx\vec{j}+xy\vec{k}$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭圆面$x^2+\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{6}z^2=1$上第一卦限上的点$P(a,b,c)$，问$a$、$b$、$c$取何值时力$\vec{F}$所做的功$W$最大，并求$W$的最大值。

14. 设P为椭球面$S: x^2+y^2+z^2-yz=1$上的动点，S在点P处的切平面与xoy平面垂直，求点P的轨迹C，并计算曲面积分$I=\iint_\Sigma \frac{(x+3)|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$，$\Sigma$是椭球面S位于曲线C上方部分。

15. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$在$(-\infty,+\infty)$内收敛，和函数$y(x)$满足:

$$y''-2xy'-4y=0,\ y(0)=0,y'(0)=1.$$

(I) 证明$a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n$，n=1, 2, $\cdots$

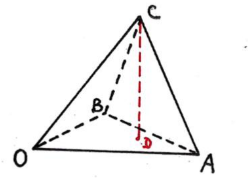
(II) 求$y(x)$的表达式。

1. 已知四面体OABC顶点$O(0,0,0)$，$A(1,2,3)$，$B(0,-1,2)$，$C(2,1,0)$，求四面体OABC的体积及顶点C在O、A、B三点所决定的平面上投影点D的坐标。

解：$\overrightarrow{OA}=\{1,2,3\}$,

$\overrightarrow{OB}=\{0,-1,2\}$,

$\overrightarrow{OC}=\{2,1,0\}$,



$$V_{OABC}=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{array}{ccc}1&2&3\\0&-1&2\\2&1&0\end{array}\right\|=2;$$

2. 设圆C为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$与平面$x+z=a$的交线，a为正实数。求圆C在xoy平面上的投影曲线，并求圆C的圆心及半径。

解法1：圆C：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x+z=a,\end{cases}$ 消去z 得投影柱面

$$x^2+y^2+(a-x)^2=a^2\Longrightarrow(x-\frac{1}{2}a)^2+\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{4}a^2;$$

圆C在xoy平面上的投影曲线为（椭圆曲线）

$$L:\begin{cases}(x-\frac{1}{2}a)^2+\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{4}a^2,\\ z=0,\end{cases};$$

圆C的圆心投影点为$(\frac{1}{2}a,0)$, 得圆C的圆心为$(\frac{1}{2}a,0,\frac{1}{2}a)$; 注意到点$(0,0,a)$在圆$C$上，从而半径为

$$R=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+0^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

3. 求曲面$S: z = x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 3$上平行于平面$\pi: 2x + y + z = 0$ 的切平面方程。

解：设切点$M(x_0, y_0, z_0)$,

$$S: F(x, y, z) = z - x^2 - \frac{1}{4}y^2 - 3 = 0;$$

曲面在M处法向量为$\vec{n_1} = \{-2x_0, -\frac{1}{2}y_0, 1\}$；平面$\pi$的法向量为$\vec{n_2} = \{2, 1, 1\}$. 由切平面平行于平面$\pi$ 以及$M \in S$得

$$\frac{-2x_0}{2} = \frac{-\frac{1}{2}y_0}{1} = \frac{1}{1},\ z_0 - x_0^2 - \frac{1}{4}y_0^2 - 3 = 0;$$

解得$x_0 = -1, y_0 = -2, z_0 = 5$, $\vec{n_1} = \{2, 1, 1\}$, 切平面方程为

$$2(x + 1) + (y + 2) + (z - 5) = 0 \Longleftrightarrow 2x + y + z = 1.$$

4. 设$z = z(x, y)$是由$xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 + \sqrt{3}$所确定的隐函数，求$z = z(x, y)$在$P(1, 1, 1)$处的全微分。

解法1：同时求微分

$$\begin{aligned}
& d(xyz) + d\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = d(1 + \sqrt{3}) \\
\Longrightarrow \quad & yzdx + xzdy + xydz + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}d(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \\
\Longrightarrow \quad & yzdx + xzdy + xydz + \frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0
\end{aligned}$$

取$(x, y, z) = (1, 1, 1)$得

$$dx + dy + dz + \frac{1}{\sqrt{3}}(dx + dy + dz) = 0 \Longrightarrow dz|_{(1,1,1)} = -dx - dy.$$

