CHAPITRE III

ÉTUDE COHOMOLOGIQUE DES FAISCEAUX COHÉRENTS

Sommaire

Ce chapitre donne les théorèmes fondamentaux sur la cohomologie des faisceaux algébriques cohérents, à l'exception de ceux découlant de la théorie des résidus (théorèmes de dualité), qui feront l'objet d'un chapitre ultérieur. Parmi les premiers, il y a essentiellement six théorèmes fondamentaux, faisant l'objet des six premiers paragraphes du présent chapitre. Ces résultats seront dans la suite des outils essentiels, même dans des questions qui ne sont pas de nature proprement cohomologique; le lecteur en verra les premiers exemples dès le § 4. Le § 7 donne des résultats de nature plus technique, mais d'un usage constant dans les applications. Enfin, dans les §§ 8 à 11, nous développerons certains résultats, liés à la dualité des faisceaux cohérents, particulièrement importants pour les applications, et qui peuvent s'exposer antérieurement à la théorie générale des résidus.

(1) Le chapitre IV ne dépend pas des §§ 8 à 11, et sera sans doute publié avant ces derniers.

Le contenu des §§ 1 et 2 est dû à J.-P. Serre, et le lecteur constatera que nous n'avons eu qu'à suivre l'exposé de (FAC). Les §§ 8 et 9 sont également inspirés par (FAC) (les transpositions nécessitées par les contextes différents étant toutefois moins évidentes). Enfin, comme nous l'avons dit dans l'Introduction, le § 4 doit être considéré comme la mise en forme, en langage moderne, du « théorème d'invariance » fondamental de la « théorie des fonctions holomorphes » de Zariski.

Signalons enfin que les résultats du n° 3.4 (et les propositions préliminaires de (**0**, 13.4 à 13.7)) ne seront pas utilisés dans la suite du chap. III et peuvent donc être omis en première lecture.

§ 1. COHOMOLOGIE DES SCHÉMAS AFFINES

1.1. Rappels sur le complexe de l'algèbre extérieure.

(1.1.1) Soient A un anneau, $\mathbf{f}=(f_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ un système de r éléments de A. Le *complexe de l'algèbre extérieure* $K_\bullet(\mathbf{f})$ correspondant à $\mathbf{f}$ est un complexe de chaînes (G, I, 2.2) se définissant de la façon suivante : le A-module gradué $K_\bullet(\mathbf{f})$ est égal à l'*algèbre extérieure* $\wedge(A^r)$, graduée de la façon usuelle, et l'opérateur bord est la *multiplication intérieure* $i_\mathbf{f}$ par $\mathbf{f}$ considéré comme élément du dual $(A^r)^\vee$; on rappelle que $i_\mathbf{f}$ est une *antidérivation* de degré -1 de $\wedge(A^r)$, et que si $(\mathbf{e}_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ est la base canonique de A^r, on a $i_\mathbf{f}(\mathbf{e}_i)=f_i$; la vérification de la condition $i_\mathbf{f}\circ i_\mathbf{f}=0$ est immédiate.

Une définition équivalente est la suivante : pour chaque i, on considère un complexe de chaînes $K_\bullet(f_i)$ défini comme suit : $K_0(f_i)=K_1(f_i)=A$, $K_n(f_i)=0$ pour $n\neq 0,1$: l'opérateur bord est défini par la condition que $d_1 : A\rightarrow A$ est la *multiplication par* f_i. On prend alors pour $K_\bullet(\mathbf{f})$ le *produit tensoriel* $K_\bullet(f_1)\otimes K_\bullet(f_2)\otimes\ldots\otimes K_\bullet(f_r)$ (G, I, 2.7) muni de son degré total; la vérification de l'isomorphisme de ce complexe et du complexe défini plus haut est immédiate.

(1.1.2) Pour tout A-module M, on définit le *complexe de chaînes*

$$K_\bullet(\mathbf{f}, M)=K_\bullet(\mathbf{f})\otimes_A M \tag{1.1.2.1}$$

et le *complexe de cochaînes* (G, I, 2.2)

$$K^\bullet(\mathbf{f}, M)=\operatorname{Hom}_A(K_\bullet(\mathbf{f}), M). \tag{1.1.2.2}$$

Si g est une k-cochaîne de ce dernier complexe, et si on pose

$$g(i_1, \ldots, i_k)=g(\mathbf{e}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathbf{e}_{i_k}),$$

g s'identifie à une application *alternée* de $[1, r]^k$ dans M, et il résulte des définitions précédentes que l'on a

$$d^k g(i_1, i_2, \ldots, i_{k+1})=\sum_{h=1}^{k+1}(-1)^{h-1}f_{i_h}g(i_1, \ldots, \widehat{i}_h, \ldots, i_{k+1}). \tag{1.1.2.3}$$

(1.1.3) Des complexes précédents, on déduit comme d'ordinaire les A-*modules d'homologie et de cohomologie* (G, I, 2.2)

(1.1.3.1) $$H_{\bullet}(\mathbf{f}, M) = H_{\bullet}(K_{\bullet}(\mathbf{f}, M))$$

(1.1.3.2) $$H^{\bullet}(\mathbf{f}, M) = H^{\bullet}(K^{\bullet}(\mathbf{f}, M)).$$

On définit d'ailleurs un A-*isomorphisme* $K_{\bullet}(\mathbf{f}, M) \xrightarrow{\sim} K^{\bullet}(\mathbf{f}, M)$ en faisant correspondre à toute chaîne $z = \Sigma(\mathbf{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}_{i_k}) \otimes z_{i_1 \ldots i_k}$ la cochaîne g_z telle que $g_z(j_1, \ldots, j_{r-k}) = \varepsilon z_{i_1 \ldots i_k}$, où $(j_h)_{1 \leqslant h \leqslant r-k}$ est la suite strictement croissante complémentaire de la suite strictement croissante $(i_h)_{1 \leqslant h \leqslant k}$ dans $[1, r]$ et $\varepsilon = (-1)^{\nu}$, ν étant le nombre d'inversions de la permutation $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{r-k}$ de $[1, r]$. On vérifie que $g_{dz} = d(g_z)$, ce qui donne un isomorphisme

(1.1.3.3) $$H^i(\mathbf{f}, M) \xrightarrow{\sim} H_{r-i}(\mathbf{f}, M) \qquad \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant r.$$

Dans ce chapitre, nous aurons surtout à considérer les modules de cohomologie $H^{\bullet}(\mathbf{f}, M)$.

Pour un $\mathbf{f}$ donné, il est immédiat (G, I, 2.1) que $M \rightsquigarrow H^{\bullet}(\mathbf{f}, M)$ est un *foncteur cohomologique* (T, II, 2.1), de la catégorie des A-modules dans celle des A-modules gradués, nul pour les degrés < 0 et $> r$. En outre, on a

(1.1.3.4) $$H^0(\mathbf{f}, M) = \mathrm{Hom}_A(A/(\mathbf{f}), M)$$

en désignant par $(\mathbf{f})$ l'idéal de A engendré par $f_1, \ldots, f_r$; cela résulte aussitôt de (1.1.2.3), et il est clair que $H^0(\mathbf{f}, M)$ s'identifie au sous-module de M *annulé par* $(\mathbf{f})$. De même, on a d'après (1.1.2.3)

(1.1.3.5) $$H^r(\mathbf{f}, M) = M/(\sum_{i=1}^{r} f_i M) = (A/(\mathbf{f})) \otimes_A M.$$

Nous utiliserons le résultat connu suivant, dont nous rappellerons une démonstration pour être complet :

Proposition **(1.1.4)**. — *Soient* A *un anneau,* $\mathbf{f} = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ *une famille finie d'éléments de* A, M *un* A-*module. Si, pour* $1 \leqslant i \leqslant r$, *l'homothétie* $z \rightsquigarrow f_i . z$ *dans* $M_{i-1} = M/(f_1 M + \ldots + f_{i-1} M)$ *est injective, on a* $H^i(\mathbf{f}, M) = 0$ *pour* $i \neq r$.

Il suffit en effet de prouver que $H_i(\mathbf{f}, M) = 0$ pour tout $i > 0$ en vertu de (1.1.3.3). Raisonnons par récurrence sur r, le cas $r = 0$ étant trivial. Posons $\mathbf{f}' = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant r-1}$; cette famille vérifie les conditions de l'énoncé, donc, si on pose $L_{\bullet} = K_{\bullet}(\mathbf{f}', M)$, on a $H_i(L_{\bullet}) = 0$ pour $i > 0$ par hypothèse, et $H_0(L_{\bullet}) = M_{r-1}$ en vertu de (1.1.3.3) et (1.1.3.5). Posons pour abréger $K_{\bullet} = K_{\bullet}(f_r) = K_0 \oplus K_1$, avec $K_0 = K_1 = A$, $d_1 : K_1 \to K_0$ étant la multiplication par f_r; on a par définition (1.1.1) $K_{\bullet}(\mathbf{f}, M) = K_{\bullet} \otimes_A L_{\bullet}$. Or, on a le lemme suivant :

Lemme **(1.1.4.1)**. — *Soit* $K_{\bullet}$ *un complexe de chaînes formé de* A-*modules libres, nuls sauf en dimensions* 0 *et* 1. *Pour tout complexe de chaînes* $L_{\bullet}$ *formé de* A-*modules, on a une suite exacte*

$$0 \to H_0(K_{\bullet} \otimes H_p(L_{\bullet})) \to H_p(K_{\bullet} \otimes L_{\bullet}) \to H_1(K_{\bullet} \otimes H_{p-1}(L_{\bullet})) \to 0$$

pour tout indice p.

C'est un cas particulier d'une suite exacte de termes de bas degré de la suite spectrale de Künneth (M, XVII, 5.2 *a)* et G, I, 5.5.2); on peut le démontrer directement de la façon suivante. Considérons K_0 et K_1 comme des complexes de chaînes (nuls en dimensions $\neq 0$ et $\neq 1$ respectivement); on a alors une suite exacte de complexes

$$0 \to K_0 \otimes L_{\bullet} \to K_{\bullet} \otimes L_{\bullet} \to K_1 \otimes L_{\bullet} \to 0$$

à laquelle nous pouvons appliquer la suite exacte d'homologie

$$\ldots \to H_{p+1}(K_1 \otimes L_{\bullet}) \xrightarrow{\partial} H_p(K_0 \otimes L_{\bullet}) \to H_p(K_{\bullet} \otimes L_{\bullet}) \to H_p(K_1 \otimes L_{\bullet}) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(K_0 \otimes L_{\bullet}) \to \ldots$$

Mais il est évident que $H_p(K_0 \otimes L_{\bullet}) = K_0 \otimes H_p(L_{\bullet})$ et $H_p(K_1 \otimes L_{\bullet}) = K_1 \otimes H_{p-1}(L_{\bullet})$ pour tout p; en outre, on vérifie aussitôt que l'opérateur $\partial : K_1 \otimes H_p(L_{\bullet}) \to K_0 \otimes H_p(L_{\bullet})$ n'est autre que $d_1 \otimes 1$; le lemme résulte donc de la suite exacte précédente et de la définition de $H_0(K \otimes H_p(L_{\bullet}))$ et de $H_1(K_{\bullet} \otimes H_{p-1}(L_{\bullet}))$.

Ce lemme étant établi, la fin de la démonstration de (1.1.4) est immédiate : l'hypothèse de récurrence de ce lemme (1.1.4.1) donnent $H_p(K_{\bullet} \otimes L_{\bullet}) = 0$ pour $p \geqslant 2$; en outre, si on prouve que $H_1(K_{\bullet}, H_0(L_{\bullet})) = 0$, on déduira aussi $H_1(K_{\bullet} \otimes L_{\bullet}) = 0$ du lemme (1.1.4.1); mais par définition, $H_1(K_{\bullet}, H_0(L_{\bullet}))$ n'est autre que le noyau de l'homothétie $z \rightsquigarrow f_r . z$ dans M_{r-1}, et comme par hypothèse ce noyau est nul, cela achève la démonstration.

(1.1.5) Soit $\mathbf{g} = (g_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ une seconde suite de r éléments de A, et posons $\mathbf{fg} = (f_i g_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$. On peut définir un homomorphisme canonique de complexes

(1.1.5.1) $$\varphi_{\mathbf{g}} : K_{\bullet}(\mathbf{fg}) \to K_{\bullet}(\mathbf{f})$$

comme l'extension canonique à l'algèbre extérieure $\wedge(A^r)$ de l'application A-linéaire $(x_1, \ldots, x_r) \rightsquigarrow (g_1 x_1, \ldots, g_r x_r)$ de A^r dans lui-même. Pour voir qu'on a bien un homomorphisme de complexes, il suffit de remarquer, de façon générale, que si $u : E \to F$ est une application A-linéaire, $\mathbf{x} \in \check{F}$ et $\mathbf{y} = {}^t u(\mathbf{x}) \in \check{E}$, alors on a la formule

(1.1.5.2) $$(\wedge u) \circ i_{\mathbf{y}} = i_{\mathbf{x}} \circ (\wedge u);$$

en effet, les deux membres sont des antidérivations de $\wedge F$, et il suffit de vérifier qu'ils coïncident dans F, ce qui résulte aussitôt des définitions.

Lorsqu'on identifie $K_{\bullet}(\mathbf{f})$ au produit tensoriel des $K_{\bullet}(f_i)$ (1.1.1), $\varphi_{\mathbf{g}}$ est le produit tensoriel des φ_{g_i}, où φ_{g_i} se réduit à l'identité en degré 0 et à la multiplication par g_i en degré 1.

(1.1.6) En particulier, pour tout couple d'entiers m, n tels que $0 \leqslant n \leqslant m$, on a des homomorphismes de complexes

(1.1.6.1) $$\varphi_{\mathbf{f}^{m-n}} : K_{\bullet}(\mathbf{f}^m) \to K_{\bullet}(\mathbf{f}^n)$$

et par suite des homomorphismes

(1.1.6.2) $$\varphi_{\mathbf{f}^{m-n}} : K^{\bullet}(\mathbf{f}^n, M) \to K^{\bullet}(\mathbf{f}^m, M)$$

(1.1.6.3) $$\varphi_{\mathbf{f}^{m-n}} : H^{\bullet}(\mathbf{f}^n, M) \to H^{\bullet}(\mathbf{f}^m, M).$$

Ces derniers vérifient évidemment la condition de transitivité $\varphi_{\mathbf{f}^{m-p}} = \varphi_{\mathbf{f}^{m-n}} \circ \varphi_{\mathbf{f}^{n-p}}$ pour $p \leqslant n \leqslant m$; ils définissent donc deux *systèmes inductifs* de A-modules; on posera

$$(1.1.6.4) \qquad \mathrm{C}^{\bullet}((\mathbf{f}), \mathrm{M}) = \varinjlim_{n} \mathrm{K}^{\bullet}(\mathbf{f}^n, \mathrm{M})$$

$$(1.1.6.5) \qquad \mathrm{H}^{\bullet}((\mathbf{f}), \mathrm{M}) = \mathrm{H}^{\bullet}(\mathrm{C}^{\bullet}((\mathbf{f}), \mathrm{M})) = \varinjlim_{n} \mathrm{H}^{\bullet}(\mathbf{f}^n, \mathrm{M})$$

la dernière égalité provenant du fait que le passage à la limite inductive permute au foncteur $\mathrm{H}^{\bullet}$ (G, I, 2.1). On verra ultérieurement (1.4.3) que $\mathrm{H}^{\bullet}((\mathbf{f}), \mathrm{M})$ ne dépend en fait que de l'*idéal* $(\mathbf{f})$ dans A (et même de la topologie $(\mathbf{f})$-préadique sur A), ce qui justifie les notations.

Il est clair que $\mathrm{M} \rightsquigarrow \mathrm{C}^{\bullet}((\mathbf{f}), \mathrm{M})$ est un foncteur A-linéaire exact, et $\mathrm{M} \rightsquigarrow \mathrm{H}^{\bullet}((\mathbf{f}), \mathrm{M})$ un foncteur cohomologique.

(1.1.7) Soient $\mathbf{f} = (f_i) \in \mathrm{A}^r$, $\mathbf{g} = (g_i) \in \mathrm{A}^r$; désignons par $e_{\mathbf{g}}$ la multiplication à gauche par le vecteur $\mathbf{g} \in \mathrm{A}^r$ dans l'algèbre extérieure $\wedge(\mathrm{A}^r)$; on sait que l'on a la *formule d'homotopie*

$$(1.1.7.1) \qquad i_{\mathbf{f}} e_{\mathbf{g}} + e_{\mathbf{g}} i_{\mathbf{f}} = \langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle 1$$

dans le A-module A^r (1 désignant l'automorphisme identique de A^r); cette relation signifie aussi que, *dans le complexe* $\mathrm{K}_{\bullet}(\mathbf{f})$, on a

$$(1.1.7.2) \qquad d e_{\mathbf{g}} + e_{\mathbf{g}} d = \langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle 1.$$

Si l'idéal $(\mathbf{f})$ est égal à A, il existe $\mathbf{g} \in \mathrm{A}^r$ tel que $\langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle = \sum_{i=1}^{r} g_i f_i = 1$. Par suite (G, I, 2.4) :

Proposition **(1.1.8)**. — *Supposons que l'idéal* $(\mathbf{f})$ *engendré par les* f_i *soit égal à* A. *Alors le complexe* $\mathrm{K}_{\bullet}(\mathbf{f})$ *est homotopiquement trivial, et il en est donc de même des complexes* $\mathrm{K}_{\bullet}(\mathbf{f}, \mathrm{M})$ *et* $\mathrm{K}^{\bullet}(\mathbf{f}, \mathrm{M})$ *pour tout* A*-module* M.

Corollaire **(1.1.9)**. — *Si* $(\mathbf{f}) = \mathrm{A}$, *on a* $\mathrm{H}^{\bullet}(\mathbf{f}, \mathrm{M}) = 0$ *et* $\mathrm{H}^{\bullet}((\mathbf{f}), \mathrm{M}) = 0$ *pour tout* A*-module* M.

En effet, on a alors $(\mathbf{f}^n) = \mathrm{A}$ pour tout n.

Remarque **(1.1.10)**. — Avec les mêmes notations que ci-dessus, soient $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, Y le sous-schéma fermé de X défini par l'idéal $(\mathbf{f})$. Nous prouverons au § 9 que $\mathrm{H}^{\bullet}((\mathbf{f}), \mathrm{M})$ est isomorphe à la cohomologie $\mathrm{H}^{\bullet}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}, \widetilde{\mathrm{M}})$ correspondant à l'antifiltre Φ des parties fermées de Y (T, 3.2). Nous montrerons aussi que la prop. (1.2.3) appliquée à X et à $\mathscr{F} = \widetilde{\mathrm{M}}$, est un cas particulier d'une suite exacte de cohomologie

$$\dots \to \mathrm{H}^p_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^p(\mathrm{X} - \mathrm{Y}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^{p+1}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \to \dots$$

1.2. Cohomologie de Čech d'un recouvrement ouvert.

(1.2.1) *Notations.* — Dans ce numéro, on notera :

X un préschéma;

$\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module quasi-cohérent;

$A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$;

$\mathbf{f} = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ un système fini d'éléments de A;

$U_i = X_{f_i}$ l'ensemble ouvert ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.5.2) des $x \in X$ tels que $f_i(x) \neq 0$;

$U = \bigcup_{i=1}^{r} U_i$;

$\mathfrak{U}$ le recouvrement $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ de U.

(1.2.2) Supposons que X soit, ou bien un préschéma dont l'espace sous-jacent est *noethérien*, ou bien un *schéma* dont l'espace sous-jacent soit *quasi-compact*. On sait alors (**I**, 9.3.3) que l'on a $\Gamma(U_i, \mathcal{F}) = M_{f_i}$. Nous poserons

$$U_{i_0 i_1 \dots i_p} = \bigcap_{k=0}^{p} U_{i_k} = X_{f_{i_0} f_{i_1} \dots f_{i_p}}$$

($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.5.3); on a donc aussi

$$\Gamma(U_{i_0 i_1 \dots i_p}, \mathcal{F}) = M_{f_{i_0} f_{i_1} \dots f_{i_p}} \tag{1.2.2.1}$$

Or ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 1.6.1) $M_{f_{i_0} f_{i_1} \dots f_{i_p}}$ s'identifie à la limite inductive $\varinjlim_n M^{(n)}_{i_0 i_1 \dots i_p}$, où le système inductif est formé des $M^{(n)}_{i_0 i_1 \dots i_p} = M$, l'homomorphisme $\varphi_{nm} : M^{(m)}_{i_0 i_1 \dots i_p} \to M^{(n)}_{i_0 i_1 \dots i_p}$ étant la multiplication par $(f_{i_0} f_{i_1} \dots f_{i_p})^{n-m}$ pour $m \leqslant n$. Désignons par $C^p_n(M)$ l'ensemble des applications *alternées* de $[1, r]^{p+1}$ dans M (pour tout n); ces A-modules forment encore un système inductif pour les φ_{nm}. Si $C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ est le groupe des p-cochaînes *alternées* de Čech relatif au recouvrement $\mathfrak{U}$, à coefficients dans $\mathcal{F}$ (G, II, 5.1), il résulte de ce qui précède que l'on peut écrire

$$C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \varinjlim_n C^p_n(M). \tag{1.2.2.2}$$

Or, avec les notations de (1.1.2), $C^p_n(M)$ s'identifie à $K^{p+1}(\mathbf{f}^n, M)$, et l'application φ_{nm} s'identifie à l'application $\varphi_{\mathbf{f}^{n-m}}$ définie dans (1.1.6). On a donc, pour tout $p \geqslant 0$, un isomorphisme canonique fonctoriel en $\mathcal{F}$

$$C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \simeq C^{p+1}((\mathbf{f}), M). \tag{1.2.2.3}$$

En outre, la formule (1.1.2.3) et la définition de la cohomologie d'un recouvrement (G, II, 5.1) montrent que les isomorphismes (1.2.2.3) sont compatibles avec les opérateurs cobords.

Proposition **(1.2.3)**. — *Si* X *est un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien, ou un schéma dont l'espace sous-jacent est quasi-compact, il existe un isomorphisme canonique fonctoriel en* $\mathcal{F}$

$$H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \simeq H^{p+1}((\mathbf{f}), M) \qquad \textit{pour tout } p \geqslant 1. \tag{1.2.3.1}$$

On a en outre une suite exacte fonctorielle en $\mathcal{F}$

$$0 \to H^0((\mathbf{f}), M) \to M \to H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^1((\mathbf{f}), M) \to 0. \tag{1.2.3.2}$$

Les relations (1.2.3.1) sont en effet conséquences immédiates de ce qu'on a vu dans (1.2.2). D'autre part, on a $C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = C^1((\mathbf{f}), M)$; $H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ s'identifie par suite au sous-groupe des 1-cocycles de $C^1((\mathbf{f}), M)$; comme $M = C^0((\mathbf{f}), M)$, la suite exacte (1.2.3.2) n'est autre que celle qui résulte de la définition des groupes de cohomologie $H^0((\mathbf{f}), M)$ et $H^1((\mathbf{f}), M)$.

Corollaire (**1.2.4**). — *Supposons que les* X_{f_i} *soient quasi-compacts et qu'il existe des* $g_i \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ *tels que* $\sum_i g_i(f_i|U) = 1|U$. *Alors, pour tout* $(\mathcal{O}_X|U)$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{G}$, *on a* $H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) = 0$ *pour* $p > 0$; *si en outre* $U = X$, *l'homomorphisme canonique* (1.2.3.2) $M \to H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ *est bijectif.*

Comme par hypothèse les $U_i = X_{f_i}$ sont quasi-compacts, il en est de même de U, et on peut donc se borner au cas où $U = X$; l'hypothèse entraîne alors $H^p((\mathbf{f}), M) = 0$ pour tout $p \geqslant 0$ (1.1.9). Le corollaire résulte alors aussitôt de (1.2.3.1) et (1.2.3.2).

On observera que puisque $H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = H^0(U, \mathscr{F})$ (G, II, 5.2.2), on a ainsi démontré à nouveau (**I**, 1.3.7) comme cas particulier.

Remarque (**1.2.5**). — Supposons que X soit un *schéma affine*; alors les $U_i = X_{f_i} = D(f_i)$ sont des ouverts affines, ainsi que les $U_{i_0 i_1 \dots i_p}$ (mais U n'est pas nécessairement affine). Dans ce cas, les foncteurs $\Gamma(X, \mathscr{F})$ et $\Gamma(U_{i_0 i_1 \dots i_p}, \mathscr{F})$ sont exacts en $\mathscr{F}$ (**I**, 1.3.11). Si on a une suite exacte $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ de $\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents, la suite des complexes

$$0 \to C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}') \to C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}'') \to 0$$

est exacte, et donne donc une suite exacte de cohomologie

$$\dots \to H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}') \to H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}'') \xrightarrow{\partial} H^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}') \to \dots$$

D'autre part, si on pose $M' = \Gamma(X, \mathscr{F}')$, $M'' = \Gamma(X, \mathscr{F}'')$, la suite $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est exacte; comme $C^\bullet((\mathbf{f}), M)$ est un foncteur exact en M, on a aussi la suite exacte de cohomologie

$$\dots \to H^p((\mathbf{f}), M') \to H^p((\mathbf{f}), M) \to H^p((\mathbf{f}), M'') \xrightarrow{\partial} H^{p+1}((\mathbf{f}), M') \to \dots$$

Cela étant, comme le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}') & \to & C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) & \to & C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}'') & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & C^\bullet((\mathbf{f}), M') & \to & C^\bullet((\mathbf{f}), M) & \to & C^\bullet((\mathbf{f}), M'') & \to & 0 \end{array}$$

est commutatif, on en conclut que les diagrammes

$$(1.2.5.1)\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{H}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}'') & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{H}^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^{p+1}((\mathbf{f}), \mathrm{M}'') & \xrightarrow[\partial]{} & \mathrm{H}^{p+2}((\mathbf{f}), \mathrm{M}') \end{array}$$

sont commutatifs pour tout p (G, I, 2.1.1).

1.3. Cohomologie d'un schéma affine.

Théorème (**1.3.1**). — *Soit* X *un schéma affine. Pour tout* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$, *on a* $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{F})=0$ *pour tout* $p>0$.

Soit $\mathfrak{U}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines $\mathrm{X}_{f_i}=\mathrm{D}(f_i)$ $(1\leqslant i\leqslant r)$; on sait qu'alors l'idéal engendré dans $\mathrm{A}=\Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{O}_\mathrm{X})$ par les f_i est égal à A. On conclut donc de (1.2.4) que l'on a $\mathrm{H}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})=0$ pour $p>0$. Comme il y a des recouvrements finis de X par des ouverts affines qui sont arbitrairement fins (**I**, 1.1.10), la définition de la cohomologie de Čech (G, II, 5.8) montre que l'on a aussi $\check{\mathrm{H}}^p(\mathrm{X}, \mathscr{F})=0$ pour $p>0$. Mais ceci s'applique aussi à tout préschéma X_f pour $f\in\mathrm{A}$ (**I**, 1.3.6), donc $\check{\mathrm{H}}^p(\mathrm{X}_f, \mathscr{F})=0$ pour $p>0$. Comme l'on a $\mathrm{X}_f\cap\mathrm{X}_g=\mathrm{X}_{fg}$, on en déduit que l'on a aussi $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{F})=0$ pour tout $p>0$, en vertu de (G, II, 5.9.2).

Corollaire (**1.3.2**). — *Soient* Y *un préschéma,* $f:\mathrm{X}\rightarrow\mathrm{Y}$ *un morphisme affine* (**II**, 1.6.1). *Pour tout* $\mathscr{O}_\mathrm{X}$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$, *on a* $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})=0$ *pour* $q>0$.

En effet, par définition $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ est le $\mathscr{O}_\mathrm{Y}$-Module associé au préfaisceau $\mathrm{U}\rightsquigarrow\mathrm{H}^q(f^{-1}(\mathrm{U}), \mathscr{F})$, U parcourant les ouverts de Y. Mais les ouverts affines forment une base de Y, et pour un tel ouvert U, $f^{-1}(\mathrm{U})$ est affine (**II**, 1.3.2), donc $\mathrm{H}^q(f^{-1}(\mathrm{U}), \mathscr{F})=0$ par (1.3.1), ce qui démontre le corollaire.

Corollaire (**1.3.3**). — *Soient* Y *un préschéma,* $f:\mathrm{X}\rightarrow\mathrm{Y}$ *un morphisme affine. Pour tout* $\mathscr{O}_\mathrm{X}$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$, *l'homomorphisme canonique* $\mathrm{H}^p(\mathrm{Y}, f_*(\mathscr{F}))\rightarrow\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{F})$ (**0**, 12.1.3.1) *est bijectif pour tout* p.

En effet, il suffit (en vertu de (**0**, 12.1.7)) de montrer que les edge-homomorphismes $''\mathrm{E}_2^{p0}=\mathrm{H}^p(\mathrm{Y}, f_*(\mathscr{F}))\rightarrow\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{F})$ de la seconde suite spectrale du foncteur composé Γf_* sont bijectifs. Mais le terme E_2 de cette suite est donné par $''\mathrm{E}_2^{pq}=\mathrm{H}^p(\mathrm{Y}, \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}))$ (G, II, 4.17.1), donc il résulte de (1.3.2) que $''\mathrm{E}_2^{pq}=0$ pour $q>0$, et la suite spectrale dégénère; d'où notre assertion (**0**, 11.1.6).

Corollaire (**1.3.4**). — *Soient* $f:\mathrm{X}\rightarrow\mathrm{Y}$ *un morphisme affine,* $g:\mathrm{Y}\rightarrow\mathrm{Z}$ *un morphisme.*

Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathcal{F}$, l'homomorphisme canonique $R^p g_*(f_*(\mathcal{F})) \to R^p(g \circ f)_*(\mathcal{F})$ (**0**, 12.2.5.1) *est bijectif pour tout p.*

Il suffit de remarquer que, d'après (1.3.3), pour tout ouvert affine W de Z, l'homomorphisme canonique $H^p(g^{-1}(W), f_*(\mathcal{F})) \to H^p(f^{-1}(g^{-1}(W)), \mathcal{F})$ est bijectif; cela prouve que l'homomorphisme de préfaisceaux définissant l'homomorphisme canonique $R^p g_*(f_*(\mathcal{F})) \to R^p(g \circ f)_*(\mathcal{F})$ est bijectif (**0**, 12.2.5).

1.4. Application à la cohomologie des préschémas quelconques.

Proposition **(1.4.1).** — *Soient* X *un schéma,* $\mathfrak{U} = (U_\alpha)$ *un recouvrement de* X *par des ouverts affines. Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathcal{F}$, les modules de cohomologie* $H^\bullet(X, \mathcal{F})$ *et* $H^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ *(sur* $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$*) sont canoniquement isomorphes.*

En effet, comme X est un schéma, toute intersection finie V d'ouverts du recouvrement $\mathfrak{U}$ est affine (**I**, 5.5.6), donc $H^q(V, \mathcal{F}) = 0$ pour $q \geqslant 1$ en vertu de (1.3.1). La proposition résulte alors du th. de Leray (G, II, 5.4.1).

Remarque **(1.4.2).** — On notera que la conclusion de (1.4.1) est encore valable lorsque les intersections finies des ensembles U_α sont affines, même lorsque l'on ne suppose pas nécessairement que X soit un schéma.

Corollaire **(1.4.3).** — *Soient* X *un schéma dont l'espace sous-jacent est quasi-compact,* $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $\mathbf{f} = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ *une suite finie d'éléments de* A *tels que les* X_{f_i} *(notations de* (1.2.1)*) soient affines. Alors (avec les notations de* (1.2.1)*), pour tout $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathcal{F}$, on a un isomorphisme canonique fonctoriel en $\mathcal{F}$*

$$H^q(U, \mathcal{F}) \simeq H^{q+1}((\mathbf{f}), M) \qquad \textit{pour } q \geqslant 1 \tag{1.4.3.1}$$

et une suite exacte fonctorielle en $\mathcal{F}$

$$0 \to H^0((\mathbf{f}), M) \to M \to H^0(U, \mathcal{F}) \to H^1((\mathbf{f}), M) \to 0. \tag{1.4.3.2}$$

Cela résulte en effet aussitôt de (1.4.1) et (1.2.3).

(1.4.4) Si X est un *schéma affine*, il résulte de (1.2.5) et (1.4.1) que pour tout $q \geqslant 0$, les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} H^q(U, \mathcal{F}'') & \xrightarrow{\partial} & H^{q+1}(U, \mathcal{F}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{q+1}((\mathbf{f}), M'') & \xrightarrow[\partial]{} & H^{q+2}((\mathbf{f}), M') \end{array} \tag{1.4.4.1}$$

correspondant à une suite exacte $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ de $\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents (avec les notations de (1.2.5)), sont commutatifs.

Proposition **(1.4.5).** — *Soient* X *un schéma quasi-compact,* $\mathscr{L}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible, et considérons l'anneau gradué* $A_* = \Gamma_*(\mathscr{L})$ $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 5.4.6)$ *; alors* $H^\bullet(\mathscr{F}, \mathscr{L}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^\bullet(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n})$ *est un* A_**-module gradué, et pour tout* $f \in A_n$*, on a un isomorphisme canonique*

$$(1.4.5.1) \qquad H^\bullet(X_f, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} (H^\bullet(\mathscr{F}, \mathscr{L}))_{(f)}$$

de $(A_*)_{(f)}$*-modules.*

Comme X est un schéma quasi-compact, on peut calculer la cohomologie de tous les $\mathcal{O}_X$-Modules $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ à l'aide d'un même recouvrement fini $\mathfrak{U} = (U_i)$ par des ouverts affines tels que la restriction $\mathscr{L}|U_i$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_X|U_i$ pour chaque i (1.4.1). Il est alors immédiat que les $U_i \cap X_f$ sont des ouverts affines (**I**, 1.3.6), et l'on peut donc aussi calculer la cohomologie $H^\bullet(X_f, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n})$ à l'aide du recouvrement $\mathfrak{U}|X_f = (U_i \cap X_f)$ (1.4.1). Il est immédiat que pour tout $f \in A_n$, la multiplication par f définit un homomorphisme $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) \to C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes (m+n)})$, d'où un homomorphisme $H^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes m}) \to H^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes (m+n)})$, ce qui établit la première assertion. D'autre part, pour $f \in A_n$ donné, il résulte de (**I**, 9.3.2) que l'on a un isomorphisme de complexes de $(A_*)_{(f)}$-modules

$$C^\bullet(\mathfrak{U}|X_f, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} (C^\bullet(\mathfrak{U}, \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}))_{(f)}$$

compte tenu de (**I**, 1.3.9, (ii)). Passant à la cohomologie de ces deux complexes, on en déduit l'isomorphisme (1.4.5.1), en se souvenant que le foncteur $M \rightsquigarrow M_{(f)}$ est exact dans la catégorie des A_*-modules gradués.

Corollaire **(1.4.6).** — *On suppose vérifiées les hypothèses de* (1.4.5) *et on suppose en outre que* $\mathscr{L} = \mathcal{O}_X$*. Si on pose* $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$*, alors, pour tout* $f \in A$*, on a un isomorphisme canonique* $H^\bullet(X_f, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} (H^\bullet(X, \mathscr{F}))_f$ *de* A_f*-modules.*

Corollaire **(1.4.7).** — *Soient* X *un schéma quasi-compact,* f *un élément de* $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

(i) *Supposons l'ouvert* X_f *affine. Alors, pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$*, tout* $i > 0$ *et tout* $\xi \in H^i(X, \mathscr{F})$*, il existe un entier* $n > 0$ *tel que* $f^n \xi = 0$.

(ii) *Inversement, supposons que* X_f *soit quasi-compact et que pour tout faisceau quasi-cohérent* $\mathscr{J}$ *d'idéaux de* $\mathcal{O}_X$ *et tout* $\zeta \in H^1(X, \mathscr{J})$*, il existe* $n > 0$ *tel que* $f^n \zeta = 0$*. Alors* X_f *est affine.*

(i) Si X_f est affine, on a $H^i(X_f, \mathscr{F}) = 0$ pour tout $i > 0$ (1.3.1), donc l'assertion résulte directement de (1.4.6).

(ii) En vertu du critère de Serre (**II**, 5.2.1), il suffit de prouver que pour tout Idéal quasi-cohérent $\mathscr{K}$ de $\mathcal{O}_X|X_f$, on a $H^1(X_f, \mathscr{K}) = 0$. Comme X_f est un ouvert quasi-compact dans un schéma quasi-compact X, il existe un Idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathcal{O}_X$ tel que $\mathscr{K} = \mathscr{J}|X_f$ (**I**, 9.4.2). En vertu de (1.4.6), on a $H^1(X_f, \mathscr{K}) = (H^1(X, \mathscr{J}))_f$, et l'hypothèse entraîne que le second membre est nul, d'où la conclusion.

Remarque **(1.4.8).** — On notera que (1.4.7, (i)) redonne une démonstration plus simple de la relation (**II**, 4.5.13.2).

Lemme **(1.4.9).** — *Soient* X *un schéma quasi-compact,* $\mathfrak{U}=(U_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *un recouvrement fini de* X *par des ouverts affines,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent. Le complexe de faisceaux* $\mathscr{C}^{\bullet}(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ *défini par le recouvrement* $\mathfrak{U}$ (G, II, 5.2) *est alors un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent.*

Il résulte des définitions (G, II, 5.2) que $\mathscr{C}^p(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ est somme directe des faisceaux images directes des $\mathscr{F}|U_{i_0\ldots i_p}$ par l'injection canonique $U_{i_0\ldots i_p}\rightarrow X$. Or, l'hypothèse que X est un schéma entraîne que ces injections sont des morphismes affines (**I**, 5.5.6), donc les $\mathscr{C}^p(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ sont quasi-cohérents (**II**, 1.2.6).

Proposition **(1.4.10).** — *Soit* $u: X\rightarrow Y$ *un morphisme séparé et quasi-compact. Pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$*, les* $R^q u_*(\mathscr{F})$ *sont des* $\mathcal{O}_Y$*-Modules quasi-cohérents.*

La question étant locale sur Y, on peut supposer Y affine. Alors X est réunion finie d'ouverts affines U_i $(1\leqslant i\leqslant n)$; soit $\mathfrak{U}$ le recouvrement (U_i). En outre, comme Y est un schéma, il résulte de (**I**, 5.5.10) que pour tout ouvert affine $V\subset Y$, l'injection canonique $u^{-1}(V)\rightarrow X$ est un morphisme affine; on en conclut ((1.4.1) et (G, II, 5.2)) que l'on a un isomorphisme canonique

(1.4.10.1) $$H^{\bullet}(u^{-1}(V),\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} H^{\bullet}(\Gamma(V,\mathscr{K}^{\bullet}))$$

où l'on a posé $\mathscr{K}^{\bullet}=u_*(\mathscr{C}^{\bullet}(\mathfrak{U},\mathscr{F}))$. En vertu de (1.4.9) et (**I**, 9.2.2), $\mathscr{K}^{\bullet}$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module quasi-cohérent; par ailleurs, il constitue un *complexe de faisceaux* puisqu'il en est ainsi de $\mathscr{C}^{\bullet}(\mathfrak{U},\mathscr{F})$. Il résulte alors de la définition de la cohomologie $\mathscr{H}^{\bullet}(\mathscr{K}^{\bullet})$ (G, II, 4.1) que cette dernière est formée de $\mathcal{O}_Y$-Modules quasi-cohérents (**I**, 4.1.1). Comme (pour V affine dans Y) le foncteur $\Gamma(V,\mathscr{G})$ est exact en $\mathscr{G}$ dans la catégorie des $\mathcal{O}_Y$-Modules quasi-cohérents, on a (G, II, 4.1)

(1.4.10.2) $$H^{\bullet}(\Gamma(V,\mathscr{K}^{\bullet}))=\Gamma(V,\mathscr{H}^{\bullet}(\mathscr{K}^{\bullet})).$$

Notons enfin qu'il résulte de la définition de l'homomorphisme canonique

$$H^{\bullet}(\mathfrak{U},\mathscr{F})\rightarrow H^{\bullet}(X,\mathscr{F})$$

donnée dans (G, II, 5.2), que si $V'\subset V$ est un second ouvert affine de Y, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^{\bullet}(u^{-1}(V),\mathscr{F}) & \xrightarrow{\sim} & H^{\bullet}(\Gamma(V,\mathscr{K}^{\bullet})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{\bullet}(u^{-1}(V'),\mathscr{F}) & \xrightarrow{\sim} & H^{\bullet}(\Gamma(V',\mathscr{K}^{\bullet})) \end{array}$$

est commutatif. On conclut donc de ce qui précède que les isomorphismes (1.4.10.1) définissent un isomorphisme de $\mathcal{O}_Y$-Modules

(1.4.10.3) $$R^{\bullet}u_*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^{\bullet}(\mathscr{K}^{\bullet})$$

et par suite $\mathrm{R}^{\boldsymbol{\cdot}}u_*(\mathscr{F})$ est quasi-cohérent. Il résulte en outre de (1.4.10.3), (1.4.10.2) et (1.4.10.1) que :

Corollaire **(1.4.11).** — *Sous les hypothèses de* (1.4.10), *pour tout ouvert affine* V *de* Y, *l'homomorphisme canonique*

$$\text{(1.4.11.1)} \qquad \mathrm{H}^q(u^{-1}(\mathrm{V}), \mathscr{F}) \to \Gamma(\mathrm{V}, \mathrm{R}^q u_*(\mathscr{F}))$$

est un isomorphisme pour tout $q \geqslant 0$.

Corollaire **(1.4.12).** — *Supposons vérifiées les hypothèses de* (1.4.10) *et supposons en outre que* Y *soit quasi-compact. Alors il existe un entier* $r>0$ *tel que pour tout* $\mathcal{O}_\mathrm{X}$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$ *et tout entier* $q>r$, *on ait* $\mathrm{R}^q u_*(\mathscr{F}) = 0$. *Si* Y *est affine, on peut prendre pour* r *un entier tel qu'il existe un recouvrement de* X *formé de* r *ouverts affines.*

Comme on peut recouvrir Y par un nombre fini d'ouverts affines, on est ramené à démontrer la seconde assertion, en vertu de (1.4.11). Or, si $\mathfrak{U}$ est un recouvrement de X par r ouverts affines, on a $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = 0$ pour $q>r$, puisque les cochaînes de $\mathrm{C}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ sont alternées; la conclusion résulte donc de (1.4.1).

Corollaire **(1.4.13).** — *Supposons vérifiées les hypothèses de* (1.4.10) *et en outre supposons que* $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ *soit affine. Alors, pour tout* $\mathcal{O}_\mathrm{X}$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$ *et tout* $f \in \mathrm{A}$, *on a*

$$\Gamma(\mathrm{Y}_f, \mathrm{R}^q u_*(\mathscr{F})) = (\Gamma(\mathrm{Y}, \mathrm{R}^q u_*(\mathscr{F})))_f$$

à un isomorphisme canonique près.

En effet, cela résulte de ce que $\mathrm{R}^q u_*(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_\mathrm{Y}$-Module quasi-cohérent (**I**, 1.3.7).

Proposition **(1.4.14).** — *Soient* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme séparé quasi-compact,* $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ *un morphisme affine. Pour tout* $\mathcal{O}_\mathrm{X}$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$, *l'homomorphisme canonique* $\mathrm{R}^p(g \circ f)_*(\mathscr{F}) \to g_*(\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F}))$ (**0**, 12.2.5.2) *est bijectif pour tout* p.

En effet, pour tout ouvert affine W de Z, $g^{-1}(\mathrm{W})$ est un ouvert affine de Y. L'homomorphisme de préfaisceaux définissant l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{R}^p(g \circ f)_*(\mathscr{F}) \to g_*(\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F}))$$

(**0**, 12.2.5) est donc bijectif en vertu de (1.4.11).

