CHAPITRE IV *(fin)*

ÉTUDE LOCALE DES SCHÉMAS ET DES MORPHISMES DE SCHÉMAS

§ 16. INVARIANTS DIFFÉRENTIELS MORPHISMES DIFFÉRENTIELLEMENT LISSES

Dans ce paragraphe, nous présentons, sous forme globale, quelques notions de calcul différentiel particulièrement utiles en Géométrie algébrique. Nous passons sous silence de nombreux développements, classiques en Géométrie différentielle (connexions, transformations infinitésimales associées à un champ de vecteurs, jets, etc.), bien que ces notions s'écrivent de façon particulièrement naturelle dans le cadre des schémas. Nous passons également sous silence ici les phénomènes spéciaux à la caractéristique $p>0$ (dont certains sont étudiés, dans le cadre affine, dans (**0**, 21)). Pour certains compléments sur le formalisme différentiel dans les préschémas, le lecteur pourra consulter les exposés II et VII de [42], ainsi que les chapitres ultérieurs de ce Traité.

16.1. Invariants normaux d'une immersion.

(16.1.1) Soient $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces annelés, $f=(\psi, \theta) : Y \to X$ un morphisme d'espaces annelés ($\mathbf{0}_I$, 4.1.1) tel que l'homomorphisme

$$\theta^\# : \psi^*(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_Y$$

soit *surjectif*, de sorte que $\mathcal{O}_Y$ s'identifie à un faisceau d'anneaux quotient $\psi^*(\mathcal{O}_X)/\mathcal{J}_f$. On peut alors munir $\psi^*(\mathcal{O}_X)$ de la filtration $\mathcal{J}_f$-préadique.

Définition **(16.1.2)**. — *Le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_Y$-augmenté $\psi^*(\mathcal{O}_X)/\mathcal{J}_f^{n+1}$ est appelé le n-ème* invariant normal *de f; l'espace annelé $(Y, \psi^*(\mathcal{O}_X)/\mathcal{J}_f^{n+1})$ est appelé le n-ème* voisinage infinitésimal de Y *pour le morphisme f, et noté $Y_f^{(n)}$ ou simplement $Y^{(n)}$. Le faisceau d'anneaux gradués associé au faisceau d'anneaux filtrés $\psi^*(\mathcal{O}_X)$*

(16.1.2.1) $$\mathcal{G}r_\bullet(f)=\bigoplus_{n\geqslant 0}(\mathcal{J}_f^n/\mathcal{J}_f^{n+1})$$

est appelé le faisceau d'anneaux gradués associé *à f. Le faisceau $\mathcal{G}r_1(f)=\mathcal{J}_f/\mathcal{J}_f^2$ est appelé le* faisceau conormal *de f* (que l'on note aussi $\mathcal{N}_{Y/X}$ s'il n'en résulte pas de confusion).

Il est clair que les $\mathcal{O}_{Y^{(n)}}=\psi^*(\mathcal{O}_X)/\mathcal{J}_f^{n+1}$ (qu'on note aussi $\mathcal{O}_{Y_f^{(n)}}$) forment un système projectif de faisceaux d'anneaux sur Y, l'homomorphisme de transition $\varphi_{nm} : \mathcal{O}_{Y^{(m)}} \to \mathcal{O}_{Y^{(n)}}$ pour $n \leqslant m$ identifiant $\mathcal{O}_{Y^{(n)}}$ au quotient de $\mathcal{O}_{Y^{(m)}}$ par la puissance $(\mathcal{J}_f/\mathcal{J}_f^{n+1})^m$ de l'*Idéal d'augmentation* de $\mathcal{O}_{Y^{(n)}}$, noyau de $\varphi_{0n} : \mathcal{O}_{Y^{(n)}} \to \mathcal{O}_Y$. Les $Y^{(n)}$ forment par suite un système inductif d'espaces annelés, ayant tous pour espace sous-jacent l'espace Y, et on a des morphismes canoniques d'espaces annelés $h_n : Y^{(n)} \to X$ égaux à (ψ, θ_n), où $\theta_n^\sharp$ est le morphisme canonique $\psi^*(\mathcal{O}_X) \to \psi^*(\mathcal{O}_X)/\mathcal{J}_f^{n+1}$. Il est clair que le faisceau $\mathcal{G}r_\bullet(f)$ est un faisceau d'algèbres graduées sur le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_Y = \mathcal{G}r_0(f)$, et les $\mathcal{G}r_k(f)$ des $\mathcal{O}_Y$-*Modules*.

Comme pour tout faisceau d'anneaux filtré, on a un *homomorphisme canonique surjectif* de $\mathcal{O}_Y$-Algèbres graduées

$$\mathbf{S}^\bullet_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}r_1(f)) \to \mathcal{G}r_\bullet(f) \tag{16.1.2.2}$$

coïncidant en degrés 0 et 1 avec les homomorphismes identiques.

Exemples **(16.1.3)**. — (i) Supposons que X soit un espace annelé en anneaux locaux, que Y soit réduit à un seul point y (muni d'un anneau $\mathcal{O}_y$) et que, si $x = \psi(y)$, $\theta^\sharp : \mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_y$ soit un homomorphisme *surjectif* d'anneaux ayant pour noyau l'idéal maximal $\mathfrak{m}_x$ de $\mathcal{O}_x$. Alors les $\mathcal{O}_{Y^{(n)}}$ s'identifient aux anneaux $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^{n+1}$, et $\mathcal{G}r_\bullet(f)$ à l'anneau gradué associé à l'anneau local $\mathcal{O}_x$ muni de sa filtration $\mathfrak{m}_x$-préadique.

(ii) Supposons que Y soit une partie fermée d'un sous-espace ouvert U de X et que $\mathcal{O}_Y$ soit induit sur Y par un faisceau quotient $\mathcal{O}_U/\mathcal{J}$, où $\mathcal{J}$ est un Idéal de $\mathcal{O}_U$ tel que $\mathcal{J}_x = \mathcal{O}_x$ pour tout $x \notin Y$; si X est un espace annelé en anneaux locaux, nous supposerons de plus que $\mathcal{J}_x \neq \mathcal{O}_x$ pour $x \in Y$, de sorte que $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est encore un espace annelé en anneaux locaux.

Soit $\psi_0 : Y \to U$ l'injection canonique, et notons $\theta_0 : \mathcal{O}_U \to (\psi_0)_*(\mathcal{O}_Y)$ l'homomorphisme tel que $\theta_0^\sharp$ soit l'homomorphisme canonique $\psi_0^*(\mathcal{O}_U) = \mathcal{O}_U|Y \to (\mathcal{O}_U/\mathcal{J})|Y$, de sorte que $j_0 = (\psi_0, \theta_0) : Y \to U$ est un morphisme d'espaces annelés (et d'espaces annelés en anneaux locaux si X est un espace annelé en anneaux locaux) ; si $i : U \to X$ est l'injection canonique (morphisme d'espaces annelés), $j = i \circ j_0$ est le morphisme (ψ, θ) de Y dans X, où $\psi : Y \to X$ est l'injection canonique, et $\theta : \mathcal{O}_X \to \psi_*(\mathcal{O}_Y)$ est l'homomorphisme tel que $\theta^\sharp = \theta_0^\sharp$. Comme $\theta^\sharp$ est surjectif, on peut appliquer les définitions précédentes ; $\mathcal{O}_{Y^{(n)}}$ est égal à $\psi_0^*(\mathcal{O}_U/\mathcal{J}^{n+1})$, et l'on a $(\psi_0)_*(\mathcal{O}_{Y^{(n)}}) = \mathcal{O}_U/\mathcal{J}^{n+1}$, et $\mathcal{G}r_n(j) = \mathcal{G}r_n(j_0) = \psi_0^*(\mathcal{J}^n/\mathcal{J}^{n+1}) = j_0^*(\mathcal{J}^n/\mathcal{J}^{n+1})$.

(16.1.4) L'exemple (16.1.3, (ii)) montre qu'en général les $\mathcal{O}_{Y^{(n)}}$ *ne sont pas munis canoniquement d'une structure de* $\mathcal{O}_Y$-*Module*, ni *a fortiori* d'une structure de $\mathcal{O}_Y$-Algèbre. La donnée d'une telle structure équivaut à celle d'un homomorphisme de faisceaux d'anneaux $\lambda_n : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_{Y^{(n)}}$, inverse à droite de l'homomorphisme d'augmentation φ_{0n}; cela revient aussi à la donnée d'un morphisme d'espaces annelés $(1_Y, \lambda_n) : Y^{(n)} \to Y$, inverse à gauche du morphisme canonique $(1_Y, \varphi_{0n}) : Y \to Y^{(n)}$.

Proposition **(16.1.5)**. — *Soit* $f = (\psi, \theta) : Y \to X$ *une immersion de préschémas. Alors :*

(i) $\mathcal{G}r_\bullet(f)$ *est une* $\mathcal{O}_Y$-*Algèbre graduée quasi-cohérente.*

(ii) *Les* $Y^{(n)}$ *sont des préschémas, canoniquement isomorphes à des sous-préschémas de* X.

(iii) *Tout homomorphisme de faisceaux d'anneaux* $\lambda_n : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_{Y^{(n)}}$, *inverse à droite de l'homomorphisme d'augmentation* φ_{0n}, *fait de* $\mathcal{O}_{Y^{(n)}}$ *et des* $\mathcal{O}_{Y^{(k)}}$ *pour* $k \leqslant n$, *des* $\mathcal{O}_Y$*-Algèbres quasi-cohérentes; les structures de* $\mathcal{O}_Y$*-Module déduites des structures précédentes sur les* $\mathcal{G}r_k(f)$ *pour* $k \leqslant n$ *coïncident avec celles définies dans* (16.1.2).

(i) La question étant locale sur X et sur Y, on peut se borner au cas où Y est un sous-préschéma fermé de X défini par un Idéal quasi-cohérent $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_X$; comme $\mathcal{O}_Y$ est la restriction à Y de $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$, l'assertion (i) est évidente, et $Y^{(n)}$ est le sous-préschéma fermé de X défini par l'Idéal quasi-cohérent $\mathcal{J}^{n+1}$ de $\mathcal{O}_X$. Enfin, pour prouver (iii), notons que la donnée de λ_n fait de l'Idéal $\mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+1}$ de l'augmentation φ_{0n} et de ses quotients $\mathcal{J}/\mathcal{J}^{k+1}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ des $\mathcal{O}_Y$-Modules, et il suffit de prouver par récurrence sur k que les $\mathcal{J}/\mathcal{J}^{k+1}$ sont des $\mathcal{O}_Y$-Modules quasi-cohérents et que la structure de $\mathcal{O}_Y$-Module quotient qu'on en déduit sur $\mathcal{J}^k/\mathcal{J}^{k+1}$ est la même que celle définie en (16.1.2). La seconde assertion est immédiate, $\mathcal{J}^k/\mathcal{J}^{k+1}$ étant annulé par $\mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+1}$; la première résulte, par récurrence sur k, de ce qu'elle est triviale pour $k=1$ et de ce que $\mathcal{J}/\mathcal{J}^{k+1}$ est une extension de $\mathcal{J}/\mathcal{J}^k$ par $\mathcal{J}^k/\mathcal{J}^{k+1}$ (**III**, 1.4.17).

Corollaire (**16.1.6**). — *Sous les hypothèses générales de* (16.1.5), *si l'immersion f est localement de présentation finie, les* $\mathcal{G}r_n(f)$ *sont des* $\mathcal{O}_Y$*-Modules quasi-cohérents de type fini.*

En effet, avec les notations de la démonstration de (16.1.5), $\mathcal{J}$ est un Idéal de type fini de $\mathcal{O}_X$ (1.4.7), donc les $\mathcal{J}^n/\mathcal{J}^{n+1}$ sont des $\mathcal{O}_Y$-Modules de type fini, d'où la conclusion.

Corollaire (**16.1.7**). — *Sous les hypothèses générales de* (16.1.5), *soit* $g : X \to Y$ *un morphisme de préschémas inverse à gauche de f. Alors, pour tout n, le morphisme composé* $(1, \lambda_n) : Y^{(n)} \xrightarrow{h_n} X \xrightarrow{g} Y$ *définit un homomorphisme de faisceaux d'anneaux* $\lambda_n : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_{Y^{(n)}}$ *inverse à droite de l'augmentation* φ_{0n}, *faisant de* $\mathcal{O}_{Y^{(n)}}$ *une* $\mathcal{O}_Y$*-Algèbre quasi-cohérente; pour ces homomorphismes, les homomorphismes de transition* $\varphi_{nm} : \mathcal{O}_{Y^{(m)}} \to \mathcal{O}_{Y^{(n)}}$ $(n \leqslant m)$ *sont des homomorphismes de* $\mathcal{O}_Y$*-Algèbres. En outre, si g est localement de type fini, les* $\mathcal{O}_{Y^{(n)}}$ *sont des* $\mathcal{O}_Y$*-Modules quasi-cohérents de type fini.*

La première assertion résulte aussitôt des définitions et de (16.1.5). D'autre part, si g est localement de type fini, alors f est localement de présentation finie (1.4.3, (v)); les $\mathcal{G}r_n(f)$ étant alors des $\mathcal{O}_Y$-Modules quasi-cohérents de type fini par (16.1.6), il en est de même des $\mathcal{O}_Y$-Modules $\mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+1}$, qui sont des extensions d'un nombre fini de $\mathcal{G}r_k(f)$ (**III**, 1.4.17).

Proposition (**16.1.8**). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $j : Y \to X$ *une immersion. Alors les* $Y^{(n)}$ *sont des préschémas localement noethériens, les* $\mathcal{G}r_n(j)$ *sont des* $\mathcal{O}_Y$*-Modules cohérents, et* $\mathcal{G}r_\bullet(j)$ *est un faisceau d'anneaux cohérent sur l'espace* Y.

Tout étant local sur X et Y, on est ramené au cas où X est affine et j une immersion fermée, et alors toutes les assertions sont évidentes sauf la dernière, qui résulte de ce que si A est un anneau noethérien et $\mathfrak{J}$ un idéal de A, $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{J}}(A)$ est un anneau noethérien, compte tenu de l'exactitude du foncteur ψ^* et de $(\mathbf{0}_\mathrm{I}, 5.3.7)$.

Proposition **(16.1.9).** — *Soient* X *un préschéma,* $j : Y \rightarrow X$ *une immersion localement de présentation finie,* y *un point de* Y. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Il existe un voisinage ouvert* U *de* y *dans* Y *tel que* $j|U$ *soit un homéomorphisme de* U *sur un ouvert de* X.

b) *Il existe un entier* $n>0$ *tel que l'homomorphisme canonique*

$$(\varphi_{n,n-1})_y : \mathcal{O}_{Y^{(n)},y} \rightarrow \mathcal{O}_{Y^{(n-1)},y}$$

soit bijectif.

c) *Il existe un entier* $n>0$ *tel que* $(\mathcal{G}r_n(j))_y=0$.

De plus, si l'entier n vérifie b) *ou* c), *il existe un voisinage* V *de* y *dans* Y *tel que* $\mathcal{G}r_m(j)|V=0$ *pour* $m \geqslant n$ *et que* $\varphi_{nm}|V : \mathcal{O}_{Y^{(m)}}|V \rightarrow \mathcal{O}_{Y^{(n)}}|V$ *soit bijectif pour* $m \geqslant n$.

La question étant locale sur Y, on peut se borner au cas où j est une immersion fermée, Y étant défini par un Idéal quasi-cohérent *de type fini* $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_X$. L'équivalence de *b)* et *c)*, pour un n donné, est alors immédiate ; en outre, comme $\mathcal{J}^n/\mathcal{J}^{n+1}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module de type fini, il existe un voisinage ouvert U de y dans X tel que $\mathcal{J}^n|U=\mathcal{J}^{n+1}|U$ $(\mathbf{0}_I, 5.2.2)$, donc aussi $\mathcal{J}^n|U=\mathcal{J}^m|U$ pour $m \geqslant n$, ce qui prouve les dernières assertions. Pour prouver que *a)* entraîne *b)*, on peut se borner au cas où l'espace sous-jacent à Y est égal à l'espace sous-jacent à X, et où $\mathcal{J}$ est engendré par un nombre fini de ses sections au-dessus de X : comme $\mathcal{J}$ est alors contenu dans le Nilradical $\mathcal{N}$ de $\mathcal{O}_X$ (**I**, 5.1.2), il est nilpotent, ce qui prouve *b)*. Enfin, pour prouver que *b)* entraîne *a)*, on peut aussi se borner au cas où $\mathcal{J}^n=\mathcal{J}^{n+1}$; alors, pour tout $y \in Y$, comme $\mathcal{J}_y \subset \mathfrak{m}_y$, idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,y}$, on a nécessairement $\mathcal{J}_y^n=0$ en vertu du lemme de Nakayama, puisque $\mathcal{J}_y$ est un idéal de type fini. L'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathcal{J}_x^n=0$ est donc un ouvert U de X contenant Y $(\mathbf{0}_I, 5.2.2)$; comme d'autre part $\mathcal{J}_x \neq 0$ pour $x \notin Y$, on a nécessairement $U=Y$.

Corollaire **(16.1.10).** — *Pour que la restriction de l'immersion j à un voisinage de y dans* Y *soit une immersion ouverte* (autrement dit pour que j soit un *isomorphisme local* au point y), *il faut et il suffit que* $(\mathcal{G}r_1(j))_y=(\mathcal{N}_{Y/X})_y=0$.

La condition est évidemment nécessaire, et le raisonnement précédent, appliqué pour $n=1$, prouve qu'elle est suffisante.

Remarques **(16.1.11).** — (i) Sous les conditions de la définition (16.1.1), la limite projective du système projectif $(\mathcal{O}_{Y^{(n)}}, \varphi_{nm})$ de faisceaux d'anneaux sur Y est appelé l'*invariant normal d'ordre infini* de f, et parfois noté $\mathcal{O}_{Y^{(\infty)}}$. Lorsque X est un préschéma localement noethérien, $j : Y \rightarrow X$ une immersion fermée, Y étant donc un sous-préschéma fermé de X défini par un Idéal cohérent $\mathcal{J}$, $\mathcal{O}_{Y^{(\infty)}}$ n'est autre que le *complété formel* de $\mathcal{O}_X$ le long de Y (**I**, 10.8.4), et $Y^{(\infty)}=(Y, \mathcal{O}_{Y^{(\infty)}})$ le préschéma formel *complété* de X le long de Y (**I**, 10.8.5). Dans tous les cas, on pourra dire que $Y^{(\infty)}$ est le *voisinage formel* de Y dans X (pour le morphisme f). Dans le cas particulier qu'on vient d'envisager, c'est donc le préschéma formel limite inductive des voisinages infinitésimaux d'ordre n.

(ii) On notera que pour un morphisme de préschémas $f=(\psi, \theta) : Y \rightarrow X$, il peut se faire que l'homomorphisme $\theta^\sharp : \psi^*(\mathcal{O}_X) \rightarrow \mathcal{O}_Y$ soit surjectif sans que f soit une immersion locale, et sans que f soit injectif. On en a un exemple en prenant pour Y une somme de préschémas Y_λ tous isomorphes à $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x)$, où $x \in X$, et pour f le morphisme égal au morphisme canonique dans chacun des Y_λ.

16.2. Propriétés fonctorielles des invariants normaux d'une immersion.

(16.2.1) Soient $f = (\psi, \theta) : Y \to X$, $f' = (\psi', \theta') : Y' \to X'$ deux morphismes d'espaces annelés tels que les homomorphismes $\theta^\sharp$ et $\theta'^\sharp$ soient *surjectifs*; considérons un diagramme commutatif de morphismes d'espaces annelés

(16.2.1.1)
$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle u}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle v} \\ Y' & \xrightarrow[f']{} & X' \end{array}$$

Posons $u = (\rho, \lambda)$, $v = (\sigma, \mu)$. On a $\rho^*(\psi^*(\mathcal{O}_X)) = \psi'^*(\sigma^*(\mathcal{O}_X))$ et on a par suite un diagramme commutatif d'homomorphismes de faisceaux d'anneaux sur Y'

$$\begin{array}{ccc} \rho^*(\psi^*(\mathcal{O}_X)) = \psi'^*(\sigma^*(\mathcal{O}_X)) & \xrightarrow{\psi'^*(\mu^\sharp)} & \psi'^*(\mathcal{O}_{X'}) \\ {\scriptstyle \rho^*(\theta^\sharp)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta'^\sharp} \\ \rho^*(\mathcal{O}_Y) & \xrightarrow[\lambda^\sharp]{} & \mathcal{O}_{Y'} \end{array}$$

d'où l'on conclut, si $\mathscr{J}$ et $\mathscr{J}'$ sont les noyaux de $\theta^\sharp$ et $\theta'^\sharp$, que l'on a $\psi'^*(\mu^\sharp)(\rho^*(\mathscr{J})) \subset \mathscr{J}'$, compte tenu de l'exactitude du foncteur ρ^*. On en déduit aussitôt que pour tout entier n, $\psi'^*(\mu^\sharp)(\rho^*(\mathscr{J}^n)) \subset \mathscr{J}'^n$, ce qui montre que $\psi'^*(\mu^\sharp)$ définit, par passage aux quotients, un homomorphisme de faisceaux d'anneaux

(16.2.1.2)
$$\nu_n : \rho^*(\psi^*(\mathcal{O}_X)/\mathscr{J}^{n+1}) \to \psi'^*(\mathcal{O}_{X'})/\mathscr{J}'^{n+1}$$

et par suite un morphisme d'espaces annelés $w_n = (\rho, \nu_n) : Y'^{(n)} \to Y^{(n)}$ (qui, pour $n = 0$, n'est autre que u). Il résulte aussitôt de cette définition que les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} Y^{(n)} & \xrightarrow{h_{mn}} & Y^{(m)} & \xrightarrow{h_m} & X \\ {\scriptstyle w_n}\uparrow & & {\scriptstyle w_m}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle v} \\ Y'^{(n)} & \xrightarrow[h'_{mn}]{} & Y'^{(m)} & \xrightarrow[h'_m]{} & X' \end{array} \qquad (n \leqslant m)$$

(où les flèches horizontales sont les morphismes canoniques (16.1.2)) sont commutatifs.

Par passage aux quotients à partir des homomorphismes (16.2.1.2), et en tenant compte de l'exactitude du foncteur ρ^*, on obtient un di-homomorphisme d'Algèbres graduées (relatif à l'homomorphisme $\lambda^\# : \rho^*(\mathcal{O}_Y) \to \mathcal{O}_{Y'}$)

(16.2.1.3) $$\mathrm{gr}(u) : \rho^*(\mathcal{G}r_\bullet(f)) \to \mathcal{G}r_\bullet(f')$$

(ou, si on veut, un ρ-morphisme ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 3.5.1) $\mathcal{G}r_\bullet(f) \to \mathcal{G}r_\bullet(f')$), et en particulier un di-homomorphisme des faisceaux conormaux

$$\mathrm{gr}_1(u) : \rho^*(\mathcal{G}r_1(f)) \to \mathcal{G}r_1(f').$$

Il est immédiat en outre que ces homomorphismes donnent lieu à un diagramme commutatif

(16.2.1.4)
$$\begin{tikzcd} \rho^*(\mathbf{S}^\bullet_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}r_1(f))) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{S}(\mathrm{gr}_1(u))"'] & \rho^*(\mathcal{G}r_\bullet(f)) \arrow[d, "\mathrm{gr}(u)"] \\ \mathbf{S}^\bullet_{\mathcal{O}_{Y'}}(\mathcal{G}r_1(f'))) \arrow[r] & \mathcal{G}r_\bullet(f') \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont les homomorphismes canoniques (16.1.2.2).

Enfin, si l'on a un diagramme commutatif de morphismes d'espaces annelés

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] & X \\ Y' \arrow[u, "u"] \arrow[r, "f'"'] & X' \arrow[u, "v"'] \\ Y'' \arrow[u, "u'"] \arrow[r, "f''"'] & X'' \arrow[u, "v'"'] \end{tikzcd}$$

où $f''=(\psi'', \theta'')$ est tel que $\theta''^\#$ soit surjectif, et si w'_n et w''_n sont définis à partir de u', v' d'une part, et de $u''=u\circ u'$, $v''=v\circ v'$ de l'autre, alors on a $w''_n=w_n\circ w'_n$, comme il résulte aussitôt des définitions et de ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 3.5.5); on a de même $\mathrm{gr}(u'')=\mathrm{gr}(u')\circ\rho'^*(\mathrm{gr}(u))$ si $u'=(\rho', \lambda')$. On peut donc dire que les $Y^{(n)}$ et $\mathcal{G}r_\bullet(f)$ *dépendent fonctoriellement de* f.

Proposition **(16.2.2)**. — *Avec les notations et hypothèses de* (16.2.1), *supposons de plus que* f, f', u *et* v *soient des morphismes de préschémas. Alors :*

(i) *Les morphismes* $w_n : Y'^{(n)} \to Y^{(n)}$ *sont des morphismes de préschémas.*

(ii) *Si* $Y'=Y\times_X X'$, u *et* f' *étant les projections canoniques, et si* f *est une immersion* ou *si* v *est plat, on a* $Y'^{(n)}=Y^{(n)}\times_X X'$.

(iii) *Si* $Y'=Y\times_X X'$ *et si* v *est plat* (resp. *si* f *est une immersion*), *l'homomorphisme*

$$\mathrm{Gr}(u)=\mathrm{gr}(u)\otimes 1 : \mathcal{G}r_\bullet(f)\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_{Y'} \to \mathcal{G}r_\bullet(f')$$

est bijectif (resp. *surjectif*).

(i) Les hypothèses entraînent aussitôt que pour tout $y'\in Y'$, $\rho^*_{y'}(\theta^\#_{\psi'(y')})$ est un homomorphisme *local* (**I**, 1.6.2), donc w_n est un morphisme de préschémas (**I**, 2.2.1).

(ii) et (iii) Si f est une immersion, on peut se borner au cas où f est une immersion fermée, Y étant donc défini par l'Idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathcal{O}_X$, et $Y^{(n)}$ par l'Idéal $\mathscr{J}^{n+1}$; les assertions résultent alors de (**I**, 4.4.5).

Supposons en second lieu que v soit *plat* ; on peut se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$, $X' = \mathrm{Spec}(A')$ sont affines, A′ étant un A-module plat; alors $Y' = \mathrm{Spec}(B')$ avec $B' = B \otimes_A A'$; en outre, si $\mathfrak{J}$ est le noyau de l'homomorphisme $A \to B$, le noyau $\mathfrak{J}'$ de $A' \to B'$ s'identifie à $\mathfrak{J} \otimes_A A'$ par platitude, et $\mathfrak{J}'^n/\mathfrak{J}'^{n+1} = (\mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1}) \otimes_A A'$. On en déduit aussitôt, compte tenu de ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 4.3.3), que le $\mathcal{O}_{Y'}$-Module $\mathscr{J}'^n/\mathscr{J}'^{n+1}$ est égal à

$$\psi'^*(\sigma^*((\mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1})^\sim) \otimes_{\sigma^*(\mathcal{O}_X)} \mathcal{O}_{X'}) = \\ \psi'^*(\sigma^*((\mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1})^\sim)) \otimes_{\psi'^*(\sigma^*(\mathcal{O}_X))} \psi'^*(\mathcal{O}_{X'}) = \rho^*(\mathscr{J}^n/\mathscr{J}^{n+1}) \otimes_{\rho^*(\psi^*(\mathcal{O}_X))} \psi'^*(\mathcal{O}_{X'})$$

et comme en particulier pour $n = 0$, on a

$$\mathcal{O}_{Y'} = \rho^*(\mathcal{O}_Y) \otimes_{\rho^*(\psi^*(\mathcal{O}_X))} \psi'^*(\mathcal{O}_{X'})$$

on obtient un isomorphisme canonique de $\mathscr{J}'^n/\mathscr{J}'^{n+1}$ sur

$$\rho^*(\mathscr{J}^n/\mathscr{J}^{n+1}) \otimes_{\rho^*(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{O}_{Y'} = (\mathscr{J}^n/\mathscr{J}^{n+1}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'}$$

ce qui prouve (iii). Posons maintenant $C_n = \Gamma(Y, \mathcal{O}_{Y^{(n)}})$, $C'_n = \Gamma(Y', \mathcal{O}_{Y'^{(n)}})$. Puisque $Y^{(n)}$ et $Y'^{(n)}$ sont des schémas affines (16.1.5), le noyau $\mathfrak{K}_n$ (resp. $\mathfrak{K}'_n$) de l'homomorphisme $C_n \to C_{n-1}$ (resp. $C'_n \to C'_{n-1}$) est $\Gamma(Y, \mathscr{J}^n/\mathscr{J}^{n+1})$ (resp. $\Gamma(Y', \mathscr{J}'^n/\mathscr{J}'^{n+1})$); on déduit donc de ce qui précède que $\mathfrak{K}'_n = \mathfrak{K}_n \otimes_A A'$. Or, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{K}_n \otimes_A A' \arrow[r] \arrow[d, "r"] & C_n \otimes_A A' \arrow[r] \arrow[d, "s_n"] & C_{n-1} \otimes_A A' \arrow[r] \arrow[d, "s_{n-1}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{K}'_n \arrow[r] & C'_n \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale de gauche est bijective et les deux lignes sont exactes (A′ étant un A-module plat). On en déduit par récurrence que s_n est bijectif pour tout n, car c'est vrai par hypothèse pour $n = 0$, et se déduit par application du lemme des cinq pour n quelconque. Cela prouve la seconde assertion de (ii).

Corollaire (**16.2.3**). — *Soient* $g : X \to Y$, $u : Y' \to Y$ *deux morphismes de préschémas,* $X' = X \times_Y Y'$, $g' : X' \to Y'$ *et* $v : X' \to X$ *les projections canoniques. Soient* $f : Y \to X$ *une* Y-*section de* X *(donc une immersion),* $f' = f_{(Y')} : Y' \to X'$ *la* Y′-*section de* X′ *déduite de* f *par le changement de base* u. *Alors :*

(i) *Le morphisme* $w_n : Y'^{(n)}_{f'} \to Y^{(n)}_f$ *correspondant à* f, f', u, v (16.2.1) *et le morphisme canonique* $h'_n : Y'^{(n)}_{f'} \to X'$ *identifient* $Y'^{(n)}_{f'}$ *au produit* $Y^{(n)}_f \times_X X'$.

(ii) *Si l'on munit* $\mathcal{O}_{Y^{(n)}_f}$ (resp. $\mathcal{O}_{Y'^{(n)}_{f'}}$) *de la structure de* $\mathcal{O}_Y$-*Algèbre définie par* g (resp. *de la structure de* $\mathcal{O}_{Y'}$-*Algèbre définie par* g') (16.1.6), *l'homomorphisme de* $\mathcal{O}_{Y'}$-*Algèbres*

(16.2.3.1) $$\rho^*(\mathcal{O}_{Y^{(n)}_f}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'} \to \mathcal{O}_{Y'^{(n)}_{f'}}$$

déduit de l'homomorphisme ν_n (16.2.1.2) *est bijectif. En outre, l'homomorphisme de* $\mathcal{O}_{Y'}$*-Modules*

(16.2.3.2) $$\mathrm{Gr}_1(u) : \mathcal{G}r_1(f) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'} \to \mathcal{G}r_1(f')$$

est bijectif.

(i) Notons d'abord que les morphismes $f' : Y' \to X'$ et $u : Y' \to Y$ identifient Y′ au produit $Y \times_X X'$ (pour les morphismes structuraux $f : Y \to X$ et $v : X' \to X$) (14.5.12.1). La conclusion de (i) résulte alors de (16.2.2, (ii)), le morphisme g étant une immersion.

(ii) Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y_f^{(n)} \arrow[d, "h_n"'] & Y'^{(n)}_{f'} \arrow[l, "w_n"'] \arrow[d, "h'_n"] \\ X \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[l, "v"] \arrow[d, "g'"] \\ Y & Y' \arrow[l, "u"] \end{tikzcd}$$

identifie $Y'^{(n)}_{f'}$ au produit $Y_f^{(n)} \times_X X'$ et X′ au produit $X \times_Y Y'$, donc (**I**, 3.3.9) il identifie (pour les morphismes $g' \circ h'_n$ et w_n) $Y'^{(n)}_{f'}$ au produit $Y_f^{(n)} \times_Y Y'$. Comme $Y_f^{(n)}$ (resp. $Y'^{(n)}_{f'}$) est le préschéma affine au-dessus de Y (resp. Y′) associé à la $\mathcal{O}_Y$-Algèbre $\mathcal{O}_{Y_f^{(n)}}$ (resp. à la $\mathcal{O}_{Y'}$-Algèbre $\mathcal{O}_{Y'^{(n)}_{f'}}$), le fait que l'homomorphisme canonique (16.2.3.1) soit bijectif résulte de (**II**, 1.5.2). Enfin, l'homomorphisme canonique (16.2.3.1) est compatible avec les augmentations $\mathcal{O}_{Y_f^{(n)}} \to \mathcal{O}_Y$ et $\mathcal{O}_{Y'^{(n)}_{f'}} \to \mathcal{O}_{Y'}$; comme $\mathcal{O}_{Y_f^{(n)}}$ est somme directe (en tant que $\mathcal{O}_Y$-Module) de $\mathcal{O}_Y$ et de l'Idéal d'augmentation $\mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+1}$, on voit donc que l'homomorphisme canonique (16.2.3.1), restreint à $(\mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+1}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'}$, est une *bijection* de ce dernier sur $\mathcal{J}'/\mathcal{J}'^{n+1}$. Pour $n = 1$, cela montre que $\mathrm{Gr}_1(u)$ est bijectif.

On notera que, sous les hypothèses de (16.2.3), les homomorphismes $\mathrm{Gr}_n(u)$ sont *surjectifs* en vertu de ce qui précède, mais ne sont pas bijectifs en général pour $n \geqslant 2$. Toutefois :

Corollaire **(16.2.4)**. — *Sous les hypothèses de* (16.2.3), *supposons que* $u : Y' \to Y$ *soit un morphisme plat* (resp. *que les* $\mathcal{G}r_n(f)$ *soient des* $\mathcal{O}_Y$*-Modules plats pour* $n \leqslant m$). *Alors l'homomorphisme*

$$\mathrm{Gr}_n(u) : \mathcal{G}r_n(f) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'} \to \mathcal{G}r_n(f')$$

est bijectif pour tout n (resp. *pour* $n \leqslant m$).

Si u est plat, il en est de même de $v : X' \to X$ qui s'en déduit par changement de base, et on sait déjà dans ce cas que $\mathrm{Gr}(u)$ est bijectif (16.2.2, (iii)). Si les $\mathcal{G}r_n(f)$ sont plats pour $n \leqslant m$, on voit d'abord par récurrence sur n qu'il en est de même des $\mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+1}$ pour $n \leqslant m$, en vertu des suites exactes

$$0 \to \mathcal{J}^n/\mathcal{J}^{n+1} \to \mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+1} \to \mathcal{J}/\mathcal{J}^n \to 0$$

$(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 6.1.2)$; en outre, on a alors des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \rightarrow & (\mathscr{J}^n/\mathscr{J}^{n+1})\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_{Y'} & \rightarrow & (\mathscr{J}/\mathscr{J}^{n+1})\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_{Y'} & \rightarrow & (\mathscr{J}/\mathscr{J}^{n})\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_{Y'} & \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & \mathscr{J}'^n/\mathscr{J}'^{n+1} & \longrightarrow & \mathscr{J}'/\mathscr{J}'^{n+1} & \longrightarrow & \mathscr{J}'/\mathscr{J}'^{n} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

dans lesquels les lignes sont exactes (la première par platitude $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 6.1.2)$) et les deux dernières flèches verticales sont bijectives en vertu de (16.2.3, (ii)); d'où la conclusion.

Remarques **(16.2.5)**. — (i) Le raisonnement de (16.2.2, (i)) s'applique encore lorsque dans (16.2.1.1) il s'agit de morphismes d'*espaces annelés en anneaux locaux* $(\mathbf{Err}_{\mathrm{II}}, (1.8.2))$.

(ii) Dans (16.2.2, (ii)), la conclusion n'est plus nécessairement valable lorsqu'on suppose seulement que v et f sont des morphismes de préschémas (f vérifiant la condition de (16.1.1)). Par exemple (avec les notations de la démonstration de (16.2.2, (ii)), il peut se faire que $\mathfrak{J}=0$ mais que le noyau $\mathfrak{J}'$ de $A'\rightarrow B'=B\otimes_A A'$ ne soit pas nul et que $B'\neq 0$, auquel cas on a $Y^{(n)}=Y$ pour tout n, mais $Y'^{(n)}\neq Y'$. On a un exemple de ce fait en prenant $A=\mathbf{Z}$, $B=\mathbf{Q}$, $A'=\prod_{h=1}^{\infty}(\mathbf{Z}/m^h\mathbf{Z})$ où $m>1$.

(16.2.6) Considérons le cas particulier du diagramme (16.2.1.1) où $X'=X$, v étant l'identité, X est un préschéma, Y un sous-préschéma de X, Y' un sous-préschéma, de Y, f, u et $f'=f\circ u$ les injections canoniques; le di-homomorphisme (16.2.1.3) donne, par tensorisation avec $\mathcal{O}_{Y'}$ au-dessus de $\rho^*(\mathcal{O}_Y)$, un homomorphisme de $\mathcal{O}_{Y'}$-Algèbres graduées

(16.2.6.1) $$u^*(\mathscr{G}r_\bullet(f)) \rightarrow \mathscr{G}r_\bullet(f').$$

D'autre part, on identifie $\mathcal{O}_Y$ à $\psi^*(\mathcal{O}_X)/\mathscr{J}_f$, $\mathcal{O}_{Y'}$ à $\rho^*(\mathcal{O}_Y)/\mathscr{J}_u$; comme ρ^* est un foncteur exact, on a $\rho^*(\mathcal{O}_Y)=\rho^*(\psi^*(\mathcal{O}_X))/\rho^*(\mathscr{J}_f)=\psi'^*(\mathcal{O}_X)/\rho^*(\mathscr{J}_f)$, et comme $\mathcal{O}_{Y'}$ s'identifie par ailleurs à $\psi'^*(\mathcal{O}_X)/\mathscr{J}_{f'}$ on voit que l'on a $\mathscr{J}_u=\mathscr{J}_{f'}/\rho^*(\mathscr{J}_f)$. On en déduit pour tout entier n un homomorphisme canonique $\mathscr{J}_{f'}^n/\mathscr{J}_{f'}^{n+1}\rightarrow\mathscr{J}_u^n/\mathscr{J}_u^{n+1}$, d'où un homomorphisme canonique de $\mathcal{O}_{Y'}$-Algèbres graduées

(16.2.6.2) $$\mathscr{G}r_\bullet(f') \rightarrow \mathscr{G}r_\bullet(u).$$

Proposition **(16.2.7)**. — *Soient* X *un préschéma,* Y *un sous-préschéma de* X, Y' *un sous-préschéma de* Y, $j: Y'\rightarrow Y$ *l'injection canonique. On a alors une suite exacte de faisceaux conormaux* ($\mathcal{O}_{Y'}$*-Modules*)

(16.2.7.1) $$j^*(\mathscr{N}_{Y/X}) \rightarrow \mathscr{N}_{Y'/X} \rightarrow \mathscr{N}_{Y'/Y} \rightarrow 0$$

où les flèches sont les composantes de degré 1 *des homomorphismes canoniques* (16.2.6.1) *et* (16.2.6.2).

La question étant locale, on peut se borner au cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$, $Y=\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J})$, $Y'=\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{K})$, $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{K}$ étant deux idéaux de A tels que $\mathfrak{J}\subset\mathfrak{K}$; tout revient à voir alors phisme $j : U \to X'$ d'un voisinage ouvert U de x dans X'; restreignant au besoin U, on peut, en appliquant (**I**, 6.5.1, (i)), supposer que $h \circ j = f|U$, donc j est de type fini (**I**, 6.3.4, (v)); enfin, l'homomorphisme φ est surjectif par (18.4.6, (i)), donc il résulte de (**I**, 6.5.4, (i)) qu'on peut, en restreignant encore U et X', supposer que j est une immersion fermée. Cela prouve donc la nécessité de la condition énoncée; sa suffisance est immédiate (17.1.3, (i) et (ii)).

Corollaire (**18.4.8**). — *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme localement de présentation finie. Pour que f soit non ramifié* (resp. *étale*), *il faut et il suffit qu'il existe une famille de morphismes plats* $g_\alpha : Y'_\alpha \to Y$ *et, pour chaque* α, *un ouvert* U_α *dans* $X'_\alpha = X \times_Y Y'_\alpha$, *tels que, si* $g'_\alpha : X'_\alpha \to X$ *et* $f'_\alpha : X'_\alpha \to Y'_\alpha$ *sont les projections canoniques, les* $g'_\alpha(U_\alpha)$ *forment un recouvrement de* X, *et que chacun des morphismes composés* $U_\alpha \to X'_\alpha \xrightarrow{f'_\alpha} Y'_\alpha$ *soit une immersion fermée* (resp. *ouverte*). *On peut de plus alors prendre les* g_α *étales.*

La nécessité de la condition pour les morphismes étales est triviale, en prenant un seul Y'_α égal à X, le morphisme g_α correspondant étant égal à f, et l'ouvert $U \subset X \times_Y X$ étant la diagonale. Lorsque f est non ramifié, la nécessité de la condition résulte de (18.4.7); on prend un recouvrement ouvert (V_α) de X tel que pour chaque α, $f|V_\alpha$ se factorise en $V_\alpha \xrightarrow{j_\alpha} Y'_\alpha \xrightarrow{g_\alpha} Y$, où j_α est une immersion fermée et g_α un morphisme étale. Alors $j_\alpha : V_\alpha \to Y'_\alpha$ se factorise en $V_\alpha \xrightarrow{s_\alpha} X'_\alpha \xrightarrow{f'_\alpha} Y'_\alpha$, où s_α est une V_α-section de X'_α, et comme le morphisme $g'_\alpha : X'_\alpha \to X$ est étale, s_α est une immersion ouverte (17.4.1), et il suffit de prendre $U_\alpha = s_\alpha(V_\alpha)$ pour répondre à la question.

La suffisance des conditions résulte de (17.7.1); on en conclut que f est non ramifié (resp. étale) en chaque point de $g'(U_\alpha)$, donc dans X tout entier puisque les $g'(U_\alpha)$ recouvrent X.

Proposition (**18.4.9**). — *Soient* S *un préschéma,* $f : X \to S$ *un morphisme,* $h : Y \to S$ *un morphisme localement de présentation finie,* $g : X \to Y$ *un* S-*morphisme,* x *un point de* X, $y = g(x)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *h est étale au point y et g est plat au point x.*

b) *h est non ramifié au point y et f est plat au point x.*

Comme $f = h \circ g$, *a)* entraîne que f est plat au point x (2.1.6), et évidemment que h est non ramifié au point y, donc *a)* implique *b)*.

Pour prouver que *b)* entraîne *a)*, on peut d'abord supposer que h est non ramifié (en remplaçant Y par un voisinage de y); puis, en remplaçant S par un voisinage ouvert de $s = h(y) = f(x)$, on peut supposer qu'il existe un morphisme étale $u : S' \to S$, un point y' de $Y' = Y_{(S')}$ au-dessus de y et un voisinage ouvert V de y' dans Y' tel que, si $h' = h_{(S')} : Y' \to S'$, la restriction de h' à V soit une immersion fermée (18.4.8). Si l'on prouve alors que h' est étale au point y', il en résultera que h est étale au point y (17.7.1, (ii)); d'ailleurs, $f' = f_{(S')} : X_{(S')} \to S'$ est plat en tout point x' au-dessus de x. Comme les projections $v : Y' \to Y$, $w : X' \to X$ sont des morphismes étales (donc plats), si l'on prouve que $g' = g_{(S')} : X_{(S')} \to Y_{(S')}$ est plat au point x', il résultera de (2.2.11, (iv)) que g sera plat au point x. On peut donc se borner au cas où h est une *immersion fermée* *d'anneaux $\mathcal{O}_X$-augmentés, et par suite aussi de leur limite projective $\mathscr{P}^{\infty}_{X/S}$. Cet automorphisme permute les deux structures de $\mathcal{O}_X$-Algèbre sur les $\mathscr{P}^n_{X/S}$ et sur $\mathscr{P}^{\infty}_{X/S}$.*

(16.3.5) Dans ce qui suit, les deux structures de $\mathcal{O}_X$-Algèbre définies sur les $\mathscr{P}^n_{X/S}$ et sur $\mathscr{P}^{\infty}_{X/S}$ joueront des rôles très différents : *nous conviendrons désormais, sauf mention expresse du contraire, que lorsque $\mathscr{P}^n_{X/S}$ ou $\mathscr{P}^{\infty}_{X/S}$ sera considéré comme une $\mathcal{O}_X$-Algèbre, c'est de la structure d'Algèbre définie par p_1 qu'il s'agira.*

Pour tout ouvert U de X et toute section $t \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, on notera simplement $t.1$ ou même t l'image de t par l'homomorphisme structural $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U, \mathscr{P}^n_{X/S})$ (resp. $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U, \mathscr{P}^{\infty}_{X/S})$) (c'est-à-dire l'homomorphisme correspondant à p_1).

Définition **(16.3.6)**. — *On désigne par d^n_f, ou $d^n_{X/S}$* (resp. d^{∞}_f, *ou* $d^{\infty}_{X/S}$), *ou simplement* d^n (resp. d^{∞}), *l'homomorphisme de faisceaux d'anneaux* $\mathcal{O}_X \to \mathscr{P}^n_f = \mathscr{P}^n_{X/S}$ (resp. $\mathcal{O}_X \to \mathscr{P}^{\infty}_f = \mathscr{P}^{\infty}_{X/S}$) *déduit de p_2. Pour tout ouvert* U *de* X, *et tout* $t \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, $d^n t$ (resp. $d^{\infty} t$) *est appelé* la partie principale d'ordre n (resp. partie principale d'ordre infini) *de t. On pose $dt = d^1 t - t$, et on dit que dt est la différentielle de t (élément de $\Gamma(U, \Omega^1_{X/S})$, aussi noté $d_{X/S}(t)$).*

Il résulte aussitôt de cette définition que l'on a

$$d(t_1 t_2) = t_1 dt_2 + t_2 dt_1 \tag{16.3.6.1}$$

quels que soient t_1, t_2 dans $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, autrement dit, d est une *dérivation* de l'anneau $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ dans le $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-module $\Gamma(U, \Omega^1_{X/S})$.

Dans toutes les notations introduites dans (16.3.1) et (16.3.6), on remplacera parfois S par A lorsque $S = \mathrm{Spec}(A)$.

(16.3.7) Supposons en particulier que $S = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(B)$ soient des schémas affines, B étant donc une A-algèbre. Alors Δ_f correspond à l'homomorphisme canonique surjectif $\pi : B \otimes_A B \to B$ tel que $\pi(b \otimes b') = bb'$, de noyau $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{B/A}$ (**0**, 20.4.1); $\mathscr{P}^n_f$ est le faisceau structural du préschéma $\mathrm{Spec}(P^n_{B/A})$, où

$$P^n_{B/A} = (B \otimes_A B)/\mathfrak{J}^{n+1};$$

$\mathscr{G}r_{\bullet}(\mathscr{P}_f)$ est le $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent correspondant au B-module gradué

$$\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{J}}(B \otimes_A B) = \bigoplus_{n \geqslant 0} (\mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1});$$

en particulier $\Omega^1_f = \Omega^1_{X/S}$ est le $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent correspondant au B-module des 1-différentielles de B par rapport à A, $\Omega^1_{B/A}$ (**0**, 20.4.3). Les morphismes projections $p_1 : X \times_S X \to X$, $p_2 : X \times_S X \to X$ correspondent aux deux homomorphismes d'anneaux $j_1 : B \to B \otimes_A B, j_2 : B \to B \otimes_A B$ tels que $j_1(b) = b \otimes 1, j_2(b) = 1 \otimes b$, de sorte que (par la convention de (16.3.5)), $P^n_{B/A}$ est toujours considérée comme une B-algèbre pour l'homomorphisme composé $B \xrightarrow{j_1} B \otimes_A B \to P^n_{B/A}$; l'homomorphisme d'anneaux $B \xrightarrow{j_2} B \otimes_A B \to P^n_{B/A}$ se note $d^n_{B/A}$ et correspond à $d^n_{X/S}$ opérant sur $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$; pour tout $t \in B$, dt est égal à $d_{B/A} t$, défini dans (**0**, 20.4.6) (cf. $\mathbf{Err}_{\mathbf{IV}}$, **11**).

Si $\pi_n : B \otimes_A B \to P^n_{B/A}$ est l'homomorphisme canonique, on a donc, en vertu des définitions précédentes

$$\pi_n(b \otimes b') = b . \pi_n(1 \otimes b') = b . d^n_{B/A}(b') \quad \text{pour } b \in B,\ b' \in B. \tag{16.3.7.1}$$

Proposition **(16.3.8)**. — *L'image de l'homomorphisme* $d^n_{X/S} : \mathcal{O}_X \to \mathcal{P}^n_{X/S}$ *engendre le* $\mathcal{O}_X$*-Module* $\mathcal{P}^n_{X/S}$.

On se ramène aussitôt au cas où $X = \mathrm{Spec}(B)$ et $S = \mathrm{Spec}(A)$ sont affines et la proposition résulte de (16.3.7.1) puisque π_n est surjectif. On notera qu'en général $d^n_{X/S}$ *n'est pas surjectif* (même déjà pour $n=1$).

Proposition **(16.3 9)**. — *Supposons que* $f : X \to S$ *soit un morphisme localement de type fini. Alors les* $\mathcal{P}^n_f$ *et les* $\mathcal{G}r_n(\mathcal{P}_f)$ *sont des* $\mathcal{O}_X$*-Modules quasi-cohérents de type fini.*

Cela résulte de (16.1.6) et du fait que Δ_f est localement de présentation finie (1.4.3.1).

16.4. Propriétés fonctorielles des invariants différentiels.

(16.4.1) Considérons un diagramme commutatif de morphismes de préschémas

(16.4.1.1)
$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{u} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ S & \xleftarrow[w]{} & S' \end{array}$$

On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{u} & X' \\ {\scriptstyle \Delta_f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_{f'}} \\ X\times_S X & \xleftarrow[v]{} & X'\times_{S'} X' \end{array}$$

où v est l'homomorphisme composé (**I**, 5.3.5 et 5.3.15)

(16.4.1.2)
$$X'\times_{S'}X' \xrightarrow{(p'_1,\, p'_2)_S} X'\times_S X' \xrightarrow{u\times_S u} X\times_S X$$

On déduit donc de u et v, comme il a été expliqué dans (16.2.1), des homomorphismes de faisceaux d'anneaux augmentés

(16.4.1.3)
$$\nu_n : \rho^*(\mathcal{P}^n_{X/S}) \to \mathcal{P}^n_{X'/S'}$$

(où l'on a posé $u = (\rho, \lambda)$) ; ces homomorphismes forment un système projectif, et donnent donc à la limite un homomorphisme de faisceaux d'anneaux augmentés

(16.4.1.4)
$$\nu_\infty : \rho^*(\mathcal{P}^\infty_{X/S}) \to \mathcal{P}^\infty_{X'/S'} ;$$

d'autre part, par passage aux quotients, les homomorphismes ν_n donnent un di-homomorphisme d'Algèbres graduées (relatif à $\lambda^\sharp$) :

(16.4.1.5)
$$\mathrm{gr}(u) : \rho^*(\mathcal{G}r_\bullet(\mathcal{P}_{X/S})) \to \mathcal{G}r_\bullet(\mathcal{P}_{X'/S'}).$$

(16.4.2) Si l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{u} & X' & \xleftarrow{u'} & X'' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f''} \\ S & \xleftarrow[w]{} & S' & \xleftarrow[w']{} & S'' \end{array}$$

on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\quad u \quad} & X' & \xleftarrow{\quad u' \quad} & X'' \\ {\scriptstyle \Delta_f}\downarrow & & {\scriptstyle \Delta_{f'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_{f''}} \\ X\times_S X & \xleftarrow[v]{} & X'\times_{S'} X' & \xleftarrow[v']{} & X''\times_{S''} X'' \end{array}$$

où v' est défini à partir de u', w', f', f'' comme v à partir de u, w, f, f'. On vérifie aussitôt que si $u''=u\circ u'$, $w''=w\circ w'$, alors le morphisme composé $v\circ v'$ est égal au morphisme v'' défini à partir de u'', w'', f, f'' comme v à partir de u, w, f, f'. Si l'on pose $u'=(\rho', \lambda')$, $u''=(\rho'', \lambda'')$ il résulte alors de (16.2.1) que l'homomorphisme $\nu''_n : \rho''^*(\mathscr{P}^n_{X/S}) \to \mathscr{P}^n_{X''/S''}$ est égal au composé

$$\rho'^*(\rho^*(\mathscr{P}^n_{X/S})) \xrightarrow{\rho'^*(\nu^\sharp_n)} \rho'^*(\mathscr{P}^n_{X'/S'}) \xrightarrow{\nu'_n} \mathscr{P}^n_{X''/S''}$$

et l'on a des propriétés de transitivité analogues pour les homomorphismes (16.4.1.4) et (16.4.1.5), ce qui permet de dire que les $\mathscr{P}^n_{X/S}$, $\mathscr{P}^\infty_{X/S}$ et $\mathscr{G}r_\bullet(\mathscr{P}_{X/S})$ *dépendent fonctoriellement de* f.

(16.4.3) On vérifie aussitôt (par exemple en se ramenant au cas affine à l'aide de (16.3.7)) qu'avec les notations de (16.4.1), le diagramme

(16.4.3.1)
$$\begin{array}{ccc} \rho^*(\mathscr{O}_X) & \xrightarrow{\lambda^\sharp} & \mathscr{O}_{X'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \rho^*(\mathscr{P}^n_{X/S}) & \xrightarrow[\nu_n]{} & \mathscr{P}^n_{X'/S'} \end{array}$$

où les flèches verticales sont celles définissant les structures d'Algèbre choisies dans (16.3.5) (c'est-à-dire celles provenant des premières projections) est commutatif; il en est de même du diagramme

(16.4.3.2)
$$\begin{array}{ccc} \rho^*(\mathscr{O}_X) & \xrightarrow{\lambda^\sharp} & \mathscr{O}_{X'} \\ {\scriptstyle \rho^*(d^n_{X/S})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d^n_{X'/S'}} \\ \rho^*(\mathscr{P}^n_{X/S}) & \xrightarrow[\nu_n]{} & \mathscr{P}^n_{X'/S'} \end{array}$$

les flèches verticales définissant ici les structures d'Algèbre provenant des secondes projections; d'ailleurs, si σ et σ' sont les symétries canoniques correspondant à f et f' (16.3.4), on a

$$\nu_n \circ \rho^*(\sigma) = \sigma' \circ \nu_n$$

qui fait passer d'un des diagrammes précédents à l'autre. On déduit donc de (16.4.3.1) un homomorphisme canonique de $\mathcal{O}_{X'}$-*Algèbres augmentées*

(16.4.3.3) $$\mathrm{P}^n(u) : u^*(\mathscr{P}^n_{X/S}) = \mathscr{P}^n_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'} \to \mathscr{P}^n_{X'/S'}$$

et il résulte de (16.4.3.2) que le diagramme

(16.4.3.4) $$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X'} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "u^*(d^n_{X/S})"'] & \mathcal{O}_{X'} \arrow[d, "d^n_{X'/S'}"] \\ u^*(\mathscr{P}^n_{X/S}) \arrow[r, "\mathrm{P}^n(u)"'] & \mathscr{P}^n_{X'/S'} \end{tikzcd}$$

est commutatif. On en déduit un homomorphisme de $\mathcal{O}_{X'}$-*Algèbres graduées*

(16.4.3.5) $$\mathrm{Gr}_\bullet(u) : u^*(\mathscr{G}r_\bullet(\mathscr{P}_{X/S})) \to \mathscr{G}r_\bullet(\mathscr{P}_{X'/S'})$$

et en particulier un homomorphisme de $\mathcal{O}_{X'}$-Modules

(16.4.3.6) $$\mathrm{Gr}_1(u) : \Omega^1_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'} \to \Omega^1_{X'/S'}$$

donnant lieu à un diagramme commutatif

(16.4.3.7) $$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X'} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "d_{X/S} \otimes 1"'] & \mathcal{O}_{X'} \arrow[d, "d_{X'/S'}"] \\ \Omega^1_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'} \arrow[r] & \Omega^1_{X'/S'} \end{tikzcd}$$

(16.4.4) Lorsque $S = \mathrm{Spec}(A)$, $S' = \mathrm{Spec}(A')$, $X = \mathrm{Spec}(B)$, $X' = \mathrm{Spec}(B')$ sont affines, de sorte que l'on a un diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] & B' \\ A \arrow[r] \arrow[u] & A' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

l'image de $\mathfrak{J}_{B/A}$ dans $B' \otimes_{A'} B'$ est contenue dans $\mathfrak{J}_{B'/A'}$, et l'homomorphisme ν_n correspond à l'homomorphisme d'anneaux $\mathrm{P}^n_{B/A} \to \mathrm{P}^n_{B'/A'}$ déduit de l'homomorphisme $B \otimes_A B \to B' \otimes_{A'} B'$ par passage aux quotients. L'homomorphisme (16.4.3.6) correspond à l'homomorphisme défini dans (**0**, 20.5.4.1), et le diagramme commutatif (16.4.3.7) au diagramme (**0**, 20.5.4.2).

Proposition **(16.4.5).** — *Supposons que* $X' = X \times_S S'$, *f' et u étant les projections canoniques. Alors les homomorphismes canoniques* $P^n(u)$ (16.4.3.3) *et* $Gr_1(u)$ (16.4.3.6) *sont bijectifs.*

On a en effet alors $X' \times_{S'} X' = (X \times_S X) \times_S S'$, et on peut donc appliquer (16.2.3, (ii)) en remplaçant g par la première projection $p_1 : X \times_S X \rightarrow X$ et f par la diagonale Δ_f.

On notera aussi que sous les hypothèses de (16.4.5) l'homomorphisme $Gr_\bullet(u)$ (16.4.3.5) est *surjectif*, mais non bijectif en général. Toutefois (16.2.4) :

Corollaire **(16.4.6).** — *Les hypothèses étant celles de* (16.4.5), *supposons de plus que* $w : S' \rightarrow S$ *soit plat* (resp. *que les* $\mathscr{G}r_n(\mathscr{P}_{X/S})$ *soient des* $\mathcal{O}_X$*-Modules plats pour* $n \leqslant m$); *alors l'homomorphisme*

$$Gr_n(u) : u^*(\mathscr{G}r_n(\mathscr{P}_{X/S})) \rightarrow \mathscr{G}r_n(\mathscr{P}_{X'/S'})$$

est bijectif pour tout n (resp. *pour* $n \leqslant m$).

En effet, si w est plat, il en est de même de $v : X' \times_{S'} X' \rightarrow X \times_S X$, donc la conclusion résulte de (16.2.4).

(16.4.7) Soient S un préschéma, $\mathscr{E}$ un $\mathcal{O}_S$-Module quasi-cohérent, et posons $X = \mathbf{V}(\mathscr{E})$ (**II**, 1.7.8), fibré vectoriel associé à $\mathscr{E}$, égal à $\mathrm{Spec}(\mathbf{S}_{\mathcal{O}_S}(\mathscr{E}))$. Soit $f : X \rightarrow S$ le morphisme structural. Pour tout ouvert U de S, et toute section $t \in \Gamma(U, \mathscr{E})$, t s'identifie à une section de $\mathbf{S}_{\mathcal{O}_S}(\mathscr{E})$ au-dessus de U; soit t' son image dans $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X) = \Gamma(U, f_*(\mathcal{O}_X)) = \Gamma(U, \mathbf{S}_{\mathcal{O}_S}(\mathscr{E}))$, et posons

$$\delta(t) = d^n_{X/S}(t') - t' \in \Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{P}^n_{X/S}) ; \tag{16.4.7.1}$$

il est clair que δ est un di-homomorphisme de modules (correspondant à l'homomorphisme d'anneaux $\Gamma(U, \mathcal{O}_S) \rightarrow \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$) de $\Gamma(U, \mathscr{E})$ dans $\Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{P}^n_{X/S})$, dont l'image appartient d'ailleurs à l'idéal d'augmentation de $\Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{P}^n_{X/S})$. On en déduit (en faisant varier U) un homomorphisme canonique de $\mathcal{O}_X$-Algèbres

$$f^*(\mathbf{S}_{\mathcal{O}_S}(\mathscr{E})) \rightarrow \mathscr{P}^n_{X/S} \tag{16.4.7.2}$$

et d'après la remarque précédente, si $\mathscr{K}$ est l'Idéal noyau de l'augmentation $\mathbf{S}_{\mathcal{O}_S}(\mathscr{E}) \rightarrow \mathcal{O}_S$, l'image de $\mathscr{K}^{n+1}$ par (16.4.7.2) est nulle, si bien qu'en factorisant par $\mathscr{K}^{n+1}$, on a finalement un homomorphisme canonique

$$\delta_n : f^*(\mathbf{S}_{\mathcal{O}_S}(\mathscr{E}) / \mathscr{K}^{n+1}) \rightarrow \mathscr{P}^n_{X/S}. \tag{16.4.7.3}$$

Proposition **(16.4.8).** — *Sous les conditions de* (16.4.7), *les homomorphismes* δ_n *sont bijectifs et forment un système projectif d'isomorphismes ; on en déduit un isomorphisme de* $\mathcal{O}_X$*-Algèbres graduées*

$$f^*(\mathbf{S}^\bullet_{\mathcal{O}_S}(\mathscr{E})) \rightarrow \mathscr{G}r_\bullet(\mathscr{P}_{X/S}). \tag{16.4.8.1}$$

Le fait que les homomorphismes (16.4.7.3) forment un système projectif résulte aussitôt de leur définition. Pour prouver que ce sont des isomorphismes, il suffira de démontrer que (16.4.8.1) est un isomorphisme, les filtrations des deux membres de (16.4.7.3) étant finies (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, nº 8, cor. 3 du th. 1). Pour cela, considérons la suite exacte scindée de $\mathcal{O}_S$-Modules

(16.4.8.2) $$0 \to \mathscr{E} \xrightarrow{u} \mathscr{E} \oplus \mathscr{E} \xrightarrow{v} \mathscr{E} \to 0$$

où, pour tout couple de sections s, t de $\mathscr{E}$ au-dessus d'un ouvert U de S, on prend $u(s) = (-s, s)$ et $v(s, t) = s + t$. On a

$$X \times_S X = \mathrm{Spec}(\mathbf{S}_{\mathcal{O}_S}(\mathscr{E}) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbf{S}_{\mathcal{O}_S}(\mathscr{E})) = \mathrm{Spec}(\mathbf{S}_{\mathcal{O}_S}(\mathscr{E} \oplus \mathscr{E}))$$

(**II**, 1.4.6 et 1.7.11), et le morphisme diagonal $X \to X \times_S X$ correspond (**II**, 1.2.7) à l'homomorphisme de $\mathcal{O}_S$-Algèbres $\mathbf{S}(v) : \mathbf{S}_{\mathcal{O}_S}(\mathscr{E} \oplus \mathscr{E}) \to \mathbf{S}_{\mathcal{O}_S}(\mathscr{E})$ (**II**, 1.7.4), de sorte que si $\mathscr{J}$ est le noyau de cet homomorphisme, on a

$$\mathscr{P}^n_{X/S} = f^*(\mathbf{S}_{\mathcal{O}_S}(\mathscr{E} \oplus \mathscr{E}) / \mathscr{J}^{n+1}).$$

La proposition sera conséquence du lemme suivant :

Lemme **(16.4.8.3)**. — *Soient* Y *un espace annelé*, $0 \to \mathscr{F}' \xrightarrow{u} \mathscr{F} \xrightarrow{v} \mathscr{F}'' \to 0$ *une suite exacte de* $\mathcal{O}_Y$*-Modules telle que tout point* $y \in Y$ *possède un voisinage ouvert* V *tel que la suite* $0 \to \mathscr{F}'|V \to \mathscr{F}|V \to \mathscr{F}''|V \to 0$ *soit scindée. Soit* $\mathscr{I}$ *l'Idéal noyau de* $\mathbf{S}(v)$:

$$\mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}) \to \mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}''),$$

et soit $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{I}}(\mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}))$ *la* $\mathcal{O}_Y$*-Algèbre graduée associée à la* $\mathcal{O}_Y$*-Algèbre* $\mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F})$ munie de la filtration $\mathscr{I}$-préadique. *Alors l'homomorphisme de* $\mathcal{O}_Y$*-Algèbres graduées*

(16.4.8.4) $$\mathbf{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}') \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathbf{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}'') \to \mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{I}}(\mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}))$$

(où le premier membre est le produit tensoriel gradué des $\mathcal{O}_Y$*-Algèbres symétriques munies de leur graduation canonique* (**II**, 1.7.4 et 2.1.2)), *provenant de l'injection canonique*

$$\mathscr{F}' \to \mathscr{I} = \mathrm{gr}^1_{\mathscr{I}}(\mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F})),$$

est bijectif.

L'injection $\mathscr{F}' \to \mathscr{I}$ donne en effet canoniquement un homomorphisme de $\mathcal{O}_Y$-Algèbres graduées $\mathbf{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}') \to \mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{I}}(\mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}))$, et comme le second membre est par définition une $\mathbf{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}'')$-Algèbre graduée, on en déduit l'homomorphisme canonique (16.4.8.4) par tensorisation du précédent avec $\mathbf{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}'')$. Pour prouver le lemme, on peut, la question étant locale, se borner au cas où $\mathscr{F} = \mathscr{F}' \oplus \mathscr{F}''$, u et v étant les homomorphismes canoniques. Alors l'Algèbre graduée $\mathbf{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F})$ s'identifie canoniquement au produit tensoriel gradué $\mathbf{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}') \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathbf{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}'')$ (**II**, 1.7.4), et il est immédiat que $\mathscr{I}$ est alors l'Idéal $\mathscr{J}' \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathbf{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}'')$, où $\mathscr{J}'$ est l'Idéal d'augmentation de $\mathbf{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}')$, c'est-à-dire la somme (directe) des $\mathbf{S}^m_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}')$ pour $m \geqslant 1$. On en conclut que $\mathscr{I}^n = \mathscr{J}'^n \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathbf{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}'')$, où cette fois $\mathscr{J}'^n$ est la somme (directe) des $\mathbf{S}^m_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}')$ pour $m \geqslant n$; on a par suite $\mathscr{I}^n / \mathscr{I}^{n+1} = \mathbf{S}^n_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}') \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathbf{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}'')$, ce qui prouve que (16.4.8.4) est bijectif.

Ce lemme étant démontré, il reste à voir que l'homomorphisme (16.4.8.1) est bien l'image par f^* de l'homomorphisme (16.4.8.4) correspondant à la suite exacte (16.4.8.2); on constate aisément que cela résulte de la définition de u (16.4.8.2) et de celle de δ (16.4.7.1), compte tenu de la définition de la structure de $\mathcal{O}_X$-Algèbre sur $\mathcal{P}^n_{X/S}$ et de celle de $d^n_{X/S}$ (16.3.5 et 16.3.6).

En particulier :

Corollaire **(16.4.9).** — *Sous les conditions de* (16.4.7), *on a un isomorphisme canonique*

(16.4.9.1) $$\mathrm{gr}_1(\delta) : f^*(\mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{X/S}.$$

Corollaire **(16.4.10).** — *Si* $S = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathscr{E} = \mathcal{O}^m_S$, *de sorte que*

$$X = \mathrm{Spec}(A[T_1, \ldots, T_m]),$$

$\mathcal{P}^n_{X/S}$ *s'identifie canoniquement à la* $\mathcal{O}_X$*-Algèbre correspondant à la* $A[T_1, \ldots, T_m]$*-algèbre quotient* $A[T_1, \ldots, T_m, U_1, \ldots, U_m]/\mathfrak{K}^{n+1}$, *où les* U_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ *sont m nouvelles indéterminées et* $\mathfrak{K}$ *est l'idéal engendré par* $U_1, \ldots, U_m$.

On retrouve ainsi en particulier la structure de $\Omega^1_{X/S}$ dans ce cas (**0**, 20.5.13).

Notons en outre que $d^n_{X/S}$ fait alors correspondre à un polynôme $F(T_1, \ldots, T_m)$, la classe mod. $\mathfrak{K}^{n+1}$ de $F(T_1+U_1, \ldots, T_m+U_m)$, comme il résulte de la définition (16.4.7.1).

Proposition **(16.4.11).** — *Soient* $f : X \to S$ *un morphisme,* $g : S \to X$ *une* S*-section de* X, $S^{(n)}$ *le n-ème voisinage infinitésimal de* S *pour l'immersion* g (16.1.2). *Il existe alors un isomorphisme et un seul de* $\mathcal{O}_S$*-Algèbres*

(16.4.11.1) $$\varpi_n : g^*(\mathcal{P}^n_{X/S}) \to \mathcal{O}_{S^{(n)}_g}$$

(*pour la structure de* $\mathcal{O}_S$*-Algèbre sur* $\mathcal{O}_{S^{(n)}_g}$ *définie par* f (16.1.7)), *rendant commutatif le diagramme*

(16.4.11.2) $$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_S = g^*(\mathcal{O}_X) \arrow[r, "\lambda_n"] \arrow[dr, "g^*(d^n_{X/S})"'] & \mathcal{O}_{S^{(n)}_g} \\ & g^*(\mathcal{P}^n_{X/S}) \arrow[u, "\varpi_n"'] \end{tikzcd}$$

(*où* λ_n *est l'homomorphisme structural*).

En vertu de (**I**, 5.3.7), où l'on remplace X, Y, S par S, X, S respectivement et f par g, les diagrammes

(16.4.11.3) $$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "\Delta_f"] \\ X \arrow[r, "(g\circ f, 1_X)_S"'] & X \times_S X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "\Delta_f"] \\ X \arrow[r, "(1_X, g\circ f)_S"'] & X \times_S X \end{tikzcd}$$

k-algèbre, il contient un sous-corps K'_j isomorphe canoniquement au corps résiduel de A_j (**0**, 19.6.2). On prend alors $X_i = X$, X'_i somme des $\mathrm{Spec}(K'_j)$ et il est clair que l'on répond ainsi à la question puisque pour tout j on a deux homomorphismes $K'_j \to A_j \to \boldsymbol{k}(A_j)$ dont le composé est un isomorphisme.

§ 18. COMPLÉMENTS SUR LES MORPHISMES ÉTALES ANNEAUX LOCAUX HENSÉLIENS ET ANNEAUX STRICTEMENT LOCAUX

Dans le présent paragraphe, nous étudions diverses propriétés spéciales aux morphismes étales. De plus, la notion de morphisme étale permet de développer de façon fort naturelle la théorie de Nagata des anneaux henséliens, ainsi que celle des anneaux strictement locaux. Ces anneaux jouent un rôle important dans de nombreux développements récents, en s'introduisant chaque fois que l'on a besoin d'un procédé de « localisation » plus fin que celui fourni par la topologie de Zariski (cf. par exemple [43], en attendant la parution du chapitre de notre Traité consacré à l'étude de la « topologie étale »).

18.1. Une équivalence remarquable de catégories.

Proposition (**18.1.1**). — *Soient* S *un préschéma*, S_0 *un sous-préschéma fermé de* S, X_0 *un* S_0*-préschéma lisse* (resp. *étale*) *sur* S_0, x_0 *un point de* X_0. *Il existe alors un voisinage ouvert* U_0 *de* x_0 *dans* X_0, *un* S*-préschéma* U *lisse* (resp. *étale*) *sur* S *et un* S_0*-isomorphisme* $U \times_S S_0 \simeq U_0$.

Notons que si X_0 est étale sur S_0 au point x_0, il est *a fortiori* non ramifié sur S_0 en ce point; si l'on a construit un S-préschéma U lisse sur S tel que $U \times_S S_0$ soit isomorphe à U_0, comme les fibres des morphismes $U_0 \to S_0$ et $U \to S$ contenant x_0 sont alors isomorphes, il en résultera que U est non ramifié sur S au point x_0 (17.4.1, *d)*), donc aussi dans un voisinage de x_0; en remplaçant U par ce voisinage, on en conclut que U sera étale sur S. Il suffit donc de prouver la proposition lorsqu'on suppose seulement X_0 lisse sur S_0.

La question étant locale sur S et sur X_0, on peut supposer que $S = \mathrm{Spec}(A)$ et $X_0 = \mathrm{Spec}(C_0)$ sont affines, de sorte que $S_0 = \mathrm{Spec}(A_0)$, où A_0 est un anneau quotient de A, $C_0 = B_0/\mathfrak{J}_0$, où $B_0 = A_0[T_1, \ldots, T_n]$ et $\mathfrak{J}_0$ est un idéal de type fini de B_0; enfin, C_0 est une A_0-algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes. Soit $\mathfrak{p}_0$ l'idéal $\mathfrak{j}_{x_0}$ dans C_0; on a $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{q}_0/\mathfrak{J}_0$, où $\mathfrak{q}_0$ est un idéal premier de B_0. Le critère jacobien (**0**, 22.6.4) joint à (**0**, 19.1.12) montre qu'il existe dans $\mathfrak{J}_0$ une famille de r polynômes u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ et r indices j_h $(1 \leqslant h \leqslant r)$ tels que les images des u_i dans $(\mathfrak{J}_0)_{\mathfrak{q}_0}/(\mathfrak{J}_0^2)_{\mathfrak{q}_0}$ engendrent ce $(B_0)_{\mathfrak{q}_0}$-module et que l'on ait

(**18.1.1.1**) $$\det(\partial u_i/\partial T_{j_h}) \notin \mathfrak{q}_0.$$

Comme $(B_0)_{\mathfrak{q}_0}$ est un anneau local, il résulte du lemme de Nakayama que l'on peut supposer que les images des u_i dans $(\mathfrak{J}_0)_{\mathfrak{q}_0}$ engendrent ce $(B_0)_{\mathfrak{q}_0}$-module, puis, en remplaçant au besoin X_0 par un voisinage ouvert affine de x_0, que les u_i engendrent $\mathfrak{J}_0$ ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.2.2). Posons alors $B = A[T_1, \ldots, T_n]$; B_0 est donc un anneau quotient *déduits des homomorphismes canoniques* $\mathrm{P}^n_{\mathrm{B/A}} \to \mathrm{P}^n_{\mathrm{S^{-1}B/A}}$ (16.4.4), *forment un système projectif et sont bijectifs.*

Il suffit de remarquer que $\mathrm{S}^{-1}((\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{B})/\mathfrak{J}^{n+1}) = \mathrm{S}^{-1}(\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{B})/(\mathrm{S}^{-1}\mathfrak{J})^{n+1}$ par platitude, et que $\mathrm{S}^{-1}(\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{B}) = (\mathrm{S}^{-1}\mathrm{B})\otimes_{\mathrm{A}}(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{B})$ (**I**, 1.3.4).

Corollaire (**16.4.15**). — *Les notations étant celles de* (16.4.14), *soit* R *une partie multiplicative de* A *telle que* $\rho(\mathrm{R})\subset\mathrm{S}$. *Alors on a des isomorphismes canoniques*

(16.4.15.1) $$\mathrm{S}^{-1}\mathrm{P}^n_{\mathrm{B/A}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{P}^n_{\mathrm{S^{-1}B/R^{-1}A}}$$

formant un système projectif.

Il suffit évidemment de définir des isomorphismes canoniques

(16.4.15.2) $$\mathrm{P}^n_{\mathrm{S^{-1}B/A}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{P}^n_{\mathrm{S^{-1}B/R^{-1}A}}$$

c'est-à-dire que l'on est ramené au cas où $\rho(\mathrm{R})$ est formé d'éléments *inversibles* de B. Mais alors l'isomorphisme (16.4.15.2) est simplement déduit de l'isomorphisme canonique $\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{B} \to \mathrm{B}\otimes_{\mathrm{R^{-1}A}}\mathrm{B}$ par passage aux quotients ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 1.5.3).

Corollaire (**16.4.16**). — *Soient* $f:\mathrm{X}\to\mathrm{S}$ *un morphisme de préschémas,* x *un point de* X, $s=f(x)$. *Alors on a des isomorphismes canoniques*

(16.4.16.1) $$(\mathscr{P}^n_{\mathrm{X/S}})_x \xrightarrow{\sim} \mathrm{P}^n_{\mathcal{O}_x/\mathcal{O}_s}.$$

formant un système projectif.

On déduit de là des isomorphismes pour les gradués associés, et en particulier un isomorphisme canonique

(16.4.16.2) $$(\Omega^1_{\mathrm{X/S}})_x \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{\mathcal{O}_x/\mathcal{O}_s}.$$

Corollaire (**16.4.17**). — *Soient* k *un corps,* K *le corps des fractions rationnelles* $k(\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_r)$. *Alors, pour tout entier* n, *l'homomorphisme de* $\mathrm{K}[\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_r]$ (U_i *indéterminées*) *dans* $\mathrm{P}^n_{\mathrm{K}/k}$ *qui, à tout* U_i, *fait correspondre* $d^n\mathrm{T}_i - \mathrm{T}_i.1$, *est surjectif et définit un isomorphisme du quotient* $\mathrm{K}[\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_r]/\mathfrak{m}^{n+1}$ (*où* $\mathfrak{m}$ *est l'idéal engendré par les* U_i) *sur* $\mathrm{P}^n_{\mathrm{K}/k}$.

Cela résulte de (16.4.8), (16.4.10) et (16.4.14), où l'on fait $\mathrm{A}=k$, $\mathrm{B}=k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_r]$ et $\mathrm{S}=\mathrm{B}-\{0\}$.

On retrouve ainsi le fait que les $d\mathrm{T}_i$ forment une base du K-espace vectoriel $\Omega^1_{\mathrm{K}/k}$ (**0**, 20.5.10).

Proposition (**16.4.18**). — *Soient* $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$, $g:\mathrm{Y}\to\mathrm{Z}$ *deux morphismes de préschémas, et considérons les homomorphismes canoniques de* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Algèbres augmentées* (16.4.3.3)

(16.4.18.1) $$g_{\mathrm{X/Y/Z}}:\mathscr{P}^n_{\mathrm{X/Z}} \to \mathscr{P}^n_{\mathrm{X/Y}}$$

(16.4.18.2) $$f_{\mathrm{X/Y/Z}}:f^*(\mathscr{P}^n_{\mathrm{Y/Z}}) \to \mathscr{P}^n_{\mathrm{X/Z}}.$$

Alors $g_{\mathrm{X/Y/Z}}$ *est surjectif, et son noyau est l'Idéal engendré par l'image par* $f_{\mathrm{X/Y/Z}}$ *de l'Idéal d'augmentation de* $f^*(\mathscr{P}^n_{\mathrm{Y/Z}})$.

Notons d'abord que $g_{X/Y/Z}$ correspond au cas où dans (16.4.3.3) on fait $X'=X$, $S'=Y$, $S=Z$ et $u=1_X$, et $f_{X/Y/Z}$ au cas où l'on remplace X', X, S, S' par X, Y, Z, Z respectivement et u, f par f, g respectivement.

On a un diagramme commutatif (**I**, 5.3.5)

(16.4.18.3)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta_f"] \arrow[dr, "f"'] & X\times_Y X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"] & X\times_Z X \arrow[d, "f\times_Z f"] \\ & Y \arrow[r, "\Delta_g"'] & Y\times_Z Y \end{tikzcd}$$

où $j=(1_X, 1_X)_Z$ est une immersion, $j\circ\Delta_f=\Delta_{g\circ f}$ et p est le morphisme structural. Comme on peut se borner au cas où X, Y, Z sont affines, on peut supposer les immersions Δ_f, Δ_g et j fermées, de sorte que $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_{X\times_Y X}$ s'identifient respectivement à $\mathcal{O}_{X\times_Z X}/\mathcal{I}$ et $\mathcal{O}_{X\times_Z X}/\mathcal{L}$, où $\mathcal{I}\supset\mathcal{L}$ sont les deux Idéaux quasi-cohérents correspondant respectivement aux immersions $\Delta_{g\circ f}$ et j. La $\mathcal{O}_X$-Algèbre $\mathcal{P}^n_{X/Z}$ s'identifie donc à $\mathcal{O}_{X\times_Z X}/\mathcal{I}^{n+1}$, et $\mathcal{P}^n_{X/Y}$ s'identifie à $\mathcal{O}_{X\times_Y X}/(\mathcal{I}/\mathcal{L})^{n+1}$, c'est-à-dire à $\mathcal{O}_{X\times_Z X}/(\mathcal{I}^{n+1}+\mathcal{L})$, et par suite au quotient de $\mathcal{P}^n_{X/Z}$ par $(\mathcal{I}^{n+1}+\mathcal{L})/\mathcal{I}^{n+1}$. Mais on sait *(loc. cit.)* que p et j font de $X\times_Y X$ le produit des $(Y\times_Z Y)$-préschémas Y et $X\times_Z X$, donc si $\mathcal{O}_Y$ est identifié à $\mathcal{O}_{Y\times_Z Y}/\mathcal{K}$, où $\mathcal{K}$ est l'Idéal correspondant à Δ_g, $\mathcal{L}$ est égal à $(f\times_Z f)^*(\mathcal{K}).\mathcal{O}_{X\times_Z X}$ (**I**, 4.4.5). Comme $(\mathcal{I}^{n+1}+\mathcal{L})/\mathcal{I}^{n+1}$ est l'Idéal de $\mathcal{P}^n_{X/Z}$ engendré par l'image de $\mathcal{L}$, on en déduit la proposition.

Corollaire **(16.4.19)**. — *Avec les notations de* (16.4.18), *on a une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents*

(16.4.19.1)
$$f^*(\Omega^1_{Y/Z}) \xrightarrow{f_{X/Y/Z}} \Omega^1_{X/Z} \xrightarrow{g_{X/Y/Z}} \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0.$$

Lorsque X, Y, Z sont affines, on retrouve ainsi la suite exacte (**0**, 20.5.7.1).

Proposition **(16.4.20)**. — *Soient $f: Y\to Z$ un morphisme, $j: X\to Y$ une immersion fermée, $\mathcal{K}$ l'Idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_Y$ correspondant à j. Alors on a $\mathcal{P}^n_{X/Y}=\mathcal{O}_X=\mathcal{O}_Y/\mathcal{K}$, l'homomorphisme canonique $j_{X/Y/Z}: j^*(\mathcal{P}^n_{Y/Z})\to\mathcal{P}^n_{X/Z}$ est surjectif, et son noyau est l'Idéal de $j^*(\mathcal{P}^n_{Y/Z})$ engendré par $j^*(\mathcal{O}_Y.d^n_{Y/Z}(\mathcal{K}))$ (il faut noter que $d^n_{Y/Z}(\mathcal{K})$ est un sous-faisceau de groupes commutatifs de $\mathcal{P}^n_{Y/Z}$, mais non un $\mathcal{O}_Y$-Module en général).*

On sait (**I**, 5.3.8) que la diagonale $\Delta_j: X\to X\times_Y X$ est un isomorphisme, d'où la première assertion. Si ϖ_1 et ϖ_2 sont les deux homomorphismes d'Algèbres $\mathcal{O}_Y\to\mathcal{P}^n_{Y/Z}$ correspondant respectivement aux deux projections canoniques p_1, p_2 de $Y\times_Z Y$ sur Y, rappelons que par définition (16.3.5 et 16.3.6) ϖ_1 est l'homomorphisme structural de la $\mathcal{O}_Y$-Algèbre $\mathcal{P}^n_{Y/Z}$ et $\varpi_2=d^n_{Y/Z}$. La $\mathcal{O}_X$-Algèbre $j^*(\mathcal{P}^n_{Y/Z})$ s'identifie donc à $\mathcal{P}^n_{Y/Z}/\varpi_1(\mathcal{K})\mathcal{P}^n_{Y/Z}$ et son quotient par l'Idéal engendré par $j^*(d^n_{Y/Z}(\mathcal{K}))$ à $\mathcal{P}^n_{Y/Z}/(\varpi_1(\mathcal{K})+\varpi_2(\mathcal{K}))\mathcal{P}^n_{Y/Z}$. Notons maintenant qu'on a un diagramme commutatif

Notons encore que, conformément à la théorie générale ($\mathbf{0}_{\text{III}}$, 8.1.6) l'automorphisme identique de $\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}})$ correspond canoniquement à une section c de $\mathscr{E}_{(\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}}))}$ au-dessus de $\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}})$, c'est-à-dire (**II**, 1.4.1) à un homomorphisme de $\mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}})$-Modules $u : \mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}}) \rightarrow \mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E}$; pour tout ouvert affine W de X, si l'on pose $\Gamma(W, \mathscr{O}_X) = A$, si on identifie $\Gamma(W, \mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}}))$ à une algèbre de polynômes $C = A[T_1, \ldots, T_n]$, de sorte que les T_i forment une base de $\Gamma(W, \check{\mathscr{E}})$, et si enfin on désigne par (e_i) la base duale de (T_i) dans $\Gamma(W, \mathscr{E}) = \Gamma(W, \check{\mathscr{E}})^{\vee}$, on voit aussitôt que u correspond à l'homomorphisme de C-modules tel que $u(1) = \sum_{i=1}^{n} T_i \otimes e_i$.

Si $X' = \operatorname{Spec}(A)$ est affine et tel que $\mathscr{E}_{(X')}$ soit isomorphe à $\mathscr{O}_{X'}^n$, $\Gamma(X', \mathscr{E}_{(X')})$ est un A-module libre de rang n; de façon imagée, on peut dire que l'objet $\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}})$ représente « l'ensemble des points de l'espace affine tordu sur X défini par $\mathscr{E}$ ».

(18.5.2) Rappelons (**II**, 1.7.8) que l'on a par définition $\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}}) = \operatorname{Spec}(\mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}}))$. Soit $\mathscr{J}$ un Idéal quasi-cohérent de $\mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}})$, de sorte que $\operatorname{Spec}(\mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}})/\mathscr{J})$ est un sous-préschéma fermé de $\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}})$; nous allons l'interpréter comme *représentant un foncteur* de la catégorie des X-préschémas dans celle des ensembles. Notons pour cela qu'une section $u \in \Gamma(X, \mathscr{E})$ s'identifie canoniquement à un $\mathscr{O}_X$-homomorphisme $u : \mathscr{O}_X \rightarrow \mathscr{E}$, auquel correspond par transposition un $\mathscr{O}_X$-homomorphisme ${}^t u : \check{\mathscr{E}} \rightarrow \mathscr{O}_X$, et par suite un homomorphisme de $\mathscr{O}_X$-Algèbres $v : \mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}}) \rightarrow \mathscr{O}_X$. Soit $\operatorname{Al}(X, \mathscr{E}, \mathscr{J})$ l'ensemble des $u \in \Gamma(X, \mathscr{E})$ tels que $\mathscr{J}$ soit *contenu dans le noyau de* v; il résulte aussitôt de ces définitions que

$$X' \rightsquigarrow \operatorname{Al}(X', \mathscr{E}_{(X')}, \mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{X'})$$

est un foncteur représenté par $\operatorname{Spec}(\mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}})/\mathscr{J})$. Si $X' = \operatorname{Spec}(A)$ est affine et tel que $\mathscr{E}_{(X')}$ soit isomorphe à $\mathscr{O}_{X'}^n$, $\Gamma(X', \mathscr{E}_{(X')})$ peut s'identifier à l'ensemble A^n, et $\mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{X'}$ à un $\mathscr{O}_{X'}$-Module de la forme $\widetilde{\mathfrak{J}}$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal de l'anneau de polynômes $A[T_1, \ldots, T_n]$; l'ensemble $\operatorname{Al}(X', \mathscr{E}_{(X')}, \mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{X'})$ s'identifie alors à la partie de A^n formée des points $(t_1, \ldots, t_n)$ tels que $P(t_1, \ldots, t_n) = 0$ pour tous les polynômes $P \in \mathfrak{J}$; de façon imagée on peut donc dire que l'objet $\operatorname{Spec}(\mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}})/\mathscr{J})$ représente « le sous-ensemble algébrique de l'espace affine tordu $\Gamma(X, \mathscr{E})$ formé des points annulant l'idéal $\Gamma(X, \mathscr{J})$ ». On note encore ce X-préschéma $\mathbf{Al}(\mathscr{E}, \mathscr{J})$. On notera que si $\mathscr{J}$ est un Idéal de type fini de $\mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}})$, $\mathbf{Al}(\mathscr{E}, \mathscr{J})$ est un X-préschéma *de présentation finie*, puisque $\mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}})$ est une $\mathscr{O}_X$-Algèbre de présentation finie.

Lemme **(18.5.3).** — *Soient* S *un préschéma,* $f : X \rightarrow S$ *un morphisme fini et localement libre* (18.2.7). *Considérons le foncteur contravariant de la catégorie des* S*-préschémas dans la catégorie des ensembles*

(18.5.3.1) $$S' \rightsquigarrow \operatorname{Of}(X \times_S S')$$

où $\operatorname{Of}(X \times_S S')$ *est l'ensemble des parties à la fois ouvertes et fermées de l'espace sous-jacent à* $X \times_S S'$. *Alors ce foncteur est représentable par un* S*-préschéma* $\mathbf{Of}(X)$, *qui est affine, étale et de présentation finie sur* S.

Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y & X\times_S Y \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "h"] & X\times_S Y \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "p"] \\ S & S \arrow[l, "\mathrm{id}"] & X \arrow[l, "f"] \arrow[from=1-1, to=2-1, "g"'] \end{tikzcd}$$

donne une factorisation de l'*isomorphisme* canonique $\mathrm{P}^n(p)$ (16.4.5)

$$p^*(\mathscr{P}^n_{X/S}) \to \mathscr{P}^n_{Z/S} \to \mathscr{P}^n_{Z/Y}$$

et de même, en intervertissant les rôles de X et Y, on a une factorisation de l'*isomorphisme* $\mathrm{P}^n(q)$

$$q^*(\mathscr{P}^n_{Y/S}) \to \mathscr{P}^n_{Z/S} \to \mathscr{P}^n_{Z/X}.$$

Ceci prouve que l'homomorphisme canonique (16.4.18.1)

$$p_{Z/X/S} : p^*(\mathscr{P}^n_{X/S}) \to \mathscr{P}^n_{Z/S} \qquad (\text{resp. } q_{Z/Y/S} : q^*(\mathscr{P}^n_{Z/S}) \to \mathscr{P}^n_{Z/S})$$

est *injectif*, et que le noyau de l'homomorphisme canonique surjectif (16.4.18.2)

$$\mathscr{P}^n_{Z/S} \to \mathscr{P}^n_{Z/Y} \qquad (\text{resp. } \mathscr{P}^n_{Z/S} \to \mathscr{P}^n_{Z/X})$$

est supplémentaire de l'image de $p_{Z/X/S}$ (resp. $q_{Z/Y/S}$). Mais d'autre part, ce noyau est, en vertu de (16.4.18), engendré par l'image par $q_{Z/Y/S}$ (resp. $p_{Z/X/S}$) de l'Idéal d'augmentation de $q^*(\mathscr{P}^n_{Y/S})$ (resp. $p^*(\mathscr{P}^n_{X/S})$). On en conclut la proposition en considérant le cas $n=1$.

On généralise aussitôt (16.4.23) au cas d'un produit d'un nombre fini quelconque de S-préschémas.

Remarques **(16.4.24).** — (i) Nous verrons (17.2.3) que lorsque le morphisme $f: X \to Y$ dans (16.4.18) est *lisse*, l'homomorphisme $f_{X/Y/Z}$ dans (16.4.19.1) est localement *inversible à gauche* et en particulier injectif. De même, lorsque le morphisme $f \circ j : X \to Z$ de (16.4.20) est *lisse*, l'homomorphisme de gauche dans (16.4.21.2) est localement *inversible à gauche* et *a fortiori* injectif (17.2.5). Au chap. V, nous donnerons aussi une variante, dans le cas des Modules sur les préschémas, des « modules d'imperfection » étudiés dans (**0**, 20.6), et des suites exactes où ils figurent.

(ii) Soient X un espace topologique, $\mathscr{A}$ un faisceau d'anneaux sur X et $\mathscr{B}$ une $\mathscr{A}$-Algèbre sur X. Alors il est clair que

$$U \rightsquigarrow \mathrm{P}^n_{\Gamma(U, \mathscr{B})/\Gamma(U, \mathscr{A})} \qquad (\text{U ouvert dans X})$$

est un préfaisceau de $\Gamma(U, \mathscr{B})$-algèbres augmentées, donc le faisceau associé $\mathscr{P}^n_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}$ est une $\mathscr{B}$-Algèbre augmentée. Dans le cas particulier où X est un préschéma, $f=(\psi, \theta) : X \to S$ un morphisme de préschémas, il résulte aisément de (16.4.16) et de l'exactitude du foncteur $\varinjlim$ que $\mathscr{P}^n_{X/S}$ est canoniquement isomorphe à $\mathscr{P}^n_{\mathscr{O}_X/\psi^*(\mathscr{O}_S)}$. Il s'ensuit que le formalisme développé dans le présent paragraphe pourrait être considéré comme un cas particulier d'un formalisme différentiel pour des espaces annelés munis d'un faisceau d'algèbres sur le faisceau structural. Cependant, nous n'avons pas voulu partir de ce point de vue, moins intuitif et moins commode pour les applications. Il semble d'ailleurs que, pour les diverses espèces de « variétés », la construction « globale » des $\mathscr{P}^n$ analogue à celle que nous utilisons ici soit également mieux adaptée aux applications.

16.5. Faisceaux et fibrés tangents relatifs; dérivations.

(16.5.1) Soit $f=(\psi, \theta): X \rightarrow S$ un morphisme d'espaces annelés. Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module $\mathscr{F}$, on appelle S-*dérivation* (ou (X/S)-*dérivation*, ou *f-dérivation*) *de* $\mathcal{O}_X$ *dans* $\mathscr{F}$ tout homomorphisme de *faisceaux de groupes additifs* $D: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathscr{F}$, vérifiant les conditions suivantes :

a) pour tout ouvert V de X, et tout couple de sections (t_1, t_2) de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de V, on a

(16.5.1.1) $$D(t_1 t_2)=t_1 D(t_2)+D(t_1) t_2;$$

b) pour tout ouvert V de X, toute section t de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de V et toute section s de $\mathcal{O}_S$ au-dessus d'un ouvert U de S tel que $V \subset f^{-1}(U)$, on a

(16.5.1.2) $$D((s \mid V) t)=(s \mid V) D(t).$$

Il est clair qu'il revient au même de dire que pour tout $x \in X$, l'homomorphisme de groupes additifs $D_x: \mathcal{O}_x \rightarrow \mathscr{F}_x$ est une $\mathcal{O}_{f(x)}$-*dérivation.*

Une autre interprétation consiste à considérer la $\mathcal{O}_X$-Algèbre $\mathscr{D}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F})$ égale à $\mathcal{O}_X \oplus \mathscr{F}$, la structure d'Algèbre étant définie par la condition que pour tout ouvert V de X, le produit de deux sections de $\mathcal{O}_X$ (resp. d'une section de $\mathcal{O}_X$ et d'une section de $\mathscr{F}$) au-dessus de V est défini par la structure d'anneau de $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ (resp. la structure de $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$-module sur $\Gamma(V, \mathscr{F})$), et le produit de deux sections de $\mathscr{F}$ au-dessus de V est pris égal à 0; alors, $\mathscr{F}$ est un Idéal de $\mathscr{D}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F})$, noyau de l'augmentation canonique $\mathscr{D}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}) \rightarrow \mathcal{O}_X$, et dire que D est une S-dérivation de $\mathcal{O}_X$ dans $\mathscr{F}$ signifie que $1_{\mathcal{O}_X}+D$ est un $\mathcal{O}_S$-*homomorphisme d'Algèbres* de $\mathcal{O}_X$ dans $\mathscr{D}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F})$, qui, composé avec l'augmentation, donne $1_{\mathcal{O}_X}$.

Les S-dérivations de $\mathcal{O}_X$ dans $\mathscr{F}$ forment évidemment un $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-*module* $\operatorname{Dér}_S(\mathcal{O}_X, \mathscr{F})$.

Lorsque $\mathscr{F}=\mathcal{O}_X$, une S-dérivation de $\mathcal{O}_X$ dans lui-même est simplement appelée une S-*dérivation de* $\mathcal{O}_X$.

Proposition **(16.5.2).** — *Soient* A *un anneau,* B *une* A-*algèbre,* L *un* B-*module; on pose* $S=\operatorname{Spec}(A)$, $X=\operatorname{Spec}(B)$, $\mathscr{F}=\widetilde{L}$. *Alors l'application* $D \rightsquigarrow \Gamma(D)$ *qui, à toute* S-*dérivation* D *de* $\mathcal{O}_X$ *dans* $\mathscr{F}$ *fait correspondre l'application* $\Gamma(D): t \rightsquigarrow D(t)$ *de* B *dans* L, *est un isomorphisme de* B-*modules de* $\operatorname{Dér}_S(\mathcal{O}_X, \mathscr{F})$ *sur* $\operatorname{Dér}_A(B, L)$ (cf. (**0**, 20.1.2)).

Cela résulte aussitôt de l'interprétation donnée ci-dessus des S-dérivations en termes les images des $(g_i)_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ dans $\mathcal{O}_{X_s,x} = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_{X,x}$ soient égales aux t_i. Soit X′ le sous-préschéma fermé de V défini par l'idéal de A engendré par les g_i; la suite (t_i) étant par hypothèse régulière (**0**, 16.5.7) il résulte de (11.3.8) qu'en remplaçant au besoin V par un voisinage ouvert plus petit, on peut supposer que le morphisme $X' \rightarrow S$, restriction de f, est *plat* et *de présentation finie*. D'autre part, puisque les t_i forment un système de paramètres de $\mathcal{O}_{X_s,x}$, l'anneau $\mathcal{O}_{X'_s,x}$ est par définition *artinien*, et comme x est *fermé* dans X'_s, on en conclut qu'il est *isolé* dans X'_s. En remplaçant V au besoin par un voisinage plus petit de x, on en conclut, grâce à (13.1.4) que le morphisme $X' \rightarrow S$ est *quasi-fini*.

Corollaire (**17.16.2**). — *Soit* $f: X \rightarrow S$ *un morphisme fidèlement plat et localement de présentation finie. Alors il existe un morphisme* $g: S' \rightarrow S$, *fidèlement plat, localement de présentation finie et* localement quasi-fini, *tel qu'il existe un* S-*morphisme* $S' \rightarrow X$ (autrement dit, tel qu'il existe une S′-*section* de $X' = X \times_S S'$ (**I**, 3.3.14)). *Si* S *est quasi-compact* (resp. *quasi-compact et quasi-séparé*), *on peut supposer* S′ *affine* (resp. S′ *affine et le morphisme g quasi-fini*).

Pour tout $s \in S$, la fibre X_s est non vide par hypothèse et est un préschéma localement de type fini sur $\boldsymbol{k}(s)$; l'ensemble U_s des points x de X_s où $\mathcal{O}_{X_s,x}$ est un anneau de Cohen-Macaulay est ouvert dans X_s (6.11.3) et est non vide, puisqu'il contient les points maximaux de X_s (**0**, 16.5.1); il contient par suite un point x_s *fermé* dans X_s (10.4.7). Soit $X'(s)$ un sous-préschéma affine de X contenant x_s et vérifiant les conditions de (17.16.1). Pour obtenir un préschéma S′ vérifiant les conditions de l'énoncé, il suffit de prendre la *somme* des $X'(s)$, où s parcourt S. Puisque le morphisme $X'(s) \rightarrow S$ est plat et localement de présentation finie, l'image $U(s)$ de $X'(s)$ est ouverte dans S(2.4.6); lorsque S est quasi-compact, on peut donc recouvrir S par un nombre fini de $U(s_j)$ et le préschéma S′ somme des $X'(s_j)$ répond encore à la question et est affine. Si de plus S est quasi-séparé, on peut supposer les immersions ouvertes $U(s) \rightarrow S$ quasi-compactes (1.2.7), donc de présentation finie (1.6.2), et alors les morphismes $X'(s_j) \rightarrow S$ sont de présentation finie (1.6.2) et il en est par suite de même du morphisme $S' \rightarrow S$.

Corollaire (**17.16.3**). — (i) *Soit* $f: X \rightarrow S$ *un morphisme lisse. Soient* $s \in S$, x *un point fermé de* X_s *tel que le corps résiduel* $\boldsymbol{k}(x)$ *soit séparable sur* $\boldsymbol{k}(s)$; *alors, dans la conclusion de* (17.16.1), *on peut prendre* X′ *tel que le morphisme* $X' \rightarrow U$, *restriction de* f, *soit étale.*

(ii) *Soit* $f: X \rightarrow S$ *un morphisme lisse surjectif. Alors, dans les conclusions de* (17.16.2), *on peut supposer en outre que* $g: S' \rightarrow S$ *soit étale.*

Il est clair que (ii) se déduit de (i) comme (17.16.2) de (17.16.1), compte tenu de ce que, pour tout $s \in S$, comme X_s est non vide et lisse sur $\boldsymbol{k}(s)$, il existe un point fermé $x \in X_s$ tel que $\boldsymbol{k}(x)$ soit *séparable* sur $\boldsymbol{k}(s)$ (17.15.10, (iii)). Il suffit donc de prouver (i). On notera que l'anneau $\mathcal{O}_{X_s,x}$ est alors régulier; si l'on répète la construction faite dans (17.16.1) en prenant pour (t_i) un *système régulier de paramètres de* $\mathcal{O}_{X_s,x}$, l'anneau $\mathcal{O}_{X'_s,x}$ est un corps isomorphe à $\boldsymbol{k}(x)$, donc séparable sur $\boldsymbol{k}(s)$ par hypothèse. La conclusion résulte alors de (17.6.1, c')).

Proposition (**17.16.4**). — *Soient* S *un préschéma quasi-compact et quasi-séparé*, $f: X \rightarrow S$ *un morphisme surjectif localement de présentation finie. Alors il existe une famille finie* $(S_i)_{i \in I}$

finie, $\mathfrak{G}_{X/S}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent; si de plus S est localement noethérien, $\mathfrak{G}_{X/S}$ est cohérent (16.5.6).

(16.5.8) Supposons plus particulièrement que $\Omega^1_{X/S}$ soit un $\mathcal{O}_X$-Module *localement libre* (de rang fini) (ce qui sera le cas lorsque f est *lisse* (17.2.3)); alors $\mathfrak{G}_{X/S}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module localement libre et a même rang que $\Omega^1_{X/S}$ en chaque point. De façon plus précise, supposons que $\Omega^1_{X/S}$ soit de rang n en un point x; il y a alors n sections s_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de $\mathcal{O}_X$ au-dessus d'un voisinage affine U de x telles que les images canoniques des ds_i dans $\Omega^1_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \boldsymbol{k}(x)$ forment une base de ce $\boldsymbol{k}(x)$-espace vectoriel; en vertu du lemme de Nakayama, les germes $(ds_i)_x = d(s_i)_x$ des ds_i au point x forment une base du $\mathcal{O}_x$-module $(\Omega^1_{X/S})_x$, donc, en restreignant U, on peut supposer que les ds_i forment une *base* du $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-module $\Gamma(U, \Omega^1_{X/S})$. Alors le $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-module $\Gamma(U, \mathfrak{G}_{X/S})$ est dual du précédent; on note $(D_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ou $\left(\frac{\partial}{\partial s_i}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base duale de $(ds_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, de sorte que, par (16.5.3), on a

(16.5.8.1) $$D_i s_j = \langle D_i, ds_j \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial s_i}, ds_j \right\rangle = \delta_{ij} \quad \text{(indice de Kronecker).}$$

Toute $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$-dérivation de la $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$-algèbre $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ s'écrit donc d'une seule manière

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i D_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial s_i}$$

où les a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont des sections de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de U. Pour toute section $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, si l'on pose $dg = \sum_{i=1}^{n} c_i ds_i$, on a $c_i = \langle D_i, dg \rangle = D_i g$ en vertu de (16.5.8.1), autrement dit

(16.5.8.2) $$dg = \sum_{i=1}^{n} (D_i g) ds_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial s_i} ds_i.$$

(16.5.9) Soient D_1, D_2 deux S-dérivations de $\mathcal{O}_X$. Pour tout ouvert U de X, si D_1^U, D_2^U sont les dérivations correspondantes de l'anneau $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, le *crochet*

$$[D_1^U, D_2^U] = D_1^U \circ D_2^U - D_2^U \circ D_1^U$$

est aussi une dérivation de cet anneau, donc le $\psi^*(\mathcal{O}_S)$-endomorphisme de $\mathcal{O}_X$

(16.5.9.1) $$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$$

est encore une S-dérivation; comme on vérifie aussitôt que ce crochet vérifie l'identité de Jacobi, on voit qu'on a ainsi défini sur $\mathrm{Dér}_S(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ une structure de $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$-*algèbre de Lie*. Comme la définition de cette structure commute à la restriction à un ouvert de X, on voit que $\mathfrak{G}_{X/S}$ est canoniquement muni d'une structure de $\psi^*(\mathcal{O}_S)$-*Algèbre de Lie*. On notera que l'application $(D_1, D_2) \to [D_1, D_2]$ *n'est pas* $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-*bilinéaire*.

(16.5.10) Pour tout changement de base $g: S' \to S$, si l'on pose $X' = X \times_S S'$, on a vu (16.4.5) que l'on a un isomorphisme canonique

(16.5.10.1) $$\Omega^1_{X/S} \otimes_S S' \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{X'/S'}$$

d'où l'on déduit, en vertu de (16.5.10.1), un homomorphisme canonique (Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3[e] éd., § 5, n[o] 3)

(16.5.10.2) $$\mathfrak{G}_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'} \rightarrow \mathfrak{G}_{X'/S'}$$

qui en général n'est ni injectif ni surjectif. Toutefois :

Proposition **(16.5.11)**. — (i) *Si* $g : S' \rightarrow S$ *est un morphisme plat et si* f *est localement de type fini* (resp. *localement de présentation finie*), *l'homomorphisme* (16.5.10.2) *est injectif* (resp. *bijectif*).

(ii) *Si* $\Omega^1_{X/S}$ *est un* $\mathcal{O}_X$*-Module localement libre de type fini, l'homomorphisme* (16.5.10.2) *est bijectif.*

En effet, l'assertion (ii) résulte de Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3[e] éd., § 5, n[o] 3, prop. 7. L'assertion (i) résulte de même de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, n[o] 10, prop. 11 et du fait que si f est localement de type fini (resp. localement de présentation finie), $\Omega^1_{X/S}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module de type fini (resp. de présentation finie) ((16.3.9) et (16.4.22)).

(16.5.12) Puisque $\Omega^1_{X/S}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent, on peut considérer le fibré vectoriel sur X défini par $\Omega^1_{X/S}$ (**II**, 1.7.8)

(16.5.12.1) $$T_{X/S} = \mathbf{V}(\Omega^1_{X/S})$$

qu'on appelle *fibré tangent de* X *relativement à* S. On a donc une bijection canonique (**II**, 1.7.9)

$$\Gamma(T_{X/S}/S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_X) = \Gamma(X, \mathfrak{G}_{X/S})$$

par définition de $\mathfrak{G}_{X/S}$, et on peut dans cet isomorphisme remplacer X par un ouvert quelconque U de X; on peut donc dire que le *faisceau tangent* de X relativement à S est isomorphe au *faisceau des germes de* S-*sections* du fibré tangent de X relativement à S. Si $f : X \rightarrow Y$ est un S-morphisme, on a vu (16.4.19) qu'on a un homomorphisme canonique $f_{X/Y/S} : f^*(\Omega^1_{Y/S}) \rightarrow \Omega^1_{X/S}$, ce qui donne, compte tenu de ce que

$$\mathbf{V}(f^*(\Omega^1_{Y/S})) = \mathbf{V}(\Omega^1_{Y/S}) \times_Y X \quad (\mathbf{II},\ 1.7.11),$$

un X-morphisme $T_{X/S}(f) : T_{X/S} \rightarrow T_{Y/S} \times_Y X$. Si $g : Y \rightarrow Z$ est un second S-morphisme, on a $T_{X/S}(g \circ f) = (T_{Y/S}(g) \times 1_X) \circ T_{X/S}(f)$ (**0**, 20.5.4.1).

Il résulte de (16.5.10.1) et de (**II**, 1.7.11) que pour tout changement de base $g : S' \rightarrow S$, on a un isomorphisme canonique

(16.5.12.2) $$T_{X'/S'} \xrightarrow{\sim} T_{X/S} \times_S S' = T_{X/S} \times_X X'.$$

(16.5.13) Pour tout point $x \in X$, on appelle *espace tangent à* X *au point* x (relativement à S) l'ensemble des points de la fibre $T_{X/S} \times_X \mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(x))$ *rationnels sur* $\boldsymbol{k}(x)$, donc l'ensemble

(16.5.13.1) $$T_{X/S}(x) = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}(x)}(\Omega^1_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \boldsymbol{k}(x), \boldsymbol{k}(x))$$

qui est le *dual* du $\boldsymbol{k}(x)$-espace vectoriel $\Omega^1_{\mathcal{O}_x/\mathcal{O}_s}/\mathfrak{m}_x . \Omega^1_{\mathcal{O}_x/\mathcal{O}_s}$. Lorsque $\Omega^1_{X/S}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module de *type fini*, $T_{X/S}(x)$ est donc un espace vectoriel de rang fini sur $\boldsymbol{k}(x)$, et pour tout chanqui est aussi la topologie $\mathfrak{s}$-préadique, où $\mathfrak{s}$ est le radical de l'anneau semi-local B, car $B/\mathfrak{r}B$ est un anneau artinien de radical $\mathfrak{s}/\mathfrak{r}B$. On sait alors (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, nº 13, cor. de la prop. 19) que B est composé direct d'anneaux locaux.

Proposition **(18.5.15)**. — *Soient* A *un anneau hensélien,* $\mathfrak{r}$ *son radical. Alors le foncteur* $B \rightsquigarrow B/\mathfrak{r}B$ *est une équivalence de la catégorie des* A-*algèbres finies et étales avec la catégorie des* $(A/\mathfrak{r})$-*algèbres finies et étales.*

Le fait que le foncteur de l'énoncé soit pleinement fidèle est un cas particulier de (18.5.12). Pour montrer que ce foncteur est une équivalence de catégories, on peut se borner au cas où A est local; il suffit alors d'appliquer (18.1.1) (pour les morphismes étales), à $S = \mathrm{Spec}(A)$ et $S_0 = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{r})$, réduit à un seul point.

Remarques **(18.5.16)**. — (i) Nous ignorons si la proposition (18.5.15) se généralise à un couple hensélien (S, S_0), même lorsque S est affine et noethérien.

(ii) Soient A un anneau *noethérien*, $\mathfrak{J}$ un idéal de A tel que A soit *séparé et complet* pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique. Alors le couple $(\mathrm{Spec}(A), \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J}))$ est hensélien : en effet, pour toute A-algèbre finie B, B est séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.6). Remplaçant B par A et $\mathfrak{J}B$ par $\mathfrak{J}$, tout revient donc à voir que l'application qui, à tout idempotent de A, fait correspondre sa classe mod. $\mathfrak{J}$, est *bijective*. Or on a $A = \varprojlim (A/\mathfrak{J}^n)$. Notons $\mathrm{Idem}(A)$ l'ensemble des idempotents de A, et pour tout homomorphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$, soit $\mathrm{Idem}(\varphi)$ l'application de $\mathrm{Idem}(A)$ dans $\mathrm{Idem}(B)$ restriction de φ; il résulte de la définition de la limite projective que l'on a $\mathrm{Idem}(A) = \varprojlim \mathrm{Idem}(A/\mathfrak{J}^n)$ pour les applications $\psi_{nm} : \mathrm{Idem}(A/\mathfrak{J}^m) \to \mathrm{Idem}(A/\mathfrak{J}^n)$ restriction des applications canoniques $A/\mathfrak{J}^m \to A/\mathfrak{J}^n$. Mais puisque $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J}^n) \to \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J}^m)$ est un homéomorphisme, les ψ_{nm} sont des bijections (comme on l'a vu dans la démonstration de (18.5.3)); cela prouve donc notre assertion.

Théorème **(18.5.17)**. — *Soient* A *un anneau local hensélien,* $S = \mathrm{Spec}(A)$, s *le point fermé de* S. *Pour tout morphisme lisse* $f : X \to S$, *l'application canonique*

$$\Gamma(X/S) \to \Gamma(X_s/\boldsymbol{k}(s))$$

(*où* $X_s = f^{-1}(s)$) *est surjective.*

La donnée d'une $\boldsymbol{k}(s)$-section de X_s équivaut à celle d'un point $x \in X$ au-dessus de s rationnel sur $\boldsymbol{k}(s)$, et il s'agit de prouver qu'il existe une S-section $u : S \to X$ telle que $u(s) = x$. Compte tenu de (17.16.3, (i)), on peut supposer que f est *étale*. Alors la conclusion résulte du critère (18.5.11, *b*)). (Le lecteur notera qu'en vertu de ce critère, la validité de (18.5.17) pour un anneau local donné A est nécessaire et suffisante pour que A soit hensélien).

Remarque **(18.5.18)**. — Les conditions de (18.5.11) sont encore équivalentes à la suivante :

d) *Pour tout morphisme localement de type fini* $f : X \to S$ *et tout point* $x \in X$ *tel que* $f(x)$ *soit le point fermé* s *de* S *et que* $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_{X,x}$ *soit un corps canoniquement isomorphe à* $\boldsymbol{k}(s) = k$, *il existe un voisinage ouvert* U *de* x *dans* X *tel que* $f|U$ *soit une immersion fermée.*

et proposons-nous de chercher s'il existe des S-*morphismes* $u : Y \to X$ tels que $u_0 = u \circ j$ (autrement dit, s'il est possible de compléter le diagramme précédent par la flèche pointillée u, de façon à le laisser *commutatif*).

Pour cela, considérons un ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(C)$ de Y; son image réciproque $j^{-1}(U)$ est l'ouvert affine $U_0 = \mathrm{Spec}(C/\mathfrak{L})$, où $\mathfrak{L} = \Gamma(U, \mathscr{J})$, idéal *de carré nul* dans C; nous supposerons U assez petit pour que $u_0(U_0)$ soit contenu dans un ouvert affine $V = \mathrm{Spec}(B)$ de X, et $g(U) = f(u_0(U_0))$ contenu dans un ouvert affine $W = \mathrm{Spec}(A)$ de S, de sorte que B et C sont des A-algèbres et que $u_0 | U_0$ correspond à un A-homomorphisme ψ de B dans $C/\mathfrak{L}$; soit $P(U_0)$ l'ensemble des restrictions $u | U$ des homomorphismes cherchés, qui correspondent canoniquement aux A-homomorphismes d'algèbres $\varphi : B \to C$ tels que le *composé* $B \xrightarrow{\varphi} C \to C/\mathfrak{L}$ *soit égal à* ψ. On sait donc (**0**, 20.1.1) que l'ensemble de ces homomorphismes est vide ou de la forme $\varphi_1 + \mathrm{Dér}_A(B, \mathfrak{L})$; lorsque $P(U_0)$ n'est pas vide, le groupe additif $\mathrm{Dér}_A(B, \mathfrak{L})$ opère par addition dans $P(U_0)$, qui est donc un *espace affine* pour le groupe additif $\mathrm{Dér}_A(B, \mathfrak{L})$ (ou encore un *espace homogène principal* (ou *torseur*) *sous* $\mathrm{Dér}_A(B, \mathfrak{L})$).

Remarquons maintenant que, puisque $\mathfrak{L}$ est muni d'une structure de B-module au moyen de ψ, on a un *isomorphisme* $v \rightsquigarrow v \circ d_{B/A}$ de $\mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, \mathfrak{L})$ sur $\mathrm{Dér}_A(B, \mathfrak{L})$ (**0**, 20.4.8). D'ailleurs, comme $\mathfrak{L}$ est de carré nul, donc un $(C/\mathfrak{L})$-module, tout B-homomorphisme $v : \Omega^1_{B/A} \to \mathfrak{L}$ peut être considéré comme un $(C/\mathfrak{L})$-homomorphisme $\Omega^1_{B/A} \otimes_B (C/\mathfrak{L}) \to \mathfrak{L}$. Comme $\mathscr{J}$ est de carré nul, il peut être considéré comme un $\mathcal{O}_{Y_0}$-Module quasi-cohérent; introduisons le $\mathcal{O}_{Y_0}$-Module

(16.5.14.2) $$\mathscr{G} = \mathscr{H}om(u_0^*(\Omega^1_{X/S}), \mathscr{J}) ;$$

il résulte alors du fait que $\Omega^1_{B/A} = \Gamma(V, \Omega^1_{X/S})$ (16.3.7) que l'on peut écrire $\mathrm{Dér}_A(B, \mathfrak{L}) = \Gamma(U_0, \mathscr{G})$.

Comme $P(U_0)$ est défini comme ensemble de S-morphismes $U \to X$, il est clair que $U_0 \rightsquigarrow P(U_0)$ est un *faisceau d'ensembles* $\mathscr{P}$ sur Y_0. Utilisons ce fait pour prouver que l'application $h : \Gamma(U_0, \mathscr{G}) \times P(U_0) \to P(U_0)$ définissant la structure de torseur sur $P(U_0)$ est aussi indépendante du choix de V et W, et en outre que, si $U' \subset U$ est un second ouvert affine de Y, U'_0 son image réciproque dans Y_0, le diagramme

(16.5.14.3) $$\begin{array}{ccc} \Gamma(U_0, \mathscr{G}) \times P(U_0) & \xrightarrow{h} & P(U_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(U'_0, \mathscr{G}) \times P(U'_0) & \xrightarrow[h']{} & P(U'_0) \end{array}$$

est commutatif (les flèches verticales étant les opérateurs de restriction). En vertu de la remarque précédente, on est ramené à prouver la commutativité du diagramme précédent lorsque h est défini comme ci-dessus à partir des ouverts affines V, W et h' à partir d'ouverts

Corollaire **(18.4.12).** — (i) *Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme localement de type fini, x un point de* X. *Si f est plat et formellement non ramifié au point x, alors, dans toute factorisation* $f|U : U \xrightarrow{j} X' \xrightarrow{h} Y$, *où* U *est un voisinage ouvert de x, j une immersion fermée et h un morphisme étale* (18.4.7), *l'homomorphisme* $\mathcal{O}_{X',j(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ *correspondant à j est bijectif* (en particulier $\mathcal{O}_{X,x}$ est une $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-algèbre *essentiellement étale* (18.6.1)).

(ii) *Pour qu'un morphisme* $f : X \to Y$ *soit étale, il faut et il suffit qu'il soit localement de type fini, formellement non ramifié et plat.*

(i) Comme l'homomorphisme $\mathcal{O}_{X',j(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est surjectif, il suffit de prouver qu'il est injectif, et pour cela qu'il fait de $\mathcal{O}_{X,x}$ un $\mathcal{O}_{X',j(x)}$-module *fidèlement plat*, ou seulement *plat* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.5.1 et 6.6.2); autrement dit, il s'agit de montrer que j est un morphisme *plat au point x*; mais puisque $h \circ j = f$ est par hypothèse plat au point x et que h est étale, cela résulte de (18.4.10) et (18.4.11, (i)).

(ii) Il n'y a à prouver que la suffisance des conditions énoncées. Pour tout $x \in X$, on a donc dans un voisinage ouvert U de x une factorisation de $f|U$ ayant les propriétés considérées dans (i). Comme par hypothèse f est plat et formellement non ramifié en *tous* les points de U, le résultat de (i) s'applique non seulement à x mais à tous les points de U; cela signifie que si $\mathscr{J}$ est l'Idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_{X'}$ correspondant au sous-préschéma fermé de X′ associé à j, on a $\mathscr{J}_{j(z)} = 0$ pour tout $z \in U$, donc j est une immersion ouverte, et f est par suite étale en tout point de U, donc en tout point de X.

Corollaire **(18.4.13).** — *Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme localement de type fini, x un point de* X, $y = f(x)$. *Supposons que y admette un voisinage ouvert qui soit un préschéma réduit et n'ayant qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Alors, pour que f soit étale au point x, il faut et il suffit que f soit plat et formellement non ramifié au point x.*

Il n'y a à démontrer que la suffisance de la condition. La question étant locale sur X et Y, on peut supposer (18.4.7) que f se factorise en $X \xrightarrow{j} X' \xrightarrow{h} Y$ où h est étale et j une immersion fermée, et en outre que Y est réduit et n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Alors X′ est réduit (17.5.7) et, en remplaçant au besoin X′ par un voisinage ouvert de $j(x)$, on peut supposer que X′ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles : en effet, on peut supposer h quasi-fini (17.6.1) et comme les points maximaux de X′ sont au-dessus des points maximaux de Y (2.3.4) leur nombre est fini. Tout revient à montrer, avec les notations de la démonstration de (18.4.12), que l'on a $\mathscr{J}_{x'} = 0$ pour tous les points x' d'un voisinage de $j(x)$ dans X′, sachant que $\mathscr{J}_{j(x)} = 0$. Or, en remplaçant X′ par un voisinage affine de $j(x)$, on peut supposer que toutes les composantes irréductibles de X′ contiennent $j(x)$; si $X' = \mathrm{Spec}(A')$, et si $\mathfrak{p}'$ est l'idéal premier de A′ correspondant au point $j(x)$, le morphisme $\mathrm{Spec}(A'_{\mathfrak{p}'}) \to \mathrm{Spec}(A')$ est dominant, donc l'homomorphisme correspondant $A' \to A'_{\mathfrak{p}'}$ est *injectif* puisque A′ est réduit (**I**, 1.2.7). Si $\mathscr{J} = \widetilde{\mathfrak{J}}$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal de A′, $\mathfrak{J}$ s'identifie donc à une partie de $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}'}$, et l'hypothèse $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}'} = 0$ entraîne donc $\mathfrak{J} = 0$.

Corollaire **(18.4.14).** — *Soient* A *un anneau local d'idéal maximal* $\mathfrak{m}$, *de corps résiduel k*, B *une* A-*algèbre finie.*

Revenant au problème considéré en (16.5.13), on obtient donc :

Proposition **(16.5.17)**. — *Soient* X, Y *deux* S-*préschémas*, Y_0 *un sous-préschéma fermé de* Y *défini par un Idéal quasi-cohérent* $\mathscr{J}$ *de* $\mathcal{O}_Y$ *tel que* $\mathscr{J}^2=0$, $j: Y_0 \to Y$ *l'injection canonique. Soit* $u_0 : Y_0 \to X$ *un* S-*morphisme, et* $\mathscr{P}$ *le faisceau d'ensembles sur* Y *tel que, pour tout ouvert* U *de* Y, $\Gamma(U, \mathscr{P})$ *soit l'ensemble des* S-*morphismes* $u: U \to X$ *tels que* $u_0|U_0 = u\circ(j|U_0)$, *où* $U_0 = j^{-1}(U)$. *Alors il existe sur* $\mathscr{P}$ *une structure de pseudo-torseur sous le* $\mathcal{O}_{Y_0}$-*Module* $\mathscr{G} = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_{Y_0}}(u_0^*(\Omega^1_{X/S}), \mathscr{J})$.

En particulier :

Corollaire **(16.5.18)**. — *Avec les notations de* (16.5.16), *supposons* Y *affine et* $\Omega^1_{X/S}$ *de présentation finie ; s'il existe un recouvrement ouvert* (U_α) *de* Y, *et, pour chaque indice* α, *un* S-*morphisme* $v_\alpha : U_\alpha \to X$ *tel que, si* $U_\alpha^0 = j^{-1}(U_\alpha)$, *on ait* $v_\alpha\circ(j|U_\alpha^0) = u_0|U_\alpha^0$, *alors il existe un* S-*morphisme* $u: Y \to X$ *tel que* $u\circ j = u_0$.

En effet, $\mathscr{G}$ est alors un $\mathcal{O}_{Y_0}$-Module quasi-cohérent (**I**, 1.3.12); en vertu de (16.5.16) et du fait que Y_0 est alors affine, le faisceau $\mathscr{P}$, qui est par hypothèse un torseur sous $\mathscr{G}$, et non seulement un pseudo-torseur, est *trivial*; mais si w est un isomorphisme de $\mathscr{G}$ sur $\mathscr{P}$ (en tant que torseurs sous $\mathscr{G}$), l'image par w de la section 0 de $\mathscr{G}$ est le S-morphisme u cherché.

16.6. Faisceaux de p-différentielles et différentielle extérieure.

(16.6.1) Soit $f: X \to S$ un morphisme de préschémas. On appelle *faisceau des* p-*différentielles de* X *relativement à* S (p entier) la *puissance extérieure* p-*ème* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 4.1.5) du $\mathcal{O}_X$-Module $\Omega^1_{X/S}$, notée

(16.6.1.1) $$\Omega^p_{X/S} = \bigwedge^p(\Omega^1_{X/S}).$$

On a donc $\Omega^0_{X/S} = \mathcal{O}_X$, et $\Omega^p_{X/S} = 0$ pour $p<0$; les $\Omega^p_{X/S}$ sont les composants homogènes de l'Algèbre extérieure sur $\Omega^1_{X/S}$

(16.6.1.2) $$\Omega^\bullet_{X/S} = \bigwedge(\Omega^1_{X/S}) = \bigoplus_{p\in\mathbf{Z}} \bigwedge^p(\Omega^1_{X/S}),$$

qui est donc une $\mathcal{O}_X$-Algèbre graduée quasi-cohérente, anticommutative et dont les éléments de degré 1 sont de carré nul. Pour tout ouvert affine U de X, on a $\Gamma(U, \Omega^\bullet_{X/S}) = \bigwedge(\Gamma(U, \Omega^1_{X/S}))$, où $\Gamma(U, \Omega^1_{X/S})$ est considéré comme $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-module.

Lorsque $S = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(B)$ sont affines, B étant donc une A-algèbre, on a ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 4.1.5) $\Omega^p_{X/S} = (\Omega^p_{B/A})^\sim$, en posant $\Omega^p_{B/A} = \bigwedge^p \Omega^1_{B/A}$.

Théorème **(16.6.2)**. — *Il existe un endomorphisme et un seul* d *du faisceau de groupes additifs* $\Omega^\bullet_{X/S}$, *ayant les propriétés suivantes :*

(i) $d\circ d = 0$.

(ii) *Pour tout ouvert* U *de* X *et toute section* $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, *on a* $df = d_{X/S}f$.

(iii) *Pour tout ouvert* U *de* X, *tout couple d'entiers* p, q *et tout couple de sections* $\omega'_p \in \Gamma(U, \Omega^p_{X/S})$, $\omega''_q \in \Gamma(U, \Omega^q_{X/S})$, *on a*

(16.6.2.1) $$d(\omega'_p \wedge \omega''_q) = (d\omega'_p) \wedge \omega''_q + (-1)^p \omega'_p \wedge d\omega''_q.$$

En outre, d est un endomorphisme de $\psi^*(\mathcal{O}_X)$*-Modules gradués, de degré* $+1$.

Supposons prouvée l'existence de l'endomorphisme d. Pour tout ouvert affine U de X, toute section de $\Omega^p_{X/S}$ au-dessus de U est (en vertu de (i)) combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de la forme $g(df_1 \wedge df_2 \wedge \ldots \wedge df_p)$, où g et les f_i sont de sections de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de U ($\mathbf{0}$, 20.4.7). Les conditions (i) et (iii) montrent alors, par récurrence sur p, que l'on a nécessairement

(16.6.2.2) $$d(g(df_1 \wedge df_2 \wedge \ldots \wedge df_p)) = dg \wedge df_1 \wedge df_2 \wedge \ldots \wedge df_p.$$

Cela prouve donc l'*unicité* de d et la dernière assertion du théorème. En vertu de cette propriété d'unicité, pour démontrer l'existence de d, on peut se borner au cas où $S = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(B)$ sont affines. Or (Bourbaki, *Alg.*, chap. III, 3^e^ éd., § 10) pour définir une A-antidérivation D de degré $+1$ d'une algèbre extérieure $\bigwedge(M)$ (où M est un B-module et B une A-algèbre), cette antidérivation prenant ses valeurs dans une A-algèbre *graduée anticommutative* $C = \bigoplus_{n=0}^{\infty} C_n$, dont les éléments de degré 1 sont de carré nul, il suffit de se donner arbitrairement une A-dérivation D_0 de B dans C_1 et un A-homomorphisme D_1 de M dans C_2; il existe alors une A-antidérivation D et une seule de $\bigwedge(M)$ dans C coïncidant avec D_0 dans B et avec D_1 dans M.

Dans le cas actuel, D_0 est nécessairement égal à $d_{B/A}$ en vertu de (ii); tout revient à voir, compte tenu de (16.6.2.2), qu'il y a un A-homomorphisme u de $\Omega^1_{B/A}$ dans $\Omega^2_{B/A}$ tel que l'on ait

(16.6.2.3) $$u(g.df) = dg \wedge df$$

quels que soient f, g dans A; il suffira pour cela de montrer qu'il existe un A-homomorphisme $v : B \otimes_A \Omega^1_{B/A} \rightarrow \Omega^2_{B/A}$ tel que

(16.6.2.4) $$v(g.\omega) = dg \wedge \omega$$

pour $g \in B$ et $\omega \in \Omega^1_{B/A}$. Finalement, comme $\Omega^1_{B/A} = \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ (où $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{B/A}$ est le noyau de l'homomorphisme canonique $B \otimes_A B \rightarrow B$) et que $\Omega^1_{B/A}$ est engendré par les éléments de la forme $g.df$, il suffit de définir un A-homomorphisme $w : B \otimes_A (B \otimes_A B) \rightarrow \Omega^2_{B/A}$ tel que

(16.6.2.5) $$w(g' \otimes g \otimes f) = dg' \wedge (g.df)$$

et tel que w soit nul dans l'image de $B \otimes_A \mathfrak{J}^2$. Or, comme le second membre de (16.6.2.5) est A-trilinéaire en g', g, f, l'existence de w vérifiant (16.6.2.5) est immédiate. Comme, d'autre part, $\mathfrak{J}$ est engendré par les éléments $1 \otimes x - x \otimes 1$ ($x \in B$), on est ramené à vérifier que lorsque $z = (1 \otimes x - x \otimes 1)(1 \otimes y - y \otimes 1)$, on a $w(g' \otimes z) = 0$. Or, comme $z = 1 \otimes (xy) + (xy) \otimes 1 - x \otimes y - y \otimes x$, la formule (16.6.2.4) montre qu'il

$R^{-1}B = B_\mathfrak{n}$ est l'unique idéal maximal $\mathfrak{n}B_\mathfrak{n}$ de cet anneau, donc l'image réciproque de $\mathfrak{p}$ dans B est égale à $\mathfrak{n}$. Mais d'autre part, si $\mathfrak{q}$ est l'image réciproque de $\mathfrak{p}$ dans C, on a $\mathfrak{q} \cap B = \mathfrak{n}$, et comme $\mathfrak{n}$ est maximal dans B et C une B-algèbre finie, $\mathfrak{q}$ est nécessairement un des idéaux maximaux de C; en outre, on a $u \notin \mathfrak{q}$ puisque $u \notin \mathfrak{r}$ et que $u \in B$, donc par hypothèse on a nécessairement $\mathfrak{q} = \mathfrak{r}$.

D'autre part, comme $B \subset C$, l'homomorphisme $g : R^{-1}B \to R^{-1}C$ est injectif ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 1.3.2); pour voir qu'il est surjectif, notons que $R^{-1}C$ est un $(R^{-1}B)$-module de type fini, et d'autre part que $\mathfrak{m}R^{-1}B$ est contenu dans l'idéal maximal de l'anneau local $R^{-1}B$; en vertu du lemme de Nakayama, il suffit de prouver que l'homomorphisme $R^{-1}B/\mathfrak{m}R^{-1}B \to R^{-1}C/\mathfrak{m}R^{-1}C$ est surjectif. Mais en vertu de la première partie de la démonstration, $R^{-1}C/\mathfrak{m}R^{-1}C$ s'identifie à $C_\mathfrak{r}/\mathfrak{m}C_\mathfrak{r}$; par hypothèse cette k-algèbre est engendrée par l'image de u, et *a fortiori* elle est égale à l'image de $R^{-1}B/\mathfrak{m}R^{-1}B$.

Considérons en second lieu le cas où f est étale au point x. En remplaçant X par un voisinage de x, on peut supposer que X est un voisinage de $\mathfrak{n}$ dans Spec(B) (1.7.2). Posons $B' = \mathrm{Spec}(A[T]/F.A[T])$ et soit $\mathfrak{n}'$ l'image réciproque de $\mathfrak{n}$ dans B'; comme l'image de F'(T) dans B' n'appartient pas à $\mathfrak{n}'$ par hypothèse, le morphisme $\mathrm{Spec}(B') \to \mathrm{Spec}(A)$ est étale au point $\mathfrak{n}'$ par (18.4.2, (ii)). Comme par hypothèse $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ est étale au point $\mathfrak{n}$, on en conclut (17.3.4) que $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(B')$ est étale au point $\mathfrak{n}$; mais comme ce morphisme est une immersion, il ne peut être étale en un point que si c'est un isomorphisme local en ce point (17.9.1), donc $B_\mathfrak{n}$ et $B'_{\mathfrak{n}'}$ sont isomorphes.

Enfin, supposons que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit une A-algèbre formellement étale; avec les notations précédentes, il résulte de (17.1.5) que $B_\mathfrak{n}$ est une $B'_{\mathfrak{n}'}$-algèbre formellement étale; mais puisque l'homomorphisme $B'_{\mathfrak{n}'} \to B_\mathfrak{n}$ est surjectif, cela ne peut avoir lieu que si cet homomorphisme est *bijectif* (**0**, 19.10.3, (i)). Ceci achève la démonstration de (18.4.6).

Corollaire **(18.4.7)**. — *Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme localement de type fini,* x *un point de* X. *Pour que* f *soit formellement non ramifié au point* x, *il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert* U *de* x *tel que* $f|U$ *se factorise en* $U \xrightarrow{j} X' \xrightarrow{h} Y$, *où* h *est un morphisme étale et* j *une immersion fermée.*

On peut évidemment se borner au cas où $Y = \mathrm{Spec}(R)$ est affine et f de type fini. Si $A = \mathcal{O}_{Y,y}$, avec $y = f(x)$, la condition pour que f soit formellement non ramifié au point x équivaut, en vertu de (17.4.1.2), à dire que $\mathcal{O}_{X,x}$ est une A-algèbre formellement non ramifiée. S'il en est ainsi, on peut appliquer (18.4.6, (i)) ; remplaçant au besoin Y par un voisinage affine de y, on peut supposer (avec les notations de (18.4.6)) que le polynôme F est l'image dans A[T] d'un polynôme unitaire $G \in R[T]$. On pose alors $X' = \mathrm{Spec}(R[T]/G.R[T])$; soit x' l'image du point $\mathfrak{n}$ de Spec(B) par le morphisme correspondant à l'homomorphisme composé $R[T]/G.R[T] \to A[T]/F.A[T] \to B$. Il résulte de (18.4.2) que le morphisme $h : X' \to Y$ correspondant à l'homomorphisme canonique $R \to R[T]/G.R[T]$ est étale au point x, donc, en restreignant au besoin X' et Y à des voisinages ouverts de x' et y respectivement, on peut supposer h étale. D'autre part, en vertu de (**I**, 6.5.1, (ii)) et de (1.7.2), il résulte du fait que l'on a un homomorphisme local $\varphi : \mathcal{O}_{X',x'} \to \mathcal{O}_{X,x}$ que cet homomorphisme correspond à un mor-

$\Delta_f : X \rightarrow X \times_S X$, par $h_n : X^{(n)}_{\Delta_f} \rightarrow X \times_S X$ le morphisme canonique (16.1.2), et considérons les deux morphismes composés

$$p_1^{(n)} : X^{(n)}_{\Delta_f} \xrightarrow{h_n} X \times_S X \xrightarrow{p_1} X, \qquad p_2^{(n)} : X^{(n)}_{\Delta_f} \xrightarrow{h_n} X \times_S X \xrightarrow{p_2} X$$

de sorte que, par définition, $p_1^{(n)}$ correspond à l'homomorphisme de faisceaux d'anneaux $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{P}^n_{X/S}$ que nous avons choisi pour définir la structure de $\mathcal{O}_X$-Algèbre sur $\mathcal{P}^n_{X/S}$ (16.3.5), et $p_2^{(n)}$ à l'homomorphisme de faisceaux d'anneaux $d^n_{X/S} : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{P}^n_{X/S}$ (16.3.6). Comme $X^{(n)}_{\Delta_f}$ et X ont même espace sous-jacent, on peut écrire

(16.7.1.1) $$\mathcal{P}^n_{X/S} = (p_1^{(n)})_*((p_2^{(n)})^*(\mathcal{O}_X)).$$

Plus généralement, nous poserons

(16.7.1.2) $$\mathcal{P}^n_{X/S}(\mathcal{F}) = (p_1^{(n)})_*((p_2^{(n)})^*(\mathcal{F}))$$

de sorte que $\mathcal{P}^n_{X/S} = \mathcal{P}^n_{X/S}(\mathcal{O}_X)$; par définition, $\mathcal{P}^n_{X/S}(\mathcal{F})$ est donc un $\mathcal{O}_X$-Module.

(16.7.2) Si l'on revient aux définitions des images réciproques de Modules sur les espaces annelés ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 4.3.1) et que l'on tienne compte de ce que $X^{(n)}_{\Delta_f}$ et X ont même espace sous-jacent, on voit que l'on peut aussi écrire la définition (16.7.1.2) sous la forme

(16.7.2.1) $$\mathcal{P}^n_{X/S}(\mathcal{F}) = \mathcal{P}^n_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$$

mais où il faut prendre garde que, dans l'interprétation du signe $\otimes$, $\mathcal{P}^n_{X/S}$ est muni de sa structure de $\mathcal{O}_X$-Module définie par *l'homomorphisme de faisceaux d'anneaux* $d^n_{X/S} : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{P}^n_{X/S}$. Il résulte aussitôt de cette formule (ou directement de (16.7.1.2)) que $\mathcal{P}^n_{X/S}(\mathcal{F})$ est canoniquement muni d'une structure de $\mathcal{P}^n_{X/S}$-*Module*.

Proposition **(16.7.3)**. — (i) *Le foncteur* $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{P}^n_{X/S}(\mathcal{F})$ *de la catégorie des* $\mathcal{O}_X$*-Modules dans celle des* $\mathcal{P}^n_{X/S}$*-Modules est exact à droite, et commute aux limites inductives quelconques ; il est exact lorsque* $\mathcal{P}^n_{X/S}$ *est un* $\mathcal{O}_X$*-Module plat.*

(ii) *Si* $\mathcal{F}$ *est un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent* (resp. *de type fini*, resp. *de présentation finie*), $\mathcal{P}^n_{X/S}(\mathcal{F})$ *est un* $\mathcal{P}^n_{X/S}$*-Module quasi-cohérent* (resp. *de type fini*, resp. *de présentation finie*).

Les assertions de (i) résultent aussitôt de la formule (16.7.2.1) et de la considération de la symétrie de $\mathcal{P}^n_{X/S}$ (16.3.4). Les assertions de (ii) découlent de l'exactitude à droite du foncteur $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{P}^n_{X/S}(\mathcal{F})$.

(16.7.4) Les deux structures de $\mathcal{O}_X$-Module de $\mathcal{P}^n_{X/S}$ définissent sur $\mathcal{P}^n_{X/S}(\mathcal{F})$ deux structures de $\mathcal{O}_X$-Module, d'ailleurs permutables, donc une structure de $\mathcal{O}_X$-*Bimodule*. Il est commode de noter *à gauche* celle de ces structures provenant de l'homomorphisme structural $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{P}^n_{X/S}$ (choisi dans (16.3.5)) et *à droite* celle provenant de l'homomorphisme $d^n_{X/S} : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{P}^n_{X/S}$. Autrement dit, pour tout ouvert U de X, et tout triplet d'éléments $a \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, $b \in \Gamma(U, \mathcal{P}^n_{X/S})$, $t \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, on a par définition

(16.7.4.1) $$a(b \otimes t) = (ab) \otimes t, \qquad (b \otimes t)a = (b \,.\, d^n a) \otimes t = b \otimes (at) = (d^n a) \,.\, (b \otimes t).$$

La structure de $\mathcal{O}_X$-Module provenant de la définition (16.7.1.2) est donc, avec ces conventions, la structure de $\mathcal{O}_X$-Module *à gauche*.

Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_X$-Module quasi-cohérent, il en est de même de $\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})$ pour l'une ou l'autre de ses structures de $\mathscr{O}_X$-Module. Si de plus $\mathscr{F}$ est de type fini (resp. de présentation finie) et $f: X \to S$ localement de type fini (resp. localement de présentation finie), $\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})$ est (pour l'une ou l'autre de ses structures de $\mathscr{O}_X$-Module) de type fini (resp. de présentation finie), comme il résulte de (16.3.9) et de (16.4.22).

(16.7.5) La définition (16.7.2.1) entraîne l'existence d'un homomorphisme de faisceaux de groupes commutatifs

(16.7.5.1) $$d^n_{X/S,\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}) \qquad \text{(aussi noté } d^n_{X/S})$$

tel qu'avec les notations de (16.7.4), on ait

(16.7.5.2) $$d^n_{X/S,\mathscr{F}}(t) = 1 \otimes t$$

et par suite, en vertu de (16.7.4.1)

(16.7.5.3) $$d^n_{X/S,\mathscr{F}}(at) = (1 \otimes t)a = (d^n_{X/S,\mathscr{F}}(t)) \, . \, a$$

(16.7.5.4) $$d^n_{X/S,\mathscr{F}}(at) = (d^n_{X/S}(a)) \, . \, (1 \otimes t) = (d^n_{X/S}(a))(d^n_{X/S,\mathscr{F}}(t)).$$

Il est donc $\mathscr{O}_X$-linéaire pour la structure de $\mathscr{O}_X$-Module *à droite* sur $\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})$, et *semi-linéaire* (relativement à l'automorphisme σ (16.3.4)) pour la structure de $\mathscr{O}_X$-Module *à gauche*.

Proposition **(16.7.6).** — *Le $\mathscr{O}_X$-Module à gauche $\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})$ est engendré par l'image de $\mathscr{F}$ par l'homomorphisme canonique $d^n_{X/S,\mathscr{F}}$.*

Cela résulte aussitôt de (16.7.5.3) et du cas particulier correspondant à $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X$ (16.3.8).

(16.7.7) Les homomorphismes canoniques de faisceaux d'anneaux

$$\varphi_{nm} : \mathscr{P}^m_{X/S} \to \mathscr{P}^n_{X/S}$$

pour $n \leqslant m$ (16.1.2) définissent, en vertu de (16.7.2.1) des homomorphismes canoniques

$$\mathscr{P}^m_{X/S}(\mathscr{F}) \to \mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}) \qquad (n \leqslant m)$$

qui sont des homomorphismes de $\mathscr{O}_X$-Bimodules en vertu de (16.1.6) et (16.7.4.1); en outre on a des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P}^m_{X/S}(\mathscr{F}) \arrow[rr] & & \mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}) \\ & \mathscr{F} \arrow[ul, "d^m_{X/S,\mathscr{F}}"] \arrow[ur, "d^n_{X/S,\mathscr{F}}"'] & \end{tikzcd}$$

On a donc ainsi un système projectif de $\mathscr{O}_X$-Bimodules $(\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}))$, et l'on pose

(16.7.7.1) $$\mathscr{P}^\infty_{X/S}(\mathscr{F}) = \varprojlim \mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}).$$

En outre, ce qui précède montre que les homomorphismes (16.7.5.1) forment un système projectif d'homomorphismes, et définissent donc un homomorphisme canonique

(16.7.7.2) $$d^\infty_{X/S,\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \mathscr{P}^\infty_{X/S}(\mathscr{F}).$$

(16.7.8) Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_X$-Modules; il résulte aussitôt de la définition (16.7.2.1) que l'on a un isomorphisme canonique de $\mathscr{P}^n_{X/S}$-Modules

(16.7.8.1) $$\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})\otimes_{\mathscr{P}^n_{X/S}}\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{G})$$

(Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3e éd., § 5, no 1, prop. 3).

On en conclut en particulier (ou l'on voit directement sur la définition (16.7.2.1)) que si $\mathscr{F}$ est muni d'une structure de $\mathscr{O}_X$-Algèbre (non nécessairement associative), $\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})$ est canoniquement muni d'une structure de $\mathscr{P}^n_{X/S}$-Algèbre; cette dernière est associative (resp. commutative, resp. unitaire, resp. une Algèbre de Lie) lorsqu'il en est ainsi de $\mathscr{F}$. En outre les homomorphismes canoniques $\mathscr{P}^m_{X/S}(\mathscr{F}) \to \mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})$ pour $n \leqslant m$ (16.7.7) sont alors des di-homomorphismes d'Algèbres; de même (16.7.5.1) est alors un homomorphisme de $\mathscr{O}_X$-Algèbres lorsque $\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})$ est muni de sa structure de $\mathscr{O}_X$-Algèbre provenant de sa structure de $\mathscr{O}_X$-Module *à droite*.

Avec les mêmes notations, on a également un homomorphisme canonique de $\mathscr{P}^n_{X/S}$-Modules

(16.7.8.2) $$\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{P}^n_{X/S}}(\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}), \mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{G}))$$

(Bourbaki, *Alg.*, 3e éd., § 5, no 3), qui est bijectif lorsque $\mathscr{P}^n_{X/S}$ est un $\mathscr{O}_X$-Module *localement libre de type fini* (*loc. cit.*, prop. 7).

(16.7.9) Supposons qu'on soit dans la situation décrite dans (16.4.1); alors, de l'homomorphisme canonique $P^n(u)$ (16.4.3.3), on déduit aussitôt un homomorphisme canonique de $\mathscr{O}_{X'}$-Bimodules

(16.7.9.1) $$u^*(\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})) \to \mathscr{P}^n_{X'/S'}(u^*(\mathscr{F})).$$

Nous laissons au lecteur le soin d'étendre à cet homomorphisme les propriétés vues dans (16.4) pour le cas $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X$.

Remarque **(16.7.10)**. — La définition de $\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})$ sous la forme (16.7.1.2) garde un sens lorsque $\mathscr{F}$ est un faisceau d'ensembles quelconque (l'image réciproque d'un faisceau d'ensembles par $p_2^{(n)}$ étant définie dans ($\mathbf{0}_I$, 3.7.1)); une variante de cette définition permet de définir le « schéma des jets » (relativement à S) d'un X-préschéma quelconque.

16.8. Opérateurs différentiels [1].

Définition **(16.8.1)**. — *Soient* $f = (\psi, \theta) : X \to S$ *un morphisme de préschémas,* $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ *deux* $\mathscr{O}_X$-*Modules,* n *un entier* $\geqslant 0$. *On dit qu'un homomorphisme de faisceaux de groupes additifs* $D : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *est un opérateur différentiel d'ordre* $\leqslant n$ *(relativement à* S*) s'il existe un homomorphisme de* $\mathscr{O}_X$-*Modules* $u : \mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}) \to \mathscr{G}$ *(où* $\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})$ *est muni de sa structure de* $\mathscr{O}_X$-*Module à gauche* (16.7.4)) *tel que l'on ait* $D = u \circ d^n_{X/S, \mathscr{F}}$.

Il est clair, en vertu de l'existence des homomorphismes canoniques

$$\mathscr{P}^m_{X/S}(\mathscr{F}) \to \mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})$$

[1] Pour un formalisme plus général, voir l'Exposé VII de [42] (dû à P. Gabriel).

pour $n \leqslant m$ (16.7.7) qu'un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n$ est aussi un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant m$ pour tout $m \geqslant n$. Si $D : \mathscr{F} \rightarrow \mathscr{G}$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n$, alors, pour tout ouvert U de X, $D|\mathrm{U} : \mathscr{F}|\mathrm{U} \rightarrow \mathscr{G}|\mathrm{U}$ est aussi un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n$.

On dit qu'un homomorphisme $D : \mathscr{F} \rightarrow \mathscr{G}$ des faisceaux de groupes additifs sous-jacents à $\mathscr{F}$ et à $\mathscr{G}$ est un *opérateur différentiel* (relativement à S) si, pour tout $x \in \mathrm{X}$, il existe un voisinage ouvert U de x et un entier $n \geqslant 0$ tels que $D|\mathrm{U} : \mathscr{F}|\mathrm{U} \rightarrow \mathscr{G}|\mathrm{U}$ soit un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n$. L'*ordre* d'un opérateur différentiel $D : \mathscr{F} \rightarrow \mathscr{G}$ est la borne inférieure des entiers n tels que D soit un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n$ (et donc $+\infty$ s'il n'y a pas de tels entiers); cet ordre est toujours fini si X est *quasi-compact*. Les opérateurs différentiels d'ordre 0 ne sont autres que les homomorphismes de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-*Modules* $\mathscr{F} \rightarrow \mathscr{G}$; on convient que tout opérateur différentiel d'ordre < 0 est *nul*. Pour $n \geqslant 0$, un opérateur différentiel n'est pas en général un homomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modules mais est toujours un homomorphisme de $\psi^*(\mathcal{O}_{\mathrm{S}})$-Modules.

Lorsque $\mathscr{F} = \mathcal{O}_{\mathrm{X}}$, un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant 1$ de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ dans $\mathscr{G}$ s'écrit d'une seule manière sous la forme $v + D$, où $v : \mathcal{O}_{\mathrm{X}} \rightarrow \mathscr{G}$ est un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-homomorphisme, et D une S-*dérivation* (16.5.1) de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ dans $\mathscr{G}$: cela résulte de la structure de $\mathrm{P}^1_{\mathrm{B/A}}$ (**0**, 20.4.8).

(16.8.2) Pour décrire de façon plus explicite un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n$, $D : \mathscr{F} \rightarrow \mathscr{G}$, il suffit, pour tout ouvert affine U de X, dont l'image dans S est contenue dans un ouvert affine V, de caractériser l'homomorphisme $\mathrm{D} = D_{\mathrm{U}} : \Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{F}) \rightarrow \Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{G})$. Si l'on pose $\Gamma(\mathrm{V}, \mathcal{O}_{\mathrm{S}}) = \mathrm{A}$, $\Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{O}_{\mathrm{X}}) = \mathrm{B}$, de sorte que B est une A-algèbre, on a $\Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{P}^n_{\mathrm{X/S}}) = (\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B})/\mathfrak{J}^{n+1}$, où l'on a posé pour abréger $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{\mathrm{B/A}}$. Posons en outre $\mathrm{M} = \Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{F})$, $\mathrm{N} = \Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{G})$; alors la définition de D signifie que pour chaque couple (U, V) vérifiant les conditions précédentes, le A-homomorphisme $\mathrm{D} : \mathrm{M} \rightarrow \mathrm{N}$ se factorise en

$$\mathrm{M} \rightarrow ((\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B})/\mathfrak{J}^{n+1}) \otimes_{\mathrm{B}} \mathrm{M} \xrightarrow{v} \mathrm{N}$$

où la première flèche est l'homomorphisme canonique $t \mapsto 1 \otimes t$, et v est un B-homomorphisme, la structure de B-module de $((\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B})/\mathfrak{J}^{n+1}) \otimes_{\mathrm{B}} \mathrm{M}$ provenant du premier facteur B(alors qu'on rappelle que dans la formation du produit tensoriel sur B, la structure de B-module de $(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B})/\mathfrak{J}^{n+1}$ provient du second facteur B). Notons maintenant que le B-module $((\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B})/\mathfrak{J}^{n+1}) \otimes_{\mathrm{B}} \mathrm{M}$ est isomorphe à $(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M})/\mathfrak{J}^{n+1}(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M})$, où $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ est considéré comme $(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B})$-module et sa structure de B-module provient de l'homomorphisme $b \mapsto b \otimes 1$ de B dans $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B}$. Soit alors D′ le B-homomorphisme de $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ dans N tel que $\mathrm{D}'(b \otimes t) = b\mathrm{D}(t)$; la condition de factorisation sur D s'exprime encore en disant que D′ doit *être nul dans le* B-*module* $\mathfrak{J}^{n+1}(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M})$.

(16.8.3) Il est clair que l'ensemble des opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant n$ de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$ est un groupe additif, noté $\mathrm{Diff}^n_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$; lorsque $\mathscr{F} = \mathscr{G} = \mathcal{O}_{\mathrm{X}}$, on écrit aussi $\mathrm{Diff}^n_{\mathrm{X/S}}$ au lieu de $\mathrm{Diff}^n_{\mathrm{X/S}}(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}, \mathcal{O}_{\mathrm{X}})$.

On a vu (16.8.1) que l'on a pour deux ouverts $\mathrm{U} \supset \mathrm{V}$ de X, un homomorphisme canonique de restriction

$$\mathrm{Diff}^n_{\mathrm{U/S}}(\mathscr{F}|\mathrm{U}, \mathscr{G}|\mathrm{U}) \rightarrow \mathrm{Diff}^n_{\mathrm{V/S}}(\mathscr{F}|\mathrm{V}, \mathscr{G}|\mathrm{V})$$

donc $U \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^n_{U/S}(\mathscr{F}|U, \mathscr{G}|U)$ est un préfaisceau de groupes additifs; en fait c'est même un *faisceau*, car pour U ouvert variable dans X, les homomorphismes $u \rightsquigarrow u \circ d^n_{U/S, \mathscr{F}|U}$ sont des *isomorphismes* de groupes additifs

(16.8.3.1) $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathscr{P}^n_{U/S}(\mathscr{F}|U), \mathscr{G}|U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Diff}^n_{U/S}(\mathscr{F}|U, \mathscr{G}|U),$$

en vertu du fait que l'image de $\mathscr{F}$ par $d^n_{X/S, \mathscr{F}}$ engendre $\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})$ (16.7.6). On note ce faisceau $\mathscr{D}\mathit{iff}^n_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$, et on a donc :

Proposition **(16.8.4)**. — *Les isomorphismes* (16.8.3.1) *définissent un isomorphisme de faisceaux de groupes additifs*

(16.8.4.1) $$\mathscr{H}\mathit{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}), \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}\mathit{iff}^n_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G}).$$

Lorsque $\mathscr{F} = \mathscr{G} = \mathcal{O}_X$, on écrit aussi $\mathscr{D}\mathit{iff}^n_{X/S}$ au lieu de $\mathscr{D}\mathit{iff}^n_{X/S}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$; il résulte de (16.8.4) que $\mathscr{D}\mathit{iff}^n_{X/S}$ s'identifie canoniquement au *dual* du $\mathcal{O}_X$-Module $\mathscr{P}^n_{X/S}$; aussi écrit-on $\langle t, D\rangle$ au lieu de $u(t)$ si t est une section de $\mathscr{P}^n_{X/S}$ au-dessus d'un ouvert et si u est l'homomorphisme de $\mathscr{P}^n_{X/S}$ dans $\mathcal{O}_X$ correspondant à D.

(16.8.5) Puisque $\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})$ est muni d'une structure de $\mathcal{O}_X$-Bimodule (16.7.4), on en déduit canoniquement une structure de $\mathcal{O}_X$-Bimodule sur $\mathscr{H}\mathit{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}), \mathscr{G})$, donc aussi sur $\mathscr{D}\mathit{iff}^n_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ en vertu de (16.8.4.1). De façon précise, à la structure de $\mathcal{O}_X$-Module à gauche de $\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})$ correspond, en vertu de la définition (16.8.1), la structure de $\mathcal{O}_X$-Module à gauche sur $\mathscr{D}\mathit{iff}^n_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ explicitée comme suit : pour tout ouvert U de X, toute section $a \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ et tout opérateur différentiel $D : \mathscr{F}|U \rightarrow \mathscr{G}|U$, aD est l'opérateur différentiel qui, à toute section $t \in \Gamma(U, \mathscr{F})$, fait correspondre la section

(16.8.5.1) $$(aD)(t) = a(D(t))$$

de $\Gamma(U, \mathscr{G})$. De même, à la structure de $\mathcal{O}_X$-Module à droite de $\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})$ correspond la structure de $\mathcal{O}_X$-Module à droite sur $\mathscr{D}\mathit{iff}^n_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ explicitée comme suit : avec les mêmes notations que ci-dessus, Da est l'opérateur différentiel qui, à $t \in \Gamma(U, \mathscr{F})$, fait correspondre la section

(16.8.5.2) $$(Da)(t) = D(at).$$

Proposition **(16.8.6)**. — *Si* $f : X \rightarrow S$ *est un morphisme localement de présentation finie,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent de présentation finie et* $\mathscr{G}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent, alors* $\mathscr{D}\mathit{iff}^n_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ *est un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent pour l'une ou l'autre structure définies dans* (16.8.5).

La proposition résulte de ce que, sous les hypothèses faites, $\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent de présentation finie (16.7.4), et de (**I**, 1.3.12).

(16.8.7) L'ensemble des opérateurs différentiels de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$ (d'ordre non précisé (16.8.1)) se note $\mathrm{Diff}_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$; on voit encore comme dans (16.8.3) que $U \rightsquigarrow \mathrm{Diff}_{U/S}(\mathscr{F}|U, \mathscr{G}|U)$ est un faisceau de groupes additifs, que nous désignerons par $\mathscr{D}\mathit{iff}_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$. Il est immédiat que $\mathscr{D}\mathit{iff}_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ est réunion de la famille filtrante croissante de ses sous-faisceaux $\mathscr{D}\mathit{iff}^n_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$; si X est quasi-compact, $\mathrm{Diff}_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$

est de même réunion de ses sous-groupes $\mathrm{Diff}^n_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ (16.8.1). Les structures de $\mathcal{O}_X$-Bimodule sur les $\mathscr{D}iff^n_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ définissent donc une structure de $\mathcal{O}_X$-Bimodule sur $\mathscr{D}iff_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$, explicitée encore par (16.8.5.1) et (16.8.5.2).

Notons que, pour $n \leqslant m$, on a un diagramme commutatif

(16.8.7.1)
$$\begin{array}{ccc} \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}), \mathscr{G}) & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{D}iff^n_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{P}^m_{X/S}(\mathscr{F}), \mathscr{G}) & \xrightarrow{\sim} & \mathscr{D}iff^m_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les isomorphismes (16.8.4.2) et la flèche verticale de gauche provient de l'homomorphisme canonique $\mathscr{P}^m_{X/S}(\mathscr{F}) \to \mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})$ (16.7.7). Pour tout ouvert U de X, munissons alors $\Gamma(U, \mathscr{P}^\infty_{X/S}(\mathscr{F})) = \varprojlim \Gamma(U, \mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}))$ de la topologie limite projective des topologies discrètes sur les $\Gamma(U, \mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}))$, ce qui définit $\Gamma(U, \mathscr{P}^\infty_{X/S}(\mathscr{F}))$ comme un $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-bimodule topologique, de sorte que $\mathscr{P}^\infty_{X/S}(\mathscr{F})$ apparaît comme un faisceau à valeurs dans la catégorie des groupes commutatifs topologiques ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 3.2.6). Alors (G, II, 1.11) la limite du système inductif de faisceaux de groupes commutatifs $(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}), \mathscr{G}))$ n'est autre que le faisceau des germes d'homomorphismes *continus* de $\mathscr{P}^\infty_{X/S}(\mathscr{F})$ dans $\mathscr{G}$ (ce dernier étant muni de la topologie discrète) : les homomorphismes continus de $\Gamma(U, \mathscr{P}^\infty_{X/S}(\mathscr{F}))$ dans le groupe discret $\Gamma(U, \mathscr{G})$ correspondent en effet biunivoquement aux systèmes inductifs d'homomorphismes de groupes $\Gamma(U, \mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})) \to \Gamma(U, \mathscr{G})$. On peut donc encore exprimer (16.8.4) en disant qu'on a un isomorphisme canonique

$$\mathscr{H}om.cont_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{P}^\infty_{X/S}(\mathscr{F}), \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}iff_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$$

où le premier membre désigne le faisceau des germes d'homomorphismes continus de $\mathscr{P}^\infty_{X/S}(\mathscr{F})$ dans $\mathscr{G}$.

Proposition (**16.8.8**). — *Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ deux $\mathcal{O}_X$-Modules, $D : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un homomorphisme de $\psi^*(\mathcal{O}_S)$-Modules, n un entier $\geqslant 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *D est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n$.*

b) *Pour toute section a de $\mathcal{O}_X$ au-dessus d'un ouvert* U, *l'homomorphisme $D_a : \mathscr{F}|U \to \mathscr{G}|U$ tel que, pour toute section t de $\mathscr{F}$ au-dessus d'un ouvert* $V \subset U$, *on ait*

(16.8.8.1)
$$D_a(t) = D(at) - aD(t)$$

est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n-1$.

c) *Pour tout ouvert* U *de* X, *toute famille $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ de $n+1$ sections de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de* U *et toute section t de $\mathscr{F}$ au-dessus de* U, *on a l'identité*

(16.8.8.2)
$$\sum_{H \subset I_{n+1}} (-1)^{\mathrm{Card}(H)} (\prod_{i \in H} a_i) D((\prod_{i \notin H} a_i)t) = 0$$

(*où* $\mathbf{I}_{n+1}$ *est l'intervalle* $1 \leqslant i \leqslant n+1$ *de* $\mathbf{N}$).

Prouvons d'abord l'équivalence de *a)* et *c)*. Par définition, pour prouver que D est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant n$, il suffit de montrer qu'il en est ainsi pour la restriction $D|\mathrm{U} : \mathscr{F}|\mathrm{U} \to \mathscr{G}|\mathrm{U}$ à tout ouvert affine U de X, et d'autre part la propriété *c)* est valable pour tout ouvert U de X si elle l'est pour tout ouvert affine. On peut donc se borner au cas où $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$ sont affines. En vertu de (16.8.2) (dont on garde les notations), la condition *a)* signifie alors que le A-homomorphisme $\mathrm{D}' : \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ tel que $\mathrm{D}'(b \otimes t) = b\mathrm{D}(t)$ s'annule dans $\mathfrak{J}^{n+1}(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M})$, ce qui, en vertu de (**0**, 20.4.4), équivaut à dire que D′ s'annule pour tous les éléments de la forme

$$\Big(\prod_{i=1}^{n+1} (a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i)\Big) . (1 \otimes t)$$

où $a_i \in \mathrm{B}$ et $t \in \mathrm{M}$. Or, cet élément s'écrit $\sum\limits_{\mathrm{H} \subset \mathrm{I}_{n+1}} (\prod\limits_{i \in \mathrm{H}} a_i) \otimes ((\prod\limits_{i \notin \mathrm{H}} a_i) t)$, et la valeur de D′ pour cet élément n'est autre que le premier membre de (16.8.8.2), ce qui prouve l'équivalence de *a)* et *c)*.

Prouvons maintenant l'équivalence de *b)* et *c)*. Raisonnons par récurrence sur n, l'assertion étant triviale pour $n = 0$. Écrivant a_{n+1} au lieu de a dans la condition *b)*, on voit, en vertu de l'hypothèse de récurrence, que la condition *b)* signifie que pour toute famille $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de n sections de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ au-dessus de U et toute section t de $\mathscr{F}$ au-dessus de U, on a

$$\sum_{\mathrm{H}' \subset \mathrm{I}_n} (-1)^{\mathrm{Card}(\mathrm{H}')} \Big(\prod_{i \in \mathrm{H}'} a_i\Big) D_{a_{n+1}}\Big(\Big(\prod_{i \notin \mathrm{H}'} a_i\Big) t\Big) = 0$$

Mais si l'on remplace dans cette relation $D_{a_{n+1}}$ par sa définition (16.8.8.1), on constate aussitôt qu'on obtient, au signe près, le premier membre de (16.8.8.2); d'où la conclusion.

Proposition (**16.8.9**). — *Si* $D : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *est un opérateur différentiel d'ordre* $\leqslant n$, *et* $D' : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ *un opérateur différentiel d'ordre* $\leqslant n'$, *alors* $D' \circ D : \mathscr{F} \to \mathscr{H}$ *est un opérateur différentiel d'ordre* $\leqslant n + n'$.

Par hypothèse, on peut écrire $D = u \circ d^n_{\mathrm{X/S},\mathscr{F}}$ et $D' = v \circ d^{n'}_{\mathrm{X/S},\mathscr{G}}$, où $u : \mathscr{P}^n_{\mathrm{X/S}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ et $v : \mathscr{P}^{n'}_{\mathrm{X/S}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ sont des $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-homomorphismes. Tout revient à montrer que l'homomorphisme composé de faisceaux de groupes additifs

$$\mathscr{F} \xrightarrow{d^n_{\mathrm{X/S},\mathscr{F}}} \mathscr{P}^n_{\mathrm{X/S}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathscr{F} \xrightarrow{u} \mathscr{G} \xrightarrow{d^{n'}_{\mathrm{X/S},\mathscr{G}}} \mathscr{P}^{n'}_{\mathrm{X/S}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathscr{G}$$

se factorise en

$$\mathscr{F} \xrightarrow{d^{n+n'}_{\mathrm{X/S},\mathscr{F}}} \mathscr{P}^{n+n'}_{\mathrm{X/S}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathscr{F} \xrightarrow{w} \mathscr{P}^{n'}_{\mathrm{X/S}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathscr{G}$$

où w est un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-homomorphisme. Il suffira de prouver le

Lemme (**16.8.9.1**). — *Il existe un* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-homomorphisme et un seul*

(**16.8.9.2**) $$\delta : \mathscr{P}^{n+n'}_{\mathrm{X/S}} \to \mathscr{P}^{n'}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{P}^n_{\mathrm{X/S}}) = \mathscr{P}^{n'}_{\mathrm{X/S}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathscr{P}^n_{\mathrm{X/S}}$$

rendant commutatif le diagramme

(16.8.9.3)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X \arrow[r, "d^{n+n'}_{X/S}"] \arrow[d, "d^n_{X/S}"'] & \mathscr{P}^{n+n'}_{X/S} \arrow[d, "\delta"] \\ \mathscr{P}^n_{X/S} \arrow[r, "d^{n'}_{X/S,\, \mathscr{P}^n_{X/S}}"'] & \mathscr{P}^{n'}_{X/S}(\mathscr{P}^n_{X/S}) \end{tikzcd}$$

On aura alors en effet un diagramme commutatif déduit de (16.8.9.3) par tensorisation avec $\mathscr{F}$

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "d^{n+n'}_{X/S,\, \mathscr{F}}"] \arrow[d, "d^n_{X/S,\, \mathscr{F}}"'] & \mathscr{P}^{n+n'}_{X/S}(\mathscr{F}) \arrow[d, "\delta\otimes 1"] \\ \mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}) \arrow[r, "d^{n'}_{X/S,\, \mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})}"'] & \mathscr{P}^{n'}_{X/S}(\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})) \end{tikzcd}$$

et d'autre part, on vérifie aussitôt sur la définition (16.7.5) que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d^{n'}_{X/S,\, \mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})}"'] & \mathscr{G} \arrow[d, "d^{n'}_{X/S,\, \mathscr{G}}"] \\ \mathscr{P}^{n'}_{X/S}(\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})) \arrow[r, "1\otimes u"'] & \mathscr{P}^{n'}_{X/S}(\mathscr{G}) \end{tikzcd}$$

est commutatif. On répondra donc à la question en prenant pour w le $\mathcal{O}_X$-homomorphisme composé

$$\mathscr{P}^{n+n'}_{X/S}(\mathscr{F}) \xrightarrow{\delta\otimes 1} \mathscr{P}^{n'}_{X/S}(\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})) \xrightarrow{1\otimes u} \mathscr{P}^{n'}_{X/S}(\mathscr{G}).$$

Reste à prouver le lemme (16.8.9.1). Compte tenu de (16.7.6), qui prouve l'unicité de δ, on est ramené au cas où $S=\operatorname{Spec}(A)$ et $X=\operatorname{Spec}(B)$ sont affines; posant $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}_{B/A}$, il s'agit de définir un homomorphisme canonique de B-modules

$$\varphi : (B\otimes_A B)/\mathfrak{J}^{n+n'+1} \to ((B\otimes_A B)/\mathfrak{J}^{n'+1})\otimes_B((B\otimes_A B)/\mathfrak{J}^{n+1})$$

les structures de B-module des deux membres provenant du premier facteur B; rappelons que dans le produit tensoriel du second membre, $(B\otimes_A B)/\mathfrak{J}^{n'+1}$ doit être considéré comme B-module à droite par son second facteur B et $(B\otimes_A B)/\mathfrak{J}^{n+1}$ comme B-module à gauche par son premier facteur B (16.7.2). Il revient au même de définir un homomorphisme de B-modules

$$\varphi_0 : B\otimes_A B \to ((B\otimes_A B)/\mathfrak{J}^{n'+1})\otimes_B((B\otimes_A B)/\mathfrak{J}^{n+1})$$

et de prouver qu'il s'annule dans $\mathfrak{J}^{n+n'+1}$. Or, on définit aussitôt un tel homomorphisme par la condition que

$$\varphi_0(b\otimes b') = \pi_{n'}(b\otimes 1)\otimes\pi_n(1\otimes b') \qquad \text{pour } b, b' \text{ dans B}$$

avec les notations de (16.3.7). En outre, il est immédiat que φ_0 est un homomorphisme d'*anneaux*. Or, on peut écrire

$$\varphi_0(b\otimes 1 - 1\otimes b) = \pi_{n'}(b\otimes 1 - 1\otimes b)\otimes\pi_n(1\otimes 1) + \pi_{n'}(1\otimes b)\otimes\pi_n(1\otimes 1) - \pi_{n'}(1\otimes 1)\otimes\pi_n(1\otimes b)$$

et on a

$$\pi_{n'}(1\otimes b)\otimes\pi_n(1\otimes 1) = \pi_{n'}(1\otimes 1)b\otimes\pi_n(1\otimes 1) = \pi_{n'}(1\otimes 1)\otimes b\pi_n(1\otimes 1) = \pi_{n'}(1\otimes 1)\otimes\pi_n(b\otimes 1)$$

d'où finalement

(16.8.9.4) $$\varphi_0(b\otimes 1 - 1\otimes b) = \pi_{n'}(b\otimes 1 - 1\otimes b)\otimes\pi_n(1\otimes 1) + \pi_{n'}(1\otimes 1)\otimes\pi_n(b\otimes 1 - 1\otimes b).$$

Un produit de $n+n'+1$ termes de la forme (16.8.9.4) est donc nécessairement nul, car il en est ainsi d'un produit de $n+1$ termes de la forme $\pi_n(b\otimes 1 - 1\otimes b)$ et d'un produit de $n'+1$ termes de la forme $\pi_{n'}(b\otimes 1 - 1\otimes b)$. La conclusion résulte donc de (**0**, 20.4.4).

Corollaire **(16.8.10)**. — *Le faisceau $\mathscr{D}iff_{X/S}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X)$ (aussi noté $\mathscr{D}iff_{X/S}$) est canoniquement muni d'une structure de faisceau d'anneaux, les $\mathscr{D}iff^n_{X/S}$ formant une filtration croissante compatible avec cette structure.*

En particulier, $\mathscr{D}iff^0_{X/S}$ est un faisceau de sous-anneaux de $\mathscr{D}iff_{X/S}$, qui s'identifie canoniquement à $\mathscr{O}_X$ (16.8.1). Les formules (16.8.5.1) et (16.8.5.2) montrent que la structure de $\mathscr{O}_X$-Bimodule de $\mathscr{D}iff_{X/S}$ provient de la multiplication à gauche et à droite par les sections de $\mathscr{O}_X$ considéré comme faisceau de sous-anneaux de $\mathscr{D}iff_{X/S}$.

Remarques **(16.8.11)**. — (i) Supposons que $\mathscr{F} = \bigoplus_{\lambda\in L}\mathscr{F}_\lambda$; alors il est clair (16.7.2.1) que $\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}) = \bigoplus_{\lambda\in L}\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}_\lambda)$; comme le foncteur $\mathscr{F}\rightsquigarrow\Gamma(U, \mathscr{F})$ commute à la formation des sommes directes quelconques, $d^n_{X/S,\mathscr{F}}$ est l'homomorphisme dont la restriction à chaque $\mathscr{F}_\lambda$ est $d^n_{X/S,\mathscr{F}_\lambda} : \mathscr{F}_\lambda \to \mathscr{P}^n_{X/S,(\mathscr{F}_\lambda)}$; on en conclut aussitôt que l'on a

$$\mathrm{Diff}^n_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) = \prod_{\lambda\in L}\mathrm{Diff}^n_{X/S}(\mathscr{F}_\lambda, \mathscr{G}),$$

et par suite aussi ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 3.2.6)

$$\mathscr{D}iff^n_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) = \prod_{\lambda\in L}\mathscr{D}iff^n_{X/S}(\mathscr{F}_\lambda, \mathscr{G}).$$

Par ailleurs, si $\mathscr{G} = \prod_{\mu\in M}\mathscr{G}_\mu$ ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 3.2.6), on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}), \mathscr{G}) = \prod_{\mu\in M}\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}), \mathscr{G}_\mu),$$

tout homomorphisme u de $\mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F})$ dans $\mathscr{G}$ correspondant biunivoquement à la famille de ses composés $u_\mu : \mathscr{P}^n_{X/S}(\mathscr{F}) \rightarrow \mathscr{G} \rightarrow \mathscr{G}_\mu$. On a donc

$$\mathrm{Diff}^n_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) = \prod_{\mu \in M} \mathrm{Diff}^n_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G}_\mu),$$

et par suite aussi

$$\mathscr{D}\mathit{iff}^n_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) = \prod_{\mu \in M} \mathscr{D}\mathit{iff}^n_{X/S}(\mathscr{F}, \mathscr{G}_\mu).$$

(ii) Jusqu'ici, on n'a guère rencontré d'opérateurs différentiels $\mathscr{F} \rightarrow \mathscr{G}$ que lorsque $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des $\mathcal{O}_X$-Modules localement libres de rang fini, auquel cas, leur structure se ramène localement, en vertu de (i), à celle du faisceau $\mathscr{D}\mathit{iff}_{X/S}$; cette dernière va être étudiée plus loin (16.11) dans un cas particulier.

16.9. Immersions régulières et quasi-régulières.

Définition (**16.9.1**). — *Soit* X *un espace annelé. On dit qu'un Idéal* $\mathscr{J}$ *de* $\mathcal{O}_X$ *est régulier* (resp. *quasi-régulier*) *si, pour tout point* $x \in \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathscr{J})$, *il existe un voisinage ouvert* U *de* x *dans* X *et une suite régulière* (**0**, 15.2.2) (resp. *quasi-régulière* (**0**, 15.2.2)) *d'éléments de* $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ *qui engendre* $\mathscr{J}|U$.

On dira qu'une suite régulière (resp. quasi-régulière) de sections de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de U qui engendre $\mathscr{J}|U$ est un *système régulier* (resp. *quasi-régulier*) *de générateurs de* $\mathscr{J}|U$.

Définition (**16.9.2**). — *Soit* $j : Y \rightarrow X$ *une immersion de préschémas et soit* U *un ouvert de* X *tel que* $j(Y) \subset U$ *et que* j *soit une immersion fermée de* Y *dans* U. *On dit que* j *est régulière* (resp. *quasi-régulière*) *si le sous-préschéma fermé* $j(Y)$ *de* U *associé à* j *est défini par un Idéal régulier* (resp. *quasi-régulier*) *de* $\mathcal{O}_U$ (condition indépendante de l'ouvert U choisi).

On dit qu'un sous-préschéma Y d'un préschéma X est *régulièrement immergé* (resp. *quasi-régulièrement immergé*) si l'injection canonique $j : Y \rightarrow X$ est une immersion régulière (resp. quasi-régulière). Si Y est un sous-préschéma fermé de X et $\mathscr{J}$ l'Idéal de $\mathcal{O}_X$ qui définit Y, il revient au même de dire que $\mathscr{J}$ est *régulier* (resp. *quasi-régulier*).

Par exemple, si A est un anneau *intègre*, f un élément $\neq 0$ de A, le sous-préschéma fermé $V(f)$ de Spec(A) (isomorphe à Spec(A/fA)) est *régulièrement immergé* dans Spec(A).

Tout Idéal régulier est quasi-régulier (**0**, 15.2.2); toute immersion régulière est quasi-régulière (cf. (16.9.11) pour une réciproque).

Proposition (**16.9.3**). — *Soient* X *un espace annelé,* $\mathscr{J}$ *un Idéal de* $\mathcal{O}_X$, $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$ *une suite finie de sections de* $\mathcal{O}_X$ *au-dessus de* X *engendrant* $\mathscr{J}$. *Pour que* (f_i) *soit une suite quasi-régulière* (**0**, 15.2.2), *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) *Les images canoniques des* f_i *dans* $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ *forment une base de cet* $\mathcal{O}_X/\mathscr{J}$*-Module.*

(ii) *L'homomorphisme surjectif canonique* (16.1.2.2)

$$\mathbf{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_X/\mathscr{J}}(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2) \rightarrow \mathscr{G}r^{\bullet}_{\mathscr{J}}(\mathcal{O}_X)$$

est bijectif.

En outre, s'il en est ainsi, toute suite $(f'_i)_{1 \leq i \leq n}$ *de* n *sections de* $\mathscr{J}$ *au-dessus de* X *qui engendre* $\mathscr{J}$ *est quasi-régulière.*

Les deux conditions de l'énoncé ne font que traduire la définition donnée dans (**0**, 15.2.2), compte tenu de la définition des homomorphismes canoniques (**0**, 15.2.1.1). La dernière assertion résulte de ce que, si un module M sur un anneau commutatif A admet une base de n éléments, tout système de générateurs de M ayant n éléments est une base de M (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, cor. 5 du th. 1).

Corollaire **(16.9.4)**. — *Soient* X *un espace annelé en anneaux locaux,* $\mathscr{J}$ *un Idéal de* $\mathcal{O}_X$. *Pour que* $\mathscr{J}$ *soit quasi-régulier, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions suivantes :*

(i) $\mathscr{J}$ *est de type fini.*

(ii) $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ *est un* $(\mathcal{O}_X/\mathscr{J})$*-Module localement libre.*

(iii) *L'homomorphisme canonique*

$$\mathbf{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_X/\mathscr{J}}(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2) \to \mathscr{G}r^{\bullet}_{\mathscr{J}}(\mathcal{O}_X) \tag{16.9.4.1}$$

est bijectif.

La nécessité des conditions résulte aussitôt de (16.9.3). Pour voir que ces conditions sont suffisantes, il faut montrer, en vertu de (16.9.3), que si, en un point $x \in \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathscr{J})$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X et n sections f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de $\mathscr{J}$ au-dessus de U dont les images canoniques dans $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ forment une base de $(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2)|U$ sur $(\mathcal{O}_X/\mathscr{J})|U$, alors il y a un voisinage ouvert $V \subset U$ de x tel que les $f_i|V$ engendrent $\mathscr{J}|V$. Or, par hypothèse, on a $\mathscr{J}_x \neq \mathcal{O}_x$, donc $\mathscr{J}_x$ est contenu dans l'idéal maximal de $\mathcal{O}_x$; comme $\mathscr{J}_x$ est un $\mathcal{O}_x$-module de type fini et que les classes des $(f_i)_x$ dans $\mathscr{J}_x/\mathscr{J}_x^2$ engendrent cet $(\mathcal{O}_x/\mathscr{J}_x)$-module, le lemme de Nakayama montre que les $(f_i)_x$ engendrent $\mathscr{J}_x$. Comme $\mathscr{J}$ est de type fini, on conclut par ($\mathbf{0}_I$, 5.2.2).

Corollaire **(16.9.5)**. — *Soient* X *un espace annelé en anneaux locaux,* $\mathscr{J}$ *un Idéal quasi-régulier de* $\mathcal{O}_X$, $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *une suite de sections de* $\mathscr{J}$ *au-dessus de* X, x *un point de* $\operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathscr{J})$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Il existe un voisinage ouvert* U *de* x *dans* X *tel que les* $f_i|U$ *forment une suite quasi-régulière d'éléments de* $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ *engendrant* $\mathscr{J}|U$.

b) *Les* $(f_i)_x$ *forment un système de générateurs de* $\mathscr{J}_x$ *dont le nombre d'éléments est le plus petit possible.*

b') *Les* $(f_i)_x$ *forment un système minimal de générateurs de* $\mathscr{J}_x$.

c) *Si* $\overline{f}_i$ *est l'image canonique de* f_i *dans* $\Gamma(X, \mathscr{J}/\mathscr{J}^2)$, *les* $(\overline{f}_i)_x$ *forment une base du* $(\mathcal{O}_x/\mathscr{J}_x)$*-module* $\mathscr{J}_x/\mathscr{J}_x^2$.

Par hypothèse, $\mathcal{O}_x$ est un anneau local, $\mathscr{J}_x$ un idéal de type fini de $\mathcal{O}_x$ contenu dans l'idéal maximal de $\mathcal{O}_x$; l'équivalence de *b)*, *b')* et *c)* résulte donc du lemme de Nakayama (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, prop. 5). Il est clair que *a)* entraîne *c)* en vertu de (16.9.3); d'autre part, il résulte de ($\mathbf{0}_I$, 5 2.2) que si la condition *c)* est vérifiée (donc aussi *b)*), il y a un voisinage U de x dans X tel que $(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2)|U$ ait un rang constant égal à n, et que les $f_i|U$ engendrent $\mathscr{J}|U$; il suffit donc d'appliquer dans U la dernière assertion de (16.9.3).

Remarques **(16.9.6)**. — (i) Sous les hypothèses générales de (16.9.5), il ne suffit pas que les $(\overline{f}_i)_y$ forment une base du $(\mathcal{O}_y/\mathscr{J}_y)$-module $\mathscr{J}_y/\mathscr{J}_y^2$ pour *tout* $y \in X$ pour que la suite (f_i) engendre $\mathscr{J}$. On en a un exemple en prenant $X = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau de Dedekind, et $\mathscr{J} = \widetilde{\mathfrak{J}}$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal premier *non principal* de A; on a alors en effet $\mathscr{J}_y/\mathscr{J}_y^2 = 0$ en tout point y distinct du point $x \in X$ correspondant à $\mathfrak{J}$, et $\mathscr{J}_x/\mathscr{J}_x^2$ est de rang 1 sur le corps $\mathscr{O}_x/\mathscr{J}_x$; en outre $\mathscr{J}$ est évidemment un Idéal régulier.

(ii) Dans (16.9.5), on ne peut remplacer « quasi-régulière » par « régulière », même lorsque X est un préschéma (cf. (16.9.12)). Désignons en effet par B l'anneau des germes de fonctions indéfiniment différentiables au point 0 dans $\mathbf{R}$; il a un idéal maximal $\mathfrak{m}$ engendré par le germe t de l'application identique de $\mathbf{R}$ au point 0, et l'intersection $\mathfrak{n}$ des $\mathfrak{m}^k$ pour $k>0$ n'est pas réduite à 0. Soit maintenant A l'anneau quotient $B[T]/\mathfrak{n}TB[T]$, et soient f_1, f_2 les images canoniques dans A des éléments t et T de B[T]. La suite (f_1, f_2) est *régulière* dans A : en effet, f_1 n'est pas diviseur de 0 dans A, car la relation $tP[T] \in \mathfrak{n}TB[T]$, pour un polynôme $P \in B[T]$, entraîne que les produits de t par les coefficients de P appartiennent à l'idéal $\mathfrak{n}$, et il en résulte aussitôt que ces coefficients sont eux-mêmes dans $\mathfrak{n}$, donc $P[T] \in \mathfrak{n}TB[T]$. Comme B/tB est isomorphe à $\mathbf{R}$, A/f_1A est isomorphe à l'anneau de polynômes $\mathbf{R}[T]$, donc intègre, et l'image de f_2 dans A/f_1A, étant égale à T, n'est donc pas diviseur de 0, ce qui prouve notre assertion. Cependant f_2 est diviseur de 0 dans A, car pour tout élément $x \in \mathfrak{n}$ non nul, l'image de x dans A est $\neq 0$, mais l'image de xT est nulle. On en conclut que la suite (f_2, f_1) *n'est pas régulière* dans A; d'autre part l'idéal $\mathfrak{J} = f_1A + f_2A$ est distinct de A, donc les conditions *b)*, *b')* et *c)* de (16.9.5) n'entraînent pas la condition *a)* lorsqu'on y remplace « quasi-régulière » par « régulière ».

(16.9.7) Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ est un schéma affine, nous dirons qu'un idéal $\mathfrak{J}$ de A est *régulier* (resp. *quasi-régulier*) si l'Idéal $\mathscr{J} = \widetilde{\mathfrak{J}}$ de $\mathscr{O}_X$ est régulier (resp. quasi-régulier); on notera que cette notion est *locale* et n'implique nullement l'existence d'un *système de générateurs de* $\mathfrak{J}$ formant dans A une suite régulière (resp. quasi-régulière) comme le montre l'exemple (16.9.6, (i)); il en est toutefois ainsi lorsque A est *local* (16.9.5).

La proposition (16.9.4) se traduit en termes d'immersions quasi-régulières de la façon suivante :

Proposition **(16.9.8)**. — *Soit $j : Y \to X$ un morphisme de préschémas; pour que j soit une immersion quasi-régulière, il faut et il suffit que j satisfasse aux conditions suivantes :*

(i) *j est une immersion localement de présentation finie.*

(ii) *Le faisceau conormal $\mathscr{G}r^1(j) = \mathscr{N}_{Y/X}$* (16.1.2) *est un $\mathscr{O}_Y$-Module localement libre.*

(iii) *L'homomorphisme canonique*

$$\mathbf{S}^{\bullet}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{G}r^1(j)) \to \mathscr{G}r^{\bullet}(j)$$

(16.1.2.2) *est bijectif.*

La question étant locale sur Y, on peut se borner au cas où j est l'injection canonique d'un sous-préschéma fermé Y de X, et alors la traduction de (16.9.4) en (16.9.8) résulte de l'explicitation de $\mathscr{G}r^1(j)$ et $\mathscr{G}r^{\bullet}(j)$ en termes de l'Idéal $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$ définissant le sous-préschéma Y (16.1.3, (ii)).