5. 求函数$f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$的极值点。

解：$\begin{cases} f'_x = 3x^2-8x+2y=0, \\ f'_y = 2x-2y=0, \end{cases}$，得驻点为$(0,0)$、$(2,2)$;

$$f''_{xx}=6x-8,\ f''_{xy}=2,\ f''_{yy}=-2;$$

- 驻点$(0,0)$:

$$A=f''_{xx}(0,0)=-8,\ B=f''_{xy}(0,0)=2,\ C=f''_{yy}(0,0)=-2;$$

由$AC-B^2=12>0$且$A<0$得: $(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点；

- 驻点$(2,2)$:

$$A=f''_{xx}(2,2)=4,\ B=f''_{xy}(2,2)=2,\ C=f''_{yy}(2,2)=-2;$$

由$AC-B^2=-12<0$得: $(2,2)$不是函数$f(x,y)$的极值点；

6. 设周期为2π的函数$f(x)=\begin{cases} -1, -\pi<x<0 \\ 1, 0\le x\le \pi \end{cases}$，求$f(x)$以$2\pi$为周期的傅里叶级数，并利用展开式求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。

解：$T=2\ell=2\pi \Longrightarrow \ell=\pi$;

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0, \\
a_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = 0, n=1,2,\cdots; \\
b_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx = \frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n}, n=1,2,\cdots;
\end{aligned}$$

从而$f(x)$的傅里叶级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n}\sin nx;$$

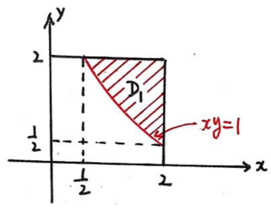
取$x=\frac{\pi}{2}$，由Dirichlet定理

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{4(-1)^j}{\pi(2j+1)}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2j+1)}\sin\frac{(2j+1)\pi}{2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{f(\frac{\pi}{2}+0)+f(\frac{\pi}{2}-0)}{2}=\frac{1+1}{2}=1;$$

$$\Longrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2j+1}=\frac{\pi}{4};$$

7. 计算$\iint_D \max\{xy,1\}d\sigma$，其中
$D=\{(x,y):\ 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$。



解： 取$D_1=D\cap\{xy\ge 1\}$,
$D_2=D\cap\{xy\le 1\}$;

$$\iint_D \max\{xy,1\}d\sigma=\iint_{D_1}\max\{xy,1\}d\sigma+\iint_{D_2}\max\{xy,1\}d\sigma$$

$$=\iint_{D_1} xyd\sigma+\iint_{D_2} d\sigma$$

$$=\iint_{D_1} xyd\sigma+\iint_{D} d\sigma-\iint_{D_1} d\sigma$$

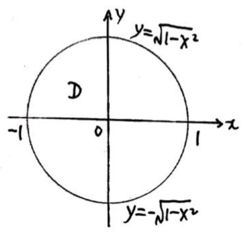
$$=\int_{1/2}^{2}dx\int_{1/x}^{2}(xy-1)dy+4=\frac{19}{4}+\ln 2;$$

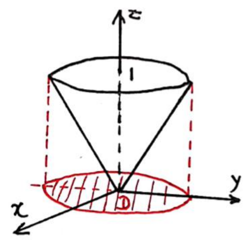
8. 计算$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dz$.

解：$\Omega=\{(x,y)\in D,\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1\}$,

$D=\{(x,y):\ -1\le x\le 1,\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le \sqrt{1-x^2}\}$;

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dz\\
&= \iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz;
\end{aligned}
$$

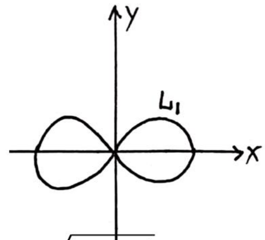




$$\Omega=\{0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}, 0\le r\le\frac{1}{\cos\varphi}\};$$

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz\\
&= \iiint_{\Omega} r\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}r^3\sin\varphi dr\\
&= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\varphi}{4\cos^4\varphi}d\varphi=\frac{1}{6}(2\sqrt{2}-1)\pi;
\end{aligned}
$$

9. 设L为双纽线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$，a为正实数，求曲线积分$\oint_L |x|ds$。



