第 八 周

第8章 相对论 §8.6，§8.7，§8.8，§8.9，§8.10(一般了解)

第9章 机械振动

§9.1，§9.2，§9.3

作业：P115 8-14，8-16，8-19；

P133 9-1，9-5，9-6，9-10

二、狭义相对论的动力学方程

狭义相对论动力学方程应满足三个要求：

1. 洛仑兹变换下方程形式不变。
2. 在有限力的作用下，物体速度不会超过光速。
3. 当$\upsilon << c$时，近似式为$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$。

按以上动量的定义：$\boldsymbol{p} = m(\upsilon)\boldsymbol{\upsilon} = \dfrac{m_0\boldsymbol{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$

则动力学方程为：$\boldsymbol{F} = \dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(m\boldsymbol{\upsilon}) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m_0\boldsymbol{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right)$

它满足以上三个要求。

§ 4.5 质量与能量的关系

一、相对论中的动能

由动能定律，外力做功等于物体动能的增量：

$$dE_k = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

代入：$\boldsymbol{F} = \dfrac{d}{dt}(m\boldsymbol{v})$ 和 $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}dt$ ，有：

$$dE_k = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}dt = dm\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} + md\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$$

$$= dm\upsilon^2 + m\upsilon d\upsilon$$

由 $m = m_0 / \sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$ $\quad dm = \dfrac{m_0 \upsilon d\upsilon}{c^2(1-\upsilon^2/c^2)^{3/2}}$

有 $$dm(c^2-\upsilon^2)=m\upsilon d\upsilon$$

代入动能的增量，可得：

$$dE_k=dm\upsilon^2+m\upsilon d\upsilon=c^2dm$$

代入边界条件 $\upsilon=0, m=m_0, E_k=0$，积分：

$$\int_0^{E_k}dE_k=\int_{m_0}^{m}c^2dm$$

$$\boxed{E_k=mc^2-m_0c^2=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}-1\right)}$$

二、质能关系

爱因斯坦从上述动能表达式中得到启示，提出物体静止能量和运动时所具有能量的见解：

$$E_0 = m_0 c^2 \qquad E = mc^2$$

上式称为质能关系。物体的能量等于静止能量与动能之和。

质能关系揭示了质量与能量之间的深刻联系，是核能研究的理论基础。

§ 4.6 能量与动量的关系

质能关系 $E = mc^2 = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$

将上式两边平方，并由 $p = m\upsilon$ ，于是有

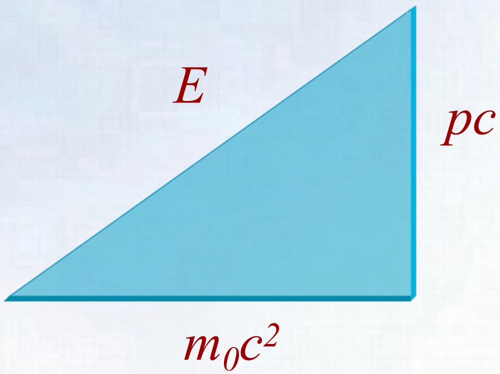
$$E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - p^2 c^2 / E^2}$$

由此式可解得：

$$\boxed{E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

上式即为狭义相对论中能量与动量的关系，简称**能动关系**。

由光子速度为c，可知光子的静止质量为零。由光的量子理论可知光子能量为



$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

由质能关系和能动关系：

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \qquad p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

思考题：

1. 设某微观粒子的总能量是它静止能量的K倍，则其运动速度的大小为（以c表示真空中的光速）

（A） $\dfrac{c}{K-1}$　　（B） $\dfrac{c}{K}\sqrt{1-K^2}$

（C） $\dfrac{c}{K}\sqrt{K^2-1}$　　（D） $\dfrac{c}{K+1}\sqrt{K(K+2)}$

解答　C

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = Km_0c^2$$

2. 根据相对论力学，动能为0.25MeV 的电子，其运动速度约等于

（A）0.1 c　　（B）0.5 c

（C）0.75 c　　（D）0.85 c

（c 表示真空中的光速）

解答

C

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - m_0c^2 = 0.25Mev$$

$$m_0c^2 \approx 0.5Mev$$

3. 在参照系 S 中，有两个静止质量都是m_0的粒子 A 和 B，分别以速度v沿同一直线相向运动，相碰后合在一起成为一个粒子，则其静止质量M_0的值为

（A） $2m_0$ （B） $2m_0\sqrt{1-(v/c)^2}$

（C） $\frac{m_0}{2}\sqrt{1-(v/c)^2}$ （D） $\frac{2m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$

解答 D

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=M_0c^2$$

4. 把一个静止质量为m_0的粒子，由静止加速到$\upsilon = 0.6\,c$（c 为真空中光速）需作的功等于

（A）$0.18 m_0 c^2$ （B）$0.25 m_0 c^2$

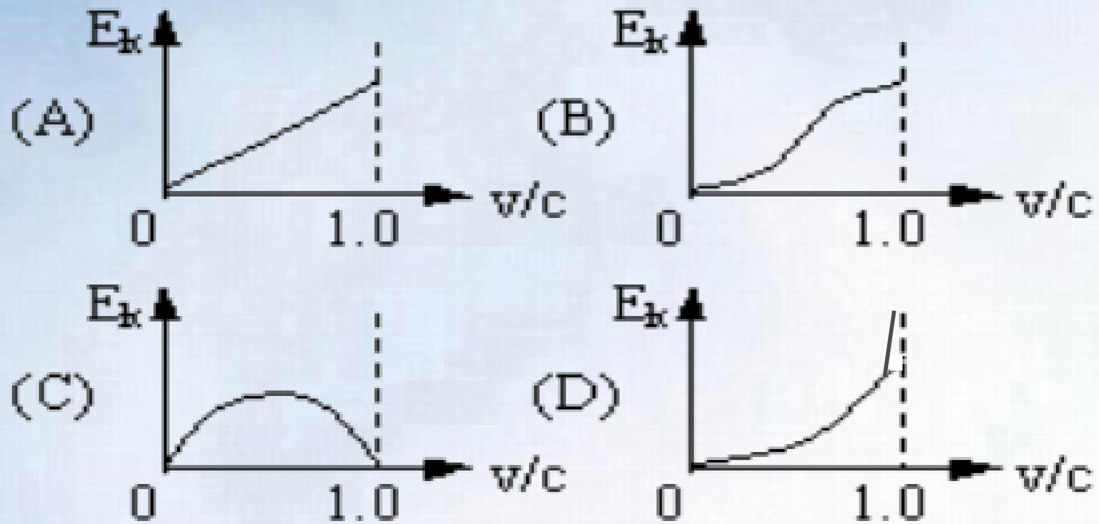
（C）$0.36 m_0 c^2$ （D）$1.25 m_0 c^2$

解答

B

$$W = \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - m_0 c^2 \right) - 0$$

5. 令电子的速率为υ，则电子的动能E_K对于比值υ/c的图线可用下列图中哪一个图表示？（c表示真空中光速）



解答　D

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - m_0 c^2$$

例题八：

两个静止质量都是m_0的小球，其中一个静止，另一个以$v=0.8c$运动。它们做对心碰撞后粘在一起，试求碰撞后合成小球的静止质量。

解： 两个静止质量均为m_0的小球所组成的系统，在碰撞前后动量守恒，以m表示碰撞前运动小球的相对论质量，M、V分别表示碰撞后合成小球的质量和速度，则有

$$mv = MV \qquad (1)$$

而：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{m_0}{0.6} \qquad (2)$$

此系统碰撞前后遵循能量守恒定律，则有：

$$m_0c^2 + mc^2 = Mc^2$$

即：
$$m_0 + m = M \qquad (3)$$

将式(2)代入式(3)得：

$$M = m_0 + \frac{m_0}{0.6} = \frac{8}{3}m_0$$

设碰撞后合成小球的静止质量为M_0，则根据质速关系有

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \qquad (4)$$

将式(1) (2) 及 $M=8/3m_0$ 代入式(4)得：

$$M_0 = M\sqrt{1-(V/c)^2} = M\sqrt{1-(\frac{m}{M}\upsilon/c)^2}$$

$$= \frac{8m_0}{3}\sqrt{1-(\frac{m_0}{0.6}\cdot\frac{3}{8m_0}\cdot\frac{0.8c}{c})^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}m_0$$