Proposition **(1.4.15).** — *Soient* $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme séparé de type fini,* $v : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$ *un morphisme plat de préschémas* ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.7.1); *soit* $u' = u_{(\mathrm{Y}')}$, *de sorte qu'on a le diagramme commutatif*

$$\text{(1.4.15.1)} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{X} & \xleftarrow{v'} & \mathrm{X}' = \mathrm{X}_{(\mathrm{Y}')} \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u'} \\ \mathrm{Y} & \xleftarrow[v]{} & \mathrm{Y}' \end{array} .$$

Alors, pour tout $\mathcal{O}_\mathrm{X}$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$, $\mathrm{R}^q u'_*(\mathscr{F}')$, *où* $\mathscr{F}' = v'^*(\mathscr{F}) = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Y}} \mathcal{O}_{\mathrm{Y}'}$, *est canoniquement isomorphe à* $\mathrm{R}^q u_*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Y}} \mathcal{O}_{\mathrm{Y}'} = v^*(\mathrm{R}^q u_*(\mathscr{F}))$ *pour tout* $q \geqslant 0$.

L'homomorphisme canonique $\rho : \mathscr{F} \to v'_*(v'^*(\mathscr{F}))$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 4.4.3.2) définit par fonctorialité un homomorphisme

(1.4.15.2) $$\mathrm{R}^q u_*(\mathscr{F}) \to \mathrm{R}^q u_*(v'_*(\mathscr{F}')).$$

D'autre part, on a, en posant $w = u \circ v' = v \circ u'$, les homomorphismes canoniques ($\mathbf{0}$, 12.2.5.1 et 12.2.5.2)

(1.4.15.3) $$\mathrm{R}^q u_*(v'_*(\mathscr{F}')) \to \mathrm{R}^q w_*(\mathscr{F}') \to v_*(\mathrm{R}^q u'_*(\mathscr{F}')).$$

Composant (1.4.15.3) et (1.4.15.2), on a un homomorphisme

$$\psi : \mathrm{R}^q u_*(\mathscr{F}) \to v_*(\mathrm{R}^q u'_*(\mathscr{F}'))$$

et finalement on en déduit l'homomorphisme canonique (dont la définition ne fait intervenir *aucune hypothèse* sur v)

(1.4.15.4) $$\psi^\sharp : v^*(\mathrm{R}^q u_*(\mathscr{F})) \to \mathrm{R}^q u'_*(\mathscr{F}')$$

dont il s'agit de prouver que c'est un isomorphisme lorsque v est *plat*. Il est clair que la question est locale sur Y et Y′ et l'on peut donc supposer que $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, $\mathrm{Y}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$; nous utiliserons en outre le

Lemme **(1.4.15.5).** — *Soient* $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *un homomorphisme d'anneaux,* $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$, $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *le morphisme correspondant à* φ, M *un* B*-module. Pour que le* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Module* $\widetilde{\mathrm{M}}$ *soit f-plat* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.7.1), *il faut et il suffit que* M *soit un* A*-module plat. En particulier, pour que le morphisme f soit plat, il faut et il suffit que* B *soit un* A*-module plat.*

En effet, cela résulte de la définition ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.7.1) et de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.3.3), compte tenu de (**I**, 1.3.4).

Cela étant, il résulte de (1.4.11.1) et des définitions des homomorphismes (1.4.15.3) (cf. **0**, 12.2.5) que ψ correspond alors au morphisme composé

$$\mathrm{H}^q(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\rho_q} \mathrm{H}^q(\mathrm{X}, v'_*(v'^*(\mathscr{F}))) \xrightarrow{\theta_q} \mathrm{H}^q(\mathrm{X}', v'^*(v'_*(v'^*(\mathscr{F})))) \xrightarrow{\sigma_q} \mathrm{H}^q(\mathrm{X}', v'^*(\mathscr{F}))$$

où ρ_q et σ_q sont les homomorphismes correspondant dans la cohomologie aux morphismes canoniques ρ et $\sigma : v'^*(v'_*(\mathscr{G}')) \to \mathscr{G}'$, et θ_q est le φ-morphisme ($\mathbf{0}$, 12.1.3.1) relatif au $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module $v'_*(v'^*(\mathscr{F}))$. Mais par fonctorialité de θ_q, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^q(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \arrow[r, "\rho_q"] \arrow[d, "\theta_q"'] & \mathrm{H}^q(\mathrm{X}, v'_*(v'^*(\mathscr{F}))) \arrow[d, "\theta_q"] \\ \mathrm{H}^q(\mathrm{X}', v'^*(\mathscr{F})) \arrow[r, "v'^*(\rho_q)"'] & \mathrm{H}^q(\mathrm{X}', v'^*(v'_*(v'^*(\mathscr{F})))) \end{tikzcd}$$

et comme par définition ($\mathbf{0}_\text{I}$, 4.4.3), $v'^*(\rho)$ est l'inverse de σ, on voit que le morphisme composé considéré plus haut n'est autre finalement que θ_q; $\psi^\#$ est par suite le B-homomorphisme associé $\mathrm{H}^q(\mathrm{X}, \mathscr{F})\otimes_\mathrm{A}\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{H}^q(\mathrm{X}', \mathscr{F}')$. Comme u est de type fini, X est réunion finie d'ouverts affines U_i $(1\leqslant i\leqslant r)$; soit $\mathfrak{U}$ le recouvrement (U_i). D'ailleurs v est un morphisme affine, donc il en est de même de v' (**II**, 1.6.2, (iii)), et les $\mathrm{U}'_i=v'^{-1}(\mathrm{U}_i)$ forment par suite un recouvrement ouvert affine $\mathfrak{U}'$ de X'. On sait alors (**0**, 12.1.4.2) que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) & \xrightarrow{\theta_q} & \mathrm{H}^q(\mathfrak{U}', \mathscr{F}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^q(\mathrm{X}, \mathscr{F}) & \xrightarrow[\theta_q]{} & \mathrm{H}^q(\mathrm{X}', \mathscr{F}') \end{array}$$

est commutatif, et les flèches verticales sont des isomorphismes puisque X et X' sont des schémas (1.4.1). Il suffit par suite de prouver que le φ-morphisme canonique $\theta_q:\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\rightarrow\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}', \mathscr{F}')$ est tel que le B-homomorphisme associé :

$$\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\otimes_\mathrm{A}\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}', \mathscr{F}')$$

soit un isomorphisme. Pour toute suite $\mathbf{s}=(i_k)_{0\leqslant k\leqslant p}$ de $p+1$ indices de $[1, r]$, posons $\mathrm{U}_\mathbf{s}=\bigcap_{k=0}^{p}\mathrm{U}_{i_k}$, $\mathrm{U}'_\mathbf{s}=\bigcap_{k=0}^{p}\mathrm{U}'_{i_k}=v'^{-1}(\mathrm{U}_\mathbf{s})$, $\mathrm{M}_\mathbf{s}=\Gamma(\mathrm{U}_\mathbf{s}, \mathscr{F})$, $\mathrm{M}'_\mathbf{s}=\Gamma(\mathrm{U}'_\mathbf{s}, \mathscr{F}')$. L'application canonique $\mathrm{M}_\mathbf{s}\otimes_\mathrm{A}\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{M}'_\mathbf{s}$ est un isomorphisme (**I**, 1.6.5), donc l'application canonique $\mathrm{C}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\otimes_\mathrm{A}\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{C}^p(\mathfrak{U}', \mathscr{F}')$ est un isomorphisme, par lequel $d\otimes 1$ s'identifie à l'opérateur cobord $\mathrm{C}^p(\mathfrak{U}', \mathscr{F}')\rightarrow\mathrm{C}^{p+1}(\mathfrak{U}', \mathscr{F}')$. Comme B est un A-module *plat*, il résulte aussitôt de la définition des modules de cohomologie que l'application canonique $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\otimes_\mathrm{A}\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{H}^q(\mathfrak{U}', \mathscr{F}')$ est un isomorphisme ($\mathbf{0}_\text{I}$, 6.1.1). Ce résultat sera généralisé plus tard (§ 6).

Corollaire (**1.4.16**). — *Soient* A *un anneau,* X *un* A*-schéma de type fini,* B *une* A*-algèbre fidèlement plate sur* A. *Pour que* X *soit affine, il faut et il suffit que* $\mathrm{X}\otimes_\mathrm{A}\mathrm{B}$ *le soit.*

La condition est évidemment nécessaire (**I**, 3.2.2); montrons qu'elle est suffisante. Comme X est séparé sur A et que le morphisme Spec(B)$\rightarrow$Spec(A) est plat, il résulte de (1.4.1) que l'on a

(**1.4.16.1**) $$\mathrm{H}^i(\mathrm{X}\otimes_\mathrm{A}\mathrm{B}, \mathscr{F}\otimes_\mathrm{A}\mathrm{B})=\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathscr{F})\otimes_\mathrm{A}\mathrm{B}$$

pour tout $i\geqslant 0$ et tout $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-Module quasi-cohérent $\mathscr{F}$. Si $\mathrm{X}\otimes_\mathrm{A}\mathrm{B}$ est affine, le premier membre de (1.4.16.1) est nul pour $i=1$, donc il en est de même de $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathscr{F})$ puisque B est un A-module fidèlement plat. Comme X est un schéma quasi-compact, on conclut par le critère de Serre (**II**, 5.2.1).

Proposition (**1.4.17**). — *Soient* X *un préschéma,* $0\rightarrow\mathscr{F}\xrightarrow{u}\mathscr{G}\xrightarrow{v}\mathscr{H}\rightarrow 0$ *une suite exacte de* $\mathscr{O}_\mathrm{X}$*-Modules. Si* $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{H}$ *sont quasi-cohérents, il en est de même de* $\mathscr{G}$.

La question étant locale sur X, on peut supposer $X = \mathrm{Spec}(A)$ affine et il suffit alors de prouver que $\mathscr{G}$ vérifie les conditions d 1) et d 2) de (**I**, 1.4.1) (avec $V = X$). La vérification de d 2) est immédiate, car si $t \in \Gamma(X, \mathscr{G})$ a une restriction nulle à $D(f)$, il en est de même de son image $v(t) \in \Gamma(X, \mathscr{H})$; il y a donc $m > 0$ tel que $f^m v(t) = v(f^m t) = 0$ (**I**, 1.4.1), et comme Γ est exact à gauche, $f^m t = u(s)$, où $s \in \Gamma(X, \mathscr{F})$; comme u est injectif, la restriction de s à $D(f)$ est nulle, d'où (**I**, 1.4.1) l'existence d'un entier $n > 0$ tel que $f^n s = 0$; on en déduit finalement $f^{m+n} t = u(f^n s) = 0$.

Vérifions maintenant d 2), et soit $t' \in \Gamma(D(f), \mathscr{G})$; comme $\mathscr{H}$ est quasi-cohérent, il existe un entier m tel que $f^m v(t') = v(f^m t')$ se prolonge en une section $z \in \Gamma(X, \mathscr{H})$ (**I**, 1.4.1). Mais en vertu de (1.3.1) (ou de (**I**, 5.1.9.2)) appliqué au $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathscr{F}$, la suite $\Gamma(X, \mathscr{G}) \to \Gamma(X, \mathscr{H}) \to 0$ est exacte, donc il existe $t \in \Gamma(X, \mathscr{G})$ tel que $z = v(t)$; on voit donc que $v(f^m t' - t'') = 0$, en désignant par t'' la restriction de t à $D(f)$; on a donc $f^m t' - t'' = u(s')$, où $s' \in \Gamma(D(f), \mathscr{F})$. Mais comme $\mathscr{F}$ est quasi-cohérent, il existe un entier $n > 0$ tel que $f^n s'$ se prolonge en une section $s \in \Gamma(X, \mathscr{F})$; comme $f^{m+n} t' - f^n t'' = u(f^n s')$, on voit que $f^{m+n} t'$ est la restriction à $D(f)$ de la section $f^n t + u(f^n s) \in \Gamma(X, \mathscr{G})$, ce qui achève la démonstration.

§ 2. ÉTUDE COHOMOLOGIQUE DES MORPHISMES PROJECTIFS

2.1. Calculs explicites de certains groupes de cohomologie.

(2.1.1) Soient X un préschéma, $\mathscr{L}$ un $\mathcal{O}_X$-Module inversible; considérons l'anneau gradué ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.4.6)

(2.1.1.1) $$S = \Gamma_*(X, \mathscr{L}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n}).$$

Soit $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ une famille finie d'éléments *homogènes* de S, soit $f_i \in S_{d_i}$; posons $U_i = X_{f_i}$, $U = \bigcup_i U_i$, et désignons par $\mathfrak{U}$ le recouvrement (U_i) de U. Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathscr{F}$, on posera

(2.1.1.2) $$H^{\bullet}(U, \mathscr{F}(*)) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^{\bullet}(U, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n})$$

(2.1.1.3) $$H^{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}(*)) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}).$$

Les groupes abéliens (2.1.1.2) et (2.1.1.3) sont *bigradués*, en prenant

$$(H^{\bullet}(U, \mathscr{F}(*)))_{mn} = H^m(U, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n})$$

et une définition analogue pour (2.1.1.3). Pour le deuxième degré, il est clair que ces groupes sont des S-modules gradués, comme il résulte par exemple du fait que $\mathscr{F} \rightsquigarrow H^m(U, \mathscr{F})$ et $\mathscr{F} \rightsquigarrow H^m(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ sont des foncteurs.

(2.1.2) Considérons maintenant le S-module gradué ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.4.6)

(2.1.2.1) $$M = \Gamma_*(\mathscr{L}, \mathscr{F}) = H^0(X, \mathscr{F}(*)) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \Gamma(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}).$$

Si X est un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien, ou un schéma quasi-compact, il résulte de (**I**, 9.3.1) qu'en posant comme d'ordinaire $U_{i_0 i_1 \dots i_p} = \bigcap_{k=0}^{p} U_{i_k}$, on a, à un isomorphisme canonique près,

$$\Gamma(U_{i_0 i_1 \dots i_p}, \mathscr{F}(*)) = H^0(U_{i_0 i_1 \dots i_p}, \mathscr{F}(*)) = M_{f_{i_0} f_{i_1} \dots f_{i_p}}.$$

On peut encore, avec les notations de (1.2.2), identifier $M_{f_{i_0} f_{i_1} \dots f_{i_p}}$ à $\varinjlim_n M^{(n)}_{i_0 i_1 \dots i_p}$. Cette identification est un isomorphisme de S-modules *gradués*, si l'on définit le degré d'un élément homogène $z \in \varinjlim_n M^{(n)}_{i_0 i_1 \dots i_p}$ de la façon suivante : z est l'image canonique d'un élément homogène $x \in M^{(n)}_{i_0 i_1 \dots i_p} = M$, de degré m; on prend alors pour degré de z le nombre $m - n(d_{i_0} + d_{i_1} + \dots + d_{i_p})$. Tenant compte de la définition des homomorphismes $\varphi_{kh} : M^{(h)}_{i_0 i_1 \dots i_p} \to M^{(k)}_{i_0 i_1 \dots i_p}$ (1.2.2), on voit aussitôt que cette définition ne dépend pas du « représentant » x de z que l'on a considéré. Désignant comme dans (1.2.2) par $C^p_n(M)$ l'ensemble des applications alternées de $[1, r]^{p+1}$ dans M (pour tout n), on définit de la même manière que ci-dessus une structure de S-module *gradué* sur $\varinjlim_n C^p_n(M)$; on a encore comme dans (1.2.2)

$$C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}(*)) = \varinjlim_n C^p_n(M) \tag{2.1.2.2}$$

l'isomorphisme des deux membres *respectant les degrés*. On a alors, comme dans (1.2.2)

$$C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}(*)) = C^{p+1}((\mathbf{f}), M) = \varinjlim_n K^{p+1}(\mathbf{f}^n, M) \tag{2.1.2.3}$$

l'isomorphisme *conservant les degrés* : le degré d'un élément de $\varinjlim_n K^{p+1}(\mathbf{f}^n, M)$, image canonique d'une cochaîne $g \in K^{p+1}(\mathbf{f}^n, M)$ dont les valeurs $g(i_0, \dots, i_p)$ sont dans une *même* composante homogène M_m de M, est $m - n(d_{i_0} + \dots + d_{i_p})$, et il est indépendant du choix de cette cochaîne comme représentant de l'élément considéré.

Comme les isomorphismes précédents sont compatibles avec les opérateurs cobords, on en conclut, comme dans (1.2.2) que l'on a :

Proposition (**2.1.3**). — *Soit* X *un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien, ou un schéma quasi-compact. Il existe un isomorphisme canonique fonctoriel en* $\mathscr{F}$

$$H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}(*)) \simeq H^{p+1}((\mathbf{f}), M) \quad \textit{pour tout } p \geq 1. \tag{2.1.3.1}$$

On a en outre une suite exacte fonctorielle en $\mathscr{F}$

$$0 \to H^0((\mathbf{f}), M) \to M \to H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}(*)) \to H^1((\mathbf{f}), M) \to 0. \tag{2.1.3.2}$$

De plus, tous les homomorphismes introduits sont de degré 0 *pour les structures de* S-*modules gradués* (S *étant l'anneau* (2.1.1.1)).

Corollaire **(2.1.4)**. — *Si* X *est un schéma quasi-compact et si les* $U_i = X_{f_i}$ *sont affines, il existe un isomorphisme canonique fonctoriel en* $\mathscr{F}$, *de degré* 0,

$$H^p(U, \mathscr{F}(*)) \xrightarrow{\sim} H^{p+1}((\mathbf{f}), M) \qquad \textit{pour } p \geqslant 1 \tag{2.1.4.1}$$

et une suite exacte fonctorielle en $\mathscr{F}$

$$0 \to H^0((\mathbf{f}), M) \to M \to H^0(U, \mathscr{F}(*)) \to H^1((\mathbf{f}), M) \to 0 \tag{2.1.4.2}$$

où tous les homomorphismes sont de degré 0.

Il suffit en effet d'appliquer (1.4.1) au résultat de (2.1.3).

La proposition « locale » analogue à (2.1.3) est la suivante :

Proposition **(2.1.5)**. — *Soient* S *un anneau gradué à degrés positifs,* f_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ *un élément homogène de* S_+ *de degré* d_i, M *un* S-*module gradué. Soit* $X = \mathrm{Proj}(S)$ *le spectre premier homogène de* S *et posons* $U_i = D_+(f_i)$, $U = \bigcup_i U_i$, $H^{\bullet}(U, \widetilde{M}(*)) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^{\bullet}(U, (M(n))^{\sim})$. *Il existe alors des isomorphismes canoniques fonctoriels en* M, *de degré* 0 *pour les structures de* S-*module gradué*

$$H^p(U, \widetilde{M}(*)) \xrightarrow{\sim} H^{p+1}((\mathbf{f}), M) \qquad \textit{pour } p \geqslant 1 \tag{2.1.5.1}$$

et une suite exacte fonctorielle en M

$$0 \to H^0((\mathbf{f}), M) \to M \to H^0(U, \widetilde{M}(*)) \to H^1((\mathbf{f}), M) \to 0 \tag{2.1.5.2}$$

où tous les homomorphismes sont de degré 0.

En effet, on a $\Gamma(U_{i_0 i_1 \dots i_p}, (M(n))^{\sim}) = (M_{f_{i_0} \dots f_{i_p}})_n$ par définition (**II**, 2.5.2), donc $\Gamma(U_{i_0 i_1 \dots i_p}, \widetilde{M}(*)) = M_{f_{i_0} \dots f_{i_p}}$. Le reste du raisonnement est alors le même que pour démontrer (2.1.4), tenant compte de ce que X est un schéma.

Remarques **(2.1.6)**. — (i) Sous les conditions de (2.1.5), les foncteurs $\Gamma(U_{i_0 i_1 \dots i_p}, \widetilde{M}(*))$ sont exacts en M, en vertu de ($\mathbf{0_I}$, 1.3.2); le même raisonnement que dans (1.2.5) montre alors que si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte de S-modules gradués (où les homomorphismes sont de degré 0), on a des diagrammes commutatifs pour tout $p \geqslant 0$

$$\begin{tikzcd} H^p(U, \widetilde{M}''(*)) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & H^{p+1}(U, \widetilde{M}'(*)) \arrow[d] \\ H^{p+1}((\mathbf{f}), M'') \arrow[r, "\partial"'] & H^{p+2}((\mathbf{f}), M') \end{tikzcd} \tag{2.1.6.1}$$

(ii) La prop. (2.1.5) sera surtout intéressante lorsque S sera une A-algèbre engendrée par un nombre fini d'éléments de degré 1, A étant supposé noethérien; en effet, lorsqu'il en est ainsi, *tout* $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent est de la forme $\widetilde{M}$ (**II**, 2.7.7).

(2.1.7) Nous allons appliquer (2.1.5) dans le cas $S = A[T_0, \ldots, T_r]$, où A est un anneau quelconque, les T_i sont des indéterminées, avec $M = S$ et $f_i = T_i$. On est donc essentiellement ramené à calculer $H^{\bullet}((\mathbf{T}), S)$, où $\mathbf{T} = (T_i)_{0 \leqslant i \leqslant r}$.

Lemme **(2.1.8)**. — *Si* $S = A[T_0, \ldots, T_r]$, *on a, avec* $\mathbf{T} = (T_i)_{0 \leqslant i \leqslant r}$

$$H^i(\mathbf{T}^n, S) = 0 \qquad \textit{si } i \neq r+1 \tag{2.1.8.1}$$

$$H^{r+1}(\mathbf{T}^n, S) = S/(\mathbf{T}^n). \tag{2.1.8.2}$$

Le A-*module* $H^{r+1}(\mathbf{T}^n, S)$ *a donc une base sur* A *formée des classes mod.* $(\mathbf{T}^n)$ *des monômes* $\mathbf{T}_{\mathbf{p}} = T_0^{p_0} \ldots T_r^{p_r}$ *avec* $\mathbf{p} = (p_0, \ldots, p_r)$, $0 \leqslant p_i < n$ *pour tout* i.

C'est une conséquence immédiate de (1.1.3.5) et de la prop. (1.1.4), dont les hypothèses sont trivialement vérifiées.

(2.1.9) Passons à la limite inductive sur n; les relations (2.1.8.1) donnent $H^i((\mathbf{T}), S) = 0$ pour $i \neq r+1$. Pour $i = r+1$, le système inductif est formé des $S/(\mathbf{T}^n)$, l'homomorphisme $\varphi_{nm} : S/(\mathbf{T}^n) \to S/(\mathbf{T}^m)$ pour $0 \leqslant n \leqslant m$ étant la multiplication par $(T_0 \ldots T_r)^{m-n}$. Pour $n \geqslant \sup(p_i)_{0 \leqslant i \leqslant r}$, désignons par $\xi_{\mathbf{p}}^{(n)} = \xi_{p_0 \ldots p_r}^{(n)}$ la classe de $T_0^{n-p_0} \ldots T_r^{n-p_r}$ mod. $(\mathbf{T}^n)$; on a alors $\varphi_{nm}(\xi_{\mathbf{p}}^{(n)}) = \xi_{\mathbf{p}}^{(m)}$, et ces éléments ont donc même image canonique $\xi_{\mathbf{p}} = \xi_{p_0 \ldots p_r}$ dans la limite inductive $H^{r+1}((\mathbf{T}), S)$; en vertu de la définition du degré donnée dans (2.1.2), le degré de $\xi_{\mathbf{p}}$ est donc égal à $-|\mathbf{p}| = -(p_0 + p_1 + \ldots + p_r)$. Il est clair que les $\xi_{\mathbf{p}}^{(n)}$ pour $0 < p_i \leqslant n$ et $0 \leqslant i \leqslant r$ forment une base de $S/(\mathbf{T}^n)$. On déduit donc aussitôt de (2.1.8) :

Corollaire **(2.1.10)**. — *Avec les notations de* (2.1.8), *on a*

$$H^i((\mathbf{T}), S) = 0 \qquad \textit{pour } i \neq r+1 \tag{2.1.10.1}$$

et $H^{r+1}((\mathbf{T}), S)$ *est un* A-*module libre dont une base est formée des éléments* $\xi_{p_0 \ldots p_r}$ *tels que* $p_i > 0$ *pour* $0 \leqslant i \leqslant r$.

Remarque **(2.1.11)**. — Soit N un A-module quelconque et soit $M = S \otimes_A N$; le raisonnement de (2.1.8) montre que l'on a plus généralement

$$H^i(\mathbf{T}^n, M) = 0 \qquad \textit{si } i \neq r+1 \tag{2.1.11.1}$$

$$H^{r+1}(\mathbf{T}^n, M) = (S/(\mathbf{T}^n)) \otimes_A N \tag{2.1.11.2}$$

car la dernière formule se déduit directement de (1.1.3.5), et d'autre part il est clair que $M/(T_0^n M + \ldots + T_{i-1}^n M)$ s'identifie au produit tensoriel $(S/(T_0^n S + \ldots + T_{i-1}^n S)) \otimes_A N$, l'idéal $T_0^n S + \ldots + T_{i-1}^n S$ étant facteur direct dans le A-module S; cela permet d'appliquer (1.1.4) à M, et on obtient ainsi (2.1.11.1).

Combinant (2.1.10) et (2.1.5), on obtient :

Proposition **(2.1.12)**. — *Soient* A *un anneau,* r *un entier* > 0, *et* $X = \mathbf{P}_A^r$ (**II**, 4.1.1). *Alors :*

(i) *On a* $H^i(X, \mathcal{O}_X(*)) = 0$ *pour* $i \neq 0, r$.

(ii) *L'homomorphisme canonique* $\alpha : S \to H^0(X, \mathcal{O}_X(*))$ (**II**, 2.6.2) *est bijectif.*

(iii) $\mathrm{H}^r(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X}(*))$ *est un* A-*module libre ayant une base formée d'éléments* $\xi_{p_0 \ldots p_r}$, *où* $p_i > 0$ *pour* $0 \leqslant i \leqslant r$, $\xi_{p_0 \ldots p_r}$ *étant de degré* $-|\mathbf{p}| = -(p_0 + \ldots + p_r)$, *et le produit* $\mathrm{T}_i \xi_{p_0 \ldots p_r}$ *étant* $\xi_{p_0, \ldots, p_i - 1, \ldots, p_r}$.

Remarquons en effet que, dans la suite exacte (2.1.5.2) appliquée à

$$\mathrm{M} = \mathrm{S} = \mathrm{A}[\mathrm{T}_0, \ldots, \mathrm{T}_r],$$

on a $\mathrm{H}^0((\mathbf{T}), \mathrm{S}) = 0$ et $\mathrm{H}^1((\mathbf{T}), \mathrm{S}) = 0$ d'après (2.1.10.1), et que la prop. (2.1.5) s'applique à $\mathrm{U} = \mathrm{X}$, puisque X est réunion des $\mathrm{D}_+(\mathrm{T}_i)$ (**II**, 2.3.14). Il reste à identifier l'application $\mathrm{S} \to \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X}(*))$ de la suite exacte (2.1.5.1) et l'application canonique α; mais cela résulte de l'identification canonique de $\mathrm{H}^0(\mathrm{U}, \mathcal{O}_\mathrm{X}(*))$ et de $\mathrm{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_\mathrm{X}(*))$.

Corollaire (**2.1.13**). — *Les seules valeurs de* (i, n) *pour lesquelles on puisse avoir* $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X}(n)) \neq 0$ *sont les suivantes :* $i = 0$ *et* $n \geqslant 0$, $i = r$ et $n \leqslant -(r+1)$.

On notera que si $\mathrm{A} \neq 0$, on a effectivement $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X}(n)) \neq 0$ pour les couples énumérés dans (2.1.13); cela résulte de (2.1.12), puisque S_n est alors $\neq 0$ pour tous les degrés $n \geqslant 0$.

Dans les applications qui seront faites dans ce chapitre, nous utiliserons surtout le résultat moins précis :

Corollaire (**2.1.14**). — *Les* A-*modules* $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X}(n))$ *sont libres de type fini; si* $i > 0$, *ils sont nuls pour* $n > 0$.

Proposition (**2.1.15**). — *Soient* Y *un préschéma,* $\mathcal{E}$ *un* $\mathcal{O}_\mathrm{Y}$-*Module localement libre de rang* $r+1$, $\mathrm{X} = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ *le fibré projectif défini par* E, $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *le morphisme structural. Les seules valeurs de i et n pour lesquelles* $\mathrm{R}^i f_*(\mathcal{O}_\mathrm{X}(n)) \neq 0$ *sont* $i = 0$ *et* $n \geqslant 0$, $i = r$ *et* $n \leqslant -(r+1)$; *en outre, l'homomorphisme canonique* (**II**, 3.3.2)

$$\alpha : \mathbf{S}_{\mathcal{O}_\mathrm{Y}}(\mathcal{E}) \to \mathbf{\Gamma}_*(\mathcal{O}_\mathrm{X}) = \mathrm{R}^0 f_*(\mathcal{O}_\mathrm{X}(*)) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} f_*(\mathcal{O}_\mathrm{X}(n))$$

est un isomorphisme.

La question étant locale sur Y, on peut supposer Y affine d'anneau A et $\mathcal{E} = \widetilde{\mathrm{E}}$, où $\mathrm{E} = \mathrm{A}^{r+1}$; on est alors immédiatement ramené à (2.1.12), compte tenu de (1.4.11).

Remarque (**2.1.16**). — Nous compléterons plus tard les résultats de (2.1.15) en démontrant les propositions suivantes : posons $\boldsymbol{\omega} = f^*(\overset{r+1}{\wedge} \mathcal{E})(-r-1)$, qui est un $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Module inversible. Alors :

(i) On a un isomorphisme canonique

(**2.1.16.1**) $$\rho : \mathrm{R}^r f_*(\boldsymbol{\omega}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_\mathrm{Y}.$$

(ii) L'accouplement par cup-produit (**0**, 12.2.2)

(**2.1.16.2**) $$\mathrm{R}^r f_*(\mathcal{O}_\mathrm{X}(n)) \times \mathrm{R}^0 f_*(\boldsymbol{\omega}(-n)) \to \mathrm{R}^r f_*(\boldsymbol{\omega})$$

composé avec l'isomorphisme ρ^{-1}, définit un *isomorphisme* de $\mathrm{R}^r f_*(\mathcal{O}_\mathrm{X}(n))$ sur le *dual* du $\mathcal{O}_\mathrm{Y}$-Module localement libre

$$\mathrm{R}^0 f_*(\boldsymbol{\omega}(-n)) = (\overset{r+1}{\wedge} \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Y}} (\mathbf{S}_{\mathcal{O}_\mathrm{Y}}(\mathcal{E}))_{-n}.$$

2.2. Le théorème fondamental des morphismes projectifs.

Théorème **(2.2.1)** (Serre). — *Soient* Y *un préschéma noethérien,* $f: X \to Y$ *un morphisme propre,* $\mathscr{L}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible ample pour* f. *Pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module* $\mathscr{F}$, *posons* $\mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{L}^{\otimes n}$ *pour tout* $n \in \mathbf{Z}$. *Alors, pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent* $\mathscr{F}$:

(i) *Les* $R^q f_*(\mathscr{F})$ *sont des* $\mathcal{O}_Y$*-Modules cohérents.*

(ii) *Il existe un entier* N *tel que pour* $n \geqslant N$, *on ait* $R^q f_*(\mathscr{F}(n)) = 0$ *pour tout* $q > 0$.

(iii) *Il existe un entier* N *tel que, pour* $n \geqslant N$, *l'homomorphisme canonique* $f^*(f_*(\mathscr{F}(n))) \to \mathscr{F}(n)$ *soit surjectif.*

Notons d'abord que si le théorème est vrai quand on y remplace $\mathscr{L}$ par $\mathscr{L}^{\otimes d}$ $(d>0)$, il est vrai sous sa forme initiale. En effet, on peut alors écrire $\mathscr{F}(n) = (\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes r}) \otimes \mathscr{L}^{\otimes hd}$ avec un $h > 0$ et $0 \leqslant r < d$, et par hypothèse pour chaque r il y a un entier N_r tel que pour $h \geqslant N_r$ les propriétés (ii) et (iii) aient lieu pour le $\mathcal{O}_X$-Module $\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes r}$; prenant pour N le plus grand des dN_r, (ii) et (iii) auront lieu pour $n \geqslant N$. On peut donc supposer $\mathscr{L}$ *très ample* relativement à f (**II**, 4.6.11); il existe par suite une Y-immersion ouverte dominante $i: X \to P$, où $P = \mathrm{Proj}(\mathscr{S})$, où $\mathscr{S}$ est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre quasi-cohérente graduée à degrés positifs, dans laquelle $\mathscr{S}_1$ est de type fini et engendre $\mathscr{S}$; en outre, $\mathscr{L}$ est isomorphe à $i^*(\mathcal{O}_P(1))$ (**II**, 4.4.7). Mais comme f est propre, il en est de même de i (**II**, 5.4.4), donc i est un *isomorphisme* $X \xrightarrow{\sim} P$. On peut donc se borner au cas où $X = \mathrm{Proj}(\mathscr{S})$ et $\mathscr{L} = \mathcal{O}_X(1)$. Le th. (2.2.1) est alors conséquence de la

Proposition **(2.2.2)**. — *Soient* A *un anneau noethérien,* S *une* A*-algèbre graduée à degrés positifs, dans laquelle* S_1 *est un* A*-module ayant un système de* $r+1$ *générateurs, et qui engendre l'algèbre* S. *Soit* $X = \mathrm{Proj}(S)$. *Pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent* $\mathscr{F}$:

(i) *Les* A*-modules* $H^q(X, \mathscr{F})$ *sont de type fini.*

(ii) *On a* $H^q(X, \mathscr{F}) = 0$ *pour* $q > r$.

(iii) *Il existe un entier* N *tel que pour* $n \geqslant N$, *on ait* $H^q(X, \mathscr{F}(n)) = 0$ *pour tout* $q > 0$.

(iv) *Il existe un entier* N *tel que pour* $n \geqslant N$, $\mathscr{F}(n)$ *soit engendré par ses sections au-dessus de* X.

Montrons d'abord comment (2.2.2) entraîne (2.2.1) : dans (2.2.1) (ramené au cas particulier $X = \mathrm{Proj}(\mathscr{S})$ considéré ci-dessus), Y est quasi-compact, donc peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts affines, d'anneaux noethériens, tels que la restriction de $\mathscr{S}_1$ à chacun de ces ouverts U_α soit engendrée par un nombre fini de sections de $\mathscr{S}_1$ au-dessus de U_α. Si on suppose (2.2.2) démontré, il suffira alors de prendre pour N dans les parties (ii) et (iii) de (2.2.1) le plus grand des entiers analogues correspondant aux U_α (tenant compte de (1.4.11) et de (**II**, 3.4.7)).

Pour prouver (2.2.2), remarquons que X s'identifie à un sous-schéma fermé de $P = \mathbf{P}_A^r$ (**II**, 3.6.2); en outre, si $j: X \to P$ est l'injection canonique, $j_*(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_P$-Module cohérent et on a $j_*(\mathscr{F}(n)) = (j_*(\mathscr{F}))(n)$ (**II**, 3.4.5 et 3.5.2). Compte tenu de (G, **II**, cor. du th. 4.9.1), on est donc ramené à prouver (2.2.2) dans le cas particulier où $X = \mathbf{P}_A^r$ et $S = A[T_0, \ldots, T_r]$. Comme X est recouvert par les ouverts affines $D_+(T_i)$ en nombre $r+1$, (ii) résulte de (1.4.12). Notons d'autre part que (iv) a déjà été démontré (**II**, 2.7.9).

Nous allons prouver simultanément (i) et (iii). Notons que ces assertions sont vraies pour $\mathcal{F}=\mathcal{O}_X(m)$ (2.1.13); elles le sont donc aussi lorsque $\mathcal{F}$ est somme directe d'un nombre fini de $\mathcal{O}_X$-Modules de la forme $\mathcal{O}_X(m_j)$. D'autre part, (i) et (iii) sont vraies trivialement pour $q>r$ en vertu de (ii). Nous allons procéder par *récurrence descendante* sur q. On sait que $\mathcal{F}$ est isomorphe à un quotient d'une somme directe $\mathcal{E}$ d'un nombre fini de faisceaux $\mathcal{O}_X(m_j)$ (**II**, 2.7.10); autrement dit, on a une suite exacte $0\rightarrow\mathcal{R}\rightarrow\mathcal{E}\rightarrow\mathcal{F}\rightarrow 0$, où $\mathcal{R}$ est cohérent ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.3) et où $\mathcal{E}$ vérifie (i) et (iii). Comme $\mathcal{F}(n)$ est un foncteur exact en $\mathcal{F}$, on a aussi la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{R}(n) \rightarrow \mathcal{E}(n) \rightarrow \mathcal{F}(n) \rightarrow 0$$

pour tout $n\in\mathbf{Z}$. On en déduit la suite exacte de cohomologie

$$H^{q-1}(X, \mathcal{E}(n)) \rightarrow H^{q-1}(X, \mathcal{F}(n)) \rightarrow H^q(X, \mathcal{R}(n)).$$

Comme $\mathcal{E}(n)$ est somme directe des $\mathcal{O}_X(n+m_j)$ (**II**, 2.5.14), $H^{q-1}(X, \mathcal{E}(n))$ est de type fini, et il en est de même de $H^q(X, \mathcal{R}(n))$ par l'hypothèse de récurrence; comme A est noethérien, on en conclut que $H^{q-1}(X, \mathcal{F}(n))$ est de type fini pour tout $n\in\mathbf{Z}$, et en particulier pour $n=0$. D'autre part, par l'hypothèse de récurrence, il existe un entier N tel que pour $n\geqslant N$ on ait $H^q(X, \mathcal{R}(n))=0$; par ailleurs, on peut supposer aussi N choisi tel que $H^{q-1}(X, \mathcal{E}(n))=0$ pour $n\geqslant N$, puisque $\mathcal{E}$ vérifie (iii); on en conclut que $H^{q-1}(X, \mathcal{F}(n))=0$ pour $n\geqslant N$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire (**2.2.3**). — *Sous les hypothèses de* (2.2.1), *soit* $\mathcal{F}\rightarrow\mathcal{G}\rightarrow\mathcal{H}$ *une suite exacte de* $\mathcal{O}_X$*-Modules cohérents. Il existe alors un entier* N *tel que pour* $n\geqslant N$, *la suite*

$$f_*(\mathcal{F}(n)) \rightarrow f_*(\mathcal{G}(n)) \rightarrow f_*(\mathcal{H}(n))$$

soit exacte.

Soient $\mathcal{F}'$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}''$ le noyau, l'image et le conoyau de $\mathcal{F}\rightarrow\mathcal{G}$; $\mathcal{G}'$ est le noyau et $\mathcal{G}''$ l'image de $\mathcal{G}\rightarrow\mathcal{H}$, soit $\mathcal{H}''$ le conoyau de cet homomorphisme; tous ces $\mathcal{O}_X$-Modules sont cohérents ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.4). Comme $\mathcal{F}(n)$ est un foncteur exact en $\mathcal{F}$, il suffit de prouver que pour n assez grand, chacune des suites

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow f_*(\mathcal{F}'(n)) \rightarrow f_*(\mathcal{F}(n)) \rightarrow f_*(\mathcal{G}'(n)) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow f_*(\mathcal{G}'(n)) \rightarrow f_*(\mathcal{G}(n)) \rightarrow f_*(\mathcal{G}''(n)) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow f_*(\mathcal{G}''(n)) \rightarrow f_*(\mathcal{H}(n)) \rightarrow f_*(\mathcal{H}''(n)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

est exacte; par suite, on peut supposer que $0\rightarrow\mathcal{F}\rightarrow\mathcal{G}\rightarrow\mathcal{H}\rightarrow 0$ est exacte. On a alors la suite exacte de cohomologie

$$0 \rightarrow f_*(\mathcal{F}(n)) \rightarrow f_*(\mathcal{G}(n)) \rightarrow f_*(\mathcal{H}(n)) \rightarrow R^1f_*(\mathcal{F}(n)) \rightarrow \dots$$

et la conclusion résulte de (2.2.1, (ii)).

Corollaire (**2.2.4**). — *Soient* Y *un préschéma noethérien,* $f: X\rightarrow Y$ *un morphisme de type fini,* $\mathcal{L}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible ample pour* f*; pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module* $\mathcal{F}$, *on pose* $\mathcal{F}(n)=\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}^{\otimes n}$ (*pour* $n\in\mathbf{Z}$). *Soit* $\mathcal{F}\rightarrow\mathcal{G}\rightarrow\mathcal{H}$ *une suite exacte de* $\mathcal{O}_X$*-Modules cohérents,* *telle que les supports de $\mathscr{F}$ et de $\mathscr{H}$ soient propres sur* Y (**II**, 5.4.10). *Il existe alors un entier* N *tel que, pour* $n \geqslant N$, *la suite*

$$f_*(\mathscr{F}(n)) \to f_*(\mathscr{G}(n)) \to f_*(\mathscr{H}(n))$$

est exacte.

Le même raisonnement qu'au début de (2.2.1) montre que si le corollaire est vrai pour $\mathscr{L}^{\otimes d}$ ($d>0$), il l'est aussi pour $\mathscr{L}$; on peut donc se borner au cas où $\mathscr{L}$ est très ample pour f (**II**, 4.6.11), et par suite on peut identifier X à un ouvert dans un Y-schéma $Z = \operatorname{Proj}(\mathscr{S})$, où $\mathscr{S}$ est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre quasi-cohérente graduée à degrés positifs, dans laquelle $\mathscr{S}_1$ est de type fini et engendre $\mathscr{S}$, de sorte que $\mathscr{L} = i^*(\mathcal{O}_Z(1))$, où i est l'immersion canonique $X \to Z$ (**II**, 4.4.7). Cela étant, comme $\operatorname{Supp}(\mathscr{G})$ est fermé dans X et contenu dans $\operatorname{Supp}(\mathscr{F}) \cap \operatorname{Supp}(\mathscr{H})$, il est propre sur Y; les supports de $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ sont donc *fermés dans* Z (**II**, 5.4.10). Les faisceaux $\mathscr{F}' = i_*(\mathscr{F})$, $\mathscr{G}' = i_*(\mathscr{G})$, $\mathscr{H}' = i_*(\mathscr{H})$ sont donc des $\mathcal{O}_Z$-Modules cohérents, et la suite $\mathscr{F}' \to \mathscr{G}' \to \mathscr{H}'$ est exacte; en outre, si $g : Z \to Y$ est le morphisme structural, on a $f = g \circ i$, et il est clair que $\mathscr{F}'(n) = i_*(\mathscr{F}(n))$ et de même pour $\mathscr{G}'$ et $\mathscr{H}'$; la conclusion résulte donc de (2.2.3) appliqué à $\mathscr{F}'$, $\mathscr{G}'$, $\mathscr{H}'$.

Remarques (**2.2.5**). — (i) L'assertion (i) de (2.2.1) est encore vraie lorsqu'on suppose seulement que Y est *localement noethérien*; en effet, la propriété est évidemment locale sur Y; d'autre part, les hypothèses de (2.2.1) impliquent que pour tout ouvert $U \subset Y$, la restriction de f à $f^{-1}(U)$ est un morphisme projectif $f^{-1}(U) \to U$ (**II**, 5.5.5, (iii)) et $\mathscr{L} | f^{-1}(U)$ est ample pour ce morphisme (**II**, 4.6.4).

(ii) L'assertion (iii) de (2.2.1) est encore valable, comme on l'a vu, lorsque l'on suppose seulement que X est un schéma quasi-compact ou un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien, et $f : X \to Y$ un morphisme quasi-compact (**II**, 4.6.8). Mais il faut noter que même lorsqu'on suppose que Y est le *spectre d'un corps* K et que f est *quasi-projectif*, l'assertion (ii) de (2.2.1) n'est plus nécessairement vérifiée. Par exemple, soit $X' = \operatorname{Spec}(K[T_0, \ldots, T_r])$ et soit X la réunion des ouverts affines $D(T_i)$ de X' ($0 \leqslant i \leqslant r$); comme l'immersion $X \to X'$ est quasi-compacte, le morphisme structural $f : X \to Y$ est quasi-affine (**II**, 5.1.10), donc $\mathcal{O}_X$ est très ample pour f (**II**, 5.1.6). Mais l'anneau $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ s'identifie à l'intersection des anneaux de fractions $(K[T_0, \ldots, T_r])_{T_i}$ pour $0 \leqslant i \leqslant r$ (**I**, 8.2.1.1), c'est-à-dire à $K[T_0, \ldots, T_r]$. Par suite, il résulte des formules (1.4.3.1) et (1.1.3.5) que l'on a $H^r(X, \mathcal{O}_X^{\otimes n}) = H^r(X, \mathcal{O}_X) = A \neq 0$ pour tout n.

