

CHAPITRE O (*suite*) ⁽¹⁾

PRÉLIMINAIRES

Sommaire

- § 14. Dimension combinatoire d'un espace topologique.
- § 15. Suites M-régulières et suites \mathcal{F} -régulières.
- § 16. Dimension et profondeur dans les anneaux locaux noethériens.
- § 17. Anneaux réguliers.
- § 18. Compléments sur les extensions d'algèbres.
- § 19. Algèbres formellement lisses et anneaux de Cohen.
- § 20. Dérivations et différentielles.
- § 21. Différentielles dans les anneaux de caractéristique p .
- § 22. Critères différentiels de lissité formelle et de régularité.
- § 23. Anneaux japonais.

La presque totalité des paragraphes précédents est consacrée à l'exposé de notions d'Algèbre commutative qui seront utilisées au cours du chapitre IV. Bien qu'une bonne partie de ces notions figure déjà dans plusieurs ouvrages ([1], [12], [13], [17], [30]), on a pensé qu'il serait plus commode pour le lecteur d'en avoir une exposition suivie et à peu près indépendante. Jointes aux §§ 5, 6 et 7 du chapitre IV (où est utilisé le langage des schémas), ces paragraphes constituent, à l'intérieur de notre Traité, un petit Traité spécial, à peu près indépendant des chapitres I à III, et qui vise à présenter sous une forme cohérente les propriétés des anneaux qui « se comportent bien » relativement à des opérations telles que la complétion ou la fermeture intégrale, en rattachant systématiquement ces propriétés à quelques conceptions générales ⁽²⁾.

⁽¹⁾ On rappelle que le symbole \mathbf{O}_N (resp. \mathbf{Err}_N) réfère à la partie du chapitre o (resp. la liste d'Errata) jointe au chapitre N.

⁽²⁾ La plupart des propriétés dont il s'agit ont été découvertes par Chevalley, Zariski, Nagata et Serre. La méthode utilisée ici a d'abord été développée en automne 1961, dans un cours professé à Harvard University, par A. Grothendieck.

§ 14. DIMENSION COMBINATOIRE D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE

4.1. Dimension combinatoire d'un espace topologique.

(14.1.1) Soit I un ensemble ordonné; une chaîne d'éléments de I est par définition une suite finie strictement croissante $i_0 < i_1 < \dots < i_n$ d'éléments de I ($n \geq 0$); par définition la longueur de cette chaîne est n . Si X est un espace topologique, l'ensemble de ses parties fermées irréductibles est ordonné par inclusion, d'où la notion de chaîne de parties fermées irréductibles de X .

Définition (14.1.2). — Soit X un espace topologique. On appelle dimension combinatoire de X (ou simplement dimension de X s'il ne peut y avoir de confusion) et on note $\dim_c(X)$, ou simplement $\dim(X)$, la borne supérieure des longueurs des chaînes de parties fermées irréductibles de X . Pour tout $x \in X$, on appelle dimension combinatoire de X en x (ou simplement dimension de X en x) et on note $\dim_x(X)$ le nombre $\inf_U (\dim(U))$, où U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de x dans X .

Il résulte de cette définition que l'on a

$$\dim(\emptyset) = -\infty$$

(la borne supérieure dans $\bar{\mathbb{R}}$ de la partie vide étant $-\infty$). Si (X_α) est la famille des composantes irréductibles de X , on a

$$(14.1.2.1) \quad \dim(X) = \sup_\alpha \dim(X_\alpha)$$

car toute chaîne de parties fermées irréductibles de X est par définition contenue dans une composante irréductible de X , et inversement ces composantes sont fermées dans X , donc toute partie fermée irréductible d'un X_α est une partie fermée irréductible de X .

Définition (14.1.3). — On dit qu'un espace topologique X est équidimensionnel si toutes ses composantes irréductibles ont même dimension (égale alors à $\dim(X)$ par (14.1.2.1)).

Proposition (14.1.4). — (i) Pour toute partie Y d'un espace topologique X , on a $\dim(Y) \leq \dim(X)$.

(ii) Si un espace topologique X est réunion finie de parties fermées X_i , on a $\dim(X) = \sup_i \dim(X_i)$.

Pour toute partie fermée irréductible Z de Y , l'adhérence \bar{Z} de Z dans X est irréductible (0.1, 2.1.2) et $\bar{Z} \cap Y = Z$, d'où (i). D'autre part, si $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$, où les X_i sont fermés, toute partie fermée irréductible de X est contenue dans un des X_i (0.1, 2.1.1), et par suite toute chaîne de parties fermées irréductibles de X est contenue dans un des X_i ; d'où (ii).

On déduit de (14.1.4, (i)) que pour tout $x \in X$, on peut aussi écrire

$$(14.1.4.1) \quad \dim_x(X) = \lim_U \dim(U)$$

la limite étant prise suivant l'ensemble filtrant décroissant des voisinages ouverts de x dans X .

Corollaire (14.1.5). — Soient X un espace topologique, x un point de X , U un voisinage de x , Y_i ($1 \leq i \leq n$) des parties fermées de U telles que $x \in Y_i$ pour tout i et que U soit réunion des Y_i . Alors on a

$$(14.1.5.1) \quad \dim_x(X) = \sup_i (\dim_x(Y_i)).$$

Il résulte de (14.1.4, (ii)) que l'on a $\dim_x(X) = \inf_V (\sup_i (\dim(Y_i \cap V)))$ lorsque V parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de x contenus dans U ; de même on a $\dim_x(Y_i) = \inf_V (\dim(Y_i \cap V))$ pour tout i . Le corollaire est donc évident si

$$\sup_i (\dim_x(Y_i)) = +\infty;$$

dans le cas contraire, il y a un voisinage ouvert $V_0 \subset U$ de x tel que $\dim(Y_i \cap V) = \dim_x(Y_i)$ pour $1 \leq i \leq n$ et pour tout $V \subset V_0$, d'où la conclusion.

Proposition (14.1.6). — Pour tout espace topologique X , on a $\dim(X) = \sup_{x \in X} \dim_x(X)$.

Il résulte de la définition (14.1.2) et de la prop. (14.1.4) que $\dim_x(X) \leq \dim(X)$ pour tout $x \in X$. D'autre part, soit $Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_n$ une chaîne de parties fermées irréductibles de X , et soit $x \in Z_0$; pour tout ouvert $U \subset X$ contenant x , $U \cap Z_i$ est irréductible (0_I, 2.1.6) et fermé dans U , et comme on a $\overline{U \cap Z_i} = Z_i$ dans X , les $U \cap Z_i$ sont distincts deux à deux; donc on a $\dim(U) \geq n$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire (14.1.7). — Si (X_α) est un recouvrement ouvert de X , ou un recouvrement fermé localement fini de X , on a $\dim(X) = \sup_\alpha (\dim(X_\alpha))$.

Si X_α est un voisinage de $x \in X$, on a $\dim_x(X) \leq \dim(X_\alpha)$, d'où la première assertion. D'autre part, si les X_α sont fermés et si U est un voisinage de $x \in X$ qui ne rencontre qu'un nombre fini d'ensembles X_α , on a $\dim_x(X) \leq \dim(U) = \sup_\alpha (\dim(U \cap X_\alpha)) \leq \sup_\alpha (\dim(X_\alpha))$ d'après (14.1.4), d'où la seconde assertion.

Corollaire (14.1.8). — Soit X un espace de Kolmogoroff (0_I, 2.1.3) noethérien, et soit F l'ensemble des points fermés de X . Alors $\dim(X) = \sup_{x \in F} \dim_x(X)$.

Avec les notations de la démonstration de (14.1.6), il suffit de remarquer qu'il existe dans Z_0 un point fermé (0_I, 2.1.3).

Proposition (14.1.9). — Soit X un espace de Kolmogoroff noethérien non vide. Pour que $\dim(X) = 0$, il faut et il suffit que X soit fini et discret.

Si un espace X est séparé (et *a fortiori* si X est un espace discret), les seuls ensembles fermés irréductibles de X sont réduits à un point, donc $\dim(X) = 0$. Inversement, supposons que X soit un espace de Kolmogoroff noethérien tel que $\dim(X) = 0$; comme toute composante irréductible de X contient un point fermé (0_I, 2.1.3), elle doit être réduite à ce point. Comme X n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, il est fini et discret.

Corollaire (14.1.10). — Soit X un espace de Kolmogoroff noethérien. Pour qu'un point $x \in X$ soit isolé, il faut et il suffit que $\dim_x(X) = 0$.

La condition est évidemment nécessaire (sans hypothèse sur X). Elle est suffisante,

car il en résulte que $\dim(U) = 0$ pour un voisinage ouvert U de x , et comme U est un espace de Kolmogoroff noethérien, U est fini et discret.

Proposition (14.1.11). — *La fonction $x \mapsto \dim_x(X)$ est semi-continue supérieurement dans X .*

Il est clair que cette fonction est semi-continue supérieurement en tout point où elle vaut $+\infty$. Supposons donc $\dim_x(X) = n < +\infty$; alors, la formule (14.1.4.1) montre qu'il existe un voisinage ouvert U_0 de x tel que $\dim(U) = n$ pour tout voisinage ouvert $U \subset U_0$ de x . Cela étant, pour tout $y \in U_0$ et tout voisinage ouvert $V \subset U_0$ de y , on a $\dim(V) \leq \dim(U_0) = n$ (14.1.4); on déduit donc de (14.1.4.1) que $\dim_y(X) \leq n$.

Remarque (14.1.12). — Si X, Y sont deux espaces topologiques, et $f : X \rightarrow Y$ une application continue, on peut avoir $\dim(f(X)) > \dim(X)$; on en a un exemple en prenant pour X un espace discret à 2 éléments a, b , pour Y l'ensemble $\{a, b\}$ muni de la topologie pour laquelle les ensembles fermés sont $\emptyset, \{a\}$ et $\{a, b\}$; si $f : X \rightarrow Y$ est l'application identique, on a $\dim(Y) = 1$ et $\dim(X) = 0$. On notera que Y est le spectre d'un anneau de valuation discrète A , dont a est l'unique point fermé et b le point générique; si K et k sont le corps des fractions et le corps résiduel de A , X est le spectre de l'anneau $k \times K$ et f l'application continue correspondant à l'homomorphisme $(\varphi, \psi) : A \rightarrow k \times K$, où $\varphi : A \rightarrow k$ et $\psi : A \rightarrow K$ sont les homomorphismes canoniques (cf. IV, 5.4.3).

14.2. Codimension d'une partie fermée.

Définition (14.2.1). — *Étant donnée une partie fermée irréductible Y d'un espace topologique X , on appelle codimension combinatoire (ou simplement codimension) de Y dans X , et on note $\text{codim}(Y, X)$ la borne supérieure des longueurs des chaînes de parties fermées irréductibles de X , dont Y est le plus petit élément. Si Y est une partie fermée quelconque de X , on appelle codimension de Y dans X , et on note encore $\text{codim}(Y, X)$ la borne inférieure des codimensions dans X des composantes irréductibles de Y . On dit que X est équicodimensionnel si toutes les parties fermées irréductibles minimales de X ont même codimension dans X .*

Il résulte de cette définition que $\text{Codim}(\emptyset, X) = +\infty$, la borne inférieure de la partie vide de $\bar{\mathbf{R}}$ étant $+\infty$. Si Y est fermé dans X et si (X_α) (resp. (Y_β)) est la famille des composantes irréductibles de X (resp. Y), tout Y_β est contenu dans un X_α , et plus généralement toute chaîne de parties fermées irréductibles de X dont Y_β est le plus petit élément est formée de parties d'un X_α ; on a donc

$$(14.2.1.1) \quad \text{codim}(Y, X) = \inf_{\beta} (\sup_{\alpha} (\text{codim}(Y_\beta, X_\alpha)))$$

où pour chaque β, α parcourt l'ensemble des indices tels que $Y_\beta \subset X_\alpha$.

Proposition (14.2.2). — *Soit X un espace topologique.*

(i) *Si Φ est l'ensemble des parties fermées irréductibles de X , on a*

$$(14.2.2.1) \quad \dim(X) = \sup_{Y \in \Phi} (\text{codim}(Y, X)).$$

(ii) Pour toute partie fermée non vide Y de X , on a

$$(14.2.2.2) \quad \dim(Y) + \text{codim}(Y, X) \leq \dim(X).$$

(iii) Si Y, Z, T sont trois parties fermées de X telles que $Y \subset Z \subset T$, on a

$$(14.2.2.3) \quad \text{codim}(Y, Z) + \text{codim}(Z, T) \leq \text{codim}(Y, T).$$

(iv) Pour qu'une partie fermée Y de X soit telle que $\text{codim}(Y, X) = 0$, il faut et il suffit que Y contienne une composante irréductible de X .

Les assertions (i) et (iv) sont des conséquences immédiates de la définition (14.2.1). Pour démontrer (ii), on peut se borner au cas où Y est irréductible, et alors la formule résulte des définitions (14.1.1) et (14.2.1). Enfin, pour démontrer (iii), on peut, en vertu de la définition (14.2.1), se borner d'abord au cas où Y est irréductible; alors $\text{codim}(Y, Z) = \sup_x (\text{codim}(Y, Z_x))$ pour les composantes irréductibles Z_x de Z contenant Y ; il est clair que $\text{codim}(Y, T) \geq \text{codim}(Y, Z)$, donc l'inégalité est vraie si $\text{codim}(Y, Z) = +\infty$; sinon, il existe un α tel que $\text{codim}(Y, Z) - \text{codim}(Y, Z_\alpha)$ et en vertu de (14.2.1), on peut se borner au cas où Z est lui aussi irréductible; mais alors l'inégalité (14.2.2.3) est conséquence évidente de la définition (14.2.1).

Proposition (14.2.3). — Soient X un espace topologique, Y une partie fermée de X . Pour tout ouvert U dans X , on a

$$(14.2.3.1) \quad \text{codim}(Y \cap U, U) \geq \text{codim}(Y, X).$$

En outre, pour que les deux membres de (14.2.3.1) soient égaux, il faut et il suffit que, si (Y_α) est la famille des composantes irréductibles de Y rencontrant U , on ait $\text{codim}(Y, X) = \inf_\alpha (\text{codim}(Y_\alpha, X))$.

On sait (0_I, 2.1.6) que $Z \rightarrow \bar{Z}$ est une bijection de l'ensemble des parties fermées irréductibles de U sur l'ensemble des parties fermées irréductibles de X rencontrant U , et en particulier fait correspondre aux composantes irréductibles de $Y \cap U$ les composantes irréductibles de Y rencontrant U ; si Y_α est une de ces dernières, on a donc $\text{codim}(Y_\alpha, X) = \text{codim}(Y_\alpha \cap U, U)$, et la proposition résulte alors de la définition (14.2.1).

Définition (14.2.4). — Soient X un espace topologique, Y une partie fermée de X , x un point de X . On appelle codimension de Y dans X au point x et on note $\text{codim}_x(Y, X)$ le nombre $\sup_U (\text{codim}(Y \cap U, U))$, où U parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de x dans X .

En vertu de (14.2.3), on peut aussi écrire

$$(14.2.4.1) \quad \text{codim}_x(Y, X) = \lim_U (\text{codim}(Y \cap U, U))$$

la limite étant prise suivant l'ensemble filtrant décroissant des voisinages ouverts de x dans X . On notera que l'on a

$$\text{codim}_x(Y, X) = +\infty \quad \text{si} \quad x \in X - Y.$$

Proposition (14.2.5). — Si $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille finie de parties fermées d'un espace topologique X , et Y la réunion de cette famille, on a

$$(14.2.5.1) \quad \text{codim}(Y, X) = \inf_i(\text{codim}(Y_i, X)).$$

En effet, toute composante irréductible de l'un des Y_i est contenue dans une composante irréductible de Y , et inversement toute composante irréductible de Y est aussi composante irréductible de l'un des Y_i (0₁, 2.1.1); la conclusion résulte donc de la définition (14.2.1) et de l'inégalité (14.2.2.3).

Corollaire (14.2.6). — Soient X un espace topologique, Y un sous-espace fermé localement noethérien de X .

(i) Pour tout $x \in X$, il n'existe qu'un nombre fini de composantes irréductibles Y_i ($1 \leq i \leq n$) de Y contenant x , et l'on a $\text{codim}_x(Y, X) = \inf_i(\text{codim}(Y_i, X))$.

(ii) La fonction $x \mapsto \text{codim}_x(Y, X)$ est semi-continue inférieurement dans X .

En effet, par hypothèse il y a un voisinage ouvert U_0 de x dans X tel que $Y \cap U_0$ soit noethérien, donc n'ait qu'un nombre fini de composantes irréductibles, qui sont traces sur U_0 de composantes irréductibles de Y ; *a fortiori* il n'y a qu'un nombre fini de composantes irréductibles Y_i ($1 \leq i \leq n$) de Y contenant x , et on peut, en remplaçant U_0 par un voisinage ouvert $U \subset U_0$ de x ne rencontrant aucun des Y_i qui ne contiennent pas x , supposer que les $Y_i \cap U$ sont les composantes irréductibles de $Y \cap U$; pour tout voisinage ouvert $V \subset U$ de x dans X , les $Y_i \cap V$ sont alors les composantes irréductibles de $Y \cap V$, et (14.2.3) montre alors que $\text{codim}(Y_i, X) = \text{codim}(Y_i \cap V, V)$, ce qui prouve (i). En outre, pour tout $x' \in U$, les composantes irréductibles de Y contenant x' sont certaines des Y_i , donc $\text{codim}_{x'}(Y, X) \geq \text{codim}_x(Y, X)$, ce qui démontre (ii).

14.3. La condition des chaînes.

(14.3.1) Dans un espace topologique X , nous dirons qu'une chaîne $Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_n$ de parties fermées irréductibles est saturée s'il n'existe pas de partie fermée irréductible Z' distincte des Z_i et telle que $Z_k \subset Z' \subset Z_{k+1}$ pour un indice k .

Proposition (14.3.2). — Soit X un espace topologique tel que, pour deux parties fermées irréductibles quelconques Y, Z de X telles que $Y \subset Z$, on ait $\text{codim}(Y, Z) < +\infty$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) Deux chaînes saturées de parties fermées irréductibles de X , ayant mêmes extrémités, ont même longueur.

b) Si Y, Z, T sont trois parties fermées irréductibles de X telles que $Y \subset Z \subset T$, on a

$$(14.3.2.1) \quad \text{codim}(Y, T) = \text{codim}(Y, Z) + \text{codim}(Z, T).$$

Il est immédiat que a) entraîne b). Réciproquement, supposons b) vérifiée, et démontrons que si deux chaînes saturées de mêmes extrémités ont pour longueurs m et $n \leq m$, on a nécessairement $m = n$. Raisonnons par récurrence sur n , la proposition étant évidente pour $n = 1$. Supposons donc $n > 1$, $n \leq m$, et soit $Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_n$ une

chaîne saturée telle qu'il existe une autre chaîne saturée d'extrémités Z_0, Z_n et de longueur m . Comme $\text{codim}(Z_0, Z_n) \geq m > n$ et que $\text{codim}(Z_0, Z_1) = 1$, il résulte de b) que $\text{codim}(Z_1, Z_n) = \text{codim}(Z_0, Z_n) - 1 > n - 1$, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence.

Lorsque les conditions de (14.3.2) sont remplies, on dit que X satisfait à la condition des chaînes, ou encore est un *espace caténaire*. Il est clair que tout sous-espace fermé d'un espace caténaire est caténaire.

Proposition (14.3.3). — Soit X un espace de Kolmogoroff noethérien de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) Deux chaînes maximales de parties fermées irréductibles de X ont même longueur.
- b) X est équidimensionnel, équicodimensionnel, et caténaire.
- c) X est équidimensionnel, et pour deux parties fermées irréductibles Y, Z de X telles que $Y \subset Z$, on a

$$(14.3.3.1) \quad \dim(Z) = \dim(Y) + \text{codim}(Y, Z).$$

d) X est équicodimensionnel et pour deux parties fermées irréductibles Y, Z de X telles que $Y \subset Z$, on a

$$(14.3.3.2) \quad \text{codim}(Y, X) = \text{codim}(Y, Z) + \text{codim}(Z, X).$$

Les hypothèses sur X entraînent que les extrémités d'une chaîne maximale de parties fermées irréductibles de X sont nécessairement un point fermé et une composante irréductible de X (0_I, 2.1.3) ; en outre, toute chaîne saturée d'extrémités Y, Z (avec $Y \subset Z$) est contenue dans une chaîne maximale dont les éléments autres que ceux de la chaîne donnée, ou bien sont contenus dans Y ou bien contiennent Z . Ces remarques établissent aussitôt l'équivalence de a) et b), et prouvent aussi que si a) est vérifiée, on a, pour toute partie fermée irréductible Y de X

$$(14.3.3.3) \quad \dim(Y) + \text{codim}(Y, X) = \dim(X);$$

comme (14.3.2.1) a lieu, on déduit aussitôt (14.3.3.1) et (14.3.3.2) de (14.3.3.3). Inversement, (14.3.3.1) entraîne (14.3.2.1), donc (14.3.3.1) entraîne la condition des chaînes en vertu de (14.3.2) ; en outre, en appliquant (14.3.3.1) au cas où Y est réduit à un point fermé x de X et Z à une composante irréductible de X , on obtient $\text{codim}(\{x\}, X) = \dim(Z)$; on en conclut que c) entraîne b). De même, (14.3.3.2) entraîne (14.3.2.1), donc la condition des chaînes ; en outre, avec le même choix de Y et Z que ci-dessus, (14.3.3.2) entraîne encore $\text{codim}(\{x\}, X) = \dim(Z)$, donc (toute composante irréductible de X contenant un point fermé en vertu de (0_I, 2.1.3)), d) entraîne b).

On dit qu'un espace de Kolmogoroff noethérien est *béquidimensionnel* s'il est de dimension finie et s'il vérifie les conditions équivalentes de (14.3.3).

Corollaire (14.3.4). — Soit X un espace de Kolmogoroff noethérien biequidimensionnel ; alors, pour tout point fermé x de X et toute composante irréductible Z de X , on a

$$(14.3.4.1) \quad \dim(X) = \dim(Z) = \text{codim}(\{x\}, X) = \dim_x(X).$$

La dernière égalité résulte de ce que si $Y_0 = \{x\} \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_m$ est une chaîne maximale de parties fermées irréductibles de X et U un voisinage ouvert de x , les $U \cap Y_i$ sont des parties fermées irréductibles de U deux à deux distinctes (puisque $\overline{U \cap Y_i} = Y_i$), d'où $\dim(U) = \dim(X)$ en vertu de (14.1.4).

Corollaire (14.3.5). — Soit X un espace de Kolmogoroff noethérien; si X est biéquidimensionnel, il en est de même de toute réunion de composantes irréductibles de X et de toute partie fermée irréductible de X . En outre, pour toute partie fermée Y de X , on a alors

$$(14.3.5.1) \quad \dim(Y) + \text{codim}(Y, X) = \dim(X).$$

Toute chaîne de parties fermées irréductibles de X étant contenue dans une composante irréductible de X , la première assertion découle aussitôt de (14.3.3). En outre, si X' est une partie fermée irréductible de X , X' vérifie trivialement les conditions (14.3.3, c)), d'où la seconde assertion.

Enfin, pour démontrer (14.3.5.1), remarquons que l'on a vu dans la démonstration de (14.3.3) que cette relation est vérifiée lorsque Y est irréductible; si Y_i ($1 \leq i \leq m$) sont les composantes irréductibles de Y , celle des Y_i pour laquelle $\dim(Y_i)$ est le plus grand est aussi celle pour laquelle $\text{codim}(Y_i, X)$ est le plus petit; donc (14.3.5.1) résulte des définitions de $\dim(Y)$ et de $\text{codim}(Y, X)$.

Remarque (14.3.6). — Le lecteur remarquera que la démonstration de (14.3.2) s'applique à un ensemble ordonné quelconque, le fait qu'il s'agit de parties fermées irréductibles d'un espace topologique n'intervenant pas dans cette démonstration. Il en est de même de la démonstration de (14.3.3) dans un ensemble ordonné E tel que pour tout $x \in E$, il existe un $z \leq x$ qui soit *minimal* dans E , et où la longueur des chaînes d'éléments de E est bornée.

§ 15. SUITES M-RÉGULIÈRES ET SUITES \mathcal{F} -RÉGULIÈRES

15.1. Suites M-régulières et suites M-quasi-régulières.

(15.1.1) Soient A un anneau, N un A -module; dans ce qui suit, nous noterons $N[T_1, \dots, T_n]$, pour abréger, le A -module gradué $N \otimes_A A[T_1, \dots, T_n]$ (T_i indéterminées), où N est gradué par la graduation triviale et $A[T_1, \dots, T_n]$ par le degré total. Soient M un A -module, f_i ($1 \leq i \leq n$) des éléments de A , $\mathfrak{J} = \sum_{i=1}^n f_i A$ l'idéal de A engendré par les f_i , et munissons M de la filtration \mathfrak{J} -préadique; on définit alors un *homomorphisme gradué surjectif de A -modules gradués*, de degré o ,

$$(15.1.1.1) \quad \varphi : (\text{gr}_0(M))[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \text{gr}_o(M)$$

de la façon suivante : si $\xi \in \text{gr}_0(M)$ est la classe mod. $\mathfrak{J}M$ d'un élément $x \in M$, au couple formé de ξ et d'un polynôme $P[T_1, \dots, T_n]$ homogène de degré k , on fait correspondre la classe mod. $\mathfrak{J}^{k+1}M$ de $P(f_1, \dots, f_n)x$; il est immédiat que cette classe

ne dépend que de ξ et de P , et si S_k est l'ensemble des polynômes homogènes de degré k dans $A[T_1, \dots, T_n]$, on a ainsi défini une application A -linéaire

$$\varphi_k : \text{gr}_0(M) \otimes_A S_k \rightarrow \text{gr}_k(M),$$

qui est surjective par définition de $\mathfrak{J}^k M$.

Nous dirons dans ce qui suit qu'un élément $f \in A$ est *non diviseur de zéro dans un A -module M* si l'homothétie $f_M : x \mapsto fx$ de M est *injective*.

Lemme (15.1.2). — Soient M un A -module, f un élément de A , et munissons M de la filtration (fA) -préadique. Si f est non diviseur de zéro dans M , l'homomorphisme canonique défini dans (15.1.1) :

$$(15.1.2.1) \quad \varphi : (M/fM)[T] \rightarrow \text{gr}_*(M)$$

est bijectif. La réciproque est vraie si M est séparé pour la topologie (fA) -préadique.

On a ici $\text{gr}_k(M) = f^k M / f^{k+1} M$; dire que φ est injective signifie que pour tout $x \in M$ et tout k , la relation $f^k x \in f^{k+1} M$ implique $x \in fM$; il est clair qu'il en est bien ainsi si f est non diviseur de zéro dans M . Inversement, remarquons que l'homothétie $f_M : x \mapsto fx$ définit par passage aux quotients, des homomorphismes $\text{gr}_k(M) \rightarrow \text{gr}_{k+1}(M)$, donc un homomorphisme gradué g de degré 1 de $\text{gr}_*(M)$ dans lui-même; et dire que φ est injectif exprime encore que g est injectif. Si on suppose la filtration de M séparée, il en résulte que f_M est injective (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 8, cor. 1 du th. 1).

Corollaire (15.1.3). — Soient A un anneau noethérien, M un A -module de type fini. Pour que f soit non diviseur de zéro dans M , il faut et il suffit que φ soit bijectif.

On doit seulement démontrer que la condition est suffisante; pour prouver que f_M est injective, il suffit de montrer que pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A , l'homothétie de rapport $f' = f/\mathfrak{p} \in A' = A_{\mathfrak{p}}$ dans le $A_{\mathfrak{p}}$ -module $M_{\mathfrak{p}} = M'$ est injective (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 4, th. 1). Or on a $f'^k M' / f'^{k+1} M' = (f^k M / f^{k+1} M) \otimes_A A'$, et il est immédiat que l'homomorphisme canonique $\varphi' : (M'/f'M')[T] \rightarrow \text{gr}_*(M')$ est égal à $\varphi \otimes_{\mathfrak{p} A'} 1_{A'}$; si φ est injectif, il en est donc de même de φ' (01, 1.3.2). On est donc ramené au cas où A est un anneau noethérien *local*, dont nous désignerons par \mathfrak{m} l'idéal maximal. Si $f \notin \mathfrak{m}$, alors f est inversible et il n'y a rien à démontrer. Si $f \in \mathfrak{m}$, on sait que M est séparé pour la topologie (fA) -préadique (01, 7.3.5), et il suffit donc d'appliquer (15.1.2).

Définition (15.1.4). — Soient A un anneau, M un A -module. On dit qu'un élément $f \in A$ est *M -régulier* (resp. *M -quasi-régulier*) si f est non diviseur de zéro dans M (resp. si l'homomorphisme (15.1.2.1) est bijectif).

Nous venons donc de démontrer que tout élément M -régulier est M -quasi-régulier, et que la réciproque est vraie si A est noethérien et M un A -module de type fini. Lorsqu'on ne suppose plus M de type fini, cette réciproque peut être en défaut : par exemple, si A est un anneau principal qui n'est pas un corps, K son corps des fractions et M le A -module K/A , on a $fM = M$ pour tout $f \neq 0$ dans A , donc les deux membres de (15.1.2.1) sont réduits à 0, mais f est alors diviseur de zéro dans M .

(15.1.5) Supposons maintenant M muni d'une filtration (M'_k) telle que $M_0 = M$, et désignons par $\text{gr}_*(M) = \bigoplus_{k \geq 0} M_k/M_{k+1}$ le A -module gradué associé. Les notations étant celles de (15.1.1), posons, pour tout $k \geq 0$,

$$(15.1.5.1) \quad M'_k = M_k + \mathfrak{J}M_{k-1} + \dots + \mathfrak{J}^{k-1}M_1 + \mathfrak{J}^kM_0.$$

Il est clair que (M'_k) est une filtration sur M . Lorsque $M_k = \mathfrak{L}^kM$, où \mathfrak{L} est un idéal de A , la filtration (M'_k) n'est autre que la filtration $(\mathfrak{J} + \mathfrak{L})$ -préadique. Nous noterons $\text{gr}'(M)$ le A -module gradué associé à (M'_k) . Notons encore $(\text{gr}_*(M) \otimes_A (A/\mathfrak{J})) [T_1, \dots, T_n]$ le produit tensoriel de A -modules gradués (II, 2.1.2) $(\text{gr}_*(M) \otimes_A (A/\mathfrak{J})) \otimes_A A [T_1, \dots, T_n]$. On définit un *homomorphisme gradué surjectif de A -modules gradués*, de degré 0,

$$(15.1.5.2) \quad \psi : (\text{gr}_*(M) \otimes_A (A/\mathfrak{J})) [T_1, \dots, T_n] \rightarrow \text{gr}'(M)$$

de la façon suivante : si $\alpha \in A/\mathfrak{J}$ est la classe d'un élément $a \in A$, $\xi \in M_k/M_{k+1}$ la classe d'un élément $x \in M_k$ et $P[T_1, \dots, T_n]$ un polynôme homogène de degré h , on fait correspondre au triplet (α, ξ, P) la classe mod. M'_{h+k+1} de $P(f_1, \dots, f_n)ax$; on vérifie encore aussitôt que cet élément ne dépend bien que de ξ , α et P , et cela définit l'homomorphisme gradué (15.1.5.2), qui est surjectif en vertu de la définition (15.1.5.1). On retrouve l'homomorphisme (15.1.1.1) en considérant la filtration sur M telle que $M_1 = 0$.

Lemme (15.1.6). — *On garde les notations de (15.1.5) et on suppose $n = 1$, en posant $f = f_1$. Si f est $\text{gr}_*(M)$ -régulier, l'homomorphisme (15.1.5.2) est bijectif.*

Soit Q_k (resp. Q'_k) le sous- A -module des termes de degré k au premier (resp. second) membre de (15.1.5.2). Munissons Q_k de la filtration

$$(15.1.6.1) \quad (Q_k)_i = \sum_{j \leq k} \text{gr}_{k-j}(M) \otimes_A (A/fA) T^j$$

de sorte que $(Q_k)_0 = Q_k$ et $(Q_k)_{k+1} = 0$, et pour cette filtration, on a

$$\text{gr}_i(Q_k) = (\text{gr}_i(M) \otimes_A (A/fA)) T^{k-i}.$$

Munissons Q'_k de la filtration formée des $\psi((Q_k)_i) = (Q'_k)_i$. Comme ces filtrations sont finies, il suffit de prouver que les homomorphismes $\psi_{ki} : \text{gr}_i(Q_k) \rightarrow \text{gr}_i(Q'_k)$ déduits de ψ_k sont injectifs (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 8, cor. 1 du th. 1). Or on a $\text{gr}_i(Q_k) = ((M_i/M_{i+1}) \otimes_A (A/fA)) T^{k-i} = (M_i/(fM_i + M_{i+1})) T^{k-i}$; d'autre part, $(Q'_k)_{i+1}$ est l'image de

$$M_k + fM_{k-1} + \dots + f^{k-i-1}M_{i+1}$$

dans M'_k/M'_{k+1} . On est donc ramené à écrire que, pour $x \in M_i$, la relation

$$(15.1.6.2) \quad f^{k-i}x \in M_k + fM_{k-1} + \dots + f^{k-i-1}M_{i+1} + M'_{k+1}$$

implique $x \in fM_i + M_{i+1}$. Or, le second membre de (15.1.6.2) est contenu dans $M_{i+1} + M'_{k+1}$, et en vertu de (15.1.5.1), M'_{k+1} est contenu dans $M_{i+1} + f^{k+1-i}M$. L'hypothèse sur f entraîne que f est non diviseur de zéro dans M/M_h pour tout h (Bourbaki, *loc. cit.*). La relation $f^{k-i}x \in f^{k+1-i}M + M_{i+1}$ entraîne donc (en raisonnant

dans M/M_{i+1}) l'existence d'un $y \in M$ tel que $x - fy \in M_{i+1}$, et comme $x \in M_i$, on a $fy \in M_i$, d'où (en raisonnant dans M/M_i), $y \in M_i$, et finalement $x \in fM_i + M_{i+1}$. C.Q.F.D.

Définition (15.1.7). — Soit $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite d'éléments de A . On dit qu'elle est M -régulière si, pour $1 \leq i \leq n$, f_i est $(M/(\sum_{1 \leq j \leq i-1} f_j M))$ -régulier. On dit que la suite (f_i) est M -quasi-régulière si l'homomorphisme canonique φ défini dans (15.1.1.1) est bijectif.

Lorsque $M = A$, on dit simplement « suite régulière » et « suite quasi-régulière ».

Proposition (15.1.8). — Les notations étant celles de (15.1.5), on suppose que la suite $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est $gr_*(M)$ -régulière. Alors l'homomorphisme canonique (15.1.5.2) est bijectif.

La proposition n'est autre que (15.1.6) pour $n = 1$; raisonnons par récurrence sur n . Posons $\mathfrak{J}'' = \sum_{i=1}^{n-1} f_i A$, de sorte que $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}'' + f_n A$, et soit

$$M''_k = M_k + \mathfrak{J}'' M_{k-1} + \dots + \mathfrak{J}''^{k-1} M_1 + \mathfrak{J}''^k M_0;$$

on peut donc écrire

$$M'_k = M''_k + f_n M''_{k-1} + \dots + f_n^{k-1} M''_1 + f_n^k M''_0.$$

Notons $gr''_*(M)$ le A -module gradué associé à la filtration (M''_k) de M . On peut écrire, à des isomorphismes canoniques près

$$(gr_*(M) \otimes (A/\mathfrak{J})) \otimes A[T_1, \dots, T_n] = (gr_*(M) \otimes (A/\mathfrak{J}''))[T_1, \dots, T_{n-1}] \otimes (A/f_n A) \otimes A[T_n]$$

et par suite (15.1.5.2) se factorise en

$$(15.1.8.1) \quad (gr''_*(M) \otimes (A/f_n A))[T_n] \rightarrow gr'_*(M)$$

et

$$((gr_*(M) \otimes (A/\mathfrak{J}''))[T_1, \dots, T_{n-1}] \otimes (A/f_n A) \otimes A[T_n]) \xrightarrow{\psi' \otimes 1} gr''_*(M) \otimes (A/f_n A) \otimes A[T_n]$$

ψ' étant l'application (15.1.5.2) où l'on remplace n par $n-1$, \mathfrak{J} par \mathfrak{J}'' et $gr'_*(M)$ par $gr''_*(M)$. L'hypothèse de récurrence entraîne que ψ' est bijective et il reste donc à voir qu'il en est de même de (15.1.8.1). En appliquant (15.1.6), il suffit de montrer que f_n est $gr''_*(M)$ -régulier. Mais $gr''_*(M)$ s'identifie à $(gr_*(M) \otimes (A/\mathfrak{J}''))[T_1, \dots, T_{n-1}]$; par hypothèse, l'homothétie de rapport f_n dans $gr_*(M) \otimes (A/\mathfrak{J}'')$ est bijective; il en est par suite de même de l'homothétie de rapport f_n dans $gr''_*(M)$, puisque $A[T_1, \dots, T_{n-1}]$ est un A -module libre.

Proposition (15.1.9). — Soient M un A -module, $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite d'éléments de A . Si la suite (f_i) est M -régulière, elle est M -quasi-régulière. La réciproque est vraie lorsqu'on suppose en outre que les A -modules $M, M/f_1 M, \dots, M/(\sum_{1 \leq j \leq n-1} f_j M)$ sont séparés pour la topologie \mathfrak{J} -préadique (où $\mathfrak{J} = \sum_{i=1}^n f_i A$).

La première assertion résulte de (15.1.8), où l'on prend $M_1 = 0$, et par suite l'homomorphisme (15.1.5.2) se réduit à (15.1.1.1). Inversement, supposons que l'homomorphisme φ de (15.1.1.1) soit bijectif. Notons que si on pose $\mathfrak{J}'' = \sum_{i=1}^{n-1} f_i A$,

et si on désigne par $\text{gr}''(M)$ le A -module gradué associé à M filtré par la filtration \mathfrak{J}'' -préadique, φ se factorise en

$$(15.1.9.1) \quad (\text{gr}''(M) \otimes (A/f_n A))[T_n] \rightarrow \text{gr}_*(M)$$

et en $\varphi' \otimes 1$, où φ' est l'homomorphisme canonique

$$(\text{gr}''_0(M))[T_1, \dots, T_{n-1}] \rightarrow \text{gr}''(M).$$

Comme ces deux homomorphismes sont surjectifs, ils sont bijectifs si φ est supposé bijectif, donc φ' est nécessairement injectif, et par suite bijectif puisqu'il est surjectif. On peut alors raisonner par récurrence sur n (le cas $n=1$ résultant de (15.1.2)), car sur $M, M/f_1 M, \dots, M/(\sum_{j=1}^{n-2} f_j M)$ la topologie \mathfrak{J}'' -préadique est plus fine que la topologie \mathfrak{J} -préadique, et par suite est séparée. On voit donc que la suite $(f_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ est M -régulière. D'autre part, montrons que l'hypothèse entraîne que si $y \in M/\mathfrak{J}'' M$ est tel que $f_n^k y \in f_n^{k+1}(M/\mathfrak{J}'' M)$, alors on a $y \in f_n(M/\mathfrak{J}'' M)$. En effet, si x est un représentant de y , montrons que l'on a $f_n^k x \in \mathfrak{J}^{k+1} M$; notre assertion résultera alors du fait que (15.1.9.1) est injectif. L'hypothèse entraîne $f_n^k x \in f_n^{k+1} M + \mathfrak{J}'' M \subset \mathfrak{J} M$, d'où, puisque φ est injectif, $f_n^{k-1} x \in \mathfrak{J} M$; par récurrence, on obtient ainsi $x \in \mathfrak{J} M$, d'où finalement $f_n^k x \in \mathfrak{J}^{k+1} M$. On termine le raisonnement comme dans (15.1.2) : sur $M/\mathfrak{J}'' M$, la filtration \mathfrak{J} -préadique est identique à la filtration $(f_n A)$ -préadique, donc est séparée par hypothèse, et on conclut que l'homothétie de rapport f_n dans $M/\mathfrak{J}'' M$ est injective, ce qui achève de montrer que la suite $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est M -régulière.

Corollaire (15.1.10). — Avec les notations de (15.1.9), supposons que pour tout A -module N de type fini, $M \otimes_A N$ soit séparé pour la topologie \mathfrak{J} -préadique. Alors, pour que la suite (f_i) soit M -régulière, il faut et il suffit qu'elle soit M -quasi-régulière.

On notera que l'hypothèse de (15.1.10) entraîne que, si la suite $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est M -régulière, il en est de même de la suite $(f_{\sigma(i)})$ pour toute permutation σ de l'intervalle $[1, n]$.

Corollaire (15.1.11). — Soient A un anneau noethérien, M un A -module de type fini, $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite finie d'éléments contenus dans le radical de A . Alors, pour que la suite (f_i) soit M -régulière, il faut et il suffit qu'elle soit M -quasi-régulière.

C'est un cas particulier de (15.1.10), puisque tout A -module de type fini est alors séparé pour la topologie \mathfrak{J} -préadique (0₁, 7.3.5).

Remarques (15.1.12). — (i) Lorsque A est un anneau local noethérien, M un A -module de type fini, et lorsque les f_i sont contenus dans l'idéal maximal de A , la notion de suite M -régulière a été introduite par J.-P. Serre sous le nom de M -suite [17].

(ii) Même si A est noethérien et $M = A$, une suite (f, g) de deux éléments de A qui est quasi-régulière n'est pas nécessairement régulière. Par exemple, la suite $(0, 1)$ est quasi-régulière, puisqu'alors $\mathfrak{J} = fA + gA = A$, donc $\text{gr}_*(A) = 0$; mais si $A \neq 0$ elle n'est pas régulière; on notera toutefois que dans ce cas la suite $(1, 0)$ est régulière, car 1 n'est pas diviseur de 0 dans A , et comme $A/A = 0$, 0 n'est pas diviseur de zéro dans ce module (cf. (15.1.1)).

(iii) Dans (15.1.6), on ne peut en général remplacer l'hypothèse que f est $\text{gr}_*(M)$ -régulier par l'hypothèse qu'il est $\text{gr}_*(M)$ -quasi-régulier. Pour le voir, reprenons l'exemple (15.1.4) où A est un anneau principal de corps des fractions $K \neq A$ et prenons $M = K$, la filtration (M_k) de M étant définie par $M_0 = M = K$, $M_1 = A$, $M_k = 0$ pour $k \geq 2$, d'où $\text{gr}_0(M) = K/A$, $\text{gr}_1(M) = A$, $\text{gr}_k(M) = 0$ pour $k \geq 2$. Si $f \neq 0$ dans A , on a vu que f n'est pas $\text{gr}_*(M)$ -régulier, mais comme on a $f^k \text{gr}_*(M)/f^{k+1} \text{gr}_*(M) = f^k A/f^{k+1} A$, il est immédiat que l'homomorphisme (15.1.2.1) (où M est remplacé par $\text{gr}_*(M)$) est injectif, donc f est $\text{gr}_*(M)$ -quasi-régulier. Mais avec les notations de (15.1.6), on a alors $M'_k = K$ pour tout $k \geq 0$, donc $\text{gr}'(M) = 0$, tandis que le premier membre de (15.1.5.2) n'est pas réduit à 0.

Proposition (15.1.13). — Soient A un anneau, M, N deux A -modules, $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite d'éléments de A . Si la suite (f_i) est M -régulière et si N est un A -module plat, alors la suite (f_i) est $M \otimes_A N$ -régulière. La réciproque est vraie si N est un A -module fidèlement plat.

En effet (sans hypothèse sur N), $(M \otimes_A N)/(\sum_{j=1}^{i-1} f_j(M \otimes_A N))$ est isomorphe à $(M/(\sum_{j=1}^{i-1} f_j M)) \otimes_A N$; il suffit alors d'appliquer (0.1, 6.1.1) et (0.1, 6.4.1) à l'homothétie de rapport f_i dans $M/(\sum_{j=1}^{i-1} f_j M)$.

Corollaire (15.1.14). — Soient A un anneau, M un A -module, $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite finie d'éléments de A . Soient $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, $M' = M_{(B)} = M \otimes_A B$, $f'_i = \varphi(f_i)$ pour $1 \leq i \leq n$. Si B est un A -module plat et si la suite (f_i) est M -régulière, alors la suite (f'_i) est M' -régulière; la réciproque est vraie si B est un A -module fidèlement plat.

En effet, $M'/(\sum_{j=1}^{i-1} f'_j M')$ s'identifie à $(M/(\sum_{j=1}^{i-1} f_j M)) \otimes_A B$, et l'homothétie de rapport f'_i dans le B -module $M'/(\sum_{j=1}^{i-1} f'_j M')$ à l'homothétie de rapport f_i dans le A -module $(M/(\sum_{j=1}^{i-1} f_j M)) \otimes_A B$; l'assertion résulte donc de (15.1.13).

Proposition (15.1.15). — Soient A un anneau, B une A -algèbre commutative, $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite finie d'éléments de B , M un B -module. Supposons que la suite (f_i) soit M -régulière et que chacun des A -modules $M/(\sum_{j=1}^{i-1} f_j M)$ ($1 \leq i \leq n$) soit plat. Alors, pour tout homomorphisme d'anneaux $\varphi : A \rightarrow A'$, si l'on pose $B' = B \otimes_A A'$, $M' = M \otimes_A A'$ et $f'_i = f_i \otimes 1$ ($1 \leq i \leq n$), la suite (f'_i) est M' -régulière et les A' -modules $M'/(\sum_{j=1}^{i-1} f'_j M')$ ($1 \leq i \leq n$) sont plats.

Considérons la suite (exacte par hypothèse)

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f_1} M \rightarrow M/f_1 M \rightarrow 0$$

(la flèche $M \xrightarrow{f_1} M$ étant l'homothétie de rapport f_1 dans M). L'hypothèse que $M/f_1 M$ est A -plat entraîne que la suite

$$0 \rightarrow M \otimes_A A' \xrightarrow{f_1 \otimes 1} M \otimes_A A' \rightarrow (M/f_1 M) \otimes_A A' \rightarrow 0$$

est exacte (**0_I**, 6.1.2). Cela montre que l'homothétie de rapport f'_1 dans M' est injective.

Posons ensuite, pour $1 \leq i \leq n-1$, $M_i = M / (\sum_{j=1}^i f_j M)$, $M'_i = M' / (\sum_{j=1}^i f'_j M')$; on a $M'_i = M_i \otimes_A A'$, $M_i / f_{i+1} M_i = M_{i+1}$, $M'_i / f'_{i+1} M'_i = M'_{i+1}$; il suffit de remplacer dans le raisonnement précédent M et f_1 par M_i et f'_{i+1} pour conclure que l'homothétie de rapport f'_{i+1} dans M'_i est injective, en raison de la platitude de $M_i / f_{i+1} M_i$. La dernière assertion résulte de (**0_I**, 6.2.1).

Proposition (15.1.16). — Soient A, B deux anneaux locaux noethériens, k le corps résiduel de A , $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme local, M un B -module de type fini. Soit $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite d'éléments de l'idéal maximal de B , et pour tout i , soit g_i l'image de f_i dans $B \otimes_A k$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) La suite (f_i) est M -régulière et les quotients $M_i = M / (\sum_{j=1}^i f_j M)$ sont des A -modules plats pour $1 \leq i \leq n$.
- b) La suite (f_i) est M -régulière et le A -module M_n est plat.
- c) Le A -module M est plat et la suite $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$ est $(M \otimes_A k)$ -régulière.
- d) Le A -module M est plat, et pour tout homomorphisme d'anneaux $\varphi : A \rightarrow A'$, si on pose $B' = B \otimes_A A'$, $M' = M \otimes_A A'$, $f'_i = f_i \otimes 1$ ($1 \leq i \leq n$), la suite (f'_i) est M' -régulière.

Il est clair que a) entraîne b); pour montrer que b) entraîne d), il suffit, en vertu de (15.1.15), de montrer que b) entraîne que les M_i sont des A -modules plats pour $0 \leq i \leq n-1$ (en posant $M_0 = M$). Comme $M_{i+1} = M_i / f_{i+1} M_i$, on est ramené, par récurrence descendante, à prouver que si h est un élément de l'idéal maximal de B tel que l'homothétie de rapport h dans M soit injective et que M/hM soit un A -module plat, alors M est un A -module plat; mais cela n'est autre que (**0_{III}**, 10.2.7). Il est clair que c) est le cas particulier de d) obtenu en prenant $A' = k$. Reste donc à prouver que c) entraîne a). Comme M est un A -module plat et un B -module de type fini, il résulte de c) et de (**0_{III}**, 10.2.4) que l'homothétie de rapport f_1 dans M est injective et que son conoyau $M / f_1 M = M_1$ est un A -module plat. Raisonnons par récurrence sur i et supposons démontré que M_i est un A -module plat; comme l'homothétie de rapport g_{i+1} dans $M_i \otimes_A k$ est injective par hypothèse, il résulte encore de (**0_{III}**, 10.2.4) que l'homothétie de rapport f_{i+1} dans M_i est injective et que $M_i / f_{i+1} M_i = M_{i+1}$ est un A -module plat, ce qui achève la démonstration. On notera que la démonstration du fait que c) entraîne a) n'utilise pas le fait que les f_i appartiennent à l'idéal maximal de B .

Corollaire (15.1.17). — Les hypothèses sur A et B étant celles de (15.1.16), soient M un B -module de type fini, plat sur A , R un sous- B -module de M tel que $N = M/R$ soit un A -module plat. Soit $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite d'éléments de l'idéal maximal de B ayant les propriétés suivantes :

- (i) $f_i M \subset R$ pour $1 \leq i \leq n$.
- (ii) Si g_i est l'image de f_i dans $B \otimes_A k$, la suite $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$ est $(M \otimes_A k)$ -régulière.
- (iii) La somme des sous- $(B \otimes_A k)$ -modules $g_i(M \otimes_A k)$ de $M \otimes_A k$ est l'image canonique de $R \otimes_A k$ dans $M \otimes_A k$ (égale au noyau de l'homomorphisme canonique $M \otimes_A k \rightarrow N \otimes_A k$).

Alors la suite (f_i) est M -régulière et l'on a $R = \sum_{i=1}^n f_i M$.

Comme N est un A -module plat, il résulte de l'exactitude de la suite $0 \rightarrow R \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ que la suite $0 \rightarrow R \otimes_A k \rightarrow M \otimes_A k \rightarrow N \otimes_A k \rightarrow 0$ est exacte (**0_I**, 6.1.2); on a donc $R \otimes_A k = \sum_i g_i(M \otimes_A k)$. Comme M est un B -module de type fini et que B est noethérien, R est aussi un B -module de type fini, d'où $R = \sum_i f_i M$ en vertu du lemme de Nakayama, les f_i appartenant à l'idéal maximal de B .

Lemme (15.1.18). — Soient A un anneau, M un A -module muni d'une filtration séparée et exhaustive $(M_k)_{k \geq 0}$ et soit $f \in A$ un élément $\text{gr}_*(M)$ -régulier. Alors :

(i) f est M -régulier.

(ii) Pour tout k , on a $M_k \cap fM = fM_k$, et l'image canonique M'_k de M_k dans $M' = M/fM$ est donc canoniquement isomorphe à M_k/fM_k .

(iii) La suite

$$0 \rightarrow M_{k+1}/fM_{k+1} \rightarrow M_k/fM_k \rightarrow \text{gr}_k(M)/f \cdot \text{gr}_k(M) \rightarrow 0$$

est exacte, et si l'on munit M' de la filtration quotient (M'_k) , $\text{gr}_*(M')$ est donc canoniquement isomorphe à $\text{gr}_*(M)/f \cdot \text{gr}_*(M)$.

L'assertion (i) résulte de l'hypothèse sur f et de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 8, cor. 1 du th. 1. Comme $\text{gr}_*(M/M_k)$ est facteur direct de $\text{gr}_*(M)$, f est $\text{gr}_*(M/M_k)$ régulier pour tout k , donc (M/M_k) -régulier par (i), ce qui établit (ii). Pour prouver (iii), il suffit de voir que l'application $M_{k+1}/fM_{k+1} \rightarrow M_k/fM_k$ est injective : or, si $x \in M_{k+1}$ est tel que $x \in fM_k$, il résulte de (ii) que $x \in fM_{k+1}$, ce qui achève de prouver le lemme.

Proposition (15.1.19). — Soient A un anneau, M un A -module muni d'une filtration $(M_k)_{k \geq 0}$ telle que $M_0 = M$, $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite $\text{gr}_*(M)$ -régulière d'éléments de A . Supposons en outre que pour $0 \leq i \leq n-1$, la filtration quotient de (M_k) sur $M/(\sum_{j \leq i} f_j M)$ soit séparée. Alors la suite (f_i) est M -régulière, et si l'on pose $M' = M/(\sum_{i \leq n} f_i M)$ et que l'on munit M' de la filtration quotient de (M_k) , $\text{gr}_*(M')$ est canoniquement isomorphe à $\text{gr}_*(M)/(\sum_{i \leq n} f_i \text{gr}_*(M))$.

Pour $n=1$, la proposition résulte du lemme (15.1.18). Raisonnons par récurrence sur n , en posant $N = M/(\sum_{i \leq n-1} f_i M)$ et en désignant par (N_k) la filtration quotient de (M_k) sur N , qui est séparée par hypothèse; en outre $\text{gr}_*(N)$ est isomorphe à

$$\text{gr}_*(M)/(\sum_{i \leq n-1} f_i \text{gr}_*(M)).$$

Par hypothèse f_n est donc $\text{gr}_*(N)$ -régulier, et il résulte donc du lemme (15.1.18) appliqué à N que f_n est N -régulier et $\text{gr}_*(M')$ isomorphe à $\text{gr}_*(N)/f_n \text{gr}_*(N)$, ce qui démontre la proposition.

La proposition (15.1.19) s'appliquera en particulier pour les filtrations vérifiant l'une ou l'autre hypothèse suivante :

1^o La filtration (M_k) est finie et séparée (puisque cela entraîne $M_k = 0$ pour k assez grand);

2^o A est un anneau noethérien, \mathfrak{J} un idéal contenu dans le radical de A , M un A -module de type fini et (M_k) la filtration \mathfrak{J} -préadique (**0_I**, 7.3.5).

Corollaire (15.1.20). — Soient A un anneau, M un A -module, $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite M -régulière d'éléments de A . Alors, quels que soient les entiers $v_i \geq 1$, la suite $(f_i^{v_i})$ est M -régulière et $M/(\sum_{i \leq n} f_i^{v_i} M)$ a une suite de composition dont les quotients sont isomorphes à $M/(\sum_{i \leq n} f_i M)$.

Raisonnons par récurrence sur n ; pour $n=1$ les assertions sont immédiates puisque $f^j M / f^{j+1} M$ est isomorphe à M/fM , l'homothétie de rapport f dans M étant injective par hypothèse. Posons alors $N = M/(\sum_{i \leq n-1} f_i^{v_i} M)$; par l'hypothèse de récurrence, N admet une filtration finie (N_k) pour laquelle les $\text{gr}_k(N)$ sont isomorphes à $M/(\sum_{i \leq n-1} f_i M)$; par hypothèse f_n est donc $\text{gr}_*(N)$ -régulier; il résulte par suite de (15.1.19) que f_n est N -régulier. Appliquant le cas $n=1$ démontré au début, on en conclut que $f_n^{v_n}$ est N -régulier et que $N/f_n^{v_n} N$ admet une suite de composition dont les quotients sont isomorphes à $N/f_n N$; mais pour la filtration de $N/f_n N$ quotient de la filtration (N_k) , $\text{gr}_k(N/f_n N)$ est isomorphe à $\text{gr}_k(N)/f_n \text{gr}_k(N)$ par (15.1.19) pour tout k , donc à $M/(\sum_{i \leq n} f_i M)$, ce qui prouve le corollaire.

Proposition (15.1.21). — Soient A, B deux anneaux locaux noethériens, $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme local, M un B -module de type fini, $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite A -régulière formée d'éléments de l'idéal maximal de A . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) M est un A -module plat.
- b) Si \mathfrak{J} est l'idéal $\sum_{i \leq n} f_i A$, $M/\mathfrak{J}M$ est un A/\mathfrak{J} -module plat et la suite (f_i) est M -régulière.

Le fait que a) entraîne b) résulte de (15.1.13) et de (0_{III}, 10.2.2). Inversement, si la suite (f_i) est M -régulière, elle est M -quasi-régulière (15.1.9), donc l'homomorphisme (15.1.1.1) est bijectif. Mais comme la suite $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est aussi supposée A -régulière, elle est A -quasi-régulière (15.1.9), et l'homomorphisme canonique (15.1.1.1) correspondant $(A/\mathfrak{J})[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \text{gr}_*(A)$ est bijectif. On en conclut que l'homomorphisme canonique (0_{III}, 10.1.1.2)

$$\text{gr}_0(M) \otimes_{A/\mathfrak{J}} \text{gr}_*(A) \rightarrow \text{gr}_*(M)$$

est bijectif. La conclusion résulte alors de (0_{III}, 10.2.2), les f_i étant dans l'idéal maximal de A et l'homomorphisme φ étant local.

15.2. Suites \mathcal{F} -régulières.

(15.2.1) Soient X un espace annelé, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module, $f_i (1 \leq i \leq n)$ une suite de sections de \mathcal{O}_X au-dessus de X , \mathcal{J} l'Idéal de \mathcal{O}_X engendré par les f_i (image de \mathcal{O}_X^n par l'homomorphisme $\mathcal{O}_X^n \rightarrow \mathcal{O}_X$ défini canoniquement par les f_i (0_I, 5.1.1)). Les sous- \mathcal{O}_X -Modules $\mathcal{J}^k \mathcal{F}$ définissent sur \mathcal{F} une filtration, et on pose encore $\text{gr}_k(\mathcal{F}) = \mathcal{J}^k \mathcal{F} / \mathcal{J}^{k+1} \mathcal{F}$; si S_k est l'ensemble des polynômes homogènes de degré total k dans l'anneau $\mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n]$, S_k peut être considéré comme un faisceau simple sur X , et on définit comme dans (15.1.1) un homomorphisme canonique

$$(15.2.1.1) \quad \varphi_k : \text{gr}_0(\mathcal{F}) \otimes_{\mathbf{Z}} S_k \rightarrow \text{gr}_k(\mathcal{F})$$

de la façon suivante : pour tout ouvert U de X (ou d'une base de la topologie de X), on considère l'homomorphisme (15.1.1.1)

$$\varphi_{k,U} : \text{gr}_0(\Gamma(U, \mathcal{F})) \otimes_{\mathbf{Z}} S_k \rightarrow \text{gr}_k(\Gamma(U, \mathcal{F}))$$

défini par les n sections $f_i|_{U \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)}$, le $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ -module $\Gamma(U, \mathcal{F})$ étant filtré par les sous-modules $(\Gamma(U, \mathcal{J}))^k \Gamma(U, \mathcal{F})$. Le \mathcal{O}_X -Module $\text{gr}_k(\mathcal{F})$ étant associé au pré-faisceau $U \mapsto \text{gr}_k(\Gamma(U, \mathcal{F}))$ pour tout k , les $\varphi_{k,U}$ définissent un homomorphisme de \mathcal{O}_X -Modules (15.2.1.1). En vertu des propriétés d'exactitude des limites inductives de modules et de leur commutation aux produits tensoriels, il résulte de ce qui précède que pour tout $x \in X$, l'homomorphisme $(\varphi_k)_x$ des fibres des deux membres de (15.2.1.1) au point x s'identifie à l'homomorphisme de (15.1.1)

$$(15.2.1.2) \quad \text{gr}_0(\mathcal{F}_x) \otimes_{\mathbf{Z}} S_k \rightarrow \text{gr}_k(\mathcal{F}_x)$$

défini par la suite $((f_i)_x)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de \mathcal{O}_x .

(15.2.2) Les notations étant celles de (15.2.1), nous dirons que la suite $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est \mathcal{F} -régulière si, en désignant par $f_i \mathcal{F}$ le sous- \mathcal{O}_X -Module de \mathcal{F} image de l'endomorphisme de \mathcal{F} défini par f_i , l'endomorphisme de $\mathcal{F}/(\sum_{j=1}^{i-1} f_j \mathcal{F})$ défini par f_i est injectif pour $1 \leq i \leq n$; nous dirons que la suite (f_i) est \mathcal{F} -quasi-régulière si les homomorphismes (15.2.1.1) sont injectifs. Il résulte de ces définitions et des remarques de (15.2.1) que pour que la suite (f_i) soit \mathcal{F} -régulière (resp. \mathcal{F} -quasi-régulière), il faut et il suffit que, pour tout $x \in X$, la suite $((f_i)_x)_{1 \leq i \leq n}$ soit \mathcal{F}_x -régulière (resp. \mathcal{F}_x -quasi-régulière). Toute suite \mathcal{F} -régulière est donc \mathcal{F} -quasi-régulière (15.1.9); la réciproque est vraie si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -Module de type fini, si les \mathcal{O}_x sont des anneaux noethériens pour tout $x \in X$ et si en outre les $(f_i)_x$ appartiennent au radical de \mathcal{O}_x pour tout $x \in X$ (15.1.11).

Si $X = \text{Spec}(A)$ est un schéma affine, et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, il résulte de (I, 1.3) que pour que la suite (f_i) soit \mathcal{F} -régulière (resp. \mathcal{F} -quasi-régulière) il faut et il suffit qu'elle soit M -régulière (resp. M -quasi-régulière).

Lorsque $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, on supprimera la mention de \mathcal{F} dans les définitions précédentes.

Remarque (15.2.3). — Lorsque $X = \text{Spec}(A)$ et $\mathfrak{J} = \sum_{i=1}^n f_i A$, la suite (f_i) est quasi-régulière pour tout A -module M dans tout ouvert U ne rencontrant pas $V(\mathfrak{J})$, car en tout point $x \in U$, on a $\mathfrak{J}_x = \mathcal{O}_x$ et les deux membres de (15.2.1.2) sont nuls. La notion de suite \widetilde{M} -régulière n'a donc d'intérêt qu'au voisinage des points de $V(\mathfrak{J})$.

Proposition (15.2.4). — Soient X un espace annelé, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module cohérent, x un point de X , $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite d'éléments de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Si la suite $((f_i)_x)_{1 \leq i \leq n}$ est \mathcal{F}_x -régulière, il existe un voisinage ouvert U de x tel que la suite $(f_i|_U)_{1 \leq i \leq n}$ soit $(\mathcal{F}|_U)$ -régulière.

En effet, pour $1 \leq i \leq n$, le \mathcal{O}_X -Module $\mathcal{F}/(\sum_{j=1}^{i-1} f_j \mathcal{F})$ est cohérent (0_I, 5.3.4), donc il en est de même du noyau de l'endomorphisme de ce \mathcal{O}_X -Module défini par f_i (0_I, 5.3.4); comme la fibre au point x de ce noyau est nulle, il en est de même de sa restriction à un voisinage de x (0_I, 5.2.2).

Proposition (15.2.5). — Soit $u = (\psi, \theta) : X \rightarrow Y$ un morphisme plat d'espaces annelés (**0₁**, 6.7.1); soient \mathcal{F} un \mathcal{O}_Y -Module, $\mathcal{G} = u^*(\mathcal{F})$, $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite d'éléments de $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$, $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$ la suite de leurs images $g_i = \theta(f_i) \in \Gamma(Y, u_*(\mathcal{O}_X)) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Si la suite (f_i) est \mathcal{F} -régulière, la suite (g_i) est \mathcal{G} -régulière. La réciproque est vraie si u est un morphisme fidèlement plat (**0₁**, 6.7.8).

Soient x un point de X , $y = u(x) = \psi(x)$; on a

$$\mathcal{G}_x = \psi_x^*(\mathcal{F}_y) \otimes_{\psi_x^*(\mathcal{O}_y)} \mathcal{O}_x, \quad \text{et} \quad (g_i)_x = 0_x^*(\psi_x^*((f_i)_y));$$

comme par hypothèse $0_x^* : \psi_x^*(\mathcal{O}_y) \rightarrow \mathcal{O}_x$ fait de \mathcal{O}_x un $\psi_x^*(\mathcal{O}_y)$ -module plat, et que le foncteur ψ^* est exact, la première assertion résulte de l'assertion correspondante de (15.1.14); il en est de même de la seconde, compte tenu de ce que l'hypothèse que u est fidèlement plat signifie que ψ est surjectif et que 0_x^* fait de \mathcal{O}_x un $\psi_x^*(\mathcal{O}_y)$ -module fidèlement plat.

§ 16. DIMENSION ET PROFONDEUR DANS LES ANNEAUX LOCAUX NOETHÉRIENS

16.1. Dimension d'un anneau.

(16.1.1) On appelle *dimension* (ou *dimension de Krull*) d'un anneau A et on note $\dim A$ la dimension (combinatoire) de son spectre $\text{Spec}(A)$ (14.2.1); comme les parties fermées irréductibles de $\text{Spec}(A)$ sont les $V(\mathfrak{p})$, où \mathfrak{p} est un idéal premier de A (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 4, no 3, cor. 1 de la prop. 14), il revient au même de dire que $\dim(A)$ est la *borne supérieure des longueurs des chaînes* (14.1.1)

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n$$

d'idéaux premiers de A . Si $A \neq 0$, on a $\dim A \geq 0$. Un anneau artinien $\neq 0$ (en particulier un corps) est de dimension 0 (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, no 5, prop. 7); un anneau de Dedekind qui n'est pas un corps (en particulier \mathbf{Z} ou un anneau $k[T]$ de polynômes à une indéterminée sur un corps k) est de dimension 1 (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 2). Un anneau noethérien n'est pas nécessairement de dimension finie [30].

Si (\mathfrak{p}_α) est la famille des idéaux premiers minimaux de A , on a (14.1.2.1)

$$(16.1.1.1) \quad \dim(A) = \sup_\alpha (\dim(A/\mathfrak{p}_\alpha)).$$

(16.1.2) Pour tout idéal \mathfrak{a} de A , les idéaux premiers de A/\mathfrak{a} correspondent biunivoquement aux idéaux premiers de A contenant \mathfrak{a} , donc

$$(16.1.2.1) \quad \dim(A/\mathfrak{a}) \leq \dim(A).$$

Si en outre \mathfrak{a} n'est contenu dans aucun idéal premier minimal \mathfrak{p}_α de A , toute chaîne d'idéaux premiers de A contenant \mathfrak{a} peut être complétée par un des \mathfrak{p}_α , donc on a

$$(16.1.2.2) \quad 1 + \dim(A/\mathfrak{a}) \leq \dim(A).$$

(16.1.3) Si S est une partie multiplicative de A , les idéaux premiers de $S^{-1}A$ correspondent biunivoquement aux idéaux premiers de A ne rencontrant pas S , donc on a

$$(16.1.3.1) \quad \dim(S^{-1}A) \leq \dim(A).$$

Pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A , on a, par définition (14.2.1)

$$(16.1.3.2) \quad \dim(A_{\mathfrak{p}}) = \text{codim}(V(\mathfrak{p}), \text{Spec}(A)).$$

Ce nombre est encore appelé *hauteur* de l'idéal premier \mathfrak{p} et noté $\text{ht}(\mathfrak{p})$. Plus généralement, pour tout idéal \mathfrak{a} de A , on appelle *hauteur* de \mathfrak{a} le nombre

$$(16.1.3.3) \quad \text{ht}(\mathfrak{a}) = \text{codim}(V(\mathfrak{a}), \text{Spec}(A)).$$

Si (\mathfrak{p}_λ) est la famille des idéaux premiers minimaux parmi ceux qui contiennent \mathfrak{a} , on a donc (14.2.1)

$$(16.1.3.4) \quad \text{ht}(\mathfrak{a}) = \inf_{\lambda} (\text{ht}(\mathfrak{p}_\lambda)).$$

On a évidemment

$$(16.1.3.5) \quad \dim(A) = \sup_{\mathfrak{m}} (\dim(A_{\mathfrak{m}}))$$

où \mathfrak{m} parcourt l'ensemble des idéaux maximaux de A .

(16.1.4) Pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A , on a (14.2.2.2)

$$(16.1.4.1) \quad \dim(A_{\mathfrak{p}}) + \dim(A/\mathfrak{p}) \leq \dim A.$$

On dit que A est *caténaire* (resp. *équidimensionnel*, *équicodimensionnel*, *biéquidimensionnel*) lorsque $\text{Spec}(A)$ est caténaire (resp. équidimensionnel, équicodimensionnel, biéquidimensionnel). Lorsque A est noethérien et biéquidimensionnel, les deux membres de (16.1.4.1) sont égaux pour tout idéal premier de A (14.3.5).

Pour tout idéal \mathfrak{a} de A , les idéaux premiers de A/\mathfrak{a} correspondent biunivoquement aux idéaux premiers de A contenant \mathfrak{a} , donc, si A est caténaire, il en est de même de A/\mathfrak{a} . De même, pour toute partie multiplicative S de A , les idéaux premiers de $S^{-1}A$ correspondent biunivoquement aux idéaux premiers de A ne rencontrant pas S , donc si A est caténaire, il en est de même de $S^{-1}A$.

En outre, comme les idéaux premiers de A contenus dans un idéal premier \mathfrak{p} correspondent biunivoquement aux idéaux premiers de $A_{\mathfrak{p}}$, pour que A soit caténaire, il faut et il suffit que $A_{\mathfrak{p}}$ le soit pour tout \mathfrak{p} . Dire que A est caténaire signifie donc ((14.3.2) et (16.1.3.2)) que pour tout couple d'idéaux premiers $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ de A tels que $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$, on a

$$(16.1.4.2) \quad \dim(A_{\mathfrak{q}}) - \dim(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}) = \dim(A_{\mathfrak{p}}).$$

Si A est biéquidimensionnel, il en est de même de $A_{\mathfrak{p}}$ pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A .

Proposition (16.1.5). — Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux faisant de B une A -algèbre entière. Alors on a $\dim(B) \leq \dim(A)$; si de plus φ est injectif, on a $\dim(B) = \dim(A)$.

Si \mathfrak{n} est le noyau de φ , $\varphi(A)$ est isomorphe à A/\mathfrak{n} , donc $\dim \varphi(A) \leq \dim(A)$ par (16.1.2.1), et comme B est entier sur $\varphi(A)$, on peut se borner à démontrer la seconde assertion lorsque $A \subset B$. Si $\mathfrak{p}'_0 \subset \mathfrak{p}'_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}'_n$ est une chaîne d'idéaux premiers de B , les $\mathfrak{p}'_i \cap A$ sont alors des idéaux premiers distincts dans A (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 1, cor. 1 de la prop. 1), donc forment une chaîne d'idéaux premiers. Inversement, pour toute chaîne $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_m$ d'idéaux premiers de A , on sait qu'il existe pour chaque i un idéal premier \mathfrak{p}'_i de B tel que $\mathfrak{p}'_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ et que $\mathfrak{p}'_i \subset \mathfrak{p}'_{i+1}$ pour $0 \leq i \leq m-1$ (*loc. cit.*, cor. 2 du th. 1). D'où la conclusion.

Proposition (16.1.6). — Soient B un anneau intègre, A un sous-anneau local de B , \mathfrak{m} son idéal maximal. Supposons que A soit intégralement clos et que B soit entier sur A ; alors, pour tout idéal maximal \mathfrak{n} de B , on a $\dim(B_{\mathfrak{n}}) = \dim(A)$.

La première partie du raisonnement de (16.1.5) montre que $\dim(B_{\mathfrak{n}}) \leq \dim(A)$. Inversement, considérons une chaîne d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_k = \mathfrak{m}$ de A ; on sait que $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 1, prop. 1) et en vertu des hypothèses faites, on peut appliquer le second théorème de Cohen-Seidenberg (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 4, th. 3), qui prouve l'existence d'une chaîne d'idéaux premiers $\mathfrak{p}'_0 \subset \mathfrak{p}'_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}'_k = \mathfrak{n}$ de B telle que $\mathfrak{p}'_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ pour tout i ; on en déduit aussitôt $\dim(B_{\mathfrak{n}}) \geq \dim(A)$, d'où la proposition.

(16.1.7) Soit M un A -module; on appelle *dimension de M* et on note $\dim_A(M)$ ou $\dim(M)$ la dimension de l'anneau $A/\text{Ann}(M)$ (isomorphe à l'anneau des homothéties A_M de M). On a donc $\dim(M^k) = \dim(M)$ pour tout $k > 0$. Si M est de type fini, les idéaux premiers de A contenant $\text{Ann}(M)$ sont exactement ceux qui appartiennent à $\text{Supp}(M)$ (0.1.7.4) et ce dernier est fermé dans $\text{Spec}(A)$, donc on a alors

$$(16.1.7.1) \quad \dim(M) = \dim(\text{Supp}(M)) \leq \dim(A).$$

Si M, N sont deux A -modules tels que $N \subset M$, on a

$$(16.1.7.2) \quad \dim(N) \leq \dim(M), \quad \dim(M/N) \leq \dim(M).$$

Si S est une partie multiplicative de A et si M est de type fini, on a

$$(16.1.7.3) \quad \dim_{S^{-1}A}(S^{-1}M) \leq \dim_A(M).$$

En effet, on a $\text{Ann}(S^{-1}M) = S^{-1}\text{Ann}(M)$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 4) et $S^{-1}A/S^{-1}\text{Ann}(M) = S^{-1}(A/\text{Ann}(M))$.

Par ailleurs, toute chaîne maximale d'idéaux premiers contenant $\text{Ann}(M)$ se termine par un idéal maximal \mathfrak{m} , donc sa longueur est égale à celle de la chaîne des idéaux premiers correspondants de $A_{\mathfrak{m}}$ (qui contiennent $\text{Ann}(M_{\mathfrak{m}}) = (\text{Ann}(M))_{\mathfrak{m}}$); de cette remarque et de (16.1.7.3), on tire

$$(16.1.7.4) \quad \dim_A(M) = \sup_{\mathfrak{m}} (\dim_{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}))$$

où \mathfrak{m} parcourt l'ensemble des idéaux maximaux de A .

On dit que M est *caténaire* (resp. *équidimensionnel*, *équicodimensionnel*, *biéquidimensionnel*) lorsque $A/\text{Ann}(M)$ l'est.

Proposition (16.1.8). — Soient A un anneau, M un A -module de type fini, \mathfrak{p} un idéal premier de A . On a alors

$$(16.1.8.1) \quad \dim_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) + \dim_A(M/\mathfrak{p}M) \leq \dim_A(M).$$

On a $\text{Ann}(M_{\mathfrak{p}}) = (\text{Ann}(M))_{\mathfrak{p}}$, donc les idéaux premiers de $A_{\mathfrak{p}}$ contenant $\text{Ann}(M_{\mathfrak{p}})$ correspondent biunivoquement aux idéaux premiers de A contenant $\text{Ann}(M)$ et contenus dans \mathfrak{p} . D'autre part, si $\text{Ann}(M) = \mathfrak{n}$, $V(\text{Ann}(M/\mathfrak{p}M)) = V(\mathfrak{p} + \mathfrak{n})$ (0₁, 1.7.5), donc les idéaux premiers de A contenant $\text{Ann}(M/\mathfrak{p}M)$ contiennent $\mathfrak{p} + \mathfrak{n}$; d'où la conclusion.

Cette dernière remarque montre en outre que l'on a

$$(16.1.8.2) \quad \dim_{A/\mathfrak{p}}(M/\mathfrak{p}M) = \dim_A(M/\mathfrak{p}M).$$

Proposition (16.1.9). — Soient A un anneau noethérien, $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, M un B -module tel que $M_{[\varphi]}$ soit un A -module de type fini. Alors on a

$$(16.1.9.1) \quad \dim_A(M_{[\varphi]}) = \dim_B(M).$$

En effet, l'anneau B_M des homothéties du B -module M s'identifie à un sous-anneau de $C = \text{End}_A(M_{[\varphi]})$, et C est un A -module de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, no 1, lemme 2), donc il en est de même de B_M ; d'ailleurs l'anneau A_M des homothéties du A -module $M_{[\varphi]}$ est un sous-anneau de B_M , image canonique de A dans C , donc B_M est fini sur A_M ; la conclusion résulte donc de (16.1.5).

(16.1.10) Soit A un anneau noethérien; si M est un A -module de *longueur finie*, on sait (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, no 5, prop. 7 et cor. 1 de la prop. 7) que $\text{Supp}(M)$ est un espace fini discret, donc $\dim(M) = 0$ si $M \neq 0$; réciproquement, si M est un A -module de type fini tel que $\dim(M) = 0$, tout point de $\text{Supp}(M)$ est fermé, autrement dit est un idéal maximal de A , donc (*loc. cit.*, prop. 7) M est de longueur finie.

16.2. Dimension d'un anneau semi-local noethérien⁽¹⁾.

(16.2.1) Soient A un anneau *semi-local noethérien*, \mathfrak{r} son radical; rappelons qu'un *idéal de définition* \mathfrak{q} de A est un idéal tel que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{r}$ et que \mathfrak{q} contienne une puissance de \mathfrak{r} ; il revient au même de dire que les seuls idéaux premiers contenant \mathfrak{q} sont *maximaux*, ou que A/\mathfrak{q} est un anneau *artinien*. Soit M un A -module de type fini; pour tout entier $n > 0$, $M/\mathfrak{q}^n M$ est un A -module de *longueur finie*, égale à $\sum_{i=0}^{n-1} \text{long}(\text{gr}_i(M))$, où $\text{gr}_i(M)$ est le (A/\mathfrak{q}) -module gradué associé à M muni de la filtration \mathfrak{q} -préadique. On sait qu'il existe un *polynôme* $Q(n)$ à coefficients rationnels tel que $\text{long}(\text{gr}_n(M)) = Q(n)$ pour n assez grand (III, 2.5.4); on en déduit aussitôt qu'il existe un polynôme $P_{\mathfrak{q}}(M, n)$ en n , à coefficients rationnels, tel que $\text{long}(M/\mathfrak{q}^n M) = P_{\mathfrak{q}}(M, n)$ pour n assez grand; il est clair que ce polynôme est unique et que son coefficient dominant est > 0 si $M \neq 0$; on dit que c'est le *polynôme de Hilbert-Samuel* de M pour la filtration \mathfrak{q} -préadique.

⁽¹⁾ Ce numéro reproduit l'exposé donné par Serre dans un cours au Collège de France en 1958.

Lemme (16.2.2.1). — Soit (M_n) une filtration q -bonne de M (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 1); alors $\text{long}(M/M_n)$ est égal, pour n grand, à un polynôme en n dont le degré et le coefficient dominant sont les mêmes que ceux de $P_q(M, n)$.

En effet, il existe n_0 tel que $M_{n+1} = qM_n$ pour $n \geq n_0$, d'où les inclusions $q^{n+n_0} M \subset M_{n+n_0} = q^n M_{n_0} \subset q^n M \subset M_n$ pour n grand, ce qui entraîne

$$P_q(M, n+n_0) \geq \text{long}(M/M_{n+n_0}) \geq P_q(M, n) \geq \text{long}(M/M_n)$$

et par suite la conclusion.

Si q' est un second idéal de définition, on a $q' \supset q^m$ pour un entier m , donc $P_{q'}(M, n) \leq P_q(M, mn)$; par suite le degré de $P_q(M, n)$ ne dépend pas de l'idéal de définition q considéré; on le note $d(M)$.

Lemme (16.2.2.2). — Soit $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de A -modules de type fini. Alors le polynôme $P_q(M, n) - P_q(M', n) - P_q(M'', n)$ a un degré $\leq d(M') - 1 \leq d(M) - 1$.

En effet, la filtration des $M'_n = M' \cap q^n M$ est q -bonne (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 1, prop. 1); comme $\text{long}(M/q^n M) = \text{long}(M''/q^n M'') + \text{long}(M'/M'_n)$ le lemme résulte aussitôt de (16.2.2.1) appliqué à M' .

Théorème (16.2.3) (Krull-Chevalley-Samuel). — Soient A un anneau semi-local noethérien, r son radical, $M \neq 0$ un A -module de type fini, $d(M)$ le degré du polynôme de Hilbert-Samuel de M (pour un idéal de définition quelconque de A); soit d'autre part $s(M)$ la borne inférieure des entiers n tels qu'il existe des éléments x_1, \dots, x_n de r pour lesquels $M/(x_1 M + \dots + x_n M)$ soit de longueur finie. Alors on a

$$d(M) = s(M) = \dim(M).$$

Lemme (16.2.3.1). — Pour tout $x \in r$, soit $_x M$ le sous-module de M formé des éléments annulés par x . Alors :

- (i) On a $s(M) \leq s(M/xM) + 1$.
- (ii) Soient p_i les idéaux premiers appartenant à $\text{Supp}(M)$ et tels que

$$\dim(A/p_i) = \dim(M) \quad (1 \leq i \leq m).$$

Si $x \notin p_i$ pour tout i , on a $\dim(M/xM) \leq \dim(M) - 1$.

- (iii) Si q est un idéal de définition de A , le polynôme

$$P_q(_x M, n) - P_q(M/xM, n)$$

est de degré $\leq d(M) - 1$.

L'assertion (i) est triviale, car si $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ est tel que pour le module $N = M/xM$, $N/(x_1 N + \dots + x_m N)$ soit de longueur finie, il suffit d'observer que ce module est isomorphe à $M/(xM + x_1 M + \dots + x_m M)$.

Pour prouver (ii), on remarque que, si a est l'annulateur de M , les idéaux premiers qui contiennent l'annulateur de M/xM sont ceux qui contiennent $a + Ax$ (0_I, 1.7.5); aucun des p_i ne peut donc contenir $a + Ax$ et par définition de $\dim(M)$ (16.1.7) toute chaîne d'idéaux premiers contenant $a + Ax$ a donc une longueur $\leq \dim(M) - 1$.

Enfin, pour démontrer (iii), on note que l'on a deux suites exactes

$$0 \rightarrow {}_x M \rightarrow M \xrightarrow{x} xM \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow xM \rightarrow M \rightarrow M/xM \rightarrow 0$$

et l'assertion découle aussitôt du lemme (16.2.2.2).

La démonstration de (16.2.3) se fait en trois étapes :

(16.2.3.2) *On a $\dim(M) \leq d(M)$.*

Raisonnons par récurrence sur $d(M)$, le cas $d(M) = 0$ étant trivial. Supposons donc $d(M) \geq 1$, et soit $p_0 \in \text{Supp}(M)$ tel que $\dim(A/p_0) = \dim(M)$. Cela entraîne que p_0 est un élément *minimal* de $\text{Supp}(M)$, donc il est associé à M (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, no 4, th. 2) et M contient par suite un sous-module N isomorphe à A/p_0 (*loc. cit.*, § 1, no 1); comme $d(M) \geq d(N)$ par (16.2.2.2), on est ramené à prouver que $\dim(N) \leq d(N)$. Soit donc $p_0 \subset p_1 \subset \dots \subset p_n$ une chaîne d'idéaux premiers distincts dans A , et montrons que $n \leq d(N)$. C'est évident si $n = 0$. Sinon, il existe $x \in p_1 \cap r$ tel que $x \notin p_0$, car la relation $p_0 \supset p_1 \cap r$ entraînerait $p_0 \supset r$ puisque p_0 ne contient pas p_1 , donc p_0 serait maximal, ce qui est absurde. On a $p_i \in \text{Supp}(N/xN)$, pour $i \geq 1$, donc $n - 1 \leq \dim(N/xN)$ (16.1.7). Comme $_x N = 0$ en vertu du choix de x , on a $d(N/xN) \leq d(N) - 1$ par (16.2.3.1, (iii)). L'hypothèse de récurrence implique alors $d(N/xN) = \dim(N/xN) \geq n - 1$, donc $n - 1 \leq d(N) - 1$.

(16.2.3.3) *On a $d(M) \leq s(M)$.*

Soit en effet $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de r telle que, si l'on pose $a = x_1 A + \dots + x_n A$, M/aM soit de longueur finie. Les idéaux associés à M/aM sont alors maximaux (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, no 5, prop. 7) et comme ce sont les seuls idéaux premiers contenant $q = a + (r \cap \text{Ann}(M))$, A/q est artinien (*loc. cit.*, prop. 9) et q est un idéal de définition de A . Mais on a $q^m M/q^{m+1}M = a^m M/a^{m+1}M$, et si M est engendré par r éléments z_j , $a^m M/a^{m+1}M$ est un (A/q) -module engendré par les images canoniques des $x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_n^{v_n} z_j$ où $\sum_i v_i = m$, donc par $r \binom{m+n-1}{n-1}$ éléments; sa longueur est par suite $\leq ar \binom{m+n-1}{n-1}$, où a est une constante, et on en déduit aussitôt que le degré de $P_q(M, n)$ est $\leq n$; d'où $d(M) \leq s(M)$.

(16.2.3.4) *On a $s(M) \leq \dim(M)$.*

Notons d'abord que $n = \dim(M)$ est fini par (16.2.3.2). Raisonnons par récurrence sur n ; la proposition est évidente pour $n = 0$, puisque M est alors de longueur finie (16.1.10). Supposons $n \geq 1$, et soient p_i ($1 \leq i \leq m$) les idéaux premiers de $\text{Supp}(M)$ tels que $\dim(A/p_i) = n$; la définition des p_i montre que ce sont des éléments minimaux de $\text{Supp}(M)$, donc en nombre fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, no 4, th. 2). Comme $n \geq 1$, les p_i ne sont pas maximaux, et il existe donc $x \in r$ tel que $x \notin p_i$ pour tout i (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 1, no 1, prop. 2). En vertu de (16.2.3.1), on a $s(M) \leq s(M/xM) + 1$ et $\dim(M) \geq \dim(M/xM) + 1$; l'hypothèse de récurrence entraîne que $s(M/xM) \leq \dim(M/xM)$, d'où la conclusion.

Corollaire (16.2.4). — Sous les hypothèses de (16.2.3), on a

(16.2.4.1)

$$\dim_{\hat{A}}(\hat{M}) = \dim_A(M).$$

En effet, M/r^nM et $\hat{M}/\hat{r}^n\hat{M}$ sont isomorphes, donc $d(\hat{M}) = d(M)$.

Corollaire (16.2.5). — *La dimension d'un anneau semi-local noethérien A est finie et égale au nombre minimum d'éléments du radical de A engendrant un idéal de définition.*

C'est l'égalité $s(M) = \dim(M)$ pour $M = A$.

En particulier :

Corollaire (16.2.6). — *Soient A un anneau local noethérien, m son idéal maximal, k = A/m son corps résiduel; on a*

$$(16.2.6.1) \quad \dim(A) \leq \operatorname{rg}_k(m/m^2).$$

En effet, on sait que si les x_i ($1 \leq i \leq n$) sont des éléments de m dont les classes mod. m^2 forment une base du k -espace vectoriel m/m^2 , les x_i engendrent m (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, cor. 2 de la prop. 4).

Proposition (16.2.7). — *Soient k un corps, B une k-algèbre graduée de type fini à degrés positifs engendrée par ses éléments homogènes de degré 1 et telle que $B_0 = k$; soient E un B-module gradué de type fini, de sorte (III, 2.5.4) que, pour n assez grand, $\operatorname{rg}_k(E_n) = r(n)$ est de la forme $\Phi(n) - \Phi(n-1)$, où Φ est un polynôme en n de degré d. Alors il existe dans B une famille $(t_i)_{1 \leq i \leq d}$ de d éléments homogènes de degrés ≥ 1 tels que $E/(\sum t_i E)$ soit de rang fini sur k.*

Soit q l'idéal maximal $\bigoplus_{n \geq 1} B_n$ de B , et, pour tout n , soit E'_n le sous-B-module $\bigoplus_{h \geq n+1} E_h$ de E . Tout élément de $B-q$ détermine une homothétie injective dans le B -module artinien E/E'_n , et cette homothétie est donc bijective (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 2, n° 2, lemme 3), ce qui entraîne que $(E/E'_n)_q$ s'identifie à E/E'_n ; comme le corps résiduel de B_q est k , on déduit de l'hypothèse que $\operatorname{long}_{B_q}((E/E'_n)_q)$ est un polynôme en n de degré d . D'autre part, comme E est un B -module de type fini et que B est engendré par ses éléments homogènes de degré 1, la filtration (E'_n) sur E est q -bonne (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 1, n° 3, lemme 1), donc la filtration $((E'_n)_q)$ sur E_q est qB_q -bonne. Puisque B_q est un anneau local noethérien, on conclut de (16.2.3) et de (16.2.2.1) que l'on a $\dim(E_q) = d$. Raisonnons alors par récurrence sur d , le lemme étant évident si $d = 0$. Supposons $d \geq 1$, et observons que les idéaux premiers minimaux p_i ($1 \leq i \leq r$) dans $\operatorname{Ass}(E)$ sont gradués (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 3, n° 1, prop. 1), et que q est distinct de la réunion des p_i puisque $d \geq 1$; il y a donc un élément homogène $t_1 \in q$ n'appartenant à aucun des p_i (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 1, n° 4, prop. 8). Comme les idéaux premiers $(p_i)_q$ sont les éléments minimaux de $\operatorname{Ass}(E_q)$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 2, prop. 5), on a $\dim(E_q/t_1 E_q) = d-1$ (16.3.4). Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence au B -module gradué $E/t_1 E$ pour obtenir la conclusion.

16.3. Systèmes de paramètres dans un anneau local noethérien.

Proposition (16.3.1). — *Soient A un anneau noethérien, p un idéal premier de A, n un entier. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) $\operatorname{ht}(p) = \dim(A_p) \leq n$;
- b) Il existe n éléments x_i de A ($1 \leq i \leq n$) tels que p soit minimal dans l'ensemble des idéaux premiers contenant l'idéal a engendré par les x_i (autrement dit $V(p)$ est une composante irréductible de $V(a)$).

La condition b) entraîne que aA_p est un idéal de définition de A_p , d'où a) en vertu de (16.2.5). Inversement, si a) est vérifiée, il existe un idéal de définition b de A_p engendré par n éléments x_i/s , avec $s \in A - p$. En vertu de la correspondance biunivoque entre idéaux premiers de A_p et idéaux premiers de A contenus dans p , l'idéal a de A engendré par les x_i vérifie b).

Pour $n=1$, on obtient le cas particulier :

Corollaire (16.3.2) (« Hauptidealsatz »). — Pour qu'un idéal premier dans un anneau noethérien soit de hauteur ≤ 1 , il faut et il suffit qu'il soit minimal dans l'ensemble des idéaux premiers contenant un idéal principal convenable.

Corollaire (16.3.3) (Artin-Tate). — Soit A un anneau intègre noethérien. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) A est un anneau semi-local de dimension ≤ 1 .
- b) Il existe $f \neq 0$ dans A tel que A_f soit un corps.

La condition a) équivaut à dire que A n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers $m_i \neq 0$, et que ces idéaux sont tous maximaux (0 étant un idéal premier). Comme le produit des m_i n'est pas nul, puisque A est intègre, un élément $f \neq 0$ de ce produit appartient à tous les m_i , donc (0) est le seul idéal premier de l'anneau intègre A_f , autrement dit A_f est un corps. (On notera que cette partie de la démonstration n'utilise pas le fait que A est noethérien.) Prouvons maintenant que b) entraîne a); l'hypothèse b) signifie que tout idéal premier $p \neq 0$ de A contient f . Soient p_i ($1 \leq i \leq n$) les idéaux premiers minimaux parmi ceux qui contiennent f (qui sont en nombre fini puisque A/fA est noethérien); il suffit de prouver que les p_i sont des idéaux maximaux, car alors tout idéal premier $\neq 0$ contient nécessairement un des p_i , donc lui est égal. Supposons donc qu'il existe un idéal maximal m contenant un des p_i et distinct des p_i ; m n'est donc pas contenu dans la réunion des p_i (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 1, n° 1, prop. 2), autrement dit il existe $g \in m$ n'appartenant à aucun des p_i . Soit q un des idéaux premiers minimaux parmi ceux qui contiennent g ; il résulte du « Hauptidealsatz » (16.3.2) que q est de hauteur 1, donc $\neq 0$; il contient par suite f , donc aussi un des p_i , et comme $g \in q$ et que g n'appartient à aucun des p_i , q est distinct des p_i ; il serait donc de hauteur ≥ 2 , ce qui est contradictoire.

Proposition (16.3.4). — Soient A un anneau semi-local noethérien, r son radical, M un A -module de type fini, p_i les éléments de $\text{Supp}(M)$ tels que $\dim(A/p_i) = \dim(M)$. Alors les p_i sont des éléments minimaux de $\text{Ass}(M)$, et l'on a $\dim(M/p_i M) = \dim(M)$. Pour tout $x \in r$, on a

$$(16.3.4.1) \quad \dim(M/xM) \geq \dim(M) - 1.$$

En outre, pour que les deux membres de (16.3.4.1) soient égaux, il faut et il suffit que x n'appartienne à aucun des p_i .

La première assertion est immédiate, car les p_i sont par définition des éléments minimaux de $\text{Supp}(M)$ (16.1.6), et ces derniers sont aussi éléments minimaux de $\text{Ass}(M)$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 4, th. 2). En outre, $\text{Supp}(M/p_i M)$ est l'ensemble des idéaux premiers contenant p_i (16.1.6), donc $\dim(M/p_i M) = \dim(A/p_i) = \dim(M)$.

Posons $N = M/xM$. Si x_1, \dots, x_n sont des éléments de r tels que $N/(x_1 N + \dots + x_n N)$ soit de longueur finie, cela signifie que $M/(xM + x_1 M + \dots + x_n M)$ est de longueur finie, d'où l'inégalité (16.3.4.1) en vertu de (16.2.3).

Le fait que les deux membres de (16.3.4.1) soient égaux lorsque x n'appartient à aucun des p_i résulte de (16.3.4.1) et de (16.2.3.1). Inversement, si

$\dim(M/xM) = \dim(M) - 1$, aucun des p_i ne peut appartenir à $\text{Supp}(M/xM)$, et les idéaux premiers de ce support sont ceux qui contiennent $\text{Ann}(M) + Ax$; comme les p_i contiennent $\text{Ann}(M)$, ils ne peuvent contenir x .

Corollaire (16.3.5). — *Avec les notations de (16.3.4), pour tout idéal $a \subset p_i$, on a $\dim(M/aM) = \dim(M)$ et si l'on pose $N = M/aM$, la relation $\dim(M/xM) = \dim(M) - 1$ entraîne $\dim(N/xN) = \dim(N) - 1$.*

En effet, $\text{Supp}(N)$ est l'ensemble des idéaux premiers contenant $a + \text{Ann}(M)$, donc p_i appartient à $\text{Supp}(N)$ et comme $\dim(N) \leq \dim(M) = \dim(A/p_i)$, on a $\dim(A/p_i) = \dim(N)$; en outre les idéaux premiers $q \in \text{Supp}(N)$ tels que $\dim(A/q) = \dim(N)$ sont certains des p_j ; si x n'appartient à aucun des p_j , on a donc $\dim(N/xN) = \dim(N) - 1$ en vertu de (16.3.4).

Définition (16.3.6). — *Soient A un anneau semi-local noethérien, r son radical, M un A-module de type fini, et posons $n = \dim(M)$. On appelle système de paramètres pour M tout système $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de n éléments de r tel que $M/(x_1M + \dots + x_nM)$ soit de longueur finie.*

On a vu (16.2.3) qu'il existe toujours de tels systèmes.

On a vu au cours de la démonstration de (16.2.3.3) que si $\mathfrak{J} = \sum_{i=1}^n x_i A$ est tel que $M/\mathfrak{J}M$ soit de longueur finie, $q = \mathfrak{J} + \text{Ann}(M)$ est un idéal de définition de A, et réciproquement, s'il en est ainsi, $M/\mathfrak{J}M$ est un module de type fini sur l'anneau artinien A/q , donc est de longueur finie. Il revient donc au même de dire que $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système de paramètres pour M ou pour $A/\text{Ann}(M)$ (ou encore que leurs images dans $A/\text{Ann}(M)$ forment un système de paramètres pour cet anneau). Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système de paramètres pour M, il en est de même de (x_i^k) pour tout entier $k \geq 1$, car on peut se borner, en vertu de ce qui précède, au cas où $M = A$, et si \mathfrak{J} est un idéal de définition de A, l'idéal $\sum_{i=1}^n x_i^k A$ contient \mathfrak{J}^{kn} , donc est aussi un idéal de définition.

Proposition (16.3.7). — *Soient A un anneau semi-local noethérien, r son radical, x_1, \dots, x_k des éléments de r, M un A-module de type fini.*

On a alors

$$(16.3.7.1) \quad \dim(M/(x_1M + \dots + x_kM)) \geq \dim(M) - k.$$

En outre, pour que les deux membres de (16.3.7.1) soient égaux, il faut et il suffit qu'il existe des éléments x_i ($k+1 \leq i \leq n = \dim(M)$) de r tels que $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ soit un système de paramètres pour M.

L'inégalité (16.3.7.1) résulte de (16.3.4.1) par récurrence sur k . Si les deux membres de (16.3.7.1) sont égaux, et si x_{k+1}, \dots, x_n est un système de paramètres pour $M/(x_1M + \dots + x_kM)$, il est clair que $M/(x_1M + \dots + x_kM + x_{k+1}M + \dots + x_nM)$ est de longueur finie, donc $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système de paramètres pour M; réciproquement, s'il existe des x_i ($k+1 \leq i \leq n$) ayant cette propriété et si l'on pose $N = M/(x_1M + \dots + x_kM)$, il est clair que $N/(x_{k+1}N + \dots + x_nN)$ est de longueur finie, donc $\dim(N) \leq n - k$, et les deux membres sont égaux en vertu de (16.3.7.1).

Proposition (16.3.8). — Soient A un anneau semi-local noethérien, $X = \text{Spec}(A)$ son spectre, \mathfrak{a} un idéal de A distinct de A tel que $\text{codim}(V(\mathfrak{a}), X) = r > 0$. Il existe alors r éléments x_1, \dots, x_r de \mathfrak{a} , faisant partie d'un système de paramètres de A , tels que

$$\text{codim}(V(\mathfrak{a}), V(Ax_1 + \dots + Ax_r)) = 0.$$

Soient \mathfrak{p}_i ($1 \leq i \leq m$) les idéaux premiers minimaux de l'anneau A , \mathfrak{q}_j ($1 \leq j \leq n$) les idéaux premiers minimaux parmi ceux qui contiennent \mathfrak{a} ; on a (14.2.1) $\text{codim}(V(\mathfrak{a}), X) = \inf_j (\text{codim}(V(\mathfrak{q}_j), X)) = \inf_j (\dim(A_{\mathfrak{q}_j}))$ (16.1.3.2). L'hypothèse $r > 0$ entraîne que \mathfrak{a} n'est contenu dans aucun des \mathfrak{p}_i ; par suite il existe $x \in \mathfrak{a}$ qui n'appartient à aucun des \mathfrak{p}_i (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 1, no 1, prop. 2). On a comme ci-dessus $\text{codim}(V(\mathfrak{a}), V(Ax)) = \inf_j (\dim((A/Ax)_{\mathfrak{q}_j/Ax})) = \inf_j (\dim(A_{\mathfrak{q}_j}/A_{\mathfrak{q}_j}x))$; mais comme $x/1$ n'est contenu dans aucun des idéaux premiers minimaux de $A_{\mathfrak{q}_j}$ on a $\dim(A_{\mathfrak{q}_j}/A_{\mathfrak{q}_j}x) = \dim(A_{\mathfrak{q}_j}) - 1$ (16.3.4), d'où $\text{codim}(V(\mathfrak{a}), V(Ax)) = r - 1$. Pour la même raison, on a $\dim(A/Ax) = \dim(A) - 1$. Raisonnons maintenant par récurrence sur r ; si $r > 1$, il existe $r - 1$ éléments x'_i ($2 \leq i \leq r$) de $A' = A/Ax$, faisant partie d'un système de paramètres de cet anneau, appartenant à \mathfrak{a}/Ax et tels que $\text{codim}(V(\mathfrak{a}/Ax), V(A'x'_2 + \dots + A'x'_r)) = 0$. Soit $(x'_i)_{r+1 \leq i \leq s}$ un système d'éléments de A' tel que $(x'_i)_{2 \leq i \leq s}$ soit un système de paramètres de A' ; pour tout i tel que $2 \leq i \leq s$, soit x_i un élément de la classe x'_i dans A , avec $x_i \in \mathfrak{a}$ pour $2 \leq i \leq r$; il est immédiat que $A/(Ax + Ax_2 + \dots + Ax_s)$ est de longueur finie, et comme $\dim(A) = s$, on voit que $x_1 = x$ et les x_i d'indices $i \geq 2$ répondent aux conditions de l'énoncé.

Proposition (16.3.9). — Soient A, B deux anneaux locaux noethériens, \mathfrak{m} l'idéal maximal de A , k son corps résiduel, $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme local.

(i) *On a*

$$(16.3.9.1) \quad \dim(B) \leq \dim(A) + \dim(B \otimes_A k).$$

(ii) *Soient $M \neq 0$ un A -module de type fini, $N \neq 0$ un B -module de type fini. On a*

$$(16.3.9.2) \quad \dim_B(M \otimes_A N) \leq \dim_A(M) + \dim_{B \otimes_A k}(N \otimes_A k).$$

Soient m la dimension de A , $(s_i)_{1 \leq i \leq m}$ un système de paramètres de A (16.3.6), de sorte que si $\mathfrak{a} = \sum_i s_i A$, A/\mathfrak{a} est un A -module de longueur finie. Alors l'anneau A/\mathfrak{a} est artinien, donc l'idéal maximal $\mathfrak{m}/\mathfrak{a}$ de cet anneau est nilpotent; l'idéal $\mathfrak{m}B/\mathfrak{a}B$ de $B/\mathfrak{a}B$, image de $(\mathfrak{m}/\mathfrak{a}) \otimes_A B$, est donc lui aussi nilpotent, et par suite on a $\dim(B/\mathfrak{a}B) = \dim(B/\mathfrak{m}B)$ (les spectres de ces deux anneaux ayant même espace sous-jacent). D'autre part $B/\mathfrak{a}B = B/(s_1 B + \dots + s_m B)$, et les images des s_i dans B appartiennent à l'idéal maximal de B . Par suite (16.3.7), on a

$$\dim(B) \leq m + \dim(B \otimes_A k)$$

ce qui n'est autre que (16.3.9.1).

Pour prouver (16.3.9.2), notons que si \mathfrak{r} (resp. \mathfrak{s}) est l'annulateur de M (resp. N)

dans A (resp. B), on a $\dim_A(M) = \dim(A/\mathfrak{r})$, $\dim_B(N) = \dim(B/\mathfrak{s})$ par définition (16.1.7); d'autre part, $\text{Supp}(M \otimes_A N)$ est un sous-ensemble fermé de $\text{Spec}(B)$ qui s'identifie (I, 9.1.13) à $\text{Supp}(M) \times_{\text{Spec}(A)} \text{Supp}(N) = \text{Spec}((B/\mathfrak{s}) \otimes_A (A/\mathfrak{r})) = \text{Spec}(B/(\mathfrak{s} + \mathfrak{r}B))$. Comme $N \otimes_A k$ est un B -module de type fini, on a $\dim_{B \otimes_A k}(N \otimes_A k) = \dim_B(N \otimes_A k)$ (16.1.9), et $\text{Supp}(N \otimes_A k)$ est égal à $\text{Spec}(B/(\mathfrak{s} + \mathfrak{m}B))$ par le même raisonnement que ci-dessus. Appliquant (16.3.9.1) à A/\mathfrak{r} et à $B/(\mathfrak{s} + \mathfrak{r}B)$ il vient

$$\dim(B/(\mathfrak{s} + \mathfrak{r}B)) \leq \dim(A/\mathfrak{r}) + \dim(B/(\mathfrak{s} + \mathfrak{m}B))$$

ce qui n'est autre que (16.3.9.2).

Corollaire (16.3.10). — Sous les hypothèses de (16.3.9), si $\mathfrak{m}B$ est un idéal de définition de B , on a $\dim(B) \leq \dim(A)$; si de plus A est intègre et $\dim(A) = \dim(B)$, φ est injectif.

La première assertion résulte de (16.3.9) puisque alors $\dim(B/\mathfrak{m}B) = 0$. On peut d'ailleurs remplacer A par $\varphi(A)$, donc $\dim(B) \leq \dim(\varphi(A))$; si $\mathfrak{a} = \text{Ker}(\varphi) \neq 0$, et si A est intègre, on a $\dim(\varphi(A)) = \dim(A/\mathfrak{a}) < \dim(A)$ (16.1.2.2), donc on ne peut alors avoir $\dim(A) = \dim(B)$ que si $\mathfrak{a} = 0$.

16.4. Profondeur et coprofondeur ⁽¹⁾.

Proposition (16.4.1). — Soient A un anneau local noethérien, \mathfrak{m} son idéal maximal, M un A -module de type fini. Alors toute suite M -régulière $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$ (15.1.7) formée d'éléments de \mathfrak{m} , fait partie d'un système de paramètres pour M .

Raisonnons par récurrence sur r ; considérons le A -module

$$N = M/(x_1 M + \dots + x_{r-1} M);$$

par hypothèse x_1, \dots, x_{r-1} font partie d'un système de paramètres pour M , donc $\dim(N) = \dim(M) - (r-1)$ (16.3.7). Comme par hypothèse l'homothétie de rapport x_r dans N est injective, x_r n'appartient à aucun des idéaux premiers associés à N , donc (16.3.4) on a $\dim(N/x_r N) = \dim(N) - 1$, ce qui s'écrit aussi

$$\dim(M/(x_1 M + \dots + x_r M)) = \dim(M) - r;$$

la conclusion résulte donc de (16.3.7).

Pour un A -module $M \neq 0$, une suite M -régulière d'éléments de \mathfrak{m} a donc au plus $\dim(M)$ éléments.

Lemme (16.4.2). — Soient A un anneau local noethérien, \mathfrak{m} son idéal maximal, $k = A/\mathfrak{m}$ son corps résiduel, M un A -module. Pour qu'une suite M -régulière $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de \mathfrak{m} soit maximale, il faut et il suffit que l'on ait $\text{Hom}_A(k, M/(x_1 M + \dots + x_n M)) \neq 0$.