Corollaire **(16.9.9)**. — *Soient Y un préschéma, X un Y-préschéma, $j : Y \to X$ une Y-section de X, de sorte que le n-ème invariant normal $\mathscr{A}^{(n)}$ de j* (16.1.2) *est une $\mathscr{O}_Y$-Algèbre augmentée* (16.1.7); *posons $\mathscr{A}^{(\infty)} = \varprojlim \mathscr{A}^{(n)}$. Pour que j soit une immersion quasi-régulière, il faut et il suffit que j soit localement de présentation finie, et que tout $y \in Y$ admette un voisinage ouvert affine U d'anneau C tel que $\mathscr{A}^{(\infty)} | U$ soit isomorphe comme $\mathscr{O}_U$-Algèbre topologique augmentée à $\mathscr{O}_U[[T_1, \ldots, T_n]]$.*

On peut se borner au cas où j est une immersion fermée en se restreignant à un voisinage assez petit de y (voir le raisonnement de (16.4.11)), et alors $\mathscr{O}_Y$ s'identifie à une Algèbre quotient $\mathscr{O}_X/\mathscr{J}$ et l'homomorphisme surjectif canonique $\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_Y$ admet un inverse à droite (16.1.7). On peut donc supposer $X=\operatorname{Spec}(B)$ et $Y=\operatorname{Spec}(A)$ affines, B étant une A-algèbre augmentée, et l'idéal d'augmentation $\mathfrak{J}$ étant de type fini. Comme $\mathscr{A}^{(n)}$ s'identifie alors à $(B/\mathfrak{J}^{n+1})^{\sim}$, le corollaire résulte de l'équivalence de *b)* et *c)* dans (**0**, 19.5.4) puisque $B/\mathfrak{J}=A$.

On notera que, dans le cas affine envisagé, le fait que j soit une immersion quasi-régulière équivaut encore, en vertu de (**0**, 19.5.4), à dire que B est une A-algèbre *formellement lisse* pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique.

On notera aussi que la condition que j soit une immersion localement de présentation finie est toujours vérifiée lorsque le morphisme $X\rightarrow Y$ est localement de type fini (1.4.3, (v)).

Proposition (**16.9.10**). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Y *un sous-préschéma de* X, $j : Y\rightarrow X$ *l'injection canonique,* y *un point de* Y.

(i) *Pour qu'il existe un voisinage ouvert* U *de* y *dans* X *tel que la restriction* $Y\cap U\rightarrow U$ *de* j *soit une immersion régulière, il faut et il suffit que le noyau* $\mathscr{J}_y$ *de l'homomorphisme surjectif* $\mathscr{O}_{X,y}\rightarrow\mathscr{O}_{Y,y}$ *soit engendré par une suite régulière d'éléments de* $\mathscr{O}_{X,y}$.

(ii) *Pour que l'immersion* j *soit régulière, il faut et il suffit qu'elle soit quasi-régulière.*

(i) On peut se borner au cas où Y est un sous-préschéma fermé de X défini par un Idéal *cohérent* $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$. La condition est évidemment nécessaire. Inversement, si $\mathscr{J}_y$ est engendré par une suite régulière $(s_i)_y$, où les s_i sont des sections de $\mathscr{J}$ au-dessus d'un voisinage ouvert U de y dans X, on peut supposer que les s_i engendrent $\mathscr{J}|U$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.2) et forment une suite régulière (**0**, 15.2.4), d'où l'assertion.

(ii) Le fait qu'une immersion quasi-régulière soit régulière résulte de (i) et de l'identité des suites quasi-régulières et des suites régulières dans $\mathscr{O}_{X,y}$, formées d'éléments de l'idéal maximal (**0**, 15.1.11).

Lorsque (sans hypothèse noethérienne sur X) le noyau $\mathscr{J}_y$ de $\mathscr{O}_{X,y}\rightarrow\mathscr{O}_{Y,y}$ est engendré par une suite régulière d'éléments de $\mathscr{O}_{X,Y}$, on dit que l'immersion j est *régulière au point* y.

Corollaire (**16.9.11**). — *Soit* X *un préschéma localement noethérien; alors tout Idéal quasi-régulier de* $\mathscr{O}_X$ *est régulier.*

Remarques (**16.9.12**). — (i) On notera qu'une immersion régulière n'est pas en général un morphisme plat, ni *a fortiori* un morphisme *régulier* au sens de (6.8.1).

(ii) Soit A un anneau local noethérien; il résulte aussitôt de (16.9.4) et de (**0**, 17.1.1) que pour que A soit *régulier*, il faut et il suffit que son idéal maximal $\mathfrak{m}$ soit *quasi-régulier* (ou *régulier*, ce qui revient au même puisque A est noethérien). Pour qu'un schéma affine noethérien X soit *régulier*, il faut et il suffit que pour tout point fermé $x\in X$, l'injection canonique $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(x))\rightarrow X$ soit une immersion *régulière*.

Proposition (**16.9.13**). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Y *un sous-préschéma de* X, Y' *un sous-préschéma de* Y, *tel que l'injection canonique* $j : Y'\rightarrow Y$ *soit régulière. Alors la suite de* $\mathscr{O}_{Y'}$*-Modules*

(**16.9.13.1**) $$0\rightarrow j^*(\mathscr{N}_{Y/X})\rightarrow\mathscr{N}_{Y'/X}\rightarrow\mathscr{N}_{Y'/Y}\rightarrow 0$$

est exacte ; en outre, pour tout $x \in \mathrm{X}$, *il existe un voisinage ouvert* U *de* x *tel que les restrictions à* U *des homomorphismes de* (16.9.13.1) *forment une suite exacte et scindée.*

Prouvons d'abord le lemme suivant :

Lemme **(16.9.13.2)**. — *Soient* A *un anneau,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A, $\mathrm{A}'=\mathrm{A}/\mathfrak{J}$, $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ *une suite d'éléments de* A *qui est* A'*-régulière,* $\mathfrak{K}=\sum_i f_i\mathrm{A}$, $\mathfrak{L}=\mathfrak{J}+\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'=\sum_i f_i\mathrm{A}'$, *de sorte que* $\mathrm{C}=\mathrm{A}/\mathfrak{L}$ *est isomorphe à* $\mathrm{A}'/\mathfrak{K}'$. *Alors pour tout entier* $n>0$ *et tout entier* $\mathrm{N}\geqslant n$, *on a la relation*

(16.9.13.3)
$$\mathfrak{J}\cap\mathfrak{K}^n=\mathfrak{J}\mathfrak{K}^n+\mathfrak{J}\cap\mathfrak{K}^{\mathrm{N}}.$$

Il suffit évidemment de prouver que tout élément du premier membre est contenu dans le second, et, par récurrence sur n, on se ramène au cas où $\mathrm{N}=n+1$. Un élément du premier membre de (16.9.13.3), étant dans $\mathfrak{K}^n$, s'écrit $\mathrm{P}(f_1,\ldots,f_r)$, où $\mathrm{P}\in\mathrm{A}[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_r]$ est homogène et de degré n. Si f_i' est l'image canonique de f_i dans A', l'hypothèse $\mathrm{P}(f_1,\ldots,f_r)\in\mathfrak{J}$ signifie que $\mathrm{P}(f_1',\ldots,f_r')=0$. Mais $\mathrm{P}(f_1',\ldots,f_r')\in\mathfrak{K}'^n$, donc l'image canonique de $\mathrm{P}(f_1',\ldots,f_r')$ dans $\mathfrak{K}'^n/\mathfrak{K}'^{n+1}$ est nulle. Or l'hypothèse que la suite (f_i) est A'-régulière implique que l'homomorphisme canonique $\mathbf{S}_{\mathrm{C}}^n(\mathfrak{K}'/\mathfrak{K}'^2)\rightarrow\mathfrak{K}'^n/\mathfrak{K}'^{n+1}$ est bijectif (**0**, 15.1.9); on conclut que les coefficients de P appartiennent à $\mathfrak{L}=\mathfrak{J}+\mathfrak{K}$. Il en résulte aussitôt que l'on a $\mathrm{P}(f_1,\ldots,f_r)\in\mathfrak{J}\mathfrak{K}^n+\mathfrak{K}^{n+1}$, et comme $\mathrm{P}(f_1,\ldots,f_r)\in\mathfrak{J}$, on a finalement $\mathrm{P}(f_1,\ldots,f_r)\in\mathfrak{J}\mathfrak{K}^n+\mathfrak{J}\cap\mathfrak{K}^{n+1}$, ce qui prouve le lemme.

En prenant les quotients des deux membres de (16.9.13.3) par $\mathfrak{J}\mathfrak{K}^n$, on voit que les relations (16.9.13.3) pour $\mathrm{N}\geqslant n$ entraînent

(16.9.13.4)
$$(\mathfrak{J}\cap\mathfrak{K}^n)/\mathfrak{J}\mathfrak{K}^n\subset\bigcap_{\mathrm{N}\geqslant n}\mathfrak{K}^{\mathrm{N}}.(\mathrm{A}/(\mathfrak{J}\mathfrak{K}^n))$$

On en déduit le

Corollaire **(16.9.13.5)**. — *Supposons vérifiées les hypothèses de* (16.9.13.2) *et supposons en outre que l'anneau* A *soit noethérien et que* $\mathfrak{K}$ *soit contenu dans le radical de* A. *Alors on a pour tout entier* $n>0$,

(16.9.13.6)
$$\mathfrak{J}\cap\mathfrak{K}^n=\mathfrak{J}\mathfrak{K}^n.$$

En effet, le second membre de (16.9.13.4) est alors nul, puisque $\mathrm{A}/\mathfrak{J}\mathfrak{K}^n$ est un A-module de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 3, prop. 6).

Prenons en particulier $n=2$ dans (16.9.13.6), et remarquons que l'on a $\mathfrak{L}^2=\mathfrak{J}^2+\mathfrak{J}\mathfrak{K}+\mathfrak{K}^2=\mathfrak{J}\mathfrak{L}+\mathfrak{K}^2$; puisque $\mathfrak{J}\mathfrak{L}\subset\mathfrak{L}^2$, on en déduit que
$$\mathfrak{J}\cap\mathfrak{L}^2=\mathfrak{J}\mathfrak{L}+(\mathfrak{J}\cap\mathfrak{K}^2)=\mathfrak{J}\mathfrak{L}+\mathfrak{J}\mathfrak{K}^2=\mathfrak{J}\mathfrak{L},$$
autrement dit

(16.9.13.7)
$$\mathfrak{J}\cap\mathfrak{L}^2=\mathfrak{J}\mathfrak{L},$$

ce qu'on peut encore exprimer en disant que l'homomorphisme canonique
$$\mathfrak{J}/\mathfrak{J}\mathfrak{L}\rightarrow(\mathfrak{J}+\mathfrak{L}^2)/\mathfrak{L}^2$$
est bijectif.

Ces lemmes étant démontrés, prouvons la première assertion de (16.9.13) : il suffit évidemment de prouver que la suite des fibres des faisceaux figurant dans (16.9.13.1), en un point $x \in Y'$, est exacte. Or, si l'on pose $A = \mathcal{O}_{X,x}$, on peut écrire $\mathcal{O}_{Y,x} = A' = A/\mathfrak{J}$ où $\mathfrak{J}$ est un idéal contenu dans l'idéal maximal de A, puis $\mathcal{O}_{Y',x} = A'/\mathfrak{K}'$, où $\mathfrak{K}'$ est engendré par une suite A'-*régulière* d'éléments de A', eux-mêmes images des éléments d'une suite A'-régulière d'éléments de A appartenant à l'idéal maximal de A. Si $\mathfrak{K}$ est l'idéal engendré par ces derniers et $\mathfrak{L} = \mathfrak{J} + \mathfrak{K}$, on a $\mathcal{O}_{Y',x} = A/\mathfrak{L}$, et comme on est dans la situation de (16.9.13.5), l'homomorphisme canonique $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}\mathfrak{L} \to (\mathfrak{J} + \mathfrak{L}^2)/\mathfrak{L}^2$ est bijectif. Mais cela montre que la suite

$$0 \to \mathfrak{J}/\mathfrak{J}\mathfrak{L} \to \mathfrak{L}/\mathfrak{L}^2 \to (\mathfrak{L}/\mathfrak{J})/(\mathfrak{L}/\mathfrak{J})^2 \to 0$$

est exacte (voir la démonstration de (16.2.7)), et les modules figurant dans cette suite sont précisément les fibres en x des faisceaux de (16.9.13.1). La seconde assertion résulte de ce que $\mathcal{N}_{Y'/Y}$ est un $\mathcal{O}_{Y'}$-Module *localement libre* (16.9.8) et de Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3^e^ éd., § 1, n° 11, prop. 21.

16.10. Morphismes différentiellement lisses.

Définition (**16.10.1**). — *On dit qu'un morphisme de préschémas* $f : X \to S$ *est différentiellement lisse (ou que* X *est différentiellement lisse sur* S) *s'il vérifie les conditions suivantes :*

(i) $\Omega^1_{X/S}$ *est un* $\mathcal{O}_X$*-Module localement projectif, c'est-à-dire que tout point de* X *admet un voisinage ouvert affine* U *tel que* $\Gamma(U, \Omega^1_{X/S})$ *soit un* $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$*-module projectif (non nécessairement de type fini).*

(ii) *L'homomorphisme canonique* (16.3.1.1)

$$\mathbf{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/S}) \to \mathcal{G}r_{\bullet}(\mathcal{P}_{X/S})$$

est bijectif.

En particulier, si $\Omega^1_{X/S}$ *est localement libre de rang fini, les* $\mathcal{P}^n_{X/S}$ *sont des* $\mathcal{O}_X$*-Modules localement libres de rang fini* (étant des extensions de tels Modules).

On dit que f est *différentiellement lisse en un point* $x \in X$ (ou que X est différentiellement lisse sur S au point x) s'il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que $f|U$ soit différentiellement lisse.

Nous verrons plus loin (17.12.4) qu'un morphisme lisse est différentiellement lisse, ce qui justifie la terminologie; mais la réciproque est inexacte; en effet, un *monomorphisme* $f : X \to S$ est différentiellement lisse, puisque $\Omega^1_{X/S} = 0$ en vertu de (**I**, 5.3.8), et par suite l'homomorphisme surjectif (16.3.1.1) est évidemment bijectif; or un monomorphisme n'est même pas nécessairement plat, ni *a fortiori* lisse. Bornons-nous ici à noter la proposition suivante :

Proposition (**16.10.2**). — *Scient* A *un anneau,* B *une* A*-algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes* (**0**, 19.3.1). *Alors* Spec(B) *est différentiellement lisse sur* Spec(A).

En effet, $B \otimes_A B$ est alors (pour les topologies discrètes) une B-algèbre formellement lisse (pour l'un ou l'autre des homomorphismes canoniques $b \rightsquigarrow b \otimes 1$, $b \rightsquigarrow 1 \otimes b$ de B dans $B\otimes_A B$) (**0**, 19.3.5, (iii)); donc $B\otimes_A B$ est aussi une A-algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes (**0**, 19.3.5, (ii)). Posant $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}_{B/A}$, il en résulte que $B\otimes_A B$ est aussi une A-algèbre formellement lisse pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique (**0**, 19.3.8); comme par hypothèse $B=(B\otimes_A B)/\mathfrak{J}$ est une A-algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes, la proposition résulte de l'équivalence de *a)* et *b)* dans (**0**, 19.5.4).

Proposition (**16.10.3**). — *Pour qu'un morphisme $f: X\to S$ soit différentiellement lisse, il faut et il suffit que pour tout $x\in X$, il existe un voisinage ouvert affine U de x, d'anneau A, tel que $\Gamma(U, \mathscr{P}^{\infty}_{X/S})$ soit une A-algèbre topologique augmentée isomorphe à l'algèbre complétée $\widehat{B}$, où $B=\mathbf{S}_A(V)$, V étant un A-module projectif et B étant muni de la topologie B^+-préadique (où B^+ est l'idéal d'augmentation). Si $\Omega^1_{X/S}$ est localement libre de rang fini, on peut remplacer $\widehat{B}$ par l'algèbre de séries formelles $A[[T_1, \ldots, T_n]]$.*

La notion de morphisme différentiellement lisse étant évidemment locale sur X, on peut se borner au cas où $S=\mathrm{Spec}(B)$, $X=\mathrm{Spec}(C)$. Considérons $C\otimes_B C$ comme une C-algèbre (pour le premier facteur); posons $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}_{C/B}$ et munissons $C\otimes_B C$ de la topologie $\mathfrak{J}$-préadique; on peut appliquer à la C-algèbre topologique $C\otimes_B C$ et à l'idéal $\mathfrak{J}$ de $C\otimes_B C$ l'équivalence de *b)* et *c)* dans (**0**, 19.5.4), puisque $(C\otimes_B C)/\mathfrak{J}=C$ est évidemment une C-algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes. La topologie sur $\Gamma(U, \mathscr{P}^{\infty}_{X/S})$ est évidemment la topologie de limite projective de cet anneau (16.1.11).

On notera que l'entier n de l'énoncé de (16.10.3) est le *rang* de $\Omega^1_{X/S}$ au point x. Nous verrons plus loin (17.13.5) que lorsque f est différentiellement lisse et localement de type fini, n est aussi égal à la dimension de la fibre $f^{-1}(f(x))$ au point x.

Proposition (**16.10.4**). — *Soient $f: X\to S$, $g: S'\to S$ deux morphismes, et posons* $X'=X\times_S S'$, $f'=f_{(S')}: X'\to S'$.

(i) *Si f est différentiellement lisse, il en est de même de f'.*

(ii) *Inversement, si g est fidèlement plat et quasi-compact, et si f' est différentiellement lisse et $\Omega^1_{X'/S'}$ un $\mathscr{O}_{X'}$-Module de type fini, f est différentiellement lisse et $\Omega^1_{X/S}$ est un $\mathscr{O}_X$-Module de type fini.*

En effet, si f est différentiellement lisse, les $\mathscr{G}r_n(\mathscr{P}_{X/S})$ sont des $\mathscr{O}_X$-Modules *plats*; par suite (16.4.6), l'homomorphisme $\mathscr{G}r_n(\mathscr{P}_{X/S})\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{O}_{X'}\to\mathscr{G}r_n(\mathscr{P}_{X'/S'})$ est bijectif pour tout n, et en vertu de la commutativité du diagramme (16.2.1.3), il résulte de la définition (16.10.1) que f' est différentiellement lisse. D'autre part, si g est fidèlement plat et quasi-compact, il résulte encore de (16.4.6) que $\mathscr{G}r_n(\mathscr{P}_{X/S})\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{O}_{X'}\to\mathscr{G}r_n(\mathscr{P}_{X'/S'})$ est bijectif pour tout n. Supposons alors f' différentiellement lisse et $\Omega^1_{X'/S'}$ de rang fini. Comme la projection canonique $X'\to X$ est un morphisme fidèlement plat et quasi-compact, il résulte d'abord de (2.5.2) que $\Omega^1_{X/S}$ est un $\mathscr{O}_X$-Module localement libre de rang fini, puis de (2.2.7) que l'homomorphisme canonique (16.3.1.1) est bijectif, donc f est différentiellement lisse.

Proposition (**16.10.5**). — *Pour qu'un morphisme localement de type fini $f: X\to S$ soit différentiellement lisse, il faut et il suffit que l'immersion diagonale $\Delta_f: X\to X\times_S X$ soit quasi-régulière.*

La question étant locale, on peut se borner au cas où S et X sont affines, et par suite le sous-préschéma diagonal de $X\times_S X$ est fermé. L'hypothèse que f est localement de type fini entraîne que Δ_f est localement de présentation finie (1.4.3.1), donc le sous-préschéma diagonal de $X\times_S X$ est défini par un Idéal de type fini $\mathscr{J}$, et $\Omega^1_{X/S}=\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ est un $\mathscr{O}_X$-Module de type fini. La proposition résulte alors aussitôt de la comparaison des conditions dans (16.10.1) et (16.9.4).

Remarque **(16.10.6)**. — Soit $f: X\to S$ un morphisme tel que le $\mathscr{O}_X$-Module $\Omega^1_{X/S}$ soit localement libre de rang fini. Il résulte alors de $(\mathbf{0}, 20.4.7)$ que tout $x\in X$ possède un voisinage ouvert U tel qu'il existe une famille finie $(z_\lambda)_{\lambda\in L}$ de sections de $\mathscr{O}_X$ au-dessus de U pour lesquelles $(dz_\lambda)_{\lambda\in L}$ forme une *base* du $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$-module $\Gamma(U, \Omega^1_{X/S})$.

16.11. Opérateurs différentiels sur un S-préschéma différentiellement lisse.

(16.11.1) Soient $f: X\to S$ un morphisme, U un ouvert de X, $(z_\lambda)_{\lambda\in L}$ une famille de sections de $\mathscr{O}_X$ au-dessus de U telle que les dz_λ forment un système de générateurs de $\Omega^1_{X/S}|U=\Omega^1_{U/S}$. Soit m un entier ou le symbole ∞, et posons, pour tout λ

(16.11.1.1) $$\zeta_\lambda=\delta z_\lambda=d^m z_\lambda - z_\lambda\in\Gamma(U, \mathscr{P}^m_{X/S}).$$

Nous utiliserons d'autre part les notations usuelles de l'analyse; pour tout $\mathbf{p}=(p_\lambda)\in\mathbf{N}^{(L)}$ (avec $p_\lambda=0$ sauf pour un nombre fini d'indices), nous poserons

(16.11.1.2) $$|\mathbf{p}|=\sum_\lambda p_\lambda, \qquad \mathbf{p}!=\prod_\lambda (p_\lambda!)$$

(16.11.1.3) $$\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}=\mathbf{p}!/(\mathbf{q}!(\mathbf{p}-\mathbf{q})!) \qquad \text{pour } \mathbf{p}, \mathbf{q} \text{ dans } \mathbf{N}^{(L)}, \mathbf{q}\leqslant\mathbf{p}$$

et on convient que $\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}=0$ si $\mathbf{q}\not\leqslant\mathbf{p}$,

(16.11.1.4) $$\mathbf{z}^\mathbf{p}=\prod_\lambda (z_\lambda)^{p_\lambda}, \qquad \boldsymbol{\zeta}^\mathbf{p}=\prod_\lambda (\zeta_\lambda)^{p_\lambda}.$$

On aura donc, avec ces notations

(16.11.1.5) $$d^m(\mathbf{z}^\mathbf{p})=(d^m(\mathbf{z}))^\mathbf{p}=(\boldsymbol{\zeta}+\mathbf{z})^\mathbf{p}=\sum_{\mathbf{q}\leqslant\mathbf{p}}\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}\mathbf{z}^{\mathbf{p}-\mathbf{q}}\boldsymbol{\zeta}^\mathbf{q}$$

(16.11.1.6) $$\boldsymbol{\zeta}^p=(d^m\mathbf{z}-\mathbf{z})^\mathbf{p}=\sum_{\mathbf{q}\leqslant\mathbf{p}}(-1)^{|\mathbf{p}-\mathbf{q}|}\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}\mathbf{z}^{\mathbf{p}-\mathbf{q}}d^m(\mathbf{z}^\mathbf{q}).$$

Comme les dz_λ engendrent $\Omega^1_{X/S}$ et sont les images des δz_λ, et que l'homomorphisme canonique (16.3.1.1) est surjectif, on en conclut que pour m fini, les δz_λ engendrent la $\mathscr{O}_U$-Algèbre $\mathscr{P}^m_{U/S}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 8, cor. 2 du th. 1). Donc les $\boldsymbol{\zeta}^\mathbf{p}$ (pour $|\mathbf{p}|\leqslant m$) engendrent le $\mathscr{O}_U$-Module $\mathscr{P}^m_{U/S}$. Un opérateur différentiel $D\in\mathrm{Diff}^m_{U/S}$ est par suite entièrement déterminé par les valeurs des $\langle\boldsymbol{\zeta}^\mathbf{p}, D\rangle$ pour $|\mathbf{p}|\leqslant m$, ou, ce qui revient au même par (16.11.1.5) et (16.11.1.6), par les valeurs des $\langle d^m(\mathbf{z}^\mathbf{p}), D\rangle = D(\mathbf{z}^\mathbf{p})$ pour $|\mathbf{p}|\leqslant m$; de façon précise, il résulte de (16.11.1.5) que l'on a

(16.11.1.7) $$D(\mathbf{z}^\mathbf{p}) = \langle d^m(\mathbf{z}^\mathbf{p}), D\rangle = \sum_{\mathbf{q}\leqslant\mathbf{p}} \binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} \langle \boldsymbol{\zeta}^\mathbf{p}, D\rangle \mathbf{z}^{\mathbf{p}-\mathbf{q}}.$$

Théorème **(16.11.2).** — *Soient* $f: \mathrm{X}\rightarrow\mathrm{S}$ *un morphisme,* U *un ouvert de* X, $(z_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{L}}$ *une famille de sections de* $\mathcal{O}_\mathrm{X}$ *au-dessus de* U *telle que la famille* $(dz_\lambda)_{\lambda\in\mathrm{L}}$ *engendre* $\Omega^1_{\mathrm{X/S}}|\mathrm{U} = \Omega^1_{\mathrm{U/S}}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $f|\mathrm{U}$ *est différentiellement lisse et* (dz_λ) *est une base du* $\mathcal{O}_\mathrm{U}$*-Module* $\Omega^1_{\mathrm{U/S}}$.

b) *Il existe une famille* $(D_\mathbf{p})_{\mathbf{p}\in\mathbf{N}^{(\mathrm{L})}}$ *d'opérateurs différentiels de* $\mathcal{O}_\mathrm{U}$ *dans lui-même, vérifiant les conditions*

(16.11.2.1) $$D_\mathbf{p}(\mathbf{z}^\mathbf{q}) = \binom{\mathbf{q}}{\mathbf{p}} \mathbf{z}^{\mathbf{q}-\mathbf{p}} \qquad (\mathbf{p}, \mathbf{q} \textit{ dans } \mathbf{N}^{(\mathrm{L})}).$$

De plus, lorsque ces conditions sont vérifiées, la famille $(D_\mathbf{p})$ *est déterminée de façon unique par les conditions* (16.11.2.1) *et vérifie les relations*

(16.11.2.2) $$D_\mathbf{p}\circ D_\mathbf{q} = D_\mathbf{q}\circ D_\mathbf{p} = \frac{(\mathbf{p}+\mathbf{q})!}{\mathbf{p}!\,\mathbf{q}!} D_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} \qquad (\mathbf{p}, \mathbf{q} \textit{ dans } \mathbf{N}^{(\mathrm{L})}).$$

Enfin, si L *est fini, pour tout entier* m, *les* $D_\mathbf{p}$ *tels que* $|\mathbf{p}|\leqslant m$ *forment une base du* $\mathcal{O}_\mathrm{U}$*-Module* $\mathscr{D}\!\mathit{iff}^m_{\mathrm{U/S}}$, *autrement dit, tout opérateur différentiel d'ordre* $\leqslant m$ *sur* U *s'écrit d'une seule façon sous la forme*

$$D = \sum_{|\mathbf{p}|\leqslant m} a_\mathbf{p} D_\mathbf{p}$$

où les $a_\mathbf{p}$ *sont des sections de* $\mathcal{O}_\mathrm{X}$ *au-dessus de* U.

Notons d'abord qu'en vertu de (16.11.1.6) et (16.11.1.5), on vérifie aussitôt que les conditions (16.11.2.1) sont équivalentes à

(16.11.2.3) $$\langle \boldsymbol{\zeta}^\mathbf{p}, D_\mathbf{q}\rangle = \delta_{\mathbf{pq}} \qquad \text{(indice de Kronecker).}$$

L'existence de la famille $(D_\mathbf{p})$ vérifiant ces relations entraîne donc d'abord (en prenant $|\mathbf{p}|=1$) que les dz_λ sont linéairement indépendants, donc forment une *base* du $\mathcal{O}_\mathrm{U}$-Module $\Omega^1_{\mathrm{U/S}}$. Puis, pour tout entier $m\geqslant 1$, on déduit de même de (16.11.2.3) que les $\boldsymbol{\zeta}^\mathbf{p}$ tels que $|\mathbf{p}|\leqslant m$ sont linéairement indépendants; par suite l'homomorphisme canonique (16.3.1.1) est injectif, donc bijectif, et cela prouve que *b)* entraîne *a)*. La réciproque découle aussitôt de la définition (16.10.1), le fait que les $\boldsymbol{\zeta}^\mathbf{p}$ forment une base de $\mathscr{P}^m_{\mathrm{U/S}}$ pour $|p|\leqslant m$ entraînant l'existence et l'unicité d'une famille d'homomorphismes $u_{\mathbf{q},m}: \mathscr{P}^m_{\mathrm{U/S}}\rightarrow\mathcal{O}_\mathrm{U}$ ($|\mathbf{q}|\leqslant m$) tels que $\langle\boldsymbol{\zeta}^\mathbf{p}, u_{\mathbf{q},m}\rangle = \delta_{\mathbf{pq}}$ pour $|\mathbf{p}|\leqslant m$, $|\mathbf{q}|\leqslant m$. Pour une valeur de $\mathbf{q}$ donnée, les opérateurs différentiels correspondant aux $u_{\mathbf{q},m}$ pour $m\geqslant|\mathbf{q}|$ sont identifiés à un même opérateur $D_\mathbf{q}$. Cela prouve donc que *a)* entraîne *b)*, et en outre que la famille $(D_\mathbf{p})$ est déterminée de façon unique et que, si L est fini, pour $|\mathbf{p}|\leqslant m$, les $D_\mathbf{p}$ forment une base du dual $\mathscr{D}\!\mathit{iff}^m_{\mathrm{U/S}}$ de $\mathscr{P}^m_{\mathrm{U/S}}$. Enfin, les relations (16.11.2.2) découlent aussitôt de l'expression des valeurs des trois opérateurs considérés pour les $\mathbf{z}^\mathbf{r}$, et du fait que les $\boldsymbol{\zeta}^\mathbf{r}$ pour $|\mathbf{r}|\leqslant m$ engendrent $\mathscr{P}^m_{\mathrm{U/S}}$.

Remarques (**16.11.3**). — (i) Le fait que les $D_{\mathbf{p}}$ sont deux à deux permutables en vertu de (16.11.2.2) n'implique naturellement pas que la $\mathcal{O}_U$-Algèbre $\mathcal{D}iff_{U/S}$ soit commutative, les $D_{\mathbf{p}}$ ne permutant aux produits par les sections de $\mathcal{O}_U$ que si $n=0$.

(ii) Les indices $\mathbf{p}$ tels que $|\mathbf{p}|=1$ sont les $\varepsilon_\lambda=(\varepsilon_{\lambda\mu})_{\mu\in L}$ avec $\varepsilon_{\lambda\mu}=0$ si $\mu\neq\lambda$ et $\varepsilon_{\lambda\lambda}=1$; lorsque L est fini, les opérateurs D_{ε_λ} ne sont autres que les S-dérivations D_i introduites dans (16.5.7). On notera qu'en général (et contrairement à ce qui se passe en Analyse classique), il n'est pas vrai qu'un opérateur différentiel d'ordre quelconque puisse s'écrire comme combinaison linéaire de puissances des D_i (cf. (16.12)).

(iii) Pour tout entier $r\geqslant 1$, on peut définir la notion de morphisme *différentiellement lisse jusqu'à l'ordre r* en remplaçant dans (16.10.1) la condition (ii) par la condition que les homomorphismes

$$\mathbf{S}^m_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/S}) \to \mathcal{G}r_m(\mathcal{P}_{X/S})$$

soient bijectifs *pour tout* $m\leqslant r$. Le raisonnement de (16.11.2) prouve alors que si, dans la condition *a)*, on remplace « différentiellement lisse » par « différentiellement lisse jusqu'à l'ordre r », cette condition est équivalente à la condition *b)* dans laquelle on se borne aux $\mathbf{p}\in\mathbf{N}^{(L)}$, $\mathbf{q}\in\mathbf{N}^{(L)}$ tels que $|\mathbf{p}|\leqslant r$, $|\mathbf{q}|\leqslant r$.

16.12. Cas de la caractéristique nulle : critère jacobien pour les morphismes différentiellement lisses.

(**16.12.1**) On dit qu'un préschéma X est *de caractéristique p* (p égal à 0 ou à un nombre premier) si, pour tout ouvert affine U de X, l'anneau $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ est de caractéristique p (**0**, 21.1.1). Il résulte de (**0**, 21.1.3) que pour que X soit de caractéristique 0, il faut et il suffit que pour tout point *fermé* x de X, le corps résiduel $\boldsymbol{k}(x)$ soit de caractéristique 0, ou encore que X puisse être muni d'une structure de $\mathbf{Q}$-préschéma (nécessairement unique).

Théorème (**16.12.2**). — *Soient* X *un préschéma de caractéristique* 0, $f: X\to S$ *un morphisme. Si* $\Omega^1_{X/S}$ *est un* $\mathcal{O}_X$*-Module localement libre (non nécessairement de type fini), f est différentiellement lisse.*

La question étant locale sur X, on peut supposer qu'il existe une famille (z_λ) de sections de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de X telle que (dz_λ) soit une base du $\mathcal{O}_X$-Module $\Omega^1_{X/S}$. Appliquant le critère (16.11.2), il suffit de remarquer que les opérateurs

$$D_{\mathbf{p}}=(\mathbf{p}!)^{-1}\prod_\lambda D_\lambda^{p_\lambda}$$

(où les D_λ sont les formes coordonnées correspondant à la base (dz_λ)) vérifient les relations (16.11.2.1), ce qui est une conséquence du fait que les D_λ sont des dérivations.

(**16.12.3**) Le théorème précédent n'est plus exact lorsqu'on abandonne l'hypothèse que X est de caractéristique 0. Par exemple, si $S=\mathrm{Spec}(k)$, où k est un corps de caractéristique $p>0$, $X=\mathrm{Spec}(K)$ où $K=k(\alpha)$ avec $\alpha\notin k$, $\alpha^p\in k$, on vérifie aussitôt que l'hypothèse entraîne que l'homomorphisme $(f^*(\Omega^1_{Y/k}))_x \to (\Omega^1_{X/k})_x$ est surjectif, donc, en remplaçant X par un voisinage ouvert de x, on peut supposer que l'homomorphisme $f^*(\Omega^1_{Y/k}) \to \Omega^1_{X/k}$ est surjectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 1, prop. 2); par suite f est *non ramifié* (17.2.2). Nous allons voir d'abord qu'on peut se borner au cas où x est *rationnel sur* k. En effet, si l'on pose $k'=\boldsymbol{k}(x)$, et $X'=X\otimes_k k'$, $Y'=Y\otimes_k k'=\operatorname{Spec}(k'[T_1, \ldots, T_n])$, il existe un point $x'\in X'$ au-dessus de x, tel que $\boldsymbol{k}(x')=k'$. Pour prouver que f est étale au point x, il suffit de montrer que $f'=f_{(k')}: X'\to Y'$ est étale au point x' (17.7.1, (ii)); d'ailleurs f' est non ramifié (17.3.3, (iii)) et l'on a $\dim_{x'}(X')=n$ (4.2.7). De la même manière on peut, en remplaçant k' par une extension algébriquement close de k', supposer que k est *algébriquement clos*. Posons alors $y=f(x)$, $A=\mathcal{O}_{Y,y}$, $B=\mathcal{O}_{X,x}$; comme le corps résiduel de B est égal à k, il en est de même de celui de A, donc x (resp. y) est un point fermé de X (resp. Y) (**I**, 6.4.2) et l'on a par suite $\dim(A)=\dim(B)=n$. Puisque f est non ramifié, l'homomorphisme $\hat{A}\to\hat{B}$ est *surjectif* (17.4.4, f'')); mais comme $\dim(\hat{A})=\dim(\hat{B})=n$, et que $\hat{A}$, étant un anneau régulier, est intègre, l'homomorphisme $\hat{A}\to\hat{B}$ est aussi *injectif* (**0**, 16.3.10). Cet homomorphisme est donc bijectif, ce qui achève de prouver que f est étale au point x (17.6.3, e'')).

Corollaire **(17.15.4)**. — *Sous les hypothèses générales de* (17.15.3), *supposons en outre que* $\boldsymbol{k}(x)$ *soit une extension* finie *et* séparable *de* k *et que les germes* $(g_i)_x$ *appartiennent à* $\mathfrak{m}_x$. *Alors les conditions* a), b), c) *de* (17.15.3) *équivalent aussi à chacune des suivantes :*

d) *Les n germes $(g_i)_x$ engendrent l'idéal maximal $\mathfrak{m}_x$ de $\mathcal{O}_{X,x}$.*

d') *L'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier et les $(g_i)_x$ forment un système régulier de paramètres pour cet anneau* (**0**, 17.1.6).

En effet, *d')* entraîne trivialement *d)*. D'autre part, comme $\boldsymbol{k}(x)$ est une extension finie et séparable de k, on a $\Omega^1_{\boldsymbol{k}(x)/k}=0$ (**0**, 20.6.20) et $\boldsymbol{k}(x)=\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ est une k-algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes (**0**, 19.6.1), donc la suite exacte (**0**, 20.5.14.1) s'applique à $A=k$, $B=\mathcal{O}_{X,x}$, $\mathfrak{K}=\mathfrak{m}_x$, et fournit un isomorphisme canonique

$$\delta : \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \xrightarrow{\sim} (\Omega^1_{X/k})_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \boldsymbol{k}(x).$$

De là on déduit d'abord l'équivalence des conditions *c)* et *d)*, compte tenu du lemme de Nakayama. D'autre part, si f est étale au point x, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier et de dimension n, puisque x est un point fermé de X (**I**, 6.4.2), et n éléments de $\mathfrak{m}_x$ qui engendrent cet idéal maximal forment alors nécessairement un système régulier de paramètres pour $\mathcal{O}_{X,x}$ (**0**, 17.1.6), ce qui prouve que *a)* entraîne *d')*.

Proposition **(17.15.5)**. — *Soient k un corps,* X *un préschéma localement de type fini sur k, x un point de* X, $n=\dim_x(X)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) X *est lisse sur k au point x.*

b) X *est différentiellement lisse sur k au point x.*

c) $(\Omega^1_{X/k})_x$ *est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module libre de rang n.*

d) $(\Omega^1_{X/k})_x$ *est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module admettant un système de n générateurs.*

est surjective (resp. injective, resp. bijective); par composition, on en conclut qu'il en est de même de (17.1.1.1).

(iii) On notera que les propriétés du morphisme f définies dans (17.1.1) sont des propriétés du *foncteur représentable* ($\mathbf{0}_{\text{III}}$, 8.1.8)

$$Y' \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_Y(Y', X)$$

de la catégorie des Y-préschémas dans la catégorie des ensembles; elles gardent un sens pour *n'importe quel* foncteur contravariant ayant mêmes catégories de départ et d'arrivée, représentable ou non.

(iv) Supposons que le morphisme f soit formellement non ramifié (resp. formellement étale); considérons un Y-préschéma *quelconque* Z et un sous-préschéma fermé Z_0 de Z défini par un Idéal *localement nilpotent* $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_Z$. Alors l'application

(17.1.2.1) $$\mathrm{Hom}_Y(Z, X) \rightarrow \mathrm{Hom}_Y(Z_0, X)$$

déduite de l'injection canonique $Z_0 \rightarrow Z$, est encore injective (resp. bijective). En effet, soit (U_α) un recouvrement ouvert affine de Z tel que les Idéaux $\mathscr{J}|U_\alpha$ soient nilpotents, et pour tout α, soit U_α^0 l'image réciproque de U_α dans Z_0, qui est le sous-schéma fermé de U_α défini par $\mathscr{J}|U_\alpha$. Soit $f_0 : Z_0 \rightarrow X$ un Y-morphisme; par hypothèse, pour tout α, il y a au plus un (resp. un et un seul) Y-morphisme $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow X$ dont la restriction à U_α^0 soit égale à $f_0|U_\alpha^0$. On en conclut aussitôt que si f_α et f_β sont définis, alors, pour tout ouvert affine $V \subset U_\alpha \cap U_\beta$, on a $f_\alpha|V = f_\beta|V$, puisque les restrictions de ces morphismes à l'image réciproque V_0 de V dans Z_0 coïncident. Il y a donc au plus un (resp. un et un seul) Y-morphisme $f : Z \rightarrow X$ dont la restriction à Z_0 coïncide avec f_0.

Proposition **(17.1.3)**. — (i) *Un monomorphisme de préschémas est formellement non ramifié; une immersion ouverte est formellement étale.*

(ii) *Le composé de deux morphismes formellement lisses* (resp. *formellement non ramifiés*, resp. *formellement étales*) *est formellement lisse* (resp. *formellement non ramifié*, resp. *formellement étale*).

(iii) *Si* $f : X \rightarrow Y$ *est un* S-*morphisme formellement lisse* (resp. *formellement non ramifié*, resp. *formellement étale*), *il en est de même de* $f_{(S')} : X_{(S')} \rightarrow Y_{(S')}$ *pour toute extension* $S' \rightarrow S$ *du préschéma de base.*

(iv) *Si* $f : X \rightarrow X'$ *et* $g : Y \rightarrow Y'$ *sont deux* S-*morphismes formellement lisses* (resp. *formellement non ramifiés*, resp. *formellement étales*), *il en est de même de* $f \times_S g : X \times_S Y \rightarrow X' \times_S Y'$.

(v) *Soient* $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ *deux morphismes; si* $g \circ f$ *est formellement non ramifié, il en est de même de* f.

(vi) *Si* $f : X \rightarrow Y$ *est un morphisme formellement non ramifié, il en est de même de* $f_{\text{red}} : X_{\text{red}} \rightarrow Y_{\text{red}}$.

En vertu de (**I**, 5.5.12), il suffit de prouver (i), (ii) et (iii). Les deux assertions de (i) sont triviales. Pour prouver (ii), considérons deux morphismes $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, un schéma affine Z', un sous-schéma fermé Z'_0 de Z' défini par un Idéal nilpotent et un morphisme $Z' \rightarrow Z$. Supposons f et g formellement lisses, et considérons un Z-morphisme $u_0 : Z'_0 \to X$; l'hypothèse sur g entraîne qu'il existe un Z-morphisme $v : Z' \to Y$ tel que $f \circ u_0 = v \circ j$ (où $j : Z'_0 \to Z'$ est l'injection canonique); l'hypothèse sur f entraîne alors qu'il existe un morphisme $u : Z \to X$ tel que $f \circ u = v$ et $u \circ j = u_0$, donc $(g \circ f) \circ u$ est égal au morphisme donné $Z' \to Z$ et $u \circ j = u_0$, ce qui prouve que $g \circ f$ est formellement lisse; on raisonne de même lorsque l'on suppose f et g formellement non ramifiés.

Enfin, pour démontrer (iii), posons $X' = X_{(S')}$, $Y' = Y_{(S')}$, $f' = f_{(S')}$; considérons un schéma affine Y'', un sous-schéma fermé Y''_0 de Y'' défini par un Idéal nilpotent et un morphisme $g : Y'' \to Y'$ faisant de Y'' un Y'-préschéma; on sait alors (**I**, 3.3.8) que $\mathrm{Hom}_{Y'}(Y'', X')$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_Y(Y'', X)$ et $\mathrm{Hom}_{Y'}(Y''_0, X')$ à $\mathrm{Hom}_Y(Y'', X)$, et la conclusion résulte alors immédiatement de la définition (17.1.1).

On notera qu'une *immersion fermée* n'est pas nécessairement un morphisme formellement lisse.

Proposition (**17.1.4**). — *Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ deux morphismes, et supposons g formellement non ramifié. Alors, si $g \circ f$ est formellement lisse* (resp. *formellement étale*), *il en est de même de f.*

En effet, soient Y' un schéma affine, Y'_0 un sous-schéma fermé de Y' défini par un Idéal nilpotent, $h : Y' \to Y$ un morphisme, $j : Y'_0 \to Y'$ l'injection canonique, $u_0 : Y'_0 \to X$ un Y-morphisme, donc tel que $f \circ u_0 = h \circ j$. Supposons $g \circ f$ formellement lisse; alors il existe un morphisme $u : Y' \to X$ tel que $u \circ j = u_0$ et $(g \circ f) \circ u = g \circ h$. Mais ces relations entraînent que $f \circ u$ et h sont deux Z-morphismes de Y' dans Y tels que $(f \circ u) \circ j = h \circ j$; en vertu de l'hypothèse que g est formellement non ramifié, on en tire que $f \circ u = h$, autrement dit u est un Y-morphisme; donc f est formellement lisse. Compte tenu de (17.1.3, (v)), cela démontre la proposition.

Corollaire (**17.1.5**). — *Supposons g formellement étale; alors, pour que $g \circ f$ soit formellement lisse* (resp. *formellement non ramifié*, resp. *formellement étale*), *il faut et il suffit que f le soit.*

Cela résulte de (17.1.4) et de (17.1.3, (ii) et (v)).

Proposition (**17.1.6**). — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de préschémas.*

(i) *Soit (U_α) un recouvrement ouvert de X et, pour tout α, soit $i_\alpha : U_\alpha \to X$ l'injection canonique. Pour que f soit formellement lisse* (resp. *formellement non ramifié*, resp. *formellement étale*), *il faut et il suffit que chacun des morphismes $f \circ i_\alpha$ le soit.*

(ii) *Soit (V_λ) un recouvrement ouvert de Y. Pour que f soit formellement lisse* (resp. *formellement non ramifié*, resp. *formellement étale*), *il faut et il suffit que chacune des restrictions $f^{-1}(V_\lambda) \to V_\lambda$ de f le soit.*

Notons d'abord que (ii) est conséquence de (i) : en effet, si $j_\lambda : V_\lambda \to Y$ et $i_\lambda : f^{-1}(V_\lambda) \to X$ sont les injections canoniques, la restriction $f_\lambda : f^{-1}(V_\lambda) \to V_\lambda$ de f est telle que $j_\lambda \circ f_\lambda = f \circ i_\lambda$; si f est formellement lisse (resp. formellement non ramifié), il en est de même de $f \circ i_\lambda$ puisque i_λ est formellement étale (17.1.3); mais comme j_λ est formellement étale, cela entraîne que f_λ est formellement lisse (resp. formellement non ramifié) en vertu de (17.1.5). Inversement, si tous les f_λ sont formellement lisses (resp. formellement non ramifiés), il en est de même des $j_\lambda \circ f_\lambda$ (17.1.3), donc aussi de f en vertu de (i).

Si l'on tient compte de ce que les i_α sont formellement étales, tout revient donc à prouver que si les $f \circ i_\alpha$ sont formellement lisses (resp. formellement non ramifiés), il en est de même de f.

Soient donc Y' un schéma affine, Y'_0 un sous-schéma fermé de Y' défini par un Idéal nilpotent $\mathscr{J}$, que l'on peut supposer tel que $\mathscr{J}^2=0$ (17.1.2, (ii)), et enfin soit $g: Y' \to Y$ un morphisme. Supposons donné un Y-morphisme $u_0: Y'_0 \to X$; désignons par W_α (resp. W^0_α) le préschéma induit par Y' (resp. Y'_0) sur l'ouvert $u_0^{-1}(U_\alpha)$ (on rappelle que Y' et Y'_0 ont *même espace topologique sous-jacent*). Supposons d'abord que les $f \circ i_\alpha$ soient *formellement non ramifiés*, et montrons que, si u' et u'' sont deux Y-morphismes de Y' dans X dont les restrictions à Y'_0 coïncident, alors on a $u'=u''$. En effet, compte tenu de (17.1.2, (iv)), l'hypothèse que les $f \circ i_\alpha$ sont non ramifiés entraîne que pour tout α, on a $u'|W_\alpha = u''|W_\alpha$, puisque les restrictions de ces deux Y-morphismes à W^0_α coïncident. D'où la conclusion dans ce cas.

Supposons maintenant tous les $f \circ i_\alpha$ *formellement lisses* et prouvons qu'il existe un Y-morphisme $u: Y' \to X$ dont u_0 est la restriction à Y'_0. Or, puisque Y' est un *schéma affine*, on peut appliquer (16.5.17) dont les hypothèses sont satisfaites, et dont la conclusion démontre précisément l'existence de u.

On peut donc dire que les notions introduites dans (17.1.1) sont *locales* sur X et sur Y, ce qui permet toujours, en vertu de (17.1.2, (i)), de se ramener à l'étude des *algèbres* formellement lisses (resp. formellement non ramifiées, resp. formellement étales).

17.2. Propriétés différentielles générales.

Proposition (**17.2.1**). — *Pour qu'un morphisme* $f: X \to Y$ *soit formellement non ramifié, il faut et il suffit que* $\Omega^1_f = 0$ (ce qu'on écrit encore $\Omega^1_{X/Y}=0$ (16.3.1)).

Compte tenu de (17.1.6), on est ramené au cas où $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(B)$ sont affines, et la conclusion résulte alors de (**0**, 20.7.4) et de l'interprétation de $\Omega^1_{X/Y}$ dans ce cas (16.3.7).

Corollaire (**17.2.2**). — *Soient* $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ *deux morphismes. Pour que f soit formellement non ramifié, il faut et il suffit que l'homomorphisme canonique* (16.4.19)

$$f^*(\Omega^1_{Y/Z}) \to \Omega^1_{X/Z}$$

soit surjectif.

C'est une conséquence immédiate de (17.2.1) et de la suite exacte (16.4.19.1).

Proposition (**17.2.3**). — *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme formellement lisse.*

(i) *Le* $\mathscr{O}_X$*-Module* $\Omega^1_{X/Y}$ *est localement projectif* (16.10.1). *Si f est localement de type fini,* $\Omega^1_{X/Y}$ *est localement libre de type fini.*

(ii) *Pour tout morphisme* $g: Y \to Z$, *la suite* (16.4.19) *de* $\mathscr{O}_X$*-Modules*

$$(\mathbf{17.2.3.1}) \qquad 0 \to f^*(\Omega^1_{Y/Z}) \to \Omega^1_{X/Z} \to \Omega^1_{X/Y} \to 0$$

est exacte; en outre, pour tout $x \in X$, *il existe un voisinage ouvert* U *de x tel que les restrictions à* U *des homomorphismes de* (17.2.3.1) *forment une suite exacte et* scindée.

(i) On sait (16.3.9) que si f est localement de type fini, Ω^1_f est un $\mathcal{O}_X$-Module de type fini. Pour prouver que, dans tous les cas, il est localement projectif, on peut se borner, en vertu de (17.1.6), au cas où $Y = \operatorname{Spec}(A)$ et $X = \operatorname{Spec}(B)$ sont affines, et cela résulte de l'hypothèse sur f et de (**0**, 20.4.9 et **0**, 19.2.1).

(ii) Ici encore, on peut se borner au cas où X, Y et Z sont affines (17.1.6) et la conclusion résulte dans ce cas de l'interprétation des Modules figurant dans la suite (17.2.3.1) et de (**0**, 20.5.7).

Corollaire (**17.2.4**). — *Si* $f : X \to Y$ *est un morphisme formellement étale, alors, pour tout morphisme* $g : Y \to Z$, *l'homomorphisme canonique de* $\mathcal{O}_X$*-Modules*

$$f^*(\Omega^1_{Y/Z}) \to \Omega^1_{X/Z}$$

est bijectif.

Cela résulte de l'exactitude de la suite (17.2.3.1) et du fait que l'on a alors $\Omega^1_{X/Y} = 0$ (17.2.1).

Proposition (**17.2.5**). — *Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme,* X' *un sous-préschéma de* X *tel que le morphisme composé* $X' \xrightarrow{j} X \xrightarrow{f} Y$ *(où j est l'injection canonique) soit formellement lisse. Alors la suite de* $\mathcal{O}_{X'}$*-Modules* (16.4.21)

(17.2.5.1)
$$0 \to \mathcal{N}_{X'/X} \to \Omega^1_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'} \to \Omega^1_{X'/Y} \to 0$$

est exacte ; en outre, pour tout $x \in X$, *il existe un voisinage ouvert* U *de* x *tel que les restrictions à* U *des homomorphismes de* (17.2.5.1) *forment une suite exacte et* scindée.

Toujours en vertu de (17.1.6), on peut se borner au cas où $Y = \operatorname{Spec}(A)$ et $X = \operatorname{Spec}(B)$ sont affines, et $X' = \operatorname{Spec}(B/\mathfrak{J})$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal de B. Alors le faisceau conormal $\mathcal{N}_{X'/X}$ correspond au B-module $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ (16.1.3), et la conclusion découle de (**0**, 20.5.14).

Proposition (**17.2.6**). — *Soient* X, Y *deux préschémas,* $f : X \to Y$ *un morphisme localement de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) f *est un monomorphisme.*

b) f *est radiciel et formellement non ramifié.*

c) *Pour tout* $y \in Y$, *la fibre* $f^{-1}(y)$ *est vide ou* $\boldsymbol{k}(y)$*-isomorphe à* $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$ (autrement dit, est réduite à un seul point z tel que $\boldsymbol{k}(y) \to \mathcal{O}_z/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_z$ soit un *isomorphisme*).

Le fait que *a)* entraîne *c)* résulte de (8.11.5.1). Il est clair que *c)* entraîne que f est radiciel; montrons qu'il résulte aussi de *c)* que $\Omega^1_{X/Y} = 0$, ce qui prouvera que *c)* entraîne *b)* (17.2.1). Notons que le $\mathcal{O}_X$-Module $\Omega^1_{X/Y}$ est quasi-cohérent de type fini (16.3.9). Il résulte donc de (**I**, 9.1.13.1) que, pour que $(\Omega^1_{X/Y})_x = 0$, il faut et il suffit que si l'on pose $Y_1 = \operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$, $X_1 = f^{-1}(y) = X \times_Y Y_1$, on ait $(\Omega^1_{X_1/Y_1})_x = 0$; mais comme le morphisme $f_1 : X_1 \to Y_1$ déduit de f est formellement non ramifié en vertu de l'hypothèse *c)* (17.1.3), la conclusion résulte de (17.2.1). Prouvons enfin que *b)* entraîne *a)*; pour cela, considérons le morphisme diagonal $g = \Delta_f : X \to X \times_Y X$; puisque f est radiciel, g est surjectif (1.8.7.1); d'autre part, $\Omega^1_{X/Y}$ est par définition le faisceau conormal $\mathcal{G}r_1(g)$ de l'immersion g (16.3.1), et dire que f est formellement non ramifié signifie donc que

$\mathscr{G}r_1(g)=0$ (17.2.1). En outre, g est localement de présentation finie (1.4.3.1); donc l'hypothèse $\mathscr{G}r_1(g)=0$ entraîne que g est une immersion ouverte (16.1.10); étant surjective, cette immersion est un isomorphisme, donc f est un monomorphisme (**I**, 5.3.8).

17.3. Morphismes lisses, morphismes non ramifiés, morphismes étales.

Définition (**17.3.1**). — *On dit qu'un morphisme* $f: X \to Y$ *est lisse* (resp. *non ramifié*, ou ***net*** [1] resp. *étale*) *s'il est localement de présentation finie et formellement lisse* (resp. *formellement non ramifié*, resp. *formellement étale*).

On dit encore alors que X est *lisse* (resp. *non ramifié* ou ***net***, resp. *étale*) *sur* Y.

Nous verrons plus loin (17.5.2) que cette définition d'un morphisme lisse coïncide avec celle déjà donnée dans (6.8.1); jusque-là, c'est la définition de (17.3.1) que nous utiliserons exclusivement.

Il est clair que dire que f est étale signifie qu'il est *à la fois* lisse et non ramifié.

Remarques (**17.3.2**). — (i) On notera que la définition (17.3.1) peut s'exprimer uniquement à l'aide du foncteur

$$Y' \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_Y(Y', X)$$

considéré dans (17.1.2, (iii)), car dire que f est localement de présentation finie équivaut à dire que le foncteur précédent *commute aux limites projectives de schémas affines* (8.14.2).

(ii) Soient A un anneau, B une A-algèbre. On dit que B est une A-algèbre *lisse* (resp. *non ramifiée*, resp. *étale*) si le morphisme correspondant $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ est lisse (resp. non ramifié, resp. étale). Il revient au même de dire que B est une A-algèbre *de présentation finie* (1.4.6) et formellement lisse (resp. formellement non ramifiée, resp. formellement étale) pour les topologies discrètes.

(iii) Il résulte de (17.1.6) et de la définition d'un morphisme localement de présentation finie (1.4.2) que les notions de morphisme lisse, non ramifié et étale sont *locales sur* X *et sur* Y.

Proposition (**17.3.3**). — (i) *Une immersion ouverte est étale. Pour qu'une immersion soit non ramifiée, il faut et il suffit qu'elle soit localement de présentation finie.*

(ii) *Le composé de deux morphismes lisses* (resp. *non ramifiés*, resp. *étales*) *est lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*).

(iii) *Si* $f: X \to Y$ *est un* S-*morphisme lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*), *il en est de même de* $f_{(S')}: X_{(S')} \to Y_{(S')}$ *pour toute extension* $S' \to S$ *du préschéma de base.*

(iv) *Si* $f: X \to X'$ *et* $g: Y \to Y'$ *sont deux* S-*morphismes lisses* (resp. *non ramifiés*, resp. *étales*), *il en est de même de* $f \times_S g : X \times_S Y \to X' \times_S Y'$.

---

[1] Les mots « net » et « formellement net » paraissent bien préférables à la terminologie consacrée de « non ramifié » (resp. « formellement non ramifié ») et seront employés à peu près exclusivement à partir du chap. V. Dans ce chapitre, nous avons conservé l'ancienne terminologie afin de ne pas entrer en conflit avec (**0**, 19.10).

(v) *Soient* $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ *deux morphismes; si* g *est localement de type fini et si* $g \circ f$ *est non ramifié, alors* f *est non ramifié.*

Cela résulte aussitôt de (1.4.3) et de (17.1.3).

Proposition **(17.3.4)**. — *Soient* $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ *deux morphismes, et supposons* g *non ramifié. Alors, si* $g \circ f$ *est lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*), *il en est de même de* f.

En effet, comme g et $g \circ f$ sont localement de présentation finie, il en est de même de f (1.4.3, (v)); la conclusion résulte donc de (17.1.4) et (17.1.3, (v)).

Corollaire **(17.3.5)**. — *Supposons* g *étale; alors, pour que* f *soit lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*), *il faut et il suffit que* $g \circ f$ *le soit.*

Cela résulte de (17.3.4) et de (17.3.3, (ii)).

Proposition **(17.3.6)**. — *Soient* $g: Y \to S$, $h: X \to S$ *deux morphismes localement de présentation finie. Pour qu'un* S-*morphisme* $f: X \to Y$ *soit non ramifié, il faut et il suffit que l'homomorphisme canonique* (16.4.19)

$$f^*(\Omega^1_{Y/S}) \to \Omega^1_{X/S}$$

soit surjectif.

Comme f est alors localement de présentation finie (1.4.3, (v)), la proposition résulte aussitôt de (17.2.2).

Définition **(17.3.7)**. — *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme. On dit que* f *est lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*) *en un point* $x \in X$ *s'il existe un voisinage ouvert* U *de* x *dans* X *tel que la restriction* $f|U$ *soit un morphisme lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*) *de* U *dans* Y.

On dit encore alors que X est *lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*) *sur* Y *au point* x.

Compte tenu de la remarque (17.3.2, (iii)), il revient au même de dire que f est un morphisme lisse (resp. non ramifié, resp. étale) ou qu'il est lisse (resp. non ramifié, resp. étale) en chaque point de X.

Il est clair que l'ensemble des points de X où un morphisme $f: X \to Y$ est lisse (resp. non ramifié, resp. étale) est *ouvert* dans X.

Proposition **(17.3.8)**. — *Pour tout préschéma* Y *et tout* $\mathcal{O}_Y$-*Module localement libre* $\mathcal{E}$ *de type fini, le préschéma fibré vectoriel* $\mathbf{V}(\mathcal{E})$ (**II**, 1.7.8) *est un* Y-*préschéma lisse.*

En effet (17.3.2, (iii)), on peut se borner au cas où $Y = \mathrm{Spec}(A)$ est affine et $\mathbf{V}(\mathcal{E}) = \mathrm{Spec}(A[T_1, \ldots, T_r])$; comme $A[T_1, \ldots, T_r]$ est une A-algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes (**0**, 19.3.2) et de présentation finie, cela démontre la proposition (17.3.2, (ii)).

Corollaire **(17.3.9)**. — *Sous les hypothèses de* (17.3.8), *le préschéma fibré projectif* $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ (**II**, 4.1.1) *est un* Y-*préschéma lisse.*

On peut encore se borner au cas où $Y = \mathrm{Spec}(A)$ est affine et $\mathbf{P}(\mathcal{E}) = \mathbf{P}^r_Y$. On sait alors (**II**, 2.3.14) qu'on a un recouvrement ouvert fini de $\mathbf{P}^r_A$ en prenant les $D_+(T_i)$ ($0 \leqslant i \leqslant r$), égaux respectivement aux spectres des anneaux $S_{(f)}$, où l'on remplace S par $A[T_0, T_1, \ldots, T_r]$ et f par T_i; mais il résulte aussitôt de la définition de $S_{(f)}$ (**II**, 2.2.1) que cet anneau, dans le cas considéré, est isomorphe à $A[T_0, \ldots, T_{i-1}, T_{i+1}, \ldots, T_r]$; donc le corollaire résulte de (17.3.8).

17.4. Caractérisations des morphismes non ramifiés.

Théorème (**17.4.1**). — *Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme localement de présentation finie, x un point de* X. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *f est non ramifié au point x.*

b) *Le morphisme diagonal* $\Delta_f : X \to X \times_Y X$ *est un isomorphisme local au point x.*

b') *Si l'on pose* $\Delta_f = (\psi, \theta)$, $Z = X \times_Y X$ *et* $z = \psi(x)$, *l'homomorphisme* $\theta_z^\sharp : \mathcal{O}_{Z,z} \to \mathcal{O}_{X,x}$ *est bijectif.*

b'') *Pour tout morphisme* $g : Y' \to Y$, *et tout point* $y' \in Y'$ *au-dessus de* $y = f(x)$, *toute* Y'*-section* s' *de* $X' = X \times_Y Y'$ *telle que* $x' = s'(y')$ *soit au-dessus de x est un isomorphisme local au point* y'.

c) *On a* $(\Omega^1_{X/Y})_x = 0$.

d) *Le* $\boldsymbol{k}(y)$*-préschéma* $f^{-1}(y)$ *est non ramifié sur* $\boldsymbol{k}(y)$ *au point x.*

d') *Le point x est isolé dans* $X_y = f^{-1}(y)$ (autrement dit (**Err**$_{\text{III}}$, 20), le morphisme f est *quasi-fini au point x*) *et l'anneau* $\mathcal{O}_{X_y,x}$ *est un corps, extension séparable de* $\boldsymbol{k}(y)$.

d'') *L'anneau* $\mathcal{O}_{X_y,x} = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x}$ *est un corps, extension finie séparable de* $\boldsymbol{k}(y)$.

e) *L'anneau* $\mathcal{O}_{X,x}$ *est une* $\mathcal{O}_{Y,y}$*-algèbre formellement non ramifiée pour les topologies discrètes.*

Comme f est localement de type fini, le $\mathcal{O}_X$-Module $\Omega^1_{X/Y}$ est de type fini (16.3.9), donc il revient au même de dire que $(\Omega^1_{X/Y})_x = 0$ ou qu'il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\Omega^1_{X/Y}|U = 0$. Compte tenu de (17.2.1), cela prouve l'équivalence de *a)* et *c)*. D'autre part, si l'on pose $A = \mathcal{O}_{Y,y}$, $B = \mathcal{O}_{X,x}$, on a $(\Omega^1_{X/Y})_x = \Omega^1_{B/A}$ (16.4.15), et l'équivalence de *c)* et *e)* résulte donc de (**0**, 20.7.4).

Comme *d')* ne fait intervenir que des propriétés du morphisme $X_y \to \operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$, l'équivalence de *a)* et *d')* entraînera *ipso facto* celle de *d)* et *d')*. D'autre part *d')* et *d'')* sont équivalentes, car il revient au même de dire que $\mathcal{O}_{X_y,x}$ est une $\boldsymbol{k}(y)$-algèbre *finie* ou que x est un point isolé de X_y, puisque X_y est un $\boldsymbol{k}(y)$-préschéma localement de type fini (**I**, 6.4.4).

Prouvons maintenant l'équivalence de *b)* et *b')*. On peut se limiter au cas où $Y = \operatorname{Spec}(R)$ et $X = \operatorname{Spec}(S)$ sont affines et f de présentation finie; alors on a $Z = \operatorname{Spec}(S \otimes_R S)$ et Δ_f correspond à l'homomorphisme canonique surjectif $S \otimes_R S \to S$, dont on sait que le noyau $\mathfrak{J}$ est un idéal *de type fini* (**0**, 20.4.4). Si l'on pose $\mathscr{J} = \widetilde{\mathfrak{J}}$, le $\mathcal{O}_Z$-Module $\psi_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Z/\mathscr{J}$ est donc de présentation finie, et l'hypothèse que l'homomorphisme $\theta_z : \mathcal{O}_{Z,z} \to (\psi_*(\mathcal{O}_X))_z$ est bijectif entraîne qu'en remplaçant au besoin X par un voisinage ouvert de x, l'homomorphisme $\theta : \mathcal{O}_Z \to \psi_*(\mathcal{O}_X)$ est lui-même bijectif (**0**$_{\text{I}}$, 5.2.7). Cela montre donc que *b')* entraîne *b)* ; la réciproque est évidente.

D'autre part, l'équivalence de *b)* et *b'')* résulte de (**I**, 5.3.7) sans hypothèse de finitude sur f : la donnée d'une Y'-section $s' : Y' \to X'$ équivaut en effet à celle d'un

Y-morphisme $h = g' \circ s' : Y' \rightarrow X$ (où $g' : X' \rightarrow X$ est la projection canonique), de sorte que $s' = (1_{Y'}, h)_X$, et alors le diagramme

(17.4.1.1)
$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "s'"] \arrow[d, "h"'] & X' = Y' \times_Y X \arrow[d, "h \times_X 1_X"] \\ X \arrow[r, "\Delta_f"'] & X \times_Y X \end{tikzcd}$$

identifie Y′ au produit des $(X \times_Y X)$-préschémas X et X′. Par suite (**I**, 4.3.2) si Δ_f est un isomorphisme local au point x, s' est un isomorphisme local au point y' (puisque $x = h(y')$), ce qui prouve que *b)* implique *b″)*. La réciproque s'obtient en appliquant *b″)* au cas où l'on prend $Y' = X$, $y' = x$, $g = f$ et $s' = \Delta_f$.

Pour achever la démonstration de (17.4.1), il suffit de prouver les implications

$$d'') \Rightarrow c) \Rightarrow b) \Rightarrow d'')$$

d″) ⇒ *c)* : Comme $\Omega^1_{X/Y}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module de type fini, il résulte du lemme de Nakayama que la condition *c)* équivaut à $(\Omega^1_{X/Y})_x / \mathfrak{m}_y (\Omega^1_{X/Y})_x = 0$, c'est-à-dire (16.4.5) à $(\Omega^1_{X_y/\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y))})_x = 0$. On est donc ramené au cas où Y est le spectre d'un corps k et X un k-préschéma algébrique. L'hypothèse que $\mathcal{O}_{X,x}$ est un corps k', extension *finie* de k, entraîne d'abord que x est *fermé* dans X (**I**, 6.4.2), puis que x est point *maximal* du préschéma noethérien X, donc est un point *isolé* de X. Remplaçant X par l'ouvert $\{x\}$ de X, on peut donc supposer que $X = \mathrm{Spec}(k')$; mais alors l'hypothèse que k' est extension *finie séparable* de k entraîne $\Omega^1_{k'/k} = 0$ (**0**, 20.6.20), ce qui prouve *c)*.

c) ⇒ *b)* : On a vu plus haut que l'on a alors $\Omega^1_{X/Y} | U = 0$ pour un voisinage ouvert U de x dans X; l'assertion *b)* résulte alors de la définition de $\Omega^1_{X/Y}$ (16.3.1) et de (16.1.9).

b) ⇒ *d″)* : Remplaçant X par un voisinage ouvert de x, on peut supposer que Δ_f est une immersion ouverte; si l'on désigne par $f_y : X_y \rightarrow \mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$ le morphisme déduit de f par changement de base, Δ_{f_y} est alors aussi une immersion ouverte (**I**, 5.3.4), et comme la condition *d″)* ne concerne que le préschéma X_y, on voit qu'on peut se borner au cas où Y est le spectre d'un corps k, X le spectre d'une k-algèbre A de type fini; la propriété *d″)* sera établie si l'on prouve que A est une k-algèbre *finie et séparable*, une telle algèbre étant composée directe d'extensions finies séparables de k. Si K est une extension algébriquement close de k, il revient au même de dire que $A \otimes_k K$ est une K-algèbre finie et séparable (4.6.1), donc on voit qu'on peut se borner au cas où k est *algébriquement clos*. Montrons d'abord que A est une k-algèbre *finie* : il suffira de montrer que tout point *fermé* x de X est *isolé*, car alors l'ensemble de ces points est ouvert dans X et discret, donc fini puisqu'il est quasi-compact (X étant noethérien), ce qui établira notre assertion en vertu de (**I**, 6.4.4). Or, on a alors $\boldsymbol{k}(x) = k$ puisque k est algébriquement clos (**I**, 6.4.3), donc il y a une Y-section s de X telle que $s(Y) = \{x\}$, et en vertu de (17.4.1.1), $\{x\}$ est l'image réciproque de la diagonale $\Delta_X(X)$ par un morphisme $X \rightarrow X \times_Y X$, donc $\{x\}$ est ouvert dans X en vertu de l'hypothèse *b)*. On a ainsi montré que A est une

k-algèbre *finie*, composée directe de k-algèbres finies locales. Pour exprimer que Δ_f est une immersion ouverte, on peut donc se borner au cas où A est une k-algèbre locale finie, $X = \mathrm{Spec}(A)$ étant donc réduit à un seul point; le corps résiduel de A, étant une extension finie de k, est nécessairement identique à k, et par suite (**I**, 3.4.9) $X \times_k X$ est réduit à un seul point et Δ_f est donc nécessairement un *isomorphisme*. Or, puisque A est une k-algèbre, l'homomorphisme canonique $A \otimes_k A \to A$ ne peut être bijectif que si $A = k$. C.Q.F.D.

Remarque (**17.4.1.2**). — Supposons seulement que f soit *localement de type fini.* Alors $\Omega^1_{X/Y}$ est encore un $\mathcal{O}_X$-Module de type fini (16.3.9), et Δ_f un morphisme localement de présentation finie (1.4.3.1). Toute la démonstration de (17.4.1) est donc valable, à condition de remplacer *a)* par : *la restriction de f à un voisinage convenable de x est un morphisme formellement non ramifié.* On voit en outre que dans ce cas la restriction de f à un voisinage convenable de x est un morphisme ***localement*** *quasi-fini.*

Corollaire (**17.4.2**). — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme localement de présentation finie. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *f est non ramifié.*

b) *Le morphisme diagonal $\Delta_f : X \to X \times_Y X$ est une immersion ouverte.*

b') ***Pour tout morphisme*** $Y' \to Y$, ***toute*** Y'***-section de*** $X' = X \times_Y Y'$ ***est une immersion*** *ouverte.*

c) *On a $\Omega^1_{X/Y} = 0$.*

d) *Pour tout $y \in Y$, le $\boldsymbol{k}(y)$-préschéma $f^{-1}(y)$ est non ramifié sur $\boldsymbol{k}(y)$.*

d') *Pour tout $y \in Y$, le $\boldsymbol{k}(y)$-préschéma $f^{-1}(y)$ est isomorphe à un préschéma de la forme $\coprod_{\lambda \in L} \mathrm{Spec}(K_\lambda)$, où, pour tout $\lambda \in L$, K_λ est une extension finie et séparable de $\boldsymbol{k}(y)$.*

e) *Pour tout $x \in X$, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est une $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-algèbre formellement non ramifiée pour les topologies discrètes.*

Corollaire (**17.4.3**). — *Si $f : X \to Y$ est non ramifié, alors f est localement quasi-fini* (**Err**$_{\mathrm{III}}$, 20).

Proposition (**17.4.4**). — *Soient* Y *un préschéma* localement noethérien, $f : X \to Y$ *un morphisme localement de type fini, x un point de X, $y = f(x)$. Posons $A = \mathcal{O}_{Y,y}$, $B = \mathcal{O}_{X,x}$, qui sont des anneaux locaux noethériens, et soit k le corps résiduel de A. Alors les conditions équivalentes* a) *à* e) *du théorème* (17.4.1) *sont aussi équivalentes à chacune des suivantes :*

f) $\hat{B} \otimes_{\hat{A}} k$ *est un corps, extension finie séparable de k* (ce qui entraîne que $\hat{B}$ est une $\hat{A}$-algèbre *finie*).

f') $\hat{B}$ *est une* $\hat{A}$*-algèbre formellement non ramifiée pour les topologies adiques.*

Si de plus $\boldsymbol{k}(x) = \boldsymbol{k}(y)$, ou si k est séparablement clos, ces conditions équivalent aussi à :

f'') *L'homomorphisme $\hat{A} \to \hat{B}$ est surjectif.*

Notons d'abord, par le même raisonnement que dans (**0**, 19.3.6), qu'il revient au même de dire que B est une A-algèbre formellement non ramifiée pour les topologies préadiques, ou que $\hat{B}$ est une $\hat{A}$-algèbre formellement non ramifiée pour les topologies adiques. D'autre part, l'hypothèse que f est localement de type fini entraîne que $\Omega^1_{B/A}$

est un B-module de type fini (16.3.9), donc *séparé* pour la topologie $\mathfrak{n}$-préadique (où $\mathfrak{n}$ est l'idéal maximal de B) ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.5); il revient par suite au même de dire que $\Omega^1_{B/A}=0$ ou que $\hat{\Omega}^1_{B/A}=0$; donc ($\mathbf{0}$, 20.7.4), il revient au même de dire que B est une A-Algèbre formellement non ramifiée pour les topologies *discrètes*, ou pour les topologies *préadiques*. Ceci prouve l'équivalence des conditions *e)* et *f')*. Si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A, on a $k=A/\mathfrak{m}=\hat{A}/\mathfrak{m}\hat{A}$, donc $\hat{B}\otimes_{\hat{A}}k=\hat{B}/\mathfrak{m}\hat{B}=\hat{B}\otimes_B(B/\mathfrak{m}B)$, et par suite ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.5) $\hat{B}/\mathfrak{m}\hat{B}$ est le complété de $B/\mathfrak{m}B=B\otimes_A k$ pour la topologie $\mathfrak{n}$-préadique; ceci prouve l'équivalence de *d'')* et de *f)*. Enfin, lorsque $\boldsymbol{k}(x)=\boldsymbol{k}(y)$ ou lorsque k est séparablement clos, la condition *f)* entraîne que l'homomorphisme $\hat{A}/\mathfrak{m}\hat{A}\rightarrow\hat{B}/\mathfrak{m}\hat{B}$ est bijectif; la condition *f)* implique d'autre part que $\hat{B}$ est une $\hat{A}$-algèbre *quasi-finie* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.4.4), donc *finie* puisque $\hat{A}$ est complet et $\hat{B}$ séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-préadique, $\mathfrak{m}\hat{B}$ étant un idéal de définition de $\hat{B}$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.4.1). L'homomorphisme $\hat{A}\rightarrow\hat{B}$ est donc surjectif en vertu du lemme de Nakayama. Donc *f)* entraîne alors *f'')*, et la réciproque est évidente.

(17.4.5) Étant donnés un S-préschéma Y et deux S-morphismes $f:X\rightarrow Y$, $g:X\rightarrow Y$, on en déduit canoniquement un S-morphisme $(f,g)_S:X\rightarrow Y\times_S Y$. Nous appellerons *préschéma des coïncidences* de f et g l'image réciproque par $(f,g)_S$ de la *diagonale* $\Delta_{Y|S}$; c'est donc un sous-préschéma de X, qui est *fermé* lorsque Y est un S-*schéma* (**I**, 5.4.1).

Proposition **(17.4.6)**. — *Soient* $h:Y\rightarrow S$ *un morphisme non ramifié, et soient* $f:X\rightarrow Y$, $g:X\rightarrow Y$ *deux* S-*morphismes. Alors le préschéma* C *des coïncidences de f et g est un sous-préschéma induit sur un ouvert de* X; *si de plus* Y *est un* S-*schéma* (**I**, 5.4.1), C *est un sous-préschéma fermé de* X.

En effet, puisque $\Delta_h:Y\rightarrow Y\times_S Y$ est une immersion ouverte (17.4.2), l'image réciproque par $(f,g)_S$ de $\Delta_{Y|S}$ est un sous-préschéma induit sur un ouvert de X (**I**, 4.4.1). La dernière assertion résulte de (17.4.5).

Corollaire **(17.4.7)**. — *Sous les hypothèses de* (17.4.6), *soit x un point de* X *tel que les deux morphismes composés* $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(x))\rightarrow X\xrightarrow{f}Y$ *et* $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(x))\rightarrow X\xrightarrow{g}Y$ *soient égaux. Alors il existe un voisinage ouvert* U *de x tel que* $f|U=g|U$. *Si de plus* Y *est un* S-*schéma, il existe un voisinage ouvert et fermé* X' *de x dans* X *tel que* $f|X'=g|X'$. *Si enfin on suppose en outre que* X *est connexe, on a* $f=g$.

Cela résulte de (17.4.6) et de (**I**, 5.3.17).

Corollaire **(17.4.8)**. — *Sous les hypothèses de* (17.4.6), *supposons que le morphisme structural* $\varphi=h\circ f=h\circ g$ *de* X *dans* S *soit fermé. Soit s un point de* S; *soit* X_s *le* $\boldsymbol{k}(s)$-*préschéma* $\varphi^{-1}(s)$ *et supposons que les deux morphismes composés* $X_s\rightarrow X\xrightarrow{f}Y$ *et* $X_s\rightarrow X\xrightarrow{g}Y$ *soient égaux. Alors il existe un voisinage ouvert* V *de s dans* S *tel que* $f|\varphi^{-1}(V)=g|\varphi^{-1}(V)$. *Si de plus* Y *est un* S-*schéma et si* φ *est ouvert, on peut prendre* V *ouvert et fermé. Si enfin on suppose de plus* S *connexe, on a* $f=g$.

Il résulte de (17.4.7) que le préschéma C des coïncidences de f et g est induit sur un ouvert de X et contient X_s. Comme φ est fermé, il existe un voisinage ouvert V de s tel que $\varphi^{-1}(V)\subset C$. Si de plus Y est un S-schéma, C est fermé, donc $\varphi(X-C)$ est à la fois ouvert et fermé dans S, et son complémentaire V dans S est donc un voisinage ouvert et fermé de s tel que $\varphi^{-1}(\mathrm{V})\subset\mathrm{C}$.

Proposition (**17.4.9**). — *Soient* Y *un préschéma connexe,* $f:\mathrm{X}\rightarrow\mathrm{Y}$ *un morphisme non ramifié et séparé. Alors toute* Y-*section* g *de* X *est un isomorphisme de* Y *sur une composante connexe ouverte de* X, *et l'application* $g\rightsquigarrow g(\mathrm{Y})$ *est une bijection de* $\Gamma(\mathrm{X}/\mathrm{Y})$ *sur l'ensemble des composantes connexes* Z *de* X (nécessairement *ouvertes* dans X) *telles que la restriction de* f *à* Z *soit un isomorphisme de* Z *sur* Y. *En particulier, si* g' *et* g'' *sont deux* Y-*sections de* X *telles que* $g'(y)=g''(y)$ *pour un* $y\in\mathrm{Y}$, *on a* $g'=g''$.

Il résulte en effet de (17.4.1, *b''*)) qu'une Y-section s de X est une immersion ouverte, et comme X est un Y-schéma, s est aussi une immersion fermée (**I**, 5.4.7); il en résulte que s est un isomorphisme de Y sur un sous-préschéma de X induit sur une partie ouverte et fermée de X, et comme $s(\mathrm{Y})$ est connexe, c'est nécessairement une composante connexe de X. Le reste de la proposition est immédiat.

Remarque (**17.4.10**). — Compte tenu de la remarque (17.4.1.2), on voit que, dans les énoncés (17.4.6) à (17.4.9), on peut remplacer partout les mots « non ramifié » par « formellement non ramifié et localement de type fini ».

17.5. Caractérisations des morphismes lisses.

Théorème (**17.5.1**). — *Soient* $f:\mathrm{X}\rightarrow\mathrm{Y}$ *un morphisme localement de présentation finie,* x *un point de* X, $y=f(x)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) f *est lisse au point* x.

b) f *est plat au point* x *et le* $\boldsymbol{k}(y)$-*préschéma* $f^{-1}(y)$ *est lisse sur* $\boldsymbol{k}(y)$ *au point* x.

b') f *est régulier au point* x (6.8.1).

c) *L'anneau* $\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}$ *est une* $\mathcal{O}_{\mathrm{Y},y}$-*algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes.*

On peut se borner au cas où $\mathrm{Y}=\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, $\mathrm{X}=\mathrm{Spec}(\mathrm{C})$, où $\mathrm{C}=\mathrm{B}/\mathfrak{J}$, $\mathrm{B}=\mathrm{A}[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n]$ étant une algèbre de polynômes et $\mathfrak{J}$ un idéal de B *de type fini*. L'équivalence de *a)* et *c)* résulte alors de l'équivalence de *a)* et *c)* dans (**0**, 22.6.4). D'autre part, appliquant ce résultat au morphisme localement de type fini $f^{-1}(y)\rightarrow\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$, on voit que l'équivalence de *b)* et *b')* résulte de l'équivalence de *a)* et *b)* dans (6.8.6). Reste donc à démontrer l'équivalence de *a)* et *b)*.

Montrons d'abord que *a)* entraîne *b)*; notons $\mathfrak{p}$ l'idéal premier $\mathfrak{j}_x$ dans C, $\mathfrak{r}$ l'idéal premier $\mathfrak{j}_y$ dans A; on a $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}/\mathfrak{J}$, où $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B et $\mathfrak{r}$ est l'image réciproque de $\mathfrak{q}$ dans A. L'hypothèse *a)* entraîne d'abord que $f^{-1}(y)$ est lisse sur $\boldsymbol{k}(y)$ au point x par (17.3.3), et il s'agit de montrer en outre que $\mathrm{C}_{\mathfrak{p}}=\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}$ est un $\mathrm{A}_{\mathfrak{r}}$-module *plat*. Comme $\mathrm{C}_{\mathfrak{p}}$ est une $\mathrm{A}_{\mathfrak{r}}$-algèbre formellement lisse et que B est une A-algèbre formellement lisse (pour les topologies discrètes), le critère jacobien (**0**, 22.6.4), joint à (**0**, 19.1.12), entraîne qu'il existe dans $\mathfrak{J}$ un système de r polynômes u_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ et r indices j_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ tels que les images des u_i dans $\mathfrak{J}_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{J}_{\mathfrak{q}}^2$ engendrent ce $\mathrm{B}_{\mathfrak{q}}$-module et que l'on ait

(**17.5.1.1**) $$\det(\partial u_i/\partial\mathrm{T}_{j_k})\notin\mathfrak{q}.$$

Notons maintenant que si $g : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ est le morphisme structural, la fibre $g^{-1}(y)$ est le spectre de l'anneau *régulier* $\boldsymbol{k}(y)[T_1, \ldots, T_n]$ ($\mathbf{0}$, 17.3.7), donc l'anneau local noethérien $B_\mathfrak{q}/\mathfrak{r}B_\mathfrak{q}$ en un point de cette fibre est régulier. Or, la condition (17.5.1.1) entraîne que les images canoniques v_i des u_i dans l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $B_\mathfrak{q}/\mathfrak{r}B_\mathfrak{q}$ sont *linéairement indépendantes* mod. $\mathfrak{m}^2$: sinon, en effet, il existerait des polynômes $w_i \in B$ ($1 \leqslant i \leqslant r$) n'appartenant pas tous à $\mathfrak{q}$ et tels que $\sum_{i=1}^{r} w_i u_i \in \mathfrak{q}^2$. En dérivant par rapport aux T_{j_k}, on en conclurait que $\sum_{i=1}^{r} w_i(\partial u_i/\partial T_{j_k}) \in \mathfrak{q}$ pour $1 \leqslant k \leqslant r$, ce qui contredirait (17.5.1.1) puisque $\mathfrak{q}$ est premier. On conclut donc de ($\mathbf{0}$, 17.1.7) que (v_i) est une *suite régulière* dans $B_\mathfrak{q}/\mathfrak{r}B_\mathfrak{q}$. Mais comme le morphisme g est localement de présentation finie et que B est un A-module plat, il résulte de (11.3.8) que les images canoniques u'_i des u_i dans $B_\mathfrak{q}$ forment aussi une *suite régulière* et que $B_\mathfrak{q}/(\sum_i u'_i B_\mathfrak{q})$ est un $A_\mathfrak{r}$-module *plat*. Comme les images des u'_i dans $\mathfrak{J}_\mathfrak{q}/\mathfrak{J}_\mathfrak{q}^2$ engendrent ce $B_\mathfrak{q}$-module, il résulte du lemme de Nakayama que l'on a $\sum_i u'_i B_\mathfrak{q} = \mathfrak{J}_\mathfrak{q}$, et $C_\mathfrak{p} = B_\mathfrak{q}/\mathfrak{J}_\mathfrak{q}$ est donc bien un $A_\mathfrak{r}$-module plat.

Prouvons enfin que *b)* implique *a)*. Avec les mêmes notations, l'hypothèse que $B_\mathfrak{q}/\mathfrak{J}_\mathfrak{q}$ est un $A_\mathfrak{r}$-module plat entraîne que l'homomorphisme canonique $\mathfrak{J}_\mathfrak{q}/\mathfrak{r}\mathfrak{J}_\mathfrak{q} \to B_\mathfrak{q}/\mathfrak{r}B_\mathfrak{q}$ est *injectif* ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.1.2), de sorte que $\mathfrak{J}_\mathfrak{q}/\mathfrak{r}\mathfrak{J}_\mathfrak{q}$ est identifié à un idéal de $B_\mathfrak{q}/\mathfrak{r}B_\mathfrak{q}$. Comme $B_\mathfrak{q}/\mathfrak{r}B_\mathfrak{q}$ est une $A_\mathfrak{r}$-algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes, on peut appliquer à $C_\mathfrak{p} = (B_\mathfrak{q}/\mathfrak{r}B_\mathfrak{q})/(\mathfrak{J}_\mathfrak{q}/\mathfrak{r}\mathfrak{J}_\mathfrak{q})$, le critère jacobien ($\mathbf{0}$, 22.6.4); joint à ($\mathbf{0}$, 19.1.12), ce dernier prouve, en vertu de l'hypothèse *b)*, l'existence de r polynômes $v_i \in \boldsymbol{k}(y)[T_1, \ldots, T_n]$ tels que leurs images dans $(\mathfrak{J}_\mathfrak{q}/\mathfrak{r}\mathfrak{J}_\mathfrak{q})/(\mathfrak{J}_\mathfrak{q}/\mathfrak{r}\mathfrak{J}_\mathfrak{q})^2$ engendrent ce $(B_\mathfrak{q}/\mathfrak{r}B_\mathfrak{q})$-module et que l'on ait

$$\textbf{(17.5.1.2)} \qquad \det(\partial v_i/\partial T_{j_k}) \notin \mathfrak{q}B_\mathfrak{q}/\mathfrak{r}B_\mathfrak{q}.$$

Si, pour tout i, on désigne alors par u_i un élément de $\mathfrak{J}$ dont v_i est l'image canonique, il résulte de (17.5.1.2) que les u_i vérifient la condition (17.5.1.1); d'autre part, en vertu du lemme de Nakayama, les images u'_i des u_i dans $\mathfrak{J}_\mathfrak{q}$ engendrent ce $B_\mathfrak{q}$-module. Le critère jacobien ($\mathbf{0}$, 22.6.4) joint à ($\mathbf{0}$, 19.1.12), prouve alors que $C_\mathfrak{p} = B_\mathfrak{q}/\mathfrak{J}_\mathfrak{q}$ est une $A_\mathfrak{r}$-algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes. C.Q.F.D.

Corollaire **(17.5.2)**. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme localement de présentation finie. Pour que f soit lisse (au sens de* (17.3.1)*), il faut et il suffit que f soit régulier* (6.8.1), *autrement dit que f soit plat et que pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ soit un $\boldsymbol{k}(y)$-préschéma géométriquement régulier* (6.7.6).

On a ainsi établi *l'équivalence* des deux définitions de « morphisme lisse » données dans (6.8.1) et (17.3.1).

Proposition **(17.5.3)**. — *Soient* Y *un préschéma* localement noethérien, $f : X \to Y$ *un morphisme localement de type fini, x un point de* X, $y = f(x)$. *Posons* $A = \mathcal{O}_{Y,y}$, $B = \mathcal{O}_{X,x}$, *qui sont des anneaux locaux noethériens. Alors les conditions équivalentes* a) *à* c) *de* (17.5.1) *sont aussi équivalentes à chacune des suivantes :*

d) B *est une* A-*algèbre formellement lisse pour les topologies préadiques.*

d') $\hat{B}$ *est une* $\hat{A}$-*algèbre formellement lisse pour les topologies adiques.*

Si de plus $\boldsymbol{k}(x)=\boldsymbol{k}(y)$, *ces conditions équivalent aussi à :*

d'') $\hat{B}$ *est une* $\hat{A}$-*algèbre isomorphe à une algèbre de séries formelles* $\hat{A}[[T_1, \ldots, T_n]]$.

L'équivalence de la condition *c)* de (17.5.1) et de *d)* résulte de l'équivalence de *a)* et *d)* dans le critère jacobien (**0**, 22.6.4), et l'équivalence de *d)* et *d')* résulte de (**0**, 19.3.6). D'autre part, *d'')* implique *d')* sans hypothèse sur les corps résiduels (**0**, 19.3.4). Enfin, si $\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximal de $\hat{A}$, l'hypothèse *d')* entraîne que $\hat{B}/\mathfrak{m}\hat{B}$ est une $\boldsymbol{k}(y)$-algèbre locale noethérienne complète, formellement lisse pour sa topologie adique (**0**, 19.3.5); l'hypothèse $\boldsymbol{k}(y)=\boldsymbol{k}(x)$ entraîne donc que $\hat{B}/\mathfrak{m}\hat{B}$ est $\boldsymbol{k}(y)$-isomorphe à une algèbre de séries formelles $\boldsymbol{k}(y)[[T_1, \ldots, T_n]]$ (**0**, 19.6.4). Comme d'autre part, $\hat{A}[[T_1, \ldots, T_n]]$ est un $\hat{A}$-module plat et une $\hat{A}$-algèbre locale noethérienne complète, on conclut de (**0**, 19.7.1.5) que cette algèbre est isomorphe à $\hat{B}$. Donc *d')* entraîne *d'')* sous l'hypothèse additionnelle $\boldsymbol{k}(x)=\boldsymbol{k}(y)$.

Remarque (**17.5.4**). — Supposons que Y soit un préschéma *localement noethérien*, et $f : X \to Y$ un morphisme localement de type fini. Le critère (17.5.3, *d)*), joint à (**0**, 22.1.4) montre que pour démontrer que f est lisse, on peut appliquer la définition (17.1.1), en se *restreignant* au cas où le schéma affine Y' est le *spectre d'un anneau local artinien.*

Proposition (**17.5.5**). — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f : X \to Y$ *un morphisme localement de type fini, x un point de* X, $y=f(x)$. *Supposons que* Y *soit* réduit *au point y. Alors, pour que f soit lisse au point x, il faut et il suffit que f soit universellement ouvert dans un voisinage de x dans* $f^{-1}(y)$ *et que* $f^{-1}(y)$ *soit un* $\boldsymbol{k}(y)$-*préschéma géométriquement régulier au point x.*

Compte tenu de (17.5.1), tout revient à voir que, si $f^{-1}(y)$ est un $\boldsymbol{k}(y)$-préschéma géométriquement régulier au point x, il est équivalent de dire que f est plat au point x ou universellement ouvert dans un voisinage de x dans $f^{-1}(y)$. Or, si f est plat au point x, il l'est dans un voisinage de x dans X (11.1.1) et par suite est universellement ouvert dans ce voisinage (2.4.6). Réciproquement, l'hypothèse que f est universellement ouvert dans un voisinage de x dans $f^{-1}(y)$ et que $f^{-1}(y)$ est un $\boldsymbol{k}(y)$-préschéma géométriquement régulier au point x entraîne que f est plat au point x, puisque $\mathcal{O}_{Y,y}$ est réduit (15.2.2).

Corollaire (**17.5.6**). — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f : X \to Y$ *un morphisme localement de type fini, x un point de* X, $y=f(x)$. *On suppose que* Y *soit* réduit *et* géométriquement unibranche (6.15.1) *au point y. Alors, pour que f soit lisse au point x, il faut et il suffit que f soit équidimensionnel au point x et que* $f^{-1}(y)$ *soit un* $\boldsymbol{k}(y)$-*préschéma géométriquement régulier au point x.*

En remarquant que l'ensemble des points où f est équidimensionnel est ouvert (13.3.2), on voit que le corollaire résulte de (17.5.5) et du critère de Chevalley (14.4.4).

Le fait que f soit un morphisme lisse en un point entraîne en particulier que f vérifie en ce point *toutes* les propriétés définies dans (6.8.1). On a donc les propriétés suivantes, que nous rappelons pour la commodité des références :

Proposition (**17.5.7**). — *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme localement de présentation finie, lisse en un point* $x \in X$; *posons* $y = f(x)$. *Alors, pour que l'anneau* $\mathcal{O}_{X,x}$ *soit réduit* (resp. *intégralement clos*, resp. *géométriquement unibranche*), *il faut et il suffit que* $\mathcal{O}_{Y,y}$ *le soit.*

Cela a en effet été prouvé dans (11.3.13) et (11.3.14) complété par $\mathbf{Err}_{\mathrm{IV}}$, 30.

Proposition (**17.5.8**). — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien*, $f: X \to Y$ *un morphisme localement de type fini, lisse en un point* $x \in X$; *posons* $y = f(x)$. *Alors :*

(i) *On a* $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim(\mathcal{O}_{Y,y}) + \dim(\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \boldsymbol{k}(y))$.

(ii) *On a* $\mathrm{coprof}(\mathcal{O}_{X,x}) = \mathrm{coprof}(\mathcal{O}_{Y,y})$.

(iii) *Pour que l'anneau* $\mathcal{O}_{X,x}$ *possède la propriété* (S_n) (5.7.2) (resp. (R_n) (5.8.2)), *il faut et il suffit que l'anneau* $\mathcal{O}_{Y,y}$ *la possède. En particulier, pour que* $\mathcal{O}_{X,x}$ *soit régulier, il faut et il suffit que* $\mathcal{O}_{Y,y}$ *le soit.*

Ce sont des cas particuliers de (6.1.2), (6.3.2), (6.4.1) et (6.5.3).

17.6. Caractérisations des morphismes étales.

Théorème (**17.6.1**). — *Soient* $f: X \to Y$ *un morphisme localement de présentation finie,* x *un point de* X, $y = f(x)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) f *est étale au point* x.

a') f *est lisse au point* x *et non ramifié au point* x.

b) f *est lisse au point* x *et quasi-fini au point* x ($\mathbf{Err}_{\mathrm{III}}$, 20).

c) f *est plat au point* x *et non ramifié au point* x.

c') f *est plat au point* x *et l'anneau* $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x}$ *est un corps, extension finie séparable de* $\boldsymbol{k}(y)$.

d) *L'anneau* $\mathcal{O}_{X,x}$ *est une* $\mathcal{O}_{Y,y}$*-algèbre formellement étale pour les topologies discrètes.*

L'équivalence de *a)* et *a')* résulte aussitôt des définitions; celle de *a)* et *d)* résulte de l'équivalence de *a)* et *e)* dans (17.4.1) et de l'équivalence de *a)* et *d)* dans (17.5.1). L'équivalence de *c)* et *c')* résulte de l'équivalence de *a)* et *d')* dans (17.4.1). Le fait que *a')* implique *c')* découle de (17.5.1); inversement, si *c')* est vérifiée, f est régulier (donc lisse par (17.5.1)) au point x, car si K est une extension finie séparable d'un corps k, alors, pour toute extension k' de k, $\mathrm{Spec}(K \otimes_k k')$ est régulier, étant somme d'un nombre fini de spectres de corps. Le fait que *a')* implique *b)* résulte de (17.4.1, *d')*) et de (17.5.1, *b)*). Il reste donc à voir que *b)* entraîne *c)*, et comme on sait déjà que f est plat au point x, par (17.5.1), il suffit de montrer que $f^{-1}(y)$ est un $\boldsymbol{k}(y)$-préschéma non ramifié sur $\boldsymbol{k}(y)$; autrement dit, on est ramené à prouver que *b)* entraîne *c)* lorsque $Y = \mathrm{Spec}(k)$ est le spectre d'un corps k. Comme la question est locale sur X, on peut se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$, où A est une k-algèbre *finie* et *locale* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.4.1). En vertu de l'hypothèse *b)*, A est une k-algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes, qui coïncident ici avec les topologies préadiques; donc ($\mathbf{0}$, 19.6.5), A est un anneau local régulier, donc un corps puisqu'il est artinien, et il résulte alors de (**0**, 19.6.5.1) que A doit être une extension finie et séparable de k, ce qui achève la démonstration (17.4.1).

Corollaire (**17.6.2**). — *Soit* $f: X \rightarrow Y$ *un morphisme localement de présentation finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *f est étale.*

a') *f est lisse et non ramifié.*

b) *f est lisse et localement quasi-fini* ($\mathbf{Err}_{\mathrm{III}}$, 20).

c) *f est plat et non ramifié.*

c') *f est plat, et toute fibre $f^{-1}(y)$ est un $\boldsymbol{k}(y)$-schéma somme de spectres de corps, extensions finies et séparables de $\boldsymbol{k}(y)$.*

c'') *f est plat, et pour tout $y \in Y$ et toute extension algébriquement close k' de $\boldsymbol{k}(y)$, la « fibre géométrique » $f^{-1}(y) \otimes_{\boldsymbol{k}(y)} k'$ est somme de spectres de corps isomorphes à k'.*

Le seul point qui reste à démontrer est l'équivalence de *c')* et *c'')*. Il est clair que *c')* entraîne *c'')* par changement de base (17.3.3). D'autre part, comme le morphisme projection $f^{-1}(y) \otimes_{\boldsymbol{k}(y)} k' \rightarrow f^{-1}(y)$ est ouvert (2.4.10), l'hypothèse *c'')* entraîne que l'espace $f^{-1}(y)$ est discret, donc, pour tout point $x \in X_y = f^{-1}(y)$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X_y, x} = A$ est une $\boldsymbol{k}(y)$-algèbre finie, donc un anneau local artinien; en outre il résulte de *c'')* que $\mathrm{Spec}(A \otimes_{\boldsymbol{k}(y)} k')$ est somme de spectres de corps isomorphes à k', ce qui n'est possible que si A est un corps, extension finie séparable de $\boldsymbol{k}(y)$ (4.6.1).

Proposition (**17.6.3**). — *Soient* Y *un préschéma* localement noethérien, $f: X \rightarrow Y$ *un morphisme localement de type fini, x un point de* X, $y = f(x)$. *Posons* $A = \mathcal{O}_{Y,y}$, $B = \mathcal{O}_{X,x}$, *qui sont des anneaux locaux noethériens, et soit k le corps résiduel de* A. *Alors les conditions équivalentes* a) *à* d) *de* (17.6.1) *sont aussi équivalentes à chacune des suivantes :*

e) $\hat{B}$ *est une $\hat{A}$-algèbre formellement étale pour les topologies adiques.*

e') $\hat{B}$ *est un $\hat{A}$-module libre et* $\hat{B} \otimes_{\hat{A}} k$ *est un corps, extension finie et séparable de k* (ce qui entraîne que $\hat{B}$ est une $\hat{A}$-algèbre *finie*).

Si de plus $\boldsymbol{k}(x) = \boldsymbol{k}(y)$, *ou si k est séparablement clos, ces conditions équivalent aussi à :*

e'') *L'homomorphisme canonique* $\hat{A} \rightarrow \hat{B}$ *est bijectif.*

L'équivalence de *e)* et de chacune des conditions de (17.6.1) résulte aussitôt de (17.4.4, *f')*) et (17.5.3, *d')*). Le fait que *e)* entraîne *e')* résulte de (17.4.4, *f)*) et de (**0**, 19.7.1), compte tenu de ce que $\hat{B}$ est alors une $\hat{A}$-algèbre *finie* (17.4.4) et qu'il revient donc au même de dire que $\hat{B}$ est un $\hat{A}$-module plat ou un $\hat{A}$-module libre ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 10.1.3). Inversement, le fait que *e')* entraîne *e)* résulte de (17.4.4) et de (**0**, 19.7.1). Enfin, *e')* entraîne que l'homomorphisme $\hat{A} \rightarrow \hat{B}$ est injectif, et si $\boldsymbol{k}(x) = \boldsymbol{k}(y)$ ou si k est séparablement clos, cet homomorphisme est surjectif par (17.4.4). La réciproque est immédiate.

Proposition (**17.6.4**). — *Sous les hypothèses de* (17.6.3), *si f est étale au point x, on a* $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim(\mathcal{O}_{Y,y})$.

C'est un cas particulier de (17.5.8, (i)) puisque x est isolé dans sa fibre $f^{-1}(y)$.

17.7. Propriétés de descente, de passage à la limite et de constructibilité.

Proposition (**17.7.1**). — *Soient* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme localement de présentation finie,* $g : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$ *un morphisme,* $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$, $f' = f_{(\mathrm{Y}')} : \mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$ *et* $g' : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ *les projections canoniques. Soit* x' *un point de* X' *et posons* $x = g'(x')$, $y' = f'(x')$.

(i) *Si* f' *est non ramifié au point* x', *alors* f *est non ramifié au point* x.

(ii) *Supposons de plus que* g *soit plat au point* y'. *Alors, si* f' *est lisse* (resp. *étale*) *au point* x', f *est lisse* (resp. *étale*) *au point* x.

Posons $y = f(x) = g(y')$, de sorte que l'on a $f'^{-1}(y') = f^{-1}(y) \otimes_{\boldsymbol{k}(y)} \boldsymbol{k}(y')$; notons que f' est localement de présentation finie.

(i) Comme la propriété pour un morphisme (localement de présentation finie) d'être non ramifié en un point ne fait intervenir que la fibre du morphisme en ce point (17.4.1, *d)*), on peut se borner au cas où Y et Y′ sont des spectres de corps. Mais alors il revient au même de dire que f (resp. f') est non ramifié en x (resp. x') ou qu'il est étale en ce point (17.6.1, *c)*), donc (i) est une conséquence de (ii).

(ii) Comme f' est plat au point x' (17.5.1), l'hypothèse que g est plat au point y' entraîne que f est plat au point x, car la projection $g' : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ est un morphisme plat au point x', et $f \circ g' = g \circ f'$ est un morphisme plat au point X′, d'où la conclusion (2.2.11, (iv)). Le fait que f soit lisse (resp. étale) au point x ne fait plus alors intervenir que la fibre $f^{-1}(y)$ (17.5.1 et 17.6.1), et on est donc encore ramené au cas où $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(k)$ et $\mathrm{Y}' = \mathrm{Spec}(k')$ sont des spectres de corps. Dire que f' est lisse au point x' signifie alors (17.5.1) que X′ est un k'-préschéma géométriquement régulier au point x', et cela entraîne (6.7.8) que X est un k-préschéma géométriquement régulier au point x, donc que f est lisse au point x. Supposons de plus que f' soit étale au point x' de sorte que x' est isolé dans $f'^{-1}(y')$ (17.6.1); comme la projection $f'^{-1}(y') \to f^{-1}(y)$ est un morphisme *ouvert* (2.4.10), x est isolé dans $f^{-1}(y)$; comme on sait déjà que f est lisse au point x, il est étale en ce point (17.6.1).

Corollaire (**17.7.2**). — (i) *Avec les notations de* (17.7.1), *soit* U (resp. U′) *l'ensemble des points de* X (resp. X′) *où* f (resp. f') *est non ramifié ; alors on a* $\mathrm{U}' = g^{-1}(\mathrm{U})$.

(ii) *Supposons de plus que* g *soit plat, et soit* V (resp. V′) *l'ensemble des points de* X *où* f (resp. f') *est lisse ; alors* $\mathrm{V}' = g^{-1}(\mathrm{V})$.

Corollaire (**17.7.3**). — (i) *Supposons* g *surjectif; alors, pour que* f *soit non ramifié, il faut et il suffit que* f' *le soit.*

(ii) *Soient* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un* S-*morphisme,* $g : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *un morphisme fidèlement plat. Supposons que* f *soit localement de présentation finie,* ou *que* g *soit quasi-compact. Alors, pour que* f *soit lisse* (resp. *non ramifié,* resp. *étale*), *il faut et il suffit que* f' *le soit.*

Dans (ii), le cas où f est localement de présentation finie résulte de (17.7.1). Si g est quasi-compact et f' lisse (resp. non ramifié, resp. étale), f' est localement de présentation finie par (2.7.1, (iv)) et on est ramené au premier cas.

Proposition (**17.7.4**). — *Soient* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme,* $g : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$ *un morphisme plat et localement de présentation finie,* $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$, $f' = f_{(\mathrm{Y}')} : \mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$ *et* $g' : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ *les* *projections canoniques. Soit* V (resp. V′) *l'ensemble des* $x \in X$ (resp. $x' \in X'$) *où f possède l'une des propriétés suivantes* (resp. *où f′ possède la même propriété*) *: être :*

(i) *localement de type fini ;*

(ii) *localement de présentation finie ;*

(iii) *plat ;*

(iv) *non ramifié ;*

(v) *lisse ;*

(vi) *étale.*

Alors on a $V' = g'^{-1}(V)$ (autrement dit, pour que f' ait la propriété considérée en un point x', il faut et il suffit que f ait cette propriété au point x).

La propriété (iii) n'est mise que pour mémoire, et ne nécessite pas l'hypothèse que g soit localement de présentation finie ((2.2.11, (iv)), compte tenu du fait que la projection $g' : X' \rightarrow X$ est un morphisme plat). En vertu de (17.7.2), les assertions relatives aux propriétés (iv), (v) et (vi) sont des conséquences de l'assertion relative à (ii). Il suffit donc de considérer les cas (i) et (ii). Il est clair que $V' \supset g'^{-1}(V)$; reste donc à montrer que $V' \subset g'^{-1}(V)$; notons que les ensembles V et V′ sont ouverts, et $W = g'(V')$ est aussi ouvert dans X en vertu de (2.4.6). Il s'agit donc de prouver que le morphisme $f|W : W \rightarrow Y$ est localement de type fini (resp. localement de présentation finie) ; comme par hypothèse le composé $V' \xrightarrow{g''} W \xrightarrow{f|W} Y$ (où g'' est la restriction de g'), égal à $V' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} Y$, est localement de type fini (resp. localement de présentation finie) et que g'' est surjectif (donc *fidèlement plat*), on est ramené à prouver le lemme suivant, qui améliore (11.3.16) :

Lemme **(17.7.5).** — *Soient* $f : X \rightarrow Y$ *un morphisme fidèlement plat et localement de présentation finie,* $g : Y \rightarrow Z$ *un morphisme tel que* $g \circ f : X \rightarrow Z$ *ait l'une des propriétés suivantes : être :*

(i) *localement de type fini ;*

(ii) *localement de présentation finie ;*

(iii) *de type fini.*

Alors g a la même propriété.

Si en outre f est quasi-compact ou g quasi-séparé, la même conclusion est valable pour la propriété :

(iv) *être de présentation finie.*

Dans les cas (i) et (ii), il s'agit de voir que pour tout $y \in Y$, il y a un voisinage ouvert affine V de y dans Y et un voisinage ouvert affine W de $z = g(y)$ dans Z contenant $g(V)$ tels que le morphisme $V \rightarrow W$, restriction de g, soit de type fini (resp. de présentation finie). Or, il existe par hypothèse un $x \in X$ tel que $f(x) = y$, un voisinage ouvert affine U de x dans X, un voisinage ouvert affine V′ de y dans Y contenant $f(U)$ et un voisinage ouvert affine W de z dans Z contenant $g(V')$ tels que le morphisme $f_1 : U \rightarrow V'$ restriction de f soit plat et de présentation finie, et le morphisme $g_1 : V' \rightarrow W$ restriction de g tel que $g_1 \circ f_1$ soit de type fini (resp. de présentation finie). Alors $f(U)$ est ouvert dans Y (2.4.6), et si $V \subset f(U)$ est un voisinage affine de y, le morphisme $f_2 : f_1^{-1}(V) \rightarrow V$, restriction de f_1, est encore de présentation finie et est en outre fidèlement plat; de plus, si $g_2 = g_1|V$, $g_2 \circ f_2$ est de type fini (resp. de présentation finie), l'ouvert $f_1^{-1}(V)$ étant quasi-compact (resp. quasi-compact et quasi-séparé). On est alors ramené aux hypothèses de (11.3.16), d'où l'on conclut que g_2 est un morphisme de type fini (resp. de présentation finie).

Dans le cas (iii) la question est locale sur Z, donc on peut supposer Z affine, et il en résulte alors que X est quasi-compact, donc aussi $Y = f(X)$. Le cas (iii) est donc conséquence de (i).

Dans le cas (iv) (avec les hypothèses supplémentaires sur f ou g), on peut aussi supposer Z affine, donc X et Y quasi-compacts; on sait en outre déjà que g est localement de présentation finie et quasi-compact (1.1.3), donc tout revient à voir que g est quasi-séparé, et il suffit donc de montrer que cette propriété est vraie lorsque l'on suppose f quasi-compact. Or, puisque $g \circ f$ est quasi-séparé, il en est de même de f (1.2.2, (v)); comme f est quasi-compact et localement de présentation finie, il est de présentation finie (1.6.1); il suffit alors de répéter le raisonnement du premier alinéa de la démonstration de (11.3.16).

Remarque **(17.7.6)**. — Dans l'assertion relative à la propriété (iv), on ne peut supprimer l'hypothèse que f est quasi-compact; sans quoi, cela impliquerait que tout morphisme $g : Y \to Z$ quasi-compact et localement de présentation finie serait de présentation finie, conclusion que l'on sait être erronée (1.6.4). En effet, on peut se borner au cas où Z est affine, donc Y quasi-compact; il y a par suite un recouvrement fini (U_i) de Y par des ouverts affines tels que les restrictions $g|U_i$ soient de présentation finie; il suffirait alors de prendre pour X le préschéma *somme* des U_i, pour $f : X \to Y$ le morphisme canonique, qui est évidemment fidèlement plat et localement de présentation finie (1.4.3); $g \circ f$ serait de présentation finie en vertu du choix des U_i et de (1.6.5), d'où notre assertion.

Proposition **(17.7.7)**. — *Soient* $f : Y \to S$ *et* $h : X \to S$ *deux morphismes localement de présentation finie,* $g : X \to Y$ *un* S-*morphisme,* x *un point de* X, $y = g(x)$. *Supposons que* g *soit* plat *au point* x. *Alors, si* h *est lisse* (resp. *non ramifié,* resp. *étale*) *au point* x, f *est lisse* (resp. *non ramifié,* resp. *étale*) *au point* y.

Posons $s = h(x) = f(y)$. Dire que h est non ramifié au point x (resp. que f est non ramifié au point y) équivaut à dire que $h^{-1}(s)$ est étale sur $\boldsymbol{k}(s)$ au point x (resp. que $f^{-1}(s)$ est étale sur $\boldsymbol{k}(s)$ au point y) (17.4.1 et 17.6.1); comme le morphisme $g_s : h^{-1}(s) \to f^{-1}(s)$ déduit de g est plat au point x, on voit que l'on peut se borner à prouver la proposition lorsque h est lisse ou étale au point x. En outre, comme h est alors plat au point x (17.5.1), f est plat au point y, comme il résulte de (2.2.11, (iv)). Il revient donc au même (17.5.1) de dire que f est lisse (resp. étale) au point y, ou que $f^{-1}(s)$ est lisse (resp. étale) sur $\boldsymbol{k}(s)$ au point x. On est ainsi ramené au cas où $S = \mathrm{Spec}(k)$ est le *spectre d'un corps*.

(i) *Cas des morphismes lisses.* Comme g est un morphisme localement de présentation finie (1.4.3, (v)), il y a un voisinage ouvert U de x dans X dans lequel g est plat (11.3.1) et h lisse. En outre $g(U)$ est un voisinage ouvert de y dans Y (2.4.6); remplaçant X par U et Y par $g(U)$, on peut donc supposer que g est *fidèlement plat* et que h est *lisse*, et on est ramené à prouver que f est alors *lisse*. Si k' est une extension algébriquement close de k, $X \otimes_k k'$ est alors lisse sur k' et en vertu de (17.7.3, (ii)), il suffit de prouver que $Y \otimes_k k'$ est lisse sur k' (puisque $\operatorname{Spec}(k') \to \operatorname{Spec}(k)$ est fidèlement plat); on peut donc se borner au cas où k est *algébriquement clos*. Comme l'ensemble des points de Y rationnels sur k est alors très dense dans Y (10.4.8) et comme l'ensemble des points de Y où Y est lisse sur k est ouvert, on voit qu'il suffit de prouver que Y est lisse sur k en tout point *rationnel sur* k. Mais en un tel point y, dire que Y est lisse sur k en ce point équivaut à dire que Y est *régulier* en y (17.5.1 et 6.7.8). Or on a $y = g(x)$ pour un $x \in X$ et par hypothèse (17.5.1) X est régulier au point x; comme X et Y sont alors localement noethériens et que g est plat, Y est bien régulier au point y (6.5.1, (i)).

(ii) *Cas des morphismes étales*. Par (i) on sait déjà que f est lisse au point y; en vertu de (17.6.1), il suffit donc de montrer que f est *quasi-fini* au point y, ou encore que $\mathcal{O}_{Y,y}$ est une k-algèbre *finie*. Or, comme $\mathcal{O}_{X,x}$ est un $\mathcal{O}_{Y,y}$-module fidèlement plat ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.6.2), $\mathcal{O}_{Y,y}$ s'identifie à un sous-k-module de $\mathcal{O}_{X,x}$ et comme $\mathcal{O}_{X,x}$ est par hypothèse une k-algèbre finie, il en est de même de $\mathcal{O}_{Y,y}$.

Proposition **(17.7.8)**. — *Les notations étant celles de* (8.8.1), *on suppose* X_α *et* Y_α *localement de présentation finie sur* S_α. *Soient* $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ *un* S_α-*morphisme*, $f : X \to Y$ *le* S-*morphisme correspondant.*

(i) *Soient* x *un point de* X, x_λ *sa projection canonique dans* X_λ. *Pour que* f *soit lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*) *au point* x, *il faut et il suffit qu'il existe* $\lambda \geqslant \alpha$ *tel que* f_λ *soit lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*) *au point* x_λ.

(ii) *Supposons de plus* X_α *quasi-compact. Pour que* f *soit lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*), *il faut et il suffit qu'il existe* $\lambda \geqslant \alpha$ *tel que* f_λ *soit lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*).

(i) Si $y = f(x)$, $y_\lambda = f_\lambda(x_\lambda)$ est la projection canonique de y dans Y_λ, et l'on a $f^{-1}(y) = f_\lambda^{-1}(y_\lambda) \otimes_{\boldsymbol{k}(y_\lambda)} \boldsymbol{k}(y)$; la partie de l'énoncé concernant les morphismes non ramifiés résulte donc de (17.7.1, (i)), et il suffit donc de considérer le cas des morphismes lisses. Comme f et f_λ sont localement de présentation finie, il revient au même de dire que $f^{-1}(y)$ est géométriquement régulier au point x ou que $f_\lambda^{-1}(y_\lambda)$ est géométriquement régulier au point x_λ (6.7.8). La proposition résulte donc de (17.5.1) et de (11.2.6).

(ii) Pour tout λ, soit U_λ l'ensemble ouvert des $x_\lambda \in X_\lambda$ tels que f_λ soit lisse (resp. non ramifié, resp. étale) au point x_λ; soit V_λ son image réciproque dans X. Comme, par hypothèse, pour tout $x \in X$ il existe, en vertu de (i), un λ tel que f_λ soit lisse (resp. non ramifié, resp. étale) au point x_λ, X est réunion des V_λ. D'ailleurs (17.3.3), pour $\lambda \leqslant \mu$ on a $V_\lambda \subset V_\mu$, donc, comme X est quasi-compact, il existe un indice μ tel que $X = V_\mu$. Comme les X_λ sont quasi-compacts, il résulte alors de (8.3.4) qu'il existe un indice $\nu \geqslant \mu$ tel que l'image réciproque de U_μ dans X_ν soit X_ν tout entier, ce qui signifie que f_ν est lisse (resp. non ramifié, resp. étale) par (17.3.3).

Corollaire **(17.7.9)**. — *Soient* $S = \operatorname{Spec}(A)$ *un schéma affine*, $f : X \to S$ *un morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) f *est un morphisme de présentation finie et lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*).

b) *Il existe un schéma affine noethérien* $S_0 = \mathrm{Spec}(A_0)$, *un morphisme de type fini* $f_0 : X_0 \to S_0$, *et un morphisme* $S \to S_0$ *tels que le* S-*préschéma* $X_0 \otimes_{S_0} S$ *soit* S-*isomorphe à* X *et que* f_0 *soit lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*).

c) *Les conditions de* b) *sont vérifiées, et en outre* A_0 *est une sous-*$\mathbf{Z}$*-algèbre de type fini de* A, *le morphisme* $S \to S_0$ *correspondant à l'injection canonique* $A_0 \to A$.

La démonstration à partir de (17.7.8) est la même que celle de (11.2.7) à partir de (11.2.6).

Proposition **(17.7.10)**. — *Soient* $f : Y \to S$, $h : X \to S$ *deux morphismes localement de présentation finie,* $g : X \to Y$ *un* S-*morphisme,* x *un point de* X, $y = g(x)$. *Supposons que* h *soit* plat *au point* x *et que* f *soit* non ramifié *au point* y. *Alors* f *est* étale *au point* y *et* g *est* plat *au point* x.

(On verra plus loin (18.4.9) que l'on peut en fait se dispenser de l'hypothèse que h est localement de présentation finie).

La question étant locale sur S, X et Y, on peut supposer que S, X et Y sont affines, f, g, h des morphismes de présentation finie, h plat et f non ramifié. Compte tenu de (11.2.7) et (17.7.9), on peut supposer en outre que S, X et Y sont *noethériens*; enfin on peut se borner au cas où $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ (où $s = f(y) = h(x)$). L'anneau $A = \mathcal{O}_{S,s}$ étant un anneau local noethérien, il existe un anneau local noethérien B *complet*, de corps résiduel *algébriquement clos* et un homomorphisme local $A \to B$ faisant de B un A-module *fidèlement plat* ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 10.3.1). Remplaçant X et Y par $X \times_S \mathrm{Spec}(B)$ et $Y \times_S \mathrm{Spec}(B)$, on conclut par (2.5.1) et (17.7.1) qu'on peut se borner au cas où A est complet et a un corps résiduel algébriquement clos. L'hypothèse que f est non ramifié au point y entraîne alors (17.4.4) que $\mathcal{O}_{Y,y}$ est une $\mathcal{O}_{S,s}$-algèbre finie et un anneau local noethérien complet ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.4.2), et comme le corps résiduel de $\mathcal{O}_{S,s}$ est algébriquement clos, l'homomorphisme $\mathcal{O}_{S,s} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ est *surjectif* (17.4.4). Mais, d'autre part, l'hypothèse que h est plat au point x entraîne que l'homomorphisme composé $\mathcal{O}_{S,s} \to \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est injectif ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.5.1), donc l'homomorphisme $\mathcal{O}_{S,s} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ est bijectif, ce qui montre que f est étale au point y (17.6.3); en outre, $\mathcal{O}_{X,x}$ est un $\mathcal{O}_{Y,y}$-module plat, donc g est plat au point x.

Proposition **(17.7.11)**. — *Soient* S *un préschéma,* X, Y *deux* S-*préschémas localement de présentation finie sur* S, $f : X \to Y$ *un* S-*morphisme. Pour tout* $s \in S$, *on note* X_s, Y_s, f_s *les préschémas et le morphisme déduits de* X, Y, f *par le changement de base* $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(s)) \to S$. *Alors :*

(i) *L'ensemble des* $x \in X$ *tels que, si* s *est l'image de* x *dans* S, $f_s : X_s \to Y_s$ *soit lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*, resp. *différentiellement lisse*) *au point* x, *est localement constructible.*

(ii) *Supposons* f *de présentation finie. L'ensemble des* $y \in Y$ *tels que, si* s *est l'image de* y *dans* S, f_s *soit lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*, resp. *différentiellement lisse*) *en tous les points de* $f_s^{-1}(y)$, *est localement constructible.*

(iii) *Supposons* X *et* Y *de présentation finie sur* S. *L'ensemble des* $s \in S$ *tels que* f_s *soit lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*, resp. *différentiellement lisse*) *est localement constructible.*

Soit E l'ensemble des $x \in X$ vérifiant la propriété considérée dans (i). Alors l'ensemble F des $y \in Y$ vérifiant la propriété correspondante considérée dans (ii) n'est autre que $Y - f(X - E)$, donc (ii) résulte de (i) et du théorème de Chevalley lorsque f est de présentation finie (1.8.4). De même, si $h : Y \to S$ est le morphisme structural, l'ensemble des $s \in S$ vérifiant la propriété correspondante considérée dans (iii) est $S - h(Y - F)$, donc (iii) découle encore de (ii) et du théorème de Chevalley lorsque f et h sont de présentation finie. Il suffit donc de prouver les assertions de (i).

Prouvons d'abord (i) lorsqu'il s'agit de la propriété d'être *lisse*.

La question étant locale sur X, on peut se borner au cas où $S = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$ et $Y = \mathrm{Spec}(C)$ sont affines, B et C étant des A-algèbres de présentation finie. Raisonnant comme au début de (9.9.1) et utilisant (17.7.2, (ii)), on se ramène au cas où A est *noethérien*. En vertu de ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 9.2.3), on est ramené à voir que si $x \in E$ (resp. si $x \notin E$), il existe un voisinage V de x dans $\overline{\{x\}}$ contenu dans E (resp. dans $X - E$). Désignant par $g : X \to S$ et $h : Y \to S$ les morphismes structuraux, on peut d'abord remplacer S par le sous-préschéma réduit S' de S ayant $\overline{\{g(x)\}}$ pour espace sous-jacent, X par $g^{-1}(S')$, Y par $h^{-1}(S')$, les fibres de X et X' (resp. Y et Y') aux points de S' étant les mêmes. Autrement dit on peut se borner au cas où S est *intègre* et où $\eta = g(x) = h(y)$ (où $y = f(x)$) est son point générique.

1° Supposons d'abord que $x \in E$. Les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X_\eta, x}$ et $\mathcal{O}_{Y_\eta, y}$ sont respectivement égaux à $\mathcal{O}_{X,x}$ et $\mathcal{O}_{Y,y}$; comme la propriété de lissité d'un morphisme de présentation finie en un point ne dépend que de l'anneau local de ce point et de l'anneau local de son image (17.5.1), on voit que l'hypothèse $x \in E$ revient à dire que le morphisme f est lisse au point x; il possède alors encore cette propriété aux points d'un voisinage ouvert de x dans X, et il suffit d'appliquer (17.3.3, (iii)) pour obtenir alors la conclusion.

2° Supposons en second lieu que $x \in X - E$, et que le morphisme f_η *ne soit pas plat* au point x. La conclusion résulte alors du lemme suivant qui précise (11.2.8) :

Lemme **(17.7.11.1)**. — *Soient* $g : X \to S$, $h : Y \to S$ *deux morphismes localement de présentation finie*, $f : X \to Y$ *un* S*-morphisme*, $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent de présentation finie. Alors l'ensemble* E *des* $x \in X$ *tels que* $\mathcal{F}_{g(x)}$ *soit* $f_{g(x)}$*-plat au point* x *est localement constructible.*

Raisonnant encore comme au début de (9.9.1) et utilisant (2.5.1), on se ramène au cas où S, X et Y sont noethériens; puis on se ramène comme ci-dessus au cas où S est intègre, où $\eta = g(x) = h(f(x))$ est son point générique, et il s'agit de montrer que si $x \in E$ (resp. $x \notin E$) il y a un voisinage V de x dans $\overline{\{x\}}$ contenu dans E (resp. dans $X - E$). Le cas où $x \in E$ est conséquence immédiate de (11.1.1). Pour traiter le cas où $x \notin E$, on raisonne comme dans (9.4.7.1), dont nous conservons les notations, de sorte que l'on peut supposer, en remplaçant éventuellement Y et X par des voisinages de $f(x)$ et x respectivement, qu'il existe deux $\mathcal{O}_Y$-Modules cohérents $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ et un $\mathcal{O}_Y$-homomorphisme $u : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ tels que pour tout $s \in S$, $u_s : \mathcal{G}_s \to \mathcal{H}_s$ soit injectif, mais que l'homomorphisme $1 \otimes u_\eta : \mathcal{F}_\eta \otimes_{\mathcal{O}_{Y_\eta}} \mathcal{G}_\eta \to \mathcal{F}_\eta \otimes_{\mathcal{O}_{Y_\eta}} \mathcal{H}_\eta$ ne soit pas injectif au point x, autrement dit $x \in \mathrm{Supp}(\mathrm{Ker}(1 \otimes u_\eta))$; si l'on pose $T = \overline{\{x\}}$, on a donc $\mathrm{Supp}(\mathrm{Ker}(1 \otimes u_\eta)) \supset T_\eta$. Mais on peut supposer que pour tout $s \in S$, on a $\mathrm{Ker}(1 \otimes u_s) = (\mathrm{Ker}(1 \otimes u))_s$ (9.4.2), donc

$\mathrm{Supp}(\mathrm{Ker}(1\otimes u_s))=(\mathrm{Supp}(\mathrm{Ker}(1\otimes u)))_s$ (**I**, 9.1.13.1) ; il résulte enfin de (9.5.2) que pour s dans un voisinage de η, on a $(\mathrm{Supp}(\mathrm{Ker}(1\otimes u)))_s\supset \mathrm{T}_s$, ce qui établit le lemme.

3° Supposons maintenant que $x\in\mathrm{X}-\mathrm{E}$, que le morphisme f_η soit *plat* au point x, mais que f_η ne soit pas lisse au point x. Remarquons que dire que f_η est plat au point x équivaut à dire que f lui-même est plat au point x et en remplaçant X par un voisinage de x, on peut supposer que f est plat (11.1.1); on en conclut qu'il en est de même de f_s pour tout $s\in\mathrm{S}$, et comme pour tout $y\in\mathrm{Y}$, $f^{-1}(y)=f_{h(y)}^{-1}(y)$, il revient au même de dire que $f_{g(x')}$ est lisse au point x' ou de dire que f est lisse au point x'. Mais l'ensemble des $x'\in\mathrm{X}$ où f est lisse est *ouvert* dans X (12.1.7), donc l'ensemble des $x'\in\mathrm{X}$ où f n'est pas lisse est fermé, et puisqu'il contient x par hypothèse, il contient aussi $\overline{\{x\}}$, ce qui achève la démonstration pour la première propriété considérée dans (i).

Prouvons en second lieu (i) lorsqu'il s'agit de la propriété d'être *étale*. Notons pour cela que cette propriété pour f_s au point x équivaut à dire que f_s est à la fois *lisse* et *quasi-fini* au point x (17.6.1). Or, il revient au même de dire que $f_{g(x)}$ est quasi-fini au point x ou que f est lui-même quasi-fini en ce point; il résulte donc de (13.1.4) que l'ensemble des points x tels que $f_{g(x)}$ soit quasi-fini au point x est ouvert dans X, et *a fortiori* localement constructible; la conclusion résulte donc de ce que l'ensemble des x tels que $f_{g(x)}$ soit lisse au point x est lui aussi localement constructible.

Passons à la preuve de (i) lorsqu'il s'agit de la propriété d'être *différentiellement lisse*. Soit $p:\mathrm{X}\times_\mathrm{Y}\mathrm{X}\rightarrow\mathrm{X}$ la seconde projection canonique; la seconde projection $\mathrm{X}_s\times_{\mathrm{Y}_s}\mathrm{X}_s\rightarrow\mathrm{X}_s$ n'est autre que p_s pour tout $s\in\mathrm{S}$, et il résulte donc de (17.12.5.1) ([1]) que pour que $f_{g(x)}$ soit différentiellement lisse au point x, il faut et il suffit que $p_{g(x)}$ soit *lisse* au point $\Delta_f(x)$. Comme p est localement de présentation finie, l'ensemble des points $z\in\mathrm{X}\times_\mathrm{Y}\mathrm{X}$ tels que $p_{g(p(z))}$ soit lisse au point z est localement constructible, et l'intersection de cet ensemble avec l'ensemble localement fermé $\Delta_f(\mathrm{X})$ est donc aussi localement constructible dans $\Delta_f(\mathrm{X})$ (1.8.2); la restriction de p à $\Delta_f(\mathrm{X})$ étant un isomorphisme sur X, on voit que l'ensemble des $x\in\mathrm{X}$ tels que $f_{g(x)}$ soit différentiellement lisse au point x est localement constructible.

Considérons enfin la propriété d'être non ramifié; notons que le morphisme diagonal $\Delta_f:\mathrm{X}\rightarrow\mathrm{X}\times_\mathrm{Y}\mathrm{X}$ est une immersion localement de présentation finie (1.4.3.1) et pour tout $s\in\mathrm{S}$, le morphisme diagonal $\Delta_{f_s}:\mathrm{X}_s\rightarrow\mathrm{X}_s\times_{\mathrm{Y}_s}\mathrm{X}_s$ n'est autre que $(\Delta_f)_s$; dire que $f_{g(x)}$ est non ramifié au point x équivaut à dire que $(\Delta_f)_{g(x)}$ est un isomorphisme local au point x (17.4.1), et puisque c'est une immersion localement de présentation finie, il revient au même (17.9.1) ([2]) de dire que $(\Delta_f)_{g(x)}$ est *étale* au point x; il suffit donc d'appliquer ce qui a été vu plus haut pour la propriété d'être étale.

([1]) Le lecteur vérifiera que le résultat de (17.7.11) n'est pas utilisé dans la suite du § 17 et qu'il n'y a donc pas de cercle vicieux.

([2]) Le lecteur vérifiera que le résultat de (17.7.11) n'est pas utilisé dans le reste du § 17 et qu'il n'y a donc pas de cercle vicieux.

17.8. Critères de lissité et non-ramification par fibres.

Proposition (**17.8.1**). — *Soient* $g: Y \to S$, $h: X \to S$ *deux morphismes localement de présentation finie. Pour qu'un* S-*morphisme* $f: X \to Y$ *soit non ramifié, il faut et il suffit que pour tout* $s \in S$, *le morphisme* $f_s: h^{-1}(s) \to g^{-1}(s)$ *déduit de* f *par le changement de base* $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(s)) \to S$, *soit non ramifié.*

Cela résulte aussitôt du fait que, pour un morphisme localement de présentation finie, le fait d'être non ramifié est une propriété des *fibres* de ce morphisme (17.4.1, *d)*), et de ce que, pour tout $y \in Y$, on a $f^{-1}(y) = f_s^{-1}(y)$ si $s = g(y)$.

Proposition (**17.8.2**). — *Soient* $g: Y \to S$, $h: X \to S$ *deux morphismes localement de présentation finie; on suppose en outre que* h *est* plat. *Pour qu'un* S-*morphisme* $f: X \to Y$ *soit lisse* (resp. *étale*), *il faut et il suffit que, pour tout* $s \in S$, *le morphisme* $f_s: h^{-1}(s) \to g^{-1}(s)$ *déduit de* f *par le changement de base* $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(s)) \to S$ *soit lisse* (resp. *étale*). *Lorsqu'il en est ainsi, le morphisme* g *est plat aux points de* $f(X)$.

On sait en effet (11.3.10) que pour que f soit plat, il faut et il suffit que f_s le soit pour tout $s \in S$, et qu'alors g est plat aux points de $f(X)$. Mais pour un morphisme plat localement de présentation finie, le fait d'être lisse est une propriété des *fibres* de ce morphisme (17.5.1, *b)*), et pour tout $y \in Y$, on a $f^{-1}(y) = f_s^{-1}(y)$ si $s = g(y)$.

Remarque (**17.8.3**). — Les démonstrations précédentes montrent (compte tenu de (11.3.10)) que si les hypothèses sur g et h sont les mêmes que ci-dessus, alors, pour que f soit non ramifié (resp. lisse, resp. étale) *en un point* $x \in X$, il suffit que, si l'on pose $s = h(x)$, f_s soit non ramifié (resp. lisse, resp. étale) au point x.

17.9. Morphismes étales et immersions ouvertes.

Théorème (**17.9.1**). — *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) f *est une immersion ouverte.*

b) f *est un monomorphisme plat localement de présentation finie.*

c) f *est étale et radiciel.*

Il résulte de (1.4.3, (i)) que *a)* implique *b)*. La condition *b)* implique que pour tout $y \in Y$, la fibre $f^{-1}(y)$ est vide ou isomorphe à $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$ (8.11.5.1), donc *b)* entraîne *c)*, en vertu de (17.6.2, *c)*). Reste à voir que *c)* implique *a)*.

La question étant locale sur X et sur Y (puisque f est injectif), on peut se borner au cas où Y est affine et f de présentation finie. Comme f est plat, c'est un morphisme *ouvert* (2.4.6), donc, en remplaçant Y par $f(X)$, on peut supposer que f est *surjectif*. Pour tout morphisme $Y' \to Y$, $f' = f_{(Y')}: X_{(Y')} \to Y'$ est encore étale, radiciel, surjectif et de présentation finie, donc ouvert, et par suite un homéomorphisme; autrement dit f est un *homéomorphisme universel*, et étant de type fini et séparé (1.8.7.1), f est *propre*. L'hypothèse que f est radiciel et de type fini entraîne alors que f est quasi-fini; donc (8.11.1) f est un morphisme *fini*. Pour prouver que f est un isomorphisme, on peut se borner au cas où $Y = \mathrm{Spec}(A)$, A étant un anneau local. Comme f est de présentation finie, on a $X = \mathrm{Spec}(B)$, où B est un A-module plat de présentation finie (1.4.7), donc *libre* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 2, cor. 2 du th. 1). En outre, si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A et k son corps résiduel, $B/\mathfrak{m}B$ est par hypothèse un corps, à la fois extension radicielle et extension finie séparable de k, puisque f est étale et radiciel (17.6.1); donc $B/\mathfrak{m}B$ est isomorphe à k, et comme B est un A-module libre, B est isomorphe à A. C.Q.F.D.

Corollaire **(17.9.2)**. — *Soit* X *un préschéma connexe; si* $f: X \to Y$ *est une immersion fermée étale, alors* f *est un isomorphisme de* X *sur une composante connexe ouverte de* Y.

En effet f est étale et radiciel, donc un isomorphisme de X sur un préschéma induit sur une partie ouverte de Y; mais par hypothèse $f(X)$ est fermé dans Y, donc à la fois ouvert et fermé, et puisque $f(X)$ est connexe, c'est une composante connexe de Y.

Corollaire **(17.9.3)**. — *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme étale* (resp. *étale et séparé*). *Alors toute* Y-*section* $g: Y \to X$ *de* X *est une immersion ouverte* (resp. *ouverte et fermée*)*; en outre l'application* $g \rightsquigarrow g(Y)$ *est une bijection de l'ensemble* $\Gamma(X/Y)$ *des* Y-*sections de* X *sur l'ensemble des parties ouvertes* Z (resp. *ouvertes et fermées*) *de* X *telles que la restriction de* f *à* Z *soit un morphisme surjectif et radiciel de* Z *sur* Y.

En effet, le fait que g soit une immersion ouverte résulte déjà de ce que f est non ramifié (17.4.1, *b''*)), et la restriction de f à l'ouvert $g(Y)$ de X est un isomorphisme. Inversement, si Z est un ouvert de X tel que $f|Z$ soit un morphisme surjectif et radiciel de Z sur Y, $f|Z$ est un isomorphisme en vertu de (17.9.1), puisqu'il est étale. Si f est en outre séparé, on sait que g est une immersion fermée (**I**, 5.4.6), ce qui achève de prouver le corollaire.

Corollaire **(17.9.4)**. — *Soient* Y *un préschéma connexe,* $f: X \to Y$ *un morphisme étale et séparé. Alors toute* Y-*section* g *de* X *est un isomorphisme de* Y *sur une composante connexe ouverte de* X, *et l'application* $g \rightsquigarrow g(Y)$ *est une bijection de* $\Gamma(X/Y)$ *sur l'ensemble des composantes connexes ouvertes* Z *de* X *telles que la restriction de* f *à* Z *soit un morphisme surjectif et radiciel de* Z *sur* Y.

Corollaire **(17.9.5)**. — *Soient* $g: Y \to S$, $h: X \to S$ *deux morphismes localement de présentation finie; on suppose en outre que* h *est* plat. *Pour qu'un* S-*morphisme* $f: X \to Y$ *soit une immersion ouverte* (resp. *un isomorphisme*), *il faut et il suffit que, pour tout* $s \in S$, *le morphisme* $f_s: h^{-1}(s) \to g^{-1}(s)$ *déduit de* f *par le changement de base* $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(s)) \to S$, *soit une immersion ouverte* (resp. *un isomorphisme*).

En effet, si f_s est une immersion ouverte pour tout $s \in S$, il résulte de (17.8.3) que f est un morphisme étale; comme pour tout $y \in Y$, on a $f^{-1}(y) = f_s^{-1}(y)$ avec $s = g(y)$, f est radiciel; donc f est une immersion ouverte en vertu de (17.9.1). Si de plus f_s est surjectif pour tout $s \in S$, f est surjectif, donc un isomorphisme.

La proposition suivante précise (10.4.11) :

Proposition **(17.9.6)**. — *Soient* S *un préschéma,* X *un* S-*préschéma de présentation finie. Tout* S-*endomorphisme de* X *qui est un monomorphisme est un automorphisme de* X.

Soient $f: X \to S$ le morphisme structural, g le S-endomorphisme considéré. La question est locale sur S, et on peut par suite supposer que S est affine. Utilisant (8.9.1) et (8.10.5, (i *bis*)), on est ramené au cas où $S = \mathrm{Spec}(A)$, où A est une **Z**-algèbre de type fini, et par suite X est un **Z**-préschéma de type fini. Il résulte déjà de (10.4.11) que g est un morphisme bijectif, puisqu'un monomorphisme est radiciel (8.11.5.1); il suffira donc de montrer que g est une immersion ouverte, et puisque g est radiciel, il suffira, en vertu de (17.9.1), de prouver que g est *étale*. En outre, comme l'ensemble des points où g est étale est ouvert et que X est un préschéma de Jacobson (10.4.7), il suffira de montrer que g est étale en tout point *fermé* z de X (10.3.1). Posons $z'=g(z)$; il résulte de (10.4.11.1, (i)) que z' est aussi un point fermé de X et puisque g est un monomorphisme, l'application $\boldsymbol{k}(z')\to\boldsymbol{k}(z)$ déduite de g est un *isomorphisme*. Pour que g soit étale au point z, il faut et il suffit donc que l'homomorphisme canonique $\widehat{\mathcal{O}}_{X,z'}\to\widehat{\mathcal{O}}_{X,z}$ soit bijectif (17.6.3, *e''*)). Nous allons pour cela prouver que pour tout entier n, l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{X,z'}/\mathfrak{m}_{z'}^{n+1}\to\mathcal{O}_{X,z}/\mathfrak{m}_z^{n+1}$ est *bijectif*, d'où résultera aussitôt la conclusion. On peut supposer que z appartient à l'ensemble fini $T_{p,d}$ des points fermés t de X tels que $\boldsymbol{k}(t)$ soit une extension de $\mathbf{F}_p$ dont le degré divise d; auquel cas il en est de même de z'. Désignons par $\mathscr{J}$ l'Idéal cohérent de $\mathcal{O}_X$ tel que $\mathscr{J}_x=\mathcal{O}_x$ pour $x\notin T_{p,d}$, et $\mathscr{J}_x=\mathfrak{m}_x^{n+1}$ pour $x\in T_{p,d}$. Soient $T_{p,d,n}$ le sous-préschéma fermé de X défini par $\mathscr{J}$, $j: T_{p,d,n}\to X$ l'injection canonique; le morphisme composé $g\circ j: T_{p,d,n}\to X$ applique l'ensemble $T_{p,d}$ dans lui-même, et pour tout $x\in T_{p,d}$, l'homomorphisme $\mathcal{O}_{X,g(x)}\to\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}^{n+1}$ se factorise en

$$\mathcal{O}_{X,g(x)}\to\mathcal{O}_{X,g(x)}/\mathfrak{m}_{g(x)}^{n+1}\to\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^{n+1}.$$

Donc (**I**, 4.1.9) il existe un unique endomorphisme g' de $T_{p,d,n}$ tel que $j\circ g'=g\circ j$. Comme j est un monomorphisme, et qu'il en est de même de g par hypothèse, on en déduit que g' est aussi un monomorphisme, et la proposition sera prouvée si l'on montre que g' est un *automorphisme* de $T_{p,d,n}$. Or, pour tout $x\in T_{p,d,n}$, on a vu que $\boldsymbol{k}(x)$ est un corps fini, et comme $\mathcal{O}_{X,x}$ est noethérien, chacun des $\mathfrak{m}_x^h/\mathfrak{m}_x^{h+1}$ est un $\boldsymbol{k}(x)$-espace vectoriel de rang fini; d'où l'on conclut aussitôt que l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^{n+1}$ de $T_{p,d,n}$ au point x a un nombre *fini* d'éléments, et *a fortiori* est un **Z**-module de type fini. Comme $T_{p,d,n}$ est somme des préschémas $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^{n+1})$ en nombre fini, c'est un **Z**-préschéma *fini*; l'endomorphisme g' est donc lui aussi *fini* (**II**, 6.1.5, (v)), donc propre. Mais un monomorphisme propre est une *immersion fermée* (8.11.5); si $T_{p,d,n}=\mathrm{Spec}(B)$, g' correspond donc à un endomorphisme surjectif $\varphi: B\to B$ de l'anneau B. Or, l'ensemble B est fini, donc φ est nécessairement bijectif. C.Q.F.D.

17.10. Dimension relative d'un préschéma lisse sur un autre.

Définition (**17.10.1**). — *Soit* $f: X\to Y$ *un morphisme localement de type fini. On appelle dimension relative de* f *au point* $x\in X$ *(ou dimension relative de* X *sur* Y *au point* x*) et l'on note* $\dim_x f$ *l'entier positif* $\dim_x(f^{-1}(f(x)))$.

Dire que f est *quasi-fini* au point x ($\mathbf{Err}_{\mathrm{III}}$, 20) équivaut donc à dire que $\dim_x f=0$. On a vu (13.1.3) que la fonction $x\rightsquigarrow\dim_x f$ est semi-continue supérieurement. On notera que, même lorsque le morphisme f a la propriété (S_1) (autrement dit (6.8.1) est plat et tel que ses fibres n'aient pas de cycle premier associé immergé), la fonction $x\rightsquigarrow\dim_x f$ n'est pas nécessairement continue, comme le montre l'exemple où $Y=\mathrm{Spec}(k)$, où k est un corps, et $X=\mathrm{Spec}(k[U,V,W]/\mathfrak{p}\mathfrak{q})$, où $\mathfrak{p}=(W)$ et $\mathfrak{q}=(U)+(V-W)$, idéaux premiers de $k[U,V,W]$ (X étant donc la réunion, dans l'espace à 3 dimensions, d'un plan et d'une droite non parallèle à ce plan).

Dire qu'un morphisme localement de présentation finie $f: X\to Y$ est étale au point $x\in X$ signifie encore que f est lisse au point x et que $\dim_x f=0$ (17.6.1).

Proposition (**17.10.2**). — *Soit* $f: X\to Y$ *un morphisme lisse. Pour tout* $x\in X$, *le* $\mathcal{O}_{X,x}$*-Module localement libre* Ω_f^1 (17.2.3) *a un rang en* x *égal à* $\dim_x f$ (ce qui entraîne que $x\rightsquigarrow\dim_x f$ est une fonction *continue* dans X).

En effet, si $y=f(x)$, $X_y=f^{-1}(y)$ est lisse sur $\boldsymbol{k}(y)$, et si $f_y: X_y\to\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$ est le morphisme structural, on a $\Omega_{f_y}^1=\Omega_f^1\otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}}\boldsymbol{k}(y)$ (16.4.5); on peut donc se borner au cas où $Y=\mathrm{Spec}(k)$ est le spectre d'un corps; en outre, en vertu de (16.4.5) et (17.7.1), on peut remplacer k par une extension algébriquement close, autrement dit supposer k *algébriquement clos*. L'ensemble des points de X rationnels sur k étant alors dense dans X (10.4.8), on peut se borner au cas où x est rationnel sur k. Or (16.4.12) $(\Omega^1_{X/k})_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \boldsymbol{k}(x)$ est alors k-isomorphe à $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, et puisque $\mathcal{O}_x$ est un anneau local régulier (17.5.1), $\operatorname{rg}_k(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2) = \dim(\mathcal{O}_x)$ ($\mathbf{0}$, 17.1.1); donc $\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_x}(\Omega^1_{X/k})_x = \dim(\mathcal{O}_x)$. Mais puisque $\boldsymbol{k}(x) = k$, on a $\dim_x f = \dim(\mathcal{O}_x)$ (5.2.3). C.Q.F.D.

Nous démontrerons plus loin une réciproque de ce résultat (17.15.5).

Corollaire (**17.10.3**). — *Soient* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *deux morphismes lisses. Alors, pour tout* $x \in X$, *on a*

(17.10.3.1) $$\dim_x(g \circ f) = \dim_x f + \dim_{f(x)} g.$$

En effet, $g \circ f$ est lisse (17.3.3), donc les trois $\mathcal{O}_X$-Modules $\Omega^1_{X/Y}$, $\Omega^1_{X/Z}$ et $f^*(\Omega^1_{Y/Z})$ sont localement libres (17.2.3 et $\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.4.5); en outre le rang en x de $f^*(\Omega^1_{Y/Z})$ est égal au rang en $y = f(x)$ de $\Omega^1_{Y/Z}$. L'égalité (17.10.3.1) est donc conséquence de (17.10.2) et de l'exactitude de la suite (17.2.3.1).

Corollaire (**17.10.4**). — *Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme lisse*, X′ *un sous-préschéma de* X *tel que le morphisme composé* $X' \xrightarrow{j} X \xrightarrow{f} Y$ *(où j est l'injection canonique) soit lisse. Alors le faisceau conormal* $\mathcal{N}_{X'/X}$ *est un* $\mathcal{O}_{X'}$*-Module localement libre, et pour tout* $x \in X'$, *on a*

(17.10.4.1) $$\dim_x f = \dim_x(f \circ j) + \operatorname{rg}_{\mathcal{O}_{X',x}}(\mathcal{N}_{X'/X})_x.$$

En effet, $\Omega^1_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'}$ et $\Omega^1_{X'/Y}$ sont alors localement libres et la suite exacte (17.2.5.1) est scindée dans un voisinage convenable de chaque point de X′, donc $\mathcal{N}_{X'/X}$ est localement libre (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 2, th. 1), et la relation (17.10.4.1) résulte aussitôt de l'exactitude de la suite (17.2.5.1).

17.11. Morphismes lisses de préschémas lisses.

Théorème (**17.11.1**). — *Soient* $f : Y \to S$ *et* $h : X \to S$ *deux morphismes localement de présentation finie*, $g : X \to Y$ *un* S*-morphisme*, x *un point de* X; *posons* $y = g(x)$, $s = f(y) = h(x)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) f *est lisse au point* y *et* g *est lisse au point* x.

b) g *et* h *sont lisses au point* x.

c) h *est lisse au point* x, *et l'homomorphisme canonique* (16.4.18)

(17.11.1.1) $$(g^*(\Omega^1_{Y/S}))_x \to (\Omega^1_{X/S})_x$$

est inversible à gauche (autrement dit est un isomorphisme sur un *facteur direct de* $(\Omega^1_{X/S})_x$).

c′) h *est lisse au point* x, *et l'homomorphisme canonique*

(17.11.1.2) $$((\Omega^1_{Y/S})_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \boldsymbol{k}(y)) \otimes_{\boldsymbol{k}(y)} \boldsymbol{k}(x) \to (\Omega^1_{X/S})_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \boldsymbol{k}(x)$$

est injectif.

Supposons en outre que l'homomorphisme $\boldsymbol{k}(y) \to \boldsymbol{k}(x)$ *soit bijectif. Alors les conditions précédentes sont aussi équivalentes à la suivante :*

d) *h est lisse au point x, et l'application canonique* $T_{X/S}(x) \to T_{Y/S}(y)$ *de l'espace vectoriel tangent en x à X dans l'espace vectoriel tangent en y à Y* (16.5.12) *est surjective.*

Le fait que *a)* entraîne *b)* résulte trivialement de (17.3.3, (ii)); *b)* entraîne *c)* par application de (17.2.3, (ii)). Pour voir que *c)* est équivalente à *c')*, notons qu'en vertu de (17.2.3, (i)), $\Omega^1_{X/S}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module localement libre de type fini; il suffit alors d'appliquer (**0**, 19.1.12) à l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ et à l'homomorphisme (17.11.1.1) de $\mathcal{O}_{X,x}$-modules de type fini. Lorsque $\boldsymbol{k}(x) = \boldsymbol{k}(y)$, l'application linéaire tangente $T_{X/S}(x) \to T_{Y/S}(y)$ est transposée de (17.11.1.2), par (16.5.12), ce qui établit dans ce cas l'équivalence de *c')* et *d)*.

Il reste donc à prouver que *c)* entraîne *a)*. On peut se borner au cas où $S = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$, $X = \mathrm{Spec}(C)$ sont affines. L'hypothèse implique (17.2.3, (i)) que $(\Omega^1_{X/S})_x = \Omega^1_{C_x/A_s}$ est un C_x-module libre : en effet (16.10.6) il existe des éléments t_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ de $B_y = \mathcal{O}_{Y,y}$ tels que les différentielles $d_{B_y/A_s}(t_i)$ engendrent le B_y-module $\Omega^1_{B_y/A_s}$ et que leurs images dans $\Omega^1_{C_x/A_s}$ fassent partie d'une base de ce C_x-module libre. Comme $\Omega^1_{Y/S}$ (resp. $\Omega^1_{X/S}$) est un $\mathcal{O}_Y$-Module (resp. un $\mathcal{O}_X$-Module) de présentation finie (16.4.22), on peut, en remplaçant au besoin X et Y par des voisinages ouverts affines convenables de x et y respectivement, supposer que $\Omega^1_{C/A}$ est un C-module libre et que les t_i sont les images d'éléments s_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ de B tels que les $d_{B/A}(s_i)$ engendrent le B-module $\Omega^1_{B/A}$ et que leurs images dans $\Omega^1_{C/A}$ fassent partie d'une base de ce C-module (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 1, prop. 2). Soit φ le A-homomorphisme de $B' = A[T_1, \ldots, T_r]$ dans B tel que $\varphi(T_i) = s_i$ pour tout i; le di-homomorphisme correspondant $\Omega^1_{B'/A} \to \Omega^1_{B/A}$ (**0**, 20.5.2) transforme les $d_{B'/A}(T_i)$, qui forment une base de $\Omega^1_{B'/A}$ (**0**, 20.4.13), en les $d_{B/A}(s_i)$ et est par suite *surjectif*; si $Y' = \mathrm{Spec}(B')$, et si $u : Y \to Y'$ est le S-morphisme correspondant à φ, on conclut de (17.2.2) que u est *non ramifié*. Si l'on prouve que le morphisme composé $u \circ g : X \to Y'$ est lisse au point x, il résultera donc de (17.7.10) que u est *étale* au point y, puis de (17.3.5) que g est lisse au point x; enfin, comme le morphisme structural $f' : Y' \to S$ est lisse (17.3.8), $f = f' \circ u$ sera lisse au point y. Comme les images canoniques des $d_{B'/A}(T_i)$ dans $\Omega^1_{C/A}$ sont celles des $d_{B/A}(s_i)$, elles font partie d'une base de $\Omega^1_{C/A}$. On voit ainsi que pour prouver que *c)* implique *a)*, on peut se borner au cas où $Y' = Y$, et par suite supposer que f est un morphisme *lisse*.

En vertu de (17.8.2), on peut alors se borner au cas où $S = \mathrm{Spec}(k)$ est le spectre d'un corps; de plus, grâce à (17.7.1, (ii)), on peut supposer que k est algébriquement clos; enfin, remplaçant au besoin X et Y par des voisinages ouverts de x et y respectivement, on peut supposer que f et h sont tous deux lisses, et que l'homomorphisme canonique

$$g^*(\Omega^1_{Y/S}) \to \Omega^1_{X/S}$$

est inversible à gauche (**0**, 19.1.12). Alors l'ensemble des points de X rationnels sur k est très dense dans X (10.4.8), donc, pour prouver que g est lisse, il suffit de prouver que g est lisse en tout point $x \in X$ *rationnel sur k*, ou encore qu'en un tel point, $\mathcal{O}_{X,x}$ est un $\mathcal{O}_{Y,y}$-module plat et $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x}$ un anneau régulier (17.5.1). Or, $y = g(x)$ est *a fortiori* rationnel sur k, et comme $\mathcal{O}_{Y,y}$ est alors une k-algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes et que $\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y = k$, il résulte de (**0**, 20.5.14) que l'homomorphisme canonique $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \rightarrow (\Omega^1_{Y/S})_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \boldsymbol{k}(y)$ est bijectif; de même, l'homomorphisme canonique $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \rightarrow (\Omega^1_{X/S})_x \otimes_{\mathcal{O}_{Y,x}} \boldsymbol{k}(x)$ est bijectif. L'hypothèse *c')*, équivalente à *c)*, signifie donc ici que l'homomorphisme canonique

$$(\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2) \otimes_{\boldsymbol{k}(y)} \boldsymbol{k}(x) \rightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$$

est injectif. Comme l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier, la conclusion résulte de (**0**, 17.3.3). C.Q.F.D.

Corollaire (**17.11.2**). — *Sous les hypothèses générales de* (17.11.1), *les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *f est lisse au point y et g est étale au point x.*

b) *h est lisse au point x et g est étale au point x.*

c) *h est lisse au point x, et l'homomorphisme canonique*

$$(g^*(\Omega^1_{X/S}))_x \rightarrow (\Omega^1_{X/S})_x$$

est bijectif.

c') *h est lisse au point x, et l'homomorphisme canonique*

$$((\Omega^1_{Y/S})_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \boldsymbol{k}(y)) \otimes_{\boldsymbol{k}(y)} \boldsymbol{k}(x) \rightarrow (\Omega^1_{X/S})_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \boldsymbol{k}(x)$$

est bijectif.

Supposons en outre que l'homomorphisme $\boldsymbol{k}(y) \rightarrow \boldsymbol{k}(x)$ soit bijectif. Alors les conditions précédentes sont aussi équivalentes à la suivante :

d) *h est lisse au point x, et l'application canonique* $T_{X/S}(x) \rightarrow T_{Y/S}(y)$ (16.5.12) *est bijective.*

Chacune des conditions *a)*, *b)*, *c)* de (17.11.2) est équivalente à la conjonction de la condition correspondante de (17.11.1) et du fait que g est non ramifié au point x, compte tenu de (17.2.2) en ce qui concerne la condition *c)*; d'où l'équivalence de *a)*, *b)* et *c)*. L'équivalence de *c)* et *c')* résulte de l'équivalence des conditions correspondantes de (17.11.1) et du lemme de Nakayama; l'équivalence de *c')* et *d)* lorsque $\boldsymbol{k}(x) = \boldsymbol{k}(y)$ est immédiate par transposition (16.5.12).

Corollaire (**17.11.3**). — *Soient* $h : X \rightarrow S$ *un morphisme lisse,* s_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ *des sections de* $\mathcal{O}_X$ *au-dessus de* X (*qui sont aussi des sections de* $h_*(\mathcal{O}_X)$ *au-dessus de* S), $g : X \rightarrow S[T_1, \ldots, T_r] = \mathbf{V}^r_S$ *le* S-*morphisme correspondant à l'homomorphisme de* $\mathcal{O}_S$-*Modules* $\mathcal{O}^r_S \rightarrow h_*(\mathcal{O}_X)$ *défini par ces sections* (**II**, 1.2.7). *Pour que g soit lisse* (resp. *étale*) *en un point* $x \in X$ *il faut et il suffit que les* $(d_{X/S}(s_i))_x$ *fassent partie d'une base* (resp. *constituent une base*) *du* $\mathcal{O}_{X,x}$-*module* $(\Omega^1_{X/S})_x$.

Il suffit d'appliquer (17.11.1) (resp. (17.11.2)) en prenant pour f le morphisme structural $S[T_1, \ldots, T_r] \rightarrow S$.

Corollaire (**17.11.4**). — *Pour qu'un morphisme* $h : X \rightarrow S$ *soit lisse en un point* $x \in X$, *il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert* U *de x, un entier r, et un* S-*morphisme étale* $U \rightarrow S[T_1, \ldots, T_n]$.

La condition est évidemment suffisante puisque le morphisme structural $S[T_1, \ldots, T_n] \to S$ est lisse (17.3.8). Pour montrer qu'elle est nécessaire, notons que puisque h est lisse au point x, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\Omega^1_{X/S}|U$ soit localement libre (17.2.3); il suffit alors d'utiliser (16.10.6) pour obtenir (en restreignant au besoin U) des sections s_i de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de U telles que les $d_{X/S}(s_i)$ forment une base de $\Omega^1_{X/S}|U$; on conclut en appliquant (17.11.3).

Proposition (**17.11.5**). — *Soient* $f : Y \to S$, $h : X \to S$ *deux morphismes lisses. Pour qu'un* S-*morphisme* $g : X \to Y$ *soit une immersion ouverte, il faut et il suffit que g soit un monomorphisme de préschémas et que pour tout* $x \in X$, *si l'on pose* $y = g(x)$, *on ait* $\dim_y(f) = \dim_x(h)$ (pour une généralisation de cette proposition, voir (18.10.5)).

La condition est évidemment nécessaire; prouvons qu'elle est suffisante.

En vertu de (17.9.5), on est aussitôt ramené au cas où $S = \operatorname{Spec}(k)$ est le spectre d'un corps, et en vertu de (2.7.1, (x)), on peut supposer k algébriquement clos. Compte tenu de (17.9.1), il suffit alors de prouver que g est étale, et comme l'ensemble des points où g est étale est ouvert, il suffit de montrer que g est étale aux points *fermés* (ou encore, rationnels sur k) de X (10.4.8). Soit donc x un tel point, et posons $y = g(x)$, qui est aussi rationnel sur k; par hypothèse, l'anneau $A = \mathcal{O}_{Y,y}$ est régulier et de corps résiduel k; soient $d = \dim(A)$ et $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ un système régulier de paramètres pour A. Posons $B = \mathcal{O}_{X,x}$, $C = B/\mathfrak{m}_y B$. Comme g est un monomorphisme, il en est de même du morphisme $\operatorname{Spec}(C) \to \operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(y)) = \operatorname{Spec}(k)$ déduit de g par changement de base (**I**, 3.3.12); mais cela signifie que l'homomorphisme correspondant $u : k \to C$ est *surjectif* (donc bijectif), car u admet un inverse à gauche $v : C \to k$, et $u \circ v$ et l'identité de C, composés avec u, donnent le même morphisme $u : k \to C$. Comme par hypothèse B est un anneau régulier de dimension d, les images des t_i dans B forment un système régulier de paramètres pour B (**0**, 17.1.7); la condition (17.6.3, *e''*)) est donc vérifiée par g au point x (**0**, 17.1.1 et Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 8, cor. 3 du th. 1), ce qui achève la démonstration.

17.12. Sous-préschémas lisses d'un préschéma lisse. Morphismes lisses et morphismes différentiellement lisses.

Théorème (**17.12.1**). — *Soient* $f : X \to S$, $h : Y \to S$ *deux morphismes localement de présentation finie,* $j : Y \to X$ *une immersion,* y *un point de* Y, $x = j(y)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *h est lisse au point y et f est lisse au point x.*

b) *f est lisse au point x, et l'homomorphisme canonique* (16.4.21)

$$(\mathcal{N}_{Y/X})_y \to (j^*(\Omega^1_{X/S}))_y$$

est inversible à gauche.

c) *h est lisse au point y et il existe un voisinage ouvert* U *de y dans* Y *tel que* $j|U : U \to X$ *soit une immersion régulière* (16.9.2).

c') *h est lisse au point y et il existe un voisinage ouvert* U *de y dans* Y *tel que* $j|\mathrm{U} : \mathrm{U} \rightarrow \mathrm{X}$ *soit une immersion quasi-régulière* (autrement dit (16.9.8), il existe un voisinage U de y dans Y dans lequel $\mathscr{N}_{\mathrm{Y/X}}$ est un $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$-Module localement libre et l'homomorphisme canonique $\mathbf{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}}(\mathscr{N}_{\mathrm{Y/X}}) \rightarrow \mathscr{G}r^{\bullet}(j)$ est bijectif).

Pour démontrer l'équivalence de *a)* et *b)*, on peut se borner au cas où $\mathrm{S}=\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{X}=\mathrm{Spec}(\mathrm{B})$ sont affines, avec $\mathrm{Y}=\mathrm{Spec}(\mathrm{B}/\mathfrak{J})$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal de type fini de B, et B est une A-algèbre lisse (17.3.2, (ii)). Il suffit alors d'appliquer le critère jacobien (**0**, 22.6.1) ainsi que (**0**, 19.1.14), compte tenu de ce que $\Omega^1_{\mathrm{X/S}}$ est un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module localement libre dans un voisinage de x et $\mathscr{N}_{\mathrm{Y/X}}$ un $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$-Module de type fini (16.1.6).

En second lieu, prouvons que *a)* entraîne *c')*. On peut encore se borner au cas où S, X, Y sont affines, B et $\mathrm{B}/\mathfrak{J}$ des A-algèbres lisses, et il résulte alors de (17.7.9) et (8.10.5, (iv)) qu'il existe un sous-anneau noethérien A' de A, une A'-algèbre de type fini B' et un idéal $\mathfrak{J}'$ de B' tels que $\mathrm{B}=\mathrm{B}'\otimes_{\mathrm{A}'}\mathrm{A}$, $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}'\mathrm{B}$ et que B' et $\mathrm{B}'/\mathfrak{J}'$ soient des A'-algèbres lisses. Notons que, d'après (**0**, 19.3.8), B' est encore une A'-algèbre formellement lisse lorsqu'on munit A' de la topologie discrète et B' de la topologie $\mathfrak{J}'$-préadique. Par suite (**0**, 19.5.4), $\mathfrak{J}'/\mathfrak{J}'^2$ est un $(\mathrm{B}'/\mathfrak{J}')$-module projectif et l'homomorphisme canonique $\mathbf{S}^{\bullet}_{\mathrm{B}'/\mathfrak{J}'}(\mathfrak{J}'/\mathfrak{J}'^2) \rightarrow \mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{J}'}(\mathrm{B}')$ est bijectif. En d'autres termes (16.9.8), l'immersion $\mathrm{Spec}(\mathrm{B}'/\mathfrak{J}') \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathrm{B}')$ est quasi-régulière, donc régulière puisque B' est noethérien (16.9.10). Mais comme par hypothèse $\mathrm{B}'/\mathfrak{J}'$ est un A'-module plat (17.5.1) et B' une A'-algèbre de présentation finie, on peut appliquer (11.3.8) en remplaçant $\mathscr{F}$ par $\widetilde{\mathfrak{J}'}$, et on voit donc (par changement de base) que j est une immersion régulière, et *a fortiori* quasi-régulière. Le fait que B est une A-algèbre de présentation finie et un A-module plat montre d'ailleurs, en vertu de (11.3.8), que les conditions *c')* et *c)* sont équivalentes, et sont stables par changement de base.

Montrons enfin que *c)* entraîne *a)*. Du fait que, dans (11.3.8), la condition *b)* entraîne *c)*, on voit déjà que si *c)* est vérifiée, f est *plat* au point x; en vertu de (17.5.1), tout revient donc à voir que sous l'hypothèse *c)*, $f^{-1}(s)$ est lisse sur $\boldsymbol{k}(s)$ au point x, en posant $s=h(x)$; comme on a remarqué que la condition *c)* est stable par changement de base, on voit qu'on est ramené au cas où $\mathrm{S}=\mathrm{Spec}(k)$ est le spectre d'un corps, et compte tenu de (17.7.1, (ii)) on peut supposer que k est *algébriquement clos*. Il suffit alors de prouver que $\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}$ est un anneau *régulier* (17.5.1). Or, par hypothèse on a $\mathcal{O}_{\mathrm{Y},y}=\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}/\mathscr{J}_x$, où $\mathscr{J}_x$ est un idéal engendré par une suite $\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}$-régulière (t_i), et $\mathcal{O}_{\mathrm{Y},y}$ est un anneau *régulier*; comme les t_i font partie d'un système de paramètres pour $\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}$ (**0**, 16.4.1), la conclusion résulte de (**0**, 17.1.7).

Corollaire **(17.12.2)**. — *Avec les notations de* (17.12.1), *supposons que f soit lisse au point x, et soit* Y *un sous-préschéma fermé de* X *défini par un Idéal $\mathscr{J}$ de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$, et* S*-lisse au point x. Soient $(g_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ des sections de $\mathscr{J}$ au-dessus de* X. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Les $(g_i)_x$ forment un système de générateurs du $\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}$-module $\mathscr{J}_x$ dont le nombre d'éléments est le plus petit possible.*

b) *Si g'_i est l'image canonique de g_i dans $\Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{J}/\mathscr{J}^2)$, les $(g'_i)_x$ forment une base du $(\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}/\mathscr{J}_x)$-module $\mathscr{J}_x/\mathscr{J}_x^2$.*

c) *Les images des* $d_{X/S}g_i$ *dans* $(\Omega^1_{X/S})_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \boldsymbol{k}(x)$ *sont des éléments linéairement indépendants sur* $\boldsymbol{k}(x)$, *et les* $(g_i)_x$ *engendrent* $\mathscr{J}_x$.

d) *Il existe un voisinage ouvert* U *de* x *dans* X *et des sections* g_j $(r+1 \leqslant j \leqslant n)$ *de* $\mathcal{O}_X$ *au-dessus de* U *telles que le* S-*morphisme* $u : U \rightarrow S[T_1, \ldots, T_n]$ *correspondant à l'homomorphisme* $\mathcal{O}^n_S \rightarrow f_*(\mathcal{O}_U)$ *défini par les sections* $g_i|U$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ *et* g_j $(r+1 \leqslant j \leqslant n)$ (**II**, 1.2.7) *soit un morphisme étale, et que l'image réciproque du sous-préschéma* $Y' = S[T_{r+1}, \ldots, T_n]$ *par ce morphisme soit le préschéma induit par* $j(Y)$ *sur l'ouvert* $U \cap j(Y)$.

Comme $(g'_i)_x$ est l'image canonique de $(g_i)_x$, l'équivalence de *a)* et *b)* résulte du lemme de Nakayama, $\mathscr{J}_x$ étant de type fini et $\mathscr{J}_x/\mathscr{J}^2_x$ un $(\mathcal{O}_{X,x}/\mathscr{J}_x)$-module libre (17.10.4) (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, nº 2, prop. 5). En vertu de (17.12.1, *b)*), $\mathscr{J}_x/\mathscr{J}^2_x$ s'identifie canoniquement à un facteur direct du $(\mathcal{O}_{X,x}/\mathscr{J}_x)$-module libre de rang n, $(\Omega^1_{X/S})_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} (\mathcal{O}_{X,x}/\mathscr{J}_x)$, et l'équivalence de *b)* et *c)* résulte de Bourbaki, *loc. cit.* En outre, si *a)* est vérifié, $(g'_i)_x$ est ainsi identifié à $(d_{X/S}g_i)_x \otimes 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$; le $\mathcal{O}_{X,x}$-module $(\Omega^1_{X/S})_x$ étant libre de rang n, il résulte encore de Bourbaki, *loc. cit.*, qu'en remplaçant au besoin X par un voisinage ouvert de x, on peut supposer qu'il existe $n-r$ sections g_i $(r+1 \leqslant i \leqslant n)$ de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de X, telles que les $(d_{X/S}g_i)_x$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ forment une base de $(\Omega^1_{X/S})_x$; le fait que le morphisme correspondant u soit étale au point x résulte alors de (17.11.3); pour la même raison, le morphisme $u^{-1}(Y') \rightarrow Y'$, restriction de u, est étale au point x; en remplaçant X par un voisinage de x, on peut supposer ces deux morphismes étales. En outre, il est immédiat que Y (identifié, pour simplifier, au sous-préschéma fermé $j(Y)$ de X) est un sous-préschéma fermé de $u^{-1}(Y')$, et en vertu du choix des g_i pour $i > r$ et de (17.2.5) et (17.11.2), la restriction à Y de u peut encore être supposée étale. On en déduit que pour tout $y' \in Y'$, l'immersion $Y \cap u^{-1}(y') \rightarrow u^{-1}(y')$ est ouverte, d'où l'on conclut à l'aide de (17.9.6) que $Y \rightarrow u^{-1}(Y')$ est une immersion ouverte; cela prouve que *a)* entraîne *d)*. La réciproque découle aussitôt de (17.11.3).

Corollaire (**17.12.3**). — *Soient* $f : X \rightarrow S$ *un morphisme localement de présentation finie,* $u : S \rightarrow X$ *une* S-*section de* X. *Pour que* f *soit lisse en un point* $x \in X$, *il faut et il suffit que* u *soit une immersion quasi-régulière dans un voisinage de* $s = f(x)$.

La conclusion résulte de (17.12.1), puisque $f \circ u = 1_S$ est lisse.

Proposition (**17.12.4**). — *Tout morphisme lisse* $f : X \rightarrow S$ *est différentiellement lisse* (autrement dit (16.10.5) $\Delta_f : X \rightarrow X \times_S X$ est une immersion quasi-régulière). *En particulier, les* $\mathscr{P}^n_f = \mathscr{P}^n_{X/S}$ *et les* $\operatorname{gr}_n(\mathscr{P}_{X/S})$ *sont des* $\mathcal{O}_X$-*Modules localement libres de type fini.*

Il suffit de remarquer que le morphisme structural $p_1 : X \times_S X \rightarrow X$ est lisse (17.3.3, (iii)) et que Δ_f est une X-section pour p_1; la conclusion résulte de (17.12.3).

Proposition (**17.12.5**). — *Soit* $f : X \rightarrow Y$ *un morphisme localement de présentation finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) f *est différentiellement lisse.*

b) *Pour tout morphisme* $g : Y' \rightarrow Y$, *si l'on pose* $X' = X \times_Y Y'$ *et* $f' = f_{(Y')} : X' \rightarrow Y'$, *alors, pour toute* Y'-*section* s' *de* X', f' *est lisse en tous les points de* $s'(Y')$.

c) *La seconde projection* $p_2 : X \times_Y X \rightarrow X$ *est lisse en tous les points de la diagonale* $\Delta_f(X)$.

La condition *c)* est un cas particulier de *b)* : il suffit en effet de prendre $Y'=X$ et $g=f$ dans *b)*, car alors f' n'est autre que la seconde projection p_2, et Δ_f est une X-section de $X\times_Y X$. En second lieu, *c)* entraîne *a)*, car p_2 est un morphisme localement de présentation finie, et si p_2 est lisse aux points de $\Delta_f(X)$, Δ_f est une immersion quasi-régulière (17.12.3), donc f est différentiellement lisse. Enfin, montrons que *a)* entraîne *b)*; si Δ_f est une immersion quasi-régulière, p_2 est lisse en tous les points de $\Delta_f(X)$ (17.12.3). Or, si $g' : X'\to X$ est la projection canonique, et $v=(g', g')_Y : X'\to X\times_Y X$, on vérifie aussitôt que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X\times_Y X \arrow[d, "p_2"'] & X' \arrow[l, "v"'] \arrow[d, "f'"] \\ X & Y' \arrow[l, "h=g'\circ s'"] \end{tikzcd}$$

est commutatif et identifie X' au produit $(X\times_Y X)\times_X Y'$ (**I**, 3.3.9); tenant compte de ce que le diagramme (17.4.1.1) identifie Y' au produit des $(X\times_Y X)$-préschémas X et X', on conclut, de ce que p_2 est lisse en tout point de $\Delta_f(X)$, que f' est lisse en tout point de $s'(Y')$ (17.3.3, (iii)).

Corollaire (**17.12.6**). — *Les notations étant celles de* (8.8.1), *on suppose* X_α *quasi-compact, et* $f_\alpha : X_\alpha\to S_\alpha$ *localement de présentation finie. Pour que* $f : X\to S$ *soit différentiellement lisse, il faut et il suffit qu'il existe* $\lambda\geqslant\alpha$ *tel que* $f_\lambda : X_\lambda\to S_\lambda$ *soit différentiellement lisse* (*auquel cas* $f_\mu : X_\mu\to S_\mu$ *est différentiellement lisse pour* $\mu\geqslant\lambda$).

La suffisance de la condition et la dernière assertion résultent de (16.10.4). Pour prouver que la condition est nécessaire, notons que $\Delta_f : X\to X\times_S X$ et $p_2 : X\times_S X\to X$ se déduisent par changement de base de $\Delta_{f_\lambda} : X_\lambda\to X_\lambda\times_{S_\lambda} X_\lambda$ et $p_{2,\lambda} : X_\lambda\times_{S_\lambda} X_\lambda\to X_\lambda$. En vertu de (17.12.5), pour tout $z\in\Delta_f(X)$, il existe un voisinage ouvert affine $U(z)$ de z dans $X\times_S X$ tel que p_2 soit lisse dans $U(z)$; en vertu de (8.2.11) et (17.7.8), il existe un indice $\lambda(z)$ et un voisinage $U_{\lambda(z)}$ de la projection de z dans $X_{\lambda(z)}\times_{S_{\lambda(z)}} X_{\lambda(z)}$ tels que $U(z)$ soit l'image réciproque de $U_{\lambda(z)}$, et que $p_{2,\lambda(z)}$ soit lisse dans $U_{\lambda(z)}$. Comme X est quasi-compact, on peut recouvrir $\Delta_f(X)$ par un nombre fini de voisinages $U(z_i)$; en vertu de (8.3.4), il existe un λ supérieur à tous les $\lambda(z_i)$ tels que les images réciproques des $U_{\lambda(z_i)}$ dans $X_\lambda\times_{S_\lambda} X_\lambda$ forment un recouvrement de $\Delta_{f_\lambda}(X_\lambda)$; il résulte alors de (17.12.5) que cet indice λ répond à la question.

Exemple (**17.12.7**). — Soient S un préschéma, G un S-*préschéma en groupes*, localement de présentation finie sur S. Alors, pour que G soit différentiellement lisse, il faut et il suffit que G soit lisse sur S aux points de la « section unité » e de G. La condition est en effet nécessaire par (17.12.5). Inversement, supposons-la remplie; pour tout morphisme $S'\to S$, $G'=G\times_S S'$ est alors un S'-préschéma en groupes localement de présentation finie sur S'; on peut donc, en vertu de (17.12.5), se borner à prouver que pour toute S-section s de G, f est lisse aux points de $s(S)$. Or, si $m : G\times_S G\to G$ est le morphisme qui définit la structure de préschéma en groupes de G, $m\circ(s\times 1_G) : S\times_S G\to G\times_S G\to G$ est un

S-isomorphisme du préschéma G, la « translation à gauche » τ_s, transformant les points de la section unité de G en les points de $s(\mathrm{S})$; on en conclut que G est lisse sur S aux points de $s(\mathrm{S})$.

Remarque **(17.12.8).** — Un S-préschéma en groupes G, de type fini (et même fini) sur un préschéma localement noethérien S, peut être différentiellement lisse sur S sans être lisse (ni même *plat*) sur S. Prenons par exemple pour S le spectre de l'algèbre des nombres duaux $\mathrm{D}=k[\mathrm{T}]/\mathrm{T}^2k[\mathrm{T}]$ sur un corps k, pour G le spectre de la D-algèbre composée directe $\mathrm{E}=\mathrm{D}\oplus k$. On définit sur G une structure de S-schéma en groupes en définissant une « application diagonale » δ, homomorphisme de E dans $\mathrm{E}\otimes_{\mathrm{D}}\mathrm{E}$: si e', e'' sont les idempotents, images canoniques de l'unité 1 de D dans les facteurs D et k de E, on vérifie sans peine qu'on obtient une telle application diagonale en prenant $\delta(e')=e'\otimes e'+e''\otimes e''$ et $\delta(e'')=e'\otimes e''+e''\otimes e'$. La section unité du schéma en groupes G correspond à l'homomorphisme $\mathrm{E}\rightarrow\mathrm{D}$ qui est l'identité dans D et 0 dans k; c'est un isomorphisme de S sur une composante connexe de G, et *a fortiori* G est différentiellement lisse sur S (17.12.6), mais il est clair que G n'est pas S-plat.

17.13. Morphismes transversaux.

(17.13.1) Soient S un préschéma, X, Y, X' trois S-préschémas, $i:\mathrm{Y}\rightarrow\mathrm{X}$ une S-*immersion*, $f:\mathrm{X}'\rightarrow\mathrm{X}$ un S-morphisme. Posons $\mathrm{Y}'=\mathrm{Y}\times_{\mathrm{X}}\mathrm{X}'$, et soient $g:\mathrm{Y}'\rightarrow\mathrm{Y}$, $j:\mathrm{Y}'\rightarrow\mathrm{X}'$ les projections canoniques, de sorte qu'on a le diagramme commutatif

(17.13.1.1)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y} \arrow[d, "i"'] & \mathrm{Y}' \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "j"] \\ \mathrm{X} & \mathrm{X}' \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

et que j est une S-immersion. On a alors un diagramme commutatif de $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}'}$-Modules quasi-cohérents

(17.13.1.2)
$$\begin{tikzcd} g^*(\mathcal{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{gr}_1(g)"'] & f^*(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}})\otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}'}}\mathcal{O}_{\mathrm{Y}'} \arrow[r] \arrow[d] & g^*(\Omega^1_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ \mathcal{N}_{\mathrm{Y}'/\mathrm{X}'} \arrow[r] & \Omega^1_{\mathrm{X}'/\mathrm{S}}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}'}}\mathcal{O}_{\mathrm{Y}'} \arrow[r] & \Omega^1_{\mathrm{Y}'/\mathrm{S}} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où la ligne inférieure est la suite exacte (16.4.21) appliquée à j, la ligne supérieure provient de la même suite exacte pour i, par application du foncteur exact à droite g^* (qui la laisse donc exacte); $\mathrm{gr}_1(g)$ est défini en (16.2.1), et la commutativité des deux carrés résulte de (**0**, 20.5.7.3) et (**0**, 20.5.11.3).

On a vu en outre (16.2.2, (iii)) que $\mathrm{gr}_1(g)$ est ici surjectif, donc on déduit de (17.13.1.2) la suite exacte

(17.13.1.3) $$g^*(\mathscr{N}_{Y/X}) \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{X'/S} \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \mathscr{O}_{Y'} \to \Omega^1_{Y'/S} \to 0.$$

Proposition **(17.13.2)**. — *Les notations étant celles de* (17.13.1), *soient* x' *un point de* Y', $x = g(x')$ *son image dans* Y; *supposons* X *et* Y *lisses sur* S *au point* x, X' *lisse sur* S *au point* x'. *Soient* m, $m-c$ *les dimensions relatives de* X *et* Y *sur* S *au point* x (17.10.1), n *celle de* X' *sur* S *au point* x'. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) Y' *est lisse sur* S *au point* x' *et de dimension relative* $n-c$.

b) *L'homomorphisme* $\alpha \otimes 1 : g^*(\mathscr{N}_{Y/X}) \otimes_{\mathscr{O}_{Y'}} \boldsymbol{k}(x') \to \Omega^1_{X'/S} \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \boldsymbol{k}(x')$ *déduit de l'homomorphisme* α *de* (17.13.1.3) *est injectif.*

Soit s *l'image canonique de* x *dans* S, *et supposons que* x' *soit rationnel sur* $\boldsymbol{k}(s)$. *Alors les conditions* a) *et* b) *sont aussi équivalentes à la suivante :*

b') *L'homomorphisme transposé de* $\alpha \otimes 1$

$$T_{X'/S}(x') \to (\mathscr{N}_{Y/X} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \boldsymbol{k}(x))^{\vee} = T_{X/S}(x)/T_{Y/S}(x)$$

(cf. (16.5.12)) *est surjectif.*

De plus, lorsque les conditions a) *et* b) *sont vérifiées en* x', *elles le sont dans un voisinage de* x' *dans* Y'; *en remplaçant au besoin* X' *par un voisinage de* x', *l'homomorphisme*

$$\mathrm{gr}_1(g) : g^*(\mathscr{N}_{Y/X}) \to \mathscr{N}_{Y'/X'}$$

est bijectif, et la suite

(17.13.2.1) $$0 \to g^*(\mathscr{N}_{Y/X}) \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{X'/S} \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \mathscr{O}_{Y'} \to \Omega^1_{Y'/S} \to 0$$

obtenue en ajoutant un 0 *à* (17.13.1.3), *est exacte.*

Le fait que si les conditions équivalentes *a)* et *b)* sont vérifiées au point x', elles le sont aussi au voisinage de x' dans Y', résulte de ce que l'ensemble des points où un morphisme est lisse est ouvert (17.3.7) et de (17.10.2).

En vertu de (17.12.1) appliqué à X' et Y', dire que Y' est lisse sur S au point x' équivaut à dire que l'homomorphisme

$$\delta \otimes 1 : \mathscr{N}_{Y'/X'} \otimes_{\mathscr{O}_{Y'}} \boldsymbol{k}(x') \to \Omega^1_{X'/S} \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \boldsymbol{k}(x')$$

est injectif, compte tenu de (**0**, 19.1.12) et de ce que $\Omega^1_{X'/S}$ est un $\mathscr{O}_{X'}$-Module localement libre au point x' (17.2.3); comme alors $\Omega^1_{Y'/S}$ est aussi un $\mathscr{O}_{Y'}$-Module localement libre au voisinage de x' et que la suite

(17.13.2.2) $$0 \to \mathscr{N}_{Y'/X'} \to \Omega^1_{X'/S} \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \mathscr{O}_{Y'} \to \Omega^1_{Y'/S} \to 0$$

est exacte (17.2.5), dire que Y' est de dimension relative $n-c$ sur S au point x' signifie, par (17.10.2), que $\mathscr{N}_{Y'/X'}$ (qui est localement libre au voisinage de x') est de rang c au point x'. Mais en vertu des hypothèses sur X et Y au point x, et par le même raisonnement, $\mathscr{N}_{Y/X}$ est localement libre et de rang c au point x, donc $g^*(\mathscr{N}_{Y/X})$ est aussi localement libre et de rang c au point x'. Comme l'homomorphisme $\mathrm{gr}_1(g) : g^*(\mathscr{N}_{Y/X}) \to \mathscr{N}_{Y'/X'}$ est surjectif, les conditions précédentes équivalent à dire que cet homomorphisme est *bijectif* au point x' (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, nº 2, cor. de la prop. 6), donc aussi dans un voisinage de x' ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.7); cela entraîne évidemment *b)*, ainsi que la dernière assertion de l'énoncé, en vertu de l'exactitude de (17.13.2.2). Inversement, comme $\alpha\otimes 1$ se factorise en

$$g^*(\mathcal{N}_{\mathrm{Y/X}})\otimes \boldsymbol{k}(x') \xrightarrow{\mathrm{gr}_1(g)\otimes 1} \mathcal{N}_{\mathrm{Y'/X'}}\otimes \boldsymbol{k}(x') \xrightarrow{\delta\otimes 1} \Omega^1_{\mathrm{X'/S}}\otimes \boldsymbol{k}(x')$$

et que $\mathrm{gr}_1(g)$ est surjectif, dire que $\alpha\otimes 1$ est injectif entraîne que $\delta\otimes 1$ l'est et que $\mathrm{gr}_1(g)\otimes 1$ est bijectif. On en conclut (17.12.1) que Y' est lisse sur S au point x', et que $\mathrm{gr}_1(g)$ est bijectif dans un voisinage de x' (Bourbaki, *loc. cit.*). En outre, comme la suite (17.13.2.2) est alors exacte, et que $\mathcal{N}_{\mathrm{Y'/X'}}$, isomorphe à $g^*(\mathcal{N}_{\mathrm{Y/X}})$, est de rang c au point x', $\Omega^1_{\mathrm{Y'/S}}$ est de rang $n-c$ en ce point, ce qui achève de prouver l'équivalence de *a)* et *b)*, en vertu de (17.10.2).

Reste à montrer l'équivalence de *b)* et *b')* lorsque x' est rationnel sur $\boldsymbol{k}(s)$ (ce qui implique qu'il en est de même de x); alors $g^*(\mathcal{N}_{\mathrm{Y/X}})\otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Y'}}}\boldsymbol{k}(x')$ s'identifie à $\mathcal{N}_{\mathrm{Y/X}}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}}\boldsymbol{k}(x)$, et puisque la suite

$$0 \to \mathcal{N}_{\mathrm{Y/X}} \to \Omega^1_{\mathrm{X/S}}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}}\mathcal{O}_{\mathrm{Y}} \to \Omega^1_{\mathrm{Y/S}} \to 0$$

est exacte au point x et formée de $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$-Modules localement libres, le dual de $\mathcal{N}_{\mathrm{Y/X}}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}}\boldsymbol{k}(x)$ s'identifie à l'espace quotient $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(x)/\mathrm{T}_{\mathrm{Y/S}}(x)$ (16.5.12); d'où l'équivalence de *b)* et *b')*.

