

球堆积、格与模形式

(Sphere packings, lattices, and modular forms)



南方科技大学

SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

姓名：刘纪章

学号：11510323

系别：数学系

指导教师：朱一飞

诚信承诺书

- 1.本人郑重承诺所呈交的毕业设计（论文），是在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果，所有数据、图片资料均真实可靠。
- 2.除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本论文的研究作出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确的方式标明。
- 3.本人承诺在毕业论文（设计）选题和研究内容过程中没有抄袭他人研究成果和伪造相关数据等行为。
- 4.在毕业论文（设计）中对侵犯任何方面知识产权的行为，由本人承担相应的法律责任。

作者签名：

目录

摘要	4
1 历史背景	4
2 球堆积	6
2.1 球堆积密度的定义	6
2.2 最密堆积的存在性	6
2.3 球堆积密度的下界	7
3 格与球堆积	8
3.1 周期排布	8
3.2 周期逼近	9
3.3 E_8 格和Leech格	10
3.3.1 E_8 格	10
3.3.2 Leech格	11
4 线性规划上界	12
5 模形式初等理论	15
5.1 模形式定义	15
5.2 Eisenstein级数和theta级数	18
5.3 8维和24维证明前的准备	20
6 8维情形的证明	22
6.1 对应1特征值的特征函数 $a(x)$	23
6.2 对应-1特征值的特征函数 $b(x)$	26
7 24维情形的证明概要	33
8 球堆积在纠错码的应用	34
9 致谢	36
10 参考文献	36

摘要

本毕业论文是一篇主要关于Cohn [1]的读书报告，作者因这篇综述性文章获2018年美国数学会颁发的Levi L. Conant奖。另外的参考材料还有Viazovska[2]、Zagier[3]、Conway[4]等。

球堆积问题研究的是在任意给定 n 维欧氏空间中，用等半径、不相交的 n 维实心球去填充整个空间，能否找到一种最密的排布方式使之空间占有率最大。事实上，对于给定的维数 n ，Groemer[5]已经证明 n 维欧氏空间中球堆积存在一个最大密度的上界，并且这个上界确实可以由某种球堆积给出，但是这个上界的值具体是多少，以及是何种排布给出的，仍然是一个疑问。目前我们已经知道的只有1、2、3、8、24维，其他维度最大密度是多少仍然需要我们去探索。

本毕业论文主要是是以球堆积这一形象而重要的离散几何问题为出发点，通过学习该问题最近在8维和24维的解决方法，综合运用本科阶段学到的线性代数和Fourier分析知识，掌握抽象代数中群作用和数论中模形式的基础理论。例如，Fourier分析中的Poisson求和公式成为解决该问题的关键之一，其推广形式为Arthur-Selberg迹公式，后者出现在位于当今数学核心的Langlands纲领中。另外，球堆积问题还直接对应于密码学中的纠错码(error-correcting code)，有重要而广泛的实际应用。

论文第一章主要介绍球堆积的一些历史背景已经研究进程，第二章介绍球堆积问题的具体描述方式以及对球堆积密度的定义，第三章介绍格与球堆积的联系，第四章介绍Cohn和Elkies的“线性规划上界定理”，第五章讲述构造“魔幻”函数所需要的一些相关的模形式初等理论，第六章具体讲述8维的证明过程，第七章简略介绍24维证明所构造的“魔幻”函数，第八章介绍球堆积在纠错码的应用。

关键词： 球堆积，格，模形式

1 历史背景

球堆积问题应该是一个很古老的问题，或许在人类文明出现不久就已经意识到了它的3维版本。但是第一次出现在论文或者著作中，还要谈到开普勒。1611年，著名的天文学家、数学家开普勒Johannes Kepler在他的论文*Strena seu de nive sexangula*(‘On the Six-Cornered Snowake’)中提出过一个猜想：3维的最密球堆积由所谓的面心立方(face-centered-cubic)格给出，且密度为 $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$ ，大概是74.05%。开普勒最初由天文学家Thomas Harriot (1560-1621)介绍下接触球堆积问题。Harriot曾经是著名的探险家、殖民者Sir Walter Raleigh (1554-1618)的助手，Raleigh曾经为了找到在船上放置炮弹的最有效排布方式而请教Harriot[11]

1831年，Gauss证明了开普勒猜想在所有3维格点所给出的排布中是最大的。

1953年，László Fejes Tóth提出理论上可以通过有限次的计算（但是计算量非常大）来验证非格点给出的球堆积排布在开普勒猜想上的准确性与否。但是由于当时的技术性原因并没有得到验证。

1998年，密歇根大学的数论学家Thomas Hales发展了Tóth的想法，并且与他的学生Samuel Fer-

guson在计算机的帮助下解决了开普勒猜想，期间计算机大概解了100,000个线性规划问题。（这不是人类第一次在计算机的帮助下完成的证明，还有一次著名的证明是图论中的四色问题）。

类似的，球堆积在2维问题也有一些故事，Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)曾经证明蜂窝格 (honeycomb lattice) 在所有格点给出的排布中是最大的。1890年，Axel Thue第一次给出了蜂窝格在2维平面所给出的排布的密度是最大的(密度为 $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$)，但是后面又有一些争论。第一个比较完整的全面的被广泛接受的证明由 Tóth在1940年给出。

2016年，Maryna Viazovska给出了首个8维的证明，证明了8维最密球堆积由 E_8 格给出，她的证明方法的主要根据是Henry Cohn 和 Noam Elkies的“线性规划上界定理”，运用模形式巧妙地构造了相关的“魔幻”函数。并且她的方法很快就推广到24维，得到24维最密球堆积由Leech格给出。球堆积问题在此两个维度的解决也迅速地刺激了相关的“接吻数”问题（kissing numbers problem），纠错码问题(error-correcting codes) 的讨论与应用。

2 球堆积

2.1 球堆积密度的定义

现实中我们经常会考虑空间占有率的问题，比如说一个停车场最多能够放多少辆车、兵乓球盒子里面最多能够放几个乒乓球等等。球堆积问题就是由现实中的这些问题抽象而来的，说的是在任意给定的n维空间中，用等半径的n维球去填充整个空间，我们能否找到一种最密的排布方式使之空间占有率达到最大。和我们现实中的问题不同的是，整个空间的体积是无穷大，在研究这个问题之前，我们需要先定义球堆积的空间占有率，或者说球堆积的密度。类比生活中的问题，我们会自然地想到，先给定一个盒子，看看里面有多少乒乓球，密度就是乒乓球的体积除以盒子的体积，为了方便研究，不妨将盒子取为n维欧式空间中以0为中心、边长为 $2r$ 的一个立方体 $C_r^n(0)$ ，即

$$\Delta_P(r) := \frac{\text{vol}(C_r^n(0) \cap P)}{\text{vol}(C_r^n(0))}$$

其中P为乒乓球， $C_r^n(0)$ 为n维的盒子。对于空间体积无穷大这个问题，我们只要盒子趋于无穷大就好了。

定义1 球堆积P (sphere packing) 为 \mathbb{R}^n 中一些非空的、不相交的、等半径的一些球体的集合，即
 $P = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} B_r^n(x)$

但是无奈下面这个极限不一定存在：

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(C_r^n(0) \cap P)}{\text{vol}(C_r^n(0))}$$

但是由于

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \Delta_P(r) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \sup_{s \leq r} \Delta_P(s)$$

后者单调，又因为密度都是在[0,1]之间的数，故有界，故极限一定存在。由此，我们可以定义出球堆积密度(sphere packing density)。

定义2 对于给定n维空间中的某个球堆积P，其密度为

$$\Delta_P := \limsup_{r \rightarrow \infty} \Delta_P(r)$$

在给出球堆积密度定义之后，球堆积问题就变成从所有可能的球堆积P中，寻找出一个使得 Δ_P 最大的，即

$$\Delta_n := \sup_{P \subset \mathbb{R}^n} \Delta_P$$

2.2 最密堆积的存在性

定理 1. 对于任意给定的n维欧式空间中，存在一个球堆积 P_0 使得

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(C_r^n(x) \cap P_0)}{\text{vol}(C_r^n(x))} = \sup_{P \subset \mathbb{R}^n} \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(C_r^n(0) \cap P)}{\text{vol}(C_r^n(0))}$$

一致收敛对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$ [5]

此定理最先由Groemer证明，具体细节可以参看[5]。因此最大密度确实是存在的并且确实可以由某个球堆积 P_0 给出，但是最密堆积并不是唯一的。如三维欧式空间的最密堆积就可以由两种不同的排布给出。

2.3 球堆积密度的下界

定义3 在给定的任意 n 维欧式空间中，一个球堆积如果不能够再填充入再多一个等半径的球，则称为排列紧致的。

定理 2. 对于任意给定的 n 维欧式空间中，排列紧致的球堆积密度下界是 2^{-n} 。

在证明这个定理之前，先证明一个引理。

引理1 在给定的任意 n 维欧式空间中，以 r 为球半径的排列紧致球堆积 P_0 将半径扩大 2 倍后将会完全覆盖整个 \mathbb{R}^n 空间。

证明 反证法，假设以 $2r$ 为球半径的排列紧致球堆积还没有完全覆盖整个 \mathbb{R}^n 空间，设这块没有覆盖到的区域为 S ，在 S 中任意取一点，并以 r 为半径作球，此球和初始的以 r 为半径的球堆积 P_0 不相交，与排列紧致矛盾，故以 $2r$ 为球半径的排列紧致球堆积一定完全覆盖整个 \mathbb{R}^n 空间。

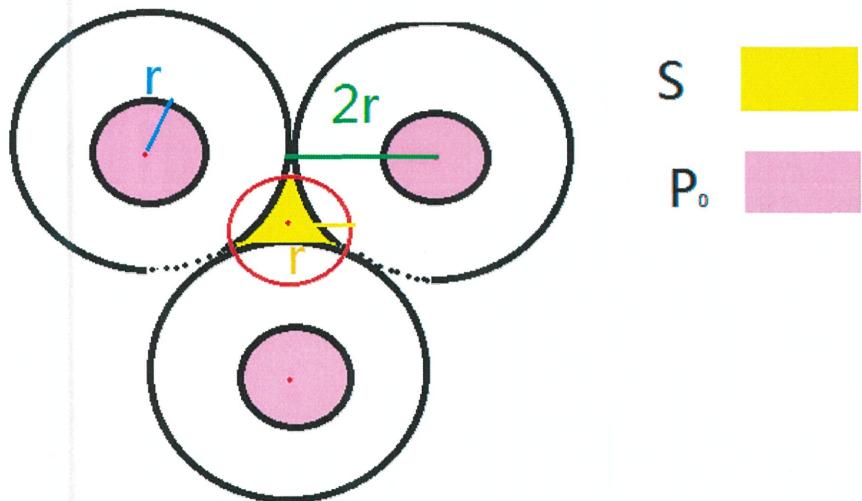


图 1: 示意图

由引理1立得:对于任意 $R > 0$, 有 $\text{vol}(C_R^n(0) \cap P_0)2^n \geq \text{vol}(C_R^n(0))$ 成立, 故 $\frac{\text{vol}(C_R^n(0) \cap P_0)}{\text{vol}(C_R^n(0))} \geq 2^{-n}$ 因此

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(C_R^n(0) \cap P_0)}{\text{vol}(C_R^n(0))} \geq 2^{-n}$$

3 格与球堆积

3.1 周期排布

定义4 格是指 $\Lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^n m_i v_i, \text{ where } m_i \in \mathbb{Z} \text{ and } v_i \in \mathbb{R}^n \text{ for each } 1 \leq i \leq n\}$ 其中 v_i 称为格的基。