Dire que (x_i) est maximale signifie que, pour aucun $x \in \mathfrak{m}$, l'homothétie de rapport x dans $N = M/(x_1 M + \dots + x_n M)$ n'est injective, ou encore que \mathfrak{m} est contenu dans la réunion des idéaux premiers associés à N (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 1, cor. 2 de la prop. 2), donc égal à un de ces derniers, puisque c'est un idéal

⁽¹⁾ Dans la 3^e partie du chap. III, nous développons la notion de profondeur du point de vue cohomologique et dans un cadre plus général.

maximal (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 1, n° 1, prop. 2); autrement dit, il y a un élément $z \in N$ dont l'annulateur est m , et par suite le sous-module Az de N est isomorphe à $A/m = k$; d'où le lemme.

Lemme (16.4.3). — Soient A un anneau local noethérien, m son idéal maximal, $k = A/m$ son corps résiduel, M un A -module, $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite M -régulière d'éléments de m . Alors les A -modules $\text{Hom}_A(k, M/(x_1M + \dots + x_nM))$ et $\text{Ext}_A^n(k, M)$ sont isomorphes, et pour $n \geq 1$, ils sont aussi isomorphes à $\text{Ext}_A^{n-1}(k, M/x_1M)$.

Raisonnons par récurrence sur n , la proposition étant évidente pour $n=0$. Posons $N = M/x_1M$; la suite $(x_i)_{2 \leq i \leq n}$ est N -régulière, donc

$$\text{Hom}_A(k, M/(x_1M + \dots + x_nM)) = \text{Hom}_A(k, N/(x_2N + \dots + x_nN))$$

est isomorphe à $\text{Ext}_A^{n-1}(k, N)$ en vertu de l'hypothèse de récurrence. Considérons alors la suite exacte $0 \rightarrow M \xrightarrow{x_1} M \rightarrow M/x_1M = N \rightarrow 0$; on en déduit la suite exacte des Ext

$$(16.4.3.1) \quad \text{Ext}_A^{n-1}(k, M) \rightarrow \text{Ext}_A^{n-1}(k, N) \rightarrow \text{Ext}_A^n(k, M) \xrightarrow{x_1} \text{Ext}_A^n(k, M).$$

En vertu de l'hypothèse de récurrence, $\text{Ext}_A^{n-1}(k, M)$ est isomorphe à

$$\text{Hom}_A(k, M/(x_1M + \dots + x_{n-1}M)),$$

qui est nul, puisque $(x_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ n'est pas une suite M -régulière maximale (16.4.2). D'autre part, comme $x_1 \in m$, l'homothétie de rapport x_1 dans le A -module $\text{Hom}_A(k, T)$ est nulle pour tout A -module T , donc il en est de même de l'homothétie de rapport x_1 dans tout A -module $\text{Ext}_A^m(k, T)$; les assertions du lemme découlent donc aussitôt de la suite exacte (16.4.3.1).

Corollaire (16.4.4). — Soient A un anneau local noethérien, m son idéal maximal, $k = A/m$ son corps résiduel, M un A -module de type fini $\neq 0$. Toutes les suites M -régulières maximales d'éléments de m ont le même nombre d'éléments, qui est le plus petit entier n tel que $\text{Ext}_A^n(k, M) \neq 0$.

Définition (16.4.5). — Soient A un anneau local noethérien, m son idéal maximal, M un A -module de type fini. On appelle profondeur de M , et l'on note $\text{prof}_A M$ ou $\text{prof}(M)$ la borne supérieure du nombre d'éléments d'une suite M -régulière formée d'éléments de m .

On a donc $\text{prof}(M) = +\infty$ si et seulement si $M = 0$, et, par (16.4.1)

$$(16.4.5.1) \quad \text{prof}(M) \leq \dim(M) \quad \text{si } M \neq 0.$$

On a évidemment $\text{prof}(M^k) = \text{prof}(M)$ pour tout $k > 0$.

Proposition (16.4.6). — Soient A un anneau local noethérien, m son idéal maximal, M un A -module de type fini.

(i) Pour que $\text{prof}(M) = 0$, il faut et il suffit que $m \in \text{Ass}(M)$ (ou encore qu'il existe un sous-module de M isomorphe au corps résiduel $k = A/m$ de A).

(ii) Pour tout élément M -régulier x appartenant à m , on a

$$(16.4.6.1) \quad \text{prof}(M/xM) = \text{prof}(M) - 1.$$

(iii) Si $M \neq 0$, on a

$$(16.4.6.2) \quad \text{prof}(M) \leq \inf_{p \in \text{Ass}(M)} \dim(A/p) \leq \dim(M).$$

(iv) *On a $\text{prof}_A(M) = \text{prof}_{\hat{A}}(\hat{M})$.*

(i) Dire que $\text{prof}(M) = 0$ signifie qu'il n'existe aucun $x \in M$ tel que l'homothétie de rapport x dans M soit injective, autrement dit que tout $x \in M$ appartient à un idéal premier associé à M (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, no 1, cor. 2 de la prop. 2); mais M ne peut être réunion des idéaux premiers associés à M que s'il est égal à l'un d'eux (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 1, no 1, prop. 2).

(ii) Si $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ est une suite (M/xM) -régulière formée d'éléments de M , la suite formée de x et des x_i est M -régulière, et il résulte de la définition qu'elle est maximale lorsque la suite $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ est une suite (M/xM) -régulière maximale; d'où la conclusion.

(iii) Raisonnons par récurrence sur $n = \text{prof}(M)$, l'assertion étant évidente pour $n = 0$. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme (16.4.6.3). — *Soient A un anneau noethérien, M un A -module de type fini, $t \in A$ un élément M -régulier. Alors, pour tout $p \in \text{Ass}(M)$, tout idéal premier minimal parmi ceux qui contiennent $p + At$ est associé à M/tM .*

On sait qu'il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

telle que $\text{Ass}(M') = \{p\}$, $\text{Ass}(M'') = \text{Ass}(M) - \{p\}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, no 1, prop. 4); comme t est M -régulier, il est aussi M' -régulier et M'' -régulier (*loc. cit.*, § 1, no 1, cor. 2 de la prop. 2). On en déduit que la suite

$$0 \rightarrow M'/tM' \rightarrow M/tM \rightarrow M''/tM'' \rightarrow 0$$

est exacte (15.1.18). Par suite, on a $\text{Ass}(M'/tM') \subset \text{Ass}(M/tM)$. Mais les idéaux premiers de A contenant p sont les points de $\text{Supp}(M')$ (*loc. cit.*, § 1, no 3, prop. 7), donc les idéaux premiers contenant $p + At$ sont les points du support de $M'/tM' = M' \otimes_A (A/tA)$ (0_I, 1.7.5); un élément minimal de l'ensemble de ces idéaux premiers appartient donc à $\text{Ass}(M'/tM')$ (Bourbaki, *loc. cit.*, § 1, no 3, cor. 1 de la prop. 7), et *a fortiori* à $\text{Ass}(M/tM)$.

Ce lemme étant établi, revenons à la démonstration de (iii). Soit $x \in M$ un élément M -régulier, de sorte que $\text{prof}(M/xM) = n - 1$ par (ii); pour tout $p \in \text{Ass}(M)$, il résulte du lemme qu'il y a un idéal p' associé à M/xM et contenant $p + xA$; mais comme x est M -régulier, on a $x \notin p$, d'où $p' \neq p$ et par suite $\dim(A/p') \leq \dim(A/p) - 1$. Or l'hypothèse de récurrence montre que $n - 1 \leq \dim(A/p')$; on en conclut que $n \leq \dim(A/p)$ pour tout $p \in \text{Ass}(M)$.

(iv) On peut se borner au cas où $M \neq 0$. Rappelons que $\hat{M} = M \otimes_A \hat{A}$ à un isomorphisme canonique près (0_I, 7.3.3); comme \hat{A} est un A -module plat, on a des isomorphismes canoniques $\text{Ext}_A^i(k, M) \otimes_A \hat{A} \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\hat{A}}^i(k, M \otimes_A \hat{A})$ puisque $k = k \otimes_A \hat{A}$ à un isomorphisme canonique près (0_{III}, 12.3.5). L'assertion (iv) résulte donc de (16.4.4) et du fait que \hat{A} est un A -module fidèlement plat (0_I, 7.3.5).

(16.4.6.4) On notera que si p est un idéal premier de A , on peut avoir *aussi bien* $\text{prof}_{A_p}(M_p) < \text{prof}_A(M)$ que $\text{prof}_{A_p}(M_p) > \text{prof}_A(M)$; pour un exemple du premier cas,

il suffit de prendre pour A un anneau local intègre de dimension ≥ 1 ; on a $\text{prof}(A) \geq 1$ mais $\text{prof}(K)=0$ pour le corps des fractions K de A . Pour un exemple du second cas, considérons un anneau local noethérien intègre A_0 de dimension ≥ 2 , d'idéal maximal m_0 et soit $k = A_0/m_0$ son corps résiduel; soit $A = A_0 \oplus \mathfrak{J}$ l'extension triviale de A_0 par le A_0 -module k (18.2.3), l'idéal \mathfrak{J} étant A_0 -isomorphe à k (de sorte que la multiplication dans A est donnée par $(x, z)(x', z') = (xx', xz' + x'z)$). Il est clair que \mathfrak{J} est le nilradical de A et A/\mathfrak{J} est isomorphe à A_0 , de sorte que tout idéal premier p de A est de la forme $p_0 \oplus \mathfrak{J}$, où p_0 est un idéal premier de A_0 ; en particulier $m = m_0 \oplus \mathfrak{J}$ est l'unique idéal maximal de A . Comme tout élément de m_0 annule \mathfrak{J} , on a $\text{prof}(A) = \text{prof}(A_m) = 0$; au contraire, si $p_0 \neq m_0$, les éléments de \mathfrak{J} sont annulés par ceux de $m_0 - p_0$, donc A_p est canoniquement isomorphe à $(A_0)_{p_0}$, et comme A_0 est intègre, $\text{prof}(A_p) = \text{prof}(A_0)_{p_0} \geq 1$ si $p_0 \neq 0$.

Corollaire (16.4.7). — Pour qu'un anneau local noethérien réduit A soit de profondeur o , il faut et il suffit que A soit un corps.

En effet, comme l'intersection des idéaux premiers minimaux de A est 0 , A n'a pas d'idéaux premiers associés immersés; en vertu de (16.4.6, (i)), si $\text{prof}(A) = o$, l'idéal maximal m de A est aussi idéal premier minimal, donc est le seul idéal premier de A , et comme A est réduit, $m = 0$.

Proposition (16.4.8). — Soient A, B deux anneaux locaux noethériens, $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme local, M un B -module tel que $M_{[\varphi]}$ soit un A -module de type fini. Alors on a

$$(16.4.8.1) \quad \text{prof}_A(M_{[\varphi]}) = \text{prof}_B(M).$$

On peut se borner au cas $M \neq 0$; supposons que $\text{prof}_A(M_{[\varphi]}) = n$. Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une suite $(M_{[\varphi]})$ -régulière maximale formée d'éléments de l'idéal maximal de A , les $\varphi(x_i)$ constituent une suite M -régulière formée d'éléments de l'idéal maximal de B , et on a donc, en posant $N = M/(\varphi(x_1)M + \dots + \varphi(x_n)M)$, $\text{prof}_B(N) = \text{prof}_B(M) = n$ (16.4.6, (ii)); de même $N_{[\varphi]} = M_{[\varphi]}/(\varphi(x_1)M_{[\varphi]} + \dots + \varphi(x_n)M_{[\varphi]})$ et $\text{prof}_A(N_{[\varphi]}) = 0$; on est ainsi ramené à démontrer la proposition lorsque $n = o$. Soit k le corps résiduel de A ; comme k est un quotient de A , le A -module $P = \text{Hom}_A(k, M_{[\varphi]})$ est un sous-module de $\text{Hom}_A(A, M_{[\varphi]}) = M_{[\varphi]}$ et l'hypothèse entraîne que $P \neq 0$ (16.4.6, (i)); en outre, P est un A -module de type fini (puisque $M_{[\varphi]}$ est un A -module de type fini), donc un k -espace vectoriel de type fini, étant annulé par l'idéal maximal de A , et finalement un A -module de longueur finie. D'autre part, P est aussi un sous-module du B -module M , et puisqu'il est de longueur finie en tant que A -module, il l'est *a fortiori* en tant que B -module. Comme il est $\neq 0$, il contient un sous- B -module simple, c'est-à-dire isomorphe au corps résiduel de B ; on conclut alors de (16.4.6, (i)) que l'on a bien $\text{prof}_B(M) = o$.

Définition (16.4.9). — Soient A un anneau local noethérien M un A -module de type fini. Si $M \neq 0$, on appelle coprofondeur de M et on note $\text{coprof}_A(M)$ ou $\text{coprof}(M)$, l'entier fini $\dim_A(M) - \text{prof}_A(M) \geq o$ (16.4.5.1). Si $M = 0$, on pose $\text{coprof}(M) = o$.

On a $\text{coprof}(M^k) = \text{coprof}(M)$ pour tout $k > o$.

Proposition (16.4.10). — Soient A un anneau local noethérien, M un A -module de type fini.

(i) Pour tout élément M -régulier x appartenant à l'idéal maximal de A , on a $\text{coprof}(M/xM) = \text{coprof}(M)$.

(ii) On a $\text{coprof}_A(M) = \text{coprof}_{\hat{A}}(\hat{M})$.

En effet, (i) résulte de (16.3.4) et (16.4.6, (ii)), et (ii) de (16.2.4) et (16.4.6, (iv)).

Nous montrerons plus tard (**IV**, 6.11.5) que pour tout idéal premier p de A , on a $\text{coprof}_{A_p}(M_p) \leq \text{coprof}_A(M)$.

Proposition (16.4.11). — *Sous les hypothèses de (16.4.8), on a*

$$(16.4.11.1) \quad \text{coprof}_A(M_{[p]}) = \text{coprof}_B(M).$$

Cela résulte de (16.1.9) et (16.4.8).

16.5. Modules de Cohen-Macaulay.

Définition (16.5.1). — Soit Λ un anneau local noethérien. On dit qu'un A -module de type fini M est un module de Cohen-Macaulay si $\text{coprof}(M) = 0$, autrement dit si $M = 0$ ou si $M \neq 0$ et $\dim(M) = \text{prof}(M)$. On dit que A est un anneau de Cohen-Macaulay si le A -module A est un module de Cohen-Macaulay.

Un A -module de longueur finie est un module de Cohen-Macaulay puisqu'il est de dimension 0 (16.1.10). Un anneau local réduit A de dimension 1 est un anneau de Cohen-Macaulay, car alors son idéal maximal m ne peut être associé à A (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, prop. 10), donc $\text{prof}(A) = 1$ en vertu de (16.4.6, (i)). Si A est un anneau local intègre et intégralement clos de dimension ≥ 2 , on a $\text{prof}(A) \geq 2$: en effet, si $x \neq 0$ est un élément de m , on sait (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 1, n° 4, prop. 8) que les idéaux premiers associés à A/xA sont de hauteur 1, donc distincts de m , et leur réunion est par suite distincte de m (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 1, n° 1, prop. 2) ; il existe donc des suites (x, y) qui sont A -régulières et formées d'éléments de m , d'où notre assertion. On en conclut qu'un anneau local intégralement clos de dimension 2 est un anneau de Cohen-Macaulay.

Proposition (16.5.2). — Soient A un anneau local noethérien, M un A -module de type fini. Pour que M soit un module de Cohen-Macaulay, il faut et il suffit que \hat{M} soit un \hat{A} -module de Cohen-Macaulay.

Cela résulte aussitôt de (16.4.10, (ii)).

Proposition (16.5.3). — Sous les hypothèses de (16.4.8), pour que M soit un B -module de Cohen-Macaulay, il faut et il suffit que $M_{[p]}$ soit un A -module de Cohen-Macaulay.

Cela résulte de (16.4.11).

Proposition (16.5.4). — Soient A un anneau local noethérien, M un A -module de type fini $\neq 0$. Si M est un A -module de Cohen-Macaulay, on a $\dim(A/p) = \dim(M)$ pour tout idéal premier $p \in \text{Ass}(M)$; en particulier aucun idéal premier associé à M n'est immergé.

Cela résulte aussitôt des inégalités (16.4.6.2).

On peut encore dire que M (ou $\text{Supp}(M)$) est équidimensionnel (16.1.7).

Proposition (16.5.5). — Soient A un anneau local noethérien, m son idéal maximal, M un A-module de type fini $\neq 0$, x un élément de m. Supposons que M soit un module de Cohen-Macaulay; alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) x est M-régulier;
- b) $\dim(M/xM) = \dim(M) - 1$;
- c) x n'appartient à aucun élément minimal de $\text{Supp}(M)$.

En outre, M/xM est alors un module de Cohen-Macaulay.

On a vu (16.5.4) que tous les éléments p de $\text{Ass}(M)$ sont minimaux dans $\text{Supp}(M)$ et que $\dim(A/p) = \dim(M)$; l'équivalence de a) et c) résulte donc de Bourbaki, Alg. comm., chap. IV, § 1, n° 1, cor. 2 de la prop. 2; l'équivalence de b) et c) résulte de (16.3.4). Le fait que M/xM soit un module de Cohen-Macaulay résulte enfin de (16.4.10, (i)).

Corollaire (16.5.6). — Sous les hypothèses de (16.5.5), soit $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$ une suite d'éléments de m. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) La suite (x_i) est M-régulière.
- b) On a $\dim(M/(x_1M + \dots + x_rM)) = \dim(M) - r$.
- c) Les x_i font partie d'un système de paramètres de M.

En outre, lorsque ces conditions sont satisfaites, $N = M/(x_1M + \dots + x_rM)$ est un module de Cohen-Macaulay, donc, pour tout idéal $p \in \text{Ass}(N)$, on a $\dim(A/p) = \dim(M) - r$.

On sait déjà que b) et c) sont équivalentes (16.3.6) et que a) entraîne c) (16.4.1) sans hypothèse sur M. Pour voir que c) implique a) et prouver la dernière assertion de l'énoncé, raisonnons par récurrence sur r, l'assertion étant triviale pour $r=0$. Puisque x_1 fait partie d'un système de paramètres, $\dim(M/x_1M) = \dim(M) - 1$ (16.3.6), donc x_1 est M-régulier et M/x_1M est un module de Cohen-Macaulay par (16.5.5). Comme la suite $(x_i)_{2 \leq i \leq r}$ fait partie d'un système de paramètres pour $P = M/x_1M$, l'hypothèse de récurrence montre que $(x_i)_{2 \leq i \leq r}$ est une suite P-régulière et que $P/(x_2P + \dots + x_rP) = N$ est un module de Cohen-Macaulay; en outre $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$ est M-régulière.

Remarque (16.5.7). — Il résulte de (16.5.6) qu'il y a identité entre les systèmes de paramètres pour M et les suites M-régulières maximales d'éléments de m lorsque M est un module de Cohen-Macaulay. Inversement, il résulte de (16.4.1) que si un A-module de type fini non nul est tel qu'il y ait une suite M-régulière qui soit un système de paramètres pour M, alors M est un module de Cohen-Macaulay. La dernière propriété énoncée dans (16.5.6) caractérise aussi les modules de Cohen-Macaulay :

Proposition (16.5.8). — Soient A un anneau local noethérien, M un A-module de type fini. On suppose que pour toute suite $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$ d'éléments de A faisant partie d'un système de paramètres pour M, et tout idéal premier p associé à $N = M/(x_1M + \dots + x_rM)$, on ait $\dim(A/p) = \dim(N)$. Alors M est un module de Cohen-Macaulay.

Soit $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de paramètres pour M; il suffit de montrer que la suite (y_i) est M-régulière. Raisonnons par récurrence sur $n = \dim(M)$, la proposition étant triviale pour $n=0$. Par hypothèse (appliquée avec $r=0$) les idéaux premiers p, associés à M sont tous tels que $\dim(A/p) = \dim(M)$; comme y_1 fait partie d'un système de paramètres

pour M , il résulte de (16.3.7) et (16.3.4) que y_1 n'appartient à aucun des p_j , donc est M -régulier. Si on pose $P = M/y_1 M$, $(y_i)_{2 \leq i \leq n}$ est un système de paramètres pour P , et il est immédiat que P vérifie l'hypothèse de l'énoncé; appliquant l'hypothèse de récurrence, on voit donc que $(y_i)_{2 \leq i \leq n}$ est une suite P -régulière, ce qui démontre la proposition.

Proposition (16.5.9). — Soient A un anneau local noethérien, M un A -module de type fini; on suppose que M soit un module de Cohen-Macaulay. Soit $p \in \text{Supp}(M)$, et posons $r = \dim(M) - \dim(M/pM)$. Alors il existe une suite M -régulière $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$, formée d'éléments de p ; pour toute suite ayant ces propriétés, on a

$$\dim(M/(x_1 M + \dots + x_r M)) = \dim(M/pM) = \dim(A/p),$$

et p est un élément minimal de $\text{Ass}(M/(x_1 M + \dots + x_r M))$.

Prouvons d'abord l'existence des x_i ; il n'y a rien à démontrer pour $r=0$. Pour $r>0$, procédons par récurrence sur r . Comme pour tout idéal premier q_i associé à M on a $\dim(A/q_i) = \dim(M)$ (16.5.4), l'hypothèse $\dim(M/pM) < \dim(M)$ entraîne que p ne peut être contenu dans un des q_i , ces derniers étant les idéaux premiers minimaux parmi ceux qui contiennent $\text{Ann}(M)$ (16.1.2.2 et 16.1.7); on en conclut que p n'est pas non plus contenu dans la réunion des q_i (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 1, n° 1, prop. 2), et par suite il existe un $x_1 \in p$ qui est M -régulier (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 1, cor. 2 de la prop. 2). On déduit donc de (16.5.5) que $N = M/x_1 M$ est un module de Cohen-Macaulay, de dimension $\dim(M) - 1$; comme $x_1 \in p$, on a d'ailleurs $N/pN = M/pM$, d'où $\dim(N) - \dim(N/pN) = r - 1$; on peut par suite appliquer à N l'hypothèse de récurrence, et si $(x_i)_{2 \leq i \leq r}$ est une suite N -régulière formée d'éléments de p , il est clair que $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$ est une suite M -régulière formée d'éléments de p . Si on pose $P = M/(x_1 M + \dots + x_r M)$, on a $P/pP = M/pM$ puisque les x_i sont dans p , et $\dim(P) = \dim(P/pP)$ par (16.5.6); mais comme P est un module de Cohen-Macaulay, on a aussi $\dim(P) = \dim(A/p')$ pour tout $p' \in \text{Ass}(P)$ (16.5.4). Comme $p \in \text{Supp}(P)$ (0I, 1.7.5), p contient un des idéaux $p' \in \text{Ass}(P)$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 4, th. 2), et comme $\dim(P) = \dim(P/pP) \leq \dim(A/p) \leq \dim(A/p') = \dim(P)$, on a nécessairement $p = p'$ (16.1.2.2), ce qui achève la démonstration.

Corollaire (16.5.10). — Sous les mêmes hypothèses que dans (16.5.9) :

- (i) M_p est un A_p -module de Cohen-Macaulay.
- (ii) On a

$$(16.5.10.1) \quad \dim(M) = \dim_A(M/pM) + \dim_{A_p}(M_p).$$

Avec les notations de (16.5.9), soient x'_i les images canoniques des x_i dans A_p ($1 \leq i \leq r$); comme les x'_i appartiennent à l'idéal maximal de A_p et forment une suite M_p -régulière par platitude (15.1.14), on a

$$\text{prof}_{A_p}(M_p) \geq r = \dim(M) - \dim(M/pM) \geq \dim_{A_p}(M_p)$$

(en vertu de (16.1.8.1)). Mais compte tenu de (16.4.5.1), les trois termes de cette inégalité sont nécessairement égaux, d'où le corollaire.

Corollaire (16.5.11). — Soit A un anneau local noethérien; supposons qu'il existe un A -module de type fini M de support $\text{Spec}(A)$, qui soit un module de Cohen-Macaulay. Alors, pour tout idéal premier p de A on a

$$(16.5.11.1) \quad \dim(A) = \dim(A/p) + \dim(A_p).$$

En effet, $\text{Supp}(M/pM) = \text{Spec}(A/p)$ (0₁, 1.7.5) et $\text{Supp}(M_p) = \text{Spec}(A_p)$; la relation (16.5.11.1) est donc un cas particulier de (16.5.10.1).

Corollaire (16.5.12). — Tout anneau quotient d'un anneau local noethérien A vérifiant les conditions de (16.5.11) (en particulier tout anneau quotient d'un anneau local de Cohen-Macaulay) est caténaire.

Il suffit évidemment de prouver que A lui-même est caténaire c'est-à-dire que, pour deux idéaux premiers $p \subset q$ de A , on a (16.1.4.2)

$$\dim(A_q) = \dim(A_p) + \dim(A_q/pA_q).$$

Or, en vertu de (16.5.10, (i)) A_q vérifie les mêmes hypothèses que A , et la relation précédente n'est donc autre que (16.5.11.1) appliquée à A_q et à l'idéal premier pA_q de A_q .

(16.5.13) Soient A un anneau noethérien, M un A -module de type fini. On dit que M est un A -module de Cohen-Macaulay si, pour tout idéal premier p de A , M_p est un A_p -module de Cohen-Macaulay; en vertu de (16.5.10) cette définition coïncide avec (16.5.1) lorsque A est *local*. On dit que A est un *anneau de Cohen-Macaulay* si tous les A_p le sont. Il est clair que si M (resp. A) est un A -module de Cohen-Macaulay (resp. un anneau de Cohen-Macaulay), $S^{-1}M$ est un $S^{-1}A$ -module de Cohen Macaulay (resp. $S^{-1}A$ est un anneau de Cohen-Macaulay) pour toute partie multiplicative S de A .

§ 17. ANNEAUX RÉGULIERS

17.1. Définition des anneaux réguliers.

Proposition (17.1.1). — Soient A un anneau local noethérien de dimension n , m son idéal maximal, $k = A/m$ son corps résiduel. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) L'homomorphisme canonique surjectif de k -modules gradués (15.1.1.1)

$$\varphi : \mathbf{S}_k^*(m/m^2) \rightarrow \text{gr}_m^*(A)$$

(où le second membre est le k -module gradué associé à A muni de la filtration m -préadique) est bijectif.

- b) On a $\text{rg}_k(m/m^2) = n$.
- c) L'idéal m admet un système de générateurs de n éléments.
- d) L'idéal m admet un système de générateurs qui est une suite A -régulière.

En vertu du lemme de Nakayama, $\text{rg}_k(m/m^2)$ est le plus petit nombre d'éléments d'un système de générateurs de m , donc b) et c) sont équivalentes. D'autre part, si $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$ est un système de générateurs de m dont les classes $\bar{x}_i \bmod. m^2$ forment une base du k -espace vectoriel m/m^2 , $\mathbf{S}^*(m/m^2)$ est isomorphe à l'anneau de poly-

nômes $k[T_1, \dots, T_n]$; compte tenu de ce que tout A-module de type fini est séparé pour la filtration \mathfrak{m} -préadique (0₁, 7.3.5), il résulte de (15.1.9) que les conditions *a*) et *d*) sont équivalentes; en outre, comme toute suite A-régulière d'éléments de \mathfrak{m} a au plus n éléments (16.4.1), on voit que *d*) entraîne *c*). Reste à prouver que *c*) entraîne *a*). Posons pour abréger $S = \mathbf{S}^*(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = k[T_1, \dots, T_n]$, $G = \text{gr}_{\mathfrak{m}}^*(A)$, et considérons la suite exacte $0 \rightarrow \mathfrak{J} \rightarrow S \xrightarrow{\varphi} G \rightarrow 0$, où le noyau \mathfrak{J} de φ est donc un idéal gradué de S . Pour tout entier $s > 0$, on a donc

$$(17.1.1.1) \quad \binom{s+n-1}{n-1} = \text{long}(S_s) = \text{long}(G_s) + \text{long}(\mathfrak{J}_s).$$

Supposons $\mathfrak{J} \neq 0$, de sorte qu'il existe un élément homogène $u \in \mathfrak{J}$ de degré $h > 0$; \mathfrak{J}_s contient uS_{s-h} pour $s \geq h$, et comme $u \neq 0$ et que S est intègre, uS_{s-h} est isomorphe à S_{s-h} comme k -espace vectoriel; on aurait donc $\text{long}(\mathfrak{J}_s) \geq \text{long}(S_{s-h}) = \binom{s-h+n-1}{n-1}$, d'où pour $s \geq h$,

$$(17.1.1.2) \quad \text{long}(G_s) \leq \binom{s+n-1}{n-1} - \binom{s-h+n-1}{n-1}.$$

Or, le second membre de (17.1.1.2) est un polynôme en s de degré $\leq n-2$; mais on a $G_s = \mathfrak{m}^s/\mathfrak{m}^{s+1}$, et pour s assez grand, $\text{long}(G_s)$ est un polynôme en s de degré exactement égal à $n-1$ dont le coefficient dominant est > 0 (16.2.1), ce qui contredit l'inégalité (17.1.1.2). C.Q.F.D.

Définition (17.1.2). — On dit qu'un anneau local noethérien qui vérifie les conditions équivalentes de (17.1.1) est régulier.

Corollaire (17.1.3). — Un anneau local régulier est intègre, intégralement clos, et un anneau de Cohen-Macaulay.

La dernière assertion résulte de (17.1.1, *d*)); d'autre part, si A est régulier, $\text{gr}_{\mathfrak{m}}^*(A)$ est intègre et complètement intégralement clos, étant isomorphe à $k[T_1, \dots, T_n]$; on en conclut que A possède aussi ces deux propriétés (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, no 3, cor. de la prop. 1 et chap. V, § 1, no 5, prop. 15).

Exemples (17.1.4). — (i) Un anneau local régulier de dimension 0, étant intègre par (17.1.3), est nécessairement un *corps*, et réciproquement.

(ii) Pour qu'un anneau local noethérien de dimension 1 soit régulier, il faut et il suffit qu'il soit un *anneau de valuation discrète*: en effet, dire qu'un anneau local noethérien de dimension 1 est régulier signifie que son idéal maximal est *principal* et la conclusion résulte de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VI, § 3, no 6, prop. 9.

(iii) Soit k un corps; l'anneau de séries formelles $A = k[[T_1, \dots, T_n]]$ est un *anneau régulier de dimension n*; en effet, il est clair que les T_i ($1 \leq i \leq n$) engendrent l'idéal maximal \mathfrak{m} de A et forment une suite A-régulière, car $A/(T_1A + \dots + T_nA)$ est isomorphe à $k[[T_{i+1}, \dots, T_n]]$.

Proposition (17.1.5). — Pour qu'un anneau local noethérien A soit régulier, il faut et il suffit que son complété \hat{A} le soit.

En effet, l'idéal maximal de \hat{A} est $m\hat{A}$ et on sait que m^k/m^{k+1} et $(m\hat{A})^k/(m\hat{A})^{k+1}$ sont des k -espaces vectoriels isomorphes; la condition *a*) de (17.1.1) est donc la même pour A et \hat{A} .

Définition (17.1.6). — *Étant donné un anneau local noethérien A , d'idéal maximal m , on appelle système régulier de paramètres de A un système de paramètres pour A (16.3.5) qui engendre m .*

L'existence d'un tel système équivaut au fait que A est régulier (17.1.1); si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système régulier de paramètres, c'est un système minimal de générateurs de m , dont les classes mod. m^2 forment une base de m/m^2 sur k ; en vertu de (17.1.1, *a*)) et de (15.1.9), (x_i) est une suite A -régulière maximale (d'où la terminologie).

On prendra garde toutefois que, dans un anneau régulier, un système de paramètres pour A qui est aussi une suite A -régulière n'est pas nécessairement un système régulier de paramètres, comme le montre l'exemple des puissances k -ièmes d'un système régulier de paramètres (15.1.20).

Proposition (17.1.7). — *Soient A un anneau local noethérien, m son idéal maximal, $k = A/m$ son corps résiduel, $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$ une suite d'éléments de m , \mathfrak{J} l'idéal $x_1A + \dots + x_rA$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) *A est régulier et les x_i font partie d'un système régulier de paramètres de A .*
- a') *A est régulier et les classes \bar{x}_i des x_i mod. m^2 sont linéairement indépendantes sur k .*
- b) *Les x_i font partie d'un système de paramètres pour A et A/\mathfrak{J} est un anneau régulier.*
En outre, lorsque ces conditions sont vérifiées, \mathfrak{J} est un idéal premier.

La dernière assertion résulte trivialement du fait que A/\mathfrak{J} , étant régulier, est intègre (17.1.3). Posons $n = \dim(A)$. L'équivalence de *a*) et *a'*) est immédiate; en effet, les classes mod. m^2 des éléments d'un système régulier de paramètres forment une base de m/m^2 par rapport à k , et réciproquement, si les \bar{x}_i ($1 \leq i \leq r$) sont linéairement indépendants sur k , on peut trouver $n-r$ éléments $x_i \in m$ ($r+1 \leq i \leq n$) tels que les \bar{x}_i ($1 \leq i \leq n$) forment une base de m/m^2 , donc $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système régulier de paramètres. Pour voir que *a*) entraîne *b*), remarquons que puisque les x_i font partie d'un système de paramètres de A , on a $\dim(A/\mathfrak{J}) = n-r$ (16.3.6); soit $\mathfrak{n} = m/\mathfrak{J}$ l'idéal maximal de A/\mathfrak{J} . On a une suite exacte

$$(17.1.7.1) \quad 0 \rightarrow (m^2 + \mathfrak{J})/m^2 \rightarrow m/m^2 \rightarrow \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \rightarrow 0$$

puisque $\mathfrak{n}^2 = (m^2 + \mathfrak{J})/\mathfrak{J}$; l'hypothèse *a*) entraîne que $\text{rg}_k((m^2 + \mathfrak{J})/m^2) = r$, donc $\text{rg}_k(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2) = n-r = \dim(A/\mathfrak{J})$, ce qui prouve *b*) en vertu de (17.1.1, *b*)).

Inversement, pour prouver que *b*) entraîne *a*), notons que le fait que les x_i font partie d'un système de paramètres entraîne que $\dim(A/\mathfrak{J}) = n-r$ (16.3.6); l'hypothèse que A/\mathfrak{J} est régulier implique d'autre part $\text{rg}_k(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2) = n-r$ (17.1.1); par ailleurs on a évidemment $\text{rg}_k((m^2 + \mathfrak{J})/m^2) \leq r$, donc on tire de (17.1.7.1) que $\text{rg}_k(m/m^2) \leq r+(n-r)=n$; donc A est régulier en vertu de (16.2.6) et (17.1.1). En outre la relation $\text{rg}_k(m/m^2) = n$ entraîne alors $\text{rg}_k((m^2 + \mathfrak{J})/m^2) = r$, et par suite les \bar{x}_i sont linéairement indépendants sur k . C.Q.F.D.

Corollaire (17.1.8). — Soient A un anneau local noethérien, m son idéal maximal, t un élément de m . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) A/tA est régulier et t est non diviseur de zéro dans A .
- b) A est régulier et $t \notin m^2$.

C'est le cas particulier $r=1$ de (17.1.7) (compte tenu de ce qu'un élément de m non diviseur de 0 fait partie d'un système de paramètres (16.4.1)).

Corollaire (17.1.9). — Soient A un anneau local régulier, m son idéal maximal, \mathfrak{J} un idéal de A contenu dans m . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) L'anneau A/\mathfrak{J} est régulier.
- b) \mathfrak{J} est engendré par une suite $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$, faisant partie d'un système régulier de paramètres de A .

On a déjà vu (17.1.7) que b) entraîne a). Inversement, supposons que A/\mathfrak{J} soit régulier (ce qui entraîne que \mathfrak{J} est premier) et soient $n = \dim(A)$, $n-r = \dim(A/\mathfrak{J})$; avec les notations de (17.1.7), la suite exacte (17.1.7.1) donne $\text{rg}_k((m^2 + \mathfrak{J})/m^2) = r$, donc il existe une suite $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$, d'éléments de \mathfrak{J} faisant partie d'un système régulier de paramètres de A . Posons $\mathfrak{J}' = x_1 A + \dots + x_r A$; il résulte de (17.1.7) que \mathfrak{J}' est un idéal premier de A et que A/\mathfrak{J}' est régulier et de dimension $n-r$; mais comme $A/\mathfrak{J} = (A/\mathfrak{J}')/(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}')$ et que $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}'$ est premier dans l'anneau intègre A/\mathfrak{J}' , les dimensions de A/\mathfrak{J} et de A/\mathfrak{J}' ne peuvent être égales que si $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}'$ (16.1.2.2).

17.2. Rappels sur la dimension projective et la dimension injective des modules.

(17.2.1) Soient A un anneau, M un A -module. Rappelons (M, VI, 2) qu'on appelle *dimension projective* (resp. *dimension injective*) de M et que l'on note $\dim. \text{proj}(M)$ ou $\dim. \text{proj}_A(M)$ (resp. $\dim. \text{inj}(M)$ ou $\dim. \text{inj}_A(M)$) le plus petit n (entier ou égal à $+\infty$) tel qu'il existe une résolution projective gauche (resp. une résolution injective droite) de M qui soit de *longueur* n . Il revient au même (*loc. cit.*) de dire que n est le plus petit nombre tel que pour tout A -module N , on ait $\text{Ext}_A^i(M, N) = 0$ (resp. $\text{Ext}_A^i(N, M) = 0$) pour tout $i > n$, ou seulement pour $i = n+1$. Pour tout *facteur direct* M' de M , on a donc $\dim. \text{proj}(M') \leq \dim. \text{proj}(M)$ puisque $\text{Ext}_A^i(M', N)$ est facteur direct de $\text{Ext}_A^i(M, N)$; de même $\dim. \text{inj}(M') \leq \dim. \text{inj}(M)$. Une condition équivalente à $\dim. \text{proj}(M) = n$ (resp. $\dim. \text{inj}(M) = n$) est que n est le plus petit nombre tel que, pour toute suite exacte

$$0 \rightarrow R \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

(resp. $0 \rightarrow M \rightarrow Q_0 \rightarrow \dots \rightarrow Q_{n-1} \rightarrow C \rightarrow 0$), où tous les P_i pour $0 \leq i \leq n$ sont projectifs (resp. tous les Q_i pour $0 \leq i \leq n$ sont injectifs), alors R est projectif (resp. C est injectif).

Remarques (17.2.2). — (i) Dire que M est un A -module *projectif* (resp. *injectif*) équivaut donc à dire que $\dim. \text{proj}(M) = 0$ (resp. $\dim. \text{inj}(M) = 0$).

(ii) Soit T un *foncteur covariant* additif de la catégorie des A -modules dans une catégorie abélienne. Il résulte aussitôt des définitions de (17.2.1) et de celle des

foncteurs dérivés que si $\dim. \text{proj}(M) \leq n$ (resp. $\dim. \text{inj}(M) \leq n$), on a $L^i T(M) = 0$ (resp. $R^i T(M) = 0$) pour tout $i > n$.

(iii) Si on suppose A noethérien et M de type fini, la dernière interprétation de la dimension projective donnée dans (17.2.1) montre que si $\dim. \text{proj}(M) = n$, M admet une résolution gauche de longueur n formée de modules projectifs de type fini. Si de plus A est un anneau local noethérien, M admet une résolution de longueur n par des modules libres de type fini, un A -module projectif de type fini étant alors libre (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, cor. 2 de la prop. 5).

Lemme (17.2.3). — Soient A un anneau, M un A -module. Pour que $\dim. \text{inj}(M) \leq n$, il faut et il suffit que pour tout A -module monogène N , on ait $\text{Ext}_A^{n+1}(N, M) = 0$.

Avec les notations de (17.2.1), il s'agit de prouver que C est injectif; pour tout A -module N , $\text{Ext}_A^{n+1}(N, M)$ est isomorphe à $\text{Ext}_A^1(N, C)(M, V, 7)$, donc on a $\text{Ext}_A^1(N, C) = 0$ pour tout A -module N de la forme A/\mathfrak{J} , où \mathfrak{J} est un idéal quelconque de A . La suite exacte des Ext montre alors que l'homomorphisme canonique $\text{Hom}(A, C) \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{J}, C)$ est surjectif pour tout idéal \mathfrak{J} de A , ce qui implique que C est un A -module injectif (M , I, 3.2).

Lemme (17.2.4). — Soient A un anneau noethérien, M un A -module de type fini. Pour que $\dim. \text{proj}(M) \leq n$, il faut et il suffit que pour tout A -module monogène N , on ait $\text{Ext}_A^{n+1}(M, N) = 0$.

On sait en effet (M, VI, 2.5) que la condition $\dim. \text{proj}(M) \leq n$ est équivalente à $\text{Ext}_A^{n+1}(M, N) = 0$ pour tout A -module N de type fini; pour voir que la condition de l'énoncé est aussi suffisante, on raisonne par récurrence sur le nombre de générateurs m de N : il y a un sous-module N_1 de N engendré par $m-1$ éléments et tel que $N_2 = N/N_1$ soit monogène; de la suite exacte $0 \rightarrow N_1 \rightarrow N \rightarrow N_2 \rightarrow 0$, on déduit alors la suite exacte $\text{Ext}_A^{n+1}(M, N_1) \rightarrow \text{Ext}_A^{n+1}(M, N) \rightarrow \text{Ext}_A^{n+1}(M, N_2)$ et l'hypothèse de récurrence montre que la condition de l'énoncé entraîne bien $\text{Ext}_A^{n+1}(M, N) = 0$.

Corollaire (17.2.5). — Soient A un anneau noethérien, M un A -module. On a

$$(17.2.5.1) \quad \dim. \text{inj}_A(M) = \sup_m (\dim. \text{inj}_{A_m}(M_m))$$

et si M est de type fini

$$(17.2.5.2) \quad \dim. \text{proj}_A(M) = \sup_m (\dim. \text{proj}_{A_m}(M_m))$$

où m parcourt l'ensemble des idéaux premiers (ou l'ensemble des idéaux maximaux) de A .

En effet, si N est un A -module de type fini (donc de présentation finie), on a, pour toute partie multiplicative S de A et pour tout $i \geq 0$

$$S^{-1} \text{Ext}_A^i(N, M) = \text{Ext}_{S^{-1}A}^i(S^{-1}N, S^{-1}M)$$

par platitude, en considérant une résolution libre de M et en utilisant le fait que la relation précédente est vraie pour $i=0$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 7, prop. 19). En particulier $\text{Ext}_{A_m}^i(A_m/\mathfrak{J}A_m, M_m) = (\text{Ext}_A^i(A/\mathfrak{J}, M))_m$ pour tout idéal premier m et tout idéal \mathfrak{J} de A ; si l'on tient compte de (17.2.3) et de ce que tout

idéal de A_m est de la forme $\mathfrak{J}A_m$ pour un idéal convenable \mathfrak{J} de A , on déduit la formule (17.2.5.1) de ce qui précède et de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 3, th. 1. On procède de même pour (17.2.5.2) en utilisant cette fois (17.2.4) et en échangeant les rôles de M et de N .

Pour les anneaux noethériens et les modules de type fini, l'étude de la dimension projective ou de la dimension injective est donc ramenée par (17.2.5) au cas des anneaux locaux. On a alors le

Lemme (17.2.6). — Soient A un anneau local noethérien, k son corps résiduel, M un A -module de type fini. Pour que $\dim. \text{proj}(M) \leq n$, il est nécessaire que $\text{Tor}_i^A(M, k) = 0$ pour $i > n$, et il suffit que $\text{Tor}_{n+1}^A(M, k) = 0$.

La nécessité est un cas particulier de la remarque (17.2.2 (ii)), appliquée au foncteur covariant $M \rightsquigarrow k \otimes_A M$. Pour prouver que la condition est suffisante, il s'agit, avec les notations de (17.2.1), d'établir que R est projectif lorsque les P_i sont supposés de type fini; or $\text{Tor}_{n+1}^A(M, k)$ est isomorphe à $\text{Tor}_1^A(R, k)$ (M, V, 7); et on sait que, puisque R est de type fini, la condition $\text{Tor}_1^A(R, k) = 0$ entraîne que R est libre (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, cor. 2 de la prop. 5).

Corollaire (17.2.7). — Sous les hypothèses de (17.2.6), soit x un élément M -régulier de A appartenant à l'idéal maximal de A ; alors on a

$$(17.2.7.1) \quad \dim. \text{proj}(M/xM) = \dim. \text{proj}(M) + 1.$$

En effet, de la suite exacte $0 \rightarrow M \xrightarrow{x} M \rightarrow M/xM \rightarrow 0$ définie par la multiplication par x dans M , on déduit la suite exacte des Tor :

$$\text{Tor}_i^A(M, k) \xrightarrow{x} \text{Tor}_i^A(M, k) \rightarrow \text{Tor}_i^A(M/xM, k) \rightarrow \text{Tor}_{i-1}^A(M, k) \xrightarrow{x} \text{Tor}_{i-1}^A(M, k)$$

pour tout $i \geq 1$. Or, pour tout A -module N , l'homothétie de rapport x dans $M \otimes_A N$ provient aussi bien de l'homothétie de rapport x dans M que de l'homothétie de rapport x dans N ; on en conclut aussitôt, puisque l'homothétie de rapport x dans k est nulle par définition, que, pour tout i , l'homomorphisme $\text{Tor}_i^A(M, k) \xrightarrow{x} \text{Tor}_i^A(M, k)$ est nul; autrement dit, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Tor}_i^A(M, k) \rightarrow \text{Tor}_i^A(M/xM, k) \rightarrow \text{Tor}_{i-1}^A(M, k) \rightarrow 0.$$

Si $\dim. \text{proj}(M) = n$, on a $\text{Tor}_n^A(M, k) \neq 0$ et $\text{Tor}_{n+1}^A(M, k) = \text{Tor}_{n+2}^A(M, k) = 0$ en vertu de (17.2.6). Il résulte donc de ce qui précède que l'on a $\text{Tor}_{n+1}^A(M/xM, k) \neq 0$ et $\text{Tor}_{n+2}^A(M/xM, k) = 0$, donc $\dim. \text{proj}(M/xM) = n+1$ par (17.2.6).

Proposition (17.2.8) (M. Auslander). — Soit A un anneau. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) Tout A -module est de dimension projective $\leq n$.
- a') Tout A -module de type fini est de dimension projective $\leq n$.
- b) Tout A -module est de dimension injective $\leq n$.
- c) Pour tout couple de A -modules M, N on a $\text{Ext}_A^{n+1}(M, N) = 0$.
- c') Pour tout couple de A -modules M, N tel que M soit de type fini (ou seulement monogène), on a $\text{Ext}_A^{n+1}(M, N) = 0$.

Cela résulte aussitôt de (17.2.1) et (17.2.3).

Le plus petit nombre n (entier ou $+\infty$) pour lequel les conditions équivalentes de (17.2.8) sont satisfaites est appelé *dimension cohomologique globale* (ou simplement *dimension cohomologique*) de A et noté $\dim. \text{coh}(A)$.

Proposition (17.2.9). — Soit A un anneau noethérien. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $\dim. \text{coh}(A) \leq n$.
- b) Tout A -module de type fini est de dimension injective $\leq n$.
- c) Pour tout couple de A -modules de type fini, M, N , on a $\text{Ext}_A^{n+1}(M, N) = 0$.

Cela résulte aussitôt de la définition et de (17.2.4).

Corollaire (17.2.10). — Si A est un anneau noethérien, on a

$$(17.2.10.1) \quad \dim. \text{coh}(A) = \sup_m (\dim. \text{coh}(A_m))$$

où m parcourt le spectre de A (ou l'ensemble des idéaux maximaux de A).

Cela résulte de (17.2.9) et (17.2.5).

Proposition (17.2.11). — Soient A un anneau local noethérien, k son corps résiduel. Pour que $\dim. \text{coh}(A) \leq n$, il est nécessaire que $\text{Tor}_i^A(k, k) = 0$ pour $i > n$, et il suffit que $\text{Tor}_{n+1}^A(k, k) = 0$.

Compte tenu de (17.2.6), il suffit de prouver que les relations $\dim. \text{coh}(A) \leq n$ et $\dim. \text{proj}_A(k) \leq n$ sont équivalentes. Il est clair que la première entraîne la seconde par définition. Inversement, si $\dim. \text{proj}_A(k) \leq n$, on a $\text{Tor}_i^A(M, k) = 0$ pour $i > n$ et pour tout A -module M en vertu de (17.2.2, (ii)); donc $\dim. \text{proj}(M) \leq n$, ce qui prouve la proposition en vertu de (17.2.8).

Corollaire (17.2.12). — Soit A un anneau noethérien. Pour que l'on ait $\dim. \text{coh}(A) \leq n$, il est nécessaire que, pour tout idéal maximal m de A , on ait $\text{Tor}_i^A(A/m, A/m) = 0$ pour $i > n$, et il suffit que ces relations soient vérifiées pour $i = n + 1$.

Cela résulte aussitôt de (17.2.11) et (17.2.10).

Proposition (17.2.13). — Soient A, B deux anneaux locaux noethériens, $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme local faisant de B un A -module plat. Alors on a

$$(17.2.13.1) \quad \dim. \text{coh}(A) \leq \dim. \text{coh}(B).$$

Supposons que $\dim. \text{coh}(B) = n$ soit finie; il suffit de prouver que pour tout couple (M, N) de A -modules de type fini, on a $\text{Tor}_i^A(M, N) = 0$ pour $i > n$ (17.2.11). Comme B est un A -module fidèlement plat (0_I, 6.6.2), il revient au même (0_I, 6.4.1) de montrer que l'on a

$$(17.2.13.2) \quad \text{Tor}_i^A(M, N) \otimes_A B = 0.$$

Or, si $L = (L_i)$ est une résolution droite de M par des A -modules libres, il résulte de ce que B est un A -module plat que $L \otimes_A B = (L_i \otimes_A B)$ est une résolution droite du B -module $M \otimes_A B$ par des B -modules libres; en outre, on a $(L_i \otimes_A B) \otimes_B (N \otimes_A B) = (L_i \otimes_A N) \otimes_A B$, d'où on conclut aussitôt que le premier membre

de (17.2.13.2) est égal à $\text{Tor}_i^B(M \otimes_A B, N \otimes_A B)$; l'hypothèse sur B entraîne que ce B -module est nul pour $i > n$ (17.2.2, (ii)), d'où la conclusion.

(17.2.14) Soient (X, \mathcal{O}_X) un espace annelé, \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -Module; on appelle *dimension projective* (resp. *injective*) *ponctuelle* de \mathcal{F} et on note $\dim. \text{proj}(\mathcal{F})$ (resp. $\dim. \text{inj}(\mathcal{F})$) le nombre $\sup_{x \in X} (\dim. \text{proj}(\mathcal{F}_x))$ (resp. $\sup_{x \in X} (\dim. \text{inj}(\mathcal{F}_x))$). On appelle *dimension cohomologique ponctuelle* de X et on note $\dim. \text{coh}(X)$ le nombre $\sup_{x \in X} (\dim. \text{coh}(\mathcal{O}_x))$. Il résulte de (17.2.5) et (17.2.10) que lorsque A est un anneau noethérien, M un A -module de type fini et $X = \text{Spec}(A)$, on a $\dim. \text{proj}(\widetilde{M}) = \dim. \text{proj}(M)$, $\dim. \text{inj}(\widetilde{M}) = \dim. \text{inj}(M)$ et $\dim. \text{coh}(X) = \dim. \text{coh}(A)$. On appelle *dimension projective* (resp. *injective*) de \mathcal{F} en un point $x \in X$ la dimension projective (resp. injective) de \mathcal{F}_x , *dimension cohomologique de X en un point x* la dimension cohomologique de \mathcal{O}_x .

Proposition (17.2.15). — *Soient X, Y deux espaces annelés en anneaux locaux noethériens, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme plat. Si $\dim. \text{coh}(X) \leq n$, alors Y est de dimension cohomologique $\leq n$ en tout point de $f(X)$.*

Cela résulte aussitôt de (17.2.13).

17.3. Théorie cohomologique des anneaux réguliers.

Théorème (17.3.1) (Hilbert-Serre). — *Soit A un anneau local noethérien. Pour que A soit de dimension cohomologique finie, il faut et il suffit que A soit régulier; on a alors*

$$(17.3.1.1) \quad \dim. \text{coh}(A) = \dim(A).$$

Supposons A régulier; soient m son idéal maximal, $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système régulier de paramètres de A (17.1.6); considérons le complexe de l'algèbre extérieure $K_*(\mathbf{x})$ (III, 1.1.1), qui est formé de A -modules libres, avec $K_i(\mathbf{x}) = 0$ pour $i > n$; comme (x_i) est une suite régulière, on a $H_i(K_*(\mathbf{x})) = 0$ pour $i > 0$ (III, 1.1.4 et 1.1.3.3) et $H_0(K_*(\mathbf{x})) = A/(x_1 A + \dots + x_n A) = A/m = k$; les $K_i(\mathbf{x})$ forment par suite une *réolution libre* de k de longueur n . Or, le fait que les x_i appartiennent à m entraîne aussitôt que dans le complexe $K_*(\mathbf{x}, k) = K_*(\mathbf{x}) \otimes_A k$, l'opérateur bord est *nul* en toutes dimensions, si bien que l'on a, par définition, $\text{Tor}_i^A(k, k) = \bigwedge^i (k^n)$; l'égalité (17.3.1.1) résulte donc aussitôt de (17.2.11) (ce résultat est essentiellement le « théorème des syzygies » de Hilbert).

Montrons maintenant que si A est un anneau local noethérien, m son idéal maximal, et si $\dim. \text{proj}_A(m)$ est *finie*, alors A est régulier, ce qui achèvera de démontrer (17.3.1). Nous procéderons par récurrence sur $n = \text{rg}_k(m/m^2)$. Pour $n = 0$, on a $m = 0$ et l'assertion est triviale.

Lemme (17.3.1.2) (Nagata). — *Si tout élément de $m - m^2$ est diviseur de zéro dans A , il existe $c \neq 0$ dans A tel que $cm = 0$ (autrement dit on a $m \in \text{Ass}(A)$).*

On peut se borner au cas où $m \neq 0$, donc $m \neq m^2$. L'hypothèse entraîne que $m - m^2$ est contenu dans la réunion des idéaux p_i de $\text{Ass}(A)$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, no 1, cor. 3 de la prop. 2); donc m est contenu dans la réunion de m^2

et des p_i , donc dans l'un des p_i puisque $m \neq m^2$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 1, n° 1, prop. 2); m étant maximal, cela prouve le lemme.

Lemme (17.3.1.3). — *Si $a \in m - m^2$, m/Aa est isomorphe à un facteur direct de m/am .*

Il existe un système minimal de générateurs de m contenant a (dont les images dans m/m^2 forment une base de ce k -espace vectoriel); soit b l'idéal engendré par les éléments de ce système autres que a . Comme la relation $xa \in b$ entraîne $x \in m$ (en considérant l'image de xa dans m/m^2), on a $b \cap Aa \subset am$ d'où un homomorphisme $b/(b \cap Aa) \rightarrow m/am$ déduit de l'injection $b \rightarrow m$ par passage aux quotients, et qui est *injectif*. En outre, $b + Aa = m$, et l'homomorphisme composé

$$m/Aa = (b + Aa)/Aa \xrightarrow{\sim} b/(b \cap Aa) \rightarrow m/am \rightarrow m/Aa$$

est l'identité; d'où le lemme.

Lemme (17.3.1.4). — *Soient A un anneau local noethérien, m son idéal maximal, E un A -module de type fini et de dimension projective finie. Si $a \in m$ est A -régulier et E -régulier, alors E/aE est un (A/aA) -module de dimension projective finie, au plus égale à $\dim. \text{proj}_A(E)$.*

Raisonnons par récurrence sur $h = \dim. \text{proj}_A(E)$, le cas $h=0$ étant trivial puisque alors E est un A -module projectif, donc E/aE un (A/aA) -module projectif. Il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow E \rightarrow 0$$

où L est libre et $\dim. \text{proj}_A(N) = h-1$ (17.2.2, (iii)), N étant de type fini. En outre, la suite

$$0 \rightarrow N/aN \rightarrow L/aL \rightarrow E/aE \rightarrow 0$$

est exacte (15.1.18). Comme a est A -régulier, il est aussi N -régulier puisque L est libre; l'hypothèse de récurrence entraîne que N/aN est un (A/aA) -module de dimension projective $\leq h-1$, et comme L/aL est un (A/aA) -module libre, E/aE est un (A/aA) -module de dimension projective $\leq h$.

Examinons maintenant deux cas :

I. — Supposons d'abord que tout élément de $m - m^2$ soit diviseur de zéro dans A , auquel cas (17.3.1.2) il existe $c \neq 0$ dans A tel que $cm = 0$. Montrons alors que $m = 0$. S'il n'en était pas ainsi, notons d'abord que m ne pourrait être un A -module projectif, car il serait libre (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, cor. 2 de la prop. 5), ce qui contredit la relation $cm = 0$. On aurait donc $n = \dim. \text{coh}(A) \geq 1$. Comme $m \in \text{Ass}(A)$, il existerait une suite exacte de A -homomorphismes

$$0 \rightarrow k \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow 0.$$

Mais cela est absurde, car en vertu de la relation $n \geq 1$, la suite exacte des Tor donnerait la suite exacte $0 \rightarrow \text{Tor}_{n+1}^A(E, k) \rightarrow \text{Tor}_n^A(k, k) \rightarrow 0$; or on a $\text{Tor}_{n+1}^A(E, k) = 0$ (17.2.2, (ii)) et $\text{Tor}_n^A(k, k) \neq 0$ (17.2.11) et nous avons abouti à une contradiction.

II. — On peut donc se borner au cas où il existe $a \in m - m^2$ qui est un élément A -régulier, et par suite aussi m -régulier. Considérons l'anneau $A' = A/aA$ et son idéal

maximal $m' = m/aA$; il est clair que $\text{rg}_k(m'/m'^2) = n - 1$. En vertu de (17.3.1.4), m/am est un A' -module de dimension projective finie, donc il en est de même de $m' = m/aA$, qui en est un facteur direct (17.3.1.3 et 17.2.1). L'hypothèse de récurrence entraîne par suite que $A' = A/aA$ est régulier, ce qui prouve par (17.1.8) que A est régulier.

Corollaire (17.3.2). — Si A est un anneau local régulier, A_p est régulier pour tout idéal premier p de A .

En effet, on a vu (17.2.10) que $\dim. \text{coh}(A_p) \leq \dim. \text{coh}(A)$, donc la conclusion résulte aussitôt de (17.3.1).

Proposition (17.3.3). — Soient A, B deux anneaux locaux noethériens, $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme local, m (resp. n) l'idéal maximal de A (resp. B), $k = A/m$ (resp. $k' = B/n$) le corps résiduel de A (resp. B). On a donc un homomorphisme canonique de k' -espaces vectoriels
(17.3.3.1) $\psi : (m/m^2) \otimes_k k' \rightarrow n/n^2$.

- (i) Si B est régulier et si B est un A -module plat, A est régulier.
- (ii) Les conditions suivantes sont équivalentes :
 - a) B est régulier et l'homomorphisme ψ (17.3.3.1) est injectif.
 - b) A et B sont réguliers, et pour un système régulier de paramètres $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ de A , les $\varphi(x_i)$ font partie d'un système régulier de paramètres de B (auquel cas cette propriété a lieu pour tout système régulier de paramètres de A).
 - c) B et $B \otimes_A k$ sont réguliers, et B est un A -module plat.
 - d) A et $B \otimes_A k$ sont réguliers, et B est un A -module plat.
 - e) A et $B \otimes_A k$ sont réguliers, et l'on a

$$(17.3.3.2) \quad \dim(B) = \dim(A) + \dim(B \otimes_A k).$$

(i) On a $\dim. \text{coh}(A) \leq \dim. \text{coh}(B)$ par (17.2.13), donc il suffit d'appliquer (17.3.1).

(ii) Lorsque A est supposé régulier et que (x_i) est un système régulier de paramètres de A , dire que B est un A -module *plat* équivaut, en vertu de (15.1.21) à dire que la suite des $y_i = \varphi(x_i)$ est B -régulière (puisque $B \otimes_A k$ est un k -module plat). D'autre part, comme $\dim(A) = m$, et que la suite (y_i) engendre l'idéal mB , la relation (17.3.3.2), qui s'écrit aussi $\dim(B/mB) = \dim(B) - m$, équivaut à dire que la suite $(y_i)_{1 \leq i \leq m}$ fait partie d'un système de paramètres de B (16.3.7). On voit donc que les conditions b), d) et e) équivalent respectivement aux suivantes :

b') A et B sont réguliers et $(y_i)_{1 \leq i \leq m}$ fait partie d'un système régulier de paramètres de B .

d') A est régulier, $B/(\sum_{i=1}^m y_i B)$ est régulier et la suite (y_i) est B -régulière.

e') A est régulier, $B/(\sum_{i=1}^m y_i B)$ est régulier et la suite (y_i) fait partie d'un système de paramètres de B .

Or, b') et e') sont équivalentes en vertu de (17.1.7), et comme d') entraîne e') (16.4.1) et est entraînée par b') (17.1.7), elle leur est équivalente. La conjonction

de b) et d) implique trivialement c), et en vertu de (i), c) entraîne d); on a donc prouvé l'équivalence de b), c), d) et e). En outre, il est clair que b) entraîne a), les classes des x_i dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ formant alors une base de ce k -espace vectoriel et les classes des y_i dans $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ un système libre de ce k' -espace vectoriel. Reste donc à prouver que a) entraîne e). Posons $V = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, $W = \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$; il est immédiat que l'on a $\psi(V \otimes_{k'} k') = (\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{m}B)/\mathfrak{n}^2$. On a d'une part, en vertu de (16.3.9)

$$(17.3.3.3) \quad \dim(B) \leq \dim(A) + \dim(B \otimes_A k);$$

en second lieu, d'après (16.2.6), on a

$$(17.3.3.4) \quad \dim(A) \leq \text{rg}_{k'}(V \otimes_{k'} k').$$

Enfin, dans l'anneau local $B \otimes_A k = B/\mathfrak{m}B$, $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}/\mathfrak{m}B$ est l'idéal maximal, k' le corps résiduel et $\mathfrak{n}'/\mathfrak{n}'^2$ est isomorphe à $\mathfrak{n}/(\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{m}B) = W/\psi(V \otimes_{k'} k')$; on a donc, d'après (16.2.6)

$$(17.3.3.5) \quad \dim(B \otimes_A k) \leq \text{rg}_{k'} W - \text{rg}_k \psi(V \otimes_{k'} k').$$

Enfin, puisque B est supposé régulier, on a $\dim(B) = \text{rg}_{k'} W$ (17.1.1); on conclut donc de (17.3.3.3), (17.3.3.4) et (17.3.3.5) que l'on a

$$\text{rg}_{k'} W \leq \dim(A) + \dim(B \otimes_A k) \leq \text{rg}_{k'} W + \text{rg}_{k'}(V \otimes_{k'} k') - \text{rg}_{k'} \psi(V \otimes_{k'} k')$$

et dire que les deux termes extrêmes de cette inégalité sont égaux signifie que ψ est *injectif*. La condition a) entraîne donc nécessairement que dans chacune des relations (17.3.3.3), (17.3.3.4) et (17.3.3.5), les deux membres sont *égaux*; or, l'égalité dans (17.3.3.4) (resp. (17.3.3.5)) signifie que A (resp. $B \otimes_A k$) est *régulier* (17.1.1); on a donc bien prouvé que a) entraîne e).

Proposition (17.3.4). — Soient A un anneau local régulier de dimension n , \mathfrak{m} son idéal maximal. Pour tout A -module non nul de type fini M , on a

$$(17.3.4.1) \quad \text{prof}(M) + \dim. \text{proj}(M) = n.$$

Raisonnons par récurrence sur $m = \text{prof}(M)$. Si $m = 0$, on sait (16.4.6, (i)) qu'il existe un sous- A -module N de M isomorphe à $k = A/\mathfrak{m}$; appliquant la suite exacte des Tor à la suite exacte $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$, on obtient une suite exacte

$$\text{Tor}_{n+1}^A(M/N, k) \rightarrow \text{Tor}_n^A(N, k) \rightarrow \text{Tor}_n^A(M, k),$$

et l'hypothèse que A est régulier entraîne $\text{Tor}_{n+1}^A(M/N, k) = 0$ ((17.3.1.1) et (17.2.6)), donc $\text{Tor}_n^A(k, k)$ est isomorphe à un sous- A -module de $\text{Tor}_n^A(M, k)$; appliquant de nouveau (17.3.1.1) et (17.2.6), on voit que $\text{Tor}_n^A(M, k) \neq 0$, donc $\dim. \text{proj}(M) \geq n$ (17.2.6); mais comme $\dim. \text{proj}(M) \leq n$ par (17.3.1.1), on a bien $\dim. \text{proj}(M) = n$. Supposons maintenant $m > 0$, et soit x un élément M -régulier appartenant à \mathfrak{m} ; on sait alors (16.4.6, (i)) que l'on a $\text{prof}(M/xM) = m - 1$, et d'autre part (17.2.7) $\dim. \text{proj}(M/xM) = \dim. \text{proj}(M) + 1$; l'hypothèse de récurrence prouve aussitôt la relation (17.3.4.1).

Corollaire (17.3.5). — (i) Soit A un anneau local régulier de dimension n ; pour qu'un A -module $M \neq 0$ de type fini soit libre, il faut et il suffit que M soit un A -module de Cohen-Macaulay de dimension n .

(ii) Soient A un anneau local régulier, B un anneau local, $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme local faisant de B un A -module de type fini. Pour que B soit un A -module libre, il faut et il suffit que B soit un anneau de Cohen-Macaulay et que φ soit injectif (ou, ce qui revient au même (16.1.5), que $\dim(B) = \dim(A)$).

(i) Cela résulte de (17.3.4.1) et du fait que pour un A -module de type fini, il revient au même de dire que ce module est projectif ou libre (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, cor. 2 de la prop. 5); les A -modules libres de type fini M sont donc caractérisés par la relation $\dim(\text{proj}(M)) = 0$ (17.2.2, (i)).

(ii) Dire que B est un anneau de Cohen-Macaulay équivaut à dire que B est un A -module de Cohen-Macaulay (16.5.3), donc il suffit d'appliquer (i), puisque $\dim B = \dim A$ (16.1.5).

(17.3.6) On dit qu'un anneau noethérien A est *régulier* si pour tout idéal premier p de A , l'anneau local A_p est régulier; lorsque A lui-même est un anneau *local*, il résulte de (17.3.2) que cette définition est équivalente à celle de (17.1.2). Pour que A soit régulier, il suffit, en vertu de (17.3.2), que A_m soit régulier pour tout idéal maximal m de A . En outre, il résulte aussitôt de cette définition que pour toute partie multiplicative S de A , $S^{-1}A$ est régulier.

Proposition (17.3.7). — Si A est un anneau noethérien régulier, tout anneau de polynômes $A[T_1, \dots, T_n]$ est régulier.

Il suffit évidemment de prouver que l'anneau de polynômes $B = A[T]$ est régulier; comme B est un A -module libre, pour tout idéal premier q de B , B_q est un A_p -module plat, où $p = q \cap A$ (0₁, 6.3.1); il suffit donc, en vertu de (17.1.10), de prouver que B_q/pB_q est régulier, et comme cet anneau est un anneau local en un idéal premier de $A_p[T]/pA_p[T] = k[T]$ (où k est le corps résiduel A_p/pA_p), il suffit de prouver que $C = k[T]$ est régulier; or, C étant principal, les anneaux locaux en les idéaux premiers de C sont des anneaux de valuation discrète ou un corps (pour l'idéal (0)), donc réguliers (17.1.4), ce qui achève la démonstration.

Corollaire (17.3.8). — Si A est un anneau régulier, tout anneau de séries formelles $A[[T_1, \dots, T_n]]$ est régulier.

Soit \mathfrak{J} l'idéal engendré par les T_i dans l'anneau de polynômes $A[T_1, \dots, T_n]$; comme ce dernier est régulier par (17.3.7), et que $A[[T_1, \dots, T_n]]$ est le complété de $A[T_1, \dots, T_n]$ pour la topologie \mathfrak{J} -préadique (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 12, *Exemple 1*), la conclusion résulte du

Lemme (17.3.8.1). — Soient A un anneau régulier, \mathfrak{J} un idéal de A , \hat{A} le séparé complété de A pour la topologie \mathfrak{J} -préadique. Alors \hat{A} est régulier.

Il suffit en effet (17.3.6) de voir que pour tout idéal maximal n de \hat{A} , l'anneau local \hat{A}_n est régulier; on sait (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 4, prop. 8) que n

est de la forme $m\hat{A}$, où m est un idéal maximal de A contenant \mathfrak{J} , et que l'homomorphisme canonique $A \rightarrow \hat{A}$ donne un homomorphisme *injectif* $A_m \rightarrow \hat{A}_n$, tel que la topologie $n\hat{A}_n$ -préadique de \hat{A}_n induise sur A_m la topologie mA_m -préadique, et que A_m soit dense dans \hat{A}_n pour la topologie $n\hat{A}_n$ -préadique; par suite les *complétés* des anneaux locaux noethériens A_m et \hat{A}_n sont canoniquement *isomorphes*. Or, par hypothèse A_m est régulier, donc il en est de même de son complété (17.1.5) et comme le complété de \hat{A}_n est régulier, il en est de même de \hat{A}_n par (17.1.5).

Corollaire (17.3.9). -- Soit A un anneau noethérien, quotient d'un anneau noethérien régulier B . Si C est une A -algèbre de type fini, tout anneau de fractions $S^{-1}C$ de C est quotient d'un anneau régulier.

En effet, C est quotient d'un anneau de polynômes $A[T_1, \dots, T_n]$; comme $A = B/\mathfrak{J}$, où \mathfrak{J} est un idéal de B , on a $A[T_1, \dots, T_n] = B[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{J}B[T_1, \dots, T_n]$; en vertu de (17.3.7), on peut donc se borner au cas où C est quotient d'un anneau régulier B' ; mais si S' est l'image réciproque de S dans B' , S' est une partie multiplicative de B' et C est un anneau quotient de $S'^{-1}B'$, si bien que finalement tout revient à voir que lorsque C est régulier, il en est de même de $S^{-1}C$, ce qu'on a vu en (17.3.6).

L'importance des quotients d'anneaux réguliers tient entre autres à la propriété précédente et au fait que ce sont des anneaux *caténaires* (16.5.12).

Tous les anneaux importants dans les applications à la Géométrie algébrique sont des quotients d'anneaux réguliers.

§ 18. COMPLÉMENTS SUR LES EXTENSIONS D'ALGÈBRES

Ce paragraphe rassemble un certain nombre de constructions fonctorielles sur les anneaux, qui seront utilisées de façon répétée aux §§ 19 et 20; il ne contient aucun résultat non trivial.

18.1. Images réciproques d'anneaux augmentés.

(18.1.1) Étant donné un anneau A (non nécessairement commutatif), la catégorie des A -anneaux a pour objets les couples (B, ρ) formés d'un anneau B et d'un homomorphisme d'anneaux $\rho : A \rightarrow B$, pour morphismes (dits aussi A -homomorphismes) les homomorphismes d'anneaux $u : B \rightarrow C$ tels que, si $\rho : A \rightarrow B$ et $\sigma : A \rightarrow C$ sont les homomorphismes (dits structuraux) définissant la structure de A -anneau sur B et C respectivement, le diagramme

$$(18.1.1.1) \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u} & C \\ \swarrow \rho & & \nearrow \sigma \\ A & & \end{array}$$

soit commutatif. Le *noyau* \mathfrak{J} de u est un idéal bilatère qui est un A -bimodule (pour ρ).

Si $f : A' \rightarrow A$ est un homomorphisme d'anneaux, pour tout A -anneau (B, ρ) , $(B, \rho \circ f)$ est un A' -anneau, et si $u : B \rightarrow C$ est un A -homomorphisme du A -anneau (B, ρ)

dans le A-anneau (C, σ) , c'est aussi un A' -homomorphisme du A' -anneau $(B, \rho \circ f)$ dans le A' -anneau $(C, \sigma \circ f)$; on définit ainsi un foncteur canonique de la catégorie des A-anneaux dans celle des A' -anneaux.

(18.1.2) Soient B, E, F trois A-anneaux, $f : E \rightarrow B, g : F \rightarrow B$ deux A-homomorphismes. Rappelons que l'on appelle *produit fibré* de E et F sur B (pour les A-homomorphismes f et g) et que l'on note $E \times_B F$ le sous-anneau G de l'anneau produit $E \times F$, formé des couples (x, y) tels que $f(x) = g(y)$; les restrictions $p_1 : G \rightarrow E$, $p_2 : G \rightarrow F$ des projections pr_1 et pr_2 à G sont encore appelées les *projections canoniques*; la structure de A-anneau de G est définie par l'homomorphisme $\alpha \rightarrow (\rho(\alpha), \sigma(\alpha))$ (où $\rho : A \rightarrow E$ et $\sigma : A \rightarrow F$ sont les homomorphismes structuraux), qui applique effectivement A dans G en vertu de (18.1.1). La propriété caractéristique de $E \times_B F$ est que, pour tout couple de A-homomorphismes $u : C \rightarrow E, v : C \rightarrow F$ tels que $f \circ u = g \circ v$, il existe un A-homomorphisme et un seul $w : C \rightarrow G$ tel que $u = p_1 \circ w, v = p_2 \circ w$. On peut encore dire que $E \times_B F$ est *limite projective* du système projectif formé de B, E, F et des A-homomorphismes f, g , dans la catégorie des A-anneaux (**0_{III}**, 8.1.9).

(18.1.3) Soit \mathfrak{J} l'idéal bilatère de E , noyau de f ; il est immédiat que le noyau \mathfrak{J}' de $p_2 : G \rightarrow F$ est l'idéal formé des éléments $(x, 0)$ où $x \in \mathfrak{J}$; la restriction $i_1 : \mathfrak{J}' \rightarrow \mathfrak{J}$ de p_1 est donc un *isomorphisme* d'anneau *sans élément unité*, et aussi un isomorphisme de A-bimodules. De même, si \mathfrak{R} est le noyau de g , le noyau \mathfrak{R}' de $p_1 : G \rightarrow E$ est l'idéal des éléments $(0, y)$ où $y \in \mathfrak{R}$, et la restriction $i_2 : \mathfrak{R}' \rightarrow \mathfrak{R}$ de p_2 est un isomorphisme (au même sens). Enfin, il est clair que le noyau du A-homomorphisme $q = f \circ p_1 = g \circ p_2$ de $E \times_B F$ dans B est $\mathfrak{J} \times \mathfrak{R} = \mathfrak{J}' \oplus \mathfrak{R}'$, de sorte que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & \searrow & \downarrow & \nearrow i_2 & \downarrow \\
 & \mathfrak{J}' \oplus \mathfrak{R}' & \longrightarrow & \mathfrak{R}' & \xrightarrow{\sim} \mathfrak{R} \\
 \downarrow & \searrow & i \downarrow & & p_2 \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathfrak{J}' & \longrightarrow & G \longrightarrow F \\
 & \downarrow i_1 & \swarrow & p_1 \downarrow & q \searrow & \downarrow g \\
 0 & \longrightarrow & \mathfrak{J} & \longrightarrow & E & \xrightarrow{f} B
 \end{array}
 \quad (18.1.3.1)$$

Les définitions et résultats de (18.1.2) et (18.1.3) s'étendent aussitôt au produit fibré d'une *famille* quelconque $(E_\lambda)_{\lambda \in I}$ de A-anneaux défini par une famille de A-homomorphismes $f_\lambda : E_\lambda \rightarrow B$. Nous laissons la formulation de ces résultats au lecteur.

(18.1.4) Conformément à la terminologie de (M, VIII), nous appellerons A-anneau *augmenté sur B* un A-anneau E muni d'un A-homomorphisme *surjectif* (dit *augmentation* de E), $f : E \rightarrow B$; le noyau \mathfrak{J} de f est appelé l'*idéal d'augmentation*. On dit que le A-anneau augmenté E est *trivial* s'il existe un A-homomorphisme de A-anneaux $s : B \rightarrow E$ qui est *inverse à droite* de l'augmentation $f : E \rightarrow B$ (autrement dit $f \circ s = \text{id}_B$). La suite exacte de A-bimodules

$$0 \rightarrow \mathfrak{J} \rightarrow E \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$$

est alors *scindée*; autrement dit, on peut identifier le A-bimodule E à $B \times \mathfrak{J}$, et la multiplication dans E est alors donnée par

$$(b, z)(b', z') = (bb', bz' + z'b' + zz'),$$

\mathfrak{J} étant considéré comme B-bimodule au moyen de $s : B \rightarrow E$.

(18.1.5) Avec les notations de (18.1.2), supposons que le A-homomorphisme f soit *surjectif*, autrement dit fasse de E un A-anneau *augmenté sur B*. Alors il est clair que $p_2 : G \rightarrow F$ est aussi *surjectif*, autrement dit définit sur G une structure de A-anneau *augmenté sur F*, que l'on appelle l'*image réciproque* par $g : F \rightarrow B$ de l'anneau augmenté E.

Proposition (18.1.6). — Pour que l'*image réciproque* $G = E \times_B F$ par $g : F \rightarrow B$ du A-anneau augmenté E soit un A-anneau augmenté trivial, il faut et il suffit qu'il existe un A-homomorphisme $u : F \rightarrow E$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \swarrow \downarrow g & \\ E & \dashrightarrow & B \\ & \downarrow f & \end{array}$$

La condition est évidemment nécessaire, en prenant $u = p_1 \circ s$, où $s : F \rightarrow G$ est un A-homomorphisme inverse à droite de p_2 . Inversement, s'il existe un A-homomorphisme u vérifiant la condition de l'énoncé, l'existence de l'inverse à droite s de p_2 résulte de la propriété universelle du produit fibré (18.1.2) appliquée aux A-homomorphismes $u : F \rightarrow E$ et $i_F : F \rightarrow F$.

Ce résultat entraîne en particulier que si E est un anneau augmenté *trivial*, il en est de même de toutes ses images réciproques.

(18.1.7) Reprenons la situation décrite en (18.1.2) et (18.1.3); on a évidemment sur \mathfrak{R} une structure de G-bimodule, provenant de sa structure de F-bimodule et de l'homomorphisme d'anneaux $p_2 : G \rightarrow F$. Comme i_2 est bijectif on a en outre une injection $\theta = j \circ i_2^{-1} : \mathfrak{R} \rightarrow G$, qui est un homomorphisme de G-bimodules. Nous allons voir inversement que, lorsqu'on suppose en outre que f et g sont *surjectifs*, autrement dit que E et F sont des A-anneaux *augmentés sur B*, la donnée d'un tel homomorphisme θ permet de reconstituer l'anneau augmenté E (sur B) à partir de l'anneau augmenté G (sur F).

De façon précise, donnons-nous un A-anneau F augmenté sur B et un A-anneau G augmenté sur F, les idéaux d'augmentation étant notés \mathfrak{R} et \mathfrak{J}' respectivement :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & o & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & \mathfrak{R} & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ (18.1.7.1) & & & \theta \swarrow & & & \\ & o & \longrightarrow & \mathfrak{J}' & \longrightarrow & G & \xrightarrow{h} F \longrightarrow o \\ & & & & & \downarrow g & \\ & & & & & B & \\ & & & & & \downarrow & \\ & & & & & o & \end{array}$$

L'homomorphisme h définit sur tous les idéaux de F (et en particulier sur \mathfrak{K}) une structure de G -bimodule. Soit $\theta : \mathfrak{K} \rightarrow G$ un homomorphisme de G -bimodules rendant commutatif le diagramme (18.1.7.1); cela implique que θ est *injectif* et que $\mathfrak{J}' \cap \theta(\mathfrak{K}) = 0$; comme $\theta(\mathfrak{K})$ est un idéal bilatère de G , et que $h(\theta(\mathfrak{K})) = \mathfrak{K}$, l'homomorphisme composé $goh : G \rightarrow B$ se factorise en $G \xrightarrow{q} G/\theta(\mathfrak{K}) \xrightarrow{f} B$, où f est surjectif; en outre l'image \mathfrak{J} de \mathfrak{J}' dans $E = G/\theta(\mathfrak{K})$ est le noyau de f (celui de goh étant $\mathfrak{J}' \oplus \theta(\mathfrak{K})$), et la restriction à \mathfrak{J}' de l'homomorphisme canonique $q : G \rightarrow E$ est injective. On peut donc former le *produit fibré* $G' = E \times_B F$, et comme les deux A -homomorphismes $q : G \rightarrow E$ et $h : G \rightarrow F$ sont tels que $f \circ q = goh$, ils définissent un unique A -homomorphisme $u : G' \rightarrow G$ par la propriété universelle de G' (18.1.2); nous allons voir que u est *bijectif*. Il suffit de le prouver lorsque u est considéré comme homomorphisme de A -bimodules; mais on notera alors que u est compatible avec les filtrations finies sur G' et G formées respectivement par G' et $\mathfrak{J}'' = \text{Ker}(G' \rightarrow F)$, et par G et \mathfrak{J}' ; en outre, on a vu (18.1.3) que $\text{gr}_0 u : F \rightarrow F$ est l'identité et que $\text{gr}_1 u : \mathfrak{J}'' \rightarrow \mathfrak{J}'$ est bijectif, donc u lui-même est bijectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 8, cor. 3 du th. 1).

18.2. Extensions d'un anneau par un bimodule.

(18.2.1) Soient E un A -anneau augmenté sur B , $f : E \rightarrow B$ l'augmentation, $\mathfrak{J} = \text{Ker}(f)$ l'idéal d'augmentation. Si l'on a $\mathfrak{J}^2 = 0$, \mathfrak{J} est non seulement un E -bimodule mais aussi un B -bimodule puisque B est isomorphe à E/\mathfrak{J} ; de façon précise, tout $b \in B$ est de la forme $f(x)$ avec $x \in E$, et si z, z' sont dans \mathfrak{J} on a $(x+z)z' = xz'$ (resp. $z'(x+z) = zx'$) de sorte que la valeur de xz' (resp. $z'x$) ne dépend pas de l'élément $x \in f^{-1}(b)$, et peut s'écrire bz' (resp. $z'b$) ce qui définit la structure de B -bimodule considérée. Inversement, si \mathfrak{J} est muni d'une structure de B -bimodule telle que $xz' = f(x)z'$ et $z'x = z'f(x)$ pour $x \in E$ et $z' \in \mathfrak{J}$, il est clair que $\mathfrak{J}^2 = 0$.

(18.2.2) On appelle *A -extension d'un A -anneau B par un B -bimodule L* une suite exacte d'homomorphismes de A -bimodules

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{j} E \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$$

où E est un A -anneau, f un A -homomorphisme d'anneaux et l'on a, pour $x \in E$ et $z \in L$,

$$j(f(x)z) = xj(z), \quad j(zf(x)) = j(z)x$$

d'où résulte (18.2.1) que $j(L)$ est un idéal bilatère de carré nul de E . Par abus de langage on dira aussi que E est une extension de B par L . On dit que deux A -extensions E, E' de B par L sont *A -équivalentes* s'il existe un isomorphisme de A -anneaux $u : E \xrightarrow{\sim} E'$ (dit aussi *A -équivalence de A -extensions*) rendant commutatif le diagramme

$$(18.2.2.1) \quad \begin{array}{ccccc} & & E & & \\ & \nearrow & \downarrow u & \searrow & \\ 0 \rightarrow L & & B \rightarrow 0 & & \\ & \searrow & \downarrow \varphi & \nearrow & \\ & & E' & & \end{array}$$

(18.2.3) On dit qu'une A-extension E de B par un B-bimodule L est *A-triviale* si E est un A-anneau augmenté (sur B) trivial (18.1.4). On définit sur le A-bimodule produit $B \times L$ une structure de A-anneau en posant $(x, s)(y, t) = (xy, xt + sy)$, comme on le vérifie aussitôt, et il est immédiat que les applications canoniques $j : L \rightarrow B \times L$ et $f : B \times L \rightarrow B$ définissent une A-extension de B par L qui est *A-triviale*, l'application canonique $g : B \rightarrow B \times L$ étant un A-homomorphisme inverse à droite de f. On dit que cette extension est l'*extension triviale type* de B par L et on la note $D_B(L)$; il est immédiat que toute A-extension A-triviale de B par L est A-équivalente à $D_B(L)$.

On notera que toute extension du A-anneau A lui-même par un A-bimodule est nécessairement A-triviale.

(18.2.4) Étant données deux A-extensions $L \xrightarrow{j} E \xrightarrow{f} B$, $L' \xrightarrow{j'} E' \xrightarrow{f'} B'$, un *morphisme* de la première dans la seconde est par définition un triplet d'homomorphismes de A-bimodules (u, v, w) tel que le diagramme

$$(18.2.4.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{j} & E & \xrightarrow{f} & B \longrightarrow 0 \\ & & w \downarrow & & u \downarrow & & v \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{j'} & E' & \xrightarrow{f'} & B' \longrightarrow 0 \end{array}$$

soit commutatif, u et v étant des A-homomorphismes d'anneaux et w étant tel que $w(bz) = v(b)w(z)$ et $w(zb) = w(z)v(b)$ pour $z \in L$ et $b \in B$ (en d'autres termes, le couple (v, w) constitue un *di-homomorphisme* du B-bimodule L dans le B'-bimodule L'); il est clair que si (u', v', w') est un morphisme de $L' \rightarrow E' \rightarrow B'$ dans une A-extension $L'' \rightarrow E'' \rightarrow B''$, $(u' \circ u, v' \circ v, w' \circ w)$ est encore un morphisme, ce qui justifie la terminologie.

La considération des deux carrés commutatifs du diagramme (18.2.4.1) va nous conduire à deux opérations sur les extensions de A-anneaux.

(18.2.5) En premier lieu, considérons une A-extension E' de B' par L'

$$0 \rightarrow L' \xrightarrow{j'} E' \xrightarrow{f'} B' \rightarrow 0$$

et un A-homomorphisme d'anneaux $v : B \rightarrow B'$, et soit $F = E' \times_B B$ l'*image réciproque* par v du A-anneau augmenté E' (18.1.5), de sorte que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L_0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{p_2} & B \longrightarrow 0 \\ & & i \downarrow & & p_1 \downarrow & & \downarrow v \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{j'} & E' & \xrightarrow{f'} & B' \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes, p_1 et p_2 étant les homomorphismes canoniques; on a vu (18.1.3) que i est *bijectif* et il résulte aussi de la définition (18.1.2) que $L_0^2 = 0$, de sorte que l'on peut considérer que F est une A-extension de B par L' , que l'on appelle *image réciproque* par v de l'extension E' de B' par L' (L' étant naturellement considéré comme B-bimodule au moyen de l'homomorphisme d'anneaux v). Le caractère fonc-

toriel du produit fibré vis-à-vis de chacun des facteurs montre en outre que si l'on a un morphisme de deux extensions de B'

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L'_1 & \longrightarrow & E'_1 & \longrightarrow & B' \longrightarrow 0 \\ & & h \downarrow & & g \downarrow & & \downarrow 1_{B'} \\ 0 & \longrightarrow & L'_2 & \longrightarrow & E'_2 & \longrightarrow & B' \longrightarrow 0 \end{array}$$

on en déduit un morphisme *image réciproque* par v

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & L'_1 & \rightarrow & E'_1 \times_{B'} B & \rightarrow & B \rightarrow 0 \\ & & h \downarrow & & g \times_{B'} 1_B \downarrow & & \downarrow \ell \downarrow 1_B \\ 0 & \rightarrow & L'_2 & \rightarrow & E'_2 \times_{B'} B & \rightarrow & B \rightarrow 0 \end{array}$$

En particulier, si E'_1 et E'_2 sont des A-extensions A-équivalentes de B' par L' , leurs images réciproques par v sont des A-extensions A-équivalentes de B par L' .

La définition du produit fibré montre que lorsque l'on a un morphisme (18.2.4.1) de A-extensions, il se *factorise* à travers l'image réciproque de E' par v ; de façon précise, il existe un A-homomorphisme unique $u_0 : E \rightarrow F = E' \times_{B'} B$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{j} & E & \xrightarrow{f} & B \longrightarrow 0 \\ & & w_0 \downarrow & & u_0 \downarrow & & \downarrow 1_B \\ 0 & \longrightarrow & L_0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{p_2} & B \longrightarrow 0 \\ & & i \downarrow & & p_1 \downarrow & & \downarrow v \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{j'} & E' & \xrightarrow{f'} & B' \longrightarrow 0 \end{array}$$

où w_0 est la restriction de u_0 à L et $p_1 \circ w_0 = u$, $i \circ w_0 = w$.

(18.2.6) Étudions en particulier les images réciproques d'extensions par des A-homomorphismes *surjectifs*. Considérons un A-homomorphisme surjectif $v : B \rightarrow B'$, une A-extension F de B par un B -bimodule L , et l'idéal bilatère \mathfrak{R} de B , noyau de v (qui peut être considéré comme F -bimodule au moyen de l'augmentation $F \rightarrow B$); on a vu (18.1.7) que tout homomorphisme de F -bimodules $0 : \mathfrak{R} \rightarrow F$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{R} & \\ \theta \swarrow & \downarrow & \\ F & \rightarrow & B \end{array}$$

détermine une extension E' de $B' = B/\mathfrak{R}$ par L dont l'image réciproque par $v : B \rightarrow B'$ est équivalente à F , et que toute A-extension E' de B' par L ayant cette dernière propriété s'obtient ainsi (à une A-équivalence près). En outre, pour que deux homomorphismes θ_1, θ_2 de F -bimodules de \mathfrak{R} dans F donnent deux A-extensions A-équivalentes de B par L , il faut et il suffit qu'il existe une A-équivalence u de la A-extension F sur elle-même telle que

$\theta_2 = u \circ \theta_1$; cela résulte aussitôt de ce qu'on a vu dans (18.2.5) et de la définition de la bijection canonique de F sur le produit fibré $E' \times_B B$ (18.1.7).

(18.2.7) Considérons maintenant le carré de gauche de (18.2.4.1), et rappelons d'abord la notion de *somme amalgamée* dans la catégorie des A-bimodules : étant donnés trois A-bimodules X, Y, Z et deux A-homomorphismes $f: X \rightarrow Y, g: X \rightarrow Z$, la somme amalgamée $Y \oplus_X Z$ est *limite inductive* du système inductif formé par X, Y, Z et les A-homomorphismes f, g dans la catégorie des A-bimodules (0_{III}, 8.1.11). On définit ce A-bimodule comme quotient du produit $Y \times Z$ par le sous-A-bimodule M image de X par l'homomorphisme $x \mapsto (f(x), -g(x))$. Sa propriété caractéristique est que, pour tout couple d'homomorphismes de A-bimodules $u: Y \rightarrow T, v: Z \rightarrow T$ tels que $u \circ f = v \circ g$, il existe un homomorphisme et un seul $w: Y \oplus_X Z \rightarrow T$ tel que $u = w \circ j_1$ et $v = w \circ j_2$, où $j_1: Y \rightarrow Y \oplus_X Z$ et $j_2: Z \rightarrow Y \oplus_X Z$ sont les applications canoniques.

(18.2.8) Considérons maintenant une A-extension E de B par un B-bimodule L :

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{j} E \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$$

et soit d'autre part $w: L \rightarrow L'$ un homomorphisme de B-bimodules. Soit H le A-bimodule somme amalgamée $E \oplus_L L'$; montrons comment on peut munir ce A-bimodule d'une structure de A-anneau et définir une A-extension

$$0 \rightarrow L' \rightarrow H \rightarrow B \rightarrow 0.$$

Notons pour cela que L' est muni d'une structure de E-bimodule au moyen de l'homomorphisme d'augmentation $E \rightarrow B$; on peut donc former la A-extension triviale type $G = D_E(L')$ (18.2.3). Considérons alors l'application $\theta: z \mapsto (j(z), -w(z))$ de L dans G ; c'est un homomorphisme de G-bimodules (L étant considéré comme G-bimodule au moyen de l'homomorphisme canonique $p: G \rightarrow E$). En effet, pour $(x, z') \in G$ et $z \in L$, on a $(j(z), -w(z))(x, z') = (j(z)x, j(z)z' - w(z)x)$; or $j(z)z' = f(j(z))z' = 0$ par définition de la structure de E-bimodule sur L' , et $j(z)x = j(zf(x))$ et $w(z)x = w(zf(x))$; on vérifie de même que θ est un homomorphisme de G-module à gauche. On peut alors appliquer au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & o & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & L & & \\ & & & \swarrow \theta & \downarrow j & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & G & \xrightarrow{p} & E \longrightarrow 0 \\ & & & & & \downarrow f & \\ & & & & & B & \\ & & & & & \downarrow & \\ & & & & & o & \end{array}$$

le résultat de (18.1.7). Comme $H = G/\theta(L)$ par définition, notre assertion est une conséquence immédiate de (18.1.7).

On dit que la A-extension H de B par L' est *déduite de E au moyen de l'homomorphisme $w : L \rightarrow L'$* . Le caractère fonctoriel de la somme amalgamée en chacun des sommandes montre en outre que si l'on a un morphisme d'extensions

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & L & \rightarrow & E_1 & \rightarrow & B_1 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \iota_L & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \rightarrow & L & \rightarrow & E_2 & \rightarrow & B_2 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

on en déduit canoniquement un morphisme d'extensions

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & L' & \rightarrow & E_1 \oplus_L L' & \rightarrow & B_1 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \iota_{L'} & & \downarrow g \otimes_L \iota_{L'} & & \downarrow h & & \\ 0 & \rightarrow & L' & \rightarrow & E_2 \oplus_L L' & \rightarrow & B_2 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

En particulier, si E_1 et E_2 sont des A-extensions A-équivalentes de B par L , les extensions de B par L' qu'on en déduit au moyen de w sont A-équivalentes.

Lorsque l'on a un morphisme (18.2.4.1) de A-extensions, il se factorise à travers la A-extension H de B par L' déduite de E au moyen de l'homomorphisme $w : L \rightarrow L'$ (L' étant considéré comme B -bimodule au moyen de l'homomorphisme $v : B \rightarrow B'$) : en effet, la définition de la somme amalgamée montre qu'il existe un A-homomorphisme unique $u_0 : H \rightarrow E'$ de A-bimodules, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & L & \xrightarrow{j} & E & \xrightarrow{f} & B & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow w_0 & & \downarrow j_1 & & \downarrow \iota_B & & \\ 0 & \rightarrow & L'_0 & \xrightarrow{i_1} & H & \xrightarrow{f_0} & B & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow j_0 \iota & & \downarrow u_0 & & \downarrow v & & \\ 0 & \rightarrow & L' & \xrightarrow{j'} & E' & \xrightarrow{f'} & B' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

avec $u = u_0 \circ j_1$, $w = j_0 \circ w_0$, j_1 et j_2 étant les homomorphismes canoniques ; on vérifie immédiatement que u_0 est aussi un homomorphisme d'anneaux.

Notons enfin les propriétés fonctorielles relatives aux extensions triviales :

Proposition (18.2.9). — Soient B , B' deux A-anneaux, L un B -bimodule, L' un B' -bimodule, $v : B \rightarrow B'$ un A-homomorphisme d'anneaux, $w : L \rightarrow L'$ un homomorphisme de A-bimodules tel que (v, w) soit un di-homomorphisme de bimodules. Alors, il existe un A-homomorphisme unique d'anneaux $u : D_B(L) \rightarrow D_{B'}(L')$ rendant commutatif les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} D_B(L) & \xrightarrow{u} & D_{B'}(L') \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ B & \xrightarrow[v]{} & B' \\ & \vdots & \vdots \\ & \uparrow & \uparrow \\ D_B(L) & \xrightarrow{u} & D_{B'}(L') \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ L & \xrightarrow[w]{} & L' \end{array}$$

où les flèches verticales sont les injections canoniques.

En effet, u ne peut être que l'application $(x, s) \mapsto (v(x), w(s))$ et il reste à vérifier que c'est un A-homomorphisme d'anneaux, ce qui résulte trivialement de la définition (18.2.3). On notera que u rend aussi commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} D_B(L) & \xrightarrow{u} & D_{B'}(L') \\ | & & | \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{v} & B' \end{array}$$

où cette fois les flèches verticales sont les augmentations.

Proposition (18.2.10). — Soient B un A-anneau, L un B -bimodule, E une A-extension de B par L . On définit une application bijective de l'ensemble G des homomorphismes de B -anneaux de B dans E (autrement dit, l'ensemble des A-homomorphismes inverses à droite de l'augmentation $E \rightarrow B$) sur l'ensemble G' des A-équivalences de $D_B(L)$ sur E en faisant correspondre à tout $g \in G$ la A-équivalence $g' : (x, s) \mapsto g(x) + s$; l'application réciproque fait correspondre à tout $g' \in G'$ le B-homomorphisme $x \mapsto g'(x, 0)$.

Ceci résulte aussitôt des définitions.

18.3. Le groupe des classes de A-extensions.

(18.3.1) Considérons un A-anneau B et un B -bimodule L fixés; alors la relation « E et E' sont A-équivalentes» entre A-extensions E, E' de B par L est une relation d'équivalence, et pour cette relation on peut parler de l'ensemble des classes de A-extensions A-équivalentes de B par L . Il suffit pour le voir de remarquer que si, pour tout $x \in B$, c_x est un élément de E dont l'image dans B est x , tout $z \in E$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $c_x + t$, où $t \in L$, et l'on peut écrire $c_{x+y} = c_x + c_y + \varphi(x, y)$, $c_{xy} = c_x c_y + \psi(x, y)$, où $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ sont des éléments de L , les applications φ et ψ de $B \times B$ dans L devant vérifier des conditions exprimant que E est un A-anneau, qu'il est inutile d'écrire ici. Toute A-extension de B par L est donc A-équivalente à une A-extension dont $B \times L$ est l'ensemble sous-jacent, d'où on tire aussitôt notre conclusion.

(18.3.2) Le A-anneau B étant fixé, désignons provisoirement par $T(L)$ l'ensemble des classes de A-extensions de B par L . Pour tout B -homomorphisme $w : L \rightarrow L'$ de B -bimodules, on définit canoniquement une application $T(w) : T(L) \rightarrow T(L')$ en faisant correspondre à la classe d'une A-extension E de B par L la classe de la A-extension $E \oplus_L L'$ déduite de w , en vertu de (18.2.8). Si $w' : L' \rightarrow L''$ est un second homomorphisme de B -bimodules, on a en outre

$$(18.3.2.1) \quad T(w' \circ w) = T(w') \circ T(w).$$

En effet, on sait qu'il existe un isomorphisme canonique de A-bimodules

$$E \oplus_L L'' \xrightarrow{\sim} (E \oplus_L L') \oplus_{L'} L''$$

en vertu des propriétés générales de limites inductives (cf. par exemple (I, 3.3.9)), et il est immédiat de vérifier que c'est bien une A-équivalence de A-extensions, d'où

la relation (18.3.2.1). Si C_B désigne la catégorie des B -bimodules, on voit qu'on a ainsi défini un *foncteur covariant* $T : C_B \rightarrow Ens$.

(18.3.3) Considérons maintenant une famille $(L_\alpha)_{\alpha \in I}$ de B -bimodules et leur produit $L = \prod_{\alpha \in I} L_\alpha$; les projections $pr_\alpha : L \rightarrow L_\alpha$ définissent des applications

$$T(pr_\alpha) : T(L) \rightarrow T(L_\alpha),$$

d'où une application canonique

$$(18.3.3.1) \quad \prod_{\alpha} T(pr_\alpha) : T(L) \rightarrow \prod_{\alpha \in I} T(L_\alpha).$$

Nous allons voir que cette application est *bijective*. En effet, pour tout $\alpha \in I$, soit E_α une A -extension de B par L_α , et soit F le *produit fibré* des E_α sur B (18.1.3); il est immédiat que F est une A -extension de B par $L = \prod_{\alpha \in I} L_\alpha$ et que si l'on remplace chaque E_α par une A -extension A -équivalente E'_α , le produit fibré F' des E'_α sur B est A -équivalente à F . On a ainsi défini une application $\prod_{\alpha \in I} T(L_\alpha) \rightarrow T(L)$ et il est clair que cette application est réciproque de (18.3.3.1), d'où notre assertion. On identifiera canoniquement $T(L)$ à $\prod_{\alpha \in I} T(L_\alpha)$ par l'application (18.3.3.1). On vérifie en outre immédiatement que si $(L'_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une seconde famille de B -bimodules et, pour chaque α , $w_\alpha : L_\alpha \rightarrow L'_\alpha$ un homomorphisme de B -bimodules, alors, en posant $w = \prod_{\alpha} w_\alpha : L \rightarrow L' = \prod_{\alpha \in I} L'_\alpha$, $T(w)$ s'identifie à $\prod_{\alpha \in I} T(w_\alpha)$ quand on fait l'identification précédente.

(18.3.4) Cela étant, pour un B -bimodule L , l'addition est un homomorphisme $s : L \times L \rightarrow L$ de B -bimodules, et il en est de même de la symétrie $t : L \rightarrow L$ de la loi additive de L . On en déduit une loi de composition

$$T(s) : T(L) \times T(L) \rightarrow T(L)$$

dans $T(L)$ en vertu de (18.3.3), et cette loi est une loi de *groupe commutatif* dont $T(t)$ est la symétrie, comme il résulte de la définition d'un objet en groupes au moyen de diagrammes commutatifs (0_{III}, 8.2.5 et 8.2.6). Nous désignerons par $Exan_A(B, L)$ le groupe commutatif ainsi défini et nous dirons que c'est le *groupe des classes de A-extensions de B par L*.

(18.3.5) Désignons par K la catégorie dont les objets sont les triplets (A, B, L) où A est un anneau, B un A -anneau et L un B -bimodule; les *morphismes* de cette catégorie sont les triplets (u, v, w) où $u : A' \rightarrow A$ et $v : B' \rightarrow B$ sont deux homomorphismes d'anneaux rendant commutatif le carré de gauche du diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ u \uparrow & & \uparrow v \\ A' & \rightarrow & B' \end{array} \quad \begin{array}{c} L \\ \downarrow w \\ L' \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les homomorphismes structuraux; enfin $w : L \rightarrow L'$ est un homomorphisme de groupes commutatifs tel que l'on ait $w(v(b')z) = b'w(z)$ et

$w(zv(b')) = w(z)b'$ quels que soient $z \in L$ et $b' \in B'$ (en d'autres termes, w est un homomorphisme de B' -bimodules lorsqu'on munit L de la structure de B' -bimodule définie par v). La composition des morphismes est définie par $(u', v', w') \circ (u, v, w) = (u \circ u', v \circ v', w' \circ w)$, qui se justifie aussitôt. Nous nous proposons de montrer que

$$(18.3.5.1) \quad (A, B, L) \rightsquigarrow \text{Exan}_A(B, L)$$

est un *foncteur covariant* de la catégorie \mathbf{K} dans la catégorie \mathbf{Ab} des groupes commutatifs. Il s'agit donc pour tout triplet (u, v, w) comme ci-dessus, de définir un homomorphisme de groupes commutatifs

$$(u, v, w)_* : \text{Exan}_A(B, L) \rightarrow \text{Exan}_{A'}(B', L').$$

En vertu de la définition des morphismes dans \mathbf{K} , on peut écrire

$$(u, v, w) = (\iota_A, \iota_{B'}, w) \circ (\iota_{A'}, v, \iota_L) \circ (u, \iota_B, \iota_L)$$

où, dans le premier facteur, L est muni de sa structure de B' -bimodule définie par v ; nous définirons donc d'abord $(u, v, w)_*$ lorsque deux des homomorphismes u, v, w sont réduits à l'identité.

(18.3.6) Nous prendrons d'abord pour $(\iota_A, \iota_B, w)_*$ l'application

$$(18.3.6.1) \quad w_* : \text{Exan}_A(B, L) \rightarrow \text{Exan}_A(B, L')$$

notée $T(w)$ dans (18.3.2); il est immédiat de vérifier que c'est un homomorphisme de groupes, cette propriété s'exprimant par la commutativité de diagrammes, transformés par T de diagrammes analogues pour L et L' .

L'application $(\iota_A, v, \iota_L)_*$ est l'application

$$(18.3.6.2) \quad v^* : \text{Exan}_A(B, L) \rightarrow \text{Exan}_A(B', L)$$

définie de la façon suivante : si E est une A -extension de B par L , on a vu que $E \times_B B'$ est une A -extension de B' par L (18.2.5) et que si l'on remplace E par une A -extension A -équivalente E' , $E' \times_B B'$ est A -équivalente à $E \times_B B'$; l'image par v^* de la classe de E est la classe de $E \times_B B'$. On vérifie aussitôt que si $w : L \rightarrow L'$ est un homomorphisme de B -bimodules, le diagramme

$$(18.3.6.3) \quad \begin{array}{ccc} \text{Exan}_A(B, L) & \xrightarrow{v^*} & \text{Exan}_A(B', L) \\ \downarrow w_* & & \downarrow w_* \\ \text{Exan}_A(B, L') & \xrightarrow{v^*} & \text{Exan}_A(B', L') \end{array}$$

est commutatif, L et L' étant considérés comme B' -bimodules au moyen de v dans la colonne de droite. Remplaçant L et L' respectivement par $L \times L$ et L , et w par l'addition s dans L , on en conclut que v^* est bien un *homomorphisme de groupes*.

Enfin, l'application $(u, i_B, i_L)_*$ est l'application

$$(18.3.6.4) \quad u^* : \text{Exan}_A(B, L) \rightarrow \text{Exan}_{A'}(B, L)$$

qui s'obtient en faisant correspondre à une A -extension E de B par L l'anneau E considéré comme A' -anneau au moyen de u (18.1.1), qui est évidemment une A' -extension de B par L , B étant aussi considéré comme A' -anneau au moyen de u ; il est clair qu'une A -équivalence est aussi une A' -équivalence, d'où l'application (18.3.6.4), qui, pour tout homomorphisme $w : L \rightarrow L'$ de B -bimodules, rend encore commutatif le diagramme

$$(18.3.6.5) \quad \begin{array}{ccc} \text{Exan}_A(B, L) & \xrightarrow{u^*} & \text{Exan}_{A'}(B, L) \\ \downarrow w_* & & \downarrow w_* \\ \text{Exan}_A(B, L') & \xrightarrow{u^*} & \text{Exan}_{A'}(B, L') \end{array}$$

d'où l'on conclut comme ci-dessus que u^* est un homomorphisme de groupes.