2.3. Application aux faisceaux gradués d'algèbres et de modules.

Théorème (**2.3.1**). — *Soient* Y *un préschéma noethérien,* $\mathscr{S}$ *une* $\mathcal{O}_Y$*-Algèbre graduée à degrés positifs, quasi-cohérente et de type fini,* $X = \operatorname{Proj}(\mathscr{S})$, $q : X \to Y$ *le morphisme structural,* $\mathscr{M}$ *un* $\mathscr{S}$*-Module gradué quasi-cohérent vérifiant la condition* (**TF**). *Alors il existe un entier* N *tel que, pour* $n \geqslant N$, *l'homomorphisme canonique* (**II**, 8.14.5.1)

$$\alpha_n : \mathscr{M}_n \to q_*(\mathscr{P}roj_0(\mathscr{M}(n))) = q_*((\mathscr{P}roj(\mathscr{M}))_n)$$

soit bijectif. En d'autres termes, l'homomorphisme canonique

$$\alpha : \mathscr{M} \to \mathbf{\Gamma}_*(\mathscr{P}roj(\mathscr{M}))$$

est un **(TN)**-*isomorphisme.*

On peut se borner au cas où $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{S}$-module de type fini (**II**, 3.4.2).

Comme Y est quasi-compact, il existe un entier $d>0$ tel que $\mathscr{S}^{(d)}$ soit engendrée par le $\mathcal{O}_Y$-Module quasi-cohérent $\mathscr{S}_d$, ce dernier étant de type fini (**II**, 3.1.10), donc cohérent puisque Y est noethérien. Remarquons maintenant que $\mathscr{M}$ est somme directe des $\mathscr{M}^{(d,k)}$ pour $0 \leqslant k < d$ et que chacun des $\mathscr{M}^{(d,k)}$ est un $\mathscr{S}^{(d)}$-Module quasi-cohérent de type fini, ainsi qu'il résulte de (**II**, 2.1.6, (iii)), la question étant locale sur Y. Or, il suffit évidemment de prouver que chacun des homomorphismes canoniques $\alpha : \mathscr{M}^{(d,k)} \to \mathbf{\Gamma}_*((\mathscr{P}roj(\mathscr{M}))^{(d,k)})$ est un **(TN)**-isomorphisme. Compte tenu de (**II**, 8.14.13) (et notamment du diagramme (8.14.13.4)), on voit qu'on est ramené à prouver le théorème lorsque $\mathscr{S}$ est engendrée par $\mathscr{S}_1$ et que $\mathscr{S}_1$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent. Comme Y est noethérien, le même raisonnement qu'au début de (2.2.2) montre qu'on peut se borner au cas où $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathscr{S} = \widetilde{S}$, $\mathscr{M} = \widetilde{M}$, A étant un anneau noethérien, S_1 un A-module de type fini et M un S-module gradué de type fini. Montrons qu'il suffit alors de prouver le théorème lorsque $M = S$. En effet, dans le cas général, on a une suite exacte $L' \to L \to M \to 0$, où L et L′ sont des sommes directes de modules gradués de la forme $S(m)$. Si le résultat est vrai pour $M = S$, il l'est aussi pour $M = S(m)$, donc pour L et L′. Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widetilde{L}'_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_n"] & \widetilde{L}_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_n"] & \widetilde{M}_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_n"] & 0 \\ q_*(\widetilde{L}'(n)) \arrow[r] & q_*(\widetilde{L}(n)) \arrow[r] & q_*(\widetilde{M}(n)) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

La deuxième ligne est exacte en vertu de (2.2.3), dès que n est assez grand; comme il en est de même de la première et que les deux flèches verticales de gauche sont des isomorphismes, il en est de même de la troisième.

Cela étant, pour prouver le théorème lorsque $M = S$, supposons d'abord que $S = A[T_0, \ldots, T_r]$ (T_i indéterminées); dans ce cas, notre assertion n'est autre que (2.1.11, (ii)). Dans le cas général, S s'identifie à un quotient d'un anneau $S' = A[T_0, \ldots, T_r]$ par un idéal gradué, donc X à un sous-schéma fermé de $X' = \mathbf{P}^r_A$ (**II**, 2.9.2). Si j est l'injection canonique $X \to X'$, $j_*(\widetilde{S}(n))$ n'est autre que le $\mathcal{O}_{X'}$-Module $(\mathscr{P}roj(\widetilde{S}))(n)$ où S est considéré comme un S′-module gradué; cela résulte en effet aussitôt de (**II**, 2.8.7). Comme $j_*(\widetilde{S}(n))$ est un $\mathcal{O}_{X'}$-Module vérifiant **(TF)**, l'homomorphisme canonique $\alpha_n : S_n \to \Gamma(X', j_*(\widetilde{S}(n)))$ est bijectif pour n assez grand, en vertu de ce qui précède; cela achève la démonstration, puisque $\Gamma(X', j_*(\widetilde{S}(n))) = \Gamma(X, \widetilde{S}(n))$.

Corollaire **(2.3.2)**. — *Sous les hypothèses de* (2.3.1), *soit* $\mathscr{S}_X = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_X(n)$, *et soit* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{S}_X$*-Module gradué quasi-cohérent de type fini. Alors* $\Gamma_*(\mathscr{F})$ *vérifie la condition* **(TF)**.

On a vu dans la démonstration de (2.3.1) que X, qui est isomorphe à $\mathrm{Proj}(\mathscr{S}^{(d)})$ (**II**, 3.1.8) est de type fini sur Y (**II**, 3.4.1). Il résulte alors de (**II**, 8.14.9) que $\mathscr{F}$ est isomorphe à un $\mathscr{S}_X$-Module gradué de la forme $\mathscr{P}roj(\mathscr{M})$, où $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{S}$-Module gradué quasi-cohérent de type fini. En vertu de (2.3.1), $\Gamma_*(\mathscr{F})$ est **(TN)**-isomorphe à $\mathscr{M}$, et par suite vérifie **(TF)**.

Scholie **(2.3.3)**. — Soient Y un préschéma noethérien, $\mathscr{S}$ une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre graduée vérifiant les conditions de (2.3.1) et $X = \mathrm{Proj}(\mathscr{S})$. Soient $\boldsymbol{K}_{\mathscr{S}}$ la catégorie abélienne des $\mathscr{S}$-Modules gradués quasi-cohérents vérifiant **(TF)**, $\boldsymbol{K}'_{\mathscr{S}}$ la sous-catégorie de $\boldsymbol{K}_{\mathscr{S}}$ formée des $\mathscr{S}$-Modules vérifiant **(TN)**; enfin, soit $\boldsymbol{K}_X$ la catégorie des $\mathscr{S}_X$-Modules gradués quasi-cohérents de type fini $\mathscr{F}$ (ce qui revient à dire, puisque $\mathscr{S}_X$ est périodique (**II**, 8.14.4 et 8.14.12), que les $\mathscr{F}_i$ sont des $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents). Alors les foncteurs $\mathscr{M} \rightsquigarrow \mathscr{P}roj(\mathscr{M})$ dans $\boldsymbol{K}_{\mathscr{S}}$ et $\mathscr{F} \rightsquigarrow \Gamma_*(\mathscr{F})$ dans $\boldsymbol{K}_X$ définissent, en vertu de (**II**, 8.14.8 et 8.14.10) et (2.3.2) *une équivalence* (T, I, 1.2) *de la catégorie quotient* $\boldsymbol{K}_{\mathscr{S}}/\boldsymbol{K}'_{\mathscr{S}}$ (T, I, 1.11) *avec la catégorie* $\boldsymbol{K}_X$. Lorsque $\mathscr{S}$ est engendré par $\mathscr{S}_1$, on peut remplacer $\boldsymbol{K}_X$ par la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents (**II**, 8.14.12).

Proposition **(2.3.4)**. — *Soit* Y *un préschéma noethérien.*

(i) *Soit* $\mathscr{S}$ *une* $\mathcal{O}_Y$*-Algèbre graduée à degrés positifs, quasi-cohérente de type fini. Soient* $X = \mathrm{Proj}(\mathscr{S})$, *et* $\mathscr{S}_X = \mathscr{P}roj(\mathscr{S}) = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_X(n)$. *Alors* $\mathscr{S}_X$ *est une* $\mathcal{O}_X$*-Algèbre graduée périodique* (**II**, 8.14.12) *dont les composants homogènes* $(\mathscr{S}_X)_n = \mathcal{O}_X(n)$ *sont des* $\mathcal{O}_X$*-Modules cohérents, et si* $d>0$ *est une période de* $\mathscr{S}_X$, $(\mathscr{S}_X)_d = \mathcal{O}_X(d)$ *est un* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible* Y*-ample. En outre, l'homomorphisme canonique* $\alpha : \mathscr{S} \to \Gamma_*(\mathscr{S}_X)$ *est un* **(TN)**-*isomorphisme.*

(ii) *Inversement, soit* $q : X \to Y$ *un morphisme projectif, et soit* $\mathscr{S}'$ *une* $\mathcal{O}_X$*-Algèbre graduée, dont les composants homogènes* $\mathscr{S}'_n$ $(n \in \mathbf{Z})$ *sont des* $\mathcal{O}_X$*-Modules cohérents, et qui admet une période* $d>0$ *telle que* $\mathscr{S}'_d$ *soit un* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible ample pour* q. *Alors* $\mathscr{S} = \bigoplus_{n\geqslant 0} q_*(\mathscr{S}'_n)$ *est une* $\mathcal{O}_Y$*-Algèbre graduée à degrés positifs quasi-cohérente et de type fini, et il existe un* Y*-isomorphisme* $r : X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Proj}(\mathscr{S})$ *tel que* $r^*(\mathscr{P}roj(\mathscr{S}))$ *soit isomorphe (en tant que* $\mathcal{O}_X$*-Algèbre graduée) à* $\mathscr{S}'$.

(i) Toutes les assertions ont pratiquement déjà été démontrées, la dernière n'étant autre qu'un cas particulier de (2.3.2). Le fait que $\mathscr{S}_X$ est périodique a été vu en (**II**, 8.14.14) et le fait qu'il y a une période $d>0$ telle que $\mathcal{O}_X(d)$ soit inversible et Y-ample n'est autre que (**II**, 4.6.18). Enfin, pour $0 \leqslant k < d$, $(\mathscr{S}_X)^{(d,k)}$ est un $(\mathscr{S}_X)^{(d)}$-Module de type fini (**II**, 8.14.14), donc chacun des $(\mathscr{S}_X)_n$ est un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent de type fini en vertu de (**II**, 2.1.6, (ii)), la question étant locale; comme $\mathcal{O}_X$ est cohérent, il en est de même des $(\mathscr{S}_X)_n$.

(ii) Quitte à remplacer la période d par un de ses multiples, on peut supposer que $\mathscr{L} = \mathscr{S}'_d$ est un $\mathcal{O}_X$-Module *très ample* relativement à q (**II**, 4.6.11). On a en outre $\mathscr{S}'^{(d)} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathscr{L}^{\otimes n}$ par hypothèse, donc $\mathscr{S}^{(d)} = \bigoplus_{n\geqslant 0} q_*(\mathscr{L}^{\otimes n})$; on sait (**II**, 3.1.8 et 3.2.9) qu'il y a un Y-isomorphisme s de $X' = \mathrm{Proj}(\mathscr{S})$ sur $X'' = \mathrm{Proj}(\mathscr{S}^{(d)})$ tel que

$s^*(\mathcal{O}_{X''}(n)) = \mathcal{O}_{X'}(nd)$. On établira donc l'existence d'un Y-isomorphisme $X \simeq X'$ si l'on prouve la

Proposition **(2.3.4.1)**. — *Soient* Y *un préschéma noethérien,* $q : X \to Y$ *un morphisme projectif,* $\mathcal{L}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible très ample pour q. Alors* $\mathcal{S} = \bigoplus_{n \geqslant 0} q_*(\mathcal{L}^{\otimes n})$ *est une* $\mathcal{O}_Y$*-Algèbre graduée quasi-cohérente de type fini, telle que* $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_1^n$ *pour n assez grand, et il existe un* Y-*isomorphisme* $r : X \simeq P = \mathrm{Proj}(\mathcal{S})$ *tel que* $\mathcal{L} = r^*(\mathcal{O}_P(1))$.

Comme q est un morphisme projectif, il résulte de (**II**, 5.4.4 et 4.4.7) qu'il existe un Y-isomorphisme $r' : X \simeq P' = \mathrm{Proj}(\mathcal{T})$, où $\mathcal{T}$ est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre quasi-cohérente telle que $\mathcal{T}_1$ soit un $\mathcal{O}_Y$-Module de type fini et engendre $\mathcal{T}$, et l'on a $\mathcal{L} = r'^*(\mathcal{O}_{P'}(1))$. On a alors $\mathcal{S} = \bigoplus_{n \geqslant 0} q'_*(\mathcal{O}_{P'}(n))$, où $q' : P' \to Y$ est le morphisme structural, et il résulte de (2.3.1) que pour n assez grand, l'homomorphisme canonique $\alpha_n : \mathcal{T}_n \to \mathcal{S}_n = q_*(\mathcal{L}^{\otimes n})$ est *bijectif*; comme $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_1^n$, on a *a fortiori* $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_1^n$ dès que n est assez grand. En outre, comme l'homomorphisme canonique $\alpha : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ de $\mathcal{O}_Y$-Algèbres graduées est un **(TN)**-isomorphisme, $\Phi = \mathrm{Proj}(\alpha) : \mathrm{Proj}(\mathcal{S}) \to \mathrm{Proj}(\mathcal{T})$ est un isomorphisme (**II**, 3.6.1) et on a $\Phi_*(\widetilde{\mathcal{S}}(n)) = (\mathcal{S}(n))_{[\alpha]}^{\sim}$ (**II**, 3.5.2); mais comme les $\mathcal{T}$-Modules gradués $(\mathcal{S}(n))_{[\alpha]}$ et $\mathcal{T}(n)$ sont **(TN)**-isomorphes, on a $\Phi_*(\mathcal{O}_P(n)) = \mathcal{O}_{P'}(n)$ pour tout n (**II**, 3.4.2); pour achever de prouver (2.3.4.1), il reste à montrer que $\mathcal{S}$ est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre de type fini; or les $\mathcal{S}_n = q'_*(\mathcal{O}_{P'}(n))$ sont des $\mathcal{O}_Y$-Modules *cohérents* en vertu de (2.2.1) et comme $\mathcal{S}_1^n = \mathcal{S}_n$ pour $n \geqslant n_0$, $\mathcal{S}$ est engendrée par $\bigoplus_{i \leqslant n_0} \mathcal{S}_i$, qui est cohérent, d'où notre assertion (**I**, 9.6.2).

Revenons à la démonstration de (2.3.4), dont nous reprenons les notations. Nous avons démontré l'existence d'un Y-isomorphisme $r'' : X \simeq X''$ tel que $r''_*(\mathcal{L}^{\otimes n}) = \mathcal{O}_{X''}(n)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$; nous désignerons par q'' le morphisme structural $X'' \to Y$. Notons maintenant que $\mathcal{S}'$ est somme directe des $\mathcal{S}'^{(d)}$-Modules gradués $\mathcal{S}'^{(d,k)}$; chacun de ces derniers est un $\mathcal{S}'^{(d)}$-Module quasi-cohérent de type fini, en vertu de la périodicité de $\mathcal{S}'$ et de l'hypothèse que les $\mathcal{S}'_n$ sont des $\mathcal{O}_X$-Modules de type fini (**II**, 8.14.12). Posons $\mathcal{F}^{(k)} = r''_*(\mathcal{S}'^{(d,k)})$, de sorte que les $\mathcal{F}^{(k)}$ sont des $\mathcal{S}_{X''}$-Modules gradués quasi-cohérents de type fini; par suite (**II**, 8.14.8), l'homomorphisme canonique $\beta : \mathcal{P}roj(\mathbf{\Gamma}_*(\mathcal{F}^{(k)})) \to \mathcal{F}^{(k)}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}_{X''}$-Modules. Mais on a $q''_*((\mathcal{F}^{(k)})_n) = q_*((\mathcal{S}'^{(d,k)})_n)$ et pour $n \geqslant 0$, ce dernier $\mathcal{O}_Y$-Module est par définition égal à $(\mathcal{S}^{(d,k)})_n$. Autrement dit, l'injection canonique $\mathcal{S}^{(d,k)} \to \mathbf{\Gamma}_*(\mathcal{F}^{(k)})$ est un **(TN)**-isomorphisme, donc (**II**, 3.4.2) on a $\mathcal{P}roj(\mathcal{S}^{(d,k)}) = \mathcal{P}roj(\mathbf{\Gamma}_*(\mathcal{F}^{(k)}))$, et par suite $r''^*(\mathcal{P}roj(\mathcal{S}^{(d,k)})) = \mathcal{S}'^{(d,k)}$. Il reste à remarquer que $\mathcal{P}roj(\mathcal{S}^{(d,k)}) = s_*((\mathcal{P}roj(\mathcal{S}))^{(d,k)})$ à un isomorphisme canonique près (**II**, 8.14.13.1) pour avoir démontré l'isomorphisme de $r^*(\mathcal{P}roj(\mathcal{S}))$ et de $\mathcal{S}'$. Enfin, en vertu de (2.3.2), chacun des $\mathbf{\Gamma}_*(\mathcal{F}^{(k)})$ vérifie la condition **(TF)**, donc il en est de même de chacun des $\mathcal{S}^{(d,k)}$; en outre, comme les $\mathcal{S}'_n$ sont cohérents, il en est de même des $\mathcal{S}_n = q_*(\mathcal{S}'_n)$ par (2.2.1), et on en conclut aussitôt que les $\mathcal{S}^{(d,k)}$ sont des $\mathcal{S}^{(d)}$-Modules de type fini. Comme on a vu dans (2.3.4.1) que $\mathcal{S}^{(d)}$ est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre de type fini, on en conclut bien que $\mathcal{S}$ est aussi une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre de type fini.

Proposition (**2.3.5**). — *Soient* Y *un préschéma intègre noethérien,* X *un préschéma intègre,* $f: X \to Y$ *un morphisme* projectif birationnel. *Il existe alors un Idéal fractionnaire cohérent* $\mathscr{J} \subset \mathscr{R}(Y)$ (**II**, 8.1.2) *tel que* X *soit* Y-*isomorphe au préschéma obtenu en faisant éclater* $\mathscr{J}$ (**II**, 8.1.3). *En outre, il existe un ouvert* U *de* Y *tel que la restriction de* f *à* $f^{-1}(U)$ *soit un isomorphisme de* $f^{-1}(U)$ *sur* U (cf. **I**, 6.5.5), *et que* $\mathscr{J}|U$ *soit inversible.*

Comme il existe un $\mathcal{O}_X$-Module inversible $\mathscr{L}$ très ample pour f (**II**, 4.4.2 et 5.3.2), on peut appliquer (2.3.4.1), et on voit que X s'identifie à $\mathrm{Proj}(\mathscr{S})$, où $\mathscr{S} = \bigoplus_{n\geqslant 0} f_*(\mathscr{L}^{\otimes n})$. On sait en outre que les $f_*(\mathscr{L}^{\otimes n})$ sont des $\mathcal{O}_Y$-Modules sans torsion (**I**, 7.4.5), donc il en est de même du $\mathcal{O}_Y$-Module $\mathscr{S}$, et par suite $\mathscr{S}$ s'identifie canoniquement à un sous-$\mathcal{O}_Y$-Module de $\mathscr{S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{R}(Y)$ (**I**, 7.4.1); ce dernier est un faisceau *simple* (**I**, 7.3.6) qui est connu lorsqu'on connaît sa restriction à un ouvert non vide, par exemple à un ouvert non vide $U' \subset U$ tel que $\mathscr{L}|f^{-1}(U')$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_X|f^{-1}(U')$. Comme par hypothèse les $f_*(\mathscr{L}^{\otimes n})|U'$ sont alors isomorphes à $\mathcal{O}_Y|U'$, on voit que $\mathscr{S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{R}(Y)$ est un $\mathscr{R}(Y)$-Module isomorphe à $\mathscr{R}(Y)[T]$, où T est une indéterminée, et $\mathscr{S}$ est (**TN**)-isomorphe à la sous-$\mathcal{O}_Y$-Algèbre engendrée par l'image canonique de $f_*(\mathscr{L})$ dans $\mathscr{S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{R}(Y)$ (2.3.4.1); mais si on identifie $\mathscr{S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{R}(Y)$ à $\mathscr{R}(Y)[T]$, l'image de $f_*(\mathscr{L})$ s'identifie à $\mathscr{J}.T$, où $\mathscr{J}$ est un sous-$\mathcal{O}_Y$-Module cohérent (2.2.1) de $\mathscr{R}(Y)$, dont la restriction à U' est isomorphe à $\mathcal{O}_Y|U'$, et qui par suite est tel que $\mathscr{J}|U$ soit inversible. On voit alors que $\mathscr{S}$ est (**TN**)-isomorphe à $\bigoplus_{n\geqslant 0} \mathscr{J}^n$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire (**2.3.6**). — *Sous les hypothèses de* (2.3.5), *supposons en outre que, pour tout sous-*$\mathcal{O}_Y$*-Module cohérent* $\mathscr{J} \neq 0$ *de* $\mathscr{R}(Y)$, *il existe un* $\mathcal{O}_Y$*-Module inversible* $\mathscr{L}$ *tel que* $\Gamma(Y, \mathscr{L} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{H}om(\mathscr{J}, \mathcal{O}_Y)) \neq 0$; *alors, dans l'énoncé de* (2.3.5), *on peut supposer que* $\mathscr{J}$ *est un Idéal de* $\mathcal{O}_Y$. *Cette condition supplémentaire est toujours vérifiée s'il existe un* $\mathcal{O}_Y$*-Module ample.*

En effet, on a ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.4.2)

$$\mathscr{L} \otimes \mathscr{H}om(\mathscr{J}, \mathcal{O}_Y) = \mathscr{H}om(\mathscr{L}^{-1}, \mathscr{H}om(\mathscr{J}, \mathcal{O}_Y)) = \mathscr{H}om(\mathscr{J} \otimes \mathscr{L}^{-1}, \mathcal{O}_Y);$$

l'hypothèse signifie donc qu'il y a un homomorphisme non nul u de $\mathscr{J} \otimes \mathscr{L}^{-1}$ dans $\mathcal{O}_Y$. Comme, pour tout $y \in Y$, $(\mathscr{J} \otimes \mathscr{L}^{-1})_y$ s'identifie à un sous-$\mathcal{O}_y$-Module du corps des fractions $(\mathscr{R}(Y))_y$ de $\mathcal{O}_y$ (**I**, 7.1.5), u_y est nécessairement injectif, donc u est un isomorphisme de $\mathscr{J} \otimes \mathscr{L}^{-1}$ sur un Idéal $\mathscr{J}'$ de $\mathcal{O}_Y$. Mais comme $\mathrm{Proj}(\bigoplus_{n\geqslant 0} \mathscr{J}^n)$ et

$$\mathrm{Proj}(\bigoplus_{n\geqslant 0} (\mathscr{J} \otimes \mathscr{L}^{-1})^n)$$

sont Y-isomorphes (**II**, 3.1.8), cela prouve la première assertion du corollaire. Pour démontrer la seconde, notons que $\mathscr{F} = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{J}, \mathcal{O}_Y)$ est cohérent et $\neq 0$, puisqu'il existe un ouvert U de Y tel que $\mathscr{J}|U$ soit inversible. Si $\mathscr{L}$ est un $\mathcal{O}_Y$-module ample, il existe un entier n tel que $\mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ soit engendré par ses sections au-dessus de Y (**II**, 4.5.5); *a fortiori*, on a $\Gamma(Y, \mathscr{F}(n)) \neq 0$, d'où la conclusion.

Corollaire (**2.3.7**). — *Soient* X *et* Y *deux schémas intègres, projectifs sur un corps* k, *et soit* $f: X \to Y$ *un* k*-morphisme birationnel. Alors* X *est* k*-isomorphe à un* Y*-schéma obtenu en faisant éclater un sous-schéma fermé* Y′ *(non nécessairement réduit) de* Y.

En effet, f est projectif (**II**, 5.5.5, (v)) et comme Y est projectif sur k, la condition supplémentaire de (2.3.6) est vérifiée ; il suffit alors de considérer le sous-schéma fermé Y' de Y défini par l'Idéal cohérent $\mathscr{J}$ du cor. (2.3.6).

Remarque **(2.3.8)**. — Au chap. IV, en étudiant la notion de diviseur, nous verrons que si, dans l'énoncé de (2.3.5), on suppose que les anneaux $\mathcal{O}_y$ ($y \in Y$) sont factoriels (ce qui est le cas par exemple si Y est non singulier), alors X peut se déduire de Y en faisant éclater un sous-préschéma fermé Y' de Y dont l'espace sous-jacent est contenu dans Y—U.

2.4. Une généralisation du théorème fondamental.

Théorème **(2.4.1)**. — *Soient* Y *un préschéma noethérien,* $\mathscr{S}$ *une* $\mathcal{O}_Y$*-Algèbre quasi-cohérente de type fini. Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme projectif,* $\mathscr{S}' = f^*(\mathscr{S})$, $\mathscr{M}$ *un* $\mathscr{S}'$*-Module quasi-cohérent de type fini. Alors :*

(i) *Pour tout* $p \in \mathbf{Z}$, $R^p f_*(\mathscr{M})$ *est un* $\mathscr{S}$*-Module de type fini.*

(ii) *Soit de plus* $\mathscr{L}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible ample pour* f, *et posons* $\mathscr{M}(n) = \mathscr{M} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$ *pour tout* $n \in \mathbf{Z}$. *Il existe un entier* N *tel que, pour* $n \geqslant N$, *on ait*

(2.4.1.1) $$R^p f_*(\mathscr{M}(n)) = 0$$

pour tout $p > 0$, *et que l'homomorphisme canonique* $f^*(f_*(\mathscr{M}(n)) \to \mathscr{M}(n)$ ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 4.4.3) *soit surjectif.*

Posons $Y' = \mathrm{Spec}(\mathscr{S})$, $X' = \mathrm{Spec}(\mathscr{S}')$ de sorte que $X' = X \times_Y Y'$ (**II**, 1.5.5) ; soient $g : Y' \to Y$, $g' : X' \to X$ les morphismes structuraux, qui sont affines par définition, et $f' = f_{(Y')} : X' \to Y'$; on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow_h & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \xleftarrow[g]{} & Y' \end{array}$$

et le morphisme f' est projectif (**II**, 5.5.5, (iii)) ; posons $h = f \circ g' = g \circ f'$.

(i) Soit $\widetilde{\mathscr{M}}$ le $\mathcal{O}_{X'}$-Module associé au $\mathscr{S}'$-Module quasi-cohérent $\mathscr{M}$, quand X' est considéré comme un X-schéma affine (**II**, 1.4.3), de sorte que l'on a $\mathscr{M} = g'_*(\widetilde{\mathscr{M}})$; comme $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{S}'$-Module de type fini, $\widetilde{\mathscr{M}}$ est un $\mathcal{O}_{X'}$-Module de type fini (**II**, 1.4.5) ; comme h est de type fini, puisque g et f' le sont (**II**, 1.3.7 et **I**, 6.3.4, (ii)), X' est noethérien (**I**, 6.3.7) et $\widetilde{\mathscr{M}}$ est par suite cohérent. Cela étant, comme g' est affine, l'homomorphisme canonique $R^p f_*(\mathscr{M}) \to R^p h_*(\widetilde{\mathscr{M}})$ est bijectif (1.3.4). En outre, cet homomorphisme est un homomorphisme de $\mathscr{S}$-*Modules* ; en effet, de l'homomorphisme canonique

(2.4.1.2) $$g'_*(\mathcal{O}_{X'}) \otimes_{\mathcal{O}_X} g'_*(\widetilde{\mathscr{M}}) \to g'_*(\widetilde{\mathscr{M}})$$

qui définit la structure de $\mathscr{S}'$-Module de $\mathscr{M}$ (en se rappelant que $\mathscr{S}' = g'_*(\mathcal{O}_{X'})$), on déduit canoniquement un homomorphisme

$$f_*(g'_*(\mathcal{O}_{X'})) \otimes R^p f_*(g'_*(\widetilde{\mathscr{M}})) \to R^p f_*(g'_*(\widetilde{\mathscr{M}}))$$

($\mathbf{0}$, 12.2.2), et comme (2.4.1.2) provient lui-même (par application de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 4.2.2.1)) de l'homomorphisme $\mathscr{O}_{X'}\otimes\widetilde{\mathscr{M}}\to\widetilde{\mathscr{M}}$ définissant la structure de $\mathscr{O}_{X'}$-Module de $\widetilde{\mathscr{M}}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} f_*(g'_*(\mathscr{O}_{X'}))\otimes \mathrm{R}^p f_*(g'_*(\widetilde{\mathscr{M}})) & \rightarrow & \mathrm{R}^p f_*(g'_*(\widetilde{\mathscr{M}})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ h_*(\mathscr{O}_{X'})\otimes \mathrm{R}^p h_*(\widetilde{\mathscr{M}}) & \longrightarrow & \mathrm{R}^p h_*(\widetilde{\mathscr{M}}) \end{array}$$

est commutatif ($\mathbf{0}$, 12.2.6); composant les flèches horizontales avec l'homomorphisme provenant de l'homomorphisme canonique $\mathscr{S}\to f_*(f^*(\mathscr{S}))=f_*(\mathscr{S}')=f_*(g'_*(\mathscr{O}_{X'}))=h_*(\mathscr{O}_{X'})$, on obtient notre assertion. D'autre part, puisque g est affine et que f' est séparé et quasi-compact, l'homomorphisme canonique $\mathrm{R}^p h_*(\widetilde{\mathscr{M}})\to g_*(\mathrm{R}^p f'_*(\widetilde{\mathscr{M}}))$ est bijectif (1.4.14), et on démontre comme ci-dessus que c'est un isomorphisme de *$\mathscr{S}$-Modules* (en utilisant cette fois la commutativité de ($\mathbf{0}$, 12.2.6.2)). Or, f' étant projectif et $\widetilde{\mathscr{M}}$ cohérent, $\mathrm{R}^p f'_*(\widetilde{\mathscr{M}})$ est un $\mathscr{O}_{Y'}$-Module cohérent en vertu de (2.2.1); on en conclut que $g_*(\mathrm{R}^p f'_*(\widetilde{\mathscr{M}}))$ est un $\mathscr{S}$-Module *de type fini* (**II**, 1.4.5).

(ii) Soit $\mathscr{L}'=g'^*(\mathscr{L})$, qui est un $\mathscr{O}_{X'}$-Module inversible; pour tout $n\in\mathbf{Z}$, on a $g'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n})=g'_*(\widetilde{\mathscr{M}})\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}=\mathscr{M}(n)$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.4.10) à un isomorphisme près; on peut appliquer à $\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n}$ le raisonnement fait dans (i) pour $\widetilde{\mathscr{M}}$, qui prouve que $\mathrm{R}^p f_*(g'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n}))$ est isomorphe à $g_*(\mathrm{R}^p f'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n}))$. Or $\mathscr{L}'$ est ample pour f' (**II**, 4.6.13, (iii)), donc il résulte de (**2.2.1**) qu'il existe un entier N tel que $\mathrm{R}^p f'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n})=0$ pour tout p et tout $n\geqslant N$, ce qui prouve (2.4.1.1). Enfin, il résulte encore de (2.2.1) qu'on peut supposer N tel que pour $n\geqslant N$, l'homomorphisme canonique $f'^*(f'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n}))\to\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n}$ soit surjectif; comme g'_* est un foncteur exact (**II**, 1.4.4), l'homomorphisme correspondant

$$g'_*(f'^*(f'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n})))\to g'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n})=\mathscr{M}(n)$$

est surjectif. Or, on a $g'_*(f'^*(f'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n})))=f^*(g_*(f'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n}))$ (**II**, 1.5.2) et comme $g_*\circ f'_*=f_*\circ g'_*$, on voit finalement que l'on a

$$g'_*(f'^*(f'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n})))=f^*(f_*(g'_*(\widetilde{\mathscr{M}}\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n})))=f^*(f_*(\mathscr{M}(n))),$$

ce qui achève la démonstration.

(2.4.2) Nous aurons en particulier à appliquer (2.4.1) lorsque $\mathscr{S}$ est une $\mathscr{O}_Y$-Algèbre *graduée* à degrés positifs, $\mathscr{M}=\bigoplus_{k\in\mathbf{Z}}\mathscr{M}_k$ un $\mathscr{S}'$-Module *gradué*. Alors (avec les mêmes hypothèses de finitude sur $\mathscr{S}$ et $\mathscr{M}$) on conclut de (2.4.1) que $\bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} \mathrm{R}^p f_*(\mathscr{M}_k)$ est un $\mathscr{S}$-Module *de type fini* pour tout p, et (sous les hypothèses supplémentaires de (2.4.1, (ii)) qu'il existe N tel que pour $n \geqslant \mathrm{N}$, on ait $\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{M}_k(n)) = 0$ pour tout $p>0$ et *tout* $k\in\mathbf{Z}$, et que l'homomorphisme canonique $f^*(f_*(\mathscr{M}_k(n))) \to \mathscr{M}_k(n)$ soit surjectif pour *tout* $k\in\mathbf{Z}$.

2.5. Caractéristique d'Euler-Poincaré et polynôme de Hilbert.

(2.5.1) Soient A un anneau *artinien*, X un A-schéma *projectif* sur $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$. Pour tout $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Module cohérent $\mathscr{F}$, les $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathscr{F})$ $(i\geqslant 0)$ sont des A-modules de type fini (2.2.1), donc ici *de longueur finie* puisque A est artinien. On sait en outre (2.2.1) que $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathscr{F}) = 0$ sauf pour un nombre fini de valeurs de $i\geqslant 0$; le nombre entier

$$\chi_\mathrm{A}(\mathscr{F}) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \operatorname{long}(\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathscr{F})) \tag{2.5.1.1}$$

est donc défini pour tout $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Module cohérent $\mathscr{F}$. Lorsque A est un *anneau local artinien*, on dit que $\chi_\mathrm{A}(\mathscr{F})$ est la *caractéristique d'Euler-Poincaré de* $\mathscr{F}$ *(par rapport à l'anneau* A). Pour $\mathscr{F} = \mathcal{O}_\mathrm{X}$, on dit que $\chi_\mathrm{A}(\mathcal{O}_\mathrm{X})$ est le *genre arithmétique de* X (par rapport à A).

Proposition **(2.5.2)**. — *Soit* $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ *une suite exacte de* $\mathcal{O}_\mathrm{X}$*-Modules cohérents; on a alors*

$$\chi_\mathrm{A}(\mathscr{F}) = \chi_\mathrm{A}(\mathscr{F}') + \chi_\mathrm{A}(\mathscr{F}''). \tag{2.5.2.1}$$

Comme les modules de cohomologie de $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$, $\mathscr{F}''$ sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux, il y a un entier $r>0$ tel que la suite exacte de cohomologie s'écrive

$$0 \to \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathscr{F}') \to \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathscr{F}'') \to \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathscr{F}') \to \dots$$
$$\dots \to \mathrm{H}^r(\mathrm{X}, \mathscr{F}') \to \mathrm{H}^r(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^r(\mathrm{X}, \mathscr{F}'') \to 0.$$

Or, on sait que dans une suite exacte de A-modules de longueur finie, ayant des 0 aux deux extrémités, la somme alternée des longueurs est nulle (**0**, 11.10.1); appliquant ce résultat, on trouve immédiatement la formule (2.5.2.1).

On notera que le résultat de (2.5.2) s'applique toutes les fois que l'on sait que X est un A-schéma quasi-compact et que les A-modules $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathscr{F})$ sont *de type fini* pour tout $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Module cohérent $\mathscr{F}$ (1.4.12).

Théorème **(2.5.3)**. — *Soient* A *un anneau local artinien,* X *un schéma projectif sur* $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, $\mathscr{L}$ *un* $\mathcal{O}_\mathrm{X}$*-Module inversible très ample relativement à* Y, $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_\mathrm{X}$*-Module cohérent; on pose* $\mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathscr{L}^{\otimes n}$ *pour tout* $n\in\mathbf{Z}$.

(i) *Il existe un polynôme unique* $\mathrm{P}\in\mathbf{Q}[\mathrm{T}]$ *tel que* $\chi_\mathrm{A}(\mathscr{F}(n)) = \mathrm{P}(n)$ *pour tout* $n\in\mathbf{Z}$ (on dit que P est le *polynôme de Hilbert* de $\mathscr{F}$ par rapport à A).

(ii) *Pour n assez grand, on a* $\chi_\mathrm{A}(\mathscr{F}(n)) = \operatorname{long}_\mathrm{A}\Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{F}(n))$.

(iii) *Le terme de plus haut degré de* $\chi_\mathrm{A}(\mathscr{F}(n))$ *a un coefficient* $\geqslant 0$.

Ajoutons qu'au chap. IV, dans le paragraphe consacré à la notion de dimension, nous démontrerons en outre que *le degré de* $\chi_\mathrm{A}(\mathscr{F}(n))$ *est égal à la dimension du support de* $\mathscr{F}$.

Comme on a $\mathrm{H}^i(\mathrm{X}, \mathscr{F}(n)) = 0$ pour tout $i>0$ dès que n est assez grand (2.2.1), on a $\chi_A(\mathscr{F}(n)) = \text{long } H^0(X, \mathscr{F}(n)) = \text{long } \Gamma(X, \mathscr{F}(n))$ pour n assez grand, d'où (ii); cela entraîne $\chi_A(\mathscr{F}(n)) \geqslant 0$ pour n assez grand, et (iii) résulte donc de (i); comme d'ailleurs l'assertion d'unicité de (i) est immédiate, il reste à prouver l'existence du polynôme P.

Montrons d'abord qu'on peut supposer que $\mathfrak{m}\mathscr{F} = 0$, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A. En effet, il existe un entier $s > 0$ tel que $\mathfrak{m}^s = 0$, et $\mathscr{F}(n)$ admet donc une filtration finie

$$\mathscr{F}(n) \supset \mathfrak{m}\mathscr{F}(n) \supset \ldots \supset \mathfrak{m}^{s-1}\mathscr{F}(n) \supset 0.$$

Par récurrence, on déduit de (2.5.2.1) que

$$\chi_A(\mathscr{F}(n)) = \sum_{k=1}^{s} \chi_A(\mathfrak{m}^{k-1}\mathscr{F}(n)/\mathfrak{m}^k\mathscr{F}(n));$$

comme $\mathfrak{m}^{k-1}\mathscr{F}(n)/\mathfrak{m}^k\mathscr{F}(n) = \mathscr{F}'_k(n)$, où $\mathscr{F}'_k = \mathfrak{m}^{k-1}\mathscr{F}/\mathfrak{m}^k\mathscr{F}$, cela prouve notre assertion.

Supposons donc $\mathfrak{m}\mathscr{F} = 0$; si X' est le sous-schéma fermé de X, image réciproque par le morphisme structural $X \rightarrow \operatorname{Spec}(A)$ de l'unique point fermé de Spec(A), et $j : X' \rightarrow X$ l'injection canonique, on a $\mathscr{F} = j_*(\mathscr{F}')$, où $\mathscr{F}'$ est un $\mathcal{O}_{X'}$-Module cohérent; X' est un schéma projectif sur Spec(K), où $K = A/\mathfrak{m}$. Si $\mathscr{L}' = j^*(\mathscr{L})$, $\mathscr{L}'$ est très ample relativement à Spec(K) (**II**, 4.4.10), et on a $\mathscr{F}(n) = j_*(\mathscr{F}'(n))$, où $\mathscr{F}'(n) = \mathscr{F}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathscr{L}'^{\otimes n}$ ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.4.10). On en conclut que $\chi_A(\mathscr{F}(n)) = \chi_K(\mathscr{F}'(n))$ (G, II, 4.9.1), et on est donc ramené au cas où A est un *corps*.

Notons maintenant que X peut être considéré comme un sous-schéma fermé de $P = \mathbf{P}_A^r$ pour un r convenable (**II**, 5.5.4, (ii)); si $i : X \rightarrow P$ est l'injection canonique, on voit comme ci-dessus que l'on a $\chi_A(\mathscr{F}(n)) = \chi_A(i_*(\mathscr{F})(n))$, de sorte que l'on peut se borner au cas où $X = \mathbf{P}_A^r = \operatorname{Proj}(S)$ avec $S = A[T_0, \ldots, T_r]$, A étant un corps.

Cela étant, on a $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un S-module gradué de type fini (**II**, 2.7.8); il existe par suite une résolution finie de M par des S-modules gradués *libres* de type fini

$$0 \rightarrow L_q \rightarrow L_{q-1} \rightarrow \ldots \rightarrow L_1 \rightarrow M \rightarrow 0$$

en vertu du th. des syzygies de Hilbert (M, VIII, 6.5); comme $\widetilde{M}$ est un foncteur exact en M (**II**, 2.5.4), on a aussi une suite exacte

$$0 \rightarrow \widetilde{L}_q \rightarrow \widetilde{L}_{q-1} \rightarrow \ldots \rightarrow \widetilde{L}_1 \rightarrow \widetilde{M} \rightarrow 0$$

et par suite, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la suite

$$0 \rightarrow \widetilde{L}_q(n) \rightarrow \widetilde{L}_{q-1}(n) \rightarrow \ldots \rightarrow \widetilde{L}_1(n) \rightarrow \widetilde{M}(n) \rightarrow 0$$

est exacte; appliquant par récurrence sur q la prop. (2.5.1), il vient

$$\chi_A(\widetilde{M}(n)) = \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1} \chi_A(\widetilde{L}_j(n))$$

et pour prouver (i), on est donc ramené au cas où M est *libre* et gradué de type fini, donc au cas où $M = S(h)$ pour un $h \in \mathbf{Z}$. Comme alors $\widetilde{\mathscr{M}}(n) = (M(n))^{\sim} = (S(n+h))^{\sim}$ (**II**, 2.5.15), on voit finalement que le théorème résultera du

Lemme **(2.5.3.1)**. — *Soient* A *un corps*, r *un entier* >0, *et* $X=\mathbf{P}_A^r$; *on a alors* $\chi_A(\mathcal{O}_X(n))=\binom{n+r}{r}$ *pour tout* $n\in\mathbf{Z}$.

En effet, pour $n>0$, on a $\chi_A(\mathcal{O}_X(n))=\operatorname{long} H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$, qui est le nombre de monômes en les T_i de degré total n, c'est-à-dire $\binom{n+r}{r}$ (2.1.12). Pour $n\leqslant -r-1$, on a de même $\chi_A(\mathcal{O}_X(n))=(-1)^r \operatorname{long} H^r(X, \mathcal{O}_X(n))$; si $n=-r-h$, la dimension de $H^r(X, \mathcal{O}_X(n))$ sur A est le nombre des suites $(p_i)_{0\leqslant i\leqslant r}$ d'entiers $p_i>0$ tels que $\sum_{i=0}^{r} p_i=r+h$ (2.1.12), ou encore le nombre des suites d'entiers $q_i\geqslant 0$ $(0\leqslant i\leqslant r)$ tels que $\sum_{i=0}^{r} q_i=h-1$; c'est donc le nombre $\binom{h+r-1}{r}=(-1)^r\binom{n+r}{r}$. Enfin, pour $-r\leqslant n\leqslant 0$, on a $\binom{n+r}{r}=0$ et d'autre part $H^i(X, \mathcal{O}_X(n))=0$ pour tout $i\geqslant 0$ (2.1.12), ce qui prouve le lemme.