Définition **(17.13.3)**. — *Avec les notations de* (17.13.1), *on dit que le morphisme f est transversal à* Y *au point x', relativement à* S, *si* X *et* Y *sont lisses sur* S *au point x,* X' *lisse sur* S *au point x', et si les conditions équivalentes* a), b) *de* (17.3.2) *sont satisfaites.*

Lorsque aucune confusion n'est à craindre, on supprime la mention du préschéma S et on dit simplement que f est transversal à Y au point x'.

Remarques **(17.13.4)**. — (i) Supposons que X, Y et X' soient *plats et localement de présentation finie* sur S. Pour tout $s\in\mathrm{S}$, notons X_s, Y_s, X'_s, Y'_s les fibres de X, Y, X', Y' au point s, $f_s:\mathrm{X}'_s\to\mathrm{X}_s$ le morphisme déduit de f par changement de base. Il résulte alors de (17.5.9) que pour que f soit un morphisme transversal à Y au point x', il faut et il suffit que, si s est l'image de x dans S, f_s soit transversal à Y_s au point x', relativement à $\boldsymbol{k}(s)$.

(ii) On a vu dans (17.13.2) que l'ensemble des points $x'\in\mathrm{Y}'$ où f est transversal à Y est *ouvert* dans Y'; si Y' est de plus *propre* sur S, on en déduit que l'ensemble des $s\in\mathrm{S}$ tels que f soit transversal à Y en *tous* les points de Y'_s, relativement à S, est *ouvert* dans S. Lorsque X, Y et X' sont plats et localement de présentation finie sur S, il résulte de (i) que l'ensemble des $x'\in\mathrm{Y}'$ tels que f_s soit transversal à Y_s au point x' (s image de x' dans S), relativement à $\boldsymbol{k}(s)$, est *ouvert* dans Y'. Si de plus Y' est propre sur S, l'ensemble des $s\in\mathrm{S}$ tels que f_s soit transversal à Y_s en tous les points de Y'_s (relativement à $\boldsymbol{k}(s)$) est *ouvert* dans S.

(iii) La propriété d'être lisse sur S, ainsi que la notion de dimension relative à S en un point, étant stables par tout changement de base $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$ ((17.3.3) et (4.2.7)), il en est de même de la propriété pour un morphisme $f:\mathrm{X}'\to\mathrm{X}$ d'être transversal à un sous-préschéma de X en un point, relativement à S.

(iv) La condition *b)* de (17.13.2) exprime encore que l'homomorphisme $\alpha : g^*(\mathscr{N}_{Y/X}) \to \Omega^1_{X'/S} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{Y'}$ est *universellement injectif* relativement à Y' (11.9.18).

(17.13.5) Considérons maintenant un préschéma S, trois S-préschémas X, Y, Z, deux S-morphismes $f : Y \to X$, $g : Z \to X$; posons $T = Y \times_X Z$; on sait alors (**I**, 5.3.5) qu'on a un diagramme commutatif

(17.13.5.1)
$$\begin{tikzcd} X & Y \times_X Z = T \arrow[l] \arrow[d, "j"] \\ X \times_S X \arrow[u, leftarrow, "\Delta"'] & Y \times_S Z \arrow[l, "u"] \end{tikzcd}$$

faisant de T le produit des $(X \times_S X)$-préschémas X et $Y \times_S Z$, où $u = f \times_S g$. Comme Δ est une S-immersion (**I**, 5.3.9), on est dans la situation du diagramme (17.13.1.1); ce qui correspond à $\Omega^1_{X'/S}$ dans (17.13.1) est alors $(\Omega^1_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y \times_S Z}) \oplus (\Omega^1_{Z/S} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_{Y \times_S Z})$ en vertu de (16.4.23). D'autre part, ce qui correspond au $\mathcal{O}_Y$-Module $\mathscr{N}_{Y/X}$ dans (17.13.1) est ici par définition $\Omega^1_{X/S}$ (16.3.1); il correspond donc à (17.13.1.3) une suite exacte

(17.13.5.2)
$$\Omega^1_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_T \xrightarrow{\rho} (\Omega^1_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_T) \oplus (\Omega^1_{Z/S} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_T) \xrightarrow{\sigma} \Omega^1_{T/S} \to 0$$

où il reste à préciser les homomorphismes ρ et σ. Tenant compte d'abord de (16.4.23) et de (**0**, 20.5.2), on voit que si $p : T \to Y$, $q : T \to Z$ sont les projections canoniques, on a, avec les notations de (16.4.19),

(17.13.5.3)
$$\sigma = p_{T/Y/S} + q_{T/Z/S}.$$

D'autre part, pour évaluer ρ, utilisons la commutativité du carré de gauche dans (17.13.1.2), ce qui, dans le cas présent, ramène d'abord à expliciter l'homomorphisme canonique

$$\rho' : \Omega^1_{X/S} \to \Omega^1_{(X \times_S X)/S} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_S X}} \mathcal{O}_X$$

défini dans (16.4.21) appliqué à l'immersion Δ. On peut se borner au cas où $S = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$ sont affines, et alors ρ' correspond à l'homomorphisme δ de (**0**, 20.5.11.2), où il faut remplacer B par $B \otimes_A B$ et C par $B = B \otimes_A B)/\mathfrak{J}_{B/A}$. On voit alors que δ fait correspondre à la classe de $x \otimes 1 - 1 \otimes x \bmod. \mathfrak{J}^2_{B/A}$ (pour un $x \in B$) l'image de

$$(x \otimes 1 - 1 \otimes x) \otimes (1 \otimes 1) - (1 \otimes 1) \otimes (x \otimes 1 - 1 \otimes x)$$

dans $\Omega^1_{(B \otimes_A B)/A} \otimes_{(B \otimes_A B)} B$; mais l'élément précédent peut s'écrire

$$((x \otimes 1) \otimes (1 \otimes 1) - (1 \otimes 1) \otimes (x \otimes 1)) - ((1 \otimes x) \otimes (1 \otimes 1) - (1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes x))$$

et on voit donc que ρ' est la différence des deux homomorphismes $\pi^{(1)}$ et $\pi^{(2)}$ de $\Omega^1_{X/S}$ dans $\Omega^1_{(X \times_S X)/S} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_S X}} \mathcal{O}_X$, correspondant respectivement à la première et la seconde projection de $X \times_S X$ dans X, par (16.4.3.3). Pour obtenir ρ, il faut d'abord considérer l'homomorphisme ρ'' : $\Omega^1_{(X \times_S X)/S} \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_S X}} \mathcal{O}_{(Y \times_S Z)} \to \Omega^1_{(Y \times_S Z)/S}$ correspondant par (16.4.3.3) au morphisme u de (17.13.5.1), puis, après tensorisation par $\mathcal{O}_T$, former le composé $(\rho'' \otimes 1) \circ (\rho' \otimes 1)$; il résulte de ce qui précède que l'on a, avec les notations de (16.4.18)

$$\rho = (f_{Y/X/S} \otimes 1_{\mathcal{O}_T}) \oplus (-g_{Z/X/S} \otimes 1_{\mathcal{O}_T}). \tag{17.13.5.4}$$

Ceci dit, l'application de (17.13.2) à la situation du diagramme (17.13.5.1) (compte tenu de (17.3.3, (iv)), qui implique que $X \times_S X$ est lisse sur S en x si X l'est) donne le

Corollaire **(17.13.6).** — *Soient* S *un préschéma,* X, Y, Z *trois* S*-préschémas* $f : Y \to X$, $g : Z \to X$ *deux* S*-morphismes; posons* $T = Y \times_X Z$, *et soient* $p : T \to Y$, $q : T \to Z$ *les projections canoniques. Soient* t *un point de* T, $y = p(t)$, $z = q(t)$, $x = f(y) = g(z)$. *Supposons que* X *soit lisse sur* S *au point* x, *de dimension relative* m, Y (resp. Z) *lisse sur* S *au point* y (resp. z), *de dimension relative* $m + a$ (resp. $m + b$), *a et b étant positifs ou négatifs. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) T *est lisse sur* S *au point* t, *de dimension relative* $m+a+b$.

b) *L'homomorphisme*

$$\rho \otimes 1 : \Omega^1_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \boldsymbol{k}(t) \to (\Omega^1_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \boldsymbol{k}(t)) \oplus (\Omega^1_{Z/S} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \boldsymbol{k}(t))$$

où ρ *est donné par* (17.13.5.4), *est injectif.*

c) *Le morphisme* $T = Y \times_S Z \to X \times_S X$ *est transversal à la diagonale de* $X \times_S X$ *au point* t.

Si t *est rationnel sur le corps résiduel de son image* s *dans* S, *ces conditions sont aussi équivalentes à la suivante :*

b′) *L'homomorphisme*

$$T_y(f) - T_z(g) : T_{Y/S}(y) \oplus T_{Z/S}(z) \to T_{X/S}(x) \tag{17.13.6.1}$$

(cf. (16.5.12.5)) *est surjectif.*

De plus, lorsque les conditions a) *et* b) *sont vérifiées en* t, *elles le sont dans un voisinage de* t *dans* T, *et en restreignant* T *à un tel voisinage, la suite*

$$0 \to \Omega^1_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_T \xrightarrow{\rho} (\Omega^1_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_T) \oplus (\Omega^1_{Z/S} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_T) \xrightarrow{\sigma} \Omega^1_{T/S} \to 0 \tag{17.13.6.2}$$

(*où* σ *est donné par* (17.13.5.3)) *est exacte.*

Le seul point qui reste à prouver dans (17.13.6) concerne *b′)*, et résulte de ce que, sous l'hypothèse que t est rationnel sur $\boldsymbol{k}(s)$, l'homomorphisme $\rho \otimes 1$ est *transposé* de $T_y(f) - T_z(g)$, en vertu de (17.13.5.4).

Lorsque les conditions équivalentes de (17.13.6) sont satisfaites, on dit que f et g forment un *couple de morphismes transversaux au point* t, *relativement à* S; ici encore, on supprime souvent la mention de S.

(17.13.7) Considérons en particulier le cas où Y et Z sont des *sous-préschémas de* X, f et g étant les injections canoniques; T est alors le sous-préschéma « intersection » inf(Y, Z) de X (**I**, 4.4.3), et l'on a $t=y=z=x$. Au lieu de dire que le couple (f, g) est transversal au point x, on dit alors que Y *et* Z *se coupent transversalement au point* x (relativement à S). Notant X_s, Y_s, Z_s, T_s les fibres de X, Y, Z, T au point s, image de x dans S, et tenant compte de (5.2.3), (5.1.9) et (**0**, 16.5.12), on voit que pour qu'il en soit ainsi (lorsque X, Y, Z sont lisses sur S au point x), il faut et il suffit que T soit *lisse* sur S au point x, et que l'on ait la relation

(17.13.7.1) $$\operatorname{codim}_x(T_s, X_s) = \operatorname{codim}_x(Y_s, X_s) + \operatorname{codim}_x(Z_s, X_s).$$

Proposition **(17.13.8).** — *Soient* S *un préschéma,* X *un* S-*préschéma localement de présentation finie sur* S, Y, Z *deux sous-préschémas de* X, $T=\inf(Y, Z)$ *le sous-préschéma « intersection » de* Y *et* Z, x *un point de* T. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *L'injection canonique* $i : Y \rightarrow X$ *est un morphisme transversal à* Z *au point* x, *relativement à* S (17.13.3).

a') *L'injection canonique* $j : Z \rightarrow X$ *est un morphisme transversal à* Y *au point* x, *relativement à* S.

a'') Y *et* Z *se coupent transversalement au point* x, *relativement à* S.

b) X, Y, Z *sont lisses sur* S *au point* x, *et l'homomorphisme* ρ (17.13.5.4) *est tel que*

$$\rho \otimes 1 : \Omega^1_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \boldsymbol{k}(x) \rightarrow (\Omega^1_{Y/S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \boldsymbol{k}(x)) \oplus (\Omega^1_{Z/S} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \boldsymbol{k}(x))$$

est injectif.

Lorsque x *est rationnel sur* $\boldsymbol{k}(s)$ (s *image de* x *dans* S) *ces conditions sont aussi équivalentes à la suivante :*

b') *L'homomorphisme*

$$T_x(i) - T_x(j) : T_{Y/S}(x) \oplus T_{Z/S}(x) \rightarrow T_{X/S}(x)$$

est surjectif.

En outre, lorsque les conditions équivalentes a) *à* b) *sont vérifiées au point* x, *elles le sont dans un voisinage de* x *dans* T, *et en restreignant* X *à un voisinage de* x, *la suite* (17.13.6.2) *est exacte, et l'on a un isomorphisme canonique*

(17.13.8.1) $$\mathcal{N}_{T/X} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{N}_{Y/X} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_T) \oplus (\mathcal{N}_{Z/X} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_T).$$

Les conditions *a), a'), a'')* impliquent toutes que X, Y, Z sont lisses sur S au point x. Soient en outre, $m, m-a, m-b$ les dimensions relatives de X, Y, Z sur S au point x. Il résulte alors de (17.13.2) appliqué en remplaçant X' par Z et Y' par $T = Y \times_X Z$, que les conditions *a), a')* équivalent toutes deux à dire que T est lisse sur S au point x et de dimension relative $m-a-b$ en ce point; mais en vertu de (17.13.7), cela signifie précisément que la condition *a'')* est vérifiée, d'où l'équivalence de *a), a')* et *a'')*. L'équivalence de *a'')* et de *b)* (ou *b')* lorsque x est rationnel sur $\boldsymbol{k}(s)$) a été prouvée dans (17.13.6), ainsi que le fait que si ces conditions sont satisfaites au point x, elles le sont dans un voisinage de x, et l'exactitude de la suite (17.13.6.2) dans un tel voisinage. Reste à définir l'isomorphisme canonique (17.13.8.1).

Notons α et $-\beta$ les homomorphismes figurant au second membre de (17.13.5.4), γ et δ ceux figurant au second membre de (17.13.5.2). Dire que la suite (17.13.6.2)

$$0 \rightarrow \Omega^1_{X/S}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_T \xrightarrow{\alpha\oplus(-\beta)} (\Omega^1_{Y/S}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_T)\oplus(\Omega^1_{Z/S}\otimes_{\mathcal{O}_Z}\mathcal{O}_T) \xrightarrow{\gamma+\delta} \Omega^1_{T/S} \rightarrow 0$$

est exacte signifie que, dans la catégorie des $\mathcal{O}_T$-Modules, $\Omega^1_{X/S}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_T$ s'identifie canoniquement au *produit fibré* de $\Omega^1_{Y/S}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_T$ et $\Omega^1_{Z/S}\otimes_{\mathcal{O}_Z}\mathcal{O}_T$ sur $\Omega^1_{T/S}$, pour les homomorphismes γ et δ. Le même raisonnement que dans (**0**, 18.1.2 et 18.1.3), où l'on remplace anneaux et idéaux bilatères respectivement par Modules et sous-Modules, fournit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & (\mathcal{N}_{Y/X}\otimes\mathcal{O}_T)\oplus(\mathcal{N}_{Z/X}\otimes\mathcal{O}_T) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "\iota"] & \mathcal{N}_{Z/X}\otimes\mathcal{O}_T \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathcal{N}_{T/Y} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{N}_{Y/X}\otimes\mathcal{O}_T \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \Omega^1_{X/S}\otimes\mathcal{O}_T \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & \Omega^1_{Y/S}\otimes\mathcal{O}_T \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{N}_{T/Z} \arrow[r] & \Omega^1_{Z/S}\otimes\mathcal{O}_T \arrow[r, "\delta"'] \arrow[d] & \Omega^1_{T/S} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

où les 3^e et 4^e lignes et colonnes sont exactes en vertu des hypothèses de lissité. Le fait que l'homomorphisme composé $\varepsilon=\gamma\circ\alpha=\delta\circ\beta$ soit l'homomorphisme correspondant à l'injection canonique $T\rightarrow X$ résulte de (**0**, 20.5.2.7). Comme la diagonale du diagramme précédent est exacte, $\operatorname{Ker}(\varepsilon)$ s'identifie canoniquement avec $\mathcal{N}_{T/X}$, compte tenu de ce que T est lisse sur S (17.2.5); donc on a un isomorphisme canonique (17.13.8.1) réciproque de ι.

(17.13.9) On peut généraliser les résultats de (17.13.5) et (17.13.6) à un nombre fini quelconque de S-morphismes $f_i : Y_i \rightarrow X$ ($i\in I$, I ensemble fini). Pour cela, notons X^I le produit de la famille $(X_i)_{i\in I}$ de S-préschémas tous identiques à X (**I**, 3.3.5), et soient p_i ($i\in I$) les projections canoniques. Le *morphisme diagonal* $\Delta : X\rightarrow X^I$ est défini (comme dans (**I**, 5.3.1)) comme l'unique S-morphisme tel que $p_i\circ\Delta = 1_X$ pour tout $i\in I$. C'est une X-section de X^I pour le morphisme p_1, donc (**I**, 5.3.11) une *immersion*.

Soit alors Y le produit des S-*préschémas* Y_i (pour les morphismes composés $Y_i \xrightarrow{f_i} X \rightarrow S$), T le produit des X-*préschémas* Y_i (pour les morphismes f_i). On prouve comme dans (**I**, 5.3.5) que l'on a un diagramme commutatif

(**17.13.9.1**)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\Delta"'] & T \arrow[l, "v"'] \arrow[d, "j"] \\ X^I & Y \arrow[l, "u"] \end{tikzcd}$$

(où u est le produit (sur S) des f_i), qui fait de T le produit des X^I-préschémas X et Y.

Par récurrence sur le nombre d'éléments de I, il résulte de (16.4.23) que $\Omega^1_{X^I/S}$ (resp. $\Omega^1_{Y/S}$) s'identifie canoniquement à la somme directe des $p_i^*(\Omega^1_{X/S})$ (resp. des $q_i^*(\Omega^1_{X_i/S})$, si $q_i : Y \rightarrow Y_i$ sont les projections canoniques).

Supposons maintenant que X soit *lisse* sur S en un point x (donc dans un voisinage de ce point). Il en est alors de même de X^I en ce point (17.3.3, (iv)), et restreignant X à un voisinage de x, on a donc (17.2.5) une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-Modules localement libres

$$0 \rightarrow \mathscr{G}r_1(\Delta) \rightarrow (\Omega^1_{X/S})^I \rightarrow \Omega^1_{X/S} \rightarrow 0.$$

Posons $\mathscr{J} = \mathscr{G}r_1(\Delta)$; on déduit de la suite précédente une suite exacte de $\mathcal{O}_T$-Modules localement libres

(**17.13.9.1**)
$$0 \rightarrow \mathscr{J} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_T \rightarrow (\Omega^1_{X/S})^I \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_T \xrightarrow{\sigma} \Omega^1_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_T \rightarrow 0$$

qui correspond à la première ligne du diagramme (17.13.1.2), et où σ n'est autre que l'homomorphisme canonique qui, à chaque famille de sections $(t_i)_{i \in I}$ de $\Omega^1_{X/S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_T$ au-dessus d'un ouvert de T, fait correspondre sa *somme*.

D'autre part, ce qui correspond ici à la seconde flèche verticale du diagramme (17.13.1.2) est l'homomorphisme

(**17.13.9.2**)
$$\tau : (\Omega^1_{X/S})^I \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_T \rightarrow \bigoplus_{i \in I} (\Omega^1_{Y_i/S} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_i}} \mathcal{O}_T)$$

qui, à toute famille $(t'_i \otimes 1)_{i \in I}$, où ici les t'_i sont des sections au-dessus d'un ouvert de X de $\Omega^1_{X/S}$, associe la somme des $((f_i)_{Y_i/X/S}(t'_i)) \otimes 1$, avec la notation de (16.4.18). L'homomorphisme ρ qui correspond à l'homomorphisme α de (17.13.1.3) est donc la *restriction* à $\mathscr{J} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_T$ de l'homomorphisme τ précédent.

Ces hypothèses et notations étant précisées, on peut appliquer à la situation de (17.13.9.1) la prop. (17.13.2), ce qui donne le

Corollaire (**17.13.10**). — *Sous les hypothèses générales de* (17.13.9), *soit t un point de* T, y_i ($i \in$ I) *ses projections dans les* Y_i, *x le point de* X *égal à chacun des* $f_i(y_i)$. *Supposons que* X *soit lisse sur* S *au point x et de dimension relative d, et que chacun des* Y_i *soit lisse sur* S *au point* y_i; *soit* $d + c_i$ (c_i *entier positif ou négatif*) *la dimension relative de* Y_i *au point* y_i. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) T *est lisse sur* S *au point* t, *de dimension relative* $d+\sum_{i\in I} c_i$.

b) *L'homomorphisme*

$$\rho\otimes 1 : \mathscr{J}\otimes_{\mathcal{O}_X} \boldsymbol{k}(t) \rightarrow \bigoplus_{i\in I}(\Omega^1_{Y_i/S}\otimes_{\mathcal{O}_{Y_i}}\boldsymbol{k}(t))$$

est injectif.

Lorsque t est rationnel sur le corps $\boldsymbol{k}(s)$ (*où s est l'image de t dans* S), *ces conditions sont aussi équivalentes à la suivante :*

b') *L'homomorphisme transposé de* $\rho\otimes 1$

$$\bigoplus_{i\in I} T_{Y_i/X}(y_i) \rightarrow (T_{X/S}(x))^I/\delta(T_{X/S}(x))$$

(où δ est l'application diagonale) est surjectif.

Il suffit de remarquer que X^I est lisse sur S et de dimension relative $d.\mathrm{Card}(I)$, et Y lisse sur S de dimension relative $d.\mathrm{Card}(I)+\sum_{i\in I} c_i$.

Lorsque les conditions équivalentes de (17.13.10) sont vérifiées, on dit encore que les f_i forment une *famille de morphismes transversaux au point t, relativement à* S. On voit encore que l'ensemble des points $t\in T$ où cela a lieu est *ouvert* dans T. La remarque (17.13.4, (ii)) montre alors que si X et les Y_i sont plats et localement de présentation finie sur S, et de plus si T est *propre* sur S, l'ensemble des $s\in S$ tels que les f_i forment une famille de morphismes transversaux en *tous* les points de T_s, relativement à S, est *ouvert* dans S.

(17.13.11) Considérons en particulier le cas, généralisant (17.13.7), où les Y_i ($i\in I$) sont des *sous-préschémas* de X, les f_i étant les injections canoniques, de sorte que $T=\inf_{i\in I}(Y_i)$ est encore le sous-préschéma « intersection » des Y_i, et $t=y_i=x$ pour tout i; au lieu de dire que les f_i forment une famille de morphismes transversaux au point x, on dit encore que *les* Y_i *se coupent transversalement au point* x (relativement à S). La condition *a)* de (17.13.10) s'exprime encore en la relation qui généralise (17.13.7.1)

$$\text{(17.13.11.1)} \qquad \operatorname{codim}_x(T_s, X_s)=\sum_{i\in I}\operatorname{codim}_x((Y_i)_s, X_s).$$

En outre, on a la propriété suivante, qui étend (17.13.8.1), et en donne une autre démonstration quand I a 2 éléments :

Corollaire **(17.13.12)**. — *Lorsque les* Y_i *se coupent transversalement au point* x, *on a un isomorphisme canonique*

$$\text{(17.13.12.1)} \qquad \mathscr{N}_{T/X} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I}(\mathscr{N}_{Y_i/X}\otimes_{\mathcal{O}_{Y_i}}\mathcal{O}_T).$$

On peut se borner au cas où les Y_i sont des sous-préschémas fermés de X, définis par des Idéaux quasi-cohérents $\mathscr{J}_i$, de sorte que T est défini par l'Idéal $\mathscr{J}=\sum_i \mathscr{J}_i$. Par définition du faisceau conormal à une immersion (16.1.3), l'homomorphisme canonique $\bigoplus_i \mathscr{J}_i\rightarrow\mathscr{J}$ donne, par passage aux quotients, un homomorphisme *surjectif*

$$\text{(17.13.12.2)} \qquad \bigoplus_{i\in I}(\mathscr{N}_{Y_i/X}\otimes_{\mathcal{O}_{Y_i}}\mathcal{O}_T) \rightarrow \mathscr{N}_{T/X}.$$

Mais ici les $\mathcal{O}_T$-Modules des deux membres de (17.13.12.2) sont localement libres et de *même rang* $\sum_i c_i$ (si c_i est le rang de $\mathcal{N}_{Y_i/X}$), en vertu de (17.2.5) et de la condition *a)* de (17.13.10); on conclut donc de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, cor. de la prop. 6, que (17.13.12.2) est bijectif, et (17.13.12.1) est l'isomorphisme réciproque.

17.14. Caractérisations locales et infinitésimales des morphismes lisses, des morphismes non ramifiés et des morphismes étales.

Proposition **(17.14.1)**. — *Soient* $f: X \to Y$ *un morphisme localement de présentation finie,* x *un point de* X, $y=f(x)$. *Pour que* f *soit lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*) *au point* x, *il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :*

Pour tout schéma local $Y'=\mathrm{Spec}(A')$ *de point fermé* y', *tout morphisme* $h: Y' \to Y$ *tel que* $h(y')=y$, *tout sous-schéma fermé* $Y'_0=\mathrm{Spec}(A'/\mathfrak{J}')$ *de* Y', *où l'idéal* $\mathfrak{J}'$ *est de carré nul, et tout* Y-*morphisme* $g_0: Y'_0 \to X$ *tel que* $g'_0(y')=x$, *il existe au moins un* (resp. *au plus un*, resp. *un et un seul*) Y-*morphisme* $g: Y' \to X$ *dont* g_0 *soit la restriction à* Y'_0.

Compte tenu des définitions (17.1.1 et 17.3.1), il s'agit de montrer que la condition de l'énoncé est *suffisante* pour que f soit lisse (resp. non ramifié) au point x.

(i) *Cas des morphismes lisses.* On peut se borner au cas où $Y=\mathrm{Spec}(A)$ et $X=\mathrm{Spec}(C)$ sont affines, avec $C=B/\mathfrak{K}$, où $B=A[T_1, \ldots, T_n]$ est une A-algèbre de polynômes et $\mathfrak{K}$ un idéal de type fini de B. Pour prouver que f est lisse au point x, il suffit d'établir que $\mathcal{O}_{X,x}$ est une $\mathcal{O}_{Y,y}$-algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes (17.5.1). Or on a $\mathcal{O}_{X,x}=B_\mathfrak{q}/\mathfrak{K}B_\mathfrak{q}$, où $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B, et si $\mathfrak{p}$ est l'image réciproque de $\mathfrak{q}$ dans A, $B_\mathfrak{q}$ est une $A_\mathfrak{p}$-algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes (**0**, 19.3.2 et 19.3.5). Par application du critère jacobien (**0**, 22.6.1 et 20.5.12) il suffit donc de voir que $B_\mathfrak{q}/\mathfrak{K}^2B_\mathfrak{q}$ est une extension $A_\mathfrak{p}$-triviale de $B_\mathfrak{q}/\mathfrak{K}B_\mathfrak{q}$ par $\mathfrak{K}B_\mathfrak{q}/\mathfrak{K}^2B_\mathfrak{q}$. Mais cela résulte précisément de l'hypothèse appliquée à $A'=B_\mathfrak{q}/\mathfrak{K}^2B_\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{J}'=\mathfrak{K}B_\mathfrak{q}/\mathfrak{K}^2B_\mathfrak{q}$ et au morphisme g_0 correspondant à l'automorphisme identique de $A'/\mathfrak{J}'=\mathcal{O}_{X,x}$.

(ii) *Cas des morphismes non ramifiés.* Posons ici $A=\mathcal{O}_{Y,y}$, $B=\mathcal{O}_{X,x}$, et notons qu'en vertu de (17.4.1, *c)*), il suffit de montrer que $\Omega^1_{B/A}=(\Omega^1_{X/Y})_x=0$. Or, avec les notations de (**0**, 20.4.1), l'anneau $C=P^1_{B/A}=(B\otimes_A B)/\mathfrak{J}^2$ est local puisqu'il en est ainsi de $C/(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)$ isomorphe à B. L'hypothèse appliquée à $A'=C$ et $\mathfrak{J}'=\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ montre par définition que l'application $d_{B/A}: B \to \Omega^1_{B/A}$ est nulle (**0**, 20.4.6), donc que $\Omega^1_{B/A}=0$ par (**0**, 20.4.7).

Proposition **(17.14.2)**. — *Soient* Y *un préschéma* localement noethérien, $f: X \to Y$ *un morphisme localement de type fini,* x *un point de* X, $y=f(x)$. *Pour que* f *soit lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*) *au point* x, *il faut et il suffit qu'il vérifie la condition de* (17.14.1) *où l'on suppose de plus que l'anneau local* A' *est* artinien, *que* $\mathfrak{m}'\mathfrak{J}'=0$, *où* $\mathfrak{m}'$ *est l'idéal maximal de* A', *et que le corps résiduel* $A'/\mathfrak{m}'$ *de* A' *est* égal à $\boldsymbol{k}(x)$.

Il s'agit encore de montrer que ces conditions sont suffisantes dans le cas des morphismes lisses et le cas des morphismes non ramifiés.

(i) *Cas des morphismes lisses.* Si l'on pose $A = \mathcal{O}_{Y,y}$ et $B = \mathcal{O}_{X,x}$, il s'agit ici de prouver, compte tenu de (17.5.3), que B est une A-algèbre formellement lisse *pour les topologies préadiques*. Or, en vertu de (**0**, 22.1.4), cela découle de l'hypothèse lorsqu'on remplace dans celle-ci la condition $\mathfrak{m}'\mathfrak{J}' = 0$ par $\mathfrak{J}' \subset \mathfrak{m}'$. Mais comme $\mathfrak{m}'$ est nilpotent, on voit que la condition de l'énoncé est déjà suffisante en considérant les anneaux $A'/\mathfrak{m}'^j\mathfrak{J}'$ et en raisonnant par récurrence sur j comme dans (**0**, 19.4.3).

(ii) *Cas des morphismes non ramifiés.* Reprenons les notations de la démonstration de (17.14.1, (ii)); pour prouver que l'idéal $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ de C est nul, notons que C est alors un anneau local noethérien, étant anneau local de l'anneau d'un ouvert affine d'un sous-préschéma de $X \times_Y X$, qui est localement de type fini sur X, donc aussi sur Y. Si $\mathfrak{r}$ est l'idéal maximal de C, il suffit donc de vérifier que l'on a $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \subset \mathfrak{r}^n$ pour tout n ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 7.3.5), ou encore que $\mathfrak{r}^n = \mathfrak{r}^n + (\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)$. Avec les notations de (**0**, 20.4.6), cela signifie encore que pour tout n, les deux applications composées $B \xrightarrow{p_1} C \to C/\mathfrak{r}^n$ et $B \xrightarrow{p_2} C \to C/\mathfrak{r}^n$ sont identiques; mais comme $C/\mathfrak{r}^n$ est artinien, cette identité résulte de l'hypothèse appliquée, par récurrence sur n, à $A' = C/\mathfrak{r}^n$ et $\mathfrak{J}' = (\mathfrak{r}^n + (\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2))/\mathfrak{r}^n$.

Remarque (**17.14.3**). — On notera que, sous les hypothèses de (17.14.2), si de plus le corps $\boldsymbol{k}(x)$ est une extension *finie* de $\boldsymbol{k}(y)$, alors les A'-modules $\mathfrak{m}'^j/\mathfrak{m}'^{j+1}$ sont des $\boldsymbol{k}(y)$-espaces vectoriels de rang fini, donc *a fortiori* A' est une $\mathcal{O}_{Y,y}$-algèbre *finie*.

17.15. Cas des préschémas sur un corps de base.

Rappelons d'abord (6.7.7, 6.7.8 et 6.8.1) la

Proposition (**17.15.1**). — *Soient k un corps,* X *un préschéma localement de type fini sur k. Pour que* X *soit lisse en un point x, il faut et il suffit que pour toute extension radicielle k' de k* (ou seulement pour toute extension *finie radicielle* de k), *l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x} \otimes_k k'$ soit régulier. Si $\boldsymbol{k}(x)$ est une extension séparable de k* (en particulier si k est *parfait*), *il revient au même de dire que $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier.*

Corollaire (**17.15.2**). — *Sous les conditions de* (17.15.1), *pour que* X *soit lisse sur k, il faut et il suffit que* X *soit géométriquement régulier sur k* (6.7.6), *ce qui entraîne que* X *est régulier. Si k est parfait, alors* X *est lisse sur k si et seulement si* X *est régulier.*

Proposition (**17.15.3**). — *Soient k un corps,* X *un préschéma localement de type fini sur k, x un point de* X, $n = \dim_x(X)$. *Soit $(g_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de n sections de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de* X, *et soit $f : X \to Y = \operatorname{Spec}(k[T_1, \ldots, T_n])$ le morphisme correspondant au k-homomorphisme $k[T_1, \ldots, T_n] \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ transformant T_i en g_i* (**I**, 2.2.4). *Les conditions suivantes sont équivalentes (et impliquent que* X *est lisse sur k au point x* et par suite *régulier* au point *x) :*

a) *f est étale au point x.*

b) *Les images des $d_{X/k}g_i$ forment une base du $\mathcal{O}_{X,x}$-module $(\Omega^1_{X/k})_x$.*

c) *Les images des $d_{X/k}g_i$ engendrent le $\mathcal{O}_{X,x}$-module $(\Omega^1_{X/k})_x$.*

Si f est étale au point x, X est lisse sur k au point x puisque $Y = \operatorname{Spec}(k[T_1, \ldots, T_n])$ est lisse sur k (17.3.8); le fait que *a)* entraîne *b)* est donc un cas particulier de (17.11.3). Comme *b)* entraîne trivialement *c)*, il reste à voir que *c)* implique *a)*. Notons d'abord que l'hypothèse entraîne que l'homomorphisme $(f^*(\Omega^1_{Y/k}))_x \to (\Omega^1_{X/k})_x$ est surjectif, donc, en remplaçant X par un voisinage ouvert de x, on peut supposer que l'homomorphisme $f^*(\Omega^1_{Y/k}) \to \Omega^1_{X/k}$ est surjectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 1, prop. 2); par suite f est *non ramifié* (17.2.2). Nous allons voir d'abord qu'on peut se borner au cas où x est *rationnel sur k*. En effet, si l'on pose $k' = \boldsymbol{k}(x)$, et $X' = X \otimes_k k'$, $Y' = Y \otimes_k k' = \mathrm{Spec}(k'[T_1, \ldots, T_n])$, il existe un point $x' \in X'$ au-dessus de x, tel que $\boldsymbol{k}(x') = k'$. Pour prouver que f est étale au point x, il suffit de montrer que $f' = f_{(k')} : X' \to Y'$ est étale au point x' (17.7.1, (ii)); d'ailleurs f' est non ramifié (17.3.3, (iii)) et l'on a $\dim_{x'}(X') = n$ (4.2.7). De la même manière on peut, en remplaçant k' par une extension algébriquement close de k', supposer que k est *algébriquement clos*. Posons alors $y = f(x)$, $A = \mathcal{O}_{Y,y}$, $B = \mathcal{O}_{X,x}$; comme le corps résiduel de B est égal à k, il en est de même de celui de A, donc x (resp. y) est un point fermé de X (resp. Y) (**I**, 6.4.2) et l'on a par suite $\dim(A) = \dim(B) = n$. Puisque f est non ramifié, l'homomorphisme $\hat{A} \to \hat{B}$ est *surjectif* (17.4.4, f'')); mais comme $\dim(\hat{A}) = \dim(\hat{B}) = n$, et que $\hat{A}$, étant un anneau régulier, est intègre, l'homomorphisme $\hat{A} \to \hat{B}$ est aussi *injectif* (**0**, 16.3.10). Cet homomorphisme est donc bijectif, ce qui achève de prouver que f est étale au point x (17.6.3, e'')).

Corollaire **(17.15.4)**. — *Sous les hypothèses générales de* (17.15.3), *supposons en outre que* $\boldsymbol{k}(x)$ *soit une extension* finie *et* séparable *de* k *et que les germes* $(g_i)_x$ *appartiennent à* $\mathfrak{m}_x$. *Alors les conditions* a), b), c) *de* (17.15.3) *équivalent aussi à chacune des suivantes :*

d) *Les* n *germes* $(g_i)_x$ *engendrent l'idéal maximal* $\mathfrak{m}_x$ *de* $\mathcal{O}_{X,x}$.

d') *L'anneau* $\mathcal{O}_{X,x}$ *est régulier et les* $(g_i)_x$ *forment un système régulier de paramètres pour cet anneau* (**0**, 17.1.6).

En effet, *d')* entraîne trivialement *d)*. D'autre part, comme $\boldsymbol{k}(x)$ est une extension finie et séparable de k, on a $\Omega^1_{\mathbf{k}(x)/k} = 0$ (**0**, 20.6.20) et $\boldsymbol{k}(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ est une k-algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes (**0**, 19.6.1), donc la suite exacte (**0**, 20.5.14.1) s'applique à $A = k$, $B = \mathcal{O}_{X,x}$, $\mathfrak{K} = \mathfrak{m}_x$, et fournit un isomorphisme canonique

$$\delta : \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \xrightarrow{\sim} (\Omega^1_{X/k})_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \boldsymbol{k}(x).$$

De là on déduit d'abord l'équivalence des conditions *c)* et *d)*, compte tenu du lemme de Nakayama. D'autre part, si f est étale au point x, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier et de dimension n, puisque x est un point fermé de X (**I**, 6.4.2), et n éléments de $\mathfrak{m}_x$ qui engendrent cet idéal maximal forment alors nécessairement un système régulier de paramètres pour $\mathcal{O}_{X,x}$ (**0**, 17.1.6), ce qui prouve que *a)* entraîne *d')*.

Proposition **(17.15.5)**. — *Soient* k *un corps*, X *un préschéma localement de type fini sur* k, x *un point de* X, $n = \dim_x(X)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) X *est lisse sur* k *au point* x.

b) X *est différentiellement lisse sur* k *au point* x.

c) $(\Omega^1_{X/k})_x$ *est un* $\mathcal{O}_{X,x}$*-module libre de rang* n.

d) $(\Omega^1_{X/k})_x$ *est un* $\mathcal{O}_{X,x}$*-module admettant un système de* n *générateurs.*

e) *Il existe une extension parfaite k' de k et un voisinage ouvert* U *de x dans* X *tels que le préschéma* $U\otimes_k k'$ *soit régulier.*

Le fait que X soit lisse sur k au point x entraîne l'existence d'un voisinage ouvert U de x qui est lisse sur k, donc $U\otimes_k k'$ est régulier pour *toute* extension k' de k (17.15.2), ce qui prouve que *a)* implique *e)*. Inversement *e)* implique *a)*, car alors $U\otimes_k k'$ est lisse sur k' (17.15.2), donc U est lisse sur k (17.7.1, (ii)).

On a déjà prouvé que *a)* entraîne *c)* (17.10.2); *c)* implique *d)* trivialement et le fait que *d)* implique *a)* résulte de (**0**, 20.4.7) et (17.15.3, *c)*).

Enfin, on a déjà vu que *a)* implique *b)* (17.12.4). Inversement, pour prouver que *b)* entraîne *a)*, on peut se borner au cas où x est *rationnel sur k*, en considérant, comme dans la démonstration de (17.15.3), un point x' de $X'=X\otimes_k k'$ au-dessus de x et tel que $\boldsymbol{k}(x')=k'=\boldsymbol{k}(x)$, utilisant encore (17.7.1, (ii)) et le fait que si X est différentiellement lisse au point x, X' est différentiellement lisse au point x' (16.10.4). Supposant donc x rationnel sur k, le fait que f soit lisse en x résulte alors de l'hypothèse *b)* et de (17.12.5) appliqué à la k-section $u:\mathrm{Spec}(k)\rightarrow X$ telle que $u(\mathrm{Spec}(k))=\{x\}$.

Corollaire (**17.15.6**). — *Soit* X *un préschéma de type fini sur un corps k. Pour que* X *soit lisse sur k, il faut et il suffit que le $\mathcal{O}_X$-Module $\Omega^1_{X/k}$ soit localement libre, et que les anneaux locaux aux points maximaux de* X *soient des corps, extensions séparables de k* (cette dernière condition étant automatiquement vérifiée si k est un corps *parfait* et X un préschéma *réduit*).

Les conditions sont nécessaires, car si X est lisse sur k, il résulte de (17.10.2) que $\Omega^1_{X/k}$ est localement libre; d'autre part, X est régulier, donc *a fortiori* réduit, donc en tout point maximal x de X, $\mathcal{O}_{X,x}$ est un corps, qui doit être une k-algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes (17.5.1), donc une extension séparable de k (**0**, 19.6.1).

Les conditions sont suffisantes. On peut en effet se borner au cas où X est connexe, donc $\Omega^1_{X/k}$ localement libre de rang constant n. Pour tout point maximal x de X, on a alors $\mathrm{rg}_{\boldsymbol{k}(x)}\Omega^1_{\boldsymbol{k}(x)/k}=n$ puisque $\mathcal{O}_{X,x}=\boldsymbol{k}(x)$; comme par hypothèse $\boldsymbol{k}(x)$ est une extension séparable de k, on a $\Upsilon_{\boldsymbol{k}(x)/k}=0$ (**0**, 20.6.3), donc $\deg.\mathrm{tr}_k\boldsymbol{k}(x)=n$ par l'égalité de Cartier (**0**, 21.7.1). Toutes les composantes irréductibles de X ont donc même dimension n (5.2.1), et on conclut que X est lisse sur k en tout point en vertu de ce que *c)* entraîne *a)* dans (17.15.5).

Corollaire (**17.15.7**). — *Si k est de caractéristique* 0, *alors, pour que* X *soit lisse sur k au point x, il faut et il suffit que $(\Omega^1_{X/k})_x$ soit un $\mathcal{O}_{X,x}$-module libre.*

Cela résulte de (16.12.2) et de l'équivalence de *b)* et *a)* dans (17.15.5).

Proposition (**17.15.8**). — *Soient k un corps,* X *un préschéma localement de type fini sur k, x un point de* X; *posons* $n=\dim_x(X)$, $r=\dim(\mathcal{O}_{X,x})$, *de sorte que* $n-r=\deg.\mathrm{tr}_k\boldsymbol{k}(x)$ (5.2.3). *Soit* $(g_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *une famille de n sections de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de* X, *telles que* $(g_i)_x\in\mathfrak{m}_x$ *pour* $1\leqslant i\leqslant r$; *soit* $f:X\rightarrow Y=\mathrm{Spec}(k[T_1,\ldots,T_n])$ *le morphisme correspondant au k-homomorphisme* $k[T_1,\ldots,T_n]\rightarrow\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ *transformant* T_i *en* g_i. *Les conditions suivantes sont équivalentes (et impliquent que* X *est lisse sur k au point x et que $\boldsymbol{k}(x)$ est une extension séparable de k) :*

a) f *est étale au point x.*

b) *Les* $(g_i)_x$ *tels que* $1 \leqslant i \leqslant r$ *engendrent* $\mathfrak{m}_x$ (et par suite forment un système régulier de paramètres pour $\mathcal{O}_{X,x}$ (**0**, 17.1.6)) *et les images dans* $\Omega^1_{\boldsymbol{k}(x)/k}$ *des éléments* $(d_{X/k}g_j)_x$ *pour* $r+1 \leqslant j \leqslant n$ *engendrent* $\Omega^1_{\boldsymbol{k}(x)/k}$.

On a en effet (**0**, 20.5.12.1) la suite exacte de $\boldsymbol{k}(x)$-modules

(17.15.8.1) $$\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to (\Omega^1_{X/k})_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \boldsymbol{k}(x) \to \Omega^1_{\boldsymbol{k}(x)/k} \to 0$$

et la condition *b)* entraîne par suite que les $(d_{X/k}g_i)_x$ engendrent $(\Omega^1_{X/k})_x$ compte tenu du lemme de Nakayama; le fait que *b)* implique *a)* résulte donc de (17.15.3). Inversement, si *a)* est vérifiée, les $(d_{X/k}g_i)_x$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ forment une base de $(\Omega^1_{X/k})_x$ en vertu de (17.15.3). Si t_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est l'image de $(g_i)_x$ dans $\boldsymbol{k}(x)$, on conclut de ce qui précède que les dt_i engendrent $\Omega^1_{\boldsymbol{k}(x)/k}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, et comme par hypothèse $t_i = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$, les dt_i pour $r+1 \leqslant i \leqslant n$ engendrent déjà $\Omega^1_{\boldsymbol{k}(x)/k}$. Comme $\deg.\mathrm{tr}_k \boldsymbol{k}(x) = n - r$, il suit de l'égalité de Cartier (**0**, 21.7.1) que $\Upsilon_{\boldsymbol{k}(x)/k} = 0$, donc $\boldsymbol{k}(x)$ est une extension séparable de k (**0**, 20.6.3), et la suite de $\boldsymbol{k}(x)$-espaces vectoriels

(17.15.8.2) $$0 \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to (\Omega^1_{X/k})_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \boldsymbol{k}(x) \to \Omega^1_{\boldsymbol{k}(x)/k} \to 0$$

est exacte ((**0**, 20.5.14) et (**0**, 19.6.1)); en outre les dt_i pour $r+1 \leqslant i \leqslant n$ forment une base de $\Omega^1_{\boldsymbol{k}(x)/k}$, donc aucun des t_i tels que $r+1 \leqslant i \leqslant n$ ne peut être nul. Cela montre que les images des $(g_i)_x$ dans $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$ engendrent nécessairement $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, donc les $(g_i)_x$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$ engendrent $\mathfrak{m}_x$ en vertu du lemme de Nakayama, ce qui achève de prouver que *a)* implique *b)*.

Corollaire **(17.15.9)**. — *Soient* X *un préschéma localement de type fini sur un corps* k, x *un point de* X *et posons* $n = \dim_x(X)$, $r = \dim(\mathcal{O}_{X,x})$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *L'anneau* $\mathcal{O}_{X,x}$ *est régulier et* $\boldsymbol{k}(x)$ *est une extension séparable de* k.

b) X *est lisse sur* k *au point* x, *et l'homomorphisme canonique*

$$\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to (\Omega^1_{X/k})_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \boldsymbol{k}(x)$$

est injectif.

c) *Il existe* n *sections* g_i *de* $\mathcal{O}_X$ *au-dessus d'un voisinage ouvert* U *de* x *telles que* $(g_i)_x \in \mathfrak{m}_x$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant r$ *et que le morphisme* $U \to \mathrm{Spec}(k[T_1, \ldots, T_n])$ *correspondant aux* g_i (cf. (17.15.8)) *soit étale au point* x.

d) *Il existe* n *sections* g_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *de* $\mathcal{O}_X$ *au-dessus d'un voisinage ouvert* U *de* x, *telles que les* $(g_i)_x$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant r$ *engendrent* $\mathfrak{m}_x$ *et que les images dans* $\Omega^1_{\boldsymbol{k}(x)/k}$ *des* $(d_{U/k}g_j)_x$ *pour* $r+1 \leqslant j \leqslant n$ *engendrent* $\Omega^1_{\boldsymbol{k}(x)/k}$.

L'équivalence de *c)* et *d)* résulte de (17.15.8). De plus, on a vu dans la démonstration de (17.15.8) que la condition *c)* entraîne que X est lisse sur k au point x et que la suite (17.15.8.2) est exacte, donc *c)* entraîne *b)*. La condition *b)* entraîne que l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier, donc $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ est de rang r; en outre, $(\Omega^1_{X/k})_x$ est alors un $\mathcal{O}_{X,x}$-module libre de rang n (17.10.2); comme la suite (17.15.7.2) est exacte par hypothèse, $\Omega^1_{\boldsymbol{k}(x)/k}$ est de rang $n - r = \deg.\mathrm{tr}_k \boldsymbol{k}(x)$ et l'égalité de Cartier montre que $\Upsilon_{\boldsymbol{k}(x)/k} = 0$, donc $\boldsymbol{k}(x)$ est séparable sur k (**0**, 20.6.3); ainsi *b)* entraîne *a)*. Enfin, si *a)* est vérifiée, on déduit encore de l'égalité de Cartier que $\Omega^1_{\boldsymbol{k}(x)/k}$ est de rang $n-r$. Comme d'autre part l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier, l'existence des g_i vérifiant les conditions de *d)* est immédiate.

Remarques (**17.15.10**). — (i) Pour qu'un préschéma de type fini X sur k soit lisse sur k, il ne suffit pas que $\Omega^1_{X/k}$ soit localement libre, comme le montre l'exemple où $X=\mathrm{Spec}(K)$, K étant une extension finie non séparable de k.

(ii) Lorsque k n'est pas parfait, il peut se faire que X soit lisse sur k sans que $\boldsymbol{k}(x)$ soit séparable sur k. On en a un exemple en prenant $X=\mathrm{Spec}(k[T])$ et pour x le point correspondant à l'idéal premier principal $(T^p-\lambda)$ ($p>0$ caractéristique de k, $\lambda\in k-k^p$).

(iii) Toutefois, si X est un préschéma lisse sur k, l'ensemble des points fermés de X tels que $\boldsymbol{k}(x)$ soit *séparable* (et fini) sur k est *dense* dans X. En effet, soit $f:X\rightarrow\mathrm{Spec}(k)$ le morphisme structural; pour tout $x_0\in X$, il y a un voisinage ouvert U de x_0 dans X et une factorisation de $f|U : U \xrightarrow{g} \mathrm{Spec}(k[T_1, \ldots, T_n]) \xrightarrow{h} \mathrm{Spec}(k)$ où g est *étale* (17.11.4). Comme on peut se borner au cas où k est non parfait, donc infini, l'ensemble des points de l'ouvert $g(U)$ qui sont *rationnels* sur k est non vide; si y est un tel point et $x\in U$ un point au-dessus de y, x est fermé dans X et $\boldsymbol{k}(x)$ est séparable sur $\boldsymbol{k}(y)=k$ (17.6.2).

Proposition (**17.15.11**). — *Soit* X *un préschéma de type fini sur un corps k. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) X *est étale sur k.*

b) X *est non ramifié sur k.*

c) X *est isomorphe à* Spec(A), *où* A *est une k-algèbre finie et séparable.*

Cela résulte de (17.6.2) et (17.4.2), compte tenu de ce que la condition *b)* implique ici que X est fini sur k.

Proposition (**17.15.12**). — *Soient k un corps,* X *un préschéma localement de type fini sur k. Pour qu'il existe un ouvert partout dense* U *de* X *qui soit lisse sur k, il faut et il suffit que pour tout point maximal x de* X, X *soit réduit en ce point et que* $\boldsymbol{k}(x)$ *soit une extension séparable de k. Pour qu'il existe un ouvert partout dense* U *de* X *tel que* U_{red} *soit lisse sur k, il faut et il suffit que pour tout point maximal x de* X, $\boldsymbol{k}(x)$ *soit une extension séparable de k.*

La seconde assertion résulte évidemment de la première. Dire qu'il existe un ouvert partout dense U lisse sur k signifie que X est lisse sur k en chacun de ses points maximaux x. Il est nécessaire pour cela que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit régulier (17.15.1) et *a fortiori* réduit, donc un *corps*, égal à $\boldsymbol{k}(x)$; en outre (17.15.1), $\boldsymbol{k}(x)\otimes_k k'$ doit être régulier pour toute extension radicielle k' de k, donc $\boldsymbol{k}(x)$ doit être une extension séparable de k (4.3.5); la réciproque est immédiate, en vertu de (17.15.1).

Corollaire (**17.15.13**). — *Soit* X *un préschéma algébrique sur un corps k. Alors il existe un ouvert partout dense* U *dans* X *et une extension finie radicielle k' de k tels que* $(U_{(k')})_{\mathrm{red}}$ *soit lisse sur k'.*

En effet, il y a une telle extension k' telle que $(X_{(k')})_{\mathrm{red}}$ soit géométriquement réduit sur k' (4.6.6), ce qui équivaut à dire (4.6.1) que pour tout point maximal x' de $X_{(k')}$, $\boldsymbol{k}(x')$ est une extension séparable de k'. On conclut donc de (17.15.12) qu'il y a un ouvert partout dense U' de $X_{(k')}$ tel que U'_{red} soit lisse sur k'. Mais le morphisme $X_{(k')} \to X$ est un homéomorphisme (2.4.5), donc U' est de la forme $U_{(k')}$, où U est un ouvert partout dense dans X.

Proposition (**17.15.14**). — *Soit* X *un préschéma algébrique sur* k, *de dimension* $\leqslant 1$. *Alors il existe une extension finie radicielle* k' *de* k *telle que le normalisé* (**II**, 6.3.8) *de* $(X_{(k')})_{\text{red}}$ *soit lisse sur* k'.

Démontrons d'abord les deux lemmes suivants :

Lemme (**17.15.14.1**). — *Soient* X *un préschéma réduit dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini,* $f : Y \to X$ *un morphisme. Pour que* Y *soit* X-*isomorphe au normalisé* X' *de* X (**II**, 6.3.8), *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) Y *est normal ;*

(ii) f *est un morphisme entier et birationnel.*

Lorsqu'il existe dans X *un ouvert dense et normal (ce qui est toujours le cas lorsque* X *est excellent* (7.8.3), *en particulier lorsque* X *est localement de type fini sur un corps), on peut remplacer la condition* (ii) *par la suivante :*

(ii *bis*) f *est entier et il existe un ouvert dense* U *dans* X *tel que* $f^{-1}(U)$ *soit dense dans* Y *et que la restriction* $f^{-1}(U) \to U$ *de* f *soit un isomorphisme.*

La question étant locale sur X, on peut supposer que X n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles; soient X_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ les sous-préschémas réduits de X ayant ces composantes pour espaces sous-jacents. On sait (**II**, 6.3.6) que X' est somme des normalisés X'_i des X_i; chacun des morphismes structuraux $f_i : X'_i \to X_i$ est donc entier et birationnel, donc f est entier et birationnel; il est immédiat que (ii) entraîne (ii *bis*) lorsqu'il existe un ouvert V dense et normal dans X, en prenant $U = V$. Inversement, si les conditions (i) et (ii) sont remplies, Y n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles Y_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, Y_i dominant X_i pour chaque indice i (6.15.4); Y est somme des Y_i puisqu'il est normal, et le morphisme $g_i : Y_i \to X_i$ en lequel se factorise la restriction $Y_i \to X$ de f (**I**, 5.2.2) est birationnel; comme X_i et Y_i sont intègres, il résulte alors du fait que g_i est entier et Y_i normal que, pour tout ouvert affine V de X_i, $\Gamma(g_i^{-1}(V), \mathcal{O}_{Y_i})$ est la clôture intégrale de $\Gamma(V_i, \mathcal{O}_{X_i})$, donc Y s'identifie canoniquement à X' (**II**, 6.3.4). Enfin, si l'on suppose vérifiée la condition (ii *bis*), on peut se borner au cas où U est réunion d'ouverts irréductibles disjoints U_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, donc $f^{-1}(U)$ réunion disjointe des $V_i = f^{-1}(U_i)$. Comme les V_i sont irréductibles et $f^{-1}(U)$ dense dans Y, les $\overline{V_i}$ sont les composantes irréductibles de Y et par suite f est birationnel.

Lemme (**17.15.14.2**). — *Soient* k *un corps,* X *un préschéma algébrique sur* k. *Alors il existe une extension finie radicielle* k' *de* k *telle que* $(X_{(k')})_{\text{red}}$ *soit géométriquement réduit sur* k' *et que son normalisé soit géométriquement normal sur* k'.

Compte tenu de (4.6.6) et de (**I**, 5.1.8), on peut se borner au cas où X est déjà géométriquement réduit sur k. Soient p l'exposant caractéristique de k et $k_1 = k^{p^{-\infty}}$ la plus petite extension parfaite de k; k_1 est donc limite inductive des extensions finies radicielles de k. Posons $X_1 = X_{(k_1)}$, qui est réduit par hypothèse, et soit Y_1 son normalisé; si $f_1 : Y_1 \to X_1$ est le morphisme structural, f_1 est donc fini (7.8.3, (vi)) et surjectif, et il existe un ouvert dense U_1 dans X_1 tel que $f_1^{-1}(U_1) = V_1$ soit dense dans Y_1 et que le morphisme $V_1 \to U_1$ restriction de f_1 soit un isomorphisme (17.15.14.1). Appliquant (8.9.1) et (8.10.5, (vi) et (x)), on voit donc d'abord qu'il existe une extension finie radicielle k'' de k et un morphisme fini surjectif $Y'' \to X'' = X_{(k'')}$ tels que $Y_1 = Y'' \times_{X''} X_1 = Y'' \otimes_{k''} k_1$; puisque Y_1 est normal et k_1 parfait, il résulte de (6.7.7) que Y'' est géométriquement normal sur k''. Comme les projections $X_1 \to X''$ et $Y_1 \to Y''$ sont des morphismes entiers, surjectifs et radiciels, ce sont des homéomorphismes (2.4.5), et si U'' et V'' sont les images de U_1 et V_1 dans X'' et Y'' respectivement, ce sont des ouverts denses dans X'' et Y'' respectivement tels que $V'' = f''^{-1}(U'')$, où $f'' : Y'' \to X''$ est le morphisme structural. Comme on a $U_1 = U'' \otimes_{k''} k_1$, il résulte de (8.10.5, (i)) qu'il existe une extension finie radicielle k' de k'' telle que si l'on pose $X' = X \otimes_k k' = X'' \otimes_{k''} k'$, $Y' = Y'' \otimes_{k''} k'$, $f' = f''_{(k')} : Y' \to X'$, et si U' et V' sont les images de U'' et V'' dans X' et Y' respectivement, la restriction $V' \to U'$ de f' soit un isomorphisme. Comme Y' est normal et f' entier et birationnel, on conclut de (17.15.14.1) que Y' est isomorphe au normalisé de X', ce qui prouve le lemme puisque Y' est géométriquement normal.

Revenons maintenant à la démonstration de (17.15.14), et appliquons à k et X le lemme (17.15.14.2); puisque $\dim(X) \leqslant 1$, on a aussi $\dim(X_{(k')}) \leqslant 1$ (4.1.4), et le normalisé Y' de $X_{(k')}$ est aussi de dimension $\leqslant 1$ (5.4.2 et **II**, 7.4.6). Dire que Y' est géométriquement normal sur k' revient alors à dire, en vertu des définitions et de (**II**, 7.4.5), que Y' est géométriquement régulier sur k', donc lisse sur k' (17.5.1), ce qui prouve (17.15.14).

Proposition (**17.15.15**). — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme localement de présentation finie. Pour que f soit lisse en un point $x \in X$, il faut et il suffit que f soit plat au point x et que Ω^1_f soit un $\mathcal{O}_X$-Module localement libre dans un voisinage de x, de rang en x égal à* $\dim_x f$.

La nécessité des conditions résulte de (17.5.1) et (17.10.2). Inversement, si ces conditions sont vérifiées, et si $y = f(x)$, il suffit de montrer (17.5.1) que $f^{-1}(y)$ est lisse sur $\boldsymbol{k}(y)$ au point x; mais cela résulte de la définition de $\dim_x f$ (17.10.1), de (16.4.5) et de (17.15.5).

17.16. Quasi-sections de morphismes plats ou lisses.

Les énoncés de ce numéro complètent ceux de (14.5), moyennant des hypothèses de platitude.

Proposition (**17.16.1**). — *Soit $f : X \to S$ un morphisme plat localement de présentation finie. Soient $s \in S$, x un point fermé de X_s tel que $\mathcal{O}_{X_s,x}$ soit un anneau de Cohen-Macaulay; alors il existe un voisinage ouvert U de s dans S et un sous-préschéma $X' \subset f^{-1}(U)$ de X tel que $x \in X'$ et que le morphisme $X' \to U$, restriction de f, soit plat, quasi-fini et de présentation finie.*

La question étant locale sur X et Y, on peut supposer f de présentation finie.

Soit $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ un système de paramètres de l'anneau local $\mathcal{O}_{X_s,x}$; il existe un voisinage ouvert affine $V = \mathrm{Spec}(A)$ de x dans X et m sections g_i de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de V telles que les images des $(g_i)_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ dans $\mathcal{O}_{X_s,x} = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_{X,x}$ soient égales aux t_i. Soit X′ le sous-préschéma fermé de V défini par l'idéal de A engendré par les g_i; la suite (t_i) étant par hypothèse régulière (**0**, 16.5.7) il résulte de (11.3.8) qu'en remplaçant au besoin V par un voisinage ouvert plus petit, on peut supposer que le morphisme $X' \rightarrow S$, restriction de f, est *plat* et *de présentation finie*. D'autre part, puisque les t_i forment un système de paramètres de $\mathcal{O}_{X_s,x}$, l'anneau $\mathcal{O}_{X'_s,x}$ est par définition *artinien*, et comme x est *fermé* dans X'_s, on en conclut qu'il est *isolé* dans X'_s. En remplaçant V au besoin par un voisinage plus petit de x, on en conclut, grâce à (13.1.4) que le morphisme $X' \rightarrow S$ est *quasi-fini*.

Corollaire (**17.16.2**). — *Soit* $f: X \rightarrow S$ *un morphisme fidèlement plat et localement de présentation finie. Alors il existe un morphisme* $g: S' \rightarrow S$, *fidèlement plat, localement de présentation finie et* localement quasi-fini, *tel qu'il existe un* S-*morphisme* $S' \rightarrow X$ (autrement dit, tel qu'il existe une S′-*section* de $X' = X \times_S S'$ (**I**, 3.3.14)). *Si* S *est quasi-compact* (resp. *quasi-compact et quasi-séparé*), *on peut supposer* S′ *affine* (resp. S′ *affine et le morphisme* g *quasi-fini*).

Pour tout $s \in S$, la fibre X_s est non vide par hypothèse et est un préschéma localement de type fini sur $\boldsymbol{k}(s)$; l'ensemble U_s des points x de X_s où $\mathcal{O}_{X_s,x}$ est un anneau de Cohen-Macaulay est ouvert dans X_s (6.11.3) et est non vide, puisqu'il contient les points maximaux de X_s (**0**, 16.5.1); il contient par suite un point x_s *fermé* dans X_s (10.4.7). Soit $X'(s)$ un sous-préschéma affine de X contenant x_s et vérifiant les conditions de (17.16.1). Pour obtenir un préschéma S′ vérifiant les conditions de l'énoncé, il suffit de prendre la *somme* des $X'(s)$, où s parcourt S. Puisque le morphisme $X'(s) \rightarrow S$ est plat et localement de présentation finie, l'image $U(s)$ de $X'(s)$ est ouverte dans S(2.4.6); lorsque S est quasi-compact, on peut donc recouvrir S par un nombre fini de $U(s_j)$ et le préschéma S′ somme des $X'(s_j)$ répond encore à la question et est affine. Si de plus S est quasi-séparé, on peut supposer les immersions ouvertes $U(s) \rightarrow S$ quasi-compactes (1.2.7), donc de présentation finie (1.6.2), et alors les morphismes $X'(s_j) \rightarrow S$ sont de présentation finie (1.6.2) et il en est par suite de même du morphisme $S' \rightarrow S$.

Corollaire (**17.16.3**). — (i) *Soit* $f: X \rightarrow S$ *un morphisme lisse. Soient* $s \in S$, x *un point fermé de* X_s *tel que le corps résiduel* $\boldsymbol{k}(x)$ *soit séparable sur* $\boldsymbol{k}(s)$; *alors, dans la conclusion de* (17.16.1), *on peut prendre* X′ *tel que le morphisme* $X' \rightarrow U$, *restriction de* f, *soit étale.*

(ii) *Soit* $f: X \rightarrow S$ *un morphisme lisse surjectif. Alors, dans les conclusions de* (17.16.2), *on peut supposer en outre que* $g: S' \rightarrow S$ *soit étale.*

Il est clair que (ii) se déduit de (i) comme (17.16.2) de (17.16.1), compte tenu de ce que, pour tout $s \in S$, comme X_s est non vide et lisse sur $\boldsymbol{k}(s)$, il existe un point fermé $x \in X_s$ tel que $\boldsymbol{k}(x)$ soit *séparable* sur $\boldsymbol{k}(s)$ (17.15.10, (iii)). Il suffit donc de prouver (i). On notera que l'anneau $\mathcal{O}_{X_s,x}$ est alors régulier; si l'on répète la construction faite dans (17.16.1) en prenant pour (t_i) un *système régulier de paramètres* de $\mathcal{O}_{X_s,x}$, l'anneau $\mathcal{O}_{X'_s,x}$ est un corps isomorphe à $\boldsymbol{k}(x)$, donc séparable sur $\boldsymbol{k}(s)$ par hypothèse. La conclusion résulte alors de (17.6.1, c')).

Proposition (**17.16.4**). — *Soient* S *un préschéma quasi-compact et quasi-séparé*, $f: X \rightarrow S$ *un morphisme surjectif localement de présentation finie. Alors il existe une famille finie* $(S_i)_{i \in I}$

de sous-préschémas affines de S, *de présentation finie sur* S, *deux à deux disjoints, de réunion* S, *et ayant la propriété suivante : pour chaque* $i \in I$, *il existe deux morphismes finis de présentation finie et surjectifs* $S_i'' \xrightarrow{g_i} S_i' \xrightarrow{h_i} S_i$, *où* h_i *est étale et* g_i *plat et radiciel, et un* S-*morphisme* $S_i'' \rightarrow X$ (autrement dit une S_i''-*section* de $X_i'' = X \times_S S_i''$).

Il y a un recouvrement fini $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de S par des ouverts affines; pour tout i, l'intersection $W_i = \bigcap_{j \leqslant i} U_j$ est quasi-compacte (1.2.7) donc il existe un sous-préschéma fermé V_i de U_i ayant pour espace sous-jacent $U_i - W_i$ et défini par un idéal de type fini de l'anneau de U_i; donc V_i est un sous-préschéma affine de S qui est de présentation finie sur S (1.6.2). Il est clair qu'on peut se borner à prouver la proposition en y remplaçant S par V_i et X par $X \times_S V_i$. Autrement dit, on peut déjà supposer S affine. D'autre part, X est réunion d'ouverts affines W_α et les $f(W_\alpha)$ sont constructibles dans S (1.8.4) et forment un recouvrement de S; par suite (1.9.9) il existe une sous-famille finie $(W_{\alpha_j})_{1 \leqslant j \leqslant m}$ telle que les $f(W_{\alpha_j})$ forment déjà un recouvrement de S. Soit alors X' le préschéma *somme* des sous-préschémas induits sur les ouverts W_{α_j} de X; il est immédiat qu'il suffit de prouver la proposition en remplaçant X par X' puisqu'un S-morphisme $S_i'' \rightarrow X'$ donne par composition un S-morphisme $S_i'' \rightarrow X' \rightarrow X$.

On peut donc supposer X *affine* et f de présentation finie. On peut alors (8.9.1) écrire X sous la forme $X_0 \times_{S_0} S$, où S_0 est noethérien, $X_0 \rightarrow S_0$ un morphisme de type fini, qu'on peut supposer surjectif (8.10.5, (vi)). Si la proposition est prouvée pour ce morphisme, elle en résultera aussitôt pour X par changement de base $S \rightarrow S_0$. On peut donc supposer de plus S *noethérien* et f de type fini.

Soient s_h $(1 \leqslant h \leqslant r)$ les points maximaux de S. Montrons qu'il suffit de prouver l'énoncé en remplaçant S par un voisinage ouvert assez petit U_h de chacun des s_h, X par l'image réciproque de U_h dans X. En effet, supposons la proposition établie dans ce cas, et raisonnons par récurrence noethérienne ($\mathbf{0_I}$, 2.2.2) en supposant l'énoncé établi pour tout sous-préschéma fermé de S ayant un espace sous-jacent $\neq$ S. On peut supposer les U_h deux à deux sans point commun; si T est un sous-préschéma fermé ayant pour espace sous-jacent $S - (\bigcup_h U_h)$, l'hypothèse de récurrence entraîne que l'énoncé est vrai pour T; comme il est vrai aussi pour chacun des U_h, il l'est évidemment pour S.

Comme on peut évidemment (en remplaçant S par S_{red} et X par $X \times_S S_{\mathrm{red}}$) supposer S réduit, chacun des $\mathcal{O}_{S, s_h}$ est un *corps* $\boldsymbol{k}(s_h)$. Supposons que l'on ait prouvé la proposition lorsque S est le *spectre d'un corps* et f est de type fini. Alors l'existence des U_h résulte de la méthode de (8.1.2, *a)*) et de (8.8.2, (i) et (ii)), (8.10.5, (vi), (vii) et (x)), (11.2.6, (ii)) et (17.7.8, (ii)).

Supposons donc $S = \mathrm{Spec}(k)$, où k est un corps, X étant de type fini sur k et $X \neq \emptyset$. Comme X est noethérien, il existe dans X un point fermé x ($\mathbf{0_I}$, 2.1.3), donc $\boldsymbol{k}(x)$ est une extension *finie* de k (**I**, 6.4.2). Il y a par suite une extension finie séparable k' de k telle que $k'' = \boldsymbol{k}(x)$ soit extension finie radicielle de k'. On répond alors à la question en prenant I réduit à un élément, $S_i' = \mathrm{Spec}(k')$, $S_i'' = \mathrm{Spec}(k'')$.

Corollaire **(17.16.5).** — *Soit* $f: X \to S$ *un morphisme surjectif localement de présentation finie. Alors il existe un morphisme* $g: S' \to S$ *surjectif, localement de présentation finie et* localement quasi-fini, *tel qu'il existe un* S-*morphisme* $S' \to X$ (autrement dit tel qu'il existe une S'-*section* de $X' = X \times_S S'$). *Si* S *est quasi-compact* (resp. *quasi-compact et quasi-séparé*), *on peut supposer* S′ *affine* (resp. S′ *affine et le morphisme* g *de présentation finie et quasi-fini*).

Il suffit de prouver le corollaire en supposant S affine : S est en effet réunion d'une famille (S_α) d'ouverts affines, et si pour chaque α, S'_α est affine et le morphisme $g_\alpha: S'_\alpha \to S_\alpha$ répond à la question et est de présentation finie et quasi-fini, alors en prenant pour S′ le préschéma somme des S'_α, $g: S' \to S$ coïncidant avec g_α dans chacun des S'_α, ce morphisme répond à la question; en outre, si S est quasi-compact, on peut supposer la famille (S_α) finie, donc S′ affine; si de plus S est quasi-séparé, les immersions $S_\alpha \to S$ sont de présentation finie (1.6.2), donc il en est de même de g.

Considérons donc le cas où S est affine : on forme alors les morphismes finis et de présentation finie $S''_i \to S_i$ de (17.16.4); comme les immersions $S_i \to S$ sont de présentation finie (les S_i étant affines), les morphismes $g''_i: S''_i \to S_i \to S$ sont de présentation finie et quasi-finis, et on répond à la question en prenant S′ égal à la *somme* des S''_i et g coïncidant avec g''_i dans chacun des S''_i.

Proposition **(17.16.6).** — *Soient* S *un préschéma quasi-compact et quasi-séparé,* $f: X \to S$ *un morphisme de présentation finie tel que, pour tout* $s \in S$, $X_s = f^{-1}(s)$ *soit un préschéma propre sur* $\boldsymbol{k}(s)$. *Alors il existe une famille finie* $(S_i)_{i \in I}$ *de sous-préschémas affines de* S, *de présentation finie sur* S, *deux à deux disjoints, de réunion* S *et tels que, pour tout* i, *le morphisme* $X_i = X \times_S S_i \to S_i$ *soit* propre *et* plat. *Si de plus, pour tout* $s \in S$, X_s *est fini sur* $\boldsymbol{k}(s)$, *on peut prendre les* S_i *tels que chacun des morphismes* $X_i \to S_i$ *se factorise en*

$$X_i \xrightarrow{u_i} X'_i \xrightarrow{h_i} S_i$$

où u_i *et* h_i *sont finis et localement libres* (18.2.7), h_i *est étale,* u_i *est radiciel et surjectif.*

On suit une marche analogue à celle de (17.16.4). On se ramène d'abord au cas où S est *affine* et où f est *plat*, en utilisant le théorème de platitude générique (8.9.5) (on observera que les sous-préschémas S'_i définis dans la démonstration de (8.9.5) sont affines). Puisque f est de présentation finie, on peut ensuite écrire $X = X_0 \times_{S_0} S$, où S_0 est noethérien, $X_0 \to S_0$ un morphisme de type fini et plat (11.2.7); en outre chaque fibre $(X_0)_{s_0}$ est encore propre sur $\boldsymbol{k}(s_0)$, comme il résulte de (2.7.1, (vii)) et on est donc ramené au cas où S est noethérien. Par récurrence noethérienne et application du procédé de (8.1.2, *a*)) (en utilisant aussi cette fois (8.10.5, (xii))), on est finalement ramené, pour prouver la première assertion, au cas où S est le spectre d'un corps, qui résulte trivialement de l'hypothèse (avec $S_i = S$). On traite de même le cas où X_s est supposé fini sur $\boldsymbol{k}(s)$ pour tout $s \in S$ (il faut cette fois utiliser (2.7.1, (xv)), (8.10.5, (x), (iv), (vi) et (vii)), (17.7.8) et (2.1.12)), et on est ramené à prouver la dernière assertion de l'énoncé lorsque $S = \operatorname{Spec}(k)$ est le spectre d'un corps. Mais alors $X = \operatorname{Spec}(A)$, où A est une k-algèbre finie (**I**, 6.4.4); donc A est composée directe de k-algèbres finies A_j qui sont des anneaux locaux $(1 \leqslant j \leqslant m)$; puisque A_j est un anneau artinien et une

k-algèbre, il contient un sous-corps K'_j isomorphe canoniquement au corps résiduel de A_j (**0**, 19.6.2). On prend alors $X_i = X$, X'_i somme des $\mathrm{Spec}(K'_j)$ et il est clair que l'on répond ainsi à la question puisque pour tout j on a deux homomorphismes $K'_j \to A_j \to \boldsymbol{k}(A_j)$ dont le composé est un isomorphisme.

§ 18. COMPLÉMENTS SUR LES MORPHISMES ÉTALES ANNEAUX LOCAUX HENSÉLIENS ET ANNEAUX STRICTEMENT LOCAUX

Dans le présent paragraphe, nous étudions diverses propriétés spéciales aux morphismes étales. De plus, la notion de morphisme étale permet de développer de façon fort naturelle la théorie de Nagata des anneaux henséliens, ainsi que celle des anneaux strictement locaux. Ces anneaux jouent un rôle important dans de nombreux développements récents, en s'introduisant chaque fois que l'on a besoin d'un procédé de « localisation » plus fin que celui fourni par la topologie de Zariski (cf. par exemple [43], en attendant la parution du chapitre de notre Traité consacré à l'étude de la « topologie étale »).

18.1. Une équivalence remarquable de catégories.

Proposition (**18.1.1**). — *Soient* S *un préschéma,* S_0 *un sous-préschéma fermé de* S, X_0 *un* S_0*-préschéma lisse* (resp. *étale*) *sur* S_0, x_0 *un point de* X_0. *Il existe alors un voisinage ouvert* U_0 *de* x_0 *dans* X_0, *un* S*-préschéma* U *lisse* (resp. *étale*) *sur* S *et un* S_0*-isomorphisme* $U \times_S S_0 \cong U_0$.

Notons que si X_0 est étale sur S_0 au point x_0, il est *a fortiori* non ramifié sur S_0 en ce point; si l'on a construit un S-préschéma U lisse sur S tel que $U \times_S S_0$ soit isomorphe à U_0, comme les fibres des morphismes $U_0 \to S_0$ et $U \to S$ contenant x_0 sont alors isomorphes, il en résultera que U est non ramifié sur S au point x_0 (17.4.1, *d)*), donc aussi dans un voisinage de x_0; en remplaçant U par ce voisinage, on en conclut que U sera étale sur S. Il suffit donc de prouver la proposition lorsqu'on suppose seulement X_0 lisse sur S_0.

La question étant locale sur S et sur X_0, on peut supposer que $S = \mathrm{Spec}(A)$ et $X_0 = \mathrm{Spec}(C_0)$ sont affines, de sorte que $S_0 = \mathrm{Spec}(A_0)$, où A_0 est un anneau quotient de A, $C_0 = B_0/\mathfrak{J}_0$, où $B_0 = A_0[T_1, \ldots, T_n]$ et $\mathfrak{J}_0$ est un idéal de type fini de B_0; enfin, C_0 est une A_0-algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes. Soit $\mathfrak{p}_0$ l'idéal $\mathfrak{j}_{x_0}$ dans C_0; on a $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{q}_0/\mathfrak{J}_0$, où $\mathfrak{q}_0$ est un idéal premier de B_0. Le critère jacobien (**0**, 22.6.4) joint à (**0**, 19.1.12) montre qu'il existe dans $\mathfrak{J}_0$ une famille de r polynômes u_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ et r indices j_h $(1 \leqslant h \leqslant r)$ tels que les images des u_i dans $(\mathfrak{J}_0)_{\mathfrak{q}_0}/(\mathfrak{J}_0^2)_{\mathfrak{q}_0}$ engendrent ce $(B_0)_{\mathfrak{q}_0}$-module et que l'on ait

$$\text{(18.1.1.1)} \qquad \det(\partial u_i/\partial T_{j_h}) \notin \mathfrak{q}_0.$$

Comme $(B_0)_{\mathfrak{q}_0}$ est un anneau local, il résulte du lemme de Nakayama que l'on peut supposer que les images des u_i dans $(\mathfrak{J}_0)_{\mathfrak{q}_0}$ engendrent ce $(B_0)_{\mathfrak{q}_0}$-module, puis, en remplaçant au besoin X_0 par un voisinage ouvert affine de x_0, que les u_i engendrent $\mathfrak{J}_0$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.2). Posons alors $B = A[T_1, \ldots, T_n]$; B_0 est donc un anneau quotient de B, $\mathfrak{q}_0$ est l'image d'un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B et $\mathfrak{q}$ l'image réciproque de $\mathfrak{q}_0$. Pour tout i, soit $v_i \in B$ un élément dont u_i est l'image dans B_0, et soit $\mathfrak{J}$ l'idéal de B engendré par les v_i, de sorte que $\mathfrak{J}_0$ est l'image de $\mathfrak{J}$ dans B_0. La proposition sera établie en prenant pour U un voisinage ouvert du point de $\operatorname{Spec}(B/\mathfrak{J})$ correspondant à l'idéal premier $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}/\mathfrak{J}$, pourvu que l'on prouve que $B_\mathfrak{q}/\mathfrak{J}_\mathfrak{q}$ est une A-algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes. Or, cela résulte du critère jacobien, car les images des v_i dans $\mathfrak{J}_\mathfrak{q}/\mathfrak{J}_\mathfrak{q}^2$ engendrent ce $B_\mathfrak{q}$-module, et il résulte de (18.1.1.1) que l'on a $\det(\partial v_i/\partial T_{i_h}) \notin \mathfrak{q}$.

Théorème (**18.1.2**). — *Soient* S *un préschéma,* S_0 *un sous-préschéma fermé de* S *dont l'espace sous-jacent est identique à celui de* S. *Alors le foncteur*

$$X \rightsquigarrow X \times_S S_0$$

de la catégorie des S*-préschémas étales sur* S, *dans la catégorie des* S_0*-préschémas étales sur* S_0, *est une équivalence de catégories.*

Montrons d'abord que ce foncteur est *pleinement fidèle*. Soient X, Y deux S-préschémas étales sur S, et posons $X_0 = X \times_S S_0$, $Y_0 = Y \times_S S_0$. Si $Z = X \times_S Y$, l'ensemble $\operatorname{Hom}_S(X, Y)$ est en correspondance biunivoque canonique avec l'ensemble des X-sections $\Gamma(Z/X)$, et de même $\operatorname{Hom}_{S_0}(X_0, Y_0)$ est en correspondance biunivoque canonique avec $\Gamma(Z_0/X_0)$, où $Z_0 = Z \times_S S_0 = X_0 \times_{S_0} Y_0$. Or Z est étale sur X, Z_0 étale sur X_0, et X_0 (resp. Z_0) est un sous-préschéma fermé de X (resp. Z) ayant même espace sous-jacent. Les parties ouvertes de Z telles que la restriction du morphisme $Z \to X$ soit surjective et radicielle sont donc les *mêmes* que les parties de Z_0 ayant les propriétés correspondantes et notre assertion découle par suite de (17.9.3).

Pour achever la démonstration, il suffit de voir que pour tout S_0-préschéma X_0 étale sur S_0, il existe un S-préschéma X étale sur S et un S_0-isomorphisme $X_0 \xrightarrow{\sim} X \times_S S_0$. En vertu de la prop. (18.1.1), il existe un recouvrement ouvert (U_α) de X_0 et pour tout α, un S-préschéma V_α qui est étale sur S, et enfin un S_0-isomorphisme $\theta_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\sim} V_\alpha \times_S S_0$. En outre, en raison de la première partie de la démonstration, il existe un unique S_0-isomorphisme $\varphi_{\alpha\beta}$ de $\theta_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ sur $\theta_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, correspondant à l'automorphisme identique de $U_\alpha \cap U_\beta$, et il est immédiat, pour la même raison, que ces isomorphismes vérifient la condition de recollement ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 4.1.7). Il y a par suite un S-préschéma X tel que les V_α s'identifient canoniquement à des sous-préschémas induits sur des ouverts de X, les θ_α s'identifiant à des S_0-isomorphismes qui coïncident dans les intersections $U_\alpha \cap U_\beta$, et définissent donc un S_0-isomorphisme $X_0 \xrightarrow{\sim} X \times_S S_0$. Il est clair que X est étale sur S (17.3.2), ce qui achève la démonstration.

Corollaire (**18.1.3**). — *Soient* S *un préschéma,* X *un* S*-préschéma étale sur* S, S′ *un* S*-préschéma,* S'_0 *un sous-préschéma fermé de* S′ *ayant même espace sous-jacent. Alors l'application canonique* $X(S')_S \to X(S'_0)_S$ (**I**, 3.4.3) *est bijective.*

Posons en effet $X' = X \times_S S'$, $X'_0 = X \times_S S'_0$, de sorte que $X(S')_S = \Gamma(X'/S')$ et $X(S'_0)_S = \Gamma(X'_0/S'_0)$; le corollaire résulte du fait que le foncteur défini dans (18.1.2) (avec S et S_0 remplacés par S′ et S'_0 respectivement) est pleinement fidèle (ou directement de (17.9.3)).

18.2. Revêtements étales.

(18.2.1) Étant donnés un anneau A et une A-algèbre commutative B qui est *finie* et est un A-module *libre*, rappelons (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 12, nº 2) que l'on définit sur B une *forme* A-*linéaire* $\mathrm{Tr}_{B/A}$, la « forme trace »; on en déduit la définition d'une *forme* A-*bilinéaire symétrique* (dite encore « forme trace »)

(18.2.1.1) $$(x, y) \rightsquigarrow \mathrm{Tr}_{B/A}(xy)$$

dont la donnée est équivalente à celle de l'application A-linéaire associée $\mathrm{astr}_{B/A} : B \to \check{B}$ du A-module B dans son *dual* $\check{B}$, égale à sa transposée. Lorsque A est un *corps*, il est équivalent de dire que cette forme bilinéaire est *non dégénérée* ou que B est une A-algèbre *séparable* (Bourbaki, *Alg.*, chap. IX, § 2, prop. 5).

Soit $f: A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux; posons $B' = B \otimes_A A'$, et soit $g: B \to B'$ l'homomorphisme canonique; l'image par g d'une base du A-module B est alors une base du A'-module B', et il résulte des définitions que l'on a, pour tout $x \in B$,

(18.2.1.2) $$\mathrm{Tr}_{B'/A'}(g(x)) = f(\mathrm{Tr}_{B/A}(x)).$$

(18.2.2) Considérons maintenant un *espace annelé* $(X, \mathcal{O}_X)$ et soit $\mathscr{B}$ une $\mathcal{O}_X$-*Algèbre* qui, en tant que $\mathcal{O}_X$-*Module*, est *localement libre de rang fini*; alors, pour tout ouvert $U \subset X$ tel que $\mathscr{B}|U$ soit (en tant que $\mathcal{O}_U$-Module) isomorphe à $\mathcal{O}_U^n$ (pour un n dépendant de U), $\Gamma(U, \mathscr{B})$ est une $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-algèbre qui, en tant que $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-module, est libre de rang fini et définit donc une forme $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$-linéaire $\mathrm{Tr}_{\Gamma(U, \mathscr{B})/\Gamma(U, \mathcal{O}_X)}$, que nous noterons aussi $\mathrm{Tr}_{\mathscr{B}/\mathcal{O}_X, U}$; on en déduit une application linéaire associée

$$\mathrm{astr}_{\mathscr{B}/\mathcal{O}_X, U} : \Gamma(U, \mathscr{B}) \to \Gamma(U, \mathscr{B})\check{} = \Gamma(U, \check{\mathscr{B}}).$$

En outre, il résulte de (18.2.1.2) que ces applications linéaires sont compatibles avec les opérations de restriction de U à un ouvert plus petit, et définissent donc, d'une part un *homomorphisme de* $\mathcal{O}_X$-*Modules*, appelé encore *homomorphisme trace :*

(18.2.2.1) $$\mathrm{Tr}_{\mathscr{B}/\mathcal{O}_X} : \mathscr{B} \to \mathcal{O}_X$$

et d'autre part un *homomorphisme de* $\mathcal{O}_X$-*Modules*

(18.2.2.2) $$\mathrm{astr}_{\mathscr{B}/\mathcal{O}_X} : \mathscr{B} \to \check{\mathscr{B}}$$

dit *associé à la trace*, et égal à son transposé. Il résulte aussi de (18.2.1.2) que pour tout $x \in X$, on a

(18.2.2.3) $$(\mathrm{Tr}_{\mathscr{B}/\mathcal{O}_X})_x = \mathrm{Tr}_{\mathscr{B}_x/\mathcal{O}_{X,x}}$$

(18.2.2.4) $$(\mathrm{astr}_{\mathscr{B}/\mathcal{O}_X})_x = \mathrm{astr}_{\mathscr{B}_x/\mathcal{O}_{X,x}}.$$

Enfin, sous les conditions de (18.2.1), si l'on pose $X = \mathrm{Spec}(A)$ et si $\mathscr{B} = \widetilde{B}$ est la $\mathcal{O}_X$-Algèbre correspondant à B, la forme $\mathrm{Tr}_{\mathscr{B}/\mathcal{O}_X}$ (resp. l'homomorphisme $\mathrm{astr}_{\mathscr{B}/\mathcal{O}_X}$) correspond à la forme $\mathrm{Tr}_{B/A}$ (resp. à l'homomorphisme de A-modules $\mathrm{astr}_{B/A}$), comme il résulte encore de (18.2.1.2).

Proposition **(18.2.3).** — *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme* fini *de préschémas et soit* $\mathscr{B} = f_*(\mathcal{O}_X)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) f *est étale.*

a') f *est un morphisme plat de présentation finie, et pour tout* $x \in X$, *si l'on pose* $y = f(x)$, $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x}$ *est un corps, extension finie séparable de* $\boldsymbol{k}(y)$.

b) $\mathscr{B}$ *est un* $\mathcal{O}_Y$*-Module localement libre et pour tout* $y \in Y$, $\mathscr{B}_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \boldsymbol{k}(y)$ *est une* $\boldsymbol{k}(y)$*-algèbre finie séparable* (donc le composé direct d'un nombre fini de corps, extensions finies séparables de $\boldsymbol{k}(y)$).

c) $\mathscr{B}$ *est un* $\mathcal{O}_Y$*-Module localement libre, et l'homomorphisme* $\mathrm{astr}_{\mathscr{B}/\mathcal{O}_Y} : \mathscr{B} \to \check{\mathscr{B}}$ (18.2.2) *est bijectif.*

Compte tenu de ce que f est quasi-compact, l'équivalence de *a)* et *a')* a déjà été démontrée (17.6.2). Pour prouver le reste de la proposition, on peut se borner au cas où $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(B)$ sont affines, B étant une A-algèbre finie et $\mathscr{B} = \widetilde{B}$. Dire que f est un morphisme de présentation finie équivaut alors à dire que B est un A-*module de présentation finie* (1.4.7). Si en outre f est plat, donc B un A-module plat, on sait (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, nº 2, cor. 2 du th. 1) que B est un A-module *projectif*, donc $\mathscr{B}$ un $\mathcal{O}_Y$-Module localement libre (*loc. cit.*, nº 2, th. 1), et la réciproque est immédiate. D'autre part $f^{-1}(y)$ n'est autre que le spectre de la $\boldsymbol{k}(y)$-algèbre $\mathscr{B}(y) = \mathscr{B}_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \boldsymbol{k}(y)$, ce qui achève de prouver l'équivalence de *a')* et *b)*. Pour voir que *b)* est équivalente à *c)*, notons que la seconde assertion de *b)* équivaut au fait que l'homomorphisme $\mathrm{astr}_{\mathscr{B}(y)/\boldsymbol{k}(y)} : \mathscr{B}(y) \to \mathscr{B}(y)^{\vee}$ est bijectif; comme $\mathscr{B}(y) = \mathscr{B}_y/\mathfrak{m}_y\mathscr{B}_y$ et $\mathscr{B}(y)^{\vee} = \check{\mathscr{B}}_y/\mathfrak{m}_y\check{\mathscr{B}}_y$ et que $\mathscr{B}_y$ et $\check{\mathscr{B}}_y$ sont des $\mathcal{O}_{Y,y}$-modules libres, il résulte de (18.2.2.4) et de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, nº 3, cor. de la prop. 6, que l'homomorphisme $\mathrm{astr}_{\mathscr{B}_y/\mathcal{O}_{Y,y}} : \mathscr{B}_y \to \check{\mathscr{B}}_y$ est lui aussi bijectif; la réciproque étant évidente, cela achève la démonstration.

Lorsqu'une $\mathcal{O}_X$-Algèbre $\mathscr{B}$ vérifie les conditions équivalentes *b)* et *c)* de (18.2.3), on dit que $\mathscr{B}$ est une $\mathcal{O}_X$-Algèbre *finie et étale*. Lorsque $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine et que l'on a donc $\mathscr{B} = \widetilde{B}$, où B est une A-algèbre, il revient au même, en vertu de (18.2.3), de dire que $\mathscr{B}$ est une $\mathcal{O}_X$-Algèbre finie et étale, ou que B est une A-algèbre finie et étale (au sens de (17.3.2)).

Corollaire **(18.2.4).** — *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme fini et de présentation finie, et posons* $\mathscr{B} = f_*(\mathcal{O}_X)$. *Soit* y *un point de* Y. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Il existe un voisinage ouvert* U *de* y *dans* Y *tel que la restriction* $f^{-1}(U) \to U$ *de* f *soit un morphisme étale.*

b) $\mathscr{B}_y$ *est un* $\mathcal{O}_{Y,y}$*-module libre de type fini et* $\mathscr{B}_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \boldsymbol{k}(y)$ *est une* $\boldsymbol{k}(y)$*-algèbre séparable.*

Il est clair que *a)* entraîne *b)* en vertu de (18.2.3). D'autre part, $\mathscr{B}$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module de présentation finie (1.6.3 et 1.4.7), donc, si $\mathscr{B}_y$ est un $\mathcal{O}_{Y,y}$-module libre, il existe un voisinage ouvert U de y dans Y tel que $\mathscr{B}|U$ soit un $\mathcal{O}_U$-Module localement libre ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.7); en outre, par hypothèse, l'homomorphisme $\mathrm{astr}_{\mathscr{B}_y/\mathcal{O}_{Y,y}} : \mathscr{B}_y \to \check{\mathscr{B}}_y$ étant bijectif, il résulte aussi de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.7) que l'on peut supposer U choisi de sorte que l'homomorphisme $\mathrm{astr}_{\mathscr{B}|U, \mathcal{O}_U}$ soit bijectif. Le fait que *b)* implique *a)* résulte alors de (18.2.3).

Corollaire **(18.2.5)**. — *Soient* Y *un préschéma quasi-compact ou localement noethérien,* $f: X \to Y$ *un morphisme fini et de présentation finie; posons* $\mathscr{B} = f_*(\mathcal{O}_X)$. *Supposons que pour tout point fermé* y *de* Y, $\mathscr{B}_y$ *soit un* $\mathcal{O}_{Y,y}$*-module libre et* $\mathscr{B}_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \boldsymbol{k}(y)$ *une* $\boldsymbol{k}(y)$*-algèbre séparable. Alors* f *est étale.*

En effet, il résulte de (18.2.4) que tout point fermé y de Y possède un voisinage ouvert U tel que la restriction $f^{-1}(U) \to U$ de f soit étale; la conclusion résulte de ce que dans les deux cas considérés, toute partie fermée non vide de Y contient un point fermé (5.1.11 et $\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.1.3).

Corollaire **(18.2.6)**. — *Si* $f: X \to Y$ *est un morphisme fini et étale, et si l'on pose* $\mathscr{B} = f_*(\mathcal{O}_X)$, *alors le* $\mathcal{O}_Y$*-homomorphisme* $\mathrm{Tr}_{\mathscr{B}/\mathcal{O}_Y}: \mathscr{B} \to \mathcal{O}_Y$ (18.2.2) (aussi noté Tr_f) *est surjectif.*

La question étant locale, on peut, en vertu de (18.2.3) supposer que $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$ avec $\mathscr{B} = \widetilde{B}$, B étant un A-module libre; comme en vertu de (18.2.3) la forme bilinéaire (18.2.1.1) est non dégénérée, cela entraîne en particulier que la forme linéaire $\mathrm{Tr}_{B/A}$ est surjective.

Remarques **(18.2.7)**. — (i) Lorsque $f: X \to Y$ est un morphisme fini tel que $f_*(\mathcal{O}_X)$ soit un $\mathcal{O}_Y$-Module localement libre (resp. localement libre de rang n), on dit encore que f est un morphisme *fini localement libre* (resp. *localement libre de rang* n). Cette condition, en vertu de (18.2.3), est vérifiée si f est un morphisme fini étale, mais n'implique pas à elle seule que f soit étale, comme le montre l'exemple où $X = \mathrm{Spec}(K)$ et $Y = \mathrm{Spec}(k)$ sont des spectres de corps, K étant une extension finie non séparable de k. Lorsque $f: X \to Y$ est un morphisme fini étale, on dit encore que X est un *revêtement étale* de Y. On notera que dans ce cas, f est universellement ouvert et universellement fermé, et en particulier $f(X)$ est une partie à la fois ouverte et fermée de Y.

On dit qu'un revêtement étale X de Y est *trivial* si X est *somme* d'un nombre fini de préschémas *isomorphes à* Y. On dit qu'un revêtement étale X de Y est *localement trivial* si le morphisme $f: X \to Y$ est tel que tout point $y \in Y$ ait un voisinage ouvert U pour lequel le revêtement $f^{-1}(U)$ de U soit trivial.

(ii) Soit $f: X \to Y$ un morphisme fini, localement libre de rang n; posons $\mathscr{B} = f_*(\mathcal{O}_X)$ et soit $u = \mathrm{astr}_{\mathscr{B}/\mathcal{O}_Y}: \mathscr{B} \to \check{\mathscr{B}}$; on en déduit un homomorphisme puissance extérieure *n-ème* $\overset{n}{\wedge} u : \overset{n}{\wedge}\mathscr{B} \to \overset{n}{\wedge}\check{\mathscr{B}} = (\overset{n}{\wedge}\mathscr{B})\check{}$ de $\mathcal{O}_Y$-Modules *inversibles*, et par suite ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.4.2) un élément

(18.2.7.1) $$d_{X/Y} \in \Gamma(Y, (\overset{n}{\wedge}\check{\mathscr{B}}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\overset{n}{\wedge}\check{\mathscr{B}}))$$

que l'on appelle le *discriminant de* X *sur* Y. D'ailleurs, comme $(\overset{n}{\wedge}\check{\mathscr{B}}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\overset{n}{\wedge}\check{\mathscr{B}})$ est le dual de $(\overset{n}{\wedge}\mathscr{B}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\overset{n}{\wedge}\mathscr{B})$, $d_{X/Y}$ peut aussi être identifié à un homomorphisme

(18.2.7.2) $$(\overset{n}{\wedge}\mathscr{B}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\overset{n}{\wedge}\mathscr{B}) \to \mathcal{O}_Y$$

et on note $\mathscr{D}_{X/Y}$ l'Idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathcal{O}_Y$, *image* de l'homomorphisme (18.2.7.2), encore appelé *Idéal discriminant* de X sur Y.

Cela étant, pour que l'homomorphisme u soit bijectif, il faut et il suffit que $\overset{n}{\wedge} u$ soit bijectif, ou encore que la section $d_{X/Y}$ ait un germe *inversible* en tout point $y \in Y$, ce qui s'écrit aussi $d_{X/Y}(y) \neq 0$ pour tout y ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.5.2). Il revient aussi au même de dire que l'Idéal discriminant $\mathscr{D}_{X/Y}$ est *égal à* $\mathcal{O}_Y$.

La terminologie de « revêtement » introduite dans (18.2.7, (i)), se justifie par la proposition suivante :

Proposition (**18.2.8**). — *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme étale, séparé et de type fini et pour tout* $y \in Y$, *soit* $n(y)$ *le nombre géométrique des points de* $f^{-1}(y)$. *Alors la fonction* $y \rightsquigarrow n(y)$ *est semi-continue inférieurement dans* Y. *Pour qu'elle soit continue en un point* y (donc *constante* dans un voisinage de y), *il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert* U *de* y *tel que la restriction* $f^{-1}(U) \to U$ *de* f *soit un morphisme fini (étale).*

Comme f est quasi-fini (17.6.1) et localement de présentation finie, il revient au même de dire que f est fini ou que f est propre (8.11.1) : en outre, chaque fibre $f^{-1}(y)$ est géométriquement réduite sur $\boldsymbol{k}(y)$. Les conclusions résultent donc de (15.5.9, (i) et (ii)) et de ce que f est plat.

Corollaire (**18.2.9**). — *Soient* Y *un préschéma connexe,* $f: X \to Y$ *un morphisme étale, séparé et de type fini. Pour que* f *soit fini* (autrement dit, que X soit un *revêtement étale* de Y), *il faut et il suffit que toutes les fibres de* f *aient même nombre géométrique de points.*

Remarques (**18.2.10**). — (i) L'exemple de la « droite affine avec un point dédoublé » (**I**, 5.5.11) montre qu'un morphisme étale de type fini de préschémas noethériens peut être *non séparé*; pour cet exemple, la première assertion de (18.2.8) n'est plus exacte.

(ii) Pour qu'un morphisme séparé, de type fini et étale $f: X \to Y$ fasse de X un revêtement *localement trivial*, il faut et il suffit que pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert U de $y = f(x)$ et une U-section g de $f^{-1}(U)$ telle que $g(y) = x$. En effet, la condition est évidemment nécessaire; le fait qu'elle est suffisante résulte de ce que toute fibre $f^{-1}(y)$ est finie ((17.6.1) et (**I**, 6.2.2)), de la caractérisation des sections d'un Y-schéma étale (17.9.3) et de la prop. (18.2.8).

18.3. Algèbres finies et étales.

Proposition (**18.3.1**). — *Soient* A *un anneau,* B *une* A-*algèbre de présentation finie.*

(i) *Pour que* B *soit une* A-*algèbre non ramifiée, il faut et il suffit que* B *soit un* A-*module de présentation finie et que* B *soit un* $(B \otimes_A B)$-*module projectif.*

(ii) *Supposons de plus que* B *soit une* A-*algèbre finie. Pour que* B *soit une* A-*algèbre étale, il faut et il suffit que* B *soit un* A-*module projectif et un* $(B \otimes_A B)$-*module projectif.*

Bien entendu, la structure de $(B \otimes_A B)$-module sur B est celle provenant de la structure de $(B \otimes_A B)$-algèbre sur B correspondant au A-homomorphisme canonique d'anneaux $B \otimes_A B \to B$, qui est surjectif et de noyau $\mathfrak{J}_{B/A}$ ($\mathbf{0}$, 20.4.1).

(i) Dire que le morphisme $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ est localement de présentation finie équivaut à dire que B est une A-algèbre de présentation finie (1.4.6). Dire que B est une A-algèbre non ramifiée signifie alors (17.4.2) que $\mathrm{Spec}((B\otimes_A B)/\mathfrak{J}_{B/A})$ est un sous-schéma induit sur une partie *ouverte et fermée* de $\mathrm{Spec}(B\otimes_A B)$ et on sait que pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $\mathfrak{J}_{B/A}$ soit un idéal *facteur direct* de $B\otimes_A B$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, n° 3, prop. 15); mais il revient au même de dire que le $(B\otimes_A B)$-module quotient $(B\otimes_A B)/\mathfrak{J}_{B/A}$ est projectif (Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3e éd., § 2, n° 2, prop. 4).

(ii) Si on se rappelle qu'un A-module plat de présentation finie est projectif et réciproquement (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 2, cor. 2 du th. 1), l'assertion de (ii) résulte de celle de (i) et de (17.6.2).

Proposition **(18.3.2)**. — *Soient* A *un anneau,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A *tel que, pour la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique,* A *soit séparé et complet; on pose* $A_0 = A/\mathfrak{J}$. *Alors le foncteur*

$$B \rightsquigarrow B\otimes_A A_0$$

est une équivalence de la catégorie des A*-algèbres finies et étales, dans la catégorie des* A_0*-algèbres finies et étales.*

Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

Lemme **(18.3.2.1)**. — *Soient* A *un anneau,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A *tel que, pour la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique,* A *soit séparé et complet.*

(i) *Tout* A*-module projectif de type fini* M *est séparé et complet pour la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique, donc limite projective des* $(A/\mathfrak{J}^{n+1})$*-modules projectifs* $M/\mathfrak{J}^{n+1}M$.

(ii) *Inversement, posons* $A_n = A/\mathfrak{J}^{n+1}$, *et soit* (M_n) *un système projectif de* A_n*-modules, tel que, pour tout* n, *l'homomorphisme* $M_{n+1}\otimes_{A_{n+1}} A_n \rightarrow M_n$ *déduit du di-homomorphisme de transition* $M_{n+1}\rightarrow M_n$ *soit bijectif. Supposons en outre les* M_n *projectifs et* M_0 *de type fini. Alors* $M = \varprojlim M_n$ *est un* A*-module projectif de type fini tel que l'homomorphisme canonique* $M\otimes_A A_0 \rightarrow M_0$ *soit bijectif.*

(i) Il existe un A-module libre de type fini L tel que M soit isomorphe à un facteur direct de L; comme L est séparé pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique, il en est de même de tout sous-module N de L puisque $\mathfrak{J}^{n+1}N \subset \mathfrak{J}^{n+1}L$; en particulier M est séparé pour cette topologie, et comme l'homomorphisme surjectif $f: L\rightarrow M$ est continu pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique, son noyau N est fermé pour la topologie induite par celle de L; puisque L est complet et f un morphisme strict, on en conclut que M est complet (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. IX, 2e éd., § 3, n° 1, prop. 4).

(ii) Il résulte du lemme de Nakayama que si M_0 est engendré par une famille finie (x_{i0}) de r éléments et si pour tout n, x_{in} est un élément de M_n dont $x_{i,n-1}$ est l'image dans M_{n-1}, alors (x_{in}) $(1\leqslant i\leqslant r)$ est un système de générateurs de M_n (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, cor. 2 de la prop. 4). Cela étant, pour tout n, posons $L_n = A_n^r$; si $(e_{in})_{1\leqslant i\leqslant r}$ est la base canonique de L_n, soit $u_n: L_n\rightarrow M_n$ l'application A-linéaire telle que $u_n(e_{in}) = x_{in}$ pour tout i. Par hypothèse on a une suite exacte *scindée*

$$0 \rightarrow N_n \xrightarrow{v_n} L_n \xrightarrow{u_n} M_n \rightarrow 0$$

et comme $L_n = L_{n+1}/\mathfrak{J}^{n+1}L_{n+1}$ et $M_n = M_{n+1}/\mathfrak{J}^{n+1}M_{n+1}$, les flèches verticales dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N_{n+1} & \xrightarrow{v_{n+1}} & L_{n+1} & \xrightarrow{u_{n+1}} & M_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N_n & \xrightarrow[v_n]{} & L_n & \xrightarrow[u_n]{} & M_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

sont toutes trois *surjectives*. Or on a $M = \varprojlim M_n$ et $L = A^r = \varprojlim L_n$; si l'on pose $N = \varprojlim N_n$, $u = \varprojlim u_n$, $v = \varprojlim v_n$, on a, en vertu de ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 13.2.2), la suite exacte

(18.3.2.2) $$0 \to N \xrightarrow{v} L \xrightarrow{u} M \to 0.$$

En outre, comme pour tout n, v_n est inversible à gauche et que M_n est un A_n-module projectif, il résulte de (**0**, 19.1.8) que la suite exacte (18.3.2.2) est scindée, ce qui prouve le lemme.

Cela étant, montrons d'abord que le foncteur de l'énoncé de (18.3.2) est *pleinement fidèle*. Posons, comme dans le lemme, $A_n = A/\mathfrak{J}^{n+1}$; soient B, C deux A-algèbres finies et étales, et posons, pour tout n, $B_n = B \otimes_A A_n$, $C_n = C \otimes_A A_n$; en vertu de (18.3.1) et (18.3.2.1), B et C sont séparés et complets pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique, et l'on a $B = \varprojlim B_n$, $C = \varprojlim C_n$; en outre tout homomorphisme de A-algèbres $u : B \to C$ est continu pour les topologies $\mathfrak{J}$-préadiques, et donne donc un système projectif d'homomorphismes de A_n-algèbres $u_n = u \otimes 1 : B_n \to C_n$, dont il est la limite projective; la réciproque étant évidente, on a donc une bijection canonique

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-alg.}}(B, C) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathrm{Hom}_{A_n\text{-alg.}}(B_n, C_n).$$

Mais comme B et C sont des A-algèbres *étales*, il résulte aussitôt de (18.1.2) que l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_{A_{n+1}\text{-alg.}}(B_{n+1}, C_{n+1}) \to \mathrm{Hom}_{A_n\text{-alg.}}(B_n, C_n)$$

est *bijective* pour $n \geqslant 0$, ce qui achève de prouver que l'application canonique $\mathrm{Hom}_{A\text{-alg.}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{A_0\text{-alg.}}(B_0, C_0)$ est bijective.

Pour achever de démontrer (18.3.2), il suffit de voir que pour toute A_0-algèbre finie et étale B_0, il existe une A-algèbre finie et étale B et un A_0-isomorphisme $B_0 \xrightarrow{\sim} B \otimes_A A_0$. Or, il résulte de (18.1.2) qu'il y a un système projectif (B_n) tel que B_n soit une A_n-algèbre étale et que les homomorphismes $B_{n+1} \otimes_{A_{n+1}} A_n \to B_n$ soient bijectifs. Il résulte de (18.3.1) et (18.3.2.1) que la A-algèbre $B = \varprojlim B_n$ est un A-module projectif de type fini et que B_0 est isomorphe à $B \otimes_A A_0$. Pour prouver que B est une A-algèbre étale, il suffit, en vertu de (18.2.5), de montrer que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $B_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}B_{\mathfrak{m}}$ est une $(A/\mathfrak{m})$-algèbre séparable. Or, puisque $\mathfrak{J}$ est contenu dans le radical de A ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.1.10), on a $\mathfrak{J}\subset\mathfrak{m}$ et si $\mathfrak{m}_0=\mathfrak{m}/\mathfrak{J}$, on a $A_0/\mathfrak{m}_0=A/\mathfrak{m}$ et $B_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}B_\mathfrak{m}=(B_0)_{\mathfrak{m}_0}/\mathfrak{m}_0(B_0)_{\mathfrak{m}_0}$; la conclusion résulte donc du fait que B_0 est une A_0-algèbre étale (18.2.5).

Exemple **(18.3.3)**. — La prop. (18.3.2) s'applique en particulier lorsque A est un *anneau local* séparé et complet, $\mathfrak{J}$ étant l'idéal maximal de A, de sorte que A_0 est un *corps* et la catégorie des A_0-algèbres finies et étales identique à celle des A_0-algèbres finies et séparables, donc isomorphes à des composées directes de corps, extensions séparables et finies de A_0. En particulier, si le corps A_0 est *séparablement clos*, ces extensions sont toutes identiques à A_0, et par suite tout revêtement étale de Spec(A) est *trivial* (18.2.7) en vertu de (18.3.2).

Théorème **(18.3.4)**. — *Soient* A *un anneau noethérien,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A *tel que* A *soit séparé et complet pour la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique,* $A_0=A/\mathfrak{J}$. *Posons* $S=\mathrm{Spec}(A)$, $S_0=\mathrm{Spec}(A_0)$. *Soit* X *un* S*-schéma propre sur* S, *et posons* $X_0=X\times_S S_0$. *Alors le foncteur*

$$Z \rightsquigarrow Z\times_X X_0$$

de la catégorie des X*-schémas finis et étales sur* X *dans la catégorie des* X_0*-schémas finis et étales sur* X_0, *est une équivalence de catégories.*

Montrons d'abord que ce foncteur est *pleinement fidèle*. Soient donc Z′ et Z″ deux X-schémas finis et étales sur X. Posons $S_n=\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J}^{n+1})$, $X_n=X\times_S S_n$, $Z'_n=Z'\times_S S_n$, $Z''_n=Z''\times_S S_n$ pour tout $n\geqslant 0$. Il résulte de (**III**, 5.4.1) que l'on a une bijection canonique $\mathrm{Hom}_X(Z',Z'')\xrightarrow{\sim}\varprojlim \mathrm{Hom}_{X_n}(Z'_n,Z''_n)$. Or, en vertu de (18.1.2), l'application canonique $\mathrm{Hom}_{X_{n+1}}(Z'_{n+1},Z''_{n+1})\rightarrow\mathrm{Hom}_{X_n}(Z'_n,Z''_n)$ est bijective, ce qui achève de prouver notre assertion.

Il reste à prouver que si $\mathscr{B}_0$ est une $\mathscr{O}_{X_0}$-Algèbre finie et étale, il existe une $\mathscr{O}_X$-Algèbre finie et étale $\mathscr{B}$ et un isomorphisme $\mathscr{B}_0\xrightarrow{\sim}\mathscr{B}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{O}_{X_0}$. Il résulte de (18.1.2) qu'il y a un système projectif $(\mathscr{B}_n)$, où $\mathscr{B}_n$ est une $\mathscr{O}_{X_n}$-Algèbre finie et étale, et le deuxième théorème de comparaison (**III**, 5.1.4) prouve l'existence d'un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent $\mathscr{B}$ et d'un système projectif d'isomorphismes $\mathscr{B}_n\xrightarrow{\sim}\mathscr{B}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{O}_{X_n}$. La donnée d'une structure d'Algèbre sur un Module $\mathscr{F}$ étant équivalente à celle d'un homomorphisme $\mathscr{F}\otimes\mathscr{F}\rightarrow\mathscr{F}$ rendant commutatifs des diagrammes où n'interviennent que des puissances tensorielles de $\mathscr{F}$, il résulte de (**III**, 5.1.3), (**I**, 10.11.4) et (**I**, 10.11.7) que $\mathscr{B}$ est muni de façon naturelle d'une structure de $\mathscr{O}_X$-Algèbre pour laquelle l'isomorphisme $\mathscr{B}_0\xrightarrow{\sim}\mathscr{B}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{O}_{X_0}$ est un isomorphisme d'Algèbres. De plus, $\mathscr{B}$ est un $\mathscr{O}_X$-Module *localement libre*; cela résulte encore de (**III**, 5.1.3), (**I**, 10.11.4), (**I**, 10.11.7) et du fait que, dans la catégorie des $\mathscr{O}_X$-Modules cohérents, les $\mathscr{O}_X$-Modules localement libres $\mathscr{F}$ peuvent être définis comme ceux pour lesquels le foncteur $\mathscr{G}\rightsquigarrow\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G})$ est *exact*. Enfin, pour voir que $\mathscr{B}$ est une $\mathscr{O}_X$-Algèbre étale, il suffit (18.2.5) de montrer que pour tout point *fermé* $x\in X$, $\mathscr{B}_x\otimes_{\mathscr{O}_{X,x}}\boldsymbol{k}(x)$ est une $\boldsymbol{k}(x)$-algèbre séparable. Mais comme le morphisme structural $f:X\rightarrow S$ est *propre*, $f(x)$ est un point fermé de S, donc appartient à S_0, puisque $\mathfrak{J}$ est contenu dans le radical de A ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 7.1.10); la conclusion résulte donc de ce que $X_0=f^{-1}(S_0)$ et de ce que $\mathscr{B}_0$ est une $\mathscr{O}_{X_0}$-algèbre finie et étale.

18.4. Structure locale des morphismes non ramifiés et des morphismes étales.

Lemme (**18.4.1**). — *Soient* A *un anneau,* B *une* A*-algèbre finie monogène, u un générateur de la* A*-algèbre* B, $F \in A[T]$ *un polynôme tel que* $F(u)=0$, F′ *le polynôme dérivé ; posons* $u'=F'(u)$. *Alors l'idéal de* B, *annulateur de* $\Omega^1_{B/A}$, *contient* $u'B$; *il est égal à* $u'B$ *si l'idéal* $\mathfrak{J}$ *de* A[T] *formé des polynômes* G *tels que* $G(u)=0$, *est engendré par* F, *autrement dit si l'homomorphisme surjectif canonique* $\varphi : A[T]/F.A[T] \to B$ *transformant l'image de* T *en u, est bijectif.*

Posons $C=A[T]$, de sorte que $B=C/\mathfrak{J}$. On a la suite exacte (**0**, 20.5.12.1)

$$\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \to \Omega^1_{C/A}\otimes_C B \to \Omega^1_{B/A} \to 0$$

et $\Omega^1_{B/A}$ s'identifie donc au quotient $B/\mathfrak{J}'$, $\mathfrak{J}'$ étant l'idéal engendré par les éléments $G'(u)$, où G′ parcourt un système de générateurs de l'idéal $\mathfrak{J}$ (**0**, 20.5.13); d'où aussitôt le lemme.

Proposition (**18.4.2**). — *Les notations étant celles de* (18.4.1), *soit* $\mathfrak{q}$ *un idéal premier de* B. *Alors :*

(i) *Si* $\mathfrak{q}$ *ne contient pas* u', $B_\mathfrak{q}$ *est une* $A_\mathfrak{p}$*-algèbre formellement non ramifiée* ($\mathfrak{p}$ *étant l'image réciproque de* $\mathfrak{q}$ *dans* A) ; *en d'autres termes,* $\mathrm{Spec}(B_{u'})$ *est formellement non ramifié sur* Spec(A).

(ii) *Supposons de plus que* F *soit unitaire et engendre* $\mathfrak{J}$. *Alors, pour que* Spec(B) *soit étale sur* Spec(A) *au point* $\mathfrak{q}$, *il faut et il suffit que* $u'\notin\mathfrak{q}$.

L'hypothèse que $u'\notin\mathfrak{q}$ entraîne que $\Omega^1_{B_\mathfrak{q}/A_\mathfrak{p}}=0$ (**0**, 20.5.9), donc (i) résulte de (17.2.1). En outre, sous les hypothèses de (ii), B est un A-module libre en vertu de la division euclidienne; comme l'annulateur $\mathfrak{J}'$ de $\Omega^1_{B/A}$ est alors égal à $u'B$ en vertu de (18.4.1) et que $\Omega^1_{B/A}$ est un B-module de présentation finie (16.4.22), l'annulateur de $\Omega^1_{B_\mathfrak{q}/A_\mathfrak{p}}$ est égal à $u'B_\mathfrak{q}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 4, formule (9)), et (ii) résulte donc de (i) et de l'implication *c)* ⇒ *a)* dans (17.6.1).

Corollaire (**18.4.3**). — *Les notations étant celles de* (18.4.2), *supposons que* F *soit unitaire et engendre* $\mathfrak{J}$. *Alors, pour que* B *soit une* A*-algèbre étale, il faut et il suffit que u′ soit inversible dans* B (ou, ce qui revient au même, que l'idéal de A[T] engendré par F et F′ soit égal à A[T]).

Compte tenu de (18.4.2), (ii)), dire que Spec(B) est étale sur Spec(A) signifie en effet que u' n'appartient à aucun idéal premier de B, i.e. qu'il est inversible dans B.

On dit qu'un polynôme unitaire $F\in A[T]$ tel que l'idéal de A[T] engendré par F et F′ soit égal à A[T] lui-même, est *séparable*; il est immédiat que cette définition coïncide avec la définition usuelle (Bourbaki, *Alg.*, chap. V, § 7, n° 6) lorsque A est un corps.

Lemme (**18.4.4**). — *Soient* A *un anneau local,* B *une* A*-algèbre finie monogène, u un générateur de la* A*-algèbre* B. *Soient* $\mathfrak{n}_i$ $(1\leqslant i\leqslant r)$ *des idéaux maximaux de* B *tels que* Spec(B) *soit formellement non ramifié sur* Spec(A) *aux points* $\mathfrak{n}_i$. *Alors il existe un polynôme unitaire* $F\in A[T]$ *tel que* $F(u)=0$ *et* $F'(u)\notin\mathfrak{n}_i$ *pour tout indice* i $(1\leqslant i\leqslant r)$. *En outre, si k est le corps* *résiduel de* A, $f \in k[T]$ *le polynôme minimal de l'image de u dans* $B \otimes_A k$, *il existe un* $F \in A[T]$ *dont f est l'image canonique et tel que* $F(u) = 0$; *un tel polynôme* F *vérifie les conditions* $F'(u) \notin \mathfrak{n}^i$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant r$.

L'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A est l'image réciproque de chacun des $\mathfrak{n}_i$ (**II**, 6.1.10); soit $L = B \otimes_A k$, qui est une k-algèbre finie. Soit ξ l'image de u dans L, et soit n le rang de L sur k; le polynôme minimal $f \in k[T]$ de ξ sur k est donc de degré n, et L est isomorphe à $k[T]/f.k[T]$. Si $\mathfrak{n}'_i = \mathfrak{n}_i/\mathfrak{m}B$, l'hypothèse entraîne que Spec(L) est étale sur k aux points $\mathfrak{n}'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ en vertu de (17.6.1, *c*)), donc $f'(\xi) \notin \mathfrak{n}'_i$ en vertu de (18.4.2, (ii)). Notons maintenant que $\mathfrak{m}B$ est contenu dans le radical de B; comme $1, \xi, \ldots, \xi^{n-1}$ forment une base de L sur k, il résulte du lemme de Nakayama que $1, u, \ldots, u^{n-1}$ engendrent le A-module B, et par suite il existe un polynôme unitaire $F \in A[T]$ de degré n, tel que $F(u) = 0$; en outre, comme ξ est racine de l'image canonique de F dans $k[T]$, cette image est nécessairement égale à f. Mais alors l'image de $F'(u)$ dans L est $f'(\xi)$, et comme $f'(\xi) \notin \mathfrak{n}'_i$, on a $F'(u) \notin \mathfrak{n}_i$ pour tout i.

Proposition (**18.4.5**). — *Soient* A *un anneau local, k son corps résiduel,* B *une* A-*algèbre finie* (resp. *finie et de présentation finie*). *On suppose en outre, ou bien que le corps k est infini, ou bien que* B *est un anneau local. Soit n le rang de* $L = B \otimes_A k$ *sur k. Pour que* B *soit une* A-*algèbre formellement non ramifiée* (resp. *étale*), *il faut et il suffit qu'il existe un polynôme unitaire séparable* $F \in A[T]$ (18.4.3) *tel que* B *soit isomorphe à un quotient de* $A[T]/F.A[T]$ (resp. *isomorphe à* $A[T]/F.A[T]$). *En outre, on peut supposer que* F *est de degré n* (resp. F *est nécessairement de degré n*).

Les conditions sont suffisantes en vertu de (18.4.2), sans supposer k infini ni B local. Pour voir que les conditions sont nécessaires, notons que si B est une A-algèbre formellement non ramifiée, L est une algèbre finie et séparable sur k, donc composée directe d'un nombre fini d'extensions finies et séparables k_j de k $(1 \leqslant j \leqslant r)$, k_j étant donc engendrée par un élément ξ_j, de polynôme minimal f_j $(1 \leqslant j \leqslant r)$ (Bourbaki, *Alg.*, chap. V, § 11, n° 4, prop. 4). Montrons qu'en vertu des hypothèses faites sur k ou B, il existe un élément ξ de L engendrant la k-algèbre L. C'est immédiat si B est local, puisque alors $r = 1$. Sinon, k étant supposé infini, on peut supposer que les polynômes irréductibles $f_j \in k[T]$ sont tous *distincts* (en remplaçant au besoin chaque ξ_j par $\xi_j + a_j$, pour un élément convenable $a_j \in k$); si l'on pose $f = f_1 f_2 \ldots f_r$, il est clair que L est isomorphe à $k[T]/f.k[T]$ dans les deux cas envisagés, donc est engendrée par un élément ξ de polynôme minimal $f \in k[T]$ de degré n. Si $u \in B$ est un élément d'image ξ dans L, le lemme de Nakayama montre que les éléments $1, u, \ldots, u^{n-1}$ engendrent le A-module B; ceci montre déjà qu'il existe un polynôme unitaire $F \in A[T]$ de degré n tel que $F(u) = 0$, u engendrant la A-algèbre B, qui est par suite isomorphe à une algèbre quotient de $A[T]/F.A[T]$; en outre B est un anneau semi-local et en chacun de ses idéaux maximaux $\mathfrak{n}_i$, on a $F'(u) \notin \mathfrak{n}_i$ d'après (18.4.4), ce qui prouve que $F'(u)$ est inversible dans B, donc que F est un polynôme *séparable*. Enfin, si B est une A-algèbre étale, B étant un A-module plat de présentation finie (1.4.7) est un A-module libre, et $1, u, \ldots, u^{n-1}$ forment une base du A-module B (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, prop. 5), autrement dit la A-algèbre B est isomorphe à $A[T]/F.A[T]$, et pour tout autre polynôme unitaire $G \in A[T]$ tel que B soit isomorphe à $A[T]/G.A[T]$, G est nécessairement de degré n.

Théorème **(18.4.6)** (Chevalley). — (i) *Soient* $f: X \rightarrow Y$ *un morphisme localement de type fini,* x *un point de* X, $y=f(x)$, *et posons* $A=\mathcal{O}_{Y,y}$. *Pour que* $\mathcal{O}_{X,x}$ *soit une* A-*algèbre formellement étale* (resp. *formellement non ramifiée*), *il faut et il suffit qu'il existe un polynôme unitaire* $F \in A[T]$ *et un idéal maximal* $\mathfrak{n}$ *de* $B=A[T]/F.A[T]$ (resp. *d'une algèbre quotient* B *de* $A[T]/F.A[T]$) *tels que* $\mathcal{O}_{X,x}$ *soit* A-*isomorphe à* $B_{\mathfrak{n}}$ *et que, si* u *est l'image de* T *dans* B, *on ait* $F'(u) \notin \mathfrak{n}$.

(ii) *Supposons en outre que* f *soit localement de présentation finie. Alors, pour que* f *soit étale au point* x, *il faut et il suffit de plus que l'on puisse prendre* $B=A[T]/F.A[T]$.

Les conditions sont suffisantes en vertu de (18.4.2). Pour voir qu'elles sont nécessaires, on peut évidemment se borner au cas où X et Y sont affines, et, compte tenu de la remarque (17.4.1.2), au cas où f est formellement non ramifié et quasi-fini. Comme f est affine, il résulte de (8.12.8) qu'il existe une A-algèbre finie C et un idéal maximal $\mathfrak{r}$ de C (nécessairement au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A) tels que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit A-isomorphe à $C_{\mathfrak{r}}$. En outre (17.4.1.2) le corps résiduel $C/\mathfrak{r}=C_{\mathfrak{r}}/\mathfrak{r}C_{\mathfrak{r}}$ est une extension finie séparable de $k=A/\mathfrak{m}$, donc de la forme $k[v]$, où v est *séparable* sur k. Soient $\mathfrak{r}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$ les idéaux maximaux de l'anneau semi-local C *autres que* $\mathfrak{r}$; il existe un élément $u \in C$ appartenant à tous les $\mathfrak{r}_i$ et tel que son image dans $C/\mathfrak{r}$ soit égale à v (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 1, n° 2, prop. 5). Nous allons montrer que la sous-A-algèbre $B=A[u]$ de C et l'idéal (nécessairement maximal puisque C est finie sur B) $\mathfrak{n}=\mathfrak{r} \cap B$ de B répondent à la question.

Pour traiter le cas où $\mathcal{O}_{X,y}$ est une A-algèbre formellement ramifiée, il suffira de prouver que $B_{\mathfrak{n}}$ est *isomorphe à* $C_{\mathfrak{r}}$; en effet, $B_{\mathfrak{n}}$ sera alors formellement non ramifié sur A et l'existence du polynôme $F \in A[T]$ ayant les propriétés de l'énoncé résultera de (18.4.4). Notons maintenant que, puisque f est formellement non ramifié, $C/\mathfrak{r}$ est isomorphe à la A-algèbre $C_{\mathfrak{r}}/\mathfrak{m}C_{\mathfrak{r}}$ (17.4.1.2). On est ainsi ramené à prouver le lemme suivant :

Lemme **(18.4.6.1)**. — *Soient* A *un anneau local,* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal,* C *une* A-*algèbre finie,* $\mathfrak{r}$ *un idéal maximal de* C. *Soit* u *un élément de* C *appartenant à tous les idéaux maximaux de* C *distincts de* $\mathfrak{r}$, *n'appartenant pas à* $\mathfrak{r}$, *et tel que* $C_{\mathfrak{r}}/\mathfrak{m}C_{\mathfrak{r}}$ *soit une algèbre monogène sur* $k=A/\mathfrak{m}$, *engendrée par l'image de* u *dans* $C_{\mathfrak{r}}/\mathfrak{m}C_{\mathfrak{r}}$. *Posons* $B=A[u]$, $\mathfrak{n}=\mathfrak{r} \cap B$. *Alors l'homomorphisme canonique* $B_{\mathfrak{n}} \rightarrow C_{\mathfrak{r}}$ *est un isomorphisme.*

Posons $R=B-\mathfrak{n}$, $S=C-\mathfrak{r}$, de sorte que $B_{\mathfrak{n}}=R^{-1}B$ et $C_{\mathfrak{r}}=S^{-1}C$; l'homomorphisme canonique $B_{\mathfrak{r}} \rightarrow C_{\mathfrak{r}}$ peut s'écrire comme le composé

$$R^{-1}B \xrightarrow{g} R^{-1}C \xrightarrow{h} S^{-1}C$$

et il suffit de montrer que chacun de ces deux homomorphismes est bijectif.

Montrons d'abord que $h: R^{-1}C \rightarrow S^{-1}C=C_{\mathfrak{r}}$ est bijectif; il suffit de voir que les images dans $R^{-1}C$ des éléments de S sont inversibles, ou encore que tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de $R^{-1}C$ a une image réciproque dans C ne rencontrant pas S, donc nécessairement égale à $\mathfrak{r}$. Or, comme $R^{-1}C$ est une $(R^{-1}B)$-algèbre finie, l'image réciproque de $\mathfrak{p}$ dans

$R^{-1}B = B_{\mathfrak{n}}$ est l'unique idéal maximal $\mathfrak{n}B_{\mathfrak{n}}$ de cet anneau, donc l'image réciproque de $\mathfrak{p}$ dans B est égale à $\mathfrak{n}$. Mais d'autre part, si $\mathfrak{q}$ est l'image réciproque de $\mathfrak{p}$ dans C, on a $\mathfrak{q} \cap B = \mathfrak{n}$, et comme $\mathfrak{n}$ est maximal dans B et C une B-algèbre finie, $\mathfrak{q}$ est nécessairement un des idéaux maximaux de C; en outre, on a $u \notin \mathfrak{q}$ puisque $u \notin \mathfrak{r}$ et que $u \in B$, donc par hypothèse on a nécessairement $\mathfrak{q} = \mathfrak{r}$.

D'autre part, comme $B \subset C$, l'homomorphisme $g : R^{-1}B \rightarrow R^{-1}C$ est injectif ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 1.3.2); pour voir qu'il est surjectif, notons que $R^{-1}C$ est un $(R^{-1}B)$-module de type fini, et d'autre part que $\mathfrak{m}R^{-1}B$ est contenu dans l'idéal maximal de l'anneau local $R^{-1}B$; en vertu du lemme de Nakayama, il suffit de prouver que l'homomorphisme $R^{-1}B/\mathfrak{m}R^{-1}B \rightarrow R^{-1}C/\mathfrak{m}R^{-1}C$ est surjectif. Mais en vertu de la première partie de la démonstration, $R^{-1}C/\mathfrak{m}R^{-1}C$ s'identifie à $C_{\mathfrak{r}}/\mathfrak{m}C_{\mathfrak{r}}$; par hypothèse cette k-algèbre est engendrée par l'image de u, et *a fortiori* elle est égale à l'image de $R^{-1}B/\mathfrak{m}R^{-1}B$.

Considérons en second lieu le cas où f est étale au point x. En remplaçant X par un voisinage de x, on peut supposer que X est un voisinage de $\mathfrak{n}$ dans Spec(B) (1.7.2). Posons $B' = \mathrm{Spec}(A[T]/F.A[T])$ et soit $\mathfrak{n}'$ l'image réciproque de $\mathfrak{n}$ dans B'; comme l'image de $F'(T)$ dans B' n'appartient pas à $\mathfrak{n}'$ par hypothèse, le morphisme $\mathrm{Spec}(B') \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est étale au point $\mathfrak{n}'$ par (18.4.2, (ii)). Comme par hypothèse $\mathrm{Spec}(B) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est étale au point $\mathfrak{n}$, on en conclut (17.3.4) que $\mathrm{Spec}(B) \rightarrow \mathrm{Spec}(B')$ est étale au point $\mathfrak{n}$; mais comme ce morphisme est une immersion, il ne peut être étale en un point que si c'est un isomorphisme local en ce point (17.9.1), donc $B_{\mathfrak{n}}$ et $B'_{\mathfrak{n}'}$ sont isomorphes.

Enfin, supposons que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit une A-algèbre formellement étale; avec les notations précédentes, il résulte de (17.1.5) que $B_{\mathfrak{n}}$ est une $B'_{\mathfrak{n}'}$-algèbre formellement étale; mais puisque l'homomorphisme $B'_{\mathfrak{n}'} \rightarrow B_{\mathfrak{n}}$ est surjectif, cela ne peut avoir lieu que si cet homomorphisme est *bijectif* ($\mathbf{0}$, 19.10.3, (i)). Ceci achève la démonstration de (18.4.6).

Corollaire **(18.4.7).** — *Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, x un point de* X. *Pour que f soit formellement non ramifié au point x, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert* U *de x tel que $f|U$ se factorise en $U \xrightarrow{j} X' \xrightarrow{h} Y$, où h est un morphisme étale et j une immersion fermée.*

On peut évidemment se borner au cas où $Y = \mathrm{Spec}(R)$ est affine et f de type fini. Si $A = \mathcal{O}_{Y,y}$, avec $y = f(x)$, la condition pour que f soit formellement non ramifié au point x équivaut, en vertu de (17.4.1.2), à dire que $\mathcal{O}_{X,x}$ est une A-algèbre formellement non ramifiée. S'il en est ainsi, on peut appliquer (18.4.6, (i)) ; remplaçant au besoin Y par un voisinage affine de y, on peut supposer (avec les notations de (18.4.6)) que le polynôme F est l'image dans A[T] d'un polynôme unitaire $G \in R[T]$. On pose alors $X' = \mathrm{Spec}(R[T]/G.R[T])$; soit x' l'image du point $\mathfrak{n}$ de Spec(B) par le morphisme correspondant à l'homomorphisme composé $R[T]/G.R[T] \rightarrow A[T]/F.A[T] \rightarrow B$. Il résulte de (18.4.2) que le morphisme $h : X' \rightarrow Y$ correspondant à l'homomorphisme canonique $R \rightarrow R[T]/G.R[T]$ est étale au point x, donc, en restreignant au besoin X' et Y à des voisinages ouverts de x' et y respectivement, on peut supposer h étale. D'autre part, en vertu de (**I**, 6.5.1, (ii)) et de (1.7.2), il résulte du fait que l'on a un homomorphisme local $\varphi : \mathcal{O}_{X',x'} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ que cet homomorphisme correspond à un morphisme $j : U \to X'$ d'un voisinage ouvert U de x dans X'; restreignant au besoin U, on peut, en appliquant (**I**, 6.5.1, (i)), supposer que $h \circ j = f|U$, donc j est de type fini (**I**, 6.3.4, (v)); enfin, l'homomorphisme φ est surjectif par (18.4.6, (i)), donc il résulte de (**I**, 6.5.4, (i)) qu'on peut, en restreignant encore U et X', supposer que j est une immersion fermée. Cela prouve donc la nécessité de la condition énoncée; sa suffisance est immédiate (17.1.3, (i) et (ii)).

Corollaire (**18.4.8**). — *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme localement de présentation finie. Pour que* f *soit non ramifié* (resp. *étale*), *il faut et il suffit qu'il existe une famille de morphismes plats* $g_\alpha : Y'_\alpha \to Y$ *et, pour chaque* α, *un ouvert* U_α *dans* $X'_\alpha = X \times_Y Y'_\alpha$, *tels que, si* $g'_\alpha : X'_\alpha \to X$ *et* $f'_\alpha : X'_\alpha \to Y'_\alpha$ *sont les projections canoniques, les* $g'_\alpha(U_\alpha)$ *forment un recouvrement de* X, *et que chacun des morphismes composés* $U_\alpha \to X'_\alpha \xrightarrow{f'_\alpha} Y'_\alpha$ *soit une immersion fermée* (resp. *ouverte*). *On peut de plus alors prendre les* g_α *étales.*

La nécessité de la condition pour les morphismes étales est triviale, en prenant un seul Y'_α égal à X, le morphisme g_α correspondant étant égal à f, et l'ouvert $U \subset X \times_Y X$ étant la diagonale. Lorsque f est non ramifié, la nécessité de la condition résulte de (18.4.7); on prend un recouvrement ouvert (V_α) de X tel que pour chaque α, $f|V_\alpha$ se factorise en $V_\alpha \xrightarrow{j_\alpha} Y'_\alpha \xrightarrow{g_\alpha} Y$, où j_α est une immersion fermée et g_α un morphisme étale. Alors $j_\alpha : V_\alpha \to Y'_\alpha$ se factorise en $V_\alpha \xrightarrow{s_\alpha} X'_\alpha \xrightarrow{f'_\alpha} Y'_\alpha$, où s_α est une V_α-section de X'_α, et comme le morphisme $g'_\alpha : X'_\alpha \to X$ est étale, s_α est une immersion ouverte (17.4.1), et il suffit de prendre $U_\alpha = s_\alpha(V_\alpha)$ pour répondre à la question.

La suffisance des conditions résulte de (17.7.1); on en conclut que f est non ramifié (resp. étale) en chaque point de $g'(U_\alpha)$, donc dans X tout entier puisque les $g'(U_\alpha)$ recouvrent X.

Proposition (**18.4.9**). — *Soient* S *un préschéma,* $f : X \to S$ *un morphisme,* $h : Y \to S$ *un morphisme localement de présentation finie,* $g : X \to Y$ *un* S-*morphisme,* x *un point de* X, $y = g(x)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) h *est étale au point* y *et* g *est plat au point* x.

b) h *est non ramifié au point* y *et* f *est plat au point* x.

Comme $f = h \circ g$, *a)* entraîne que f est plat au point x (2.1.6), et évidemment que h est non ramifié au point y, donc *a)* implique *b)*.

Pour prouver que *b)* entraîne *a)*, on peut d'abord supposer que h est non ramifié (en remplaçant Y par un voisinage de y); puis, en remplaçant S par un voisinage ouvert de $s = h(y) = f(x)$, on peut supposer qu'il existe un morphisme étale $u : S' \to S$, un point y' de $Y' = Y_{(S')}$ au-dessus de y et un voisinage ouvert V de y' dans Y' tel que, si $h' = h_{(S')} : Y' \to S'$, la restriction de h' à V soit une immersion fermée (18.4.8). Si l'on prouve alors que h' est étale au point y', il en résultera que h est étale au point y (17.7.1, (ii)); d'ailleurs, $f' = f_{(S')} : X_{(S')} \to S'$ est plat en tout point x' au-dessus de x. Comme les projections $v : Y' \to Y$, $w : X' \to X$ sont des morphismes étales (donc plats), si l'on prouve que $g' = g_{(S')} : X_{(S')} \to Y_{(S')}$ est plat au point x', il résultera de (2.2.11, (iv)) que g sera plat au point x. On peut donc se borner au cas où h est une *immersion fermée* de présentation finie, f étant supposé plat au point x. Soit $\mathscr{J}$ l'Idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathcal{O}_S$ qui définit le sous-préschéma fermé Y de S. L'hypothèse que f est plat au point x entraîne que l'homomorphisme $\mathcal{O}_{S,s} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est injectif $(\mathbf{0}_I, 6.5.1)$; *a fortiori* l'homomorphisme $\mathcal{O}_{S,s} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$ est injectif, ce qui signifie que $\mathscr{J}_s = 0$, puisque c'est le noyau de l'homomorphisme précédent. Puisque $\mathscr{J}$ est de type fini, il y a un voisinage ouvert U de s dans S tel que $\mathscr{J} | U = 0$ $(\mathbf{0}_I, 5.2.2)$. On peut donc supposer que h est une immersion ouverte, et alors il est clair que g est plat au point x.

Proposition **(18.4.10)**. — *Désignons par* $\mathbf{P}(f, x)$ *une propriété vérifiant les conditions suivantes :*

1° *Pour tout morphisme* $f : X \rightarrow Y$ *et tout isomorphisme local* $h : Y \rightarrow Z$, $\mathbf{P}(f, x)$ *est équivalente à* $\mathbf{P}(h \circ f, x)$ *pour* $x \in X$.

2° *Pour tout morphisme* $f : X \rightarrow Y$, *tout morphisme étale* $g : Y' \rightarrow Y$, *tout point* $x \in X$, *si l'on pose* $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')} : X' \rightarrow Y'$ *et si* $x' \in X'$ *est au-dessus de* x, *les propriétés* $\mathbf{P}(f, x)$ *et* $\mathbf{P}(f', x')$ *sont équivalentes* (« invariance par changement de base étale »).

Soient alors S *un préschéma,* $f : X \rightarrow S$ *et* $h : Y \rightarrow S$ *deux morphismes,* $g : X \rightarrow Y$ *un* S-*morphisme,* x *un point de* X, $y = g(x)$, *et supposons* h *étale au point* y. *Alors les propriétés* $\mathbf{P}(f, x)$ *et* $\mathbf{P}(g, x)$ *sont équivalentes.*

Avec les mêmes notations que dans la démonstration de (18.4.9) et en remplaçant S (resp. Y) par un voisinage de $s = h(y)$ (resp. de y), on peut ici, en vertu de (18.4.8), trouver un morphisme étale $u : S' \rightarrow S$ tel que h' soit une immersion ouverte; si $x' \in X'$ est au-dessus de x, $\mathbf{P}(f', x')$ (resp. $\mathbf{P}(g', x')$) est alors par hypothèse équivalente à $\mathbf{P}(f, x)$ (resp. $\mathbf{P}(g, x)$). On peut donc se borner au cas où h est une immersion ouverte. Comme l'hypothèse entraîne que $\mathbf{P}(g, x)$ est alors équivalente à $\mathbf{P}(h \circ g, x)$, on en déduit la conclusion.

Exemples **(18.4.11)**. — On peut prendre pour propriété $\mathbf{P}(f, x)$ l'une quelconque des suivantes, compte tenu de (17.7.4, (ii)) :

(i) f est plat au point x (2.2.11, (iv));

(ii) f est localement de présentation finie et de coprofondeur $\leqslant n$ au point x (6.8.1 et 6.7.8);

(iii) f est localement de présentation finie et de Cohen-Macaulay au point x (6.8.1 et 6.7.8);

(iv) f est localement de présentation finie et possède la propriété (S_n) au point x (6.8.1 et 6.7.8);

(v) f est localement de présentation finie et possède la propriété (R_n) au point x (6.8.1 et 6.7.8);

(vi) f est localement de présentation finie et normal au point x (6.8.1 et 6.7.8);

(vii) f est localement de présentation finie et réduit au point x (6.8.1 et 6.7.8);

(viii) f est non ramifié au point x (17.7.4);

(ix) f est lisse au point x (17.7.4);

(x) f est étale au point x (17.7.4).

Corollaire **(18.4.12)**. — (i) *Soient* $f: X \to Y$ *un morphisme localement de type fini, x un point de* X. *Si f est plat et formellement non ramifié au point x, alors, dans toute factorisation* $f|U: U \xrightarrow{j} X' \xrightarrow{h} Y$, *où* U *est un voisinage ouvert de x, j une immersion fermée et h un morphisme étale* (18.4.7), *l'homomorphisme* $\mathcal{O}_{X',j(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ *correspondant à j est bijectif* (en particulier $\mathcal{O}_{X,x}$ est une $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-algèbre *essentiellement étale* (18.6.1)).

(ii) *Pour qu'un morphisme* $f: X \to Y$ *soit étale, il faut et il suffit qu'il soit localement de type fini, formellement non ramifié et plat.*

(i) Comme l'homomorphisme $\mathcal{O}_{X',j(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est surjectif, il suffit de prouver qu'il est injectif, et pour cela qu'il fait de $\mathcal{O}_{X,x}$ un $\mathcal{O}_{X',j(x)}$-module *fidèlement plat*, ou seulement *plat* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.5.1 et 6.6.2); autrement dit, il s'agit de montrer que j est un morphisme *plat au point* x; mais puisque $h \circ j = f$ est par hypothèse plat au point x et que h est étale, cela résulte de (18.4.10) et (18.4.11, (i)).

(ii) Il n'y a à prouver que la suffisance des conditions énoncées. Pour tout $x \in X$, on a donc dans un voisinage ouvert U de x une factorisation de $f|U$ ayant les propriétés considérées dans (i). Comme par hypothèse f est plat et formellement non ramifié en *tous* les points de U, le résultat de (i) s'applique non seulement à x mais à tous les points de U; cela signifie que si $\mathcal{J}$ est l'Idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_{X'}$ correspondant au sous-préschéma fermé de X' associé à j, on a $\mathcal{J}_{j(z)} = 0$ pour tout $z \in U$, donc j est une immersion ouverte, et f est par suite étale en tout point de U, donc en tout point de X.

Corollaire **(18.4.13)**. — *Soient* $f: X \to Y$ *un morphisme localement de type fini, x un point de* X, $y = f(x)$. *Supposons que y admette un voisinage ouvert qui soit un préschéma réduit et n'ayant qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Alors, pour que f soit étale au point x, il faut et il suffit que f soit plat et formellement non ramifié au point x.*

Il n'y a à démontrer que la suffisance de la condition. La question étant locale sur X et Y, on peut supposer (18.4.7) que f se factorise en $X \xrightarrow{j} X' \xrightarrow{h} Y$ où h est étale et j une immersion fermée, et en outre que Y est réduit et n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Alors X' est réduit (17.5.7) et, en remplaçant au besoin X' par un voisinage ouvert de $j(x)$, on peut supposer que X' n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles : en effet, on peut supposer h quasi-fini (17.6.1) et comme les points maximaux de X' sont au-dessus des points maximaux de Y (2.3.4) leur nombre est fini. Tout revient à montrer, avec les notations de la démonstration de (18.4.12), que l'on a $\mathcal{J}_{x'} = 0$ pour tous les points x' d'un voisinage de $j(x)$ dans X', sachant que $\mathcal{J}_{j(x)} = 0$. Or, en remplaçant X' par un voisinage affine de $j(x)$, on peut supposer que toutes les composantes irréductibles de X' contiennent $j(x)$; si $X' = \mathrm{Spec}(A')$, et si $\mathfrak{p}'$ est l'idéal premier de A' correspondant au point $j(x)$, le morphisme $\mathrm{Spec}(A'_{\mathfrak{p}'}) \to \mathrm{Spec}(A')$ est dominant, donc l'homomorphisme correspondant $A' \to A'_{\mathfrak{p}'}$ est *injectif* puisque A' est réduit (**I**, 1.2.7). Si $\mathcal{J} = \widetilde{\mathfrak{J}}$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal de A', $\mathfrak{J}$ s'identifie donc à une partie de $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}'}$, et l'hypothèse $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}'} = 0$ entraîne donc $\mathfrak{J} = 0$.

Corollaire **(18.4.14)**. — *Soient* A *un anneau local d'idéal maximal* $\mathfrak{m}$, *de corps résiduel* k, B *une* A-*algèbre finie.*

(i) *Pour que* B *soit une* A-*algèbre formellement non ramifiée, il faut et il suffit que* $B\otimes_A k$ *soit une* k-*algèbre étale.*

(ii) *Pour que* B *soit une* A-*algèbre étale, il faut et il suffit que* $B\otimes_A k$ *soit une* k-*algèbre étale et que* B *soit un* A-*module plat* (ce qui équivaut à dire ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.3.3) que pour tout idéal maximal $\mathfrak{n}$ de B (nécessairement au-dessus de $\mathfrak{m}$), $B_\mathfrak{n}$ est un A-module plat).

On n'a évidemment à prouver que la suffisance des conditions énoncées. Il est clair que (ii) résulte de (i) et de (18.4.12, (ii)), compte tenu de (17.1.2, (i)). Pour prouver (i) remarquons que si $B\otimes_A k$ est une k-algèbre étale, on a $\Omega^1_{(B\otimes_A k)/k}=0$ (17.2.1). Or on a $\Omega^1_{(B\otimes_A k)/k}=\Omega^1_{B/A}\otimes_B k$ (**0**, 20.5.5) et puisque B est une A-algèbre de type fini, $\Omega^1_{B/A}$ est un B-module de type fini (**0**, 20.4.7). Mais comme B est une A-algèbre finie, $\mathfrak{m}$B est contenu dans le radical de B (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, nº 1, prop. 1), donc le lemme de Nakayama prouve que $\Omega^1_{B/A}=0$, et par suite B est une A-algèbre formellement non ramifiée (17.2.1).

18.5. Anneaux locaux henséliens [1].

(18.5.1) Soient X un préschéma, $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_X$-Module *localement libre* de rang fini; le dual $\check{\mathscr{E}}=\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{E},\mathscr{O}_X)$ est donc un $\mathscr{O}_X$-Module localement libre dont le rang en tout point de X est égal à celui de $\mathscr{E}$ en ce point, et l'homomorphisme canonique $\mathscr{E}\to\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}},\mathscr{O}_X)=(\check{\mathscr{E}})\check{}$ est *bijectif*. Pour tout morphisme $X'\to X$, posons $\mathscr{E}_{(X')}=\mathscr{E}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{O}_{X'}$ qui est un $\mathscr{O}_{X'}$-Module localement libre, et considérons l'*ensemble* $\Gamma(X',\mathscr{E}_{(X')})$ des sections de ce $\mathscr{O}_{X'}$-Module au-dessus de X'. Nous allons voir que l'on définit ainsi un *foncteur contravariant représentable*

$$(18.5.1.1)\qquad {}^t\mathrm{V}_{\mathscr{E}}: X'\rightsquigarrow\Gamma(X',\mathscr{E}_{(X')})$$

de la catégorie des X-*préschémas* dans celle des *ensembles* ($\mathbf{0}_\mathrm{III}$, 8.1.8).

Tout d'abord, on a bien défini un foncteur, car si $f: X''\to X'$ est un X-morphisme de X-préschémas, on a $\mathscr{E}_{(X'')}=f^*(\mathscr{E}_{(X')})$, d'où ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 4.4.3.2) une application $\Gamma(X',\mathscr{E}_{(X')})\to\Gamma(X',f_*(\mathscr{E}_{(X'')}))=\Gamma(X'',\mathscr{E}_{(X'')})$ qui achève de définir le foncteur ^{t}V. Montrons ensuite que le X-préschéma $\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}})$ (**II**, 1.7.8) *représente* le foncteur ^{t}V. Il est immédiat en effet que l'on a $(\mathscr{E}_{(X')})\check{}=(\check{\mathscr{E}})_{(X')}$, donc $\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}})\times_X X'=\mathbf{V}((\mathscr{E}_{(X')})\check{})$; compte tenu de (**I**, 3.3.14), on est ramené à définir une bijection $\Gamma(\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}})/X)\xrightarrow{\sim}\Gamma(X,\mathscr{E})$, et à vérifier que la bijection $\Gamma(\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}}_{(X')})/X')\xrightarrow{\sim}\Gamma(X',\mathscr{E}_{(X')})$ est fonctorielle en X'. Or, on a une bijection canonique de $\Gamma(\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}})/X)$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}},\mathscr{O}_X)$ (**II**, 1.7.8), et la transposition $u\rightsquigarrow{}^tu$ est une bijection canonique de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}},\mathscr{O}_X)$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X,\mathscr{E})=\Gamma(X,\mathscr{E})$, en raison de l'identification de $(\check{\mathscr{E}})\check{}$ et de $\mathscr{E}$. La vérification de la propriété fonctorielle est immédiate.

---

[1] La notion d'anneau local hensélien est due à Azumaya, celle de hensélisation à Nagata, à qui l'on doit aussi les principaux résultats de cette théorie.

Notons encore que, conformément à la théorie générale $(\mathbf{0}_{\mathrm{III}}, 8.1.6)$ l'automorphisme identique de $\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}})$ correspond canoniquement à une section c de $\mathscr{E}_{(\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}}))}$ au-dessus de $\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}})$, c'est-à-dire (**II**, 1.4.1) à un homomorphisme de $\mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}})$-Modules $u : \mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}}) \rightarrow \mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E}$; pour tout ouvert affine W de X, si l'on pose $\Gamma(W, \mathscr{O}_X) = A$, si on identifie $\Gamma(W, \mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}}))$ à une algèbre de polynômes $C = A[T_1, \ldots, T_n]$, de sorte que les T_i forment une base de $\Gamma(W, \check{\mathscr{E}})$, et si enfin on désigne par (e_i) la base duale de (T_i) dans $\Gamma(W, \mathscr{E}) = \Gamma(W, \check{\mathscr{E}})^{\vee}$, on voit aussitôt que u correspond à l'homomorphisme de C-modules tel que $u(1) = \sum_{i=1}^{n} T_i \otimes e_i$.

Si $X' = \mathrm{Spec}(A)$ est affine et tel que $\mathscr{E}_{(X')}$ soit isomorphe à $\mathscr{O}_{X'}^n$, $\Gamma(X', \mathscr{E}_{(X')})$ est un A-module libre de rang n; de façon imagée, on peut dire que l'objet $\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}})$ représente « l'ensemble des points de l'espace affine tordu sur X défini par $\mathscr{E}$ ».

(18.5.2) Rappelons (**II**, 1.7.8) que l'on a par définition $\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}}) = \mathrm{Spec}(\mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}}))$. Soit $\mathscr{J}$ un Idéal quasi-cohérent de $\mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}})$, de sorte que $\mathrm{Spec}(\mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}})/\mathscr{J})$ est un sous-préschéma fermé de $\mathbf{V}(\check{\mathscr{E}})$; nous allons l'interpréter comme *représentant un foncteur* de la catégorie des X-préschémas dans celle des ensembles. Notons pour cela qu'une section $u \in \Gamma(X, \mathscr{E})$ s'identifie canoniquement à un $\mathscr{O}_X$-homomorphisme $u : \mathscr{O}_X \rightarrow \mathscr{E}$, auquel correspond par transposition un $\mathscr{O}_X$-homomorphisme ${}^t u : \check{\mathscr{E}} \rightarrow \mathscr{O}_X$, et par suite un homomorphisme de $\mathscr{O}_X$-Algèbres $v : \mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}}) \rightarrow \mathscr{O}_X$. Soit $\mathrm{Al}(X, \mathscr{E}, \mathscr{J})$ l'ensemble des $u \in \Gamma(X, \mathscr{E})$ tels que $\mathscr{J}$ soit *contenu dans le noyau de* v; il résulte aussitôt de ces définitions que

$$X' \rightsquigarrow \mathrm{Al}(X', \mathscr{E}_{(X')}, \mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{X'})$$

est un foncteur représenté par $\mathrm{Spec}(\mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}})/\mathscr{J})$. Si $X' = \mathrm{Spec}(A)$ est affine et tel que $\mathscr{E}_{(X')}$ soit isomorphe à $\mathscr{O}_{X'}^n$, $\Gamma(X', \mathscr{E}_{(X')})$ peut s'identifier à l'ensemble A^n, et $\mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{X'}$ à un $\mathscr{O}_{X'}$-Module de la forme $\widetilde{\mathfrak{J}}$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal de l'anneau de polynômes $A[T_1, \ldots, T_n]$; l'ensemble $\mathrm{Al}(X', \mathscr{E}_{(X')}, \mathscr{J} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{X'})$ s'identifie alors à la partie de A^n formée des points $(t_1, \ldots, t_n)$ tels que $P(t_1, \ldots, t_n) = 0$ pour tous les polynômes $P \in \mathfrak{J}$; de façon imagée on peut donc dire que l'objet $\mathrm{Spec}(\mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}})/\mathscr{J})$ représente « le sous-ensemble algébrique de l'espace affine tordu $\Gamma(X, \mathscr{E})$ formé des points annulant l'idéal $\Gamma(X, \mathscr{J})$ ». On note encore ce X-préschéma $\mathbf{Al}(\mathscr{E}, \mathscr{J})$. On notera que si $\mathscr{J}$ est un Idéal de type fini de $\mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}})$, $\mathbf{Al}(\mathscr{E}, \mathscr{J})$ est un X-préschéma *de présentation finie*, puisque $\mathbf{S}_{\mathscr{O}_X}(\check{\mathscr{E}})$ est une $\mathscr{O}_X$-Algèbre de présentation finie.

Lemme **(18.5.3).** — *Soient* S *un préschéma,* $f : X \rightarrow S$ *un morphisme fini et localement libre* (18.2.7). *Considérons le foncteur contravariant de la catégorie des* S*-préschémas dans la catégorie des ensembles*

$$S' \rightsquigarrow \mathrm{Of}(X \times_S S') \tag{18.5.3.1}$$

où $\mathrm{Of}(X \times_S S')$ *est l'ensemble des parties à la fois ouvertes et fermées de l'espace sous-jacent à* $X \times_S S'$. *Alors ce foncteur est représentable par un* S*-préschéma* $\mathbf{Of}(X)$, *qui est affine, étale et de présentation finie sur* S.

On a par hypothèse $X=\mathrm{Spec}(\mathscr{B})$, où $\mathscr{B}=f_*(\mathscr{O}_X)$ est une $\mathscr{O}_S$-Algèbre finie et localement libre. Posons $X'=X\times_S S'$, $f'=f_{(S')}$, $\mathscr{B}'=\mathscr{B}\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{O}_{S'}=f'_*(\mathscr{O}_{X'})$, de sorte que $X'=\mathrm{Spec}(\mathscr{B}')$; il y a alors une bijection canonique, fonctorielle en S', de l'ensemble Of(X') sur l'ensemble $\mathrm{Id}(\mathscr{B}')$ des *idempotents* de l'anneau $\Gamma(S', \mathscr{B}')=\Gamma(X', \mathscr{O}_{X'})$. En effet, en vertu de l'*équivalence* de la catégorie des S'-schémas affines sur S' et de la catégorie opposée de la catégorie des $\mathscr{O}_{S'}$-Algèbres quasi-cohérentes (**II**, 1.2.7 et 1.3.1), il y a correspondance biunivoque canonique entre les décompositions de X' en *somme* $X'_1 \amalg X'_2$ de deux sous-préschémas induits sur des ouverts de X' et les décompositions de $\mathscr{B}'$ en *composée directe* de deux Idéaux $\mathscr{B}'_1$, $\mathscr{B}'_2$; ces dernières à leur tour forment un ensemble en correspondance biunivoque canonique (et fonctorielle en S') avec $\mathrm{Id}(\mathscr{B}')$. Il suffit donc de prouver le lemme pour le foncteur $S' \rightsquigarrow \mathrm{Id}(\mathscr{B}')$.

Pour cela, nous allons montrer qu'il existe un Idéal de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathbf{S}_{\mathscr{O}_S}(\check{\mathscr{B}})$ tel que $\mathrm{Id}(\mathscr{B}')$ soit de la forme $\mathrm{Al}(S', \check{\mathscr{B}}', \mathscr{J}\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{O}_{S'})$ (18.5.2). Notons à cet effet que puisque $\mathscr{B}$ est une $\mathscr{O}_S$-Algèbre, son image réciproque $\mathscr{B}_{(\mathbf{V}(\check{\mathscr{B}}))}$ est une $\mathscr{O}_{\mathbf{V}(\check{\mathscr{B}})}$-Algèbre, et l'on peut donc former le *carré* c^2, dans cette Algèbre, de la section canonique c (18.5.1); elle correspond canoniquement à un homomorphisme $u^{(2)}:\mathbf{S}_{\mathscr{O}_S}(\check{\mathscr{B}}) \to \mathbf{S}_{\mathscr{O}_S}(\check{\mathscr{B}})\otimes_{\mathscr{O}_S}\mathscr{B}$ de $\mathbf{S}_{\mathscr{O}_S}(\check{\mathscr{B}})$-Modules, et on vérifie aussitôt que pour un ouvert affine W de S, avec les notations de (18.5.1), $u^{(2)}$ correspond à l'homomorphisme de C-modules tel que $u^{(2)}(1)=\sum_k(\sum_{i,j}c_{ijk}T_iT_j)\otimes e_k$, où (c_{ijk}) est la table de multiplication de l'algèbre $\Gamma(W, \mathscr{B})$. Montrons que l'Idéal $\mathscr{J}$ de $\mathbf{S}_{\mathscr{O}_S}(\check{\mathscr{B}})$ engendré par le *noyau* de l'homomorphisme $u-u^{(2)}$ répond à la question. Il suffit en effet de noter que l'idéal $\Gamma(W, \mathscr{J})$ de C est engendré par les polynômes $P_k(T_1, \ldots, T_n)=T_k-\sum_{i,j}c_{ijk}T_iT_j$ et que les idempotents de $\Gamma(W, \mathscr{B})$ sont précisément les éléments $\sum_i t_ie_i$ de cette algèbre tels que $(t_1, \ldots, t_n)$ annule tous les polynômes P_k $(1\leqslant i\leqslant n)$. On déduit donc de (18.5.2) que le S-préschéma affine de présentation finie $\mathbf{Of}(X)=\mathbf{Al}(\mathscr{B}, \mathscr{J})$ représente bien le foncteur (18.5.3.1). Il reste à prouver que $\mathbf{Of}(X)$ est étale sur S, ou, ce qui revient au même, qu'il est *formellement étale* sur S. Mais si S' est un S-préschéma, S'_0 un sous-préschéma fermé de S' défini par un Idéal localement nilpotent de $\mathscr{O}_{S'}$ (et ayant donc même espace sous-jacent que S'), il est clair que $X'=X\times_S S'$ et $X'_0=X\times_S S'_0$ ont même espace sous-jacent, donc l'application canonique $\mathrm{Of}(X')\to\mathrm{Of}(X'_0)$ est *bijective*, ce qui achève la démonstration (17.1.1).

Proposition (**18.5.4**). — *Soient* S *un préschéma*, S_0 *un sous-préschéma fermé de* S; *considérons les propriétés suivantes :*

a) *Pour tout morphisme* fini $g: S'\to S$, *l'application canonique*

$$\mathrm{Of}(S') \to \mathrm{Of}(S'\times_S S_0) \qquad (\text{cf. } (18.5.3)) \tag{18.5.4.1}$$

est bijective.

a') *Pour tout morphisme* fini et localement libre $g: S'\to S$, *l'application* (18.5.4.1) *est bijective.*

b) *Pour tout morphisme* étale et séparé $g : S' \to S$, *l'application canonique*

(18.5.4.2) $$\Gamma(S'/S) \to \Gamma(S' \times_S S_0/S_0)$$

est bijective.

La condition b) *entraîne* a'); *si de plus* S *est quasi-compact et quasi-séparé, la condition* a) *entraîne* b).

Prouvons d'abord que *b)* entraîne *a')*. Supposons donc *b)* vérifiée, et soit $g : S' \to S$ un morphisme fini et localement libre; posons $S'_0 = S' \times_S S_0$, de sorte que $g_0 = g_{(S_0)} : S'_0 \to S_0$ est fini et localement libre. Alors il résulte de (18.5.3) que $P = \mathbf{Of}(S')$ est un S-préschéma *étale et séparé*; en outre, la définition du foncteur Of montre aussitôt que si l'on pose $P_0 = \mathbf{Of}(S'_0)$ (pour la catégorie des S_0-préschémas), on a $P_0 = P \times_S S_0$. Cela étant, on a par définition le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(P/S) & \longrightarrow & \Gamma(P_0/S_0) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathrm{Of}(S') & \longrightarrow & \mathrm{Of}(S'_0) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les bijections canoniques. Comme l'hypothèse *b)*, appliquée au morphisme $P \to S$, entraîne que la première ligne est une bijection, il en est de même de la seconde, ce qui établit notre assertion.

Avant de prouver que *a)* entraîne *b)* lorsque S est quasi-compact et quasi-séparé, nous établirons le

Lemme **(18.5.4.3)**. — *Si* S *et* S_0 *vérifient la condition* a) *de* (18.5.4), *alors, pour tout morphisme* fini $g : S' \to S$, S' *est l'unique voisinage de* $S'_0 = g^{-1}(S_0) = S' \times_S S_0$ *dans* S'.

En effet, il revient au même de dire que si T' est une partie fermée de S' telle que $T' \cap S'_0 = \emptyset$, alors $T' = \emptyset$. Or, si l'on désigne encore par T' un sous-préschéma fermé de S' ayant T' pour espace sous-jacent, le morphisme composé $h : T' \to S' \xrightarrow{g} S$ est fini et $h^{-1}(S_0)$ est vide; la condition *a)* appliquée au morphisme *h* entraîne que T' est nécessairement vide.

Ce lemme étant démontré, prouvons d'abord que, sous l'hypothèse *a)*, l'application (18.5.4.2) est *injective*. En effet, si u', u'' sont deux S-sections de S', le fait que le morphisme $S' \to S$ soit non ramifié entraîne que le préschéma des coïncidences de u' et u'' est induit sur un ouvert U de S (17.4.6). Si les restrictions à S_0 de u' et u'' sont les mêmes, le fait que u' et u'' sont des immersions ouvertes (17.4.1) entraîne que U contient S_0, donc est égal à S en vertu du lemme (18.5.4.3) appliqué au cas où $S' = S$.

Reste à montrer que sous l'hypothèse *a)*, l'application (18.5.4.2) est *surjective* (S étant quasi-compact et quasi-séparé). Soit donc $u_0 : S_0 \to S'_0$ une S_0-section de S'_0; $u_0(S_0)$ étant quasi-compact dans S', peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts affines V_i tels que la restriction $g|V_i$ soit un morphisme de type fini; si V est la réunion des V_i, on en conclut que $g|V : V \to S$ est un morphisme *de présentation finie,* étant séparé et localement de présentation finie par hypothèse (1.6.1). Remplaçant S′ par V, on peut donc supposer que g est de présentation finie. Comme S est quasi-compact et quasi-séparé et g quasi-fini et séparé (17.6.1), il résulte du « Main theorem » (8.12.6) que g se factorise en $S' \xrightarrow{j} S'' \xrightarrow{f} S$, où j est une immersion ouverte et f un morphisme *fini.* Posons $S''_0 = S'' \times_S S_0$, $j_0 = j_{(S_0)} : S'_0 \to S''_0$, qui est une immersion ouverte et $f_0 = f_{(S_0)} : S''_0 \to S_0$, qui est un morphisme fini. Alors u_0 est aussi une S_0-section de S''_0. Comme $g_0 : S'_0 \to S_0$ est étale, u_0 est une immersion ouverte de S_0 dans S'_0 (17.4.1), donc $u_0(S_0)$ est ouvert dans S'_0, et *a fortiori* dans S''_0; mais d'autre part, comme f_0 est un morphisme fini, donc séparé, u_0 est une immersion fermée de S_0 dans S''_0 (**I**, 5.4.6), donc $X_0 = u_0(S_0)$ est *à la fois ouvert et fermé* dans S''_0. En vertu de l'hypothèse *a)*, il existe un sous-ensemble à la fois ouvert et fermé X de S″ tel que $X \cap S''_0 = X_0$. Montrons d'abord que le morphisme $f : S'' \to S$ est *étale aux points de* X : en effet, l'ensemble U des points de X où $f|X$ est étale est ouvert et contient par hypothèse $X_0 \subset S'_0$. Mais le lemme (18.5.4.3) appliqué au morphisme fini $f|X$ prouve que $U = X$. D'autre part, $S' \cap X$ est ouvert dans X et contient X_0 par hypothèse, donc le même raisonnement prouve que $S' \cap X = X$, c'est-à-dire $X \subset S'$. Il reste à montrer que, pour tout $s \in S$, le nombre géométrique $n(s)$ de points de $X \cap f^{-1}(s)$ est égal à 1, car il en résultera que $f|X$ est radiciel et surjectif, et comme $f|X$ est étale, on aura montré (17.9.1) que $f|X$ est un isomorphisme de l'ouvert $X \subset S'$ sur S, dont l'isomorphisme réciproque u sera la S-section cherchée prolongeant u_0. Mais comme $f|X$ est étale et *fini,* $s \rightsquigarrow n(s)$ est continue dans S (18.2.8), et comme $X \cap S'_0 = X_0$, on a $n(s) = 1$ dans S_0; l'ensemble des points $s \in S$ tels que $n(s) = 1$ étant ouvert dans S et contenant S_0, il est égal à S par (18.5.4.3). C.Q.F.D.

Remarque (**18.5.4.4**). — On peut montrer que l'énoncé (18.5.4) reste valable lorsque, dans la condition *b)*, on suppose seulement le morphisme g étale (mais non nécessairement séparé) [43, exp. XII].

Définition (**18.5.5**). — *On dit qu'un préschéma* S *et un sous-préschéma fermé* S_0 *de* S *forment un* couple hensélien *s'ils vérifient la condition* a) *de* (18.5.4).

Compte tenu de (**I**, 5.1.8), il revient au même de dire que (S, S_0) est un couple hensélien ou que $(S_{red}, (S_0)_{red})$ en est un.

Proposition (**18.5.6**). — (i) *Si* (S, S_0) *est un couple hensélien, alors, pour tout morphisme fini* $f : S' \to S$, *si* S'_0 *est le sous-préschéma* $f^{-1}(S_0)$ *de* S′, *le couple* (S', S'_0) *est hensélien.*

(ii) *Soient* $S = \coprod_\alpha S^{(\alpha)}$ *une somme de préschémas,* S_0 *un sous-préschéma fermé de* S, *somme des sous-préschémas fermés* $S_0^{(\alpha)}$ *des* $S^{(\alpha)}$. *Pour que le couple* (S, S_0) *soit hensélien, il faut et il suffit que chacun des couples* $(S^{(\alpha)}, S_0^{(\alpha)})$ *le soit.*

L'assertion (i) est conséquence immédiate de la définition, puisque pour tout morphisme fini $g : S'' \to S'$, $f \circ g : S'' \to S$ est un morphisme fini. De même, sous les conditions de (ii), pour qu'un morphisme $g : S' \to S$ soit fini, il faut et il suffit que chacune de ses restrictions $g^{(\alpha)}: S'^{(\alpha)} = g^{-1}(S^{(\alpha)}) \to S^{(\alpha)}$ le soit, et si l'on pose $S'_0 = g^{-1}(S_0)$, $S_0'^{(\alpha)} = (g^{(\alpha)})^{-1}(S_0^{(\alpha)})$, il y a correspondance biunivoque entre les parties ouvertes et fermées U (resp. U_0) de S' (resp. S'_0) et les familles $(U^{(\alpha)})$ (resp. $U_0^{(\alpha)}$) où $U^{(\alpha)}$ (resp. $U_0^{(\alpha)}$) est une partie ouverte et fermée de $S'^{(\alpha)}$ (resp. $S_0'^{(\alpha)}$), d'où l'assertion (ii).

Remarque **(18.5.7)**. — Soient $S = \operatorname{Spec}(A)$ un schéma affine, S_0 un sous-schéma fermé de S défini par un idéal $\mathfrak{J}$ de A. Alors, si le couple (S, S_0) est hensélien, l'idéal $\mathfrak{J}$ est nécessairement contenu dans le *radical* de A. En effet, si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de A, $\mathfrak{m}$ doit appartenir à $V(\mathfrak{J}) = S_0$, en vertu de (18.5.4.3), autrement dit on doit avoir $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{m}$, d'où la conclusion. En particulier, supposons que S_0 soit *réduit à un point*, c'est-à-dire que l'idéal $\mathfrak{J}$ soit *maximal*; alors $\mathfrak{J}$ doit être le radical de A, autrement dit A doit être un anneau *local*, S_0 étant l'unique point fermé de Spec(A).

Définition **(18.5.8)**. — *On dit qu'un anneau* A *est hensélien s'il est semi-local et si, en désignant par* $\mathfrak{r}$ *le radical de* A, *le couple* $(\operatorname{Spec}(A), \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{r}))$ *est hensélien. On appelle schéma local hensélien un schéma isomorphe au spectre d'un anneau local hensélien.*

Proposition **(18.5.9)**. — (i) *Pour qu'un anneau semi-local* A *soit hensélien, il faut et il suffit qu'il soit composé direct d'anneaux locaux henséliens.*

(ii) *Pour qu'un anneau local* A *soit hensélien, il faut et il suffit que toute* A-*algèbre finie* B *soit isomorphe à un produit d'anneaux* locaux.

(i) En effet, la définition, appliquée à $S = \operatorname{Spec}(A)$ et $S_0 = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{r})$ montre, puisque S_0 est un ensemble fini discret et fermé dans S, que S est réunion d'un nombre fini de parties ouvertes et fermées S_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ deux à deux disjointes, dont chacune contient exactement un des idéaux maximaux $\mathfrak{m}_i$ de A; la conclusion résulte de (18.5.6, (ii)) et de la remarque (18.5.7).

(ii) Tout morphisme fini $S' \to \operatorname{Spec}(A)$ est de la forme $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$, où B est une A-algèbre finie. Si k est le corps résiduel de A, $\operatorname{Spec}(B \otimes_A k)$ est un spectre d'anneau artinien, donc fini et discret. Dire que le couple $(\operatorname{Spec}(A), \operatorname{Spec}(k))$ est hensélien signifie donc que B est composé direct d'anneaux A_i tels que $\operatorname{Spec}(A_i \otimes_A k)$ soit réduit à un point, c'est-à-dire que A_i (qui est une A-algèbre *finie*) ne doit avoir qu'un seul idéal maximal (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 1, prop. 1).

L'étude des anneaux henséliens est donc essentiellement ramenée à celle des anneaux *locaux* henséliens.

Proposition **(18.5.10)**. — *Si* A *est un anneau hensélien, toute* A-*algèbre finie* B *est un anneau hensélien* (donc *composé direct d'anneaux locaux henséliens* (18.5.9)).

En effet, si $\mathfrak{r}'$ est le radical de B, l'image réciproque de $\mathfrak{r}'$ dans A est le radical $\mathfrak{r}$ de A, et tout idéal de B au-dessus d'un idéal maximal de A est un idéal maximal de B, donc l'ensemble $V(\mathfrak{r}')$ dans Spec(B) est l'image réciproque de l'ensemble $V(\mathfrak{r})$ dans Spec(A). La proposition est alors une conséquence de (18.5.6, (i)).

Théorème **(18.5.11)**. — *Soient* A *un anneau local,* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) A *est hensélien, autrement dit, toute* A-*algèbre finie* B *est isomorphe à un produit d'anneaux locaux.*

a') *La condition* a) *est satisfaite pour toutes les* A-*algèbres* B *de la forme* $A[T]/F.A[T]$, *où* $F \in A[T]$ *est un polynôme unitaire.*

b) *Soient* $S = \mathrm{Spec}(A)$, $S_0 = \mathrm{Spec}(k)$. *Pour tout morphisme étale* $g : S' \rightarrow S$, *si l'on pose* $S'_0 = S' \otimes_A k$, *toute* S_0-*section* u_0 *de* S'_0 *est la restriction d'une* S-*section* u *de* S'.

c) *Pour tout morphisme* $f : X \rightarrow S$, *séparé et localement de type fini, et tout point* $x \in X$ *tel que* $f(x)$ *soit égal au point fermé* s *de* S *et que* f *soit quasi-fini au point* x (**Err**$_{\mathrm{III}}$, 20), X *est somme de deux préschémas* X', X'' *tels que* $X' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ *et que* $f|X' : X' \rightarrow S$ *soit un morphisme* fini.

c') *Pour tout morphisme localement de type fini* $f : X \rightarrow S$, *et tout point* $x \in X$ *tel que* f *soit quasi-fini au point* x, *et que* $f(x)$ *soit égal au point fermé* s *de* S, $\mathcal{O}_{X,x}$ *est une algèbre finie sur* $\mathcal{O}_{S,s} = A$.

c'') *Pour tout morphisme localement de présentation finie* $f : X \rightarrow S$, *et tout point* $x \in X$ *tel que* f *soit quasi-fini au point* x, *et que* $f(x)$ *soit égal au point fermé* s *de* S, $\mathcal{O}_{X,x}$ *est une algèbre finie et de présentation finie sur* $\mathcal{O}_{S,s} = A$.

Notons d'abord que la condition *c')* (resp. *c'')*) est équivalente à la même condition où on suppose de plus *f séparé,* la question étant locale sur X. De même, la condition *b)* est équivalente à la même condition où l'on suppose de plus *g séparé* : en effet, il suffit d'appliquer cette dernière à la restriction de g à un voisinage ouvert affine du point $u_0(S_0)$ dans S'. Bornons-nous donc désormais au cas où, dans *b)*, *c')* et *c'')*, les morphismes donnés sont *séparés.*

Le fait que *a)* implique *b)* et que *b)* implique *a')* est un cas particulier de (18.5.4). Montrons en outre que *a')* implique *a)*. Il s'agit de prouver que si e_0 est un idempotent de $C = B \otimes_A k$, il existe un idempotent $e \in B$ dont e_0 est l'image canonique. Si b est un élément de B dont l'image dans C est e_0, la sous-A-algèbre $A[b] = B'$ de B est finie, et l'image canonique C' de $B' \otimes_A k$ dans C contient e_0. Or, $B' \otimes_A k$ est une k-algèbre finie, donc composée directe de k-algèbres locales finies, et par suite e_0 est l'image dans C' d'un idempotent e'_0 de $B' \otimes_A k$. On est ainsi ramené au cas où B est monogène, et par suite isomorphe à une A-algèbre quotient d'une algèbre de la forme $A[T]/F.A[T]$, où F est un polynôme unitaire. Or, en vertu de *a')*, $A[T]/F.A[T]$ est composée directe d'anneaux locaux, donc il en est de même de toutes ses algèbres quotients, ce qui achève de prouver l'existence de l'idempotent e.

Il est immédiat que *c)* entraîne *a)*, comme on le voit en raisonnant par récurrence sur le nombre d'idéaux maximaux de l'anneau semi-local B. Pour voir que *a)* implique *c)*, on peut, en vertu de (13.1.4), se borner au cas où f est un morphisme affine et quasi-fini. Alors, par application du « Main theorem » (8.12.8), f peut s'écrire comme un morphisme composé $X \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{g} S$, où g est un morphisme fini et j une immersion ouverte. Comme $Y = \mathrm{Spec}(B)$, où B est une A-algèbre finie, il résulte de *a)* que B est composée directe d'anneaux locaux, qui sont évidemment des A-algèbres finies, et $\mathcal{O}_{X,x}$ s'identifie à l'un de ces anneaux locaux puisque $f(x) = s$; en outre, tout ouvert de Y contenant x contient nécessairement $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$.

Il est trivial que *c)* implique *c')*, en vertu de la remarque du début. Prouvons que *c')* implique *c'')*. Supposons en effet *c')* vérifiée, et prouvons que sous les conditions de *c'')*, l'ensemble $Z = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ s'identifie alors à une partie *ouverte et fermée* de X, ce qui établira *c'')* (**I**, 2.4.2). En premier lieu, le morphisme composé $Z \xrightarrow{j} X \xrightarrow{f} S$, où j est le morphisme canonique (**I**, 2.4.1), est fini et de présentation finie par hypothèse, et comme f est séparé et localement de présentation finie, j est aussi un morphisme fini et de présentation finie ((**II**, 6.1.5) et (1.4.3)); j est par suite un morphisme fermé (**II**, 6.1.10), ce qui prouve que Z est fermé dans X. Il résulte alors de (**I**, 2.4.2) et (**I**, 4.2.2) que j est une immersion fermée. Mais si $\mathscr{J}$ est l'idéal de $\mathcal{O}_X$ définissant Z, on a alors par hypothèse $\mathscr{J}_x = 0$, donc aussi $\mathscr{J}_z = 0$ en tout point z d'un voisinage ouvert V de x dans X, puisque par hypothèse $\mathscr{J}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent de type fini ((1.4.7) et ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.2)). Or, un tel voisinage contient Z, donc Z est ouvert dans X puisque $\mathscr{J}|V = 0$.

Enfin, *c'')* implique *a')* : en effet, si $B = A[T]/F.A[T]$, le morphisme $X = \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A) = Y$ est fini et de présentation finie, et la démonstration précédente montre que B est composée directe des A-algèbres finies $\mathcal{O}_{X,x_i}$, où les x_i sont les points de la fibre du point fermé de Y.

Corollaire (**18.5.12**). — *Soient* A *un anneau semi-local,* $\mathfrak{r}$ *son radical ; posons* $S = \mathrm{Spec}(A)$, $S_0 = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{r})$. *Pour que* A *soit hensélien, il faut et il suffit que, pour tout morphisme* fini $f : X \to S$ *et tout morphisme* étale et séparé $g : Y \to S$, *si l'on pose* $X_0 = X \times_S S_0$ et $Y_0 = Y \times_S S_0$, *l'application canonique*

$$\mathrm{Hom}_S(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{S_0}(X_0, Y_0)$$

soit bijective.

La suffisance de la condition résulte de l'équivalence de *a)* et *b)* dans (18.5.11), en appliquant cette condition au cas où $f = 1_S$. Pour voir que la condition est nécessaire, notons que si A est hensélien, le couple (X, X_0) est hensélien par (18.5.6, (i)) ; en outre $\mathrm{Hom}_S(X, Y) = \Gamma(X \times_S Y/X)$ et $\mathrm{Hom}_{S_0}(X_0, Y_0) = \Gamma(X_0 \times_{S_0} Y_0/X_0)$; comme $X \times_S Y$ est étale et séparé sur X, la conclusion résulte de ce que *a)* implique *b)* dans (18.5.4).

Remarque (**18.5.13**). — Les conditions équivalentes *a)*, *a')*, *b)* du théorème (18.5.11) sont encore équivalentes à la suivante (« lemme de Hensel ») :

a'') *Pour tout polynôme unitaire* $F \in A[T]$, *d'image canonique* $F_0 \in k[T]$, *et toute décomposition* $F_0 = G_0 H_0$ *de* F_0 *en un produit de deux polynômes unitaires* étrangers G_0, H_0 *de* $k[T]$, *il existe un couple unique* (G, H) *de polynômes unitaires de* A[T] *possédant les propriétés suivantes :* G_0 *et* H_0 *sont les images canoniques respectives de* G *et* H, *on a* $F = GH$, *et l'idéal de* A[T] *engendré par* G *et* H *est égal à* A[T].

Nous établirons d'abord le lemme suivant :

Lemme (**18.5.13.1**). — *Soient* A *un anneau local de corps résiduel* k, $F \in A[T]$ *un polynôme unitaire,* B *la* A-*algèbre* $A[T]/F.A[T]$. *Il existe une correspondance canonique entre les décompositions de* B *en composée directe de deux* A-*algèbres quotients* B', B'' *et les décompositions* $F = GH$ *de* F *en produit de deux polynômes unitaires* G, H *de* A[T], *tels que l'idéal engendré par* G *et* H *soit égal à* A[T]; *les algèbres quotients* B', B'' *correspondant à un tel couple de polynômes* G, H *sont respectivement* $A[T]/H.A[T]$ *et* $A[T]/G.A[T]$.

Si $F=GH$ et si G et H engendrent l'idéal $A[T]$, il y a deux polynômes P, Q de $A[T]$ tels que $1=PG+QH$. On en déduit que l'intersection des idéaux principaux $\mathfrak{a}=G.A[T]$ et $\mathfrak{b}=H.A[T]$ est égale à $\mathfrak{c}=F.A[T]$: en effet, si $R\in G.A[T]\cap H.A[T]$, on peut écrire $R=PRG+QRH$; or RH (resp. RG) est un multiple de F puisque R est un multiple de G (resp. H), donc $R\in F.A[T]$. Comme $A[T]=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $A[T]/\mathfrak{c}$ est somme directe des idéaux $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$ et $\mathfrak{b}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$, canoniquement isomorphes respectivement à $A[T]/\mathfrak{b}$ et $A[T]/\mathfrak{a}$.

Inversement, supposons donnée une décomposition de B en composée directe de deux A-algèbres B', B'', qui s'identifient canoniquement à deux idéaux $e'B$, $e''B$ de B, correspondant à une décomposition $1=e'+e''$ de 1 en idempotents orthogonaux e', e'' de B. Posons encore $B_0=B\otimes_A k=k[T]/F_0.k[T]$, où F_0 est l'image canonique de F dans $k[T]$, de même degré n que F; si e'_0, e''_0 sont les images canoniques de e', e'' dans B_0, ce sont deux idempotents orthogonaux tels que $1=e'_0+e''_0$, et B_0 est donc composée directe de $B'_0=e'_0B_0$ et $B''_0=e''_0B_0$. Soient t et t_0 les images canoniques de T dans B et B_0; comme B'_0 (resp. B''_0) est une k-algèbre finie engendrée par $t'_0=e'_0t_0$ (resp. $t''_0=e''_0t_0$), elle admet une base de la forme $\{e'_0, t'_0, t'^2_0, \ldots, t'^{s-1}_0\}$ (resp. $\{e''_0, t''_0, t''^2_0, \ldots, t''^{r-1}_0\}$) avec $r+s=n$. D'autre part, B étant un A-module libre (de base $\{1, t, \ldots, t^{n-1}\}$), B' et B'' sont des A-modules projectifs, donc libres puisque A est un anneau local (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 3, cor. de la prop. 5); il résulte donc de ce qui précède et de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 3, prop. 5, que si l'on pose $t'=e't$, $t''=e''t$, $\{e', t', \ldots, t'^{s-1}\}$ (resp. $\{e'', t'', \ldots, t''^{r-1}\}$) est une base du A-module B' (resp. B''). Il y a donc un polynôme unitaire H (resp. G) de degré s (resp. r) de $A[T]$ tel que $e'H(t')=0$ et $e''G(t'')=0$; comme $t^h=t'^h+t''^h$ pour tout entier $h\geqslant 1$, et $t'^h=e't'^h$, $t''^h=e''t''^h$, on a aussi $G(t)=e'G'(t')$ et $H(t)=e''H(t'')$, d'où $G(t)H(t)=0$; on en conclut que le polynôme $G(T)H(T)$ est divisible par $F(T)$; mais comme les degrés de ces deux polynômes unitaires sont les mêmes, on a $GH=F$. En outre, B' (resp. B'') est isomorphe à $A[T]/H.A[T]$ (resp. $A[T]/G.A[T]$). Enfin, il y a deux polynômes R, S de $A[T]$ tels que $e'=R(t)$ et $e''=S(t)$; comme $R(t)=e'R(t')+e''R(t'')$, on a nécessairement $e''R(t'')=0$ et de même $e'S(t')=0$, de sorte que, par définition de G et H, $R=QH$ et $S=PG$, où P, Q appartiennent à $A[T]$; la relation $1=R(t)+S(t)$ dans B donne donc par définition $PG+QH=1+LF$ pour un certain polynôme $L\in A[T]$, et comme $F=GH$, cela prouve que l'idéal engendré par G et H est $A[T]$, et achève de démontrer le lemme.

Ce lemme étant établi, il suffit de l'appliquer à l'anneau local A d'une part, au corps k de l'autre, pour voir aussitôt que les conditions *a')* et *a'')* sont équivalentes.

Proposition **(18.5.14)**. — *Tout anneau semi-local* A, *séparé et complet pour la topologie* $\mathfrak{r}$-*préadique* (*où* $\mathfrak{r}$ *est le radical de* A) *est hensélien.*

En effet, A est composé direct d'anneaux locaux séparés et complets (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 13, cor. de la prop. 19), donc on est ramené au cas où A est un anneau local. Vérifions le critère *a')* de (18.5.11). Comme B est un A-module libre de type fini, il est évidemment séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{r}$-préadique, qui est aussi la topologie $\mathfrak{s}$-préadique, où $\mathfrak{s}$ est le radical de l'anneau semi-local B, car $B/\mathfrak{r}B$ est un anneau artinien de radical $\mathfrak{s}/\mathfrak{r}B$. On sait alors (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 13, cor. de la prop. 19) que B est composé direct d'anneaux locaux.

Proposition **(18.5.15)**. — *Soient* A *un anneau hensélien,* $\mathfrak{r}$ *son radical. Alors le foncteur* $B \rightsquigarrow B/\mathfrak{r}B$ *est une équivalence de la catégorie des* A*-algèbres finies et étales avec la catégorie des* $(A/\mathfrak{r})$*-algèbres finies et étales.*

Le fait que le foncteur de l'énoncé soit pleinement fidèle est un cas particulier de (18.5.12). Pour montrer que ce foncteur est une équivalence de catégories, on peut se borner au cas où A est local; il suffit alors d'appliquer (18.1.1) (pour les morphismes étales), à $S = \mathrm{Spec}(A)$ et $S_0 = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{r})$, réduit à un seul point.

Remarques **(18.5.16)**. — (i) Nous ignorons si la proposition (18.5.15) se généralise à un couple hensélien (S, S_0), même lorsque S est affine et noethérien.