定义5 基本单元(fundamental cell) $FC = \{x_1 v_1 + \dots + x_n v_n : 0 \leq x_i < 1 \text{ for } i=1,2,\dots,n\}$ 其中, v_i 为 Λ 的基且互相线性无关。 FC 又可以记为 \mathbb{R}^n / Λ , 为 \mathbb{R}^n 中的商群。

在定义了格之后, 我们可以由格给出一个具体的球堆积排布。首先以格点为球心, 以 r (非常小)为半径上作一个球在 \mathbb{R}^n 空间中, 再让 r 逐渐变大直到这些等半径的球相切, 我们就得到了一个单轨的、由格给出的球堆积。如下图所示:

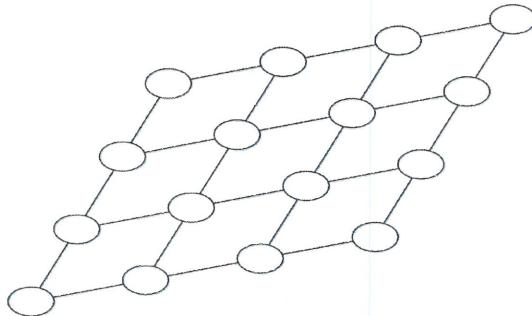


图 2: 单轨(出自[1])

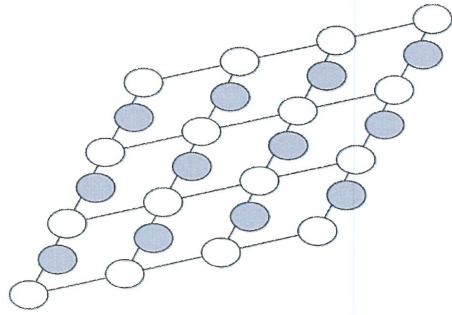


图 3: 多轨(出自[1])

对于多轨的由格给出的球堆积, 即相当于在 $\sum_{i=1}^k (\Lambda + t_i)$ 的格点上作等半径不相交的球, $t_i \in \mathbb{R}^n$ 称为第*i*轨对于 Λ 的平移向量。得到的k轨的球堆积排布如上图所示, 这些球堆积排布统称为周

期排布。

对于周期排布而言，计算它的密度很简单，只需要看基本单元里面有多少个半径为r的小球，用这些小球的体积除以基本单元的体积即可，即

$$\frac{N\text{vol}(B_r^n)}{\text{vol}(FC)}$$

3.2 周期逼近

定理 3. 在 \mathbb{R}^n 中，任意球堆积都能够被周期排布所逼近。

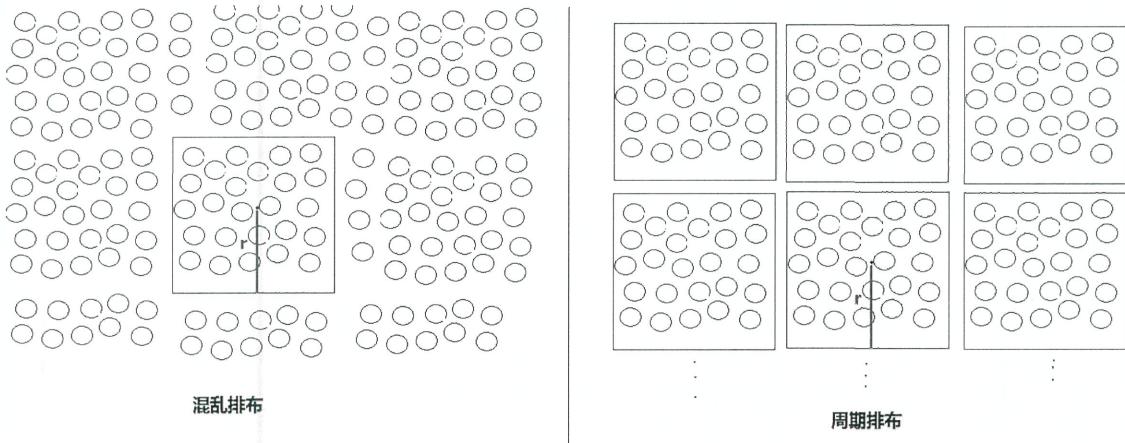


图 4: 周期逼近

证明 在 \mathbb{R}^n 中，任意给定一个球堆积 P_0 ，我们想用一个周期为r（r充分大）的周期排布 P_r 去逼近 P_0 ，如图4所示，我们就在 P_0 的基础上以 $2r$ 为边长取一个n-立方体（基本单元），其他地方都是这个地方的复制，这样我们就构造出了 P_r 。设

$$\Delta_{P_0} := \sup \frac{\text{vol}(C_r^n(0) \cap P_0)}{\text{vol}(C_r^n(0))} \quad \Delta_{P_r} := \sup \frac{\text{vol}(C_r^n(0) \cap P_r)}{\text{vol}(C_r^n(0))}$$

由球堆积密度的定义，我们有： $\forall \epsilon > 0, \exists R_1 > 0$ ，当 $r \geq R_1$ 时， $|\Delta_{P_0} - d_1| < \epsilon$

并且 $\forall \epsilon > 0, \exists R_2 > 0$ ，当 $r \geq R_2$ 时， $|\Delta_{P_r} - d_2| < \epsilon$

现在取 $R = \max\{R_1, R_2\}$ ，当 $r \geq R$ 时有

$$|d_1 - d_2| = |d_1 - \Delta_{P_0} + \Delta_{P_0} - \Delta_{P_r} + \Delta_{P_r} - d_2| \leq |\Delta_{P_0} - d_1| + |\Delta_{P_r} - d_2| + |\Delta_{P_0} - \Delta_{P_r}| \leq 3\epsilon$$

其中第三项充分小是因为当 $r \geq R$ 时，由前面 P_r 的构造可以知道两者充分靠近。故有

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_{P_r} = d_2 = d_1 = \lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_{P_0}$$

3.3 E_8 格和Leech格

3.3.1 E_8 格

定义6 在 \mathbb{R}^8 中, $E_8 := \{x = (x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + 1/2)^8 : \sum_{i=1}^8 x_i \equiv 0 \pmod{2}\}$
其可能的一组基如下按列向量表示:

$$(v_1, \dots, v_8) = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其所对应的Dynkin图的 图中每一个节点表示每一个基向量, 如果两个节点相连则表示对应的两

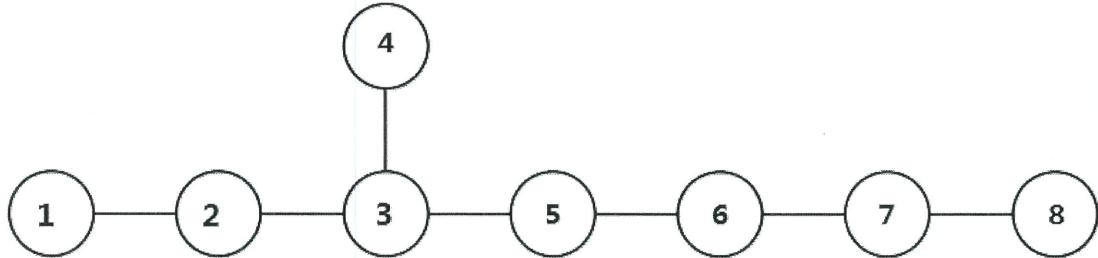


图 5: Dynkin图

个向量内积为-1, 不相连的内积为0, 并且每个基向量的长度都为 $\sqrt{2}$ 。由基向量所对应的Gram内积矩阵为:

$$(\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq 8} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

E_8 又称为根格 (root lattice), 原因是其基向量可以由 E_8 根系统 (由240个8维向量构成) 中得出, 根系统里面的向量又被称为根, 故基的选取不唯一。

定义7 如果 E 是一个由标准内积生成的有限维的欧式空间，一个根系统 ϕ 指的是由有限多个非零向量（称为根）生成的集合，且满足以下条件：

- (1) 这些根会张成 E 。
- (2) 如果 $\alpha \in \phi$ ，那么 ϕ 里面关于 α 唯一的数乘只有 α 和 $-\alpha$ 。
- (3) 对于任意的 $\alpha, \beta \in \phi$ ，有 $\beta - 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha \in \phi$ ，且 $2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ 是整数。

定义8 (1) 如果张成一个格的所有基向量的内积都是整数，则称此格为整数格 (integral lattice)。

(2) 如果一个格内任意某向量的长度的平方都是偶数，则称为偶格 (even lattice)。

(3) 如果张成格的基向量的行列式等于1，或者说 $\text{vol}(FC) = 1$ ，则称为unimodular lattice。

(4) 自对偶：给定 v_1, \dots, v_n 为 Λ 的基，其对应的对偶基为 v_1^*, \dots, v_n^* ，且满足 $\langle v_i, v_j^* \rangle = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{else} \end{cases}$ 。但是 Λ^* 却并不依赖于对偶基 v_1^*, \dots, v_n^* 定义，如可以这样定义：

$$\Lambda^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}, \forall x \in \Lambda\}.$$

如果 $\Lambda^* = \Lambda$ ，则称 Λ 是自对偶的 (self-dual)。

定理 4. E_8 满足定义8中所有的定义，即 E_8 是integral, even, unimodular, self-dual lattice。

证明 (1) 由Gram 矩阵立得。(2) 设 $m_1, \dots, m_8 \in \mathbb{Z}$ ，则 $|m_1v_1 + \dots + m_8v_8|^2 = 2m_1^2 + \dots + 2m_8^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 8} 2m_i m_j \langle v_i, v_j \rangle$ 显然为偶数。因此， E_8 中不同点之间的距离为 $\sqrt{2k}$ ， $k = 1, 2, \dots$

(3) 由于 $\text{vol}(FC) = |\det(v_1, \dots, v_8)|$ ，且 $(v_1^T, \dots, v_8^T)^T (v_1, \dots, v_8) = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq 8}$ ，故 $1 = \det(\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq 8} = \text{vol}(FC)^2$ ，即 $\text{vol}(FC) = 1$ 。(4) 由于 $\langle v_i, v_j^* \rangle = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{else} \end{cases}$ ，故 $(v_1^T, \dots, v_8^T)^T (v_1^*, \dots, v_8^*) = I$ ，因此 $\text{vol}(\mathbb{R}^n/E_8^*) = 1/\text{vol}(\mathbb{R}^n/E_8)$ 。根据 (4) 中第二种定义知 E_8^* 也是整数格，而由 (1) 知 E_8 也是整数格，故有 $E_8 \subseteq E_8^*$ ， E_8 在 E_8^* 里面的index是： $[E_8^* : E_8] = \frac{\text{vol}(\mathbb{R}^n/E_8)}{\text{vol}(\mathbb{R}^n/E_8^*)} = \text{vol}(\mathbb{R}^n/E_8)^2 = 1$ ，因此 $E_8 = E_8^*$ 。

结论 由于 E_8 中邻近点的距离是 $\sqrt{2}$ ，所以我们应该用半径为 $\sqrt{2}/2$ 的小球去填充 \mathbb{R}^8 ， E_8 给出的球堆积密度为 $\frac{\text{vol}(B_{\sqrt{2}/2}^8)}{\text{vol}(\mathbb{R}^n/E_8)} = \frac{\pi^4}{384 \text{vol}(\mathbb{R}^n/E_8)} = \frac{\pi^4}{384} = 0.2536\dots$

3.3.2 Leech格

定理 5. 在 \mathbb{R}^{24} 中，存在一个唯一的，长度为 $\sqrt{2k}$ ，其中 $k=2, 3, 4, \dots$ 的even, unimodular, integral, self-dual 格(在缩放以及同构意义下)，称之为 Λ^{24} 。

此定理的证明可见Conway[4]第十二章。有很多构造 Λ^{24} 的方法，其中差不多有20种在[4]中提到。关于 Λ^{24} 的向量基以及Gram矩阵可参看[6]。在这里我们只给出一种有意思的构造方法：首先对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^{26}$ ，定义洛伦兹内积

$$\langle x, y \rangle := x_1y_1 + \dots + x_{25}y_{25} - x_{26}y_{26}$$

定义格

$$II_{25,1} := \{x = (x_1, \dots, x_{26}) \in \mathbb{Z}^{26} \cup (\mathbb{Z} + 1/2)^{26} : \sum_{i=1}^{26} x_i \equiv 0 \pmod{2}\}$$

在 $II_{25,1}$ 中存在一个特殊的向量：

$$\mathbf{w} := (0, 1, 2, \dots, 24, 70)$$

由于丢番图方程 $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = N^2$ 在 $k > 1$ 且 $N > 1$ 的唯一整数解只有 $k=24$, $N=70$, 故 $\langle w, w \rangle = 0$.