Corollaire **(2.5.4)**. — *Soient* A *un anneau local artinien*, S *une* A-*algèbre graduée de type fini engendrée par* S_1, M *un* S-*module gradué de type fini*, $X=\operatorname{Proj}(S)$. *On a alors* $\chi_A(\widetilde{M}(n))=\operatorname{long} M_n$ *pour* n *assez grand.*

Cela résulte de ce que M_n et $\Gamma(X, \widetilde{M}(n))$ sont isomorphes pour n assez grand (2.3.1).

2.6. Application : critères d'amplitude.

Proposition **(2.6.1)**. — *Soient* Y *un préschéma noethérien*, $f: X\rightarrow Y$ *un morphisme propre*, $\mathcal{L}$ *un* $\mathcal{O}_X$-*Module inversible. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathcal{L}$ *est ample pour* f.

b) *Pour tout* $\mathcal{O}_X$-*Module cohérent* $\mathcal{F}$, *il existe un entier* N *tel que pour* $n\geqslant N$, *on ait* $R^qf_*(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n})=0$ *pour tout* $q>0$.

c) *Pour tout Idéal cohérent* $\mathcal{J}$ *de* $\mathcal{O}_X$, *il existe un entier* N *tel que pour* $n\geqslant N$ *on ait* $R^1f_*(\mathcal{J}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n})=0$.

On a vu que *a)* entraîne *b)* (2.2.1, (ii)). Il est trivial que *b)* entraîne *c)*, et il reste à prouver que *c)* implique *a)*. On peut se borner au cas où Y est affine (**II**, 4.6.4), et prouver dans ce cas que $\mathcal{L}$ est ample; il suffira de montrer que lorsque h parcourt l'ensemble des sections des $\mathcal{L}^{\otimes n}$ $(n>0)$ au-dessus de X, ceux des X_h qui sont affines forment un recouvrement de X (**II**, 4.5.2). Pour cela, montrons que pour tout point *fermé* x de X et tout voisinage ouvert affine U de x, il existe un n et un $h\in\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ tels que $x\in X_h\subset U$; X_h sera nécessairement affine (**I**, 1.3.6) et la réunion de ces X_h sera un ouvert de X contenant tous les points fermés de X, et par suite X lui-même puisque X est noethérien (**I**, 6.3.7 et $\mathbf{0}_I$, 2.1.3). Soit $\mathcal{J}$ (resp. $\mathcal{J}'$) le faisceau quasi-cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}_X$ définissant le sous-préschéma fermé réduit de X ayant pour espace sous-jacent $X-U$ (resp. $(X-U)\cup\{x\}$) (**I**, 5.2.1); il est clair que $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ sont cohérents (**I**, 6.1.1), que $\mathcal{J}'\subset\mathcal{J}$ et que $\mathcal{J}''=\mathcal{J}/\mathcal{J}'$ est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent ($\mathbf{0}_I$, 5.3.3) ayant pour support $\{x\}$ et tel que $\mathcal{J}''_x=\boldsymbol{k}(x)$. Comme $\mathcal{L}$ est localement libre, la suite $0\rightarrow\mathcal{J}'\otimes\mathcal{L}^{\otimes n}\rightarrow\mathcal{J}\otimes\mathcal{L}^{\otimes n}\rightarrow\mathcal{J}''\otimes\mathcal{L}^{\otimes n}\rightarrow 0$ est exacte pour tout n, et par hypothèse il existe n assez grand tel que $H^1(X, \mathcal{J}'\otimes\mathcal{L}^{\otimes n})=0$; la suite exacte de cohomologie prouve donc que l'homomorphisme $\Gamma(X, \mathscr{J}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})\to\Gamma(X, \mathscr{J}''\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})$ est *surjectif*. Une section g de $\mathscr{J}''\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}$ au-dessus de X telle que $g(x)\neq 0$ est donc l'image d'une section $h\in\Gamma(X, \mathscr{J}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})\subset\Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes n})$ (car en vertu de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.4.1), $\mathscr{J}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}$ est un sous-$\mathcal{O}_X$-Module de $\mathscr{L}^{\otimes n}$); on a par définition $h(x)\neq 0$ et $h(z)=0$ pour $z\notin U$, ce qui achève la démonstration.

Proposition (**2.6.2**). — *Soient* Y *un préschéma noethérien,* $f: X\to Y$ *un morphisme de type fini,* $g: X'\to X$ *un morphisme fini surjectif,* $\mathscr{L}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible et* $\mathscr{L}'=g^*(\mathscr{L})$. *On suppose vérifiée la condition suivante : Il existe une partie* Z *de* X, *propre sur* Y (**II**, 5.4.10) *telle que pour tout* $x\in X-Z$, *ou bien* X *est normal au point* x, *ou bien* $(g_*(\mathcal{O}_{X'}))_x$ *est un* $\mathcal{O}_x$*-module libre. Dans ces conditions, pour que* $\mathscr{L}$ *soit ample pour* f, *il faut et il suffit que* $\mathscr{L}'$ *soit ample pour* $f\circ g$.

(**2.6.2.1**) Puisque g est affine, la condition est nécessaire (**II**, 5.1.12). Pour voir qu'elle est suffisante, on peut supposer Y affine (**II**, 4.6.4). Montrons en outre qu'on peut se borner au cas où X est *réduit*. En effet, soit $j: X_{\mathrm{red}}\to X$ l'injection canonique, et posons $X_1=X_{\mathrm{red}}$, $X'_1=X'\times_X X_1$, de sorte que l'on a le diagramme commutatif

(**2.6.2.2**)
$$\begin{array}{ccc} X' & \xleftarrow{j'} & X'_1 \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_1} \\ X & \xleftarrow[j]{} & X_1 \end{array}.$$

Le morphisme $f\circ j$ est alors de type fini (**I**, 6.3.4) et g_1 est un morphisme fini (**II**, 6.1.5, (iii)); si $\mathscr{L}'$ est ample pour $f\circ g$, $j'^*(\mathscr{L}')$ est ample pour $f\circ g\circ j'$ puisque j' est une immersion fermée (**II**, 5.1.12 et **I**, 4.3.2). Si on pose $Z_1=j^{-1}(Z)$, Z_1 est propre sur Y (**II**, 5.4.10); d'autre part, si X est normal en un point x, il en est évidemment de même de X_{red}; enfin, si $(g_*(\mathcal{O}_{X'}))_x$ est un $\mathcal{O}_x$-module libre, il résulte aussitôt de (**II**, 1.5.2) que $((g_1)_*(\mathcal{O}_{X'_1}))_x$ est un $\mathcal{O}_{X_1,x}$-module libre. Enfin, comme X est noethérien (**I**, 6.3.7), si $j^*(\mathscr{L})$ est ample, $\mathscr{L}$ est ample (**II**, 4.5.14), et comme $j'^*(\mathscr{L}')=g_1^*(j^*(\mathscr{L}))$, cela achève la réduction annoncée. Nous supposons donc désormais Y *affine* et X *réduit*.

Les hypothèses de (**II**, 6.6.11) étant alors vérifiées, il existe un Y-préschéma réduit X_2, et un Y-morphisme $h: X_2\to X$ *fini* et *birationnel* tel que la restriction de h à $h^{-1}(X-Z)$ soit un *isomorphisme* sur $X-Z$ et que $h^*(\mathscr{L})$ soit ample. Remplaçant X' par X_2, on voit qu'on est ramené à démontrer la proposition en supposant en outre que g *possède les propriétés qui viennent d'être énumérées pour* h. Nous désignerons encore par Z un sous-préschéma de X ayant Z pour espace sous-jacent, qui est propre sur Y (**II**, 5.4.10).

(**2.6.2.3**) Soient maintenant X_1 un *sous-préschéma fermé* de X, $j: X_1\to X$ l'injection canonique, $X'_1=g^{-1}(X_1)=X'\times_X X_1$ son image réciproque, $j': X'_1\to X'$ l'injection canonique, de sorte que l'on a le diagramme commutatif (2.6.2.2); posons $\mathscr{L}_1=j^*(\mathscr{L})$, $\mathscr{L}'_1=j'^*(\mathscr{L}')=g_1^*(\mathscr{L}_1)$, de sorte que $\mathscr{L}'_1$ est ample pour $f\circ g\circ j'$ (**II**, 5.1.12). Si on pose $Z_1=j^{-1}(Z)$, le sous-préschéma fermé Z_1 de X_1 est propre sur Y (**II**, 5.4.2, (ii)). En d'autres termes, *les hypothèses de* (2.6.2) *sont vérifiées pour* X_1, $\mathscr{L}_1$, g_1 et Z_1.

Ceci va nous permettre de démontrer (2.6.2) par *récurrence noethérienne* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.2.2) dans le cas où la restriction de g à $g^{-1}(X-Z)$ est un *isomorphisme* sur $X-Z$ (ce qui est suffisant pour notre propos, comme on l'a vu en (2.6.2.2)) : il suffira d'établir que si, pour tout sous-préschéma fermé X_1 de X, dont l'espace sous-jacent est $\neq X$, la conclusion de (2.6.2) est vraie pour le faisceau $\mathscr{L}_1$, alors elle est vraie aussi pour le faisceau $\mathscr{L}$.

(2.6.2.4) Soient alors $\mathscr{A}=\mathscr{O}_X$, $\mathscr{B}=g_*(\mathscr{O}_X)$, de sorte que $\mathscr{B}$ est une sous-$\mathscr{A}$-Algèbre de $\mathscr{R}(X)$, qui est un $\mathscr{A}$-Module cohérent; en outre, la restriction $\mathscr{B}|(X-Z)$ est égale à $\mathscr{A}|(X-Z)$. Soit $\mathscr{K}$ le *conducteur* de $\mathscr{B}$ sur $\mathscr{A}$, c'est-à-dire le plus grand sous-$\mathscr{A}$-Module quasi-cohérent de $\mathscr{A}$ tel que $\mathscr{B}.\mathscr{K}\subset\mathscr{A}$ (ou encore l'*annulateur* du $\mathscr{A}$-Module $\mathscr{B}/\mathscr{A}$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.7)), ce qui entraîne $\mathscr{B}.\mathscr{K}=\mathscr{K}$. Il est clair que $\mathscr{K}_x=\mathscr{A}_x$ en tous les points admettant un voisinage W_x tel que g soit un isomorphisme de $g^{-1}(W_x)$ sur W_x, et en particulier en tous les points de $X-Z$ et dans un voisinage de tout point générique d'une composante irréductible de X. Considérons alors le sous-préschéma fermé $Z_1=\mathrm{Spec}(\mathscr{A}/\mathscr{K})$ de X défini par $\mathscr{K}$; il est encore *propre* sur Y car le sous-espace Z_1 est fermé dans Z (**II**, 5.4.10). De plus, la définition de $\mathscr{K}$ montre que $\mathscr{B}|(X-Z_1)=\mathscr{A}|(X-Z_1)$; on voit donc qu'on peut toujours se ramener au cas où $Z=\mathrm{Spec}(\mathscr{A}/\mathscr{K})$, et comme on a vu que $X-Z_1$ est un ouvert non vide de X, on peut toujours supposer que l'espace Z est *distinct* de X.

(2.6.2.5) Considérons X' comme égal à $\mathrm{Spec}(\mathscr{B})$ (puisque g est affine) et soit $\mathscr{K}'=\widetilde{\mathscr{K}}$, Idéal cohérent de $\mathscr{O}_{X'}$ tel que $g_*(\mathscr{K}')=\mathscr{K}$ (**II**, 1.4.1); le sous-préschéma fermé $Z'=g^{-1}(Z)=Z\times_X X'$ de X' est défini par $\mathscr{K}'$ et égal à $\mathrm{Spec}(\mathscr{B}/\mathscr{K})$ (**II**, 1.4.10); comme $h: Z'\rightarrow Z$ est un morphisme fini (**II**, 6.1.5, (iii)), Z' est *propre* sur Y (**II**, 6.1.11 et 5.4.2, (ii)).

Cela posé, il nous faut prouver que pour tout $x\in X$ et tout voisinage ouvert U de x, il existe une section s d'un $\mathscr{L}^{\otimes n}$ $(n>0)$ au-dessus de X telle que $x\in X_s\subset U$ (**II**, 4.5.2); nous distinguerons deux cas :

1° On a $x\in X-Z$; on peut évidemment supposer alors que l'on a aussi $U\subset X-Z$, donc l'ouvert $U'=g^{-1}(U)$ ne rencontre pas Z'. Comme $\mathscr{L}'$ est ample par hypothèse, il existe un $n>0$ et une section s' de $\mathscr{L}'^{\otimes n}$ au-dessus de X' telle que $x'=g^{-1}(x)\in X'_{s'}\subset g^{-1}(U)$ (**II**, 4.5.2). En outre, on peut supposer que $\mathscr{K}'\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n}$ soit engendré par ses sections au-dessus de X' (**II**, 4.5.5), donc, comme $\mathscr{K}'_{x'}=\mathscr{O}_{x'}$, il y a une de ces sections s'' telle que $s''(x')\neq 0$; en la multipliant par s' (ce qui revient à remplacer n par $2n$), on voit qu'on peut supposer aussi que $x'\in X'_{s''}\subset g^{-1}(U)$. Cela étant, il résulte de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.4.10) que l'on a un isomorphisme canonique

$$\Gamma(X, \mathscr{K}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X', \mathscr{K}'\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n}).$$

La section s de $\mathscr{K}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}$ qui correspond à s'' par cet isomorphisme a évidemment les propriétés voulues.

2° On a $x\in Z$. Soit $\mathscr{J}$ l'Idéal cohérent de $\mathscr{O}_X$ définissant le sous-préschéma fermé réduit de X ayant pour espace sous-jacent $X-U$, et considérons *dans* $\mathscr{B}$ les Idéaux cohérents $\mathscr{J}\mathscr{B}$ et $\mathscr{J}\mathscr{K}=\mathscr{J}(\mathscr{K}\mathscr{B})=\mathscr{K}(\mathscr{J}\mathscr{B})$, de sorte que l'on a le diagramme d'inclusions

(2.6.2.6)
$$\begin{array}{ccc} \mathscr{J}\mathscr{B} & \rightarrow & \mathscr{B} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathscr{J} & \rightarrow & \mathscr{A} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathscr{J}\mathscr{K}\mathscr{B}=\mathscr{J}\mathscr{K} & \rightarrow & \mathscr{K} \end{array}$$

Soit $\mathscr{J}'$ l'Idéal cohérent $(\mathscr{J}\mathscr{B})^{\sim}$ de $\mathcal{O}_{X'}$ de sorte que $\mathscr{J}\mathscr{B}=g_*(\mathscr{J}')$, $\mathscr{J}'\mathscr{K}'=(\mathscr{J}\mathscr{K}\mathscr{B})^{\sim}$, et par suite $\mathscr{J}'/\mathscr{J}'\mathscr{K}'=(\mathscr{J}\mathscr{B}/\mathscr{J}\mathscr{K}\mathscr{B})^{\sim}$ (**II**, 1.4.4). Comme $\mathscr{J}|V=\mathscr{J}\mathscr{K}|V$ pour tout ouvert V ne rencontrant pas Z, on voit que le support de $\mathscr{J}'/\mathscr{J}'\mathscr{K}'$ est *contenu dans* Z'. Comme Z' est propre sur Y, on peut appliquer (2.2.4) et on voit que pour n assez grand, l'application canonique

$$\Gamma(X', \mathscr{J}'\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n}) \rightarrow \Gamma(X', (\mathscr{J}'/\mathscr{J}'\mathscr{K}')\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n})$$

est *surjective*.

Mais en vertu de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.4.10), on en conclut que l'application canonique

$$\Gamma(X, \mathscr{J}\mathscr{B}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}) \rightarrow \Gamma(X, (\mathscr{J}\mathscr{B}/\mathscr{J}\mathscr{K}\mathscr{B})\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})$$

est *surjective*.

Cela étant, soient $i: Z \rightarrow X$ l'injection canonique, $i': Z' \rightarrow X'$ l'injection canonique, de sorte qu'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' & \xleftarrow{i'} & Z' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ X & \xleftarrow[i]{} & Z \end{array}$$

Soient $\mathscr{M}=i^*(\mathscr{L})$, $\mathscr{M}'=i'^*(\mathscr{L}')$; comme $\mathscr{L}'$ est ample, $\mathscr{M}'$ est ample (**II**, 5.1.12), et d'autre part $\mathscr{M}'=h^*(\mathscr{M})$; on conclut donc de l'hypothèse de récurrence noethérienne (puisque $Z \neq X$) que $\mathscr{M}$ est *ample*. Par suite $i^*(\mathscr{J}/\mathscr{J}\mathscr{K})\otimes\mathscr{M}^{\otimes n}$ est engendré par ses sections au-dessus de Z pour n assez grand (**II**, 4.5.5). Comme $\mathscr{J}/\mathscr{J}\mathscr{K}=i_*(i^*(\mathscr{J}/\mathscr{J}\mathscr{K}))$, on déduit encore de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.4.10) qu'il existe une section s de $(\mathscr{J}/\mathscr{J}\mathscr{K})\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}$ au-dessus de X (pour un n assez grand) telle que $s(x)\neq 0$, puisque l'on a $\mathscr{J}_x=\mathscr{A}_x$ par définition de $\mathscr{J}$ et $\mathscr{K}_x\neq\mathscr{A}_x$ par hypothèse. Le diagramme (2.6.2.6) montre que s est aussi une section de $(\mathscr{J}\mathscr{B}/\mathscr{J}\mathscr{K}\mathscr{B})\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}$ au-dessus de X, donc s est l'*image canonique d'une section t de* $(\mathscr{J}\mathscr{B})\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}$ au-dessus de X. Mais par définition, l'image canonique s de t mod. $(\mathscr{J}\mathscr{K}\mathscr{B})\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}$ est dans $(\mathscr{J}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})/(\mathscr{J}\mathscr{K}\mathscr{B}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})$ donc, en vertu de (2.6.2.6), cela implique que t est une *section de* $\mathscr{J}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}$ au-dessus de X, et *a fortiori* une section de $\mathscr{L}^{\otimes n}$. On a vu ci-dessus que $t(x)\neq 0$, donc $x\in X_t$, et par définition de $\mathscr{J}$, $t(y)=0$ dans $X-U$ qui est le support de $\mathcal{O}_X/\mathscr{J}$; donc $X_t\subset U$, ce qui achève la démonstration.

Remarque **(2.6.3)**. — Lorsque X est *propre* sur Y, on peut démontrer (2.6.2) plus simplement, en raisonnant comme dans le th. de Chevalley (**II**, 6.7.1), à l'aide de (2.6.1) et du lemme (**II**, 6.7.1.1).

§ 3. LE THÉORÈME DE FINITUDE POUR LES MORPHISMES PROPRES

3.1. Le lemme de dévissage.

Définition **(3.1.1)**. — *Soit* $\boldsymbol{K}$ *une catégorie abélienne. On dit qu'un sous-ensemble* $\boldsymbol{K}'$ *de l'ensemble des objets de* $\boldsymbol{K}$ *est exact si* $0 \in \boldsymbol{K}'$ *et si, pour toute suite exacte* $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ *dans* $\boldsymbol{K}$ *telle que deux des objets* A, A′, A″ *soit dans* $\boldsymbol{K}'$, *alors le troisième est aussi dans* $\boldsymbol{K}'$.

Théorème **(3.1.2)**. — *Soit* X *un préschéma noethérien; on désigne par* $\boldsymbol{K}$ *la catégorie abélienne des* $\mathcal{O}_X$*-Modules cohérents. Soient* $\boldsymbol{K}'$ *un sous-ensemble exact de* $\boldsymbol{K}$, X′ *une partie fermée de l'espace sous-jacent à* X. *On suppose que pour toute partie fermée irréductible* Y *de* X′, *de point générique* y, *il existe un* $\mathcal{O}_X$*-Module* $\mathscr{G} \in \boldsymbol{K}'$ *tel que* $\mathscr{G}_y$ *soit un* $\boldsymbol{k}(y)$*-espace vectoriel de dimension* 1. *Alors tout* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent de support contenu dans* X′ *appartient à* $\boldsymbol{K}'$ *(et en particulier, si* $X' = X$, *on a* $\boldsymbol{K}' = \boldsymbol{K}$).

Considérons la propriété suivante $\boldsymbol{P}(Y)$ d'une partie fermée Y de X′ : tout $\mathcal{O}_X$-Module cohérent de support contenu dans Y appartient à $\boldsymbol{K}'$. En vertu du principe de récurrence noethérienne ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.2.2), on voit qu'on est ramené à démontrer que *si* Y *est une partie fermée de* X′ *tel que la propriété* $\boldsymbol{P}(Y')$ *soit vraie pour toute partie fermée* Y′ *de* Y, *distincte de* Y, *alors* $\boldsymbol{P}(Y)$ *est vraie.*

Soit donc $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}$ à support contenu dans Y et prouvons que $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}'$. Désignons encore par Y le sous-préschéma fermé réduit de X ayant Y pour espace sous-jacent (**I**, 5.2.1); il est défini par un Idéal cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathcal{O}_X$. On sait (**I**, 9.3.4) qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $\mathscr{J}^n\mathscr{F} = 0$; pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a donc une suite exacte

$$0 \to \mathscr{J}^{k-1}\mathscr{F}/\mathscr{J}^k\mathscr{F} \to \mathscr{F}/\mathscr{J}^k\mathscr{F} \to \mathscr{F}/\mathscr{J}^{k-1}\mathscr{F} \to 0$$

de $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.6 et 5.3.3) ; comme $\boldsymbol{K}'$ est exact, on voit, par récurrence sur k, qu'il suffit de montrer que chacun des $\mathscr{F}_k = \mathscr{J}^{k-1}\mathscr{F}/\mathscr{J}^k\mathscr{F}$ est dans $\boldsymbol{K}'$. On est donc ramené à prouver que $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}'$ sous l'hypothèse supplémentaire que $\mathscr{J}\mathscr{F} = 0$; il revient au même de dire que $\mathscr{F} = j_*(j^*(\mathscr{F}))$, où j est l'injection canonique $Y \to X$. Distinguons maintenant deux cas :

a) Y est *réductible*. Soient $Y = Y' \cup Y''$, Y′ et Y″ étant des parties fermées de Y, distinctes de Y; soient encore Y′, Y″ les sous-préschémas fermés réduits de X ayant pour espaces sous-jacents Y′, Y″ respectivement, qui sont définis respectivement par les Idéaux cohérents $\mathscr{J}'$, $\mathscr{J}''$ de $\mathcal{O}_X$. Posons $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X/\mathscr{J}')$, $\mathscr{F}'' = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X/\mathscr{J}'')$. Les homomorphismes canoniques $\mathscr{F} \to \mathscr{F}'$, $\mathscr{F} \to \mathscr{F}''$ définissent donc un homomorphisme $u : \mathscr{F} \to \mathscr{F}' \oplus \mathscr{F}''$. Montrons que pour tout $z \notin Y' \cap Y''$, l'homomorphisme $u_z : \mathscr{F}_z \to \mathscr{F}'_z \oplus \mathscr{F}''_z$ est *bijectif*. En effet, on a $\mathscr{J}' \cap \mathscr{J}'' = \mathscr{J}$, car la question est locale et l'égalité précédente résulte de (**I**, 5.2.1 et 1.1.5); si $z \notin Y''$, on a donc $\mathscr{J}'_z = \mathscr{J}_z$, d'où $\mathscr{F}'_z = \mathscr{F}_z$ et $\mathscr{F}''_z = 0$, ce qui établit notre assertion dans ce cas; on raisonne de même si $z \notin Y'$. Par suite, le noyau et le conoyau de u, qui sont dans $\boldsymbol{K}$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.4) ont leurs supports dans $Y' \cap Y''$, et sont donc dans $\boldsymbol{K}'$ par hypothèse; pour la même raison, $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{F}''$ sont dans $\boldsymbol{K}'$, donc aussi $\mathscr{F}' \oplus \mathscr{F}''$, puisque $\boldsymbol{K}'$ est exact. La conclusion résulte alors de la considération des deux suites exactes

$$0 \to \operatorname{Im} u \to \mathscr{F}' \oplus \mathscr{F}'' \to \operatorname{Coker} u \to 0$$
$$0 \to \operatorname{Ker} u \to \mathscr{F} \to \operatorname{Im} u \to 0$$

et de l'hypothèse que $\boldsymbol{K}'$ est exact.

b) Y est irréductible, et par suite le sous-préschéma Y de X est *intègre*. Si y est son point générique, on a $(\mathcal{O}_Y)_y = \boldsymbol{k}(y)$, et comme $j^*(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent, $\mathscr{F}_y = (j^*(\mathscr{F}))_y$ est un $\boldsymbol{k}(y)$-espace vectoriel de dimension finie m. Par hypothèse, il y a un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathscr{G}$ (nécessairement de support Y) tel que $\mathscr{G}_y$ soit un $\boldsymbol{k}(y)$-espace vectoriel de dimension 1. Par suite, il y a un $\boldsymbol{k}(y)$-isomorphisme $(\mathscr{G}_y)^m \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_y$, qui est aussi un $\mathcal{O}_Y$-isomorphisme, et comme $\mathscr{G}^m$ et $\mathscr{F}$ sont cohérents, il existe un voisinage ouvert W de y dans X et un isomorphisme $\mathscr{G}^m|W \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}|W$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.7). Soit $\mathscr{H}$ le graphe de cet isomorphisme, qui est un sous-$(\mathcal{O}_X|W)$-Module cohérent de $(\mathscr{G}^m \oplus \mathscr{F})|W$, canoniquement isomorphe à $\mathscr{G}^m|W$ et à $\mathscr{F}|W$; il existe donc un sous-$\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathscr{H}_0$ de $\mathscr{G}^m \oplus \mathscr{F}$, induisant $\mathscr{H}$ sur W et 0 sur $X - Y$ puisque $\mathscr{G}^m$ et $\mathscr{F}$ ont pour support Y (**I**, 9.4.7). Les restrictions $v : \mathscr{H}_0 \to \mathscr{G}^m$ et $w : \mathscr{H}_0 \to \mathscr{F}$ des projections canoniques de $\mathscr{G}^m \oplus \mathscr{F}$ sont alors des homomorphismes de $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents, qui, dans W et dans $X - Y$, se réduisent à des isomorphismes; autrement dit, les noyaux et conoyaux de v et w ont leur support dans l'ensemble fermé $Y - (Y \cap W)$, distinct de Y. Ils appartiennent donc à $\boldsymbol{K}'$; d'autre part, on a $\mathscr{G}^m \in \boldsymbol{K}'$ puisque $\mathscr{G} \in \boldsymbol{K}'$ et que $\boldsymbol{K}'$ est exact. On en conclut successivement, par l'exactitude de $\boldsymbol{K}'$, que $\mathscr{H}_0 \in \boldsymbol{K}'$ puis que $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}'$. C.Q.F.D.

Corollaire **(3.1.3)**. — *Supposons que le sous-ensemble exact* $\boldsymbol{K}'$ *de* $\boldsymbol{K}$ *ait en outre la propriété que tout facteur direct cohérent d'un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent* $\mathscr{M} \in \boldsymbol{K}'$ *appartienne encore à* $\boldsymbol{K}'$. *Dans ces conditions, la conclusion de* (3.1.2) *subsiste encore lorsque la condition « $\mathscr{G}_y$ est un $\boldsymbol{k}(y)$-espace vectoriel de dimension* 1 » *est remplacée par* $\mathscr{G}_y \neq 0$ (*ce qui équivaut à* Supp $(\mathscr{G}) = Y$).

En effet, le raisonnement de (3.1.2) ne doit être modifié que dans le cas *b)*; cette fois $\mathscr{G}_y$ est un $\boldsymbol{k}(y)$-espace vectoriel de dimension $q > 0$, et on a par suite un $\mathcal{O}_Y$-isomorphisme $(\mathscr{G}_y)^m \xrightarrow{\sim} (\mathscr{F}_y)^q$; la fin du raisonnement de (3.1.2) prouve alors que $\mathscr{F}^q \in \boldsymbol{K}'$, et l'hypothèse additionnelle sur $\boldsymbol{K}'$ implique que $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}'$.

3.2. Le théorème de finitude : cas des schémas usuels.

Théorème **(3.2.1)**. — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f : X \to Y$ *un morphisme propre. Pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent* $\mathscr{F}$, *les* $\mathcal{O}_Y$*-Modules* $R^q f_*(\mathscr{F})$ *sont cohérents pour* $q \geqslant 0$.

La question étant locale sur Y, on peut supposer Y noethérien, donc X noethérien (**I**, 6.3.7). Les $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents $\mathscr{F}$ pour lesquels la conclusion du th. (3.2.1) est vraie forment un sous-ensemble *exact* $\boldsymbol{K}'$ de la catégorie $\boldsymbol{K}$ des $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents.

En effet, soit $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents; supposons par exemple que $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{F}''$ appartiennent à $\boldsymbol{K}'$; on a la suite exacte de cohomologie

$$R^{q-1}f_*(\mathscr{F}'') \xrightarrow{\partial} R^q f_*(\mathscr{F}') \to R^q f_*(\mathscr{F}) \to R^q f_*(\mathscr{F}'') \xrightarrow{\partial} R^{q+1}f_*(\mathscr{F}')$$

dans laquelle par hypothèse les quatre termes extrêmes sont cohérents; il en est donc de même du terme médian $R^q f_*(\mathscr{F})$ par ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.4 et 5.3.3). On montre de la même manière que lorsque $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ (resp. $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}''$) sont dans $\boldsymbol{K}'$, il en est de même de $\mathscr{F}''$ (resp. $\mathscr{F}'$). De plus, tout *facteur direct* cohérent $\mathscr{F}'$ d'un $\mathcal{O}_X$-Module $\mathscr{F} \in \boldsymbol{K}'$ appartient aussi à $\boldsymbol{K}'$: en effet, $R^q f_*(\mathscr{F}')$ est alors facteur direct de $R^q f_*(\mathscr{F})$ (G, II, 4.4.4), donc est de type fini, et comme il est quasi-cohérent (1.4.10), il est cohérent, Y étant noethérien. En vertu de (3.1.3), on est ramené à prouver que lorsque X est *irréductible* de point générique x, il existe *un* $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathscr{F}$ appartenant à $\boldsymbol{K}'$, tel que $\mathscr{F}_x \neq 0$: en effet, si ce point est établi, on pourra l'appliquer à tout sous-préschéma fermé irréductible Y de X, car si $j : Y \to X$ est l'injection canonique, $f \circ j$ est propre (**II**, 5.4.2), et si $\mathscr{G}$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent de support Y, $j_*(\mathscr{G})$ est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent tel que $R^q(f \circ j)_*(\mathscr{G}) = R^q f_*(j_*(\mathscr{G}))$ (G, II, 4.9.1), donc on est bien dans les conditions d'application de (3.1.3).

Or, en vertu du lemme de Chow (**II**, 5.6.2), il existe un préschéma irréductible X' et un morphisme *projectif* et surjectif $g : X' \to X$ tel que $f \circ g : X' \to Y$ soit *projectif*. Il existe un $\mathcal{O}_{X'}$-Module $\mathscr{L}$ ample pour g (**II**, 5.3.1); appliquons le th. fondamental des morphismes projectifs (2.2.1) à $g : X' \to X$ et à $\mathscr{L}$: il existe donc un entier n tel que $\mathscr{F} = g_*(\mathcal{O}_{X'}(n))$ soit un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent et $R^q g_*(\mathcal{O}_{X'}(n)) = 0$ pour tout $q > 0$; en outre, comme $g^*(g_*(\mathcal{O}_{X'}(n))) \to \mathcal{O}_{X'}(n)$ est surjectif pour n assez grand (2.2.1), on voit qu'on peut supposer que, au point générique x de X, on a $\mathscr{F}_x \neq 0$ (**II**, 3.4.7). D'autre part, comme $f \circ g$ est projectif et Y noethérien, les $R^p(f \circ g)_*(\mathcal{O}_{X'}(n))$ sont *cohérents* (2.2.1). Cela étant, $R^*(f \circ g)_*(\mathcal{O}_{X'}(n))$ est l'aboutissement d'une suite spectrale de Leray, dont le terme E_2 est donné par $E_2^{pq} = R^p f_*(R^q g_*(\mathcal{O}_{X'}(n)))$; ce qui précède montre que cette suite spectrale est dégénérée, et on sait alors (**0**, 11.1.6) que $E_2^{p0} = R^p f_*(\mathscr{F})$ est isomorphe à $R^p(f \circ g)_*(\mathcal{O}_{X'}(n)))$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire (**3.2.2**). — *Soit* Y *un préschéma localement noethérien. Pour tout morphisme propre* $f : X \to Y$, *l'image directe par* f *de tout* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent est un* $\mathcal{O}_Y$*-Module cohérent.*

Corollaire (**3.2.3**). — *Soient* A *un anneau noethérien,* X *un schéma propre sur* A; *pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent* $\mathscr{F}$, *les* $H^p(X, \mathscr{F})$ *sont des* A*-modules de type fini, et il existe un entier* $r > 0$ *tel que pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent* $\mathscr{F}$ *et tout* $p > r$, $H^p(X, \mathscr{F}) = 0$.

La seconde assertion a déjà été démontrée (1.4.12); la première résulte du th. de finitude (3.2.1), compte tenu de (1.4.11).

En particulier, si X est un *schéma algébrique propre* sur un corps k, alors, pour tout $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathscr{F}$, les $H^p(X, \mathscr{F})$ sont des k-espaces vectoriels de *dimension finie.*

Corollaire (**3.2.4**). — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f : X \to Y$ *un morphisme de type fini. Pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent* $\mathscr{F}$ *dont le support est propre sur* Y (**II**, 5.4.10), *les* $\mathcal{O}_Y$*-Modules* $R^q f_*(\mathscr{F})$ *sont cohérents.*

La question étant locale sur Y, on peut supposer Y noethérien, et il en est donc de même de X (**I**, 6.3.7). Par hypothèse, tout sous-préschéma fermé Z de X dont l'espace sous-jacent est $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ est propre sur Y, autrement dit, si $j : Y \to X$ est l'injection canonique, $f \circ j : Z \to Y$ est propre. Or, on peut supposer Z tel que $\mathscr{F} = j_*(\mathscr{G})$, où $\mathscr{G} = j^*(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_Z$-Module cohérent (**I**, 9.3.5); comme on a $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}) = \mathrm{R}^q(f \circ j)_*(\mathscr{G})$ par (1.3.4), la conclusion résulte aussitôt de (3.2.1).

3.3. Généralisation du théorème de finitude (schémas usuels).

Proposition (**3.3.1**). — *Soient* Y *un préschéma noethérien,* $\mathscr{S}$ *une* $\mathcal{O}_Y$*-Algèbre graduée à degrés positifs, quasi-cohérente et de type fini,* $Y' = \mathrm{Proj}(\mathscr{S})$ *et* $g : Y' \to Y$ *le morphisme structural. Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme propre,* $\mathscr{S}' = f^*(\mathscr{S})$, $\mathscr{M} = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} \mathscr{M}_k$ *un* $\mathscr{S}'$*-Module gradué quasi-cohérent et de type fini. Alors les* $\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{M}) = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} \mathrm{R}^p f_*(\mathscr{M}_k)$ *sont des* $\mathscr{S}$*-Modules gradués de type fini pour tout* p. *Supposons en outre que* $\mathscr{S}$ *soit engendrée par* $\mathscr{S}_1$*; alors, pour chaque* $p \in \mathbf{Z}$, *il existe un entier* k_p *tel que pour tout* $k \geqslant k_p$ *et tout* $r \geqslant 0$, *on ait*

$$\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{M}_{k+r}) = \mathscr{S}_r \mathrm{R}^p f_*(\mathscr{M}_k). \tag{3.3.1.1}$$

La première assertion est identique à l'énoncé de (2.4.1, (i)), où on a simplement remplacé « morphisme projectif » par « morphisme propre ». Or, dans la démonstration de (2.4.1, (i)), l'hypothèse sur f a été utilisée uniquement pour montrer (avec les notations de cette démonstration) que $\mathrm{R}^p f'_*(\widetilde{\mathscr{M}})$ est un $\mathcal{O}_{Y'}$-Module cohérent. Avec les hypothèses de (3.3.1), f' est propre (**II**, 5.4.2, (iii)), donc on peut reprendre sans changement toute la démonstration de (2.4.1, (i)), grâce au théorème de finitude (3.2.1).

Quant à la seconde assertion, il suffit de remarquer qu'il y a un recouvrement ouvert affine fini (U_i) de Y tel que les restrictions à U_i des deux membres de (3.3.1.1) soient égales pour tout $k \geqslant k_{p,i}$ (**II**, 2.1.6, (ii)); il suffit de prendre pour k_p le plus grand des $k_{p,i}$.

Corollaire (**3.3.2**). — *Soient* A *un anneau noethérien,* $\mathfrak{m}$ *un idéal de* A, X *un* A*-schéma propre,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent. Alors, pour tout* $p \geqslant 0$, *la somme directe* $\bigoplus_{k \geqslant 0} \mathrm{H}^p(X, \mathfrak{m}^k \mathscr{F})$ *est un module de type fini sur l'anneau* $S = \bigoplus_{k \geqslant 0} \mathfrak{m}^k$; *en particulier, il existe un entier* $k_p \geqslant 0$ *tel que pour tout* $k \geqslant k_p$, *et tout* $r \geqslant 0$, *on ait*

$$\mathrm{H}^p(X, \mathfrak{m}^{k+r}\mathscr{F}) = \mathfrak{m}^r \mathrm{H}^p(X, \mathfrak{m}^k \mathscr{F}). \tag{3.3.3.1}$$

Il suffit d'appliquer (3.3.2) avec $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathscr{S} = \widetilde{S}$, $\mathscr{M}_k = \mathfrak{m}^k \mathscr{F}$, compte tenu de (1.4.11).

Il convient de rappeler que la structure de S-module de $\bigoplus_{k \geqslant 0} \mathrm{H}^p(X, \mathfrak{m}^k \mathscr{F})$ s'obtient en considérant, pour tout $a \in \mathfrak{m}^r$, l'application $\mathrm{H}^p(X, \mathfrak{m}^k \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^p(X, \mathfrak{m}^{k+r}\mathscr{F})$ qui provient par passage à la cohomologie de la multiplication $\mathfrak{m}^k \mathscr{F} \to \mathfrak{m}^{k+r}\mathscr{F}$ définie par a (2.4.1).

3.4. Le théorème de finitude : cas des schémas formels.

Les résultats de cette section (sauf la définition (3.4.1)) ne seront pas utilisés dans la suite de ce chapitre.

(3.4.1) Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{S}$ deux préschémas formels localement noethériens (**I**, 10.4.2), $f:\mathfrak{X}\rightarrow\mathfrak{S}$ un morphisme de préschémas formels. Nous dirons que f est un morphisme *propre* s'il vérifie les conditions suivantes :

1° *f est un morphisme de type fini* (**I**, 10.13.3).

2° *Si $\mathscr{K}$ est un Idéal de définition de $\mathfrak{S}$ et si l'on pose $\mathscr{J}=f^*(\mathscr{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, $X_0=(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$,* $S_0=(\mathfrak{S}, \mathcal{O}_{\mathfrak{S}}/\mathscr{K})$, *le morphisme $f_0 : X_0\rightarrow Y_0$ déduit de f* (**I**, 10.5.6) *est propre.*

Il est immédiat que cette définition ne dépend pas de l'Idéal de définition $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{S}$ considéré; en effet, si $\mathscr{K}'$ est un second Idéal de définition tel que $\mathscr{K}'\subset\mathscr{K}$, et si on pose $\mathscr{J}'=f^*(\mathscr{K}')\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, $X'_0=(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}')$, $S'_0=(\mathfrak{S}, \mathcal{O}_{\mathfrak{S}}/\mathscr{K}')$, le morphisme $f'_0 : X'_0\rightarrow S'_0$ déduit de f est tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{f_0} & S_0 \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ X'_0 & \xrightarrow[f'_0]{} & S'_0 \end{array}$$

est commutatif, i et j étant des immersions surjectives; il revient donc au même de dire que f_0 ou f'_0 est propre, en vertu de (**II**, 5.4.5).

On notera que, pour tout $n\geqslant 0$, si on pose $X_n=(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $S_n=(\mathfrak{S}, \mathcal{O}_{\mathfrak{S}}/\mathscr{K}^{n+1})$, le morphisme $f_n : X_n\rightarrow Y_n$ déduit de f (**I**, 10.5.6) est propre pour tout n dès qu'il l'est pour $n=0$ (**II**, 5.4.6).

Si $g : Y\rightarrow Z$ est un morphisme propre de préschémas usuels, localement noethériens, Z' une partie fermée de Z, Y' une partie fermée de Y telle que $g(Y')\subset Z'$, le prolongement $\hat{g} : Y_{/Y'}\rightarrow Z_{/Z'}$ de g aux complétés (**I**, 10.9.1) est un morphisme propre de préschémas formels, comme il résulte de la définition et de (**II**, 5.4.5).

Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{S}$ deux préschémas formels localement noethériens, $f:\mathfrak{X}\rightarrow\mathfrak{S}$ un morphisme *de type fini* (**I**, 10.13.3); les notations étant les mêmes que ci-dessus, on dit qu'une partie Z de l'espace sous-jacent à $\mathfrak{X}$ est *propre* sur $\mathfrak{S}$ (ou propre pour f) si, considérée comme partie de X_0, Z est *propre sur* S_0 (**II**, 5.4.10). Toutes les propriétés des parties propres de préschémas usuels énoncées dans (**II**, 5.4.10) sont encore valables pour les parties propres de préschémas formels comme il résulte aussitôt des définitions.

Théorème **(3.4.2)**. — *Soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ deux préschémas formels localement noethériens, $f : \mathfrak{X}\rightarrow\mathfrak{Y}$ un morphisme propre. Pour tout $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-Module cohérent $\mathscr{F}$, les $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$-Modules $R^qf_*(\mathscr{F})$ sont cohérents pour tout $q\geqslant 0$.*

Soient $\mathscr{J}$ un Idéal de définition de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{K}=f^*(\mathscr{J})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, et considérons les $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-Modules

$$\mathscr{F}_k=\mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{J}^{k+1})=\mathscr{F}/\mathscr{K}^{k+1}\mathscr{F} \qquad (k\geqslant 0) \tag{3.4.2.1}$$

qui forment évidemment un *système projectif* de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-Modules topologiques, tel que

$\mathscr{F} = \varprojlim_k \mathscr{F}_k$ (**I**, 10.11.3). D'autre part, il résultera de (3.4.2) que chacun des $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$, étant cohérent, est naturellement muni d'une structure de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-Module topologique (**I**, 10.11.6), et il en est de même des $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_k)$. Aux homomorphismes canoniques $\mathscr{F} \to \mathscr{F}_k = \mathscr{F}/\mathscr{K}^{k+1}\mathscr{F}$ correspondent canoniquement des homomorphismes

$$\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}) \to \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_k)$$

qui sont nécessairement continus pour les structures de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-Module topologique précédentes (**I**, 10.11.6), et forment un système projectif, donnant à la limite un homomorphisme canonique fonctoriel

$$\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}) \to \varprojlim_k \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_k) \tag{3.4.2.2}$$

qui sera un homomorphisme continu de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-Modules topologiques. Nous allons démontrer en même temps que (3.4.2) le

Corollaire **(3.4.3)**. — *Chacun des homomorphismes* (3.4.2.2) *est un isomorphisme topologique. En outre, si* $\mathfrak{Y}$ *est noethérien, le système projectif* $(\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}/\mathscr{K}^{k+1}\mathscr{F}))_{k\geqslant 0}$ *satisfait à la condition* (ML) (**0**, 13.1.1).

