CHAPITRE O (*suite*) [1]

PRÉLIMINAIRES

§ 8. FONCTEURS REPRÉSENTABLES

8.1. Foncteurs représentables.

(8.1.1) Nous désignerons par $\boldsymbol{Ens}$ la catégorie des ensembles. Soit $\boldsymbol{C}$ une catégorie; pour deux objets X, Y de $\boldsymbol{C}$, nous poserons $h_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$; pour tout morphisme $u : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}'$ dans $\boldsymbol{C}$, nous désignerons par $h_{\mathrm{X}}(u)$ l'application $v \rightsquigarrow vu$ de $\mathrm{Hom}(\mathrm{Y}', \mathrm{X})$ dans $\mathrm{Hom}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$. Il est immédiat qu'avec ces définitions, $h_{\mathrm{X}} : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Ens}$ est un *foncteur contravariant*, c'est-à-dire un objet de la catégorie, notée $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}^0, \boldsymbol{Ens})$, des foncteurs covariants de la catégorie $\boldsymbol{C}^0$, duale de la catégorie $\boldsymbol{C}$, dans la catégorie $\boldsymbol{Ens}$ (T, 1.7, *d)* et [29]).

(8.1.2) Soit maintenant $w : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ un morphisme dans $\boldsymbol{C}$; pour tout $\mathrm{Y} \in \boldsymbol{C}$ et tout $v \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}) = h_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y})$, on a $wv \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}') = h_{\mathrm{X}'}(\mathrm{Y})$; désignons par $h_w(\mathrm{Y})$ l'application $v \rightsquigarrow wv$ de $h_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y})$ dans $h_{\mathrm{X}'}(\mathrm{Y})$. Il est immédiat que pour tout morphisme $u : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}'$ dans $\boldsymbol{C}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} h_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}') \arrow[r, "h_{\mathrm{X}}(u)"] \arrow[d, "h_w(\mathrm{Y}')"'] & h_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}) \arrow[d, "h_w(\mathrm{Y})"] \\ h_{\mathrm{X}'}(\mathrm{Y}') \arrow[r, "h_{\mathrm{X}'}(u)"'] & h_{\mathrm{X}'}(\mathrm{Y}) \end{tikzcd}$$

est commutatif; autrement dit, h_w est un *morphisme fonctoriel* $h_{\mathrm{X}} \to h_{\mathrm{X}'}$ (T, 1.2), ou encore un morphisme dans la catégorie $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}^0, \boldsymbol{Ens})$ (T, 1.7, *d)*). Les définitions de h_{X} et de h_w constituent donc la définition d'un *foncteur covariant canonique*

(8.1.2.1) $$h : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}^0, \boldsymbol{Ens}).$$

(8.1.3) Soient X un objet de $\boldsymbol{C}$, F un foncteur contravariant de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{Ens}$ (objet de $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}^0, \boldsymbol{Ens})$). Soit $g : h_{\mathrm{X}} \to \mathrm{F}$ un *morphisme fonctoriel* : pour tout $\mathrm{Y} \in \boldsymbol{C}$,

[1] Pour faciliter la recherche des références, on renverra désormais aux paragraphes du chapitre o publiés avec le chapitre I par le signe $\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$.

$g(Y)$ est donc une application $h_X(Y) \to F(Y)$ telle que pour tout morphisme $u : Y \to Y'$ dans $\boldsymbol{C}$, le diagramme

(8.1.3.1)
$$\begin{array}{ccc} h_X(Y') & \xrightarrow{h_X(u)} & h_X(Y) \\ {\scriptstyle g(Y')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g(Y)} \\ F(Y') & \xrightarrow[F(u)]{} & F(Y) \end{array}$$

soit commutatif. En particulier, on a une application $g(X) : h_X(X) = \mathrm{Hom}(X, X) \to F(X)$, d'où un élément

(8.1.3.2) $$\alpha(g) = (g(X))(1_X) \in F(X)$$

et par suite une application canonique

(8.1.3.3) $$\alpha : \mathrm{Hom}(h_X, F) \to F(X).$$

Inversement, considérons un élément $\xi \in F(X)$; pour tout morphisme $v : Y \to X$ dans $\boldsymbol{C}$, $F(v)$ est une application $F(X) \to F(Y)$; considérons l'application

(8.1.3.4) $$v \rightsquigarrow (F(v))(\xi)$$

de $h_X(Y)$ dans $F(Y)$; si on désigne par $(\beta(\xi))(Y)$ cette application,

(8.1.3.5) $$\beta(\xi) : h_X \to F$$

est un *morphisme fonctoriel*, car on a pour tout morphisme $u : Y \to Y'$ dans $\boldsymbol{C}$, $(F(vu))(\xi) = (F(v) \circ F(u))(\xi)$, ce qui vérifie la commutativité de (8.1.3.1) pour $g = \beta(\xi)$. On a ainsi défini une application canonique

(8.1.3.6) $$\beta : F(X) \to \mathrm{Hom}(h_X, F).$$

Proposition **(8.1.4)**. — *Les applications* α *et* β *sont des bijections réciproques l'une de l'autre.*

Calculons $\alpha(\beta(\xi))$ pour $\xi \in F(X)$; pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$, $(\beta(\xi))(Y)$ est l'application $g_1(Y) : v \rightsquigarrow (F(v))(\xi)$ de $h_X(Y)$ dans $F(Y)$. On a donc

$$\alpha(\beta(\xi)) = (g_1(X))(1_X) = (F(1_X))(\xi) = 1_{F(X)}(\xi) = \xi.$$

Calculons maintenant $\beta(\alpha(g))$ pour $g \in \mathrm{Hom}(h_X, F)$; pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$, $(\beta(\alpha(g)))(Y)$ est l'application $v \rightsquigarrow (F(v))((g(X))(1_X))$; en vertu de la commutativité de (8.1.3.1), cette application n'est autre que $v \rightsquigarrow (g(Y))((h_X(v))(1_X)) = (g(Y))(v)$ par définition de $h_X(v)$, autrement dit, elle est égale à $g(Y)$, ce qui démontre la proposition.

(8.1.5) Rappelons qu'une *sous-catégorie* $\boldsymbol{C}'$ d'une catégorie $\boldsymbol{C}$ est définie par la condition que ses objets soient des objets de $\boldsymbol{C}$, et que si X', Y' sont deux objets de $\boldsymbol{C}'$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'}(X', Y')$ des morphismes $X' \to Y'$ *dans* $\boldsymbol{C}'$ est une partie de l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(X', Y')$ des morphismes $X' \to Y'$ *dans* $\boldsymbol{C}$, l'application canonique de « composition des morphismes »

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'}(X', Y') \times \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'}(Y', Z') \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}'}(X', Z')$$

étant la restriction de l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X', Y') \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y', Z') \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X', Z').$$

On dit que $\boldsymbol{C}'$ est une sous-catégorie *pleine* de $\boldsymbol{C}$ si $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}'}(X', Y') = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X', Y')$ pour tout couple d'objets de $\boldsymbol{C}'$. La sous-catégorie $\boldsymbol{C}''$ de $\boldsymbol{C}$ formée des objets de $\boldsymbol{C}$ isomorphes aux objets de $\boldsymbol{C}'$ est encore alors une sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{C}$, *équivalente* (T, 1.2) à $\boldsymbol{C}'$ comme on le vérifie sans peine.

Un foncteur covariant $F : \boldsymbol{C}_1 \to \boldsymbol{C}_2$ est dit *pleinement fidèle* si, pour tout couple d'objets X_1, Y_1 de $\boldsymbol{C}_1$, l'application $u \rightsquigarrow F(u)$ de $\mathrm{Hom}(X_1, Y_1)$ dans $\mathrm{Hom}(F(X_1), F(Y_1))$ est *bijective*; cela entraîne que la sous-catégorie $F(\boldsymbol{C}_1)$ de $\boldsymbol{C}_2$ est *pleine*. En outre, si deux objets X_1, X_1' ont même image X_2, il existe un isomorphisme unique $u : X_1 \to X_1'$ tel que $F(u) = 1_{X_2}$. Pour tout objet X_2 de $F(\boldsymbol{C}_1)$, soit alors $G(X_2)$ un des objets X_1 de $\boldsymbol{C}_1$ tel que $F(X_1) = X_2$ (G étant défini au moyen de l'axiome de choix); pour tout morphisme $v : X_2 \to Y_2$ dans $F(\boldsymbol{C}_1)$, $G(v)$ sera l'unique morphisme $u : G(X_2) \to G(Y_2)$ tel que $F(u) = v$; G est alors un *foncteur* de $F(\boldsymbol{C}_1)$ dans $\boldsymbol{C}_1$; FG est le foncteur identique dans $F(\boldsymbol{C}_1)$, et ce qui précède montre qu'il existe un isomorphisme de foncteurs $\varphi : \mathit{1}_{\mathbf{C}_1} \to GF$ tel que F, G, φ et l'identité $\mathit{1}_{F(\mathbf{C}_1)} \to FG$ définissent une *équivalence* de la catégorie $\boldsymbol{C}_1$ et de la sous-catégorie pleine $F(\boldsymbol{C}_1)$ de $\boldsymbol{C}_2$ (T, 1.2).

(8.1.6) Appliquons la prop. (8.1.4) au cas où le foncteur F est $h_{X'}$, X' étant un objet quelconque de $\boldsymbol{C}$; l'application $\beta : \mathrm{Hom}(X, X') \to \mathrm{Hom}(h_X, h_{X'})$ n'est autre ici que l'application $w \rightsquigarrow h_w$ définie dans (8.1.2); cette application étant *bijective*, on voit, avec la terminologie de (8.1.5), que :

Proposition **(8.1.7)**. — *Le foncteur canonique* $h : \boldsymbol{C} \to \mathbf{Hom}(\boldsymbol{C}^0, \mathbf{Ens})$ *est pleinement fidèle.*

(8.1.8) Soit F un foncteur contravariant de $\boldsymbol{C}$ dans $\mathbf{Ens}$; on dit que F est *représentable* s'il existe un objet $X \in \boldsymbol{C}$ tel que F soit *isomorphe* à h_X; il résulte de (8.1.7) que la donnée d'un $X \in \boldsymbol{C}$ et d'un isomorphisme de foncteurs $g : h_X \to F$ détermine X à un isomorphisme unique près. La prop. (8.1.7) signifie encore que h définit une *équivalence* de $\boldsymbol{C}$ et de la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Hom}(\boldsymbol{C}^0, \mathbf{Ens})$ formée des *foncteurs contravariants représentables*. Il résulte d'ailleurs de (8.1.4) que la donnée d'un morphisme fonctoriel $g : h_X \to F$ équivaut à celle d'un élément $\xi \in F(X)$; dire que g est un *isomorphisme* équivaut pour ξ à la condition suivante : *pour tout objet* Y *de* $\boldsymbol{C}$ *l'application* $v \rightsquigarrow (F(v))(\xi)$ *de* $\mathrm{Hom}(Y, X)$ *dans* $F(Y)$ *est bijective*. Lorsque ξ vérifie cette condition, on dira que le couple (X, ξ) *représente* le foncteur représentable F. Par abus de langage, on dira aussi que l'objet $X \in \boldsymbol{C}$ représente F s'il existe $\xi \in F(X)$ tel que (X, ξ) représente F, autrement dit si h_X est isomorphe à F.

Soient F, F' deux foncteurs contravariants représentables de $\boldsymbol{C}$ dans $\mathbf{Ens}$, $h_X \to F$ et $h_{X'} \to F'$ deux isomorphismes de foncteurs. Alors il résulte de (8.1.6) qu'il y a une correspondance biunivoque canonique entre $\mathrm{Hom}(X, X')$ et l'ensemble $\mathrm{Hom}(F, F')$ des morphismes fonctoriels $F \to F'$.

(8.1.9) *Exemples. I : limites projectives.* La notion de foncteur contravariant représentable couvre en particulier la notion « duale » de la notion usuelle de « solution d'un problème universel ». Plus généralement, nous allons voir que la notion de *limite projective* est un cas particulier de celle de foncteur représentable. Rappelons que dans une catégorie $\boldsymbol{C}$, on définit un *système projectif* par la donnée d'un ensemble préordonné I, d'une famille $(\mathrm{A}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{I}}$ d'objets de $\boldsymbol{C}$, et, pour tout couple d'indices (α, β) tel que $\alpha \leqslant \beta$, d'un morphisme $u_{\alpha\beta} : \mathrm{A}_\beta \rightarrow \mathrm{A}_\alpha$. Une *limite projective* de ce système dans $\boldsymbol{C}$ est constituée par un objet B de $\boldsymbol{C}$ (noté $\varprojlim \mathrm{A}_\alpha$), et, pour chaque $\alpha\in\mathrm{I}$, un morphisme $u_\alpha : \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A}_\alpha$, tels que : 1° $u_\alpha = u_{\alpha\beta}u_\beta$ pour $\alpha \leqslant \beta$; 2° Pour tout objet X de $\boldsymbol{C}$ et toute famille $(v_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{I}}$ de morphismes $v_\alpha : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{A}_\alpha$, telle que $v_\alpha = u_{\alpha\beta}v_\beta$ pour $\alpha \leqslant \beta$, il existe un morphisme unique $v : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{B}$ (noté $\varprojlim v_\alpha$) tel que $v_\alpha = u_\alpha v$ pour tout $\alpha\in\mathrm{I}$ (T, 1.8). Ceci s'interprète de la façon suivante : les $u_{\alpha\beta}$ définissent canoniquement des applications

$$\overline{u}_{\alpha\beta} : \mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{A}_\beta) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{A}_\alpha)$$

qui définissent un *système projectif* d'ensembles $(\mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{A}_\alpha), \overline{u}_{\alpha\beta})$, et (v_α) est par définition un élément de l'ensemble $\varprojlim_\alpha \mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{A}_\alpha)$; il est clair que $\mathrm{X} \rightsquigarrow \varprojlim \mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{A}_\alpha)$ est un *foncteur contravariant* de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{Ens}$, et l'existence de la limite projective B équivaut à dire que $(v_\alpha) \rightsquigarrow \varprojlim v_\alpha$ est un *isomorphisme* de foncteurs en X

$$\varprojlim \mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{A}_\alpha) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{B}) \tag{8.1.9.1}$$

autrement dit que le foncteur $\mathrm{X} \rightsquigarrow \varprojlim \mathrm{Hom}\,(\mathrm{X}, \mathrm{A}_\alpha)$ est *représentable*.

(8.1.10) *Exemples. II : Objet final.* Soient $\boldsymbol{C}$ une catégorie, $\{a\}$ un ensemble réduit à un seul élément. Considérons le foncteur contravariant $\mathrm{F} : \boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{Ens}$ qui, à tout objet X de $\boldsymbol{C}$ fait correspondre l'ensemble $\{a\}$ et à tout morphisme $\mathrm{X} \rightarrow \mathrm{X}'$ dans $\boldsymbol{C}$ l'unique application $\{a\} \rightarrow \{a\}$. Dire que ce foncteur est *représentable* signifie qu'il existe un objet $\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{C}$ tel que pour tout $\mathrm{Y}\in\boldsymbol{C}$, $\mathrm{Hom}(\mathrm{Y}, \boldsymbol{e}) = h_{\boldsymbol{e}}(\mathrm{Y})$ soit *réduit à un élément*; on dit que $\boldsymbol{e}$ est un *objet final* de $\boldsymbol{C}$, et il est clair que deux objets finaux de $\boldsymbol{C}$ sont isomorphes (ce qui permet de définir, en général à l'aide de l'axiome de choix, *un* objet final de $\boldsymbol{C}$ qu'on note alors $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{C}}$). Par exemple, dans la catégorie $\boldsymbol{Ens}$, les objets finaux sont les ensembles réduits à un élément; dans la catégorie des *algèbres augmentées* sur un corps K (où les morphismes sont les homomorphismes d'algèbres compatibles avec les augmentations), K est un objet final; dans la catégorie des S-*préschémas* (**I**, 2.5.1), S est un objet final.

(8.1.11) Pour deux objets X, Y d'une catégorie $\boldsymbol{C}$, posons $h'_\mathrm{X}(\mathrm{Y}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et pour tout morphisme $u : \mathrm{Y} \rightarrow \mathrm{Y}'$, soit $h_\mathrm{X}(u)$ l'application $v \rightsquigarrow uv$ de $\mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ dans $\mathrm{Hom}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}')$; h'_X est alors un *foncteur covariant* $\boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{Ens}$, d'où l'on déduit comme dans (8.1.2) la définition d'un foncteur covariant canonique $h' : \boldsymbol{C}^0 \rightarrow \boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{Ens})$; un foncteur *covariant* F de $\boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{Ens}$, autrement dit un objet de $\boldsymbol{Hom}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{Ens})$ est alors dit *représentable* s'il existe un objet $\mathrm{X}\in\boldsymbol{C}$ (nécessairement unique à isomorphisme unique près) tel que F soit *isomorphe à* h'_X; nous laissons au lecteur le soin de développer les considérations « duales » des précédentes pour cette notion, qui couvre cette fois celle de *limite inductive*, et en particulier la notion usuelle de « solution de problème universel ».

8.2. Structures algébriques dans les catégories.

(8.2.1) Étant donnés deux foncteurs contravariants F, F′ de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{Ens}$, rappelons que pour tout objet $Y \in \mathbf{C}$, on pose $(F \times F')(Y) = F(Y) \times F'(Y)$, et pour tout morphisme $u : Y \to Y'$ dans $\mathbf{C}$, on pose $(F \times F')(u) = F(u) \times F'(u)$ qui est l'application $(t, t') \rightsquigarrow (F(u)(t), F'(u)(t'))$ de $F(Y') \times F'(Y')$ dans $F(Y) \times F'(Y)$; $F \times F' : \mathbf{C} \to \mathbf{Ens}$ est donc un *foncteur contravariant* (qui n'est autre d'ailleurs que le *produit* des objets F, F′ dans la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathbf{C}^0, \mathbf{Ens})$). Étant donné un objet $X \in \mathbf{C}$, nous appellerons *loi de composition interne* sur X un *morphisme fonctoriel*

(8.2.1.1) $$\gamma_X : h_X \times h_X \to h_X.$$

Autrement dit (T, 1.2), pour tout objet $Y \in \mathbf{C}$, $\gamma_X(Y)$ est une application $h_X(Y) \times h_X(Y) \to h_X(Y)$ (donc par définition une *loi de composition interne* sur l'ensemble $h_X(Y)$) soumise à la condition que, pour tout morphisme $u : Y \to Y'$ dans $\mathbf{C}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} h_X(Y') \times h_X(Y') & \xrightarrow{h_X(u) \times h_X(u)} & h_X(Y) \times h_X(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma_X(Y')} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_X(Y)} \\ h_X(Y') & \xrightarrow[h_X(u)]{} & h_X(Y) \end{array}$$

soit commutatif; cela signifie que pour les lois de composition $\gamma_X(Y)$ et $\gamma_X(Y')$, $h_X(u)$ est un *homomorphisme* de $h_X(Y')$ dans $h_X(Y)$.

De la même façon, étant donnés deux objets Z, X de $\mathbf{C}$, on appelle *loi de composition externe sur* X, *ayant* Z *comme domaine d'opérateurs*, un morphisme fonctoriel

(8.2.1.2) $$\omega_{X,Z} : h_Z \times h_X \to h_X.$$

On voit comme ci-dessus que pour tout $Y \in \mathbf{C}$, $\omega_{X,Z}(Y)$ est une loi de composition externe sur $h_X(Y)$, ayant $h_Z(Y)$ comme domaine d'opérateurs, et telle que pour tout morphisme $u : Y \to Y'$, $h_X(u)$ et $h_Z(u)$ forment un *dihomomorphisme* de $(h_Z(Y'), h_X(Y'))$ dans $(h_Z(Y), h_X(Y))$.

(8.2.2) Soit X′ un second objet de $\mathbf{C}$, et supposons donnée sur X′ une loi de composition interne $\gamma_{X'}$; nous dirons qu'un morphisme $w : X \to X'$ dans $\mathbf{C}$ est un *homomorphisme* pour ces lois de composition, si pour tout $Y \in \mathbf{C}$, $h_w(Y) : h_X(Y) \to h_{X'}(Y)$ est un *homomorphisme* pour les lois de composition $\gamma_X(Y)$ et $\gamma_{X'}(Y)$. Si X″ est un troisième objet de $\boldsymbol{C}$ muni d'une loi de composition interne $\gamma_{X''}$ et $w' : X' \rightarrow X''$ un morphisme dans $\boldsymbol{C}$ qui est un homomorphisme pour $\gamma_{X'}$ et $\gamma_{X''}$, il est clair que le morphisme $w'w : X \rightarrow X''$ est un homomorphisme pour les lois de composition γ_X et $\gamma_{X''}$. Un isomorphisme $w : X \xrightarrow{\sim} X'$ dans $\boldsymbol{C}$ est appelé *isomorphisme pour les lois de composition* γ_X et $\gamma_{X'}$ si w est un homomorphisme pour ces lois de composition, et si son morphisme réciproque w^{-1} est un homomorphisme pour les lois de composition $\gamma_{X'}$ et γ_X.

On définit de la même manière les *dihomomorphismes* pour les couples d'objets de $\boldsymbol{C}$ munis de lois de composition externes.

(8.2.3) Lorsqu'une loi de composition interne γ_X sur un objet $X \in \boldsymbol{C}$ est telle que $\gamma_X(Y)$ soit une loi de *groupe* sur $h_X(Y)$ pour *tout* $Y \in \boldsymbol{C}$, on dit que X, muni de cette loi, est un ***C*-*groupe*** ou un ***C*-*objet en groupes***. On définit de même les ***C*-*anneaux***, ***C*-*modules***, etc.

(8.2.4) Supposons que le *produit* $X \times X$ d'un objet $X \in \boldsymbol{C}$ par lui-même existe dans $\boldsymbol{C}$; par définition, on a alors $h_{X\times X} = h_X \times h_X$ à un isomorphisme canonique près, puisqu'il s'agit d'un cas particulier de limite projective (8.1.9); une loi de composition interne sur X peut donc être considérée comme un morphisme fonctoriel $\gamma_X : h_{X\times X} \rightarrow h_X$, et détermine donc canoniquement (8.1.6) un élément $c_X \in \mathrm{Hom}(X \times X, X)$ tel que $h_{c_X} = \gamma_X$; dans ce cas, la donnée d'une loi de composition interne sur X est donc équivalente à celle d'un morphisme $X \times X \rightarrow X$; lorsque $\boldsymbol{C}$ est la catégorie ***Ens***, on retrouve la notion classique de loi de composition interne sur un ensemble. On a un résultat analogue pour une loi de composition externe lorsque le produit $Z \times X$ existe dans $\boldsymbol{C}$.

(8.2.5) Avec les notations précédentes, supposons en outre que $X \times X \times X$ existe dans $\boldsymbol{C}$; la caractérisation du produit comme objet représentant un foncteur (8.1.9) entraîne l'existence d'isomorphismes canoniques

$$(X \times X) \times X \xrightarrow{\sim} X \times X \times X \xrightarrow{\sim} X \times (X \times X);$$

si on identifie canoniquement $X \times X \times X$ à $(X \times X) \times X$, l'application $\gamma_X(Y) \times 1_{h_X(Y)}$ s'identifie à $h_{c_X \times 1_X}(Y)$ pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$. Il est par suite équivalent de dire que pour tout $Y \in \boldsymbol{C}$, la loi interne $\gamma_X(Y)$ est associative, ou que le diagramme d'applications

$$\begin{tikzcd}
h_X(Y) \times h_X(Y) \times h_X(Y) \arrow[r, "\gamma_X(Y) \times 1"] \arrow[d, "1 \times \gamma_X(Y)"'] & h_X(Y) \times h_X(Y) \arrow[d, "\gamma_X(Y)"] \\
h_X(Y) \times h_X(Y) \arrow[r, "\gamma_X(Y)"'] & h_X(Y)
\end{tikzcd}$$

est commutatif, ou que le diagramme de morphismes

$$\begin{tikzcd} X\times X\times X \arrow[r, "c_X\times 1_X"] \arrow[d, "1_X\times c_X"'] & X\times X \arrow[d, "c_X"] \\ X\times X \arrow[r, "c_X"'] & X \end{tikzcd}$$

est commutatif.

(8.2.6) Sous les hypothèses de (8.2.5), si on veut exprimer que pour tout $Y\in\boldsymbol{C}$, la loi interne $\gamma_X(Y)$ est une loi de *groupe*, il faut d'une part exprimer qu'elle est associative, et de l'autre qu'il existe une application $\alpha_X(Y) : h_X(Y)\rightarrow h_X(Y)$ ayant les propriétés de l'*inverse* dans un groupe; comme pour tout morphisme $u : Y\rightarrow Y'$ dans $\boldsymbol{C}$, on a vu que $h_X(u)$ doit être un homomorphisme de groupes $h_X(Y')\rightarrow h_X(Y)$, on voit d'abord que $\alpha_X : h_X\rightarrow h_X$ doit être un *morphisme fonctoriel.* On peut d'autre part exprimer les propriétés caractéristiques de l'inverse $s\rightsquigarrow s^{-1}$ dans un groupe G sans faire intervenir l'élément neutre : il suffit d'écrire **que** les deux applications composées

$$(s, t)\rightsquigarrow(s, s^{-1}, t)\rightsquigarrow(s, s^{-1}t)\rightsquigarrow s(s^{-1}t)$$
$$(s, t)\rightsquigarrow(s, s^{-1}, t)\rightsquigarrow(s, ts^{-1})\rightsquigarrow(ts^{-1})s$$

sont égales à la seconde projection $(s, t)\rightsquigarrow t$ de $G\times G$ dans G. En vertu de (8.1.3), on a $\alpha_X = h_{a_X}$, où $a_X\in\mathrm{Hom}(X, X)$; la première condition précédente exprime alors que le morphisme composé

$$X\times X \xrightarrow{(1_X, a_X)\times 1_X} X\times X\times X \xrightarrow{1_X\times c_X} X\times X \xrightarrow{c_X} X$$

est la seconde projection $X\times X\rightarrow X$ dans $\boldsymbol{C}$, et la seconde condition se traduit de même.

(8.2.7) Supposons maintenant qu'il existe dans $\boldsymbol{C}$ un *objet final* $\boldsymbol{e}$ (8.1.10). Supposons toujours que $\gamma_X(Y)$ soit une loi de groupe sur $h_X(Y)$ pour tout $Y\in\boldsymbol{C}$, et désignons par $\eta_X(Y)$ l'élément neutre de $\gamma_X(Y)$. Comme, pour tout morphisme $u : Y\rightarrow Y'$ dans $\boldsymbol{C}$, $h_X(u)$ est un homomorphisme de groupes, on a $\eta_X(Y) = (h_X(u))(\eta_X(Y'))$; prenant en particulier $Y' = \boldsymbol{e}$, auquel cas u est l'unique élément ε de $\mathrm{Hom}(Y, \boldsymbol{e})$, on voit que l'élément $\eta_X(\boldsymbol{e})$ détermine complètement $\eta_X(Y)$ pour tout $Y\in\boldsymbol{C}$. Posons $e_X = \eta_X(X)$, élément neutre du groupe $h_X(X) = \mathrm{Hom}(X, X)$; la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} h_X(\boldsymbol{e}) \arrow[r, "h_X(\varepsilon)"] \arrow[d, "h_{e_X}(\boldsymbol{e})"'] & h_X(Y) \arrow[d, "h_{e_X}(Y)"] \\ h_X(\boldsymbol{e}) \arrow[r, "h_X(\varepsilon)"'] & h_X(Y) \end{tikzcd}$$

(cf. 8.1.2) montre que, dans l'ensemble $h_X(Y)$, l'application $h_{e_X}(Y)$ n'est autre que

$s \rightsquigarrow \eta_X(Y)$ transformant tout élément en l'élément neutre. On vérifie alors que le fait que $\eta_X(Y)$ soit élément neutre de $\gamma_X(Y)$ pour tout $Y \in C$ équivaut à dire que le morphisme composé

$$X \xrightarrow{(1_X, 1_X)} X \times X \xrightarrow{1_X \times e_X} X \times X \xrightarrow{e_X} X,$$

et l'analogue où on permute 1_X et e_X, sont tous deux *égaux à* 1_X.

(8.2.8) On pourrait bien entendu multiplier sans peine les exemples de structures algébriques dans les catégories. L'exemple des groupes a été traité avec assez de détails, mais par la suite nous laisserons généralement au lecteur le soin de développer des considérations analogues dans les exemples de structures algébriques que nous rencontrerons.

§ 9. ENSEMBLES CONSTRUCTIBLES

9.1. Ensembles constructibles.

Définition **(9.1.1)**. — *On dit qu'une application continue* $f: X \to Y$ *est quasi-compacte si pour tout ouvert quasi-compact* U *de* Y, $f^{-1}(U)$ *est quasi-compact. On dit qu'une partie* Z *d'un espace topologique* X *est rétrocompacte dans* X *si l'injection canonique* $Z \to X$ *est quasi-compacte, autrement dit si pour tout ouvert quasi-compact* U *de* X, $U \cap Z$ *est quasi-compact.*

Une partie *fermée* de X est rétrocompacte dans X, mais une partie quasi-compacte de X n'est pas nécessairement rétrocompacte dans X. Si X est quasi-compact, toute partie ouverte rétrocompacte dans X est quasi-compacte. Il est clair que toute réunion *finie* d'ensembles rétrocompacts dans X est rétrocompacte dans X, toute réunion finie d'ensembles quasi-compacts étant quasi-compacte. Toute intersection finie d'ouverts rétrocompacts dans X est un ouvert rétrocompact dans X. Dans un espace *localement noethérien* X, tout ensemble quasi-compact est un sous-espace noethérien, et par suite *toute partie* de X est rétrocompacte dans X.

Définition **(9.1.2)**. — *Étant donné un espace topologique* X, *on dit qu'une partie de* X *est constructible si elle appartient au plus petit ensemble de parties* $\mathfrak{F}$ *de* X *contenant toutes les parties ouvertes rétrocompactes de* $\mathfrak{F}$ *et stable par intersection finie et passage au complémentaire* (ce qui implique que $\mathfrak{F}$ est aussi *stable par réunion finie*).

Proposition **(9.1.3)**. — *Pour qu'une partie de* X *soit constructible, il faut et il suffit qu'elle soit réunion finie d'ensembles de la forme* $U \cap \complement V$, *où* U *et* V *sont des ouverts rétrocompacts dans* X.

Il est clair que la condition est suffisante. Pour voir qu'elle est nécessaire, considérons l'ensemble $\mathfrak{G}$ des réunions finies d'ensembles de la forme $U \cap \complement V$ où U et V sont ouverts rétrocompacts dans X; il suffit de voir que tout complémentaire d'un ensemble de $\mathfrak{G}$ appartient à $\mathfrak{G}$. Soit donc $Z = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap \complement V_i)$, où I est fini, U_i et V_i ouverts rétrocompacts dans X; on a $\complement Z = \bigcap_{i \in I} (V_i \cup \complement U_i)$, donc Z est réunion finie d'ensembles qui sont intersections d'un certain nombre des V_i et d'un certain nombre de $\complement U_i$, donc de la forme

$V \cap \complement U$, où U est réunion d'un certain nombre des U_i et V intersection d'un certain nombre des V_i ; mais on a remarqué plus haut que les réunions et intersections finies d'ouverts rétrocompacts dans X sont des ouverts rétrocompacts dans X, d'où la conclusion.

Corollaire **(9.1.4)**. — *Toute partie constructible de* X *est rétrocompacte dans* X.

Il suffit de montrer que si U et V sont ouverts rétrocompacts dans X, $U \cap \complement V$ est rétrocompact dans X; or, si W est ouvert quasi-compact dans X, $W \cap U \cap \complement V$ est fermé dans l'espace quasi-compact $W \cap U$, donc est quasi-compact.

En particulier :

Corollaire **(9.1.5)**. — *Pour qu'une partie ouverte* U *de* X *soit constructible, il faut et il suffit qu'elle soit rétrocompacte dans* X. *Pour qu'une partie fermée* F *de* X *soit constructible, il faut et il suffit que l'ouvert* $\complement F$ *soit rétrocompact.*

(9.1.6) Un cas important est celui où toute partie ouverte quasi-compacte de X est rétrocompacte, autrement dit, où l'intersection de deux parties ouvertes quasi-compactes de X est quasi-compacte (cf. **I**, 5.5.6). Lorsque X lui-même est quasi-compact, cela signifie que les parties ouvertes rétrocompactes dans X sont identiques aux parties ouvertes quasi-compactes de X, et les parties constructibles de X aux réunions finies d'ensembles de la forme $U \cap \complement V$, où U et V sont ouverts quasi-compacts.

Corollaire **(9.1.7)**. — *Pour qu'une partie d'un espace noethérien* X *soit constructible, il faut et il suffit qu'elle soit réunion finie de parties localement fermées de* X.

Proposition **(9.1.8)**. — *Soient* X *un espace topologique,* U *une partie ouverte de* X.

(i) *Si* T *est une partie constructible de* X, $T \cap U$ *est une partie constructible de* U.

(ii) *Supposons en outre* U *rétrocompact dans* X. *Pour qu'une partie* Z *de* U *soit constructible dans* X, *il faut et il suffit qu'elle soit constructible dans* U.

(i) Utilisant (9.1.3), on est ramené à montrer que si T est ouvert rétrocompact dans X, $T \cap U$ est ouvert rétrocompact dans U, autrement dit, pour tout ouvert quasi-compact $W \subset U$, $T \cap U \cap W = T \cap W$ est quasi-compact, ce qui résulte aussitôt de l'hypothèse.

(ii) La condition étant nécessaire en vertu de (i), il reste à démontrer qu'elle est suffisante. Compte tenu de (9.1.3), il suffit de considérer le cas où Z est ouvert rétrocompact *dans* U, car il s'ensuivra alors que $U - Z$ est constructible dans X, et si Z, Z′ sont deux ouverts rétrocompacts *dans* U, $Z \cap (U - Z')$ sera bien constructible dans X. Or, si W est ouvert quasi-compact dans X et Z ouvert rétrocompact dans U, on a $Z \cap W = Z \cap (W \cap U)$ et par hypothèse $W \cap U$ est ouvert quasi-compact dans U; donc $W \cap Z$ est bien quasi-compact, et par suite Z est ouvert rétrocompact dans X, et *a fortiori* constructible dans X.

Corollaire **(9.1.9)**. — *Soient* X *un espace topologique,* $(U_i)_{i \in I}$ *un recouvrement fini de* X *formé d'ensembles ouverts rétrocompacts dans* X. *Pour qu'une partie* Z *de* X *soit constructible dans* X, *il faut et il suffit que pour tout* $i \in I$, $Z \cap U_i$ *soit constructible dans* U_i.

(9.1.10) Supposons en particulier que X soit quasi-compact et que tout point de X admette un système fondamental de voisinages ouverts rétrocompacts dans X (et *a fortiori* quasi-compacts); alors la condition pour une partie Z de X d'être constructible dans X est de nature *locale*, autrement dit, il faut et il suffit que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V de x tel que $V \cap Z$ soit constructible dans V. En effet, si cette condition est vérifiée, il existe pour tout $x \in X$ un voisinage ouvert V de x *rétrocompact dans* X et tel que $V \cap Z$ soit constructible dans V, en vertu de l'hypothèse sur X et de (9.1.8, (i)); il suffit alors de recouvrir X par un nombre fini de ces voisinages, et d'appliquer (9.1.9).

Définition **(9.1.11)**. — *Soit* X *un espace topologique. On dit qu'une partie* T *de* X *est localement constructible dans* X *si, pour tout* $x \in X$, *il existe un voisinage ouvert* V *de* x *tel que* $T \cap V$ *soit constructible dans* V.

Il résulte aussitôt de (9.1.8, (i)) que si V est tel que $V \cap T$ soit constructible dans V, alors pour tout ouvert $W \subset V$, $W \cap T$ est constructible dans W. Si T est localement constructible dans X, alors, pour tout ouvert U de X, $T \cap U$ est localement constructible dans U, comme il résulte de la remarque précédente. Cette même remarque montre que l'ensemble des parties localement constructibles dans X est stable par réunion finie et intersection finie; il est clair, d'autre part, qu'il est aussi stable par passage aux complémentaires.

Proposition **(9.1.12)**. — *Soit* X *un espace topologique. Tout ensemble constructible dans* X *est localement constructible dans* X. *La réciproque est vraie si* X *est quasi-compact et si sa topologie admet une base formée d'ensembles rétrocompacts dans* X.

La première assertion résulte de la définition (9.1.11) et la seconde de (9.1.10).

Corollaire **(9.1.13)**. — *Soit* X *un espace topologique dont la topologie admet une base formée d'ensembles rétrocompacts dans* X. *Alors toute partie* T *localement constructible dans* X *est rétrocompacte dans* X.

En effet, soit U un ensemble ouvert quasi-compact dans X; $T \cap U$ est localement constructible dans U, donc constructible dans U en vertu de (9.1.12), et par suite quasi-compact en vertu de (9.1.4).

9.2. Ensembles constructibles dans les espaces noethériens.

(9.2.1) On a vu (9.1.7) que dans un espace noethérien X, les parties constructibles dans X sont les *réunions finies de parties localement fermées* de X.

L'image réciproque d'un ensemble constructible dans X par une application continue d'un espace noethérien X' dans X est constructible dans X'. Si Y est une partie constructible d'un espace noethérien X, les parties de Y qui sont constructibles en tant que sous-espaces de Y sont identiques à celles qui sont constructibles en tant que sous-espaces de X.

Proposition **(9.2.2)**. — *Soient* X *un espace irréductible noethérien,* E *une partie constructible de* X. *Pour que* E *soit partout dense dans* X, *il faut et il suffit que* E *contienne une partie ouverte non vide de* X.

La condition est évidemment suffisante, tout ensemble ouvert non vide étant dense dans X. Inversement, soit $E = \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cap F_i)$ une partie constructible de X, les U_i étant ouverts non vides et les F_i fermés dans X; on a donc $\overline{E} \subset \bigcup_i F_i$. Par suite, si $\overline{E} = X$, X est égal à l'un des F_i, donc $E \supset U_i$, ce qui achève la démonstration.

Lorsque X admet un point générique x ($\mathbf{0}_{\text{I}}$, 2.1.2), la condition de (9.2.2) équivaut à la relation $x \in E$.

Proposition **(9.2.3)**. — *Soit* X *un espace noethérien. Pour qu'une partie* E *de* X *soit constructible, il faut et il suffit que, pour toute partie fermée irréductible* Y *de* X, $E \cap Y$ *soit rare dans* Y *ou contienne une partie ouverte non vide de* Y.

La nécessité de la condition provient de ce que $E \cap Y$ doit être une partie constructible de Y et de (9.2.2), car une partie non dense de Y est nécessairement rare dans l'espace irréductible Y ($\mathbf{0}_{\text{I}}$, 2.1.1). Pour prouver que la condition est suffisante, appliquons le principe de récurrence noethérienne ($\mathbf{0}_{\text{I}}$, 2.2.2) à l'ensemble $\mathfrak{F}$ des parties fermées Y de X telles que $Y \cap E$ soit constructible (par rapport à Y ou par rapport à X, ce qui revient au même) : on peut donc supposer que pour toute partie fermée $Y \neq X$ de X, $E \cap Y$ est constructible. Supposons d'abord que X ne soit pas irréductible, et soient X_i ($1 \leqslant i \leqslant m$) ses composantes irréductibles, nécessairement en nombre fini ($\mathbf{0}_{\text{I}}$, 2.2.5); par hypothèse, les $E \cap X_i$ sont constructibles, donc aussi leur réunion E. Supposons ensuite que X soit irréductible; alors, par hypothèse, ou bien E est rare, donc $\overline{E} \neq X$ et $E = E \cap \overline{E}$ est constructible; ou bien E contient un ouvert non vide U de E, donc est réunion de U et de $E \cap (X - U)$; mais $X - U$ est un ensemble fermé distinct de X, donc $E \cap (X - U)$ est constructible; E lui-même est par suite constructible, ce qui achève la démonstration.

Corollaire **(9.2.4)**. — *Soient* X *un espace noethérien,* (E_α) *une famille filtrante croissante de parties constructibles de* X, *telle que :*

1° X *est réunion de la famille* (E_α).

2° *Toute partie fermée irréductible de* X *est contenue dans l'adhérence d'un des* E_α.

Alors il existe un indice α *tel que* $X = E_\alpha$.

Lorsque toute partie fermée irréductible de X *admet un point générique, l'hypothèse* 2° *peut être supprimée.*

Appliquons le principe de récurrence noethérienne ($\mathbf{0}_{\text{I}}$, 2.2.2) à l'ensemble $\mathfrak{M}$ des parties fermées de X contenues dans l'un des E_α au moins; on peut donc supposer que toute partie fermée $Y \neq X$ de X est contenue dans un des E_α. La proposition est évidente si X n'est pas irréductible, car chacune des composantes irréductibles X_i de X ($1 \leqslant i \leqslant m$) est contenue dans un E_{α_i}, et il existe un E_α contenant tous les E_{α_i}. Supposons donc X irréductible. Par hypothèse, il existe β tel que $X = \overline{E}_\beta$, donc (9.2.2) E_β contient un ouvert non vide U de X. Mais alors l'ensemble fermé $X - U$ est contenu dans un E_γ, et il suffit de prendre E_α contenant E_β et E_γ. Lorsque toute partie fermée irréductible Y de X admet un point générique y, il existe α tel que $y \in E_\alpha$, donc $Y = \overline{\{y\}} \subset \overline{E}_\alpha$, et la condition 2° est conséquence de 1°.

Proposition **(9.2.5)**. — *Soient* X *un espace noethérien, x un point de* X, E *une partie constructible de* X. *Pour que* E *soit un voisinage de x, il faut et il suffit que pour toute partie fermée irréductible* Y *de* X *contenant x,* $E \cap Y$ *soit dense dans* Y *(s'il existe un point générique y de* Y, *cela signifie aussi* (9.2.2) *que* $y \in E$).

La condition est évidemment nécessaire; prouvons qu'elle est suffisante. Appliquant le principe de récurrence noethérienne à l'ensemble $\mathfrak{M}$ des parties fermées Y de X contenant x et telles que $E \cap Y$ soit un voisinage de x dans Y, on peut supposer que toute partie fermée $Y \neq X$ de X contenant x appartient à $\mathfrak{M}$. Si X n'est pas irréductible, chacune des composantes irréductibles X_i de X contenant x est distincte de X, donc $E \cap X_i$ est un voisinage de x par rapport à X_i; par suite, E est un voisinage de x dans la réunion des composantes irréductibles de X contenant x, et comme cette réunion est un voisinage de x dans X, il en est de même de E. Si X est irréductible, E est dense dans X par hypothèse, donc contient une partie ouverte non vide U de X (9.2.2); la proposition est alors évidente si $x \in U$; sinon, x est par hypothèse intérieur à $E \cap (X - U)$ par rapport à $X - U$, donc l'adhérence dans X de $X - E$ ne contient pas x, et le complémentaire de cette adhérence est un voisinage de x contenu dans E, ce qui achève la démonstration.