解：由对称性

$I=\oint_L |x|ds=4\oint_{L_1}|x|ds=4\int_{L_1}xds;$

引进极坐标(r,θ),

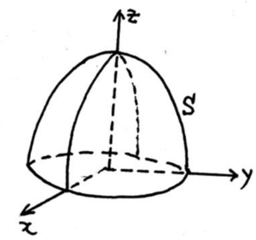
$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\Longleftrightarrow r=a\sqrt{\cos 2\theta};$$

$$L_1: x=a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta,\ y=a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta, 0\le\theta\le\frac{\pi}{4},$$

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta;$$

$$I = 4\int_{L_1}xds=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos\theta d\theta=2\sqrt{2}a^2.$$

10. 设S是半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$R>0$，计算曲面积分$I=\iint_S(x+y+z+1)^2dS$。



解：$I=\iint_S(x^2+y^2+z^2+1+2xy+2yz+2xz+2x+2y+2z)dS$,

由对称性：$\iint_S(2xy+2yz+2xz+2x+2y)dS=0;$

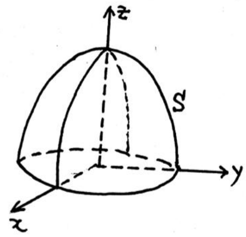
$$\begin{aligned}I &= \iint_S(x^2+y^2+z^2+1+2z)dS\\ &= \iint_S(x^2+y^2+z^2+1)dS+\iint_S 2zdS\\ &= \iint_S(R^2+1)dS+\iint_S 2zdS=(R^2+1)\cdot 2\pi R^2+\iint_S 2zdS\end{aligned}$$

$I=(R^2+1)\cdot 2\pi R^2+\iint_S 2zdS;$

$S:\ z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},$

$\qquad (x,y)\in D=\{x^2+y^2\le R^2\},$

$dS=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy;$



$$
\begin{aligned}
I &= 2\pi(R^2+1)R^2+\iint_D 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy\\
&= 2\pi(R^2+1)R^2+\iint_D 2Rdxdy=2\pi R^2(R^2+R+1);
\end{aligned}
$$

11. 设在上半平面$D=\{(x,y):\ y>0\}$内, 函数$f(x,y)$具有连续的一阶偏导数，且对任何$t>0$都有$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$。证明:
对D内的任意分段光滑的有向简单闭曲线L，都有

$$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0.$$

证明：在等式$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$二侧关于t求导

$$xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y),$$

取$t=1$得

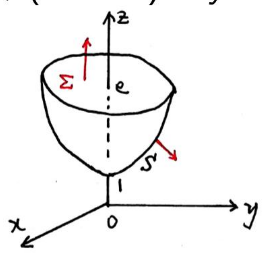
$$xf_1'(x,y)+yf_2'(x,y)=-2f(x,y);$$

在单连通区域D内$P(x,y)=yf(x,y)$, $Q(x,y)=-xf(x,y)$;

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2f(x,y)-xf_1'(x,y)-yf_2'(x,y)=0,$$

从而, $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$。

12. S是曲线$\begin{cases} z = e^y \\ x = 0 \end{cases}$ $(0 \le y \le 1)$围绕z轴旋转生成的旋转曲面、下侧，求$I = \iint_S 4xzdydz - 2yzdzdx + (x^2 - z^2)dxdy$.



解法1：旋转曲面

$S: z = e^{\sqrt{x^2+y^2}} (1 \le z \le e)$、下侧；

取$\Sigma: z = e(x^2 + y^2 \le 1)$、上侧；

由曲面S与Σ所围立体记为Ω.

由高斯公式及投影法

$$\begin{aligned} I &= \iint_{S\cup\Sigma} - \iint_{\Sigma} 4xzdydz - 2yzdzdx + (x^2 - z^2)dxdy \\ &= \iiint_{\Omega} (4z - 2z - 2z)dV - \left(0 + 0 + \iint_{x^2+y^2\le 1} (x^2 - e^2)dxdy\right) \\ &= e^2\pi - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cos^2\theta \cdot rdr = e^2\pi - \frac{1}{4}\pi. \end{aligned}$$

13. 在变力$\overrightarrow{F} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭圆面$x^2 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{6}z^2 = 1$上第一卦限上的点$P(a, b, c)$，问$a$、$b$、$c$取何值时力$\overrightarrow{F}$所做的功$W$最大，并求$W$的最大值。