例题九：

有一静止质量为m_0的粒子，具有初速度υ=0.4c。试求：（1）若粒子速度增加一倍，它的动量为初动量的多少倍？（2）若使粒子的末动量为初动量的10倍，则粒子末速度为初速度的多少倍？

解：（1）设$P(\upsilon)$和$P'(2\upsilon)$为粒子的初、末动量，则有

$$\frac{P'}{P}=\frac{\dfrac{2m_0\upsilon}{\sqrt{1-(\frac{2\upsilon}{c})^2}}}{\dfrac{m_0\upsilon}{\sqrt{1-(\frac{\upsilon}{c})^2}}}=\frac{2\sqrt{1-(\frac{\upsilon}{c})^2}}{\sqrt{1-(\frac{2\upsilon}{c})^2}}=\frac{2\sqrt{1-0.4^2}}{\sqrt{1-4\times0.4^2}}=3.1$$

即在此速度时，速度增加一倍，动量约为初动量的3倍。这是因为粒子的质量也增加所造成的。

（2）由已知的粒子初速度υ为0.4c可求出粒子的初动量为$P=0.44m_0c$，而末动量为$P'=10P$。

由 $P=\dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ 可得：

$$v=\frac{Pc}{\sqrt{P^2+m_0^2c^2}} \qquad v'=\frac{P'c}{\sqrt{P'^2+m_0^2c^2}}$$

所以：

$$\frac{v'}{v}=\frac{P'\sqrt{P^2+m_0^2c^2}}{P\sqrt{P'^2+m_0^2c^2}}=\frac{10\sqrt{P^2+m_0^2c^2}}{\sqrt{100P^2+m_0^2c^2}}=2.4$$

即当$P'=10P$时，粒子末速度只是初速度的2.4倍。

例题十：

一粒子的静止质量为$1/3\times10^{-26}$kg，以速率3c/5垂直进入水泥墙。墙厚50cm，粒子从墙的另一面穿出时的速率减少为5c/13。求：（1）粒子受到墙的平均阻力。（2）粒子穿过墙所需的时间。

解：
$$m_0=\frac{1}{3}\times10^{-26}kg,\quad \upsilon_1=\frac{3}{5}c,\quad d=0.5m,\quad \upsilon_2=\frac{5}{13}c$$

（1）由动能定律

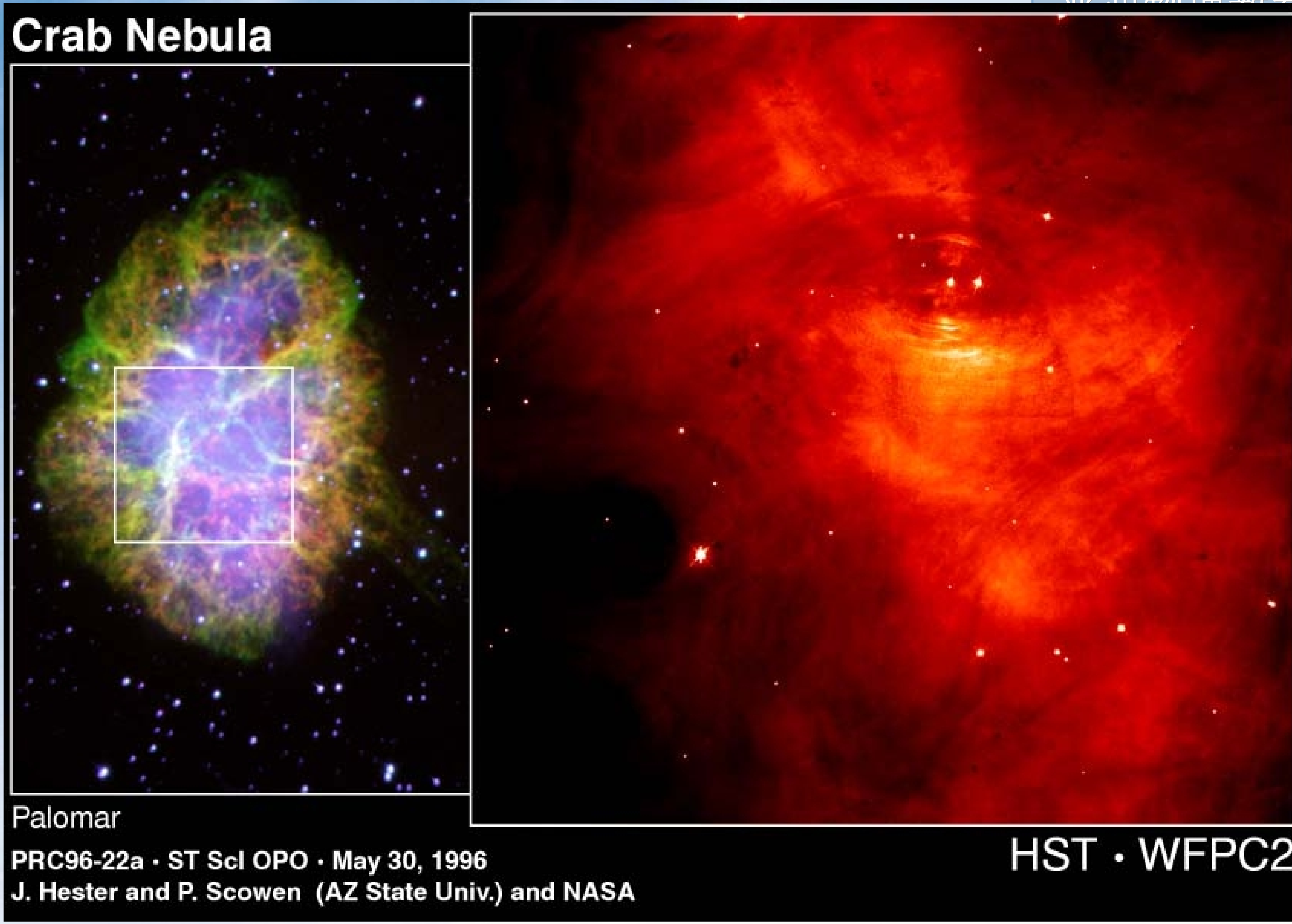
$$W=\overline{F}d=E_{K2}-E_{K1}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(\upsilon_2^2/c^2)}}-\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(\upsilon_1^2/c^2)}}$$

$$\overline{F}=\frac{m_0c^2}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(\upsilon_2^2/c^2)}}-\frac{1}{\sqrt{1-(\upsilon_1^2/c^2)}}\right)=-10^{-10}\mathrm{N}$$