Corollaire **(9.2.6)**. — *Soient* X *un espace noethérien,* E *une partie de* X. *Pour que* E *soit un ensemble ouvert dans* X, *il faut et il suffit que pour toute partie fermée irréductible* Y *de* X *rencontrant* E, $E \cap Y$ *contienne une partie ouverte non vide de* Y.

La condition est évidemment nécessaire; inversement, si elle est vérifiée, elle implique que E est constructible en vertu de (9.2.3). En outre, (9.2.5) montre que E est alors voisinage de chacun de ses points, d'où la conclusion.

9.3. Fonctions constructibles.

Définition **(9.3.1)**. — *Soit h une application d'un espace topologique* X *dans un ensemble* T. *On dit que h est constructible si $h^{-1}(t)$ est constructible pour tout $t \in T$, et vide sauf pour un nombre fini de valeurs de t; pour toute partie* S *de* T, $h^{-1}(S)$ *est alors constructible. On dit que h est localement constructible si tout $x \in X$ possède un voisinage ouvert* V *tel que $h|V$ soit constructible.*

Toute fonction constructible est localement constructible; la réciproque est vraie quand X est quasi-compact et admet une base formée d'ensembles ouverts rétrocompacts dans X (en particulier quand X est noethérien).

Proposition **(9.3.2)**. — *Soit h une application d'un espace noethérien* X *dans un ensemble* T. *Pour que h soit constructible, il faut et il suffit que pour toute partie fermée irréductible* Y *de* X, *il existe une partie non vide* U *de* Y, *ouverte par rapport à* Y, *et dans laquelle h soit constante.*

La condition est nécessaire : en effet, par hypothèse, h ne prend dans Y qu'un nombre fini de valeurs t_i, et chacun des ensembles $h^{-1}(t_i) \cap Y$ est constructible dans Y (9.2.1); comme ils ne peuvent être tous des parties rares de l'espace Y, un d'eux au moins contient un ensemble ouvert non vide (9.2.3).

Pour voir que la condition est suffisante, appliquons le principe de récurrence noethérienne à l'ensemble $\mathfrak{M}$ des parties fermées Y de X telles que la restriction $h|Y$ soit constructible; on peut donc supposer que pour toute partie fermée $Y \neq X$ de X, $h|Y$ est constructible. Si X n'est pas irréductible, la restriction de h à chacune des composantes irréductibles X_i de X (en nombre fini) est donc constructible, et il résulte alors aussitôt de la définition (9.3.1) que h est constructible. Si X est irréductible, il existe par hypothèse une partie ouverte non vide U de X dans laquelle h est constante; d'autre part, la restriction de h à $X - U$ est constructible par hypothèse, et il en résulte aussitôt que h est constructible.

Corollaire **(9.3.3)**. — *Soit* X *un espace noethérien dans lequel toute partie fermée irréductible admet un point générique. Si h est une application de* X *dans un ensemble* T *telle que, pour tout* $t \in T$, $h^{-1}(t)$ *soit constructible, alors h est constructible.*

En effet, si Y est une partie fermée irréductible de X et y son point générique, $Y \cap h^{-1}(h(y))$ est constructible et contient y, donc (9.2.2) cet ensemble contient une partie ouverte non vide de Y, et il suffit d'appliquer (9.3.2).

Proposition **(9.3.4)**. — *Soient* X *un espace noethérien dans lequel toute partie fermée irréductible admet un point générique, h une application constructible de* X *dans un ensemble ordonné. Pour que h soit semi-continue supérieurement dans* X, *il faut et il suffit que pour tout* $x \in X$ *et toute générisation* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.1.2) x' *de* x, *on ait* $h(x') \leqslant h(x)$.

La fonction h ne prend qu'un nombre fini de valeurs; dire qu'elle est semi-continue supérieurement signifie donc que pour tout $x \in X$, l'ensemble E des $y \in X$ tels que $h(y) \leqslant h(x)$ est un voisinage de x. Par hypothèse, E est une partie constructible de X; d'autre part, dire qu'une partie fermée irréductible Y de X contient x signifie que son point générique y est une générisation de x; la conclusion résulte alors de (9.2.5).

§ 10. COMPLÉMENTS SUR LES MODULES PLATS

Pour les démonstrations des propriétés énoncées sans démonstration dans les n^os (10.1) et (10.2), nous renvoyons le lecteur à Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II et III.

10.1. Relations entre modules plats et modules libres.

(10.1.1) Soient A un anneau, $\mathfrak{J}$ un idéal de A, M un A-module; pour tout entier $p \geqslant 0$, on a un homomorphisme canonique de $(A/\mathfrak{J})$-modules

(10.1.1.1) $$\varphi_p : (M/\mathfrak{J}M) \otimes_{A/\mathfrak{J}} (\mathfrak{J}^p/\mathfrak{J}^{p+1}) \to \mathfrak{J}^p M/\mathfrak{J}^{p+1} M$$

qui est évidemment *surjectif*. Nous désignerons par $\mathrm{gr}(A) = \bigoplus_{p \geqslant 0} \mathfrak{J}^p/\mathfrak{J}^{p+1}$ l'anneau gradué associé à A filtré par les $\mathfrak{J}^p$, par $\mathrm{gr}(M) = \bigoplus_{p \geqslant 0} \mathfrak{J}^p M/\mathfrak{J}^{p+1} M$ le gr(A)-module gradué associé à M filtré par les $\mathfrak{J}^p M$; on a donc $\mathrm{gr}_p(A) = \mathfrak{J}^p/\mathfrak{J}^{p+1}$, $\mathrm{gr}_p(M) = \mathfrak{J}^p M/\mathfrak{J}^{p+1} M$; les φ_p définissent un homomorphisme *surjectif* de gr(A)-modules gradués

(10.1.1.2) $$\varphi : \mathrm{gr}_0(M) \otimes_{\mathrm{gr}_0(A)} \mathrm{gr}(A) \to \mathrm{gr}(M).$$

(10.1.2) Supposons vérifiée l'*une* des hypothèses suivantes :

(i) $\mathfrak{J}$ est nilpotent;

(ii) A est noethérien, $\mathfrak{J}$ est contenu dans le radical de A, et M est de type fini.

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) M est un A-module libre.

b) $M/\mathfrak{J}M = M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ est un $(A/\mathfrak{J})$-module libre, et $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{J}) = 0$.

c) $M/\mathfrak{J}M$ est un $(A/\mathfrak{J})$-module libre et l'homomorphisme canonique (10.1.1.2) est injectif (donc bijectif).

(10.1.3) Supposons que $A/\mathfrak{J}$ soit un *corps* (autrement dit que $\mathfrak{J}$ soit maximal), et que l'une des hypothèses (i), (ii) de (10.1.2) soit vérifiée. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) M est un A-module libre.

b) M est un A-module projectif.

c) M est un A-module plat.

d) $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{J}) = 0$.

e) L'homomorphisme canonique (10.1.1.2) est bijectif.

Ce résultat s'appliquera en particulier dans les deux cas suivants :

(i) M est un module *quelconque* sur un anneau local A dont l'idéal maximal $\mathfrak{J}$ est *nilpotent* (par exemple un anneau local artinien).

(ii) M est un module *de type fini* sur un anneau *local noethérien*.

10.2. Critères locaux de platitude.

(10.2.1) Les hypothèses et notations étant celles de (10.1.1), considérons les conditions suivantes :

a) M est un A-module plat.

b) $M/\mathfrak{J}M$ est un $(A/\mathfrak{J})$-module plat et $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{J}) = 0$.

c) $M/\mathfrak{J}M$ est un $(A/\mathfrak{J})$-module plat et l'homomorphisme canonique (10.1.1.2) est bijectif.

d) Pour tout $n \geqslant 1$, $M/\mathfrak{J}^n M$ est un $(A/\mathfrak{J}^n)$-module plat.

On a alors les implications

$$a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow d$$

et si $\mathfrak{J}$ est *nilpotent*, les quatre conditions *a)*, *b)*, *c)*, *d)* sont *équivalentes*. Il en est de même si A est noethérien et en outre si M est *idéalement séparé*, c'est-à-dire que pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, le A-module $\mathfrak{a} \otimes_A M$ est *séparé* pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique.

(10.2.2) Soient A un anneau noethérien, B une A-algèbre commutative noethérienne, $\mathfrak{J}$ un idéal de A tel que $\mathfrak{J}B$ soit contenu dans le radical de B, M un B-*module* de type fini. Alors, lorsque M est considéré comme A-*module*, les conditions *a)*, *b)*, *c)*, *d)* de (10.2.1) sont *équivalentes*.

Ce résultat s'applique surtout lorsque A et B sont des anneaux *locaux* noethériens, l'homomorphisme $A \to B$ un homomorphisme *local*. Plus particulièrement, si $\mathfrak{J}$ est alors l'idéal *maximal* de A, on peut, dans les conditions *b)* et *c)*, supprimer l'hypothèse que $M/\mathfrak{J}M$ est plat, qui est automatiquement vérifiée, et la condition *d)* signifie que les modules $M/\mathfrak{J}^n M$ sont *libres* sur les $A/\mathfrak{J}^n$.

(10.2.3) Les hypothèses sur A, B, $\mathfrak{J}$, M étant celles formulées au début de (10.2.2), soient $\hat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique, $\hat{M}$ le séparé complété de M pour la topologie $\mathfrak{J}B$-préadique. Alors, pour que M soit un A-module plat, il faut et il suffit que $\hat{M}$ soit un $\hat{A}$-module plat.

(10.2.4) Soient $\rho : A \to B$ un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens, k le corps résiduel de A, M, N deux B-modules de type fini, N étant supposé être A-*plat*. Soit $u : M \to N$ un B-homomorphisme. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) u est injectif et Coker (u) est un A-module plat.

b) $u \otimes 1 : M \otimes_A k \to N \otimes_A k$ est injectif.

(10.2.5) Soient $\rho : A \to B$, $\sigma : B \to C$ des homomorphismes locaux d'anneaux locaux noethériens, k le corps résiduel de A, M un C-module de type fini. On suppose que B est un A-module *plat* Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) M est un B-module plat.

b) M est un A-module plat, et $M \otimes_A k$ est un $(B \otimes_A k)$-module plat.

Proposition **(10.2.6)**. — *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens,* $\rho : A \to B$ *un homomorphisme local,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* B *contenu dans l'idéal maximal,* M *un* B-*module de type fini. Supposons que pour tout* $n \geqslant 0$, $M_n = M/\mathfrak{J}^{n+1}M$ *soit un* A-*module plat. Alors* M *est un* A-*module plat.*

Il faut prouver que pour tout homomorphisme injectif $u : N' \to N$ de A-modules de type fini, $v = 1 \otimes u : M \otimes_A N' \to M \otimes_A N$ est injectif. Or, $M \otimes_A N'$ et $M \otimes_A N$ sont des B-modules de type fini, donc séparés pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.5) ; il suffit donc de prouver que l'homomorphisme $\hat{v} : (M \otimes_A N')^{\wedge} \to (M \otimes_A N)^{\wedge}$ pour les séparés complétés est injectif. Or, on a $\hat{v} = \varprojlim v_n$, où v_n est l'homomorphisme $1 \otimes u : M_n \otimes_A N' \to M_n \otimes_A N$; comme par hypothèse M_n est A-plat, v_n est injectif pour tout n, donc il en est de même de v, le foncteur $\varprojlim$ étant exact à gauche.

Corollaire **(10.2.7)**. — *Soient* A *un anneau noethérien,* B *un anneau local noethérien,* $\rho : A \to B$ *un homomorphisme,* f *un élément de l'idéal maximal de* B, M *un* B-*module de type fini. Supposons que l'homothétie* $f_M : x \to fx$ *de* M *soit injective et que* M/fM *soit un* A-*module plat. Alors* M *est un* A-*module plat.*

Posons $M_i : f^i M$ pour $i \geqslant 0$; comme f_M est injective, M_i/M_{i+1} est isomorphe à M/fM, donc A-plat pour tout $i \geqslant 0$; de la suite exacte

$$0 \to M_i/M_{i+1} \to M/M_{i+1} \to M/M_i \to 0$$

on tire par récurrence sur i que M/M_i est A-*plat* pour tout $i \geqslant 0$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.1.2) ; on peut donc appliquer (10.2.6). On peut aussi raisonner directement comme suit : pour tout A-module N de type fini, $M \otimes_A N$ est un B-module de type fini; comme f appartient au radical $\mathfrak{n}$ de B, la topologie (f)-adique sur $M \otimes_A N$ est plus fine que la topologie $\mathfrak{n}$-adique, et on sait que cette dernière est *séparée* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.5). D'ailleurs, comme M/M_i est A-plat, on a $f^i(M \otimes_A N) = \mathrm{Im}(M_i \otimes_A N \to M \otimes_A N) = \mathrm{Ker}(M \otimes_A N \to (M/M_i) \otimes_A N)$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.1.2). Soient alors N un A-module de type fini, N' un sous-module de N, $j : N' \to N$ l'injection canonique; dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} M\otimes_A N' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "1_M \otimes j"'] & (M/M_i)\otimes_A N' \arrow[d, "1_{M/M_i}\otimes j"] \\ M\otimes_A N \arrow[r] & (M/M_i)\otimes_A N \end{tikzcd}$$

$1_{M/M_i} \otimes j$ est injectif puisque M/M_i est A-plat; on en conclut que

$$\mathrm{Ker}(M \otimes_A N' \to M \otimes_A N) \subset \mathrm{Ker}(M \otimes_A N' \to (M/M_i) \otimes_A N')$$

quel que soit i; puisque l'intersection des seconds membres est réduite à 0 comme on l'a vu plus haut, il en est de même du premier membre, et par suite M est A-plat.

Proposition (**10.2.8**). — *Soient* A *un anneau noethérien réduit,* M *un* A-*module de type fini. On suppose que pour toute* A-*algèbre* B, *qui est un anneau de valuation discrète,* $M \otimes_A B$ *soit un* B-*module plat* (*donc libre* (10.1.3)). *Alors* M *est un* A-*module plat.*

On sait que pour que M soit plat, il faut et il suffit que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $M_{\mathfrak{m}}$ soit un $A_{\mathfrak{m}}$-module plat ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.3.3); on peut donc se borner au cas où A est *local* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 1.2.8). Soient alors $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, $\mathfrak{p}_i$ ($1 \leqslant i \leqslant r$) ses idéaux premiers minimaux, k le corps résiduel $A/\mathfrak{m}$. On sait (**II**, 7.1.7) qu'il existe pour chaque i un anneau de valuation discrète B_i ayant même corps des fractions K_i que l'anneau intègre $A/\mathfrak{p}_i$, et dominant ce dernier. Posons $M_i = M \otimes_A B_i$. Par hypothèse, M_i est libre sur B_i, donc on a, en désignant par k_i le corps résiduel de B_i

(**10.2.8.1**) $$\mathrm{rg}_{k_i}(M_i \otimes_{B_i} k_i) = \mathrm{rg}_{K_i}(M_i \otimes_{B_i} K_i)$$

Mais il est clair que l'homomorphisme composé $A \to A/\mathfrak{p}_i \to B_i$ est local, donc k est une extension de k, et l'on a $M_i \otimes_{B_i} k_i = M \otimes_A k_i = (M \otimes_A k) \otimes_k k_i$, et par ailleurs $M_i \otimes_{B_i} K_i = M \otimes_A K_i$. L'égalité (10.2.8.1) entraîne donc

$$\mathrm{rg}_k(M \otimes_A k) = \mathrm{rg}_{K_i}(M \otimes_A K_i) \qquad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant r$$

et comme A est réduit, on sait que cette condition entraîne que M est un A-module *libre* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, prop. 7).

10.3. Existence d'extensions plates d'anneaux locaux.

Proposition (**10.3.1**). — *Soient* A *un anneau local noethérien,* $\mathfrak{J}$ *son idéal maximal,* $k = A/\mathfrak{J}$ *son corps résiduel. Soit* K *une extension du corps* k. *Il existe un homomorphisme local de* A *dans un anneau local noethérien* B, *tel que* $B/\mathfrak{J}B$ *soit* k-*isomorphe à* K, *et que* B *soit un* A-*module plat.*

Nous démontrerons cette proposition en plusieurs étapes.

(**10.3.1.1**) Supposons d'abord que $K = k(T)$, où T est une indéterminée. Dans l'anneau de polynômes $A' = A[T]$, considérons l'idéal premier $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}A'$ formé des polynômes ayant leurs coefficients dans l'idéal $\mathfrak{J}$; il est clair que $A'/\mathfrak{J}'$ est canoniquement isomorphe à $k[T]$. Montrons que l'anneau de fractions $B = A'_{\mathfrak{J}'}$ répond à la question; c'est évidemment un anneau local noethérien dont l'idéal maximal $\mathfrak{L} = \mathfrak{J}B$. En outre, $B/\mathfrak{L} = (A'/\mathfrak{J}')_{\mathfrak{J}'} = (k[T])_{\mathfrak{J}'}$ n'est autre que le corps des fractions K de $k[T]$. Enfin, B est un A'-module plat et A' un A-module libre, donc B est un A-module plat ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.2.1).

(10.3.1.2) Supposons ensuite que $K = k(t) = k[t]$, où t est algébrique sur k; soit $f \in k[T]$ le polynôme minimal de t; il existe un polynôme unitaire $F \in A[T]$ dont l'image canonique dans $k[T]$ soit f. Posons encore $A' = A[T]$, et soit $\mathfrak{J}'$ l'idéal $\mathfrak{J}A' + (F)$ dans A'. Nous allons voir que l'anneau quotient $B = A'/(F)$ répond cette fois à la question. Tout d'abord, il est clair que B est un A-module *libre*, donc plat. L'anneau $A'/\mathfrak{J}'$ est isomorphe à $(A'/\mathfrak{J}A')/((\mathfrak{J}A' + (F))/\mathfrak{J}A') = k[T]/(f) = K$; l'image $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{J}'$ dans B est donc maximal et on a évidemment $\mathfrak{L} = \mathfrak{J}B$. Enfin, B est un anneau semi-local, puisqu'il est un A-module de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, cor. 3 de la prop. 9), et ses idéaux maximaux sont en correspondance biunivoque avec ceux de $B/\mathfrak{J}B$ ([13], vol. I, p. 259); ce qui précède prouve donc que B est un anneau local.

Lemme **(10.3.1.3)**. — *Soit* $(A_\lambda, f_{\mu\lambda})$ *un système inductif filtrant d'anneaux locaux, tel que les* $f_{\mu\lambda}$ *soient des homomorphismes locaux; soit* $\mathfrak{m}_\lambda$ *l'idéal maximal de* A_λ, *et soit* $K_\lambda = A_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda$. *Alors* $A' = \varinjlim A_\lambda$ *est un anneau local dont* $\mathfrak{m}' = \varinjlim \mathfrak{m}_\lambda$ *est l'idéal maximal, et* $K = \varinjlim K_\lambda$ *le corps résiduel. En outre, si* $\mathfrak{m}_\mu = \mathfrak{m}_\lambda A_\mu$ *pour* $\lambda < \mu$, *on a* $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}_\lambda A'$ *pour tout* λ. *Si, de plus, pour* $\lambda < \mu$, A_μ *est un* A_λ*-module plat, et si tous les* A_λ *sont noethériens, alors* A' *est noethérien et est un* A_λ*-module plat pour tout* λ.

Comme $f_{\mu\lambda}(\mathfrak{m}_\lambda) \subset \mathfrak{m}_\mu$ pour $\lambda < \mu$ par hypothèse, les $\mathfrak{m}_\lambda$ forment un système inductif, et sa limite $\mathfrak{m}'$ est évidemment un idéal de A'. En outre, si $x' \notin \mathfrak{m}'$, il existe λ tel que $x' = f_\lambda(x_\lambda)$ pour un $x_\lambda \in A_\lambda$ ($f_\lambda : A_\lambda \to A'$ désignant l'homomorphisme canonique); puisque $x' \notin \mathfrak{m}'$, on a nécessairement $x_\lambda \notin \mathfrak{m}_\lambda$, donc x_λ admet un inverse y_λ dans A_λ, et $y' = f_\lambda(y_\lambda)$ est l'inverse de x' dans A', ce qui prouve que A' est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}'$; l'assertion relative à K résulte aussitôt du fait que $\varinjlim$ est un foncteur exact. L'hypothèse $\mathfrak{m}_\mu = \mathfrak{m}_\lambda A_\mu$ signifie que l'application canonique $\mathfrak{m}_\lambda \otimes_{A_\lambda} A_\mu \to \mathfrak{m}_\mu$ est surjective; la relation $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}_\lambda A'$ résulte donc encore de l'exactitude du foncteur $\varinjlim$ et du fait qu'il commute avec le produit tensoriel.

Supposons maintenant que pour $\lambda < \mu$, on ait $\mathfrak{m}_\mu = \mathfrak{m}_\lambda A_\mu$ et que A_μ soit un A_λ-module plat. Alors A' est un A_λ-module plat pour tout λ, en vertu de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.2.3); comme A' et A_λ sont des anneaux locaux et que $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}_\lambda A'$, A' est même un A_λ-module *fidèlement plat* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.6.2). Supposons enfin, en outre, les A_λ *noethériens*; les topologies $\mathfrak{m}_\lambda$-préadiques sont alors séparées ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.5); montrons qu'il en résulte d'abord que sur A' la topologie $\mathfrak{m}'$-adique est *séparée*. En effet, si $x' \in A'$ appartient à tous les $\mathfrak{m}'^n$ $(n > 0)$, il est l'image d'un $x_\mu \in A_\mu$ pour un certain indice μ, et comme l'image réciproque dans A_μ de $\mathfrak{m}'^n = \mathfrak{m}_\mu^n A'$ est $\mathfrak{m}_\mu^n$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.6.1), x_μ appartient à tous les $\mathfrak{m}_\mu^n$, donc $x_\mu = 0$ par hypothèse, et par conséquent $x' = 0$. Notons $\hat{A}'$ le complété de A' pour la topologie $\mathfrak{m}'$-adique; ce qui précède montre que l'on a $A' \subset \hat{A}'$. Nous allons montrer que $\hat{A}'$ est *noethérien* et A_λ*-plat* pour tout λ; il en résultera que $\hat{A}'$ est A'-plat $(\mathbf{0}_I, 6.2.3)$, et comme $\mathfrak{m}'\hat{A}' \neq \hat{A}'$, $\hat{A}'$ est un A'-module fidèlement plat $(\mathbf{0}_I, 6.6.2)$, d'où on conclura finalement que A' est *noethérien* $(\mathbf{0}_I, 6.5.2)$, ce qui achèvera la démonstration du lemme.

On a $\hat{A}' = \varprojlim_n A'/\mathfrak{m}'^n$; en raison de ce que A' est A_λ-plat, on a

$$\mathfrak{m}'^n/\mathfrak{m}'^{n+1} = (\mathfrak{m}_\lambda^n/\mathfrak{m}_\lambda^{n+1}) \otimes_{A_\lambda} A' = (\mathfrak{m}_\lambda^n/\mathfrak{m}_\lambda^{n+1}) \otimes_{K_\lambda} (K_\lambda \otimes_{A_\lambda} A') = (\mathfrak{m}_\lambda^n/\mathfrak{m}_\lambda^{n+1}) \otimes_{K_\lambda} K;$$

comme $\mathfrak{m}_\lambda^n/\mathfrak{m}_\lambda^{n+1}$ est un K_λ-espace vectoriel de dimension finie, $\mathfrak{m}'^n/\mathfrak{m}'^{n+1}$ est un K-espace vectoriel de dimension finie pour tout $n \geqslant 0$. Il résulte donc de $(\mathbf{0}_I, 7.2.12)$ et $(\mathbf{0}_I, 7.2.8)$ que $\hat{A}'$ est *noethérien.* On sait en outre que l'idéal maximal de $\hat{A}'$ est $\mathfrak{m}'\hat{A}'$ et que $\hat{A}'/\mathfrak{m}'^n\hat{A}'$ est isomorphe à $A'/\mathfrak{m}'^n$; comme $A'/\mathfrak{m}'^n = (A_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda^n) \otimes_{A_\lambda} A'$, $A'/\mathfrak{m}'^n$ est un $(A_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda^n)$-module plat $(\mathbf{0}_I, 6.2.1)$; le critère (10.2.2) est donc applicable à la A_λ-algèbre noethérienne $\hat{A}'$, et montre que $\hat{A}'$ est A_λ-*plat.* C.Q.F.D.

(10.3.1.4) Abordons maintenant le cas général. Il existe un ordinal γ et pour tout ordinal $\lambda \leqslant \gamma$ un sous-corps k_λ de K contenant k, tels que : 1° Pour tout $\lambda < \gamma$, $k_{\lambda+1}$ soit une extension de k_λ engendrée par un seul élément; 2° Pour tout ordinal μ sans prédécesseur, $k_\mu = \bigcup_{\lambda<\mu} k_\lambda$; 3° $K = k_\gamma$. Il suffit en effet de considérer une bijection $\xi \to t_\xi$ de l'ensemble des ordinaux $\xi \leqslant \beta$ (pour un β convenable) sur K, de définir k_λ par induction transfinie (pour $\lambda \leqslant \beta$) comme la réunion des k_μ pour $\mu < \lambda$ si λ n'a pas de prédécesseur, et, si $\lambda = \nu + 1$, comme $k_\nu(t_\xi)$, où ξ est le plus petit ordinal tel que $t_\xi \notin k_\nu$; γ est alors par définition le plus petit ordinal $\leqslant \beta$ tel que $k_\gamma = K$.

Cela étant, nous allons définir, par récurrence transfinie, une famille d'anneaux locaux noethériens A_λ pour $\lambda \leqslant \gamma$, et des homomorphismes locaux $f_{\mu\lambda} : A_\lambda \to A_\mu$ pour $\lambda \leqslant \mu$, vérifiant les conditions suivantes :

(i) $(A_\lambda, f_{\mu\lambda})$ est un système inductif et $A_0 = A$.

(ii) Pour tout λ, on a un k-isomorphisme $A_\lambda/\mathfrak{J}A_\lambda \xrightarrow{\sim} k_\lambda$.

(iii) Pour $\lambda \leqslant \mu$, A_μ est un A_λ-module plat.

Supposons donc les A_λ et les $f_{\mu\lambda}$ définis pour $\lambda < \mu < \xi$, et supposons en premier lieu que $\xi = \zeta + 1$, de sorte que $k_\xi = k_\zeta(t)$. Si t est transcendant sur k_ζ, on définit A_ξ suivant le procédé de (10.3.1.1) comme égal à $(A_\zeta[t])_{\mathfrak{J}A_\zeta[t]}$; $f_{\zeta\xi}$ est l'application canonique, et pour $\lambda < \zeta$, on prend $f_{\xi\lambda} = f_{\xi\zeta} \circ f_{\zeta\lambda}$; la vérification des conditions (i) à (iii) est alors immédiate, vu ce qui a été démontré en (10.3.1.1). Supposons ensuite t algébrique, et soient h son polynôme minimal dans $k_\zeta[T]$, H un polynôme unitaire de $A_\zeta[T]$ dont l'image dans $k_\zeta[T]$ est h; on prend alors A_ξ égal à $A_\zeta[T]/(H)$, les $f_{\xi\lambda}$ se définissant comme précédemment; la vérification des conditions (i) à (iii) résulte alors de ce qui a été vu en (10.3.1.2).

Supposons maintenant que ξ n'ait pas de prédécesseur; on prend alors pour A_ξ la limite inductive du système inductif d'anneaux locaux $(A_\lambda, f_{\mu\lambda})$ pour $\lambda < \xi$; $f_{\xi\lambda}$ est définie comme l'application canonique pour $\lambda < \xi$. Le fait que A_ξ soit local noethérien, que les $f_{\xi\lambda}$ soient des homomorphismes locaux, et les conditions (i) à (iii) pour $\lambda \leqslant \xi$

résultent alors de l'hypothèse de récurrence et du lemme (10.3.1.3). Cette construction faite, il est clair que l'anneau $B = A_Y$ vérifie l'énoncé de (10.3.1).

On notera qu'en vertu de (10.2.1, *c)*), on a un isomorphisme canonique

(10.3.1.5) $$\mathrm{gr}(A) \otimes_k K \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}(B).$$

D'autre part, on peut remplacer B par son complété $\mathfrak{J}$B-adique $\hat{B}$ sans changer les conclusions de (10.3.1), puisque $\hat{B}$ est un B-module plat ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.3), donc un A-module plat ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.2.1).

On a en outre démontré le

Corollaire **(10.3.2)**. — *Si* K *est une extension de degré fini, on peut supposer que* B *est une* A-*algèbre finie.*

§ 11. COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

11.1. Rappels sur les suites spectrales.

(11.1.1) Nous utiliserons dans la suite une notion de suite spectrale plus générale que celle définie dans (T, 2.4); gardant les notations de (T, 2.4), nous appellerons *suite spectrale* dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ un système E formé des éléments suivants :

a) Une famille (E_r^{pq}) d'objets de $\mathcal{C}$ définis pour $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{Z}$ et $r \geqslant 2$.

b) Une famille de morphismes $d_r^{pq} : E_r^{pq} \to E_r^{p+r, q-r+1}$ tels que $d_r^{p+r, q-r+1} d_r^{pq} = 0$. On pose $Z_{r+1}(E_r^{pq}) = \mathrm{Ker}(d_r^{pq})$, $B_{r+1}(E_r^{pq}) = \mathrm{Im}(d_r^{p+r, q-r+1})$, de sorte que

$$B_{r+1}(E_r^{pq}) \subset Z_{r+1}(E_r^{pq}) \subset E_r^{pq}.$$

c) Une famille d'isomorphismes $\alpha_r^{pq} : Z_{r+1}(E_r^{pq})/B_{r+1}(E_r^{pq}) \xrightarrow{\sim} E_{r+1}^{pq}$.

On définit alors pour $k \geqslant r+1$, par récurrence sur k, les sous-objets $B_k(E_r^{pq})$ et $Z_k(E_r^{pq})$ comme images réciproques, par le morphisme canonique $E_r^{pq} \to E_r^{pq}/B_{r+1}(E_r^{pq})$ des sous-objets de ce quotient identifié par α_r^{pq} aux sous-objets $B_k(E_{r+1}^{pq})$ et $Z_k(E_{r+1}^{pq})$ respectivement. Il est clair que l'on a alors, à un isomorphisme près

(11.1.1.1) $$Z_k(E_r^{pq})/B_k(E_r^{pq}) = E_k^{pq} \qquad \text{pour } k \geqslant r+1$$

et, si on pose encore $B_r(E_r^{pq}) = 0$ et $Z_r(E_r^{pq}) = E_r^{pq}$, on a les relations d'inclusion

(11.1.1.2) $$0 = B_r(E_r^{pq}) \subset B_{r+1}(E_r^{pq}) \subset B_{r+2}(E_r^{pq}) \subset \ldots$$
$$\ldots \subset Z_{r+2}(E_r^{pq}) \subset Z_{r+1}(E_r^{pq}) \subset Z_r(E_r^{pq}) = E_r^{pq}.$$

Les autres éléments de la donnée de E sont alors :

d) Deux sous-objets $B_\infty(E_2^{pq})$ et $Z_\infty(E_2^{pq})$ de E_2^{pq} tels que l'on ait $B_\infty(E_2^{pq}) \subset Z_\infty(E_2^{pq})$ et, pour tout $k \geqslant 2$

$$B_k(E_2^{pq}) \subset B_\infty(E_2^{pq}) \qquad \text{et} \qquad Z_\infty(E_2^{pq}) \subset Z_k(E_2^{pq}).$$

On pose

(11.1.1.3) $$E_\infty^{pq} = Z_\infty(E_2^{pq})/B_\infty(E_2^{pq}).$$

e) Une famille (E^n) d'objets de $\boldsymbol{C}$, dont chacun est muni d'une *filtration décroissante* $(\mathrm{F}^p(\mathrm{E}^n))_{p\in\mathbf{Z}}$. On désigne comme d'ordinaire par $\mathrm{gr}(\mathrm{E}^n)$ l'objet gradué associé à l'objet filtré E^n, somme directe des $\mathrm{gr}_p(\mathrm{E}^n)=\mathrm{F}^p(\mathrm{E}^n)/\mathrm{F}^{p+1}(\mathrm{E}^n)$.

f) Pour tout couple $(p, q)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, un isomorphisme $\beta^{pq} : \mathrm{E}_\infty^{pq} \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_p(\mathrm{E}^{p+q})$.

La famille (E^n), sans les filtrations, est appelée l'*aboutissement* de la suite spectrale E.

Supposons que la catégorie $\boldsymbol{C}$ admette des sommes directes infinies, ou que pour tout $r\geqslant 2$ et tout $n\in\mathbf{Z}$, les couples (p, q) tels que $p+q=n$ et $\mathrm{E}_r^{pq}\neq 0$ soient en nombre fini (il suffit qu'il en soit ainsi pour $r=2$). Alors les $\mathrm{E}_r^{(n)}=\sum_{p+q=n}\mathrm{E}_r^{pq}$ sont définis, et en désignant par $d_r^{(n)}$ le morphisme $\mathrm{E}_r^{(n)}\to\mathrm{E}_r^{(n+1)}$ dont la restriction à E_r^{pq} est d_r^{pq} pour chaque couple (p, q) tel que $p+q=n$, on a $d_r^{(n+1)}\circ d_r^{(n)}=0$, autrement dit $(\mathrm{E}_r^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ est un *complexe* $\mathrm{E}_r^{(\cdot)}$ dans $\boldsymbol{C}$, à opérateur de dérivation de degré $+1$, et il résulte de *c)* que $\mathrm{H}^n(\mathrm{E}_n^{(\cdot)})$ est *isomorphe à* $\mathrm{E}_{r+1}^{(n)}$ pour tout $r\geqslant 2$.

(11.1.2) Un *morphisme* $u : \mathrm{E}\to\mathrm{E}'$ d'une suite spectrale E dans une suite spectrale $\mathrm{E}'=(\mathrm{E}_r'^{pq}, \mathrm{E}'^n)$ consiste en des systèmes de morphismes $u_r^{pq} : \mathrm{E}_r^{pq}\to\mathrm{E}_r'^{pq}$, $u^n : \mathrm{E}^n\to\mathrm{E}'^n$, les u^n étant compatibles avec les filtrations de E^n et E'^n, les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E}_r^{pq} \arrow[r, "d_r^{pq}"] \arrow[d, "u_r^{pq}"'] & \mathrm{E}_r^{p+r,q-r+1} \arrow[d, "u_r^{p+r,q-r+1}"] \\
\mathrm{E}_r'^{pq} \arrow[r, "d_r'^{pq}"'] & \mathrm{E}_r'^{p+r,q-r+1}
\end{tikzcd}$$

étant commutatifs; en outre, par passage aux quotients, u_r^{pq} donne un morphisme $\bar{u}_r^{pq} : \mathrm{Z}_{r+1}(\mathrm{E}_r^{pq})/\mathrm{B}_{r+1}(\mathrm{E}_r^{pq})\to\mathrm{Z}_{r+1}(\mathrm{E}_r'^{pq})/\mathrm{B}_{r+1}(\mathrm{E}_r'^{pq})$ et on doit avoir $\alpha_r'^{pq}\circ\bar{u}_r^{pq}=u_{r+1}^{pq}\circ\alpha_r^{pq}$; enfin, on doit avoir $u_2^{pq}(\mathrm{B}_\infty(\mathrm{E}_2^{pq}))\subset\mathrm{B}_\infty(\mathrm{E}_2'^{pq})$, $u_2^{pq}(\mathrm{Z}_\infty(\mathrm{E}_2^{pq}))\subset\mathrm{Z}_\infty(\mathrm{E}_2'^{pq})$; par passage aux quotients, u_2^{pq} donne alors un morphisme $u_\infty'^{pq} : \mathrm{E}_\infty^{pq}\to\mathrm{E}_\infty'^{pq}$, et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E}_\infty^{pq} \arrow[r, "u_\infty'^{pq}"] \arrow[d, "\beta^{pq}"'] & \mathrm{E}_\infty'^{pq} \arrow[d, "\beta'^{pq}"] \\
\mathrm{gr}_p(\mathrm{E}^{p+q}) \arrow[r, "\mathrm{gr}_p(u^{p+q})"'] & \mathrm{gr}_p(\mathrm{E}'^{p+q})
\end{tikzcd}$$

doit être commutatif.

Les définitions précédentes montrent, par récurrence sur r, que si les u_2^{pq} sont des *isomorphismes*, il en est de même des u_r^{pq} pour $r\geqslant 2$; *si l'on sait en outre* que $u_2^{pq}(\mathrm{B}_\infty(\mathrm{E}_2^{pq}))=\mathrm{B}_\infty(\mathrm{E}_2'^{pq})$ et $u_2^{pq}(\mathrm{Z}_\infty(\mathrm{E}_2^{pq}))=\mathrm{Z}_\infty(\mathrm{E}_2'^{pq})$ et que les u^n sont des *isomorphismes*, alors on peut conclure que u est un *isomorphisme*.

(11.1.3) Rappelons que si $(\mathrm{F}^p(\mathrm{X}))_{p\in\mathbf{Z}}$ est une *filtration* (décroissante) d'un objet $\mathrm{X}\in\boldsymbol{C}$, on dit que cette filtration est *séparée* si $\inf(\mathrm{F}^p(\mathrm{X}))=0$, *discrète* s'il existe un p tel que $\mathrm{F}^p(\mathrm{X})=0$, *exhaustive* (ou *co-séparée*) si $\sup(\mathrm{F}^p(\mathrm{X}))=\mathrm{X}$, *co-discrète* s'il existe p tel que $\mathrm{F}^p(\mathrm{X})=\mathrm{X}$.

Nous dirons qu'une suite spectrale $\mathrm{E}=(\mathrm{E}_r^{pq},\mathrm{E}^n)$ est *faiblement convergente* si l'on a $\mathrm{B}_\infty(\mathrm{E}_2^{pq})=\sup\limits_k(\mathrm{B}_k(\mathrm{E}_2^{pq}))$, $\mathrm{Z}_\infty(\mathrm{E}_2^{pq})=\inf\limits_k(\mathrm{Z}_k(\mathrm{E}_2^{pq}))$ (autrement dit les objets $\mathrm{B}_\infty(\mathrm{E}_2^{pq})$ et $\mathrm{Z}_\infty(\mathrm{E}_2^{pq})$ sont déterminés par les données *a)* à *c)* de la suite spectrale E). Nous dirons que la suite spectrale E est *régulière* si elle est faiblement convergente et si en outre :

1° Pour tout couple (p,q), la suite décroissante $(\mathrm{Z}_k(\mathrm{E}_2^{pq}))_{k\geqslant 2}$ est *stationnaire*; l'hypothèse que E est faiblement convergente entraîne alors $\mathrm{Z}_\infty(\mathrm{E}_2^{pq})=\mathrm{Z}_k(\mathrm{E}_2^{pq})$ pour k assez grand (dépendant de p et q).

2° Pour tout n, la filtration $(\mathrm{F}^p(\mathrm{E}^n))_{p\in\mathbf{Z}}$ de E^n est *discrète* et *exhaustive.*

On dit que la suite spectrale E est *co-régulière* si elle est faiblement convergente et si en outre :

3° Pour tout couple (p,q), la suite croissante $(\mathrm{B}_k(\mathrm{E}_2^{pq}))_{k\geqslant 2}$ est *stationnaire*, ce qui entraîne $\mathrm{B}_\infty(\mathrm{E}_2^{pq})=\mathrm{B}_k(\mathrm{E}_2^{pq})$, et par suite $\mathrm{E}_\infty^{pq}=\inf\mathrm{E}_k^{pq}$.

4° Pour tout n, la filtration de E^n est *co-discrète.*

Enfin, on dit que E est *birégulière* si elle est à la fois régulière et co-régulière, autrement dit si on a les conditions suivantes :

a) Pour tout couple (p,q), les suites $(\mathrm{B}_k(\mathrm{E}_2^{pq}))_{k\geqslant 2}$ et $(\mathrm{Z}_k(\mathrm{E}_2^{pq}))_{k\geqslant 2}$ sont *stationnaires* et l'on a $\mathrm{B}_\infty(\mathrm{E}_2^{pq})=\mathrm{B}_k(\mathrm{E}_2^{pq})$ et $\mathrm{Z}_\infty(\mathrm{E}_2^{pq})=\mathrm{Z}_k(\mathrm{E}_2^{pq})$ pour k assez grand (ce qui entraîne $\mathrm{E}_\infty^{pq}=\mathrm{E}_k^{pq}$).

b) Pour tout n, la filtration $(\mathrm{F}^p(\mathrm{E}^n))_{p\in\mathbf{Z}}$ est *discrète* et *co-discrète* (ce qu'on exprime aussi en disant qu'elle est *finie*).

Les suites spectrales définies dans (T, 2.4) sont donc les suites spectrales birégulières.

(11.1.4) Supposons que dans la catégorie $\boldsymbol{C}$, les limites inductives filtrantes existent et que le foncteur $\varinjlim$ soit *exact* (ce qui équivaut à dire que l'axiome AB 5) de (T, 1.5) est vérifié (cf. T, 1.8)). La condition que la filtration $(\mathrm{F}^p(\mathrm{X}))_{p\in\mathbf{Z}}$ d'un objet $\mathrm{X}\in\boldsymbol{C}$ est exhaustive s'écrit alors aussi $\varinjlim\limits_{p\to-\infty}\mathrm{F}^p(\mathrm{X})=\mathrm{X}$. Si une suite spectrale E est faiblement convergente, on a $\mathrm{B}_\infty(\mathrm{E}_2^{pq})=\varinjlim\limits_{k\to\infty}\mathrm{B}_k(\mathrm{E}_2^{pq})$; si en outre $u:\mathrm{E}\to\mathrm{E}'$ est un morphisme de E dans une suite spectrale E′ de $\boldsymbol{C}$ faiblement convergente, on a $u_2^{pq}(\mathrm{B}_\infty(\mathrm{E}_2^{pq}))=\mathrm{B}_\infty(\mathrm{E}_2'^{pq})$ en raison de l'exactitude de $\varinjlim$. De plus :

Proposition **(11.1.5)**. — *Soient* $\boldsymbol{C}$ *une catégorie abélienne dans laquelle les limites inductives filtrantes sont exactes,* E, E′ *deux suites spectrales régulières de* $\boldsymbol{C}$, $u:\mathrm{E}\to\mathrm{E}'$ *un morphisme de suites spectrales. Si les* u_2^{pq} *sont des isomorphismes, il en est de même de* u.