Nous commencerons par établir (3.4.2) et (3.4.3) lorsque Y est un schéma affine formel noethérien (**I**, 10.4.1) :

Corollaire **(3.4.4)**. — *Sous les hypothèses de* (3.4.2), *supposons en outre que* $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$, *où* A *est un anneau adique noethérien. Soit* $\mathfrak{J}$ *un idéal de définition de* A, *et posons* $\mathscr{F}_k = \mathscr{F}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}$ *pour* $k \geqslant 0$. *Alors les* $\mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$ *sont des* A*-modules de type fini ; le système projectif* $(\mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k))_{k\geqslant 0}$ *satisfait à la condition* (ML) *pour tout n ; si on pose*

$$\mathrm{N}_{n,k} = \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k)) \tag{3.4.4.1}$$

(égal aussi à $\mathrm{Im}(\mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}) \to \mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}))$ *par la suite exacte de cohomologie), les* $\mathrm{N}_{k,n}$ *définissent sur* $\mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$ *une filtration* $\mathfrak{J}$*-bonne* (**0**, 13.7.7); *enfin, l'homomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \to \varprojlim_k \mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k) \tag{3.4.4.2}$$

est un isomorphisme topologique pour tout n (le premier membre étant muni de la topologie $\mathfrak{J}$*-adique, les* $\mathrm{H}^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k)$ *de la topologie discrète).*

Posons

$$\mathrm{S} = \mathrm{gr}(\mathrm{A}) = \bigoplus_{k\geqslant 0} \mathfrak{J}^k/\mathfrak{J}^{k+1}, \qquad \mathscr{M} = \mathrm{gr}(\mathscr{F}) = \bigoplus_{k\geqslant 0} \mathfrak{J}^k\mathscr{F}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}. \tag{3.4.4.3}$$

On sait que $\mathfrak{J}^\Delta$ est un Idéal de définition de $\mathfrak{Y}$ (**I**, 10.3.1); soient $\mathscr{K} = f^*(\mathfrak{J}^\Delta)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathrm{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{K})$, $\mathrm{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathfrak{J}^\Delta) = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_0)$ avec $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}/\mathfrak{J}$. Il est clair que les $\mathscr{M}_k = \mathfrak{J}^k\mathscr{F}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}$ sont des $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}$-Modules cohérents (**I**, 10.11.3). Considérons d'autre part la $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}$-Algèbre graduée quasi-cohérente

$$\mathscr{S} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}_0} \otimes_{\mathrm{A}_0} \mathrm{S} = \mathrm{gr}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) = \bigoplus_{k\geqslant 0} \mathscr{K}^k/\mathscr{K}^{k+1}. \tag{3.4.4.4}$$

L'hypothèse que $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-Module de type fini entraîne d'abord que $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{S}$-Module gradué *de type fini*. En effet, la question est locale sur $\mathfrak{X}$, et on peut donc supposer pour la traiter que $\mathfrak{X}=\mathrm{Spf}(B)$, où B est un anneau adique noethérien, et $\mathscr{F}=N^{\Delta}$, où N est un B-module de type fini (**I**, 10.10.5); on a en outre $X_0=\mathrm{Spec}(B_0)$ où $B_0=B/\mathfrak{J}B$, et les $\mathcal{O}_{X_0}$-Modules quasi-cohérents $\mathscr{S}$ et $\mathscr{M}$ sont respectivement égaux à $\widetilde{S}'$ et $\widetilde{M}'$, où $S'=\bigoplus_{k\geqslant 0}((\mathfrak{J}^k/\mathfrak{J}^{k+1})\otimes_{A_0}B_0)$ et $M'=\bigoplus_{k\geqslant 0}((\mathfrak{J}^k/\mathfrak{J}^{k+1})\otimes_{A_0}N_0)$, avec $N_0=N/\mathfrak{J}N$; on a donc évidemment $M'=S'\otimes_{B_0}N_0$, et comme N_0 est un B_0-module de type fini, M′ est un S′-module de type fini, d'où notre assertion (**I**, 1.3.13).

Comme le morphisme $f_0: X_0\rightarrow Y_0$ est *propre* par hypothèse, on peut appliquer (3.3.2) à $\mathscr{S}$, $\mathscr{M}$ et au morphisme f_0; compte tenu de (1.4.11), on en conclut que pour *tout* $n\geqslant 0$, $\bigoplus_{k\geqslant 0}H^n(X_0, \mathscr{M}_k)$ est un S-module gradué *de type fini*. Cela prouve que la condition (F_n) de (**0**, 13.7.7) est vérifiée pour *tout* $n\geqslant 0$, lorsqu'on considère le système projectif strict $(\mathscr{F}/\mathfrak{J}^k\mathscr{F})_{k\geqslant 0}$ de faisceaux de groupes abéliens sur X_0, munis chacun de sa structure naturelle de « A-module filtré ». On peut donc appliquer (**0**, 13.7.7), qui prouve que :

1° Le système projectif $(H^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k))_{k\geqslant 0}$ vérifie la condition (ML).

2° Si $H'^n=\varprojlim_k H^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k)$, H'^n est un A-module de type fini.

3° La filtration définie sur H'^n par les noyaux des homomorphismes canoniques $H'^n\rightarrow H^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k)$ est $\mathfrak{J}$-bonne.

Notons d'autre part que si on pose $X_k=(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{K}^{k+1})$, $\mathscr{F}_k$ est un $\mathcal{O}_{X_k}$-Module cohérent (**I**, 10.11.3) et si U est un ouvert affine dans X_0, U est aussi un ouvert affine dans chacun des X_k (**I**, 5.1.9), donc $H^n(U, \mathscr{F}_k)=0$ pour tout $n>0$ et tout k (1.3.1) et $H^0(U, \mathscr{F}_k)\rightarrow H^0(U, \mathscr{F}_h)$ est surjectif pour $h\leqslant k$ (**I**, 1.3.9). On est donc dans les conditions de (**0**, 13.3.2) et l'application de (**0**, 13.3.1) prouve que H'^n s'identifie canoniquement à $H^n(\mathfrak{X}, \varprojlim_k \mathscr{F}_k)=H^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$; cela achève de prouver (3.4.4).

(3.4.5) Revenons maintenant à la démonstration de (3.4.2) et (3.4.3). Prouvons d'abord ces propositions dans le cas $\mathfrak{Y}=\mathrm{Spf}(A)$ envisagé dans (3.4.4); pour cela, pour tout $g\in A$, appliquons (3.4.4) au schéma formel affine noethérien induit sur l'ouvert $\mathfrak{Y}_g=\mathfrak{D}(g)$ de $\mathfrak{Y}$, qui est égal à $\mathrm{Spf}(A_{\{g\}})$, et au préschéma formel induit par $\mathfrak{X}$ sur $f^{-1}(\mathfrak{Y}_g)$; notons que $\mathfrak{Y}_g$ est aussi un ouvert affine dans le préschéma $Y_k=(\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/(\mathfrak{J}^{\Delta})^{k+1})$, et comme $\mathscr{F}_k$ est un $\mathcal{O}_{X_k}$-Module cohérent, on a

$$H^n(f^{-1}(\mathfrak{Y}_g), \mathscr{F}_k)=\Gamma(\mathfrak{Y}_g, R^nf_*(\mathscr{F}_k))$$

pour tout $k\geqslant 0$ en vertu de (1.4.11). L'homomorphisme canonique

$$H^n(f^{-1}(\mathfrak{Y}_g), \mathscr{F}) \rightarrow \varprojlim_k \Gamma(\mathfrak{Y}_g, R^nf_*(\mathscr{F}_k))$$

est un isomorphisme; mais on a ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 3.2.6)

$$\varprojlim_k \Gamma(\mathfrak{Y}_g, R^nf_*(\mathscr{F}_k))=\Gamma(\mathfrak{Y}_g, \varprojlim_k R^nf_*(\mathscr{F}_k))$$

et comme le faisceau $R^n f_*(\mathscr{F})$ est associé au préfaisceau $\mathfrak{Y}_g \rightsquigarrow H^n(f^{-1}(\mathfrak{Y}_g), \mathscr{F})$ sur les $\mathfrak{Y}_g$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 3.2.1), on a bien montré que l'homomorphisme (3.4.2.2) est *bijectif*. Prouvons ensuite que $R^n f_*(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$-Module cohérent, et de façon plus précise que l'on a

$$R^n f_*(\mathscr{F}) = (H^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}))^\Delta. \tag{3.4.5.1}$$

Avec les notations précédentes, on a, puisque $\mathscr{F}_k$ est un $\mathcal{O}_{X_k}$-Module cohérent (1.4.13)

$$\Gamma(\mathfrak{Y}_g, R^n f_*(\mathscr{F}_k)) = (\Gamma(\mathfrak{Y}, R^n f_*(\mathscr{F}_k)))_g = (H^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k))_g.$$

Or, les $H^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k)$ forment un système projectif vérifiant (ML) et leur limite projective $H^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$ est un A-module de type fini. On en conclut ($\mathbf{0}$, 13.7.8) que l'on a

$$\varprojlim_k((H^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k))_g) = H^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \otimes_A A_{\{g\}} = \Gamma(\mathfrak{Y}_g, (H^n(\mathfrak{X}, \mathscr{F}))^\Delta)$$

compte tenu de (**I**, 10.10.8) appliqué à A et $A_{\{g\}}$; ceci démontre (3.4.5.1) puisque $\Gamma(\mathfrak{Y}_g, R^n f_*(\mathscr{F})) = \varprojlim_k \Gamma(\mathfrak{Y}_g, R^n f_*(\mathscr{F}_k))$.

Comme (3.4.2.2) est alors un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$-Modules cohérents, c'est nécessairement un isomorphisme *topologique* (**I**, 10.11.6). Enfin, il résulte des relations $R^n f_*(\mathscr{F}_k) = (H^n(X, \mathscr{F}_k))^\Delta$ que le système projectif $(R^n f_*(\mathscr{F}_k))_{k \geqslant 0}$ vérifie (ML) (**I**, 10.10.2).

Une fois (3.4.2) et (3.4.3) démontrés dans le cas où le préschéma formel $\mathfrak{Y}$ est affine noethérien, il est immédiat de passer de là au cas général pour (3.4.2) et la première assertion de (3.4.3), qui sont locales sur $\mathfrak{Y}$. Quant à la seconde assertion de (3.4.3), il suffit, $\mathfrak{Y}$ étant noethérien, de le recouvrir par un nombre fini d'ouverts affines noethériens U_i et de remarquer que les restrictions du système projectif $(R^q f_*(\mathscr{F}_k))$ à chacun des U_i vérifient (ML).

Nous avons en outre démontré en cours de route :

Corollaire (**3.4.6**). — *Sous les hypothèses de* (3.4.4), *l'homomorphisme canonique*

$$H^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \to \Gamma(\mathfrak{Y}, R^q f_*(\mathscr{F})) \tag{3.4.6.1}$$

est bijectif.

§ 4. LE THÉORÈME FONDAMENTAL DES MORPHISMES PROPRES APPLICATIONS

4.1. Le théorème fondamental.

(**4.1.1**) Soient X, Y deux préschémas usuels noethériens, $f : X \to Y$ un morphisme *propre*, Y′ une partie fermée de Y, X′ son image réciproque $f^{-1}(Y')$. Nous désignerons par $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ les préschémas formels $X_{/X'}$ et $Y_{/Y'}$ *complétés* de X et Y le long de X′ et Y′ respectivement (**I**, 10.8.5), par $\hat{f}$ le *prolongement* de f à ces complétés (**I**, 10.9.1) qui est un morphisme $\hat{X} \to \hat{Y}$ de préschémas formels. Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module *cohérent* $\mathscr{F}$, nous désignerons par $\hat{\mathscr{F}}$ son *complété* $\mathscr{F}_{/X'}$ le long de X′ (**I**, 10.8.4) qui est un $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-Module cohérent (**I**, 10.8.8).

(4.1.2) Soit $\mathscr{J}$ un Idéal cohérent de $\mathcal{O}_Y$ tel que $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_Y/\mathscr{J})=Y'$ (**I**, 5.2.1); on sait (**I**, 4.4.5) que $\mathscr{K}=f^*(\mathscr{J})\mathcal{O}_X$ est un Idéal cohérent de $\mathcal{O}_X$ tel que

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathscr{K})=X'.$$

Nous considérerons pour tout $k\geqslant 0$ les $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents

$$\mathscr{F}_k=\mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y/\mathscr{J}^{k+1})=\mathscr{F}/\mathscr{K}^{k+1}\mathscr{F}.$$

Les $\mathcal{O}_Y$-Modules $R^nf_*(\mathscr{F})$ et $R^nf_*(\mathscr{F}_k)$ sont *cohérents* pour tout n (3.2.1). Pour tout $k\geqslant 0$ et tout n, l'homomorphisme canonique $\mathscr{F}\to\mathscr{F}_k$ définit par fonctorialité un homomorphisme

$$R^nf_*(\mathscr{F})\to R^nf_*(\mathscr{F}_k). \tag{4.1.2.1}$$

En outre, comme $\mathscr{F}_k$ est un $\mathcal{O}_X/\mathscr{K}^{k+1}$-Module, $R^nf_*(\mathscr{F}_k)$ est un $\mathcal{O}_Y/\mathscr{J}^{k+1}$-Module (**0**, 12.2.1) et on déduit donc de (4.1.2.1) un homomorphisme

$$R^nf_*(\mathscr{F})\otimes_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y/\mathscr{J}^{k+1})\to R^nf_*(\mathscr{F}_k). \tag{4.1.2.2}$$

Les deux membres de (4.1.2.2) forment deux systèmes projectifs, et la limite projective du premier membre n'est autre que le *complété* $(R^nf_*(\mathscr{F}))_{/Y'}$, que nous noterons $(R^nf_*(\mathscr{F}))^\wedge$. En outre, il est immédiat que les homomorphismes (4.1.2.2) forment un système projectif, d'où par passage à la limite un *homomorphisme canonique*

$$\varphi_n:(R^nf_*(\mathscr{F}))^\wedge\to\varprojlim_k R^nf_*(\mathscr{F}_k). \tag{4.1.2.3}$$

D'ailleurs (4.1.2.2) est un homomorphisme de $(\mathcal{O}_Y/\mathscr{J}^{k+1})$-Modules, et par suite (**I**, 10.8.3) peut être considéré comme un homomorphisme continu de $\mathcal{O}_{\hat{Y}}$-Modules topologiques pseudo-discrets ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 3.8.1). L'homomorphisme φ_n est par suite un homomorphisme *continu* de $\mathcal{O}_Y$-Modules topologiques.

(4.1.3) Soit $i:\hat{X}\to X$ le morphisme canonique d'espaces annelés défini dans (**I**, 10.8.7), de sorte que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X_k \arrow[r, "h_k"] \arrow[dr, "i_k"'] & \hat{X} \arrow[d, "i"] \\ & X \end{tikzcd} \tag{4.1.3.1}$$

où X_k est le sous-préschéma fermé de X défini par l'Idéal $\mathscr{K}^{k+1}$, i_k l'injection canonique, h_k le morphisme d'espaces annelés correspondant à l'identité dans les espaces sous-jacents et à l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{\hat{X}}\to\mathcal{O}_X/\mathscr{K}^{k+1}$ (**I**, 10.5.2). En outre, on a $\hat{\mathscr{F}}=i^*(\mathscr{F})$ (**I**, 10.8.8) à un isomorphisme canonique près. On sait que l'on a

$$H^n(X_k,i_k^*(\mathscr{F}_k))=H^n(X,\mathscr{F}_k) \tag{4.1.3.2}$$

à un isomorphisme canonique près, puisque $\mathscr{F}_k = (i_k)_*(i_k^*(\mathscr{F}_k))$ (G, II, 4.9.1); l'homomorphisme canonique $H^n(\hat{X}, \hat{\mathscr{F}}) \to H^n(X_k, h_k^*(\hat{\mathscr{F}}))$ (**0**, 12.1.3.5) s'écrit donc aussi

(4.1.3.3) $$H^n(\hat{X}, \hat{\mathscr{F}}) \to H^n(X, \mathscr{F}_k)$$

et ces homomorphismes forment évidemment un système projectif, d'où par passage à la limite, un homomorphisme canonique

(4.1.3.4) $$\psi_{n,X} : H^n(\hat{X}, \hat{\mathscr{F}}) \to \varprojlim_k H^n(X, \mathscr{F}_k).$$

Remplaçant X par un ouvert de la forme $f^{-1}(V)$, où V est un ouvert affine de Y, on a, compte tenu de (1.4.11), des homomorphismes

(4.1.3.5) $$\psi_{n,V} : H^n(\hat{X} \cap f^{-1}(V), \hat{\mathscr{F}}) \to \varprojlim_k \Gamma(V, R^n f_*(\mathscr{F}_k));$$

ces homomorphismes commutent de façon évidente à la restriction de V à un ouvert affine plus petit, donc définissent finalement un *homomorphisme canonique* de faisceaux

(4.1.3.6) $$\psi_n : R^n \hat{f}_*(\hat{\mathscr{F}}) \to \varprojlim_k R^n f_*(\mathscr{F}_k).$$

(4.1.4) Soit enfin $j : \hat{Y} \to Y$ le morphisme canonique d'espaces annelés (**I**, 10.8.7); comme $R^n f_*(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent (3.2.1), on a $j^*(R^n f_*(\mathscr{F})) = R^n f_*(\mathscr{F})^\wedge$ à un isomorphisme canonique près (**I**, 10.8.8) et on a donc un homomorphisme canonique

(4.1.4.1) $$\rho_n : (R^n f_*(\mathscr{F}))^\wedge = j^*(R^n f_*(\mathscr{F})) \to R^n \hat{f}_*(i^*(\mathscr{F})) = R^n \hat{f}_*(\hat{\mathscr{F}})$$

défini de façon générale pour les espaces annelés (voir la démonstration de (1.4.15)). Montrons que le diagramme

(4.1.4.2) $$\begin{array}{ccc} (R^n f_*(\mathscr{F}))^\wedge & \xrightarrow{\rho_n} & R^n \hat{f}_*(\hat{\mathscr{F}}) \\ & {\scriptstyle\varphi_n}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\psi_n} & \\ & \varprojlim_k R^n f_*(\mathscr{F}_k) & \end{array}$$

est *commutatif*. Il suffit évidemment de prouver la commutativité du diagramme correspondant d'homomorphismes de préfaisceaux, donc on peut se borner au cas où Y est affine, et tout revient à prouver que le diagramme

(4.1.4.3) $$\begin{array}{ccc} (H^n(X, \mathscr{F}))^\wedge & \xrightarrow{\rho_n} & H^n(\hat{X}, \hat{\mathscr{F}}) \\ & {\scriptstyle\varphi_n}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\psi_{n,X}} & \\ & \varprojlim_k H^n(X, \mathscr{F}_k) & \end{array}$$

est commutatif. Mais la commutativité de (4.1.3.1) et les relations vues dans (4.1.3) entre les groupes de cohomologie donnent aussitôt le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}) & \to & \mathrm{H}^n(\hat{\mathrm{X}}, \hat{\mathscr{F}}) = \mathrm{H}^n(\hat{\mathrm{X}}, i^*(\mathscr{F})) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k) = \mathrm{H}^n(\mathrm{X}_k, i_k^*(\mathscr{F})) & \end{array}$$

d'où on déduit aussitôt la commutativité de (4.1.4.3).

Théorème **(4.1.5)**. — *Soient* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme propre de préschémas noethériens,* Y' *une partie fermée de* Y, $\mathrm{X}' = f^{-1}(\mathrm{Y}')$. *Alors, pour tout* $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-*Module cohérent* $\mathscr{F}$, $\mathrm{R}^n\hat{f}_*(\hat{\mathscr{F}})$ *est un* $\mathcal{O}_{\hat{\mathrm{X}}}$-*Module cohérent et les homomorphismes* φ_n, ψ_n *et* ρ_n *du diagramme* (4.1.4.2) *sont des isomorphismes topologiques.*

Il suffira évidemment de prouver que φ_n et ψ_n sont des isomorphismes; comme $\mathrm{R}^nf_*(\mathscr{F})$ est cohérent (3.2.1), il en résultera que $(\mathrm{R}^nf_*(\mathscr{F}))^\wedge$ est cohérent (**I**, 10.8.8) et la bicontinuité de φ_n, ψ_n et ρ_n est alors automatique (**I**, 10.11.6).

Remarques **(4.1.6)**. — (i) Si on pose $\mathscr{F}_k = \hat{\mathscr{F}}/\hat{\mathscr{K}}^{k+1}\hat{\mathscr{F}}$, il est immédiat que $\mathscr{F}_k = i_*(\hat{\mathscr{F}}_k)$, et l'homomorphisme canonique (4.1.3.6) n'est autre que l'homomorphisme déjà défini en (3.4.2.2)

(4.1.6.1) $$\mathrm{R}^n\hat{f}_*(\hat{\mathscr{F}}) \to \varprojlim_k \mathrm{R}^n\hat{f}_*(\hat{\mathscr{F}}_k);$$

par suite le fait que ψ_n soit un isomorphisme est un cas particulier de (3.4.3). Mais nous en donnerons ci-dessous une démonstration directe, évitant les considérations délicates sur les limites projectives de suites spectrales (**0**, 13.7), sur lesquelles repose le théorème général (3.4.3).

(ii) Compte tenu du fait que les ψ_n sont des isomorphismes, il est équivalent de dire que les φ_n ou les $\rho_n = \psi_n^{-1} \circ \varphi_n$ sont des isomorphismes. Le th. (4.1.5) exprime entre autres que *la formation des* R^nf_* *commute à la complétion* et pourra s'appeler le *premier théorème de comparaison* de la théorie « algébrique » à la théorie « formelle ».

Nous commencerons par établir la forme affine de (4.1.5) :

Corollaire **(4.1.7)**. — *Les hypothèses étant celles de* (4.1.5), *supposons en outre* $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, *où* A *est noethérien, et* $\mathscr{J} = \tilde{\mathfrak{J}}$, *où* $\mathfrak{J}$ *est un idéal de* A, *de sorte que* $\mathscr{F}_k = \mathscr{F}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}$. *L'homomorphisme canonique*

(4.1.7.1) $$\varphi_n : (\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}))^\wedge \to \varprojlim_k \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k)$$

(où le premier membre est le séparé complété de $\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F})$ *pour la topologie* $\mathfrak{J}$-*préadique) est un isomorphisme. Le système projectif* $(\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k))_{k \geqslant 0}$ *vérifie pour tout n la condition* (ML), *et l'homomorphisme canonique*

(4.1.7.2) $$\psi_n : \mathrm{H}^n(\hat{\mathrm{X}}, \hat{\mathscr{F}}) \to \varprojlim_k \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k)$$

est un isomorphisme. Enfin, la filtration sur $\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F})$, *définie par les noyaux des homomor-*

phismes canoniques $H^n(X, \mathscr{F}) \to H^n(X, \mathscr{F}_k)$, *est* $\mathfrak{J}$*-bonne* (**0**, 13.7.7) *et* φ_n *est un isomorphisme topologique* [1].

L'entier $n \geqslant 0$ étant fixé dans cette démonstration, nous poserons pour simplifier

(**4.1.7.3**) $$H = H^n(X, \mathscr{F}), \quad H_k = H^n(X, \mathscr{F}_k)$$

(**4.1.7.4**) $$R_k = \mathrm{Ker}(H \to H_k), \quad \text{sous-A-module de H.}$$

La suite exacte de cohomologie

$$H^n(X, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}) \to H^n(X, \mathscr{F}) \to H^n(X, \mathscr{F}_k) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(X, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}) \to H^{n+1}(X, \mathscr{F})$$

montre que l'on a aussi $R_k = \mathrm{Im}(H^n(X, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}) \to H^n(X, \mathscr{F}))$; nous poserons

(**4.1.7.5**) $$\begin{aligned} Q_k &= \mathrm{Ker}(H^{n+1}(X, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}) \to H^{n+1}(X, \mathscr{F})) \\ &= \mathrm{Im}(H^n(X, \mathscr{F}_k) \to H^{n+1}(X, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F})). \end{aligned}$$

On a donc la suite exacte

(**4.1.7.6**) $$0 \to R_k \to H \to H_k \to Q_k \to 0.$$

(**4.1.7.7**) Soit x un élément de $\mathfrak{J}^m$ ($m \geqslant 0$) ; la multiplication par x dans $\mathfrak{J}^k\mathscr{F}$ est un homomorphisme $\mathfrak{J}^k\mathscr{F} \to \mathfrak{J}^{k+m}\mathscr{F}$, et donne lieu par suite à un homomorphisme

(**4.1.7.8**) $$\mu_{x,m} : H^n(X, \mathfrak{J}^k\mathscr{F}) \to H^n(X, \mathfrak{J}^{k+m}\mathscr{F}).$$

Si on désigne par S la A-algèbre graduée $\bigoplus_{k \geqslant 0} \mathfrak{J}^k$, on sait que les multiplications $\mu_{x,m}$ définissent sur $E = \bigoplus_{k \geqslant 0} H^n(X, \mathfrak{J}^k\mathscr{F})$ une structure de *module gradué de type fini* sur l'anneau gradué S (3.3.2), qui est *noethérien* (**II**, 2.1.5).

Lemme (**4.1.7.9**). — *Les sous-modules* R_k *de* H *définissent sur* H *une filtration* $\mathfrak{J}$*-bonne.*

En premier lieu, montrons que l'on a

(**4.1.7.10**) $$\mathfrak{J}^m R_k \subset R_{k+m},$$

la multiplication dans $H = H^n(X, \mathscr{F})$ par un élément $x \in \mathfrak{J}^m$ étant donc l'application $\mu_{x,0}$.

Pour tout $x \in \mathfrak{J}^m$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F} & \xrightarrow{x} & \mathfrak{J}^{k+m+1}\mathscr{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{F} & \xrightarrow[x]{} & \mathscr{F} \end{array}$$

[1] La démonstration qui suit, plus simple que la démonstration initiale, et le complément relatif à la filtration de $H^n(X, \mathscr{F})$, nous ont été communiqués par J.-P. Serre.

(où les flèches horizontales sont la multiplication par x, et les flèches verticales les injections canoniques) est commutatif; donc le diagramme correspondant

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}) & \xrightarrow{\mu_{x,m}} & \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathfrak{J}^{k+m+1}\mathscr{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}) & \xrightarrow[\mu_{x,0}]{} & \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \end{array} \tag{4.1.7.11}$$

est commutatif, ce qui, compte tenu de l'interprétation de R_k comme image de $\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}) \rightarrow \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F})$, prouve (4.1.7.10) et montre en outre que le S-module gradué $\mathrm{R} = \bigoplus_{k\geqslant 0} \mathrm{R}_k$ est un *quotient* du sous-S-module $\mathrm{M} = \bigoplus_{k\geqslant 0} \mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F})$ de E; la remarque faite plus haut montre donc que R est un S-module *de type fini*, ce qui équivaut à l'assertion de (4.1.7.9) (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 1, th. 1).

(4.1.7.12) Considérons maintenant le S-module gradué $\mathrm{N} = \bigoplus_{k\geqslant 0} \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F})$ défini comme dans (4.7.1.8); c'est encore un S-module *de type fini* en vertu de (3.3.2); on a $\mathrm{Q}_k \subset \mathrm{N}_k$ pour tout k par (4.1.7.5) et le diagramme (4.1.7.11) où on remplace n par $n+1$, montre que $\mathrm{S}_m \mathrm{Q}_k = \mathfrak{J}^m \mathrm{Q}_k \subset \mathrm{Q}_{k+m}$. Autrement dit, Q est un *sous-S-module gradué* de N, et par suite est *de type fini*.

(4.1.7.13) Désignons par α_m l'injection canonique $\mathfrak{J}^m \rightarrow \mathrm{A}$, qu'on peut écrire $\mathrm{S}_m \rightarrow \mathrm{S}_0$. Comme $\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}_k = 0$, le A-module $\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k)$ est annulé par $\mathfrak{J}^{k+1}$; comme Q_k est l'image du A-homomorphisme $\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k) \rightarrow \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F})$, Q_k, en tant que A-module, est aussi annulé par $\mathfrak{J}^{k+1}$; cela signifie encore que, dans le S-*module* Q, on a

$$\alpha_{k+1}(\mathrm{S}_{k+1})\mathrm{Q}_k = 0. \tag{4.1.7.14}$$

Comme Q est un S-module de type fini, il existe un entier k_0 et un entier h tels que $\mathrm{Q}_{k+h} = \mathrm{S}_h \mathrm{Q}_k$ pour $k \geqslant k_0$ (**II**, 2.1.6, (ii)); on déduit de cette relation et de (4.1.7.14) qu'il existe un entier $r > 0$ tel que

$$\alpha_r(\mathrm{S}_r)\mathrm{Q} = 0. \tag{4.1.7.15}$$

(4.1.7.16) Notons maintenant que l'injection canonique $\mathfrak{J}^{k+m}\mathscr{F} \rightarrow \mathfrak{J}^k\mathscr{F}$ donne en passant à la cohomologie un A-homomorphisme

$$\nu_m : \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathfrak{J}^{k+m}\mathscr{F}) \rightarrow \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathfrak{J}^k\mathscr{F}) \tag{4.1.7.17}$$

et, pour tout $x \in \mathfrak{J}^m$, on a évidemment la factorisation

$$\mu_{x,0} : \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathfrak{J}^k\mathscr{F}) \xrightarrow{\mu_{x,m}} \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathfrak{J}^{k+m}\mathscr{F}) \xrightarrow{\nu_m} \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathfrak{J}^k\mathscr{F}) \tag{4.1.7.18}$$

d'où on conclut que, pour tout sous-A-module P de $H^{n+1}(X, \mathfrak{J}^k\mathscr{F})$, on a, dans le S-module N,

(4.1.7.19) $$\nu_m(S_m P) = \alpha_m(S_m)P.$$

Lemme **(4.1.7.20).** — *Il existe un entier* $m>0$ *tel que* $\nu_m(Q_{k+m})=0$ *pour tout* $k \geqslant k_0$.

Prenons en effet pour m un multiple de h qui soit $\geqslant r$; comme $Q_{k+m}=S_m Q_k$ pour $k \geqslant k_0$, on a en vertu de (4.1.7.19) et (4.1.7.15) $\nu_m(Q_{k+m}) = \alpha_m(S_m)Q_k \subset \alpha_r(S_r)Q_k = 0$.

(4.1.7.21) Remarquons que du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^n(X, \mathscr{F}) \arrow[r] & H^n(X, \mathscr{F}_k) \arrow[r, "\partial"] & H^{n+1}(X, \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}) \arrow[r] & H^{n+1}(X, \mathscr{F}) \\
H^n(X, \mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[u] & H^n(X, \mathscr{F}_{k+m}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[u] & H^{n+1}(X, \mathfrak{J}^{k+m+1}\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[u] & H^{n+1}(X, \mathscr{F}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

provenant lui-même du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F} \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r] & \mathscr{F}_k \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{J}^{k+m+1}\mathscr{F} \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{F}_{k+m} \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les applications canoniques, on déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R_k \arrow[r] & H \arrow[r] & H_k \arrow[r] & Q_k \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_{k+m} \arrow[r] \arrow[u] & H \arrow[r] \arrow[u, "id."'] & H_{k+m} \arrow[r] \arrow[u] & Q_{k+m} \arrow[r] \arrow[u, "\nu_m"] & 0
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes. Comme la dernière flèche verticale est nulle pour $k \geqslant k_0$ (4.1.7.20), l'image de H_{k+m} dans H_k est contenue dans $\mathrm{Ker}(H_k \to Q_k) = \mathrm{Im}(H \to H_k)$, mais par ailleurs elle contient $\mathrm{Im}(H \to H_k)$ par la commutativité du diagramme, donc elle lui est égale; il en est donc de même des images dans H_k des $H_{k'}$ pour $k' \geqslant k+m$, ce qui démontre la condition (ML) pour le système projectif $(H_k)_{k \geqslant 0}$. En outre, pour tout ouvert affine U de X, on a $H^i(U, \mathscr{F}_k)=0$ pour $i>0$ (1.3.1), et pour $m>0$, l'application $H^0(U, \mathscr{F}_{k+m}) \to H^0(U, \mathscr{F}_k)$ est surjective (**I**, 1.3.9). On peut donc appliquer (**0**, 13.3.1), et l'homomorphisme canonique $H^n(\hat{X}, \hat{\mathscr{F}}) \to \varprojlim_k H^n(X, \mathscr{F}_k)$ est *bijectif* pour tout $n \geqslant 0$.

Comme le système projectif $(H/R_k)_{k \geqslant 0}$ est strict, on peut passer à la limite projective dans les suites exactes

(4.1.7.22) $$0 \to H/R_k \to H_k \to Q_k \to 0$$

(**0**, 13.2.2); comme $\nu_m(Q_{k+m}) = 0$, on a $\varprojlim_k Q_k = 0$, d'où un isomorphisme topologique $\varprojlim_k (H/R_k) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k H_k$. Mais comme la filtration (R_k) de H est $\mathfrak{J}$-bonne, elle définit sur H la topologie $\mathfrak{J}$-préadique; donc $\varprojlim_k (H/R_k)$ est le séparé complété de H pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique, ce qui achève de démontrer (4.1.7).

(4.1.8) Passons enfin à la démonstration de (4.1.5) : pour tout ouvert affine V de Y, $\Gamma(V, (R^n f_*(\mathscr{F}))^\wedge)$ est le séparé complété de $\Gamma(V, R^n f_*(\mathscr{F}))$ pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique (si $\mathscr{J}|V = \tilde{\mathfrak{J}}$) puisque $R^n f_*(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent (**I**, 10.8.4), et $\Gamma(V, \varprojlim_k R^n f_*(\mathscr{F}_k))$ est égal à $\varprojlim_k \Gamma(V, R^n f_*(\mathscr{F}_k))$ ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 3.2.6); le fait que φ_n soit un isomorphisme topologique résulte alors de (4.1.7) et de (1.4.11). D'autre part (toujours en vertu de (1.4.11)), il résulte de (4.1.7) que l'homomorphisme $\psi_{n,V}$ de (4.1.3.3) est un *isomorphisme*, donc ψ_n est un isomorphisme par définition de $R^n \hat{f}_*(\hat{\mathscr{F}})$.

Corollaire **(4.1.9)**. — *Sous les hypothèses de* (4.1.4), *pour tout ouvert affine* V *de* Y, *l'homomorphisme canonique*

$$H^n(\hat{X} \cap f^{-1}(V), \hat{\mathscr{F}}) \to \Gamma(\hat{Y} \cap V, R^n \hat{f}_*(\hat{\mathscr{F}}))$$

est bijectif.

Remarque **(4.1.10)**. — Soit $f: X \to Y$ un morphisme *de type fini* de préschémas (usuels) noethériens, et soit $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent dont le support soit *propre sur* Y (**II**, 5.4.10). On sait alors (3.2.4) que $R^n f_*(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent pour tout $n \geqslant 0$. En outre, on peut toujours supposer que $\mathscr{F} = u_*(\mathscr{G})$, où $\mathscr{G} = u^*(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_Z$-Module cohérent, Z désignant un sous-préschéma fermé convenable de X dont l'espace sous-jacent est $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$, et $u: Z \to X$ l'injection canonique (**I**, 9.3.5). Si on pose $\mathscr{G}_k = \mathscr{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\mathcal{O}_Y/\mathscr{J}^{k+1})$, on a $\mathscr{G}_k = u^*(\mathscr{F}_k)$, $R^n f_*(\mathscr{F}_k) = R^n(f \circ u)_*(\mathscr{G}_k)$ et $R^n f_*(\mathscr{F}) = R^n(f \circ u)_*(\mathscr{G})$ (1.3.4), et enfin, compte tenu de (**I**, 10.9.5),

$$R^n \hat{f}_*(\hat{\mathscr{F}}) = R^n(f \circ u)_*^\wedge(\mathscr{G}).$$

On peut alors appliquer (4.1.5) à $\mathscr{G}$ et au morphisme propre $f \circ u$, et on en conclut que sous ces hypothèses, *les résultats de* (4.1.5) *sont valables pour* $\mathscr{F}$ *et* f.

4.2. Cas particuliers et variantes.

La forme la plus utile du th. de comparaison (4.1.5) est la suivante :

Proposition **(4.2.1)**. — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f: X \to Y$ *un morphisme propre,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent. Alors, pour tout* $y \in Y$ *et tout* p, $(R^p f_*(\mathscr{F}))_y$ *est* *un $\mathcal{O}_y$-module de type fini, donc séparé pour la topologie $\mathfrak{m}_y$-préadique, et on a un isomorphisme topologique canonique*

$$(\mathbf{4.2.1.1}) \qquad ((\mathrm{R}^p f_*(\mathcal{F}))_y)^\wedge \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k \mathrm{H}^p(f^{-1}(y), \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Y}}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^k))$$

où le premier membre est le complété de $(\mathrm{R}^p f_*(\mathcal{F}))_y$ pour la topologie $\mathfrak{m}_y$-préadique, et au second membre $f^{-1}(y)$ est considéré, pour tout $k\geqslant 0$, comme espace sous-jacent au préschéma $\mathrm{X}\times_\mathrm{Y}\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^k)$ (I, 3.6.1).

Comme $\mathcal{O}_y$ est un anneau local noethérien et $(\mathrm{R}^p f_*(\mathcal{F}))_y$ un $\mathcal{O}_y$-module de type fini (3.2.1), la topologie $\mathfrak{m}_y$-préadique sur $(\mathrm{R}^p f_*(\mathcal{F}))_y$ est séparée ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 7.3.5). Les autres assertions sont conséquences de (4.1.7) lorsque Y est noethérien et le point y fermé, en remplaçant Y par un voisinage affine de y et prenant $\mathrm{Y}'=\{y\}$, compte tenu de (G, II, 4 9.1). Dans le cas général, posons $\mathrm{Y}_1=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y)$, $\mathrm{X}_1=\mathrm{X}\times_\mathrm{Y}\mathrm{Y}_1$, $\mathcal{F}_1=\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Y}}\mathcal{O}_{\mathrm{Y}_1}$ et soit $f_1=f\times 1_{\mathrm{Y}_1}:\mathrm{X}_1\rightarrow\mathrm{Y}_1$; Y_1 est noethérien et f_1 propre (**II**, 5.4.2, (iii)) et $\mathcal{F}_1$ est cohérent ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.3.11). Soit y_1 l'unique point fermé de Y_1; la proposition est valable pour f_1, $\mathcal{F}_1$ et y_1; on a $\mathcal{O}_{y_1}=\mathcal{O}_y$, $f_1^{-1}(y_1)=f^{-1}(y)$ (I, 3.6.5), les préschémas $\mathrm{X}\times_\mathrm{Y}\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^k)$ et $\mathrm{X}_1\times_{\mathrm{Y}_1}\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^k)$ étant canoniquement identifiés (I, 3.3.9); en outre, $\mathcal{F}_1\otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Y}_1}}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^k)$ s'identifie à $\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Y}}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^k)$ (**I**, 9.1.6). Il reste à voir que $\mathrm{R}^p f_{1*}(\mathcal{F}_1)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{R}^p f_*(\mathcal{F})\otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Y}}\mathcal{O}_{\mathrm{Y}_1}$, ce qui résulte de (1.4.15), le morphisme local $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y)\rightarrow\mathrm{Y}$ étant plat ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.7.1 et **I**, 2.4.2).

Le corollaire suivant utilise la terminologie de la théorie de la dimension (chap. IV) et ne sera pas appliqué avant le chap. IV.

Corollaire (**4.2.2**). — *Soient Y un préschéma localement noethérien, $f:\mathrm{X}\rightarrow\mathrm{Y}$ un morphisme propre, y un point de Y, r la dimension de $f^{-1}(y)$. Alors, pour tout $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Module cohérent $\mathcal{F}$, les faisceaux $\mathrm{R}^p f_*(\mathcal{F})$ sont nuls au voisinage de y pour tout $p>r$.*

En effet, on a alors $\mathrm{H}^p(f^{-1}(y), \mathcal{F}\otimes(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^k))=0$ (G, II, 4.15.2) pour tout k, donc (4.2.1) le séparé complété de $(\mathrm{R}^p f_*(\mathcal{F}))_y$ pour la topologie $\mathfrak{m}_y$-préadique est nul, et comme cette topologie est séparée, on a aussi $(\mathrm{R}^p f_*(\mathcal{F}))_y=0$; d'où la conclusion, puisque $\mathrm{R}^p f_*(\mathcal{F})$ est cohérent ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.2.2).

(**4.2.3**) Le résultat (4.2.1) est surtout employé pour $p=0$; on obtient donc le corollaire suivant :

Corollaire (**4.2.4**). — *Sous les hypothèses de* (4.2.1), *on a un isomorphisme canonique topologique*

$$((f_*(\mathcal{F}))_y)^\wedge \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k \Gamma(f^{-1}(y), \mathcal{F}_y/\mathfrak{m}_y^k\mathcal{F}_y).$$

4.3. Le théorème de connexion de Zariski.

Les résultats de ce numéro et du suivant généralisent des théorèmes bien connus de Zariski, et peuvent tous se déduire de (4.2.4). Ils sont conséquences du th. suivant :

Théorème (**4.3.1**) (théorème de connexion). — *Soient Y un préschéma localement noethérien, $f:\mathrm{X}\rightarrow\mathrm{Y}$ un morphisme propre. Alors $\mathcal{A}(\mathrm{X})=f_*(\mathcal{O}_\mathrm{X})$ est une $\mathcal{O}_\mathrm{Y}$-Algèbre cohérente.*

Soit Y′ *le* Y-*schéma fini au-dessus de* Y *tel que* $\mathscr{A}(Y')=\mathscr{A}(X)$, *qui est déterminé à un* Y-*isomorphisme près* (**II**, 1.3.1 et 6.1.3); *si* $f'=\mathscr{A}(e)$ *est le* Y-*morphisme* $X\rightarrow Y'$ *déduit de l'isomorphisme identique* $e:\mathscr{A}(Y')\rightarrow\mathscr{A}(X)$ (**II**, 1.2.7), f' *est propre,* $f'_*(\mathcal{O}_X)$ *est isomorphe à* $\mathcal{O}_{Y'}$, *et les fibres* $f'^{-1}(y')$ *du morphisme* f' *sont connexes et non vides pour tout* $y'\in Y'$.

Soit $g:Y'\rightarrow Y$ le morphisme structural. Pour prouver que l'homomorphisme $\theta:\mathcal{O}_{Y'}\rightarrow f'_*(\mathcal{O}_X)$ entrant dans la définition du morphisme f' est bijectif, il suffit, puisque Y′ est affine sur Y, de prouver que $g_*(\theta):g_*(\mathcal{O}_{Y'})\rightarrow g_*(f'_*(\mathcal{O}_X))=f_*(\mathcal{O}_X)$ est l'identité (**II**, 1.4.2); mais cela résulte des définitions puisque $g_*(\mathcal{O}_{Y'})=\mathscr{A}(Y')$ et $f_*(\mathcal{O}_X)=\mathscr{A}(X)$. Le fait que $\mathscr{A}(X)$ est cohérent est un cas particulier du th. de finitude (3.2.1). Comme f est propre et g séparé, f' est propre (**II**, 5.4.3, (i)); pour terminer la démonstration de (4.3.1), il suffit donc d'en prouver le

Corollaire (**4.3.2**). — *Sous les hypothèses de* (4.3.1), *supposons de plus que* $f_*(\mathcal{O}_X)$ *soit isomorphe à* $\mathcal{O}_Y$. *Alors les fibres* $f^{-1}(y)$ *de* f *sont connexes et non vides pour tout* $y\in Y$.

L'hypothèse que $f_*(\mathcal{O}_X)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_Y$ entraîne déjà que f est dominant, donc surjectif puisque f est une application fermée. On peut se ramener, comme dans (4.2.1), au cas où y est *fermé* dans Y; $f^{-1}(y)$ étant un espace noethérien, a un nombre fini de composantes connexes, et c'est l'espace sous-jacent du complété $\hat{X}$ le long de $f^{-1}(y)$. Si Z_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ sont ces composantes connexes, il est clair que $\Gamma(\hat{X},\mathcal{O}_{\hat{X}})$ est composé direct des anneaux $\Gamma(Z_i,\mathcal{O}_{\hat{X}})$, et chacun de ces derniers n'est pas réduit à 0, puisque la section unité est distincte de 0 en chaque point de $\hat{X}$. Or, si on applique (4.1.5) à $\mathscr{F}=\mathcal{O}_X$, dont le complété le long de $f^{-1}(y)$ est $\mathcal{O}_{\hat{X}}$, on voit que $\Gamma(\hat{X},\mathcal{O}_{\hat{X}})$ est isomorphe au séparé complété $\mathfrak{m}_y$-adique $\hat{\mathcal{O}}_y$ de l'anneau local $\mathcal{O}_y$; c'est donc un *anneau local* qui ne peut être composé direct de plusieurs anneaux non réduits à 0 (sans quoi il aurait plusieurs idéaux maximaux distincts). On a donc $n=1$, ce qui démontre le corollaire.