(ii) Soient A un anneau *noethérien,* $\mathfrak{J}$ un idéal de A tel que A soit *séparé et complet* pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique. Alors le couple $(\mathrm{Spec}(A), \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J}))$ est hensélien : en effet, pour toute A-algèbre finie B, B est séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.6). Remplaçant B par A et $\mathfrak{J}B$ par $\mathfrak{J}$, tout revient donc à voir que l'application qui, à tout idempotent de A, fait correspondre sa classe mod. $\mathfrak{J}$, est *bijective.* Or on a $A = \varprojlim (A/\mathfrak{J}^n)$. Notons Idem(A) l'ensemble des idempotents de A, et pour tout homomorphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$, soit $\mathrm{Idem}(\varphi)$ l'application de Idem(A) dans Idem(B) restriction de φ; il résulte de la définition de la limite projective que l'on a $\mathrm{Idem}(A) = \varprojlim \mathrm{Idem}(A/\mathfrak{J}^n)$ pour les applications $\psi_{nm} : \mathrm{Idem}(A/\mathfrak{J}^m) \to \mathrm{Idem}(A/\mathfrak{J}^n)$ restriction des applications canoniques $A/\mathfrak{J}^m \to A/\mathfrak{J}^n$. Mais puisque $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J}^n) \to \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J}^m)$ est un homéomorphisme, les ψ_{nm} sont des bijections (comme on l'a vu dans la démonstration de (18.5.3)); cela prouve donc notre assertion.

Théorème **(18.5.17)**. — *Soient* A *un anneau local hensélien,* $S = \mathrm{Spec}(A)$, s *le point fermé de* S. *Pour tout morphisme lisse* $f : X \to S$, *l'application canonique*

$$\Gamma(X/S) \to \Gamma(X_s/\boldsymbol{k}(s))$$

(où $X_s = f^{-1}(s)$) *est surjective.*

La donnée d'une $\boldsymbol{k}(s)$-section de X_s équivaut à celle d'un point $x \in X$ au-dessus de s rationnel sur $\boldsymbol{k}(s)$, et il s'agit de prouver qu'il existe une S-section $u : S \to X$ telle que $u(s) = x$. Compte tenu de (17.16.3, (i)), on peut supposer que f est *étale.* Alors la conclusion résulte du critère (18.5.11, *b)*). (Le lecteur notera qu'en vertu de ce critère, la validité de (18.5.17) pour un anneau local donné A est nécessaire et suffisante pour que A soit hensélien).

Remarque **(18.5.18)**. — Les conditions de (18.5.11) sont encore équivalentes à la suivante :

d) *Pour tout morphisme localement de type fini* $f : X \to S$ *et tout point* $x \in X$ *tel que* $f(x)$ *soit le point fermé* s *de* S *et que* $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_{X,x}$ *soit un corps canoniquement isomorphe à* $\boldsymbol{k}(s) = k$, *il existe un voisinage ouvert* U *de* x *dans* X *tel que* $f|U$ *soit une immersion fermée.*

Il est immédiat que *d)* implique la condition *b)* de (18.5.11) car une immersion fermée étale est une immersion ouverte (18.9.1). Inversement, supposons vérifiées les conditions de (18.5.11) et prouvons *d)*. L'hypothèse de *d)* implique que f est quasi-fini au point x ($\mathbf{Err}_{\mathrm{III}}$, 20), en vertu de (13.1.4). Donc en vertu de la condition *c)* de (18.5.11), $\mathcal{O}_{X,x}$ est une A-algèbre finie et $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ un voisinage ouvert U de x dans X. En outre, comme $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_{X,x}$ est isomorphe à $k=A/\mathfrak{m}_s$, le lemme de Nakayama prouve que l'homomorphisme $A\to\mathcal{O}_{X,x}$ est surjectif, donc que $f|U$ est une immersion fermée.

Proposition **(18.5.19).** — *Soient* A *un anneau local noethérien et hensélien,* $S=\mathrm{Spec}(A)$, s *le point fermé de* S, $f: X\to S$ *un morphisme propre ; posons* $X_s=f^{-1}(s)$. *Alors l'application* $Y\leadsto Y\cap X_s$ *est une bijection de l'ensemble des composantes connexes de* X *sur l'ensemble des composantes connexes de* X_s.

En considérant un sous-préschéma fermé de X ayant pour espace sous-jacent une composante connexe de X, on est ramené à prouver que si X est *connexe et non vide,* alors X_s est *connexe et non vide.* Le fait que X_s soit non vide résulte de (**II**, 7.2.1); pour prouver que X_s est connexe, raisonnons par l'absurde, en considérant la factorisation de Stein $f: X\xrightarrow{f'} S'\xrightarrow{g} S$ du morphisme propre f (**III**, 4.3.3); par hypothèse, l'ensemble discret fini $g^{-1}(s)$ contiendrait au moins deux points. Puisque A est hensélien et g séparé et de type fini, il résulterait alors de (18.5.11, *c)*) que S' serait somme de deux préschémas non vides S'_1, S'_2 (puisque l'intersection de l'un d'eux avec $g^{-1}(s)$ est réduite à un seul point). Puisque f' est surjectif (**III**, 4.3.1), on en conclurait que X est somme de deux préschémas non vides, contrairement à l'hypothèse.

18.6. Hensélisation.

(18.6.1) Étant donné un anneau local A, nous dirons qu'une A-algèbre locale B est *essentiellement étale* s'il existe une A-algèbre étale C et un idéal premier $\mathfrak{n}$ de C tels que B soit A-isomorphe à $C_{\mathfrak{n}}$ et que l'homomorphisme composé $A\to C\to C_{\mathfrak{n}}$ soit *local* (autrement dit, que $\mathfrak{n}$ soit au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A); cela entraîne (17.6.1) que $\mathfrak{n}$ est le *seul* idéal premier de B au-dessus de $\mathfrak{m}$ puisque B est un anneau local; si B, B' sont deux A-algèbres locales essentiellement étales, tout A-homomorphisme $B\to B'$ est donc *local.*

Si A' est une A-algèbre locale essentiellement étale et A'' une A'-algèbre locale essentiellement étale, alors A'' est une A-algèbre locale essentiellement étale. En effet, on a par hypothèse $A'=B_{\mathfrak{n}}$ où B est une A-algèbre étale et $\mathfrak{n}$ un idéal premier de B au-dessus de l'idéal maximal de A, et $A''=B'_{\mathfrak{n}'}$, où B' est une A'-algèbre étale et $\mathfrak{n}'$ un idéal premier de B' au-dessus de l'idéal $\mathfrak{n}B_{\mathfrak{n}}$. Si l'on pose $S=B-\mathfrak{n}$, de sorte que $A'=S^{-1}B$, B' est de la forme $S^{-1}C$, où C est une B-algèbre de présentation finie. Par suite C est une A-algèbre de présentation finie et A'' est de la forme $C_{\mathfrak{r}}$, où $\mathfrak{r}$ est un idéal premier de C au-dessus de l'idéal maximal de A. Comme A' est une A-algèbre formellement étale et A'' une A'-algèbre formellement étale, A'' est une A-algèbre formellement étale (pour les topologies discrètes (17.1.3)); le morphisme $\mathrm{Spec}(C) \to \mathrm{Spec}(A)$ est donc étale au point $\mathfrak{r}$ (17.6.1), et il y a par suite un élément $g \in C$ tel que C_g soit une A-algèbre étale, ce qui prouve que A'' est une A-algèbre essentiellement étale.

Étant donné un anneau local A, il existe un *ensemble* $\mathfrak{E}$ de A-algèbres locales essentiellement étales tel que toute A-algèbre locale essentiellement étale soit A-isomorphe à une algèbre appartenant à $\mathfrak{E}$. Il suffit évidemment pour le voir d'observer qu'il existe un ensemble $\mathfrak{F}$ de A-algèbres de type fini tel que toute A-algèbre de type fini soit isomorphe à une algèbre appartenant à $\mathfrak{F}$; on peut prendre $\mathfrak{F}$ égal à l'ensemble des quotients des algèbres de polynômes $A[T_1, \ldots, T_n]$ ($n \in \mathbf{N}$).

Dans ce qui suit, si A et B sont deux anneaux locaux, nous noterons $\mathrm{Hom.loc}(A, B)$ l'ensemble des homomorphismes *locaux* de A dans B.

Lemme **(18.6.2).** — *Soient* A, A' *deux anneaux locaux*, k, k' *leurs corps résiduels respectifs*, $\varphi : A \to A'$ *un homomorphisme (local) faisant de* A' *une* A-*algèbre essentiellement étale* (18.6.1) *et tel que l'homomorphisme correspondant* $k \to k'$ *soit bijectif. Alors, pour tout anneau local* hensélien B, *l'application canonique*

$$\mathrm{Hom}(\varphi, 1_B) : \mathrm{Hom.loc}(A', B) \to \mathrm{Hom.loc}(A, B)$$

est bijective.

Posons $S = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$, et soient s et y les points fermés de S et Y respectivement. Par hypothèse, A' est isomorphe à un anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ d'un S-schéma X étale sur S, en un point $x \in X$ au-dessus de s. Supposons donné un homomorphisme local $\psi : A \to B$, faisant de Y un S-schéma; il s'agit de voir qu'il existe *un et un seul* S-morphisme $f : Y \to X$ tel que $f(y) = x$. Posons $X' = X \times_S Y$, et notons que puisque $\boldsymbol{k}(x) = \boldsymbol{k}(s)$, il existe un seul point $x' \in X$ au-dessus de x et de y, et que $\boldsymbol{k}(x') = \boldsymbol{k}(y)$. Il faut prouver qu'il existe une seule Y-section f' de X' telle que $f'(y) = x'$. Or, le morphisme $g : X' \to Y$ est étale et séparé, et la fibre $X'_0 = g^{-1}(y)$ a pour anneau local au point x' le corps $\boldsymbol{k}(x') = \boldsymbol{k}(y)$. Si l'on pose $Y_0 = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$, il existe donc une unique Y_0-section f'_0 de X'_0 telle que $f'_0(y) = x'$, et la conclusion résulte de ce que B est supposé hensélien et de (18.5.11, *b*)).

Nous dirons qu'une A-algèbre locale A' vérifiant les conditions de (18.6.2) est *strictement essentiellement étale*. Notons que le critère (18.5.11, *b*)) signifie que, *pour que* A *soit hensélien, il faut et il suffit que toute* A-*algèbre strictement essentiellement étale soit* A-*isomorphe à* A.

Lemme **(18.6.3).** — *Soient* A *un anneau local*, A_1, A_2 *deux* A-*algèbres locales strictement essentiellement étales.*

(i) *Il existe au plus un* A-*homomorphisme (nécessairement local) de* A_1 *dans* A_2.

(ii) *Il existe une* A-*algèbre locale strictement essentiellement étale* A_3 *et deux* A-*homomorphismes* $A_1 \to A_3$, $A_2 \to A_3$.

Posons $S = \mathrm{Spec}(A)$; par hypothèse il y a deux S-schémas étales sur S, X_1, X_2, et deux points $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ au-dessus du point fermé s de S et tels que $A_1 = \mathcal{O}_{X_1, x_1}$, $A_2 = \mathcal{O}_{X_2, x_2}$. Posons $X_3 = X_1 \times_S X_2$; les hypothèses $\boldsymbol{k}(x_1) = \boldsymbol{k}(x_2) = \boldsymbol{k}(s)$ entraînent qu'il existe un seul point $x_3 \in X_3$ au-dessus de x_1 et x_2 et que $\boldsymbol{k}(x_3) = \boldsymbol{k}(s)$ (**I**, 3.4.9). En outre, X_3 est étale sur S (17.3.3), donc $A_3 = \mathcal{O}_{X_3, x_3}$ vérifie les conditions de (ii). Par ailleurs, on a vu qu'un A-homomorphisme de A_1 dans A_2 est nécessairement local; il correspond à un S-morphisme f de $X'_2 = \mathrm{Spec}(A_2)$ dans X_1 tel que $f(x_2) = x_1$, ou encore, en posant $X'_3 = X_1 \times_S X'_2$, à une X'_2-section f' de X'_3 telle que $f'(x_2) = x_3$. Comme $\boldsymbol{k}(x_3) = \boldsymbol{k}(x_2)$ et que X'_2 est connexe, l'unicité de f' résulte de (17.4.9), d'où (i).

(18.6.4) Désignons par $\mathfrak{S}$ le sous-ensemble de l'ensemble $\mathfrak{E}$ défini dans (18.6.1) formé des A-algèbres strictement essentiellement étales appartenant à $\mathfrak{E}$. Il résulte de (18.6.3) que la relation « il existe un A-homomorphisme de A_1 dans A_2 » est une relation de *préordre* dans $\mathfrak{S}$ et fait de $\mathfrak{S}$ un ensemble *filtrant croissant.* En indexant $\mathfrak{S}$ par lui-même au moyen de l'application identique, il résulte de (18.6.3, (i)) que si $\lambda \leqslant \mu$ dans $\mathfrak{S}$, il existe un A-homomorphisme *unique* $\varphi_{\mu\lambda} : A_\lambda \to A_\mu$ et $(A_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})$ est évidemment un *système inductif* de A-algèbres locales, les $\varphi_{\mu\lambda}$ étant des homomorphismes locaux. En outre, il résulte de (17.3.5) que pour $\lambda \leqslant \mu$, A_μ est une A_λ-algèbre strictement essentiellement étale.

Définition **(18.6.5).** — *On appelle hensélisé d'un anneau local* A *et on désigne par* ${}^hA$ *la* A-*algèbre limite inductive du système inductif* $(A_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})$ *défini dans* (18.6.4).

Cette définition ne dépend qu'en apparence du choix de $\mathfrak{E}$; si $\mathfrak{E}'$ est un autre ensemble de A-algèbres locales essentiellement étales ayant la même propriété que $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{S}'$ le sous-ensemble de $\mathfrak{E}'$ formé des A-algèbres strictement essentiellement étales, il résulte de (18.6.3, (ii)) que, pour les relations de préordre envisagées, $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ sont *cofinaux* à $\mathfrak{S}'' = \mathfrak{S} \cup \mathfrak{S}'$, donc donnent la même limite inductive à un isomorphisme près. Nous allons voir d'ailleurs ci-dessous (18.6.6, (i) et (ii)) que ${}^hA$ et l'homomorphisme canonique $A \to {}^hA$ forment une solution d'un problème universel, et par suite sont déterminés à isomorphisme unique près.

On remarquera que si A est un corps, on a évidemment ${}^hA = A$. Dans le cas général, ${}^hA$ est aussi le hensélisé de toutes les A-algèbres strictement essentiellement étales A_λ $(\lambda \in \mathfrak{S})$, car si B est une A_λ-algèbre strictement essentiellement étale, B est aussi une A-algèbre strictement essentiellement étale (18.6.1), donc (à un A-isomorphisme près) une des A_μ pour $\mu \geqslant \lambda$, et les A_μ telles que $\mu \geqslant \lambda$ et que A_μ soit une A_λ-algèbre strictement essentiellement étale forment un ensemble cofinal dans l'ensemble préordonné des A_λ, en vertu de (18.6.1) et (18.6.3).

Théorème **(18.6.6).** — *Soient* A *un anneau local,* ${}^hA$ *son hensélisé.*

(i) ${}^hA$ *est un anneau local hensélien et l'homomorphisme structural* $A \to {}^hA$ *est local.*

(ii) *Pour tout anneau local hensélien* B, *l'application canonique*

$$\mathrm{Hom.loc}({}^hA, B) \to \mathrm{Hom.loc}(A, B)$$

est bijective.

(iii) ${}^hA$ *est un* A-*module fidèlement plat, et si* $\mathfrak{m}$ *est l'idéal maximal de* A, $\mathfrak{m}.{}^hA$ *est l'idéal maximal de* ${}^hA$, *et l'homomorphisme* $A/\mathfrak{m}A \to {}^hA/\mathfrak{m}.{}^hA$ *des corps résiduels est bijective.*

(iv) *Si* $\hat{A}$ *et* $({}^hA)^\wedge$ *sont les séparés complétés des anneaux locaux* A *et* ${}^hA$, *l'homomorphisme* $\hat{A} \to ({}^hA)^\wedge$ *déduit de l'homomorphisme structural* $A \to {}^hA$ *par complétion est bijectif.*

(v) *Pour que* ${}^hA$ *soit noethérien, il faut et il suffit que* A *le soit.*

(vi) *Si* A *est hensélien, l'homomorphisme canonique* $A \to {}^hA$ *est bijectif.*

Soit $\mathfrak{m}_\lambda$ l'idéal maximal de A_λ; il résulte du fait que, dans (17.6.1), *a)* implique *c')*, que pour $\lambda \leqslant \mu$, on a $\mathfrak{m}_\mu = \mathfrak{m}_\lambda A_\mu$, l'homomorphisme $A_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda \to A_\mu/\mathfrak{m}_\mu$ est bijectif et A_μ est un A_λ-module plat. Le fait que ${}^hA$ soit local, que l'homomorphisme $A \to {}^hA$ soit local, l'assertion (iii) et la suffisance de (v) résultent donc de ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 10.3.1.3); la nécessité de (v) résulte de ce que ${}^hA$ est un A-module fidèlement plat ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.5.2).

Pour prouver que ${}^hA$ est hensélien, appliquons le critère (18.5.11, *b)*). Posons donc $S = \mathrm{Spec}({}^hA)$, $S_0 = \mathrm{Spec}({}^hA/\mathfrak{m}.{}^hA)$, et soit $g : S' \to S$ un morphisme étale; posons $S'_0 = g^{-1}(S_0)$, et soit $f_0 : S_0 \to S'_0$ une S_0-section de S'_0. Raisonnant comme dans (18.5.4), on peut supposer que g est de présentation finie. Il résulte alors de (8.8.2) et (17.7.5) qu'il existe un indice $\lambda \in S$, un morphisme étale $g_\lambda : S'^{(\lambda)} \to S^{(\lambda)} = \mathrm{Spec}(A_\lambda)$ et, si l'on pose $S_0^{(\lambda)} = \mathrm{Spec}(A_\lambda/\mathfrak{m}A_\lambda)$ et $S_0'^{(\lambda)} = g^{-1}(S_0^{(\lambda)})$, une $S_0^{(\lambda)}$-section $f_0^{(\lambda)} : S_0^{(\lambda)} \to S_0'^{(\lambda)}$ tels que $S' = S'^{(\lambda)} \times_{S(\lambda)} S$, $g = g^{(\lambda)} \times 1$ et $f_0 = f_0^{(\lambda)} \times 1$. Soient s le point fermé de S, $x = f_0(s)$, x_λ la projection de x dans $S'^{(\lambda)}$; comme x_λ est au-dessus du point fermé s_λ de $S^{(\lambda)}$, l'anneau local C_λ de $S'^{(\lambda)}$ au point x_λ est une A_λ-algèbre essentiellement étale; en outre, comme $f_0^{(\lambda)}(s_\lambda) = x_\lambda$, on a $\boldsymbol{k}(x_\lambda) = \boldsymbol{k}(s_\lambda)$, autrement dit, C_λ est une A_λ-algèbre locale strictement essentiellement étale, et par suite (18.6.1) est A_λ-isomorphe à une A-algèbre A_μ avec $\mu \geqslant \lambda$. Il y a donc un A_λ-homomorphisme $C_\lambda \to {}^hA$, c'est-à-dire un $S^{(\lambda)}$-morphisme $h : S \to S'^{(\lambda)}$ tel que $h(s) = x_\lambda$, et par suite il existe bien une S-section f de S' telle que $f(s) = x$, ce qui achève de prouver (i).

Pour prouver (ii), il suffit de noter que l'on a $\mathrm{Hom.loc}({}^hA, B) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom.loc}(A_\lambda, B)$ et que par (18.6.2) les homomorphismes canoniques $\mathrm{Hom.loc}(A_\lambda, B) \leftarrow \mathrm{Hom.loc}(A, B)$ sont bijectifs.

Pour démontrer (iv), notons que pour tout λ et tout entier $n > 0$, $\mathfrak{m}_\lambda^n = \mathfrak{m}^n A_\lambda$, et $(\mathfrak{m}.{}^hA)^n = \mathfrak{m}^n.{}^hA = \varinjlim \mathfrak{m}_\lambda^n$. On en conclut, par l'exactitude du foncteur $\varinjlim$ dans la catégorie des A-modules, que ${}^hA/(\mathfrak{m}.{}^hA)^n = \varinjlim (A_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda^n)$, et par suite, il suffit de montrer que, pour tout entier n, et tout indice λ, l'homomorphisme $A/\mathfrak{m}^n \to A_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda^n$ est bijectif. Or, cela est vrai par hypothèse pour $n = 1$; d'autre part, puisque A_λ est un A-module plat, on a

$$\mathfrak{m}_\lambda^n/\mathfrak{m}_\lambda^{n+1} = (\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) \otimes_A A_\lambda = (\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}) \otimes_{A/\mathfrak{m}} (A_\lambda/\mathfrak{m}A_\lambda)$$

et comme $A/\mathfrak{m} \to A_\lambda/\mathfrak{m}A_\lambda = A_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda$ est bijectif, l'homomorphisme $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \to \mathfrak{m}_\lambda^n/\mathfrak{m}_\lambda^{n+1}$ est lui aussi bijectif; la conclusion résulte donc de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 8, cor. 3 du th. 1.

Enfin, si A est hensélien, il résulte de la remarque qui précède (18.6.3) que les homomorphismes $A \to A_\lambda$ sont bijectifs, ce qui prouve (vi) par définition de ${}^hA$.

(18.6.7) Soient maintenant A un anneau *semi-local*, $\mathfrak{m}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ ses idéaux maximaux. On appelle *hensélisé* de A et l'on note encore ${}^hA$ l'anneau *produit* $\prod_i {}^h(A_{\mathfrak{m}_i})$ des hensélisés des anneaux locaux $A_{\mathfrak{m}_i}$. C'est un A-module fidèlement plat et une A-algèbre semi-locale, dont les idéaux maximaux sont les $\mathfrak{m}_i.{}^hA$ en vertu de (18.6.6, (iii)); en outre, si $\mathfrak{r} = \bigcap_i \mathfrak{m}_i$ est le radical de A, il résulte de ce qui précède que $\mathfrak{r}.{}^hA$

est le radical de ${}^h\mathrm{A}$ et que l'application canonique $\mathrm{A}/\mathfrak{r} \to {}^h\mathrm{A}/\mathfrak{r}.{}^h\mathrm{A}$ est bijective. Comme le séparé complété $\hat{\mathrm{A}}$ de A pour la topologie $\mathfrak{r}$-préadique est le produit des séparés complétés $\hat{\mathrm{A}}_{\mathfrak{m}_i}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, nº 13, prop. 18) l'homomorphisme canonique $\hat{\mathrm{A}} \to ({}^h\mathrm{A})^\wedge$ est bijectif par (18.6.6, (iv)), et il est clair par (18.6.6, (v)) que pour que ${}^h\mathrm{A}$ soit noethérien, il faut et il suffit que A le soit.

Pour obtenir l'analogue de la propriété universelle (18.6.6, (ii)), convenons, lorsque A et B sont deux anneaux *semi-locaux* de radicaux respectifs $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$, d'appeler homomorphisme *semi-local* de A dans B tout homomorphisme φ tel que $\varphi(\mathfrak{r}) \subset \mathfrak{s}$. Dans le cas particulier où B est un *produit* d'anneaux locaux B_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, la donnée d'un tel homomorphisme revient à celle de ses projections $\varphi_j : \mathrm{A} \to \mathrm{B}_j$, qui sont des homomorphismes soumis à la seule condition que $\varphi_j(\mathfrak{r}) \subset \mathfrak{n}_j$, où $\mathfrak{n}_j$ est l'idéal maximal de B_j. D'ailleurs, si $\mathfrak{m}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ sont les idéaux maximaux de A, l'idéal premier $\varphi_j^{-1}(\mathfrak{n}_j)$ doit contenir l'un des $\mathfrak{m}_i$ puisqu'il contient leur intersection $\mathfrak{r}$, donc il est égal à l'un des $\mathfrak{m}_i$ et φ_j se factorise en $\mathrm{A} \to \mathrm{A}_{\mathfrak{m}_i} \xrightarrow{\psi_{ij}} \mathrm{B}_j$, où ψ_{ij} est un homomorphisme *local*. Si $\mathrm{Hom.sloc}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ désigne l'ensemble des homomorphismes semi-locaux de A dans B, on peut donc identifier cet ensemble à $\prod_j (\bigcup_i \mathrm{Hom.loc}(\mathrm{A}_{\mathfrak{m}_i}, \mathrm{B}_j))$ dans le cas considéré; comme un anneau semi-local hensélien est produit direct d'anneaux locaux henséliens, on voit que la propriété universelle (18.6.6, (ii)) est encore valable pour un anneau semi-local A, lorsqu'on y remplace les homomorphismes locaux par les homomorphismes semi-locaux.

Proposition **(18.6.8)**. — *Soient* A *un anneau semi-local,* B *une* A*-algèbre semi-locale et entière sur* A. *Alors* $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} ({}^h\mathrm{A})$ *est une* B*-algèbre semi-locale isomorphe à* ${}^h\mathrm{B}$.

Comme $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} ({}^h\mathrm{A})$ est entier au-dessus de ${}^h\mathrm{A}$, chacun de ses idéaux maximaux est au-dessus d'un des idéaux maximaux de ${}^h\mathrm{A}$, donc au-dessus d'un idéal maximal de A, et comme B est entière sur A, les idéaux premiers de B au-dessus d'un idéal maximal de A sont des idéaux maximaux de B, si bien que finalement un idéal maximal de $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} ({}^h\mathrm{A})$ a pour projections dans $\mathrm{Spec}({}^h\mathrm{A})$ et $\mathrm{Spec}(\mathrm{B})$ des idéaux maximaux; compte tenu de (18.6.6, (iii)) et de (**I**, 3.4.9), on conclut que l'anneau $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} ({}^h\mathrm{A})$ est semi-local. En outre, pour tout anneau local hensélien C, $\mathrm{Hom.sloc}(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} ({}^h\mathrm{A}), \mathrm{C})$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des couples (φ, ψ) d'homomorphismes semi-locaux $\varphi : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$, $\psi : {}^h\mathrm{A} \to \mathrm{C}$ tels que les composés $\mathrm{A} \to \mathrm{B} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{C}$, $\mathrm{A} \to {}^h\mathrm{A} \xrightarrow{\psi} \mathrm{C}$ soient égaux. Mais en vertu de la correspondance biunivoque entre $\mathrm{Hom.sloc}(\mathrm{A}, \mathrm{C})$ et $\mathrm{Hom.sloc}({}^h\mathrm{A}, \mathrm{C})$ on voit que pour tout $\varphi \in \mathrm{Hom.sloc}(\mathrm{B}, \mathrm{C})$ il existe un ψ et un seul ayant la propriété précédente, donc l'application $\mathrm{Hom.sloc}(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} ({}^h\mathrm{A}), \mathrm{C}) \to \mathrm{Hom.sloc}(\mathrm{B}, \mathrm{C})$ est bijective, ce qui prouve la proposition en vertu de l'unicité de la solution d'un problème universel.

Théorème **(18.6.9)**. — *Soit* A *un anneau semi-local.*

(i) *Pour que* ${}^h\mathrm{A}$ *soit réduit* (resp. *normal*), *il faut et il suffit que* A *le soit.*

(ii) *Supposons* A *noethérien. Alors, pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A, *l'anneau* $({}^h\mathrm{A})_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}.({}^h\mathrm{A})_{\mathfrak{p}}$ *est composé direct d'un nombre fini d'extensions algébriques séparables de* $\boldsymbol{k}(\mathfrak{p})$ (ce qui entraîne que les fibres du morphisme canonique $\mathrm{Spec}({}^h\mathrm{A}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ sont *géométriquement régulières*).

(i) Comme ${}^h\mathrm{A}$ est un A-module fidèlement plat, il résulte de (2.1.13) que si ${}^h\mathrm{A}$ est réduit (resp. normal), il en est de même de A. Pour prouver la réciproque, on peut se borner au cas où l'anneau A est local, de sorte qu'avec les notations de (18.6.4), on a ${}^h\mathrm{A}=\varinjlim \mathrm{A}_\alpha$. Or, il résulte de la définition des A_α et de (17.5.7) que si A est réduit (resp. intègre et intégralement clos), il en est de même des A_α; en outre, les homomorphismes $\mathrm{A}_\alpha \to \mathrm{A}_\beta$ pour $\alpha \leqslant \beta$ sont injectifs en vertu de $(\mathbf{0}_\mathrm{I}, 6.5.1)$ puisque A_β est un A_α-module fidèlement plat; donc les morphismes $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}_\beta) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_\alpha)$ sont dominants, et on conclut de (5.13.2) (resp. (5.13.4)) que ${}^h\mathrm{A}$ est réduit (resp. intègre et intégralement clos).

(ii) On peut se borner au cas où A est local. En vertu du fait que le foncteur $\varinjlim$ permute au produit tensoriel, la fibre du morphisme $\mathrm{Spec}({}^h\mathrm{A}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ en un point $\mathfrak{p}$ est limite inductive des fibres des morphismes $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}_\alpha) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ en ce point. Comme ${}^h\mathrm{A}$ est noethérien, on voit, compte tenu de (17.6.2), que l'on est ramené à prouver le lemme suivant :

Lemme **(18.6.9.1)**. — *Soient* (B_α) *un système inductif d'anneaux artiniens,* $\mathrm{B}=\varinjlim \mathrm{B}_\alpha$ *sa limite inductive. Si* B *est noethérien, alors* B *est artinien ; si de plus, pour* $\alpha \leqslant \beta$, *les homomorphismes* $\varphi_{\beta\alpha} : \mathrm{B}_\alpha \to \mathrm{B}_\beta$ *sont injectifs, alors il existe* λ *tel que, pour* $\alpha \geqslant \lambda$ *le nombre des composants locaux* $\mathrm{B}_\alpha^{(i)}$ *de* B_α *soit constant, que* $\varphi_{\beta\alpha}(\mathrm{B}_\alpha^{(i)}) \subset \mathrm{B}_\beta^{(i)}$ *pour tout* i *et que les* $\mathrm{B}^{(i)}=\varinjlim \mathrm{B}_\alpha^{(i)}$ *soient les composants locaux de* B.

Soient en effet $\mathrm{Y}_\alpha=\mathrm{Spec}(\mathrm{B}_\alpha)$, $\mathrm{Y}=\mathrm{Spec}(\mathrm{B})$, qui, en tant qu'espace topologique, est égal à $\varprojlim \mathrm{Y}_\alpha$ (8.2.10). Les espaces Y_α sont finis et discrets; en outre, si les $\varphi_{\beta\alpha}$ sont injectifs, les morphismes canoniques $\mathrm{Y}_\beta \to \mathrm{Y}_\alpha$ sont dominants, donc surjectifs. Le lemme résultera donc du lemme purement topologique suivant :

Lemme **(18.6.9.2)**. — *Soit* $(\mathrm{Y}_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$ *un système projectif d'espaces topologiques finis et discrets. Si* $\mathrm{Y}=\varprojlim \mathrm{Y}_\alpha$ *est noethérien,* Y *est fini et discret. Si de plus les* $\psi_{\alpha\beta}$ *sont surjectifs, il existe* λ *tel que pour* $\alpha \geqslant \lambda$, *le nombre d'éléments de* Y_α *soit constant et égal au nombre d'éléments de* Y.

En effet, Y étant compact et noethérien, toute partie de Y est compacte, donc fermée, ce qui implique que Y est discret, donc fini puisqu'il est compact. Si de plus les $\psi_{\alpha\beta}$ sont surjectifs, il en est de même de $\psi_\alpha : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}_\alpha$, donc $\mathrm{Card}(\mathrm{Y}) \geqslant \mathrm{Card}(\mathrm{Y}_\alpha)$, et comme $\mathrm{Card}(\mathrm{Y}_\alpha)$ est fonction croissante de α, il existe λ tel que pour $\alpha \geqslant \lambda$, $\mathrm{Card}(\mathrm{Y}_\alpha)=\mathrm{Card}(\mathrm{Y}_\lambda)$; les $\psi_{\alpha\beta}$ sont alors bijectifs pour $\alpha \geqslant \lambda$ et on a donc $\mathrm{Card}(\mathrm{Y})=\mathrm{Card}(\mathrm{Y}_\lambda)$.

Corollaire **(18.6.10)**. — *Soit* A *un anneau local noethérien. Pour que* ${}^h\mathrm{A}$ *possède une des propriétés suivantes :*

a) *être un anneau de Cohen-Macaulay* (**0**, 16.5.3) ;

b) *vérifier la propriété* (S_n) (5.7.3) ;

c) *être régulier ;*

d) *vérifier la propriété* (R_n) (5.8.2) ;

il faut et il suffit que A *possède cette même propriété.*

Cela résulte aussitôt de ce que les fibres du morphisme $\mathrm{Spec}({}^h\mathrm{A}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ sont géométriquement régulières (18.6.9) et de (6.4.1), (6.5.1) et (6.5.3).

Corollaire (**18.6.11**). — *Soit* A *un anneau semi-local noethérien. Pour qu'un idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* ${}^h\mathrm{A}$ *appartienne à* $\mathrm{Ass}({}^h\mathrm{A})$, *il faut et il suffit que* $\mathfrak{p} \cap \mathrm{A}$ *appartienne à* $\mathrm{Ass}(\mathrm{A})$.

Compte tenu de la description des fibres du morphisme $\mathrm{Spec}({}^h\mathrm{A}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, cela résulte aussitôt de (3.3.1).

Proposition (**18.6.12**). — *Soit* A *un anneau local; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) A *est unibranche* (**0**, 23.2.1) (resp. *réduit et unibranche*).

b) *Pour toute* A-*algèbre locale strictement essentiellement étale* A′, Spec(A′) *est irréductible* (resp. *intègre*).

c) $\mathrm{Spec}({}^h\mathrm{A})$ *est irréductible* (resp. *intègre*).

Notons d'abord que ${}^h(\mathrm{A}_{\mathrm{red}}) = ({}^h\mathrm{A})_{\mathrm{red}}$, car ${}^h(\mathrm{A}_{\mathrm{red}}) = ({}^h\mathrm{A}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}_{\mathrm{red}}$ (18.6.8), et comme ${}^h(\mathrm{A}_{\mathrm{red}})$ est réduit (18.6.9), il est égal à $({}^h\mathrm{A})_{\mathrm{red}}$. Ceci permet, dans la démonstration, de considérer seulement le cas où A est *réduit*, donc aussi A′ (17.5.7) et ${}^h\mathrm{A}$ (18.6.9).

Avec les notations de (18.6.4), la condition *b)* signifie que tous les A_α sont intègres; on en conclut que ${}^h\mathrm{A} = \varinjlim \mathrm{A}_\alpha$ est intègre (5.13.3), donc *b)* entraîne *c)*.

Il est clair que si ${}^h\mathrm{A}$ est intègre, il en est de même des $\mathrm{A}_\alpha \subset {}^h\mathrm{A}$, donc *c)* entraîne *b)*. Montrons que *c)* entraîne *a)*. Notons d'abord que $\mathrm{A} \subset {}^h\mathrm{A}$ est intègre; soient K et L les corps des fractions de A et ${}^h\mathrm{A}$ respectivement. Il suffit de voir que pour toute A-algèbre *finie* $\mathrm{B} \subset \mathrm{K}$, B est un anneau local. Or B est un anneau semi-local, dont le hensélisé est donc $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} ({}^h\mathrm{A})$ (18.6.8). Par platitude, $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} ({}^h\mathrm{A})$ s'identifie à un sous-anneau de $\mathrm{K} \otimes_{\mathrm{A}} ({}^h\mathrm{A})$ et ce dernier à un sous-anneau de L, donc ${}^h\mathrm{B}$ est intègre. Mais comme ${}^h\mathrm{B}$ est un anneau semi-local hensélien, il est composé direct d'anneaux locaux (18.5.9), donc ne peut être intègre que s'il est local, ce qui entraîne bien que B est local.

Prouvons enfin que *a)* implique *c)*. Soit C la clôture intégrale de l'anneau intègre A. Comme C est un anneau local par hypothèse, $\mathrm{C} \otimes_{\mathrm{A}} ({}^h\mathrm{A})$ est le hensélisé de C (18.6.8), donc est intègre et intégralement clos (18.6.9). Comme A est un sous-anneau de C, ${}^h\mathrm{A}$ s'identifie à un sous-anneau de ${}^h\mathrm{C}$ par platitude, donc est lui aussi intègre, ce qui achève la démonstration.

Corollaire (**18.6.13**). — *Soit* A *un anneau local hensélien. Alors, pour que* A *soit unibranche, il faut et il suffit que* $\mathrm{A}_{\mathrm{red}}$ *soit intègre.*

Proposition (**18.6.14**). — (i) *Toute limite inductive filtrante d'anneaux locaux henséliens (où les homomorphismes de transition sont locaux) est un anneau local hensélien.*

(ii) *Le foncteur* $\mathrm{A} \rightsquigarrow {}^h\mathrm{A}$ *dans la catégorie des anneaux locaux (où les morphismes sont les homomorphismes locaux) commute aux limites inductives filtrantes.*

(iii) *Tout anneau local hensélien* A *est limite inductive d'un système inductif filtrant d'anneaux locaux henséliens et noethériens* A_λ *(les homomorphismes de transition* $\mathrm{A}_\lambda \to \mathrm{A}_\mu$ *étant locaux).*

(i) Soit (A_λ) un système inductif filtrant d'anneaux locaux henséliens, où les homomorphismes de transition sont locaux. Montrons que $\mathrm{A}' = \varinjlim \mathrm{A}_\lambda$, qui est local ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 10.3.1.3) est hensélien. Or, soient C une A′-algèbre étale, $\mathfrak{n}$ un idéal premier de C au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{m}'$ de A', tel que $C_{\mathfrak{n}}$ soit strictement essentiellement étale sur A' (18.6.1), autrement dit que $\boldsymbol{k}(\mathfrak{m}')\rightarrow\boldsymbol{k}(\mathfrak{n})$ soit un isomorphisme. En vertu de (8.8.2, (ii)) et de (17.7.8), il existe un indice λ et une A_λ-algèbre étale C_λ tels que $C=C_\lambda\otimes_{A_\lambda}A'$ à isomorphisme près; en outre, si $\mathfrak{n}_\lambda$ est l'image réciproque de $\mathfrak{n}$ dans C_λ, et $\mathfrak{m}_\lambda$ l'idéal maximal de A_λ, on peut, en vertu de (8.8.2.4) et de la transitivité des fibres (**I**, 3.6.4), supposer que $(C_\lambda)_{\mathfrak{n}_\lambda}$ est strictement essentiellement étale sur A_λ; puisque A_λ est hensélien, $(C_\lambda)_{\mathfrak{n}_\lambda}$ est nécessairement isomorphe à A_λ (18.5.11, *b)*); il existe par suite un voisinage de $\mathfrak{n}_\lambda$ dans $\mathrm{Spec}(C_\lambda)$ isomorphe à $\mathrm{Spec}(A_\lambda)$ (**I**, 6.5.4); on en conclut qu'il y a un voisinage de $\mathfrak{n}$ dans Spec(C) isomorphe à Spec(A'), donc que $C_{\mathfrak{n}}$ est isomorphe à A', ce qui prouve que A' est hensélien (18.6.2) et achève la démonstration.

(ii) Supposons que $B=\varinjlim B_\lambda$, où les B_λ sont des anneaux locaux, les homomorphismes de transition $B_\lambda\rightarrow B_\mu$ $(\lambda\leqslant\mu)$ étant locaux. Posons $A_\lambda={}^hB_\lambda$; les A_λ sont des anneaux locaux henséliens (18.6.6, (vi)), et en vertu de (18.6.6, (ii)) les homomorphismes de transition $B_\lambda\rightarrow B_\mu$ déterminent de façon unique des homomorphismes locaux $A_\lambda\rightarrow A_\mu$, de sorte que (A_λ) est un système inductif. Tout revient à voir que $A'=\varinjlim A_\lambda$ est canoniquement isomorphe à $A={}^hB$. En vertu de (18.6.6, (ii)) et de la définition des limites inductives, on a, pour tout anneau local hensélien E,

$$\mathrm{Hom.loc}(A', E)=\varprojlim \mathrm{Hom.loc}(A_\lambda, E)=\varprojlim \mathrm{Hom.loc}(B_\lambda, E)=\mathrm{Hom.loc}(B, E).$$

Mais comme A' est hensélien par (i), cela prouve notre assertion.

(iii) L'anneau A est limite inductive filtrante de ses sous-anneaux locaux noethériens B_λ, les homomorphismes de transition étant locaux (5.13.3, (iii)). Comme les ${}^hB_\lambda$ sont des anneaux locaux henséliens et noethériens (18.6.6, (v)) et que $A={}^hA$ (18.6.6, (vi)), il suffit d'appliquer (ii) au système inductif (B_λ).

Corollaire (**18.6.15**). — *Soient* A *un anneau local hensélien,* X *un* A*-préschéma de présentation finie sur* A. *Il existe alors un anneau local noethérien et hensélien* A_0, *un homomorphisme local* $A_0\rightarrow A$, *un préschéma* X_0 *de type fini sur* A_0 *et un* A*-isomorphisme* $X_0\otimes_{A_0}A\xrightarrow{\sim}X$.

Cela résulte de (18.6.14) et de (8.8.2, (ii)).

18.7. Hensélisation et anneaux excellents.

(**18.7.1**) Nous désignerons dans ce numéro par $\boldsymbol{P}(Z, k)$ une propriété de la forme considérée dans (7.3.1), où nous supposons en outre que la propriété $\boldsymbol{Q}(A, k)$ satisfait à la condition suivante :

Pour toute extension algébrique séparable k' de k, et toute k'-algèbre locale noethérienne A, la propriété $\boldsymbol{Q}(A, k)$ est *équivalente* à $\boldsymbol{Q}(A, k')$.

Il est immédiat que toutes les propriétés $\boldsymbol{P}$ considérées dans (7.3.8) vérifient la condition précédente, compte tenu du fait que si K est une extension finie de k, $k'\otimes_k K$ est composé direct d'extensions algébriques séparables de K.

Proposition **(18.7.2).** — *Soit* A *un anneau local noethérien. Pour que* ^{h}A *soit un* $\boldsymbol{P}$*-anneau* (7.3.13), *il faut et il suffit que* A *le soit.*

En effet, en vertu de (18.6.6, (iv)), le complété $\hat{A}$ de A est aussi le complété de ^{h}A et l'on a donc $A \subset {}^hA \subset \hat{A}$. D'après (18.6.9), pour tout $x \in \mathrm{Spec}(A)$, la fibre en x du morphisme $\mathrm{Spec}({}^hA) \to \mathrm{Spec}(A)$ est discrète et finie, et en chacun des points y_i de cette fibre, $\boldsymbol{k}(y_i)$ est une extension algébrique séparable de $\boldsymbol{k}(x)$. La fibre formelle de A au point x est donc un préschéma *somme* des fibres formelles de ^{h}A aux points y_i. La conclusion résulte alors de l'hypothèse faite sur $\boldsymbol{P}$ dans (18.7.1).

Corollaire **(18.7.3).** — *Soit* A *un anneau local noethérien. Pour que* ^{h}A *soit universellement japonais, il faut et il suffit que* A *le soit.*

En effet, pour un anneau local noethérien B, il revient au même de dire que B est universellement japonais, ou que les fibres formelles de B sont géométriquement réduites (7.6.4 et 7.7.1); la conclusion résulte donc de (18.7.2).

Corollaire **(18.7.4).** — *Soit* A *un anneau local noethérien. Pour que les fibres formelles de* ^{h}A *soient géométriquement régulières, il faut et il suffit que celles de* A *le soient.*

C'est un cas particulier de (18.7.2).

Proposition **(18.7.5).** — *Soit* A *un anneau local noethérien. Si* A *est universellement caténaire* (5.6.2) (resp. *formellement caténaire* (7.1.9), resp. *strictement formellement caténaire* (7.2.6)), *il en est de même de* ^{h}A.

Avec les notations de (18.6.4), si A est universellement caténaire, il en est de même des A_α, qui sont des A-algèbres essentiellement de type fini (5.6.3). Pour prouver que dans ce cas ^{h}A est universellement caténaire, il suffira donc d'établir le lemme suivant :

Lemme **(18.7.5.1).** — *Soit* $(B_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ *un système inductif d'anneaux noethériens et supposons que, pour* $\alpha \leqslant \beta$, $\varphi_{\beta\alpha}$ *fasse de* B_β *un* B_α*-module fidèlement plat et que* $B = \varinjlim B_\alpha$ *soit noethérien. Alors, si les* B_α *sont caténaires* (resp. *universellement caténaires*), *il en est de même de* B.

Dire que B est universellement caténaire équivaut à dire que $B[T_1, \ldots, T_n]$ est caténaire pour tout n (5.6.2), et il est immédiat que le système inductif $(B_\alpha[T_1, \ldots, T_n])$ vérifie les mêmes conditions que (B_α); il suffit donc de prouver que si les B_α sont caténaires, il en est de même de B. Si $\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{p}_r$ est une chaîne saturée d'idéaux premiers de B, les images réciproques $\mathfrak{p}_{0\alpha} \supset \mathfrak{p}_{1\alpha} \supset \ldots \supset \mathfrak{p}_{r\alpha}$ de ces idéaux dans B_α forment une chaîne d'idéaux premiers, et il sufffit de montrer que pour α assez grand, cette chaîne est *saturée*. Or, chaque $\mathfrak{p}_i$ est un idéal de type fini, donc il existe un λ tel que, pour $\alpha \geqslant \lambda$, on ait $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_{i\alpha}.B$. On a donc $1 = \mathrm{codim}(V(\mathfrak{p}_i), V(\mathfrak{p}_{i+1})) = \mathrm{codim}(V(\mathfrak{p}_{i\alpha}), V(\mathfrak{p}_{i+1,\alpha}))$ puisque B est un B_α-module plat ((6.1.4) et $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 6.2.3)$), ce qui achève de prouver le lemme.

Supposons maintenant A formellement caténaire. Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier de ^{h}A, $\mathfrak{q}$ son image réciproque dans A, de sorte que $\mathfrak{q}.{}^hA \subset \mathfrak{p}$, et par suite ${}^hA/\mathfrak{p}$ est un anneau quotient de ${}^hA/\mathfrak{q}.{}^hA$. Il suffit donc de prouver que ${}^hA/\mathfrak{q}.{}^hA$ est formellement caténaire pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de A (7.1.9), et comme ${}^hA/\mathfrak{q}.{}^hA = {}^h(A/\mathfrak{q})$ par (18.6.8), il suffit (7.1.11) de voir que si A est *intègre* et formellement caténaire, ^{h}A est *formellement équidimensionnel.* Mais comme le complété de ^{h}A est égal à $\hat{A}$, cela résulte de l'hypothèse que A est formellement caténaire.

Supposons enfin A strictement formellement caténaire; alors on vient de voir que ${}^h\mathrm{A}$ est formellement caténaire, et il reste à prouver que les fibres du morphisme $\mathrm{Spec}(\hat{\mathrm{A}}) \to \mathrm{Spec}({}^h\mathrm{A})$ vérifient la propriété (S_1) (7.2.5, *b)*). Mais cela résulte de l'hypothèse sur A et de (18.7.2) appliqué au cas où $\boldsymbol{P}(\mathrm{Z}, k)$ est la propriété (S_1) pour Z.

Corollaire **(18.7.6)**. — *Si un anneau local noethérien* A *est excellent* (7.8.2), *il en est de même de* ${}^h\mathrm{A}$.

Remarque **(18.7.7)**. — Il peut se faire que ${}^h\mathrm{A}$ soit un anneau local excellent sans que A soit universellement caténaire (ni par suite excellent). Pour le voir, reprenons l'exemple de l'anneau A de (5.6.11), avec les mêmes notations. L'anneau E construit dans (5.6.11) est excellent lorsque k_0 est de caractéristique 0 (7.8.3, (ii) et (iii)); considérons deux anneaux E_1, E_2 isomorphes à E, et « recollons » $\mathrm{Spec}(\mathrm{E}_1)$ et $\mathrm{Spec}(\mathrm{E}_2)$ de sorte que si $\mathfrak{m}_i$ et $\mathfrak{m}'_i$ sont les idéaux maximaux de E_i $(i=1, 2)$ correspondant à $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$, le point $\mathfrak{m}_1$ soit « recollé » à $\mathfrak{m}'_2$ et le point $\mathfrak{m}_2$ à $\mathfrak{m}'_1$; de façon précise, si ε_i et ε'_i sont les homomorphismes canoniques de E_i sur $\boldsymbol{k}(\mathfrak{m}_i)$ et $\boldsymbol{k}(\mathfrak{m}'_i)$ $(i=1, 2)$, le schéma obtenu est Spec(R), où R est le sous-anneau de $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ formé des couples (x_1, x_2) tels que $\varepsilon'_2(x_2)=\sigma(\varepsilon_1(x_1))$ et $\varepsilon'_1(x_1)=\sigma(\varepsilon_2(x_2))$. On vérifie aisément (par exemple à l'aide de (17.6.3)) que R est une C-algèbre finie et étale, et qu'il y a deux idéaux maximaux $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ de R au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{n}$ de C, les complétés de $\mathrm{R}_{\mathfrak{r}_1}$ et $\mathrm{R}_{\mathfrak{r}_2}$ étant canoniquement isomorphes à celui de $\mathrm{A}=\mathrm{C}_{\mathfrak{n}}$; $\mathrm{R}_{\mathfrak{r}_1}$ est donc une A-algèbre strictement essentiellement étale, et par suite son hensélisé est égal à ${}^h\mathrm{A}$. En outre, on a vu (7.8.4, (ii)) que les fibres formelles de A sont géométriquement régulières, donc il en est de même de celles de ${}^h\mathrm{A}$ (18.7.2). Enfin, l'anneau R est universellement caténaire, car ses quotients par ses deux idéaux premiers minimaux sont isomorphes à E, d'où la conclusion par (5.6.3, (iii)). L'anneau $\mathrm{R}_{\mathfrak{r}_1}$ est donc excellent, et il en est par suite de même de ${}^h\mathrm{A}$ (18.7.6), alors que A n'est pas universellement caténaire.

18.8. Anneaux strictement locaux et hensélisation stricte.

Proposition **(18.8.1)**. — *Soit* A *un anneau local. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) A *est un anneau hensélien et son corps résiduel k est séparablement clos.*

b) A *est un anneau hensélien et tout revêtement étale de* $\mathrm{S}=\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ *est trivial.*

c) *Pour tout morphisme étale* $f:\mathrm{X}\to\mathrm{S}$ *et tout point* $x\in\mathrm{X}$ *tel que* $f(x)$ *soit le point fermé s de* S, *il existe une* S-*section* $u:\mathrm{S}\to\mathrm{X}$ *de* X *telle que* $u(s)=x$.

L'hypothèse *c)* implique que pour tout morphisme étale $f:\mathrm{X}\to\mathrm{S}$, les corps résiduels aux points de $f^{-1}(s)$ sont tous isomorphes à k, et en outre que la condition *b)* de (18.5.11) est vérifiée. Donc A est hensélien, et le fait que tout revêtement étale de S est trivial résulte de (18.2.10, (ii)); donc *c)* implique *b)*. Comme les revêtements étales de Spec(k) sont triviaux si et seulement si k est séparablement clos, *b)* implique *a)* en vertu de (18.5.11, *b)*). Enfin, il résulte aussi de (18.5.11, *b)*) que *a)* implique *c)*.

Définition **(18.8.2)**. — *On dit qu'un anneau local est un anneau* strictement local *s'il vérifie les conditions équivalentes de* (18.8.1). *On appelle schéma* strictement local *un schéma isomorphe au spectre d'un anneau strictement local.*

Remarque **(18.8.3)**. — Les conditions de (18.8.1) sont encore équivalentes à la suivante :

d) *Pour tout morphisme localement de type fini* $f:\mathrm{X}\to\mathrm{S}$ *et tout point* $x\in\mathrm{X}$ *tel que* $f(x)$ *soit le point fermé s de* S *et que* $\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}$ *soit un corps, extension finie séparable de* $\boldsymbol{k}(s)=k$, *il existe un voisinage ouvert* U *de x dans* X *tel que* $f|\mathrm{U}$ *soit une immersion fermée.*

(On notera que l'hypothèse de *d)* est vérifiée si f est *formellement non ramifié* au point x (17.4.1.2).)

Nous laissons au lecteur la démonstration, qui est substantiellement la même que celle de (18.5.18).

Lemme **(18.8.4)**. — *Soient* A, A' *deux anneaux locaux*, $\varphi : A \to A'$ *un homomorphisme local faisant de* A' *une* A-*algèbre essentiellement étale* (18.6.1). *Alors, pour tout anneau strictement local* B, *tout homomorphisme local* $\psi : A \to B$ *et tout homomorphisme de* $\boldsymbol{k}(A)$-*algèbres* $\alpha : \boldsymbol{k}(A') \to \boldsymbol{k}(B)$, *il existe un et un seul homomorphisme local* $\psi' : A' \to B$ *tel que* $\psi = \psi' \circ \varphi$ *et que* α *soit égal à l'homomorphisme* $\overline{\psi'}$ *déduit de* ψ' *par passage aux quotients.*

Avec les notations de (18.6.2), l'homomorphisme α correspond à un $\boldsymbol{k}(s)$-morphisme $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y)) \to \mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(x))$, donc à un point x' bien déterminé dans X' au-dessus de y. L'existence de la Y-section f' de X' telle que $f'(y) = x'$ résulte donc de (18.8.1, *c)*) puisque f' est étale et B strictement local, et son unicité résulte de ce que f' est séparé et de (17.4.9).

Lemme **(18.8.5)**. — *Soient* A *un anneau local*, A_1, A_2 *deux* A-*algèbres locales essentiellement étales*, K *un corps, extension de* $\boldsymbol{k}(A)$.

(i) *Pour tout* $\boldsymbol{k}(A)$-*homomorphisme* $\gamma : \boldsymbol{k}(A_1) \to \boldsymbol{k}(A_2)$, *il existe au plus un* A-*homomorphisme (nécessairement local)* $\psi : A_1 \to A_2$ *tel que* γ *soit l'homomorphisme* $\overline{\psi}$ *déduit de* ψ *par passage aux quotients.*

(ii) *Pour tout couple de* A-*homomorphismes locaux* $\beta_1 : A_1 \to K$, $\beta_2 : A_2 \to K$ *il existe une* A-*algèbre locale essentiellement étale* A_3, *deux* A-*homomorphismes* $\varphi_1 : A_1 \to A_3$, $\varphi_2 : A_2 \to A_3$ *et un* A-*homomorphisme* $\beta : A_3 \to K$ *tels que* $\beta_1 = \beta \circ \varphi_1$ *et* $\beta_2 = \beta \circ \varphi_2$.

Avec les notations de (18.6.3), les homomorphismes β_1, β_2 dans (ii) correspondent à deux S-morphismes $\mathrm{Spec}(K) \to X_1$, $\mathrm{Spec}(K) \to X_2$, d'images respectives x_1, x_2; on en déduit un S-morphisme bien déterminé $\mathrm{Spec}(K) \to X_3$ (**I**, 3.2.1) d'image x_3 au-dessus de x_1 et x_2; la A-algèbre $A_3 = \mathcal{O}_{X_3, x_3}$ et l'homomorphisme $A_3 \to K$ correspondant à ces données répondent aux conditions de (ii). D'autre part, la donnée de γ dans (i) correspond à un S-morphisme $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(x_2)) \to \mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(x_1))$ ou encore à un point x'_3 de X'_3 au-dessus de x_2; l'unicité de ψ résulte de l'unicité d'une X'_2-section de X'_3 passant par x'_3 (17.4.9).

(18.8.6) Soient A un anneau local, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, k son corps résiduel, Ω une *clôture séparable* de k. Considérons l'ensemble $\mathfrak{E}$ de A-algèbres essentiellement étales défini dans (18.6.1), et désignons par L l'ensemble des A-*homomorphismes locaux* $A' \to \Omega$, où A' parcourt $\mathfrak{E}$; on notera qu'un tel homomorphisme se factorise en $\lambda : A' \to \boldsymbol{k}(A') \xrightarrow{\omega_\lambda} \Omega$, où $\omega_\lambda : \boldsymbol{k}(A') \to \Omega$ est un k-homomorphisme (puisque $\mathfrak{m}A'$ est l'idéal maximal de A'); inversement la donnée d'un tel homomorphisme ω_λ détermine uniquement un homomorphisme $\lambda \in L$. Pour tout $\lambda \in L$, nous désignerons par A_λ la A-algèbre essentiellement étale appartenant à $\mathfrak{E}$ sur laquelle λ est défini. L'ensemble L est *préordonné* par la relation « il existe un A-homomorphisme $\varphi_{\mu\lambda} : A_\lambda \to A_\mu$ tel que $\lambda = \mu \circ \varphi_{\mu\lambda}$ », et il résulte de (18.8.5, (i)) que cet homomorphisme $\varphi_{\mu\lambda}$ est *unique*. En outre, L est *filtrant croissant* pour la relation de préordre précédente (que l'on note encore $\lambda \leqslant \mu$), en vertu de (18.8.5, (ii)). Il est clair que $(A_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})$ est un *système inductif* de A-algèbres locales, les $\varphi_{\mu\lambda}$ étant des homomorphismes locaux; en outre, il résulte de (17.3.5) que pour $\lambda \leqslant \mu$, A_μ est une A_λ-algèbre essentiellement étale. Si $\overline{\varphi}_{\mu\lambda} : \boldsymbol{k}(A_\lambda) \to \boldsymbol{k}(A_\mu)$ est le k-homomorphisme déduit de $\varphi_{\mu\lambda}$ par passage aux quotients, $(\boldsymbol{k}(A_\lambda), \overline{\varphi}_{\mu\lambda})$ est un *système inductif* d'extensions algébriques séparables de k, et les $\omega_\lambda : \boldsymbol{k}(A_\lambda) \to \Omega$ forment un système inductif de k-homomorphismes. En outre, la limite inductive

(18.8.6.1) $$\omega : \varinjlim \boldsymbol{k}(A_\lambda) \to \Omega$$

est un *k-isomorphisme*. Il suffit en effet de prouver que pour toute extension finie séparable k' de k, il existe une A-algèbre essentiellement étale A′ telle que k' soit le corps résiduel de A′ et que l'homomorphisme $k \to k'$ se déduise de $A \to A'$ par passage aux quotients. Mais cela résulte de (18.1.1) appliqué aux morphismes étales, compte tenu de ce que Spec(A) est le seul voisinage de son point fermé.

Notons maintenant que si $\mathfrak{m}_\lambda$ est l'idéal maximal de A_λ, il résulte de (17.6.1) que pour $\lambda \leqslant \mu$, on a $\mathfrak{m}_\mu = \mathfrak{m}_\lambda A_\mu$ et que A_μ est un A_λ-module plat. Donc il résulte de ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 10.3.1.3) que l'anneau $\varinjlim A_\lambda$ est *local*, que l'homomorphisme canonique $w : A \to \varinjlim A_\lambda$ est local, et que l'on a un k-isomorphisme canonique

$$\varinjlim \boldsymbol{k}(A_\lambda) \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{k}(\varinjlim A_\lambda);$$

identifiant ces deux corps, on en déduit un *k-isomorphisme canonique*

(18.8.6.2) $$\omega^{-1} : \Omega \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{k}(\varinjlim A_\lambda).$$

Définition **(18.8.7)**. — *Soient* A *un anneau local,* $k = \boldsymbol{k}(A)$ *son corps résiduel,* $i : k \to \Omega$ *un homomorphisme de k dans une clôture séparable Ω de k; on appelle* hensélisé strict *de* A relativement à i, *et on note* ${}^{hs}A_{(i)}$ *(où* ${}^{hs}A$ *lorsque cela ne prête pas à confusion) la limite inductive du système inductif* $(A_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})$ *défini dans* (18.8.6).

Comme on a un k-isomorphisme canonique $\omega^{-1} : \Omega \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{k}({}^{hs}A_{(i)})$, Ω est muni canoniquement d'une structure de ${}^{hs}A_{(i)}$-algèbre par l'homomorphisme local

$${}^{hs}A_{(i)} \to \boldsymbol{k}({}^{hs}A_{(i)}) \overset{\omega}{\xrightarrow{\sim}} \Omega.$$

Comme dans (18.6.5) on voit que la définition donnée dans (18.8.7) ne dépend qu'en apparence du choix de l'ensemble $\mathfrak{E}$; nous allons voir encore ci-dessous (18.8.8, (i) et (ii)) que ${}^{hs}A_{(i)}$ est un objet représentant un foncteur entièrement défini par la donnée de A et de i ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 8.1.8), et est donc défini comme tel à *isomorphisme unique près*.

Proposition **(18.8.8)**. — *Soient* A *un anneau local, k son corps résiduel,* $i : k \to \Omega$ *un homomorphisme de k dans une clôture séparable de k,* ${}^{hs}A_{(i)}$ *le hensélisé strict de* A *correspondant à i.*

(i) ${}^{hs}A_{(i)}$ *est un anneau strictement local* (18.8.2) *et l'homomorphisme structural* $w : A \to {}^{hs}A_{(i)}$ *est local.*

(ii) *Pour tout homomorphisme local* $u : A \to B$, *où* B *est un anneau strictement local, et tout k-homomorphisme* $\psi : \Omega \to \boldsymbol{k}(B)$, *il existe un et un seul* A-*homomorphisme* $v : {}^{hs}A_{(i)} \to B$ *tel que ψ se factorise en* $\Omega \xrightarrow{\omega^{-1}} \boldsymbol{k}({}^{hs}A_{(i)}) \xrightarrow{\overline{v}} \boldsymbol{k}(B)$, *où $\overline{v}$ est déduit de v par passage aux quotients.*

(iii) ${}^{hs}\mathrm{A}_{(i)}$ *est un* A-*module fidèlement plat, et si* $\mathfrak{m}$ *est l'idéal maximal de* A, $\mathfrak{m}.{}^{hs}\mathrm{A}_{(i)}$ *est l'idéal maximal de* ${}^{hs}\mathrm{A}_{(i)}$, *et* $\boldsymbol{k}({}^{hs}\mathrm{A}_{(i)})$ *est une clôture séparable de* k.

(iv) *Pour que* ${}^{hs}\mathrm{A}_{(i)}$ *soit noethérien, il faut et il suffit que* A *le soit.*

(v) *Si* A *est strictement local (donc* $\Omega=k$*), on a* ${}^{hs}\mathrm{A}\cong\mathrm{A}$.

(vi) *Si* $i' : k\rightarrow\Omega'$ *est un second homomorphisme de* k *dans une clôture séparable de* k, *pour tout* k-*isomorphisme* $\sigma : \Omega \xrightarrow{\sim} \Omega'$, *le* A-*homomorphisme correspondant (par* (ii)*)* $v_\sigma : {}^{hs}\mathrm{A}_{(i)} \rightarrow {}^{hs}\mathrm{A}_{(i')}$ *est un isomorphisme.*

On a déjà vu ci-dessus que ${}^{hs}\mathrm{A}_{(i)}$ est un anneau local et que w est un homomorphisme local; le fait que ${}^{hs}\mathrm{A}_{(i)}$ soit hensélien (et par suite strictement local) se démontre comme dans (18.6.6). Les assertions de (iii) découlent encore de $(\mathbf{0}_{\mathrm{III}}, 10.3.1.3)$, ainsi que la suffisance de la condition (iv); la nécessité de cette condition résulte de ce que ${}^{hs}\mathrm{A}_{(i)}$ est un A-module fidèlement plat $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 6.5.2)$.

Pour prouver (ii), remarquons, avec les notations de (18.8.6), que pour tout $\lambda\in\mathrm{L}$, il existe un et un seul A-homomorphisme local $v_\lambda : \mathrm{A}_\lambda\rightarrow\mathrm{B}$, tel que le composé $\boldsymbol{k}(\mathrm{A}_\lambda) \xrightarrow{\omega_\lambda} \Omega \xrightarrow{\psi} \boldsymbol{k}(\mathrm{B})$ soit déduit de v_λ par passage aux quotients, en vertu de (18.8.4) et de l'hypothèse que B est strictement local. L'unicité de v_λ entraîne en outre que les v_λ forment un système inductif, d'où l'existence de l'homomorphisme v répondant aux conditions de (ii); son unicité résulte de (17.4.9). L'unicité de v entraîne aussitôt l'assertion (vi), en considérant les composés $v_\sigma \circ v_{\sigma^{-1}}$ et $v_{\sigma^{-1}} \circ v_\sigma$. Enfin, si A est strictement local, et $\mathrm{A}'=\mathrm{B}_\mathfrak{n}$ une A-algèbre locale essentiellement étale, où B est une A-algèbre étale, il résulte de (18.8.1) qu'il existe une Spec(A)-section de Spec(B) prenant la valeur $\mathfrak{n}$ au point fermé de Spec(A), donc on déduit de (17.4.1) que l'homomorphisme $\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{A}'$ est bijectif, ce qui prouve (v).

(18.8.8.1) Soit $\boldsymbol{C}$ la catégorie des anneaux strictement locaux, avec pour morphismes les homomorphismes locaux; pour tout $\mathrm{B}\in\boldsymbol{C}$, désignons par F(B) l'ensemble des couples (u, ψ) formés d'un homomorphisme local $u : \mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}$ et d'un k-isomorphisme $\psi : \Omega\rightarrow\boldsymbol{k}(\mathrm{B})$ tels que le composé $\boldsymbol{k}(\mathrm{A})=k \xrightarrow{i} \Omega \xrightarrow{\psi} \boldsymbol{k}(\mathrm{B})$ soit déduit de u par passage aux quotients. On peut dire que l'objet ${}^{hs}\mathrm{A}_{(i)}$ *représente* le foncteur covariant $\mathrm{F} : \boldsymbol{C}\rightarrow\boldsymbol{Ens}$ $(\mathbf{0}_{\mathrm{III}}, 8.1.11)$.

On remarquera qu'en vertu de (18.8.8, (vi)) les hensélisés stricts ${}^{hs}\mathrm{A}_{(i)}$ sont tous A-isomorphes (pour les divers k-homomorphismes i de k dans des clôtures séparables de k), mais pour i et i' donnés, il y a en général une infinité de A-isomorphismes ${}^{hs}\mathrm{A}_{(i)} \xrightarrow{\sim} {}^{hs}\mathrm{A}_{(i')}$. De façon précise, le groupe des A-automorphismes de ${}^{hs}\mathrm{A}_{(i)}$ est isomorphe au groupe de Galois de Ω sur k.

(18.8.9) Soient maintenant A un anneau *semi-local*, $\mathfrak{m}_j$ $(1\leqslant j\leqslant r)$ ses idéaux maximaux, et pour tout indice j, considérons un homomorphisme $i_j : \boldsymbol{k}(\mathrm{A}_{\mathfrak{m}_j})\rightarrow\Omega_j$ de $\boldsymbol{k}(\mathrm{A}_{\mathfrak{m}_j})$ dans une clôture séparable de ce corps. On appelle *hensélisé strict* de A relatif aux i_j et l'on note ${}^{hs}\mathrm{A}$ (lorsqu'il n'en résulte pas de confusion) le produit $\prod_{j=1}^{r}({}^{hs}(\mathrm{A}_{\mathfrak{m}_j}))$ des hensélisés stricts des anneaux locaux $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}_j}$ relativement aux homomorphismes i_j.

C'est donc, en vertu de (18.8.8), un A-module fidèlement plat et une A-algèbre semi-locale dont les idéaux maximaux sont les $\mathfrak{m}_j.{}^{hs}A$ et le radical $\mathfrak{r}.{}^{hs}A$ (si $\mathfrak{r}$ désigne le radical de A). Enfin, la propriété universelle (18.8.8, (ii)) subsiste en remplaçant « homomorphisme local » par « homomorphisme semi-local » (18.6.7), et en remplaçant Ω par $\prod_j \Omega_j$.

Proposition **(18.8.10)**. — *Soient* A *un anneau semi-local,* B *une* A*-algèbre finie. Soient* $\mathfrak{n}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ *les idéaux maximaux de* B. *Alors il y a, pour chaque j, un idéal maximal* $\mathfrak{q}_j$ *de* $B \otimes_A ({}^{hs}A)$ *au-dessus de* $\mathfrak{n}_j$, *tel que* ${}^{hs}B$ *soit isomorphe au composé direct des anneaux locaux* $(B \otimes_A ({}^{hs}A))_{\mathfrak{q}_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$.

On peut évidemment se borner au cas où A est local, en remplaçant A par $A_{\mathfrak{m}_j}$, où $\mathfrak{m}_j$ est l'idéal maximal de A image réciproque de $\mathfrak{n}_j$. Posons d'autre part $C = B_{\mathfrak{n}_j}$; en vertu de la définition de ${}^{hs}B$ (18.8.1), tout revient à voir que ${}^{hs}C$ est C-isomorphe à $(C \otimes_A ({}^{hs}A))_{\mathfrak{q}}$, où $\mathfrak{q}$ est un des idéaux maximaux de $C \otimes_A ({}^{hs}A)$. Soient k et K les corps résiduels de A et C, Ω celui de ${}^{hs}A$, qui est par définition une clôture séparable de k; comme K est une extension finie de k, on peut supposer K et Ω contenus dans une même clôture algébrique de k; il est alors immédiat que $K \otimes_k \Omega$ est composé direct d'un nombre fini de corps, tous isomorphes à la clôture séparable $K\Omega$ de K. D'autre part, l'anneau ${}^{hs}A$ étant hensélien, $C \otimes_A ({}^{hs}A)$ est composé direct des anneaux locaux $(C \otimes_A ({}^{hs}A))_{\mathfrak{q}_i}$, où $\mathfrak{q}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ parcourt les idéaux maximaux de $C \otimes_A ({}^{hs}A)$, et ces anneaux locaux sont henséliens (18.5.10) et ont $K\Omega$ pour corps résiduel, donc sont strictement locaux (18.8.1). Posons pour abréger $C' = C \otimes_A ({}^{hs}A)$ et $C'_i = C'_{\mathfrak{q}_i}$, qui est donc un anneau quotient de C'; soient $f : C \rightarrow C'$, $g : {}^{hs}A \rightarrow C'$, $\varphi_i : C' \rightarrow C'_i$ les applications canoniques.

$$
\begin{tikzcd}
 & & {}^{hs}C \arrow[d, shift left, "w'"] \\
 & & C'_i \arrow[u, shift left, "w"] \\
C \arrow[r, "f"] \arrow[uurr, "v"] & C' \arrow[ur] & \\
A \arrow[u] \arrow[r] & {}^{hs}A \arrow[u, "g"] \arrow[uuur, "u"] &
\end{tikzcd}
$$

Soit $v : C \rightarrow {}^{hs}C$ l'homomorphisme canonique; il existe un homomorphisme local et un seul $u : {}^{hs}A \rightarrow {}^{hs}C$ qui, par passage aux quotients, donne l'injection canonique $\Omega \rightarrow K\Omega$ et tel que le composé $A \rightarrow C \xrightarrow{v} {}^{hs}C$ soit égal au composé $A \rightarrow {}^{hs}A \xrightarrow{u} {}^{hs}C$ (18.8.8); donc il existe un unique homomorphisme local $w_0 : C' \rightarrow {}^{hs}C$ tel que $w_0 \circ g = u$, $w_0 \circ f = v$, et puisque ${}^{hs}C$ est un anneau local, cet homomorphisme se factorise en $C' \xrightarrow{\varphi_i} C'_i \xrightarrow{w} {}^{hs}C$ pour un indice i bien déterminé, w étant un homomorphisme local. D'autre part, l'anneau C'_i étant strictement local, il existe un homomorphisme local $w' : {}^{hs}C \rightarrow C'_i$ qui, par passage aux quotients, donne l'automorphisme identique de $K\Omega$ et qui est tel que $w' \circ v = \varphi_i \circ f$ (18.8.8). On déduit d'abord de là que $w \circ w'$ est un endomorphisme de ${}^{hs}C$ qui, par passage aux quotients, donne l'automorphisme identique de $K\Omega$, donc est l'identité (18.8.8). D'autre part, on a $w'\circ w\circ\varphi_i\circ f=w'\circ v=\varphi_i\circ f$, et $w'\circ w\circ\varphi_i\circ g=w'\circ u=\varphi_i\circ g$; d'où $w'\circ w\circ\varphi_i=\varphi_i$, autrement dit $w'\circ w$ est l'automorphisme identique de C'_i. C.Q.F.D.

Remarque (**18.8.11**). — La démonstration de (18.8.10) utilise le fait que B est *entière* sur A, mais n'utilise le fait que B est une A-algèbre *finie*, que pour établir que $K\otimes_k\Omega$ est composé direct d'un nombre fini de corps. Or, cette dernière propriété est encore vérifiée lorsque l'on suppose que B est une A-algèbre *entière semi-locale* dont les idéaux maximaux $\mathfrak{n}_j$ ont des corps résiduels de degrés séparables $[\boldsymbol{k}(\mathfrak{n}_j) : k]_s$ *finis*.

Proposition (**18.8.12**). — *Soit* A *un anneau semi-local.*

(i) *Pour que* ${}^{hs}A$ *soit réduit* (resp. *normal*), *il faut et il suffit que* A *le soit.*

(ii) *Supposons* A *noethérien. Alors, pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A, *l'anneau* $({}^{hs}A)_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}.({}^{hs}A)_\mathfrak{p}$ *est composé direct d'un nombre fini d'extensions algébriques séparables de* $\boldsymbol{k}(\mathfrak{p})$ (ce qui entraîne que les fibres du morphisme canonique $\mathrm{Spec}({}^{hs}A)\to\mathrm{Spec}(A)$ sont *géométriquement régulières* et sont des espaces *discrets*).

Corollaire (**18.8.13**). — *Soit* A *un anneau local noethérien. Pour que* ${}^{hs}A$ *possède une des propriétés suivantes :*

a) *être un anneau de Cohen-Macaulay* (**0**, 16.5.3);

b) *vérifier la condition* (S_n) (5.7.3);

c) *être régulier ;*

d) *vérifier la condition* (R_n) (5.8.2);

il faut et il suffit que A *possède cette même propriété.*

Corollaire (**18.8.14**). — *Soit* A *un anneau semi-local noethérien. Pour qu'un idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* ${}^{hs}A$ *appartienne à* $\mathrm{Ass}({}^{hs}A)$, *il faut et il suffit que* $\mathfrak{p}\cap A$ *appartienne à* Ass(A).

Les démonstrations sont les mêmes que celles de (18.6.9), (18.6.10) et (18.6.11) respectivement.

Proposition (**18.8.15**). — *Soit* A *un anneau local ; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) A *est géométriquement unibranche* (resp. *réduit et géométriquement unibranche*).

b) *Pour toute* A-*algèbre locale essentiellement étale* A′, Spec(A′) *est irréductible* (resp. *intègre*).

c) $\mathrm{Spec}({}^{hs}A)$ *est irréductible* (resp. *intègre*).

On se ramène comme dans (18.6.12) au cas où A est réduit, en utilisant la relation ${}^{hs}(A_{\mathrm{red}})=({}^{hs}A)\otimes_A A_{\mathrm{red}}$ (18.8.11), et l'équivalence de *b)* et *c)* se prouve comme dans (18.6.12); il en est de même du fait que *a)* entraîne *c)*, en tenant compte de (18.8.11) et de la définition d'un anneau local intègre géométriquement unibranche. Enfin, pour démontrer que *c)* entraîne *a)*, gardons les mêmes notations que dans (18.6.12); il s'agit encore de voir que ${}^{hs}B$ est intègre. Mais, par (18.8.10), ${}^{hs}B$ est un anneau localisé de l'anneau semi-local $B\otimes_A({}^{hs}A)$, qui s'identifie encore par platitude à un sous-anneau du corps L, donc est intègre; il en est par suite de même de ${}^{hs}B$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire (**18.8.16**). — *Soit* A *un anneau local hensélien* (resp. *strictement local*). *Pour que* A *soit unibranche* (resp. *géométriquement unibranche*), *il faut et il suffit que* Spec(A) *soit irréductible.*

Proposition **(18.8.17).** — *Soit* A *un anneau local noethérien. Si* A *est universellement caténaire, il en est de même de* ${}^{hs}A$.

La démonstration est la même que celle de (18.7.5).

Proposition **(18.8.18).** — (i) *Toute limite inductive filtrante d'anneaux strictement locaux (où les homomorphismes de transition sont locaux) est un anneau strictement local.*

(ii) *Le foncteur* $A \rightsquigarrow {}^{hs}A$ *dans la catégorie des anneaux locaux (où les morphismes sont les homomorphismes locaux) commute aux limites inductives filtrantes.*

(iii) *Tout anneau strictement local* A *est limite inductive d'un système inductif filtrant d'anneaux strictement locaux noethériens (les homomorphismes de transition étant locaux).*

Les démonstrations sont calquées sur celles de (18.6.14).

18.9. Fibres formelles des anneaux noethériens henséliens.

Théorème **(18.9.1).** — *Soit* A *un anneau local noethérien hensélien, dont les fibres formelles sont géométriquement normales. Alors les fibres formelles de* A *sont géométriquement intègres* (donc *géométriquement connexes*).

Les deux assertions de l'énoncé sont en fait équivalentes, un préschéma localement noethérien connexe et normal étant intègre. Comme toute A-algèbre intègre finie est un anneau local hensélien (18.5.9 et 18.5.10), il résulte de (7.3.16.2) que l'on est ramené à prouver que si l'on suppose de plus A *intègre*, alors la fibre du morphisme $\mathrm{Spec}(\hat{A}) \to \mathrm{Spec}(A)$ au point générique de Spec(A) est *intègre*, ce qui résulte du

Corollaire **(18.9.2).** — *Soit* A *un anneau local noethérien hensélien intègre, dont les fibres formelles sont géométriquement normales. Alors* $\hat{A}$ *est intègre.*

En effet, il résulte de (18.8.16) que A est unibranche, donc le théorème résulte de l'hypothèse faite sur les fibres formelles de A et de (7.6.3).

Corollaire **(18.9.3).** — *Sous les hypothèses de* (18.9.2), *le corps des fractions* L *de* $\hat{A}$ *est une extension séparable du corps des fractions* K *de* A, *et* K *est algébriquement fermé dans* L.

Cela résulte de ce que la fibre du morphisme $\mathrm{Spec}(\hat{A}) \to \mathrm{Spec}(A)$ au point générique de Spec(A) est géométriquement intègre et de (4.3.2) et (4.3.5).

Corollaire **(18.9.4).** — *Soit* A *un anneau local noethérien, hensélien et dont les fibres formelles sont géométriquement normales* (par exemple un anneau local noethérien hensélien et *excellent*), *et posons* $A' = \hat{A}$. *Soient* X *un* A-*préschéma*, $X' = X \otimes_A A'$, $g : X' \to X$ *la projection canonique. Alors l'application* $U \rightsquigarrow g^{-1}(U)$ *est une bijection de l'ensemble des parties à la fois ouvertes et fermées de* X *sur l'ensemble des parties à la fois ouvertes et fermées de* X'.

Comme g est un morphisme fidèlement plat et quasi-compact, on sait (2.3.12) que la topologie de X est *quotient* de celle de X' par la relation d'équivalence définie par f. Tout revient donc à voir qu'une partie ouverte et fermée U' de X' est *saturée* pour cette relation. Or, comme le morphisme $\mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A)$ a ses fibres géométriquement connexes (18.9.1), les fibres de g sont *connexes*, d'où aussitôt notre assertion.

En particulier, si X est localement connexe (ce qui sera le cas si X est localement noethérien), alors, pour toute composante connexe U de X (qui est ouverte et fermée dans X), $g^{-1}(U)$ est connexe (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. Ier, 3e éd., § 11, no 3, prop. 7). Si l'on désigne par $\pi_0(X)$ l'ensemble des composantes connexes de X, l'application $\pi_0(X') \rightarrow \pi_0(X)$ déduite canoniquement de g est donc *bijective.*

Corollaire **(18.9.5).** — *Sous les hypothèses de* (18.9.4), *le foncteur*

$$Z \rightsquigarrow Z \otimes_A A' \tag{18.9.5.1}$$

de la catégorie des préschémas étales sur X, *dans celle des préschémas étales sur* X', *est pleinement fidèle.*

Soient Z_1, Z_2 deux préschémas étales sur X, et posons $Z'_i = Z_i \otimes_A A'$ ($i = 1, 2$); il s'agit de prouver que tout X'-morphisme $Z'_1 \rightarrow Z'_2$ provient, par changement de base, d'un X-morphisme unique $Z_1 \rightarrow Z_2$. Supposons d'abord que Z_2 soit *séparé* sur X; alors, comme $\mathrm{Hom}_X(Z_1, Z_2)$ s'identifie à $\Gamma((Z_1 \times_X Z_2)/Z_1)$, et que $Z_1 \times_X Z_2$ est étale et séparé sur Z_1, $\mathrm{Hom}_X(Z_1, Z_2)$ s'identifie fonctoriellement, en vertu de (17.9.3), à l'ensemble des parties ouvertes et fermées U de $Z_1 \times_X Z_2$ telles que la restriction à U de la projection $p : Z_1 \times_X Z_2 \rightarrow Z_1$ soit un morphisme surjectif et radiciel. L'assertion résulte donc dans le cas considéré de (18.9.4) et de ce que $Z'_1 \times_{X'} Z'_2 = (Z_1 \times_X Z_2) \otimes_A A'$.

Passons au cas général : il suffira de prouver que le graphe Γ' d'un X'-morphisme $Z'_1 \rightarrow Z'_2$ qui est *ouvert* (17.9.3) dans $Z'_1 \times_{X'} Z'_2$ est de la forme $\Gamma \otimes_A A'$, où Γ est induit sur une partie *ouverte* de $Z = Z_1 \times_X Z_2$. En effet, la restriction à Γ de la projection $p : Z \rightarrow Z_1$ est alors un *isomorphisme*, car par changement de base $A \rightarrow A'$ cette restriction devient l'isomorphisme restriction à Γ' de la projection $p' : Z' \rightarrow Z'_1$ (avec $Z' = Z \otimes_A A'$), et il suffit d'appliquer (2.7.1, (viii)); la conclusion résulte alors de la caractérisation des graphes de morphismes (**I**, 5.3).

Si $q : Z' \rightarrow Z$ est la projection canonique, pour prouver que Γ' est de la forme $q^{-1}(\Gamma)$, où Γ est ouvert dans Z, il suffit, puisque q est un morphisme fidèlement plat et quasi-compact, de prouver qu'il existe un ensemble $U \subset Z$ tel que $\Gamma' = q^{-1}(U)$ (2.3.12). Posons $Z'' = Z' \times_Z Z' = Z \times_X X''$, où $X'' = X' \times_X X'$, et soient $q_1 : Z'' \rightarrow Z'$, $q_2 : Z'' \rightarrow Z'$ les projections canoniques. Appliquant (4.5.19.1), il suffit de montrer que $q_1^{-1}(\Gamma') = q_2^{-1}(\Gamma')$. Mais c'est une propriété qui est vraie si et seulement si elle l'est après chaque changement de base $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(x)) \rightarrow X$, où x parcourt X. Autrement dit, il suffit de prouver le corollaire lorsque X est le *spectre d'un corps*; mais comme tout X-préschéma étale est alors automatiquement *séparé* sur X (17.6.2, *c')*), on est ramené au cas envisagé au début de la démonstration.

Remarques **(18.9.6).** — (i) Il est possible que, si le corps résiduel de A est de caractéristique 0, le foncteur (18.9.5.1) induise même une *équivalence* de la catégorie des revêtements étales de X et de la catégorie des revêtements étales de X'. On peut en tout cas le démontrer lorsque A est *excellent,* en utilisant la résolution des singularités de Hironaka (M. Artin). Il est plausible que l'énoncé analogue soit encore vrai sans restriction sur la caractéristique du corps résiduel, à condition de se borner aux revêtements « galoisiens principaux » dont le groupe est d'ordre premier à la caractéristique résiduelle (cf. [41]).

(ii) On ignore si les fibres formelles de A sont géométriquement connexes (voire géométriquement irréductibles) lorsque A est un anneau local hensélien quelconque. Il suffirait que, pour tout anneau local noethérien, hensélien et *intègre* A, $\mathrm{Spec}(\hat{A})$ soit irréductible. On ignore s'il en est toujours ainsi.

(iii) On ignore si lorsque A est un anneau local excellent, son hensélisé strict ${}^{hs}A$ est excellent. On peut voir que, pour élucider cette question, on peut se ramener au cas où $A=k[[T_1, \ldots, T_n]]$, k étant un corps de caractéristique $p>0$. Compte tenu de (18.8.17), la question est de savoir si les fibres formelles de ${}^{hs}A$ sont géométriquement régulières. La réponse est affirmative lorsque $n=1$, mais n'est pas connue pour $n=2$. On peut montrer que la réponse est affirmative chaque fois que, pour tout schéma Y_1 fini sur $Y=\mathrm{Spec}(\hat{A})$, on peut résoudre les singularités de Y_1 (7.9.1).

L'assertion de connexité faite dans (18.9.1) se généralise de la façon suivante :

Théorème **(18.9.7)**. — *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens,* $\rho : A \to B$ *un homomorphisme local,* $f: \mathrm{Spec}(B)=X \to \mathrm{Spec}(A)=Y$ *le morphisme correspondant. Supposons vérifiées les conditions suivantes :*

(i) *f est plat et toutes les fibres* $X_y=f^{-1}(y)$ $(y \in Y)$ *sont géométriquement réduites* (4.6.2).

(ii) Ou bien *l'anneau* A *est géométriquement unibranche* (**0**, 23.2.1), ou bien *l'anneau* A *est unibranche* (**0**, 23.2.1) *et* $\boldsymbol{k}(B)$ *est une extension primaire* (4.3.1) *de* $\boldsymbol{k}(A)$.

Alors, si η *est le point générique de* Y, X_η *est connexe, et pour toute partie fermée* T *de* X *telle que* $f(T)$ *soit rare dans* Y, $X-T$ *est connexe.*

Les deux conclusions énoncées sont en fait équivalentes; en effet, l'hypothèse que $f(T)$ est rare entraîne que $\overline{f(T)}$ ne contient pas η; d'autre part, comme $\{\eta\}$ est proconstructible (1.9.6) et que f est plat, X_η est dense dans X (2.3.10), et par suite si X_η est connexe, il en est de même de $X-T$ qui le contient. Inversement, lorsque U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts affines de η dans Y, X_η est limite projective des sous-préschémas induits sur les ouverts $f^{-1}(U)$ de X (8.1.2, *a)*); si l'on suppose que $X-T$ est connexe pour toute partie fermée T de X telle que $f(T)$ soit rare dans Y, les $f^{-1}(U)$ sont connexes, donc il en est de même de X_η (8.4.1).

Montrons d'abord qu'on peut se limiter au cas où A est intègre et $Y=\mathrm{Spec}(A)$ géométriquement unibranche (6.15.1) (ce qui implique que A est géométriquement unibranche, mais n'est pas équivalent à cette condition (6.15.2)). Il est clair qu'on peut d'abord supposer Y réduit, en considérant le morphisme $X \times_Y Y_{\mathrm{red}} \to Y_{\mathrm{red}}$, déduit de f par changement de base, qui est plat, et a mêmes fibres que f. On peut donc supposer A intègre et unibranche; si K est le corps des fractions de A, il existe alors une sous-A-algèbre *finie* A″ de K telle que, si A′ est la clôture intégrale de A, le morphisme $\mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A'')$ soit *radiciel* (**0**, 23.2.5); on en conclut (6.15.5) que Spec(A″) est *géométriquement unibranche*. Comme A est unibranche, A′ est un anneau local, donc il en est de même de A″; montrons que l'anneau $B''=B\otimes_A A''$ est aussi un anneau *local*. En effet, B″ est une B-algèbre finie, donc un anneau semi-local noethérien; si k'' est le corps résiduel de A″, les idéaux maximaux de B″ sont les points de Spec(B″) au-dessus du point fermé de Spec(B), donc les points de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(B)\otimes_{\boldsymbol{k}(A)} k'')$ (**I**, 3.4.9) puisque le point fermé de Spec(A″) est le seul point au-dessus du point fermé de Spec(A). Or, lorsque A est géométriquement unibranche, k'' est une extension radicielle de $\boldsymbol{k}(\mathrm{A})$, donc $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(\mathrm{B})\otimes_{\boldsymbol{k}(\mathrm{A})}k'')$ est radiciel sur $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(\mathrm{B}))$ et ne comprend donc qu'un seul point. Lorsque A est unibranche et $\boldsymbol{k}(\mathrm{B})$ extension primaire de $\boldsymbol{k}(\mathrm{A})$, $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(\mathrm{B})\otimes_{\boldsymbol{k}(\mathrm{A})}k'')$ est irréductible (4.3.2) et comme c'est un espace fini et discret (**I**, 6.4.4) il est encore réduit à un point, ce qui montre que dans les deux cas envisagés B″ est *local.* Si $\mathrm{Y}''=\mathrm{Spec}(\mathrm{A}'')$, $\mathrm{X}''=\mathrm{Spec}(\mathrm{B}'')=\mathrm{X}\times_{\mathrm{Y}}\mathrm{Y}''$, le morphisme $f''=f_{(\mathrm{Y}'')}:\mathrm{X}''\rightarrow\mathrm{Y}''$ est plat et a ses fibres géométriquement réduites; en outre, si η'' est le point générique de Y″, $\boldsymbol{k}(\eta'')=\boldsymbol{k}(\eta)=\mathrm{K}$ par définition, donc les fibres X_η et $\mathrm{X}''_{\eta''}$ sont isomorphes. Il suffit donc de prouver que $\mathrm{X}''_{\eta''}$ est connexe.

Remarque (**18.9.7.1**). — Lorsque l'anneau A est *japonais*, on peut, dans ce qui précède, prendre $\mathrm{A}''=\mathrm{A}'$ par définition (**0**, 23.1.1); on voit donc que dans ce cas on serait même ramené à prouver le théorème lorsque A est *intégralement clos.*

(**18.9.7.2**) Supposons donc désormais que Y soit intègre et géométriquement unibranche. Notons que si T est une partie fermée de X telle que $f(\mathrm{T})$ soit rare dans Y, T ne contient aucun point maximal de X puisque f est plat (2.3.4), donc est rare dans X; comme X est un schéma local, donc connexe, pour prouver que $\mathrm{X}-\mathrm{T}$ est connexe, il suffit, en vertu de (15.5.6.1) de montrer que pour tout $x\in\mathrm{X}$ tel que $f(x)\neq\eta$, $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathrm{X},x})-\{x\}$ est *connexe.* Posons $y=f(x)$, $\mathrm{A}_1=\mathcal{O}_{\mathrm{Y},y}$, $\mathrm{B}_1=\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}$, $\mathrm{Y}_1=\mathrm{Spec}(\mathrm{A}_1)$, $\mathrm{X}_1=\mathrm{Spec}(\mathrm{B}_1)$, $f_1:\mathrm{X}_1\rightarrow\mathrm{Y}_1$ le morphisme correspondant à l'homomorphisme local $\mathrm{A}_1\rightarrow\mathrm{B}_1$ déduit de ρ; il est clair que f_1 est plat, et il résulte de (4.6.1) que ses fibres sont géométriquement réduites; en outre A_1 est intègre et géométriquement unibranche (6.15.1) et $\dim(\mathrm{A}_1)\geqslant 1$. On est ainsi ramené à prouver le

Lemme (**18.9.7.3**). — *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens,* $\mathrm{Y}=\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, $\mathrm{X}=\mathrm{Spec}(\mathrm{B})$, $\rho:\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}$ *un homomorphisme local,* $f:\mathrm{X}\rightarrow\mathrm{Y}$ *le morphisme correspondant. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

(i) f *est plat et toutes les fibres* X_y $(y\in\mathrm{Y})$ *sont géométriquement réduites.*

(ii) A *est intègre, géométriquement unibranche et* $\dim(\mathrm{A})\geqslant 1$.

Alors, si b *est le point fermé de* X, $\mathrm{X}-\{b\}$ *est connexe.*

Notons d'abord qu'en vertu du théorème de Hartshorne (5.10.7), $\mathrm{X}-\{b\}$ est connexe si l'on a $\mathrm{prof}(\mathrm{B})\geqslant 2$. Or on a (6.3.1)

(**18.9.7.4**) $$\mathrm{prof}(\mathrm{B})=\mathrm{prof}(\mathrm{A})+\mathrm{prof}(\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}k)$$

en désignant par k le corps résiduel de A. D'autre part, puisque A est intègre et $\dim(\mathrm{A})\geqslant 1$, on a $\mathrm{prof}(\mathrm{A})\geqslant 1$, donc $\mathrm{prof}(\mathrm{B})\geqslant 2$ *sauf* lorsque $\mathrm{prof}(\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}k)=0$; d'ailleurs $\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}k$ est réduit par (i), donc la relation $\mathrm{prof}(\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}k)=0$ signifie que $\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}k$ est un *corps* (**0**, 16.4.7). On supposera donc désormais que cette dernière condition est vérifiée. On commencera par traiter un cas où la démonstration est très simple.

A) *Cas où* A *est intégralement clos.* Alors, si $\dim(\mathrm{A})\geqslant 2$, on a $\mathrm{prof}(\mathrm{A})\geqslant 2$ (**0**, 16.5.1), donc $\mathrm{prof}(\mathrm{B})\geqslant 2$. On n'a donc qu'à considérer le cas où $\dim(\mathrm{A})=1$ et où $\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}k$ est un corps; A est alors un anneau de valuation discrète, donc régulier, et puisque $\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}k$

est un corps et que f est plat, B est régulier (**0**, 17.3.3); mais en outre (6.1.1.1), on a $\dim(B) = \dim(A) + \dim(B \otimes_A k) = \dim(A) = 1$, donc B est aussi un anneau de valuation discrète. Mais alors $X - \{b\}$ est réduit à un seul point, d'où le lemme (18.9.7.3) dans ce cas.

On observera que cela prouve l'énoncé du théorème (18.9.7) lorsqu'on suppose en outre que, dans cet énoncé, l'anneau A est *japonais*, car en vertu de la remarque (18.9.7.1), on est ramené au cas où A est *intégralement clos*, et alors, dans la réduction qui précède (18.9.7.3), l'anneau $A_1 = \mathcal{O}_{Y,y}$ est lui aussi intégralement clos et on peut appliquer le résultat qui vient d'être démontré.

B) *Cas où* $\dim(A) \geqslant 2$. Le résultat de (18.9.7.3) résultera alors des deux lemmes suivants :

Lemme (**18.9.7.5**). — *Soient* A *un anneau semi-local noethérien et réduit,* A′ *sa fermeture intégrale dans son anneau total des fractions,* $X = \mathrm{Spec}(A)$, $X' = \mathrm{Spec}(A')$; *soient* S *l'ensemble des points fermés de* X *et* $U = X - S$. *Supposons que pour tout point* $x' \in X'$ *au-dessus d'un point de* S, *on ait* $\dim(\mathcal{O}_{X',x'}) \geqslant 2$; *alors l'anneau* $A^{(1)} = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ *est entier sur* A *et est une* A*-algèbre isomorphe à une sous-algèbre de* A′.

Rappelons que si $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ sont les idéaux minimaux de A, A′ est le composé direct des clôtures intégrales A'_i des anneaux intègres $A_i = A/\mathfrak{p}_i$, de sorte que X′ est la somme des schémas $X'_i = \mathrm{Spec}(A'_i)$. Si X_0 est la somme des schémas $X_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ et U_0 l'image réciproque de U dans X_0, l'homomorphisme canonique $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U_0, \mathcal{O}_{X_0})$ est injectif puisque X est réduit et le morphisme $X_0 \to X$ (donc aussi le morphisme $U_0 \to U$) surjectif. Comme $\Gamma(U_0, \mathcal{O}_{X_0})$ est composé direct des $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_{X_i})$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, où U_i est l'image réciproque de U dans X_i, tout revient à prouver que pour chaque i, $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_{X_i})$ est isomorphe à une sous-A_i-algèbre de A'_i. Autrement dit, on est ramené au cas où A est un anneau semi-local noethérien intègre. Comme X est réduit et le morphisme $X' \to X$ surjectif, l'homomorphisme $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U', \mathcal{O}_{X'})$ (où U′ est l'image réciproque de U dans X′) est injectif, et tout revient à voir que l'homomorphisme canonique $A' = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}) \to \Gamma(U', \mathcal{O}_{X'})$ est *bijectif*. Or (**I**, 8.2.1.1), $\Gamma(U', \mathcal{O}_{X'})$ est l'intersection des anneaux locaux $A'_{\mathfrak{p}'}$, où $\mathfrak{p}'$ parcourt U′, et en vertu de l'hypothèse, parmi ces anneaux locaux figurent tous ceux pour lesquels $\mathfrak{p}'$ est *de hauteur* 1. Mais le raisonnement de (**0**, 23.2.7) s'applique aussi à un anneau *semi-local* intègre noethérien, donc A′ est un *anneau de Krull* semi-local, et est donc l'intersection des anneaux locaux $A'_{\mathfrak{p}'}$, où $\mathfrak{p}'$ parcourt l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de A′ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 1, n° 6, th. 4); *a fortiori*, A′ est l'intersection des $A'_{\mathfrak{p}'}$ pour $\mathfrak{p}' \in U'$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Remarque (**18.9.7.6**). — On sait (**0**, 23.2.5) qu'il existe une sous-A-algèbre *finie* A″ du corps des fractions K de A telle que le morphisme $\mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A'')$ soit *radiciel*; comme ce morphisme est aussi entier et dominant, donc surjectif (**II**, 6.1.10), c'est un *homéomorphisme* (2.4.5). En vertu de l'interprétation géométrique de $\dim(\mathcal{O}_{X',x'})$ (5.1.2), on a donc, pour tout point x'' de $X'' = \mathrm{Spec}(A'')$ au-dessus d'un point $x \in X$, $\dim(\mathcal{O}_{X'',x''}) = \dim(\mathcal{O}_{X',x'}) \geqslant 2$ si x' est l'unique point de X′ au-dessus de x. Cela étant, il résulte d'abord de (**0**, 16.1.5) et (**0**, 16.1.4.1) que la relation $\dim(\mathcal{O}_{X',x'}) \geqslant 2$ entraîne $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) \geqslant 2$. Inversement, supposons que $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) \geqslant 2$ et que A soit *universellement caténaire* (5.6.2); alors il en est de même de $\mathcal{O}_{X,x}$ (5.6.3), donc $\dim(\mathcal{O}_{X'',x''}) = \dim(\mathcal{O}_{X,x}) \geqslant 2$ en vertu de (5.6.10) et on a donc alors $\dim(\mathcal{O}_{X',x'}) \geqslant 2$. La même conclusion est valable si $\mathcal{O}_{X,x}$ est *géométriquement unibranche*, car la fibre du morphisme $X' \rightarrow X$ au point x est alors réduite à un seul point, et $\mathcal{O}_{X',x'}$ est une $\mathcal{O}_{X,x}$-algèbre *entière*; il suffit donc d'appliquer (**0**, 16.1.5).

Lemme **(18.9.7.7)**. — *Soient* A *un anneau local noethérien, de dimension* $\geqslant 2$, *intègre et géométriquement unibranche,* $Y = \operatorname{Spec}(A)$, y *le point fermé de* Y. *Soient* X *un préschéma localement noethérien et connexe,* $f : X \rightarrow Y$ *un morphisme plat. Alors, pour toute partie fermée* $T \subset f^{-1}(y)$, $X - T$ *est connexe.*

Le même raisonnement qu'au début de (18.9.7.2) ramène à prouver que, pour tout point $x \in f^{-1}(y)$, $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) - \{x\}$ est connexe. On peut donc se borner au cas où $X = \operatorname{Spec}(B)$, B étant un anneau local noethérien et l'homomorphisme $A \rightarrow B$ correspondant à f étant local; posons $U = Y - \{y\}$, et notons que $V = f^{-1}(U)$ est dense dans X (2.3.10); il suffit donc de prouver que V est *connexe*. Gardons les notations de (18.9.7.5), et posons donc $A^{(1)} = \Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$, $Y_1 = \operatorname{Spec}(A^{(1)})$, $X_1 = X \times_Y Y_1 = \operatorname{Spec}(B \otimes_A A^{(1)})$, de sorte qu'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X_1 \arrow[l, "g_1"'] \arrow[d, "f_1"] \\ Y & Y_1 \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

En vertu de (2.3.1) et de la définition de $A^{(1)}$, on a un isomorphisme canonique $\Gamma(V, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} B \otimes_A A^{(1)}$, et il suffit donc de prouver que ce dernier anneau est *local*, un tel anneau ne pouvant être le produit de deux anneaux non réduits à 0 (**III**, 7.8.6.1). Mais on a vu (18.9.7.5) que $A^{(1)}$ est une sous-A-algèbre de la clôture intégrale A' de A, puisque $\dim(A) \geqslant 2$. L'hypothèse que A est géométriquement unibranche entraîne que le morphisme $\operatorname{Spec}(A') \rightarrow \operatorname{Spec}(A)$ est radiciel au point y (6.15.3); *a fortiori* $g : Y_1 \rightarrow Y$ est radiciel au point y, et par suite g_1 est radiciel au point fermé x de X; comme en outre g_1 est un morphisme entier, les points fermés de X_1 sont au-dessus de x, donc il n'existe qu'un seul point fermé de X_1, ce qui achève la démonstration de (18.9.7.7).

Il est clair que (18.9.7.7) démontre (18.9.7.3) lorsque $\dim(A) \geqslant 2$ (même sans supposer les fibres X_y géométriquement réduites).

C) *Cas où* $\dim(A) = 1$. On a vu au début de la preuve de (18.9.7.3) que l'on peut supposer $\dim(B \otimes_A k) = 0$, et par platitude (6.1.1.1), on a donc

$$\dim(B) = \dim(A) + \dim(B \otimes_A k) = 1.$$

Puisque A est intègre, Y se compose de deux points, le point générique η et le point fermé a. En outre, puisque f est plat, toute composante irréductible de X domine Y (2.3.4), donc $X - \{b\}$, qui est l'ensemble des points maximaux ξ_i de X, est égal à l'ensemble sous-jacent à $f^{-1}(\eta)$, et la fibre $f^{-1}(\eta)$ est somme des $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(\xi_i))$. L'hypothèse sur les X_y et le fait que ces fibres sont de dimension 0, montrent qu'elles sont *géométriquement régulières* (6.7.6), et *a fortiori* géométriquement normales, autrement dit f est un *morphisme normal*. Mais puisque A est intègre et géométriquement unibranche, il résulte alors de (6.15.10) que B est intègre et géométriquement unibranche, donc $f^{-1}(\eta)=X-\{b\}$ est réduit à un seul point, et *a fortiori* connexe; ceci termine donc la démonstration de (18.9.7.3) et celle de (18.9.7).

Remarque **(18.9.7.8)**. — Dans le cas C) de la démonstration de (18.9.7.3), on peut éviter de faire appel au délicat résultat (6.15.10) en raisonnant de la façon suivante : puisque A est intègre et de dimension 1, il résulte du théorème de Krull-Akizuki (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 2, n° 5, prop. 5) que sa clôture intégrale A′ est un anneau *noethérien*. Le même raisonnement qu'au début de la démonstration de (18.9.7) montre alors que $B'=B\otimes_A A'$ est un anneau local; en outre, par platitude, B′ est contenu dans l'anneau total des fractions R de l'anneau réduit B (3.3.5). Or, le raisonnement qui prouve le théorème de Krull-Akizuki (Bourbaki, *loc. cit.*) s'applique également à un anneau local noethérien *réduit* de dimension 1, et montre que pour un tel anneau B, tout anneau compris entre B et son anneau total des fractions est *noethérien*. L'anneau B′ étant un anneau local noethérien et le morphisme $\mathrm{Spec}(B')\rightarrow\mathrm{Spec}(A')$ étant normal, B′ est un anneau intègre et intégralement clos (6.5.4), et on conclut comme au début de la preuve de (18.9.7).

Corollaire **(18.9.8)**. — *Avec les notations de* (18.9.7), *supposons vérifiée la condition* (i) *de* (18.9.7) *et* l'une *des deux conditions suivantes :*

(ii′) A *est un anneau strictement local* (18.8.2).

(ii″) A *est un anneau local hensélien et* $\boldsymbol{k}(B)$ *est une extension primaire de* $\boldsymbol{k}(A)$.

Alors toutes *les fibres* X_y $(y\in Y)$ *sont géométriquement connexes.*

Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de A correspondant au point y, et posons $A'=A/\mathfrak{p}$ et $B'=B\otimes_A A'=B/\mathfrak{p}B$, qui sont évidemment des anneaux locaux noethériens; il est clair que le morphisme $f':\mathrm{Spec}(B')\rightarrow\mathrm{Spec}(A')$ vérifie la condition (i) de (18.9.7); comme y est le point générique de $\mathrm{Spec}(A')$ et que $\boldsymbol{k}(A')=\boldsymbol{k}(A)$, $\boldsymbol{k}(B')=\boldsymbol{k}(B)$, on voit qu'il suffit de vérifier que, dans le cas (ii′) (resp. (ii″)), A′ est géométriquement unibranche (resp. unibranche). Mais A′ est intègre, et dans le cas (ii′) (resp. (ii″)) il est strictement local (resp. hensélien) en vertu de (18.5.10). On en conclut que A′ est géométriquement unibranche (resp. unibranche) en vertu de (18.8.15) (resp. (18.6.12)).

Corollaire **(18.9.9)**. — *Soit* A *un anneau local noethérien hensélien, universellement japonais* (i.e. ((7.6.4) et (7.7.2)), dont les *fibres formelles* (7.3.13) sont géométriquement réduites); *alors les fibres formelles de* A *sont géométriquement connexes.*

Il suffit d'appliquer (18.9.8) au cas où $B=\hat{A}$, puisque B est un A-module plat et que $\boldsymbol{k}(B)=\boldsymbol{k}(A)$.

Remarque **(18.9.10)**. — Les démonstrations de (18.9.4) et (18.9.5) n'utilisent que le fait que les fibres formelles de A sont géométriquement connexes. Les conclusions de ces deux propositions sont donc encore valables lorsqu'on suppose l'anneau local A noethérien, hensélien et universellement japonais.

Corollaire (**18.9.11**). — *Soient* X, Y *deux préschémas localement noethériens,* Y *étant supposé géométriquement unibranche et* X *connexe. Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme réduit* (i.e. (6.8.1) plat et à fibres géométriquement réduites). *Alors, pour toute partie fermée* T *de* X *telle que* $f(T)$ *soit rare dans* Y, $X-T$ *est connexe.*

Comme f est plat et que $f(T)$, étant rare, ne peut contenir de point maximal de Y, T ne peut contenir de point maximal de X (2.3.4), donc est rare dans X. Utilisant (15.5.6.1), il suffit de montrer que, pour tout $x \in T$, $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})-\{x\}$ est connexe. Posons $y=f(x)$, qui n'est pas un point maximal de Y. Comme l'anneau $\mathcal{O}_{Y,y}$ est géométriquement unibranche, on peut appliquer (18.9.7) au morphisme

$$f_1 : \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}),$$

qui vérifie les conditions (i) et (ii) de ce théorème, et à la partie fermée $\{x\}$ de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$, puisque $f_1(\{x\})=\{y\}$ est rare dans $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$.

18.10. Préschémas étales sur un préschéma géométriquement unibranche ou normal.

Théorème (**18.10.1**). — *Soient* $f: X \to Y$ *un morphisme localement de présentation finie,* x *un point de* X, $y=f(x)$. *Supposons que* Y *soit intègre et géométriquement unibranche au point* y. *Alors, pour que* f *soit étale au point* x, *il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) f *est non ramifié au point* x *;*

(ii) *l'homomorphisme* $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ *est injectif.*

De plus, s'il en est ainsi, X *est intègre et géométriquement unibranche au point* x.

Enfin, si $\mathcal{O}_{Y,y}$ *est noethérien, on peut, dans le critère précédent, remplacer la condition* (ii) *par la condition*

(ii *bis*) *On a* $\dim \mathcal{O}_{Y,y} \leqslant \dim \mathcal{O}_{X,x}$.

Le fait que, si f est étale, X soit intègre et géométriquement unibranche au point x est un cas particulier de (17.5.7). Il est clair d'autre part que les conditions (i) et (ii) sont nécessaires pour que f soit étale au point x, puisque $\mathcal{O}_{X,x}$ est alors un $\mathcal{O}_{Y,y}$-module fidèlement plat (17.6.1). Prouvons que ces conditions sont suffisantes.

Posons $A=\mathcal{O}_{Y,y}$, $A'={}^{hs}A$ (18.8.7), $Y'=\operatorname{Spec}(A')$, $X'=X\times_Y Y'$, $f'=f_{(Y')}: X' \to Y'$. Soient y' le point fermé de Y', x' un point de X' au-dessus de x et de y'; puisque le morphisme $g: Y' \to Y$ est *plat* (18.8.8), tout revient à voir que f' est étale au point x' (17.7.1, (ii)). L'hypothèse (ii) entraîne que le morphisme $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$ est dominant (**I**, 1.2.7); comme $\mathcal{O}_{Y,y}$ est intègre, $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$ a un seul point générique y_1, et il y a donc une générisation x_1 de x dans X au-dessus de y_1. Le morphisme projection $X' \to X$ étant plat, il existe une générisation x'_1 de x' au-dessus de x_1 (2.3.4); posons $y'_1=f'(x'_1)$; on a par suite $g(y'_1)=y_1$. Or, l'hypothèse sur y entraîne que A' est *intègre* (18.8.15), donc Y' a un seul point générique η, nécessairement au-dessus de y_1 puisque g

est plat (2.3.4); d'autre part, η est aussi point générique de $g^{-1}(y_1)$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.1.8), et on sait par ailleurs que les fibres de g sont des espaces *discrets* (18.8.12), donc $g^{-1}(y_1)=\{\eta\}$, et par suite $y'_1=\eta$. Le morphisme $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X',x'}) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y',y'})$ restriction de f' est donc dominant, et puisque $\mathcal{O}_{Y',y'}=A'$ est intègre, l'homomorphisme correspondant $\mathcal{O}_{Y',y'}\to\mathcal{O}_{X',x'}$ est injectif (**I**, 1.2.7). D'autre part, f' est non ramifié au point x', (donc (18.8.3, *d)*), il y a un voisinage U de x' dans X' tel que $f'|U$ soit une *immersion fermée* de U dans Y'; *a fortiori* l'homomorphisme $\mathcal{O}_{Y',y'}\to\mathcal{O}_{X',x'}$ est surjectif, et puisqu'il est injectif, il est *bijectif.* Mais alors $\mathcal{O}_{X',x'}$ est un $\mathcal{O}_{Y',y'}$-module *plat*, et f' est donc étale au point x' (17.6.1).

Enfin, lorsque $\mathcal{O}_{Y,y}$ est noethérien, on sait que si f est étale au point x, on a $\dim \mathcal{O}_{Y,y}=\dim \mathcal{O}_{X,x}$ (17.6.4). Réciproquement, supposons vérifiées les conditions (i) et (ii *bis*), et montrons qu'elles entraînent (ii). Soit $\mathfrak{J}$ le noyau de l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{Y,y}\to\mathcal{O}_{X,x}$; restreignant au besoin Y à un voisinage de y, on peut supposer que $\mathfrak{J}=\mathscr{J}_y$, où $\mathscr{J}$ est un Idéal de $\mathcal{O}_Y$; si Y_1 est le sous-préschéma fermé de Y défini par $\mathscr{J}$, on peut, en restreignant encore au besoin X et Y à des voisinages de x et y respectivement, supposer que f se factorise en $X \xrightarrow{f_1} Y_1 \to Y$ (**I**, 6.5.1). Il est clair que f_1 est encore non ramifié au point x, donc (17.4.1) quasi-fini en ce point; la démonstration de (5.4.1, (i)) prouve alors que l'on a $\dim(\mathcal{O}_{X,x})\leqslant\dim(\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{J})$. Mais si l'on avait $\mathfrak{J}\neq 0$, on en conclurait que $\dim(\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{J})<\dim(\mathcal{O}_{Y,y})$ puisque Y est intègre ($\mathbf{0}$, 16.1.2.2); on aurait par suite $\dim \mathcal{O}_{X,x}<\dim \mathcal{O}_{Y,y}$ contrairement à l'hypothèse, ce qui prouve (ii).

Remarques (**18.10.2**). — (i) Lorsque $A=\mathcal{O}_{Y,y}$ est noethérien, et que l'on sait que son complété $\hat{A}$ est intègre (par exemple si A est régulier), on peut, dans la démonstration précédente, remplacer A' par $\hat{A}$.

(ii) Lorsque Y est localement noethérien, on peut donner de (18.10.1) une démonstration plus rapide, n'utilisant pas la hensélisation stricte, mais faisant intervenir les résultats assez délicats des §§ 14 et 15. Comme f est quasi-fini au point x par hypothèse (17.4.1), on peut, en remplaçant X par un voisinage ouvert de x, supposer que $f^{-1}(y)=\{x\}$. L'hypothèse (ii) entraîne, comme on l'a vu, l'existence d'une composante irréductible Z de X contenant x et dominant l'unique composante irréductible Y_0 de Y contenant y. Le morphisme $f|Z$ étant quasi-fini au point x, donc équidimensionnel en ce point (13.2.2), il résulte de l'hypothèse sur Y et du critère de Chevalley (14.4.4) que $g=f|Z$ est universellement ouvert au point x. Par ailleurs puisque f (donc aussi g) est non ramifié au point x, $g^{-1}(y)$ est géométriquement réduit sur $\boldsymbol{k}(y)$ (17.4.1); comme $\mathcal{O}_{Y,y}$ est intègre, on conclut de (15.2.3) que g est *plat* au point x, donc f est *étale* en ce point (18.4.9).

(iii) Les notations et les hypothèses sur Y étant celles de (18.10.1), supposons seulement que f soit *localement de type fini* (et non nécessairement localement de présentation finie). Alors, pour que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit une $\mathcal{O}_{Y,y}$-algèbre *essentiellement étale* (18.6.1), il faut et il suffit que f vérifie les deux conditions suivantes :

1° *f est formellement non ramifié au point x;*

2° *l'homomorphisme $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est injectif.*

Il n'y a encore à prouver que la suffisance de ces conditions. Tenant compte de (18.4.12), il suffit de montrer que f est *plat* au point x. Or, en reprenant la démonstration de (18.10.1) et les notations utilisées dans cette démonstration, il suffit de montrer que f' est plat au point x' (2.5.1); par ailleurs f' est formellement non ramifié au point x' (17.1.3); on peut donc se borner à faire la démonstration lorsque $Y = \mathrm{Spec}(A)$, où A est *strictement local* et $y = f(x)$ le point fermé de Y. Utilisant alors (18.8.3) on voit que l'homomorphisme $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est surjectif, donc *bijectif* en vertu de l'hypothèse, et cela suffit à montrer la platitude de f au point x.

Supposons de plus que Y soit *localement intègre* au point y (**I**, 2.1.8). Alors les conditions 1° et 2° précédentes (jointe au fait que Y est géométriquement unibranche au point y et f localement de type fini) entraînent déjà que f est *étale au point* x. En effet, cela résulte de ce qui précède et de (18.4.13).

Corollaire **(18.10.3)**. — *Soient Y un préschéma intègre et géométriquement unibranche, η son point générique, X un préschéma connexe, $f : X \to Y$ un morphisme localement de type fini et tel que $f^{-1}(\eta)$ soit non vide. Alors, si f est formellement non ramifié, f est étale, et X est intègre et géométriquement unibranche.*

Il résulte de l'hypothèse et de (18.4.13) que f est étale en tous les points où il est *plat*, et en particulier aux points de $f^{-1}(\eta)$, puisque $\mathcal{O}_{Y,\eta} = \boldsymbol{k}(\eta)$ est un corps. L'ensemble ouvert U des points de X où f est étale est donc *non vide*. Montrons d'autre part que pour tout $x \in \overline{U}$, l'homomorphisme $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est *injectif*. Soit en effet s une section de $\mathcal{O}_Y$ au-dessus d'un voisinage ouvert de $f(x)$, qu'on peut toujours supposer être Y lui-même (la question étant locale sur X et Y), et supposons que son image $t \in \Gamma(Y, f_*(\mathcal{O}_X)) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ait un germe nul au point x, donc s'annule dans un voisinage ouvert V de x; alors la restriction de t à l'ouvert $U \cap V \neq \emptyset$ est nulle; mais la restriction $f|(U \cap V)$ est étale, donc $W = f(U \cap V)$ est ouvert dans Y et contient par suite le point générique η; l'homomorphisme $\mathcal{O}_{Y,\eta} \to \mathcal{O}_{X,z}$ étant injectif pour tout point $z \in f^{-1}(\eta)$, l'hypothèse que $t|(U \cap V) = 0$ entraîne que $s_\eta = 0$, et comme Y est intègre, cela entraîne $s = 0$, d'où notre assertion. Appliquant maintenant (18.10.2, (iii)), on conclut que f est *plat* au point x, autrement dit $x \in U$, et U est donc à la fois ouvert et fermé dans X; comme il est non vide et que X est connexe, on a $U = X$.

Notons maintenant que puisque f est étale, donc localement quasi-fini et que Y est irréductible, les points maximaux de X appartiennent à $f^{-1}(\eta)$ (2.3.4) et pour tout $x \in X$, il y a un voisinage de x qui ne contient qu'un nombre fini de ces points maximaux; autrement dit l'ensemble des composantes irréductibles de X est localement fini. Mais par (18.10.1) X est intègre et géométriquement unibranche en tout point, donc tout point de X n'appartient qu'à une seule composante irréductible, et puisque ces dernières forment un ensemble localement fini, elles sont ouvertes (et fermées) dans X; puisque X est connexe, il est intègre.

Remarque (**18.10.3.1**). — Si $f: X \to Y$ est localement de présentation finie, *dominant et quasi-compact*, la fibre $f^{-1}(\eta)$ est non vide en vertu de (1.1.5). Par contre, si l'on ne suppose pas f quasi-compact, *f peut être non ramifié et dominant sans que f soit étale* (en supposant toujours vérifiées les hypothèses de (18.10.3) pour X et Y). C'est ce que montre l'exemple suivant : on prend pour Y le plan affine $\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[T, U])$; on considère d'autre part une famille $(X_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ de préschémas isomorphes à la droite affine $\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[T])$, et on forme le préschéma obtenu en « recollant » X_{2j} et X_{2j+1} au point -1 et X_{2j+1} et X_{2j+2} au point $+1$. Définissons d'autre part $f: X \to Y$ comme étant égal sur X_{2j} à l'immersion fermée dont l'image est la droite d'équation $y = 2j$, transformant le point -1 en $(2j-1, 2j)$ et le point $+1$ en $(2j+1, 2j)$; sur X_{2j+1}, f_j est l'immersion fermée dont l'image est la droite d'équation $x = 2j+1$, transformant le point -1 en $(2j+1, 2j)$ et le point -1 en $(2j+1, 2j+2)$. Il est clair que f est une immersion locale (donc est non ramifié) et est dominant mais la fibre du point générique de Y est vide et f n'est pas étale.

Corollaire (**18.10.4**). — *Soient $g: Y \to S$, $h: X \to S$ deux morphismes localement de présentation finie, $f: X \to Y$ un S-morphisme, x un point de X, $y = f(x)$, $s = g(y) = h(x)$. On suppose que h est* plat *au point x et $g^{-1}(s)$* normal *au point y. Alors, pour que f soit étale au point x, il faut et il suffit que f soit non ramifié au point x et que* $\dim_x h^{-1}(s) = \dim_y g^{-1}(s)$.

Les conditions sont nécessaires en vertu du fait que si f est étale au point x, il en est de même de $f_s: h^{-1}(s) \to g^{-1}(s)$, et la conclusion résulte alors de ce que f_s est plat et quasi-fini au point x (6.1.2). Inversement, si les conditions de l'énoncé sont vérifiées, pour voir que f est étale au point x, il suffit, en vertu de (17.8.3) de voir que f_s l'est. On peut donc se borner au cas où S est le spectre d'un corps. Il résulte alors de l'hypothèse $\dim_x X = \dim_y Y$ et du fait que f est non ramifié au point x que l'on a (par (5.2.3) et (17.4.1)) $\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim \mathcal{O}_{Y,y}$; puisque f est quasi-fini au point x et $\mathcal{O}_{Y,y}$ intègre, on déduit de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.4.4) et (**0**, 16.3.10) que l'homomorphisme $\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est injectif; il suffit alors pour conclure d'appliquer (18.10.1).

Corollaire (**18.10.5**). — *Avec les notations de* (18.10.4), *on suppose que h est plat et que $g^{-1}(s)$ est normal pour tout* $s \in S$ (ce qui sera par exemple le cas si g est *lisse*). *Pour que f soit une immersion ouverte, il faut et il suffit que f soit un monomorphisme et que, pour tout* $x \in X$, *on ait* $\dim_x h^{-1}(s) = \dim_y g^{-1}(s)$, *où* $y = f(x)$ *et* $s = g(y) = h(x)$.

On n'a à prouver que la suffisance des conditions; or, il résulte de (17.1.3) qu'un monomorphisme localement de présentation finie est non ramifié, donc les hypothèses entraînent que f est étale (18.10.4); on conclut alors par (17.9.1).

Lemme (**18.10.6**). — *Soit $f: X \to Y$ un morphisme plat et localement quasi-fini* (**Err**$_{\mathrm{III}}$, 20).

(i) *L'ensemble* Max(X) *des points maximaux de* X *est en correspondance biunivoque canonique avec l'ensemble* $\coprod_{y\in \mathrm{Max}(Y)} f^{-1}(y)$.

(ii) *Si* Y *est irréductible et de point générique* η, *l'ensemble des composantes irréductibles de* X *est en correspondance biunivoque canonique avec $f^{-1}(\eta)$, et en particulier est fini si et seulement si $f^{-1}(\eta)$ est fini.*

(iii) *Si l'ensemble des composantes irréductibles de* Y *est localement fini, il en est de même de l'ensemble des composantes irréductibles de* X, *et en particulier* X *est localement connexe.*

L'assertion (i) résulte aussitôt de (2.3.4) et ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.1.6) et du fait que les fibres $f^{-1}(y)$ sont des ensembles discrets. Il est clair que (ii) est un cas particulier de (i). Enfin, pour prouver (iii), on peut, en vertu de (i), se borner au cas où f est quasi-fini et où Y est irréductible ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.1.6) et la conclusion résulte alors de (ii) et du fait que les fibres de f sont des ensembles finis (**II**, 6.2.2).

Proposition (**18.10.7**). — *Soient* Y *un préschéma géométriquement unibranche et irréductible* (resp. *intègre*), $f: X \rightarrow Y$ *un morphisme étale. Alors* X *est isomorphe à une somme de préschémas irréductibles* (resp. *intègres*) X_λ, *où* λ *parcourt la fibre* $f^{-1}(\eta)$ *du point générique* η *de* Y. *Les* X_λ *sont géométriquement unibranches; si* Y *est normal, les* X_λ *sont normaux.*

En effet, X est géométriquement unibranche (17.5.7), donc tout point de X n'appartient qu'à une seule composante irréductible; en outre, en vertu de (18.10.6) et (17.6.1) l'ensemble des composantes irréductibles de X est localement fini, donc ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.1.6) ce sont les composantes connexes X_λ de X ($\lambda \in f^{-1}(\eta)$), et X est somme des X_λ; en vertu de (17.5.7), si Y est intègre (resp. normal), les X_λ sont intègres (resp. normaux).

Proposition (**18.10.8**). — *Soient* Y *un préschéma normal et intègre, de point générique* η, $K = \boldsymbol{k}(\eta)$ *son corps de fonctions rationnelles*, $f: X \rightarrow Y$ *un morphisme étale. On suppose que* $f^{-1}(\eta)$ *est finie et non vide, de sorte que le* K-*schéma* $f^{-1}(\eta)$ *est le spectre d'une* K-*algèbre finie séparable* L, *composée directe d'un nombre fini de corps* K_i ($1 \leqslant i \leqslant n$), *extensions finies séparables de* K (17.6.2). *Soit* Y' *la fermeture intégrale de* Y *dans* L, *isomorphe à la somme des fermetures intégrales* Y_i *de* Y *dans les* K_i (**II**, 6.3.6). *Alors le morphisme* f *se factorise d'une seule manière en* $f: X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} Y$, *tel que la restriction* $f'_\eta : f^{-1}(\eta) \rightarrow g^{-1}(\eta)$ *soit l'isomorphisme canonique. En outre* f' *est un isomorphisme local; pour que* f' *soit une immersion ouverte, il faut et il suffit que* f *soit séparé.*

En vertu de (18.10.7), on peut se borner au cas où X est intègre et normal, L son corps de fonctions rationnelles, f étant dominant. L'existence et l'unicité de la factorisation considérée de f résultent alors de (**II**, 6.3.9). Comme f' est birationnel et localement quasi-fini, les dernières assertions résultent de (8.12.10).

Corollaire (**18.10.9**). — *Sous les hypothèses de* (18.10.8), *pour que* f *soit un morphisme fini* (autrement dit, pour que X soit un *revêtement étale* de Y), *il faut et il suffit que* X *soit isomorphe à la fermeture intégrale* Y' *de* Y *dans* L.

Si f est fini, l'injection canonique $j: X \rightarrow Y'$ (qui est une immersion ouverte) est aussi un morphisme fini (**II**, 6.1.5, (v)), donc un morphisme fermé (**II**, 6.1.10), et comme $j(X)$ est dense dans Y' par (18.10.8), on a $j(X) = Y'$. Inversement, comme Y est normal et L composé direct d'extensions finies séparables de K, Y' est fini sur Y (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 1, n° 6, cor. 1 de la prop. 18), d'où le corollaire.

(**18.10.10**) Soient Y un préschéma normal et intègre, $K = R(Y)$ son corps de fonctions rationnelles. Nous dirons qu'une K-algèbre de rang fini L est *non ramifiée sur* Y si : 1° L est une K-algèbre séparable, donc composée directe d'extensions finies séparables K_i de K ($1 \leqslant i \leqslant n$); 2° la fermeture intégrale Y' de Y dans L (somme des préschémas fermetures intégrales de Y dans les K_i) est *non ramifiée sur* Y (ce qui, par (18.10.3), équivaut à dire que Y′ est *étale sur* Y). Lorsque $Y=\mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau intègre et intégralement clos, K son corps des fractions, on dira encore (par abus de langage, et lorsqu'une confusion avec la terminologie de (17.3.2, (ii)) n'est pas à craindre) que L est *non ramifiée sur* A au lieu de « non ramifiée sur Y ».

Remarque (**18.10.11**). — Au lieu de dire que L est non ramifiée sur Y certains auteurs disent aussi que L est « non ramifiée sur K »; nous nous garderons de suivre cet usage qui prête à confusions.

On peut alors exprimer (18.10.9) sous la forme suivante :

Corollaire (**18.10.12**). — *Soient* Y *un préschéma normal et intègre,* $K=R(Y)$ *son corps de fonctions rationnelles. Alors le foncteur* $X \rightsquigarrow R(X)$ *est une équivalence de la catégorie des revêtements étales de* Y, *et de la catégorie des* K-*algèbres finies étales qui sont* non ramifiées *sur* Y. *On obtient un foncteur quasi-inverse en faisant correspondre à toute* K-*algèbre finie étale* L, *non ramifiée sur* Y, *la fermeture intégrale* Y′ *de* Y *dans* L.

Proposition (**18.10.13**). — *Soient* Y *un préschéma normal et intègre,* $K=R(Y)$ *son corps de fonctions rationnelles.*

(i) *Le corps* K *est une* K-*algèbre non ramifiée sur* Y.

(ii) *Soit* L *une extension finie de* K, *non ramifiée sur* Y, *et soit* Z *la fermeture intégrale de* Y *dans* L. *Alors, si* M *est une* L-*algèbre non ramifiée sur* Z, M *est aussi une* K-*algèbre non ramifiée sur* Y (« transitivité » de la non-ramification).

(iii) *Soient* Y′ *un préschéma normal et intègre,* K′ *son corps de fonctions rationnelles,* $g: Y' \rightarrow Y$ *un morphisme dominant. Si* L *est une* K-*algèbre non ramifiée sur* Y, *alors* $L\otimes_K K'$ *est une* K′-*algèbre non ramifiée sur* Y′ (propriété de « translation »). *Si de plus* $Y=\mathrm{Spec}(A)$ *et* $Y'=\mathrm{Spec}(A')$ *sont affines, et si* C *est la fermeture intégrale de* A *dans* L, *alors* $C'=C\otimes_A A'$ *est la fermeture intégrale de* A′ *dans* $L\otimes_K K'$.

L'assertion (i) est immédiate, Y étant par hypothèse son propre normalisé dans K. Pour prouver (ii), soit Z′ la fermeture intégrale de Z dans M, qui est par hypothèse un revêtement étale de Z. Comme Z est étale et séparé sur Y, il en est de même de Z′ (17.3.3) qui est évidemment la fermeture intégrale de Y dans M. Comme M est une K-algèbre finie et séparable, il résulte de (18.10.10) que M est non ramifiée sur Y. Enfin, pour démontrer (iii), notons que si Z est la fermeture intégrale de Y dans L, $Z\times_Y Y'$ est étale et séparé sur Y′ (17.3.3), fini sur Y′ puisque Z est fini sur Y, et admet pour anneau de fonctions rationnelles $L\otimes_K K'$ (**I**, 3.4.9); comme Y′ est normal, il en est de même de $Z\times_Y Y'$ (17.5.7), qui est donc la fermeture intégrale de Y′ dans $L\otimes_K K'$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire (**18.10.14**). — *Soient* Y *et* Y′ *deux préschémas normaux et intègres,* K, K′ *leurs corps de fonctions rationnelles respectifs,* $g: Y' \rightarrow Y$ *un morphisme dominant, de sorte que* K′ *est une extension de* K. *Soient* L *une extension finie de* K *non ramifiée sur* Y, L_1 *une extension composée* (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 8, déf. 1) de L *et de* K′. *Alors* L_1 *est une extension de* K′ *non ramifiée sur* Y′. *Si de plus* $Y=\mathrm{Spec}(A)$, $Y'=\mathrm{Spec}(A')$ *sont affines, et si* C *est la fermeture intégrale de* A *dans* L, *alors le sous-anneau* $C_1=A[C, A']$ *de* L_1 *est la fermeture intégrale de* A′ *dans* L_1.

En effet, $L\otimes_K K'$ est composée directe d'extensions finies séparables de K′, et L_1

est l'une de ces extensions; donc la fermeture intégrale de Y dans L est somme de préschémas dont l'un est la fermeture intégrale de Y dans L_1. Le corollaire résulte donc aussitôt de (18.10.14).

Lorsque par exemple A est l'anneau des entiers d'un corps de nombres algébriques K, K' et L des extensions algébriques de K, il y a des exemples classiques montrant que la relation $C_1 = A[C, A']$ est en défaut lorsque L n'est pas non ramifiée sur A[ ].

(18.10.15) Supposons que $Y = \mathrm{Spec}(A)$ soit affine, A étant intègre et intégralement clos; soient K son corps des fractions, L une extension finie séparable de K, et supposons que la fermeture intégrale C de A dans L soit un A-module *projectif* de type fini (ce qui sera par exemple le cas si A est un anneau de Dedekind (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 4, n° 10, prop. 22)). Dire que L est non ramifiée sur A signifie que C est *étale* (18.10.10) et en vertu de (18.2.7, (ii)), cela équivaut donc à dire que le *discriminant* $d_{C/A}$ de Spec(C) sur Spec(A) est *inversible* dans A. Dans le cas particulier où C est un A-module *libre* et $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de C sur A, cela signifie que $\det(\mathrm{Tr}_{C/A}(x_i x_j))$ est inversible dans A.

Théorème **(18.10.16)**. — *Soient* Y *un préschéma intègre,* η *son point générique,* $f : X \rightarrow Y$ *un morphisme séparé et localement de type fini. On suppose que toute composante irréductible de* X *domine* Y *et que la fibre générique* $X_\eta = f^{-1}(\eta)$ *est un préschéma fini sur* $K = \boldsymbol{k}(\eta)$, *donc* $(X_\eta)_{\mathrm{red}}$ *est égal à* Spec(L), *où* $L = \prod_i L_i$ *est un produit d'extensions finies* L_i *de* K. *On pose* $n = [L : K] = \sum_i [L_i : K]$, $n_s = \sum_i [L_i : K]_s$ (somme des degrés séparables des L_i).

Soit y *un point* géométriquement unibranche *de* Y, *et désignons par* $n(y)$ *la somme des degrés séparables sur* $\boldsymbol{k}(y)$ *des corps résiduels des points* isolés *de* $f^{-1}(y)$. *Alors :*

(i) *On a* $n(y) \leqslant n_s \leqslant n$.

(ii) *Supposons* X *réduit et le point* y *normal dans* Y. *Pour que* $n(y) = n$, *il faut et il suffit qu'il existe un voisinage ouvert* U *de* y *dans* Y *tel que la restriction* $f^{-1}(U) \rightarrow U$ *de* f *soit un morphisme étale et fini.*

A) *Réduction au cas où* f *est quasi-fini.* — On sait (13.1.4) que l'ensemble Z des points $x \in X$ isolés dans $f^{-1}(f(x))$ est ouvert dans X et par hypothèse Z contient $f^{-1}(\eta)$. Puisque $f^{-1}(\eta)$ est fini, Z est réunion filtrante croissante d'ouverts quasi-compacts V_λ contenant $f^{-1}(\eta)$ (donc denses dans X par hypothèse). Si $n_\lambda(y)$ est la somme des degrés séparables sur $\boldsymbol{k}(y)$ des corps résiduels des points de $V_\lambda \cap f^{-1}(y)$, on a $n(y) = \sup_\lambda n_\lambda(y)$; pour prouver (i), il suffira donc de montrer que $n_\lambda(y) \leqslant n_s$. D'autre part, si $n(y) = n$, il y a un indice λ tel que $n_\lambda(y) = n$. Supposons démontré qu'il existe alors un voisinage ouvert U de y dans Y tel que la restriction $V_\lambda \cap f^{-1}(U) \rightarrow U$ de f soit un morphisme étale et fini. Puisque f est séparé, l'injection canonique $V_\lambda \cap f^{-1}(U) \rightarrow f^{-1}(U)$ est alors aussi un morphisme fini (**II**, 6.1.5, (v)), donc $V_\lambda \cap f^{-1}(U)$ est fermé dans $f^{-1}(U)$ (**II**, 6.1.10); mais étant partout dense dans $f^{-1}(U)$, il lui est nécessairement égal.

B) *Réduction au cas où* X *est réduit,* f *fini et* $Y = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$. — On notera que l'hypothèse sur f entraîne qu'elle est aussi vérifiée pour f_{red} et que la conclusion de (i) ne concerne que f_{red}. On peut donc remplacer partout f par f_{red} et supposer donc X réduit.

D'autre part, en vertu de (18.12.13) [1], on peut (après avoir remplacé Y par un voisinage ouvert affine V de y et f par sa restriction $f^{-1}(V) \to V$) factoriser f en $X \xrightarrow{j} X' \xrightarrow{g} Y$, où g est *fini* et j une immersion ouverte. Puisque X est réduit, on peut remplacer X′ par le sous-préschéma fermé réduit d'espace sous-jacent $\overline{j(X)}$ (**I**, 5.2.2), donc supposer X′ réduit et tel que toute composante irréductible de X′ domine Y. En outre, $j(X)$ est un ouvert dense dans X′ et n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles en vertu de l'hypothèse; donc ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 1.2.7) les composantes irréductibles de X′ sont les adhérences de celles de $j(X)$, et par suite la fibre $g^{-1}(\eta)$ s'identifie à $f^{-1}(\eta)$. Si on suppose le théorème démontré lorsqu'en outre f est un morphisme *fini*, on pourra l'appliquer à g, et comme $f^{-1}(y)$ s'identifie à un sous-préschéma de $g^{-1}(y)$, la relation (i) pour g entraîne la même relation pour f. Supposons d'autre part que $n(y)=n$; alors, en vertu de ce qui précède, on peut appliquer la conclusion de (ii) au morphisme g, et en remplaçant au besoin Y par un voisinage ouvert de y, on peut supposer g étale, et il en est par suite de même de f; en outre, on a alors $f^{-1}(y)=g^{-1}(y)$. Comme le morphisme g est fermé et que $j(X)$ est ouvert dans X′, il existe un voisinage U de y dans Y tel que $j(X) \cap g^{-1}(U) = j(f^{-1}(U))$, ce qui prouve que (ii) est vrai aussi pour f.

On est ainsi ramené au cas où f est en outre un morphisme *fini*. Il est immédiat que, pour prouver (i), on peut se borner au cas où $Y = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$. Montrons qu'il en est de même pour prouver (ii). En effet, supposons prouvé que la condition $n(y)=n$ entraîne que $X \times_Y \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$ est étale et fini sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$; comme cela entraîne que f est plat et formellement non ramifié aux points de $f^{-1}(y)$, et que Y est *intègre*, on conclut de (18.4.13) que f est *étale aux points de* $f^{-1}(y)$, donc aussi dans un voisinage ouvert V de $f^{-1}(y)$ dans X; mais puisque f est un morphisme fini, donc fermé, V contient un ouvert de la forme $f^{-1}(U)$, où U est un voisinage ouvert de y dans Y.

C) *Réduction au cas où* $Y = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$ *et* $\mathcal{O}_{Y,y}$ *est strictement local.* — Posons $A = \mathcal{O}_{Y,y}$, et soit $A' = {}^{hs}A$ le hensélisé strict de A (18.8.7), qui est un anneau local intègre et géométriquement unibranche (18.8.16). Soit $Y' = \mathrm{Spec}(A')$, et soient y' le point fermé et η' le point générique de Y′; y' est au-dessus de y et puisque le morphisme $g: Y' \to Y$ est plat (18.8.8), η' est au-dessus de η (2.3.4). Posons $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')} : X' \to Y'$; f' est fini et puisque g est plat, toute composante irréductible de X′ domine Y′ (2.3.7). Si $n'(y')$, n' et n'_s sont les nombres définis pour f' de la même façon que $n(y)$, n et n_s pour f, on a $n'_s = n_s$ et $n'(y') = n(y)$ (**I**, 6.4.8), et il revient donc au même de prouver l'assertion (i) de l'énoncé pour f ou pour f'. En outre, si X est réduit et y un point normal de Y (donc A intégralement clos), alors A′ est intégralement clos (18.8.12). D'autre part il résulte de la définition (18.8.7), de la remarque (8.1.2, *a)*) et du théorème de la double limite inductive, que A′ est limite inductive d'anneaux A_α tels que les morphismes $\mathrm{Spec}(A_\alpha) \to \mathrm{Spec}(A) = Y$ soient étales; par suite X′ est limite projective des $X_\alpha = X \otimes_A A_\alpha$, qui sont étales sur X, donc réduits puisque X l'est (17.5.7); par passage à la limite,

[1] Le lecteur vérifiera que (18.10.16) n'est pas utilisé dans la démonstration de (18.12.13). Si f est supposé localement de présentation finie (resp. quasi-projectif), on peut remplacer (18.12.13) par (8.12.8) (resp. (8.12.6)).

on en déduit que X' est réduit (8.7.1). Cela étant, si $n(y)=n$, on a $n_s=n$ et par suite les corps résiduels aux points de X_η sont nécessairement séparables sur $\boldsymbol{k}(\eta)$; les corps résiduels aux points de $X'_{\eta'}$ sont par suite algébriques et séparables sur $\boldsymbol{k}(\eta')$ (4.6.1), autrement dit $n'_s=n'=n$, et on a donc en vertu de ce qui précède $n'(y')=n'$. Le morphisme f' a donc les mêmes propriétés que f, et si l'on prouve que f' est étale, il en résultera que f est étale par (17.7.1).

D) *Fin de la démonstration.* — Supposons donc A strictement local. Puisque A est hensélien et le morphisme f fini, il résulte de (18.5.11) que si x_j $(1\leqslant j\leqslant m)$ sont les points distincts de $f^{-1}(y)$, X est *somme* des sous-préschémas ouverts $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x_j})=X_j$, qui sont donc les composantes connexes de X. Par hypothèse, chacune d'elles domine Y, donc rencontre $f^{-1}(\eta)$, et par suite le nombre de points de $f^{-1}(\eta)$ est $\geqslant m$; *a fortiori* on a $n_s\geqslant m$. Mais puisque $\boldsymbol{k}(y)$ est séparablement clos et que les $\boldsymbol{k}(x_j)$ sont algébriques sur $\boldsymbol{k}(y)$, ce sont nécessairement des extensions *radicielles* de $\boldsymbol{k}(y)$, donc $m=n(y)$, et cela prouve (i). Supposons maintenant vérifiées les hypothèses de (ii) ; les relations $n(y)=n_s=n$ entraînent d'abord, puisque toute composante irréductible de X domine Y, que chacun des X_j est *irréductible* ; en outre, comme les X_j sont *réduits*, ils sont *intègres* ; enfin les relations $m=n_s=n$ entraînent que pour le point générique ξ_j de X_j, $\boldsymbol{k}(\xi_j)$ est une extension séparable de $\boldsymbol{k}(\eta)$ de degré 1, donc isomorphe à $\boldsymbol{k}(\eta)$; autrement dit, la restriction $f|X_j : X_j\rightarrow Y$ de f est un morphisme *fini et birationnel* ; en outre, X_j est *intègre* et par hypothèse Y est *normal* ; donc (8.12.10.1) $f|X_j$ est un *isomorphisme*, ce qui prouve que f est *étale*, et termine la démonstration de (18.10.16).

Remarque **(18.10.17).** — La méthode de « localisation étale » utilisée dans la démonstration de (18.10.16) permet aussi d'améliorer les résultats de (15.5.1) en éliminant l'hypothèse noethérienne. On a tout d'abord le résultat suivant qui généralise (15.5.2) :

(18.10.17.1) *Soient* $f : X\rightarrow Y$ *un morphisme séparé et quasi-fini,* y *un point de* Y *tel que* f *soit universellement ouvert aux points de* $f^{-1}(y)$. *Alors, pour toute générisation* y' *de* y, *on a* $n(y)\leqslant n(y')$.

On peut remplacer Y par le sous-préschéma fermé réduit Z ayant pour espace sous-jacent $\overline{\{y'\}}$ et X par $f^{-1}(Z)$, donc supposer Y intègre de point générique y'. Utilisant (18.12.13) comme dans (18.10.16, B)), on peut supposer que X est ouvert dense dans un préschéma X' et que f est la restriction à X d'un morphisme *fini* $g : X'\rightarrow Y$. Montrons que l'on a $g^{-1}(y')=f^{-1}(y')$. En effet, soit $i : g^{-1}(y')\rightarrow X'$ l'injection canonique, qui est un morphisme plat puisque y' est point générique de Y (**I**, 3.6.5) ; on peut écrire $f^{-1}(y')=i^{-1}(X)$. D'autre part, l'injection canonique $j : X\rightarrow X'$ est un morphisme de type fini puisque le composé $g\circ j=f$ est de type fini et que g est séparé (1.5.4) ; donc X est un ouvert rétrocompact dans X', et par suite est pro-constructible dans X' (1.9.5, (v)). On conclut donc de (2.3.10) que l'on a $i^{-1}(\overline{X})=\overline{i^{-1}(X)}$ autrement dit $f^{-1}(y')$ est dense dans $g^{-1}(y')$; mais comme $g^{-1}(y')$ est discret, on a nécessairement $f^{-1}(y')=g^{-1}(y')$.

On est ainsi ramené à prouver que la somme des nombres $[\boldsymbol{k}(x):\boldsymbol{k}(y)]_s$ où x parcourt l'ensemble des points de $g^{-1}(y)$ où g est universellement ouvert, est au plus égale au nombre $n(y')$ (pour le morphisme g). Utilisant ensuite le fait que la propriété d'être universellement ouvert en un point se conserve par changement de base, on montre, comme dans (18.10.16, C)) que l'on peut se ramener au cas où $Y=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$, avec $\mathcal{O}_{Y,y}$ *strictement local*. Alors, avec les notations de (18.10.16, D)), X est somme des sous-préschémas ouverts $X_j=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x_j})$, où x_j parcourt $g^{-1}(y)$; l'hypothèse que g est *ouvert* en un de ces points x_j entraîne que le sous-préschéma X_j correspondant domine Y (1.10.3); on termine comme dans (18.10.16, D)).

On tire ensuite de (18.10.17.1) que *les conclusions de* (15.5.1) *sont encore valables lorsqu'on ne suppose plus* Y *localement noethérien, mais seulement que f est séparé, quasi-fini et de présentation finie.*

En effet, pour prouver l'assertion (i) de (15.5.1), on remarque que, puisque f est de présentation finie, l'ensemble E des points $z\in Y$ tels que $n(z)\geqslant n(y)$ est localement constructible (9.7.9); pour montrer que y est intérieur à E, il suffit, en vertu de (1.10.1), de voir que toute générisation y' de y appartient à E, ce qui n'est autre que (18.10.17.1).

Pour prouver l'assertion (ii) de (15.5.1), on peut, puisque f est de présentation finie, utiliser (8.10.5, (xii)) appliqué suivant la méthode de (8.1.2, *a)*), et on peut donc déjà supposer que $Y=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$. Appliquant ensuite (2.7.1, (vii)), on voit qu'on peut par le changement de base fidèlement plat $Y'\to Y$, où $Y'=\mathrm{Spec}({}^{hs}\mathcal{O}_{Y,y})$, supposer que l'anneau $\mathcal{O}_{Y,y}$ est *strictement local*. Appliquant (18.5.11, *c)*), on voit alors que si x_j $(1\leqslant j\leqslant n)$ sont les points de $f^{-1}(y)$, X est *somme* de n sous-préschémas ouverts $X_j=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x_j})$ qui sont *finis* sur Y, et d'un préschéma ouvert X''. Si on prouve que $X''=\emptyset$, on aura démontré que f est fini, donc propre. Or, les corps $\boldsymbol{k}(x_j)$ étant des extensions algébriques de $\boldsymbol{k}(y)$, sont *radicielles*, et par suite $n(y)=n$; comme f est ouvert en chacun des points x_j, X_j domine Y (1.10.3), donc la restriction de f à X_j, étant un morphisme *fini*, est *surjectif* (**II**, 6.1.10). L'hypothèse que $z\rightsquigarrow n(z)$ est constant dans Y entraîne donc que $X''\cap f^{-1}(z)=\emptyset$ pour tout $z\in Y$, c'est-à-dire $X''=\emptyset$.

Enfin, la preuve de (iii) reproduit sans changement celle donnée dans (15.5.1).

(18.10.17.2) Par des méthodes analogues utilisant la hensélisation stricte, on peut, dans la plupart des résultats des §§ 14 et 15, se débarrasser des hypothèses noethériennes.

Lemme **(18.10.18)**. — *Soient* X, Y *deux préschémas,* $f: X\to Y$ *un morphisme birationnel* (1), *x un point de* X. *Pour que f soit un isomorphisme local au point x, il faut et il suffit que f soit étale au point x. Pour que f soit une immersion ouverte, il faut et il suffit que f soit étale et séparé.*

Les conditions énoncées étant trivialement nécessaires, tout revient à voir qu'elles sont suffisantes. Pour la première assertion, la question est locale sur X et Y, donc on peut supposer f étale, X et Y affines, donc f *séparé*, et on est ramené à prouver la seconde assertion. En vertu de (17.9.1), il s'agit de prouver que f est *radiciel*. Soit donc $y\in Y$ et prouvons que $f^{-1}(y)$ est radiciel sur $\boldsymbol{k}(y)$. Le changement de base $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})\to Y$ ne changeant pas le fait que f est étale, séparé et birationnel, on peut se borner au cas où $Y=\mathrm{Spec}(A)$, avec $A=\mathcal{O}_{Y,y}$. Soit alors $A'={}^{hs}A$, qui est un anneau local et un A-module

(1) Nous entendons par là la notion définie dans (6.15.4), mais où on ne suppose pas X et Y réduits.

fidèlement plat (18.8.8), l'homomorphisme $A \rightarrow A'$ étant local. Posons $Y' = \mathrm{Spec}(A')$, $X' = X_{(Y')}$, $f' = f_{(Y')} : X' \rightarrow Y'$, de sorte que f' est étale et séparé; en outre, comme le morphisme $Y' \rightarrow Y$ est plat, le raisonnement de (6.15.4.1) montre que f' est aussi birationnel. Si y' est le point fermé de Y', il suffira, en vertu de (2.6.1, (v)), de prouver que $f'^{-1}(y')$ est radiciel sur $\boldsymbol{k}(y')$; puisque f' est étale, il suffira de prouver que $f'^{-1}(y')$ contient *au plus un point* (17.6.1, *c'*)).

Supposons donc $Y = \mathrm{Spec}(A)$, A étant strictement local, f séparé, étale et birationnel et montrons que $f^{-1}(y)$ ne peut contenir plus d'un point. En effet, s'il existait dans $f^{-1}(y)$ deux points distincts x_1, x_2, il existerait deux Y-sections u_1, u_2 de f telles que $u_1(y) = x_1$ et $u_2(y) = x_2$ (18.8.1); mais puisque f est étale et séparé, u_1 et u_2 seraient des isomorphismes de Y sur deux composantes connexes (ouvertes) de X (17.9.4) et il y aurait donc deux points maximaux au moins de X au-dessus de tout point maximal de Y, ce qui contredit l'hypothèse que f est *birationnel*.

Proposition (**18.10.19**). — *Soient* Y *un préschéma réduit dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini,* $f : X \rightarrow Y$ *un morphisme séparé, localement de type fini et formellement non ramifié, g une* Y*-section rationnelle de f* (i.e. *une* Y*-application rationnelle de* Y *dans* X), U *le domaine de définition de g* (**I**, 7.2.1), *et soit* Z *l'adhérence de g*(U) *dans* X. *Alors, pour tout point* $y \in Y - U$ *tel que* Y *soit géométriquement unibranche au point y, on a* $Z_y = Z \cap f^{-1}(y) = \emptyset$. *En particulier, si* Y *est géométriquement unibranche, g*(U) *est une partie à la fois ouverte et fermée de* X. *Si, pour toute partie fermée* irréductible T *de* X, *f*(T) *est fermé dans* Y, *g est définie en tout point géométriquement unibranche de* Y.

Puisque Y est réduit et f séparé, il résulte de (**I**, 7.2.2) qu'il existe une U-section u de $f^{-1}(U)$ appartenant à la classe g; d'ailleurs (17.4.1.2), puisque f est formellement non ramifié, u est un isomorphisme de U sur le préschéma induit sur l'ouvert $u(U)$ de X. Si on note encore Z le sous-préschéma réduit de X ayant Z pour espace sous-jacent, $g(U) = u(U)$, étant réduit, est induit aussi par Z, donc la restriction $f' = f|Z$ de f est un morphisme *birationnel* de Z dans Y, d'ailleurs formellement non ramifié, puisque f l'est (17.1.3). La question étant locale sur Y, puisque Y est réduit et géométriquement unibranche (donc intègre) au point y, on peut se borner (en remplaçant Y par un voisinage ouvert de y) au cas où Y est *intègre*; alors $u(U)$ est irréductible, donc aussi Z, et par suite Z est aussi intègre. Alors (**I**, 8.2.7) puisque f' est dominant, l'homomorphisme $\mathcal{O}_{Y,y} \rightarrow \mathcal{O}_{Z,x}$ est injectif pour tout $x \in Z_y$, et on conclut de (18.10.2, (iii)) que f' est un morphisme *étale*; étant séparé et birationnel, c'est un isomorphisme local au point x en vertu de (18.10.18); mais cela entraînerait que la U-section u serait prolongeable à un ouvert distinct de U, contrairement à la définition de ce dernier. On a donc nécessairement $Z_y = \emptyset$, ce qui établit la première assertion; la seconde en est une conséquence évidente. En outre, sous les hypothèses de la dernière assertion de l'énoncé, comme Z est fermé et irréductible, $f(Z)$ est fermé dans Y, donc égal à Y, i.e. on a $Z_y \neq \emptyset$ pour tout $y \in Y$, ce qui achève la démonstration.

Remarque (**18.10.20**). — Soit Y un préschéma localement noethérien. On dit qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est *essentiellement propre* s'il est *localement de type fini* et si, pour tout Y-schéma de la forme $Y'=\mathrm{Spec}(A)$ où A est un anneau de valuation discrète, l'application canonique (**II**, 7.3.2.2) relative au Y'-préschéma $X\times_Y Y'$, est bijective. Le raisonnement de (**II**, 7.3.8) prouve qu'il revient au même de dire que f (supposé localement de type fini) est *séparé* et que pour tout changement de base $Y''\rightarrow Y$, où Y'' est *localement noethérien*, l'image par $f_{(Y'')} : X_{(Y'')}\rightarrow Y''$ de toute partie fermée *irréductible* de X'' est *fermée*. Dire que f est *propre* (pour Y localement noethérien) signifie donc que f est *essentiellement propre et de type fini* (**II**, 7.3.8) ; mais on rencontre des exemples importants de morphismes essentiellement propres qui ne sont pas de type fini (par exemple certains « préschémas de Picard » ou certains « préschémas de Néron-Severi » (chap. VI)). Il résulte évidemment de (18.10.19) que si Y est *localement noethérien, réduit et géométriquement unibranche*, et si le morphisme $f : X\rightarrow Y$ est *essentiellement propre et non ramifié*, alors *toute* Y-*section rationnelle de f est partout définie*.

La proposition suivante généralise le critère (17.15.5) de lissité d'un morphisme $X\rightarrow Y$ lorsque Y n'est pas le spectre d'un corps :

Proposition (**18.10.21**). — *Soient $f : X\rightarrow Y$ un morphisme localement de présentation finie, x un point de* X, $y=f(x)$ *et supposons l'anneau $\mathcal{O}_{Y,y}$* intègre *et* géométriquement unibranche. *Soit r le nombre minimum de générateurs du $\mathcal{O}_{X,x}$-module* $(\Omega^1_{X/Y})_x$ (égal au *rang* du $\boldsymbol{k}(x)$-espace vectoriel $(\Omega^1_{X/Y})_x\otimes_{\mathcal{O}_{X,x}}\boldsymbol{k}(x)$). *Alors, pour que f soit lisse au point x, il faut et il suffit que, si y' est le point générique de l'unique composante irréductible de* Y *contenant y, il existe une générisation x' de x telle que $f(x')=y'$ et* $\dim_{x'}f^{-1}(y')\geqslant r$.

Si f est lisse au point x, il l'est aussi dans un voisinage ouvert U de x, donc en toute générisation x' de x et $\dim_{x'}(f^{-1}(f(x')))=r$ en chacun de ces points, en vertu de (17.10.2). Comme f est en outre plat dans U, il existe une générisation de x au-dessus de toute générisation de y (2.3.4), ce qui prouve que la condition est nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, notons d'abord que par (17.5.1), il suffit de prouver que le morphisme déduit de f par le changement de base $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})\rightarrow Y$ est lisse au point x; on peut donc supposer que $Y=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$.

La question est locale sur X, donc ((16.4.22) et ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.2)) on peut supposer que X est affine, et qu'il existe r sections s_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de X telles que les sections $d_{X/Y}(s_i)$ engendrent $\Omega^1_{X/Y}$. Soit

$$g : X \rightarrow Z=Y[T_1, \ldots, T_r]=\mathbf{V}^r_Y$$

le Y-morphisme correspondant à l'homomorphisme $\mathcal{O}^r_Y\rightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$ de $\mathcal{O}_Y$-Modules défini par les s_i (considérées comme sections de $f_*(\mathcal{O}_X)$ au-dessus de Y) (**II**, 1.2.7). On a la suite exacte (16.4.19)

$$g^*(\Omega^1_{Z/Y}) \rightarrow \Omega^1_{X/Y} \rightarrow \Omega^1_{X/Z} \rightarrow 0.$$

Comme les dT_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ engendrent $\Omega^1_{Z/Y}$, il résulte de la définition de g que l'homomorphisme $g^*(\Omega^1_{Z/Y})\rightarrow\Omega^1_{X/Y}$ est surjectif, donc $\Omega^1_{X/Z}=0$, et g est par suite *non ramifié* (17.4.1). Nous allons voir que g est *étale* au point x, et compte tenu de (17.3.8), cela prouvera que f est lisse au point x. Comme $\mathcal{O}_{Y,y}$ est supposé intègre et géométriquement unibranche, il en est de même de $\mathcal{O}_{Z,z}$(17.5.7) où $z=g(x)$, puisque le morphisme structural $Z \to Y$ est lisse (17.3.8). En vertu de (18.10.1), il suffit de montrer que l'homomorphisme $\mathcal{O}_{Z,z} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est injectif; il revient au même de voir que le morphisme $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Z,z})$ correspondant est *dominant*, puisque $\mathcal{O}_{Z,z}$ est intègre (**I**, 1.2.7). Soit y' le point générique de $Y = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$ et soit z' le point générique de $Z = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}[T_1, \ldots, T_n])$ qui est intègre; si $h : Z \to Y$ est le morphisme structural, on a $h(z')=y'$. Il suffit de prouver qu'il existe dans $f^{-1}(y')$ une générisation x' de x telle que l'image de x' par le morphisme $g_{y'} : f^{-1}(y') \to h^{-1}(y')$ soit égale à z'. D'ailleurs z' est aussi le point générique de $h^{-1}(y') = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y')[T_1, \ldots, T_r])$; comme le morphisme $g_{y'}$ est non ramifié, donc quasi-fini (17.4.2), il en est de même de sa restriction à toute composante irréductible de $f^{-1}(y')$; comme $f^{-1}(y')$ et $h^{-1}(y')$ sont localement noethériens et que $\dim(h^{-1}(y'))=r$, il résulte de (5.4.1) que la restriction de $g_{y'}$ à toute composante irréductible *de dimension* $\geqslant r$ de $f^{-1}(y')$ est un morphisme dominant. Or, il existe par hypothèse une telle composante contenant une générisation de x; *a fortiori* son point générique est une générisation de x, d'où la conclusion.

18.11. Application aux algèbres locales noethériennes complètes sur un corps.

Le lemme suivant généralise (**0**, 21.9.1) et (**0**, 21.9.2) :

Lemme (**18.11.1**). — *Soient k un corps,* A *un anneau local noethérien complet qui est une k-algèbre,* K *le corps résiduel de* A.

(i) *Si le* K*-espace vectoriel $\Omega^1_{K/k}$ est de rang fini, le* A*-module $\widehat{\Omega}^1_{A/k}$ est de type fini.*

(ii) *Si de plus* A *est une k-algèbre formellement lisse (pour la topologie adique), $\widehat{\Omega}^1_{A/k}$ est un* A*-module libre de rang égal à*

$$\dim(A) + \mathrm{rg}_K(\Omega^1_{K/k}) - \mathrm{rg}_K(\Upsilon_{K/k}).$$

En outre, pour tout sous-corps k_0 de k tel que Ω^1_{k/k_0} soit un k-espace vectoriel de rang fini, $\widehat{\Omega}^1_{A/k_0}$ est un A*-module libre de rang égal à*

$$\dim(A) + \mathrm{rg}_K(\Omega^1_{K/k}) - \mathrm{rg}_K(\Upsilon_{K/k}) + \mathrm{rg}_k(\Omega^1_{k/k_0}).$$

L'assertion (i) n'est mise que pour mémoire, ayant été prouvée dans (**0**, 20.7.15). Pour prouver (ii), notons que cette assertion a été en fait établie par la démonstration de (**0**, 21.9.2), l'énoncé de (**0**, 21.9.2) faisant seul intervenir la finitude du degré de transcendance de K sur k (par l'intermédiaire de l'égalité de Cartier (**0**, 21.7.1)).

Lemme (**18.11.2**). — *Soient k un corps de caractéristique $p>0$,* C *une k-algèbre locale noethérienne, complète, dont le corps résiduel est une extension finie de k, et qui est intègre ; soient n sa dimension,* L *son corps des fractions. Alors $\Omega^1_{L/k}$ et $\Upsilon_{L/k}$ sont des* L*-espaces vectoriels de rang fini, et l'on a*

(**18.11.2.1**) $$\mathrm{rg}_L(\Omega^1_{L/k}) - \mathrm{rg}_L(\Upsilon_{L/k}) \geqslant n.$$

Supposons en outre que $[k:k^p]<+\infty$. *Alors on a l'égalité*

(18.11.2.2) $$\mathrm{rg}_L(\Omega^1_{L/k})-\mathrm{rg}_L(\Upsilon_{L/k})=n.$$

En outre, $\Omega^1_{C/k}$ *est alors isomorphe à* $\widehat{\Omega}^1_{C/k}$, *donc* (18.11.1) *est un* C-*module de type fini.*

On sait en effet (**0**, 19.8.9) qu'il existe une sous-k-algèbre C_0 de C isomorphe à une algèbre de séries formelles $k[[T_1, \ldots, T_n]]$ et telle que C soit une C_0-algèbre finie. Par suite, L est une extension *finie* du corps des fractions $L_0=k((T_1, \ldots, T_n))$ de C_0. Or, on a la suite exacte de L-espaces vectoriels obtenue en appliquant (**0**, 20.6.17.1) au sous-corps premier de k et aux trois corps $k\subset L_0\subset L$ (et en tenant compte de (**0**, 20.6.21, (i))

$$0\to\Upsilon_{L_0/k}\otimes_{L_0}L\to\Upsilon_{L/k}\to\Upsilon_{L/L_0}\to\Omega^1_{L_0/k}\otimes_{L_0}L\to\Omega^1_{L/k}\to\Omega^1_{L/L_0}\to 0.$$

Puisque L est une extension finie de L_0, Ω^1_{L/L_0} et Υ_{L/L_0} sont des L-espaces vectoriels de rang fini ayant même rang, en vertu de l'égalité de Cartier (**0**, 21.7.1). Comme L_0 est séparable sur k (**0**, 21.9.6.4), on a $\Upsilon_{L_0/k}=0$ (**0**, 20.6.3); on déduit donc déjà de la suite exacte précédente que $\Upsilon_{L/k}$ est de rang fini et que l'on a dans tous les cas ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 11.10.2)

$$\mathrm{rg}_L(\Omega^1_{L/k})-\mathrm{rg}_L(\Upsilon_{L/k})=\mathrm{rg}_{L_0}(\Omega^1_{L_0/k})-\mathrm{rg}_{L_0}(\Upsilon_{L_0/k}).$$

Pour prouver (18.11.2.1) ou (18.11.2.2), on peut donc se borner à prouver ces relations en remplaçant C et L par C_0 et L_0. Comme L_0 est séparable sur k (**0**, 21.9.6.4), on a $\Upsilon_{L_0/k}=0$ (**0**, 20.6.3); d'autre part $\Omega^1_{L_0/k}=\Omega^1_{C_0/k}\otimes_{C_0}L_0$ (**0**, 20.5.9). On sait (**0**, 21.9.4) que si $C_1=k[[T_1^p, \ldots, T_n^p]]$, $\widehat{\Omega}^1_{C_0/k}$ s'identifie à $\Omega^1_{C_0/C_1}$; d'autre part, on a $\Omega^1_{C_0/k}=\Omega^1_{C_0/k[C_0^p]}$ (**0**, 21.1.5), et comme $C_0^p=k^p[[T_1^p, \ldots, T_n^p]]$, on a $k[C_0^p]\subset C_1$, avec *égalité lorsque* $[k:k^p]<+\infty$. Or, on a une suite exacte $\Omega^1_{C_0/k[C_0^p]}\to\Omega^1_{C_0/C_1}\to 0$ (**0**, 20.5.7), d'où une suite exacte $\Omega^1_{L_0/k}\to\widehat{\Omega}^1_{C_0/k}\otimes_{C_0}L_0\to 0$. Comme $\widehat{\Omega}^1_{C_0/k}$ est un C_0-module libre de rang n (**0**, 21.9.3), on voit que l'on a dans tous les cas $\mathrm{rg}_{L_0}(\Omega^1_{L_0/k})\geqslant n$, avec égalité lorsque $[k:k^p]<+\infty$; ceci prouve déjà (18.11.2.1) et (18.11.2.2).

Enfin, pour voir que $\Omega^1_{C/k}$ est isomorphe à $\widehat{\Omega}^1_{C/k}$ lorsque $[k:k^p]<+\infty$, il suffit de prouver que $\Omega^1_{C/k}$ est un C-module de type fini, puisque C est un anneau local noethérien complet ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.3). Puisque $\Omega^1_{C/k}$ est isomorphe à $\Omega^1_{C/k[C^p]}$ et que $k[C_0^p]\subset k[C^p]$, tout revient à prouver que C est un $k[C_0^p]$-module de type fini (**0**, 20.4.7); mais cela résulte de ce que C est un C_0-module de type fini et C_0 un $k[C_0^p]$-module de type fini en vertu de l'hypothèse $[k:k^p]<+\infty$.

Lemme **(18.11.3)**. — *Soient k un corps, p son exposant caractéristique, et supposons que* $[k:k^p]<+\infty$. *Soit* A *une k-algèbre locale noethérienne* complète, *dont le corps résiduel est une extension* finie *de k. Soit* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* A *tel que* $A_{\mathfrak{p}}$ *soit* géométriquement régulier *sur k* (6.7.6), *de sorte qu'il existe un seul idéal premier minimal* $\mathfrak{q}$ *de* A *contenu dans* $\mathfrak{p}$. *Alors* $(\widehat{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}}$ *est un* $A_{\mathfrak{p}}$-*module libre de rang égal à* $\dim(A/\mathfrak{q})$.

Comme A est noethérien, et Spec(A) régulier (et *a fortiori* intègre) au point $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ n'appartient qu'à une seule composante irréductible de Spec(A), donc ne contient qu'un seul idéal minimal $\mathfrak{q}$ de A, et en outre on a $\mathfrak{q}_\mathfrak{p}=0$. Si l'on pose $B=A/\mathfrak{q}$, la suite ($\mathbf{0}$, 20.7.20)

$$\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2 \rightarrow \hat{\Omega}^1_{A/k} \hat{\otimes}_A B \rightarrow \hat{\Omega}^1_{B/k} \rightarrow 0$$

est *exacte*; en effet, $\hat{\Omega}^1_{A/k}$ est un A-module de type fini (18.11.1), donc on a $\hat{\Omega}^1_{A/k} \hat{\otimes}_A B = \hat{\Omega}^1_{A/k} \otimes_A B = \hat{\Omega}^1_{A/k}/\mathfrak{q}.\hat{\Omega}^1_{A/k}$, et comme ce B-module est de type fini, tout sous-B-module en est fermé ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 7.3.5), compte tenu de ($\mathbf{0}$, 20.4.5). Comme l'image de $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2$ est dense dans le noyau de l'homomorphisme $\hat{\Omega}^1_{A/k} \hat{\otimes}_A B \rightarrow \hat{\Omega}^1_{B/k}$ ($\mathbf{0}$, 20.7.20), elle est nécessairement égale à ce noyau, d'où notre assertion. En localisant en $\mathfrak{p}$ la suite exacte précédente, on voit en outre que l'homomorphisme canonique $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p} \rightarrow (\hat{\Omega}^1_{B/k})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}$ est *bijectif*. On voit ainsi qu'on peut se borner au cas où $\mathfrak{q}=0$, autrement dit au cas où A est *intègre*. Distinguons alors deux cas :

I) $p>1$. Alors on peut appliquer (18.11.2) à l'algèbre quotient $C=A/\mathfrak{p}$, dont le corps des fractions K n'est autre que le corps résiduel de $A_\mathfrak{p}$; on voit donc que l'on a

(18.11.3.1) $$\mathrm{rg}_K(\Omega^1_{K/k}) - \mathrm{rg}_K(\Upsilon_{K/k}) = \dim(A/\mathfrak{p}).$$

Notons maintenant ($\mathbf{0}$, 19.6.6) que $A_\mathfrak{p}$ est une k-algèbre *formellement lisse* pour sa topologie $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$-préadique; par suite $\Omega^1_{A_\mathfrak{p}/k}$ est formellement projectif ($\mathbf{0}$, 20.4.9) pour la topologie $\mathfrak{p}$-préadique ($\mathbf{0}$, 20.4.5); d'autre part, $\Omega^1_{A_\mathfrak{p}/k}=(\Omega^1_{A/k})_\mathfrak{p}$ ($\mathbf{0}$, 20.5.9) est un $A_\mathfrak{p}$-module de type fini, en vertu de (18.11.2) appliqué à A. Pour tout entier j, $\Omega^1_{A_\mathfrak{p}/k}/\mathfrak{p}^{j+1}\Omega^1_{A_\mathfrak{p}/k}$ est donc un $(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{j+1}A_\mathfrak{p})$-module projectif de rang $m=\mathrm{rg}_K(\Omega^1_{A_\mathfrak{p}/k}\otimes_{A_\mathfrak{p}}K)$ ($\mathbf{0}$, 19.2.4); on conclut donc de ($\mathbf{0}_\mathrm{III}$, 10.2.1 et 10.1.3) que $\Omega^1_{A_\mathfrak{p}/k}$ est un $A_\mathfrak{p}$-*module libre de rang* m. Soit $A'=(A_\mathfrak{p})^\wedge$ l'algèbre *complétée* de $A_\mathfrak{p}$ pour sa topologie $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$-préadique; A′ est encore une k-algèbre formellement lisse ($\mathbf{0}$, 19.3.6) pour sa topologie adique, et il résulte de ($\mathbf{0}$, 20.7.14) et de ($\mathbf{0}$, 20.4.5) que $\hat{\Omega}^1_{A'/k}=\hat{\Omega}^1_{A_\mathfrak{p}/k}$; on en conclut que $\hat{\Omega}^1_{A'/k}$ est un A′-module *libre de rang* m. Mais il résulte alors de (18.11.1) et de ce que $\dim(A')=\dim(A_\mathfrak{p})$ ($\mathbf{0}$, 16.2.4) que l'on a

(18.11.3.2) $$m=\dim(A_\mathfrak{p})+(\mathrm{rg}_K(\Omega^1_{K/k})-\mathrm{rg}_K(\Upsilon_{K/k}))$$

d'où, en vertu de (18.11.3.1)

$$m=\dim(A/\mathfrak{p})+\dim(A_\mathfrak{p}).$$

Mais puisque A est un anneau local noethérien complet, c'est un quotient d'anneau régulier ($\mathbf{0}$, 19.8.8), donc ($\mathbf{0}$, 16.5.12) on a $\dim(A)=\dim(A/\mathfrak{p})+\dim(A_\mathfrak{p})$, ce qui achève la démonstration dans ce cas.

II) $p=1$. On a, comme ci-dessus $\dim(A)=\dim(A/\mathfrak{p})+\dim(A_\mathfrak{p})$; posons $n=\dim(A)$, $r=\dim(A/\mathfrak{p})$, $s=\dim(A_\mathfrak{p})$; nous allons voir que $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module libre de rang n. Nous allons d'abord prouver le lemme suivant :

Lemme **(18.11.3.3)**. — *Soient* A *un anneau local noethérien,* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* A *tel que* $A_\mathfrak{p}$ *soit un anneau de Cohen-Macaulay. Pour tout système de paramètres* $(t_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$ *de* $A_\mathfrak{p}$, *il existe une suite* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$ *d'éléments de* $\mathfrak{p}$ *tels que les* x_i *fassent partie d'un système de paramètres de* A *et que, pour tout i,* $x_i/1$ *soit congru à* t_i *modulo l'idéal* $t_1 A_{\mathfrak{p}} + \ldots + t_{i-1} A_{\mathfrak{p}}$. *En particulier, si* $A_{\mathfrak{p}}$ *est régulier et si les* t_i *forment un système* régulier *de paramètres de* $A_{\mathfrak{p}}$, *il en est de même des* $x_i/1$.

Ce lemme sera lui-même une conséquence du suivant :

Lemme (**18.11.3.4**). — *Soient* A *un anneau local noethérien,* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* A, *x un élément de* A; *alors il existe un élément* $x' \in A$ *tel que* $x'/1 = x/1$ *dans* $A_{\mathfrak{p}}$ *et que* x' *n'appartienne à aucun des idéaux premiers minimaux de* A *non contenus dans* $\mathfrak{p}$.

Montrons d'abord comment (18.11.3.4) entraîne (18.11.3.3). En multipliant au besoin les t_i par des éléments inversibles de $A_{\mathfrak{p}}$, on peut supposer qu'ils sont de la forme $x_i/1$, avec $x_i \in \mathfrak{p}$ pour $1 \leqslant i \leqslant s$. Raisonnons par récurrence sur s; comme t_1 fait partie d'un système de paramètres de $A_{\mathfrak{p}}$, il n'appartient à aucun des idéaux premiers minimaux de $A_{\mathfrak{p}}$ (**0**, 16.5.5), donc aucun $x'_i \in A$ tel que $x'_1/1 = t_1$ ne peut appartenir à un idéal premier minimal de A contenu dans $\mathfrak{p}$. En vertu de (18.11.3.4), on peut en outre choisir x'_1 tel que $x'_1/1 = t_1$ (donc $x'_1 \in \mathfrak{p}$) et que x'_1 n'appartienne à *aucun* idéal premier minimal de A, donc fasse partie d'un système de paramètres de A (**0**, 16.3.4 et 16.3.7). On raisonne ensuite par récurrence, en considérant l'anneau $A' = A/x'_1 A$ et l'idéal premier $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}/x'_1 A$ de cet anneau; comme $A'_{\mathfrak{p}'} = A_{\mathfrak{p}}/t_1 A_{\mathfrak{p}}$, $A'_{\mathfrak{p}'}$ est aussi un anneau de Cohen-Macaulay (**0**, 16.5.5), et les images t'_i $(2 \leqslant i \leqslant s)$ des t_i dans $A'_{\mathfrak{p}'}$ forment un système de paramètres de cet anneau; il suffit d'appliquer à A' et aux t'_i $(2 \leqslant i \leqslant s)$ l'hypothèse de récurrence. La dernière assertion de (18.11.3.3) résulte de ce que dans $A_{\mathfrak{p}}$, un système de paramètres qui engendre l'idéal maximal est un système régulier de paramètres (**0**, 17.1.1).

Prouvons donc (18.11.3.4). Soit $(\mathfrak{p}'_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ la suite des idéaux premiers minimaux de A non contenus dans $\mathfrak{p}$ et tels que $x \in \mathfrak{p}'_k$, et soit $(\mathfrak{p}_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ la suite des idéaux premiers minimaux de A autres que les $\mathfrak{p}'_k$; on peut supposer que $r \geqslant 1$. Comme $\mathfrak{p}'_k$ ne contient pas $\bigcap_{1 \leqslant j \leqslant n} \mathfrak{p}_j$, il existe un élément $y \in \bigcap_{1 \leqslant j \leqslant n} \mathfrak{p}_j$ qui n'est contenu dans aucun des $\mathfrak{p}'_k$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 1, n° 1, prop. 2); d'ailleurs $y/1$ appartient à tous les idéaux premiers minimaux de $A_{\mathfrak{p}}$, donc est nilpotent; si $(y/1)^h = 0$, l'élément $x' = x + y^h$ répondra aux conditions de l'énoncé, car d'une part $y^h \notin \mathfrak{p}'_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant r$, et par définition des $\mathfrak{p}'_k$ on a bien $x' \notin \mathfrak{p}'_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant r$, et d'autre part, si $\mathfrak{p}_j$ est un idéal premier minimal de A non contenu dans $\mathfrak{p}$ mais tel que $x \notin \mathfrak{p}_j$, on a aussi $x' \notin \mathfrak{p}_j$ puisque $y \in \mathfrak{p}_j$.

Revenons à la preuve de (18.11.3) lorsque $p = 1$. En vertu de (18.11.3.3), il existe un système régulier de paramètres $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$ de $A_{\mathfrak{p}}$ tel que $t_i = x_i/1$, où les x_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ appartiennent à $\mathfrak{p}$ et font partie d'un système de paramètres $(x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ de A. Posons $A_0 = k[[T_1, \ldots, T_n]]$; comme A est une k-algèbre complète et que les x_j appartiennent à l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, il existe un k-homomorphisme local $u : A_0 \to A$ tel que $u(T_j) = x_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 4, n° 5, prop. 6); si $\mathfrak{n}$ est l'idéal de A engendré par les x_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, c'est par hypothèse un idéal de définition de A; on déduit donc de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.4.4 et 7.4.3) que u fait de A une A_0-algèbre *finie*.

Posons $\mathfrak{p}_0 = \sum_{j=1}^{s} A_0 T_j$, $B_0 = (A_0)_{\mathfrak{p}_0}$ et $B = A \otimes_{A_0} B_0$, de sorte que $u_{\mathfrak{p}_0} : B_0 \to B$ fait de B une B_0-algèbre finie; en outre, si $\mathfrak{p}'$ est l'idéal de B engendré par $\mathfrak{p}$, on a $B_{\mathfrak{p}'}=A_{\mathfrak{p}}$; comme $\mathfrak{p}'$ contient $\mathfrak{p}_0 B$ par construction, il est au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{p}_0 B_0$ de B_0. Montrons que le morphisme $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(B_0)$ est *non ramifié* au point $\mathfrak{p}'$: cela résulte en effet de ce que $\boldsymbol{k}(\mathfrak{p}')$ est une extension finie du corps $\boldsymbol{k}(\mathfrak{p}_0)$ de caractéristique 0, donc est *nécessairement séparable*, et que l'on a $B_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}_0 B_{\mathfrak{p}'}=\boldsymbol{k}(\mathfrak{p}')$ en vertu du choix des x pour $1 \leqslant j \leqslant s$ (17.4.1).

Notons maintenant le lemme suivant :

Lemme (**18.11.3.5**). — *Soient k un corps,* R, S *deux k-algèbres locales noethériennes complètes, telles que, si* K *est le corps résiduel de* S, $\Omega^1_{K/k}$ *soit de rang fini sur* K; *soit* $u : R \to S$ *un k-homomorphisme faisant de* S *une* R*-algèbre finie; alors on a* $\hat{\Omega}^1_{S/R}=\Omega^1_{S/R}$, *et la suite*

$$\textbf{(18.11.3.6)} \qquad \hat{\Omega}^1_{R/k}\hat{\otimes}_R S \xrightarrow{v} \hat{\Omega}^1_{S/k} \xrightarrow{w} \Omega^1_{S/R} \to 0$$

(cf. (**0**, 20.7.17.3)) *est exacte.*

La première assertion résulte de ce que $\Omega^1_{S/R}$ est un S-module de type fini (**0**, 20.4.7) et de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.6). D'autre part, on sait (**0**, 20.7.17.3) que l'image de v est dense dans $\mathrm{Ker}(w)$ et que w est surjectif; mais il résulte de (18.11.1) que $\hat{\Omega}^1_{S/k}$ est un S-module de type fini; on en conclut que tout sous-S-module de $\hat{\Omega}^1_{S/k}$ est fermé ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.5), d'où le lemme.

Appliquons ce lemme au cas où $R=A_0$, $S=A$, et notons que $\hat{\Omega}^1_{A_0/k}$ est un A_0-module libre de rang n (**0**, 21.9.3); donc on a $\hat{\Omega}^1_{A_0/k}\hat{\otimes}_{A_0} A=\hat{\Omega}^1_{A_0/k}\otimes_{A_0} A$ et ce A-module est libre de rang n. Puisque Spec(B) est non ramifié sur $\mathrm{Spec}(B_0)$ au point $\mathfrak{p}'$, on a $(\Omega^1_{A/A_0})_{\mathfrak{p}}=\Omega^1_{B_{\mathfrak{p}'}/B_0}=0$ (16.4.15 et 17.4.1). Si on localise la suite exacte (18.11.3.6) (appliquée à A_0 et A) en $\mathfrak{p}$, on obtient donc un homomorphisme *surjectif*

$$v_{\mathfrak{p}} : (\hat{\Omega}^1_{A_0/k}\otimes_{A_0} A)_{\mathfrak{p}} \to (\hat{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}}$$

d'où l'on conclut que le $A_{\mathfrak{p}}$-module $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}}$ admet un système de n générateurs. Mais le A-module $\hat{\Omega}^1_{A/k}$ est de *rang* n, en vertu de (**0**, 21.9.5), qui est applicable à l'anneau complet et intègre A en raison du théorème de Cohen (**0**, 19.8.8, (ii)) et du fait que le corps des fractions de A est de caractéristique 0. Le $A_{\mathfrak{p}}$-module $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}}$ est donc aussi de rang n, et comme son quotient par son sous-module de torsion admet un système de n générateurs, ce quotient est nécessairement *libre*; on en déduit aussitôt que les n générateurs de $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}}$ obtenus ci-dessus forment un système *libre*, d'où la conclusion.

Lemme (**18.11.4**). — *Soient k un corps,* A *une k-algèbre locale noethérienne complète, dont le corps résiduel est une extension finie de k. Soit k' une extension quelconque de k, et posons* $A'=A\hat{\otimes}_k k'$. *Alors :*

(i) A′ *est un anneau semi-local noethérien complet, composé direct d'anneaux locaux complets* A'_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ *qui sont des* A*-modules fidèlement plats, et dont les corps résiduels sont des extensions finies de k'; si* $\mathfrak{m}$ *est l'idéal maximal de* A, $\mathfrak{m}A'$ *est un idéal de définition de* A′; *on a* $\dim(A'_i)=\dim(A)$ *pour tout i.*

(ii) *Pour tout i,* $\hat{\Omega}^1_{A'_i/k}$ *est canoniquement isomorphe à* $\hat{\Omega}^1_{A/k}\otimes_A A'_i$.

(i) Les premières assertions résultent aussitôt de (7.5.5) et de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.6.2); le fait que $\mathfrak{m}\mathrm{A}'$ soit un idéal de définition de A' résulte aussi de (7.5.5), car si K est le corps résiduel de A, $\mathrm{K}\otimes_{\mathrm{A}}k'$ est une k'-algèbre finie. Enfin $\mathrm{A}'_i/\mathfrak{m}\mathrm{A}'_i$ est un des anneaux locaux artiniens composants directs de $\mathrm{K}\otimes_k k'$ (7.5.5), donc est de dimension 0; comme A'_i est un A-module plat, l'égalité des dimensions de A et de A'_i résulte de (6.1.2).

(ii) Comme $\hat{\Omega}^1_{\mathrm{A}/k}$ est, en vertu de l'hypothèse sur K, un A-module de type fini (18.11.1), $\hat{\Omega}^1_{\mathrm{A}/k}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$ est complet et s'identifie au produit tensoriel complété $\hat{\Omega}^1_{\mathrm{A}/k}\hat{\otimes}_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$; en vertu de l'associativité du produit tensoriel complété ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.7.4), $\hat{\Omega}^1_{\mathrm{A}/k}\hat{\otimes}_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'=\hat{\Omega}^1_{\mathrm{A}/k}\hat{\otimes}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}\hat{\otimes}_k k')$ s'identifie à $\hat{\Omega}^1_{\mathrm{A}/k}\hat{\otimes}_k k'$. Mais $\Omega^1_{\mathrm{A}/k}\otimes_k k'$ s'identifie à $\Omega^1_{\mathrm{A}''/k'}$, où $\mathrm{A}''=\mathrm{A}\otimes_k k'$ ($\mathbf{0}$, 20.5.5), et comme A' est par définition le séparé complété de A'', le séparé complété de $\Omega^1_{\mathrm{A}''/k'}$ s'identifie par construction à celui de $\Omega^1_{\mathrm{A}'/k'}$ ($\mathbf{0}$, 20.7.4); autrement dit, on a un isomorphisme canonique

$$\hat{\Omega}^1_{\mathrm{A}'/k'} \xrightarrow{\sim} \hat{\Omega}^1_{\mathrm{A}/k}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'.$$

La conclusion de (ii) résulte maintenant de ce que $\Omega^1_{\mathrm{A}'/k'}$ est somme directe des $\Omega^1_{\mathrm{A}'_i/k'}$ ($\mathbf{0}$, 20.4.13), et si $\mathfrak{r}$ est le radical de A', la topologie $\mathfrak{r}$-préadique sur $\Omega^1_{\mathrm{A}'/k'}$ s'identifie au produit des topologies $\mathfrak{m}'_i$-préadiques sur les $\Omega^1_{\mathrm{A}'_i/k'}$ (où $\mathfrak{m}'_i$ est l'idéal maximal de A'_i); finalement, il en résulte que le séparé complété $\hat{\Omega}^1_{\mathrm{A}'/k'}$ pour la topologie $\mathfrak{r}$-préadique s'identifie au produit des séparés complétés $\hat{\Omega}^1_{\mathrm{A}'_i/k'}$ pour les topologies $\mathfrak{m}'_i$-préadiques, et il suffit d'utiliser ($\mathbf{0}$, 20.4.5).

Proposition **(18.11.5).** — *Soient k un corps,* A *une k-algèbre locale noethérienne et complète dont le corps résiduel est une extension finie de k,* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* A, *distinct de l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$, *tel qu'il existe un idéal premier minimal* $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{p}$ *pour lequel* $\dim(\mathrm{A}/\mathfrak{q})=\dim(\mathrm{A})$ (ce qui aura lieu en particulier lorsque A est *équidimensionnel*), *m un entier* $\geqslant 0$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Le* $\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$*-module* $(\hat{\Omega}^1_{\mathrm{A}/k})_{\mathfrak{p}}$ *admet un système de m générateurs.*

b) *Il existe un k-homomorphisme local* $u:\mathrm{B}\to\mathrm{A}$, *où* $\mathrm{B}=k[[\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_m]]$, *faisant de* A *une* B*-algèbre finie, et tel que le morphisme correspondant* $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})\to\mathrm{Spec}(\mathrm{B})$ *soit non ramifié au point* $\mathfrak{p}$.