解：直线OP：$x = at, y = bt, z = ct, t: 0 \to 1$;

$$\begin{aligned} W &= \int_{OP} \overrightarrow{F} \cdot d\vec{s} = \int_{OP} yzdx + zxdy + xydz \\ &= \int_0^1 3abct^2 dt = abc; \end{aligned}$$

我们要计算：当$a^2 + \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{6}c^2 = 1$且$a > 0$、$b > 0$ 及$c > 0$ 时求$W = abc$的最大值。引进拉格朗日函数

$$L(a, b, c, \lambda) = abc + \lambda(a^2 + \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{6}c^2 - 1);$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a} = bc + 2\lambda a = 0, & \frac{\partial L}{\partial b} = ac + \frac{2}{3}\lambda b = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial c} = ab + \frac{1}{3}\lambda c = 0, & \frac{\partial L}{\partial \lambda} = a^2 + \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{6}c^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

得拉格朗日函数的驻点$(a, b, c, \lambda) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \sqrt{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})$. 结合实际问题，当$(a, b, c) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \sqrt{2})$时$W$有最大值$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

14. 设P为椭球面S：$x^2+y^2+z^2-yz=1$上的动点，S在点P处的切平面与xoy平面垂直，求点P的轨迹C，并计算曲面积分$I=\iint_\Sigma \frac{(x+3)|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$，$\Sigma$是椭球面S位于曲线C上方部分。

解：设点$P(x,y,z)$, 则

$$x^2+y^2+z^2-yz=1--------(1)$$

椭球面S在$P(x,y,z)$处的法向量为$\vec{n}=\{2x,2y-z,2z-y\}$, 由切平面与xoy平面垂直得

$$\vec{n}\cdot\vec{k}=0\Longrightarrow 2z-y=0----------(2)$$

从而点P的轨迹为$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2-yz=1 \\ 2z-y=0 \end{cases}$. 点P的轨迹$C$在$xoy$平面上的投影曲线为$\begin{cases} x^2+\frac{3}{4}y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$;

$$\Sigma: z=\frac{1}{2}y+\sqrt{1-x^2-\frac{3}{4}y^2}, (x,y)\in D=\{x^2+\frac{3}{4}y^2\le 1\}\text{且}2z-y\ge 0;$$

$$dS=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}dxdy=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{2z-y}dxdy;$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_\Sigma \frac{(x+3)|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS=\iint_\Sigma \frac{(x+3)(2z-y)}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS \\ &= \iint_D (x+3)dxdy(\text{由对称性})=\iint_D 3dxdy=2\sqrt{3}\pi. \end{aligned}$$

15. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-\infty,+\infty)$内收敛，和函数$y(x)$满足:

$$y" - 2xy' - 4y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

(I) 证明$a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n$，n=1, 2, $\cdots$

(II) 求$y(x)$的表达式。

解：(I). 在$(-\infty,+\infty)$内$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$(其收敛半径为$R = +\infty$),

$$\begin{cases} y'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}; \\ y"(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = y" - 2xy' - 4y = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n - 4a_n\right] x^n \\ 0 = y(0) = a_0, \qquad 1 = y'(0) = a_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = y" - 2xy' - 4y = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n - 4a_n\right] x^n \\ 0 = y(0) = a_0, \qquad 1 = y'(0) = a_1; \end{cases}$$

比较系数得

$$\begin{cases} (n+2)(n+1)a_{n+2} = (2n+4)a_n \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases}$$

(II) 由$a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n$, $a_0 = 0$推得

$$a_0 = a_2 = \cdots = a_{2k} = 0, k = 1, 2, \cdots;$$

由$a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n$, $a_1 = 1$推得

$$\begin{aligned} & a_3 = \frac{2}{2} a_1,\ a_5 = \frac{2}{4} a_3 = \frac{2}{4}\frac{2}{2} a_1 = \frac{1}{2!} a_1, \\ & a_7 = \frac{1}{3!} a_1, \cdots, a_{2k+1} = \frac{1}{k!}, k = 0, 1, 2 \cdots; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x + \frac{1}{1!} x^3 + \frac{1}{2!} x^5 + \frac{1}{3!} x^7 + \cdots \\ &= x\left[1 + \frac{1}{1!} x^2 + \frac{1}{2!} x^4 + \frac{1}{3!} x^6 + \cdots\right] = x e^{x^2}; \end{aligned}$$