Nous savons déjà (11.1.2) que les u_r^{pq} sont des isomorphismes et que

$$u_2^{pq}(\mathrm{B}_\infty(\mathrm{E}_2^{pq}))=\mathrm{B}_\infty(\mathrm{E}_2'^{pq});$$

l'hypothèse que E et E′ sont régulières entraîne aussi $u_2^{pq}(Z_\infty(E_2^{pq})) = Z_\infty(E_2'^{pq})$, et comme u_2^{pq} est un isomorphisme, il en est de même de u_∞^{pq}; on en conclut donc que $\mathrm{gr}_p(u^{p+q})$ est aussi un isomorphisme. Mais comme les filtrations des E^n et des E'^n sont discrètes et exhaustives, cela entraîne que les u^n sont aussi des isomorphismes (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 8, th. 1).

(11.1.6) Il résulte de (11.1.1.2) et de la définition (11.1.1.3) que si, dans une suite spectrale E, on a $E_r^{pq} = 0$, on a $E_k^{pq} = 0$ pour $k \geqslant r$ et $E_\infty^{pq} = 0$. On dit qu'une suite spectrale est *dégénérée* s'il existe un entier $r \geqslant 2$ et, pour tout entier $n \in \mathbf{Z}$, un entier $q(n)$ tel que $E_r^{n-q,q} = 0$ *pour tout* $q \neq q(n)$. On déduit d'abord de la remarque précédente que l'on a aussi $E_k^{n-q,q} = 0$ pour $k \geqslant r$ (y compris $k = \infty$) et $q \neq q(n)$. En outre, la définition de E_{r+1}^{pq} montre que l'on a $E_{r+1}^{n-q(n),q(n)} = E_r^{n-q(n),q(n)}$; si E est *faiblement convergente*, on a donc aussi $E_\infty^{n-q(n),q(n)} = E_r^{n-q(n),q(n)}$; autrement dit, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $\mathrm{gr}_p(E^n) = 0$ pour $p \neq q(n)$ et $\mathrm{gr}_{q(n)}(E^n) = E_r^{n-q(n),q(n)}$. Si en outre la filtration de E^n est *discrète* et *exhaustive*, la suite E est *régulière* et on a $E^n = E_r^{n-q(n),q(n)}$ à un isomorphisme près.

(11.1.7) Supposons que dans la catégorie $\mathbf{C}$ les limites inductives filtrantes existent et soient exactes, et soit $(E_\lambda, u_{\mu\lambda})$ un système inductif (suivant un ensemble d'indices filtrant) de suites spectrales de $\mathbf{C}$. Alors la *limite inductive* de ce système inductif existe dans la catégorie additive des suites spectrales d'objets de $\mathbf{C}$: il suffit pour le voir de définir E_r^{pq}, d_r^{pq}, α_r^{pq}, $B_\infty(E_2^{pq})$, $Z_\infty(E_2^{pq})$, E^n, $F^p(E^n)$ et β^{pq} comme limites inductives respectives de $E_{r,\lambda}^{pq}$, $d_{r,\lambda}^{pq}$, $\alpha_{r,\lambda}^{pq}$, $B_\infty(E_{2,\lambda}^{pq})$, $Z_\infty(E_{2,\lambda}^{pq})$, E_λ^n, $F^p(E_\lambda^n)$ et β_λ^{pq}; la vérification des conditions de (11.1.1) résulte de l'exactitude du foncteur $\varinjlim$ dans $\mathbf{C}$.

Remarque **(11.1.8)**. — Supposons que la catégorie $\mathbf{C}$ soit la catégorie des A-modules sur un anneau *noethérien* A (resp. sur un anneau A). Alors, les définitions de (11.1.1) montrent que si pour un r donné, les E_r^{pq} sont des A-modules *de type fini* (resp. de *longueur finie*), il en est de même de tous les modules E_s^{pq} pour $s \geqslant r$, ainsi que des E_∞^{pq}. Si en outre la filtration de l'aboutissement (E^n) est *discrète* et *co-discrète* pour tout n, on en conclut que chacun des E_n est aussi un A-module *de type fini* (resp. de *longueur finie*).

(11.1.9) Nous aurons à considérer des conditions assurant qu'une suite spectrale E est birégulière de façon « uniforme » en $p+q=n$. On utilisera alors le lemme suivant :

Lemme **(11.1.10)**. — *Soit* (E_r^{pq}) *une famille d'objets de* $\mathbf{C}$ *liés par les données* a), b), c) *de* (11.1.1). *Pour un entier fixé n, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *Il existe un entier* $r(n)$ *tel que pour* $r \geqslant r(n), p+q=n$ *ou* $p+q=n-1$, *les morphismes* d_r^{pq} *soient tous nuls.*

b) *Il existe un entier* $r(n)$ *tel que pour* $p+q=n$ *ou* $p+q=n+1$, *on ait* $B_r(E_2^{pq}) = B_s(E_2^{pq})$ *pour* $s \geqslant r \geqslant r(n)$.

c) *Il existe un entier* $r(n)$ *tel que pour* $p+q=n$ *ou* $p+q=n-1$, *on ait* $Z_r(E_2^{pq}) = Z_s(E_2^{pq})$ *pour* $s \geqslant r \geqslant r(n)$.

d) *Il existe un entier* $r(n)$ *tel que pour* $p+q=n$, *on ait* $B_r(E_2^{pq}) = B_s(E_2^{pq})$ *et* $Z_r(E_2^{pq}) = Z_s(E_2^{pq})$ *pour* $s \geqslant r \geqslant r(n)$.

En effet, d'après les conditions *a), b), c)* de (11.1.1), dire que $Z_{r+1}(E_2^{pq}) = Z_r(E_2^{pq})$ équivaut à dire que $d_r^{pq}=0$, et dire que $B_r(E_2^{p+r,q-r+1}) = B_{r+1}(E_2^{p+r,q-r+1})$ équivaut aussi à dire que $d_r^{pq}=0$; le lemme résulte aussitôt de cette remarque.

11.2. La suite spectrale d'un complexe filtré.

(11.2.1) Étant donnée une catégorie abélienne $\mathbf{C}$, nous conviendrons de désigner par des notations telles que $K^\bullet$ les *complexes* $(K^i)_{i\in\mathbf{Z}}$ d'objets de $\mathbf{C}$ dans lesquels l'opérateur de dérivation est de degré $+1$, par des notations telles que $K_\bullet$ les complexes $(K_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ d'objets de $\mathbf{C}$ dans lesquels l'opérateur de dérivation est de degré -1. A tout complexe $K^\bullet = (K^i)$ dont l'opérateur de dérivation d est de degré $+1$, on peut associer un complexe $K'_\bullet = (K'_i)$ en posant $K'_i = K^{-i}$, l'opérateur de dérivation $K'_i \to K'_{i-1}$ étant l'opérateur $d : K^{-i} \to K^{-i+1}$; et *vice versa*, ce qui permettra suivant les circonstances de considérer l'un ou l'autre type de complexes et de traduire tout résultat pour l'un des types en résultats pour l'autre. Nous désignerons de même par des notations telles que $K^{\bullet\bullet} = (K^{ij})$ (resp. $K_{\bullet\bullet} = (K_{ij})$) des *bicomplexes* d'objets de $\mathbf{C}$ dans lesquels les *deux* opérateurs de dérivation sont de degré $+1$ (resp. -1); on passe encore de l'un à l'autre type en changeant les signes des indices, et on a des notations et remarques analogues pour des multicomplexes quelconques. La notation $K^\bullet$ ou $K_\bullet$ sera aussi utilisée pour des *objets gradués* de $\mathbf{C}$, de type $\mathbf{Z}$, qui ne sont pas nécessairement des complexes (ou que l'on peut considérer comme tels pour des opérateurs de dérivation *nuls*); par exemple, nous écrirons $H^\bullet(K^\bullet) = (H^i(K^\bullet))_{i\in\mathbf{Z}}$ la *cohomologie* d'un complexe $K^\bullet$ dont l'opérateur de dérivation est de degré $+1$, par $H_\bullet(K_\bullet) = (H_i(K_\bullet))_{i\in\mathbf{Z}}$ l'*homologie* d'un complexe $K_\bullet$ dont l'opérateur de dérivation est de degré -1; quand on passe de $K^\bullet$ à $K'_\bullet$ par l'opération décrite ci-dessus, on a $H_i(K'_\bullet) = H^{-i}(K^\bullet)$.

Rappelons à ce propos que pour un complexe $K^\bullet$ (resp. $K_\bullet$), nous écrirons en général $Z^i(K^\bullet) = \mathrm{Ker}(K^i \to K^{i+1})$ (« objet des cocycles ») et $B^i(K^\bullet) = \mathrm{Im}(K^{i-1} \to K^i)$ (« objet des cobords ») (resp. $Z_i(K_\bullet) = \mathrm{Ker}(K_i \to K_{i-1})$ (« objet des cycles ») et $B_i(K_\bullet) = \mathrm{Im}(K_{i+1} \to K_i)$ (« objet des bords »)) de sorte que $H^i(K^\bullet) = Z^i(K^\bullet)/B^i(K^\bullet)$ (resp. $H_i(K_\bullet) = Z_i(K_\bullet)/B_i(K_\bullet)$).

Si $K^\bullet = (K^i)$ (resp. $K_\bullet = (K_i)$) est un complexe dans $\mathbf{C}$, et $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ un foncteur de $\mathbf{C}$ dans une catégorie abélienne $\mathbf{C}'$, nous désignerons par $T(K^\bullet)$ (resp. $T(K_\bullet)$) le complexe $(T(K^i))$ (resp. $(T(K_i))$) dans $\mathbf{C}'$.

Nous ne revenons pas sur la définition des *∂-foncteurs* (T, 2.1), sauf pour signaler que nous dirons *aussi* ∂-foncteur au lieu de ∂^*-foncteur lorsque le morphisme ∂ diminue le degré d'une unité, le contexte devant chaque fois préciser ce point s'il peut y avoir doute.

Enfin, nous dirons qu'un *objet gradué* $(A_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ de $\mathbf{C}$ est *limité inférieurement* (resp. *supérieurement*) s'il existe i_0 tel que $A_i = 0$ pour $i < i_0$ (resp. $i > i_0$).

(11.2.2) Soit $K^\bullet$ un complexe de $\mathbf{C}$ dont l'opérateur de dérivation d est de degré $+1$, et supposons-le muni d'une *filtration* $F(K^\bullet) = (F^p(K^\bullet))_{p\in\mathbf{Z}}$ formé de sous-objets *gradués* de $K^\cdot$, autrement dit $F^p(K^\cdot) = (K^i \cap F^p(K^\cdot))_{i\in\mathbf{Z}}$; en outre, on suppose que $d(F^p(K^\cdot)) \subset F^p(K^\cdot)$ pour tout $p \in \mathbf{Z}$. Rappelons alors rapidement comment on définit *fonctoriellement* une suite spectrale $E(K^\cdot)$ à partir de $K^\cdot$ (M, XV, 4 et G, I, 4.3). Pour $r \geqslant 2$, le morphisme canonique $F^p(K^\cdot)/F^{p+r}(K^\cdot) \rightarrow F^p(K^\cdot)/F^{p+1}(K^\cdot)$ définit un morphisme pour la cohomologie

$$H^{p+q}(F^p(K^\cdot)/F^{p+r}(K^\cdot)) \rightarrow H^{p+q}(F^p(K^\cdot)/F^{p+1}(K^\cdot))$$

On désigne par $Z_r^{pq}(K^\cdot)$ l'image de ce morphisme. De même, de la suite exacte

$$0 \rightarrow F^p(K^\cdot)/F^{p+1}(K^\cdot) \rightarrow F^{p-r+1}(K^\cdot)/F^{p+1}(K^\cdot) \rightarrow F^{p-r+1}(K^\cdot)/F^p(K^\cdot) \rightarrow 0$$

on déduit par la suite exacte de cohomologie un morphisme

$$H^{p+q-1}(F^{p-r+1}(K^\cdot)/F^p(K^\cdot)) \rightarrow H^{p+q}(F^p(K^\cdot)/F^{p+1}(K^\cdot))$$

et on désigne par $B_r^{pq}(K^\cdot)$ l'image de ce morphisme; on montre que $B_r^{pq}(K^\cdot) \subset Z_r^{pq}(K^\cdot)$ et on prend $E_r^{pq}(K^\cdot) = Z_r^{pq}(K^\cdot)/B_r^{pq}(K^\cdot)$; nous ne préciserons pas la définition des d_r^{pq}, ni des α_r^{pq}.

On notera ici que tous les $Z_r^{pq}(K^\cdot)$ et $B_p^{pq}(K^\cdot)$, pour p, q fixés, sont des sous-objets du même objet $H^{p+q}(F^p(K^\cdot)/F^{p+1}(K^\cdot))$, que l'on note $Z_1^{pq}(K^\cdot)$; on pose $B_1^{pq}(K^\cdot) = 0$, de sorte que les définitions précédentes pour $Z_r^{pq}(K^\cdot)$ et $B_r^{pq}(K^\cdot)$ s'appliquent aussi pour $r=1$; on pose encore $E_1^{pq}(K^\cdot) = Z_1^{pq}(K^\cdot)$. On définit encore les d_1^{pq} et α_1^{pq} de sorte que les conditions de (11.1.1) soient vérifiées pour $r=1$. On définit d'autre part les sous-objets $Z_\infty^{pq}(K^\cdot)$, image du morphisme

$$H^{p+q}(F^p(K^\cdot)) \rightarrow H^{p+q}(F^p(K^\cdot)/F^{p+1}(K^\cdot)) = E_1^{pq}(K^\cdot)$$

et $B_\infty^{pq}(K^\cdot)$, image du morphisme

$$H^{p+q-1}(K^\cdot/F^p(K^\cdot)) \rightarrow H^{p+q}(F^p(K^\cdot)/F^{p+1}(K^\cdot)) = E_1^{pq}(K^\cdot)$$

déduit comme ci-dessus d'une suite exacte de cohomologie. On prend pour $Z_\infty(E_2^{pq}(K^\cdot))$ et $B_\infty(E_2^{pq}(K^\cdot))$ les images canoniques dans $E_2^{pq}(K^\cdot)$ de $Z_\infty^{pq}(K^\cdot)$ et $B_\infty^{pq}(K^\cdot)$.

Enfin, on désigne par $F^p(H^n(K^\cdot))$ l'image dans $H^n(K^\cdot)$ du morphisme $H^n(F^p(K^\cdot)) \rightarrow H^n(K^\cdot)$ provenant de l'injection canonique $F^p(K^\cdot) \rightarrow K^\cdot$; par la suite exacte de cohomologie, c'est aussi le noyau du morphisme $H^n(K^\cdot) \rightarrow H^n(K^\cdot/F^p(K^\cdot))$. On définit ainsi une filtration sur $E^n(K^\cdot) = H^n(K^\cdot)$; nous ne donnerons pas non plus ici la définition des isomorphismes β^{pq}.

(11.2.3) Le caractère *fonctoriel* de $E(K^\cdot)$ doit s'entendre de la façon suivante : étant donné deux complexes *filtrés* $K^\cdot$, $K'^\cdot$ de $\mathcal{C}$, et un morphisme de complexes $u : K^\cdot \rightarrow K'^\cdot$ *compatible avec les filtrations*, on en déduit de façon évidente les morphismes u_r^{pq} (pour $r \geqslant 1$) et u^n, et on montre que ces morphismes sont compatibles avec les d_r^{pq}, α_r^{pq} et β^{pq} au sens de (11.1.2), donc définissent bien un morphisme $E(u) : E(K^\cdot) \rightarrow E(K'^\cdot)$ de suites spectrales. En outre, on montre que si u et v sont des morphismes $K^\cdot \rightarrow K'^\cdot$ du type précédent, *homotopes d'ordre* $\leqslant k$, alors $u_r^{pq} = v_r^{pq}$ pour $r > k$ et $u^n = v^n$ pour tout n (M, XV, 3.1).

(11.2.4) Supposons que dans $\boldsymbol{C}$ les limites inductives filtrantes soient exactes. Alors, si la filtration $(F^p(K^\bullet))$ de $K^\bullet$ est *exhaustive*, il en est de même de la filtration $(F^p(H^n(K^\bullet)))$ pour tout n, car on a par hypothèse $K^\bullet = \varinjlim_{p \to -\infty} F^p(K^\bullet)$ et l'hypothèse sur $\boldsymbol{C}$ entraîne que la cohomologie commute aux limites inductives. En outre, on a, pour la même raison, $B_\infty(E_2^{pq}(K^\bullet)) = \sup_k B_k(E_2^{pq}(K^\bullet))$. On dit que la filtration $(F^p(K^\bullet))$ de $K^\bullet$ est *régulière* si pour tout n il existe un entier $u(n)$ tel que $H^n(F^p(K^\bullet)) = 0$ pour $p > u(n)$. Il en est ainsi en particulier lorsque la filtration de $K^\bullet$ est *discrète*. Lorsque la filtration de $K^\bullet$ est régulière et exhaustive, et que les limites inductives filtrantes dans $\boldsymbol{C}$ sont exactes, on montre (M, XV, 4) que la suite spectrale $E(K^\bullet)$ est *régulière*.

11.3. Les suites spectrales d'un bicomplexe.

(11.3.1) En ce qui concerne les conventions relatives aux bicomplexes, nous suivons celles de (T, 2.4) plutôt que celles de (M), les deux dérivations d', d'' (de degré $+1$) d'un tel bicomplexe $K^{\bullet\bullet} = (K^{ij})$ étant donc supposées *permutables*. Supposons vérifiées l'*une* des deux conditions suivantes : 1° Les *sommes directes infinies* existent dans $\boldsymbol{C}$; 2° Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, il n'y a qu'un nombre *fini* de couples (p, q) tels que $p + q = n$ et $K^{pq} \neq 0$. Alors, le bicomplexe $K^{\bullet\bullet}$ définit un *complexe* (simple) $(K'^n)_{n \in \mathbf{Z}}$, avec $K'^n = \sum_{i+j=n} K^{ij}$, l'opérateur de dérivation d (de degré $+1$) de ce complexe étant donné par $dx = d'x + (-1)^i d''x$ pour $x \in K^{ij}$. Lorsque nous parlerons par la suite du *complexe* (simple) *défini par un bicomplexe* $K^{\bullet\bullet}$, il sera toujours sous-entendu que l'une des conditions précédentes est satisfaite. On adoptera des conventions analogues pour les multicomplexes.

On désigne par $K^{i,\bullet}$ (resp. $K^{\bullet,j}$) le complexe simple $(K^{ij})_{j \in \mathbf{Z}}$ (resp. $(K^{ij})_{i \in \mathbf{Z}}$), par $Z_{\mathrm{II}}^p(K^{i,\bullet})$, $B_{\mathrm{II}}^p(K^{i,\bullet})$, $H_{\mathrm{II}}^p(K^{i,\bullet})$ (resp. $Z_{\mathrm{I}}^p(K^{\bullet,j})$, $B_{\mathrm{I}}^p(K^{\bullet,j})$, $H_{\mathrm{I}}^p(K^{\bullet,j})$) ses p^{es} objets des cocycles, des cobords et de cohomologie respectivement; la dérivation $d' : K^{i,\bullet} \to K^{i+1,\bullet}$ est un morphisme de complexes, qui donne donc un opérateur dans les cocycles, les cobords et la cohomologie,

$$d' : Z_{\mathrm{II}}^p(K^{i,\bullet}) \to Z_{\mathrm{II}}^p(K^{i+1,\bullet})$$
$$d' : B_{\mathrm{II}}^p(K^{i,\bullet}) \to B_{\mathrm{II}}^p(K^{i+1,\bullet})$$
$$d' : H_{\mathrm{II}}^p(K^{i,\bullet}) \to H_{\mathrm{II}}^p(K^{i+1,\bullet})$$

et il est clair que pour ces opérateurs, $(Z_{\mathrm{II}}^p(K^{i,\bullet}))_{i \in \mathbf{Z}}$, $(B_{\mathrm{II}}^p(K^{i,\bullet}))_{i \in \mathbf{Z}}$ et $(H_{\mathrm{II}}^p(K^{i,\bullet}))_{i \in \mathbf{Z}}$ sont des complexes; nous désignerons le complexe $(H_{\mathrm{II}}^p(K^{i,\bullet}))_{i \in \mathbf{Z}}$ par $H_{\mathrm{II}}^p(K^{\bullet\bullet})$, ses q^{es} objets de cocycles, de cobords et de cohomologie par $Z_{\mathrm{I}}^q(H_{\mathrm{II}}^p(K^{\bullet\bullet}))$, $B_{\mathrm{I}}^q(H_{\mathrm{II}}^p(K^{\bullet\bullet}))$ et $H_{\mathrm{I}}^q(H_{\mathrm{II}}^p(K^{\bullet\bullet}))$. On définit de même les complexes $H_{\mathrm{I}}^p(K^{\bullet\bullet})$ et leurs objets de cohomologie $H_{\mathrm{II}}^q(H_{\mathrm{I}}^p(K^{\bullet\bullet}))$. Rappelons d'autre part que $H^n(K^{\bullet\bullet})$ désigne le n^{e} objet de cohomologie du complexe *(simple)* défini par $K^{\bullet\bullet}$.

(11.3.2) Sur le complexe défini par un bicomplexe $K^{\bullet\bullet}$, on peut considérer deux filtrations canoniques $(F_{\mathrm{I}}^p(K^{\bullet\bullet}))$ et $(F_{\mathrm{II}}^p(K^{\bullet\bullet}))$ données par

(11.3.2.1) $\quad F_{\mathrm{I}}^p(K^{\bullet\bullet}) = (\sum_{i+j=n,\, i \geqslant p} K^{ij})_{n \in \mathbf{Z}}, \qquad F_{\mathrm{II}}^p(K^{\bullet\bullet}) = (\sum_{i+j=n,\, j \geqslant p} K^{ij})_{n \in \mathbf{Z}}$

qui, par définition, sont bien des sous-objets gradués du complexe (simple) défini par $K^{\bullet\bullet}$, et font donc de ce complexe un complexe filtré; par ailleurs, il est clair que ces filtrations sont *exhaustives* et *séparées*.

Il correspond à chacune de ces filtrations une suite spectrale (11.2.2); nous désignerons par $'E(K^{\bullet\bullet})$ et $''E(K^{\bullet\bullet})$ les suites spectrales correspondant à $(F_I^p(K^{\bullet\bullet}))$ et $(F_{II}^p(K^{\bullet\bullet}))$ respectivement, dites *suites spectrales du bicomplexe* $K^{\bullet\bullet}$, et ayant toutes deux pour aboutissement la cohomologie $(H^n(K^{\bullet\bullet}))$. On montre en outre (M, XV, 6) que l'on a

(11.3.2.2) $$'E_2^{pq}(K^{\bullet\bullet}) = H_I^p(H_{II}^q(K^{\bullet\bullet})), \qquad ''E_2^{pq}(K^{\bullet\bullet}) = H_{II}^p(H_I^q(K^{\bullet\bullet})).$$

Tout morphisme $u : K^{\bullet\bullet} \to K'^{\bullet\bullet}$ de bicomplexes est *ipso facto* compatible avec les filtrations de même type de $K^{\bullet\bullet}$ et $K'^{\bullet\bullet}$, donc définit un morphisme pour chacune des deux suites spectrales; en outre, deux morphismes *homotopes* définissent une homotopie *d'ordre* $\leqslant 1$ des complexes (simples) filtrés correspondant, donc le *même* morphisme pour chacune des deux suites spectrales (M, XV, 6.1).

Proposition **(11.3.3).** — *Soit* $K^{\bullet\bullet} = (K^{ij})$ *un bicomplexe dans une catégorie abélienne* **C**.

(i) *S'il existe* i_0 *et* j_0 *tels que* $K^{ij} = 0$ *pour* $i < i_0$ *ou* $j < j_0$ (resp. $i > i_0$ *ou* $j > j_0$), *les deux suites spectrales* $'E(K^{\bullet\bullet})$ *et* $''E(K^{\bullet\bullet})$ *sont birégulières.*

(ii) *S'il existe* i_0 *et* i_1 *tels que* $K^{ij} = 0$ *pour* $i < i_0$ *ou* $i > i_1$ (resp. *s'il existe* j_0 *et* j_1 *tels que* $K^{ij} = 0$ *pour* $j < j_0$ *ou* $j > j_1$) *les deux suites spectrales* $'E(K^{\bullet\bullet})$ *et* $''E(K^{\bullet\bullet})$ *sont birégulières.*

Supposons en outre que dans **C** *les limites inductives filtrantes existent et soient exactes. Alors :*

(iii) *S'il existe* i_0 *tel que* $K^{ij} = 0$ *pour* $i > i_0$ (resp. *s'il existe* j_0 *tel que* $K^{ij} = 0$ *pour* $j < j_0$), *la suite* $'E(K^{\bullet\bullet})$ *est régulière.*

(iv) *S'il existe* i_0 *tel que* $K^{ij} = 0$ *pour* $i < i_0$ (resp. *s'il existe* j_0 *tel que* $K^{ij} = 0$ *pour* $j > j_0$), *la suite* $''E(K^{\bullet\bullet})$ *est régulière.*

La proposition résulte aussitôt des définitions (11.1.3) et de (11.2.4), ainsi que des observations suivantes relatives à la filtration F_I (et des observations analogues qu'on en déduit pour F_{II} en échangeant les rôles des deux indices dans $K^{\bullet\bullet}$) :

1° S'il existe i_0 tel que $K^{ij} = 0$ pour $i > i_0$, la filtration $F_I(K^{\bullet\bullet})$ est *discrète.*

2° S'il existe i_0 tel que $K^{ij} = 0$ pour $i < i_0$, la filtration $F_I(K^{\bullet\bullet})$ est *co-discrète.* On en déduit aussitôt qu'il en est de même de la filtration correspondante $F_I(H^n(K^{\bullet\bullet}))$ pour tout n; en outre, la définition de B_r^{pq} correspondant à la filtration $F_I(K^{\bullet\bullet})$ (11.2.2) montre que pour tout couple (p, q), la suite $(B_r^{pq})_{r \geqslant 2}$ est stationnaire.

3° S'il existe j_0 tel que $K^{ij} = 0$ pour $j < j_0$, on a

$$F_I^{p+r}(K^{\bullet\bullet}) \cap \Big(\sum_{i+j=n} K^{ij}\Big) = 0$$

dès que $p+r+j_0 > n$, donc $Z_r^{pq} = Z_\infty(E_2^{pq})$ pour $r > q - j_0 + 1$; d'autre part, $H^n(F_I^p(K^{\bullet\bullet})) = 0$ pour $p > n - j_0 + 1$.

4° S'il existe j_0 tel que $K^{ij} = 0$ pour $j > j_0$, on a

$$F_I^{p-r+1}(K^{\bullet\bullet}) \cap \Big(\sum_{i+j=n} K^{ij}\Big) = \sum_{i+j=n} K^{ij}$$

dès que $p-r+1+j_0<n$, donc $B_r^{pq}=B_\infty(E_2^{pq})$ pour $r<j_0-q+1$; d'autre part, $H^n(F_I^p(K^{\bullet\bullet}))=H^n(K^{\bullet\bullet})$ pour $p+j_0<n-1$.

(11.3.4) Supposons que le bicomplexe $K^{\bullet\bullet}=(K^{ij})$ soit tel que $K^{ij}=0$ pour $i<0$ ou $j<0$. On sait qu'on peut alors définir pour tout $p\in\mathbf{Z}$ un « edge-homomorphisme » canonique

$$'E_2^{p0}(K^{\bullet\bullet})\to H^p(K^{\bullet\bullet}) \tag{11.3.4.1}$$

(M, XV, 6). Rappelons rapidement que cela est dû, d'une part à ce que l'on a dans la suite spectrale $'E(K^{\bullet\bullet})$, $Z_r^{p0}=Z_I^p(Z_{II}^0(K^{\bullet\bullet}))$ pour $2\leqslant r\leqslant+\infty$, et de l'autre au fait que $H^p(F_I^{p+1}(K^{\bullet\bullet}))=0$, si bien que l'isomorphisme $\beta^{p0} : {'E_\infty^{p0}}\xrightarrow{\sim} H^p(F_I^p)/H^p(F_I^{p+1})$ donne un homomorphisme $'E_\infty^{p0}\to H^p(F_I^p(K^{\bullet\bullet}))\to H^p(K^{\bullet\bullet})$; l'égalité de tous les Z_r^{p0} permet alors de définir des homomorphismes canoniques $'E_r^{p0}\to{'E_s^{p0}}$ pour $r\leqslant s$, et en particulier un homomorphisme $'E_2^{p0}\to{'E_\infty^{p0}}$, d'où par composition l'edge-homomorphisme $'E_2^{p0}\to H^p(K^{\bullet\bullet})$; en outre, on vérifie aussitôt que, à la classe mod. B_2^{p0} d'un élément $z\in Z_{II}^0(K^{\bullet\bullet})\subset K^{p0}$ tel que $d'z=0$, l'edge-homomorphisme ainsi défini fait correspondre dans $'E_\infty^{p0}$ la classe de z mod. B_∞^{p0}, puis à cette dernière la classe de cohomologie de z dans $H^p(K^{\bullet\bullet})$. On voit donc finalement que l'*edge-homomorphisme* (11.3.4.1) *provient, par passage à la cohomologie, de l'injection canonique* $Z_{II}^0(K^{\bullet\bullet})\to K^{\bullet\bullet}$ (où $K^{\bullet\bullet}$ est considéré comme complexe simple). On interprète naturellement de même l'edge-homomorphisme

$$''E_2^{p0}(K^{\bullet\bullet})\to H^p(K^{\bullet\bullet}) \tag{11.3.4.2}$$

comme provenant de l'injection canonique $Z_I^0(K^{\bullet\bullet})\to K^{\bullet\bullet}$.

(11.3.5) Soit maintenant $K_{\bullet\bullet}=(K_{ij})$ un bicomplexe de C dont les deux opérateurs de dérivation sont de degré -1. Nous écrirons alors $K_{i,\bullet}$ (resp. $K_{\bullet,j}$) le complexe simple $(K_{ij})_{j\in\mathbf{Z}}$ (resp. $(K_{ij})_{i\in\mathbf{Z}}$), $H_p^{II}(K_{i,\bullet})$ (resp. $H_p^I(K_{\bullet,j})$) son p^e objet d'homologie, $H_p^{II}(K_{\bullet\bullet})$ (resp. $H_p^I(K_{\bullet\bullet})$) le complexe $(H_p^{II}(K_{i,\bullet}))_{i\in\mathbf{Z}}$ (resp. $(H_p^I(K_{\bullet,j}))_{j\in\mathbf{Z}}$), $H_q^I(H_p^{II}(K_{\bullet\bullet}))$ (resp. $H_q^{II}(H_p^I(K_{\bullet\bullet}))$) son q^e objet d'homologie; notations analogues pour les objets des cycles et objets des bords; enfin, $H_n(K_{\bullet\bullet})$ désignera (lorsqu'il existe) le n^e objet d'homologie du complexe simple (à opérateur de dérivation de degré -1) défini par $K_{\bullet\bullet}$.

Soit $K'^{\bullet\bullet}=(K'^{ij})$ avec $K'^{ij}=K_{-i,-j}$ le bicomplexe à opérateurs de dérivation de degrés $+1$ associé à $K_{\bullet\bullet}$; par définition, les *suites spectrales* de $K_{\bullet\bullet}$ sont celles de $K'^{\bullet\bullet}$, que l'on écrit $'E(K_{\bullet\bullet})$ et $''E(K_{\bullet\bullet})$, où l'on change toutefois les notations, en posant

$$'E_{pq}^r(K_{\bullet\bullet})={'E_r^{-p,-q}}(K'^{\bullet\bullet}),\quad ''E_{pq}^r(K_{\bullet\bullet})={''E_r^{-p,-q}}(K'^{\bullet\bullet})$$

pour $2\leqslant r\leqslant\infty$. Avec ces notations, on a

$$'E_{pq}^2(K_{\bullet\bullet})=H_p^I(H_q^{II}(K_{\bullet\bullet})),\quad ''E_{pq}^2(K_{\bullet\bullet})=H_p^{II}(H_p^I(K_{\bullet\bullet})).$$

Pour éviter des erreurs de signe, il sera en général préférable, pour les relations entre ces suites spectrales et leur aboutissement, de revenir au complexe $K'^{\bullet\bullet}$. Notons toutefois les critères correspondant à (11.3.3) :

(11.3.6) Les suites spectrales $'E(K_{\bullet\bullet})$ et $''E(K_{\bullet\bullet})$ sont *birégulières* dans les cas suivants : *a)* Il existe i_0 et j_0 tels que $K_{ij}=0$ pour $i>i_0$ ou pour $j>j_0$ (resp. pour $i<i_0$

ou pour $j<j_0$); *b)* Il existe i_0 et i_1 tels que $K_{ij}=0$ pour $i<i_0$ et $i>i_1$; *c)* Il existe j_0 et j_1 tels que $K_{ij}=0$ pour $j<j_0$ et $j>j_1$.

La suite $'E(K_{..})$ est *régulière* s'il existe i_0 tel que $K_{ij}=0$ pour $i<i_0$, ou s'il existe j_0 tel que $K_{ij}=0$ pour $j>j_0$.

La suite $''E(K_{..})$ est *régulière* s'il existe i_0 tel que $K_{ij}=0$ pour $i>i_0$, ou s'il existe j_0 tel que $K_{ij}=0$ pour $j<j_0$.

11.4. Hypercohomologie d'un foncteur par rapport à un complexe $K^\bullet$.

(11.4.1) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne; rappelons que l'on appelle *résolution droite* (ou *cohomologique*) d'un objet A de $\mathcal{C}$ un complexe d'objets de $\mathcal{C}$, dont l'opérateur de dérivation est de degré $+1$,

$$0\to L^0\to L^1\to L^2\dots$$

muni d'un morphisme $\varepsilon : A\to L^0$ dit *augmentation* de la résolution (et que l'on peut considérer comme un morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & 0 & \to & 0 & \to & \dots \\ & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & L^0 & \to & L^1 & \to & L^2 & \to & \dots) \end{array}$$

tel que la suite

$$0\to A\xrightarrow{\varepsilon} L^0\to L^1\to\dots$$

soit *exacte*; de même une *résolution gauche* (ou *homologique*) de A est un complexe $0\leftarrow L_0\leftarrow L_1\leftarrow\dots$ d'objets de $\mathcal{C}$ dont l'opérateur de dérivation est de degré -1, muni d'une augmentation $\varepsilon : L_0\to A$, de sorte que la suite

$$0\leftarrow A\xleftarrow{\varepsilon} L_0\leftarrow L_1\leftarrow\dots$$

soit *exacte*.

Lorsqu'une résolution droite $(L_i)_{i\geqslant 0}$ d'un objet A est telle que $L_i=0$ pour $i\geqslant n+1$, on dit que cette résolution est *de longueur* $\leqslant n$. On définit de même une résolution gauche de longueur $\leqslant n$. Une résolution qui est de longueur $\leqslant n$ pour un entier n est dite *finie*.

Une résolution de A est dite *projective* (resp. *injective*) si les objets de $\mathcal{C}$ autres que A qui la composent sont *projectifs* (resp. *injectifs*). Lorsque $\mathcal{C}$ est la catégorie des modules (à gauche par exemple) sur un anneau, on dira de même qu'une résolution de A est *plate* (resp. *libre*) lorsque les modules autres que A qui la composent sont *plats* (resp. *libres*).

(11.4.2) Soit $K^\bullet=(K^i)_{i\in\mathbf{Z}}$ un complexe d'objets de $\mathcal{C}$, dont l'opérateur de dérivation est de degré $+1$.

On appelle *résolution de Cartan-Eilenberg droite* de $K^\bullet$ le couple formé d'un bicomplexe $L^{\bullet\bullet}=(L^{ij})$ à opérateurs de dérivation de degré $+1$, avec $L^{ij}=0$ pour $j<0$, et d'un morphisme de complexes simples $\varepsilon : K^\bullet\to L^{\bullet,0}$, de façon que les conditions suivantes soient remplies :

(i) Pour chaque indice i, les suites

$$0 \to K^i \xrightarrow{\varepsilon} L^{i0} \to L^{i1} \to \dots$$
$$0 \to B^i(K^\cdot) \xrightarrow{\varepsilon} B^i_{\mathrm{I}}(L^{\cdot,0}) \to B^i_{\mathrm{I}}(L^{\cdot,1}) \to \dots$$
$$0 \to Z^i(K^\cdot) \xrightarrow{\varepsilon} Z^i_{\mathrm{I}}(L^{\cdot,0}) \to Z^i_{\mathrm{I}}(L^{\cdot,1}) \to \dots$$
$$0 \to H^i(K^\cdot) \xrightarrow{\varepsilon} H^i_{\mathrm{I}}(L^{\cdot,0}) \to H^i_{\mathrm{I}}(L^{\cdot,1}) \to \dots$$

sont exactes, autrement dit $(L^{i,\cdot})$, $(B^i_{\mathrm{I}}(L^{\cdot\cdot}))$, $(Z^i_{\mathrm{I}}(L^{\cdot\cdot}))$ et $(H^i_{\mathrm{I}}(L^{\cdot\cdot}))$ sont respectivement des *résolutions* de K^i, $B^i(K^\cdot)$, $Z^i(K^\cdot)$ et $H^i(K^\cdot)$.

(ii) Pour chaque j, le complexe simple $L^{\cdot,j}$ est *scindé*, autrement dit, les suites exactes

(11.4.2.1) $$0 \to B^i_{\mathrm{I}}(L^{\cdot,j}) \to Z^i_{\mathrm{I}}(L^{\cdot,j}) \to H^i_{\mathrm{I}}(L^{\cdot,j}) \to 0$$

(11.4.2.2) $$0 \to Z^i_{\mathrm{I}}(L^{\cdot,j}) \to L^{ij} \to B^{i+1}_{\mathrm{I}}(L^{\cdot,j}) \to 0$$

sont *scindées*.

On prouve (M, XVII, 1.2) que si tout objet de $\boldsymbol{C}$ est sous-objet d'un objet injectif, tout complexe $K^\cdot$ de $\boldsymbol{C}$ admet une résolution de Cartan-Eilenberg *injective*, c'est-à-dire formée d'objets injectifs L^{ij} (la condition (ii) ci-dessus entraîne alors que les $B^i_{\mathrm{I}}(L^{\cdot,j})$, $Z^i_{\mathrm{I}}(L^{\cdot,j})$ et $H^i_{\mathrm{I}}(L^{\cdot,j})$ sont aussi des objets injectifs). En outre, pour tout morphisme $f: K^\cdot \to K'^\cdot$ de complexes de $\boldsymbol{C}$, toute résolution de Cartan-Eilenberg $L^{\cdot\cdot}$ de $K^\cdot$ et toute résolution *injective* de Cartan-Eilenberg $L'^{\cdot\cdot}$ de $K'^\cdot$, il existe un morphisme de bicomplexes $F: L^{\cdot\cdot} \to L'^{\cdot\cdot}$ compatible avec f et les augmentations, et si f et g sont deux morphismes homotopes de $K^\cdot$ dans $K'^\cdot$, les morphismes correspondants de $L^{\cdot\cdot}$ dans $L'^{\cdot\cdot}$ sont homotopes (*loc. cit.*).

Lorsque $K^\cdot$ est *limité inférieurement* (resp. *supérieurement*), on peut prendre $L^{\cdot\cdot}$ tel que $L^{ij}=0$ pour $i<i_0$ (resp. $i>i_0$) si $K^i=0$ pour $i<i_0$ (resp. $i>i_0$) (M, XVII, 1.3).

Supposons d'autre part qu'il existe un entier n tel que tout objet de $\boldsymbol{C}$ admette une *résolution injective de longueur* $\leqslant n$; alors on peut supposer que l'on a $L^{ij}=0$ pour $j>n$ (M, XVII, 1.4).

(11.4.3) Soit maintenant T un *foncteur covariant additif* de $\boldsymbol{C}$ dans une catégorie abélienne $\boldsymbol{C}'$. Étant donnés un complexe $K^\cdot$ de $\boldsymbol{C}$ et une résolution de Cartan-Eilenberg *injective* $L^{\cdot\cdot}$ de $K^\cdot$, supposons que le complexe (simple) défini par le bicomplexe $T(L^{\cdot\cdot})$ existe (cf. 11.3.1); alors les deux suites spectrales $'E(T(L^{\cdot\cdot}))$ et $''E(T(L^{\cdot\cdot}))$ de ce bicomplexe sont dites *suites spectrales d'hypercohomologie* de T par rapport au complexe $K^\cdot$; en vertu de (11.4.2) et (11.3.2), elles ne dépendent effectivement que de $K^\cdot$ et non de la résolution de Cartan-Eilenberg injective $L^{\cdot\cdot}$ choisie; en outre, elles dépendent *fonctoriellement* de $K^\cdot$. Elles ont un même aboutissement $H^\cdot(T(L^{\cdot\cdot}))$ appelé encore l'*hypercohomologie* de T par rapport à $K^\cdot$, et noté $\mathbf{R}^\cdot T(K^\cdot)$. On montre que les termes E_2 des deux suites spectrales précédentes sont donnés par

(11.4.3.1) $$'E_2^{pq} = H^p(R^qT(K^\cdot))$$

(11.4.3.2) $$''E_2^{pq} = R^pT(H^q(K^\cdot))$$

R^pT désignant comme d'ordinaire le p^e *foncteur dérivé* de T pour $p \in \mathbf{Z}$; $R^qT(K^\bullet)$ désigne le complexe $(R^qT(K^i))_{i\in\mathbf{Z}}$. Sauf mention expresse du contraire, nous supposerons désormais que tout objet de $\mathbf{C}$ est sous-objet d'un objet injectif de $\mathbf{C}$, de sorte que les résolutions de Cartan-Eilenberg injectives existent pour tout complexe de $\mathbf{C}$. Comme $L^{ij}=0$ pour $j<0$, les critères de (11.3.3) montrent que les *deux* suites spectrales d'hypercohomologie de T par rapport à $K^\bullet$ existent et sont *birégulières* dans chacun des deux cas suivants : 1° $K^\bullet$ est limité inférieurement; 2° Tout objet de $\mathbf{C}$ admet une résolution injective de longueur au plus égale à un entier n (indépendant de l'objet considéré). En effet, dans le premier cas, on peut supposer (11.4.2) qu'il existe i_0 tel que $L^{ij}=0$ pour $i<i_0$ et dans le second qu'il existe j_1 tel que $L^{ij}=0$ pour $j>j_1$; dans chacun des deux cas, il est clair en outre que pour n donné, il n'y a qu'un nombre fini de couples (i,j) tels que $L^{ij}\neq 0$ et $i+j=n$, ce qui établit nos assertions.