定义线性子空间：

$$W := \{x \in \mathbb{R}^{26} : x = kw, k \in \mathbb{R}\}$$

定义正交补空间：

$$W^\perp := \{x \in \mathbb{R}^{26} : \langle x, w \rangle = 0, \forall w \in W\}$$

则 $\Lambda^{24} := (W^\perp / W) \cap II_{25,1}$. 值得注意的是, Λ^{24} 是手性的, 其所有的对称性关于手性方向都是保持的, 但是又有左手和右手之分, 它们都是镜像对称的。对比于 E_8 , 由于 E_8 的对称群可以由反射生成, 故 E_8 是非手性的。

4 线性规划上界

2003年, Henry Cohn 和 Noam Elkies类比于线性规划方法发表了他们所谓的“线性规划上届”的论文用于求解8和24维接吻数问题(kissing number problem)。13年后, Viazovska基于此方法, 使用模形式巧妙地构造了“魔幻”函数, 解决了8和24维的球堆积问题。

定义8 如果 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 满足以下条件:

- (1) f 无限可微
- (2) $f(x) = O(1 + |x|)^{-k}$ 对于任意的 $k \in \mathbb{Z}^+$ 并且 f 的任意阶偏导皆如此
则称 f 是Schwarz函数。

定理 6. (Cohn and Elkies [8])如果 f 是一个从 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的Schwarz函数且满足以下三条:

- (1) $f(0) = \hat{f}(0) > 0$
- (2) $\hat{f}(y) \geq 0$ 对于任意的 $y \in \mathbb{R}^n$
- (3) $f(x) \leq 0$ 对于任意的 $|x| \geq r$

那么此时 \mathbb{R}^n 中所有的球堆积密度最大值最多是 $\text{vol}(B_{r/2}^n)$, 其中 r 为最小基向量的长度。此外, 我们称此定理为“魔幻”函数定理。

在证明此定理之前, 先熟悉一下调和分析的基础:
如果 f 是一个从 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的可积函数, 那么其傅里叶变换

$$\hat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, y \rangle} dx$$

如果 \widehat{f} 是一个从 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的可积函数，那么有傅里叶逆变换

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dy$$

一般地，我们有：

$$f(x+t) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{2\pi i \langle t, y \rangle} e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dy$$

Poisson求和公式 如果 f 是一个从 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的 Schwarz 函数，则

(4.1)

$$\Sigma_{x \in \Lambda} f(x) = \frac{1}{vol(FC)} \Sigma_{y \in \Lambda^*} \widehat{f}(y)$$

(4.1)的证明 我们首先证明：

$$\Sigma_{m \in \mathbb{Z}^n} f(m) = \Sigma_{m \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(m)$$

令 $F(x) = \Sigma_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x+k)$, 则根据傅里叶展开有: $F(x) = \Sigma_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{2\pi i \langle m, x \rangle}$, 那么

$$\begin{aligned} a_m &= \int_{T^n} f(x) e^{-2\pi i \langle m, x \rangle} dx \\ &= \int_{T^n} \Sigma_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x+k) e^{-2\pi i \langle m, x \rangle} dx \\ &= \Sigma_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{T^n} f(x+k) e^{-2\pi i \langle m, x \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, m \rangle} dx \\ &= \widehat{f}(m) \end{aligned}$$

令 $x=0$, 有

$$\Sigma_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k) = \Sigma_{m \in \mathbb{Z}^n} f(m) = F(0) = \Sigma_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m = \Sigma_{m \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(m)$$

注意到 \mathbb{Z}^n 的对偶格就是它本身，并且 $vol(\mathbb{Z}^n) = 1$ ，故此是 (4.1) 的一个特例。

其次，设 $\mathbb{Z}^n = span\{e_1, \dots, e_n\}$, $\Lambda = span\{v_1, \dots, v_n\}$, $\Lambda^* = span\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ 分别为对应的基向量所张成的格。有 $(v_1, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n)J$, 则 $vol(FC) = |J|$, 由于 $\langle v_i, v_j^* \rangle = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & else \end{cases}$, 故 $(v_1^T, \dots, v_n^T)^T (v_1^*, \dots, v_n^*) = I$, 即 $J^{-1} = J^*$, $|J^{-1}| = |J^*|$, 又 $|J||J^*| = 1$, $|J^*| = |J|^{-1}$, 故 $det(J^{-1}) = |J|^{-1}$ 。现在设 $y = L(x) = Jx$, 且 $y = L(m) := Jm, m \in \mathbb{Z}^n$, $y^* = J^*m = J^{-1}m$, 则 $x = J^{-1}y$, $dx = d(L^{-1}(y)) = det(J^{-1})dy$, 故

$$\begin{aligned} \Sigma_{y \in \Lambda} f(y) &= \Sigma_{m \in \mathbb{Z}^n} f(Jm) \\ &= \Sigma_{m \in \mathbb{Z}^n} f \circ J(m) \\ &= \Sigma_{m \in \mathbb{Z}^n} (\widehat{f \circ J})(m) \\ &= \Sigma_{m \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f \circ J(x) e^{-2\pi i \langle m, x \rangle} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi \langle m, J^{-1}y \rangle} d(J^{-1}y) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \det(J^{-1}) \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi \langle J^{-1}m, y \rangle} dy (\langle m, J^{-1}y \rangle = \langle J^{-1}m, y \rangle) \\
&= |J|^{-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(J^{-1}m) \\
&= \frac{1}{\text{vol}(FC)} \sum_{y^* \in \Lambda^*} \widehat{f}(y^*)
\end{aligned}$$

(4.2)

$$\Sigma_{x \in \Lambda} f(x + t) = \frac{1}{\text{vol}(FC)} \sum_{y \in \Lambda^*} \widehat{f}(y) e^{2\pi i \langle t, y \rangle}$$

(4.2)的证明 令 $F(y) = f(y + t)$, 据 (4.1) 有 $\Sigma_{y \in \Lambda} F(y) = \frac{1}{\text{vol}(FC)} \sum_{y \in \Lambda^*} \widehat{F}(y)$, 又

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(m) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y + t) e^{-2\pi i \langle m, y \rangle} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y + t) e^{-2\pi i \langle m, y+t \rangle} e^{-2\pi i \langle m, -t \rangle} dy \\
&= e^{-2\pi i \langle m, -t \rangle} \int_{\mathbb{R}^n} f(y + t) e^{-2\pi i \langle m, y+t \rangle} d(y + t) \\
&= e^{-2\pi i \langle m, -t \rangle} \widehat{f}(m) \\
&= e^{2\pi i \langle m, t \rangle} \widehat{f}(m)
\end{aligned}$$

$$\text{故 } \Sigma_{y \in \Lambda} f(y + t) = \Sigma_{y \in \Lambda} F(y) = \frac{1}{\text{vol}(FC)} \sum_{y \in \Lambda^*} \widehat{f}(y) e^{2\pi i \langle t, y \rangle}$$

定理6的证明 由于周期球堆积排布能够任意逼近最优排布, 故我们只需要考虑周期球堆积排布。假设 Λ 为 \mathbb{R}^n 中的格, 且设张成 Λ 的基向量的最小长度为 r , 换言之我们用半径为 $r/2$ 的球来填充整个空间。对于单轨而言, 其球堆积密度为: $\frac{\text{vol}(B_{r/2}^n)}{\text{vol}(FC)}$, 且由条件 (3):

$$\Sigma_{x \in \Lambda} f(x) = \Sigma_{|x| \geq r} f(x) + \Sigma_{|x| < r} f(x) = \Sigma_{|x| \geq r} f(x) + f(0) \leq f(0)$$

由条件 (2):

$$\Sigma_{y \in \Lambda^*} \widehat{f}(y) = \Sigma_{|y| \neq 0} \widehat{f}(y) + \widehat{f}(0) \geq \widehat{f}(0)$$

由 (4.1) 我们有:

$$\frac{\widehat{f}(0)}{\text{vol}(FC)} \leq \frac{1}{\text{vol}(FC)} \sum_{y \in \Lambda^*} \widehat{f}(y) = \Sigma_{x \in \Lambda} f(x) \leq f(0)$$

再由条件 (1): $\text{vol}(FC) \geq 1$, 注意等号成立当且仅当 $\Sigma_{|x| \geq r} f(x) = 0$, 且 $\Sigma_{|y| \neq 0} \widehat{f}(y) = 0$ 。

对于多轨而言, 不妨设共有 N 轨, 且 t_1, \dots, t_N 为 Λ 的平移向量, 则这些半径为 $r/2$ 的小球的中心落在 $\Lambda + t_i$ 的格点上, 此时所给出的球堆积密度为: $\frac{N \text{vol}(B_{r/2}^n)}{\text{vol}(FC)}$, 我们想证明 $\text{vol}(FC) \geq N$ 即可。

首先,

$$\Sigma_{1 \leq j, k \leq N} \Sigma_{x \in \Lambda} f(x + t_j - t_k) = \frac{1}{\text{vol}(FC)} \Sigma_{1 \leq j, k \leq N} \Sigma_{y \in \Lambda^*} \widehat{f}(y) e^{2\pi i \langle y, t_j - t_k \rangle}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{vol(FC)} \sum_{y \in \Lambda^*} \widehat{f}(y) \sum_{1 \leq j, k \leq N} e^{2\pi i \langle y, t_j - t_k \rangle} \\
&= \frac{1}{vol(FC)} \sum_{y \in \Lambda^*} \widehat{f}(y) \sum_{1 \leq j \leq N} e^{2\pi i \langle y, t_j \rangle} \sum_{1 \leq k \leq N} e^{2\pi i \langle y, -t_k \rangle} \\
&= \frac{1}{vol(FC)} \sum_{y \in \Lambda^*} \widehat{f}(y) \sum_{1 \leq j \leq N} e^{2\pi i \langle y, t_j \rangle} \overline{\sum_{1 \leq k \leq N} e^{2\pi i \langle y, t_k \rangle}} \\
&= \frac{1}{vol(FC)} \sum_{y \in \Lambda^*} \widehat{f}(y) |\sum_{1 \leq j \leq N} e^{2\pi i \langle y, t_j \rangle}|^2
\end{aligned}$$

对于等式最右边而言，根据条件（2）可知，当扔掉所有的除了 $y=0$ 的项，我们有：

$$\frac{N^2 \widehat{f}(0)}{vol(FC)} \leq \frac{1}{vol(FC)} \sum_{y \in \Lambda^*} \widehat{f}(y) |\sum_{1 \leq j \leq N} e^{2\pi i \langle y, t_j \rangle}|^2$$