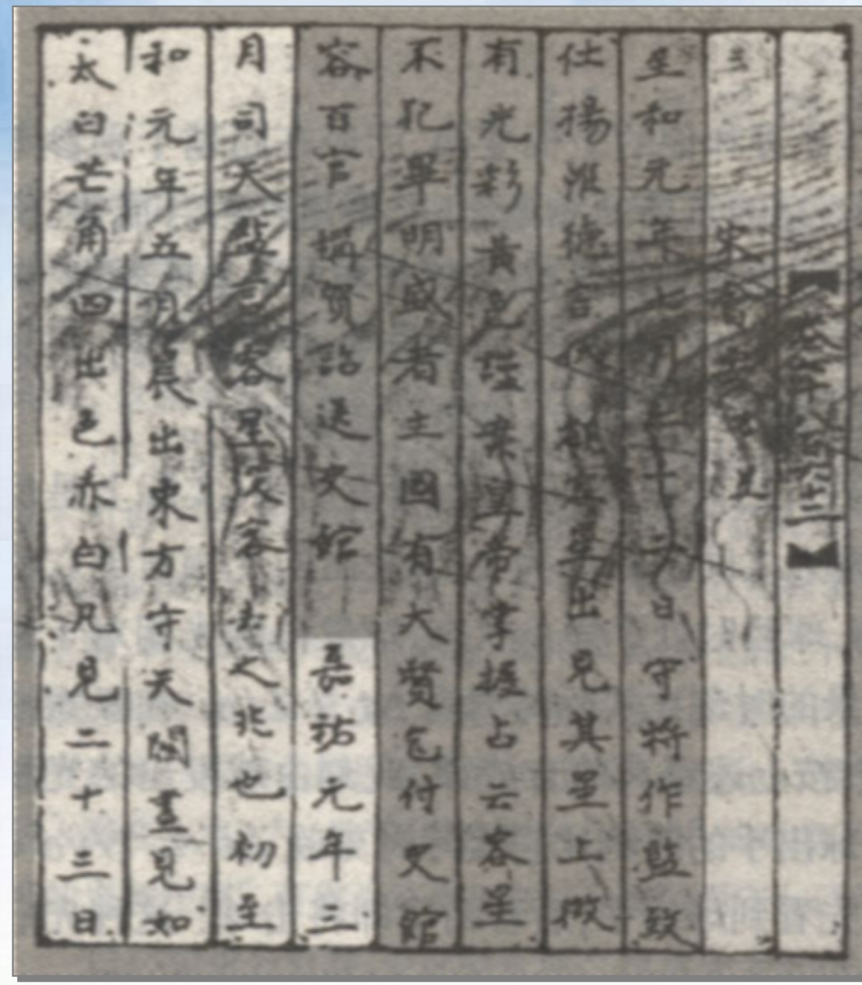
负号表示阻力。

（2）由动量定理 $\overline{F}\Delta t=m_2\upsilon_2-m_1\upsilon_1$

$$\Delta t=\frac{m_2\upsilon_2-m_1\upsilon_1}{\overline{F}}=\frac{1}{3}\times10^{-8}\mathrm{s}$$


Crab Nebula
Palomar
PRC96-22a · ST ScI OPO · May 30, 1996
J. Hester and P. Scowen (AZ State Univ.) and NASA
HST · WFPC2

嘉佑元年三月，司天监言，
客星没，客去之兆也。初，
至和元年五月晨出东方，守
天关。昼见如太白，芒角四
出，色赤白，凡见二十三日。


至和元年七月二十二日守將作監致
仕楊惟德言伏覩客星出見其星上微
有光彩黃色謹案黃帝掌握占云客星
不犯畢明盛者主國有大賢乞付史館
容百官拜賀詔送史館
嘉祐元年三
月司天監言客星沒客去之兆也初至
和元年五月晨出東方守天關晝見如
太白芒角四出色赤白凡見二十三日

第五章 机械振动

§5.1 简谐振动的描述

一、简谐振动的解析表示 振幅、相位和频率

简谐振动是一种最简单、最基本的振动形式。复杂的振动可分解为许多不同频率的简谐振动，而许多不同频率的简谐振动也可叠加为复杂振动。

弹簧振子的振动是简谐振动的一种理想模型。

简谐振动的数学关系式有余弦或正弦形式：

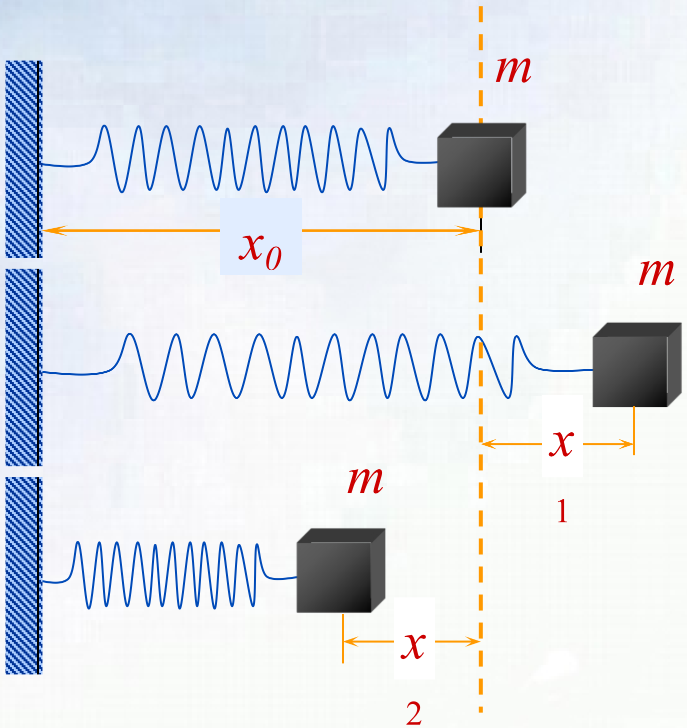
$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)} \qquad (1)$$

A 振幅—物体的最大位移；

φ 初相—决定物体初始时刻的位移；

$(\omega t+\varphi)$ 相位—决定任意时刻物体的位移。初相和相位也能决定初始或任意时刻物体的速度、加速度。

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$



ω 称为角频率；频率 ν 为每秒振动的次数。

$$\omega = 2\pi\nu$$

物体做一次完整振动的时间称为周期：

$$T=1/\nu=2\pi/\omega$$

对振动方程求导，可得速度和加速度的表达式：

$$\upsilon=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi) \qquad (2)$$

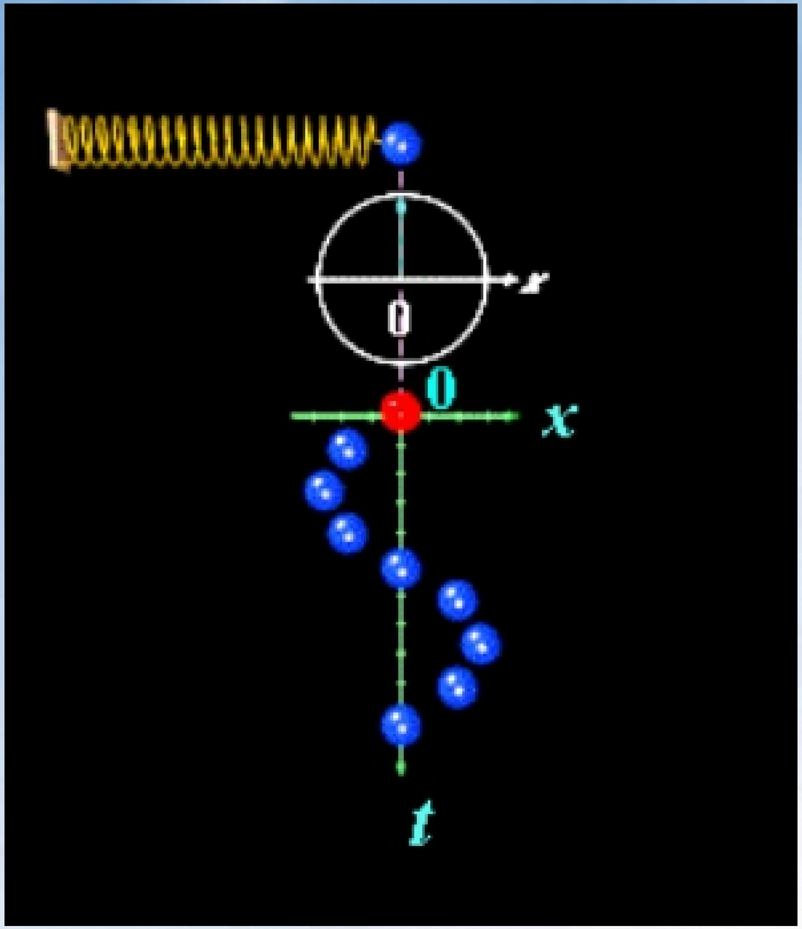
$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi) \qquad (3)$$