Lorsqu'on suppose que dans $\mathbf{C}'$ les limites inductives filtrantes existent et sont exactes (ce qui implique en particulier l'existence dans $\mathbf{C}'$ des sommes directes infinies), alors le complexe défini par le bicomplexe $T(L^{\bullet\bullet})$ existe, et le critère (11.3.3) montre que la suite $'E(T(L^{\bullet\bullet}))$ est toujours *régulière*.

Lorsque $K^\bullet$ est un complexe dont tous les termes K^i sont nuls sauf un seul K^{i_0}, $\mathbf{R}^nT(K^\bullet)$ est isomorphe à $R^{n-i_0}T(K^{i_0})$, ainsi qu'il résulte aussitôt des définitions en prenant une résolution de Cartan-Eilenberg $L^{\bullet\bullet}$ telle que $L^{ij}=0$ pour $i\neq i_0$.

Si $K^\bullet$ et $K'^\bullet$ sont deux complexes de $\mathbf{C}$, f, g deux morphismes *homotopes* de $K^\bullet$ dans $K'^\bullet$, alors les morphismes $\mathbf{R}^\bullet T(K^\bullet)\to\mathbf{R}^\bullet T(K'^\bullet)$ déduits de f et g sont identiques, et il en est de même pour les morphismes des suites spectrales de cohomologie.

Proposition **(11.4.5).** — *Supposons que dans $\mathbf{C}'$ les limites inductives filtrantes existent et soient exactes. Si $R^nT(K^i)=0$ pour tout $n>0$ et tout $i\in\mathbf{Z}$, on a des isomorphismes fonctoriels*

$$\mathbf{R}^iT(K^\bullet)\xrightarrow{\sim}H^i(T(K^\bullet)) \qquad (i\in\mathbf{Z}). \tag{11.4.5.1}$$

En effet, les seuls termes E_2 non nuls de la première suite spectrale (11.4.3.1) sont alors $'E_2^{p0}=H^p(T(K^\bullet))$; autrement dit, cette suite est *dégénérée*; comme elle est régulière (11.4.4), la conclusion résulte de (11.1.6).

(11.4.6) Considérons maintenant, par exemple, un *bifoncteur* covariant $(M,N)\to T(M,N)$ de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}'$ dans $\mathbf{C}''$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$, $\mathbf{C}''$ étant trois catégories abéliennes; on suppose, pour simplifier, T additif en chacun de ses arguments, et en outre que tout objet de $\mathbf{C}$ et tout objet de $\mathbf{C}'$ sont sous-objets d'un objet injectif, et que les limites inductives filtrantes existent dans $\mathbf{C}''$ et sont exactes. On définit alors l'*hypercohomologie* de T par rapport à deux complexes $K^\bullet$, $K'^\bullet$ de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$ respectivement, à opérateurs de dérivation de degré $+1$, en prenant pour $K^\bullet$ (resp. $K'^\bullet$) une résolution de Cartan-Eilenberg injective $L^{\bullet\bullet}$ (resp. $L'^{\bullet\bullet}$); alors $T(L^{\bullet\bullet}, L'^{\bullet\bullet})$ est un quadricomplexe de $\mathbf{C}''$, que l'on considère comme *bicomplexe* de $\mathbf{C}''$ en prenant pour degrés de $T(L^{ij}, L'^{hk})$ les entiers $i+h$ et $j+k$. L'*hypercohomologie* de T par rapport à $K^\bullet$ et $K'^\bullet$ est par définition la cohomologie $H^\bullet(T(L^{\bullet\bullet}, L'^{\bullet\bullet}))$ de ce bicomplexe (autrement dit, celle du complexe simple associé) notée $\mathbf{R}^{\cdot}\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\cdot}, \mathrm{K}'^{\cdot})$; elle est l'aboutissement de deux suites spectrales dont les termes E_2 sont donnés par

(11.4.6.1) $$'\mathrm{E}_2^{pq} = \mathrm{H}^p(\mathrm{R}^q\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\cdot}, \mathrm{K}'^{\cdot}))$$

(11.4.6.2) $$''\mathrm{E}_2^{pq} = \sum_{q'+q''=q} \mathrm{R}^p\mathrm{T}(\mathrm{H}^{q'}(\mathrm{K}^{\cdot}), \mathrm{H}^{q''}(\mathrm{K}'^{\cdot})) \qquad \text{(cf. M, XVII, 2).}$$

Ici $\mathrm{R}^q\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\cdot}, \mathrm{K}'^{\cdot})$ est le bicomplexe $(\mathrm{R}^q\mathrm{T}(\mathrm{K}^i, \mathrm{K}'^j))_{(i,j)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$ et le second membre de (11.4.6.1) est sa cohomologie quand on le considère comme complexe simple.

En outre, la première suite spectrale est toujours régulière, et les deux suites spectrales sont birégulières lorsqu'il existe n tel que tout objet de $\boldsymbol{C}$ et tout objet de $\boldsymbol{C}'$ admettent une résolution injective de longueur $\leqslant n$, ou lorsque $\mathrm{K}^{\cdot}$ *et* $\mathrm{K}'^{\cdot}$ sont limités inférieurement; dans ce dernier cas, on peut en outre omettre l'hypothèse que les limites inductives existent dans $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{C}'$.

Si $\mathrm{K}_1^{\cdot}$, $\mathrm{K}_1'^{\cdot}$ sont deux autres complexes de $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{C}'$ respectivement, f, g deux morphismes *homotopes* de $\mathrm{K}^{\cdot}$ dans $\mathrm{K}_1^{\cdot}$, f', g' deux morphismes *homotopes* de $\mathrm{K}'^{\cdot}$ dans $\mathrm{K}_1'^{\cdot}$, alors les morphismes $\mathbf{R}^{\cdot}\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\cdot}, \mathrm{K}'_{\cdot}) \rightarrow \mathbf{R}^{\cdot}\mathrm{T}(\mathrm{K}_1^{\cdot}, \mathrm{K}_1'^{\cdot})$ déduits de f et f' d'une part, de g et g' d'autre part, sont identiques, et il en est de même pour les morphismes des suites spectrales d'hypercohomologie.

On généralise aisément à un multifoncteur covariant additif quelconque.

Proposition **(11.4.7)**. — *Supposons que pour tout objet injectif* I *de* $\boldsymbol{C}$ (resp. I′ *de* $\boldsymbol{C}'$), $\mathrm{A}' \rightsquigarrow \mathrm{T}(\mathrm{I}, \mathrm{A}')$ (resp. $\mathrm{A} \rightsquigarrow \mathrm{T}(\mathrm{A}, \mathrm{I}')$) *soit un foncteur exact. Alors, avec les notations de* (11.4.6), *on a des isomorphismes canoniques*

(11.4.7.1) $$\mathbf{R}^{\cdot}\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\cdot}, \mathrm{K}'^{\cdot}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{T}(\mathrm{L}^{\cdot\cdot}, \mathrm{K}'^{\cdot})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\cdot}, \mathrm{L}'^{\cdot\cdot}))$$

où les deux derniers termes sont la cohomologie des complexes simples définis par les tricomplexes $\mathrm{T}(\mathrm{L}^{\cdot\cdot}, \mathrm{K}'^{\cdot})$ *et* $\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\cdot}, \mathrm{L}'^{\cdot\cdot})$ *respectivement.*

Définissons par exemple le premier de ces isomorphismes. Le quadricomplexe $\mathrm{T}(\mathrm{L}^{\cdot\cdot}, \mathrm{L}'^{\cdot\cdot}))$ peut être considéré comme un *bicomplexe*, en prenant comme degrés de $\mathrm{T}(\mathrm{L}^{ij}, \mathrm{L}'^{hk})$ les nombres $i+j+h$ et k. Comme pour chaque h, $\mathrm{L}'^{h,\cdot}$ est une *résolution* de K'^h, on a, pour ce bicomplexe, en vertu de l'hypothèse sur T, $\mathrm{H}_{\mathrm{II}}^q(\mathrm{T}(\mathrm{L}^{\cdot\cdot}, \mathrm{L}'^{\cdot\cdot})) = 0$ pour $q \neq 0$ et $\mathrm{H}_{\mathrm{II}}^0(\mathrm{T}(\mathrm{L}^{\cdot\cdot}, \mathrm{L}'^{\cdot\cdot})) = \mathrm{T}(\mathrm{L}^{\cdot\cdot}, \mathrm{K}'^{\cdot})$; la première suite spectrale de ce bicomplexe est donc *dégénérée*; comme $\mathrm{L}'^{hk} = 0$ pour $k < 0$, cette suite est en outre régulière (11.3.3), et la conclusion résulte donc de (11.1.6).

On a des résultats analogues pour un multifoncteur covariant en un nombre quelconque n d'arguments : dans le calcul de l'hypercohomologie, il n'est pas nécessaire de remplacer *tous* les complexes par une résolution de Cartan-Eilenberg, mais seulement $n-1$ d'entre eux, pourvu que, lorsqu'on fixe $n-1$ arguments quelconques en leur donnant pour valeurs des objets *injectifs*, le foncteur covariant en l'argument restant soit *exact*.

11.5. Passage à la limite inductive dans l'hypercohomologie.

Lemme **(11.5.1)**. — *Soit* $\mathrm{K}^{\cdot} = (\mathrm{K}^i)_{i\in\mathbf{Z}}$ *un complexe de* $\boldsymbol{C}$, *et pour tout entier* $r \in \mathbf{Z}$, *soit* $\mathrm{K}_{(r)}^{\cdot}$ *le complexe tel que* $\mathrm{K}_{(r)}^i = 0$ *pour* $i < r$, $\mathrm{K}_{(r)}^i = \mathrm{K}^i$ *pour* $i \geqslant r$. *Soit* T *un foncteur covariant additif* *de* $\boldsymbol{C}$ *dans* $\boldsymbol{C}'$, *permutant aux limites inductives (on suppose que les limites inductives filtrantes existent et sont exactes dans* $\boldsymbol{C}$ *et* $\boldsymbol{C}'$*). Alors* $\mathbf{R}^{\bullet}\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\bullet})$ *est isomorphe à la limite inductive* $\varinjlim \mathbf{R}^{\bullet}\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\bullet}_{(r)})$ *lorsque* r *tend vers* $-\infty$.

La construction d'une résolution injective de Cartan-Eilenberg de $\mathrm{K}^{\bullet}$ se fait en choisissant *arbitrairement*, pour chaque i, une résolution injective $(\mathrm{X}_{\mathrm{B}}^{ij})_{j\geqslant 0}$ de $\mathrm{B}^{i}(\mathrm{K}^{\bullet})$ et une résolution injective $(\mathrm{X}_{\mathrm{H}}^{ij})_{j\geqslant 0}$ de $\mathrm{H}^{i}(\mathrm{K}^{\bullet})$; cela fait, la méthode de construction montre que la résolution injective $(\mathrm{L}^{ij})_{j\geqslant 0}$ de K^{i} et les opérateurs de dérivation $\mathrm{L}^{i,j}\rightarrow\mathrm{L}^{i+1,j}$ *ne dépendent que des résolutions* $(\mathrm{X}_{\mathrm{B}}^{i,\bullet})$, $(\mathrm{X}_{\mathrm{H}}^{i,\bullet})$ *et* $(\mathrm{X}_{\mathrm{B}}^{i+1,\bullet})$ (M, XVII, 1.2). Or, il est clair que l'on a $\mathrm{B}^{i}(\mathrm{K}^{\bullet}_{(r)})=\mathrm{B}^{i}(\mathrm{K}^{\bullet})$ et $\mathrm{H}^{i}(\mathrm{K}^{\bullet}_{(r)})=\mathrm{H}^{i}(\mathrm{K}^{\bullet})$ pour $i\geqslant r+1$. On a, d'autre part, pour chaque r, une injection canonique $\varphi^{\bullet}_{r-1,r}:\mathrm{K}^{\bullet}_{(r)}\rightarrow\mathrm{K}^{\bullet}_{(r-1)}$, $\varphi^{i}_{r-1,r}$ étant l'identité pour $i\neq r-1$. La remarque précédente montre que, si $\mathrm{L}^{\bullet\bullet}=(\mathrm{L}^{ij})$ est une résolution injective de Cartan-Eilenberg de $\mathrm{K}^{\bullet}$, on peut pour chaque r définir une résolution injective de Cartan-Eilenberg $\mathrm{L}^{\bullet\bullet}_{(r)}=(\mathrm{L}^{ij}_{(r)})$ de $\mathrm{K}^{\bullet}_{(r)}$ telle que $\mathrm{L}^{ij}_{(r)}=0$ pour $i<r$ et $\mathrm{L}^{ij}_{(r)}=\mathrm{L}^{ij}$ pour $i\geqslant r+1$. On peut d'autre part définir un morphisme de bicomplexes $\Phi^{\bullet\bullet}_{r-1,r}:\mathrm{L}^{\bullet\bullet}_{(r)}\rightarrow\mathrm{L}^{\bullet\bullet}_{(r-1)}$ correspondant à $\varphi^{\bullet}_{r-1,r}$, et la méthode de définition de ce morphisme *(loc. cit.)* montre encore qu'on peut le construire de sorte que $\Phi^{ij}_{r-1,r}$ soit l'identité pour $i\neq r$ et $i\neq r-1$. On a ainsi défini un système inductif $(\mathrm{L}^{\bullet\bullet}_{(r)})$ de bicomplexes de $\boldsymbol{C}$, dont $\mathrm{L}^{\bullet\bullet}$ est évidemment la limite inductive lorsque r tend vers $-\infty$; en raison de la permutabilité des sommes directes et des limites inductives, le complexe simple associé à $\mathrm{L}^{\bullet\bullet}$ est aussi limite inductive du complexe simple associé à $\mathrm{L}^{\bullet\bullet}_{(r)}$. Comme T permute par hypothèse aux limites inductives et qu'il en est de même de la cohomologie (en raison de l'exactitude du foncteur $\varinjlim$), on a bien $\mathrm{H}^{\bullet}(\mathrm{T}(\mathrm{L}^{\bullet\bullet}))=\varinjlim \mathrm{H}^{\bullet}(\mathrm{T}(\mathrm{L}^{\bullet\bullet}_{(r)}))$ à un isomorphisme près.

Le lemme (11.5.1) permet d'étendre à des complexes $\mathrm{K}^{\bullet}$ quelconques, par passage à la limite inductive, des propriétés valables pour les complexes *limités inférieurement*. Comme premier exemple, nous prouverons :

Proposition **(11.5.2)**. — *Sous les hypothèses de* (11.5.1) *concernant* $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}'$ *et* T, $\mathbf{R}^{\bullet}\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\bullet})$ *est un foncteur cohomologique dans la catégorie abélienne des complexes de* $\boldsymbol{C}$.

Montrons qu'on peut se ramener au cas des complexes *limités inférieurement* : si on a une suite exacte $0\rightarrow\mathrm{K}'^{\bullet}\rightarrow\mathrm{K}^{\bullet}\rightarrow\mathrm{K}''^{\bullet}\rightarrow 0$ de complexes, on en déduit évidemment pour chaque r une suite exacte $0\rightarrow\mathrm{K}'^{\bullet}_{(r)}\rightarrow\mathrm{K}^{\bullet}_{(r)}\rightarrow\mathrm{K}''^{\bullet}_{(r)}\rightarrow 0$, d'où par hypothèse, une suite exacte

$$\ldots\rightarrow\mathbf{R}^{n}\mathrm{T}(\mathrm{K}'^{\bullet}_{(r)})\rightarrow\mathbf{R}^{n}\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\bullet}_{(r)})\rightarrow\mathbf{R}^{n}\mathrm{T}(\mathrm{K}''^{\bullet}_{(r)})\xrightarrow{\partial}\mathbf{R}^{n+1}\mathrm{T}(\mathrm{K}'^{\bullet}_{(r)})\rightarrow\ldots$$

ces suites exactes formant un système inductif; le lemme (11.5.1) et l'exactitude du foncteur $\varinjlim$ démontrent que l'on a une suite exacte

$$\ldots\rightarrow\mathbf{R}^{n}\mathrm{T}(\mathrm{K}'^{\bullet})\rightarrow\mathbf{R}^{n}\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\bullet})\rightarrow\mathbf{R}^{n}\mathrm{T}(\mathrm{K}''^{\bullet})\xrightarrow{\partial}\mathbf{R}^{n+1}\mathrm{T}(\mathrm{K}'^{\bullet})\rightarrow\ldots$$

Pour traiter le cas des complexes limités inférieurement, on peut se borner à ceux tels que $\mathrm{K}^{i}=0$ pour $i<0$; ils forment évidemment une *catégorie abélienne* $\boldsymbol{K}$.

Lemme **(11.5.2.1)**. — *Dans* $\boldsymbol{K}$, *soit* $\mathfrak{J}$ *l'ensemble des complexes* $\mathrm{Q}^{\bullet}=(\mathrm{Q}^{i})_{i\geqslant 0}$ *ayant les* *propriétés suivantes : 1° Tout* Q^i *est un objet injectif de* $\boldsymbol{C}$; *2° Pour tout* $i \geqslant 0$, *on a* $Z^i(Q^\bullet) = B^i(Q^\bullet)$, *et* $Z^i(Q^\bullet)$ *est facteur direct de* Q^i. *Alors :*

(i) *Tout* $Q^\bullet \in \mathfrak{J}$ *est un objet injectif de* $\boldsymbol{K}$.

(ii) *Tout objet de* $\boldsymbol{K}$ *est isomorphe à un sous-complexe d'un complexe appartenant à* $\mathfrak{J}$.

(i) Soient $A^\bullet = (A^i)$ un objet de $\boldsymbol{K}$, $A'^\bullet = (A'^i)$ un sous-objet de $A^\bullet$, $Q^\bullet = (Q^i)$ un objet de $\mathfrak{J}$, et supposons donné un morphisme $f = (f^i) : A'^\bullet \to Q^\bullet$, qu'il s'agit de prolonger en un morphisme $g = (g^i) : A^\bullet \to Q^\bullet$. Nous utiliserons le langage de la catégorie des modules pour simplifier (cf. [27]).

Identifions Q à $B^i(Q^\bullet) \oplus B^{i+1}(Q^\bullet)$; procédons par récurrence sur i, et supposons donc les g^j définis pour $j < i$, compatibles avec les opérateurs de dérivation $d^j : A^j \to A^{j+1}$ et $d'^j : Q^j \to Q^{j+1}$ pour $j < i-1$ et tels en outre que : 1° $g^{i-1}(Z^{i-1}(A^\bullet)) \subset Z^{i-1}(Q^\bullet)$; 2° Si on pose $C^j = (d^j)^{-1}(A'^{j+1})$ pour tout j, alors $d'^{i-1} \circ g^{i-1}$ coïncide avec $f^i \circ d^{i-1}$ sur C^{i-1}. Le morphisme $f^i : A'^i \to Q^i$ donne par composition avec les projections deux morphismes $f'^i : A'^i \to B^i(Q^\bullet)$ et $f''^i : A'^i \to B^{i+1}(Q^\bullet)$. Comme $d'^{i-1} \circ g^{i-1}$ applique A^{i-1} dans $B^i(Q^\bullet)$ et s'annule dans $Z^{i-1}(A^\bullet)$, il définit un morphisme $h^i : B^i(A^\bullet) \to B^i(Q^\bullet)$, et puisque $d'^{i-1} \circ g^{i-1}$ coïncide avec $f^i \circ d^{i-1}$ sur C^{i-1}, h^i coïncide avec f'_i dans $B^i(A^\bullet) \cap A'^i$. Comme $B^i(Q^\bullet)$, facteur direct de Q^i, est injectif, il y a un morphisme $g'^i : A^i \to B^i(Q^\bullet)$ qui coïncide avec h^i dans $B^i(A^\bullet)$ et avec f'^i dans A'^i. Considérons d'autre part le morphisme $f''^{i+1} \circ d^i : C^i \to B^{i+1}(Q^\bullet)$, qui s'annule dans $Z^i(A^\bullet)$; comme $B^{i+1}(Q^\bullet)$ est injectif, il y a un morphisme $g''^i : A^i \to B^{i+1}(Q^\bullet)$, qui coïncide avec $f''^{i+1} \circ d^i$ dans C^i et avec 0 dans $Z^i(A^\bullet)$. Il suffit alors de prendre $g^i = g'^i + g''^i$ pour pouvoir poursuivre la récurrence.

(ii) Pour plonger $A^\bullet = (A^i)$ dans un complexe appartenant à $\mathfrak{J}$, on prend pour chaque $i \geqslant 1$ un objet injectif Q'^i de $\boldsymbol{C}$ tel qu'il existe une injection $f'^i : A^i \to Q'^i$. Posons alors $Q^i = 0$ pour $i < 0$, $Q^0 = Q'^1$ et $Q^i = Q'^i \oplus Q'^{i+1}$ pour $i \geqslant 1$, avec l'opérateur de dérivation évident. Posons $f^i = f'^i + (f'^{i+1} \circ d^i)$ pour tout i (avec $f'^i = 0$ pour $i \leqslant 0$); il est immédiat que f^i est injectif pour tout i, et que les f^i sont compatibles avec les opérateurs de dérivation.

Corollaire **(11.5.2.2)**. — *Tout objet* $K^\bullet$ *de* $\boldsymbol{K}$ *admet une résolution droite formée d'objets de* $\mathfrak{J}$. *Si* $L^{\bullet\bullet}$ *est une telle résolution, pour toute résolution* $L'^{\bullet\bullet}$ *de* $K^\bullet$, *formée d'objets de* $\boldsymbol{K}$, *il y a un morphisme de bicomplexes* $F : L'^{\bullet\bullet} \to L^{\bullet\bullet}$ *compatible avec les augmentations, et deux tels morphismes* F, F' *sont homotopes.*

Ce n'est autre que (M, V, 1.1 *a)*) appliqué à la catégorie abélienne $\boldsymbol{K}$.

(11.5.2.3) Ces préliminaires étant posés, considérons une résolution de Cartan-Eilenberg injective $L'^{\bullet\bullet}$ de $K^\bullet$ et une résolution $L^{\bullet\bullet}$ de $K^\bullet$ formée d'objets de $\mathfrak{J}$, et montrons que l'on a un isomorphisme $H^\bullet(T(L'^{\bullet\bullet})) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(T(L^{\bullet\bullet}))$. On déduit en effet de (11.5.2.2) un morphisme de bicomplexes $T(L'^{\bullet\bullet}) \to T(L^{\bullet\bullet})$, et par suite un morphisme $'E(T(L'^{\bullet\bullet})) \to {}'E(T(L^{\bullet\bullet}))$ des premières suites spectrales de ces bicomplexes. Comme en vertu de (11.3.3), ces suites spectrales sont *régulières*, il suffit (11.1.5) de voir que le morphisme précédent est un isomorphisme pour les termes E_2, ou encore que $H^q_{\mathrm{II}}(T(L'^{i,\bullet}))$ est égal à $R^qT(K^i)$; comme $L'^{i,\bullet}$ est une résolution droite de K^i, on est ramené à prouver le

Lemme **(11.5.2.4).** — *Si* $L^\bullet = (L^i)_{i\in\mathbf{Z}}$ *est une résolution droite d'un objet* A *de* $\boldsymbol{C}$ *telle que* $R^nT(L^i) = 0$ *pour tout* $i\in\mathbf{Z}$ *et tout* $n>0$, *alors on a* $H^\bullet T(L^\bullet) = R^\bullet T(A)$.

C'est un cas particulier de (T, 2.5.2).

(11.5.2.5) La démonstration de (11.5.2) se termine maintenant de façon immédiate, car $L'^{\bullet\bullet}$ est une résolution injective de $K^\bullet$ *dans la catégorie abélienne* $\boldsymbol{K}$, autrement dit, $K^\bullet \rightsquigarrow H^\bullet(T(L'^{\bullet\bullet}))$ n'est autre que le foncteur cohomologique *dérivé droit* de T dans la catégorie $\boldsymbol{K}$ (T, 2.3).

Proposition **(11.5.3).** — *Sous les hypothèses de* (11.5.1) *concernant* $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}'$ *et* T, *soit* $L^{\bullet\bullet} = (L^{ij})$ *un bicomplexe tel que* $L^{ij} = 0$ *pour* $j<0$ *et que, pour tout* i, $L^{i,\bullet}$ *soit une résolution de* K^i; *supposons enfin que* $R^nT(L^{ij}) = 0$ *pour tout couple* (i, j) *et tout* $n>0$. *Alors il existe un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathbf{R}^\bullet T(K^\bullet) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(T(L^{\bullet\bullet})). \tag{11.5.3.1}$$

Soit $L^{\bullet\bullet}_{(r)} = (L^{ij}_{(r)})$ le bicomplexe tel que $L^{ij}_{(r)} = 0$ pour $i<r$, $L^{ij}_{(r)} = L^{ij}$ pour $i\geqslant r$; il est immédiat que $L^{\bullet\bullet}$ est limite inductive de $L^{\bullet\bullet}_{(r)}$ pour r tendant vers $-\infty$; en vertu de l'hypothèse sur T et de (11.5.1), il suffit donc de prouver la proposition lorsque $K^\bullet$ est limité inférieurement, par exemple $K^i = 0$ pour $i<0$, et $L^{ij} = 0$ pour $i<0$. Soit alors $L'^{\bullet\bullet} = (L'^{ij})$ une résolution droite de $K^\bullet$ formée d'objets de $\mathfrak{J}$ (11.5.2.2); il y a un morphisme de bicomplexes $L^{\bullet\bullet} \to L'^{\bullet\bullet}$ compatible avec les augmentations, d'où un morphisme $'E(T(L^{\bullet\bullet})) \to {}'E(T(L'^{\bullet\bullet}))$ pour les premières suites spectrales; le lemme (11.5.2.4) montre, comme dans (11.5.2.3), que ce morphisme est un *isomorphisme*, d'où la conclusion.

Remarque **(11.5.4).** — Les raisonnements précédents prouvent que les conclusions de (11.5.2) et (11.5.3) sont valables dans la catégorie des complexes $K^\bullet$ *limités inférieurement, sans supposer que* T *permute aux limites inductives filtrantes*. En outre, quand on considère seulement la catégorie $\boldsymbol{K}$ des complexes $K^\bullet$ tels que $K^i = 0$ pour $i<0$, la caractérisation de $\mathbf{R}^\bullet T(K^\bullet)$ comme le système des *foncteurs dérivés droits* de T dans $\boldsymbol{K}$ montre que ce foncteur cohomologique est *universel* (T, 2.3).

Un autre cas où (11.5.2) est valable sans faire d'hypothèse supplémentaire sur T est le cas où il existe un entier $m>0$ tel que tout objet de $\boldsymbol{C}$ admette une résolution injective *de longueur* $\leqslant m$. En effet, dans la démonstration de (11.5.1), toutes les résolutions injectives d'objets de $\boldsymbol{C}$ qui interviennent peuvent être prises de longueur $\leqslant m$, d'où il résulte aussitôt que les termes de degré total n du bicomplexe $T(L^{\bullet\bullet}_{(r)})$ sont *égaux à ceux de* $T(L^{\bullet\bullet})$ et en nombre *fini*, dès que r est assez grand, ce qui entraîne que pour tout n, $H^n(T(L^{\bullet\bullet})) = H^n(T(L^{\bullet\bullet}_{(r)}))$ dès que r est assez grand. Avec les notations de (11.5.2), on a donc aussi $\mathbf{R}^nT(K^\bullet_{(r)}) = \mathbf{R}^nT(K^\bullet)$ pour r assez grand (dépendant de n) et de même pour $K'^\bullet$ et $K''^\bullet$, d'où la conclusion. De la même manière, (11.5.3) est valable sans condition supplémentaire sur T lorsque $\boldsymbol{C}$ vérifie l'hypothèse précédente et que l'on suppose que les résolutions $L^{i,\bullet}$ sont de longueur $\leqslant m$.

(11.5.5) Le résultat de (11.5.2) se généralise aux multifoncteurs covariants. Considérons par exemple la situation de (11.4.6), où l'on suppose que dans $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}'$ et $\boldsymbol{C}''$

les limites inductives filtrantes existent et sont exactes, et que T commute aux limites inductives. Alors $\mathbf{R}^{\bullet}\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\bullet}, \mathrm{K}'^{\bullet})$ est un bifoncteur *cohomologique* en chacun des complexes $\mathrm{K}^{\bullet}$, $\mathrm{K}'^{\bullet}$; pour le voir, on se ramène comme dans (11.5.2) au cas où $\mathrm{K}^{\bullet}$ et $\mathrm{K}'^{\bullet}$ sont limités inférieurement; prenant alors pour $\mathrm{K}^{\bullet}$ et $\mathrm{K}'^{\bullet}$ des résolutions injectives du type décrit dans (11.5.2.2), on est ramené à la propriété générale démontrée dans (M, V, 4.1).

(11.5.6) De même, les résultats de (11.4.7) et (11.5.3) se généralisent comme suit. Supposons (sous les hypothèses de (11.5.5)) que l'on ait deux bicomplexes $\mathrm{L}^{\bullet\bullet} = (\mathrm{L}^{ij})$, $\mathrm{L}'^{\bullet\bullet} = (\mathrm{L}'^{ij})$ tels que $\mathrm{L}^{ij} = 0$ et $\mathrm{L}'^{ij} = 0$ pour $j < 0$, que pour tout i, $\mathrm{L}^{i,\bullet}$ soit une résolution de K^{i} et $\mathrm{L}'^{i,\bullet}$ une résolution de K'^{i}, et enfin que $\mathrm{R}^{n}\mathrm{T}(\mathrm{L}^{ij}, \mathrm{L}'^{hk}) = 0$ pour $n > 0$ et pour tout système d'indices (i, j, h, k). Alors on a un isomorphisme fonctoriel en $\mathrm{K}^{\bullet}$ et $\mathrm{K}'^{\bullet}$

$$\mathbf{R}^{\bullet}\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\bullet}, \mathrm{K}'^{\bullet}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{\bullet}(\mathrm{T}(\mathrm{L}^{\bullet\bullet}, \mathrm{L}'^{\bullet\bullet})) \tag{11.5.6.1}$$

Cela s'établit comme dans (11.5.3) en se ramenant au cas où $\mathrm{K}^{\bullet}$ et $\mathrm{K}'^{\bullet}$ sont limités inférieurement.

Supposons en outre que pour tout couple (i, j) et pour tout couple (h, k), les foncteurs $\mathrm{A} \rightsquigarrow \mathrm{T}(\mathrm{A}, \mathrm{L}'^{hk})$ et $\mathrm{A}' \rightsquigarrow \mathrm{T}(\mathrm{L}^{ij}, \mathrm{A}')$ soient exacts dans $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{C}'$ respectivement. Alors on a aussi des isomorphismes fonctoriels

$$\mathbf{R}^{\bullet}\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\bullet}, \mathrm{K}'^{\bullet}) \sim \mathrm{H}^{\bullet}(\mathrm{T}(\mathrm{L}^{\bullet\bullet}, \mathrm{K}'^{\bullet})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{\bullet}(\mathrm{T}(\mathrm{K}^{\bullet}, \mathrm{L}'^{\bullet\bullet})). \tag{11.5.6.2}$$

La démonstration est semblable à celle de (11.4.7).

(11.5.7) On notera encore que les résultats de (11.5.5) et (11.5.6) sont valables sans supposer que T permute aux limites inductives, pourvu que l'on se restreigne aux complexes $\mathrm{K}^{\bullet}$, $\mathrm{K}'^{\bullet}$ limités inférieurement, ou que l'on suppose que tout objet de $\boldsymbol{C}$ (resp. $\boldsymbol{C}'$) admet une résolution injective de longueur bornée, et que dans (11.5.6) les bicomplexes $\mathrm{L}^{\bullet\bullet}$ et $\mathrm{L}'^{\bullet\bullet}$ ont leur second degré limité supérieurement.

11.6. Hyperhomologie d'un foncteur par rapport à un complexe $\mathrm{K}_{\bullet}$.

(11.6.1) Soient $\boldsymbol{C}$ une catégorie abélienne, $\mathrm{K}_{\bullet} = (\mathrm{K}_{i})_{i\in\mathbf{Z}}$ un complexe d'objets de $\boldsymbol{C}$, dont l'opérateur de dérivation est de degré -1. Une *résolution de Cartan-Eilenberg gauche* de $\mathrm{K}_{\bullet}$ est formée d'un bicomplexe $\mathrm{L}_{\bullet\bullet} = (\mathrm{L}_{ij})$ à opérateurs de dérivation de degré -1 avec $\mathrm{L}_{ij} = 0$ pour $j < 0$, et d'un morphisme de complexes simples $\varepsilon : \mathrm{L}_{\bullet,0} \to \mathrm{K}_{\bullet}$, de façon que les conditions obtenues à partir de celles de (11.4.2) par « renversement des flèches » soient remplies. Si tout objet de $\boldsymbol{C}$ est quotient d'un objet projectif, tout complexe $\mathrm{K}_{\bullet}$ de $\boldsymbol{C}$ admet une résolution de Cartan-Eilenberg *projective*, c'est-à-dire formée d'objets projectifs L_{ij}, avec des propriétés fonctorielles semblables à celles de (11.4.2). En outre, si $\mathrm{K}_{\bullet}$ est limité inférieurement (resp. supérieurement), on peut supposer que $\mathrm{L}_{ij} = 0$ pour $i < i_0$ (resp. $i > i_0$) si $\mathrm{K}_{i} = 0$ pour $i < i_0$ (resp. $i > i_0$). Si tout objet de $\boldsymbol{C}$ admet une résolution projective de longueur $\leqslant n$, on peut supposer que $\mathrm{L}_{ij} = 0$ pour $j > n$.

(11.6.2) Supposons que T soit un *foncteur covariant additif* de $\mathbf{C}$ dans une catégorie abélienne $\mathbf{C}'$. La définition de l'*hyperhomologie* $\mathbf{L}_{\bullet}\mathrm{T}(\mathrm{K}_{\bullet})$ et des *suites spectrales d'hyperhomologie* de T par rapport à un complexe $\mathrm{K}_{\bullet}$ de $\mathbf{C}$ (lorsqu'elles existent) se fait encore à partir de (11.4.3) par « renversement des flèches », les termes E^2 des deux suites spectrales ainsi obtenues étant

(11.6.2.1) $$'\mathrm{E}^2_{pq} = \mathrm{H}_p(\mathrm{L}_q\mathrm{T}(\mathrm{K}_{\bullet}))$$

(11.6.2.2) $$''\mathrm{E}^2_{pq} = \mathrm{L}_p\mathrm{T}(\mathrm{H}_q(\mathrm{K}_{\bullet}))$$

où $\mathrm{L}_p\mathrm{T}$ désigne le p^e dérivé de T pour $p \geqslant 0$, et 0 pour $p<0$, $\mathrm{L}_q\mathrm{T}(\mathrm{K}_{\bullet})$ le complexe $(\mathrm{L}_q\mathrm{T}(\mathrm{K}_i))_{i\in\mathbf{Z}}$.

Les propriétés de l'hyperhomologie ne se déduisent pas toutes par simple « renversement des flèches » de celles de l'hypercohomologie (à moins qu'on ne fasse des hypothèses supplémentaires du type AB 5^*) de T, 1.5 sur la catégorie $\mathbf{C}'$) en raison des conditions de *régularité* des deux suites spectrales précédentes, auxquelles il faut cette fois appliquer les critères de (11.3.4). Ces derniers montrent que lorsqu'on suppose que dans $\mathbf{C}'$ les limites inductives filtrantes existent et sont exactes, alors le complexe défini par le bicomplexe $\mathrm{T}(\mathrm{L}_{\bullet\bullet})$ existe, et la *seconde* suite spectrale $''\mathrm{E}(\mathrm{T}(\mathrm{L}_{\bullet\bullet}))$ est cette fois *régulière*. Si l'on suppose, soit que $\mathrm{K}_{\bullet}$ soit limité inférieurement, soit qu'il existe un entier n tel que tout objet de $\mathbf{C}$ admette une résolution projective de longueur $\leqslant n$, alors les *deux* suites spectrales d'hyperhomologie existent (sans hypothèse sur $\mathbf{C}'$) et sont *birégulières*.

Proposition **(11.6.3)**. — *Soient $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$ deux catégories abéliennes,* T *un foncteur covariant additif de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}'$. Alors :*

(i) *L'hyperhomologie $\mathbf{L}_{\bullet}\mathrm{T}(\mathrm{K}_{\bullet})$ est un foncteur homologique dans la catégorie abélienne des complexes de $\mathbf{C}$ limités inférieurement.*

(ii) *Soit $\mathrm{K}_{\bullet}$ un complexe de $\mathbf{C}$ limité inférieurement. Si $\mathrm{L}_n\mathrm{T}(\mathrm{K}_i) = 0$ pour tout $n>0$ et tout $i\in\mathbf{Z}$, on a des isomorphismes fonctoriels*

(11.6.3.1) $$\mathbf{L}_i\mathrm{T}(\mathrm{K}_{\bullet}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_i(\mathrm{T}(\mathrm{K}_{\bullet})) \qquad (i\in\mathbf{Z}).$$

(iii) *Soit $\mathrm{K}_{\bullet}$ un complexe de $\mathbf{C}$ limité inférieurement. Soit $\mathrm{L}_{\bullet\bullet} = (\mathrm{L}_{ij})$ un bicomplexe tel que $\mathrm{L}_{ij} = 0$ pour $j<0$ et que, pour tout i, $\mathrm{L}_{i\bullet}$ soit une résolution de K_i; supposons enfin que $\mathrm{L}_n\mathrm{T}(\mathrm{L}_{ij}) = 0$ pour tout couple (i, j) et tout $n>0$. Alors il existe un isomorphisme fonctoriel*

(11.6.3.2) $$\mathbf{L}_{\bullet}\mathrm{T}(\mathrm{K}_{\bullet}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_{\bullet}(\mathrm{T}(\mathrm{L}_{\bullet\bullet}))$$

Les démonstrations se font comme celles de (11.5.2), (11.4.5) et (11.5.3) dans le cas des complexes limités inférieurement. Nous laissons les détails de ces raisonnements au lecteur.

(11.6.4) On a des résultats tout à fait analogues pour les *multifoncteurs* covariants additifs en chacun des arguments. Par exemple pour un bifoncteur T, on a les deux suites spectrales d'hyperhomologie de termes E^2 donnés par

(**11.6.4.1**) $$'E^2_{pq} = H_p(L_qT(K_\bullet, K'_\bullet))$$

(**11.6.4.2**) $$''E^2_{pq} = \sum_{q'+q''=q} L_p(H_{q'}(K_\bullet), H_{q''}(K'_\bullet)).$$

Ici encore, c'est la *seconde* suite spectrale qui est régulière, les deux suites étant birégulières lorsqu'il s'agit de complexes $K_\bullet$, $K'_\bullet$ limités inférieurement, ou quand les objets des catégories abéliennes que l'on considère ont des résolutions projectives de longueur fixée.

En outre :

Proposition (**11.6.5**). — *Soient* $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$, $\mathbf{C}''$ *trois catégories abéliennes,* T *un bifoncteur covariant biadditif de* $\mathbf{C}\times\mathbf{C}'$ *dans* $\mathbf{C}''$.

(i) $\mathbf{L}_\bullet T(K_\bullet, K'_\bullet)$ *est un bifoncteur homologique en chacun des complexes limités inférieurement* $K_\bullet$, $K'_\bullet$ *(formés respectivement d'objets de* $\mathbf{C}$ *et d'objets de* $\mathbf{C}'$*).*

(ii) *Supposons* $K_\bullet$ *et* $K'_\bullet$ *limités inférieurement. Soient* $L_{\bullet\bullet} = (L_{ij})$, $L'_{\bullet\bullet} = (L'_{ij})$ *deux bicomplexes tels que* $L_{ij} = 0$ *et* $L'_{ij} = 0$ *pour* $j < 0$, *que pour tout* i, $L_{i,\bullet}$ *soit une résolutiou de* K_i *et* $L'_{i,\bullet}$ *une résolution de* K'_i, *et enfin que* $L_nT(L_{ij}, L'_{hk}) = 0$ *pour* $n > 0$ *et tout système* (i, j, h, k). *Alors on a un isomorphisme fonctoriel*

(**11.6.5.1**) $$\mathbf{L}_\bullet T(K_\bullet, K'_\bullet) \simeq H_\bullet(T(L_{\bullet\bullet}, L'_{\bullet\bullet})).$$

(iii) *Supposons en outre que pour tout couple* (i, j) *et tout couple* (h, k), *les foncteurs* $A \rightsquigarrow T(A, L'_{hk})$ *et* $A' \rightsquigarrow T(L_{ij}, A')$ *soient exacts dans* $\mathbf{C}$ *et* $\mathbf{C}'$ *respectivement. Alors on a des isomorphismes fonctoriels*

(**11.6.5.2**) $$\mathbf{L}_\bullet T(K_\bullet, K'_\bullet) \simeq H_\bullet(T(L_{\bullet\bullet}, K'_\bullet)) \simeq H_\bullet(T(K_\bullet, L'_{\bullet\bullet})).$$

Les démonstrations sont analogues à celles de (11.5.5) et (11.5.6).

11.7. Hyperhomologie d'un foncteur par rapport à un bicomplexe $K_{\bullet\bullet}$.

(**11.7.1**) Soit $\mathbf{C}$ une catégorie abélienne dans laquelle tout objet est quotient d'un objet projectif. Considérons un bicomplexe $K_{\bullet\bullet} = (K_{ij})$ formé d'objets de $\mathbf{C}$, et dont les deux degrés sont *limités inférieurement*; on peut toujours se borner au cas où $K_{ij} = 0$ pour $i < 0$ ou $j < 0$, et c'est ce que nous ferons désormais. On peut considérer $K_{\bullet\bullet}$ comme un complexe (simple) formé d'objets $K_{i,\bullet} = (K_{ij})_{j\geq 0}$ de la catégorie abélienne $\boldsymbol{K}$ des complexes à degrés positifs d'objets de $\mathbf{C}$. Il résulte du lemme (11.5.2.1) (ou plutôt du lemme « dual » obtenu par « renversement des flèches ») et de (M, V, 2.2) que $K_{\bullet\bullet}$ admet une *résolution projective de Cartan-Eilenberg* dans la catégorie $\boldsymbol{K}$; une telle résolution est un *tricomplexe* $M_{\bullet\bullet\bullet} = (M_{ijk})$ de $\mathbf{C}$, à degrés tous ≥ 0, formé d'objets projectifs, tel que pour tout i, $M_{i,\bullet\bullet}$, $B^I_i(M_{\bullet\bullet\bullet})$, $Z^I_i(M_{\bullet\bullet\bullet})$, $H^I_i(M_{\bullet\bullet\bullet})$ constituent des *résolutions projectives* de $K_{i,\bullet}$, $B^I_i(K_{\bullet\bullet})$, $Z^I_i(K_{\bullet\bullet})$, $H^I_i(K_{\bullet\bullet})$ respectivement dans la catégorie $\boldsymbol{K}$; en particulier, pour tout couple (i, j), $M_{ij,\bullet}$ est une *résolution projective* de K_{ij} dans $\mathbf{C}$.