Cela étant, on pose $(u, v, w)_* = (i_{A'}, i_B, w)_* \circ (i_{A'}, v, i_L)_* \circ (u, i_B, i_L)_*$ et l'on vérifie facilement, en raison de la commutativité des diagrammes (18.3.6.3) et (18.3.6.5), que l'on a $(u \circ u', v \circ v', w \circ w)_* = (u', v', w')_* \circ (u, v, w)_*$, ce qui achève de prouver que (18.3.4.1) est un foncteur.

L'existence de l'homomorphisme de groupes (18.3.6.1) montre en particulier que si E est une A -extension *triviale* de B par L , l'extension $E \oplus_{L'} L'$ de B par L' définie dans (18.2.8) est aussi triviale, ce que l'on vérifie d'ailleurs sans peine de façon directe.

D'autre part, pour tout élément z du *centre* Z de B , l'homothétie $h_z : y \mapsto yz = zy$ est un endomorphisme du B -bimodule L , donc $(h_z)_*$ est un endomorphisme du groupe commutatif $\text{Exan}_A(B, L)$, et par fonctorialité, ces endomorphismes définissent sur $\text{Exan}_A(B, L)$ une structure canonique de Z -module.

(18.3.7) Soient A, A' deux anneaux, $u : A' \rightarrow A$ un homomorphisme, B un A -anneau et L un B -bimodule. Le *noyau* de l'homomorphisme de groupes

$$u^* : \text{Exan}_A(B, L) \rightarrow \text{Exan}_{A'}(B, L)$$

est formé par définition des classes de A -extensions de B par L qui sont A' -triviales quand on les considère comme A' -extensions au moyen de u . On désigne ce noyau par la notation $\text{Exan}_{A/A'}(B, L)$ quand cela ne prête pas à confusion.

Si Λ est un anneau, et si on a un diagramme commutatif de Λ -homomorphismes de Λ -anneaux

$$(18.3.7.1) \quad \begin{array}{ccc} B' & \rightarrow & B \\ \uparrow & & \uparrow \\ A' & \rightarrow & A \end{array}$$

on en déduit canoniquement des homomorphismes

$$(18.3.7.2) \quad \text{Exan}_{A'/A}(B, L) \rightarrow \text{Exan}_{A'/A}(B, L) \rightarrow \text{Exan}_{A'/A}(B', L)$$

qui proviennent de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \text{Exan}_A(B, L) & \rightarrow & \text{Exan}_{A'}(B, L) & \rightarrow & \text{Exan}_{A'}(B', L) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Exan}_A(B, L) & \rightarrow & \text{Exan}_A(B, L) & \rightarrow & \text{Exan}_A(B', L) \end{array}$$

où les flèches sont déduites de celles de (18.3.7.1) par fonctorialité.

Proposition (18.3.8). — Soient B un anneau, \mathfrak{J} un idéal bilatère de B , $C = B/\mathfrak{J}$ l'anneau quotient; $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est alors canoniquement muni d'une structure de C -bimodule. Pour tout C -bimodule L , soit $\text{Hom}_C(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2, L)$ le groupe additif des homomorphismes de C -bimodules de $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ dans L . On définit alors un isomorphisme canonique de groupes commutatifs

$$(18.3.8.1) \quad \eta_L : \text{Hom}_C(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2, L) \xrightarrow{\sim} \text{Exan}_B(C, L)$$

en faisant correspondre à tout C -homomorphisme $w : \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \rightarrow L$ (qui est *a fortiori* un B -homomorphisme) la classe de l'extension $(B/\mathfrak{J}^2) \oplus_{(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)} L$ déduite de l'extension B/\mathfrak{J}^2 de C par $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ au moyen de w ; l'isomorphisme réciproque fait correspondre à la classe d'une B -extension E de C par L l'homomorphisme w tel que le composé $\mathfrak{J} \rightarrow \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \xrightarrow{w} L$ soit la restriction à \mathfrak{J} de l'homomorphisme structural $B \rightarrow E$.

Soit $F = B/\mathfrak{J}^2$, qui est une B -extension de C par $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$. Pour toute B -extension $0 \rightarrow L \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$ de C par L , l'homomorphisme structural $f : B \rightarrow E$ est tel que le composé $B \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} C$ soit l'homomorphisme canonique $B \rightarrow B/\mathfrak{J} = C$. Comme l'image de \mathfrak{J} par $p \circ f$ est nulle, $f(\mathfrak{J})$ est contenu dans le noyau de p , c'est-à-dire $j(L)$, et comme $j(L)$ est de carré nul, on a $f(\mathfrak{J}^2) = 0$; donc f se factorise en $B \rightarrow B/\mathfrak{J}^2 = F \xrightarrow{u} E$, et si w est la restriction de u à $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{u} & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow w & & \downarrow u & & \downarrow \ell \downarrow \iota_C \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{j} & E & \xrightarrow{p} & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

autrement dit (u, ι_C, w) est un morphisme d'extensions (18.2.4). On en déduit un morphisme d'extensions

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \iota_L & & \downarrow u' & & \downarrow \ell \downarrow \iota_C \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & E & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

où $E' = F \oplus_{(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)} L$ (18.2.8); il s'agit de prouver que u' est une B -équivalence, ce qui établira que η_L est bijectif. En vertu de la construction faite dans (18.2.8), tout revient à prouver (compte tenu de (18.1.7)) que l'image réciproque G de l'extension E de C par l'homomorphisme canonique $g : F \rightarrow C$ est F -triviale, ce qui est évident puisque g se factorise en $F \xrightarrow{u} E \xrightarrow{p} C$ (18.1.6).

Il reste à voir que η_L est un homomorphisme de groupes; or, pour tout B -homomorphisme $h : L \rightarrow L'$, il est immédiat que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_C(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2, L) & \xrightarrow{\eta_L} & \text{Exan}_B(C, L) \\ \downarrow \text{Hom}(1, h) & & \downarrow h_* \\ \text{Hom}_C(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2, L') & \xrightarrow{\eta_{L'}} & \text{Exan}_B(C, L') \end{array}$$

est commutatif. Il suffit d'appliquer cette remarque à l'homomorphisme $L \times L \rightarrow L$ définissant l'addition pour conclure.

18.4. Extensions d'algèbres.

(18.4.1) Soit A un anneau *commutatif*. La catégorie des A -algèbres est alors une sous-catégorie pleine de celle des A -anneaux, caractérisée par le fait que les homomorphismes structuraux $\varphi : A \rightarrow B$ sont *centraux*.

Si B est une A -algèbre, L un B -bimodule, il est immédiat que la A -extension triviale type $D_B(L)$ est une A -algèbre. De même, dans la construction de (18.2.5) (resp. de (18.2.8)), si B, B' et E' (resp. B et E) sont des A -algèbres, il en est de même de $E' \times_B B'$ (resp. de $E \oplus_L L'$). Enfin, il est clair que si B est une A -algèbre et E une A -extension de B par un B -bimodule L qui est une A -algèbre, toute A -extension de B par L , A -équivalente à E , est aussi une A -algèbre. On déduit alors aussitôt de la définition (18.3.4) que les classes de A -extensions équivalentes de B par L qui sont des A -algèbres forment un *sous-groupe*, noté $\text{Exal}_A(B, L)$, de $\text{Exan}_A(B, L)$. Soit \mathbf{K}' la sous-catégorie pleine de la catégorie \mathbf{K} définie dans (18.3.5), dont les objets (A, B, L) sont tels que A soit commutatif et B une A -algèbre. Alors ce qui précède montre que

$$(A, B, L) \rightsquigarrow \text{Exal}_A(B, L)$$

est un *foncteur covariant* de \mathbf{K}' dans \mathbf{Ab} . Les résultats de (18.3.7) sont inchangés lorsqu'on remplace partout Exan par Exal .

(18.4.2) Supposons toujours l'anneau A commutatif. Les remarques de (18.4.1) restent valables lorsque l'on remplace « algèbre » par « algèbre commutative » et « bimodule » par « module ». Si B est une A -algèbre commutative et L un B -module,

les classes de A-extensions équivalentes de B par L qui sont des *A-algèbres commutatives* (ou, ce qui revient au même, des *A-anneaux commutatifs*) forment un *sous-groupe* de $\text{Exal}_A(B, L)$, noté $\text{Exalcom}_A(B, L)$. Si \mathbf{K}'' est la sous-catégorie pleine de \mathbf{K}' formée des triplets (A, B, L) où A et B sont commutatifs et L un B-module,

$$(A, B, L) \rightsquigarrow \text{Exalcom}_A(B, L)$$

est encore un *foncteur covariant* de \mathbf{K}'' dans \mathbf{Ab} . On peut aussi dans (18.3.7) remplacer partout Exan par Exalcom . Enfin, si dans (18.3.8), on suppose que B soit un anneau *commutatif* et que L soit un *C-module*, le même raisonnement donne un isomorphisme canonique

$$(18.4.2.1) \quad \text{Hom}_C(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2, L) \xrightarrow{\sim} \text{Exalcom}_B(C, L)$$

où le premier membre est le groupe des homomorphismes de *C-module*.

(18.4.3) Soit A un anneau commutatif. Un cas important d'extensions de A-algèbres est formé des A-algèbres E, extensions d'une A-algèbre B par un B-bimodule L telles que E, en tant que *A-module*, soit une extension *triviale* du A-module B par le A-module L; autrement dit, la suite exacte de A-modules $0 \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow B \rightarrow 0$ est *scindée*. On dit alors que E est une *extension de Hochschild* de B par L. Ce sera toujours le cas lorsque B est un A-module *projectif*, et en particulier lorsque A est un *corps* commutatif. En tant que A-module, on peut identifier E à $B \times L$, la multiplication dans E étant donnée par $(x, s)(y, t) = (xy, xt + sy + f(x, y))$ avec $f(x, y) \in L$. Si l'on écrit que cette multiplication définit sur $B \times L$ une structure de A-algèbre, on trouve (M, XIV, 2) que f doit être une application *A-bilinéaire* de $B \times B$ dans L, telle que

$$(18.4.3.1) \quad f(xy, z) + f(x, y)z = xf(y, z) + f(x, yz)$$

autrement dit, f est un *2-cocycle* sur B à valeurs dans L, au sens de Hochschild; pour que l'extension E soit A-triviale, il faut et il suffit que l'on ait

$$(18.4.3.2) \quad f(x, y) = xg(y) - g(xy) + g(x)y$$

où g est une application *A-linéaire* de B dans L, autrement dit f doit être un *2-cobord* au sens de Hochschild. On en déduit aussitôt que les classes d'extensions de Hochschild de B par L forment un sous-groupe de $\text{Exal}_A(B, L)$, isomorphe au *groupe de cohomologie* de Hochschild $H_A^2(B, L)$.

Si B est une A-algèbre *commutative*, et L un B-module, les extensions de Hochschild *commutatives* de B par L correspondent aux 2-cocycles *symétriques*, c'est-à-dire tels que $f(y, x) = f(x, y)$. Les classes d'extensions de Hochschild commutatives de B par L forment donc un sous-groupe de $\text{Exalcom}_A(B, L)$, isomorphe au sous-groupe de $H_A^2(B, L)$ image du groupe des 2-cocycles symétriques, que nous noterons $H_A^2(B, L)^s$.

(18.4.4) Bornons-nous au cas où A et B sont *commutatifs* et L un B-module, et rappelons dans ce cas la définition équivalente des groupes de Hochschild $H_A^i(B, L)$ (M, IX, 6). On considère un complexe $P_\bullet = (P_n)_{n \geq 0}$ de B-modules, où $P_n = B^{\otimes(n+1)} = B \otimes_A B \otimes \dots \otimes_A B$ ($n+1$ fois), la structure de B-module étant définie

par $x(y_1 \otimes y_2 \otimes \dots \otimes y_{n+1}) = (xy_1) \otimes y_2 \otimes \dots \otimes y_{n+1}$; la dérivation, de degré -1 , $d_n : P_n \rightarrow P_{n-1}$, est définie par

$$d_n(x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_{n+1}) = (x_1 x_2) \otimes x_3 \otimes \dots \otimes x_{n+1} - x_1 \otimes (x_2 x_3) \otimes \dots \otimes x_{n+1} + \dots + (-1)^{n-1} x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_{n-1} \otimes (x_n x_{n+1}) + (-1)^n (x_{n+1} x_1) \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_n$$

qui est bien B -linéaire puisque B est commutatif.

Un 2-cocycle de ce complexe à valeurs dans L est une application B -linéaire h de $B \otimes B \otimes B$ dans L telle que $h(d_3(x \otimes y \otimes z \otimes t)) = 0$; mais comme $h(x \otimes y \otimes z) = xh(1 \otimes y \otimes z)$, le cocycle h est déterminé par l'application A -bilinéaire $(y, z) \mapsto f(y, z) = h(1 \otimes y \otimes z)$ de $B \times B$ dans L , et en écrivant la condition précédente pour h , on retrouve pour f la condition (18.4.3.1). De même, un 2-cobord sera une application de la forme $x \otimes y \otimes z \mapsto h'(d_2(x \otimes y \otimes z))$, où $h' : B \otimes_A B \rightarrow L$ est linéaire, et ici encore h' est déterminé par l'application B -linéaire $g : y \mapsto h'(1 \otimes y)$ de B dans L ; on obtient alors $h'(d_2(1 \otimes x \otimes y)) = xg(y) - g(xy) + yg(x)$, ce qui redonne (18.4.3.2). On procède de même pour tout i , et l'on voit ainsi que l'on a

$$(18.4.4.1) \quad H_A^i(B, L) = H^i(\text{Hom}_B(P_\bullet, L)).$$

(18.4.5) Sous les conditions de (18.4.4), on peut interpréter de la même façon le groupe $H_A^2(B, L)^s$ (18.4.3). Pour cela, modifions le complexe P_\bullet en degré 3, en considérant un nouveau complexe

$$P'_\bullet : P'_3 \xrightarrow{d'_3} P_2 \xrightarrow{d_1} P_1;$$

nous prendrons $P'_3 = P_3 \oplus (B \otimes_A B \otimes_A B)$, d'_3 coïncidant avec d_3 sur P_3 , et étant donné dans $B \otimes_A B \otimes_A B$ par

$$d'_3(x \otimes y \otimes z) = x \otimes y \otimes z - x \otimes z \otimes y.$$

La relation $d_2 d'_3 = 0$ résulte de la commutativité de B . Avec les notations introduites ci-dessus, un 2-cocycle de P'_\bullet correspond maintenant à une application A -bilinéaire $f : B \times B \rightarrow L$ qui est *symétrique* et vérifie (18.4.3.1); par suite, on a $H_A^2(B, L)^s = H^2(\text{Hom}_B(P'_\bullet, L))$.

(18.4.6) Dans le cas particulier où l'on considère un *corps* commutatif k , une *extension* K de k , on a $\text{Ext}_K^1(M, L) = 0$ quels que soient les K -espaces vectoriels L, M , et par suite ($M, VI, 3.3 a$), on a un isomorphisme canonique

$$(18.4.6.1) \quad H_k^i(K, L) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_K(H_i(P_\bullet), L)$$

et de même

$$(18.4.6.2) \quad H_k^2(K, L)^s \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_K(H_2(P'_\bullet), L).$$

18.5. Cas des anneaux topologiques.

(18.5.1) Soient A, B deux anneaux *topologiques* dont la topologie est *linéaire*, $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme continu, L un B -bimodule topologique, et supposons qu'il existe un idéal bilatère *ouvert* \mathfrak{R}_0 de B tel que $\mathfrak{R}_0 \cdot L = L \cdot \mathfrak{R}_0 = 0$, de sorte que L peut être

considéré comme un (B/\mathfrak{R}) -bimodule pour tout idéal ouvert $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}_0$. Soient alors $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}_0$ un idéal bilatère ouvert de B , \mathfrak{J} un idéal bilatère ouvert de A tel que $\rho(\mathfrak{J}) \subset \mathfrak{R}$, de sorte que B/\mathfrak{R} peut être considéré comme un (A/\mathfrak{J}) -anneau discret. La remarque précédente prouve que le groupe $\text{Exan}_{A/\mathfrak{J}}(B/\mathfrak{R}, L)$ est défini; en outre, si $\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R}$, $\mathfrak{J}' \subset \mathfrak{J}$ sont deux idéaux bilatères ouverts de A et B respectivement tels que $\rho(\mathfrak{J}') \subset \mathfrak{R}'$, on a par (18.3.5.1) un homomorphisme canonique

$$(18.5.1.1) \quad \text{Exan}_{A/\mathfrak{J}}(B/\mathfrak{R}, L) \rightarrow \text{Exan}_{A/\mathfrak{J}'}(B/\mathfrak{R}', L).$$

L'ensemble des couples d'idéaux ouverts $(\mathfrak{J}, \mathfrak{R})$ tels que $\rho(\mathfrak{J}) \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}_0$ est évidemment ordonné filtrant à droite pour la relation « $\mathfrak{J} \supset \mathfrak{J}'$ et $\mathfrak{R} \supset \mathfrak{R}'$ » et les applications (18.5.1.1) définissent un *système inductif* de groupes additifs ayant cet ensemble pour ensemble d'indices. On pose, par abus de notation (car il ne s'agit plus d'un groupe en correspondance biunivoque naturelle avec un ensemble d'extensions)

$$(18.5.1.2) \quad \text{Exantop}_A(B, L) = \varinjlim \text{Exan}_{A/\mathfrak{J}}(B/\mathfrak{R}, L).$$

Dire que le second membre de (18.5.1.2) est *nul* signifie donc que, pour tout couple d'idéaux ouverts $\mathfrak{J} \subset A$, $\mathfrak{R} \subset B$ tels que $\rho(\mathfrak{J}) \subset \mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}_0$ et toute (A/\mathfrak{J}) -extension E de B/\mathfrak{R} par L , il existe deux idéaux ouverts $\mathfrak{J}' \subset \mathfrak{J}$, $\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R}$ tels que $\rho(\mathfrak{J}') \subset \mathfrak{R}'$ et que l'image réciproque par l'homomorphisme $B/\mathfrak{R}' \rightarrow B/\mathfrak{R}$ de E soit *triviale*.

Nous laissons au lecteur la définition analogue des limites inductives $\text{Exaltop}_A(B, L)$, $\text{Exalcotop}_A(B, L)$ à partir de $\text{Exal}_{A/\mathfrak{J}}(B/\mathfrak{R}, L)$ et de $\text{Exalcom}_{A/\mathfrak{J}}(B/\mathfrak{R}, L)$ pour le cas où A est commutatif et B une A -algèbre (resp. une A -algèbre commutative) topologique.

(18.5.2) Si l'on a un diagramme commutatif d'homomorphismes continus d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} B' & \rightarrow & B \\ \uparrow & & \uparrow \\ A' & \rightarrow & A \end{array}$$

on en déduit canoniquement deux homomorphismes de groupes additifs

$$\text{Exantop}_A(B, L) \rightarrow \text{Exantop}_{A'}(B, L) \rightarrow \text{Exantop}_{A'}(B', L)$$

par passage à la limite inductive à partir de (18.3.5.1).

En vertu de l'exactitude du foncteur \varinjlim dans la catégorie des groupes commutatifs, le noyau de l'homomorphisme

$$\text{Exantop}_A(B, L) \rightarrow \text{Exantop}_{A'}(B, L)$$

est la limite inductive des noyaux des homomorphismes

$$\text{Exan}_{A/\mathfrak{J}}(B/\mathfrak{R}, L) \rightarrow \text{Exan}_{A'/\mathfrak{J}'}(B/\mathfrak{R}, L)$$

où on a pris pour \mathfrak{J}' l'image réciproque de \mathfrak{J} ; on note ce noyau $\text{Exantop}_{A/A'}(B, L)$. On définit de même $\text{Exaltop}_{A/A'}(B, L)$ et $\text{Exalcotop}_{A/A'}(B, L)$. Enfin, si on a un homomorphisme

continu de B -bimodules $L \rightarrow L'$, on en déduit canoniquement un homomorphisme de groupes additifs

$$\text{Exantop}_A(B, L) \rightarrow \text{Exantop}_A(B, L')$$

par passage à la limite inductive à partir de (18.3.6.1).

(18.5.3) Étant donnés un anneau topologique C et deux C -bimodules topologiques M, N , on note $\text{Hom. cont}_C(M, N)$ le groupe additif des C -homomorphismes continus de M dans N .

Lemme (18.5.3.1). — Soient C un anneau topologique, E, L deux C -bimodules topologiques; on suppose que les topologies sont linéaires, que L est discret et annulé par un idéal bilatère ouvert de C . Alors on a un isomorphisme canonique

$$(18.5.3.2) \quad \lim_{\longrightarrow} \text{Hom}_{C/\mathfrak{R}}(E/V, L) \xrightarrow{\sim} \text{Hom. cont}_C(E, L)$$

où dans le premier membre la limite inductive est prise suivant l'ensemble ordonné filtrant des couples (\mathfrak{R}, V) tels que \mathfrak{R} soit un idéal bilatère ouvert de C , V un sous- C -bimodule ouvert de E , tels que $\mathfrak{R}.L = L.\mathfrak{R} = 0$, $\mathfrak{R}.E \subset V$, $E.\mathfrak{R} \subset V$.

Comme C/\mathfrak{R} et E/V sont discrets, on a des homomorphismes canoniques $w_{K,V} : \text{Hom}_{C/\mathfrak{R}}(E/V, L) \rightarrow \text{Hom. cont}_C(E, L)$ formant un système inductif, d'où un homomorphisme (18.5.3.2) par passage à la limite inductive. Comme l'homomorphisme $E/V' \rightarrow E/V$ est surjectif pour $V' \subset V$, il résulte aussitôt de la définition que l'homomorphisme $\text{Hom}_{C/\mathfrak{R}}(E/V, L) \rightarrow \text{Hom}_{C/\mathfrak{R}}(E/V', L)$ (avec $\mathfrak{R}.L = L.\mathfrak{R} = 0$, $\mathfrak{R}.E \subset V'$, $E.\mathfrak{R} \subset V'$) est injectif, et il en est évidemment de même de l'homomorphisme

$$\text{Hom}_{C/\mathfrak{R}}(E/V, L) \rightarrow \text{Hom}_{C/\mathfrak{R}'}(E/V, L)$$

pour $\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R}$; on en conclut que l'homomorphisme (18.5.3.2) est injectif. D'autre part, si u est un C -homomorphisme continu de E dans L , son noyau est un sous-bimodule ouvert V_0 de E , et si \mathfrak{R}_0 est un idéal bilatère ouvert de C tel que $\mathfrak{R}_0.L = L.\mathfrak{R}_0 = 0$ et $\mathfrak{R}_0.E \subset V_0$, $E.\mathfrak{R}_0 \subset V_0$, il est clair que u est l'image canonique d'un (C/\mathfrak{R}_0) -homomorphisme de E/V_0 dans L , donc (18.5.3.2) est surjectif.

Cela étant, la proposition (18.3.8) se généralise comme suit aux anneaux topologiques :

Proposition (18.5.4). — Soient B un anneau topologique linéairement topologisé, \mathfrak{J} un idéal bilatère de B , $C = B/\mathfrak{J}$ l'anneau topologique quotient; $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ (où \mathfrak{J} est muni de la topologie induite par celle de B et $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ de la topologie quotient de celle de \mathfrak{J}) est alors canoniquement muni d'une structure de C -bimodule topologique. Pour tout C -bimodule discret L annulé par un idéal ouvert de C , il existe alors un isomorphisme canonique

$$(18.5.4.1) \quad \text{Hom. cont}_C(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2, L) \xrightarrow{\sim} \text{Exantop}_B(C, L).$$

En effet, pour tout idéal ouvert \mathfrak{R} de B tel que $(\mathfrak{J} + \mathfrak{R})/\mathfrak{J}$ annule L , on a, d'après (18.3.9), un isomorphisme canonique

$$\text{Hom}_{B/(\mathfrak{J} + \mathfrak{R})}((\mathfrak{J} + \mathfrak{R})/(\mathfrak{J}^2 + \mathfrak{R}), L) \xrightarrow{\sim} \text{Exan}_{B/\mathfrak{R}}(B/(\mathfrak{J} + \mathfrak{R}), L)$$

et il suffit de passer à la limite inductive, en tenant compte de (18.5.3.1).

§ 19. ALGÈBRES FORMELLEMENT LISSES ET ANNEAUX DE COHEN

19.0. Introduction.

(19.0.1) Au chapitre IV, nous introduirons et étudierons entre autres une classe importante de morphismes de préschémas, les morphismes *lisses*⁽¹⁾. Une de leurs propriétés fondamentales (et qui, jointe à une condition de finitude, les caractérise) est une propriété de *relèvement des morphismes* : si $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme lisse, $g: Y' \rightarrow Y$ un morphisme, alors pour tout morphisme $h: Y'' \rightarrow Y'$ faisant de Y'' un préschéma « peu différent » de Y' , *tout Y-morphisme* $Y'' \rightarrow X$ se factorise en $Y'' \xrightarrow{h} Y' \rightarrow X$. De façon précise, bornons-nous au cas où $Y = \text{Spec}(A)$, $X = \text{Spec}(B)$ sont *affines*; B est alors appelée une A -algèbre *formellement lisse* si, pour toute A -algèbre C et tout idéal *nilpotent* \mathfrak{J} de C , tout A -homomorphisme $B \rightarrow C/\mathfrak{J}$ se relève en $B \rightarrow C \rightarrow C/\mathfrak{J}$. En d'autres termes, l'application

$$\text{Hom}_A(B, C) \rightarrow \text{Hom}_A(B, C/\mathfrak{J})$$

est *surjective*. Dans beaucoup d'applications, X apparaîtra comme objet représentant un *foncteur contravariant représentable* $Y' \rightsquigarrow F(Y')$ de la catégorie des Y -préschémas dans celle des ensembles, de sorte (0_{III}, 8.1.8) que l'on aura $F(Y') = \text{Hom}_Y(Y', X)$. Dans le cas affine, si l'on pose $F^0(C) = F(\text{Spec}(C))$, la vérification du fait que, sous les conditions ci-dessus, $F^0(C) \rightarrow F^0(C/\mathfrak{J})$ est *surjectif* (qui peut se faire même *sans savoir* que F est représentable) établira que f est lisse, pourvu que la condition additionnelle de finitude soit remplie.

(19.0.2) Pour les *algèbres topologiques* sur un anneau topologique A , il y a une notion analogue d'*algèbre formellement lisse* que nous ne préciserons pas ici (cf. 19.3.1). L'étude de ces notions est faite d'abord d'un point de vue élémentaire au § 19, puis, à l'aide des propriétés des différentielles qui seront développées aux §§ 20 et 21, des théorèmes plus délicats seront prouvés au § 22. Résumons ici les principaux résultats sur les algèbres formellement lisses :

I. — Soient A, B deux anneaux locaux noethériens, $\varphi: A \rightarrow B$ un homomorphisme local, k le corps résiduel de A , et soit $B_0 = B \otimes_A k$; on munit A, B et B_0 de leurs topologies préadiques et k de la topologie discrète. Alors, pour que B soit une A -algèbre formellement lisse, il faut et il suffit que B soit un A -module *plat* et que B_0 soit une k -algèbre *formellement lisse* (19.7.1). Ce théorème ramène donc la lissité formelle, pour les anneaux locaux noethériens, à la même question pour les anneaux locaux noethériens qui sont des algèbres sur un *corps*.

II. — Soient k un corps, A un anneau local noethérien qui est une k -algèbre. Pour que A soit formellement lisse, il faut et il suffit que A soit *géométriquement régulier* sur k , c'est-à-dire que pour toute extension *finie* k' de k , l'anneau semi-local $A \otimes_A k'$ soit

(1) Aussi appelés morphismes *simples* dans certains travaux récents (en s'inspirant de la terminologie classique de « point simple »); cette terminologie prête cependant à confusion, notamment en théorie des groupes algébriques.

régulier (22.5.8); le complété \hat{A} de A est alors un anneau isomorphe à un anneau de séries formelles $K[[T_1, \dots, T_n]]$ (19.6.5). En outre, la structure de k -algèbre de A , lorsque A est supposé être complet et formellement lisse sur k , est entièrement déterminée par le corps résiduel K de A et la dimension de A ; celle-ci peut d'ailleurs être arbitraire à condition de satisfaire à l'inégalité $\dim(A) \geq \mathrm{rg}_k(Y_{K/k})$, où $Y_{K/k}$ est le « module d'imperfection » de K (22.2.6).

En particulier, pour qu'une extension K de k soit formellement lisse, il faut et il suffit que K soit une extension séparable de k (19.6.1).

III. — Soient A un anneau local noethérien, \mathfrak{J} un idéal de A distinct de A , $A_0 = A/\mathfrak{J}$, B_0 un anneau local noethérien complet, $A_0 \rightarrow B_0$ un homomorphisme local faisant de B_0 une A_0 -algèbre formellement lisse. Alors il existe un anneau local noethérien complet B , un homomorphisme local $A \rightarrow B$ faisant de B un A -module plat, et un A_0 -isomorphisme $B \otimes_A A_0 \xrightarrow{\sim} B_0$ (de sorte que, par I), B est une A -algèbre formellement lisse; en outre B est déterminé par ces propriétés à isomorphisme près (19.7.2). Ce théorème contient en particulier les théorèmes de Cohen sur la structure des anneaux locaux noethériens complets (19.8), qui joueront un rôle important dans les §§ 6 et 7 du chapitre IV.

IV. — L'intérêt de l'étude des anneaux locaux noethériens formellement lisses sur un autre provient de la caractérisation « ponctuelle » suivante des morphismes lisses : si X et Y sont des préschémas localement noethériens, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, alors, pour que f soit lisse, il faut et il suffit que pour tout $x \in X$, l'anneau \mathcal{O}_x soit formellement lisse sur $\mathcal{O}_{f(x)}$. En particulier, si $Y = \mathrm{Spec}(k)$, où k est un corps parfait, dire que f est lisse équivaut à dire que X est un préschéma régulier.

V. — Enfin, nous verrons aux §§ 20, 21 et 22 que la notion d'algèbre formellement lisse s'introduit de façon naturelle dans la théorie des différentielles de Kähler, les deux théories s'éclairant mutuellement.

(19.0.3) Dans tout ce paragraphe et les suivants, les anneaux et modules topologiques seront supposés linéairement topologisés (0₁, 7.1.1); les anneaux topologiques considérés seront supposés commutatifs, sauf mention expresse du contraire. Rappelons que si A et B sont deux anneaux topologiques, $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux définissant sur B une structure de A -algèbre, on dit que B est une A -algèbre topologique si φ est continu pour les topologies envisagées.

Pour abréger, dans un anneau topologique A (resp. un A -module topologique M), nous dirons « système fondamental d'idéaux (resp. sous-modules) ouverts » au lieu de « système fondamental de voisinages de 0 formé d'idéaux (resp. sous-modules) ».

Étant donnés un anneau topologique A et un A -module M , les ensembles $\mathfrak{J}M$, où \mathfrak{J} parcourt un système fondamental d'idéaux ouverts, forment un système fondamental de sous-modules ouverts d'une topologie sur M faisant de M un A -module topologique, et que l'on dit déduite de la topologie de A .

Soit M un A -module topologique dont la topologie est moins fine que la topologie déduite de celle de A ; alors, si N est un sous-module ouvert de M , le A -module discret M/N est annulé par un idéal ouvert de A , car par hypothèse il existe un tel idéal \mathfrak{R} tel que $\mathfrak{R} \cdot M \subset N$.

Si M et N sont deux A -modules topologiques dont les topologies sont toutes deux déduites de celle de A , alors tout A -homomorphisme $u : M \rightarrow N$ est *continu*, car pour tout voisinage V de 0 dans N , il existe par hypothèse un idéal ouvert \mathfrak{J} de A tel que $\mathfrak{J}N \subset V$, et l'on a donc $u(\mathfrak{J}M) \subset \mathfrak{J}N \subset V$.

Lorsque B est une A -algèbre topologique, la topologie sur B déduite de celle de A est *plus fine* que la topologie donnée, car pour tout idéal ouvert \mathfrak{K} de B , il y a par hypothèse un idéal ouvert \mathfrak{J} de A tel que $\mathfrak{J}B \subset \mathfrak{K}$.

19.1. Épimorphismes et monomorphismes formels.

Proposition (19.1.1). — Soient A un anneau topologique, M, N deux A -modules topologiques, (W_λ) un système fondamental de sous-modules ouverts dans N , $u : M \rightarrow N$ un A -homomorphisme continu, \hat{M}, \hat{N} les séparés complétés de M et N , $\hat{u} : \hat{M} \rightarrow \hat{N}$ le prolongement continu de u aux séparés complétés.

(i) Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $u(M)$ est dense dans N .
- a') $\hat{u}(\hat{M})$ est dense dans \hat{N} .

a'') Pour tout λ , l'homomorphisme composé $M \xrightarrow{u} N \rightarrow N/W_\lambda$ est surjectif.

(ii) Les conditions suivantes sont équivalentes :

b) L'image réciproque par u de la topologie de N est égale à la topologie de M .

b') \hat{u} est un isomorphisme du \hat{A} -module topologique \hat{M} sur le sous- \hat{A} -module topologique $\hat{u}(\hat{M})$ de \hat{N} (qui est nécessairement fermé).

b'') Les $u^{-1}(W_\lambda)$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans M .

Cela résulte immédiatement de la définition des séparés complétés, et du fait que N/W_λ est discret.

(19.1.2) Lorsque les conditions équivalentes de (i) (resp. (ii)) dans (19.1.1) sont remplies, on dit que u est un *épimorphisme formel* (resp. un *monomorphisme formel*). On dit que u est un *bimorphisme formel* s'il est à la fois un monomorphisme formel et un épimorphisme formel; il revient au même, en vertu de (19.1.1), de dire que \hat{u} est un *isomorphisme* du \hat{A} -module topologique \hat{M} sur le \hat{A} -module topologique \hat{N} .

Proposition (19.1.3). — Soient A un anneau topologique, M, N deux A -modules topologiques, $u : M \rightarrow N$ un A -homomorphisme continu. On suppose qu'il existe deux systèmes fondamentaux de sous-modules ouverts, (V_λ) , (W_λ) dans M et N respectivement, ayant même ensemble d'indices et tels que $u(V_\lambda) \subset W_\lambda$ pour tout λ ; soit $u_\lambda : M/V_\lambda \rightarrow N/W_\lambda$ l'homomorphisme déduit de u par passage aux quotients. Alors :

(i) Pour que u soit un épimorphisme formel, il faut et il suffit que, pour tout λ , u_λ soit surjectif.

(ii) Pour que u soit un monomorphisme formel, il faut et il suffit que, pour tout λ , il existe un μ tel que $V_\mu \subset V_\lambda$ et que $\text{Ker}(u_\mu)$ soit contenu dans le noyau V_λ/V_μ de l'application canonique $M/V_\mu \rightarrow M/V_\lambda$.

(iii) Pour que u soit un bimorphisme formel, il faut et il suffit que, pour tout λ , u_λ soit surjectif et qu'il existe un μ tel que $V_\mu \subset V_\lambda$ et que l'homomorphisme canonique $M/V_\mu \rightarrow M/V_\lambda$

se factorise en $M/V_\mu \xrightarrow{u_\mu} N/W_\mu \rightarrow M/V_\lambda$ (où l'homomorphisme $N/W_\mu \rightarrow M/V_\lambda$ est nécessairement unique).

L'assertion (i) est immédiate; d'autre part, $\text{Ker}(u_\mu) = u^{-1}(W_\mu)/V_\mu$, et le noyau de l'application canonique $M/V_\mu \rightarrow M/V_\lambda$ est V_λ/V_μ ; la condition de (ii) revient donc à dire que $u^{-1}(W_\mu) \subset V_\lambda$, et l'assertion (ii) en découle aussitôt; enfin, lorsque u_μ est surjectif, il revient au même de dire que $\text{Ker}(u_\mu)$ est contenu dans V_λ/V_μ , ou de dire que $M/V_\mu \rightarrow M/V_\lambda$ se factorise en $v \circ u_\mu$, où v est un homomorphisme $N/W_\mu \rightarrow M/V_\lambda$, puisque N/W_μ s'identifie alors à $(M/V_\mu)/\text{Ker}(u_\mu)$.

Corollaire (19.1.4). — Soient A un anneau topologique, M, N deux A -modules topologiques dont les topologies sont déduites de celle de A , $u : M \rightarrow N$ un épimorphisme formel. Soit (\mathfrak{J}_λ) un système fondamental d'idéaux ouverts dans A . Pour que u soit un bimorphisme formel, il faut et il suffit que pour tout λ , l'homomorphisme $u_\lambda : M/\mathfrak{J}_\lambda M \rightarrow N/\mathfrak{J}_\lambda N$ déduit de u par passage aux quotients soit bijectif.

On a en effet $u(\mathfrak{J}_\lambda M) \subset \mathfrak{J}_\lambda N$ et on peut appliquer le critère (19.1.3, (iii)); mais si l'on a une factorisation $M/\mathfrak{J}_\mu M \xrightarrow{u_\mu} N/\mathfrak{J}_\mu N \xrightarrow{v} M/\mathfrak{J}_\lambda M$, l'image de $\mathfrak{J}_\lambda M/\mathfrak{J}_\mu M$ par u_μ est $\mathfrak{J}_\lambda N/\mathfrak{J}_\mu N$, donc l'image de $\mathfrak{J}_\lambda N/\mathfrak{J}_\mu N$ par v est 0 et v se factorise en

$$N/\mathfrak{J}_\mu N \rightarrow N/\mathfrak{J}_\lambda N \xrightarrow{v'} M/\mathfrak{J}_\lambda M;$$

mais alors l'automorphisme identique de $M/\mathfrak{J}_\lambda M$ se factorise en

$$M/\mathfrak{J}_\lambda M \xrightarrow{u_\lambda} N/\mathfrak{J}_\lambda N \xrightarrow{v'} M/\mathfrak{J}_\lambda M,$$

ce qui montre que u_λ est injectif, et comme on sait déjà qu'il est surjectif, cela prouve le corollaire.

Proposition (19.1.5). — Soient A un anneau topologique, M, N deux A -modules topologiques, $u : M \rightarrow N$ un A -homomorphisme continu. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout A -module topologique discret E et tout A -homomorphisme continu $v : M \rightarrow E$, il existe un A -homomorphisme continu $w : N \rightarrow E$ tel que $v = w \circ u$.

b) Pour tout sous-module ouvert V' de M , il existe un sous-module ouvert W'' de N , un sous-module ouvert $V'' \subset V' \cap u^{-1}(W'')$ et un homomorphisme $h : N/W'' \rightarrow M/V'$ tels que l'homomorphisme canonique $M/V'' \rightarrow M/V'$ se factorise en

$$M/V'' \xrightarrow{u''} N/W'' \xrightarrow{h} M/V'$$

où u'' est déduit de u par passage aux quotients.

Pour voir que a) entraîne b), il suffit d'appliquer a) à $E = M/V'$ et à l'homomorphisme canonique $v : M \rightarrow M/V'$; alors $W'' = w^{-1}(0)$ est un sous-module ouvert de N et $V'' = u^{-1}(W'')$ un sous-module ouvert de M contenu dans V' ; ces sous-modules et l'homomorphisme $h : N/W'' \rightarrow M/V'$ déduit de w par passage au quotient répondent à la question. Inversement, pour montrer que b) entraîne a), on peut se limiter au cas où v est surjectif, en remplaçant E par $v(M)$; alors $V' = \text{Ker}(v)$ est un sous-module ouvert de M , donc E est isomorphe au A -module discret M/V' , et en appliquant b), on obtient

le A-homomorphisme continu w cherché en prenant le composé $N \rightarrow N/W'' \xrightarrow{h} M/V'$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{u} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M/V'' & \xrightarrow{w'} & N/W'' \end{array}$$

étant commutatif.

Lorsque les conditions équivalentes de (19.1.5) sont remplies, nous dirons que u est *formellement inversible à gauche*; comme la condition b) de (19.1.5) implique que $u^{-1}(W'') \subset V'$, u est alors un *monomorphisme formel*. La terminologie est en outre justifiée par les corollaires suivants :

Corollaire (19.1.6). — *S'il existe un \hat{A} -homomorphisme continu $s : \hat{N} \rightarrow \hat{M}$ tel que $s \circ \hat{u} = 1_{\hat{M}}$, alors u est formellement inversible à gauche.*

On notera que \hat{u} est alors un isomorphisme topologique de \hat{M} sur un *facteur direct topologique* de \hat{N} . Pour prouver (19.1.6), il suffit de noter qu'avec les notations de (19.1.5, a)), $v : M \rightarrow E$ se prolonge en un \hat{A} -homomorphisme continu $\hat{v} : \hat{M} \rightarrow E$ puisque E est discret; soient $j : M \rightarrow \hat{M}$ et $j' : N \rightarrow \hat{N}$ les homomorphismes canoniques; alors, en posant $w = \hat{v} \circ s \circ j'$, on a $w \circ u = \hat{v} \circ s \circ \hat{u} \circ j = \hat{v} \circ j = v$.

Corollaire (19.1.7). — *Supposons que les topologies de M et de N soient déduites de celle de A , et soit (\mathfrak{J}_λ) un système fondamental d'idéaux ouverts dans A . Pour que u soit formellement inversible à gauche il faut et il suffit que, pour tout λ , l'homomorphisme $u_\lambda : M/\mathfrak{J}_\lambda M \rightarrow N/\mathfrak{J}_\lambda N$, déduit de u par passage aux quotients, soit inversible à gauche (autrement dit, soit un isomorphisme de $M/\mathfrak{J}_\lambda M$ sur un facteur direct de $N/\mathfrak{J}_\lambda N$).*

En effet, la condition est suffisante, car, pour $V' = \mathfrak{J}_\lambda M$ dans la condition b) de (19.1.5), on répond à la question en prenant $W'' = \mathfrak{J}_\lambda N$, $V'' = V'$ et h tel que $h \circ u_\lambda$ soit l'identité dans $M/\mathfrak{J}_\lambda M$. Inversement, si u est formellement inversible à gauche, alors, pour tout λ , il y a, en vertu de (19.1.5, b)), un μ tel que $\mathfrak{J}_\mu \subset \mathfrak{J}_\lambda$ et un homomorphisme $h : N/\mathfrak{J}_\mu N \rightarrow M/\mathfrak{J}_\lambda M$ tels que l'homomorphisme canonique $M/\mathfrak{J}_\mu M \rightarrow M/\mathfrak{J}_\lambda M$ se factorise en $M/\mathfrak{J}_\mu M \xrightarrow{u_\mu} N/\mathfrak{J}_\mu N \xrightarrow{h} M/\mathfrak{J}_\lambda M$; mais comme $h(\mathfrak{J}_\lambda(N/\mathfrak{J}_\mu N)) = \mathfrak{J}_\lambda h(N/\mathfrak{J}_\mu N) \subset \mathfrak{J}_\lambda(M/\mathfrak{J}_\lambda M) = 0$, h se factorise canoniquement en $N/\mathfrak{J}_\mu N \rightarrow N/\mathfrak{J}_\lambda N \xrightarrow{s} M/\mathfrak{J}_\lambda M$, et il est immédiat que s est inverse à gauche de u_λ .

Proposition (19.1.8). — *Soit A un anneau topologique admettant un système fondamental dénombrable décroissant (\mathfrak{J}_n) d'idéaux ouverts. Soient M, N deux A -modules topologiques dont les topologies sont déduites de celle de A , $u : M \rightarrow N$ un A -homomorphisme. Posons $M_n = M/\mathfrak{J}_n M$, $N_n = N/\mathfrak{J}_n N$ et soit $u_n : M_n \rightarrow N_n$ le (A/\mathfrak{J}_n) -homomorphisme déduit de u par passage aux quotients. Supposons que, pour tout n , $P_n = \text{Coker}(u_n)$ soit un (A/\mathfrak{J}_n) -module projectif et que M soit séparé et complet. Alors, pour que u soit formellement inversible à gauche, il faut et il suffit que u soit inversible à gauche (et u est alors un isomorphisme topologique de M sur un facteur direct topologique de N).*

En vertu de (19.1.7), on a des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_n & \xrightarrow{u_n} & N_n & \xrightarrow{p_n} & P_n & \longrightarrow & 0 \\ & & f \uparrow & & g \uparrow & & h \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M_{n+1} & \xrightarrow{u_{n+1}} & N_{n+1} & \xrightarrow{p_{n+1}} & P_{n+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les lignes sont des suites exactes *scindées*, autrement dit, il existe pour chaque n un homomorphisme $s_n : P_n \rightarrow N_n$ tel que $p_n \circ s_n = i_{P_n}$. Nous allons montrer que l'on peut, par récurrence sur n , définir un homomorphisme $s'_n : P_n \rightarrow N_n$ tel que $p_n \circ s'_n = i_{P_n}$ et que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} P_n & \xrightarrow{s'_n} & N_n \\ h \uparrow & & \uparrow g \\ P_{n+1} & \xrightarrow{s'_{n+1}} & N_{n+1} \end{array}$$

soient commutatifs. En effet, $g \circ s_{n+1} - s'_n \circ h$ est un homomorphisme de P_{n+1} dans $u_n(M_n) = u_{n+1}(M_{n+1})/\mathfrak{J}_n u_{n+1}(M_{n+1})$; comme P_{n+1} est un (A/\mathfrak{J}_{n+1}) -module *projectif*, cet homomorphisme se factorise en

$$P_{n+1} \xrightarrow{t_{n+1}} u_{n+1}(M_{n+1}) \rightarrow u_{n+1}(M_{n+1})/\mathfrak{J}_n u_{n+1}(M_{n+1})$$

d'où l'on conclut aussitôt que $s'_{n+1} - s_{n+1} - t_{n+1}$ répond à la question. Cela étant, de la décomposition de N_n en somme directe de $u_n(M_n)$ et de $s'_n(P_n)$, on déduit aussitôt un homomorphisme $w_n : N_n \rightarrow M_n$ inverse à gauche de u_n et tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} N_n & \xrightarrow{w_n} & M_n \\ g \uparrow & & \uparrow f \\ N_{n+1} & \xrightarrow{w_{n+1}} & M_{n+1} \end{array}$$

soient commutatifs. Le système projectif (w_n) admet alors une limite projective $\hat{w} : \hat{N} \rightarrow \hat{M} = M$, d'où par composition avec l'homomorphisme canonique $N \rightarrow \hat{N}$, un homomorphisme $w : N \rightarrow M$ tel que, pour tout n , l'endomorphisme $(w \circ u)_n$ de $M_n = M/\mathfrak{J}_n M$ déduit de $w \circ u$ par passage aux quotients soit l'identité; cela entraîne que $w \circ u = i_M$ puisque M est séparé et complet.

Proposition (19.1.9). — Soient A un anneau topologique préadmissible (0₁, 7.1.2), \mathfrak{I} un idéal de définition de A , (\mathfrak{J}_λ) un système fondamental d'idéaux ouverts de A . Soient M, N deux A -modules topologiques dont les topologies sont déduites de celles de A , et tels que pour tout λ , $N/\mathfrak{J}_\lambda N$ soit un (A/\mathfrak{J}_λ) -module projectif (cf. (19.2.3)). Soit $u : M \rightarrow N$ un A -homomorphisme. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) u est formellement inversible à gauche.
b) L'homomorphisme $u_0 : M/\mathfrak{J}M \rightarrow N/\mathfrak{J}N$ déduit de u par passage aux quotients est inversible à gauche.

On a vu (19.1.7) que la condition a) équivaut à dire que u_λ est inversible à gauche pour tout λ ; comme \mathfrak{J} est un idéal ouvert, donc contient un \mathfrak{J}_λ , on en déduit aussitôt que u_0 est inversible à gauche. Pour montrer inversement que b) entraîne a), notons que pour tout λ , $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}_\lambda$ est par hypothèse un idéal nilpotent de A/\mathfrak{J}_λ . Notre assertion résultera de la proposition suivante :

Proposition (19.1.10). — Soient A un anneau, M, N deux A -modules, N étant projectif, $u : M \rightarrow N$ un A -homomorphisme. Soit \mathfrak{J} un idéal de A ; on suppose vérifiée l'une des conditions suivantes :

- (i) \mathfrak{J} est nilpotent.
- (ii) \mathfrak{J} est contenu dans le radical de A et M est de type fini.

Alors, pour que u soit inversible à gauche, il faut et il suffit que l'homomorphisme $u_0 : M/\mathfrak{J}M \rightarrow N/\mathfrak{J}N$ de (A/\mathfrak{J}) -modules, déduit de u par passage aux quotients, soit inversible à gauche.

La condition étant évidemment nécessaire, prouvons qu'elle est suffisante. Soit v_0 un inverse à gauche de u_0 ; l'homomorphisme composé $N \xrightarrow{v_0} N/\mathfrak{J}N \xrightarrow{u_0} M/\mathfrak{J}M$ se factorise en $N \xrightarrow{v} M \xrightarrow{w} M/\mathfrak{J}M$ puisque N est projectif; alors $w = v \circ u$ est un endomorphisme de M tel que l'endomorphisme w_0 de $M/\mathfrak{J}M$ déduit par passage aux quotients soit l'identité, et il suffit de prouver que w est lui-même bijectif (car alors $w^{-1} \circ v$ sera un inverse à gauche de u). Distinguons maintenant les deux cas.

- (i) Pour tout n on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1}) \otimes_{A/\mathfrak{J}} (M/\mathfrak{J}M) & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{J}^n M/\mathfrak{J}^{n+1} M \\ \downarrow 1 \otimes \text{gr}^0(w) & & \downarrow \text{gr}^n(w) \\ (\mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1}) \otimes_{A/\mathfrak{J}} (M/\mathfrak{J}M) & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{J}^n M/\mathfrak{J}^{n+1} M \end{array}$$

où les flèches horizontales sont *surjectives*, et comme $\text{gr}^0(w) = w_0$ est l'*identité*, il en est de même de $\text{gr}^n(w)$ qui, *a fortiori*, est bijectif. La filtration \mathfrak{J} -prédictique sur M étant finie puisque \mathfrak{J} est nilpotent, on en conclut que w est bijectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 8, cor. 3 du th. 1).

(ii) Il suffit de montrer que pour tout idéal maximal \mathfrak{m} de A , l'endomorphisme w_m de M_m est bijectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 3, th. 1) et comme $\mathfrak{J}A_m \subset mA_m$, et $A_m/\mathfrak{J}A_m = (A/\mathfrak{J})_m$, on est ramené à prouver la proposition lorsque A est un anneau *local*. En outre, on peut supposer que \mathfrak{J} est l'idéal maximal \mathfrak{J}_0 de A , car si u_0 est inversible

à gauche, il en est de même de $u_{00} : M/\mathfrak{J}_0M \rightarrow N/\mathfrak{J}_0M$ obtenu par tensorisation de u_0 avec $\mathfrak{I}_{A/\mathfrak{J}_0}$, puisque l'on a $M/\mathfrak{J}_0M = (M/\mathfrak{J}M) \otimes_{A/\mathfrak{J}} (A/\mathfrak{J}_0)$. Supposons donc \mathfrak{J} maximal, de sorte que A/\mathfrak{J} est un corps. Il suffit évidemment de montrer que M est un A -module libre sous les conditions de l'énoncé : en effet, $\det(w_0)$ est alors l'image canonique de $\det(w)$ dans A/\mathfrak{J} , donc $\det(w)$ n'appartient pas à l'idéal \mathfrak{J} et est par suite inversible. Or le (A/\mathfrak{J}) -espace vectoriel $M/\mathfrak{J}M$ étant libre de type fini, il y a un A -module de type fini L et un A -homomorphisme $f : L \rightarrow M$ tel que l'homomorphisme $f_0 : L/\mathfrak{J}L \rightarrow M/\mathfrak{J}M$ déduit de f par passage aux quotients soit bijectif. Comme M est de type fini, on en conclut tout d'abord que f est surjectif par le lemme de Nakayama (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, no 2, cor. 1 de la prop. 4); en outre, si $g = u \circ f$, l'homomorphisme $g_0 : L/\mathfrak{J}L \rightarrow N/\mathfrak{J}N$ déduit par passage aux quotients est inversible à gauche, et puisqu'ici L est libre, la remarque du début prouve que g est lui-même inversible à gauche; or cela entraîne évidemment que f est injectif, ce qui achève la démonstration.

Mentionnons en passant les corollaires suivants de (19.1.10) :

Corollaire (19.1.11). — Soient A un anneau local, k son corps résiduel, M un A -module de type fini, N un A -module projectif, $u : M \rightarrow N$ un homomorphisme. Pour que u soit inversible à gauche, il faut et il suffit qu'il existe un système de générateurs $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ de M tel que les images par $u \otimes 1 : M \otimes_A k \rightarrow N \otimes_A k$ des $x_i \otimes 1$ soient linéairement indépendantes dans $N \otimes_A k$; les x_i forment alors une base de M .

La condition est évidemment nécessaire, car si u est inversible à gauche, M est un A -module projectif de type fini, donc libre. Inversement, si la condition est satisfaite, il est clair que les $x_i \otimes 1$ forment une base de $M \otimes_A k$ et que $u \otimes 1$ est inversible à gauche; il suffit donc d'appliquer (19.1.10) à l'idéal maximal \mathfrak{J} de A .

Corollaire (19.1.12). — Soient A un anneau, M un A -module de type fini, N un A -module projectif, $u : M \rightarrow N$ un homomorphisme. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) L'homomorphisme $u_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \rightarrow N_{\mathfrak{p}}$ est inversible à gauche.
- b) L'homomorphisme $u \otimes 1 : M \otimes_A k(\mathfrak{p}) \rightarrow N \otimes_A k(\mathfrak{p})$ est injectif (on rappelle que $k(\mathfrak{p})$ désigne le corps résiduel de A en \mathfrak{p}).
- c) Il existe un système fini d'éléments $x_i \in M$ ($1 \leq i \leq m$) tel que les images des x_i dans $M_{\mathfrak{p}}$ engendrent $M_{\mathfrak{p}}$, et un système de m formes linéaires y_i^* sur N ($1 \leq i \leq m$) tel que $\det(y_i^*, u(x_i)) \notin \mathfrak{p}$.

d) Il existe $f \in A - \mathfrak{p}$ tel que l'homomorphisme $u_f : M_f \rightarrow N_f$ soit inversible à gauche.

En outre, l'ensemble des $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ vérifiant ces conditions est ouvert dans $\text{Spec}(A)$.

La dernière condition est conséquence triviale de d). Comme N est projectif, il est facteur direct d'un A -module libre $A^{(1)}$; en outre, comme M est de type fini, $u(M)$ est contenu dans un sous-module de $A^{(1)}$ de la forme A^n pour n fini; comme chacun des énoncés a), b), c), d) est équivalent à l'énoncé correspondant où l'on remplace N par $N \oplus P$ (u étant toujours supposé appliquer M dans N), on est ramené au cas où N est libre de type fini. Il est trivial que d) entraîne a), et a) et b) sont équivalentes en vertu de (19.1.11); d'ailleurs a) entraîne que $M_{\mathfrak{p}}$ est libre (19.1.11), donc a) entraîne c), en prenant pour les x_i une famille dont les images dans $M_{\mathfrak{p}}$ forment une base de ce

$A_{\mathfrak{p}}$ -module et en notant que (puisque N est libre de type fini) toute forme linéaire sur le $A_{\mathfrak{p}}$ -module $N_{\mathfrak{p}}$ s'écrit $u = v/f$, où $f \in A - \mathfrak{p}$, et où v est une forme linéaire sur le A -module N . Il est clair que $c)$ entraîne $b)$, et il reste donc à voir que $a)$ entraîne $d)$. Or, comme N est de présentation finie, $(\text{Hom}_A(N, M))_{\mathfrak{p}}$ s'identifie canoniquement à $\text{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(N_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}})$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 7, prop. 19). Si $w_{\mathfrak{p}}$ est inverse à gauche de $u_{\mathfrak{p}}$, il existe donc un homomorphisme $w : N \rightarrow M$ et un élément $f \in A - \mathfrak{p}$ tels que $w = w_{\mathfrak{p}} \otimes (1/f) \cdot 1_{A_{\mathfrak{p}}}$. La relation $w_{\mathfrak{p}} \circ u_{\mathfrak{p}} = 1_{M_{\mathfrak{p}}}$ s'écrit donc aussi $(w \circ u) \otimes 1_{A_{\mathfrak{p}}} = f \cdot 1_{M_{\mathfrak{p}}}$. Mais comme M est un A -module de type fini, il existe $g \in A - \mathfrak{p}$ tel que l'endomorphisme $g((w \circ u) - f \cdot 1_M)$ s'annule en tous les générateurs de M , donc soit nul. Si on pose $h = fg$, et $u_h = u \otimes 1_{A_h}$, $w_h = w \otimes 1_{A_h}$, on a donc $w_h(u_h(z)) = (f/1)z$ pour tout $z \in M_h$; mais comme $h/1$ est inversible dans A_h , il en est de même de $f/1 = f'$, et $f'^{-1}w_h$ est par suite inverse à gauche de u_h , ce qui achève la démonstration.

Proposition (19.1.13). — *Supposons vérifiées les hypothèses de (19.1.9) et supposons en outre que (\mathfrak{J}_λ) soit une suite décroissante (\mathfrak{J}_n) et que M soit séparé et complet. Alors les conditions a) et b) de (19.1.9) sont aussi équivalentes à :*

c) *u est inversible à gauche.*

On sait déjà que c) entraîne a) (19.1.6). Inversement, si a) est vérifiée, on sait (avec les notations de (19.1.8)) que M_n est facteur direct du (A/\mathfrak{J}_n) -module projectif N_n , donc P_n est aussi isomorphe à un facteur direct de N_n , et par suite est projectif; il suffit donc d'appliquer (19.1.8).

Notons enfin la proposition suivante :

Proposition (19.1.14). — *Soient A un anneau, M un A -module de type fini, N un A -module projectif, $u : M \rightarrow N$ un A -homomorphisme.*

(i) *Pour que u soit inversible à gauche, il faut et il suffit que, pour tout idéal maximal m de A , $u_m : M_m \rightarrow N_m$ soit inversible à gauche.*

(ii) *Soit A' une A -algèbre qui soit un A -module fidèlement plat. Pour que u soit inversible à gauche, il faut et il suffit que $u \otimes 1 : M \otimes_A A' \rightarrow N \otimes_A A'$ soit inversible à gauche.*

Comme dans (19.1.12), on peut se borner au cas où N est libre de type fini; dire que u est inversible à gauche signifie alors que u est injectif et que le module quotient $P = N/u(M)$ est projectif, car $u(M)$ sera alors facteur direct de N . Notons en outre que puisque M est de type fini, P est de *présentation finie*. Cela étant :

(i) La condition est évidemment nécessaire. Inversement, si elle est satisfaite, on sait que u est injectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 3, th. 1) et comme $P_m = N_m/u_m(M_m)$ est projectif pour tout m , on sait que cela entraîne que P est projectif (*loc. cit.*, § 5, n° 2, th. 1).

(ii) Ici encore, la condition est trivialement nécessaire. Inversement, si elle est remplie, on sait que u est injectif (0_I, 6.4.1) et comme $P \otimes_A A' = \text{Coker}(u \otimes 1)$ est projectif, donc plat, on en déduit que P est un A -module plat (0_I, 6.6.3), donc projectif puisqu'il est de présentation finie (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 2, cor. 2 du th. 1).

Remarque (19.1.15). — La notion « duale » de celle d'homomorphisme formellement inversible à gauche est celle d'homomorphisme *formellement inversible à droite*; un tel A-homomorphisme continu $u : M \rightarrow N$ vérifie, par définition, la condition suivante : pour tout sous-module ouvert W' de N , il existe un sous-module ouvert $V' \subset u^{-1}(W')$ de M , un sous-module ouvert $W'' \subset W'$ de N et un homomorphisme $h : N/W'' \rightarrow M/V'$ tels que l'homomorphisme canonique $N/W'' \rightarrow N/W'$ se factorise en

$$N/W'' \xrightarrow{h} M/V' \xrightarrow{u'} N/W'$$

où u' est déduit de u par passage aux quotients. Cela entraîne que u est un épimorphisme formel; s'il existe un \hat{A} -homomorphisme continu $r : \hat{N} \rightarrow \hat{M}$ tel que $\hat{u} \circ r = i_{\hat{N}}$, on vérifie aussitôt que u est formellement inversible à droite. Si les conditions de (19.1.7) sont remplies, pour que u soit formellement inversible à droite, il faut et il suffit que les u_λ soient inversibles à droite (c'est-à-dire que le noyau de u_λ est facteur direct de $M/\mathfrak{J}_\lambda M$ et que u_λ est un isomorphisme d'un supplémentaire de $\text{Ker}(u_\lambda)$ sur $N/\mathfrak{J}_\lambda N$). Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer et de démontrer les propositions correspondant à (19.1.8) et (19.1.9) (dans l'analogue de (19.1.8), il faut supposer M séparé et complet et que M_n est un (A/\mathfrak{J}_n) -module projectif; dans l'analogue de (19.1.9), il faut supprimer l'hypothèse sur les $N/\mathfrak{J}_\lambda N$, mais supposer par contre que, pour tout λ , $M/\mathfrak{J}_\lambda M$ est un (A/\mathfrak{J}_λ) -module projectif).

19.2. Modules formellement projectifs.

Définition (19.2.1). — Soient A un anneau topologique. On dit qu'un A -module topologique M est *formellement projectif* s'il vérifie la condition suivante : pour tout idéal ouvert \mathfrak{J} de A , tout couple de (A/\mathfrak{J}) -modules (discrets) P, Q , tout A -homomorphisme surjectif $u : P \rightarrow Q$ et tout A -homomorphisme continu $v : M \rightarrow Q$, il existe un A -homomorphisme continu $w : M \rightarrow P$ tel que $v = u \circ w$.

(19.2.2) Pour vérifier la condition de (19.2.1), on peut évidemment se borner (en remplaçant Q par $v(M)$ et P par $u^{-1}(v(M))$ au cas où v est lui-même surjectif; alors Q est isomorphe à M/V , où V est un sous-module ouvert de M tel que $\mathfrak{J}M \subset V$; la condition de (19.2.1) équivaut alors à dire que pour tout (A/\mathfrak{J}) -module discret P et tout A -homomorphisme surjectif $u : P \rightarrow M/V$, il existe un sous-module ouvert $V' \subset V$ dans M et un A -homomorphisme $w : M/V' \rightarrow P$, tels que l'homomorphisme canonique $M/V' \rightarrow M/V$ se factorise en $M/V' \xrightarrow{w} P \xrightarrow{u} M/V$. On notera qu'il suffit de vérifier cette condition lorsque \mathfrak{J} parcourt un système fondamental de voisinages de 0 dans A formé d'idéaux.

(19.2.3) Supposons qu'il existe un système fondamental (\mathfrak{J}_λ) d'idéaux ouverts dans A et un système fondamental (V_λ) de sous-modules ouverts de M , ayant même ensemble d'indices que (\mathfrak{J}_λ) et tel que, pour tout λ , M/V_λ soit un (A/\mathfrak{J}_λ) -module *projectif*. Alors M est formellement projectif : il suffit en effet, avec les notations de (19.2.2), de prendre λ tel que $\mathfrak{J}_\lambda \subset \mathfrak{J}$ et $V_\lambda \subset V$; comme P est aussi un (A/\mathfrak{J}_λ) -module, la factorisation de l'homomorphisme canonique $M/V_\lambda \rightarrow M/V$ en $M/V_\lambda \rightarrow P \rightarrow M/V$ résulte de ce qu'il s'agit d'un (A/\mathfrak{J}_λ) -homomorphisme et de ce que M/V_λ est supposé être un (A/\mathfrak{J}_λ) -module projectif.

Lorsque la condition plus stricte de ce numéro est satisfaite, on dit que M est *strictement formellement projectif*.

Proposition (19.2.4). — Soient A un anneau topologique, M un A -module topologique dont la topologie est déduite de celle de A . Pour que M soit formellement projectif, il faut et il suffit qu'il soit strictement formellement projectif.

On vient de voir que la condition est suffisante. Inversement, supposons M formellement projectif et soit (\mathfrak{J}_λ) un système fondamental d'idéaux ouverts dans A . Pour tout λ , soient P un (A/\mathfrak{J}_λ) -module libre et $u : P \rightarrow M/\mathfrak{J}_\lambda M$ un (A/\mathfrak{J}_λ) -homomorphisme surjectif. Il existe donc un $\mathfrak{J}_\mu \subset \mathfrak{J}_\lambda$ tel que l'homomorphisme canonique $M/\mathfrak{J}_\mu M \rightarrow M/\mathfrak{J}_\lambda M$ se factorise en $M/\mathfrak{J}_\mu M \xrightarrow{w} P \xrightarrow{u} M/\mathfrak{J}_\lambda M$; mais comme $w(\mathfrak{J}_\lambda(M/\mathfrak{J}_\mu M)) \subset \mathfrak{J}_\lambda P = 0$, w se factorise en $M/\mathfrak{J}_\mu M \rightarrow M/\mathfrak{J}_\lambda M \xrightarrow{v} P$, et il est clair que $u \circ v$ est l'identité dans $M/\mathfrak{J}_\lambda M$, ce qui prouve que ce (A/\mathfrak{J}_λ) -module est projectif.

Proposition (19.2.5). — Soient A un anneau topologique, M un A -module topologique.

(i) Pour que M soit formellement projectif (resp. strictement formellement projectif), il faut et il suffit que le \hat{A} -module topologique \hat{M} le soit.

(ii) Soit A' une A -algèbre topologique. Si M est formellement projectif (resp. strictement formellement projectif), alors $M \otimes_A A'$ (muni de la topologie produit tensoriel) est un A' -module topologique formellement projectif (resp. strictement formellement projectif).

(i) Il suffit de remarquer que lorsque \mathfrak{J} (resp. V) parcourt l'ensemble des idéaux ouverts de A (resp. l'ensemble des sous-modules ouverts de M), le séparé complété $\hat{\mathfrak{J}}$ (resp. \hat{V}) parcourt l'ensemble des idéaux ouverts de \hat{A} (resp. l'ensemble des sous-modules ouverts de \hat{M}), et $\hat{A}/\hat{\mathfrak{J}} = A/\mathfrak{J}$ (resp. $\hat{M}/\hat{V} = M/V$) à un isomorphisme canonique près; comme la notion de module formellement projectif (resp. strictement formellement projectif) ne fait intervenir que les A/\mathfrak{J} et les M/V , on en déduit aussitôt (i).

(ii) Supposons d'abord M formellement projectif et posons $M' = M \otimes_A A'$; soient \mathfrak{J}' un idéal ouvert de A' , P' , Q' deux (A'/\mathfrak{J}') -modules discrets, $u' : P' \rightarrow Q'$ un A' -homomorphisme surjectif, $v' : M' \rightarrow Q'$ un A' -homomorphisme continu. Il y a un idéal ouvert \mathfrak{J} de A tel que $\mathfrak{J}A' \subset \mathfrak{J}'$, donc P' et Q' sont aussi des (A/\mathfrak{J}) -modules discrets. Si l'on considère le A -homomorphisme composé $v : M \xrightarrow{j} M' \xrightarrow{v'} Q'$ qui est continu, l'hypothèse entraîne qu'il existe un A -homomorphisme continu $w : M \rightarrow P'$ tel que $v = u' \circ w$; mais comme P' est un A' -module topologique, w se factorise en $M \xrightarrow{j} M' \xrightarrow{w'} P'$, où w' est un A' -homomorphisme continu, et comme $v' \circ j = (u' \circ w') \circ j$, on en conclut que $v' = u' \circ w'$.

Supposons ensuite que M soit strictement formellement projectif; soit (\mathfrak{J}_λ) (resp. (V_λ)) un système fondamental d'idéaux ouverts (resp. de sous-modules ouverts) dans A (resp. M) tel que (M/V_λ) soit un (A/\mathfrak{J}_λ) -module projectif, et soit (\mathfrak{J}'_μ) un système fondamental d'idéaux ouverts dans A' . On a un système fondamental de voisinages de 0 dans M' en prenant les sous-modules $\text{Im}(M \otimes_A \mathfrak{J}'_\mu) + \text{Im}(V_\lambda \otimes_A A') = W_{\lambda\mu}$, où λ et μ sont tels que $\mathfrak{J}_\lambda A' \subset \mathfrak{J}'_\mu$. Comme $(M \otimes_A A')/W_{\lambda\mu} = (M/V_\lambda) \otimes_{A/\mathfrak{J}_\lambda} (A'/\mathfrak{J}'_\mu)$ et que (M/V_λ) est un (A/\mathfrak{J}_λ) -module projectif, $M'/W_{\lambda\mu}$ est un (A'/\mathfrak{J}'_μ) -module projectif.

19.3. Algèbres formellement lisses.

Définition (19.3.1). — Soient A un anneau topologique, B une A -algèbre topologique. On dit que B est une A -algèbre formellement lisse si, pour toute A -algèbre topologique discrète C

et tout idéal nilpotent \mathfrak{J} de C , tout A -homomorphisme continu $u : B \rightarrow C/\mathfrak{J}$ se factorise en $B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{\varphi} C/\mathfrak{J}$ où v est un homomorphisme continu et φ l'homomorphisme canonique.

La définition (19.3.1) revient à dire que la propriété suivante a lieu :

(P) Pour tout idéal ouvert \mathfrak{R} de la A -algèbre B et tout A -homomorphisme $u' : B/\mathfrak{R} \rightarrow C/\mathfrak{J}$, il y a un idéal ouvert $\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R}$ de B tel que l'homomorphisme $B \rightarrow B/\mathfrak{R} \xrightarrow{u'} C/\mathfrak{J}$ se factorise en $B \rightarrow B/\mathfrak{R}' \xrightarrow{v'} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$, où v' est un A -homomorphisme.

En effet, si $u : B \rightarrow C/\mathfrak{J}$ est un A -homomorphisme continu, il a pour noyau \mathfrak{R} un idéal ouvert de B , donc u se factorise en $B \rightarrow B/\mathfrak{R} \xrightarrow{u'} C/\mathfrak{J}$, et si (P) est vérifiée, il suffit de l'appliquer à u' et de prendre pour v la composée $B \rightarrow B/\mathfrak{R}' \xrightarrow{v'} C$ pour satisfaire aux conditions de (19.3.1). Inversement, supposons que B soit une A -algèbre formellement lisse; donnons-nous un idéal ouvert \mathfrak{R} de B et un A -homomorphisme $u' : B/\mathfrak{R} \rightarrow C/\mathfrak{J}$ et appliquons la définition (19.3.1) à $u : B \rightarrow B/\mathfrak{R} \xrightarrow{u'} C/\mathfrak{J}$; si $v : B \rightarrow C$ est un A -homomorphisme continu tel que u se factorise en $B \xrightarrow{v} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$, l'idéal $\mathfrak{R}' = \text{Ker}(v) \cap \mathfrak{R}$ de B est ouvert et contenu dans \mathfrak{R} ; par suite v se factorise en $B \rightarrow B/\mathfrak{R}' \xrightarrow{v'} C$, et v' vérifie bien la condition (P).

Proposition (19.3.2). — Soient A un anneau discret, V un A -module projectif; l'algèbre symétrique $B = \mathbf{S}_A^*(V)$, munie de la topologie discrète, est une A -algèbre formellement lisse.

En effet, les notations C et \mathfrak{J} ayant le même sens que dans (19.3.1), soit $u : B \rightarrow C/\mathfrak{J}$ un homomorphisme de A -algèbres, qui par restriction à $V = \mathbf{S}_A^1(V)$, donne un homomorphisme de A -modules $u_1 : V \rightarrow C/\mathfrak{J}$; comme V est projectif, u_1 se factorise en $V \xrightarrow{v_1} C \xrightarrow{\varphi} C/\mathfrak{J}$, et v_1 se prolonge en un homomorphisme de A -algèbres $v : \mathbf{S}_A^*(V) \rightarrow C$, tel que le composé $\varphi \circ v$ coïncide avec u dans V , donc $\varphi \circ v = u$, ce qui démontre la proposition.

Corollaire (19.3.3). — Si A est un anneau discret, toute algèbre de polynômes $B = A[T_\alpha]_{\alpha \in I}$, munie de la topologie discrète, est une A -algèbre formellement lisse.

Proposition (19.3.4). — Soit A un anneau topologique, et soit $B = A[[T_\alpha]]_{\alpha \in I}$ un anneau de séries formelles $\sum_{\lambda \in \mathbf{N}^{(I)}} c_\lambda T^\lambda$ (algèbre large sur A du monoïde $\mathbf{N}^{(I)}$, identifié en tant que A -module au produit $A^{\mathbf{N}^{(I)}}$). Si l'on munit B de la topologie produit, B est une A -algèbre formellement lisse.

Soit $(\mathfrak{L}_\mu)_{\mu \in M}$ un système fondamental d'idéaux ouverts dans A . Pour toute partie finie H de I , tout $\mu \in M$ et tout entier n , désignons par $\mathfrak{R}_{H,\mu,n}$ le voisinage de 0 dans B formé des (c_λ) tels que pour tout $\lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha \in I}$ tel que $\lambda_\alpha = 0$ pour $\alpha \notin H$ et $\sum_{\alpha \in H} \lambda_\alpha \leq n$, on ait $c_\lambda \in \mathfrak{L}_\mu$. On vérifie immédiatement que les $\mathfrak{R}_{H,\mu,n}$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans B et sont des idéaux de B , donc la topologie produit est compatible avec la structure de A -algèbre de B .

Notons d'abord, avec les mêmes notations, le

Lemme (19.3.4.1). — Soit E une A -algèbre discrète.

(i) Si $f : B \rightarrow E$ est un A -homomorphisme continu, il existe une partie finie H de I telle que $f(T_\alpha) = 0$ pour $\alpha \notin H$, et $f(T_\alpha)$ est nilpotent dans E pour tout $\alpha \in H$.

(ii) Inversement, soient H une partie finie de I , $(z_\alpha)_{\alpha \in H}$ une famille d'éléments nilpotents de E . Il existe un A -homomorphisme continu $g : B \rightarrow E$ et un seul tel que $g(T_\alpha) = z_\alpha$ pour $\alpha \in H$ et $g(T_\alpha) = 0$ pour $\alpha \notin H$.

(i) résulte aussitôt de ce que $f^{-1}(0)$ est un voisinage de 0 dans le A -module produit $A^{N^{(I)}}$, d'où $f(T^\lambda) = 0$ sauf pour un nombre fini de valeurs de $\lambda \in N^{(I)}$. Pour prouver (ii), il suffit de remarquer que l'anneau de polynômes $B' = A[T_\alpha]_{\alpha \in I}$ est dense dans B ; l'existence et l'unicité de la restriction $g|B'$ sont triviales et sa continuité résulte de l'hypothèse que les $f(T_\alpha)$ pour $\alpha \in H$ sont nilpotents, car si $(f(T_\alpha))^n = 0$ pour tout $\alpha \in H$, on a $g(T^\lambda) = 0$ pour tout $\lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha \in I}$ de support fini sauf ceux tels que $\lambda_\alpha = 0$ pour $\alpha \notin H$ et $\lambda_\alpha \leq n$ pour $\alpha \in H$, c'est-à-dire sauf pour un nombre fini de valeurs de λ .

Ce lemme étant établi, et les notations C et \mathfrak{J} ayant le même sens que dans (19.3.1), on a $u(T_\alpha) = 0$ sauf pour $\alpha \in H$, H étant une partie finie de I , et les $z_\alpha = u(T_\alpha)$ pour $\alpha \in H$ sont nilpotents dans C/\mathfrak{J} ; comme \mathfrak{J} est nilpotent, il existe une famille $(x_\alpha)_{\alpha \in H}$ d'éléments nilpotents de C dont les images canoniques dans C/\mathfrak{J} sont les z_α ; si v est le A -homomorphisme continu de B dans C tel que $v(T_\alpha) = 0$ pour $\alpha \notin H$, $v(T_\alpha) = x_\alpha$ pour $\alpha \in H$, il est clair que u se factorise en $B \xrightarrow{v} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$.

Proposition (19.3.5). — Soit A un anneau topologique.

(i) A est une A -algèbre formellement lisse.

(ii) Si B est une A -algèbre formellement lisse et C une B -algèbre formellement lisse, alors C est une A -algèbre formellement lisse.

(iii) Soient B une A -algèbre formellement lisse, A' une A -algèbre topologique; alors la A' -algèbre topologique $B \otimes_A A'$ (0_I, 7.7.5 et 7.7.6) est formellement lisse.

(iv) Soient B une A -algèbre topologique, S (resp. T) une partie multiplicative de A (resp. B) telle que l'image canonique de S dans B soit contenue dans T . Si B est une A -algèbre formellement lisse, alors $T^{-1}B$ est une $S^{-1}A$ -algèbre formellement lisse.

(v) Soient B_i ($1 \leq i \leq n$) des A -algèbres topologiques. Pour que $\prod_{i=1}^n B_i$ soit une A -algèbre formellement lisse, il faut et il suffit que chacune des B_i le soit.

(i) Si C est une A -algèbre discrète, $\varphi : C \rightarrow C/\mathfrak{J}$ l'homomorphisme canonique de C sur une A -algèbre quotient quelconque de C , le seul A -homomorphisme de A dans C/\mathfrak{J} est l'homomorphisme composé $A \xrightarrow{\psi} C \xrightarrow{\varphi} C/\mathfrak{J}$, où ψ est l'homomorphisme définissant la structure de A -algèbre de C ; comme ψ est continu, la condition de (19.3.1) est trivialement vérifiée.

(ii) Soient $\alpha : A \rightarrow B$, $\beta : B \rightarrow C$ les homomorphismes continus définissant respectivement la structure de A -algèbre sur B et celle de B -algèbre sur C , de sorte que $\beta \circ \alpha$ définit la structure de A -algèbre sur C . Soient E une A -algèbre discrète, \mathfrak{L} un idéal nilpotent de E , $u : C \rightarrow E/\mathfrak{L}$ un A -homomorphisme continu, de sorte que $u \circ \beta \circ \alpha$ est l'homomorphisme définissant la structure de A -algèbre de E/\mathfrak{L} . Comme B est une A -algèbre formellement lisse, le A -homomorphisme continu $u \circ \beta : B \rightarrow E/\mathfrak{L}$ se factorise en $B \xrightarrow{v} E \rightarrow E/\mathfrak{L}$, où v est un A -homomorphisme continu; v et $u \circ \beta$ définissent alors sur E et E/\mathfrak{L} respectivement des structures de B -algèbre topologique, pour lesquelles E/\mathfrak{L} est

encore l'algèbre quotient (discrète) de la B -algèbre E . En outre, u est un B -homomorphisme continu, donc se factorise en $C \xrightarrow{w} E \rightarrow E/\mathfrak{L}$, où w est un B -homomorphisme continu; comme $v \circ \alpha$ est le A -homomorphisme définissant la structure de A -algèbre sur E , w est bien un A -homomorphisme continu, d'où notre assertion.

(iii) Soient C une A' -algèbre topologique discrète, \mathfrak{J} un idéal nilpotent de C , $u : B \otimes_A A' \rightarrow C/\mathfrak{J}$ un A' -homomorphisme continu. Si on compose u et l'homomorphisme canonique $\rho : B \rightarrow B \otimes_A A'$, on obtient (puisque $A \rightarrow B \xrightarrow{\varphi} B \otimes_A A'$ est égal au composé $A \rightarrow A' \xrightarrow{\sigma} B \otimes_A A'$) un A -homomorphisme continu qui, par hypothèse, se factorise donc en $B \xrightarrow{v} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$, où v est un A -homomorphisme continu (pour la structure de A -algèbre topologique sur C définie par le composé $A \rightarrow A' \xrightarrow{w} C$ des homomorphismes canoniques). L'égalité des composés $A \rightarrow B \xrightarrow{v} C$ et $A \rightarrow A' \xrightarrow{w} C$ entraîne donc l'existence d'un homomorphisme continu d'anneaux $f : B \otimes_A A' \rightarrow C$ tel que $v = f \circ \rho$ et $w = f \circ \sigma$ (**0_I**, 7.7.6); comme les homomorphismes composés $B \xrightarrow{\varphi} B \otimes_A A' \xrightarrow{f} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$ et $B \xrightarrow{\varphi} B \otimes_A A' \xrightarrow{w} C/\mathfrak{J}$ (resp. $A' \xrightarrow{\sigma} B \otimes_A A' \xrightarrow{f} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$ et $A' \xrightarrow{\sigma} B \otimes_A A' \xrightarrow{w} C/\mathfrak{J}$) sont égaux, on a bien la factorisation $u : B \otimes_A A' \xrightarrow{f} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$, ce qui établit (iii).

(iv) La topologie considérée sur $S^{-1}A$ (resp. $T^{-1}B$) est naturellement celle pour laquelle un système fondamental de voisinages de 0 est formé des $S^{-1}\mathfrak{J}$ (resp. $T^{-1}\mathfrak{R}$), où \mathfrak{J} (resp. \mathfrak{R}) parcourt un système fondamental d'idéaux ouverts dans A (resp. B) (**0_I**, 7.6.1). Si $\alpha : A \rightarrow B$ est l'homomorphisme canonique, il est clair que l'homomorphisme canonique $\alpha' : S^{-1}A \rightarrow T^{-1}B$ déduit de α (et dont l'existence résulte de ce que $\alpha(S) \subset T$ par hypothèse) est continu (**0_I**, 7.6.6). Soient alors C une $S^{-1}A$ -algèbre topologique discrète, \mathfrak{J} un idéal nilpotent de cette algèbre, $u : T^{-1}B \rightarrow C/\mathfrak{J}$ un $S^{-1}A$ -homomorphisme continu; alors le composé $B \xrightarrow{\psi} T^{-1}B \xrightarrow{u} C/\mathfrak{J}$ est un A -homomorphisme continu qui, par hypothèse, se factorise en $B \xrightarrow{v} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$, où v est un A -homomorphisme continu. Comme pour tout $t \in T$, $t/1$ est inversible dans $T^{-1}B$, $u(t/1)$ est inversible dans C/\mathfrak{J} . Comme \mathfrak{J} est nilpotent, tout élément de la classe $u(t/1)$ dans C , et en particulier $v(t)$, est inversible dans C (**0_I**, 7.1.12), et par suite v se factorise en $B \xrightarrow{\psi} T^{-1}B \xrightarrow{w} C$; comme v est continu, il en est de même de w (**0_I**, 7.6.6), et c'est un $S^{-1}A$ -homomorphisme car le composé $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\psi} T^{-1}B \xrightarrow{w} C$ est égal à

$$A \xrightarrow{\varphi} S^{-1}A \xrightarrow{\alpha'} T^{-1}B \xrightarrow{w} C,$$

donc $S^{-1}A \xrightarrow{\alpha'} T^{-1}B \xrightarrow{w} C$ est l'homomorphisme canonique définissant sur C la structure de $S^{-1}A$ -algèbre. Enfin, les homomorphismes composés $B \xrightarrow{\psi} T^{-1}B \xrightarrow{w} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$ et $B \xrightarrow{\psi} T^{-1}B \xrightarrow{w} C/\mathfrak{J}$ étant égaux, le même raisonnement montre que u est bien égal au composé $T^{-1}B \xrightarrow{w} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$, d'où (iv).

Enfin, (v) est immédiat, la donnée d'un A -homomorphisme continu de $B = \prod_{i=1}^n B_i$ dans C (resp. C/\mathfrak{J}) équivalant à celle de n A -homomorphismes continus $B_i \rightarrow C$.

(resp. $B_i \rightarrow C/\mathfrak{J}$) et tout A-homomorphisme continu $B_j \rightarrow C$ (resp. $B_j \rightarrow C/\mathfrak{J}$) donnant par composition un A-homomorphisme continu $B \rightarrow B_j \rightarrow C$ (resp. $B \rightarrow B_j \rightarrow C/\mathfrak{J}$).

Proposition (19.3.6). — Soient A un anneau topologique, B une A-algèbre topologique, \hat{A} et \hat{B} les séparés complétés respectifs de A et B, de sorte que \hat{B} est une \hat{A} -algèbre topologique. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) B est une A-algèbre formellement lisse.
- b) \hat{B} est une A-algèbre formellement lisse.
- c) \hat{B} est une \hat{A} -algèbre formellement lisse.

Bien entendu, la structure de \hat{A} -algèbre sur \hat{B} est définie par l'homomorphisme $\hat{\varphi}$, si $\varphi : A \rightarrow B$ est l'homomorphisme définissant la structure de A-algèbre sur B. Comme toute A-algèbre discrète C est séparée et complète, elle est aussi une \hat{A} -algèbre (par prolongement canonique de l'homomorphisme de A dans C), et un A-homomorphisme continu de B dans C donne par prolongement canonique un \hat{A} -homomorphisme (et *a fortiori* un A-homomorphisme) de \hat{B} dans C (autrement dit, tout A-homomorphisme $B \rightarrow C$ se factorise en $B \rightarrow \hat{B} \rightarrow C$ de façon unique). Ces remarques et la définition (19.3.1) entraînent aussitôt la proposition.

Corollaire (19.3.7). — Sous les hypothèses de (19.3.5, (iv)), la $A\{S^{-1}\}$ -algèbre topologique $B\{T^{-1}\}$ est formellement lisse.

Cela résulte des définitions (0₁, 7.6.1 et 7.6.7) et de (19.3.5, (iv)) et (19.3.6).

Proposition (19.3.8). — Soient A un anneau topologique, B une A-algèbre topologique, et supposons que pour tout idéal ouvert \mathfrak{R} de B, \mathfrak{R}^2 soit aussi ouvert. Soient A', B' des anneaux topologiques obtenus en munissant A et B de topologies plus fines que les topologies initiales, et supposons que l'homomorphisme canonique $\varphi : A \rightarrow B$ soit encore un homomorphisme continu de A' dans B'. Alors, si B' est une A'-algèbre formellement lisse, B est une A-algèbre formellement lisse.

Il suffit d'appliquer le lemme suivant :

Lemme (19.3.8.1). — Soient C une A-algèbre discrète, \mathfrak{J} un idéal nilpotent de C. Supposons que le carré de tout idéal ouvert de B soit ouvert. Alors, si un homomorphisme composé $v : B \xrightarrow{u} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$ est continu, l'homomorphisme u est continu.

En effet, $\mathfrak{R} = u^{-1}(\mathfrak{J})$ est le noyau de v et il est ouvert par hypothèse; comme il existe un entier n tel que $\mathfrak{J}^n = 0$, \mathfrak{R}^n est contenu dans $\text{Ker}(u)$; mais par récurrence sur h, il résulte de l'hypothèse que \mathfrak{R}^{2^h} est ouvert, donc aussi \mathfrak{R}^n pour tout n, et par suite $\text{Ker}(u)$ est lui aussi ouvert, ce qui prouve notre assertion.

On notera que l'hypothèse sur B signifie que la topologie de B est *borne supérieure* des topologies \mathfrak{R} -préadiques, où \mathfrak{R} parcourt l'ensemble des idéaux ouverts de B. Si B est un anneau prédict (0₁, 7.1.9), cette condition est toujours vérifiée.

(19.3.9) Nous allons maintenant voir que la propriété d'être formellement lisse implique des propriétés de « relèvement » d'homomorphismes sous des conditions plus générales que celles de la définition (19.3.1).

Proposition (19.3.10). — Soient A un anneau topologique, B une A -algèbre formellement lisse. Soient C une A -algèbre topologique, \mathfrak{J} un idéal de C , vérifiant les conditions suivantes :

- 1° C est métrisable et complet.
- 2° \mathfrak{J} est fermé et la suite (\mathfrak{J}^n) tend vers 0.

Alors, tout A -homomorphisme continu $u : B \rightarrow C/\mathfrak{J}$ se factorise en $B \xrightarrow{v} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$, où v est un A -homomorphisme continu.

Soit (\mathfrak{Q}_n) une suite décroissante d'idéaux de C formant un système fondamental de voisinages de 0. Pour tout n , considérons la A -algèbre discrète C/\mathfrak{Q}_n et l'idéal $(\mathfrak{J} + \mathfrak{Q}_n)/\mathfrak{Q}_n$ de cette algèbre; comme il existe k tel que $\mathfrak{J}^k \subset \mathfrak{Q}_n$, $(\mathfrak{J} + \mathfrak{Q}_n)/\mathfrak{Q}_n$ est nilpotent. Pour tout n , soit u_n l'homomorphisme continu $B \xrightarrow{u_n} C/\mathfrak{J} \rightarrow C/(\mathfrak{J} + \mathfrak{Q}_n) = (C/\mathfrak{Q}_n)/((\mathfrak{J} + \mathfrak{Q}_n)/\mathfrak{Q}_n)$; par hypothèse u_n se factorise en $B \xrightarrow{v_n} C/\mathfrak{Q}_n \xrightarrow{\varphi_n} C/(\mathfrak{J} + \mathfrak{Q}_n)$, où v_n est un A -homomorphisme continu. Montrons qu'on peut choisir de proche en proche les v_n de sorte que v_n se factorise en

$$B \xrightarrow{v_{n+1}} C/\mathfrak{Q}_{n+1} \rightarrow C/\mathfrak{Q}_n$$

pour tout n (autrement dit, que les v_n forment un *système projectif* d'homomorphismes). Cela résultera du lemme suivant :

Lemme (19.3.10.1). — Soient B une A -algèbre formellement lisse, E, E' deux A -algèbres topologiques discrètes, \mathfrak{R} (resp. \mathfrak{R}') un idéal nilpotent de E (resp. E'), $f : E \rightarrow E'$ un A -homomorphisme surjectif tel que $f(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{R}'$, $f' : E/\mathfrak{R} \rightarrow E'/\mathfrak{R}'$ l'homomorphisme déduit de f par passage aux quotients. Soient $u : B \rightarrow E/\mathfrak{R}$ un A -homomorphisme continu, u' l'homomorphisme composé $B \xrightarrow{u} E/\mathfrak{R} \xrightarrow{f'} E'/\mathfrak{R}'$, et soit $v' : B \rightarrow E'$ un A -homomorphisme continu tel que u' se factorise en $B \xrightarrow{v'} E' \rightarrow E'/\mathfrak{R}'$. Alors il existe un A -homomorphisme continu $v : B \rightarrow E$ tel que v' se factorise en $B \xrightarrow{v} E \xrightarrow{f} E'$.

Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ E/\mathfrak{R} & \xrightarrow{f'} & E'/\mathfrak{R}' \end{array}$$

tous les homomorphismes sont surjectifs; si \mathfrak{L} est le noyau de f , E' s'identifie à E/\mathfrak{L} et \mathfrak{R}' à $(\mathfrak{R} + \mathfrak{L})/\mathfrak{L}$. Utilisons maintenant le lemme élémentaire suivant :

Lemme (19.3.10.2). — Soient F un anneau (non nécessairement commutatif), a, b deux idéaux bilatères de F ; alors le produit fibré $(F/a) \times_{F/(a+b)} (F/b)$ s'identifie canoniquement à $F/(a \cap b)$.

Ce n'est autre qu'une application particulière de (18.1.7), où, dans le diagramme (18.1.7.1), on remplace G par $F/(a \cap b)$, \mathfrak{J}' par $b/(a \cap b)$, F par F/b , \mathfrak{R} par $(a+b)/b$, B par $F/(a+b)$ et θ par le F -homomorphisme bijectif canonique $(a+b)/b \xrightarrow{\sim} a/(a \cap b)$.

Appliquant ce lemme à la situation de (19.3.10.1), la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{v'} & E' = E/\mathfrak{L} \\ u \downarrow & & \downarrow \\ E/\mathfrak{R} & \xrightarrow{f'} & E'/\mathfrak{R}' \end{array}$$

montre l'existence d'un homomorphisme $w : B \rightarrow E/(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{L})$ tel que v' et u se factorisent en $B \xrightarrow{w} E/(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{L}) \rightarrow E/\mathfrak{L}$ et $B \xrightarrow{w} E/(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{L}) \rightarrow E/\mathfrak{R}$ respectivement; comme le noyau de w contient l'intersection de ceux de v' et de u , il est ouvert dans B et w est continu. Enfin, il est clair que $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{L}$ est nilpotent, donc w se factorise en $B \xrightarrow{u} E \rightarrow E/(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{L})$, où u est un A -homomorphisme continu répondant à la question.

Revenant à la démonstration de (19.3.10), l'existence de v_{n+1} résulte du lemme (19.3.10.1) appliqué en remplaçant $E, E', \mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ par $C/\mathfrak{L}_{n+1}, C/\mathfrak{L}_n, (\mathfrak{J} + \mathfrak{L}_{n+1})/\mathfrak{L}_{n+1}$ et $(\mathfrak{J} + \mathfrak{L}_n)/\mathfrak{L}_n$ respectivement, u, u' et v' par u_{n+1}, u_n et v_n respectivement. Notons que, comme C est séparé et complet, il est égal à $\varprojlim_n (C/\mathfrak{L}_n)$, et $v = \varprojlim_n v_n$ est un A -homomorphisme continu de B dans C . Comme \mathfrak{J} est fermé dans C , on a $\mathfrak{J} = \bigcap_n (\mathfrak{J} + \mathfrak{L}_n)$; comme C/\mathfrak{J} est métrisable et complet et que les $(\mathfrak{J} + \mathfrak{L}_n)/\mathfrak{J}$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans C/\mathfrak{J} , on a $C/\mathfrak{J} = \varprojlim_n (C/(\mathfrak{J} + \mathfrak{L}_n))$ et $\varprojlim_n \varphi_n$ est l'application canonique $\varphi : C \rightarrow C/\mathfrak{J}$. Comme $\varprojlim_n u_n = u$, on a bien $u = v \circ \varphi$. C.Q.F.D.

Corollaire (19.3.11). — Soient A un anneau topologique, B une A -algèbre formellement lisse, C un anneau local noethérien complet, \mathfrak{J} un idéal distinct de C , $\varphi : A \rightarrow C$ un homomorphisme continu, faisant de C une A -algèbre topologique. Alors tout A -homomorphisme continu $u_0 : B \rightarrow C_0 = C/\mathfrak{J}$ se factorise en $B \xrightarrow{u} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$, où u est un A -homomorphisme continu.

Toutes les conditions de (19.3.10) sont en effet remplies (0_I, 7.3.5).

Proposition (19.3.12). — Soient A un anneau topologique, B une A -algèbre formellement lisse, C une A -algèbre topologique, \mathfrak{J} un idéal de C , vérifiant les conditions suivantes :

1° Il existe un système fondamental d'idéaux ouverts \mathfrak{L}_λ de C , tels que les $C_\lambda = C/\mathfrak{L}_\lambda$ soient des anneaux artiniens et que l'homomorphisme canonique $C \rightarrow \varprojlim_\lambda C_\lambda$ soit un isomorphisme d'anneaux topologiques.

2° L'idéal \mathfrak{J} est fermé dans C et topologiquement nilpotent.

3° Le carré de tout idéal ouvert de B est ouvert.

Dans ces conditions, tout A -homomorphisme continu $u : B \rightarrow C/\mathfrak{J}$ se factorise en $B \xrightarrow{v} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$, où v est un A -homomorphisme continu.

Soit $\mathfrak{J}_\lambda = (\mathfrak{J} + \mathfrak{L}_\lambda)/\mathfrak{L}_\lambda$ l'image canonique de \mathfrak{J} dans C_λ , qui est un idéal nilpotent, et soit u_λ l'homomorphisme composé $B \xrightarrow{u} C \rightarrow C_\lambda/\mathfrak{J}_\lambda = C/(\mathfrak{J} + \mathfrak{L}_\lambda)$. Montrons que tout A -homomorphisme $w : B \rightarrow C$ tel que u se factorise en $B \xrightarrow{w} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$ est nécessairement continu; en effet, pour tout λ , il y a un idéal ouvert \mathfrak{R} de B tel que $u(\mathfrak{R}) \subset (\mathfrak{J} + \mathfrak{L}_\lambda)/\mathfrak{L}_\lambda$, d'où $w(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{J}_\lambda$, donc il y a une puissance \mathfrak{R}^{2m} de \mathfrak{R} telle que $w(\mathfrak{R}^{2m}) \subset \mathfrak{L}_\lambda$, ce qui établit notre assertion puisque \mathfrak{R}^{2m} est ouvert dans B . On peut donc se borner à trouver un A -homomorphisme w ayant la propriété précédente sans s'inquiéter de ses propriétés de continuité. Or, l'ensemble $\text{Hom}(B, C)$ de tous les A -homomorphismes d'algèbres de B dans C est égal à $\varprojlim \text{Hom}(B, C_\lambda)$, et ce dernier est fermé dans le C -module C_λ^B , muni de la topologie produit, pour laquelle il est linéairement compact puisque C_λ est artinien. Pour tout λ , soit W_λ

l'ensemble des $w_\lambda \in \text{Hom}(B, C_\lambda)$ tels que w_λ se factorise en $B \xrightarrow{w_\lambda} C_\lambda \rightarrow C_\lambda/\mathfrak{J}_\lambda$; W_λ est une variété linéaire fermée dans le C -module $\text{Hom}(B, C_\lambda)$, non vide puisque B est formellement lisse. Dans le produit $\prod_{\mu \leq \lambda} \text{Hom}(B, C_\mu) = E_\lambda$, considérons la sous-variété linéaire U_λ formée des $(w_\mu)_{\mu \leq \lambda}$ tels que $w_\mu = \varphi_{\mu\lambda} \circ w_\lambda$ pour $\mu \leq \lambda$ et $w_\lambda \in W_\lambda$ (où $\varphi_{\mu\lambda} : C_\lambda \rightarrow C_\mu$ est l'homomorphisme canonique), qui est aussi fermée. Enfin, soit V_λ la variété linéaire dans le produit $\prod_{\mu} \text{Hom}(B, C_\mu)$, produit de U_λ et des $\text{Hom}(B, C_\mu)$ pour $\mu \neq \lambda$, qui est encore fermée. Tout revient à voir que l'intersection des V_λ est non vide, car un élément w de cette intersection appartiendra à $\lim_{\leftarrow} \text{Hom}(B, C_\lambda)$ par définition. D'ailleurs, comme \mathfrak{J} est fermé, et $C = \lim_{\leftarrow} C_\lambda$ linéairement compact, C/\mathfrak{J} s'identifie à $\lim_{\leftarrow} C_\lambda/\mathfrak{J}_\lambda$ et l'application canonique $\psi : C \rightarrow C/\mathfrak{J}$ à $\lim_{\leftarrow} \psi_\lambda$, où ψ_λ est l'application canonique $C_\lambda \rightarrow C_\lambda/\mathfrak{J}_\lambda$. On conclut donc comme dans (19.3.10) que $\psi \circ w = u$.

19.4. Premiers critères de lissité formelle.

Proposition (19.4.1). — Soient A un anneau topologique, B une A -algèbre topologique; supposons qu'il existe deux familles filtrantes décroissantes $(\mathfrak{J}_\alpha)_{\alpha \in I}$, $(\mathfrak{K}_\alpha)_{\alpha \in I}$ d'idéaux de A et B respectivement, telles que : 1° (\mathfrak{J}_α) tend vers 0 dans A et (\mathfrak{K}_α) tend vers 0 dans B ; 2° pour tout $\alpha \in I$ on a $\mathfrak{J}_\alpha B \subset \mathfrak{K}_\alpha$ (de sorte que B/\mathfrak{K}_α est une (A/\mathfrak{J}_α) -algèbre topologique); 3° pour tout $\alpha \in I$, B/\mathfrak{K}_α est une (A/\mathfrak{J}_α) -algèbre formellement lisse. Alors B est une A -algèbre formellement lisse.

En effet, soient C une A -algèbre discrète, \mathfrak{L} un idéal nilpotent de C , \mathfrak{R} un idéal ouvert de B ; par hypothèse il y a un $\alpha \in I$ tel que $\mathfrak{K}_\alpha \subset \mathfrak{R}$, donc B/\mathfrak{R} est quotient de B/\mathfrak{K}_α par un idéal ouvert. Tout A -homomorphisme $u' : B/\mathfrak{R} \rightarrow C/\mathfrak{L}$ est aussi un (A/\mathfrak{J}_α) -homomorphisme, donc il existe un idéal ouvert \mathfrak{R}' de B tel que $\mathfrak{K}_\alpha \subset \mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R}$ et que $B/\mathfrak{R}_\alpha \rightarrow B/\mathfrak{R} \xrightarrow{u'} C/\mathfrak{L}$ se factorise en $B/\mathfrak{R}_\alpha \rightarrow B/\mathfrak{R}' \xrightarrow{v'} C \rightarrow C/\mathfrak{L}$, où v' est un (A/\mathfrak{J}_α) -homomorphisme; d'où la conclusion, en vertu de la remarque suivant (19.3.1).

Corollaire (19.4.2). — Soient A un anneau topologique, B une A -algèbre topologique, $(\mathfrak{J}_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille filtrante décroissante d'idéaux de A tendant vers 0. Pour que B soit une A -algèbre formellement lisse, il faut et il suffit que pour tout $\alpha \in I$, si l'on pose $A_\alpha = A/\mathfrak{J}_\alpha$, $B_\alpha = B/\mathfrak{J}_\alpha B$, B_α soit une A_α -algèbre formellement lisse.

La condition est suffisante par (19.4.1), et elle est aussi nécessaire par (19.3.5, (iii)).

Proposition (19.4.3). — Soient A un anneau topologique, B une A -algèbre topologique. Supposons que pour toute A -algèbre discrète C et tout idéal \mathfrak{J} de C tel que $\mathfrak{J}^2 = 0$, tout A -homomorphisme continu $u : B \rightarrow C/\mathfrak{J}$ se factorise en $B \xrightarrow{v} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$, où v est un A -homomorphisme continu. Alors B est une A -algèbre formellement lisse.

En effet, avec les mêmes notations, soit \mathfrak{R} un idéal nilpotent quelconque de C , et considérons un A -homomorphisme continu $u' : B \rightarrow C/\mathfrak{R}$. Supposons que $\mathfrak{R}^m = 0$, et posons $C_i = C/\mathfrak{R}^i$ pour $1 \leq i \leq m$, de sorte que $C_m = C$, que $\mathfrak{R}^{i-1}/\mathfrak{R}^i$ est un idéal de carré nul \mathfrak{J}_i dans C_i , et $C_i = C_{i+1}/\mathfrak{J}_{i+1}$; l'hypothèse entraîne alors par récurrence sur i l'existence de A -homomorphismes continus $u_i : B \rightarrow C_i$ tels que $u_1 = u$ et que u_i se factorise en $B \xrightarrow{u_{i+1}} C_{i+1} \rightarrow C_{i+1}/\mathfrak{J}_{i+1} = C_i$; d'où la conclusion.

Proposition (19.4.4). — Soient A un anneau topologique, B une A -algèbre topologique (commutative). Pour que B soit une A -algèbre formellement lisse, il faut et il suffit que pour

tout B -module topologique discret L , annulé par un idéal ouvert de B , on ait (cf. (18.5.1)) $\text{Exalcotop}_A(B, L) = 0$.

Soit (\mathfrak{R}_λ) un système fondamental décroissant d'idéaux ouverts de B et posons $B_\lambda = B/\mathfrak{R}_\lambda$. Considérons une A -algèbre topologique discrète C et un idéal \mathfrak{J} de C tel que $\mathfrak{J}^2 = 0$, de sorte que C est une A -extension de C/\mathfrak{J} par \mathfrak{J} ; supposons donné un A -homomorphisme $u : B_\lambda \rightarrow C/\mathfrak{J}$ et formons la A -extension E_λ de B_λ par \mathfrak{J} , image réciproque de C par l'homomorphisme u (18.2.5); c'est une A -algèbre topologique pour la topologie discrète. Si $\text{Exalcotop}_A(B, L) = 0$, il existe par définition (18.5.1) un μ tel que $\mathfrak{R}_\mu \subset \mathfrak{R}_\lambda$ et que l'extension image réciproque E_μ soit A -triviale; mais cela signifie (18.1.6) qu'il existe un A -homomorphisme continu $v : B_\mu \rightarrow E_\lambda$ tel que l'homomorphisme canonique $B_\mu \rightarrow B_\lambda$ se factorise en $B_\mu \xrightarrow{v} E_\lambda \rightarrow B_\lambda$; on en conclut aussitôt que $B_\mu \rightarrow B_\lambda \xrightarrow{u} C/\mathfrak{J}$ se factorise en $B_\mu \xrightarrow{v} E_\lambda \rightarrow C \rightarrow C/\mathfrak{J}$, et cela prouve, en vertu de (19.3.1) et (19.4.3), que B est une A -algèbre formellement lisse. La réciproque est immédiate, en appliquant (19.3.1) au cas où C est une A -algèbre topologique qui est une A -extension de B_λ par L , et à l'homomorphisme identique $B_\lambda \rightarrow B_\lambda = C/L$.

Lorsque A et B sont des anneaux discrets, le critère de lissité formelle (19.4.4) se réduit à

$$(19.4.4.1) \quad \text{Exalcom}_A(B, L) = 0 \quad \text{pour tout } B\text{-module } L;$$

autrement dit, toute A -extension commutative de B par un B -module doit être A -triviale.

Corollaire (19.4.5). — Soient A un anneau topologique, B une A -algèbre topologique (commutative).

(i) Supposons que B soit une A -algèbre formellement lisse. Alors, pour tout idéal ouvert \mathfrak{R} de B , tout (B/\mathfrak{R}) -module L et tout 2-cocycle de Hochschild A -bilinéaire et symétrique f de $(B/\mathfrak{R}) \times (B/\mathfrak{R})$ dans L (18.4.3), il existe un idéal ouvert $\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R}$ tel que, si $\varphi : B/\mathfrak{R}' \rightarrow B/\mathfrak{R}$ est l'homomorphisme canonique, $f \circ (\varphi \times \varphi)$ soit un 2-cobord de Hochschild A -bilinéaire de $(B/\mathfrak{R}') \times (B/\mathfrak{R}')$ dans L .

(ii) Si B est un A -module formellement projectif (19.2.1) et si la condition de (i) est vérifiée, B est une A -algèbre formellement lisse.

(i) Le 2-cocycle f définit une A -extension de Hochschild C de B/\mathfrak{R} par L (18.4.3). Appliquant (19.3.1) à C , à l'idéal de carré nul L de C et à l'homomorphisme identique $B/\mathfrak{R} \rightarrow B/\mathfrak{R} = C/L$, on en déduit la condition (i) en vertu de (18.4.3).