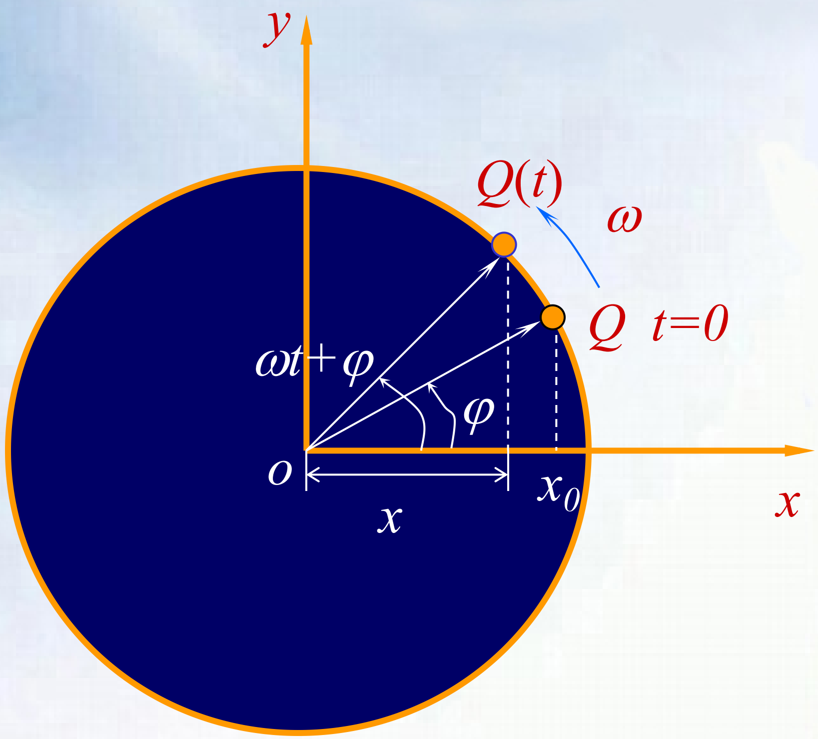
比较（1）式和（3）可得： $a=-\omega^2 x$

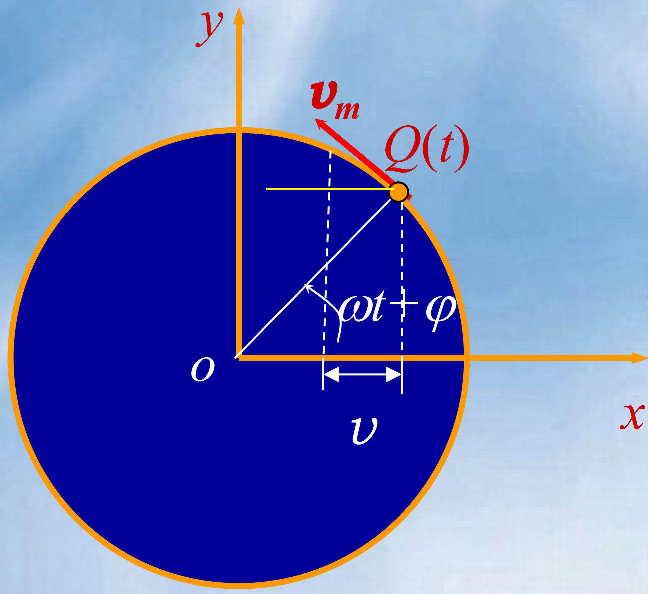
如果一个物体做简谐振动，它的加速度和位移成正比，但方向相反。

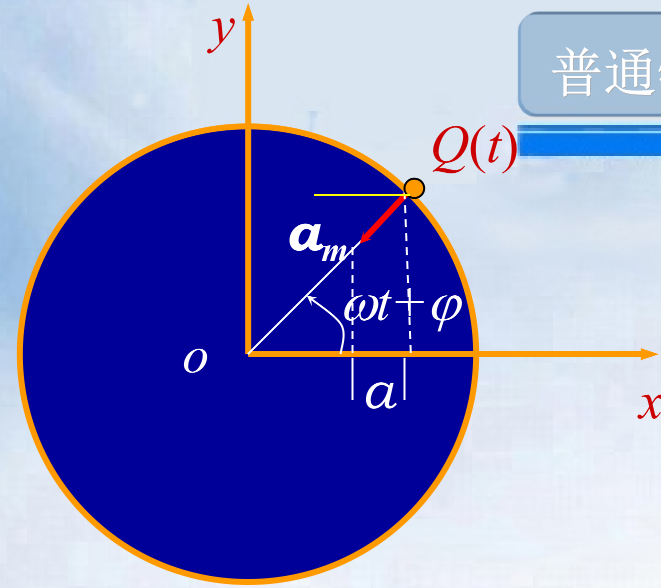
二、简谐振动的振幅矢量图示法

为了帮助理解，简谐振动方程可用简单的几何图示来说明，如旋转矢量法或参考圆表示法：如下图所示，参考点Q以o为圆心，A为半径，做逆时针匀速圆周运动，角速度为ω。初始时刻（t=0）位置矢量oQ与x轴的夹角为φ，任意时刻t，oQ与x轴的夹角为 $(\omega t+\varphi)$ ，此时Q点在x轴的投影相当于（1）式所表示的简谐振动方程。


0
x
t


y
Q(t)
ω
Q t=0
ωt+φ
φ
o
x
x0
x





$$v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$a=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi)$$

相位的超前与落后：研究两个振动的迭加时，

相位差起决定作用，设有两个同频率的振动：

$$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$$ 和 $$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

两者的相位差为：

$$(\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1)=\varphi_2-\varphi_1=\Delta\varphi$$

当 $\Delta\varphi=\pm 2k\pi \quad (k=0,1,2,\cdots)$时，两振动同相位；

当 $\Delta\varphi=\pm(2k+1)\pi \quad (k=0,1,2,\cdots)$ 时，两振动反相位；

当 $\Delta\varphi=\pi/2$，这时说x_2比x_1超前90^0，也可说x_1比 x_2落后90^0。将振动位移、速度、加速度比较，速度比位移超前π/2，加速度比速度移超前π/2。