Proposition (**11.7.2**). — *Soit* T *un foncteur covariant additif de* $\mathbf{C}$ *dans une catégorie abélienne* $\mathbf{C}'$. *Avec les notations de* (11.7.1), *l'homologie* $H_\bullet(T(M_{\bullet\bullet\bullet}))$ *du complexe simple associé au tricomplexe* $T(M_{\bullet\bullet\bullet})$ *est canoniquement isomorphe à l'hyperhomologie* $\mathbf{L}_\bullet T(K_{\bullet\bullet})$ *du complexe* *simple associé à* $K_{\bullet\bullet}$ (11.6.2), *et est l'aboutissement commun de six suites spectrales birégulières notées* ${}^{(t)}E$ (*avec* $t = a, b, a', b', c$ *ou* d), *dont les termes* E^2 *sont donnés par les formules*

$$
\begin{aligned}
{}^{(a)}E^2_{pq} &= L_p T(H_q(K_{\bullet\bullet}))\\
{}^{(b)}E^2_{pq} &= H_p(\mathbf{L}^{\mathrm{II}}_q T(K_{\bullet\bullet}))\\
{}^{(a')}E^2_{pq} &= \mathbf{L}_p T(H^{\mathrm{I}}_q(K_{\bullet\bullet}))\\
{}^{(b')}E^2_{pq} &= H_p(L_q T(K_{\bullet\bullet}))\\
{}^{(c)}E^2_{pq} &= \mathbf{L}_p T(H^{\mathrm{II}}_q(K_{\bullet\bullet}))\\
{}^{(d)}E^2_{pq} &= H_p(\mathbf{L}^{\mathrm{I}}_q T(K_{\bullet\bullet}))
\end{aligned}
$$

(On rappelle que nous utilisons la notation $F(A_\bullet)$ pour désigner le complexe des objets $F(A_i)$ pour tout complexe $A_\bullet = (A_i)$; par exemple $\mathbf{L}^{\mathrm{II}}_q T(K_{\bullet\bullet})$ désigne le complexe $(\mathbf{L}^{\mathrm{II}}_q T(K_{i,\bullet}))_{i\geqslant 0}$, où $\mathbf{L}^{\mathrm{II}}_q T(K_{i,\bullet})$ est l'hyperhomologie d'indice q du foncteur T par rapport au complexe simple $K_{i,\bullet}$.)

Désignons par $L_\bullet$ le complexe simple associé à $K_{\bullet\bullet}$, de sorte que $L_i = \bigoplus_{r+s=i} K_{rs}$, et posons $N_{ij} = \bigoplus_{r+s=i} M_{rsj}$; il est clair que pour chaque i, $N_{i,\bullet}$ est une *résolution projective* de L_i dans $\mathbf{C}$; il résulte donc de (11.6.3) et (11.6.4) que l'on a un isomorphisme fonctoriel $\mathbf{L}_\bullet T(L_\bullet) \simeq H_\bullet(T(N_{\bullet\bullet}))$; comme le complexe simple associé au bicomplexe $T(N_{\bullet\bullet})$ est aussi associé au tricomplexe $T(M_{\bullet\bullet\bullet})$, cela prouve la première assertion de l'énoncé.

En outre, $\mathbf{L}_\bullet T(L_\bullet)$ est l'aboutissement des deux suites spectrales d'hyperhomologie (11.6.2) de T relativement au complexe simple $L_\bullet$, qui ne sont autres que les suites ${}^{(b')}E$ et ${}^{(a)}E$ respectivement.

Considérons maintenant $M_{\bullet\bullet\bullet}$ comme un bicomplexe $U_{\bullet\bullet}$ avec $U_{ij} = \bigoplus_{r+s=j} M_{irs}$; $H_\bullet(T(M_{\bullet\bullet\bullet}))$ est encore l'aboutissement des deux suites spectrales du bicomplexe $T(U_{\bullet\bullet})$. Or, pour tout i, $M_{i,\bullet\bullet}$ est un bicomplexe vérifiant les conditions de (11.6.3) relativement au complexe simple $K_{i,\bullet}$; donc $H^{\mathrm{II}}_q(T(U_{i,\bullet})) = \mathbf{L}^{\mathrm{II}}_q T(K_{i,\bullet})$), et la première suite spectrale de $T(U_{\bullet\bullet})$ n'est autre que ${}^{(b)}E$. D'autre part, pour tout r, $M_{\bullet,r,\bullet}$ est une résolution de Cartan-Eilenberg du complexe simple $K_{\bullet,r}$; le calcul fait dans (M, XV, 2) montre que $H^{\mathrm{I}}_q(T(M_{\bullet,rs})) = T(H^{\mathrm{I}}_q(M_{\bullet,rs}))$, d'où $H^{\mathrm{I}}_q(T(U_{\bullet,j})) = \bigoplus_{r+s=j} T(H^{\mathrm{I}}_q(M_{\bullet,rs}))$; autrement dit, le complexe simple $H^{\mathrm{I}}_q(T(U_{\bullet\bullet}))$ n'est autre que le complexe simple associé au bicomplexe $T(H^{\mathrm{I}}_q(M_{\bullet\bullet\bullet}))$. Or, pour tout q, $H^{\mathrm{I}}_q(M_{\bullet\bullet\bullet})$ est une résolution *projective* du complexe simple $H^{\mathrm{I}}_q(K_{\bullet\bullet})$ dans la catégorie $\mathbf{K}$; appliquant (11.6.3), on voit que l'on a

$$H^{\mathrm{II}}_p(T(H^{\mathrm{I}}_q(M_{\bullet\bullet\bullet}))) = \mathbf{L}_p T(H^{\mathrm{I}}_q(K_{\bullet\bullet})),$$

et on obtient ainsi la suite ${}^{(a')}E$. Enfin, les suites ${}^{(c)}E$ et ${}^{(d)}E$ s'obtiennent en intervertissant les rôles des indices i et j dans la définition du tricomplexe $M_{\bullet\bullet\bullet}$ et en appliquant à ce nouveau tricomplexe les raisonnements qui précèdent.

On dit que $\mathbf{L}_\bullet T(K_{\bullet\bullet})$ est l'*hyperhomologie* de T relative au *bicomplexe* $K_{\bullet\bullet}$.

Remarques (**11.7.3**). — (i) Il résulte de (11.6.3) que $\mathbf{L}_\bullet T(K_{\bullet\bullet})$ est un *foncteur homologique* dans la catégorie des bicomplexes $K_{\bullet\bullet}$ de $\mathbf{C}$ limités inférieurement en chacun de leurs degrés.

(ii) Soit $M_{\bullet\bullet\bullet}$ un tricomplexe de $\mathcal{C}$ tel que pour chaque couple (r, s), $M_{rs,\bullet}$ soit une *résolution* de K_{rs} et que $L_n T(M_{ijk}) = 0$ pour tous les triplets (i, j, k) et tout $n > 0$. Alors on a un isomorphisme $\mathbf{L}_\bullet T(K_{\bullet\bullet}) \widetilde{\rightarrow} H_\bullet(T(M_{\bullet\bullet\bullet}))$; en effet, avec les notations de la démonstration de (11.7.2), $N_{i,\bullet}$ est une résolution de L_i telle que $L_n T(N_{ij}) = 0$ pour $n > 0$ et tout couple (i, j), et il suffit d'appliquer (11.6.3, (iii)).

(iii) On généralise aussitôt les résultats de (11.7.2) aux multifoncteurs covariants; par exemple, soient $\mathcal{C}'$ une seconde catégorie abélienne dans laquelle tout objet est quotient d'un objet projectif, $K'_{\bullet\bullet}$ un bicomplexe de $\mathcal{C}'$ dont les deux degrés sont limités inférieurement, et T un bifoncteur covariant additif de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ dans une catégorie abélienne $\mathcal{C}''$. Si $L_\bullet$ et $L'_\bullet$ sont les complexes simples associés à $K_{\bullet\bullet}$ et $K'_{\bullet\bullet}$ respectivement, on définit l'hyperhomologie de T par rapport aux deux bicomplexes $K_{\bullet\bullet}$, $K'_{\bullet\bullet}$ comme l'hyperhomologie $\mathbf{L}_\bullet T(L_\bullet, L'_\bullet)$; appliquant (11.6.4) et (11.6.5), on a de même que dans (11.7.2) six suites spectrales aboutissant à cette hyperhomologie, et que nous laissons le soin d'écrire au lecteur.

11.8. Compléments sur la cohomologie des complexes simpliciaux.

(11.8.1) Soient A un ensemble fini, $\Sigma(A)$ l'ensemble des suites finies $\sigma = (\alpha_0, \ldots, \alpha_h)$ d'éléments de A (« simplexes » de A); on pose $|\sigma| = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_h\}$; on rappelle que le complexe de chaînes $C_\bullet(A)$ est le groupe abélien libre gradué engendré par les éléments de $\Sigma(A)$, $(\alpha_0, \ldots, \alpha_h)$ étant de *degré h*, avec une différentielle définie par $d(\alpha_0, \ldots, \alpha_h) = \sum_{j=0}^{h} (-1)^j (\alpha_0, \ldots, \hat{\alpha}_j, \ldots, \alpha_h)$. Le sous-groupe $D_\bullet(A)$ de $C_\bullet(A)$ engendré par les chaînes $\sigma = (\alpha_0, \ldots, \alpha_h)$ pour lesquelles deux des α_i sont égaux, et par les chaînes $\pi(\sigma) - \varepsilon_\pi . \sigma$, où pour toute permutation π, $\pi(\sigma) = (\alpha_{\pi(0)}, \ldots, \alpha_{\pi(h)})$ et ε_π est la signature de π, est un sous-complexe de $C_\bullet(A)$ dont les éléments sont dits chaînes *dégénérées*; on pose $L_\bullet(A) = C_\bullet(A)/D_\bullet(A)$, et on a un homomorphisme naturel de complexes $p : C_\bullet(A) \rightarrow L_\bullet(A)$. On définit d'autre part un homomorphisme de complexes $j : L_\bullet(A) \rightarrow C_\bullet(A)$ de la façon suivante : on ordonne totalement A; à la classe mod. $D_\bullet(A)$ d'un simplexe $\sigma = (\alpha_0, \ldots, \alpha_h)$, on fait correspondre 0 si deux des α_i sont égaux, et la suite $(\beta_0, \ldots, \beta_h)$ des α_i rangés *dans l'ordre croissant* dans le cas contraire. Il est clair que $p \circ j$ est l'*identité* de $L_\bullet(A)$.

(11.8.2) Soit B un second ensemble fini; si d', d'' sont les différentielles de $C_\bullet(A)$ et $C_\bullet(B)$, le complexe produit tensoriel $C_\bullet(A) \otimes C_\bullet(B)$ peut être considéré comme le groupe abélien libre engendré par les éléments de $\Sigma(A) \times \Sigma(B)$, avec la différentielle $d(\sigma, \tau) = (d'\sigma, \tau) + (-1)^{h+1}(\sigma, d''\tau)$ si $\mathrm{Card}\,|\sigma| = h + 1$.

Les homomorphismes naturels $C_\bullet(A) \rightarrow L_\bullet(A)$, $C_\bullet(B) \rightarrow L_\bullet(B)$ définissent un homomorphisme $p : C_\bullet(A) \otimes C_\bullet(B) \rightarrow L_\bullet(A) \otimes L_\bullet(B)$, ce dernier produit tensoriel étant isomorphe à $(C_\bullet(A) \otimes C_\bullet(B))/(C_\bullet(A) \otimes D_\bullet(B) + D_\bullet(A) \otimes C_\bullet(B))$. De même, à l'aide des homomorphismes $L_\bullet(A) \rightarrow C_\bullet(A)$ et $L_\bullet(B) \rightarrow C_\bullet(B)$ définis dans (11.8.1) (à l'aide d'ordres totaux sur A et B), on définit un homomorphisme $j : L_\bullet(A) \otimes L_\bullet(B) \rightarrow C_\bullet(A) \otimes C_\bullet(B)$ tel que $p \circ j$ soit l'identité.

Avec ces notations :

Proposition **(11.8.3).** — *Il existe une homotopie* $h : C_\bullet(A)\otimes C_\bullet(B)\to C_\bullet(A)\otimes C_\bullet(B)$, *telle que* $h(\sigma, \tau)$ *soit combinaison linéaire de couples de simplexes* (σ_i, τ_i) *avec* $|\sigma_i|\subset|\sigma|, |\tau_i|\subset|\tau|$, *et que l'on ait pour* $f=j\circ p$,

(11.8.3.1) $$f-1=h\circ d+d\circ h.$$

Il suffit de définir h sur chaque couple (σ, τ) de simplexes, en raisonnant par récurrence sur la somme des degrés de σ et τ, car on peut prendre $h=0$ lorsque cette somme est o. Soit $\omega=f(\sigma, \tau)-(\sigma, \tau)-h(d(\sigma, \tau))$; en vertu de l'hypothèse de récurrence et de la définition de d, on a $\omega\in C_\bullet(|\sigma|)\otimes C_\bullet(|\tau|)$. On a

$$d\omega=f(d(\sigma, \tau))-d(\sigma, \tau)-d(h(d(\sigma, \tau)))=h(d(d(\sigma, \tau)))=0$$

en vertu de (11.8.3.1) et de l'hypothèse de récurrence. Or, on a $H_q(C_\bullet(A))=0$ pour $q>0$ (G, I, 3.7.4), donc aussi $H_q(C_\bullet(A)\otimes C_\bullet(B))=0$ pour $q>0$, en vertu de la formule de Künneth (G, I, 5.5.2). Appliquant cette remarque en remplaçant A par $|\sigma|$ et B par $|\tau|$, on voit qu'il existe un élément ω' de $C_\bullet(|\sigma|)\otimes C_\bullet(|\tau|)$ tel que $\omega=d\omega'$; prenant $h(\sigma, \tau)=\omega'$, on vérifie (11.8.3.1) pour le couple (σ, τ) et la récurrence peut se poursuivre.

(11.8.4) Les notations étant celles de (11.8.2), nous poserons $(\sigma, \tau)\leqslant(\sigma', \tau')$ si $|\sigma|\subset|\sigma'|$ et $|\tau|\subset|\tau'|$. Un *système de coefficients* $\mathscr{S}$ sur $\Sigma(A)\times\Sigma(B)$ est constitué par une famille $(\Gamma_{\sigma,\tau})$ de groupes abéliens, où $\Gamma_{\sigma,\tau}$ ne dépend que des ensembles $|\sigma|$ et $|\tau|$, et une famille d'homomorphismes $\Gamma_{\sigma,\tau}\to\Gamma_{\sigma',\tau'}$ pour $(\sigma, \tau)\leqslant(\sigma', \tau')$, formant un *système inductif* pour cette relation de préordre. On définit alors un *complexe de cochaînes* $C^\bullet(A, B; \mathscr{S})$ comme l'ensemble des familles $\lambda=(\lambda(\sigma, \tau))$, où (σ, τ) parcourt $\Sigma(A)\times\Sigma(B)$, avec $\lambda(\sigma, \tau)\in\Gamma_{\sigma,\tau}$ pour tout couple (σ, τ). La différentielle est donnée de la façon suivante : si $d(\sigma, \tau)=\sum_i\pm(\sigma_i, \tau_i)$, on a $|\sigma_i|\subset|\sigma|$, $|\tau_i|\subset|\tau|$ pour tout i, et l'on prend

$$d\lambda(\sigma, \tau)=\sum_i\pm\lambda_i(\sigma_i, \tau_i),$$

où $\lambda_i(\sigma_i, \tau_i)$ désigne l'image canonique de $\lambda(\sigma_i, \tau_i)$ dans $\Gamma_{\sigma,\tau}$.

Nous dirons qu'une cochaîne $\lambda\in C^\bullet(A, B; \mathscr{S})$ est *bi-alternée* si $\lambda(\sigma, \tau)=0$ lorsque l'un des deux simplexes σ, τ a deux termes égaux, et si l'on a $\lambda(\pi(\sigma), \tau)=\varepsilon_\pi\lambda(\sigma, \tau)$ et $\lambda(\sigma, \pi'(\tau))=\varepsilon_{\pi'}\lambda(\sigma, \tau)$ pour des permutations quelconques π, π' des indices. Il est clair que ces cochaînes engendrent un *sous-complexe* $L^\bullet(A, B; \mathscr{S})$ de $C^\bullet(A, B; \mathscr{S})$.

Proposition **(11.8.5).** — *L'injection canonique* $L^\bullet(A, B; \mathscr{S})\to C^\bullet(A, B; \mathscr{S})$ *définit un isomorphisme pour la cohomologie de ces deux complexes.*

Notons que si p et j ont le sens défini dans (11.8.2), les applications ${}^tp : \lambda\to\lambda\circ p$ et ${}^tj : \lambda\to\lambda\circ j$ sont définies dans $L^\bullet(A, B; \mathscr{S})$ et $C^\bullet(A, B; \mathscr{S})$ respectivement, la première n'étant autre que l'injection canonique. Comme ${}^tj\circ{}^tp$ est l'identité, il suffit de démontrer que ${}^tp\circ{}^tj$ est homotope à l'identité; or, d'après (11.8.3), ${}^th : \lambda\to\lambda\circ h$ est *définie* dans $C^\bullet(A, B; \mathscr{S})$ et on peut donc transposer l'identité (11.8.3.1), qui fournit le résultat cherché.

(11.8.6) La proposition (11.8.5) ramène le calcul de la cohomologie de $L^{\bullet}(A, B; \mathcal{S})$ à celui de la cohomologie de $C^{\bullet}(A, B; \mathcal{S})$. Rappelons d'autre part que cette dernière est, en vertu du th. d'Eilenberg-Zilber (G, I, 3.10.2), canoniquement isomorphe à la cohomologie du complexe de cochaînes défini comme suit : on forme le complexe de chaînes $P_{\bullet}(A, B)$, constitué par les combinaisons linéaires des $(\sigma, \tau) \in \Sigma(A) \times \Sigma(B)$ tels que σ et τ aient *le même degré*; la différentielle de ce complexe est donnée par $d : (\sigma, \tau) \rightsquigarrow \sum_{j,k} (-1)^{j+k}(\sigma_j, \tau_k)$ si $d\sigma = \sum_j (-1)^j \sigma_j$ et $d\tau = \sum_k (-1)^k \tau_k$; on a alors deux homomorphismes canoniques de complexes

$$f : P_{\bullet}(A, B) \to C_{\bullet}(A) \otimes C_{\bullet}(B), \qquad g : C_{\bullet}(A) \otimes C_{\bullet}(B) \to P_{\bullet}(A, B),$$

et on démontre *(loc. cit.)* qu'il y a des *homotopies* h, h' telles que

$$f \circ g - 1 = d \circ h + h \circ d \qquad \text{et} \qquad g \circ f - 1 = d \circ h' + h' \circ d.$$

En outre, on a $f(\sigma, \tau) \in C_{\bullet}(|\sigma|) \otimes C_{\bullet}(|\tau|)$ et $g(\sigma, \tau) \in P_{\bullet}(|\sigma|, |\tau|)$ et les homotopies h, h' *peuvent être prises telles que* $h(\sigma, \tau) \in C_{\bullet}(|\sigma|) \otimes C_{\bullet}(|\tau|)$ *et* $h'(\sigma, \tau) \in P_{\bullet}(|\sigma|, |\tau|)$. Ce point provient de ce que la définition de $h(\sigma, \tau)$ et $h'(\sigma, \tau)$ peut se faire par *récurrence* sur la somme des degrés de σ et τ, et de ce que les $H^q(C_{\bullet}(|\sigma|) \otimes C_{\bullet}(|\tau|))$ et $H^q(P_{\bullet}(|\sigma|, |\tau|))$ sont *nuls* pour $q > 0$ *(loc. cit.)*; on raisonne alors comme dans (11.8.3) et la conclusion en résulte.

On définit alors $P^{\bullet}(A, B; \mathcal{S})$ comme l'ensemble des familles $\lambda = (\lambda(\sigma, \tau))$ où (σ, τ) parcourt les couples dont les termes ont même degré, avec $\lambda(\sigma, \tau) \in \Gamma_{\sigma,\tau}$, et comme on a $d\sigma = \sum_j (-1)^j \sigma_j \in C_{\bullet}(|\sigma|)$ et $d\tau = \sum_k (-1)^k \tau_k \in C_{\bullet}(|\tau|)$,

$$d\lambda(\sigma, \tau) = \Sigma(-1)^{j+k} \lambda(\sigma_j, \tau_k)$$

est défini et donne la différentielle du complexe $P^{\bullet}(A, B; \mathcal{S})$. Cela étant, les applications ${}^t f : \lambda \to \lambda \circ f$, ${}^t g : \lambda \to \lambda \circ g$, ${}^t h : \lambda \to \lambda \circ h$ et ${}^t h' : \lambda \to \lambda \circ h'$ sont toutes *définies* en vertu des remarques qui précèdent; ${}^t f \circ {}^t g$ et ${}^t g \circ {}^t f$ sont donc homotopes à l'identité, d'où l'isomorphisme cherché entre la cohomologie de $C^{\bullet}(A, B; \mathcal{S})$ et celle de $P^{\bullet}(A, B; \mathcal{S})$.

Remarque **(11.8.7)**. — Le même raisonnement que dans (11.8.3), mais appliqué à $C_{\bullet}(A)$ et $L_{\bullet}(A)$, montre que si j et p sont définis comme dans (11.8.1), $f = j \circ p$ vérifie encore une relation (11.8.3.1), avec $|h(\sigma)| \subset |\sigma|$, d'où on déduit comme dans (11.8.5) un isomorphisme de la cohomologie de $L^{\bullet}(A; \mathcal{S})$ sur celle de $C^{\bullet}(A; \mathcal{S})$, ces deux complexes étant définis de façon évidente. C'est le résultat dont la démonstration est esquissée dans (G, I, 3.8.1).

(11.8.8) Reprenons maintenant les notations et hypothèses de (11.8.2), et considérons un *complexe* $\mathcal{S}^{\bullet} = (\mathcal{S}^k)$ *de systèmes de coefficients* sur $\Sigma(A) \times \Sigma(B)$: pour chaque (σ, τ), les $\Gamma^k_{\sigma,\tau}$ forment donc un complexe de groupes abéliens ($k \in \mathbf{Z}$), et on a les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^k_{\sigma,\tau} & \to & \Gamma^{k+1}_{\sigma,\tau} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma^k_{\sigma',\tau'} & \to & \Gamma^{k+1}_{\sigma',\tau'} \end{array}$$

pour $(\sigma, \tau) \leqslant (\sigma', \tau')$. Alors on vérifie aussitôt que $C^\bullet(A, B; \mathscr{S}^\bullet) = (C^h(A, B; \mathscr{S}^k))_{(h,k)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$ est un *bicomplexe* de groupes abéliens, et $L^\bullet(A, B; \mathscr{S}^\bullet) = (L^h(A, B; \mathscr{S}^k))$ en est un sous-bicomplexe.

Proposition **(11.8.9)**. — *L'injection canonique* $L^\bullet(A, B; \mathscr{S}^\bullet) \to C^\bullet(A, B; \mathscr{S}^\bullet)$ *définit un isomorphisme pour la cohomologie de ces deux bicomplexes.*

Posons $C^{\bullet\bullet} = C^\bullet(A, B; \mathscr{S}^\bullet)$ et $L^{\bullet\bullet} = L^\bullet(A, B; \mathscr{S}^\bullet)$ pour simplifier, et notons que puisque $C^{hk} = L^{hk} = 0$ pour $h<0$, les secondes suites spectrales de ces bicomplexes sont *régulières* (11.3.3); l'homomorphisme $L^{\bullet\bullet} \to C^{\bullet\bullet}$ fournit donc un morphisme de suites spectrales $''E(L^{\bullet\bullet}) \to {}''E(C^{\bullet\bullet})$ qui, pour les termes E_2, se réduit à

(11.8.9.1)
$$H^p_{II}(H^q_I(L^{\bullet\bullet})) \to H^p_{II}(H^q_I(C^{\bullet\bullet})).$$

Mais pour tout $k\in\mathbf{Z}$, il résulte de (11.8.3) que l'homomorphisme $H^q_I(L^{\bullet,k}) \to H^q_I(C^{\bullet,k})$ est *bijectif*; la conclusion résulte donc de (11.1.5).

(11.8.10) De même, avec les notations de (11.8.6), on a des homomorphismes canoniques de bicomplexes $C^\bullet(A, B; \mathscr{S}^\bullet) \to P^\bullet(A, B; \mathscr{S}^\bullet)$ (avec des notations évidentes), et le même raisonnement que dans (11.8.9), basé cette fois sur (11.8.6), montre que cet homomorphisme donne encore un *isomorphisme* en cohomologie.

11.9. Un lemme sur les complexes de type fini.

Proposition **(11.9.1)**. — *Soient* $\boldsymbol{C}$ *une catégorie abélienne,* $\boldsymbol{K}'$ *et* $\boldsymbol{K}''$ *des parties de l'ensemble des objets de* $\boldsymbol{C}$*, telles que* $\boldsymbol{K}''\subset\boldsymbol{K}'$*, et vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *Pour tout objet* $A'\in\boldsymbol{K}'$ *et tout épimorphisme* $u : A\to A'$ *dans* $\boldsymbol{C}$*, il existe un objet* $B\in\boldsymbol{K}''$ *et un morphisme* $v : B\to A$ *tels que* uv *soit un épimorphisme.*

(ii) *Pour tout couple d'objets* $A\in\boldsymbol{K}'$, $B\in\boldsymbol{K}'$ *et tout épimorphisme* $u : A\to B$, $\mathrm{Ker}(u)$ *appartient à* $\boldsymbol{K}'$.

(iii) *Le produit de deux objets de* $\boldsymbol{K}''$ *appartient à* $\boldsymbol{K}''$.

Soit $P_\bullet = (P_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ *un complexe dans* $\boldsymbol{C}$*, tel que* $H_i(P_\bullet)\in\boldsymbol{K}'$ *pour tout* i*, et qu'il existe* d *tel que* $H_i(P_\bullet) = 0$ *pour* $i<d$. *Alors il existe un complexe* $Q_\bullet = (Q_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ *dans* $\boldsymbol{C}$ *tel que* $Q_i\in\boldsymbol{K}''$ *pour tout* i *et* $Q_i = 0$ *pour* $i<d$*, et un morphisme* $u : Q_\bullet\to P_\bullet$ *de complexes tel que le morphisme correspondant* $H_\bullet(Q_\bullet)\to H_\bullet(P_\bullet)$ *soit un isomorphisme.*

Démontrons d'abord la conséquence suivante de la propriété (i) :

(i *bis*) *Soient* $u : C\to B$ *un épimorphisme dans* $\boldsymbol{C}$, A *un objet de* $\boldsymbol{K}'$, $v : A\to B$ *un morphisme dans* $\boldsymbol{C}$*; il existe alors un objet* $D\in\boldsymbol{K}''$*, un épimorphisme* $u' : D\to A$ *et un morphisme* $v' : D\to C$ *tels que le diagramme*

(11.9.1.1)
$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "v'"'] & A \arrow[d, "v"] \\ C \arrow[r, "u"'] & B \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Considérons en effet le produit fibré $C\times_B A$ dans $\boldsymbol{C}$ et les projections canoniques $p : C\times_B A\to C$, $q : C\times_B A\to A$, rendant commutatif le diagramme

(**11.9.1.2**)
$$\begin{tikzcd} C\times_B A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & A \arrow[d, "v"] \\ C \arrow[r, "u"'] & B \end{tikzcd}$$

On sait ([27], p. 1-12) que le conoyau de q est le quotient de A par $v^{-1}(u(C))$; comme u est un épimorphisme, $u(C)=B$ et $v^{-1}(u(C))=A$, donc q est un épimorphisme; il suffit alors d'appliquer (i) à l'épimorphisme $q: C\times_B A \to A$: il y a un objet $D\in \boldsymbol{K}''$ et un morphisme $w: D\to C\times_B A$ tels que qw soit un épimorphisme; on prendra $u'=qw$, $v'=pw$.

Cela étant, pour démontrer la proposition, procédons par récurrence. Supposons, pour un $i\geqslant d-1$, construits, pour $j\leqslant i$, les objets Q_j, les morphismes $d_j: Q_j\to Q_{j-1}$ et les morphismes $u_j: Q_j\to P_j$ de sorte que $Q_j=0$ pour $j<d$, que $d_{j-1}\circ d_j=0$ et $d_j\circ u_j=u_{j-1}\circ d_j$ pour $j\leqslant i$; en outre, nous supposons vérifiées les conditions suivantes :

(I_i) On a $Q_j\in\boldsymbol{K}''$ pour $j\leqslant i$ et $B_j(Q_{\bullet})\in\boldsymbol{K}'$ pour $j<i$.

(II_i) Pour $j<i$, l'homomorphisme $H_j(Q_{\bullet})\to H_j(P_{\bullet})$ déduit de la famille $(u_k)_{k\leqslant i}$ est un *isomorphisme*.

(III_i) Le morphisme composé $v_i: Z_i(Q_{\bullet})\to Z_i(P_{\bullet})\to H_i(P_{\bullet})$ (où la flèche de gauche est la restriction de u_i et la flèche de droite le morphisme canonique) est un *épimorphisme*.

Notons que, d'après (ii), $Z_i(Q_{\bullet})$, noyau de l'épimorphisme $Q_i\to B_{i-1}(Q_{\bullet})$, appartient à $\boldsymbol{K}'$ en vertu de l'hypothèse (I_i). On tire encore de (ii) que $N_i=\mathrm{Ker}\,(v_i)$ appartient aussi à $\boldsymbol{K}'$, compte tenu de l'hypothèse (III_i). En vertu de (i *bis*), il existe un $Q'_{i+1}\in\boldsymbol{K}''$, un épimorphisme $d'_{i+1}: Q'_{i+1}\to N_i$ et un morphisme $u'_{i+1}: Q'_{i+1}\to P_{i+1}$, tels que le diagramme

(**11.9.1.3**)
$$\begin{tikzcd} Q'_{i+1} \arrow[r, "d'_{i+1}"] \arrow[d, "u'_{i+1}"'] & N_i \arrow[d, "u_i"] \\ P_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"'] & B_i(P_{\bullet}) \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Comme le morphisme canonique $Z_{i+1}(P_{\bullet})\to H_{i+1}(P_{\bullet})$ est un épimorphisme et que $H_{i+1}(P_{\bullet})\in\boldsymbol{K}'$ par hypothèse, il résulte de (i) qu'il existe un objet $Q''_{i+1}\in\boldsymbol{K}''$ et un morphisme $u''_{i+1}: Q''_{i+1}\to Z_{i+1}(P_{\bullet})$ tels que le composé $Q''_{i+1}\to Z_{i+1}(P_{\bullet})\to H_{i+1}(P_{\bullet})$ soit un épimorphisme. Si on prend $d''_{i+1}: Q''_{i+1}\to N_i$ égal à 0, le diagramme

(**11.9.1.4**)
$$\begin{tikzcd} Q''_{i+1} \arrow[r, "d''_{i+1}"] \arrow[d, "u''_{i+1}"'] & N_i \arrow[d, "u_i"] \\ Z_{i+1}(P_{\bullet}) \arrow[r, "d_{i+1}"'] & P_i \end{tikzcd}$$

est commutatif, la flèche horizontale inférieure étant 0. Prenons alors $Q_{i+1} = Q'_{i+1} \times Q''_{i+1}$, qui appartient à $\boldsymbol{K}''$ en vertu de (iii), et $d_{i+1} = d'_{i+1} + d''_{i+1}$, $u_{i+1} = u'_{i+1} + u''_{i+1}$. Comme $d_{i+1}(Q_{i+1}) = d'_{i+1}(Q_{i+1}) = N_i \subset Z_i(Q_\bullet)$, on a $d_{i+1} \circ d_i = 0$ et, avec les notations usuelles, $B_i(Q_\bullet) = N_i$, ce qui vérifie (I_{i+1}). La commutativité des diagrammes (11.9.1.3) et (11.9.1.4) montre que $d_{i+1} \circ u_{i+1} = u_i \circ d_{i+1}$. Par définition de N_i, le morphisme $H_i(Q_\bullet) = Z_i(Q_\bullet)/N_i \to H_i(P_\bullet)$ déduit du système des u_k $(k \leqslant i+1)$ est le morphisme déduit de v_i par passage aux quotients, donc c'est un isomorphisme puisque v_i est un épimorphisme, d'où (II_{i+1}). Enfin, on a $Q''_{i+1} \subset Z_{i+1}(Q_\bullet)$ par définition; le choix de u''_{i+1} montre que le morphisme $v_{i+1} : Z_{i+1}(Q_\bullet) \to Z_{i+1}(P_\bullet) \to H_{i+1}(P_\bullet)$ est un épimorphisme, sa restriction à Q''_{i+1} l'étant déjà, d'où (III_{i+1}). La récurrence peut donc se poursuivre, et la proposition est démontrée.

Corollaire **(11.9.2)**. — *Soient* A *un anneau noethérien (non nécessairement commutatif),* $P_\bullet = (P_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ *un complexe de* A*-modules à droite. On suppose que les* $H_i(P_\bullet)$ *sont des* A*-modules de type fini et qu'il existe d tel que* $H_i(P_\bullet) = 0$ *pour* $i < d$. *Alors il existe un complexe* $Q_\bullet = (Q_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ *formé de* A*-modules à droite libres de rang fini, tel que* $Q_i = 0$ *pour* $i < d$, *et un homomorphisme* $u : Q_\bullet \to P_\bullet$ *de complexes, tel que l'homomorphisme* $H_\bullet(Q_\bullet) \to H_\bullet(P_\bullet)$ *correspondant à u soit bijectif.*

On applique (11.9.1) en prenant pour $\boldsymbol{C}$ la catégorie des A-modules à droite, pour $\boldsymbol{K}'$ (resp. $\boldsymbol{K}''$) l'ensemble des A-modules de type fini (resp. l'ensemble des A-modules libres de rang fini); la vérification des conditions (i), (ii) et (iii) de (11.9.1) est immédiate, compte tenu de l'hypothèse que A est noethérien.

Remarques **(11.9.3)**. — (i) Sous les conditions de (11.9.2), supposons en outre que les P_i soient des A-modules à droite *plats*. Alors, pour tout A-module à gauche M, l'homomorphisme de complexes $u \otimes 1 : Q_\bullet \otimes_A M \to P_\bullet \otimes_A M$ définit encore un *isomorphisme* $H_\bullet(Q_\bullet \otimes_A M) \xrightarrow{\sim} H_\bullet(P_\bullet \otimes_A M)$ de l'homologie comme nous le verrons au chap. III.

(ii) La conclusion de (11.9.2) n'est plus nécessairement exacte lorsqu'on ne suppose pas A *noethérien*; en effet, en l'appliquant à un complexe réduit à 0 sauf pour un seul terme, on en conclurait que tout A-module à gauche de type fini admet une *résolution* par des modules libres de type fini, ce qui n'est pas vrai en général (cf. Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, exerc. 6).

Toutefois, au lieu de supposer A noethérien, on peut supposer seulement que les $H_i(P_\bullet)$ ont une ∞-présentation finie (cf. chap. IV).

11.10. Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un complexe de modules de longueur finie.

(11.10.1) Soient A un anneau (non nécessairement commutatif),

$$M^\bullet : 0 \to M^0 \to M^1 \to \dots \to M^n \to 0 \tag{11.10.1.1}$$

un *complexe* de A-modules à gauche de *longueur finie*. On appelle *caractéristique d'Euler-Poincaré* de ce complexe le nombre

(**11.10.1.2**) $$\chi(\mathrm{M}^{\bullet}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \operatorname{long} \mathrm{M}^i.$$

Proposition (**11.10.2**). — *Pour tout complexe fini* $\mathrm{M}^{\bullet}$ *de* A-*modules à gauche de longueur finie, on a* $\chi(\mathrm{M}^{\bullet})=\chi(\mathrm{H}^{\bullet}(\mathrm{M}^{\bullet}))$ ($\mathrm{H}^{\bullet}(\mathrm{M}^{\bullet})$ *étant considéré comme un complexe pour la dérivation triviale*). *En particulier, si la suite* (11.10.1.1) *est exacte, on a* $\chi(\mathrm{M}^{\bullet})=0$.

Posons pour abréger $\mathrm{B}^i=\mathrm{B}^i(\mathrm{M}^{\bullet})$, $\mathrm{Z}^i=\mathrm{Z}^i(\mathrm{M}^{\bullet})$, $\mathrm{H}^i=\mathrm{H}^i(\mathrm{M}^{\bullet})=\mathrm{Z}^i/\mathrm{B}^i$; les B^i, Z^i, H^i sont de longueur finie. Des suites exactes

$$0\to\mathrm{B}^i\to\mathrm{Z}^i\to\mathrm{H}^i\to 0$$
$$0\to\mathrm{Z}^i\to\mathrm{M}^i\to\mathrm{B}^{i+1}\to 0$$

on tire les relations

$$\operatorname{long}(\mathrm{Z}^i)=\operatorname{long}(\mathrm{H}^i)+\operatorname{long}(\mathrm{B}^i)$$
$$\operatorname{long}(\mathrm{M}^i)=\operatorname{long}(\mathrm{Z}^i)+\operatorname{long}(\mathrm{B}^{i+1})$$

d'où

$$\operatorname{long}(\mathrm{M}^i)-\operatorname{long}(\mathrm{H}^i)=\operatorname{long}(\mathrm{B}^{i+1})+\operatorname{long}(\mathrm{B}^i)$$

Multiplions cette relation par $(-1)^i$ et faisons la somme des relations obtenues pour $0\leqslant i\leqslant n$; en notant que $\mathrm{B}^0=\mathrm{B}^{n+1}=0$, il vient l'égalité cherchée.

Corollaire (**11.10.3**). — *Soit* $\mathrm{E}=(\mathrm{E}_r^{pq})$ *une suite spectrale dans la catégorie des modules sur un anneau* A. *On suppose que les* E_2^{pq} *sont des* A-*modules de longueur finie et qu'il n'y a qu'un nombre fini de couples* (p, q) *tels que* $\mathrm{E}_2^{pq}\neq 0$. *Alors les caractéristiques d'Euler-Poincaré* $\chi(\mathrm{E}_r^{(\bullet)})$ *de tous les complexes* $\mathrm{E}_r^{(\bullet)}=(\mathrm{E}_r^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ (11.1.1) *sont toutes égales. Si, en outre, la suite* E *est faiblement convergente et si on pose* $\mathrm{E}_\infty^{(n)}=\bigoplus_{p+q=n}\mathrm{E}_\infty^{pq}$ *pour tout* $n\in\mathbf{Z}$, *on a aussi* $\chi(\mathrm{E}_\infty^{(\bullet)})=\chi(\mathrm{E}_2^{(\bullet)})$, $\mathrm{E}_\infty^{(\bullet)}=(\mathrm{E}_\infty^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ *étant considéré comme un complexe à dérivation triviale.*

Notons d'abord que si $\mathrm{E}_2^{pq}=0$, on a $\mathrm{E}_r^{pq}=0$ pour $2\leqslant r\leqslant+\infty$, donc tous les complexes $\mathrm{E}_r^{(\bullet)}$ sont finis et formés de A-modules de longueur finie; la relation $\chi(\mathrm{E}_r^{(\bullet)})=\chi(\mathrm{E}_{r+1}^{(\bullet)})$ pour tout r fini résulte donc de (11.10.2) et de l'isomorphie entre $\mathrm{H}^{\bullet}(\mathrm{E}_r^{(\bullet)})$ et $\mathrm{E}_{r+1}^{(\bullet)}$ (en tant que complexes à dérivation triviale). L'hypothèse que les E_r^{pq} sont de longueur finie entraîne que pour tout couple (p, q), les suites $(\mathrm{B}_k(\mathrm{E}_2^{pq}))_{k\geqslant 2}$ et $(\mathrm{Z}_k(\mathrm{E}_2^{pq}))_{k\geqslant 2}$ sont stationnaires; l'hypothèse que E est faiblement convergente et que $\mathrm{E}_2^{pq}=0$, sauf pour un nombre fini de couples (p, q), entraîne donc qu'il existe un entier $r\geqslant 2$ tel que $\mathrm{E}_\infty^{pq}=\mathrm{E}_r^{pq}$ pour tout couple (p, q); d'où l'assertion relative à $\chi(\mathrm{E}_\infty^{(\bullet)})$.

§ 12. COMPLÉMENTS SUR LA COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX

12.1. Cohomologie des faisceaux de modules sur les espaces annelés.

(**12.1.1**) Soit $(\mathrm{X}, \mathscr{O}_\mathrm{X})$ un espace annelé. Rappelons que pour tout $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-Module $\mathscr{F}$, on définit la *cohomologie* $\mathrm{H}^{\bullet}(\mathrm{X}, \mathscr{F})$, qui est un *foncteur cohomologique universel* (T, 2.2) de la catégorie $\mathbf{C}(\mathrm{X})$ des $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-Modules dans la catégorie des groupes abéliens; c'est le foncteur dérivé du foncteur exact à gauche $\mathscr{F}\to\Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{F})$. Le foncteur $\mathrm{H}^{\bullet}(\mathrm{X}, \mathscr{F})$ est isomorphe à la restriction à la catégorie $\mathbf{C}(X)$ du foncteur cohomologique défini de même sur la catégorie des *faisceaux de groupes abéliens* sur X (G, II, 7.2.1).

(12.1.2) Posons $A=\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Comme tout élément de A définit un endomorphisme du groupe abélien $\Gamma(X, \mathcal{F})$, il définit par fonctorialité un endomorphisme de ∂-foncteur de $H^{\bullet}(X, \mathcal{F})$; ces endomorphismes définissent sur chacun des $H^p(X, \mathcal{F})$ une structure de A-*module*, et l'opérateur ∂ est A-linéaire. En outre, pour deux entiers positifs quelconques p, q, et deux $\mathcal{O}_X$-Modules $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, on a un homomorphisme de A-modules, dit *cup-produit*

(12.1.2.1) $$H^p(X, \mathcal{F})\otimes_A H^q(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{G})$$

(G, II, 6.6). Ces homomorphismes font de la somme directe S des $H^p(X, \mathcal{O}_X)$ (pour $p\geqslant 0$) une A-*algèbre graduée anticommutative* et de la somme directe des $H^p(X, \mathcal{F})$ un S-*module gradué*.

Pour tout *recouvrement ouvert* $\mathfrak{U}$ de X, nous désignerons toujours par $C^{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ (contrairement à (G, II, 5.1)) le complexe des cochaînes *alternées* du nerf de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans le système de coefficients $\Gamma(U_\sigma, \mathcal{F})$. Il est clair que $C^{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ est un A-*module gradué*, donc les groupes de cohomologie $H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ de ce complexe sont munis d'une structure de A-*module*; en outre, les applications canoniques $H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})\rightarrow H^p(X, \mathcal{F})$ (G, II, 5.4) sont A-*linéaires*.