Corollaire (**4.3.3**). — *Sous les hypothèses de* (4.3.1), *pour tout* $y\in Y$, *l'ensemble des composantes connexes de la fibre* $f^{-1}(y)$ *est en correspondance biunivoque avec l'ensemble fini des points de la fibre* $g^{-1}(y)$, *où* $g:Y'\rightarrow Y$ *est le morphisme structural* (autrement dit, l'ensemble des *idéaux maximaux* de $(f_*(\mathcal{O}_X))_y$).

Puisque Y′ est fini sur Y, on sait en effet que $g^{-1}(y)$ est un espace fini discret (**II**, 6.1.7). Comme $f^{-1}(y)=f'^{-1}(g^{-1}(y))$, le corollaire résulte de cette remarque et de (4.3.1).

On a ainsi une interprétation remarquable du Y-préschéma Y′ défini dans (4.3.1). La factorisation $f=g\circ f'$ du morphisme propre f est analogue à la factorisation obtenue par K. Stein pour les applications holomorphes d'espaces analytiques, et nous l'appellerons par la suite la *factorisation de Stein* de f.

Remarque (**4.3.4**). — Soit k une extension du corps $\boldsymbol{k}(y)$: si le préschéma $f^{-1}(y)\otimes_{\boldsymbol{k}(y)}k=X\times_Y\mathrm{Spec}(k)$ est connexe, il en est de même de $f^{-1}(y)$, qui en est l'image par un morphisme de projection (**I**, 3.4.7). Nous dirons que, pour un morphisme $f:X\rightarrow Y$ de préschémas et un point $y\in Y$, la fibre $f^{-1}(y)$ est *géométriquement connexe,* si pour *toute* extension k de $\boldsymbol{k}(y)$, le préschéma $f^{-1}(y)\otimes_{\boldsymbol{k}(y)}k=X\times_Y\mathrm{Spec}(k)$ est *connexe.*

Sous les hypothèses de (4.3.2), on peut alors en renforcer la conclusion : les fibres $f^{-1}(y)$ sont en effet *géométriquement connexes*. Pour le voir, observons que pour toute extension k de $\boldsymbol{k}(y)$, il existe un anneau local noethérien A et un homomorphisme local $\varphi : \mathcal{O}_y \rightarrow \mathrm{A}$ qui fait de A un $\mathcal{O}_y$-module *plat* et tel que le corps résiduel de A soit $\boldsymbol{k}(y)$-isomorphe à k (**0**, 10.3.1). Soit alors $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ et soit $h : \mathrm{Y}_1 \rightarrow \mathrm{Y}$ le morphisme local correspondant à φ, transformant l'unique point fermé y_1 de Y_1 en y (**I**, 2.4.1); posons $\mathrm{X}_1 = \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}_1$, et $f_1 = f \times 1_{\mathrm{Y}_1}$; f_1 est propre (**II**, 5.4.2, (iii)) et $f_1^{-1}(y_1)$ est un $\boldsymbol{k}(y_1)$-préschéma isomorphe à $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Spec}(k)$. Tout revient donc à montrer que $f_{1*}(\mathcal{O}_{\mathrm{X}_1}) = \mathcal{O}_{\mathrm{Y}_1}$ pour pouvoir appliquer (4.3.2) à f_1. Or g est un morphisme *plat*, comme il résulte de (**I**, 2.4.2) et de (1.4.15.5); on a donc $f_{1*}(\mathcal{O}_{\mathrm{X}_1}) = h^*(f_*(\mathcal{O}_{\mathrm{X}})) = h^*(\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}) = \mathcal{O}_{\mathrm{Y}_1}$ en vertu de (1.4.15) appliqué pour $q = 0$.

Dans le cas général (4.3.1), le même raisonnement montre que l'on a (avec les notations de (4.3.1)) $f_{1*}(\mathcal{O}_{\mathrm{X}_1}) = h^*(g_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Y}'}))$, et la factorisation de Stein $f_1 = g_1 \circ f_1'$ de f_1 est telle que $g_1 = g \times 1_{\mathrm{Y}_1}$ (**II**, 1.5.2), le Y_1-schéma fini correspondant étant $\mathrm{Y}_1' = \mathrm{Y}' \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}_1$. Tenant compte de la transitivité des fibres (**I**, 3.6.4), on voit donc que le nombre des composantes connexes de $f_1^{-1}(y_1)$ est, en vertu de (4.3.3), égal au nombre d'éléments de $g_1^{-1}(y_1) = g^{-1}(y) \otimes_{\boldsymbol{k}(y)} k$. Si on prend pour k une extension *algébriquement close* de $\boldsymbol{k}(y)$, ce nombre est indépendant de l'extension algébriquement close considérée et égal au *nombre géométrique de points de* $g^{-1}(y)$ (**I**, 6.4.7), ou encore à la *somme des rangs séparables* $[\boldsymbol{k}(y_i') : \boldsymbol{k}(y)]_s$ où y_i' parcourt l'ensemble fini $g^{-1}(y)$. On dit encore que ce nombre est le *nombre géométrique de composantes connexes* de $f^{-1}(y)$. On notera que les $\boldsymbol{k}(y_i')$ ne sont autres que les corps résiduels de l'anneau semi-local $(f_*(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}))_y$.

Proposition (**4.3.5**). — *Soient* X *et* Y *deux préschémas localement noethériens intègres et* $f : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$ *un morphisme propre dominant. Pour tout* $y \in \mathrm{Y}$, *le nombre de composantes connexes de* $f^{-1}(y)$ *est au plus égal au nombre des idéaux maximaux de la fermeture intégrale* $\mathcal{O}_y'$ *de* $\mathcal{O}_y$ *dans le corps des fonctions rationnelles* R(X).

En effet, pour tout ouvert U de Y, $\Gamma(\mathrm{U}, f_*(\mathcal{O}_{\mathrm{X}})) = \Gamma(f^{-1}(\mathrm{U}), \mathcal{O}_{\mathrm{X}})$ est l'intersection des anneaux locaux $\mathcal{O}_x$ tels que $x \in f^{-1}(\mathrm{U})$ (**I**, 8.2.1.1). On en conclut aussitôt que la fibre $(f_*(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}))_y$ est un sous-anneau de R(X) contenant $\mathcal{O}_y$. En outre, comme $f_*(\mathcal{O}_{\mathrm{X}})$ est un $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$-Module cohérent, $(f_*(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}))_y$ est un $\mathcal{O}_y$-module de type fini, donc contenu dans $\mathcal{O}_y'$; on sait ([13], vol. I, p. 257 et 259) que tout idéal maximal d'un tel anneau A est l'intersection de A et d'un idéal maximal de $\mathcal{O}_y'$, d'où la proposition.

Définition (**4.3.6**). — *On dit qu'un anneau local intègre est unibranche si sa clôture intégrale est un anneau local. On dit qu'un point* y *d'un préschéma intègre* Y *est unibranche si l'anneau local* $\mathcal{O}_y$ *est unibranche* (ce qui est en particulier le cas lorsque Y est *normal* au point y).

Soit A un anneau local intègre, et soit K son corps des fractions; pour que A soit unibranche, il faut et il suffit que tout sous-anneau A_1 de K, contenant A et qui est une A-algèbre finie, soit un anneau local. En effet, soit A′ la clôture intégrale de A; il résulte du premier théorème de Cohen-Seidenberg (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 1, th. 1) que tout idéal maximal de A_1 est la trace d'un idéal maximal de A′, donc si A′ est local, il en est de même de A_1. Réciproquement, A′ est limite inductive de la famille filtrante croissante des sous-A-algèbres finies A_α de A', et si chacune des A_α est un anneau local, l'idéal maximal de A_α est la trace sur A_α de celui de A_β pour $A_\alpha \subset A_\beta$ par le même raisonnement que ci-dessus, donc A' est un anneau local (**0**, 10.3.1.3).

On notera que si le complété d'un anneau local *noethérien* A est intègre (ce qu'on exprime en disant que A est *analytiquement intègre*), A est *unibranche*. Soient en effet $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, K son corps des fractions, K′ le corps des fractions de $\hat{A}$; on a donc $K' = K \otimes_A \hat{A}$. Soit A'_F une sous-A-algèbre finie de K. Le sous-anneau B_F de K′ engendré par $\hat{A}$ et A'_F est isomorphe à $A'_F \otimes_A \hat{A}$; c'est un $\hat{A}$-module de type fini, *complété* de A'_F pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique ($\mathbf{0}_I$, 7.3.3 et 7.3.6). Comme A'_F est un anneau semi-local (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, cor. 3 de la prop. 9) et que son complété est intègre, A'_F ne peut avoir qu'un seul idéal maximal $\mathfrak{m}'_F$ et on a $\mathfrak{m}'_F \cap A = \mathfrak{m}$; d'où notre assertion.

Corollaire (**4.3.7**). — *Sous les hypothèses de* (4.3.5), *supposons que la fermeture algébrique de* R(Y) *dans* R(X) *soit de degré séparable n et que* $y \in Y$ *soit unibranche. Alors la fibre* $f^{-1}(y)$ *a au plus n composantes connexes. En particulier si la fermeture algébrique de* R(Y) *dans* R(X) *est radicielle sur* R(X), $f^{-1}(y)$ *est connexe.*

En effet, soit $\mathcal{O}''_y$ la clôture intégrale de $\mathcal{O}_y$; la fermeture intégrale $\mathcal{O}'_y$ de $\mathcal{O}_y$ dans R(X) est aussi celle de $\mathcal{O}''_y$; mais on sait que si $\mathcal{O}''_y$ est un anneau local, $\mathcal{O}'_y$ est un anneau semi-local dont le nombre d'idéaux maximaux est au plus égal à *n* ([13], vol. I, p. 289, th. 22).

Ce corollaire est essentiellement la forme sous laquelle Zariski énonce son « théorème de connexion » pour les schémas algébriques.

Remarque (**4.3.8**). — Si on ajoute aux hypothèses de (4.3.7) l'hypothèse que Y est *normal* au point y, la fibre $f^{-1}(y)$ est *géométriquement connexe*, puisque (avec les notations de (4.3.4)) $g^{-1}(y)$ est réduit à un point y' et que $\boldsymbol{k}(y')$ est radiciel sur $\boldsymbol{k}(y)$.

Définition (**4.3.9**). — *Étant donné un préschéma localement noethérien* Y, *on dit qu'un morphisme* de type fini $f : X \to Y$ *est universellement ouvert si, pour tout préschéma irréductible localement noethérien* Y′, *et tout morphisme dominant* $g : Y' \to Y$, *toute composante irréductible de* $X' = X \times_Y Y'$ *domine* Y′.

Si Y est irréductible, cela revient à dire que si η, η' sont les points génériques de Y et Y′ respectivement (de sorte que $g(\eta') = \eta$), et si on pose $f' = f_{(Y')}$, toute composante irréductible de X′ rencontre $f'^{-1}(\eta')$ ($\mathbf{0}_I$, 2.1.8); cela implique donc que pour tout ouvert U de Y, le morphisme $f^{-1}(U) \to U$, restriction de f, est universellement ouvert,

Corollaire (**4.3.10**). — *Soient* X, Y *deux préschémas localement noethériens intègres.* $f : X \to Y$ *un morphisme propre dominant et universellement ouvert. Si la fermeture algébrique de* R(Y) *dans* R(X) *est radicielle sur* R(Y), *toute fibre* $f^{-1}(y)$ ($y \in Y$) *est géométriquement connexe.*

On peut se borner au cas où Y = Spec(B), B étant un anneau intègre noethérien. Il résulte alors de (**II**, 7.1.7) qu'il existe un anneau local *noethérien intégralement clos* A qui domine $\mathcal{O}_y$ et a R(Y) pour corps des fractions. Soit Y′ = Spec(A), et soit $h : Y' \to Y$ le morphisme correspondant à l'injection canonique $B \to A$, qui est birationnel (donc dominant); en outre, si y' est l'unique point fermé de Y′, on a $h(y') = y$. Soient

$X' = X \times_Y Y'$, $f' = f \times 1_{Y'}$; désignons par η, η', ξ les points génériques de Y, Y' et X respectivement, de sorte que $f(\xi) = \eta$ et $h^{-1}(\eta) = \{\eta'\}$; en outre, $\boldsymbol{k}(\eta) = \boldsymbol{k}(\eta') = R(Y)$, donc $f'^{-1}(\eta')$ est isomorphe à $f^{-1}(\eta)$ (**I**, 3.6.4) et en particulier, puisque ξ est le point générique de $f^{-1}(\eta)$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.1.8), $f'^{-1}(\eta')$ a un seul point générique. Mais par hypothèse, toute composante irréductible de X' a son point générique dans $f'^{-1}(\eta')$, donc X' est nécessairement irréductible, son point générique ξ' est le point générique de $f'^{-1}(\eta')$ et on a $\boldsymbol{k}(\xi') = \boldsymbol{k}(\xi)$. Posons $X'' = X'_{\mathrm{red}}$, $f'' = f'_{\mathrm{red}}$; X'' est donc intègre et noethérien, f'' est propre (**II**, 5.4.6) et les espaces sous-jacents aux fibres $f'^{-1}(y')$ et $f''^{-1}(y')$ sont les mêmes; en outre, $R(X'') = \boldsymbol{k}(\xi') = R(X)$, donc f'' vérifie les hypothèses de (4.3.8), et $f''^{-1}(y')$ est géométriquement connexe. Soit maintenant k une extension quelconque de $\boldsymbol{k}(y)$; il existe une extension k_1 de $\boldsymbol{k}(y)$ dont $\boldsymbol{k}(y')$ et k peuvent être considérés comme des sous-extensions (Bourbaki, *Alg.*, chap. V, § 4, prop. 2). Par hypothèse, $f''^{-1}(y') \times_{Y'} \mathrm{Spec}(k_1)$ est connexe, et il a même préschéma réduit que $f'^{-1}(y') \times_{Y'} \mathrm{Spec}(k_1)$ (**I**, 5.1.8), donc ce dernier est connexe, et comme il est isomorphe à $f^{-1}(y) \times_Y \mathrm{Spec}(k_1)$ (**I**, 3.6.4), on en conclut que ce dernier est connexe; *a fortiori*, il en est de même de $f^{-1}(y) \times_Y \mathrm{Spec}(k)$ d'après la remarque du début de (4.3.4), ce qui achève la démonstration.

Remarques (**4.3.11**). — (i) Le raisonnement précédent est dû en substance à Zariski [20], à cela près qu'il peut prendre pour A la clôture intégrale de $\mathcal{O}_y$, celle-ci étant un anneau noethérien pour les anneaux locaux de la géométrie algébrique classique. D'autre part, Zariski prouve que si Y est la variété de Chow d'un espace projectif $\mathbf{P}_k^r$ sur un corps k, et si X est la partie fermée de $\mathbf{P}_k^r \times_k Y$ qui définit la correspondance de Chow entre $\mathbf{P}_k^r$ et Y, alors la projection $X \rightarrow Y$ est un morphisme universellement ouvert (*loc. cit.*, lemme de la p. 82). Il semble bien que ce soit la seule propriété formelle des « coordonnées de Chow » dont on se soit servi dans certaines applications; il y a par suite intérêt dans une telle situation, à substituer le langage : fibres d'un morphisme propre (éventuellement supposé universellement ouvert ou soumis à d'autres restrictions analogues de régularité locale) au langage : spécialisation de cycles dans l'espace projectif.

(ii) Au chap. IV, nous verrons qu'un morphisme universellement ouvert $f : X \rightarrow Y$ peut encore être défini de la façon suivante (qui justifie la terminologie) : pour *tout* morphisme $Z \rightarrow Y$, le morphisme $f_{(Z)} : X_{(Z)} \rightarrow Z$ est *ouvert*. On peut montrer en outre que si f vérifie les hypothèses de (4.3.10), alors, si y, y' sont deux points de Y tels que y soit une *spécialisation* de y', le nombre géométrique de composantes connexes de $f^{-1}(y)$ est au plus égal à celui des composantes connexes de $f^{-1}(y')$.

Corollaire (**4.3.12**). — *Sous les hypothèses de* (4.3.5), *supposons en outre* R(Y) *algébriquement fermé dans* R(X), *et soit y un point normal de* Y. *Alors $f^{-1}(y)$ est géométriquement connexe, et il existe un voisinage ouvert* U *de y dans* Y *tel que $f_*(\mathcal{O}_X | f^{-1}(U))$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_Y | U$. Si plus particulièrement, on suppose* Y *normal* (*et* R(Y) *algébriquement fermé dans* R(X)) *$f_*(\mathcal{O}_X)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_Y$.*

La première assertion relative à $f^{-1}(y)$ est un cas particulier de (4.3.8). On en déduit que si $f: X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} Y$ est la factorisation de Stein de f (4.3.3), $g^{-1}(y)$ se réduit à un seul point y'; en outre, on a $\mathcal{O}_y \subset \mathcal{O}_{y'} = (f_*(\mathcal{O}_X))_y \subset R(X)$, et comme $\mathcal{O}_{y'}$ est fini sur $\mathcal{O}_y$, (et *a fortiori* sur $R(Y)$), il est contenu dans $R(Y)$ en vertu de l'hypothèse; comme y est normal, on a nécessairement $\mathcal{O}_{y'} = \mathcal{O}_y$; on en conclut que g est un isomorphisme local au point y' (**I**, 6.5.4), ce qui achève de prouver la première partie du corollaire. La seconde résulte de la première, car l'hypothèse supplémentaire entraîne que g est bijective et un isomorphisme local au voisinage de tout point de Y', donc un isomorphisme.

Le fait que (4.3.7) soit établi dans le cadre des schémas permet des applications telles que la suivante :

Proposition **(4.3.13)**. — *Soient* A *un anneau local noethérien unibranche,* $\mathfrak{a}$ *un idéal de définition de* A, $A_0 = A/\mathfrak{a}$, $S = \mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ *l'anneau gradué associé à* A *pour la filtration* $\mathfrak{a}$*-préadique ;* S *est une* A_0*-algèbre graduée engendrée par* S_1, S_1 *étant un* A_0*-module de type fini. Alors* $\mathrm{Proj}(S)$ *est un* A_0*-schéma connexe.*

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A; $Y = \mathrm{Spec}(A)$ est un schéma intègre dont le point y correspondant à $\mathfrak{m}$ est l'unique point fermé. Par hypothèse, on a $\mathfrak{m}^p \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ pour un entier p, donc $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{m}\}$. Soit $S' = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{a}^n$, et soit $X = \mathrm{Proj}(S')$, qui est le Y-schéma obtenu en faisant éclater l'idéal $\mathfrak{a}$; X est intègre et le morphisme structural $f: X \to Y$ est birationnel (**II**, 8.1.4) et évidemment projectif. Par suite, (4.3.7) est applicable et montre que $f^{-1}(y)$ est connexe; mais l'espace $f^{-1}(y)$ est sous-jacent à $\mathrm{Proj}(S' \otimes_A A_0)$ (**I**, 3.6.1 et **II**, 2.8.10); comme $S' \otimes_A A_0 = S$ par définition, la proposition est démontrée.

4.4. Le « main theorem » de Zariski.

Proposition **(4.4.1)**. — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f: X \to Y$ *un morphisme propre. Soit* X' *l'ensemble des points* $x \in X$ *qui sont isolés dans leur fibre* $f^{-1}(f(x))$. *Alors l'ensemble* X' *est ouvert dans* X, *et si* $f = g \circ f'$ *est la factorisation de Stein de* f (4.3.3), *la restriction de* f' *à* X' *est un isomorphisme de* X' *sur un sous-préschéma induit sur un ouvert* U *de* Y', *et on a* $X' = f'^{-1}(U)$.

Comme $g^{-1}(f(x))$ est fini et discret (4.3.3 et **II**, 6.1.7), pour que x soit isolé dans $f^{-1}(f(x))$, il faut et il suffit qu'il le soit dans $f'^{-1}(f'(x))$; on peut donc se borner au cas où $f' = f$, donc $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$. Alors, si $x \in X'$, $f^{-1}(f(x))$, qui est connexe (4.3.2) est nécessairement réduit au point x. Comme f est fermé, pour tout voisinage ouvert V de x dans X, $f(X - V)$ est fermé dans Y et ne contient pas $y = f(x)$, puisque $f^{-1}(y) = \{x\}$; si U est le complémentaire de $f(X - V)$ dans Y, on a $f^{-1}(U) \subset V$, et on en conclut que les images réciproques par f d'un système fondamental de voisinages ouverts de y forment un système fondamental de voisinages ouverts de x. L'hypothèse $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$ et la définition de l'image directe d'un faisceau ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 3.4.1 et 4.2.1) entraînent alors que, si $f = (\psi, \theta)$, l'homomorphisme $\theta_y^\sharp : \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ est un *isomorphisme*. On en conclut qu'il existe un voisinage ouvert V de x et un voisinage ouvert U de y tels que la restriction de f à V soit un isomorphisme de V sur U (**I**, 6.5.4); en outre, d'après ce qu'on vient de voir, on peut supposer que $f^{-1}(\mathrm{U})=\mathrm{V}$, d'où on conclut aussitôt, par définition, que $\mathrm{V}\subset\mathrm{X}'$, ce qui achève la démonstration.

La proposition suivante a été démontrée par Chevalley dans le cas des schémas algébriques :

Proposition (**4.4.2**). — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ *un morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *f est fini.*

b) *f est affine et propre.*

c) *f est propre et, pour tout $y\in\mathrm{Y}$, $f^{-1}(y)$ est un ensemble fini.*

On sait que *a)* entraîne *b)* (**II**, 6.1.2 et 6.1.11). Si f est propre et affine, il en est de même du morphisme $f^{-1}(y)\to\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$ (**II**, 1.6.2, (iii) et 5.4.2, (iii)), et le th. de finitude (3.2.1) appliqué au faisceau structural de $f^{-1}(y)$, montre que $f^{-1}(y)=\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, où A est une $\boldsymbol{k}(y)$-algèbre *finie*; donc $f^{-1}(y)$ est un ensemble fini (**II**, 6.1.7), et on voit que *b)* entraîne *c)*. Enfin, comme $f^{-1}(y)$ est un préschéma algébrique sur $\boldsymbol{k}(y)$, l'hypothèse que l'ensemble $f^{-1}(y)$ est fini entraîne que l'espace $f^{-1}(y)$ est discret (**I**, 6.4.4). Avec les notations de (4.4.1), on a donc $\mathrm{X}'=\mathrm{X}$, et $f':\mathrm{X}\to\mathrm{Y}'$ est un isomorphisme; comme g est un morphisme fini, on voit que *c)* entraîne *a)*.

Théorème (**4.4.3**) (« Main theorem » de Zariski). — *Soient* Y *un préschéma noethérien,* $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ *un morphisme quasi-projectif,* X' *l'ensemble des points* $x\in\mathrm{X}$ *qui sont isolés dans leur fibre* $f^{-1}(f(x))$. *Alors* X' *est une partie ouverte de* X, *et le sous-préschéma induit* X' *est isomorphe à un préschéma induit sur une partie ouverte d'un* Y-*préschéma* Y' *fini sur* Y.

L'hypothèse entraîne qu'il existe un Y-préschéma projectif Z tel que X soit Y-isomorphe à un sous-préschéma induit sur un ouvert de Z (**II**, 5.3.2 et 5.5.1). On est donc ramené à démontrer le théorème lorsque f est un morphisme projectif, donc propre (**II**, 5.5.3), et il résulte alors aussitôt de (4.4.1).

Remarque (**4.4.4**). — Si X est réduit (resp. irréductible et X' non vide), on peut supposer, dans l'énoncé de (4.4.3), que Y' est réduit (resp. irréductible). En effet, on peut toujours remplacer Y' par le sous-préschéma *adhérence* $\overline{\mathrm{X}'}$ de X' dans Y' (**I**, 9.5.11 et **II**, 6.1.5, (i) et (ii)), et on sait que si X' est réduit, il en est de même de $\overline{\mathrm{X}'}$ (**I**, 9.5.9, (i)); par ailleurs, si X' n'est pas vide, il est irréductible si X l'est, et $\overline{\mathrm{X}'}$ est alors aussi irréductible.

Corollaire (**4.4.5**). — *Soient* Y *un schéma localement noethérien,* $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ *un morphisme de type fini,* x *un point de* X *isolé dans sa fibre* $f^{-1}(f(x))$. *Alors il existe un voisinage ouvert de* x *dans* X *qui est isomorphe à une partie ouverte d'un* Y-*préschéma fini sur* Y.

Soient en effet $y=f(x)$, U un voisinage ouvert affine de y dans Y, V un voisinage ouvert affine de x dans X, contenu dans $f^{-1}(\mathrm{U})$. Comme Y est séparé, l'injection $\mathrm{U}\to\mathrm{Y}$ est affine (**II**, 1.6.3), et comme V est affine sur U *(ibid.)*, la restriction de f à V est un morphisme affine $\mathrm{V}\to\mathrm{Y}$ (**II**, 1.6.2, (ii)); *a fortiori*, cette restriction est un morphisme quasi-projectif puisqu'il est de type fini (**I**, 6.3.5 et **II**, 5.3.4, (i)). Il suffit alors d'appliquer à cette restriction le th. (4.4.3).

Le cor. (4.4.5) s'énonce dans le langage de l'algèbre commutative :

Corollaire **(4.4.6)**. — *Soient* A *un anneau noethérien,* B *une* A*-algèbre de type fini,* $\mathfrak{q}$ *un idéal premier de* B, $\mathfrak{p}$ *son image réciproque dans* A. *On suppose que* $\mathfrak{q}$ *soit à la fois maximal et minimal dans l'ensemble des idéaux premiers de* B *dont l'image réciproque est* $\mathfrak{p}$. *Alors il existe* $g \in B - \mathfrak{q}$, *une* A*-algèbre finie* A' *et un élément* $f' \in A'$ *tels que les* A*-algèbres* B_g *et* $A'_{f'}$ *soient isomorphes.*

Il suffit en effet d'appliquer (4.4.5) à $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(B)$, l'hypothèse sur $\mathfrak{q}$ signifiant exactement qu'il est isolé dans sa fibre (**I**, 1.1.7).

On en déduit le résultat suivant, moins général en apparence :

Corollaire **(4.4.7)**. — *Soient* A *un anneau local noethérien,* B *une* A*-algèbre de type fini,* $\mathfrak{n}$ *un idéal premier de* B *dont l'image réciproque dans* A *est l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$. *On suppose que* $\mathfrak{n}$ *est maximal dans* B *et est minimal dans l'ensemble des idéaux premiers de* B *dont l'image réciproque est* $\mathfrak{m}$ *(ce qui signifie aussi que* $B\mathfrak{m}$ *est primaire pour* $\mathfrak{n}$*). Alors il existe une* A*-algèbre finie* A' *et un idéal maximal* $\mathfrak{m}'$ *de* A' (*dont* $\mathfrak{m}$ *est l'image réciproque dans* A) *tels que* $B_{\mathfrak{n}}$ *soit isomorphe à la* A*-algèbre* $A'_{\mathfrak{m}'}$.

Le cas particulier suivant de (4.4.7) est aussi parfois appelé « Main Theorem » :

Corollaire **(4.4.8)**. — *Sous les conditions de* (4.4.7), *supposons en outre* A *et* B *intègres et ayant même corps des fractions* K. *Alors, si* A *est intégralement clos, on a* $B = A$.

En effet, la *Remarque* (4.4.4) montre que l'on peut supposer, dans l'application de (4.4.7) que A' est intègre et a K pour corps des fractions; l'hypothèse sur A entraîne alors $A' = A$, donc $B_{\mathfrak{n}} = A$; comme on a $A \subset B \subset B_{\mathfrak{n}}$, on en conclut bien $A = B$.

L'énoncé (4.4.8) est la forme donnée par Zariski à son « Main theorem » (étendu aux anneaux locaux noethériens intègres quelconques).

Les corollaires précédents étaient des variantes de nature locale de (4.4.3), qui est un résultat global. Voici une autre conséquence de nature globale :

Corollaire **(4.4.9)**. — *Soient* Y *un préschéma intègre localement noethérien,* $f : X \to Y$ *un morphisme séparé, de type fini et birationnel. Supposons en outre* Y *normal et toutes les fibres* $f^{-1}(y)$ *finies pour* $y \in Y$. *Alors* f *est une immersion ouverte ; si en outre* f *est fermé (et en particulier si* f *est propre),* f *est un isomorphisme.*

Soit en effet $x \in X$, et posons $y = f(x)$. Comme $f^{-1}(y)$ est un schéma algébrique sur $\boldsymbol{k}(y)$, l'hypothèse qu'il est fini entraîne qu'il est discret (**I**, 6.4.4); en outre $\mathcal{O}_y$ est intégralement clos et $\mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_y$ ont même corps des fractions (**I**, 7.1.5). On peut donc appliquer (4.4.8), et si $f = (\psi, \theta)$, l'homomorphisme $\theta_y^{\#} : \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ est bijectif; on en conclut (**I**, 6.5.4) que f est un isomorphisme local. Mais comme f est séparé et X intègre, f est une immersion ouverte (**I**, 8.2.8). La dernière assertion résulte de ce que f est dominant.

Proposition **(4.4.10)**. — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f : X \to Y$ *un morphisme localement de type fini. L'ensemble* X' *des* $x \in X$ *isolés dans leur fibre* $f^{-1}(f(x))$ *est ouvert dans* X.

La question étant locale sur X et Y, on peut supposer X et Y affines noethériens et f de type fini; f est alors un morphisme affine de type fini, donc quasi-projectif (**II**, 5.3.4, (i)), et il suffit d'appliquer (4.4.3).

Corollaire **(4.4.11)**. — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f: X \to Y$ *un morphisme propre. L'ensemble* U *des points* $y \in Y$ *tels que* $f^{-1}(y)$ *soit discret est ouvert dans* Y, *et le morphisme* $f^{-1}(U) \to U$ *restriction de* f *est fini. En particulier, un morphisme propre et quasi-fini* $X \to Y$ *est fini.*

En effet, le complémentaire de U dans Y est l'image par f de $X - X'$ qui est fermé dans X en vertu de (4.4.10); comme f est une application fermée, U est ouvert. En outre, il résulte de (**II**, 6.2.2) que $f^{-1}(y)$ est fini pour tout $y \in U$; comme le morphisme $f^{-1}(U) \to U$, restriction de f est propre (**II**, 5.4.1), il est fini en vertu de (4.4.2).

Remarques **(4.4.12)**. — (i) Comme on l'a annoncé dans (**II**, 6.2.7), nous montrerons au chap. V que si Y est localement noethérien, tout morphisme quasi-fini et séparé $f: X \to Y$ est quasi-affine, donc quasi-projectif. Il s'ensuivra que, dans le Main Theorem (4.4.3) la conclusion reste valable lorsqu'on suppose seulement f *séparé et de type fini*. En effet, il résulte de (4.4.10) que X′ est ouvert dans X, et comme X est localement noethérien, la restriction de f à X′ est encore de type fini (**I**, 6.3.5), donc quasi-fini par définition de X′, et évidemment séparé; on peut donc appliquer (4.4.3) à cette restriction, d'où la conclusion.

(ii) Nous donnerons au chap. IV une démonstration plus élémentaire de (4.4.10), utilisant la théorie de la dimension.

4.5. Complétés de modules d'homomorphismes.

Proposition **(4.5.1)**. — *Soient* A *un anneau noethérien,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A, X *un* A-*préschéma de type fini,* $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ *deux* $\mathcal{O}_X$-*Modules cohérents dont les supports ont une intersection propre sur* $Y = \mathrm{Spec}(A)$ (**II**, 5.4.10). *Alors, pour tout entier* $n \geqslant 0$, $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_X}(X; \mathcal{F}, \mathcal{G})$ *est un* A-*module de type fini, et son séparé complété pour la topologie* $\mathfrak{J}$-*préadique s'identifie canoniquement* (*avec les notations de* (4.1.7)) *à* $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}(\hat{X}; \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{G}})$.

On sait (T, 4.2) qu'il existe une suite spectrale birégulière $E(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ dont l'aboutissement est $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}(X; \mathcal{F}, \mathcal{G})$ et dont les termes E_2 sont donnés par $E_2^{pq} = H^p(X, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$. On sait que $\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent (**0**, 12.3.3) dont le support est contenu dans l'intersection de ceux de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ (T, 4.2.2), et est par suite propre sur Y (**II**, 5.4.10). On conclut de (3.2.4) que les E_2^{pq} sont des A-modules de type fini, et par suite (**0**, 11.1.8) il en est de même de tous les termes E_r^{pq} de la suite spectrale et de son aboutissement. D'autre part, si $i: \hat{X} \to X$ est le morphisme canonique, $\hat{\mathcal{F}}$ et $\hat{\mathcal{G}}$ s'identifient canoniquement à $i^*(\mathcal{F})$ et $i^*(\mathcal{G})$, et i est *plat* (**I**, 10.8.8 et 10.8.9). On sait alors (**0**, 12.3.4) qu'il existe, pour tout $q \geqslant 0$, un i-morphisme canonique $u_q: \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}(\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{G}})$, et que le $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-homomorphisme correspondant $u^\sharp: i^*(\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \to \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}(\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{G}})$ est un *isomorphisme* (**0**, 12.3.5); autrement dit (**I**, 10.8.8), $\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}(\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{G}})$ s'identifie canoniquement au complété $(\mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))^\wedge$ (avec les notations de (4.1.7)). On conclut alors du th. de comparaison (4.1.10) que pour tout $p \geqslant 0$, $H^p(\hat{X}, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}(\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{G}}))$ s'identifie canoniquement au séparé complété de $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))$ pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique. Si on désigne par $\mathrm{E}(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}})$ la suite spectrale birégulière définie dans (T, 4.2) relative à $\hat{\mathscr{F}}$ et $\hat{\mathscr{G}}$, on voit donc que si $\hat{\mathrm{A}}$ désigne le séparé complété de A pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique, on a, à un isomorphisme canonique près, $\mathrm{E}_2^{pq}(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}}) = \mathrm{E}_2^{pq}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes_\mathrm{A} \hat{\mathrm{A}}$ ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 7.3.3).

Cela étant, on sait que la donnée du morphisme plat i définit un homomorphisme canonique de suites spectrales

$$\varphi : \mathrm{E}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \rightarrow \mathrm{E}(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}}) = \mathrm{E}(i^*(\mathscr{F}), i^*(\mathscr{G}))$$

qui, pour les termes E_2 (resp. l'aboutissement) se réduit à l'homomorphisme

$$\varphi_2^{pq} : \mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \rightarrow \mathrm{H}^p(\hat{\mathrm{X}}, \mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_{\hat{\mathrm{X}}}}(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}}))$$
$$(\text{resp. } \varphi^n : \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathrm{X}; \mathscr{F}, \mathscr{G}) \rightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{\hat{\mathrm{X}}}}(\hat{\mathrm{X}}; \hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}}))$$

déduit de u_q (resp. u_0) par fonctorialité (**0**, 12.3.4). Par tensorisation avec $\hat{\mathrm{A}}$, les φ_r^{pq} et φ^n donnent des homomorphismes de $\hat{\mathrm{A}}$-modules

$$\psi_r^{pq} : \mathrm{E}_r^{pq}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes_\mathrm{A} \hat{\mathrm{A}} \rightarrow \mathrm{E}_r^{pq}(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}})$$
$$\psi^n : \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathrm{X}; \mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes_\mathrm{A} \hat{\mathrm{A}} \rightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{\hat{\mathrm{X}}}}(\hat{\mathrm{X}}; \hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}}).$$

Comme $\hat{\mathrm{A}}$ est un A-module *plat* ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 7.3.3), les $\hat{\mathrm{A}}$-modules $\mathrm{E}_r^{pq}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes_\mathrm{A} \hat{\mathrm{A}}$ forment une suite spectrale birégulière d'aboutissement les $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathrm{X}; \mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes_\mathrm{A} \hat{\mathrm{A}}$, et les ψ_r^{pq} et ψ_n un morphisme de suites spectrales. Comme les ψ_2^{pq} sont des *isomorphismes*, il en est de même des ψ^n (**0**, 11.1.5).

Corollaire (**4.5.2**). — *Sous les hypothèses de* (4.5.1), *supposons en outre que* A *soit un anneau $\mathfrak{J}$-adique noethérien. Alors, pour tout entier $n \geqslant 0$,* $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathrm{X}; \mathscr{F}, \mathscr{G})$ *s'identifie canoniquement à* $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{\hat{\mathrm{X}}}}(\hat{\mathrm{X}}; \hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}})$.

Il suffit de remarquer que $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathrm{X}; \mathscr{F}, \mathscr{G})$, étant un A-module de type fini, est séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 7.3.6).

Le cas particulier $n=0$ de (4.5.1) s'énonce de la façon suivante :

Corollaire (**4.5.3**). — *Sous les hypothèses de* (4.5.1), *pour tout homomorphisme* $u : \mathscr{F} \rightarrow \mathscr{G}$, *désignons par* $\hat{u}$ *l'homomorphisme complété* $\hat{\mathscr{F}} \rightarrow \hat{\mathscr{G}}$ (I, 10.8.4). *Alors on a un isomorphisme canonique*

$$(\mathbf{4.5.3.1}) \qquad (\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))^\wedge \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\hat{\mathscr{F}}, \hat{\mathscr{G}})$$

où le premier membre est le séparé complété pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique du A-*module* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$, *cet isomorphisme étant obtenu par passage aux séparés complétés à partir de l'homomorphisme* $u \rightarrow \hat{u}$.

4.6. Relations entre morphismes formels et morphismes usuels.

Proposition (**4.6.1**). — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$ *un morphisme propre,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_\mathrm{X}$*-Module cohérent et* f*-plat,* y *un point de* Y. *Supposons que pour un* *entier n, on ait* $H^n(f^{-1}(y), \mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\boldsymbol{k}(y))=0$. *Alors il existe un voisinage* U *de* y *dans* Y *tel que* $R^n f_*(\mathscr{F})|U=0$, *et pour tout entier* $p\geqslant 0$, *l'homomorphisme canonique*

$$(R^{n-1}f_*(\mathscr{F}))_y \to H^{n-1}(f^{-1}(y), \mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^{p+1}))$$

(4.2.1.1) *est surjectif.*

Comme $R^n f_*(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent (3.2.1), la première assertion de la proposition sera établie si l'on prouve que l'on a $(R^n f_*(\mathscr{F}))_y=0$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.2); en vertu de (4.2.1), il suffira de prouver que $H^n(f^{-1}(y), \mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^{p+1}))=0$ pour tout p. C'est vrai par hypothèse pour $p=0$; nous allons le démontrer par récurrence sur p. Posons $X_p=X\times_Y \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^{p+1})$, de sorte que X_{p-1} est un sous-préschéma fermé de X_p, ayant même espace sous-jacent (**I**, 3.6.1); l'hypothèse de récurrence $H^n(X_{p-1}, \mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^p))=0$ entraîne donc $H^n(X_p, \mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^p))=0$; d'autre part, la suite exacte de cohomologie donne, à partir de la suite exacte

$$0 \to \mathfrak{m}_y^p\mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathscr{F} \to \mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathscr{F} \to \mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^p\mathscr{F} \to 0$$

de $\mathcal{O}_{X_p}$-Modules, la suite exacte

$$H^n(X_p, \mathfrak{m}_y^p\mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathscr{F}) \to H^n(X_p, \mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathscr{F}) \to H^n(X_p, \mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^p\mathscr{F})$$

et il suffira de montrer que l'on a

(4.6.1.1) $$H^n(X_p, \mathfrak{m}_y^p\mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathscr{F})=0$$

car alors $H^n(X_p, \mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathscr{F})$ sera un sous-module de $H^n(X_p, \mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^p\mathscr{F})$, donc 0 en vertu de l'hypothèse de récurrence.

Notons maintenant que la fibre $Z=f^{-1}(y)=X\times_Y \mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$ est un sous-préschéma fermé de X_p, et que $\mathfrak{m}_y^p\mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathscr{F}$ est annulé par $\mathfrak{m}_y$, donc peut être considéré comme un $\mathcal{O}_Z$-Module, de sorte que $H^n(Z, \mathfrak{m}_y^p\mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathscr{F})=H^n(X_p, \mathfrak{m}_y^p\mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathscr{F})$. Cela étant, nous allons montrer que le $\mathcal{O}_Z$-homomorphisme canonique

(4.6.1.2) $$(\mathscr{F}/\mathfrak{m}_y\mathscr{F})\otimes_{\boldsymbol{k}(y)}(\mathfrak{m}_y^p/\mathfrak{m}_y^{p+1}) \to \mathfrak{m}_y^p\mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathscr{F}$$

est *bijectif*; cela établi, il en résultera, puisque $\mathfrak{m}_y^p/\mathfrak{m}_y^{p+1}$ est un $\boldsymbol{k}(y)$-module libre, que l'on a

$$H^n(Z, \mathfrak{m}_y^p\mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^{p+1}\mathscr{F})=H^n(Z, \mathscr{F}/\mathfrak{m}_y\mathscr{F})\otimes_{\boldsymbol{k}(y)}(\mathfrak{m}_y^p/\mathfrak{m}_y^{p+1})=0$$

(**0**, 12.2.3), puisque $H^n(Z, \mathscr{F}/\mathfrak{m}_y\mathscr{F})=0$ par hypothèse, d'où (4.6.1.1). Pour établir la première assertion, il reste donc à prouver que (4.6.1.2) est bijectif; comme la question est ponctuelle sur X et que $\mathscr{F}_x$ est un $\mathcal{O}_y$-module *plat* par hypothèse pour tout $x\in f^{-1}(y)$, il suffit d'appliquer (**0**, 10.2.1, *c*)), car $\mathscr{F}_x/\mathfrak{m}_y\mathscr{F}_x$ est un module plat sur le corps $\boldsymbol{k}(y)=\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y$.

Pour démontrer la seconde assertion de (4.6.1), on se ramène aussitôt, comme dans (4.2.1), au cas où Y est affine et y fermé. Notons que (4.6.1.1) donne, par un raisonnement analogue, pour tout $k>0$, la relation

(4.6.1.3) $$H^n(X_{k+1}, \mathfrak{m}_y^k\mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^{k+p+1}\mathscr{F})=0$$

d'où on déduit, par (4.2.1), que l'on a aussi

$$(\mathrm{R}^n f_*(\mathfrak{m}_y^k \mathscr{F}))_y = 0. \tag{4.6.1.4}$$

Cela étant, on tire de la suite exacte de cohomologie l'exactitude de la suite

$$(\mathrm{R}^{n-1} f_*(\mathscr{F}))_y \to (\mathrm{R}^{n-1} f_*(\mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^p \mathscr{F}))_y \to (\mathrm{R}^n f_*(\mathfrak{m}_y^p \mathscr{F}))_y = 0$$

et comme y est fermé et Y affine, on a (1.4.11)

$$\mathrm{R}^{n-1} f_*(\mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^p \mathscr{F}) = (\mathrm{H}^{n-1}(\mathrm{X}, \mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^p \mathscr{F}))^\sim = (\mathrm{H}^{n-1}(f^{-1}(y), \mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^p \mathscr{F}))^\sim$$

(G, II, 4.9.1); or $\mathrm{H}^{n-1}(f^{-1}(y), \mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^p \mathscr{F})$ est un $(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^p)$-module, d'où

$$(\mathrm{R}^{n-1} f_*(\mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^p \mathscr{F}))_y = \mathrm{H}^{n-1}(f^{-1}(y), \mathscr{F}/\mathfrak{m}_y^p \mathscr{F})$$

et cela achève de prouver (4.6.1).