最左边由于 $x + t_j - t_k$ 表示的是从格点 t_k 到 $x + t_j$ 的向量，此向量长度至少 $\geq r$ ，除非两点是重合的才能够等于0，即 $t_k = x + t_j$ ，当 t_k 跑遍 t_1, \dots, t_N 时，此式都成立，当且仅当 $x = 0, t_k = t_j$ ，故

$$\sum_{1 \leq j, k \leq N} \sum_{x \in \Lambda} f(x + t_j - t_k) \leq N f(0)$$

因此， $N f(0) \geq \frac{N^2 \widehat{f}(0)}{vol(FC)}$ ，故 $vol(FC) \geq N$ 。

推论 假设 f 是满足定理4中所有条件的函数，那么由 Λ 格给出的球堆积密度等于上届 $vol(B_{r/2}^n)$ 当且仅当 $f = 0$ 在 $\Lambda - \{0\}$ ，且 $\widehat{f} = 0$ 在 $\Lambda^* - \{0\}$ 。

5 模形式初等理论

Viazovska通过模形式巧妙地构造了“魔幻”函数，解决了8和24维的球堆积问题。下面我们将介绍一些与球堆积问题密切相关的模形式初等理论，这部分内容主要选自Zagier[3]。

5.1 模形式定义

首先定义复空间中的上半平面：

$$\mathfrak{H} := \{z = a + bi \in \mathbb{C} : b > 0\}$$

定义特殊线性群：

$$SL(2, \mathbb{R}) := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$$

将此群作用到上半平面 \mathfrak{H} 上，得到分式线性变换（又叫莫比乌斯变换）：

$$\forall \gamma \in SL(2, \mathbb{R}), \quad \gamma(z) := \frac{az + b}{cz + d}, \quad \forall z \in \mathfrak{H}$$

因为

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im}(\gamma(z)) &= \operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \\
 &= \operatorname{Im}\left(\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2}\right) \\
 &= \operatorname{Im}\left(\frac{(adz+bc\bar{z})}{|cz+d|^2}\right) \\
 &= \frac{ad\operatorname{Im}(z)-bc\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2} \\
 &= \frac{(ad-bc)\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2} \\
 &= \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2} > 0
 \end{aligned}$$

故

$$\forall \gamma \in SL(2, \mathbb{R}), \quad z \in \mathfrak{H}, \quad \gamma(z) \in \mathfrak{H}$$

注意到

$$\forall M, -M \in SL(2, \mathbb{R}), \quad M(z) = -M(z)$$

故让我们想到模群

$$PSL(2, \mathbb{R}) := SL(2, \mathbb{R}) / \{\pm I\}$$

现在考虑 $SL(2, \mathbb{R})$ 的离散子群 $SL(2, \mathbb{Z}) := \Gamma(1)$, 一般地

$$\begin{aligned}
 \Gamma(N) &:= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}), \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \pmod{N} \right\} \\
 \Gamma_1(N) &:= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}), \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \pmod{N} \right\} \\
 \Gamma_0(N) &:= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}), \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \pmod{N} \right\}
 \end{aligned}$$

其中*表示任意整数, N又叫做同余模群的level。

定义9 给定任意的离散模群 $\Gamma \subseteq SL(2, \mathbb{Z})$, 我们可以定义一个权重 (weight) 是 k 的模形式 $f : \mathfrak{H} \rightarrow \mathbb{C}$, 其满足以下条件:

(1) f 在 \mathfrak{H} 上是全纯函数 (holomorphic)。

(2) f 可以全纯地解析延拓到 $i\infty$.

$$(3) f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z), \quad \forall z \in \mathfrak{H}, \quad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$$

下面介绍一下关于模形式很重要的性质。

性质1: $f((\gamma\gamma')(z)) = f(\gamma(\gamma'(z))), \quad \forall \gamma, \gamma' \in \Gamma$

证明 设

$$\gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \gamma' = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

则有

$$\gamma\gamma' = \begin{bmatrix} aa_1 + bc_1 & ab_1 + bd_1 \\ ca_1 + dc_1 & cb_1 + dd_1 \end{bmatrix} \in \Gamma$$

由于

$$\begin{aligned} f((\gamma\gamma')(z)) &= f\left(\frac{(aa_1 + bc_1)z + ab_1 + bd_1}{(ca_1 + dc_1)z + cb_1 + dd_1}\right) \\ &= ((ca_1 + dc_1)z + cb_1 + dd_1)^k f(z) \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} f(\gamma(\gamma'(z))) &= f\left(\gamma\left(\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\right)\right) \\ &= f\left(\frac{\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b}{c \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d}\right) \\ &= f\left(\frac{a(a_1 z + b_1) + b(c_1 z + d_1)}{c(a_1 z + b_1) + d(c_1 z + d_1)}\right) \\ &= f\left(\frac{(aa_1 + bc_1)z + ab_1 + bd_1}{(ca_1 + dc_1)z + cb_1 + dd_1}\right) \\ &= ((ca_1 + dc_1)z + cb_1 + dd_1)^k f(z) \end{aligned}$$

故

$$f((\gamma\gamma')(z)) = f(\gamma(\gamma'(z)))$$

性质2: $f(z+t) = f(z), \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \quad z \in \mathfrak{H}$

证明 考虑矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \Gamma, \quad t \in \mathbb{Z}$$

则有

$$f\left(\frac{1z + t}{0z + 1}\right) = (0z + 1)^k f(z)$$

即

$$f(z+t) = f(z)$$

性质3: 权重k一般为正的偶数。当k = 0时，由模形式定义第三条可以推知f只能为常值函

数；当k小于0时，第二条将出现问题；并且当k为奇数时， $f \equiv 0$ ，这是因为

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \Gamma \subseteq SL(2, \mathbb{Z}) \Rightarrow f\left(\frac{-z+0}{0z-1}\right) = (0z-1)^k f(z) \Rightarrow f \equiv 0$$

现在考虑权重为k的定义在 Γ 上的模形式构成的函数空间，表示为 $M_k(\Gamma)$ ，则

$$M_*(\Gamma) := \bigoplus_k M_k(\Gamma)$$

构成一个分级环 (graded ring)：环运算就定义为普通的加法与乘法，加法单位元为0，乘法单位元为常函数1（其权重为0）。下面验证封闭性：

$$f_k\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f_k(z), \quad f_l\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^l f_l(z)$$

$$f_k \cdot f_l = (cz+d)^{k+l} f_k(z) f_l(z)$$

可以看出一个权重为k的模形式乘上一个权重为l的模形式将得到一个权重为 $k + l$ 的模形式。我们即将证明 $M_k(\Gamma)$ 是有限维的，并且 $M_*(\Gamma)$ 由有限个生成元生成。

5.2 Eisenstein级数和theta级数

首先，在每一个格上我们都可以定义一个theta级数

$$\Theta_\Lambda(z) := \sum_{x \in \Lambda} e^{\pi i |x|^2 z} \quad \forall z \in \mathfrak{H}$$

定理 7. 如果 Λ 是一个定义在 \mathbb{R}^n 上的格，那么

$$\Theta_\Lambda(z) = \frac{1}{vol(\mathbb{R}^n/\Lambda)} (i/z)^{n/2} \Theta_{\Lambda^*}(-1/z) \quad \forall z \in \mathfrak{H}$$

证明 首先令

$$f(x) := e^{-\pi t x^2} \quad t > 0$$

则

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\pi t x^2 + 2\pi i x y)} dx = \frac{e^{-\pi y^2/t}}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u^2} du = \frac{e^{-\pi y^2/t}}{\sqrt{t}}$$

其中 $u = \sqrt{t}(x - iy/t)$ ，故

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t n^2} = t^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/t}$$

类似的，我们推广到高维的格点 Λ 中，并且用上Poisson求和公式，有

$$\sum_{x \in \Lambda} e^{-\pi t |x|^2} = \frac{1}{vol(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{y \in \Lambda^*} t^{-n/2} e^{-\pi |y|^2/t}$$

令 $z = it$, 有

$$\Theta_{\Lambda}(z) = \frac{1}{vol(\mathbb{R}^n/\Lambda)}(i/z)^{n/2}\Theta_{\Lambda*}(-1/z)$$

由此定理我们分别令 $\Lambda = E_8$ 和 $\Lambda = \Lambda_{24}$ 很容易得到

$$\begin{aligned}\Theta_{E_8}(-1/z) &= z^4\Theta_{E_8}(z) \\ \Theta_{E_8}(z+1) &= \Theta_{E_8}(z) \\ \Theta_{\Lambda_{24}}(-1/z) &= z^{12}\Theta_{\Lambda_{24}}(z) \\ \Theta_{\Lambda_{24}}(z+1) &= \Theta_{\Lambda_{24}}(z)\end{aligned}$$

下面介绍一个著名的模形式, Eisenstein级数的定义

$$E_k(z) := \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2/(0,0)} (mz+n)^{-k}, \quad \forall z \in \mathfrak{H} \quad (1)$$

其中 k 为大于2的偶数。下面证明一个公式

$$E_k(z) := 1 + \frac{2}{\zeta(1-k)} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \quad (2)$$

其中 $q = e^{2\pi iz}$ 并且 $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$, $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$ 。

证明 首先我们由欧拉曾经证明过的很著名的式子开始

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z+n} = \frac{\pi}{\tan \pi z} \quad z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z} \quad (3)$$

由于

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\tan \pi z} &= \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \pi i \frac{e^{\pi iz} + e^{-\pi iz}}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}} = -\pi i \frac{1+q}{1-q} = -\pi i \frac{1+2q-q}{1-q} \\ &= -\pi i \left(1 + \frac{2q}{1-q}\right) = -\pi i \left(1 + 2q \sum_{r=0}^{\infty} q^r\right) = -2\pi i \left(1/2 + \sum_{r=1}^{\infty} q^r\right)\end{aligned}$$

将结果代入 (3), 对 z 求 $k-1$ 次导并且除以 $(-1)^{k-1}(k-1)!$ 得到

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(\frac{\pi}{\tan \pi z} \right) = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} q^r$$

故有

$$E_k(z) = \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{n \neq 0} n^{-k} + \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2/(0,0)} \frac{1}{(mz+n)^k} = \frac{1}{\zeta(k)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k} + \frac{1}{\zeta(k)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2\pi i)^k}{(k-1)!\zeta(k)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} q^{mr} &= 1 + \frac{2}{\zeta(1-k)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r|n}^{\infty} r^{k-1} q^n \\ &= 1 + \frac{2}{\zeta(1-k)} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \end{aligned}$$

下面介绍两个很有用的定理，由于证明过程繁杂，此处不加赘述，具体可以详见Zagier[5]第一章到第二章。

定理 8. 当 $k < 0$ 或者 k 为奇数， $M_k(\Gamma(1))$ 的维数是 0；当 k 为大于 0 的偶数时，我们有：

$$\dim M_k(\Gamma(1)) \leq \begin{cases} \left[\frac{k}{12}\right] + 1 & x \not\equiv 2 \pmod{12}, \\ \left[\frac{k}{12}\right] & x \equiv 2 \pmod{12} \end{cases}$$

定理 9. $M_*(\Gamma(1))$ 可以由 E_4 与 E_6 自由地生成，换言之，集合

$$\{E_4^i E_6^j : i, j \geq 0 \text{ and } 4i + 6j = k\}$$

是权重为 k 的模形式的基。

5.3 8维和24维证明前的准备

定义10 给定任意的离散模群 $\Gamma \subseteq SL(2, \mathbb{Z})$ ，我们可以定义一个权重 (weight) 是 k 的弱模形式 $f : \mathfrak{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ，其满足以下条件：

$$(1) f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z), \quad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma$$