(12.1.3) Soit $(X', \mathcal{O}_{X'})$ un second espace annelé, et soit $f=(\psi, \theta)$ un morphisme de X' dans X.

Posons $A'=\Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$; le ψ-morphisme θ définit canoniquement un homomorphisme d'anneaux $A\rightarrow A'$. Soient $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module, $\mathcal{F}'$ un $\mathcal{O}_{X'}$-Module; pour tout *f-morphisme* $u : \mathcal{F}\rightarrow\mathcal{F}'$ $(0_{\text{I}}, 4.4.1)$, nous allons voir qu'on peut définir pour tout $p\geqslant 0$, un *di-homomorphisme*

(12.1.3.1) $$u_p : H^p(X, \mathcal{F})\rightarrow H^p(X', \mathcal{F}').$$

En effet, comme ψ^* est exact dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X, $\mathcal{F}\rightsquigarrow H^{\bullet}(X', \psi^*(\mathcal{F}))$ est un ∂-foncteur dans cette catégorie, et on sait qu'on a un homomorphisme canonique de ∂-foncteurs

(12.1.3.2) $$H^{\bullet}(X, \mathcal{F})\rightarrow H^{\bullet}(X', \psi^*(\mathcal{F}))$$

uniquement déterminé par la condition de se réduire à l'homomorphisme canonique $\Gamma(X, \mathcal{F})\rightarrow\Gamma(X', \psi^*(\mathcal{F}))$ en degré 0 (T, 3.2.2). En outre, tout élément de A détermine un endomorphisme μ de $\Gamma(X, \mathcal{F})$ et un endomorphisme μ' de $\Gamma(X', \psi^*(\mathcal{F}))$ tels que le diagramme

(12.1.3.3) $$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, \mathcal{F}) & \rightarrow & \Gamma(X', \psi^*(\mathcal{F})) \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu'} \\ \Gamma(X, \mathcal{F}) & \rightarrow & \Gamma(X', \psi^*(\mathcal{F})) \end{array}$$

soit commutatif; par la propriété d'unicité de prolongement des morphismes pour les foncteurs cohomologiques universels (T, 2.2), on en déduit des prolongements uniques de μ et μ' à la cohomologie rendant commutatifs les diagrammes analogues à (12.1.3.3), ce qui signifie que (12.1.3.2) est un homomorphisme de A-*modules*. Notons maintenant que l'on a $f^*(\mathscr{F})=\psi^*(\mathscr{F})\otimes_{\psi^*(\mathcal{O}_X)}\mathcal{O}_{X'}$, et que l'on a donc un di-homomorphisme canonique $\psi^*(\mathscr{F})\rightarrow f^*(\mathscr{F})$ du $\psi^*(\mathcal{O}_X)$-Module $\psi^*(\mathscr{F})$ dans le $\mathcal{O}_{X'}$-Module $f^*(\mathscr{F})$. Par fonctorialité, on en déduit donc un di-homomorphisme fonctoriel

(12.1.3.4)
$$H^p(X', \psi^*(\mathscr{F}))\rightarrow H^p(X', f^*(\mathscr{F}))$$

les anneaux correspondants étant A et A'; en composant ce di-homomorphisme avec (12.1.3.2), on obtient un di-homomorphisme canonique *fonctoriel* en $\mathscr{F}$

(12.1.3.5)
$$\theta_p : H^p(X, \mathscr{F})\rightarrow H^p(X', f^*(\mathscr{F})).$$

Enfin, par fonctorialité, on déduit de l'homomorphisme $u^\# : f^*(\mathscr{F})\rightarrow\mathscr{F}'$ un homomorphisme de A'-modules $H^p(X', f^*(\mathscr{F}))\rightarrow H^p(X', \mathscr{F}')$, qui, composé avec (12.1.3.5), donne (12.1.3.1).

Soit $f'=(\psi', \theta') : X''\rightarrow X'$ un second morphisme d'espaces annelés, $f''=f\circ f'$ le morphisme composé. Compte tenu de la permutabilité du foncteur ψ'^* et du produit tensoriel ($\mathbf{0}_\text{I}$, 4.3.3), on vérifie aussitôt que le composé du di-homomorphisme $H^p(X', f^*(\mathscr{F}))\rightarrow H^p(X'', f'^*(f^*(\mathscr{F})))$ et de (12.1.3.5) est le di-homomorphisme correspondant $H^p(X, \mathscr{F})\rightarrow H^p(X'', f''^*(\mathscr{F}))$.

(12.1.4) Une définition directe de l'homomorphisme (12.1.3.2) peut s'obtenir de la façon suivante : on considère une résolution injective $\mathscr{L}^\bullet=(\mathscr{L}^i)$ de $\mathscr{F}$ formée de faisceaux de groupes abéliens sur X; comme le foncteur ψ^* est exact, $\psi^*(\mathscr{L}^\bullet)$ est une *résolution* de $\psi^*(\mathscr{F})$ formée de faisceaux sur X'. Si $\mathscr{L}'^\bullet=(\mathscr{L}'^i)$ est une résolution injective de $\psi^*(\mathscr{F})$ dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X', il y a donc un morphisme $\psi^*(\mathscr{L}^\bullet)\rightarrow\mathscr{L}'^\bullet$ de complexes de faisceaux de groupes abéliens, compatible avec les augmentations (M, V, 1.1.*a)*), bien déterminé à une homotopie près. On en déduit des homomorphismes

$$\Gamma(X, \mathscr{L}^\bullet)\rightarrow\Gamma(X', \psi^*(\mathscr{L}^\bullet))\rightarrow\Gamma(X', \mathscr{L}'^\bullet)$$

de complexes de groupes abéliens, dont le composé, par passage à la cohomologie donne un morphisme de ∂-foncteurs $H^\bullet(X, \mathscr{F})\rightarrow H^\bullet(X', \psi^*(\mathscr{F}))$; comme il coïncide avec (12.1.3.2) en degré 0, il lui est identique (T, 2.2).

Considérons maintenant un *recouvrement ouvert* $\mathfrak{U}=(U_\alpha)$ de X, et soit $\mathfrak{U}'=(f^{-1}(U_\alpha))$ le recouvrement ouvert de X', image réciproque de $\mathfrak{U}$. Les homomorphismes canoniques $\Gamma(V, \mathscr{F})\rightarrow\Gamma(f^{-1}(V), f^*(\mathscr{F}))$ pour tout ouvert V de X définissent aussitôt (cf. G, II, 5.1) un homomorphisme de complexes $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\rightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}', f^*(\mathscr{F}))$, d'où des homomorphismes canoniques

(12.1.4.1)
$$\theta_p : H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F})\rightarrow H^p(\mathfrak{U}', f^*(\mathscr{F})).$$

En outre, on a des diagrammes commutatifs

(**12.1.4.2**)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \arrow[r, "\theta_p"] \arrow[d] & \mathrm{H}^p(\mathfrak{U}', f^*(\mathscr{F})) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \arrow[r, "\theta_p"'] & \mathrm{H}^p(\mathrm{X}', f^*(\mathscr{F}))
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les homomorphismes canoniques de (G, II, 5.2). Pour établir la commutativité de (12.1.4.2), considérons le complexe de faisceaux de cochaînes (alternées) de $\mathscr{F}$ relatives à $\mathfrak{U}$, $\mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$, tel que $\Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})) = \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ (G, II, 5.2). Les homomorphismes canoniques $\Gamma(\mathrm{V}, \mathscr{F}) \to \Gamma(f^{-1}(\mathrm{V}), \psi^*(\mathscr{F}))$ définissent alors un ψ-morphisme $\mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}', \psi^*(\mathscr{F}))$, et on a, avec les notations ci-dessus, un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(\mathrm{X}', \mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}', \psi^*(\mathscr{F}))) \arrow[d] & \\
\Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{L}^\bullet) \arrow[r] & \Gamma(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{L}^\bullet)) \arrow[r] & \Gamma(\mathrm{X}', \mathscr{L}'^\bullet)
\end{tikzcd}$$

qui, en passant à la cohomologie, donne des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^p(\mathfrak{U}', \psi^*(\mathscr{F})) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \arrow[r] & \mathrm{H}^p(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{F}))
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les homomorphismes canoniques de (G, II, 5.2). Il suffit alors de combiner ces diagrammes avec les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^p(\mathfrak{U}', \psi^*(\mathscr{F})) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^p(\mathfrak{U}', f^*(\mathscr{F})) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^p(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{F})) \arrow[r] & \mathrm{H}^p(\mathrm{X}', f^*(\mathscr{F}))
\end{tikzcd}$$

qui proviennent de l'homomorphisme $\psi^*(\mathscr{F}) \to f^*(\mathscr{F})$ et du caractère fonctoriel des homomorphismes canoniques de (G, II, 5.2), pour obtenir la commutativité de (12.1.4.2).

On notera que si $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $A' = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$, l'homomorphisme (12.1.4.3) est un di-homomorphisme de modules correspondant aux anneaux A et A'. On a une propriété de *transitivité* de (12.1.4.1) pour le composé de deux morphismes, analogue à la transitivité de (12.1.3.5). Enfin, notons que dans les définitions précédentes, au lieu d'une résolution injective $\mathscr{L}^\bullet$ de $\mathscr{F}$, on aurait aussi bien pu partir d'une résolution telle que $H^p(X, \mathscr{L}^i) = 0$ pour tout i et tout $p > 0$ (G, II, 4.7.1).

(12.1.5) Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ trois $\mathcal{O}_X$-Modules, et considérons un $\mathcal{O}_X$-homomorphisme $u : \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{G} \to \mathscr{H}$, qui donne pour la cohomologie des homomorphismes

(12.1.5.1)
$$H^p(X, \mathscr{F}) \otimes_A H^q(X, \mathscr{G}) \to H^{p+q}(X, \mathscr{H})$$

déduits du cup-produit (12.1.2.1). Montrons qu'avec les hypothèses et notations de (12.1.3), on a des diagrammes commutatifs

(12.1.5.2)
$$\begin{array}{ccc} H^p(X, \mathscr{F}) \otimes_A H^q(X, \mathscr{G}) & \longrightarrow & H^{p+q}(X, \mathscr{H}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^p(X', f^*(\mathscr{F})) \otimes_{A'} H^q(X', f^*(\mathscr{G})) & \rightarrow & H^{p+q}(X', f^*(\mathscr{H})) \end{array}$$

où les flèches verticales proviennent des homomorphismes canoniques (12.1.3.5). Pour cela, rappelons que (12.1.5.1) peut s'obtenir en partant des résolutions *canoniques* (G, II, 4.3) $\mathscr{L}^\bullet$, $\mathscr{M}^\bullet$, $\mathscr{N}^\bullet$ de $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ respectivement (qui sont formées de $\mathcal{O}_X$-Modules), de l'application linéaire $\mathscr{L}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{M}^\bullet \to \mathscr{N}^\bullet$ de complexes de $\mathcal{O}_X$-Modules correspondant à u, qui fournit un homomorphisme de complexes de A-modules $\Gamma(X, \mathscr{L}^\bullet) \otimes_A \Gamma(X, \mathscr{M}^\bullet) \to \Gamma(X, \mathscr{N}^\bullet)$, et en passant à la cohomologie des homomorphismes $H^p(\Gamma(X, \mathscr{L}^\bullet)) \otimes_A H^q(\Gamma(X, \mathscr{M}^\bullet)) \to H^{p+q}(\Gamma(X, \mathscr{N}^\bullet))$ (G, II, 6.6). Or, on a évidemment un diagramme commutatif

(12.1.5.3)
$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, \mathscr{L}^\bullet) \otimes_A \Gamma(X, \mathscr{M}^\bullet) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{N}^\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(X', \psi^*(\mathscr{L}^\bullet)) \otimes_{\Gamma(X', \psi^*(\mathcal{O}_X))} \Gamma(X', \psi^*(\mathscr{M}^\bullet)) & \rightarrow & \Gamma(X', \psi^*(\mathscr{N}^\bullet)) \end{array}$$

qui donne en passant à la cohomologie des diagrammes commutatifs

$$(12.1.5.4)\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{F})\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{G}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^{p+q}(\mathrm{X}, \mathscr{H}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^p(\Gamma(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{L}^\bullet)))\otimes_{\Gamma(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}))}\mathrm{H}^q(\Gamma(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{M}^\bullet))) & \rightarrow & \mathrm{H}^{p+q}(\Gamma(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{N}^\bullet))). \end{array}$$

Mais comme $\psi^*(\mathscr{L}^\bullet)$, $\psi^*(\mathscr{M}^\bullet)$ et $\psi^*(\mathscr{N}^\bullet)$ sont des *résolutions* de $\psi^*(\mathscr{F})$, $\psi^*(\mathscr{G})$, $\psi^*(\mathscr{H})$ respectivement, on a un diagramme commutatif (G, II, 6.6.1)

$$(12.1.5.5)\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{H}^p(\Gamma(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{L}^\bullet)))\otimes_{\Gamma(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}))}\mathrm{H}^q(\Gamma(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{M}^\bullet))) & \rightarrow & \mathrm{H}^{p+q}(\Gamma(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{N}^\bullet))) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^p(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{F}))\otimes_{\Gamma(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}))}\mathrm{H}^q(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{G})) & \rightarrow & \mathrm{H}^{p+q}(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{H})) \end{array}$$

Enfin, par fonctorialité, on a un diagramme commutatif

$$(12.1.5.6)\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{H}^p(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{F}))\otimes_{\Gamma(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}))}\mathrm{H}^q(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{G})) & \rightarrow & \mathrm{H}^{p+q}(\mathrm{X}', \psi^*(\mathscr{H})). \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^p(\mathrm{X}', f^*(\mathscr{F}))\otimes_{\mathrm{A}'}\mathrm{H}^q(\mathrm{X}', f^*(\mathscr{G})) & \rightarrow & \mathrm{H}^{p+q}(\mathrm{X}', f^*(\mathscr{H})) \end{array}$$

et par combinaison des trois diagrammes (12.1.5.4), (12.1.5.5) et (12.1.5.6), on obtient le diagramme commutatif (12.1.5.2) cherché.

Remarque **(12.1.6).** — Avec les notations de (12.1.3), supposons que l'on ait un diagramme commutatif

(12.1.6.1)
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \mathscr{F} & \xrightarrow{r} & \mathscr{G} & \xrightarrow{s} & \mathscr{H} & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle w} & & \\ 0 & \rightarrow & \mathscr{F}' & \xrightarrow[r']{} & \mathscr{G}' & \xrightarrow[s']{} & \mathscr{H}' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

où r, s sont des homomorphismes de $\mathcal{O}_X$-Modules, r', s' des homomorphismes de $\mathcal{O}_{X'}$-Modules, u, v, w des f-morphismes et les lignes sont *exactes*. On en déduit alors un diagramme commutatif

(12.1.6.2)
$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \rightarrow & \mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{F}) & \rightarrow & \mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{G}) & \rightarrow & \mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{H}) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{H}^{p+1}(\mathrm{X}, \mathscr{F}) & \rightarrow \ldots \\ & \downarrow{\scriptstyle u_p} & & \downarrow{\scriptstyle v_p} & & \downarrow{\scriptstyle w_p} & & \downarrow{\scriptstyle u_{p+1}} & \\ \ldots \rightarrow & \mathrm{H}^p(\mathrm{X}', \mathscr{F}') & \rightarrow & \mathrm{H}^p(\mathrm{X}', \mathscr{G}') & \rightarrow & \mathrm{H}^p(\mathrm{X}', \mathscr{H}') & \xrightarrow[\partial]{} & \mathrm{H}^{p+1}(\mathrm{X}', \mathscr{F}') & \rightarrow \ldots \end{array}$$

En effet, (12.1.6.1) se factorise en

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \mathscr{F} & \longrightarrow & \mathscr{G} & \longrightarrow & \mathscr{H} & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \psi^*(\mathscr{F}) & \rightarrow & \psi^*(\mathscr{G}) & \rightarrow & \psi^*(\mathscr{H}) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \mathscr{F}' & \longrightarrow & \mathscr{G}' & \longrightarrow & \mathscr{H}' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

où la ligne du milieu est *exacte* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 3.7.2) et il suffit d'utiliser le fait que (12.1.3.2) est un homomorphisme de ∂-foncteurs et que les $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}', \mathscr{F}')$ forment un ∂-foncteur en $\mathscr{F}'$.

(12.1.7) Les hypothèses et notations étant celles de (12.1.3), considérons maintenant le cas où $\mathscr{F} = f_*(\mathscr{F}') = \psi_*(\mathscr{F}')$; nous allons voir que le di-homomorphisme défini dans (12.1.3)

(12.1.7.1)
$$\mathrm{H}^p(\mathrm{X}, f_*(\mathscr{F}')) \rightarrow \mathrm{H}^p(\mathrm{X}', \mathscr{F}')$$

peut s'obtenir (à un automorphisme près de $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}', \mathscr{F}')$) comme *edge-homomorphisme d'une suite spectrale* du foncteur composé $\mathscr{F}' \rightsquigarrow \Gamma(\mathrm{X}', \psi_*(\mathscr{F}'))$ (T, 2.4). La description de l'homomorphisme (12.1.7.1) donnée dans (12.1.4) montre ici qu'on peut obtenir cet homomorphisme de la façon suivante : on considère des résolutions injectives $\mathscr{L}^\bullet$ et $\mathscr{L}'^\bullet$ de $\psi_*(\mathscr{F}')$ et de $\mathscr{F}'$ respectivement, puis on prend un homomorphisme de complexes $v : \psi^*(\mathscr{L}^\bullet) \rightarrow \mathscr{L}'^\bullet$ « au-dessus » de l'homomorphisme canonique $\psi^*(\psi_*(\mathscr{F}')) \rightarrow \mathscr{F}'$;

on note ensuite que l'on a $\Gamma(X', \mathscr{L}'^{\cdot}) = \Gamma(X, \psi_*(\mathscr{L}'^{\cdot}))$ et que l'homomorphisme composé

$$\Gamma(X, \mathscr{L}^{\cdot}) \to \Gamma(X', \psi^*(\mathscr{L}^{\cdot})) \xrightarrow{\Gamma(v)} \Gamma(X', \mathscr{L}'^{\cdot})$$

n'est autre que

(12.1.7.2) $$\Gamma(v^\flat) : \Gamma(X, \mathscr{L}^{\cdot}) \to \Gamma(X, \psi_*(\mathscr{L}'^{\cdot}))$$

($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 3.7.1), et (12.1.7.1) s'obtient par passage à la cohomologie dans (12.1.7.2). D'autre part, les suites spectrales du foncteur composé $\mathscr{F}' \rightsquigarrow \Gamma(X, \psi_*(\mathscr{F}'))$ s'obtiennent en considérant une résolution injective de Cartan-Eilenberg $\mathscr{M}^{\cdot\cdot} = (\mathscr{M}^{ij})$ du complexe $\psi_*(\mathscr{L}'^{\cdot})$ dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X; les suites spectrales en question sont celles du bicomplexe $\Gamma(X, \mathscr{M}^{\cdot\cdot})$ (qui sont birégulières puisque $\mathscr{M}^{ij} = 0$ pour $i < 0$ ou $j < 0$). Or, la première suite spectrale de ce bicomplexe *dégénère*, car les faisceaux $\psi_*(\mathscr{L}'^{i})$ sont flasques (G, II, 3.1.1), donc $\mathrm{H}^q_{\mathrm{II}}(\Gamma(X, \mathscr{M}^{i,\cdot})) = \mathrm{H}^q(\psi_*(\mathscr{L}'^{i})) = 0$ pour $q > 0$ (G, II, 4.4.3); on a donc des edge-homomorphismes *bijectifs* (11.1.6)

(12.1.7.3) $$'\mathrm{E}_2^{i0} = \mathrm{H}^i(\mathrm{H}^0_{\mathrm{II}}(\Gamma(X, \mathscr{M}^{\cdot\cdot}))) \to \mathrm{H}^i(\Gamma(X, \mathscr{M}^{\cdot\cdot}))$$

et on sait (11.3.4) que cet homomorphisme provient, par passage à la cohomologie, de l'augmentation

(12.1.7.4) $$\Gamma(X, \psi_*(\mathscr{L}'^{\cdot})) \to \Gamma(X, \mathscr{M}^{\cdot\cdot})$$

laquelle provient elle-même de l'augmentation $\eta : \psi_*(\mathscr{L}'^{\cdot}) \to \mathscr{M}^{\cdot\cdot}$. D'autre part, pour la seconde suite spectrale, on a des edge-homomorphismes

(12.1.7.5) $$''\mathrm{E}_2^{i0} = \mathrm{H}^i(\mathrm{H}^0_{\mathrm{I}}(\Gamma(X, \mathscr{M}^{\cdot\cdot})) \to \mathrm{H}^i(\Gamma(X, \mathscr{M}^{\cdot\cdot}))$$

provenant (11.3.4) par passage à la cohomologie, de l'homomorphisme de complexes $\mathrm{Z}^0_{\mathrm{I}}(\Gamma(X, \mathscr{M}^{\cdot\cdot})) \to \Gamma(X, \mathscr{M}^{\cdot\cdot})$. Or, comme ψ_* est exact à gauche, la suite

$$0 \to \psi_*(\mathscr{F}') \to \psi_*(\mathscr{L}'^0) \to \psi_*(\mathscr{L}'^1)$$

est exacte; par définition d'une résolution de Cartan-Eilenberg (11.4.2), on peut donc prendre $\mathrm{B}^0_{\mathrm{I}}(\mathscr{M}^{\cdot\cdot}) = 0$, $\mathrm{Z}^0_{\mathrm{I}}(\mathscr{M}^{\cdot\cdot}) = \mathscr{L}^{\cdot}$; comme le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{L}^0 \arrow[r, "i^0"] & \mathscr{M}^{00} \\ \psi_*(\mathscr{F}') \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[r, "\varepsilon'"'] \arrow[ur, "\varepsilon''"] & \psi_*(\mathscr{L}'^0) \arrow[u, "\eta^0"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif, l'injection de complexes $i : \mathscr{L}^{\cdot} \to \mathscr{M}^{\cdot\cdot}$ est compatible avec les augmentations ε et ε''. On a ainsi deux homomorphismes de complexes de $\mathscr{L}^{\cdot}$ dans $\mathscr{M}^{\cdot\cdot}$

$$\begin{tikzcd} \mathscr{L}^{\cdot} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "v^\flat"'] & & \mathscr{M}^{\cdot\cdot} \\ & \psi_*(\mathscr{L}'^{\cdot}) \arrow[ur, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

compatibles avec les augmentations ε et ε''; comme $\mathscr{L}^\bullet$ est une *résolution* injective et que $\mathscr{M}^{\bullet\bullet}$ est formée de faisceaux injectifs, il résulte de (M, V, 1.1 *a)*) que ces deux homomorphismes sont *homotopes*; il en est donc de même des deux homomorphismes correspondants $\Gamma(X, \mathscr{L}^\bullet) \to \Gamma(X, \mathscr{M}^{\bullet\bullet})$, et en passant à la cohomologie, on obtient donc le *même* homomorphisme; en d'autres termes, on a bien montré que le edge-homomorphisme (12.1.7.5), qui s'écrit $H^p(X, \psi_*(\mathscr{F}')) \to H^p(\Gamma(X, \mathscr{M}^{\bullet\bullet}))$ est composé de (12.1.7.1) et de (12.1.7.3), qui s'écrit $H^p(X', \mathscr{F}') \to H^p(\Gamma(X, \mathscr{M}^{\bullet\bullet}))$ et qu'on a vu être un *isomorphisme*; d'où notre assertion.

12.2. Images directes supérieures.

(12.2.1) Soient $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces annelés, $f = (\psi, \theta)$ un morphisme de X dans Y, qui définit le foncteur *image directe* $f_* : \boldsymbol{C}(X) \to \boldsymbol{C}(Y)$, identique d'ailleurs à la restriction à $\boldsymbol{C}(X)$ du foncteur ψ_* défini dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X. Ce dernier foncteur est additif et exact à gauche, et comme tout faisceau de groupes abéliens sur X est isomorphe à un sous-faisceau d'un faisceau *injectif* de groupes abéliens, on définit les *foncteurs dérivés* droits $\mathscr{F} \rightsquigarrow R^p\psi_*(\mathscr{F})$ du foncteur ψ_*; les $R^p\psi_*(\mathscr{F})$ sont des faisceaux de groupes abéliens sur Y, et les $R^p\psi_*$ forment un *foncteur cohomologique universel* (T, 2.3).

En outre, le faisceau $R^p\psi_*(\mathscr{F})$ est le faisceau associé au préfaisceau $V \rightsquigarrow H^p(f^{-1}(V), \mathscr{F})$ (T, 3.7.2). Si maintenant on suppose que $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-*Module*, $H^p(f^{-1}(V), \mathscr{F})$ est naturellement muni d'une structure de $\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{O}_X)$-module, donc de $\Gamma(V, \psi_*(\mathcal{O}_X))$-module, et la donnée de l'homomorphisme $\theta : \mathcal{O}_Y \to \psi_*(\mathcal{O}_X)$ permet d'en déduire une structure de $\Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$-module. Pour les structures ainsi définies, il est clair que la restriction d'un ouvert V à un ouvert $V' \subset V$ définit un di-homomorphisme, et cela permet donc de définir sur chacun des $R^p\psi_*(\mathscr{F})$ une structure de $\mathcal{O}_Y$-*Module*; c'est ce $\mathcal{O}_Y$-Module que nous noterons $R^pf_*(\mathscr{F})$, R^pf_* étant ainsi défini comme un foncteur additif de $\boldsymbol{C}(X)$ dans $\boldsymbol{C}(Y)$. En outre, les R^pf_* forment un ∂-*foncteur*, car si $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ est une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-Modules, la description des $R^p\psi_*$ et de la structure de $\mathcal{O}_Y$-Module sur $R^p\psi_*(\mathscr{F})$ donnée ci-dessus montre aussitôt que l'homomorphisme $\partial : R^p\psi_*(\mathscr{F}'') \to R^{p+1}\psi_*(\mathscr{F}')$ est dans ce cas un homomorphisme de $\mathcal{O}_Y$-*Modules*. Enfin, les R^pf_* s'identifient aux foncteurs *dérivés* droits de f_* : en effet, tout $\mathcal{O}_X$-Module admet une résolution *injective* formée de $\mathcal{O}_X$-Modules, et comme une telle résolution est formée de faisceaux *flasques* de groupes abéliens (G, II, 7.1), elle peut servir à calculer les $R^p\psi_*(\mathscr{F})$, puisque $R^n\psi_*(\mathscr{G}) = 0$ pour $n \geqslant 1$ et pour tout faisceau *flasque* $\mathscr{G}$ (T, 2.4.1, Remarque 3, et cor. de la prop. 3.3.2). On conclut donc que les R^pf_* forment un *foncteur cohomologique universel de* $\boldsymbol{C}(X)$ dans $\boldsymbol{C}(Y)$ (T, 2.3).

(12.2.2) Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux $\mathcal{O}_X$-Modules. Avec les notations de (12.2.1), pour tout ouvert V de Y, on a l'homomorphisme de cup-produit (12.1.2.1)

$$H^p(f^{-1}(V), \mathscr{F}) \otimes_{\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{O}_X)} H^q(f^{-1}(V), \mathscr{G}) \to H^{p+q}(f^{-1}(V), \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{G})$$

et il résulte aussitôt de la définition du cup-produit (G, II, 6.6) que ces homomorphismes commutent au passage de V à un sous-espace ouvert V′ de V. D'autre part, on a un homomorphisme d'anneaux

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_Y) \to \Gamma(V, \psi_*(\mathcal{O}_X)) = \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{O}_X)$$

provenant de θ, d'où un homomorphisme canonique de produits tensoriels

$$H^p(f^{-1}(V), \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(V,\mathcal{O}_Y)} H^q(f^{-1}(V), \mathcal{G}) \to H^p(f^{-1}(V), \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(f^{-1}(V),\mathcal{O}_X)} H^q(f^{-1}(V), \mathcal{G})$$

qui est lui aussi compatible avec la restriction de V′ à V. Par composition, on obtient donc un homomorphisme de $\Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$-modules, qui définit un homomorphisme canonique fonctoriel en $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ pour les faisceaux associés aux préfaisceaux considérés :

(12.2.2.1) $$R^p f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} R^q f_*(\mathcal{G}) \to R^{p+q} f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}).$$

On notera que pour $p=q=0$, cet homomorphisme se réduit à ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 4.2.2.1).

Proposition **(12.2.3)**. — *Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{F}$ et tout $\mathcal{O}_Y$-Module localement libre de rang fini $\mathcal{L}$, on a des isomorphismes canoniques fonctoriels*

(12.2.3.1) $$R^p f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} R^p f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\mathcal{L})).$$

L'homomorphisme (12.2.3.1) s'obtient en composant l'homomorphisme, cas particulier de (12.2.2.1) :

(12.2.3.2) $$R^p f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_*(f^*(\mathcal{L})) \to R^p f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\mathcal{L}))$$

avec l'homomorphisme du premier membre de (12.2.3.1) dans celui de (12.2.3.2), provenant de l'homomorphisme canonique ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 4.4.3.2). Pour vérifier que (12.2.3.1) est un isomorphisme lorsque $\mathcal{L}$ est localement libre, on peut aussitôt se ramener au cas $\mathcal{L} = \mathcal{O}_Y$, la question étant locale sur Y, et les foncteurs envisagés étant additifs en $\mathcal{L}$. Mais alors, la proposition se ramène, vu la définition de (12.2.2.1), à la vérification du fait que l'homomorphisme correspondant de préfaisceaux est bijectif, ce qui est immédiat en vertu de la relation $f^*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X$.

(12.2.4) Soient $(Z, \mathcal{O}_Z)$ un troisième espace annelé, $g : Y \to Z$ un morphisme d'espaces annelés. On sait (G, II, 7.1 et 3.1.1) que pour tout $\mathcal{O}_X$-Module injectif $\mathcal{G}$, $f_*(\mathcal{G})$ est un faisceau flasque de groupes abéliens, et par suite (12.2.1) on a $R^p g_*(f_*(\mathcal{G})) = 0$ pour tout $p > 0$. Il s'ensuit (T, 2.4.1) que la *suite spectrale de Leray* des foncteurs composés est applicable au foncteur composé $g_* f_*$: il y a une suite spectrale *birégulière* dont l'aboutissement est le foncteur $R^{\cdot} h_*$, où $h = g \circ f$, et dont le terme E_2 est donné par

(12.2.4.1) $$E_2^{pq} = R^p g_*(R^q f_*(\mathcal{F})).$$

(12.2.5) Sous les conditions de (12.2.4), nous allons définir directement des homomorphismes canoniques de $\mathcal{O}_Z$-Modules

(12.2.5.1) $$R^n g_*(f_*(\mathcal{F})) \to R^n h_*(\mathcal{F})$$

(12.2.5.2) $$R^n h_*(\mathcal{F}) \to g_*(R^n f_*(\mathcal{F}))$$

qu'on pourrait identifier aux « edge-homomorphismes » de la suite spectrale de Leray (cf. (12.1.7)). Il suffit d'opérer sur les préfaisceaux auxquels sont associés les faisceaux images supérieures (12.2.1). Pour cela, considérons un ouvert quelconque W de Z et son image réciproque $g^{-1}(W)$ dans Y; on a un di-homomorphisme canonique

$$H^n(g^{-1}(W), f_*(\mathscr{F})) \to H^n(f^{-1}(g^{-1}(W)), f^*(f_*(\mathscr{F}))) \tag{12.2.5.3}$$

les anneaux correspondants étant $\Gamma(g^{-1}(W), \mathcal{O}_Y)$ et $\Gamma(h^{-1}(W), \mathcal{O}_X)$; d'autre part, l'homomorphisme canonique ($\mathbf{0}_I$, 4.4.3.3) fournit par fonctorialité des homomorphismes canoniques

$$H^n(h^{-1}(W), f^*(f_*(\mathscr{F}))) \to H^n(h^{-1}(W), \mathscr{F}) \tag{12.2.5.4}$$

qui sont des homomorphismes de $\Gamma(h^{-1}(W), \mathcal{O}_X)$-modules. Compte tenu de l'homomorphisme d'anneaux $\Gamma(W, \mathcal{O}_Z) \to \Gamma(g^{-1}(W), \mathcal{O}_Y)$, on voit qu'en composant (12.2.5.4) et (12.2.5.3), on obtient un homomorphisme de préfaisceaux, qui fournit l'homomorphisme de faisceaux (12.2.5.1).

La définition de (12.2.5.2) est encore plus simple; par définition, $R^n h_*(\mathscr{F})$ est associé au préfaisceau $W \rightsquigarrow H^n(f^{-1}(g^{-1}(W)), \mathscr{F})$ et $R^n f_*(\mathscr{F})$ au préfaisceau $V \rightsquigarrow H^n(f^{-1}(V), \mathscr{F})$; on a donc un homomorphisme canonique

$$H^n(f^{-1}(g^{-1}(W)), \mathscr{F}) \to \Gamma(g^{-1}(W), R^n f_*(\mathscr{F})),$$

et il est immédiat que ces homomorphismes définissent un homomorphisme de préfaisceaux, qui à son tour définit (12.2.5.2).

(12.2.6) Sous les hypothèses de (12.2.4), soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{H}$ trois $\mathcal{O}_X$-Modules et $u : \mathscr{F} \otimes \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ un $\mathcal{O}_X$-homomorphisme. On a alors des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} R^p g_*(f_*(\mathscr{F})) \otimes_{\mathcal{O}_Z} R^q g_*(f_*(\mathscr{G})) & \to & R^{p+q} g_*(f_*(\mathscr{H})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^p h_*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Z} R^q h_*(\mathscr{G}) & \longrightarrow & R^{p+q} h_*(\mathscr{H}) \end{array} \tag{12.2.6.1}$$

et

$$\begin{array}{ccc} R^p h_*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Z} R^q h_*(\mathscr{G}) & \to & R^{p+q} h_*(\mathscr{H}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ g_*(R^p f_*(\mathscr{F})) \otimes_{\mathcal{O}_Z} g_*(R^q f_*(\mathscr{G})) & \to & g_*(R^{p+q} f_*(\mathscr{H})) \end{array} \tag{12.2.6.2}$$

où les flèches horizontales proviennent de (12.2.2.1) (la dernière combinée avec ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 4.2.2.1)) et les flèches verticales des homomorphismes (12.2.5.1) et (12.2.5.2) respectivement.

Il suffit en effet de le vérifier pour les homomorphismes correspondants de préfaisceaux; si on revient aux définitions données dans (12.2.2) et (12.2.5) pour ces homomorphismes, on est aussitôt ramené, pour (12.2.6.1), aux diagrammes commutatifs (12.1.5.2); la vérification est encore plus simple pour (12.2.6.2).

12.3. Compléments sur les foncteurs Ext de faisceaux.

(12.3.1) Considérons un espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$; nous ne reviendrons pas sur la définition et les principales propriétés des bifoncteurs $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_X}(X; \mathcal{F}, \mathcal{G})$ de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules dans celle des $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-modules, et $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ de la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules dans elle-même, ni sur la suite spectrale birégulière $E(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ qui les relie (T, 4.2 et G, II, 7.3).

(12.3.2) On définit de la même manière que dans (M, XIV, 1) la notion d'*extension* d'un $\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{F}$ par un $\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{G}$ et la loi de composition entre classes d'extensions équivalentes : les raisonnements faits pour les modules s'adaptent en effet de façon évidente à une catégorie abélienne quelconque. La seconde démonstration de (M, XIV, 1.1), qui n'utilise que l'existence de plongements dans les objets injectifs, est alors encore valable pour la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules, et montre donc que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(X; \mathcal{F}, \mathcal{G})$ s'identifie canoniquement au *groupe abélien des classes d'extensions de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{G}$*.

Proposition **(12.3.3)**. — *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé tel que le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ soit cohérent. Alors, pour tout couple de $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et tout $p \geqslant 0$, $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent.*

Notons que les $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ forment un foncteur cohomologique contravariant en $\mathcal{F}$. Puisque $\mathcal{F}$ est cohérent, il existe pour tout p et tout point $x \in X$ un voisinage ouvert U de X et une suite exacte de $(\mathcal{O}_X|U)$-Modules

$$0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{L}_{p-1} \to \ldots \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{F}|U \to 0$$

où chacun des $\mathcal{L}_i$ $(0 \leqslant i \leqslant p-1)$ est isomorphe à un $\mathcal{O}_X^{n_i}|U$ et $\mathcal{R}$ est cohérent : cela résulte par récurrence sur p de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.2) et ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.4), vu l'hypothèse que $\mathcal{O}_X$ est cohérent.

Notons maintenant que, pour $p \geqslant 1$, on a $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{L}|U, \mathcal{G}|U) = 0$ pour tout $\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{L}$ tel que $\mathcal{L}|U$ soit isomorphe à un $\mathcal{O}_X^n|U$ (T, 4.2.3); le raisonnement de (M, V, 7.2) s'applique donc au foncteur cohomologique contravariant $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{F}|U, \mathcal{G}|U)$, et donne une suite exacte

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{L}_{p-1}, \mathcal{G}|U) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{R}, \mathcal{G}|U) \to \mathcal{E}xt^p_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{F}|U, \mathcal{G}|U) \to 0$$

et comme les deux premiers termes de cette suite sont des $(\mathcal{O}_X|U)$-Modules cohérents ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.5), il en est de même du troisième ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.4).

Proposition (**12.3.4**). — *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme* plat *d'espaces annelés, et soient* $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ *deux* $\mathscr{O}_Y$*-Modules.*

(i) *Il existe un homomorphisme de bifoncteurs cohomologiques*

$$(\mathbf{12.3.4.1}) \qquad f^*(\mathscr{E}xt^{\cdot}_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}xt^{\cdot}_{\mathscr{O}_X}(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{G}))$$

se réduisant en degré 0 *à l'homomorphisme canonique* ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 4.4.6).

(ii) *Il existe un morphisme canonique de suites spectrales*

$$(\mathbf{12.3.4.2}) \qquad \mathrm{E}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \to \mathrm{E}(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{G}))$$

qui, pour les termes E_2, *se réduit aux homomorphismes*

$$(\mathbf{12.3.4.3}) \qquad \mathrm{H}^p(\mathrm{Y}, \mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \to \mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O}_X}(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{G})))$$

déduits de (12.3.4.1) *et de* (12.1.3.1).

(i) Comme f^* est un foncteur exact dans la catégorie des $\mathscr{O}_Y$-Modules ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.7.2), les foncteurs $\mathscr{G} \rightsquigarrow f^*(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))$ et $\mathscr{G} \rightsquigarrow \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{G}))$ sont exacts à gauche; on déduit canoniquement de ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 4.4.6) un homomorphisme de leurs foncteurs dérivés. Pour calculer ces derniers, on prend une résolution injective $\mathscr{L}^{\cdot} = (\mathscr{L}^i)$ de $\mathscr{G}$, et on a donc des morphismes $\mathscr{H}^p(f^*(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{L}^{\cdot}))) \to \mathscr{H}^p(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{L}^{\cdot})))$ de cohomologies de complexes de faisceaux. D'ailleurs, en vertu de l'exactitude de f^*, on a $\mathscr{H}^p(f^*(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{L}^{\cdot}))) = f^*(\mathscr{H}^p(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{L}^{\cdot}))) = f^*(\mathscr{E}xt^p_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))$ par définition. D'autre part, l'exactitude de f^* entraîne que $f^*(\mathscr{L}^{\cdot})$ est une *résolution* de $f^*(\mathscr{G})$; si $\mathscr{L}'^{\cdot} = (\mathscr{L}'^i)$ est une résolution injective de $f^*(\mathscr{G})$ dans la catégorie des $\mathscr{O}_X$-Modules, il y a donc un homomorphisme de complexes $f^*(\mathscr{L}^{\cdot}) \to \mathscr{L}'^{\cdot}$, déterminé à une homotopie près, et qui définit par suite un homomorphisme bien déterminé en cohomologie; composant cet homomorphisme avec l'homomorphisme défini plus haut, on obtient (12.3.4.1).

(ii) Avec les notations précédentes, on a un homomorphisme de complexes de faisceaux de $\mathscr{O}_X$-Modules $f^*(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{L}^{\cdot})) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(f^*(\mathscr{F}), \mathscr{L}'^{\cdot})$. Soit $\mathscr{M}^{\cdot\cdot}$ une résolution injective de Cartan-Eilenberg du complexe $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{L}^{\cdot})$ dans la catégorie des $\mathscr{O}_Y$-Modules; alors, en vertu de l'exactitude du foncteur f^*, $f^*(\mathscr{M}^{\cdot\cdot})$ est une résolution de Cartan-Eilenberg du complexe $f^*(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{L}^{\cdot}))$; si $\mathscr{M}'^{\cdot\cdot}$ est une résolution injective de Cartan-Eilenberg du complexe $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(f^*(\mathscr{F}), \mathscr{L}'^{\cdot})$, il y a donc (11.4.2), un homomorphisme (déterminé à homotopie près) $f^*(\mathscr{M}^{\cdot\cdot}) \to \mathscr{M}'^{\cdot\cdot}$ compatible avec l'homomorphisme considéré ci-dessus, autrement dit un f-morphisme $\mathscr{M}^{\cdot\cdot} \to \mathscr{M}'^{\cdot\cdot}$ de bicomplexes de faisceaux. On en déduit un di-homomorphisme $\Gamma(\mathrm{Y}, \mathscr{M}^{\cdot\cdot}) \to \Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{M}'^{\cdot\cdot})$ de bicomplexes de modules, déterminé à homotopie près, et un morphisme bien déterminé de suites spectrales (11.3.2), qui n'est autre que le morphisme (12.3.4.2) cherché, la caractérisation de (12.3.4.3) se déduisant aussitôt des définitions.