Corollaire (**4.6.2**). — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme propre et plat,* $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ *deux* $\mathcal{O}_\mathrm{X}$*-Modules localement libres,* y *un point de* Y. *Posons* $\mathrm{X}_y = f^{-1}(y) = \mathrm{X} \otimes_\mathrm{Y} \boldsymbol{k}(y)$, $\mathscr{F}_y = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Y}} \boldsymbol{k}(y)$, $\mathscr{G}_y = \mathscr{G} \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Y}} \boldsymbol{k}(y)$, *et supposons que l'on ait*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_y, \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}_y}}(\mathscr{F}_y, \mathscr{G}_y)) = 0. \tag{4.6.2.1}$$

Alors, pour tout homomorphisme $u_0 : \mathscr{F}_y \to \mathscr{G}_y$, *il existe un voisinage ouvert* U *de* Y *et un homomorphisme* $u : \mathrm{F}|f^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathscr{G}|f^{-1}(\mathrm{U})$ *tels que* u_0 *soit égal à l'homomorphisme* $u \otimes 1$.

En effet, l'hypothèse permet d'appliquer (4.6.1) au $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Module cohérent $\mathscr{H} = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ pour $n = 1$ et $p = 0$, car $\mathscr{H}$ est localement libre et *a fortiori* f-plat, et le $\mathcal{O}_{\mathrm{X}_y}$-Module $\mathscr{H} \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Y}} \boldsymbol{k}(y)$ s'identifie alors à $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}_y}}(\mathscr{F}_y, \mathscr{G}_y)$ ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.2.2). On peut supposer $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ affine, et alors (1.4.11) $\mathrm{R}^0 f_*(\mathscr{H}) = (\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))^\sim$, donc $(\mathrm{R}^0 f_*(\mathscr{H}))_y = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes_\mathrm{A} \mathcal{O}_y$; l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes_\mathrm{A} \mathcal{O}_y \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}_y}}(\mathscr{F}_y, \mathscr{G}_y)$$

étant surjectif par (4.6.1), cela établit le corollaire, tout élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes_\mathrm{A} \mathcal{O}_y$ pouvant toujours se mettre sous la forme $u \otimes (1/s)$, où $s \notin \mathfrak{m}_y$ est un élément de A.

Ce corollaire peut se compléter par le suivant :

Corollaire (**4.6.3**). — *Sous les hypothèses de* (4.6.2), *si* u_0 *est injectif* (resp. *surjectif, bijectif*), *on peut supposer qu'il en est de même de* u.

On peut se borner au cas où $\mathrm{U} = \mathrm{Y}$. Il suffit de prouver que si u_0 est injectif (resp. surjectif), $\mathrm{Ker}\, u_x = 0$ (resp. $\mathrm{Coker}\, u_x = 0$) pour tout $x \in f^{-1}(y)$: en effet, $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Coker}\, u$ sont des $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Modules cohérents ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.3.4), donc il existera un voisinage V de $f^{-1}(y)$ dans X tel que la restriction de $\mathrm{Ker}\, u$ (resp. $\mathrm{Coker}\, u$) à V soit 0 ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.2.2); comme f est fermé, il existera un voisinage $\mathrm{U}' \subset \mathrm{U}$ de y tel que $f^{-1}(\mathrm{U}') \subset \mathrm{V}$, et (4.6.3) sera démontré. Par hypothèse, $u_x \otimes 1 : \mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y) \to \mathscr{G}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y)$ est injectif (resp. surjectif),

$\mathscr{F}_x$ et $\mathscr{G}_x$ sont des $\mathcal{O}_x$-modules libres de type fini et $\mathcal{O}_x$ est un $\mathcal{O}_y$-module plat. Lorsque l'on suppose $u_x \otimes 1$ injectif, le fait que u_x soit injectif résulte de (**0**, 10.2.4). Lorsque l'on suppose $u_x \otimes 1$ surjectif, *a fortiori* l'homomorphisme $\mathscr{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x/\mathfrak{m}_x\mathscr{G}_x$, qui s'en déduit par passage aux quotients, est surjectif; comme $\mathscr{G}_x$ est un $\mathcal{O}_x$-module de type fini et que $\mathcal{O}_x$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}_x$, la conclusion résulte du lemme de Nakayama (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 6, n° 3, cor. 4 de la prop. 6).

On déduit en particulier de (4.6.3) :

Corollaire (**4.6.4**). — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f : X \to Y$ *un morphisme propre et plat,* y *un point de* Y, $X_y = X \otimes_Y \boldsymbol{k}(y)$. *Soit* $\mathscr{E}_0$ *un* $\mathcal{O}_{X_y}$-*Module localement libre tel que*

$$\textbf{(4.6.4.1)} \qquad H^1(X_y, \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{X_y}}(\mathscr{E}_0, \mathscr{E}_0)) = 0.$$

Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ *deux* $\mathcal{O}_X$-*Modules localement libres tels que* $\mathscr{F}_y$ *et* $\mathscr{G}_y$ *(avec les notations de* (4.6.2)) *soient isomorphes à* $\mathscr{E}_0$. *Alors il existe un voisinage ouvert* U *de* y *tel que* $\mathscr{F}|f^{-1}(U)$ *et* $\mathscr{G}|f^{-1}(U)$ *soient isomorphes.*

Plus particulièrement :

Corollaire (**4.6.5**). — *Sous les hypothèses de* (4.6.4) *sur* f, X, Y, *supposons que* $H^1(X_y, \mathcal{O}_{X_y}) = 0$. *Si* $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{G}$ *sont deux* $\mathcal{O}_X$-*Modules inversibles tels que* $\mathscr{F}_y$ *et* $\mathscr{G}_y$ *soient isomorphes, il existe un voisinage ouvert* U *de* y *tel que* $\mathscr{F}|f^{-1}(U)$ *et* $\mathscr{G}|f^{-1}(U)$ *soient isomorphes.*

Il suffit d'appliquer (4.6.4) aux modules $\mathscr{F}^{-1} \otimes \mathscr{G}$ et $\mathcal{O}_X$.

Remarques (**4.6.6**). — (i) En utilisant (4.6.5), nous établirons au chap. V la classification des faisceaux inversibles sur un fibré projectif, annoncée dans (**II**, 4.2.7).

(ii) Le résultat de (4.6.1) apparaîtra au § 7 comme conséquence de propositions plus générales.

Proposition (**4.6.7**). — *Soient* Z *un préschéma localement noethérien,* X, Y *deux* Z-*préschémas tels que les morphismes structuraux* $g : X \to Z$, $h : Y \to Z$ *soient propres. Soient* $f : X \to Y$ *un* Z-*morphisme,* z *un point de* Z, *et soit* $f_z = f \times_Z 1 : X \otimes_Z \boldsymbol{k}(z) \to Y \otimes_Z \boldsymbol{k}(z)$.

(i) *Si* f_z *est un morphisme fini* (resp. *une immersion fermée*), *il existe un voisinage ouvert* U *de* z *tel que le morphisme* $g^{-1}(U) \to h^{-1}(U)$, *restriction de* f, *soit un morphisme fini* (resp. *une immersion fermée*).

(ii) *On suppose de plus que* g *soit un morphisme plat. Alors, si* f_z *est un isomorphisme, il existe un voisinage ouvert* U *de* z *tel que le morphisme* $g^{-1}(U) \to h^{-1}(U)$, *restriction de* f, *soit un isomorphisme.*

Dans les deux cas, il suffira de prouver que pour tout $y \in h^{-1}(z)$ il existe un voisinage V_y de y tel que la restriction $f^{-1}(V_y) \to V_y$ de f soit un morphisme fini (resp. une immersion fermée, un isomorphisme); il en résultera alors en effet que si V est la réunion des V_y, la restriction $f^{-1}(V) \to V$ de f est un morphisme fini (resp. une immersion fermée, un isomorphisme) (**II**, 6.1.1 et **I**, 4.2.4). Comme h est un morphisme fermé, il existera un voisinage ouvert U de z tel que $h^{-1}(U) \subset V$, et la proposition sera démontrée.

(i) Notons tout d'abord que f est un morphisme propre (**II**, 5.4.3); si on suppose f_z fini, l'existence pour tout $y \in h^{-1}(z)$ d'un voisinage V_y tel que $f^{-1}(V_y) \to V_y$ soit fini résulte de (4.4.11). Pour traiter le cas où f_z est une immersion fermée, on peut donc déjà supposer que le morphisme f est *fini*, donc que $X = \mathrm{Spec}(\mathscr{B})$, où $\mathscr{B}$ est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre cohérente, le morphisme f correspondant (**II**, 1.2.7) à l'homomorphisme canonique $u : \mathcal{O}_Y \to \mathscr{B}$. Si l'on prouve que pour tout $y \in h^{-1}(z)$, l'homomorphisme $u_y : \mathcal{O}_y \to \mathscr{B}_y$ est surjectif, il en résultera que pour un voisinage V_y de y, $u | V_y$ sera surjectif, le faisceau $\mathrm{Coker}\, u$ étant cohérent ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.4 et 5.2.2). Cela étant, le morphisme fini f_z correspond à l'homomorphisme $v = u \otimes 1 : \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_z} \boldsymbol{k}(z) \to \mathscr{B} \otimes_{\mathcal{O}_z} \boldsymbol{k}(z)$, et l'hypothèse que f_z est une immersion fermée entraîne que l'homomorphisme $u_y \otimes 1 : \mathcal{O}_y \otimes_{\mathcal{O}_z} \boldsymbol{k}(z) \to \mathscr{B}_y \otimes_{\mathcal{O}_z} \boldsymbol{k}(z)$ est surjectif. Comme $\mathscr{B}_y$ est un $\mathcal{O}_y$-module de type fini et $\mathcal{O}_y$ un anneau local noethérien, la conclusion résulte comme dans (4.6.3) du lemme de Nakayama.

(ii) Le même raisonnement que ci-dessus montre qu'il suffit cette fois de prouver que u_y est bijectif, sachant que $u_y \otimes 1$ est bijectif.

Cela résultera du lemme suivant :

Lemme (**4.6.7.1**). — *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens*, $\rho : A \to B$ *un homomorphisme local*, $u : N \to M$ *un homomorphisme de* B*-modules. On suppose que* M *est un* A*-module plat*, N *un* B*-module de type fini et que* $u \otimes 1 : N \otimes_A k \to M \otimes_A k$ (*où* k *est le corps résiduel de* A) *est injectif. Alors* N *est un* A*-module plat et* u *est injectif.*

Pour établir la première assertion, il faut montrer que pour tout couple de A-modules *de type fini* P, Q et tout A-homomorphisme injectif $v : P \to Q$, $1_N \otimes v : N \otimes_A P \to N \otimes_A Q$ est injectif. Or, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} N \otimes_A P & \xrightarrow{1_N \otimes v} & N \otimes_A Q \\ {\scriptstyle u \otimes 1_P} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle u \otimes 1_Q} \\ M \otimes_A P & \xrightarrow[1_M \otimes v]{} & M \otimes_A Q \end{array}$$

et comme $1_M \otimes v$ est injectif par hypothèse, il suffira de prouver qu'il en est de même de $u \otimes 1_P$. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A; la filtration $\mathfrak{m}$-adique sur le A-module $N \otimes_A P$ est aussi sa filtration $\mathfrak{m}$B-adique en tant que B-module; la topologie définie par cette filtration est donc *séparée*, puisque B est noethérien, que $\mathfrak{m}$B est contenu dans le radical de B, et que $N \otimes_A P$ est un B-module de type fini, N étant un B-module de type fini et P un A-module de type fini ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.5). Il suffit donc de prouver que l'homomorphisme $\mathrm{gr}\,(u \otimes 1_P) : \mathrm{gr}_\bullet(N \otimes_A P) \to \mathrm{gr}_\bullet(M \otimes_A P)$ (où les modules gradués sont relatifs aux filtrations $\mathfrak{m}$-adiques) est injectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n^0 8, cor. 1 du th. 1). Notons maintenant que puisque M est un A-module plat, les homomorphismes $M \otimes_A (\mathfrak{m}^n P) \to \mathfrak{m}^n (M \otimes_A P)$ sont bijectifs; il en est donc de même de l'homomorphisme canonique

$$\varphi_M : \mathrm{gr}_0(M) \otimes_A \mathrm{gr}_\bullet(P) \to \mathrm{gr}_\bullet(M \otimes_A P).$$

Or, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}_0(\mathrm{N})\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{P}) & \xrightarrow{\mathrm{gr}_0(u)\otimes 1} & \mathrm{gr}_0(\mathrm{M})\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{P}) \\ {\scriptstyle\varphi_{\mathrm{N}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{\mathrm{M}}} \\ \mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{N}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{P}) & \xrightarrow[\mathrm{gr}(u\otimes 1)]{} & \mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{P}) \end{array}$$

dans lequel φ_{M} est bijectif, φ_{N} surjectif; en outre, $\mathrm{gr}_0(u)$ est injectif par hypothèse, et comme $\mathrm{gr}_0(\mathrm{N})\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{P})=\mathrm{gr}_0(\mathrm{N})\otimes_k\mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{P})$, $\mathrm{gr}_0(\mathrm{M})\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{P})=\mathrm{gr}_0(\mathrm{M})\otimes_k\mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{P})$, $\mathrm{gr}_0(u)\otimes 1$ est aussi injectif. On en conclut que $\mathrm{gr}(u\otimes 1)$ est injectif, ce qui achève de démontrer la première assertion. La seconde se déduit du raisonnement précédent en faisant $\mathrm{P}=\mathrm{A}$.

Proposition (**4.6.8**). — *Soient* Z *un préschéma localement noethérien,* X, Y, *deux* Z-*préschémas tels que les morphismes structuraux* $g:\mathrm{X}\to\mathrm{Z}$, $h:\mathrm{Y}\to\mathrm{Z}$ *soient propres,* Z′ *une partie fermée de* Z, $\mathrm{X}'=g^{-1}(\mathrm{Z}')$, $\mathrm{Y}'=h^{-1}(\mathrm{Z}')$ *ses images réciproques,* $\hat{\mathrm{X}}=\mathrm{X}_{/\mathrm{X}'}$, $\hat{\mathrm{Y}}=\mathrm{Y}_{/\mathrm{Y}'}$, $\hat{\mathrm{Z}}=\mathrm{Z}_{/\mathrm{Z}'}$ *les complétés formels de* X, Y, Z *le long de ces parties fermées,* $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ *un* Z-*morphisme,* $\hat{f}:\hat{\mathrm{X}}\to\hat{\mathrm{Y}}$ *son prolongement aux complétés. Pour que* $\hat{f}$ *soit un isomorphisme* (resp. *une immersion fermée*), *il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert* U *de* Z′ *tel que le morphisme* $g^{-1}(\mathrm{U})\to h^{-1}(\mathrm{U})$, *restriction de* f, *soit un isomorphisme* (resp. *une immersion fermée*).

La suffisance de la condition est immédiate (**I**, 10.14.7). Pour en montrer la nécessité, il suffit encore de prouver que pour tout $y\in\mathrm{Y}'$, il existe un voisinage ouvert V_y de y tel que la restriction $f^{-1}(\mathrm{V}_y)\to\mathrm{V}_y$ de f soit un isomorphisme (resp. une immersion fermée), par le même raisonnement que dans (4.6.7). On est ainsi ramené au cas où $\mathrm{Y}=\mathrm{Z}$, $\mathrm{Y}=\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ étant affine noethérien. Par hypothèse (I, 10.9.1 et 10.14.2) la fibre $f^{-1}(y)$ est réduite à un point pour $y\in\mathrm{Y}'$, donc comme f est propre (**II**, 5.4.3), il existe un voisinage ouvert U de y tel que la restriction $f^{-1}(\mathrm{U})\to\mathrm{U}$ de f soit un morphisme *fini* (4.4.11). On peut donc déjà supposer que f soit un morphisme fini, donc $\mathrm{X}=\mathrm{Spec}(\mathrm{B})$, où B est une A-algèbre *finie* sur A. Si $\mathrm{Y}'=\mathrm{V}(\mathfrak{J})$, on a alors $\hat{\mathrm{Y}}=\mathrm{Spf}(\hat{\mathrm{A}})$, $\hat{\mathrm{X}}=\mathrm{Spf}(\hat{\mathrm{B}})$, $\hat{\mathrm{A}}$ étant le séparé complété de A pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique, $\hat{\mathrm{B}}$ le séparé complété de B pour la topologie $\mathfrak{J}$B-préadique, ou (ce qui revient au même), le séparé complété du A-module B pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique; en outre, $\hat{f}$ est le morphisme de schémas formels affines correspondant au prolongement continu $\hat{\varphi}:\hat{\mathrm{A}}\to\hat{\mathrm{B}}$ de l'homomorphisme canonique d'anneaux $\varphi:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$, et l'hypothèse est que $\hat{\varphi}$ est surjectif (resp. bijectif) (**I**, 10.14.2). Or, $\hat{\varphi}$ est aussi le prolongement continu de φ considéré comme homomorphisme de A-modules; on sait alors (**I**, 10.8.14) qu'il existe un voisinage ouvert U de Y′ tel que la restriction à U de l'homomorphisme $\widetilde{\varphi}:\widetilde{\mathrm{A}}\to\widetilde{\mathrm{B}}$ de $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$-Modules soit surjectif (resp. bijectif), ce qui achève la démonstration.

4.7. Un critère d'amplitude.

Théorème (**4.7.1**). — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f: X \rightarrow Y$ *un morphisme propre,* $\mathscr{L}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible,* y *un point de* Y, $X_y = X \otimes_Y \boldsymbol{k}(y) = f^{-1}(y)$, *g la projection de* X_y *dans* X. *Si* $\mathscr{L}_y = g^*(\mathscr{L}) = \mathscr{L} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \boldsymbol{k}(y)$ *est ample sur* X_y, *il existe un voisinage ouvert* U *de* y *dans* Y *tel que* $\mathscr{L} | f^{-1}(U)$ *soit ample pour la restriction de* f *à* $f^{-1}(U)$.

I) Posons $Y' = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_y)$, $X' = X \times_Y Y'$, et soit $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_y$; nous allons d'abord prouver que $\mathscr{L}'$ est *ample pour* $f' = f_{(Y')}$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \longleftarrow & X' & \longleftarrow & X_y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle f'}\downarrow & & {\scriptstyle f_y}\downarrow \\ Y & \longleftarrow & Y' & \leftarrow & \operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(y)) \end{array}$$

Comme f' est propre (**II**, 5.4.2, (iii)) et $\mathcal{O}_y$ noethérien, on voit qu'on peut se borner au cas où $Y = Y' = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_y)$, donc $X = X'$, supposer que $\mathscr{L}_y$ est ample pour f_y et prouver que $\mathscr{L}$ est ample pour f (**II**, 4.6.6). Nous allons appliquer le critère (2.6.1, *c)*) et montrer en fait que pour tout $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathscr{F}$, il existe un entier N tel que $H^1(X, \mathscr{F}(n)) = 0$ pour tout $n \geqslant N$, avec $\mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$. Notons que y est un point fermé de Y correspondant à l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}_y$; X_y est donc un sous-préschéma fermé de X défini par l'Idéal cohérent $\mathscr{J} = f^*(\widetilde{\mathfrak{m}})\mathcal{O}_X = \mathfrak{m}\mathcal{O}_X$ de $\mathcal{O}_X$ (**I**, 4.4.5), et g l'injection canonique. Considérons alors la $\boldsymbol{k}(y)$-algèbre graduée $S = \operatorname{gr}(\mathcal{O}_y) = \bigoplus_{j \geqslant 0} \mathfrak{m}^j/\mathfrak{m}^{j+1}$, qui est de type fini puisque $\mathcal{O}_y$ est noethérien; la $\mathcal{O}_X$-Algèbre $\mathscr{S} = f^*(\widetilde{S})$ est donc quasi-cohérente et de type fini, et elle est évidemment annulée par $\mathscr{J}$, donc si on pose $\mathscr{S}_y = g^*(\mathscr{S})$, $\mathscr{S}_y$ est une $\mathcal{O}_{X_y}$-Algèbre quasi-cohérente de type fini, et $\mathscr{S} = g_*(\mathscr{S}_y)$. Posons d'autre part, $\mathscr{M}_j = \mathfrak{m}^j\mathscr{F}/\mathfrak{m}^{j+1}\mathscr{F}$ et $\mathscr{M} = \bigoplus_{j \geqslant 0} \mathscr{M}_j = \operatorname{gr}(\mathscr{F})$; comme $\mathscr{F}$ est cohérent, $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{S}$-Module quasi-cohérent de type fini (**0**, 10.1.1) qui est aussi annulé par $\mathscr{J}$, de sorte que si l'on pose $\mathscr{M}'_j = g^*(\mathscr{M}_j)$, $\mathscr{M}' = g^*(\mathscr{M}) = \bigoplus_{j \geqslant 0} \mathscr{M}'_j$ est un $\mathscr{S}_y$-Module gradué quasi-cohérent de type fini tel que $\mathscr{M} = g_*(\mathscr{M}')$. En outre, si on pose $\mathscr{M}'_j(n) = \mathscr{M}'_j \otimes \mathscr{L}_y^{\otimes n}$, on a $\mathscr{M}'_j(n) = g^*((\mathscr{M}_j(n)))$. Cela étant, f_y est propre (**II**, 5.4.2, (iii)) et $\mathscr{L}_y$ est ample, donc f_y est *projectif* (**II**, 5.5.4 et 4.6.11), et on peut appliquer à $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$, f_y, $\mathscr{S}_y$, $\mathscr{L}_y$ et $\mathscr{M}'$ le théorème (2.4.1, (ii)) : il existe un entier N tel que pour $n \geqslant N$, on ait $H^q(X_y, \mathscr{M}'_j(n)) = 0$ pour tout $q > 0$ *et tout* j; par suite, on a aussi $H^q(X, \mathscr{M}_j(n)) = 0$ pour tout $q > 0$ et tout j (G, II, 4.9.1). Posons alors $\mathscr{F}(n)_j = \mathscr{F}(n)/\mathfrak{m}^{j+1}\mathscr{F}(n)$, de sorte que $\mathscr{F}(n)_{j-1} = \mathscr{F}(n)_j/\mathscr{M}_j(n)$ pour $j \geqslant 1$ et $\mathscr{F}(n)_0 = \mathscr{M}_0(n)$. On a $H^1(X, \mathscr{F}(n)_0) = 0$, et, par la suite exacte de cohomologie, $H^1(X, \mathscr{F}(n)_j) = H^1(X, \mathscr{F}(n)_{j-1})$ pour tout $j \geqslant 1$, donc $H^1(X, \mathscr{F}(n)_j) = 0$ pour tout $j \geqslant 0$. On conclut donc de (4.2.1) que $H^1(X, \mathscr{F}(n)) = 0$, ce qui achève de prouver notre assertion.

II) Revenons aux notations du début de la démonstration, et remarquons qu'on peut toujours supposer $Y = \mathrm{Spec}(A)$ affine; comme f' est de type fini et $\mathscr{L}'$ ample pour f', il existe un entier $m>0$ tel que $\mathscr{L}'^{\otimes m}$ soit très ample pour f' (**II**, 4.6.11); remplaçant au besoin $\mathscr{L}$ par $\mathscr{L}^{\otimes m}$, on peut se borner à considérer le cas où $\mathscr{L}'$ est *très ample* pour f', et à prouver que $\mathscr{L}|f^{-1}(U)$ est alors très ample pour f. Comme f' est propre, il existe alors une Y'-immersion *fermée* $j : X' \rightarrow P = \mathbf{P}^r_{Y'}$ pour un entier $r>0$ convenable, telle que $\mathscr{L}'$ soit isomorphe à $j^*(\mathcal{O}_P(1))$ (**II**, 5.5.4, (ii)); cette immersion correspond canoniquement à un $\mathcal{O}_{X'}$-homomorphisme *surjectif* $u : \mathcal{O}_{X'}^{r+1} \rightarrow \mathscr{L}'$ (**II**, 4.2.3). Ce dernier correspond ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.1.1) à la donnée de $r+1$ sections s'_i $(0 \leqslant i \leqslant r)$ de $\mathscr{L}'$ au-dessus de X' qui engendrent ce $\mathcal{O}_{X'}$-Module. Ces sections sont aussi par définition des sections de $f'_*(\mathscr{L}')$ au-dessus de Y'; on a $f'_*(\mathscr{L}') = f_*(\mathscr{L}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'}$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.4.10), Y est affine et $\mathcal{O}_y$ est l'anneau local en l'idéal premier $\mathfrak{j}_y$ de A, donc on a $s'_i = s''_i/t_i$, où les s''_i sont des sections de $f_*(\mathscr{L})$ au-dessus de Y et les t_i des éléments de A n'appartenant pas à $\mathfrak{j}_y$; on en conclut qu'il existe un voisinage ouvert affine V de y dans Y et des sections s_i de $f_*(\mathscr{L})|V$ telles que $s'_i = s_i/1$ (on rappelle que l'espace Y' est contenu dans V, cf. **I**, 2.4.2). Les s_i sont alors des sections de $\mathscr{L}$ au-dessus de $f^{-1}(V)$, définissant donc un homomorphisme $v : (\mathcal{O}_X|f^{-1}(V))^{r+1} \rightarrow \mathscr{L}|f^{-1}(V)$ qui, par hypothèse, est surjectif en tous les points de $f^{-1}(y)$; comme Coker (v) est cohérent ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.4), son support est fermé ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.2) et par suite il existe un voisinage ouvert $W \subset f^{-1}(V)$ de $f^{-1}(y)$ tel que la restriction de v à W soit un homomorphisme *surjectif*. Puisque le morphisme f est fermé, on peut supposer que W est de la forme $f^{-1}(U)$, où U est un voisinage ouvert de y, et la conclusion résulte alors de (**II**, 4.2.3).

4.8. Morphismes finis de préschémas formels.

Proposition (**4.8.1**). — *Soient* $\mathfrak{Y}$ *un préschéma formel localement noethérien,* $\mathscr{K}$ *un Idéal de définition de* $\mathfrak{Y}$, $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ *un morphisme de préschémas formels. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathfrak{X}$ *est localement noethérien,* f *est un morphisme adique* (**I**, 10.12.1) *et si l'on pose* $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, *le morphisme* $f_0 : (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}) \rightarrow (\mathfrak{Y}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$ *déduit de* f *est fini.*

b) $\mathfrak{X}$ *est localement noethérien et est limite inductive d'un* (Y_n)*-système inductif adique* (X_n) *tel que le morphisme* $X_0 \rightarrow Y_0$ *soit fini.*

c) Tout point de $\mathfrak{Y}$ *possède un voisinage ouvert formel affine noethérien* V *tel que* $f^{-1}(V)$ *soit un ouvert formel affine et que* $\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ *soit un* $\Gamma(V, \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}})$*-module de type fini.*

Il est immédiat que *a)* entraîne *b)* en vertu de (**I**, 10.12.3). Pour voir que *b)* entraîne *c)*, on peut supposer que $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$, où B est adique noethérien et $\mathscr{K} = \mathfrak{K}^{\Delta}$, où $\mathfrak{K}$ est un idéal de définition de B. Par hypothèse, X_0 est un schéma affine dont l'anneau A_0 est un $B/\mathfrak{K}$-module de type fini (**II**, 6.1.3). En vertu de (**I**, 5.1.9), chacun des X_n est un schéma affine, et si A_n est son anneau, l'hypothèse *b)* entraîne que pour $m \leqslant n$, A_m est isomorphe à $A_n/\mathfrak{K}^{m+1}A_n$. On en déduit que $\mathfrak{X}$ est isomorphe à $\mathrm{Spf}(A)$, où $A = \varprojlim_n A_n$; on conclut en vertu de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.2.9). Enfin, pour prouver que *c)* entraîne *a)*, on peut se borner encore au cas $\mathfrak{Y}=\mathrm{Spf}(\mathrm{B})$, $\mathfrak{X}=\mathrm{Spf}(\mathrm{A})$, A étant une B-algèbre finie; comme $\mathrm{A}/\mathfrak{K}\mathrm{A}$ est alors une $\mathrm{B}/\mathfrak{K}$-algèbre finie, il résulte de (**I**, 10.10.9) que les conditions de *a)* sont satisfaites.

Définition (**4.8.2**). — *Lorsque les propriétés équivalentes* a), b), c) *de* (4.8.1) *sont vérifiées, on dit que le morphisme f est fini, ou que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-préschéma formel fini, ou un préschéma formel fini au-dessus de $\mathfrak{Y}$.*

Proposition (**4.8.3**). — (i) *Une immersion fermée de préschémas formels localement noethériens est un morphisme fini.*

(ii) *Le composé de deux morphismes finis de préschémas formels localement noethériens est un morphisme fini.*

(iii) *Soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{S}$ trois préschémas formels localement noethériens, $f:\mathfrak{X}\rightarrow\mathfrak{S}$ un morphisme fini, $g:\mathfrak{Y}\rightarrow\mathfrak{S}$ un morphisme; alors le morphisme $\mathfrak{X}\times_{\mathfrak{S}}\mathfrak{Y}\rightarrow\mathfrak{Y}$ est fini.*

(iv) *Soient $\mathfrak{S}$ un préschéma formel localement noethérien, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$ deux préschémas formels localement noethériens tels que $\mathfrak{X}'\times_{\mathfrak{S}}\mathfrak{Y}'$ soit localement noethérien. Si $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ sont des $\mathfrak{S}$-préschémas formels localement noethériens, $f:\mathfrak{X}\rightarrow\mathfrak{X}'$, $g:\mathfrak{Y}\rightarrow\mathfrak{Y}'$ deux* S-*morphismes finis, alors $f\times_{\mathfrak{S}}g$ est un morphisme fini.*

(v) *Soient $f:\mathfrak{X}\rightarrow\mathfrak{Y}$, $g:\mathfrak{Y}\rightarrow\mathfrak{Z}$ deux morphismes de préschémas formels localement noethériens tels que g soit de type fini et séparé; alors, si $g\circ f$ est un morphisme fini, f est un morphisme fini.*

(i) est trivial, et les autres assertions se ramènent aussitôt aux propositions correspondantes pour les morphismes de préschémas usuels (**II**, 6.1.5) à l'aide du critère *a)* de (4.8.1); nous laissons les détails au lecteur, sur le modèle de (**I**, 10.13.5).

Corollaire (**4.8.4**). — *Sous les hypothèses de* (**I**, 10.9.9), *si f est un morphisme fini, il en est de même de son prolongement $\hat{f}$ aux complétés.*

Corollaire (**4.8.5**). — *Si $\mathfrak{X}$ est un préschéma formel fini au-dessus de $\mathfrak{Y}$, $f:\mathfrak{X}\rightarrow\mathfrak{Y}$ le morphisme structural, alors, pour tout ouvert* $\mathrm{U}\subset\mathfrak{Y}$, $f^{-1}(\mathrm{U})$ *est fini au-dessus de* U.

Proposition (**4.8.6**). — *Si $f:\mathfrak{X}\rightarrow\mathfrak{Y}$ est un morphisme fini de préschémas formels localement noethériens, $f_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ est une $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$-Algèbre cohérente.*

On peut considérer f comme limite inductive d'un système inductif (f_n) de morphismes $f_n:\mathrm{X}_n\rightarrow\mathrm{Y}_n$; montrons que les f_n sont des morphismes finis et $f_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ est isomorphe à la limite projective des $(f_n)_*(\mathcal{O}_{\mathrm{X}_n})$, ce qui établira notre assertion (**I**, 10.10.5). Il suffit de se borner au cas où $\mathfrak{Y}=\mathrm{Spf}(\mathrm{B})$, $\mathfrak{X}=\mathrm{Spf}(\mathrm{A})$, et de remarquer que si $\mathfrak{K}$ est un idéal de définition de B et A un B-module de type fini, $\mathrm{A}/\mathfrak{K}^{n+1}\mathrm{A}$ est un module de type fini sur $\mathrm{B}/\mathfrak{K}^{n+1}\mathrm{B}$, et que A est limite projective des $\mathrm{A}/\mathfrak{K}^{n+1}\mathrm{A}$.

Réciproquement :

Proposition (**4.8.7**). — *Soient $\mathfrak{Y}$ un préschéma formel localement noethérien, $\mathscr{A}$ une $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$-Algèbre cohérente. Il existe un préschéma formel $\mathfrak{X}$ fini au-dessus de $\mathfrak{Y}$, défini à un $\mathfrak{Y}$-isomorphisme unique près, et tel que $f_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})=\mathscr{A}$, $f:\mathfrak{X}\rightarrow\mathfrak{Y}$ étant le morphisme structural.*

Soit $\mathscr{K}$ un Idéal de définition de $\mathfrak{Y}$, et posons $\mathrm{Y}_n=(\mathfrak{Y},\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$ et $\mathscr{A}_n=\mathscr{A}/\mathscr{K}^{n+1}\mathscr{A}$; il est clair que $\mathscr{A}_n$ est une $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}_n}$-Algèbre finie et définit donc un

Y_n-préschéma fini $X_n = \mathrm{Spec}(\mathscr{A}_n)$ (**II**, 6.1.3); pour $m \leqslant n$, l'homomorphisme canonique surjectif $h_{mn} : \mathscr{A}_n \to \mathscr{A}_m$ définit un morphisme $u_{mn} : X_m \to X_n$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xleftarrow{u_{mn}} & X_m \\ {\scriptstyle f_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_m} \\ Y_n & \longleftarrow & Y_m \end{array}$$

(f_n étant le morphisme structural) soit commutatif et identifie X_m au produit $X_n \times_{Y_n} Y_m$, comme on le voit aussitôt (**II**, 1.4.6). Le préschéma formel X, limite inductive du système inductif (X_n) est alors localement noethérien et tel que le morphisme structural $f : X \to Y$, limite inductive du système (f_n), soit fini (4.8.1 et **II**, 10.12.3.1); on a vu en outre dans la démonstration de (4.8.6) que $f_*(\mathscr{O}_X)$ est limite projective des $\mathscr{A}_n$, donc égale à $\mathscr{A}$ (**I**, 10.10.6). Quant à l'assertion d'unicité, elle est conséquence du résultat plus général suivant :

Proposition (**4.8.8**). — *Soient $\mathfrak{Y}$ un préschéma formel localement noethérien, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ deux $\mathfrak{Y}$-préschémas formels finis au-dessus de $\mathfrak{Y}$, $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $f' : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{Y}$ les morphismes structuraux. Il existe une bijection canonique de* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Y}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}')$ *sur* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}}(f'_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}), f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}))$ [1].

La définition de cette application $h \to \mathscr{A}(h)$ est la même que dans (**II**, 1.1.2), et pour voir qu'elle est bijective, on est aussitôt ramené au cas où $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ est un schéma formel affine noethérien. Mais alors $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{X}' = \mathrm{Spf}(A')$, où A et A' sont deux B-algèbres finies et $f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) = A^{\Delta}$, $f'_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}) = A'^{\Delta}$. La conclusion résulte alors de la correspondance biunivoque, d'une part entre les $\mathfrak{Y}$-morphismes $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ et les B-homomorphismes (nécessairement continus) $A' \to A$ qui sont des homomorphismes d'algèbres (**I**, 10.2.2), et d'autre part entre les homomorphismes de B-modules $A' \to A$ et les homomorphismes de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-Modules $A'^{\Delta} \to A^{\Delta}$ (**I**, 10.10.2.3).

Corollaire (**4.8.9**). — *Dans la correspondance biunivoque canonique définie dans* (4.8.8), *les immersions fermées $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ correspondent aux homomorphismes surjectifs de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-Algèbres $f'_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}) \to f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$.*

La question étant encore locale sur $\mathfrak{Y}$, on est ramené à la définition des immersions fermées de préschémas formels localement noethériens (**I**, 10.14.2).

Corollaire (**4.8.10**). — *Les notations et hypothèses étant celles de* (4.8.1), *pour qu'un morphisme adique f soit une immersion fermée, il faut et il suffit que f_0 soit une immersion fermée (de préschémas usuels).*

Cela résulte aussitôt de (4.8.9) et de la condition de surjectivité pour un homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-Modules cohérents (**I**, 10.11.5).

Proposition (**4.8.11**). — *Pour qu'un morphisme $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de préschémas formels localement*

[1] La dernière expression désigne l'ensemble des homomorphismes de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-*Algèbres* $f'_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}) \to f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$.

noethériens soit fini, il faut et il suffit qu'il soit propre et ait ses fibres $f^{-1}(y)$ finies (pour tout $y \in \mathfrak{Y}$).

Grâce aux définitions (3.4.1 et 4.8.2), on est aussitôt ramené à la même proposition pour f_0 (notations de (4.8.1)), ce qui n'est autre que (4.4.2).

§ 5. UN THÉORÈME D'EXISTENCE DE FAISCEAUX ALGÉBRIQUES COHÉRENTS

5.1. Énoncé du théorème.

(5.1.1) Soient A un anneau *adique noethérien*, $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de A, de sorte que A est séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{J}$-adique. Si $Y = \mathrm{Spec}(A)$, le schéma formel affine Spf(A) s'identifie au *complété* $\hat{Y}$ de Y le long de la partie fermée $Y' = V(\mathfrak{J})$ (**I**, 10.10.1). Soient X un Y-préschéma (usuel) de type fini, $f: X \rightarrow Y$ le morphisme structural; nous désignerons par $\hat{X}$ le *complété* de X le long de la partie fermée $X' = f^{-1}(Y')$, ou encore le $\hat{Y}$-préschéma formel $X \times_Y \hat{Y}$; par $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ le prolongement de f aux complétés; enfin, pour tout $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{F}$, nous noterons $\hat{\mathcal{F}}$ son complété, $\mathcal{F}_{/X'}$, qui est un $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-Module cohérent.

Proposition **(5.1.2)**. — *Les hypothèses et notations étant celles de* (5.1.1), *soit* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent dont le support est propre sur* Y (**II**, 5.4.10). *Les homomorphismes canoniques* (4.1.4)

$$\rho_i : H^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(\hat{X}, \hat{\mathcal{F}})$$

sont alors des isomorphismes.

Comme $H^i(X, \mathcal{F})$ est un A-module de type fini (3.2.4), donc identique à son séparé complété pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.6), la proposition n'est qu'un cas particulier de (4.1.10).

Rappelons que les isomorphismes canoniques ρ_i commutent aux cobords pour toute suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ de $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents ((**0**, 12.1.6) et (**I**, 10.8.9)).

Corollaire **(5.1.3)**. — *Soient* $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ *deux* $\mathcal{O}_X$*-Modules cohérents tels que l'intersection de leurs supports soit propre sur* Y. *Alors l'homomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}(\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{G}}) \tag{5.1.3.1}$$

qui, à tout homomorphisme $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, *fait correspondre son complété* $\hat{u} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, *est un isomorphisme. De plus, lorsque le morphisme f est fermé, pour que* $\hat{u}$ *soit injectif* (resp. *surjectif*), *il faut et il suffit que u le soit.*

La première assertion est un cas particulier de (4.5.3), dû encore au fait que le premier membre de (5.1.3.1) est un A-module de type fini, donc identique à son séparé complété. Pour démontrer la seconde, notons en vertu de (**I**, 10.8.14) que $\hat{u}$ est injectif (resp. surjectif) si et seulement s'il existe un voisinage de X' dans lequel u soit injectif (resp. surjectif).

La conclusion résulte donc du lemme suivant :

Lemme (**5.1.3.1**). — *Sous les hypothèses de* (5.1.1), *si on suppose en outre le morphisme f fermé, tout voisinage de* X′ *dans* X *est identique à* X.

Tout d'abord, on peut se ramener au cas où $f(X)=Y$. En effet, par hypothèse, $f(X)$ est une partie fermée Z de Y; on peut en outre remplacer f par f_{red} (**I**, 6.3.4), et supposer par suite X et Y réduits; on peut alors remplacer Y par le sous-préschéma fermé réduit de Y ayant Z pour espace sous-jacent (**I**, 5.2.2), car tout idéal de A est fermé, et tout anneau quotient de A est donc adique et noethérien. On a alors $f(X')=Y'$; si V est un voisinage ouvert de X′ dans X, $f(X-V)$ est fermé dans Y par hypothèse, et ne rencontre pas Y′; mais cela est impossible à moins que X — V ne soit vide, puisque $\mathfrak{J}$ est contenu dans le radical de A (**I**, 1.1.15 et $\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.1.10), d'où la conclusion.

Lorsqu'on se borne aux $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents dont le support est propre sur Y, (5.1.3) peut s'énoncer, dans le langage des catégories, en disant que le foncteur $\mathscr{F} \rightsquigarrow \widehat{\mathscr{F}}$ est *pleinement fidèle* de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules du type précédent, dans la catégorie des $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Modules cohérents, et établit par suite une *équivalence* de la première de ces catégories avec une sous-catégorie *pleine* de la seconde (**0**, 8.1.6). Le théorème d'existence va prouver que lorsque X est propre sur Y, cette sous-catégorie est en fait la catégorie de *tous* les $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Modules cohérents. De façon précise :

Théorème (**5.1.4**). — *Soient* A *un anneau adique noethérien*, $Y=\mathrm{Spec}(A)$, $\mathfrak{J}$ *un idéal de définition de* A, $Y'=V(\mathfrak{J})$, $f: X\rightarrow Y$ *un morphisme séparé de type fini*, $X'=f^{-1}(Y')$. *Soient* $\widehat{Y}=Y_{/Y'}=\mathrm{Spf}(A)$, $\widehat{X}=X_{/X'}$ *les complétés de* Y *et* X *le long de* Y′ *et* X′, $\widehat{f}:\widehat{X}\rightarrow\widehat{Y}$ *le prolongement de f aux complétés; alors, le foncteur* $\mathscr{F}\rightsquigarrow\mathscr{F}_{/X'}=\widehat{\mathscr{F}}$ *est une équivalence de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents de support propre sur* Spec(A), *avec la catégorie des $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Modules cohérents de support propre sur* Spf(A).

En d'autres termes, compte tenu de (5.1.3) :

Corollaire (**5.1.5**). — *Pour qu'un $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Module soit isomorphe au complété d'un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent et de support propre sur* Spec(A), *il faut et il suffit qu'il soit cohérent et de support propre sur* Spf(A).

Le cas le plus important est le

Corollaire (**5.1.6**). — *Supposons* X *propre sur* $Y=\mathrm{Spec}(A)$. *Alors le foncteur* $\mathscr{F}\rightsquigarrow\widehat{\mathscr{F}}$ *est une équivalence de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents et de la catégorie des $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Modules cohérents.*

Scholie (**5.1.7**). — Si on tient compte de la caractérisation des faisceaux cohérents sur les préschémas formels (**I**, 10.11.3), on voit que sous les conditions de (5.1.1), la donnée d'un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent de support propre sur Spec(A) *équivaut* (en posant $Y_n=\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J}^{n+1})$ et $X_n=X\times_Y Y_n$) à la donnée d'un système projectif de $\mathcal{O}_{X_n}$-Modules cohérents $(\mathscr{F}_n)$ tel que pour $m\leqslant n$ on ait $\mathscr{F}_m=\mathscr{F}_n\otimes_{Y_n}\mathcal{O}_{Y_m}$ (ou encore $\mathscr{F}_m=\mathscr{F}_n/\mathfrak{J}^{m+1}\mathscr{F}_n$) et que le support de $\mathscr{F}_0$ soit une partie de X_0 propre sur Y_0. Au moyen de (**I**, 10.11.4), on interprète de même les homomorphismes de $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents comme des homomorphismes de systèmes projectifs de $\mathcal{O}_{X_n}$-Modules cohérents.

Dans tous les cas d'application connus, A est en fait un anneau adique *local* noethérien, donc les Y_n sont des spectres d'anneaux *artiniens locaux*, et les résultats de ce paragraphe et des précédents réduisent dans une large mesure la géométrie algébrique sur un anneau adique local noethérien, à la géométrie algébrique sur des anneaux locaux artiniens.

Corollaire (**5.1.8**). — *Sous les conditions de* (5.1.4), *l'application* $Z \rightsquigarrow \hat{Z} = Z_{/(Z \cap X')}$ *est une bijection de l'ensemble des sous-préschémas fermés* Z *de* X, *propres sur* Y, *sur l'ensemble des sous-préschémas formels fermés de* $\hat{X}$, *propres sur* $\hat{Y}$.