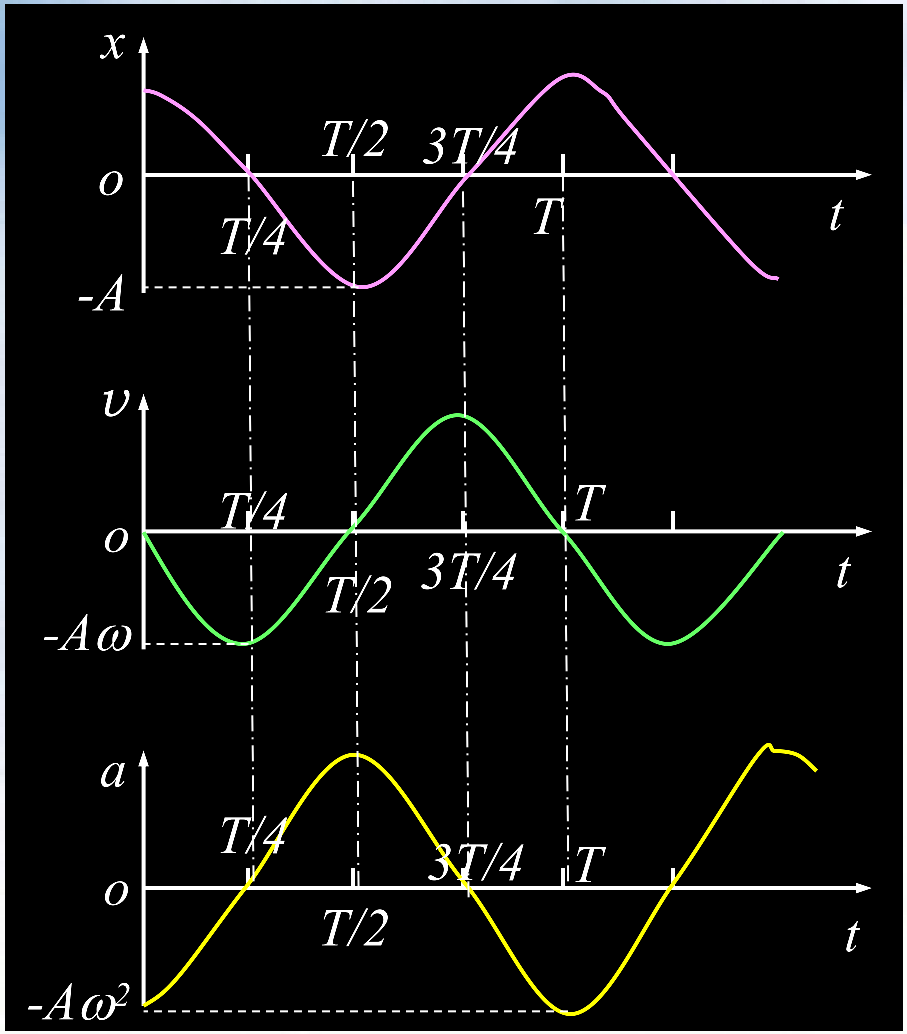
如把位移、速度、加速度都用余弦形式表达，设φ=0则：

$$x = A\cos(\omega t)$$

$$\upsilon = A\omega\cos(\omega t + \pi/2)$$

$$a = A\omega^2\cos(\omega t + \pi)$$

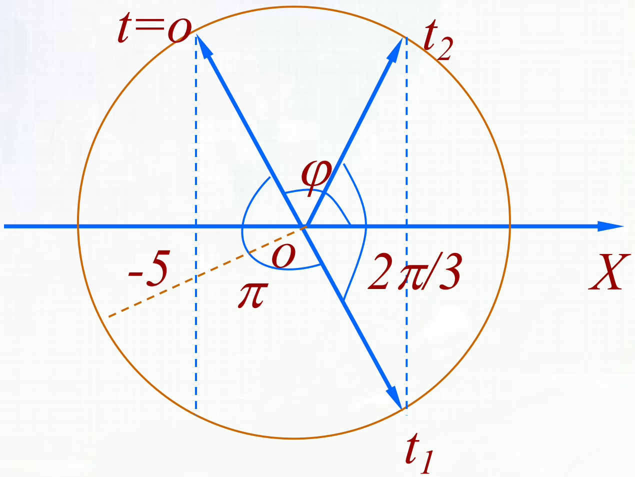
可见速度的最大值比位移的最大值早1/4周期，加速度的最大值比速度最大值早1/4周期。



例题

一物体沿X轴作简谐振动。其振幅$A=10\text{cm}$，周期$T=2\text{s}$，$t=0$时物体的位移为 $x_0=-5\text{cm}$，且向X轴负方向运动。试求：（1）$t=0.5\text{s}$时物体的位移；（2）何时物体第一次运动到 $x=5\text{cm}$处；（3）再经过多少时间物体第二次运动到 $x=5\text{cm}$处。

解: 由已知条件可画出该谐振动在$t=0$时刻的旋转矢量位置，如图所示：



由图可以看出
$$\varphi=\pi-\frac{1}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi$$

所以该物体的振动方程为：

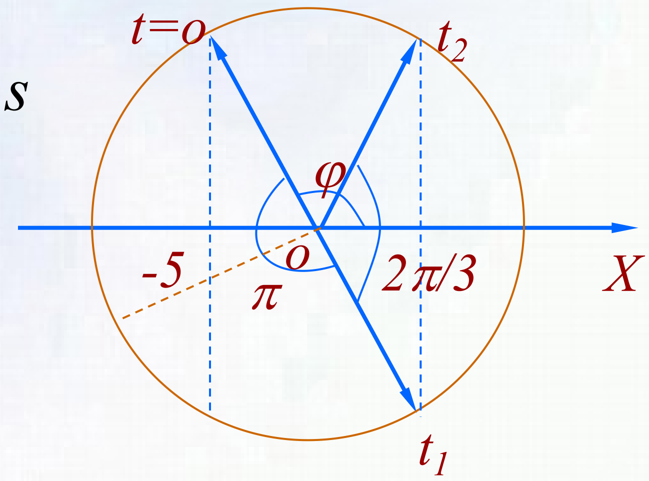
$$x=0.10\cos(2\pi\frac{t}{T}+\frac{2}{3}\pi)$$

（1）将 T＝2s，代入振动方程可得 t＝ 0.5s 时质点的位移为：

$$x = 0.10\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi) = -0.087(m)$$

（2）当物体第一次运动到 x＝5cm处时，旋转矢量转过的角度为π，如图所示，所以有

$$\omega t_1 = \pi, \quad 即 \quad t_1 = \frac{\pi}{\omega} = \frac{1}{2}T = 1s$$



（3）当物体第二次运动到 x＝5cm处时，旋转矢量又转过2 π /3，如图所示，所以有

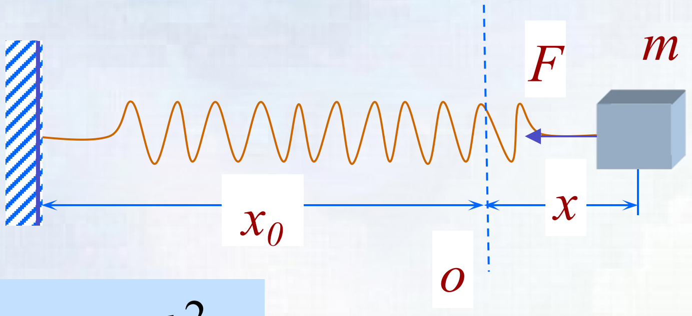
$$\omega(t_2 - t_1) = \omega\Delta t = \frac{2}{3}\pi, \ 即 \ \Delta t = \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{1}{3}T = \frac{2}{3}s$$

§ 5.2 简谐振动的动力学表述

一、弹簧振子的运动微分方程及其解

在弹簧振子系统中，物体受弹性力为：

$$F = -kx$$



按牛顿第二定律，得：

$$F = -kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

或：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(\frac{k}{m})x = -\omega^2 x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 x$$

上述方程的解有三种形式：

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ x = A\cos(\omega t+\varphi) \\ x = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \end{cases}$$

其中 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

选用的通解形式为： $x = A\cos(\omega t+\varphi)$

上式中当t=0时， $x_0 = A\cos\varphi$ $\upsilon_0=-\omega A\sin\varphi$

由此可求得： $A=\sqrt{x_0^2+\left(\dfrac{\upsilon_0}{\omega}\right)^2}$ $\varphi=\arctan\dfrac{-\upsilon_0}{\omega x_0}$