(ii) Appliquons le critère (19.4.3), en considérant un idéal ouvert \mathfrak{R} de B , un idéal ouvert \mathfrak{J} de A tel que $\mathfrak{J}B \subset \mathfrak{R}$, et une (A/\mathfrak{J}) -extension E de B/\mathfrak{R} par L . Comme B est un A -module formellement projectif, l'application A -linéaire continue canonique $p : B \rightarrow B/\mathfrak{R}$ se factorise en $B \xrightarrow{w} E \rightarrow B/\mathfrak{R}$, où w est une application A -linéaire continue (19.2.1), qui se factorise donc elle-même en $B \rightarrow B/\mathfrak{R}' \xrightarrow{w'} E$ où \mathfrak{R}' est un idéal ouvert de B contenu dans \mathfrak{R} ; remplaçant \mathfrak{J} par un idéal plus petit, on peut supposer que $\mathfrak{J}B \subset \mathfrak{R}'$. Alors l'image réciproque par l'homomorphisme canonique $B/\mathfrak{R}' \rightarrow B/\mathfrak{R}$ de l'extension E de B/\mathfrak{R} par L , est une (A/\mathfrak{J}) -extension de Hochschild E' de B/\mathfrak{R}' par L ;

appliquant (i) à un cocycle définissant cette extension (18.4.3), on en conclut qu'il y a un idéal ouvert $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$ de B tel que l'image réciproque E'' de E par $B/\mathfrak{K}'' \rightarrow B/\mathfrak{K}$ soit A -triviale, C.Q.F.D.

Corollaire (19.4.6). — Soient A un anneau topologique, B une A -algèbre topologique qui soit un A -module formellement projectif. Soit A' une A -algèbre munie de la topologie déduite de celle de A . Supposons en outre que A' soit un A -module fidèlement plat, et que l'une des conditions suivantes soit remplie :

1° Il existe un système fondamental (\mathfrak{J}_λ) d'idéaux ouverts de A et un système fondamental (\mathfrak{M}_λ) d'idéaux ouverts de B , ayant même ensemble d'indices et tels que, pour tout λ , on ait $\mathfrak{J}_\lambda B \subset \mathfrak{M}_\lambda$ et que B/\mathfrak{M}_λ soit un (A/\mathfrak{J}_λ) -module projectif de type fini.

2° A' est un A -module projectif de type fini.

Alors, pour que $B' = B \otimes_A A'$ (muni de la topologie produit tensoriel) soit une A' -algèbre formellement lisse, il faut et il suffit que B soit une A -algèbre formellement lisse.

La suffisance de la condition est contenue dans (19.3.5, (iii)), sans aucune hypothèse supplémentaire sur B ni A' . Pour démontrer la réciproque, nous allons appliquer le critère (19.4.5); sous l'hypothèse 2°, nous désignerons encore par (\mathfrak{M}_λ) un système fondamental d'idéaux ouverts de B , et, pour tout λ , par \mathfrak{J}_λ un idéal ouvert de A tel que $\mathfrak{J}_\lambda B \subset \mathfrak{M}_\lambda$; dans les deux cas, nous poserons $A_\lambda = A/\mathfrak{J}_\lambda$, $B_\lambda = B/\mathfrak{M}_\lambda$, $A'_\lambda = A_\lambda \otimes_A A'$, $B'_\lambda = B_\lambda \otimes_A A'$. Soit f un 2-cocycle de Hochschild A_λ -bilinéaire symétrique de $B_\lambda \times B_\lambda$ dans un B_λ -module L ; par extension des scalaires, on en déduit un 2-cocycle de Hochschild $f' = f \otimes 1$, A' -bilinéaire symétrique, de $B'_\lambda \times B'_\lambda$ dans $L' = L \otimes_A A'$. Comme par hypothèse B' est une A' -algèbre formellement lisse, il existe, par (19.4.5, (i)), un indice μ tel que $\mathfrak{M}_\mu \subset \mathfrak{M}_\lambda$, et tel que, si $\varphi' : B'_\mu \rightarrow B'_\lambda$ est l'application canonique, $f' \circ (\varphi' \times \varphi')$ est un 2-cobord de Hochschild de $B'_\mu \times B'_\mu$ dans L' ; autrement dit, son image c' dans le groupe de Hochschild $H_{A'_\mu}^2(B'_\mu, L')^s$ est nulle; il est clair que si $\varphi : B_\mu \rightarrow B_\lambda$ est l'homomorphisme canonique, et c la classe de $f \circ (\varphi \times \varphi)$ dans le groupe de Hochschild $H_{A_\mu}^2(B_\mu, L)^s$, c' est l'image canonique de c . Or, si P'_* est le complexe relatif aux anneaux A_μ et B_μ défini dans (18.4.5), servant au calcul de $H_{A_\mu}^2(B_\mu, L)^s$, le complexe analogue relatif aux anneaux A'_μ et B'_μ est évidemment $P'_* \otimes_A A'$; dans l'hypothèse 1°, la construction de P'_* montre que c'est un A_μ -module projectif de type fini. On conclut donc de Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3^e éd., § 5, no 3, prop. 7 que, sous les deux hypothèses, on a $\text{Hom}_{A'_\mu}(P'_* \otimes_A A', L \otimes_A A') = (\text{Hom}_{A_\mu}(P'_*, L)) \otimes_A A'$ à un isomorphisme canonique près; comme A' est un A -module plat, on a par suite (18.4.5)

$$H_{A'_\mu}^2(B'_\mu, L')^s = (H_{A_\mu}^2(B_\mu, L)^s) \otimes_A A'$$

et l'on peut donc écrire $c' = c \otimes 1$; mais comme A' est un A -module fidèlement plat, l'hypothèse $c' = 0$ entraîne $c = 0$, ce qui achève la démonstration.

Proposition (19.4.7). — Soient A un anneau topologique préadmissible, \mathfrak{J} un idéal de définition de A (0₁, 7.1.2), B une A -algèbre topologique qui soit un A -module formellement projectif. Considérons les anneaux topologiques quotients $A_0 = A/\mathfrak{J}$, $B_0 = B/\mathfrak{J}B$; alors, pour que B soit

une A-algèbre formellement lisse, il faut et il suffit que B_0 soit une A_0 -algèbre formellement lisse.

La nécessité de la condition résulte de (19.4.2). Pour voir qu'elle est suffisante, notons d'abord qu'en considérant un système fondamental de voisinages ouverts de 0 dans A formés d'idéaux \mathfrak{J}_α contenus dans \mathfrak{J} , on peut, en vertu de (19.4.2), se ramener au cas où A est *discret* puisque $B/\mathfrak{J}_\alpha B$ est un (A/\mathfrak{J}_α) -module formellement projectif (19.2.5); par définition d'un anneau préadmissible, \mathfrak{J} est alors *nilpotent*. Il suffit en outre de démontrer la proposition lorsque $\mathfrak{J}^2 = 0$, car si $\mathfrak{J}^m = 0$, on l'appliquera successivement aux anneaux $A_k = A/\mathfrak{J}^k$ et $B_k = B/\mathfrak{J}^k B$ et à l'idéal $\mathfrak{J}^{k-1}/\mathfrak{J}^k$ de A_k pour $k = 2, 3, \dots, m$, en notant (19.2.5) que $B_k = B \otimes_A A_k$ est un A_k -module formellement projectif. Appliquons le critère (19.4.5, (ii)) en considérant un idéal ouvert \mathfrak{R} de B et un 2-cocycle de Hochschild A-bilinéaire symétrique f de $(B/\mathfrak{R}) \times (B/\mathfrak{R})$ dans un (B/\mathfrak{R}) -module L. Considérons d'abord le cas particulier où $\mathfrak{J}L = 0$, de sorte que L peut aussi être considéré comme un $(B_0/\mathfrak{R}B_0)$ -module, et f se factorise en

$$(B/\mathfrak{R}) \times (B/\mathfrak{R}) \rightarrow (B_0/\mathfrak{R}B_0) \times (B_0/\mathfrak{R}B_0) \xrightarrow{f_0} L$$

où f_0 est un 2-cocycle de Hochschild bilinéaire symétrique. En vertu de l'hypothèse, il y a donc un idéal ouvert $\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R}$ dans B et une application A_0 -linéaire $g_0 : B_0/\mathfrak{R}'B_0 \rightarrow L$ telle que $f_0(\varphi_0(x), \varphi_0(y)) = xg_0(y) - g_0(xy) + g_0(x)y$ pour x, y dans $B_0/\mathfrak{R}'B_0$, $\varphi_0 : B_0/\mathfrak{R}'B_0 \rightarrow B_0/\mathfrak{R}B_0$ étant l'homomorphisme canonique. On en conclut aussitôt que l'application A-linéaire composée $g : B/\mathfrak{R}' \rightarrow B_0/\mathfrak{R}'B_0 \xrightarrow{g_0} L$ est telle que $dg = f_0(\varphi \times \varphi)$, où $\varphi : B/\mathfrak{R}' \rightarrow B/\mathfrak{R}$ est l'homomorphisme canonique.

Passons maintenant au cas général, et considérons d'abord le (B/\mathfrak{R}) -module $L/\mathfrak{J}L = L'$, pour lequel on a $\mathfrak{J}L' = 0$; si f' est l'application A-bilinéaire composée $(B/\mathfrak{R}) \times (B/\mathfrak{R}) \xrightarrow{f} L \rightarrow L'$, f' est encore un 2-cocycle de Hochschild symétrique, et en vertu de ce qui précède, il existe un idéal ouvert $\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R}$ dans B et une application A-linéaire $g' : B/\mathfrak{R}' \rightarrow L'$ vérifiant $dg' = f'(\varphi' \times \varphi')$ pour l'application canonique $\varphi' : B/\mathfrak{R}' \rightarrow B/\mathfrak{R}$. Comme B est un A-module formellement projectif, il existe un idéal ouvert $\mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}'$ et une application A-linéaire $g_1 : B/\mathfrak{R}_1 \rightarrow L'$ telle que l'homomorphisme $B/\mathfrak{R}_1 \rightarrow B/\mathfrak{R}' \xrightarrow{g'} L'$ se factorise en $B/\mathfrak{R}_1 \xrightarrow{g_1} L \rightarrow L'$. Considérons alors le 2-cocycle de Hochschild

$$f_1(x, y) = f(\varphi_1(x), \varphi_1(y)) - xg_1(y) + g_1(xy) - g_1(x)y,$$

application A-bilinéaire symétrique de $(B/\mathfrak{R}_1) \times (B/\mathfrak{R}_1)$ dans L. Le choix de g_1 entraîne que f_1 prend ses valeurs dans $\mathfrak{J}L$. Comme $\mathfrak{J}L = 0$, on peut de nouveau appliquer le premier cas, et il y a donc un idéal ouvert $\mathfrak{R}'' \subset \mathfrak{R}_1$ et une application A-linéaire $g_2 : B/\mathfrak{R}'' \rightarrow \mathfrak{J}L$ telle que

$$f_1(\varphi_2(x), \varphi_2(y)) = xg_2(y) - g_2(xy) + g_2(x)y$$

dans $(B/\mathfrak{R}'') \times (B/\mathfrak{R}'')$, $\varphi_2 : B/\mathfrak{R}'' \rightarrow B/\mathfrak{R}_1$ étant l'application canonique; l'application A-linéaire $g = g_2 + g_1 \circ \varphi_2 : B/\mathfrak{R}'' \rightarrow L$ vérifie donc $dg = f_0(\varphi \times \varphi)$ pour l'application canonique $\varphi : B/\mathfrak{R}'' \rightarrow B/\mathfrak{R}$. C.Q.F.D.

19.5. Lissité formelle et anneaux gradués associés.

(19.5.1) Soient C un anneau topologique (commutatif), V un C -module topologique, et considérons l'algèbre symétrique $\mathbf{S}_C^*(V) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbf{S}_C^n(V)$, que nous allons munir canoniquement d'une *topologie linéaire*, compatible avec sa structure de C -algèbre. Pour cela, considérons un sous-module ouvert U de V , et l'*idéal gradué* $U \cdot \mathbf{S}_C^*(V)$ qu'il engendre dans $\mathbf{S}_C^*(V)$; nous prendrons comme système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathbf{S}_C^*(V)$ l'ensemble des sommes $a \cdot \mathbf{S}_C^*(V) + U \cdot \mathbf{S}_C^*(V)$, où a (resp. U) parcourt un système fondamental d'idéaux ouverts (resp. de sous-modules ouverts) de C (resp. V). On notera que si la topologie de V est moins fine que la topologie déduite de celle de C , on peut se borner aux couples (a, U) tels que $aV \subset U$, donc $a \cdot \mathbf{S}_C^*(V) + U \cdot \mathbf{S}_C^*(V) = a \cdot \mathbf{1}_C + U \cdot \mathbf{S}_C^*(V)$; dans ce cas la topologie induite sur chacun des $\mathbf{S}_C^n(V)$ pour $n \geq 1$ a pour système fondamental de voisinages de 0 les $U \cdot \mathbf{S}_C^{n-1}(V)$, où U parcourt les sous-modules ouverts de V ; en particulier, sur $V = \mathbf{S}_C^1(V)$, elle coïncide avec la topologie donnée (en général elle est moins fine que cette dernière). En outre, dans tous les cas, l'*algèbre topologique* $\mathbf{S}_C^*(V)$ ainsi définie est, pour les catégories des C -modules topologiques et des C -algèbres topologiques, la solution du même problème universel que pour les catégories de C -modules et de C -algèbres. En effet, soient E une C -algèbre topologique, $u : V \rightarrow E$ un homomorphisme de C -modules, $\mathbf{S}(u) = \tilde{u}$ son extension canonique à $\mathbf{S}_C^*(V)$. Supposons u continu; alors, si b est un idéal ouvert de E , son image réciproque $U = u^{-1}(b)$ est un sous- C -module ouvert de V , et l'image par \tilde{u} de $U \cdot \mathbf{S}_C^*(V)$ est donc contenue dans b ; comme par ailleurs il existe un idéal ouvert a de C tel que $a \cdot E \subset b$, donc $\tilde{u}(a \cdot \mathbf{S}_C^1(V)) \subset b$, cela prouve que \tilde{u} est continu. Réciproquement, si \tilde{u} est continu, et si b est un idéal ouvert de E , il existe un sous-module ouvert U de V tel que $\tilde{u}(U \cdot \mathbf{S}_C^1(V)) \subset b$, et en particulier $\tilde{u}(U \cdot \mathbf{1}_C) \subset b$, c'est-à-dire $u(U) \subset b$, donc u est continu. Rappelons en outre que l'on a un isomorphisme canonique de C -modules topologiques (discrets)

$$(19.5.1.1) \quad \mathbf{S}_C^n(V)/U \cdot \mathbf{S}_C^{n-1}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}_C^n(V/U).$$

(19.5.2) Soient A un anneau topologique, B une A -algèbre topologique (commutative), \mathfrak{J} un idéal de B (non nécessairement ouvert ni fermé); dans tout ce qui suit, on munit \mathfrak{J} et les \mathfrak{J}^n ($n \geq 2$) de la topologie *induite* par celle de B , les quotients $C = B/\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1} = \text{gr}_{\mathfrak{J}}^n(B)$ de la topologie *quotient*, de sorte que les $\mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1}$ sont des C -modules topologiques; l'injection canonique $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \rightarrow \text{gr}_{\mathfrak{J}}^1(B)$ se prolonge en un homomorphisme (d'abord non topologique) de C -algèbres

$$\varphi : \mathbf{S}_C^*(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) \rightarrow \text{gr}_{\mathfrak{J}}^1(B)$$

qui pour chaque n donne un homomorphisme *surjectif* de C -modules

$$(19.5.2.1) \quad \varphi_n : \mathbf{S}_C^n(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) \rightarrow \mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1} = \text{gr}_{\mathfrak{J}}^n(B).$$

Lorsque $\mathbf{S}_C^n(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)$ est muni de la topologie définie dans (19.5.1), les homomorphismes φ_n sont continus, en vertu de la propriété universelle (19.5.1) de $\mathbf{S}_C^*(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)$

appliquée à la A-algèbre topologique $E = \text{gr}_{\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^n}(B/\mathfrak{J}^n)$ muni de la topologie produit de celles des $\mathfrak{J}^k/\mathfrak{J}^{k+1}$, et à l'injection canonique $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \rightarrow E$. Notons qu'ici la topologie de $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est moins fine que la topologie déduite de celle de C (cette dernière topologie sur $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ étant aussi la topologie déduite de celle de B).

Théorème (19.5.3). — Soient A un anneau topologique, B une A-algèbre topologique, \mathfrak{J} un idéal de B, $C = B/\mathfrak{J}$ la A-algèbre topologique quotient. On suppose que la A-algèbre C est formellement lisse. Alors :

(i) Si B est une A-algèbre formellement lisse, $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est un C-module topologique formellement projectif (19.2.1).

(ii) Si B est une A-algèbre formellement lisse et un anneau préadmissible (0₁, 7.1.2), les homomorphismes φ_n (19.5.2) sont des bimorphismes formels (19.1.2).

(iii) Réciproquement, supposons que B soit préadmissible, que la suite (\mathfrak{J}^n) tende vers 0 dans B, que $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ soit un C-module formellement projectif et que les φ_n soient des bimorphismes formels. Alors B est une A-algèbre formellement lisse.

La démonstration de ce théorème est longue et encombrée de détails techniques; aussi commencerons-nous par en démontrer un corollaire plus simple, où apparaissent plus nettement les idées directrices; ce corollaire est d'ailleurs le cas particulier du théorème (19.5.3) qui sera le plus fréquemment employé par la suite.

Corollaire (19.5.4.). — Soient A un anneau topologique, B une A-algèbre topologique, \mathfrak{J} un idéal de B tel que la topologie de B soit la topologie \mathfrak{J} -préadique. On suppose que la A-algèbre discrète $C = B/\mathfrak{J}$ est formellement lisse. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- a) B est une A-algèbre formellement lisse.
- b) $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est un C-module projectif et l'homomorphisme canonique

$$\varphi : \mathbf{S}_C(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) \rightarrow \text{gr}_{\mathfrak{J}}^*(B)$$

est bijectif.

c) Le séparé complété \hat{B} de B est une \hat{A} -algèbre topologique isomorphe à une \hat{A} -algèbre de la forme \hat{B}' , où $B' = \mathbf{S}_C(V)$, V étant un C-module projectif et B' étant muni de la topologie B'^+ -préadique, où B'^+ est l'idéal d'augmentation.

(19.5.4.1) Prouvons d'abord que a) entraîne que $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est un C-module projectif. Soient donc P et Q deux C-modules, $u : P \rightarrow Q$ un C-homomorphisme surjectif, et $v : \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \rightarrow Q$ un C-homomorphisme. L'anneau B/\mathfrak{J}^2 étant considéré comme une B-extension de C par $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$, on en déduit par v une B-extension $E = (B/\mathfrak{J}^2) \oplus_{(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)} Q$ de C par Q (18.2.8). Comme C est une A-algèbre discrète formellement lisse, l'extension E est A-triviale (19.4.4) et peut donc s'identifier à $D_C(Q)$ (18.2.3). L'homomorphisme surjectif $u : P \rightarrow Q$ définit alors canoniquement un A-homomorphisme surjectif $\psi : D_C(P) \rightarrow D_C(Q)$ (18.2.9) dont le noyau est un idéal \mathfrak{L} de l'extension $E' = D_C(P)$, contenu dans P, et a fortiori de carré nul. Soit $f : B \rightarrow E = E'/\mathfrak{L}$ l'homomorphisme définissant la structure de B-algèbre de E : comme \mathfrak{L} est de carré nul, et que B est une A-algèbre

formellement lisse, f se factorise en $B \xrightarrow{g} E' \rightarrow E'/\mathfrak{L}$, où g est un A-homomorphisme continu. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\psi} & E \\ \uparrow & & \uparrow v' \\ B & \xrightarrow{\theta} & B/\mathfrak{J}^2 \end{array}$$

où v' est déduit de v (18.2.8), est commutatif. D'ailleurs l'image de \mathfrak{J} par $\psi \circ g$ est contenue dans \mathbf{Q} , donc l'image de \mathfrak{J} par g est contenue dans $P + \mathfrak{L} = P$, et l'image de \mathfrak{J}^2 par g est nulle. Restreignant g et θ à \mathfrak{J} , on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{u} & Q \\ w \uparrow & \nearrow v & \\ \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 & & \end{array}$$

ce qui prouve que le C-module $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est projectif.

(19.5.4.2) Prouvons en second lieu que a) entraîne que φ est bijectif, ce qui achèvera de montrer que a) entraîne b). Posons $E_n = B/\mathfrak{J}^{n+1}$, et désignons par F_n le quotient de $\mathbf{S}_C(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)$ par la puissance $(n+1)^e$ de son idéal d'augmentation. Comme $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^{n+1}$ est nilpotent dans E_n et que C est une A-algèbre discrète formellement lisse, l'automorphisme identique de C se factorise en $C \xrightarrow{f} E_n \rightarrow C = E_n / (\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^{n+1})$ où f est un A-homomorphisme; d'autre part, $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ étant un C-module projectif d'après (19.5.4.1), l'automorphisme identique de $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ se factorise en $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \xrightarrow{g} \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^{n+1} \rightarrow \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$, où g est une application C-linéaire; à partir de f et g on obtient canoniquement un homomorphisme de C-algèbres $\mathbf{S}_C(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) \rightarrow E_n$ qui d'ailleurs (par définition de g) s'annule sur la puissance $(n+1)^e$ de l'idéal d'augmentation de $\mathbf{S}_C(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)$, d'où, en passant au quotient, un A-homomorphisme surjectif d'algèbres $v : F_n \rightarrow E_n$ tel que $\text{gr}^0(v)$ et $\text{gr}^1(v)$ soient les automorphismes identiques de C et de $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$. Par définition de l'homomorphisme canonique φ , on voit que $\text{gr}^j(v) = \varphi_j$ pour tout $j \leq n$. Notons maintenant que le noyau \mathfrak{N} de v est un idéal nilpotent de F_n , de sorte que E_n s'identifie à F_n / \mathfrak{N} . Comme B est une A-algèbre formellement lisse, le A-homomorphisme canonique $p_n : B \rightarrow E_n = B / \mathfrak{J}^{n+1}$, qui est continu, se factorise en $B \xrightarrow{w} F_n \xrightarrow{v} E_n$, où w est un A-homomorphisme continu; comme $\text{gr}^0(v)$ est l'identité, $w(\mathfrak{J})$ est contenu dans l'idéal d'augmentation de F_n , d'où $w(\mathfrak{J}^{n+1}) = 0$, si bien que w se factorise en $B \xrightarrow{p_n} B / \mathfrak{J}^n = E_n \xrightarrow{w'} F_n$, et le composé $E_n \xrightarrow{w'} F_n \xrightarrow{v} E_n$ est l'identité. En outre, comme $\text{gr}^0(v)$ et $\text{gr}^1(v)$ sont les automorphismes identiques de C et de $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$, il en est de même de $\text{gr}^0(w')$ et de $\text{gr}^1(w')$. Comme $\text{gr}^*(E_n)$ est engendré par $\text{gr}^1(E_n)$, l'homomorphisme composé

$$\text{gr}^j(F_n) \xrightarrow{\varphi_j} \text{gr}^j(E_n) \xrightarrow{\text{gr}^j(w')} \text{gr}^j(F_n)$$

est l'identité pour tout $j \leq n$, puisque c'est vrai pour $j=0$ et $j=1$; faisant $j=n$, on prouve ainsi que φ_n est injectif, ce qui achève de montrer que a) entraîne b). •

(19.5.4.3) Prouvons ensuite que *b*) entraîne *a*). Le même raisonnement qu'au début de (19.5.4.2) prouve l'existence d'un A-homomorphisme surjectif d'algèbres $v : F_n \rightarrow E_n$ tel que $\text{gr}^j(v) = \varphi_j$ pour tout j ; comme φ_j est bijectif pour tout j et que les filtrations de F_n et E_n sont finies, on en conclut que v est *bijectif* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 8, cor. 3 du th. 1). Soient maintenant G une A-algèbre topologique discrète, \mathfrak{N} un idéal de carré nul dans G, $f : B \rightarrow G/\mathfrak{N}$ un A-homomorphisme continu d'algèbres. Comme G est discrète, il existe un entier m tel que f s'annule dans \mathfrak{J}^m , donc f se factorise en $B \xrightarrow{f_n} E_n \xrightarrow{f_n} G/\mathfrak{N}$, où l'on prend $n = 2m$. On a donc par composition un A-homomorphisme continu d'algèbres $r : C \xrightarrow{v} F_n \xrightarrow{f_n} G/\mathfrak{N}$, et comme C est une A-algèbre formellement lisse discrète, r se factorise en $C \xrightarrow{r'} G \xrightarrow{\theta} G/\mathfrak{N}$, de sorte que G est muni par r' d'une structure de C-algèbre. D'autre part, la restriction à $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ de l'homomorphisme $f'_n : F_n \xrightarrow{v} E_n \xrightarrow{f_n} G/\mathfrak{N}$ est une application C-linéaire $g : \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \rightarrow G/\mathfrak{N}$. Puisque $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est un C-module projectif, g se factorise en $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \xrightarrow{h} G \rightarrow G/\mathfrak{N}$, où h est une application C-linéaire; par prolongement, on en déduit un homomorphisme de C-algèbres $w : S_C(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) \rightarrow G$, et par construction tout élément de degré m a pour image par w un élément de \mathfrak{N} , donc tout élément de degré $n = 2m$ a une image nulle puisque $\mathfrak{N}^2 = 0$; autrement dit, w se factorise en $S_C(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) \xrightarrow{w'} F_n \xrightarrow{\theta} G$. Par construction, le composé $F_n \xrightarrow{w'} G \xrightarrow{\theta} G/\mathfrak{N}$ coïncide avec f'_n dans C et dans $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$, donc est égal à f'_n . Finalement, le composé

$$B \xrightarrow{v^{-1}} E_n \xrightarrow{f_n} F_n \xrightarrow{w'} G \xrightarrow{\theta} G/\mathfrak{N}$$

étant égal à f , on voit que B est une A-algèbre formellement lisse.

(19.5.4.4) Il reste à prouver l'équivalence de *a*) et *c*). En premier lieu, *c*) entraîne *a*): en effet, B' est une C-algèbre formellement lisse pour la topologie discrète (19.3.2), donc aussi pour la topologie B'^+ -préadique (19.3.8); comme C est une A-algèbre formellement lisse, B' est aussi une A-algèbre formellement lisse (19.3.5, (ii)) et finalement \hat{B}' est une \hat{A} -algèbre formellement lisse (19.3.6), donc B est une A-algèbre formellement lisse (19.3.6). Reste à voir que *a*) entraîne *c*). Notons d'abord que puisque C est une A-algèbre formellement lisse, l'homomorphisme identique $C \rightarrow B/\mathfrak{J}$ se factorise en $C \rightarrow \hat{B} \rightarrow B/\mathfrak{J}$, où $C \rightarrow \hat{B}$ est un A-homomorphisme (19.3.10); \hat{B} , et par suite tous les B/\mathfrak{J}^{n+1} , sont donc munis de structures de C-algèbres. D'autre part, comme $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est un C-module projectif par *b*), l'injection canonique $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \rightarrow B/\mathfrak{J}^2$ permet de former un système projectif de C-homomorphismes $u_n : \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \rightarrow B/\mathfrak{J}^{n+1}$ pour $n \geq 1$, donc aussi (par la propriété universelle de l'algèbre symétrique) un système projectif d'homomorphismes de C-algèbres $v_n : S_C(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) = B' \rightarrow B/\mathfrak{J}^{n+1}$; d'ailleurs il est clair que v_n s'annule dans $(B'^+)^{n+1}$ et comme $\text{gr}^0(v_n) = \varphi_0$ et $\text{gr}^1(v_n) = \varphi_1$, on a $\text{gr}^j(v_n) = \varphi_j$ pour $0 \leq j \leq n$. Comme les φ_j sont des isomorphismes par *b*), et que les filtrations de $B'/(B'^+)^{n+1}$ et de B/\mathfrak{J}^{n+1} sont finies, on en conclut que v_n est *bijectif* pour

tout n (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, no 8, cor. 3 du th. 1); d'où $c)$ par passage à la limite projective.

Remarque (19.5.5). — Sous les hypothèses générales de (19.5.4), supposons en outre que \mathfrak{J} soit un idéal maximal de B , de sorte que $C = B/\mathfrak{J}$ est un corps, et que $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ soit un C -espace vectoriel de dimension finie. Alors les conditions $a)$, $b)$ et $c)$ de (19.5.4) sont encore équivalentes à la suivante :

d) *Étant donné une algèbre de polynômes $E = C[T_1, \dots, T_n]$ sur le corps C , et en désignant par \mathfrak{n} l'idéal maximal de E engendré par les T_i ($1 \leq i \leq n$), alors, pour tout idéal \mathfrak{b} de E contenant une puissance \mathfrak{n}^k , tout homomorphisme $v : B \rightarrow E/\mathfrak{b}$ de A -algèbres C -augmentées se factorise en $B \xrightarrow{w} E/\mathfrak{n}^k \rightarrow E/\mathfrak{b}$, où w est un A -homomorphisme.*

En effet, $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ étant ici un C -module libre, il suffit de vérifier que la condition $d)$ entraîne que l'homomorphisme canonique $\varphi : \mathbf{S}_C(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) \rightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{J}}(B)$ est bijectif. Or ici $\mathbf{S}_C(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)$ s'identifie à l'algèbre de polynômes $E = C[T_1, \dots, T_n]$, où $n = \mathrm{rg}_C(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)$, et l'idéal d'augmentation de E est l'idéal \mathfrak{n} engendré par les T_i . Pour tout entier $k \geq 0$, l'hypothèse que C est une A -algèbre discrète formellement lisse entraîne comme dans (19.5.4.2) l'existence d'un A -homomorphisme surjectif $f : E/\mathfrak{n}^{k+1} \rightarrow B/\mathfrak{J}^{k+1}$, tel que $\mathrm{gr}^j(f) = \varphi_j$ pour tout $j \leq k$. Si $\mathfrak{b}/\mathfrak{n}^{k+1} = \mathrm{Ker}(f)$, B/\mathfrak{J}^{k+1} s'identifie donc à E/\mathfrak{b} , et l'hypothèse $d)$ permet de factoriser l'homomorphisme canonique $B \rightarrow B/\mathfrak{J}^{k+1}$ en $B \xrightarrow{w} E/\mathfrak{n}^{k+1} \xrightarrow{f} B/\mathfrak{J}^{k+1}$; comme $\mathrm{gr}^0(f)$ est l'identité, on a $w(\mathfrak{J}) \subset \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^{k+1}$, donc $w(\mathfrak{J}^{k+1}) = 0$; on conclut comme dans (19.5.4.2) que φ_k est injectif pour tout k , ce qui achève de prouver notre assertion.

(19.5.6) *Démonstration du théorème (19.5.3).* — Soit (\mathfrak{b}_α) un système fondamental décroissant d'idéaux ouverts de B . Nous poserons

$$B_\alpha = B/\mathfrak{b}_\alpha, \quad C_\alpha = B/(\mathfrak{b}_\alpha + \mathfrak{J}), \quad \mathfrak{J}_\alpha = (\mathfrak{b}_\alpha + \mathfrak{J})/\mathfrak{b}_\alpha,$$

de sorte que

$$C_\alpha = B_\alpha/\mathfrak{J}_\alpha \quad \text{et} \quad \mathfrak{J}_\alpha^n/\mathfrak{J}_\alpha^{n+1} = (\mathfrak{b}_\alpha + \mathfrak{J}^n)/(\mathfrak{b}_\alpha + \mathfrak{J}^{n+1}).$$

Les C -modules $((\mathfrak{b}_\alpha \cap \mathfrak{J}^n) + \mathfrak{J}^{n+1})/\mathfrak{J}^{n+1}$ de $\mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1}$ forment un système fondamental de sous-modules ouverts du C -module topologique $\mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1}$; comme $(\mathfrak{b}_\alpha \cap \mathfrak{J}^n) + \mathfrak{J}^{n+1} = \mathfrak{J}^n \cap (\mathfrak{b}_\alpha + \mathfrak{J}^{n+1})$, on a

$$\mathfrak{J}^n/((\mathfrak{b}_\alpha \cap \mathfrak{J}^n) + \mathfrak{J}^{n+1}) = \mathfrak{J}^n/(\mathfrak{J}^n \cap (\mathfrak{b}_\alpha + \mathfrak{J}^{n+1})) = (\mathfrak{b}_\alpha + \mathfrak{J}^n)/(\mathfrak{b}_\alpha + \mathfrak{J}^{n+1}) = \mathfrak{J}_\alpha^n/\mathfrak{J}_\alpha^{n+1}.$$

(19.5.6.1) *Démonstration de (19.5.3, (i)).* — Soient P, Q deux C_α -modules discrets, $u : P \rightarrow Q$ un C_α -homomorphisme surjectif. L'anneau discret $B/(\mathfrak{b}_\alpha + \mathfrak{J}^2)$ est une B -extension de C_α par l'idéal de carré nul $\mathfrak{J}_\alpha/\mathfrak{J}_\alpha^2$. Soit $v : \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \rightarrow Q$ un C -homomorphisme continu; remplaçant au besoin \mathfrak{b}_α par un idéal ouvert plus petit de B , on peut supposer que le noyau de v contient le sous- C -module ouvert $((\mathfrak{b}_\alpha \cap \mathfrak{J}) + \mathfrak{J}^2)/\mathfrak{J}^2$; passant au quotient, on déduit de v un C_α -homomorphisme de modules discrets $v' : \mathfrak{J}_\alpha/\mathfrak{J}_\alpha^2 \rightarrow Q$; soit E_α la B_α -extension de C_α par Q déduite de $B/(\mathfrak{b}_\alpha + \mathfrak{J}^2)$ au moyen de v' , et soit $v'_* : B/(\mathfrak{b}_\alpha + \mathfrak{J}^2) \rightarrow E_\alpha$ le B_α -homomorphisme correspondant (18.2.8); E_α est une A -algèbre topologique discrète, et l'isomorphisme canonique $C_\alpha \xrightarrow{\sim} E_\alpha/Q$ donne par composition un A -homomorphisme continu $f : C \rightarrow C_\alpha \rightarrow E_\alpha/Q$. Mais comme Q est de carré nul dans E_α et que C est une A -algèbre formellement lisse, f se factorise en $C \xrightarrow{g} E_\alpha \rightarrow E_\alpha/Q$ où g est un A -homomorphisme continu. Comme g est continu et E_α discret, il existe un $\beta \geq \alpha$ tel que g se factorise en $C \xrightarrow{g} C_\beta \xrightarrow{g'} E_\alpha$. D'autre part, soit E_β la A -extension de C_β par Q , image réciproque de E_α par l'homomorphisme canonique $C_\beta \rightarrow C_\alpha$; l'existence de g' (tel que le composé $C_\beta \xrightarrow{g'} E_\alpha \rightarrow C_\alpha$ soit l'homomorphisme canonique) équivaut au fait que E_β est une extension A -triviale, et peut donc s'identifier à $D_{C_\beta}(Q)$. Cela étant, l'homomorphisme surjectif $u : P \rightarrow Q$ définit canoniquement un

homomorphisme surjectif $D_{C_\beta}(P) \rightarrow D_{C_\beta}(Q)$ (18.2.9), dont le noyau est un idéal \mathfrak{I} de l'extension $E'_\beta = D_{C_\beta}(P)$ contenu dans P , et *a fortiori* de carré nul. Soit $f' : B \rightarrow E_\beta = E'_\beta/\mathfrak{I}$ le A -homomorphisme continu définissant la structure de B -algèbre topologique de E_β ; comme \mathfrak{I} est de carré nul et que B est une A -algèbre formellement lisse, f' se factorise en $B \xrightarrow{h'} E'_\beta \rightarrow E'_\beta/\mathfrak{I}$, où h' est un A -homomorphisme continu. La construction de E'_β donne par composition un A -homomorphisme $\psi : E'_\beta \rightarrow E_\beta \rightarrow E_\alpha$, et il est clair que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E'_\beta & \xrightarrow{\psi} & E_\alpha \\ h' \uparrow & & \uparrow v_* \\ B & \xrightarrow[\theta]{} & B/(\mathfrak{b}_\alpha + \mathfrak{J}^2) \end{array}$$

est commutatif. D'ailleurs, l'image par $\psi \circ h'$ de \mathfrak{J} est contenue dans Q , donc l'image par h' de \mathfrak{J} est contenue dans P , et l'image de \mathfrak{J}^2 par h' est nulle. Restreignant h' et θ à \mathfrak{J} , on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{w} & Q \\ w \uparrow & \nearrow v & \\ \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 & & \end{array}$$

où w est continu, ce qui prouve que $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est un C -module formellement projectif.

(19.5.6.2) Pour tout entier $n \geq 0$, nous poserons

$$E_n = B/\mathfrak{J}^{n+1}, \quad \text{de sorte que } E_0 = C;$$

les idéaux $(\mathfrak{b}_\alpha + \mathfrak{J}^{n+1})/\mathfrak{J}^{n+1}$ forment un système fondamental d'idéaux ouverts dans E_n , et nous poserons

$$E_{\alpha,n} = B/(\mathfrak{b}_\alpha + \mathfrak{J}^{n+1}) = B_\alpha/\mathfrak{J}_\alpha^{n+1},$$

anneau quotient discret. De même, dans $\text{gr}_{\mathfrak{J}}^n(B) = \mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1}$, nous avons vu que les $((\mathfrak{b}_\alpha \cap \mathfrak{J}^n) + \mathfrak{J}^{n+1})/\mathfrak{J}^{n+1}$ forment un système fondamental de voisinages de 0 , le quotient de $\mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1}$ par ce sous-module s'identifiant canoniquement à $\mathfrak{J}_\alpha^n/\mathfrak{J}_\alpha^{n+1}$. Considérons l'algèbre symétrique $S_{C_\alpha}^*(\mathfrak{J}_\alpha/\mathfrak{J}_\alpha^2)$; nous noterons $F_{\alpha,n}$ le quotient de $S_{C_\alpha}^*(\mathfrak{J}_\alpha/\mathfrak{J}_\alpha^2)$ par la puissance $(n+1)^\text{e}$ de son idéal d'augmentation. Pour un $n \geq 1$ fixé, il résulte de (19.5.1.1) que les $S_{C_\alpha}^n(\mathfrak{J}_\alpha/\mathfrak{J}_\alpha^2)$ sont les quotients de $S_C^n(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)$ par un système fondamental de sous-modules ouverts dans ce C -module topologique.

Pour abréger le langage, nous dirons que pour $\alpha \leq \beta$, les homomorphismes canoniques $B_\beta \rightarrow B_\alpha$, $C_\beta \rightarrow C_\alpha$, $\mathfrak{J}_\beta/\mathfrak{J}_\beta^2 \rightarrow \mathfrak{J}_\alpha/\mathfrak{J}_\alpha^2$, $E_{\beta,n} \rightarrow E_{\alpha,n}$, $F_{\beta,n} \rightarrow F_{\alpha,n}$, etc., sont les *homomorphismes de transition*.

Lemme (19.5.6.3). — Supposons que la A -algèbre C soit formellement lisse, l'anneau B préadmissible et le C -module $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ formellement projectif. Alors :

(i) Pour tout α , il existe $\beta \geq \alpha$ et un A -homomorphisme surjectif d'algèbres :

$$v_{\alpha\beta} : F_{\beta,n} \rightarrow E_{\alpha,n}$$

tel que $\text{gr}^0(v_{\alpha\beta}) : C_\beta \rightarrow C_\alpha$ et $\text{gr}^1(v_{\alpha\beta}) : \mathfrak{J}_\beta/\mathfrak{J}_\beta^2 \rightarrow \mathfrak{J}_\alpha/\mathfrak{J}_\alpha^2$ soient les homomorphismes de transition.

(ii) Si β et $v_{\alpha\beta}$ vérifient les conditions de (i), alors, pour tout $\gamma \geq \beta$, il existe $\delta \geq \gamma$ et un A -homomorphisme surjectif d'algèbres $v_{\gamma\delta} : F_{\delta,n} \rightarrow E_{\gamma,n}$ vérifiant les conditions de (i) (pour γ et δ) et rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F_{\beta,n} & \xrightarrow{v_{\alpha\beta}} & E_{\alpha,n} \\ \uparrow & & \uparrow \\ F_{\delta,n} & \xrightarrow[v_{\gamma\delta}]{} & E_{\gamma,n} \end{array}$$

(19.5.6.4)

où les flèches verticales sont les homomorphismes de transition.

(i) Dans la A -algèbre topologique discrète $E_{\alpha,n}$, l'idéal $\mathfrak{J}_\alpha/\mathfrak{J}_\alpha^{n+1}$ est nilpotent, et l'isomorphisme identique $C_\alpha \xrightarrow{\sim} E_{\alpha,n}/(\mathfrak{J}_\alpha/\mathfrak{J}_\alpha^{n+1})$ donne par composition un A -homomorphisme continu $C \rightarrow C_\alpha \rightarrow E_{\alpha,n}/(\mathfrak{J}_\alpha/\mathfrak{J}_\alpha^{n+1})$;

comme C est une A -algèbre formellement lisse, cet homomorphisme se factorise en $C \xrightarrow{f_\alpha} E_{\alpha,n} \rightarrow E_{\alpha,n}/(\mathfrak{I}_\alpha/\mathfrak{I}_\alpha^{n+1})$, où f_α est un A -homomorphisme continu; par suite, $\mathfrak{I}_\alpha/\mathfrak{I}_\alpha^{n+1}$ devient, au moyen de f_α , un C -module topologique discret annulé par un idéal ouvert de C . L'hypothèse que $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ est un C -module formellement projectif entraîne alors l'existence d'une application C -linéaire continue $g_\alpha : \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \rightarrow \mathfrak{I}_\alpha/\mathfrak{I}_\alpha^{n+1}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{I}_\alpha/\mathfrak{I}_\alpha^{n+1} & \rightarrow & \mathfrak{I}_\alpha/\mathfrak{I}_\alpha^2 \\ g_\alpha \swarrow & & \uparrow \\ \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 & & \end{array}$$

Comme f_α et g_α sont continus, il y a un $\beta \geq \alpha$ tel que ces homomorphismes se factorisent respectivement en

$$\begin{array}{c} C \rightarrow C_\beta \xrightarrow{f'_\alpha \beta} E_{\alpha,n} \\ \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \rightarrow \mathfrak{I}_\beta/\mathfrak{I}_\beta^2 \xrightarrow{g'_\alpha \beta} \mathfrak{I}_\alpha/\mathfrak{I}_\alpha^{n+1} \end{array}$$

et à partir de $f'_\alpha \beta$ et $g'_\alpha \beta$, on obtient donc canoniquement un homomorphisme de C_β -algèbres

$$S_{C_\beta}^*(\mathfrak{I}_\beta/\mathfrak{I}_\beta^2) \rightarrow E_{\alpha,n}$$

qui d'ailleurs (par définition de $g'_\alpha \beta$) s'annule dans la puissance $(n+1)^e$ de l'idéal d'augmentation de $S_{C_\beta}^*(\mathfrak{I}_\beta/\mathfrak{I}_\beta^2)$; passant au quotient par cette puissance $(n+1)^e$, on obtient l'homomorphisme $v_{\alpha\beta}$ cherché, compte tenu des définitions de f_α et g_α ; la surjectivité de $v_{\alpha\beta}$ résulte en effet de celle des deux homomorphismes $\text{gr}^0(v_{\alpha\beta})$ et $\text{gr}^1(v_{\alpha\beta})$, puisque cela entraîne que $\text{gr}(v_{\alpha\beta})$ est surjectif (l'algèbre $\text{gr}^*(E_{\alpha,n})$ étant engendrée par $\text{gr}^0(E_{\alpha,n})$ et $\text{gr}^1(E_{\alpha,n})$), et comme les filtrations considérées sont finies, on peut appliquer Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 8, cor. 3 du th. 1.

(ii) L'hypothèse que B est *préadmissible* signifie que l'on peut supposer tous les b_α contenus dans un même b_α , dont les puissances *tendent vers* 0. Cela entraîne en particulier que le noyau de l'homomorphisme de transition $E_{\gamma,n} \rightarrow E_{\alpha,n}$, égal à $(b_\alpha : \mathfrak{I}^{n+1})/(b_\gamma : \mathfrak{I}^{n+1})$, est *nilpotent*; appliquant le lemme (19.3.10.1), on voit qu'on peut supposer f_γ choisi de sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & E_{\alpha,n} & \\ \alpha \nearrow & \uparrow & \\ C & & E_{\gamma,n} \\ f_\gamma \searrow & & \end{array}$$

(où la flèche verticale est l'homomorphisme de transition) soit commutatif. L'hypothèse que $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ est un C -module formellement projectif permet d'autre part de choisir $g_\gamma : \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \rightarrow \mathfrak{I}_\gamma/\mathfrak{I}_\gamma^{n+1}$ de sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{I}_\alpha/\mathfrak{I}_\alpha^{n+1} & \longrightarrow & \mathfrak{I}_\alpha/\mathfrak{I}_\alpha^2 & & \\ \uparrow & \searrow g_\alpha & \uparrow & & \\ \mathfrak{I}_\gamma/\mathfrak{I}_\gamma^{n+1} & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{I}_\gamma/\mathfrak{I}_\gamma^2 & & \\ \downarrow g_\gamma & & \downarrow p_\gamma & & \\ \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 & & & & \end{array}$$

soit commutatif (il suffit de remarquer que l'image par (g_α, p_γ) de $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ dans le module produit $(\mathfrak{I}_\alpha/\mathfrak{I}_\alpha^{n+1}) \times (\mathfrak{I}_\gamma/\mathfrak{I}_\gamma^2)$ est contenue (vu la définition de g_α et de la relation $\beta \leq \gamma$) dans l'image canonique Q dans ce module produit du

module $P = \mathfrak{J}_\gamma/\mathfrak{J}_\gamma^{n+1}$, et d'appliquer la définition (19.2.1) à l'homomorphisme *surjectif* $P \rightarrow Q$ et à l'homomorphisme (g_α, p_γ) de $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ dans Q). Ce choix de f_γ et de g_γ permet alors, en construisant $v_{\beta\gamma}$ comme dans (i), d'obtenir en outre la commutativité du diagramme (19.5.6.4).

Lemme (19.5.6.5). — *Supposons que les A-algèbres B et C soient formellement lisses et que B soit préadmissible (de sorte qu'en vertu de (19.5.6.1), les conditions de (19.5.6.3) sont satisfaites). Pour tout système de deux indices $\alpha \leq \beta$ et d'un homomorphisme $v_{\alpha\beta}$ vérifiant les conditions de (19.5.6.3, (i)), il existe un indice $\lambda \geq \beta$ et un A-homomorphisme d'algèbres*

$$w_{\beta\lambda} : E_{\lambda, n} \rightarrow F_{\beta, n}$$

tel que : 1° $\text{gr}^0(w_{\beta\lambda}) : C_\lambda \rightarrow C_\beta$ et $\text{gr}^1(w_{\beta\lambda}) : \mathfrak{J}_\lambda/\mathfrak{J}_\lambda^2 \rightarrow \mathfrak{J}_\beta/\mathfrak{J}_\beta^2$ soient les homomorphismes de transition; 2° le composé $E_{\lambda, n} \xrightarrow{w_{\beta\lambda}} F_{\beta, n} \xrightarrow{v_{\alpha\beta}} E_{\alpha, n}$ soit l'homomorphisme de transition.

Appliquons le lemme (19.5.6.3, (ii)) avec $\gamma = \beta$, ce qui donne un $\delta \geq \beta$ et un $v_{\beta\delta} : F_{\delta, n} \rightarrow E_{\beta, n}$. Rappelons que $v_{\beta\delta}$ est surjectif; d'autre part, son noyau \mathfrak{N} est nilpotent : en effet, l'idéal d'augmentation $F_{\delta, n}^+$ de $F_{\delta, n}$ est nilpotent par définition, et le noyau de $\text{gr}^0(v_{\beta\delta}) : C_\delta \rightarrow C_\beta$ est aussi nilpotent en vertu de l'hypothèse que B est préadmissible. On voit donc que $E_{\beta, n}$ s'identifie à $F_{\delta, n}/\mathfrak{N}$. Comme B est une A-algèbre formellement lisse, le A-homomorphisme canonique $p_{\beta, n} : B \rightarrow E_{\beta, n}$, qui est continu, se factorise en $B \xrightarrow{w} F_{\delta, n} \xrightarrow{v_{\beta\delta}} E_{\beta, n}$, où w est un A-homomorphisme continu. Comme $F_{\delta, n}$ est discret, il existe $\lambda \geq \delta$ tel que w soit nul dans \mathfrak{b}_λ , donc w se factorise en $B \xrightarrow{w_\lambda} B/\mathfrak{b}_\lambda \rightarrow F_{\delta, n}$. Considérons l'homomorphisme composé $w'_\lambda : B/\mathfrak{b}_\lambda \rightarrow F_{\delta, n} \xrightarrow{v_{\beta\delta}} F_{\beta, n}$, où $v_{\beta\delta}$ est l'homomorphisme de transition; notons que $\text{gr}^0(v_{\beta\delta}) - \text{gr}^0(v_{\beta\delta}) : C_\delta \rightarrow C_\beta$ est l'homomorphisme de transition; comme le composé $v_{\beta\delta} \circ w_\lambda$ est l'homomorphisme canonique $B/\mathfrak{b}_\lambda \rightarrow B/(\mathfrak{b}_\lambda + \mathfrak{J}^{n+1})$, cela montre que l'image de $\mathfrak{J}_\lambda = (\mathfrak{b}_\lambda + \mathfrak{J})/\mathfrak{b}_\lambda$ par w'_λ est contenue dans l'idéal d'augmentation $F_{\delta, n}^+$, et par suite l'image par w'_λ de $\mathfrak{J}_\lambda^{n+1} = (\mathfrak{b}_\lambda + \mathfrak{J}^{n+1})/\mathfrak{b}_\lambda = \mathfrak{J}^{n+1}/(\mathfrak{b}_\lambda \cap \mathfrak{J}^{n+1})$ est nulle. Autrement dit, w'_λ se factorise en

$$B/\mathfrak{b}_\lambda \rightarrow B/(\mathfrak{b}_\lambda + \mathfrak{J}^{n+1}) \xrightarrow{w_{\beta\lambda}} F_{\beta, n}$$

tel que le composé $E_{\lambda, n} \xrightarrow{w_{\beta\lambda}} F_{\beta, n} \xrightarrow{v_{\alpha\beta}} E_{\alpha, n}$ soit l'homomorphisme de transition. Le raisonnement précédent montre aussi que $\text{gr}^0(w_{\beta\lambda})$, qui est le composé $B/(\mathfrak{b}_\lambda + \mathfrak{J}) \rightarrow \text{gr}^0(F_{\delta, n}) \xrightarrow{\text{gr}^0(v_{\beta\delta})} \text{gr}^0(F_{\beta, n})$, est l'homomorphisme de transition $C_\lambda \rightarrow C_\beta$, puisque $v_{\beta\delta} \circ w_\lambda$ est l'homomorphisme canonique. En outre, on a aussi $\text{gr}^1(v_{\beta\delta}) = \text{gr}^1(v_{\beta\delta})$ (19.5.6.3), donc le même raisonnement prouve que $\text{gr}^1(w_{\beta\lambda})$ est l'homomorphisme de transition.

(19.5.6.6) Démonstration de (19.5.3, (ii)). — Pour montrer que φ_n est un bimorphisme formel, nous allons appliquer le critère de (19.1.3, (iii)). Les conditions de (19.5.6.5) étant satisfaites par hypothèse, déterminons, pour tout indice α , $v_{\alpha\beta}$ et $w_{\beta\lambda}$ vérifiant les conclusions de ce lemme. L'homomorphisme

$$\text{gr}^n(v_{\alpha\beta}) : \text{gr}^n(F_{\beta, n}) \rightarrow \text{gr}^n(E_{\alpha, n})$$

n'est autre que l'homomorphisme

$$\varphi_{\alpha\beta, n} : S_{C_\beta}^n(\mathfrak{J}_\beta/\mathfrak{J}_\beta^2) \rightarrow \mathfrak{J}_\alpha^n/\mathfrak{J}_\alpha^{n+1}$$

déduit de l'homomorphisme canonique φ_n (19.5.2.1) par passage aux quotients; en effet, il résulte de (19.5.6.3) que $\text{gr}^0(v_{\alpha\beta})$ et $\text{gr}^1(v_{\alpha\beta})$ coïncident respectivement avec $\varphi_{\alpha\beta, 0}$ et $\varphi_{\alpha\beta, 1}$, et la définition de l'homomorphisme canonique φ montre alors, par récurrence sur $j \leq n$, que $\text{gr}^j(v_{\alpha\beta})$ et $\varphi_{\alpha\beta, j}$ sont égaux pour tout j . Cela étant, comme φ_n est surjectif, c'est *a fortiori* un épimorphisme formel; en outre, pour $j \leq n$, l'homomorphisme composé

$$\text{gr}^j(F_{\lambda, n}) \xrightarrow{\varphi_{\lambda\beta, j}} \text{gr}^j(E_{\lambda, n}) \xrightarrow{\text{gr}^j(w_{\beta\lambda})} \text{gr}^j(F_{\beta, n})$$

est l'homomorphisme de transition, car c'est vrai pour $j = 0$ et $j = 1$ en vertu de (19.5.6.5), et comme $\text{gr}^*(E_{\lambda, n})$ est engendré par $\text{gr}^1(E_{\lambda, n})$ cela démontre l'assertion par récurrence sur j . Composant avec l'homomorphisme de transition $\text{gr}^j(F_{\beta, n}) \rightarrow \text{gr}^j(F_{\alpha, n})$, on voit donc, pour $j = n$, que l'on a factorisé l'homomorphisme de transition $\text{gr}^n(F_{\lambda, n}) \rightarrow \text{gr}^n(F_{\alpha, n})$ en

$$\text{gr}^n(F_{\lambda, n}) \xrightarrow{\varphi_{\lambda\beta, n}} \text{gr}^n(E_{\lambda, n}) \rightarrow \text{gr}^n(F_{\alpha, n})$$

ce qui est la condition du critère (19.1.3) pour que φ_n soit un bimorphisme formel.

Lemme (19.5.6.7). — Supposons que B soit préadmissible, que $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ soit un C -module formellement projectif, que C soit une A -algèbre formellement lisse et que les φ_n soient des bimorphismes formels. Alors, pour tout couple d'indices α, β tel que $\alpha \leq \beta$ et tout homomorphisme $v_{\alpha\beta} : F_{\beta,n} \rightarrow E_{\alpha,n}$ vérifiant les conditions de (19.5.6.3, (i)), il existe un indice $\gamma \geq \beta$ tel que, pour tout indice $\mu \geq \gamma$, il y ait un diagramme commutatif de A -homomorphismes

$$\begin{array}{ccc} F_{\beta,n} & \xrightarrow{v_{\alpha\beta}} & E_{\alpha,n} \\ u_{\beta\mu} \swarrow & & \uparrow p_{\alpha\mu} \\ & & E_{\mu,n} \end{array}$$

où $p_{\alpha\mu}$ est l'homomorphisme de transition.

Appliquant le critère (19.1.3) à chacun des φ_j pour $0 \leq j \leq n$, on voit qu'il existe un indice $\gamma \geq \beta$ et des homomorphismes uniquement déterminés (et surjectifs) de C_γ -modules

$$w_{\beta\gamma}^j : \text{gr}^j(E_{\gamma,n}) \rightarrow \text{gr}^j(F_{\beta,n})$$

tels que les composés

$$\text{gr}^j(F_{\gamma,n}) \xrightarrow{\varphi_{\gamma\gamma,j}} \text{gr}^j(E_{\gamma,n}) \xrightarrow{w_{\beta\gamma}^j} \text{gr}^j(F_{\beta,n})$$

soient les homomorphismes de transition (le fait qu'on puisse choisir le même indice γ pour tous les γ_j résulte de ce qu'ils sont en nombre fini). En outre, l'unicité des $w_{\beta\gamma}^j$ prouve (puisque φ est un homomorphisme d'algèbres graduées) que $w_{\beta\gamma} = (w_{\beta\gamma}^j)_{0 \leq j \leq n}$ est un homomorphisme de C_γ -algèbres graduées $\text{gr}^*(E_{\gamma,n}) \rightarrow \text{gr}^*(F_{\beta,n}) = F_{\beta,n}$. En outre, comme $\varphi_{\gamma\gamma,0}$ et $\varphi_{\gamma\gamma,1}$ sont les homomorphismes identiques, $w_{\beta\gamma}^0 : C_\gamma \rightarrow C_\beta$ et $w_{\beta\gamma}^1 : \mathfrak{I}_\gamma/\mathfrak{I}_\gamma^2 \rightarrow \mathfrak{I}_\beta/\mathfrak{I}_\beta^2$ sont les homomorphismes de transition, et il en est donc de même de $\text{gr}^0(v_{\alpha\beta} \circ w_{\beta\gamma})$ et de $\text{gr}^1(v_{\alpha\beta} \circ w_{\beta\gamma})$; comme $\text{gr}^*(E_{\gamma,n})$ est engendré par $\text{gr}^1(E_{\gamma,n})$, on en conclut que $\text{gr}^j(v_{\alpha\beta} \circ w_{\beta\gamma})$ est aussi l'homomorphisme de transition pour $0 \leq j \leq n$. Appliquons maintenant à α, β et γ le lemme (19.5.6.3, (ii)), ce qui donne le diagramme (19.5.6.4) avec $\delta \geq \gamma$; puis répétons le raisonnement du début en remplaçant α et β par γ et δ . On obtient ainsi un indice $\lambda \geq \delta$ et un diagramme commutatif d'homomorphismes

$$\begin{array}{ccccc} \text{gr}^*(E_{\gamma,n}) & \xrightarrow{w_{\beta\gamma}} & F_{\beta,n} & \xrightarrow{v_{\alpha\beta}} & E_{\alpha,n} \\ \text{gr}(p_{\gamma\lambda}) \uparrow & & q_{\beta\delta} \uparrow & \searrow u_{\beta\gamma} & \uparrow p_{\alpha\gamma} \\ \text{gr}^*(E_{\lambda,n}) & \xrightarrow{w_{\delta\lambda}} & F_{\delta,n} & \xrightarrow{v_{\gamma\delta}} & E_{\gamma,n} \end{array}$$

où les flèches verticales sont les homomorphismes de transition. Tout revient à prouver l'existence de l'homomorphisme $u_{\beta\gamma}$ laissant le diagramme commutatif, et pour cela il suffit évidemment de montrer que l'on a $\text{Ker}(v_{\gamma\delta}) \subset \text{Ker}(q_{\beta\delta})$, $v_{\gamma\delta}$ et $q_{\beta\delta}$ étant surjectifs. Comme $w_{\delta\lambda}$ est surjectif, cette dernière relation équivaut à $\text{Ker}(v_{\gamma\delta} \circ w_{\delta\lambda}) \subset \text{Ker}(q_{\beta\delta} \circ w_{\delta\lambda}) = \text{Ker}(w_{\beta\gamma} \circ (\text{gr}(p_{\gamma\lambda})))$. Mais on a vu ci-dessus que $\text{gr}(p_{\gamma\lambda}) = \text{gr}(v_{\gamma\delta} \circ w_{\delta\lambda})$ et il est clair que $\text{Ker}(v_{\gamma\delta} \circ w_{\delta\lambda}) \subset \text{Ker}(\text{gr}(v_{\gamma\delta} \circ w_{\delta\lambda})) = \text{Ker}(\text{gr}(p_{\gamma\lambda})) \subset \text{Ker}(w_{\beta\gamma} \circ (\text{gr}(p_{\gamma\lambda})))$, ce qui achève la démonstration du lemme, car pour tout $\mu \geq \gamma$, il suffira de définir $u_{\beta\mu}$ comme le composé $E_{\mu,n} \xrightarrow{p_{\gamma\mu}} E_{\gamma,n} \xrightarrow{u_{\beta\gamma}} F_{\beta,n}$.

(19.5.6.8) *Démonstration de (19.5.3, (iii)).* — Soient G une A -algèbre topologique discrète, \mathfrak{N} un idéal de carré nul dans G , $f : B \rightarrow G/\mathfrak{N}$ un A -homomorphisme continu d'algèbres. Comme G/\mathfrak{N} est discrète, il y a un indice α tel que f s'annule dans \mathfrak{b}_α ; par hypothèse, il existe un entier m tel que $\mathfrak{I}^m \subset \mathfrak{b}_\alpha$, donc f se factorise en

$$B \xrightarrow{r_\alpha} E_{\alpha,n} \xrightarrow{f_{\alpha,n}} G/\mathfrak{N}$$

où l'on prend $n = 2m$. Les hypothèses du lemme (19.5.6.3) étant satisfaites, on a tout d'abord un $\beta \geq \alpha$ et un A -homomorphisme composé

$$(19.5.6.9) \quad f_{\alpha,n} \circ v_{\alpha\beta} : F_{\beta,n} \xrightarrow{v_{\alpha\beta}} E_{\alpha,n} \xrightarrow{f_{\alpha,n}} G/\mathfrak{N}$$

et comme $F_{\beta,n}$ est une C_β -algèbre, donc *a fortiori* une C -algèbre topologique (discrète), cela donne par composition un A -homomorphisme continu $r : C \rightarrow F_{\beta,n} \rightarrow G/\mathfrak{N}$. Comme d'autre part C est une A -algèbre formellement lisse,

cet homomorphisme se factorise en $r : C \xrightarrow{r'} G \xrightarrow{\quad} G/\mathfrak{N}$ où r' est un A -homomorphisme continu, si bien que G est ainsi muni d'une structure de C -algèbre topologique (discrète). D'autre part, par composition avec l'homomorphisme canonique

$$\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \rightarrow \mathfrak{J}_\beta/\mathfrak{J}_\beta^2 \rightarrow F_{\beta,n}$$

on déduit de (19.5.6.9) un C -homomorphisme continu $g : \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \rightarrow G/\mathfrak{N}$. Comme $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est un C -module formellement projectif, g se factorise en $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \xrightarrow{h} G \xrightarrow{\quad} G/\mathfrak{N}$, où h est un C -homomorphisme continu. Comme G est discret, il existe un indice $\gamma \geq \beta$ tel que l'image par h de $((\mathfrak{b}_\gamma \cap \mathfrak{J}) + \mathfrak{J}^2)/\mathfrak{J}^2$ soit nulle, ainsi que l'image par r' de $(\mathfrak{b}_\gamma + \mathfrak{J})/\mathfrak{J}$, de sorte que h se factorise en

$$\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \rightarrow \mathfrak{J}_\gamma/\mathfrak{J}_\gamma^2 \xrightarrow{h'} G$$

où h' est un C_γ -homomorphisme. Par prolongement, on déduit donc de h' un homomorphisme de C_γ -algèbres

$$w : \mathbf{S}_{C_\gamma}^*(\mathfrak{J}_\gamma/\mathfrak{J}_\gamma^2) \rightarrow G$$

et par construction, tout élément de degré m a pour image par w un élément de \mathfrak{N} , donc tout élément de degré $n = 2m$ a une image nulle, puisque $\mathfrak{N}^2 = 0$; autrement dit, w se factorise en

$$\mathbf{S}_{C_\gamma}^*(\mathfrak{J}_\gamma/\mathfrak{J}_\gamma^2) \rightarrow F_{\gamma,n} \xrightarrow{w'_\gamma} G.$$

Appliquons maintenant à $v_{\alpha\gamma} : F_{\gamma,n} \xrightarrow{v_{\alpha\beta}} F_{\beta,n} \xrightarrow{v_{\alpha\beta}} E_{\alpha,n}$ le lemme (19.5.6.7), dont les hypothèses sont vérifiées; il existe donc un $\delta \geq \gamma$ et un homomorphisme $u_{\gamma\delta} : E_{\delta,n} \rightarrow F_{\gamma,n}$ tel que le composé $v_{\alpha\gamma} \circ u_{\gamma\delta}$ soit l'homomorphisme de transition $p_{\alpha\delta} : E_{\delta,n} \rightarrow E_{\alpha,n}$. On obtient donc finalement un diagramme commutatif de A -homomorphismes continus

$$\begin{array}{ccccc} & & E_{\alpha,n} & \xrightarrow{l_{\alpha,n}} & G/\mathfrak{N} \\ & & \uparrow v_{\alpha\beta} & & \uparrow \\ & & F_{\beta,n} & \xrightarrow{q_{\beta\gamma}} & \\ & \nearrow p_{\alpha\delta} & \uparrow v_{\alpha\beta} & & \uparrow \\ B & \xrightarrow{p_\delta} & E_{\delta,n} & \xrightarrow{u_{\gamma\delta}} & F_{\gamma,n} \xrightarrow{w'_\gamma} G \end{array}$$

et le composé $f' : B \rightarrow G$ des homomorphismes de la ligne inférieure est donc tel que f se factorise en $B \xrightarrow{f'} G \xrightarrow{\quad} G/\mathfrak{N}$, ce qui prouve que B est une A -algèbre formellement lisse.

La démonstration du th. (19.5.3) est ainsi achevée.

Corollaire (19.5.7). — Soient A un anneau topologique, B une A -algèbre topologique, (\mathfrak{b}_λ) un système fondamental d'idéaux ouverts dans B , \mathfrak{J} un idéal de B , $C = B/\mathfrak{J}$ la A -algèbre topologique quotient. On pose $C_\lambda = B/(\mathfrak{b}_\lambda + \mathfrak{J})$. On suppose que : 1° pour tout n , la topologie induite sur \mathfrak{J}^n par celle de B est aussi la topologie du B -module \mathfrak{J}^n déduite de la topologie de B (19.0.2) (cette condition sera remplie en particulier si B est noethérien et sa topologie préadmissible (0_1 , 7.3.2)); 2° C est une A -algèbre formellement lisse. Sous ces conditions :

(i) Si B est une A -algèbre formellement lisse, alors, pour tout λ , $(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) \otimes_C C_\lambda$ est un C_λ -module projectif.

(ii) Si B est une A -algèbre formellement lisse et un anneau préadmissible, alors pour tout λ , l'homomorphisme canonique

$$(19.5.7.1) \quad \varphi_\lambda = \varphi \otimes I_{C_\lambda} : \mathbf{S}_{C_\lambda}^*((\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) \otimes_C C_\lambda) \rightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{J}}^*(B) \otimes_C C_\lambda$$

est bijectif.

(iii) *Réiproquement, supposons que B soit préadmissible, que la suite (\mathfrak{J}^n) tende vers 0, et que, pour tout λ , $(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) \otimes_C C_\lambda$ soit un C_λ -module projectif et l'homomorphisme (19.5.4.i) soit bijectif. Alors B est une A-algèbre formellement lisse.*

En effet, la topologie de $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ et celle des $S_C^n(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)$ sont alors aussi déduites de celle de B (19.5.1); les conclusions sont alors des conséquences immédiates de (19.5.3) et des critères de (19.1.4) et (19.2.4) spéciaux à ce type de topologies.

Remarque (19.5.8). — Supposons que $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ soit un C -module de type fini et que, pour la topologie quotient de celle de B, C soit un anneau de Zariski; soit r un idéal de définition de C , de sorte que les r^n forment un système fondamental de voisinages de 0 dans C . Alors les conclusions de (i) et (ii) dans (19.5.7) peuvent être remplacées par les suivantes :

- (i') $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est un C -module projectif.
- (ii') L'homomorphisme canonique $\varphi : S_C^n(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) \rightarrow \text{gr}_{\mathfrak{J}}^n(B)$ est bijectif.

En effet, il est clair que (i') entraîne la conclusion de (i) dans (19.5.7). Inversement, si $(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) \otimes_C C_\lambda$ est un C_λ -module projectif pour tout λ , alors $(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) \otimes_C (C/r^n)$ est un (C/r^n) -module projectif (donc plat) pour tout n ; on en conclut que $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est un C -module plat ($\mathbf{0}_{III}$, 10.2.2), donc projectif puisqu'il est de présentation finie (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 2, cor. 2 du th. 1). D'autre part, les C -modules $S_C^n(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)$ et $\text{gr}_{\mathfrak{J}}^n(B)$ sont de type fini, et on sait que lorsque C est un anneau de Zariski, il revient au même de dire alors que φ_n est bijectif ou que $\hat{\varphi}_n$ est bijectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 5, prop. 9), donc (ii) est équivalent à (ii').

19.6. Cas des algèbres sur un corps.

Théorème (19.6.1) (Cohen). — *Soient k un corps, K une extension de k , k et K étant munis des topologies discrètes. Pour que K soit une k -algèbre formellement lisse, il faut et il suffit que K soit une extension séparable de k .*

La nécessité de la condition sera établie en (19.6.5.1) (et naturellement ne sera pas utilisée jusque-là); nous nous bornerons ici à prouver que la condition est suffisante. Distinguons deux cas :

I. — K est une extension séparable de type fini de k . On sait alors (Bourbaki, *Alg.*, chap. V, § 9, n° 3, th. 2) qu'il existe une sous-extension pure $K' = k(T_1, \dots, T_n)$ de K telle que K soit une extension algébrique finie séparable de K' . Compte tenu de (19.3.5, (ii)), on peut donc se borner, soit au cas où $K = K'$, soit au cas où K est algébrique fini sur k . Dans le premier cas, on sait que $A = k[T_1, \dots, T_n]$ est une k -algèbre formellement lisse (19.3.3), donc il en est de même de $k(T_1, \dots, T_n) = S^{-1}A$, où $S = A - \{0\}$ (19.3.5, (iv)). Dans le second cas, tous les groupes de cohomologie de Hochschild $H_k^i(K, L)$ pour un (K, K) -bimodule quelconque L , sont nuls : en effet, si l'on considère la k -algèbre produit tensoriel $C = K \otimes_k K$, L est un C -module à gauche et le groupe de cohomologie $H_k^n(K, L)$ est égal à $\text{Ext}_C^n(K, L)$, où K est aussi considéré comme (K, K) -bimodule,

donc comme C -module à gauche (M, IX, 4). Or, comme K est une extension finie séparable de k , on sait que $K \otimes_k K$ est composée d'extensions de k , dont l'une est K lui-même (Bourbaki, Alg., chap. VIII, § 8, prop. 3); cela entraîne donc que K est un C -module *projectif*, d'où notre assertion. Toute k -extension de K de noyau L est donc k -triviale, et *a fortiori* les k -extensions commutatives le sont, d'où le théorème dans ce cas (19.4.4).

II. — *Cas général.* — Avec les notations de (18.4.5), il s'agit de prouver que $\text{Hom}_K(H_2(P'_*), L) = 0$ pour *tout* K -espace vectoriel L , ce qui signifie évidemment que $H_2(P'_*) = 0$. Si K est réunion d'une famille filtrante de sous-extensions $K^{(\alpha)}$ de k , P'_* est *limite inductive* des complexes correspondants $P'^{(\alpha)}_*$, puisque le foncteur \varinjlim commute au produit tensoriel dans la catégorie des k -modules; par l'exactitude du foncteur \varinjlim dans cette catégorie, on a donc $H_2(P'_*) = \varinjlim H_2(P'^{(\alpha)}_*)$. Comme l'hypothèse que K est séparable entraîne qu'il en est de même de toute sous-extension de K et que K est réunion des sous-extensions de type fini, la première partie de la démonstration entraîne bien que K est une k -algèbre formellement lisse. C.Q.F.D.

Corollaire (19.6.2). — Soient A un anneau local séparé et complet, K son corps résiduel, k un sous-corps de K tel que K soit une extension séparable de k . Alors il existe un sous-corps K' de A contenant k , tel que la restriction à K' de l'homomorphisme canonique $A \rightarrow K$ soit un isomorphisme de K' sur K .

Soit m l'idéal maximal de A . En vertu de l'hypothèse et de (19.6.1), K est une k -algèbre formellement lisse; appliquant (19.3.10) en remplaçant C par A et \mathfrak{J} par m , on voit que l'automorphisme identique de $K = A/m$ se factorise en $K \xrightarrow{u} A \rightarrow A/m$, où u est un k -homomorphisme, donc nécessairement un k -isomorphisme de K sur un sous-corps K' contenant k .

Corollaire (19.6.3). — Soient A un anneau local noethérien complet, m son idéal maximal, k son corps résiduel. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) A contient un sous-corps.
- b) Si p est la caractéristique de k , on a $pA = 0$.
- c) Il existe un corps K tel que A soit isomorphe à un anneau quotient d'un anneau de séries formelles $B = K[[T_1, \dots, T_n]]$.

Lorsqu'il en est ainsi, on peut supposer que A est isomorphe à B/b , où b est contenu dans le carré de l'idéal maximal de B .

Il est immédiat que c) implique a), car A est $\neq 0$ puisque c'est un anneau local; comme K est un corps et que l'homomorphisme composé $K \xrightarrow{\varphi} B \rightarrow A$ (où φ est l'injection canonique) n'est pas nul, il est injectif. Pour voir que a) entraîne b), il suffit de remarquer que si K est un sous-corps de A , K est isomorphe à un sous-corps de k et a par suite même caractéristique p ; comme $p \cdot 1 = 0$ dans K , donc dans A , on a $pA = 0$. Réciproquement, b) entraîne a), car le composé des homomorphismes canoniques $\mathbf{Z} \xrightarrow{j} A \rightarrow k$ a pour noyau $p\mathbf{Z}$, et l'on a $j(p\mathbf{Z}) = 0$, donc $\text{Ker}(j) = p\mathbf{Z}$ et A contient un anneau A' isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et ne rencontrant pas m ; si $p > 0$, A' est un corps; sinon, tout

élément de A' étant inversible dans A , le corps des fractions de A' (isomorphe à \mathbf{Q}) est aussi contenu dans A .

Prouvons enfin que $a)$ entraîne $c)$; la condition $a)$ entraîne que A contient un sous-corps premier k_0 , isomorphe au sous-corps premier de k , et dont k est par suite extension séparable. Appliquant (19.6.2), on voit d'abord qu'il existe un isomorphisme f de k sur un sous-corps K de A . D'autre part, soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système d'éléments de m tel que les classes mod. m^2 des x_i forment une base (sur k) de m/m^2 . Puisque A est complet, il y a alors un homomorphisme continu d'anneaux $u : k[[T_1, \dots, T_n]] \rightarrow A$ tel que u soit égal à f dans k et que $u(T_i) = x_i$ pour tout i et cet homomorphisme est surjectif en vertu du choix des x_i (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, no 9, prop. 11).

Théorème (19.6.4). — Soient k un corps, A une k -algèbre locale noethérienne, m son idéal maximal, $K = A/m$ son corps résiduel, A étant muni de la topologie m -préadique. On suppose que K soit une extension séparable de k . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) A est une k -algèbre formellement lisse.
- b) Le complété \hat{A} de A est k -isomorphe à un anneau de séries formelles $K[[T_1, \dots, T_n]]$ (dont la structure de k -algèbre est définie par l'homomorphisme composé

$$k \xrightarrow{\psi} K \xrightarrow{\phi} K[[T_1, \dots, T_n]],$$

où ψ est l'injection canonique et ϕ l'homomorphisme définissant la structure d'extension de K).

b') \hat{A} est un anneau isomorphe à un anneau de séries formelles $K[[T_1, \dots, T_n]]$.

c) A est un anneau local régulier.

Le fait que $a)$ entraîne $b)$ est le cas particulier de ((19.5.4), équivalence de $a)$ et $c)$), appliqué en y remplaçant A par k , B par A et \mathfrak{J} par m , compte tenu de (19.6.1). Il est clair que $b)$ entraîne $b')$ et $b')$ entraîne $c)$ par (17.1.1). Enfin si $c)$ est vérifiée, il résulte de (17.1.1, a)) et de ((19.5.4), équivalence de $b)$ et $a)$), appliqué à $K = A/m$ remplaçant C , que A est une k -algèbre formellement lisse.

Corollaire (19.6.5). — Soient k un corps, A une k -algèbre locale noethérienne, m son idéal maximal, A étant muni de la topologie m -préadique. Supposons que A soit une k -algèbre formellement lisse; alors A est géométriquement régulier sur k , autrement dit (cf. IV, 6.7.6), pour toute extension finie k' de k , l'anneau semi-local $A' = A \otimes_k k'$ est régulier (17.3.6). En outre, si K est le corps résiduel de A , \hat{A} est isomorphe à un anneau de séries formelles $K[[T_1, \dots, T_n]]$.

Comme $\hat{A}' = \hat{A} \otimes_k k'$, il résulte de (19.3.6) et de (17.1.5) (appliqué aux anneaux locaux en les idéaux maximaux de A') qu'on peut se borner au cas où A est complet; alors A' est une k' -algèbre formellement lisse (19.3.5, (iii)) et par ailleurs est composée directe de k' -algèbres locales, qui sont aussi formellement lisses (19.3.5, (v)). On est donc ramené à prouver que A est régulier. Soit k_0 le sous-corps premier de k ; comme k est une extension séparable de k_0 , c'est une k_0 -algèbre formellement lisse (19.6.1) et en vertu de l'hypothèse, il en est de même de A (19.3.5, (ii)). Comme le corps résiduel K de A est une extension séparable de k_0 , on peut alors appliquer (19.6.4) à A et k_0 , d'où la conclusion.

Corollaire (19.6.5.1). — Soient A un anneau local noethérien, k un sous-corps de A tel que A soit une k -algèbre formellement lisse (pour sa topologie préadique). Alors tout corps K tel que $k \subset K \subset A$ est une extension séparable de k .

En effet, pour toute extension finie k' de k , l'anneau $K \otimes_k k'$ s'identifie à un sous-anneau de $A' = A \otimes_k k'$; comme A' est un anneau régulier, il est réduit, donc il en est de même de K , ce qui prouve que K est une extension séparable de k (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 7, n° 3, th. 1).

On notera que cela démontre que la condition de l'énoncé de (19.6.1) est nécessaire.

Remarque (19.6.5.2). — Si K est une extension non séparable de k , l'anneau de séries formelles $K[[T_1, \dots, T_n]]$ n'est donc pas une k -algèbre formellement lisse (pour la structure de k -algèbre usuelle rappelée dans (19.6.4)). D'autre part, il y a des k -algèbres formellement lisses A qui sont des anneaux locaux noethériens complets dont le corps résiduel K est une extension non séparable de k (par exemple les complétés des localisés de $B = k[T_1, \dots, T_n]$ en des idéaux maximaux \mathfrak{n} tels que B/\mathfrak{n} soit une extension algébrique finie non séparable de k); un tel anneau ne peut donc être k -isomorphe à $K[[T_1, \dots, T_n]]$ bien qu'il lui soit isomorphe en vertu de (19.6.5).

On peut dans certains cas préciser le corollaire (19.6.5) :

Proposition (19.6.6). — Soient k un corps, A une k -algèbre locale noethérienne, \mathfrak{m} son idéal maximal, A étant muni de la topologie \mathfrak{m} -préadique. Supposons que le corps résiduel $K = A/\mathfrak{m}$ de A soit tel qu'il existe une extension radicielle finie k_0 de k pour laquelle le corps résiduel de l'anneau local $K \otimes_k k_0$ soit une extension séparable de k_0 (nous exprimerons plus tard cette propriété en disant que K est de multiplicité radicielle finie sur k (**IV**, 4.7.4) et nous verrons que cette condition est toujours satisfaite lorsque K est une extension de type fini de k). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) A est une k -algèbre formellement lisse.

b) Il existe une extension radicielle finie k' de k telle que $\hat{A} \otimes_k k'$ soit k' -isomorphe à une algèbre de séries formelles $K'[[T_1, \dots, T_n]]$, où K' est une extension séparable de k' .

b') Il existe une extension finie k' de k telle que l'anneau semi-local $\hat{A} \otimes_k k'$ ait au moins un anneau local composant qui soit k' -isomorphe à une algèbre de séries formelles $K'[[T_1, \dots, T_n]]$, où K' est une extension séparable de k' .

c) A est géométriquement régulier sur k (19.6.5).

Notons d'abord que si k' est une extension radicielle de k , il n'y a qu'un seul idéal de $A' = A \otimes_k k'$ au-dessus de \mathfrak{m} , formé des éléments dont une puissance p^h -ième (p exposant caractéristique de k) est dans \mathfrak{m} pour un h convenable (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 3, lemme 4); A' est donc un anneau local, et il en est de même de $K \otimes_k k' = (A \otimes_k k') / (\mathfrak{m} \otimes_k k')$; en outre les corps résiduels de ces deux anneaux sont identiques. Rappelons d'autre part que si K est une extension séparable de k , alors, pour toute extension finie k'' de k , $K \otimes_k k''$ est composé direct de corps (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 7, n° 3, cor. 1 du th. 1), et par suite $\mathfrak{m} \otimes_k k''$ est le radical de $A \otimes_k k''$, et les corps composants de $K \otimes_k k''$ sont les corps résiduels aux idéaux maximaux de $A \otimes_k k''$; en

outre, ces corps sont des extensions séparables de k'' puisque pour toute extension k_1 de k'' , $K \otimes_k k_1 = (K \otimes_{k''} k'') \otimes_{k''} k_1$ est sans radical (*loc. cit.*, th. 1). Si l'on applique ces remarques au corps K de multiplicité radicielle finie sur k , on voit que pour toute extension finie k'' de k_0 , $(K \otimes_k k'')_{\text{red}}$ est séparable sur k'' .

Passons à la démonstration de (19.6.6). Il est trivial que $b)$ implique $b')$. Montrons que $b')$ entraîne $a)$. Si l'on pose $B' = K'[[T_1, \dots, T_n]]$, l'hypothèse que K' est séparable sur k' entraîne, par les remarques du début, que pour toute extension finie k'' de k' , les composants de l'anneau semi-local complet $B' \otimes_{k'} k''$ (égal à l'anneau de séries formelles $(K' \otimes_{k'} k'')[[T_1, \dots, T_n]]$) sont les anneaux $K_i''[[T_1, \dots, T_n]]$, où les K_i'' sont les corps composants de $K' \otimes_{k'} k''$. Comme les composants locaux de $B' \otimes_{k'} k''$ sont aussi des composants locaux de $\hat{A} \otimes_k k'' = (\hat{A} \otimes_{k'} k') \otimes_{k'} k''$, on voit que l'hypothèse $b')$ est encore vérifiée lorsqu'on remplace k' par une quelconque de ses extensions finies. En particulier, on peut supposer que k' est *quasi-galoisienne*, donc extension galoisienne d'une extension radicielle k'_0 de k ; $A' = \hat{A} \otimes_{k'} k'$ peut alors s'écrire $A'_0 \otimes_{k'_0} k'$, où $A'_0 = \hat{A} \otimes_{k'} k'_0$ est un anneau local complet. On sait alors (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 8, prop. 4) que A' est composé direct d'anneaux locaux *isomorphes* à A'_0 en tant que k'_0 -algèbres. Or, un de ces anneaux est par hypothèse k' -isomorphe à un anneau de séries formelles $K'[[T_1, \dots, T_n]]$, où K' est une extension séparable de k' , donc aussi une extension séparable de k'_0 ; compte tenu de (19.6.4), A'_0 est donc une k'_0 -algèbre formellement lisse. Mais comme k'_0 est un k -module fidèlement plat, projectif et de type fini, on conclut de (19.4.7) que \hat{A} est une k -algèbre formellement lisse.

On a déjà vu (19.6.5) que $a)$ implique $c)$; il reste donc à vérifier que $c)$ implique $b)$. Or, si $c)$ est vérifié, alors, pour toute extension radicielle finie k' de k contenant k_0 , $A \otimes_k k'$ est un anneau local régulier, dont le corps résiduel K' est une extension séparable de k' ; il résulte donc de (19.6.4) que son complété $\hat{A} \otimes_k k'$ est k' -isomorphe à un anneau de séries formelles $K'[[T_1, \dots, T_n]]$.

Remarques (19.6.7). — (i) On notera que l'hypothèse que K est de multiplicité radicielle finie sur k n'a été utilisée que dans la démonstration de l'implication $b') \Rightarrow a)$.

(ii) Nous prouverons plus tard (22.5.8) que $a)$ et $c)$ sont équivalentes, *sans hypothèse* sur l'extension K de k .

19.7. Cas des homomorphismes locaux; théorèmes d'existence et d'unicité.

Dans ce numéro, lorsqu'un anneau semi-local est considéré comme un anneau topologique, il est toujours sous-entendu qu'il s'agit de sa topologie *r-préadique*, où r est son radical. Tout homomorphisme local d'anneaux locaux est donc automatiquement *continu*.

Théorème (19.7.1). — Soient A, B deux anneaux locaux noethériens, m, n leurs idéaux maximaux respectifs, $k = A/m$ le corps résiduel de A ; on suppose A et B munis respectivement des topologies m -préadique et n -préadique. Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme local, et posons $B_0 = B \otimes_A k$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) B est une A -algèbre formellement lisse.

b) B est un A -module plat et $B_0 = B/\mathfrak{m}B$ (muni de la topologie quotient) est une k -algèbre formellement lisse.

La démonstration se fait en plusieurs étapes.

(19.7.1.1) Démontrons d'abord que b) entraîne a); nous allons appliquer le critère (19.4.7), avec $\mathfrak{J} = \mathfrak{m}$; en vertu de la seconde hypothèse dans b), tout revient à montrer que B est un A -module *formellement projectif*. L'hypothèse entraîne que pour tout $h > 0$, $B/\mathfrak{m}^h B$ est un (A/\mathfrak{m}^h) -module plat (0_{III}, 10.2.1); comme les \mathfrak{m}^h forment un système fondamental de voisinages de 0 dans A et que $(B/\mathfrak{m}^h B) \otimes_{A/\mathfrak{m}^h} k = B_0$, on peut remplacer A et B par A/\mathfrak{m}^h et $B/\mathfrak{m}^h B$ respectivement, et par suite supposer A artinien (donc discret). Comme B_0 est une k -algèbre formellement lisse, c'est un anneau régulier (19.6.5); soit $(x_i^0)_{1 \leq i \leq n}$ un système régulier de paramètres pour B_0 (17.1.6), et pour tout i , soit $x_i \in B$ tel que x_i^0 soit son image dans $B_0 = B/\mathfrak{m}B$; comme les x_i^0 engendrent l'idéal maximal $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}/\mathfrak{m}B$ de B_0 , les idéaux $\mathfrak{L}_m = \sum_{i=1}^n (x_i^0)^m B_0$ (pour $m > 0$) forment un système fondamental de voisinages de 0 dans B_0 , car \mathfrak{L}_m est évidemment contenu dans \mathfrak{n}_0^m , et d'autre part contient \mathfrak{n}_0^{m+1} . Posons $\mathfrak{J}_m = \sum_{i=1}^n x_i^m B$ pour tout $m > 0$; il est clair que $\mathfrak{n} = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{m}B$; comme il existe un $h > 0$ tel que $\mathfrak{m}^h = 0$, on a $\mathfrak{n}^m \subset \mathfrak{J}_1^{m-h} \subset \mathfrak{n}^{m-h}$ pour $m > h$, et comme on a vu que $\mathfrak{J}_m \supset \mathfrak{J}_1^{m-h}$, on voit que les \mathfrak{J}_m forment un système fondamental de voisinages de 0 dans B . Tout revient par suite à prouver que les B/\mathfrak{J}^m sont des A -modules libres, et il revient au même de voir que ce sont des A -modules plats (0_{III}, 10.1.3). Or, l'hypothèse que (x_i^0) est une suite B_0 -régulière d'éléments de l'idéal maximal de B_0 entraîne la même propriété pour la suite des $(x_i^0)^m$ ($1 \leq i \leq n$) pour tout $m > 0$ (15.1.20); la conclusion résulte donc de (15.1.16, b) et c)).

Lemme (19.7.1.2). — Soient A un anneau topologique, B, C deux A -algèbres topologiques qui sont des anneaux locaux noethériens. On suppose en outre que C est complet et que le corps résiduel B/\mathfrak{m} de B est un A -module de type fini. Soit E le produit tensoriel complété $B \hat{\otimes}_A C$. Alors :

- (i) E est un anneau semi-local noethérien complet.
- (ii) L'idéal $\mathfrak{m}E$ est contenu dans le radical de E , et pour tout $h > 0$, $E/\mathfrak{m}^h E$ est isomorphe à $(B/\mathfrak{m}^h) \otimes_A C$.

(iii) Si C est un A -module plat, E est un B -module plat.

Par définition, E est le séparé complété du produit tensoriel $B \otimes_A C$ pour la topologie définie par les idéaux $\text{Im}(\mathfrak{m}^i \otimes_A C) + \text{Im}(B \otimes_A \mathfrak{n}^i)$ (0_I, 7.7.5). Si l'on pose $\mathfrak{r} = \text{Im}(\mathfrak{m} \otimes_A C) + \text{Im}(B \otimes_A \mathfrak{n})$, on a $\mathfrak{r}^2 \subset \text{Im}(\mathfrak{m}^i \otimes_A C) + \text{Im}(B \otimes_A \mathfrak{n}^i) \subset \mathfrak{r}^i$, donc E est aussi le séparé complété de $B \otimes_A C$ pour la topologie \mathfrak{r} -préadique. Par hypothèse, $(B \otimes_A C)/\mathfrak{r} = (B/\mathfrak{m}) \otimes_A (C/\mathfrak{n})$ est un (C/\mathfrak{n}) -module de type fini, donc un anneau artinien; en outre, $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2$, étant un quotient de $((\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \otimes_A C) \oplus (B \otimes_A (\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2))$, est un $(B \otimes_A C)$ -module de type fini; appliquant (0_I, 7.2.11), on voit donc que E est un anneau noethérien; en outre, $E/\mathfrak{r}E$, isomorphe à $(B \otimes_A C)/\mathfrak{r}$, étant artinien, E est semi-local. Notons maintenant que E , qui est isomorphe à $\varprojlim_{i,j} ((B/\mathfrak{m}^i) \otimes_A (C/\mathfrak{n}^j))$, est aussi isomorphe, par le théorème de la double limite projective, à $\varprojlim_i (\varprojlim_j ((B/\mathfrak{m}^i) \otimes_A (C/\mathfrak{n}^j)))$; mais $\varprojlim_j ((B/\mathfrak{m}^i) \otimes_A (C/\mathfrak{n}^j))$

est le séparé complété de $(B/\mathfrak{m}^i) \otimes_A C$, et comme C est complet, ce n'est autre que $(B/\mathfrak{m}^i) \otimes_A C$ lui-même, B/\mathfrak{m}^i étant un A -module de type fini puisque $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^i$ est un (B/\mathfrak{m}) -module de type fini (**0_I**, 7.3.6). On a donc $E = \varprojlim_i ((B/\mathfrak{m}^i) \otimes_A C)$. Pour tout entier $h > 0$, $\mathfrak{m}^h E$, étant un idéal de E , est fermé dans E (**0_I**, 7.3.5), donc complet, et d'autre part il est évidemment dense dans $\varprojlim_i (\text{Im}(\mathfrak{m}^h / \mathfrak{m}^{h+i}) \otimes_A C)$, donc égal à cette

dernière limite projective. En outre, tous les systèmes projectifs considérés sont définis par des homomorphismes *surjectifs*; il résulte donc de (**0_{III}**, 13.2.2) que $E/\mathfrak{m}^h E$ est isomorphe à $(B/\mathfrak{m}^h) \otimes_A C = (B \otimes_A C) / \text{Im}(\mathfrak{m}^h \otimes_A C)$. En particulier comme $\text{Im}(\mathfrak{m} \otimes_A C) \subset r$, cela montre que $\mathfrak{m}E$ est contenu dans rE , donc dans le radical de E . Enfin, l'hypothèse que C est un A -module plat entraîne que $(B/\mathfrak{m}^h) \otimes_A C = E/\mathfrak{m}^h E$ est un (B/\mathfrak{m}^h) -module plat pour tout $h > 0$: comme B et E sont noethériens et que $\mathfrak{m}E$ est contenu dans le radical de E , il résulte de (**0_{III}**, 10.2.2) que E est un B -module plat.

Lemme (19.7.1.3). — Soient A un anneau local noethérien, \mathfrak{m} son idéal maximal, k son corps résiduel, B_0 une k -algèbre; on suppose que B_0 est un anneau local noethérien, complet et régulier. Alors il existe une A -algèbre topologique B qui est un anneau local noethérien complet, un A -module plat, et tel que B_0 soit k -isomorphe à $B \otimes_A k = B/\mathfrak{m}B$.

Comme \hat{A} est plat sur A et a même corps résiduel, on peut se borner au cas où A est *complet*.

Soit K le corps résiduel de B_0 , et distinguons deux cas :

I) K est une extension *séparable* de k . En vertu de (19.6.4), B_0 est k -isomorphe à un anneau de séries formelles $K[[T_1, \dots, T_n]]$. Lorsque $B_0 = K$, le lemme a déjà été démontré (**0_{III}**, 10.3.1); soit C un anneau local noethérien complet qui est un A -module *plat* et tel que $C \otimes_A k$ soit isomorphe à K . Pour $n \geq 1$, il suffit de prendre (avec la notation précédente) $B = C[[T_1, \dots, T_n]]$; on sait en effet (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 4, cor. 3 du th. 1) que B est un C -module plat, donc aussi un A -module plat, et d'autre part, il est immédiat que $C[[T_1, \dots, T_n]] \otimes_A k$ est isomorphe à $(C/\mathfrak{m}C)[[T_1, \dots, T_n]] = B_0$.

II) K est de *caractéristique* $p > 0$, et par suite il en est de même de k . Notons P le corps premier \mathbf{F}_p , et $W(P)$ l'anneau local complet des nombres p -adiques \mathbf{Z}_p , qui est un anneau de valuation discrète (donc *régulier*), et a P pour corps résiduel. Montrons d'abord qu'il existe un homomorphisme continu d'anneaux $W(P) \rightarrow A$ faisant donc de A une $W(P)$ -algèbre topologique. En effet, si $j : \mathbf{Z} \rightarrow A$ est l'homomorphisme canonique, on a $j(p\mathbf{Z}) \subset \mathfrak{m}$ par hypothèse, d'où $j^{-1}(\mathfrak{m}) = p\mathbf{Z}$, et par suite j se factorise en $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_{p\mathbf{Z}} \xrightarrow{f} A$, où f est un homomorphisme local, donc continu, qui (puisque A est complet) se prolonge par continuité en l'homomorphisme $W(P) \rightarrow A$ cherché.

Comme k est extension séparable de P , le cas I) montre qu'il y a un homomorphisme local $W(P) \rightarrow W(k)$, où $W(k)$ est un anneau local noethérien complet et un $W(P)$ -module *plat*, tel que $W(k) \otimes_{W(P)} P$ soit isomorphe à k . D'ailleurs, comme l'uniformisante p de $W(P)$ est un élément $W(k)$ -régulier par platitude (**0_I**, 6.3.4) et comme

$W(k)/pW(k) = k$, $pW(k)$ est l'idéal maximal de $W(k)$, ce qui entraîne que ce dernier anneau est un *anneau de valuation discrète complet* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VI, § 3, n° 5, prop. 9). Par (19.7.1.1) on voit en outre (puisque k est séparable sur P , donc une P -algèbre formellement lisse (19.6.1)) que $W(k)$ est une $W(P)$ -algèbre *formellement lisse*. Le $W(P)$ -homomorphisme continu $W(k) \rightarrow k$ se factorise donc en $W(k) \rightarrow A \rightarrow k$ (19.3.11), ce qui permet de considérer A comme une $W(k)$ -algèbre topologique. Appliquant maintenant le cas I) à B_0 considéré comme P -algèbre et à $W(P)$, on voit qu'il existe une $W(P)$ -algèbre B_P qui est un anneau local noethérien complet, un $W(P)$ -module plat, et telle que $B_P \otimes_{W(P)} P$ soit P -isomorphe à B_0 . Utilisant de nouveau le fait que $W(k)$ est une $W(P)$ -algèbre formellement lisse, on voit par (19.3.11) que l'homomorphisme composé $W(k) \rightarrow k \rightarrow B_0$ se factorise en $W(k) \rightarrow B_P \rightarrow B_0$; en outre, comme $k = W(k)/pW(k)$, on a $B_P \otimes_{W(k)} k = B_P/pB_P = B_P \otimes_{W(P)} P = B_0$. Montrons que B_P est un $W(k)$ -module *plat*; comme $W(k)$ est un anneau de valuation discrète dont p est l'uniformisante, il suffit de vérifier que B_P est un $W(k)$ -module *sans torsion* (0_I, 6.3.4), ou encore que p est un élément B_P -régulier, ce qui résulte de ce que B_P est un $W(P)$ -module plat (0_I, 6.3.4).

Posons maintenant

$$B = B_P \hat{\otimes}_{W(k)} A$$

et notons que le corps résiduel de A étant égal à celui de $W(k)$, est *a fortiori* un $W(k)$ -module de type fini. Il résulte donc tout d'abord de (19.7.1.2) que B est un anneau semi-local noethérien complet, $\mathfrak{m}B$ étant contenu dans le radical de B ; en outre $B/\mathfrak{m}B$ est k -isomorphe à $B_P \otimes_{W(k)} k = B_0$, donc B est en fait un anneau *local*. Comme B_P est un $W(k)$ -module plat, (19.7.1.2) montre enfin que B est un A -module plat. C.Q.F.D.

Lemme (19.7.1.4). — Soient A un anneau, \mathfrak{J} un idéal de A , M, N deux A -modules séparés pour la topologie \mathfrak{J} -préadique. On suppose en outre que N est complet pour la topologie \mathfrak{J} -préadique et que M soit un A -module plat. Soit $u : N \rightarrow M$ un A -homomorphisme; si $u \otimes 1 : N \otimes_A (A/\mathfrak{J}) \rightarrow M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$ est bijectif, alors u est bijectif.

Les modules gradués associés étant pris relatifs aux filtrations \mathfrak{J} -préadiques, il résulte des hypothèses sur M et N relativement aux topologies \mathfrak{J} -préadiques qu'il suffit de prouver que $\text{gr}(u) : \text{gr}_*(N) \rightarrow \text{gr}_*(M)$ est bijectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 8, cor. 3 du th. 1). Or, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{gr}_0(N) \otimes_{A_0} \text{gr}_*(A) & \xrightarrow{\text{gr}_0(u) \otimes 1} & \text{gr}_0(M) \otimes_{A_0} \text{gr}_*(A) \\ \downarrow \varphi_N & & \downarrow \varphi_M \\ \text{gr}_*(N) & \xrightarrow{\text{gr}(u)} & \text{gr}_*(M) \end{array}$$

où $A_0 = A/\mathfrak{J} = \text{gr}_0(A)$, et φ_M et φ_N sont les applications canoniques ($\mathbf{0}_{III}$, 10.1.1.2). Par hypothèse, $\text{gr}_0(u)$ est bijectif ainsi que φ_M ($\mathbf{0}_{III}$, 10.2.1), et φ_N est surjectif; on en déduit d'abord que $\text{gr}_0(u) \otimes 1$ est bijectif, puis que φ_N est injectif, donc bijectif, et enfin que $\text{gr}(u)$ est bijectif.

Lemme (19.7.1.5). — Soient A un anneau noethérien, \mathfrak{J} un idéal de A , B, B' deux A -algèbres qui sont des anneaux locaux noethériens, les homomorphismes $A \rightarrow B, A \rightarrow B'$ étant continus pour la topologie \mathfrak{J} -préadique sur A . On suppose que : 1^o B et B' sont complets pour les topologies \mathfrak{J} -préadiques; 2^o B est une A -algèbre formellement lisse; 3^o B' est un A -module plat. Posons $A_0 = A/\mathfrak{J}$, et soit $u_0 : B \otimes_A A_0 \rightarrow B' \otimes_A A_0$ un A_0 -isomorphisme; alors il existe un A -isomorphisme $u : B \rightarrow B'$ tel que $u_0 = u \otimes 1$ (ce qui entraîne que B' est une A -algèbre formellement lisse et B un A -module plat).

Posons $B_0 = B \otimes_A A_0, B'_0 = B' \otimes_A A_0$. Notons que si m et m' sont les idéaux maximaux de B et B' , les topologies \mathfrak{J} -préadiques sur B et B' sont séparées puisque $\mathfrak{J}B \subset m$ et $\mathfrak{J}B' \subset m'$; en outre, comme $\mathfrak{J}B'$ est fermé dans B' pour la topologie \mathfrak{J} -préadique, l'homomorphisme composé $B \xrightarrow{u} B'_0$, qui est continu pour les topologies \mathfrak{J} -préadiques, se factorise en $B \xrightarrow{u} B' \xrightarrow{u'} B'_0$, où u est un A -homomorphisme continu (19.3.10). On a évidemment $u_0 = u \otimes 1$, et l'hypothèse que u_0 est bijectif entraîne qu'il en est de même de u en vertu de (19.7.1.4).

(19.7.1.6) Fin de la démonstration. — Pourachever de prouver (19.7.1), il faut montrer que a) entraîne b); on sait déjà que a) entraîne que B_0 est une k -algèbre formellement lisse (19.3.5, (iii)), donc tout revient à prouver que B est un A -module *plat*. Il revient au même d'établir que \hat{B} est un \hat{A} -module plat (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 4, prop. 4), et l'on sait que \hat{B} est une \hat{A} -algèbre formellement lisse (19.3.6); on peut donc se borner au cas où A et B sont *complets*. Comme B_0 est une k -algèbre formellement lisse, c'est un anneau *régulier* (19.6.5) et complet ($\mathbf{0}_I$, 6.3.5); appliquant (19.7.1.3), on voit qu'il existe une A -algèbre B' qui est un anneau local noethérien complet et un A -module *plat*, un homomorphisme local $A \rightarrow B'$ et un k -isomorphisme $B_0 \xrightarrow{\sim} B'_0 = B' \otimes_A k$. Il suffit alors d'appliquer (19.7.1.5) en prenant pour \mathfrak{J} l'idéal maximal de A , pour obtenir que B est A -isomorphe à B' , donc est un A -module plat. C.Q.F.D.

Théorème (19.7.2). — Soient A un anneau local noethérien, \mathfrak{J} un idéal contenu dans l'idéal maximal de A , $A_0 = A/\mathfrak{J}$, B_0 un anneau local noethérien complet, $A_0 \rightarrow B_0$ un homomorphisme local faisant de B_0 une A_0 -algèbre formellement lisse. Alors il existe un anneau local noethérien complet B , un homomorphisme local $A \rightarrow B$ faisant de B un A -module plat, et un A_0 -isomorphisme $u : B \otimes_A A_0 \xrightarrow{\sim} B_0$. Si (B', u') est un couple satisfaisant aux mêmes conditions que (B, u) , il existe un A -isomorphisme $v : B \xrightarrow{\sim} B'$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A A_0 & \xrightarrow{v \otimes 1} & B' \otimes_A A_0 \\ \swarrow u & & \searrow u' \\ B_0 & & \end{array}$$

Soit m l'idéal maximal de A , de sorte que $m_0 = m/\mathfrak{J}$ est l'idéal maximal de A_0 , A et A_0 ayant le même corps résiduel k . Posons $B_{00} = B_0 \otimes_{A_0} k$; comme B_{00} est une k -algèbre formellement lisse (19.3.5, (iii)), c'est un anneau local régulier (19.6.5); en appliquant (19.7.1.3), on voit qu'il existe une A -algèbre topologique B qui est un anneau local noethérien complet, un A -module *plat*, et pour laquelle on a un k -isomorphisme $u_{00} : B \otimes_A k \xrightarrow{\sim} B_{00}$. Notons qu'en vertu de (19.7.1), B est une A -algèbre formellement lisse, donc $B \otimes_A A_0 = B/\mathfrak{J}B$ est une A_0 -algèbre formellement lisse (19.3.5, (iii)) et un anneau local noethérien complet; en outre, B_0 est un A_0 -module plat en vertu de l'hypothèse et de (19.7.1); comme on a un k -isomorphisme $u_{00} : B \otimes_A k = (B \otimes_A A_0) \otimes_{A_0} k \xrightarrow{\sim} B_0 \otimes_{A_0} k = B_{00}$, on déduit de (19.7.1.5), appliqué en y remplaçant A par A_0 et \mathfrak{J} par m_0 , qu'il existe un A_0 -isomorphisme $u : B \otimes_A A_0 \xrightarrow{\sim} B_0$ tel que $u_{00} = u \otimes 1$. Quant à l'assertion d'unicité, notons que les idéaux $\mathfrak{J}^h B$ (resp. $\mathfrak{J}^h B'$) sont fermés dans B (resp. B') (0₁, 7.3.5), donc B et B' sont séparés et complets pour les topologies \mathfrak{J} -préadiques (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. III, 3^e éd., § 3, n° 5, cor. 2 de la prop. 9); on a par hypothèse un A_0 -isomorphisme $v_0 : B \otimes_A A_0 \xrightarrow{\sim} B' \otimes_A A_0$ tel que $u' \circ v_0 = u$; comme B est une A -algèbre formellement lisse et B' un A -module plat, on peut appliquer (19.7.1.5), d'où l'existence du A -isomorphisme v répondant à la question.

Remarques (19.7.3). — (i) On notera que l'assertion d'unicité dans (19.7.2) est encore valable si l'on suppose seulement que B et B' sont complets *pour les topologies \mathfrak{J} -préadiques*. Nous ignorons si l'on peut améliorer de même l'assertion d'existence, autrement dit si l'on peut se dispenser de supposer l'anneau local B_0 *complet* (pour sa topologie n_0 -préadique, en désignant par n_0 son idéal maximal) en exigeant seulement que B soit complet *pour la topologie \mathfrak{J} -préadique*. Lorsque A_0 est complet pour la topologie m -préadique, on peut voir que ce problème revient au suivant : si B_0 est un anneau local noethérien régulier (non nécessairement complet) contenant le corps premier $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, existe-t-il pour tout $n > 1$ une $(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ -algèbre plate B telle que B/pB soit isomorphe à B_0 ?

(ii) On notera qu'en général, l'isomorphisme v dont l'existence est affirmée dans (19.7.2) *n'est pas unique* (cf. (19.8.7)).

19.8. Algèbres de Cohen et p -anneaux de Cohen ; application à la structure des anneaux locaux complets.

Les résultats de cette section sont des applications immédiates des théorèmes de (19.7), mais méritent d'être explicités en raison de leur importance pratique.