Pour prouver que *b)* entraîne *a)*, notons qu'en vertu du lemme (18.11.3.5), on a alors la suite exacte

$$\hat{\Omega}^1_{\mathrm{B}/k}\otimes_{\mathrm{B}}\mathrm{A}\to\hat{\Omega}^1_{\mathrm{A}/k}\to\Omega^1_{\mathrm{A}/\mathrm{B}}\to 0$$

puisque A est une B-algèbre finie; localisant en $\mathfrak{p}$ et notant que par hypothèse on a alors $(\Omega^1_{\mathrm{A}/\mathrm{B}})_{\mathfrak{p}}=0$ (17.4.1), on obtient un homomorphisme surjectif $(\hat{\Omega}^1_{\mathrm{B}/k}\otimes_{\mathrm{B}}\mathrm{A})_{\mathfrak{p}}\to(\hat{\Omega}^1_{\mathrm{A}/k})_{\mathfrak{p}}$, et la conclusion résulte de ce que $\hat{\Omega}^1_{\mathrm{B}/k}$ est un B-module libre de rang *m* ($\mathbf{0}$, 21.9.3).

Pour prouver que *a)* implique *b)*, prouvons d'abord les lemmes suivants.

Lemme **(18.11.5.1).** — *Soient k un corps,* A *une k-algèbre locale noethérienne et complète, dont le corps résiduel est une extension finie de k,* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* A, $\mathfrak{q}$ *un idéal minimal de* A *contenu dans* $\mathfrak{p}$. *Alors le nombre minimum de générateurs du* $\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$*-module* $(\hat{\Omega}^1_{\mathrm{A}/k})_{\mathfrak{p}}$ *est au moins égal à* $\dim(\mathrm{A}/\mathfrak{q})$.

Posons $n=\dim(A/\mathfrak{q})$, et soit m le nombre minimum de générateurs du $A_\mathfrak{p}$-module $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p}$, qui est égal à $\mathrm{rg}_{\boldsymbol{k}(\mathfrak{p})}((\hat{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p}\otimes_{A_\mathfrak{p}}\boldsymbol{k}(\mathfrak{p}))$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, nº 2, cor. 2 de la prop. 4). Notons que l'on a $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{q}=(\hat{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p}\otimes_{A_\mathfrak{p}}A_\mathfrak{q}$, donc le nombre minimum de générateurs du $A_\mathfrak{q}$-module $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{q}$ est *au plus égal* à m. Il suffit par suite de considérer le cas où $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ est minimal. En second lieu, montrons qu'on peut se borner au cas où k est *algébriquement clos*. En effet, soit k' une clôture algébrique de k, et posons $A'=A\hat{\otimes}_k k'$, qui est composé direct de k'-algèbres locales A'_i $(1\leqslant i\leqslant r)$, dont les corps résiduels sont *isomorphes à* k', et qui sont des A-modules fidèlement plats (18.11.4). Appliquant (2.3.4) et (6.1.1), on voit que dans un A'_i donné, il existe un idéal minimal $\mathfrak{q}'_i$ au-dessus de $\mathfrak{q}$ tel que $n'=\dim(A'/\mathfrak{q}'_i)\geqslant\dim(A/\mathfrak{q})=n$. D'autre part (18.11.4), on a $(\hat{\Omega}^1_{A'_i/k'})_{\mathfrak{q}'_i}=(\hat{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{q}\otimes_{A_\mathfrak{q}}(A'_i)_{\mathfrak{q}'_i}$, donc le nombre minimum m' de générateurs du $(A'_i)_{\mathfrak{q}'_i}$-module $(\hat{\Omega}^1_{A'_i/k'})_{\mathfrak{q}'_i}$ est *au plus égal à* m; d'où notre assertion.

Supposons donc k algébriquement clos, et montrons qu'on peut en outre se borner au cas où $\mathfrak{q}=0$. En effet, on a $\Omega^1_{(A/\mathfrak{q})/A}=0$ (**0**, 20.4.12), donc la suite exacte (18.11.3.6) fournit un homomorphisme surjectif $(\hat{\Omega}^1_{A/k})\otimes_A(A/\mathfrak{q})\to\hat{\Omega}^1_{(A/\mathfrak{q})/k}$, d'où on déduit aussitôt que le nombre minimum de générateurs du K-module $(\hat{\Omega}^1_{(A/\mathfrak{q})/k})\otimes_{A/\mathfrak{q}}K$, où K est le corps des fractions de $A/\mathfrak{q}$, est au plus égal à m.

Mais si A est intègre et K son corps des fractions, K est séparable sur le corps algébriquement clos k, donc une k-algèbre géométriquement régulière (6.7.6); on peut donc appliquer (18.11.3) pour $\mathfrak{p}=0$ en observant que $k=k^p$ puisque k est algébriquement clos, et dans ce cas on a $m=n$.

Lemme **(18.11.5.2)**. — *Soient k un corps,* A *une k-algèbre locale noethérienne complète, dont le corps résiduel est une extension finie de k,* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal,* $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{m}$ *un idéal premier de* A. *Soit m le nombre minimum de générateurs du* $A_\mathfrak{p}$*-module* $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p}$, *et soit* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ *une famille d'éléments de* $\mathfrak{m}$ *n'appartenant pas à* $\mathfrak{p}$. *Alors il existe m éléments inversibles* u_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ *de* A *tels que si l'on pose* $y_i=u_ix_i$, *les images canoniques des* dy_i *dans* $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p}$ *engendrent cet* $A_\mathfrak{p}$*-module.*

Pour tout $x\in A$, désignons par $\delta(x)$ l'image canonique de dx $(=d_{A/k}x)$ dans $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p}\otimes_{A_\mathfrak{p}}\boldsymbol{k}(\mathfrak{p})=\hat{\Omega}^1_{A/k}\otimes_A\boldsymbol{k}(\mathfrak{p})$; comme ce $\boldsymbol{k}(\mathfrak{p})$-espace vectoriel est par hypothèse de rang m, il suffit (en vertu du lemme de Nakayama) de prouver qu'on peut déterminer les u_i tels que les $\delta(u_ix_i)$ forment un système libre. Raisonnons par récurrence et supposons que, pour un entier $r<m$, on ait déterminé les u_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ tels que les $\delta(u_ix_i)$ pour $1\leqslant i\leqslant r$ soient linéairement indépendants sur $\boldsymbol{k}(\mathfrak{p})$; si $\delta(x_{r+1})$ n'est pas combinaison linéaire des $\delta(u_ix_i)$ pour $1\leqslant i\leqslant r$, il suffit de prendre $u_{r+1}=1$ pour poursuivre la récurrence. Dans le cas contraire, notons que pour $u\in A$, $\delta(ux_{r+1})$ est l'image canonique de $(du)x_{r+1}+u(dx_{r+1})$; comme $u(dx_{r+1})$ a une image canonique combinaison linéaire des $\delta(u_ix_i)$ pour $1\leqslant i\leqslant r$, et que d'autre part l'image canonique de x_{r+1} dans $\boldsymbol{k}(\mathfrak{p})$ est $\neq 0$, on voit qu'il suffit de prouver qu'il existe un élément inversible $u\in A$ tel que $\delta(u)$ ne soit pas combinaison linéaire des $\delta(u_ix_i)$ pour $1\leqslant i\leqslant r$. Or, il résulte de (**0**, 20.7.15) et de ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 7.2.9) que les $\delta(x)$ engendrent le $\boldsymbol{k}(\mathfrak{p})$-espace vectoriel $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p}\otimes_{A_\mathfrak{p}}\boldsymbol{k}(\mathfrak{p})$;

comme par hypothèse $r<m$, il existe donc $z \in A$ tel que $\delta(z)$ ne soit pas combinaison linéaire des $\delta(u_i x_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Si $z \notin \mathfrak{m}$, on prendra $u=z$; sinon, $1+z$ est inversible et on a $\delta(1+z)=\delta(z)$ puisque $d(1+z)=dz$; on prendra alors $u=1+z$, ce qui achève de prouver (18.11.5.2).

Revenons maintenant à la démonstration de l'implication *a)* $\Rightarrow$ *b)* dans (18.11.5). Notons d'abord que puisque $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, il existe un système de paramètres $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de A (avec $n=\dim(A)$) tel que $x_i \notin \mathfrak{p}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$: en effet, on ne peut avoir $x_i \in \mathfrak{p}$ pour tout i, sans quoi $A/\mathfrak{p}$ serait de longueur finie, et $\mathfrak{p}$ serait maximal, contrairement à l'hypothèse. Mais si par exemple $x_1 \notin \mathfrak{p}$, il suffit, pour chaque indice i tel que $x_i \in \mathfrak{p}$, de remplacer x_i par x_1+x_i, pour avoir un système de paramètres dont aucun élément n'appartient à $\mathfrak{p}$. L'hypothèse *a)* et la relation $\dim(A/\mathfrak{q})=n$ entraînent, en vertu de (18.11.5.1), que $m \geqslant n$; on peut donc considérer une famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ d'éléments $x_i \notin \mathfrak{p}$, dont les n premiers forment un système de paramètres de A. Multipliant en outre les x_i par des éléments inversibles u_i de A, on peut, grâce à (18.11.5.2) supposer que les images des dx_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ dans $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}}$ engendrent cet $A_{\mathfrak{p}}$-module, et la multiplication par les u_i n'a pas altéré le fait que les x_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$ forment un système de paramètres. Considérons alors le k-homomorphisme local $u: B \rightarrow A$ tel que $u(T_i)=x_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 4, n° 5, prop. 6); comme les x_i engendrent un idéal de définition de A, il résulte de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.4.4 et 7.4.3) que u fait de A une B-algèbre *finie*. On a donc (18.11.3.5) la suite exacte

$$(\hat{\Omega}^1_{B/k}) \otimes_B A \xrightarrow{v} \hat{\Omega}^1_{A/k} \xrightarrow{w} \Omega^1_{A/B} \rightarrow 0$$

Mais les $d_A x_i$ sont les images canoniques par v des éléments $d_B T_i \otimes 1$ ($\mathbf{0}$, 20.5.2.6). Si on localise la suite exacte précédente en $\mathfrak{p}$, on voit donc que $v_{\mathfrak{p}} : (\hat{\Omega}^1_{B/k}) \otimes_B A_{\mathfrak{p}} \rightarrow (\hat{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}}$ est *surjectif*, et par suite on a $0=(\Omega^1_{A/B})_{\mathfrak{p}}=\Omega^1_{A_{\mathfrak{p}}/B_{\mathfrak{r}}}$ (où $\mathfrak{r}$ est l'image réciproque de $\mathfrak{p}$ dans A, cf. (16.4.15)). En vertu de (17.4.1), cela entraîne la propriété *b)* de (18.11.5). C.Q.F.D.

Remarque **(18.11.6)**. — Dans l'énoncé de (18.11.5), on ne peut supprimer l'hypothèse $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$. En effet, pour tout k-homomorphisme local $u: B \rightarrow A$, où $B=k[[T_1, \ldots, T_r]]$ (r entier quelconque) faisant de A une B-algèbre finie, $\mathfrak{m}$ est le seul point de Spec(A) au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{n}$ de B; le morphisme $\mathrm{Spec}(A) \rightarrow \mathrm{Spec}(B)$ ne peut être non ramifié en $\mathfrak{m}$ que si $A/\mathfrak{n}A$ est un corps, extension séparable de k (17.4.1), ce qui implique que le corps résiduel K de A est une extension séparable de k. Si cette condition n'est pas remplie, la conclusion de (18.11.5) ne peut jamais être vérifiée pour $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}$, quel que soit l'entier m.

Corollaire **(18.11.7)**. — *Soient k un corps,* A *une k-algèbre locale noethérienne complète équidimensionnelle, dont le corps résiduel est une extension finie de k,* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* A. *Alors le nombre minimum de générateurs du $A_{\mathfrak{p}}$-module $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}}$ est au moins égal à* dim(A).

C'est un cas particulier de (18.11.5.1).

Plus particulièrement :

Corollaire **(18.11.8)**. — *Soient k un corps,* A *une k-algèbre locale noethérienne complète* intègre, *dont le corps résiduel est une extension finie de k. Si* K *est le corps des fractions de* A, *on a* $\mathrm{rg}_K((\hat{\Omega}^1_{A/k})\otimes_A K)\geqslant\dim(A)$.

Il suffit de faire $\mathfrak{p}=0$ dans (18.11.7).

Corollaire **(18.11.9)**. — *Soient k un corps,* A *une k-algèbre locale noethérienne complète de dimension n, dont le corps résiduel est une extension finie de k. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de* A *distinct de l'idéal maximal, et contenant un idéal premier minimal $\mathfrak{q}$ tel que* $\dim(A/\mathfrak{q})=n$. *Supposons que le $A_\mathfrak{p}$-module $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p}$ admette n générateurs. Alors :*

(i) *Le $A_\mathfrak{p}$-module $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p}$ est libre de rang n.*

(ii) *Il existe un k-homomorphisme local* $u:B\rightarrow A$, *où* $B=k[[T_1,\ldots,T_n]]$, *faisant de* A *une* B-*algèbre finie, et tel que le morphisme correspondant* $\mathrm{Spec}(A)\rightarrow\mathrm{Spec}(B)$ *soit étale au point* $\mathfrak{p}$.

(iii) *La k-algèbre $A_\mathfrak{p}$ est géométriquement régulière.*

Prouvons d'abord (ii); en vertu de (18.11.5), il existe un homomorphisme local $u:B=k[[T_1,\ldots,T_n]]\rightarrow A$ faisant de A une B-algèbre *finie*, et tel que le morphisme correspondant $\mathrm{Spec}(A)\rightarrow\mathrm{Spec}(B)$ soit non ramifié au point $\mathfrak{p}$; posons $\mathfrak{r}=u^{-1}(\mathfrak{p})$. L'hypothèse sur $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{p}$, et le fait que A soit un quotient d'anneau régulier (**0**, 19.8.8) impliquent que l'on a $\dim(A_\mathfrak{p})=n-\dim(A/\mathfrak{p})$ (**0**, 16.5.12). On a de même $\dim(B_\mathfrak{r})=n-\dim(B/\mathfrak{r})$. Enfin, puisque le morphisme $\mathrm{Spec}(A)\rightarrow\mathrm{Spec}(B)$ est non ramifié au point $\mathfrak{p}$, la fibre de ce morphisme au point $\mathfrak{r}$ est de dimension 0, donc (**0**, 16.3.9) on a $\dim(A/\mathfrak{p})\leqslant\dim(B/\mathfrak{r})$ et par suite $\dim(B_\mathfrak{r})\leqslant\dim(A_\mathfrak{p})$. On conclut donc de (18.10.1) que le morphisme $\mathrm{Spec}(A)\rightarrow\mathrm{Spec}(B)$ est étale au point $\mathfrak{p}$.

L'assertion (iii) résulte de ce que $A_\mathfrak{p}$ est formellement lisse sur $B_\mathfrak{r}$ et que $B_\mathfrak{r}$ est formellement lisse sur k (pour les topologies préadiques) (**0**, 19.3.4 et 19.3.5), donc $A_\mathfrak{p}$ est formellement lisse sur k pour sa topologie préadique, et par suite est géométriquement régulier sur k (**0**, 22.5.8).

Prouvons enfin (i). Soit k' une extension algébriquement close de k, et considérons la k'-algèbre semi-locale $A'=A\hat{\otimes}_k k'$. Si l'on considère A comme B-module de type fini au moyen de l'homomorphisme u, on peut donc écrire, à un isomorphisme canonique près, $A'=A\otimes_B(B\hat{\otimes}_k k')$ ((7.5.7.1), dans l'énoncé duquel on rappelle qu'il n'est pas nécessaire de supposer que le corps résiduel de B soit une extension finie de k). Posons $B'=B\hat{\otimes}_k k'$, qui s'identifie canoniquement à l'algèbre de séries formelles $k'[[T_1,\ldots,T_n]]$. Puisque le morphisme $\mathrm{Spec}(A)\rightarrow\mathrm{Spec}(B)$ est fini et étale au point $\mathfrak{p}$, le morphisme $\mathrm{Spec}(A')\rightarrow\mathrm{Spec}(B')$ est fini, et étale en tout point $\mathfrak{p}'$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ (17.3.3); d'ailleurs, A' est composé direct d'anneaux locaux A'_i de dimension n $(1\leqslant i\leqslant r)$ (18.11.4) et $\mathfrak{p}'$ s'identifie à un idéal premier $\mathfrak{p}'_i$ de l'un des A'_i. Le même raisonnement que ci-dessus prouve alors que $(A'_i)_{\mathfrak{p}'_i}$ est géométriquement régulier sur k', et comme k' est parfait, il résulte de (18.11.3) que $(\hat{\Omega}^1_{A'_i/k'})_{\mathfrak{p}'_i}$ est un $(A'_i)_{\mathfrak{p}'_i}$-module libre de type fini. Mais puisque $(\hat{\Omega}^1_{A'_i/k'})_{\mathfrak{p}'_i}$ est isomorphe à $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p}\otimes_{A_\mathfrak{p}}(A'_i)_{\mathfrak{p}'_i}$ (18.11.4) et que $(A'_i)_{\mathfrak{p}'_i}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module fidèlement plat, on voit que $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module *libre* de type fini (2.5.2);

d'ailleurs, en vertu de (18.11.5.1) et de l'hypothèse $\dim(A/\mathfrak{q})=n$, on conclut que $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module libre *de rang n*. C.Q.F.D.

Théorème (**18.11.10**). — *Soient k un corps d'exposant caractéristique p, A une k-algèbre locale noethérienne complète, dont le corps résiduel est une extension finie de k,* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* A *distinct de l'idéal maximal. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour toute extension k' de k, et tout idéal premier* $\mathfrak{p}'$ *de* $A'=A\hat{\otimes}_k k'$ *au-dessus de* $\mathfrak{p}$, $A'_{\mathfrak{p}'}$ *est un anneau régulier.*

a') *Il existe une extension* parfaite *k' de k et un idéal premier* $\mathfrak{p}'$ *de* $A'=A\hat{\otimes}_k k'$ *au-dessus de* $\mathfrak{p}$, *tels que* $A'_{\mathfrak{p}'}$ *soit régulier.*

b) *Soit n la plus grande des dimensions des composantes irréductibles de* Spec(A) *auxquelles appartient* $\mathfrak{p}$; *alors* $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p}$ *est un* $A_\mathfrak{p}$*-module libre de rang n.*

Supposons en outre que $n=\dim(A)$ (ce qui sera le cas si A est *équidimensionnel*); *alors les conditions précédentes sont aussi équivalentes à :*

c) *Il existe un k-homomorphisme local* $u: B\rightarrow A$, *où* $B=k[[T_1, \ldots, T_n]]$, *faisant de* A *une* B*-algèbre finie, et tel que le morphisme correspondant* $\mathrm{Spec}(A)\rightarrow\mathrm{Spec}(B)$ *soit étale au point* $\mathfrak{p}$.

Chacune des conditions a), a'), b) *entraîne la suivante :*

d) *L'anneau* $A_\mathfrak{p}$ *est géométriquement régulier sur k.*

Si de plus $[k:k^p]<+\infty$, *la condition* d) *est équivalente à* a), a') *et* b).

Le fait que *d)* entraîne *b)* lorsque $[k:k^p]<+\infty$ n'est autre que (18.11.3). Il est clair que *a)* entraîne trivialement *a')*; montrons que *c)* entraîne *a)* lorsque $\dim(A)=n$. Avec les notations de *a)*, on a alors $A'=A\otimes_B B'$, où $B'=B\hat{\otimes}_k k'=k'[[T_1, \ldots, T_n]]$ (7.5.7.1). Le morphisme $\mathrm{Spec}(A')\rightarrow\mathrm{Spec}(B')$ est alors fini et étale au point $\mathfrak{p}'$, et le raisonnement qui prouve (18.11.9, (iii)) montre que $A'_{\mathfrak{p}'}$ est régulier.

Le fait que *b)* entraîne *c)* lorsque $\dim(A)=n$ résulte de (18.11.9). Montrons que *a')* entraîne *b) lorsque* $\dim(A)=n$. On sait que A' est un A-module plat (18.11.4) et $\dim(A')=\dim(A)=n$; il résulte de (2.3.4) et de (6.1.1) qu'il existe un idéal premier minimal $\mathfrak{q}'$ de A' contenu dans $\mathfrak{p}'$, au-dessus de $\mathfrak{q}$ et tel que $\dim(A'/\mathfrak{q}')=\dim(A/\mathfrak{q})=n$. Par ailleurs, il résulte de (18.11.4) que $(\hat{\Omega}^1_{A'/k'})_{\mathfrak{p}'}=(\hat{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p}\otimes_{A_\mathfrak{p}}A'_{\mathfrak{p}'}$; comme k' est parfait, l'hypothèse que $A'_{\mathfrak{p}'}$ est régulier entraîne qu'il est *géométriquement régulier* sur k' (6.7.7). Puisque $k'^p=k'$, on peut appliquer à A' et $\mathfrak{p}'$ le fait que *d)* entraîne *b)*, donc $(\hat{\Omega}^1_{A'/k'})_{\mathfrak{p}'}$ est un $A'_{\mathfrak{p}'}$-module libre de rang *n*; par fidèle platitude (18.11.4 et 2.5.2), on en conclut que $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module libre de rang *n*.

Ceci montre l'équivalence de *a)*, *a')*, *b)* et *c)* lorsque $\dim(A)=n$. Il reste à prouver que *a)*, *a')* et *b)* sont encore équivalentes dans le cas général. Soit $\mathfrak{J}$ l'idéal de A, noyau de l'homomorphisme canonique $A\rightarrow A_\mathfrak{p}$, et posons $A_1=A/\mathfrak{J}$; on a nécessairement $\mathfrak{J}\subset\mathfrak{p}$, et si l'on pose $\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p}/\mathfrak{J}$, l'homomorphisme canonique $A_\mathfrak{p}\rightarrow(A_1)_{\mathfrak{p}_1}$ est *bijectif*; on en conclut (**I**, 6.5.4) que l'injection canonique $\mathrm{Spec}(A_1)\rightarrow\mathrm{Spec}(A)$ est un *isomorphisme local* au point $\mathfrak{p}_1$, et l'on a $\mathfrak{J}_\mathfrak{p}=0$. On voit comme dans (18.11.3) que l'on a une suite exacte

$$\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2\rightarrow(\hat{\Omega}^1_{A/k})\otimes_A A_1\rightarrow\hat{\Omega}^1_{A_1/k}\rightarrow 0$$

et en localisant en $\mathfrak{p}$, il vient un isomorphisme $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} (\hat{\Omega}^1_{A_1/k})_{\mathfrak{p}_1}$. Ceci montre que la condition *b)* pour l'anneau A et l'idéal $\mathfrak{p}$ est *équivalente* à la condition *b)* pour l'anneau A_1 et l'idéal $\mathfrak{p}_1$. D'autre part, avec les notations de *a)*, on a $A'_1 = A_1 \hat{\otimes}_k k' = A'/\mathfrak{J}A'$ à isomorphisme près ((7.5.7.1), où l'hypothèse sur le corps résiduel de B est superflue); si $\mathfrak{p}'$ est un idéal premier de A′ au-dessus de $\mathfrak{p}$, tout élément de $\mathfrak{J}A'$ annule un élément de $A' - \mathfrak{p}'$, donc $\mathfrak{J}A' \subset \mathfrak{p}'$, et si l'on pose $\mathfrak{p}'_1 = \mathfrak{p}'/\mathfrak{J}A'$, $\mathfrak{p}'_1$ est au-dessus de $\mathfrak{p}_1$ et $(A'_1)_{\mathfrak{p}'_1}$ s'identifie canoniquement à $A'_{\mathfrak{p}'}$; ceci montre donc que la condition *a)* (resp. *a′)*) pour l'anneau A et l'idéal $\mathfrak{p}$ est *équivalente* à la condition *a)* (resp. *a′)*) pour l'anneau A_1 et l'idéal $\mathfrak{p}_1$. Or, tous les idéaux premiers minimaux de A contenus dans $\mathfrak{p}$ contiennent $\mathfrak{J}$ puisque $\mathrm{Spec}(A_1) \to \mathrm{Spec}(A)$ est un isomorphisme local au point $\mathfrak{p}_1$; d'autre part les idéaux de $\mathrm{Ass}_A(A/\mathfrak{J})$ sont les idéaux de $\mathrm{Ass}(A)$ qui sont contenus dans $\mathfrak{p}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 2, prop. 6); donc les idéaux premiers minimaux de A_1 sont tous contenus dans $\mathfrak{p}_1$, et on a par suite $\dim(A_1) = n$. Il suffit alors d'appliquer à A_1 et à $\mathfrak{p}_1$ ce qui a été prouvé plus haut.

Remarques (**18.11.11**). — (i) L'équivalence des conditions *d)* et *b)* dans (18.11.10) n'est plus valable lorsqu'on ne suppose plus que $[k : k^p] < +\infty$. En effet, dans l'exemple de (**0**, 22.7.7, (ii)), l'anneau $B = A/\mathfrak{q}$ est intègre et de dimension 1; d'autre part, la suite

$$(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2) \otimes_A L \xrightarrow{j} \hat{\Omega}^1_{A/k} \otimes_A L \to \hat{\Omega}^1_{B/k} \otimes_B L \to 0$$

est exacte (même démonstration que dans (18.11.3)), et on sait que *j n'est pas injectif*, donc $j = 0$ puisque $(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2) \otimes_A L$ est de rang 1. On en conclut que $\mathrm{rg}_L(\hat{\Omega}^1_{B/k} \otimes_B L) = 2$. Comme $B_{\mathfrak{p}}$ est une k-algèbre géométriquement régulière, on voit qu'ici la condition *d)* n'entraîne pas *b)*.

(ii) Les notations étant celles de (18.11.10), supposons que $n = \dim(A)$ et soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système de paramètres de A n'appartenant pas à $\mathfrak{p}$; on en déduit un k-homomorphisme local $u : B \to A$ tel que $u(T_i) = x_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, faisant de A une B-algèbre finie. Pour que le morphisme correspondant $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B)$ soit *étale* au point $\mathfrak{p}$, il faut et il suffit que les images des $d_A x_i$ dans $(\hat{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}}$ forment un *système de générateurs* de cet $A_{\mathfrak{p}}$-module. En effet, on a vu dans la démonstration de (18.11.5) que si le morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B)$ est non ramifié au point $\mathfrak{p}$, l'homomorphisme canonique $(\hat{\Omega}^1_{B/k} \otimes_B A)_{\mathfrak{p}} \to (\hat{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}}$ est surjectif et les images des éléments $d_B T_i \otimes 1$, qui engendrent $(\hat{\Omega}^1_{B/k}) \otimes_B A$, sont les $d_A x_i$; d'où la *nécessité* de la condition. Inversement, le même raisonnement montre que si cette condition est vérifiée, le morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B)$ est non ramifié en $\mathfrak{p}$, et le raisonnement de (18.11.9) prouve en fait que ce morphisme est *étale* en $\mathfrak{p}$.

Corollaire (**18.11.12**). — *Soient k un corps d'exposant caractéristique p tel que* $[k : k^p] < +\infty$, A *une k-algèbre locale noethérienne complète et intègre, qui n'est pas un corps, et dont le corps résiduel est une extension finie de k. Il existe alors une extension finie radicielle k' de k telle qu'en posant* $A' = A \otimes_k k'$, *la k'-algèbre* A'_{red} *et l'idéal premier* $\mathfrak{o}$ *de cette algèbre vérifient les conditions équivalentes* a), a′), b), c) *et* d) *de* (18.11.10). *En particulier, si* $n = \dim(A) = \dim(A')$, *il existe un k'-homomorphisme local* $B'=k'[[T_1, \ldots, T_n]] \to A'_{\mathrm{red}}$ *faisant de* A'_{red} *une* B'*-algèbre finie, et tel que le corps des fractions* K' *de* A'_{red} *soit une extension finie* séparable *du corps des fractions* $k'((T_1, \ldots, T_n))$ *de* B'.

Le morphisme $\mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A)$ étant radiciel et fini, A' est un anneau local complet et son nilradical est le seul idéal premier au-dessus de l'idéal $\mathfrak{o}$ de A; par platitude, A' s'identifie à un sous-anneau de $K\otimes_k k'$, qui est d'ailleurs l'anneau total des fractions de A'; on a par suite $K'=(K\otimes_k k')_{\mathrm{red}}$. Il s'agit de prouver, vu l'équivalence *d)* $\Leftrightarrow$ *c)* de (18.11.10), qu'il existe une extension radicielle finie k' de k telle que $(K\otimes_k k')_{\mathrm{red}}$ soit une extension *séparable* de k' (6.7.6). Or on sait ($\mathbf{0}$, 19.8.9) que sous les hypothèses faites, il existe une sous-k-algèbre $C=k[[T_1, \ldots, T_m]]$ de A telle que A soit une C-algèbre finie; K est donc une extension *finie* du corps des fractions $K_1=k((T_1, \ldots, T_m))$ de C, qui est *séparable* sur k ($\mathbf{0}$, 21.9.6.4). Si p est l'exposant caractéristique de k, on peut donc écrire $K\otimes_k k^{p^{-\infty}}=K\otimes_{K_1}(K_1\otimes_k k^{p^{-\infty}})$ et $K_1\otimes_k k^{p^{-\infty}}$ est un *corps*, extension radicielle de K_1; on en conclut que $K\otimes_k k^{p^{-\infty}}$ est une algèbre finie sur le corps $K_1\otimes_k k^{p^{-\infty}}$, donc un anneau *artinien*. La conclusion résulte donc du lemme plus général suivant :

Lemme (**18.11.12.1**). — *Soient k un corps de caractéristique $p>0$, K une extension de k. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *L'anneau* $K\otimes_k k^{p^{-\infty}}$ *est artinien.*

b) *Il existe une extension k' de k de type fini telle que* $(K\otimes_k k')_{\mathrm{red}}$ *soit une k'-algèbre séparable.*

c) *Il existe une extension finie radicielle k' de k telle que* $(K\otimes_k k')_{\mathrm{red}}$ *soit une extension séparable de k'.*

Montrons d'abord que *c)* entraîne *a)*. L'anneau $A=K\otimes_k k'$ est alors un anneau artinien local, et si $\mathfrak{N}$ est son nilradical, le corps résiduel $L=A/\mathfrak{N}$ est séparable sur k'; par suite $L\otimes_{k'} k^{p^{-\infty}}$ est un corps, et comme il est égal à $(A\otimes_{k'} k^{p^{-\infty}})/(\mathfrak{N}\otimes_{k'} k^{p^{-\infty}})$, on voit que $\mathfrak{N}\otimes_{k'} k^{p^{-\infty}}$ est le nilradical de $A\otimes_{k'} k^{p^{-\infty}}=K\otimes_k k^{p^{-\infty}}$; comme $\mathfrak{N}$ est un idéal de type fini, le nilradical de $K\otimes_k k^{p^{-\infty}}$ est donc de type fini, ce qui entraîne que l'anneau $K\otimes_k k^{p^{-\infty}}$ est artinien.

Inversement, prouvons que *a)* entraîne *c)*. Soit $\mathfrak{N}$ le nilradical de l'anneau local artinien $B=K\otimes_k k^{p^{-\infty}}$, qui est par hypothèse engendré par un nombre fini d'éléments de la forme $y_i=\sum_j x_{ij}\otimes\xi_{ij}$, où $x_{ij}\in K$, $\xi_{ij}\in k^{p^{-\infty}}$. Soient k' l'extension radicielle finie de k engendrée par les ξ_{ij}, $\mathfrak{N}_0$ l'idéal de $B_0=K\otimes_k k'$ engendré par les y_i; il est clair que les y_i sont nilpotents dans B_0; d'autre part, on a $\mathfrak{N}_0\otimes_{k'} k^{p^{-\infty}}=\mathfrak{N}$, et par suite $\mathfrak{N}\cap B_0=\mathfrak{N}_0$, $\mathfrak{N}_0$ contient le nilradical de B_0, donc il lui est égal. Comme $B/\mathfrak{N}=(B_0/\mathfrak{N}_0)\otimes_{k'} k^{p^{-\infty}}$ est réduit, on en conclut que $B_0/\mathfrak{N}_0=(K\otimes_k k')_{\mathrm{red}}$ est séparable sur k (4.6.1).

Il est clair que *c)* entraîne *b)*. Inversement, supposons *b)* vérifiée, et notons qu'il existe une extension séparable k_1 de k telle que k' soit une extension radicielle finie de k_1; posons $K_1=K\otimes_k k_1$, qui est un corps. Appliquant l'équivalence de *a)* et *c)* à l'extension K_1 de k_1, on voit que $K_1\otimes_{k_1} k_1^{p^{-\infty}}$ est un anneau artinien; mais cet anneau est égal à $K \otimes_k k_1^{p^{-\infty}} = (K \otimes_k k^{p^{-\infty}}) \otimes_{k^{p^{-\infty}}} k_1^{p^{-\infty}}$, donc $K \otimes_k k^{p^{-\infty}}$ est aussi artinien (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 3, n° 5, cor. de la prop. 8); on a ainsi prouvé que *b)* entraîne *a)*, ce qui achève la démonstration de (18.11.12.1) et de (18.11.12).

18.12. Applications de la localisation étale aux morphismes quasi-finis (généralisations de résultats antérieurs).

Les résultats de ce numéro nous ont été communiqués par P. Deligne.

Théorème **(18.12.1).** — *Soient $f : X \to Y$ un morphisme localement de type fini, x un point de X, $y = f(x)$. Supposons que x soit un point isolé de l'espace $f^{-1}(y)$. Alors, il existe un morphisme étale $Y' \to Y$, un point x' de $X' = X \times_Y Y'$ au-dessus de x et un voisinage ouvert V' de x' dans X' tel que, si $f' = f_{(Y')} : X' \to Y'$, $f' | V'$ soit un morphisme fini. Si de plus f est séparé, V' est à la fois ouvert et fermé, et X' est donc somme de deux sous-préschémas induits sur des ouverts de X', dont l'un est fini sur Y' et contient x'.*

La dernière assertion résulte de ce que, si f est séparé, il en est de même de f'; donc, si $j' : V' \to X'$ est l'injection canonique, le fait que le morphisme $f' | V' = f' \circ j'$ soit fini entraîne qu'il en est de même de j' (**II**, 6.1.5), et par suite $V' = j'(V')$ est fermé dans X' (**II**, 6.1.10).

La question étant locale sur X, on peut supposer $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(B)$ affines, B étant une A-algèbre de type fini, donc de la forme $C/\mathfrak{J}$, où $C = A[T_1, \ldots, T_r]$ et $\mathfrak{J}$ est un idéal de C; f est donc *séparé*, et on peut en outre supposer que $f^{-1}(y) = \{x\}$. Soit $(\mathfrak{J}_\lambda)$ la famille des idéaux de type fini de C contenus dans $\mathfrak{J}$, de sorte que $\mathfrak{J}$ est la réunion filtrante des $\mathfrak{J}_\lambda$. Si X et les $X_\lambda = \mathrm{Spec}(C/\mathfrak{J}_\lambda)$ sont considérés comme des sous-préschémas fermés de $Z = \mathrm{Spec}(C)$, on a donc, pour les espaces sous-jacents, $X = \bigcap_\lambda X_\lambda$; si $f_\lambda : X_\lambda \to Y$ est le morphisme structural, on en déduit que $f^{-1}(y) = \bigcap_\lambda f_\lambda^{-1}(y)$, et comme les ensembles $f_\lambda^{-1}(y)$ sont fermés dans l'espace *noethérien* $Z_y = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y)[T_1, \ldots, T_r])$, il existe un indice λ tel que $f_\lambda^{-1}(y) = f^{-1}(y) = \{x\}$. On peut donc supposer que les X_λ vérifient la même condition que X au point x; si l'on prouve la proposition pour un tel X_λ, elle en résultera pour X, car si x' est un point au-dessus de x dans $Z' = Z \times_Y Y'$, $X'_\lambda = p^{-1}(X_\lambda)$, où $p : Z' \to Z$ est la projection (de sorte qu'on a aussi $X' = p^{-1}(X)$), s'il existe un voisinage ouvert V'_λ de x' dans X'_λ qui est fini sur Y', *a fortiori* la restriction de f'_λ au sous-préschéma fermé $X' \cap V'_\lambda$ de V'_λ sera un morphisme fini. On est donc ramené au cas où f est de *présentation finie*. Notons en outre que l'ensemble des points de X isolés dans leur fibre est ouvert dans X (13.1.4), donc f est quasi-fini au point x, et on peut par suite se borner au cas où f est *quasi-fini*. Soit A'' l'anneau local hensélisé de $\mathcal{O}_{Y,y}$, et posons $Y'' = \mathrm{Spec}(A'')$. Si $X'' = X \times_Y Y''$, $f'' = f_{(Y'')} : X'' \to Y''$ est séparé, quasi-fini et de présentation finie; comme A'' est hensélien, il y a pour tout $x'' \in X''$ au-dessus de x un voisinage ouvert et fermé V'' de x'' dans X'' qui est *fini* sur Y'' (18.5.11, *c)*); comme l'immersion $V'' \to X''$ est ouverte et fermée, elle est quasi-compacte, donc de présentation finie (1.6.2), donc $f'' | V''$ est de présentation finie.

Cela étant, par définition, A'' est limite inductive d'une famille filtrante (A_λ) de $\mathcal{O}_{Y,y}$-algèbres strictement essentiellement étales (18.6.5); chaque A_λ est lui-même limite inductive d'une famille filtrante $(B_{\lambda\mu})$ de $\mathcal{O}_{Y,y}$-algèbres *étales* ((18.6.1) et (8.1.2, *a)*)). Enfin, comme $B_{\lambda\mu}$ peut être supposée une $\mathcal{O}_{Y,y}$-algèbre de présentation finie, il résulte encore de (8.1.2, *a)*) et de (17.7.8) que $B_{\lambda\mu}$ est limite inductive d'une famille filtrante $(C_{\lambda\mu\nu})$ de A-algèbres étales. Finalement, on voit, en utilisant le théorème de la double limite inductive, que Y'' est limite projective d'une famille filtrante (Y'_α) de schémas affines étales sur Y. Si x'_α est la projection de x'' sur $X'_\alpha = X \times_Y Y'_\alpha$, on peut supposer que le voisinage V'', qui est quasi-compact, est de la forme $V'_\alpha \times_{Y'_\alpha} Y''$ où V'_α est un voisinage ouvert de x'_α dans X'_α (8.2.11). Enfin, V'' étant de présentation finie sur Y'', on conclut de (8.10.5, (x)) que pour un α convenable, V'_α est *fini* sur Y'_α. C.Q.F.D.

Remarque **(18.12.2).** — Dans la démonstration précédente, on voit (compte tenu de (18.6.2)) que l'on a construit un Y' répondant à la question, et tel en plus que si $y' = f'(X')$, l'homomorphisme $\boldsymbol{k}(y) \to \boldsymbol{k}(y')$ soit *bijectif*.

Corollaire **(18.12.3).** — *Soient $f : X \to Y$ un morphisme localement de type fini et séparé, y un point de Y tel que le sous-espace $f^{-1}(y)$ soit fini et discret. Il existe alors un morphisme étale $Y' \to Y$, un point $y' \in Y'$ au-dessus de y, tel que $\boldsymbol{k}(y') = \boldsymbol{k}(y)$, et une décomposition de X' en somme de deux sous-préschémas X'_1, X'_2 induits sur des ouverts de X', tels que la restriction de $f' = f_{(Y')} : X' \to Y'$ à X'_1 soit un morphisme fini et que l'on ait $X'_2 \cap f'^{-1}(y')) = \varnothing$.*

Si n est le nombre de points de $f^{-1}(y)$, on raisonne par récurrence sur n, le corollaire étant trivial pour $n = 0$. Soit x un point de $f^{-1}(y)$; en vertu de (18.12.1) et (18.12.2) il y a un morphisme étale $Y_1 \to Y$, un point y_1 de Y_1 au-dessus de y tel que $\boldsymbol{k}(y_1) = \boldsymbol{k}(y)$ et si l'on pose $S_1 = X \times_Y Y_1$, $f_1 = f_{(S_1)} : S_1 \to Y_1$, il existe un point x_1 de $f_1^{-1}(y_1)$

tel que S_1 soit somme de deux ouverts V_1, X_1, V_1 étant fini sur Y_1 et un voisinage de x_1. En vertu de la relation $\boldsymbol{k}(y_1)=\boldsymbol{k}(y)$, la fibre $f_1^{-1}(y_1)$ dans S_1 est isomorphe à $f^{-1}(y)$, donc $X_1 \cap f_1^{-1}(y_1)$ est fini, discret et a $n-1$ points. Comme $f_1 | X_1$ est localement de type fini et séparé, on applique l'hypothèse de récurrence à ce morphisme : il y a un morphisme étale $Y' \rightarrow Y_1$, un point $y' \in Y'$ au-dessus de y_1 tel que $\boldsymbol{k}(y')=\boldsymbol{k}(y_1)$, et, si $X'=X\times_Y Y'$ et si $p: X' \rightarrow S_1$ est la projection canonique, on a une décomposition de $p^{-1}(X_1)$ en somme de deux sous-préschémas U' et X'_2 induits sur des ouverts de X' tels que $X'_2 \cap f'^{-1}(y')=\emptyset$ et que U' soit fini sur Y'. Par ailleurs $V'=p^{-1}(V_1)$ est fini sur Y' et X' est somme de U', V' et X'_2; on répondra donc à la question en prenant X'_1 somme de U' et V'.

Le corollaire suivant améliore (8.11.1) :

Corollaire **(18.12.4)**. — *Pour qu'un morphisme $f: X \rightarrow Y$ soit fini, il faut et il suffit qu'il soit séparé, universellement fermé, localement de type fini et que, pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ soit un espace fini discret; en particulier, un morphisme propre et quasi-fini est fini.*

En effet, on peut appliquer le corollaire (18.12.3) à un point *quelconque* y de Y. Avec les notations de ce corollaire, f' est un morphisme fermé, donc, puisque X'_2 est fermé dans X', $f'(X'_2)$ est fermé dans Y' et ne contient pas y'; il existe par suite un voisinage ouvert U' de y' dans Y' tel que $U' \rightarrow Y$ soit de type fini et que $f'^{-1}(U')=X\times_Y U'$ soit fini sur U'. Soit U l'image de U' dans Y, qui est un ouvert de Y en vertu de (11.3.1) puisque le morphisme $Y' \rightarrow Y$ est étale, donc plat et localement de présentation finie; on a évidemment encore $X\times_Y U'=X\times_U U'=f^{-1}(U)\times_U U'$. Puisque maintenant le morphisme $U' \rightarrow U$ est fidèlement plat et quasi-compact, on déduit de (2.7.1, (xv)) que le morphisme $f^{-1}(U) \rightarrow U$, restriction de f, est fini, ce qui prouve le corollaire.

Remarque **(18.12.5)**. — On notera que dans la démonstration de (18.12.4) on n'a pas utilisé l'hypothèse que f est universellement fermé sous sa forme générale, mais seulement que $f_{(Y')}$ est un morphisme fermé pour tout morphisme *étale* $Y' \rightarrow Y$.

Corollaire **(18.12.6)**. — *Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de préschémas. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *f est une immersion fermée.*

b) *f est un monomorphisme propre.*

c) *f est propre et, pour tout $y \in Y$, le $\boldsymbol{k}(y)$-préschéma $X_y=f^{-1}(y)$ est radiciel et géométriquement réduit sur $\boldsymbol{k}(y)$ (c'est-à-dire vide ou $\boldsymbol{k}(y)$-isomorphe à* $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$).

Cela se déduit de (18.12.4) comme (8.11.5) se déduit de (8.11.1).

Proposition **(18.12.7)**. — *Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, y un point de* Y. *Pour qu'il existe un voisinage ouvert* U *de y tel que la restriction $f^{-1}(U) \rightarrow U$ de f soit une immersion fermée, il faut et il suffit que X_y soit un $\boldsymbol{k}(y)$-préschéma radiciel et géométriquement réduit sur $\boldsymbol{k}(y)$ (c'est-à-dire vide ou $\boldsymbol{k}(y)$-isomorphe à* $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$) *et qu'il existe un voisinage ouvert* V *de y tel que la restriction $f^{-1}(V) \rightarrow V$ de f soit un morphisme universellement fermé.*

Les conditions étant évidemment nécessaires, prouvons qu'elles sont suffisantes. On peut se borner au cas où $X_y \neq \emptyset$. En vertu de la seconde condition, on peut déjà supposer f universellement fermé. Montrons en outre qu'on peut supposer f *affine*, donc séparé; cela résulte du lemme suivant :

Lemme **(18.12.7.1)**. — *Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme fermé, $y \in Y$ un point tel que tout voisinage de X_y contienne un voisinage affine de X_y (condition toujours vérifiée lorsque X_y est vide ou réduite à un seul point). Alors il existe un voisinage ouvert affine* U *de y tel que la restriction $f^{-1}(U) \rightarrow U$ de f soit un morphisme affine.*

En effet, soit U_0 un voisinage ouvert affine de y dans Y et soit V un voisinage ouvert affine de X_y contenu dans $f^{-1}(U_0)$. Puisque f est fermé, il existe un voisinage ouvert affine $U \subset U_0$ de y tel que $f^{-1}(U) \subset V$. Comme la restriction $g: V \rightarrow U_0$ de f est un morphisme affine, il en est de même de sa restriction $f^{-1}(U) \rightarrow U$ (**II**, 1.2.5).

Supposons donc f affine et universellement fermé, et montrons qu'il existe un voisinage ouvert U de y tel que la restriction $f^{-1}(U) \rightarrow U$ soit un morphisme *fini*; comme on peut supposer Y et X affines, on peut supposer f de type fini, donc *propre*, et il suffit de prouver qu'il existe un voisinage U de y tel que $f^{-1}(U) \rightarrow U$ soit un morphisme *quasi-fini* (18.12.4). Mais il existe un voisinage V de l'ensemble X_y (réduit à un seul point) tel que $f|V$ soit quasi-fini (13.1.4), et comme f est fermé il y a un voisinage U de y tel que $f^{-1}(U) \subset V$, ce qui achève la démonstration, compte tenu de (18.12.6).

Proposition **(18.12.8)**. — *Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de préschémas. Pour que f soit entier, il faut et il suffit que f soit affine et universellement fermé.*

Les conditions sont nécessaires (**II**, 6.1.10); prouvons qu'elles sont suffisantes. On peut supposer $Y=\mathrm{Spec}(A)$ affine, donc aussi $X=\mathrm{Spec}(B)$, et il faut prouver que tout élément $b \in B$ est entier sur A (**II**, 6.1.1). Soit B' la sous-A-algèbre de B engendrée par b, qui est une A-algèbre de type fini; posons $X'=\mathrm{Spec}(B')$, de sorte que $f: X \rightarrow Y$ se factorise en $X \xrightarrow{g} X' \xrightarrow{h} Y$, où h est de type fini, et g est *dominant* puisque l'homomorphisme $B' \rightarrow B$ est injectif (**I**, 1.2.7). Comme h est séparé et $h \circ g$ universellement fermé, g est universellement fermé (**II**, 5.4.3 et

5.4.9), donc *surjectif* puisqu'il est dominant; on en conclut (**II**, 5.4.3 et 5.4.9) que h est aussi universellement fermé, donc *propre* puisqu'il est de type fini et séparé. Mais alors, pour tout $y \in Y$, le morphisme $h^{-1}(y) \rightarrow \mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$ déduit de h est propre et affine, donc *fini* (**III**, 4.4.2), autrement dit h est *quasi-fini*; on déduit donc de (18.12.4) que h est *fini*, ce qui prouve que B′ est une A-algèbre finie, et par suite que b est entier sur A. C.Q.F.D.

Remarque (**18.12.9**). — Il se peut qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ soit entier lorsqu'on le suppose seulement séparé, universellement fermé et tel que pour tout $y \in Y$, le morphisme $f^{-1}(y) \rightarrow \mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$ déduit de f soit entier. Il faudrait pour cela prouver que ces conditions impliquent que f est affine, ou encore que toute fibre X_y est contenue dans un voisinage ouvert affine.

Corollaire (**18.12.10**). — *Un morphisme* $f : X \rightarrow Y$ *qui est injectif et universellement fermé est entier.*

Il suffit, par (18.12.8), de prouver que f est affine, ce qui résulte du lemme (18.12.7.1) et de l'hypothèse.

Corollaire (**18.12.11**). — *Soit* $f : X \rightarrow Y$ *un morphisme de préschémas* (resp. *un morphisme localement de type fini*). *Pour que f soit un homéomorphisme universel* (2.4.2), *il faut et il suffit que f soit entier* (resp. *fini*), *radiciel et surjectif.*

On sait que les conditions sont suffisantes (2.4.5); elles sont nécessaires en vertu de (18.12.10) et (18.12.4).

La proposition suivante améliore (8.11.2) :

Proposition (**18.12.12**). — *Tout morphisme* $f : X \rightarrow Y$ *qui est quasi-fini et séparé est quasi-affine.*

Posons $\mathscr{A} = f_*(\mathcal{O}_X)$, qui est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre quasi-cohérente puisque f est quasi-compact et séparé (1.7.4); soit $Z = \mathrm{Spec}(\mathscr{A})$ (**II**, 1.3.1) de sorte que f se factorise canoniquement en $X \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} Y$, h étant affine et g correspondant à l'automorphisme identique de $\mathscr{A}$ (**II**, 1.2.7); il suffira de prouver que g est une *immersion ouverte*, ou, ce qui revient au même (17.9.1) que g est *étale* et *radiciel*. Il suffira évidemment de montrer que, pour tout $y \in Y$, le morphisme g est étale et radiciel en chaque point de $f^{-1}(y)$. Or, pour tout $y \in Y$, on peut appliquer à f le résultat de (18.12.3), dont nous conservons les notations; puisque le morphisme $Y' \rightarrow Y$ est plat, et que f est quasi-compact et séparé, on a, à un isomorphisme canonique près, $f'_*(\mathcal{O}_{X'}) = \mathscr{A} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'} = \mathscr{A}'$ (2.3.1), donc $Z' = Z \times_Y Y'$ s'identifie à $\mathrm{Spec}(f'_*(\mathcal{O}_{X'}))$, et dans la factorisation canonique $X' \xrightarrow{g'} Z' \xrightarrow{h'} Y'$ de f' (**II**, 1.2.7), on a $h' = h_{(Y')}$ et $g' = g_{(Y')}$. Cela étant, la décomposition de X′ en somme de deux sous-préschémas X'_1, X'_2 entraîne la décomposition de $\mathscr{A}'$ en produit direct des deux $\mathcal{O}_Y$-Algèbres quasi-cohérentes $\mathscr{A}'_1$, $\mathscr{A}'_2$, images directes respectives de $\mathcal{O}_{X'_1}$ et $\mathcal{O}_{X'_2}$, de sorte que Z′ s'identifie à la somme $Z'_1 \amalg Z'_2$, où $Z'_i = \mathrm{Spec}(\mathscr{A}'_i)$ et $g'(X'_i) \subset Z'_i$ pour $i = 1, 2$. Comme X'_1 est fini sur Y′, $g'_1 = g' \mid X'_1$ est un *isomorphisme* de X'_1 sur Z'_1, puisque $f' \mid X'_1$ est affine; comme $X'_2 \cap f'^{-1}(y') = \emptyset$, on voit que g' est *étale* et *radiciel* en chaque point de $f'^{-1}(y')$. Le morphisme $Y' \rightarrow Y$ étant plat et localement de présentation finie, on déduit donc d'abord de (17.7.4) que g est étale en tous les points de X projections de points de $f'^{-1}(y')$, c'est-à-dire en tous les points de $f^{-1}(y)$ (**I**, 3.5.2). D'autre part, le morphisme $g'_{y'} : f'^{-1}(y') \rightarrow h'^{-1}(y')$ déduit de g' est radiciel; comme $\boldsymbol{k}(y') = \boldsymbol{k}(y)$, le morphisme $g_y : f^{-1}(y) \rightarrow h^{-1}(y)$ est aussi radiciel, autrement dit g est radiciel en chaque point de $f^{-1}(y)$, ce qui achève de prouver la proposition.

L'énoncé suivant améliore de même (8.12.6) :

Corollaire (**18.12.13**) (« Main Theorem » de Zariski). — *Soient* Y *un préschéma quasi-compact et quasi-séparé,* $f : X \rightarrow Y$ *un morphisme quasi-fini et séparé. Alors il existe une factorisation de f*

$$X \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{u} Y$$

où g est une immersion ouverte (nécessairement quasi-compacte) et u un morphisme fini.

En effet, il résulte de (18.12.12) que f est *quasi-affine*, donc quasi-projectif. On peut alors appliquer (8.12.8), où l'hypothèse de l'existence d'un $\mathcal{O}_Y$-Module ample peut en fait être remplacée par la seule hypothèse que Y est quasi-compact et quasi-séparé : en effet, il résulte de (8.12.3) que l'existence de la factorisation annoncée dans (8.12.8) est une propriété *locale* sur Y, et qu'il suffit donc de la prouver lorsque Y est *affine*.

Remarque (**18.12.14**). — On peut donner de (18.12.13) une démonstration analogue à celle de (18.12.12) n'utilisant pas (8.12.8) (mais utilisant (18.12.3), donc (18.5.11), qui lui-même se sert du « Main theorem » sous sa forme locale (8.12.9)). Gardons en effet les notations de la démonstration de (18.12.12), et soit $\mathscr{B}$ la $\mathcal{O}_Y$-Algèbre quasi-cohérente, *fermeture intégrale* de $\mathcal{O}_Y$ dans $\mathscr{A}$ (**II**, 6.3.2). Si l'on pose $T = \mathrm{Spec}(\mathscr{B})$, il suffit, en vertu de (8.12.3), de prouver que le Y-morphisme $g : X \rightarrow T$ correspondant à l'injection canonique $\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A}$ est une immersion, et pour cela il suffit de montrer (17.9.1) que g est étale et radiciel. Avec les notations de (18.12.12), on peut supposer que $Y = \mathrm{Spec}(C)$ et $Y' = \mathrm{Spec}(C')$ sont affines, C′ étant une C-algèbre *étale* (17.3.2); donc $\mathscr{A} = \widetilde{A}$, où A est une C-algèbre, $\mathscr{A}' = \widetilde{A'}$ avec $A' = A \otimes_C C'$, et $\mathscr{B} = \widetilde{B}$, où B est la fermeture intégrale de C dans A. L'algèbre A′ est isomorphe au *produit* $A'_1 \times A'_2$, où A'_1 est une C′-algèbre *finie*. Il suffira de prouver que $B' = B \otimes_C C'$, qui s'identifie par platitude à une sous-C'-algèbre de A', contient A'_1; en effet, B' se décomposera alors en produit $A'_1 \times A''_2$ où A''_2 est une sous-C'-algèbre de A'_2, et si l'on pose $T''_2 = \mathrm{Spec}(A''_2)$, $T' = T \times_Y Y'$ sera somme de $Z'_1 = \mathrm{Spec}(A'_1)$ et de T_2, et $g' | X'_1$ sera un *isomorphisme de* X'_1 sur Z'_1, ce qui permettra de conclure comme dans (18.12.12).

Pour prouver que B' contient A'_1, il suffit évidemment de prouver la proposition suivante, qui étend partiellement (6.14.4) lorsqu'on ne fait plus d'hypothèses noethériennes :

Proposition **(18.12.15).** — *Soient* C *un anneau,* C' *une* C*-algèbre* étale, A *une* C*-algèbre,* B *la fermeture intégrale de* C *dans* A; *on pose* $A' = A \otimes_C C'$, $B' = B \otimes_C C'$, B' *s'identifiant à une sous-algèbre de* A'; *alors* B' *est la fermeture intégrale de* C' *dans* A'.

En considérant la famille filtrante croissante des sous-C-algèbres de type fini de A et raisonnant comme dans (6.14.4, II)), on peut d'abord supposer que A est une C-algèbre *de type fini*, donc de la forme $E/\mathfrak{J}$, où $E = C[T_1, \ldots, T_r]$ et $\mathfrak{J}$ est un idéal de E; on a alors $A' = E'/\mathfrak{J}E'$, où $E' = C'[T_1, \ldots, T_r]$. Soit $(\mathfrak{J}_\lambda)$ la famille filtrante croissante des idéaux de type fini de E contenus dans $\mathfrak{J}$, de sorte que A est limite inductive des $E/\mathfrak{J}_\lambda$; si B_λ est la fermeture intégrale de C dans $E/\mathfrak{J}_\lambda$, B est limite inductive des B_λ, comme le montre le raisonnement de (5.13.4). De même la fermeture intégrale de C' dans $E'/\mathfrak{J}E'$ est limite inductive de la fermeture intégrale de C' dans $E'/\mathfrak{J}_\lambda E'$; si on prouve que cette dernière est égale à $B_\lambda \otimes_C C'$, il en résultera que $B' = \varinjlim (B_\lambda \otimes_C C')$ sera la fermeture intégrale de C' dans A'. On est ainsi ramené à prouver la proposition lorsque A est une C-algèbre de *présentation finie*.

Montrons ensuite qu'on peut se ramener au cas où C est *noethérien*. En effet, C est réunion filtrante de ses sous-**Z**-algèbres de type fini C_α, donc il résulte de (17.7.8) qu'il existe un indice α et une C_α-algèbre *étale* C'_α tels que $C' = C'_\alpha \otimes_{C_\alpha} C$; en outre C' est limite inductive des $C'_\beta = C'_\alpha \otimes_{C_\alpha} C_\beta$ pour $\beta \geqslant \alpha$. On peut en outre supposer, puisque A est une C-algèbre de présentation finie, que $A = A_\alpha \otimes_{C_\alpha} C$, où A_α est une C_α-algèbre de type fini, et A est limite inductive des $A_\beta = A_\alpha \otimes_{C_\alpha} C_\beta$ pour $\beta \geqslant \alpha$ (8.9.1). Le raisonnement de (5.13.4) montre alors que B est la limite inductive des fermetures intégrales B_β des C_β dans A_β. De même A' est limite inductive des $A'_\beta = A_\beta \otimes_{C_\beta} C'_\beta = A_\alpha \otimes_{C_\alpha} C'_\beta$ pour $\beta \geqslant \alpha$, donc le même raisonnement que ci-dessus montre qu'il suffira de prouver que $B'_\alpha = B_\alpha \otimes_{C_\alpha} C'_\alpha$ est la fermeture intégrale de C'_α dans A'_α.

Une fois ramené au cas où C est noethérien, la proposition devient un cas particulier de (6.14.4). Il faut toutefois observer que, lorsque C' est supposé *étale* sur C noethérien, la démonstration de (6.14.4) n'exige plus le délicat théorème (6.14.1). En effet, les réductions successives de la preuve de (6.14.4) ramènent *sans utiliser* (6.14.1), au cas où C est *intègre*, A le corps des fractions de C. Comme alors B est un anneau normal et que le morphisme $\mathrm{Spec}(B') \to \mathrm{Spec}(B)$ est *étale*, il résulte de (17.5.7) que B' est un anneau normal; le raisonnement se termine en faisant appel seulement au lemme élémentaire (6.14.1.1), mais non à la partie difficile de la preuve de (6.14.1).

Proposition **(18.12.16).** — *Soient* $g : Y \to S$ *un morphisme quasi-compact,* $f : X \to Y$ *un morphisme séparé et quasi-fini. Pour tout* $\mathcal{O}_Y$*-Module inversible* $\mathscr{L}$, *ample relativement à* S (**II**, 4.6.1), *le* $\mathcal{O}_X$*-Module* $f^*(\mathscr{L})$ *est ample relativement à* S.

En effet, en vertu de (18.12.12), le morphisme f est quasi-affine, donc (**II**, 5.1.6) le $\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{O}_X$ est ample pour f. On en déduit (**II**, 4.6.13, (ii)) que $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\mathscr{L}^{\otimes n}) = f^*(\mathscr{L}^{\otimes n})$ est ample relativement à S pour un n assez grand. Mais comme $f^*(\mathscr{L}^{\otimes n}) = (f^*(\mathscr{L}))^{\otimes n}$, cela entraîne que $f^*(\mathscr{L})$ est ample relativement à S (**II**, 4.6.9, (i)).

Corollaire **(18.12.17).** — *Soient* Z *un schéma affine,* $h : X \to Z$ *un morphisme de type fini,* $\mathscr{L}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible. Avec les notations de* (**II**, 4.5.2), *les conditions de* (**II**, 4.5.2) (*qui équivalent au fait que* $\mathscr{L}$ *est ample*) *sont aussi équivalentes à chacune des suivantes :*

b'') *h est séparé, on a* $G(\varepsilon) = X$ *et le morphisme canonique* $u : G(\varepsilon) \to \mathrm{Proj}(S)$ *a ses fibres finies et discrètes.*

b''') *On a* $G(\varepsilon) = X$ *et le morphisme canonique u est radiciel.*

Si $Z = \mathrm{Spec}(A)$, l'anneau S est canoniquement muni d'une structure de A-algèbre graduée, donc on a un morphisme structural $g : \mathrm{Proj}(S) \to Z$ qui est séparé (**II**, 2.4.2), et on a $h = g \circ u$.

Comme tout morphisme radiciel est séparé (**I**.8.7.1), *b''')* entraîne que h est séparé, donc entraîne *b'')*. Comme la condition *b)* de (**II**, 4.5.2) entraîne évidemment *b''')*, il reste à voir que *b'')* entraîne que $\mathscr{L}$ est ample. Puisque $h = g \circ u$ est de type fini par hypothèse et que g est séparé, u est aussi de type fini (**I**, 6.3.4), donc l'hypothèse *b'')* entraîne que u est quasi-fini et séparé (**I**, 5.5.1). Pour prouver que $\mathscr{L}$ est ample, nous allons appliquer (18.12.16). Posons $Y = \mathrm{Proj}(S)$. Comme X est quasi-compact, il existe un entier $n > 0$ et un nombre fini d'éléments $f_j \in S_n$ tels que les images réciproques $u^{-1}(D_+(f_j))$ recouvrent X; on peut donc considérer u comme un morphisme quasi-fini et séparé de X dans l'ouvert $Y' = \bigcup_j D_+(f_j)$ de Y. Considérons alors le $\mathcal{O}_{Y'}$-Module inversible $\mathscr{L}' = \mathcal{O}_Y(n) | Y'$ (**II**, 2.5.8); il est très ample relativement à Z (**II**, 4.4.3), et $u^*(\mathscr{L}')$ n'est autre par définition que $\mathscr{L}^{\otimes n}$

(**II**, 3.7.9, (i)). En vertu de (18.12.16), $\mathscr{L}^{\otimes n}$ est donc ample relativement à Z (ce qui équivaut à dire qu'il est ample (**II**, 4.6.6)), et par suite il en est de même de $\mathscr{L}$ (**II**, 4.5.6, (i)).

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer de même des conditions équivalentes à celles de (**II**, 4.6.3) pour les $\mathcal{O}_X$-Modules relativement amples.

§ 19. IMMERSIONS RÉGULIÈRES ET PLATITUDE NORMALE

Le présent paragraphe est consacré, d'une part à une étude des *immersions régulières* (16.9.2) $Y \rightarrow X$ de préschémas, notamment dans le cas où X et Y sont plats sur un même préschéma S; d'autre part, il donne des compléments sur les suites M-régulières et la platitude normale, en généralisant notamment des résultats de platitude établis par H. Hironaka dans sa théorie de la résolution des singularités [35].

19.1. Propriétés des immersions régulières.

Proposition (**19.1.1**). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $j: Y \rightarrow X$ *une immersion,* y *un point régulier de* Y. *Pour que* j *soit une immersion régulière au point* y, *il faut et il suffit que* X *soit régulier au point* $j(y)$.

Compte tenu de (16.9.10), on est ramené à prouver le

Corollaire (**19.1.2**). — *Soient* A *un anneau local noethérien,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A; *on suppose que l'anneau quotient* $B = A/\mathfrak{J}$ *soit régulier. Pour que* A *soit régulier, il faut et il suffit que l'idéal* $\mathfrak{J}$ *soit régulier.*

En effet, si A est régulier, on sait (**0**, 17.1.9) que $\mathfrak{J}$ est engendré par une partie d'un système régulier de paramètres de A, donc $\mathfrak{J}$ est régulier. Inversement, si $\mathfrak{J}$ est régulier, et si $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est une suite A-régulière engendrant $\mathfrak{J}$, (x_i) fait partie d'un système de paramètres de A (**0**, 16.4.1), donc on déduit de (**0**, 17.1.7) que A est régulier.

Définition (**19.1.3**). — *Soient* X *un préschéma,* Y *un sous-préschéma de* X, U *un ouvert de* X *contenant* Y *et tel que* Y *soit défini par un Idéal* $\mathscr{J}$ *de* $\mathcal{O}_U$; *on suppose que* $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ *soit un* $\mathcal{O}_U/\mathscr{J}$*-Module localement libre* (ce qui est le cas si Y est quasi-régulièrement immergé dans X). *Pour tout* $y \in Y$, *on appelle codimension transversale de* Y *dans* X *au point* y *et on note* $\operatorname{codim}^*_y(Y, X)$ *le rang du* $(\mathcal{O}_y/\mathfrak{J}_y)$*-module libre* $\mathscr{J}_y/\mathscr{J}^2_y$. *Si* $f: Z \rightarrow X$ *est une immersion d'image* Y, *on appelle de même codimension transversale de* f *au point* $z \in Z$ *la codimension tranversale dans* X *au point* $f(z)$ *du sous-préschéma* Y.

Proposition (**19.1.4**). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Y *un sous-préschéma de* X *régulièrement immergé; alors, pour tout* $y \in Y$, *on a*

$$\operatorname{codim}^*_y(Y, X) = \operatorname{codim}_y(Y, X). \tag{19.1.4.1}$$

En vertu de (5.1.3.2), $\operatorname{codim}_y(Y, X)$ est égal à la plus petite valeur des dimensions des anneaux locaux $A = \mathcal{O}_{X,z}$, où z est point générique d'une composante irréductible de Y contenant y; comme un tel point z est contenu dans tout voisinage de y dans X, $\mathcal{J}_z/\mathcal{J}_z^2$ est un A-module libre de rang $n = \mathrm{codim}_y^*(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$; tout revient à voir que $\dim(\mathrm{A}) = n$. Or, puisque z est point maximal du sous-préschéma Y défini par $\mathcal{J}$, on a $\dim(\mathcal{O}_{\mathrm{X},z}/\mathcal{J}_z) = 0$, donc $\mathcal{J}_z$ est un *idéal de définition* de l'anneau local noethérien A; en outre, l'hypothèse que $\mathcal{J}$ est quasi-régulier entraîne que $\mathcal{J}_z^m/\mathcal{J}_z^{m+1}$ est un $(\mathrm{A}/\mathcal{J}_z)$-module libre de rang $\binom{m+n-1}{n-1}$; si r est la longueur de l'anneau artinien $\mathrm{A}/\mathcal{J}_z$, la longueur de $\mathcal{J}_z^m/\mathcal{J}_z^{m+1}$ est donc $r\binom{m+n-1}{n-1}$; le polynôme de Hilbert-Samuel de A pour la filtration $\mathcal{J}_z$-préadique est donc bien de degré n, ce qui prouve la proposition (**0**, 16.2.3).

En vertu de (19.1.4), on dira désormais « codimension » au lieu de « codimension transversale » lorsqu'il s'agira d'un sous-préschéma Y régulièrement immergé dans X (*même* lorsque X n'est pas localement noethérien).

Proposition **(19.1.5)**. — (i) *Pour qu'une immersion* $j : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *soit ouverte, il faut et il suffit qu'elle soit régulière et de codimension* 0 *en tout point.*

(ii) *Soient* $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *une immersion régulière* (resp. *quasi-régulière*) $g : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ *un morphisme plat,* $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{X}'$; *alors le morphisme* $f' = f_{(\mathrm{X}')} : \mathrm{Y}' \to \mathrm{X}'$ *est une immersion régulière* (resp. *quasi-régulière*), *et pour tout* $y' \in \mathrm{Y}'$, *si* y *est la projection de* y' *dans* Y, *la codimension de* f' *au point* y' *est égale à la codimension de* f *au point* y. *Inversement, si* f *est une immersion et* $g : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ *un morphisme fidèlement plat et quasi-compact, alors, si* f' *est une immersion quasi-régulière, il en est de même de* f.

(iii) *Si* $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *et* $g : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ *sont des immersions régulières, alors* $f \circ g : \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ *est une immersion régulière, et pour tout* $z \in \mathrm{Z}$, *la codimension de* $f \circ g$ *au point* z *est la somme de la codimension de* g *au point* z *et de la codimension de* f *au point* $g(z)$. *De plus, la suite d'homomorphismes canoniques* (16.2.7.1)

(19.1.5.1) $$0 \to g^*(\mathcal{N}_{\mathrm{Y}/\mathrm{X}}) \to \mathcal{N}_{\mathrm{Z}/\mathrm{X}} \to \mathcal{N}_{\mathrm{Z}/\mathrm{Y}} \to 0$$

est exacte, et pour tout $z \in \mathrm{Z}$, *il existe un voisinage de* z *dans* Z *dans lequel les restrictions des homomorphismes de cette suite forment une suite scindée.*

(iv) *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *et* $g : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ *deux immersions,* z *un point de* Z. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *g est une immersion régulière au point z et f une immersion régulière au point $g(z)$.*

b) *g et $f \circ g$ sont des immersions régulières au point z.*

c) *$f \circ g$ est une immersion régulière au point z, f est une immersion régulière au point $g(z)$, et la suite d'homomorphismes canoniques* (19.1.5.1), *restreinte à un voisinage ouvert assez petit de z dans* Z, *est exacte et scindée.*

(v) *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$, $g : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ *deux immersions, z un point de* Z; *supposons que* $y = g(z)$ *soit un point régulier de* Y *et* $x = f(g(z))$ *un point régulier de* X (ce qui entraîne, par (19.1.1), que f est une *immersion régulière* au point $g(z)$); *alors,* *pour que $f\circ g$ soit une immersion régulière au point z, il faut et il suffit que g soit une immersion régulière au point z.*

L'assertion (i) est une autre manière d'exprimer (16.1.10). Pour démontrer la première assertion de (ii), on peut se borner au cas où Y est un sous-préschéma fermé de X défini par un Idéal régulier (resp. quasi-régulier) $\mathscr{J}$; alors Y' est le sous-préschéma fermé de X' défini par l'Idéal $g^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{X'}$ (**I**, 4.4.5) qui s'identifie ici à $g^*(\mathscr{J})$ puisque g est plat; en remplaçant X par un ouvert affine assez petit, on peut supposer que $\mathscr{J}$ admet une suite régulière (resp. quasi-régulière) de générateurs f_i (sections de $\mathscr{O}_X$ au-dessus de X). Si la suite (f_i) est régulière, il en est de même de la suite $(f_i\otimes 1)$ (qui engendre $g^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_X$) en vertu de (**0**, 15.2.5); le résultat analogue pour les suites quasi-régulières découle aussitôt de la platitude de g et du critère (16.9.4). De même, si g est fidèlement plat et quasi-compact, et si $g^*(\mathscr{J})$ est quasi-régulier, $\mathscr{J}$ est de type fini en vertu de (2.5.2); par platitude, on a $g^*(\mathscr{J})/g^*(\mathscr{J})^2=g^*(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2)$, donc, puisque $g^*(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2)$ est localement libre par hypothèse (16.9.4), il en est de même de $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ (2.5.2). Enfin, la condition (iii) de (16.9.4) relative à $g^*(\mathscr{J})$ entraîne la même condition pour $\mathscr{J}$ en vertu de la fidèle platitude de g (2.2.7). On conclut donc de (16.9.4) que $\mathscr{J}$ est quasi-régulier.

Pour prouver (iii), on peut de même supposer que Y et Z sont des sous-préschémas fermés de X, définis respectivement par des Idéaux $\mathscr{J}$, $\mathscr{K}$ de $\mathscr{O}_X$ tels que $\mathscr{J}\subset\mathscr{K}$; de plus, on peut supposer qu'il existe des sections f_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ de $\mathscr{J}$ au-dessus de X engendrant $\mathscr{J}$ et telles que pour $1\leqslant i\leqslant m$, l'endomorphisme de $\mathscr{O}_X/(\sum_{j=1}^{i-1}f_j\mathscr{O}_X)$ défini par f_i soit injectif, et des sections $\overline{f}_i$ $(m+1\leqslant i\leqslant n)$ de $\mathscr{K}/\mathscr{J}$ au-dessus de X engendrant $\mathscr{K}/\mathscr{J}$ et telles que pour $m+1\leqslant i\leqslant n$, l'endomorphisme de $(\mathscr{O}_X/\mathscr{J})/(\sum_{j=m+1}^{i-1}\overline{f}_j(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}))$ défini par $\overline{f}_i$ soit injectif. Pour tout $z\in Z$, soit U un voisinage ouvert de z dans X tel qu'il existe une section f_i de $\mathscr{K}$ au-dessus de U, dont $\overline{f}_i|U$ soit la classe dans $\Gamma(U,\mathscr{K}/\mathscr{J})$ pour $m+1\leqslant i\leqslant n$; alors $(\mathscr{O}_X/\mathscr{J})/(\sum_{j=m+1}^{i-1}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}))$, restreint à U est isomorphe à $\mathscr{O}_U/((\mathscr{J}|U)+\sum_{j=m+1}^{i-1}f_j\mathscr{O}_U)=\mathscr{O}_U/(\sum_{j=1}^{i-1}f_j\mathscr{O}_U)$, et on voit donc que la suite $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est régulière dans $\mathscr{O}_U$; comme elle engendre $\mathscr{K}|U$, cela prouve la première assertion de (iii). Pour prouver la dernière assertion de (iii), on peut se borner (avec les mêmes notations) au cas où les images t_i des f_i dans $\mathscr{K}/\mathscr{K}^2$ (pour $1\leqslant i\leqslant n$) forment une base de cet $\mathscr{O}_X/\mathscr{K}$-Module (16.9.5); pour la même raison, on peut supposer que les t_i tels que $1\leqslant i\leqslant m$ sont les images canoniques des éléments d'une base du $\mathscr{O}_X/\mathscr{K}$-Module $g^*(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2)$, et que les images canoniques $\overline{t}_i$ des t_i dans $(\mathscr{K}/\mathscr{J})/(\mathscr{K}/\mathscr{J})^2$ pour $m+1\leqslant i\leqslant n$ forment une base de cet $\mathscr{O}_X$-$\mathscr{K}$-Module. Cela achève de prouver (iii).

Passons à la démonstration de (iv). Le fait que *a)* implique *c)* résulte de (iii). Prouvons que *c)* implique *a)*. Posons encore $A=\mathscr{O}_{X,f(g(z))}$, de sorte que $\mathscr{O}_{Y,g(z)}=A/\mathfrak{J}$,

$\mathcal{O}_{Z,z}=A/\mathfrak{K}$ avec $\mathfrak{J}\subset\mathfrak{K}$. Par hypothèse, $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{K}$ sont des idéaux réguliers de A et on a une suite exacte scindée

$$0\to\mathfrak{J}/\mathfrak{J}\mathfrak{K}\to\mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2\to(\mathfrak{K}/\mathfrak{J})/(\mathfrak{K}/\mathfrak{J})^2\to 0$$

(cf. (16.2.7)). Cela entraîne qu'il existe des éléments f_j $(1\leqslant j\leqslant r+s)$ de $\mathfrak{K}$ dont les images f_j' dans $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2$ forment une base de cet $(A/\mathfrak{K})$-module, et tels en outre que les f_j d'indice $j\leqslant r$ appartiennent à $\mathfrak{J}$ et sont tels que leurs images dans $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}\mathfrak{K}$ forment une base de cet $(A/\mathfrak{K})$-module. Les f_j pour $1\leqslant j\leqslant r+s$ engendrent donc $\mathfrak{K}$, et les f_j pour $1\leqslant j\leqslant r$ engendrent $\mathfrak{J}$ puisque A est noethérien (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, prop. 5) ; comme $\mathfrak{K}$ est un idéal régulier, il résulte de (16.9.5) que la suite $(f_j)_{1\leqslant j\leqslant r+s}$ est régulière. Par définition, les images de $f_{r+1},\ldots,f_{r+s}$ dans $\mathfrak{K}/\mathfrak{J}$ forment donc une suite régulière dans cet $(A/\mathfrak{J})$-module, ce qui achève de prouver que *c)* entraîne *a)* dans (iv).

Enfin, compte tenu de (16.9.10), il est immédiat que (v), ainsi que l'équivalence de *a)* et *b)* dans (iv), résultent du

Corollaire (**19.1.6**). — *Soient* A *un anneau local noethérien,* $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$ *deux idéaux de* A *contenus dans son idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *et tels que* $\mathfrak{J}\subset\mathfrak{K}$, $A'=A/\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}'=\mathfrak{K}/\mathfrak{J}$. *Alors :*

(i) *Si* $\mathfrak{J}$ *et* $\mathfrak{K}'$ *sont des idéaux réguliers, il en est de même de* $\mathfrak{K}$.

(ii) *Si* $\mathfrak{K}$ *et* $\mathfrak{K}'$ *sont des idéaux réguliers, il en est de même de* $\mathfrak{J}$.

(iii) *Supposons les anneaux* A *et* $A'=A/\mathfrak{J}$ *réguliers. Pour que l'idéal* $\mathfrak{K}$ *soit régulier, il faut et il suffit que* $\mathfrak{K}'$ *le soit.*

L'assertion (i) est un cas particulier de (19.1.5, (iii)). Pour démontrer (ii), considérons l'homomorphisme surjectif canonique $u:\mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2\to\mathfrak{K}'/\mathfrak{K}'^2=\mathfrak{K}/(\mathfrak{K}^2+\mathfrak{J})$. Comme par hypothèse $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2$ et $\mathfrak{K}'/\mathfrak{K}'^2$ sont des $(A/\mathfrak{K})$-modules libres, dont nous désignerons les rangs respectifs par $p+q$ et q, le noyau de u est un $(A/\mathfrak{K})$-module *projectif* (Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3e éd., § 2, n° 2, prop. 4), donc *libre* de rang p puisque $A/\mathfrak{K}$ est un anneau local noethérien ($\mathbf{0}_{\text{III}}$, 10.1.3); autrement dit, il existe une base de $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2$ dont les p premiers éléments forment une base de $(\mathfrak{K}^2+\mathfrak{J})/\mathfrak{K}^2$. Cela signifie encore (en vertu du lemme de Nakayama) qu'il existe un système de générateurs $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant p+q}$ de $\mathfrak{K}$, formant une suite régulière dans A, telle que la suite $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ soit formée d'éléments de $\mathfrak{J}$; il s'agit de montrer que cette dernière suite engendre $\mathfrak{J}$. Pour cela, désignons par $\mathfrak{J}'\subset\mathfrak{J}$ l'idéal qu'elle engendre; en considérant l'anneau $A/\mathfrak{J}'$, on voit qu'on est ramené à prouver le lemme suivant :

Lemme (**19.1.6.1**). — *Soient* B *un anneau local noethérien d'idéal maximal* $\mathfrak{n}$, $(g_j)_{1\leqslant j\leqslant q}$ *une suite régulière dans* B *d'éléments de* $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{b}$ *l'idéal qu'elle engendre,* $\mathfrak{c}\subset\mathfrak{b}$ *un idéal tel que les images canoniques des* g_j *dans* $B/\mathfrak{c}$ *forment encore une suite régulière dans cet anneau. Alors on a* $\mathfrak{c}=0$.

Le lemme étant trivial pour $q=0$, raisonnons par récurrence sur q. L'hypothèse de récurrence, appliquée à l'anneau B/g_1B et aux images canoniques des g_j $(2\leqslant j\leqslant q)$

et de $\mathfrak{c}$ dans cet anneau quotient, montre que $\mathfrak{c} \subset g_1 B$. Soit $\mathfrak{d}$ l'idéal de B formé des $x \in B$ tels que $g_1 x \in \mathfrak{c}$; on a donc $\mathfrak{c} = g_1 \mathfrak{d}$; mais comme par hypothèse g_1 est régulier dans $B/\mathfrak{c}$, on a nécessairement $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$, donc $\mathfrak{c} = g_1 \mathfrak{c}$. Comme $\mathfrak{c}$ est de type fini et que g_1 est contenu dans le radical de B, le lemme de Nakayama montre que $\mathfrak{c} = 0$.

Démontrons enfin l'assertion (iii) de (19.1.6). En vertu de (i) et de (19.1.2), il suffit de voir que si $\mathfrak{K}$ est régulier, il en est de même de $\mathfrak{K}'$. Notons que $\mathfrak{J}$ est régulier (19.1.2), et raisonnons par récurrence sur le rang q du $(A/\mathfrak{J})$-module libre $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$. Si $q = 0$, on a $\mathfrak{J} = 0$ par le lemme de Nakayama et l'assertion est triviale. Comme A et $A/\mathfrak{J}$ sont réguliers, on sait (**0**, 17.1.9) que $\mathfrak{J}$ est engendré par une partie à q éléments d'un système régulier de paramètres de A, donc, si f est un des éléments de ce système de générateurs de $\mathfrak{J}$, $A_1 = A/fA$ est régulier et $f \notin \mathfrak{m}^2$ (**0**, 17.1.8). Soient $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{K}_1$ les images canoniques de $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$ dans A_1; on a $\mathfrak{J}_1 \subset \mathfrak{K}_1$, $A_1/\mathfrak{J}_1 = A/\mathfrak{J}$, donc $A_1/\mathfrak{J}_1$ est régulier et par suite $\mathfrak{J}_1$ est un idéal régulier (19.1.2). Montrons que $\mathfrak{K}_1$ est un idéal régulier dans A_1; comme $\mathfrak{K}$ est un idéal régulier dans A, il suffit de montrer que f fait partie d'un système régulier de générateurs de $\mathfrak{K}$, et pour cela (16.9.5) il suffit de montrer que l'image de f dans $\mathfrak{K}/(\mathfrak{K}^2 + \mathfrak{m}\mathfrak{K}) = \mathfrak{K}/\mathfrak{m}\mathfrak{K}$ fait partie d'une base de cet $(A/\mathfrak{m})$-espace vectoriel, autrement dit que $f \notin \mathfrak{m}\mathfrak{K}$, ce qui résulte en effet de $f \notin \mathfrak{m}^2$. Alors, comme $\mathfrak{J}_1/\mathfrak{J}_1^2$ est un $(A_1/\mathfrak{J}_1)$-module libre de rang $q-1$, l'hypothèse de récurrence montre que $\mathfrak{K}_1' = \mathfrak{K}_1/\mathfrak{J}_1$ est un idéal régulier de $A_1/\mathfrak{J}_1$, et comme $\mathfrak{K}'$ s'identifie à $\mathfrak{K}_1'$ dans l'isomorphisme canonique entre $A/\mathfrak{J}$ et $A_1/\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{K}'$ est régulier. C.Q.F.D.

Remarques (**19.1.7**). — (i) Nous ignorons si le composé de deux immersions quasi-régulières est quasi-régulière.

(ii) Dans un espace annelé en anneaux locaux X, pour tout Idéal $\mathscr{J}$ de $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_X/\mathscr{J}$ est de type fini et a donc un support fermé dans X ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.2). On peut par suite définir comme dans (**I**, 4.1.3 et 4.2.1) les notions de sous-espace annelé (localement fermé) de X défini par un Idéal $\mathscr{J}$ d'un faisceau $\mathcal{O}_U$, où U est un ouvert de X, et la notion d'immersion. Les définitions d'immersions quasi-régulières et régulières, de codimension transversale s'appliquent alors sans modification, et les résultats de (19.1.4, (i) à (iv)) sont encore valables, en supposant dans la seconde assertion de (i) et dans (iv) que le faisceau $\mathcal{O}_X$ soit cohérent et les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x}$ noethériens; quant à (ii), il faut *définir* Y' comme le sous-espace annelé défini par le $\mathcal{O}_{X'}$-Idéal $g^*(\mathscr{J})$; les démonstrations sont inchangées.

(**19.1.8**) Nous avons déjà signalé (notamment dans (16.9.6, (ii))) que dans les anneaux non noethériens, la notion de « suite régulière » d'éléments de l'anneau ne possède pas les propriétés qui la rendraient utilisable. De récentes recherches semblent montrer que la notion qui doit dans ce cas se substituer à celle de suite régulière est celle de suite $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ ayant la propriété que le complexe de l'algèbre extérieure $K_\bullet(\mathbf{f}, M)$ (**III**, 1.1.3) ait *son homologie nulle en degrés* >0 (cf. (**III**, 1.1.4)); voir en particulier A. Grothendieck, Séminaire de géométrie algébrique, 1966, à paraître prochainement.

19.2. Immersions transversalement régulières.

Définition (**19.2.1**). — *Soient* $u: X \to S$ *un morphisme de préschémas,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent. On dit qu'une suite* $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *de sections de* $\mathscr{F}$ *au-dessus de* X *est* transversalement $\mathscr{F}$-régulière relativement à S (*ou* relativement à u) *si la suite* (f_i) *est* $\mathscr{F}$*-régulière et telle que les* $\mathcal{O}_X$*-Modules* $\mathscr{F}/(\sum_{j \leqslant i} f_j \mathscr{F})$ *soient* S*-plats pour* $0 \leqslant i \leqslant n$. *On dit qu'un Idéal quasi-cohérent* $\mathscr{J}$ *de* $\mathcal{O}_X$ *est* transversalement régulier relativement à S (*ou* relativement à u) en un point $x \in \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathscr{J})$ *s'il existe un voisinage ouvert* U *de* x *et une suite finie* (f_i) *de sections de* $\mathscr{J}$ *au-dessus de* U *qui est transversalement* $\mathcal{O}_U$*-régulière relativement à* S *et qui engendre* $\mathscr{J}|U$.

Dans une A-algèbre B, on dit qu'un idéal $\mathfrak{J}$ est *transversalement régulier* relativement à A si $\mathscr{J} = \widetilde{\mathfrak{J}}$ est transversalement régulier relativement à $S = \operatorname{Spec}(A)$ en tout point de $V(\mathfrak{J})$ dans $\operatorname{Spec}(B)$.

Définition (**19.2.2**). — *Soient* S *un préschéma,* X, Y *deux* S*-préschémas,* $u: Y \to X$ *un* S*-morphisme qui est une immersion. On dit que u est une immersion* transversalement régulière relativement à S *en un point* $y \in Y$ *s'il existe un voisinage* V *de* $u(y)$ *dans* X *tel que le sous-préschéma induit sur* $u(Y) \cap V$ *par le sous-préschéma de* X *associé à u soit défini par un Idéal de* $\mathcal{O}_U$ *transversalement régulier relativement à* S *au point* $u(y)$.

Il est clair que l'ensemble des points de Y où une immersion est transversalement régulière relativement à S est *ouvert* dans Y; s'il est égal à Y, on dit simplement que u est une *immersion transversalement régulière relativement à* S.

Si $S \to T$ est un morphisme *plat*, alors, si $\mathscr{J}$ est un Idéal de $\mathcal{O}_X$ transversalement régulier relativement à S en $x \in X$, il l'est aussi relativement à T ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.2.1). Une S-immersion $Y \to X$ transversalement régulière en un point $y \in Y$ relativement à S est donc aussi une T-immersion transversalement régulière relativement à T en ce point.

Proposition (**19.2.3**). — *Soient* S *un préschéma,* X, Y *deux* S*-préschémas,* $u: Y \to X$ *un* S*-morphisme qui est une immersion transversalement régulière relativement à* S *en un point* $y \in Y$. *Alors, pour tout changement de base* $S' \to S$, *si l'on pose* $X' = X \times_S S'$, $Y' = Y \times_S S'$, *l'immersion* $u' = u_{(S')}: Y' \to X'$ *est transversalement régulière relativement à* S' *en tout point* $y' \in Y'$ *au-dessus de* y.

Cela résulte aussitôt de la définition et de (**0**, 15.1.15).

Proposition (**19.2.4**). — *Soient* S *un préschéma,* X, Y *deux* S*-préschémas,* $u: Y \to X$ *un* S*-morphisme qui est une immersion. On suppose,* soit *que* S *et* X *sont localement noethériens,* soit *que les morphismes structuraux* $g: X \to S$, $h: Y \to S$ *soient localement de présentation finie. Soient* y *un point de* Y, s *son image dans* S. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *u est transversalement régulière relativement à* S *au point* y.

b) *Les morphismes g et h sont plats au voisinage des points* $u(y)$ *et* y *respectivement, et si l'on pose* $X_s = g^{-1}(s)$, $Y_s = h^{-1}(s)$, *l'immersion* $u_s: Y_s \to X_s$ *est régulière au point* y.

b') *Les morphismes g et h sont plats au voisinage des points* $u(y)$ *et* y *respectivement, et, pour tout changement de base* $S' \to S$, *si l'on pose* $X' = X \times_S S'$, $Y' = Y \times_S S'$, *l'immersion* $u' = u_{(S')}: Y' \to X'$ *est régulière en tout point de* Y' *au-dessus de* y.

c) *Le morphisme h est plat au voisinage du point* y, *et l'immersion u est régulière au voisinage du point* y.

c') *Le morphisme h est plat au voisinage du point y, et l'immersion u est quasi-régulière au voisinage du point y.*

On a déjà prouvé dans (19.2.3) que *a)* entraîne *b')* sans hypothèse de finitude, et il est trivial que *b')* entraîne *b)*. Montrons que *b)* entraîne *c)*. On peut pour cela (la question étant locale sur X et sur S) supposer que Y est un sous-préschéma fermé de X défini par un Idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathcal{O}_X$, et u l'injection canonique. L'hypothèse que $\mathcal{O}_X/\mathscr{J}$ est g-plat entraîne que la suite

$$0 \to \mathscr{J}\otimes_{\mathcal{O}_S}\boldsymbol{k}(s) \to \mathcal{O}_X\otimes_{\mathcal{O}_S}\boldsymbol{k}(s) \to (\mathcal{O}_X/\mathscr{J})\otimes_{\mathcal{O}_S}\boldsymbol{k}(s) \to 0$$

est exacte ($\mathbf{0}_I$, 6.1.2), donc Y_s est le sous-préschéma fermé de X_s défini par l'Idéal $\mathscr{J}_s$ de $\mathcal{O}_{X_s}=\mathcal{O}_X\otimes_{\mathcal{O}_S}\boldsymbol{k}(s)$ qui s'identifie à $\mathscr{J}\otimes_{\mathcal{O}_S}\boldsymbol{k}(s)=\mathscr{J}/\mathfrak{m}_s\mathscr{J}$. Considérons une suite finie (f_i) de sections de $\mathscr{J}$ au-dessus d'un voisinage de y dans X, dont les images dans $\mathscr{J}_y/(\mathfrak{m}_s\mathscr{J}_y+\mathscr{J}_y^2)$ forment une base de ce $(\mathcal{O}_{X,y}/(\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_{X,y}+\mathscr{J}_y))$-module (qui est libre en vertu de l'hypothèse *b)*). Puisque X_s est localement noethérien, il résulte de (16.9.11), (16.9.5) et de l'hypothèse *b)* que les images $(f_i)_s=f_i\otimes 1$, sections de $\mathscr{J}_s=\mathscr{J}\otimes_{\mathcal{O}_S}\boldsymbol{k}(s)$ au-dessus d'un voisinage de y dans X_s, forment une suite régulière engendrant la restriction de $\mathscr{J}_s$ à ce voisinage. Comme $\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_{X,y}$ est contenu dans le radical de $\mathcal{O}_{X,y}$, et que dans les deux cas envisagés $\mathscr{J}_y$ est un idéal de type fini de $\mathcal{O}_{X,y}$, il résulte du lemme de Nakayama que les $(f_i)_y$ engendrent aussi $\mathscr{J}_y$; comme $\mathscr{J}$ est un Idéal de type fini de $\mathcal{O}_X$ dans les deux cas envisagés, il y a un voisinage U de y dans X tel que les $f_i|U$ engendrent $\mathscr{J}|U$ ($\mathbf{0}_I$, 5.2.2). Le fait que *b)* entraîne *c)* est alors conséquence de ($\mathbf{0}$, 15.1.16) lorsque S et X sont localement noethériens, et de (11.3.8) lorsque g et h sont localement de présentation finie; dans ce dernier cas, (11.3.8) prouve aussi l'équivalence de *c)* et *c')* (qui est triviale lorsque X et S sont localement noethériens ($\mathbf{0}$, 15.1.11)). Enfin, si *c)* est vérifiée, pour prouver *a)*, on peut encore se borner au cas où Y est un sous-préschéma fermé de X défini par $\mathscr{J}$, et par hypothèse, il y a une suite régulière (f_i) de sections de $\mathscr{J}$ au-dessus d'un voisinage de y dans X telle que les f_i engendrent $\mathscr{J}|U$ et que h soit plat dans U; pour voir que *c)* entraîne *a)*, il suffit encore d'appliquer ($\mathbf{0}$, 15.1.6) lorsque S et X sont localement noethériens, et (11.3.8) lorsque g et h sont localement de présentation finie.

Remarques **(19.2.5)**. — (i) Lorsque dans la condition *b)*, on supprime l'hypothèse que h est plat au voisinage de y, la condition ainsi modifiée n'entraîne plus *a)*. Il suffit de prendre pour S le spectre d'un anneau local qui n'est pas un corps, pour s le point fermé de S, et $Y=X_s$.

(ii) Supposons que Y soit un sous-préschéma fermé de X défini par un Idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathcal{O}_X$. On a prouvé au cours de la démonstration de (19.2.4) que, lorsque les conditions équivalentes de cette proposition sont remplies, alors, pour tout système (f_i) de sections de $\mathscr{J}$ au-dessus d'un voisinage de y dans X, tel que les images des f_i dans $\mathscr{J}_y/(\mathfrak{m}_s\mathscr{J}_y+\mathscr{J}_y^2)$ forment une base de ce $(\mathcal{O}_{X,y}/(\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_{X,y}+\mathscr{J}_y))$-module, il existe un voisinage ouvert U de y dans X tel que les $f_i|U$ vérifient les conditions de la définition (19.2.1).

Corollaire **(19.2.6)**. — *Supposons*, soit *que* S *et* X *soient localement noethériens*, soit *que g et h soient localement de présentation finie. Supposons en outre que les fibres* X_s *et* Y_s *soient des préschémas réguliers aux points* $u(y)$ *et* y *respectivement, et que les morphismes g et h soient plats au voisinage de* $u(y)$ *et* y *respectivement. Alors l'immersion* $Y \to X$ *est transversalement régulière au point* x.

En effet, il résulte de (19.1.1) que l'immersion $Y_s \to X_s$ est régulière au point x, et il suffit d'appliquer (19.2.4, *b)*).

Proposition **(19.2.7)**. — (i) *Toute* S-*immersion ouverte est transversalement régulière relativement à* S.

(ii) *Soient* $f: Y \to X$ *une* S-*immersion,* $g: S' \to S$ *un morphisme et posons* $X' = X_{(S')}$, $Y' = Y_{(S')}$, $f' = f_{(S')}: Y' \to X'$. *Si f est une immersion transversalement régulière relativement à* S, f' *est une immersion transversalement régulière relativement à* S'. *La réciproque est vraie si g est fidèlement plat, et si de plus* X *et* Y *sont localement de présentation finie sur* S.

(iii) *Si* $f: Y \to X$ *et* $g: Z \to Y$ *sont des immersions transversalement régulières relativement à* S, *il en est de même de* $f \circ g: Z \to X$.

(iv) *Soient* X *un* S-*préschéma,* $f: Y \to X$, $g: Z \to Y$ *deux* S-*immersions. On suppose, soit que* S *et* X *soient localement noethériens, soit que* X, Y *et* Z *soient localement de présentation finie sur* S. *Alors, si g et* $f \circ g$ *sont transversalement régulières au point* $z \in Z$ *relativement à* S, *f est transversalement régulière au point* $g(z)$ *relativement à* S.

(v) *Sous les conditions générales de* (iv), *supposons que* X *et* Y *soient* S-*plats,* Y_s *régulier au point* $g(z)$ *et* X_s *régulier au point* $g(z)$; *alors, si* $f \circ g$ *est transversalement régulière au point* z, *il en est de même de g.*

L'assertion (i) est immédiate, et la première assertion de (ii) résulte aussitôt de (19.2.3). Pour démontrer la seconde assertion de (ii), appliquons (19.2.4) : X' et Y' étant localement de présentation finie sur S', il résulte d'abord de ce critère que X' et Y' sont plats sur S', donc X et Y sont plats sur S (2.5.1); d'autre part, pour tout $s \in S$, si $s' \in S'$ est un point au-dessus de s, $Y'_{s'} \to X'_{s'}$ est par hypothèse une immersion régulière, et on déduit donc de (19.1.5, (ii)) qu'il en est de même de $Y_s \to X_s$, puisque ces préschémas sont localement noethériens et qu'il revient alors au même de dire que l'immersion $Y_s \to X_s$ est régulière ou quasi-régulière. Pour prouver (iii), on se ramène au cas où Z est un sous-préschéma fermé de Y et Y un sous-préschéma fermé de X, et on forme comme dans (19.1.5, (iii)) un système de générateurs de l'Idéal de $\mathcal{O}_X$ définissant Z. Pour prouver (iv), on remarque que l'hypothèse jointe à (19.2.4) montre d'abord que X, Y et Z sont S-plats dans un voisinage de z, et il suffit en outre, si s est l'image de z dans S, de prouver que l'immersion $f_s: Y_s \to X_s$ est régulière au point z, sachant qu'il en est de même de $g_s: Z_s \to Y_s$ et de $f_s \circ g_s$; mais cela résulte de (19.1.5, (iv)). Enfin, pour (v), on raisonne de la même manière que pour (iv); l'hypothèse sur $f \circ g$ implique déjà par (19.2.4, *b)*) que Z est S-plat dans un voisinage de z, et il en est de même de X et Y par hypothèse; on est alors ramené à prouver que g_s est régulière au point z, sachant qu'il en est de même de $f_s \circ g_s$, ce qui découle de (19.1.5, (v)), vu les hypothèses faites sur X_s et Y_s.

Proposition (**19.2.8**). — *Soient* X *un* S-*préschéma*, Y *un sous-préschéma fermé de* X *défini par un Idéal quasi-cohérent* $\mathscr{J}$ *de* $\mathcal{O}_X$, $u : Y \to X$ *l'injection canonique. Si u est transversalement régulière relativement à* S, *les* $\mathcal{O}_X$-*Modules* $\mathscr{J}^n$ *et* $\mathscr{J}^n/\mathscr{J}^m$ $(0 \leqslant n < m)$ *sont* S-*plats aux points de* Y. *Pour tout changement de base* $S' \to S$, *si* $X' = X_{(S')}$, $Y' = Y_{(S')}$ *et* $u' = u_{(S')}$, *on a* $\mathscr{G}r_n(u') = \mathscr{G}r_n(u) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ *à isomorphisme près pour tout* $n > 0$.

En effet, $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_X/\mathscr{J}$ sont par hypothèse S-plats aux points de Y, et $\mathscr{J}^n/\mathscr{J}^{n+1}$ est un $(\mathcal{O}_X/\mathscr{J})$-module localement libre (16.9.3), donc est S-plat aux points de Y. La première assertion résulte alors de ($\mathbf{0}_I$, 6.1.2) et la seconde de (11.2.9.2).

La proposition suivante généralise et précise (17.16.1) :

Proposition (**19.2.9**). — *Soient* $f : X \to S$ *un morphisme, x un point de* X, $s = f(x)$. *Supposons que f soit de présentation finie au point x, et soit un morphisme de Cohen-Macaulay au point x* (6.8.1). *Alors il existe un sous-préschéma* Y *de* X *contenant x et ayant les propriétés suivantes :*

(i) *L'injection canonique* $j : Y \to X$ *est transversalement régulière relativement à* S.

(ii) *Le morphisme* $g = f \circ j : Y \to S$ *est de Cohen-Macaulay* (ce qui équivaut à dire, compte tenu de (i), que toutes les fibres $g^{-1}(g(y))$ de g sont des préschémas de Cohen-Macaulay).

(iii) *Le point x est point maximal de* $Y_s = g^{-1}(s)$.

Posons $X_s = f^{-1}(s)$; par hypothèse, l'anneau $\mathcal{O}_{X_s,x}$ est de Cohen-Macaulay; soit $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système de paramètres de cet anneau, qui est donc une suite régulière (**0**, 16.5.7). Il y a un voisinage ouvert U de x dans X et des sections h_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de U telles que les t_i soient les images canoniques des $(h_i)_x$ dans l'anneau quotient $\mathcal{O}_{X_s,x}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$. Soit $\mathscr{J}$ l'Idéal de $\mathcal{O}_U$ engendré par les h_i, et prenons pour Y le sous-préschéma fermé de U défini par $\mathscr{J}$. On peut supposer que $f|U$ est localement de présentation finie, et il en est donc de même de g par définition de Y; il résulte alors de l'équivalence de *c)* et *a)* dans (11.3.8) que la suite $((h_i)_x)$ est régulière dans $\mathcal{O}_{X,x}$ et que $\mathcal{O}_{Y,x}$ est plat sur $\mathcal{O}_{S,s}$; en vertu de (11.3.1) f et g sont donc plats dans un voisinage de x et il résulte de (19.2.4) que j est une immersion transversalement régulière relativement à S (en remplaçant au besoin Y par $Y \cap V$ pour un voisinage ouvert V de x dans X). On a ainsi prouvé (i) et on voit qu'on peut supposer que $g : Y \to S$ est un morphisme *plat*. Comme $\mathcal{O}_{Y_s,x}$, quotient de $\mathcal{O}_{X_s,x}$ par l'idéal engendré par les t_i, est artinien par construction (**0**, 16.3.6), x est point maximal de Y_s. Enfin, l'anneau $\mathcal{O}_{Y_s,x}$, étant artinien, est un anneau de Cohen-Macaulay (**0**, 16.5.1), donc, en remplaçant au besoin Y par son intersection avec un voisinage ouvert de x dans X, on peut supposer que g est un morphisme de Cohen-Macaulay, en vertu de (12.1.7, (iii)).

En particulier, on retrouve l'existence des « quasi-sections » *plates* Y d'un morphisme $f : X \to S$ en un point $x \in X_s$ qui est *fermé* dans X_s et tel que f soit plat au point x et que $\mathcal{O}_{X_s,x}$ soit un anneau de Cohen-Macaulay (17.16.1) et on voit en outre que l'immersion $Y \to X$ est *transversalement régulière* relativement à S. Ce dernier complément est aussi valable pour la quasi-section étale définie dans (17.16.3, (i)).

19.3. Intersections complètes relatives (cas plat).

Définition **(19.3.1).** — *Soit* A *un anneau local noethérien. On dit que* A *est un* anneau d'intersection complète *(ou encore, anneau d'intersection complète* absolue, *s'il y a danger de confusion) si le complété* $\hat{A}$ *est isomorphe au quotient d'un anneau local noethérien complet* régulier B *par un idéal* régulier (i.e. (16.9.7) *un idéal engendré par une suite régulière d'éléments de* B).

Tout anneau local régulier est un anneau d'intersection complète.

On dit qu'un préschéma localement noethérien X est *intersection complète* (absolue) *au point* $x \in X$ si l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau d'intersection complète.

Proposition **(19.3.2).** — *Soient* B *un anneau local noethérien régulier,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* B. *Pour que* $A = B/\mathfrak{J}$ *soit un anneau d'intersection complète, il faut et il suffit que l'idéal* $\mathfrak{J}$ *soit régulier* (i.e. (16.9.7) *engendré par une suite régulière d'éléments de* B).

On peut écrire $\hat{A} = \hat{B}/\mathfrak{J}\hat{B}$ et puisque $\hat{B}$ est un B-module fidèlement plat et B noethérien, $\mathfrak{J}\hat{B}$ est régulier si et seulement si $\mathfrak{J}$ l'est (19.1.5, (ii)). Ceci montre (en vertu de (**0**, 17.1.5)) d'une part que la condition de l'énoncé est suffisante, et d'autre part que pour prouver qu'elle est nécessaire, on peut se borner au cas où A et B sont *complets*. Par hypothèse, il existe alors un anneau local noethérien complet *régulier* B' tel que A soit isomorphe à un quotient $B'/\mathfrak{J}'$, où $\mathfrak{J}'$ est un idéal *régulier* de B'. Considérons alors le *produit fibré* $B \times_A B' = B''$ pour les homomorphismes surjectifs $B \to A$, $B' \to A$ (**0**, 18.1.2); nous prouverons d'abord le lemme suivant :

Lemme **(19.3.2.1).** — *Soient* A, E, F *trois anneaux,* $f : E \to A$, $g : F \to A$ *deux homomorphismes, et posons* $G = E \times_A F$ (**0**, 18.1.2).

(i) *Si f est surjectif et si* E *et* F *sont des anneaux noethériens, il en est de même de* G.

(ii) *Si* A, E *et* F *sont des anneaux locaux et si f et g sont des homomorphismes locaux,* G *est un anneau local et les homomorphismes canoniques* $G \to E$, $G \to F$ *sont locaux.*

(iii) *Si les conditions de* (i) *et* (ii) *sont vérifiées, si g est surjectif, et si* E *et* F *sont des anneaux locaux noethériens complets, il en est de même de* G.

(i) Compte tenu de (**0**, 18.1.3 et 18.1.5), G est un A-anneau augmenté sur F, dont l'idéal d'augmentation $\mathfrak{J}'$ s'identifie canoniquement au noyau $\mathfrak{J}$ de f, la structure de G-module sur $\mathfrak{J}'$ s'identifiant à celle de E-module sur $\mathfrak{J}$ au moyen de l'homomorphisme canonique $G \to E$. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal quelconque de G, $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{J}')$ est isomorphe à $(\mathfrak{a} + \mathfrak{J}')/\mathfrak{J}'$, donc à un idéal de F, et par suite est de type fini; d'autre part, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{J}'$ est isomorphe à un idéal de E contenu dans $\mathfrak{J}$, donc est aussi de type fini, ce qui prouve que $\mathfrak{a}$ est de type fini, donc G est noethérien.

(ii) Soient $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ les idéaux maximaux de E et F respectivement; l'ensemble $\mathfrak{m} = \mathfrak{r} \times_A \mathfrak{s}$ est évidemment un idéal de G, image réciproque de $\mathfrak{r}$ par la projection $G \to E$ et de $\mathfrak{s}$ par la projection $G \to F$. On en déduit aussitôt que les éléments de $\mathfrak{m}$ sont non inversibles dans G. D'autre part, si $(x, y) \notin \mathfrak{m}$, et si par exemple $x \notin \mathfrak{r}$, $f(x)$ n'appartient pas à l'idéal maximal de A, donc, puisque $g(y) = f(x)$, et que g est local, on a aussi $y \notin \mathfrak{s}$; on en conclut que x et y sont inversibles, donc il en est de même de (x, y), ce qui achève de prouver (ii).

(iii) L'image de $\mathfrak{m}$ par l'homomorphisme surjectif $G \to E$ est l'idéal maximal $\mathfrak{r}$ de E, donc l'image de $\mathfrak{m}^n \cap \mathfrak{J}'$ est $\mathfrak{r}^n \cap \mathfrak{J}$, et comme $\mathfrak{J}$ est fermé (donc complet) pour la topologie induite par la topologie $\mathfrak{r}$-adique de E ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.5), $\mathfrak{J}'$ est complet pour la topologie induite par la topologie $\mathfrak{m}$-préadique de G. D'autre part, $G/\mathfrak{J}'$, muni de la topologie $\mathfrak{m}$-préadique, est isomorphe à F muni de la topologie $\mathfrak{s}$-adique, donc est complet pour la topologie quotient de la topologie $\mathfrak{m}$-préadique de G. On en déduit aussitôt que G est complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-préadique.

Ce lemme étant établi, il résulte du théorème de Cohen (**0**, 19.8.8) que B'' est isomorphe à un quotient d'un anneau local noethérien complet *régulier* C. Il résulte alors de (19.1.2) que l'immersion $\mathrm{Spec}(B') \to \mathrm{Spec}(C)$ est régulière; comme par hypothèse il en est de même de l'immersion $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B')$, on conclut de (19.1.5, (iii)) que l'immersion $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(C)$ est régulière; mais cette immersion s'écrit aussi comme composée $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(C)$. Or comme B est régulier par hypothèse, l'immersion $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(C)$ est régulière (19.1.2); donc il en est de même de $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B)$ par (19.1.5, (iv)).

Corollaire (**19.3.3**). — *Soit* X *un préschéma localement noethérien localement immersible dans un préschéma régulier. Alors l'ensemble des* $x \in X$ *où* X *est une intersection complète est ouvert dans* X *et contient l'ensemble des points réguliers de* X.

On peut en effet se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(B/\mathfrak{J})$, où B est un anneau régulier et $\mathfrak{J}$ un idéal de B. L'ensemble des $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{J}$ dans Spec(B) tels que $\mathfrak{J}_{\mathfrak{p}}$ soit régulier dans $B_{\mathfrak{p}}$ est alors ouvert (16.9.5), et c'est l'ensemble des points de Spec(B) où X est une intersection complète en vertu de (19.3.2).

Corollaire (**19.3.4**). — *Soient k un corps,* X *un préschéma localement de type fini sur k, k' une extension de k,* $X' = X \otimes_k k'$. *Soient x' un point de* X', *x sa projection dans* X. *Pour que* X *soit intersection complète en x, il faut et il suffit que* X' *soit intersection complète en x'.*

La question étant locale sur X, on peut supposer que $X = \mathrm{Spec}(A)$, où A est une k-algèbre de type fini, donc quotient d'une algèbre de polynômes $k[T_1, \ldots, T_n]$, si bien que X est sous-préschéma fermé du schéma régulier $Y = \mathrm{Spec}(k[T_1, \ldots, T_n])$ (**0**, 17.3.7). Si l'on pose $Y' = Y \otimes_k k' = \mathrm{Spec}(k'[T_1, \ldots, T_n])$, Y' est aussi un schéma régulier. Or, puisque $\mathrm{Spec}(k')$ est fidèlement plat sur $\mathrm{Spec}(k)$, il résulte de (19.1.5, (ii)) et du fait qu'il s'agit de préschémas noethériens que l'immersion $Y \to X$ est régulière au point x si et seulement si l'immersion $Y' \to X'$ l'est au point x'. La conclusion résulte donc du critère (19.3.2).

Corollaire (**19.3.5**). — *Soient* A, C *deux anneaux locaux noethériens,* $\rho : A \to C$ *un homomorphisme local,* $B = C/\mathfrak{J}$ *un anneau quotient de* C, *k le corps résiduel de* A. *On suppose que* ρ *fait de* C *un* A*-module plat, et que l'anneau* $C \otimes_A k$ *est régulier. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *L'idéal* $\mathfrak{J}$ *est transversalement régulier relativement à* A.

b) B *est un* A*-module plat, et* $B \otimes_A k$ *est un anneau d'intersection complète.*

En vertu de (19.2.4), la condition *a)* équivaut à dire que B est un A-module plat et que $\mathfrak{J}\otimes_A k$ (qui s'identifie à un idéal de $C\otimes_A k$ en vertu de la platitude de B sur A $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 6.1.2)$) est régulier dans cet anneau. Comme l'anneau $C\otimes_A k$ est régulier, il revient au même, en vertu de (19.3.2), de dire (lorsque B est un A-module plat) que $\mathfrak{J}\otimes_A k$ est un idéal régulier de $C\otimes_A k$, ou que $B\otimes_A k=(C\otimes_A k)/(\mathfrak{J}\otimes_A k)$ est un anneau d'intersection complète; d'où le corollaire.

Définition **(19.3.6)**. — *Soit* $f: X\rightarrow S$ *un morphisme* plat *localement de présentation finie. On dit que* X *est une* intersection complète relativement à S *en un point* x, *si la fibre* $f^{-1}(f(x))$ *est une intersection complète (absolue) au point* x. *On dit que* X *est une intersection complète relativement à* S, *ou que le morphisme* f *est un morphisme d'intersection complète, si* X *est intersection complète relativement à* S *en chacun de ses points.*

Proposition **(19.3.7)**. — *Soient* $g: X\rightarrow S$, $h: Y\rightarrow S$ *deux morphismes plats localement de présentation finie,* $f: Y\rightarrow X$ *une* S-*immersion,* y *un point de* Y, $x=f(y)$, $s=g(x)=h(y)$. *On suppose que la fibre* $X_s=g^{-1}(s)$ *soit régulière au point* x. *Alors, pour que* f *soit une immersion transversalement régulière au point* y, *il faut et il suffit que* Y *soit une intersection complète relativement à* S *au point* y.

Dire que f est transversalement régulière au point y revient, en vertu de (19.2.4), à dire que $f_s: Y_s\rightarrow X_s$ est une immersion régulière au point y. Mais comme X_s est régulier au point $x=f(y)$, cela équivaut, en vertu de (19.3.2), à dire que Y_s est intersection complète (absolue) au point y, d'où la proposition.

Corollaire **(19.3.8)**. — *Soit* $f: X\rightarrow S$ *un morphisme plat localement de présentation finie. L'ensemble* U *des* $x\in X$ *en lesquels* X *est une intersection complète relativement à* S *est ouvert dans* X. *Si de plus* f *est propre, l'ensemble* E *des* $s\in S$ *tels que* $X_s=f^{-1}(s)$ *soit intersection complète en chacun de ses points est une partie ouverte de* S.

Comme $E=Y-f(X-U)$, la seconde assertion résulte de la première et du fait que f est une application fermée. La première assertion est locale sur X, donc on peut supposer que X est un sous-préschéma fermé d'un préschéma de la forme $Z=S[T_1, \ldots, T_n]$ (T_i indéterminées). Ce dernier étant lisse sur S (17.3.8), ses fibres Z_s sont régulières, et il revient donc au même, en vertu de (19.3.7), de dire que $x\in U$ ou que l'immersion $X\rightarrow Z$ est transversalement régulière au point x; on en conclut donc le corollaire par (19.2.2).

Proposition **(19.3.9)**. — (i) *Toute immersion ouverte est un morphisme d'intersection complète.*

(ii) *Soit* $f: X\rightarrow S$ *un morphisme plat et localement de présentation finie qui est un morphisme d'intersection complète. Pour tout changement de base* $g: S'\rightarrow S$, $f'=f_{(S')}: X_{(S')}\rightarrow S'$ *est un morphisme d'intersection complète. La réciproque est vraie si* g *est fidèlement plat et quasi-compact.*

(iii) *Si* $f: X\rightarrow Y$ *et* $g: Y\rightarrow Z$ *sont deux morphismes plats localement de présentation finie qui sont des morphismes d'intersection complète, il en est de même de* $g\circ f: X\rightarrow Z$.

L'assertion (i) découle aussitôt de la définition (19.3.1). Pour prouver (ii), remarquons d'abord que si f est plat et localement de présentation finie, il en est de même de f' (2.1.4), la réciproque étant vraie si g est fidèlement plat ((2.5.1) et (2.7.1)); en outre pour tout $s' \in S'$, si $s=g(s')$, il est équivalent de dire que $f^{-1}(s)$ est une intersection complète ou que $f'^{-1}(s')$ est une intersection complète (19.3.4); d'où (ii), compte tenu de ce que g est surjectif lorsqu'il est fidèlement plat.

Enfin, sous les hypothèses de (iii), $g \circ f$ est plat et localement de présentation finie. Par définition (19.3.6), on est donc ramené au cas où Z est le spectre d'un corps, et à prouver alors que les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x}$ sont des anneaux d'intersection complète, ce qui est contenu dans le résultat plus général suivant :

Corollaire **(19.3.10).** — *Soient* $f: X \rightarrow S$ *un morphisme plat localement de présentation finie qui soit un morphisme d'intersection complète,* x *un point de* X, $s=f(x)$. *Si* $\mathcal{O}_{S,s}$ *est un anneau noethérien d'intersection complète, il en est de même de* $\mathcal{O}_{X,x}$.

On peut évidemment se borner au cas où $S = \operatorname{Spec}(A)$ avec $A = \mathcal{O}_{S,s}$. Montrons en outre qu'on peut se borner au cas où l'anneau local A est *complet*. En effet, posons $A' = \hat{A}$, $X' = X \otimes_A A'$, et soit s' l'unique point fermé de $S' = \operatorname{Spec}(A')$, qui est l'unique point de S' au-dessus de s; si $f' = f_{(S')}: X' \rightarrow S'$, la fibre $f'^{-1}(s')$ est isomorphe canoniquement à $f^{-1}(s)$, puisque A et A' ont même corps résiduel (**I**, 3.6.4); il y a donc un seul point $x' \in X'$ au-dessus de x et de s', et on a par suite $\mathcal{O}_{X',x'} = \mathcal{O}_{X,x} \otimes_A A'$. On en déduit que les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x}$ et $\mathcal{O}_{X',x'}$ ont des *complétés isomorphes*, car de façon générale, si E est un anneau local qui est une A-algèbre (l'homomorphisme $A \rightarrow E$ étant local), le séparé complété $(E \otimes_A \hat{A})\hat{}$ de l'anneau $E \otimes_A \hat{A}$ muni de la topologie produit tensoriel est isomorphe au séparé complété de $\hat{E} \otimes_{\hat{A}} \hat{A} \cong \hat{E}$, donc au séparé complété $\hat{E}$ de E ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.7.1). En vertu de la définition (19.3.1), il revient donc au même de dire que $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau d'intersection complète, ou que $\mathcal{O}_{X',x'}$ est un anneau d'intersection complète.

Supposons donc A *complet*; on peut en outre supposer que $X = \operatorname{Spec}(B)$, B étant quotient d'une algèbre de polynômes $C = A[T_1, \ldots, T_r]$. Comme les anneaux de polynômes sur un corps sont des anneaux réguliers (**0**, 17.3.7), il résulte de (19.3.7) que l'immersion $X \rightarrow Z = \operatorname{Spec}(C)$ peut être supposée transversalement régulière relativement à S; donc on peut supposer que $B = C/\mathfrak{J}$, où $\mathfrak{J}$ est engendré par une suite régulière $(g_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments de C. D'autre part, puisque A est complet, on peut par hypothèse l'écrire $A'/\mathfrak{K}$, où A' est un anneau local régulier et $\mathfrak{K}$ un idéal de A' (**0**, 19.8.8), et l'hypothèse que A est un anneau d'intersection complète entraîne que $\mathfrak{K}$ est engendré par une suite régulière $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ (19.3.2). Dans l'anneau de polynômes $C' = A'[T_1, \ldots, T_r]$, les éléments f_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ forment encore une suite régulière engendrant l'idéal $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}[T_1, \ldots, T_r]$ (**0**, 15.1.4); comme $C'/\mathfrak{K}' = C$, on voit que si, pour chaque i, g'_i est un élément de C' d'image g_i dans C, la suite formée des f_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ et des g'_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est régulière dans C'; si $\mathfrak{J}'$ est l'idéal de C' qu'elle engendre, on a $B = C'/\mathfrak{J}'$, d'où la conclusion en vertu de (19.3.2), puisque C' est un anneau régulier (**0**, 17.3.7).

19.4. Application : critères de régularité et de lissité pour les préschémas éclatés.

(19.4.1) Soient X un préschéma, Y un sous-préschéma fermé de X, défini par un Idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathcal{O}_X$. Rappelons (**II**, 8.1.3) que le X-schéma X′ obtenu en faisant éclater Y est le préschéma

$$X' = \mathrm{Proj}(\mathscr{S}), \quad \text{où} \quad \mathscr{S} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathscr{J}^n.$$

Si $\mathscr{J}$ est de type fini, le morphisme structural $f: X' \to X$ est projectif. Sans hypothèse sur $\mathscr{J}$, le sous-préschéma fermé

$$Y' = f^{-1}(Y)$$

de X′ est défini par l'Idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}\mathcal{O}_{X'}$ de $\mathcal{O}_{X'}$, canoniquement isomorphe à $\mathcal{O}_{X'}(1)$; de façon plus précise, on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{X'}(1) \xrightarrow{\widetilde{u}_0} \mathcal{O}_{X'} \to \mathcal{O}_{Y'} \to 0 \tag{19.4.1.1}$$

où $\mathscr{J}\mathcal{O}_{X'}$ est l'image de $\widetilde{u}_0$ (**II**, 8.1.7 et 8.1.8). Comme au voisinage d'un point de X′, le $\mathcal{O}_{X'}$-Module $\mathcal{O}_{X'}(1)$ est libre de rang 1, $\mathscr{J}\mathcal{O}_{X'}$ est engendré dans un tel voisinage par une section inversible de $\mathcal{O}_{X'}$ et $\mathscr{J}\mathcal{O}_{X'}/\mathscr{J}^2\mathcal{O}_{X'}$ est par suite un $\mathcal{O}_{X'}/\mathscr{J}\mathcal{O}_{X'}$-Module libre de rang 1. Ceci prouve la première assertion du lemme suivant :

Lemme **(19.4.2)**. — *L'immersion canonique* $Y' \to X'$ *est régulière et de codimension* 1, *et* Y′ *est canoniquement isomorphe au* Y*-schéma* $\mathrm{Proj}(\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{J}}(\mathcal{O}_X))$.

La seconde assertion résulte de (**II**, 3.5.3) appliqué à l'injection canonique $Y \to X$, compte tenu de ce que $\mathscr{S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y = \mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{J}}(\mathcal{O}_X)$ par définition, puisque $\mathcal{O}_Y$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X/\mathscr{J}$ et $\mathscr{J}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X/\mathscr{J})$ à $\mathscr{J}^n/\mathscr{J}^{n+1}$.

Corollaire **(19.4.3)**. — *Si l'immersion canonique* $Y \to X$ *est quasi-régulière, la restriction* $g: Y' \to Y$ *du morphisme* f *est lisse.*

En effet, $\mathscr{N}_{Y/X} = \mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ est alors un $\mathcal{O}_Y$-Module localement libre de rang fini et $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{J}}(\mathcal{O}_X)$ est isomorphe à $\mathbf{S}^{\bullet}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{N}_{Y/X})$ (16.9.8), donc Y′ est Y-isomorphe à $\mathbf{P}(\mathscr{N}_{Y/X})$ et par suite est lisse sur Y (17.3.9).

Nous verrons plus tard (chap. V) que g est encore lisse lorsque l'immersion $Y \to X$ « ne présente que des singularités ordinaires ».

Proposition **(19.4.4)**. — *Avec les notations de* (19.4.1), *supposons que* X *soit localement noethérien et que le morphisme* $g: Y' \to Y$, *restriction de* f, *soit lisse. Soient* x' *un point de* Y′, $x = g(x')$. *Pour que* Y *soit régulier au point* x, *il faut et il suffit que* Y′ *soit régulier au point* x' ; *lorsqu'il en est ainsi,* X′ *est alors régulier au point* x'.

La première assertion résulte de (17.5.8) et la seconde de (19.1.1) et (19.4.2).

Corollaire **(19.4.5)**. — *Sous les hypothèses générales de* (19.4.4), *supposons que* Y *soit régulier au point* x. *Alors, pour toute générisation* x_1 *de* x *dans* X *n'appartenant pas à* Y, X *est régulier au point* x_1. *Si* Reg(X) *est ouvert* ((6.12), par exemple si X est *excellent* (7 8.6, (iii))) *et si* Y *est régulier, alors il existe un voisinage ouvert* U *de* Y *dans* X *tel que* X *soit régulier aux points de* $U-Y$.

Pour prouver la première assertion, on peut se borner au cas où X est un schéma local de point fermé x; l'hypothèse entraîne alors que Y est régulier (**0**, 17.3.2), donc il en est de même de Y′ par (19.4.4). Notons maintenant que le morphisme $f: X' \rightarrow X$ est projectif, donc propre, et par suite (**II**, 7.2.1), si l'on considère l'unique point x_1' de X′ au-dessus de x_1 (**II**, 8.1.3), il existe une spécialisation de x_1' appartenant à Y′; en lui appliquant (19.4.4) et utilisant (**0**, 17.3.2) on en conclut que X′ est régulier au point x_1', donc X régulier au point x_1 puisque $X'-Y'$ est isomorphe à $X-Y$ (**II**, 8.1.3). Si Y est régulier, tout point de $X-Y$ qui est générisation d'un point de Y appartient donc à Reg(X); si Reg(X) est ouvert, $U = Y \cup \mathrm{Reg}(X)$ est donc localement constructible et stable par générisation, donc ouvert ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 9.2.5) et répond à la question.

Proposition (**19.4.6**). — *Soient* $g: X \rightarrow S$ *un morphisme,* Y *un sous-préschéma fermé de* X *défini par un Idéal quasi-cohérent* $\mathscr{J}$, X′ *le* X*-schéma obtenu en faisant éclater* Y, Y′ *l'image réciproque de* Y *dans* X′.

(i) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{J}}(\mathcal{O}_X)$ *est une* $\mathcal{O}_X$*-Algèbre g-plate.*

b) *Pour tout* $n \geqslant 0$, *le* $\mathcal{O}_X$*-Module* $\mathcal{O}_X/\mathscr{J}^{n+1}$ *est g-plat* (en d'autres termes, le *n-ème voisinage infinitésimal* $Y^{(n)}$ de Y dans X (16.1.2) est S-*plat*).

c) *Pour tout changement de base* $S_1 \rightarrow S$ *et tout entier* $n \geqslant 1$, *si l'on pose* $X_1 = X \times_S S_1$, *l'homomorphisme canonique* $\mathscr{J}^n \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_1} \rightarrow \mathscr{J}^n \mathcal{O}_{X_1}$ *est bijectif.*

Lorsqu'il en est ainsi, Y′ *est* S*-plat, et pour tout changement de base* $S_1 \rightarrow S$, *si* Y_1 *est l'image réciproque de* Y *dans* X_1, *le préschéma* X_1' *obtenu en faisant éclater* Y_1 *dans* X_1 *est canoniquement isomorphe à* $X' \times_S S_1$.

(ii) *Supposons que les conditions équivalentes de* (i) *soient satisfaites et de plus que les morphismes* $X \rightarrow S$ *et* $Y \rightarrow S$ *soient localement de présentation finie. Alors* $\mathscr{S} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathscr{J}^n$ *est une* $\mathcal{O}_X$*-Algèbre de présentation finie, le morphisme* $X' \rightarrow X$ *est de présentation finie, l'immersion canonique* $Y' \rightarrow X'$ *est transversalement régulière de codimension* 1 *relativement à* S, *et l'ensemble des points de* X (resp. X′) *où* X (resp. X′) *est* S*-plat, est un voisinage de* Y (resp. Y′).

(i) L'équivalence de *a)* et *b)* résulte aussitôt de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.1.2); pour montrer l'équivalence de *b)* et *c)*, on peut se borner au cas où $S = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(B)$ sont affines, avec $\mathscr{J} = \widetilde{\mathfrak{J}}$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal de B; la suite exacte des Tor montre alors que la condition *c)* implique que $\mathrm{Tor}_1^A(B/\mathfrak{J}^{n+1}, A') = 0$ pour tout entier $n \geqslant 0$ et toute A-algèbre A′; en prenant pour A′ une algèbre somme directe $A \oplus M$, où M est un A-module quelconque et où la multiplication est définie par $(a, m)(a', m') = (aa', am' + a'm)$ on voit que la condition précédente équivaut à $\mathrm{Tor}_1^A(B/\mathfrak{J}^{n+1}, M) = 0$, donc au fait que $B/\mathfrak{J}^{n+1}$ est un A-module plat. Si l'on pose $\mathscr{J}_1 = \mathscr{J} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_1}$, on a alors $\bigoplus_{n \geqslant 0} \mathscr{J}_1^n = (\bigoplus_{n \geqslant 0} \mathscr{J}^n) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_1}$ et l'assertion relative au préschéma éclaté X_1' s'en déduit aussitôt. Enfin, pour prouver que Y′ est S-plat, on peut encore se borner au cas où S et X sont affines; si l'on pose $C = \mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{J}}(B)$, tout point de Y′ admet alors, en vertu de (19.4.2) et de (**II**, 2.3.6), un voisinage ouvert affine dont l'anneau est de la forme $C_{(t)}$, où t est un élément homogène de degré 1 de C; comme par hypothèse C est un A-module plat, il en est de même de son anneau de fractions C_t et de la composante de degré 0, $C_{(t)}$, de ce A-module gradué, d'où notre assertion.

(ii) On peut toujours se borner au cas où S et X sont affines, B étant donc une A-algèbre de présentation finie, $\mathfrak{J}$ un idéal de type fini de B. En vertu de (8.9.1), (8.6.3) et (11.2.9), il existe un sous-anneau noethérien A_0 de A, une A_0-algèbre de type fini B_0, un idéal $\mathfrak{J}_0$ de B_0 tels que $B = B_0 \otimes_{A_0} A$, $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 B$, que $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{J}_0}(B_0)$ soit un A_0-module *plat* et que $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{J}}(B) = \mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{J}_0}(B_0) \otimes_{A_0} A$. En vertu de (i), on a alors $\bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{J}^n = (\bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{J}_0^n) \otimes_{A_0} A = (\bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{J}_0^n) \otimes_{B_0} B$; comme $\bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{J}_0^n$ est une B_0-algèbre engendrée par l'idéal de type fini $\mathfrak{J}_0$ de B_0, donc une B_0-algèbre de type fini, et par suite de présentation finie puisque B_0 est noethérien, on en déduit que $\bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{J}^n$ est une B-algèbre de présentation finie. De même, le morphisme $\mathrm{Proj}(\bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{J}^n) \to \mathrm{Spec}(B_0)$ est de type fini (**II**, 2.7.1), et par suite de présentation finie; donc le morphisme $X' \to X$, qui s'en déduit par changement de base, est de présentation finie. On sait déjà (19.4.2) que l'immersion canonique $Y' \to X'$ est régulière; comme Y' est S-plat, ainsi qu'on l'a vu dans (i), on déduit de (19.2.4) que l'immersion $Y' \to X'$ est transversalement régulière relativement à S et que X' est S-plat aux points de Y', donc (11.3.1) dans un voisinage ouvert de Y'. D'autre part, le fait que $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{J}}(\mathcal{O}_X)$ est une $\mathcal{O}_X$-Algèbre S-plate entraîne, par (11.3.4), que X est S-plat aux points de Y, donc (11.3.1) dans un voisinage de Y.

Corollaire **(19.4.7).** — *Soient* $g : X \to S$ *un morphisme localement de présentation finie,* Y *un sous-préschéma fermé de* X *tel que le morphisme composé* $Y \to X \to S$ *soit localement de présentation finie ; supposons en outre que* Y *soit* S-*plat et que* $\mathcal{O}_X$ *soit normalement plat le long de* Y (11.3.4). *Alors* (avec les notations de (19.4.1)), *le morphisme* $X' \to X$ *est de présentation finie, l'immersion canonique* $Y' \to X'$ *est transversalement régulière de codimension* 1 *relativement à* S, Y' *est* Y-*plat (donc* S-*plat) et l'ensemble des points de* X (resp. X') *où* X (resp. X') *est* S-*plat est un voisinage de* Y (resp. Y').

En effet, par hypothèse $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{J}}(\mathcal{O}_X)$ est un $(\mathcal{O}_X/\mathscr{J})$-Module plat, donc est S-plat puisque Y est supposé être S-plat. On peut par suite appliquer les résultats de (19.4.6, (i) et (ii)). Comme Y' est Y-isomorphe à $\mathrm{Proj}(\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{J}}(\mathcal{O}_X))$ (19.4.2), le même raisonnement que dans (19.4.6) montre que Y' est Y-*plat.*

Proposition **(19.4.8).** — *Supposons vérifiées les hypothèses de* (19.4.7) *et en outre que le morphisme* $Y' \to Y$ *soit lisse. Soient* x' *un point de* Y', x *son image dans* Y. *Pour que* Y *soit lisse sur* S *au point* x, *il faut et il suffit que* Y' *soit lisse sur* S *au point* x' *; lorsqu'il en est ainsi,* X' *est alors lisse sur* S *au point* x'.

Les conclusions précédentes sont en particulier vérifiées lorsque le morphisme $X \to S$ *est localement de présentation finie et que l'immersion* $Y \to X$ *est transversalement régulière relativement à* S.

Compte tenu de la compatibilité de la formation d'un préschéma éclaté avec les changements de base dans le cas envisagé (19.4.6, (i)) et de (17.5.1) et (17.7.1), il suffit de considérer le cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Mais alors il revient au même de dire qu'un S-préschéma localement de type fini est lisse sur S en un point ou qu'il est régulier en ce point (17.15.1), donc les conclusions résultent de (19.4.4).

Lorsque $X \to S$ est localement de présentation finie, et que l'immersion canonique $Y \to X$ est quasi-régulière, cette immersion est par définition de présentation finie puisque l'Idéal qui définit Y est de type fini, donc le morphisme composé $Y \to X \to S$ est localement de présentation finie. On a déjà vu (19.4.3) que dans ces conditions le morphisme $Y' \to Y$ est lisse; en outre, on sait alors que $\mathscr{N}_{Y/X}$ est un $\mathscr{O}_Y$-Module localement libre et que $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{J}}(\mathscr{O}_X)$ est isomorphe à $\mathbf{S}^{\bullet}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{N}_{Y/X})$, donc est un $\mathscr{O}_Y$-Module plat. Les hypothèses de (19.4.7) sont donc toutes vérifiées et l'on peut appliquer les conclusions de l'énoncé de (19.4.8).

Corollaire **(19.4.9)**. — *Sous les hypothèses générales de* (19.4.8), *supposons en outre que* Y *soit lisse sur* S *au point* x. *Alors, pour toute générisation* x_1 *de* x *dans* X *n'appartenant pas à* Y, X *est lisse sur* S *au point* x_1. *Si* Y *est lisse sur* S, *alors il existe un voisinage ouvert* U *de* Y *dans* X *tel que* X *soit lisse sur* S *aux points de* $U - Y$.

Pour la première assertion, on peut se borner au cas où X est un schéma local de point fermé x, et l'hypothèse entraîne alors que Y est lisse sur S, tout voisinage du point fermé de Y dans Y étant nécessairement Y lui-même; on conclut donc par le même raisonnement que dans (19.4.5), utilisant le fait que l'ensemble des points où X' est lisse sur S est ouvert dans X'. Pour prouver la seconde assertion, on peut se ramener au cas où S est noethérien, et X de type fini sur S, grâce à (8.9.1), (8.6.3), (11.2.9) et (17.7.6); on conclut alors comme dans (19.4.5), en utilisant le fait que l'ensemble des points où X est lisse sur S est ouvert dans X.

Remarque **(19.4.10)**. — Dans (19.4.6, (ii)), remplaçons l'hypothèse que X et Y sont localement de présentation finie sur S par celle que S et X (donc aussi Y) sont *localement noethériens*. Alors il est clair que $\bigoplus_{n \geqslant 0} \mathscr{J}^n$ est une $\mathscr{O}_X$-Algèbre de type fini, que le morphisme $X' \to X$ est de type fini, et il résulte encore de (19.2.4) appliqué aux préschémas localement noethériens, que l'immersion $Y' \to X'$ est transversalement régulière relativement à S et que X' est S-plat aux points de Y'.

Proposition **(19.4.11)**. — *Soient* X *un préschéma,* $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module quasi-cohérent,* $u : \mathscr{E} \to \mathscr{O}_X$ *un homomorphisme de* $\mathscr{O}_X$*-Modules,* $\mathscr{J} = u(\mathscr{E})$ *l'Idéal quasi-cohérent de* $\mathscr{O}_X$ *image de* u, Y *le sous-préschéma fermé de* X *défini par* $\mathscr{J}$. *Soit* X' *le* X*-schéma obtenu en faisant éclater* Y. *D'autre part, soient* $P = \mathbf{P}(\mathscr{E})$ *le fibré projectif sur* X *défini par* $\mathscr{E}$ (**II**, 4.1.1), $p : P \to X$ *le morphisme structural,* $\alpha_1^\sharp : p^*(\mathscr{E}) \to \mathscr{O}_P(1)$ *l'homomorphisme canonique* (**II**, 4.1.5.1) *et* $\mathscr{H}$ *son noyau, de sorte qu'on a la suite exacte*

$$0 \to \mathscr{H} \to p^*(\mathscr{E}) \xrightarrow{\alpha_1^\sharp} \mathscr{O}_P(1) \to 0.$$

Enfin, soit $\mathscr{K}$ *l'Idéal quasi-cohérent de* $\mathscr{O}_P$ *image de la restriction* $v : \mathscr{H} \to \mathscr{O}_P$ *de* $p^*(u)$, *et soit* Z *le sous-préschéma fermé de* P *défini par* $\mathscr{K}$.

(i) *L'image de* X′ *par l'immersion fermée* $j: X' \to \mathbf{P}(\mathscr{E})$ *correspondant à l'homomorphisme surjectif de* $\mathcal{O}_X$*-Algèbres graduées* $\mathbf{S}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{E}) \to \mathbf{S}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{J}) \to \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathscr{J}^n$ (**II**, 3.6.2) *est un sous-préschéma fermé de* Z.

(ii) *Si* $\mathscr{E}$ *est un* $\mathcal{O}_X$*-Module localement libre de rang m,* $\mathscr{H}$ *est un* $\mathcal{O}_P$*-Module localement libre de rang* $m-1$.

(iii) *On suppose que* X *soit localement noethérien, que* $\mathscr{E}$ *soit localement libre de type fini, que le sous-préschéma* Y *soit régulier, et qu'en tout point* $x \in Y$, *l'immersion canonique* $i: Y \to X$ *soit régulière et de codimension égale à* $\mathrm{rg}_{\mathcal{O}_x}(\mathscr{E}_x)$ (ce que nous exprimerons en disant que l'homomorphisme u est *régulier* au point x (cf. chap. V)). *Alors l'image de* X′ *par l'immersion fermée* $j: X' \to P$ *est le sous-préschéma fermé* Z *de* P; *en tous les points de* $X' - Y'$ (Y′ *image réciproque de* Y *dans* X′) *l'immersion j est transversalement régulière relativement à* X; *enfin en tous les points* x' *de* Y′, X′ *est régulier, l'immersion j est régulière et de codimension* $\mathrm{rg}_{\mathcal{O}_P}(\mathscr{H}_z)$ *où* $z = j(x')$ (autrement dit l'homomorphisme $v: \mathscr{H} \to \mathcal{O}_P$ est *régulier* en z).

Toutes les questions étant locales sur X, on peut se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine et $\mathscr{E} = \widetilde{E}$, où E est un A-module. Pour faire la vérification de (i), on peut en outre se borner à examiner ce qui se passe dans un ouvert affine de P de la forme $D_+(t)$, où $t \in E = \mathbf{S}^1_A(E)$ (**II**, 2.3.14). Si l'on pose $S = \mathbf{S}_A(E)$, on a alors $\Gamma(D_+(t), \mathcal{O}_P) = S_{(t)}$ (**II**, 2.4.1), et $p^*(\mathscr{E}) | D_+(t) = (E \otimes_A S_{(t)})^\sim$. Si l'on se reporte à la définition de $\alpha_1^\sharp$ (**II**, 2.6.2.2), on voit qu'à tout élément $a = \sum_i x^{(i)} \otimes ((x_1^{(i)} x_2^{(i)} \ldots x_n^{(i)})/t^n)$ de $E \otimes_A S_{(t)}$ (où $x^{(i)}$ et les $x_j^{(i)}$ sont dans E) $\alpha_1^\sharp$ fait correspondre l'élément $\sum_i (x^{(i)} x_1^{(i)} \ldots x_n^{(i)})/t^n$ de $(S(1))_{(t)}$. Il s'agit (pour prouver (i)) de montrer que si ce dernier élément est nul, alors il en est de même l'image de $a' = v(a) = \sum_i u(x^{(i)})(x_1^{(i)} \ldots x_n^{(i)})/t^n$ par l'homomorphisme canonique $S_{(t)} \to (u(E))^n_{(t)}$ (**II**, 3.6.2). Or, cette image n'est autre que $\sum_i u(x^{(i)}) u(x_1^{(i)}) \ldots u(x_n^{(i)})/(u(t))^n$ dans l'anneau $A_{u(t)}$, c'est-à-dire le produit de l'élément $u(t)$ et de l'image canonique de $\sum_i (x^{(i)} x_1^{(i)} \ldots x_n^{(i)})/t^{n+1}$ par l'homomorphisme d'algèbres, prolongement canonique à $S_{(t)}$ de l'homomorphisme $u: E \to A$ de A-modules. Cela prouve donc (i).

Pour établir (ii), notons que l'on peut supposer que E est un A-module libre de rang m; puisque $\alpha_1^\sharp: E \otimes_A S_{(t)} \to (S(1))_{(t)}$ est surjectif et que $(S(1))_{(t)}$ est un $S_{(t)}$-module libre de rang 1, la suite exacte

$$0 \to H_{(t)} \to E \otimes_A S_{(t)} \xrightarrow{\alpha_1^\sharp} (S(1))_{(t)} \to 0$$

est *scindée*, et $H_{(t)}$ est donc un $S_{(t)}$-module projectif de rang $m-1$, d'où (ii).

Pour prouver (iii), examinons d'abord ce qui se passe au-dessus d'un point $x \in X - Y$. Alors $u: \mathscr{E} \to \mathcal{O}_X$, restreint à un voisinage de x, est *surjectif*, donc on peut se borner au cas où $\mathscr{J} = \mathcal{O}_X$, cas où X′ s'identifie canoniquement à X. Pour voir alors que le sous-préschéma fermé de P image de X′ s'identifie à Z, on peut se borner comme au début au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, et en outre $E = A^m$, de sorte que $S = A[T_0, \ldots, T_{m-1}]$. On peut en outre, avec les notations du début, supposer $u(t) \neq 0$ (les valeurs de $t \in E$

qui vérifient cette condition engendrant l'algèbre symétrique $\mathbf{S}_A(E)$); changeant au besoin de base dans E, on peut donc supposer que $t = T_0$, et $u(T_i) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant m-1$, de sorte que $S_{(t)}$ s'identifie canoniquement à $A[T_1, \ldots, T_{m-1}]$. Les éléments de H sont alors les éléments de la forme $\sum_{\alpha} L_\alpha(\mathbf{T}) \otimes \mathbf{T}^\alpha$ de $E \otimes_A A[T_1, \ldots, T_{m-1}]$ où les $L_\alpha(\mathbf{T}) = \lambda_{\alpha 0} + \lambda_{\alpha 1} T_1 + \ldots + \lambda_{\alpha, m-1} T_{m-1}$ doivent être tels que $\sum_{\alpha} L_\alpha(\mathbf{T}) \mathbf{T}^\alpha = 0$ dans $A[T_1, \ldots, T_{m-1}]$. On vérifie aisément que lorsque la condition $\lambda_{00} = 0$ est remplie, les valeurs des $\lambda_{\alpha 0}$ peuvent être prises *arbitrairement* pour $|\boldsymbol{\alpha}| \geqslant 1$, et on peut toujours alors déterminer les $\lambda_{\alpha i}$ pour $i \geqslant 1$ de façon à vérifier la condition $\sum_{\alpha} L_\alpha(\mathbf{T}) \mathbf{T}^\alpha = 0$. Les éléments de l'idéal $\mathfrak{K}$ correspondants sont alors les polynômes $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha 0} \mathbf{T}^\alpha$ *sans terme constant*, et comme $(\mathbf{S}_A(A))_{(t)}$ s'identifie à A, ces polynômes sont exactement les éléments du noyau de l'homomorphisme $(\mathbf{S}_A(E))_{(t)} \to (\mathbf{S}_A(A))_{(t)}$. On a ainsi prouvé (19.2.1) que l'immersion $j : X' \to P$ est *transversalement régulière* relativement à X en tous les points de $X' - Y'$ et que $j(X') = Z$ en ces points.

Reste à examiner ce qui se passe au-dessus d'un point $x \in Y$. L'hypothèse de « régularité » de u en ce point faite dans (iii) équivaut (en vertu de (19.1.1) et de (**0**, 17.1.7)) à dire que X est *régulier* au point x et que l'homomorphisme $u_X \otimes 1 : \mathscr{E}_X \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \boldsymbol{k}(x) \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ est *injectif*. Cela étant, comme le morphisme $p : P \to X$ est lisse (17.3.9), pour tout $z \in P$ au-dessus de x, P est *régulier* au point z (17.5.8); en outre (**0**, 17.3.3) l'homomorphisme canonique

$$(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2) \otimes_{\boldsymbol{k}(x)} \boldsymbol{k}(z) \to \mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2 \tag{19.4.11.1}$$

est *injectif*. On en déduit que l'homomorphisme

$$(\mathscr{E}_x \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \mathscr{O}_{P,z}) \otimes_{\mathscr{O}_{P,z}} \boldsymbol{k}(z) \to \mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2$$

déduit de $p^*(u)$ est aussi injectif, car il s'écrit comme le composé

$$(\mathscr{E}_x \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \boldsymbol{k}(x)) \otimes_{\boldsymbol{k}(x)} \boldsymbol{k}(z) \to (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2) \otimes_{\boldsymbol{k}(x)} \boldsymbol{k}(z) \to \mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2$$

où la première flèche est injective par platitude et la seconde est l'homomorphisme injectif (19.4.11.1). Comme $\mathscr{H}$ est (dans un voisinage de z dans P) facteur direct de $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_P = p^*(\mathscr{E})$, l'homomorphisme $v_z \otimes 1 : \mathscr{H}_z \otimes_{\mathscr{O}_{P,z}} \boldsymbol{k}(z) \to \mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2$ est aussi injectif, ce qui établit la « régularité » de l'homomorphisme v au point z. Reste à voir que l'image par j de X' est identique au sous-préschéma fermé Z. Il suffira pour cela de montrer d'une part que l'image par j des points de $q^{-1}(x)$ (où $q : X' \to X$ est le morphisme structural) sont exactement ceux de $Z \cap p^{-1}(x)$ et d'autre part qu'en chacun de ces points $z = j(x')$, l'homomorphisme surjectif $\mathscr{O}_{Z,z} \to \mathscr{O}_{X',x'}$ est bijectif. Mais, compte tenu de l'hypothèse et de (19.4.3), la restriction $Y' \to Y$ de q est lisse, et puisque $\mathscr{O}_{Y,x}$ est supposé régulier, il en est de même de $\mathscr{O}_{Y',x'}$ (17.5.8); en outre, l'immersion $Y' \to X'$ est régulière (19.4.2), donc $\mathscr{O}_{X',x'}$ est aussi un anneau régulier (19.1.1). Pour prouver que l'homomorphisme $\mathscr{O}_{Z,z} \to \mathscr{O}_{X',x'}$ est bijectif, il suffit donc de montrer que les dimensions de ces deux anneaux réguliers sont égales (**0**, 17.1.9). Mais en vertu de (**0**, 17.3.3), cela équivaut aussi à l'égalité des dimensions des deux anneaux $\mathcal{O}_{Z,z}\otimes_{\mathcal{O}_{X,x}}\boldsymbol{k}(x)$ et $\mathcal{O}_{X',x'}\otimes_{\mathcal{O}_{X,x}}\boldsymbol{k}(x)$, si bien que finalement on peut remplacer X' et Z par les *fibres* $q^{-1}(x)$ et $Z\cap p^{-1}(x)$ respectivement, et se ramener à prouver que le morphisme $q^{-1}(x)\rightarrow Z\cap p^{-1}(x)$ déduit de j est un *isomorphisme*. Or, on peut ici se borner au cas où $X=\mathrm{Spec}(B)$ avec $B=\mathcal{O}_{X,x}$ et $E=B^m$, d'où $S=B[T_1, \ldots, T_m]$; en outre, l'hypothèse signifie qu'il existe un système régulier de paramètres $(t_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ de B tel que $u(T_i)=t_i$ pour $1\leqslant i\leqslant m$ (**0**, 17.1.7); soit $\mathfrak{J}$ l'image de u; si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de B, on a $\mathfrak{J}^n\otimes_B(B/\mathfrak{m})=\mathfrak{J}^n/\mathfrak{m}\mathfrak{J}^n=(\mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1})\otimes_B(B/\mathfrak{m})$ et par suite (16.9.4.1), $(\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathfrak{J}^n)\otimes_B\boldsymbol{k}(x)$ s'identifie à $\boldsymbol{k}(x)[T_1, \ldots, T_m]$, d'où résulte que l'immersion $q^{-1}(x)\rightarrow p^{-1}(x)$ est ici un *isomorphisme*; ceci implique *a fortiori* que le sous-préschéma fermé $Z\cap p^{-1}(x)$ est identique à la fibre $p^{-1}(x)$, et termine la démonstration de (19.4.11).

19.5. Critères de M-régularité.

Nous reprenons ici, en les complétant, les critères pour qu'une suite d'éléments d'un anneau A soit M-régulière ou M-quasi-régulière (M étant un A-module), déjà étudiés dans (**0**, 15.1).

Théorème (**19.5.1**). — *Soient* A *un anneau,* $\mathbf{f}=(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *une suite d'éléments de* A, M *un* A-*module. Considérons les propriétés suivantes :*

a) *La suite* **f** *est* M-*régulière.*

b) *On a* $H_i(\mathbf{f}, M)=0$ *pour tout* $i>0$ (**III**, 1.1.3).

b') *On a* $H_1(\mathbf{f}, M)=0$.

c) *La suite* **f** *est* M-*quasi-régulière.*

Alors on a les implications

$$a)\Rightarrow b)\Rightarrow b') \quad \text{et} \quad a)\Rightarrow c).$$

Posons $\mathfrak{J}=\sum_{i=1}^{n} f_i A$. *Si les modules* $M_i=M/(\sum_{j=1}^{i} f_j M)$ *sont séparés pour la topologie* $\mathfrak{J}$-*préadique* (resp. *si tout module quotient d'un sous-module de* M *est séparé pour la topologie* $\mathfrak{J}$-*préadique*), *alors on a aussi l'implication* c) ⇒ a) (resp. b') ⇒ a)).

Les implications *a) ⇒ c)*, et *c) ⇒ a)* lorsque les M_i sont séparés pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique, ont déjà été prouvées (**0**, 15.1.9), et ne sont données que pour mémoire. On a aussi montré (**III**, 1.1.4 et 1.1.3.3) que *a)* entraîne *b)*, et *b)* implique trivialement *b')*. Il reste donc à voir que lorsque tout module quotient d'un sous-module de M est séparé pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique, *b')* entraîne *a)*. Raisonnons par récurrence sur n. Pour $n=1$, l'assertion résulte trivialement des définitions, car alors $H_1(\mathbf{f}, M)$ n'est autre que le noyau de l'homothétie $z\rightsquigarrow f_1 z$ dans M (**III**, 1.1.1 et 1.1.2). Supposons donc $n\geqslant 2$, et posons $\mathbf{f}'=(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n-1}$; avec les notations de (**III**, 1.1.2), on a $K_\bullet(\mathbf{f}, M)=K_\bullet(f_n)\otimes_A K_\bullet(\mathbf{f}', M)$. On a donc (**III**, 1.1.4.1) la suite exacte

(**19.5.1.1**) $$0\rightarrow H_0(f_n, H_1(\mathbf{f}', M))\rightarrow H_1(\mathbf{f}, M)\rightarrow H_1(f_n, H_0(\mathbf{f}', M))\rightarrow 0.$$

La relation $H_1(\mathbf{f}, M)=0$ implique donc $H_0(f_n, H_1(\mathbf{f}', M))=0$ et $H_1(f_n, H_0(\mathbf{f}', M))=0$. La première de ces deux relations signifie que l'on a $f_n H_1(\mathbf{f}', M)=H_1(\mathbf{f}', M)$ (**III**, 1.1.3.5). Or, par définition (**III**, 1.1.1), $H_1(\mathbf{f}', M)$ est isomorphe à un quotient d'un sous-module N de M^{n-1}; prenant sur M^{n-1} la filtration des M^j pour $j\leqslant n-1$, sur N la filtration induite et sur $H_1(\mathbf{f}', M)$ la filtration quotient de celle de N, on obtient sur $H_1(\mathbf{f}', M)$ une filtration finie dont les quotients sont isomorphes à des quotients de sous-modules de M, donc sont séparés pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique par hypothèse. Comme la relation $f_n H_1(\mathbf{f}', M)=H_1(\mathbf{f}', M)$ implique *a fortiori* $\mathfrak{J}H_1(\mathbf{f}', M)=H_1(\mathbf{f}', M)$, on déduit de l'hypothèse et des remarques précédentes que $H_1(\mathbf{f}', M)=0$. L'hypothèse de récurrence prouve alors que la suite $\mathbf{f}'$ est M-régulière. D'autre part, la relation $H_1(f_n, H_0(\mathbf{f}', M))=0$ signifie que f_n est $(M/(\sum_{i=1}^{n-1} f_i M))$-régulier, donc la suite $\mathbf{f}$ est M-régulière.

Corollaire (**19.5.2**). — *Supposons que* A *soit un anneau noethérien, que les* f_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ *appartiennent au radical de* A *et que* M *soit un* A-*module de type fini. Alors les quatre conditions* a), b), b'), c) *de* (19.5.1) *sont équivalentes.*

On sait en effet alors ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.5) que tout A-module de type fini est séparé pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique.

Proposition (**19.5.3**). — *Soient*

$$0\to M'\to M\to M''\to 0$$

une suite exacte de A-*modules,* $\mathbf{f}=(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *une suite* M-*régulière,* $\mathfrak{J}=\sum_{i=1}^{n} f_i A$. *Considérons les propriétés suivantes :*

a) *La suite* $\mathbf{f}$ *est* M''-*régulière.*

b) *La filtration* $\mathfrak{J}$-*préadique de* M' *est induite sur* M' *par la filtration* $\mathfrak{J}$-*préadique de* M (autrement dit, l'homomorphisme canonique $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{J}}(M')\to\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{J}}(M)$ est *injectif*).

c) *L'homomorphisme canonique* $M'/(\sum_{i=1}^{n} f_i M')\to M/(\sum_{i=1}^{n} f_i M)$ *est injectif.*

Alors on a les implications a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c), *et* a) *entraîne en outre que la suite* $\mathbf{f}$ *est* M'-*régulière.*

Si tout quotient d'un sous-module de M'' *est séparé pour la topologie* $\mathfrak{J}$-*préadique, les conditions* a), b) *et* c) *sont équivalentes.*

Il est clair que *c)* est conséquence de *b)*. Prouvons que sous les hypothèses de la dernière assertion, *c)* entraîne *a)* : puisque $\mathbf{f}$ est M-régulière, on a, par (19.5.1), $H_1(\mathbf{f}, M)=0$, d'où une suite exacte, portion de la suite exacte d'homologie

$$0\to H_1(\mathbf{f}, M'')\to H_0(\mathbf{f}, M')\to H_0(\mathbf{f}, M).$$

Or, la condition *c)* exprime que l'homomorphisme $H_0(\mathbf{f}, M')\to H_0(\mathbf{f}, M)$ est injectif (**III**, 1.1.3.5); elle équivaut donc à $H_1(\mathbf{f}, M'')=0$, d'où, en vertu de l'hypothèse de séparation et de (19.5.1), le fait que $\mathbf{f}$ est M''-régulière.

Montrons ensuite que *a)* entraîne *c)* et le fait que $\mathbf{f}$ est M'-régulière, en procédant par récurrence sur n. Pour $n=1$, f_1 étant M-régulier est aussi M'-régulier et la propriété *c)* n'est autre que le lemme (3.4.1.4). Pour $n>1$, l'hypothèse de récurrence montre que si l'on pose $\mathbf{f}'=(f_1, \ldots, f_{n-1})$, la suite $\mathbf{f}'$ est M'-régulière et l'on a, en vertu de *c)* appliqué à $\mathbf{f}'$, une suite exacte

$$0 \to M'/(\sum_{i=1}^{n-1} f_i M') \to M/(\sum_{i=1}^{n-1} f_i M) \to M''/(\sum_{i=1}^{n-1} f_i M'') \to 0.$$

Par hypothèse, f_n est $(M/(\sum_{i=1}^{n-1} f_i M))$-régulier et $(M''/(\sum_{i=1}^{n-1} f_i M''))$-régulier, donc le même raisonnement montre d'une part que f_n est $(M'/(\sum_{i=1}^{n-1} f_i M'))$-régulier, et d'autre part, en vertu de (3.4.1.4), que la suite

$$0 \to M'/(\sum_{i=1}^{n} f_i M') \to M/(\sum_{i=1}^{n} f_i M) \to M''/(\sum_{i=1}^{n} f_i M'') \to 0$$

est exacte, d'où *c)*.

Montrons enfin que *a)* entraîne *b)*. Comme la suite $\mathbf{f}$ est alors M-régulière et M'-régulière, donc M-quasi-régulière et M'-quasi-régulière, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{J}}(M') \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^{0}_{\mathfrak{J}}(M')[T_1, \ldots, T_n], \qquad \mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{J}}(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^{0}_{\mathfrak{J}}(M)[T_1, \ldots, T_n]$$

(**0**, 15.1.7), et comme on a vu ci-dessus que $\mathrm{gr}^0_{\mathfrak{J}}(M') \to \mathrm{gr}^0_{\mathfrak{J}}(M)$ est injectif, il en est de même de $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{J}}(M') \to \mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{J}}(M)$.

On notera encore que l'équivalence des conditions *a)*, *b)*, *c)* de (19.5.3) est valable en particulier lorsque A *est noethérien,* M'' *un* A-*module de type fini et que les* f_i *appartiennent au radical de* A.

(19.5.4) Dans la suite de ce numéro, nous conservons les notations A, $\mathbf{f}$, M, $\mathfrak{J}$ de (19.5.1), et nous supposons de plus M muni d'une filtration décroissante (M_k) formée de sous-A-modules, telle que $M_0 = M$. Rappelons (**0**, 15.1.5) que l'on définit alors sur M une seconde filtration décroissante formée des sous-modules

$$M'_k = M_k + \mathfrak{J}M_{k-1} + \ldots + \mathfrak{J}^{k-1}M_1 + \mathfrak{J}^k M_0$$

et que, si $\mathrm{gr}_{\bullet}(M)$ et $\mathrm{gr}'_{\bullet}(M)$ sont les A-modules gradués associés aux filtrations (M_k) et (M'_k) respectivement, on définit un homomorphisme gradué surjectif de degré 0 (**0**, 15.1.5.2)

$$\psi_M : (\mathrm{gr}_{\bullet}(M) \otimes_A (A/\mathfrak{J}))[T_1, \ldots, T_n] \to \mathrm{gr}'_{\bullet}(M)$$

Rappelons aussi que l'on a l'homomorphisme canonique surjectif (**0**, 15.1.1.1)

$$\varphi_{\mathrm{gr}_{\bullet}(M)} : (\mathrm{gr}_{\bullet}(M) \otimes_A (A/\mathfrak{J}))[T_1, \ldots, T_n] \to \mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{J}}(\mathrm{gr}_{\bullet}(M))$$

Théorème **(19.5.5)**. — *Avec les notations de* (19.5.4), *considérons les propriétés suivantes :*

a) *La suite* $\mathbf{f}$ *est* $\mathrm{gr}_{\bullet}(M)$-*régulière.*

b) *L'homomorphisme canonique* ψ_M *est bijectif.*

c) *L'homomorphisme canonique* $\varphi_{\mathrm{gr}_{\bullet}(M)}$ *est bijectif* (autrement dit (**0**, 15.1.7), la suite $\mathbf{f}$ est $\mathrm{gr}_{\bullet}(M)$-*quasi-régulière*).

On a alors les implications (1)

$$a) \Rightarrow b) \Rightarrow c).$$

En outre, si, pour tout entier $k \geqslant 0$, *les modules quotients des sous-modules de* $\mathrm{gr}_k(\mathrm{M})$ *sont séparés pour la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique* (ce qui est le cas lorsque A est noethérien, que les f_i sont dans le radical de A et que les $\mathrm{gr}_k(\mathrm{M})$ sont des A-modules de type fini), *alors les conditions* a), b) *et* c) *sont équivalentes.*

L'implication *a)* $\Rightarrow$ *b)* a été démontrée dans (**0**, 15.1.8); l'implication *c)* $\Rightarrow$ *a)* sous l'hypothèse de séparation est un cas particulier de (**0**, 15.1.9). Il reste à prouver que *b)* implique *c)*, ce qui va se faire en plusieurs étapes.

Nous désignerons par $\mathfrak{J}$ l'idéal $\sum_{i=1}^{n} f_i\mathrm{A}$ engendré par les f_i; pour toute suite $\mathbf{q}=(q_1, \ldots, q_n)$ de n entiers $\geqslant 0$, on posera $|\mathbf{q}| = \sum_{i=1}^{n} q_i$ et $\mathbf{f}^{\mathbf{q}} = f_1^{q_1} f_2^{q_2} \ldots f_n^{q_n}$.

(**19.5.5.1**) *Pour que l'application* ψ_{M} *soit injective (et par suite bijective), il faut et il suffit que pour* $p \geqslant 0$ *et* $q \geqslant 0$ *la condition suivante soit vérifiée :*

($\mathrm{I}_{q,p}$) *Pour toute famille* $(x_{\mathbf{q}}^p)_{|\mathbf{q}|=q}$ *d'éléments de* M_p, *la relation*

$$\sum_{|\mathbf{q}|=q} \mathbf{f}^{\mathbf{q}} x_{\mathbf{q}}^p \in \sum_{i=1}^{q} \mathfrak{J}^{q-i}\mathrm{M}_{p-i} + \mathrm{M}'_{p+q+1}$$

implique $x_{\mathbf{q}}^p \in \mathrm{M}_{p+1} + \mathfrak{J}\mathrm{M}_p$ *pour tout* $\mathbf{q}$ *tel que* $|\mathbf{q}| = q$.

On procède comme dans (**0**, 15.1.6) en considérant le sous-A-module Q_k (resp. Q'_k) des termes de degré k au premier (resp. second) membre de (**0**, 15.1.5.2). On munit Q_k de la filtration

$$(\mathrm{Q}_k)_i = \sum_{j \leqslant k-i} \Big(\sum_{|\mathbf{j}|=j} (\mathrm{gr}_{k-j}(\mathrm{M}) \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathfrak{J}))\mathbf{T}^{\mathbf{j}} \Big)$$

et Q'_k de la filtration image formée des $\psi_{\mathrm{M}}((\mathrm{Q}_k)_i) = (\mathrm{Q}'_k)_i$; il suffit encore de prouver que les homomorphismes $(\psi_{\mathrm{M}})_{ki} : \mathrm{gr}_i(\mathrm{Q}_k) \to \mathrm{gr}_i(\mathrm{Q}'_k)$ sont injectifs. Or, on a

$$\mathrm{gr}_i(\mathrm{Q}_k) = \sum_{|\mathbf{j}|=k-i} ((\mathrm{M}_i/\mathrm{M}_{i+1}) \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathfrak{J}))\mathbf{T}^{\mathbf{j}} = \sum_{|\mathbf{j}|=k-i} (\mathrm{M}_i/(\mathfrak{J}\mathrm{M}_i + \mathrm{M}_{i+1}))\mathbf{T}^{\mathbf{j}};$$

d'autre part, $(\mathrm{Q}'_k)_{i+1}$ est l'image de $\sum_{h=0}^{k-i-1} \mathfrak{J}^{k-i-h-1}\mathrm{M}_{i+h+1}$ dans $\mathrm{M}'_k/\mathrm{M}'_{k+1}$. Écrire que $(\psi_{\mathrm{M}})_{ki}$ est injectif équivaut donc à écrire la condition $(\mathrm{I}_{k-i,i})$; d'où notre assertion.

(**19.5.5.2**) *Pour que la suite* $\mathbf{f}$ *soit* $\mathrm{gr}_{\bullet}(\mathrm{M})$*-quasi-régulière, il suffit que, pour* $p \geqslant 0$ *et* $q \geqslant 0$, *la condition suivante soit vérifiée :*

($\mathrm{S}_{q,p}$) *Pour toute famille* $(x_{\mathbf{q}}^p)_{|\mathbf{q}|=q}$ *d'éléments de* M_p, *la relation* $\sum_{|\mathbf{q}|=q} \mathbf{f}^{\mathbf{q}} x_{\mathbf{q}}^p \in \mathrm{M}_{p+1}$ *implique* $x_{\mathbf{q}}^p \in \mathrm{M}_{p+1} + \mathfrak{J}\mathrm{M}_p$ *pour tout* $\mathbf{q}$ *tel que* $|\mathbf{q}| = q$.

Par définition, dire que $\mathbf{f}$ est $\mathrm{gr}_{\bullet}(\mathrm{M})$-quasi-régulière signifie que, pour tout $p \geqslant 0$ et tout $q \geqslant 0$, une relation

$$\sum_{|\mathbf{q}|=q} \mathbf{f}^{\mathbf{q}} x_{\mathbf{q}}^p \in \mathrm{M}_{p+1} + \mathfrak{J}^{q+1}\mathrm{M}_p$$

(1) L'implication *b)* $\Rightarrow$ *c)*, sans hypothèse de séparation sur les $\mathrm{gr}_k(\mathrm{M})$, est due à P. Deligne, dont nous reproduisons ci-dessous la démonstration.

pour une famille $(x_{\mathbf{q}}^p)_{|\mathbf{q}|=q}$ d'éléments de M_p entraîne $x_{\mathbf{q}}^p \in \mathrm{M}_{p+1}+\mathfrak{J}\mathrm{M}_p$ pour tout $\mathbf{q}$ tel que $|\mathbf{q}|=q$. Or l'hypothèse sur la suite $(x_{\mathbf{q}}^p)$ signifie qu'il existe une famille $(y_{\mathbf{q}}^p)_{|\mathbf{q}|=q}$ d'éléments de $\mathfrak{J}\mathrm{M}_p$ telle que l'on ait $\sum_{|\mathbf{q}|=q} \mathbf{f}^{\mathbf{q}}(x_{\mathbf{q}}^p - y_{\mathbf{q}}^p) \in \mathrm{M}_{p+1}$. La condition $(\mathrm{S}_{q,p})$ entraîne alors $x_{\mathbf{q}}^p - y_{\mathbf{q}}^p \in \mathrm{M}_{p+1}+\mathfrak{J}\mathrm{M}_p$ pour tout $\mathbf{q}$ tel que $|\mathbf{q}|=q$, d'où $x_{\mathbf{q}}^p \in \mathrm{M}_{p+1}+\mathfrak{J}\mathrm{M}_p$; on voit donc que les conditions $(\mathrm{S}_{q,p})$ entraînent que la suite $\mathbf{f}$ est $\mathrm{gr}_{\bullet}(\mathrm{M})$-quasi-régulière.

Il suffit donc de prouver la proposition suivante :

(19.5.5.3) *Pour tout $r \geqslant 0$, si les conditions $(\mathrm{I}_{q,p})$ sont vérifiées pour $p+q<r$, alors les conditions $(\mathrm{S}_{q,p})$ sont vérifiées pour $p+q<r$.*

Introduisons les conditions

$(\mathrm{A}_{q,p})$ *Pour toute famille $(x_{\mathbf{q}}^p)_{|\mathbf{q}|=q}$ d'éléments de M_p, la relation $\sum_{|\mathbf{q}|=q} \mathbf{f}^{\mathbf{q}} x_{\mathbf{q}}^p \in \mathrm{M}_{p+1}$ implique $\sum_{|\mathbf{q}|=q} \mathbf{f}^{\mathbf{q}} x_{\mathbf{q}}^p \in \sum_{i=1}^{q} \mathfrak{J}^{q-i}\mathrm{M}_{p+i}$.*

Il est clair que la conjonction de $(\mathrm{A}_{q,p})$ et de $(\mathrm{I}_{q,p})$ implique $(\mathrm{S}_{q,p})$. D'autre part, les conditions $(\mathrm{A}_{1,p})$ et $(\mathrm{S}_{0,p})$ sont triviales. Par suite, (19.5.5.3) résultera de la proposition suivante :

(19.5.5.4) *Quels que soient $p \geqslant 0$ et $q \geqslant 1$, la condition $(\mathrm{A}_{q+1,p})$ est entraînée par la conjonction des conditions $(\mathrm{A}_{q,p})$, $(\mathrm{I}_{q-1,p+1})$, $(\mathrm{I}_{q-2,p+2})$, ..., $(\mathrm{I}_{0,p+q})$.*

En effet, une fois prouvée cette proposition, les conditions $(\mathrm{I}_{q,p})$ supposées vérifiées pour $p+q<r$ entraîneront, pour chaque $p \leqslant r$, la condition $(\mathrm{A}_{q,p})$ pour $1 \leqslant q < r-p$, par récurrence sur q.

Prouvons donc (19.5.5.4). Notons que la condition $(\mathrm{A}_{q,p})$ équivaut aussi à

(19.5.5.5) $$\mathfrak{J}^q\mathrm{M}_p \cap \mathrm{M}_{p+1} \subset \sum_{i=1}^{q} \mathfrak{J}^{q-i}\mathrm{M}_{p+i}.$$

Soit donc $m \in \mathfrak{J}^{q+1}\mathrm{M}_p \cap \mathrm{M}_{p+1} \subset \mathfrak{J}^q\mathrm{M}_p \cap \mathrm{M}_{p+1}$. Appliquant la condition $(\mathrm{A}_{q,p})$, on voit qu'il existe, pour chaque i tel que $1 \leqslant i \leqslant q$, une famille $(y_{\mathbf{q}}^{p+i})_{|\mathbf{q}|=q-i}$ d'éléments de M_{p+i} telle que

$$m = \sum_{i=1}^{q} \Big(\sum_{|\mathbf{q}|=q-i} \mathbf{f}^{\mathbf{q}} y_{\mathbf{q}}^{p+i} \Big).$$

Supposons que, pour $1 \leqslant i < j$ $(j \geqslant 1)$, on ait prouvé que

$$y_{\mathbf{q}}^{p+i} \in \mathfrak{J}\mathrm{M}_{p+i} + \mathrm{M}_{p+i+1} \qquad (\text{pour } |\mathbf{q}|=q-i).$$

On en déduit par définition (19.5.4)

$$m - \sum_{i<j} \Big(\sum_{|\mathbf{q}|=q-i} \mathbf{f}^{\mathbf{q}} y_{\mathbf{q}}^{p+i} \Big) \in \mathrm{M}'_{p+q+1},$$

Puisque par hypothèse $(\mathrm{I}_{q-j,p+j})$ est vérifiée, on en déduit

$$y_{\mathbf{q}}^{p+j} \in \mathfrak{J}\mathrm{M}_{p+j} + \mathrm{M}_{p+j+1}$$

et, par récurrence sur j, on voit donc que cette condition est vérifiée pour *tout* j tel que $1 \leqslant j \leqslant q$. On a donc

$$m \in \sum_{i=1}^{q} \mathfrak{J}^{q-i}(\mathfrak{J}\mathrm{M}_{p+i} + \mathrm{M}_{p+i+1}) = \sum_{i=1}^{q+1} \mathfrak{J}^{q-i+1}\mathrm{M}_{p+i}$$

et on a ainsi prouvé $(\mathrm{A}_{q+1,p})$ et terminé la démonstration de (19.5.5).

Remarques **(19.5.6)**. — (i) Les résultats de ce numéro gardent un sens et sont valables lorsque, au lieu d'un A-module M et d'éléments $f_i \in \mathrm{A}$, on prend un objet M d'une catégorie abélienne quelconque, et n endomorphismes f_i de M qui commutent deux à deux; les démonstrations s'adaptent sans peine à ce cas plus général. L'hypothèse de séparation pour un A-module N relativement à la topologie $\mathfrak{J}$-préadique doit ici être remplacée par l'hypothèse que tout sous-objet de N contenu dans tous les $\sum_i f_i^r(\mathrm{N})$ (r entier arbitraire) est nécessairement nul. La même remarque s'applique aux résultats de 19.7.

(ii) Supposons que A soit un anneau *gradué* à degrés $\geqslant 0$. Si M (resp. chaque $\mathrm{gr}_p(\mathrm{M})$) est un A-module gradué à degrés bornés inférieurement et si les f_i ne contiennent pas de composant homogène de degré 0, l'hypothèse de séparation de (**0**, 15.1.9) est *ipso facto* vérifiée pour M (resp. chaque $\mathrm{gr}_p(\mathrm{M})$), et on voit donc que dans ce cas on a l'implication *c)* $\Rightarrow$ *a)* dans (19.5.1) (resp. (19.5.5)).

(iii) Rappelons que, sans hypothèse de séparation, l'implication *c)* $\Rightarrow$ *b)* n'est plus valable même pour $n=1$ (**0**, 15.1.12, (iii)).

19.6. Suites régulières relativement à un module filtré quotient.

(19.6.1). Soient A un anneau, $\mathbf{f}=(f_1, \dots, f_n)$ une suite finie d'éléments de A, $\mathfrak{J}=f_1\mathrm{A}+\dots+f_n\mathrm{A}$ l'idéal qu'elle engendre, et considérons une suite exacte de A-modules

$$0 \to \mathrm{R} \xrightarrow{j} \mathrm{N} \xrightarrow{p} \mathrm{M} \to 0$$

où l'on suppose que N est muni d'une filtration décroissante (N_k) formée de sous-A-modules, avec $\mathrm{N}_0=\mathrm{N}$. On pose $\mathrm{R}_k=\mathrm{R}\cap\mathrm{N}_k$ (filtration induite par (N_k)), $\mathrm{M}_k=p(\mathrm{N}_k)$ (filtration quotient de (N_k)), et on désigne par $\mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{N})$, $\mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{R})$ et $\mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{M})$ les A-modules gradués associés à ces trois filtrations. On pose d'autre part pour tout k,

$$\mathrm{N}'_k=\mathrm{N}_k+\mathfrak{J}\mathrm{N}_{k-1}+\dots+\mathfrak{J}^{k-1}\mathrm{N}_1+\mathfrak{J}^k\mathrm{N}_0$$

de sorte que $\mathrm{M}'_k=p(\mathrm{N}'_k)=\mathrm{M}_k+\mathfrak{J}\mathrm{M}_{k-1}+\dots+\mathfrak{J}^{k-1}\mathrm{M}_1+\mathfrak{J}^k\mathrm{M}_0$; on pose d'autre part $\mathrm{R}'_k=\mathrm{R}\cap\mathrm{N}'_k$ (filtration *induite* par (N'_k)), et on note $\mathrm{gr}'_\bullet(\mathrm{N})$, $\mathrm{gr}'_\bullet(\mathrm{M})$ et $\mathrm{gr}'_\bullet(\mathrm{R})$ les A-modules gradués associés à ces trois filtrations; on a donc un diagramme commutatif de suites exactes

(19.6.1.1)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{R}) \arrow[r, "\mathrm{gr}(j)"] \arrow[d] & \mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{N}) \arrow[r, "\mathrm{gr}(p)"] \arrow[d] & \mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{M}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{gr}'_\bullet(\mathrm{R}) \arrow[r, "\mathrm{gr}'(j)"'] & \mathrm{gr}'_\bullet(\mathrm{N}) \arrow[r, "\mathrm{gr}'(p)"'] & \mathrm{gr}'_\bullet(\mathrm{M}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les homomorphismes canoniques d'un module gradué associé à une filtration dans le module gradué associé à une filtration moins fine.

On notera que si l'on pose

$$R''_k = R_k + \mathfrak{J}R_{k-1} + \ldots + \mathfrak{J}^{k-1}R_1 + \mathfrak{J}^k R_0$$

on a évidemment $R''_k \subset R'_k$, mais les filtrations (R''_k) et (R'_k) sont en général distinctes; on notera $\mathrm{gr}''_\bullet(R)$ le A-module gradué associé à la filtration (R''_k).

(19.6.2) On a défini en (**0**, 15.1.5.2) les homomorphismes surjectifs gradués de degré 0

$$\psi_N : (\mathrm{gr}_\bullet(N) \otimes_A (A/\mathfrak{J}))[T_1, \ldots, T_n] \to \mathrm{gr}'_\bullet(N)$$
$$\psi_M : (\mathrm{gr}_\bullet(M) \otimes_A (A/\mathfrak{J}))[T_1, \ldots, T_n] \to \mathrm{gr}'_\bullet(M)$$
$$\psi_R : (\mathrm{gr}_\bullet(R) \otimes_A (A/\mathfrak{J}))[T_1, \ldots, T_n] \to \mathrm{gr}''_\bullet(R)$$

dont les deux premiers sont déduits des deux dernières flèches verticales de (19.6.1.1).

Comme la filtration (R''_k) est plus fine que (R'_k) sur R, on a un homomorphisme canonique $\gamma : \mathrm{gr}''_\bullet(R) \to \mathrm{gr}'_\bullet(R)$; nous désignerons par ψ'_R l'homomorphisme composé $\gamma \circ \psi_R$. Il résulte alors aussitôt des définitions que l'on a un diagramme commutatif

$$\text{(19.6.2.1)} \qquad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] \\ (\mathrm{gr}_\bullet(R) \otimes_A (A/\mathfrak{J}))[T_1, \ldots, T_n] \arrow[r, "\psi'_R"] \arrow[d, "j'"'] & \mathrm{gr}'_\bullet(R) \arrow[d, "\mathrm{gr}'(j)"] \\ (\mathrm{gr}_\bullet(N) \otimes_A (A/\mathfrak{J}))[T_1, \ldots, T_n] \arrow[r, "\psi_N"] \arrow[d, "p'"'] & \mathrm{gr}'_\bullet(N) \arrow[d, "\mathrm{gr}'(p)"] \\ (\mathrm{gr}_\bullet(M) \otimes_A (A/\mathfrak{J}))[T_1, \ldots, T_n] \arrow[r, "\psi_M"] \arrow[d] & \mathrm{gr}'_\bullet(M) \arrow[d] \\ 0 & 0 \end{tikzcd}$$

où les colonnes sont exactes.

Proposition **(19.6.3)**. — *Avec les notations précédentes, supposons que la suite* $\mathbf{f}$ *soit* $\mathrm{gr}_\bullet(N)$*-régulière. Considérons les propriétés suivantes :*

a) $\mathbf{f}$ *est* $\mathrm{gr}_\bullet(M)$*-régulière.*

b) ψ_M *est bijectif.*

c) ψ'_R *est surjectif* (autrement dit $\mathrm{gr}'_\bullet(R)$ est engendré comme $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{J}}(A)$-module par $\mathrm{Im}(\mathrm{gr}_\bullet(R) \to \mathrm{gr}'_\bullet(R))$).

d) ψ'_R *est injectif.*

d') *L'homomorphisme* $(\psi'_R)_0 : \mathrm{gr}_\bullet(R) \otimes_A (A/\mathfrak{J}) \to \mathrm{gr}'_\bullet(R)$ *obtenu en restreignant* ψ'_R *aux polynômes de degré* 0, *est injectif.*

e) ψ'_R *est bijectif.*

f) j' *est injectif.*

f') *L'homomorphisme* $\mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{R})\otimes_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/\mathfrak{J}) \rightarrow \mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{N})\otimes_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/\mathfrak{J})$ *obtenu en restreignant* j' *aux polynômes de degré* 0, *est injectif.*

g) *La filtration* $\mathfrak{J}$*-préadique de* $\mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{R})$ *est induite par celle de* $\mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{N})$.

h) *Les filtrations* (R'_k) *et* (R''_k) *sur* R *sont identiques.*

On a alors les implications suivantes :

$$\begin{array}{l} \mathrm{a}) \Rightarrow \mathrm{e}) \Rightarrow \mathrm{b}) \Leftrightarrow \mathrm{c}) \Leftrightarrow \mathrm{h}) \\ \quad \searrow \quad \searrow \\ \qquad \mathrm{g}) \Rightarrow \mathrm{d}) \Leftrightarrow \mathrm{d}') \Leftrightarrow \mathrm{f}) \Leftrightarrow \mathrm{f}') \end{array}$$

En outre, lorsque tout module quotient d'un sous-module d'un $\mathrm{gr}_k(\mathrm{M})$ *est séparé pour la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique* (ce qui sera le cas lorsque A est noethérien, que les f_i appartiennent au radical de A et que les $\mathrm{gr}_k(\mathrm{M})$ sont des A-modules de type fini), *alors les conditions* a) *à* h) *sont toutes équivalentes.*

Notons que d'après (19.5.5), de l'hypothèse que $\mathbf{f}$ est $\mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{N})$-régulière, il résulte que ψ_{N} est *bijectif*; comme $\mathrm{gr}'(j)$ est injectif, l'équivalence de *d)* et *f)* résulte du diagramme (19.6.2.1), ainsi que celle de *d')* et *f')*; par ailleurs *f)* et *f')* sont trivialement équivalentes, ce qui montre l'équivalence de *d)*, *d')*, *f)* et *f')*.

Comme on sait déjà que ψ_{M} est surjectif et ψ_{N} bijectif, l'équivalence de *b)* et *c)* découle aussi du diagramme (19.6.2.1) par un cas particulier du lemme des cinq.

La relation $\psi'_{\mathrm{R}}=\gamma\circ\psi_{\mathrm{R}}$ (19.6.2) et le fait que ψ_{R} est surjectif montrent que la condition *c)* équivaut à dire que γ est surjectif, ce qui équivaut encore à la condition *h)*; on a donc prouvé l'équivalence de *b)*, *c)* et *h)*.

Il est trivial que *e)* équivaut à la conjonction de *c)* et *d)*, donc aussi de *b)* et *d)*. Notons maintenant que *a)* implique *b)* et que *b)* implique *a)* sous l'hypothèse de séparation (19.5.5). D'autre part, les implications *a)* $\Rightarrow$ *g)* $\Rightarrow$ *f')*, et l'implication *f')* $\Rightarrow$ *a)* sous l'hypothèse de séparation, résultent de (19.5.3). On a donc prouvé que *a)* entraîne *e)* (équivalente à la conjonction de *b)* et *f')*), et aussi que toutes les conditions sont équivalentes sous l'hypothèse de séparation. C.Q.F.D.

Corollaire (**19.6.4**). — *Soient* $\mathfrak{K}$ *un idéal de* A, $\mathfrak{L}=\mathfrak{J}+\mathfrak{K}$. *Supposons que la filtration* (N_k) (*donc aussi* (M_k)) *soit la filtration* $\mathfrak{K}$*-préadique, de sorte que les filtrations* (M'_k) *et* (N'_k) *sont les filtrations* $\mathfrak{L}$*-préadiques. Considérons* $\mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{R})$ (resp. $\mathrm{gr}'_\bullet(\mathrm{R})$) *comme un module gradué sur* $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{K}}(\mathrm{A})$ (resp. $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{L}}(\mathrm{A})$).

(i) *Soit* S *une partie de* $\mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{R})$ *qui engendre* $\mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{R})$ *comme* $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{K}}(\mathrm{A})$*-module. Alors la condition* c) *de* (19.6.3) *équivaut à la condition suivante :*

c') *L'image de* S *dans* $\mathrm{gr}'_\bullet(\mathrm{R})$ *par* ψ'_{R} *engendre* $\mathrm{gr}'_\bullet(\mathrm{R})$ *comme* $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{L}}(\mathrm{A})$*-module.*

(ii) *Supposons vérifiée la condition* e) *de* (19.6.3), *et de plus que les quotients des* $\mathrm{gr}_k(\mathrm{R})$ *soient séparés pour la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique* (ce qui sera le cas lorsque A est noethérien, les f_i dans le radical de A et les $\mathrm{gr}_k(\mathrm{N})$ des A-modules de type fini). *Alors, pour qu'une partie* S *de* $\mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{R})$ *formée d'éléments homogènes engendre* $\mathrm{gr}_\bullet(\mathrm{R})$ *comme* $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{K}}(\mathrm{A})$*-module, il faut et il suffit que son image par* ψ'_{R} *engendre* $\mathrm{gr}'_\bullet(\mathrm{R})$ *comme* $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{L}}(\mathrm{A})$*-module.*

(i) Considérons l'homomorphisme de degré o

$$\psi_{\mathrm{A}} : (\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(\mathrm{A}) \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathfrak{J}))[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n] \to \mathrm{gr}'_{\bullet}(\mathrm{A}) = \mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{L}}(\mathrm{A})$$

(**0**, 15.1.5.2). Le fait que cet homomorphisme soit *surjectif* entraîne que la sous-$\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{L}}(\mathrm{A})$-algèbre de $\mathrm{gr}'_{\bullet}(\mathrm{R})$ engendrée par $\mathrm{S}' = \psi'_{\mathrm{R}}(\mathrm{S})$ n'est autre que $\mathrm{Im}(\psi'_{\mathrm{R}})$, d'où l'équivalence de *c)* et *c')*.

ii) Puisque *e)* est vérifiée, il en est de même de *c)*, et en vertu de (i), il reste à prouver la suffisance de la condition de l'énoncé. Or, comme ψ'_{R} est bijectif, dire que S' engendre $\mathrm{gr}'_{\bullet}(\mathrm{R})$ considéré comme $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{L}}(\mathrm{A})$-module équivaut à dire que S engendre $(\mathrm{gr}_{\bullet}(\mathrm{R}) \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathfrak{J}))[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$ comme $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{L}}(\mathrm{A})$-module, et en vertu de la surjectivité de ψ_{A}, on peut dans cet énoncé remplacer l'anneau $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{L}}(\mathrm{A})$ par $(\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(\mathrm{A}) \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathfrak{J}))[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$. Il revient évidemment au même de dire que S engendre $\mathrm{gr}_{\bullet}(\mathrm{R}) \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathfrak{J})$ en tant que module sur l'anneau $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(\mathrm{A}) \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathfrak{J})$, ou aussi en tant que $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(\mathrm{A})$-module. Or, si T est le sous-$\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(\mathrm{A})$-module gradué de $\mathrm{gr}_{\bullet}(\mathrm{R})$ engendré par S, et si l'on pose $\mathrm{T}' = \mathrm{gr}_{\bullet}(\mathrm{R})/\mathrm{T}$, on a par hypothèse $\mathrm{T}'/\mathfrak{J}\mathrm{T}' = 0$, ou $\mathfrak{J}\mathrm{T}' = \mathrm{T}'$; mais T' est un module gradué, et chaque T'_p est un quotient de $\mathrm{gr}_p(\mathrm{R})$, donc séparé pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique ; l'hypothèse $\mathfrak{J}\mathrm{T}'_p = \mathrm{T}'_p$ entraîne donc $\mathrm{T}'_p = 0$ pour tout entier p, donc $\mathrm{T}' = 0$, ce qui achève de prouver le corollaire.