例题2

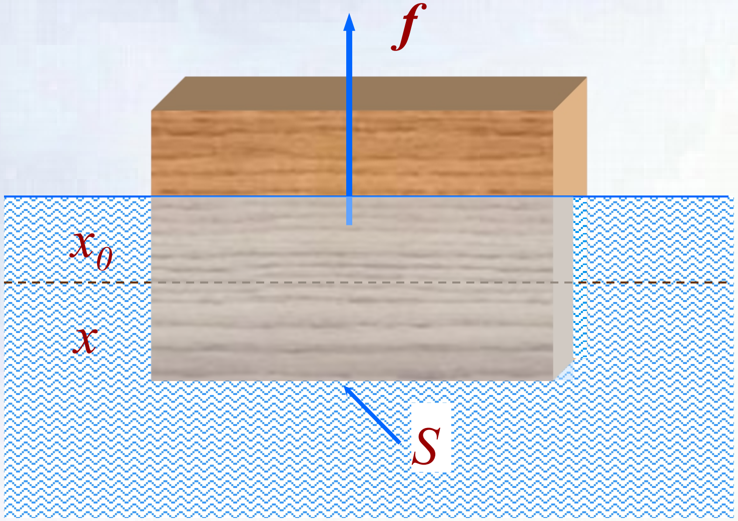
水面上浮沉的木块可看作简谐振动吗？如果是，周期为多少？

解： 木块偏离平衡位置距离为 x 时，所受浮力与重力之差为：

$$f_{浮} = -\rho_{水} g S(x + x_0)$$

$$mg = \rho_{水} g S x_0$$

$$f = f_{浮} + mg = -\rho_{水} S g x$$



此力相当于弹性系数k为 $S\rho_{水}g$ 的准弹性力。木块受一相当于弹性恢复力的作用，因而是简谐振动，其周期为：

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{S\rho_{水}g}{m}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{S\rho_{水}g}}$$

二、谐振动的能量

设弹簧振子的物体位移为x，速度为υ，系统的弹性势能和动能分别为：

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$E_k=\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

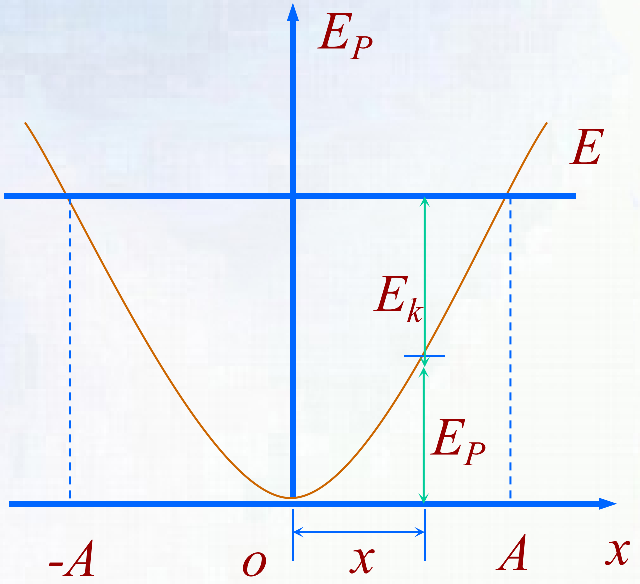
上式中我们利用了公式 $\omega^2=k/m$，系统的总机械能为：

$$\boxed{E=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}kA^2}$$

系统的势能和动能的总量守恒，而且总能量与振幅的平方成正比。

弹簧振子的能量曲线图：

物体在平衡位置附近振动时，在平衡位置时势能为零，动能最大；通过平衡位置后，动能逐渐减小，势能逐渐增大；当动能为零时，势能最大，物体静止。然后物体往回运动。物体在周而复始的运动中，总能量保持不变。

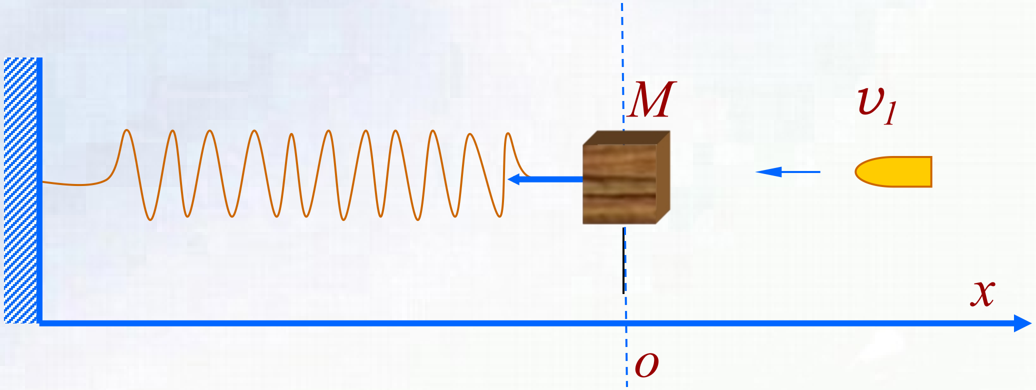


例题3

弹性系数为k，质量为M的弹簧振子，静止的放在光滑的水平面上，一质量为m的子弹以水平速度υ_1射入M中，与它一起运动。选M、m开始共同运动的时刻$t=0$，求固有的角频率、振幅和初相位？

解： 碰撞后振子的质量为$M+m$，固有的角频率为：

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{M+m}}$$



由碰撞过程的动量守恒，碰撞后的初速度为：

$$v_0 = \frac{v_1 m}{M + m}$$

这里v_1和v_0都是负值，初始动能为 $\frac{1}{2}(M + m)v_0^2$ ，

在最大位移处全部转化为弹性势能 $\frac{1}{2}kA^2$ ，

由此得：

$$A = \sqrt{\frac{M+m}{k}}\,v_0 = \sqrt{\frac{m^2}{k(M+m)}}\,v_1$$

在$t = 0$时刻，有：
$$\begin{cases} x = A\cos\varphi_0 = 0 & (1) \\ v = -\omega_0 A\sin\varphi_0 = v_0 < 0 & (2) \end{cases}$$

由(1)式得：$\varphi_0 = \pi/2, 3\pi/2$ ，再由(2)判断$\varphi_0 = \pi/2$

例题4

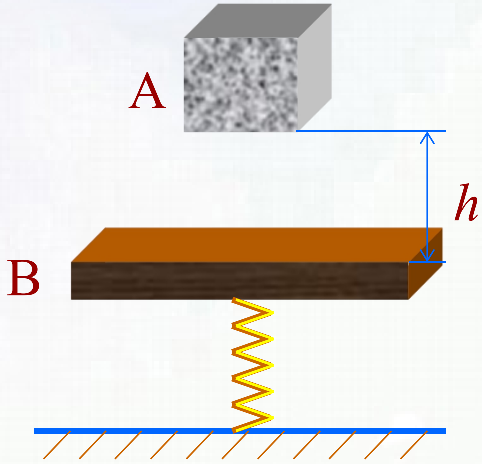
质量为M的物块A在离平板为h的高度处自由下落，落在质量也是M的平板B上，平板B起初与一弹簧相连并处于平衡态，已知轻质弹簧的劲度系数为K，物体与平板为完全非弹性碰撞，求碰撞后弹簧的最大压缩量。