Définition (19.8.1). — Soient A , B deux anneaux locaux noethériens, m l'idéal maximal de A , $k = A/m$ son corps résiduel, $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme local, faisant de B une A -algèbre. On dit que B est une A -algèbre de Cohen si elle vérifie les conditions suivantes :

- (i) B est un anneau complet.
- (ii) B est un A -module plat.
- (iii) $B \otimes_A k$ est un corps (autrement dit, mB est l'idéal maximal de B) qui est une extension séparable de k .

Théorème (19.8.2). — Soient A un anneau local noethérien, k son corps résiduel.

(i) Si B est une A -algèbre de Cohen, B est une A -algèbre formellement lisse. Pour tout anneau local noethérien complet C , tout homomorphisme local $A \rightarrow C$ et tout idéal $\mathfrak{J} \neq C$ dans C , tout A -homomorphisme $B \rightarrow C/\mathfrak{J}$ se factorise donc en $B \xrightarrow{v} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$, où v est un A -homomorphisme (nécessairement local).

(ii) Pour tout corps K , extension séparable de k , il existe une A -algèbre de Cohen B telle que $B \otimes_A k$ soit k -isomorphe à K , et une telle A -algèbre est unique à isomorphisme près.

Comme K est une k -algèbre formellement lisse (19.6.1), l'assertion (i) résulte de (19.7.1). Pour prouver (ii), on peut se borner au cas où A est complet, car il revient au même de dire que B est un A -module plat ou un \hat{A} -module plat (0_{III}, 10.2.3), on a $mB = m\hat{A}B$ et k est le corps résiduel de \hat{A} . Il suffit alors d'appliquer (19.7.2) en prenant $\mathfrak{J} = m$ et $B_0 = K$ (et utilisant (19.6.1)).

Définition (19.8.3). — On appelle anneau local premier un anneau local de la forme $\mathbf{Z}_{p\mathbf{Z}}$, où $p\mathbf{Z}$ est un idéal premier de \mathbf{Z} . On appelle anneau local complet premier le complété d'un anneau local premier.

Les anneaux locaux premiers sont donc de deux sortes :

1° Ceux qui correspondent aux idéaux maximaux $p\mathbf{Z}$ où $p \neq 0$ est un nombre premier; $\mathbf{Z}_{p\mathbf{Z}}$ est un anneau de valuation discrète, dont le complété est l'anneau des entiers p -adiques noté d'ordinaire \mathbf{Z}_p ⁽¹⁾.

2° Pour l'idéal premier $p\mathbf{Z} = (0)$, $\mathbf{Z}_{p\mathbf{Z}}$ est le corps des nombres rationnels \mathbf{Q} , identique à son complété (la topologie étant naturellement la topologie d'anneau local noethérien, donc ici la topologie discrète).

La terminologie de (19.8.3), analogue à celle des « corps premiers », se justifie de la même manière : pour tout anneau local A , considérons l'homomorphisme canonique $\varphi : \mathbf{Z} \rightarrow A$, et soit $p\mathbf{Z}$ l'image réciproque par cet homomorphisme de l'idéal maximal m de A ; $p\mathbf{Z}$ est un idéal premier de \mathbf{Z} et l'homomorphisme précédent se factorise donc en $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_{p\mathbf{Z}} \xrightarrow{\psi} A$; d'ailleurs, comme φ est l'*unique* homomorphisme de \mathbf{Z} dans A , p et ψ sont déterminés de façon *unique*. Autrement dit, pour tout anneau local A , il y a un *unique* homomorphisme $\psi : P \rightarrow A$, où P est un anneau local premier; si en outre A est séparé et complet, on peut prolonger par complétion cet homomorphisme, et il y a donc un *unique* homomorphisme $\hat{\psi} : \hat{P} \rightarrow A$, où \hat{P} est un anneau local complet premier. D'ailleurs, par passage aux quotients, ψ donne un homomorphisme du corps résiduel \mathbf{F}_p si $p > 0$ (resp. \mathbf{Q} si $p = 0$) dans le corps résiduel k de A , et p est donc la *caractéristique* de k .

Si l'on prend en particulier pour A un anneau local premier (resp. complet premier), on voit qu'il n'existe dans un tel anneau qu'*un seul endomorphisme*, savoir l'identité.

⁽¹⁾ Cette notation, actuellement universellement utilisée, est dans ce cas en conflit avec la notation A_f adoptée dans (0_I, 1.2.3) : avec $A = \mathbf{Z}$ et $f = p$, A_f signifie en effet l'anneau des nombres rationnels de la forme k/p^n ($k \in \mathbf{Z}$, n entier ≥ 0); nous éviterons toujours d'utiliser la notation \mathbf{Z}_p pour désigner ce dernier anneau.

Définition (19.8.4). — Soient A un anneau local, $P \rightarrow A$ l'unique homomorphisme d'un anneau local premier P dans A , p la caractéristique des corps résiduels de P et A . On dit que A est un anneau de Cohen si c'est une P -algèbre de Cohen, c'est-à-dire (19.8.1) si :

1° A est noethérien et complet.

2° A est un P -module plat (ce qui revient aussi à dire que A est un \hat{P} -module plat (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 4, prop. 4)).

3° A/pA est un corps (nécessairement séparable sur le corps résiduel de P , ce corps étant premier).

Si $p=0$, ces conditions équivalent à dire que A est un *corps de caractéristique 0*. Si $p>0$, on a nécessairement $pA \neq 0$; la condition 3° signifie que pA est l'*idéal maximal* m de A ; la condition 2° signifie que p est A -régulier, puisque P est un anneau de valuation discrète (0₁, 6.3.4). Donc A est un anneau régulier (17.1.1, d)) de dimension 1, et par suite un *anneau de valuation discrète, complet* en vertu de 1°; en résumé :

Proposition (19.8.5). — Les anneaux de Cohen sont les corps de caractéristique 0 et les anneaux de valuation discrète complets, dont le corps résiduel a une caractéristique $p>0$, et dont l'*idéal maximal* est engendré par $p.1$ (1 étant l'*unité* de l'anneau).

On notera que dans le second cas, $p.1 \neq 0$ puisque p est A -régulier, donc on peut identifier $p.1$ à l'entier p ; l'homomorphisme canonique $\mathbf{Z}_p \rightarrow A$ est injectif, et on identifie $p.1$ à l'élément p de \mathbf{Z}_p ; on dit dans ce cas que A est un p -anneau de Cohen.

Théorème (19.8.6) (Cohen). — (i) Soient W un anneau de Cohen, C un anneau local noethérien complet, \mathfrak{J} un idéal de C distinct de C . Alors tout homomorphisme local $u : W \rightarrow C/\mathfrak{J}$ se factorise en $W \xrightarrow{v} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$ où v est un homomorphisme local.

(ii) Soit K un corps. Il existe un anneau de Cohen W dont le corps résiduel est isomorphe à K . Si W' est un second anneau de Cohen, K' son corps résiduel, tout isomorphisme $u : K \xrightarrow{\sim} K'$ provient par passage aux quotients d'un isomorphisme $v : W \xrightarrow{\sim} W'$.

Cela n'est autre que (19.8.2) appliqué au cas où A est un anneau local premier.

Remarques (19.8.7). — (i) Lorsque K est de caractéristique 0, la partie (ii) de (19.8.6) devient triviale.

(ii) L'homomorphisme v de (19.8.6, (i)) n'est pas nécessairement déterminé de façon unique par u , comme le montre déjà le cas où W est un corps de caractéristique 0, $\mathfrak{J}^2 = 0$ et u est un isomorphisme (cf. (21.5.5)). De même, dans (19.8.6, (ii)) l'isomorphisme v n'est pas nécessairement déterminé de façon unique par u (cf. (21.5.5)).

Toutefois, lorsque K est parfait et de caractéristique $p>0$, on verra (21.5.5) que dans (19.8.6, (ii)) l'isomorphisme v est unique. On verra aussi plus tard que dans ce cas W s'identifie à l'anneau $W_\infty(K)$ des vecteurs de Witt de longueur infinie sur K .

(iii) Dans (19.8.6, (i)), on peut affaiblir les hypothèses sur C en utilisant (19.3.10) et (19.3.12).

Théorème (19.8.8) (Cohen). — Soient A un anneau local noethérien complet, k son corps résiduel.

(i) Il existe un anneau de Cohen W tel que A soit isomorphe à un anneau quotient d'un anneau de séries formelles $W[[T_1, \dots, T_n]]$ (et en particulier A est isomorphe à un quotient d'un anneau local régulier complet (17.3.8)). Si A contient un corps, il est isomorphe à un anneau quotient de $k[[T_1, \dots, T_n]]$.

(ii) Supposons en outre A intègre. Alors il existe un sous-anneau B de A , tel que : 1° B est isomorphe à un anneau de séries formelles sur un anneau C qui est un corps ou un anneau de Cohen (ce qui entraîne que B est un anneau local régulier et complet (17.3.8)); 2° B a même corps résiduel que A et l'injection $B \rightarrow A$ est un homomorphisme local; 3° A est une B -algèbre finie.

Soit m l'idéal maximal de A . Il existe un anneau de Cohen W dont le corps résiduel est isomorphe à k (19.8.6, (ii)); on a donc un homomorphisme local $W \rightarrow A/m$, qui par suite se factorise en $W \xrightarrow{u} A \rightarrow A/m$, où u est un homomorphisme local (19.8.6, (i)). Pour toute famille finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de m , il existe alors un homomorphisme local $v : W[[T_1, \dots, T_n]] \rightarrow A$ prolongeant u et tel que $v(T_i) = x_i$ pour tout i (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 4, no 5, prop. 6). Lorsque A contient un corps, il contient un corps premier P , dont k est une extension (nécessairement séparable), et par suite A contient un corps isomorphe à k (19.6.2); on peut alors remplacer W par k dans la définition précédente de v .

(i) Prenons d'abord pour les x_i un système de générateurs de m . Comme W a même corps résiduel que A , et que les classes des x_i dans l'anneau gradué $\text{gr}_*(A)$ engendrent $\text{gr}_*(A)$ en tant que k -algèbre, $\text{gr}(v) : \text{gr}_*(W[[T_1, \dots, T_n]]) \rightarrow \text{gr}_*(A)$ est surjectif; on en déduit que v est lui-même surjectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, no 8, cor. 2 du th. 1). Rappelons que le cas où A contient un corps a déjà été vu et ne figure ici que pour mémoire (19.6.3).

(ii) Si A contient un corps, il contient un corps k' isomorphe à k comme on l'a vu; on considère alors un système de paramètres $(y_j)_{1 \leq j \leq m}$ de A (16.3.6), on prend $B = k[[T_1, \dots, T_m]]$ et on considère l'homomorphisme local $w : B \rightarrow A$ qui coïncide dans k avec un isomorphisme $k \rightarrow k'$ et qui est tel que $w(T_i) = y_i$ pour $1 \leq i \leq m$. Si A ne contient pas de corps, l'unique homomorphisme $\mathbf{Z}_{p\mathbf{Z}} \rightarrow A$ (19.8.3) est nécessairement injectif (sans quoi, comme A est intègre, son noyau serait l'idéal maximal de $\mathbf{Z}_{p\mathbf{Z}}$ et son image isomorphe à un corps); en outre, on a alors $p > 0$ par hypothèse, $\mathbf{Z}_{p\mathbf{Z}}$ étant un corps si $p = 0$. L'élément $p \cdot 1$ de A (identifié à p) est non diviseur de zéro dans A , et est contenu dans m , donc (16.3.4 et 16.3.7) il existe une famille $(z_i)_{1 \leq i \leq m-1}$ qui, avec p , forme un système de paramètres de A . L'anneau de Cohen W considéré au début de la démonstration est alors un anneau de valuation discrète de corps résiduel k , dans lequel p engendre l'idéal maximal (19.8.5), et l'homomorphisme unique $u : W \rightarrow A$ défini au début applique p sur lui-même. On prend alors $B = W[[T_1, \dots, T_{m-1}]]$ et on considère l'homomorphisme local $w : B \rightarrow A$ qui coïncide avec u dans W et est tel que $w(T_i) = z_i$ pour $1 \leq i \leq m-1$. Dans les deux cas, si n est l'idéal maximal de B , il est clair que nA est un idéal de définition de A ; comme en outre B/n et A/m sont isomorphes, A est un B -module *quasi-fini* (0₁, 7.4.4), donc un A -module de *type fini* puisque B est complet et A séparé pour les topologies n -préadiques (0₁, 7.4.1). D'autre part,

dans les deux cas, on a $\dim(B) = \dim(A) = m$; dans le premier cas, cela résulte de (17.1.4, (iii)); dans le second, on voit directement que p et les T_i ($1 \leq i \leq m-1$) forment une suite B -régulière engendrant n , ou on peut aussi utiliser le fait que ces éléments engendrent n et que l'on a $\dim(B) \geq \dim(A)$ par (16.3.10). Comme A et B sont intègres, on tire finalement de (16.3.10) que w est injectif, ce qui achève la démonstration.

Corollaire (19.8.9). — Soit A un anneau local noethérien intègre complet contenant un corps k_0 ; soit k le corps résiduel de A , et supposons que k soit fini sur k_0 . Alors, dans la conclusion de (19.8.8, (ii)), on peut remplacer 1^o et 2^o par la condition que B est de la forme $k_0[[T_1, \dots, T_n]]$, l'injection canonique $B \rightarrow A$ étant un k_0 -homomorphisme local (pour la structure usuelle de k_0 -algèbre de B).

En effet, en reprenant la démonstration de (19.8.8, (ii)), on définit cette fois $w : k_0[[T_1, \dots, T_n]] \rightarrow A$ comme coïncidant dans k_0 avec l'identité et appliquant T_j sur y_j pour $1 \leq j \leq n$. L'hypothèse que k est de degré fini sur k_0 entraîne encore que A est un B -module quasi-fini, donc de type fini par (0₁, 7.4.1), et on conclut comme dans (19.8.8).

Corollaire (19.8.10). — Soit A un anneau local artinien dont l'idéal maximal m est de carré nul; il existe alors un anneau local noethérien régulier B , d'idéal maximal n , tel que A soit isomorphe à B/n^2 .

Soient K le corps résiduel A/m de A , n le rang de $m/m^2 = m$ sur K . Si A contient un corps, il résulte de (19.6.3) que A est isomorphe à B/b , où $B = K[[T_1, \dots, T_n]]$ et b est contenu dans le carré de l'idéal maximal n de B ; mais comme $\text{long}(B/n^2) = n + 1 = \text{long}(A)$, on a nécessairement $b = n^2$.

Supposons ensuite que A ne contienne pas de corps; cela entraîne que K est de caractéristique $p > 0$ et que $p \cdot 1 \neq 0$ dans A (19.6.3); donc $p \cdot 1$ est un élément de m , et il y a par suite $n - 1$ autres éléments x_i ($2 \leq i \leq n$) de m formant avec $p \cdot 1$ une base de m sur K . Soit W un anneau de Cohen dont le corps résiduel est isomorphe à K ; W est un anneau de valuation discrète dont p engendre l'idéal maximal; on a vu dans la démonstration de (19.8.8) qu'il y a un homomorphisme $u : W \rightarrow A$ appliquant p sur lui-même et qui par passage aux quotients donne l'identité sur K . On prend $B = W[[T_2, \dots, T_n]]$ et l'on considère l'homomorphisme local $w : B \rightarrow A$ qui coïncide avec u dans W et est tel que $w(T_i) = x_i$ pour $2 \leq i \leq n$. Il est clair que w est surjectif et que son noyau b est contenu dans le carré de l'idéal maximal $n = pB + BT_2 + \dots + BT_n$ de B ; comme $\text{long}(B/n^2) = n + 1 = \text{long}(A)$, on a encore $b = n^2$.

Proposition (19.8.11). — Soient A un anneau local artinien, m son idéal maximal, k son corps résiduel. Pour que A soit isomorphe à un anneau quotient d'un anneau de Cohen, il faut et il suffit que m soit engendré par $p \cdot 1$, où p est la caractéristique de k .

La condition est évidemment nécessaire (19.8.5). Pour voir qu'elle est suffisante, on observe, comme au début de la démonstration de (19.8.8), qu'il existe un anneau de Cohen W dont le corps résiduel est isomorphe à k et un homomorphisme local $u : W \rightarrow A$. En outre, si l'on considère l'homomorphisme composé $\mathbf{Z}_{p\mathbf{Z}} \rightarrow W \xrightarrow{u} A$ (qui est nécessairement l'unique homomorphisme de $\mathbf{Z}_{p\mathbf{Z}}$ dans A), on voit que l'image

par u de l'élément $p_{\cdot 1}$ de W est l'élément $p_{\cdot 1}$ de A ; comme l'élément $p_{\cdot 1}$ de W engendre l'idéal maximal de cet anneau, on déduit aussitôt de l'hypothèse que $\text{gr}(u) : \text{gr}_*(W) \rightarrow \text{gr}_*(A)$ est surjectif, et par suite il en est de même de u (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, no 8, cor. 2 du th. 1).

19.9. Algèbres relativement formellement lisses.

Définition (19.9.1). — Soient Λ un anneau topologique, A une Λ -algèbre topologique, B une A -algèbre topologique. On dit que B est une A -algèbre formellement lisse relativement à Λ si, pour toute A -algèbre topologique discrète C , et tout idéal nilpotent \mathfrak{J} de C , tout A -homomorphisme continu $u_0 : B \rightarrow C/\mathfrak{J}$ qui se factorise en $B \xrightarrow{u} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$, où u est un Λ -homomorphisme continu, se factorise aussi en $B \xrightarrow{v} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$, où v est un A -homomorphisme continu.

Il résulte de cette définition que si B est une A -algèbre *formellement lisse*, alors B est aussi *formellement lisse relativement à Λ* , pour toute structure de Λ -algèbre topologique définie sur A (autrement dit, tout homomorphisme continu d'anneaux $\Lambda \rightarrow A$).

Proposition (19.9.2). — Soient Λ un anneau topologique, A une Λ -algèbre topologique.

(i) A est une Λ -algèbre formellement lisse relativement à Λ .

(ii) Si B est une A -algèbre formellement lisse relativement à Λ et C une B -algèbre formellement lisse relativement à Λ , alors C est une A -algèbre formellement lisse relativement à Λ .

(iii) Soient B une A -algèbre formellement lisse relativement à Λ , A' une A -algèbre topologique, alors la A' -algèbre topologique $B \otimes_A A'$ est formellement lisse relativement à Λ .

(iv) Soient B une A -algèbre topologique, S (resp. T) une partie multiplicative de A (resp. B) telle que l'image canonique de S dans B soit contenue dans T . Si B est une A -algèbre formellement lisse relativement à Λ , alors $T^{-1}B$ est une $S^{-1}A$ -algèbre formellement lisse relativement à Λ .

(v) Soient B_i ($1 \leq i \leq n$) des A -algèbres topologiques. Pour que $\prod_{i=1}^n B_i$ soit une A -algèbre formellement lisse relativement à Λ , il faut et il suffit que chacune des B_i le soit.

L'assertion (i) est triviale, et la démonstration des autres est étroitement calquée sur les démonstrations de (19.3.5); elle est donc laissée au lecteur.

Corollaire (19.9.3). — Soient A un anneau topologique, A' et B deux A -algèbres topologiques. Alors la A -algèbre topologique $B' = B \otimes_A A'$ est une B -algèbre formellement lisse relativement à A .

Cela résulte de (19.9.2, (i) et (iii)).

Proposition (19.9.4). — Soient Λ un anneau topologique, A une Λ -algèbre topologique, B une A -algèbre topologique. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) B est une A -algèbre formellement lisse relativement à Λ .
- b) \hat{B} est une A -algèbre formellement lisse relativement à Λ .
- c) \hat{B} est une \hat{A} -algèbre formellement lisse relativement à Λ .
- d) \hat{B} est une \hat{A} -algèbre formellement lisse relativement à $\hat{\Lambda}$.

On laisse encore au lecteur la démonstration, calquée sur celle de (19.3.6).

(19.9.5) De même, l'énoncé (19.3.8) est encore valable (avec la même démonstration) quand on y remplace « formellement lisse » par « formellement lisse relativement à Λ ». Si dans l'énoncé de (19.3.10) on remplace « formellement lisse » par « formellement lisse relativement à Λ » la conclusion est remplacée par la suivante (la démonstration restant essentiellement inchangée) : *tout A-homomorphisme continu $u_0 : B \rightarrow C/\mathfrak{J}$ qui se factorise en $B \xrightarrow{u} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$, où u est un Λ -homomorphisme continu, se factorise aussi en $B \xrightarrow{v} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$, où v est un A-homomorphisme continu.*

(19.9.6) Les critères de lissité formelle (19.4.1) et (19.4.2) sont valables lorsqu'on y remplace « formellement lisse » par « formellement lisse relativement à Λ », les démonstrations restant pratiquement inchangées.

Proposition (19.9.7). — Soient Λ un anneau topologique, A une Λ -algèbre topologique, B une A-algèbre topologique. Supposons que pour toute A-algèbre discrète C et tout idéal \mathfrak{J} de C tel que $\mathfrak{J}^2 = 0$, tout A-homomorphisme continu $u_0 : B \rightarrow C/\mathfrak{J}$ qui se factorise en $B \xrightarrow{u} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$, où u est un Λ -homomorphisme continu, se factorise aussi en $B \xrightarrow{v} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$, où v est un A-homomorphisme continu. Alors B est une A-algèbre formellement lisse relativement à Λ .

La démonstration de (19.4.3) se transcrit aussitôt.

Proposition (19.9.8). — Soient Λ un anneau topologique, A une Λ -algèbre topologique, B une A-algèbre topologique. Pour que B soit une A-algèbre formellement lisse relativement à Λ , il faut et il suffit que pour tout B-module topologique discret L, annulé par un idéal ouvert de B, on ait (cf. 18.4.2) $\text{Exalcot}_{A/\Lambda}(B, L) = 0$.

Avec les notations de la démonstration de (19.4.4), il suffit de noter ici que l'on peut supposer que l'extension E_λ de B_λ est Λ -triviale; le reste de la démonstration est alors inchangé.

Lorsque Λ , A et B sont des anneaux discrets, le critère (19.9.8) se réduit à

$$(19.9.8.1) \quad \text{Exalcom}_{A/\Lambda}(B, L) = 0 \quad \text{pour tout B-module } L;$$

autrement dit, toute A-extension commutative de B par un B-module, qui est Λ -triviale, est aussi A-triviale.

19.10. Algèbres formellement non ramifiées et algèbres formellement étales.

(19.10.1) Nous aurons aussi à utiliser deux notions voisines de la notion d'algèbre formellement lisse.

Définition (19.10.2). — Soient A un anneau topologique, B une A-algèbre topologique. On dit que B est une A-algèbre formellement non ramifiée si, pour tout A-homomorphisme $p : E \rightarrow C$ de A-algèbres discrètes, dont le noyau est nilpotent, et tout A-homomorphisme continu $u : B \rightarrow C$, il existe au plus un A-homomorphisme continu $v : B \rightarrow E$ tel que u se factorise en $B \xrightarrow{v} E \xrightarrow{p} C$. On dit que B est une A-algèbre formellement étale si elle est formellement lisse et formellement non ramifiée, autrement dit, si, pour tout A-homomorphisme surjectif $p : E \rightarrow C$ de A-algèbres discrètes, dont le noyau est nilpotent, et pour tout A-homomorphisme continu $u : B \rightarrow C$, il existe un et un seul A-homomorphisme continu $v : B \rightarrow E$ tel que u se factorise en $B \xrightarrow{v} E \xrightarrow{p} C$.

Exemples (19.10.3). — Nous nous bornerons aux anneaux *discrets*.

(i) Si l'homomorphisme structural $\rho : A \rightarrow B$ est *surjectif*, B est une A -algèbre *formellement non ramifiée*, car avec les notations de (19.10.2), l'homomorphisme composé $A \xrightarrow{\rho} B \xrightarrow{v} E$ doit être l'homomorphisme structural, donc v est unique (s'il existe). Par contre, B n'est formellement lisse que si ρ est *bijectif*.

(ii) Soient A un anneau, S une partie multiplicative de A ; alors $B = S^{-1}A$ est une A -algèbre *formellement étale*. En effet, soient $j : A \rightarrow B$ l'homomorphisme canonique, $\rho : A \rightarrow E$ un homomorphisme d'anneaux, \mathfrak{J} un idéal nilpotent de E , $p : E \rightarrow C = E/\mathfrak{J}$ l'homomorphisme canonique. Si $u : B \rightarrow C$ est un A -homomorphisme, $u(s/1)$ est invisible dans C pour $s \in S$ puisque $s/1$ est inversible dans B ; mais $u(s/1) = p(\rho(s))$, et comme \mathfrak{J} est nilpotent, le fait que l'image de $\rho(s)$ dans E/\mathfrak{J} soit invisible entraîne que $\rho(s)$ lui-même est invisible dans E (0_I, 7.1.12); on en conclut que ρ se factorise d'une seule manière en $A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{v} E$, et l'on a évidemment $u \circ j = (p \circ v) \circ j$, d'où $u = p \circ v$, ce qui prouve notre assertion.

(iii) Une extension finie séparable k' d'un corps k est une k -algèbre formellement lisse (19.6.1); nous verrons plus loin que pour qu'une extension *de type fini* K d'un corps k soit une k -algèbre formellement étale, il faut et il suffit qu'elle soit formellement non ramifiée, et cela équivaut aussi au fait que K est une extension finie et séparable de k (21.7.4).

(iv) Une algèbre de polynômes $A[X_\alpha]_{\alpha \in I}$ sur un anneau A est *formellement lisse* sur A (19.3.3) mais *non formellement étale* si I n'est pas vide, comme il résulte aussitôt des définitions.

Remarque (19.10.4). — Le même raisonnement que dans (19.4.3) montre que pour vérifier qu'une A -algèbre topologique B est formellement non ramifiée, on peut, dans la définition (19.10.2), se borner au cas où le noyau de $p : E \rightarrow C$ est *de carré nul*; on peut en outre se borner au cas où $u(B) \subset p(E)$ (sans quoi il n'y a aucun v factorisant u) et en remplaçant C par $u(B)$ et E par $p^{-1}(u(B))$, supposer u et p *surjectifs*.

§ 20. DÉRIVATIONS ET DIFFÉRENTIELLES

Les notions introduites dans ce paragraphe seront reprises sous forme géométrique au chapitre IV, § 16, et joueront un rôle important dans l'étude des préschémas. Leur importance dans ce chapitre tient d'abord à leurs relations avec la notion d'algèbre *formellement lisse*, et notamment aux théorèmes (20.4.9), (20.5.7) et (20.5.12), qui seront traduits en langage géométrique dans le paragraphe du chapitre IV consacré aux morphismes lisses, et sont d'un usage constant dans les applications. D'autre part, les notions différentielles serviront à démontrer au § 22 d'importants critères de régularité qui joueront un rôle essentiel dans l'étude approfondie des anneaux locaux noethériens faite au § 7 du chapitre IV.

20.1. Dérivations et extensions d'algèbres.

Proposition (20.1.1). — Soient A un anneau (non nécessairement commutatif), B, E, C des A -anneaux, $p : E \rightarrow C$ un A -homomorphisme dont le noyau \mathfrak{L} est de carré nul, $u : B \rightarrow C$ un A -homomorphisme. Supposons qu'il existe un A -homomorphisme $v_0 : B \rightarrow E$ tel que u se factorise en $B \xrightarrow{v_0} E \xrightarrow{p} C$. Alors l'ensemble des A -homomorphismes $v : B \rightarrow E$ tels que $u = p \circ v$ est identique à l'ensemble des applications $v_0 + D$, où $D : B \rightarrow \mathfrak{L}$ est une application vérifiant les deux conditions suivantes :

- (i) D est un homomorphisme de A -bimodules.
- (ii) Quels que soient f, g dans B , on a

$$(20.1.1.1) \quad D(fg) = f.D(g) + D(f).g.$$

Dire que $p(v(f)) = p(v_0(f))$ pour $f \in B$ signifie que $D(f) = v(f) - v_0(f)$ appartient à \mathfrak{L} ; si l'on écrit que $v(fg) = v(f)v(g)$, on obtient la relation (20.1.1.1), \mathfrak{L} étant de carré nul, et la condition (i) résulte de ce que v et v_0 sont des A -homomorphismes.

Si $\rho : A \rightarrow B$ est l'homomorphisme structural, on tire de (20.1.1.1) que l'on a $D(\rho(a)f) = \rho(a)D(f) + D(\rho(a))f$ pour tout $a \in A$; mais on doit avoir $D(\rho(a)f) = \rho(a)D(f)$ d'après (i), donc, en faisant $f = 1$, il vient

$$D(\rho(a)) = 0 \quad \text{pour } a \in A;$$

réciproquement, si D est nulle dans $\rho(A)$ et vérifie (20.1.1.1), elle vérifie aussi (i).

Définition (20.1.2). — Étant donnés un A -anneau B et un B -bimodule L , on appelle A -dérivation de B dans L une application $D : B \rightarrow L$ vérifiant les conditions (i) et (ii) de (20.1.1).

Il résulte de (20.1.1.1) que le noyau d'une A -dérivation $D : B \rightarrow L$ est un sous- A -anneau de B .

On appelle parfois *dérivation* de B dans L une \mathbf{Z} -dérivation, c'est-à-dire une application additive de B dans L vérifiant (20.1.1.1); on a donc $D(1) = 0$ pour une telle application. Si B est une algèbre sur un corps premier P , toute \mathbf{Z} -dérivation de B est une P -dérivation : c'est évident d'après ce qui précède si P est de caractéristique > 0 , et dans le cas contraire, la relation $n \cdot n^{-1} = 1$ pour $n \in \mathbf{Z}$ donne

$$nD(n^{-1}) = 0$$

donc $D(n^{-1}) = 0$ puisque P est de caractéristique 0.

Il résulte aussitôt de la définition (20.1.2) que si D, D' sont deux A -dérivations de B dans L , il en est de même de $D - D'$. Autrement dit, l'ensemble des A -dérivations de B dans L est muni d'une structure de groupe additif; on note ce groupe $\mathrm{Dér}_A(B, L)$. Si A est commutatif, B une A -algèbre commutative, et L un B -module, alors, pour toute A -dérivation D de B dans L et tout $a \in A$, aD est encore une A -dérivation de B dans L , autrement dit $\mathrm{Dér}_A(B, L)$ est alors muni d'une structure de A -module.

La prop. (20.1.1) s'interprète de la façon suivante :

Corollaire (20.1.3). — Étant donnés deux A-homomorphismes de A-anneaux $p : E \rightarrow C$, $u : B \rightarrow C$ dont le premier a un noyau \mathfrak{L} de carré nul, l'ensemble des A-homomorphismes $v : B \rightarrow E$ tels que $u = p \circ v$ est vide ou est un espace homogène principal pour le groupe $\text{Dér}_A(B, \mathfrak{L})$.

En particulier :

Corollaire (20.1.4). — Soient A un anneau, C un A-anneau, L un C-bimodule, E une A-extension de C par L, $p : E \rightarrow C$ l'augmentation. L'application qui, à toute dérivation $D \in \text{Dér}_A(C, L)$, associe l'application $x \mapsto x + D(p(x))$ est un isomorphisme du groupe $\text{Dér}_A(C, L)$ sur le groupe des A-équivalences de E sur elle-même.

Appliquons (20.1.1) pour $B = E$, $v_0 = i_E$: l'ensemble des A-homomorphismes $v : E \rightarrow E$ tels que $p \circ v = p$ est identique à l'ensemble des applications $v = i_E + D'$, où $D' \in \text{Dér}_A(E, L)$. Dire qu'un tel A-homomorphisme v est une A-équivalence équivaut à dire que v se réduit à l'injection canonique dans L, ou encore que $D'(x) = 0$ dans L; mais cela signifie aussi que D' se factorise en $E \xrightarrow{p} C \xrightarrow{D} L$, où D est une A-dérivation. D'où le corollaire.

Pour les extensions triviales, (20.1.3) donne :

Corollaire (20.1.5). — Soient A un anneau, B, C deux A-anneaux, L un C-bimodule, $u : B \rightarrow C$ un A-homomorphisme; l'application qui, à toute dérivation $D \in \text{Dér}_A(B, L)$, associe l'application $\alpha : x \mapsto (u(x), D(x))$ est une bijection sur l'ensemble des A-homomorphismes $v : B \rightarrow D_C(L)$ (cf. 18.2.3) tels que u se factorise en $B \xrightarrow{v} D_C(L) \rightarrow C$.

Plus particulièrement :

Corollaire (20.1.6). — Soient A un anneau, B un A-anneau, L un B-bimodule. Si, à toute dérivation $D \in \text{Dér}_A(B, L)$, on associe : 1^o la A-équivalence $(x, y) \mapsto (x, y + D(x))$ de l'extension $D_B(L)$ sur elle-même; 2^o le A-homomorphisme $x \mapsto (x, D(x))$ de B dans $D_B(L)$, inverse à droite de l'homomorphisme d'augmentation $D_B(L) \rightarrow B$, on définit des correspondances biunivoques canoniques entre :

- (i) l'ensemble $\text{Dér}_A(B, L)$;
- (ii) l'ensemble des A-équivalences de $D_B(L)$ sur elle-même;
- (iii) l'ensemble des A-homomorphismes inverses à droite de l'homomorphisme d'augmentation $D_B(L) \rightarrow B$.

On notera que la correspondance biunivoque ainsi établie entre (i) et (ii) respecte les structures de groupe, et que celle qu'on en déduit entre (ii) et (iii) n'est autre que la correspondance biunivoque déjà définie dans (18.3.8).

Corollaire (20.1.7). — Soient A un anneau, C un A-anneau, L un A-bimodule, E une A-extension triviale de C par L, $p : E \rightarrow C$ l'augmentation. L'ensemble des A-dérivations D de E dans L telles que $D(x) = x$ dans L est identique à l'ensemble des applications $x \mapsto x - w(p(x))$, où w parcourt l'ensemble des A-homomorphismes inverses à droite de p.

Il suffit encore d'appliquer (20.1.1) pour $B = E$, $v_0 = i_E$; si $v = i_E - D$, la condition $D(x) = x$ pour $x \in L$ équivaut à $v(x) = 0$ pour $x \in L$, c'est-à-dire à $v = w \circ p$, où $w : C \rightarrow E$ est un A-homomorphisme; en outre la condition $p \circ v = p$ équivaut à $p \circ w = i_C$, autrement dit au fait que w est inverse à droite de p.

20.2. Propriétés fonctorielles des dérivations.

(20.2.1) Soient A un anneau, B un A -anneau, L un B -bimodule; si L' est un second B -bimodule et $w : L \rightarrow L'$ un homomorphisme de B -bimodules, il est clair que l'application $D \rightsquigarrow w \circ D$ est un homomorphisme de groupes additifs

$$(20.2.1.1) \quad w_0 : \text{Dér}_A(B, L) \rightarrow \text{Dér}_A(B, L')$$

et que si $w' : L' \rightarrow L''$ est un second homomorphisme de B -bimodules, on a $(w' \circ w)_0 = w'_0 \circ w_0$. Lorsque A est commutatif, B une A -algèbre commutative et L un B -module, (20.2.1.1) est un homomorphisme de A -modules.

En second lieu, soient B' un A -anneau, $v : B' \rightarrow B$ un A -homomorphisme qui fait de L un B' -bimodule; alors l'application $D \rightsquigarrow D \circ v$ est un homomorphisme de groupes additifs,

$$(20.2.1.2) \quad v^0 : \text{Dér}_A(B, L) \rightarrow \text{Dér}_A(B', L)$$

comme il résulte de (20.1.1.1); si $v' : B'' \rightarrow B'$ est un second A -homomorphisme, on a $(v \circ v')^0 = v'^0 \circ v^0$. Lorsque A , B et B' sont commutatifs et L un B -module, (20.2.1.2) est un homomorphisme de A -modules.

Enfin, soit $u : A' \rightarrow A$ un homomorphisme d'anneaux faisant de B un A' -anneau; toute A -dérivation $D \in \text{Dér}_A(B, L)$ est aussi une A' -dérivation, d'où une injection canonique de groupes commutatifs

$$(20.2.1.3) \quad u^0 : \text{Dér}_A(B, L) \rightarrow \text{Dér}_{A'}(B, L)$$

et si $u' : A'' \rightarrow A'$ est un second homomorphisme d'anneaux, on a $(u \circ u')^0 = u'^0 \circ u^0$; lorsque A , A' et B sont commutatifs et L un B -module (20.2.1.3) est un dihomomorphisme de modules (relatif à u).

On peut encore dire que

$$(A, B, L) \rightsquigarrow \text{Dér}_A(B, L)$$

est un *foncteur covariant* de la catégorie \mathbf{K} définie dans (18.3.5) dans la catégorie \mathbf{Ab} des groupes commutatifs, en faisant correspondre, à tout triplet (u, v, w) constituant un morphisme de \mathbf{K} l'homomorphisme $w_0 \circ v^0 \circ u^0$; la vérification de la fonctorialité résulte de la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \text{Dér}_A(B, L) & \xrightarrow{v^0} & \text{Dér}_A(B', L) \\ \downarrow w_0 & & \downarrow w_0 \\ \text{Dér}_A(B, L') & \xrightarrow[v^0]{} & \text{Dér}_A(B', L') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \text{Dér}_A(B, L) & \xrightarrow{u^0} & \text{Dér}_{A'}(B, L) \\ \downarrow w_0 & & \downarrow w_0 \\ \text{Dér}_A(B, L') & \xrightarrow[u^0]{} & \text{Dér}_{A'}(B, L') \end{array}$$

pour tout homomorphisme $w : L \rightarrow L'$ de B -bimodules.

Théorème (20.2.2). — Soient $u : A \rightarrow B$, $v : B \rightarrow C$ deux homomorphismes d'anneaux, L un C -bimodule. On a une suite exacte canonique de groupes commutatifs

$$(20.2.2.1) \quad 0 \rightarrow \text{Dér}_B(C, L) \xrightarrow{u^0} \text{Dér}_A(C, L) \xrightarrow{v^0} \text{Dér}_A(B, L) \xrightarrow{\partial} \\ \xrightarrow{\theta} \text{Exan}_B(C, L) \xrightarrow{u^1} \text{Exan}_A(C, L) \xrightarrow{v^1} \text{Exan}_A(B, L)$$

où u^0 , v^0 sont les homomorphismes (20.2.1.3) et (20.2.1.2) respectivement, u^1 , v^1 les homomorphismes définis dans (18.3.4.1) et (18.3.3.1) respectivement, et où ∂ est défini comme suit : pour toute A -dérivation D de B dans L , $\partial(D)$ est la classe de la B -extension de C par L définie sur l'anneau $D_C(L)$ par le A -homomorphisme $\alpha : x \mapsto (v(x), D(x))$ (cf. (20.1.5)). En outre, la suite exacte (20.2.2.1) est fonctorielle en L (pour les homomorphismes définis dans (20.2.1.1) et (18.3.1.1) respectivement).

Comme D est une A -dérivation (et *a fortiori* une \mathbf{Z} -dérivation) de B dans L , le A -homomorphisme $\alpha : x \mapsto (v(x), D(x))$ définit bien sur $D_C(L)$ une structure de B -extension, donc $\partial(D)$ est bien définie (20.1.5). Il faut vérifier l'exactitude en 5 endroits :

- 1) L'exactitude en $\text{Dér}_B(C, L)$ est triviale (cf. (20.2.1)).
- 2) Par définition (20.2.1) le noyau de v^0 est l'ensemble des A -dérivations de C dans L qui s'annulent dans $v(B)$, c'est-à-dire celles des A -dérivations qui sont aussi des B -dérivations (20.1.1); d'où l'exactitude en $\text{Dér}_A(C, L)$.
- 3) Le noyau de ∂ est formé des dérivations $D \in \text{Dér}_A(B, L)$ pour lesquelles la B -extension définie par $\alpha : x \mapsto (v(x), D(x))$ est B -triviale; cela signifie (18.2.3) qu'il existe un B -homomorphisme $z \mapsto (z, w(z))$ de C dans $D_C(L)$ (la structure de B -anneau de $D_C(L)$ étant définie par α); mais un tel homomorphisme, étant *a fortiori* un A -homomorphisme, est de la forme $z \mapsto (z, D'(z))$ où $D' \in \text{Dér}_A(C, L)$ (20.1.6); et en écrivant que c'est un B -homomorphisme, il vient

$$D(x)z + v(x)D'(z) = D'(v(x)z) = v(x)D'(z) + D'(v(x))z$$

pour $x \in B$, $z \in C$, ce qui donne $D'(v(x)) = D(x)$; le noyau de ∂ est donc l'image de v^0 .

4) Le noyau de u^1 est l'ensemble des classes de B -extensions de C par L qui sont A -triviales (18.3.7), donc (à équivalence près) de la forme $D_C(L)$, où la structure de A -anneau est définie par l'homomorphisme $t \mapsto (u(t), 0)$. Or, toute structure de B -extension sur $D_C(L)$ est définie par un homomorphisme $\alpha : x \mapsto (v(x), D(x))$, où D est une \mathbf{Z} -dérivation de B dans L (20.1.5); dire que la structure de A -anneau de cette B -extension est déduite de sa structure de B -anneau au moyen de $u : A \rightarrow B$ signifie que $D(u(t)) = 0$ pour $t \in A$, donc que D est une A -dérivation ou encore que la classe de la B -extension considérée est de la forme $\partial(D)$; d'où l'exactitude en $\text{Exan}_B(C, L)$.

5) Le noyau de v^1 est l'ensemble des classes des A -extensions E de C par L qui se trivialisent sur $v(B)$, c'est-à-dire pour lesquelles il y a un A -homomorphisme $w : B \rightarrow E$ tel que v se factorise en $B \xrightarrow{w} E \rightarrow C$; or un tel A -homomorphisme définit sur E une structure de B -extension dont la classe a pour image par u^1 la classe de la A -extension donnée; la réciproque étant triviale, on a prouvé l'exactitude en $\text{Exan}_A(C, L)$.

Enfin, la fonctorialité en L découle trivialement des définitions.

Corollaire (20.2.3). — Soient A, B, C trois anneaux commutatifs, $u : A \rightarrow B, v : B \rightarrow C$ deux homomorphismes d'anneaux, L un C -module. On a une suite exacte canonique de A -modules

$$(20.2.3.1) \quad 0 \rightarrow \text{Dér}_B(C, L) \xrightarrow{u^*} \text{Dér}_A(C, L) \xrightarrow{v^*} \text{Dér}_A(B, L) \xrightarrow{\partial} \\ \xrightarrow{\partial} \text{Exalcom}_B(C, L) \xrightarrow{u^!} \text{Exalcom}_A(C, L) \xrightarrow{v^!} \text{Exalcom}_A(B, L)$$

fonctorielle en L .

Le raisonnement est le même que dans (20.2.2) une fois qu'on a vérifié que pour toute dérivation $D \in \text{Dér}_A(B, L)$, $\partial(D)$ est bien la classe d'une B -extension de C par L qui est une B -algèbre commutative; mais cela résulte aussitôt de la commutativité de C et du fait que L est un C -module.

Corollaire (20.2.4). — Sous les hypothèses de (20.2.2) (resp. (20.2.3)), on a une suite exacte canonique, fonctorielle en L ,

$$(20.2.4.1) \quad 0 \rightarrow \text{Dér}_B(C, L) \xrightarrow{u^*} \text{Dér}_A(C, L) \xrightarrow{v^*} \text{Dér}_A(B, L) \xrightarrow{\partial} \text{Exan}_{B/A}(C, L) \rightarrow 0$$

(resp.

$$(20.2.4.2) \quad 0 \rightarrow \text{Dér}_B(C, L) \xrightarrow{u^*} \text{Dér}_A(C, L) \xrightarrow{v^*} \text{Dér}_A(B, L) \xrightarrow{\partial} \text{Exalcom}_{B/A}(C, L) \rightarrow 0.$$

Cela résulte de la définition de $\text{Exan}_{B/A}(C, L)$ (resp. $\text{Exalcom}_{B/A}(C, L)$) ((18.3.7) et (18.4.2)).

Remarque (20.2.5). — Supposons que l'on ait un diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \end{array}$$

Alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \text{Dér}_B(C, L) & \rightarrow & \text{Dér}_A(C, L) & \rightarrow & \text{Dér}_A(B, L) & \xrightarrow{\partial} & \text{Exan}_B(C, L) \rightarrow \text{Exan}_A(C, L) \rightarrow \text{Exan}_A(B, L) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \rightarrow \text{Dér}_{B'}(C', L) & \rightarrow & \text{Dér}_{A'}(C', L) & \rightarrow & \text{Dér}_{A'}(B', L) & \xrightarrow{\partial} & \text{Exan}_{B'}(C', L) \rightarrow \text{Exan}_{A'}(C', L) \rightarrow \text{Exan}_{A'}(B', L) \end{array}$$

et de même pour les suites exactes (20.2.3.1), (20.2.4.1) et (20.2.4.2).

20.3. Dérivations continues dans les anneaux topologiques.

(20.3.1) Étant donnés deux anneaux topologiques A, B (linéairement topologisés comme toujours), nous désignerons par $\text{Hom. cont}(A, B)$ l'ensemble des homomorphismes continus de A dans B . Étant donné un anneau topologique A , la catégorie des A -anneaux topologiques se définit comme celle des A -anneaux (18.1.4) en remplaçant partout « anneau » par « anneau topologique » et « homomorphisme » par « homomorphisme continu »; si B

et C sont deux A -anneaux topologiques, on notera $\text{Hom. cont}_A(B, C)$ l'ensemble des A -homomorphismes continus de B dans C .

Soient A un anneau topologique, B un A -anneau topologique, L un B -bimodule topologique ; on note $\text{Dér. cont}_A(B, L)$ l'ensemble des A -dérivations continues de B dans L ; il est clair que c'est un sous-groupe de $\text{Dér}_A(B, L)$ (et un sous- A -module lorsque A et B sont commutatifs et L un B -module).

(20.3.2) Il est immédiat que la prop. (20.1.1) subsiste quand on y remplace « anneau » par « anneau topologique » et « homomorphisme » par « homomorphisme continu ». De même, (20.1.3) et (20.1.4) restent valables en remplaçant Dér par Dér. cont , « anneau » (resp. « bimodule ») par « anneau topologique » (resp. « bimodule topologique »), « homomorphisme » par « homomorphisme continu » ; il faut naturellement supposer dans (20.1.4) que ϕ est continu, et remplacer « A -équivalences » par « A -équivalences continues ». On a les mêmes résultats pour (20.1.5) et (20.1.6), à condition de prendre comme topologie sur $D_C(L)$ (resp. $D_B(L)$) la topologie produit (sur $C \times L$, resp. $B \times L$).

Proposition (20.3.3). — Soient A un anneau topologique, B un A -anneau topologique, L un B -bimodule topologique discret annulé par un idéal bilatère ouvert de B . Si dans B le carré de tout idéal bilatère ouvert est ouvert, on a $\text{Dér. cont}_A(B, L) = \text{Dér}_A(B, L)$.

En effet, si \mathfrak{R} est un idéal bilatère ouvert de B annulant L , et D une A -dérivation de B dans L , on a $D(\mathfrak{R}^2) \subset \mathfrak{R}.D(\mathfrak{R}) + D(\mathfrak{R}).\mathfrak{R} = 0$ (20.1.1.1) donc D est continue.

(20.3.4) Tous les résultats de (20.2.1) restent valables lorsqu'on y remplace « anneau » par « anneau topologique », « bimodule » par « bimodule topologique », « homomorphisme » par « homomorphisme continu » et Dér par Dér. cont .

Proposition (20.3.5). — Soient A un anneau topologique, B un A -anneau topologique, L un B -bimodule topologique discret annulé par un idéal bilatère ouvert de B . On a alors un isomorphisme canonique

$$(20.3.5.1) \quad \varinjlim \text{Dér}_{A/\mathfrak{J}}(B/\mathfrak{R}, L) \xrightarrow{\sim} \text{Dér. cont}_A(B, L)$$

où dans le premier membre la limite inductive est prise suivant l'ensemble ordonné filtrant des couples $(\mathfrak{J}, \mathfrak{R})$ d'idéaux bilatères tels que $\mathfrak{R}.L = L.\mathfrak{R} = 0$, $\mathfrak{J}.B \subset \mathfrak{R}$, $B.\mathfrak{J} \subset \mathfrak{R}$.

Comme A/\mathfrak{J} et B/\mathfrak{R} sont discrets, on a des homomorphismes canoniques $w_{\mathfrak{J}, \mathfrak{R}} : \text{Dér}_{A/\mathfrak{J}}(B/\mathfrak{R}, L) \rightarrow \text{Dér. cont}_A(B, L)$ formant un système inductif (20.3.4), d'où l'homomorphisme (20.3.5.1) par passage à la limite inductive. Comme l'homomorphisme $B/\mathfrak{R}' \rightarrow B/\mathfrak{R}$ est surjectif pour $\mathfrak{R} \supset \mathfrak{R}'$ il résulte aussitôt de la définition que l'homomorphisme $\text{Dér}_{A/\mathfrak{J}}(B/\mathfrak{R}, L) \rightarrow \text{Dér}_{A/\mathfrak{J}'}(B/\mathfrak{R}', L)$ (avec $\mathfrak{R}.L = L.\mathfrak{R} = 0$, $\mathfrak{J}.B \subset \mathfrak{R}'$, $B.\mathfrak{J} \subset \mathfrak{R}'$) est injectif, et il en est évidemment de même de l'homomorphisme $\text{Dér}_{A/\mathfrak{J}}(B/\mathfrak{R}, L) \rightarrow \text{Dér}_{A/\mathfrak{J}''}(B/\mathfrak{R}, L)$ pour $\mathfrak{J}' \subset \mathfrak{J}$ (20.2.1) ; on en conclut que l'homomorphisme (20.3.5.1) est injectif. D'autre part, si D est une A -dérivation continue de B dans L , son noyau contient un idéal bilatère ouvert \mathfrak{R}_0 de B , et si \mathfrak{J}_0 est un idéal bilatère ouvert de A tel que $\mathfrak{J}_0.B \subset \mathfrak{R}_0$ et $B.\mathfrak{J}_0 \subset \mathfrak{R}_0$, il est clair que D est l'image canonique d'une (A/\mathfrak{J}_0) -dérivation de B/\mathfrak{R}_0 dans L , donc (20.3.5.1) est surjectif.

Proposition (20.3.6). — Soient $u : A \rightarrow B$, $v : B \rightarrow C$ deux homomorphismes continus d'anneaux topologiques, L un C -bimodule discret annulé par un idéal bilatère ouvert de C . On a une suite exacte canonique

$$(20.3.6.1) \quad \begin{aligned} 0 \rightarrow & \text{Dér. cont}_B(C, L) \xrightarrow{u^*} \text{Dér. cont}_A(C, L) \xrightarrow{v^*} \text{Dér. cont}_A(B, L) \xrightarrow{\partial} \\ & \xrightarrow{\partial} \text{Exantop}_B(C, L) \xrightarrow{u^1} \text{Exantop}_A(C, L) \xrightarrow{v^1} \text{Exantop}_A(B, L) \end{aligned}$$

où ∂ est défini par passage à la limite inductive à partir de l'homomorphisme ∂ de (20.2.2.1); cette suite exacte est fonctorielle en L (dans la catégorie des C -bimodules discrets annulés par des idéaux bilatères ouverts).

Cela résulte de l'exactitude du foncteur \lim_{\rightarrow} , à partir de (20.2.2).

Corollaire (20.3.7). — Soient A , B , C trois anneaux topologiques commutatifs, $u : A \rightarrow B$, $v : B \rightarrow C$ deux homomorphismes continus, L un C -module discret annulé par un idéal ouvert de C . On a une suite exacte canonique de A -modules, fonctorielle en L ,

$$(20.3.7.1) \quad \begin{aligned} 0 \rightarrow & \text{Dér. cont}_B(C, L) \xrightarrow{u^*} \text{Dér. cont}_A(C, L) \xrightarrow{v^*} \text{Dér. cont}_A(B, L) \xrightarrow{\partial} \\ & \xrightarrow{\partial} \text{Exalcotop}_B(C, L) \xrightarrow{u^1} \text{Exalcotop}_A(C, L) \xrightarrow{v^1} \text{Exalcotop}_A(B, L). \end{aligned}$$

Corollaire (20.3.8). — Sous les hypothèses de (20.3.5) (resp. (20.3.6)) on a une suite exacte canonique, fonctorielle en L

$$(20.3.8.1) \quad \begin{aligned} 0 \rightarrow & \text{Dér. cont}_B(C, L) \xrightarrow{u^*} \text{Dér. cont}_A(C, L) \xrightarrow{v^*} \text{Dér. cont}_A(B, L) \rightarrow \\ & \rightarrow \text{Exantop}_{B/A}(C, L) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(resp.

$$(20.3.8.2) \quad \begin{aligned} 0 \rightarrow & \text{Dér. cont}_B(C, L) \xrightarrow{u^*} \text{Dér. cont}_A(C, L) \xrightarrow{v^*} \text{Dér. cont}_A(B, L) \rightarrow \\ & \rightarrow \text{Exalcotop}_{B/A}(C, L) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Nous laissons au lecteur le soin d'écrire les diagrammes analogues à ceux de (20.2.5).

20.4. Parties principales et différentielles.

Dans toute la suite de ce paragraphe et dans les trois suivants, tous les anneaux sont supposés commutatifs.

(20.4.1) Soient A un anneau topologique, B une A -algèbre topologique; la A -algèbre $B \otimes_A B$ sera munie de la topologie *produit tensoriel*, qui en fait une A -algèbre topologique; nous désignerons par p (ou $p_{B/A}$) le A -homomorphisme canonique surjectif

$$(20.4.1.1) \quad p : B \otimes_A B \rightarrow B$$

tel que $p(b \otimes b') = bb'$; il est immédiat que p est continu. Le noyau de p sera noté $\mathfrak{J}_{B/A}$ (ou seulement \mathfrak{J} s'il n'y a pas de confusion). On désignera par $j_1 : B \rightarrow B \otimes_A B$ et $j_2 : B \rightarrow B \otimes_A B$ les deux A -homomorphismes canoniques, tels que

$$j_1(b) = b \otimes 1, \quad j_2(b) = 1 \otimes b$$

qui sont continus.

Définition (20.4.2). — On appelle *B-algèbre augmentée des parties principales d'ordre 1 de B par rapport à A* et l'on note $P_{B/A}^1$ la *A-algèbre topologique quotient*

$$(20.4.2.1) \quad P_{B/A}^1 = (B \otimes_A B) / \mathfrak{J}^2$$

muni de la structure de *B-algèbre topologique définie par l'homomorphisme $\bar{j}_1 : B \rightarrow P_{B/A}^1$ (déduit de j_1 par composition avec l'homomorphisme canonique $B \otimes_A B \rightarrow P_{B/A}^1$), et de l'augmentation de B-algèbre $\varepsilon : P_{B/A}^1 \rightarrow B$ (aussi notée $\varepsilon_{B/A}$) déduite de p par passage au quotient.*

Comme $p(b \otimes 1) = b$ par définition, il est clair que ε est bien une augmentation de *B-algèbre*.

Définition (20.4.3). — Le noyau de l'augmentation $\varepsilon : P_{B/A}^1 \rightarrow B$,

$$(20.4.3.1) \quad \Omega_{B/A}^1 = \mathfrak{J}_{B/A} / (\mathfrak{J}_{B/A})^2$$

muni de la topologie induite par celle de $P_{B/A}^1$, qui en fait un *B-module topologique*, est appelé le *B-module des 1-différentielles* (ou simplement des *différentielles*) de *B par rapport à A*.

On notera que la topologie de $\Omega_{B/A}^1$ est aussi la topologie quotient de la topologie induite sur $\mathfrak{J}_{B/A}$ par celle de $B \otimes_A B$ (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. III, 3^e éd., § 2, n° 7, prop. 20). Si *B* est discret il en est de même de $\Omega_{B/A}^1$. On note $\hat{\Omega}_{B/A}^1$ le *séparé complété* du *B-module topologique* $\Omega_{B/A}^1$.

Tout anneau topologique *B* pouvant être considéré comme une *Z-algèbre topologique* (où *Z* est muni de la topologie discrète), on peut définir le *B-module topologique* $\Omega_{B/Z}^1$, qu'on appelle parfois aussi le *B-module des différencielles absolues* sur *B* et que l'on note Ω_B^1 . Si *B* est une algèbre topologique sur un corps premier *P* (discret), on a $B \otimes_P B = B \otimes_Z B$, donc $\Omega_{B/P}^1 = \Omega_B^1$.

Lemme (20.4.4). — Soient *A* un anneau, *B* une *A-algèbre*. L'idéal $\mathfrak{J}_{B/A}$ de $B \otimes_A B$ est engendré par les éléments $1 \otimes s - s \otimes 1$, où *s* parcourt un ensemble de générateurs de la *A-algèbre B*.

Il est clair que pour tout $x \in B$, on a $x \otimes 1 - 1 \otimes x \in \mathfrak{J}$; d'autre part, quels que soient *x*, *y* dans *B*, on a $x \otimes y = xy \otimes 1 + (x \otimes 1)(1 \otimes y - y \otimes 1)$. Si $\sum_i (x_i \otimes y_i) \in \mathfrak{J}$, on a par définition $\sum_i x_i y_i = 0$, donc

$$(20.4.4.1) \quad \sum_i (x_i \otimes y_i) = \sum_i (x_i \otimes 1)(1 \otimes y_i - y_i \otimes 1)$$

ce qui prouve que \mathfrak{J} est l'idéal engendré par les éléments $1 \otimes x - x \otimes 1$. En outre, si $x = st$, on a

$$(20.4.4.2) \quad x \otimes 1 - 1 \otimes x = (s \otimes 1)(t \otimes 1 - 1 \otimes t) + (s \otimes 1 - 1 \otimes s)(1 \otimes t)$$

ce qui termine aussitôt la démonstration par récurrence.

Proposition (20.4.5). — Soient *A* un anneau topologique, *B* une *A-algèbre topologique*. La topologie de $\Omega_{B/A}^1$ est moins fine que la topologie déduite de celle de *B* (19.0.2); si dans *B* le carré de tout idéal ouvert est ouvert, ces deux topologies sont identiques.

La première assertion est triviale, la topologie produit tensoriel sur $B \otimes_A B$ étant moins fine que la topologie déduite de celle de *B*; *a fortiori* la topologie induite sur $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{B/A}$

par celle de $B \otimes_A B$ est moins fine que la topologie sur \mathfrak{J} déduite de celle de B . Pour démontrer la seconde assertion, écrivons $M \otimes N$, par abus de notation, le sous-module $\text{Im}(M \otimes_A N)$ pour deux sous- A -modules M, N de B . Utilisant la relation

$$(xy) \otimes z - x \otimes (yz) = (x \otimes 1)(1 \otimes z)(y \otimes 1 - 1 \otimes y) = xz \cdot (y \otimes 1 - 1 \otimes y) - x \cdot (z \otimes 1 - 1 \otimes z)(y \otimes 1 - 1 \otimes y)$$

dans le B -module $B \otimes_A B$ (défini par j_1), on voit aussitôt, compte tenu de (20.4.4), que, si \mathfrak{K} est un idéal de B , on a

$$((\mathfrak{K}^2 \otimes B) + (B \otimes \mathfrak{K}^2)) \cap \mathfrak{J} \subset (\mathfrak{K} \otimes \mathfrak{K}) \cap \mathfrak{J} + \mathfrak{K}\mathfrak{J} + \mathfrak{J}\mathfrak{K}$$

et d'autre part, si x_i, y_i sont des éléments de \mathfrak{K} tels que $\sum_i (x_i \otimes y_i) \in \mathfrak{J}$, il résulte de (20.4.4.1) que l'on a $\sum_i (x_i \otimes y_i) \in \mathfrak{K}\mathfrak{J}$, si bien que finalement

$$(20.4.5.1) \quad (\mathfrak{K}^2 \otimes B + B \otimes \mathfrak{K}^2) \cap \mathfrak{J} \subset \mathfrak{K}\mathfrak{J} + \mathfrak{J}^2.$$

Or, on a un système fondamental de voisinages de 0 dans \mathfrak{J} (pour la topologie induite par celle de $B \otimes_A B$) en prenant pour voisinages de 0 les ensembles $(\mathfrak{K} \otimes B + B \otimes \mathfrak{K}) \cap \mathfrak{J}$, où \mathfrak{K} parcourt l'ensemble des idéaux ouverts. Comme la topologie de $\Omega_{B/A}^1$ déduite de celle de B est aussi le quotient par \mathfrak{J}^2 de la topologie de \mathfrak{J} déduite de celle de B , l'hypothèse sur les idéaux ouverts de B et la relation (20.4.5.1) achèvent de prouver la seconde assertion.

Définition (20.4.6). — Soient p_1 et p_2 les applications composées $B \xrightarrow{j_1} B \otimes_A B \rightarrow P_{B/A}^1$, $B \xrightarrow{j_2} B \otimes_A B \rightarrow P_{B/A}^1$, qui sont des A -homomorphismes continus tels que $\varepsilon \circ p_1 = \varepsilon \circ p_2 = 1_B$. Le A -homomorphisme continu de A -modules

$$(20.4.6.1) \quad d_{B/A} = p_1 - p_2 : B \rightarrow \Omega_{B/A}^1$$

est appelé la différentielle extérieure de B relative à A ; pour tout $x \in B$, $d_{B/A}(x)$ (aussi noté $d(x)$ ou dx) est appelé la différentielle de x (relativement à A).

Lorsque $A = \mathbf{Z}$, on écrit d_B au lieu de $d_{B/\mathbf{Z}}$; si B est une algèbre sur un corps premier P , on a $d_B = d_{B/P}$.

Proposition (20.4.7). — Le B -module $\Omega_{B/A}^1$ est engendré par les éléments $d_{B/A}(x)$, où x parcourt un système de générateurs de la A -algèbre B .

Comme $d_{B/A}(x)$ est l'image canonique de $x \otimes 1 - 1 \otimes x$ dans $\Omega_{B/A}^1$, la proposition est une conséquence immédiate de (20.4.4).

Théorème (20.4.8). — Soient A un anneau topologique, B une A -algèbre topologique.

(i) Il existe un isomorphisme unique de B -algèbres augmentées topologiques

$$(20.4.8.1) \quad \varphi : P_{B/A}^1 \xrightarrow{\sim} D_B(\Omega_{B/A}^1)$$

qui se réduit à l'identité dans $\Omega_{B/A}^1$.

(ii) L'homomorphisme $d_{B/A}$ est une A -dérivation de B dans $\Omega_{B/A}^1$, ayant la propriété universelle suivante : pour tout B -module topologique L , l'application $u \mapsto u \circ d_{B/A}$ est un isomorphisme de A -modules

$$(20.4.8.2) \quad \text{Hom. cont}_B(\Omega_{B/A}^1, L) \xrightarrow{\sim} \text{Dér. cont}_A(B, L).$$

(i) Il est immédiat que φ (avec les notations de (20.4.6)) est nécessairement l'application $z \mapsto (\varepsilon(z), z - p_1(\varepsilon(z)))$, et l'isomorphisme réciproque l'application $(b, x) \mapsto p_1(b) + x$; ces deux applications étant continues, cela prouve la première assertion. On notera que cela entraîne que la topologie de B s'identifie (par p_1) au quotient de la topologie de $B \otimes_A B$ par $\mathfrak{J}_{B/A}$.

(ii) Le fait que $d_{B/A}$ soit une A -dérivation de B résulte de la définition (20.4.6) et de (20.1.1).

Pour prouver la propriété universelle, rappelons que $\text{Dér. cont}_A(B, L)$ s'identifie canoniquement à l'ensemble G des homomorphismes continus de A -algèbres $u : B \rightarrow D_B(L)$ tels que le composé $B \xrightarrow{u} D_B(L) \xrightarrow{q} B$ soit l'identité (où $q(b, 0) = b$ est la projection; cf. (20.1.6) et (20.3.2)). D'autre part, grâce à l'isomorphisme φ , $\text{Hom. cont}_B(\Omega_{B/A}^1, L)$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des homomorphismes continus de B -algèbres $v : P_{B/A}^1 \rightarrow D_B(L)$ tels que le composé $P_{B/A}^1 \xrightarrow{v} D_B(L) \xrightarrow{q} B$ soit l'augmentation ε . Comme on a $p_2 = p_1 - d_{B/A}$ par définition, tout revient à prouver que tout $u \in G$ se factorise en

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{u} & D_B(L) \\ p_2 \searrow & \nearrow v & \\ P_{B/A}^1 & & \end{array}$$

où v est un B -homomorphisme continu. Or, on a déjà un homomorphisme continu de A -algèbres $j : b \mapsto (b, 0)$ de B dans $D_B(L)$, qui appartient à G ; par définition du produit tensoriel topologique d'algèbres topologiques (0₁, 7.7.6), il existe donc un A -homomorphisme continu d'algèbres $w : B \otimes_A B \rightarrow D_B(L)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A B & \xleftarrow{j_1} & B \\ i_2 \uparrow & w \searrow & \downarrow j \\ B & \xrightarrow{u} & D_B(L) \end{array}$$

On a donc par définition $w(b \otimes 1 - 1 \otimes b) = j(b) - u(b) \in L$, et en vertu de (20.4.4), cela entraîne $w(\mathfrak{J}) \subset L$ donc $w(\mathfrak{J}^2) = 0$; par suite w se factorise en

$$B \otimes_A B \rightarrow P_{B/A}^1 \xrightarrow{v} D_B(L)$$

où v est un homomorphisme continu de A -algèbres; d'ailleurs, comme $v \circ p_1 = j$ est un homomorphisme de B -algèbres, il en est de même de v par définition de la structure de B -algèbre de $P_{B/A}^1$; comme on a par définition $u = v \circ p_2$, cela termine la démonstration.

Théorème (20.4.9). — *Supposons que B soit une A -algèbre topologique formellement lisse. Alors le B -module topologique $\Omega_{B/A}^1$ est formellement projectif.*

En effet, l'hypothèse entraîne que $B \otimes_A B$ (muni de la structure de B -algèbre topologique définie par j_1) est une B -algèbre topologique formellement lisse (19.3.5, (iii)), et par suite aussi une A -algèbre topologique formellement lisse (19.3.5, (ii)); comme B est topologiquement isomorphe à la A -algèbre quotient $(B \otimes_A B)/\mathfrak{J}$ et est une A -algèbre formellement lisse, la conclusion résulte de (19.5.3).

Corollaire (20.4.10). — Supposons en outre que dans B le carré de tout idéal ouvert soit ouvert; alors, pour tout idéal ouvert \mathfrak{K} de B , $\Omega_{B/A}^1 \otimes_B (B/\mathfrak{K}) = \Omega_{B/A}^1 / \mathfrak{K} \cdot \Omega_{B/A}^1$ est un (B/\mathfrak{K}) -module projectif.

En effet, la topologie de $\Omega_{B/A}^1$ est alors déduite de celle de B (20.4.5), et il suffit d'appliquer (19.2.4).

Corollaire (20.4.11). — Soient A, B deux anneaux locaux noethériens, $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme local, faisant de B une A -algèbre topologique formellement lisse (pour les topologies préadiques). Alors, pour tout idéal de définition b de B , $\Omega_{B/A}^1 \otimes_B (B/b)$ est un (B/b) -module libre.

En effet, il résulte de (20.4.10) que ce module est projectif, et comme B/b est un anneau artinien, tout (B/b) -module projectif est libre (0_{III}, 10.1.3).

Proposition (20.4.12). — Soient A un anneau topologique, B une A -algèbre topologique. Si l'homomorphisme structural $A \rightarrow B$ est surjectif, on a $\Omega_{B/A}^1 = 0$.

En effet, on a $D_{\text{ér}}_A(B, L) = 0$ pour tout B -module L en vertu de (20.1.1), et la proposition découle donc aussitôt de (20.4.8).

Exemples (20.4.13). — (i) Soient A un anneau, $B = A[X_\alpha]_{\alpha \in I}$ une algèbre de polynômes sur A . Alors $\Omega_{B/A}^1$ est un B -module libre, dont les dX_α forment une base. En effet, les dX_α engendrent ce B -module (20.4.7). D'autre part, si L est un B -module libre, ayant une base $(z_\alpha)_{\alpha \in I}$ dont I est l'ensemble d'indices, il existe un A -homomorphisme u de B dans $D_B(L)$ tel que $u(X_\alpha) = (X_\alpha, z_\alpha)$, pour tout $\alpha \in I$, donc (20.1.5) une A -dérivation D de B dans L telle que $D(X_\alpha) = z_\alpha$ pour tout α ; en vertu de (20.4.8.1), cela prouve que les dX_α sont linéairement indépendants.

(ii) Soient A un anneau, L un A -module, B la A -algèbre $D_A(L)$; alors l'homomorphisme canonique $x \mapsto d_{B/A}x$ de L dans $\Omega_{B/A}^1$ est bijectif, car il est immédiat que les B -dérivations de $B = D_A(L)$ dans un B -module M sont les applications de la forme $(b, x) \mapsto u(x)$, où $u \in \text{Hom}_A(L, M)$; on conclut donc par (20.4.8, (ii)).

(iii) Supposons que B soit le produit de deux A -algèbres topologiques B_1, B_2 (identifiées à des idéaux de B). Alors les images de $B_1 \otimes_A B_2$ et de $B_2 \otimes_A B_1$ par l'homomorphisme p (20.4.1.1) sont nulles, d'où il résulte aussitôt que $P_{B/A}^1$ s'identifie au produit $P_{B_1/A}^1 \times P_{B_2/A}^1$, et que le B -module $\Omega_{B/A}^1$ est somme directe (topologique) des B -modules $\Omega_{B_1/A}^1$ et $\Omega_{B_2/A}^1$ (annulés respectivement par B_2 et B_1).

(iv) Soient A, B deux anneaux intègres tels que $A \subset B$, que A soit intégralement clos, B entier sur A , et que le corps des fractions de B soit une extension séparable de celui de A . Alors le B -module $\Omega_{B/A}^1$ est un module de torsion. En effet, pour tout $x \in B$, le polynôme minimal de x par rapport au corps des fractions K de A est un polynôme $f(T)$ appartenant à $A[T]$; comme x est séparable sur K , on a $f'(x) \neq 0$ et d'autre part on déduit de la relation $f(x) = 0$ que $f'(x)d_{B/A}x = 0$, d'où notre assertion en vertu de (20.4.7).

Remarques (20.4.14). — (i) On notera que le B -module $\Omega_{B/A}^1$, privé de sa topologie, est indépendant des topologies de A et de B .

(ii) Nous introduirons plus tard l'« algèbre des parties principales d'ordre n » de B par rapport à A , $P_{B/A}^n = (B \otimes_A B) / (\mathfrak{J}_{B/A})^{n+1}$, qui est à la base du « calcul différentiel d'ordre n ».

20.5. Propriétés fonctorielles fondamentales de $\Omega_{B/A}^1$.

(20.5.1) Dans tout ce numéro et le suivant, sauf mention expresse du contraire, les anneaux et modules considérés sont supposés munis de la topologie discrète.

(20.5.2) Soient A un anneau, B, C deux A -algèbres, $u : B \rightarrow C$ un A -homomorphisme; on a un diagramme commutatif

$$(20.5.2.1)$$

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A B & \xrightarrow{u \otimes u} & C \otimes_A C \\ \downarrow p_{B/A} & & \downarrow p_{C/A} \\ B & \xrightarrow{u} & C \end{array}$$

d'où par passage aux quotients, un A -homomorphisme d'algèbres

$$(20.5.2.2) \quad u' : P_{B/A}^1 \rightarrow P_{C/A}^1$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P_{B/A}^1 & \xrightarrow{u'} & P_{C/A}^1 \\ \uparrow p_1 & & \uparrow p_1 \\ B & \xrightarrow{u} & C \end{array}$$

soit commutatif; comme $u \otimes u$ applique $\mathfrak{J}_{B/A}$ dans $\mathfrak{J}_{C/A}$, on obtient, en restreignant u' à $\Omega_{B/A}^1$, une application

$$(20.5.2.3) \quad u'' : \Omega_{B/A}^1 \rightarrow \Omega_{C/A}^1$$

telle que le couple (u'', u) soit un *di-homomorphisme* pour la structure de B -module de $\Omega_{B/A}^1$ et la structure de C -module de $\Omega_{C/A}^1$; ce dernier fait permet d'en déduire canoniquement un *homomorphisme de C -modules*

$$(20.5.2.4) \quad u_{C/B/A} : \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \rightarrow \Omega_{C/A}^1.$$

En outre, comme le diagramme

$$(20.5.2.5)$$

$$\begin{array}{ccc} P_{B/A}^1 & \xrightarrow{u'} & P_{C/A}^1 \\ \uparrow p_1 & & \uparrow p_1 \\ B & \xrightarrow{u} & C \end{array}$$

est aussi commutatif, on en déduit que le diagramme

$$(20.5.2.6) \quad \begin{array}{ccc} \Omega_{B/A}^1 & \xrightarrow{u} & \Omega_{C/A}^1 \\ d_{B/A} \downarrow & & \downarrow d_{C/A} \\ B & \xrightarrow{u} & C \end{array}$$

est commutatif.

Enfin, si $w : C \rightarrow D$ est un second homomorphisme de A -algèbres, on a la propriété de transitivité

$$(20.5.2.7) \quad (w \circ u)_{D/B/A} = w_{D/C/A} \circ (u_{C/B/A} \otimes I_D)$$

comme il résulte de la définition.

(20.5.3) Soient maintenant A, B deux anneaux, $v : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux, C une B -algèbre qui devient une A -algèbre au moyen de v ; alors l'application canonique $v_0 : C \otimes_A C \rightarrow C \otimes_B C$ est un *di-homomorphisme* surjectif d'algèbres (relatif à $v : A \rightarrow B$) tel que le diagramme

$$(20.5.3.1) \quad \begin{array}{ccc} C \otimes_A C & \xrightarrow{v_0} & C \otimes_B C \\ p_{C/A} \downarrow & & \downarrow p_{C/B} \\ C & \dashrightarrow_{I_C} & C \end{array}$$

soit commutatif; par passage aux quotients, on en déduit un di-homomorphisme d'algèbres

$$(20.5.3.2) \quad v' : P_{C/A}^1 \rightarrow P_{C/B}^1$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P_{C/A}^1 & \xrightarrow{v'} & P_{C/B}^1 \\ p_1 \uparrow & & \uparrow p_1 \\ C & \dashrightarrow_{I_C} & C \end{array}$$

soit commutatif. Comme v_0 applique $\mathfrak{J}_{C/A}$ dans $\mathfrak{J}_{C/B}$ on obtient, en restreignant v' à $\Omega_{C/A}^1$, une application

$$(20.5.3.3) \quad v_{C/B/A} : \Omega_{C/A}^1 \rightarrow \Omega_{C/B}^1$$

qui est un *homomorphisme de C -modules*.

En outre, comme le diagramme

$$(20.5.3.4) \quad \begin{array}{ccc} P_{C/A}^1 & \xrightarrow{v'} & P_{C/B}^1 \\ p_1 \uparrow & & \uparrow p_2 \\ C & \xrightarrow{i_C} & C \end{array}$$

est aussi commutatif, on en déduit que le diagramme

$$(20.5.3.5) \quad \begin{array}{ccc} \Omega_{C/A}^1 & \xrightarrow{v_{C/B/A}} & \Omega_{C/B}^1 \\ d_{C/A} \uparrow & & \uparrow d_{C/B} \\ C & \xrightarrow{i_C} & C \end{array}$$

est commutatif.

Enfin, si $s : A' \rightarrow A$ est un second homomorphisme d'anneaux, on a la propriété de transitivité

$$(20.5.3.6) \quad (vos)_{C/B/A'} = v_{C/B/A} \circ s_{C/A/A'}.$$

(20.5.4) Si maintenant on a un diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{v} & B' \\ f \uparrow & & \uparrow g \\ A & \xrightarrow{u} & A' \end{array}$$

on déduit de (20.5.2.4) et (20.5.3.3), par composition, un homomorphisme de B' -modules

$$(20.5.4.1) \quad \Omega_{B/A}^1 \otimes_B B' \xrightarrow{v_{B'/B/A}} \Omega_{B'/A}^1 \xrightarrow{u_{B'/A'/A}} \Omega_{B'/A'}^1$$

tel que le diagramme de A' -homomorphismes

$$(20.5.4.2) \quad \begin{array}{ccc} \Omega_{B/A}^1 \otimes_B B' & \rightarrow & \Omega_{B'/A'}^1 \\ d_{B/A} \otimes 1 \uparrow & & \uparrow d_{B'/A'} \\ B' & \xrightarrow{i_{B'}} & B' \end{array}$$

soit commutatif.

L'homomorphisme (20.5.4.1) correspond d'ailleurs à un di-homomorphisme de B -modules

$$(20.5.4.3) \quad \Omega_{B/A}^1 \rightarrow \Omega_{B'/A'}^1.$$

Proposition (20.5.5). — Si A' , B sont deux A -algèbres et $B' = B \otimes_A A'$, l'homomorphisme canonique (20.5.4.1).

$$(20.5.5.1) \quad \Omega_{B/A}^1 \otimes_B B' \rightarrow \Omega_{B'/A'}^1$$

est bijectif.

Le premier membre de (20.5.5.1) n'est autre alors que $\Omega_{B/A}^1 \otimes_A A'$. On peut écrire $B' \otimes_A B' = (B \otimes_A B) \otimes_A A'$ à un isomorphisme canonique près et $p_{B'/A'}$ s'identifie alors à $p_{B/A} \otimes_A 1_{A'}$; par suite (comme $p_{B/A}$ est surjectif) $\mathfrak{J}_{B'/A'} = \text{Im}(\mathfrak{J}_{B/A} \otimes_A A')$ et $\mathfrak{J}_{B'/A'}^2 = \text{Im}(\mathfrak{J}_{B/A}^2 \otimes_A A')$, d'où $P_{B'/A'}^1 = P_{B/A}^1 \otimes_A A'$ à un isomorphisme canonique près, qui transforme en eux-mêmes les idéaux d'augmentation; comme le A -module $P_{B/A}^1$ s'identifie canoniquement à la somme directe de B et de $\Omega_{B/A}^1$, on a

$$(20.5.5.2) \quad \Omega_{B/A}^1 \otimes_A A' = \Omega_{B'/A'}^1$$

par le même isomorphisme, et on vérifie aussitôt que le composé de cet isomorphisme et de l'isomorphisme canonique $\Omega_{B/A}^1 \otimes_B B' \xrightarrow{\sim} \Omega_{B/A}^1 \otimes_A A'$ n'est autre que (20.5.5.1).

(20.5.6) Les homomorphismes canoniques (20.5.2.4) et (20.5.3.3) donnent, par fonctorialité, pour tout C -module L , des homomorphismes canoniques

$$(20.5.6.1) \quad \text{Hom}_C(\Omega_{C/A}^1, L) \rightarrow \text{Hom}_C(\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C, L) = \text{Hom}_B(\Omega_{B/A}^1, L)$$

$$(20.5.6.2) \quad \text{Hom}_C(\Omega_{C/B}^1, L) \rightarrow \text{Hom}_C(\Omega_{C/A}^1, L).$$

Compte tenu de (20.4.8.2) et des diagrammes commutatifs (20.5.2.6) et (20.5.3.5), ces homomorphismes *ne sont autres* (à une identification canonique près) *que les homomorphismes* (20.2.1.2) et (20.2.1.3) respectivement.

Théorème (20.5.7). — Soient $u : A \rightarrow B$, $v : B \rightarrow C$ deux homomorphismes d'anneaux.

(i) La suite de C -modules

$$(20.5.7.1) \quad \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \xrightarrow{v_{C/B/A}} \Omega_{C/A}^1 \xrightarrow{u_{C/B/A}} \Omega_{C/B}^1 \rightarrow 0$$

est exacte.

(ii) Pour que $v_{C/B/A}$ soit inversible à gauche, il faut et il suffit que C soit une B -algèbre formellement lisse relativement à A (pour les topologies discrètes (cf. (19.9.1)); en particulier, il suffit pour cela que C soit une B -algèbre formellement lisse (pour les topologies discrètes)).

(i) L'exactitude de la suite (20.2.4.2) montre tout d'abord, compte tenu de (20.5.6), que la suite

$$0 \rightarrow \text{Hom}_C(\Omega_{C/B}^1, L) \rightarrow \text{Hom}_C(\Omega_{C/A}^1, L) \rightarrow \text{Hom}_C(\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C, L)$$

est exacte pour tout C -module L . On sait que cela implique l'exactitude de la suite (20.5.7.1) (Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3^e éd., § 2, n° 1, th. 1).

(ii) En vertu de l'exactitude de (20.5.7.1), dire que $v_{C/B/A}$ est inversible à gauche signifie que la suite

$$(20.5.7.2) \quad 0 \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \xrightarrow{v_{C/B/A}} \Omega_{C/A}^1 \xrightarrow{u_{C/B/A}} \Omega_{C/B}^1 \rightarrow 0$$

est *exacte et scindée*; on sait (Bourbaki, *loc. cit.*, n° 1, prop. 1) que cela équivaut à dire que pour tout C -module L , la suite

$$0 \rightarrow \text{Hom}_C(\Omega_{C/B}^1, L) \rightarrow \text{Hom}_C(\Omega_{C/A}^1, L) \rightarrow \text{Hom}_C(\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C, L) \rightarrow 0$$

est *exacte*; compte tenu de (20.5.6) et (20.2.4.2), cette condition équivaut à $\text{Exalcom}_{B/A}(C, L) = 0$ pour tout C -module L , et la conclusion résulte donc de (19.9.8.1).

Notons en outre que si l'on a un diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & B' \longrightarrow C' \\ \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ A & \longrightarrow & B \longrightarrow C \end{array}$$

on en déduit un diagramme commutatif

$$(20.5.7.3) \quad \begin{array}{ccccccc} \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C & \dashrightarrow & \Omega_{C/A}^1 & \longrightarrow & \Omega_{C/B}^1 & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \Omega_{B'/A'}^1 \otimes_{B'} C' & \rightarrow & \Omega_{C'/A'}^1 & \rightarrow & \Omega_{C'/B'}^1 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

où les flèches verticales proviennent des di-homomorphismes (20.5.4.3).

Corollaire (20.5.8). — Supposons que l'homomorphisme $v : B \rightarrow C$ fasse de C une B -algèbre formellement étale (pour les topologies discrètes (19.10.2)); alors l'homomorphisme (20.5.3.3)

$v_{C/B/A} : \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \rightarrow \Omega_{C/A}^1$
est bijectif.

En effet, si C est une B -algèbre formellement non ramifiée pour les topologies discrètes, il résulte de (19.10.4), (20.4.8) et (20.1.1) que l'on a $\text{Hom}_C(\Omega_{C/B}^1, L) = 0$ pour tout C -module L , donc $\Omega_{C/B}^1 = 0$ (cf. (20.7.4)); d'autre part, si C est une B -algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes, la suite (20.5.7.2) est exacte; d'où le corollaire.

Corollaire (20.5.9). — Soient A un anneau, B une A -algèbre, S une partie multiplicative de B ; alors l'homomorphisme canonique

$$(20.5.9.1) \quad S^{-1}\Omega_{B/A}^1 \rightarrow \Omega_{S^{-1}B/A}^1$$

est bijectif.

Il suffit d'appliquer (20.5.8) à $C = S^{-1}B$, qui est une B -algèbre formellement étale pour les topologies discrètes (19.10.3, (ii)).

Compte tenu de (20.5.5), on peut donc écrire

$$(20.5.9.2) \quad \Omega_{S^{-1}B/S^{-1}A}^1 = S^{-1}\Omega_{B/A}^1 = \Omega_{S^{-1}B/A}^1,$$

à des isomorphismes canoniques près.

Corollaire (20.5.10). — Si k est un corps et $K = k(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ une extension pure de k , les dX_α forment une base du K -espace vectoriel $\Omega_{K/k}^1$.

Comme K est le corps des fractions de l'anneau de polynômes $k[X_\alpha]_{\alpha \in I}$, cela résulte de (20.4.13, (i)) et de (20.5.9).

(20.5.11) Soient A un anneau, B une A -algèbre, \mathfrak{R} un idéal de B , C la A -algèbre quotient B/\mathfrak{R} , et considérons l'homomorphisme composé de A -modules

$$(20.5.11.1) \quad \delta : \mathfrak{R} \rightarrow B \xrightarrow{\delta_{B/A}} \Omega_{B/A}^1$$

où la première flèche est l'injection canonique ; comme $d(xy) = xdy + ydx$, on voit que l'on a $\delta(\mathfrak{R}^2) \subset \mathfrak{R} \cdot \Omega_{B/A}^1$, d'où, par passage aux quotients, un homomorphisme de A -modules

$$(20.5.11.2) \quad \delta_{C/B/A} : \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2 \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C = \Omega_{B/A}^1 / (\mathfrak{R} \cdot \Omega_{B/A}^1).$$

Mais en fait, $\delta_{C/B/A}$ est un homomorphisme de C -modules, car pour $x \in B$ et $y \in \mathfrak{R}$, on a $ydx \in \mathfrak{R} \cdot \Omega_{B/A}^1$, donc $d(xy) \equiv xdy \pmod{\mathfrak{R} \cdot \Omega_{B/A}^1}$, ce qui prouve d'abord que (20.5.11.2) est un homomorphisme de B -modules, et comme \mathfrak{R} annule les deux membres, cela établit notre assertion.

Si B' est une seconde A -algèbre, $u : B \rightarrow B'$ un A -homomorphisme, \mathfrak{R}' un idéal de B' tel que $u(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{R}'$ et $C' = B'/\mathfrak{R}'$ l'algèbre quotient, on a un diagramme commutatif

$$(20.5.11.3)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2 & \xrightarrow{\delta_{C/B/A}} & \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{R}'/\mathfrak{R}'^2 & \xrightarrow[\delta_{C'/B'/A}]{} & \Omega_{B'/A}^1 \otimes_{B'} C' \end{array}$$

où les flèches verticales proviennent de u (20.5.2.4).

Théorème (20.5.12). — Soient A un anneau, B une A -algèbre, C la A -algèbre quotient B/\mathfrak{R} , $u : B \rightarrow C$ l'homomorphisme canonique.

(i) On a une suite exacte de C -modules

$$(20.5.12.1) \quad \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2 \xrightarrow{\delta_{C/B/A}} \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \xrightarrow{u_{C/B/A}} \Omega_{C/A}^1 \rightarrow 0$$

où $u_{C/B/A}$ et $\delta_{C/B/A}$ sont définis par (20.5.2.4) et (20.5.11.2) respectivement.

(ii) Si l'on pose $E = B/\mathfrak{R}^2$, l'homomorphisme canonique (20.5.2.4)

$$\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \rightarrow \Omega_{E/A}^1 \otimes_E C$$

est bijectif.

(iii) Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $\delta_{C/B/A}$ est inversible à gauche.
- b) Toute A -extension de C par un C -module L , dont l'image réciproque par $u : B \rightarrow C$ est A -triviale, est elle-même A -triviale.
- c) La A -algèbre $E = B/\mathfrak{R}^2$ est une extension A -triviale de C par $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2$.

(iv) Il y a correspondance biunivoque canonique entre les inverses à gauche de $\delta_{C/B/A}$ et les inverses à droite de l'homomorphisme canonique $E \rightarrow C$.

(i) Comme u est surjectif, on a $Dér_B(C, L) = 0$ pour tout C -module L en vertu de (20.1.1). La suite exacte (20.2.3.1) devient donc

$$(20.5.12.2) \quad 0 \rightarrow Dér_A(C, L) \xrightarrow{u^0} Dér_A(B, L) \xrightarrow{\partial} Exalcom_B(C, L) \xrightarrow{v^1} Exalcom_A(C, L) \xrightarrow{u^1} Exalcom_A(B, L)$$

où v est l'homomorphisme $A \rightarrow B$. Rappelons d'autre part (18.3.8) que $Exalcom_B(C, L)$ s'identifie canoniquement à $\text{Hom}_C(\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2, L)$; on déduit donc de (20.5.12.2) et (20.4.8) la suite exacte

$$(20.5.12.3) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}_C(\Omega_{C/A}^1, L) \rightarrow \text{Hom}_C(\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C, L) \xrightarrow{\varphi} \text{Hom}_C(\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2, L) \xrightarrow{\psi} \text{Ker}(u^1) \rightarrow 0$$

avec $\varphi = \partial \circ \eta^{-1}$ et $\psi = v^1 \circ \eta$. Revenant aux définitions de ∂ (20.2.2) et de η (18.3.8), on constate aussitôt que φ est précisément l'homomorphisme $\text{Hom}(\delta_{C/B/A}, 1_L)$. L'existence de la suite exacte formée des 4 premiers termes de (20.5.12.3) montre donc que la suite (20.5.12.1) est exacte (Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3^e éd., § 2, n° 1, th. 1).

(ii) Appliquons à B et à l'idéal \mathfrak{R}^2 la suite exacte (20.5.12.1), ce qui donne

$$(20.5.12.4) \quad \mathfrak{R}^2/\mathfrak{R}^4 \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \otimes_B E \rightarrow \Omega_{E/A}^1 \rightarrow 0$$

d'où, en tensorisant par C (considéré comme E -algèbre), la suite exacte

$$\mathfrak{R}^2/\mathfrak{R}^4 \otimes_E C \xrightarrow{\delta'} \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \rightarrow \Omega_{E/A}^1 \otimes_E C \rightarrow 0.$$

Or, si x, y sont deux éléments de \mathfrak{R} , et ζ la classe de xy mod. \mathfrak{R}^4 , l'image $\delta'(\zeta \otimes 1)$ est par définition $d_{B/A}(xy) \otimes 1 = (xd_{B/A}(y) + yd_{B/A}(x)) \otimes 1$; mais comme les images de x et de y dans C sont nulles, on a aussi $d_{B/A}(xy) \otimes 1 = 0$ dans $\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C$, ce qui prouve notre assertion.

(iii) Dire que $\delta_{C/B/A}$ est inversible à gauche revient, compte tenu de l'exactitude de (20.5.12.1), à dire que la suite

$$(20.5.12.5) \quad 0 \rightarrow \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2 \xrightarrow{\delta_{C/B/A}} \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \xrightarrow{u_{C/B/A}} \Omega_{C/A}^1 \rightarrow 0$$

est *exacte* et *scindée*, et il revient au même (Bourbaki, *loc. cit.*) de dire que $\text{Ker}(u^1) = 0$ dans la suite exacte (20.5.12.3) pour tout L , ce qui montre l'équivalence des conditions *a*) et *b*) (cf. (18.3.6.2)).

Le fait que *b*) entraîne *c*) provient de ce que l'image réciproque par $u : B \rightarrow C$ de la A -extension E de C par $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2$ est A -triviale, u étant composée des homomorphismes canoniques $B \rightarrow E \rightarrow C$ (18.1.6). Inversement, *c*) entraîne *b*), car toute B -extension de C par L est B -équivalente à $E \oplus_{\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2} L$ (18.3.8), autrement dit sa classe est l'image de la classe de E (considéré comme B -extension) par l'homomorphisme

$w_* : \text{Exan}_B(C, \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2) \rightarrow \text{Exan}_B(C, L)$ correspondant à un B -homomorphisme $w : \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2 \rightarrow L$. Le fait que c) entraîne b) résulte alors de la commutativité du diagramme (18.3.6.5)

$$\begin{array}{ccc} \text{Exan}_B(C, \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2) & \xrightarrow{w_*} & \text{Exan}_B(C, L) \\ \downarrow u^* & & \downarrow u^* \\ \text{Exan}_A(C, \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2) & \xrightarrow{w_*} & \text{Exan}_A(C, L) \end{array}$$

(iv) On a vu (20.1.7) que les inverses à droite de $E \rightarrow C$ correspondent biunivoquement de façon canonique à l'ensemble des éléments $D \in D_{\text{Dér}}(E, \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2)$ tels que $D(x) = x$ dans $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2$, donc aussi, par (20.4.8), à l'ensemble des E -homomorphismes $h : \Omega_{E/A}^1 \rightarrow \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2$ tels que le composé $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2 \xrightarrow{\delta_{E/A}} \Omega_{E/A}^1 \xrightarrow{h} \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2$ soit l'identité. Par tensorisation avec C , on en déduit (puisque $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2$ est un C -module) que le composé

$$\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2 \xrightarrow{\delta_{C/E/A}} \Omega_{E/A}^1 \otimes_E C \xrightarrow{h \otimes 1} \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2$$

est l'identité; or, puisque $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2$ est un C -module, $h \otimes h \otimes 1$ est un isomorphisme de l'ensemble $\text{Hom}_E(\Omega_{E/A}^1, \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2)$ sur $\text{Hom}_C(\Omega_{E/A}^1 \otimes_E C, \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2)$; et par ailleurs (ii) prouve que l'on peut identifier canoniquement $\Omega_{E/A}^1 \otimes_E C$ et $\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C$, $\delta_{C/E/A}$ s'identifiant alors à $\delta_{C/B/A}$. C.Q.F.D.

Exemple (20.5.13). — Soient $B = A[X_\alpha]_{\alpha \in I}$ une algèbre de polynômes sur A , \mathfrak{R} un idéal de B , (P_λ) un système de générateurs de \mathfrak{R} et $C = B/\mathfrak{R}$; on sait que $\Omega_{B/A}^1$ est un B -module libre dont les dX_α forment une base (20.4.13, (i)), donc les dX_α forment aussi une base du C -module libre $\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C$. D'autre part, il résulte aussitôt de la définition que l'image de $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2$ par $\delta_{C/B/A}$ est le sous- C -module engendré par les

$$dP_\lambda = \sum_\alpha \frac{\partial P_\lambda}{\partial X_\alpha} dX_\alpha.$$

On en conclut que $\Omega_{C/A}^1$ est isomorphe au quotient du C -module libre ayant les dX_α pour base, par le sous- C -module engendré par les dP_λ , ce qui donne une description d'un module de différentielles d'une algèbre *quelconque*, toute A -algèbre C pouvant s'obtenir de la façon précédente.

Corollaire (20.5.14). — Si C est une A -algèbre formellement lisse (pour les topologies discrètes), la suite

$$(20.5.14.1) \quad 0 \rightarrow \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2 \xrightarrow{\delta_{C/B/A}} \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \xrightarrow{u_{C/B/A}} \Omega_{C/A}^1 \rightarrow 0$$

est exacte et scindée.

En effet, toute A -extension de C par un C -module est alors triviale (19.4.4.1).

Remarque (20.5.15). — Soit $u : A \rightarrow B$ un homomorphisme *surjectif* d'anneaux; alors, pour tout homomorphisme d'anneaux $v : B \rightarrow C$, l'homomorphisme canonique

$$(20.5.15.1) \quad u_{C/B/A} : \Omega_{C/A}^1 \rightarrow \Omega_{C/B}^1$$

est *bijectif*; cela résulte en effet de la suite exacte (20.5.7.1), puisque $\Omega_{B/A}^1 = 0$ (20.4.12).

20.6. Modules d'imperfection et homomorphismes caractéristiques.

Définition (20.6.1). — Étant donnés deux homomorphismes d'anneaux $u : A \rightarrow B$, $v : B \rightarrow C$, on appelle module d'imperfection de la B -algèbre C relativement à A , et on note $\Upsilon_{C/B/A}$, le C -module noyau de l'homomorphisme $v_{C/B/A} : \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \rightarrow \Omega_{C/A}^1$.

On a donc par définition (cf. (20.5.7)) la suite exacte

$$(20.6.1.1) \quad 0 \rightarrow \Upsilon_{C/B/A} \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \xrightarrow{v_{C/B/A}} \Omega_{C/A}^1 \xrightarrow{u_{C/B/A}} \Omega_{C/B}^1 \rightarrow 0.$$

Lorsque $A = \mathbf{Z}$ (les modules $\Omega_{B/A}^1$ et $\Omega_{C/A}^1$ étant donc les modules de différentielles « absolues » Ω_B^1 et Ω_C^1), on écrit $\Upsilon_{C/B}$ au lieu de $\Upsilon_{C/B/\mathbf{Z}}$; lorsque B et C sont des algèbres sur un corps premier P , on a $\Upsilon_{C/B/P} = \Upsilon_{C/B}$.

Soient R, S des parties multiplicatives de B et C respectivement, telles que l'image de R soit contenue dans S . Il résulte alors de la suite exacte (20.6.1.1) et de (20.5.9) que l'on a

$$(20.6.1.2) \quad \Upsilon_{S^{-1}C/R^{-1}B/A} = S^{-1}\Upsilon_{C/B/A}.$$

Proposition (20.6.2). — Si C est une B -algèbre formellement lisse relativement à A (et en particulier si C est une B -algèbre formellement lisse), on a $\Upsilon_{C/B/A} = 0$.

Cela résulte de (20.5.7, (ii)).

Proposition (20.6.3). — Soient k un corps, K une extension de k . Pour que K soit une extension séparable de k , il faut et il suffit que $\Upsilon_{K/k} = 0$ (autrement dit, l'homomorphisme canonique $\Omega_k^1 \otimes_k K \rightarrow \Omega_K^1$ est *injectif* ou encore (20.4.8), toute dérivation de k dans K se prolonge en une dérivation de K dans lui-même).

En effet, il est équivalent de dire que K est séparable sur k ou une k -algèbre formellement lisse (19.6.1); d'autre part, si P est le corps premier de k , K est séparable sur P , donc une P -algèbre formellement lisse, et il revient donc au même de dire que K est une k -algèbre formellement lisse ou une k -algèbre formellement lisse relativement à P . Enfin, dire que K est une k -algèbre formellement lisse relativement à P équivaut d'après (20.5.7, (ii)) à dire que l'homomorphisme $v_{K/k/P} : \Omega_k^1 \otimes_k K \rightarrow \Omega_K^1$ est inversible à gauche; mais comme K est un corps, cette dernière condition équivaut à dire que le noyau de $v_{K/k/P}$, c'est-à-dire $\Upsilon_{K/k}$, est nul.

(20.6.4) Considérons un diagramme commutatif

$$(20.6.4.1) \quad \begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' \\ f \uparrow & & g \uparrow & & h \uparrow \\ A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C \end{array}$$

d'homomorphismes d'anneaux commutatifs. La commutativité du diagramme correspondant (20.5.7.3) entraîne l'existence d'un unique C -homomorphisme

$$(20.6.4.2) \quad Y_{C/B/A} \rightarrow Y_{C'/B'/A'}$$

déduit canoniquement de (20.6.4.1) et rendant commutatif le diagramme

$$(20.6.4.3)$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & Y_{C/B/A} & \rightarrow & \Omega^1_{B/A} \otimes_B C & \xrightarrow{v_{C/B/A}} & \Omega^1_{C/A} \xrightarrow{u_{C/B/A}} \Omega^1_{C/B} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & Y_{C'/B'/A'} & \rightarrow & \Omega^1_{B'/A'} \otimes_{B'} C' & \xrightarrow{v'_{C'/B'/A'}} & \Omega^1_{C'/A'} \xrightarrow{u'_{C'/B'/A'}} \Omega^1_{C'/B'} \rightarrow 0 \end{array}$$

La donnée de l'homomorphisme (20.6.4.2) équivaut d'ailleurs à celle d'un C' -homomorphisme

$$(20.6.4.4) \quad Y_{C/B/A} \otimes_C C' \rightarrow Y_{C'/B'/A'}$$

qui, composé avec l'homomorphisme canonique $Y_{C/B/A} \rightarrow Y_{C/B/A} \otimes_C C'$, redonne (20.6.4.2). Il est clair que (20.6.4.2) jouit d'une propriété évidente de transitivité, permettant de dire que $Y_{C/B/A}$ est un *foncteur* en le triplet (A, B, C) .

(20.6.5) Il nous sera commode pour la suite, sous les conditions de (20.6.1), d'introduire un *complexe* (de chaînes) de C -modules $K_*(C/B/A)$ dont les termes sont nuls sauf en degrés 0 et 1, où on prend

$$(20.6.5.1) \quad \begin{cases} K_0(C/B/A) = \Omega^1_{C/A} \\ K_1(C/B/A) = \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \end{cases}$$

l'opérateur différentiel $K_1 \rightarrow K_0$ étant $v_{C/B/A}$. Cela permet d'écrire (à des isomorphismes canoniques près) $\Omega^1_{C/B}$ et $Y_{C/B/A}$ comme les *modules d'homologie* de ce complexe

$$(20.6.5.2) \quad H_0(K_*(C/B/A)) = \Omega^1_{C/B}, \quad H_1(K_*(C/B/A)) = Y_{C/B/A}.$$

De même :

Proposition (20.6.6). — *Sous les hypothèses de (20.6.1), pour tout C -module L , on a des C -isomorphismes canoniques*

$$(20.6.6.1) \quad H^0(K_*(C/B/A), L) \xrightarrow{\sim} Dér_B(C, L)$$

$$(20.6.6.2) \quad H^1(K_*(C/B/A), L) \xrightarrow{\sim} Exalcom_{B/A}(C, L).$$

En effet, le complexe de cochaînes $\text{Hom}_C(K_*(C/B/A), L)$ n'est autre, en vertu de (20.4.8) et (20.5.6), que le complexe

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow Dér_A(C, L) \rightarrow Dér_A(B, L) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

où l'opérateur différentiel est v^0 (avec les notations de (20.2.1)). La proposition résulte alors de la suite exacte (20.2.4.2) et de la définition des modules de cohomologie

$$(20.6.6.3) \quad H^i(K_*, L) = H^i(\text{Hom}_C(K_*, L)).$$

Si on a un diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux

$$\begin{array}{ccccc} A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \end{array}$$

les di-homomorphismes (20.5.4.3) définissent un di-homomorphisme de complexes de modules

$$(20.6.6.4) \quad K_*(C/B/A) \rightarrow K_*(C'/B'/A')$$

et les di-homomorphismes qu'on en déduit pour l'homologie ou la cohomologie s'identifient, par les formules (20.6.5.2), (20.6.6.1) et (20.6.6.2), aux di-homomorphismes déjà définis dans (20.5.4.3), (20.6.4.2), (20.2.1) et (18.3.7.2) (compte tenu, pour le dernier, de la définition de l'opérateur ∂ dans la suite exacte (20.2.4.2)).

(20.6.7) On sait que pour un complexe K_* de C -modules et un C -module L , on a des homomorphismes canoniques

$$\alpha : H^i(K_*, L) \rightarrow \text{Hom}_C(H_i(K_*), L)$$

(M, IV, 6). Ici, l'homomorphisme canonique

$$\alpha_1 : H^1(K_*(C/B/A), L) \rightarrow \text{Hom}_C(H_1(K_*(C/B/A)), L)$$

se définit immédiatement comme obtenu par passage au quotient par l'image de $\text{Hom}_C(K_0, L)$ de l'homomorphisme de restriction

$$\text{Hom}_C(K_1(C/B/A), L) \rightarrow \text{Hom}_C(H_1(K_*(C/B/A)), L)$$

puisque $H_1(K_*(C/B/A))$ n'est autre que le noyau de $K_1 \rightarrow K_0$; tenant compte de (20.6.6.2) et (20.6.5.2), on obtient donc un C -homomorphisme canonique

$$(20.6.7.1) \quad \text{Exalcom}_{B/A}(C, L) \rightarrow \text{Hom}_C(Y_{C/B/A}, L)$$

qui s'explique de la façon suivante : en vertu de (20.2.4.2), toute B -extension de C par L qui est A -triviale provient de la donnée d'une A -dérivation D de B dans L , donc (20.4.8) d'un C -homomorphisme f de $\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C$ dans L ; on fait correspondre à la classe de cette extension la *restriction* de f à $Y_{C/B/A}$, qui ne dépend effectivement que de cette classe et non du choix de D .

Définition (20.6.8). — Soient $u : A \rightarrow B$, $v : B \rightarrow C$ deux homomorphismes d'anneaux. Pour toute B -extension E de C par un C -module L , qui est A -triviale (18.3.7), on appelle homo-

morphisme caractéristique de E, et on note χ_E , le C-homomorphisme $\Upsilon_{C/B/A} \rightarrow L$, image de la classe de E par l'homomorphisme canonique (20.6.7.1).

On peut définir l'homomorphisme χ_E d'une autre manière :

Proposition (20.6.9). — Soit E une B-extension de C par un C-module L, qui est A-triviale (18.3.7); alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \Upsilon_{C/B/A} & \longrightarrow & \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C & \xrightarrow{v_{C/B/A}} & \Omega_{C/A}^1 \\
 & & \downarrow \chi_E & & \downarrow q_{E/B/A} \otimes 1_C & & \downarrow \gamma^1 \\
 (20.6.9.1) & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\delta_{C/E/A}} & \Omega_{E/A}^1 \otimes_E C & \xrightarrow{p_{C/E/A}} & \Omega_{C/A}^1 \rightarrow 0
 \end{array}$$

où $q : B \rightarrow E$ définit la structure de B-extension de E et $p : E \rightarrow C$ est l'homomorphisme d'augmentation, est commutatif et ses lignes sont exactes.

La ligne inférieure du diagramme est la suite (20.5.12.5) relative aux deux homomorphismes $A \xrightarrow{q \circ u} E$ et $p : E \rightarrow C = E/L$; comme p est surjectif et que E est une extension A-triviale, cette suite est exacte et scindée en vertu de (20.5.12, (iii)). La commutativité du carré de droite de (20.6.9.1) résulte de la relation $v = p \circ q$ (20.5.2.7); l'image par $q_{E/B/A} \otimes 1_C$ du noyau $\Upsilon_{C/B/A}$ de $v_{C/B/A}$ est donc contenue dans le noyau L de $p_{C/B/A}$. D'autre part soit $h : C \rightarrow E$ un A-homomorphisme inverse à droite de p , et soit $j : L \rightarrow E$ l'injection canonique, de sorte que l'on a $q(b) = h(v(b)) + j(D(b))$ pour $b \in B$, où D est la A-dérivation de B dans L définissant la B-extension E; on peut écrire $D = f \circ d_{B/A}$, où $f : \Omega_{B/A}^1 \rightarrow L$ est un B-homomorphisme. En vertu de (20.5.2.6), on a $q_{E/B/A}(d_{B/A}(b)) = d_{E/A}(q(b)) = d_{E/A}(h(v(b))) + d_{E/A}(j(f(d_{B/A}(b))))$ pour $b \in B$. Soit alors $z = \sum_i d_{B/A}(b_i) \otimes c_i$, où $b_i \in B$ et $c_i \in C$, un élément de $\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C$; on a

$$(q_{E/B/A} \otimes 1_C)(z) = \sum_i d_{E/A}(h(v(b_i))) \otimes c_i + \sum_i d_{E/A}(j(f(d_{B/A}(b_i)))) \otimes c_i.$$

Dans la première somme, on a $d_{E/A}(h(v(b_i))) = h_{E/C/A}(d_{C/A}(v(b_i)))$, donc cette somme est $(h_{E/C/A} \otimes 1_C)(v_{C/B/A}(z))$ en vertu de (20.5.2.6). Si l'on prend $z \in \Upsilon_{C/B/A}$, cette somme est donc nulle, et il reste, par définition de $\delta_{C/E/A}$,

$$(q_{E/B/A} \otimes 1_C)(z) = \sum_i \delta_{C/E/A}(c_i f(d_{B/A}(b_i))) = \delta_{C/E/A}(f(z))$$

ce qui démontre la commutativité du carré de gauche dans (20.6.9.1).