19.7. Critère de platitude normale de Hironaka.

Théorème (**19.7.1**) (Hironaka). — *Soient* A *un anneau*, $\mathfrak{K}$ *un idéal de* A, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ *une suite d'éléments de* A *qui est* $(\mathrm{A}/\mathfrak{K})$*-régulière*, $\mathfrak{J} = f_1\mathrm{A} + \ldots + f_n\mathrm{A}$ *l'idéal engendré par* $\mathbf{f}$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{J} + \mathfrak{K}$, M *un* A*-module.*

On a dans ce cas $(\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(\mathrm{M})) \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathfrak{J}) = (\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(\mathrm{M})) \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathfrak{L}) = (\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(\mathrm{M})) \otimes_{\mathrm{A}/\mathfrak{K}} (\mathrm{A}/\mathfrak{L})$, *car* $(\mathfrak{K}^n\mathrm{M}/\mathfrak{K}^{n+1}\mathrm{M}) \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathfrak{J}) = \mathfrak{K}^n\mathrm{M}/(\mathfrak{K}^{n+1} + \mathfrak{J}\mathfrak{K}^n)\mathrm{M} = \mathfrak{K}^n\mathrm{M}/(\mathfrak{K}^{n+1} + \mathfrak{L}\mathfrak{K}^n)\mathrm{M}$, *et la dernière égalité résulte de* Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3[e] éd., § 3, n° 7, cor. 2 de la prop. 6.

Considérons les conditions suivantes :

a) $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(\mathrm{M})$ *est un* $(\mathrm{A}/\mathfrak{K})$*-module plat.*

b) $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{L}}(\mathrm{M})$ *est un* $(\mathrm{A}/\mathfrak{L})$*-module plat et l'homomorphisme canonique* (**0**, 15.1.5.2)

$$\psi_{\mathrm{M}} : ((\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(\mathrm{M})) \otimes_{\mathrm{A}} (\mathrm{A}/\mathfrak{L})))[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n] \to \mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{L}}(\mathrm{M})$$

est bijectif.

c) $(\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(\mathrm{M})) \otimes_{\mathrm{A}/\mathfrak{K}} (\mathrm{A}/\mathfrak{L})$ *est un* $(\mathrm{A}/\mathfrak{L})$*-module plat et la suite* $\mathbf{f}$ *est* $(\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(\mathrm{M}))$*-régulière.*

d) $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{L}}(\mathrm{M})$ *est un* $(\mathrm{A}/\mathfrak{L})$*-module plat, et pour tout* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{\mathrm{A}/\mathfrak{K}}(\mathrm{A}/\mathfrak{L})$, $(\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(\mathrm{M}))_{\mathfrak{p}}$ *est un* $(\mathrm{A}/\mathfrak{K})_{\mathfrak{p}}$*-module plat.*

On a alors les implications

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{a)} & \Rightarrow & \mathrm{c)} & \Rightarrow & \mathrm{b)} \\ & & \searrow & & \\ & & & \mathrm{d)} & \end{array}$$

Lorsque tout quotient d'un sous-module d'un $\mathrm{gr}^p_{\mathfrak{K}}(\mathrm{M})$ $(p \geqslant 0)$ *est idéalement séparé pour* $\mathfrak{J}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 1), *les conditions* a), b) *et* c) *sont équivalentes.*

Enfin, lorsque A *est noethérien, que les* f_i *appartiennent au radical de* A, *que la suite* $\mathbf{f}$ *est* $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(A)$*-régulière et que* M *est un* A*-module de type fini, les conditions* a), b), c), d) *sont équivalentes.*

L'implication *a)* ⇒ *c)* est immédiate ($\mathbf{0}$, 15.1.13). Si *c)* est vérifiée, il résulte de (19.5.5) que ψ_M est bijectif; en outre, $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(M)\otimes_A(A/\mathfrak{L})=\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(M)\otimes_{A/\mathfrak{K}}(A/\mathfrak{L})$ est un $(A/\mathfrak{L})$-module plat, donc il en est de même de $(\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(M)\otimes_A(A/\mathfrak{L}))[T_1, \ldots, T_n]$, et par suite de $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{L}}(M)$ puisque ψ_M est un $(A/\mathfrak{L})$-isomorphisme; donc *c)* entraîne *b)*. Le fait que *a)* implique *b)* montre aussitôt que *a)* implique aussi *d)*.

Lorsque tout quotient d'un $\mathrm{gr}^p_{\mathfrak{K}}(M)$ est idéalement séparé pour $\mathfrak{J}$, il résulte de (19.5.5) que la condition *b)* entraîne que $\mathbf{f}$ est $(\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(M))$-régulière; en outre, comme $(\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(M)\otimes_{A/\mathfrak{K}}(A/\mathfrak{L}))[T_1, \ldots, T_n]$, isomorphe à $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{L}}(M)$, est alors un $(A/\mathfrak{L})$-module plat, il en est de même de $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(M)\otimes_{A/\mathfrak{K}}(A/\mathfrak{L})$, qui en est un facteur direct; cela prouve donc que *b)* entraîne alors *c)*. D'autre part, sous la même hypothèse, *c)* entraîne *a)* en vertu de ($\mathbf{0}$, 15.1.21) (où on peut remplacer l'hypothèse noethérienne par l'hypothèse que M est idéalement séparé pour $\mathfrak{J}$, en vertu de ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 10.2.1)).

Il reste donc à prouver que lorsque A est noethérien, M de type fini et que les f_i appartiennent au radical de A, *d)* entraîne *a)*.

Il existe par hypothèse un A-module *libre de type fini* N et une suite exacte $0\to R\to N\to M\to 0$. Il suffit de prouver que *d)* entraîne *b)*, puisque tout quotient d'un sous-module d'un $\mathrm{gr}^p_{\mathfrak{K}}(M)$ est alors idéalement séparé pour $\mathfrak{J}$, en vertu du fait que $\mathrm{gr}^p_{\mathfrak{K}}(M)$ est un A-module de type fini, que $\mathfrak{J}$ est contenu dans le radical de A, et que A est noethérien (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 1); en d'autres termes, il s'agit de voir que ψ_M est *bijectif*.

Comme par hypothèse la suite $\mathbf{f}$ est $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(A)$-régulière, elle est aussi $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(N)$-régulière; on peut par suite appliquer (19.6.3), car tout module quotient d'un sous-module d'un $\mathrm{gr}^k_{\mathfrak{K}}(M)$ est alors séparé pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique puisque les f_i appartiennent au radical de A par hypothèse. Le diagramme commutatif (19.6.2.1) s'écrit donc ici

(19.7.1.1)
$$\begin{array}{ccc}
 & & 0 \\
 & & \downarrow \\
(\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(R, N)\otimes_{A/\mathfrak{K}}(A/\mathfrak{L}))[T_1, \ldots, T_n] & \xrightarrow{\psi'_R} & \mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{L}}(R, N) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(N)\otimes_{A/\mathfrak{K}}(A/\mathfrak{L}))[T_1, \ldots, T_n] & \xrightarrow{\psi_N} & \mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{L}}(N) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(M)\otimes_{A/\mathfrak{K}}(A/\mathfrak{L}))[T_1, \ldots, T_n] & \xrightarrow{\psi_M} & \mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{L}}(M) \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

où $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(R, N)$ (resp. $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{L}}(R, N)$) est le gradué associé à R pour la filtration des $R\cap\mathfrak{K}^m N$ (resp. $R\cap\mathfrak{L}^m N$); rappelons que dans ce diagramme les colonnes sont exactes et que ψ_N

est *bijectif*. Il s'agit, en vertu de (19.6.3), de prouver que ψ'_R est *surjectif*, ce qui va être fait en plusieurs étapes.

(19.7.1.2) Posons $B = \mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}} A \otimes_{A/\mathfrak{K}} (A/\mathfrak{L})$, $P = \mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(N) \otimes_{A/\mathfrak{K}} (A/\mathfrak{L})$, $Q = \mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{L}}(R, N)$; puisque ψ_N est bijectif, $P[T_1, \ldots, T_n]$ s'identifie à $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{L}}(N)$, et Q à un sous-$B[T_1, \ldots, T_n]$-module de $P[T_1, \ldots, T_n]$; nous allons d'abord voir que l'on a

$$Q = (Q \cap P)[T_1, \ldots, T_n]. \tag{19.7.1.3}$$

Pour cela, posons $Z = Q/((Q \cap P)[T_1, \ldots, T_n])$; c'est un sous-$B[T_1, \ldots, T_n]$-module de $P[T_1, \ldots, T_n]/((Q \cap P)[T_1, \ldots, T_n]) = (P/(Q \cap P))[T_1, \ldots, T_n]$. En tant que $(A/\mathfrak{L})$-module, il est donc isomorphe à un sous-module d'une somme directe de $(A/\mathfrak{L})$-modules isomorphes à $P/(Q \cap P) = (P+Q)/Q$. Mais $(P+Q)/Q$ est un $(A/\mathfrak{L})$-module isomorphe à un sous-module de $P[T_1, \ldots, T_n]/Q$, qui n'est autre que $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{L}}(M)$ en vertu du diagramme (19.7.1.1). On a donc

$$\mathrm{Ass}_{A/\mathfrak{L}}(Z) \subset \mathrm{Ass}_{A/\mathfrak{L}}(\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{L}}(M)). \tag{19.7.1.4}$$

Mais chacun des $\mathrm{gr}^{m}_{\mathfrak{L}}(M)$ est par hypothèse un $(A/\mathfrak{L})$-module *plat* de type fini, donc projectif puisque $A/\mathfrak{L}$ est noethérien, et on a par suite $\mathrm{Ass}_{A/\mathfrak{L}}(\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{L}}(M)) \subset \mathrm{Ass}_{A/\mathfrak{L}}(A/\mathfrak{L})$. Pour voir que $Z = 0$, il suffit par suite (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 1, cor. 1 de la prop. 2 et n° 3, prop. 7) de voir que pour tout $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_{A/\mathfrak{L}}(A/\mathfrak{L})$, on a $Z_{\mathfrak{q}} = 0$. Mais les idéaux de $\mathrm{Ass}_{A/\mathfrak{L}}(A/\mathfrak{L})$ sont les idéaux de la forme $\mathfrak{p}/(\mathfrak{L}/\mathfrak{K})$, où $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{A/\mathfrak{K}}(A/\mathfrak{L})$, et il revient donc au même de voir que $Z_{\mathfrak{p}} = 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{A/\mathfrak{K}}(A/\mathfrak{L})$. Or, si $\mathfrak{p} = \mathfrak{r}/\mathfrak{K}$, où $\mathfrak{r}$ est un idéal premier de A, on a $(\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(M))_{\mathfrak{p}} = \mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}_{\mathfrak{r}}}(M_{\mathfrak{r}})$ et $(A/K)_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{r}}/K_{\mathfrak{r}}$, et les images des f_i dans $A_{\mathfrak{r}}$ forment une suite $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}_{\mathfrak{r}}}(A_{\mathfrak{r}})$-régulière (**0**, 15.1.14); appliquant à $A_{\mathfrak{r}}$, $\mathfrak{K}_{\mathfrak{r}}$ et $M_{\mathfrak{r}}$ l'implication *a)* ⇒ *b)* de l'énoncé, on voit que l'hypothèse *d)* entraîne que $\psi_{M_{\mathfrak{r}}}$ est bijectif, donc aussi $\psi'_{R_{\mathfrak{r}}}$ en vertu de (19.6.3); en d'autres termes, $Q_{\mathfrak{r}} = Q'_{\mathfrak{r}}[T_1, \ldots, T_n]$, où on a posé $Q' = \mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(R, N) \otimes_{A/\mathfrak{K}} (A/\mathfrak{L})$, qui est ici un sous-B-module de P; en particulier $Q'_{\mathfrak{r}} = Q_{\mathfrak{r}} \cap P_{\mathfrak{r}}$, donc finalement on a bien $Z_{\mathfrak{r}} = Z_{\mathfrak{p}} = 0$, ce qui achève de démontrer (19.7.1.3).

(19.7.1.5) En vertu de (19.7.1.3), pour prouver que ψ'_R est surjectif, il suffit de montrer que tout élément homogène de degré m de $Q \cap P$ est l'image d'un élément de même degré de $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{K}}(R, N) \otimes_{A/\mathfrak{K}} (A/\mathfrak{L})$. Or, les éléments de degré m de P s'identifient (par ψ_N) aux éléments de $\mathrm{gr}^{m}_{\mathfrak{L}}(N)$ qui appartiennent à $(\mathfrak{K}^m N + \mathfrak{L}^{m+1} N)/\mathfrak{L}^{m+1} N$; ceux qui sont images d'éléments de $\mathrm{gr}^{m}_{\mathfrak{K}}(R, N) \otimes_{A/\mathfrak{K}} (A/\mathfrak{L})$ s'identifient aux éléments de $\mathrm{gr}^{m}_{\mathfrak{L}}(N)$ appartenant à $((R \cap \mathfrak{K}^m N) + \mathfrak{L}^{m+1} N)/\mathfrak{L}^{m+1} N$. Il suffira donc finalement de prouver, pour tout entier $m > 0$, l'inclusion

$$((R \cap \mathfrak{L}^m N) + \mathfrak{L}^{m+1} N) \cap (\mathfrak{K}^m N + \mathfrak{L}^{m+1} N) \subset (R \cap \mathfrak{K}^m N) + \mathfrak{L}^{m+1} N.$$

Comme $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{L}$, on vérifie aussitôt que le premier membre de cette relation est égal à $(R \cap (\mathfrak{K}^m N + \mathfrak{L}^{m+1} N)) + \mathfrak{L}^{m+1} N$, si bien que tout se réduit à prouver

$$R \cap (\mathfrak{K}^m N + \mathfrak{L}^{m+1} N) \subset (R \cap \mathfrak{K}^m N) + \mathfrak{L}^{m+1} N. \tag{19.7.1.6}$$

Nous procéderons par *récurrence sur m*, supposant donc (19.7.1.6) vérifiée lorsqu'on remplace m par un entier $m'<m$. Nous considérerons d'autre part, pour m fixé et pour un entier $d\geqslant 0$, la relation

$$(*_d)\qquad \mathrm{R}\cap(\mathfrak{K}^m\mathrm{N}+\mathfrak{L}^{m+1}\mathrm{N})\subset(\mathrm{R}\cap\mathfrak{K}^d\mathrm{N}\cap\mathfrak{L}^m\mathrm{N})+\mathfrak{L}^{m+1}\mathrm{N}.$$

Il est clair qu'il suffit de démontrer $(*_d)$ pour $d=m$, et d'autre part $(*_0)$ est trivialement vraie. Nous prouverons $(*_d)$ par *récurrence sur d*; autrement dit, nous supposons, pour un $d\geqslant 0$ fixé (avec $d<m$), que $(*_d)$ est vraie, et nous voulons prouver

$$(*_{d+1})\qquad \mathrm{R}\cap(\mathfrak{K}^m\mathrm{N}+\mathfrak{L}^{m+1}\mathrm{N})\subset(\mathrm{R}\cap\mathfrak{K}^{d+1}\mathrm{N}\cap\mathfrak{L}^m\mathrm{N})+\mathfrak{L}^{m+1}\mathrm{N}.$$

Considérons pour cela, pour un $h\geqslant 0$, la relation

$$(**_{d+1,h})\qquad \mathrm{R}\cap(\mathfrak{K}^m\mathrm{N}+\mathfrak{L}^{m+1}\mathrm{N})\subset(\mathrm{R}\cap(\mathfrak{K}^{d+1}\mathrm{N}+\mathfrak{K}^d\mathfrak{L}^h\mathrm{N})\cap\mathfrak{L}^m\mathrm{N})+\mathfrak{L}^{m+1}\mathrm{N}$$

L'hypothèse $(*_d)$ implique que $(**_{d+1,0})$ est vraie. Nous prouverons par *récurrence sur h* que $(**_{d+1,h})$ est vraie pour *tout* $h\geqslant 0$. Mais on a le

Lemme **(19.7.1.7)**. — *Soient* A *un anneau noethérien,* N *un* A*-module de type fini,* E, F *deux sous-modules de* N, $\mathfrak{L}$ *un idéal de* A. *Pour tout* $k>0$ *il existe* $h>0$ *tel que* $\mathrm{E}\cap(\mathrm{F}+\mathfrak{L}^h\mathrm{N})\subset(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})+\mathfrak{L}^k\mathrm{N}$.

En effet, soit $\varphi:\mathrm{N}\to\mathrm{N}/(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})=\mathrm{N}_1$ l'homomorphisme canonique, et posons $\mathrm{E}_1=\varphi(\mathrm{E})$, $\mathrm{F}_1=\varphi(\mathrm{F})$, de sorte que $\mathrm{E}_1\cap\mathrm{F}_1=0$ et $\varphi(\mathrm{E}\cap(\mathrm{F}+\mathfrak{L}^h\mathrm{N}))=\mathrm{E}_1\cap(\mathrm{F}_1+\mathfrak{L}^h\mathrm{N}_1)$. On sait ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.2) qu'il existe h tel que $(\mathrm{E}_1+\mathrm{F}_1)\cap\mathfrak{L}^h\mathrm{N}_1\subset\mathfrak{L}^k(\mathrm{E}_1+\mathrm{F}_1)$; si h est ainsi choisi et si $x_1\in\mathrm{E}_1$ est tel qu'il existe $y_1\in\mathrm{F}_1$ pour lequel $x_1-y_1\in\mathfrak{L}^h\mathrm{N}_1$, on en déduit d'après ce qui précède qu'il existe $u_1\in\mathfrak{L}^k\mathrm{E}_1$ et $v_1\in\mathfrak{L}^k\mathrm{F}_1$ tels que $x_1=u_1$ et $y_1=v_1$; donc $\mathrm{E}_1\cap(\mathrm{F}_1+\mathfrak{L}^h\mathrm{N}_1)\subset\mathfrak{L}^k\mathrm{N}_1$, ce qui prouve le lemme.

Il suffit alors d'appliquer ce lemme avec $\mathrm{E}=\mathrm{R}\cap\mathfrak{L}^m\mathrm{N}$, $\mathrm{F}=\mathfrak{K}^{d+1}\mathrm{N}$ et de prendre $k=m+1$ pour en déduire qu'avec la valeur de h correspondante, $(**_{d+1,h})$ entraîne $(*_{d+1})$.

Nous supposons donc dans tout ce qui suit que $(**_{d+1,h})$ *est vérifiée.*

(19.7.1.8) *Démonstration de* $(**_{d+1,h+1})$: *Premier cas :* $h\leqslant m-d$.

Partons donc d'un élément

$$\textbf{(19.7.1.9)}\qquad g\in\mathrm{R}\cap(\mathfrak{K}^{d+1}\mathrm{N}+\mathfrak{K}^d\mathfrak{L}^h\mathrm{N})\cap\mathfrak{L}^m\mathrm{N}$$

congru mod. $\mathfrak{L}^{m+1}\mathrm{N}$ à un élément $g_1\in\mathrm{R}\cap(\mathfrak{K}^m\mathrm{N}+\mathfrak{L}^{m+1}\mathrm{N})$; on a donc

$$\textbf{(19.7.1.10)}\qquad g\in\mathfrak{K}^m\mathrm{N}+\mathfrak{L}^{m+1}\mathrm{N}.$$

Il suffira de prouver que g est aussi congru mod. $\mathfrak{L}^{m+1}\mathrm{N}$ à un élément

$$g_2\in\mathrm{R}\cap(\mathfrak{K}^{d+1}\mathrm{N}+\mathfrak{K}^d\mathfrak{L}^{h+1}\mathrm{N}),$$

car cela entraînera $g_2\in\mathfrak{L}^m\mathrm{N}$, puisque l'on aura $g\in\mathfrak{L}^m\mathrm{N}$ et $g_2-g\in\mathfrak{L}^{m+1}\mathrm{N}$. Dans le cas $h\leqslant m-d$ que nous considérons, il suffit de démontrer la relation

$$\textbf{(19.7.1.11)}\qquad (\mathfrak{K}^m\mathrm{N}+\mathfrak{L}^{m+1}\mathrm{N})\cap\mathfrak{K}^d\mathrm{N}\subset\mathfrak{L}^{m-d+1}\mathfrak{K}^d\mathrm{N}+\mathfrak{K}^{d+1}\mathrm{N}$$

car les relations (19.7.1.9) et (19.7.1.10) entraînent que g appartient au premier membre de (19.7.1.11), et comme $h \leqslant m-d$, on a $\mathfrak{L}^{m-d+1} \subset \mathfrak{L}^{h+1}$, ce qui établira $(**_{d+1,h+1})$. D'ailleurs on a $\mathfrak{K}^m \mathrm{N} \subset \mathfrak{K}^d \mathrm{N}$, et la relation

(19.7.1.12) $$\mathfrak{L}^{m+1}\mathrm{N} \cap \mathfrak{K}^d \mathrm{N} \subset \mathfrak{L}^{m-d+1}\mathfrak{K}^d \mathrm{N}$$

entraînera (19.7.1.11). Comme N est un A-module libre de type fini, on voit qu'il suffit donc de prouver

(19.7.1.13) $$\mathfrak{L}^{m+1} \cap \mathfrak{K}^d \subset \mathfrak{L}^{m-d+1}\mathfrak{K}^d.$$

Il suffira de prouver que, de façon générale, pour $d<m$, on a

(19.7.1.14) $$\mathfrak{L}^{m+1} \cap \mathfrak{K}^d \subset \mathfrak{L}^{m-d+1}\mathfrak{K}^d + \mathfrak{K}^{d+1}.$$

En effet, comme $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{L}$, donc $\mathfrak{L}^{m-d+1}\mathfrak{K}^d \subset \mathfrak{L}^{m+1}$, la relation précédente entraînera

$$\mathfrak{L}^{m+1} \cap \mathfrak{K}^d \subset \mathfrak{L}^{m-d+1}\mathfrak{K}^d + \mathfrak{L}^{m+1} \cap \mathfrak{K}^{d+1}$$

et par récurrence sur $d<m$, on en conclura

$$\mathfrak{L}^{m+1} \cap \mathfrak{K}^d \subset \mathfrak{L}^{m-d+1}\mathfrak{K}^d + \mathfrak{K}^{m+1}$$

d'où (19.7.1.13), puisque $\mathfrak{K}^{m+1} \subset \mathfrak{L}^{m-d+1}\mathfrak{K}^d$.

Comme $\mathfrak{L} = \mathfrak{J} + \mathfrak{K}$, la relation (19.7.1.14) s'écrit aussi

(19.7.1.15) $$(\mathfrak{J}^{m+1} + \mathfrak{J}^m\mathfrak{K} + \ldots + \mathfrak{J}\mathfrak{K}^m + \mathfrak{K}^{m+1}) \cap \mathfrak{K}^d \subset$$
$$\subset \mathfrak{J}^{m-d+1}\mathfrak{K}^d + \mathfrak{J}^{m-d}\mathfrak{K}^{d+1} + \ldots + \mathfrak{J}\mathfrak{K}^m + \mathfrak{K}^{m+1} + \mathfrak{K}^{d+1} = \mathfrak{J}^{m-d+1}\mathfrak{K}^d + \mathfrak{K}^{d+1}.$$

Nous allons voir que cette inclusion est elle-même conséquence de

(19.7.1.16) $$\mathfrak{K}^a\mathfrak{J}^b \cap \mathfrak{K}^{a+1} \subset \mathfrak{K}^{a+1}\mathfrak{J}^{b-1}$$

valable pour $a \geqslant 0$, $b \geqslant 1$. En effet, il suffit, pour prouver (19.7.1.15) de montrer que pour $0 < q \leqslant d$, on a

(19.7.1.17) $$(\mathfrak{J}^{m+1} + \mathfrak{J}^m\mathfrak{K} + \ldots + \mathfrak{J}\mathfrak{K}^m + \mathfrak{K}^{m+1}) \cap \mathfrak{K}^d \subset$$
$$\subset (\mathfrak{J}^{m+1-q}\mathfrak{K}^q + \mathfrak{J}^{m-q}\mathfrak{K}^{q+1} + \ldots + \mathfrak{K}^{m+1}) \cap \mathfrak{K}^d$$

car pour $q=d$, cela entraînera (19.7.1.15). Or, pour prouver (19.7.1.17), il suffit de procéder par récurrence sur q en supposant la relation vraie pour $q<d$; un élément du premier membre s'écrit donc par hypothèse $y+z$ avec $y \in \mathfrak{J}^{m+1-q}\mathfrak{K}^q$, $z \in \mathfrak{J}^{m-q}\mathfrak{K}^{q+1} + \ldots + \mathfrak{K}^{m+1}$; comme $y+z \in \mathfrak{K}^d \subset \mathfrak{K}^{q+1}$, on en déduit $y \in \mathfrak{K}^{q+1}$, puisque $z \in \mathfrak{K}^{q+1}$; tenant compte de (19.7.1.16), on a $y \in \mathfrak{J}^{m-q}\mathfrak{K}^{q+1}$, donc

$$y+z \in \mathfrak{J}^{m-q}\mathfrak{K}^{q+1} + \ldots + \mathfrak{K}^{m+1}, \quad \text{et} \quad y+z \in \mathfrak{K}^d$$

par hypothèse, ce qui prouve (19.7.1.17) où q a été remplacé par $q+1$.

Reste donc à établir (19.7.1.16). Un élément du premier membre s'écrit $a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n$, où les a_i appartiennent à $\mathfrak{K}^a\mathfrak{J}^{b-1}$; tenant compte de ce que la suite $\mathbf{f}$ est $(\mathfrak{K}^a/\mathfrak{K}^{a+1})$-régulière par hypothèse, donc aussi $(\mathfrak{K}^a/\mathfrak{K}^{a+1})$-quasi-régulière (**0**, 15.1.9), il résulte de la définition (**0**, 15.1.7) que la relation $a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n \in \mathfrak{K}^{a+1}$, où les $a_i \in \mathfrak{K}^a$, entraîne nécessairement $a_i \in \mathfrak{K}^{a+1}$, donc $a_i \in \mathfrak{K}^a\mathfrak{J}^{b-1} \cap \mathfrak{K}^{a+1}$; il suffit de raisonner par récurrence sur b pour $b \geqslant 1$ (le cas $b=1$ étant trivial) pour achever de prouver (19.7.1.16) et par suite aussi $(**_{d+1,h+1})$ pour $h \leqslant m-d$.

(19.7.1.18) *Démonstration de* $(**_{d+1,h+1})$; *Deuxième cas :* $h > m-d$.

Nous allons tout d'abord démontrer que, pour *tout* $h \geqslant 0$, on a

(19.7.1.19) $$\mathrm{R} \cap (\mathfrak{K}^{d+1}\mathrm{N} + \mathfrak{K}^d\mathfrak{L}^h\mathrm{N}) \subset \mathfrak{L}^h(\mathrm{R} \cap \mathfrak{K}^d\mathrm{N}) + \mathfrak{L}^{h+1}\mathfrak{K}^d\mathrm{N} + \mathfrak{K}^{d+1}\mathrm{N}.$$

Considérons pour cela un élément z du premier membre de (19.7.1.19). Notons que l'on a $\mathfrak{K}^{d+1}\mathrm{N}+\mathfrak{K}^d\mathfrak{L}^h\mathrm{N}=\mathfrak{K}^{d+1}\mathrm{N}+\mathfrak{K}^d\mathfrak{J}^h\mathrm{N}$ puisque $\mathfrak{L}=\mathfrak{K}+\mathfrak{J}$; nous allons considérer la classe $\bar{z}$ de z dans $\mathrm{gr}^h_{\mathfrak{J}}(\mathrm{gr}^d_{\mathfrak{K}}(\mathrm{N}))$, qui, en vertu de (19.5.5) et de l'hypothèse sur $\mathbf{f}$, s'identifie à un sous-$(\mathrm{A}/\mathfrak{L})$-module de $\mathrm{gr}^{h+d}_{\mathfrak{L}}(\mathrm{N})$. Du fait que $z \in \mathrm{R}$, nous allons montrer que l'on a même (avec l'identification précédente)

(19.7.1.20) $$\bar{z} \in \mathrm{gr}^{h+d}_{\mathfrak{L}}(\mathrm{R}, \mathrm{N}).$$

En effet, on a noté, dans la démonstration de (19.7.1.3) que, pour tout idéal premier $\mathfrak{r}$ de A tel que $\mathfrak{p}=\mathfrak{r}/\mathfrak{K} \in \mathrm{Ass}_{\mathrm{A}/\mathfrak{K}}(\mathrm{A}/\mathfrak{L})$, l'application $\psi'_{\mathrm{R}_\mathfrak{r}}$ est bijective, et par suite la relation (19.7.1.6), où l'on remplace tous les modules par leurs localisés en $\mathfrak{r}$, est vraie. Comme z appartient à $\mathrm{R} \cap (\mathfrak{K}^d\mathrm{N}+\mathfrak{L}^{d+1}\mathrm{N})$, son image $z/1$ dans $\mathrm{R}_\mathfrak{r}$ appartient à $(\mathrm{R}_\mathfrak{r} \cap \mathfrak{K}^d_\mathfrak{r}\mathrm{N}_\mathfrak{r})+\mathfrak{L}^{d+1}_\mathfrak{r}\mathrm{N}_\mathfrak{r}$, donc l'image $\bar{z}/1$ de $\bar{z}$ dans $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{L}_\mathfrak{r}}(\mathrm{N}_\mathfrak{r})$ appartient à $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{L}_\mathfrak{r}}(\mathrm{R}_\mathfrak{r}, \mathrm{N}_\mathfrak{r})=(\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{L}}(\mathrm{R}, \mathrm{N}))_\mathfrak{r}=(\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{L}}(\mathrm{R}, \mathrm{N}))_\mathfrak{q}$, où $\mathfrak{q}=\mathfrak{r}/\mathfrak{L}$. En d'autres termes l'image de $\bar{z}$ par l'application canonique $(\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{L}}(\mathrm{N}))_\mathfrak{q} \to (\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{L}}(\mathrm{M}))_\mathfrak{q}$ est nulle pour tout $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_{\mathrm{A}/\mathfrak{L}}(\mathrm{A}/\mathfrak{L})$. Comme on a vu dans la démonstration de (19.7.1.3) que $\mathrm{Ass}_{\mathrm{A}/\mathfrak{L}}(\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{L}}(\mathrm{M})) \subset \mathrm{Ass}_{\mathrm{A}/\mathfrak{L}}(\mathrm{A}/\mathfrak{L})$, on en déduit bien (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, nº 1, cor. 1 de la prop. 2 et nº 3, prop. 7) que l'image de $\bar{z}$ par l'application canonique $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{L}}(\mathrm{N}) \to \mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{L}}(\mathrm{M})$ est nulle, c'est-à-dire que l'on a la relation (19.7.1.20).

Cela étant, on peut écrire par définition

(19.7.1.21) $$z \equiv \sum_{|\mathbf{p}|=h} c_\mathbf{p}\mathbf{f}^\mathbf{p} \bmod . \mathfrak{K}^{d+1}\mathrm{N}$$

où on pose comme d'ordinaire $\mathbf{p}=(p_1, \ldots, p_n)$, $\mathbf{f}^\mathbf{p}=f_1^{p_1}f_2^{p_2}\ldots f_n^{p_n}$, $|\mathbf{p}|=p_1+\ldots+p_n$ et où $c_\mathbf{p} \in \mathfrak{K}^d\mathrm{N}$. En outre, comme ψ_N identifie $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{L}}(\mathrm{N})$ à $(\mathrm{gr}_{\mathfrak{K}}(\mathrm{N}) \otimes_{\mathrm{A}/\mathfrak{K}} (\mathrm{A}/\mathfrak{L}))[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$, les $c_\mathbf{p}$ sont *déterminés* mod. $\mathfrak{K}^d\mathfrak{L}\mathrm{N}$, et si $\bar{c}_\mathbf{p}$ est la classe de $c_\mathbf{p}$ mod. $\mathfrak{K}^d\mathfrak{L}\mathrm{N}$, on a, par l'identification précédente,

(19.7.1.22) $$\bar{z} = \sum_{|\mathbf{p}|=h} \bar{c}_\mathbf{p}\mathbf{T}^\mathbf{p}.$$

Utilisant (19.7.1.3), on en déduit que l'on a nécessairement, pour tout $\mathbf{p}$ tel que $|\mathbf{p}|=h$ ($\bar{c}_\mathbf{p}$ étant cette fois identifié par ψ_N à un élément de $\mathrm{gr}^d_{\mathfrak{L}}(\mathrm{N})$)

(19.7.1.23) $$\bar{c}_\mathbf{p} \in \mathrm{gr}^d_{\mathfrak{L}}(\mathrm{R}, \mathrm{N}).$$

Mais puisque $d<m$, l'hypothèse que $(*_d)$ est vraie implique que $\bar{c}_\mathbf{p}$ appartient à l'image de ψ'_R, donc qu'on peut supposer que $c_\mathbf{p} \in (\mathrm{R} \cap \mathfrak{K}^d\mathrm{N})+\mathfrak{K}^d\mathfrak{L}\mathrm{N}$. La relation (19.7.1.21) donne alors

$$z \in \mathfrak{J}^h(\mathrm{R} \cap \mathfrak{K}^d\mathrm{N})+\mathfrak{J}^h\mathfrak{K}^d\mathfrak{L}\mathrm{N}+\mathfrak{K}^{d+1}\mathrm{N}$$

et comme $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{L}$, cela prouve (19.7.1.19).

En particulier, on peut donc écrire

$$g = t + g_2$$

avec $t \in \mathfrak{L}^h(\mathrm{R} \cap \mathfrak{K}^d\mathrm{N})$ et $g_2 \in \mathfrak{K}^{d+1}\mathrm{N} + \mathfrak{K}^d\mathfrak{L}^h\mathrm{N}$; en outre, comme $t \in \mathrm{R}$ et $g \in \mathrm{R}$, on a $g_2 \in \mathrm{R}$. D'autre part, utilisant l'hypothèse $h \geqslant m - d + 1$, on voit que $t \in \mathfrak{L}^{m+1}\mathrm{N}$. L'élément g_2 répond donc à toutes les conditions énoncées au début de (19.7.1.8), ce qui achève la démonstration de (19.7.1).

Remarques (**19.7.2**). — (i) Lorsque l'on suppose que $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{K}}(\mathrm{A})$ est un $(\mathrm{A}/\mathfrak{K})$-module *plat*, l'hypothèse que la suite f est $(\mathrm{A}/\mathfrak{K})$-régulière entraîne qu'elle est aussi $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{K}}(\mathrm{A})$-régulière (**0**, 15.1.14). On notera que ce sera le cas lorsque A *et* $\mathrm{A}/\mathfrak{K}$ *sont des anneaux réguliers* (**0**, 17.3.6) : en effet, $\mathfrak{K}$ est alors un idéal régulier de A (19.1.2), donc quasi-régulier, et en localisant aux idéaux maximaux de A contenant $\mathfrak{K}$ et utilisant (**0**, 15.1.7), on voit que $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{K}}(\mathrm{A})$ est un $(\mathrm{A}/\mathfrak{K})$-module *projectif*.

(ii) Il serait intéressant de pouvoir prouver la dernière conclusion de (19.7.1) en supposant seulement qu'il existe une A-algèbre B qui est un anneau noethérien, pour lequel $\mathfrak{J}\mathrm{B}$ est contenu dans le radical de B, et que M est un B-*module* de type fini.

Corollaire (**19.7.3**). — *Soient* A *un anneau local noethérien,* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal,* $\mathfrak{K}$ *un idéal de* A *tel que l'anneau* $\mathrm{A}/\mathfrak{K}$ *soit régulier et de dimension n,* M *un* A-*module de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{K}}(\mathrm{M})$ *est un* $(\mathrm{A}/\mathfrak{K})$-*module plat.*

b) *Si* P(T) *et* Q(T) *sont les séries de Poincaré des* $(\mathrm{A}/\mathfrak{m})$-*modules gradués* $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{m}}(\mathrm{M})$ *et* $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{K}}(\mathrm{M}) \otimes_{\mathrm{A}/\mathfrak{K}} (\mathrm{A}/\mathfrak{m})$, *on a*

$$\mathrm{Q}(\mathrm{T}) = \mathrm{P}(\mathrm{T})(1-\mathrm{T})^n. \tag{19.7.3.1}$$

Soit $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ une suite d'éléments de A tels que les images des f_i dans $\mathrm{A}/\mathfrak{K}$ forment un système régulier de paramètres de $\mathrm{A}/\mathfrak{K}$ (**0**, 17.1.6), de sorte que $\mathbf{f}$ est une suite $(\mathrm{A}/\mathfrak{K})$-régulière; en outre, si $\mathfrak{J}$ est l'idéal engendré par $\mathbf{f}$, on a $\mathfrak{J} + \mathfrak{K} = \mathfrak{m}$, et comme $\mathrm{A}/\mathfrak{m}$ est un corps, $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{m}}(\mathrm{M})$ est un $(\mathrm{A}/\mathfrak{m})$-module plat. Comme A est noethérien et M un A-module de type fini, on peut appliquer l'équivalence de *a)* et *b)* dans (19.7.1). En outre, comme $\mathrm{A}/\mathfrak{m}$ est un corps, et que ψ_{M} est surjectif, le fait que ψ_{M} soit bijectif équivaut à dire que pour tout $h \geqslant 0$, $\mathrm{gr}^h_{\mathfrak{m}}(\mathrm{M})$ et le sous-module des éléments de degré h de $(\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{K}}(\mathrm{M}) \otimes_{\mathrm{A}/\mathfrak{K}} (\mathrm{A}/\mathfrak{m}))[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$ ont même rang sur $\mathrm{A}/\mathfrak{m}$; mais pour le second de ces modules le rang en question est évidemment égal à $\sum_{r=0}^{h} \binom{r+n-1}{n-1} \mathrm{rg}(\mathrm{gr}^{h-r}_{\mathfrak{K}}(\mathrm{M}) \otimes_{\mathrm{A}/\mathfrak{K}} (\mathrm{A}/\mathfrak{m}))$. Comme $(1-\mathrm{T})^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{n-1} \mathrm{T}^r$, cela prouve que la relation (19.7.3.1) est nécessaire et suffisante pour que ψ_{M} soit bijectif.

Corollaire (**19.7.4**). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Y *un sous-préschéma fermé de* X, *régulier et connexe,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-*Module cohérent normalement plat* (6.10.1) *le long de* Y. *Alors il existe une série formelle* $\mathrm{R} \in \mathbf{Q}[[\mathrm{T}]]$ (indépendante de $x \in \mathrm{Y}$) *telle que, pour tout* $x \in \mathrm{Y}$, *la série de Poincaré de* $\mathrm{gr}^\bullet_{\mathfrak{m}_x}(\mathscr{F}_x)$ *soit donnée par la formule*

$$\mathrm{P}_x(\mathscr{F})(\mathrm{T}) = \mathrm{R}(\mathrm{T})(1-\mathrm{T})^{-n} \qquad \textit{où } n = \dim(\mathscr{O}_{\mathrm{Y},x}). \tag{19.7.4.1}$$

Soit $\mathscr{J}$ l'Idéal cohérent de $\mathcal{O}_X$ définissant Y; l'hypothèse sur $\mathscr{F}$ signifie que $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{J}}(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module plat. On peut donc, pour tout $x \in Y$, appliquer (19.7.3) en prenant $A = \mathcal{O}_{X,x}$, $\mathfrak{K} = \mathscr{J}_x$, $M = \mathscr{F}_x$; l'hypothèse *a)* étant remplie par hypothèse, la série de Poincaré $P_x(\mathscr{F})(T)$ est donc égale à $R_x(T)(1-T)^{-n}$, où $R_x(T)$ est la série de Poincaré de $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{J}_x}(\mathscr{F}_x) \otimes_{\mathcal{O}_{Y,x}} \boldsymbol{k}(x)$. Or, chacun des $\mathcal{O}_Y$-Modules $\mathscr{J}^h\mathscr{F}/\mathscr{J}^{h+1}\mathscr{F}$ est plat et cohérent par hypothèse, donc localement libre (2.1.12), et puisque Y est supposé connexe, chacun des $\mathscr{J}^h\mathscr{F}/\mathscr{J}^{h+1}\mathscr{F}$ est de rang constant dans Y, ce qui prouve que la série de Poincaré $R_x(T)$ est *indépendante* de $x \in Y$.

Corollaire **(19.7.5)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Y *un sous-préschéma fermé de* X, Z *un sous-préschéma fermé de* Y; *on suppose* Y *et* Z *réguliers. Soit* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent.*

(i) *Si* $\mathscr{F}$ *est normalement plat le long de* Y *aux points de* Z (cf. (11.3.4) pour la définition de la platitude normale en un point), *alors* $\mathscr{F}$ *est normalement plat le long de* Z.

(ii) *Supposons en outre que* Z *soit connexe et que* $\mathcal{O}_X$ *soit normalement plat le long de* Y *aux points de* Z (ce qui aura lieu en particulier si X est *régulier* aux points de Z). *Si* $\mathscr{F}$ *est normalement plat le long de* Z *et s'il existe* un *point* $z \in Z$ *tel que* $\mathscr{F}$ *soit normalement plat le long de* Y *au point* z, *alors* $\mathscr{F}$ *est normalement plat le long de* Y *aux points de* Z.

Soient $\mathscr{K}$ et $\mathscr{L} \supset \mathscr{K}$ les Idéaux cohérents de $\mathcal{O}_X$ définissant respectivement Y et Z. Pour tout point $z \in Z$, l'immersion canonique $Z \to Y$ est régulière au point z, puisque Y et Z sont réguliers en ce point (19.1.1); autrement dit, il existe une suite $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments de $\mathcal{O}_{X,z}$ qui est $\mathscr{K}_z$-régulière et est telle que $\mathscr{L}_z = \mathscr{K}_z + \sum_i f_i \mathcal{O}_{X,z}$.

(i) L'hypothèse signifie que $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{K}_z}(\mathscr{F}_z)$ est un $\mathcal{O}_{Y,z}$-module plat; elle entraîne donc que $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{L}_z}(\mathscr{F}_z)$ est un $\mathcal{O}_{Z,z}$-module plat, en vertu du fait que dans (19.7.1), *a)* entraîne *b)*.

(ii) L'hypothèse supplémentaire sur X entraîne que la suite (f_i) est $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{K}_z}(\mathscr{F}_z)$-régulière en tout point $z \in Z$ (19.7.2). D'autre part, Z étant régulier et connexe, est intègre, et si $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{K}_z}(\mathscr{F}_z)$ est $\mathcal{O}_{Y,z}$-plat en un point $z \in Z$, alors, comme le point générique ζ de Z est une générisation de z, on en conclut que $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{K}_\zeta}(\mathscr{F}_\zeta)$ est $\mathcal{O}_{Y,\zeta}$-plat $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 6.3.1)$. On en déduit que si en tout point z' de Z, $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{L}_{z'}}(\mathscr{F}_{z'})$ est un $\mathcal{O}_{Z,z'}$-module plat, alors $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{K}_{z'}}(\mathscr{F}_{z'})$ est un $\mathcal{O}_{Y,z'}$-module plat, car on peut appliquer l'équivalence de *a)* et *d)* dans (19.7.1).

19.8. Propriétés de passage à la limite projective.

Dans ce numéro, les notations et conventions sur les limites projectives sont celles de (8.5.1) et de (8.8.1).

Proposition **(19.8.1)**. — *Supposons que les morphismes de transition* $S_\mu \to S_\lambda$ $(\lambda \leqslant \mu)$ *soient plats, et en outre que* l'une *des deux hypothèses suivantes soit vérifiée :*

1° *Les préschémas* S_λ *sont localement noethériens.*

2° *Les morphismes de transition* $S_\mu \to S_\lambda$ *sont surjectifs (donc fidèlement plats).*

Dans ces conditions :

(i) *Supposons* S_α *quasi-compact. Soit* $\mathscr{F}_\alpha$ *un* $\mathcal{O}_{S_\alpha}$*-Module quasi-cohérent, que l'on suppose en outre de type fini quand l'hypothèse* 1° *est vérifiée. Soit* $(f_{i\alpha})_{1\leqslant i\leqslant n}$ *une suite finie de sections de* $\mathscr{F}_\alpha$ *au-dessus de* S_α. *Pour que la suite des sections* f_i *du* $\mathcal{O}_S$*-Module* $\mathscr{F}$ *au-dessus de* S, *correspondant aux* $f_{i\alpha}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, *soit* $\mathscr{F}$*-régulière, il faut et il suffit qu'il existe* $\lambda\geqslant\alpha$ *tel que la suite des sections* $f_{i\lambda}$ *de* $\mathscr{F}_\lambda$ *au-dessus de* S_λ *soit* $\mathscr{F}_\lambda$*-régulière.*

(ii) *Supposons* X_α *quasi-compact, et soit* $j_\alpha : X_\alpha\rightarrow S_\alpha$ *une immersion, que l'on suppose localement de présentation finie lorsque l'hypothèse* 2° *est vérifiée. Alors, pour que l'immersion correspondante* $j : X\rightarrow S$ *soit régulière, il faut et il suffit qu'il existe* $\lambda\geqslant\alpha$ *tel que* $j_\lambda : X_\lambda\rightarrow S_\lambda$ *soit régulière.*

(i) Si $p_\lambda : S\rightarrow S_\lambda$ est la projection canonique, on a $\mathscr{F}/(\sum_{j=1}^{i-1} f_j\mathscr{F}) = p_\lambda^*(\mathscr{F}_\lambda/(\sum_{j=1}^{i-1} f_{j\lambda}\mathscr{F}_\lambda))$, donc on est ramené au cas $n=1$, auquel cas on supprime l'indice i. Le fait que la condition soit suffisante résulte de ce que p_λ est plat (8.3.8) et de (**0**, 15.1.5). Dans le cas 2°, p_λ est fidèlement plat (8.3.8) et la nécessité de la condition résulte encore de (**0**, 15.2.5), avec $\lambda=\alpha$. Dans le cas 1°, notons $\mathscr{N}_\lambda$ (resp. $\mathscr{N}$) le noyau de l'homomorphisme $\mathscr{F}_\lambda\rightarrow\mathscr{F}_\lambda$ (resp. $\mathscr{F}\rightarrow\mathscr{F}$), multiplication par f_λ (resp. par f); puisque $\mathscr{F}_\lambda$ est cohérent par hypothèse, il en est de même de $\mathscr{N}_\lambda$, donc l'hypothèse $\mathscr{N}=0$ entraîne $\mathscr{N}_\lambda=0$ pour un $\lambda\geqslant\alpha$ en vertu de (8.5.8, (ii)).

(ii) Comme p_λ est plat, la suffisance de la condition résulte de (19.1.5, (ii)). Pour prouver sa nécessité, notons que, puisque $j_\alpha(X_\alpha)$ est quasi-compact, il est contenu dans un ouvert quasi-compact de S_α et on peut donc se limiter au cas où S_α est aussi quasi-compact et j_α une immersion fermée, de sorte que l'image de X_α est définie par un Idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}_\alpha$ de $\mathcal{O}_{S_\alpha}$, qu'on peut en outre supposer de type fini dans les cas 1° et 2° (j_α étant localement de présentation finie dans le cas 2°); l'image de X_λ (resp. X) dans S_λ (resp. S) est alors définie par $\mathscr{J}_\lambda=\mathscr{J}_\alpha\mathcal{O}_{S_\lambda}$ (resp. $\mathscr{J}=\mathscr{J}_\alpha\mathcal{O}_S$) qui est encore de type fini. On peut en outre, compte tenu de (8.2.11), supposer que $\mathscr{J}$ est engendré par une suite régulière $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de sections au-dessus de S, qui définissent par suite un homomorphisme surjectif $u : \mathcal{O}_S^n\rightarrow\mathscr{J}$. Compte tenu de (8.5.2, (i)) et (8.5.7), il existe un $\lambda\geqslant\alpha$ et un homomorphisme surjectif $u_\lambda : \mathcal{O}_{S_\lambda}^n\rightarrow\mathscr{J}_\lambda$ tels que $u=p_\lambda^*(u_\lambda)$, donc les f_i sont les images canoniques de sections $f_{i\lambda}$ de $\mathscr{J}_\lambda$ au-dessus de S_λ engendrant cet Idéal. En vertu de (i), il existe donc $\mu\geqslant\lambda$ tel que la suite $(f_{i\mu})$ soit $\mathcal{O}_{S_\mu}$-régulière, donc l'immersion j_μ est régulière.

Proposition (**19.8.2**). — *Soient* X_α *un* S_α*-préschéma quasi-compact et localement de présentation finie.*

(i) *Soient* $\mathscr{F}_\alpha$ *un* $\mathcal{O}_{X_\alpha}$*-Module quasi-cohérent de présentation finie,* $(f_{i\alpha})_{1\leqslant i\leqslant n}$ *une suite de sections de* $\mathcal{O}_{X_\alpha}$ *au-dessus de* X_α. *Pour que la suite de sections* f_i *de* $\mathcal{O}_X$ *au-dessus de* X, *correspondant aux* $f_{i\alpha}$, *soit* $\mathscr{F}$*-transversalement régulière relativement à* S (19.2.1), *il faut et il suffit qu'il existe* $\lambda\geqslant\alpha$ *tel que la suite des sections* $f_{i\lambda}$ *de* $\mathcal{O}_{X_\lambda}$ *au-dessus de* X_λ *soit* $\mathscr{F}_\lambda$*-transversalement régulière relativement à* S_λ.

(ii) *Soient* Y_α *un* S_α*-préschéma quasi-compact,* $j_\alpha : Y_\alpha\rightarrow X_\alpha$ *une* S_α*-immersion localement* *de présentation finie. Pour que la* S*-immersion correspondante* $j : \mathrm{Y} \rightarrow \mathrm{X}$ *soit transversalement régulière relativement à* S, *il faut et il suffit qu'il existe* $\lambda \geqslant \alpha$ *tel que* $j_\lambda : \mathrm{Y}_\lambda \rightarrow \mathrm{X}_\lambda$ *soit transversalement régulière relativement à* S_λ.

(i) La suffisance de la condition résulte de (**0**, 15.1.15). Pour prouver qu'elle est nécessaire, il suffira de montrer que tout point $x \in \mathrm{X}$ possède un voisinage ouvert $\mathrm{V}(x)$ pour lequel il existe un indice $\lambda = \lambda(x) \geqslant \alpha$ et un voisinage ouvert V_λ de l'image x_λ de x dans X_λ tels que $\mathrm{V}(x)$ soit l'image réciproque de V_λ et que la suite des restrictions à V_λ des $f_{i\lambda}$ soit $(\mathscr{F}_\lambda | \mathrm{V}_\lambda)$-transversalement régulière relativement à S_λ : en effet, il suffira alors d'appliquer (8.3.4) à l'ensemble ouvert U_λ de X_λ, défini par la condition d'être le plus grand ouvert tel que les restrictions à U_λ des $f_{i\lambda}$ forment une suite $(\mathscr{F}_\lambda | \mathrm{U}_\lambda)$-transversalement régulière relativement à S_λ. Soient s l'image de x dans S, et pour tout $\lambda \geqslant \alpha$, soit s_λ l'image de s dans S_λ. Alors la fibre X_s est limite projective des fibres $(\mathrm{X}_\lambda)_{s_\lambda}$ et est localement noethérienne puisque le morphisme $\mathrm{X} \rightarrow \mathrm{S}$ est localement de présentation finie; comme en outre $(\mathrm{X}_\alpha)_{s_\alpha}$ est quasi-compact et que les morphismes de transition $(\mathrm{X}_\mu)_{s_\mu} \rightarrow (\mathrm{X}_\lambda)_{s_\lambda}$ sont plats (puisqu'il en est ainsi de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(s_\mu)) \rightarrow \mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(s_\lambda))$) on peut appliquer aux sections $f_i \otimes 1$ de $\mathscr{F}_s = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \boldsymbol{k}(s)$ au-dessus de X_s le résultat de (19.8.1, (i)); d'où l'existence d'un $\lambda \geqslant \alpha$ tel que les sections $f_{i\lambda} \otimes 1$ de $(\mathscr{F}_\lambda)_{s_\lambda} = \mathscr{F}_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}_\lambda}} \boldsymbol{k}(s_\lambda)$ au-dessus de $(\mathrm{X}_\lambda)_{s_\lambda}$ forment une suite $(\mathscr{F}_\lambda)_{s_\lambda}$-régulière. En outre (11.2.6), on peut supposer que $\mathscr{F}_\lambda$ est S_λ-plat au point x_λ. Il résulte alors de (11.3.8) qu'il existe un voisinage ouvert V_λ de x_λ dans X_λ vérifiant les conditions requises.

(ii) La suffisance de la condition résulte de (19.2.7, (ii)). Pour prouver sa nécessité, il suffit encore de montrer que tout point $x \in j(\mathrm{Y})$ admet un voisinage ouvert $\mathrm{V}(x)$ pour lequel il existe un indice $\lambda = \lambda(x) \geqslant \alpha$ et un voisinage ouvert V_λ de l'image x_λ de x dans X_λ tels que $\mathrm{V}(x)$ soit l'image réciproque de V_λ et que la restriction $j_\lambda^{-1}(\mathrm{V}_\lambda) \rightarrow \mathrm{V}_\lambda$ de j_λ soit transversalement régulière relativement à S_λ. Soient s l'image de x dans S, et pour tout $\lambda \geqslant \alpha$, soit s_λ l'image de s dans S_λ. Comme X_s (resp. Y_s) est limite projective des fibres $(\mathrm{X}_\lambda)_{s_\lambda}$ (resp. $(\mathrm{Y}_\lambda)_{s_\lambda}$), on peut comme dans (i) utiliser (19.8.1, (ii)), et comme par hypothèse l'immersion $\mathrm{Y}_s \rightarrow \mathrm{X}_s$ est régulière, il existe un indice $\lambda(s)$ tel que pour $\lambda \geqslant \lambda(s)$ l'immersion $(\mathrm{Y}_\lambda)_{s_\lambda} \rightarrow (\mathrm{X}_\lambda)_{s_\lambda}$ soit régulière. En outre, en vertu de (19.2.4) il existe un voisinage ouvert quasi-compact $\mathrm{W}(x)$ de x dans X tel que les morphismes structuraux $\mathrm{W}(x) \rightarrow \mathrm{S}$ et $\mathrm{Y} \cap \mathrm{W}(x) \rightarrow \mathrm{S}$ soient plats; appliquant (11.2.6) et (8.2.11), on peut supposer qu'il existe un $\lambda \geqslant \lambda(s)$ et un voisinage ouvert quasi-compact $\mathrm{W}(x_\lambda)$ de x_λ dans X_λ, tels que $\mathrm{W}(x)$ soit l'image réciproque de $\mathrm{W}(x_\lambda)$ et que les restrictions à $\mathrm{W}(x_\lambda)$ et à $\mathrm{Y}_\lambda \cap \mathrm{W}(x_\lambda)$ respectivement des morphismes structuraux $\mathrm{X}_\lambda \rightarrow \mathrm{S}_\lambda$ et $\mathrm{Y}_\lambda \rightarrow \mathrm{S}_\lambda$ soient plats. On conclut donc de (19.2.4) qu'il existe un voisinage ouvert V_λ de x_λ répondant à la question.

Remarque (**19.8.3**). — Les démonstrations précédentes montrent que les énoncés de (19.8.1) et (19.8.2) subsistent lorsqu'on remplace les conditions concernant la régularité ou la régularité transversale dans tout X (resp. X_λ) par ces conditions dans un voisinage d'un point $x \in \mathrm{X}$ (resp. dans un voisinage de x_λ, projection de x).

19.9. Suites $\mathscr{F}$-régulières et profondeur.

(19.9.1) Rappelons que si X est un préschéma localement noethérien, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent, T une partie de X, on pose (5.10.1)

(19.9.1.1) $$\mathrm{prof}_T(\mathscr{F}) = \inf_{x\in T} \mathrm{prof}(\mathscr{F}_x).$$

On pose d'autre part, pour tout point $t \in T$

(19.9.1.2) $$\mathrm{prof}_{T,t}(\mathscr{F}) = \inf_{z\in T\cap \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,t})} \mathrm{prof}(\mathscr{F}_z),$$

et on dit que $\mathrm{prof}_{T,t}(\mathscr{F})$ est la T-*profondeur de* $\mathscr{F}$ *au point* t; il est clair que l'on a

(19.9.1.3) $$\mathrm{prof}_T(\mathscr{F}) = \inf_{t\in T} \mathrm{prof}_{T,t}(\mathscr{F}).$$

Lemme **(19.9.2)**. — *Soient* A *un anneau noethérien,* M *un* A*-module de type fini,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A. *Afin que, pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{J}$, *on ait* $\mathrm{prof}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \geqslant r$, *il faut et il suffit qu'il existe une suite* M*-régulière de* r *éléments appartenant à* $\mathfrak{J}$.

La suffisance de la condition résultant aussitôt de (**0**, 16.4.5), prouvons sa nécessité. Raisonnons par récurrence sur r (il n'y a rien à démontrer si $r=0$) : puisque $\mathrm{prof}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \geqslant r-1$ pour tout $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{J}$, il existe par hypothèse une suite M-régulière $(g_i)_{1\leqslant i\leqslant r-1}$ formée d'éléments de $\mathfrak{J}$. Posons $N = M/(g_1M+\ldots+g_{r-1}M)$; pour tout $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{J}$, les images des g_i dans $A_\mathfrak{p}$ appartiennent donc à l'idéal maximal $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, et forment une suite $M_\mathfrak{p}$-régulière (**0**, 15.1.14); on conclut donc de (**0**, 16.4.6) que l'on a $\mathrm{prof}_{A_\mathfrak{p}}(N_\mathfrak{p}) = \mathrm{prof}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) - (r-1) \geqslant 1$, et on voit que tout revient à prouver le lemme pour $r=1$. Or l'hypothèse signifie alors que, pour tout $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{J}$, $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ n'est pas associé à $M_\mathfrak{p}$ (**0**, 16.4.6), donc (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 2, prop. 5), $\mathfrak{p}$ n'est pas associé à M. Autrement dit, $\mathfrak{J}$ n'est contenu dans aucun des idéaux premiers de Ass(M), donc il n'est pas contenu dans leur réunion (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 1, n° 1, prop. 2). Mais comme cette réunion est l'ensemble des éléments qui ne sont pas M-réguliers (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 1, cor. 2 de la prop. 2), cela prouve le lemme.

Proposition **(19.9.3)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module cohérent,* Y *une partie fermée de* X, y *un point de* Y, n *un entier* >0. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Il existe un voisinage ouvert* U *de* y *dans* X *tel que* $\mathrm{prof}_{Y\cap U}(\mathscr{F}|U) \geqslant n$.

b) *Il existe un voisinage ouvert* U *de* y *dans* X *et une suite* $(\mathscr{F}|U)$*-régulière de* n *sections* f_i *de* $\mathscr{O}_U$ *au-dessus de* U, *telles que* $f_i(x)=0$ $(\mathbf{0}_\mathrm{I}, 5.5.1)$ *pour* $1\leqslant i\leqslant n$ *en tout point* $x\in U\cap Y$.

c) *On a* $\mathrm{prof}_{Y,y}(\mathscr{F}) \geqslant n$.

En outre, l'ensemble des $y\in Y$ *vérifiant ces conditions est ouvert dans* Y.

La dernière assertion résulte trivialement de *a)*. L'équivalence de *a)* et *b)* découle de (19.9.2) appliqué à un voisinage ouvert affine de y dans X et de (**0**, 15.1.14). Il est clair que *a)* entraîne *c)*, tout voisinage ouvert de y dans X contenant $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{X,y})$; montrons inversement que *c)* implique *b)*. Il résulte de *c)* et de la définition (19.9.1.1) que l'on peut appliquer (19.9.2) à l'anneau $\mathcal{O}_{X,y}$, au $\mathcal{O}_{X,y}$-module $\mathcal{F}_y$ et à l'idéal $\mathcal{J}_y$ de $\mathcal{O}_{X,y}$, donc il existe une suite $\mathcal{F}_y$-régulière $(t_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de n éléments de $\mathcal{J}_y$. Il y a donc un voisinage ouvert U de y dans X et une suite $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de sections de $\mathcal{J}$ au-dessus de U telles que les t_i soient les germes des f_i au point y; utilisant (**0**, 15.2.4), on en déduit qu'il existe un voisinage ouvert $U'\subset U$ de y dans X tel que les $f_i|U'$ forment une suite $(\mathcal{F}|U')$-régulière.

Corollaire (**19.9.4**). — *Avec les notations de* (19.9.3), *la fonction* $y\rightsquigarrow \mathrm{prof}_{Y,y}(\mathcal{F})$ *est semi-continue inférieurement dans* Y.

Proposition (**19.9.5**). — *Avec les notations de* (19.9.3), *soient* X' *un préschéma localement noethérien,* $g: X'\to X$ *un morphisme plat,* $Y'=g^{-1}(Y)$, $\mathcal{F}'=g^*(\mathcal{F})$. *Alors, pour tout point* $y'\in Y'$ *au-dessus de* y, *on a* $\mathrm{prof}_{Y',y'}(\mathcal{F}')=\mathrm{prof}_{Y,y}(\mathcal{F})$.

En effet, pour tout $z'\in\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X',y'})$, il résulte de (6.3.1) que l'on a $\mathrm{prof}(\mathcal{F}'_{z'})\geqslant\mathrm{prof}(\mathcal{F}_{g(z')})$, et si z'' est un point maximal de la fibre $g^{-1}(g(z'))$, générisation de z' (donc appartenant aussi à $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X',y'})$), on a *(loc. cit.)* $\mathrm{prof}(\mathcal{F}'_{z''})=\mathrm{prof}(\mathcal{F}_{g(z')})$. La proposition résulte alors de ce que l'on a $g(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X',y'}))=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,g(y)})$ puisque g est plat (2.3.4).

Proposition (**19.9.6**). — *Soient* $f: X\to S$ *un morphisme localement de présentation finie,* Y *une partie fermée de* X, $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module de présentation finie et* f*-plat,* n *un entier* >0. *Pour tout point* $y\in Y$, *les conditions suivantes sont équivalentes (en désignant par* $X_{f(y)}$ *la fibre de* f *au point* $f(y)$, *par* $\mathcal{F}_{f(y)}$ *l'image réciproque de* $\mathcal{F}$ *dans* $X_{f(y)}$, *et en posant* $Y_{f(y)}=X_{f(y)}\cap Y$) :

a) *On a* $\mathrm{prof}_{Y_{f(y)},y}(\mathcal{F}_{f(y)})\geqslant n$.

b) *Il existe un voisinage ouvert* U *de* y *dans* X *et une suite* $(g_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *de* n *sections de* $\mathcal{O}_X$ *au-dessus de* U, *qui soit transversalement* $\mathcal{F}$*-régulière relativement à* S (cf. (19.2.1) *pour la terminologie*) *et telle que* $g_i(x)=0$ *pour* $1\leqslant i\leqslant n$ *et pour tout* $x\in U\cap Y$.

L'ensemble V_n *des* $y\in Y$ *vérifiant ces conditions est ouvert dans* Y; *si de plus* Y *est localement constructible dans* X, V_n *est rétrocompact dans* X ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 9.1.1).

En vertu de (19.9.3), la condition *a)* équivaut à l'existence d'un voisinage ouvert U de y dans X et d'une suite $(\mathcal{F}_{f(y)}|(U\cap X_{f(y)}))$-régulière $(h_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de sections de $\mathcal{O}_{X_{f(y)}}$ au-dessus de $U\cap X_{f(y)}$ telles que $h_i(z)=0$ pour tout $z\in U\cap Y_{f(y)}$. Si on désigne encore par Y un sous-préschéma fermé de X ayant Y pour espace sous-jacent, par $\mathcal{J}$ l'Idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$ définissant Y, on peut encore dire que l'on a $h_i\in\mathcal{J}_{f(y)}$ pour $1\leqslant i\leqslant n$. Comme on peut remplacer U par un voisinage affine plus petit de y, on peut supposer que les h_i sont les images d'une suite $(g_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de sections de $\mathcal{F}$ au-dessus de U, de sorte que les germes $(g_i)_y$ appartiennent à l'idéal maximal $\mathfrak{m}_y$ de $\mathcal{O}_{X,y}$. L'équivalence de *a)* et *b)* résulte alors de (11.3.8), qui prouve aussi que l'ensemble V_n est ouvert dans Y. Reste à prouver la dernière assertion; comme il s'agit encore de propriétés locales sur X, on peut supposer $S=\mathrm{Spec}(A)$ affine et X de présentation finie sur S; il existe alors un sous-anneau noethérien A_0 de A, un préschéma X_0 de type fini sur $S_0=\mathrm{Spec}(A_0)$ et un $\mathcal{O}_{X_0}$-Module cohérent $\mathcal{F}_0$ tels que $X=X_0\times_{S_0}S$ et $\mathcal{F}=\mathcal{F}_0\otimes_{\mathcal{O}_{X_0}}\mathcal{O}_X$ (8.9.1); on peut en outre supposer que, si $f_0: X_0\to S_0$ est le morphisme structural, $\mathcal{F}_0$ est f_0-plat (11.2.6). Puisque Y est constructible, on peut en outre (8.3.11) supposer que $Y = p^{-1}(Y_0)$, où $p : X \to X_0$ est la projection canonique. Alors, pour tout $y \in Y$, il résulte de (19.9.5) et de la transitivité des fibres que l'on a

$$\mathrm{prof}_{Y_{f(y)}, y}(\mathcal{F}_{f(y)}) = \mathrm{prof}_{(Y_0)_{f_0(y_0)}, y_0}((\mathcal{F}_0)_{f_0(y_0)}),$$

en posant $y_0 = p(y)$; si V_n^0 est l'ensemble des $y_0 \in Y_0$ pour lesquels le second membre de cette relation est $\geqslant n$, on a donc $V_n = p^{-1}(V_n^0)$. Comme X_0 est noethérien, V_n^0 est un ouvert rétrocompact dans X_0, et par suite (cf. démonstration de (1.8.2)) V_n est rétrocompact dans X.

Corollaire **(19.9.7)**. — *Sous les hypothèses générales de* (19.9.6), *la fonction* $y \rightsquigarrow \mathrm{prof}_{Y_{f(y)}, y}(\mathcal{F}_{f(y)})$ *est semi-continue inférieurement dans* Y. *Si de plus* Y *est localement constructible, cette fonction est localement constructible.*

Proposition **(19.9.8)**. — *Soient* $f : X \to S$ *un morphisme localement de présentation finie,* Z *une partie fermée de* X, $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module de présentation finie et* f*-plat,* $\mathcal{G}$ *un* $\mathcal{O}_S$*-Module quasi-cohérent. Supposons que, pour tout* $x \in Z$, *on ait* $\mathrm{prof}((\mathcal{F}_{f(x)})_x) \geqslant 1$ (resp. $\mathrm{prof}((\mathcal{F}_{f(x)})_x) \geqslant 2$). *Alors, si* $j : X - Z \to X$ *est l'injection canonique, et si on pose* $\mathcal{H} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\mathcal{G})$, *l'homomorphisme canonique* $\rho_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to j_*(j^*(\mathcal{H}))$ *relatif à* j *est injectif* (resp. *bijectif*).

La question est évidemment locale sur X et S, et il suffit de démontrer la proposition dans un voisinage d'un point $x \in Z$. Autrement dit, on peut se borner au cas où X et S sont affines. Grâce à (19.9.6), on peut supposer qu'il existe une section transversalement $\mathcal{F}$-régulière g_1 de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de X relativement à S (resp. une suite transversalement $\mathcal{F}$-régulière (g_1, g_2) de deux sections de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de X relativement à S) telle que si Z′ est l'ensemble des $x' \in X$ pour lesquels $g_1(x') = 0$ (resp. $g_1(x') = g_2(x') = 0$), on ait $Z \subset Z'$.

Cela étant, revenons à la démonstration de (19.9.8); en vertu de (19.9.6) on a encore $\mathrm{prof}((\mathcal{F}_{f(x)})_x) \geqslant 1$ (resp. $\mathrm{prof}((\mathcal{F}_{f(x)})_x) \geqslant 2$) pour tout $x \in Z'$. Si la proposition est prouvée en remplaçant le couple (X, Z) par (X, Z′) et $(X - Z, Z' \cap (X - Z))$, il est immédiat qu'elle le sera aussi pour (X, Z); on peut donc se borner à la prouver pour X et Z′. Autrement dit, on peut se borner à démontrer (19.9.8) lorsque $S = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$, où B est une A-algèbre de présentation finie, $Z = V(\mathfrak{J})$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal *de type fini* de l'anneau B, $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ et $\mathcal{G} = \widetilde{N}$, où N est un A-module et M un B-module de présentation finie qui est un A-module *plat*. On peut en outre se ramener au cas où N est un A-module *de présentation finie*. En effet, N est limite inductive d'un système inductif filtrant de A-modules de présentation finie N_α (par double limite inductive) si l'on pose $\mathcal{G}_\alpha = \widetilde{N}_\alpha$, $\mathcal{H}$ est limite inductive des $\mathcal{H}_\alpha = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\mathcal{G}_\alpha)$; comme j_* et j^* commutent aux limites inductives et que $\varinjlim$ est un foncteur exact dans la catégorie des Modules quasi-cohérents, si la proposition est prouvée pour chacun des $\mathcal{H}_\alpha$, elle le sera pour $\mathcal{H}$.

Il suffit en outre de prouver que l'homomorphisme canonique

$$\Gamma(X, \mathcal{H}) \to \Gamma(X - Z, \mathcal{H})$$

est injectif (resp. bijectif). Il existe alors un sous-anneau noethérien A_0 de A, une A_0-algèbre de type fini B_0, un idéal $\mathfrak{J}_0$ de B_0 et un B_0-module de type fini M_0 qui est un A_0-module plat et un A_0-module N_0, tels que $B = B_0 \otimes_{A_0} A$, $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 B$, $M = M_0 \otimes_{A_0} A$ et $N = N_0 \otimes_{A_0} A$ (8.9.1, 8.5.11 et 11.2.7). De plus, soit (A_λ) la famille des sous-A_0-algèbres de type fini de A, de sorte que $A = \varinjlim A_\lambda$; posons $B_\lambda = B_0 \otimes_{A_0} A_\lambda$, $\mathfrak{J}_\lambda = \mathfrak{J}_0 B_\lambda$, $M_\lambda = M_0 \otimes_{A_0} A_\lambda = M_0 \otimes_{B_0} B_\lambda$, $N_\lambda = N_0 \otimes_{A_0} A_\lambda$ et $S_\lambda = \operatorname{Spec}(A_\lambda)$, $X_\lambda = \operatorname{Spec}(B_\lambda)$, $Z_\lambda = V(\mathfrak{J}_\lambda)$; si $p_\lambda : X \to X_\lambda$ est la projection canonique, on a donc $Z = p_\lambda^{-1}(Z_\lambda)$, et $X - Z = p_\lambda^{-1}(X_\lambda - Z_\lambda)$. Comme $X_\lambda - Z_\lambda$ est quasi-compact et quasi-séparé, on en conclut (8.5.2) que si l'on pose $\mathscr{F}_\lambda = \widetilde{M}_\lambda$ et $\mathscr{H}_\lambda = (M_\lambda \otimes_{A_\lambda} N_\lambda)^\sim$, les homomorphismes $\varinjlim \Gamma(X_\lambda, \mathscr{H}_\lambda) \to \Gamma(X, \mathscr{H})$ et $\varinjlim \Gamma(X_\lambda - Z_\lambda, \mathscr{H}_\lambda) \to \Gamma(X - Z, \mathscr{H})$ sont *bijectifs*; en vertu de l'exactitude du foncteur $\varinjlim$, il suffira donc de prouver que pour tout λ assez grand, l'homomorphisme canonique $\Gamma(X_\lambda, \mathscr{H}_\lambda) \to \Gamma(X_\lambda - Z_\lambda, \mathscr{H}_\lambda)$ est injectif (resp. bijectif). Mais pour tout $x \in Z$, si x_λ est la projection de x dans Z_λ, on a $\operatorname{prof}((\mathscr{F}_{f(x)})_x) = \operatorname{prof}(((\mathscr{F}_\lambda)_{f_\lambda(x_\lambda)})_{x_\lambda})$ en vertu de (4.2.7) et (6.7.1); pour être ramené à démontrer (19.9.8) dans le cas où A est *noethérien*, il faut prouver que, pour λ assez grand on a $\operatorname{prof}(((\mathscr{F}_\lambda)_{f_\lambda(x_\lambda)})_{x_\lambda}) \geqslant 1$ (resp. $\geqslant 2$) pour *tout* point $x_\lambda \in Z_\lambda$. Or, notons Z'_λ l'ensemble des points $x_\lambda \in Z_\lambda$ tels que, pour toute générisation z_λ de x_λ dans $Z_\lambda \cap (X_\lambda)_{f_\lambda(x_\lambda)}$, on ait $\operatorname{prof}(((\mathscr{F}_\lambda)_{f_\lambda(x_\lambda)})_{z_\lambda}) \geqslant 1$; si $p_{\lambda\mu} : Z_\mu \to Z_\lambda$ est la projection canonique pour $\lambda \leqslant \mu$, il résulte de l'hypothèse et de (19.9.5) que l'on a $Z'_\mu = p_{\lambda\mu}^{-1}(Z'_\lambda)$ et $Z = p_\lambda^{-1}(Z'_\lambda)$; d'autre part, il résulte de (19.9.6) que Z'_λ est *ouvert* dans Z_λ, donc notre assertion résulte de (8.3.4).

Pour terminer la démonstration lorsque A est noethérien, notons qu'en vertu de l'hypothèse de platitude et de (6.3.1), on a alors $\operatorname{prof}_Z(\mathscr{H}) \geqslant 1$ (resp. $\operatorname{prof}_Z(\mathscr{H}) \geqslant 2$); mais la conclusion de (19.9.8) résulte dans ce cas de (5.10.2) (resp. 5.10.4)).

Remarque **(19.9.9)**. — La même démonstration, jointe aux résultats du chap. III, 3e partie sur la profondeur et la cohomologie locale, permet d'établir la généralisation suivante de (19.9.8) :

Sous les conditions générales de (19.9.8), *supposons que, pour tout* $x \in Z$, *on ait* $\operatorname{prof}((\mathscr{F}_{f(x)})_x) \geqslant k$; *alors l'homomorphisme canonique*

$$H^i(X, \mathscr{H}) \to H^i(X - Z, \mathscr{H} \mid (X - Z))$$

est bijectif pour $i \leqslant k-2$ *et injectif pour* $i = k-1$ (ce qui, exprimé à l'aide de la notion cohomologique générale de profondeur introduite au chap. III, s'écrit aussi $\operatorname{prof}_Z(\mathscr{H}) \geqslant k$).

§ 20. FONCTIONS MÉROMORPHES ET PSEUDO-MORPHISMES

20.0. Introduction.

La plupart des notions et résultats des §§ 20 et 21 se rattachent directement au chap. I, et ne dépendent guère des chap. II à IV, sauf en ce qui concerne l'usage occasionnel de la notion de profondeur et d'anneau local régulier (dans (20.6), (21.11), (21.13) et (21.15)), du « Main theorem » de Zariski dans (20.4) et (21.12), et des propriétés des immersions transversalement régulières dans (20.6) et (21.15).

Au § 20, nous introduisons plusieurs variantes de la notion d'application rationnelle, déjà étudiée dans (**I**, 7) d'un point de vue encore assez proche du point de vue classique, et pour cette raison assez mal adaptée au cas des préschémas non nécessairement réduits. Les notions et résultats du § 20 sont utilisés pour développer au § 21 (n^{os} 21.1 à 21.7) la notion générale de diviseur et ses propriétés les plus élémentaires. Cette notion est surtout commode lorsque les anneaux locaux des préschémas considérés sont noethériens et intégralement clos, et surtout lorsqu'ils sont en outre *factoriels* (21.6 et 21.7), en raison de son identification dans ce dernier cas avec la notion de *cycle* 1-*codimensionnel* (combinaison linéaire de sous-préschémas irréductibles de codimension 1). Dans (21.9), on détermine les diviseurs sur un préschéma noethérien de dimension 1 mais non nécessairement normal, ce qui est utile pour diverses applications. Les n^{os} 21.11 et 21.12 donnent deux théorèmes importants, dus respectivement à Auslander-Buchsbaum et Van der Waerden, et se rattachant à la notion d'anneau factoriel (les n^{os} (21.9), (21.11) et (21.12) sont indépendants les uns des autres). Dans les n^{os} (21.13) et (21.14), également indépendants des trois précédents, nous étudions une variante utile de la notion d'anneau local factoriel, celle d'anneau local *parafactoriel*, qui s'introduit notamment [41] dans le développement de théorèmes de comparaison du groupe de Picard d'un préschéma projectif X sur un corps k et d'une « section hyperplane ». On verra dans (21.14.1) (théorème de Ramanujam-Samuel) que les anneaux locaux parafactoriels sont bien plus nombreux que l'on ne pouvait s'y attendre *a priori*.

Dans (20.5), (20.6) et (21.15), nous reprenons les notions précédentes mais d'un point de vue « relatif » à un préschéma de base fixé. Pour l'instant ces notions ne sont utilisées qu'assez rarement; en particulier la notion de diviseur relatif n'est guère employée que lorsqu'il s'agit de diviseurs positifs, et dans ce cas elle s'explicite avantageusement sans le secours de la notion de fonction méromorphe relative, à l'aide de la notion d'immersion transversalement régulière de codimension 1. On aura donc avantage à omettre ces sections en première lecture.

20.1. Fonctions méromorphes.

(20.1.1) Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, et soit $\mathcal{S}$ un sous-faisceau *d'ensembles* de $\mathcal{O}_X$. Pour tout ouvert U de X, considérons l'*anneau de fractions* $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)[\Gamma(U, \mathcal{S})^{-1}]$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 1). Il est immédiat que l'application $U \rightsquigarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X)[\Gamma(U, \mathcal{S})^{-1}]$ est un *préfaisceau d'anneaux* ($\mathbf{0}_I$, 1.5.1 et 1.5.7). On note $\mathcal{O}_X[\mathcal{S}^{-1}]$ le *faisceau d'anneaux* associé à ce préfaisceau et on dit que c'est le *faisceau d'anneaux de fractions de* $\mathcal{O}_X$, *à dénominateurs dans* $\mathcal{S}$; c'est un $\mathcal{O}_X$-Module *plat*. Il est immédiat que pour tout $x \in X$, on a un isomorphisme canonique

$$(20.1.1.1)\qquad (\mathcal{O}_X[\mathcal{S}^{-1}])_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_x[\mathcal{S}_x^{-1}]$$

car le raisonnement de ($\mathbf{0}_I$, 1.4.5) se généralise aussitôt au cas où l'on a un système inductif $(A_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ d'anneaux, et pour chaque indice α une partie S_α de A_α telle que

$\varphi_{\beta\alpha}(S_\alpha) \subset S_\beta$ pour $\alpha \leqslant \beta$; on prend alors pour S la limite inductive dans $A = \varinjlim A$ du système inductif de parties (S_α).

(20.1.2) Soit maintenant $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module. On pose alors

(20.1.2.1) $$\mathscr{F}[\mathscr{S}^{-1}] = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X[\mathscr{S}^{-1}]$$

et on dit que c'est le *faisceau de modules de fractions de* $\mathscr{F}$ *à dénominateurs dans* $\mathscr{S}$; il est immédiat qu'il est associé au préfaisceau de modules $U \rightsquigarrow \Gamma(U, \mathscr{F})[\Gamma(U, \mathscr{S})^{-1}]$, et que pour tout $x \in X$, on a un isomorphisme canonique

(20.1.2.2) $$(\mathscr{F}[\mathscr{S}^{-1}])_x \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_x[\mathscr{S}_x^{-1}].$$

(20.1.3) Nous allons nous intéresser ici au cas où $\mathscr{S}$ est le sous-faisceau $\mathscr{S}(\mathcal{O}_X)$ de $\mathcal{O}_X$ tel que pour tout ouvert U, $\Gamma(U, \mathscr{S})$ soit l'*ensemble des éléments réguliers* de l'anneau $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$; il est immédiat qu'il s'agit d'un faisceau (et non seulement d'un préfaisceau) la régularité d'une section de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de U se vérifiant « fibre par fibre » (i.e. signifiant que le germe de la section en x est régulier dans $\mathcal{O}_X$ pour tout $x \in U$) autrement dit $\mathscr{S}(\mathcal{O}_X)_x$ n'est autre que l'ensemble des éléments réguliers de $\mathcal{O}_{X,x}$. Le faisceau d'anneaux correspondant

$$\mathscr{M}_X = \mathcal{O}_X[\mathscr{S}^{-1}]$$

est appelé le *faisceau des germes de fonctions méromorphes sur* X, et les sections de $\mathscr{M}_X$ au-dessus de X sont appelées les *fonctions méromorphes sur* X; elles forment un anneau que l'on note M(X). Pour tout $\mathcal{O}_X$-*Module* $\mathscr{F}$,

$$\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{M}_X = \mathscr{F}[\mathscr{S}^{-1}]$$

est encore noté $\mathscr{M}_X(\mathscr{F})$ et appelé le *faisceau des germes de sections méromorphes de* $\mathscr{F}$; ses sections au-dessus de X forment un M(X)-module noté $M(X, \mathscr{F})$, dont les éléments sont appelés *sections méromorphes de* $\mathscr{F}$ *au-dessus de* X. Ces définitions impliquent que pour tout ouvert U de X, on a un isomorphisme canonique $\mathscr{M}_X(\mathscr{F})|U \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_U(\mathscr{F}|U)$, en particulier $\mathscr{M}_X|U \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_U$.

(20.1.3.1) Si X est un *préschéma réduit*, on notera que si un élément $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ est tel que $s_\xi \neq 0$ pour tout point maximal ξ de U, alors s est *régulier*. En effet, si $st = 0$ pour un $t \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, on a $s_\xi t_\xi = 0$, donc $t_\xi = 0$ puisque $\mathcal{O}_{X,\xi}$ est un corps, et dire que $t_\xi = 0$ pour tout point maximal ξ de X signifie que $t = 0$: en effet, on est aussitôt ramené au cas où U est affine, et un élément d'un anneau réduit qui appartient à tous les idéaux premiers minimaux est nul par définition. La réciproque est vraie si l'ensemble des composantes irréductibles de X est *localement fini*. On est en effet aussitôt ramené au cas où $X = \operatorname{Spec}(A)$ est affine; si $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont les idéaux premiers minimaux de A et si $s \in \mathfrak{p}_i$ pour un indice i, il existe $t \in A$ tel que $t \in \mathfrak{p}_j$ pour $j \neq i$ et $t \notin \mathfrak{p}_i$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 1, n° 1, prop. 1); on a donc $st \in \mathfrak{p}_i$ pour tout i, et par suite $st = 0$ puisque A est réduit; s est donc non régulier.

(20.1.4) Pour tout ouvert U de X, l'homomorphisme $t \rightsquigarrow t/1$ de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ dans $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)[\Gamma(U, \mathscr{S})^{-1}]$ (qui n'est autre que l'*anneau total des fractions* de

$\Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{O}_{\mathrm{X}})$) est injectif; ces homomorphismes définissent donc un *homomorphisme canonique injectif*

$$(\mathbf{20.1.4.1}) \qquad i : \mathcal{O}_{\mathrm{X}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{X}}$$

qui permet d'identifier $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ à un sous-faisceau de $\mathcal{M}_{\mathrm{X}}$. Étant donnée une fonction méromorphe $\varphi \in \mathrm{M}(\mathrm{X})$, on dit que φ est *définie* dans un ouvert U de X si $\varphi|\mathrm{U}$ est une *section de* $\mathcal{O}_{\mathrm{U}}$ au-dessus de U; les axiomes des faisceaux montrent qu'il y a, pour une section φ donnée, un *plus grand* ouvert dans lequel φ est définie; on l'appelle *domaine de définition* de φ et on le note $\mathrm{dom}(\varphi)$.

(20.1.5) Pour tout $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module $\mathcal{F}$, on déduit de (20.1.4.1) un di-homomorphisme formé de i et de l'homomorphisme de faisceaux de groupes additifs

$$(\mathbf{20.1.5.1}) \qquad 1_{\mathcal{F}} \otimes i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{X}}(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathcal{M}_{\mathrm{X}}.$$

On notera que ce dernier n'est plus injectif en général; lorsqu'il est injectif, on dit que $\mathcal{F}$ est *strictement sans torsion* : cela signifie que pour tout ouvert U de X et toute section $s \in \Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{O}_{\mathrm{X}})$ qui est un élément régulier de cet anneau, l'homothétie $z \rightsquigarrow sz$ de $\Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{F})$ est injective; cette condition est évidemment remplie si $\mathcal{F}$ est *localement libre*.

Proposition **(20.1.6)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Module quasi-cohérent. Pour que* $\mathcal{F}$ *soit strictement sans torsion, il faut et il suffit que* $\mathrm{Ass}(\mathcal{F}) \subset \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{\mathrm{X}})$.

On est en effet aussitôt ramené au cas où $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ est affine, $\mathcal{F} = \widetilde{\mathrm{M}}$, et on sait que les éléments s de A appartenant à un idéal de Ass(M) sont exactement ceux pour lesquels l'homothétie $z \rightsquigarrow sz$ n'est pas injective (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 1, cor. 2 de la prop. 2).

(20.1.7) Si u est une section de $\mathcal{M}_{\mathrm{X}}(\mathcal{F})$ au-dessus de X, on dit que u est *définie* en un point $x \in \mathrm{X}$ s'il existe un voisinage ouvert V de x dans X tel que $u|\mathrm{V}$ soit l'image d'une section de $\mathcal{F}$ au-dessus de V par le di-homomorphisme (20.1.5.1). On dit que u est *définie* dans un ouvert U de X si elle est définie en tout point de U; il y a encore un plus grand ouvert dans lequel u est définie, appelé *domaine de définition* de u et noté $\mathrm{dom}(u)$. Lorsque $\mathcal{F}$ est strictement sans torsion, de sorte que $\mathcal{F}$ s'identifie par (20.1.5.1) à un sous-faisceau de $\mathcal{M}_{\mathrm{X}}(\mathcal{F})$, dire que u est définie dans U signifie que $u|\mathrm{V}$ est une *section de* $\mathcal{F}$ *au-dessus de* U.

(20.1.8) Conformément aux notations générales ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.4.7), on note $\mathcal{M}_{\mathrm{X}}^{*}$ le faisceau de groupes multiplicatifs tel que $\Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{M}_{\mathrm{X}}^{*})$ soit (pour tout ouvert U de X) le groupe des *éléments inversibles* de $\Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{M}_{\mathrm{X}})$. Ce faisceau n'est autre que le faisceau $\mathcal{S}(\mathcal{M}_{\mathrm{X}})$ défini en (20.1.3) : en effet, si $s \in \Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{S}(\mathcal{M}_{\mathrm{X}}))$, pour tout $x \in \mathrm{U}$, il existe un voisinage ouvert $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ de x tel que $s|\mathrm{V}$ soit un élément régulier dans l'*anneau total des fractions* de $\Gamma(\mathrm{V}, \mathcal{O}_{\mathrm{X}})$ et on sait qu'un tel élément est nécessairement inversible dans cet anneau de fractions. Nous dirons que les sections de $\mathcal{M}_{\mathrm{X}}^{*}$ au-dessus de X sont les *fonctions méromorphes régulières* (on notera que nous nous écartons ici de la terminologie suivie par certains auteurs, qui nomment fonctions méromorphes « régulières » celles qui sont des *sections de* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$, identifié à un sous-faisceau de $\mathcal{M}_{\mathrm{X}}$).

Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-*Module inversible* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.4.1); alors il est clair que $\mathcal{M}_{\mathrm{X}}(\mathcal{L}) = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathcal{M}_{\mathrm{X}}$

est un $\mathscr{M}_X$-*Module inversible*. Soit U un ouvert tel que $\mathscr{L}|U$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_U$; comme tout automorphisme de $\mathscr{M}_U$ est la multiplication par un élément inversible de $\Gamma(U, \mathscr{M}_X)$ ($\mathbf{0}_I$, 5.4.7), il revient au même de dire qu'une section $s \in \Gamma(U, \mathscr{M}_X(\mathscr{L}))$ a une image inversible dans $\Gamma(U, \mathscr{M}_X)$ par *un* isomorphisme ou par *tout* isomorphisme sur $\Gamma(U, \mathscr{M}_X)$; on dira dans ce cas que s est une *section méromorphe régulière de* $\mathscr{L}$ au-dessus de U; une section s de $\mathscr{L}$ au-dessus de X sera appelée une *section méromorphe régulière de* $\mathscr{L}$ si, pour tout ouvert U tel que $\mathscr{L}|U$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_U$, $s|U$ est une section méromorphe régulière de $\mathscr{L}$ au-dessus de U. On notera $(\mathscr{M}_X(\mathscr{L}))^*$ le sous-faisceau de $\mathscr{M}_X(\mathscr{L})$ tel que pour tout ouvert U, $\Gamma(U, (\mathscr{M}_X(\mathscr{L}))^*)$ soit l'ensemble des sections méromorphes régulières de $\mathscr{L}$ au-dessus de U. Soit s une section méromorphe de $\mathscr{L}$ au-dessus de X (i.e. une section de $\mathscr{M}_X(\mathscr{L})$); elle définit un homomorphisme $h_s : \mathscr{M}_X \to \mathscr{M}_X(\mathscr{L})$ qui, à toute section t de $\mathscr{M}_X$ au-dessus d'un ouvert U, fait correspondre $(s|U)t$. Il résulte aussitôt de ce qui précède que, pour que s soit *régulière*, il faut et il suffit que h_s soit *injectif*, et en fait h_s est alors un homomorphisme *bijectif* de $\mathscr{M}_X$ sur $\mathscr{M}_X(\mathscr{L})$, et sa restriction à $\mathscr{M}_X^*$ est une bijection sur $(\mathscr{M}_X(\mathscr{L}))^*$. On en conclut que l'homothétie $t \rightsquigarrow ts$ est un isomorphisme de M(X) sur M(X, $\mathscr{L}$).

(20.1.9) Soit s une section méromorphe régulière du $\mathcal{O}_X$-Module inversible $\mathscr{L}$ au-dessus de X; alors, pour tout $\mathcal{O}_X$-Module $\mathscr{F}$, s définit de même un homomorphisme $h_s \otimes 1_{\mathscr{F}} : \mathscr{M}_X(\mathscr{F}) \to \mathscr{M}_X(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{L})$, qui est encore *bijectif*.

(20.1.10) Soit s une section méromorphe d'un $\mathcal{O}_X$-Module inversible $\mathscr{L}$ au-dessus de X; pour que s soit régulière, il faut et il suffit qu'il existe une section méromorphe s' de $\mathscr{L}^{-1}$ au-dessus de X telle que l'image canonique de $s \otimes s'$ dans $\mathscr{M}_X$ ($\mathbf{0}_I$, 5.4.3) soit la section unité, et cette section s' est alors unique : en effet, la nécessité de l'existence locale d'une telle section est évidente, et son unicité locale entraîne son existence (et unicité) globale; en outre, l'existence de s' est trivialement suffisante pour que s soit régulière. On posera $s' = s^{-1}$.

Enfin, si $\mathscr{L}'$ est un second $\mathcal{O}_X$-Module inversible, s (resp. s') une section méromorphe régulière de $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{L}'$) au-dessus de X, $s \otimes s'$ est évidemment une section méromorphe régulière de $\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}'$ au-dessus de X.

(20.1.11) Si $f : X' \to X$ est un morphisme d'espaces annelés, il n'y a pas en général d'application naturelle associant à une fonction méromorphe sur X une fonction méromorphe sur X'. Par exemple, si X est le spectre d'un anneau local intègre A, X' celui de son corps résiduel k, il n'y a aucun homomorphisme naturel du corps des fractions K de A dans k, et on ne peut faire correspondre à un élément de K un élément de k que s'il est déjà dans A.

De façon générale, si $f = (\psi, \theta)$, notons, pour tout ouvert U de X, $\mathscr{S}_f(U)$ l'ensemble des sections *régulières* $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ telles que l'image de s par

$$\Gamma(\theta^\#) : \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_{X'})$$

soit une section *régulière*. Il est immédiat que $U \rightsquigarrow \mathscr{S}_f(U)$ est un *sous-faisceau* du faisceau d'ensembles $\mathscr{S}(\mathcal{O}_X)$, que l'on note $\mathscr{S}_f$. On pose $\mathscr{M}_f = \mathcal{O}_X[\mathscr{S}_f^{-1}]$; c'est un sous-faisceau d'anneaux de $\mathscr{M}_X$, et on déduit canoniquement de $\theta^\# : \psi^*(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_{X'}$ un homomorphisme de faisceaux d'anneaux $\theta'^\# : \psi^*(\mathscr{M}_f) \to \mathscr{M}_{X'}$ prolongeant $\theta^\#$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, nº 1, prop. 2); d'où, en se rappelant que $f^*(\mathscr{M}_f) = \psi^*(\mathscr{M}_f) \otimes_{\psi^*(\mathcal{O}_X)} \mathcal{O}_{X'}$, un homomorphisme canonique de $\mathcal{O}_{X'}$-Algèbres

$$f^*(\mathscr{M}_f) \to \mathscr{M}_{X'}. \tag{20.1.11.1}$$

Pour toute fonction méromorphe φ sur X, qui *est une section de* $\mathscr{M}_f$, $\Gamma(\theta'^\#)(\varphi)$ est une fonction méromorphe sur X', dite *image réciproque de* φ *par* f, et notée $\varphi \circ f$ si cela n'entraîne pas confusion.

De même, si $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module, on pose $\mathscr{M}_f(\mathscr{F}) = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{M}_f$, et on déduit aussitôt de $\theta'^\#$ un homomorphisme canonique (qu'on écrit aussi $u \rightsquigarrow u \circ f$)

$$\Gamma(X, \mathscr{M}_f(\mathscr{F})) \to \Gamma(X', \mathscr{M}_{X'}(f^*(\mathscr{F}))).$$

En outre, si $u \in \Gamma(X, \mathscr{M}_f(\mathscr{F}))$ est définie (20.1.7) en un point x, u coïncide, dans un voisinage U de x, avec une section de la forme $\sum_i h_i \otimes (t_i/s_i)$, où les h_i appartiennent à $\Gamma(U, \mathscr{F})$, les t_i à $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ et les s_i à $\Gamma(U, \mathscr{S}_f)$. Comme par hypothèse les images des s_i dans $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_{X'})$ sont régulières, on voit que $u \circ f$ est définie en tout point de $f^{-1}(U)$; autrement dit, on a

$$f^{-1}(\mathrm{dom}(u)) \subset \mathrm{dom}(u \circ f). \tag{20.1.11.2}$$

Nous verrons plus loin (20.6.5, (i)) des exemples (avec $\mathscr{F} = \mathcal{O}_X$) où les deux membres de (20.1.11.2) peuvent être distincts.

Considérons en particulier le cas où $\mathscr{M}_f = \mathscr{M}_X$; alors, si $\mathscr{L}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module inversible, l'image dans $\mathscr{M}_{X'}(f^*(\mathscr{L}))$, par $\Gamma(\theta'^\#)$, d'une section méromorphe *régulière* de $\mathscr{L}$ au-dessus de X (20.1.8) est une section méromorphe *régulière* de $f^*(\mathscr{L})$ au-dessus de X', comme il résulte aussitôt de la définition de ces sections, et du fait qu'un homomorphisme d'anneaux transforme un élément inversible en un élément inversible.

Soit $f' : X'' \to X'$ un second morphisme d'espaces annelés, et supposons que $\mathscr{M}_f = \mathscr{M}_X$ et $\mathscr{M}_{f'} = \mathscr{M}_{X'}$; alors, si l'on pose $f'' = f \circ f'$, on a aussi $\mathscr{M}_{f''} = \mathscr{M}_X$, et l'on voit aussitôt que pour toute section méromorphe u de $\mathscr{F}$ au-dessus de X, on a $u \circ f'' = (u \circ f) \circ f'$.

Proposition **(20.1.12)**. — *Si le morphisme* $f : X' \to X$ *est plat* ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.7.1) *on a* $\mathscr{M}_f = \mathscr{M}_X$, *et l'homomorphisme* $\varphi \rightsquigarrow \varphi \circ f$ *est défini dans* M(X) *tout entier. En outre, si f est un morphisme (plat) d'espaces annelés en anneaux locaux, on a* $\mathrm{dom}(\varphi \circ f) = f^{-1}(\mathrm{dom}(\varphi))$; *si de plus f est surjectif (donc fidèlement plat), l'homomorphisme* $\varphi \rightsquigarrow \varphi \circ f$ *est injectif.*

La première assertion résulte de ce que, si B est une A-algèbre qui est un A-module plat, tout élément de A non diviseur de 0 dans A est non diviseur de 0 dans B ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.3.4). Pour prouver les autres assertions, notons que, pour tout $x' \in X'$, si $x = f(x')$, $\mathcal{O}_{X',x'}$ est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module plat, et comme l'homomorphisme $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X',x'}$ est *local* par hypothèse, il est injectif ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.5.1 et 6.6.2); si l'on pose $A = \mathcal{O}_{X,x}$, $B = \mathcal{O}_{X',x'}$, de sorte que A s'identifie à un sous-anneau de B, $(f^*(\mathscr{M}_X))_{x'}$ est égal à $S^{-1}A \otimes_A B = S^{-1}B$, où S est l'ensemble des éléments réguliers de A, $(\mathscr{M}_{X'})_{x'}$ est égal à $T^{-1}B$, où T est l'ensemble des éléments réguliers de B, et comme on a vu que $S \subset T$, l'homomorphisme $S^{-1}B \to T^{-1}B$ est injectif; autrement dit, cela prouve que l'homomorphisme (20.1.11.1) $f^*(\mathscr{M}_X) \to \mathscr{M}_{X'}$ est *injectif* (d'où la dernière assertion de l'énoncé). Le quotient $f^*(\mathscr{M}_X)/\mathscr{O}_{X'}$ s'identifie à un sous-$\mathscr{O}_{X'}$-Module de $\mathscr{M}_{X'}/\mathscr{O}_{X'}$, et $(f^*(\mathscr{M}_X)/\mathscr{O}_{X'})_{x'}$ s'identifie à $(\mathscr{M}_X/\mathscr{O}_X)_x \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \mathscr{O}_{X',x'}$. Supposons alors que $x \notin \mathrm{dom}(\varphi)$; l'image de φ_x dans $(\mathscr{M}_X/\mathscr{O}_X)_x$ est donc $\neq 0$; par fidèle platitude, on en déduit qu'il en est de même de l'image de $(\varphi \circ f)_{x'}$ dans $(\mathscr{M}_{X'}/\mathscr{O}_{X'})_{x'}$, donc $x' \notin \mathrm{dom}(\varphi \circ f)$, ce qui achève la démonstration.

Remarque (**20.1.13**). — Soit X un espace analytique complexe *réduit*; alors la notion de fonction méromorphe sur X définie ci-dessus coïncide avec la notion usuelle. Considérons d'autre part un préschéma Y, localement de type fini sur le corps **C**; on sait alors qu'on peut associer à Y un espace analytique Y^{an} ayant même espace topologique sous-jacent, et que le morphisme canonique $f : Y^{an} \to Y$ est *plat* [37]; en vertu de (20.1.12), l'homomorphisme canonique $u \rightsquigarrow u \circ f$ de $M(Y)$ dans $M(Y^{an})$ est donc partout défini et est injectif; mais il n'est pas *surjectif* en général. Par exemple, lorsque $Y = \mathbf{V}^r_{\mathbf{C}}$ ($\mathbf{Err}_{\mathrm{III}}$, 14) est l'espace affine de dimension r sur **C**, M(Y) s'identifie canoniquement au corps R(Y) des fonctions rationnelles sur Y (20.2.13, (i)), tandis que $M(Y^{an})$ est le corps des fonctions méromorphes usuelles sur $\mathbf{C}^r$. En raison de ce fait, il est souvent préférable, en Géométrie algébrique, de s'abstenir de la terminologie introduite dans cette section, et d'utiliser la terminologie équivalente de « pseudo-fonction » qui va être définie ci-dessous.

20.2. Pseudo-morphismes et pseudo-fonctions.

Les seuls espaces annelés dont il sera question dans cette section sont les *préschémas*.

(**20.2.1**) Rappelons (11.10.2) que dans un préschéma X, on dit qu'un ouvert U est *schématiquement dense* si, pour tout ouvert V de X, l'homomorphisme canonique $\Gamma(V, \mathscr{O}_X) \to \Gamma(V \cap U, \mathscr{O}_X)$ est *injectif.*

Considérons deux préschémas X, Y, deux ouverts *schématiquement denses* U, U′ de X; on dit que deux morphismes $u : U \to Y$, $u' : U' \to Y$ sont *équivalents* s'il existe un ouvert $U'' \subset U \cap U'$, *schématiquement dense* dans X, tel que $u|U'' = u'|U''$. Comme il résulte aussitôt de la définition des ouverts schématiquement denses que l'intersection de deux tels ouverts en est un autre, il est immédiat que la relation précédente est bien une relation d'équivalence. Une classe d'équivalence suivant cette relation s'appelle un *pseudo-morphisme* de X dans Y, ou une *application rationnelle stricte* de X dans Y.

Si S est un préschéma et X, Y deux S-préschémas, on appelle *pseudo*-S-*morphisme* la classe d'équivalence (pour la relation précédente) d'un S-*morphisme* d'un ouvert schématiquement dense de X dans Y. Un pseudo-morphisme n'est donc autre chose qu'un pseudo-S-morphisme pour $S = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$.

On note $\mathrm{Ps.hom}(X, Y)$ (resp. $\mathrm{Ps.hom}_S(X, Y)$) l'ensemble des pseudo-morphismes (resp. des pseudo-S-morphismes) de X dans Y.

(20.2.2) Il résulte de la définition rappelée ci-dessus que si U est un ouvert schématiquement dense dans X, alors, pour tout ouvert V de X, $U \cap V$ est schématiquement dense dans V. Si deux morphismes $u : U \to Y$, $u' : U' \to Y$ d'ouverts schématiquement denses de X dans Y sont équivalents il s'ensuit donc que leurs restrictions $u|(V \cap U)$ et $u'|(V \cap U')$ sont aussi des morphismes équivalents (pour le préschéma induit sur V); leur classe est dite la *restriction* à V du pseudo-morphisme ω, classe de u, et on note ce pseudo-morphisme $\omega|U$. Si $W \subset V$ est un ouvert de X, il est clair que $(\omega|V)|W = \omega|W$. Ceci montre que les applications de restriction définissent un *préfaisceau* d'ensembles $U \rightsquigarrow \mathrm{Ps.hom}(U, Y)$; on notera que ce préfaisceau *n'est pas* un faisceau en général (cf. (20.2.16)); le faisceau associé se note $\mathscr{P}s.\mathit{hom}(X, Y)$. Pour les pseudo-S-morphismes, on voit de même que $U \rightsquigarrow \mathrm{Ps.hom}_S(X, Y)$ est un préfaisceau d'ensembles, dont on note $\mathscr{P}s.\mathit{hom}_S(X, Y)$ le faisceau associé.

Si V est un ouvert *schématiquement dense* dans X, alors, pour tout ouvert U schématiquement dense dans X, $U \cap V$ est aussi schématiquement dense dans X, donc l'application $\omega \rightsquigarrow \omega|V$ est une *bijection* de l'ensemble $\mathrm{Ps.hom}(X, Y)$ (resp. $\mathrm{Ps.hom}_S(X, Y)$) sur $\mathrm{Ps.hom}(V, Y)$ (resp. $\mathrm{Ps.hom}_S(V, Y)$).

(20.2.3) Étant donné un pseudo-S-morphisme ω de X dans Y, on dit qu'il est *défini* en un point $x \in X$ s'il existe un voisinage ouvert V de x dans X, un ouvert $U \subset V$ *contenant* x *et schématiquement dense dans* V, et enfin un S-morphisme $u : U \to Y$ dont la classe dans $\mathrm{Ps.hom}_S(V, Y)$ soit égale à $\omega|V$ (20.2.2); on appelle *domaine de définition* de ω et on note $\mathrm{dom}_S(\omega)$ (ou simplement $\mathrm{dom}(\omega)$ si $S = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$) l'ensemble des $x \in X$ où ω est défini; c'est évidemment un *ouvert* de X. En outre, pour tout ouvert W de X, on a

$$\mathrm{dom}_S(\omega|W) = (\mathrm{dom}_S(\omega)) \cap W \tag{20.2.3.1}$$

en vertu de la propriété des ouverts schématiquement denses rappelée dans (20.2.2).

Proposition **(20.2.4)**. — *Supposons que* X, Y *soient des* S-*préschémas tels que le morphisme structural* $Y \to S$ *soit séparé; alors, si* ω *est un pseudo*-S-*morphisme de* X *dans* Y, $\mathrm{dom}_S(\omega)$ *est le plus grand des ouverts schématiquement denses* U *de* X *tels qu'il y ait un* S-*morphisme* $u : U \to Y$ *appartenant à la classe* ω.

Il suffit évidemment de prouver que si U, U′ sont deux ouverts schématiquement denses dans X tels que deux S-morphismes $u : U \to Y$ et $u' : U' \to Y$ soient équivalents, alors les restrictions de u et u' à $U \cap U'$ sont égales. Or il existe par hypothèse un ouvert $U'' \subset U \cap U'$, schématiquement dense dans X et dans lequel u et u' coïncident; comme U'' est aussi schématiquement dense dans $U \cap U'$, notre assertion résulte de (11.10.1, *d)*).

Corollaire **(20.2.5)**. — *Soient* S *un* S_0-*schéma*, X, Y *deux* S-*préschémas tels que le morphisme composé* $Y \to S \to S_0$ *soit séparé (ce qui implique* (**I**, 5.5.1) *que* $Y \to S$ *l'est aussi). Pour tout pseudo*-S-*morphisme* ω *de* X *dans* Y, *on a alors* $\mathrm{dom}_S(\omega) = \mathrm{dom}_{S_0}(\omega)$. *En particulier, si* Y *est un schéma, on a* $\mathrm{dom}_S(\omega) = \mathrm{dom}(\omega)$.

En effet, il est clair que $\mathrm{dom}_S(\omega) \subset \mathrm{dom}_{S_0}(\omega)$ sans hypothèse de séparation; en vertu de (20.2.4), il suffit de prouver que si un S_0-morphisme $u_0 : U_0 \to Y$ d'un ouvert schématiquement dense U_0 de X dans Y est tel que le composé $v_0 : U_0 \xrightarrow{u_0} Y \rightarrow S$ coïncide avec la restriction du morphisme structural $w_0 : U_0 \rightarrow S$ dans un ouvert $U \subset U_0$ schématiquement dense dans X, alors on a $v_0 = w_0$. Mais en vertu de l'hypothèse que le morphisme $S \rightarrow S_0$ est séparé, cela résulte encore de (11.10.1, *d)*).

Corollaire **(20.2.6)**. — *Sous les hypothèses de* (20.2.4), *le préfaisceau* $U \rightsquigarrow \mathrm{Ps.hom}_S(U, Y)$ *est un faisceau.*

En effet, soient U un ouvert de X, (U_α) un recouvrement de U par des ouverts de U; supposons donné pour chaque α un pseudo-S-morphisme ω_α de U_α dans Y, de sorte que pour tout couple d'indices α, β, les restrictions (20.2.2) des pseudo-S-morphismes ω_α et ω_β à $U_\alpha \cap U_\beta$ soient égales; en vertu de (20.2.3.1), cela entraîne que $\mathrm{dom}_S(\omega_\alpha) \cap U_\beta = \mathrm{dom}_S(\omega_\beta) \cap U_\alpha$. Soit alors W la réunion des ouverts $\mathrm{dom}_S(\omega_\alpha)$, et, pour tout α, soit u_α le S-morphisme unique $\mathrm{dom}_S(\omega_\alpha) \rightarrow Y$ appartenant à la classe ω_α (20.2.4); en raison de l'hypothèse et de (20.2.4), les restrictions de u_α et u_β à $\mathrm{dom}_S(\omega_\alpha) \cap \mathrm{dom}_S(\omega_\beta)$ sont égales, donc il existe un morphisme $u : W \rightarrow Y$ dont la restriction à chaque ouvert $\mathrm{dom}_S(\omega_\alpha)$ est égale à u_α; il est clair que W est schématiquement dense dans U, donc définit un pseudo-S-morphisme ω de U dans Y dont les restrictions aux U_α sont les ω_α.

Remarque **(20.2.7)**. — On sait (11.10.4) que lorsque X est *réduit*, il revient au même de dire qu'un ouvert de X est dense dans X ou qu'il est schématiquement dense dans X; la notion de pseudo-morphisme (resp. pseudo-S-morphisme) de X dans Y coïncide alors avec celle d'*application rationnelle* (resp. S-*application rationnelle*) de X dans Y (**I**, 7.1.2). Dans le cas général, la notion de pseudo-morphisme semble plus utile que celle d'application rationnelle.

(20.2.8) On appelle *pseudo-fonction* sur X un pseudo-morphisme de X dans $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[T])$ (T indéterminée), ou, ce qui revient au même, un X-pseudo-morphisme de X dans $X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[T]$; il revient aussi au même (**I**, 3.3.15) de dire qu'une pseudo-fonction sur X est une *classe d'équivalence de sections de* $\mathcal{O}_X$ *au-dessus d'ouverts schématiquement denses de* X, deux sections $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, $g' \in \Gamma(U', \mathcal{O}_X)$ au-dessus de tels ouverts étant équivalentes s'il existe un ouvert $U'' \subset U \cap U'$, schématiquement dense dans X, où g et g' coïncident. On peut ici appliquer (20.2.4) avec $S = X$ et $Y = X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[T]$; donc, pour toute pseudo-fonction φ sur X, il existe un *plus grand* ouvert schématiquement dense $\mathrm{dom}(\varphi)$ dans X tel qu'il y ait une section de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de $\mathrm{dom}(\varphi)$ appartenant à la classe φ. Il est clair que le faisceau $\mathcal{P}s.hom_X(X, X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[T])$ est ici un *faisceau d'anneaux*, et même une $\mathcal{O}_X$-*Algèbre*, que nous noterons $\mathscr{M}'_X$; il résulte de (20.2.6) que, pour tout ouvert U de X, $\Gamma(U, \mathscr{M}'_X)$ est égal à l'ensemble des pseudo-morphismes de U dans $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[T])$; on pose $M'(X) = \Gamma(X, \mathscr{M}'_X)$. Dire qu'une section φ de $\mathscr{M}'_X$ au-dessus de U est *inversible* dans l'anneau $\Gamma(U, \mathscr{M}'_X)$ signifie qu'il existe un ouvert U' schématiquement dense dans $\mathrm{dom}(\varphi)$, donc dans U, tel que, si g est l'unique section de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de $\mathrm{dom}(\varphi)$ appartenant à φ, $g|U'$ soit *inversible* dans $\Gamma(U', \mathcal{O}_X)$. Il résulte de (**I**, 3.3.15) que, dans la correspondance canonique entre $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ et $\mathrm{Hom}(V, \mathbf{Z}[T])$ (V ouvert de X) les éléments inversibles de $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ correspondent aux morphismes qui *se* *factorisent en* $V \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[T, T^{-1}]) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[T])$. On en conclut que le faisceau $\mathscr{M}'^{*}_X$ des germes de sections inversibles de $\mathscr{M}'_X$ s'identifie canoniquement au faisceau $\mathscr{P}s.\mathit{hom}_X(X, X\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}[T, T^{-1}])$.

Lemme **(20.2.9)**. — *Soient* U *un ouvert de* X, s *un élément régulier de l'anneau* $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$; *alors l'ensemble ouvert* U_s *des* $x \in U$ *tels que* $s(x) \neq 0$ *est schématiquement dense dans* U.

En effet, soient V un ouvert de U, t une section de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de V telle que $t|(V\cap U_s)=0$. Pour tout ouvert affine $W\subset V$, il existe alors un entier n tel que $s^n t|W=0$ (**I**, 1.4.1); mais puisque s est un élément *régulier* de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, cela entraîne $t|W=0$, d'où $t=0$.

(20.2.10) Considérons une fonction méromorphe $f\in M(X)$ (20.1.4); alors $\mathrm{dom}(f)$ est *schématiquement dense* dans X : en effet, tout point de X admet un voisinage ouvert U tel qu'il existe une section $s\in\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ qui est un élément régulier de cet anneau, et pour laquelle $s(f|U)\in\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$; comme $s|U_s$ est inversible, on en conclut que $f|U_s\in\Gamma(U_s, \mathcal{O}_X)$, donc $U_s\subset\mathrm{dom}(f)$ par définition (20.1.4), et notre assertion résulte donc du lemme (20.2.9). On peut donc associer à f la pseudo-fonction égale à la classe de la section de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de $\mathrm{dom}(f)$, restriction de f; opérant de même en remplaçant X par un ouvert quelconque de X, on obtient ainsi un *homomorphisme canonique de* $\mathcal{O}_X$*-Algèbres*

(20.2.10.1) $$\mathscr{M}_X \to \mathscr{M}'_X$$

qui, par restriction, donne évidemment un homomorphisme de faisceaux de groupes abéliens

(20.2.10.2) $$\mathscr{M}^{*}_X \to \mathscr{M}'^{*}_X$$

pour les faisceaux de germes inversibles de sections de $\mathscr{M}_X$ et $\mathscr{M}'_X$.

Proposition **(20.2.11)**. — (i) *L'homomorphisme canonique* (20.2.10.1) (et par suite aussi (20.2.10.2)) *est injectif.*

(ii) *Supposons, soit que* X *soit localement noethérien, soit que* X *soit réduit et que l'ensemble de ses composantes irréductibles soit localement fini. Alors l'homomorphisme canonique* (20.2.10.1) (et par suite aussi (20.2.10.2)) *est bijectif.*

Les questions envisagées étant locales sur X, on peut se borner à considérer le cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$ est affine, et à montrer alors que l'homomorphisme canonique $M(X)\to M'(X)$ est toujours injectif, et qu'il est bijectif dans les cas considérés dans (ii). Compte tenu de la définition du faisceau $\mathscr{M}_X$ (20.1.3), on peut d'ailleurs remarquer que (20.2.10.1) provient en fait d'un homomorphisme de *préfaisceaux*

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X)[\Gamma(U, \mathscr{S})^{-1}] \to \Gamma(U, \mathscr{M}'_X)$$

et il suffit de montrer que, pour U affine, ce dernier est injectif (resp. bijectif sous les hypothèses de (ii)). Notant S l'ensemble des éléments réguliers de A (de sorte que $S^{-1}A$ est l'*anneau total des fractions* de A), on doit donc considérer l'homomorphisme canonique

(20.2.11.1) $$S^{-1}A \to M'(X)$$

et montrer qu'il est injectif (resp. bijectif sous les conditions de (ii)). Or, on peut écrire $S^{-1}A = \varinjlim_t A_t$, où t parcourt l'ensemble des éléments *réguliers* de A, ordonné suivant la relation « t est un diviseur de t' » ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 1.4.5); on peut aussi écrire $A_t = \Gamma(D(t), \mathcal{O}_X)$. D'autre part on a par définition $M'(X) = \varinjlim_U \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, où U parcourt l'ensemble des ouverts schématiquement denses de X (ordonné par la relation $\supset$), et l'application (20.2.11.1) n'est autre que l'application canonique provenant du fait que les $D(t)$ constituent une partie de l'ensemble des ouverts schématiquement denses dans X (20.2.9). Notons que par définition d'un ouvert schématiquement dense, l'homomorphisme $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U', \mathcal{O}_X)$ pour deux tels ouverts $U' \subset U$ est toujours *injectif*, donc il en est de même des homomorphismes $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \to M'(X)$, et on en conclut que (20.2.11.1) est injectif. Pour prouver que (20.2.11.1) est bijectif, il suffit de montrer que l'ensemble des $D(t)$ est *cofinal* à l'ensemble des ouverts schématiquement denses, autrement dit que pour un tel ouvert U, il existe t régulier dans A tel que $D(t) \subset U$. Or, lorsque X est réduit et que les composantes irréductibles de X forment un ensemble localement fini, cet ensemble est fini puisque X a été supposé affine, autrement dit A n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_i$; comme A est réduit, l'intersection des $\mathfrak{p}_i$ est réduite à 0, et dire que t est régulier équivaut donc à dire que t n'appartient à aucun des $\mathfrak{p}_i$; on conclut donc par le raisonnement de (**I**, 7.1.9.1). Lorsque A est noethérien, dire que $U = X - Y$ (où $Y = V(\mathfrak{J})$ est fermé dans X) est schématiquement dense signifie (5.10.2) que Y *ne rencontre pas* $\mathrm{Ass}(\mathcal{O}_X)$, et en vertu de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 4, prop. 8, cela entraîne l'existence d'un $t \in \mathfrak{J}$ tel que t soit A-régulier, donc $U \supset D(t)$.

On a en outre prouvé au cours de cette démonstration le

Corollaire (**20.2.12**). — *Si* $X = \mathrm{Spec}(A)$, *où* A *est noethérien, ou réduit et n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux, les ouverts schématiquement denses dans* X *sont ceux qui contiennent un ouvert de la forme* $D(t)$, *où t est régulier dans* A, *et* $M(X) = M'(X)$ *est l'anneau total des fractions* $S^{-1}A$, *où* S *est l'ensemble des éléments réguliers de* X.

Remarques (**20.2.13**). — (i) Soient φ un élément de $M(X)$, φ' son image dans $M'(X)$; on a évidemment, par définition ((20.1.4) et (20.2.8)) $\mathrm{dom}(\varphi) \subset \mathrm{dom}(\varphi')$; mais en fait on a l'égalité $\mathrm{dom}(\varphi) = \mathrm{dom}(\varphi')$, car il existe une section de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de $\mathrm{dom}(\varphi')$, appartenant à la classe φ', et la fonction méromorphe correspondante est égale à φ (20.2.11, (i)), donc $\mathrm{dom}(\varphi') \subset \mathrm{dom}(\varphi)$.

(ii) On a déjà noté que lorsque X est *réduit*, on a $\mathscr{M}'_X = \mathscr{R}(X)$ (faisceau des fonctions rationnelles sur X (**I**, 7.3.2)); si en outre les composantes irréductibles de X forment un ensemble localement fini, on a $\mathscr{M}_X = \mathscr{M}'_X = \mathscr{R}(X)$. En général, puisque tout ensemble ouvert schématiquement dense est dense, on a un homomorphisme canonique $\mathscr{M}'_X \to \mathscr{R}(X)$, mais même lorsque X est localement noethérien, cet homomorphisme n'est pas nécessairement injectif. Par exemple, si $X = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau noethérien tel que Ass(A) contienne des idéaux premiers immergés (ce qui entraîne que A n'est pas réduit), on a vu que $M(X)$ et $M'(X)$ s'identifient à l'anneau total de fractions $S^{-1}A$, où S est l'ensemble des éléments réguliers de A, complémentaire de la réunion des idéaux $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(A)$; par contre, $R(X)$ s'identifie à $Q^{-1}A$, où Q est le complémentaire de la réunion des idéaux premiers *minimaux* de A (**I**, 7.1.9), et l'homomorphisme canonique $A\to Q^{-1}A$ (et *a fortiori* $S^{-1}A\to Q^{-1}A$) n'est donc pas injectif, puisqu'il existe dans $A-Q$ des éléments $\neq 0$ de A annulés par des éléments de Q (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 1, cor. 2 de la prop. 1).

(iii) On notera que même lorsque X est localement noethérien, le $\mathcal{O}_X$-Module $\mathscr{M}'_X$ *n'est pas nécessairement quasi-cohérent*. Considérons par exemple un anneau local noethérien A de dimension $\geqslant 2$, dont l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ est tel que $\mathfrak{m}\in\mathrm{Ass}(A)$ et que si l'on pose $X=\mathrm{Spec}(A)$, le schéma induit sur l'ouvert U de X, complémentaire de $\{\mathfrak{m}\}$, soit *intègre*. Les seuls éléments réguliers de A sont alors les éléments inversibles, donc $\Gamma(X,\mathscr{M}_X)=M(X)=A$; si $\mathscr{M}_X$ était quasi-cohérent, il serait donc égal à $\mathcal{O}_X$; mais comme U est un schéma intègre, $\mathscr{M}_X|U=R(U)$ est un faisceau *simple* (**I**, 7.3.5), alors que $\mathcal{O}_U$ n'est pas un faisceau simple puisque $\dim(A)\geqslant 2$.

Reste à donner un exemple d'anneau A ayant les propriétés précédentes. Il suffit de considérer un anneau local intègre B de dimension $\geqslant 2$ et de corps résiduel k, et de prendre $A=B\oplus k$ avec la loi de multiplication $(b,x)(b',x')=(bb',bx'+b'x)$.

(iv) Si X est localement noethérien, il résulte de (5.10.2) que les ouverts schématiquement denses dans X sont ceux qui *contiennent l'ensemble* $\mathrm{Ass}(\mathcal{O}_X)$.

(20.2.14) Soient X un préschéma, $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent et *strictement sans torsion* (20.1.5), de sorte que $\mathscr{F}$ s'identifie à un sous-$\mathcal{O}_X$-Module de $\mathscr{M}_X(\mathscr{F})$. Pour toute section méromorphe u de $\mathscr{F}$ au-dessus de X, on appelle *Idéal des dénominateurs de u* l'annulateur $\mathscr{J}$ de la section $\overline{u}$ image de u dans $\mathscr{M}_X(\mathscr{F})/\mathscr{F}$. L'Idéal $\mathscr{J}$ est *quasi-cohérent* : en effet, la question étant locale sur X, on peut se borner au cas où X est affine, et il existe une section $s\in\Gamma(X,\mathscr{S}(\mathcal{O}_X))$ telle que $v=su\in\Gamma(X,\mathscr{F})$. Dire que, pour un ouvert $U\subset X$, une section $f\in\Gamma(U,\mathcal{O}_X)$ appartient à $\Gamma(U,\mathscr{J})$ signifie que $f(u|U)\in\Gamma(U,\mathscr{F})$, et puisque $s|U$ est un élément régulier de $\Gamma(U,\mathcal{O}_X)$ et que $\mathscr{F}$ est strictement sans torsion, la relation précédente équivaut encore à $f((su)|U)\in\Gamma(U,s\mathscr{F})$; si $\overline{v}$ est la section de $\mathscr{F}/s\mathscr{F}$, image canonique de v, on voit donc que $\mathscr{J}$ est le noyau de l'homomorphisme $\mathcal{O}_X\to\mathscr{F}/s\mathscr{F}$ obtenu par multiplication par la section $\overline{v}$. Comme $\mathscr{F}/s\mathscr{F}$ est quasi-cohérent, il en est de même de $\mathscr{J}$.

Il résulte aussitôt de la définition précédente que $\mathrm{dom}(u)$ est *l'ouvert complémentaire du sous-préschéma fermé de X défini par l'Idéal des dénominateurs de u*.

Proposition **(20.2.15)**. — *Soient* $f:X'\to X$ *un morphisme,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent,* φ *une section de* $\mathscr{M}_f(\mathscr{F})$ *au-dessus de* X (20.1.11). *Alors* $f^{-1}(\mathrm{dom}(\varphi))$ *est schématiquement dense dans* X'.

La question étant évidemment locale sur X et X', on peut supposer $X=\mathrm{Spec}(A)$, $X'=\mathrm{Spec}(A')$ affines, $\mathscr{F}=\widetilde{M}$, et $\varphi=h\otimes(1/s)$, où $h\in M$ et s est un élément régulier de A dont l'image s' dans A' est un élément régulier. On sait alors (20.2.9) que $D(s')$ est un ouvert schématiquement dense dans X', et c'est l'image réciproque par f de $D(s)$, qui est contenu dans $\mathrm{dom}(\varphi)$.

Remarque **(20.2.16)**. — Lorsque Y n'est pas séparé, le préfaisceau $U\rightsquigarrow\mathrm{Ps.hom}_S(U,Y)$ sur X n'est pas nécessairement un faisceau, même lorsque X est noethérien, comme le montre l'exemple suivant. Nous allons prendre pour X un spectre d'un anneau *semi-local* noethérien A de dimension $\geqslant 2$, ayant exactement deux idéaux maximaux $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}''$ (donc tel que X ait exactement deux points fermés x', x''), de sorte que $\mathfrak{m}'$ et $\mathfrak{m}''$ appartiennent à Ass(A) et que l'ouvert $U = X - \{x', x''\}$ soit *intègre*. Soient $U' = X - \{x'\}$, $U'' = X - \{x''\}$, de sorte que $U = U' \cap U''$. Notons que les seuls ouverts schématiquement denses dans X sont ceux qui contiennent x' et x'' (20.2.13, (iv)), donc ils sont nécessairement identiques à X. Pour avoir un contre-exemple, il suffira donc de définir deux S-morphismes $u' : U' \to Y$, $u'' : U'' \to Y$ (avec $S = X$) dont les restrictions à U appartiennent au même pseudo-morphisme de U dans Y, mais qui sont tels que, pour tout voisinage V′ de x'' dans U′ et tout voisinage V″ de x' dans U″, les restrictions de u' et u'' à $V' \cap V''$ soient distinctes. Pour cela, considérons une partie fermée *irréductible* Z de X contenant x' et x'', distincte de X; soit Y le X-préschéma obtenu en recollant deux préschémas Y′, Y″ isomorphes à X le long de l'ouvert partout dense $X - Z$ (**I**, 2.3.1). On prendra alors pour u' et u'' les restrictions respectives à U′ et U″ des isomorphismes réciproques des isomorphismes structuraux $Y' \xrightarrow{\sim} X$, $Y'' \xrightarrow{\sim} X$. Comme V′ et V″ contiennent le point générique de Z, les restrictions de u' et u'' à $V' \cap V''$ sont distinctes, mais les restrictions de u' et u'' à $U - (U \cap Z)$ sont égales, et $U - (U \cap Z)$ est un ouvert dense dans U, donc schématiquement dense puisque U est réduit.

Reste donc seulement à définir A et Z de façon à avoir les propriétés précédentes. Soient $X_0 = \mathrm{Spec}(B)$ un schéma affine intègre (par exemple le plan affine sur un corps k), Y une partie fermée irréductible de X_0 (par exemple une droite affine) contenant deux points fermés distincts x' et x'', correspondant aux idéaux maximaux $\mathfrak{n}'$, $\mathfrak{n}''$ de B. On considère l'anneau $C = B \oplus (B/\mathfrak{n}' \oplus B/\mathfrak{n}'')$ avec la multiplication $(b, z)(b', z') = (bb', bz' + b'z)$. Si $X_1 = \mathrm{Spec}(C)$, on a $X_0 = (X_1)_{\mathrm{red}}$ et X_1 est réduit sauf aux points x', x''. Il suffit alors de prendre $A = R^{-1}C$, où R est le complémentaire de la réunion des idéaux maximaux de C aux points x', x'', et pour Z la trace de Y sur $X = \mathrm{Spec}(A)$.

20.3. Composition des pseudo-morphismes.

(20.3.1) Soient X, Y, Z trois préschémas, ω un pseudo-morphisme de X dans Y, $f : Y \to Z$ un *morphisme*. Il est clair que si U′, U″ sont deux ouverts schématiquement denses dans X, $u' : U' \to Y$, $u'' : U'' \to Y$ deux morphismes de la classe ω, les morphismes $f \circ u'$ et $f \circ u''$ sont équivalents (pour la relation définie dans (20.2.1)), donc, pour tous les morphismes u de la classe ω, les morphismes $f \circ u$ appartiennent à une même classe d'équivalence, que l'on note $f \circ \omega$ et que l'on appelle le pseudo-morphisme de X dans Z *composé* de f et de ω. On a $\mathrm{dom}(f \circ \omega) = \mathrm{dom}(\omega)$. Si $g : Z \to T$ est un morphisme, il est clair que l'on a $g \circ (f \circ \omega) = (g \circ f) \circ \omega$.

(20.3.2) Supposons maintenant donnés un pseudo-S-morphisme ω de X dans Y, où Y est *séparé sur* S, de sorte qu'il existe un S-morphisme $u : \mathrm{dom}_S(\omega) \to Y$ de la classe ω (20.2.4). Soit $f : X' \to X$ un S-morphisme tel que l'ouvert $V' = f^{-1}(\mathrm{dom}_S(\omega))$ soit *schématiquement dense dans* X′; alors on dit que la classe (pour la relation d'équivalence de (20.2.1)) du S-morphisme $u \circ (f | U')$ (classe qui est définie en vertu de l'hypothèse précédente) est le pseudo-S-morphisme *composé* de ω et de f, et on le note $\omega \circ f$; il est clair que l'on a

(20.3.2.1) $$f^{-1}(\mathrm{dom}_S(\omega)) \subset \mathrm{dom}_S(\omega \circ f).$$

Pour $f : X' \to X$ donné, on note $\mathrm{Ps.hom}_S(X, Y)^f$ l'ensemble des pseudo-S-morphismes ω de X dans Y qui vérifient la condition précédente. Si ω est un tel pseudo-S-morphisme, il est clair que pour tout ouvert V de X,

$$f^{-1}(\mathrm{dom}_S(\omega | V)) = f^{-1}(V \cap \mathrm{dom}_S(\omega)) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(\mathrm{dom}_S(\omega))$$

est schématiquement dense dans $f^{-1}(V)$, donc, si $f^V : f^{-1}(V) \to V$ est la restriction de f, le composé $(\omega | V) \circ f^V$ est défini et égal à $(\omega \circ f) | f^{-1}(V)$. On définit ainsi une application canonique de restriction $\mathrm{Ps.hom_S}(X, Y)^f \to \mathrm{Ps.hom_S}(V, Y)^{f^V}$, ce qui permet de définir un *préfaisceau* d'ensembles $V \leadsto \mathrm{Ps.hom_S}(V, Y)^{f^V}$ sur X, sous-préfaisceau de $V \leadsto \mathrm{Ps.hom_S}(V, Y)$, d'où un faisceau d'ensembles associé que l'on note $\mathscr{P}s.\mathit{hom}_S(X, Y)^f$. En outre, pour tout ouvert V de X, on a une application $\omega \leadsto \omega \circ f^V$ de $\mathrm{Ps.hom_S}(V, Y)^{f^V}$ dans $\mathrm{Ps.hom_S}(f^{-1}(V), Y)$, qui définit donc un *f-morphisme* de faisceaux d'ensembles

$$\mathscr{P}s.\mathit{hom}_S(X, Y)^f \to \mathscr{P}s.\mathit{hom}_S(X', Y).$$

(20.3.3) Soit maintenant $f' : X'' \to X'$ un S-morphisme tel que l'ouvert $f'^{-1}(f^{-1}(\mathrm{dom_S}(\omega)))$ soit schématiquement dense dans X''; alors $\omega \circ (f \circ f')$ est défini et $u \circ f \circ f'$ appartient à ce pseudo-S-morphisme; en outre, en vertu de (20.3.2.1), $f'^{-1}(\mathrm{dom_S}(\omega \circ f))$ est *a fortiori* schématiquement dense dans X'', donc $(\omega \circ f) \circ f'$ est aussi défini et $u \circ f \circ f'$ appartient à ce pseudo-S-morphisme, donc on a $(\omega \circ f) \circ f' = \omega \circ (f \circ f')$.

D'autre part, pour tout S-morphisme $g : Y \to Z$, on a $\mathrm{dom_S}(g \circ \omega) = \mathrm{dom_S}(\omega)$ (20.3.1), donc $(g \circ \omega) \circ f$ est défini, et $g \circ u \circ f$ appartient à ce pseudo-S-morphisme, ce qui montre que $(g \circ \omega) \circ f = g \circ (\omega \circ f)$.

(20.3.4) Le cas le plus important dans la définition (20.3.2) est celui où l'on a $\mathscr{P}s.\mathit{hom}_S(X, Y)^f = \mathscr{P}s.\mathit{hom}_S(X, Y)$: il suffit pour cela que pour tout ouvert U de X et tout ouvert V schématiquement dense dans U, $f^{-1}(V)$ soit schématiquement dense dans $f^{-1}(U)$; lorsqu'il en est ainsi, alors, pour *tout* ouvert U de X et *tout* pseudo-S-morphisme $\omega : U \to Y$, on peut définir le composé $\omega \circ f^U$, *même si* Y *n'est pas séparé sur* S. En effet, si $u' : U' \to Y$ et $u'' : U'' \to Y$ sont deux morphismes de la classe ω, ils coïncident dans un ouvert U_0 schématiquement dense dans U, donc les morphismes composés $f^{-1}(U') \to U' \xrightarrow{u'} Y$ et $f^{-1}(U'') \to U'' \xrightarrow{u''} Y$ coïncident dans $f^{-1}(U_0)$, qui est par hypothèse schématiquement dense dans $f^{-1}(U)$; on peut donc définir $\omega \circ f^U$ comme la classe d'un quelconque des morphismes $f^{-1}(U') \to U' \xrightarrow{u'} Y$, où u' appartient à ω.

Proposition **(20.3.5)**. — *Soient* X, X' *deux préschémas*, $f : X' \to X$ *un morphisme. Alors, dans chacun des trois cas suivants, pour tout ouvert* U *de* X *et tout ouvert* V *schématiquement dense dans* U, $f^{-1}(V)$ *est schématiquement dense dans* $f^{-1}(U)$:

(i) f *est plat et localement de présentation finie.*

(ii) f *est plat et l'espace sous-jacent à* X *est localement noethérien.*

(iii) X' *est réduit, l'ensemble des composantes irréductibles de* X *est localement fini, et toute composante irréductible de* X' *domine une composante irréductible de* X.

L'assertion (i) résulte de (11.10.5, (ii), *b)*); l'assertion (ii) résulte de (11.10.5, (ii), *a)*), car alors tout ouvert V dans U est *rétrocompact*, autrement dit l'injection canonique $j : V \to U$ est un morphisme quasi-compact. Enfin, pour prouver (iii), notons que puisque X' est réduit, il suffit de montrer que pour tout ouvert U de X et tout ouvert V *dense* dans U, $f^{-1}(V)$ est *dense* dans $f^{-1}(U)$. Or, pour que $f^{-1}(V)$ soit dense dans $f^{-1}(U)$, il suffit que $f^{-1}(V)$ contienne tous les points maximaux de X' appartenant à $f^{-1}(U)$; la conclusion résulte donc de l'hypothèse que l'image par f de tout point maximal de X' appartenant à $f^{-1}(V)$ est un point maximal de X appartenant à U, donc à V puisque l'ensemble des composantes irréductibles de X est localement fini.

(20.3.6) Soient X, Y deux S-préschémas; supposons que X vérifie l'une des deux hypothèses suivantes :

a) X *est localement noethérien;*

b) X *est réduit et l'ensemble de ses composantes irréductibles est localement fini.*

Alors, pour tout $x \in X$, le S-morphisme canonique $j : \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to X$ est plat et vérifie la condition (ii) de (20.3.5) dans le cas *a)*, la condition (iii) de (20.3.5) dans le cas *b)*. Pour *tout* pseudo-S-morphisme ω de X dans Y, le composé $\omega \circ j$ est donc défini et est un pseudo-S-morphisme de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ dans Y, appelé la *restriction* de ω à $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$. Notons maintenant que si X vérifie la condition *a)* (resp. *b)*) de (20.3.6), il en est de même de tout préschéma induit sur un ouvert U de X contenant x. Par passage à la limite inductive, on déduit donc, des applications canoniques $\mathrm{Ps.hom}_S(U, Y) \to \mathrm{Ps.hom}_S(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}), Y)$ ainsi obtenues, une application canonique

$$(\mathscr{P}s.hom_S(X, Y))_x \to \mathrm{Ps.hom}_S(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}), Y) \tag{20.3.6.1}$$

où le premier membre est la fibre au point x du faisceau $\mathscr{P}s.hom_S(X, Y)$, ensemble des germes en x de pseudo-S-morphismes de voisinages ouverts de x dans Y.

Proposition **(20.3.7).** — *Sous les hypothèses de* (20.3.6), *l'application canonique* (20.3.6.1) *est injective. Si en outre* Y *est localement de présentation finie sur* S, *l'application* (20.3.6.1) *est bijective.*

Par application de la méthode de (8.1.2, *a)*), cette proposition sera un cas particulier de la suivante :

Proposition **(20.3.8).** — *Les notations étant celles de* (8.8.1), *supposons* X_α *quasi-compact* (resp. *quasi-compact et quasi-séparé*) *et* Y_α *localement de type fini* (resp. *localement de présentation finie*) *sur* S_α. *Supposons en outre que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

(i) *Les morphismes de transition* $S_\mu \to S_\lambda$ (*pour* $\lambda \leqslant \mu$) *sont plats, et les* X_λ *et* X *sont noethériens.*

(ii) *Les* X_λ *sont réduits, l'ensemble des composantes irréductibles de* X *et de chacun des* X_λ *est fini, et, pour* $\lambda \leqslant \mu$, *toute composante irréductible de* X_μ *domine une composante irréductible de* X_λ.

Alors, l'application canonique

$$\varinjlim \mathrm{Ps.hom}_{S_\lambda}(X_\lambda, Y_\lambda) \to \mathrm{Ps.hom}_S(X, Y) \tag{20.3.8.1}$$

est injective (resp. *bijective*).

Notons d'abord que, dans le cas (i), les morphismes $X_\mu \to X_\lambda$ (pour $\lambda \leqslant \mu$) et $X \to X_\lambda$ sont plats, donc il résulte de (20.3.4) et (20.3.5) que les applications canoniques

$$\mathrm{Ps.hom}_{S_\lambda}(X_\lambda, Y_\lambda) \to \mathrm{Ps.hom}_{S_\mu}(X_\mu, Y_\mu)$$

pour $\lambda \leqslant \mu$ et $\mathrm{Ps.hom}_{S_\lambda}(X_\lambda, Y_\lambda) \to \mathrm{Ps.hom}_S(X, Y)$ sont définies (sans hypothèse de séparation sur les Y_λ ni Y); il en est par suite de même de l'application (20.3.8.1). La proposition va résulter du lemme suivant :

Lemme **(20.3.8.2)**. — *Les notations étant celles de* (8.8.1), *supposons* X_α *quasi-compact, et soit* U_α *un ouvert dans* X_α; *soient* U_λ *et* U *ses images réciproques dans* X_λ *et* X *pour* $\lambda \geqslant \alpha$. *Supposons que l'une des conditions* (i), (ii) *de* (20.3.8) *soit vérifiée. Alors, pour que* U *soit schématiquement dense dans* X, *il faut et il suffit qu'il existe* $\lambda \geqslant \alpha$ *tel que* U_λ *soit schématiquement dense dans* X_λ, *et dans ce cas* U_μ *est schématiquement dense dans* X_μ *pour* $\mu \geqslant 1$.

Supposons d'abord vérifiée la condition (i); désignons par $j_\lambda : U_\lambda \to X_\lambda$ et $j : U \to X$ les injections canoniques, par $\mathscr{J}_\lambda$ le noyau de l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_{X_\lambda} \to (j_\lambda)_*(\mathscr{O}_{U_\lambda})$. L'immersion j_λ étant quasi-compacte et quasi-séparée, $(j_\lambda)_*(\mathscr{O}_{U_\lambda})$ est un $\mathscr{O}_{X_\lambda}$-Module quasi-cohérent, donc $\mathscr{J}_\lambda$ est un Idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_{X_\lambda}$, et puisque X_λ est noethérien, $\mathscr{J}_\lambda$ est cohérent, donc de type fini. D'autre part, le morphisme de transition $p_{\lambda\mu} : X_\mu \to X_\lambda$ (resp. $p_\lambda : X \to X_\lambda$) étant plat, il résulte de (2.3.1) que l'on peut identifier $(j_\mu)_*(\mathscr{O}_{U_\mu})$ à $p^*_{\lambda\mu}((j_\lambda)_*(\mathscr{O}_{U_\lambda}))$ (resp. $j_*(\mathscr{O}_U)$ à $p^*_\lambda((j_\lambda)_*(\mathscr{O}_{U_\lambda}))$). L'assertion résulte alors de la définition d'un ouvert schématiquement dense et de (8.5.8, (ii)).

Pour établir (20.3.8.2) lorsque la condition (ii) est vérifiée, nous prouverons d'abord deux lemmes.

Lemme **(20.3.8.3)**. — *Sous les hypothèses de* (8.2.2), *soit* M_λ (resp. M) *l'ensemble des points maximaux de* S_λ (resp. S). *Supposons que pour tout* λ, *l'ensemble* M_λ *soit fini, et que les* M_λ *forment un système projectif d'ensembles. Alors* M *est limite projective du système des* M_λ.

Montrons d'abord qu'un point $s \in \varprojlim M_\lambda$ est maximal dans S : en effet, si s' est une générisation de s, l'image s'_λ de s' dans S_λ est une générisation de l'image s_λ de s, donc égale à s_λ pour tout λ, ce qui implique $s' = s$, puisque l'ensemble sous-jacent à S est limite projective des ensembles sous-jacents aux S_λ (8.2.9). Inversement, soit s un point maximal de S et prouvons qu'il appartient à $\varprojlim M_\lambda$. Soient s_λ l'image de s dans S_λ, M'_λ l'ensemble des points maximaux de S_λ qui sont des générisations de s_λ; les M'_λ sont des ensembles finis non vides, qui forment un système projectif, donc $M' = \varprojlim M'_\lambda$ n'est pas vide et l'application $M' \to M'_\lambda$ est surjective (Bourbaki, *Ens.*, chap. III, 2^e^ éd., § 7, n° 4, Exemple I). D'autre part, on a $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{S,s}) = \varprojlim \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{S_\lambda, s_\lambda})$ en vertu de (8.2.12) et (8.2.9), donc les points de $\varprojlim M'_\lambda$ sont aussi points maximaux de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{S,s})$ d'après la première partie du raisonnement. Donc $M' = \varprojlim M'_\lambda$ se réduit nécessairement au point s; on en conclut que M'_λ se réduit au point s_λ et par suite les s_λ sont maximaux dans les S_λ, ce qui achève de prouver le lemme.

Lemme **(20.3.8.4)**. — *Les hypothèses étant celles de* (20.3.8.3), *supposons en outre* S_α *quasi-compact*; *soit* V_α *un ensemble ouvert de* S_α, *et soient* V_λ *et* V *ses images réciproques dans* S_λ *pour* $\lambda \geqslant \alpha$ *et dans* S. *Si* U_α *est dense dans* S_α, U_λ *est dense dans* S_λ *pour* $\lambda \geqslant \alpha$ *et* U *est dense dans* S. *Inversement, si* U *est dense dans* S *et si de plus l'ensemble* M *des points maximaux de* S *est fini, il existe* $\lambda \geqslant \alpha$ *tel que* U_λ *soit dense dans* S_λ.

En effet, puisque M_α est fini, l'hypothèse que U_α est dense dans S_α entraîne que

$M_\alpha \subset U_\alpha$, donc $M_\lambda \subset U_\lambda$ pour $\lambda \geqslant \alpha$ et $M \subset U$ en vertu de (20.3.8.3), ce qui prouve la première assertion. Inversement, supposons M fini et U dense dans S, donc $M \subset U$; notons que les U_λ sont ouverts, donc ind-constructibles et les M_λ finis, donc pro-constructibles (1.9.6). La seconde assertion résulte alors de (8.3.2).

(20.3.8.5) *Fin de la démonstration de* (20.3.8.2). — Supposons la condition (ii) vérifiée, et notons que X est alors *réduit* en vertu de (8.7.1); il revient donc au même de dire que U_λ (resp. U) est schématiquement dense dans X_λ (resp. X) ou qu'il est dense dans X_λ (resp. X), et la conclusion résulte de (20.3.8.4) appliqué aux X_λ et à X.

(20.3.8.6) *Fin de la démonstration de* (20.3.8). — Pour montrer que l'application (20.3.8.1) est injective, considérons deux morphismes u'_λ, u''_λ d'un ouvert schématiquement dense $U_\lambda \subset X_\lambda$ dans Y_λ, et supposons que leurs images u', u'', morphismes de U dans Y, coïncident dans un ouvert schématiquement dense V de U. En outre, dans l'une ou l'autre des hypothèses (i), (ii), on peut supposer V *quasi-compact*; c'est évident si X est noethérien; sinon, comme X n'a qu'un nombre fini de points maximaux et est réduit, il suffit de remplacer V par la réunion d'un nombre fini de voisinages ouverts affines de ces points maximaux (contenus dans V par hypothèse). Alors il existe un $\lambda \geqslant \alpha$ tel que V soit l'image réciproque d'un ouvert quasi-compact V_λ de X_λ (8.2.11), et il résulte de (20.3.8.2) qu'en prenant λ assez grand, on peut supposer que V_λ est schématiquement dense dans X_λ. Il résulte alors de (8.8.2, (i)) qu'en prenant λ assez grand, u'_λ et u''_λ coïncident dans V_λ, donc appartiennent au même pseudo-homomorphisme.

Prouvons enfin que l'application (20.3.8.1) est surjective. On considère maintenant un morphisme u d'un ouvert schématiquement dense U de X, dans Y; comme ci-dessus, on peut supposer U quasi-compact et quasi-séparé (U pouvant être remplacé, dans le cas (ii), par une réunion d'un nombre fini d'ouverts affines deux à deux disjoints). On peut donc encore supposer qu'il existe un $\lambda \geqslant \alpha$ tel que U soit l'image réciproque d'un ouvert quasi-compact U_λ de X_λ (8.2.11) qui est automatiquement quasi-séparé, et par (20.3.8.2) on peut supposer en outre que U_λ soit schématiquement dense dans X_λ. Puisque les Y_λ sont supposés localement de présentation finie, il résulte de (8.8.2, (i)) qu'il existe un λ tel que u soit l'image d'un morphisme $u_\lambda : U_\lambda \to Y_\lambda$; d'où la conclusion.

Remarques **(20.3.8.7)**. — (i) Pour prouver que l'application (20.3.8.1) est *injective*, il n'est pas nécessaire, dans l'hypothèse (i) de (20.3.8), de supposer X noethérien. En effet, le lemme (20.3.8.2) n'utilise pas cette hypothèse. Avec les notations de (20.3.8.6), soit Z_λ le sous-préschéma des coïncidences de u'_λ et u''_λ, et soit Z le sous-préschéma des coïncidences de u' et u''; il résulte de la définition (17.4.5) et de (**I**, 3.3.10.1) que Z est limite projective des Z_μ pour $\mu \geqslant \lambda$. Or, par hypothèse, Z majore un ouvert schématiquement dense dans X; il en résulte que Z est lui-même induit sur un ouvert de X en vertu du lemme suivant :

Lemme **(20.3.8.8)**. — *Soit* T *un préschéma. Alors tout sous-préschéma* W *de* T *qui majore un ouvert schématiquement dense* V *de* T *est induit sur un ouvert (schématiquement dense) de* T.

En effet, le sous-espace de T sous-jacent à W est localement fermé, donc ouvert dans son adhérence, ce qui prouve déjà que l'espace sous-jacent à W est ouvert dans T; la conclusion résulte alors de (11.10.1, *c*)).

Ce lemme étant établi, on en conclut que pour $\mu \geqslant \lambda$ assez grand, Z_μ est induit sur un ouvert de X_μ en vertu de (8.6.3), car Z_λ, en tant que sous-préschéma d'un préschéma noethérien, est de présentation finie sur X_λ (1.6.2), et il en est donc de même des Z_μ pour $\mu \geqslant \lambda$ sur X_μ et de Z sur X. On peut maintenant appliquer (20.3.8.2) qui montre que pour $\mu \geqslant \lambda$ assez grand, Z est schématiquement dense dans X, d'où la conclusion.

(ii) Si, dans l'hypothèse (i) de (20.3.8), on supprime la condition que X est noethérien, on voit que le raisonnement de (20.3.8.6) montre encore que l'image de (20.3.8.1) est formée des pseudo-S-morphismes ayant un représentant qui est un S-morphisme $U \to Y$, où U est schématiquement dense dans X et *quasi-compact et quasi-séparé.*

Corollaire **(20.3.9)**. — *Supposons vérifiées l'une ou l'autre hypothèse* a), b) *de* (20.3.6) *sur* X, *et que* Y *soit localement de présentation finie sur* S. *Alors, pour qu'un pseudo*-S-*morphisme* ω *de* X *dans* Y *soit défini au point x* (20.2.3), *il faut et il suffit que sa restriction à* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ *soit partout définie* (autrement dit, soit un S-*morphisme* de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ dans Y).

Le résultat suivant, qui nous servira dans la démonstration de (20.3.11), utilise la théorie de la descente fidèlement plate du chap. VI. Le lecteur pourra vérifier que les résultats de (20.3) ne seront pas utilisés dans cette théorie.

Lemme **(20.3.10)**. — *Soient* $f: X' \to X$ *un* S-*morphisme fidèlement plat et quasi-compact,* $X'' = X' \times_X X'$, p_1 *et* p_2 *les projections canoniques de* X'' *dans* X', Y *un préschéma séparé sur* S. *Soient* U *un ouvert de* X, $U' = f^{-1}(U)$, $U'' = p_1^{-1}(U') = p_2^{-1}(U')$, *et supposons que* U'' *soit schématiquement dense dans* X''. *Soit* $g: U \to Y$ *un* S-*morphisme*; *alors, si* $g \circ (f|U)$ *se prolonge en un* S-*morphisme* $X' \to Y$, *g se prolonge en un* S-*morphisme* $X \to Y$.

On notera que les hypothèses entraînent que U (resp. U') est schématiquement dense dans X (resp. X') (11.10.5, (i)); on peut donc encore dire que si ω désigne le pseudo-S-morphisme classe de *g*, l'énoncé de (20.3.10) signifie que *si* $\omega \circ f$ *est partout défini, il en est de même de* ω.

Pour prouver (20.3.10), désignons par g' un S-morphisme $X' \to Y$ qui prolonge $g \circ (f|U)$, et posons $g''_i = g' \circ p_i : X'' \to Y$ ($i = 1, 2$). Si l'on pose $f'' = f \circ p_1 = f \circ p_2 : X'' \to X$, il est clair que g''_1 et g''_2 coïncident dans U'' avec $g \circ (f''|U'')$. Mais comme Y est séparé sur S et U'' schématiquement dense dans X'', on a $g''_1 = g''_2$ (11.10.1, *d*)). Comme *f* est fidèlement plat et quasi-compact, il résulte de la théorie de la descente (chap. VI) qu'il existe un unique S-morphisme $h: X \to Y$ tel que $h \circ f = g'$; comme la restriction $U' \to U$ de *f* est un morphisme fidèlement plat et quasi-compact et que $U'' = U' \times_U U'$, le résultat d'unicité précédent, appliqué à U au lieu de X, montre que $h|U = g$, ce qui prouve le lemme.

Proposition **(20.3.11)**. — *Soient* Y *un* S-*préschéma séparé sur* S, ω *un pseudo*-S-*morphisme de* X *dans* Y, $f: X' \to X$ *un* S-*morphisme. Supposons que f soit* plat, *et que* l'une *des conditions suivantes soit réalisée :*

(i) *f est un morphisme ouvert, ou surjectif et quasi-compact, et* $\mathrm{dom}_S(\omega)$ *contient un ouvert* U *schématiquement dense dans* X *et rétrocompact dans* X.

(ii) *f est localement de présentation finie.*

(iii) Y *est localement de présentation finie sur* S, *et* X *vérifie l'une des conditions* a), b) *de* (20.3.6).

Alors, $f^{-1}(\mathrm{dom}_S(\omega))$ *est schématiquement dense dans* X', *de sorte que* $\omega\circ f$ *est défini* (20.3.2) *et l'on a*

(20.3.11.1) $$\mathrm{dom}_S(\omega\circ f)=f^{-1}(\mathrm{dom}_S(\omega)).$$

Prouvons d'abord que $f^{-1}(\mathrm{dom}_S(\omega))$ est schématiquement dense dans X'. La question étant locale sur X et X', on peut supposer X et X' affines et puisque f est plat, il suffit de voir, en vertu de (11.10.5, (ii), *a)*) que $\mathrm{dom}_S(\omega)$ contient un ensemble ouvert U *rétrocompact* et schématiquement dense dans X. Cela résulte de l'hypothèse dans le cas (i), et de (20.2.12) dans le cas (iii), compte tenu du fait que dans un schéma affine, tout ouvert de la forme D(t) est rétrocompact; enfin, dans le cas (ii), on voit directement que $f^{-1}(\mathrm{dom}_S(\omega))$ est schématiquement dense dans X' en appliquant (20.3.5, (i)).

Prouvons maintenant (20.3.11.1), autrement dit que, pour tout point

$$x'\in\mathrm{dom}_S(\omega\circ f),$$

on a $x=f(x')\in\mathrm{dom}_S(\omega)$. Notons d'abord qu'on peut se borner au cas où f est *fidèlement plat et quasi-compact*. C'est en effet l'hypothèse dans le second cas de (i); dans les autres cas, la question est locale sur X', et on peut donc supposer déjà X et X' affines, donc f *quasi-compact*. Dans le premier cas de (i) et dans le cas (ii) f est un morphisme ouvert (11.3.1), donc on peut, en remplaçant X par l'ouvert $f(\mathrm{X}')$, supposer f surjectif, donc fidèlement plat. Dans le cas (iii), en utilisant (20.3.9), on peut se borner à prouver que la restriction de ω à $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathrm{X},x})$ est partout définie, et on peut donc remplacer X par $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathrm{X},x})$, X' par $\mathrm{X}'\times_{\mathrm{X}}\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathrm{X},x})$ et f par sa restriction à ce dernier préschéma, qui est un morphisme surjectif (2.3.4), donc fidèlement plat.

Supposons donc f fidèlement plat et quasi-compact; avec les notations du lemme (20.3.10), il suffit de voir alors que U'' est schématiquement dense dans X'', en prenant pour U un ouvert schématiquement dense dans X, contenu dans $\mathrm{dom}_S(\omega)$; cela sera le cas, en vertu de (11.10.5, (ii), *a)*) si U est pris *rétrocompact* dans X (puisque le morphisme $f'':\mathrm{X}''\rightarrow\mathrm{X}$ est plat). Or l'existence d'un tel ouvert U fait partie de l'hypothèse dans le cas (i); dans le cas (iii) elle résulte de (20.2.12) et du fait que dans un schéma affine Spec(A), tout ouvert de la forme D(t) est rétrocompact. Enfin, dans le cas (ii), prenons $\mathrm{U}=\mathrm{dom}_S(\omega)$ et montrons directement que U'' est schématiquement dense dans X'' : il suffit pour cela de remarquer que $f'':\mathrm{X}''\rightarrow\mathrm{X}$ est plat et localement de présentation finie et d'appliquer (11.10.5, (ii), *b)*).

Corollaire **(20.3.12)**. — *Soit* φ *une pseudo-fonction sur un préschéma* X. *Alors, pour tout morphisme plat et localement de présentation finie* $f:\mathrm{X}'\rightarrow\mathrm{X}$, *la pseudo-fonction* $\varphi\circ f$ *est définie et l'on a* $\mathrm{dom}(\varphi\circ f)=f^{-1}(\mathrm{dom}(\varphi))$.

Remarque (**20.3.13**). — Lorsque X vérifie l'une des conditions *a)*, *b)* de (20.3.6), alors on a vu (20.2.11) que les pseudo-fonctions sur X s'identifient aux fonctions méromorphes sur X. En vertu de (20.1.12) et de (20.2.13, (i)), si l'on suppose seulement que le morphisme $f : X' \to X$ est *plat*, alors, pour toute pseudo-fonction φ sur X, $\varphi \circ f$ est définie et l'on a $\mathrm{dom}(\varphi \circ f) = f^{-1}(\mathrm{dom}(\varphi))$.

20.4. Propriétés des domaines de définition des fonctions rationnelles.

(**20.4.1**) Soient X, Y deux S-préschémas, ω un pseudo-S-morphisme de X dans Y. Soit u un S-morphisme $U \to Y$ appartenant à ω, où U est schématiquement dense dans X, et considérons le *graphe* Γ_u, sous-préschéma de $U \times_S Y$ (**I**, 5.3.11), donc sous-préschéma de $X \times_S Y$. Supposons que ce sous-préschéma admette une *adhérence* (**I**, 9.5.11) dans $X \times_S Y$; si $j : \Gamma_u \to X \times_S Y$ est l'injection canonique, ce sera le cas lorsque le $\mathcal{O}_{X \times_S Y}$-Module $j_*(\mathcal{O}_{\Gamma_u})$ est quasi-cohérent; il résulte de la définition de la classe d'équivalence ω (20.2.1) que $j_*(\mathcal{O}_{\Gamma_u})$ ne dépend pas du représentant u considéré, donc le préschéma adhérence de Γ_u est alors bien déterminé par ω; on dit que ce sous-préschéma fermé de $X \times_S Y$ est le *graphe* du pseudo-S-morphisme ω et on le note Γ_ω. On notera que Γ_ω est défini s'il existe un morphisme $u : U \to Y$ de la classe ω tel que U soit *rétrocompact* dans X et si de plus Y est quasi-séparé sur S, car alors l'injection j est un morphisme quasi-compact et quasi-séparé ((1.2.2) et (1.7.4)); la première hypothèse sera toujours vérifiée lorsque X est *localement noethérien.* Notons aussi que lorsque X est *réduit*, il en est de même de Γ_u, qui est isomorphe à U (**I**, 5.3.11); alors Γ_ω existe et n'est autre que le sous-préschéma *réduit* de $X \times_S Y$ ayant pour espace sous-jacent l'adhérence dans $X \times_S Y$ de l'espace sous-jacent à Γ_u (**I**, 5.2.1 et 5.2.2).

Notons enfin que si Y est *séparé* sur S, Γ_u est *fermé* dans $U \times_S Y$ (**I**, 5.4.3), donc est *induit par* Γ_ω (lorsque ce dernier existe) sur l'ouvert $\Gamma_\omega \cap (U \times_S Y)$ (**I**, 9.5.10); par contre, ce préschéma induit est en général différent de Γ_u lorsque Y n'est pas séparé. En particulier, si $v : X \to Y$ est un S-*morphisme*, le graphe Γ_ω de la classe ω de v peut être distinct du graphe Γ_v. Aussi allons-nous dans ce qui suit, lorsqu'il sera question du graphe d'un pseudo-S-morphisme, nous borner au cas où Y *est séparé sur* S.

(**20.4.2**) Supposons donc Γ_ω défini et Y séparé sur S; notons p et q les restrictions à Γ_ω des projections canoniques

$$\begin{tikzcd} & \Gamma_\omega \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Alors, si $U \subset \mathrm{dom}_S(\omega)$, la restriction $p^{-1}(U) \to U$ de p est un isomorphisme (**I**, 5.3.11); réciproquement, si U est un ouvert de X ayant cette propriété, et si u est l'isomorphisme réciproque de la restriction $p^{-1}(U) \to U$ de p, $q \circ u$ est un S-morphisme de U dans Y qui coïncide avec un morphisme de la classe ω dans $U \cap \mathrm{dom}_S(\omega)$. On en conclut que $\mathrm{dom}_S(\omega)$ est *le plus grand ouvert* U de X tel que la restriction $p^{-1}(U) \to U$ de p soit un isomorphisme. Soit $v : \mathrm{dom}_S(\omega) \to \Gamma_\omega$ le S-morphisme réciproque de la restriction $p^{-1}(\mathrm{dom}_S(\omega)) \to \mathrm{dom}_S(\omega)$ de p; on note parfois p^{-1} le pseudo-S-morphisme de X dans Γ_ω, classe de v (dont l'application rationnelle associée (20.2.13, (ii)) est alors *birationnelle*); comme $p^{-1}(\mathrm{dom}_S(\omega))$ est le graphe du S-morphisme $u = q \circ v : \mathrm{dom}_S(\omega) \to Y$, il est schématiquement dense dans Γ_ω (11.10.3, (iv)), donc ω peut être considéré comme le *composé* $q \circ p^{-1}$ (20.3.2). Pour toute partie M de l'espace sous-jacent à X, on pose parfois $\omega(M) = q(p^{-1}(M))$, ce qui revient alors à considérer ω comme une application de X dans $\mathfrak{P}(Y)$ (ou, comme disent certains auteurs, une « fonction multiforme »). On notera que lorsque $x \in \mathrm{dom}_S(\omega)$, $\omega(\{x\})$ est l'ensemble $\{u(x)\}$; en général, pour un $x \in X$ quelconque, si l'on désigne par s l'image de x dans S, par Y_s la fibre au point s du morphisme structural $Y \to S$, l'ensemble $\omega(\{x\})$ est une partie du préschéma Y_s.

(20.4.3) Dans tout le reste de ce numéro, nous allons nous borner au cas où X est *réduit*, de sorte qu'il y a alors identité entre pseudo-S-morphismes et S-*applications rationnelles* (20.2.7). En outre, le *graphe* de toute S-application rationnelle de X dans Y est alors défini (20.4.1).

Proposition **(20.4.4)**. — *Soient* X *un* S-*préschéma localement intègre,* Y *un* S-*préschéma localement de type fini et séparé sur* S, ω *une* S-*application rationnelle de* X *dans* Y, $p : \Gamma_\omega \to X$ *la projection canonique. Alors, si* $x \in X$ *est un point* normal *tel que l'ensemble* $p^{-1}(x)$ *contienne un point* isolé, ω *est définie au point* x.

En effet, la première projection $p_1 : X \times_S Y \to X$ est alors un morphisme séparé et localement de type fini, donc il en est de même de sa restriction $p : \Gamma_\omega \to X$, qui est en outre *birationnel* et comme Γ_ω est réduit et X intègre, Γ_ω est *intègre*; il résulte donc de (**Err**$_{\mathrm{IV}}$, **30**) que l'hypothèse sur x entraîne l'existence d'un voisinage ouvert U de x tel que la restriction $p^{-1}(U) \to U$ de p soit un isomorphisme; d'où la conclusion (20.4.2).

On notera que l'énoncé (20.4.4) est la formulation originelle donnée par Zariski à son « Main theorem » (à cela près qu'il se restreignait aux schémas algébriques sur un corps de base).

Proposition **(20.4.5)**. — *Les hypothèses et notations étant celles de* (20.4.4), *supposons en outre* X *normal, et soient* X′ *un préschéma* réduit, $f : X' \to X$ *un morphisme localement de type fini et* universellement ouvert. *Alors* $\omega \circ f$ *est défini, et l'on a* $\mathrm{dom}_S(\omega \circ f) = f^{-1}(\mathrm{dom}(\omega))$ (en d'autres termes, si $x' \in X'$ et $x = f(x')$, alors, pour que ω soit définie au point x, il faut et il suffit que $\omega \circ f$ le soit au point x').

Comme X′ est réduit et $f^{-1}(\mathrm{dom}_S(\omega))$ partout dense dans X′ en vertu de (2.4.11), le composé $\omega \circ f$ est défini; pour prouver que, lorsque $\omega \circ f$ est définie au point x', ω l'est au point x, on peut évidemment remplacer X′ par un voisinage ouvert de x', donc supposer $\omega \circ f$ *partout définie*; en outre, comme $f(X')$ est ouvert dans X, on peut supposer f *surjectif*. En vertu de l'hypothèse sur f, le morphisme $f_{(Y)} : X' \times_S Y \to X \times_S Y$ est alors ouvert, donc $f_{(Y)}^{-1}(\overline{M}) = \overline{f_{(Y)}^{-1}(M)}$ pour toute partie M de $X \times_S Y$; prenant pour M l'ensemble Γ_u, où $u : \mathrm{dom}_S(\omega) \to Y$ est la restriction de ω à $\mathrm{dom}_S(\omega)$, il résulte de la relation précédente et de (**I**, 5.3.12) que l'ensemble sous-jacent à $\Gamma_{\omega \circ f}$ est égal à $f_{(Y)}^{-1}(\Gamma_\omega)$; comme on sait que $\Gamma_{\omega\circ f}$ est un préschéma réduit (20.4.1), on voit que le X'-préschéma $\Gamma_{\omega\circ f}$ est égal à $(\Gamma_{\omega}\times_{X}X')_{\mathrm{red}}$. Mais comme par hypothèse le morphisme composé $\Gamma_{\omega\circ f}\rightarrow\Gamma_{\omega}\times_{X}X'\xrightarrow{p_{(X')}}X'$ est un isomorphisme, $p_{(X')}$ est nécessairement *radiciel*; comme f est surjectif, il en est de même de $p:\Gamma_{\omega}\rightarrow X$ (**I**, 3.4.8), donc $p^{-1}(x)$ est un ensemble réduit à un point (**I**, 3.6.4); il résulte alors de (20.4.4) que ω est définie au point x.

La proposition suivante donne un *critère valuatif* pour qu'une application rationnelle soit définie en un point :

Proposition (**20.4.6**). — *Soient* S *un préschéma,* X, Y *deux* S-*préschémas*; *on suppose* X *localement noethérien,* Y *localement de type fini sur* S. *Soient* U *un ouvert dense dans* X, $h:U\rightarrow Y$ *un* S-*morphisme,* $x\in X-U$ *un point* normal *de* X, $h'_x:\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(x))\rightarrow Y$ *un* S-*morphisme. Afin que h puisse être prolongé en un* S-*morphisme* $h':U'\rightarrow Y$, *où* U' *est un ouvert de* X *contenant* U *et x, et où le morphisme composé* $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(x))\rightarrow U'\xrightarrow{h'}Y$ *est le* S-*morphisme donné* h'_x, *il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :*

(P) *Pour tout spectre* S_1 *d'un anneau de valuation discrète, de point fermé a et de point générique b, et tout morphisme* $u:S_1\rightarrow X$ *tel que* $u(a)=x$, $u(b)\in U$, *le morphisme composé* $h_1=h\circ(u|\{b\}):\{b\}=u^{-1}(U)\rightarrow Y$, *se prolonge en un morphisme* $h'_1:S_1\rightarrow Y$ *tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(a)) & \longrightarrow & S_1\\ & & \big\downarrow{\scriptstyle h'_1}\\ \mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(x)) & \xrightarrow[h'_x]{} & Y\end{array}$$

soit commutatif.

De plus, si cette condition est vérifiée, et si $h'':U''\rightarrow Y$ *est un morphisme vérifiant les mêmes conditions que h', alors il existe un ensemble ouvert contenant* $U\cup\{x\}$, *et dans lequel h' et h'' coïncident.*

Prouvons d'abord la dernière assertion; on peut supposer h' et h'' définis dans le même ouvert $U_0\supset U\cup\{x\}$. Le sous-préschéma Z des coïncidences de h' et h'' (17.4.5) contient U et x, donc il y a un voisinage ouvert V de x dans U_0 tel que le sous-préschéma induit par Z sur l'ouvert $Z\cap V$ soit un sous-préschéma *fermé* du préschéma induit par X sur V; comme ce préschéma $Z\cap V$ majore le sous-préschéma induit par V sur l'ouvert $U\cap V$, et que ce dernier est schématiquement dense dans V, $Z\cap V$ est nécessairement égal à V (20.3.8.8), ce qui prouve que h' et h'' coïncident dans $U\cup V$.

La nécessité de la condition de l'énoncé étant évidente, prouvons qu'elle est suffisante. En vertu de la correspondance biunivoque entre S-morphismes de X dans Y et X-sections de $X\times_S Y$ (**I**, 3.3.15), on peut se borner au cas où $S=X$ et où h est donc une U-section de Y; on notera qu'alors Y est localement noethérien, et on peut évidemment (puisque X est localement intègre et localement noethérien) supposer $X=S$ *irréductible*. En outre, compte tenu de (20.3.7), on peut supposer que $X=\mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau *local* noethérien, intègre et intégralement clos.

Notons que pour tout $x' \in U$, $h(x')$ est une spécialisation de $h'_x(x)=y$. En effet, il existe un spectre S_1 d'anneau de valuation discrète et un morphisme $u : S_1 \rightarrow X$ tel que $u(a)=x$, $u(b)=x'$ (**II**, 7.1.9). Appliquant la condition de l'énoncé, on obtient aussitôt notre assertion, puisque $h(x')=h_1(b)=h'_1(b)$ et $y=h'_1(a)$. Si Y' est un voisinage ouvert affine de y, on a donc $h(X \cap U) \subset Y'$; on peut par suite remplacer Y par Y', autrement dit supposer Y *affine*, donc *séparé* sur X. Soit ω la X-section rationnelle de Y à laquelle h appartient, de sorte que son graphe a ici pour ensemble sous-jacent l'adhérence de $h(U)$ dans Y. Puisque Y est séparé sur X, on peut appliquer (20.4.4) à ω : il suffira de prouver que, si $p : \Gamma_\omega \rightarrow X$ est la projection canonique, $p^{-1}(x)$ est réduit à un seul point y et que $h'_x(x)=y$. En effet, par (20.4.4) h se prolongera en une section h' au-dessus d'un ouvert U' contenant $U \cup \{x\}$, telle que $h'(x)=y$, et comme alors il n'existe qu'un seul X-morphisme $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(x)) \rightarrow Y$ transformant x en y, cela prouvera l'identité de h'_x et du composé de h' et de $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(x)) \rightarrow U'$.

Puisque pour $x' \in X \cap U$, $h(x')$ est une spécialisation de y, on a $y \in p^{-1}(x)$. Supposons alors que z soit un point quelconque de $p^{-1}(x)$. Comme Γ_ω est l'adhérence de $h(U)$ et que $h(U)$ est formé de points adhérents à $h(\xi)$, où ξ est le point générique de X, Γ_ω est l'adhérence de $h(\xi)$ dans Y. On prend alors un spectre S_1 d'anneau de valuation discrète et un morphisme $v : S_1 \rightarrow Y$ tels que $v(a)=z$, $v(b)=h(\xi)$ (**II**, 7.1.9), et on pose $u=p \circ v$, de sorte que $u(a)=x$, $u(b)=\xi$. Appliquant à u la condition de l'énoncé, on voit que l'on obtient un morphisme $h'_1 : S_1 \rightarrow Y$ tel que $h'_1(a)=y$ et $h'_1(b)=h(\xi)$; mais cela entraîne $z=y$ en vertu de (**II**, 7.2.3), puisque Y est séparé sur X et que v et h'_1 doivent donc coïncider, puisqu'ils sont égaux au point b. C.Q.F.D.

Corollaire **(20.4.7)**. — *Les hypothèses sur* S, X, Y, U *et* h *étant celles de* (20.4.6), *soit* E *une partie de* $X-U$ *telle que* X *soit* normal *en tout point de* E, *et pour chaque* $x \in E$, *soit* $h'_x : \operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(x)) \rightarrow Y$ *un* S-*morphisme, tel que la condition* (P) *de* (20.4.6) *soit vérifiée. On suppose en outre que la réunion* F *des graphes des* h'_x (*identifiés à des parties de* $X \times_S Y$) *pour* $x \in E$, *soit contenue dans la réunion d'un nombre* fini *d'ouverts* V_i *de* $X \times_S Y$ *qui sont séparés sur* X (condition automatiquement vérifiée si Y est *séparé* sur S, ou si X est *quasi-compact* et Y *de type fini* sur S). *Alors il existe un* S-*morphisme* $h' : U' \rightarrow Y$, *où* U' *est un ouvert de* X *contenant* $U \cup E$, *tel que, pour tout* $x \in E$, *le composé*

$$\operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(x)) \rightarrow U' \xrightarrow{h'} Y$$

soit égal à h'_x.

Notons d'abord que, dans (20.4.6), si Y est supposé *séparé*, il y a un plus grand ouvert $U_0 \supset U$, égal au domaine de la S-application rationnelle correspondant à h, dans lequel h peut être prolongé, et ce prolongement est unique (**I**, 7.2.2); d'où la conclusion dans ce cas, grâce à (20.4.6). Dans le cas général, soit E_i l'ensemble des $x \in E$ tels que $(x, h'_x(x)) \in V_i$. En vertu de (20.4.6), pour tout $x \in E$, il y a un prolongement $h^{(x)}$ de h à $U \cup W^{(x)}$, où $W^{(x)}$ est un voisinage de x dans X tel que le graphe de $h^{(x)} | W^{(x)}$ soit contenu dans *tous* les V_i tels que $x \in E_i$. Puisque V_i est séparé sur X et X réduit, pour deux points x', x'' de E_i, $h^{(x')}$ et $h^{(x'')}$ coïncident dans $W^{(x')} \cap W^{(x'')}$ puisqu'ils coïncident dans l'ouvert partout dense $U \cap W^{(x')} \cap W^{(x'')}$ de cet ensemble. Il y a donc un morphisme $h_i : U \cup U_i \to Y$ qui prolonge h à un ouvert $U \cup U_i$, contenant E_i; en outre, pour tout couple d'indices i, j, les graphes des restrictions $h_i|(U_i \cap U_j)$ et $h_j|(U_i \cap U_j)$ sont contenus dans $V_i \cap V_j$; comme $V_i \cap V_j$ est séparé sur X et que les morphismes précédents coïncident dans un ouvert partout dense $U \cap U_i \cap U_j$ de $U_i \cap U_j$, ils sont égaux. Le morphisme h' égal à h dans U, à h_i dans chacun des U_i, répond à la question.

Remarque **(20.4.8)**. — Lorsque $E = X - U$, il est clair que si, pour tout ouvert affine T de X, il existe un S-morphisme $h'_T : T \to Y$ prolongeant $h|(U \cap T)$ et tel que le composé $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(x)) \to T \xrightarrow{h'_T} Y$ soit égal à h'_x pour tout $x \in T - (U \cap T)$, alors les h'_T sont les restrictions d'un S-*morphisme* $h' : X \to Y$ (partout défini) en vertu de l'assertion d'unicité dans (20.4.6). Pour prouver l'existence de h', on est donc ramené au cas où X est *affine*, et alors il suffit que l'ensemble F, réunion des graphes des h'_x, soit *quasi-compact* dans $X \times_S Y$ pour que l'on puisse appliquer (20.4.7). Il en sera ainsi lorsque les h'_x sont de la forme $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(x)) \to Z \xrightarrow{h_0} Y$, où Z est un sous-préschéma fermé de X ayant $X - U$ pour espace sous-jacent, et h_0 un S-morphisme.

Corollaire **(20.4.9)**. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien,* X *un préschéma localement noethérien,* $f : X \to S$ *un morphisme plat,* $g : Y \to S$ *un morphisme localement de type fini. Soient* U *un ouvert dense dans* S, $h : f^{-1}(U) \to Y$ *un* S-*morphisme,* $T = S - U$, Z *le sous-préschéma fermé réduit de* X *ayant* $f^{-1}(T)$ *comme espace sous-jacent,* $h_0 : Z \to Y$ *un* S-*morphisme. Supposons* X normal *en tous les points de* Z. *Afin qu'il existe un* S-*morphisme (nécessairement unique)* $h' : X \to Y$ *prolongeant* h *et* h_0, *il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite :*

Pour tout spectre S_1 *d'un anneau de valuation discrète, de point fermé a et de point générique b, et tout morphisme* $u : S_1 \to S$ *tel que* $u(a) \in T$ *et* $u(b) \in U$, *il existe un* S_1-*morphisme* $h'_1 : X_{(S_1)} \to Y_{(S_1)}$ *qui prolonge* $h_{(S_1)} : f_{(S_1)}^{-1}(b) \to Y_{(S_1)}$ *et est tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(z_1)) \arrow[r] \arrow[d] & Z_{(S_1)} \arrow[d, "(h_0)_{(S_1)}"] \\
X_{(S_1)} \arrow[r, "h'_1"'] & Y_{(S_1)}
\end{tikzcd}$$

soit commutatif pour tout $z_1 \in Z_{(S_1)}$.

L'hypothèse que f est plat entraîne en effet que $f^{-1}(U)$ est dense dans X (2.3.10), et il suffit alors d'appliquer (20.4.8).

Corollaire **(20.4.10)**. — *Sous les hypothèses de* (20.4.6), *supposons en outre* Y *séparé et localement quasi-fini sur* S. *Soient* U *un ouvert dense dans* X, $h : U \to Y$ *un* S-*morphisme,* ω *la* S-*application rationnelle correspondante,* $x \in X - U$ *un point* normal *de* X. *Afin que* ω *soit définie au point* x, *il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée : il existe un spectre* S_1 *d'un anneau de valuation discrète, de point fermé a et de point générique b, et un morphisme* $u : S_1 \to X$

tels que $u(a)=x$, $u(b)\in \mathrm{U}$ *et que la* S-*application rationnelle* $\omega\circ u$ *soit partout définie.*

En effet, par hypothèse toutes les fibres du morphisme projection $X\times_S Y\rightarrow X$ sont formées de points isolés, et pour appliquer (20.4.4) il suffit de savoir que la fibre $p^{-1}(x)$ est *non vide* dans Γ_ω. Or si h_1 est l'unique morphisme de la classe $\omega\circ u$, l'unique point de $X\times_S Y$ au-dessus de x et de $h_1(a)$ appartient à Γ_ω, d'où la conclusion.

Proposition (**20.4.11**). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Y *un* S-*préschéma affine sur* S, U *un ouvert de* X, $Z=X-U$. *Supposons que l'on ait* $\mathrm{prof}_Z(\mathcal{O}_X)\geqslant 2$ (5.10.1); *alors tout* S-*morphisme* $f:U\rightarrow Y$ *se prolonge de façon unique en un* S-*morphisme de* X *dans* Y.

On peut se borner au cas où S et X sont affines et (en vertu de (**I**, 3.3.14)) au cas où $S=X$; on a donc $X=\mathrm{Spec}(A)$, $Y=\mathrm{Spec}(B)$, B étant une A-algèbre de type fini. Comme B est quotient d'une algèbre de polynômes $A[(T_\lambda)]_{\lambda\in L}$, Y est un sous-préschéma fermé de $Y'=X[(T_\lambda)]_{\lambda\in L}$. D'autre part, l'hypothèse sur Z entraîne que U est schématiquement dense dans X en vertu de (20.2.13, (iv)) et (5.10.2). Si l'on prouve que tout X-morphisme $u:U\rightarrow Y$ se prolonge de façon unique en un X-morphisme $v':X\rightarrow Y'$, il en résultera que v' se factorisera en $X\xrightarrow{v}Y\rightarrow Y'$: en effet, le sous-préschéma $v'^{-1}(Y)$ est fermé et majore U (**I**, 4.4.1), donc est identique à X (20.3.8.8). Dans ces conditions, v sera l'unique S-morphisme de X dans Y prolongeant u. On peut donc se borner au cas où $Y=Y'$. Mais alors il y a correspondance biunivoque entre les X-morphismes d'un ouvert $U\subset X$ dans Y' et les familles $(s_\lambda)_{\lambda\in L}$ de sections de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de U (**II**, 1.7.9); la conclusion résulte donc de (5.10.5).

Corollaire (**20.4.12**). — *Soient* X *un* S-*préschéma localement noethérien réduit et vérifiant la condition* (S_2) (5.7.2) (par exemple un S-préschéma localement noethérien et *normal* (5.8.6)), Y *un* S-*préschéma affine sur* S, f *une* S-*application rationnelle de* X *dans* Y; *alors toute composante irréductible de* $X-\mathrm{dom}(f)$ *est de codimension* 1 *dans* X.

Il revient au même de dire que si $Z^{(2)}$ est l'ensemble des $x\in X$ tels que $\dim(\mathcal{O}_{X,x})\geqslant 2$, alors, pour toute partie fermée $Z\subset Z^{(2)}$ de X, tout S-morphisme de $X-Z$ dans Y se prolonge en un S-morphisme de X dans Y; or, cela résulte de l'hypothèse sur X (5.7.2) et de (20.4.11).

20.5. Pseudo-morphismes relatifs.

(**20.5.1**) Soient X, Y deux S-préschémas. Il résulte des définitions (11.10.8) que l'intersection de deux ouverts U, U' de X, *universellement schématiquement denses par rapport à* S, possède encore cette propriété. On définit donc une relation d'équivalence entre S-morphismes $u:U\rightarrow Y$ en remplaçant dans (20.2.1) « schématiquement dense » par « universellement schématiquement dense par rapport à S ». Une classe d'équivalence suivant cette relation s'appelle un *pseudo-morphisme de* X *dans* Y *relativement à* S, et l'ensemble de ces classes se note $\mathrm{Ps.hom}_{X/S}(X, Y)$.

(**20.5.2**) Comme tout ouvert de X universellement schématiquement dense par rapport à S est en particulier schématiquement dense, les éléments d'un pseudo-morphisme de X dans Y relativement à S sont équivalents au sens de (20.2.1), d'où une application canonique

(**20.5.2.1**) $$\mathrm{Ps.hom}_{X/S}(X, Y) \to \mathrm{Ps.hom}_S(X, Y).$$

Proposition (**20.5.3**). — *Supposons* Y *séparé sur* S. *Alors :*

(i) *L'application* (20.5.2.1) *est injective et identifie* $\mathrm{Ps.hom}_{X/S}(X, Y)$, *au sous-ensemble de* $\mathrm{Ps.hom}_S(X, Y)$ *formé des pseudo*-S-*morphismes* ω *tels que* $\mathrm{dom}_S(\omega)$ *soit universellement schématiquement dense relativement à* S.

(ii) *Le préfaisceau* $U \rightsquigarrow \mathrm{Ps.hom}_{U/S}(U, Y)$ *sur* X *est un faisceau.*

L'assertion (i) est immédiate, car dire que deux S-morphismes $u : U \to Y$, $u' : U' \to Y$ sont équivalents au sens de (20.2.1) signifie alors que ce sont les restrictions d'un même morphisme $\mathrm{dom}_S(\omega) \to Y$ (20.2.4), et si U et U' sont universellement schématiquement denses par rapport à S, il en est de même *a fortiori* de $\mathrm{dom}_S(\omega)$. Pour prouver (ii), notons que $U \rightsquigarrow \mathrm{Ps.hom}_S(U, Y)$ est alors un faisceau (20.2.6); d'autre part, étant donné un recouvrement ouvert (U_α) de U, et un pseudo-S-morphisme ω de U dans Y, pour que $\mathrm{dom}_S(\omega)$ soit universellement schématiquement dense dans U relativement à S, il résulte aussitôt des définitions (cf. (20.2.1)) qu'il faut et il suffit que chacun des ensembles $\mathrm{dom}_S(\omega) \cap U_\alpha = \mathrm{dom}_S(\omega | U_\alpha)$ soit universellement schématiquement dense dans U_α relativement à S; d'où (ii).

Lorsque Y est séparé, on notera $\mathcal{P}s.hom_{X/S}(X, Y)$ le sous-faisceau

$$U \rightsquigarrow \mathrm{Ps.hom}_{U/S}(U, Y)$$

de $\mathcal{P}s.hom_S(X, Y)$.

Lorsque X est *plat et localement de présentation finie* sur S et Y séparé sur S, les pseudo-morphismes de X dans Y relativement à S s'identifient encore aux pseudo-S-morphismes ω tels que, pour toute fibre X_s du morphisme $X \to S$, $\mathrm{dom}_S(\omega) \cap X_s$ soit *schématiquement dense dans* X_s (11.10.10).

(**20.5.4**) Un cas particulièrement important où Y est séparé sur S est le cas où $Y = S[T] = S \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[T])$ (T indéterminée). Il y a alors correspondance biunivoque entre les pseudo-S-morphismes de X dans Y et les *pseudo-fonctions* sur X (20.2.8) en vertu de la définition d'un produit de **Z**-préschémas. Les pseudo-morphismes de X dans Y relativement à S s'identifient alors, en vertu de (20.5.3), aux *pseudo-fonctions* φ *sur* X *telles que* $\mathrm{dom}(\varphi)$ *soit universellement schématiquement dense relativement à* S. Le faisceau $\mathcal{P}s.hom_{X/S}(X, Y)$ est un *sous-faisceau d'anneaux* de $\mathcal{M}'_X$, que l'on note $\mathcal{M}'_{X/S}$.

On pose alors $\mathrm{Ps.hom}_{X/S}(X, Y) = \mathrm{M}'(X/S)$ et on dit que ses éléments sont les *pseudo-fonctions sur* X *relatives à* S.

(**20.5.5**) Soient X, Y, Z trois S-préschémas, $f : Y \to Z$ un S-morphisme. On peut, dans le raisonnement de (20.3.1), remplacer partout « schématiquement dense » par « universellement schématiquement dense relativement à S »; pour tout pseudo-morphisme $\omega \in \mathrm{Ps.hom}_{X/S}(X, Y)$, les morphismes $f \circ u$, où u parcourt ω, appartiennent donc à une même classe d'équivalence (pour la relation définie dans (20.5.1)), que l'on appelle le pseudo-morphisme de X dans Z, relativement à S, *composé* de f et de ω et que l'on note $f\circ\omega$. Si $g : \mathrm{Z}\rightarrow\mathrm{T}$ est un morphisme, il est immédiat que $g\circ(f\circ\omega)=(g\circ f)\circ\omega$.

(20.5.6) Supposons Y *séparé* sur S, et soit ω un pseudo-morphisme de X dans Y relativement à S. Si $f: \mathrm{X}'\rightarrow\mathrm{X}$ est un S-morphisme tel que $f^{-1}(\mathrm{dom}_{\mathrm{S}}(\omega))$ soit *universellement schématiquement dense dans* X' *relativement à* S, il résulte de (20.3.2) que le pseudo-S-morphisme $\omega\circ f$ a un domaine universellement schématiquement dense relativement à S, donc (20.5.3) peut être considéré comme un pseudo-morphisme *relativement à* S. Lorsque X' est plat et localement de présentation finie sur S, la condition que $f^{-1}(\mathrm{dom}_{\mathrm{S}}(\omega))$ soit universellement schématiquement dense relativement à S équivaut encore à dire que pour tout $s\in\mathrm{S}$, $(f^{-1}(\mathrm{dom}_{\mathrm{S}}(\omega)))_s$ (notation de (11.10.10)) est schématiquement dense dans X'_s, ou encore, en notant $f_s : \mathrm{X}'_s\rightarrow\mathrm{X}_s$ le morphisme déduit de f par changement de base, que l'image réciproque par f_s de $(\mathrm{dom}_{\mathrm{S}}(\omega))_s$ soit schématiquement dense dans X'_s. Cette dernière condition sera en particulier remplie si, pour tout $s\in\mathrm{S}$, X_s, X'_s et f_s vérifient l'une des trois conditions (i), (ii), (iii) de (20.3.5).