(2) 对于任意的 $\gamma \in SL(2, \mathbb{Z})$ ， $F(z) := (cz+d)^{-k} f(\gamma(z))$ 有傅里叶展开

$$F(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} c_F(\gamma, \frac{n}{n_\gamma}) e^{2\pi i \frac{n}{n_\gamma} z}$$

对于某个 $n_0 \in \mathbb{Z}$ ， $n_\gamma \in \mathbb{Z}$

我们用 $M_k^!(\Gamma)$ 表示所有弱模形式的函数空间，该空间是无穷维的。下面介绍一个著名的弱模形式

$$j := \frac{1728 E_4^3}{E_4^3 - E_6^2}$$

其傅里叶展开为

$$j(z) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + O(q^3)$$

其傅里叶系数为

$$c_j(n) = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k(n)}{k} I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{k}\right) \quad n \in \mathbb{Z}_{>0} \quad (4)$$

其中

$$A_k(n) = \sum_{\substack{h \mod k \\ (h,k)=1}} e^{-2\pi i (nh+h')/k}, \quad hh' \equiv -1 \pmod{k}$$

并且 I_1 是修饰的贝塞尔函数[7]

注意当 $k=2$ 时(1)不一定收敛，但是对于 (2) 其仍然收敛到一个上半平面的全纯函数，故我们可以定义

$$E_2(z) := 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n \quad (5)$$

注意该函数不是模形式，但是满足

$$z^{-2} E_2(-1/z) = E_2(z) - \frac{6i}{\pi z} \quad (6)$$

下面定义三个theta函数

$$\begin{aligned} \theta_{00}(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z} \\ \theta_{01}(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{\pi i n^2 z} \\ \theta_{10}(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i (n+1/2)^2 z} \end{aligned}$$

将 $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 作用在这些theta函数上，我们有

$$z^{-2} \theta_{00}^4(-1/z) = -\theta_{00}^4(z) \quad (7)$$

$$z^{-2} \theta_{01}^4(-1/z) = -\theta_{10}^4(z) \quad (8)$$

$$z^{-2} \theta_{10}^4(-1/z) = -\theta_{01}^4(z) \quad (9)$$

$$\theta_{00}^4(z+1) = \theta_{01}^4(z) \quad (10)$$

$$\theta_{01}^4(z+1) = \theta_{00}^4(z) \quad (11)$$

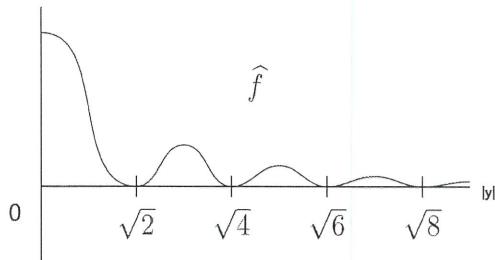
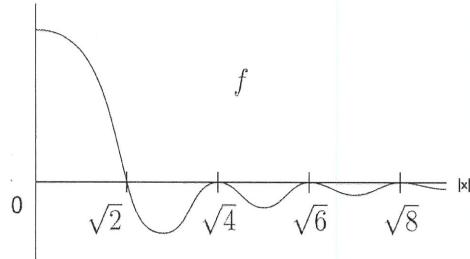
$$\theta_{10}^4(z+1) = -\theta_{10}^4(z) \quad (12)$$

并且它们满足

$$\theta_{01}^4 + \theta_{10}^4 = -\theta_{00}^4 \quad (13)$$

6 8维情形的证明

在此章节我们将具体展示Viazovska8维“魔幻”函数的构造方法以及证明。我们大概要构造如下面的函数(此两个图出自[1]):



首先构造两个在 $E_8 - \{0\}$ 上为0的Schwarz函数 $a, b : \mathbb{R}^8 \rightarrow i\mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(a) = a, \quad \mathcal{F}(b) = -b \quad (14)$$

这里的 a, b 又可以看做傅里叶变换下的特征函数, 定义 a, b 为纯虚数值函数是为了方便我们的计算。后面我们即将通过 a, b 的某种线性组合构造出“魔”函数满足定理6。下面定义

$$\phi_{-4} := -DjE_6^{-1} \quad (15)$$

$$\phi_{-2} := \phi_{-4}E_2 + DjE_4^{-1} \quad (16)$$

$$\phi_0 := \phi_{-4}E_2^2 + 2DjE_4^{-1}E_2 + j - 1728 \quad (17)$$

其中, $Dj(z) = \frac{1}{2i\pi} \frac{d}{dz} j(z)$, 这些函数的傅里叶展开为

$$\phi_{-4}(z) = q^{-1} + 504 + 73764q + 2695040q^2 + 54755730q^3 + O(q^4) \quad (18)$$

$$\phi_{-2}(z) = 720 + 203040q + 9417600q^2 + 223473600q^3 + 3566782080q^4 + O(q^5) \quad (19)$$

$$\phi_0(z) = 518400q + 31104000q^2 + 870912000q^3 + 15697152000q^4 + O(q^5) \quad (20)$$

其中 $q = e^{2i\pi z}$, ϕ_0 不是模形式, 但是却有:

$$\phi_0\left(\frac{-1}{z}\right) = \phi_0(z) - \frac{12i}{\pi z} \phi_{-2}(z) - \frac{36}{\pi^2 z^2} \phi_{-4}(z) \quad (21)$$

6.1 对应1特征值的特征函数 $a(x)$

对于 $x \in \mathbb{R}^8$, 我们定义

$$\begin{aligned} a(x) := & \int_{-1}^i \phi_0\left(\frac{-1}{z+1}\right)(z+1)^2 e^{\pi i ||x||^2 z} dz + \int_1^i \phi_0\left(\frac{-1}{z-1}\right)(z-1)^2 e^{\pi i ||x||^2 z} dz \\ & - 2 \int_0^i \phi_0\left(\frac{-1}{z}\right) z^2 e^{\pi i ||x||^2 z} dz + 2 \int_i^{i\infty} \phi_0(z) e^{\pi i ||x||^2 z} dz \end{aligned} \quad (22)$$

我们可以证明以上积分是绝对收敛的, 对于 $\forall x \in \mathbb{R}^8$ 一致地成立, 并且 $\phi_0(z) = O(e^{-2\pi iz})$ 当 $Im(z) \rightarrow \infty$, 所以 $a(x)$ 是定义良好的。

命题6.1 (30)所定义的函数是Schwartz函数并且满足

$$\hat{a}(x) = a(x)$$

证明 首先, 我们证明 (22) 是Schwartz函数。由 (2),(5),(6) 我们可以得到 ϕ_0 的傅里叶系数满足:

$$|c_{\phi_0}(n)| \leq 2e^{4\pi\sqrt{n}} \quad n \in \mathbb{Z}_{>0}$$

因此, 存在正的常数C使得

$$|\phi_0(z)| \leq Ce^{-2\pi Im(z)} \quad Im(z) > \frac{1}{2}$$

我们放缩 (30) 第一个积分式子, 对于 $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^i \phi_0\left(\frac{-1}{z+1}\right)(z+1)^2 e^{\pi ir^2 z} dz \right| &= \left| \int_{i\infty}^{-1/(i+1)} \phi_0(z) z^{-4} e^{\pi ir^2(-1/z-1)} dz \right| \\ &\leq C_1 \int_{1/2}^{\infty} e^{-2\pi t} e^{-\pi r^2/t} dt \\ &\leq C_1 \int_0^{\infty} e^{-2\pi t} e^{-\pi r^2/t} dt \\ &= C_2 r K_1(2\sqrt{2\pi r}) \end{aligned}$$

其中 C_1, C_2 都是正的常数并且 $K_\alpha(x)$ 是修饰的贝塞尔函数，在[7]中可以找到。（22）的第二和第三个积分式也可以作同样的不等式，对于最后一个，我们有：

$$\left| \int_i^{i\infty} \phi_0 e^{\pi i ||x||^2 z} dz \right| \leq C \int_1^\infty e^{-2\pi t} e^{-\pi r^2/t} dt = C_3 \frac{e^{\pi(r^2+2)}}{r^2+2}$$

因此，我们有

$$|a(r)| \leq 4C_2 r K_1(2\sqrt{2}\pi r) + 2C_3 \frac{e^{\pi(r^2+2)}}{r^2+2}$$

类似的证明同样可以对 $\frac{d^k}{dr^k} a(r)$ 进行，故为Schwartz函数。

下面我们证明 a 是它傅里叶变换的特征函数。注意到高斯函数的傅里叶变换是：

$$\mathcal{F}(e^{\pi i ||x||^2 z})(y) = z^{-4} e^{\pi i ||y||^2 (-1/z)}$$

又

$$\hat{a}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x) e^{-2\pi i \langle x, y \rangle} dx$$

注意到作傅里叶变换的时候是对 x 积分，而（22）中 $a(x)$ 的定义是对 z 积分，此双重积分由控制收敛定理可以交换积分顺序，即

$$\begin{aligned} \hat{a}(y) &= \int_{-1}^i \phi_0\left(\frac{-1}{z+1}\right)(z+1)^2 z^{-4} e^{\pi i ||y||^2 (-1/z)} dz + \int_1^i \phi_0\left(\frac{-1}{z-1}\right)(z-1)^2 z^{-4} e^{\pi i ||y||^2 (-1/z)} dz \\ &\quad - 2 \int_0^i \phi_0\left(\frac{-1}{z}\right) z^2 z^{-4} e^{\pi i ||y||^2 (-1/z)} dz + 2 \int_i^{i\infty} \phi_0 z^{-4} e^{\pi i ||y||^2 (-1/z)} dz \end{aligned}$$

作变量替换 $w = \frac{-1}{z}$

$$\begin{aligned} \hat{a}(y) &= \int_1^i \phi_0\left(1 - \frac{1}{w-1}\right)(-1/w+1)^2 w^2 e^{\pi i ||y||^2 w} dw \\ &\quad + \int_{-1}^i \phi_0\left(1 - \frac{1}{w+1}\right)(-1/w-1)^2 w^2 e^{\pi i ||y||^2 w} dw \\ &\quad - 2 \int_0^i \phi_0(w) e^{\pi i ||y||^2 w} dw + 2 \int_i^{i\infty} \phi_0(-1/w) w^2 e^{\pi i ||y||^2 w} dw \end{aligned}$$

由于 ϕ_0 是以1为周期的函数，故

$$\begin{aligned} \hat{a}(y) &= \int_1^i \phi_0\left(\frac{-1}{z-1}\right)(z-1)^2 e^{\pi i ||x||^2 z} dz + \int_{-1}^i \phi_0\left(\frac{-1}{z+1}\right)(z+1)^2 e^{\pi i ||x||^2 z} dz \\ &\quad + 2 \int_i^{i\infty} \phi_0(z) e^{\pi i ||x||^2 z} dz - 2 \int_0^i \phi_0\left(\frac{-1}{z}\right) z^2 e^{\pi i ||x||^2 z} dz \end{aligned}$$

接下来将证明 a 在 E_8 的所有非0格点上具有二重根。

命题6.2 当 $r > \sqrt{2}$ 时, 有

$$a(r) = -4 \sin(\pi r^2/2)^2 \int_0^{i\infty} \phi_0\left(\frac{-1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} dz \quad (23)$$