解： 设弹簧的最大压缩量为x，开始时弹簧已被压缩了x_0，则$m_B g = Kx_0$，

$x_0 = Mg/K$

物块A自由下落，机械能守恒，

$$v_A = \sqrt{2gh}$$



A与B完全非弹性碰撞，动量守恒，

$$m_A v_A = (m_A+m_B)V，\quad V = v_A/2$$

A与B一起压缩弹簧，机械能守恒：

$$\frac{1}{2}(m_A+m_B)V^2-(m_A+m_B)gx_0+\frac{1}{2}Kx_0^{\ 2}=-(m_A+m_B)gx+\frac{1}{2}Kx^2$$

$$x^2-\frac{4Mg}{K}x+3\left(\frac{Mg}{K}\right)^2-\frac{Mg}{K}h=0$$

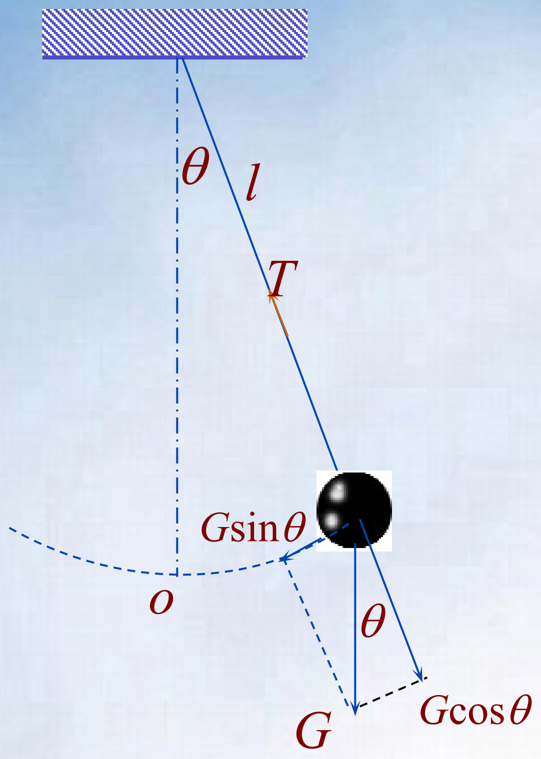
解得：

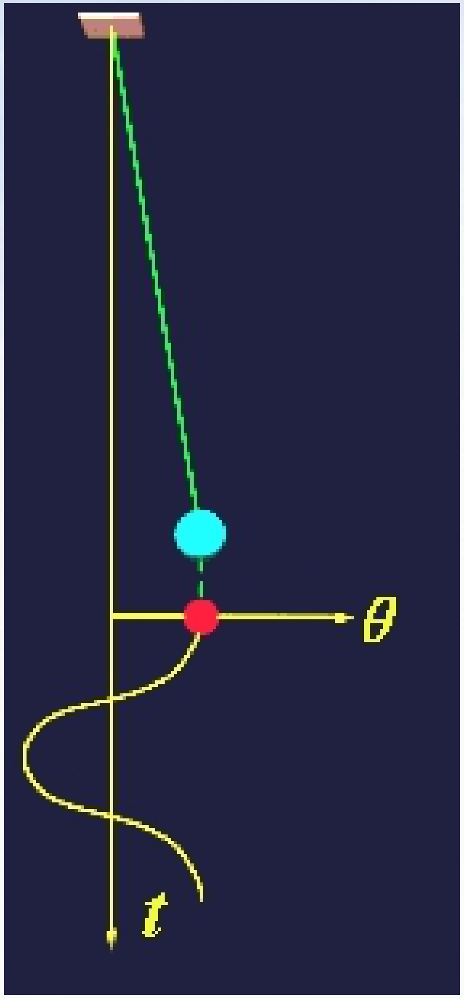
$$\boxed{x=\frac{2Mg}{K}+\sqrt{\left(\frac{Mg}{K}\right)^2+\frac{Mg}{K}h}}$$

（负号舍去，因必须有$x > x_0$）

§ 5.3 几种常见的简谐振动

1. 单摆





单摆所受的重力的切向分力：

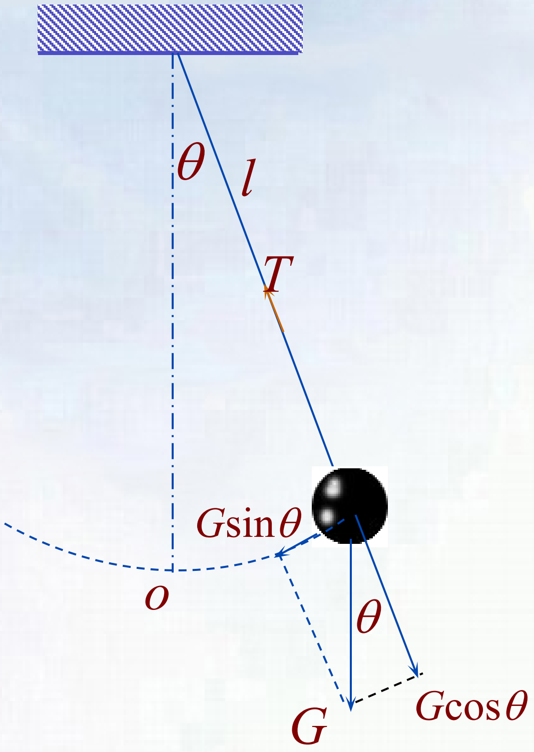
$$mg\sin\theta$$

单摆小球的切向加速度：

$$a_\tau = l(d^2\theta / dt^2)$$

由牛顿第二定律：

$$-mg\sin\theta = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



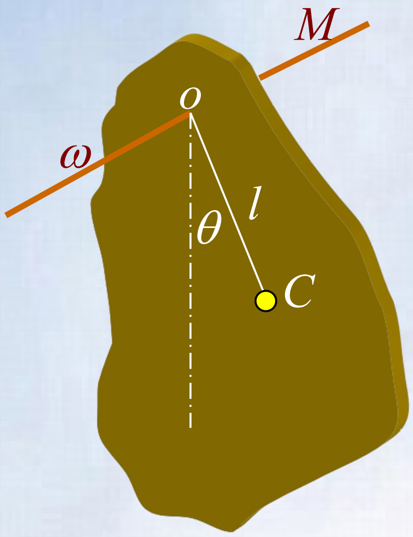
当θ很小时，$\sin\theta \approx \theta$

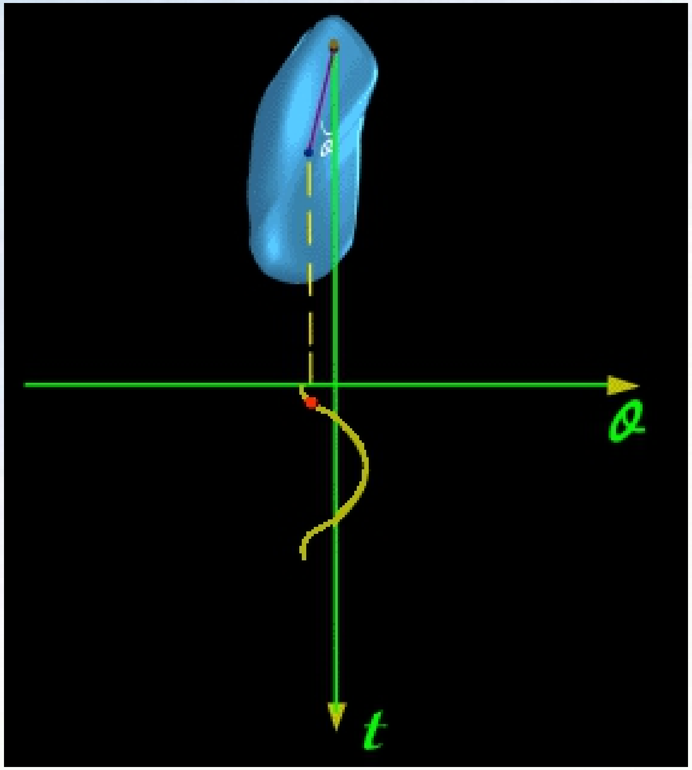
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta = -\omega^2\theta$$