(20.5.7) Supposons maintenant que X et X' soient tous deux des S-préschémas *plats et localement de présentation finie sur* S, et que $f: \mathrm{X}'\rightarrow\mathrm{X}$ soit un S-morphisme *plat* (ou, ce qui revient au même (11.3.10), que pour tout $s\in\mathrm{S}$, $f_s : \mathrm{X}'_s\rightarrow\mathrm{X}_s$ soit un morphisme plat). Alors, pour tout ouvert U de X et tout ouvert $\mathrm{V}\subset\mathrm{U}$ universellement schématiquement dense dans U relativement à S, il résulte de (11.10.5) et (11.10.9) que $f^{-1}(\mathrm{V})$ est universellement schématiquement dense dans $f^{-1}(\mathrm{U})$ relativement à S. Pour tout pseudo-morphisme ω de X dans Y relativement à S, il résulte de (20.3.4) que le pseudo-S-morphisme $\omega\circ f$ est défini et est un pseudo-morphisme de X' dans Y relativement à S, *même lorsqu'on ne suppose pas* Y *séparé sur* S. On en déduit que dans ce cas, pour tout S-morphisme $g : \mathrm{Y}\rightarrow\mathrm{Z}$, $(g\circ\omega)\circ f$ est encore défini et égal à $g\circ(\omega\circ f)$ (avec les définitions de (20.5.1)), et est donc un pseudo-morphisme *relativement à* S.

(20.5.8) Soient X un S-préschéma, $\mathrm{S}'\rightarrow\mathrm{S}$ un morphisme quelconque, $\mathrm{X}'=\mathrm{X}_{(\mathrm{S}')}$, $g : \mathrm{X}'\rightarrow\mathrm{X}$ la projection canonique. Alors, pour tout ouvert U de X et tout ouvert $\mathrm{V}\subset\mathrm{U}$ universellement schématiquement dense dans U relativement à S, $\mathrm{V}'=g^{-1}(\mathrm{V})$ est universellement schématiquement dense dans $\mathrm{U}'=g^{-1}(\mathrm{U})$ relativement à S' par définition (11.10.8). Soit alors ω un pseudo-morphisme de X dans un S-préschéma Y relativement à S; si u_1, u_2 sont des S-morphismes de la classe ω, définis respectivement dans des ouverts U_1, U_2 de X, universellement schématiquement denses dans X relativement à S, il résulte de ce qui précède que les morphismes $u'_1=u_1\circ(g|g^{-1}(\mathrm{U}_1))$ et $u'_2=u_2\circ(g|g^{-1}(\mathrm{U}_2))$ coïncident dans un ouvert U'_3 universellement schématiquement dense relativement à S'. Or, si $\mathrm{Y}'=\mathrm{Y}_{(\mathrm{S}')}$ et si $h : \mathrm{Y}'\rightarrow\mathrm{Y}$ est la projection canonique, u'_1 et u'_2 se factorisent canoniquement en $u'_1=h\circ v_1$, $u'_2=h\circ v_2$, et v_1 et v_2 sont deux S'-morphismes dans Y' qui coïncident dans U'_3. On voit donc que lorsque u_1 parcourt la classe ω, les S'-morphismes v_1 correspondants appartiennent à un même pseudo-morphisme relativement à S', dit *image réciproque* de ω par le morphisme changement de base $\mathrm{S}'\rightarrow\mathrm{S}$ et noté $\omega_{(\mathrm{S}')}$. Il est clair que si $\mathrm{S}''\rightarrow\mathrm{S}'$ est un second morphisme, on a $(\omega_{(\mathrm{S}')})_{(\mathrm{S}'')}=\omega_{(\mathrm{S}'')}$ (pour le morphisme changement de base composé $\mathrm{S}''\rightarrow\mathrm{S}'\rightarrow\mathrm{S}$).

20.6. Fonctions méromorphes relatives.

(20.6.1) Soient S un préschéma, X un S-préschéma qui est *plat et localement de présentation finie* sur S; pour tout $s \in S$, nous noterons X_s la fibre au point s du morphisme structural $X \rightarrow S$. En général, si φ est une fonction méromorphe sur X, il n'est pas possible de lui associer de façon « naturelle », pour chaque $s \in S$, une fonction méromorphe « induite » sur X_s (20.1.11). Pour tout ouvert U de X, notons $T_{X/S}(U)$ l'ensemble des sections $t \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ telles que, pour tout $s \in S$, l'image t_s de t par l'homomorphisme canonique $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(U \cap X_s, \mathcal{O}_{X_s})$ soit une section *régulière*; cela implique d'ailleurs, par l'équivalence de *a)* et *b)* dans (11.3.7), que t est elle-même une section *régulière*. Il est clair que $U \rightsquigarrow T_{X/S}(U)$ est un *sous-faisceau* du faisceau d'ensemble $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathcal{O}_X)$ (notation de (20.1.3)), que l'on note $\mathscr{T}_{X/S}$; on pose

$$\textbf{(20.6.1.1)} \qquad \mathscr{M}_{X/S} = \mathcal{O}_X[\mathscr{T}_{X/S}^{-1}]$$

(notation de (20.1.1)) et on dit que ce faisceau d'anneaux est le *faisceau des germes de fonctions méromorphes sur* X *relatives à* S; ses sections au-dessus de X sont appelées les *fonctions méromorphes sur* X *relatives à* S et leur ensemble est noté M(X/S). Il est clair que $\mathscr{M}_{X/S}$ est un *sous-faisceau* de $\mathscr{M}_X = \mathcal{O}_X[\mathscr{S}^{-1}]$; pour toute fonction méromorphe $\varphi \in M(X/S)$ et tout $s \in S$, l'image réciproque de φ par le morphisme injection canonique $j_s : X_s \rightarrow X$ est alors définie (20.1.11), et notée φ_s.

(20.6.2) Soit maintenant $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent; on pose

$$\textbf{(20.6.2.1)} \qquad \mathscr{M}_{X/S}(\mathscr{F}) = \mathscr{F}[\mathscr{T}_{X/S}^{-1}] = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{M}_{X/S};$$

les sections de $\mathscr{M}_{X/S}(\mathscr{F})$ sont dites *sections méromorphes de* $\mathscr{F}$ *au-dessus de* X, *relatives à* S et leur ensemble est noté M(X/S, F). L'homomorphisme canonique $\mathscr{F} \rightarrow \mathscr{M}_{X/S}(\mathscr{F})$ n'est pas nécessairement injectif; lorsqu'il l'est, on dit que $\mathscr{F}$ est *sans torsion relativement à* S : cela signifie que pour tout ouvert U de X et toute section $t \in T_{X/S}(U)$, t est $(\mathscr{F}|U)$-*régulière*; cette condition est remplie *a fortiori* lorsque $\mathscr{F}$ est *strictement sans torsion* (20.1.5). Dans ce dernier cas, il résulte aussitôt des définitions (20.1.2) que l'homomorphisme canonique de $\mathcal{O}_X$-Modules

$$\textbf{(20.6.2.2)} \qquad \mathscr{M}_{X/S}(\mathscr{F}) \rightarrow \mathscr{M}_X(\mathscr{F})$$

est *injectif*, de sorte que les sections méromorphes de $\mathscr{F}$ relatives à S sont des sections méromorphes de $\mathscr{F}$ au sens de (20.1.3).

Proposition **(20.6.3).** — *L'image par l'homomorphisme injectif* (20.2.10.1) *du sous-faisceau* $\mathscr{M}_{X/S}$ *de* $\mathscr{M}_X$ *est le sous-faisceau* $\mathscr{M}'_{X/S}$ *des pseudo-fonctions sur* X *relatives à* S (i.e. *des pseudo-fonctions dont le domaine de définition est universellement schématiquement dense relativement à* S (20.5.4)).

On peut évidemment se borner à prouver que l'image de M(X/S) par l'homomorphisme canonique $M(X) \rightarrow M'(X)$ est égale à $M'(X/S)$; la proposition est alors conséquence de la proposition plus générale suivante :

Proposition **(20.6.4).** — *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent de présentation finie et strictement sans torsion. Alors, pour qu'une section méromorphe φ de $\mathscr{F}$ au-dessus de* X *soit une section méromorphe relative à* S, *il faut et il suffit que* dom(φ) *soit universellement schématiquement dense relativement à* S.

La nécessité de la condition résulte de (20.2.15) appliqué à chaque injection canonique $X_s \rightarrow X$ ($s \in S$), compte tenu de (11.10.9). Pour voir que la condition est suffisante, il faut prouver que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X et une section de $\mathscr{M}_{X/S}(\mathscr{F})$ au-dessus de U dont la restriction à $U \cap \mathrm{dom}(\varphi)$ coïncide avec φ dans un ouvert schématiquement dense de $U \cap \mathrm{dom}(\varphi)$. Considérons l'Idéal des dénominateurs $\mathscr{J}$ de φ (20.2.14), qui est quasi-cohérent, et qui définit un sous-préschéma fermé de X dont l'espace sous-jacent est $X - \mathrm{dom}(\varphi)$. Par hypothèse, si s est l'image de x dans S, $\mathrm{dom}(\varphi) \cap X_s$ est schématiquement dense dans le préschéma localement noethérien X_s, donc (20.2.13, (iv)) contient $\mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X_s})$; cela implique donc que l'idéal $\mathscr{J}_x$ de $\mathcal{O}_{X,x}$ a une image dans $\mathcal{O}_{X_s,x} = \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \boldsymbol{k}(s)$ qui n'est contenue dans aucun des idéaux premiers $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X_s,x})$ (en nombre fini); donc (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 1, n° 1, prop. 2) il existe un élément $t_x \in \mathscr{J}_x$ dont l'image dans $\mathcal{O}_{X_s,x}$ n'appartient à aucun des $\mathfrak{p}_i$, et est par suite *régulière* dans cet anneau noethérien. Soit t une section de $\mathscr{J}$ au-dessus d'un voisinage ouvert affine U de x, dont t_x soit le germe au point x; puisque X est plat et localement de présentation finie sur S, on peut supposer (11.3.8) que t est une section *régulière* de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de U et que, pour tout $s' \in S$, l'image de t dans $\Gamma(U \cap X_{s'}, \mathcal{O}_{X_{s'}})$ soit aussi *régulière*; autrement dit, on a $t \in \mathrm{T}_{X/S}(U)$. Mais alors, par définition de $\mathscr{J}$, puisque $\mathscr{F}$ est strictement sans torsion, $t(\varphi | (U \cap \mathrm{dom}(\varphi)))$ est une section u de $\mathscr{F}$ au-dessus de $U \cap \mathrm{dom}(\varphi)$; d'autre part, $U \cap \mathrm{dom}(\varphi)$ contient l'ensemble ouvert U_t des points $x' \in U$ où $t(x') \neq 0$, et ce dernier contient x et est schématiquement dense dans U (20.2.9). On voit donc que dans U_t, φ coïncide avec la restriction à U_t de la section u/t de $\mathscr{M}_{X/S}(\mathscr{F})$ au-dessus de U. C.Q.F.D.

Remarques **(20.6.5).** — (i) Soit φ une fonction méromorphe sur X relative à S, de sorte que pour tout $s \in S$, φ_s est une fonction méromorphe sur X_s (20.6.1); en vertu de (20.1.11.1), on a

$$\textbf{(20.6.5.1)} \qquad \mathrm{dom}(\varphi) \cap X_s \subset \mathrm{dom}(\varphi_s).$$

Mais il convient de noter que même lorsque S est le spectre d'un anneau de valuation discrète A et $X = S[T]$ (T indéterminée), les deux membres de (20.6.5.1) ne sont pas nécessairement égaux : par exemple, si π est une uniformisante de A, il est immédiat que $\varphi = \pi/T$ est une fonction méromorphe sur S relative à S, car si a et b sont le point fermé et le point générique de S, T est régulier dans $\Gamma(X_a, \mathcal{O}_{X_a}) = k[T]$ et dans $\Gamma(X_b, \mathcal{O}_{X_b}) = K[T]$, k et K étant le corps résiduel et le corps des fractions de A. On a $\mathrm{dom}(\varphi) = D(T)$ dans X, mais $\mathrm{dom}(\varphi_a) = X_a$ puisque $\varphi_a = 0$.

(ii) Pour qu'une fonction méromorphe φ relative à S soit *inversible dans l'anneau* M(X/S), il faut et il suffit que pour tout $s \in S$, φ_s soit inversible dans $M(X_s)$ (autrement dit, que φ_s soit une fonction méromorphe régulière sur X_s (20.1.8)). La condition est en effet trivialement nécessaire. Inversement, si elle est vérifiée, et si x est un point quelconque de X, s son image dans S, il existe par hypothèse un voisinage ouvert U de x dans X et deux sections u, t de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de U telles que $t\in T_{X/S}(U)$ et $\varphi|U=u/t$; l'hypothèse entraîne que si u_s est l'image de u dans $\Gamma(U\cap X_s, \mathcal{O}_{X_s})$, u_s est régulière au point x. En restreignant U, on peut donc supposer, en vertu de (11.3.8), que $u\in T_{X/S}(U)$, d'où la conclusion.

Lorsque φ est inversible dans M(X/S), on dit encore que φ est une *fonction méromorphe régulière relative à* S. On notera que $\varphi\in M(X/S)$ peut être inversible *dans* M(X) (autrement dit, être *régulière* au sens de (20.1.8)) sans l'être dans M(X/S), comme le montre aussitôt l'exemple de (i).

(iii) Soit $\mathscr{L}$ un $\mathcal{O}_X$-Module *inversible*, et soit φ une section méromorphe *régulière* de $\mathscr{L}$ au-dessus de X (20.1.8); on dit que φ est *régulière relativement à* S si, pour tout ouvert U de X tel que $\mathscr{L}|U$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_U$, $\varphi|U$ correspond à un élément de $\Gamma(U, \mathscr{M}_X)$ qui est *régulière relative à* S; en vertu de (ii), il est immédiat qu'il faut et il suffit pour cela que, pour tout $s\in S$, φ_s soit une section méromorphe *régulière* (20.1.8) du $\mathcal{O}_{X_s}$-Module inversible $\mathscr{L}_s=\mathscr{L}\otimes_{\mathcal{O}_X}\boldsymbol{k}(s)$. Si φ' est l'inverse de φ dans $\mathscr{L}^{-1}$ (20.1.10), φ' est alors aussi régulière relative à S. Si $\mathscr{L}_1$ est un second $\mathcal{O}_X$-Module inversible, φ_1 une section méromorphe de $\mathscr{L}_1$ au-dessus de X, régulière relativement à S, alors $\varphi\otimes\varphi_1$ est une section méromorphe de $\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}_1$ au-dessus de X, régulière relativement à S.

Proposition **(20.6.6)**. — *Soient* X *un* S-*préschéma plat et localement de présentation finie sur* S, $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$-*Module localement libre de type fini; pour tout* $s\in S$, *on note* X_s *la fibre au point* s *du morphisme structural* $f: X\to S$. *Soit* φ *une section méromorphe de* $\mathscr{F}$ *au-dessus de* X, ***relativement*** *à* S, *et supposons que* φ *soit définie en tous les points* $x\in X$ *tels que* $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{X_{f(x)},x})=1$. *Alors* φ *est partout définie.*

Par hypothèse, $\mathrm{dom}(\varphi)\cap X_s$ est schématiquement dense dans X_s pour tout $s\in S$, donc contient les points x de X_s tels que $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{X_s,x})=0$ (5.10.2); l'hypothèse signifie donc que si l'on pose $Z=X-\mathrm{dom}(\varphi)$, on a $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{X_{f(x)},x})\geqslant 2$ en tous les points de Z. Il suffit donc d'appliquer (19.9.8).

(20.6.7) Soient X, X′ deux S-préschémas plats et localement de présentation finie sur S, $f=(\psi, \theta): X'\to X$ un S-morphisme. Pour tout ouvert U de X, notons $T_f(U)$ l'ensemble des sections $t\in T_{X/S}(U)$ dont l'image dans $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_{X'})$ appartienne à $T_{X'/S}(f^{-1}(U))$; il est immédiat que $U\rightsquigarrow T_f(U)$ est un sous-faisceau du faisceau d'ensembles $\mathscr{T}_{X/S}$, que l'on note $\mathscr{T}_f$. On pose $\mathscr{M}_{X/S,f}=\mathcal{O}_X[\mathscr{T}_f^{-1}]$; c'est un sous-faisceau d'anneaux de $\mathscr{M}_{X/S}$, et on déduit canoniquement de $\theta^\#: \psi^*(\mathcal{O}_X)\to\mathcal{O}_{X'}$ un homomorphisme de faisceaux d'anneaux $\theta'^\#: \psi^*(\mathscr{M}_{X/S,f})\to\mathscr{M}_{X'/S}$ prolongeant $\theta^\#$. Si une fonction méromorphe φ sur X, relative à S, est *une section de* $\mathscr{M}_{X/S,f}$, $\Gamma(\theta'^\#)(\varphi)$ est une fonction méromorphe sur X′, dite *image réciproque de* φ *par* f, et notée $\varphi\circ f$ si cela n'entraîne pas confusion. On étend aussitôt de même les définitions de (20.1.11) relatives aux $\mathcal{O}_X$-Modules.

Proposition **(20.6.8)**. — *Avec les notations de* (20.6.7), *si le* S-*morphisme* $f: X'\to X$ *est plat, on a* $\mathscr{M}_{X/S,f}=\mathscr{M}_{X/S}$, *et l'homomorphisme* $\varphi\rightsquigarrow\varphi\circ f$ *est défini dans* M(X/S) *tout entier.*

En effet, l'hypothèse entraîne, en vertu de (11.3.10), que pour tout $s \in S$, $f_s : X'_s \to X_s$ est plat; donc, pour toute section $t \in T_{X/S}(U)$, si t' est son image réciproque dans $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_{X'})$, t'_s, qui est l'image réciproque de t_s, est une section *régulière* de $\mathcal{O}_{X'_s}$ au-dessus de $f^{-1}(U) \cap X'_s$, en vertu de (20.1.12); on en conclut que par définition $t' \in T_{X'/S}(f^{-1}(U))$, d'où la proposition.

On déduit de là, comme dans (20.1.12), un homomorphisme canonique de $\mathcal{O}_{X'}$-Algèbres

(20.6.8.1) $$f^*(\mathscr{M}_{X/S}) \to \mathscr{M}_{X'/S}.$$

(20.6.9) Considérons enfin un morphisme *quelconque* $S' \to S$, et posons $X' = X \times_S S'$, qui est plat et localement de présentation finie sur S'; soit $p : X' \to X$ la projection canonique. Soient U un ouvert de X, t une section appartenant à $T_{X/S}(U)$, t' son image dans $\Gamma(p^{-1}(U), \mathcal{O}_{X'})$; pour tout $s' \in S'$, si $s \in S$ est l'image de s', on a $X'_{s'} = X_s \otimes_{\boldsymbol{k}(s)} \boldsymbol{k}(s')$, donc le morphisme $X'_{s'} \to X_s$ est plat, et par suite (20.1.12) l'image réciproque $t'_{s'}$ de t_s dans $\Gamma(p^{-1}(U) \cap X'_{s'}, \mathcal{O}_{X'_{s'}})$ est régulière; ceci prouve que l'on a $t' \in T_{X'/S'}(p^{-1}(U))$. Ceci permet de définir canoniquement, comme dans (20.6.8), un homomorphisme canonique de $\mathcal{O}_{X'}$-Algèbres

(20.6.9.1) $$p^*(\mathscr{M}_{X/S}) \to \mathscr{M}_{X'/S'}.$$

Moyennant l'identification permise par (20.6.3), cette notion de changement de base pour les fonctions méromorphes relatives est un cas particulier de la notion analogue pour les pseudo-morphismes relatifs (20.5.8).

§ 21. DIVISEURS

Sur le contenu du présent paragraphe, voir les commentaires de l'introduction du § 20. Pour les propriétés *globales* des diviseurs, le lecteur se reportera au paragraphe qui leur est consacré au chap. V.

21.1. Diviseurs sur un espace annelé.

(21.1.1) Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, $\mathscr{M}_X$ le faisceau des germes de fonctions méromorphes sur X (20.1.3), $\mathscr{M}_X^*$ le faisceau (de groupes multiplicatifs) des germes de fonctions méromorphes régulières sur X (20.1.8). Il est clair que le faisceau (de groupes multiplicatifs) $\mathcal{O}_X^*$ des germes de sections *inversibles* de $\mathcal{O}_X$ s'identifie canoniquement à un sous-faisceau (de groupes multiplicatifs) de $\mathscr{M}_X^*$.

Définition **(21.1.2)** — *On appelle* faisceau des diviseurs *sur* X *et on note* $\mathscr{D}iv_X$ *le faisceau quotient (de groupes commutatifs)* $\mathscr{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*$; *les sections de ce faisceau au-dessus de* X *se nomment les diviseurs sur* X; *ils forment un groupe commutatif noté* Div(X). *Pour toute section f de* $\mathscr{M}_X^*$ *au-dessus de* X (autrement dit, toute *fonction méromorphe régulière* sur X (20.1.8)) *on appelle diviseur de f et on note* $\operatorname{div}(f)$ (ou $\operatorname{div}_X(f)$) *le diviseur sur* X *image de f par l'homomorphisme canonique* $\Gamma(X, \mathscr{M}_X^*) \to \Gamma(X, \mathscr{D}iv_X)$.

Le *support* d'un diviseur D est l'ensemble fermé des $x \in X$ tels que $D_x \neq 0$. On le note Supp(D).

Pour tout ouvert U de X, on a évidemment $\mathscr{M}^*_X | U = \mathscr{M}^*_U$, $\mathcal{O}^*_X | U = \mathcal{O}^*_U$, donc $\mathscr{D}iv_X | U = \mathscr{D}iv_U$, et par suite le faisceau $\mathscr{D}iv_X$ est égal au préfaisceau $U \rightsquigarrow \mathrm{Div}(U)$.

Lorsque $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, on écrit Div(A) au lieu de Div(Spec(A)).

(21.1.3) Nous noterons toujours *additivement* le groupe Div(X) des diviseurs sur X. Pour deux fonctions méromorphes régulières f, g sur X, on a donc

(21.1.3.1) $$\mathrm{div}(fg) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(g),$$

(21.1.3.2) $$\mathrm{div}(f^{-1}) = -\mathrm{div}(f).$$

Par définition, pour toute fonction méromorphe régulière f sur X, on a l'équivalence

(21.1.3.3) $$\mathrm{div}(f) = 0 \Leftrightarrow f \in \Gamma(X, \mathcal{O}^*_X),$$

d'où, pour deux fonctions méromorphes régulières f, g sur X

(21.1.3.4) $$\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(g) \Leftrightarrow fg^{-1} \in \Gamma(X, \mathcal{O}^*_X).$$

(21.1.4) Soit maintenant $\mathscr{L}$ un $\mathcal{O}_X$-Module *inversible*, et soit s une *section méromorphe régulière* (20.1.8) de $\mathscr{L}$ au-dessus de X. Tout $x \in X$ possède un voisinage ouvert U tel que $\mathscr{L} | U$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_U$, donc $\mathscr{M}_X(\mathscr{L}) | U$ isomorphe à $\mathscr{M}_X | U$; par un de ces isomorphismes, $s | U$ correspond à une section $f \in \Gamma(U, \mathscr{M}^*_X)$, et puisque deux isomorphismes de $\mathscr{L} | U$ sur $\mathcal{O}_U$ ne diffèrent que par la multiplication par un élément de $\Gamma(U, \mathcal{O}^*_X)$ ($\mathbf{0}_I$, 5.4.3), l'élément $\mathrm{div}_U(f)$ de $\Gamma(U, \mathscr{D}iv_X)$ est *indépendant* de l'isomorphisme choisi; il est clair que ces éléments (pour U variable) sont les restrictions d'une section de $\mathscr{D}iv_X$ au-dessus de X, que l'on appelle le *diviseur de s* et que l'on note $\mathrm{div}(s)$ (un tel diviseur n'est pas nécessairement de la forme $\mathrm{div}(g)$ pour une fonction méromorphe régulière g sur X; voir (21.2.9)). Pour $\mathscr{L} = \mathcal{O}_X$, la définition de $\mathrm{div}(s)$ coïncide avec celle de (21.1.2). Si $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$ sont deux $\mathcal{O}_X$-Modules inversibles, s (resp. s') une section méromorphe régulière de $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{L}'$) au-dessus de X, il est immédiat que l'on a

(21.1.4.1) $$\mathrm{div}(s \otimes s') = \mathrm{div}(s) + \mathrm{div}(s')$$

(21.1.4.2) $$\mathrm{div}(s^{\otimes n}) = n . \mathrm{div}(s) \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbf{Z}$$

(s^{-1} étant la section méromorphe régulière de $\mathscr{L}^{-1}$ au-dessus de X définie dans (20.1.10)) et, pour deux sections méromorphes régulières s, s' de $\mathscr{L}$ au-dessus de X, on a la relation

(21.1.4.3) $$\mathrm{div}(s) = \mathrm{div}(s') \Leftrightarrow s' = ts \quad \text{avec} \quad t \in \Gamma(X, \mathcal{O}^*_X).$$

(21.1.5) Le faisceau $\mathscr{S}(\mathcal{O}_X)$ (20.1.3) dont les sections au-dessus d'un ouvert U de X sont les éléments réguliers de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ est un *sous-faisceau de monoïdes* de $\mathscr{M}^*_X$; on peut écrire

(21.1.5.1) $$\mathscr{S}(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X \cap \mathscr{M}^*_X.$$

Si on note $\mathscr{S}(\mathcal{O}_X)^{-1}$ le faisceau dont les sections au-dessus de U sont les *inverses* dans $\Gamma(U, \mathscr{M}_X^*)$ des éléments de $\Gamma(U, \mathscr{S}(\mathcal{O}_X))$, il est clair que l'on a $\Gamma(U, \mathscr{S}(\mathcal{O}_X)) \cap \Gamma(U, \mathscr{S}(\mathcal{O}_X)^{-1}) = \Gamma(U, \mathcal{O}_X^*)$, donc

(21.1.5.2) $$\mathscr{S}(\mathcal{O}_X) \cap \mathscr{S}(\mathcal{O}_X)^{-1} = \mathcal{O}_X^*.$$

Définition **(21.1.6)**. — *Le sous-faisceau d'ensembles de* $\mathscr{D}iv_X$, *image canonique du sous-faisceau* $\mathscr{S}(\mathcal{O}_X)$ *de* $\mathscr{M}_X^*$, *est noté* $\mathscr{D}iv_X^+$; *ses sections au-dessus de* X *sont appelées diviseurs positifs sur* X, *et leur ensemble est noté* $\mathrm{Div}^+(X)$.

Puisque $\mathscr{S}(\mathcal{O}_X)$ est un faisceau de monoïdes (multiplicatifs), on a

(21.1.6.1) $$\mathrm{Div}^+(X) + \mathrm{Div}^+(X) \subset \mathrm{Div}^+(X)$$

et d'autre part, en vertu de (21.1.5.2) et (21.1.3.3)

(21.1.6.2) $$\mathrm{Div}^+(X) \cap (-\mathrm{Div}^+(X)) = \{0\}.$$

Ces deux relations montrent que $\mathrm{Div}^+(X)$ est l'ensemble des éléments positifs pour une structure *d'ordre* sur le groupe Div(X), compatible avec cette structure de groupe; on note cette relation d'ordre $D \leqslant D'$, autrement dit, on a

(21.1.6.3) $$D \geqslant 0 \Leftrightarrow D \in \mathrm{Div}^+(X).$$

Nous supposerons toujours dans ce qui suit que Div(X) est muni de cette structure d'ordre; il est clair que $\mathscr{D}iv_X^+ | U = \mathscr{D}iv_U^+$, donc $\Gamma(U, \mathscr{D}iv_X^+) = \mathrm{Div}^+(U)$, et on peut donc dire que $\mathscr{D}iv_X^+$ définit sur $\mathscr{D}iv_X$ une structure de *faisceau de groupes ordonnés*. La fibre $(\mathscr{D}iv_X^+)_x$ en un point x du faisceau $\mathscr{D}iv_X^+$ est un sous-monoïde du groupe $(\mathscr{D}iv_X)_x$, ensemble des éléments $\geqslant 0$ pour une structure d'ordre compatible avec la structure de groupe; pour un diviseur D sur X, il revient au même de dire que $D \geqslant 0$ ou que $D_x \geqslant 0$ pour tout $x \in X$.

Par définition, pour toute fonction méromorphe régulière f sur X, on a la relation

(21.1.6.4) $$\mathrm{div}(f) \geqslant 0 \Leftrightarrow f \in \Gamma(X, \mathscr{S}(\mathcal{O}_X))$$

autrement dit, $\mathrm{div}(f) \geqslant 0$ signifie que f est une *section régulière de* $\mathcal{O}_X$, ou encore une section de $\mathcal{O}_X$ *inversible dans* M(X).

Plus généralement, étant donné un diviseur D sur X, la relation $\mathrm{div}(f) \geqslant D$ est équivalente à la suivante : pour tout ouvert U de X tel que $D|U = \mathrm{div}(g)$, où $g \in \Gamma(U, \mathscr{M}_X^*)$, il existe un élément *régulier* t de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ tel que $f|U = tg$.

(21.1.7) Soient $\mathscr{L}$ un $\mathcal{O}_X$-Module inversible, s une section méromorphe régulière de $\mathscr{L}$ au-dessus de X; on a la relation

(21.1.7.1) $$\mathrm{div}(s) \geqslant 0 \Leftrightarrow s \in \Gamma(X, \mathscr{L}) \cap \Gamma(X, (\mathscr{M}_X(\mathscr{L}))^*)$$

comme il résulte aussitôt des définitions (21.1.4) et (21.1.6).

Proposition **(21.1.8)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* D *un diviseur sur* X. *Supposons que pour tout* $x \in X$ *tel que* $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{X,x}) = 1$ *on ait* $D_x \geqslant 0$ (resp. $D_x = 0$). *Alors on a* $D \geqslant 0$ (resp. $D = 0$).

La question étant locale sur X, on peut supposer que $D = \mathrm{div}(f)$, f étant une fonction méromorphe régulière sur X; la relation $D_x \geqslant 0$ équivaut à $x \in \mathrm{dom}(f)$ donc l'hypothèse signifie que si $T = X - \mathrm{dom}(f)$, on a $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{X,x}) \geqslant 2$ pour tout $x \in T$ (car $\mathrm{dom}(f)$ contient les points maximaux de X). Par suite (5.10.5) l'homomorphisme de restriction $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(X-T, \mathcal{O}_X)$ est *bijectif*, ce qui montre qu'il existe une section s de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de X telle que $f = s|(X-T)$. Mais par définition de T, cela entraîne $T = \emptyset$, donc $f = s$ et $D \geqslant 0$. L'assertion relative à la relation $D_x = 0$ s'en déduit aussitôt en appliquant ce qui précède à $-D$, en vertu de (21.1.6.2).

Corollaire **(21.1.9)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* D *un diviseur sur* X. *Soit* S *le support de* D. *Alors, pour tout point maximal* x *de* S, *on a* $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{X,x}) = 1$.

Posons en effet $X_1 = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$; compte tenu de (20.2.11) et (20.3.6), le faisceau $\mathcal{M}^*_{X_1}$ est induit sur X_1 par $\mathcal{M}^*_X$, donc on peut se borner au cas où $X = X_1$, auquel cas, comme $x \in S$ et que x est point maximal de S, on a nécessairement $S = \{x\}$. Si l'on avait alors $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{X,x}) \neq 1$, on en conclurait, en vertu de (21.1.8), que $D = 0$, ce qui contredit la définition de S.

Proposition **(21.1.10)**. — *Soit* A *un anneau local noethérien; pour que* $\mathrm{Div}(A) = 0$, *il faut et il suffit que* $\mathrm{prof}(A) = 0$ (*autrement dit, que l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* A *soit associé à* A (**0**, 16.4.6)).

En effet, dire que $\mathrm{Div}(A) = 0$ signifie que dans A tout élément régulier est inversible, ou encore que tous les éléments de $\mathfrak{m}$ sont diviseurs de zéro, ce qui signifie que $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(A)$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 1, cor. 3 de la prop. 2).

21.2. Diviseurs et Idéaux fractionnaires inversibles.

(21.2.1) Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé. On appelle *Idéal fractionnaire* sur X un *sous-$\mathcal{O}_X$-Module* du $\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{M}_X$ des germes de fonctions méromorphes sur X. Un Idéal fractionnaire $\mathcal{J}$ sur X qui est un $\mathcal{O}_X$*-Module inversible* est appelé *Idéal fractionnaire inversible.*

Proposition **(21.2.2)**. — *Pour qu'un Idéal fractionnaire* $\mathcal{J}$ *sur* X *soit inversible, il faut et il suffit que pour tout* $x \in X$, *il existe un voisinage ouvert* U *de* x *et une section* $f \in \Gamma(U, \mathcal{M}^*_X)$ *tels que* $\mathcal{J}|U = \mathcal{O}_U.f$.

La condition est évidemment suffisante, l'application $s \rightsquigarrow s(f|V)$ de $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ dans $\Gamma(V, \mathcal{J})$ étant évidemment bijective pour tout ouvert $V \subset U$. Pour voir qu'elle est nécessaire, notons qu'il existe par hypothèse un voisinage ouvert U de x et un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-Modules $\mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}|U$. Si f est l'image de la section $1 \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ par cet isomorphisme, on peut supposer, en restreignant U, que l'on a $f = u/s$, où $u \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ et $s \in \Gamma(U, \mathcal{S}(\mathcal{O}_X))$, et l'isomorphisme considéré fait alors correspondre, à toute section $v \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$ (où V est un ouvert contenu dans U) la section $v(u|V)/(s|V)$; dire que l'application ainsi définie est bijective signifie que $u|V$ est un élément régulier de $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$, donc $f \in \Gamma(U, \mathcal{M}^*_X)$.

On notera que pour tout ouvert U de X tel que $\mathcal{J}|U = \mathcal{O}_U.f$ avec $f \in \Gamma(U, \mathcal{M}^*_X)$, la section f est déterminée *à la multiplication près par un élément de* $\Gamma(U, \mathcal{O}^*_X)$, puisque la multiplication par ces éléments fournit tous les automorphismes du $\mathcal{O}_U$-Module $\mathcal{O}_U$ ($\mathbf{0}_I$, 5.4.3).

Corollaire (**21.2.3**). — (i) *Soit $\mathcal{J}$ un Idéal fractionnaire inversible; alors le $\mathcal{O}_X$-Module inversible $\mathcal{J}^{-1}$ s'identifie canoniquement à l'Idéal fractionnaire $\mathcal{J}'$ (transporteur de $\mathcal{J}$ dans $\mathcal{O}_X$) défini de la façon suivante : pour tout ouvert* U *de* X *tel que* $\mathcal{J}|U = \mathcal{O}_U.f$, *où* $f \in \Gamma(U, \mathcal{M}_X^*)$, *on a* $\mathcal{J}'|U = \mathcal{O}_U.f^{-1}$.

(ii) *Si* $\mathcal{J}_1$ *et* $\mathcal{J}_2$ *sont deux Idéaux fractionnaires inversibles, l'application canonique* $\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2 \to \mathcal{J}_1\mathcal{J}_2$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{O}_X$-*Modules.*

L'assertion (ii) résulte aussitôt de (21.2.2). D'autre part, la remarque faite à la fin de (21.2.2) prouve qu'il existe bien un Idéal fractionnaire $\mathcal{J}'$ et un seul défini par la condition de l'énoncé; l'isomorphisme canonique de $\mathcal{J}'$ sur $\mathcal{J}^{-1} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}, \mathcal{O}_X)$ s'obtient en faisant correspondre à toute section $s(f^{-1}|V)$ de $\Gamma(V, \mathcal{J}')$ (où V est un ouvert contenu dans U et $s \in \Gamma(V, \mathcal{O}_X)$) l'homomorphisme $t(f|V) \rightsquigarrow st$ de $\Gamma(V, \mathcal{J})$ dans $\Gamma(V, \mathcal{O}_X)$.

En vertu de (21.2.3, (i)), on identifiera généralement les $\mathcal{O}_X$-Modules inversibles $\mathcal{J}'$ et $\mathcal{J}^{-1}$, considérant donc $\mathcal{J}^{-1}$ comme un *sous-$\mathcal{O}_X$-Module* de $\mathcal{M}_X^*$.

(**21.2.4**) Il résulte de (21.2.3) que l'ensemble Id.inv(X) des Idéaux fractionnaires inversibles sur X est muni d'une structure de *groupe commutatif* pour la loi de composition $(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2) \rightsquigarrow \mathcal{J}_1\mathcal{J}_2$, l'élément neutre de ce groupe étant $\mathcal{O}_X$. Il est clair que pour tout ouvert U de X, on a $(\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2)|U = (\mathcal{J}_1|U)(\mathcal{J}_2|U)$, donc l'application de restriction $\mathcal{J} \rightsquigarrow \mathcal{J}|U$ est un homomorphisme de groupes Id.inv(X) → Id.inv(U); on définit donc ainsi un *préfaisceau de groupes commutatifs* U ⇝ Id.inv(U); il est immédiat qu'en fait ce préfaisceau est un *faisceau de groupes commutatifs*, que l'on note $\mathcal{I}d.inv_X$.

(**21.2.5**) Pour toute fonction méromorphe régulière $f \in \Gamma(X, \mathcal{M}_X^*)$, il résulte de (21.2.2) que $\mathcal{J}(f) = \mathcal{O}_X.f$ est un Idéal fractionnaire inversible, et on a évidemment $\mathcal{J}(f_1f_2) = \mathcal{J}(f_1)\mathcal{J}(f_2)$, autrement dit l'application $f \rightsquigarrow \mathcal{J}(f)$ est un homomorphisme du groupe commutatif $\Gamma(X, \mathcal{M}_X^*)$ dans le groupe commutatif Id.inv(X). Remplaçant X par un ouvert quelconque U de X et notant que les homomorphismes obtenus sont compatibles avec les opérations de restriction, on obtient un homomorphisme canonique de faisceaux de groupes commutatifs :

(**21.2.5.1**) $$I_0 : \mathcal{M}_X^* \to \mathcal{I}d.inv_X.$$

Notons que si $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$, on a $\mathcal{J}(f) = \mathcal{O}_X$; on en déduit aussitôt que l'homomorphisme I_0 se factorise en

(**21.2.5.2**) $$\mathcal{M}_X^* \to \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^* = \mathcal{D}iv_X \xrightarrow{I} \mathcal{I}d.inv_X$$

où I est un homomorphisme du faisceau de groupes additifs $\mathcal{D}iv_X$ dans le faisceau de groupes multiplicatifs $\mathcal{I}d.inv_X$; on a donc pour tout ouvert U de X un homomorphisme $\mathcal{I}_U : \mathrm{Div}(U) \to \mathrm{Id.inv}(U)$ de groupes commutatifs, tel que, pour toute section $f \in \Gamma(U, \mathcal{M}_X^*)$, on ait

(**21.2.5.3**) $$\mathcal{I}_U(\mathrm{div}_U(f)) = \mathcal{O}_U.f.$$

On en conclut que $\mathscr{I}_{\mathrm{X}}(\mathrm{D})$, pour tout diviseur $\mathrm{D}\in\mathrm{Div}(\mathrm{X})$, est l'idéal fractionnaire inversible défini de la façon suivante : pour tout ouvert U de X tel que $\mathrm{D}|\mathrm{U}=\mathrm{div}_{\mathrm{U}}(f)$, où $f\in\Gamma(\mathrm{U},\mathscr{M}_{\mathrm{X}}^{*})$, $\mathscr{I}_{\mathrm{X}}(\mathrm{D})|\mathrm{U}$ est l'Idéal fractionnaire inversible $\mathscr{O}_{\mathrm{U}}.f$. On a donc, en vertu de (21.1.6), pour toute fonction méromorphe régulière $f\in\Gamma(\mathrm{X},\mathscr{M}_{\mathrm{X}}^{*})$, la relation

(21.2.5.4) $$f\in\Gamma(\mathrm{X},\mathscr{I}_{\mathrm{X}}(\mathrm{D})) \Leftrightarrow \mathrm{div}(f)\geqslant\mathrm{D}.$$

Proposition **(21.2.6)**. — *L'homomorphisme* $\mathrm{I} : \mathscr{D}iv_{\mathrm{X}} \to \mathscr{I}d.inv_{\mathrm{X}}$ *est bijectif.*

On définit en effet un homomorphisme I'_{X} de Id.inv(X) dans Div(X) en faisant correspondre à tout Idéal fractionnaire inversible $\mathscr{J}$ sur X le diviseur $\mathrm{I}'_{\mathrm{X}}(\mathscr{J})$ défini de la façon suivante : pour tout ouvert U de X tel que $\mathscr{J}|\mathrm{U}=\mathscr{O}_{\mathrm{U}}.f$, où $f\in\Gamma(\mathrm{U},\mathscr{M}_{\mathrm{X}}^{*})$ (21.2.2), on prend $\mathrm{I}'_{\mathrm{X}}(\mathscr{J})|\mathrm{U}=\mathrm{div}_{\mathrm{U}}(f)$; en vertu de la remarque suivant (21.2.2), cette définition est indépendante du générateur f choisi dans $\mathscr{J}|\mathrm{U}$, et détermine bien un diviseur sur X. En outre, cette définition montre aussitôt que les homomorphismes $\mathscr{I}_{\mathrm{X}}$ et I'_{X} sont réciproques l'un de l'autre. Remplaçant X par un ouvert quelconque U, on en déduit la définition de l'isomorphisme $\mathrm{I}' : \mathscr{I}d.inv_{\mathrm{X}} \to \mathscr{D}iv_{\mathrm{X}}$, réciproque de I, d'où la proposition. On posera $\mathrm{I}'_{\mathrm{X}}(\mathscr{J})=\mathrm{div}(\mathscr{J})$, de sorte que l'on a, pour toute fonction méromorphe régulière f sur X

(21.2.6.1) $$\mathrm{div}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}.f)=\mathrm{div}(f).$$

(21.2.7) On identifiera souvent les faisceaux $\mathscr{D}iv_{\mathrm{X}}$ et $\mathscr{I}d.inv_{\mathrm{X}}$ (resp. les groupes Div(X) et Id.inv(X)) au moyen des isomorphismes I et I′ (resp. $\mathscr{I}_{\mathrm{X}}$ et I'_{X}) précédents. On notera que l'on a la relation

(21.2.7.1) $$\mathrm{D}\geqslant 0 \Leftrightarrow \mathscr{I}_{\mathrm{X}}(\mathrm{D})\subset\mathscr{O}_{\mathrm{X}} \quad \text{pour} \quad \mathrm{D}\in\mathrm{Div}(\mathrm{X})$$

comme il résulte aussitôt des définitions (21.1.6) et de (21.1.5.1); en d'autres termes, l'image $\mathscr{I}_{\mathrm{X}}(\mathrm{Div}^{+}(\mathrm{X}))$ est l'ensemble des *Idéaux de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ (dits aussi parfois Idéaux *entiers*) qui sont des $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-Modules *inversibles* : un tel Idéal $\mathscr{J}$ est encore caractérisé par le fait que pour tout $x\in\mathrm{X}$, il y a un voisinage ouvert U de x dans X tel que $\mathscr{J}|\mathrm{U}=\mathscr{O}_{\mathrm{U}}.f$, où f est un élément *régulier* de $\Gamma(\mathrm{U},\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$. L'ensemble $\mathscr{I}_{\mathrm{X}}(\mathrm{Div}^{+}(\mathrm{X}))$ de ces Idéaux est donc un sous-monoïde de Id.inv(X), égal à l'ensemble des éléments positifs pour une relation d'ordre compatible avec la structure de groupe de Id.inv(X), et il est immédiat que cette relation n'est autre que la relation *opposée* à l'inclusion; autrement dit, on a

(21.2.7.2) $$\mathscr{J}_1\subset\mathscr{J}_2 \Leftrightarrow \mathrm{div}(\mathscr{J}_1)\geqslant\mathrm{div}(\mathscr{J}_2)$$

pour $\mathscr{J}_1$, $\mathscr{J}_2$ dans Id.inv(X).

(21.2.8) Pour tout diviseur D sur X, on pose

(21.2.8.1) $$\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{D})=(\mathscr{I}_{\mathrm{X}}(\mathrm{D}))^{-1};$$

$\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{D})$ est donc un Idéal fractionnaire inversible, défini de la façon suivante : pour tout ouvert U de X tel que $\mathrm{D}|\mathrm{U}=\mathrm{div}_{\mathrm{U}}(f)$, où $f\in\Gamma(\mathrm{U},\mathscr{M}_{\mathrm{X}}^{*})$, $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{D})|\mathrm{U}$ est l'Idéal fractionnaire inversible $\mathcal{O}_U.f^{-1}$; en vertu de (21.1.6), pour toute fonction méromorphe régulière f, on a la relation

(21.2.8.2) $$f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D)) \Leftrightarrow \operatorname{div}(f) \geqslant -D.$$

En outre, il est clair que l'on a des isomorphismes canoniques (21.2.3)

(21.2.8.3) $$\begin{cases} \mathcal{O}_X(0) = \mathcal{O}_X, \quad \mathcal{O}_X(D+D') = \mathcal{O}_X(D)\mathcal{O}_X(D') \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_X(D') \\ \qquad \mathcal{O}_X(nD) = (\mathcal{O}_X(D))^n \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X(D))^{\otimes n} \end{cases}$$

pour tout entier $n \in \mathbf{Z}$, et pour deux diviseurs quelconques D, D' sur X.

(21.2.9) Soit $\mathcal{J}$ un Idéal fractionnaire inversible sur X. L'injection canonique $\mathcal{J} \to \mathcal{M}_X$ définit par tensorisation un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-Modules

(21.2.9.1) $$\mathcal{M}_X(\mathcal{J}) = \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X \to \mathcal{M}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X = \mathcal{M}_X$$

qui est un *isomorphisme* : en effet, si U est un ouvert de X tel que $\mathcal{J}|U = \mathcal{O}_U.f$, où $f \in \Gamma(U, \mathcal{M}_X^*)$, l'homomorphisme (21.2.9.1) restreint à U n'est autre que l'isomorphisme qui à toute section t de $\mathcal{M}_X(\mathcal{J})|U = \mathcal{M}_X|U$ au-dessus de $V \subset U$, fait correspondre la section $t(f|V)^{-1}$ du même faisceau. Dans l'isomorphisme (21.2.9.1), aux sections méromorphes régulières de $\mathcal{J}$ au-dessus de X correspondent les fonctions méromorphes régulières sur X.

Considérons en particulier le cas où $\mathcal{J} = \mathcal{O}_X(D)$, où D est un diviseur sur X; on a alors un isomorphisme canonique

(21.2.9.2) $$\mathcal{M}_X(\mathcal{O}_X(D)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_X$$

et on désigne par s_D la section méromorphe régulière de $\mathcal{O}_X(D)$ au-dessus de X qui correspond par cet isomorphisme à la section 1 de $\mathcal{M}_X$. Si U est un ouvert de X tel que $\mathcal{O}_X(D)|U = \mathcal{O}_U.f^{-1}$, où $f \in \Gamma(U, \mathcal{M}_X^*)$, on a $s_D|U = 1$ dans $\Gamma(U, \mathcal{M}_X)$; comme alors on a $D|U = \operatorname{div}_U(f)$, on en déduit (21.1.4) que l'on a

(21.2.9.3) $$\operatorname{div}(s_D) = D.$$

D'autre part, on déduit aussitôt des isomorphismes canoniques (21.2.8.3) les formules

(21.2.9.4) $$s_0 = 1, \quad s_{D+D'} = s_D \otimes s_{D'}, \quad s_{nD} = s_D^{\otimes n} \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

(21.2.10) Considérons, entre deux couples $(\mathcal{L}, s)$, $(\mathcal{L}', s')$, où $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont deux $\mathcal{O}_X$-Modules inversibles, s (resp. s') une section méromorphe régulière de $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L}'$) au-dessus de X, la relation : « il existe un isomorphisme $u : \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'$ tel que $\overline{u}(s) = s'$ », où $\overline{u} : \Gamma(X, \mathcal{M}_X(\mathcal{L})) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, \mathcal{M}_X(\mathcal{L}'))$ est l'isomorphisme déduit de u (on notera que l'isomorphisme u vérifiant cette condition est alors déterminé de façon unique). Il est clair que c'est une relation d'équivalence, et puisqu'il existe un ensemble de $\mathcal{O}_X$-Modules inversibles tel que tout $\mathcal{O}_X$-Module inversible soit isomorphe à un élément de cet ensemble $(\mathbf{0}_I, 5.4.7)$, on peut parler de *l'ensemble* D(X) *des classes d'équivalence* des couples $(\mathcal{L}, s)$ pour la relation précédente. Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module inversible $\mathcal{L}$ et toute section méromorphe régulière s de $\mathscr{L}$ au-dessus de X, on notera $\mathrm{cl}(\mathscr{L}, s)$ l'élément de D(X) correspondant au couple $(\mathscr{L}, s)$. Il résulte de $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 5.4.3)$ que si s, s' sont deux sections méromorphes régulières de $\mathscr{L}$ au-dessus de X, la relation $\mathrm{cl}(\mathscr{L}, s) = \mathrm{cl}(\mathscr{L}, s')$ équivaut à l'existence d'une section $t \in \Gamma(\mathrm{X}, \mathcal{O}_{\mathrm{X}}^*)$ telle que $s' = ts$.

Il est immédiat que si $(\mathscr{L}, s)$ est équivalent à $(\mathscr{L}_1, s_1)$ et $(\mathscr{L}', s')$ à $(\mathscr{L}'_1, s'_1)$, les couples $(\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}', s \otimes s')$ et $(\mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}'_1, s_1 \otimes s'_1)$ sont équivalents; on définit donc dans D(X) une loi de composition en posant

$$(\mathbf{21.2.10.1}) \qquad \mathrm{cl}(\mathscr{L}, s)\mathrm{cl}(\mathscr{L}', s') = \mathrm{cl}(\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}', s \otimes s');$$

il est immédiat que c'est une loi de *groupe commutatif*, dont l'élément neutre est $\mathrm{cl}(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}, 1)$ et où l'inverse de $\mathrm{cl}(\mathscr{L}, s)$ est $\mathrm{cl}(\mathscr{L}^{-1}, s^{\otimes(-1)})$.

Proposition **(21.2.11)**. — *Les applications*

$$(\mathbf{21.2.11.1}) \qquad \mathrm{D} \rightsquigarrow \mathrm{cl}(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{D}), s_{\mathrm{D}}), \qquad \mathrm{cl}(\mathscr{L}, s) \rightsquigarrow \mathrm{div}(s)$$

sont des isomorphismes réciproques de Div(X) *sur* D(X) *et de* D(X) *sur* Div(X) *respectivement.*

Compte tenu de (21.2.8.3), (21.2.9.4) et (21.2.10.1), il suffit de voir que les composés de ces deux applications sont les identités dans Div(X) et D(X) respectivement. La première assertion n'est autre que (21.2.9.3). D'autre part, soit $\mathrm{D} = \mathrm{div}(s)$, où s est une section méromorphe régulière de $\mathscr{L}$ au-dessus de X, et soit U un ouvert de X tel qu'il existe un isomorphisme de $\mathscr{L}|\mathrm{U}$ sur $\mathcal{O}_{\mathrm{U}}$, transformant $s|\mathrm{U}$ en $f \in \Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{M}_{\mathrm{X}}^*)$, de sorte que $\mathrm{D}|\mathrm{U} = \mathrm{div}_{\mathrm{U}}(f)$, $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{D})|\mathrm{U} = \mathcal{O}_{\mathrm{U}}.f^{-1}$ et $s_{\mathrm{D}}|\mathrm{U}$ est l'élément unité de $\Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{M}_{\mathrm{X}})$. Il y a donc un isomorphisme $v_{\mathrm{U}} : \mathscr{L}|\mathrm{U} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{U}}.f^{-1} = \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{D})|\mathrm{U}$ tel que $\overline{v}_{\mathrm{U}}$ (notation de (21.2.10)) transforme $s|\mathrm{U}$ en $f.f^{-1} = 1$; on voit aussitôt que ces isomorphismes sont compatibles avec les opérations de restriction, donc définissent un isomorphisme $v : \mathscr{L} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{D})$ tel que $\overline{v}(s) = s_{\mathrm{D}}$. C.Q.F.D.

On peut *transporter* par le premier des isomorphismes (21.2.11.1) la structure de groupe ordonné de Div(X) à D(X); les éléments $\geqslant 0$ de D(X) sont donc les classes $\mathrm{cl}(\mathscr{L}, s)$ telles que $\mathrm{div}(s) \geqslant 0$, c'est-à-dire (21.1.7.1) telles que

$$s \in \Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{L}) \cap \Gamma(\mathrm{X}, (\mathscr{M}_{\mathrm{X}}(\mathscr{L}))^*).$$

(21.2.12) Soit D un diviseur *positif* sur un *préschéma* X; l'Idéal fractionnaire $\mathscr{I}_{\mathrm{X}}(\mathrm{D})$ est donc un *Idéal de* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$, qui est un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module *inversible*; soit $\mathrm{Y}(\mathrm{D})$ le sous-préschéma fermé de X qu'il définit. Pour tout $x \in \mathrm{Y}(\mathrm{D})$, il y a par hypothèse un voisinage ouvert U de x dans X et une section *régulière* $t \in \Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{O}_{\mathrm{X}})$ telle que $\mathscr{I}_{\mathrm{X}}(\mathrm{D})|\mathrm{U} = \mathcal{O}_{\mathrm{U}}.t$ (21.2.7); en d'autres termes, l'immersion canonique $\mathrm{Y}(\mathrm{D}) \rightarrow \mathrm{X}$ est *régulière et de codimension* 1 (19.1.4) en tout point de $\mathrm{Y}(\mathrm{D})$. Inversement, si Y est un sous-préschéma fermé de X, régulièrement immergé dans X et de codimension 1 en tout point de Y, il existe *un diviseur positif et un seul* D tel que $\mathrm{Y}(\mathrm{D}) = \mathrm{Y}$, car pour tout $x \in \mathrm{Y}$, il y a un voisinage U de x dans X tel que $\mathrm{Y} \cap \mathrm{U}$ soit défini par un Idéal de $\mathcal{O}_{\mathrm{U}}$ de la forme $\mathcal{O}_{\mathrm{U}}.t$, où t est *régulier* dans $\Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{O}_{\mathrm{X}})$.

On notera que l'on a alors $\mathrm{Supp}(\mathrm{D}) = \mathrm{Y}(\mathrm{D})$, car dire que $\mathrm{D}_x \neq 0$ signifie que t_x (avec les notations ci-dessus) n'est pas inversible, c'est-à-dire que $x \in \mathrm{Y}(\mathrm{D})$.

21.3. Équivalence linéaire des diviseurs.

(**21.3.1**) On dit qu'un diviseur D sur X est *principal* s'il est de la forme $\operatorname{div}(f)$, où f est une fonction méromorphe régulière sur X; les fonctions méromorphes régulières f' telles que $\operatorname{div}(f')=\mathrm{D}$ sont alors toutes celles de la forme tf, où $t\in\Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}^{*})$ (21.1.3.4). L'ensemble des diviseurs principaux est un sous-groupe de Div(X), noté Div.princ(X), isomorphe à $\Gamma(\mathrm{X},\mathscr{M}_{\mathrm{X}}^{*})/\Gamma(\mathrm{X},\mathscr{O}_{\mathrm{X}}^{*})$. Deux diviseurs D, D′ sont dits *linéairement équivalents* si $\mathrm{D}-\mathrm{D}'$ est un diviseur principal; les diviseurs principaux sont donc les diviseurs *linéairement équivalents à* 0.

(**21.3.2**) Rappelons ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.4.7) que l'on peut parler de l'ensemble des classes d'équivalences des $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-Modules inversibles pour la relation d'isomorphie; on désigne cet ensemble par Pic(X), et pour tout $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-Module inversible $\mathscr{L}$, on note $\mathrm{cl}(\mathscr{L})$ la classe d'équivalence des $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-Modules isomorphes à $\mathscr{L}$; en outre, Pic(X) est un groupe commutatif pour la multiplication définie par $\mathrm{cl}(\mathscr{L})\mathrm{cl}(\mathscr{L}')=\mathrm{cl}(\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}')$. Il est clair que l'application

(**21.3.2.1**) $$r:\mathrm{cl}(\mathscr{L},s)\rightsquigarrow\mathrm{cl}(\mathscr{L})$$

est un *homomorphisme* du groupe D(X) (21.2.10) dans le groupe Pic(X). Par composition, on en déduit donc un homomorphisme

(**21.3.2.2**) $$l:\mathrm{Div}(\mathrm{X})\xrightarrow{\sim}\mathrm{D}(\mathrm{X})\xrightarrow{r}\mathrm{Pic}(\mathrm{X})$$

(aussi noté l_{X}) tel que, pour tout diviseur D, on ait

(**21.3.2.3**) $$l(\mathrm{D})=\mathrm{cl}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{D})).$$

Notons enfin que, si $u:\mathrm{X}'\to\mathrm{X}$ est un morphisme d'espaces annelés, $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ deux $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-Modules inversibles isomorphes, les $\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}$-Modules inversibles $u^*(\mathscr{L}_1)$ et $u^*(\mathscr{L}_2)$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.4.5) sont isomorphes; comme d'autre part, pour deux $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-Modules inversibles quelconques $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ on a $u^*(\mathscr{L}_1\otimes\mathscr{L}_2)=u^*(\mathscr{L}_1)\otimes u^*(\mathscr{L}_2)$ à isomorphisme canonique près ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 4.3.3), on voit que le morphisme u définit canoniquement un homomorphisme de groupes commutatifs

(**21.3.2.4**) $$\mathrm{Pic}(u):\mathrm{Pic}(\mathrm{X})\to\mathrm{Pic}(\mathrm{X}').$$

Proposition (**21.3.3**). — (i) *Le noyau de l'homomorphisme canonique* $l:\mathrm{Div}(\mathrm{X})\to\mathrm{Pic}(\mathrm{X})$ *est le sous-groupe* Div.princ(X), *autrement dit, pour que* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{D})$ *et* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{D}')$ *soient isomorphes, il faut et il suffit que* D *et* D′ *soient linéairement équivalents. On a donc un homomorphisme* injectif *canonique*

(**21.3.3.1**) $$\mathrm{Div}(\mathrm{X})/\mathrm{Div.princ}(\mathrm{X})\to\mathrm{Pic}(\mathrm{X})$$

déduit de l.

(ii) *Pour qu'un* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-Module inversible* $\mathscr{L}$ *soit tel que* $\mathrm{cl}(\mathscr{L})$ *soit de la forme* $l(\mathrm{D})$, *ou encore pour que* $\mathscr{L}$ *soit isomorphe à un* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-Module de la forme* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{D})$, *il faut et il suffit qu'il existe une section méromorphe régulière de* $\mathscr{L}$.

La proposition résulte aussitôt des définitions et de (21.2.10).

Proposition **(21.3.4).** — *Soit* X *un préschéma vérifiant l'une des deux hypothèses suivantes :*

a) X *est localement noethérien et* $\mathrm{Ass}(\mathcal{O}_X)$ *est contenu dans un ouvert affine de* X.

b) X *est réduit et l'ensemble de ses composantes irréductibles est localement fini.*

Alors l'homomorphisme canonique $l : \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ *est surjectif, et donne par passage au quotient un isomorphisme*

$$\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div.princ}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X).$$

Il suffit de montrer que tout $\mathcal{O}_X$-Module inversible $\mathcal{L}$ admet une section méromorphe régulière au-dessus de X (21.3.3). Dans les deux cas, il suffira, grâce à (20.2.11, (ii)), de définir une section s de $(\mathcal{M}_X(\mathcal{L}))^*$ au-dessus d'un ouvert *schématiquement dense* U de X, ou encore dans le cas *a)*, d'un ouvert U contenant $\mathrm{Ass}(\mathcal{O}_X)$ (20.2.13, (iv)). En effet, soit alors V un ouvert quelconque de X tel que $\mathcal{L}|V$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_V$, de sorte qu'il existe un isomorphisme de $\mathcal{M}_X(\mathcal{L})|V$ sur $\mathcal{M}_X|V$, transformant $s|(U\cap V)$ en une section f_V de $\mathcal{M}_X^*$ au-dessus de $U\cap V$. Comme $U\cap V$ est schématiquement dense dans V, il résulte de (20.2.11) qu'il existe une fonction méromorphe régulière et une seule g_V dans V telle que $g_V|(U\cap V)=f_V$, et cette section correspond donc par l'isomorphisme considéré à une section méromorphe régulière u_V de $\mathcal{L}$ au-dessus de V telle que $u_V|(U\cap V)=s|(U\cap V)$. En outre, si V′ est un second ouvert de X tel que $\mathcal{L}|V'$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_{V'}$, les restrictions de u_V et $u_{V'}$ à $V\cap V'$ sont égales, car elles correspondent par isomorphisme à deux fonctions méromorphes qui coïncident dans un ouvert schématiquement dense $U\cap V\cap V'$, et on conclut encore par (20.2.11); les u_V sont donc bien les restrictions d'une section de $(\mathcal{M}_X(\mathcal{L}))^*$ au-dessus de X.

Cela étant, dans le cas *b)*, on prend pour chacun des points maximaux x_λ de X un ouvert U_λ contenant x_λ, ne rencontrant aucune composante irréductible de X distincte de $\overline{\{x_\lambda\}}$ et telle que $\mathcal{L}|U_\lambda$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_{U_\lambda}$; on prendra pour s la section telle que $s|U_\lambda$ soit la section de $\mathcal{L}|U_\lambda$ qui correspond par l'isomorphisme précédent à la section unité de $\mathcal{O}_{U_\lambda}$.

Dans le cas *a)*, on peut prendre pour U par hypothèse un ouvert affine (donc noethérien), autrement dit, supposer que $X=\mathrm{Spec}(A)$, où A est noethérien, et $\mathcal{L}=\widetilde{P}$, où P est un A-module projectif de rang 1. Si S est l'ensemble des éléments réguliers de A, on a $\Gamma(X, \mathcal{M}_X)=S^{-1}A$ (20.2.12) et $\Gamma(X, \mathcal{M}_X(\mathcal{L}))=S^{-1}P$; or S est l'ensemble des éléments n'appartenant à aucun des idéaux associés à A, donc $S^{-1}A$ est un anneau *semi-local* dont les idéaux maximaux proviennent des éléments maximaux de Ass(A), et $S^{-1}P$ est un $S^{-1}A$-module projectif de rang 1, donc ici *libre* de rang 1 (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 3, prop. 5); un élément formant une base de ce $S^{-1}A$-module est par suite (20.1.8) une section méromorphe régulière de $\mathcal{L}$ au-dessus de X.

Corollaire **(21.3.5).** — *Si* X *est un préschéma noethérien, tel qu'il existe un* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible ample* (**II**, 4.5.3) (par exemple un préschéma *quasi-projectif* sur un spectre d'anneau noethérien (**II**, 5.3.1 et 4.6.6)), *l'homomorphisme canonique* $l : \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ *est surjectif.*

En effet (**II**, 4.5.4), il existe alors un voisinage ouvert affine de l'ensemble *fini* $\mathrm{Ass}(\mathcal{O}_X)$.

Remarque **(21.3.6)**. — Rappelons ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.4.7) que l'on a un isomorphisme canonique $\pi : \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X)$ défini de la façon suivante. On part d'un 1-cocycle $(c_{\alpha\beta})$ à valeurs dans $\mathcal{O}_X^*$ correspondant à un recouvrement ouvert (U_α) de X, $c_{\alpha\beta}$ étant un élément de $\Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}_X^*)$, et on lui associe la classe du $\mathcal{O}_X$-Module inversible obtenu en recollant les $\mathcal{O}_{U_\alpha}$ suivant les isomorphismes $\mathcal{O}_{U_\alpha} | (U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_\beta} | (U_\alpha \cap U_\beta)$ définis par la multiplication par $c_{\alpha\beta}$. D'autre part, on déduit de la suite exacte de faisceaux de groupes commutatifs

$$1 \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{M}_X^* \rightarrow \mathcal{D}iv_X \rightarrow 0$$

l'homomorphisme bord de la suite exacte de cohomologie

(21.3.6.1) $$\partial : \mathrm{Div}(X) \rightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*).$$

Montrons que l'homomorphisme composé

$$\mathrm{Div}(X) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*) \underset{\sim}{\xrightarrow{\pi}} \mathrm{Pic}(X)$$

n'est autre que l'homomorphisme l défini dans (21.3.2.2). En effet on doit partir d'un diviseur D et d'un recouvrement ouvert (U_α) de X tel que $D | U_\alpha = \mathrm{div}_{U_\alpha}(g_\alpha)$, où g_α est une fonction méromorphe régulière au-dessus de U_α; $\partial(D)$ est la classe de cohomologie du cocycle $(c_{\alpha\beta})$, où $c_{\alpha\beta} = g_{\alpha|\beta}\, g_{\beta|\alpha}^{-1}$, $g_{\alpha|\beta}$ désignant la restriction de g_α à $U_\alpha \cap U_\beta$. Il est clair que l'image par π de cette classe de cohomologie est la classe de l'Idéal fractionnaire inversible $\mathcal{L}$ tel que pour tout α, $\mathcal{L} | U_\alpha = \mathcal{O}_{U_\alpha} . g_\alpha^{-1}$, qui n'est autre par définition que $\mathcal{O}_X(D)$ (21.2.8).

21.4. Images réciproques de diviseurs.

(21.4.1) Soit $f : X' \rightarrow X$ un morphisme d'espaces annelés; proposons-nous de donner des conditions permettant d'associer à un diviseur D sur X un diviseur D′ sur X′, *image réciproque* de D par f. Notons d'abord pour cela que pour toute section $t \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$, l'image de t par l'homomorphisme canonique $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$ est encore inversible, autrement dit appartient à $\Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}^*)$. Considérons alors D comme donné par la classe d'équivalence d'un couple $(\mathcal{L}, s)$, où $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module inversible et s une section méromorphe régulière de $\mathcal{L}$ au-dessus de X (21.2.11). Formons le $\mathcal{O}_{X'}$-Module inversible $f^*(\mathcal{L}) = \mathcal{L}'$; dire que l'image réciproque $s \circ f$ de s par f existe (20.1.11) et est une section méromorphe régulière de $\mathcal{L}'$ au-dessus de X′ revient à dire que les images réciproques par f de s et de $s^{\otimes(-1)}$ existent, autrement dit que $s \in \Gamma(X, \mathcal{M}_f(\mathcal{L}))$ et $s^{\otimes(-1)} \in \Gamma(X, \mathcal{M}_f(\mathcal{L}^{-1}))$; la remarque faite ci-dessus montre alors que si $(\mathcal{L}_1, s_1)$ est un couple équivalent à $(\mathcal{L}, s)$ au sens de (21.2.10), l'image réciproque $s_1 \circ f$ existe et est une section méromorphe régulière de $\mathcal{L}'_1 = f^*(\mathcal{L}_1)$ au-dessus de X′, et les couples $(\mathcal{L}', s \circ f)$ et $(\mathcal{L}'_1, s_1 \circ f)$ sont équivalents. On peut donc poser la définition suivante :

Définition **(21.4.2)**. — *Étant donné un morphisme* $f : X' \rightarrow X$ *d'espaces annelés, on dit que l'image réciproque par* f *d'un diviseur* D *sur* X *existe si l'on a* $s_D \in \Gamma(X, \mathcal{M}_f(\mathcal{O}_X(D)))$ *et* $s_{-D} \in \Gamma(X, \mathcal{M}_f(\mathcal{O}_X(-D)))$ (cf. (20.1.11)). *On appelle alors image réciproque de* D *par* f *et l'on note* $f^*(D)$ *le diviseur sur* X′ *qui correspond canoniquement* (21.2.11) *à la classe du couple* $(f^*(\mathcal{O}_X(D)), s_D \circ f)$.

Il résulte aussitôt de cette définition que si D et D′ ont des images réciproques par f, il en est de même de $-D$ et de $D + D'$ (compte tenu de (21.2.9.4)) et que l'on a

$f^*(D+D')=f^*(D)+f^*(D')$. Autrement dit, l'ensemble $\mathrm{Div}^f(X)$ des diviseurs sur X dont l'image réciproque par f existe est un *sous-groupe* de Div(X), et l'application $D \rightsquigarrow f^*(D)$ est un *homomorphisme croissant* du sous-groupe ordonné $\mathrm{Div}^f(X)$ dans le groupe ordonné Div(X'), rendant commutatif le diagramme

(**21**.4.2.1)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Div}^f(X) & \xrightarrow{l_X} & \mathrm{Pic}(X) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Pic}(f)} \\ \mathrm{Div}(X') & \xrightarrow[l_{X'}]{} & \mathrm{Pic}(X') \end{array}$$

(**21**.4.3) La définition (21.4.2) montre aussitôt que, pour que $f^*(D)$ existe, il faut et il suffit que pour tout ouvert U de X, l'image réciproque par $f^U : f^{-1}(U) \to U$ (restriction de f) de $D|U$ existe. Or, si $D=\mathrm{div}(g)$, où g est une fonction méromorphe régulière sur X, dire que l'image réciproque de s_D par f existe et est une section méromorphe régulière de $f^*(\mathcal{O}_X(D))$ signifie (21.2.9) que l'image réciproque de g par f existe et est une fonction méromorphe régulière sur X'. On en déduit aussitôt une seconde description de $\mathrm{Div}^f(X)$ et de $f^*(D)$: on considère le sous-faisceau de groupes de $\mathscr{M}_X^*$, noté $\mathscr{M}_f^{**}$, formé des germes de fonctions méromorphes régulières sur un ouvert de X et dont l'image réciproque par f existe et est régulière sur l'ouvert image réciproque (20.1.11). Alors si $f=(\psi, \theta)$, l'homomorphisme canonique (20.1.11) $\psi^*(\mathscr{M}_f) \to \mathscr{M}_{X'}$ donne par restriction un homomorphisme de faisceaux de groupes $\psi^*(\mathscr{M}_f^{**}) \to \mathscr{M}_{X'}^*$. Posant $\mathscr{D}iv_X^f = \mathscr{M}_f^{**}/\mathcal{O}_X^*$, on a $\mathrm{Div}^f(X)=\Gamma(X, \mathscr{D}iv_X^f)$, et l'application $D \rightsquigarrow f^*(D)$ correspond à l'homomorphisme de faisceaux de groupes $\psi^*(\mathscr{M}_f^{**})/\psi^*(\mathcal{O}_X^*) \to \mathscr{M}_{X'}^*/\mathcal{O}_{X'}^* = \mathscr{D}iv_{X'}$ déduit du précédent par passage aux quotients.

(**21**.4.4) Il résulte aussitôt des définitions précédentes que si $f' : X'' \to X'$ est un second morphisme d'espaces annelés, D un diviseur sur X tel que les images réciproques $f^*(D)$ et $f'^*(f^*(D))$ existent, alors $(f \circ f')^*(D)$ existe et est égal à $f'^*(f^*(D))$.

Proposition (**21**.4.5). — *Soit* $f : X' \to X$ *un morphisme d'espaces annelés. Dans chacun des trois cas suivants, l'image réciproque par f de tout diviseur sur* X *est définie :*

(i) *f est plat.*

(ii) X *et* X' *sont des préschémas localement noethériens et l'on a* $f(\mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X'})) \subset \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_X)$.

(iii) X *et* X' *sont des préschémas, l'ensemble des composantes irréductibles de* X *est localement fini,* X' *est réduit et toute composante irréductible de* X' *domine une composante irréductible de* X.

Il suffit en effet de montrer que dans les trois cas on a $\mathscr{M}_f = \mathscr{M}_X$; dans le cas (i), cela résulte de (20.1.12). Dans le cas (iii), on peut se borner au cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$ et $X'=\mathrm{Spec}(A')$ sont affines; si $s \in A$ est régulier, il n'appartient à aucun idéal premier minimal de A (20.1.3.1), donc l'hypothèse entraîne que son image dans A' n'appartient à aucun idéal premier minimal de A', et est par suite un élément régulier de A' (20.1.3.1). Dans le cas (ii) les fonctions méromorphes sur X' s'identifient aux pseudo-fonctions sur X' (20.2.11), et l'hypothèse, jointe à (20.2.13, (iv)) assure que l'image réciproque par f de tout ouvert schématiquement dense dans X est un ouvert schématiquement dense dans X'; on conclut donc par (20.3.12).

Corollaire (**21.4.6**). — *Soit* X *un préschéma ayant l'une des propriétés suivantes :*

(i) X *est localement noethérien.*

(ii) X *est réduit et l'ensemble de ses composantes irréductibles est localement fini.*

Alors, pour tout $x \in X$, *on a un isomorphisme canonique*

(21.4.6.1) $$(\mathscr{D}iv_X)_x \xrightarrow{\sim} \mathrm{Div}(\mathcal{O}_{X,x}).$$

Cela résulte en effet de (20.2.11), (20.3.7) et de ce que $(\mathcal{O}_X^*)_x$ s'identifie au groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$.

(**21.4.7**) Soient X, X' deux préschémas, $f : X' \to X$ un morphisme. Si D est un diviseur *positif* sur X tel que l'image réciproque $f^*(D)$ soit définie (21.4.2), alors le sous-préschéma fermé $Y(f^*(D))$ de X' n'est autre que l'image réciproque $f^{-1}(Y(D))$; cela résulte aussitôt des définitions (21.4.2) et (21.2.12).

Proposition (**21.4.8**). — *Soient* X, Y *deux préschémas,* $f : X \to Y$ *un morphisme fidèlement plat. Alors, si un diviseur* D *sur* Y *est tel que* $f^*(D) \geqslant 0$ (l'existence de $f^*(D)$ résultant de (21.4.5)), *on a* $D \geqslant 0$. *En particulier, l'application* $D \rightsquigarrow f^*(D)$ *de* Div(Y) *dans* Div(X) *est injective.*

La question étant locale sur Y, on peut se borner au cas où $D = \mathrm{div}(w)$, avec $w = uv^{-1}$, u et v étant deux sections régulières de $\mathcal{O}_Y$ au-dessus de Y. Par hypothèse on a $u\mathcal{O}_X \subset v\mathcal{O}_X$, donc, pour tout $x \in X$, si l'on pose $y = f(x)$, on a $u_y\mathcal{O}_{X,x} \subset v_y\mathcal{O}_{X,x}$; on en conclut que $u_y\mathcal{O}_{Y,y} \subset v_y\mathcal{O}_{Y,y}$ en vertu de l'hypothèse que $\mathcal{O}_{X,x}$ est un $\mathcal{O}_{Y,y}$-module fidèlement plat et de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 3, n° 5, prop. 10, (ii); d'où $u\mathcal{O}_Y \subset v\mathcal{O}_Y$ puisque f est surjectif, et par suite $D \geqslant 0$.

21.5. Images directes de diviseurs.

(**21.5.1**) Soient X, X' deux *préschémas*, $f : X' \to X$ un morphisme. Nous allons, dans ce numéro, donner des conditions suffisantes pour qu'on puisse associer à *tout* diviseur D' sur X' un diviseur D sur X, *image directe* de D' par f. Nous nous bornerons au cas où f est un morphisme *fini* (pour des conditions plus générales, voir le chapitre de ce Traité consacré à la théorie des intersections).

Lemme (**21.5.2**). — *Soient* A *un anneau,* E *un* A-*module libre de rang fini. Pour qu'un endomorphisme* u *de* E *soit injectif, il faut et il suffit que* $\det(u)$ *soit un élément régulier de* A.

Cela est prouvé dans Bourbaki, *Alg.*, chap. III, 3ᵉ éd., § 8, n° 2, prop. 3.

(**21.5.3**) Supposons maintenant que le morphisme $f : X' \to X$ soit *fini*, et en outre que f vérifie *l'une* des deux propriétés suivantes :

I) f *est* un morphisme fini *localement libre*, autrement dit (18.2.7) le $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent de type fini $f_*(\mathcal{O}_{X'})$ est *localement libre*.

II) X est un préschéma localement noethérien réduit, le $\mathscr{R}(X)$-Module $f_*(\mathcal{O}_{X'}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{R}(X)$ est localement libre, et pour toute section $s' \in \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ (U ouvert dans X), $N_{f_*(\mathcal{O}_{X'})/\mathcal{O}_X}(s')$ est une section de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de U (cf. (**II**, 6.5.1)). (On rappelle que la condition (II) est vérifiée pour *tout morphisme fini f* lorsque X est un préschéma localement noethérien *normal (loc. cit.)*.)

On sait alors (**II**, 6.5.5) que pour tout $\mathcal{O}_{X'}$-Module inversible $\mathcal{L}'$ on définit la *norme* $\mathcal{L}=N_{X'/X}(\mathcal{L}')$ (que nous écrirons aussi $N(\mathcal{L}')$), qui est un $\mathcal{O}_X$-Module inversible. En outre, pour tout ouvert U de X et toute section *régulière* $s'\in\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_{X'})$, la *norme* $N_{X'/X}(s')=N_{f_*(\mathcal{O}_{X'})/\mathcal{O}_X}(s')$ (que nous écrirons aussi $N(s')$) est un élément *régulier* de $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$; on est en effet ramené aussitôt au cas où $U=X$ est affine, et alors la conclusion résulte de (21.5.2) dans l'hypothèse (I) ; d'autre part, dans l'hypothèse (II), le fait que $\mathcal{R}(X)$ soit un $\mathcal{O}_X$-Module plat entraîne que la section $s'\otimes 1$ de $\Gamma(U, f_*(\mathcal{O}_{X'})\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{R}(X))$ est aussi régulière ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.1.2), et la conclusion résulte encore de (21.5.2) appliqué à l'anneau $\Gamma(U, \mathcal{R}(X))$, compte tenu de la définition de la norme d'une section (**II**, 6.5.3). Cela étant, soit u' une section méromorphe de $\mathcal{L}'$ au-dessus de X' ; le morphisme f étant affine, tout point $x\in X$ admet un voisinage ouvert U tel que $u'|f^{-1}(U)$ soit de la forme t'/s', où $t'\in\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{L}')$ et s' est une section *régulière* dans $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_{X'})$; l'élément $N(t')/N(s')$ (où $N(t')$ est la section de $\mathcal{L}$ définie dans (**II**, 6.5.3)) est alors une section méromorphe de $\mathcal{L}$ au-dessus de U en vertu de ce qui précède, et il résulte des propriétés multiplicatives de la norme (**II**, 6.5.3.1) que cette section ne dépend que de $u'|f^{-1}(U)$ et non de son écriture sous la forme t'/s' ; pour la même raison, lorsque U varie, les sections méromorphes de $\mathcal{L}$ au-dessus de U ainsi définies sont les restrictions d'une même section méromorphe de $\mathcal{L}$ au-dessus de X, que l'on appelle la *norme* de u' et que l'on note $N_{X'/X}(u')$ (ou simplement $N(u')$). L'application ainsi définie

(21.5.3.1) $$N_{X'/X} : \Gamma(X', \mathcal{M}_{X'}(\mathcal{L}')) \to \Gamma(X, \mathcal{M}_X(N_{X'/X}(\mathcal{L}')))$$

prolonge la norme définie dans (**II**, 6.5.5.3) ; si u' est une section méromorphe *régulière* de $\mathcal{L}'$ au-dessus de X', il résulte aussitôt de ce qui précède que $N(u')$ est une section méromorphe *régulière* de $\mathcal{L}$ au-dessus de X, car (avec les mêmes notations) $N(t')$ est régulière si t' l'est. Enfin, si $\mathcal{L}'_1$, $\mathcal{L}'_2$ sont deux $\mathcal{O}_{X'}$-Modules inversibles, s'_1 (resp. s'_2) une section méromorphe de $\mathcal{L}'_1$ (resp. $\mathcal{L}'_2$) au-dessus de X', on a, en vertu de ce qui précède et de (**II**, 6.5.3.1)

(21.5.3.2) $$N(s'_1\otimes s'_2)=N(s'_1)\otimes N(s'_2).$$

(21.5.4) Supposons toujours que f vérifie l'une des hypothèses I), II) de (21.5.3). Si $(\mathcal{L}'_1, s'_1)$, $(\mathcal{L}'_2, s'_2)$ sont deux couples formés chacun d'un $\mathcal{O}_{X'}$-Module inversible et d'une section méromorphe régulière de ce Module au-dessus de X', qui en outre sont *équivalents* au sens de (21.2.10), alors les couples $(N(\mathcal{L}'_1), N(s'_1))$ et $(N(\mathcal{L}'_2), N(s'_2))$ sont aussi équivalents, car un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X'}$-Modules inversibles a pour norme un isomorphisme de leurs normes (**II**, 6.5.3), et on a vu plus haut que $N_{X'/X}$ transforme les sections de $\Gamma(X', \mathcal{O}^*_{X'})$ en celles de $\Gamma(X, \mathcal{O}^*_X)$. On peut donc poser la définition suivante :

Définition **(21.5.5).** — *Étant donné un morphisme fini* $f : X' \to X$ *de préschémas, vérifiant l'une des conditions* I), II) *de* (21.5.3), *on appelle image directe (ou norme) d'un diviseur* D' *sur* X' *par* f, *et l'on note* $f_*(D')$ (*ou* $N_{X'/X}(D')$), *le diviseur sur* X *qui correspond canoniquement* (21.2.11) *à la classe du couple* $(N_{X'/X}(\mathcal{O}_{X'}(D')), N_{X'/X}(s_{D'}))$.

Il résulte aussitôt de cette définition, compte tenu de (21.2.9.4) et de (21.5.3.2), que si D'_1, D'_2, D' sont des diviseurs sur X', on a

(21.5.5.1) $$f_*(D'_1 + D'_2) = f_*(D'_1) + f_*(D'_2)$$

et $D' \geqslant 0$ entraîne $f_*(D') \geqslant 0$, autrement dit, $D' \rightsquigarrow f_*(D')$ est un *homomorphisme croissant* du groupe ordonné $\mathrm{Div}(X')$ dans le groupe ordonné $\mathrm{Div}(X)$. La définition (21.5.5) montre d'ailleurs aussitôt que pour tout ouvert U de X, on a $f^U_*(D' | f^{-1}(U)) = f_*(D') | U$ (f^U étant la restriction $f^{-1}(U) \to U$ de f), et les homomorphismes f^U_*, pour U variable, définissent donc un *homomorphisme de faisceaux de groupes ordonnés*

(21.5.5.2) $$N_{X'/X} : f_*(\mathcal{D}iv_{X'}) \to \mathcal{D}iv_X.$$

En outre, pour tout ouvert U de X, tout $\mathcal{O}_{X'}$-Module inversible $\mathcal{L}'$ et toute section méromorphe régulière s' de $\mathcal{L}'$ au-dessus de $f^{-1}(U)$, on a, d'après les définitions précédentes et (21.1.4)

(21.5.5.3) $$\mathrm{div}_U(N(s')) = f^U_*(\mathrm{div}_{f^{-1}(U)}(s')).$$

Proposition **(21.5.6).** — *Soit* $f : X' \to X$ *un morphisme fini localement libre et supposons que* $f_*(\mathcal{O}_{X'})$ *soit de rang constant n. Alors, pour tout diviseur* D *sur* X, $f_*(D)$ *est défini et l'on a*

(21.5.6.1) $$f_*(f^*(D)) = nD.$$

La première assertion résulte de ce que f est plat (21.4.5), et la seconde est conséquence immédiate des définitions et de (**II**, 6.5.3.2).

Proposition **(21.5.7).** — *Soient* $f : X' \to X$ *un morphisme fini vérifiant l'une des hypothèses* I), II) *de* (21.5.3), $f' : X'' \to X'$ *un morphisme fini localement libre de rang constant n. Alors* $f'' = f \circ f' : X'' \to X$ *vérifie la même hypothèse que* f, *et pour tout diviseur* D'' *sur* X'', *on a*

(21.5.7.1) $$f''_*(D'') = f_*(f'_*(D'')).$$

Compte tenu de la définition (21.5.5), il suffit de prouver le résultat suivant :

Lemme **(21.5.7.2).** — *Sous les hypothèses de* (21.5.7), *on a un isomorphisme fonctoriel*

(21.5.7.3) $$N_{X''/X}(\mathcal{L}'') \xrightarrow{\sim} N_{X'/X}(N_{X''/X'}(\mathcal{L}''))$$

dans la catégorie des $\mathcal{O}_{X''}$-*Modules inversibles.*

En effet, compte tenu de la définition de la norme d'une section de $\mathcal{L}''$ (**II**, 6.5.3) et de la définition (21.5.5), on obtiendra aussitôt (21.5.7.1). Pour prouver (21.5.7.2), il suffit, compte tenu des définitions de (**II**, 6.5.2 et 6.5.3) de prouver que pour toute section s de $f''_*(\mathcal{O}_{X''}) = f_*(f'_*(\mathcal{O}_{X''}))$ au-dessus d'un ouvert U de X, on a

(21.5.7.4) $$N_{f''_*(\mathcal{O}_{X''})/\mathcal{O}_X}(s) = N_{f_*(\mathcal{O}_{X'})/\mathcal{O}_X}(N_{f''_*(\mathcal{O}_{X''})/f_*(\mathcal{O}_{X'})}(s))$$

La question est évidemment locale sur X, et on peut donc se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine; on a alors $X' = \mathrm{Spec}(A')$ et $X'' = \mathrm{Spec}(A'')$, et on peut supposer que A'' est un A'-module projectif de rang n. Lorsque f est localement libre, on peut supposer que A' est un A-module libre de rang m, et alors A'' est un A-module projectif de rang mn, et en restreignant X à un ouvert convenable, on peut supposer que A'' est un A-module libre de rang mn; la formule (21.5.7.4) résulte alors de la transitivité de la norme (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 12, n° 2, prop. 7). Lorsque f vérifie l'hypothèse II), A est noethérien réduit, et si R est son anneau total de fractions, $A' \otimes_A R$ est un R-module libre de rang m, donc $A'' \otimes_A R = A'' \otimes_{A'} (A' \otimes_A R)$ est un R-module projectif de rang mn, et comme R est alors un anneau semi-local, ce R-module est libre; la proposition résulte alors encore de la transitivité des normes.

Proposition (**21**.5.**8**). — *Soient* $f : X' \to X$ *un morphisme fini,* $g : Y \to X$ *un morphisme; on pose* $Y' = X' \times_X Y$, $f' = f_{(Y)} : Y' \to Y$, $g' = g_{(X)} : Y' \to X'$. *On suppose vérifiée l'une des conditions suivantes :*

(i) *f est localement libre et g est plat.*

(ii) *f est localement libre,* X *et* Y *sont localement noethériens,* $g(\mathrm{Ass}(\mathcal{O}_Y)) \subset \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_X)$ *et* $g'(\mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{Y'})) \subset \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X'})$.

(iii) *f vérifie l'hypothèse* II) *de* (21.5.3), Y *est localement noethérien,* Y *et* Y' *sont réduits et toute composante irréductible de* Y (resp. Y') *domine une composante irréductible de* X (resp. X').

Alors, pour tout diviseur D' *sur* X', $g'^*(D')$ *est défini,* $g^*(f_*(D'))$ *est défini et l'on a*

$$g^*(f_*(D')) = f'_*(g'^*(D')). \tag{21.5.8.1}$$

En effet, dans tous les cas, il résulte de (**II**, 6.5.8) que l'on a un isomorphisme fonctoriel

$$g^*(\mathrm{N}_{X'/X}(\mathscr{L}')) \xrightarrow{\sim} \mathrm{N}_{Y'/Y}(g'^*(\mathscr{L}'))$$

dans la catégorie des $\mathcal{O}_{X'}$-Module inversibles; en outre (**II**, 6.5.4), si s' est une section de $\mathcal{O}_{X'}$ au-dessus de $f^{-1}(U)$, s'' la section correspondante de $\mathcal{O}_{Y'}$ au-dessus de $g'^{-1}(f^{-1}(U))$ (U ouvert de X), $\mathrm{N}_{Y'/Y}(s'')$ est la section de $\mathcal{O}_Y$ au-dessus de $g^{-1}(U)$ qui correspond à la section $\mathrm{N}_{X'/X}(s')$ de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de U. La formule (21.5.8.1) résultera donc des définitions si l'on prouve que $g'^*(D')$ et $g^*(D)$ sont définis, quels que soient les diviseurs D' sur X' et D sur X. En ce qui concerne D, cela résulte des hypothèses faites et de (21.4.5). En ce qui concerne D', dans le cas (i) g' est plat, donc dans tous les cas $g'^*(D')$ est défini en vertu de (21.4.5).

21.6. Cycle 1-codimensionnel associé à un diviseur.

(**21**.**6**.**1**) Soit X un *préschéma localement noethérien,* et soit $\mathfrak{I}(X)$ l'ensemble des *parties fermées irréductibles* de X (qui est en correspondance biunivoque avec X par l'application $x \rightsquigarrow \overline{\{x\}}$). Dans le groupe produit $\mathbf{Z}^X$, considérons le sous-groupe $\mathfrak{Z}(X)$ des éléments $(n_x)_{x \in X}$ tels que l'ensemble des $\overline{\{x\}} \in \mathfrak{I}(X)$ tels que $n_x \neq 0$ (ou, ce qui revient au même, l'ensemble des $x \in X$ tels que $n_x \neq 0$) soit *localement fini*. Il est clair que $\mathfrak{Z}(X)$ est un *sous-groupe* de $\mathbf{Z}^X$, qui contient le groupe somme directe $\mathbf{Z}^{(X)}$ (groupe libre ayant pour base $\mathfrak{I}(X)$), et lui est égal lorsque X est *noethérien*. Les éléments de $\mathfrak{Z}(X)$ sont appelés *cycles* sur X et ceux de $\mathfrak{I}(X)$ *cycles premiers* (ils ne forment pas en général une base de $\mathfrak{Z}(X)$ lorsque X n'est pas noethérien). On considère toujours $\mathfrak{Z}(X)$ comme *ordonné* par l'ordre induit sur ce sous-groupe par l'ordre produit de $\mathbf{Z}^X$, et on notera $\mathfrak{Z}^+(X)$ l'ensemble des cycles $\geqslant 0$.

Pour tout cycle $Z \in \mathfrak{Z}(X)$, égal à $(n_x)_{x \in X}$, on écrira par abus de langage,

$$Z = \sum_{x \in X} n_x . \overline{\{x\}};$$

on appelle *multiplicité de* Z *au point* x et on note $\operatorname{mult}_x(Z)$ l'entier n_x (positif ou négatif). Dire que $Z \geqslant 0$ signifie que $\operatorname{mult}_x(Z) \geqslant 0$ pour tout $x \in X$. On appelle *support de* Z et on note $\operatorname{Supp}(Z)$ la réunion des $\overline{\{x\}}$ tels que $\operatorname{mult}_x(Z) \neq 0$; par définition de $\mathfrak{Z}(X)$, c'est une partie *fermée* de X, comme réunion d'une famille localement finie de parties fermées. On appelle *dimension* (resp. *codimension*) de Z et on note $\dim(Z)$ (resp. $\operatorname{codim}(Z)$) la dimension (resp. codimension dans X) de $\operatorname{Supp}(Z)$.

(21.6.2) On dit qu'une partie fermée Y de X est *purement de codimension p* (dans X) si *chacune* de ses composantes irréductibles est de codimension p dans X. On dit qu'un cycle est *purement de codimension p*, ou (par abus de langage) est un *cycle p-codimensionnel* si son support est *purement* de codimension p. On note $X^{(p)}$ l'ensemble des $x \in X$ tels que $\operatorname{codim}(\overline{\{x\}}, X) = p$, ou, ce qui revient au même (5.1.2.1), $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = p$: les cycles purement de codimension p forment un sous-groupe $\mathfrak{Z}^p(X)$ de $\mathfrak{Z}(X)$, isomorphe au sous-groupe de $\mathbf{Z}^{X^{(p)}}$ formé des $(n_x)_{x \in X^{(p)}}$ tels que l'ensemble des $\overline{\{x\}}$ (ou l'ensemble des x) pour lesquels $n_x \neq 0$ soit localement fini; ce sous-groupe contient le groupe libre $\mathbf{Z}^{(X^{(p)})}$ et lui est identique lorsque X est noethérien. On note $\mathfrak{Z}^{p+}(X)$ l'ensemble des éléments $\geqslant 0$ de $\mathfrak{Z}^p(X)$. Il est clair que le groupe ordonné $\mathfrak{Z}(X)$ contient la somme directe des sous-groupes ordonnés $\mathfrak{Z}^p(X)$, et est identique à cette somme directe lorsque X est noethérien; dans ce dernier cas, on considère $\mathfrak{Z}(X)$ comme *gradué* par les $Z^p(X)$ pour $p \in \mathbf{N}$.

(21.6.3) Soient $Z = \sum_{x \in X} n_x . \overline{\{x\}}$ un cycle sur X, U un ouvert de X; on appelle *restriction* de Z à U et on note $Z|U$ le cycle $\sum_{x \in U} n_x . (U \cap \overline{\{x\}})$ sur U; on a $\operatorname{Supp}(Z|U) = \operatorname{Supp}(Z) \cap U$. Il est clair que $Z \rightsquigarrow Z|U$ est un homomorphisme de groupes ordonnés de $\mathfrak{Z}(X)$ dans $\mathfrak{Z}(U)$ (resp. de $\mathfrak{Z}^p(X)$ dans $\mathfrak{Z}^p(U)$), et que si V est un ouvert contenu dans U, on a $Z|V = (Z|U)|V$; l'application $U \rightsquigarrow \mathfrak{Z}(U)$ (resp. $U \rightsquigarrow \mathfrak{Z}^p(U)$) est donc un *préfaisceau* sur X de groupes ordonnés commutatifs. En fait ce préfaisceau est un *faisceau*, somme directe des faisceaux $(i_x)_*(\mathbf{Z}_{\overline{\{x\}}})$, où x parcourt X (resp. $X^{(p)}$) et pour chaque $x \in X$, i_x est l'injection canonique $\overline{\{x\}} \to X$ et $\mathbf{Z}_{\overline{\{x\}}}$ est le faisceau simple associé au faisceau constant $\mathbf{Z}$ sur l'espace $\overline{\{x\}}$: cela résulte aussitôt de la description des sections d'une somme directe de faisceaux de groupes commutatifs (G, II, 2.7). On note ce faisceau $\mathscr{Z}_X$ (resp. $\mathscr{Z}_X^p$). On note $\mathscr{Z}_X^+$ (resp. $\mathscr{Z}_X^{p+}$) le sous-faisceau de monoïdes $U \rightsquigarrow \mathfrak{Z}^+(U)$ (resp. $U \rightsquigarrow \mathfrak{Z}^{p+}(U)$) de $\mathscr{Z}_X$ (resp. $\mathscr{Z}_X^p$). Le faisceau $\mathscr{Z}_X$ est évidemment *somme directe* des faisceaux $\mathscr{Z}_X^p$.

Notons enfin que les faisceaux $\mathscr{Z}_X^p$ (donc aussi $\mathscr{Z}_X$) sont *flasques*. Supposons en effet donnée une section Z de $\mathscr{Z}_X^p$ au-dessus d'un ouvert U, de sorte que l'ensemble S des $x \in U$ tels que $\mathrm{mult}_x(Z) \neq 0$ est localement fini *dans* U; cet ensemble est aussi localement fini *dans* X, car pour tout $z \in X$ et tout voisinage ouvert noethérien V de z, $U \cap V$ est noethérien, donc ne contient qu'un nombre fini de points de S. On définit donc une section Z' de $\mathscr{Z}_X^p$ au-dessus de X en posant $Z' = \sum_{x \in U} \mathrm{mult}_x(Z) . \overline{\{x\}}$ et puisque l'adhérence de x dans U est $\overline{\{x\}} \cap U$, on a bien $Z' | U = Z$, d'où notre assertion.

(21.6.4) Nous nous proposons de définir un homomorphisme canonique

$$c : \mathscr{D}iv_X \rightarrow \mathscr{Z}_X^1 \tag{21.6.4.1}$$

de faisceaux de groupes commutatifs. Il suffit évidemment de définir un homomorphisme de $\mathscr{M}_X^*$ dans $\mathscr{Z}_X^1$, qui s'annule dans $\mathscr{O}_X^*$ (21.1.2); or, par définition, $\mathscr{M}_X^*$ est le *symétrisé* du faisceau de monoïdes $\mathscr{S}(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_X \cap \mathscr{M}_X^*$, et un homomorphisme $\mathscr{M}_X^* \rightarrow \mathscr{Z}_X^1$ est déterminé de façon unique par la donnée de sa restriction $\mathscr{S}(\mathscr{O}_X) \rightarrow \mathscr{Z}_X^1$, qui est un homomorphisme de faisceau de *monoïdes* soumis à la seule condition d'être nul dans $\mathscr{O}_X^*$; il revient au même de dire que pour définir c, il suffit de définir un homomorphisme de *faisceau de monoïdes*

$$c : \mathscr{D}iv_X^+ \rightarrow \mathscr{Z}_X^1. \tag{21.6.4.2}$$

(21.6.5) Or, on a vu qu'à tout diviseur positif D sur X on fait correspondre le sous-préschéma fermé $\mathsf{Y}(D)$ de X, défini par l'Idéal $\mathscr{I}_X(D) \subset \mathscr{O}_X$, et qui est régulièrement immergé et de codimension 1. En chacun des points maximaux x de $\mathsf{Y}(D)$, on a donc ((19.1.4) et (5.1.2)) $\mathrm{codim}(\overline{\{x\}}, X) = \dim(\mathscr{O}_{X,x}) = 1$, autrement dit $x \in X^{(1)}$; d'ailleurs l'ensemble de ces points maximaux est localement fini dans X (3.1.6), et $\mathscr{O}_{\mathsf{Y}(D),x}$ est un anneau *artinien*. En tout point $x \in X^{(1)}$ qui n'est pas point maximal de $\mathsf{Y}(D)$, on a nécessairement $x \notin \mathsf{Y}(D)$, donc $\mathscr{O}_{\mathsf{Y}(D),x} = 0$. Posons

$$\mathrm{cyc}(D) = \sum_{x \in X^{(1)}} \mathrm{long}(\mathscr{O}_{\mathsf{Y}(D),x}) . \overline{\{x\}} \tag{21.6.5.1}$$

qui est donc un élément de $\mathfrak{Z}^1(X)$.

Proposition **(21.6.6)**. — *L'application* $D \rightsquigarrow \mathrm{cyc}(D)$ *est un homomorphisme du monoïde* $\mathrm{Div}^+(X)$ *dans* $\mathfrak{Z}^1(X)$.

Tout revient à voir que pour deux diviseurs *positifs* D, D', on a

$$\mathrm{cyc}(D + D') = \mathrm{cyc}(D) + \mathrm{cyc}(D').$$

Or, on a (21.2.5) $\mathscr{I}_X(D + D') = \mathscr{I}_X(D)\mathscr{I}_X(D')$; tout revient à voir que si $x \in X^{(1)}$, si l'on pose $A = \mathscr{O}_{X,x}$, et si t et t' sont deux éléments réguliers de A, on a $\mathrm{long}(A/tt'A) = \mathrm{long}(A/tA) + \mathrm{long}(A/t'A)$; mais puisque t est régulier, $tA/tt'A$ est isomorphe à $A/t'A$, d'où aussitôt la proposition.

Il résulte aussitôt des définitions que pour tout ouvert $U \subset X$, on a

$$Y(D|U) = Y(D) \cap U,$$

donc $\operatorname{cyc}(D|U) = \operatorname{cyc}(D)|U$, et les homomorphismes $\operatorname{cyc} : \operatorname{Div}^+(U) \to \mathfrak{Z}^1(U)$ définissent donc un homomorphisme de faisceaux de monoïdes (21.6.4.3), d'où l'homomorphisme cherché (21.6.4.1) de faisceaux de groupes.

On a $\operatorname{Supp}(\operatorname{cyc}(D)) \subset \operatorname{Supp}(D)$ pour tout diviseur D et

(21.6.6.2) $$\operatorname{Supp}(\operatorname{cyc}(D)) = \operatorname{Supp}(D) \quad \text{lorsque } D \geqslant 0;$$

on a déjà vu en effet la seconde relation (21.2.12); lorsque D est quelconque, la relation $D_x = 0$ entraîne l'existence d'un voisinage ouvert U de x tel que $D|U = 0$, d'où $\operatorname{cyc}(D)|U = 0$, ce qui prouve notre assertion.

(21.6.7) L'homomorphisme (21.6.4.1) donne, par passage aux groupes de sections au-dessus de X, un *homomorphisme croissant de groupes ordonnés* $\operatorname{Div}(X) \to \mathfrak{Z}^1(X)$, que nous noterons encore $D \rightsquigarrow \operatorname{cyc}(D)$; le nombre $\operatorname{mult}_x(\operatorname{cyc}(D))$ pour $x \in X^{(1)}$ se note encore $\operatorname{mult}_x(D)$ ou $\operatorname{mult}_{\overline{\{x\}}}(D)$ et s'appelle *multiplicité du diviseur* D *au point* x, ou *multiplicité du cycle premier* $\overline{\{x\}}$ *dans* D; c'est un entier positif ou négatif, égal comme on l'a vu à $\operatorname{long}(\mathcal{O}_{Y(D),x})$ lorsque D est un diviseur *positif*; on a donc par définition

(21.6.7.1) $$\operatorname{cyc}(D) = \sum_{x \in X^{(1)}} \operatorname{mult}_x(D) . \overline{\{x\}},$$

et en vertu du fait que $D \rightsquigarrow \operatorname{cyc}(D)$ est un homomorphisme, on a

(21.6.7.2) $$\operatorname{mult}_x(-D) = -\operatorname{mult}_x(D), \qquad \operatorname{mult}_x(D + D') = \operatorname{mult}_x(D) + \operatorname{mult}_x(D')$$

pour deux diviseurs quelconques D, D'.

Pour toute fonction méromorphe régulière f sur X, on pose en particulier, pour $x \in X^{(1)}$

(21.6.7.3) $$o_x(f) = \operatorname{mult}_x(\operatorname{div}(f))$$

et on dit que $o_x(f)$ (entier positif ou négatif) est l'*ordre de f au point* $x \in X^{(1)}$. Si $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ (élément *régulier* de cet anneau local par hypothèse), on a donc

(21.6.7.4) $$o_x(f) = \operatorname{long}(\mathcal{O}_{X,x}/f_x\mathcal{O}_{X,x});$$

pour deux fonctions méromorphes régulières f, f' sur X, on a

(21.6.7.5) $$o_x(ff') = o_x(f) + o_x(f'), \qquad o_x(f^{-1}) = -o_x(f)$$

pour tout $x \in X^{(1)}$. Les cycles 1-codimensionnels

$$Z^+(f) = \sum_{x \in X^{(1)}} (o_x(f))^+ . \overline{\{x\}}, \qquad Z^-(f) = \sum_{x \in X^{(1)}} (o_x(f))^- . \overline{\{x\}}$$

sont appelés respectivement le *cycle des zéros* et le *cycle des pôles* (ou *cycle polaire*) de f, et l'on a évidemment $\operatorname{cyc}(\operatorname{div}(f)) = Z^+(f) - Z^-(f)$. Les cycles 1-codimensionnels de la forme $\operatorname{cyc}(\operatorname{div}(f))$ sont appelés *principaux* (ou *linéairement équivalents à* 0) et forment un sous-groupe $\mathfrak{Z}^1_{\mathrm{princ}}(X)$ de $\mathfrak{Z}^1(X)$. Les sections au-dessus de X de l'image $c(\mathcal{D}iv_X) \subset \mathcal{Z}^1_X$ sont appelées *cycles localement principaux*; un tel cycle Z est donc caractérisé par le fait que, pour tout $y \in X$, il y a un voisinage ouvert U de y dans X et une fonction méromorphe régulière f sur U telle que $Z|U = \sum_{x \in U \cap X^{(1)}} o_x(f)(\overline{\{x\}} \cap U)$. Si $Z = \sum_{x \in X^{(1)}} n_x . \overline{\{x\}}$, il revient au même de dire que, pour tout $y \in X$, si l'on pose $T_y = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ et $Z_y = \sum_{x \in X^{(1)} \cap T_y} n_x(\overline{\{x\}} \cap T_y)$, Z_y est *principal*, autrement dit il existe une fonction méromorphe régulière g sur T_y telle que $Z_y = \mathrm{cyc}(\mathrm{div}(g))$. Cela résulte aussitôt en effet de la définition précédente et de (20.3.7) qui établit une correspondance biunivoque entre les fonctions méromorphes régulières sur T_y et les germes de fonctions méromorphes régulières sur les voisinages ouverts de y dans X lorsque X est localement noethérien. On exprime encore le fait que Z_y est principal en disant que Z est *principal au point* y. L'ensemble des points où Z est principal est évidemment *ouvert*, en vertu de ce qui précède.

On déduit de l'homomorphisme canonique $\mathrm{cyc} : \mathrm{Div}(X) \to \mathfrak{Z}^1(X)$ un homomorphisme canonique $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div.princ}(X) \to \mathfrak{Z}^1(X)/\mathfrak{Z}^1_{\mathrm{princ}}(X)$, en vertu de la définition de $\mathfrak{Z}^1_{\mathrm{princ}}(X)$. On dit que le groupe $\mathfrak{Z}^1(X)/\mathfrak{Z}^1_{\mathrm{princ}}(X)$ est le *groupe des classes de cycles* 1*-codimensionnels* de X et on le note $\mathfrak{Cl}(X)$. Deux éléments de $\mathfrak{Z}^1(X)$ ayant même image dans $\mathfrak{Cl}(X)$ sont appelés *linéairement équivalents.*

(21.6.8) Considérons en particulier le cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un *anneau noethérien intègre et intégralement clos.* Alors $X^{(1)}$ est l'ensemble des *idéaux premiers de hauteur* 1 de A, et $\mathfrak{Z}^1(X)$ s'identifie donc au *groupe des diviseurs* (au sens de N. Bourbaki) de l'anneau de Krull A (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 1, n° 3, cor. du th. 2 et n° 6, th. 3).

Comme d'autre part, les fonctions méromorphes régulières sur X s'identifient alors aux éléments $\neq 0$ du corps des fractions K de A, l'application $f \rightsquigarrow \mathrm{cyc}(\mathrm{div}(f))$ de $M(X)$ dans $\mathfrak{Z}^1(X)$ s'identifie à l'application notée $f \rightsquigarrow \mathrm{div}(f)$ dans Bourbaki (*loc. cit.*, § 1, n° 1); $\mathfrak{Z}^1_{\mathrm{princ}}(X)$ s'identifie donc au *groupe des diviseurs principaux* de A au sens de Bourbaki, et $\mathfrak{Cl}(X)$ au *groupe des classes de diviseurs de* A au sens de Bourbaki (*loc. cit.*, § 1, n° 2 et n° 10).

Théorème **(21.6.9).** — *Soit* X *un préschéma localement noethérien* normal.

(i) *L'homomorphisme canonique* $\mathrm{cyc} : \mathrm{Div}(X) \to \mathfrak{Z}^1(X)$ *est injectif et son image est formée des cycles localement principaux.*

(ii) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *L'homomorphisme* $\mathrm{cyc} : \mathrm{Div}(X) \to \mathfrak{Z}^1(X)$ *est bijectif.*

b) *Tout cycle* 1*-codimensionnel est localement principal.*

c) *Pour tout* $x \in X$, *l'anneau local* $\mathcal{O}_{X,x}$ *est factoriel.*

(On dit alors que X est un préschéma *localement factoriel.*)

(i) Il suffit de démontrer que

$$\mathrm{cyc}^{-1}(\mathfrak{Z}^{1+}(X)) = \mathrm{Div}^+(X), \tag{21.6.9.1}$$

puisque l'on a $\mathrm{Div}^+(X) \cap (-\mathrm{Div}^+(X)) = 0$ et $\mathfrak{Z}^{1+}(X) \cap (-\mathfrak{Z}^{1+}(X)) = 0$. On est donc ramené à prouver que si D est un diviseur sur X tel que $\mathrm{mult}_x(D) \geqslant 0$ pour tout $x \in X^{(1)}$, on a $D \geqslant 0$. Or, pour tout $x \notin X^{(1)}$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre et intégralement clos et de dimension 0 ou $\geqslant 2$, donc on a $\operatorname{prof}(\mathcal{O}_{X,x})=0$ ou $\operatorname{prof}(\mathcal{O}_{X,x})\geqslant 2$ (**0**, 16.5.1). D'autre part, aux points $x\in X^{(1)}$, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète (**II**, 7.1.6), donc $\operatorname{prof}(\mathcal{O}_{X,x})=1$ (**0**, 16.5.1); les seuls points de X tels que $\operatorname{prof}(\mathcal{O}_{X,x})=1$ sont donc les points de $X^{(1)}$, et la conclusion résulte par suite de (21.1.8).

(ii) L'équivalence de *a)* et *b)* est claire en vertu de (i). D'après la caractérisation des cycles localement principaux donnée dans (21.6.7), et la relation entre cycles 1-codimensionnels sur Spec(A) et diviseurs (au sens de Bourbaki) de l'anneau A lorsque A est un anneau noethérien intégralement clos (21.6.8), la condition *b)* équivaut à dire que pour tout $x\in X$, tout diviseur de l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est principal, autrement dit que l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est factoriel (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 3, n° 1), d'où l'équivalence de *b)* et *c)*.

(21.6.9.2) Lorsque A est un anneau noethérien *factoriel*, il est clair que $X=\operatorname{Spec}(A)$ est localement factoriel (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 3, n° 4, prop. 3). Si, dans ce cas, on écrit un élément $f\neq 0$ du corps des fractions K de A sous la forme r/s, où r et s sont deux éléments *étrangers* de A, dont les diviseurs sont bien déterminés (*loc. cit.*, § 3, n° 3), ces diviseurs s'identifient respectivement au *diviseur des zéros* et au *diviseur des pôles* de f (21.6.7).

Corollaire **(21.6.10)**. — *Soit* X *un préschéma localement noethérien* normal.

(i) *Il existe un homomorphisme canonique injectif*

(21.6.10.1) $$\operatorname{Pic}(X)\rightarrow \mathfrak{Cl}(X).$$

(ii) *Si* X *est localement factoriel, l'homomorphisme* (21.6.10.1) *est bijectif, et réciproquement.*

On a vu (21.6.7) que l'image de Div.princ(X) par l'homomorphisme $\mathrm{cyc}: D(X)\rightarrow \mathfrak{Z}^1(X)$ est $\mathfrak{Z}^1_{\mathrm{princ}}(X)$; on déduit donc de (21.6.9) que l'homomorphisme $\operatorname{Div}(X)/\operatorname{Div.princ}(X)\rightarrow \mathfrak{Z}^1(X)/\mathfrak{Z}^1_{\mathrm{princ}}(X)=\operatorname{Cl}(X)$ déduit de cyc est injectif, et qu'il est bijectif si et seulement si X est localement factoriel. La conclusion résulte donc de ce que, lorsque X est localement noethérien et réduit, l'homomorphisme canonique $\operatorname{Div}(X)/\operatorname{Div.princ}(X)\rightarrow\operatorname{Pic}(X)$ (21.3.3.1) est bijectif (21.3.4, (ii)).

Corollaire **(21.6.11)**. — *Soit* X *un préschéma localement noethérien et localement factoriel. Alors le faisceau* $\mathcal{D}iv_X$ *est flasque, et pour tout ouvert* U *de* X, *l'homomorphisme canonique* $\operatorname{Pic}(X)\rightarrow\operatorname{Pic}(U)$ *est surjectif.*

Tenant compte de (21.6.9, (ii)), la première assertion équivaut à dire que le faisceau $\mathcal{Z}^1_X$ est flasque, ce qui a été vu plus haut (21.6.3). Pour tout ouvert U de X, l'homomorphisme canonique $\mathfrak{Z}^1(X)\rightarrow\mathfrak{Z}^1(U)$ est donc surjectif; comme en vertu de (21.6.10), l'homomorphisme $\operatorname{Pic}(X)\rightarrow\operatorname{Pic}(U)$ s'identifie canoniquement à $\mathfrak{Z}^1(X)/\mathfrak{Z}^1_{\mathrm{princ}}(X)\rightarrow\mathfrak{Z}^1(U)/\mathfrak{Z}^1_{\mathrm{princ}}(U)$, il est aussi surjectif.

Proposition **(21.6.12)**. — *Soit* X *un préschéma noethérien réduit.*

Soit $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ *une famille filtrante décroissante d'ouverts de* X *vérifiant les conditions suivantes :*

1° *Si* $Y_\lambda=X-U_\lambda$, *on a* $\operatorname{codim}(Y_\lambda,X)\geqslant 2$ *pour tout* $\lambda\in L$.

2° *Pour tout* $x\in\bigcap_{\lambda\in L}U_\lambda$, *l'anneau* $\mathcal{O}_{X,x}$ *est factoriel.*

Alors il existe des isomorphismes canoniques

(21.6.12.1) $\varinjlim \mathrm{Div}(U_\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Z}^1(X), \qquad \varinjlim \mathrm{Pic}(U_\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Cl}(X)$

tels que, pour tout ouvert V *de* X, *les diagrammes*

(21.6.12.2)
$$\begin{array}{ccccccc} \varinjlim \mathrm{Div}(U_\lambda) & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{Z}^1(X) & \qquad & \varinjlim \mathrm{Pic}(U_\lambda) & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{Cl}(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \varinjlim \mathrm{Div}(U_\lambda \cap V) & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{Z}^1(V) & & \varinjlim \mathrm{Pic}(U_\lambda \cap V) & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{Cl}(V) \end{array}$$

soient commutatifs.

L'hypothèse 1° sur U_λ implique que pour tout $\lambda \in L$, on a $X^{(1)} \subset U_\lambda$ (5.1.3.1) donc l'homomorphisme de restriction $\mathfrak{Z}^1(X) \to \mathfrak{Z}^1(U_\lambda)$ est bijectif et par suite on a un isomorphisme canonique $\varinjlim \mathfrak{Z}^1(U_\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Z}^1(X)$. Les homomorphismes canoniques cyc : $\mathrm{Div}(U_\lambda) \to \mathfrak{Z}^1(U_\lambda)$ définissent donc, par passage à la limite inductive, le premier des homomorphismes canoniques (21.6.12.1), et le second s'en déduit par passage aux quotients. En outre, il résulte de la condition 1° que les U_λ sont denses dans X, donc schématiquement denses puisque X est réduit (11.10.4), et par suite toute fonction méromorphe sur X est entièrement déterminée par sa rejtriction à chaque U_λ; on déduit aussitôt de là que dans l'isomorphisme $\mathfrak{Z}^1(X) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Z}^1(U_\lambda)$, l'image de $\mathfrak{Z}^1_{\mathrm{princ}}(X)$ est $\mathfrak{Z}^1_{\mathrm{princ}}(U_\lambda)$, donc on a aussi un isomorphisme canonique $\varinjlim \mathfrak{Cl}(U_\lambda) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Cl}(X)$. Le second des homomorphismes canoniques (21.6.12.1) sera donc un isomorphisme si le premier l'est, et il reste donc à prouver ce dernier point, la commutativité des diagrammes (21.6.12.2) étant triviale.

Montrons d'abord que l'homomorphisme $\varinjlim \mathrm{Div}(U_\lambda) \to \mathfrak{Z}^1(X)$ est *injectif*. Posons $T = \bigcap_\lambda U_\lambda$, et notons que les U_λ forment un *système fondamental de voisinages* de T. En effet, pour tout ouvert $V \supset T$, $X - V$ est un sous-espace fermé de X, donc un espace noethérien dont toute partie fermée irréductible admet un point générique; comme les ensembles $(X-V) \cap (X-U_\lambda)$ sont fermés dans $X-V$, forment une famille filtrante croissante et ont pour réunion $X-V$, notre assertion résulte de ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 9.2.4). Cela étant, il s'agit de voir que si $D \in \mathrm{Div}(U_\lambda)$ est tel que $\mathrm{cyc}(D) = 0$ dans $\mathfrak{Z}^1(U_\lambda)$, alors il existe $\mu \geqslant \lambda$ tel que $D | U_\mu = 0$. En vertu de ce qui précède, il suffira de voir que pour tout $x \in T$, on a $D_x = 0$; en effet, il y aura alors un voisinage $W(x)$ de x dans X tel que $D | W(x) = 0$, et la réunion des $W(x)$ pour $x \in T$ contient un U_μ. Compte tenu de (21.4.6), on est donc ramené au cas où $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$; mais par hypothèse $\mathcal{O}_{X,x}$ est factoriel, donc intègre et intégralement clos, et $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ est alors normal; donc la conclusion résulte de (21.6.9, (i)).

Pour prouver que l'homomorphisme $\varinjlim \mathrm{Div}(U_\lambda) \to \mathfrak{Z}^1(X)$ est bijectif, il suffira de prouver de même que pour tout $Z \in \mathfrak{Z}^1(X)$ et tout $x \in T$, il y a un voisinage $W(x)$

de x dans X et un diviseur $D^{(x)}$ sur $W(x)$ tel que $\mathrm{cyc}(D^{(x)})=Z|W(x)$. En effet, on pourra alors recouvrir l'ensemble quasi-compact T par un nombre fini de $W(x_i)$, et en vertu de la première partie de la démonstration, puisque les couples (i,j) sont en nombre fini, il existera un indice λ tel que dans chacun des $W(x_i)\cap W(x_j)\cap U_\lambda$, les restrictions de $D^{(x_i)}$ et $D^{(x_j)}$ coïncident; comme on peut supposer en outre que U_λ est contenu dans la réunion des $W(x_i)$, on voit que les restrictions $D^{(x_i)}|(W(x_i)\cap U_\lambda)$ sont les restrictions d'un même diviseur $D\in\mathrm{Div}(U_\lambda)$ qui sera tel que $\mathrm{cyc}(D)=Z|U_\lambda$. On est donc ramené encore au cas où $X=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ avec $x\in T$; mais comme $\mathcal{O}_{X,x}$ est factoriel, il en est de même de ses localisés (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 3, n° 4, prop. 3), et il suffit d'appliquer (21.6.9, (ii)).

Corollaire (**21.6.13**). — *Soit* A *un anneau local noethérien intègre et intégralement clos et de dimension* $\geqslant 2$. *Posons* $X=\mathrm{Spec}(A)$, *et soient* a *le point fermé de* X, $U=X-\{a\}$. *Pour que* A *soit factoriel, il faut et il suffit que* U *soit localement factoriel et que* $\mathrm{Pic}(U)=0$.

En effet, dire que A est factoriel équivaut à dire que $\mathfrak{Cl}(X)=0$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 1, n° 4, cor. du th. 2 et § 3, n° 2, th. 1); il suffit donc d'utiliser l'existence du second isomorphisme (21.6.12.1), en prenant la famille (U_λ) restreinte au seul ouvert U.

Corollaire (**21.6.14**). — *Soient* A *un anneau local noethérien de dimension* $\geqslant 2$, $X=\mathrm{Spec}(A)$, a *le point fermé de* X, $U=X-\{a\}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) A *est factoriel.*

b) $\mathrm{Pic}(U)=0$ *et* $\mathrm{prof}(A)\geqslant 2$ (conditions que nous exprimerons plus loin (21.13) en disant que l'anneau A est *parafactoriel*), *et* U *est localement factoriel.*

Il est clair que si A est factoriel, il est normal, donc $\mathrm{prof}(A)\geqslant 2$ puisque $\dim(A)\geqslant 2$ (**0**, 16.5.1) et (21.6.13) montre que *a)* implique *b)*. Inversement, si *b)* est vérifiée, il suffit de voir que A est intégralement clos pour en conclure par (21.6.13) que *b)* entraîne *a)*. En vertu du critère de Serre (5.8.6), il suffit de vérifier pour X les conditions (R_1) et (S_2). Or, U étant localement factoriel vérifie ces conditions, et l'hypothèse $\mathrm{prof}(A)\geqslant 2$ entraîne que X les vérifie également.

21.7. Interprétation des cycles positifs 1-codimensionnels en termes de sous-préschémas.

(**21.7.1**) Soient X un préschéma localement noethérien, $C=\sum_{x\in X^{(1)}} n_x.\overline{\{x\}}$ un *cycle* 1-*codimensionnel positif* (de sorte que l'on a $n_x\geqslant 0$ pour tout $x\in X^{(1)}$, et $n_x=0$ sauf en un ensemble localement fini de points). Désignons par $Y(C)$ le sous-préschéma fermé de X, *image fermée* (**I**, 9.5.3 et 9.5.1) du préschéma *somme* $Y'(C)=\coprod_{x\in X^{(1)}}\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^{n_x})$ par le morphisme canonique, et par $\mathcal{J}_X(C)$ (ou $\mathcal{J}(C)$) l'Idéal de $\mathcal{O}_X$ définissant $Y(C)$.

Proposition (**21.7.2**). — *Soit* X *un préschéma localement noethérien vérifiant la condition* (R_1) (5.8.2). *Pour qu'un sous-préschéma fermé* Y *de* X *soit de la forme* $Y(C)$, *où* C *est un cycle* 1-*codimensionnel positif, il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions suivantes :*

(i) Y *est purement de codimension* 1.

(ii) Y *vérifie la condition* (S_1), *autrement dit* (5.7.5) *n'a pas de cycle premier associé immergé.*

On a alors

(**21.7.2.1**) $$\mathrm{mult}_x(C) = \mathrm{long}\, \mathcal{O}_{Y,x}.$$

L'application $C \rightsquigarrow Y(C)$ *est une bijection de* $\mathfrak{Z}^{1+}(X)$ *sur l'ensemble des sous-préschémas fermés de* X *vérifiant les conditions* (i) *et* (ii).

Les conditions sont nécessaires (sans supposer que X vérifie (R_1)). En effet, la question étant locale sur X, on peut supposer que $X = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau noethérien; on a alors $Y(C) = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{J})$, où $\mathfrak{J}$ est, par définition (**I**, 9.5.1) le noyau de l'homomorphisme canonique $A \to \bigoplus_i A_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{p}_i^{n_i}A_{\mathfrak{p}_i}$, où les $\mathfrak{p}_i$ sont les idéaux premiers correspondant aux points $x \in X^{(1)}$ pour lesquels $n_x \geqslant 0$, et où l'on a posé $n_i = n_x$. L'image réciproque $\mathfrak{q}_i$ de $\mathfrak{p}_i^{n_i}A_{\mathfrak{p}_i}$ dans A est un idéal $\mathfrak{p}_i$-primaire et on a $\mathfrak{J} = \bigcap_i \mathfrak{q}_i$. D'ailleurs, comme les $x \in X^{(1)}$ sont tels que $\overline{\{x\}}$ est de codimension 1, aucun point de $X^{(1)}$ ne peut être adhérent à un autre point de $X^{(1)}$. Donc les $\mathfrak{p}_i$ sont les idéaux premiers minimaux de $A/\mathfrak{J}$ et l'ensemble des $\mathfrak{p}_i$ est égal à $\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{J})$, ce qui prouve les conditions (i) et (ii).

Les conditions sont suffisantes; désignant par $\mathscr{J}$ l'Idéal de $\mathcal{O}_X$ définissant Y, l'hypothèse (ii) implique que $\mathrm{Ass}(\mathcal{O}_X/\mathscr{J})$ est identique à l'ensemble F des points maximaux de Y, et l'hypothèse (i) implique que F est contenu dans $X^{(1)}$; donc (3.2.6) $\mathcal{O}_X/\mathscr{J}$ s'identifie à un sous-$\mathcal{O}_X$-Module de $\bigoplus_{x \in F} \mathscr{G}(x)$, où pour chaque $x \in F$, $\mathscr{G}(x)$ est un $\mathcal{O}_X$-Module irredondant tel que $\mathrm{Ass}(\mathscr{G}(x)) = \{x\}$. Or, puisque X vérifie (R_1), pour chaque $x \in F$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète et par suite les idéaux primaires $\neq 0$ de cet anneau sont les puissances $\mathfrak{m}_x^{n_x}$ de l'idéal maximal; supposant encore que $X = \mathrm{Spec}(A)$, on en conclut que $\mathscr{J} = \widetilde{\mathfrak{J}}$, où $\mathfrak{J} = \bigcap_i \mathfrak{q}_i$, les $\mathfrak{q}_i$ étant les images réciproques dans A d'idéaux $\mathfrak{p}_i^{n_i}A_{\mathfrak{p}_i}$, où les $\mathfrak{p}_i$ correspondent aux points de F. On voit donc bien que Y est de la forme $Y(C)$.

Corollaire (**21.7.3**). — *Soit* X *un préschéma localement noethérien. Pour tout diviseur positif* D *sur* X, *tel que* X *vérifie* (R_1) *aux points maximaux du sous-préschéma fermé* $Y(D)$ (21.2.12), $Y(D)$ *majore le sous-préschéma fermé* $Y(\mathrm{cyc}(D))$ (21.7.1). *et a même espace sous-jacent; pour que ces deux sous-préschémas soient égaux, il faut et il suffit que* $Y(D)$ *vérifie la condition* (S_1), *ou encore que, pour tout* $z \in Y(D)$ *distinct d'un point maximal de* $Y(D)$, *on ait* $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{X,z}) \geqslant 2$ (condition toujours vérifiée lorsque X est *normal*).

En effet, la question étant locale, on peut toujours supposer que $\mathscr{I}_X(D) = t\mathcal{O}_X$, t étant une section régulière de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de X; en tout point maximal x de $Y(D)$, appartenant nécessairement à $X^{(1)}$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est par hypothèse un anneau de valuation discrète, donc $t_x\mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{m}_x^{n_x}$, où $n_x = \mathrm{mult}_x(D)$. On peut supposer $X = \mathrm{Spec}(A)$, et alors, si $\mathscr{J}_X(\mathrm{cyc}(D)) = \widetilde{\mathfrak{J}}$, $\mathscr{I}_X(D) = \widetilde{\mathfrak{J}'}$, il résulte de ce qui précède et de (21.7.1) que $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{J}'$ ont *mêmes idéaux primaires non immergés*, donc $\mathfrak{J}' \subset \mathfrak{J}$, puisque $\mathfrak{J}$ est l'intersection de ces idéaux primaires (21.7.2). Cela prouve que $\mathrm{Y}(\mathrm{D})$ majore $\mathrm{Y}(\mathrm{cyc}(\mathrm{D}))$ et que ces deux sous-préschémas sont égaux si et seulement si $\mathrm{Y}(\mathrm{D})$ n'a pas de cycle premier associé immergé (autrement dit vérifie (S_1)). Comme pour tout $x \in \mathrm{Y}(\mathrm{D})$, il y a par hypothèse un voisinage ouvert U de x dans X et un élément régulier $t \in \Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{O}_\mathrm{X})$ tel que $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}(\mathrm{D})} | (\mathrm{U} \cap \mathrm{Y}(\mathrm{D}))$ soit restriction à $\mathrm{Y}(\mathrm{D}) \cap \mathrm{U}$ de $\mathcal{O}_\mathrm{U}/t\mathcal{O}_\mathrm{U}$, dire que $\mathrm{Y}(\mathrm{D})$ vérifie (S_1) signifie aussi qu'en tout point $z \in \mathrm{Y}(\mathrm{D})$ non maximal, on a $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{\mathrm{X},z}/t_z\mathcal{O}_{\mathrm{X},z}) \geqslant 1$, c'est-à-dire ($\mathbf{0}$, 16.4.6) $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{\mathrm{X},z}) \geqslant 2$. L'assertion concernant le cas où X est normal est alors immédiate puisque X vérifie (S_2) et qu'aux points non maximaux z de $\mathrm{Y}(\mathrm{D})$ on a $\dim(\mathcal{O}_{\mathrm{X},z}) \geqslant 2$ ($\mathbf{0}$, 16.3.4).

(21.7.3.1) On voit donc que lorsque X est *normal*, $\mathrm{Div}^+(\mathrm{X})$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des sous-préschémas fermés Y de X vérifiant les conditions (i) et (ii) de (21.7.2) et *régulièrement immergés* dans X.

Proposition **(21.7.4)**. — *Soit* X *un préschéma localement noethérien, réduit en chacun de ses points isolés. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *L'homomorphisme canonique* $c : \mathscr{D}iv_\mathrm{X} \rightarrow \mathscr{Z}^1_\mathrm{X}$ (21.6.4) *est un isomorphisme de faisceaux de groupes ordonnés.*

a′) *Tout cycle premier* 1*-codimensionnel de* X *est l'image par* cyc *d'un diviseur positif, et l'homomorphisme canonique* $c : \mathscr{D}iv_\mathrm{X} \rightarrow \mathscr{Z}^1_\mathrm{X}$ *est injectif.*

a″) *Pour tout sous-préschéma fermé intègre* Y *de* X, *de codimension* 1, *l'immersion canonique* $\mathrm{Y} \rightarrow \mathrm{X}$ *est régulière.*

b) X *est normal et l'homomorphisme* $\mathrm{cyc} : \mathrm{Div}(\mathrm{X}) \rightarrow \mathfrak{Z}^1(\mathrm{X})$ *est bijectif.*

c) X *est localement factoriel.*

L'équivalence de *b)* et *c)* a été démontrée dans (21.6.9), ainsi que le fait que *c)* entraîne *a)*. De plus *b)* entraîne *a″)* en vertu de (21.7.3.1), et *a)* implique trivialement *a′)*. Il reste à voir que *a′)* ou *a″)* entraîne *c)*.

Supposons donc vérifiée la condition *a′)*, et montrons d'abord que X est *normal*. Notons en premier lieu que si X vérifie *a′)*, il en est de même de tout schéma local $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathrm{X},x})$. Considérons alors $x \in \mathrm{X}^{(1)}$, de sorte que $\mathrm{A} = \mathcal{O}_{\mathrm{X},x}$ est un anneau local noethérien de dimension 1. Appliquant la condition *a′)* à Spec(A) et au cycle premier 1-codimensionnel formé du point fermé de Spec(A), on voit que dans A l'idéal maximal est engendré par un seul élément régulier dans A; donc ($\mathbf{0}$, 17.1.1) A est un anneau régulier. Comme les anneaux localisés $\mathrm{A}_\mathfrak{p}$ sont aussi réguliers ($\mathbf{0}$, 17.3.2), on voit que X est régulier en tous ses points maximaux non isolés; comme il est aussi réduit (donc régulier) en ses points isolés par hypothèse, on en conclut que X vérifie la condition (R_1). Montrons en outre que X vérifie aussi (S_1), autrement dit que pour tout $x \in \mathrm{X}$ tel que $\dim(\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}) \geqslant 1$, on a $\mathfrak{m}_x \notin \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{\mathrm{X},x})$ ($\mathbf{0}$, 16.4.6). En effet, l'hypothèse *a′)* appliquée à $\mathrm{X}_1 = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathrm{X},x})$ montre qu'il existe sur ce préschéma au moins un diviseur $\neq 0$, autrement dit que l'on a $\mathscr{M}^*_{\mathrm{X}_1} \neq \mathcal{O}^*_{\mathrm{X}_1}$, et il suffit d'appliquer (21.1.10). On déduit donc déjà de ces résultats que X est *réduit* (5.8.5). Prouvons ensuite qu'il vérifie la condition (S_2) (ce qui établira que X est normal, en vertu du critère de Serre (5.8.6)). Raisonnons par l'absurde en supposant que l'ensemble E des points $x \in \mathrm{X}$ où X ne vérifie pas (S_2) soit non vide, et soit $x \in \mathrm{E}$ un point pour lequel $\dim(\mathcal{O}_{\mathrm{X},x})$ est la plus petite possible; puisque X vérifie (S_1), on a $\dim(\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}) \geqslant 2$. Dans $\mathrm{X}_1 = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathrm{X},x})$, l'ouvert $\mathrm{U} = \mathrm{X}_1 - \{x\}$ vérifie (S_2); montrons que X_1 vérifie (S_2), de sorte que l'on aura abouti à une contradiction. Il suffit, en vertu de (5.10.5), de montrer que toute section f de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}_1}$ au-dessus de U se prolonge en une section de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}_1}$ au-dessus de X_1. Comme X_1 est réduit et U dense dans X_1, U est schématiquement dense dans X_1, et par suite f est la restriction à U d'une section méromorphe régulière $g \in \mathrm{M}(\mathrm{X}_1)$. En outre, comme $\dim(\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}) \geqslant 2$, on a $\mathrm{cyc}(\mathrm{div}(g)) \geqslant 0$ puisque $g | \mathrm{U} = f$; comme l'homomorphisme cyc est injectif, on a nécessairement $\mathrm{div}(g) \geqslant 0$, donc (21.6.4) g est une section de $\mathcal{O}^{\bullet}_{\mathrm{X}_1}$ au-dessus de X_1, ce qui établit notre assertion.

Pour montrer que *a′)* implique *c)*, remarquons alors que la condition *a′)* implique que l'homomorphisme canonique $\mathrm{cyc} : \mathrm{Div}(\mathrm{X}) \rightarrow \mathfrak{Z}^1(\mathrm{X})$ est surjectif; puisque X est normal, il suffit d'appliquer (21.6.9).

Prouvons maintenant que *a″)* entraîne *c)*. Il résulte de (21.6.5) que *a″)* entraîne que tout cycle premier 1-codimensionnel sur X est l'image par cyc d'un diviseur positif; la première partie du raisonnement fait ci-dessus prouve donc encore que X vérifie (R_1) et (S_1). Il reste encore à voir que X est normal (la fin du raisonnement étant alors la même), c'est-à-dire que si $x \in \mathrm{X}$ est tel que $\dim(\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}) \geqslant 2$, on a $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{\mathrm{X},x}) \geqslant 2$. Or, si y est une générisation de x telle que $\overline{\{y\}}$ soit de codimension 1 dans X, le sous-préschéma réduit Y de X ayant $\overline{\{y\}}$ pour espace sous-jacent est intègre, donc régulièrement immergé dans X par hypothèse. Cela entraîne qu'il existe un élément régulier t de $\mathcal{O}_{X,x}$ tel que l'idéal $t\mathcal{O}_{X,x}$ soit l'idéal premier définissant le préschéma Y_1 image réciproque de Y dans $X_1 = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$. Comme $\mathcal{O}_{X,x}/t\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre, cela prouve que $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{X,x}) \geqslant 2$ et termine la preuve de (21.7.4).

Remarque **(21.7.5)**. — On ne peut dans (21.7.4) remplacer la condition *a')* par la condition plus faible que tout cycle premier 1-codimensionnel de X soit l'image par cyc d'un diviseur positif. C'est ce que montre l'exemple où X est le schéma affine défini dans (14.1.5) (« réunion d'un plan et d'une droite qui le coupe ») *qui n'est pas normal*; avec les notations introduites dans (14.1.5), les cycles premiers 1-codimensionnels de X sont ceux du plan X_1 et les points fermés de la droite X_2 distincts du point commun à X_1 et X_2; si t_1, t_2, t_3 sont les images de T_1, T_2, T_3 dans $A/\mathfrak{a}$, on voit donc que les cycles premiers 1-codimensionnels de X sont définis par les idéaux premiers monogènes de générateurs $P(t_1, t_2)$ (P irréductible dans $K[T_1, T_2]$) ou $t_3 - a$, avec $a \neq 0$ dans K; ces éléments étant réguliers dans $A/\mathfrak{a}$, tout cycle 1-codimensionnel est bien l'image canonique d'un diviseur positif.

Corollaire **(21.7.6)**. — *Soit* X *un préschéma localement noethérien, réduit en chacun de ses points isolés. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *L'homomorphisme canonique* $c : \mathscr{D}iv_X \to \mathscr{Z}_X^1$ *est un isomorphisme de faisceaux de groupes ordonnés, et on a* $\mathrm{Div}(X) = \mathrm{Div.princ}(X)$.

a') *L'homomorphisme canonique* $c : \mathscr{D}iv_X \to \mathscr{Z}_X^1$ *est injectif, et tout cycle premier* 1*-codimensionnel est l'image par* cyc *d'un diviseur positif* principal, *autrement dit est de la forme* $\mathrm{cyc}(\mathrm{div}(f))$, *où* f *est une section régulière de* $\mathcal{O}_X$ *au-dessus de* X.

a'') *Pour tout sous-préschéma fermé intègre* Y *de* X, *de codimension* 1, *il existe une section régulière* f *de* $\mathcal{O}_X$ *au-dessus de* X *telle que* Y *soit défini par l'Idéal* $f\mathcal{O}_X$.

b) X *est normal et tout cycle premier* 1*-codimensionnel sur* X *est principal.*

c) X *est localement factoriel et* $\mathrm{Pic}(X) = 0$.

d) X *est normal, et pour tout ouvert* U *de* X, *on a* $\mathrm{Pic}(U) = 0$.

L'équivalence de *a), a'), a''), b)* et *c)* résulte aussitôt de (21.7.4) et de (21.6.11). En outre, il résulte aussitôt de *a'')* que tout ouvert non vide U de X vérifie encore les mêmes conditions, autrement dit ces conditions impliquent *d)*. Reste à voir que *d)* entraîne *b)*. Or, désignons par U_λ les ouverts complémentaires des réunions finies d'ensembles de la forme $\overline{\{x\}}$, où $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) \geqslant 2$; il est clair que les U_λ forment une famille filtrante décroissante et que pour tout $x \in \bigcap_\lambda U_\lambda$, on a $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) \leqslant 1$, donc $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau principal en vertu de l'hypothèse. On peut donc appliquer à la famille (U_λ) la proposition (21.6.12), qui montre que $\mathfrak{Cl}(X)$ est isomorphe à $\varinjlim \mathrm{Pic}(U_\lambda)$, donc $\mathfrak{Cl}(X) = 0$ en vertu de l'hypothèse, ce qui prouve *b)* par définition.

Remarque **(21.7.7)**. — Lorsque $X = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau noethérien intègre, les conditions équivalentes de (21.7.6) équivalent à dire que A est un anneau *factoriel*.

21.8. Diviseurs et normalisation.

Lemme (21.8.1). — *Soit* $f : X' \to X$ *un morphisme entier de préschémas. Pour tout* $\mathcal{O}_{X'}$*-Module localement libre* $\mathscr{E}'$ *de rang constant* n *et tout* $x \in X$, *il existe un voisinage ouvert* U *de* x *dans* X *tel que, si l'on pose* $U' = f^{-1}(U)$, $\mathscr{E}'|U'$ *soit isomorphe à* $\mathcal{O}_{U'}^n$.

La question étant locale sur X, on peut se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, auquel cas on a $X' = \mathrm{Spec}(A')$, où A' est une A-algèbre entière. Alors A' est limite inductive de ses sous-A-algèbres *finies* A'_λ. Posant $X'_\lambda = \mathrm{Spec}(A'_\lambda)$ et désignant par $p_\lambda : X' \to X'_\lambda$ le morphisme structural, il résulte de (8.5.2) et (8.5.5) qu'il existe un indice λ et un $\mathcal{O}_{X'_\lambda}$-Module localement libre $\mathscr{E}'_\lambda$ de rang n tel que $\mathscr{E}' = p_\lambda^*(\mathscr{E}'_\lambda)$, et il suffira évidemment de prouver le lemme pour X'_λ et $\mathscr{E}'_\lambda$; autrement dit, on peut se borner au cas où le morphisme f est *fini*. Posons $B = \mathcal{O}_{X,x}$ et soit B' l'anneau du schéma affine $X'_0 = X' \times_X \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$; comme B est un anneau local et que B' est une B-algèbre finie, B' est un anneau semi-local (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 1, prop. 3); on en conclut que le $\mathcal{O}_{X'_0}$-Module localement libre $\mathscr{E}'_0 = \mathscr{E}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{X,x}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{X'_0}^n$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 3, prop. 5). Considérant X'_0 comme limite projective des préschémas induits par X′ sur les ouverts $f^{-1}(\mathrm{U})$, où U parcourt l'ensemble filtrant des voisinages ouverts affines de x dans X, suivant la méthode de (8.1.2, *a)*), et appliquant (8.5.2.5), on obtient la conclusion cherchée.

Corollaire (**21.8.2**). — *Soit* $f: \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ *un morphisme entier de préschémas. Alors :*

(i) *On a* $\mathrm{R}^1 f_*(\mathcal{O}_{\mathrm{X}'}^*) = 0$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 12.2.1).

(ii) *Le groupe* $\mathrm{Pic}(\mathrm{X}')$ *est canoniquement isomorphe à* $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, f_*(\mathcal{O}_{\mathrm{X}'}^*))$.

(i) $\mathrm{R}^1 f_*(\mathcal{O}_{\mathrm{X}'}^*)$ est le faisceau associé au préfaisceau de groupes commutatifs $\mathrm{U} \rightsquigarrow \mathrm{H}^1(f^{-1}(\mathrm{U}), \mathcal{O}_{\mathrm{X}'}^*)$ sur X *(loc. cit.)*; la fibre de ce faisceau en un point x peut donc ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.4.7) être identifiée au groupe commutatif $\varinjlim \mathrm{Pic}(f^{-1}(\mathrm{U}))$, où U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de x, les homomorphismes de transition $\mathrm{Pic}(f^{-1}(\mathrm{U}')) \to \mathrm{Pic}(f^{-1}(\mathrm{U}))$ pour deux ouverts $\mathrm{U} \subset \mathrm{U}'$ étant définis par (21.3.2.4). Or, pour tout $x \in \mathrm{X}$, tout voisinage ouvert U′ de x dans X, et tout élément $\zeta' \in \mathrm{Pic}(f^{-1}(\mathrm{U}'))$, il résulte de (21.8.1) qu'il y a un voisinage ouvert $\mathrm{U} \subset \mathrm{U}'$ de x tel que l'image de ζ dans $\mathrm{Pic}(f^{-1}(\mathrm{U}))$ soit nulle. Donc la fibre de $\mathrm{R}^1 f_*(\mathcal{O}_{\mathrm{X}'}^*)$ au point x est nulle.

(ii) La suite spectrale de Leray pour le foncteur composé $\mathscr{F}' \rightsquigarrow \Gamma(\mathrm{X}, f_*(\mathscr{F}'))$ de faisceaux de groupes commutatifs sur X′ (T, 2.4) donne la suite exacte de termes de bas degré (M, XV, 6)

$$0 \to \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, f_*(\mathcal{O}_{\mathrm{X}'}^*)) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{X}', \mathcal{O}_{\mathrm{X}'}^*) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{R}^1 f_*(\mathcal{O}_{\mathrm{X}'}^*))$$

et la conclusion résulte de (i) et de l'isomorphisme de $\mathrm{Pic}(\mathrm{X}')$ et de $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}', \mathcal{O}_{\mathrm{X}'}^*)$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.4.7).

Proposition (**21.8.3**). — *Soit* $f = (\psi, \theta) : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ *un morphisme entier de préschémas; supposons que, pour tout ouvert* U *de* X, *l'homomorphisme* $\Gamma(\theta) : \Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{O}_{\mathrm{X}}) \to \Gamma(\mathrm{U}, f_*(\mathcal{O}_{\mathrm{X}'}))$ *transforme les éléments réguliers en éléments réguliers, ce qui permet de prolonger canoniquement l'homomorphisme* $\theta : \mathcal{O}_{\mathrm{X}} \to f_*(\mathcal{O}_{\mathrm{X}'})$ *en un homomorphisme de faisceaux d'anneaux* $\theta' : \mathscr{M}_{\mathrm{X}} \to f_*(\mathscr{M}_{\mathrm{X}'})$, *d'où des homomorphismes de faisceaux de groupes multiplicatifs* $\theta^* : \mathcal{O}_{\mathrm{X}}^* \to f_*(\mathcal{O}_{\mathrm{X}'}^*)$ *et* $\theta'^* : \mathscr{M}_{\mathrm{X}}^* \to f_*(\mathscr{M}_{\mathrm{X}'}^*)$, *donnant par passage aux quotients un homomorphisme* $\theta''^* : \mathscr{D}iv_{\mathrm{X}} \to f_*(\mathscr{D}iv_{\mathrm{X}'})$. *On a alors un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathrm{X}}^* & \longrightarrow & \mathscr{M}_{\mathrm{X}}^* & \longrightarrow & \mathscr{D}iv_{\mathrm{X}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\theta^*} & & \downarrow{\scriptstyle\theta'^*} & & \downarrow{\scriptstyle\theta''^*} & & \\ 1 & \longrightarrow & f_*(\mathcal{O}_{\mathrm{X}'}^*) & \longrightarrow & f_*(\mathscr{M}_{\mathrm{X}'}^*) & \longrightarrow & f_*(\mathscr{D}iv_{\mathrm{X}'}) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{21.8.3.1}$$

dans lequel les deux lignes sont exactes.

Le seul point à vérifier est l'exactitude de la seconde ligne du diagramme, qui résulte de l'application de la suite exacte de cohomologie pour le foncteur f_* à la suite exacte de faisceaux de groupes commutatifs sur X′

$$1 \to \mathcal{O}_{\mathrm{X}'}^* \to \mathscr{M}_{\mathrm{X}'}^* \to \mathscr{D}iv_{\mathrm{X}'} \to 0$$

et de (21.8.2).

Corollaire **(21.8.4)**. — *Si, en outre des hypothèses de* (21.8.3), *l'homomorphisme* θ' *est un isomorphisme de faisceaux d'anneaux, alors* $\theta^* : \mathcal{O}_X^* \to f_*(\mathcal{O}_{X'}^*)$ *est injectif,* $\theta''^* : \mathcal{D}iv_X \to f_*(\mathcal{D}iv_{X'})$ *est surjectif et* $\mathrm{Ker}(\theta''^*)$ *est isomorphe à* $\mathrm{Coker}(\theta^*)$.

C'est une conséquence immédiate du diagramme du serpent (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, nº 4, prop. 2) appliqué au diagramme (21.8.3.1).

Proposition **(21.8.5)**. — *Soient* X, X' *deux préschémas localement noethériens,* $f : X' \to X$ *un morphisme entier ; on suppose qu'il existe un ouvert schématiquement dense* U *dans* X *tel que* $f^{-1}(U)$ *soit schématiquement dense dans* X' (cf. (20.3.5)), *et que le morphisme* $f^{-1}(U) \to U$, *restriction de* f, *soit un isomorphisme. Alors :*

(i) *L'homomorphisme* $\theta' : \mathcal{M}_X \to f_*(\mathcal{M}_{X'})$ *est défini et bijectif, l'homomorphisme*

$$\theta^* : \mathcal{O}_X^* \to f_*(\mathcal{O}_{X'}^*)$$

est injectif, l'homomorphisme $\theta''^* : \mathcal{D}iv_X \to f_*(\mathcal{D}iv_{X'})$ *est surjectif,* $\mathrm{Ker}(\theta''^*)$ *est isomorphe à* $\mathcal{N} = \mathrm{Coker}(\theta^*)$ *et le support du faisceau de groupes multiplicatifs* $\mathcal{N}$ *est contenu dans* $S = X - U$.

(ii) *Supposons de plus l'ensemble* S *discret et posons pour abréger* $\mathcal{O}'_X = f_*(\mathcal{O}_{X'})$. *Alors on a un diagramme commutatif*

$$(21.8.5.1)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \prod_{s\in S} \mathcal{O}'^*_{X,s}/\mathcal{O}^*_{X,s} & \xrightarrow{\quad j \quad} & \mathrm{Div}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Div}(X') & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle l_X} & & \Big\downarrow{\scriptstyle l_{X'}} & & \\ 1 & \longrightarrow & (\prod_{s\in S} \mathcal{O}'^*_{X,s}/\mathcal{O}^*_{X,s})/\mathrm{Im}\,\Gamma(X', \mathcal{O}^*_{X'}) & \xrightarrow[j']{} & \mathrm{Pic}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X') & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes et où la flèche verticale de gauche est l'homomorphisme canonique.

(i) L'hypothèse entraîne que l'on a un isomorphisme canonique $\mathcal{M}'_X \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{M}'_{X'})$ pour les faisceaux de germes de pseudo-fonctions (20.2.2), d'où l'assertion relative à θ', vu l'existence des isomorphismes canoniques $\mathcal{M}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}'_X$ et $\mathcal{M}_{X'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}'_{X'}$ (20.2.11). Le reste de l'assertion (i) découle de (21.8.4), sauf ce qui concerne le support de $\mathcal{N}$, qui résulte directement de l'hypothèse sur U.

(ii) Appliquant la suite exacte de cohomologie aux deux suites exactes de faisceaux de groupes commutatifs

$$(21.8.5.2)\qquad \begin{gathered} 1 \to \mathcal{N} \to \mathcal{D}iv_X \to f_*(\mathcal{D}iv_{X'}) \to 0 \\ 1 \to \mathcal{O}_X^* \to f_*(\mathcal{O}_{X'}^*) \to \mathcal{N} \to 1 \end{gathered}$$

il vient respectivement les suites exactes

$$(21.8.5.3)\qquad \begin{gathered} 1 \to \Gamma(X, \mathcal{N}) \xrightarrow{j} \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Div}(X') \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{N}) \\ \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}^*) \to \Gamma(X, \mathcal{N}) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X') \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{N}) \end{gathered}$$

compte tenu de l'isomorphisme canonique $\mathrm{Pic}(X') \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(X, f_*(\mathcal{O}_{X'}^*))$ (21.8.2). Or, comme le support de $\mathcal{N}$ est contenu dans l'ensemble discret S, fermé dans X, on a

$H^1(X, \mathscr{N}) = H^1(S, \mathscr{N}|S)$ (G, II, 4.9.2) et $H^1(S, \mathscr{N}|S) = \prod_{s \in S} H^1(\{s\}, \mathscr{N}_s) = 0$ par définition de la cohomologie (G, II, 4.4). De même on a $\Gamma(X, \mathscr{N}) = \prod_{s \in S} \mathscr{N}_s$ et $\mathscr{N}_s = \mathscr{O}'^*_{X,s}/\mathscr{O}^*_{X,s}$ en vertu de la seconde suite exacte (21.8.5.2). Reste à préciser les injections j et j'. Or, on peut décrire une section t de $\mathscr{N}$ au-dessus de X en prenant un recouvrement de X formé de U et d'ouverts U_i tels que $U_i \cap S$ soit réduit à un seul point s_i et que $U_i \cap U_j \subset U$ pour $i \neq j$, puis en considérant pour chaque i une section t_i de $\mathscr{N}$ au-dessus de U_i, nécessairement telle que $(t_i)_{s_i} \in \mathscr{O}'^*_{X,s_i}/\mathscr{O}^*_{X,s_i}$ et $(t_i)_x = 0$ aux points $x \in U_i - \{s_i\}$. Le germe $(t_i)_{s_i}$ provient d'une section u_i de $\mathscr{O}^*_{X'}$ au-dessus de $f^{-1}(U_i)$, qu'on peut aussi considérer comme une section de $\mathscr{M}^*_{X'}$ au-dessus de $f^{-1}(U_i)$, donc une section de $\mathscr{M}^*_X$ au-dessus de U_i (en vertu de l'hypothèse); il correspond canoniquement à cette section une section $d_i \in \Gamma(U_i, \mathscr{D}iv_X)$ et comme dans $f^{-1}(U \cap U_i)$ la restriction de u_i s'identifie à une section de $\mathscr{O}^*_X$ au-dessus de $U \cap U_i$ en vertu de l'hypothèse, les restrictions des d_i à $U \cap U_i$ sont toutes nulles, donc les d_i sont les restrictions d'un même diviseur $d \in \mathrm{Div}(X)$, qui est l'image de la section t par j. De même, l'image de t par $\partial : \Gamma(X, \mathscr{N}) \to H^1(X, \mathscr{O}^*_X)$ provient du cocycle égal à la restriction de u_i dans $U \cap U_i$ pour chaque i, à $(u_i|(U_i \cap U_j))(u_j|(U_i \cap U_j))^{-1}$ dans $U_i \cap U_j$, d'où l'expression de $j'(t)$ et la commutativité du diagramme (21.8.5.1).

Remarques (**21.8.6**). — (i) Les conditions d'application de (21.8.5, (i)) sont en particulier remplies lorsque X est un préschéma localement noethérien *réduit* n'ayant qu'un nombre fini de composantes irréductibles, X' son *normalisé* et que X' est aussi localement noethérien (**II**, 6.3.8); le $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{D}iv_X$ est alors une *extension* de $f_*(\mathscr{D}iv_{X'})$ par le conoyau $\mathscr{N}$ de $\mathscr{O}^*_X \to f_*(\mathscr{O}^*_{X'})$, que l'on peut considérer comme connus. Si de plus X est une courbe algébrique (réduite) sur un corps k, on est dans les conditions d'application de (21.8.5, (ii)).

(ii) Lorsque les conditions d'application de (21.8.5, (ii)) sont remplies et en outre que l'homomorphisme canonique *global* $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) \to \Gamma(X', \mathscr{O}_{X'})$ est *bijectif*, on voit que les noyaux des homomorphismes surjectifs $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Div}(X')$ et $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X')$ sont *isomorphes*.

(iii) Lorsque les conditions d'application de (21.8.5, (ii)) sont remplies, on voit que l'homomorphisme $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Div}(X')$ ne peut être injectif (auquel cas il est bijectif) que si $\mathscr{O}'^*_{X,s} = \mathscr{O}^*_{X,s}$ pour tout $s \in S$. Pour un $s \in S$ tel que l'anneau $\mathscr{O}'_{X,s}$ soit *local* (ce qui, compte tenu du fait que $X' = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}'_X)$ (**II**, 1.3), signifie qu'il n'existe qu'*un seul* point $s' \in X'$ au-dessus de s) cela entraîne nécessairement que les corps résiduels $\boldsymbol{k}(s)$ et $\boldsymbol{k}(s')$ sont égaux et que $1 + \mathfrak{m}_s = 1 + \mathfrak{m}_{s'}$, donc finalement équivaut à la relation $\mathscr{O}'_{X,s} = \mathscr{O}_{X,s}$ ou encore (compte tenu de l'hypothèse) au fait qu'il y a un voisinage ouvert V de s dans X tel que le morphisme $f^{-1}(V) \to V$ soit un isomorphisme. Dans le cas général, l'anneau $\mathscr{O}'_{X,s}$ est *semi-local* (c'est évident lorsque le morphisme f est *fini* et dans le cas général cela résulte de $(\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 23.2.6)), l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}^*_{X,s} \to \mathscr{O}'^*_{X,s}$ définit, par passage aux quotients, un homomorphisme du groupe multiplicatif $(\boldsymbol{k}(s))^*$ dans le produit des groupes multiplicatifs $(\boldsymbol{k}(s'_j))^*$, les s'_j étant les points (en nombre >1) de X′ au-dessus de s. Il est immédiat que cet homomorphisme ne peut être bijectif que si $\boldsymbol{k}(s)$ et tous les $\boldsymbol{k}(s'_j)$ sont égaux *au corps* $\mathbf{F}_2$ *à 2 éléments*; de plus, si cette condition est vérifiée, il faut en outre que le groupe multiplicatif $1+\mathfrak{m}_s$ ait pour image $1+\mathfrak{r}$, où $\mathfrak{r}$ est le radical de $\mathcal{O}'_{X,s}$, ou encore que $\mathfrak{m}_s=\mathfrak{r}$, ce qui entraîne que $\mathcal{O}'_{X,s}\otimes_{\mathcal{O}_{X,s}}\boldsymbol{k}(s)$ est *composé direct de corps isomorphes à* $\boldsymbol{k}(s)$ (ce qui, lorsque le morphisme f est fini, entraîne qu'il est *non ramifié* aux points s'_j (17.4.1)). Si par exemple *aucun* corps résiduel de X n'est isomorphe à $\mathbf{F}_2$, l'homomorphisme canonique $\mathrm{Div}(X)\rightarrow\mathrm{Div}(X')$ ne peut être bijectif que si f est un *isomorphisme*. Dans le cas où l'homomorphisme canonique $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)\rightarrow\Gamma(X',\mathcal{O}_{X'})$ est bijectif, on conclut de ce qui précède et de (ii) que dans les considérations précédentes, on peut remplacer l'homomorphisme $\mathrm{Div}(X)\rightarrow\mathrm{Div}(X')$ par l'homomorphisme $\mathrm{Pic}(X)\rightarrow\mathrm{Pic}(X')$.

21.9. Diviseurs sur les préschémas de dimension 1.

(21.9.1) Soient X un espace topologique, x un point de X, $i_x:\{x\}\rightarrow X$ l'injection canonique. Si $A(x)$ est un groupe commutatif, on peut le considérer comme un faisceau de groupes commutatifs sur l'espace $\{x\}$ réduit à un seul point, et prendre son image directe $(i_x)_*(A(x))$ qui est un faisceau de groupes commutatifs sur X ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 3.4.1); il résulte aussitôt des définitions que pour tout ouvert U de X, $\Gamma(U,(i_x)_*(A(x)))=A(x)$ si $x\in U$, et est réduit à 0 dans le cas contraire; donc, pour $y\in\overline{\{x\}}$ on a $((i_x)_*(A(x)))_y=A(x)$, et pour $y\notin\overline{\{x\}}$, $((i_x)_*(A(x)))_y=0$.

Si maintenant $\mathcal{F}$ est un faisceau de groupes commutatifs sur X et Y une partie de X, pour tout ouvert U de X, on a un homomorphisme canonique

$$\Gamma(U,\mathcal{F})\rightarrow\prod_{x\in U\cap Y}\mathcal{F}_x=\prod_{x\in Y}\Gamma(U,(i_x)_*(\mathcal{F}_x))\tag{21.9.1.1}$$

et comme ces homomorphismes commutent aux opérateurs de restriction, ils définissent un homomorphisme canonique de *faisceaux*

$$j_Y:\mathcal{F}\rightarrow\prod_{x\in Y}(i_x)_*(\mathcal{F}_x).\tag{21.9.1.2}$$

Lemme **(21.9.2)**. — *Soient* X *un espace topologique localement noethérien,* X_0 *l'ensemble de ses points fermés,* $\mathcal{F}$ *un faisceau de groupes commutatifs sur* X. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *L'homomorphisme canonique* $j_{X_0}:\mathcal{F}\rightarrow\prod_{x\in X_0}(i_x)_*(\mathcal{F}_x)$ *est injectif et a pour image* $\bigoplus_{x\in X_0}(i_x)_*(\mathcal{F}_x)$.

a′) *Il existe une famille de groupes commutatifs* $(A(x))_{x\in X_0}$ *telle que* $\mathcal{F}$ *soit isomorphe à* $\bigoplus_{x\in X_0}(i_x)_*(A(x))$.

b) *Toute section de* $\mathcal{F}$ *au-dessus d'un ouvert* U *de* X *a un support discret contenu dans* X_0.

Lorsqu'il en est ainsi, pour tout $x\in X_0$, *le groupe* $A(x)$ *est déterminé à isomorphisme unique près et est isomorphe à* $\mathcal{F}_x$. *En outre, le faisceau* $\mathcal{F}$ *est alors flasque.*

Comme les points de X_0 sont fermés dans X, on a $((i_x)_*(A(x)))_y=0$ pour tout

$y \neq x \in X_0$; cette remarque prouve l'assertion d'unicité relative aux groupes $A(x)$, et il est clair par ailleurs que *a)* implique *a')*. Pour voir que *a')* implique *b)*, on peut se borner au cas où U est noethérien; alors (G, II, 3.10) on a

$$\Gamma(U, \bigoplus_{x \in X_0} (i_x)_*(A(x))) = \bigoplus_{x \in X_0} \Gamma(U, (i_x)_*(A(x))),$$

donc toute section s de $\mathscr{F}$ au-dessus de U est somme directe d'un nombre *fini* de sections $s_k \in \Gamma(U, (i_{x_k})_*(A(x_k)))$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ avec $x_k \in X_0$. Mais puisque x_k est fermé dans X, le support de s_k est réduit à x_k, donc le support de s est contenu dans l'ensemble fini des x_k, qui est évidemment discret puisque les points x_k sont fermés dans X. Montrons enfin que *b)* entraîne *a)*; pour tout ouvert noethérien U, tout support d'une section de $\mathscr{F}$ au-dessus de U étant discret et quasi-compact, est *fini*. On déduit donc de l'hypothèse *b)* que pour tout ouvert noethérien U, l'image de l'homomorphisme (21.9.1.1) (pour $Y = X_0$) est contenue dans $\bigoplus_{x \in X_0} \Gamma(U, (i_x)_*(\mathscr{F}_x))$ et que cet homomorphisme est injectif, ce qui établit *a)*.

Enfin, pour montrer que $\mathscr{F}$ est flasque, considérons une section s de $\mathscr{F}$ au-dessus d'un ouvert U de X; comme le support de s est un sous-espace discret et fermé dans X, on prolonge s en une section s' de $\mathscr{F}$ au-dessus de X en posant $s'_x = 0$ dans $X - U$.

Remarques **(21.9.3)**. — (i) Dans la condition *b)* de (21.9.2), il ne suffit pas de supposer que le support de toute section de $\mathscr{F}$ au-dessus d'un ouvert quelconque de X soit *discret*; c'est ce que montre l'exemple où on prend pour X un spectre d'anneau de valuation discrète, avec un point fermé b et un point générique a, et pour $\mathscr{F}$ le faisceau de groupes commutatifs tel que $\mathscr{F}_b = 0$ et $\mathscr{F}_a = \mathbf{Z}$.

(ii) Les conditions de (21.9.2) étant supposées vérifiées, soit E une partie discrète de X_0, et pour tout $x \in E$, soit $a(x)$ un élément de $A(x)$. Il existe alors une section t de $\bigoplus_{x \in X_0} (i_x)_*(A(x))$ et une seule au-dessus de X telle que $t_x = a(x)$ pour tout $x \in E$ et que le support de t soit contenu dans E. En effet, pour tout ouvert noethérien U, $E \cap U$ est fini, et il suffit de prendre pour t la section de $\bigoplus_{x \in X_0} (i_x)_*(A(x))$ dont la restriction à chaque ouvert noethérien U est la somme des $a(x)$ pour $x \in E \cap U$.

Proposition **(21.9.4)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien de dimension* $\leqslant 1$, $X^{(1)}$ *l'ensemble des points* $x \in X$ *tels que* $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = 1$. *On a alors un isomorphisme canonique*

(21.9.4.1) $$\mathscr{D}iv_X \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{x \in X^{(1)}} (i_x)_*(\mathrm{Div}(\mathcal{O}_{X,x}))$$

et $\mathscr{D}iv_X$ *est flasque.*

Compte tenu de l'isomorphisme (21.4.6.1), l'homomorphisme (21.9.4.1) est défini par (21.9.1.2) : prouvons que c'est une bijection. Comme $\dim(X) \leqslant 1$, les points de $X^{(1)}$ sont les *points fermés non isolés* de X. On est ramené à prouver que : 1° $\mathscr{D}iv_X$ vérifie la condition *b)* de (21.9.2); 2° pour tout point isolé $x \in X$, on a $(\mathscr{D}iv_X)_x = 0$. Le second point résulte de ce qu'alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau artinien et de ce que tout élément régulier de $\mathcal{O}_{X,x}$ est donc inversible. Pour le 1°, il suffit de noter que pour tout ouvert U de X tout diviseur $D \in \mathrm{Div}(U)$, les points maximaux du support S de D sont tels que

$\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{X,x})=1$ (21.1.9), donc *a fortiori* appartiennent à $X^{(1)}\cap U$; puisque $\dim(X)\leqslant 1$, l'ensemble de ces points est égal à S, et S est donc discret, l'ensemble des composantes irréductibles de S étant localement fini.

Corollaire (**21.9.5**). — *Soit* X *un préschéma localement noethérien de dimension* $\leqslant 1$. *Pour toute partie discrète* $E\subset X^{(1)}$ *et toute famille* $(D(x))_{x\in E}$ *avec* $D(x)\in \mathrm{Div}(\mathcal{O}_{X,x})$, *il existe un diviseur* D *sur* X *et un seul tel que le support de* D *soit contenu dans* E *et que* $D_x=D(x)$ *pour tout* $x\in E$.

Cela résulte de (21.9.4) et de (21.9.3, (ii)).

Corollaire (**21.9.6**). — *Soit* X *un préschéma localement noethérien de dimension* $\leqslant 1$; *tout diviseur* D *sur* X *est de la forme* $D'-D''$, *où* D', D'' *sont deux diviseurs* $\geqslant 0$ *de supports contenus dans celui de* D.

En vertu de (21.9.5), on est aussitôt ramené au cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau local noethérien; il suffit alors d'observer que M(X) est l'anneau total des fractions de A, et qu'une section de $\mathcal{M}_X^*$ au-dessus de X s'écrit par définition comme quotient b/a de deux éléments réguliers de A.

Corollaire (**21.9.7**). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien de dimension* $\leqslant 1$, *sans point isolé, et* U *un ouvert dense dans* X. *Il existe alors un diviseur* $D\geqslant 0$ *sur* X, *de support contenu dans* U *et rencontrant chacune des composantes irréductibles de* X.

On peut supposer que U est réunion d'ensembles ouverts disjoints non vides U_α, dont chacun est contenu dans une seule composante irréductible de X; il suffit alors de prendre dans chaque U_α un point x_α fermé dans X (il en existe puisque l'unique point générique de U_α ne peut être isolé par hypothèse), et d'appliquer (21.9.5) à l'ensemble discret des x_α.

L'intérêt de ce corollaire est qu'il permettra de prouver qu'une courbe algébrique séparée X sur un corps k est quasi-projective, le diviseur $D\geqslant 0$ défini dans (21.9.7) étant alors nécessairement *ample* en vertu du théorème de Riemann-Roch pour les courbes (chap. V).

(**21.9.8**) Pour les préschémas localement noethériens X de dimension $\leqslant 1$ la prop. (21.9.4) ramène la détermination de $\mathcal{D}iv_X$ au cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$, A étant un anneau local noethérien de dimension 1.

Lorsque A est un anneau local *régulier* de dimension 1 (autrement dit, un anneau de valuation discrète), le groupe Div(A) s'identifie canoniquement à $\mathbf{Z}$ (21.6.8); par suite, en vertu de (21.9.2):

Proposition (**21.9.9**). — *Soit* X *un préschéma localement noethérien* régulier *de dimension* $\leqslant 1$. *Alors le faisceau* $\mathcal{D}iv_X$ *est canoniquement isomorphe à* $\bigoplus_{x\in X^{(1)}}(i_x)_*(\mathbf{Z}(x))$, *où* $\mathbf{Z}(x)$ *est le groupe additif* $\mathbf{Z}$ *considéré comme faisceau de groupes sur l'espace* $\{x\}$.

(**21.9.10**) Supposons seulement que l'anneau local noethérien A de dimension 1 soit *réduit*; alors, si A′ est le *normalisé* de A (fermeture intégrale de A dans son anneau total de fractions), A′ est noethérien en vertu du théorème de Krull-Akizuki (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 2, nº 5, prop. 5), et on a vu dans (21.8.6) comment

Div(A) peut s'obtenir comme *extension* de Div(A') et ce dernier groupe est de la forme $\mathbf{Z}^r$.

Proposition (**21.9.11**). — *Soient* X *un préschéma noethérien,* X_0 *un sous-préschéma fermé de* X *ayant les propriétés suivantes :*

1° $\dim(X_0) \leqslant 1$.

2° *Pour toute partie localement fermée* Y *de* X *telle que* $Y \cap X_0$ *soit discret, il existe une partie* Y' *de* Y, *fermée dans* X *et ouverte dans* Y, *contenant* $Y \cap X_0$.

Dans ces conditions :

(i) *Soit* Z_0 *la réunion des ensembles* $\overline{\{x\}} \cap X_0$ *lorsque* x *parcourt la partie de* $\mathrm{Ass}(\mathcal{O}_X)$ *formée des points tels que* $\overline{\{x\}} \cap X_0$ *soit fini. Alors, pour tout diviseur* D_0 *sur* X_0, *dont le support ne rencontre pas* Z_0, *il existe un diviseur* D *sur* X *dont l'image réciproque par l'injection canonique* $X_0 \to X$ *existe* (21.4) *et est égale à* D_0; *si de plus* $D_0 \geqslant 0$, *on peut supposer* $D \geqslant 0$.

(ii) *Supposons en outre qu'il existe dans* X_0 *un ouvert affine* U_0 *contenant* $(\mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X_0})) \cup Z_0$ (*condition automatiquement vérifiée lorsqu'il existe un* $\mathcal{O}_{X_0}$-*Module ample* (**II**, 4.5.4)). *Alors l'homomorphisme canonique* (21.3.2.4) $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X_0)$ *est surjectif.*

(i) Compte tenu de (21.9.6), on peut se borner à prouver l'assertion relative aux diviseurs $D_0 \geqslant 0$; en vertu de (21.9.4), le support T de D_0 est un ensemble *fini* discret et fermé dans X_0. On peut supposer $D_0 \neq 0$, c'est-à-dire $T \neq \emptyset$, sans quoi il n'y a rien à démontrer. Pour tout $x \in T$, il existe un élément $s_x \in \mathcal{O}_{X_0, x}$ qui est non diviseur de zéro dans cet anneau, appartient à son idéal maximal, et dont l'image dans $(\mathcal{D}iv_{X_0})_x$ est $(D_0)_x$. Il existe un voisinage ouvert affine $U^{(x)}$ de x dans X et une section $g^{(x)}$ de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de $U^{(x)}$ tels que s_x soit l'image dans $\mathcal{O}_{X_0, x}$ du germe $(g^{(x)})_x \in \mathcal{O}_{X, x}$; nous allons voir qu'en prenant $U^{(x)}$ assez petit, on peut faire en sorte que $g^{(x)}$ ne soit pas diviseur de zéro dans $\Gamma(U^{(x)}, \mathcal{O}_X)$, autrement dit (3.1.9), en désignant par $V^{(x)}$ la partie fermée de $U^{(x)}$ formée des y tels que $g^{(x)}(y) = 0$, que l'on ait $V^{(x)} \cap \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_X) = \emptyset$. Or, si $z \in \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_X)$, l'hypothèse $x \notin Z_0$ entraîne que l'on a, ou bien $x \notin \overline{\{z\}}$, ou bien que x n'est pas isolé dans $\overline{\{z\}} \cap X_0$. En remplaçant $U^{(x)}$ par un ouvert plus petit, on peut supposer que c'est le second cas qui se produit pour un $z \in V^{(x)} \cap \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_X)$; $V^{(x)}$ contiendrait donc une composante irréductible de dimension 1 de $X_0 \cap U^{(x)}$, contenant x; mais cela signifierait que l'image $\overline{g}^{(x)}$ de $g^{(x)}$ dans $\Gamma(U \cap X_0, \mathcal{O}_{X_0})$ serait dans le nilradical de cet anneau, et par suite s_x appartiendrait au nilradical de $\mathcal{O}_{X_0, x}$, ce qui est absurde. On a donc $x \notin \overline{\{z\}}$ pour tout point $z \in V^{(x)} \cap \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_X)$, et comme cet ensemble est fini, on peut, en remplaçant $U^{(x)}$ par un voisinage ouvert plus petit de x, supposer que $V^{(x)} \cap \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_X) = \emptyset$.

En vertu du choix de $U^{(x)}$, on peut définir un diviseur $D'^{(x)}$ sur $U^{(x)}$ par $D'^{(x)} = \mathrm{div}(g^{(x)})$; d'ailleurs on a vu ci-dessus que x est nécessairement isolé dans $V^{(x)} \cap X_0$, donc en remplaçant encore $U^{(x)}$ par un voisinage ouvert plus petit de x, on peut supposer que $V^{(x)} \cap X_0$ est réduit au point x. Mais il existe alors, en vertu de la condition 2°, une partie $W^{(x)}$ de $V^{(x)}$, fermée dans X et ouverte dans $V^{(x)}$, telle que $W^{(x)} \cap X_0 = \{x\}$. Remplaçant encore $U^{(x)}$ par un voisinage ouvert plus petit de x, on peut donc supposer que $W^{(x)} = V^{(x)}$, autrement dit que $V^{(x)}$ est *fermé dans* X. On peut alors définir un diviseur $D^{(x)}$ *sur* X par la condition que $D^{(x)} | U^{(x)} = D'^{(x)}$, et $D^{(x)} | (X - V^{(x)}) = 0$, ce qui a un sens puisque dans $U^{(x)} \cap (X - V^{(x)})$ la restriction de $g^{(x)}$ est une section *inversible*, donc les restrictions à cet ouvert des deux diviseurs considérés sur $U^{(x)}$ et $X - V^{(x)}$ sont égales. Il suffit alors, pour répondre à la question, de prendre $D = \sum_{x \in T} D^{(x)}$, ce qui a un sens puisque T est fini.

(ii) Compte tenu du diagramme commutatif (21.4.2.1), la conclusion résultera de (i) si l'on prouve que tout $\mathcal{O}_{X_0}$-Module inversible $\mathscr{L}_0$ est isomorphe à un $\mathcal{O}_{X_0}$-Module de la forme $\mathcal{O}_{X_0}(D_0)$ (21.2.8), où D_0 est un diviseur sur X_0 dont le support ne rencontre pas Z_0. Or, comme U_0 est schématiquement dense dans X_0 (20.2.13, (iv)) il suffit pour cela de prouver qu'il existe une section $t \in \Gamma(U_0, \mathscr{L}_0)$ telle que $t(z_0) \neq 0$ aux points de $(\mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X_0})) \cup Z_0$ (3.1.9). On peut donc se borner au cas où $X_0 = \mathrm{Spec}(A_0)$ est affine; mais alors $\mathscr{L}_0$ est ample (**II**, 5.1.4) et comme l'ensemble $\mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X_0}) \cup Z_0$ est fini, la conclusion résulte de (**II**, 4.5.4).

Corollaire (**21.9.12**). — *Soient* A *un anneau local hensélien* (18.5.8), $S = \mathrm{Spec}(A)$, s_0 *le point fermé de* S, $f : X \to S$ *un morphisme séparé de présentation finie, et supposons que l'ensemble* $X_0 = f^{-1}(s_0)$ *soit de dimension* $\leqslant 1$. *Alors, pour tout sous-schéma fermé* X'_0 *de* X, *ayant* X_0 *pour ensemble sous-jacent et de présentation finie sur* S, *l'homomorphisme canonique* (21.3.2.4) $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X'_0)$ *est surjectif.*

Montrons d'abord qu'il suffit de prouver le corollaire lorsque l'anneau local hensélien A est de plus *noethérien*. On sait en effet (18.6.15) que l'on peut écrire $A = \varinjlim A_\lambda$, où les A_λ sont des anneaux locaux noethériens et henséliens, les homomorphismes $A_\lambda \to A$ étant locaux; il existe en outre un indice α et un morphisme séparé de présentation finie $f_\alpha : X_\alpha \to S_\alpha = \mathrm{Spec}(A_\alpha)$ tels que X et f soient déduits de X_α et f_α par le changement de base $S \to S_\alpha$ (8.10.5, (v)); avec les notations habituelles (8.8.1), les morphismes $f_\lambda : X_\lambda \to S_\lambda$ seront séparés pour $\lambda \geqslant \alpha$ et on aura $X = X_\lambda \times_{S_\lambda} S$. En outre, on peut supposer que, si $s_{0\alpha}$ est l'unique point fermé de S_α, il y a un sous-schéma fermé $X'_{0\alpha}$ de X_α, ayant même ensemble sous-jacent que $f_\alpha^{-1}(s_{0\alpha})$, tel que $X'_0 = X'_{0\alpha} \times_{S_\alpha} S$ (8.6.3); on a, pour $\lambda \geqslant \alpha$, $\dim(X'_{0\lambda}) = \dim(X'_0) \leqslant 1$ par transitivité des fibres et (4.1.4). Il s'agit de voir que si l'on a prouvé que l'homomorphisme $\mathrm{Pic}(X_\lambda) \to \mathrm{Pic}(X'_{0\lambda})$ est surjectif pour tout $\lambda \geqslant \alpha$, il en est de même de $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X'_0)$. On a évidemment le diagramme commutatif d'homomorphismes canoniques

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(X_\lambda) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Pic}(X'_{0\lambda}) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X'_0) \end{array}$$

Pour tout $\mathcal{O}_{X'_0}$-Module inversible $\mathscr{L}'_0$, il existe un $\lambda \geqslant \alpha$ et un $\mathcal{O}_{X'_{0\lambda}}$-Module inversible $\mathscr{L}'_{0\lambda}$ tel que $\mathscr{L}'_0$ s'en déduise par changement de base $S \to S_\lambda$ (8.5.2 et 8.5.5); il suffit de considérer un $\mathcal{O}_{X_\lambda}$-Module inversible $\mathcal{L}_\lambda$ tel que $\mathrm{cl}(\mathcal{L}'_{0\lambda})$ soit l'image de $\mathrm{cl}(\mathcal{L}_\lambda)$ dans $\mathrm{Pic}(X'_{0\lambda})$, puis de prendre le $\mathcal{O}_X$-Module inversible $\mathcal{L}$ déduit de $\mathcal{L}_\lambda$ par changement de base; en vertu de la commutativité du diagramme précédent, $\mathrm{cl}(\mathcal{L}'_0)$ sera l'image de $\mathrm{cl}(\mathcal{L})$.

Supposons donc A noethérien, donc aussi X, et vérifions que X et X_0 satisfont aux conditions de (21.9.11, (ii)). On a par hypothèse $\dim(X'_0) \leqslant 1$; d'autre part, pour vérifier la condition 2° de (21.9.11), considérons un sous-préschéma Y de X ayant Y pour ensemble sous-jacent; le morphisme $g : Y \rightarrow S$, restriction de f, étant quasi-fini en chacun des points x_i de $Y \cap X_0$ ($1 \leqslant i \leqslant n$), on peut appliquer (18.5.11, *c)*) et on voit que Y est *somme* des sous-préschémas *ouverts* $Y_i = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,x_i})$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) et d'un préschéma Y'' tel que $Y'' \cap X_0 = \varnothing$, et en outre que les injections canoniques $j_i : Y_i \rightarrow X$ sont telles que $f \circ j_i$ soit un morphisme *fini*. Comme f est séparé, j_i est aussi un morphisme fini, donc Y_i est *fermé dans* X; on répond donc à la question en prenant $Y' = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} Y_i$.

Il reste à vérifier l'hypothèse supplémentaire de (21.9.11, (ii)). Or, X'_0 étant une courbe séparée sur le corps $\boldsymbol{k}(s_0)$, est un $\boldsymbol{k}(s_0)$-schéma quasi-projectif (chap. V) ([1]), donc il existe un $\mathcal{O}_{X'_0}$-Module ample (**II**, 5.3.1), et cela achève la démonstration.

Remarque **(21.9.13)**. — Sous les conditions de (21.9.12), supposant en outre f propre, le morphisme f est même *projectif* : en effet, si $\mathcal{L}_0$ est un $\mathcal{O}_{X'_0}$-Module ample, il existe, en vertu de (21.9.12) un $\mathcal{O}_X$-Module inversible $\mathcal{L}$ dont l'image réciproque dans X'_0 est isomorphe à $\mathcal{L}_0$, donc est ample. Puisque tout voisinage de s_0 dans S est nécessairement S tout entier, on déduit alors de (9.6.4) que $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module ample, d'où la conclusion (**II**, 5.3.1 et **II**, 5.5.3).

21.10. Images réciproques et images directes de cycles 1-codimensionnels.

Dans un chapitre ultérieur, consacré à la théorie des intersections, seront développées de façon systématique les notions d'image inverse et d'image directe de cycles. Dans le présent numéro, nous nous contenterons de définir ces notions dans certains cas particuliers utiles, et pour les *cycles* 1-*codimensionnels*, ces définitions étant choisies de telle sorte qu'elles soient compatibles avec les définitions correspondantes pour les diviseurs (21.4 et 21.5), compte tenu de l'homomorphisme cyc défini en (21.6).

(21.10.1) Soient X, X' deux préschémas localement noethériens, $f : X' \rightarrow X$ un morphisme, T une partie de X; supposons que l'image par f de tout point maximal de X' soit un point maximal de X, et que, pour tout $x' \in X'^{(1)}$ (i.e. tel que $\dim \mathcal{O}_{X',x'} = 1$), on ait l'*une* des trois conditions suivantes pour le point $x = f(x')$:

(i) $x \notin T$;

(ii) $x \in X^{(1)}$ *et* $\mathcal{O}_{X',x'}$ *est un* $\mathcal{O}_{X,x}$*-module plat*;

(iii) *l'anneau* $\mathcal{O}_{X,x}$ *est factoriel et* $\mathfrak{m}_{x'} \notin \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X',x'})$.

Sous ces conditions, nous nous proposons, pour tout cycle 1-codimensionnel Z sur X *de support contenu dans* T, de définir un cycle 1-codimensionnel $Z' = f^*(Z)$, de sorte

---

([1]) Le lecteur vérifiera que (21.9.12) n'est pas utilisé pour prouver cette propriété au chap. V.

que $Z \rightsquigarrow f^*(Z)$ soit un *homomorphisme* de groupes ordonnés du sous-groupe de $\mathfrak{Z}^1(X)$ formé des cycles de support contenu dans T, dans le groupe ordonné $\mathfrak{Z}^1(X')$. Pour cela, soit

$$\textbf{(21.10.1.1)} \qquad Z = \sum_{x \in T \cap X^{(1)}} n_x . \overline{\{x\}}$$

où la famille des $x \in T \cap X^{(1)}$ tels que $n_x \neq 0$ est localement finie. Pour tout $x' \in X'^{(1)}$, définissons un entier $n_{x'}$ de la façon suivante, en posant $x = f(x')$:

1° si $x \notin T$, on prend $n_{x'} = 0$;

2° si $x \in X^{(1)}$ et si $\mathcal{O}_{X',x'}$ est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module plat, on sait (6.1.1) que $\dim(\mathcal{O}_{X',x'}/\mathfrak{m}_x\mathcal{O}_{X',x'}) = 0$, autrement dit $\mathcal{O}_{X',x'}/\mathfrak{m}_x\mathcal{O}_{X',x'}$ est un $\mathcal{O}_{X',x'}$-module de longueur *finie* $\lambda_{x'}$, et on prend $n_{x'} = \lambda_{x'} n_x$;

3° si $\mathcal{O}_{X,x}$ est factoriel et $\mathfrak{m}_{x'} \notin \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X',x'})$, on sait (21.6.9) que l'homomorphisme canonique $\mathrm{cyc} : \mathrm{Div}(\mathcal{O}_{X,x}) \to \mathfrak{Z}^1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}))$ est bijectif, et d'autre part comme $\dim(\mathcal{O}_{X',x'}) = 1$ et $\mathfrak{m}_{x'} \notin \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X',x'})$, $\mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X',x'})$ se compose uniquement des points maximaux de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X',x'})$, donc l'hypothèse sur f implique que $f(\mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X',x'})) \subset \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X,x})$ et il résulte de (21.4.5, (ii)) que l'homomorphisme $f^* : \mathrm{Div}(\mathcal{O}_{X,x}) \to \mathrm{Div}(\mathcal{O}_{X',x'})$ est défini; enfin, x' étant l'unique point fermé de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X',x'})$, $\mathfrak{Z}^1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X',x'}))$ est canoniquement isomorphe à **Z**. On a donc un homomorphisme canonique composé

$$\textbf{(21.10.1.2)} \quad \mathfrak{Z}^1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{cyc}^{-1}} \mathrm{Div}(\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Div}(\mathcal{O}_{X',x'}) \xrightarrow{\mathrm{cyc}} \mathfrak{Z}^1(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X',x'})) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$$

Si Z_x est le cycle $\sum_{y \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \cap X^{(1)}} n_y . (\overline{\{y\}} \cap \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}))$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$, on prend alors pour $n_{x'}$ *l'image de* Z_x par l'homomorphisme (21.10.1.2).

(21.10.2) Nous nous proposons de montrer que :

A) Lorsque deux des conditions 1°, 2°, 3° de (21.10.1) sont *simultanément* satisfaites, les valeurs correspondantes de $n_{x'}$ *coïncident*.

B) L'ensemble des $x' \in X'^{(1)}$ tels que $n_{x'} \neq 0$ est *localement fini* dans X'.

Pour démontrer A), supposons d'abord que $x \notin T$ et que x vérifie l'une des conditions 2° ou 3° de (21.10.1); alors $n_x = 0$ et si l'on est dans le cas 2°, on a $n_{x'} = 0$; si on est dans le cas 3°, on a $Z_x = 0$ puisque $\mathrm{Supp}(Z) \subset T$, donc encore $n_{x'} = 0$. Il reste à considérer le cas où l'on est à la fois dans le cas 2° et dans le cas 3°; alors, puisque $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = 1$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète; si t est une uniformisante de cet anneau, le diviseur correspondant à Z_x est $\mathrm{div}(t^{n_x})$ dans $\mathrm{Div}(\mathcal{O}_{X,x})$, et son image dans $\mathrm{Div}(\mathcal{O}_{X',x'})$ est le diviseur de t'^{n_x}, où t' est l'élément (régulier) de $\mathcal{O}_{X',x'}$ image de t. On peut évidemment se borner au cas où $n_x = 1$, et alors la définition (21.6.5.1) montre que l'image de Z_x par (21.10.1.1) est le nombre $\lambda_{x'}$, ce qui achève de prouver A).

Démontrons maintenant B). Posons $T_0 = \mathrm{Supp}(Z) \subset T$, $T'_0 = f^{-1}(T_0)$; il suffit de prouver que la relation $n_{x'} \neq 0$ implique que x' appartient à l'ensemble des points maximaux de T'_0, ce dernier étant localement fini dans X'. Il est immédiat que l'on a nécessairement $x' \in T'_0$; si x' n'était pas maximal dans l'ensemble fermé T'_0, il existerait une générisation y' de x' dans T'_0, distincte de x', et puisque $x' \in X'^{(1)}$, y' serait nécessairement un point maximal de X'; par suite $y=f(y')$ serait point maximal de X par hypothèse; mais cela est absurde puisque $y\in T_0$ et que T_0 est purement de codimension 1 dans X.