证明 我们不妨将上式右侧表示为 $d(r)$, 很容易验证 $d(r)$ 是定义良好的, 由(18)-(21)可以得到

$$\begin{aligned} \phi_0\left(\frac{-1}{it}\right) &= O(e^{-2\pi/t}) \quad t \rightarrow 0 \\ \phi_0\left(\frac{-1}{it}\right) &= O(t^{-2}e^{2\pi t}) \quad t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

因此 (23) 中的积分是绝对收敛的对于 $r > \sqrt{2}$, 故

$$\begin{aligned} d(r) &= \int_{-1}^{i\infty-1} \phi_0\left(\frac{-1}{z+1}\right)(z+1)^2 e^{\pi i r^2 z} dz - 2 \int_0^{i\infty} \phi_0\left(\frac{-1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} dz \\ &\quad + \int_1^{i\infty+1} \phi_0\left(\frac{-1}{z-1}\right)(z-1)^2 e^{\pi i r^2 z} dz \end{aligned}$$

由 (21) 可以得到当 $r > \sqrt{2}$ 时, $\phi_0\left(\frac{-1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} \rightarrow 0$ 当 $Im(z) \rightarrow \infty$, 故

$$\begin{aligned} d(r) &= \int_{-1}^i \phi_0\left(\frac{-1}{z+1}\right)(z+1)^2 e^{\pi i r^2 z} dz + \int_i^{i\infty} \phi_0\left(\frac{-1}{z+1}\right)(z+1)^2 e^{\pi i r^2 z} dz \\ &\quad - 2 \int_0^i \phi_0\left(\frac{-1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} dz - 2 \int_i^{i\infty} \phi_0\left(\frac{-1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} dz \\ &\quad + \int_1^i \phi_0\left(\frac{-1}{z-1}\right)(z-1)^2 e^{\pi i r^2 z} dz + \int_i^{i\infty} \phi_0\left(\frac{-1}{z-1}\right)(z-1)^2 e^{\pi i r^2 z} dz \end{aligned}$$

根据 (21) 我们有

$$\begin{aligned} &\phi_0\left(\frac{-1}{z+1}\right)(z+1)^2 - 2\phi_0\left(\frac{-1}{z}\right)z^2 + \phi_0\left(\frac{-1}{z-1}\right)(z-1)^2 \\ &= \phi_0(z+1)(z+1)^2 - 2\phi_0(z)z^2 + \phi_0(z-1)(z-1)^2 \\ &\quad - \frac{12i}{\pi}(\phi_{-2}(z+1)(z+1) - 2\phi_{-2}(z)z + \phi_{-2}(z-1)(z-1)) \\ &\quad - \frac{36i}{\pi^2}(\phi_{-4}(z+1) - 2\phi_{-4}(z) + \phi_{-4}(z-1)) = 2\phi_0(z) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} d(r) &= \int_{-1}^i \phi_0\left(\frac{-1}{z+1}\right)(z+1)^2 e^{\pi i r^2 z} dz - 2 \int_0^i \phi_0\left(\frac{-1}{z}\right) z^2 e^{\pi i r^2 z} dz \\ &\quad + \int_1^i \phi_0\left(\frac{-1}{z-1}\right)(z-1)^2 e^{\pi i r^2 z} dz + 2 \int_i^{i\infty} \phi_0(z) e^{\pi i r^2 z} dz = a(r) \end{aligned}$$

命题6.3 对于 $r \geq 0$ 我们有

$$\begin{aligned} a(r) &= 4i \sin(\pi r^2/2)^2 \left(\frac{36}{\pi^3(r^2-2)} - \frac{8640}{\pi^3 r^4} + \frac{18144}{\pi^3 r^2} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty (t^2 \phi_0(\frac{i}{t}) - \frac{36}{\pi^2} e^{2\pi t} + \frac{8640}{\pi} t - \frac{18144}{\pi^2}) e^{-\pi r^2 t} dt \right) \end{aligned} \quad (24)$$

证明 假设 $r > \sqrt{2}$, 由命题2我们知道

$$a(r) = 4i \sin(\pi r^2/2)^2 \int_0^\infty \phi_0(\frac{i}{t}) t^2 e^{-\pi r^2 t} dt$$

由 (19) - (20) 我们有

$$\phi_0(\frac{i}{t}) t^2 = \frac{36}{\pi^2} e^{2\pi t} - \frac{8640}{\pi} t + \frac{18144}{\pi^2} + O(t^2 e^{-2\pi t}), \quad t \rightarrow \infty \quad (25)$$

对于 $r > \sqrt{2}$ 我们有

$$\int_0^\infty (\frac{36}{\pi^2} e^{2\pi t} - \frac{8640}{\pi} t + \frac{18144}{\pi^2}) e^{-\pi r^2 t} dt = \frac{36}{\pi^2} e^{2\pi t} - \frac{8640}{\pi} t + \frac{18144}{\pi^2} \quad (26)$$

因此, 对于 $r > \sqrt{2}$, (24) 是对的。另外, 从 (21) 的定义我们可以看出, $a(r)$ 可以解析延拓到 $[0, \infty]$ 的某个领域, 注意到由 (25) 可以知道 (24) 同样可以解析延拓到 $[0, \infty]$ 的某个领域, 因此 (24) 对于 $[0, \infty]$ 都是成立的。

命题6.4

$$a(0) = \frac{-i8640}{\pi} \quad a(\sqrt{2}) = 0 \quad a'(\sqrt{2}) = \frac{i72\sqrt{2}}{\pi} \quad (27)$$

证明 由命题6.3立得。

6.2 对应-1特征值的特征函数 $b(x)$

现在我们来构造 b 。考虑

$$h(z) := 128 \frac{\theta_{00}^4(z) + \theta_{01}^4(z)}{\theta_{10}^8(z)} \quad (28)$$

下面我们验证 $h \in M_{-2}^!(\Gamma_0(2))$ 。对于 $\forall \gamma \in \Gamma_0(2)$, 有 $h|_{-2\gamma} = h$ 。并且 $\Gamma_0(2)$ 是由 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 生成, h 在它们的作用下是平移不变的。对于 h 的极点 (poles), 我们知道 θ_{10} 是没有零点的在上半平面上, 因此 h 的极点只有在尖点 (cusps) 处。在尖点 $i\infty$ 这个模形式有傅里叶展开

$$h(z) := q^{-1} + 16 - 132q + 640q^2 - 2550q^3 + O(q^4)$$

下面定义 Γ_1 中三个特殊的元素：

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

然后

$$\psi_I := h - h|_{-2}ST \quad (29)$$

$$\psi_T := \psi_I|_{-2}T \quad (30)$$

$$\psi_S := \psi_I|_{-2}S \quad (31)$$

即

$$\psi_I(z) = 128 \frac{\theta_{00}^4(z) + \theta_{01}^4(z)}{\theta_{10}^8(z)} + 128 \frac{\theta_{01}^4(z) - \theta_{10}^4(z)}{\theta_{00}^8(z)} \quad (32)$$

$$\psi_T(z) = 128 \frac{\theta_{00}^4(z) + \theta_{01}^4(z)}{\theta_{10}^8(z)} + 128 \frac{\theta_{00}^4(z) + \theta_{10}^4(z)}{\theta_{01}^8(z)} \quad (33)$$

$$\psi_S(z) = -128 \frac{\theta_{00}^4(z) + \theta_{10}^4(z)}{\theta_{01}^8(z)} - 128 \frac{\theta_{10}^4(z) - \theta_{01}^4(z)}{\theta_{00}^8(z)} \quad (34)$$

它们的傅里叶展开分别是

$$\psi_I(z) = q^{-1} + 144 - 5120q^{1/2} + 70524q - 626688q^{3/2} + 4265600q^2 + O(q^{5/2}) \quad (35)$$

$$\psi_T(z) = q^{-1} + 144 + 5120q^{1/2} + 70524q + 626688q^{3/2} + 4265600q^2 + O(q^{5/2}) \quad (36)$$

$$\psi_S(z) = -10240q^{1/2} - 1253376q^{3/2} - 48328704q^{5/2} - 1059078144q^{7/2} + O(q^{9/2}) \quad (37)$$

对于 $x \in \mathbb{R}^8$, 我们定义

$$b(x) := \int_{-1}^i \psi_T(z) e^{\pi i \|x\|^2 z} dz + \int_1^i \psi_T(z) e^{\pi i \|x\|^2 z} dz \quad (38)$$

$$-2 \int_0^i \psi_I(z) e^{\pi i \|x\|^2 z} dz - 2 \int_i^{i\infty} \psi_S(z) e^{\pi i \|x\|^2 z} dz$$

命题6.5(38)所定义的函数是Schwartz函数并且满足

$$\widehat{b}(x) = -b(x)$$

证明 关于 b 是Schwartz函数的证明和 a 类似, 下面证明 b 满足 $\widehat{b}(x) = -b(x)$ 。

$$\mathcal{F}(b)(x) = \int_{-1}^i \psi_T(z) z^{-4} e^{\pi i \|x\|^2 (-1/z)} dz + \int_1^i \psi_T(z) z^{-4} e^{\pi i \|x\|^2 (-1/z)} dz$$

$$- 2 \int_0^i \psi_I(z) z^{-4} e^{\pi i ||x||^2 (-1/z)} dz - 2 \int_i^{i\infty} \psi_S(z) z^{-4} e^{\pi i ||x||^2 (-1/z)} dz$$

作变量替换 $w = -1/z$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(b)(x) &= \int_1^i \psi_T(-1/w) w^2 e^{\pi i ||x||^2 w} dw + \int_{-1}^i \psi_T(-1/w) w^2 e^{\pi i ||x||^2 w} dw \\ &\quad - 2 \int_{i\infty}^i \psi_I(-1/w) w^2 e^{\pi i ||x||^2 w} dw - 2 \int_i^0 \psi_S(-1/w) w^2 e^{\pi i ||x||^2 w} dw \end{aligned}$$

由定义(35)-(37)得到

$$\psi_T|_{-2} S = -\psi_T$$

$$\psi_I|_{-2} S = \psi_S$$

$$\psi_S|_{-2} S = \psi_I$$

因此

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(b)(x) &= \int_1^i -\psi_T(z) e^{\pi i ||x||^2 z} dz + \int_{-1}^i -\psi_T(z) e^{\pi i ||x||^2 z} dz \\ &\quad + 2 \int_i^{i\infty} \psi_S(z) e^{\pi i ||x||^2 z} dz + 2 \int_0^i \psi_I(z) e^{\pi i ||x||^2 z} dz \end{aligned}$$

即

$$\widehat{b}(x) = -b(x)$$

命题6.6 当 $r > \sqrt{2}$ 时, 有

$$b(r) = -4 \sin(\pi r^2/2)^2 \int_0^{i\infty} \psi_I(z) e^{\pi i r^2 z} dz \quad (39)$$

证明 我们不妨将上式右侧表示为 $c(r)$, 很容易验证 $c(r)$ 是定义良好的, 因为

$$\psi_I(it) = O(t^2 e\pi/t) \quad t \rightarrow 0$$

$$\psi_I(it) = O(e^{2\pi t}) \quad t \rightarrow \infty$$

因此 (39) 中的积分是绝对收敛的对于 $r > \sqrt{2}$, 故

$$c(r) = \int_{-1}^{i\infty-1} \psi_I(z+1) e^{\pi i r^2 z} dz - 2 \int_0^{i\infty} \psi_I(z) e^{\pi i r^2 z} dz + \int_1^{i\infty+1} \psi_I(z-1) e^{\pi i r^2 z} dz$$