On notera que lorsque l'on suppose seulement que $\delta_{C/E/A}$ est *injectif* (et non nécessairement inversible à gauche), cette interprétation permettrait encore de définir χ_E comme la restriction de $q_{E/B/A} \otimes 1_C$ à $\Upsilon_{C/B/A}$.

Corollaire (20.6.10). — Si \mathfrak{R} est un idéal de B, $C = B/\mathfrak{R}$, $E = B/\mathfrak{R}^2$, et si E est une B-extension A-triviale (18.3.7) de C par $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2$, alors l'homomorphisme caractéristique $\chi_E : \Upsilon_{C/B/A} \rightarrow \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2$ est bijectif.

En effet, dans le diagramme (20.6.9.1), les deux flèches verticales de droite sont des homomorphismes bijectifs (20.5.12, (ii)).

Théorème (20.6.11). — Soient $u : A \rightarrow B$, $v : B \rightarrow C$ deux homomorphismes d'anneaux, L un C -module. Supposons vérifiée l'une des conditions suivantes :

- (i) L est un C -module injectif.
- (ii) $\Upsilon_{C/B/A}$ est facteur direct du C -module $\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C$ et $u_{C/B/A} : \Omega_{C/A}^1 \rightarrow \Omega_{C/B}^1$ est inversible à droite.

Alors l'homomorphisme canonique (20.6.7.1)

$$\text{Exalcom}_{B/A}(C, L) \rightarrow \text{Hom}_C(\Upsilon_{C/B/A}, L)$$

est bijectif.

En particulier, si $\Omega_{C/B}^1$ et $\Omega_{C/A}^1$ sont des C -modules projectifs, l'homomorphisme canonique (20.6.7.1) est bijectif.

Le fait que chacune des conditions (i), (ii) entraîne que (20.6.7.1) est bijectif résulte dans les deux cas de la définition de α_1 . On notera d'ailleurs que la condition (ii) est nécessaire et suffisante pour que l'homomorphisme (20.6.7.1) soit bijectif pour tout C -module L (Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3^e éd., § 2, no 1, prop. 1). Si on suppose que $\Omega_{C/B}^1$ et $\Omega_{C/A}^1$ sont des C -modules projectifs, alors, dans la suite exacte (20.6.1.1), $\text{Ker}(u_{C/B/A})$ est un C -module projectif, car la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ker}(u_{C/B/A}) \rightarrow \Omega_{C/A}^1 \rightarrow \Omega_{C/B}^1 \rightarrow 0$$

est scindée, $\Omega_{C/B}^1$ étant projectif; comme $\text{Ker}(u_{C/B/A}) = \text{Im}(v_{C/B/A})$, la suite exacte

$$0 \rightarrow \Upsilon_{C/B/A} \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \rightarrow \text{Im}(v_{C/B/A}) \rightarrow 0$$

est scindée.

Corollaire (20.6.12). — Supposons que C soit une A -algèbre formellement lisse. Il existe alors un homomorphisme canonique

$$(20.6.12.1) \quad \text{Exalcom}_B(C, L) \rightarrow \text{Hom}_C(\Upsilon_{C/B/A}, L).$$

En outre, cet homomorphisme est bijectif si l'une des conditions (i), (ii) de (20.6.11) est vérifiée.

En effet, il résulte de l'hypothèse sur C que $\text{Exalcom}_B(C, L) = \text{Exalcom}_{B/A}(C, L)$, et l'homomorphisme (20.6.12.1) n'est autre que (20.6.7.1).

Corollaire (20.6.13). — Si C est une A -algèbre formellement lisse et si $\Omega_{C/B}^1$ est un C -module projectif, l'homomorphisme (20.6.12.1) est bijectif.

En effet, on sait alors que $\Omega_{C/A}^1$ est un C -module projectif (20.4.9), les topologies étant discrètes.

(20.6.14) Les notations restant les mêmes, supposons maintenant en outre que A , B , C soient des Λ -algèbres et u , v des Λ -homomorphismes, ce qui revient à se donner trois homomorphismes d'anneaux

$$\Lambda \xrightarrow{s} A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C.$$

On a donc, en dehors du module d'imperfection $\Upsilon_{C/B/\Lambda}$, les modules d'imperfection $\Upsilon_{B/A/\Lambda}$, $\Upsilon_{C/A/\Lambda}$ et $\Upsilon_{C/B/\Lambda}$, et on a déjà défini des homomorphismes canoniques de C -modules (20.6.4.2)

$$(20.6.14.1) \quad u' : \Upsilon_{C/A/\Lambda} \rightarrow \Upsilon_{C/B/\Lambda}$$

$$(20.6.14.2) \quad s' : \Upsilon_{C/B/\Lambda} \rightarrow \Upsilon_{C/A/\Lambda}.$$

Comme dans le diagramme commutatif (20.5.7.3)

$$(20.6.14.3) \quad \begin{array}{ccccccc} \Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A B & \rightarrow & \Omega_{B/\Lambda}^1 & \rightarrow & \Omega_{B/A}^1 & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A C & \rightarrow & \Omega_{C/\Lambda}^1 & \rightarrow & \Omega_{C/A}^1 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

la ligne inférieure est formée de C -modules, on en déduit par tensorisation un diagramme commutatif

$$(20.6.14.4) \quad \begin{array}{ccccccc} \Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A C & \rightarrow & \Omega_{B/\Lambda}^1 \otimes_B C & \rightarrow & \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C & \rightarrow & 0 \\ \downarrow \iota & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A C & \longrightarrow & \Omega_{C/\Lambda}^1 & \longrightarrow & \Omega_{C/A}^1 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

où la première ligne est encore exacte et la flèche verticale de gauche est l'identité; si l'on pose

$$(20.6.14.5) \quad \Upsilon_{B/A/\Lambda}^C = \text{Ker}(u_{B/A/\Lambda} \otimes \text{Id}_C) = \text{Ker}(\Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A C \rightarrow \Omega_{B/\Lambda}^1 \otimes_B C)$$

on voit, compte tenu de la définition de $\Upsilon_{C/A/\Lambda}$, que l'on a un unique C -homomorphisme

$$(20.6.14.6) \quad v' : \Upsilon_{B/A/\Lambda}^C \rightarrow \Upsilon_{C/A/\Lambda}$$

rendant commutatif le diagramme

$$(20.6.14.7) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Upsilon_{B/A/\Lambda}^C & \rightarrow & \Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A C & \rightarrow & \Omega_{B/\Lambda}^1 \otimes_B C & \rightarrow & \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow v' & & \downarrow \iota & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \Upsilon_{C/A/\Lambda} & \rightarrow & \Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A C & \longrightarrow & \Omega_{C/\Lambda}^1 & \longrightarrow & \Omega_{C/A}^1 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes.

Lorsque $\Lambda = \mathbf{Z}$, on écrira $\Upsilon_{B/A}^C$ au lieu de $\Upsilon_{B/A/\mathbf{Z}}^C$. Si Λ est un corps premier, on a $\Upsilon_{B/A/\Lambda}^C = \Upsilon_{B/A}^C$.

(20.6.15) Pour étudier les relations entre les modules précédents, nous introduirons d'une part le complexe de B -modules $K_*(B/A/\Lambda)$, d'autre part, les complexes

de C-modules $K_*(C/A/\Lambda)$ et $K_*(C/B/\Lambda)$ (20.6.5), et en outre les complexes de C-modules suivants. On posera tout d'abord

$$(20.6.15.1) \quad K_*^c(B/A/\Lambda) = K_*(B/A/\Lambda) \otimes_B C.$$

D'autre part, nous désignerons par $T_*(C/B/\Lambda)$ le complexe de C-modules dont les termes sont nuls sauf en degrés 0 et 1, et où

$$(20.6.15.2) \quad T_0(C/B/\Lambda) = T_1(C/B/\Lambda) = \Omega_{B/\Lambda}^1 \otimes_B C$$

l'opérateur différentiel étant l'identité, de sorte que ce complexe est *homotope* à 0; posons enfin

$$(20.6.15.3) \quad K'_*(C/A/\Lambda) = K_*(C/A/\Lambda) \oplus T_*(C/B/\Lambda).$$

En vertu du caractère trivial de T_* , il est clair que l'on a

$$(20.6.15.4) \quad H^i(K'_*, L) = H^i(K_*, L) \quad \text{et} \quad H_i(K'_*, L) = H_i(K_*, L)$$

pour tout C-module L et tout i .

(20.6.16) Définissons maintenant une *suite exacte* de complexes, *scindée* en chaque degré

$$(20.6.16.1) \quad 0 \rightarrow K_*^c(B/A/\Lambda) \xrightarrow{j_*} K'_*(C/A/\Lambda) \xrightarrow{p_*} K_*(C/B/\Lambda) \rightarrow 0$$

de la façon suivante : désignons pour un moment par

$$\begin{aligned} f &: \Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A C \rightarrow \Omega_{B/\Lambda}^1 \otimes_B C \\ g &: \Omega_{B/\Lambda}^1 \otimes_B C \rightarrow \Omega_{C/\Lambda}^1 \end{aligned}$$

les homomorphismes canoniques $u_{B/A/\Lambda} \otimes 1_C$ et $v_{C/B/\Lambda}$ respectivement, dont le composé est $g \circ f = (v \circ u)_{C/A/\Lambda}$ (cf. (20.6.14.4)). On prendra $j_1(x) = (x, f(x))$, $p_1(y, z) = z - f(y)$, $j_0(x) = (g(x), x)$, $p_0(y, z) = g(z) - y$ de sorte que $\text{Im}(j_1) = \text{Ker}(p_1)$ est le graphe de f , supplémentaire de $\{0\} \oplus T_1$, et $\text{Im}(j_0) = \text{Ker}(p_0)$ est le graphe de g , supplémentaire de $K_1(C/A/\Lambda) \oplus \{0\}$; la vérification de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & K_1^c(B/A/\Lambda) & \xrightarrow{j_1} & K'_1(C/A/\Lambda) & \xrightarrow{p_1} & K_1(C/B/\Lambda) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & K_0^c(B/A/\Lambda) & \xrightarrow{j_*} & K'_0(C/A/\Lambda) & \xrightarrow{p_*} & K_0(C/B/\Lambda) \rightarrow 0 \end{array}$$

où les flèches verticales sont les opérateurs différentiels, est immédiate.

Théorème (20.6.17). — *On a une suite exacte de C-modules*

$$(20.6.17.1) \quad 0 \rightarrow \Gamma_{B/A/\Lambda}^c \xrightarrow{v'} \Gamma_{C/A/\Lambda} \xrightarrow{u'} \Gamma_{C/B/\Lambda} \xrightarrow{\partial} \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \xrightarrow{v_{C/B/\Lambda}} \Omega_{C/A}^1 \xrightarrow{u_{C/B/\Lambda}} \Omega_{C/B}^1 \rightarrow 0$$

où l'opérateur bord ∂ est le composé

$$(20.6.17.2) \quad \Upsilon_{C/B/\Lambda} \xrightarrow{s'} \Upsilon_{C/A/\Lambda} \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C$$

la seconde flèche étant l'injection canonique.

En écrivant la suite exacte d'homologie pour la suite exacte de complexes (20.6.16.1), on obtient (20.6.17.1), l'homologie étant nulle en degrés distincts de 0 et de 1; le fait que les homomorphismes de cette suite exacte qui proviennent par fonctorialité de j et de p sont bien ceux de l'énoncé est immédiat. Reste à vérifier que ∂ est égal à (20.6.17.2); or un élément $z \in \Upsilon_{C/B/\Lambda}$ est image par p_1 de $(0, z)$, d'où on déduit aussitôt que $\partial(z)$ est l'image de z par l'homomorphisme canonique $s_{B/A/\Lambda} \otimes_I C : \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C$. Notre assertion résulte de la commutativité du diagramme

$$(20.6.17.3) \quad \begin{array}{ccc} \Upsilon_{C/B/\Lambda} & \xrightarrow{s'} & \Upsilon_{C/A/\Lambda} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C & \rightarrow & \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \end{array}$$

(cf. (20.6.4.3)).

Corollaire (20.6.18). — (i) La suite de C -modules

$$(20.6.18.1) \quad 0 \rightarrow \Upsilon_{B/A/\Lambda}^C \xrightarrow{v'} \Upsilon_{C/A/\Lambda} \xrightarrow{u'} \Upsilon_{C/B/\Lambda} \xrightarrow{s'} \Upsilon_{C/B/\Lambda} \rightarrow 0$$

est exacte.

(ii) Si B est une A -algèbre formellement lisse relativement à Λ , on a $\Upsilon_{B/A/\Lambda}^C = 0$.

(i) Dans (20.6.17.1), l'image de $\Upsilon_{C/B/\Lambda}$ par ∂ est le noyau de $v_{C/B/\Lambda}$, donc $\Upsilon_{C/B/\Lambda}$ par définition.

(ii) L'hypothèse entraîne que la suite

$$0 \rightarrow \Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A B \rightarrow \Omega_{B/\Lambda}^1 \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \rightarrow 0$$

est exacte et scindée (20.5.7); par tensorisation avec C , la suite

$$0 \rightarrow \Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A C \rightarrow \Omega_{B/\Lambda}^1 \otimes_B C \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \rightarrow 0$$

reste donc exacte, d'où notre assertion.

Corollaire (20.6.19). — Soient K un corps, E, F deux extensions de K telles que $K \subset E \subset F$.

(i) Si F est une extension séparable de E , on a $\Upsilon_{F/E/K} = 0$ (autrement dit, l'homomorphisme canonique $\Omega_{E/K}^1 \otimes_E F \rightarrow \Omega_{F/K}^1$ est injectif).

(ii) Inversement, si F est une extension séparable de K et si l'on a $\Upsilon_{F/E/K} = 0$, alors F est une extension séparable de E .

Si P est le corps premier de K , on a en effet la suite exacte (20.6.18)

$$\Upsilon_{F/K/P} \rightarrow \Upsilon_{F/E/P} \rightarrow \Upsilon_{F/E/K} \rightarrow 0.$$

Si $\Upsilon_{F/E/P} = \Upsilon_{F/E} = 0$, on a donc $\Upsilon_{F/E/K} = 0$, d'où (i) en vertu de (20.6.3); inversement, si $\Upsilon_{F/E/K} = 0$ et $\Upsilon_{F/K/P} = \Upsilon_{F/K} = 0$, on a $\Upsilon_{F/E/P} = 0$, d'où (ii) en vertu de (20.6.3).

Corollaire (20.6.20). — (i) Si K est une extension algébrique séparable de k , on a $\Omega_{K/k}^1 = 0$.

(ii) Soient k un corps de caractéristique o , K une extension de k . Pour que $\Omega_{K/k}^1 = 0$, il faut et il suffit que K soit une extension algébrique de k . En particulier, pour qu'un corps K de caractéristique o soit tel que $\Omega_K^1 = 0$, il faut et il suffit que K soit une extension algébrique de \mathbf{Q} (cf. (21.4.4) et (21.7.5)).

(i) Pour tout $x \in K$, soit f le polynôme minimal de x sur k ; comme $f'(x) \neq 0$ et $d_{K/k}(f(x)) = f'(x)d_{K/k}(x) = 0$, on a $d_{K/k}(x) = 0$ et notre assertion résulte de (20.4.7).

(ii) Il existe une extension pure L de k telle que $k \subset L \subset K$ et que K soit une extension algébrique de L . Comme K est séparable sur L , il résulte de (20.6.19, (i)) que la suite (20.5.7.2)

$$0 \rightarrow \Omega_{L/k}^1 \otimes_L K \rightarrow \Omega_{K/k}^1 \rightarrow \Omega_{K/L}^1 \rightarrow 0$$

est exacte et de (i) que $\Omega_{K/L}^1 = 0$. La relation $\Omega_{K/k}^1 = 0$ est donc équivalente à $\Omega_{L/k}^1 = 0$, et comme L est une extension pure de k , il résulte de (20.5.10) que la relation $\Omega_{L/k}^1 = 0$ équivaut à $L = k$.

Remarques (20.6.21). — (i) Comme $\Upsilon_{B/A/\Lambda}$ est le noyau de

$$u_{B/A/\Lambda} : \Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A B \rightarrow \Omega_{B/\Lambda}^1$$

et $\Upsilon_{B/A/\Lambda}^C$ le noyau de $u_{B/A/\Lambda} \otimes_{\Lambda} I_C$, on a un homomorphisme canonique

$$(20.6.21.1) \quad \Upsilon_{B/A/\Lambda} \otimes_B C \rightarrow \Upsilon_{B/A/\Lambda}^C.$$

Cet homomorphisme est bijectif lorsque la suite

$$(20.6.21.2) \quad 0 \rightarrow \Upsilon_{B/A/\Lambda} \otimes_B C \rightarrow \Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A C \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \rightarrow 0$$

est exacte, ce qui se produit dans les cas suivants :

1° C est un B -module *plat*.

2° Les B -modules $\Omega_{B/A}^1$ et $\Omega_{B/A}^1$ sont *plats* : en effet, il en est alors de même de $\text{Ker}(\Omega_{B/A}^1 \rightarrow \Omega_{B/A}^1)$ (0.1.2), et la suite (20.6.21.2) est alors exacte en vertu de (0.1.2).

(ii) Considérons un diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux

$$\begin{array}{ccccccc} \Lambda' & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \Lambda & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \end{array}$$

Alors les définitions de (20.6.16) montrent que l'on a un diagramme commutatif de complexes (où les flèches verticales proviennent de (20.6.6.4))

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & K_*^c(B/A/\Lambda) & \rightarrow & K'_*(C/A/\Lambda) & \rightarrow & K_*(C/B/\Lambda) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & K_*^c(B'/A'/\Lambda') & \rightarrow & K'_*(C'/A'/\Lambda') & \rightarrow & K_*(C'/B'/\Lambda') \rightarrow 0 \end{array}$$

d'où, par passage à l'homologie, un *diagramme commutatif*

(20.6.21.3)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & Y_{B/A/\Lambda}^C & \rightarrow & Y_{C/A/\Lambda} & \rightarrow & Y_{C/B/\Lambda} & \rightarrow & \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \rightarrow \Omega_{C/A}^1 \rightarrow \Omega_{C/B}^1 \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & Y_{B'/A'/\Lambda'}^{C'} & \rightarrow & Y_{C'/A'/\Lambda'} & \rightarrow & Y_{C'/B'/\Lambda'} & \rightarrow & \Omega_{B'/A'}^1 \otimes_{B'} C' \rightarrow \Omega_{C'/A'}^1 \rightarrow \Omega_{C'/B'}^1 \rightarrow 0 \end{array}$$

On a un diagramme commutatif analogue pour (20.6.18.1).

Proposition (20.6.22). — Soient $s : \Lambda \rightarrow A$, $u : A \rightarrow B$ deux homomorphismes d'anneaux, \mathfrak{R} un idéal de B , C l'anneau quotient B/\mathfrak{R} . Supposons que $E = B/\mathfrak{R}^2$ soit une B -extension Λ -triviale de C par $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2$. On a alors une suite exacte

$$(20.6.22.1) \quad 0 \rightarrow Y_{B/A/\Lambda}^C \xrightarrow{v'} Y_{C/A/\Lambda} \xrightarrow{x_E} \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2 \xrightarrow{\delta_{C/B/A}} \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \xrightarrow{v_{C/B/A}} \Omega_{C/A}^1 \rightarrow 0.$$

En effet, comme $v : B \rightarrow C$ est surjectif, on a $\Omega_{C/B}^1 = 0$ (20.4.12). En outre, il résulte de (20.6.10) que $Y_{C/B/\Lambda}$ s'identifie canoniquement à $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2$. Il suffit alors d'appliquer les suites exactes (20.6.17.1) et (20.6.18.1), en notant que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y_{C/A/\Lambda} & \longrightarrow & \Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A C \\ \downarrow x_E & & \downarrow \\ Y_{C/E/\Lambda} = Y_{C/B/\Lambda} = \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2 & \xrightarrow{\delta_{C/E/A}} & \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C = \Omega_{E/A}^1 \otimes_E C \\ \downarrow \wr & & \downarrow \\ \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2 & \xrightarrow{\delta_{C/B/A}} & \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \end{array}$$

et utilisant la commutativité du diagramme (20.6.17.3).

On a ainsi précisé le noyau de $\delta_{C/B/A}$ dans le cas où il existe un anneau Λ tel que A soit une Λ -algèbre et que B/\mathfrak{R}^2 soit Λ -triviale; on observera que c'est le cas en particulier lorsque C est une Λ -algèbre formellement lisse (pour la topologie discrète).

Supposons en outre qu'on ait un diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda' & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow f \\ \Lambda & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B \end{array}$$

que \mathfrak{R}' soit un idéal de B' tel que $f(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{R}'$, et que $E' = B'/\mathfrak{R}'^2$ soit une B' -extension Λ' -triviale de $C' = B'/\mathfrak{R}'$ par $\mathfrak{R}'/\mathfrak{R}'^2$. On a alors un diagramme commutatif

(20.6.22.2)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \Upsilon_{B'/A'/\Lambda'}^C & \rightarrow & \Upsilon_{C'/A'/\Lambda'} & \rightarrow & \mathfrak{R}'/\mathfrak{R}'^2 & \rightarrow & \Omega_{B'/A'}^1 \otimes_{B'} C' & \rightarrow & \Omega_{C'/A'}^1 & \rightarrow 0 \\ \uparrow & & \uparrow & \\ 0 & \rightarrow & \Upsilon_{B/A/\Lambda}^C & \rightarrow & \Upsilon_{C/A/\Lambda} & \rightarrow & \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2 & \rightarrow & \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C & \rightarrow & \Omega_{C/A}^1 & \rightarrow 0 \end{array}$$

comme il résulte de (20.6.21.3) et (20.5.11.3).

Corollaire (20.6.23). — Sous les hypothèses de (20.6.22), supposons en outre que B soit une A -algèbre formellement lisse. Alors on a une suite exacte

$$(20.6.23.1) \quad 0 \rightarrow \Upsilon_{C/A/\Lambda} \xrightarrow{\chi_E} \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2 \xrightarrow{\delta_{C/B/A}} \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \rightarrow \Omega_{C/A}^1 \rightarrow 0.$$

Cela résulte en effet de (20.6.18, (ii)).

(20.6.24) Lorsque les hypothèses de (20.6.22) sont satisfaites, on dit encore que l'homomorphisme caractéristique χ_E est l'*homomorphisme caractéristique de la A-algèbre B, relativement à Λ et à l'idéal \mathfrak{R}* (en supprimant ces dernières précisions lorsqu'il n'y a pas de confusion à craindre); on le notera parfois χ_B ou $\chi_{B/A}$.

Proposition (20.6.25). — Soient $s : \Lambda \rightarrow A$, $u : A \rightarrow B$, $v : B \rightarrow C$ trois homomorphismes d'anneaux, L un C -module. On a alors une suite exacte

$$(20.6.25.1) \quad 0 \rightarrow \text{Dér}_B(C, L) \xrightarrow{u^*} \text{Dér}_A(C, L) \xrightarrow{v^*} \text{Dér}_A(B, L) \xrightarrow{\partial} \\ \xrightarrow{\hat{\epsilon}} \text{Exalcom}_{B/\Lambda}(C, L) \xrightarrow{u^1} \text{Exalcom}_{A/\Lambda}(C, L) \xrightarrow{v^1} \text{Exalcom}_{A/\Lambda}(B, L) \rightarrow 0$$

où u^1 , v^1 sont les homomorphismes définis dans (18.3.6.4) et (18.3.6.2), et ∂ est défini comme dans (20.2.2).

En effet, comme la suite exacte (20.6.16.1) est scindée, on en déduit une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}_C(K_*(C/B/A), L) \rightarrow \text{Hom}_C(K'_*(C/A/\Lambda), L) \rightarrow \text{Hom}_C(K_*^C(B/A/\Lambda), L) \rightarrow 0.$$

Si on applique à ce complexe la suite exacte de cohomologie, en tenant compte de (20.6.15.4), et de (20.6.6), on obtient (20.6.25.1) car on a

$$\text{Hom}_C(K_*^C(B/A/\Lambda), L) = \text{Hom}_B(K_*(B/A/\Lambda), L)$$

par définition; l'identification de u^1 et v^1 avec les homomorphismes de (18.3.4.2) résulte de (20.6.6.4).

Remarque (20.6.26). — Dans ce numéro, les complexes $K_(C/B/A)$ sont apparus comme un artifice technique destiné à simplifier l'exposition de certains comportements fonctoriels. En réalité, ces complexes, considérés comme objets de la catégorie des*

complexes de C -modules « à homotopie près » (c'est-à-dire où les morphismes sont les classes d'homomorphismes homotopes) sont des invariants remarquables, plus fins que le couple formé de $\Omega_{C/B}^1$ et de $\Upsilon_{C/B/A}$. Lorsque k est un corps premier, et C une k -algèbre formellement lisse (par exemple un anneau régulier de type fini sur une extension de k (cf. (IV, 6.8.6))) on peut montrer que le complexe $K_*(C/A/k)$ peut se décrire uniquement en faisant intervenir C et A (à l'exclusion de k) : on exprime C comme quotient d'une algèbre de polynômes B sur A par un idéal \mathfrak{L} , et on considère le complexe $F_*(C/A)$ à 2 termes non nuls

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathfrak{L}/\mathfrak{L}^2 \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

(dont l'homologie coïncide bien avec celle de $K_*(C/A/k)$ en vertu de (20.6.23.1)). Ces complexes $F_*(C/A)$, qui du point de vue de l'algèbre homologique jouent le rôle d'un fibré conormal pour $\text{Spec}(C)$ au-dessus de $\text{Spec}(A)$, tiendront une place importante dans les chapitres de cet ouvrage consacrés à la dualité des faisceaux cohérents et au théorème de Riemann-Roch.

20.7. Généralisations aux anneaux topologiques.

(20.7.1) Il résulte aussitôt des définitions que si, dans (20.5.2) et (20.5.3), les anneaux A , B , C sont supposés être des anneaux topologiques et les homomorphismes d'anneaux u , v continus, alors les homomorphismes $u_{C/B/A}$ et $v_{C/B/A}$ sont *continus* (il faut naturellement prendre sur $\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C$ la topologie produit tensoriel).

En outre, $u_{C/B/A} : \Omega_{C/A}^1 \rightarrow \Omega_{C/B}^1$ est un *morphisme strict surjectif* de C -modules topologiques; en effet, il en est ainsi de l'homomorphisme canonique $C \otimes_A C \rightarrow C \otimes_B C$, compte tenu de la définition de la topologie produit tensoriel; par passage aux quotients on en déduit que l'homomorphisme correspondant $P_{C/A}^1 \rightarrow P_{C/B}^1$ est un morphisme strict surjectif, et $u_{C/B/A}$ est la restriction de ce dernier à $\Omega_{C/A}^1$.

Dans (20.5.5), si A' et B sont des A -algèbres topologiques, et si B' et $\Omega_{B/A}^1 \otimes_B B'$ sont munis des topologies produits tensoriels, l'homomorphisme canonique (20.5.5.1) est un isomorphisme *topologique*, en tenant compte de ce que $P_{B/A}^1$ est somme directe topologique de B et de $\Omega_{B/A}^1$ (20.4.8).

Proposition (20.7.2). — Soient $u : A \rightarrow B$, $v : B \rightarrow C$ deux homomorphismes continus d'anneaux topologiques. Pour que l'homomorphisme continu $v_{C/B/A} : \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \rightarrow \Omega_{C/A}^1$ soit formellement inversible à gauche (cf. (19.1.5)), il faut et il suffit que C soit une B -algèbre formellement lisse relativement à A (19.9.1) (et *a fortiori* il suffit que C soit une B -algèbre formellement lisse).

Dire que $v_{C/B/A}$ est formellement inversible à gauche signifie en effet, vu que les topologies de $\Omega_{C/A}^1$ et $\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C$ sont moins fines que celles déduites de la topologie de C (20.4.5), que pour tout C -module discret L , annulé par un idéal ouvert de C , l'homomorphisme canonique

$$\text{Hom. cont}_C(\Omega_{C/A}^1, L) \rightarrow \text{Hom. cont}_C(\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C, L)$$

est *surjectif* (19.1.5); comme $\text{Hom. cont}_C(\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C, L) = \text{Hom. cont}_C(\Omega_{B/A}^1, L)$ par définition de la topologie produit tensoriel, il revient au même, en vertu de (20.4.8), de dire que l'homomorphisme canonique

$$\text{Dér. cont}_A(C, L) \rightarrow \text{Dér. cont}_A(B, L)$$

est surjectif. Mais la suite exacte (20.3.8.2) montre que cette condition équivaut à $\text{Exalcot}_{B/A}(C, L) = 0$, c'est-à-dire précisément au fait que C est formellement lisse relativement à A (19.9.8).

Corollaire (20.7.3). — *Supposons que dans B et dans C , le carré d'un idéal ouvert soit ouvert. Pour que C soit une B -algèbre formellement lisse relativement à A , il faut et il suffit que si l'on désigne par (\mathfrak{R}_λ) un système fondamental de voisinages de 0 formé d'idéaux de C , alors, pour tout λ , l'homomorphisme*

$$(20.7.3.1) \quad v_{C/B/A} \otimes I_{C/\mathfrak{R}_\lambda} : \Omega_{B/A}^1 \otimes_B (C/\mathfrak{R}_\lambda) \rightarrow \Omega_{C/A}^1 \otimes_C (C/\mathfrak{R}_\lambda)$$

soit inversible à gauche.

On sait en effet alors que la topologie de $\Omega_{B/A}^1$ (resp. $\Omega_{C/A}^1$) est déduite de celle de B (resp. de C) (20.4.5); on en conclut aussitôt que la topologie de $\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C$ est aussi déduite de celle de C ; le corollaire résulte alors de (20.7.2) et (19.1.7).

Proposition (20.7.4). — *Soient A un anneau topologique, B une A -algèbre topologique. Pour que B soit formellement non ramifiée (19.10.2), il faut et il suffit que le séparé complété $\hat{\Omega}_{B/A}^1$ soit nul.*

En effet, il résulte aussitôt de (19.10.4) et (20.1.1) que, pour que B soit formellement non ramifiée, il faut et il suffit que pour tout idéal ouvert \mathfrak{R} de B , tout idéal ouvert \mathfrak{H} de A tel que $\mathfrak{H} \cdot B \subset \mathfrak{R}$ et tout (B/\mathfrak{R}) -module L , on ait $\text{Dér}_{A/\mathfrak{H}}(B/\mathfrak{R}, L) = 0$, c'est-à-dire $\text{Dér. cont}_A(B, L) = 0$ pour tout B -module discret L annulé par un idéal ouvert de B ; en vertu de (20.4.8), cela équivaut à $\text{Hom. cont}_A(\Omega_{B/A}^1, L) = 0$ pour un tel B -module, d'où aussitôt la proposition.

Lorsque B est *discret*, la condition de l'énoncé de (20.7.4) équivaut donc à $\Omega_{B/A}^1 = 0$.

Corollaire (20.7.5). — *Soient A un anneau, m un idéal de A , B une A -algèbre; munissons A de la topologie m -préadique, B de la topologie déduite de celle de A , et posons $A_0 = A/m$, $B_0 = B/mB = B \otimes_A A_0$. Alors, pour que B soit une A -algèbre formellement non ramifiée, il faut et il suffit que $\Omega_{B_0/A_0}^1 = 0$ (ou encore que B_0 soit une A_0 -algèbre formellement non ramifiée).*

En effet, on a $\Omega_{B/A}^1 \otimes_B B_0 = \Omega_{B/A}^1 / m \cdot \Omega_{B/A}^1 = \Omega_{B_0/A_0}^1$ en vertu de (20.5.5); écrire que tout sous-module ouvert de $\Omega_{B/A}^1$ est égal à $\Omega_{B/A}^1$ équivaut par (20.4.5) à écrire que $m \cdot \Omega_{B/A}^1 = \Omega_{B/A}^1$, d'où la conclusion.

Proposition (20.7.6). — *Soient $u : A \rightarrow B$, $v : B \rightarrow C$ deux homomorphismes continus d'anneaux topologiques, et supposons que v fasse de C une B -algèbre formellement étale; alors $v_{C/B/A} : \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \rightarrow \Omega_{C/A}^1$ est un bimorphisme formel (19.1.2).*

En effet, pour tout C -module discret L annulé par un idéal ouvert de C , on a alors (20.7.4) $\text{Dér. cont}_B(C, L) = 0$ et par suite (20.3.6.1) l'homomorphisme canonique

Dér. $\text{cont}_A(C, L) \rightarrow \text{Dér. cont}_A(B, L)$ est injectif; il est par ailleurs surjectif en vertu de (20.7.2), donc il est bijectif; il en résulte que l'image de $v_{C/B/A}$ est nécessairement dense dans $\Omega_{C/A}^1$, sans quoi le quotient de $\Omega_{C/A}^1$ par l'adhérence de $\text{Im}(v_{C/B/A})$ serait séparé et $\neq 0$ et aurait donc un quotient discret $L \neq 0$, contrairement à ce qu'on vient de voir (compte tenu de (20.4.8)). Par suite $v_{C/B/A}$, qui est un monomorphisme formel en vertu de (20.7.2), est aussi un épimorphisme formel (19.1.2), donc un bimorphisme formel.

Corollaire (20.7.7). — *Supposons que dans B et dans C le carré de tout idéal ouvert soit ouvert. Si C est une B-algèbre formellement étale, alors, pour tout idéal ouvert \mathfrak{R}_λ de C, l'homomorphisme (20.7.3.1) est bijectif.*

En effet, en vertu de (19.1.1), cet homomorphisme est surjectif, et il est injectif par (20.7.3).

Proposition (20.7.8). — *Soient $u : A \rightarrow B$ un homomorphisme continu d'anneaux topologiques, \mathfrak{R} un idéal de B, C l'anneau topologique quotient B/\mathfrak{R} , $v : B \rightarrow C$ l'homomorphisme canonique. Alors :*

(i) *Dans la suite exacte (20.5.12.1)*

$$\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2 \xrightarrow{\delta_{C/B/A}} \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \xrightarrow{v_{C/B/A}} \Omega_{C/A}^1 \rightarrow 0$$

l'homomorphisme $\delta_{C/B/A}$ est continu et l'homomorphisme $v_{C/B/A}$ est un morphisme strict de C-modules topologiques.

(ii) *Pour que $\delta_{C/B/A}$ soit formellement inversible à gauche (19.1.5), il faut et il suffit que pour tout C-module discret L annulé par un idéal ouvert de C, l'homomorphisme canonique*

$$(20.7.8.1) \quad \text{Exalcotop}_A(C, L) \rightarrow \text{Exalcotop}_A(B, L)$$

soit injectif.

(i) La première assertion est évidente. D'autre part, l'homomorphisme canonique $v \otimes v : B \otimes_A B \rightarrow C \otimes_A C$ est un morphisme strict par définition de la topologie produit tensoriel, et on en déduit aussitôt (cf. (20.5.2)) qu'il en est de même de $v_{C/B/A}$.

(ii) Dire que $\delta_{C/B/A}$ est formellement inversible à gauche signifie que pour tout C-module discret L annulé par un idéal ouvert de C, l'homomorphisme canonique

$$\text{Hom. cont}_C(\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C, L) \rightarrow \text{Hom. cont}_C(\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2, L)$$

est surjectif. Or, compte tenu de (18.4.3) et de (20.4.8), cela revient à dire que l'homomorphisme canonique

$$\text{Dér. cont}_A(B, L) \rightarrow \text{Exalcotop}_B(C, L)$$

est surjectif, et la conclusion résulte donc de la suite exacte (20.3.6.1).

Le fait que (20.7.8.1) soit injectif s'exprime encore de la manière suivante, compte tenu de la définition des deux membres (18.4.1) : pour tout idéal ouvert \mathfrak{M} de A, tout idéal ouvert \mathfrak{N} de B tel que $\mathfrak{M}B \subset \mathfrak{N}$, et toute (A/\mathfrak{M}) -extension E de $B/(\mathfrak{R} + \mathfrak{N})$ par un $(B/(\mathfrak{R} + \mathfrak{N}))$ -module L, telle que l'image réciproque de E par l'homomorphisme canonique $B/\mathfrak{N} \rightarrow B/(\mathfrak{R} + \mathfrak{N})$ soit (A/\mathfrak{M}) -triviale, il existe un idéal ouvert $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ de A,

un idéal ouvert $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$ de B tels que $\mathfrak{M}'B \subset \mathfrak{N}'$ et que l'image réciproque de E par l'homomorphisme canonique $B/(\mathfrak{R} + \mathfrak{N}') \rightarrow B/(\mathfrak{R} + \mathfrak{N})$ soit (A/\mathfrak{M}') -triviale. En particulier :

Corollaire (20.7.9). — Si la A-algèbre topologique $C = B/\mathfrak{R}$ est formellement lisse, l'homomorphisme canonique $\delta_{C/B/A}$ est formellement inversible à gauche.

(20.7.10) Dans (20.6.1), lorsque A, B, C sont des anneaux topologiques, u et v des homomorphismes continus, on munit $\Upsilon_{C/B/A}$ de la topologie induite par celle de $\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C$; les homomorphismes (20.6.4.2) et (20.6.4.4) sont alors continus pourvu qu'il en soit de même de ceux du diagramme (20.6.4.1). En outre, si, dans (20.6.7), on suppose que L est un C -module discret annulé par un idéal ouvert de C , on déduit, par passage à la limite inductive, un C -homomorphisme canonique

$$(20.7.10.1) \quad \text{Exalcotop}_{B/A}(C, L) \rightarrow \text{Hom. cont}_C(\Upsilon_{C/B/A}, L)$$

compte tenu de (18.5.3.1) : pour tout idéal ouvert \mathfrak{M} de A , tout idéal ouvert \mathfrak{N} de B tel que $\mathfrak{M}B \subset \mathfrak{N}$, tout idéal ouvert \mathfrak{P} de C tel que $\mathfrak{N}C \subset \mathfrak{P}$ et que $\mathfrak{P}.L = 0$, toute (B/\mathfrak{N}) -extension E de C/\mathfrak{P} par L qui est (A/\mathfrak{M}) -triviale provient de la donnée d'un C -homomorphisme continu f de $\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C$ dans L , et l'homomorphisme (20.7.10.1) fait correspondre à l'image dans $\text{Exalcotop}_{B/A}(C, L)$ de la classe de E , la restriction de f à $\Upsilon_{C/B/A}$, dit *homomorphisme caractéristique de E* et noté encore χ_E .

Proposition (20.7.11). — Supposons que la topologie de C soit telle que le carré d'un idéal ouvert soit ouvert. Si C est une A-algèbre topologique formellement lisse et si $\Omega_{C/B}^1$ est un C -module formellement projectif, on a un isomorphisme canonique

$$(20.7.11.1) \quad \text{Exalcotop}_B(C, L) \xrightarrow{\sim} \text{Hom. cont}_C(\Upsilon_{C/B/A}, L)$$

pour tout C -module discret L annulé par un idéal ouvert de C .

On a en effet, dans la suite exacte (20.3.7.1), $\text{Exalcotop}_A(C, L) = 0$ (19.4.4), donc $\text{Exalcotop}_B(C, L) = \text{Exalcotop}_{B/A}(C, L)$ et l'homomorphisme (20.7.8.1) n'est autre que (20.7.10.1); le fait qu'il est bijectif se déduit de (20.6.13) par passage à la limite inductive, compte tenu de ce que la topologie de $\Omega_{C/B}^1$ est alors déduite de celle de C (20.4.5) et de (19.2.4).

(20.7.12) Dans (20.6.14) on munit encore $\Upsilon_{B/A/A}^C$ de la topologie induite par celle de $\Omega_{A/A}^1 \otimes_A C$ et alors l'homomorphisme (20.6.14.6) est continu, lorsque les anneaux considérés sont topologiques et les homomorphismes d'anneaux continus.

(20.7.13) Si, dans (20.6.23), on suppose que les anneaux Λ, A, B, C sont topologiques, les homomorphismes s, u, v continus et L un C -module discret annulé par un idéal ouvert de C , alors on peut passer à la limite inductive comme dans (20.3.6), et on a une suite exacte

$$(20.7.13.1) \quad 0 \rightarrow \text{Dér. cont}_B(C, L) \rightarrow \text{Dér. cont}_A(C, L) \rightarrow \text{Dér. cont}_A(B, L) \rightarrow \\ \rightarrow \text{Exalcotop}_{B/A}(C, L) \rightarrow \text{Exalcotop}_{A/A}(C, L) \rightarrow \text{Exalcotop}_{A/A}(B, L) \rightarrow 0.$$

(20.7.14) Soient A un anneau topologique, B une A -algèbre topologique, \mathfrak{M}' un idéal ouvert de A , \mathfrak{N}' un idéal ouvert de B tels que $\mathfrak{M}'B \subset \mathfrak{N}'$; posons $A' = A/\mathfrak{M}'$,

$B' = B/\mathfrak{N}'$; le noyau de l'homomorphisme $B \otimes_A B \rightarrow B' \otimes_{A'} B'$ est $\mathfrak{U}' = \text{Im}(\mathfrak{N}' \otimes B + B \otimes \mathfrak{N}')$, d'où résulte aussitôt que le noyau de l'homomorphisme

$$(20.7.14.1) \quad \varphi_{(\mathfrak{M}', \mathfrak{N}')} : \Omega_{B/A}^1 \rightarrow \Omega_{B'/A'}^1$$

est $((\mathfrak{J} \cap \mathfrak{U}') + \mathfrak{J}^2)/\mathfrak{J}^2$; par ailleurs, l'homomorphisme (20.7.14.1) est *surjectif*, comme il résulte de (20.4.7). Si \mathfrak{M}'' (resp. \mathfrak{N}'') est un second idéal ouvert de A (resp. B) tel que $\mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'' \subset \mathfrak{N}'$ et $\mathfrak{M}'' B \subset \mathfrak{N}'$, et si l'on pose $A'' = A/\mathfrak{M}''$, $B'' = B/\mathfrak{N}''$, on a de même un homomorphisme surjectif

$$\varphi_{(\mathfrak{M}', \mathfrak{N}'), (\mathfrak{M}'', \mathfrak{N}'')} : \Omega_{B''/A''}^1 \rightarrow \Omega_{B'/A'}^1$$

et ces homomorphismes forment évidemment un *système projectif*. Si l'on remarque que les $((\mathfrak{J} \cap \mathfrak{U}') + \mathfrak{J}^2)/\mathfrak{J}^2$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans $\Omega_{B/A}^1$, on voit donc que le *séparé complété* $\hat{\Omega}_{B/A}^1$ du B -module topologique $\Omega_{B/A}^1$ est donné, à un isomorphisme canonique près, par

$$(20.7.14.2) \quad \hat{\Omega}_{B/A}^1 = \varprojlim (\Omega_{B'/A'}^1).$$

En outre, l'homomorphisme canonique $j : \Omega_{B/A}^1 \rightarrow \hat{\Omega}_{B/A}^1$ est limite projective du système projectif des $\varphi_{(\mathfrak{M}', \mathfrak{N}')}$, donc $\varphi_{(\mathfrak{M}', \mathfrak{N}')}$ se factorise en $\Omega_{B/A}^1 \xrightarrow{j} \hat{\Omega}_{B/A}^1 \rightarrow \Omega_{B'/A'}^1$, et comme il est surjectif on en conclut que l'homomorphisme canonique

$$(20.7.14.3) \quad \hat{\Omega}_{B/A}^1 \rightarrow \Omega_{B'/A'}^1$$

est *surjectif* pour tout couple $(\mathfrak{M}', \mathfrak{N}')$.

On peut d'ailleurs dans ce qui précède remplacer partout A' par A .

Enfin, si L est un B -module topologique *séparé* et *complet*, tout B -homomorphisme continu de $\Omega_{B/A}^1$ dans L se prolonge de façon unique en un \hat{B} -homomorphisme continu de $\hat{\Omega}_{B/A}^1$ dans L , et réciproquement un tel homomorphisme redonne par composition avec $\Omega_{B/A}^1 \rightarrow \hat{\Omega}_{B/A}^1$ un B -homomorphisme continu, si bien que l'on a un isomorphisme canonique

$$\text{Hom. cont}_B(\Omega_{B/A}^1, L) \xrightarrow{\sim} \text{Hom. cont}_{\hat{B}}(\hat{\Omega}_{B/A}^1, L).$$

Plus particulièrement, si L est un B -module discret annulé par un idéal ouvert de B , on voit que l'isomorphisme canonique (20.4.8.2) peut aussi s'écrire

$$(20.7.14.4) \quad \text{Hom. cont}_{\hat{B}}(\hat{\Omega}_{B/A}^1, L) \xrightarrow{\sim} \text{Dér. cont}_A(B, L).$$

Proposition (20.7.15). — Soient A un anneau discret, B une A -algèbre topologique adique (0₁, 7.1.9), n un idéal de définition de B , $B_0 = B/n$. On suppose que $\Omega_{B_0/A}^1$ et n/n^2 sont des B_0 -modules de type fini. Alors $\hat{\Omega}_{B/A}^1$ est un B -module de type fini.

Comme le carré de tout idéal ouvert de B est ouvert, la topologie de $\Omega_{B/A}^1$ est la topologie n -préadique (20.4.5). Compte tenu de l'hypothèse que B est un anneau adique, il suffit donc, en vertu de (0₁, 7.2.7 et 7.2.9), de prouver

que $\Omega_{B/A}^1/\mathfrak{n} \cdot \Omega_{B/A}^1 = \Omega_{B/A}^1 \otimes_B B_0$ est un B_0 -module de type fini. Mais cela résulte de l'hypothèse et de la suite exacte (20.5.12.1)

$$\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \otimes_B B_0 \rightarrow \Omega_{B_0/A}^1 \rightarrow 0.$$

(20.7.16) La proposition (20.7.15) s'applique par exemple lorsque A est un corps k , $B = k'[[T_1, \dots, T_n]]$ une algèbre de séries formelles munie de sa topologie usuelle, k' une extension *finie* de k (cf. (21.9.2)). On notera que le corps des fractions K de B a un degré de transcendance infini sur k ; lorsque k est de caractéristique 0, on en déduit aussitôt (à l'aide de (20.4.13, (i)) et de (20.5.9) notamment, en utilisant aussi le fait que toute dérivation d'un corps de caractéristique 0 se prolonge à toute extension) que $\Omega_{B/k}^1$ n'est pas un B -module de type fini.

(20.7.17) Soient A, B, C trois anneaux topologiques, $u : A \rightarrow B, v : B \rightarrow C$ deux homomorphismes continus; remplaçant A, B, C par des quotients par des idéaux ouverts $A' = A/\mathfrak{M}', B' = B/\mathfrak{N}', C' = C/\mathfrak{P}'$ avec $u(\mathfrak{M}') \subset \mathfrak{N}', v(\mathfrak{N}') \subset \mathfrak{P}'$, de sorte que l'on a des homomorphismes $u' : A' \rightarrow B', v' : B' \rightarrow C'$, on en déduit des homomorphismes canoniques $u'_{C'/B'/A'}, v'_{C'/B'/A'}$ qui, en vertu de (20.5.4), forment des systèmes projectifs, et donnent par suite, par passage à la limite, des homomorphismes canoniques, prolongements aux séparés complétés des homomorphismes de la suite exacte (20.5.7.1)

$$(20.7.17.1) \quad \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C \xrightarrow{v_{C/B/A}} \Omega_{C/A}^1 \xrightarrow{u_{C/B/A}} \Omega_{C/B}^1 \rightarrow 0$$

$$(20.7.17.2) \quad \hat{v}_{C/B/A} : \hat{\Omega}_{B/A}^1 \hat{\otimes}_B \hat{C} \rightarrow \hat{\Omega}_{C/A}^1$$

$$(20.7.17.3) \quad \hat{u}_{C/B/A} : \hat{\Omega}_{C/A}^1 \rightarrow \hat{\Omega}_{C/B}^1$$

et dans la suite

$$(20.7.17.4) \quad \hat{\Omega}_{B/A}^1 \hat{\otimes}_B \hat{C} \xrightarrow{\hat{v}_{C/B/A}} \hat{\Omega}_{C/A}^1 \xrightarrow{\hat{u}_{C/B/A}} \hat{\Omega}_{C/B}^1 \rightarrow 0$$

le composé de deux homomorphismes consécutifs est 0, mais la suite n'est pas nécessairement exacte. Toutefois, si B et C sont métrisables, l'homomorphisme $\hat{u}_{C/B/A}$ est surjectif, et $\text{Im}(\hat{v}_{C/B/A})$ est dense dans $\text{Ker}(\hat{u}_{C/B/A})$: cela résulte aussitôt (cf. (0_I, 7.3.1)) de ce que, si (\mathfrak{M}_k) (resp. (\mathfrak{N}_k)) est une suite décroissante d'idéaux de B (resp. C), formant un système fondamental de voisinages de 0, et si l'on pose $B_k = B/\mathfrak{M}_k, C_k = C/\mathfrak{N}_k$, les homomorphismes de transition $\Omega_{C_{k+1}/B_{k+1}}^1 \rightarrow \Omega_{C_k/B_k}^1, \Omega_{C_{k+1}/A}^1 \rightarrow \Omega_{C_k/A}^1$ et $\Omega_{B_{k+1}/A}^1 \rightarrow \Omega_{B_k/A}^1$ sont surjectifs (20.7.14).

Proposition (20.7.18). — Soient A, B, C trois anneaux topologiques, $u : A \rightarrow B, v : B \rightarrow C$ deux homomorphismes continus. On suppose B et C admissibles (0_I, 7.1.2) et métrisables. Pour que l'homomorphisme canonique $\hat{v}_{C/B/A} : \hat{\Omega}_{B/A}^1 \hat{\otimes}_B C \rightarrow \hat{\Omega}_{C/A}^1$ admette un inverse à gauche qui soit un C -homomorphisme continu, il faut et il suffit que C soit une B -algèbre formellement lisse relativement à A .

La condition est nécessaire en vertu de (20.7.2) et (19.1.6). Pour voir qu'elle est suffisante, notons que le C -module topologique $L = \hat{\Omega}_{B/A}^1 \hat{\otimes}_B C$ est métrisable et complet en vertu de l'hypothèse, donc $E = D_C(L)$, muni de la topologie produit, est

métrisable et complet; il est en outre admissible, car si \mathfrak{R} est un idéal de définition dans C , la suite des $(\mathfrak{R} \oplus L)^n = \mathfrak{R}^n \oplus \mathfrak{R}^{n-1}L$ tend vers 0. Comme l'application composée

$$D : B \xrightarrow{d_{B/A}} \Omega_{B/A}^1 \rightarrow \hat{\Omega}_{B/A}^1 \hat{\otimes}_B C = L$$

est une A -dérivation continue de B dans L , le A -homomorphisme continu

$$f : x \mapsto (v(x), D(x))$$

de B dans E définit sur E une structure de B -extension. Comme L est un idéal fermé dans E , il résulte de (19.9.5) et de l'hypothèse que l'application identique $C \rightarrow E/L$ (qui est un B -homomorphisme) se factorise en $C \xrightarrow{g} E \rightarrow E/L$, où g est un homomorphisme continu tel que $g \circ v = f$; par suite (20.1.3), g est de la forme $y \mapsto (y, D'(y))$, où D' est une B -dérivation continue de C dans L , autrement dit $D' \circ v = D$. Compte tenu de (20.7.14.4), on a $D' = h \circ \hat{d}_{C/A}$, où $h : \hat{\Omega}_{C/A}^1 \rightarrow L$ est un C -homomorphisme continu; mais on a $\hat{d}_{C/A} \circ v = \hat{v}_{C/B/A} \circ D$ par définition, et comme l'image de B par D engendre (topologiquement) le C -module L (20.4.7), la relation $D' \circ v = D$ donne bien $h \circ \hat{v}_{C/B/A} = 1_L$. C.Q.F.D.

Corollaire (20.7.19). — *Sous les hypothèses de (20.7.18), si l'on suppose en outre que dans B et C le carré d'un idéal ouvert soit ouvert, alors, pour que C soit une B -algèbre formellement lisse relativement à A , il faut et il suffit que $\hat{v}_{C/B/A}$ soit inversible à gauche.*

En effet, les topologies de $\hat{\Omega}_{B/A}^1 \hat{\otimes}_B C$ et de $\hat{\Omega}_{C/A}^1$ sont alors déduites de celle de C (20.4.5), et tout C -homomorphisme de l'un dans l'autre est nécessairement continu.

(20.7.20) Soient A un anneau topologique, B une A -algèbre topologique métrisable et complète, \mathfrak{R} un idéal fermé de B , $C = B/\mathfrak{R}$ l'anneau topologique quotient, qui est métrisable et complet. Soit (\mathfrak{M}_k) un système fondamental décroissant de voisinages de 0 dans B formé d'idéaux, et posons $B_k = B/\mathfrak{M}_k$, $\mathfrak{R}_k = (\mathfrak{R} + \mathfrak{M}_k)/\mathfrak{M}_k$, $C_k = B_k/\mathfrak{R}_k$. On a un système projectif d'homomorphismes $\delta_{C_k/B_k/A} : \mathfrak{R}_k/\mathfrak{R}_k^2 \rightarrow \Omega_{B_k/A}^1 \hat{\otimes}_{B_k} C_k$ (20.5.11.3), d'où l'on déduit en passant à la limite un homomorphisme canonique

$$\hat{\delta}_{C/B/A} : \mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2 \rightarrow \hat{\Omega}_{B/A}^1 \hat{\otimes}_B C$$

et en raisonnant comme dans (20.7.17), on voit que l'homomorphisme canonique $\hat{u}_{C/B/A} : \hat{\Omega}_{B/A}^1 \hat{\otimes}_B C \rightarrow \hat{\Omega}_{C/A}^1$ est surjectif et que $\text{Im}(\hat{\delta}_{C/B/A})$ est dense dans $\text{Ker}(\hat{u}_{C/B/A})$.

§ 21. DIFFÉRENTIELLES DANS LES ANNEAUX DE CARACTÉRIQUE p

Les résultats du présent paragraphe, de nature plus spéciale et technique que ceux des §§ 19, 20 et 22, ne serviront qu'exceptionnellement dans le cours du chap. IV. Leur rôle principal est ici dans la démonstration de trois théorèmes du § 22 (22.3.3, 22.5.8 et 22.7.3), dont le premier et le dernier interviennent de façon essentielle dans la théorie « fine » des anneaux locaux noethériens du chap. IV, § 7.

21.1. Systèmes de p-générateurs et p-bases.

(21.1.1) Étant donné un nombre p qui est, soit 0, soit un nombre premier, nous dirons qu'un anneau A est de caractéristique p s'il existe un homomorphisme d'anneaux $P \rightarrow A$, où P est le *corps premier* de caractéristique p ; on notera que cet homomorphisme est alors unique, le composé $\mathbf{Z} \rightarrow P \rightarrow A$ étant l'unique homomorphisme de \mathbf{Z} dans A . Si $A \neq 0$, il revient au même de dire que A contient un *corps de caractéristique p* , l'image de P étant nécessairement un corps isomorphe à P (et d'ailleurs le seul sous-corps de A isomorphe à P).

(21.1.2) Si $p > 0$, dire que A est de caractéristique p équivaut à dire que, dans A , on a $p \cdot 1 = 0$, ou encore $pA = 0$. Si $p = 0$, dire que A est de caractéristique p équivaut à dire que pour tout entier $n \neq 0$, $n \cdot 1$ est *inversible* dans A . Si $A \neq 0$, il ne peut exister qu'un seul p (premier ou 0) tel que A soit de caractéristique p ; cela résulte de ce qui précède et de l'identité de Bezout $ap + bq = 1$ pour deux nombres premiers distincts p, q . Par contre l'anneau réduit à 0 est de caractéristique p pour tout p .

(21.1.3) Si A est de caractéristique p , il en est de même de toute *algèbre* sur A . En particulier, pour tout idéal premier p de A , le *corps résiduel* de A en p est de caractéristique p . Réciproquement, si $p = 0$ et si pour tout idéal maximal m de A , le corps résiduel de A en m est de caractéristique 0, il en est de même de A , car pour tout entier $n \neq 0$, $n \cdot 1$ est alors inversible dans tous les A_m , donc aussi dans A . Par contre, si $p > 0$, un anneau local peut avoir son corps résiduel de caractéristique p sans être lui-même de caractéristique p , comme le montre l'exemple de l'*anneau premier* (intègre) \mathbf{Z}_{pz} (19.8.3) ou de l'anneau local artinien $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ pour $n \geq 2$, qui ne contiennent pas de corps.

Notons enfin que pour un anneau (même réduit), les corps résiduels en ses idéaux premiers peuvent avoir des caractéristiques différentes, comme le montre l'exemple de \mathbf{Z} .

(21.1.4) Dans toute la suite de ce paragraphe, nous supposons fixés un *nombre premier p* et tous les anneaux seront supposés de caractéristique p , sauf mention expresse du contraire. Pour un tel anneau A , l'application $x \mapsto x^p$ est un *endomorphisme* de A , que l'on note F_A ; si A est *réduit*, F_A est *injectif*. On pose $A^p = F_A(A)$ (sous-anneau de A formé des x^p , pour $x \in A$); on peut naturellement considérer A comme une A^p -algèbre.

On peut aussi considérer A comme une A -algèbre au moyen de l'*homomorphisme* $F_A : x \mapsto x^p$ de A dans A ; autrement dit, il s'agit de la A -algèbre $A_{[F_A]}$, pour laquelle le produit $\lambda \cdot x$ de $x \in A$ par un scalaire $\lambda \in A$ est le produit $\lambda^p x$ dans l'anneau A ; nous noterons cette A -algèbre $A^{(p)}$. Il est clair que pour tout homomorphisme d'anneaux $u : A \rightarrow B$ le couple (u, u) est un *di-homomorphisme* d'algèbres $A^{(p)} \rightarrow B^{(p)}$. Pour tout A -module E , on posera $E^{(p)} = E \otimes_A A^{(p)}$ où $A^{(p)}$ est considéré comme un (A, A) -bimodule, la structure de A -module à gauche étant celle qu'on vient de définir, et la structure de A -module à droite définie par la multiplication dans A ; $E^{(p)}$ est muni de la structure de A -module provenant de la structure de A -module à droite de $A^{(p)}$, de sorte que pour $x \in E$, α, β dans A , on a

$$\alpha(x \otimes \beta) = x \otimes (\alpha\beta) \quad \text{et} \quad (\alpha x) \otimes \beta = \alpha^p(x \otimes \beta) = x \otimes \alpha^p\beta.$$

Posant $x^{(p)} = x \otimes 1$, on a donc $(\alpha x)^{(p)} = \alpha^p x^{(p)}$. Lorsque F_A est injectif, on peut identifier $A^{(p)}$ à l'anneau A considéré comme algèbre sur son sous-anneau A^p .

Proposition (21.1.5). — Soient A, B deux anneaux, $u : A \rightarrow B$ un homomorphisme.

(i) Toute A -dérivation de B dans un B -module L est nulle dans $A[B^p]$ (donc est une $A[B^p]$ -dérivation).

(ii) Pour toute sous- A -algèbre A' de $A[B^p]$, si $j : A' \rightarrow B$ est l'injection canonique, l'homomorphisme canonique

$$j_{B/A'/A} : \Omega_{B/A}^1 \rightarrow \Omega_{B/A'}^1$$

est bijectif.

(iii) Supposons qu'il existe un entier $s \geq 0$ tel que $u(A) \supset B^{p^s}$. Alors, dans l'anneau $B \otimes_A B$, $\mathfrak{J}_{B/A}$ est un nilidéal.

(i) Par récurrence à partir de (20.1.1.1), on déduit, pour toute A -dérivation $D : B \rightarrow L$, que l'on a $D(x^k) = kx^{k-1}D(x)$, d'où en particulier $D(x^p) = 0$.

(ii) Vu (20.4.8), l'assertion (ii) n'est qu'une traduction de (i), cette dernière s'écrivant $\text{Dér}_A(B, L) = \text{Dér}_{A[B^p]}(B, L)$ pour tout B -module L .

(iii) Pour tout $x \in B$, on a $(x \otimes 1 - 1 \otimes x)^{p^s} = x^{p^s} \otimes 1 - 1 \otimes x^{p^s} = x^{p^s}(1 \otimes 1 - 1 \otimes 1) = 0$, puisque $x^{p^s} \in u(A)$. La conclusion résulte de ce que les éléments $1 \otimes x - x \otimes 1$ engendrent $\mathfrak{J}_{B/A}$ (20.4.4).

Il résulte aussitôt de (21.1.5) que l'on a, pour tout couple d'homomorphismes d'anneaux $A \rightarrow B \rightarrow C$,

$$(21.1.5.1) \quad \Upsilon_{C/B/A} = \Upsilon_{C/B/A'}$$

pour toute sous- A -algèbre $A' \subset A[B^p]$ de B .

D'autre part, (21.1.5) montre aussi que l'on a en particulier pour les modules de différentielles « absolues »

$$(21.1.5.2) \quad \Omega_A^1 = \Omega_{A/A^p}^1$$

Corollaire (21.1.6). — Supposons que B soit une A -algèbre de type fini et qu'il existe un entier $s \geq 0$ tel que $u(A) \supset B^{p^s}$. Si l'on a $\Omega_{B/A}^1 = 0$, u est surjectif.

D'après (21.1.5, (iii)), $\mathfrak{J}_{B/A}$ est un nilidéal; en outre, en vertu de (20.4.4) et de l'hypothèse, $\mathfrak{J}_{B/A}$ est un idéal de type fini, donc il est nilpotent; comme la relation $\Omega_{B/A}^1 = 0$ signifie que $\mathfrak{J}_{B/A} = \mathfrak{J}_{B/A}^2$, on en conclut que $\mathfrak{J}_{B/A} = 0$, ou encore que $\pi : B \otimes_A B \rightarrow B$ est bijectif. Par ailleurs, tout élément de B ayant sa puissance p^s -ième dans $u(A)$, B est entier sur A , et étant de type fini, c'est une A -algèbre finie. On est ainsi ramené à prouver le lemme suivant (où on ne suppose pas que les anneaux considérés sont de caractéristique p) :

Lemme (21.1.6.1). — Soient R un anneau, S une R -algèbre finie; si l'homomorphisme canonique $\pi : S \otimes_R S \rightarrow S$ est bijectif, alors l'homomorphisme structural $u : R \rightarrow S$ est surjectif.

Il suffit de montrer que pour tout idéal maximal m de R , si l'on pose $T = R - m$, l'homomorphisme $u_m : R_m \rightarrow T^{-1}S$ est surjectif (Bourbaki, Alg. comm., chap. II, § 3, n° 3, th. 1); or l'hypothèse entraîne que l'homomorphisme $(T^{-1}S) \otimes_{R_m} (T^{-1}S) \rightarrow T^{-1}S$

est bijectif (0₁, 1.3.4), et comme $T^{-1}S$ est une R_m -algèbre finie, on voit qu'on peut se borner au cas où R est un anneau *local*. Désignant encore par m son idéal maximal, il suffit de prouver que $u \otimes 1 : R/m \rightarrow S/mS$ est surjectif, en vertu du lemme de Nakayama (S étant un R -module de type fini); comme l'homomorphisme canonique $(S/mS) \otimes_{R/m} (S/mS) \rightarrow S/mS$ est bijectif et que S/mS est une (R/m) -algèbre finie, on est finalement ramené au cas où R est un *corps*; mais alors les rangs de $S \otimes_R S$ et de S sur R ne peuvent être égaux que si S est de rang 0 ou 1, donc si $u : R \rightarrow S$ est surjectif.

Proposition (21.1.7). — Soient A un anneau, B une A -algèbre, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille d'éléments de B . Considérons les propriétés suivantes :

- a) $B = A[B^p, (x_\alpha)]$, autrement dit la $A[B^p]$ -algèbre B est engendrée par la famille $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$.
- b) Le $A[B^p]$ -module B est engendré par les monômes $\prod_\alpha x_\alpha^{n(\alpha)}$, où $(n(\alpha))_{\alpha \in I}$ est une famille d'entiers à support fini telle que $0 \leq n(\alpha) < p$ pour tout $\alpha \in I$.
- c) Le B -module $\Omega_{B/A}^1$ est engendré par les $d_{B/A}(x_\alpha)$ ($\alpha \in I$).

Alors les propriétés a) et b) sont équivalentes et entraînent c); si en outre B est une $A[B^p]$ -algèbre de type fini, c) est équivalente à a) et b).

Il est clair que b) entraîne a), et inversement a) entraîne b), car tout monôme $\prod_\alpha x_\alpha^{m(\alpha)}$, où les $m(\alpha)$ sont des entiers ≥ 0 (formant une famille à support fini), peut s'écrire $(\prod_\alpha x_\alpha^{q(\alpha)})^p \prod_\alpha x_\alpha^{r(\alpha)}$, en divisant chaque $m(\alpha)$ par p , ce qui donne $m(\alpha) = p \cdot q(\alpha) + r(\alpha)$ avec $0 \leq r(\alpha) < p$. Le fait que a) entraîne c) résulte de (21.1.5, (ii)) et de (20.4.7). Supposons inversement c) vérifiée et que B soit une $A[B^p]$ -algèbre de type fini; soit B' la sous- $A[B^p]$ -algèbre de B engendrée par les x_α ; dans la suite exacte (20.5.7.1)

$$\Omega_{B'/A[B^p]}^1 \otimes_{B'} B \rightarrow \Omega_{B/A[B^p]}^1 \rightarrow \Omega_{B/B'}^1 \rightarrow 0$$

l'hypothèse entraîne que la flèche de gauche est surjective (compte tenu de (21.1.5, (ii)); on a donc $\Omega_{B/B'}^1 = 0$, et comme $B^p \subset B' \subset B$ et que B est une B' -algèbre de type fini, on a nécessairement $B' = B$ par (21.1.6)).

Remarque (21.1.8). — Lorsque B est un *corps*, nous démontrerons l'équivalence des propriétés a), b) et c) sans hypothèse de finitude (21.4.5).

Définition (21.1.9). — Soient A un anneau (de caractéristique p), B une A -algèbre. On dit qu'une famille $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ d'éléments de B est p -libre sur A (resp. un système de p -générateurs de B sur A , resp. une p -base de B sur A) si la famille des monômes $\prod_\alpha x_\alpha^{n(\alpha)}$ ($0 \leq n(\alpha) < p$, $(n(\alpha))_{\alpha \in I}$ de support fini) est une famille libre (resp. un système de générateurs, resp. une base) dans le $A[B^p]$ -module B .

On a des définitions correspondantes pour un ensemble M d'éléments de B , en considérant la famille définie par l'injection canonique $M \rightarrow B$. Lorsqu'on prend pour A le *corps premier* \mathbf{F}_p (auquel cas $A[B^p] = B^p$), on omet la mention de A dans la définition précédente (ou l'on dit encore qu'une famille est « absolument » p -libre, resp. un système « absolu » de p -générateurs, resp. une p -base « absolue »).

Il est clair que les notions définies dans (21.1.9) ne changent pas lorsqu'on y remplace A par le sous-anneau $A[B^p]$ de B; autrement dit on peut toujours supposer que l'on a $B^p \subset A \subset B$.

Si M est une partie p -libre de B sur A, il est clair que toute partie de M est p -libre sur A. En outre :

Lemme (21.1.10). — Soient C une sous-A-algèbre de B telle que $B^p \subset C$, M une partie de C, N une partie de B.

(i) Si M est un système de p -générateurs de C sur A et N un système de p -générateurs de B sur C, alors $M \cup N$ est un système de p -générateurs de B sur A.

(ii) Supposons que M soit une p -base de C sur A; alors, pour que N soit p -libre sur C, il faut et il suffit que $M \cup N$ soit p -libre sur A.

On peut se borner au cas où $B^p \subset A \subset C \subset B$. Alors (i) est un cas particulier du fait que si P (resp. Q) est un système de générateurs du A-module C (resp. du C-module B), l'ensemble des xy , où $x \in P$ et $y \in Q$, est un système de générateurs du A-module B. Conservant les mêmes notations, si P est une base du A-module C, dire que Q est une famille libre sur C signifie que la relation $\sum_{\lambda, \mu} a_{\lambda \mu} x_{\lambda} y_{\mu} = 0$, où $a_{\lambda \mu} \in A$, $x_{\lambda} \in P$, $y_{\mu} \in Q$ (les x_{λ} (resp. y_{μ}) étant deux à deux distincts) équivaut à $\sum_{\lambda} a_{\lambda \mu} x_{\lambda} = 0$ pour tout μ , ou encore à $a_{\lambda \mu} = 0$ pour tout couple (λ, μ) ; d'où l'assertion (ii).

21.2. p-bases et lissité formelle.

Théorème (21.2.1). — Soient B un anneau, A un sous-anneau de B tel que $B^p \subset A \subset B$, $(x_{\alpha})_{\alpha \in I}$ une p -base de B sur A. Soient E une A-algèbre, $u : A \rightarrow E$ l'homomorphisme structural, $q : E \rightarrow B$ un A-homomorphisme surjectif, R son noyau, et supposons que $R^p = 0$. Alors :

(i) Pour qu'il existe un A-homomorphisme $v : B \rightarrow E$ inverse à droite de l'homomorphisme $q : E \rightarrow B$, il faut et il suffit que l'on ait $u(q(z)^p) = z^p$ pour tout $z \in E$.

(ii) Lorsque la condition de (i) est satisfaite, pour toute famille $(z_{\alpha})_{\alpha \in I}$ d'éléments de E telle que $q(z_{\alpha}) = x_{\alpha}$ pour tout $\alpha \in I$, il existe un A-homomorphisme $v : B \rightarrow E$ et un seul tel que $v(x_{\alpha}) = z_{\alpha}$ pour tout $\alpha \in I$, et v est inverse à droite de q.

S'il existe un A-homomorphisme $v : B \rightarrow E$, on doit avoir $v(a) = u(a)$ pour tout $a \in A \subset B$, donc $v(q(z)^p) = u(q(z)^p)$ pour tout $z \in E$, puisque $B^p \subset A$. Mais on a $v(q(z)^p) = (v(q(z)))^p$ et par définition $v(q(z)) \equiv z$ (mod. R) si $q \circ v = i_B$, donc $(v(q(z)))^p = z^p$ puisque $R^p = 0$; d'où la nécessité de (i). La suffisance de la condition (i) résultera de (ii). Or, sous les hypothèses de (ii), l'unicité de v est évidente puisque les monômes $\prod_{\alpha} x_{\alpha}^{n(\alpha)}$ engendrent le A-module B; comme ces monômes forment en outre une base du A-module B, il existe une application A-linéaire v de B dans E telle que $v(\prod_{\alpha} x_{\alpha}^{n(\alpha)}) = \prod_{\alpha} z_{\alpha}^{n(\alpha)}$ pour toute famille $(n(\alpha))_{\alpha \in I}$ à support fini avec $0 \leq n(\alpha) < p$ pour tout α . Reste à voir que v est un homomorphisme d'anneaux. Or, on peut écrire $(\prod_{\alpha} x_{\alpha}^{m(\alpha)})(\prod_{\alpha} x_{\alpha}^{n(\alpha)}) = a \cdot \prod_{\alpha} x_{\alpha}^{r(\alpha)}$, où $r(\alpha) = m(\alpha) + n(\alpha)$ si $m(\alpha) + n(\alpha) < p$, $r(\alpha) = m(\alpha) + n(\alpha) - p$ dans le cas contraire, et $a \in A$

est le produit des x_α^p pour les $\alpha \in I$ tels que $m(\alpha) + n(\alpha) \geq p$; il s'agit de voir que $u(a) = \prod_\alpha z_\alpha^p$; mais comme $x_\alpha = q(z_\alpha)$, cela résulte de l'hypothèse. C.Q.F.D.

Corollaire (21.2.2). — Soient B un anneau, A un sous-anneau de B tel que $B^p \subset A \subset B$. S'il existe une p -base de B sur A , B est une A -algèbre formellement lisse relativement à B^p (pour les topologies discrètes).

En effet, soient E une A -extension de B par un B -module L , $q : E \rightarrow B$ l'augmentation, $u : A \rightarrow E$ l'homomorphisme structural. Dire que E est B^p -triviale signifie qu'il existe un homomorphisme d'anneaux $v : B \rightarrow E$ tel que $q(v(b)) = b$ et $v(b^p) = u(b^p)$ pour tout $b \in B$. On en déduit que, pour $z \in E$, on a $u(q(z)^p) = v(q(z)^p) = (v(q(z)))^p$; mais en vertu de la relation $L^2 = 0$, on a aussi $L^p = 0$, et comme $v(q(z)) - z \in L$, on a $(v(q(z)))^p = z^p$; la condition de (21.2.1, (i)) est donc satisfaite, et E est B -triviale.

Corollaire (21.2.3). — Soient B un anneau, A un sous-anneau de B tel que $B^p \subset A \subset B$, et $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ une p -base de B sur A . Soit L un B -module. Alors :

(i) Pour qu'une dérivation D de A dans L se prolonge en une dérivation de B dans L , il faut et il suffit que D s'annule dans B^p .

(ii) Si D s'annule dans B^p , alors, pour toute famille $(y_\alpha)_{\alpha \in I}$ d'éléments de L , il existe une dérivation D' de B dans L et une seule prolongeant D et telle que $D'(x_\alpha) = y_\alpha$ pour tout $\alpha \in I$.

Étant donnée une dérivation D de A dans L , considérons l'anneau $E = D_B(L)$ et l'homomorphisme $u : A \rightarrow E$ défini par $u(a) = (a, D(a))$; un A -homomorphisme $v : B \rightarrow E$ inverse à droite de l'homomorphisme canonique $q : E \rightarrow B$ est alors de la forme $x \mapsto (x, D'(x))$, où D' est une dérivation de B dans L prolongeant D (20.1.5); comme $u(q(z)^p) = (q(z)^p, D(q(z)^p))$ pour $z \in E$, le corollaire résulte aussitôt de (21.2.1) appliquée à E .

Il résulte de (21.2.3) que la suite

$$(21.2.3.1) \quad 0 \rightarrow \text{Dér}_A(B, L) \rightarrow \text{Dér}_{B^p}(B, L) \rightarrow \text{Dér}_{B^p}(A, L) \rightarrow 0$$

(cf. (20.2.2.1)) est exacte, et que l'application

$$(21.2.3.2) \quad D' \rightsquigarrow (D'(x_\alpha))_{\alpha \in I}$$

est un isomorphisme du B -module $\text{Dér}_A(B, L)$ sur le B -module *produit* L^I (en faisant $D = 0$ dans (21.2.3)).

Corollaire (21.2.4). — Sous les hypothèses de (21.2.3), la suite

$$(21.2.4.1) \quad 0 \rightarrow \Omega_{A/B^p}^1 \otimes_A B \rightarrow \Omega_{B/B^p}^1 \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \rightarrow 0$$

est exacte et scindée, et la famille $(d_{B/A}(x_\alpha))_{\alpha \in I}$ est une base du B -module $\Omega_{B/A}^1$.

Cela résulte aussitôt de (21.2.3) et de la formule $\text{Dér}_A(B, L) = \text{Hom}_B(\Omega_{B/A}^1, L)$ (20.4.8).

Corollaire (21.2.5). — Soient A un anneau, B une A -algèbre, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ une p -base de B sur A . Alors $(d_{B/A}(x_\alpha))_{\alpha \in I}$ est une base du B -module $\Omega_{B/A}^1$.

En utilisant (21.1.5, (ii)), on se ramène en effet au cas où $A = A[B^p]$ et il suffit alors d'appliquer (21.2.4).

(21.2.6) Soient A, B deux anneaux, $u : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux; on a (avec les notations de (21.1.4)) un diagramme commutatif

$$(21.2.6.1) \quad \begin{array}{ccc} A^{(p)} & \xrightarrow{u} & B^{(p)} \\ F_A \uparrow & & \uparrow F_B \\ A & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

On en déduit donc canoniquement un homomorphisme de B -algèbres

$$(21.2.6.2) \quad u \otimes 1 : A^{(p)} \otimes_A B \rightarrow B^{(p)}$$

dont l'image est l'anneau $A[B^p]$ (qui est une B -algèbre pour l'homomorphisme $F_B : B \rightarrow B^p$).

Théorème (21.2.7). — Soient A un anneau, B une A -algèbre, $u : A \rightarrow B$ l'homomorphisme structural. On suppose vérifiées les conditions suivantes :

(i) *L'homomorphisme (21.2.6.2) déduit de u est injectif.*

(ii) *B admet une p -base $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ par rapport à A .*

*Alors B est une A -algèbre formellement lisse (pour les topologies discrètes). De façon plus précise, munissons A et B des topologies discrètes; soient E une A -algèbre topologique admissible (**0₁**, 7.1.2), \mathfrak{R} un idéal de définition de E , $C = E/\mathfrak{R}$, $v : B \rightarrow C$ un A -homomorphisme, $q : E \rightarrow C$ l'augmentation. Alors, pour toute famille $(z_\alpha)_{\alpha \in I}$ d'éléments de E tels que $q(z_\alpha) = v(x_\alpha)$ pour tout $\alpha \in I$, il existe un A -homomorphisme $w : B \rightarrow E$ et un seul tel que $v = q \circ w$ et $w(x_\alpha) = z_\alpha$ pour tout $\alpha \in I$.*

Considérons d'abord le cas où E est *discret*, donc \mathfrak{R} nilpotent. On peut se borner au cas où v est surjectif; en outre, le raisonnement de (19.4.3) permet de supposer $\mathfrak{R}^2 = 0$ et par suite $\mathfrak{R}^p = 0$. Enfin, en considérant l'image réciproque par v de l'extension E de C par \mathfrak{R} , on peut se borner au cas où $C = B$ et où v est l'identité (19.4.4). Comme l'homomorphisme d'anneaux $F_E : z \mapsto z^p$ s'annule dans \mathfrak{R} , il se factorise en $E \xrightarrow{q} B \xrightarrow{F'} E$, et F' , considéré comme homomorphisme de B dans $E^{(p)}$, est un A -homomorphisme par définition de la structure de A -algèbre de $E^{(p)}$ à l'aide de l'homomorphisme composé $A \xrightarrow{r} E \xrightarrow{F_E} E^{(p)}$, où $r : A \rightarrow E$ est l'homomorphisme structural de la A -algèbre E ; d'ailleurs $r : A^{(p)} \rightarrow E^{(p)}$ est aussi un A -homomorphisme. Il y a donc un unique A -homomorphisme $f : A^{(p)} \otimes_A B \rightarrow E^{(p)}$ tel que les composés de f et des homomorphismes canoniques $A^{(p)} \rightarrow A^{(p)} \otimes_A B$ et $B \rightarrow A^{(p)} \otimes_A B$ soient respectivement r et F' . Or, par hypothèse, on peut identifier $A^{(p)} \otimes_A B$ à $A[B^p]$, les homomorphismes canoniques $A^{(p)} \rightarrow A^{(p)} \otimes_A B$ et $B \rightarrow A^{(p)} \otimes_A B$ s'identifiant respectivement à u et à F_B . On peut donc maintenant considérer E comme une $A[B^p]$ -algèbre au moyen de l'homomorphisme f , et, par construction, on a $f(q(z)^p) = z^p$ pour tout $z \in E$; on est donc dans les conditions d'application de (21.2.1), d'où le théorème dans ce cas.

Pour passer au cas général, considérons un système fondamental (\mathfrak{J}_λ) d'idéaux ouverts de E , et soient $E_\lambda = E/\mathfrak{J}_\lambda$, $\mathfrak{R}_\lambda = (\mathfrak{R} + \mathfrak{J}_\lambda)/\mathfrak{J}_\lambda$, $C_\lambda = E_\lambda/\mathfrak{R}_\lambda = E/(\mathfrak{R} + \mathfrak{J}_\lambda)$; comme E est admissible, on a $E = \lim_{\leftarrow} E_\lambda$ (**0₁**, 7.2.2). Pour tout couple (α, λ) , désignons par $z_{\alpha\lambda}$ l'image canonique de z_α dans E_λ , par $p_\lambda : C \rightarrow C_\lambda$ l'homomorphisme canonique,

par q_λ l'homomorphisme canonique $E_\lambda \rightarrow C_\lambda$. Comme par hypothèse \mathfrak{K}_λ est nilpotent dans E_λ , la première partie de la démonstration prouve l'existence et l'unicité d'un A -homomorphisme $w_\lambda : B \rightarrow E_\lambda$ tel que $p_\lambda \circ v = q_\lambda \circ w_\lambda$ et $w_\lambda(x_\alpha) = z_{\alpha\lambda}$ pour tout α . L'unicité des w_λ montre alors aussitôt que (w_λ) est un système projectif d'homomorphismes, et $w = \varprojlim w_\lambda$ répond à la question.

Remarque (21.2.8). — La vérification de l'existence et de l'unicité de l'homomorphisme $w : B \rightarrow E$ tel que $w(x_\alpha) = z_\alpha$ pour tout α peut se déduire directement du fait que B est une A -algèbre formellement lisse et de ce que les $d_{B/A}(x_\alpha)$ forment une base du B -module $\Omega_{B/A}^1$ (21.2.4), sans faire intervenir le fait qu'il s'agit d'une p -base (de sorte que le résultat est valable sans supposer les anneaux de caractéristique p). En effet, on peut se borner au cas où $\mathfrak{R}^2 = 0$; comme $\text{Dér}_A(B, \mathfrak{R}) = \text{Hom}_B(\Omega_{B/A}^1, \mathfrak{R})$ par (20.4.8), il existe une A -dérivation D et une seule de B dans \mathfrak{R} telle que $D(x_\alpha) = z'_\alpha$ pour toute famille (z'_α) d'éléments de \mathfrak{R} ; la conclusion résulte donc de (20.1.1).

21.3. p-bases et modules d'imperfection.

(21.3.1) Soient A, B deux anneaux (de caractéristique p), $i : A \rightarrow B$, $j : B \rightarrow A$ deux homomorphismes d'anneaux tels que l'on ait

$$(21.3.1.1) \quad j(i(a)) = a^p \quad \text{pour tout } a \in A,$$

$$(21.3.1.2) \quad i(j(b)) = b^p \quad \text{pour tout } b \in B.$$

Le plus souvent, i sera *injectif*, de sorte que A s'identifiera par $i : A \rightarrow B$ à un sous-anneau de B ; une fois cette identification faite, l'existence de j implique que $B^p \subset A$, et j s'identifie alors à F_B .

(21.3.2) Si $h : A^p \rightarrow A$ est l'injection canonique, on a, d'après (21.3.1.1), un diagramme commutatif

$$(21.3.2.1) \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{j} & A \\ i \uparrow & & \uparrow h \\ A & \xrightarrow[F_A]{} & A^p \end{array}$$

si bien que le couple (j, F_A) peut être considéré comme un *di-homomorphisme* de la A -algèbre B (pour i) dans la A^p -algèbre A (pour h). On en déduit un *homomorphisme canonique de A -modules*

$$(21.3.2.2) \quad \pi_{B/A} : \Omega_{B/A}^1 \otimes_B A_{[j]} \rightarrow \Omega_{A/A^p}^1 = \Omega_A^1$$

(cf. (20.5.4); l'identification de Ω_{A/A^p}^1 et du module des différentielles absolues Ω_A^1 provient de (21.1.5, (ii))).

On posera

$$(21.3.2.3) \quad \Theta_{B/A} = \Omega_{B/A}^1 \otimes_B A_{[j]}$$

$$(21.3.2.4) \quad \Xi_{B/A} = \text{Ker}(\pi_{B/A})$$

de sorte que l'on a la suite exacte

$$(21.3.2.5) \quad 0 \rightarrow \Xi_{B/A} \rightarrow \Theta_{B/A} \xrightarrow{\pi_{B/A}} \Omega_A^1$$

(on remarquera que ces notations peuvent prêter à confusion puisque $\Theta_{B/A}$ et $\pi_{B/A}$ dépendent non seulement de A et de B, mais aussi de i et de j).

(21.3.3) Comme en vertu de (21.3.1.2), on a $F_B = i \circ j$, on peut écrire pour tout B-module M (cf. (21.1.4))

$$(21.3.3.1) \quad M^{(p)} = M \otimes_B B^{(p)} = (M \otimes_B A_{[i]}) \otimes_A B_{[i]}$$

d'où en particulier

$$(21.3.3.2) \quad (\Omega_{B/A}^1)^{(p)} = \Theta_{B/A} \otimes_A B_{[i]}$$

et on déduit donc de (21.3.2.2) un *homomorphisme canonique de B-modules*

$$(21.3.3.3) \quad \pi_{B/A} \otimes I_B : (\Omega_{B/A}^1)^{(p)} \rightarrow \Omega_A^1 \otimes_A B_{[i]}.$$

Compte tenu de (20.5.4.2), l'image de cet homomorphisme est le B-module engendré par les éléments $d_A(j(b)) \otimes 1$ pour $b \in B$. Leur image par l'homomorphisme canonique $i_{B/A} : \Omega_A^1 \otimes_A B \rightarrow \Omega_B^1$ déduit de i (20.5.2) est donc dans le sous-B-module de Ω_B^1 engendré par les $d_B(i(j(b)))$ pour $b \in B$; en vertu de (21.3.1.2), cette image est nulle. Autrement dit, on a une suite d'homomorphismes

$$(21.3.3.4) \quad 0 \rightarrow \Xi_{B/A} \otimes_A B_{[i]} \rightarrow (\Omega_{B/A}^1)^{(p)} \rightarrow \Upsilon_{B/A}$$

qui n'est pas nécessairement exacte, mais où le composé de deux homomorphismes consécutifs est nul.

Proposition (21.3.4). — Si B est un A-module plat (pour i), la suite (21.3.3.4) est exacte. Cela résulte de la définition de la platitude.

La proposition (21.3.4) s'applique en particulier lorsque l'on a $B^p \subset A \subset B$, i et j étant respectivement l'injection canonique et F_B , et que B admet une p -base sur A (de sorte que B est alors un A-module libre). Mais même dans ce cas le noyau $\Xi_{B/A}$ n'est pas nécessairement nul. Toutefois :

Proposition (21.3.5). — Soient B un anneau réduit, A un sous-anneau de B tel que $B^p \subset A \subset B$. Supposons qu'il existe une p -base $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ de B sur A et une p -base $(y_\mu)_{\mu \in M}$ de A sur B^p ; alors l'homomorphisme canonique (21.3.3.4)

$$(21.3.5.1) \quad (\Omega_{B/A}^1)^{(p)} \rightarrow \Upsilon_{B/A}$$

est bijectif, et les éléments $d_A(x_\lambda^p) \otimes 1$ forment une base du B-module $\Upsilon_{B/A}$.

Comme B est réduit, $x \mapsto x^p$ est un isomorphisme de B sur B^p , et par transport de structure au moyen de cet isomorphisme, on voit que $(x_\lambda^p)_{\lambda \in L}$ est une p -base de B^p sur A^p ; on en conclut que les x_λ^p et les y_μ forment une p -base de A sur A^p (21.1.10); par suite (21.1.5, (ii) et 21.2.5) les $d_A(x_\lambda^p)$ et les $d_A(y_\mu)$ forment une base du A-module Ω_A^1 ; donc les $d_A(x_\lambda^p) \otimes 1$ et les $d_A(y_\mu) \otimes 1$ forment une base du B-module $\Omega_A^1 \otimes_A B$. Or, l'image de $d_A(x_\lambda^p) \otimes 1$ par $i_{B/A}$ est $d_B(x_\lambda^p) = 0$; d'autre part, l'image de $d_A(y_\mu)$ par $i_{B/A}$

est $d_B(y_\mu)$, et comme les y_μ et les x_λ forment une p -base de B sur B^p (21.1.10), les $d_B(y_\mu)$ sont linéairement indépendants (sur B) dans Ω_B^1 (21.2.5); on en déduit aussitôt que le noyau de $i_{B/A}$ a une base formée des $d_A(x_\lambda^p) \otimes 1$; comme ce sont les images par (21.3.5.1) des éléments $d_{B/A}(x_\lambda) \otimes 1$ dans $\Omega_{B/A}^1 \otimes_B B^{(p)}$, et que ces derniers forment une base du B -module $\Omega_{B/A}^1 \otimes_B B^{(p)}$ (21.2.5), l'homomorphisme (21.3.5.1) de B -modules est bijectif.

Remarques (21.3.6). — (i) Soient A' , B' deux anneaux de caractéristique p , et supposons que l'on ait deux homomorphismes $i' : A' \rightarrow B'$, $j' : B' \rightarrow A'$ vérifiant (21.3.1.1) et (21.3.1.2), et des homomorphismes d'anneaux $f : A \rightarrow A'$, $g : B \rightarrow B'$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & A' \\ f \uparrow & & g \uparrow & & f \uparrow \\ A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & A \end{array}$$

Alors l'homomorphisme canonique $\Omega_{B/A}^1 \rightarrow \Omega_{B'/A'}^1$ (20.5.4.3) donne un di-homomorphisme canonique $\Theta_{B/A} \rightarrow \Theta_{B'/A'}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Xi_{B/A} & \longrightarrow & \Theta_{B/A} & \xrightarrow{\pi_{B/A}} & \Omega_A^1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Xi_{B'/A'} & \rightarrow & \Theta_{B'/A'} & \xrightarrow{\pi_{B'/A'}} & \Omega_{A'}^1 \end{array}$$

(ii) Soit A' une A -algèbre quelconque, et posons $B' = B \otimes_A A'$; alors $i' = i \otimes 1 : A' \rightarrow B'$ et $j' = j \otimes 1 : B' \rightarrow A'$ vérifient (21.3.1.1) et (21.3.1.2), et l'on a

$$\Omega_{B'/A'}^1 = \Omega_{B/A}^1 \otimes_A A' = \Omega_{B/A}^1 \otimes_B B'$$

(20.5.5); on en déduit un A' -isomorphisme canonique

$$(21.3.6.1) \quad \Theta_{B/A} \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} \Theta_{B'/A'}$$

et aussi un B' -homomorphisme canonique

$$(21.3.6.2) \quad (\Omega_{B/A}^1)^{(p)} \otimes_B B' \xrightarrow{\sim} (\Omega_{B'/A'}^1)^{(p)}.$$

21.4. Cas des extensions de corps.

(21.4.0) Soient K un corps de caractéristique $p > 0$, k un sous-corps de K ; alors l'anneau $k[K^p]$ est égal au corps $k(K^p)$ puisque k est algébrique sur K^p . On pourra donc appliquer les résultats des numéros précédents en remplaçant partout A , B et $A[B^p]$ par k , K et $k(K^p)$.

Lemme (21.4.1). — Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, K une extension de k . Pour qu'un élément $x \in K$ soit p -libre sur k , il faut et il suffit que $x \notin k(K^p)$.

En effet, x est racine du polynôme $X^p - x^p$ de $k(K^p)[X]$, et l'on sait (Bourbaki, *Alg.*, chap. V, § 8, n° 1, prop. 1) que si $x \notin k(K^p)$ ce polynôme est irréductible, de sorte que les éléments $1, x, \dots, x^{p-1}$ forment une base du $k(K^p)$ -module $k(K^p)(x)$.

Théorème (21.4.2). — Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, K une extension de k , S un système de p -générateurs de K sur k , $L \subset S$ une partie p -libre sur k . Il existe alors une p -base B de K sur k telle que $L \subset B \subset S$. En particulier, toute extension de k admet une p -base sur k .

On peut se borner au cas où $K^p \subset k$. En vertu du théorème de Zorn, il existe dans K une partie B telle que $L \subset B \subset S$, p -libre sur k et maximale parmi les parties de S ayant ces propriétés. Il suffit de voir que le sous-corps K' de K engendré par k et B est égal à K . Dans le cas contraire, il existerait $x \in S$ non dans K' ; comme $K^p \subset k$, on a $K' = K'(K^p)$; donc x serait p -libre sur K' (21.4.1), et par suite $B \cup \{x\}$ serait p -libre sur k (21.1.10), contrairement à la définition de B . La dernière assertion de (21.4.2) s'obtient en prenant $L = \emptyset$, $S = K$. C.Q.F.D.

Corollaire (21.4.3). — Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, K une extension de k . Pour qu'une famille (x_α) d'éléments de K soit p -libre sur k , il faut et il suffit que, pour tout α , x_α n'appartienne pas au corps K_α engendré par $k(K^p)$ et par les x_β d'indice $\beta + \alpha$.

La condition est nécessaire en vertu de (21.1.10). Inversement, supposons-la remplie; on peut se borner au cas où (x_α) est un système de p -générateurs de K . Il existe alors une sous-famille de (x_α) qui est une p -base de K (21.4.2), mais cette famille ne peut être distincte de (x_α) , sans quoi, en vertu de l'hypothèse, ce ne serait pas une famille de p -générateurs de K .

Corollaire (21.4.4). — Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, K une extension de k . Pour que $\Omega_{K/k}^1 = 0$, il faut et il suffit que $K = k(K^p)$. En particulier, pour que $\Omega_K^1 = 0$, il faut et il suffit que K soit un corps parfait.

En effet, si (x_α) est une p -base de K sur k , les $d_{K/k}(x_\alpha)$ forment une base du K -espace vectoriel $\Omega_{K/k}^1$ (21.2.5).

Théorème (21.4.5). — Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, K une extension de k , (x_α) une famille d'éléments de K . Pour que (x_α) soit p -libre sur k (resp. une famille de p -générateurs de K sur k , resp. une p -base de K sur k), il faut et il suffit que la famille $(d_{K/k}(x_\alpha))$ soit une famille libre (resp. un système de générateurs, resp. une base) dans le K -espace vectoriel $\Omega_{K/k}^1$.

Soit K' le sous-corps (égal au sous-anneau) de K engendré par $k(K^p)$ et les x_α ; compte tenu de (20.4.7), on voit que les $d_{K'/k}(x_\alpha)$ engendrent $\Omega_{K'/k(K^p)}^1 = \Omega_{K'/k}^1$. Si les $d_{K/k}(x_\alpha)$ engendrent $\Omega_{K/k}^1 = \Omega_{K/k(K^p)}^1$, la flèche de gauche dans la suite exacte (20.5.7.1)

$$\Omega_{K'/k(K^p)}^1 \otimes_{K'} K \rightarrow \Omega_{K/k(K^p)}^1 \rightarrow \Omega_{K/K'}^1 \rightarrow 0$$

est surjective, donc $\Omega_{K/K'}^1 = 0$, ce qui implique $K' = K$ par (21.4.4).

Si maintenant (x_α) est une famille p -libre, elle est une sous-famille d'une p -base de K sur k (21.4.2), donc les $d_{K/k}(x_\alpha)$ font partie d'une base du K -espace vectoriel $\Omega_{K/k}^1$ (21.2.5), et sont par suite linéairement indépendants sur K . Prouvons réciproquement que si les $d_{K/k}(x_\alpha)$ sont linéairement indépendants sur K , la famille (x_α) est p -libre sur k .

Compte tenu de (21.4.3), il suffit de voir que, pour chaque α , x_α n'appartient pas à K_α . Or, dans la suite exacte

$$\Omega_{K_\alpha/k(K^p)}^1 \otimes_{K_\alpha} K \rightarrow \Omega_{K/k(K^p)}^1 \rightarrow \Omega_{K/K_\alpha}^1 \rightarrow 0$$

les images par la flèche de gauche des $d_{K_\alpha/k}(x_\beta)$ pour $\beta \neq \alpha$ sont les $d_{K/k}(x_\beta)$, donc engendrent un sous-espace vectoriel de $\Omega_{K/k(K^p)}^1$ ne contenant pas $d_{K/k}(x_\alpha)$, et comme ce sous-espace vectoriel est le noyau de la flèche de droite, on voit que $d_{K/K_\alpha}(x_\alpha) \neq 0$, donc $x_\alpha \notin K_\alpha$.

Corollaire (21.4.6). — Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, K une extension de k , x un élément de K . Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $x \notin k(K^p)$.
- b) $d_{K/k}(x) \neq 0$.
- c) L'élément x est p -libre sur k .

Proposition (21.4.7). — Soient L un corps de caractéristique $p > 0$, K un sous-corps de L tel que $L^p \subset K \subset L$. Alors la suite de L -espaces vectoriels

$$(21.4.7.1) \quad 0 \rightarrow \Omega_{L/K^p}^1 \otimes_K L \rightarrow \Omega_{L/L^p}^1 \rightarrow \Omega_{L/K}^1 \rightarrow 0$$

est exacte; en d'autres termes, on a $\Upsilon_{L/K/L^p} = 0$.

C'est un cas particulier de (21.2.4), compte tenu de (21.4.2).

Proposition (21.4.8). — Sous les hypothèses de (21.4.7), l'homomorphisme canonique

$$(21.4.8.1) \quad (\Omega_{L/K}^1)^{(p)} \rightarrow \Upsilon_{L/K}$$

est bijectif; si (x_λ) est une p -base de L sur K , les éléments $d_K(x_\lambda^p) \otimes 1$ forment une base du L -espace vectoriel $\Upsilon_{L/K}$.

C'est un cas particulier de (21.3.5).

21.5. Application : critères de séparabilité.

Dans ce numéro et les deux suivants, on ne suppose plus que les anneaux considérés soient de caractéristique $p > 0$.

(21.5.1) Notons d'abord que le critère (21.2.7) permet de démontrer une partie du théorème de Cohen sur les extensions séparables (19.6.1), savoir que si k est de caractéristique $p > 0$ et si K est une extension séparable de k , alors K est une k -algèbre formellement lisse. En effet, K admet une p -base sur k (21.4.2), et d'autre part, il résulte du critère de MacLane (Bourbaki, Alg., chap. V, § 8, n° 2, prop. 3) que dans une clôture algébrique de K , $k^{p^{-1}}$ et K sont linéairement disjoints sur k , et par suite que l'homomorphisme canonique $k^{p^{-1}} \otimes_k K \rightarrow k^{p^{-1}}(K)$ est bijectif, ce qui est précisément la condition (i) de (21.2.7), après transport de structure par l'isomorphisme $x \mapsto x^p$.

Proposition (21.5.2) (MacLane). — Soient A , B deux anneaux de valuation discrète complètes, m , n leurs idéaux maximaux respectifs, $K = A/m$ et $L = B/n$ leurs corps résiduels, $u : A \rightarrow B$ un homomorphisme tel que $Bu(m) = n$, $u_0 = u \otimes 1 : K \rightarrow L$ l'homomorphisme correspondant pour les corps résiduels. On considère les conditions suivantes :

- a) L est une extension séparable de K (pour u_0).
- b) Pour tout anneau de valuation discrète complet B' d'idéal maximal n' et de corps résiduel L' ,

tout homomorphisme $u' : A \rightarrow B'$ tel que $B'u'(m) = n'$ et tout K-isomorphisme $\sigma : L \rightarrow L'$ (relatif à u_0 et $u'_0 = u' \otimes 1 : K \rightarrow L'$), il existe un isomorphisme $w : B \rightarrow B'$ tel que $u' = w \circ u$ et que $w_0 = w \otimes 1$ soit égal à σ .

b') Pour tout homomorphisme $u' : A \rightarrow B$ tel que $Bu'(m) = n$ et tel que $u'_0 = u' \otimes 1 : K \rightarrow L$ soit égal à u_0 , il existe un automorphisme w de B tel que $u' = w \circ u$ et que $w_0 = w \otimes 1 : L \rightarrow L$ soit l'identité.

c) Désignant par $u_1 : A/m^2 \rightarrow B/n^2$ l'homomorphisme déduit de u par passage aux quotients, alors, pour tout homomorphisme local $u'_1 : A/m^2 \rightarrow B/n^2$ tel que $\text{gr}_0(u'_1) = \text{gr}_0(u_1) (= u_0)$, il existe un automorphisme w_1 de B/n^2 tel que $\text{gr}_0(w_1)$ soit l'identité et que $u'_1 = w_1 \circ u_1$.

c') Pour tout homomorphisme local $u'_1 : A/m^2 \rightarrow B/n^2$ tel que $\text{gr}_0(u'_1) = \text{gr}_0(u_1)$ et $\text{gr}_1(u'_1) = \text{gr}_1(u_1)$ (homomorphisme de m/m^2 dans n/n^2), il existe un automorphisme w_1 de B/n^2 tel que $\text{gr}_0(w_1)$ soit l'identité et que $u'_1 = w_1 \circ u_1$.

Alors on a les implications $c) \Leftrightarrow c' \Leftrightarrow a) \Rightarrow b) \Rightarrow b'$.

Si de plus A est un anneau de Cohen, les cinq conditions précédentes sont équivalentes.

Les implications $b) \Rightarrow b'$ et $c) \Rightarrow c'$ sont triviales. Montrons que $a)$ implique $b)$. L'homomorphisme u fait de B un A-module sans torsion, puisqu'il transforme par hypothèse une uniformisante de A en une uniformisante de B ; il en résulte que B est un A-module *plat* (0₁, 6.3.4), donc une A-algèbre de Cohen (19.8.1); le fait que $a)$ implique $b)$ est alors conséquence de (19.8.2, (i)) appliqué à $C = B'$, $\mathfrak{J} = n'$, B' étant considéré comme A-algèbre pour u' et l'homomorphisme $B \rightarrow B'/n'$ étant le composé $B \rightarrow B/n \xrightarrow{\sigma} B'/n'$, qui est un A-homomorphisme en vertu de l'hypothèse $u'_0 = \sigma \circ u_0$. Le même raisonnement prouve que $a)$ entraîne $c)$, en prenant cette fois $C = B/n^2$, $\mathfrak{J} = n/n^2$, C étant considéré comme A-algèbre pour u'_1 .

Prouvons en second lieu que $c')$ implique $a)$. Les deux homomorphismes u_1 et u'_1 sont tels que $u'_1 = u_1 + D$, où D est une dérivation de A/m^2 dans n/n^2 (20.1.1); d'ailleurs, l'hypothèse $\text{gr}_1(u'_1) = \text{gr}_1(u_1)$ signifie que D est nulle dans m/m^2 , et peut par suite être considérée comme une dérivation de $K = A/m$ dans n/n^2 , et n/n^2 s'identifie (par choix d'une uniformisante de B) au K-module L (pour u_0). D'autre part, les conditions imposées à w_1 entraînent que $\text{gr}_1(w_1)$ est aussi l'identité (puisque $u_1(m/m^2)$ engendre n/n^2); w_1 est donc de la forme $z \mapsto z + D'(z)$, où D' est cette fois une dérivation de B/n^2 dans le (B/n^2) -module n/n^2 ; comme w_1 est l'identité dans n/n^2 , D' peut encore (par l'identification précédente de n/n^2 et de L) être considérée comme une dérivation de L dans L ; enfin, la relation $u'_1 = w_1 \circ u_1$ signifie que D' prolonge D . Notons d'autre part que toute dérivation D de K dans L correspond à un homomorphisme u'_1 vérifiant les conditions de $c')$ (20.1.1); la condition $c')$ signifie donc que toute dérivation de K dans L se prolonge en une dérivation de L dans lui-même, c'est-à-dire (20.6.5) que L est séparable sur K .

Prouvons enfin que, lorsque A est un anneau de Cohen, $b')$ entraîne $c')$. Prouvons d'abord que sous les hypothèses de $c')$, il existe un homomorphisme $u' : A \rightarrow B$ qui vérifie les hypothèses de $b')$ et, par passage aux quotients, donne $u'_1 : A/m^2 \rightarrow B/n^2$. En effet, cela résulte de (19.8.6, (i)) appliqué à l'homomorphisme composé $v' : A \rightarrow A/m^2 \xrightarrow{u'_1} B/n^2$;

ce dernier se factorise donc en $A \xrightarrow{u'} B \rightarrow B/n^2$ et les hypothèses sur $\text{gr}_0(u'_1)$ et $\text{gr}_1(u'_1)$ entraînent $\text{gr}_0(u') = \text{gr}_0(u) = u_0$ et $\text{gr}_1(u') = \text{gr}_1(u)$, donc l'image par u' d'une uniformisante de A est une uniformisante de B , et l'on a par suite $Bu'(\mathfrak{m}) = n$. Il suffit alors, pour obtenir un automorphisme w_1 répondant à la question, de prendre l'automorphisme déduit par passage aux quotients de l'automorphisme w de B fourni par l'application de b' à l'homomorphisme u' .

Remarques (21.5.3). — (i) Les propriétés différentielles des corps permettent de résoudre la question de l'*unicité* du corps de représentants dans un anneau local noethérien complet C (19.8.7, (ii)). Soient en effet \mathfrak{J} l'idéal maximal de C , $K = C/\mathfrak{J}$ le corps résiduel de C ; on peut se borner au cas $\mathfrak{J} \neq 0$. Supposons qu'il existe un homomorphisme $u : K \rightarrow C$ qui, composé avec l'augmentation $C \rightarrow K$, donne l'identité; alors, *pour que cet homomorphisme soit unique, il faut et il suffit que $\Omega_K^1 = 0$* . En effet, la condition $\Omega_K^1 = 0$ entraîne que K est formellement non ramifié sur son corps premier (20.7.4); s'il existait un second homomorphisme $v \neq u$ répondant à la question, il y aurait un plus grand entier n tel que \mathfrak{J}^n contienne l'ensemble des $u(x) - v(x)$ pour $x \in K$; par passage au quotient, u et v donneraient deux homomorphismes distincts u', v' de K dans C/\mathfrak{J}^{n+1} , dont les composés avec $C/\mathfrak{J}^{n+1} \rightarrow C/\mathfrak{J}^n$ seraient égaux, ce qui contredit la définition (19.10.2). Inversement, supposons que $\Omega_K^1 \neq 0$; il existe alors une dérivation $D \neq 0$ de K dans $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ (20.4.8), donc un homomorphisme $v_1 : K \rightarrow C/\mathfrak{J}^2$ tel que, si $u_1 : K \rightarrow C/\mathfrak{J}^2$ est obtenu par passage au quotient à partir de u , on ait $v_1 = u_1 + D$ (20.1.1). Si k est le corps premier de K , C est une k -algèbre et K une k -algèbre formellement lisse (19.6.1), et les restrictions de u_1 et v_1 à k coïncident, donc v_1 se factorise en $K \xrightarrow{v} C \rightarrow C/\mathfrak{J}^2$ et l'on a $v \neq u$.