则有：

$$\theta=\theta_m\cos(\omega t+\varphi)$$，其中 $$\omega=\sqrt{g/l}$$

2. 复摆（物理摆）

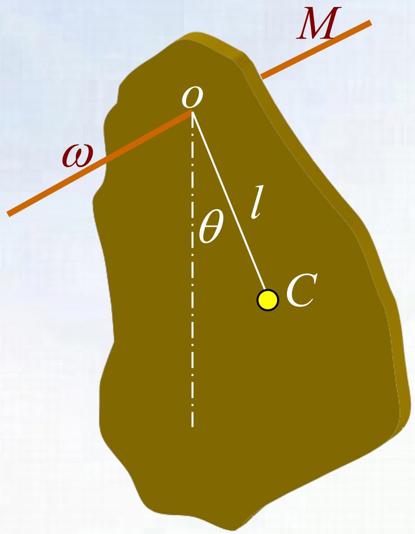




一个可绕水平轴摆动的刚体构成物理摆。选如图O为支点，则：

$$M = -lmg\sin\theta$$

$$J = J_C + ml^2$$



运动方程为： $$\boxed{M = J\frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

即： $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{l}{J}mg\sin\theta = 0$$

当θ很小时，$\sin\theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgl}{J}\theta$$

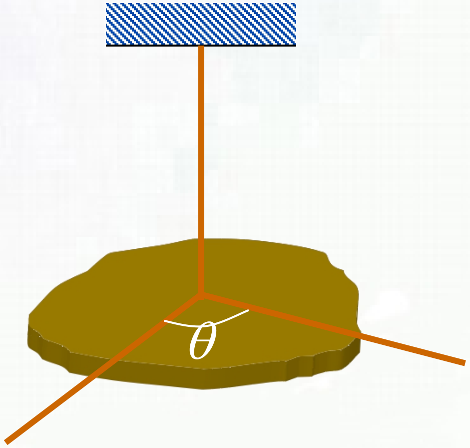
$\boxed{\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)}$ 其中：$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}}$

对于单摆，$J = ml^2$ 代入ω即可得单摆的表达式。

3. 扭摆

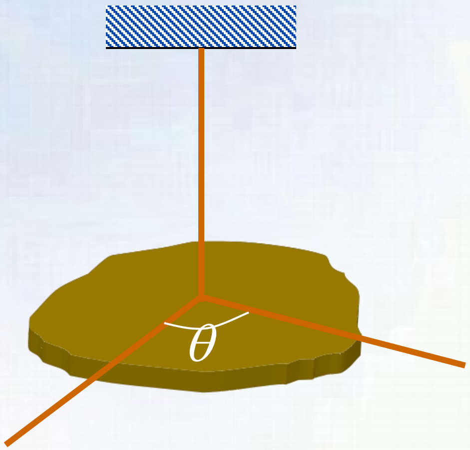
扭转力矩和运动方程分别为：

$$M = -k\theta \qquad M = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



由以上两式可得：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{k}{J}\theta$$



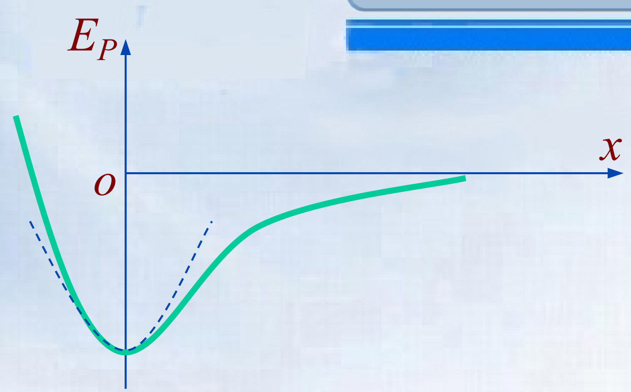
可知其振动的角频率为 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{J}}$

扭摆的周期为： $T = 2\pi\sqrt{J/k}$

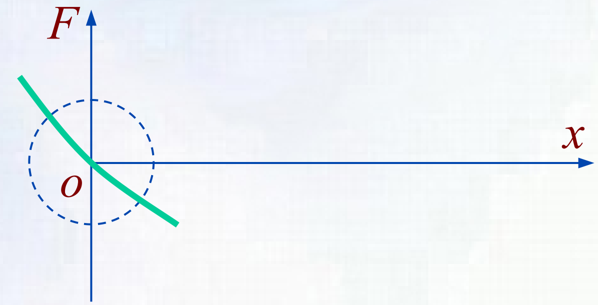
已知k，再测得T可计算出转动惯量。

稳定平衡附近的运动：*

在许多系统中，回复力包含非线性项，势能曲线如图所示：在图中稳定平衡点o，x=0处，势能有极小值：



$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_0 > 0$$



与势能相应的作用力为：

$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$$

在x=0附近，$F(x)$-x曲线如图所示。

在原点附近对$F(x)$做泰勒级数展开：

$$F(x)=F(0)+\left(\frac{dF}{dx}\right)_0 x+\cdots$$

由平衡位置的极值条件，可知：

$$F(0)=0,\quad \left(\frac{dF}{dx}\right)_0=-\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_0<0,\quad 令\ \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_0=k$$

在x较小，可略去二阶以上项： $\boxed{F(x)=-kx}$

物体在回复力作用下，在稳定平衡位置附近的运动，可近似看作简谐振动。

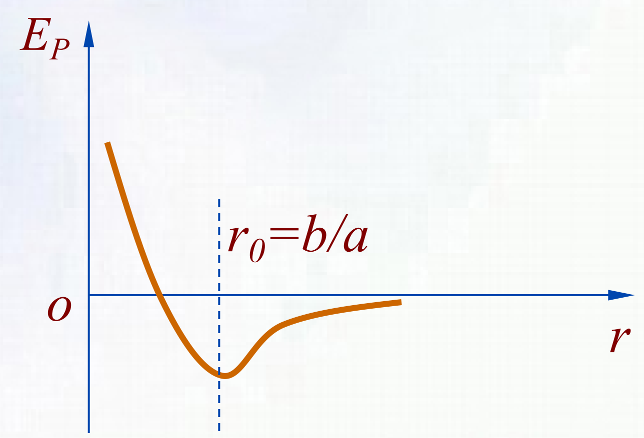
例题5 *

在某些双原子分子中，两原子间的相互作用力可以用 $F=-\frac{a}{r^2}+\frac{b}{r^3}$ 表示，其中a与b均为正的常数，而r为两原子间的距离。图中表示了势能E_P随r的变化曲线。

(1) 证明在平衡时原子间距为b/a

(2) 证明原子在平衡位置附近的微振动是简谐振动，劲度系数为a^4/b^3

(3) 试求振动的周期



解：(1) 原子在平衡位置受力为零，故：

$$F = -\frac{a}{r^2} + \frac{b}{r^3} = 0$$

所以平衡时原子间距为： $r_0 = \frac{b}{a}$

(2) 设原子在平衡位置附近位移为x，所受到的力F可展开为幂级数：

$$F(x) = F(0) + \left(\frac{dF}{dr}\right)_{r=r_0} x + \cdots$$

式中 $x = r - r_0$，$F(0)$为原子在平衡位置所受的力，故$F(0) = 0$。若忽略二阶及二阶以上的小量，则有：

$$F(x) = \left(\frac{dF}{dr}\right)_{r=r_0} x$$

$$\left(\frac{dF}{dr}\right)_{r=r_0} = -\left(\frac{2a}{r^3} - \frac{3b}{r^4}\right)_{r=\frac{b}{a}} = -\frac{a^4}{b^3}$$

故：

$$F = -\frac{a^4}{b^3}x = -kx$$

所以，原子在平衡位置附近的振动为谐振动，且劲度系数为

$$\boxed{k = \frac{a^4}{b^3}}$$

(3) 分子中原子的振动周期为：

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{b^3}{a^4}m}}$$