En effet, un sous-préschéma formel fermé de $\hat{X}$ est de la forme $(T, (\mathcal{O}_{\hat{X}}/\mathscr{A})|T)$, où $\mathscr{A}$ est un Idéal cohérent de $\mathcal{O}_X$ (**I**, 10.14.2) ; si T est propre sur $\hat{Y}$, il résulte de (5.1.4) que $\mathcal{O}_{\hat{X}}/\mathscr{A}$ est isomorphe à un $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-Module de la forme $\hat{\mathscr{F}}$, où $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent de support propre sur Y ; en outre, il résulte de (5.1.3) que l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{\hat{X}} \to \mathcal{O}_{\hat{X}}/\mathscr{A}$ est de la forme $\hat{u}$, où $u : \mathcal{O}_X \to \mathscr{F}$ est un homomorphisme surjectif de $\mathcal{O}_X$-Modules. Donc $\mathscr{F}$ est de la forme $\mathcal{O}_X/\mathscr{N}$, où $\mathscr{N}$ est un Idéal cohérent de $\mathcal{O}_X$, et $\mathscr{A} = \hat{\mathscr{N}}$ (**I**, 10.8.8), d'où la conclusion (**I**, 10.14.7).

5.2. Démonstration du théorème d'existence : cas projectif et quasi-projectif.

(**5.2.1**) Sous les conditions de (5.1.4), nous dirons provisoirement qu'un $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-Module cohérent est *algébrisable* s'il est isomorphe à un complété $\hat{\mathscr{F}}$ d'un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathscr{F}$ de support propre sur Y.

Lemme (**5.2.2**). — *Soient* $\mathscr{F}'$, $\mathscr{G}'$ *deux* $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-*Modules algébrisables. Pour tout homomorphisme* $u : \mathscr{F}' \to \mathscr{G}'$, Ker (u), Im (u) *et* Coker (u) *sont algébrisables.*

En effet, si $\mathscr{F}' = \hat{\mathscr{F}}$, $\mathscr{G}' = \hat{\mathscr{G}}$, où $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents de supports propres sur Y, on a $u = \hat{v}$, où $v : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un homomorphisme (5.1.3). En vertu de l'exactitude du foncteur $\mathscr{F} \rightsquigarrow \hat{\mathscr{F}}$, Ker $(\hat{v})$ est isomorphe à $(\text{Ker}\,(v))^\wedge$ et comme le support de Ker (v) est contenu dans celui de $\mathscr{F}$, on voit que Ker (u) est algébrisable ; démonstration analogue pour Im (u) et Coker (u).

Proposition (**5.2.3**). — *Soient* A *un anneau adique noethérien,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de définition de* A, $\mathfrak{Y} = \text{Spf}(A)$, $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *un morphisme propre de préschémas formels. On pose* $Y_k = \text{Spec}(A/\mathfrak{J}^{k+1})$, $X_k = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} Y_k$, *et pour tout* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-*Module* $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_k = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_n} = \mathscr{F}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}$. *Soit* $\mathscr{L}$ *un* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-*Module inversible, et supposons que* $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}/\mathfrak{J}\mathscr{L}$ *soit un* $\mathcal{O}_{X_0}$-*Module ample ; pour tout* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-*Module* $\mathscr{F}$ *et tout entier* n, *posons* $\mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$. *Alors, pour tout* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-*Module cohérent* $\mathscr{F}$, *il existe un entier* n_0 *tel que, pour tout* $n \geqslant n_0$, *les propriétés suivantes aient lieu :*

(i) *L'homomorphisme canonique* $H^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(n)) \to H^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k(n))$ *est surjectif pour tout* $k \geqslant 0$.

(ii) *On a* $H^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(n)) = 0$ *pour tout* $q > 0$.

On sait que les espaces sous-jacents à $\mathfrak{X}$ et à X_0 sont les mêmes ; les faisceaux $\mathscr{M}_k = \mathfrak{J}^k\mathscr{F}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}$ étant annulés par $\mathfrak{J}$, peuvent être considérés comme des $\mathcal{O}_{X_0}$-Modules cohérents ($\mathbf{0}_{\text{I}}$, 5.3.10) ; en outre, si on pose $\mathscr{M}_k(n) = \mathscr{M}_k \otimes_{\mathcal{O}_{X_0}} \mathscr{L}_0^{\otimes n}$, on voit aussitôt que $\mathscr{M}_k(n) = \mathfrak{J}^k\mathscr{F}(n)/\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}(n)$. Notons que, puisque $\mathscr{L}_0$ est ample pour $f_0 : X_0 \to Y_0$, et que f_0 est propre, on en conclut que f_0 est *projectif* (**II**, 5.5.4). Soit S la A-algèbre graduée $\bigoplus_{k\geqslant 0}\mathfrak{J}^k/\mathfrak{J}^{k+1}$ associée à la filtration $\mathfrak{J}$-adique de A, qui est de type fini puisque A est noethérien; si on pose $\mathscr{S}'=f_0^*(\widetilde{S})$, $\mathscr{S}'$ est une $\mathcal{O}_{X_0}$-Algèbre quasi-cohérente de type fini, et $\mathscr{M}=\bigoplus_{k\geqslant 0}\mathscr{M}_k$ un $\mathscr{S}'$-Module gradué quasi-cohérent et de type fini (puisque $\mathscr{F}_0$ est cohérent et engendre le $\mathscr{S}'$-Module $\mathscr{M}$). On est donc dans les conditions d'application du théorème (2.4.1, (ii)), et on en conclut qu'il existe n_0 tel que, pour $n\geqslant n_0$ et pour *tout* k, on ait

(**5.2.3.1**) $$\mathrm{H}^q(X_0, \mathscr{M}_k(n))=0 \qquad \textit{pour tout } q>0.$$

On a donc aussi $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{M}_k(n))=0$ pour $q>0$ et $n\geqslant n_0$, $\mathscr{M}_k(n)$ étant cette fois considéré comme $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-Module. Appliquant la suite exacte de cohomologie à

$$0\rightarrow\mathfrak{J}^k\mathscr{F}(n)/\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}(n)\rightarrow\mathfrak{J}^h\mathscr{F}(n)/\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}(n)\rightarrow\mathfrak{J}^h\mathscr{F}(n)/\mathfrak{J}^k\mathscr{F}(n)\rightarrow 0$$

on en déduit tout d'abord que pour $0\leqslant h<k$, $n\geqslant n_0$ et $q>0$, on a par récurrence sur $h-k$

(**5.2.3.2**) $$\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathfrak{J}^h\mathscr{F}(n)/\mathfrak{J}^k\mathscr{F}(n))=0$$

et en particulier pour $h=0$

(**5.2.3.3**) $$\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k(n))=0 \qquad \text{pour } n\geqslant n_0,\ k\geqslant 0 \text{ et } q>0.$$

Une autre portion de la suite exacte de cohomologie, pour $h=0$, donne la suite exacte

(**5.2.3.4**) $$\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_{k+1}(n))\rightarrow\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k(n))\rightarrow\mathrm{H}^1(\mathfrak{X}, \mathfrak{J}^k\mathscr{F}(n)/\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}(n))=0$$

d'où on déduit que pour $h\leqslant k$, l'application canonique

(**5.2.3.5**) $$\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k(n))\rightarrow\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_h(n))$$

est *surjective*. Pour *tout* q, le système projectif $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k(n))$ $(k\geqslant 0)$ vérifie donc la condition (ML) pour $n\geqslant n_0$. Par ailleurs, tout ouvert formel affine U de $\mathfrak{X}$ est aussi un ouvert affine dans chacun des X_k (**I**, 10.5.2), donc on a $\mathrm{H}^q(U, \mathscr{F}_k(n))=0$ pour tout $q>0$ (1.3.1), et $\mathrm{H}^0(U, \mathscr{F}_k(n))\rightarrow\mathrm{H}^0(U, \mathscr{F}_h(n))$ est surjective pour $h\leqslant k$ (**I**, 1.3.9). Les conditions d'application de (**0**, 13.3.1) sont par suite remplies, et on en conclut que, pour $n\geqslant n_0$:

1° Pour tout $q>0$, $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(n))\rightarrow\varprojlim_k \mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k(n))$ est bijectif, donc, en vertu de (5.2.3.3), $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(n))=0$.

2° L'homomorphisme $\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(n))\rightarrow\varprojlim_k \mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k(n))$ est bijectif; par ailleurs, comme les homomorphismes (5.2.3.5) sont surjectifs, il en est de même de chacun des homomorphismes

$$\varprojlim_k \mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k(n))\rightarrow\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_h(n))$$

ce qui achève la démonstration.

Corollaire (**5.2.4**). — *Les hypothèses étant celles de* (5.2.3), *pour tout $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-Module cohérent $\mathscr{F}$, il existe un entier* N *tel que pour $n\geqslant$* N, *$\mathscr{F}(n)$ soit engendré par ses sections au-dessus* *de $\mathfrak{X}$; en d'autres termes, $\mathscr{F}$ est isomorphe au quotient d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-Module de la forme $(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(-n))^k$.*

Comme X_0 est noethérien, il résulte de l'hypothèse sur $\mathscr{L}_0$ et de (**II**, 4.5.5) qu'il existe n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $\mathscr{F}_0(n)$ soit engendré par ses sections au-dessus de $\mathfrak{X}$; par ailleurs, on peut supposer n_0 pris assez grand pour que l'homomorphisme $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(n)) \rightarrow \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_0(n))$ soit surjectif pour $n \geqslant n_0$ (5.2.3). Il existe donc un nombre fini de sections $s_i \in \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(n))$ dont les images dans $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_0(n))$ engendrent $\mathscr{F}_0(n)$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.3). Comme $\mathfrak{J}$ est contenu dans l'idéal maximal de l'anneau local en tout point de $\mathfrak{X}$, il résulte du lemme de Nakayama, appliqué à ces anneaux locaux, que les s_i engendrent $\mathscr{F}(n)$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.1.1).

(5.2.5) Démonstration du théorème d'existence : cas projectif.

Les notations étant celles de (5.1.4), supposons f *projectif*, de sorte qu'il existe un $\mathcal{O}_X$-Module ample $\mathscr{L}$ (**I**, 5.5.4). Par définition, $X_n = \hat{X} \times_{\hat{Y}} Y_n$ est égal au sous-préschéma fermé $X_n \times_Y Y_n = f^{-1}(Y_n)$ de X; si $\mathscr{L}'$ est le complété $\mathscr{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\hat{X}}$ de $\mathscr{L}$, on a donc $\mathscr{L}'_0 = \mathscr{L}/\mathfrak{J}\mathscr{L}$, considéré comme $\mathcal{O}_{X_0}$-Module; on sait que $\mathscr{L}'_0$ est *ample* (**II**, 4.6.13, (i *bis*)). On peut donc appliquer à $\mathscr{L}'$ et à tout $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-Module cohérent $\mathscr{F}$ le cor. (5.2.4); on voit donc que $\mathscr{F}$ est isomorphe à un quotient de $\mathscr{G} = (\mathscr{L}'^{\otimes(-n)})^k$ pour des entiers $n > 0$ et $k > 0$ convenables. Or, il est clair que $\mathscr{G}$ est le complété de $(\mathscr{L}^{\otimes(-n)})^k$ (**I**, 10.8.10), donc est algébrisable. Considérons ensuite l'homomorphisme canonique surjectif $u : \mathscr{G} \rightarrow \mathscr{F}$, et soit $\mathscr{H} = \operatorname{Ker}(u)$, qui est un $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-Module cohérent ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.4). On voit de même qu'il existe un $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-Module algébrisable $\mathscr{K}$ et un homomorphisme $v : \mathscr{K} \rightarrow \mathscr{G}$ tel que $\mathscr{H} = \operatorname{Im}(v)$. On a alors $\mathscr{F} = \operatorname{Coker}(v)$, et $\mathscr{F}$ est algébrisable en vertu de (5.2.2).

(5.2.6) Démonstration du théorème d'existence; cas quasi-projectif.

Les notations étant toujours celles de (5.1.4), supposons maintenant que f soit *quasi-projectif*. Il existe alors un morphisme projectif $g : Z \rightarrow Y$ tel que X s'identifie au Y-préschéma induit sur un ouvert de Z (**II**, 5.3.2); si on pose $Z' = g^{-1}(Y')$, on a $X' = X \cap Z'$. Par suite, le complété $\hat{X} = X_{/X'}$ s'identifie au préschéma formel induit par le complété $\hat{Z} = Z_{/Z'}$ sur l'ouvert $X \cap Z'$ de $\hat{Z}$ (**I**, 10.8.5). Soit $\mathscr{F}'$ un $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-Module cohérent, dont le support T' est *propre sur* $\hat{Y}$; cela signifie par définition qu'il existe un sous-préschéma fermé de X', ayant $T' \subset X'$ comme espace sous-jacent, tel que la restriction $T' \rightarrow Y'$ de f soit propre; on en conclut que T' est propre *sur* Y, donc *fermé dans* Z' (**II**, 5.4.10). Il en résulte que $\mathscr{F}'$ est le faisceau induit sur $\hat{X}$ par le $\mathcal{O}_Z$-Module $\mathscr{G}'$ obtenu par recollement de $\mathscr{F}'$ (défini sur l'ouvert $\hat{X}$ de $\hat{Z}$) et du faisceau 0 sur l'ouvert $\hat{Z} - T'$ de $\hat{Z}$, ces deux faisceaux coïncidant dans l'ouvert intersection $\hat{X} - T'$. Il est clair que $\mathscr{G}'$ est cohérent; en vertu de (5.2.5), il existe un $\mathcal{O}_Z$-Module cohérent $\mathscr{G}$ tel que $\mathscr{G}' = \hat{\mathscr{G}}$; soit T le support de $\mathscr{G}$, de sorte que $T' = T \cap Z'$ (**I**, 10.8.12). Si h est la restriction de g au sous-préschéma fermé réduit de Z ayant T comme espace sous-jacent, on a donc $T' = h^{-1}(Y') = T \cap g^{-1}(Y')$, et par suite $X \cap T$ est un ouvert de T contenant T'.

Comme h est propre (**II**, 5.4.2), donc fermé, il résulte de (5.1.3.1) que $X \cap T = T$, autrement dit $T \subset X$, et comme T est fermé dans Z, T est propre sur Y. Si $\mathscr{F}$ est le faisceau induit sur X par $\mathscr{G}$, son complété $\hat{\mathscr{F}}$ est induit sur $\hat{X}$ par $\hat{\mathscr{G}}$ (**I**, 10.8.4), donc est égal à $\mathscr{F}'$, ce qui achève la démonstration.

5.3. Démonstration du théorème d'existence : cas général.

Lemme (**5.3.1**). — *Sous les conditions de* (5.1.4), *si* $0 \to \mathscr{H} \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to 0$ *est une suite exacte de* $\mathcal{O}_{\hat{X}}$*-Modules cohérents telle que* $\mathscr{G}$ *et* $\mathscr{H}$ *soient algébrisables, alors* $\mathscr{F}$ *est algébrisable.*

En effet, supposons que $\mathscr{G} = \hat{\mathscr{B}}$, $\mathscr{H} = \hat{\mathscr{C}}$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ étant des $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents à supports propres sur Y; $\mathscr{F}$ définit canoniquement un élément du A-module $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}(\hat{X}; \hat{\mathscr{B}}, \hat{\mathscr{C}})$ (**0**, 12.3.2), et les hypothèses entraînent que ce A-module est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(X; \mathscr{B}, \mathscr{C})$ (4.5.2); il existe donc une suite exacte $0 \to \mathscr{C} \to \mathscr{A} \to \mathscr{B} \to 0$ de $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents telle que l'image canonique de l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(X; \mathscr{B}, \mathscr{C})$ correspondant à $\mathscr{A}$ soit l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\hat{X}}}(\hat{X}; \hat{\mathscr{B}}, \hat{\mathscr{C}})$ correspondant à $\mathscr{F}$. Mais par définition (compte tenu de (**I**, 10.8.8, (ii))), cela signifie que $\mathscr{F}$ est isomorphe à $\hat{\mathscr{A}}$, d'où le lemme, car $\mathrm{Supp}(\mathscr{A})$ est contenu dans la réunion de $\mathrm{Supp}(\mathscr{B})$ et $\mathrm{Supp}(\mathscr{C})$, donc est propre sur Y.

Corollaire (**5.3.2**). — *Sous les conditions de* (5.1.1), *soit* $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *un homomorphisme de* $\mathcal{O}_{\hat{X}}$*-Modules cohérents; si* $\mathscr{G}$, Ker (u) *et* Coker (u) *sont algébrisables, il en est de même de* $\mathscr{F}$.

Le lemme (5.2.2) appliqué à l'homomorphisme $\mathscr{G} \to \mathrm{Coker}\,(u)$ montre en effet que Im (u) est algébrisable, et il suffit ensuite d'appliquer le lemme (5.3.1) à la suite exacte $0 \to \mathrm{Ker}\,(u) \to \mathscr{F} \to \mathrm{Im}\,(u) \to 0$.

Lemme (**5.3.3**). — *Sous les conditions de* (5.1.1), *soient* $h : Z \to Y$ *un morphisme de type fini,* $\hat{Z}$ *le complété de* Z *le long de* $Z' = h^{-1}(Y')$, $g : Z \to X$ *un* Y*-morphisme propre,* $\hat{g} : \hat{Z} \to \hat{X}$ *son prolongement aux complétés. Pour tout* $\mathcal{O}_{\hat{Z}}$*-Module algébrisable* $\mathscr{F}'$, $\hat{g}_*(\mathscr{F}')$ *est un* $\mathcal{O}_{\hat{X}}$*-Module algébrisable.*

En effet, si $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_Z$-Module cohérent tel que $\mathscr{F}' = \hat{\mathscr{F}}$, il résulte du premier th. de comparaison (4.1.5) que $\hat{g}_*(\hat{\mathscr{F}})$ est isomorphe au complété de $g_*(\mathscr{F})$.

Lemme (**5.3.4**). — *Soient* X *un schéma (usuel) noethérien,* X' *une partie fermée de* X, $f : Z \to X$ *un morphisme propre,* $Z' = f^{-1}(X')$, $\hat{X} = X_{/X'}$, $\hat{Z} = Z_{/Z'}$, $\hat{f} : \hat{Z} \to \hat{X}$ *le prolongement de* f *aux complétés. Soit* $\mathscr{M}$ *un Idéal cohérent de* $\mathcal{O}_X$ *tel que, si* $U = X - \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathscr{M})$, *la restriction* $f^{-1}(U) \to U$ *de* f *soit un isomorphisme. Alors, pour tout* $\mathcal{O}_{\hat{X}}$*-Module cohérent* $\mathscr{F}$, *il existe un entier* $n > 0$ *tel que le noyau et le conoyau de l'homomorphisme canonique* $\rho_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \hat{f}_*(\hat{f}^*(\mathscr{F}))$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 4.4.3) *soient annulés par* $\hat{\mathscr{M}}^n$.

On peut se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(B)$ où B est un anneau noethérien, donc $X' = V(\mathfrak{K})$, où $\mathfrak{K}$ est un idéal de B. Nous allons voir qu'on peut se ramener au cas où B est un anneau *adique* noethérien et $\mathfrak{K}$ un idéal de définition de B. Soit en effet B_1 le séparé complété de B pour la topologie $\mathfrak{K}$-préadique; si $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}B_1$, B_1 est donc un anneau adique noethérien dont $\mathfrak{K}_1$ est un idéal de définition. Posons $X_1 = \mathrm{Spec}(B_1)$ et soit $h : X_1 \rightarrow X$ le morphisme correspondant à l'homomorphisme canonique $B \rightarrow B_1$; si $X'_1 = h^{-1}(X')$, on a donc $X'_1 = V(\mathfrak{K}_1)$. Posons enfin $Z_1 = Z \times_X X_1 = Z_{(X_1)}$, $f_1 = f_{(X_1)} : Z_1 \rightarrow X_1$, qui est un morphisme propre (**II**, 5.4.2), et désignons par $\hat{X}_1$ le complété de X_1 le long de X'_1, par $\hat{Z}_1 = Z_1 \times_{X_1} \hat{X}_1$ le complété de Z_1 le long de $Z'_1 = f_1^{-1}(X'_1)$, par $\hat{f}_1$ le prolongement de f_1 aux complétés. Il est immédiat que le prolongement $\hat{h} : \hat{X}_1 \rightarrow \hat{X}$ de h aux complétés est un isomorphisme, correspondant à l'application identique de B_1 (**I**, 10.9.1); on en conclut que l'homomorphisme correspondant $\hat{Z}_1 \rightarrow \hat{Z}$ est aussi un isomorphisme, ces isomorphismes identifiant $\hat{f}_1$ et $\hat{f}$. Enfin, $\mathscr{M}_1 = h^*(\mathscr{M})$ est un Idéal cohérent de $\mathscr{O}_{X_1}$ et $\mathrm{Supp}(\mathscr{O}_{X_1}/\mathscr{M}_1) = h^{-1}(\mathrm{Supp}(\mathscr{O}_X/\mathscr{M}))$ (**I**, 9.1.13), donc, si $U_1 = X_1 - \mathrm{Supp}(\mathscr{O}_{X_1}/\mathscr{M}_1)$, on a $U_1 = h^{-1}(U)$, d'où résulte aussitôt que la restriction $f_1^{-1}(U_1) \rightarrow U_1$ de f_1 est un isomorphisme (**I**, 3.2.7); en outre, les complétés $\hat{\mathscr{M}}$ et $\hat{\mathscr{M}}_1$ s'identifient par $\hat{h}$ (**I**, 10.9.5). Toutes les hypothèses de (5.3.4) sont donc remplies par X_1, X'_1, f_1 et $\mathscr{M}_1$, et on peut donc désormais supposer B adique noethérien et $\mathfrak{K}$ un idéal de définition de B. On a alors $\hat{X} = \mathrm{Spf}(B)$, et $\mathscr{F} = N^\Delta$, où N est un B-module de type fini, d'où $\mathscr{F} = \hat{\mathscr{G}}$, où $\mathscr{G}$ est le $\mathscr{O}_X$-Module cohérent $\widetilde{N}$ (**I**, 10.10.5), et par suite $\hat{f}^*(\mathscr{F}) = (f^*(\mathscr{G}))^\wedge$ (**I**, 10.9.5). En outre, en vertu du premier théorème de comparaison (4.1.5), $\hat{f}_*((f^*(\mathscr{G}))^\wedge)$ s'identifie canoniquement à $(f_*(f^*(\mathscr{G})))^\wedge$, et l'homomorphisme canonique $\rho_{\mathscr{F}}$ n'est autre que $\hat{\rho}_{\mathscr{G}}$ en vertu de (5.1.3). Or, le noyau $\mathscr{P}$ et le conoyau $\mathscr{R}$ de $\rho_{\mathscr{G}} : \mathscr{G} \rightarrow f_*(f^*(\mathscr{G}))$ sont des $\mathscr{O}_X$-Modules cohérents, et par hypothèse leurs restrictions à U sont évidemment nuls. Il existe par suite un entier $n > 0$ tel que $\mathscr{M}^n \mathscr{P} = \mathscr{M}^n \mathscr{R} = 0$ (**I**, 9.3.4); on en conclut que $\hat{\mathscr{M}}^n \hat{\mathscr{P}} = \hat{\mathscr{M}}^n \hat{\mathscr{R}} = 0$ (**I**, 10.8.8 et 10.8.10).

5.3.5. Fin de la démonstration du théorème d'existence.

Les hypothèses étant celles de (5.1.4), nous allons utiliser le principe de récurrence noethérienne ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 2.2.2) en supposant donc le théorème vrai pour tout sous-préschéma fermé T de X dont l'espace sous-jacent est distinct de X (le complété $\hat{T}$ étant bien entendu le complété de T le long de $T \cap X'$). On peut supposer X non vide. Comme f est séparé et de type fini, on peut appliquer le lemme de Chow (**II**, 5.6.1) : il existe donc un Y-schéma Z et un Y-morphisme $g : Z \rightarrow X$ tels que le morphisme structural $h : Z \rightarrow Y$ soit quasi-projectif, le morphisme g projectif et surjectif, et en outre un ouvert non vide U de X tel que la restriction $g^{-1}(U) \rightarrow U$ soit un isomorphisme. Soit $\mathscr{M}$ un Idéal cohérent de $\mathscr{O}_X$ définissant un sous-préschéma fermé d'espace sous-jacent $X - U$ (**I**, 5.2.2), et soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\hat{X}}$-Module cohérent dont le support E est propre sur Y; désignons par $\hat{Z}$ le complété de Z le long de $h^{-1}(Y')$, par $\hat{g} : \hat{Z} \rightarrow \hat{X}$ le prolongement de g aux complétés. Alors $\hat{g}^*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_{\hat{Z}}$-Module cohérent dont le support est contenu dans $g^{-1}(E)$ et est par suite propre sur Y, puisque g est projectif, donc propre (**II**, 5.4.6). Comme h est quasi-projectif, $\hat{g}^*(\mathscr{F})$ est algébrisable en vertu de (5.2.6). On en conclut que $\widehat{g}_*(\widehat{g}^*(\mathscr{F}))$ est un $\mathcal{O}_{\widehat{X}}$-Module algébrisable (5.3.3) puisque g est propre. On peut maintenant appliquer à $\mathscr{F}$ et à g le résultat de (5.2.4) : le noyau $\mathscr{P}$ et le conoyau $\mathscr{R}$ de l'homomorphisme $\rho_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \widehat{g}_*(\widehat{g}^*(\mathscr{F}))$ sont annulés par une puissance $\widehat{\mathscr{M}}^n$; soient T le sous-préschéma fermé de X défini par $\mathscr{M}^n$, ayant $X - U$ pour espace sous-jacent, $j : T \to X$ l'injection canonique, de sorte que le prolongement aux complétés $\widehat{j} : \widehat{T} \to \widehat{X}$ est l'injection canonique (**I**, 10.14.7). On peut donc écrire $\mathscr{P} = \widehat{j}_*(\widehat{j}^*(\mathscr{P}))$ et $\mathscr{R} = \widehat{j}_*(\widehat{j}^*(\mathscr{R}))$ et comme U n'est pas vide, il résulte de l'hypothèse de récurrence que $\widehat{j}^*(\mathscr{P})$ et $\widehat{j}^*(\mathscr{R})$ sont des $\mathcal{O}_{\widehat{T}}$-Modules algébrisables; en vertu de (5.3.3), $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ sont algébrisables, et on peut alors appliquer (5.3.2), qui prouve finalement que $\mathscr{F}$ est algébrisable.

C.Q.F.D.

5.4. Application : comparaison de morphismes de schémas usuels et de morphismes de schémas formels. Schémas formels algébrisables.

Théorème (**5.4.1**). — *Soient* A *un anneau adique noethérien,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de définition de* A, $S = \mathrm{Spec}(A)$, $S' = V(\mathfrak{J})$. *Soient* $u : X \to S$ *un morphisme propre,* $v : Y \to S$ *un morphisme séparé de type fini, et soient* $\widehat{S}$, $\widehat{X}$, $\widehat{Y}$ *les complétés de* S, X, Y *le long de* S', $u^{-1}(S')$, $v^{-1}(S')$ *respectivement. Si, pour tout* S-*morphisme* $f : X \to Y$, $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ *est le prolongement de* f *aux complétés, l'application* $f \rightsquigarrow \widehat{f}$ *est une bijection*

$$\mathrm{Hom}_S(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widehat{S}}(\widehat{X}, \widehat{Y}).$$

Montrons d'abord que $f \rightsquigarrow \widehat{f}$ est injective. Supposons en effet que deux S-morphismes f, g de X dans Y soient tels que $\widehat{f} = \widehat{g}$. On sait alors (**I**, 10.9.4) qu'il existe un voisinage ouvert V de $X' = u^{-1}(S')$ dans lequel f et g coïncident. Or, comme u est une application fermée, on a $V = X$ (5.1.3.1), d'où $f = g$.

Prouvons maintenant que $f \rightsquigarrow \widehat{f}$ est surjective, et soit donc h un $\widehat{S}$-morphisme $\widehat{X} \to \widehat{Y}$. Soit $Z = X \times_S Y$, et désignons par $p : Z \to X$ et $q : Z \to Y$ les projections canoniques; Z est de type fini sur S (**I**, 6.3.4), donc noethérien; désignons par $\widehat{Z}$ son complété le long de $Z' = p^{-1}(u^{-1}(S'))$; on sait que $\widehat{Z}$ s'identifie canoniquement à $\widehat{X} \times_{\widehat{S}} \widehat{Y}$, les projections $\widehat{Z} \to \widehat{X}$ et $\widehat{Z} \to \widehat{Y}$ s'identifiant aux prolongements $\widehat{p}$ et $\widehat{q}$ (**I**, 10.9.7). Comme Y est séparé sur S, $\widehat{Y}$ est séparé sur $\widehat{S}$ (**I**, 10.15.7), donc le morphisme graphe $\Gamma_h = (1_{\widehat{X}}, h) : \widehat{X} \to \widehat{Z}$ est une immersion fermée (**I**, 10.15.4). Soient $\mathfrak{T}$ le sous-préschéma formel fermé de $\widehat{Z}$ associé à cette immersion, et $j : \mathfrak{T} \to \widehat{Z}$ l'injection canonique, de sorte que $\Gamma_h = j \circ w$, où $w : \widehat{X} \to \mathfrak{T}$ est un isomorphisme (**I**, 10.14.3) dont l'isomorphisme réciproque est $\widehat{p} \circ j$; en outre, $\mathfrak{T}$ est évidemment propre sur $\widehat{S}$, puisque $\widehat{X}$ l'est; on en conclut (5.1.8) qu'il existe un sous-préschéma fermé T de Z tel que $\mathfrak{T} = \widehat{T} = T_{/(T \cap Z')}$, et que $j = \widehat{i}$, où i est l'injection canonique $T \to Z$ (**I**, 10.14.7). Alors $p \circ i : T \to X$ est un isomorphisme, car il en est ainsi de $(p \circ i)^\wedge = \widehat{p} \circ \widehat{i}$ par hypothèse, et il suffit d'appliquer

(4.6.8) en notant comme ci-dessus que S est le seul voisinage de S' dans S. Soit $g : X \to T$ l'isomorphisme réciproque de $p \circ i$, et posons $f = q \circ i \circ g$, qui est un morphisme $X \to Y$ dont par définition le graphe $\Gamma_f = i \circ g$. Comme $\hat{g}$ est l'isomorphisme réciproque de $(p \circ i)\hat{} = w$, on a $(\Gamma_f)\hat{} = \hat{i} \circ \hat{g} = j \circ w = \Gamma_h$. Mais on sait que $(\Gamma_f)\hat{} = \Gamma_{\hat{f}}$ (**I**, 10.9.8), d'où finalement $h = \hat{f}$, ce qui achève la démonstration.

On peut donc dire, dans le langage des catégories, que le foncteur $X \rightsquigarrow \hat{X}$ est *pleinement fidèle* (**0**, 8.1.6) de la catégorie des schémas propres sur Spec(A) dans la catégorie des schémas formels propres sur Spf(A), pour tout anneau adique noethérien A; il établit par suite une équivalence entre la première de ces catégories et une *sous-catégorie* de la seconde; les objets de cette dernière seront appelés *schémas formels algébrisables*. Pour un tel schéma $\mathfrak{X}$, il existe un schéma usuel X, propre sur Spec(A), déterminé à isomorphisme unique près, tel que $\mathfrak{X}$ soit isomorphe à $\hat{X}$.

Scholie (**5.4.2**). — Avec les notations de (5.4.1), posons $S_n = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J}^{n+1})$, $X_n = X \times_S S_n$, $Y_n = Y \times_S S_n$. Il résulte de (5.4.1) et de (**I**, 10.12.3) que se donner un S-morphisme $f : X \to Y$ *équivaut* à se donner un (S_n)-système inductif adique (**I**, 10.12.2) de S_n-morphismes $f_n : X_n \to Y_n$.

Remarque (**5.4.3**). — Contrairement à ce que pourrait suggérer le th. d'existence (5.1.6), il y a des schémas formels propres sur Spf(A) et qui *ne sont pas algébrisables* (tout comme il y a des espaces analytiques compacts qui ne proviennent pas de variétés algébriques complexes). Nous rencontrerons plus tard de tels schémas dans la « théorie des modules », qui traite précisément (lorsque le corps de base est **C**) des variations infinitésimales de la structure complexe d'une variété algébrique complète, et on sait que de telles variations peuvent donner naissance à des variétés analytiques qui ne sont pas algébriques.

Proposition (**5.4.4**). — *Soient* A *un anneau adique noethérien,* $\mathfrak{S} = \mathrm{Spf}(A)$, $g : \mathfrak{X} \to \mathfrak{S}$, $h : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{S}$ *deux morphismes propres de schémas formels,* $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *un* $\mathfrak{S}$*-morphisme. Si* f *est fini et si* $\mathfrak{Y}$ *est algébrisable, alors* $\mathfrak{X}$ *est algébrisable.*

On notera que les hypothèses sur g et h entraînent déjà que f est propre (3.4.1), et pour que f soit fini, il suffit que pour tout $y \in \mathfrak{Y}$, la fibre $f^{-1}(y)$ soit *finie* (4.8.11). L'hypothèse entraîne que $\mathscr{B} = f_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ est une $\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}$-Algèbre cohérente (4.8.6), donc il résulte du th. d'existence que, si $\mathfrak{Y} = \hat{Y}$ et $h = \hat{w}$, où $w : Y \to \mathrm{Spec}(A)$ est un morphisme propre de schémas usuels, il existe une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre cohérente $\mathscr{C}$ telle que $\mathscr{B} = \hat{\mathscr{C}}$. Soient $X = \mathrm{Spec}(\mathscr{C})$, et $u : X \to Y$ le morphisme structural; alors, il résulte aussitôt de la définition de $\mathfrak{X}$ à partir de $\mathscr{B}$ (4.8.7) que $\mathfrak{X}$ est canoniquement isomorphe à $\hat{X}$ et que f s'identifie à $\hat{u}$ (il suffit pour le voir de considérer le cas où Y est affine).

On notera que (5.1.8) est un cas particulier de (5.4.4).

Théorème (**5.4.5**). — *Soient* A *un anneau adique noethérien,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de définition de* A, $S = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathfrak{S} = \hat{S} = \mathrm{Spf}(A)$, $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{S}$ *un morphisme propre de schémas formels. On pose* $S_k = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J}^{k+1})$, $X_k = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{S}} S_k$, *et pour tout* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$*-Module* $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_k = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{X_k} = \mathscr{F}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathscr{F}$.

Soit $\mathscr{L}$ un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module inversible, et supposons que $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}/\mathfrak{J}\mathscr{L}$ soit un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}_0}$-Module ample. Alors $\mathfrak{X}$ est algébrisable, et si X est un S-schéma propre tel que $\mathfrak{X}$ soit isomorphe à $\hat{\mathrm{X}}$, il existe un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module ample $\mathscr{M}$ tel que $\mathscr{L}$ soit isomorphe à $\hat{\mathscr{M}}$ (ce qui entraîne que X est *projectif* sur S).

Appliquons (5.2.3) à $\mathscr{F} = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$: il existe donc un entier n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, l'homomorphisme canonique $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{L}^{\otimes n}) \to \Gamma(\mathrm{X}_0, \mathscr{L}_0^{\otimes n})$ soit *surjectif*. On peut supposer $n \geqslant n_0$ choisi assez grand pour que $\mathscr{L}_0^{\otimes n}$ soit *très ample* pour S_0 (**II**, 4.5.10). Comme le morphisme $f_0 : \mathrm{X}_0 \to \mathrm{S}_0$ est propre, $\Gamma(\mathrm{X}_0, \mathscr{L}_0^{\otimes n})$ est un A-module de type fini (3.2.1), donc il existe un sous-A-module de type fini E de $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{L}^{\otimes n})$ dont l'image dans $\Gamma(\mathrm{X}_0, \mathscr{L}_0^{\otimes n})$ soit ce dernier module tout entier. Cela étant, pour tout $k \geqslant 0$, considérons l'homomorphisme $u_k : \mathrm{E}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathrm{E} \to \Gamma(\mathrm{X}_k, \mathscr{L}_k^{\otimes n})$ déduit de l'injection canonique $\mathrm{E} \to \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{L}^{\otimes n})$. Notons que $(f_k)_*(\mathscr{L}_k^{\otimes n})$ est quasi-cohérent, et comme $\Gamma(\mathrm{S}_k, (f_k)_*(\mathscr{L}_k^{\otimes n})) = \Gamma(\mathrm{X}_k, \mathscr{L}_k^{\otimes n})$, u_k définit un homomorphisme $\widetilde{u}_k : (\mathrm{E}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathrm{E})^{\sim} \to (f_k)_*(\mathscr{L}_k^{\otimes n})$, et par suite aussi un homomorphisme $\widetilde{u}_k^\sharp : f_k^*((\mathrm{E}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathrm{E})^{\sim}) \to \mathscr{L}_k^{\otimes n}$. D'ailleurs, si on pose $\mathscr{G}_k = f_k^*((\mathrm{E}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathrm{E})^{\sim})$, on a $\mathscr{G}_0 = \mathscr{G}_k/\mathfrak{J}\mathscr{G}_k$ (**I**, 9.1.5), donc $\widetilde{u}_0^\sharp : \mathscr{G}_k/\mathfrak{J}\mathscr{G}_k \to \mathscr{L}_k^{\otimes n}/\mathfrak{J}\mathscr{L}_k^{\otimes n}$ se déduit de $\widetilde{u}_k^\sharp$ par passage aux quotients. Or, par définition de E, $\widetilde{u}_0^\sharp$ n'est autre que l'homomorphisme canonique $\sigma : f_0^*((f_0)_*(\mathscr{L}_0^{\otimes n})) \to \mathscr{L}_0^{\otimes n}$, et l'hypothèse que $\mathscr{L}_0^{\otimes n}$ est très ample entraîne que $\widetilde{u}_0^\sharp$ est *surjectif* (**II**, 4.4.3); on déduit alors du lemme de Nakayama que chacun des $\widetilde{u}_k^\sharp$ est aussi *surjectif*. Chacun des $\widetilde{u}_k^\sharp$ définit donc (**II**, 4.2.2) un S_k-morphisme $g_k : \mathrm{X}_k \to \mathrm{P}_k = \mathbf{P}(\mathrm{E}/\mathfrak{J}^{k+1}\mathrm{E})$, et comme $\mathrm{P}_h = \mathrm{P}_k \times_{\mathrm{S}_k} \mathrm{S}_h$ pour $h \leqslant k$ en vertu de (**II**, 4.1.3), (g_k) est un (S_k)-*système inductif adique* (**I**, 10.12.2) en vertu des relations entre les $\widetilde{u}_k^\sharp$ et de (**II**, 4.2.10). Les g_k définissent donc un $\mathfrak{S}$-morphisme de schémas formels $g : \mathfrak{X} \to \mathfrak{P}$, où $\mathfrak{P}$ est la limite inductive du système (P_k), ou encore le complété $\hat{\mathrm{P}}$, où $\mathrm{P} = \mathbf{P}(\mathrm{E})$. De plus, l'hypothèse que $\mathscr{L}_0^{\otimes n}$ est très ample entraîne que g_0 est une *immersion fermée* (**II**, 4.4.3); on en conclut que g est une immersion fermée de schémas formels (4.8.10), donc $\mathfrak{X}$ est algébrisable (5.1.8). Le fait que $\mathscr{L}$ soit isomorphe au complété $\hat{\mathscr{M}}$ d'un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module inversible résulte alors du th. d'existence (5.1.6). En outre, $\mathscr{L}^{\otimes n}$ est alors le complété de $\mathscr{M}^{\otimes n}$ (**I**, 10.8.10), et les homomorphismes $\widetilde{u}_k^\sharp$ définissent un homomorphisme bien déterminé $v : f^*(\widetilde{\mathrm{E}}) \to \mathscr{M}^{\otimes n}$ (5.1.7); d'ailleurs, comme $\widetilde{u}_0^\sharp$ est surjectif, il en est de même de $\hat{v}$ (**I**, 10.11.5), donc de v (5.1.3); en outre, le morphisme $r : \mathrm{X} \to \mathrm{P}$ défini par v (**II**, 4.2.2) a pour prolongement aux complétés g, et comme g est une immersion fermée, il en est de même de r, par (5.1.8) et (5.4.1); on en conclut que $\mathscr{M}^{\otimes n}$ est très ample (**II**, 4.4.6) et $\mathscr{M}$ est ample (**II**, 4.5.10).

Remarque (**5.4.6**). — Soient A un anneau adique noethérien, $\mathfrak{S} = \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$, $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{S}$ un morphisme propre de schémas formels. Soit $\mathscr{N}$ l'Idéal cohérent de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ tel que pour tout ouvert formel affine U de $\mathfrak{X}$, $\Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{N})$ soit le nilradical de $\Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$; l'existence de cet Idéal résulte facilement de (**I**, 10.10.2) et du fait que tout homomorphisme d'anneaux $\mathrm{B} \to \mathrm{C}$ applique le nilradical de B dans celui de C. Soit $\mathfrak{X}'$ le sous-schéma formel fermé de $\mathfrak{X}$ défini par $\mathscr{N}$ (**I**, 10.14.2); il serait intéressant de savoir si, lorsque $\mathfrak{X}'$ est algébrisable, $\mathfrak{X}$ lui-même est algébrisable. On parviendrait sans doute à une solution de ce problème si on savait classifier (par exemple au moyen d'invariants de nature cohomologique), les *extensions* d'un faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ (pour un préschéma usuel ou un préschéma formel) par un Idéal de carré nul, autrement dit les $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-Algèbres $\mathcal{A}$ telles que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ soit isomorphe à $\mathcal{A}/\mathcal{J}$, où $\mathcal{J}$ est un Idéal de carré nul de $\mathcal{A}$.

5.5. Une décomposition de certains schémas.

Proposition **(5.5.1)**. — *Soient* A *un anneau adique noethérien,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de définition de* A, $Y = \mathrm{Spec}(A)$. *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme séparé de type fini; on pose* $Y_0 = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J})$, $X_0 = X \times_Y Y_0 = f^{-1}(Y_0)$. *Soit* Z_0 *une partie ouverte de* X_0, *propre sur* Y_0 ; *il existe alors dans* X *une partie ouverte et fermée* Z, *propre sur* Y *et telle que* $Z \cap X_0 = Z_0$.

Par hypothèse, il y a un ouvert T de X tel que $T \cap X_0 = Z_0$; soit $\hat{T}$ le complété le long de Z_0 du schéma induit par X sur l'ouvert T; le support de $\mathcal{O}_{\hat{T}}$ étant Z_0, qui est propre sur Y_0, $\hat{T}$ est propre sur $\hat{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ (3.4.1). Il résulte de (5.1.8) qu'il existe un sous-schéma fermé Z de T *propre* sur Y, tel que, si $i : Z \to T$ est l'injection canonique, $\hat{i} = \hat{Z} \to \hat{T}$ soit un isomorphisme ($\hat{Z}$ étant le complété de Z le long de Z_0). On en conclut (4.6.8) qu'il existe dans T un voisinage ouvert V de Z_0 tel que la restriction $i^{-1}(V) \to V$ de i soit un isomorphisme. Mais $i^{-1}(V)$ est un voisinage de Z_0 dans Z, donc est nécessairement identique à Z (5.1.3.1). On en conclut que Z est ouvert dans T, donc dans X, ce qui achève la démonstration.

Corollaire **(5.5.2)**. — *Si* X_0 *est propre sur* Y_0, X *est réunion de deux parties ouvertes disjointes* Z *et* Z' *telles que* Z *soit propre sur* Y *et contienne* X_0 ; *en outre, toute partie fermée* P *de* X, *propre sur* Y, *est contenue dans* Z.

La dernière assertion résulte de ce que $P \cap Z'$ étant fermé dans P est propre sur Y; si $P \cap Z'$ n'était pas vide, $f(P \cap Z')$ serait fermé non vide dans Y, donc rencontrerait Y_0 (5.1.3.1), ce qui contredit la définition de Z.

(A suivre.)