由(35)的傅里叶展开我们知道

$$\psi_I(z) = e^{-2\pi iz} + O(1) \quad Im(z) \rightarrow \infty$$

并且 $r > \sqrt{2}$, 我们可以转换积分路径 (全纯函数积分只与始末点有关, 与积分路径无关), 故

$$\int_{-1}^{i\infty-1} \psi_I(z+1) e^{\pi i r^2 z} dz = \int_{-1}^i \psi_T(z) e^{\pi i r^2 z} dz + \int_i^{i\infty} \psi_T(z) e^{\pi i r^2 z} dz \quad (40)$$

$$\int_1^{i\infty+1} \psi_I(z-1) e^{\pi i r^2 z} dz = \int_{-1}^i \psi_T(z) e^{\pi i r^2 z} dz + \int_i^{i\infty} \psi_T(z) e^{\pi i r^2 z} dz \quad (41)$$

故

$$\begin{aligned} c(r) = & \int_{-1}^i \psi_T(z) e^{\pi i r^2 z} dz + \int_1^i \psi_T(z) e^{\pi i r^2 z} dz - 2 \int_0^i \psi_I(z) e^{\pi i r^2 z} dz \\ & + 2 \int_i^{i\infty} (\psi_T(z) - \psi_I(z)) e^{\pi i r^2 z} dz \end{aligned} \quad (42)$$

另外由于

$$\psi_T + \psi_S = (h - h|_{-2} ST)|_{-2} T + (h - h|_{-2} ST)|_{-2} S = h|_{-2} T - h|_{-2} ST^2 + h|_{-2} S - h|_{-2} STS$$

注意到 $ST^2 S \in \Gamma_0(2)$, 因此 $h \in M_{-2}^1 \Gamma_0(2)$, 故

$$\psi_T + \psi_S = h|_{-2} T - h|_{-2} STS$$

另外 $T, STS(ST)^{-1} \in \Gamma_0(2)$, 因此

$$\psi_T + \psi_S = h|_{-2} T - h|_{-2} STS = h|_{-2} - h|ST = \psi_I$$

即

$$\psi_T + \psi_S = \psi_I \quad (43)$$

现在由(42)和(43)得到

$$c(r) = \int_{-1}^i \psi_T(z) e^{\pi i r^2 z} dz + \int_1^i \psi_T(z) e^{\pi i r^2 z} dz - 2 \int_0^i \psi_I(z) e^{\pi i r^2 z} dz - 2 \int_i^{i\infty} \psi_S(z) e^{\pi i r^2 z} dz = b(r)$$

命题6.7 当 $r > \sqrt{2}$ 时, 有

$$b(r) = 4i \sin(\pi r^2 / 2)^2 \left(\frac{144}{\pi r^2} + \frac{1}{\pi(r^2 - 2)} + \int_0^\infty (\psi_I(it) - 144 - e^{2\pi t}) e^{-\pi r^2 t} dt \right) \quad (44)$$

证明 此处证明类似于命题6.3。首先假设 $r > \sqrt{2}$, 由命题6.6得到

$$b(r) = 4i \sin(\pi r^2 / 2)^2 \int_0^\infty (\psi_I(it) e^{-\pi r^2 t} dt$$

由(44)我们得到

$$\psi_I(it) = e^{2\pi t} + 144 + O(e^{-\pi t}) \quad t \rightarrow \infty \quad (45)$$

故

$$\int_0^\infty (e^{2\pi t} + 144)e^{-\pi r^2 t} dt = \frac{1}{\pi(r^2 - 2)} + \frac{144}{\pi r^2} \quad (46)$$

因此, (38) 对于 $r > \sqrt{2}$ 时成立。对于 $r \in [0, \sqrt{2}]$, 由于 b 可以解析延拓至此区间, 故完成证明。

命题6.8

$$b(0) = 0 \quad b(\sqrt{2}) = 0 \quad b'(\sqrt{2}) = \frac{i}{2\sqrt{2}\pi} \quad (47)$$

证明 由命题6.6立得。

定理 10. 函数

$$g(x) := \frac{\pi i}{8640} a(x) + \frac{i}{240\pi} b(x) \quad x \in \mathbb{R}^8$$

在 E_8 上满足定理6的(1)-(3)条。

证明 首先定理6条件(1)由命题6.4和6.8立得。现在验证条件 (3):
由命题6.2和6.6我们知道当 $r > \sqrt{2}$ 时, 有

$$g(r) = \frac{\pi}{2160} \sin(\pi r^2/2)^2 \int_0^\infty A(t) e^{-\pi r^2 t} dt \quad (48)$$

其中

$$A(t) = -t^2 \phi_0(i/t) - \frac{36}{\pi^2} \psi_I(it)$$

我们想证明 $A(t) < 0 \quad \forall t \in (0, \infty)$

由等式 (21), (31) 我们有

$$\begin{aligned} A(t) &= -t^2 \phi_0(i/t) + \frac{36}{\pi^2} t^2 \psi_S(i/t) \\ A(t) &= -t^2 \phi_0(it) + \frac{12}{\pi} t \phi_{-2}(it) - \frac{36}{\pi^2} \phi_{-4}(it) - \frac{36}{\pi^2} \psi_I(i/t) \end{aligned}$$

下面我们将 $A(t)$ 写成主部加高阶无穷小的形式: 对于 $\forall n \geq 0$, 我们有

$$A(t) = A_0^{(n)}(t) + O(t^2 e^{-\pi n/t}) \quad t \rightarrow 0 \quad (49)$$

$$A(t) = A_\infty^{(n)}(t) + O(t^2 e^{-\pi n t}) \quad t \rightarrow \infty \quad (50)$$

我们想证明存在某个 m 使得高阶无穷小的绝对值小于等于主部的绝对值

$$\begin{aligned} |A(t) - A_0^{(m)}(t)| &= |O(t^2 e^{-\pi n/t})| \leq |A_0^{(m)}(t)| \\ |A(t) - A_\infty^{(m)}(t)| &= |O(t^2 e^{-\pi n t})| \leq |A_\infty^{(m)}(t)| \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} A_0^{(m)}(t) &< 0 \\ A_\infty^{(m)}(t) &< 0 \end{aligned}$$

则能够推出 $A(t) < 0$, 例如 $n = 6$, 由傅里叶展开(18)-(20),(35), 我们有

$$\begin{aligned} A_\infty^{(6)}(t) = & -\frac{72}{\pi^2}e^{2\pi t} - \frac{23328}{\pi^2} + \frac{184320}{\pi^2}e^{-\pi t} - \frac{5194368}{\pi^2}e^{-2\pi t} + \frac{22560768}{\pi^2}e^{-3\pi t} - \frac{250583040}{\pi^2}e^{-4\pi t} \\ & + \frac{869916672}{\pi^2}e^{-5\pi t} + t\left(\frac{8640}{\pi} + \frac{2436480}{\pi}e^{-2\pi t} + \frac{113011200}{\pi}e^{-4\pi t}\right) - t^2(518400e^{-2\pi t} + 31104000e^{-4\pi t}) \end{aligned}$$

由傅里叶展开(18)-(20),(37), 我们有

$$A_0^{(6)}(t) = t^2\left(-\frac{368640}{\pi^2}e^{-\pi/t} - 518400e^{-2\pi/t} - \frac{45121536}{\pi^2}e^{-3\pi/t} - 31104000e^{-4\pi t} - \frac{1739833344}{\pi^2}e^{-5\pi/t}\right)$$

另外, 由[9]的命题1.12可以知道, ψ_I 的第 n 个傅里叶系数 $c_{\psi_I}(n)$ 满足

$$|c_{\psi_I}(n)| \leq e^{4\pi\sqrt{n}} \quad n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0}$$

类似地有

$$\begin{aligned} |c_{\psi_S}(n)| &\leq 2e^{4\pi\sqrt{n}} \quad n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0} \\ |c_{\phi_0}(n)| &\leq 2e^{4\pi\sqrt{n}} \quad n \in \mathbb{Z}_{>0} \\ |c_{\phi_{-2}}(n)| &\leq e^{4\pi\sqrt{n}} \quad n \in \mathbb{Z}_{>0} \\ |c_{\phi_{-4}}(n)| &\leq e^{4\pi\sqrt{n}} \quad n \in \mathbb{Z}_{>0} \end{aligned}$$

因此由(49),(50)得到

$$\begin{aligned} |A(t) - A_0^{(m)}(t)| &\leq (t^2 + \frac{36}{\pi^2})\sum_{n=m}^{\infty} 2e^{2\sqrt{2}\pi\sqrt{n}}e^{-\pi n/t} \\ |A(t) - A_\infty^{(m)}(t)| &\leq (t^2 + \frac{12}{\pi}t + \frac{36}{\pi^2})\sum_{n=m}^{\infty} 2e^{2\sqrt{2}\pi\sqrt{n}}e^{-\pi nt} \end{aligned}$$

定义

$$\begin{aligned} R_0^{(m)} &:= (t^2 + \frac{36}{\pi^2})\sum_{n=m}^{\infty} 2e^{2\sqrt{2}\pi\sqrt{n}}e^{-\pi n/t} \\ R_\infty^{(m)} &:= (t^2 + \frac{12}{\pi}t + \frac{36}{\pi^2})\sum_{n=m}^{\infty} 2e^{2\sqrt{2}\pi\sqrt{n}}e^{-\pi nt} \end{aligned}$$

代入 $m = 6$ 故有

$$|R_0^{(6)}(t)| \leq |A_0^{(6)}(t)| \quad t \in (0, 1]$$

$$\begin{aligned}|R_{\infty}^{(6)}(t)| &\leq |A_{\infty}^{(6)}(t)| \quad t \in (1, \infty] \\ A_0^{(6)}(t) &< 0 \quad t \in (0, 1] \\ A_{\infty}^{(6)}(t) &< 0 \quad t \in (1, \infty]\end{aligned}$$

故有 $A(t) < 0, \quad \forall t \in (0, \infty)$

下面验证定理6的第(2)条。由命题6.3和6.7我们知道当 $r > 0$ 时，有

$$\widehat{g}(r) = \frac{\pi}{2160} \sin(\pi r^2/2)^2 \int_0^\infty B(t) e^{-\pi r^2 t} dt \quad (51)$$

其中

$$B(t) = -t^2 \phi_0(i/t) + \frac{36}{\pi^2} \psi_I(it)$$

我们想证明 $B(t) > 0 \quad \forall t \in (0, \infty)$

我们有

$$\begin{aligned}B(t) &= -t^2 \phi_0(i/t) - \frac{36}{\pi^2} t^2 \psi_S(i/t) \\ B(t) &= -t^2 \phi_0(it) + \frac{12}{\pi} t \phi_{-2}(it) - \frac{36}{\pi^2} \phi_{-4}(it) + \frac{36}{\pi^2} \psi_I(i/t)\end{aligned}$$

下面我们将 $B(t)$ 写成主部加高阶无穷小的形式：对于 $\forall n \geq 0$ ，我们有

$$B(t) = B_0^{(n)}(t) + O(t^2 e^{-\pi n/t}) \quad t \rightarrow 0 \quad (52)$$

$$B(t) = B_{\infty}^{(n)}(t) + O(t^2 e^{-\pi n t}) \quad t \rightarrow \infty \quad (53)$$

同样的，当 $n = 6$ ，我们有

$$\begin{aligned}B_{\infty}^{(6)}(t) &= -\frac{12960}{\pi^2} - \frac{184320}{\pi^2} e^{-\pi t} - \frac{116640}{\pi^2} e^{-2\pi t} - \frac{22560768}{\pi^2} e^{-3\pi t} + \frac{56540160}{\pi^2} e^{-4\pi t} \\ &\quad - \frac{869916672}{\pi^2} e^{-5\pi t} + t \left(\frac{8640}{\pi} + \frac{2436480}{\pi} e^{-2\pi t} + \frac{113011200}{\pi} e^{-4\pi t} \right) - t^2 (518400 e^{-2\pi t} + 31104000 e^{-4\pi t})\end{aligned}$$