Proposition (**12.3.5**). — *Sous les hypothèses de* (12.3.4), *supposons en outre le faisceau d'anneaux* $\mathscr{O}_Y$ *cohérent; alors, pour tout* $\mathscr{O}_Y$*-Module cohérent* $\mathscr{F}$, *les homomorphismes canoniques* (12.3.4.1) *sont bijectifs.*

La question étant locale sur Y, on peut supposer qu'il existe une suite exacte $0 \to \mathscr{R} \to \mathcal{O}_Y^n \to \mathscr{F} \to 0$, et $\mathscr{R}$ est alors aussi un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.3.4). Pour prouver que les homomorphismes

$$f^*(\mathscr{E}xt^p_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \to \mathscr{E}xt^p_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{G}))$$

sont bijectifs, raisonnons par récurrence sur p, la proposition résultant de ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.7.6.1) lorsque $p = 0$. Or, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
f^*(\mathscr{E}xt^{p-1}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y^n, \mathscr{G})) & \to & f^*(\mathscr{E}xt^{p-1}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{R}, \mathscr{G})) & \xrightarrow{\partial} & f^*(\mathscr{E}xt^{p}_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) & \longrightarrow & f^*(\mathscr{E}xt^{p}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y^n, \mathscr{G})) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{E}xt^{p-1}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, f^*(\mathscr{G})) & \to & \mathscr{E}xt^{p-1}_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathscr{R}), f^*(\mathscr{G})) & \xrightarrow{\partial} & \mathscr{E}xt^{p}_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{G})) & \to & \mathscr{E}xt^{p}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, f^*(\mathscr{G}))
\end{array}$$

puisque $f^*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X$; comme f^* est exact, les deux lignes sont exactes. En outre, on a $\mathscr{E}xt^p_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y^n, \mathscr{G}) = 0$ pour tout $p > 0$ et de même $\mathscr{E}xt^p_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, f^*(\mathscr{G})) = 0$ pour tout $p > 0$ (T, 4.2.3). Vu l'hypothèse de récurrence, les deux premières flèches verticales du diagramme précédent sont des isomorphismes, et les termes de droite sont 0, donc $f^*(\mathscr{E}xt^p_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \to \mathscr{E}xt^p_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{G}))$ est un isomorphisme.

12.4. Hypercohomologie du foncteur image directe.

(12.4.1) Soient $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ deux espaces annelés, $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces annelés. On peut prendre l'*hypercohomologie* de f_* par rapport à un complexe *quelconque* de $\mathcal{O}_X$-Modules $\mathscr{K}^\bullet = (\mathscr{K}^i)_{i \in \mathbf{Z}}$ (11.4.4), car dans la catégorie abélienne des $\mathcal{O}_Y$-Modules, les limites inductives filtrantes existent et sont exactes (T, 3.1.1). Les $\mathcal{O}_Y$-Modules d'hypercohomologie $\mathbf{R}^p f_*(\mathscr{K}^\bullet)$ se noteront aussi $\mathcal{H}^p(f, \mathscr{K}^\bullet)$ ou $\mathcal{H}^p_f(\mathscr{K}^\bullet)$. Rappelons que $\mathcal{H}^\bullet(f, \mathscr{K}^\bullet)$ est la cohomologie du bicomplexe de $\mathcal{O}_Y$-Modules $f_*(\mathscr{L}^{\bullet\bullet})$, où $\mathscr{L}^{\bullet\bullet}$ est une résolution injective de Cartan-Eilenberg de $\mathscr{K}^\bullet$ dans la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules; $\mathcal{H}^\bullet(f, \mathscr{K}^\bullet)$ est l'aboutissement de deux suites spectrales $'\mathscr{E}(f, \mathscr{K}^\bullet)$ et $''\mathscr{E}(f, \mathscr{K}^\bullet)$ dont les termes E_2 sont donnés par

(12.4.1.1) $$'\mathscr{E}_2^{pq} = \mathscr{H}^p(\mathscr{H}^q(f, \mathscr{K}^\bullet))$$

(12.4.1.2) $$''\mathscr{E}_2^{pq} = \mathscr{H}^p(f, \mathscr{H}^q(\mathscr{K}^\bullet)) \quad (= \mathrm{R}^p f_*(\mathscr{H}^q(\mathscr{K}^\bullet)))$$

On a, dans ces formules, adopté la notation générale $T(A^\bullet)$ pour le transformé d'un complexe par un foncteur (11.2.1), et on écrit $\mathscr{H}^p(f, \mathscr{F})$ au lieu de $\mathrm{R}^p f_*(\mathscr{F})$ pour un $\mathcal{O}_X$-Module $\mathscr{F}$. Rappelons encore que la suite $'\mathscr{E}(f, \mathscr{K}^\bullet)$ est toujours *régulière*; les deux suites spectrales $'\mathscr{E}(f, \mathscr{K}^\bullet)$ et $''\mathscr{E}(f, \mathscr{K}^\bullet)$ sont *birégulières* lorsque $\mathscr{K}^\bullet$ est limité inférieurement, ou lorsqu'il existe un entier m tel que tout $\mathcal{O}_X$-Module admette une résolution flasque de longueur $\leqslant m$ (11.4.4).

(12.4.2) Nous désignerons de même par $\mathbf{H}^\bullet(X, \mathscr{K}^\bullet)$ l'hypercohomologie du foncteur Γ par rapport à un complexe $\mathscr{K}^\bullet$ de $\mathcal{O}_X$-Modules; les $\mathbf{H}^p(X, \mathscr{K}^\bullet)$ sont donc des $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-modules. On peut d'ailleurs considérer $\mathbf{H}^\bullet(X, \mathscr{K}^\bullet)$ comme un cas particulier de $\mathcal{H}^\bullet(f, \mathscr{K}^\bullet)$, où f est un morphisme de $(X, \mathcal{O}_X)$ sur un espace annelé réduit à un point muni de l'anneau $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Pour tout ouvert V de X, nous écrirons $\mathbf{H}^\bullet(V, \mathscr{K}^\bullet)$ au lieu de $\mathbf{H}^\bullet(V, \mathscr{K}^\bullet|V)$.

Proposition **(12.4.3).** — *Pour tout entier $p \in \mathbf{Z}$, le $\mathcal{O}_Y$-Module $\mathcal{H}^p(f, \mathscr{K}^\bullet)$ est canoniquement isomorphe au faisceau associé au préfaisceau $U \rightsquigarrow \mathbf{H}^p(f^{-1}(U), \mathscr{K}^\bullet)$ sur* Y.

En effet, avec les notations de (12.4.1), le faisceau de cohomologie $\mathscr{H}^p(f_*(\mathscr{L}^{\bullet\bullet}))$ est associé au préfaisceau $U \rightsquigarrow H^p(\Gamma(U, f_*(\mathscr{L}^{\bullet\bullet}))) = H^p(\Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{L}^{\bullet\bullet}))$. Mais il est clair que $\mathscr{L}^{\bullet\bullet}|f^{-1}(U)$ est une résolution injective de Cartan-Eilenberg de $\mathscr{K}^\bullet|f^{-1}(U)$ (T, 3.1.3), donc $H^p(\Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{L}^{\bullet\bullet})) = \mathbf{H}^p(f^{-1}(U), \mathscr{K}^\bullet)$ par définition.

Proposition **(12.4.4).** — *L'hypercohomologie $\mathcal{H}^\bullet(f, \mathscr{K}^\bullet)$ est un foncteur cohomologique en $\mathscr{K}^\bullet$ dans chacun des cas suivants :*

a) *$\mathscr{K}^\bullet$ varie dans la catégorie des complexes limités inférieurement.*

b) *Il existe un entier m tel que tout $\mathcal{O}_X$-Module admette une résolution flasque de longueur $\leqslant m$.*

c) X *est un espace noethérien.*

Les cas *a)* et *b)* sont des cas particuliers de (11.5.4). D'autre part, le cas *c)* se déduit de (11.5.2), car on sait que dans ce cas, le foncteur f_* permute aux limites inductives (G, II, 3.10.1).

(12.4.5) Considérons maintenant un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_\alpha)$ de X, et pour tout complexe de *préfaisceaux* $\mathscr{K}^\bullet = (\mathscr{K}^i)$ sur X, le bicomplexe $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{K}^\bullet)$, dont le composant d'indices (i, j) est $C^i(\mathfrak{U}, \mathscr{K}^j)$, groupe des i-cochaînes alternées du nerf de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans $\mathscr{K}^j$ (G, II, 5.1). Nous dirons que la cohomologie de ce bicomplexe est l'*hypercohomologie* du recouvrement $\mathfrak{U}$ à coefficients dans $\mathscr{K}^\bullet$, et nous la noterons $\mathbf{H}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{K}^\bullet) = H^\bullet(C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{K}^\bullet))$. La suite spectrale de Leray d'un recouvrement (T, 3.8.1 et G, II, 5.9.1) se généralise comme suit à l'hypercohomologie :

Proposition **(12.4.6).** — *Soit $\mathscr{K}^\bullet = (\mathscr{K}^i)$ un complexe de $\mathcal{O}_X$-Modules. Il existe un foncteur spectral régulier en $\mathscr{K}^\bullet$ ayant pour aboutissement l'hypercohomologie $\mathbf{H}^\bullet(X, \mathscr{K}^\bullet)$, et dont le terme* E_2 *est donné par*

(12.4.6.1)
$$E_2^{pq} = \mathbf{H}^p(\mathfrak{U}, h^q(\mathscr{K}^\bullet))$$

où $h^q(\mathscr{K}^\bullet)$ désigne le complexe de préfaisceaux $V \rightsquigarrow H^q(V, \mathscr{K}^\bullet)$ sur X. *La suite spectrale précédente est birégulière si $\mathscr{K}^\bullet$ est limité inférieurement.*

Considérons une résolution injective de Cartan-Eilenberg $\mathscr{L}^{\bullet\bullet}$ de $\mathscr{K}^\bullet$, et le tricomplexe $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{L}^{\bullet\bullet}) = (C^i(\mathfrak{U}, \mathscr{L}^{jk}))$; considérons d'abord ce tricomplexe comme un bicomplexe pour les degrés i et $j+k$. Comme i ne prend que des valeurs $\geqslant 0$, la seconde suite spectrale de ce bicomplexe est régulière (11.3.3) et dégénérée, car on a $H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{L}^{jk}) = 0$ pour tout $q > 0$, les $\mathcal{O}_X$-Modules $\mathscr{L}^{jk}$ étant des faisceaux flasques (G, II, 5.2.3). On a par suite (11.1.6) un isomorphisme canonique $H^n(C^{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathscr{L}^{\bullet\bullet})) \xrightarrow{\sim} H^n(\Gamma(X, \mathscr{L}^{\bullet\bullet}))$ (en vertu de (G, II, 5.2.2)), donc par définition (12.4.2) un isomorphisme $H^n(C^{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathscr{L}^{\bullet\bullet})) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^n(X, \mathscr{K}^{\bullet})$. Considérons d'autre part le tricomplexe $C^{\bullet}(U, L^{\bullet\bullet})$ comme un bicomplexe pour les degrés $i+j$ et k. Comme k ne prend que des valeurs $\geqslant 0$, la première suite spectrale de ce bicomplexe est toujours régulière; elle est birégulière si $\mathscr{L}^{jk}=0$ pour $j<j_0$, c'est-à-dire lorsque $\mathscr{K}^{\bullet}$ est limité inférieurement (11.3.3). Cette suite spectrale est la suite cherchée; en effet, pour tout j, $\mathscr{L}^{j,\bullet}$ est une résolution injective de $\mathscr{K}^j$; par suite, $H^q(C^i(\mathfrak{U}, \mathscr{L}^{j,\bullet}))$ n'est autre que le complexe de cochaînes $C^i(\mathfrak{U}, h^q(\mathscr{K}^j))$, ce qui termine la démonstration.

Corollaire (**12.4.7**). — *Si, pour tout simplexe σ du nerf de $\mathfrak{U}$, et pour tout entier i, on a $H^q(U_\sigma, \mathscr{K}^i)=0$ pour $q>0$, alors on a un isomorphisme canonique*

$$\mathbf{H}^{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathscr{K}^{\bullet}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^{\bullet}(X, \mathscr{K}^{\bullet}). \tag{12.4.7.1}$$

En effet, l'hypothèse entraîne que $C^{\bullet}(\mathfrak{U}, h^q(\mathscr{K}^i))=0$ pour $q>0$, donc $E_2^{pq}=0$ pour $q>0$; la suite (12.4.6.1) étant dégénérée et régulière, la conclusion résulte de la définition (12.4.5) de $\mathbf{H}^{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathscr{K}^{\bullet})$ et de (11.1.6).

(**12.4.8**) Soit $(X', \mathcal{O}_{X'})$ un second espace annelé, et soit $f=(\psi, \theta)$ un morphisme de X' dans X. Par la même méthode que dans (12.1.3) et (12.1.4), on définit un di-homomorphisme pour l'hypercohomologie d'un complexe $\mathscr{K}^{\bullet}$ de $\mathcal{O}_X$-Modules

$$\mathbf{H}^p(X, \mathscr{K}^{\bullet}) \to \mathbf{H}^p(X', f^*(\mathscr{K}^{\bullet})). \tag{12.4.8.1}$$

On part d'une résolution injective de Cartan-Eilenberg $\mathscr{L}^{\bullet\bullet}$ de $\mathscr{K}^{\bullet}$, et comme ψ^* est exact, $\psi^*(\mathscr{L}^{\bullet\bullet})$ est une résolution de Cartan-Eilenberg de $\psi^*(\mathscr{K}^{\bullet})$ dans la catégorie des $\psi^*(\mathcal{O}_X)$-Modules; il y a alors un morphisme $\psi^*(\mathscr{L}^{\bullet\bullet}) \to \mathscr{L}'^{\bullet\bullet}$, où $\mathscr{L}'^{\bullet\bullet}$ est une résolution injective de Cartan-Eilenberg de $\psi^*(\mathscr{K}^{\bullet})$, et on en déduit un morphisme pour la cohomologie : $\mathbf{H}^{\bullet}(X, \mathscr{K}^{\bullet}) \to \mathbf{H}^{\bullet}(X', \psi^*(\mathscr{K}^{\bullet}))$; par composition avec le morphisme déduit par fonctorialité de $\psi^*(\mathscr{K}^{\bullet}) \to f^*(\mathscr{K}^{\bullet})$, on obtient le morphisme (12.4.8.1) cherché.

Partant de (12.4.8.1) et de (12.4.3), on peut alors, en raisonnant comme dans (12.2.5), définir, pour deux morphismes $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ d'espaces annelés, des homomorphismes pour l'hypercohomologie d'un complexe $\mathscr{K}^{\bullet}$ de $\mathcal{O}_X$-Modules

$$\mathcal{H}^n(g, f_*(\mathscr{K}^{\bullet})) \to \mathcal{H}^n(h, \mathscr{K}^{\bullet}) \tag{12.4.8.2}$$

$$\mathcal{H}^n(h, \mathscr{K}^{\bullet}) \to g_*(\mathcal{H}^n(f, \mathscr{K}^{\bullet})). \tag{12.4.8.3}$$

Nous laissons au lecteur le détail des définitions.

§ 13. LIMITES PROJECTIVES EN ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

13.1. La condition de Mittag-Leffler.

(**13.1.1**) Soit $\mathbf{C}$ une catégorie abélienne dans laquelle les produits infinis existent (axiome AB 3*) de T, 1.5)); alors la borne inférieure d'une famille de sous-objets d'un objet de $\mathbf{C}$ existe, et tout système projectif d'objets de $\mathbf{C}$ admet une limite projective, qui est un foncteur exact à gauche du système projectif considéré (T, 1.8). Soit $(A_\alpha, f_{\alpha\beta})$

un système projectif d'objets de $\mathbf{C}$ dont l'ensemble d'indices I est *filtrant* à droite; soient $A = \varprojlim A_\alpha$ et pour tout $\alpha \in I$, soit $f_\alpha : A \to A_\alpha$ le morphisme canonique. Pour tout $\alpha \in I$, les $f_{\alpha\beta}(A_\beta)$ pour $\alpha \leqslant \beta$ forment une famille filtrante décroissante de sous-objets de A_α; le sous-objet $A'_\alpha = \inf_{\beta \geqslant \alpha} f_{\alpha\beta}(A_\beta)$ est dit sous-objet des « images universelles » dans A_α; il est clair que $f_\alpha(A) \subset A'_\alpha$ et $f_{\alpha\beta}(A'_\beta) \subset A'_\alpha$ pour $\alpha \leqslant \beta$; donc $(A'_\alpha, f_{\alpha\beta}|A'_\beta)$ est un système projectif et $A = \varprojlim A'_\alpha$.

(13.1.2) Étant donné un système projectif $(A_\alpha, f_{\alpha\beta})$ dans $\mathbf{C}$, on appelle *condition de Mittag-Leffler* la condition suivante :

(ML) *Pour tout indice* α, *il existe* $\beta \geqslant \alpha$ *tel que, pour tout* $\gamma \geqslant \beta$, *on ait* $f_{\alpha\gamma}(A_\gamma) = f_{\alpha\beta}(A_\beta)$.

Il est clair que si les $f_{\alpha\beta}$ sont des *épimorphismes*, la condition (ML) est vérifiée. Inversement, si (ML) est vérifiée, et si pour tout $\alpha \in I$, A'_α est le sous-objet des « images universelles » dans A_α, la restriction de $f_{\alpha\beta}$ à A'_β est un *épimorphisme* $A'_\beta \to A'_\alpha$ pour $\alpha \leqslant \beta$: en effet, si $\gamma \geqslant \beta$ est tel que $f_{\beta\delta}(A_\delta) = f_{\beta\gamma}(A_\gamma)$ pour $\delta \geqslant \gamma$, on a $A'_\beta = f_{\beta\gamma}(A_\gamma)$ et cela entraîne d'autre part $f_{\alpha\delta}(A_\delta) = f_{\alpha\gamma}(A_\gamma)$ pour $\delta \geqslant \gamma$, donc $A'_\alpha = f_{\alpha\gamma}(A_\gamma) = f_{\alpha\beta}(A'_\beta)$.

Notons aussi que la condition (ML) est vérifiée lorsque les objets A_α sont *artiniens* dans $\mathbf{C}$, c'est-à-dire que toute famille de sous-objets de A_α admet un élément minimal : un élément minimal de la famille filtrante décroissante $(f_{\alpha\beta}(A_\beta))$ de sous-objets de A_α est en effet alors nécessairement le plus petit de ces sous-objets.

Remarque **(13.1.3)**. — La condition (ML) peut se formuler également lorsque $\mathbf{C}$ est par exemple la catégorie des ensembles; on peut alors encore définir le sous-ensemble des « images universelles » de A_α et les remarques faites à ce sujet dans (13.1.1) et (13.1.2) restent valables.

13.2. La condition de Mittag-Leffler pour les groupes abéliens.

Proposition **(13.2.1)**. — *Soit*

$$0 \to A_\alpha \xrightarrow{u_\alpha} B_\alpha \xrightarrow{v_\alpha} C_\alpha \to 0$$

une suite exacte de systèmes projectifs de groupes abéliens (relatifs à un même ensemble filtrant d'indices I*).*

(i) *Si* (B_α) *vérifie* (ML), *il en est de même de* (C_α).

(ii) *Si* (A_α) *et* (C_α) *vérifient* (ML), *il en est de même de* (B_α).

Soient $(f_{\alpha\beta})$, $(g_{\alpha\beta})$, $(h_{\alpha\beta})$ les systèmes d'homomorphismes définissant les systèmes projectifs (A_α), (B_α), (C_α) respectivement.

(i) Supposons que $g_{\alpha\beta}(B_\beta) = g_{\alpha\lambda}(B_\lambda)$ pour $\lambda \geqslant \beta$; comme v_β et v_λ sont surjectives, on a $h_{\alpha\beta}(C_\beta) = v_\alpha(g_{\alpha\beta}(B_\beta)) = v_\alpha(g_{\alpha\lambda}(B_\lambda)) = h_{\alpha\lambda}(C_\lambda)$ pour $\lambda \geqslant \beta$.

(ii) Soit $\alpha \in I$, et soit $\beta \geqslant \alpha$ un indice tel que pour $\lambda \geqslant \beta$, on ait $f_{\alpha\beta}(A_\beta) = f_{\alpha\lambda}(A_\lambda)$; soit d'autre part $\gamma \geqslant \beta$ un indice tel que, pour $\lambda \geqslant \gamma$, on ait $h_{\beta\gamma}(C_\gamma) = h_{\beta\lambda}(C_\lambda)$. Soit alors y_α un élément de $g_{\alpha\gamma}(B_\gamma)$; on a donc $y_\alpha = g_{\alpha\gamma}(y_\gamma)$ avec $y_\gamma \in B_\gamma$; posons $y_\beta = g_{\beta\gamma}(y_\gamma)$, de sorte que $v_\beta(y_\beta) = h_{\beta\gamma}(v_\gamma(y_\gamma))$. Pour tout $\lambda \geqslant \gamma$, il existe par hypothèse $y_\lambda \in B_\lambda$ tel que $h_{\beta\gamma}(v_\gamma(y_\gamma)) = h_{\beta\lambda}(v_\lambda(y_\lambda)) = v_\beta(g_{\beta\lambda}(y_\lambda))$, d'où $v_\beta(y_\beta - g_{\beta\lambda}(y_\lambda)) = 0$, et par suite il existe $x_\beta \in A_\beta$

tel que $y_\beta = g_{\beta\lambda}(y_\lambda) + u_\beta(x_\beta)$. On en déduit $y_\alpha = g_{\alpha\lambda}(y_\lambda) + u_\alpha(f_{\alpha\beta}(x_\beta))$; mais comme $\lambda \geqslant \beta$, il existe $x_\lambda \in A_\lambda$ tel que $f_{\alpha\beta}(x_\beta) = f_{\alpha\lambda}(x_\lambda)$, et finalement $y_\alpha = g_{\alpha\lambda}(y_\lambda + u_\lambda(x_\lambda)) \in g_{\alpha\lambda}(B_\lambda)$, ce qui achève la démonstration.

Proposition (**13.2.2**). — *Soit* I *un ensemble ordonné filtrant ayant une partie cofinale* dénombrable. *Soit*

$$0 \to A_\alpha \xrightarrow{u_\alpha} B_\alpha \xrightarrow{v_\alpha} C_\alpha \to 0$$

une suite exacte de systèmes projectifs de groupes abéliens ayant I *pour ensemble d'indices. Si* (A_α) *satisfait à la condition* (ML), *la suite*

$$0 \to \varprojlim A_\alpha \to \varprojlim B_\alpha \to \varprojlim C_\alpha \to 0$$

est exacte.

Tout revient à prouver que l'homomorphisme $v = \varprojlim v_\alpha : \varprojlim B_\alpha \to \varprojlim C_\alpha$ est surjectif. Soit $z = (z_\alpha)$ un élément de $\varprojlim C_\alpha$, et posons $E_\alpha = v_\alpha^{-1}(z_\alpha)$; il est clair que les E_α forment un système projectif d'ensembles non vides pour les restrictions des homomorphismes $g_{\alpha\beta} : B_\beta \to B_\alpha$. Montrons que ce système projectif vérifie la condition (ML); identifiant A_α à une partie de B_α par u_α, pour tout $\alpha \in I$, il existe $\beta \geqslant \alpha$ tel que $g_{\alpha\beta}(A_\beta) = g_{\alpha\lambda}(A_\lambda)$ pour $\lambda \geqslant \beta$; montrons que l'on a aussi $g_{\alpha\beta}(E_\beta) = g_{\alpha\lambda}(E_\lambda)$ pour $\lambda \geqslant \beta$. En effet, prenons un $y_\lambda \in E_\lambda$ et posons $y_\beta = g_{\beta\lambda}(y_\lambda), y_\alpha = g_{\alpha\lambda}(y_\lambda)$; soit $y'_\alpha \in g_{\alpha\beta}(E_\beta)$, de sorte que $y'_\alpha = g_{\alpha\beta}(y'_\beta)$ pour un $y'_\beta \in E_\beta$; on a $y'_\beta - y_\beta = x_\beta \in A_\beta$, et par hypothèse il existe $x_\lambda \in A_\lambda$ tel que $g_{\alpha\beta}(x_\beta) = g_{\alpha\lambda}(x_\lambda)$; donc

$$y'_\alpha = g_{\alpha\beta}(y_\beta) + g_{\alpha\beta}(x_\beta) = g_{\alpha\lambda}(y_\lambda) + g_{\alpha\lambda}(x_\lambda) = g_{\alpha\lambda}(y_\lambda + x_\lambda) \in g_{\alpha\lambda}(E_\lambda),$$

ce qui démontre notre assertion. Cela étant, on sait (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. II, 3e éd., § 3, th. 1) que sous les hypothèses faites sur I, un système projectif d'ensembles non vides vérifiant (ML) a une limite projective non vide; par suite, il existe un point $y = (y_\alpha) \in \varprojlim E_\alpha$, et comme $v_\alpha(y_\alpha) = z_\alpha$ par définition pour tout α, on a $z = v(y)$, C.Q.F.D.

Proposition (**13.2.3**). — *Les hypothèses sur* I *étant celles de* (13.2.2), *soit* $(K^\bullet_\alpha)_{\alpha\in I}$ *un système projectif de complexes de groupes abéliens* $K^\bullet_\alpha = (K^n_\alpha)_{n\in \mathbf{Z}}$ *dont l'opérateur de dérivation est de degré* $+1$. *Pour chaque n, il existe un homomorphisme canonique fonctoriel*

$$h_n : H^n(\varprojlim K^\bullet_\alpha) \to \varprojlim H^n(K^\bullet_\alpha). \tag{13.2.3.1}$$

Si, pour tout degré n, le système projectif de groupes abéliens $(K^n_\alpha)_{\alpha\in I}$ *vérifie* (ML), *alors tous les homomorphismes* h_n *sont surjectifs. Si en outre, pour un degré n, le système projectif* $(H^{n-1}(K^\bullet_\alpha))_{\alpha\in I}$ *vérifie* (ML), *l'homomorphisme* h_n *est bijectif.*

Posons, pour tout n, $K^n = \varprojlim K^n_\alpha$; la définition des homomorphismes h_n provient de la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots \to & K^{n-1} & \to & K^n & \longrightarrow & K^{n+1} & \to \dots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\dots \to & K^{n-1}_\alpha & \to & K^n_\alpha & \longrightarrow & K^{n+1}_\alpha & \to \dots
\end{array}$$

les opérateurs de dérivation dans $K^{\boldsymbol{\cdot}}$ étant limites projectives des opérateurs correspondants dans les $K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha}$.

Considérons les suites exactes

$$(*_n) \qquad 0 \to B^n(K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha}) \to Z^n(K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha}) \to H^n(K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha}) \to 0$$

$$(**_n) \qquad 0 \to Z^{n-1}(K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha}) \to K^{n-1}_{\alpha} \to B^n(K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha}) \to 0$$

L'hypothèse et la prop. (13.2.1, (i)) montrent que le système projectif $(B^n(K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha}))_{\alpha\in I}$ vérifie (ML) pour tout n; il résulte donc de (13.2.2) que la suite

$$(***_n) \qquad 0 \to \varprojlim_{\alpha} B^n(K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha}) \to \varprojlim_{\alpha} Z^n(K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha}) \to \varprojlim_{\alpha} H^n(K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha}) \to 0$$

est exacte. Or il est clair que $\varprojlim B^n(K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha})$ s'identifie à un sous-groupe de K^{n+1} contenant $B^n(K^{\boldsymbol{\cdot}})$ et que $\varprojlim Z^n(K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha})$ s'identifie à un sous-groupe de $Z^n(K^{\boldsymbol{\cdot}})$; par suite, h_n est surjective. Si maintenant, on suppose en outre que le système projectif $(H^{n-1}(K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha}))_{\alpha\in I}$ vérifie (ML), les suites exactes $(*_{n-1})$ et la prop. (13.2.1, (ii)) montrent que le système projectif $(Z^{n-1}(K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha}))_{\alpha\in I}$ vérifie (ML); mais alors, (13.2.2) appliquée aux suites exactes $(**_n)$ montre que la suite

$$0 \to \varprojlim_{\alpha} Z^{n-1}(K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha}) \to K^{n-1} \xrightarrow{u} \varprojlim_{\alpha} B^n(K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha}) \to 0$$

est exacte; comme $\varprojlim B^n(K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha}) \supset B^n(K^{\boldsymbol{\cdot}})$, et que la composée de l'injection $\varprojlim B^n(K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha}) \to K^n$ et de u est l'opérateur de dérivation $K^{n-1} \to K^n$, le fait que u soit surjectif entraîne $\varprojlim B^n(K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha}) = B^n(K^{\boldsymbol{\cdot}})$, donc h_n est injective. C.Q.F.D.

Remarques (**13.2.4**). — (i) Le raisonnement de (13.2.2) (cf. Bourbaki, *loc. cit.*) montre que la conclusion de cette proposition reste valable lorsqu'on suppose seulement que les A_{α} peuvent être munis de structures d'espaces *métrisables complets*, dans lesquels les translations sont des homéomorphismes, que les applications $f_{\alpha\beta} : A_{\beta} \to A_{\alpha}$ définissant le système projectif (A_{α}) sont *uniformément continues* pour les distances considérées, et enfin que le système (A_{α}) vérifie la condition

(ML′) *Pour tout indice* α, *il existe* $\beta \geqslant \alpha$ *tel que pour tout* $\gamma \geqslant \beta$, $f_{\alpha\gamma}(A_{\gamma})$ *est dense dans* $f_{\alpha\beta}(A_{\beta})$.

Cela permet d'apporter un complément analogue à (13.2.3) : supposons que $K^n_{\alpha} = 0$ pour $n < 0$ et pour tout α; supposons de plus que $(K^n_{\alpha})_{\alpha\in I}$ vérifie (ML) pour $n \geqslant 0$ et que les $A_{\alpha} = H^0(K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha})$ puissent être munis de structures d'espaces métriques vérifiant les propriétés ci-dessus. Alors les conclusions de (13.2.3) sont inchangées pour $n \geqslant 2$, et en outre h_1 est *bijectif*, car le raisonnement de (13.2.2) montre encore que $(B^1(K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha}))_{\alpha\in I}$ vérifie (ML), que la suite $(***_1)$ est exacte, et enfin, en vertu de ce qui précède, que $\varprojlim B^1(K^{\boldsymbol{\cdot}}_{\alpha}) = B^1(K^{\boldsymbol{\cdot}})$. On a ainsi établi entre autres les assertions de (T, 3.10.2).

(ii) Il est possible d'introduire les foncteurs dérivés à droite $\varinjlim^{(n)}$ du foncteur $\varinjlim$, et d'obtenir des énoncés plus complets que les précédents [28].

13.3. Application : cohomologie d'une limite projective de faisceaux.

Proposition (13.3.1). — *Soient* X *un espace topologique,* $(\mathscr{F}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *un système projectif de faisceaux de groupes abéliens sur* X, *et soit* $\mathscr{F}=\varprojlim \mathscr{F}_k$. *On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

(i) *Il existe une base* $\mathfrak{B}$ *de la topologie de* X *telle que, pour tout* $U\in\mathfrak{B}$ *et tout* $i\geqslant 0$, *le système projectif* $(H^i(U, \mathscr{F}_k))_{k\in\mathbf{N}}$ *vérifie* (ML).

(ii) *Pour tout* $x\in X$ *et tout* $i>0$, *on a* $\varinjlim_U (\varprojlim_k H^i(U, \mathscr{F}_k))=0$ *lorsque* U *parcourt l'ensemble des voisinages de* x *appartenant à* $\mathfrak{B}$.

(iii) *Les homomorphismes* $u_{hk}: \mathscr{F}_k\rightarrow\mathscr{F}_h$ $(h\leqslant k)$ *définissant le système projectif* $(\mathscr{F}_k)$ *sont surjectifs.*

Dans ces conditions, pour tout $i>0$, *l'homomorphisme canonique*

$$h_i : H^i(X, \mathscr{F}) \rightarrow \varprojlim_k H^i(X, \mathscr{F}_k)$$

est surjectif; si en outre, pour une valeur de i, *le système projectif* $(H^{i-1}(X, \mathscr{F}_k))_{k\in\mathbf{N}}$ *vérifie* (ML), h_i *est bijectif.*

a) Nous allons d'abord supposer que les $\mathscr{F}_k$ sont *flasques* ainsi que les *noyaux* $\mathscr{N}_{hk}$ des u_{hk}; nous allons montrer alors que la condition (iii) de l'énoncé entraîne que $H^i(X, \mathscr{F})=0$ pour $i>0$. Il suffira de prouver que pour *tout* ouvert U de X et tout recouvrement $\mathfrak{U}$ de U par des ouverts de U, on a $H^i(\mathfrak{U}, \mathscr{F})=0$ pour $i>0$. Il en résultera en effet tout d'abord que pour la cohomologie de Čech, on a $\check{H}^i(U, \mathscr{F})=0$ pour tout $i>0$, puis (en vertu de (G, II, 5.9.2) appliqué à l'ensemble de tous les ouverts de X) que $H^i(X, \mathscr{F})=0$ pour tout $i>0$. Comme les $\mathscr{F}_k$ sont flasques, on a $H^i(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_k)=0$ pour $i>0$ (G, II, 5.2.3); considérons pour chaque k le complexe $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_k)$ des cochaînes alternées du nerf du recouvrement $\mathfrak{U}$ (G, II, 5.1), qui forment évidemment un système projectif de complexes de groupes abéliens. Montrons que toutes les applications $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_k)\rightarrow C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_h)$ $(h\leqslant k)$ sont *surjectives*. Il suffit évidemment, par définition, de montrer que pour tout ouvert V de X, l'application $\Gamma(V, \mathscr{F}_k)\rightarrow\Gamma(V, \mathscr{F}_h)$ est surjective; mais la suite $0\rightarrow\mathscr{N}_{hk}\rightarrow\mathscr{F}_k\rightarrow\mathscr{F}_h\rightarrow 0$ étant exacte par hypothèse, donne la suite exacte de cohomologie

$$\Gamma(V, \mathscr{F}_k)\rightarrow\Gamma(V, \mathscr{F}_h)\rightarrow H^1(V, \mathscr{N}_{hk})=0$$

puisque $\mathscr{N}_{hk}$ est flasque. Le système projectif $(C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_k))_{k\in\mathbf{N}}$ vérifie donc (ML); il en est de même de $(H^i(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_k))_{k\in\mathbf{N}}$ pour tout $i\geqslant 0$, car cela est trivial pour $i>0$, et comme $H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_k)=\Gamma(U, \mathscr{F}_k)$ (G, II, 5.2.2), la condition (ML) est aussi remplie pour $i=0$ d'après ce qui précède. On peut donc appliquer (13.2.3), qui montre que $H^i(\mathfrak{U}, \mathscr{F})=\varprojlim_k H^i(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_k)=0$ pour tout $i>0$.

b) Passons au cas général, et considérons pour chaque $k\in\mathbf{N}$, la *résolution canonique* $\mathscr{C}^\bullet(X, \mathscr{F}_k)=(\mathscr{C}^i(X, \mathscr{F}_k))_{i\geqslant 0}$ de $\mathscr{F}_k$ par des faisceaux flasques (G, II, 4.3). Pour chaque $i\geqslant 0$, il est clair que $(\mathscr{C}^i(X, \mathscr{F}_k))_{k\in\mathbf{N}}$ est un système projectif de faisceaux flasques; montrons qu'il satisfait aux conditions de *a)*. En effet, si $\mathscr{N}_{hk}$ est le noyau de u_{hk} pour $h \leqslant k$, la suite $0 \to \mathscr{N}_{hk} \to \mathscr{F}_k \to \mathscr{F}_h \to 0$ est exacte d'après (iii), et notre assertion résulte de ce que le foncteur $\mathscr{A} \rightsquigarrow \mathscr{C}^i(X, \mathscr{A})$ est exact (G, II, 4.3). Soit $\mathscr{G}^i = \varprojlim_k \mathscr{C}^i(X, \mathscr{F}_k)$; on a donc $H^j(X, \mathscr{G}^i) = 0$ pour $j > 0$ et $i \geqslant 0$ en vertu de *a)*. Nous allons montrer que $\mathscr{G}^\bullet = (\mathscr{G}^i)_{i \geqslant 0}$ est une *résolution* du faisceau $\mathscr{F}$; comme $H^j(X, \mathscr{G}^\bullet) = 0$ pour $j > 0$, la cohomologie $H^\bullet(X, \mathscr{F})$ sera égale à $H^\bullet(\Gamma(X, \mathscr{G}^\bullet))$ (G, II, 4.7.1).

Il est clair que, par passage à la limite projective, on déduit des suites exactes

$$0 \to \mathscr{F}_k \to \mathscr{C}^0(X, \mathscr{F}_k) \to \mathscr{C}^1(X, \mathscr{F}_k) \to \dots$$

un complexe de faisceaux de groupes abéliens

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G}^0 \to \mathscr{G}^1 \to \dots$$

Pour prouver notre assertion, il faut établir que $\mathscr{H}^i(\mathscr{G}^\bullet) = 0$ pour $i > 0$. Ce faisceau est engendré par le préfaisceau $U \rightsquigarrow H^i(\Gamma(U, \mathscr{G}^\bullet))$ (G, II, 4.1) ; or, le complexe $\Gamma(U, \mathscr{G}^\bullet)$ est la limite projective du système projectif de complexes de groupes abéliens $(\Gamma(U, \mathscr{C}^\bullet(X, \mathscr{F}_k)))_{k \in \mathbf{N}}$ $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 3.2.6)$. On a vu dans *a)* que pour chaque $i \geqslant 0$, les applications $\Gamma(U, \mathscr{C}^i(X, \mathscr{F}_k)) \to \Gamma(U, \mathscr{C}^i(X, \mathscr{F}_h))$ $(h \leqslant k)$ sont *surjectives* ; d'autre part, on a $H^i(U, \mathscr{F}_k) = H^i(\Gamma(U, \mathscr{C}^\bullet(X, \mathscr{F}_k)))$, la résolution canonique $\mathscr{C}^\bullet(U, \mathscr{F}_k|U)$ étant induite sur U par $\mathscr{C}^\bullet(X, \mathscr{F}_k)$; en vertu de l'hypothèse (i), pour tout $U \in \mathfrak{B}$, on peut appliquer (13.2.3) au système projectif de complexes $(\Gamma(U, \mathscr{C}^\bullet(X, \mathscr{F}_k)))_{k \in \mathbf{N}}$, et on a donc $H^i(\Gamma(U, \mathscr{G}^\bullet)) = \varprojlim_k H^i(U, \mathscr{F}_k)$ pour tout $i \geqslant 0$. L'hypothèse (ii) prouve bien alors, par définition, que les faisceaux $\mathscr{H}^i(\mathscr{G}^\bullet)$ sont nuls pour $i > 0$.

On a alors pour tout $i \geqslant 0$, $H^i(X, \mathscr{F}) = H^i(\Gamma(X, \mathscr{G}^\bullet))$ et

$$\Gamma(X, \mathscr{G}^\bullet) = \varprojlim_k \Gamma(X, \mathscr{C}^\bullet(X, \mathscr{F}_k)).$$

On vient de remarquer que les applications $\Gamma(X, \mathscr{C}^i(X, \mathscr{F}_k)) \to \Gamma(X, \mathscr{C}^i(X, \mathscr{F}_h))$ $(h \leqslant k)$ sont toutes surjectives ; la conclusion résulte donc encore de (13.2.3).

Remarques **(13.3.2)**. — (i) L'énoncé (13.3.1) n'a d'intérêt que pour $i > 0$, puisque pour $i = 0$, h_i est toujours un isomorphisme sans hypothèse $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 3.2.6)$.

(ii) Les conditions (i) et (ii) de (13.3.1) seront en particulier vérifiées si $H^i(U, \mathscr{F}_k) = 0$ pour tout k, tout $i > 0$ et tout $U \in \mathfrak{B}$, et si pour $U \in \mathfrak{B}$, les applications $\Gamma(U, \mathscr{F}_k) \to \Gamma(U, \mathscr{F}_h)$ sont *surjectives*. Ce sera le cas le plus fréquent d'application de (13.3.1).

13.4. Condition de Mittag-Leffler et objets gradués associés aux systèmes projectifs.

(13.4.1) Soit $\mathbf{A} = (A_k, u_{kh})_{k \in \mathbf{Z}}$ un système projectif dans une catégorie abélienne $\boldsymbol{C}$; nous dirons qu'il est *limité inférieurement* s'il existe k_0 tel que $A_k = 0$ pour $k < k_0$.

Nous définirons sur chaque A_k une *filtration* $(F^p(A_k))_{p \in \mathbf{Z}}$ par les formules

(13.4.1.1)
$$\begin{cases} F^p(A_k) = \mathrm{Ker}(A_k \to A_{p-1}) & \text{pour } p \leqslant k+1 \\ F^p(A_k) = 0 & \text{pour } p \geqslant k+1 \end{cases}$$

On a donc par hypothèse $F^{k_0}(A_k)=A_k$ et $F^{k+1}(A_k)=0$, autrement dit la filtration considérée est *finie* (11.1.3). Les objets gradués associés à cette filtration sont donc

$$\mathrm{gr}^p(A_k)=\mathrm{Ker}(A_k \to A_{p-1})/\mathrm{Ker}(A_k \to A_p)$$

et par suite, $\mathrm{gr}^p(A_k)$ est isomorphe à l'image par $A_k \to A_p$ de $\mathrm{Ker}(A_k \to A_{p-1})$; en vertu de la transitivité des morphismes définissant un système projectif, on a donc

(13.4.1.2) $$\mathrm{gr}^p(A_k)=\mathrm{Ker}(A_p \to A_{p-1}) \cap \mathrm{Im}(A_k \to A_p)$$

mais comme, en vertu de (13.4.1.1), on a $\mathrm{Ker}(A_p \to A_{p-1})=\mathrm{gr}^p(A_p)$, on a aussi

(13.4.1.3) $$\mathrm{gr}^p(A_k)=\mathrm{gr}^p(A_p) \cap \mathrm{Im}(A_k \to A_p).$$

Les définitions précédentes montrent en outre que l'on a pour $k \leqslant h$

$$u_{kh}(F^p(A_h)) \subset F^p(A_k)$$

et par suite que les $\mathrm{gr}^p(u_{kh})$ définissent un *système projectif* $(\mathrm{gr}^p(A_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ pour tout $p\in\mathbf{Z}$.

(13.4.2) Nous dirons que le système projectif $\mathbf{A}$ est *essentiellement constant* si les morphismes $A_{k+1} \to A_k$ sont des *isomorphismes* pour k assez grand. Nous dirons que le système projectif $\mathbf{A}$ est *strict* si les morphismes $A_i \to A_j$ $(j \leqslant i)$ sont des *épimorphismes*. Lorsque $\mathbf{A}$ est strict, il résulte de (13.4.1.3) que pour $p \leqslant k \leqslant h$, le morphisme canonique $\mathrm{gr}^p(A_h) \to \mathrm{gr}^p(A_k)$ est un *isomorphisme*, autrement dit, le système projectif $(\mathrm{gr}^p(A_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ est essentiellement constant. La suite des objets $\mathrm{gr}^p(A_p)$ (identifiés à $\varprojlim_k \mathrm{gr}^p(A_k)$ pour tout p) se note alors $\mathrm{gr}^\bullet(\mathbf{A})$ et s'appelle *l'objet gradué associé au système projectif strict* $\mathbf{A}=(A_k)$.

Si l'on suppose maintenant que le système projectif $\mathbf{A}$ (limité inférieurement) vérifie (ML), on sait (13.1.2) que le système projectif $\mathbf{A}'=(A'_k)$ des objets d'« images universelles » est *strict*, et il est par ailleurs limité inférieurement; l'objet gradué $\mathrm{gr}^\bullet(\mathbf{A}')$ associé à $\mathbf{A}'$ est alors encore appelé l'objet gradué *associé à* $\mathbf{A}$ et noté $\mathrm{gr}^\bullet(\mathbf{A})$.