Rappelons ((20.6.20) et (21.4.4)) que la condition $\Omega_K^1 = 0$ signifie que K est *parfait* s'il est de caractéristique $\neq 0$, et extension algébrique de \mathbf{Q} s'il est de caractéristique 0 .

(ii) De la même manière, soient W un anneau de Cohen, C un anneau local noethérien complet, \mathfrak{J} un idéal $\neq 0$ de C contenu dans l'idéal maximal; pour que la factorisation $W \xrightarrow{v} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$ dans (19.8.6, (i)) soit *unique*, il faut et il suffit que le corps résiduel K de l'anneau de Cohen W soit tel que $\Omega_K^1 = 0$. En effet, si $\Omega_K^1 \neq 0$ et si \mathfrak{m} désigne l'idéal maximal de W , il suffit de composer une dérivation $D \neq 0$ de K dans $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}\mathfrak{J}$ avec l'augmentation $W \rightarrow K$ pour obtenir une dérivation $D' \neq 0$ de W dans $\mathfrak{J}/\mathfrak{m}\mathfrak{J}$ et l'on termine le raisonnement comme dans (i) en formant à l'aide de D' un homomorphisme $v_1 : W \rightarrow C/\mathfrak{m}\mathfrak{J}$ distinct de l'homomorphisme $u_1 : W \rightarrow C/\mathfrak{m}\mathfrak{J}$ déduit de u par passage au quotient; on achève le raisonnement en invoquant cette fois (19.8.6, (i)). Si au contraire $\Omega_K^1 = 0$, l'*unicité* de v résulte déjà de (i) lorsque $W = K$ est un corps de caractéristique 0 . Dans le cas contraire, on a $\hat{\Omega}_W^1 = 0$; en effet, on a alors $\mathfrak{m} = pW$, p étant la caractéristique de K (19.8.5), et l'homomorphisme canonique $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow \Omega_W^1/\mathfrak{m}\Omega_W^1$ (20.5.11.2) est par suite nul. La suite exacte (20.5.12.1) appliquée à W et à $K = W/\mathfrak{m}$ entraîne alors que $\Omega_W^1 = \mathfrak{m}\Omega_W^1$, d'où notre assertion. Mais alors (20.7.4) W est formellement non ramifiée (pour sa topologie adique) sur \mathbf{Z} , et l'*unicité* de v se prouve comme dans (i).

21.6. Corps admissibles pour une extension.

(21.6.1) Étant donnés quatre corps $k_0 \subset k \subset K \subset L$, il résulte de (20.6.16) et (20.6.17) que l'on a une suite exacte

$$(21.6.1.1) \quad 0 \rightarrow Y_{K/k/k_0} \otimes_K L \xrightarrow{v} Y_{L/k/k_0} \xrightarrow{u} Y_{L/K/k_0} \xrightarrow{s} Y_{L/K/k} \rightarrow 0.$$

Lorsqu'on laisse fixes k_0 , K et L et qu'on fait « varier » le corps intermédiaire k entre k_0 et K , on a évidemment $Y_{L/K/k_0} = Y_{L/K/k}$ lorsque $k = k_0$. Lorsque l'homomorphisme canonique s de (21.6.1.1) est encore *bijetif*, on dit que k est un *corps k_0 -admissible pour l'extension L de K* . L'intérêt de l'existence, sous certaines conditions, de tels corps k , qui soient pourtant « suffisamment proches » de K (par exemple tels que $[K : k]$ soit *fini*) est qu'ils permettent de remplacer dans certaines questions les modules de différentielles Ω_{K/k_0}^1 et Ω_{L/k_0}^1 (qui peuvent être « trop grands », par exemple lorsque k_0 est le corps premier) par $\Omega_{K/k}^1$ et $\Omega_{L/k}^1$, plus aisément maniables.

Lorsque k_0 est le *corps premier*, on dira « corps admissible » au lieu de « corps k_0 -admissible ».

On posera

(21.6.1.2)

$$\Delta(L/K, k/k_0) = \text{Coker}(Y_{K/k/k_0} \otimes_K L \rightarrow Y_{L/k/k_0}) \cong \text{Ker}(Y_{L/K/k_0} \rightarrow Y_{L/K/k})$$

(espace vectoriel sur L); son rang sera noté $d(L/K, k/k_0)$ et appelé *défaut de k_0 -admissibilité de k pour l'extension L de K* (il est évidemment nul si et seulement si k est k_0 -admissible pour cette extension). Lorsque k_0 est le corps premier, on écrira $\Delta(L/K, k)$ et $d(L/K, k)$ au lieu de $\Delta(L/K, k/k_0)$ et $d(L/K, k/k_0)$.

Proposition (21.6.2). — Soient $k_0 \subset k \subset K \subset L$ quatre corps.

(i) Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) Le corps k est k_0 -admissible pour l'extension L de K (autrement dit, l'homomorphisme $Y_{L/K/k_0} \rightarrow Y_{L/K/k}$ est injectif, donc bijectif).
- b) L'homomorphisme canonique $u : Y_{L/k/k_0} \rightarrow Y_{L/K/k_0}$ est nul.
- c) L'homomorphisme canonique $v : Y_{K/k/k_0} \otimes_K L \rightarrow Y_{L/k/k_0}$ est surjectif (donc bijectif).
- d) On a $d(L/K, k/k_0) = 0$ (ou $\Delta(L/K, k/k_0) = 0$).

(ii) Les conditions équivalentes de (i) sont vérifiées lorsque l'on est dans l'un des cas suivants :

- α) L est séparable sur k ; β) L est séparable sur K ; γ) on a $k \subset k_0(K^n)$, en désignant par p l'exposant caractéristique de k_0 .

(i) Les assertions résultent trivialement de l'exactitude de la suite (21.6.1.1).

(ii) Si L est séparable sur k , on a $Y_{L/k/k_0} = 0$ (20.6.19), donc la condition b) de (i) est remplie; si L est séparable sur K , on a $Y_{L/K/k_0} = 0$ (20.6.19), donc la condition a) de (i) est remplie; enfin, si l'on a $k \subset k_0(K^n)$, il en résulte que $Y_{L/K/k_0} = Y_{L/K/k}$ en vertu de (21.1.5.1), et la condition a) de (i) est vérifiée.

(21.6.3) Supposons que l'on ait un diagramme commutatif de monomorphismes de corps

$$\begin{array}{ccccccc} k'_0 & \rightarrow & k' & \rightarrow & K' & \rightarrow & L' \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ k_0 & \rightarrow & k & \rightarrow & K & \rightarrow & L \end{array}$$

Il résulte alors de (20.6.17, (ii)) que l'on a un homomorphisme canonique

$$(21.6.3.1) \quad \Delta(L/K, k/k_0) \rightarrow \Delta(L'/K', k'/k'_0)$$

avec une propriété de transitivité évidente, de sorte que l'on peut dire que $\Delta(L/K, k/k_0)$ est un *foncteur* en le quadruplet (k_0, k, K, L) .

Proposition (21.6.4). — (i) Soient $k \subset k' \subset k'' \subset K \subset L$ cinq corps. On a une suite exacte d'homomorphismes canoniques

$$(21.6.4.1) \quad 0 \rightarrow \Delta(L/K, k'/k) \rightarrow \Delta(L/K, k''/k) \rightarrow \Delta(L/K, k''/k') \rightarrow 0$$

et par suite l'égalité

$$(21.6.4.2) \quad d(L/K, k''/k) = d(L/K, k''/k') + d(L/K, k'/k).$$

(ii) Soient $k_0 \subset k \subset K \subset L \subset M$ cinq corps. On a une suite exacte d'homomorphismes canoniques

$$(21.6.4.3) \quad 0 \rightarrow \Delta(L/K, k/k_0) \otimes_L M \rightarrow \Delta(M/K, k/k_0) \rightarrow \Delta(M/L, k/k_0) \rightarrow 0$$

et par suite l'égalité

$$(21.6.4.4) \quad d(M/K, k/k_0) = d(M/L, k/k_0) + d(L/K, k/k_0).$$

(i) Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Upsilon_{K/k'/k} \otimes_K L & \longrightarrow & \Upsilon_{K/k''/k} \otimes_K L & \longrightarrow & \Upsilon_{K/k''/k'} \otimes_K L \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Upsilon_{L/k'/k} & \longrightarrow & \Upsilon_{L/k''/k} & \longrightarrow & \Upsilon_{L/k''/k'} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \Delta(L/K, k'/k) & \rightarrow & \Delta(L/K, k''/k) & \rightarrow & \Delta(L/K, k''/k') \rightarrow 0 \end{array}$$

où l'on peut considérer les trois lignes comme des *complexes* T_1^*, T_2^*, T_3^* respectivement; la suite exacte (21.6.1.1) et la définition de Δ (21.6.1.2) montrent que l'on a une suite exacte de complexes $0 \rightarrow T_1^* \rightarrow T_2^* \rightarrow T_3^* \rightarrow 0$; appliquons-lui la suite exacte de coho-

mologie, et notons que, en vertu de l'exactitude de (21.6.1.1), la cohomologie de T_1^* et celle de T_2^* sont nulles sauf en un seul et même degré, pour lequel les modules de cohomologie sont tous deux égaux à $\Upsilon_{k'/k''/k} \otimes_{k''} L$; comme T_1^* et T_2^* ont ainsi même cohomologie, celle de T_3^* est nécessairement nulle, ce qui prouve (i).

(ii) Considérons de même le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \Delta(L/K, k/k_0) \otimes_L M & \rightarrow & \Delta(M/K, k/k_0) & \rightarrow & \Delta(M/L, k/k_0) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Upsilon_{L/K/k_0} \otimes_L M & \longrightarrow & \Upsilon_{M/K/k_0} & \longrightarrow & \Upsilon_{M/L/k_0} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Upsilon_{L/K/k} \otimes_L M & \longrightarrow & \Upsilon_{M/K/k} & \longrightarrow & \Upsilon_{M/L/k} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où de nouveau on considère les trois lignes comme des complexes T_1^* , T_2^* et T_3^* ; la suite exacte (21.6.1.1) et la définition de Δ (21.6.1.2) donnent ici une suite exacte de complexes $0 \rightarrow T_1^* \rightarrow T_2^* \rightarrow T_3^* \rightarrow 0$ à laquelle on applique encore la suite exacte de cohomologie; cette fois, en vertu de l'exactitude de (21.6.1.1), la cohomologie de T_2^* et celle de T_3^* sont nulles sauf en un seul et même degré, pour lequel les modules de cohomologie sont tous deux égaux à $\Upsilon_{M/L/K}$; on conclut donc ici que la cohomologie de T_1^* est nulle, ce qui établit (ii).

Corollaire (21.6.5). — (i) Étant donnés cinq corps $k \subset k' \subset k'' \subset K \subset L$, pour que k'' soit k -admissible pour l'extension L de K , il faut et il suffit que k' soit k -admissible et que k'' soit k' -admissible pour l'extension L de K .

(ii) Étant donnés cinq corps $k_0 \subset k \subset K \subset L \subset M$, pour que k soit k_0 -admissible pour l'extension M de K , il faut et il suffit qu'il le soit pour l'extension L de K et pour l'extension M de L .

Cela résulte aussitôt des relations (21.6.4.2) et (21.6.4.4), les valeurs de d étant ≥ 0 .

Corollaire (21.6.6). — Soient $k_0 \subset k \subset K \subset L$ quatre corps, et supposons que k soit k_0 -admissible pour l'extension L de K . Alors, si k'_0 , k' , K' , L' sont quatre corps tels que $k_0 \subset k'_0 \subset k' \subset k \subset K \subset K' \subset L' \subset L$, k' est k'_0 -admissible pour l'extension L' de K' .

21.7. L'égalité de Cartier.

Le résultat suivant traduit en termes de différentielles un théorème de MacLane sur les dérivations :

Théorème (21.7.1) (Cartier). — Soient K un corps, L une extension de type fini de K . Alors $\Omega_{L/K}^1$ et $\Upsilon_{L/K}$ sont des L -espaces vectoriels de rang fini, et l'on a

$$(21.7.1.1) \quad \operatorname{rg} \Omega_{L/K}^1 - \operatorname{rg} \Upsilon_{L/K} = \deg. \operatorname{tr}_K L.$$

Si L' est un corps tel que $K \subset L' \subset L$, on a la suite exacte (20.6.15.1) (appliquée à $\Lambda = P$, corps premier de K , $A = K$, $B = L'$, $C = L$)

$$0 \rightarrow \Upsilon_{L'/K} \otimes_{L'} L \rightarrow \Upsilon_{L/K} \rightarrow \Upsilon_{L/L'} \rightarrow \Omega_{L'/K}^1 \otimes_{L'} L \rightarrow \Omega_{L/K}^1 \rightarrow \Omega_{L/L'}^1 \rightarrow 0$$

d'où (0_{III}, 11.10.2)

$$\operatorname{rg}_L \Omega_{L/K}^1 - \operatorname{rg}_L \Upsilon_{L/K} = (\operatorname{rg}_L \Omega_{L/L'}^1 - \operatorname{rg}_L \Upsilon_{L/L'}) + (\operatorname{rg}_{L'} \Omega_{L'/K}^1 - \operatorname{rg}_{L'} \Upsilon_{L'/K}).$$

Comme par ailleurs $\deg. \operatorname{tr}_K L = \deg. \operatorname{tr}_K L' + \deg. \operatorname{tr}_{L'} L$, on voit, par récurrence sur le nombre de générateurs de l'extension L , que l'on est ramené à prouver (21.7.1.1) lorsque $L = K(x)$. Distinguons alors trois cas :

a) x est transcendant sur K ; comme L est séparable sur K , on a alors $\Upsilon_{L/K} = 0$ (20.6.3); d'autre part, (20.5.9) et (20.4.13) montrent que $\Omega_{L/K}^1$ est de rang 1, d'où (21.7.1.1) dans ce cas.

b) L est une extension algébrique séparable de K , de sorte que l'on a encore $\Upsilon_{L/K} = 0$ (20.6.3). D'autre part, on a $\Omega_{L/K}^1 = 0$ par (20.6.20), d'où encore (21.7.1.1).

c) L est une extension algébrique inséparable de K ; le raisonnement du début montre qu'on peut se borner au cas où $L^p \subset K$; il résulte donc de (21.4.8) que l'on a $\operatorname{rg}_L \Upsilon_{L/K} = \operatorname{rg}_L \Omega_{L/K}^1$, d'où encore (21.7.1.1).

Corollaire (21.7.2). — Soient K un corps, L une extension de type fini de K , k un sous-corps de K . Alors $\Omega_{L/K}^1$ et $\Upsilon_{L/K/k}$ sont des espaces vectoriels de rang fini sur L , et l'on a

$$(21.7.2.1) \quad \operatorname{rg} \Omega_{L/K}^1 - \operatorname{rg} \Upsilon_{L/K/k} = \deg. \operatorname{tr}_K L + d(L/K, k).$$

Par suite, on a l'inégalité

$$(21.7.2.2) \quad \operatorname{rg} \Omega_{L/K}^1 - \operatorname{rg} \Upsilon_{L/K/k} \geq \deg. \operatorname{tr}_K L.$$

En outre, pour que les deux membres de (21.7.2.2) soient égaux, il faut et il suffit que k soit un corps admissible pour l'extension L de K .

En effet, comme l'homomorphisme $\Upsilon_{L/K} \rightarrow \Upsilon_{L/K/k}$ est surjectif, on a par définition (21.6.1.2) $\operatorname{rg} \Upsilon_{L/K} - \operatorname{rg} \Upsilon_{L/K/k} = d(L/K, k)$, et le corollaire résulte donc aussitôt de (21.7.1) et de (21.6.2).

Corollaire (21.7.3). — Soient $k \subset K \subset L$ trois corps tels que L soit une extension de type fini de k . Alors on a

$$(21.7.3.1) \quad \operatorname{rg}_L \Omega_{L/k}^1 - \operatorname{rg}_K \Omega_{K/k}^1 = \deg. \operatorname{tr}_K L + d(L/K, k).$$

Par suite, on a l'inégalité

$$(21.7.3.2) \quad \mathrm{rg}_L \Omega_{L/k}^1 - \mathrm{rg}_K \Omega_{K/k}^1 \geq \deg. \mathrm{tr}_K L$$

l'égalité étant atteinte si et seulement si k est un corps admissible pour l'extension L de K .

On a en effet la suite exacte (20.6.1.1)

$$0 \rightarrow \Upsilon_{L/K/k} \rightarrow \Omega_{K/k}^1 \otimes_K L \rightarrow \Omega_{L/k}^1 \rightarrow \Omega_{L/K}^1 \rightarrow 0$$

donc le premier membre de (21.7.3.1) est égal à

$$\mathrm{rg}_L \Omega_{L/K}^1 - \mathrm{rg}_L \Upsilon_{L/K/k}$$

et il suffit d'appliquer (21.7.2).

L'intérêt de ce dernier corollaire est qu'il ne fait intervenir que des modules de différentielles, à l'exclusion de modules d'imperfection. Nous verrons d'ailleurs plus bas (21.8.6) que pour toute extension de type fini L de K , il existe un sous-corps k de K tel que $[K : k]$ soit fini et qui est admissible pour l'extension L de K , de sorte que les deux membres de (21.7.3.2) sont alors égaux.

Corollaire (21.7.4). — Soit K une extension de type fini d'un corps k . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) K est une extension finie séparable de k .
- b) K est une k -algèbre formellement non ramifiée (19.10.2).
- c) K est une k -algèbre formellement étale (19.10.2).
- d) On a $\Omega_{K/k}^1 = 0$.

En effet, on sait (les topologies étant discrètes) que les conditions b) et d) sont équivalentes (20.7.4) et que a) entraîne que K est une k -algèbre formellement lisse (19.6.1), donc la conjonction de a) et b) équivaut à c). Tout revient à voir que d) entraîne a). Or, en vertu de (21.7.1.1), la relation $\Omega_{K/k}^1 = 0$ entraîne que K est algébrique (donc finie) sur k et que $\Upsilon_{K/k} = 0$, c'est-à-dire (20.6.3) que K est séparable sur k .

Remarque (21.7.5). — En vertu de (20.6.3.2) et de (0_{III}, 11.10.2) le premier membre de (21.7.1.1) n'est autre que la caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe $K_*(C/B/A)$ introduit dans (20.6.3), pour $C = L$, $B = K$ et $A = P$ (corps premier de K). Dans le chapitre consacré à la théorie des intersections et au théorème de Riemann-Roch, un rôle important sera joué également par les caractéristiques d'Euler-Poincaré généralisées (à valeurs dans des groupes de classes de \mathcal{O}_X -Modules) de complexes généralisant les complexes $F_*(C/A)$ considérés dans (20.6.22).

21.8. Critères d'admissibilité.

Nous revenons à nos conventions antérieures et supposons donc que tous les corps considérés dans ce numéro sont de caractéristique $p > 0$.

Lemme (21.8.1). — Soient K un corps, k un sous-corps de K , $(k_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille filtrante décroissante de sous-corps de K telle que $k = \bigcap_{\alpha \in I} k_\alpha$. Soient V un espace vectoriel sur K , $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$

une famille finie de vecteurs de V ; si la famille (a_i) est libre sur k , il existe un indice γ tel qu'elle soit aussi libre sur k_γ .

Soit r le rang de la famille $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ sur K , et raisonnons par récurrence sur $n-r$; la proposition est évidente pour $n=r$, car alors la famille $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$ est libre sur K , donc sur tout sous-corps de K . Supposons par exemple que $(a_i)_{1 \leq i \leq r+1}$ soit libre sur K , et écrivons $a_{r+1} = \sum_{i=1}^r \lambda_i a_i$ avec $\lambda_i \in K$; la famille $(a_i)_{1 \leq i \leq r+1}$ étant libre sur k , les λ_i ne peuvent tous appartenir à k ; supposons par exemple que $\lambda_i \notin k$. Alors il existe un indice β tel que $\lambda_i \notin k_\beta$; on en conclut que la famille $(a_i)_{1 \leq i \leq r+1}$ est libre sur k_β ; en effet, comme la famille $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$ est libre sur tout sous-corps de K , si la famille $(a_i)_{1 \leq i \leq r+1}$ n'était pas libre sur k_β , a_{r+1} serait égal à une combinaison linéaire des a_i à coefficients dans k_β , et comme ces coefficients sont nécessairement les λ_i , on aboutit à une contradiction. Il suffit maintenant d'appliquer l'hypothèse de récurrence en remplaçant K par k_β et la famille $(k_\alpha)_{\alpha \in I}$ par la sous-famille des k_α contenus dans k_β .

Lemme (21.8.2). — Soient K un corps, p son exposant caractéristique, k_0 un sous-corps de K , $(k_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille filtrante décroissante de sous-corps de K telle que $\bigcap_{\alpha \in I} k_\alpha(K^p) = k_0(K^p)$. Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille finie d'éléments de K qui est p -libre sur k_0 , il existe un indice α tel que (x_i) soit p -libre sur k_α .

En effet, dire que la famille (x_i) est p -libre sur un sous-corps k de K signifie que la famille finie des monômes $\prod_{i=0}^n x_i^{m(i)}$ avec $0 \leq m(i) < p$ est libre sur $k(K^p)$; il suffit donc d'appliquer le lemme (21.8.1) à cette famille de monômes dans l'espace vectoriel $V = K$, et aux sous-corps $k_\alpha(K^p)$ et $k_0(K^p)$ de K .

Théorème (21.8.3). — Soient K un corps de caractéristique $p > 0$, k_0 un sous-corps de K , $(k_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille filtrante décroissante de sous-corps de K contenant k_0 . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $\bigcap_{\alpha \in I} k_\alpha(K^p) = k_0(K^p)$.
- b) Pour toute extension L de K telle que $\Upsilon_{L/K/k_0}$ soit un L -espace vectoriel de rang fini (ce qui a lieu en particulier si L est une extension de type fini en vertu de (21.7.2)), il existe $\alpha \in I$ tel que k_α soit k_0 -admissible pour l'extension L de K .
- b') Pour toute extension $L = K(x)$ de K , avec $x^p \in K$, il existe $\alpha \in I$ tel que k_α soit k_0 -admissible pour l'extension L de K .
- c) L'application canonique

$$(21.8.3.1) \quad \Omega_{K/k_0}^1 \rightarrow \varprojlim_{\alpha} \Omega_{K/k_\alpha}^1$$

est injective.

L'application canonique (21.8.3.1) est bien entendu obtenue par passage à la limite projective dans le système projectif d'homomorphismes $\Omega_{K/k_0}^1 \rightarrow \Omega_{K/k_\alpha}^1$ (20.5.3.3). Nous allons prouver le théorème suivant le schéma logique $c) \Rightarrow b) \Rightarrow b' \Rightarrow a) \Rightarrow c)$.

Dire que k_α est k_0 -admissible pour l'extension L de K signifie que l'homomorphisme

canonique $\Upsilon_{L/K/k_0} \rightarrow \Upsilon_{L/K/k_\alpha}$ est injectif; or, si N_α est le noyau de cet homomorphisme, les N_α forment un système filtrant décroissant de sous-espaces vectoriels de $\Upsilon_{L/K/k_0}$, et comme $\Upsilon_{L/K/k_0}$ est par hypothèse de rang fini, il revient au même de dire que l'un des N_α est 0 ou que leur intersection est 0. Mais cette intersection n'est autre que le noyau de l'homomorphisme limite projective $\Upsilon_{L/K/k_0} \rightarrow \varprojlim_\alpha \Upsilon_{L/K/k_\alpha}$. Or, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Upsilon_{L/K/k_0} & \rightarrow & \varprojlim \Upsilon_{L/K/k_\alpha} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_{K/k_0}^1 \otimes_K L & \rightarrow & \varprojlim \Omega_{K/k_\alpha}^1 \otimes_K L \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche est injective par définition. Pour prouver que c) entraîne b), il suffit donc de montrer que c) entraîne que l'application canonique

$$(21.8.3.2) \quad \Omega_{K/k_0}^1 \otimes_K V \rightarrow \varprojlim (\Omega_{K/k_\alpha}^1 \otimes_K V)$$

est injective pour tout espace vectoriel V sur K (et en particulier pour $V=L$). Or cela est évident si $V=K^n$ puisque alors $W \otimes_K V = W^n$ pour tout espace vectoriel sur K et que les produits et limites projectives commutent. D'autre part, pour tout élément z du premier membre de (21.8.3.2) il existe un sous-espace V' de V de rang fini tel que $z \in \Omega_{K/k_0}^1 \otimes_K V'$ (identifié canoniquement à un sous-espace de $\Omega_{K/k_0}^1 \otimes_K V$); si $z \neq 0$, son image dans $\varprojlim_\alpha (\Omega_{K/k_\alpha}^1 \otimes_K V')$ n'est donc pas nulle; comme le foncteur \varprojlim est exact à gauche, l'image de z dans le second membre de (21.8.3.2) est donc aussi $\neq 0$, ce qui achève de montrer que c) implique b).

Il est trivial que b) entraîne b'); montrons que b') entraîne a). Avec les notations de b'), on peut supposer que $L \neq K$. Il résulte alors de (21.4.7) que l'on a $\operatorname{rg} \Upsilon_{L/K/k_0} \leq \operatorname{rg} \Upsilon_{L/K} \leq 1$. Si $\Upsilon_{L/K/k_0} = 0$ il n'y a rien à démontrer en vertu de (21.6.1.1). Sinon, $\Upsilon_{L/K/k_0}$ s'identifie canoniquement à $\Upsilon_{L/K}$ et si l'on pose $a = x^p$, $\Upsilon_{L/K}$ a une base formée du seul élément $d_K a \otimes 1$ (21.4.7); $\Upsilon_{L/K/k_0}$ a donc une base formée du seul élément $d_{K/k_0}(a) \otimes 1$, et dire qu'un sous-corps k_α est k_0 -admissible pour l'extension L de K signifie que l'on a $d_{K/k_\alpha}(a) \neq 0$, ou encore (21.4.5) que $a \notin k_\alpha(K^p)$. Or, pour tout $a \notin k_0(K^p)$, on a $d_{K/k_0}(a) \neq 0$ et $K(a^{1/p}) \neq K$, donc on peut appliquer b'), qui prouve l'existence d'un α tel que $a \notin k_\alpha(K^p)$; autrement dit b') implique a).

Reste à montrer que a) implique c). Soit $(x_\mu)_{\mu \in M}$ une p -base de K sur k_0 ; alors, les $d_{K/k_0}(x_\mu)$ forment une base du K -espace vectoriel Ω_{K/k_0}^1 (21.4.5), et la condition c) signifie que pour toute partie finie J de l'ensemble d'indices M , il existe un $\alpha \in I$ tel que les $d_{K/k_\alpha}(x_\mu)$ pour $\mu \in J$ soient linéairement indépendants dans Ω_{K/k_α}^1 ; mais cela signifie aussi (21.4.5) que les x_μ pour $\mu \in J$ forment une famille p -libre sur k_α , et l'existence d'un α ayant cette propriété découle de (21.8.2) et de l'hypothèse a).

Corollaire (21.8.4). — Soient K un corps de caractéristique $p > 0$, k_0 un sous-corps de K , $(k_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille filtrante décroissante de sous-corps de K , contenant k_0 , telle que

$$\bigcap_{\alpha \in I} k_\alpha(K^p) = k_0(K^p).$$

Soient L une extension de K telle que $\Upsilon_{L/K/k_0}$ soit un L -espace vectoriel de rang fini; alors, pour tout corps K' tel que $K \subset K' \subset L$, il existe $\alpha \in I$ tel que k_α soit k_0 -admissible pour l'extension L de K' .

Il suffit d'appliquer (21.8.3) et (21.6.6).

Corollaire (21.8.5). — Soient K un corps de caractéristique $p > 0$, k_0 un sous-corps de K , $(k_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille filtrante décroissante de sous-corps de K contenant k_0 , telle que

$$\bigcap_{\alpha \in I} k_\alpha(K^p) = k_0(K^p).$$

Alors, pour toute extension L de K telle que $\Upsilon_{L/K/k_0}$ soit un L -espace vectoriel de rang fini, on a $\bigcap_{\alpha \in I} k_\alpha(L^p) = k_0(L^p)$.

Supposons en effet que M soit une extension de L telle que $\Upsilon_{M/L/k_0}$ soit un M -espace vectoriel de rang fini. La suite exacte (21.6.1.1)

$$0 \rightarrow \Upsilon_{L/K/k_0} \otimes_L M \rightarrow \Upsilon_{M/K/k_0} \rightarrow \Upsilon_{M/L/k_0}$$

et l'hypothèse montrent alors que $\Upsilon_{M/K/k_0}$ est aussi un M -espace vectoriel de rang fini. Il existe donc un indice α tel que k_α soit k_0 -admissible pour l'extension M de K (21.8.3), donc aussi pour l'extension M de L (21.6.6); cela ayant lieu pour toute extension M de L telle que $\Upsilon_{M/L/k_0}$ soit de rang fini, le corollaire résulte de l'équivalence de a) et b) dans (21.8.3).

Corollaire (21.8.6). — Soient K un corps, p son exposant caractéristique, k_0 un sous-corps de K . Si L est une extension de K telle que $\Upsilon_{L/K/k_0}$ soit un L -espace vectoriel de rang fini, il existe un sous-corps k de K , contenant $k_0(K^p)$, tel que $[K : k]$ soit fini, et qui soit k_0 -admissible pour l'extension L de K .

Il suffit en effet, en vertu de (21.8.3), de construire une famille filtrante décroissante $(k_\alpha)_{\alpha \in I}$ de sous-corps de K , contenant K^p et k_0 , pour lesquels $[K : k_\alpha] < +\infty$ et $\bigcap_{\alpha} k_\alpha = k_0(K^p)$. Pour cela on considère une p -base $(x_\lambda)_{\lambda \in J}$ de K sur k_0 et, pour toute partie finie H de J , on considère le sous-corps k_H de K engendré par $k_0(K^p)$ et les x_λ d'indice $\lambda \in J - H$; il résulte de cette définition que $(x_\lambda)_{\lambda \in H}$ est une p -base de K sur k_H , et on en conclut aussitôt que les k_H vérifient les conditions voulues.

Remarques (21.8.7). — (i) On a déjà vu (21.7.2) que si L est une extension de type fini de K , $\Upsilon_{L/K/k_0}$ est de rang fini pour tout sous-corps k_0 de K . Il en est de même si L est une extension séparable de K , car en vertu de (20.6.19), on a $\Upsilon_{L/K/k_0} = 0$. Enfin, si L est une extension de type fini d'une extension séparable L_0 de K , le même raisonnement que dans (21.8.5) montre que $\Upsilon_{L/K/k_0}$ est encore de rang fini (et en fait est isomorphe à un sous-espace de $\Upsilon_{L/L_0/k_0}$).

(ii) Dans l'énoncé de (21.8.5), et par suite aussi dans celui de (21.8.3, b)), on ne peut omettre l'hypothèse que $\Gamma_{L/K/k_0}$ est de rang fini sur L . Prenons pour k_0 le corps premier \mathbf{F}_p , pour K un corps tel que $[K : K^p]$ soit infini dénombrable (par exemple le corps de fractions rationnelles $\mathbf{F}_p(X_1, \dots, X_n, \dots)$ à une infinité d'indéterminées); le procédé de construction de (21.8.6) montre aussitôt qu'il existe une suite infinie strictement décroissante (K_n) de sous-corps de K telle que $K_0 = K$ et $\bigcap_n K_n = K^p$. Nous allons construire une suite croissante d'extensions finies M_n de K , telle que si M est la réunion des M_n , l'extension $L = M^{1/p}$ de K mette (21.8.5) en défaut. Pour cela, soit x un élément de $K - K^p$, posons $M_0 = K^p$, et $M_n = K^p(a_1x, a_2x, \dots, a_nx)$ pour $n \geq 1$, où les a_n sont construits par récurrence de façon que $a_n \in K_n$ et $a_{n+1} \notin M_n(x)$ pour tout n : cela est possible, car $M_n(x)$ est de degré fini sur K^p , tandis qu'il n'en est pas de même de K_n . On en conclut aussitôt que $x \notin M = L^p$, mais comme $x = (a_nx)a_n^{-1}$, on a $x \in K_n(M) = K_n(L^p)$ pour tout n .

Proposition (21.8.8). — Soit k un corps de caractéristique $p > 0$, et soient $A = k[[T_1, \dots, T_r]]$ l'anneau des séries formelles à r indéterminées sur k , $K = k((T_1, \dots, T_r))$ son corps des fractions. Alors il existe une famille filtrante décroissante (A_α) de sous-anneaux noethériens de A telle que A soit un A_α -module libre de type fini pour tout α et que, si K_α est le corps des fractions de A_α , on ait $\bigcap_\alpha K_\alpha = K^p$.

On peut écrire $K^p = k^p((T_1^p, \dots, T_r^p))$; on a vu dans la démonstration de (21.8.6) qu'il existe une famille décroissante (k_α) de sous-corps de k telle que $[k : k_\alpha]$ soit fini pour tout α et $\bigcap_\alpha k_\alpha = k^p$; il est clair que si l'on pose $A_\alpha = k_\alpha[[T_1^p, \dots, T_r^p]]$, A est un A_α -module libre de type fini; tout revient donc à prouver la relation

$$(21.8.8.1) \quad \bigcap_\alpha k_\alpha((T_1^p, \dots, T_r^p)) = k^p((T_1^p, \dots, T_r^p)).$$

Comme $\bigcap_\alpha k_\alpha = k^p$, cela va résulter des deux lemmes suivants :

Lemme (21.8.8.2). — Si k' est une extension d'un corps k , on a

$$k'[[T_1, \dots, T_r]] \cap k((T_1, \dots, T_r)) = k[[T_1, \dots, T_r]].$$

En effet, posons $C = k[[T_1, \dots, T_r]]$, $D = k'[[T_1, \dots, T_r]]$; comme $k((T_1, \dots, T_r))$ est le corps des fractions de C , il suffira de prouver que D est un C -module fidèlement plat (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 3, n° 5, prop. 10). Or, C et D sont des anneaux locaux noethériens, et si m est l'idéal maximal de C , on a $D/m^j D = (C/m^j) \otimes_k k'$, donc $D/m^j D$ est un (C/m^j) -module plat; il suffit donc d'appliquer (0_{III}, 10.2.1) et (0_I, 6.6.2).

Lemme (21.8.8.3). — Soient k un corps, (k_α) une famille filtrante décroissante de sous-corps de k , et posons $k_0 = \bigcap_\alpha k_\alpha$. On suppose qu'il existe une puissance q de l'exposant caractéristique de k telle que $k^q \subset k_0$. Alors on a

$$(21.8.8.4) \quad \bigcap_\alpha k_\alpha((T_1, \dots, T_r)) = k_0((T_1, \dots, T_r)).$$

Il suffit de prouver qu'un élément $f \neq 0$ du premier membre de (21.8.8.4) appartient au second membre. Soient γ un indice, $g \in k_\gamma[[T_1, \dots, T_r]]$ tel

que $gf \in k_\gamma[[T_1, \dots, T_r]]$; quitte à remplacer g par g^q , on peut supposer que $g \in k_0[[T_1, \dots, T_r]]$. Alors, pour tout $\alpha \geq \gamma$, on a

$$gf \in k_\gamma[[T_1, \dots, T_r]] \cap k_\alpha((T_1, \dots, T_r)) = k_\alpha[[T_1, \dots, T_r]]$$

en vertu du lemme (21.8.8.2). Mais il est clair que l'intersection des anneaux $k_\alpha[[T_1, \dots, T_r]]$ n'est autre que $k_0[[T_1, \dots, T_r]]$, et l'on a donc bien $f \in k_0((T_1, \dots, T_r))$.

21.9. Modules de différentielles complétées dans les anneaux de séries formelles.

Dans ce numéro, les corps ne sont plus nécessairement supposés être de caractéristique > 0 .

Lemme (21.9.1). — Soient k un corps, A un anneau local noethérien complet qui est une k -algèbre, K le corps résiduel de A . Si K est une extension de type fini de k , le A -module $\hat{\Omega}_{A/k}^1$ est de type fini.

En vertu de (20.7.15), il suffit de prouver que $\Omega_{K/k}^1$ est un K -espace vectoriel de rang fini. Or, par hypothèse, K est le corps des fractions d'une k -algèbre de type fini B ; comme $\Omega_{B/k}^1$ est un B -module de type fini en vertu de (20.4.7), la conclusion résulte de (20.5.9).

Proposition (21.9.2). — Soient k_0 un corps, A un anneau local noethérien complet qui est une k_0 -algèbre formellement lisse, m son idéal maximal, $K = A/m$ son corps résiduel (de sorte qu'en tant qu'anneau A est isomorphe à un anneau de séries formelles $K[[T_1, \dots, T_r]]$ (19.6.5)). Si K est une extension de type fini de k_0 , alors $\hat{\Omega}_{A/k_0}^1$ est un A -module libre de rang égal à $\dim(A) + \deg. \text{tr}_{k_0} K$. En outre, pour tout sous-corps k de k_0 tel que Ω_{k/k_0}^1 soit de rang fini, $\hat{\Omega}_{A/k}^1$ est un A -module libre de rang égal à $\dim(A) + \deg. \text{tr}_{k_0} K + \text{rg}_{k_0}(\Omega_{k_0/k}^1)$.

Il est clair que, si P est le sous-corps premier de k_0 , K est une P -algèbre formellement lisse (19.6.1). Notons d'autre part que l'on a $\Upsilon_{A/k_0/P}^K = 0$: en effet, cela revient à voir que l'homomorphisme

$$u_{A/k_0/P} \otimes_{I_K} : \Omega_{k_0/P}^1 \otimes_{k_0} K \rightarrow \Omega_{A/P}^1 \otimes_A K$$

est injectif (20.6.14.5), u désignant l'homomorphisme structural $k_0 \rightarrow A$. Mais comme A est une k_0 -algèbre formellement lisse par hypothèse, il résulte de (20.7.2) que $u_{A/k_0/P}$ est formellement inversible à gauche, donc (19.1.7) $u_{A/k_0/P} \otimes_{I_K}$ est inversible à gauche et *a fortiori* injectif, ce qui prouve notre assertion. Appliquant la suite exacte (20.6.22.1), où Λ , A , B , C sont remplacés par P , k_0 , A , K , il vient la suite exacte

$$0 \rightarrow \Upsilon_{K/k_0} \rightarrow m/m^2 \rightarrow \Omega_{A/k_0}^1 \otimes_A K \rightarrow \Omega_{K/k_0}^1 \rightarrow 0$$

de sorte que l'on a

$$\text{rg}_K(\Omega_{A/k_0}^1 \otimes_A K) = \text{rg}_K(m/m^2) + (\text{rg}_K(\Omega_{K/k_0}^1) - \text{rg}_K(\Upsilon_{K/k_0})) = \text{rg}_K(m/m^2) + \deg. \text{tr}_{k_0} K$$

en vertu de (21.7.1). D'autre part, Ω_{A/k_0}^1 est un A -module formellement projectif (20.4.9), et comme sa topologie est la topologie m -préadique (20.4.5), $\Omega_{A/k_0}^1/m^{j+1}\Omega_{A/k_0}^1$ est un (A/m^{j+1}) -module projectif pour tout j (19.2.4), donc libre ($\mathbf{0}_{III}$, 10.1.2) et de rang

$n = \text{rg}_K(\Omega_{A/k_0}^1 \otimes_A K)$. En vertu de (21.9.1), $\hat{\Omega}_{A/k_0}^1$ est un A -module de type fini, et en outre ce A -module est plat en vertu de (0_{III}, 10.2.1); il est donc libre (0_{III}, 10.1.3) de rang n , d'où la première assertion.

Comme par hypothèse $\Omega_{k_0/k}^1$ est de rang fini sur k_0 , le produit tensoriel complété $\hat{\Omega}_{k_0/k}^1 \hat{\otimes}_{k_0} A$ s'identifie à $\Omega_{k_0/k}^1 \otimes_{k_0} A$; comme A est une k_0 -algèbre formellement lisse, il résulte de (20.7.18) que l'homomorphisme

$$\hat{u}_{A/k_0/k} : \Omega_{k_0/k}^1 \otimes_{k_0} A \rightarrow \hat{\Omega}_{A/k}^1$$

admet un inverse à gauche qui est un A -homomorphisme continu, ce qui implique en particulier que son image est fermée dans $\hat{\Omega}_{A/k}^1$; la suite exacte

$$0 \rightarrow \Omega_{k_0/k}^1 \otimes_{k_0} A \xrightarrow{\hat{u}_{A/k_0/k}} \hat{\Omega}_{A/k}^1 \rightarrow \hat{\Omega}_{A/k_0}^1 \rightarrow 0$$

est donc *exacte et scindée* en vertu de (20.7.17) et de ce qui précède; ce qui achève de prouver la proposition.

Corollaire (21.9.3). — Soient k un corps, A l'anneau de séries formelles $k[[T_1, \dots, T_r]]$, muni de sa structure usuelle de k -algèbre. Alors $\hat{\Omega}_{A/k}^1$ est un A -module libre de rang $r = \dim(A)$.

Il suffit de noter que A est une k -algèbre formellement lisse (19.3.4), et d'appliquer (21.9.2) avec $k_0 = k = K$.

Lemme (21.9.4). — Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, A une k -algèbre qui est un anneau local noethérien complet, B une sous- k -algèbre de A isomorphe à une k -algèbre topologique de la forme $k[[T_1, \dots, T_r]]$ et telle que A soit une B -algèbre de type fini. Si B_1 est la sous-algèbre $k[[T_1^p, \dots, T_r^p]]$ de B , $\hat{\Omega}_{A/k}^1$ s'identifie canoniquement à Ω_{A/B_1}^1 .

Toute dérivation continue de B_1 dans un A -module topologique P , qui est restriction d'une k -dérivation continue de A dans P , est nulle, car elle l'est dans le sous-anneau $k[T_1^p, \dots, T_r^p]$ des polynômes, et ce dernier est dense dans B_1 . La suite exacte (20.3.7.1) montre donc que l'homomorphisme canonique

$$\text{Dér. cont}_{B_1}(A, P) \rightarrow \text{Dér. cont}_k(A, P)$$

est bijectif; la conclusion résulte de (20.7.14.4), compte tenu de ce que Ω_{A/B_1}^1 est un A -module de type fini (20.4.7), donc séparé et complet puisque A est un anneau local noethérien complet.

Proposition (21.9.5). — Soient A un anneau local noethérien complet intègre, A_0 un sous-anneau de A isomorphe à un anneau de séries formelles $k[[T_1, \dots, T_r]]$ sur un corps k , tel que A soit une A_0 -algèbre finie et que le corps des fractions E de A soit une extension séparable du corps des fractions L_0 de A_0 . Alors on a

$$(21.9.5.1) \quad \text{rg}_A \hat{\Omega}_{A/k}^1 = \text{rg}_E (\hat{\Omega}_{A/k}^1 \otimes_A E) = \dim(A).$$

Notons que si \mathfrak{m}_0 est l'idéal maximal de A_0 , la topologie de A est la topologie \mathfrak{m}_0 -adique puisque A est une A_0 -algèbre finie (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, cor. 3 de la prop. 9) et induit sur A_0 la topologie \mathfrak{m}_0 -adique (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 4, th. 3). On sait (21.9.1) que $\hat{\Omega}_{A/k}^1$ est un A -module de type fini et,

en vertu de (21.9.3) $\hat{\Omega}_{A_0/k}^1$ est un A_0 -module *libre* de rang $r = \dim(A_0) = \dim(A)$ (16.1.5); le produit tensoriel $\hat{\Omega}_{A_0/k}^1 \otimes_{A_0} A$ est donc un A -module libre de rang r identique à son séparé complété; enfin Ω_{A/A_0}^1 est un A -module de type fini (20.4.7), donc identique à son séparé complété (0₁, 7.3.6). Cela étant, dans la suite d'homomorphismes

$$(21.9.5.2) \quad \hat{\Omega}_{A_0/k}^1 \otimes_{A_0} A \xrightarrow{u} \hat{\Omega}_{A/k}^1 \xrightarrow{v} \Omega_{A/A_0}^1 \rightarrow 0$$

on sait que v est *surjectif* et que $\text{Im}(v)$ est *dense* dans $\text{Ker}(v)$ (20.7.17); mais tout sous- A_0 -module de $\hat{\Omega}_{A/k}^1$ est fermé pour la topologie m_0 -adique (0₁, 7.3.5), donc la suite (21.9.5.2) est *exacte*. Notons d'autre part que puisque A est entier sur A_0 , A_0 intégralement clos et E séparable sur L_0 , Ω_{A/A_0}^1 est un A -module de torsion (20.4.13, (iv)); tensorisant la suite exacte (21.9.5.2) par E , il vient une suite exacte

$$\hat{\Omega}_{A_0/k}^1 \otimes_{A_0} E \rightarrow \hat{\Omega}_{A/k}^1 \otimes_A E \rightarrow 0$$

d'où $\text{rg}_E(\hat{\Omega}_{A/k}^1 \otimes_A E) \leq r$. Il reste donc à montrer qu'il existe, dans $\hat{\Omega}_{A/k}^1 \otimes_A E$, r éléments linéairement indépendants sur E . Or, soient $D_i = \partial/\partial T_i$ les dérivations canoniques de A_0 dans lui-même ($1 \leq i \leq r$); elles se prolongent de façon unique en des dérivations (encore notées D_i) de E dans lui-même, puisque E est extension séparable finie de L_0 ; par restriction à A , ces dérivations donnent des dérivations de A dans E , et il est immédiat que ces dérivations prennent leurs valeurs dans un même sous- A -module de *type fini* de E ; comme elles sont continues dans A_0 et que la topologie de A est la topologie m_0 -adique, on a ainsi formé r dérivations *continues* de A dans un A -module topologique, qui sont évidemment linéairement indépendantes puisque $D_i(T_j) = \delta_{ij}$; ceci achève de prouver la proposition.

La proposition suivante est un analogue « formel » de (21.7.3) :

Proposition (21.9.6). — Soient $k_0 \subset k \subset K_0$ trois corps de caractéristique $p > 0$, tels que $[K_0 : k] < +\infty$; on pose

$$\begin{aligned} L_0 &= K_0((T_1, \dots, T_r)), & M_0 &= K_0((T_1^p, \dots, T_r^p)) \\ L &= k((T_1, \dots, T_r)), & M &= k((T_1^p, \dots, T_r^p)), & N &= k((T_1^{p^2}, \dots, T_r^{p^2})). \end{aligned}$$

Soit E une extension de type fini de L_0 .

(i) Si Γ_{K_0/k_0} est de rang fini, on a

$$(21.9.6.1) \quad \text{rg}_E \Omega_{E/M}^1 - \text{rg}_{K_0} \Omega_{K_0/k_0}^1 = (r + \deg. \text{tr}_{L_0} E) + d(E/K_0, k_0) + d(E/M_0, N/k_0)$$

(notations de (21.6.1)), et en particulier on a

$$(21.9.6.2) \quad \text{rg}_E \Omega_{E/M}^1 - \text{rg}_{K_0} \Omega_{K_0/k_0}^1 \geq r + \deg. \text{tr}_{L_0} E + d(E/K_0, k_0).$$

En outre, si les deux membres de (21.9.6.2) sont égaux, ils le restent lorsqu'on remplace k par un corps k' tel que $k_0 \subset k' \subset k$.

(ii) On suppose en outre que $[k_0 : k_0^p] < +\infty$. Soit (k_α) une famille filtrante décroissante de sous-corps de K_0 contenant k_0 , tels que $[K_0 : k_\alpha] < +\infty$ pour tout α et que $\bigcap_\alpha k_\alpha(K_0^p) = k_0(K_0^p)$; alors il existe un α tel que, pour $k = k_\alpha$, les deux membres de (21.9.6.2) soient égaux.

(i) On sait (21.1.5, (ii)) que $\text{rg}_E \Omega_{E/M}^1$ ne change pas quand on remplace M par $M(L_0^p)$; comme $L_0^p = K_0^p((T_1^p, \dots, T_r^p))$ et que $[k(K_0^p) : k] < +\infty$, on a

$$M(L_0^p) = k(K_0^p)((T_1^p, \dots, T_r^p));$$

de même $\Omega_{K_0/k}^1$ ne change pas quand on y remplace k par $k(K_0^p)$, si bien que l'on peut supposer que $K_0^p \subset k$, ce que nous ferons dans toute la suite. Nous introduirons aussi les corps

$$k'_0 = k_0(K_0^p), \quad N' = k'_0((T_1^{p^2}, \dots, T_r^{p^2}));$$

de sorte que l'on a le diagramme de corps

$$\begin{array}{ccccccc} K_0 & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & L_0 & \longrightarrow & E \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ k \rightarrow N \rightarrow M & \longrightarrow & L & & & & \\ \uparrow & & \uparrow & & & & \\ k_0 \rightarrow k'_0 \rightarrow N' & & & & & & \end{array}$$

Nous nous proposons d'évaluer la différence δ du premier et du second membre de (21.9.6.2).

Il résulte de (21.7.3) que l'on a

$$\text{rg}_E \Omega_{E/M}^1 - \text{rg}_{M_0} \Omega_{M/M_0}^1 = \deg. \text{tr}_{M_0} E + d(E/M_0, M)$$

et comme L_0 est une extension finie de M_0 , on a $\deg. \text{tr}_{L_0} E = \deg. \text{tr}_{M_0} E$. D'autre part, une p -base de K_0 sur $k = k(K_0^p)$ est aussi une p -base de M_0 sur M , donc (21.4.5), on a

$$\text{rg}_{M_0} \Omega_{M_0/M}^1 = \text{rg}_{K_0} \Omega_{K_0/k}^1$$

si bien que l'on a

$$(21.9.6.3) \quad \delta = d(E/M_0, M) - d(E/K_0, k_0) - r.$$

Notons maintenant le lemme classique :

Lemme (21.9.6.4). — Pour tout corps k , le corps de séries formelles $K = k((T_1, \dots, T_r))$ est une extension séparable de k .

Rappelons rapidement la démonstration de ce lemme pour être complet. Il suffit (Bourbaki, Alg., chap. VIII, § 7, n° 3, démonstration du th. 1) de prouver que pour toute extension finie k' de k , $K \otimes_k k'$ est sans élément nilpotent; mais si l'on pose $A = k[[T_1, \dots, T_r]]$ et $S = A - \{0\}$, $K \otimes_k k'$ est égal à $S^{-1}(A \otimes_k k')$, et $A \otimes_k k'$ s'identifie canoniquement à l'anneau intègre $A' = k'[[T_1, \dots, T_r]]$ et A à un sous-anneau de A' , d'où la conclusion.

Utilisant ce lemme et (21.6.2, (ii)), on a $d(L_0/K_0, k_0) = 0$, et la formule (21.6.4.4) donne donc

$$d(E/K_0, k_0) = d(E/L_0, k_0).$$

Les formules (21.6.4.4) et (21.6.4.2) donnent d'autre part

$$\begin{aligned} d(E/M_0, M) &= d(E/L_0, M) + d(L_0/M_0, M), \\ d(L_0/M_0, M) &= d(L_0/M_0, M/N) + d(L_0/M_0, N) \end{aligned}$$

d'où

$$\delta = d(E/L_0, M) + d(L_0/M_0, N) - d(E/L_0, k_0) + d(L_0/M_0, M/N) - r.$$

Nous allons montrer que l'on a la relation

$$(21.9.6.5) \quad d(L_0/M_0, M/N) = r.$$

Pour cela, remarquons que, par définition, on a

$$d(L_0/M_0, M/N) = \text{rg}_{L_0} Y_{L_0/M/N} - \text{rg}_{M_0} Y_{M_0/M/N}.$$

Compte tenu des deux suites exactes

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow Y_{L_0/M/N} \rightarrow \Omega^1_{M/N} \otimes_M L_0 \rightarrow \Omega^1_{L_0/N} \rightarrow \Omega^1_{L_0/M} \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow Y_{M_0/M/N} \rightarrow \Omega^1_{M/N} \otimes_M M_0 \rightarrow \Omega^1_{M_0/N} \rightarrow \Omega^1_{M_0/M} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

il vient

$$d(L_0/M_0, M/N) = \text{rg}_{L_0} \Omega^1_{L_0/M} - \text{rg}_{L_0} \Omega^1_{L_0/N} - \text{rg}_{M_0} \Omega^1_{M_0/M} + \text{rg}_{M_0} \Omega^1_{M_0/N}.$$

Or, on a $N(L_0^p) \supset M$, donc $\Omega^1_{L_0/N} = \Omega^1_{L_0/M}$ (21.1.5, (ii)). D'autre part, les T_i^p ($1 \leq i \leq r$) forment une p -base de M sur N , et une p -base de K_0 sur k est aussi une p -base de M_0 sur M , donc, comme $M_0^p \subset N$,

$$\text{rg}_{M_0} \Omega^1_{M_0/N} = r + \text{rg}_{K_0} \Omega^1_{K_0/k} = r + \text{rg}_{M_0} \Omega^1_{M_0/M}$$

en vertu de (21.4.5) et (21.1.10), ce qui prouve (21.9.6.5).

On a encore, par (21.6.4.2),

$$d(E/L_0, M) - d(E/L_0, k_0) = d(E/L_0, M/k_0)$$

et

$$d(L_0/M_0, N) = d(L_0/M_0, N/k) + d(L_0/M_0, k).$$

Mais comme L_0 est séparable sur K_0 (21.9.6.4), on a $d(L_0/K_0, k) = 0$, et par suite aussi $d(L_0/M_0, k) = 0$ ((21.6.2) et (21.6.4)). Il vient donc

$$\delta = d(E/L_0, M/k_0) + d(L_0/M_0, N/k).$$

Appliquons encore deux fois (21.6.4.2) au premier terme du second membre de cette formule; on obtient

$$d(E/L_0, M/k_0) = d(E/L_0, M/N) + d(E/L_0, N/k) + d(E/L_0, k/k_0).$$

Comme $M \subset N(L_0^p)$, on a $d(E/L_0, M/N) = 0$ (21.6.2), donc (par (21.6.4.4))

$$\delta = d(E/L_0, k/k_0) + d(E/M_0, N/k).$$

Mais M_0 et L_0 sont des extensions séparables de K_0 (21.9.6.4), donc $d(L_0/K_0, k/k_0) = d(M_0/K_0, k/k_0) = 0$ (21.6.2), et appliquant encore deux fois (21.6.4.4),

on a $d(E/L_0, k/k_0) = d(E/K_0, k/k_0) = d(E/M_0, k/k_0)$, d'où, par une dernière application de (21.6.4.2),

$$\delta = d(E/M_0, N/k_0) \geq 0$$

ce qui prouve (21.9.6.1). En outre, lorsque k est remplacé par une sous-extension k' de k_0 , N est remplacé par une sous-extension N' , donc $d(E/M_0, N'/k_0) \leq d(E/M_0, N/k_0)$ (21.6.4.2), ce qui démontre la dernière assertion de (i).

(ii) Pour tout α , posons $N_\alpha = k_\alpha((T_1^{p^s}, \dots, T_r^{p^s}))$. En vertu de (21.9.6.1) et de (21.8.3), il s'agit de montrer (compte tenu de ce que $K_0^p \subset k_\alpha$ et de ce que E est une extension de type fini de M_0) que l'on a

$$\bigcap_{\alpha} N_\alpha = k_0(M_0^p).$$

Or, on a

$$(21.9.6.6) \quad \bigcap_{\alpha} N_\alpha = N' = (k_0(K_0^p))((T_1^{p^s}, \dots, T_r^{p^s}))$$

en vertu de (21.8.8.3) et de la relation $\bigcap_{\alpha} k_\alpha = k_0(K_0^p)$ (21.8.6). D'autre part, on a $k_0(M_0^p) = k_0(K_0^p((T_1^{p^s}, \dots, T_r^{p^s})))$. Pour achever la démonstration de (21.9.6, (ii)), il reste donc à prouver le

Lemme (21.9.6.7). — Soient k_0 un corps de caractéristique $p > 0$ tel que $[k_0 : k_0^p] < +\infty$, K_0 une extension de k_0 . Alors on a

$$(21.9.6.8) \quad (k_0(K_0^p))((T_1, \dots, T_r)) = k_0(K_0^p((T_1, \dots, T_r))).$$

Comme $k_0^p \subset K_0^p$, on a $k_0^p(K_0^p((T_1, \dots, T_r))) = K_0^p((T_1, \dots, T_r))$. Si $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de k_0 sur k_0^p , il est immédiat que (c_i) est aussi un système de générateurs de chacun des deux membres de (21.9.6.8) sur $K_0^p((T_1, \dots, T_r))$.

Remarque (21.9.7). — L'assertion de (21.9.6, (ii)) ne s'étend pas au cas où $[k_0 : k_0^p]$ est infini. Prenons en effet pour k_0 le corps $\mathbf{F}_p(X_n)_{n \geq 0}$ des fractions rationnelles à une infinité d'indéterminées, de sorte que les X_n^p forment une p -base de k_0 sur \mathbf{F}_p , et par suite $[k_0 : k_0^p] = +\infty$. Dans l'énoncé de (21.9.6), prenons $K_0 = k_0$ (donc nécessairement $k = k_0$), $L_0 = k_0((T))$, pour E l'extension $L_0(y)$, où y est racine du polynôme $Y^p - \sum_{n=0}^{\infty} X_n T^{np}$ de $L_0[Y]$. Alors la différence δ des deux membres de (21.9.6.2) est non nulle. En effet, E est séparable sur k_0 , sans quoi y^p serait élément de $k_0(L_0^p)$, et l'on voit aussitôt que cela n'est pas possible (dû au fait qu'il y a une infinité de X_n algébriquement indépendants); on a donc $d(E/K_0, k_0) = 0$, la formule (21.9.6.3) se réduit à $\delta = d(E/M_0, M_0) - 1$, et il est clair que $d(E/M_0, M_0) = \text{rg}_{E/M_0} Y_{E/M_0}$. Tout revient à vérifier que ce rang est 2. Or on a $E^p \subset M_0$, une p -base de E sur L_0 est formée du seul élément y , et L_0 a évidemment une p -base sur M_0 formée du seul élément T ; donc, puisque E est extension algébrique de M_0 , notre assertion résulte de (21.7.1) et (21.4.5).

Proposition (21.9.8). — Soient k_0 un corps (de caractéristique quelconque), K_0 une extension séparable de k_0 , A un anneau local noethérien complet, qui est une k_0 -algèbre et dont le corps résiduel

est une extension finie de K_0 . Pour tout idéal premier \mathfrak{p} de A , soit $k(\mathfrak{p})$ le corps résiduel de A en \mathfrak{p} . Alors, pour tout corps k tel que $k_0 \subset k \subset K_0$ et tel que $[K_0 : k] < +\infty$, on a

$$(21.9.8.1) \quad \mathrm{rg}_{k(\mathfrak{p})}(\hat{\Omega}_{(A/\mathfrak{p})/k}^1 \otimes_{A/\mathfrak{p}} k(\mathfrak{p})) = \mathrm{rg}_{K_0} \Omega_{K_0/k}^1 \geq \dim(A/\mathfrak{p}) + \mathrm{rg}_{k(\mathfrak{p})} Y_{k(\mathfrak{p})/k_0}.$$

Supposons en outre que $[k_0 : k_0^p] < +\infty$ (où p est l'exposant caractéristique de k_0). Alors on peut trouver un corps k tel que $k_0(K_0^p) \subset k \subset K_0$ et $[K_0 : k] < +\infty$, pour lequel les deux membres de (21.9.8.1) sont égaux.

Comme A/\mathfrak{p} a même corps résiduel K que A et est complet, on peut se borner au cas où A est *intègre* et $\mathfrak{p} = 0$; on posera alors $E = k(\mathfrak{p})$, corps des fractions de A . Comme K_0 est formellement lisse sur k_0 (19.6.1), il existe un k_0 -monomorphisme $K_0 \rightarrow A$ faisant de A une K_0 -algèbre; on sait en outre qu'il existe une sous- K_0 -algèbre A_0 de A , K_0 -isomorphe à une algèbre de séries formelles $K_0[[T_1, \dots, T_r]]$ et telle que A soit une A_0 -algèbre *finie* (19.8.9), ce qui entraîne que E est une extension *finie* du corps des fractions $L_0 = K_0((T_1, \dots, T_r))$ de A_0 . On a alors $Y_{K_0/k_0} = 0$ puisque K_0 est séparable sur k_0 , et $\deg. \mathrm{tr}_{L_0} E = 0$; en outre, comme A est une A_0 -algèbre finie on a $\dim(A) = \dim(A_0)$ (16.1.5).

Si $p = 1$, on a $\mathrm{rg}_E(\hat{\Omega}_{A/k}^1 \otimes_A E) = r$ par (21.9.5) et (17.1.4, (iii)), et $\Omega_{K_0/k}^1 = 0$ puisque K_0 est extension finie séparable de k (21.7.4); d'autre part $Y_{E/k_0} = 0$, E étant extension séparable de k_0 ; les deux membres de (21.9.8.1) sont donc égaux dans ce cas.

Supposons maintenant que $p > 1$; si $B = k[[T_1, \dots, T_r]]$, A est une B -algèbre finie, donc, en posant $B_1 = k[[T_1^p, \dots, T_r^p]]$, $\hat{\Omega}_{A/k}^1$ s'identifie à Ω_{A/B_1}^1 (21.9.4), et en désignant par M le corps des fractions $k((T_1^p, \dots, T_r^p))$, il résulte de (20.5.9) que $\hat{\Omega}_{A/k}^1 \otimes_A E$ s'identifie à $\Omega_{E/M}^1$; l'inégalité (21.9.8.1) n'est autre alors que (21.9.6.2), et la dernière assertion du corollaire résulte de (21.9.6, (ii)).

§ 22. CRITÈRES DIFFÉRENTIELS DE LISSITÉ FORMELLE ET DE RÉGULARITÉ

Les principaux résultats de ce paragraphe sont :

a) Les critères (22.2.2) et (22.5.8), qui donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un anneau local noethérien complet A contenant un corps k soit formellement lisse sur k ; le critère (22.5.8) s'énonce sans faire intervenir de notions différentielles, et complète (19.6.6); l'énoncé (22.2.2), de nature un peu plus technique, permet de donner une *classification*, pour k fixé, des anneaux locaux A considérés (22.2.5) : ils sont donnés par leur dimension n et leur corps résiduel K , sous la seule condition $n \geq \mathrm{rg}_K Y_{K/k}$.

b) Le théorème (22.3.3), et le corollaire (22.7.6) du critère jacobien de Nagata (22.7.3), qui donnent des conditions permettant d'affirmer qu'un anneau *localisé* d'un anneau local noethérien complet A contenant un corps k est géométriquement régulier sur k ; ils joueront un rôle important dans l'étude des propriétés « fines » des

anneaux locaux faite au chap. IV, § 7. On ne possède pour le moment aucune démonstration de (22.7.6) indépendante du critère jacobien de Nagata.

c) Le critère jacobien de Zariski (22.6.7) et ses variantes, qui sont des conséquences faciles de (20.7.8).

22.1. Relèvement de la lissité formelle.

Théorème (22.1.1). — Soient $s : \Lambda \rightarrow A$, $u : A \rightarrow B$ deux homomorphismes d'anneaux, \mathfrak{J} un idéal de B , C l'anneau quotient B/\mathfrak{J} . On suppose que C est une Λ -algèbre formellement lisse pour la topologie discrète.

(i) Supposons vérifiées les conditions suivantes :

- α) $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est un C -module projectif.
- β) L'homomorphisme canonique $S_C(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) \rightarrow \text{gr}_\mathfrak{J}(B)$ (19.5.2) est bijectif.
- γ) L'homomorphisme caractéristique $\chi : \Gamma_{C/\Lambda} \rightarrow \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ (20.6.20) est injectif.
- δ) Le C -module $\Omega_{B/\Lambda}^1 \otimes_B C$ est projectif.

Alors B , muni de la topologie \mathfrak{J} -préadique, est une A -algèbre formellement lisse.

(ii) Inversement, supposons que B soit une A -algèbre formellement lisse pour la topologie \mathfrak{J} -préadique, et que A soit une Λ -algèbre formellement lisse pour la topologie discrète. Alors les conditions α), β), γ), δ) de (i) sont vérifiées.

En vertu de la suite exacte (20.6.22.1) (qui est applicable, puisque B/\mathfrak{J}^2 est une extension Λ -triviale de C par $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$, C étant supposée être une Λ -algèbre formellement lisse (19.4.4)), la condition γ) équivaut à $\Gamma_{B/\Lambda/\Lambda}^C = 0$, ou encore à la suivante :

γ') L'homomorphisme $u_{B/\Lambda/\Lambda} \otimes_{\Lambda} I_C : \Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A C \rightarrow \Omega_{B/\Lambda}^1 \otimes_B C$ est injectif.

(i) Les conditions α) et β) entraînent que B est une Λ -algèbre formellement lisse pour la topologie \mathfrak{J} -préadique (19.5.4). Il revient donc au même de dire que B est (pour la topologie \mathfrak{J} -préadique) une A -algèbre formellement lisse, ou une A -algèbre formellement lisse relativement à Λ . Pour voir que B est une A -algèbre formellement lisse, il suffit donc, en vertu de (20.7.2), de prouver que l'homomorphisme continu de B -modules topologiques $u_{B/\Lambda/\Lambda} : \Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A B \rightarrow \Omega_{B/\Lambda}^1$ est formellement inversible à gauche. Or, puisque B est une Λ -algèbre formellement lisse, le B -module topologique $\Omega_{B/\Lambda}^1$ est formellement projectif (20.4.9) et sa topologie est déduite de celle de B (20.4.5). En vertu de (19.1.9), il suffit donc, pour que $u_{B/\Lambda/\Lambda}$ soit formellement inversible à gauche, que $u_{B/\Lambda/\Lambda} \otimes_{\Lambda} I_C$ soit inversible à gauche. Mais en vertu de γ'), cette dernière application est injective, donc on a la suite exacte (20.6.14.7)

$$0 \rightarrow \Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A C \rightarrow \Omega_{B/\Lambda}^1 \otimes_B C \rightarrow \Omega_{B/\Lambda}^1 \otimes_B C \rightarrow 0.$$

Enfin, en vertu de δ), le C -module $\Omega_{B/\Lambda}^1 \otimes_B C$ est projectif, donc la suite exacte précédente est scindée, ce qui achève de prouver (i).

(ii) Si B est une A -algèbre formellement lisse pour la topologie \mathfrak{J} -préadique, et A une Λ -algèbre formellement lisse pour la topologie discrète, B est une Λ -algèbre formellement lisse pour la topologie \mathfrak{J} -préadique (19.3.5, (ii)); les conditions α) et β) résultent donc de (19.5.6). En outre, (20.7.2) montre que $u_{B/\Lambda/\Lambda}$ est formellement

inversible à gauche, donc $u_{B/A/\Lambda} \otimes_{\Lambda} I_C$ est inversible à gauche (19.1.7), et *a fortiori* injectif. Enfin, $\Omega_{B/A}^1$ est un B -module formellement projectif (20.4.9), et par suite $\Omega_{B/A}^1 \otimes_B C$ est un C -module projectif (19.2.4).

Corollaire (22.1.2). — Soient $s : \Lambda \rightarrow A$, $u : A \rightarrow B$ deux homomorphismes d'anneaux, m un idéal maximal de B , $K = B/m$ le corps quotient. On suppose que les Λ -algèbres A et K soient formellement lisses pour la topologie discrète. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) B est une A -algèbre formellement lisse pour la topologie m -préadique.
- b) L'homomorphisme canonique

$$(22.1.2.1) \quad S_K^*(m/m^2) \rightarrow \text{gr}_m^*(B)$$

est bijectif, et l'homomorphisme caractéristique

$$(22.1.2.2) \quad \chi : Y_{K/A/\Lambda} \rightarrow m/m^2$$

est injectif.

Cela résulte aussitôt de (22.1.1), les conditions a) et d) étant ici trivialement vérifiées, puisque K est un corps.

Remarque (22.1.3). — Supposons vérifiées les hypothèses de (22.1.2) et en outre supposons que m/m^2 soit un K -espace vectoriel de rang fini. Alors, pour que B soit une A -algèbre formellement lisse pour la topologie m -préadique, il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

(22.1.3.1) Étant donné une algèbre de polynômes $E = K[T_1, \dots, T_n]$, l'idéal maximal n de E engendré par les T_i ($1 \leq i \leq n$), et un idéal $b \supset n^k$ dans E , tout A -homomorphisme $v : B \rightarrow E/b$, qui, par passage aux quotients, donne l'identité $K \rightarrow K$, se factorise en $B \xrightarrow{w} E/n^k \rightarrow E/b$, où w est un A -homomorphisme.

(22.1.3.2) Si F est l'extension triviale $D_K(K)$ (« algèbre des nombres duals sur K »), $\varphi : A \rightarrow F$ un homomorphisme d'anneaux tel que le composé $A \xrightarrow{\varphi} F \rightarrow K$ soit l'homomorphisme canonique, alors tout A -homomorphisme $v : B \rightarrow K$ qui, par passage aux quotients, donne l'identité $K \rightarrow K$, se factorise en $B \xrightarrow{w} F \rightarrow K$, où w est un A -homomorphisme (pour la structure de A -algèbre sur F définie par φ).

En effet, on a vu (19.5.5) que la condition (22.1.3.1) entraîne que l'homomorphisme canonique (22.1.2.1) est bijectif. En vertu de (22.1.2), il suffit ensuite de voir que l'homomorphisme canonique $u_{B/A/\Lambda} \otimes_{\Lambda} I_K : \Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A K \rightarrow \Omega_{B/\Lambda}^1 \otimes_B K$ est injectif, ou encore (puisque il s'agit d'espaces vectoriels sur K) que pour tout K -espace vectoriel L , l'homomorphisme canonique $\text{Dér}_A(B, L) \rightarrow \text{Dér}_A(\Lambda, L)$ est surjectif (en vertu de (20.4.8)); il est clair que pour cela, il faut et il suffit que l'homomorphisme canonique $\text{Dér}_A(B, K) \rightarrow \text{Dér}_A(\Lambda, K)$ soit surjectif, d'où notre assertion, en vertu de (20.1.5).

On notera que les deux conditions (22.1.3.1) et (22.1.3.2) sont entraînées par la suivante :

(22.1.3.3) Pour toute A -algèbre locale artinienne E de corps résiduel égal à K , et tout idéal nilpotent r de E , tout A -homomorphisme $B \rightarrow E/r$ qui, par passage aux quotients, donne l'identité $K \rightarrow K$, se factorise en $B \xrightarrow{u} E \rightarrow E/r$, où u est un A -homomorphisme.

Ce résultat se généralise comme suit :

Proposition (22.1.4). — Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens, k (resp. K) le corps résiduel de A (resp. B). Pour que B soit une A -algèbre formellement lisse (pour les topologies préadiques), il faut et il suffit que pour tout anneau local artinien C , de corps résiduel égal à K , tout homomorphisme local $A \rightarrow C$ (faisant de C une A -algèbre topologique), et tout idéal nilpotent \mathfrak{J} de C , tout A -homomorphisme local $B \rightarrow C/\mathfrak{J}$ tel que l'homomorphisme $K \rightarrow K$ obtenu par passage aux quotients soit l'identité, se factorise en $B \xrightarrow{f} C \rightarrow C/\mathfrak{J}$, où f est un A -homomorphisme local.

La condition étant nécessaire par définition (19.3.1), montrons qu'elle est suffisante. Comme les \hat{A} -homomorphismes locaux de \hat{B} dans une \hat{A} -algèbre locale discrète proviennent par extension des A -homomorphismes locaux de B dans cette algèbre, on peut se borner au cas où A et B sont complets, en vertu de (19.3.6). Lorsque A est un corps k , la proposition résulte de (22.1.3.3), où l'on prend pour Λ le sous-corps premier de k , et de (19.6.1). Dans le cas général, posons $B_0 = B \otimes_A k = B/mB$ (m idéal maximal de A), qui est complet. Si C_0 est une k -algèbre locale artinienne de corps résiduel égal à K , \mathfrak{J}_0 un idéal nilpotent de C_0 , tout k -homomorphisme local $g_0 : B_0 \rightarrow C_0/\mathfrak{J}_0$ donnant l'identité sur K par passage aux quotients, donne par composition un A -homomorphisme local

$$g : B \xrightarrow{\quad f \quad} B_0 \xrightarrow{g_0} C_0/\mathfrak{J}_0$$

qui par hypothèse se factorise donc en $B \xrightarrow{f} C_0 \rightarrow C_0/\mathfrak{J}_0$, où f est un A -homomorphisme local; mais comme C_0 est une k -algèbre, f se factorise en $B \xrightarrow{f_0} B_0 \xrightarrow{g_0} C_0$, où f_0 est un k -homomorphisme local. On voit donc que les hypothèses de l'énoncé sont encore remplies lorsqu'on y substitue B_0 et k à B et A respectivement; donc B_0 est une k -algèbre formellement lisse d'après ce que l'on vient de voir. Appliquant (19.7.2) et (19.7.1), on voit qu'il existe un anneau local noethérien complet B' , un homomorphisme local $A \rightarrow B'$ faisant de B' un A -module plat et une A -algèbre formellement lisse, et un k -isomorphisme $u'_0 : B'_0 = B' \otimes_A k \xrightarrow{\sim} B_0$. Soit v'_0 l'isomorphisme réciproque de u'_0 ; nous nous proposons de montrer qu'il existe un A -homomorphisme local $v : B \rightarrow B'$ tel que v'_0 provienne de v par passage aux quotients. Pour cela, désignons par n et n' les idéaux maximaux respectifs de B et B' , et, pour tout j , soit $w_j : B/(n^{j+1} + mB) \rightarrow B'/(n'^{j+1} + mB')$ l'homomorphisme déduit de v'_0 par passage aux quotients; il suffira de former pour tout j un A -homomorphisme local $v_j : B/n^{j+1} \rightarrow B'/n'^{j+1}$ tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} B/n^{j+1} & \xrightarrow{v_j} & B'/n'^{j+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B/n^j & \xrightarrow{w_{j-1}} & B'/n'^j \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} B/n^{j+1} & \xrightarrow{v_j} & B'/n'^{j+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B/(n^{j+1} + mB) & \xrightarrow{w_j} & B'/(n'^{j+1} + mB') \end{array}$$

soient commutatifs; B et B' étant complets, l'homomorphisme $v = \lim_{\leftarrow} v_j$ répondra à la question. Or, la formation par récurrence de v_j résulte de l'hypothèse sur B et du

même raisonnement que dans (19.3.10.1), en utilisant le lemme (19.3.10.2) et le fait que $n'^j + (n'^{j+1} + mB') = n'^j + mB'$. Il résulte alors de (19.7.1.4) que v est un *A-isomorphisme*, car B' est un A -module plat, et B est complet pour la topologie m -préadique, les idéaux $m^j B$ étant fermés dans B pour la topologie n -adique (0₁, 7.3.5). C.Q.F.D.

22.2. Caractérisation différentielle des algèbres locales formellement lisses sur un corps.

(22.2.1) Soient k un corps, P son sous-corps premier, A une k -algèbre qui est un anneau *local*, m son idéal maximal, $K = A/m$ son corps résiduel. Comme K est séparable sur P , K est une P -algèbre formellement lisse pour la topologie discrète (19.6.1), et par suite la P -extension A/m^2 de K par m/m^2 est *P-triviale*, et l'homomorphisme caractéristique

$$(22.2.1.1) \quad \chi_{A/k} : Y_{K/k} \rightarrow m/m^2$$

est donc défini (20.6.23).

Théorème (22.2.2). — *Sous les conditions de (22.2.1), pour que A soit une k -algèbre formellement lisse pour la topologie m -préadique, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :*

- (i) *L'homomorphisme canonique $S_K(m/m^2) \rightarrow \text{gr}_m^*(A)$ est bijectif.*
- (ii) *L'homomorphisme caractéristique $\chi_{A/k} : Y_{K/k} \rightarrow m/m^2$ est injectif.*

C'est un cas particulier de (22.1.2), où l'on remplace Λ par P , A par k et B par A ; K et k , étant séparables sur P , sont en effet des P -algèbres formellement lisses (19.6.1).

Remarque (22.2.3). — La condition (ii) de (22.2.2) peut être remplacée par une quelconque des suivantes :

- a) L'homomorphisme canonique $\Omega_k^1 \otimes_k K \rightarrow \Omega_A^1 \otimes_A K$ est injectif.
- b) Pour tout n , l'homomorphisme canonique $\Omega_k^1 \otimes_k (A/m^{n+1}) \rightarrow \Omega_A^1 \otimes_A (A/m^{n+1})$ est inversible à gauche.
- c) L'homomorphisme canonique $\Omega_k^1 \hat{\otimes}_k A \rightarrow \hat{\Omega}_A^1$ est inversible à gauche.
- d) A est une k -algèbre formellement lisse (pour la topologie m -préadique) *relativement au corps premier*.

En effet, on a déjà remarqué dans (22.1.1) que l'injectivité de $\chi_{A/k}$ est équivalente à a), et que la conjonction de a) et de la condition (i) de (22.2.2) équivaut à celle de d) et de (i). Enfin, on a aussi vu dans (22.1.1) que b) et d) sont équivalentes, et l'équivalence de b) et c) résulte de (19.1.8).

(22.2.4) La principale application de (22.2.2) a trait aux k -algèbres locales *noethériennes* et *complètes* (cas où m/m^2 est un K -espace vectoriel de rang *fini*). De façon précise, soient k un corps, K une extension de k , V un K -espace vectoriel de

rang fini; nous considérons les triplets (A, α, β) , où A est une k -algèbre locale noethérienne complète formellement lisse d'idéal maximal \mathfrak{m} , $\alpha : A/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} K$ un isomorphisme de k -algèbres, $\beta : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\sim} V$ un di-isomorphisme d'espaces vectoriels (pour l'isomorphisme α). Étant donnés deux tels triplets (A, α, β) , (A', α', β') , une équivalence du premier sur le second est un k -isomorphisme $u : A \xrightarrow{\sim} A'$ tel que (si \mathfrak{m}' est l'idéal maximal de A'), les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} A/\mathfrak{m} & \xrightarrow{\text{gr}^0(u)} & A'/\mathfrak{m}' \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha' \\ K & \xrightarrow[1_K]{} & K \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 & \xrightarrow{\text{gr}^1(u)} & \mathfrak{m}'/\mathfrak{m}'^2 \\ \downarrow \beta & & \downarrow \beta' \\ V & \xrightarrow[1_V]{} & V \end{array}$$

sont commutatifs. Il est immédiat que les classes d'équivalence des triplets (A, α, β) forment un ensemble que nous noterons $FL(K/k, V)$. Remarquons maintenant qu'à tout triplet (A, α, β) est associé le K -homomorphisme composé d'espaces vectoriels $\Upsilon_{K/k} \xrightarrow{\chi_{A/k}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\beta} V$ (où $\chi_{A/k}$ est considéré comme un di-homomorphisme relatif à α^{-1}); la définition précédente prouve (par (20.6.22.2)) que ce K -homomorphisme ne dépend que de la classe d'équivalence de (A, α, β) dans $FL(K/k, V)$; autrement dit on a défini une application canonique

$$(22.2.4.1) \quad FL(K/k, V) \rightarrow \text{Hom}_K(\Upsilon_{K/k}, V).$$

Proposition (22.2.5). — Soient k un corps, K une extension de k , V un K -espace vectoriel de rang fini. L'application canonique (22.2.4.1) est une bijection de $FL(K/k, V)$ sur l'ensemble des K -homomorphismes injectifs de $\Upsilon_{K/k}$ dans V .

(i) Pour montrer que (22.2.4.1) est injective, il faut prouver ce qui suit : soient A, A' deux k -algèbres locales noethériennes complètes formellement lisses, $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ leurs idéaux maximaux respectifs, $\alpha : A/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} K$, $\alpha' : A'/\mathfrak{m}' \xrightarrow{\sim} K$ deux k -isomorphismes; supposons donnés deux k -isomorphismes $v^0 : A/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} A'/\mathfrak{m}'$, $v^1 : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}'/\mathfrak{m}'^2$ tels que les diagrammes

$$(22.2.5.1) \quad \begin{array}{ccc} A/\mathfrak{m} & \xrightarrow{v^0} & A'/\mathfrak{m}' \\ \searrow \alpha & & \downarrow \alpha' \\ K & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 & \xrightarrow{v^1} & \mathfrak{m}'/\mathfrak{m}'^2 \\ \nearrow \chi_A & & \swarrow \chi_{A'} \\ \Upsilon_{K/k} & & \end{array}$$

soient commutatifs. Il s'agit de prouver qu'il existe un k -isomorphisme $u : A \xrightarrow{\sim} A'$ tel que $\text{gr}^0(u) = v^0$ et $\text{gr}^1(u) = v^1$. Remarquons en premier lieu que puisque K est un corps, l'homomorphisme canonique (20.6.7.1) est bijectif (20.6.11), donc il existe déjà un k -isomorphisme $v : A/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\sim} A'/\mathfrak{m}'^2$ tel que $\text{gr}^0(v) = v^0$ et $\text{gr}^1(v) = v^1$. Notons maintenant que puisque A' est métrisable et complète, et A une k -algèbre formellement lisse, l'homomorphisme composé $A \rightarrow A/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{v} A'/\mathfrak{m}'^2$ se factorise en $A \xrightarrow{u} A' \rightarrow A'/\mathfrak{m}'^2$, où u est

un k -homomorphisme (19.3.11), et l'on a donc déjà $\text{gr}^0(u) = v^0$ et $\text{gr}^1(u) = v^1$. Or, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}_K^*(m/m^2) & \longrightarrow & \text{gr}_m^*(A) \\ w \downarrow & & \downarrow \text{gr}(u) \\ \mathbf{S}_K^*(m'/m'^2) & \rightarrow & \text{gr}_{m'}^*(A') \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les homomorphismes canoniques, et w provient de v^0 et v^1 ; comme v^0 et v^1 sont bijectifs, il en est de même de w , et puisque A et A' sont des k -algèbres formellement lisses, on déduit de (22.2.2, (i)) que $\text{gr}(u)$ est *bijectif*; mais comme A et A' sont séparés et complets, cela entraîne que u lui-même est *bijectif* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, no 8, cor. 3 du th. 1).

(ii) Reste à montrer que l'image de (22.2.4.1) est l'ensemble des homomorphismes *injectifs* de $\Upsilon_{K/k}$ dans V ; on sait déjà par (22.2.2, (ii)) qu'elle est contenue dans cet ensemble; il suffira alors de prouver le

Lemme (22.2.5.2). — Pour tout K -homomorphisme $h : \Upsilon_{K/k} \rightarrow V$, il existe une k -algèbre A qui est un anneau local noethérien régulier et complet, d'idéal maximal m , de corps résiduel K , et un K -isomorphisme $\beta : m/m^2 \xrightarrow{\sim} V$ tels que $h = \beta \circ \chi_{A/k}$.

En effet, si ce lemme est prouvé, le fait que A est régulier entraîne que la condition (i) de (22.2.2) est satisfaite (17.1.1); si en outre h est injectif, (22.2.2) montrera que A est une k -algèbre formellement lisse dont la classe aura h pour image (par contre si h n'est pas injectif, la k -algèbre A dont (22.2.5.2) prouve l'existence n'est pas formellement lisse).

Pour prouver (22.2.5.2), soient B la K -algèbre $\mathbf{S}_K^*(V)$, n l'idéal d'augmentation de B et $A = \hat{B}$ la K -algèbre complétée de B pour la topologie n -préadique (de sorte que A est isomorphe à l'algèbre de séries formelles $K[[T_1, \dots, T_n]]$ si $n = \text{rg}_K V$). En vertu de (20.6.11) il existe sur A/m^2 (où $m = nA$) une structure de k -extension de K par V (*distinguishante* en général de la structure k -triviale définie par l'injection canonique $k \rightarrow K \rightarrow A$) telle que h soit l'homomorphisme caractéristique de cette extension. Si $f : k \rightarrow A/m^2$ est l'homomorphisme structural, le fait que k soit séparable sur le corps premier permet (19.6.1) de factoriser f en $k \xrightarrow{g} A \rightarrow A/m^2$, et la k -algèbre A ainsi définie répond à la question (20.6.22.2).

Théorème (22.2.6). — Soient k un corps, K une extension de k . Pour qu'il existe une k -algèbre locale noethérienne A , d'idéal maximal m , telle que $A/m = K$ et que A soit formellement lisse (pour sa topologie m -préadique), il faut et il suffit que $\Upsilon_{K/k}$ soit un K -espace vectoriel de rang fini. La k -algèbre A est alors déterminée (à un k -isomorphisme près donnant par passage aux quotients l'identité $K \rightarrow K$) par sa dimension, qui est soumise à la seule condition d'être $\geq \text{rg}_K \Upsilon_{K/k}$.

Comme m/m^2 est de rang fini sur K , la nécessité de la condition résulte de (22.2.2, (ii)); inversement, (22.2.5) montre que la condition est suffisante et que l'on peut prendre pour m/m^2 un K -espace vectoriel de rang quelconque $\geq \text{rg}_K(\Upsilon_{K/k})$.

En particulier, l'homomorphisme identique de $\Upsilon_{K/k}$ associe *canoniquement* à K une k -algèbre noethérienne complète, formellement lisse, pour laquelle $\Upsilon_{K/k}$ est isomorphe à m/m^2 .

Remarques (22.2.7). — (i) Soit Λ un anneau local noethérien, de corps résiduel k ; il résulte de (19.7.1) et (19.7.2) que la détermination des Λ -algèbres A qui sont des anneaux locaux noethériens complets et qui sont formellement lisses est *équivalente* au même problème où Λ est remplacé par k , et est donc en principe entièrement résolue par (22.2.5), qui ramène la question à la structure des *corps résiduels* des k -algèbres cherchées, en tant qu'extensions de k .

(ii) Le fait que $\Upsilon_{K/k}$ soit de rang fini sur K *n'entraîne pas* que K soit « de multiplicité radicielle finie » sur k (cf. (19.6.6)). Par exemple, soient k_0 un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $k = k_0(T)$ le corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur k et $K = k^{p^{-\infty}}$ la plus petite extension parfaite de k . On a alors $\Omega_K^1 = \Omega_{K/k}^1 = 0$ (21.4.4), donc par définition (20.6.1.1) $\Upsilon_{K/k} = \Omega_k^1 \otimes_k K$, et comme $k^p = k_0(T^p)$, T est une p -base de k sur k^p , donc (21.4.5), Ω_k^1 est de rang 1 sur k , et par suite $\Upsilon_{K/k}$ de rang 1 sur K . Mais pour tout n le corps résiduel de l'anneau local $K \otimes_k k^{p^{-n}}$ est isomorphe à K donc n'est pas séparable sur $k^{p^{-n}}$.

Le théorème (22.2.2) se généralise comme suit :

Proposition (22.2.8). — *Sous les conditions de (22.2.1), supposons que la caractéristique p de k soit > 0 ; soit (k_α) une famille filtrante décroissante de sous-corps de k , telle que $\bigcap_\alpha k_\alpha(k^p) = k^p$.*

Alors la condition (ii) de (22.2.2) peut se remplacer par l'une quelconque des suivantes :

a) *Il existe α_0 tel que l'homomorphisme canonique*

$$\Omega_{k/k_\alpha}^1 \otimes_k K \rightarrow \Omega_{A/k_\alpha}^1 \otimes_A K$$

soit injectif pour tout $\alpha \geq \alpha_0$.

b) *Il existe α_0 tel que A soit une k -algèbre formellement lisse (pour la topologie m -préadique) relativement à k_α , pour tout $\alpha \geq \alpha_0$.*

c) *Pour tout α et tout entier $n \geq 0$, l'homomorphisme canonique*

$$\Omega_{k/k_\alpha}^1 \otimes_k (A/m^{n+1}) \rightarrow \Omega_{A/k_\alpha}^1 \otimes_A (A/m^{n+1})$$

est inversible à gauche.

En effet, si A est une k -algèbre formellement lisse, elle l'est *a fortiori* relativement à tout sous-corps de k , ce qui entraîne c) en vertu de (20.7.2) et (19.1.7); il est clair que c) implique b), en vertu de (20.7.2), et que b) implique a). Enfin, compte tenu de (22.2.3), il reste à prouver que a) entraîne que l'homomorphisme canonique $u : \Omega_k^1 \otimes_k K \rightarrow \Omega_A^1 \otimes_A K$ est *injectif*. Or, on a pour tout α un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Omega_k^1 \otimes_k K & \xrightarrow{u} & \Omega_A^1 \otimes_A K \\ v_\alpha \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_{k/k_\alpha}^1 \otimes_k K & \xrightarrow{u_\alpha} & \Omega_{A/k_\alpha}^1 \otimes_A K \end{array}$$

et l'hypothèse que u_α est injectif pour $\alpha \geq \alpha_0$ implique que $\text{Ker}(u)$ est contenu dans l'intersection des $\text{Ker}(v_\alpha)$. Mais on a vu (21.8.3) que cette intersection est nulle en vertu de l'hypothèse $\prod_\alpha k_\alpha(k^p) = k^p$, ce qui achève la démonstration.

Proposition (22.2.9). — *Sous les hypothèses de (22.2.1), les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) A/\mathfrak{m}^2 est une k -extension k -triviale de K par $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.
- b) $\chi_{A/k} = 0$.
- c) L'homomorphisme canonique (20.5.11.2)

$$\delta_{K/A/k} : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow \Omega_{A/k}^1 \otimes_A K$$

est injectif (en d'autres termes, la suite

$$(22.2.9.1) \quad 0 \rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow \Omega_{A/k}^1 \otimes_A K \rightarrow \Omega_{K/k}^1 \rightarrow 0$$

est exacte).

L'équivalence de b) et c) résulte de la suite exacte (20.6.22.1); l'équivalence de c) et a) résulte de (20.5.12), la suite (22.2.9.1) étant scindée si elle est exacte, puisqu'il s'agit d'espaces vectoriels.

On notera que si K est séparable sur k , les conditions équivalentes de (22.2.9) sont satisfaites, en vertu de la définition de $\chi_{A/k}$ (22.2.1) et de (20.6.3).

Corollaire (22.2.10). — *Sous les hypothèses de (22.2.1), considérons un sous-corps k_0 de k . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) A/\mathfrak{m}^2 est une k_0 -extension k_0 -triviale de K par $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.
- b) L'homomorphisme composé $\Upsilon_{K/k_0} \xrightarrow{\chi_{A/k}} \Upsilon_{K/k} \xrightarrow{\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2}$ est nul.
- c) L'homomorphisme caractéristique $\chi_{A/k} : \Upsilon_{K/k} \rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ se factorise en $\Upsilon_{K/k} \xrightarrow{\chi'} \Upsilon_{K/k/k_0} \xrightarrow{\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2}$.

En outre, lorsque ces conditions sont remplies, l'homomorphisme χ' est déterminé de façon unique et coïncide avec l'homomorphisme caractéristique de la k_0 -extension k_0 -triviale A/\mathfrak{m}^2 de K par $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Comme le composé dans b) n'est autre que χ_{A/k_0} , l'équivalence de a) et b) résulte de (22.2.9); d'autre part, b) et c) sont équivalentes en vertu de la suite exacte (20.6.18.1)

$$\Upsilon_{K/k_0} \rightarrow \Upsilon_{K/k} \rightarrow \Upsilon_{K/k/k_0} \rightarrow 0$$

et comme l'homomorphisme canonique $\Upsilon_{K/k} \rightarrow \Upsilon_{K/k/k_0}$ est surjectif, cela implique l'unicité de χ' ; le fait que χ' est l'homomorphisme caractéristique de la k_0 -extension A/\mathfrak{m}^2 résulte de (20.6.22.2).

Corollaire (22.2.11). — *Sous les hypothèses de (22.2.1), soit p l'exposant caractéristique de k , et soit (k_α) une famille filtrante décroissante de sous-corps de k telle que $\prod_\alpha k_\alpha(k^p) = k^p$. Si $\Upsilon_{K/k}$ est de rang fini sur K , il existe un indice α tel que A/\mathfrak{m}^2 soit une k_α -extension k_α -triviale de K par $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.*

On sait en effet (21.8.3) qu'il existe alors un indice α tel que l'homomorphisme canonique $\Upsilon_{K/k} \rightarrow \Upsilon_{K/k/k_\alpha}$ soit bijectif, donc la condition b) de (22.2.10) (où k_α remplace k_0) est satisfaite.

22.3. Application aux relations entre certains anneaux locaux et leurs complétés.

Lemme (22.3.1). — Soient A_0 un anneau semi-local noethérien, A une A_0 -algèbre finie (qui est donc un anneau semi-local noethérien, cf. Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, cor. 3 de la prop. 9). Si \hat{A}_0 et \hat{A} sont les complétés de A_0 et A pour leurs topologies préadiques respectives, alors, lorsqu'on munit A_0 , A et \hat{A} des topologies discrètes, \hat{A} est une A -algèbre formellement lisse relativement à A_0 (19.9.1).

On sait en effet que $\hat{A} = A \otimes_{A_0} \hat{A}_0$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, cor. 3 de la prop. 9 et chap. III, § 3, n° 4, th. 1), donc la proposition résulte de (19.9.3).

Proposition (22.3.2). — Soient A un anneau local noethérien régulier, K son corps des fractions, p la caractéristique de K . On suppose vérifiée l'une des hypothèses suivantes :

(i) $p = 0$.

(ii) $p > 0$ et il existe une famille filtrante décroissante (A_α) de sous-anneaux noethériens de A , tels que A soit une A_α -algèbre finie pour tout α , que $A^{p^{h(\alpha)}} \subset A_\alpha$ pour un entier $h(\alpha)$ convenable, et que, si K_α désigne le corps des fractions de A_α , on ait $\bigcap_\alpha K_\alpha (K^p) = K^p$.

Soient alors B une A -algèbre finie intègre et contenant A , n un idéal premier de B , C l'anneau local B_n , q un idéal premier du complété \hat{C} tel que $q \cap C = 0$, de sorte que l'anneau local \hat{C}_q est une algèbre sur le corps des fractions L de B . Alors \hat{C}_q est une L -algèbre formellement lisse pour sa topologie q -adique, et par suite un anneau géométriquement régulier sur L (19.6.5).

Distinguons deux cas.

I) Supposons que n contienne l'idéal maximal m de A , et par suite $n \cap A = m$. Alors n est maximal (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 1, prop. 1) et si r est le radical de l'anneau semi-local B , \hat{C} est le séparé complété de B pour la topologie n -préadique, et un des composants de l'anneau semi-local \hat{B} , complété de B pour la topologie r -préadique (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 4, prop. 8); on peut donc écrire $\hat{C}_q = \hat{B}_{q'}$, où q' est l'idéal premier de \hat{B} image réciproque de q . Notons maintenant que B est un sous-anneau de \hat{B} et l'hypothèse $q \cap C = 0$ entraîne $q' \cap B = 0$, donc $\hat{B}_{q'}$ est aussi localisé de l'anneau $\hat{B} \otimes_B L$ en un de ses idéaux premiers q'' , dont q' est l'image réciproque dans \hat{B} . En outre on a $\hat{B} = \hat{A} \otimes_A B$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, cor. de la prop. 9 et chap. III, § 3, n° 4, th. 1), donc $\hat{B} \otimes_B L = \hat{A} \otimes_A L$; enfin, si p est l'idéal premier de \hat{A} , image réciproque de q'' , le fait que $A \rightarrow B$ est injectif et la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \hat{B} \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & \hat{A} \end{array}$$

entraînent que $p \cap A = 0$, donc $(\hat{A} \otimes_A L)_{q''}$ est aussi localisé de l'anneau

$$\hat{A}_p \otimes_A L = (\hat{A}_p \otimes_A K) \otimes_K L$$

en un de ses idéaux premiers. Pour montrer que cet anneau local est une L -algèbre formellement lisse, il suffit donc de prouver que $\hat{A}_p \otimes_A K$ est une K -algèbre formellement lisse (19.3.5, (iii) et (iv)); d'ailleurs $\hat{A}_p \otimes_A K = \hat{A}_p$, puisque $p \cap A = 0$. On va appliquer les critères (22.2.2) et (22.2.8). En premier lieu, comme A est régulier, il en est de même de \hat{A} (17.1.5), donc de \hat{A}_p (17.3.2), et la condition (i) de (22.2.2) est vérifiée (17.1.1). Il suffit par suite (lorsque $p > 0$) de vérifier la condition *b*) de (22.2.8). Or, (22.3.1) montre que, pour tout α , \hat{A} est une A -algèbre formellement lisse relativement à A_α (pour les topologies discrètes); par suite $\hat{A} \otimes_{A_\alpha} K_\alpha = \hat{A} \otimes_A (A \otimes_{A_\alpha} K_\alpha)$ est une $(A \otimes_{A_\alpha} K_\alpha)$ -algèbre formellement lisse relativement à K_α , pour les topologies discrètes (19.9.2, (iii)). Mais comme A est une A_α -algèbre finie, on a $A \otimes_{A_\alpha} K_\alpha = K$; comme \hat{A}_p est un anneau de fractions de $\hat{A} \otimes_A K$, on en conclut (19.9.2, (iv)) que \hat{A}_p est une K -algèbre formellement lisse relativement à K_α , pour la topologie discrète, et *a fortiori* pour sa topologie p -adique ((19.3.8) et (19.9.5)). Mais cela est précisément la condition *b*) de (22.2.8), donc la proposition est démontrée dans ce cas pour $p > 0$. Lorsque $p = 0$, le corps résiduel de \hat{A}_p est séparable sur K , et comme \hat{A}_p est un anneau régulier, c'est une K -algèbre formellement lisse en vertu de (19.6.4).

II) Cas général. Soit s l'idéal premier $n \cap A$ de A , et posons $S = A - s$, de sorte que $S^{-1}A = A_s$, et l'on a $C = (S^{-1}B)_{s \rightarrow n}$, où cette fois, $S^{-1}n$ contient l'idéal maximal sA_s de A_s . Comme A_s est régulier (17.3.2) et $S^{-1}B$ une A_s -algèbre finie intègre contenant A_s , tout revient à vérifier la condition (ii) pour A_s lorsque $p > 0$: or, posons $s_\alpha = s \cap A_\alpha$ et considérons l'anneau local $(A_\alpha)_{s_\alpha}$. Pour tout $t \notin s$, on a par hypothèse, en posant $q = p^{h(\alpha)}$, $t^q \in A_\alpha$ et $t^q \notin s$, donc $t^q \notin s_\alpha$; si l'on pose $S_\alpha = A_\alpha - s_\alpha$, on voit donc que l'on a $A_s = S_\alpha^{-1}A$, et l'hypothèse entraîne que A_s est une $(A_\alpha)_{s_\alpha}$ -algèbre finie; en outre, K_α est aussi le corps des fractions de $(A_\alpha)_{s_\alpha}$, ce qui achève la démonstration.

Théorème (22.3.3). — Soient A un anneau local noethérien complet, p un idéal premier de A , B l'anneau localisé A_p , q un idéal premier du complété \hat{B} , $r = q \cap B$. Alors l'anneau localisé \hat{B}_p de \hat{B} est une B_r -algèbre formellement lisse pour les topologies préadiques.

L'idéal premier r de B est de la forme n_p , où $n \subset p$ est un idéal premier de A , et l'on a $B_r = A_n$; soit k le corps résiduel de B_r , qui est aussi le corps des fractions de l'anneau local intègre et complet $A' = A/n$. Comme \hat{B} est un B -module plat (0₁, 7.3.5), \hat{B}_q est un B_r -module plat (0₁, 6.3.2), et pour prouver que \hat{B}_q est une B_r -algèbre formellement lisse, il suffit de prouver que $\hat{B}_q \otimes_{B_r} k = \hat{B}_q / r\hat{B}_q$ est une k -algèbre formellement lisse (19.7.1). Or $\hat{B}_q / r\hat{B}_q = (\hat{B} / r\hat{B})_{q'}$, où q' est l'image canonique de q dans $\hat{B} / r\hat{B}$; on a par définition $q' \cap (B / r) = 0$ et $B / r = A'_p$, où $p' = p / n$; en outre $\hat{B} / r\hat{B}$ est le complété de B / r .

On est donc ramené à démontrer le corollaire suivant :

Corollaire (22.3.4). — Soient A un anneau local noethérien complet et intègre, K son corps des fractions, p un idéal premier de A , B l'anneau localisé A_p . Alors, pour tout idéal premier q

du complété \hat{B} , tel que $q \cap B = 0$, l'anneau local \hat{B}_q est une K -algèbre formellement lisse pour sa topologie q -adique, donc un anneau géométriquement régulier sur K .

En effet, il résulte de (19.8.9) qu'il existe un sous-anneau A_0 de A qui est un anneau de séries formelles sur un corps de caractéristique $p > 0$ ou sur un anneau de Cohen (on rappelle que les anneaux de Cohen ont un corps des fractions de caractéristique 0), et est tel que A soit une A_0 -algèbre finie. Or, on sait que l'anneau A_0 est régulier (17.3.8) et vérifie l'une des hypothèses (i), (ii) de (22.3.2), en vertu de (21.8.8); il suffit donc d'appliquer (22.3.2), en remplaçant B par A et A par A_0 .

22.4. Résultats préliminaires sur les extensions finies d'anneaux locaux dont l'idéal maximal est de carré nul.

Proposition (22.4.1). — Soient A un anneau local dont l'idéal maximal m est de carré nul, $K = A/m$ son corps résiduel; désignons par V l'idéal m considéré comme K -espace vectoriel. Soient T_i ($1 \leq i \leq r$) des indéterminées, et pour chaque i , soit F_i un polynôme unitaire de $A[T_i]$, de degré d_i ; désignons par A' le quotient de l'anneau de polynômes $A[T_1, \dots, T_r]$ par l'idéal engendré par les r polynômes F_i . Supposons que A' soit un anneau local, et soient m' son idéal maximal, $K' = A'/m'$ son corps résiduel. Alors :

(i) Si l'on pose $d = \prod_{i=1}^r d_i$, A' est un A -module libre de rang d , et l'on a $[K' : K] \leq d$.

(ii) Pour que $[K' : K] = d$, il faut et il suffit que $A' \otimes_A K = A'/mA'$ soit un corps (nécessairement isomorphe à K'), autrement dit, que $m' = mA'$. On a dans ce cas $m'^2 = 0$, et si V' désigne l'idéal m' considéré comme K' -espace vectoriel, l'homomorphisme canonique $V \otimes_K K' \rightarrow V'$ est bijectif (et par suite $\text{rg}_K V' = \text{rg}_K V$).

Sans supposer A' local, il est évident, par division euclidienne et récurrence sur r , que si t_i est la classe de T_i mod. b , les monômes $M_v = t_1^{v_1} t_2^{v_2} \dots t_r^{v_r}$, où $0 \leq v_i \leq d_i - 1$, forment une base du A -module A' . Si A' est supposé local, K' est un quotient de $A'/mA' = A' \otimes_A K$, donc $[K' : K] \leq [A' \otimes_A K : K] = d$, et il ne peut y avoir égalité que si $m' = mA'$, ce qui démontre (i) et la première assertion de (ii). D'autre part, il est clair que lorsque $m' = mA'$, on a $m'^2 = 0$, et $V \otimes_K K' = m \otimes_A A' = mA' = V'$ puisque A' est un A -module libre.

Remarque (22.4.2). — Lorsque A est artinien (autrement dit $\text{rg}_K(V)$ fini), l'hypothèse que A' est local entraîne toujours que $\text{rg}_K(m'/m'^2) \geq \text{rg}_K(V)$, comme nous le verrons plus loin (22.5.2). On notera que ces deux rangs peuvent être égaux sans que l'on ait $m' = mA'$.

Proposition (22.4.3). — Les hypothèses sur A et les notations étant celles de (22.4.1), supposons que les F_i soient de la forme

$$(22.4.3.1) \quad F_i(T_i) = T_i^{d_i} + \sum_{1 \leq k \leq d_i} c_{ik} T_i^{d_i-k}$$

où $d_i \geq 2$ pour tout i , et $c_{ik} \in m$ (« polynômes d'Eisenstein »). Alors :

(i) A' est un anneau local, et son corps résiduel $K' = A'/m'$ est isomorphe à K .

(ii) *Le noyau de l'homomorphisme canonique $V \rightarrow V' = m'/m'^2$ est l'idéal n de A engendré par les $\xi_i = c_{i,d_i}$ (« termes constants » des F_i), et le conoyau de cet homomorphisme a pour base sur K' les images des T_i ; en particulier, on a*

$$(22.4.3.2) \quad rg_{K'}(V') = rg_K(V) + r - r'$$

où $r' = rg_K(n)$. Lorsque $rg_K(V)$ est fini (autrement dit lorsque A est artinien), pour que $rg_{K'}(V') = rg_K(V)$, il faut et il suffit que les ξ_i soient linéairement indépendants sur K .

(i) Il est clair que $A' \otimes_A K = A'/mA'$ est isomorphe à $K[T_1, \dots, T_r]/b'$, où b' est l'idéal engendré par les r polynômes $T_i^{d_i}$; c'est donc un anneau local de corps résiduel K , dont l'idéal maximal est engendré par les classes des T_i mod. b' , d'où (i).