并且

$$B_0^{(6)}(t) = t^2 \left(\frac{368640}{\pi^2} e^{-\pi/t} - 518400 e^{-2\pi/t} + \frac{45121536}{\pi^2} e^{-3\pi/t} - 31104000 e^{-4\pi t} + \frac{1739833344}{\pi^2} e^{-5\pi/t} \right)$$

另外，由[8]可以知道， ψ_I 的第 n 个傅里叶系数 $c_{\psi_I}(n)$ 满足

$$|c_{\psi_I}(n)| \leq e^{4\pi\sqrt{n}} \quad n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0}$$

类似地有

$$\begin{aligned}|c_{\psi_S}(n)| &\leq 2e^{4\pi\sqrt{n}} \quad n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{>0} \\|c_{\phi_0}(n)| &\leq 2e^{4\pi\sqrt{n}} \quad n \in \mathbb{Z}_{>0} \\|c_{\phi_{-2}}(n)| &\leq e^{4\pi\sqrt{n}} \quad n \in \mathbb{Z}_{>0} \\|c_{\phi_{-4}}(n)| &\leq e^{4\pi\sqrt{n}} \quad n \in \mathbb{Z}_{>0}\end{aligned}$$

同样有

$$\begin{aligned}|B(t) - B_0^{(6)}(t)| &\leq R_0^{(6)}(t) \quad t \in (0, 1] \\|B(t) - B_\infty^{(6)}(t)| &\leq R_\infty^{(6)}(t) \quad t \in (1, \infty]\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}|R_0^{(6)}(t)| &\leq |B_0^{(6)}(t)| \quad t \in (0, 1] \\|R_\infty^{(6)}(t)| &\leq |B_\infty^{(6)}(t)| \quad t \in (1, \infty] \\B_0^{(6)}(t) &< 0 \quad t \in (0, 1] \\B_\infty^{(6)}(t) &< 0 \quad t \in (1, \infty]\end{aligned}$$

故有 $B(t) > 0, \quad \forall t \in (0, \infty)$, 证毕。

7 24维情形的证明概要

在Viazovska于2016年三月发表8维证明之后不久，24维的证明就已经呼之欲出。2017年8月，Cohn等人、包括Viazovska联合发表一篇关于球堆积问题在24维的证明[10]。由于24维证明与构造函数方法十分类似，下面只给出具体构造的24维的“魔幻”函数，不作详细的证明，具体细节可以参考[10]。

对应1特征值的特征函数 $a(x)$: 首先定义

$$\Delta := \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728}$$

和

$$\varphi := \frac{(25E_4^4 - 49E_6^2) + 48E_6E_4^2E_2 + (-49E_4^3 + 25E_6^2)E_2^2}{\Delta^2}$$

则

$$a(r) := -4 \sin(\pi r^2/2)^2 \int_0^{i\infty} (\varphi(-1/z)z^{10}e^{\pi ir^2 z} dz \quad r > 2$$

对于 $r \in [0, 2]$ 只要解析延拓就可以了。

对应-1特征值的特征函数 $b(x)$:

$$\begin{aligned} b(r) := & -4i \sin(\pi r^2/2)^2 \left(\frac{2}{\pi(r^2-4)} - \frac{464}{\pi(r^2-2)} + \frac{172128}{\pi r^2} \right. \\ & \left. + \int_0^\infty (\psi_I(it) - 2e^{4\pi t}) + 464e^{2\pi t} - 172128 e^{-\pi r^2 t} dt \right) \quad r \geq 0 \end{aligned}$$

定理 11. 函数

$$f(x) := -\frac{\pi i}{113218560} a(x) - \frac{i}{262080\pi} b(x) \quad x \in \mathbb{R}^{24}$$

在 Λ_{24} 上满足定理6的(1)-(3)条, 其中 $\|x\| = r$ 。

故24维的最大球堆积密度为

$$\frac{\text{vol}(B_1^{24})}{\text{vol}(\mathbb{R}^{24}/\Lambda_{24})} = \frac{\pi^{12}}{12!} = 0.001929\dots$$

8 球堆积在纠错码的应用

球堆积理论不仅深刻, 而且还具有一定的实际应用价值。研究球堆积问题对于解决密码学中的纠错码(error-correcting codes)有很大的帮助。密码学或者信息论中会给一段信息编码, 从而加密这段信息, 而接受者通过特定的密钥还原这段信息。但是在发送过程中存在着一些干扰, 使得信息失真, 所以我们要纠正这些错误的乱码, 但是纠正能力是有限的。就好比一篇文章缺几个字你或许能够大概猜测出来, 但是缺失多了就不行了。我们假设我们是用数字加密信息的, 如 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, 其中每个坐标都是整数。

定义 (1) Hamming 距离: $d(u, v) = |\{i : u_i \neq v_i\}|$, 即统计两个向量之间不同的坐标的个数, 其中 $u_i, v_i \in$ 数域 F_2 (一般采用二进制进行编码)。

(2) 编码集 C 是一个 F_2^n 的线性子空间, 假设其维数为 k , 那么就一共可以编码 2^k 条信息。

(3) 编码集的最小距离 $d = \min\{d(u, v) : u, v \in C, u \neq v\}$, 编码集 (n, M, d) 指的是长度为 n , 最小距离为 d , 共有 M 串编码向量的集合, 编码向量又可以称为顶点或者格点。

给定编码集 C , 由发送者通过传输通道发某一条编码向量 u 给接收者, 但是由于误差, 导致接收者接到的为 v , 这时候接收者只能通过观察 v 与编码集中哪个编码向量最相近就猜测是哪个, 即纠错码

$$v' = \text{argmin}_u \{d(u, v) | u \in C\}$$

下面简单举个例子说明纠错过程: 例如编码集 $(n, M, d) = (3, 2, 3)$, $C = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$, 发送者发送 $u = (0, 0, 0)$, 接收者却收到 $v = (0, 0, 1)$, 纠正为 $v' = (0, 0, 0)$, 成功纠正。若发送者发送 $u = (0, 0, 0)$, 接收者却收到 $v = (0, 1, 1)$, 纠正为 $v' = (1, 1, 1)$, 纠正错误。

定理 12. 假设编码集的最小距离为 d , 那么最多能够纠错 $\rho = [(d-1)/2]$ 个编码向量, ρ 又称为纠错半径。

证明 给定编码集的最小距离为 d , 例如 $d(x_1, x_2) = d(\text{Hamming 距离})$ 。以 ρ 为半径, x_1 为球心作球, 只要是落在此球内部或者边界的, 都会被纠错为 x_1 , 如果 $\rho \geq d/2$, 此时就会被纠错为其它的点, 如 x_2 , 又因为编码向量坐标都是整数, 故 $\rho = [(d-1)/2]$ 。

为了减少延迟, 一串编码向量的长度 n 应该越短越好; 为了充分利用传输通道, M 应该越大越好;

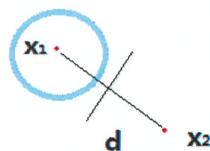


图 6: 示意图

为了尽可能多地纠正错误, d 应该越大越好。纠错码问题指的是给定长度 n 和编码集的最小距离为 d , 如何最大化编码向量的个数 M 。此问题又等价为在 n 维欧式空间的单位超立方体上选择尽可能多的顶点, 使得任意两点间的欧式距离至少为 \sqrt{d} , 即意味着在 n 维欧式空间的单位超立方体顶点上作半径为 $\sqrt{d}/2$ 的球, 尽可能地多作, 即在单位超立方体中寻找一种局部最密堆积。给定某个维数的最密球堆积排布方式, 是否能够得到该维数的纠错码问题的 M ? 答案是显然的。如我们知道8维的最密球堆积排布方式由 E_8 给出, 则 M 就是 E_8 与8维单位超立方体顶点的交的个数。更多的关于纠错码的细节可参见Conway[4]第三章第二节。

例子 当 $(n, M, d) = (3, 4, 2)$ 时, 如下图所示:

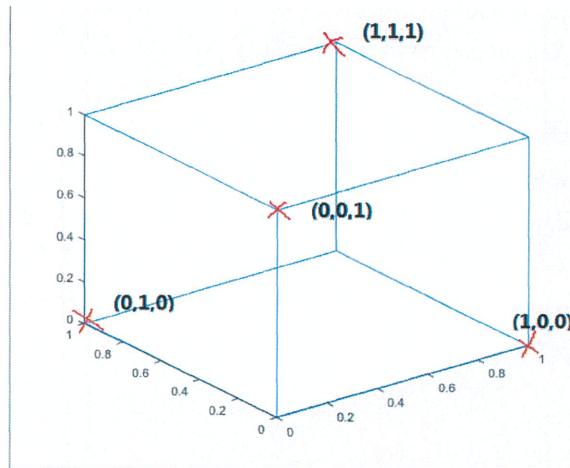


图 7: 3维示意图

9 致谢

感谢朱一飞老师一直以来对我的帮助以及指导，我一开始接触这个球堆积问题就是因为朱一飞老师的介绍，而后我被这个问题所深深地吸引，迫不及待地想弄清楚是怎么回事，一开始是在YouTube视频网站上看一些直观的理解，后来又看了许多篇论文[1][2][10]等，当然一开始看不太懂，朱一飞老师又推荐了几本书给我，包括Zagier[3]、Conway[4]等等。到我对这个问题有一定理解之后，老师与我约定每周见面一次，将每周的收获与问题在黑板上分享，每一次我都收获满满，我感到很开心，由衷地感谢老师对我的指导，谢谢。

10 参考文献

- [1] H. Cohn, *A conceptual breakthrough in sphere packing*, 2017, Notices Amer. Math. Soc. 64 (2017), no. 2, 102–115.
- [2] M. Viazovska, *The sphere packing problem in dimension 8*. Ann. of Math. (2) 185 (2017), no. 3, 991–1015.
- [3] D. Zagier, *Elliptic Modular Forms and Their Applications*, In: *The 1-2-3 of Modular Forms*, (K. Ranestad, ed.) Norway, Springer Universitext (2008).
- [4] J. H. Conway and N. J. A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, third ed., Grundlehren der Math. Wissen. 290, Springer-Verlag, New York (1999), MR 1662447. Zbl 0915.52003.
- [5] H. Groemer, *Existenzsätze für Lagerungen im Euklidischen Raum*, Math. Z. 81 (1963), 260–270.
- [6] <http://www.math.rwth-aachen.de/~Gabriele.Nebe/LATTICES/Leech.html#GRAM>
- [7] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Applied Mathematics Series 55 (10 ed.), New York, USA: United States Department of Commerce, National Bureau of Standards; Dover Publications, 1964.
- [8] H. Cohn, N. Elkies, *New upper bounds on sphere packings I*, Annals of Math. 157 (2003) pp. 689–714.
- [9] J. Bruinier, *Borcherds products on $O(2, l)$ and Chern classes of Heegner divisors*, Springer Lecture Notes in Mathematics 1780 (2002)
- [10] H. Cohn and A. Kumar, S. D. Miller, D. Radchenko, and M. Viazovska, *The sphere packing problem in dimension 24*, Annals of Mathematics 185 (2017), 1017–1033.
- [11] A. Slipper, *MODULAR MAGIC: The Theory of Modular Forms and the Sphere Packing Problem in Dimensions 8 and 24*.