(21.10.3) On peut maintenant poser

$$f^*(Z)=\sum_{x'\in X'^{(1)}} n_{x'}\overline{\{x'\}},$$

la somme du second membre ayant un sens en vertu de ce qu'on a prouvé dans (21.10.2); on dit que le cycle 1-codimensionnel $f^*(Z)$ est l'*image réciproque* de Z par f. Il est immédiat que l'application f^* ainsi définie est un homomorphisme de groupes ordonnés. En outre, si U est un ouvert de X, V un ouvert de X' tel que $f(V)\subset U$ et $f':V\rightarrow U$ la restriction de f, il résulte aussitôt des définitions que l'on a

(21.10.3.1) $$f'^*(Z|U)=f^*(Z)|V.$$

Désignons par $\Gamma_T(\mathscr{Z}_X^1)$ le plus grand sous-faisceau de groupes commutatifs de $\mathscr{Z}_X^1$ de support contenu dans T; il résulte de la relation (21.10.3.1) que les applications $\Gamma(U,\Gamma_T(\mathscr{Z}_X^1))\rightarrow\Gamma(V,\mathscr{Z}_{X'}^1)$ que l'on vient de définir, définissent un homomorphisme de faisceaux de groupes commutatifs ordonnés sur X'

$$\psi^*(\Gamma_T(\mathscr{Z}_X^1))\rightarrow\mathscr{Z}_{X'}^1$$

où ψ est l'application continue sous-jacente au morphisme f.

Proposition **(21.10.4).** — *Supposons vérifiées les conditions de* (21.10.1). *Alors, pour tout diviseur* D *sur* X *tel que* $\mathrm{Supp}(D)\subset T$ *et que* $f^*(D)$ *soit défini* (21.4.2), *on a*

(21.10.4.1) $$\mathrm{cyc}(f^*(D))=f^*(\mathrm{cyc}(D)).$$

La question étant locale sur X, on peut se borner au cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$ est affine, où $D=\mathrm{div}(t)$, où t est un élément régulier non inversible de A, et où le sous-préschéma $Y(D)$ (21.2.12) n'a qu'un seul point maximal y, de sorte que $\mathrm{cyc}(D)=n_y.\overline{\{y\}}$, où n_y est la longueur de $\mathcal{O}_{X,y}/t_y\mathcal{O}_{X,y}$ (21.6.5.1). On a vu dans la démonstration de (21.10.2, B)) que les points $x'\in X'$ tels que $\mathrm{mult}_{x'}(f^*(\mathrm{cyc}(D)))\neq 0$ sont des points maximaux de $f^{-1}(\overline{\{y\}})$. Si le point x' est dans le cas 3° de (21.10.1), l'égalité des multiplicités en x' des deux membres de (21.10.4.1) résulte de la définition de $n_{x'}$ au moyen de l'homomorphisme (21.10.1.1). Supposons au contraire que x' soit dans le cas 2° de (21.10.1), et soit $x=f(x')$; puisque $x\in X^{(1)}\cap\overline{\{y\}}$, on a nécessairement $x=y$. Remarquons maintenant que $f^*(D)=\mathrm{div}(t')$, où t' est l'image de t dans $\Gamma(X',\mathcal{O}_{X'})$, et $Y(f^*(D))=f^{-1}(Y(D))$; la multiplicité de $f^*(D)$ au point x' est donc la longueur $n_{x'}$ du $\mathcal{O}_{X',x'}$-module $\mathcal{O}_{X',x'}/t'_{x'}\mathcal{O}_{X',x'}$; comme $\mathcal{O}_{X',x'}/t'_{x'}\mathcal{O}_{X',x'}=(\mathcal{O}_{X,y}/t_y\mathcal{O}_{X,y})\otimes_{\mathcal{O}_{X,y}}\mathcal{O}_{X',x'}$ il résulte de (4.7.1) que l'on a $n_{x'}=\lambda_{x'}n_y$, donc les multiplicités au point x' des deux membres de (21.10.4.1) sont encore égales, ce qui achève la démonstration.

(21.10.5) Supposons maintenant que $f:X'\rightarrow X$ soit un morphisme de préschémas localement noethériens, transformant tout point maximal de X' en point maximal de X, et supposons en outre que pour *toute partie fermée rare* T de X, f vérifie les conditions de (21.10.1); cela signifie encore que pour tout $x' \in X'^{(1)}$, ou bien $x = f(x')$ est *point maximal* de X, ou bien x' vérifie l'une des conditions (ii), (iii) de (21.10.1). Si on tient compte de ce que tout cycle 1-codimensionnel a un support *rare* dans X, on voit que $f^*(Z)$ est défini pour *tout* cycle 1-codimensionnel Z sur X; en vertu de (21.10.3.1), on a donc défini ainsi un *homomorphisme de faisceaux de groupes commutatifs ordonnés*

$$\psi^*(\mathscr{Z}^1_X) \to \mathscr{Z}^1_{X'}.$$

Si de plus, pour tout diviseur D sur X, $f^*(D)$ est défini (21.4.5), le fait que le support de D soit rare dans X (21.6.6) entraîne que (21.10.4) est applicable, et on a donc la formule (21.10.4.1) pour tout diviseur D sur X. En particulier :

Proposition **(21.10.6)**. — *Soient* X, X′ *deux préschémas localement noethériens,* $f : X' \to X$ *un morphisme plat. Alors* $f^*(Z)$ *est défini pour tout cycle* 1*-codimensionnel* Z *sur* X, $f^*(D)$ *est défini pour tout diviseur* D *sur* X *et l'on a la relation* (21.10.4.1).

En effet, si $x' \in X'^{(1)}$ est tel que $x = f(x')$ ne soit pas maximal, il résulte de (6.1.1) que l'on a nécessairement $x \in X^{(1)}$, donc on est dans le cas (ii) de (21.10.1). On peut donc appliquer (21.10.5), compte tenu de (21.4.5) et de (2.3.4).

Remarque **(21.10.7)**. — L'existence de $f^*(Z)$ pour tout cycle 1-codimensionnel Z sur X résulte déjà de l'hypothèse que f est *plat aux points x' de* X′ *de codimension* $\leqslant 1$ *dans* X′ (i.e. tels que $\dim \mathcal{O}_{X',x'} \leqslant 1$); en effet, pour tout point maximal $z' \in X'$, il résulte de (6.1.1) que $z = f(z')$ est point maximal de X puisque $\dim \mathcal{O}_{X,z} \leqslant \dim \mathcal{O}_{X',z'} = 0$. De même, si $x' \in X'^{(1)}$, $x = f(x')$ est maximal ou appartient à $X^{(1)}$ par (6.1.1); on peut donc encore appliquer (21.10.5).

Proposition **(21.10.8)**. — *Soient* X, X′, X″ *trois préschémas localement noethériens,* $f : X' \to X$, $g : X'' \to X'$ *deux morphismes; on suppose que* f (resp. g) *est plat en tout point de codimension* $\leqslant 1$ *dans* X′ (resp. X″). *Alors* $f \circ g$ *est plat en tout point de codimension* $\leqslant 1$ *dans* X″ *et pour tout cycle* 1*-codimensionnel* Z *sur* X, *on a* $(f \circ g)^*(Z) = g^*(f^*(Z))$.

La première assertion résulte de (6.1.1) et (2.1.6). La seconde résulte de ce que f (resp. g, resp. $f \circ g$) transforme les points maximaux de X′ (resp. X″, resp. X″) en points maximaux de X (resp. X′, resp. X) et de ce que, si $x'' \in X''^{(1)}$ est tel que $x' = g(x'') \in X'^{(1)}$ et $x = f(x') \in X^{(1)}$, on a

$$\operatorname{long}(\mathcal{O}_{X'',x''}/\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{X'',x''}) = \operatorname{long}(\mathcal{O}_{X'',x''}/\mathfrak{m}_{x'} \mathcal{O}_{X'',x''}) . \operatorname{long}(\mathcal{O}_{X',x'}/\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{X',x'})$$

En effet, si l'on pose $A = \mathcal{O}_{X,x}$, $A' = \mathcal{O}_{X',x'}$, $A'' = \mathcal{O}_{X'',x''}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}_{x'}$, on a $A''/\mathfrak{m}A'' = (A'/\mathfrak{m}A') \otimes_{A'} A''$, et la formule

$$\operatorname{long}_{A''}(A''/\mathfrak{m}A'') = \operatorname{long}_{A'}(A'/\mathfrak{m}A') . \operatorname{long}_{A''}(A''/\mathfrak{m}'A'')$$

résulte de (4.7.1) et de l'hypothèse de platitude de A″ sur A′.

(21.10.9) Soient X un préschéma localement noethérien, Λ un groupe commutatif, noté additivement, et considéré donc comme **Z**-module; on notera encore par **Z** et Λ les faisceaux *simples* sur X associés aux préfaisceaux constants égaux respectivement à **Z** et Λ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 3.6). On appelle faisceau des germes de cycles 1-codimensionnels *à coefficients dans* Λ le faisceau de groupes commutatifs $\mathscr{Z}^1_X \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda$. Si $\Lambda = \mathbf{Q}$, on dit que les sections de $\mathscr{Z}^1_X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ au-dessus de X sont les *cycles* 1-*codimensionnels à coefficients rationnels*. Comme les fibres de $\mathscr{Z}^1_X$ sont des $\mathbf{Z}$-modules sans torsion (21.6.3), l'homomorphisme canonique $\mathscr{Z}^1_X \to \mathscr{Z}^1_X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ est *injectif*, de sorte que les cycles 1-codimensionnels s'identifient à des cycles 1-codimensionnels à coefficients rationnels.

(21.10.10) Nous allons voir que sous certaines conditions, on peut élargir la définition de $f^*(Z)$ donnée dans (21.10.3) pour un cycle 1-codimensionnel Z sur X, mais à condition de prendre pour $f^*(Z)$ un cycle 1-codimensionnel *à coefficients rationnels* sur X'. Le cas plus général où nous nous plaçons est celui où f transforme tout point maximal de X' en un point maximal de X, et où, en tout point $x' \in X'^{(1)}$, on a l'une des conditions (i), (ii), (iii) de (21.10.1) *ou une quatrième condition* (en posant $x = f(x')$) :

(iv) $x \in X^{(1)}$, $\mathfrak{m}_x \notin \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X,x})$ *et en outre, si l'on pose* $A = \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$, $A' = \widehat{\mathcal{O}}_{X',x'}$, *et si* K *désigne l'anneau total des fractions de* A, *alors* A' *est une* A-*algèbre* finie *et* $K' = A' \otimes_A K$ *est un* K-*module* libre.

Notons alors $r_{x'}$ le rang du K-module libre K', $q_{x'}$ le degré de $\boldsymbol{k}(x') = \boldsymbol{k}(A')$ sur $\boldsymbol{k}(x) = \boldsymbol{k}(A)$, et posons $\mu_{x'} = r_{x'}/q_{x'}$. Pour un cycle 1-codimensionnel de support contenu dans T, donné par (21.10.1.1) et tout $x' \in X'^{(1)}$, on définit $c_{x'} \in \mathbf{Q}$ comme égal au nombre $n_{x'} \in \mathbf{Z}$ lorsque l'on est dans l'un des cas 1°, 2°, 3° de (21.10.1); mais il reste ici une quatrième possibilité :

4° si x' vérifie la condition (iv) ci-dessus, on prend $c_{x'} = \mu_{x'} n_x \in \mathbf{Q}$.

(21.10.11) Il faut encore prouver que lorsque la condition 4° de (21.10.10) est vérifiée *en même temps* qu'une des conditions 1°, 2°, 3° de (21.10.1), on a $n_{x'} = c_{x'}$. C'est évident si $x \notin T$ puisque alors $n_x = 0$. Pour étudier les deux autres cas, notons que $\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{X',x'}$ est fermé pour la topologie $\mathfrak{m}_{x'}$-préadique, donc le complété de $\mathcal{O}_{X',x'}/\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{X',x'}$ pour cette dernière topologie est $A'/\mathfrak{m}_x A'$. Si l'on est à la fois dans le cas 2° et le cas 4°, $\mathcal{O}_{X',x'}/\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{X',x'}$ est discret pour la topologie $\mathfrak{m}_{x'}$-préadique, donc isomorphe à $A'/\mathfrak{m}_x A'$. Comme A' est une A-algèbre finie et *plate* ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 10.2.3), c'est un A-module *libre* ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 10.1.3), et le rang de $A'/\mathfrak{m}_x A'$ sur $A/\mathfrak{m}_x A = \boldsymbol{k}(x)$ est égal au rang de A' sur A, donc aussi à celui de K' sur K. D'autre part ce rang est aussi égal au produit de la longueur $\lambda_{x'}$ de $\mathcal{O}_{X',x'}/\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{X',x'}$ (en tant que $\mathcal{O}_{X',x'}$-module, ou de $\boldsymbol{k}(x')$-module) par le rang $[\boldsymbol{k}(x') : \boldsymbol{k}(x)] = q_{x'}$, ce qui prouve la relation $\mu_{x'} = r_{x'}/q_{x'} = \lambda_{x'}$ dans ce cas.

Supposons enfin que l'on soit à la fois dans le cas 3° et le cas 4°. Alors, puisque $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = 1$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète, donc régulier. D'autre part, $\mathcal{O}_{X',x'}$ est de dimension 1, et puisque $\mathfrak{m}_{x'} \notin \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X',x'})$, $\mathcal{O}_{X',x'}$ est un anneau de Cohen-Macaulay ($\mathbf{0}$, 16.4.6); enfin, puisque A' est un A-module de type fini, $A'/\mathfrak{m}_x A'$ est un $\boldsymbol{k}(x)$-espace vectoriel de rang fini; puisque $\mathcal{O}_{X',x'}/\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{X',x'}$ est contenu dans $A'/\mathfrak{m}_x A'$, c'est aussi un $\boldsymbol{k}(x)$-espace vectoriel de rang fini, donc un anneau artinien. L'application de (6.1.5) montre alors que $\mathcal{O}_{X',x'}$ est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module *plat*, donc on est aussi dans le cas 2°, et on conclut par ce qui a été vu plus haut.

Cela étant, dans le cas que l'on a considéré, on posera

$$f^*(Z) = \sum_{x' \in X'^{(1)}} c_{x'} \cdot \overline{\{x'\}}$$

qui est donc un cycle 1-codimensionnel sur X′ à coefficients *rationnels*. On a encore défini ainsi un homomorphisme f^* de groupes ordonnés, vérifiant (21.10.3.1), et par suite un homomorphisme de faisceaux de groupes commutatifs

$$\psi^*(\Gamma_T(\mathscr{Z}_X^1)) \to \mathscr{Z}_{X'}^1 \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}.$$

Lorsque f vérifie les conditions précédentes pour *toute partie fermée* T *rare* dans X, c'est-à-dire que pour tout $x' \in X'^{(1)}$, ou bien $x = f(x')$ est point maximal de X, ou bien x' vérifie l'une des conditions (ii), (iii) ou (iv), $f^*(Z)$ est alors défini pour *tout* cycle 1-codimensionnel Z sur X, et on a défini un homomorphisme de faisceaux de groupes commutatifs ordonnés

$$\psi^*(\mathscr{Z}_X^1) \to \mathscr{Z}_{X'}^1 \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$$

d'où, par tensorisation, un homomorphisme de faisceaux de $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels ordonnés

$$\psi^*(\mathscr{Z}_X^1 \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}) \to \mathscr{Z}_{X'}^1 \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}. \tag{21.10.11.1}$$

Remarque **(21.10.12)**. — Lorsqu'on est dans la situation de (21.10.10), on peut effectivement, pour des cycles 1-codimensionnels Z sur X, avoir pour $f^*(Z)$ des cycles 1-codimensionnels à coefficients *non entiers*; autrement dit les nombres $\mu_{x'}$, peuvent être non entiers. On en a un exemple en prenant l'anneau intègre complet A de (6.15.11, (ii)) et sa clôture intégrale A′ : le point fermé x' de Spec(A′) vérifie la condition (iv) de (21.10.10) et l'on a $\mu_{x'} = \frac{1}{2}$.

Lemme **(21.10.13)**. — *Soient* A *un anneau local noethérien de dimension* 1, *t un élément régulier de* A *appartenant à l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ (*ce qui implique que* $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}(A)$).

(i) *Pour tout* A-*module* M *de type fini, le noyau* $N_t(M)$ *et le conoyau* $P_t(M)$ *de l'homothétie* $t_M : M \to M$ *de rapport t sont de longueurs finies. On pose* $d_t(M) = \mathrm{long}\, P_t(M) - \mathrm{long}\, N_t(M)$.

(ii) *Si* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *est une suite exacte de* A-*modules de type fini, on a* $d_t(M) = d_t(M') + d_t(M'')$.

(iii) *On a* $d_t(M) \geqslant 0$ *pour tout* A-*module* M *de type fini; pour que* $d_t(M) = 0$, *il faut et il suffit que* M *soit de longueur finie.*

(iv) *Si* K *est l'anneau total des fractions de* A *et si* $M \otimes_A K$ *est un* K-*module libre de rang n, on a* $d_t(M) = n . d_t(A) = n . \mathrm{long}(A/tA)$.

(v) *Si* M *vérifie les hypothèses de* (iv) *et si de plus t est* M-*régulier, on a* $\mathrm{long}(M/tM) = n . \mathrm{long}(A/tA)$.

(i) Spec(A) est formé du point $\mathfrak{m}$ et des idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_i$; comme par hypothèse $t \notin \mathfrak{p}_i$ pour tout i (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 1, cor. 3 de la prop. 2), l'image de t dans chacun des $A_{\mathfrak{p}_i}$ est inversible, et les supports des A-modules de type fini $N_t(M)$ et $P_t(M)$ sont donc vides ou réduits à $\mathfrak{m}$; on en conclut (**0**, 16.1.10) que ces modules sont de longueur finie.

(ii) Puisque t est régulier, on a une suite exacte

$$0 \to A \xrightarrow{t_A} A \to A/tA \to 0$$

et puisque $\mathrm{Tor}_i^A(M, A)=0$ pour $i\geqslant 1$, la suite exacte des Tor donne d'une part la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^A(M, A/tA) \to M \xrightarrow{t_M} M \to M/tM \to 0$$

et d'autre part, pour $i\geqslant 2$,

$$0=\mathrm{Tor}_i^A(M, A) \to \mathrm{Tor}_i^A(M, A/tA) \to \mathrm{Tor}_{i-1}^A(M, A)=0$$

donc on a $N_t(M)=\mathrm{Tor}_1^A(M, A/tA)$ et $\mathrm{Tor}_i^A(M, A/tA)=0$ pour $i\geqslant 2$; la suite exacte des Tor donne une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^A(M', A/tA) \to \mathrm{Tor}_1^A(M, A/tA) \to \mathrm{Tor}_1^A(M'', A/tA) \to$$
$$M'\otimes_A (A/tA) \to M\otimes_A (A/tA) \to M''\otimes_A (A/tA) \to 0$$

et cette suite s'écrit, d'après ce qui précède

$$0 \to N_t(M') \to N_t(M) \to N_t(M'') \to P_t(M') \to P_t(M) \to P_t(M'') \to 0$$

ce qui prouve (ii).

Pour prouver (iii), notons qu'il y a une suite de composition (M_h) de M dont les quotients M_h/M_{h+1} sont isomorphes à $A/\mathfrak{m}$ ou à un des $A/\mathfrak{p}_i$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, nº 4, th. 1), et pour que M soit de longueur finie, il faut et il suffit que tous ces quotients soient isomorphes à $A/\mathfrak{m}$. Tout revient donc (en vertu de (ii)) à prouver que $d_t(A/\mathfrak{m})=0$ et $d_t(A/\mathfrak{p}_i)>0$. Or, l'image de t dans $A/\mathfrak{m}$ étant 0, on a $N_t(A/\mathfrak{m})=A/\mathfrak{m}$ et $P_t(A/\mathfrak{m})=A/\mathfrak{m}$, d'où la première assertion; d'autre part, l'image de t dans $A/\mathfrak{p}_i$ est régulière, donc $N_t(A/\mathfrak{p}_i)=0$ et $P_t(A/\mathfrak{p}_i)=A/(tA+\mathfrak{p}_i)$ qui n'est pas réduit à 0, d'où la seconde assertion.

(iv) Il y a une base de $M\otimes_A K$ de la forme $(x_j/s)_{1\leqslant j\leqslant n}$, où s est un élément régulier de A et $x_j\in M$. Considérons l'homomorphisme $u : A^n\to M$ qui transforme l'élément e_j $(1\leqslant j\leqslant n)$ de la base canonique de A^n en x_j et montrons que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Coker}(u)$ sont de *longueur finie*; en effet, pour tout i, l'image de s dans $A_{\mathfrak{p}_i}$ est inversible, et comme $K_{\mathfrak{p}_i}=A_{\mathfrak{p}_i}$, les images des x_j/s dans $M_{\mathfrak{p}_i}$ forment une base de ce $A_{\mathfrak{p}_i}$-module; donc $u_{\mathfrak{p}_i} : A^n_{\mathfrak{p}_i}\to M_{\mathfrak{p}_i}$ est bijectif. Comme dans (i), on en conclut que les supports de $\mathrm{Ker}(u)$ et de $\mathrm{Coker}(u)$ sont contenus dans $\{\mathfrak{m}\}$, donc que ces modules sont de longueur finie. Cela étant, il résulte de (ii) et (iii) que l'on a $d_t(M)=d_t(A^n)=n.d_t(A)=n.\mathrm{long}(A/tA)$ puisque t est régulier.

Enfin, il est clair que (v) se déduit aussitôt de (iv), puisque alors $N_t(M)=0$.

Ce lemme permet de généraliser (21.10.4) :

Proposition **(21.10.13)**. — *Supposons que f vérifie les conditions de* (21.10.10). *Alors, pour tout diviseur* D *sur* X *tel que* $\mathrm{Supp}(D)\subset T$ *et que* $f^*(D)$ *soit défini, on a*

(21.10.13.1) $$\mathrm{cyc}(f^*(D))=f^*(\mathrm{cyc}(D)).$$

Raisonnant comme dans (21.10.4), tout revient à voir (avec les mêmes notations) que si x' est dans le cas 4º de (21.10.10) et si n_y est la longueur de $\mathcal{O}_{X,y}/t_y\mathcal{O}_{X,y}$, alors la longueur $n_{x'}$ de $\mathcal{O}_{X',x'}/t'_{x'}\mathcal{O}_{X',x'}$ est égale à $\mu_{x'}n_y$, $\mu_{x'}$ étant le nombre rationnel défini dans (21.10.10). Comme $\mathcal{O}_{X',x'}/t'_{x'}\mathcal{O}_{X',x'}$ est de longueur finie, il a même longueur que son complété $\mathfrak{m}_{x'}$-préadique $A'/t'_{x'}A'$, qu'on peut aussi écrire A'/t_yA'; d'ailleurs, comme $t'_{x'}$ est régulier par hypothèse dans $\mathcal{O}_{X',x'}$, il l'est aussi dans A' par platitude ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.3.4), et lorsque A' est considéré comme A-module, on peut aussi dire que t_y est A'-régulier. Comme A est de dimension 1 et que A' est un A-module de type fini tel que $A'\otimes_A K$ soit un K-module libre de rang $r_{x'}$, on peut appliquer (21.10.13, (v)) à $M=A'$ et à t_y, et la longueur de A'/t_yA' en tant que A-*module* est donc $r_{x'}n_y$. Comme $\boldsymbol{k}(x')$ est un $\boldsymbol{k}(x)$-espace vectoriel de rang $q_{x'}$, la longueur de A'/t_yA' en tant que A'-*module* est donc $r_{x'}n_y/q_{x'}=\mu_{x'}n_y$, ce qui achève la démonstration.

(21.10.14) Soient maintenant X, X' deux préschémas localement noethériens, $f: X'\rightarrow X$ un morphisme ayant les *deux* propriétés suivantes :

a) f est *fini*;

b) l'image par f de tout point maximal de X' est un point maximal de X.

Pour tout $x\in X^{(1)}$, les points $x'\in f^{-1}(x)$ appartiennent alors tous à $X'^{(1)}$, comme il résulte de l'hypothèse *b)* et de l'inégalité (**0**, 16.3.9.1), la fibre $f^{-1}(x)$ étant discrète. Soit alors

$$Z'=\sum_{x'\in X'^{(1)}} n_{x'}.\overline{\{x'\}}$$

un cycle 1-codimensionnel sur X'. Pour tout $x\in X^{(1)}$, définissons un entier n_x par la formule

$$n_x=\sum_{x'\in f^{-1}(x)} n_{x'}.[\boldsymbol{k}(x'):\boldsymbol{k}(x)]$$

ce qui a un sens, les points de $f^{-1}(x)$ étant en nombre fini et $\boldsymbol{k}(x')$ étant un corps de degré fini sur $\boldsymbol{k}(x)$ (**I**, 6.4.4). En outre, l'ensemble des $x\in X^{(1)}$ tels que $n_x\neq 0$ est *localement fini* dans X, car il est contenu dans l'image par f de l'ensemble des $x'\in X'^{(1)}$ tels que $n_{x'}\neq 0$, et la conclusion résulte de ce que le morphisme f est quasi-compact. On peut donc définir un cycle 1-codimensionnel sur X en posant

(21.10.14.1) $$f_*(Z')=\sum_{x\in X^{(1)}} n_x.\overline{\{x\}}$$

et on dit que $f_*(Z')$ est l'*image directe* de Z' par f. Il est clair que l'application $f_*:\mathfrak{Z}^1(X')\rightarrow\mathfrak{Z}^1(X)$ ainsi définie est un homomorphisme de groupes ordonnés. En outre, si U est un ouvert de X, $f_U: f^{-1}(U)\rightarrow U$ la restriction de f, il résulte aussitôt des définitions que l'on a

(21.10.14.2) $$(f_U)_*(Z'|f^{-1}(U))=f_*(Z')|U$$

donc, en désignant par ψ l'application continue sous-jacente au morphisme f, les applications $\Gamma(f^{-1}(U),\mathscr{Z}^1_{X'})\rightarrow\Gamma(U,\mathscr{Z}^1_X)$ que l'on vient de définir définissent un homomorphisme de faisceaux de groupes commutatifs ordonnés sur X

$$\psi_*(\mathscr{Z}^1_{X'})\rightarrow\mathscr{Z}^1_X.$$

Proposition **(21.10.15)**. — *Soient* X, X′, X″ *trois préschémas localement noethériens,* $f: X' \to X$, $g: X'' \to X'$ *deux morphismes vérifiant les conditions* a) *et* b) *de* (21.10.14). *Alors* $f \circ g$ *vérifie les mêmes conditions, et pour tout cycle* 1*-codimensionnel* Z″ *sur* X″, *on a* $(f \circ g)_*(Z'') = f_*(g_*(Z''))$.

Cela résulte aussitôt des définitions.

Proposition **(21.10.16)**. — *Soient* X, X′, X_1 *trois préschémas localement noethériens,* $f: X' \to X$ *un morphisme vérifiant les conditions* a) *et* b) *de* (21.10.14), $g: X_1 \to X$ *un morphisme plat. On pose* $X'_1 = X' \times_X X_1$ *(de sorte que* X'_1 *est localement noethérien) et on note* $f_1: X'_1 \to X_1$ *et* $g_1: X'_1 \to X'$ *les projections canoniques. Alors,* f_1 *vérifie les conditions* a) *et* b) *de* (21.10.14), *et pour tout* 1*-cycle codimensionnel* Z′ *sur* X′, *on a*

(21.10.16.1) $$g^*(f_*(Z')) = (f_1)_*(g_1^*(Z')).$$

Il est clair que f_1 est fini, et il vérifie la condition *b)* de (21.10.14) en vertu de (2.3.7). Pour prouver (21.10.16.1), on est aussitôt ramené au cas où X, X′ et X_1 sont des spectres d'anneaux locaux noethériens de dimension 1, A, A′ et A_1, A′ étant un A-module fini et A_1 un A-module plat. Désignant par x, x' et x_1 les points fermés de X, X′ et X_1 respectivement, il s'agit de voir que l'on a

(21.10.16.2) $$\sum_{x'_1} \lambda_{x'_1} [\boldsymbol{k}(x'_1) : \boldsymbol{k}(x_1)] = \lambda_{x_1} [\boldsymbol{k}(x') : \boldsymbol{k}(x)]$$

où x'_1 parcourt l'ensemble des points fermés de X'_1 (i.e. l'ensemble des points à la fois au-dessus de x' et de x_1) et où $\lambda_{x'_1} = \operatorname{long}(\mathcal{O}_{X'_1, x'_1} / \mathfrak{m}_{x'} \mathcal{O}_{X'_1, x'_1})$ et $\lambda_{x_1} = \operatorname{long}(A_1 / \mathfrak{m}_x A_1)$. Comme on a

$$[\boldsymbol{k}(x'_1) : \boldsymbol{k}(x')] . [\boldsymbol{k}(x') : \boldsymbol{k}(x)] = [\boldsymbol{k}(x'_1) : \boldsymbol{k}(x_1)] . [\boldsymbol{k}(x_1) : \boldsymbol{k}(x)]$$

le premier membre de (21.10.16.2) s'écrit aussi

$$\frac{[\boldsymbol{k}(x') : \boldsymbol{k}(x)]}{[\boldsymbol{k}(x_1) : \boldsymbol{k}(x)]} \operatorname{long}_{A'}(A'_1 / \mathfrak{m}_{x'} A'_1) = \operatorname{long}_{A_1}(A'_1 / \mathfrak{m}_{x'} A'_1)$$

où on a posé $A'_1 = A' \otimes_A A_1$. On a donc $A'_1 / \mathfrak{m}_{x'} A'_1 = (A' / \mathfrak{m}_{x'}) \otimes_A A_1$, et comme A_1 est un A-module plat, on a par (4.7.1)

$$\begin{aligned} \operatorname{long}_{A_1}(A'_1 / \mathfrak{m}_{x'} A'_1) &= \operatorname{long}_A(A' / \mathfrak{m}_{x'}) \operatorname{long}_{A_1}(A_1 / \mathfrak{m} A_1) \\ &= [\boldsymbol{k}(x') : \boldsymbol{k}(x)] . \lambda_{x_1} \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Proposition **(21.10.17)**. — *Soient* X, X′ *deux préschémas localement noethériens,* $f: X' \to X$ *un morphisme fini localement libre. Alors* f *vérifie la condition* b) *de* (21.10.14), *et pour tout diviseur* D′ *sur* X′, *on a*

(21.10.17.1) $$f_*(\operatorname{cyc}(D')) = \operatorname{cyc}(f_*(D')).$$

Comme f est plat et fini, la condition *b)* de (21.10.14) et la relation $f(X'^{(1)}) \subset X^{(1)}$ résultent de (6.1.1). La définition (21.10.14.1) montre qu'on peut se ramener au cas où $X = \operatorname{Spec}(A) = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ pour un $x \in X^{(1)}$; alors $X' = \operatorname{Spec}(A')$, où A′ est une

A-algèbre qui est un A-module *libre* de rang fini; en outre, on peut supposer que $D' = \operatorname{div}(t')$, où t' est un élément régulier de A'; on a alors $f_*(D') = \operatorname{div}(t)$, où $t = N_{A'/A}(t')$ est un élément régulier de A (21.5.2). On peut se borner au cas où t' n'est pas inversible dans A', ce qui équivaut au fait que t ne l'est pas dans A; l'anneau A/tA est alors de longueur finie et $\neq 0$, et A'/tA' est composé direct d'anneaux locaux artiniens A'_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$, le corps résiduel de A'_i étant $\boldsymbol{k}(x'_i)$, où x'_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ sont les points de X' au-dessus de x. Si t'_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ est l'image de t' dans A'_i, $A'/t'A'$ est composé direct des $A'_i/t'_i A'_i$; comme le produit $\operatorname{long}_{A'_i}(A'_i/t'_i A'_i) . [\boldsymbol{k}(x'_i) : \boldsymbol{k}(x)]$ est égal à $\operatorname{long}_A(A'_i/t'_i A'_i)$, on voit que la multiplicité au point x du premier membre de (21.10.17.1) est $\operatorname{long}_A(A'/t'A')$, si bien que la formule à démontrer se réduit à

(21.10.17.2) $$\operatorname{long}_A(A'/t'A') = \operatorname{long}_A(A/tA).$$

Cette relation découle du lemme plus général suivant :

Lemme **(21.10.17.3)**. — *Soient* A *un anneau local noethérien de dimension* 1, M *un* A-*module libre de rang fini, u un endomorphisme injectif de* M. *Alors on a*

(21.10.17.4) $$\operatorname{long}_A(\operatorname{Coker} u) = \operatorname{long}_A(A/(\det u)A).$$

Distinguons plusieurs cas.

I) A *est un anneau de valuation discrète*. Soit en effet π une uniformisante de A, et remarquons que $\operatorname{long}_A(A/\pi^k A) = k$; si n est le rang de M et si π^{m_i} $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont les facteurs invariants de u, Coker(u) est somme directe des A-modules $A/\pi^{m_i}A$, donc a pour longueur $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$, et $\det(u)$ est produit d'un élément inversible et de t^m, d'où la conclusion dans ce cas (Bourbaki, *Alg.*, chap. VII, § 4, n° 5, cor. 1 de la prop. 4).

II) A *est un anneau complet intègre* (*de dimension* 1). On sait alors (**0**, 19.8.8, (ii)) qu'il y a un sous-anneau B de A, qui est un anneau de valuation discrète, tel que $B \to A$ soit un homomorphisme local faisant de A un B-module de type fini; comme ce B-module est évidemment sans torsion, il est *libre* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VI, § 3, n° 6, lemme 1). Notons M' l'ensemble M muni de sa structure de B-module (libre), par u' l'endomorphisme u considéré comme B-endomorphisme. Il résulte de I) que l'on a

(21.10.17.5) $$\operatorname{long}_B(\operatorname{Coker} u') = \operatorname{long}_B(B/(\det u')B).$$

Mais on a (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 12, n° 2, prop. 7)

$$\det u' = N_{A/B}(\det u),$$

donc, en appliquant (21.10.17.4) à l'homothétie $x \rightsquigarrow (\det u)x$ du B-module libre A, il vient

$$\operatorname{long}_B(B/(\det u')B) = \operatorname{long}_B(A/(\det u)A),$$

d'où, en portant dans (21.10.17.5) et divisant par $[\boldsymbol{k}(A) : \boldsymbol{k}(B)]$, longueur du B-module $\boldsymbol{k}(A)$, on obtient (21.10.17.4) dans le cas envisagé.

III) A *est un anneau complet.* Notons qu'on peut supposer en outre que $\mathfrak{m}\notin\mathrm{Ass}(A)$; en effet, puisque $\det(u)$ est un élément régulier de A, si l'on avait $\mathfrak{m}\in\mathrm{Ass}(A)$, on en déduirait $\det(u)\notin\mathfrak{m}$, donc $\det(u)$ serait inversible, u un automorphisme de M, et la formule (21.10.17.4) devient alors triviale, les deux membres étant nuls.

Dans ce qui suit, pour un endomorphisme v d'un module N sur un anneau R, tel que $\mathrm{Ker}\, v$ et $\mathrm{Coker}\, v$ soient de *longueur finie*, on posera

$$\chi(N, v) = \mathrm{long}_R(\mathrm{Ker}(v)) - \mathrm{long}_R(\mathrm{Coker}(v)).$$

On notera que l'hypothèse sur v revient à dire que le complexe

$$K^0 : 0 \to N \xrightarrow{v} N \to 0$$

a ses modules de cohomologie de longueur finie et que $\chi(N, v) = \chi(H^0(K^0))$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 11.10). On en déduit que si N', N, N'' sont trois R-modules, si l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "r"] \arrow[d, "v'"'] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "v"'] & N'' \arrow[r] \arrow[d, "v''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "r"'] & N \arrow[r, "s"'] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes, et si deux des trois nombres $\chi(N, v)$, $\chi(N', v')$ et $\chi(N'', v'')$ sont définis, alors il en est de même du troisième et on a

(21.10.17.6) $$\chi(N, v) = \chi(N', v') + \chi(N'', v'').$$

Cela résulte en effet aussitôt de la suite exacte de cohomologie.

Enfin, si N est un R-module de *longueur finie*, on a $\chi(N, v) = 0$.

Avec ces notations, on a le lemme suivant :

Lemme **(21.10.17.7).** — *Soient* A *un anneau local noethérien de dimension* 1 *dont l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *est tel que* $\mathfrak{m}\notin\mathrm{Ass}(A)$; *soient* $\mathfrak{p}_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ *les idéaux premiers minimaux de* A. *Soient* M *un* A*-module libre de type fini, u un endomorphisme de* M *tel que* $\chi(M, u)$ *soit défini ; pour chaque i, posons* $M_i = M\otimes_A(A/\mathfrak{p}_i)$ *et soit u_i l'endomorphisme* $u\otimes 1_{A/\mathfrak{p}_i}$ *de* M_i ; *alors si* $\chi(M_i, u_i)$ *est défini pour chaque i, on a*

(21.10.17.8) $$\chi(M, u) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{long}(A_{\mathfrak{p}_i}) . \chi(M_i, u_i).$$

Puisque $\mathfrak{m}\notin\mathrm{Ass}(A)$, on a une décomposition primaire réduite unique $(0) = \bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} \mathfrak{q}_i$, où l'idéal $\mathfrak{q}_i$ est $\mathfrak{p}_i$-primaire pour $1\leqslant i\leqslant n$. Si l'on pose $M'_i = M\otimes_A(A/\mathfrak{q}_i)$, on a donc une suite exacte

$$0 \to M \to \bigoplus_i M'_i \to M'' \to 0$$

de A-modules, où M'' est de *longueur finie* : en effet, en localisant la suite exacte précédente en chacun des $\mathfrak{p}_i$, on obtient $M''_{\mathfrak{p}_i} = 0$, car $(\mathfrak{q}_i)_{\mathfrak{p}_i} = 0$ et $(\mathfrak{q}_i)_{\mathfrak{p}_j} = A_{\mathfrak{p}_j}$ pour $j\neq i$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 4, prop. 6), donc $(M'_i)_{\mathfrak{p}_i} = M_{\mathfrak{p}_i}$ et $(M'_j)_{\mathfrak{p}_i} = 0$;

le support de M'' étant donc réduit à $\mathfrak{m}$, M'' est de longueur finie (**0**, 16.1.10). Si l'on pose $u'_i = u \otimes 1_{A/\mathfrak{q}_i}$, et si u'' est l'endomorphisme de M'' déduit de $\bigoplus_i u'_i$ par passage aux quotients, on déduit de (21.10.17.6) que $\chi(M, u) + \chi(M'', u'') = \sum_{i=1}^{n} \chi(M'_i, u'_i)$, et puisque M'' est de longueur finie, $\chi(M'', u'') = 0$. Pour prouver (21.10.17.8), on peut donc se ramener au cas où $n = 1$. On désignera alors par $\mathfrak{p}$ l'unique idéal premier minimal, qui est le nilradical de A; si $A_0 = A/\mathfrak{p}$, $M_0 = M \otimes_A A_0$, $u_0 = u \otimes 1_{A_0}$, il s'agit de prouver que si $\chi(M_0, u_0)$ est défini, on a

(21.10.17.9) $$\chi(M, u) = \operatorname{long} A_{\mathfrak{p}} . \chi(M_0, u_0).$$

Soit $\mathfrak{n}_j$ $(0 \leqslant j \leqslant r)$ la « puissance symbolique *j-ème* » de $\mathfrak{p}$, image réciproque dans A de l'idéal $(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})^j$ de $A_{\mathfrak{p}}$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$, avec $\mathfrak{n}_0 = A$ et $\mathfrak{n}_r = 0$; posons

$$M_j = \mathfrak{n}_j M / \mathfrak{n}_{j+1} M \qquad (0 \leqslant j \leqslant r-1),$$

et notons v_j l'endomorphisme de M_j déduit de u par restriction à $\mathfrak{n}_j M$ et passage aux quotients. Nous allons d'abord montrer que chacun des nombres $\chi(M_j, v_j)$ est défini et que l'on a

(21.10.17.10) $$\chi(M, u) = \sum_j \chi(M_j, v_j).$$

La première assertion entraînera la seconde, en appliquant (21.10.17.6) à chacune des suites exactes

$$0 \to \mathfrak{n}_j M / \mathfrak{n}_{j+1} M \to M / \mathfrak{n}_{j+1} M \to M / \mathfrak{n}_j M \to 0.$$

Pour prouver la première assertion, on note que si m est le rang du A-module libre M, M_j est isomorphe à $(\mathfrak{n}_j / \mathfrak{n}_{j+1})^m$, ou encore (puisque $\mathfrak{p}$ annule chacun des quotients $\mathfrak{n}_j / \mathfrak{n}_{j+1}$), M_j est un A_0-module isomorphe à $M_0 \otimes_{A_0} (\mathfrak{n}_j / \mathfrak{n}_{j+1})$. Désignons par l_j le *rang* du A_0-module $\mathfrak{n}_j / \mathfrak{n}_{j+1}$; comme le corps des fractions K_0 de A_0 est le corps résiduel de $A_{\mathfrak{p}}$, l_j est aussi la longueur du $A_{\mathfrak{p}}$-module $(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})^j / (\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})^{j+1}$. Il y a un système de générateurs du A_0-module M_j qui contient une base de $M_j \otimes_{A_0} K_0$; donc il y a un A_0-homomorphisme

$$w_j : M_0^{l_j} \to M_j$$

dont le localisé en l'idéal (0) de A_0 est un isomorphisme, de sorte que le support de $\operatorname{Ker}(w_j)$ et de $\operatorname{Coker}(w_j)$ est réduit à l'idéal maximal $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$ de A_0; $\operatorname{Ker}(w_j)$ et $\operatorname{Coker}(w_j)$ sont donc des A_0-modules de longueur finie (**0**, 16.1.10). Comme par hypothèse $\chi(M_0, u_0)$ est défini, il en est de même de $\chi(M_0^{l_j}, u_0^{l_j}) = l_j \chi(M_0, u_0)$ et en vertu de (21.10.17.6) et du fait que $\operatorname{Ker}(w_j)$ et $\operatorname{Coker}(w_j)$ sont de longueur finie, on voit que $\chi(M_j, v_j)$ est défini et égal à $l_j \chi(M_0, u_0)$; la relation (21.10.17.10) donne alors

$$\chi(M, u) = (\sum_j l_j) \chi(M_0, u_0),$$

et en vertu d'une remarque précédente, $\sum_j l_j$ n'est autre que la longueur de $A_{\mathfrak{p}}$, ce qui achève de prouver le lemme (21.10.17.7).

Pour appliquer ce lemme lorsque A est un anneau complet et $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}(A)$, on observe que si u est injectif, il en est de même des u_i (avec les notations du lemme) : en effet, $\det u$ est alors un élément régulier de A, donc n'appartient à aucun des $\mathfrak{p}_i$, et son image $\det u_i$ dans $A/\mathfrak{p}_i$ est par suite un élément $\neq 0$ de cet anneau intègre, ce qui prouve que u_i est injectif. Comme $\mathrm{Coker}(u_i)$ est image de $\mathrm{Coker}(u)$, il est aussi de longueur finie et $\chi(M_i, u_i)$ est donc défini pour tout i; on a par suite la formule (21.10.17.8). D'autre part, puisque $\det(u)$ est un élément régulier de A, il n'est contenu dans aucun des $\mathfrak{p}_i$; l'idéal $(\det u)A$ est donc $\mathfrak{m}$-primaire et le quotient $A/(\det u)A$ de longueur finie. Appliquant le même raisonnement que ci-dessus à l'homothétie injective $t : \xi \rightarrow (\det u)\xi$ de A et à ses images $t_i = \det u_i$ dans les $A/\mathfrak{p}_i$, il vient

$$\chi(A, t) = \sum_i \mathrm{long}(A_{\mathfrak{p}_i}) \cdot \chi(A/\mathfrak{p}_i, t_i).$$

Mais les anneaux $A/\mathfrak{p}_i$ sont intègres et complets, et en appliquant le résultat de II) à chacun d'eux, on obtient encore la relation (21.10.17.4) pour M et u.

IV) *Cas général.* Posons $A' = \hat{A}$, $M' = M \otimes_A A'$, $u' = u \otimes 1_{A'}$; on a $\det(u') = \det(u)$, et par platitude, $\mathrm{Coker}(u') = (\mathrm{Coker}(u))_{(A')}$ et $A'/(\det u)A' = (A/(\det u)A)_{(A')}$; comme la formule (21.10.17.4) est vraie pour A' et u' en vertu de III), elle est aussi vraie pour A et u en vertu de (4.7.1).

Ceci termine donc la démonstration de (21.10.17).

Proposition **(21.10.18).** — *Soient* X, X′ *deux préschémas localement noethériens,* $f : X' \rightarrow X$ *un morphisme fini, transformant tout point maximal de* X′ *en un point maximal de* X, *et vérifiant pour tout* $x' \in X'$ *l'une des conditions* (ii), (iii), (iv) *de* (21.10.10). *On suppose en outre qu'il existe un entier n tel que, pour tout point maximal x de* X, $(f_*(\mathcal{O}_{X'}))_x$ *soit un* $\mathcal{O}_{X,x}$*-module libre de rang n. Alors, pour tout cycle* 1*-codimensionnel* Z *sur* X, *on a*

(21.10.18.1) $$f_*(f^*(Z)) = n . Z$$

(« formule de projection »).

En vertu des définitions, on est aussitôt ramené au cas où X est spectre d'un anneau local noethérien A de dimension 1, de point fermé x, et où $Z = \overline{\{x\}}$; posons $X' = \mathrm{Spec}(A')$ où A' est une A-algèbre finie, et, pour tout idéal premier minimal $\mathfrak{p}_i$ de A, $A'_{\mathfrak{p}_i}$ est un $A_{\mathfrak{p}_i}$-module libre de rang n. Montrons qu'on peut se borner en outre au cas où A est *complet.* Faisons en effet le changement de base $h : Y \rightarrow X$, où $Y = \mathrm{Spec}(B)$, avec $B = \hat{A}$, et posons $Y' = X' \times_X Y = \mathrm{Spec}(B \otimes_A A')$ et $g = f_{(Y)} : Y' \rightarrow Y$; le morphisme g est alors fini, et comme h est plat, les points maximaux de Y sont au-dessus de ceux de X; au-dessus de chacun des $\mathfrak{p}_i$, il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux minimaux $\mathfrak{p}_{ij}$ de B, et $(B \otimes_A A')_{\mathfrak{p}_{ij}}$ est un $B_{\mathfrak{p}_{ij}}$-module libre de rang n. Enfin, si f vérifie l'une des conditions (ii), (iii) ou (iv) de (21.10.10) en chacun des points x' de $f^{-1}(x)$, g vérifie la condition correspondante en l'unique point y' de $g^{-1}(y)$ au-dessus de x' (en désignant par y le point fermé de Y); c'est immédiat pour les conditions (ii) et (iv); pour la condition (iii), elle implique que A est un anneau de valuation discrète, donc il en est de même de B, et la condition

$\mathfrak{m}_{y'} \notin \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{Y',y'})$ résulte, par platitude, de la condition $\mathfrak{m}_{x'} \notin \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X',x'})$ (3.3.1). Le morphisme g vérifie donc les mêmes conditions que f; si l'on prouve la formule (21.10.18.1) pour g et $\overline{\{y\}}$, la même formule sera valable pour f et $\overline{\{x\}}$, en vertu de (21.10.16.1).

On peut donc supposer que A est *complet*; alors il en est de même de A' qui est donc composé direct d'anneaux locaux complets; on peut par suite se borner au cas où A' est un anneau *local*, et il reste à vérifier (21.10.18.1) dans chacun des cas (ii), (iii), (iv) pour le point fermé x' de X'. Dans le cas (ii), A' étant un A-module plat de type fini, est un A-module libre ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 10.1.3), de rang n en vertu de l'hypothèse. Or, on a par définition (21.10.1 et 21.10.3) $f^*(Z) = \lambda_{x'} . \overline{\{x'\}}$, où $\lambda_{x'}$ est la longueur du A'-module $A'/\mathfrak{m}_x A'$, puis $f_*(f^*(Z)) = (\lambda_{x'}[\boldsymbol{k}(x') : \boldsymbol{k}(x)]) . \overline{\{x\}}$; mais $\lambda_{x'}[\boldsymbol{k}(x') : \boldsymbol{k}(x)]$ est la longueur de $A'/\mathfrak{m}_x A' = A' \otimes_A \boldsymbol{k}(x)$ en tant que A-module, ou encore son rang en tant que $\boldsymbol{k}(x)$-espace vectoriel, donc est égal à n.

Dans le cas (iii), A est un anneau de valuation discrète, donc régulier, et l'hypothèse $\mathfrak{m}_{x'} \notin \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X',x'})$ entraîne que A' est un anneau de Cohen-Macaulay ($\mathbf{0}$, 16.4.6); comme $\dim(A') = \dim(A) = 1$ que $A'/\mathfrak{m}_x A'$ est un anneau artinien, il résulte de (6.1.5) que A' est un A-module *plat* et on est ramené au cas (ii).

Dans le cas (iv), si K est l'anneau total des fractions de A, $K' = A' \otimes_A K$ est par hypothèse un K-module libre de rang n et par définition (21.10.10), on a $f^*(Z) = (n/[\boldsymbol{k}(x') : \boldsymbol{k}(x)]) . \overline{\{x'\}}$, d'où $f_*(f^*(Z)) = n . \overline{\{x\}}$. C.Q.F.D.

On notera que la formule (21.10.18.1) est applicable en particulier lorsque le morphisme f est *fini* et *plat* et tel que pour tout point maximal x de X, $(f_*(\mathcal{O}_{X'}))_x$ soit un $\mathcal{O}_{X,x}$-module libre de rang n.

Corollaire **(21.10.19)**. — *Sous les hypothèses de* (21.10.18), *soit* D *un diviseur sur* X *tel que* $f^*(D)$ *soit défini* (21.4.5); *alors on a*

$$f_*(\mathrm{cyc}(f^*(D))) = n . \mathrm{cyc}(D). \tag{21.10.19.1}$$

Cela résulte de (21.10.18) et (21.10.13).

21.11. Factorialité des anneaux locaux réguliers.

Théorème **(21.11.1)** (Auslander-Buchsbaum) — *Un anneau local noethérien régulier est factoriel.*

La démonstration qui suit est due à I. Kaplansky.

Soit A un anneau local noethérien régulier de dimension n; nous allons raisonner par récurrence sur n. Pour $n = 0$, A est un corps et pour $n = 1$, un anneau de valuation discrète, donc principal (et *a fortiori* factoriel). Supposons donc $n \geqslant 2$ et le théorème démontré pour des anneaux réguliers de dimension $< n$. Posons $X = \mathrm{Spec}(A)$, désignons par a le point fermé de X et posons $U = X - \{a\}$. En tout point $y \in U$, on a $\dim(\mathcal{O}_{X,y}) \leqslant n - 1$, et puisque A est régulier, les anneaux $\mathcal{O}_{X,y}$ le sont aussi ($\mathbf{0}$, 17.3.2), donc l'hypothèse de récurrence entraîne qu'ils sont factoriels. De plus on a $\mathrm{prof}(A) = \dim(A) \geqslant 2$ puisque A est régulier, donc de Cohen-Macaulay ($\mathbf{0}$, 17.1.3).

Utilisant (21.6.14), on est ramené à prouver que $\mathrm{Pic}(\mathrm{U})=0$. Considérons donc un $\mathcal{O}_{\mathrm{U}}$-Module inversible $\mathscr{L}$, et prouvons qu'il est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathrm{U}}$. Il résulte de (**I**, 9.4.5) qu'il existe un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module *cohérent* $\mathscr{F}$ tel que $\mathscr{F}|\mathrm{U}=\mathscr{L}$. Comme A est régulier, donc de dimension cohomologique finie (**0**, 17.3.1), il existe une résolution gauche *finie* de $\mathscr{F}$:

$$0 \leftarrow \mathscr{F} \leftarrow \mathcal{O}_{\mathrm{X}}^{n_1} \leftarrow \mathcal{O}_{\mathrm{X}}^{n_2} \leftarrow \ldots \leftarrow \mathcal{O}_{\mathrm{X}}^{n_h} \leftarrow 0$$

(**0**, 17.2.8 et **0**, 17.2.2, (iii)). Par restriction à U, on a donc une résolution finie

$$\textbf{(21.11.1.1)} \qquad 0 \leftarrow \mathscr{L} \leftarrow \mathcal{O}_{\mathrm{U}}^{n_1} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{U}}^{n_2} \leftarrow \ldots \leftarrow \mathcal{O}_{\mathrm{U}}^{n_h} \leftarrow 0.$$

Le théorème résultera alors des considérations générales suivantes. Sur un espace annelé X, soit $\mathscr{E}$ un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module localement libre de rang fini; on désignera par $\Lambda^{\max}\mathscr{E}$ le $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module inversible qui, au voisinage de chaque point de X, est égal à $\Lambda^p\mathscr{E}$, en désignant par p le *rang* de $\mathscr{E}$ dans ce voisinage (qui peut varier avec la composante connexe de X). Avec cette notation, on a le

Lemme (**21.11.1.2**). — *Soient* X *un espace annelé en anneaux locaux, et*

$$0 \leftarrow \mathscr{E}_0 \xleftarrow{u_0} \mathscr{E}_1 \leftarrow \ldots \leftarrow \mathscr{E}_h \leftarrow 0$$

une suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modules localement libres de rang fini; alors le $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module inversible $\bigotimes_{0\leqslant i\leqslant h}(\Lambda^{\max}\mathscr{E}_i)^{\otimes(-1)^i}$ *est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$.*

Montrons comment ce lemme permettra de conclure la preuve de (21.11.1). Il suffit de noter pour cela que, pour tout entier n, $\Lambda^{\max}(\mathcal{O}_{\mathrm{U}}^n)=\Lambda^n\mathcal{O}_{\mathrm{U}}^n$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathrm{U}}$, ainsi que $\mathcal{O}_{\mathrm{U}}^{\otimes(-1)}$. Comme d'autre part $\Lambda^{\max}\mathscr{L}=\mathscr{L}$ pour tout $\mathcal{O}_{\mathrm{U}}$-Module inversible $\mathscr{L}$, le lemme (21.11.1.2), appliqué à la suite exacte (21.11.1.1) montre que $\mathscr{L}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathrm{U}}$.

Reste à prouver (21.11.1.2); on procède par récurrence sur h, le lemme étant trivial pour $h=1$. Pour $h>1$, $\mathscr{N}=\mathrm{Ker}(u_0)$ est un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module localement libre de rang fini ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.5.5), et on a les deux suites exactes

$$0 \leftarrow \mathscr{E}_0 \leftarrow \mathscr{E}_1 \leftarrow \mathscr{N} \leftarrow 0$$
$$0 \leftarrow \mathscr{N} \leftarrow \mathscr{E}_2 \leftarrow \ldots \leftarrow \mathscr{E}_h \leftarrow 0$$

En vertu de l'hypothèse de récurrence, $(\Lambda^{\max}\mathscr{N})\otimes(\bigotimes_{2\leqslant i\leqslant h}(\Lambda^{\max}\mathscr{E}_i)^{\otimes(-1)^{i-1}})$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$; il suffira donc de définir un isomorphisme canonique $(\Lambda^{\max}\mathscr{N})\otimes(\Lambda^{\max}\mathscr{E}_0) \xrightarrow{\sim} \Lambda^{\max}\mathscr{E}_1$ pour achever la démonstration. Or, il existe un recouvrement ouvert (U_α) de X tel que dans tout U_α, $\mathscr{E}_1|\mathrm{U}_\alpha$ soit somme directe de $\mathscr{N}|\mathrm{U}_\alpha$ et d'un $\mathcal{O}_{\mathrm{U}_\alpha}$-Module localement libre $\mathscr{M}_\alpha$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.5.5), d'où un isomorphisme canonique $v_\alpha : \mathscr{M}_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_0|\mathrm{U}_\alpha$. Comme on a un isomorphisme canonique

$$r_\alpha : (\Lambda^{\max}\mathscr{N}|\mathrm{U}_\alpha)\otimes(\Lambda^{\max}\mathscr{M}_\alpha) \xrightarrow{\sim} (\Lambda^{\max}\mathscr{E}_1)|\mathrm{U}_\alpha$$

on en déduit au moyen de v_α un isomorphisme

$$u_\alpha : (\Lambda^{\max}\mathscr{N}|\mathrm{U}_\alpha)\otimes(\Lambda^{\max}\mathscr{E}_0|\mathrm{U}_\alpha) \xrightarrow{\sim} \Lambda^{\max}\mathscr{E}_1|\mathrm{U}_\alpha$$

et il s'agit de montrer que u_α et u_β coïncident dans $U_\alpha \cap U_\beta$ pour deux indices quelconques α, β. Or, si v'_α et v'_β sont les restrictions à $U_\alpha \cap U_\beta$ de v_α et v_β respectivement, on a $v'_\alpha = v'_\beta \circ w_{\beta\alpha}$, où $w_{\beta\alpha} : \mathscr{M}_\alpha | (U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_\beta | (U_\alpha \cap U_\beta)$ est la « projection parallèle à N » telle que pour toute section $s \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathscr{M}_\alpha)$, $w_{\beta\alpha}(s) = s + t$ avec $t \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathscr{N})$; l'identité de u_α et de u_β résulte aussitôt de ce fait et de la définition de l'isomorphisme canonique r_α (Bourbaki, *Alg.*, chap. III, 3ᵉ éd.).

21.12. Le théorème de pureté de Van der Waerden pour l'ensemble de ramification d'un morphisme birationnel.

(21.12.1) Soient X et U deux préschémas, $f : U \rightarrow X$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé, de sorte que $f_*(\mathcal{O}_U)$ est une $\mathcal{O}_X$-Algèbre quasi-cohérente (1.7.4). On appelle *enveloppe affine* du X-préschéma U le X-préschéma affine sur X

$$U^0 = \mathrm{Aff}(U/X) = \mathrm{Spec}(f_*(\mathcal{O}_U)) = \mathrm{Spec}(\mathscr{A}(U)) \quad (\mathbf{II}, 1.1.1).$$

Si $f^0 : U^0 \rightarrow X$ est le morphisme structural, on a donc par définition

$$\mathscr{A}(U^0) = f^0_*(\mathcal{O}_{U^0}) = f_*(\mathcal{O}_U) = \mathscr{A}(U),$$

et à l'isomorphisme identique de $f_*(\mathcal{O}_U)$ il correspond par (**II**, 1.2.7) un X-morphisme canonique

$$i_U : U \rightarrow U^0. \tag{21.12.1.1}$$

Pour que i_U soit un *isomorphisme*, il faut et il suffit évidemment que le morphisme $f : U \rightarrow X$ soit *affine*.

Pour tout X-préschéma V *affine* sur X, l'application $u \leadsto u \circ i_U$ est une *bijection*

$$\mathrm{Hom}_X(U^0, V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_X(U, V)$$

fonctorielle en V : cela résulte de l'existence des bijections canoniques

$$\mathrm{Hom}_X(U, V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{A}(V), \mathscr{A}(U))$$

et $\mathrm{Hom}_X(U^0, V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{A}(V), \mathscr{A}(U^0))$ (**II**, 1.2.7).

On peut donc dire que U^0 *représente* le foncteur covariant $V \leadsto \mathrm{Hom}_X(U, V)$ dans la catégorie des X-préschémas affines sur X ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 8.1.11). On en déduit ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 8.1.7) que pour X fixé, $U \leadsto \mathrm{Aff}(U/X)$ est un foncteur covariant de la catégorie des X-préschémas quasi-compacts et quasi-séparés sur X, dans la catégorie des X-préschémas affines sur X; de façon plus précise, si U_1, U_2 sont deux X-préschémas quasi-compacts et quasi-séparés sur X, à tout X-morphisme $g : U_1 \rightarrow U_2$ correspond l'unique X-morphisme $g^0 : U_1^0 \rightarrow U_2^0$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{g} & U_2 \\ {\scriptstyle i_{U_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_{U_2}} \\ U_1^0 & \xrightarrow[g^0]{} & U_2^0 \end{array}$$

Plus généralement, considérons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{v} & U' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ X & \xrightarrow[u]{} & X' \end{array}$$

où les morphismes f, f' sont quasi-compacts et quasi-séparés et le morphisme u *affine*. Si l'on pose $h = u \circ f$, on a $h_*(\mathcal{O}_U) = u_*(f_*(\mathcal{O}_U)) = u_*(f^0_*(\mathcal{O}_{U^0}))$ et $u \circ f^0$ est un morphisme affine; on a par suite $U^0 = \mathrm{Aff}(U/X')$ (relativement au morphisme h), d'où un unique X'-morphisme $v^0 : U^0 \to U'^0$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{v} & U' \\ {\scriptstyle i_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_{U'}} \\ U^0 & \xrightarrow[v^0]{} & U'^0 \end{array}$$

Proposition **(21.12.2)**. — *Soient* $f : U \to X$ *un morphisme quasi-compact et quasi-séparé,* $h : X' \to X$ *un morphisme* plat; *on pose* $U' = U \times_X X'$, $f' = f_{(X')} : U' \to X'$. *Alors on a un* X'*-isomorphisme canonique*

(21.12.2.1) $$\mathrm{Aff}(U'/X') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aff}(U/X) \times_X X'.$$

En effet, on a $\mathrm{Aff}(U'/X') = \mathrm{Spec}(f'_*(\mathcal{O}_{U'}))$, et $\mathrm{Aff}(U/X) \times_X X' = \mathrm{Spec}(h^*(f_*(\mathcal{O}_U)))$ (**II**, 1.5.1); l'isomorphisme de l'énoncé provient de l'isomorphisme canonique $h^*(f_*(\mathcal{O}_U)) \xrightarrow{\sim} f'_*(\mathcal{O}_{U'})$ (2.3.1).

Corollaire **(21.12.3)**. — *Pour tout morphisme quasi-compact et quasi-séparé* $f : U \to X$ *et tout* $x \in X$, *on a, à un isomorphisme canonique près*

$$U^0 \times_X \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) = (U \times_X \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}))^0.$$

Il résulte aussi de (21.12.2) que l'on a, à un isomorphisme canonique près, pour tout ouvert V de X

(21.12.4) $$(f^{-1}(V))^0 = (f^0)^{-1}(V).$$

(21.12.5) Nous allons considérer en particulier le cas où $f : U \to X$ est une *immersion ouverte*, U s'identifiant donc à un préschéma induit sur un ouvert de X. Comme le morphisme $f^{-1}(U) \to U$ est l'identité, il résulte de (21.12.4) que le morphisme $(f^0)^{-1}(U) \to U$ restriction de f^0 est un isomorphisme, $i_U : U \to U^0$ étant donc une *immersion ouverte* permettant d'identifier U à un préschéma induit sur un ouvert de U^0.

Plus généralement, pour un ouvert V de X, la restriction $(f^0)^{-1}(V) \to V$ de f^0 est un isomorphisme de $(f^0)^{-1}(V)$ sur le préschéma induit sur l'ouvert $V \cap U$ si et seulement si l'immersion ouverte $U \cap V \to V$ est un morphisme *affine*. Il est clair (**II**, 1.2.1) que la réunion de ces ouverts V est le *plus grand* d'entre eux, U_1, qui contient U; en vertu de ce qui précède, U_1 est aussi le plus grand ouvert ne rencontrant pas l'ensemble

$$\mathrm{Daf}(U/X) = f^0(U^0) - U$$

(« défaut d'affinité » de l'ouvert U relativement à X, qui est vide si et seulement si U est affine sur X); autrement dit, l'ensemble fermé $Z = X - U_1$ est l'*adhérence* de l'ensemble Daf(U/X).

On notera que pour tout morphisme *plat* $h : X' \to X$, si l'on pose $U' = h^{-1}(U)$, on a

(21.12.5.1) $$\mathrm{Daf}(U'/X') = h^{-1}(\mathrm{Daf}(U/X))$$

comme il résulte aussitôt de (21.12.2.1) et de (**I**, 3.4.8). En particulier, pour tout ouvert V de X, on a

(21.12.5.2) $$\mathrm{Daf}((U \cap V)/V) = \mathrm{Daf}(U/X) \cap V$$

et pour tout $x \in X$,

(21.12.5.3) $$\mathrm{Daf}((U \cap \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}))/\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})) = \mathrm{Daf}(U/X) \cap \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}).$$

Nous allons, lorsque X est localement noethérien, donner des précisions sur la nature de l'ensemble Daf(U/X), qui montreront par exemple que lorsque U est partout dense dans X, Daf(U/X) n'est pas un ensemble fermé rare quelconque :

Théorème **(21.12.6)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* U *un ouvert non vide de* X, $f : U \to X$ *l'injection canonique. Alors :*

(i) *L'adhérence* $Z = X - U_1$ *de* Daf(U/X) *est de codimension* ≥ 2 *dans* X.

(ii) *Si* $T = X - U \supset Z$ *est de codimension* ≥ 2, *le morphisme* $f^0 : U^0 \to X$ *est surjectif.*

(i) Montrons d'abord que pour tout point $x \in \mathrm{Daf}(U/X)$ on a nécessairement $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) > 1$. En effet, x ne peut évidemment être point maximal de X, étant contenu dans $\overline{U} - U$; il s'agit donc de voir que l'on ne peut avoir $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = 1$. Or, cette relation entraînerait, par (21.12.5.3), $x \in \mathrm{Daf}(U^{(x)}/\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}))$, où $U^{(x)} = U \cap \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$. Mais les seuls ouverts de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ sont $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ lui-même et les parties de l'ensemble (fini) des points maximaux de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$. Or, l'ensemble ouvert réduit à un point maximal de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ est affine, par définition des préschémas; on en conclut que *tous* les ensembles ouverts dans $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ sont affines, donc $\mathrm{Daf}(U^{(x)}/\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})) = \emptyset$ contrairement à l'hypothèse faite.

Pour prouver (i) il faut montrer davantage, savoir que si $x \in X$ est tel que $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = 1$, il existe un voisinage ouvert W de x dans X tel que W ne rencontre pas Daf(U/X), c'est-à-dire tel que l'injection canonique $f_W : U \cap W \to W$ soit affine. Mais, avec les mêmes notations que ci-dessus, on vient de voir que l'injection canonique $f^{(x)} : U^{(x)} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ est affine. On peut évidemment se borner au cas où X est noethérien; comme le morphisme f est de présentation finie, la conclusion résulte de (8.10.5, (viii)) appliqué suivant la méthode de (8.1.2, *a)*).

(ii) Il s'agit de prouver que pour tout point $x \in T$, on a $x \in f^0(U^0)$; nous allons montrer d'abord qu'on peut se réduire au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau local noethérien *complet*, et x le point fermé de X. Pour cela, il suffit de faire le changement de base $h : X' = \mathrm{Spec}(A) \to X$, où $A = \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$; si l'on pose $U' = h^{-1}(U)$, $f' = f_{(X')}$ est l'injection canonique $U' \to X'$, et puisque le morphisme h est *plat*, il résulte de (21.12.2) que si l'on prouve que x appartient à $f'^0(U'^0)$, on en déduira que $x \in f^0(U^0)$. En vertu de (6.1.1), on a bien opéré la réduction cherchée.

Soit alors X_1 un sous-préschéma fermé réduit de X ayant pour espace sous-jacent une composante irréductible de X, de dimension *maximale*, parmi celles qui contiennent une composante irréductible de T, et posons $U_1 = U \cap X_1$, $T_1 = T \cap X_1 = X_1 - U_1$; on a donc $\mathrm{codim}(T_1, X_1) \geqslant 2$ (**0**, 14.2.1), et le couple (U_1, X_1) vérifie donc les mêmes hypothèses que le couple (U, X) (X_1 étant spectre d'un anneau quotient de A, donc local noethérien et complet). On a par ailleurs un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_1"'] & U \arrow[d, "f"] \\ X_1 \arrow[r, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

où i et j sont les injections canoniques, i étant donc un morphisme *affine*; on en déduit (21.12.1) l'existence d'un morphisme $j^0 : U_1^0 \to U^0$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} U_1^0 \arrow[r, "j^0"] \arrow[d, "f_1^0"'] & U^0 \arrow[d, "f^0"] \\ X_1 \arrow[r, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

et par suite, pour prouver que $x \in f^0(U^0)$, il suffit de prouver que $x \in f_1^0(U_1^0)$. On peut donc remplacer X par X_1, et on peut par suite supposer que l'anneau A est en outre *intègre*. Mais A est quotient d'un anneau noethérien régulier en vertu du théorème de Cohen (**0**, 19.8.8, (i)) et puisqu'il est intègre, on peut appliquer (5.11.1) avec la famille (x_α) réduite au seul point maximal de X; comme $\mathrm{codim}(T, X) \geqslant 2$ par hypothèse, on voit que $f_*(\mathcal{O}_U)$ est un $\mathcal{O}_X$-Module *cohérent*, donc le morphisme $f^0 : U^0 \to X$ est *fini*; comme ce morphisme est dominant (U étant partout dense), il est surjectif (**II**, 6.1.10), et par suite $x \in f^0(U^0)$. C.Q.F.D.

Corollaire (**21.12.7**). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* U *un sous-préschéma induit sur un ouvert de* X, $j : U \to X$ *l'immersion canonique; supposons que j soit un morphisme* affine. *Alors toute composante irréductible de* $T = X - U$ *est de codimension* $\leqslant 1$ *(et par suite de codimension* 1 *si* U *est partout dense).*

Supposons en effet qu'une des composantes irréductibles T_1 de T soit de codimension $\geqslant 2$ dans X. Remplaçant au besoin X par un voisinage ouvert du point générique de T_1, on peut supposer T irréductible et de codimension $\geqslant 2$. Mais alors l'hypothèse que $j : U \to X$ est affine implique que U^0 s'identifie à U et j^0 à j, autrement dit que $j^0(U^0) = U$; or, cela contredit la conclusion de (21.12.6) qui, sous l'hypothèse de dimension faite implique que j^0 doit être surjectif.

(21.12.8) Soient A un anneau local noethérien $Y = \mathrm{Spec}(A)$, y l'unique point fermé de Y, $Y' = Y - \{y\}$. Considérons la condition suivante :

(W) *Pour tout ouvert* U *de* Y *contenu dans* Y', *ne contenant aucune composante irréductible de* Y' *et tel que l'immersion canonique* $U \to Y'$ *soit affine*, U *est lui-même un ouvert affine.*

Cette condition est entraînée par la suivante :

(W') *Pour toute partie fermée* T *de* Y *dont toute composante irréductible est de codimension* 1 *dans* Y, *et tel que pour toute composante irréductible* Y_i *de* Y, *on ait* $Y_i \cap T \neq \{y\}$, *l'ouvert* $U = Y - T$ *est affine.*

En effet, si (W') est vérifiée et si l'ouvert U de Y vérifie l'hypothèse de (W), il résulte de (21.12.7) qu'aucune composante irréductible de $T = Y - U$ ne peut être de codimension $\geqslant 2$; comme par ailleurs U ne contient aucune des composantes irréductibles $Y_i - \{y\}$ de Y', la condition (W') montre que U est affine.

On notera que la condition (W') se simplifie lorsque Y est *irréductible* et est alors équivalente à la suivante :

(W'') *Pour toute partie fermée irréductible* T *de* Y, *de codimension* 1 *dans* Y, $Y - T$ *est un ouvert affine.*

En effet, il est clair que (W') entraîne (W'') lorsque Y est irréductible, et la réciproque est vraie en considérant les composantes irréductibles de T et en notant que l'intersection d'un nombre fini d'ouverts affines est un ouvert affine (**I**, 5.5.6).

Exemples **(21.12.9)**. — Si A est un anneau local noethérien *factoriel*, il vérifie (W') (et *a fortiori* (W)), puisque tout idéal premier de hauteur 1 est principal (**I**, 1.3.6). Mais il y a des anneaux locaux noethériens non factoriels vérifiant (W'), par exemple ceux de dimension $\leqslant 1$: en effet, on a remarqué dans la démonstration de (21.12.6, (i)) que *tous* les ouverts de Y sont alors affines. On peut d'autre part prouver en utilisant la théorie de la dualité locale (chap. III, 3$^{\mathrm{e}}$ partie) que tout anneau local noethérien de dimension 2 vérifie (W').

L'intérêt de la condition (W) réside dans le résultat suivant :

Proposition **(21.12.10)**. — *Soient* X, Y *deux préschémas localement noethériens*, $g : X \to Y$ *un morphisme*, y *un point fermé de* Y, $Y' = Y - \{y\}$, $X' = g^{-1}(Y')$; *supposons que le morphisme* $g' : X' \to Y'$ *restriction de* g *soit une immersion ouverte, et que l'anneau local* $\mathcal{O}_{Y,y}$ *vérifie la condition* (W) (21.12.8). *Alors, pour toute composante irréductible* Z *de* $X_y = g^{-1}(y)$, ou bien Z *est de codimension* $\leqslant 1$ *dans* X, ou bien *son point générique est isolé dans* Z. *Si* Z *est localement de type fini sur* $\boldsymbol{k}(y)$, *la seconde alternative implique que* Z *est réduit à un seul point.*

La dernière assertion de l'énoncé résulte de ce que Z est alors un préschéma de Jacobson (10.4.7), et comme l'ensemble des points fermés de Z est alors dense dans Z, le point générique de Z ne peut être isolé dans Z que si Z est réduit à un seul point.

Supposons qu'il existe dans X_y une composante irréductible Z dont le point générique z n'est pas isolé dans Z, et telle que $\mathrm{codim}(Z, X) \geqslant 2$. La question étant locale sur X et Y puisque z est non isolé dans Z, on peut, en remplaçant X par un voisinage ouvert de z dans X, supposer X et Y affines, $X_y = Z$ *irréductible, non réduit à un point* et telle que $\operatorname{codim}(X_y, X) \geqslant 2$. L'image $g(X - X_y) = U$ est un ouvert de Y' isomorphe à $X - X_y$ par hypothèse; montrons qu'en remplaçant au besoin X par un voisinage ouvert de z dans X, on peut supposer que U ne contient aucune des composantes irréductibles de Y' dont l'adhérence contient y. En effet, on peut tout d'abord supposer que tous les points maximaux de X sont des générisations de z, l'ensemble de ces points étant fini; donc l'ensemble des points maximaux de U est l'ensemble des images y_i par g des points maximaux x_i de X (aucun point maximal de X ne pouvant par hypothèse être contenu dans X_y, puisque $\dim(\mathcal{O}_{X,z}) \geqslant 2$). Posons $X_i = \overline{\{x_i\}}$. Par hypothèse, on a $z \in X_i$ et puisque z n'est pas isolé dans X_y, il existe dans X_y un point $x \neq z$. Comme $X_i \neq Z$, il existe dans X_i un point t_i tel que si l'on pose $T_i = \overline{\{t_i\}}$, on ait $\dim(\mathcal{O}_{T_i,x}) = 1$ (10.5.9); cela entraîne par hypothèse $t_i \notin Z$, donc t_i n'est pas une générisation de z. Remplaçant X par $X' = X - \bigcup_i T_i$, on voit que l'image par g de $X' - X'_y$ ne contient pas les images $g(t_i)$, donc ne contient aucune des composantes irréductibles de Y' dont l'adhérence contient y. Cela étant, comme X et Y sont affines, le morphisme $g : X \to Y$ est affine, donc il en est de même de la restriction $g' : X' \to Y'$; puisque g' est une immersion ouverte, l'immersion canonique $U \to Y'$ est affine. Posons $Y_1 = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$, $Y'_1 = Y_1 - \{y\} = Y' \cap Y_1$, $U_1 = U \cap Y_1$. Ce qui précède prouve que l'immersion canonique $U_1 \to Y'_1$ est affine, donc U_1 est un ouvert affine dans Y_1 en vertu de (W), en d'autres termes l'immersion canonique $U_1 \to Y_1$ est affine. Mais puisque cette immersion est de présentation finie (1.6.2), il résulte de (8.10.5, (viii)) appliqué suivant la méthode de (8.1.2, *a)*) qu'en restreignant au besoin Y à un voisinage ouvert affine de y, on peut supposer que l'immersion $U \to Y$ est affine. On en conclurait que l'ouvert $X - X_y$ de X, isomorphe à U, serait affine, ce qui contredirait (21.12.7); la proposition est ainsi démontrée.

Corollaire **(21.12.11)**. — *Soient* X, Y *deux préschémas localement noethériens,* X *étant supposé irréductible; soit* $g : X \to Y$ *un morphisme localement de type fini, et soit* V *le plus grand ouvert de* X *tel que la restriction* $g|V : V \to Y$ *soit un isomorphisme local. Supposons que pour tout point* $y \in Y$, *l'anneau local* $\mathcal{O}_{Y,y}$ *vérifie la condition* (W) (21.12.8). *Alors toute composante irréductible de* $T = X - V$ *est,* ou bien *de codimension* $\leqslant 1$, ou bien *telle que son point générique* z *soit isolé dans* $g^{-1}(g(z))$.

Posons $g(z) = y$. La question ne dépendant que de la fibre $g^{-1}(y)$ et de l'anneau $\mathcal{O}_{X,z}$, on peut par changement de base, se borner au cas où $Y = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$ et où X est affine ((**I**, 3.6.5) et (**I**, 4.5.5)); remplaçant éventuellement X par un voisinage ouvert de z dans X, on peut supposer que T est irréductible; en outre on peut se borner au cas où V est non vide. Le morphisme g peut donc être supposé *séparé* et y fermé dans Y; puisque la restriction $g|V : V \to Y$ est un isomorphisme local et que l'ouvert non vide V de X est irréductible, il résulte de (**I**, 8.2.8) que $g|V : V \to Y$ est une *immersion ouverte.* La restriction $g|(V \cap X_y) : V \cap X_y \to \{y\} = \operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$ est donc aussi une immersion ouverte, ce qui montre que $V \cap X_y$ est, soit vide, soit réduit à un point x rationnel sur $\boldsymbol{k}(y)$, donc *fermé* dans X_y (**I**, 6.4.2). Remplaçant encore éventuellement X par un voisinage ouvert plus petit de z dans X, on peut donc se borner au cas où $V \cap X_y = \emptyset$, autrement dit $T \supset X_y$; comme d'autre part $z \in X_y$ est le point générique de T, on a $g(T) \subset \overline{\{y\}} = \{y\}$, autrement dit $T = X_y$. On est alors exactement dans les conditions d'application de (21.12.10), d'où la conclusion.

Théorème (**21.12.12**) (van der Waerden). — *Soient* X, Y *deux préschémas localement noethériens intègres,* $g: X \rightarrow Y$ *un morphisme birationnel et localement de type fini. On suppose en outre que* Y *est normal et que pour tout* $y \in Y$, *l'anneau* $\mathcal{O}_{Y,y}$ *vérifie la condition* (W) *de* (21.12.8) (conditions remplies en particulier lorsque Y est *localement factoriel* (21.12.9)). *Si* V *est le plus grand ouvert de* X *tel que la restriction* $g|V: V \rightarrow Y$ *soit un isomorphisme local, toutes les composantes irréductibles de* $T = X - V$ *sont de codimension* 1 *dans* X.

On notera que puisque g est birationnel, l'ensemble ouvert V n'est pas vide; il suffit donc de prouver qu'un point maximal z de T ne peut être isolé dans X_y, où $y = g(z)$. Mais, quitte à se restreindre à un voisinage ouvert de z, on peut se borner au cas où $T = X_y$; alors toutes les fibres $g^{-1}(y')$ $(y' \in Y)$ seraient vides ou réduites à un point et il résulterait du « Main theorem » (8.12.10) que g serait un isomorphisme local, contrairement à l'hypothèse $z \in T$.

Corollaire (**21.12.13**). — *Supposons vérifiées les hypothèses de* (21.12.12) *et en outre, supposons que g soit quasi-fini en chacun des points de* $X^{(1)}$ (on rappelle que ce sont les points où $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = 1$) ; *alors g est un isomorphisme local, et si de plus g est séparé, g est une immersion ouverte.*

Il suffit de prouver la première assertion, la seconde étant une conséquence de la première et de (**I**, 8.2.8). Tout revient à prouver, avec les notations de (21.12.12), que $T = \emptyset$; dans le cas contraire, un point générique z d'une composante irréductible de T appartiendrait à $X^{(1)}$ en vertu de (21.12.12), et par hypothèse il serait isolé dans X_y avec $y = g(z)$; mais on a vu dans la démonstration de (21.12.12) que cela n'est pas possible.

Remarques (**21.12.14**). — (i) La conclusion de (21.12.12) s'applique lorsque Y est *régulier* et intègre et X intègre, car en vertu du théorème d'Auslander-Buchsbaum (21.11.1), Y est alors localement factoriel. Par contre, on connaît des exemples où X et Y sont des schémas algébriques normaux de dimension 3, sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, et où la conclusion de (21.12.12) n'est plus valable.

(ii) L'ensemble T de (21.12.12) est aussi l'ensemble des points où g est *ramifié.* En effet, si g est non ramifié en un point $x \in X$, il est aussi non ramifié dans un voisinage ouvert affine U de x (17.3.7), donc $g|U$ est un morphisme séparé, quasi-fini et birationnel (17.4.3). Puisque Y est normal, on conclut du « Main theorem » (**III**, 4.4.9) que g est un isomorphisme local au point x, donc $x \in X - T$. Réciproquement, g est évidemment non ramifié en tout point où il est un isomorphisme local. Ceci justifie le titre donné à cette section.

(iii) Sans supposer que Y soit localement factoriel, mais en supposant par contre que X est intersection complète relativement à Y (chap. V), nous verrons au chap. V qu'on a un résultat plus précis que (21.12.12), en exprimant T comme cycle 1-codimensionnel d'une section d'un $\mathcal{O}_X$-Module inversible, canoniquement associée à g. Ceci s'appliquera notamment quand X et Y sont tous deux réguliers, ou lorsque g est un S-morphisme, X et Y étant des préschémas lisses sur S.

(iv) On peut se demander si (21.12.10) admet une réciproque; autrement dit, pour un anneau local noethérien donné A, si l'on pose $Y=\mathrm{Spec}(A)$, y désignant le point fermé de Y, et si, pour tout préschéma localement noethérien X et tout morphisme $g : X \to Y$ tel que $g' : X' \to Y'$ soit une immersion ouverte, toute composante irréductible de X_y est de codimension $\leqslant 1$ dans X ou est réduite à un point, alors est-il vrai que A vérifie la condition (W) de (21.12.8) ?

(v) Soient Y un préschéma intègre *régulier*, X un préschéma localement noethérien *normal*, $g : X \to Y$ un morphisme localement de type fini; supposons en outre que, si η est le point générique de Y, la fibre X_η soit *étale* sur $\boldsymbol{k}(\eta)$, et soit T' le complémentaire du plus grand ouvert V' de X tel que $g|V' : V' \to Y$ soit *étale*; est-il vrai alors que toutes les composantes irréductibles de T' soient de codimension 1 ? Il en est bien ainsi lorsqu'on suppose en outre que g est *localement quasi-fini* (« *théorème de pureté* » de Zariski-Nagata). On peut montrer que la conjecture précédente serait conséquence de la suivante (et lui serait même équivalente si la conjecture de (iv) était vérifiée) : pour un anneau local régulier A contenu dans un anneau local intègre et intégralement clos B, tel que B soit un A-module fini, l'ouvert U des points de Spec(B) en lesquels Spec(B) est non ramifié sur Spec(A) (ou, ce qui revient au même par (18.10.1), étale sur Spec(A)) est *affine*.

Proposition (**21.12.15**). — *Soient* S *un préschéma,* $g : X \to S$ *un morphisme plat et localement de présentation finie, dont les fibres* $X_s = g^{-1}(s)$ *sont géométriquement irréductibles* (4.5.2), $h : Y \to S$ *un morphisme lisse; on note* $Y_s = h^{-1}(s)$ *les fibres de ce morphisme. Soit* $f : X \to Y$ *un* S-*morphisme propre tel que, pour tout point maximal* η *de* S, *le morphisme* $f_\eta : X_\eta \to Y_\eta$ *soit un isomorphisme. Alors* f *est un isomorphisme.*

Puisque h est plat, tout point maximal de Y est au-dessus d'un point maximal de S (2.3.4), donc la réunion des Y_η, lorsque η parcourt l'ensemble des points maximaux de S, est dense dans Y; comme les f_η sont des isomorphismes, f est dominant et par suite *surjectif* puisqu'il est propre. Il suffit donc de montrer que f est une *immersion ouverte*. Compte tenu de (17.9.5), il suffit de prouver que pour tout $s \in S$, $f_s : X_s \to Y_s$ est une immersion ouverte. Comme tout $s \in S$ est générisation d'un point maximal η, on peut déjà, en faisant le changement de base $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S',s}) \to S$, où S' est le sous-préschéma réduit de S ayant $\overline{\{\eta\}}$ comme espace sous-jacent, se ramener au cas où S est un schéma *local* et *intègre* de point fermé s : les fibres aux points η et s ne sont en effet pas changées et les propriétés des morphismes g, h et f se conservent par changement de base. En outre, la question est locale sur Y; remplaçant Y par un voisinage ouvert affine U dans Y d'un point de Y_s, et X par $f^{-1}(U)$, qui est quasi-compact puisque f est propre, on voit qu'on peut supposer en outre que X et Y sont de *présentation finie* sur S. Il existe alors un sous-anneau local noethérien A_0 de $A = \mathcal{O}_{S,s}$ tel que $A_0 \to A$ soit un homomorphisme local, deux morphismes de type fini $g_0 : X_0 \to S_0 = \mathrm{Spec}(A_0)$, $h_0 : Y_0 \to S_0$ et un S_0-morphisme

$f_0 : X_0 \to Y_0$ tels que g, h et f se déduisent de g_0, h_0, f_0 par le changement de base $S \to S_0$ ((8.9.1) et (5.13.3)); on peut en outre supposer g_0 plat (11.2.7), h_0 lisse (17.7.9) et f_0 propre (8.10.5, (xii)). D'autre part, la projection sur S_0 du point générique η de S est le point générique η_0 de S_0 et il résulte de (2.7.1, (viii)) que le morphisme $(f_0)_{\eta_0} : (X_0)_{\eta_0} \to (Y_0)_{\eta_0}$ est un isomorphisme; enfin le point fermé s de S est au-dessus du point fermé s_0 de S_0, donc la fibre $(X_0)_{s_0}$ de g_0 est géométriquement irréductible (4.5.6). On voit donc qu'on peut se borner au cas où S est le spectre d'un anneau local intègre *noethérien*, de point fermé s, affaiblir l'hypothèse sur les fibres en supposant seulement que X_s et X_η sont géométriquement irréductibles, et prouver que sous ces hypothèses f_s est une immersion ouverte. Il y a alors un anneau de valuation discrète A' et un morphisme $S' = \mathrm{Spec}(A') \to S$ qui transforme le point fermé a de S' en s et le point générique b de S' en η (**II**, 7.1.9); soient $g' : X' \to S'$, $h' : Y' \to S'$, $f' : X' \to Y'$ les morphismes déduits de g, h, f par le changement de base $S' \to S$, qui vérifient de nouveau les hypothèses vérifiées par g, h, et f dans l'énoncé (21.12.15); si l'on prouve que $f'_a : X'_a \to Y'_a$ est une immersion ouverte, il résultera de (2.7.1, (x)) qu'il en sera de même de $f_s : X_s \to Y_s$. On peut donc finalement se borner au cas où S est le *spectre d'un anneau de valuation discrète*. Alors, puisque $h : Y \to S$ est lisse, Y est *régulier* (17.5.8), et puisque la question est locale sur Y, on peut se borner au cas où Y est *intègre*. Comme $g : X \to S$ est plat, les points maximaux de X sont contenus dans X_η (2.3.4) et puisque f_η est un isomorphisme, X est irréductible et l'anneau local en son point générique est un corps; de plus, par platitude (3.3.2), on voit que X n'a pas de cycles premiers immergés, donc X est réduit (3.2.1) et par suite *intègre* et f est un morphisme *birationnel* et séparé. Pour prouver que f est une immersion ouverte, on peut donc appliquer le critère (21.12.13); pour voir que f est quasi-fini aux points de $X^{(1)}$, on remarque que l'assertion est évidente en ceux de ces points qui appartiennent à X_η; le seul point de $X^{(1)}$ appartenant à X_s est le point générique x de X_s, en vertu de (6.1.1). Or, il résulte de (2.4.6) et de (14.2.2) que les morphismes g et h sont *équidimensionnels*; comme X_η et Y_η sont isomorphes, les composantes irréductibles de X_s et de Y_s ont toutes même dimension. Mais par hypothèse X_s est irréductible et on a vu que f est surjectif, donc il en est de même de $f_s : X_s \to Y_s$, ce qui entraîne que Y_s est aussi irréductible; si y est le point générique de Y_s, on a donc $f(x) = y$, et la relation $\dim(X_s) = \dim(Y_s)$ entraîne alors, en vertu de (5.6.6), que $\dim(f_s^{-1}(y)) = 0$, autrement dit f_s (et par suite aussi f) est bien *quasi-fini* au point x, ce qui achève la démonstration.

Corollaire (**21.12.16**). — *Soient* $g : X \to S$ *un morphisme propre, plat et de présentation finie,* $h : Y \to S$ *un morphisme lisse, propre et de présentation finie,* $f : X \to Y$ *un* S-*morphisme. On suppose que les fibres* $X_s = g^{-1}(s)$ *de* g *sont géométriquement irréductibles. Soit* U *l'ensemble des* $s \in S$ *tels que* $f_s : X_s \to Y_s$ *soit un isomorphisme. Alors* U *est ouvert et fermé dans* S, *et le morphisme* $g^{-1}(U) \to h^{-1}(U)$, *restriction de* f, *est un isomorphisme.*

La dernière assertion résultera de la première et de (17.9.5). On sait déjà (9.6.1, (xi)) que U est localement constructible dans S. En vertu de (1.10.1), il suffit de prouver que U est stable par *spécialisation* et par *générisation*. Pour démontrer ces assertions on peut, par un changement de base $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s}) \to S$, se ramener au cas où S est un schéma local de point fermé s et de point générique η, et il faut montrer que, pour que f_s soit un isomorphisme, il faut et il suffit que f_η le soit. Or, la suffisance de cette condition résulte de (21.12.15). Pour montrer qu'elle est nécessaire, on raisonne comme dans la démonstration de (21.12.15) (en remarquant, avec les mêmes notations, que la projection du point fermé de S est le point fermé de S_0) pour se ramener au cas où en outre S est *noethérien*; mais alors la conclusion résulte de (**III**, 4.6.7, (ii)).

Remarques **(21.12.17)**. — (i) La conclusion de la proposition (21.12.15) n'est plus valable si on élimine l'hypothèse que les fibres X_s sont *irréductibles*. Prenons en effet $S = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau de valuation discrète, $Y = \mathbf{P}^1_S$, qui est propre et lisse sur S (17.3.9). Notons encore s et η le point fermé et le point générique de S; soit z un point fermé de Y_s, par exemple un point rationnel sur $k = \boldsymbol{k}(s)$, et soit X le Y-préschéma obtenu en faisant éclater le point z. Comme l'anneau de polynômes A[T] est régulier (**0**, 17.3.7) et de dimension 2, on voit comme dans la démonstration de (15.1.1.6) que, si $f : X \to Y$ est le morphisme structural, $f^{-1}(z)$ est isomorphe à $\mathbf{P}^1_k$, et d'autre part, le complémentaire de $f^{-1}(z)$ dans X_s est isomorphe à $Y_s - \{z\}$, donc $Z_1 = f^{-1}(z)$ et Z_2, adhérence dans X_s du complémentaire de Z_1, sont les deux composantes irréductibles de X_s. Par ailleurs, f est évidemment propre et $g = h \circ f$ est plat, car X est intègre (**II**, 8.1.4) et pour tout ouvert affine U de X, l'homomorphisme $A \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ est injectif (**I**, 1.2.7), donc $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ est un A-module sans torsion, et par suite plat puisque A est un anneau de valuation discrète ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.3.4). Il est clair que $f_\eta : X_\eta \to Y_\eta$ est un isomorphisme, bien que $f_s : X_s \to Y_s$ n'en soit pas un.

(ii) La conclusion de (21.12.15) tombe aussi en défaut si, dans les hypothèses, on supprime l'hypothèse que f est *propre*. Il suffit pour le voir de définir S et Y comme dans (i), mais de remplacer X par le complémentaire X' de Z_2 dans le préschéma X défini dans (i), f par la restriction $f' : X' \to Y$ de f; le morphisme $g' : X' \to S$, restriction de g, est encore plat, et cette fois X'_s est géométriquement irréductible; X'_s est d'ailleurs isomorphe au complémentaire d'un point fermé dans $\mathbf{P}^1_k$, donc est un schéma affine isomorphe à $\mathbf{V}^1_k$; comme son image dans Y_s est réduite au point fermé z, f' n'est pas propre (**III**, 4.4.2) et f'_s n'est pas un isomorphisme, bien que f' en soit un.

(iii) Il se peut que l'énoncé de la proposition (21.12.15) reste valable quand on y remplace le mot « isomorphisme » par « morphisme étale » (cf. (21.12.14, (v))). Il en sera alors encore de même de (21.12.16).

21.13. Couples parafactoriels. Anneaux locaux parafactoriels.

Définition **(21.13.1)**. — *Soient* X *un espace annelé,* Y *une partie fermée de* X, $U = X - Y$. *On dit que le couple* (X, Y) *est* parafactoriel *si, pour tout ouvert* V *de* X, *le foncteur restriction* $\mathscr{L} \rightsquigarrow \mathscr{L}|(U \cap V)$, *de la catégorie des* $\mathcal{O}_V$*-Modules inversibles dans celle des* $\mathcal{O}_{U\cap V}$*-Modules inversibles, est une équivalence de catégories.*

Dire que le couple (X, Y) est parafactoriel signifie donc que, pour tout ouvert V de X, les conditions suivantes sont vérifiées :

1° le foncteur $\mathscr{L} \rightsquigarrow \mathscr{L}|(U \cap V)$ est *pleinement fidèle*, autrement dit, pour deux $\mathcal{O}_V$-Modules inversibles $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$, l'application de restriction

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathscr{L}, \mathscr{L}') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{U\cap V}}(\mathscr{L}|(U\cap V), \mathscr{L}'|(U \cap V))$$

est *bijective*;

2° le foncteur $\mathscr{L} \rightsquigarrow \mathscr{L}|(U \cap V)$ est *essentiellement surjectif*, autrement dit, pour tout $\mathcal{O}_{U\cap V}$-Module inversible $\mathscr{L}_0$, il existe un $\mathcal{O}_V$-Module inversible $\mathscr{L}$ tel que $\mathscr{L}_0$ soit isomorphe à $\mathscr{L}|(U\cap V)$; cela s'exprime encore en disant que l'homomorphisme canonique (21.3.2.4)

$$\mathrm{Pic}(V) \to \mathrm{Pic}(U\cap V)$$

est *surjectif.*

Lemme **(21.13.2)**. — *Soit $f: X'\to X$ un morphisme d'espaces annelés ; pour tout ouvert* V *de* X, *on note $f_V: f^{-1}(V)\to V$ la restriction de f. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour tout ouvert* V *de* X, *le foncteur $\mathscr{E}\rightsquigarrow f_V^*(\mathscr{E})$ de la catégorie des $\mathcal{O}_V$-Modules localement libres de rang fini dans la catégorie des $\mathcal{O}_{f^{-1}(V)}$-Modules localement libres de rang fini, est fidèle* (resp. *pleinement fidèle*).

a') *Pour tout ouvert* V *de* X, *le foncteur $\mathscr{L}\rightsquigarrow f_V^*(\mathscr{L})$ de la catégorie des $\mathcal{O}_V$-Modules localement libres de rang* 1 *dans la catégorie des $\mathcal{O}_{f^{-1}(V)}$-Modules localement libres de rang* 1 *est fidèle* (resp. *pleinement fidèle*).

b) *Pour tout ouvert* V *de* X, *l'homomorphisme canonique* ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 4.4.3.2) $\mathscr{E}\to(f_V)_*(f_V^*(\mathscr{E}))$ *est un monomorphisme* (resp. *un isomorphisme*) *pour tout $\mathcal{O}_V$-Module localement libre $\mathscr{E}$ de rang fini.*

b') *L'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_X\to f_*(\mathcal{O}_{X'})$ est un monomorphisme* (resp. *un isomorphisme*).

Supposons que l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_X\to f_*(\mathcal{O}_{X'})$ soit bijectif; alors, pour qu'un $\mathcal{O}_{X'}$-Module localement libre de rang fini $\mathscr{E}'$ soit isomorphe à un $\mathcal{O}_{X'}$-Module de la forme $f^*(\mathscr{E})$, où $\mathscr{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module localement libre de rang fini, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies :

(i) *$f_*(\mathscr{E}')$ est un $\mathcal{O}_X$-Module localement libre ;*

(ii) *l'homomorphisme canonique* ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 4.4.3.3) $f^*(f_*(\mathscr{E}'))\to\mathscr{E}'$ *est un isomorphisme.*

Lorsque ces deux conditions sont remplies, $\mathscr{E}$ est isomorphe à $f_*(\mathscr{E}')$.

Dire que le foncteur $\mathscr{E}\rightsquigarrow f_V^*(\mathscr{E})$ est fidèle (resp. pleinement fidèle) signifie que pour deux $\mathcal{O}_V$-Modules localement libres de rang fini $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_V}(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{f^{-1}(V)}}(f^*(\mathscr{E}_1), f^*(\mathscr{E}_2))$ est injective (resp. bijective); comme ceci doit avoir lieu en remplaçant V par un ouvert $W\subset V$ et $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ par $\mathscr{E}_1|W$, $\mathscr{E}_2|W$, et que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_W}(\mathscr{E}_1|W, \mathscr{E}_2|W)=\Gamma(W, \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2))$, la condition signifie encore que l'homomorphisme canonique de faisceaux

$$\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)\to(f_V)_*(f_V^*(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2))) \tag{21.13.2.1}$$

est injectif (resp. bijectif). Mais puisque $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ sont localement libres de rang fini, $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$, isomorphe à $\check{\mathscr{E}}_1\otimes_{\mathcal{O}_V}\mathscr{E}_2$ ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.4.2) est aussi localement libre de rang fini; cela montre déjà que *b)* entraîne *a)*, et inversement *b)* est un cas particulier de *a)*, compte tenu de l'isomorphisme $\mathscr{E}\xrightarrow{\sim}\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_V}(\mathcal{O}_V, \mathscr{E})$. Il est clair que *a')* est un cas particulier de *a)* et *b')* un cas particulier de *a')*. Inversement, comme *b)* est une propriété locale, on peut, pour la vérifier, se borner au cas où $\mathscr{E}=\mathcal{O}_V^n$, et cela montre que *b')* entraîne *b)*.

Si l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_X\to f_*(\mathcal{O}_{X'})$ est bijectif, et si les conditions (i) et (ii) sont remplies, il est clair que $\mathscr{E}'=f^*(\mathscr{E})$ avec $\mathscr{E}=f_*(\mathscr{E}')$, à un isomorphisme près.

Inversement, supposons que $\mathscr{E}'=f^*(\mathscr{E})$, avec $\mathscr{E}$ localement libre; la question étant locale sur X, on peut supposer que $\mathscr{E}=\mathcal{O}_X^n$, d'où $\mathscr{E}'=\mathcal{O}_{X'}^n$, et les conditions (i) et (ii) résultent de l'hypothèse que $\mathcal{O}_X \to f_*(\mathcal{O}_{X'})$ est un isomorphisme.

Dans ce numéro, nous appliquerons le lemme précédent à une injection canonique $j : U \to X$, où U est l'espace annelé induit par X sur un *ouvert* de X. Avec ces notations, (21.13.2) se traduit en :

Corollaire (**21.13.3**). — *Soient* X *un espace annelé,* Y *une partie fermée de* X, $U=X-Y$, $j : U \to X$ *l'injection canonique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour tout ouvert* V *de* X, *le foncteur restriction* $\mathscr{E} \rightsquigarrow \mathscr{E}|(U\cap V)$ *de la catégorie des* $\mathcal{O}_V$*-Modules localement libres de rang fini dans la catégorie des* $\mathcal{O}_{U\cap V}$*-Modules localement libres de rang fini est fidèle* (resp. *pleinement fidèle*).

a') *Pour tout ouvert* V *de* X, *le foncteur restriction* $\mathscr{L} \rightsquigarrow \mathscr{L}|(U\cap V)$ *de la catégorie des* $\mathcal{O}_V$*-Modules localement libres de rang* 1 *dans la catégorie des* $\mathcal{O}_{U\cap V}$*-Modules localement libres de rang* 1 *est fidèle* (resp. *pleinement fidèle*).

b) *Pour tout ouvert* V *de* X, *l'homomorphisme canonique* $\mathscr{E} \to (j_V)_*(\mathscr{E}|(U\cap V))$ *est injectif* (resp. *bijectif*) *pour tout* $\mathcal{O}_V$*-Module localement libre de rang fini* $\mathscr{E}$.

b') *L'homomorphisme canonique* $\mathcal{O}_X \to j_*(\mathcal{O}_U)$ *est injectif* (resp. *bijectif*).

Supposons que l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_X \to j_*(\mathcal{O}_U)$ *soit bijectif. Alors, pour qu'un* $\mathcal{O}_U$*-Module localement libre de rang fini* $\mathscr{F}$ *soit de la forme* $\mathscr{E}|U$, *où* $\mathscr{E}$ *est un* $\mathcal{O}_X$*-Module localement libre de rang fini, il faut et il suffit que* $j_*(\mathscr{F})$ *soit un* $\mathcal{O}_X$*-Module localement libre, et dans ce cas, on peut prendre* $\mathscr{E}=j_*(\mathscr{F})$.

Lemme (**21.13.4**). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Y *une partie fermée de* X, $U=X-Y$, $j : U \to X$ *l'injection canonique. Pour que l'homomorphisme canonique* $\mathcal{O}_X \to j_*(\mathcal{O}_U)$ *soit injectif* (resp. *bijectif*), *il faut et il suffit que* $\mathrm{prof}_Y(\mathcal{O}_X) \geqslant 1$ (resp. $\mathrm{prof}_Y(\mathcal{O}_X) \geqslant 2$) (autrement dit, que $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{X,x}) \geqslant 1$ (resp. $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{X,x}) \geqslant 2$) pour tout $x \in Y$).

Ces assertions sont en effet des cas particuliers de (5.10.2) et (5.10.5).

Proposition (**21.13.5**). — *Soient* X *un espace annelé,* Y *une partie fermée de* X, $U=X-Y$, $j : U \to X$ *l'injection canonique. Pour que le couple* (X, Y) *soit parafactoriel, il faut et il suffit que l'homomorphisme canonique* $\mathcal{O}_X \to j_*(\mathcal{O}_U)$ *soit bijectif, et que pour tout ouvert* V *de* X *et tout* $\mathcal{O}_{U\cap V}$*-Module inversible* $\mathscr{L}$, $(j_V)_*(\mathscr{L})$ *soit un* $\mathcal{O}_V$*-Module inversible* (*notation de* (21.13.3)).

C'est une conséquence immédiate de la définition (21.13.1) et de (21.13.3).

Corollaire (**21.13.6**). — *Soient* X *un espace annelé,* Y *une partie fermée de* X.

(i) *Si le couple* (X, Y) *est parafactoriel, il en est de même de* $(W, Y\cap W)$ *pour tout ouvert* W *de* X. *Inversement, si* (W_α) *est un recouvrement ouvert de* X *tel que chacun des couples* $(W_\alpha, Y\cap W_\alpha)$ *soit parafactoriel, alors le couple* (X, Y) *est parafactoriel.*

(ii) *Si le couple* (X, Y) *est parafactoriel, il en est de même de* (X, Y') *pour toute partie fermée* Y' *de* Y.

(iii) *Supposons que* X *soit un préschéma, et soient* X' *un préschéma,* $f : X' \to X$ *un morphisme fidèlement plat et quasi-compact; posons* $Y'=f^{-1}(Y)$. *Supposons que le couple* (X', Y') *soit parafactoriel et que l'ouvert* $U=X-Y$ *soit rétrocompact dans* X ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 9.1.1). *Alors le couple* (X, Y) *est parafactoriel.*

(i) Comme le fait que l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_X \to j_*(\mathcal{O}_U)$ soit bijectif est une propriété locale sur X, tout revient à voir (en vertu de (21.13.5)) en désignant par j_α l'injection canonique $U \cap W_\alpha \to W_\alpha$, que l'on a la propriété suivante : si, pour tout α et pour tout $\mathcal{O}_U$-Module inversible $\mathscr{L}$, $(j_\alpha)_*(\mathscr{L}|(U \cap W_\alpha))$ est un $\mathcal{O}_{W_\alpha}$-Module inversible, alors $j_*(\mathscr{L})$ est un $\mathcal{O}_X$-Module inversible. Mais la propriété d'être un $\mathcal{O}_X$-Module inversible est locale sur X, et (W_α) est un recouvrement ouvert de X; comme on a $j_*(\mathscr{L})|W_\alpha = (j_\alpha)_*(\mathscr{L}|(U \cap W_\alpha))$, cela prouve notre assertion.

(ii) Posons $U' = X - Y'$ et soit $j' : U' \to X$ l'injection canonique. Dire que l'homomorphisme $\mathcal{O}_X \to j'_*(\mathcal{O}_{U'})$ est bijectif revient à dire que pour tout ouvert V de X, l'homomorphisme $\Gamma(V, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(V \cap U', \mathcal{O}_X)$ est bijectif; mais l'homomorphisme composé

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(V \cap U', \mathcal{O}_X) \to \Gamma(V \cap U, \mathcal{O}_X)$$

est bijecti par hypothèse (21.13.5) et en remplaçant V par $V \cap U'$, on voit que $\Gamma(V \cap U', \mathcal{O}_X) \to \Gamma(V \cap U, \mathcal{O}_X)$ est bijectif, donc $\Gamma(V, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(V \cap U', \mathcal{O}_X)$ est bijectif. Notons ensuite que si $j'' : U \to U'$ est l'injection canonique et si $\mathscr{L}'$ est un $\mathcal{O}_{U'}$-Module inversible, $\mathscr{L}'|U$ est un $\mathcal{O}_X$-Module inversible, donc $j_*(\mathscr{L}'|U) = j'_*(j''_*(\mathscr{L}'|U))$ est par hypothèse un $\mathcal{O}_X$-Module inversible. Comme le couple $(U', U' \cap Y)$ est parafactoriel en vertu de (i), on a $j''_*(\mathscr{L}'|U) \cong \mathscr{L}'$, donc $j'_*(\mathscr{L}')$ est un $\mathcal{O}_X$-Module inversible. Il suffit alors pour conclure de remplacer dans le raisonnement précédent X, U et U' par V, $V \cap U$ et $V \cap U'$, où V est un ouvert de X.

(iii) Posons $U' = X' - Y' = f^{-1}(U)$ et notons que puisqu'il s'agit de préschémas, on peut écrire $U' = U \times_X X'$; soit $f_U : f^{-1}(U) \to U$ la restriction de f et soit $j' : U' \to X'$ l'injection canonique, qui s'écrit aussi $j_{(X')}$. Montrons d'abord que l'homomorphisme canonique $\rho : \mathcal{O}_X \to j_*(\mathcal{O}_U)$ est bijectif; pour cela, notons que par hypothèse l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{X'} \to j'_*(\mathcal{O}_{U'})$ est bijectif; mais puisque le morphisme j est quasi-compact et séparé par hypothèse, et le morphisme f plat, $j'_*(\mathcal{O}_{U'}) = j'_*(f_U^*(\mathcal{O}_U))$ s'identifie canoniquement à $f^*(j_*(\mathcal{O}_U))$ en vertu de (2.3.1); comme $\mathcal{O}_{X'} = f^*(\mathcal{O}_X)$, on voit que l'homomorphisme $f^*(\rho) : f^*(\mathcal{O}_X) \to f^*(j_*(\mathcal{O}_U))$ est bijectif; on en conclut que ρ est bijectif puisque f est fidèlement plat (2.2.7). Considérons ensuite un $\mathcal{O}_U$-Module inversible $\mathscr{L}$, et soit $\mathscr{L}' = f_U^*(\mathscr{L})$, qui est un $\mathcal{O}_{U'}$-Module inversible. Par hypothèse $j'_*(f_U^*(\mathscr{L}))$ est un $\mathcal{O}_{X'}$-Module inversible, qui est isomorphe à $f^*(j_*(\mathscr{L}))$ par (2.3.1) comme ci-dessus. Mais puisque f est fidèlement plat et quasi-compact, cela entraîne que $j_*(\mathscr{L})$ est un $\mathcal{O}_X$-Module localement libre (2.5.2). Pour achever la démonstration, il suffit de remplacer X par un ouvert V et X' par $f^{-1}(V)$ dans ce qui précède.

Définition **(21.13.7)**. — *On dit qu'un anneau local* A *est parafactoriel si, posant* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *et désignant par a le point fermé de* X, *le couple* $(X, \{a\})$ *est parafactoriel.*

Proposition **(21.13.8)**. — *Les notations étant celles de* (21.13.7), *on pose* $U = X - \{a\}$. *Pour que* A *soit parafactoriel, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions suivantes :*

(i) *L'homomorphisme canonique* $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ *est bijectif.*

(ii) $\mathrm{Pic}(U) = 0$.

Si en outre A *est noethérien, la condition* (i) *équivaut à*

(i *bis*) $\mathrm{prof}(A) \geqslant 2$.

En effet, le seul ouvert de X contenant a est X lui-même, et par suite tout $\mathcal{O}_X$-Module inversible est isomorphe à $\mathcal{O}_X$, autrement dit $\mathrm{Pic}(X)=0$; la première assertion résulte donc de la définition (21.13.1) et de (21.13.3). La seconde assertion n'est autre qu'un cas particulier de (21.13.4).

Exemples **(21.13.9)**. — (i) Un anneau local noethérien parafactoriel est nécessairement de dimension $\geqslant 2$ en vertu de (21.13.8); en d'autres termes un anneau local noethérien de dimension $\leqslant 1$ n'est pas parafactoriel.

(ii) Un anneau local noethérien *factoriel* A de dimension $\geqslant 2$ est parafactoriel, comme il résulte de (21.13.8) et de (21.6.14).

(iii) Si A est un anneau local noethérien de dimension $\geqslant 3$ et parafactoriel, il n'est pas nécessairement normal ni même réduit. Considérons un anneau local régulier B de dimension $\geqslant 3$, et soit $A=D_B(B)$ (**0**, 18.2.3), isomorphe à $B[T]/(T^2)$; on voit aussitôt que l'on a $\mathrm{prof}(A)=\mathrm{prof}(B)=\dim(B)\geqslant 3$. Pour montrer que A est parafactoriel, il suffit donc, avec les notations de (21.13.8), de prouver que $\mathrm{Pic}(U)=0$. Soit $\mathfrak{J}$ le noyau de l'augmentation $A\to B$, qui est tel que $\mathfrak{J}^2=0$ et qui, en tant que B-module, est isomorphe à B. Comme $B=A/\mathfrak{J}$, $X=\mathrm{Spec}(A)$ et $X_0=\mathrm{Spec}(B)$ ont même espace sous-jacent; si $\mathscr{J}=\widetilde{\mathfrak{J}}$, X_0 est le sous-schéma défini par $\mathscr{J}$; nous noterons U_0 le sous-préschéma induit par X_0 sur l'ouvert U. Pour tout $z\in\mathfrak{J}$, posons $\varphi(z)=1+z$; puisque $(1+z)(1-z)=1$, $1+z$ est inversible dans A et $\varphi(\mathfrak{J})$ est le noyau de l'homomorphisme surjectif canonique de groupes multiplicatifs $A^*\to B^*$; en d'autres termes, on a une suite exacte de groupes commutatifs

$$0 \to \mathfrak{J} \xrightarrow{\varphi} A^* \to B^* \to 1$$

(les trois derniers groupes étant multiplicatifs, les deux premiers additifs). Pour la même raison, pour tout $t\in A$, on a la suite exacte

$$0 \to \mathfrak{J}_t \xrightarrow{\varphi_t} (A_t)^* \to (B_{t_0})^* \to 1$$

en désignant par t_0 l'image de t dans B, puisque $B_{t_0}=A_t/\mathfrak{J}_t$; autrement dit, on a une suite exacte de faisceaux de groupes commutatifs sur l'espace topologique X

$$0 \to \mathscr{J} \xrightarrow{u} \mathcal{O}_X^* \to \mathcal{O}_{X_0}^* \to 1$$

d'où par restriction à l'ouvert U, une suite exacte

$$0 \to \mathscr{J}|U \to \mathcal{O}_U^* \to \mathcal{O}_{U_0}^* \to 1.$$

Par la suite exacte de cohomologie, on en déduit une suite exacte

(21.13.9.1) $$H^1(U, \mathscr{J}) \to H^1(U, \mathcal{O}_U^*) \xrightarrow{u_1} H^1(U, \mathcal{O}_{U_0}^*).$$

Mais puisque $\mathfrak{J}$ est un B-module isomorphe à B, on a $H^1(U, \mathscr{J})=H^1(U_0, \mathcal{O}_{U_0})$, et il résulte du chap. III, 3e partie (voir aussi [41, III, Exemple III-1]) que l'on a

$H^1(U_0, \mathcal{O}_{U_0}) = 0$ en raison de la relation $\mathrm{prof}(B) \geqslant 3$. Par ailleurs, comme B est factoriel, on a $H^1(U, \mathcal{O}^*_{U_0}) = \mathrm{Pic}(U_0) = 0$; on tire donc bien de la suite exacte précédente que $\mathrm{Pic}(U) = H^1(U, \mathcal{O}^*_U) = 0$.

(iv) Il existe aussi des anneaux locaux noethériens de dimension 3 qui sont intègres, intégralement clos et parafactoriels, mais non factoriels. Soit en effet B un anneau local noethérien, complet, intègre et intégralement clos, de dimension $\geqslant 2$ et non factoriel (par exemple le complété de l'anneau localisé de l'algèbre intègre $k[U, V, W]/(W^2 - UV)$ en l'idéal image de $(U)+(V)+(W)$). Alors il résulte de ce que l'on verra plus bas (21.14.2) que l'anneau local $A = B[[T]]$ des séries formelles en T sur B est parafactoriel, mais il n'est pas factoriel, sans quoi B le serait en vertu de (21.13.12) ci-dessous.

(v) On peut montrer qu'un anneau local d'intersection complète absolue (19.3.1) de dimension $\geqslant 4$, est parafactoriel (cf. [41, XI, 3.13 (i))]).

(vi) On a vu (Remarque (ii)) que tout anneau local noethérien factoriel A de dimension 2 est parafactoriel. Mais il y a des anneaux locaux noethériens de dimension 2 qui sont parafactoriels et non factoriels. On peut montrer que, pour qu'un anneau local noethérien A de dimension 2 soit parafactoriel et non factoriel, il faut et il suffit qu'il satisfasse aux trois conditions suivantes :

1° A est un anneau de Cohen-Macaulay (autrement dit $\mathrm{prof}(A) = 2$).

2° A est intègre et si A′ est sa clôture intégrale, A′ est factoriel et est une A-algèbre finie.

3° Soit $\mathfrak{J}$ le conducteur de A dans A′ (annulateur du A-module A′/A, ou encore le plus grand idéal de A′ contenu dans A); posons $B = A/\mathfrak{J}$, $B' = A'/\mathfrak{J}$; alors $\dim(B) = 1$ (ce qui implique $A' \neq A$, autrement dit A n'est pas intégralement clos), et l'application canonique $\mathrm{Div}(B) \to \mathrm{Div}(B')$ (21.4.5) est *surjective*.

On peut montrer en outre que ces conditions entraînent la propriété suivante :

4° L'anneau B′ (et *a fortiori* $B \subset B'$) est réduit, et le morphisme $\mathrm{Spec}(B') \to \mathrm{Spec}(B)$ est bijectif.

Si l'on pose $X = \mathrm{Spec}(A)$, $X' = \mathrm{Spec}(A')$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$, $Y' = \mathrm{Spec}(B')$, de sorte que Y (resp. Y′) est défini par l'idéal $\mathfrak{J}$ de A (resp. A′), le morphisme structural $f : X' \to X$ est un isomorphisme de $X' - Y'$ sur $X - Y$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 1, n° 5, cor. 5 de la prop. 16). On voit donc en vertu de 4° que f est un morphisme *bijectif*; en d'autres termes, X est un préschéma *unibranche* (6.15.1) (et en particulier A′ est un anneau *local* noethérien); en général X n'est pas géométriquement unibranche. L'espace Y, de dimension 1, est constitué par le point fermé x de X et les points maximaux y_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ de Y, et l'unique point y'_i de Y′ au-dessus de y_i est aussi un point maximal de Y′; comme B et B′ sont réduits, on en déduit que l'on a $\mathfrak{m}_z \mathcal{O}_{X', z'} = \mathfrak{m}_{z'}$ pour $z = y_i$ et $z' = y'_i$; cette relation est aussi vérifiée de façon évidente pour $z \notin Y$ et z' l'unique point de $f^{-1}(z)$, donc pour tout $z \in U = X - \{x\}$ et z' l'unique point de $f^{-1}(z)$. En particulier, si l'anneau A est de caractéristique 0 (**0**, 21.1.1) on voit que U′ est *non ramifié* sur U (mais *non* étale en général).

Nous nous bornerons ici à démontrer que les conditions 1°, 2°, 3° ci-dessus sont *suffisantes* pour que A soit parafactoriel. Or, en vertu de la condition 1° et de (21.13.8), il suffit de montrer que $\mathrm{Pic}(U) = 0$.

Puisque A′ est factoriel en vertu de 2°, on a $\mathrm{Pic}(U') = 0$, et on déduit de (21.8.5, (ii)) une suite exacte

$$1 \to \Big(\prod_{s \in S} \mathcal{O}'^*_{U,s}/\mathcal{O}^*_{U,s}\Big)/\mathrm{Im}\,\Gamma(U', \mathcal{O}^*_{U'}) \to \mathrm{Pic}(U) \to \mathrm{Pic}(U') \to 0$$

et il s'agit donc de montrer que le second terme de cette suite est réduit à l'élément neutre, en prenant pour S l'ensemble des y_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ et en notant qu'ici $\mathcal{O}'_X = f_*(\mathcal{O}_{X'})$ est la $\mathcal{O}_X$-Algèbre $\widetilde{A'}$. Soient $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}'_i$ les idéaux premiers de A et A′ correspondant aux points y_i, y'_i, et remarquons que $\mathfrak{p}'_i \cap A = \mathfrak{p}_i$; donnons-nous pour chaque i un élément inversible a'_i/s_i de $A'_{\mathfrak{p}_i}$, avec $a'_i \in A'$, $s_i \notin \mathfrak{p}_i$; comme nous n'avons à examiner que les groupes quotients $A'^*_{\mathfrak{p}_i}/A^*_{\mathfrak{p}_i}$, on peut supposer $s_i = 1$ pour tout i; soit $b'_i \in B' = A'/\mathfrak{J}$ l'image canonique de a'_i, de sorte que $b'_i/1$ est un élément $\neq 0$ de $\boldsymbol{k}(y_i) = \mathcal{O}_{Y', y'_i}$. L'ensemble $U \cap Y$ formé par les y_i est un ouvert affine de la forme $D(t)$ dans Y, avec $t \in \mathfrak{m}$, idéal maximal de A; il existe donc un élément inversible $b' \in B'_t$ dont les $b'_i/1$ sont les images canoniques, et comme t est régulier dans l'anneau intègre A′, on peut supposer b' de la forme b''/t^m, où $b'' \in B'$ est *inversible*. Soit a'' un élément de A′ dans la classe b'', qui est donc nécessairement inversible; $a' = a''/t^m$ est inversible dans A'_t et pour tout i, on a $u_i = a'' - a'_i t^m \in \mathfrak{J}$, d'où $t^m a'_i = a'' - u_i = a''(1 - a''^{-1} u_i)$; mais $a''^{-1} u_i \in \mathfrak{J} \subset \mathfrak{m}$, donc $1 - a''^{-1} u_i$ est un élément inversible de A, et les classes de a' et a'_i dans $A^*_{\mathfrak{p}'_i}/A^*_{\mathfrak{p}_i}$ sont les mêmes, ce qui achève la démonstration.

Pour avoir un exemple explicite d'anneau parafactoriel de dimension 2 obtenu de cette manière et *non factoriel*, considérons l'anneau $E = \mathbf{R}[[U, V]]/(U^2+V^2)$, dont la clôture intégrale E' s'identifie à $\mathbf{C}[[U]]$ (6.15.11). Si l'on pose $A = E[[T]]$, la clôture intégrale de A est l'anneau $A' = E'[[T]]$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 1, n° 4, prop. 14); on vérifie aussitôt que le conducteur de E dans E' est l'idéal maximal $\mathfrak{n}$ de E, donc le conducteur $\mathfrak{J}$ de A dans A' est $\mathfrak{n}[[T]]$, et on a $B = A/\mathfrak{J} \cong \mathbf{R}[[T]]$, $B' = A'/\mathfrak{J} \cong \mathbf{C}[[T]]$. Il est alors immédiat que les conditions 1°, 2° et 3° énoncées ci-dessus sont bien vérifiées, mais A n'est même pas intégralement clos.

On peut varier cet exemple, et le lecteur verra sans peine que si k est un corps algébriquement clos, l'anneau A, localisé de l'anneau $k[U, V, W]/(U^2-WV^2)$ en l'idéal maximal engendré par les images de U, V et W, vérifie aussi les conditions 1°, 2° et 3° ci-dessus.

Il se pourrait que ces trois conditions impliquent même que chacun des anneaux $B'/\mathfrak{p}'_i$ soit un anneau de valuation discrète, ce qui entraînerait que A' est même un anneau *régulier*.

Proposition (**21.13.10**). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Y *une partie fermée de* X. *Pour que le couple* (X, Y) *soit parafactoriel il faut et il suffit que, pour tout* $y \in Y$, *l'anneau local* $\mathcal{O}_{X,y}$ *soit parafactoriel.*

Posons $U = X - Y$ et soit $j : U \to X$ l'injection canonique.

En vertu de (21.13.4), dire que l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_X \to j_*(\mathcal{O}_U)$ soit injectif équivaut à dire que chacun des anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,y}$ pour $y \in Y$ satisfait à la condition (i *bis*) de (21.13.8).

Montrons d'abord que si le couple (X, Y) est parafactoriel, chacun des anneaux $\mathcal{O}_{X,y}$ ($y \in Y$) est parafactoriel. Compte tenu de la remarque précédente, tout revient à voir que, si l'on pose $T_y = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,y})$ et $U_y = T_y - \{y\}$, tout $\mathcal{O}_{U_y}$-Module inversible $\mathcal{L}_0$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{U_y}$. Or, lorsque V parcourt l'ensemble des voisinages ouverts affines de y dans X, il résulte de (8.2.13) et (**I**, 2.4.2) que le préschéma U_y est limite projective des préschémas induits par X sur les ouverts $V - (V \cap \overline{\{y\}})$ qui sont quasi-compacts puisque X est localement noethérien. Comme les $U_V = V - (V \cap \overline{\{y\}})$ sont séparés, il résulte alors de (8.5.2, (ii)) et (8.5.5) qu'il y a un voisinage ouvert affine V de y dans X et un $\mathcal{O}_{U_V}$-Module inversible $\mathcal{L}'_V$ tel que $\mathcal{L}_0$ soit le faisceau induit par $\mathcal{L}'_V$ sur U_y. Mais l'hypothèse entraîne, en vertu de (21.13.6, (i) et (ii)), que le couple $(V, V \cap \overline{\{y\}})$ est parafactoriel; on en conclut par définition (21.13.1) qu'il existe un $\mathcal{O}_V$-Module inversible $\mathcal{L}_V$ induisant $\mathcal{L}'_V$ sur U_V. Remplaçant au besoin V par un voisinage ouvert plus petit de y, on peut supposer que $\mathcal{L}_V$ est isomorphe à $\mathcal{O}_V$, d'où on conclut que $\mathcal{L}_0$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{U_y}$.

Inversement, prouvons que si tous les $\mathcal{O}_{X,y}$ ($y \in Y$) sont parafactoriels le couple (X, Y) est parafactoriel. On est évidemment ramené, compte tenu de la remarque du début, à montrer que pour tout $\mathcal{O}_U$-Module inversible $\mathcal{L}$, $j_*(\mathcal{L})$ est un $\mathcal{O}_X$-Module inversible (21.13.5). La question étant locale sur X, on peut supposer X noethérien. L'ensemble des $x \in X$ tels que la restriction de $j_*(\mathcal{L})$ à un voisinage ouvert de x dans X soit inversible est évidemment ouvert dans X; il s'agit de montrer que $V = X$. Pour cela, supposons le contraire et posons $Z = X - V \neq \emptyset$. Soit y un point *maximal* de Z; puisque $Z \subset Y$ par définition, $\mathcal{O}_{X,y}$ est par hypothèse un anneau parafactoriel. Remplaçant au besoin X par un voisinage ouvert de y dans X, on peut supposer que la restriction de $j_*(\mathcal{L})$

à $V-(V\cap\overline{\{y\}})$ est inversible; donc, avec les notations introduites ci-dessus, le $\mathcal{O}_{U_y}$-Module $\mathscr{L}_0$ induit par $j_*(\mathscr{L})$ sur U_y est inversible. Puisque $\mathcal{O}_{X,y}$ est parafactoriel, $\mathscr{L}_0$ est induit par un $\mathcal{O}_{T_y}$-Module inversible $\mathscr{L}'$; mais comme T_y est limite projective des voisinages ouverts W de y dans X, on peut de nouveau appliquer (8.5.2, (ii)) et (8.5.5), prouvant l'existence d'un tel voisinage W et d'un $\mathcal{O}_W$-Module inversible $\mathscr{L}''$ induisant $\mathscr{L}'$ sur T_y, donc induisant $\mathscr{L}_0$ sur U_y; appliquant cette fois (8.5.2.5) et (8.5.2, (i)), on en déduit qu'en remplaçant au besoin W par un voisinage ouvert plus petit de y, on peut supposer que les restrictions de $j_*(\mathscr{L})$ et de $\mathscr{L}''$ à $W-(W\cap\overline{\{y\}})$ soient *égales*. Si l'on pose alors $V_1=V\cup W$ et si l'on désigne par $\mathscr{L}_1$ le $\mathcal{O}_{V_1}$-Module inversible égal à $\mathscr{L}''$ dans W, à $j_*(\mathscr{L})|V$ dans V, on a $U\subset V_1$ et $\mathscr{L}_1|U=\mathscr{L}$. On conclut alors du fait que l'homomorphisme $\mathcal{O}_X\to j_*(\mathcal{O}_U)$ est bijectif et de (21.13.2, *b)*) que $j_*(\mathscr{L})|V_1$ est isomorphe à $\mathscr{L}_1$, donc inversible. Mais cela contredit la définition de V, et conclut donc la démonstration de (21.13.10).

Corollaire **(21.13.11)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Y *une partie fermée de* X, $U=X-Y$. *Supposons que le couple* (X, Y) *soit parafactoriel et que* U *soit localement factoriel; en d'autres termes* (21.13.10), *pour tout* $x\in X$, *l'anneau* $\mathcal{O}_{X,x}$ *est :* 1° *parafactoriel si* $x\in Y$; 2° *factoriel si* $x\notin Y$. *Alors* X *est localement factoriel* (autrement dit, $\mathcal{O}_{X,x}$ est en fait factoriel pour *tout* $x\in X$).

Supposons en effet le contraire, et soit y un point de Y tel que $\mathcal{O}_{X,y}$ ne soit pas factoriel et ait une dimension *minima* parmi tous les points de Y ayant cette propriété. Alors, si l'on pose $T_y=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,y})$, $U_y=T_y-\{y\}$, l'hypothèse que $\mathcal{O}_{X,y}$ est parafactoriel entraîne $\mathrm{Pic}(U_y)=0$ et $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{X,y})\geqslant 2$ (21.13.8); de plus le choix de y entraîne que U_y est localement factoriel. Mais alors (21.6.14) prouve que $\mathcal{O}_{X,y}$ est factoriel, contrairement à l'hypothèse.

Proposition **(21.13.12)**. — *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens,* $\rho: A\to B$ *un homomorphisme local faisant de* B *un* A*-module plat. Alors, si* B *est factoriel, il en est de même de* A.

On sait déjà que A est intègre et intégralement clos (6.5.4), donc on peut se borner au cas où $\dim(A)\geqslant 2$, et raisonner par récurrence sur $n=\dim(A)$. Soient $X=\mathrm{Spec}(A)$, a le point fermé de X, $X'=\mathrm{Spec}(B)$, $f: X'\to X$ le morphisme structural, $U=X-\{a\}$, $U'=f^{-1}(U)$.

Les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X',x'}$ aux points $x'\in f^{-1}(a)$ sont factoriels et de dimension $\geqslant 2$ (6.1.2), donc parafactoriels (21.13.9, (ii)); on en conclut (21.13.10) que le couple $(X', f^{-1}(a))$ est parafactoriel. En vertu de (21.13.6, (iii)), cela montre que l'anneau A est parafactoriel, donc $\mathrm{prof}(A)\geqslant 2$ et $\mathrm{Pic}(U)=0$ (21.13.8). Enfin, les anneaux locaux de U étant de dimension $<n$, l'hypothèse de récurrence prouve que U est *localement factoriel*; la conclusion résulte alors de (21.6.14).

(21.13.12.1) On notera que l'énoncé (21.13.12) où on remplace « factoriel » par « parafactoriel » n'est plus exact, comme le montre l'exemple où $A=k$ est un corps et B l'anneau local factoriel $k[[T_1, T_2]]$. Cependant, il résulte de (21.13.6, (iii)) que, sous les conditions de (21.13.12), si $\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximal de A et si $\mathfrak{m}B$ est un *idéal* *de définition* de B (autrement dit, si $\dim(B/\mathfrak{m}B)=0$), alors, lorsque B est parafactoriel, il en est de même de A. En particulier, si le complété $\hat{A}$ d'un anneau local noethérien est parafactoriel, il en est de même de A.

Remarque **(21.13.13).** — Une partie des définitions et résultats précédents se rattache à des considérations plus générales sur la cohomologie des faisceaux de groupes commutatifs sur un espace topologique, développées au chap. III, 3e partie, et nous n'en avons donné ici un exposé indépendant que pour la commodité du lecteur. En effet, si X est un espace annelé, on a une *équivalence* canonique entre la catégorie des $\mathcal{O}_X$-*Modules inversibles* et celle des *faisceaux principaux homogènes sous le faisceau de groupes* $\mathcal{O}_X^*$ (16.5.15). Cette équivalence se définit en faisant correspondre à tout $\mathcal{O}_X$-Module inversible $\mathcal{L}$ le faisceau $\mathcal{L}^*=\mathcal{I}som_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{L})$ des germes d'isomorphismes de $\mathcal{O}_X$ sur $\mathcal{L}$; il est immédiat que $\mathcal{L}^*$ est canoniquement muni d'une structure de faisceau principal homogène sous $\mathcal{O}_X^*\cong\mathcal{I}som_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$. La vérification du fait que le foncteur $\mathcal{L}\rightsquigarrow\mathcal{L}^*$ est une équivalence de catégories est immédiate. Cela étant, considérons de façon générale un espace topologique X et un faisceau de groupes $\mathcal{G}$ sur X; soit Y une partie fermée de X, posons $U=X-Y$, et soit i un entier tel que $0\leqslant i\leqslant 2$; on dira que le couple (X, Y) est *i-pur* pour $\mathcal{G}$ si, pour tout ouvert V de X, le foncteur restriction $\mathcal{P}\rightsquigarrow\mathcal{P}|(U\cap V)$, de la catégorie des faisceaux principaux homogènes sous le faisceau de groupes $\mathcal{G}|V$, dans la catégorie analogue sous le faisceau de groupes $\mathcal{G}|(U\cap V)$, est *fidèle* ($i=0$), resp. *pleinement fidèle* ($i=1$), resp. une *équivalence de catégories* ($i=2$). Dans le cas où X est un espace annelé et $\mathcal{G}=\mathcal{O}_X^*$, dire que (X, Y) est i-pur signifie donc pour $i=0$, que l'homomorphisme $\mathcal{O}_X\to j_*(\mathcal{O}_U)$ est *injectif*; pour $i=1$, que cet homomorphisme est *bijectif*; et enfin, pour $i=2$, que le couple (X, Y) est *parafactoriel* (21.13.3).

Revenant au cas général, rappelons que les morphismes de la catégorie des faisceaux principaux sous $\mathcal{G}$ sont par définition les isomorphismes. Dire que le couple (X, Y) est 0-pur signifie donc que pour tout ouvert V de X, l'homomorphisme canonique $H^0(V, \mathcal{G})\to H^0(U\cap V, \mathcal{G})$ est injectif; dire que le couple (X, Y) est 1-pur signifie que l'homomorphisme canonique $H^0(V, \mathcal{G})\to H^0(U\cap V, \mathcal{G})$ est bijectif (et alors l'homomorphisme canonique $H^1(V, \mathcal{G})\to H^1(U\cap V, \mathcal{G})$ est injectif); enfin, on peut montrer que pour que le couple (X, Y) soit 2-pur, il faut et il suffit que les homomorphismes $H^i(V, \mathcal{G})\to H^i(U\cap V, \mathcal{G})$ soient bijectifs pour $i=0$ et $i=1$. Lorsque $\mathcal{G}$ est un faisceau de groupes commutatifs, en introduisant les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}_Y^i(\mathcal{G})$ définis au chap. III, 3e partie, dire que (X, Y) est i-pur pour $i\leqslant 2$ signifie que $\mathcal{H}_Y^p(\mathcal{G})=0$ pour $p\leqslant i$; sous cette forme, la notion se généralise donc aussitôt pour tout entier i.

Proposition **(21.13.14).** — *Soient* X *un préschéma localement noethérien normal,* $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ *une famille filtrante décroissante d'ouverts de* X. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Tout cycle* 1*-codimensionnel* Z *sur* X *tel qu'il existe un indice* λ *pour lequel* $Z|U_\lambda$ *soit localement principal* (21.6.7), *est localement principal.*

b) *Pour tout* $x\in X$ *tel que* $\dim(\mathcal{O}_{X,x})\geqslant 2$ *et que* x *n'appartienne pas à* $\bigcap_{\lambda\in L} U_\lambda$, *l'anneau* $\mathcal{O}_{X,x}$ *est parafactoriel.*

b') *Pour toute partie fermée* Y *de* X *telle que* $\operatorname{codim}(Y, X) \geqslant 2$ *et telle qu'il existe* λ *pour lequel* $Y \subset X - U_\lambda$, *le couple* (X, Y) *est parafactoriel.*

La propriété *a)* peut encore s'exprimer de la façon suivante : si l'ensemble fermé N des points $x \in X$ où Z n'est pas principal est contenu dans l'un des $X - U_\lambda$, alors Z est localement principal. Comme X est normal, la condition $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) \leqslant 1$ entraîne que $\mathcal{O}_{X,x}$ est un corps ou un anneau de valuation discrète, donc Z_x est principal; en d'autres termes, on a nécessairement $\operatorname{codim}(N, X) \geqslant 2$ (5.1.3). La propriété *a)* est donc équivalente à la suivante :

a') S'il existe un ensemble fermé Y contenu dans un des $X - U_\lambda$, tel que $\operatorname{codim}(Y, X) \geqslant 2$ et que $Z | X - Y$ soit localement principal, alors Z est localement principal.

Notons d'autre part que *b)* implique *b')* en vertu de (21.13.10); inversement, si *b')* est vérifiée et si $x \notin U_\lambda$, alors $Y = \overline{\{x\}}$ est contenue dans $X - U_\lambda$ et on a $\operatorname{codim}(Y, X) \geqslant 2$, donc il résulte encore de (21.13.10) que $\mathcal{O}_{X,x}$ est parafactoriel, ce qui prouve l'équivalence de *b)* et *b')*. On est ainsi ramené à prouver l'équivalence de *a')* et de *b')*. Notons que puisque X est normal, on a, pour toute partie fermée Y de X telle que $\operatorname{codim}(Y, X) \geqslant 2$, $\operatorname{prof}_Y(\mathcal{O}_X) \geqslant 2$ (5.8.6); si l'on pose $U = X - Y$, l'homomorphisme $\mathcal{O}_X \to j_*(\mathcal{O}_U)$ est donc bijectif (21.13.4); comme les conditions *a')* et *b')* sont locales, on voit qu'il suffit de montrer l'équivalence des conditions suivantes, lorsque X est *noethérien* et normal et Y fermé dans X et tel que $\operatorname{codim}(Y, X) \geqslant 2$:

a'') Pour tout cycle 1-codimensionnel Z sur X, l'hypothèse que $Z | U$ (où $U = X - Y$) est localement principal entraîne que Z lui-même est localement principal.

b'') L'homomorphisme canonique $\operatorname{Pic}(X) \to \operatorname{Pic}(U)$ est surjectif.

Prouvons d'abord que *a'')* entraîne *b'')*; un élément $\zeta_0 \in \operatorname{Pic}(U)$ a pour image dans $\mathfrak{Cl}(U)$ (21.6.11) la classe d'un cycle 1-codimensionnel Z_0 sur U, qui est localement principal. L'hypothèse $\operatorname{codim}(Y, X) \geqslant 2$ entraîne que l'homomorphisme de restriction $\mathfrak{Z}^1(X) \to \mathfrak{Z}^1(U)$ est bijectif, donc $Z_0 = Z | U$, où Z est un cycle 1-codimensionnel sur X; puisque Z_0 est localement principal, il en est de même de Z en vertu de *a'')*; il résulte de (21.6.11) que l'image de Z dans $\mathfrak{Cl}(X)$ est l'image d'un unique élément $\zeta \in \operatorname{Pic}(X)$, et il est clair alors que ζ_0 est l'image de ζ.

Inversement, prouvons que *b'')* entraîne *a'')*. Soit donc Z un cycle 1-codimensionnel sur X tel que $Z | U$ soit localement principal; l'image de $Z | U$ dans $\mathfrak{Cl}(U)$ est donc l'image d'un unique élément $\zeta_0 \in \operatorname{Pic}(U)$ (21.6.11). Par hypothèse il existe $\zeta \in \operatorname{Pic}(X)$ dont l'image dans $\operatorname{Pic}(U)$ est ζ_0; l'image de ζ dans $\mathfrak{Cl}(X)$ est donc la classe d'un cycle 1-codimensionnel Z' sur X tel que $Z | U$ et $Z' | U$ soient linéairement équivalents. Mais puisque U est schématiquement dense dans X l'image de $\mathfrak{Z}^1_{\mathrm{princ}}(X)$ par l'isomorphisme $\mathfrak{Z}^1(X) \to \mathfrak{Z}^1(U)$ est $\mathfrak{Z}^1_{\mathrm{princ}}(U)$, donc Z et Z' sont linéairement équivalents, et puisque Z' est localement principal, il en est de même de Z.

Corollaire (**21.13.15**). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien et normal,* S *une partie de* X. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Tout cycle* 1*-codimensionnel sur* X *qui est principal aux points de* S *est localement principal.*

b) *Pour tout* $x \in X$ *qui n'est pas générisation d'un point de* S (*autrement dit, tel que* $\overline{\{x\}} \cap S = \emptyset$) *et qui est tel que* $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) \geqslant 2$, *l'anneau* $\mathcal{O}_{X,x}$ *est parafactoriel.*

Il est clair que l'ensemble S′ des points de X générisations de points de S est l'intersection des voisinages ouverts de S. On peut se borner au cas où X est noethérien (les propriétés *a)* et *b)* étant locales sur X); comme tout cycle 1-codimensionnel sur X qui est principal aux points de S l'est aussi aux points d'un voisinage ouvert de S, on voit que la condition *a)* de (21.13.15) équivaut à la condition *a)* de (21.13.14) appliquée à la famille (U_λ) des voisinages ouverts de S. Le corollaire résulte alors de l'équivalence de *a)* et *b)* dans (21.13.14).

Remarque (**21.13.16**). — Sous les conditions générales de (21.13.14), supposons de plus que l'on ait $\varinjlim \mathrm{Pic}(U_\lambda) = 0$. Alors la condition *a)* de (21.13.14) est aussi équivalente à la suivante :

c) *Tout cycle* 1*-codimensionnel sur* X *dont le support est contenu dans un des ensembles* $X - U_\lambda$ *est localement principal.*

On peut se borner au cas où X est irréductible et tous les U_λ sont non vides. Il est clair que *a)* entraîne *c)*, car si le cycle 1-codimensionnel Z sur X a son support dans $X - U_\lambda$, $Z|U_\lambda = 0$, donc $Z|U_\lambda$ est localement principal. Inversement *c)* entraîne *a)* : soit en effet Z un cycle 1-codimensionnel sur X tel que $Z|U_\lambda$ soit localement principal; comme X est normal, $Z|U_\lambda = \mathrm{cyc}(D_\lambda)$, où D_λ est un diviseur sur U_λ (21.6.10, (i)), et l'hypothèse implique (en vertu de (21.3.4)) qu'il y a un ensemble $U_\mu \subset U_\lambda$ tel que $D_\mu = D_\lambda | U_\mu$ soit équivalent à 0. Si $D_\mu = \mathrm{div}(f_\mu)$, où f_μ est une fonction rationnelle régulière sur U_μ, f_μ peut être considérée comme une fonction rationnelle régulière sur X. Si $Z' = \mathrm{cyc}(\mathrm{div}(f_\mu))$, on voit donc que $Z'' = Z - Z'$ a son support dans $X - U_\mu$; en vertu de l'hypothèse, Z″ est localement principal, d'où la conclusion.

La condition $\varinjlim \mathrm{Pic}(U_\lambda) = 0$ sera en particulier remplie si (U_λ) est la famille des voisinages ouverts d'*un point* $z \in X$, car pour tout $\mathcal{O}_{U_\lambda}$-Module inversible $\mathscr{L}_\lambda$, il existe par définition un $U_\mu \subset U_\lambda$ tel que $\mathscr{L}_\lambda | U_\mu$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_{U_\lambda}$. On voit donc que, dans l'énoncé de (21.13.15), si $S = \{z\}$, les conditions *a)* et *b)* équivalent aussi à la suivante :

c) *Tout cycle* 1*-codimensionnel sur* X *dont le support ne contient pas* z *est localement principal.*

Si de plus $\mathrm{Pic}(X) = 0$, on en conclura que cette condition entraîne que tout cycle 1-codimensionnel dont le support ne contient pas z est *principal.*

21.14. Le théorème de Ramanujam-Samuel.

Théorème (**21.14.1**) (Ramanujam-Samuel). — *Soit* A *un anneau local noethérien d'idéal maximal* $\mathfrak{m}$, *tel que son complété* $\hat{A}$ *soit intègre et intégralement clos. Soient* B *un anneau local noethérien tel que* $\dim(B) > \dim(A)$, $\rho : A \to B$ *un homomorphisme local faisant de* B *une* A*-algèbre formellement lisse* (*pour les topologies préadiques* (**0**, 19.3.1)) *et tel que le corps résiduel de* B *soit fini sur celui de* A. *Alors tout cycle* 1*-codimensionnel sur* Spec(B) *qui est principal au point* $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}B$, *est un cycle* 1*-codimensionnel principal.*

Si $k = A/\mathfrak{m}$ est le corps résiduel de A, $B/\mathfrak{m}B$ est une k-algèbre formellement lisse (pour sa topologie préadique) (**0**, 19.3.5), donc régulière, et en particulier intègre, autrement dit $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}B$ est bien un idéal premier de B, ce qui justifie l'énoncé. Tout revient évidemment à prouver que tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de B non contenu dans $\mathfrak{p}$ est *principal*.

Soient $\hat{A}$, $\hat{B}$ les complétés de A et B respectivement, de sorte que l'idéal maximal de $\hat{A}$ est $\mathfrak{m}\hat{A}$; on sait (**0**, 19.3.6) que $\hat{B}$ est une $\hat{A}$-algèbre formellement lisse pour les topologies adiques. Soit k' le corps résiduel de $\hat{B}$, extension finie de k; il existe un homomorphisme local $\hat{A}\rightarrow C$, où C est un anneau local noethérien qui est un $\hat{A}$-module *fini* et *plat* (donc libre) et est tel que $C/\mathfrak{m}C$ soit isomorphe à k' ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 10.3.1); on en déduit que C est *complet*, et il résulte alors de (7.5.1), (7.5.3) et (6.5.4, (ii)) que C est *intègre et intégralement clos*. En outre, $D=\hat{B}\otimes_{\hat{A}}C$ est un anneau semi-local complet, composé direct d'anneaux locaux complets dont l'un, D_0, a pour corps résiduel k' (puisque $k'\otimes_k k'$ est composé direct d'anneaux locaux dont l'un est isomorphe à k'). Comme D est formellement lisse sur C, il en est de même de D_0; par suite $D_0/\mathfrak{m}D_0$ est une k'-algèbre formellement lisse, de corps résiduel k', ce qui entraîne qu'elle est k'-isomorphe à une algèbre de séries formelles $k'[[T_1, \dots, T_n]]$ (**0**, 19.6.4); on en conclut, par (**0**, 19.7.1.5), que D_0 est C-isomorphe à $C[[T_1, \dots, T_n]]$, et par suite *intègre et intégralement clos* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 1, n° 4, prop. 14). Comme les morphismes $\mathrm{Spec}(D_0)\rightarrow\mathrm{Spec}(\hat{B})$ et $\mathrm{Spec}(D_0)\rightarrow\mathrm{Spec}(B)$ sont fidèlement plats, on en déduit que B et $\hat{B}$ sont aussi *intègres et intégralement clos* (2.1.13). Cela prouve que l'idéal $\mathfrak{q}D_0$ est divisoriel (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 1, n° 10, prop. 15) et non contenu dans $\mathfrak{m}D_0$, sans quoi on aurait $\mathfrak{q}=(\mathfrak{q}D_0)\cap B\subset(\mathfrak{m}D_0)\cap B=\mathfrak{m}B=\mathfrak{p}$ par fidèle platitude ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.5.1). On en conclut qu'aucun des idéaux premiers $\mathfrak{r}_h$ de hauteur 1 dans D_0 qui contiennent $\mathfrak{q}D_0$ ne peut être contenu dans $\mathfrak{m}D_0$; si l'on prouve que ces idéaux sont principaux, il en résultera que $\mathfrak{q}D_0$ est principal, les diviseurs (au sens de Bourbaki) de $\mathfrak{q}D_0$ et d'un produit de puissances des $\mathfrak{r}_h$ étant égaux (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 1, n° 4, prop. 5). Comme $\mathfrak{q}D_0\cap B=\mathfrak{q}$, on en déduit par fidèle platitude que $\mathfrak{q}$ est principal (2.5.2), en utilisant le fait que B est un anneau local.

On est ainsi ramené à prouver le théorème dans le cas particulier où A est *complet* et $B=A[[T_1, \dots, T_n]]$. Montrons d'abord qu'on peut se ramener au cas où $n=1$. En effet, procédons par récurrence sur n, et soit $f\in\mathfrak{q}$ un élément n'appartenant pas à $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}B$; il suffira de montrer qu'il existe un A-automorphisme σ de B tel que $\sigma(f)$ n'appartienne pas à l'idéal $\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}+BT_1+\dots+BT_{n-1}$: en effet, si $B'=A[[T_1, \dots, T_{n-1}]]$, B' est complet et a pour idéal maximal $\mathfrak{m}B'+B'T_1+\dots+B'T_{n-1}=\mathfrak{m}'$. Comme on a $B=B'[[T_n]]$ et $\mathfrak{p}'=\mathfrak{m}'B$, il résultera de l'hypothèse de récurrence (compte tenu de ce que B' est intègre et intégralement clos) que l'idéal $\sigma(\mathfrak{q})$ est principal dans B, donc aussi $\mathfrak{q}$. Or, si $\bar{f}\in k[[T_1, \dots, T_n]]$ est l'image de f (« série réduite » de f), on sait (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 3, n° 7, lemme 3) qu'il y a un A-automorphisme σ de B tel que $\overline{(\sigma(f))}(0, \dots, 0, T_n)\neq 0$, ce qui implique évidemment $\sigma(f)\notin\mathfrak{p}'$.

Supposons donc $n=1$ et écrivons T au lieu de T_1, de sorte que $B=A[[T]]$. Il suffit de montrer que dans l'anneau de polynômes A[T], l'idéal $\mathfrak{q}\cap A[T]$ est principal;

en effet, soit f_0 un élément de $\mathfrak{q}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{m}B$; c'est une série formelle dont la série réduite $\overline{f_0}$ n'est pas nulle; donc, en vertu du théorème de préparation (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 3, n° 8, prop. 5), pour tout $f \in \mathfrak{q}$, il existe $g \in B$ et un polynôme $r \in A[T]$ tels que $f = gf_0 + r$ et on a donc $r \in \mathfrak{q} \cap A[T]$; d'autre part (*loc. cit.*, prop. 6) il existe un polynôme distingué non constant $F_0 \in A[T]$ et un élément inversible $u \in B$ tels que $f_0 = uF_0$, donc on a aussi $F_0 \in \mathfrak{q} \cap A[T]$, ce qui prouve que $\mathfrak{q}$ est engendré par $\mathfrak{q} \cap A[T] = \mathfrak{q}_1$. Puisque B est plat sur A[T] ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.3), il résulte de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 1, n° 10, prop. 15, que $\mathfrak{q}_1$ est un idéal premier de hauteur 1 dans A[T]. En outre, on a nécessairement $\mathfrak{q}_1 \cap A = 0$; sinon, $\mathfrak{q}_1 \cap A$ serait nécessairement de hauteur $\geqslant 1$, et il résulterait de (5.5.3) que l'on aurait $\mathfrak{q}_1 = (\mathfrak{q}_1 \cap A)A[T]$. Mais alors, puisque $\mathfrak{q}_1 \cap A \subset \mathfrak{m}$, on aurait $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{m}A[T]$ contrairement à l'hypothèse sur $\mathfrak{q}$. Si K est le corps des fractions de A, $\mathfrak{q}_1 K[T]$ est donc un idéal premier distinct de 0 et de K[T] dans K[T], donc de la forme $h.K[T]$, où $h(T) = T^m + a_1 T^{m-1} + \ldots + a_m$ avec $m \geqslant 1$ et les $a_i \in K$, h étant irréductible dans K[T]. Mais on a vu plus haut qu'il existe dans $\mathfrak{q}_1$ un polynôme distingué non constant $F_0 \in A[T]$. Si t est la classe de T dans $K[T]/\mathfrak{q}_1 K[T]$, t est donc racine du polynôme F_0 dans une extension de K et par suite h divise F_0 *dans* K[T]; mais puisque h et F_0 sont unitaires, cela entraîne que les coefficients a_i de h sont entiers sur A (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 1, n° 3, prop. 11), donc appartiennent à A puisque A est intégralement clos. Autrement dit, on a $h \in A[T] \cap \mathfrak{q}_1 K[T] = \mathfrak{q}_1$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 1, n° 5, prop. 11); comme tout polynôme $g \in \mathfrak{q}_1$ est divisible par h *dans* K[T] et que h est unitaire, les coefficients de g/h appartiennent à A, donc $\mathfrak{q}_1 = h.A[T]$. C.Q.F.D.

L'énoncé (21.14.1) est *équivalent* au suivant :

Corollaire (**21.14.2**). — *Sous les hypothèses de* (21.14.1) *sur* A, B *et* $\mathfrak{p}$ *pour tout idéal premier* $\mathfrak{q}$ *de* B *non contenu dans* $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}B$ *et tel que* $\dim(B_{\mathfrak{q}}) \geqslant 2$, *l'anneau* $B_{\mathfrak{q}}$ *est parafactoriel. En particulier, si* $\dim(B \otimes_A k) > 0$ (*i. e.* $\dim B > \dim A$ ((**0**, 19.7.1) *et* (6.1.1))), *l'anneau* B *est parafactoriel.*

En effet, on a vu dans la démonstration de (21.14.1) que les conditions de l'énoncé entraînent que B est intègre et intégralement clos; l'équivalence des énoncés (21.14.1) et (21.14.2) résulte alors de (21.13.15) appliqué à $X = \mathrm{Spec}(B)$ et $S = \{\mathfrak{p}\}$.

Proposition (**21.14.3**). — *Soient* S *un préschéma normal,* $f : X \to S$ *un morphisme lisse.*

(i) *Si* S *est localement noethérien* (*donc aussi* X), *alors, pour tout* $x \in X$ *tel que* $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) \geqslant 2$ *et que x ne soit pas point maximal de sa fibre* $f^{-1}(f(x))$, *l'anneau* $\mathcal{O}_{X,x}$ *est parafactoriel. Tout cycle* 1*-codimensionnel* Z *sur* X *tel que* Supp(Z) *ne contienne aucune composante irréductible d'une fibre* $f^{-1}(s) = X_s$, *est localement principal.*

(ii) *Soit* Y *une partie fermée de* X *ne contenant aucune composante irréductible d'une fibre* X_s, *et telle que pour tout point maximal* η *de* S, $Y_\eta = Y \cap X_\eta$ *soit de codimension* $\geqslant 2$ *dans* X_η. *Alors le couple* (X, Y) *est parafactoriel.*

On notera que les conditions de (ii) sont remplies si Y est une partie fermée de X telle que, pour *tout* $s \in S$, $Y_s = Y \cap X_s$ soit de codimension $\geqslant 2$ dans X_s.

Pour prouver (21.14.3), notons d'abord que sous les hypothèses de (i), si l'on pose $Y=\overline{\{x\}}$, il existe un voisinage ouvert V de x dans X tel que $Y\cap V$ et V vérifient les conditions de (ii) : en effet, il résulte de l'hypothèse et de (9.5.3) que l'on peut prendre V tel que $V\cap Y$ ne contienne aucune composante irréductible d'un X_s; d'autre part, pour tout point maximal η de S tel que $Y\cap X_\eta \neq \emptyset$, les points de $Y\cap X_\eta$ sont des spécialisations de x, donc en un tel point z on a $\dim(\mathcal{O}_{X,z})\geqslant 2$, et comme $\mathcal{O}_{X,z}=\mathcal{O}_{X_\eta,z}$ (S étant réduit au point η en vertu de (2.1.13)), $Y\cap X_\eta$ est bien de codimension $\geqslant 2$ dans X. Comme le couple $(V, Y\cap V)$ est alors parafactoriel en vertu de (ii), on conclut de (21.13.10) que l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est parafactoriel, c'est-à-dire la première assertion de (i). Pour prouver la seconde, on peut se borner au cas où $Z=\overline{\{z\}}$, où $z\in X^{(1)}$; comme $\mathcal{O}_{X,z}$ est un anneau local intégralement clos et de dimension 1, c'est un anneau de valuation discrète et Z est donc principal au point z; pour tout autre point x de Supp(Z), on a donc $\dim(\mathcal{O}_{X,x})\geqslant 2$ et x n'est pas point maximal de sa fibre par hypothèse, donc $\mathcal{O}_{X,x}$ est parafactoriel. Appliquons alors (21.13.15) en prenant pour S l'ensemble formé de z et des points maximaux des fibres de f; il est clair que Z est principal aux points de S puisque z est le seul point de S appartenant à Supp(Z); comme d'autre part la condition *b)* de (21.13.15) est évidemment remplie, on en conclut que Z est localement principal.

On est donc ramené à prouver (ii). Posons $U=X-Y$ et soit $j : U\rightarrow X$ l'injection canonique.

Comme les hypothèses et la conclusion sont locales sur S et sur X en vertu de (21.13.6, (i)), on peut se borner au cas où S et X sont affines, f étant donc de présentation finie. Puisque les fibres de f sont régulières, l'hypothèse sur Y entraîne que, pour tout point $x\in Y$, on a $\operatorname{prof}(\mathcal{O}_{X_{f(x)},x})=\dim(\mathcal{O}_{X_{f(x)},x})\geqslant 1$; il résulte de (19 9 8) que l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_X\rightarrow j_*(\mathcal{O}_U)$ est *injectif.* De plus, remplaçant Y par une partie fermée plus grande suivant la méthode de la démonstration de (19 9 8), et utilisant (21.13.6, (ii)), on peut supposer que Y est défini par un idéal *de type fini* de l'anneau de X, donc l'ouvert $U=X-Y$ est *quasi-compact et quasi-séparé* et l'ensemble fermé Y est *constructible.*

Pour prouver (ii), il suffit, pour tout $\mathcal{O}_U$-Module inversible $\mathcal{L}$ et tout point $x\in Y$ donnés, d'établir l'existence d'un voisinage ouvert V de x dans X tel que : 1° l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_V\rightarrow(j_V)_*(\mathcal{O}_{U\cap V})$ est surjectif; 2° il existe un $\mathcal{O}_V$-Module inversible $\mathcal{L}'_V$ tel que $\mathcal{L}'_V|(U\cap V)=\mathcal{L}|(U\cap V)$ ((21.13.5) et (21.13.3)).

Posons $s=f(x)$; nous allons voir qu'on peut se borner au cas où $S=S_0=\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$. Soit en effet (S_ν) un système fondamental de voisinages ouverts affines de s dans S, et posons $X_\nu=f^{-1}(S_\nu)$, $Y_\nu=Y\cap X_\nu$, $U_\nu=X_\nu-Y_\nu$, $j_\nu : U_\nu\rightarrow X_\nu$ étant l'injection canonique; $X_0=X\times_S S_0$ est alors limite projective des X_ν (8.1.2, *a)*); supposons la proposition vraie pour le morphisme $f_0 : X_0\rightarrow S_0$ et pour $Y_0=Y\cap X_0$, et posons $U_0=X_0-Y_0$, $j_0 : U_0\rightarrow X_0$ étant l'injection canonique. La projection $p_\nu : X_0\rightarrow X_\nu$ étant un morphisme affine, on a $(j_0)_*(\mathcal{O}_{U_0})=p_\nu^*((j_\nu)_*(\mathcal{O}_{U_\nu}))$ (**II**, 1.5.2) et l'homomorphisme canonique $\rho_0 : \mathcal{O}_{X_0}\rightarrow(j_0)_*(\mathcal{O}_{U_0})$ n'est autre que $p_\nu^*(\rho_\nu)$, où $\rho_\nu : \mathcal{O}_{X_\nu}\rightarrow(j)_*(\mathcal{O}_{U_\nu})$ est l'homomorphisme canonique; comme par hypothèse ρ_0 est surjectif, il en est de même de ρ_ν pour ν assez grand (8.5.7). Soit d'autre part $\mathscr{L}_0$ le $\mathcal{O}_{U_0}$-Module inversible restriction de $\mathscr{L}$, et notons que les X_ν sont affines, donc quasi-compacts et quasi-séparés; puisque par hypothèse il existe un $\mathcal{O}_{X_0}$-Module inversible $\mathscr{L}'_0$ tel que $\mathscr{L}'_0|U_0=\mathscr{L}_0$, il existe un ν assez grand et un $\mathcal{O}_{X_\nu}$-Module quasi-cohérent $\mathscr{L}'_\nu$ de présentation finie tels que $\mathscr{L}'_0$ soit isomorphe à $p_\nu^*(\mathscr{L}'_\nu)$ (8.5.2, (ii)); de plus (8.5.5) on peut supposer que $\mathscr{L}'_\nu$ est inversible. Enfin, comme les U_ν sont quasi-compacts et quasi-séparés et que $\mathscr{L}'_0|U_0=\mathscr{L}_0$, il existe ν assez grand tel que $\mathscr{L}'_\nu|U_\nu$ et $\mathscr{L}_\nu=\mathscr{L}|U_\nu$ soient isomorphes (8.5.2.5).

On est ainsi ramené au cas où $S=\mathrm{Spec}(A)$, $X=\mathrm{Spec}(B)$, où A est un anneau *local*; puisque X est normal et f lisse, S est normal (17.5.7), donc A est *intègre* et *intégralement clos*. Considérons alors A comme limite inductive de ses *sous-*$\mathbf{Z}$*-algèbres de type fini*; comme la clôture intégrale d'une telle sous-$\mathbf{Z}$-algèbre est un sous-anneau de A et est aussi une $\mathbf{Z}$-algèbre *de type fini* (7.8.3, (ii), (iii) et (vi)), A est limite inductive filtrante des sous-$\mathbf{Z}$-algèbres de type fini A_λ de A qui sont des anneaux *intégralement clos*. En vertu de (1.8.4.2), il existe un indice λ et une A_λ-algèbre de type fini B_λ tels que $B=B_\lambda\otimes_{A_\lambda}A$ à un A-isomorphisme près. Posons $S_\lambda=\mathrm{Spec}(A_\lambda)$, $X_\lambda=\mathrm{Spec}(B_\lambda)$; si $p_\lambda: X\to X_\lambda$ est la projection canonique, on peut en outre supposer (puisque Y est *constructible*) que $Y=p_\lambda^{-1}(Y_\lambda)$, où Y_λ est une partie fermée de X_λ (8.3.11). Soit f_λ le morphisme $X_\lambda\to S_\lambda$; en vertu de la transitivité des fibres et de (4.2.6), Y_λ ne contient aucune composante irréductible des fibres $f_\lambda^{-1}(s_\lambda)$ pour aucun $s_\lambda\in S_\lambda$. Puisque f est lisse, on peut aussi supposer que f_λ est lisse (17.7.8); enfin, l'image du point générique η de S dans S_λ est le point générique η_λ de S_λ, et on a $\mathrm{codim}((Y_\lambda)_{\eta_\lambda}, (X_\lambda)_{\eta_\lambda})=\mathrm{codim}(Y_\eta, X_\eta)\geqslant 2$ en vertu de (6.1.4). On voit donc que S_λ, X_λ et Y_λ vérifient toutes les hypothèses de (ii), et en posant $X_\mu=X_\lambda\times_{S_\lambda}S_\mu$ pour $\lambda\leqslant\mu$, il en est de même de S_μ, X_μ et Y_μ. Montrons que si l'on prouve que le couple (X_μ, Y_μ) est parafactoriel pour tout $\mu\geqslant\lambda$, il en est de même de (X, Y). En effet, soient $U=X-Y$, $U_\lambda=X_\lambda-Y_\lambda$, $j: U\to X$, $j_\lambda: U_\lambda\to X_\lambda$ les injections canoniques; la projection $p_\lambda: X\to X_\lambda$ étant un morphisme affine, on a $j_*(\mathcal{O}_U)=p_\lambda^*((j_\lambda)_*(\mathcal{O}_{U_\lambda}))$ (**II**, 1.5.2), et par suite l'homomorphisme canonique $\rho:\mathcal{O}_X\to j_*(\mathcal{O}_U)$ n'est autre que $p_\lambda^*(\rho_\lambda)$, où $\rho_\lambda:\mathcal{O}_{X_\lambda}\to(j_\lambda)_*(\mathcal{O}_{U_\lambda})$ est l'homomorphisme canonique; ce dernier étant par hypothèse bijectif, il en est de même de ρ. D'autre part, pour tout $\mathcal{O}_U$-Module inversible $\mathscr{L}$, il existe un $\mu\geqslant\lambda$ et un $\mathcal{O}_{U_\mu}$-Module inversible $\mathscr{L}_\mu$ tels que $\mathscr{L}=p'^*_\mu(\mathscr{L}_\mu)$ (en désignant par $p'_\mu: U\to U_\mu$ la restriction de p_μ) (8.5.2 et 8.5.5), U_λ étant quasi-compact puisque X_λ est noethérien. Par hypothèse, il existe un $\mathcal{O}_{X_\mu}$-Module inversible $\mathscr{L}'_\mu$ tel que $\mathscr{L}'_\mu|U_\mu$ soit isomorphe à $\mathscr{L}_\mu$; $\mathscr{L}'=p_\mu^*(\mathscr{L}_\mu)$ est alors un $\mathcal{O}_X$-Module inversible tel que $\mathscr{L}'|U$ soit isomorphe à $\mathscr{L}$, ce qui prouve notre assertion.

On est ainsi ramené à prouver (ii) lorsque l'anneau A est une $\mathbf{Z}$-algèbre de type fini intégralement close; comme les anneaux locaux $\mathcal{O}_{S,s}$ de S sont alors des anneaux excellents intégralement clos, leurs *complétés* sont aussi intégralement clos (7.8.3, (ii), (iii) et (vii)). Pour prouver que le couple (X, Y) est parafactoriel, il suffit de montrer que pour tout $x\in Y$, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est parafactoriel (21.13.10). Soit y un point fermé de $Y_{f(x)}$, qui soit spécialisation de x (5.1.11); si l'on pose $s=f(x)=f(y)$, $\mathcal{O}_{S,s}$ a un complété intégralement clos, et $\mathcal{O}_{X,y}$ est une $\mathcal{O}_{S,s}$-algèbre formellement lisse pour les topologies préadiques (17.5.3); puisque Y_s ne contient aucune composante irréductible de X_s, on a $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) > \dim(\mathcal{O}_{S,s})$ (17.5.8). Si $s \neq \eta$, on a $\dim(\mathcal{O}_{S,s}) \geqslant 1$; si au contraire $s = \eta$, on a par hypothèse $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) \geqslant 2$; donc dans tous les cas $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) \geqslant 2$. En outre, l'idéal premier de $\mathcal{O}_{X,y}$ correspondant au point x n'est pas contenu dans $\mathfrak{m}_s \mathcal{O}_{X,y}$ puisque Y ne contient aucune composante irréductible de X_s. Enfin, puisque y est fermé dans X_s, $\boldsymbol{k}(y)$ est extension finie de $\boldsymbol{k}(s)$ (**I**, 6.4.2). Dans tous les cas, on peut appliquer à $A = \mathcal{O}_{S,s}$, $B = \mathcal{O}_{X,y}$ et $B_\mathfrak{q} = \mathcal{O}_{X,x}$ le résultat de (21.14.2), ce qui achève la démonstration.

Remarques **(21.14.4)**. — (i) Il se peut que les énoncés (21.14.1) et (21.14.2) restent valables *sans hypothèse* sur le corps résiduel de B. Énoncé avec cette généralité, le résultat équivaudrait, en vertu de (21.13.15) et (21.13.12.1) au suivant : Soient A un anneau local noethérien complet, intègre et intégralement clos, B un anneau local noethérien qui est une A-algèbre formellement lisse, tel que $\dim(B) > \dim(A)$; alors B est parafactoriel.

(ii) Nous verrons au chap. VI, en employant une technique de « descente finie » appliquée au morphisme $Y' \to Y = \operatorname{Spec}(A)$, où Y' est le normalisé de Y, que la conclusion de (21.14.1) (ou de (21.14.2)) reste valable en remplaçant l'hypothèse que $\hat{A}$ est intégralement clos par l'hypothèse que $\hat{A}$ est *réduit*, pourvu que $\dim B \geqslant \dim A + 2$. Si on remplace cette dernière condition par $\dim B \geqslant \dim A + 3$, on peut même supprimer l'hypothèse que $\hat{A}$ est réduit. De même, la conclusion de (21.14.3) reste valable en remplaçant l'hypothèse que X est normal par l'hypothèse que X est réduit, pourvu que $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) \geqslant \dim(\mathcal{O}_{S,f(x)}) + 2$.

(iii) Au chap. III, 3^e^ partie, on prouve que si $f : X \to S$ un morphisme lisse, Y une partie fermée localement constructible de X telle que, pour tout $s \in S$, on ait (avec les notations de (21.14.3)) $\operatorname{codim}(Y_s, X_s) \geqslant 3$, alors le couple (X, Y) est parafactoriel ([41], XII, 4.8). Cette conclusion n'est plus valable lorsqu'on suppose seulement que $\operatorname{codim}(Y_s, X_s) \geqslant 2$ pour tout $s \in S$ et lorsqu'on ne suppose plus X réduit. Par exemple, soient k un corps, $A = k[T]/(T^2)$, algèbre des nombres duaux sur k, $S = \operatorname{Spec}(A)$, $X = \operatorname{Spec}(A[T_1, T_2])$ (T_1, T_2 indéterminées), de sorte que $X = \mathbf{V}_S^2$, Y étant la « section nulle » de ce fibré; si s est l'unique point fermé de S, on a $X_s = \mathbf{V}_k^2$ et Y_s est la « section nulle » de X_s. Pour voir que le couple (X, Y) n'est pas parafactoriel, il suffit de montrer que l'anneau $B = A[T_1, T_2]_\mathfrak{m}$, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal $(T_1) + (T_2)$ qui définit Y, n'est pas parafactoriel (21.13.10). Soit $B_0 = B_{\mathrm{red}}$, et notons U et U_0 les complémentaires du point fermé dans Spec(B) et $\operatorname{Spec}(B_0)$; en raisonnant comme dans (21.13.9), on a la suite exacte, extension de (21.13.9.1)

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_U)^* \to \Gamma(U_0, \mathcal{O}_{U_0})^* \to H^1(U_0, \mathcal{O}_{U_0}) \to \operatorname{Pic}(U) \to \operatorname{Pic}(U_0).$$

Or, on a $\Gamma(U, \mathcal{O}_U) = B$, $\Gamma(U_0, \mathcal{O}_{U_0}) = B_0$ puisque $\operatorname{prof}(B) = \operatorname{prof}(B_0) = 2$ (5.10.5). Par ailleurs $\operatorname{Pic}(U_0) = 0$ puisque B_0 est factoriel, et $H^1(U_0, \mathcal{O}_{U_0}) \neq 0$ [41, 3, Exemple III-1]; comme l'homomorphisme $B^* \to B_0^*$ est surjectif, on en conclut que $\operatorname{Pic}(U) \neq 0$, donc que B n'est pas parafactoriel.

(iv) Le résultat (21.14.3) a d'abord été démontré par C. Seshadri [44] dans le cas particulier où S est un schéma algébrique normal sur un corps algébriquement clos k et $X = S \times_k T$, où T est un k-préschéma algébrique lisse sur k. La démonstration de Seshadri [44, p. 188-189] est de nature globale et utilise la théorie des schémas de Picard. Elle donne en outre *(loc. cit.)* des résultats tels que le suivant (pour lequel on ne possède pas à l'heure actuelle de démonstration par voie locale). Soient S, T deux préschémas localement de type fini sur un corps k, $X = S \times_k T$, Z un cycle 1-codimensionnel sur X (considéré comme S-préschéma); supposons vérifiées les conditions suivantes :

1° S et T sont géométriquement normaux sur k (6.7.6);

2° Pour tout point maximal η de S, le cycle 1-codimensionnel Z_η sur la fibre X_η, ayant même multiplicité que Z en tout point de $X^{(1)} \cap X_\eta$, est localement principal (autrement dit, est l'image d'un diviseur de X_η, puisque X_η est normal);

3° Pour tout $s \in S$, Z est principal aux points maximaux de la fibre X_s.

Alors Z est localement principal. En d'autres termes, X étant normal (6.14.1), pour tout $x \in X$ qui n'est pas maximal dans sa fibre X_s et qui n'appartient à aucune des « fibres génériques » X_η (ce qui implique $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) \geqslant 2$ en vertu de (6.1.1)), l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est parafactoriel, en vertu de (21.12.15) [1].

21.15. Diviseurs relatifs.

(21.15.1) Soient S un préschéma, $f: X \rightarrow S$ un morphisme *plat et localement de présentation finie*. On a défini dans (20.6.1) le faisceau d'anneaux $\mathscr{M}_{X/S}$ des *germes de fonctions méromorphes sur* X *relatives à* S, sous-faisceau de $\mathscr{M}_X$; il est clair que l'injection canonique $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathscr{M}_X$ (20.1.4.1) applique $\mathcal{O}_X$ sur un sous-faisceau de $\mathscr{M}_{X/S}$, avec lequel on l'identifie. Soit $\mathscr{M}^*_{X/S}$ le faisceau (en groupes multiplicatifs) des germes de sections inversibles de $\mathscr{M}_{X/S}$ qui est donc un sous-faisceau de $\mathscr{M}^*_X$ et contient $\mathcal{O}^*_X$ comme sous-faisceau.

Définition **(21.15.2)**. — *On appelle faisceau des diviseurs sur* X *relativement à* S, *ou faisceau des diviseurs sur* X *transversaux à* f, *et on note* $\mathscr{D}iv_{X/S}$ *le faisceau quotient (de groupes commutatifs)* $\mathscr{M}^*_{X/S}/\mathcal{O}^*_X$; *les sections de ce faisceau au-dessus de* X *se nomment diviseurs sur* X *relatifs à* S, *ou diviseurs sur* X *transversaux à* f; *ils forment un groupe commutatif noté* Div(X/S).

Il est clair que $\mathscr{D}iv_{X/S}$ s'identifie canoniquement à un sous-faisceau de $\mathscr{D}iv_X$, et par suite Div(X/S) à un sous-groupe de Div(X), que l'on note encore *additivement*. Pour

---

[1] En fait, dans l'article précité, Seshadri suppose que k est algébriquement clos, T séparé et « semi-complet » (i.e. tel que $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ soit k-isomorphe à k) et remplace l'hypothèse 3° par l'hypothèse plus forte que Supp(Z) ne contient aucune des fibres X_s pour $s \in S$. Mais comme l'énoncé est local sur S, on en conclut aussitôt qu'il suffit de faire l'hypothèse 3°, et cela prouve que la conclusion (interprétée comme ci-dessus en termes de propriété de parafactorialité des anneaux $\mathcal{O}_{X,x}$) est locale sur S *et sur* T, ce qui permet d'éliminer complètement l'hypothèse que T est « semi-complet » et que k est algébriquement clos, puisque (quitte à passer d'abord à la clôture algébrique de k) on peut supposer d'abord T affine, ce qui permet de le plonger comme ouvert d'un schéma projectif et normal sur k, auquel le résultat de Seshadri s'applique. Notons aussi que, grâce à cette réduction, il suffit de faire la démonstration de Seshadri dans le cas où T est *projectif* (et non seulement « semi-complet »), cas où la théorie du schéma de Picard utilisée par Seshadri est contenue dans celle qui sera développée au chap. VI de notre Traité.

tout ouvert U de X, on a $\mathcal{M}^*_{X/S}|U = \mathcal{M}^*_{U/S}$, donc $\mathcal{D}iv_{X/S}|U = \mathcal{D}iv_{U/S}$, et le faisceau $\mathcal{D}iv_{X/S}$ est donc égal au préfaisceau $U \rightsquigarrow \mathrm{Div}(U/S)$.

Puisque $\mathcal{M}^*_{X/S}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{M}^*_X$, les définitions, notations et formules relatives aux diviseurs des sections de $\mathcal{M}^*_X$ au-dessus de X (21.1.3) s'appliquent sans changement aux sections de $\mathcal{M}^*_{X/S}$ au-dessus de X.

(21.15.3) La structure de faisceau de groupes ordonnés sur $\mathcal{D}iv_X$ (21.1.6) induit sur le sous-faisceau $\mathcal{D}iv_{X/S}$ une structure de faisceau de groupes ordonnés, pour laquelle le faisceau de monoïdes des germes de sections positives est $\mathcal{D}iv^+_X \cap \mathcal{D}iv_{X/S}$, que l'on note $\mathcal{D}iv^+_{X/S}$. On a $\Gamma(X, \mathcal{D}iv^+_{X/S}) = \mathrm{Div}^+(X) \cap \mathrm{Div}(X/S)$; on note ce sous-monoïde de Div(X/S) par $\mathrm{Div}^+(X/S)$, et il est formé des éléments $\geqslant 0$ pour une structure de groupe ordonné sur Div(X/S). Il résulte de (21.1.5.1) que $\mathcal{D}iv^+_{X/S}$ est l'image dans $\mathcal{D}iv_{X/S}$ du sous-faisceau de monoïdes

$$\mathcal{O}^{\mathrm{reg}}_{X/S} = \mathcal{O}_X \cap \mathcal{M}^*_{X/S} \tag{21.15.3.1}$$

Pour tout ouvert U de X, $\Gamma(U, \mathcal{O}^{\mathrm{reg}}_{X/S})$ est l'ensemble des sections t de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de U telles que t soit régulière et que $1/t$ appartienne à $\Gamma(U, \mathcal{M}_{X/S})$, ce qui signifie, avec les notations de (20.6.1), que $t \in \mathrm{T}_{X/S}(U)$, de sorte que le faisceau $\mathcal{O}^{\mathrm{reg}}_{X/S}$ n'est autre que le faisceau noté $\mathcal{T}_{X/S}$ dans (20.6.1). On peut donc écrire

$$\mathcal{D}iv^+_{X/S} = \mathcal{O}^{\mathrm{reg}}_{X/S}/\mathcal{O}^*_X \tag{21.15.3.2}$$

à un isomorphisme canonique près.

(21.15.3.3) Soit $D \in \mathrm{Div}^+(X/S)$ et considérons le sous-préschéma fermé Y(D) de X défini par l'Idéal $\mathcal{I}_X(D)$ de $\mathcal{O}_X$ (21.6.5) ; en vertu de ce qui précède, pour tout $x \in Y(D)$, il y a un voisinage ouvert U de x dans X et une section $t \in \mathrm{T}_{X/S}(U)$ telle que $\mathcal{I}_X(D)|U = \mathcal{O}_U . t$; puisque $x \in Y(D)$, l'image $t_{f(x)}$ de t dans $\Gamma(U \cap X_{f(x)}, \mathcal{O}_{X_{f(x)}})$ appartient à l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X_{f(x)},x}$, et en outre, par définition, pour tout $s \in S$, l'image t_s de t dans $\Gamma(U \cap X_s, \mathcal{O}_{X_s})$ est une section *régulière*. On déduit donc de (11.3.8) et (19.2.4) que l'immersion canonique $Y(D) \rightarrow X$ est *transversalement régulière relativement à* S *et de codimension* 1 au point x. La réciproque étant immédiate, on voit qu'on peut *identifier* canoniquement les diviseurs positifs sur X relatifs à S aux sous-préschémas fermés Y de X tels que l'injection canonique $Y \rightarrow X$ soit une immersion transversalement régulière relativement à S et de codimension 1. Nous ferons d'ordinaire cette identification.

Proposition **(21.15.4)**. — *Soient* D *un diviseur sur* X, $\mathcal{I}_X(D)$ *l'Idéal fractionnaire inversible correspondant* (21.2.5). *Pour que* $D \in \mathrm{Div}(X/S)$, *il faut et il suffit que, pour tout* $x \in X$, *on ait* $(\mathcal{I}_X(D) \cap \mathcal{M}^*_{X/S})_x \neq 0$ *(ou, ce qui revient au même, que l'on ait* $\mathcal{I}_X(D) \subset \mathcal{M}_{X/S}$ *et* $\mathcal{I}_X(D)^{-1} \subset \mathcal{M}_{X/S}$).

En effet, dire que $D \in \mathrm{Div}(X/S)$ signifie que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x et une section $f \in \Gamma(U, \mathcal{M}^*_{X/S})$ tels que $D|U = \mathrm{div}_U(f)$; comme $\mathcal{I}_X(D)|U$ est l'Idéal fractionnaire inversible $\mathcal{O}_U\, f$, la proposition en résulte aussitôt.

Proposition **(21.15.5)**. — *Soient* D *un diviseur sur* X, $\mathcal{O}_X(D)$ *l'Idéal fractionnaire inversible et* s_D *la section méromorphe régulière de* $\mathcal{O}_X(D)$ *définis canoniquement par* D (21.2.8 et 21.2.9). *Pour que* $D \in \operatorname{Div}(X/S)$, *il faut et il suffit que* $s_D \in \Gamma(X, \mathcal{M}_{X/S}(\mathcal{O}_X(D)))$.

En effet, si U est un ouvert de X tel que $D|U = \operatorname{div}_U(f)$, où $f \in \Gamma(U, \mathcal{M}_X^*)$ dire que $s_D \in \Gamma(U, \mathcal{M}_{X/S}(\mathcal{O}_X(D)))$ signifie, en vertu des définitions (20.6.2) que $f^{-1} \in \Gamma(U, \mathcal{M}_{X/S}^*)$, d'où la proposition.

L'interprétation des diviseurs sur X à l'aide des classes $\operatorname{cl}(\mathcal{L}, s)$ (21.2.11) permet donc d'interpréter les éléments de Div(X/S) comme les couples (à isomorphisme près) $(\mathcal{L}, s)$ tels que $\mathcal{L}$ soit un $\mathcal{O}_X$-Module inversible et que s soit une section méromorphe de $\mathcal{L}$ au-dessus de X, *régulière relativement à* S (20.6.5, (iii)).

Proposition **(21.15.6)**. — *Soit* D *un diviseur sur* X *relatif à* S, *et supposons que pour tout* $x \in X$ *tel que* $\operatorname{prof}(\mathcal{O}_{X_{f(x)}, x}) = 1$, *on ait* $D_x \geqslant 0$ (resp. $D_x = 0$). *Alors on a* $D \geqslant 0$ (resp. $D = 0$)

Comme dans (21.1.8), on peut se borner au cas où $D = \operatorname{div}(\varphi)$, où φ est une fonction méromorphe régulière relative à S, et tout revient à voir que si $D_x \geqslant 0$ en tout point $x \in X$ tel que $\operatorname{prof}(\mathcal{O}_{X_{f(x)}, x}) = 1$, φ est partout définie dans X. Mais cette hypothèse signifie que, si $T = X - \operatorname{dom}(\varphi)$ on a $\operatorname{prof}(\mathcal{O}_{X_{f(x)}, x}) \geqslant 2$ pour tout $x \in T$, et il suffit pour conclure d'appliquer (20.6.6).

(21.15.7) Soit X' un second S-préschéma plat et localement de présentation finie sur S, et soit $g : X' \to X$ un S-morphisme. Si le S-morphisme g est *plat*, on sait (21.4.5) que l'image réciproque par g de tout diviseur sur X est définie; si de plus $D \in \operatorname{Div}(X/S)$, il résulte de la définition (21.15.2) et de (20.6.8) que l'on a alors $g^*(D) \in \operatorname{Div}(S'/S)$.

(21.15.8) Soit X' un second S-préschéma plat et localement de présentation finie sur S, et soit $g : X' \to X$ un S-morphisme *fini* et *plat*. Notons que g est alors nécessairement de présentation finie (1.4.3, 1.4.6 et 1.6.3), donc $g_*(\mathcal{O}_{X'})$ est un $\mathcal{O}_X$-Module plat et de présentation finie, et par suite *localement libre* (2.1.12), autrement dit g est un morphisme *localement libre* (18.2.7); pour tout $s \in S$, le morphisme correspondant $g_s : X'_s \to X_s$ est donc aussi fini et localement libre. On déduit alors de (21.5.2) et (20.6.1) que pour tout ouvert U de X et toute section $t' \in \Gamma(g^{-1}(U); \mathcal{T}_{X'/S})$, la norme $N_{X'/X}(t')$ appartient à $\Gamma(U, \mathcal{T}_{X/S})$; le raisonnement de (21.5.3) prouve ensuite que pour tout $\mathcal{O}_{X'}$-Module inversible $\mathcal{L}'$ et toute section méromorphe u' de $\mathcal{L}'$ au-dessus de X', *régulière relativement à* S, la norme $N_{X'/X}(u')$ est une section méromorphe de $\mathcal{L} = N_{X'/X}(\mathcal{L}')$ au-dessus de X, *régulière relativement à* S. L'interprétation des diviseurs relatifs à S donnée dans (21.15.5) et la définition de l'image directe d'un diviseur (21.5.5) prouvent alors que *pour tout diviseur* $D' \in \operatorname{Div}(X'/S)$, *on a* $g_*(D') \in \operatorname{Div}(X/S)$.

(21.15.9) Considérons enfin un morphisme *quelconque* $S' \to S$, et (sous les hypothèses de (21.15.1)) posons $X' = X \times_S S'$, qui est plat et localement de présentation finie sur S'; si $p : X' \to X$ est la projection canonique, on a vu (20.6.9) qu'on a un homomorphisme canonique $p^*(\mathcal{M}_{X/S}) \to \mathcal{M}_{X'/S'}$, qui transforme évidemment toute section de $\mathcal{M}_{X/S}$ au-dessus d'un ouvert U, *régulière relativement à* S, en une section de $\mathcal{M}_{X'/S'}$ au-dessus de $p^{-1}(U)$, *régulière relativement à* S (20.6.5, (iii)); on conclut alors de la définition (21.15.2) et de l'exactitude à droite du foncteur p^*, que l'homomorphisme précédent définit par passage aux quotients un homomorphisme canonique

(21.15.9.1) $$\mathrm{Div}(X/S) \to \mathrm{Div}(X'/S')$$

qui transforme évidemment les éléments de $\mathrm{Div}^+(X/S)$ en éléments de $\mathrm{Div}^+(X'/S')$. On pose encore $\mathrm{Div}(X'/S') = \mathrm{Div}_{X/S}(S')$ (resp. $\mathrm{Div}^+(X'/S') = \mathrm{Div}^+_{X/S}(S')$), et on voit aussitôt qu'on a ainsi défini deux foncteurs contravariants

$$\mathrm{Div}_{X/S} : \boldsymbol{Sch}_{/S} \to \boldsymbol{Ab}, \qquad \mathrm{Div}^+_{X/S} : \boldsymbol{Sch}_{/S} \to \boldsymbol{Ens}$$

de la catégorie des S-préschémas dans celle des groupes commutatifs (resp. des ensembles). On verra plus loin (chap. VI) des cas importants où le foncteur $\mathrm{Div}^+_{X/S}$ est *représentable* ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 8.1.8).

Pour tout diviseur $D \in \mathrm{Div}(X/S)$, l'image de D par l'homomorphisme (21.15.9.1) n'est autre d'ailleurs que l'image réciproque $p^*(D)$ (au sens de (21.4.2)) : l'existence de cette image réciproque et l'assertion précédente sont en effet des conséquences immédiates de (20.6.5, (iii)) et (20.6.9).

Les éléments de $\mathrm{Div}(X'/S')$ s'appellent souvent, par abus de langage, « *familles de diviseurs sur* X *relatifs à* S, *paramétrées par le* S-*préschéma* S' »; on utilise surtout cette terminologie lorsqu'il s'agit de diviseurs *positifs*.

BIBLIOGRAPHIE

[41] A. Grothendieck, Séminaire de Géométrie algébrique, 1962, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents, et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* (Institut des Hautes Études scientifiques, Bures-sur-Yvette).

[42] M. Demazure et A. Grothendieck, Séminaire de Géométrie algébrique, 1963-1964, *Schémas en groupes* (Institut des Hautes Études scientifiques, Bures-sur-Yvette).

[43] M. Artin et A. Grothendieck, Séminaire de Géométrie algébrique 1963-1964, *Cohomologie étale des schémas* (Institut des Hautes Études scientifiques, Bures-sur-Yvette).

[44] C. S. Seshadri, Quotient space by an abelian variety, *Mathematische Annalen*, t. 152 (1962), p. 185-194.