Proposition **(13.4.3)**. — *Soit* $\mathbf{A}=(A_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ *un système projectif limité inférieurement dans une catégorie abélienne* $\mathbf{C}$. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathbf{A}$ *vérifie la condition* (ML).

b) *Pour tout* $p\in\mathbf{Z}$, *le système projectif* $(\mathrm{gr}^p(A_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ *est essentiellement constant.*

En outre, lorsque ces conditions sont satisfaites, on a pour tout $p\in\mathbf{Z}$ *un isomorphisme canonique*

(13.4.3.1) $$\mathrm{gr}^p(\mathbf{A}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k \mathrm{gr}^p(A_k).$$

Il résulte aussitôt de (13.4.1.2) que *a)* implique *b)*; la même formule appliquée au système projectif $\mathbf{A}'$ (notations de (13.4.2)) donne l'isomorphisme (13.4.3.1) par définition. Pour $k \leqslant h$, posons $A_{kh}=\mathrm{Im}(A_h \to A_k)$; si $k \leqslant h \leqslant j$, on a $A_{kj} \subset A_{kh} \subset A_k$. Munissons A_{kh} de la filtration induite par $(F^p(A_k))$; on vérifie aussitôt, en vertu de la transitivité des morphismes définissant $\mathbf{A}$, que cette filtration est aussi la filtration quotient de $(F^p(A_h))$; par suite, on a

(13.4.3.2) $$\mathrm{gr}^p(A_{kh})=\mathrm{Im}(\mathrm{gr}^p(A_h) \to \mathrm{gr}^p(A_k)).$$

Cela étant, supposons *b)* vérifiée; pour tout $p \in \mathbf{Z}$, et tout $k \geqslant p$, il existe un entier $L(p, k)$ tel que le second membre de (13.4.3.2) soit constant pour $h \geqslant L(p, k)$; comme $\mathrm{gr}^p(A_k) = 0$ pour $p < k_0$, il n'y a (pour k donné) qu'un nombre fini de $L(p, k)$ non nuls lorsque p parcourt l'ensemble des entiers $\leqslant k$. Soit $L(k) = m$ le plus grand de ces entiers; pour tout $h \geqslant m$, on a $A_{kh} \subset A_{km}$, et par définition de m, l'injection canonique $A_{kh} \rightarrow A_{km}$ définit un *isomorphisme* $\mathrm{gr}^{\bullet}(A_{kh}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^{\bullet}(A_{km})$; comme les filtrations sont *finies*, on en conclut que l'injection précédente est elle-même bijective (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 8, th. 1), ce qui prouve que $\mathbf{A}$ vérifie (ML).

(13.4.4) Supposons que dans $\mathbf{C}$ la limite projective $A = \varprojlim A_k$ existe. Dans les définitions de (13.4.1), on peut alors remplacer A_k par A, et la filtration ainsi définie sur A est encore telle que

$$\mathrm{gr}^p(A) = \mathrm{gr}^p(A_p) \cap \mathrm{Im}(A \rightarrow A_p). \tag{13.4.4.1}$$

Corollaire **(13.4.5)**. — *Supposons que* $\mathbf{C}$ *soit la catégorie des groupes abéliens. Si le système projectif* $\mathbf{A}$ *vérifie* (ML) *et si* $A = \varprojlim_k A_k$, *on a pour tout* $p \in \mathbf{Z}$ *un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{gr}^p(A) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k \mathrm{gr}^p(A_k). \tag{13.4.5.1}$$

En effet, on a $\mathrm{Im}(A_k \rightarrow A_p) = \mathrm{Im}(A \rightarrow A_p)$ dès que k est assez grand (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. II, 3ᵉ éd., § 3, n° 5, th. 1), et la conclusion résulte de (13.4.1.3) et (13.4.4.1).

13.5. Limites projectives de suites spectrales de complexes filtrés.

(13.5.1) Soient $\mathbf{C}$ une catégorie abélienne, $X^{\bullet}$ un complexe d'objets de $\mathbf{C}$ muni d'une *filtration* $(F^p(X^{\bullet}))_{p \in \mathbf{Z}}$ telle que $F^{p_0}(X^{\bullet}) = X^{\bullet}$ pour un indice p_0. Considérons pour chaque $k \in \mathbf{Z}$ le complexe $X_k^{\bullet} = X^{\bullet}/F^{k+1}(X^{\bullet})$; il est canoniquement muni de la filtration formée des $F^p(X_k^{\bullet}) = F^p(X^{\bullet})/F^{k+1}(X^{\bullet})$ pour $p \leqslant k$ et des $F^p(X_k^{\bullet}) = 0$ pour $p \geqslant k+1$. En outre, on a des morphismes canoniques $X_{k+1}^{\bullet} \rightarrow X_k^{\bullet}$, qui font de $\mathbf{X}^{\bullet} = (X_k^{\bullet})_{k \in \mathbf{Z}}$ un *système projectif de complexes filtrés d'objets de* $\mathbf{C}$. On notera que ce système projectif est *strict* et tel que $X_k^{\bullet} = 0$ pour $k < p_0$.

(13.5.2) Considérons plus généralement un système projectif *strict* $\mathbf{X}^{\bullet} = (X_k^{\bullet})_{k \in \mathbf{Z}}$ de complexes d'objets de $\mathbf{C}$, *limité inférieurement*; considérons sur chaque $X_k^{\bullet}$ la filtration définie dans (13.4.1) (en se plaçant dans la catégorie abélienne des complexes de $\mathbf{C}$ limités inférieurement). Les $X_k^{\bullet} \rightarrow X_p^{\bullet}$ $(p \leqslant k)$ deviennent des morphismes de complexes *filtrés*, à filtrations finies. Le caractère fonctoriel des suites spectrales des complexes filtrés (11.2.3) montre que les morphismes de définition du système projectif $\mathbf{X}^{\bullet}$ fournissent des morphismes faisant de $E(\mathbf{X}^{\bullet}) = (E(X_k^{\bullet}))$ un *système projectif de suites spectrales*.

Lemme **(13.5.3)**. — *Supposons que le système projectif* $\mathbf{X}^{\bullet} = (X_k^{\bullet})_{k \in \mathbf{Z}}$ *de complexes filtrés soit obtenu comme dans* (13.5.2). *Alors :*

a) *Pour* $r \geqslant p - p_0$, *on a* $B_r^{pq}(X_k^{\bullet}) = B_{\infty}^{pq}(X_k^{\bullet})$ *pour tout* $k \in \mathbf{Z}$.

b) *Pour* $k+1 \leqslant p+r$, *on a* $Z_r^{pq}(X_k^{\bullet}) = Z_{\infty}^{pq}(X_k^{\bullet})$.

c) *Pour* $k+1 \geqslant p+r$, *les morphismes* $Z_r^{pq}(X_h^{\bullet}) \rightarrow Z_r^{pq}(X_k^{\bullet})$ *et* $B_r^{pq}(X_h^{\bullet}) \rightarrow B_r^{pq}(X_k^{\bullet})$ *sont des isomorphismes pour tout* $h \geqslant k$.

Ces trois propriétés résultent aussitôt des définitions de (11.2.2), en tenant compte de ce que $F^{p-r+1}(X_k^\cdot)=X_k^\cdot$ pour $p-r<p_0$.

(13.5.4) Supposons vérifiées les hypothèses de (13.5.3). Alors, pour p, q, r fixés (r fini), les systèmes projectifs $(Z_r^{pq}(X_k^\cdot))_{k\in\mathbf{Z}}$, $(B_r^{pq}(X_k^\cdot))_{k\in\mathbf{Z}}$, $(E_r^{pq}(X_k^\cdot))_{k\in\mathbf{Z}}$ sont *essentiellement constants*; on désignera par $Z_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$, $B_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$ et $E_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)=Z_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)/B_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$ leurs limites projectives respectives. Les $Z_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$ et $B_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$ s'identifient canoniquement à des sous-objets de $E_1^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$. La définition des d_r^{pq} (M, XV, 1) montre que ces morphismes (relatifs aux $X_k^\cdot$) sont aussi essentiellement constants, et par suite définissent des morphismes

$$d_r^{pq} : E_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)\to E_r^{p+r,q-r+1}(\mathbf{X}^\cdot) \tag{13.5.4.1}$$

tels que $d_r^{p+r,q-r+1}\circ d_r^{pq}=0$; en outre, on a des isomorphismes canoniques de $\mathrm{Ker}(d_r^{pq})$ sur $Z_{r+1}^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)/B_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$ et de $\mathrm{Im}(d_r^{pq})$ sur $B_{r+1}^{p+r,q-r+1}(\mathbf{X}^\cdot)/B_r^{p+r,q-r+1}(\mathbf{X}^\cdot)$.

Lemme **(13.5.5).** — *Sous les hypothèses de* (13.5.3), *on a, pour* $s\geqslant r>p-p_0$, *un monomorphisme canonique*

$$i : E_s^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)\to E_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot) \tag{13.5.5.1}$$

et un isomorphisme canonique

$$j_r : E_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)\simeq E_\infty^{pq}(X_{p+r-1}^\cdot) \tag{13.5.5.2}$$

tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_s^{pq}(\mathbf{X}^\cdot) & \xrightarrow{j_s} & E_\infty^{pq}(X_{p+s-1}^\cdot) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow \\ E_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot) & \xrightarrow[j_r]{} & E_\infty^{pq}(X_{p+r-1}^\cdot) \end{array} \tag{13.5.5.3}$$

soit commutatif (la flèche verticale de droite provenant du morphisme $X_{p+s-1}^\cdot\to X_{p+r-1}^\cdot$).

L'existence de i provient de ce que $B_r^{pq}(X_k^\cdot)=B_\infty^{pq}(X_k^\cdot)$ pour $r>p-p_0$ (13.5.3, *a)*); on a $Z_r^{pq}(X_k^\cdot)=Z_\infty^{pq}(X_k^\cdot)$ pour $k+1\leqslant p+r$ (13.5.3, *b)*), d'où en particulier $Z_r^{pq}(X_{p+r-1}^\cdot)=Z_\infty^{pq}(X_{p+r-1}^\cdot)$ et d'autre part $Z_r^{pq}(X_{p+r-1}^\cdot)$ et $B_r^{pq}(X_{p+r-1}^\cdot)$ s'identifient canoniquement à $Z_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$ et $B_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$ en vertu de (13.5.3, *c)*), d'où l'existence de j_r et la commutativité de (13.5.5.1).

Corollaire **(13.5.6).** — *Sous les hypothèses de* (13.5.3), *si l'une des limites projectives* $\varprojlim_r E_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$, $\varprojlim_k E_\infty^{pq}(X_k^\cdot)$ *existe, il en est de même de l'autre, et on a un isomorphisme canonique*

$$j_\infty : \varprojlim_r E_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)\simeq \varprojlim_k E_\infty^{pq}(X_k^\cdot). \tag{13.5.6.1}$$

En outre, pour que le système projectif $(E_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot))_{r\in\mathbf{Z}}$ *soit essentiellement constant* (13.4.2), *il faut et il suffit que le système projectif* $(E_\infty^{pq}(X_k^\cdot))_{k\in\mathbf{Z}}$ *le soit.*

(13.5.7) On note $B_\infty^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$ et $Z_\infty^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$ les sous-objets de $E_1^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$ égaux respectivement à $B_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$ pour $r>p-p_0$ et à $\inf_r Z_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$ (quand ce dernier existe), de sorte que $\varprojlim_r E_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$

s'identifie canoniquement à $E_\infty^{pq}(\mathbf{X}^\cdot) = Z_\infty^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)/B_\infty^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$. On remarquera que les objets $Z_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$, $B_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$, $E_r^{pq}(\mathbf{X}^\cdot)$ $(1 \leqslant r \leqslant +\infty)$ et d_r^{pq} dépendent *fonctoriellement* du système projectif $\mathbf{X}^\cdot$ soumis aux restrictions de (13.5.5), et que les morphismes définis dans (13.5.5) et (13.5.6) sont fonctoriels.

13.6. Suite spectrale d'un foncteur relative à un objet muni d'une filtration finie.

(13.6.1) Soient $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$ deux catégories abéliennes, $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ un foncteur additif covariant. Supposons que tout objet de $\mathbf{C}$ soit isomorphe à un sous-objet d'un objet injectif, de sorte que les foncteurs dérivés droits R^pT $(p \geqslant 0)$ existent.

Lemme **(13.6.2)**. — *Soit* A *un objet de* $\mathbf{C}$, *muni d'une filtration* finie $(F^i(A))_{i\in\mathbf{Z}}$. *Il existe une résolution injective* $X^\cdot = (X^j)_{j\geqslant 0}$ *de* A *munie d'une filtration finie* $(F^i(X^\cdot))_{i\in\mathbf{Z}}$ *telle que la relation* $F^i(A) = A$ (resp. $F^i(A) = 0$) *entraîne* $F^i(X^\cdot) = X^\cdot$ (resp. $F^i(X^\cdot) = 0$) *et que, pour tout* $i \in \mathbf{Z}$, $F^i(X^\cdot)$ *soit une résolution injective de* $F^i(A)$.

Soit p (resp. $q > p$) le plus grand indice tel que $F^i(A) = A$ (resp. le plus petit indice pour lequel $F^i(A) = 0$). On raisonne par récurrence sur $q-p$, le lemme étant évident pour $q-p=1$. Ayant formé une résolution injective $X'''^\cdot$ de $A/F^{q-1}(A)$ ayant les propriétés voulues, on considère la suite exacte $0 \to F^{q-1}(A) \to A \to A/F^{q-1}(A) \to 0$, on prend une résolution injective $X''^\cdot$ de $F^{q-1}(A)$, puis on détermine une résolution injective $X^\cdot$ de A de façon à avoir une suite exacte $0 \to X''^\cdot \to X^\cdot \to X'''^\cdot \to 0$ compatible avec la précédente (M, V, 2.2); il est clair que $X^\cdot$ répond à la question.

Corollaire **(13.6.3)**. — *Soit* B *un second objet de* $\mathbf{C}$, *muni d'une filtration finie* $(F^i(B))_{i\in\mathbf{Z}}$, *s un entier, et soit* $u : A \to B$ *un morphisme tel que* $u(F^i(A)) \subset F^{i+s}(B)$ *pour tout* $i \in \mathbf{Z}$. *Si* $Y^\cdot = (Y^j)_{j\geqslant 0}$ *est une résolution injective de* B *munie d'une filtration* $(F^i(Y^\cdot))_{i\in\mathbf{Z}}$ *ayant les propriétés énoncées en* (13.6.2), *il existe un morphisme* $v : X^\cdot \to Y^\cdot$ *compatible avec u et tel que* $v(F^i(X^\cdot)) \subset F^{i+s}(Y^\cdot)$ *pour tout* $i \in \mathbf{Z}$. *En outre, deux tels morphismes* v, v' *sont homotopes.*

Cela résulte aussitôt par récurrence sur $q-p$ de la construction précédente et de (M, V, 2.3).

(13.6.4) Sous les hypothèses de (13.6.2), considérons maintenant le complexe $T(X^\cdot)$ dans $\mathbf{C}'$, qui est évidemment filtré par les complexes $T(F^i(X^\cdot))$, puisque $F^i(X^\cdot)$ est facteur direct de $X^\cdot$. Il résulte de (13.6.3) que la *suite spectrale* de ce complexe filtré ne dépend que de l'objet filtré A, à un isomorphisme près. Son aboutissement est la cohomologie $R^\cdot T(A)$, avec la filtration

(13.6.4.1)
$$F^p(R^nT(A)) = \mathrm{Im}(R^nT(F^p(A)) \to R^nT(A)) = \mathrm{Ker}(R^nT(A) \to R^nT(A/F^p(A)))$$

(11.2.2), et son terme E_1 est donné par

(13.6.4.2)
$$E_1^{pq} = R^{p+q}T(\mathrm{gr}^p(A))$$

$\mathrm{gr}^p(A)$ désignant comme d'ordinaire $F^p(A)/F^{p+1}(A)$. Il est clair, d'après (11.2.2), que la filtration de l'aboutissement est *finie*, et que pour p, q donnés, les suites des

$B_r^{pq}(A) = B_r^{pq}(T(X^\bullet))$ et $Z_r^{pq}(A) = Z_r^{pq}(T(X^\bullet))$ sont *stationnaires*, donc la suite spectrale précédente est *birégulière* (11.1.3). Nous noterons cette suite $E(A) = (E_r^{pq}(A))$ et nous dirons que c'est la *suite spectrale du foncteur* T *relative à l'objet filtré* A.

(13.6.5) Supposons maintenant vérifiées les hypothèses de (13.6.3), dont nous conservons les notations. Comme $F^i(X^\bullet)$ (resp. $F^i(Y^\bullet)$) est facteur direct de $X^\bullet$ (resp. $Y^\bullet$), on a $(Tv)(T(F^i(X^\bullet))) \subset T(F^{i+s}(Y^\bullet))$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$; les définitions de (11.2.2) montrent alors que pour $1 \leqslant r \leqslant +\infty$, Tv définit un morphisme $B_r^{pq}(T(X^\bullet)) \to B_r^{p+s,q-s}(T(Y^\bullet))$ et un morphisme $Z_r^{pq}(T(X^\bullet)) \to Z_r^{p+s,q-s}(T(Y^\bullet))$, d'où un morphisme

$$w_r : E_r^{pq}(A) \to E_r^{p+s,q-s}(B);$$

de même, on a pour l'aboutissement des morphismes $u_n : R^nT(A) \to R^nT(B)$ tels que $u_n(F^p(R^nT(A))) \subset F^{p+s}(R^nT(B))$.

La définition des d_r^{pq} (M, XV, 1) montre en outre que les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
E_r^{pq}(A) \arrow[r, "d_r^{pq}"] \arrow[d, "w_r"'] & E_r^{p+r,q-r+1}(A) \arrow[d, "w_r"] \\
E_r^{p+s,q-s}(B) \arrow[r, "d_r^{p+s,q-s}"'] & E_r^{p+r+s,q-r-s+1}(B)
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs; on en déduit un diagramme commutatif analogue pour les isomorphismes α_r^{pq}, que nous laisserons au lecteur le soin d'expliciter. Enfin *(loc. cit.)*, on a aussi des diagrammes commutatifs pour les aboutissements

$$\begin{tikzcd}
E_\infty^{pq}(A) \arrow[r, "\beta^{pq}"] \arrow[d, "w_\infty"'] & \mathrm{gr}^p(R^{p+q}T(A)) \arrow[d, "u_{p+q}"] \\
E_\infty^{p+s,q-s}(B) \arrow[r, "\beta^{p+s,q-s}"'] & \mathrm{gr}^{p+s}(R^{p+q}T(B))
\end{tikzcd}$$

(13.6.6) Supposons en particulier qu'il existe un anneau S, muni d'une *filtration* $(F^i(S))_{i \in \mathbf{Z}}$, et un homomorphisme d'anneaux

(13.6.6.1) $$h : S \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A)$$

tel que pour tout $t \in F^j(S)$, on ait $h_t(F^i(A)) \subset F^{i+j}(A)$ pour tout couple i, j. Nous dirons pour abréger que A est alors muni d'une structure de S-$\mathbf{C}$-*module filtré* sur l'anneau filtré S. Par passage aux objets gradués associés, tout h_t, pour $t \in F^j(S)$, définit un endomorphisme *gradué* $\overline{h}_t$ de $\mathrm{gr}^\bullet(A)$, homogène de degré j; en outre, ce morphisme ne dépend que de la classe de t dans $\mathrm{gr}^j(S)$, et on définit ainsi un homomorphisme d'*anneaux gradués*

$$\overline{h} : \mathrm{gr}^\bullet(S) \to \mathrm{Hom}^g_{\mathbf{C}}(\mathrm{gr}^\bullet(A), \mathrm{gr}^\bullet(A))$$

où le second membre est l'anneau des endomorphismes *gradués* de $\mathrm{gr}^\bullet(A)$. Nous dirons que $\mathrm{gr}^\bullet(A)$ est muni d'une structure de $\mathrm{gr}^\bullet(S)$-$\mathbf{C}$-*module gradué*. Il résulte alors de (13.6.5) que pour $1 \leqslant r \leqslant +\infty$, tout $\overline{t} \in \mathrm{gr}^j(S)$ définit canoniquement dans les objets bigradués $(B^{pq}_r(A))_{(p,q)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$, $(Z^{pq}_r(A))_{(p,q)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$ et $E_r(A) = (E^{pq}_r(A))_{(p,q)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$ des endomorphismes bigradués de degrés $(s, -s)$; dans $E_r(A)$ (pour r fini), cet endomorphisme commute à l'endomorphisme bigradué défini par les d^{pq}_r. Comme ces endomorphismes vérifient les conditions habituelles d'associativité et de distributivité par rapport à l'addition dans $\mathrm{gr}^\bullet(S)$ et dans les objets bigradués considérés, nous dirons pour abréger que ces derniers sont des $\mathrm{gr}^\bullet(S)$-$\mathbf{C}'$-*modules bigradués*; il est immédiat que les α^{pq}_r définissent un *isomorphisme* pour ce type de structures. Pour tout entier n, on notera $B^{(n)}_r(A)$ (resp. $Z^{(n)}_r(A)$, $E^{(n)}_r(A)$) le sous-objet gradué de $B^{\bullet\bullet}_r(A)$ (resp. $Z^{\bullet\bullet}_r(A)$, $E^{\bullet\bullet}_r(A)$) formé des $B^{pq}_r(A)$ (resp. $Z^{pq}_r(A)$, $E^{pq}_r(A)$) tels que $p+q=n$ (pour $1 \leqslant r \leqslant +\infty$); il est immédiat que ce sont des $\mathrm{gr}^\bullet(S)$-$\mathbf{C}'$-*modules gradués*. Enfin, tout $\overline{t} \in \mathrm{gr}^j(S)$ définit pour tout n un endomorphisme gradué de degré j dans l'objet gradué $\mathrm{gr}^\bullet(R^nT(A))$, qui est ainsi muni d'une structure de $\mathrm{gr}^\bullet(S)$-$\mathbf{C}'$-*module gradué*; les β^{pq} (pour $p+q=n$) définissent un *isomorphisme* de $E^{(n)}(A)$ sur $\mathrm{gr}^\bullet(R^nT(A))$ pour cette espèce de structure.

On notera que lorsque $\mathbf{C}'$ est la catégorie des *groupes abéliens*, les structures de S-$\mathbf{C}'$-module (resp. de $\mathrm{gr}^\bullet(S)$-$\mathbf{C}'$-module gradué ou bigradué) ne sont autres que les structures usuelles de S-*module* (resp. $\mathrm{gr}^\bullet(S)$-module gradué, bigradué).

13.7. Foncteurs dérivés d'une limite projective d'arguments.

(13.7.1) Soient $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$ deux catégories abéliennes, $\mathbf{C}$ étant supposée telle que tout objet de $\mathbf{C}$ soit sous-objet d'un objet injectif; soit $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ un foncteur additif covariant. Considérons un *système projectif strict* $\mathbf{A} = (A_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ dans $\mathbf{C}$, *limité inférieurement*; de façon précise, nous supposerons que $A_k = 0$ pour $k < k_0$. Nous associons canoniquement à ce système une filtration $(F^p(A_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ sur chaque A_k par les formules (13.4.1.1), et comme il s'agit d'un système projectif *strict*, les morphismes canoniques

(13.7.1.1) $$F^i(A_h)/F^j(A_h) \to F^i(A_k)/F^j(A_k) \quad (h \geqslant k)$$

pour $i \leqslant j \leqslant k+1$ sont des *isomorphismes*. Rappelons en outre que l'on a $F^{k_0}(A_k) = A_k$ et $F^{k+1}(A_k) = 0$ pour tout k.

(13.7.2) Construisons maintenant pour chaque k une *résolution injective* $X^\bullet_k = (X^j_k)_{j\geqslant 0}$ de A_k ayant les propriétés de (13.6.2). Les morphismes canoniques $A_{k+1} \to A_k$ permettent (13.6.3) de définir pour chaque k un morphisme de complexes $X^\bullet_{k+1} \to X^\bullet_k$ compatibles avec les filtrations, et faisant de $\mathbf{X}^{\bullet}=(X_k^{\bullet})_{k\in\mathbf{Z}}$ un *système projectif* de complexes. On peut en outre supposer que ce système projectif est *strict*. Pour cela, on observe qu'en vertu de l'isomorphisme (13.7.1.1), A_k est isomorphe à $A_{k+1}/F^{k+1}(A_{k+1})$; on peut donc prendre, dans la construction de $X_{k+1}^{\bullet}$, la résolution injective de $A_{k+1}/F^{k+1}(A_{k+1})$ *égale* à $X_k^{\bullet}$, et il résulte de (M, V, 2.3) que la construction du morphisme de complexes $X_{k+1}^{\bullet}\rightarrow X_k^{\bullet}$ peut se faire de sorte que ce morphisme fournisse par passage aux quotients un *isomorphisme* $X_{k+1}^{\bullet}/F^{k+1}(X_{k+1}^{\bullet})\xrightarrow{\sim}X_k^{\bullet}$ respectant les filtrations, ce qui est la condition de (13.5.1).

(13.7.3) Par construction, le système projectif $T(\mathbf{X}^{\bullet})$ des complexes $T(X_k^{\bullet})$ satisfait aux hypothèses de (13.5.3). Les résultats de (13.5.4), (13.5.5) et (13.5.6) sont donc applicables aux suites spectrales $E(T(X_k^{\bullet}))=E(A_k)$; nous écrirons $E_r^{pq}(\mathbf{A})$ au lieu de $E_r^{pq}(T(\mathbf{X}^{\bullet}))$ pour $1\leqslant r\leqslant+\infty$ (cf. (13.5.7) pour $r=+\infty$) et de même pour les notations analogues. On notera en particulier que l'on a

(13.7.3.1) $$E_1^{pq}(\mathbf{A})=R^{p+q}T(\mathrm{gr}^p(\mathbf{A}))$$

en vertu de (13.6.4.2) et du fait que le système $(\mathrm{gr}^p(A_k))$ est essentiellement constant.

Ces résultats et (13.4.3) donnent la proposition suivante, démontrée d'abord par Shih Weishu par une méthode différente (inédite) :

Proposition **(13.7.4)** *(Shih). — Soit n un entier. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour tout couple* (p, q) *tel que* $p+q=n$, *le système projectif* $(E_r^{pq}(\mathbf{A}))_{r\geqslant 2}$ *est essentiellement constant.*

b) *Le système projectif* $R^nT(\mathbf{A})=(R^nT(A_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ *vérifie* (ML).

En outre, lorsque ces conditions sont remplies, on a un isomorphisme canonique

(13.7.4.1) $$\mathrm{gr}^p(R^nT(\mathbf{A}))\xrightarrow{\sim}E_\infty^{p,n-p}(\mathbf{A})\qquad \textit{pour tout } p\in\mathbf{Z}.$$

En effet, en vertu de (13.5.6), la condition *a)* équivaut à dire que le système projectif $(E_\infty^{pq}(A_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ est essentiellement constant pour $p+q=n$, et d'autre part $\mathrm{gr}^p(R^n(T(A_k))$ est canoniquement isomorphe à $E_\infty^{p,n-p}(A_k)$, donc il résulte de (13.4.3) que *a)* et *b)* sont équivalentes; l'isomorphisme (13.7.4.1) n'est autre que (13.5.6.1) appliqué au cas envisagé ici.

Corollaire **(13.7.5)**. — *Soit* $\mathfrak{F}=(\mathscr{F}_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *un système projectif de faisceaux de groupes abéliens satisfaisant aux conditions* (i), (ii) *et* (iii) *de* (13.3.1) *et soit* $\mathscr{F}=\varprojlim\mathscr{F}_k$. *Supposons que, pour le foncteur* $\mathscr{G}\rightsquigarrow\Gamma(X,\mathscr{G})$, *le système projectif* $(E_r^{pq}(\mathfrak{F}))_{r\in\mathbf{Z}}$ *soit essentiellement constant pour tout couple* (p, q) *tel que* $p+q=n$ *ou* $p+q=n+1$. *Considérons sur* $H^{n+1}(X,\mathscr{F})$ *la filtration définie par* $F^p(H^{n+1}(X,\mathscr{F}))=\mathrm{Ker}(H^{n+1}(X,\mathscr{F})\rightarrow H^{n+1}(X,\mathscr{F}_{p-1}))$. *On a alors un isomorphisme canonique*

(13.7.5.1) $$\mathrm{gr}^p(H^{n+1}(X,\mathscr{F}))\xrightarrow{\sim}E_\infty^{p,n-p+1}(\mathfrak{F})\qquad \textit{pour tout } p\in\mathbf{Z}.$$

Il résulte de (13.7.4) appliqué au cas où $\boldsymbol{C}$ est la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X, $\boldsymbol{C}'$ la catégorie des groupes abéliens, et $T=\Gamma$, que l'on a un isomorphisme canonique $\mathrm{gr}^p(\mathrm{R}^{n+1}\Gamma(\mathfrak{F}))\xrightarrow{\sim}\mathrm{E}_\infty^{p,n-p+1}(\mathfrak{F})$ pour tout $p\in\mathbf{Z}$. D'autre part, comme en vertu de (13.7.4), le système projectif $(\mathrm{H}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ vérifie (ML), on déduit de (13.3.1) un isomorphisme canonique

(13.7.5.1) $$\mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k).$$

Comme le système projectif $\mathrm{R}^{n+1}\Gamma(\mathfrak{F})$ vérifie (ML) en vertu de (13.7.4), on a un isomorphisme canonique $\mathrm{gr}^p(\mathrm{R}^{n+1}\Gamma(\mathfrak{F})) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k \mathrm{gr}^p(\mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k))$ (13.4.3), et un isomorphisme canonique $\varprojlim_k \mathrm{gr}^p(\mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k))\xrightarrow{\sim}\mathrm{gr}^p(\varprojlim_k \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k))$ (13.4.5). Tout revient donc à voir que l'isomorphisme (13.7.5.1) est compatible avec les filtrations des deux membres; mais cela résulte aussitôt des définitions et de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr] & \varprojlim_k \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathscr{F}_k) \arrow[d] \\ & \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathscr{F}_{p-1}) \end{tikzcd}$$

pour tout p.

(13.7.6) Soit S un anneau muni d'une filtration $(\mathrm{F}^i(\mathrm{S}))_{i\in\mathbf{Z}}$ telle que $\mathrm{F}^0(\mathrm{S})=\mathrm{S}$ (donc $\mathrm{gr}^i(\mathrm{S})=0$ pour $i<0$). Supposons que chacun des A_k, muni de la filtration définie dans (13.7.1), soit un S-$\mathbf{C}$-*module filtré* (13.6.6), les morphismes $\mathrm{A}_h\to\mathrm{A}_k$ pour $k\leqslant h$ étant des morphismes pour la structure de S-$\mathbf{C}$-module filtré; nous dirons pour abréger que $\mathbf{A}$ est un *système projectif de* S-$\mathbf{C}$-*modules filtrés*. Alors il est immédiat que les morphismes $\mathrm{B}_r^{pq}(\mathrm{A}_h)\to\mathrm{B}_r^{pq}(\mathrm{A}_k)$ et $\mathrm{Z}_r^{pq}(\mathrm{A}_h)\to\mathrm{Z}_r^{pq}(\mathrm{A}_k)$ pour $k\leqslant h$, $1\leqslant r\leqslant+\infty$, sont des morphismes pour les structures de $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S})$-$\mathbf{C}'$-*module bigradué* (13.6.5), et que les familles $(\mathrm{Z}_r^{pq}(\mathbf{A}))$, $(\mathrm{B}_r^{pq}(\mathbf{A}))$ et $(\mathrm{E}_r^{pq}(\mathbf{A}))$ sont des $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S})$-$\mathbf{C}'$-modules bigradués pour r fini, les deux premiers étant des sous-modules de $(\mathrm{E}_1^{pq}(\mathbf{A}))$. On notera encore $\mathrm{Z}_r^{(n)}(\mathbf{A})$, $\mathrm{B}_r^{(n)}(\mathbf{A})$, $\mathrm{E}_r^{(n)}(\mathbf{A})$ les sous-objets respectifs des précédents obtenu en ne prenant que les termes tels que $p+q=n$; ce sont des $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S})$-$\mathbf{C}'$-*modules gradués*.

Lorsque le système $(\mathrm{E}_r^{pq}(\mathbf{A}))_{r\in\mathbf{Z}}$ est essentiellement constant, $(\mathrm{E}_\infty^{pq}(\mathbf{A}))$ est donc aussi un $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S})$-$\mathbf{C}'$-module bigradué, et chaque $\mathrm{E}_\infty^{(n)}(\mathbf{A})$ un $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S})$-$\mathbf{C}'$-module gradué. En outre, les $\beta^{p,n-p} : \mathrm{E}_\infty^{p,n-p}(\mathrm{A}_k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^p(\mathrm{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{A}_k))$ constituent pour chaque k un isomorphisme pour la structure de $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S})$-$\mathbf{C}'$-module gradué de $\mathrm{E}_\infty^{(n)}(\mathrm{A}_k)$ sur $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{A}_k))$; si on est dans les conditions précédentes, $\beta^{p,n-p} : \mathrm{E}_\infty^{(n)}(\mathbf{A}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k \mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{A}_k))$ sera donc aussi un isomorphisme pour ces structures et il en est évidemment de même de l'isomorphisme canonique $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{R}^n\mathrm{T}(\mathbf{A}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_k \mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{R}^n\mathrm{T}(\mathrm{A}_k))$, donc les isomorphismes (13.7.4.1) constituent un isomorphisme pour les structures de $\mathrm{gr}^\bullet(\mathrm{S})$-$\mathbf{C}'$-*module gradué.*

Proposition **(13.7.7)**. — *Soit* S *un anneau noethérien* $\mathfrak{J}$-*adique. Supposons que* $\mathbf{C}$ *soit une catégorie abélienne dont tout objet est isomorphe à un sous-objet d'un objet injectif, et soit* T *un foncteur covariant additif de* $\mathbf{C}$ *dans la catégorie des groupes abéliens. Soit* $\mathbf{A}=(\mathrm{A}_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ *un* *système projectif strict de* S-$\mathbf{C}$-*modules filtrés* (*pour la filtration* $\mathfrak{J}$-*adique sur* S) *limité inférieurement. On suppose que pour un entier n donné, la condition suivante soit vérifiée :*

(F_n) *Le* $\mathrm{gr}^\bullet(S)$-*module gradué* $E_1^{(m)}(\mathbf{A})=(R^mT(\mathrm{gr}^p(\mathbf{A})))_{p\in\mathbf{Z}}$ (13.7.3.1) *est de type fini pour* $m=n$ *et* $m=n+1$.

Dans ces conditions :

(i) *Les systèmes projectifs* $(R^nT(A_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ *et* $(R^{n+1}T(A_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ *vérifient* (ML).

(ii) *Si on pose* $R'^nT(\mathbf{A})=\varprojlim_k R^nT(A_k)$, $R'^nT(\mathbf{A})$ *est un* S-*module de type fini.*

(iii) *La filtration définie par* $F^p(R'^nT(\mathbf{A}))=\mathrm{Ker}(R'^nT(\mathbf{A})\to R^nT(A_{p-1}))$ $(p\in\mathbf{Z})$ *sur* $R'^nT(\mathbf{A})$ *est* $\mathfrak{J}$-*bonne* (*c'est-à-dire que* $\mathfrak{J}F^p(R'^nT(\mathbf{A}))\subset F^{p+1}(R'^n(T(\mathbf{A}))$ *pour tout p, l'égalité des deux membres ayant lieu dès que p est assez grand*). *En particulier, la topologie sur* $R'^nT(\mathbf{A})$ *définie par cette filtration est identique à la topologie* $\mathfrak{J}$-*adique.*

(iv) *Le système projectif* $(E_r^{pq}(\mathbf{A}))_{r\in\mathbf{Z}}$ *est essentiellement constant pour* $p+q=n$ *et* $p+q=n+1$, $E_\infty^{pq}(\mathbf{A})$ *est donc défini* (13.5.7) *et on a un isomorphisme canonique de* $\mathrm{gr}^\bullet(S)$-*modules gradués*

$$\mathrm{gr}^p(R'^nT(\mathbf{A}))\xrightarrow{\sim}E_\infty^{p,n-p}(\mathbf{A})\qquad(p\in\mathbf{Z}).\tag{13.7.7.1}$$

On notera que l'isomorphisme (13.7.7.1) permettra de noter $R^nT(\mathbf{A})$ par abus de langage, la limite projective $R'^nT(\mathbf{A})$ du système projectif $R^nT(\mathbf{A})$, compte tenu des isomorphismes (13.7.4.1).

Comme l'anneau gradué $\mathrm{gr}^\bullet(S)$ est noethérien (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 9, cor. 5 du th. 2), la suite croissante des sous-$\mathrm{gr}^\bullet(S)$-modules gradués $B_r^{(m)}(\mathbf{A})$ de $E_1^{(m)}(\mathbf{A})$ (13.6.6) est *stationnaire* pour $m=n$ et $m=n+1$, et par suite la condition *b)* de (11.1.10) est vérifiée. Il s'ensuit que la condition *a)* de (13.7.4) est remplie pour n et pour $n+1$, et cela prouve déjà (i). En outre, les isomorphismes (13.7.4.1) (compte tenu des remarques de (13.7.6)) montrent que $\mathrm{gr}^\bullet(R^nT(\mathbf{A}))$ est un $\mathrm{gr}^\bullet(S)$-module gradué isomorphe à $E_\infty^{(n)}(\mathbf{A})=Z_\infty^{(n)}(\mathbf{A})/B_\infty^{(n)}(\mathbf{A})$; comme $Z_\infty^{(n)}(\mathbf{A})$ est un sous-module de $E_1^{(n)}(\mathbf{A})$, il est de *type fini*, et il en est donc de même de $E_\infty^{(n)}(\mathbf{A})$. En outre, pour la filtration $(F^p(R'^nT(\mathbf{A})))$, il résulte de (13.4.5) que $\mathrm{gr}^\bullet(R^nT(\mathbf{A}))$ et $\mathrm{gr}^\bullet(R'^nT(\mathbf{A}))$ sont des $\mathrm{gr}^\bullet(S)$-modules isomorphes, ce qui démontre (iv). Les assertions (ii) et (iii) seront enfin conséquences des résultats précédents et du lemme suivant :

Lemme (**13.7.7.2**). — *Soient* S *un anneau noethérien* $\mathfrak{J}$-*adique*, M *un* S-*module muni d'une filtration co-discrète* $(F^p(M))_{p\in\mathbf{Z}}$ *telle que* $\mathfrak{J}F^p(M)\subset F^{p+1}(M)$ (*ce qui exprime que* M *est un module filtré sur l'anneau* S *filtré par la filtration* $\mathfrak{J}$-*adique*). *Supposons en outre* M *séparé pour la topologie définie par la filtration* $(F^p(M))$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) M *est un* S-*module de type fini et* $(F^p(M))$ *une filtration* $\mathfrak{J}$-*bonne.*

b) $\mathrm{gr}^\bullet(M)$ *est un* $\mathrm{gr}^\bullet(S)$-*module de type fini.*

c) *Les* $\mathrm{gr}^p(M)$ *sont des* S-*modules de type fini et pour p assez grand les homomorphismes canoniques*

$$\mathfrak{J}\otimes_S\mathrm{gr}^p(M)\to\mathrm{gr}^{p+1}(M)\tag{13.7.7.3}$$

(déduits de $\mathfrak{J}\otimes_S F^p(M) \rightarrow F^{p+1}(M)$, *compte tenu de ce que l'image de l'homomorphisme composé* $\mathfrak{J}\otimes_S F^{p+1}(M) \rightarrow \mathfrak{J}\otimes_S F^p(M) \rightarrow F^{p+1}(M)$ *est* $\mathfrak{J}F^{p+1}(M) \subset F^{p+2}(M)$*) sont surjectifs.*

Pour la démonstration, voir Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n⁰ 1, prop. 3.

(13.7.7.4) Pour appliquer le lemme (13.7.7.2), il reste à observer que la topologie définie sur $R'^nT(\mathbf{A})$ par la filtration considérée fait de $R'^nT(\mathbf{A})$ un S-module séparé et complet, cette topologie étant celle de la limite projective des groupes discrets $R^nT(A_k)$; d'autre part, si $A_k=0$ pour $k<k_0$, on a aussi $R^nT(A_k)=0$ pour $k<k_0$, donc $F^{k_0}(R'^nT(\mathbf{A}))=R'^nT(\mathbf{A})$, et on est bien dans les conditions d'application du lemme.

Corollaire **(13.7.8).** — *Si l'hypothèse* (F_n) *est vérifiée, on a, pour tout élément* $f\in S$, *un isomorphisme canonique*

$$\textbf{(13.7.8.1)} \qquad \varprojlim_k ((R^nT(A_k))_f) \xrightarrow{\sim} R^nT(\mathbf{A})\otimes_S S_{\{f\}}.$$

En effet, $R^nT(\mathbf{A})$ est un S-module de type fini, $S_{\{f\}}$ une S-algèbre adique noethérienne $(\mathbf{0}_I, 7.6.11)$, séparée complétée de S_f pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique $(\mathbf{0}_I, 7.6.2)$. On conclut de $(\mathbf{0}_I, 7.7.8)$ et $(\mathbf{0}_I, 7.7.1)$ que $R^nT(\mathbf{A})\otimes_S S_{\{f\}}$ est isomorphe au séparé complété de $R^nT(\mathbf{A})\otimes_S S_f$ pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique; un système fondamental de voisinages de 0 pour cette topologie est $(\mathfrak{J}^pR^nT(\mathbf{A}))\otimes_S S_f$, donc $F^p(R^nT(\mathbf{A}))\otimes_S S_f$ est aussi un tel système; ce dernier est le noyau de l'application canonique $(R^nT(\mathbf{A}))_f \rightarrow (R^nT(A_{p-1}))_f$ et par suite le groupe séparé associé à $R^nT(\mathbf{A})\otimes_S S_f$ s'identifie à un sous-groupe G de $\varprojlim_k ((R^nT(A_k))_f)$. Mais le système projectif $((R^nT(A_k))_f)$ vérifie évidemment la condition (ML), et l'image de $(R^nT(\mathbf{A}))_f$ dans chacun des $(R^nT(A_k))_f$ est égale à l'image commune des $(R^nT(A_h))_f$ pour $h\geqslant k$ assez grand. On en conclut aussitôt que G est *partout dense* dans $\varprojlim_k ((R^nT(A_k))_f)$, et comme ce dernier groupe est séparé et complet, le corollaire est démontré.

(A suivre.)