(ii) Soit t_i ($1 \leq i \leq r$) la classe de T_i mod. b ; il résulte de (i) que l'idéal maximal m' de A' est donné par

$$m' = mA' + \sum_{i=1}^r t_i A'$$

d'où, compte tenu de $m^2 = 0$,

$$m'^2 = \sum_{i,j} t_i t_j A' + \sum_i t_i m A'.$$

On en conclut que A'/m'^2 est isomorphe à l'anneau $A[T_1, \dots, T_r]/c$, où c est l'idéal engendré par les éléments

$$F_i \quad (1 \leq i \leq r), \quad T_i T_j \quad (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r), \quad x T_i \quad (1 \leq i \leq r, x \in m).$$

Comme $d_i \geq 2$ et que les T_i^2 appartiennent à c , les hypothèses faites entraînent que c est aussi engendré par les éléments

$$\xi_i \quad (1 \leq i \leq r), \quad T_i T_j \quad (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r), \quad T_i x \quad (1 \leq i \leq r, x \in m).$$

Soient $c_1 = \sum_{i,j} T_i T_j A[T_1, \dots, T_r]$, $c_2 = c_1 + \sum_i m T_i A[T_1, \dots, T_r]$, de sorte que $c = c_2 + \sum_i \xi_i A[T_1, \dots, T_r]$. Il est clair que $A[T_1, \dots, T_r]/c_1$ est le A -module somme directe de A et des $A t_i^{(1)}$, où $t_i^{(1)}$ est la classe de T_i mod. c_1 . On en déduit que $A[T_1, \dots, T_r]/c_2$ est somme directe de A et des $K t_i^{(2)}$, où $t_i^{(2)}$ est la classe de T_i mod. c_2 . Enfin $A[T_1, \dots, T_r]/c$ est somme directe de A/n et des $K t_i'$, où t_i' est la classe de T_i mod. c , et n est l'idéal de A engendré par les ξ_i ; dans l'identification de A'/m'^2 à $A[T_1, \dots, T_r]/c$, l'image de V s'identifie à m/n , et ce qui précède prouve donc (ii).

Proposition (22.4.4). — Les hypothèses sur A et les notations étant celles de (22.4.1), supposons que K soit de caractéristique $p > 0$ (donc $p \cdot 1 \in m$ dans A) et que les F_i soient de la forme

$$(22.4.4.1) \quad F_i(T_i) = T_i^p + p \sum_{k=1}^{p-1} c_{ik} T_i^{p-k} - f_i$$

avec $c_{ik} \in A$ et $f_i \in A$ pour tout i et tout k tel que $1 \leq k \leq p-1$; en outre si a_i est la classe de f_i mod. m , on suppose que la famille $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$ est p -libre sur K^p (« absolument p -libre »). Alors :

(i) A' est un anneau local, d'idéal maximal $m A'$, dont le corps résiduel K' est isomorphe à l'extension de K obtenue par adjonction des $a_i^{1/p}$ ($1 \leq i \leq r$).

(ii) Les éléments $d_A f_i \otimes_{A'} K'$ forment une base du noyau $N = Y_{A'/A}^{K'}$ de l'homomorphisme canonique $\Omega_{A'}^1 \otimes_A K' \rightarrow \Omega_{A'}^1 \otimes_{A'} K'$.

(i) Cette fois $A' \otimes_A K = A'/mA'$ est isomorphe à $K[T_1, \dots, T_r]/b'$, où b' est l'idéal engendré par les polynômes $T^p - a_i$; l'hypothèse faite sur les a_i entraîne que l'anneau quotient est un corps (21.1.8), d'où les assertions de (i).

Avant de démontrer (ii), nous établirons le

Lemme (22.4.4.2). — Soient Λ un anneau, A une Λ -algèbre, \mathfrak{J} un idéal de A tel que l'anneau $C = A/\mathfrak{J}$ soit de caractéristique $p > 0$ (ce qui équivaut à dire que $p \cdot 1 \in \mathfrak{J}$ dans A). Soit π l'image canonique de $p \cdot 1$ dans $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$. Si C est une $(\Lambda/p\Lambda)$ -algèbre formellement lisse pour les topologies discrètes, on a une suite exacte canonique

$$(22.4.4.3) \quad 0 \rightarrow (\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)/C \cdot \pi \rightarrow \Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A C \rightarrow \Omega_{C/\Lambda}^1 \rightarrow 0.$$

Posons en effet $A' = A/pA$, $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}/pA$, de sorte que $C = A'/\mathfrak{J}'$. Comme $A' = A \otimes_{\Lambda} (\Lambda/p\Lambda)$, on a $\Omega_{A/\Lambda}^1 \otimes_A A' = \Omega_{A'/\Lambda'}^1$ à un isomorphisme canonique près, Λ' désignant l'anneau $\Lambda/p\Lambda$ (20.5.5). Appliquant alors la suite exacte (20.5.14.1) à la Λ' -algèbre formellement lisse $C = A'/\mathfrak{J}'$, on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathfrak{J}'/\mathfrak{J}'^2 \rightarrow \Omega_{A'/\Lambda'}^1 \otimes_{A'} C \rightarrow \Omega_{C/\Lambda'}^1 \rightarrow 0$$

et comme l'homomorphisme $\Lambda \rightarrow \Lambda'$ est surjectif, on a $\Omega_{C/\Lambda'}^1 = \Omega_{C/\Lambda}^1$ à un isomorphisme canonique près (20.5.15); d'où la suite exacte (22.4.4.3) en vertu de ce qui précède.

(ii) Comme on a $m'^2 = 0$, nous désignerons encore par V' l'idéal m' considéré comme K' -espace vectoriel, et nous poserons

$$(22.4.4.4) \quad V_0 = V/K \cdot p = m/(m^2 + pA), \quad V'_0 = V'/K' \cdot p = m'/(m'^2 + pA').$$

Appliquant la suite exacte (22.4.4.3) au cas où $\Lambda = \mathbf{Z}$, à la \mathbf{Z} -algèbre A (resp. A') et à son idéal m (resp. m'), il vient, puisque K (resp. K') est séparable sur le corps premier $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, donc une $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ -algèbre formellement lisse (19.6.1), les suites exactes

$$(22.4.4.5) \quad 0 \rightarrow V_0 \rightarrow \Omega_A^1 \otimes_A K \rightarrow \Omega_K^1 \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow V'_0 \rightarrow \Omega_{A'}^1 \otimes_{A'} K' \rightarrow \Omega_{K'}^1 \rightarrow 0.$$

Considérons alors le diagramme (22.4.4.6) où les deux colonnes médianes sont la seconde suite (22.4.4.5) et la première tensorisée par K' ; comme la première suite exacte (22.4.4.5) est formée d'espaces vectoriels sur K , les deux colonnes médianes de (22.4.4.6) sont exactes; en outre, le diagramme formé par ces colonnes et les flèches horizontales qui les connectent est commutatif, en vertu de la démonstration de (22.4.4.2) et de la commutativité du diagramme (20.5.11.3). La dernière ligne de (22.4.4.6) est la suite exacte obtenue à partir de (20.6.1.1) en y remplaçant A , B , C par \mathbf{Z} , K et K' ; la ligne médiane est obtenue par tensorisation avec K' de la suite exacte de K -modules déduite de (20.6.1.1) en y remplaçant A , B , C par \mathbf{Z} , A , K respectivement. Le diagramme formé de ces deux lignes et des flèches verticales qui les connectent est commutatif en vertu de la commutativité de (20.6.4.3). Notons d'autre part qu'on est sous les conditions d'application de (22.4.1, (ii)), donc la ligne supérieure du diagramme (22.4.4.6) est *exacte*; les colonnes extrêmes du diagramme

(22.4.4.6)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & o & & o & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & o & \longrightarrow & V_0 \otimes_K K' & \longrightarrow & V'_0 \longrightarrow o \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & o & \longrightarrow & N & \longrightarrow & \Omega_A^1 \otimes_A K' \longrightarrow \Omega_{A'/A}^1 \otimes_{A'} K' \longrightarrow \Omega_{A'/A}^1 \otimes_{A'} K' \longrightarrow o \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & o & \longrightarrow & Y_{K'/K} & \longrightarrow & \Omega_K^1 \otimes_K K' \longrightarrow \Omega_{K'/K}^1 \longrightarrow o
 \end{array}$$

sont donc formées respectivement des *noyaux* et des *conoyaux* des flèches horizontales médianes, ce qui achève de prouver que le diagramme est *commutatif*. En outre :

Lemme (22.4.4.7). — *Les homomorphismes*

$$N \rightarrow Y_{K'/K} \quad \text{et} \quad \Omega_{A'/A}^1 \otimes_{A'} K' \rightarrow \Omega_{K'/K}^1$$

du diagramme (22.4.4.6) sont bijectifs.

En effet, le diagramme du serpent (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 1, n° 4, prop. 2) appliqué aux deux colonnes médianes de (22.4.4.6) donne une suite exacte

$$o \rightarrow N \rightarrow Y_{K'/K} \rightarrow o \rightarrow \Omega_{A'/A}^1 \otimes_{A'} K' \rightarrow \Omega_{K'/K}^1 \rightarrow o.$$

Or, si t_i est l'image canonique de T_i dans A' , la relation $F_i(t_i) = o$, jointe au fait que dans A' on a $p \cdot 1 \in mA' \subset m'$, montre aussitôt que l'on a $d_{A'} f_i \in m' \Omega_{A'}^1$, donc $d_{A'} f_i \otimes 1_{K'} = o$; cela prouve que les $d_{A'} f_i \otimes 1_{K'}$ appartiennent à N . En outre, leurs images dans $Y_{K'/K}$ sont les $d_K a_i \otimes 1_{K'}$, qui forment une *base* de $Y_{K'/K}$ sur K' (21.4.7); compte tenu de (22.4.4.7), cela achève de démontrer (22.4.4).

(22.4.5) Considérons maintenant deux anneaux A, B de caractéristique $p > 0$, et deux homomorphismes

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} A$$

vérifiant les conditions de (21.3.1). Soit en outre \mathfrak{m} un idéal *de carré nul* dans A ; posons

$$K = A/\mathfrak{m}, \quad B_{(K)} = B \otimes_A K = B/Bi(\mathfrak{m})$$

et soient

$$\varphi : A \rightarrow K, \quad \psi : B \rightarrow B_{(K)}$$

les homomorphismes canoniques.

Comme φ est surjectif, $\Omega^1_{B_{(K)}/A}$ s'identifie canoniquement à $\Omega^1_{B_{(K)}/K}$ (20.5.15). Notons que, puisque $p \geq 2$, pour tout $x \in \mathfrak{m}$, on a $j(i(x)) = x^p = 0$, autrement dit $j(i(\mathfrak{m})) = 0$; par passage aux quotients on déduit donc de j un homomorphisme

$$j' : B_{(K)} \rightarrow A$$

tel que, si $i' = \psi \circ i : A \rightarrow B_{(K)}$, on ait

$$i'(i'(x)) = x^p \quad \text{et} \quad i'(j'(y)) = y^p \quad \text{pour } x \in A \quad \text{et} \quad y \in B_{(K)}.$$

En posant, suivant les notations de (21.3.2)

$$\Theta_{B_{(K)}/A} = \Omega^1_{B_{(K)}/A} \otimes_{B_{(K)}} A_{[i']} = \Omega^1_{B_{(K)}/K} \otimes_{B_{(K)}} A_{[i']}$$

on a donc (21.3.2.2) un homomorphisme canonique

$$(22.4.5.1) \quad \pi_{B_{(K)}/A} : \Theta_{B_{(K)}/A} \rightarrow \Omega^1_A.$$

D'autre part, on déduit de i et j , par passage aux quotients (tenant compte de ce que $j(i(\mathfrak{m})) = 0$) des homomorphismes

$$K \xrightarrow{i_*} B_{(K)} \xrightarrow{j_*} K$$

de sorte que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & A \\ \varphi \downarrow & & \psi \downarrow & \nearrow i' & \downarrow \varphi \\ K & \xrightarrow{i_*} & B_{(K)} & \xrightarrow{j_*} & K \end{array}$$

Il est clair en outre que l'on a

$$j_0(i_0(s)) = s^p \quad \text{et} \quad i_0(j_0(t)) = t^p \quad \text{pour } s \in K \quad \text{et} \quad t \in B_{(K)}.$$

On définit donc de même

$$\Theta_{B_{(K)}/K} = \Omega^1_{B_{(K)}/K} \otimes_{B_{(K)}} K_{[j_0]} = \Theta_{B_{(K)}/A} \otimes_A K$$

donc, en tensorisant (22.4.5.1) par K , on obtient un *K-homomorphisme canonique*

$$(22.4.5.2) \quad \pi'_{B_{(K)}/K} = \pi_{B_{(K)}/A} \otimes_{A \otimes_A K} : \Theta_{B_{(K)}/K} \rightarrow \Omega^1_A \otimes_A K.$$

Il résulte aussitôt des définitions que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Theta_{B_{(K)}/K} & \xrightarrow{\pi'_{B_{(K)}/K}} & \Omega_A^1 \otimes_A K \\ \pi_{B_{(K)}/K} \searrow & & \downarrow \varphi_{K/A} \\ & & \Omega_K^1 \end{array}$$

est commutatif, $\pi_{B_{(K)}/K}$ étant l'homomorphisme canonique correspondant à i_0 et j_0 (21.3.2.2). Par restriction à $\Xi_{B_{(K)}/K} = \text{Ker}(\pi_{B_{(K)}/K})$, l'homomorphisme $\pi'_{B_{(K)}/K}$ définit donc un *homomorphisme canonique*

$$(22.4.5.3) \quad \Xi_{B_{(K)}/K} \rightarrow \text{Ker}(\Omega_A^1 \otimes_A K \rightarrow \Omega_K^1) = \Gamma_{K/A}.$$

(22.4.6) Les hypothèses et notations étant celles de (22.4.5), supposons en outre que m soit un idéal *maximal* de carré nul, donc K un *corps*, et notons V l'idéal m considéré comme K -espace vectoriel. Comme K est une algèbre formellement lisse sur son corps premier \mathbf{F}_p (21.5.2) et que A est une algèbre sur \mathbf{F}_p (de sorte que $\Omega_A^1 = \Omega_{A/\mathbf{F}_p}^1$), on déduit de (20.5.14) que l'on a une *suite exacte*

$$(22.4.6.1) \quad 0 \rightarrow V \rightarrow \Omega_A^1 \otimes_A K \rightarrow \Omega_K^1 \rightarrow 0.$$

On a donc par (22.4.5.3) un homomorphisme noté

$$(22.4.6.2) \quad \chi'_{B/A} : \Xi_{B_{(K)}/K} \rightarrow V$$

que nous appellerons *homomorphisme caractéristique* de la A -algèbre B (relative à i, j et m). Il résulte des définitions que pour que $\chi'_{B/A}$ soit *injectif*, il faut et il suffit que $\pi'_{B_{(K)}/K}$ soit *injectif*, le noyau de ce dernier étant évidemment contenu dans $\Xi_{B_{(K)}/K}$.

Proposition (22.4.7). — Soient A un anneau local artinien dont l'idéal maximal m est de carré nul, $K = A/m$ son corps résiduel, V l'idéal m considéré comme K -espace vectoriel; on suppose que A est de caractéristique $p > 0$; soient

$$(22.4.7.1) \quad F_i(T_i) = T_i^p - f_i \quad \text{avec } f_i \in A \quad (1 \leq i \leq r)$$

et désignons par B l'anneau quotient de $A[T_1, \dots, T_r]$ par l'idéal engendré par les r polynômes F_i . Alors :

(i) B est un anneau local.

(ii) Si m' est l'idéal maximal de B , $K' = B/m'$ son corps résiduel, V' le B -module m'/m'^2 considéré comme K' -espace vectoriel, alors, pour que $\text{rg}_K(V) = \text{rg}_{K'}(V')$, il faut et il suffit que l'homomorphisme caractéristique de K -espaces vectoriels

$$(22.4.7.2) \quad \chi'_{B/A} : \Xi_{B_{(K)}/K} \rightarrow V$$

(cf. (22.4.6.2)) soit injectif.

Désignons encore par a_i ($1 \leq i \leq r$) la classe de f_i mod. m ; les a_i ne sont plus nécessairement p -indépendants sur K^p , mais on peut toujours supposer que la sous-famille

$(a_i)_{s+1 \leq i \leq r}$ est p -libre sur K^p et forme une p -base sur K^p du corps $K^p(a_1, \dots, a_r)$ de sorte que l'on a

$$a_i \in K^p(a_{s+1}, \dots, a_r) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq s.$$

Désignons par A'' l'anneau quotient de $A[T_{s+1}, \dots, T_r]$ par l'idéal engendré par les F_i d'indice $i \geq s+1$; alors, par (22.4.4), A'' est un anneau local dont l'idéal maximal est $\mathfrak{m}'' = \mathfrak{m}A''$ (donc de carré nul) et le corps résiduel $K'' = K(a_{s+1}^{1/p}, \dots, a_r^{1/p})$. On a donc $a_i \in K''^p$ pour $1 \leq i \leq s$ et par suite, dans A'' , l'élément f_i , pour $1 \leq i \leq s$, peut s'écrire

$$(22.4.7.3) \quad f_i = g_i^p + h_i$$

où $g_i \in A''$ et $h_i \in \mathfrak{m}''$ (comme $\mathfrak{m}''^2 = 0$ et $p\mathfrak{m}'' = 0$, il est immédiat que h_i est déterminé de façon unique par ces conditions). Remplaçant T_i par $T_i + g_i$, on voit donc que si l'on pose

$$G_i(T_i) = T_i^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} g_i^{p-k} T^k - h_i \quad (1 \leq i \leq s)$$

B est l'anneau quotient de $A''[T_1, \dots, T_s]$ par l'idéal engendré par les G_i ; or, tous les coefficients de G_i sauf le coefficient dominant appartiennent à \mathfrak{m}'' , donc on est dans la situation de (22.4.3), B est un anneau local, et son corps résiduel K' est isomorphe à K'' , ce qui prouve (i) (qui d'ailleurs résulte directement de ce que $B^p \subset A$, et par suite il n'y a qu'un seul idéal de B au-dessus de \mathfrak{m}).

Notons maintenant que pour que (22.4.7.2) soit injectif, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de

$$\pi'_{B_{(K)}/K} : \Omega_{B_{(K)}/K}^1 \otimes_{B_{(K)}} K \rightarrow \Omega_A^1 \otimes_A K$$

(par (22.4.6)). Or $B_{(K)} = B/\mathfrak{m}B$ est l'algèbre quotient de $C = K[T_1, \dots, T_r]$ par l'idéal engendré par les polynômes $\bar{F}_i = T_i^p - a_i$, et comme $d_{C/K}\bar{F}_i = 0$ il résulte de (20.5.13) que $\Omega_{B_{(K)}/K}^1$ est un $B_{(K)}$ -module libre ayant pour base les $d_{B_{(K)}/K}t_i$, où t_i est l'image canonique de T_i ($1 \leq i \leq r$). Mais par définition (22.4.5) l'image canonique par $j' : B_{(K)} \rightarrow A$ d'une classe mod. $\mathfrak{m}B$ d'un élément $x \in B$ est l'élément $x^p \in A$; on en déduit aussitôt, puisque $t_i^p = f_i$, que l'image de $d_{B_{(K)}/K}t_i \otimes 1$ par $\pi'_{B_{(K)}/K}$ est $d_A f_i \otimes 1$ dans $\Omega_A^1 \otimes_A K$; la condition que $\pi'_{B_{(K)}/K}$ soit injectif est donc équivalente au fait que les $d_A f_i \otimes 1_K$ sont linéairement indépendants sur K , ou encore que leurs images $d_A f_i \otimes 1_{K'}$ sont linéairement indépendants sur K' dans $\Omega_A^1 \otimes_A K'$.

Or, si l'on applique (22.4.4) à la A -algèbre A'' , on voit que le noyau de l'homomorphisme canonique $\Omega_A^1 \otimes_A K' \rightarrow \Omega_{A''}^1 \otimes_{A''} K'$ a pour base les $d_A f_i \otimes 1_{K'}$ pour $s+1 \leq i \leq r$. La condition précédente équivaut donc encore à dire que les $d_{A''} f_i \otimes 1_{K'}$ sont linéairement indépendants dans $\Omega_{A''}^1 \otimes_{A''} K'$ pour $1 \leq i \leq s$. Or, on a $d_{A''} f_i = d_{A'} h_i$ par (22.4.7.3); d'autre part, si V'' est le K' -espace vectoriel \mathfrak{m}'' , on a $\text{rg}_{K'}(V'') = \text{rg}_K(V)$ (22.4.1, (ii)), et la condition $\text{rg}_{K'}(V) = \text{rg}_K(V)$ est donc équivalente à $\text{rg}_{K'}(V'') = \text{rg}_{K'}(V')$. Mais il résulte de (22.4.3) que cette dernière relation est équivalente au fait que les classes h_i

dans V'' sont linéairement indépendantes sur K' . Or, dans $\Omega_{A''}^1 \otimes_{A''} K'$, les $d_{A''} h_i \otimes 1_K$ sont les images canoniques (20.5.11.2) des h_i par l'injection $V'' \rightarrow \Omega_{A''}^1 \otimes_{A''} K'$ (cf. (22.4.6.1)), et cela achève de prouver (22.4.7).

On a en outre prouvé :

Corollaire (22.4.7.4). — Pour que $\text{rg}_K(V) = \text{rg}_{K'}(V')$, il faut et il suffit que les éléments $d_A f_i \otimes 1_K$ ($1 \leq i \leq r$) soient linéairement indépendants dans le K -espace vectoriel $\Omega_A^1 \otimes_A K$.

Remarque (22.4.8). — On peut définir les homomorphismes (22.4.5.2) et (22.4.6.2) dans des conditions un peu différentes. Soient A un anneau, m un idéal de carré nul dans A , $K = A/m$, p un nombre premier tel que $p \cdot 1 \in m$ (autrement dit K est de caractéristique p , mais non nécessairement A). Soit d'autre part B une A -algèbre qui est un A -module fidèlement plat (de sorte que $A \subset B$), et supposons que l'on ait

$$(22.4.8.1) \quad y^p \in A + pB \subset A + mB$$

pour tout $y \in B$. Si $y^p = x + pz$ avec $x \in A, z \in B$, la classe mod. $(A \cap pB)$ de x est bien déterminée, et comme $A \cap pB = pA$ puisque B est un A -module fidèlement plat, on a ainsi défini une application canonique $j : B \rightarrow A/pA$, telle que, pour $x \in A$, $j(x)$ soit la classe de x^p mod. pA . D'ailleurs, si $y' \in B$ et $y'^p = x' + pz'$ avec $x' \in A, z' \in B$, il est immédiat que les éléments $(y+y')^p - x - x'$ et $(yy')^p - xx'$ appartiennent à pB en vertu du fait que les coefficients binomiaux $\binom{p}{i}$ sont des multiples de p pour $1 \leq i \leq p-1$. L'application j est donc un homomorphisme d'anneaux. Par composition, on déduit de j un homomorphisme $j' : B \xrightarrow{j} A/pA \rightarrow A/m = K$ et par suite un homomorphisme $j_0 : B_{(K)} \rightarrow K$ tel que j' soit le composé $B \rightarrow B_{(K)} = B \otimes_A K \xrightarrow{j_0} K$; en outre, si $i_0 : K \rightarrow B_{(K)}$ est l'application canonique, i_0 et j_0 vérifient les conditions de (21.3.1) pour les anneaux de caractéristique p , K et $B_{(K)}$. Cela étant, pour définir un K -homomorphisme $\pi'_{B_{(K)}/K} : \Omega_{B_{(K)}/K}^1 \otimes_{B_{(K)}} K_{[j_0]} \rightarrow \Omega_A^1 \otimes_A K$, il suffit (20.4.8) de définir une K -dérivation.

$$(22.4.8.2) \quad D_0 : B_{(K)} \rightarrow \Omega_A^1 \otimes_A K$$

où le second membre est considéré comme un $B_{(K)}$ -module au moyen de j_0 . Pour cela, il suffit de définir une A -dérivation

$$(22.4.8.3) \quad D : B \rightarrow \Omega_A^1 \otimes_A K$$

qui s'annule dans mB (le second membre étant considéré comme B -module au moyen de j'). Or, si l'on a la relation $y^p = x + pz$ avec $y \in B, x \in A, z \in B$, l'élément $d_A x \otimes 1_K$ de $\Omega_A^1 \otimes_A K$ ne dépend que de la classe $j(y)$ mod. pA de y (donc seulement de y), car pour tout $t \in A$ on a $d_A(pt) = pd_A(t)$, donc $d_A(pt) \otimes 1 = 0$ dans $\Omega_A^1 \otimes_A K = \Omega_A^1 / m\Omega_A^1$, puisque $p \cdot 1 \in m$. On peut donc prendre

$$D(y) = d_A x \otimes 1_K.$$

Le fait que D est une dérivation résulte aisément de ce que j est un homomorphisme d'anneaux; en outre, pour $t \in A$, on a $d_A(t^p x) = t^p d_A(x) + pt^{p-1} x d_A(t)$ et l'on en tire que $D(ty) = tD(y)$, donc D est une A -dérivation; enfin, si l'on a de plus $t \in m$, on a

$D(ty) = tD(y) = 0$ puisque $\Omega_A^1 \otimes_A K$ est annulé par m . On a ainsi défini l'homomorphisme (22.4.5.2) cherché, et il est immédiat de vérifier que l'homomorphisme composé

$$\Theta_{B_{(K)}/K} \xrightarrow{\pi'_{B_{(K)}/K}} \Omega_A^1 \otimes_A K \rightarrow \Omega_K^1$$

est encore l'homomorphisme canonique $\pi_{B_{(K)}/K}$ (relatif à i_0 et j_0). On a donc aussi un homomorphisme canonique analogue à (22.4.5.3).

Si maintenant K est un *corps*, A/pA est une \mathbf{F}_p -algèbre, et l'on a la suite exacte (20.5.14)

$$0 \rightarrow V/pA \rightarrow \Omega_{A/pA}^1 \otimes_{A/pA} K \rightarrow \Omega_K^1 \rightarrow 0$$

et d'autre part on a la suite exacte (20.5.12.1)

$$pA \rightarrow \Omega_A^1 \otimes_A (A/pA) \rightarrow \Omega_{A/pA}^1 \rightarrow 0$$

qui montre, en tensorisant avec K , que les K -espaces vectoriels $\Omega_A^1 \otimes_A K$ et $\Omega_{A/pA}^1 \otimes_{A/pA} K$ sont isomorphes. L'analogue de (22.4.6.2) est donc ici un homomorphisme

$$(22.4.8.4) \quad \Xi_{B_{(K)}/K} \rightarrow V/pA = m/(m^2 + pA).$$

Ceci dit, le critère (22.4.7), où l'on remplace V et V' par V/pA et V'/pB respectivement, reste valable en supposant seulement que K soit de caractéristique $p > 0$ (autrement dit, que $p \cdot i \in m$ dans A), et que les $F_i(T_i)$ soient de la forme plus générale (22.4.4.1) : en effet, B est un A -module libre (donc fidèlement plat), et il suffit de reprendre le raisonnement de (22.4.7), en y remplaçant (22.4.6.2) par (22.4.8.4) et V'' par V''/pA'' .

22.5. Algèbres géométriquement régulières et algèbres formellement lisses.

Proposition (22.5.1). — Soient A un anneau local régulier, A' un anneau local contenant A et qui est une A -algèbre finie, m (resp. m') l'idéal maximal de A (resp. A'), $K = A/m$ (resp. $K' = A'/m'$) son corps résiduel. Pour que A' soit un anneau régulier, il faut et il suffit que l'on ait

$$(22.5.1.1) \quad \mathrm{rg}_K(m/m^2) = \mathrm{rg}_{K'}(m'/m'^2).$$

En effet, le premier membre de (22.5.1.1) est $\dim(A)$ (17.1.1) et comme $A \subset A'$ et que A' est une A -algèbre finie, $\dim(A') = \dim(A)$ (16.1.5); l'égalité (22.5.1.1) est donc nécessaire et suffisante pour que A' soit régulier (17.1.1).

Remarques (22.5.2). — (i) Soient $A_1 = A/m^2$, $A'_1 = A' \otimes_A A_1 = A'/m'^2 A'$; comme $m^2 A' \subset m'^2$, $m'_1 = m'/mA'$ est l'idéal maximal de A'_1 et m'_1/m'^2 est un K' -espace vectoriel isomorphe à m'/m'^2 ; la condition de régularité de A' ne dépend donc que de la structure de la A_1 -algèbre A'_1 , ce qui va nous permettre ci-dessous d'appliquer les résultats préliminaires de (22.4) sur les algèbres finies sur des anneaux artiniens.

(ii) Il résulte de la démonstration de (22.5.1) et de (16.2.6.1) que l'on a en tout cas

$$(22.5.2.1) \quad \mathrm{rg}_K(m/m^2) \leq \mathrm{rg}_{K'}(m'/m'^2).$$

(iii) Supposons que A et A' vérifient les hypothèses générales de (22.4.1). On sait (19.8.10) qu'il existe un anneau local régulier B , d'idéal maximal \mathfrak{n} , tel que A soit isomorphe à B/\mathfrak{n}^2 ; désignons par $G_i \in B[T_i]$ un polynôme unitaire dont l'image canonique dans $A[T_i]$ soit F_i ($1 \leq i \leq r$); alors, si B' est l'anneau quotient de $B[T_1, \dots, T_r]$ par l'idéal engendré par les G_i , il est clair que B' est un B -module libre de rang d et que $A' = B' \otimes_B A = B'/\mathfrak{n}^2 B'$; comme A' est supposé être un anneau local, il en est de même de B' , et si \mathfrak{n}' est l'idéal maximal de B' , B'/\mathfrak{n}' est isomorphe à K' et $\mathfrak{n}'/\mathfrak{n}'^2$ isomorphe à m'/m'^2 en tant qu'espace vectoriel sur K' ; l'inégalité (22.5.2.1) montre donc que l'on a, sous les hypothèses de (22.4.1)

$$(22.5.2.2) \quad \operatorname{rg}_K(V) \leq \operatorname{rg}_{K'}(m'/m'^2).$$

Corollaire (22.5.3). — Soient A un anneau local régulier, \mathfrak{m} son idéal maximal, T_i ($1 \leq i \leq r$) des indéterminées, et pour chaque i , soit

$$(22.5.3.1) \quad F_i(T_i) = T_i^{d_i} + \sum_{1 \leq k \leq d_i} c_{ik} T_i^{d_i-k}$$

un polynôme unitaire de $A[T_i]$, tel que $d_i \geq 2$ pour tout i et $c_{ik} \in \mathfrak{m}$. Soit A' le quotient de l'anneau de polynômes $A[T_1, \dots, T_r]$ par l'idéal engendré par les r polynômes F_i . Alors :

- (i) A' est un anneau local, et son corps résiduel K' est isomorphe au corps résiduel K de A .
- (ii) Pour que A' soit un anneau régulier, il faut et il suffit que les classes $\xi_i \bmod. m^2$ des éléments c_{i,d_i} ($1 \leq i \leq r$) soient linéairement indépendantes sur K .

En effet, avec les notations de (22.5.2, (i)), si \bar{F}_i désigne le polynôme de $A_1[T_i]$ obtenu en appliquant aux coefficients de F_i l'homomorphisme $A \rightarrow A_1$, A'_1 se définit à partir de A_1 et des polynômes \bar{F}_i comme dans (22.4.1), et la conclusion résulte donc de (22.5.1) et de (22.4.3).

Théorème (22.5.4). — Soient A un anneau local régulier, K son corps résiduel; on suppose que K est de caractéristique $p > 0$; soient

$$(22.5.4.1) \quad F_i(T_i) = T_i^p + p \sum_{k=1}^{p-1} c_{ik} T_i^{p-k} - f_i$$

avec $c_{ik} \in A$ et $f_i \in A$ ($1 \leq i \leq r$); soit B l'anneau quotient de $A[T_1, \dots, T_r]$ par l'idéal engendré par les r polynômes F_i . Alors B est un anneau local, et les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) B est régulier;
- b) les éléments $d_A f_i \otimes_{A_K} K$ ($1 \leq i \leq r$) sont linéairement indépendants dans le K -espace vectoriel $\Omega_A^1 \otimes_A K$;
- c) si $B' = B/m^2 B$ et si l'on pose $\Xi_{B_{(K)}/K} = \Xi_{B'_{(K)}/K}$ (22.4.5), l'homomorphisme caractéristique $\Xi_{B_{(K)}/K} \rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ (22.4.6.2) est injectif.

En effet, B' se définit encore à partir de $A_1 = A/m^2$ et des polynômes \bar{F}_i obtenus en appliquant aux F_i l'homomorphisme $A \rightarrow A_1$. Compte tenu de ce que $\Omega_A^1 \otimes_A K$ est canoniquement isomorphe à $\Omega_{A_1}^1 \otimes_{A_1} K$ (20.5.12, (ii)), le théorème résulte de (22.5.1) et de (22.4.7.4), en utilisant la remarque (22.4.8) lorsque A_1 n'est pas de caractéristique p .

(22.5.5) Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, A un anneau local, k' une extension radicielle finie de k telle que $k'^p \subset k$, m l'idéal maximal de A , $K = A/m$ son corps résiduel; rappelons que $A' = A \otimes_k k'$ est un anneau local dont le corps résiduel est le même que celui de l'anneau local $K \otimes_{k'} k'$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 3, lemme 4). Notons que l'on a $A'_{(K)} = A' \otimes_A K = K \otimes_{k'} k'$, et par suite (21.3.6)

$$(22.5.5.1) \quad \Theta_{A'_{(K)}} = \Theta_{k'/k} \otimes_k K$$

à un isomorphisme canonique près. En outre, on sait (21.4.7) que l'on a $\Xi_{k'/k} = 0$, autrement dit l'homomorphisme canonique (21.3.2.2)

$$\pi_{k'/k} : \Theta_{k'/k} \rightarrow \Omega_K^1$$

est injectif, si bien que l'on a une *injection canonique*

$$(22.5.5.2) \quad \Theta_{A'_{(K)}} \rightarrow \Omega_K^1 \otimes_k K$$

qui s'explique de la façon suivante (compte tenu de (22.5.5.1)) : pour tout $x' \in k'$, à l'élément $d_{A'_{(K)}}(x' \otimes 1_K) \otimes 1_K$ de $\Omega_{A'_{(K)}}^1 \otimes_{A'_{(K)}} K$, on fait correspondre l'élément $d_k(x'^p) \otimes 1_K$ de $\Omega_k^1 \otimes_k K$.

Lemme (22.5.6). — *Avec les notations de (22.5.5) :*

(i) *Le noyau de l'homomorphisme canonique $\pi_{A'_{(K)}} \rightarrow \Omega_K^1 \otimes_k K$ (21.3.2.2) s'identifie par (22.5.5.2) à $(\Theta_{k'/k} \otimes_k K) \cap Y_{K/k}$.*

(ii) *Soient $A_1 = A/m^2$, $A'_1 = A_1 \otimes_k k' = A'/m^2 A'$; alors l'homomorphisme caractéristique $\chi_{A'_1/A_1} : Y_{K/k} \rightarrow V = m/m^2$ (22.4.6.2) s'identifie à la restriction de l'homomorphisme caractéristique $\chi_{A/k} : Y_{K/k} \rightarrow V = m/m^2$ (20.6.24) à $(\Theta_{k'/k} \otimes_k K) \cap Y_{K/k}$.*

(i) En vertu de (20.6.9), appliqué en remplaçant A par le corps premier, B par k , C par K et E par $A_1 = A/m^2$ (extension de K par $V = m/m^2$), il suffit (cf. (22.5.5)) de vérifier que si $x' \in k'$ et si $z \in A_1$ est un élément dont la classe mod. m/m^2 est $x'^p \in k$, alors l'image de $d_k(x'^p) \otimes 1_K$ par l'homomorphisme canonique $\Omega_k^1 \otimes_k K \rightarrow \Omega_{A_1}^1 \otimes_{A_1} K$ est $d_{A_1} z \otimes 1_K$, ce qui résulte des définitions.

(ii) Comme $A'_{(K)} = K \otimes_k k' = (A'_1)_{(K)}$ (en vertu de la relation $K = A_1/(m/m^2)$), $\Theta_{A'_{(K)}}$ s'identifie à $\Theta_{(A'_1)_{(K)}} \otimes_{(A'_1)_{(K)}} K$, et la vérification résulte du même calcul que dans (i) et de la définition (22.4.5.2) de $\pi'_{(A'_1)_{(K)}} \otimes_{(A'_1)_{(K)}} K$.

Proposition (22.5.7). — *Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, A une k -algèbre qui est un anneau local régulier, m son idéal maximal, $K = A/m$ son corps résiduel; soit $V = m/m^2$, considéré comme K -espace vectoriel. Soient k' une extension finie de k telle que $k'^p \subset k$, et $A' = A \otimes_k k'$; pour que l'anneau local A' soit régulier, il faut et il suffit que la restriction de l'homomorphisme caractéristique $\chi_{A/k} : Y_{K/k} \rightarrow V$ (20.6.24) à $(\Theta_{k'/k} \otimes_k K) \cap Y_{K/k}$ soit injective.*

Il s'agit de prouver que la condition de l'énoncé est équivalente à (22.5.1.1), en désignant par m' l'idéal maximal de A' , par $K' = A'/m'$ son corps résiduel. Avec les notations de la remarque (22.5.2, (i)), on a $A'_1 = A_1 \otimes_k k'$. Or, soit $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$ une p -base de k' sur k , de sorte que $a_i^p = b_i \in k$, et k' est isomorphe au quotient de l'anneau de

polynômes $k[T_1, \dots, T_r]$ par l'idéal engendré par les polynômes $F_i = T_i^p - b_i$ ($1 \leq i \leq r$); on en déduit que A'_1 est isomorphe au quotient de l'anneau de polynômes $A_1[T_1, \dots, T_r]$ par l'idéal engendré par les F_i . On peut alors appliquer le critère (22.4.7), et la condition de l'énoncé équivaut donc au fait que $\chi'_{A'_1/A}$ soit injectif; on conclut à l'aide de (22.5.6).

Nous pouvons maintenant démontrer la réciproque de (19.6.5) :

Théorème (22.5.8). — Soient k un corps, p son exposant caractéristique, A une k -algèbre locale noethérienne. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) A est une k -algèbre formellement lisse (pour sa topologie préadique).
- b) A est géométriquement régulier sur k .
- b') Pour toute extension finie k' de k telle que $k'^p \subset k$, $A' = A \otimes_k k'$ est un anneau régulier.

Compte tenu de (19.6.6), on peut se borner au cas $p > 1$.

Le fait que a) implique b) n'est autre que (19.6.5), et b) entraîne trivialement b').

Montrons que b') entraîne que les conditions de (22.2.2) sont satisfaites; c'est évident pour la première (17.1.1) puisque b') entraîne d'abord que A est régulier. D'autre part, soit $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ une p -base de $k^{1/p}$ sur k ; on sait que les éléments $d_k(x_\alpha^p)$ forment une base du k -espace vectoriel Ω_k^1 (21.4.5), donc les éléments $d_k(x_\alpha^p) \otimes I_K$ forment une base du K -espace vectoriel $\Omega_k^1 \otimes_k K$. On en conclut (cf. (22.5.5)) que lorsque k' parcourt l'ensemble des sous-extensions de $k^{1/p}$, finies sur k , la famille des sous-espaces $\Theta_{k'/k} \otimes_k K$ de $\Omega_k^1 \otimes_k K$ est filtrante croissante et a pour réunion $\Omega_k^1 \otimes_k K$. Il résulte alors de (22.5.7) que la condition b') entraîne que $\chi_{A/k}$ est injectif, ce qui n'est autre que la condition (ii) de (22.2.2).

Corollaire (22.5.9). — Soient k un corps, A une k -algèbre locale noethérienne formellement lisse. Alors, pour tout idéal premier p de A , l'anneau local A_p est une k -algèbre formellement lisse (pour la topologie p -préadique).

En effet, avec les notations de (22.5.8, b')), il suffit de montrer que l'anneau local $A_p \otimes_k k'$ est régulier; mais comme c'est un anneau de fractions de l'anneau local $A \otimes_k k'$ et que ce dernier est régulier par hypothèse, il en est de même de $A_p \otimes_k k'$ (17.3.6).

Remarques (22.5.10). — (i) La conclusion de (22.5.8) est en défaut lorsque, dans la condition b'), on se borne aux extensions monogènes $k' = k(x)$ de k (avec $x^p \in k$). Il se peut en effet que pour toutes ces extensions k' , on ait $\Upsilon_{K/k} \cap (\Theta_{k'/k} \otimes_k K) = 0$, bien que $\Upsilon_{K/k} \neq 0$; cela signifie que pour tout $x \in k^{1/p}$ tel que $x \notin k$, on doit avoir $d_k(x^p) \otimes I_K \notin \Upsilon_{K/k}$, ou encore $d_K(x^p) \neq 0$, c'est-à-dire $x^p \notin K^p$; autrement dit, on doit avoir $K^p \cap k = k^p$, bien que K soit une extension inséparable de k . Or, on construit aisément des exemples de telles extensions : partons d'un corps parfait k_0 de caractéristique $p > 0$, soient X, Y, Z trois indéterminées et posons $k = k_0(X, Y)$ et $K = k(X^{1/p} + ZY^{1/p})$; on vérifie aisément que K vérifie les conditions précédentes, donc $\Upsilon_{K/k} \neq 0$. Appliquons maintenant le lemme (22.2.5.2) en prenant $V = K$ et pour h l'homomorphisme nul; A est alors un anneau de valuation discrète ayant K pour corps résiduel, avec $\chi_{A/k} = 0$, et n'est donc pas une k -algèbre formellement lisse par (22.2.2); toutefois $A \otimes_k k'$ est un anneau régulier pour toute extension monogène $k' \subset k^{1/p}$ de k .

(ii) Le corollaire (22.5.9) amène à considérer la question suivante : si A est une k -algèbre noethérienne, à quelles conditions l'ensemble des idéaux premiers $p \in \text{Spec}(A)$ tels que A_p soit une k -algèbre formellement lisse est-il ouvert ? Nous en aborderons plus tard certains cas particuliers.

22.6. Critère jacobien de Zariski.

Théorème (22.6.1) (critère jacobien de lissité formelle). — Soient A, B deux anneaux topologiques, $u : A \rightarrow B$ un homomorphisme continu faisant de B une A -algèbre formellement lisse, \mathfrak{J} un idéal de B (non nécessairement fermé), $C = B/\mathfrak{J}$ la A -algèbre topologique quotient. Pour que C soit une A -algèbre formellement lisse, il faut et il suffit que l'homomorphisme canonique (cf. (20.5.11.2))

(22.6.1.1)

$$\delta_{C/B/A} : \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \otimes_B C$$

soit formellement inversible à gauche (cf. (19.1.5)).

En effet, dire que B (resp. C) est une A -algèbre formellement lisse signifie (19.4.4) que l'on a $\text{Exalcotop}_A(B, L) = 0$ (resp. $\text{Exalcotop}_A(C, L) = 0$) pour tout B -module (resp. C -module) discret L annulé par un idéal ouvert de B (resp. C). Comme par hypothèse $\text{Exalcotop}_A(B, L) = 0$ pour tout C -module discret L annulé par un idéal ouvert de C , dire que C est une A -algèbre formellement lisse signifie donc que l'homomorphisme canonique $\text{Exalcotop}_A(C, L) \rightarrow \text{Exalcotop}_A(B, L)$ est injectif, et le théorème résulte donc de (20.7.8).

Rappelons (19.5.3) que lorsque B et C sont des A -algèbres formellement lisses, $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est un C -module topologique *formellement projectif*; en outre, les homomorphismes canoniques $\varphi_n : \mathbf{S}_C^n(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) \rightarrow \mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1}$ sont des *bimorphismes formels* lorsque B est supposé être un anneau préadmissible.

Corollaire (22.6.2). — Les hypothèses et notations étant celles de (22.6.1), supposons de plus que dans B le carré de tout idéal ouvert soit ouvert, et que sur \mathfrak{J} la topologie induite par celle de B soit identique à la topologie déduite de celle de B (19.0) (on notera que ces deux conditions sont vérifiées lorsque B est noethérien et sa topologie préadique (0_I, 7.3.2), ou si la topologie de B est la topologie \mathfrak{J} -préadique). Soit (b_λ) un système fondamental d'idéaux ouverts de B et posons $B_\lambda = B/b_\lambda$ pour tout λ . Alors :

- (i) Les conditions suivantes sont équivalentes :
 - a) C est une A -algèbre formellement lisse.
 - b) Pour tout λ , l'homomorphisme de B_λ -modules

(22.6.2.1)

$$(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) \otimes_B B_\lambda \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \otimes_B B_\lambda$$

déduit de $\delta_{C/B/A}$ par tensorisation, est inversible à gauche (autrement dit un isomorphisme sur un facteur direct de $\Omega_{B/A}^1 \otimes_B B_\lambda$).

- (ii) Supposons de plus que l'anneau topologique C soit préadmissible (0_I, 7.1.2) et

soit \mathfrak{L} un idéal de définition de C ; alors les conditions a) et b) de (i) équivalent aussi à :
c) L'homomorphisme de (C/\mathfrak{L}) -modules

$$(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) \otimes_C (C/\mathfrak{L}) \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \otimes_B (C/\mathfrak{L})$$

est inversible à gauche.

Les hypothèses entraînent que sur $\Omega_{B/A}^1$ la topologie est déduite de celle de B (20.4.5), donc (i) résulte de (22.6.1) et de (19.1.7). D'autre part, rappelons (20.4.9) que puisque B est une A -algèbre formellement lisse, $\Omega_{B/A}^1$ est un B -module *formellement projectif*, donc $\Omega_{B/A}^1 \otimes_B B_\lambda$ est un B_λ -module projectif pour tout λ (19.2.4); l'équivalence de c) avec a) et b) lorsque C est préadmissible résulte alors de (19.1.9).

En particulier :

Corollaire (22.6.3). — Soient A un anneau, B une A -algèbre, \mathfrak{J} un idéal de B , $C = B/\mathfrak{J}$; on suppose A, B, C munis des topologies discrètes et que B est une A -algèbre formellement lisse. Pour que C soit une A -algèbre formellement lisse, il faut et il suffit que l'homomorphisme canonique (22.6.1.1) soit inversible à gauche.

On notera que puisque toute A -algèbre C est quotient d'une algèbre de polynômes $A[T_\alpha]_{\alpha \in I}$, et que cette dernière est formellement lisse (19.3.3), le critère (22.6.3) permet en principe de reconnaître si C est une A -algèbre formellement lisse.

Proposition (22.6.4). — Soient A un anneau, B une A -algèbre formellement lisse (pour les topologies discrètes), \mathfrak{J} un idéal de B , $C = B/\mathfrak{J}$; on suppose que $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est un C -module de type fini. Soient \mathfrak{p} un idéal premier de C , $\mathbf{k}(\mathfrak{p})$ le corps résiduel de $C_\mathfrak{p}$, \mathfrak{p}' l'image réciproque de \mathfrak{p} dans B , \mathfrak{q} l'idéal premier de A image réciproque de \mathfrak{p}' . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $C_\mathfrak{p}$ est une $A_{\mathfrak{q}}$ -algèbre formellement lisse (pour les topologies discrètes).
- a') $C_\mathfrak{p}$ est une A -algèbre formellement lisse (pour les topologies discrètes).
- b) L'homomorphisme canonique

$$(22.6.4.1) \quad (\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2) \otimes_C \mathbf{k}(\mathfrak{p}) \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \otimes_B \mathbf{k}(\mathfrak{p})$$

est injectif.

- c) Il existe $f \in C - \mathfrak{p}$ tel que C_f soit une A -algèbre formellement lisse.

Si de plus B est noethérien, les conditions précédentes sont encore équivalentes à

- d) $C_\mathfrak{p}$ est une $A_{\mathfrak{q}}$ -algèbre formellement lisse pour la topologie \mathfrak{p} -préadique sur $C_\mathfrak{p}$ et la topologie discrète (ou la topologie \mathfrak{q} -préadique) sur $A_{\mathfrak{q}}$.

Comme $A_{\mathfrak{q}}$ est une A -algèbre formellement lisse (19.3.5, (iv) et (ii)), on sait déjà que a) et a') sont équivalentes (19.3.5, (ii)). On a $C_\mathfrak{p} = B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{J}B_{\mathfrak{p}}$, et $B_{\mathfrak{p}}$ est une A -algèbre formellement lisse pour la topologie discrète (19.3.5, (iv)); en outre $\Omega_{B_{\mathfrak{p}}/A}^1 = (\Omega_{B/A}^1)_{\mathfrak{p}}$ (20.5.9). L'équivalence de a') et b) résulte alors de l'application de (22.6.3) à $B_{\mathfrak{p}}$ et $C_\mathfrak{p}$, en tenant compte de ce que $\Omega_{B/A}^1$ est un B -module projectif ((20.4.9) et (19.2.1)) et $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ un B -module de type fini, et en utilisant (19.1.12). L'application de (19.1.12) prouve aussi l'équivalence de b) et c). Enfin, notons que puisque $B_{\mathfrak{p}}$ est une $A_{\mathfrak{q}}$ -algèbre formellement lisse pour les topologies

discrètes (19.3.5, (iv)), $B_{p'}$, muni de la topologie p' -préadique, est encore une A_q -algèbre formellement lisse lorsque l'on prend sur A_q la topologie discrète ou la topologie q -préadique (19.3.8). Pour montrer l'équivalence de $b)$ et $d)$ lorsque B est noethérien, appliquons (22.6.2) à l'anneau A_q discret (ou q -préadique) et à l'anneau $B_{p'}$ muni de la topologie p' -préadique; comme C_p est préadmissible et que pC_p est un idéal de définition pour sa topologie, on peut invoquer l'équivalence de $c)$ et $a)$ dans (22.6.2).

Corollaire (22.6.5). — *Sous les hypothèses générales de (22.6.4), l'ensemble des $p \in \text{Spec}(C)$ tels que C_p soit une A -algèbre formellement lisse (ou une A_q -algèbre formellement lisse, en désignant par q l'image réciproque de p dans A) pour les topologies discrètes, est ouvert dans $\text{Spec}(C)$.*

Cela résulte de la forme $c)$ de (22.6.4). On notera que lorsque B est noethérien, on peut remplacer les topologies discrètes par les topologies préadiques.

Corollaire (22.6.6). — *Sous les hypothèses générales de (22.6.4), les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) C est une A -algèbre formellement lisse (pour les topologies discrètes).

b) Pour tout $p \in \text{Spec}(C)$ (ou seulement pour tout idéal maximal p de C), C_p est une A -algèbre formellement lisse (ou une A_q -algèbre formellement lisse, en désignant par q l'image réciproque de p dans A) pour les topologies discrètes.

En outre, lorsque B est noethérien, on peut remplacer dans b) les topologies discrètes par les topologies préadiques sur A_q et C_p .

La dernière assertion résulte de (22.6.4). En vertu de (22.6.3), la condition a) équivaut au fait que l'homomorphisme (22.6.1.1) est inversible à gauche; l'équivalence de a) et b) résulte donc de (19.1.14), compte tenu du fait que $\Omega^1_{B/A}$ est un B -module projectif et $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ un C -module de type fini.

Proposition (22.6.7). — *Soient k_0 un corps, k une extension séparable de k_0 , C une k -algèbre de type fini.*

(i) Soit p un idéal premier de C . Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) C_p est une k_0 -algèbre formellement lisse pour la topologie discrète.

b) C_p est une k_0 -algèbre formellement lisse pour la topologie p -préadique.

c) Il existe $f \in C - p$ tel que C_f soit une k_0 -algèbre formellement lisse pour la topologie discrète.

d) C_p est un anneau géométriquement régulier (19.6.5) sur k_0 .

En outre l'ensemble des $p \in \text{Spec}(C)$ ayant l'une quelconque de ces propriétés est ouvert dans $\text{Spec}(C)$.

(ii) Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) C est une k_0 -algèbre formellement lisse pour la topologie discrète.

b) Tout $p \in \text{Spec}(C)$ vérifie les conditions équivalentes de (i).

c) Tout idéal maximal m de C vérifie les conditions équivalentes de (i).

d) Pour toute extension k' de k_0 , $C \otimes_{k_0} k'$ est un anneau régulier (17.3.6); on dit encore que C est un anneau géométriquement régulier sur k_0 .

(iii) Soient $B = k[T_1, \dots, T_r]$ une algèbre de polynômes, \mathfrak{J} un idéal de B tels que C soit isomorphe à B/\mathfrak{J} . Soit q un idéal premier de B contenant \mathfrak{J} et soit $p = q/\mathfrak{J}$. Les conditions de (i) sont alors encore équivalentes à la suivante (« critère jacobien de Zariski ») :

e) Il existe un système d'éléments $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$ de \mathfrak{J} , engendrant l'idéal \mathfrak{J}_q dans B_q et des k_0 -dérivations D_j de B dans lui-même ($1 \leq j \leq m$) tels que $\det(D_j(f_i)) \notin q$.

On sait que C est toujours isomorphe à une k -algèbre de la forme B/\mathfrak{J} . Comme B est une k -algèbre formellement lisse (19.3.3) et que k , étant séparable sur k_0 , est une k_0 -algèbre formellement lisse (19.6.1), B est une k_0 -algèbre formellement lisse (19.3.5, (ii)). L'équivalence des conditions $a), b), c)$ de (i) résulte donc de (22.6.4), et celle de $a), b), c)$ dans (ii) résulte de (22.6.6); l'équivalence de $a)$ et $d)$ dans (i) résulte de (22.5.8); comme tout localisé de $C \otimes_{k_0} k'$ est aussi un localisé de $C_p \otimes_{k_0} k'$ pour un idéal premier $p \in \text{Spec}(C)$ convenable, l'équivalence de $d)$ et $b)$ dans (ii) résulte de l'équivalence de $d)$ et $a)$ dans (i). Enfin, comme Ω^1_{B/k_0} est un B -module projectif, l'équivalence du critère de Zariski $e)$ et des autres conditions de (i) découle de (19.1.12) et de (22.6.3), compte tenu de (20.4.8).

Zariski s'intéressait en fait à un critère différentiel de *régularité* pour les anneaux locaux C_p . Comme il revient au même de dire qu'un anneau local noethérien contenant un corps est régulier ou est formellement lisse en tant qu'algèbre sur son sous-corps premier (19.6.4), on obtient aussitôt un tel critère en remplaçant k_0 par le sous-corps premier de k dans (22.6.7); en particulier, on obtient le résultat suivant, que nous retrouverons plus tard (IV, 6.12.5) comme cas particulier de résultats plus généraux de Nagata :

Corollaire (22.6.8) (Zariski). — Soit C une algèbre de type fini sur un corps. Alors l'ensemble des $p \in \text{Spec}(C)$ tels que C_p soit un anneau local régulier est ouvert dans $\text{Spec}(C)$.

Remarques (22.6.9). — (i) Les énoncés de (22.6.7) sont encore valables si au lieu de supposer k séparable sur k_0 , on suppose seulement qu'il est de *multiplicité radicielle finie*, autrement dit (19.6.6) qu'il existe une extension radicielle finie k'_0 de k_0 telle que le corps résiduel de l'anneau artinien local $k \otimes_{k_0} k'_0$ soit une extension séparable k' de k'_0 . Il existe alors un k'_0 -monomorphisme $k' \rightarrow k \otimes_{k_0} k'_0$ qui, composé avec l'homomorphisme canonique $k \otimes_{k_0} k'_0 \rightarrow k'$, donne l'identité, puisque k' est une k'_0 -algèbre formellement lisse (19.6.1); on en conclut que $C \otimes_{k_0} k'_0$ est muni d'une structure de k' -algèbre de type fini, et comme k' est séparable sur k'_0 , on peut appliquer (22.6.7) à cette k' -algèbre; on en conclut notre assertion en appliquant (19.4.7). Comme nous n'aurons pas à nous servir de cette généralisation, nous en laissons le détail au lecteur. Nous ignorons par contre si les résultats de (22.6.7) sont valables sans *aucune* hypothèse sur l'extension k de k_0 .

(ii) Sous les hypothèses générales de (22.6.7), soit (k_α) une famille filtrante décroissante de sous-corps de k contenant k_0 et telle que $\bigcap_\alpha k_\alpha(k^p) = k_0(k^p)$ (où p est l'exposant caractéristique de k_0). Utilisant une méthode de décompte des dimensions due à Nagata, on peut montrer que, dans le critère jacobien (22.6.7, (iii)), on peut se borner à des dérivations D_j de B qui soient des k_α -dérivations pour un α convenable.

L'intérêt de ce résultat est qu'il y a toujours de telles familles (k_α) pour lesquelles $[k : k_\alpha]$ soit fini (21.8.6). Nous ne démontrerons pas ce raffinement du critère de Zariski, dont nous n'aurons pas à faire usage. Dans (22.7), on va donner, pour les anneaux locaux complets, une variante (due aussi à Nagata) du critère de Zariski, qui se démontre essentiellement par la même méthode (avec des difficultés techniques un peu plus grandes).

22.7. Le critère jacobien de Nagata.

(22.7.1) Le critère jacobien de Nagata est l'analogue du critère jacobien de Zariski, mais pour des anneaux quotients d'anneaux de séries formelles sur un corps. Nous en donnerons, comme Nagata [31], deux versions, présentées ici comme critères de lissité formelle.

Proposition (22.7.2). — Soient k un corps, $A = k[[T_1, \dots, T_r]]$ un anneau de séries formelles sur k , muni de sa structure usuelle de k -algèbre, q un idéal de A , $B = A/q$. Soit p un idéal premier de A contenant q . On suppose qu'il existe une sous- k -algèbre C' de $C = A/p$, isomorphe à une algèbre de séries formelles $k[[X_1, \dots, X_s]]$, telle que C soit finie sur C' et que le corps des fractions L de C soit une extension séparable de $L' = k((X_1, \dots, X_s))$ (hypothèse toujours satisfaite si k est de caractéristique 0). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $B_p = A_p/qA_p$ est une k -algèbre formellement lisse pour la topologie p -préadique.
- b) Il existe des k -dérivations D_i ($1 \leq i \leq m$) de A dans lui-même, et des éléments f_i ($1 \leq i \leq m$) de q , tels que les images des f_i dans qA_p engendrent cet idéal de A_p , et que l'on ait $\det(D_i f_j) \notin p$.
- c) B_p est un anneau régulier.

Le corps résiduel de B_p est $k(p)$; comme $k((X_1, \dots, X_s))$ est séparable sur k (21.9.6.4), $k(p)$ est séparable sur k par hypothèse, et l'on sait déjà que dans ces conditions les propriétés a) et c) sont équivalentes (19.6.4). D'ailleurs A_p est un anneau régulier ((17.1.4) et (17.3.2)), et comme son corps résiduel $k(p)$ est séparable sur k , A_p est formellement lisse sur k pour la topologie p -préadique (19.6.4). Il résulte donc de (22.6.2, (ii)) que la condition a) équivaut au fait que l'homomorphisme de L -espaces vectoriels

$$(22.7.2.1) \quad j_0 : (q/q^2) \otimes_A L \rightarrow \Omega_{A_p/k}^1 \otimes_k L = \Omega_{A/k}^1 \otimes_A L$$

soit injectif.

Considérons d'autre part l'homomorphisme composé

$$(22.7.2.2) \quad j : (q/q^2) \otimes_A L \xrightarrow{j_0} \Omega_{A/k}^1 \otimes_A L \rightarrow \hat{\Omega}_{A/k}^1 \otimes_A L$$

et montrons que la condition b) équivaut à dire que j est injectif. Notons en effet que $(q/q^2) \otimes_A L = (qA_p/q^2A_p) \otimes_{A_p} L$; la condition b) signifie que si $F_i = j(f'_i \otimes 1)$, où f'_i est l'image de f_i dans qA_p/q^2A_p , la matrice $(\langle F_i, D_i \otimes 1 \rangle)$ est inversible; donc cela entraîne que les F_i sont linéairement indépendants, et a fortiori qu'il en est de même des $f'_i \otimes 1$; mais comme ces derniers engendrent $(qA_p/q^2A_p) \otimes_{A_p} L$, on en conclut que j est injectif. Inversement, supposons j injectif, et prenons les f_i tels que les $f'_i \otimes 1$ forment

une base de $(qA_p/q^2A_p) \otimes_{A_p} L$; alors les F_i forment une base de l'image de j ; mais on sait (21.9.3) que $\hat{\Omega}_{A/k}^1$ est un A -module libre de rang r et les k -dérivations de A dans lui-même engendrent son dual; le fait que les F_i soient linéairement indépendants entraîne donc l'existence de k -dérivations D_i de A dans lui-même telles que la matrice $(\langle F_i, D_j \otimes 1 \rangle)$ soit inversible, autrement dit la condition b).

Ces remarques montrent déjà que b) entraîne a). Pour prouver inversement que la condition a) entraîne que j est injectif, considérons le diagramme commutatif

$$(22.7.2.3) \quad \begin{array}{ccc} (q/q^2) \otimes_A L & \xrightarrow{i} & \hat{\Omega}_{A/k}^1 \otimes_A L \\ \alpha \downarrow & & \parallel \\ (p/p^2) \otimes_A L & \xrightarrow{i} & \hat{\Omega}_{A/k}^1 \otimes_A L \end{array}$$

et notons le lemme suivant :

Lemme (22.7.2.4). — Soient R un anneau local régulier, m son idéal maximal, $K = R/m$ son corps résiduel. Si n est un idéal de R tel que R/n soit régulier, alors l'homomorphisme canonique

$$(22.7.2.5) \quad \alpha : (n/n^2) \otimes_R K \rightarrow (m/m^2) \otimes_R K$$

est injectif.

En effet, on sait (17.1.6) que n est engendré par une suite $(x_i)_{1 \leq i \leq t}$ faisant partie d'un système régulier de paramètres $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de R ; les images des x_i ($1 \leq i \leq t$) forment une base de $(n/n^2) \otimes_R K$, et leurs images par α font partie de la base de $(m/m^2) \otimes_R K$ formée des images des x_i pour $1 \leq i \leq n$, d'où le lemme.

Ce lemme et le diagramme (22.7.2.3) ramènent donc (en vertu de l'hypothèse a)) à prouver que i est *injectif*. Or, dans la suite

$$(22.7.2.6) \quad p/p^2 \xrightarrow{h} \hat{\Omega}_{A/k}^1 \hat{\otimes}_A (A/p) \xrightarrow{g} \hat{\Omega}_{(A/p)/k}^1 \rightarrow 0$$

on sait (20.7.20) que g est surjectif et que l'image de h est dense dans le noyau de g pour la topologie m -adique (m étant l'idéal maximal de A); comme $\hat{\Omega}_{A/k}^1$ est un A -module de type fini, tous les sous-modules du (A/p) -module $\hat{\Omega}_{A/k}^1 \otimes_A (A/p) = \hat{\Omega}_{A/k}^1 \hat{\otimes}_A (A/p)$ sont fermés pour la topologie m -adique (0_I, 7.3.5), donc la suite (22.7.2.6) est *exacte*. Tensorisant par L , il vient la suite exacte

$$(p/p^2) \otimes_A L \xrightarrow{i} \hat{\Omega}_{A/k}^1 \otimes_A L \rightarrow \hat{\Omega}_{(A/p)/k}^1 \otimes_{A/p} L \rightarrow 0.$$

Or, l'hypothèse de séparabilité faite sur L entraîne, en vertu de (21.9.5), que $\hat{\Omega}_{(A/p)/k}^1 \otimes_{A/p} L$ est de rang s sur L ; comme $\hat{\Omega}_{A/k}^1 \otimes_A L$ est de rang r sur L (21.9.3), on a $\text{rg}_L(\text{Im}(i)) = r - s$. Mais comme A/p est finie sur une sous-algèbre isomorphe à $k[[T_1, \dots, T_s]]$, on a $\dim(A/p) = s$ ((17.1.4) et (16.1.5)); donc

$$r - s = \dim(A) - \dim(A/p) = \dim(A_p)$$

par (16.5.11). Or, comme A_p est régulier (17.3.2), $\dim(A_p)$ est égal au rang sur L de pA_p/p^2A_p (17.1.1), donc au rang sur L de $(p/p^2) \otimes_A L$, ce qui achève de prouver que i est injectif.

Théorème (22.7.3). — *Soient k un corps, A un anneau local noethérien complet de corps résiduel K . On suppose que :*

- 1° $[k : k^p] < +\infty$ (où p est l'exposant caractéristique de k) ;
- 2° K est une extension finie d'une extension séparable K_0 de k ;
- 3° A est muni d'une structure de K_0 -algèbre formellement lisse (pour la topologie préadique).

Soient q un idéal de A , $B = A/q$, p un idéal premier de A contenant q . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) B_p est une k -algèbre formellement lisse (pour la topologie p -préadique).
- b) Il existe des k -dérivations D_i de A dans lui-même ($1 \leq i \leq m$) et des éléments f_i ($1 \leq i \leq m$) de q , tels que les images des f_i dans qA_p engendrent cet idéal de A_p , et que l'on ait $\det(D_i f_j) \notin p$.
- b') Il existe une sous-extension k' de K_0 , contenant K_0^p , telle que $[K_0 : k'] < +\infty$, des k' -dérivations D_i de A dans lui-même ($1 \leq i \leq m$) et des éléments f_i de q ($1 \leq i \leq m$), tels que les images des f_i dans qA_p engendrent cet idéal de A_p et que l'on ait $\det(D_i f_j) \notin p$.

Distinguons deux cas, suivant que $p=1$ ou $p>1$.

A) k est de caractéristique 0. Comme K est alors une extension séparable de K_0 , il résulte de (19.6.4) que A est K_0 -isomorphe à un anneau de séries formelles $K[[T_1, \dots, T_r]]$ muni de sa structure usuelle de K -algèbre. Mais alors, compte tenu de (19.8.8, (ii)) appliqué à A/p , on voit que les conditions générales de (22.7.2) sont vérifiées en y remplaçant k par K . En outre, en vertu de (19.6.4), il revient au même de dire que B_p est une k -algèbre formellement lisse ou une K -algèbre formellement lisse, les deux conditions étant équivalentes au fait que B_p est un anneau régulier. On peut donc appliquer les conclusions de (22.7.2), et il est immédiat que cela prouve l'équivalence de a), b) et b') (avec $k' = K_0$ dans b')).

B) k est de caractéristique $p>0$. Comme A est une K_0 -algèbre formellement lisse et que K_0 est séparable sur k , il résulte de (19.3.5, (ii)) et (19.6.1) que A est une k -algèbre formellement lisse; en vertu de (22.5.9), A_p est aussi une k -algèbre formellement lisse pour la topologie p -préadique. Il résulte donc encore de (22.6.2, (ii)) que la condition a) équivaut au fait que l'homomorphisme j_0 défini dans (22.7.2.1) (où $L = k(p)$) est injectif. Donc (19.1.12, c)) montre donc déjà que b) implique a); comme par ailleurs b') implique trivialement b), tout revient à montrer que l'hypothèse que j_0 est injectif entraîne b').

Désignons d'abord par k' une sous-extension quelconque de K_0 telle que $[K_0 : k'] < +\infty$. Notons que $\hat{\Omega}_{A/k'}^1$ est un A -module libre de type fini. Par le raisonnement de (22.7.2), il suffit de montrer que (pour un choix convenable de k'), l'homomorphisme composé

$$(22.7.3.1) \quad j' : (q/q^2) \otimes_A L \xrightarrow{j_*} \Omega_{A/k}^1 \otimes_A L \rightarrow \hat{\Omega}_{A/k'}^1 \otimes_A L$$

est *injectif*. Considérons encore le diagramme commutatif

$$(22.7.3.2) \quad \begin{array}{ccccc} (\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2) \otimes_A L & \xrightarrow{j_0} & \Omega_{A/k}^1 \otimes_A L & \longrightarrow & \hat{\Omega}_{A/k'}^1 \otimes_A L \\ \alpha \downarrow & & \parallel & & \parallel \\ (\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2) \otimes_A L & \xrightarrow{i_0} & \Omega_{A/k}^1 \otimes_A L & \longrightarrow & \hat{\Omega}_{A/k'}^1 \otimes_A L \end{array}$$

Comme j_0 est injectif, on a $\text{Ker}(j_0 \circ \alpha) = 0$. Mais comme $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau régulier et que l'hypothèse a) implique que $B_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$ est aussi un anneau régulier (19.6.5), le lemme (22.7.2.4) montre que α est injectif, d'où $\alpha^{-1}(\text{Ker } i_0) = 0$. Si i' est le composé des homomorphismes de la seconde ligne de (22.7.3.2), on a de même $\text{Ker}(i') = \alpha^{-1}(\text{Ker}(i))$, et tout revient donc à montrer que, pour un choix convenable de k' , on a

$$(22.7.3.3) \quad \text{Ker}(i') = \text{Ker}(i).$$

Mais le même raisonnement que dans (22.7.2) montre que l'on a une suite exacte

$$(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2) \otimes_A L \xrightarrow{i} \hat{\Omega}_{A/k'}^1 \otimes_A L \rightarrow \hat{\Omega}_{(A/\mathfrak{p})/k'}^1 \otimes_{A/\mathfrak{p}} L \rightarrow 0.$$

Or, les hypothèses faites permettent d'appliquer (21.9.8), donc il existe une sous-extension k' de K_0 contenant K_0^p , telle que $[K_0 : k'] < +\infty$, et pour laquelle on a

$$\text{rg}_L(\hat{\Omega}_{(A/\mathfrak{p})/k'}^1 \otimes_{A/\mathfrak{p}} L) = \dim(A/\mathfrak{p}) + \text{rg}_L Y_{L/k} + \text{rg}_{K_0} \Omega_{K_0/k'}^1.$$

Mais on a

$$\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(A) - \dim(A_{\mathfrak{p}})$$

par (16.5.11)

$$\dim(A_{\mathfrak{p}}) = \text{rg}_L((\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2) \otimes_L L)$$

puisque $A_{\mathfrak{p}}$ est régulier (17.1.1) et enfin

$$\dim(A) + \text{rg}_{K_0} \Omega_{K_0/k'}^1 = \text{rg}_L(\hat{\Omega}_{A/k'}^1 \otimes_A L)$$

en vertu de (21.9.2); on obtient donc

$$(22.7.3.4) \quad \text{rg}_L(\text{Ker}(i')) = \text{rg}_L Y_{L/k}.$$

D'autre part, le corps résiduel de $A_{\mathfrak{p}}$ étant formellement lisse sur le corps premier de k , on a une suite exacte (20.6.22.1)

$$Y_{L/k} \xrightarrow{\chi_{A_{\mathfrak{p}}/k}} (\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})/(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})^2 \xrightarrow{i} \Omega_{A_{\mathfrak{p}}/k}^1 \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} L$$

et comme $A_{\mathfrak{p}}$ est une k -algèbre formellement lisse pour la topologie \mathfrak{p} -préadique, il suit de (22.2.2) que $\chi_{A_{\mathfrak{p}}/k}$ est un homomorphisme *injectif*, donc $\text{Ker}(i)$ est isomorphe à $Y_{L/k}$, et compte tenu de (22.7.3.4) et de ce que $\text{Ker}(i) \subset \text{Ker}(i')$, cela achève de prouver (22.7.3.3) et par suite le théorème.

Remarque (22.7.4). — On a en fait montré (en utilisant (21.9.6)) que la condition b') est encore équivalente aux autres conditions de (22.7.3) lorsque l'on assujettit k' à être un des corps d'une famille filtrante décroissante (k_α) de sous-corps de K_0 contenant K_0^p , tels que $[K_0 : k_\alpha] < +\infty$ pour tout α et que $\bigcap_\alpha k_\alpha = K_0^p$.

Corollaire (22.7.5). — *Sous les hypothèses générales de (22.7.3), l'ensemble des idéaux premiers $n \in \text{Spec}(B)$ tels que B_n soit une k -algèbre formellement lisse (pour la topologie n -préadique) est ouvert dans $\text{Spec}(B)$.*

Avec les notations de (22.7.3), il suffit de voir que si B_p est formellement lisse sur k , il en est de même de $B_{p'}$ pour tout $p' \in V(q)$ assez voisin de p dans $\text{Spec}(A)$. Or, si les k -dérivations D_i et les éléments f_i de q vérifient le critère $b)$ de (22.7.3), on a aussi $f = \det(D_i f_i) \notin p'$ pour $p' \in D(f)$; d'autre part, il existe un $g \notin p$ tel que les images des f_i dans $qA_{p'}$ engendrent $qA_{p'}$ pour $p' \in D(g)$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 1, prop. 2), ce qui achève de prouver le corollaire.

Corollaire (22.7.6) (Nagata). — *Soit B un anneau local noethérien complet contenant un corps. Alors l'ensemble des $n \in \text{Spec}(B)$ tels que B_n soit régulier est ouvert dans $\text{Spec}(B)$.*

En effet, B est une algèbre sur un corps premier k , donc (19.8.8, (i)) de la forme A/q , où $A = K_0[[T_1, \dots, T_n]]$ est un anneau de séries formelles et K_0 une extension de k ; d'autre part, dire que B_n est régulier équivaut à dire que c'est une k -algèbre formellement lisse pour la topologie n -préadique (19.6.4). Toutes les conditions d'application de (22.7.5) sont donc réalisées.

Remarques (22.7.7). — (i) Nous verrons plus loin, avec Nagata, en utilisant (22.7.6), que l'on peut étendre la conclusion de (22.7.6) au cas d'un anneau local noethérien complet quelconque (IV, 6.12.7).

(ii) La conclusion du théorème (22.7.3) n'est plus nécessairement exacte lorsqu'on ne suppose plus que $[k : k^p]$ soit fini. Prenons par exemple $k = \mathbf{F}_p(X_n)_{n \geq 0}$, $A = k[[T, U]]$, q égal à l'idéal principal Af , où $f = U^p - \sum_{n=0}^{\infty} X_n T^{np}$; A est un anneau factoriel dans lequel f est un élément extrémal, car il est extrémal dans l'anneau de polynômes $k((T))[U]$, donc aussi dans l'anneau de séries formelles $k((T))[[U]]$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 3), et a fortiori dans A . Prenons $p = q$, de sorte que B_p est le corps désigné par E dans (21.9.7), qui est séparable sur k (*loc. cit.*), donc une k -algèbre formellement lisse. Mais on a ici, avec les notations de (22.7.3), $k = K_0 = K$, et les k -dérivations de A dans lui-même sont les combinaisons linéaires de $\partial/\partial T$ et $\partial/\partial U$; comme on a $\partial f/\partial T = \partial f/\partial U = 0$, les critères $b)$ et $b')$ de (22.7.3) ne sont pas vérifiés.

§ 23. ANNEAUX JAPONAIS

Les résultats de ce paragraphe seront complétés dans IV, (7.6) et (7.7).

23.1. Anneaux japonais.

Définition (23.1.1). — *On dit qu'un anneau intègre A est un anneau japonais si, pour toute extension finie K' de son corps des fractions K , la fermeture intégrale A' de A dans K' est*

un A -module de type fini (autrement dit, une A -algèbre finie). On dit qu'un anneau A est universellement japonais si toute A -algèbre intègre de type fini est un anneau japonais.

Il est clair que si A est un anneau japonais, tout anneau de fractions $S^{-1}A$ est alors un anneau japonais, car (avec les notations précédentes) $S^{-1}A'$ est la fermeture intégrale de $S^{-1}A$ dans K' , et est évidemment un $S^{-1}A$ -module de type fini.

Un anneau intègre noethérien, même un *anneau de valuation discrète*, n'est pas nécessairement un anneau japonais [30].

Proposition (23.1.2). — Soient A un anneau noethérien intègre, K son corps des fractions. Si, pour toute extension radicielle finie K' de K , la fermeture intégrale de A dans K' est un A -module de type fini, alors A est un anneau japonais.

Comme A est noethérien, il suffit, pour vérifier que A est un anneau japonais, de voir que pour toute extension quasi-galoisienne finie L de K , la fermeture intégrale B de A dans L est un A -module de type fini. Or L est une extension galoisienne de la plus grande extension radicielle K' de K contenue dans L ; et si A' est la fermeture intégrale de A dans K' , B est la fermeture intégrale de A' dans L . Mais on sait que dans une extension séparable de K' , la fermeture intégrale de A' est un A' -module de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 1, no 6, cor. 1 de la prop. 20), d'où la proposition.

Il résulte de (23.1.2) que lorsque K est de caractéristique o , dire que A est un anneau japonais signifie que sa *clôture intégrale* A' est un A -module de type fini.

Théorème (23.1.3) (Tate). — Soient A un anneau intègre noethérien, $x \neq 0$ un élément de A . Supposons vérifiées les conditions suivantes :

- (i) A est intégralement clos.
- (ii) $p = xA$ est premier et A est séparé et complet pour la topologie p -préadique.
- (iii) A/xA est un anneau japonais.

Alors A est un anneau japonais.

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme (23.1.3.1). — Soient A un anneau, x un élément de A non diviseur de o dans A et tel que $xA = p$ soit premier; alors, pour tout entier $n > o$, l'image réciproque de $x^n A_p$ dans A est $x^n A$.

En effet, supposons que $b \in A$ soit un élément tel que $b/1 = x^n a/s$ dans A_p , où $a \in A$ et $s \notin p$; il existe donc $s' \notin p$ tel que $s' sb = x^n as'$, d'où $s' sb \in p$, et comme $s' s \notin p$, cela entraîne $b \in p$, autrement dit $b = xb'$ avec $b' \in A$; puisque x est non diviseur de o , on en conclut $s' sb' = x^{n-1} as$ et il suffit de raisonner par récurrence sur n .

Pour démontrer le théorème, on peut se borner au cas où le corps des fractions K de A est de caractéristique $p > o$, puisque A est intégralement clos. Soit K' une extension radicielle finie de K , de sorte qu'il existe une puissance $q = p^e$ telle que $K'^q \subset K$; en remplaçant K' par une extension radicielle plus grande, on peut même supposer qu'il existe $y \in K'$ tel que $y^q = x$. Soit A' la fermeture intégrale de A dans K' ; comme A est intégralement clos, A' est l'ensemble des $x' \in K'$ tels que $x'^q \in A' \cap K = A$. Posons $V = A_p$; l'idéal maximal $m = xV$ de V étant principal, on sait que l'anneau local noethérien V est un *anneau de valuation discrète* (17.1.4); comme V est intégralement clos, le même

raisonnement que ci-dessus montre que la fermeture intégrale V' de V dans K' est l'ensemble des $x' \in K'$ tels que $x'^q \in V$; on sait (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VI, § 8, no 6, prop. 6, et chap. V, § 2, no 3, lemme 4) que V' est un *anneau de valuation discrète*, dont l'idéal maximal m' est l'ensemble des $x'^q \in K'$ tels que $x'^q \in m$ et en outre le corps résiduel V'/m' est une extension *finie* de V/m (*loc. cit.*, chap. VI, § 8, no 1, lemme 2). Montrons que, pour tout entier $n > 0$, on a

$$(23.1.3.2) \quad m'^n \cap A' = y^n A'.$$

En effet, comme $y^q = x$, on a $y \in m'$, donc $y^n A' \subset m'^n \cap A'$. Inversement, soit $x' \in m'^n \cap A'$, et posons $x' = z'y^n$ avec $z' \in K'$. On a $x'^q \in A'$; d'autre part, x' est somme de produits $t'_1 \dots t'_n$ avec $t'_i \in m'$, donc $t'_i \in m$, et l'on en conclut que $x'^q \in m^n \cap A$. Or le lemme (23.1.3.1) prouve que $m^n \cap A = x^n A$, donc on a $z'^q x^n \in x^n A$, ou encore $z'^q \in A$ puisque $x \neq 0$, ce qui établit (23.1.3.2).

Montrons en second lieu que sur A' la topologie xA' -préadique est *séparée*; cette topologie est aussi la topologie yA' -préadique de A' , et il résulte de (23.1.3.2) que cette topologie est induite par la topologie m' -préadique de V' qui est séparée puisque V' est un anneau de valuation discrète.

Prouvons ensuite que A'/xA' est un A -module de *type fini*. Comme $x = y^q$ et que $y^k A'/y^{k+1} A'$ est isomorphe à A'/yA' , on peut se borner à montrer que A'/yA' est un A -module de type fini; mais la formule (23.1.3.2) appliquée pour $n=1$ montre que A'/yA' est un sous-anneau de V'/m' , c'est-à-dire du *corps résiduel* de V' , qui est une extension *finie* du corps résiduel V/m de V . Or V/m est le corps des fractions de A/p , et comme A' est entier sur A , A'/yA' est entier sur A/p , donc contenu dans la fermeture intégrale de A/p dans V'/m' ; comme par hypothèse A/p est un anneau japonais noethérien, A'/yA' est un (A/p) -module de type fini, et *a fortiori* un A -module de type fini.

Cela étant, la topologie xA' -préadique de A' étant séparée, A' est un sous-anneau de son complété \hat{A}' pour cette topologie; mais puisque A'/xA' est un A -module de type fini et que A est séparé et complet pour la topologie xA -préadique, \hat{A}' est un A -module de type fini en vertu de (0_I, 7.2.9), donc il en est de même de A , C.Q.F.D.

Corollaire (23.1.4). — Soit A un anneau japonais noethérien et intégralement clos. Alors tout anneau de séries formelles $A[[T_1, \dots, T_r]]$ est un anneau japonais.

On sait que pour tout anneau noethérien intégralement clos B , l'anneau de séries formelles $B[[T]]$ est noethérien et intégralement clos (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 1, no 4, prop. 14); on peut donc, par récurrence sur n , se borner à prouver que $A[[T]]$ est un anneau japonais. Or l'élément $x = T$ vérifie toutes les conditions de (23.1.3), d'où la conclusion.

Théorème (23.1.5) (Nagata). — Tout anneau local noethérien intègre complet A est un anneau japonais.

On sait (19.8.8, (ii)) qu'il existe un sous-anneau B de A qui est un anneau local complet et *régulier*, tel que A soit une B -algèbre *finie*; il suffit évidemment de prouver

que B est un anneau japonais, autrement dit, on peut se borner au cas où A est en outre régulier. Raisonnons par récurrence sur $n = \dim(A)$, le théorème étant évident pour $n = 0$. Supposons donc $n > 0$, et, en désignant par m l'idéal maximal de A , soit x un élément de $m - m^2$; on sait (17.1.8) que A/xA est un anneau régulier, et en outre ((17.1.7) et (16.3.4)) que $\dim(A/xA) = n - 1$; de plus, l'idéal xA est fermé dans A (0_I, 7.3.5), donc A/xA est complet. En vertu de l'hypothèse de récurrence, A/xA est donc un anneau japonais, et il résulte alors de (23.1.3) qu'il en est de même de A .

Corollaire (23.1.6). — Soient A un anneau local noethérien intègre complet, K son corps des fractions, K' une extension finie de K ; alors la fermeture intégrale A' de A dans K' est un anneau local complet.

On sait déjà par (23.1.5) que A' est une A -algèbre finie, donc un anneau semi-local noethérien complet, et par suite un composé direct d'anneaux locaux; mais comme A' est intègre, c'est nécessairement un anneau local.

Proposition (23.1.7). — Soient A un anneau local noethérien intègre, K son corps des fractions, K' une extension finie de K , A' la fermeture intégrale de A dans K' . On suppose que le complété \hat{A} est réduit, et l'on désigne par R son anneau total des fractions.

(i) Si l'anneau $R \otimes_K K'$ est réduit (ce qui aura lieu en particulier lorsque K' est une extension séparable de K , R étant composé direct de corps, extensions de K (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 7, n° 3, cor. 1 du th. 1)), alors A' est un A -module de type fini.

(ii) Si en particulier R est une K -algèbre séparable, alors A est un anneau japonais.

(i) Posons pour simplifier $A_1 = \hat{A}$, $A'_1 = A' \otimes_A A_1$, $K'_1 = K' \otimes_A A_1$. Comme A_1 est un A -module plat (0_I, 7.3.5), A'_1 s'identifie à un sous-anneau de K'_1 et est évidemment entier sur A_1 . D'autre part, si l'on pose $K_1 = K \otimes_A A_1$, on peut écrire $K'_1 = K' \otimes_K K_1$; comme A est intègre et que A_1 est un A -module plat, tout élément $\neq 0$ de A est A_1 -régulier (0_I, 6.3.4); comme $K = S^{-1}A$, où $S = A - \{0\}$, on a $K_1 = S^{-1}A_1$, et la remarque précédente prouve que K_1 s'identifie à un sous-anneau de l'anneau total des fractions R de A_1 . Puisque tout K -module est plat, K'_1 s'identifie à un sous-anneau de $K' \otimes_K R$, qui par hypothèse est réduit et est une R -algèbre finie. Désignons par q_i ($1 \leq i \leq n$) les idéaux premiers minimaux de A_1 , par B_i l'anneau intègre A_1/q_i , par L_i le corps des fractions de B_i , de sorte que R est composé direct des L_i , et $K' \otimes_K R$ composé direct des $K' \otimes_K L_i$; ces dernières K -algèbres, étant réduites, sont des composées directes de corps, extensions finies des L_i . Comme B_i est un anneau local intègre complet, le théorème de Nagata (23.1.5) prouve que la fermeture intégrale de B_i dans $K' \otimes_K L_i$ est un B_i -module de type fini, et a fortiori un A_1 -module de type fini; comme tout élément de $K' \otimes_K L_i$ qui est entier sur A_1 est aussi entier sur B_i (étant annulé par q_i), on en conclut finalement que la fermeture intégrale de A_1 dans $K' \otimes_K R$ est un A_1 -module de type fini. Mais comme A'_1 est contenu dans cette fermeture intégrale et que A_1 est noethérien, A'_1 est aussi un A_1 -module de type fini. Enfin, comme A_1 est un A -module fidèlement plat (0_I, 7.3.5), on en conclut que A' est un A -module de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 3, n° 6, prop. 11).

(ii) L'hypothèse entraîne que les L_i sont des extensions séparables de K , donc $K' \otimes_K L_i$ est réduit (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 7, no 3, th. 1) et l'on peut appliquer (i) à toute extension finie K' de K , ce qui démontre notre assertion.

23.2. Clôture intégrale d'un anneau local noethérien intègre.

(23.2.1) Dans ce qui suit, pour tout anneau A , nous noterons A_{red} pour simplifier, le quotient de A par son nilradical (de sorte que si $X = \text{Spec}(A)$, on a $X_{\text{red}} = \text{Spec}(A_{\text{red}})$).

Nous dirons qu'un anneau *local* A est *unibranche* si l'anneau A_{red} est intègre et si la clôture intégrale de A_{red} est un anneau *local*, ce qui généralise la définition donnée dans (III, 4.3.6). Nous dirons que A est *géométriquement unibranche* s'il est unibranche et si le corps résiduel de l'anneau local, clôture intégrale de A_{red} , est une extension *radicielle* de celui de A . Il est clair qu'un anneau local intégralement clos est géométriquement unibranche; il résulte de (23.1.6) qu'un anneau local noethérien intègre *complet* est unibranche.

Lemme (23.2.2) (*). — Soient A un anneau intègre, A' sa clôture intégrale; pour que le morphisme canonique $f : \text{Spec}(A') \rightarrow \text{Spec}(A)$ soit radiciel, il faut et il suffit que pour tout $p \in \text{Spec}(A)$, A'_p soit géométriquement unibranche; lorsqu'il en est ainsi, f est un homéomorphisme.

En effet, pour tout $p \in \text{Spec}(A)$, la clôture intégrale de A_p est A'_p (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 1, no 5, prop. 16), et tous les idéaux premiers de A'_p au-dessus de pA_p sont maximaux (*loc. cit.*, § 2, no 1, prop. 1). Dire que f est *injectif* signifie donc que pour tout $p \in \text{Spec}(A)$, A'_p est un anneau *local*, c'est-à-dire que les A_p sont unibranches. Dire que tout A_p est géométriquement unibranche signifie alors que f est radiciel en vertu de (I, 3.5.8). Lorsqu'il en est ainsi, f est surjectif et fermé (II, 6.1.10), donc un homéomorphisme.

Lemme (23.2.3). — Soient A un anneau intègre, K son corps des fractions, B un anneau noethérien, $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneau faisant de B un A -module plat. Soit K' une extension de K ; posons $B_1 = B_{\text{red}}$, et soit R l'anneau total des fractions de B_1 . Alors, pour toute sous- A -algèbre A' de K' , l'homomorphisme canonique

$$(23.1.8.1) \quad (A' \otimes_A B)_{\text{red}} \rightarrow (K' \otimes_A R)_{\text{red}}$$

est injectif.

On peut en effet considérer l'homomorphisme canonique $h : A' \otimes_A B \rightarrow K' \otimes_A R$ comme composé des homomorphismes suivants

$$A' \otimes_A B \xrightarrow{u} K' \otimes_A B \xrightarrow{v} K' \otimes_A B_1 \xrightarrow{w} K' \otimes_A R.$$

Comme B est un A -module plat, u est injectif; de même, K' étant un K -module plat et K un A -module plat, K' est un A -module plat, et w est donc injectif puisque B_1 est réduit, donc l'homomorphisme $B_1 \rightarrow R$ injectif. Enfin, pour la même raison, si \mathfrak{N} est

(*) Dans la suite de ce numéro, nous utilisons des notions et résultats exposés au chap. IV, §§ 2 et 5; comme les résultats de ce numéro ne sont pas utilisés avant le chap. IV, § 6, cela n'entraîne pas de cercle vicieux.

le nilradical de B , le noyau de v est $K' \otimes_A \mathfrak{N}$, donc il est contenu dans le nilradical de $K' \otimes_A B$; on en conclut aussitôt que si l'image par $h = w \circ v \circ u$ d'un élément $x \in A' \otimes_A B$ est nilpotent, x est nilpotent, ce qui prouve le lemme.

Proposition (23.2.4). — Soient A un anneau intègre, K son corps des fractions, B un anneau noethérien, \mathfrak{q}_i ($1 \leq i \leq n$) ses idéaux premiers minimaux, $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. On suppose que les B/\mathfrak{q}_i sont des anneaux japonais, et que B soit un A -module plat. Soit K' une extension finie de K , et soit (C_λ) la famille filtrante croissante des sous-anneaux de K' qui sont des A -algèbres finies et admettent K' pour corps des fractions; la réunion A' des C_λ est donc la fermeture intégrale de A dans K' . Alors :

(i) Il existe un indice α tel que pour $\lambda \geq \alpha$, l'homomorphisme canonique

$$(23.2.4.1) \quad (C_\alpha \otimes_A B)_{\text{red}} \rightarrow (C_\lambda \otimes_A B)_{\text{red}}$$

soit bijectif.

(ii) Si en outre B est un A -module fidèlement plat, le morphisme $\text{Spec}(A') \rightarrow \text{Spec}(C_\alpha)$ est radiciel.

(i) Soit $B_1 = B_{\text{red}}$, et soit R l'anneau total des fractions de B_1 ; comme A est intègre et B un A -module plat, tout élément $\neq 0$ de A est B -régulier (0_I, 6.3.4), donc l'homomorphisme composé $A \xrightarrow{\varphi} B \rightarrow B_1$ se prolonge en un homomorphisme $K \rightarrow R$; on peut alors écrire $K' \otimes_A R = (K' \otimes_A K) \otimes_K R$, et comme $K' \otimes_A K$ s'identifie à K' , on a $K' \otimes_A R = K' \otimes_K R$. Comme R est composé direct des corps des fractions L_i des B/\mathfrak{q}_i , $K' \otimes_A R$ est composé direct des $K' \otimes_K L_i$, et par suite $(K' \otimes_A R)_{\text{red}}$ est composé direct d'un nombre fini d'extensions finies des L_i . En vertu de l'hypothèse, la fermeture intégrale de B/\mathfrak{q}_i dans une extension finie de L_i est un (B/\mathfrak{q}_i) -module de type fini, donc un B -module de type fini; on en conclut que la fermeture intégrale B' de B dans $(K' \otimes_A R)_{\text{red}}$ est un B -module de type fini. En vertu de (23.2.3), les $(C_\lambda \otimes_A B)_{\text{red}}$ s'identifient canoniquement à des sous-anneaux de $(K' \otimes_A R)_{\text{red}}$ qui sont des B -algèbres finies, donc contenues dans B' . Comme B est noethérien et B' un B -module de type fini, la famille filtrante des $(C_\lambda \otimes_A B)_{\text{red}}$ admet un plus grand élément $(C_\alpha \otimes_A B)_{\text{red}}$, ce qui prouve (i).

(ii) Comme B est un A -module fidèlement plat, il suffit (IV, 2.6.1, (v)) de montrer que le morphisme $\text{Spec}(A' \otimes_A B) \rightarrow \text{Spec}(C_\alpha \otimes_A B)$ est radiciel, ou, ce qui revient au même (I, 5.1.6) que le morphisme $\text{Spec}(A' \otimes_A B)_{\text{red}} \rightarrow \text{Spec}(C_\alpha \otimes_A B)_{\text{red}}$ est radiciel; mais on a $A' \otimes_A B = \varinjlim_{\lambda} (C_\lambda \otimes_A B)$, donc (IV, 5.13.2) $(A' \otimes_A B)_{\text{red}} = \varinjlim_{\lambda} (C_\lambda \otimes_A B)_{\text{red}}$, et la conclusion résulte de (i).

Corollaire (23.2.5). — Soient A un anneau local noethérien intègre, K son corps des fractions, K' une extension finie de K . Soit (C_λ) la famille filtrante croissante des sous-anneaux de K' qui sont des A -algèbres finies (donc des anneaux noethériens semi-locaux (Bourbaki, Alg. comm., chap. IV, § 2, n° 5, cor. 3 de la prop. 9)) et admettent K' pour corps des fractions. Alors il existe α tel que l'homomorphisme $(\hat{C}_\alpha)_{\text{red}} \rightarrow (\hat{C}_\lambda)_{\text{red}}$ soit un isomorphisme pour $\lambda \geq \alpha$, et si A' est la fermeture intégrale de A dans K' , le morphisme $\text{Spec}(A') \rightarrow \text{Spec}(C_\alpha)$ est radiciel (cf. (23.2.2)).

On applique (23.2.4) en prenant $B = \hat{A}$; comme les B/q_i sont des anneaux locaux noethériens complets, ce sont des anneaux japonais (23.1.5) et B est un A -module fidèlement plat (**0_I**, 7.3.5); en outre on a $C_\lambda \otimes_A B = \hat{C}_\lambda$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 4, th. 3 et chap. IV, § 2, n° 5, cor. 3 de la prop. 9).

Corollaire (23.2.6). — *Sous les hypothèses de (23.2.5), la fermeture intégrale A' de A dans K' est un anneau semi-local; si m est l'idéal maximal de A , alors, pour tout idéal maximal m' de A' , A'/m' est une extension finie de A/m .*

Le fait que l'homomorphisme $(\hat{C}_\alpha)_{\text{red}} \rightarrow (\hat{C}_\lambda)_{\text{red}}$ soit bijectif pour $\lambda \geq \alpha$ entraîne que le nombre des idéaux maximaux de C_λ est constant pour $\lambda \geq \alpha$ et que si m_α est un idéal maximal de C_α et m_λ l'unique idéal maximal de C_λ au-dessus de m_α , les corps C_λ/m_λ et C_α/m_α sont canoniquement isomorphes. La conclusion résulte de ce que $m' = \varinjlim m_\lambda$ et $A'/m' = \varinjlim (C_\lambda/m_\lambda)$ (**0_{III}**, 10.3.1.3).

Proposition (23.2.7) (Y. Mori). — *Soient A un anneau local noethérien intègre, K son corps des fractions, A' la clôture intégrale de A . Alors A' est un anneau de Krull (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 1) semi-local; autrement dit, il existe une famille (V_λ) d'anneaux de valuation discrète ayant K pour corps des fractions, tels que $A' = \bigcap_\lambda V_\lambda$ et que tout $x \in K$ appartienne à tous les V_λ sauf pour un nombre fini d'entre eux. En outre, il existe un sous-anneau C de K qui est une A -algèbre finie, et telle que les V_λ soient les clôtures intégrales des anneaux C_{p_λ} , où (p_λ) est la famille des idéaux premiers de hauteur 1 de l'anneau local C .*

Prouvons d'abord le lemme suivant :

Lemme (23.2.7.1). — *Soient A, B deux anneaux, $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme faisant de B un A -module fidèlement plat. On suppose que A est intègre; alors, si $C = B_{\text{red}}$, l'homomorphisme composé $\psi : A \rightarrow B \rightarrow B_{\text{red}} = C$ est injectif et se prolonge en un homomorphisme injectif du corps des fractions K de A dans l'anneau total des fractions R de C ; en outre, si C' est la fermeture intégrale de C dans R , $C' \cap K$ est la clôture intégrale de A .*

Comme A est intègre et φ injectif, l'intersection de $\varphi(A)$ et du nilradical \mathfrak{N} de B est réduite à 0, et comme $C = B/\mathfrak{N}$, ψ est injectif. Tout $a \neq 0$ dans A étant non diviseur de zéro dans A ne l'est pas non plus dans B par platitude (**0_I**, 6.3.4); on en déduit que a n'est pas non plus diviseur de 0 dans C , car si l'on avait $ax \in \mathfrak{N}$ pour un $x \notin \mathfrak{N}$ dans B , on en tirerait $a^n x^n = 0$ pour un entier n , ce qui contredit ce qui précède puisque $x^n \neq 0$. On peut donc prolonger ψ en un homomorphisme injectif de K dans R . Pour prouver la dernière assertion, notons qu'il est clair que la clôture intégrale A' de A est contenue dans $C' \cap K$. Inversement, soit $x \in C' \cap K$; x est donc entier sur C , et *a fortiori* sur B , autrement dit $B[x]$ est une B -algèbre finie; d'ailleurs, K s'identifie à un sous-anneau de $B \otimes_A K$, et le sous-anneau $B[x]$ de $B \otimes_A K$ s'identifie à $B \otimes_A A[x]$ par platitude; on en conclut que $A[x]$ est un A -module de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I^{er}, § 3, n° 6, prop. 11), donc que $x \in A'$.

Ce lemme étant établi, nous allons l'appliquer à l'injection canonique de A dans son complété \hat{A} , qui est un A -module fidèlement plat; $B = (\hat{A})_{\text{red}} = \hat{A}/\mathfrak{N}$ (où \mathfrak{N} est le nilradical de \hat{A}) est un anneau local noethérien complet réduit, dont l'anneau total des

fractions R est donc composé direct d'un nombre fini de corps L_i ; l'image canonique B_i de B dans L_i est un anneau local noethérien *intègre et complet*, dont L_i est le corps des fractions, et la fermeture intégrale B' de B dans R est *composée directe* des B'_i , où B'_i est la clôture intégrale de B_i . Mais en vertu de (23.1.5), B'_i est une B_i -algèbre *finie*, donc un anneau local *noethérien* intégralement clos. On sait (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 1, n° 3, cor. du th. 2) que B'_i est un anneau de Krull. Or, pour tout i , on a un homomorphisme $\varphi_i : K \rightarrow L_i$, qui est injectif, et par suite $\varphi_i^{-1}(B'_i)$ est un anneau de Krull dans K . Mais comme $A' = B' \cap K$ en vertu du lemme et que $B' = \bigcap_i \varphi_i^{-1}(B'_i)$, A' est intersection d'un nombre fini d'anneaux de Krull et est par suite un anneau de Krull. Pour prouver la dernière assertion de la proposition, notons qu'il existe une A -algèbre finie $C \subset K$ telle que le morphisme $\text{Spec}(A') \rightarrow \text{Spec}(C)$ soit radiciel et un homéomorphisme (23.2.4); pour tout idéal premier $p' \in \text{Spec}(A')$, p' est donc le seul idéal premier de A' au-dessus de $p = p' \cap C$ et $A'_{p'}$ la clôture intégrale de C_p ; d'autre part le fait que $\text{Spec}(A') \rightarrow \text{Spec}(C)$ est un homéomorphisme entraîne que l'application $p' \mapsto p' \cap C$ est une *bijection* de l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de A' sur l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de C ; d'où la conclusion, compte tenu de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 1, n° 6, th. 4.

Remarques (23.2.8). — (i) On aura soin de noter, dans l'application de (23.2.6) et (23.2.7), que l'anneau A' n'est pas nécessairement un anneau noethérien, comme le montre un exemple de Nagata avec $\dim(A) = 3$ [30].

(ii) Les conclusions de (23.2.7) sont encore valables si A' est la fermeture intégrale de A dans une extension *finie* K' de K ; il suffit en effet de considérer une A -algèbre finie B dont K' est le corps des fractions; B est un anneau semi-local noethérien, donc intersection d'un nombre fini d'anneaux locaux noethériens B_{m_i} (m_i idéaux maximaux de B), et sa clôture intégrale (qui est égale à A') est intersection des A'_{m_i} (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 3, cor. 4 du th. 1) qui sont les clôtures intégrales des B_{m_i} , donc des anneaux de Krull par (23.1.13); par suite A' est un anneau de Krull.

(iii) On peut montrer ([30], 3.3.10) que pour tout anneau noethérien intègre A (non nécessairement local), la clôture intégrale de A est un anneau de Krull.

Corollaire (23.2.9). — Soient A un anneau noethérien intègre, A' sa clôture intégrale. Supposons que pour tout anneau C tel que $A \subset C \subset A'$ et tel que C soit une A -algèbre finie, et pour tout idéal premier q de hauteur 1 dans C , $q \cap A$ soit un idéal premier de hauteur 1 dans A . Soit P l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 dans A ; on a alors

$$A' = \bigcap_{p \in P} A'_{p'}$$

Comme A' est un A -module sans torsion, on a $A' = \bigcap_m A'_m$, où m parcourt l'ensemble des idéaux maximaux de A (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 3, cor. 4 du th. 1); il suffira donc de prouver que A'_m est l'intersection des $A'_{p'}$ pour les idéaux premiers $p \subset m$ de hauteur 1. Comme A'_m est la clôture intégrale de A_m , on voit qu'on peut se borner à démontrer le corollaire pour A_m . Or, il y a alors, en vertu de (23.2.7), une A_m -algèbre

finie B contenue dans A'_m telle que A'_m soit l'intersection des clôtures intégrales des anneaux B_q , où q parcourt l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de B . Mais B est de la forme C_m , où C est une A -algèbre finie; donc, pour tout idéal premier q de hauteur 1 dans B , $q \cap A$ est par hypothèse un idéal premier de hauteur 1 dans A ; comme la clôture intégrale de B_q contient celle de $A_{q \cap A}$ et que cette dernière contient A'_m , il en résulte bien que A'_m est l'intersection des A'_p pour $p \in P$ et $p \subset m$, ce qui achève la démonstration.

Remarques (23.2.10). — (i) Nous verrons (**IV**, 5.6.3 et 5.6.10) que l'hypothèse de (23.2.9) est vérifiée lorsque A est *universellement caténaire*, en particulier (**IV**, 5.10.17 et 5.11.2) lorsque A est *quotient d'un anneau régulier*; enfin, elle est évidemment vérifiée si $\text{Spec}(A') \rightarrow \text{Spec}(A)$ est un homéomorphisme, en particulier si ce morphisme est *radiciel* (23.2.2).

(ii) La conclusion de (23.2.9) n'est plus nécessairement exacte lorsqu'on omet l'hypothèse sur les sous- A -algèbres finies de A' . En effet, on peut définir un anneau local noethérien intègre A , de dimension 2, dont la clôture intégrale A' est une A -algèbre finie, mais tel qu'il y ait un idéal premier p' de A' de hauteur 1 au-dessus de l'idéal maximal m (de hauteur 2) de A , et tel en outre que pour tout idéal premier p de hauteur 1 dans A , A_p soit intégralement clos (**IV**, 5.6.11); l'intersection de ces anneaux A_p ne peut alors être égale à A' puisque A' est un anneau de Krull (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 1, no 5, prop. 9).

(A suivre.)

CHAPITRE IV

ÉTUDE LOCALE DES SCHÉMAS ET DES MORPHISMES DE SCHÉMAS

Sommaire

- § 1. Conditions de finitude relatives. Ensembles constructibles dans les préschémas.
- § 2. Changement de base et platitude.
- § 3. Cycles premiers associés et décompositions primaires.
- § 4. Changement du corps de base dans les préschémas.
- § 5. Dimension et profondeur dans les préschémas.
- § 6. Morphismes plats de préschémas localement noethériens.
- § 7. Application aux relations entre un anneau local noethérien et son complété.
Anneaux excellents.
- § 8. Limites projectives de préschémas.
- § 9. Propriétés constructibles.
- § 10. Préschémas de Jacobson.
- § 11. (¹) Propriétés topologiques des morphismes plats de présentation finie. Critères locaux de platitude.
- § 12. Étude des fibres des morphismes plats de présentation finie.
- § 13. Morphismes équidimensionnels.
- § 14. Morphismes universellement ouverts.
- § 15. Étude des fibres d'un morphisme universellement ouvert.
- § 16. Invariants différentiels. Morphismes différentiellement lisses.
- § 17. Morphismes lisses, non ramifiés, étales.
- § 18. Compléments sur les morphismes étals. Anneaux locaux henséliens.
- § 19. Immersions régulières et transversalement régulières.
- § 20. Sections hyperplanes; projections génériques.
- § 21. Prolongements infinitésimaux.

(¹) L'ordre et le contenu des §§ 11 à 21 ne sont donnés qu'à titre indicatif et pourront être modifiés avant leur publication.

Les sujets traités dans ce Chapitre appellent les remarques suivantes :

a) Leur caractère commun est d'être relatifs à des propriétés *locales* de préschémas ou de morphismes, i.e. considérées en un point, ou aux points d'une fibre, ou dans un voisinage (non spécifié) d'un point ou d'une fibre. Ces propriétés sont généralement de nature *topologique*, *differential* ou *dimensionnelle* (i.e. faisant intervenir les notions de *dimension* et de *profondeur*) et sont liées aux propriétés des *anneaux locaux* aux points considérés. Un problème type est de mettre en relation, pour un morphisme donné $f: X \rightarrow Y$ et un point $x \in X$, les propriétés de X en x avec celles de Y en $y = f(x)$ et de la fibre $X_y = f^{-1}(y)$ en x . Un autre est de déterminer la nature topologique (par exemple la constructibilité, ou le fait d'être ouvert ou fermé) de l'ensemble des points $x \in X$ en lesquels X possède une certaine propriété ou pour lesquels la fibre $X_{f(x)}$ passant par x possède une certaine propriété en x . De même, on s'intéressera à la nature topologique de l'ensemble des points $y \in Y$ tels que X ait une certaine propriété en tous les points de la fibre X_y , ou tels que cette fibre ait une certaine propriété.

b) Les notions les plus importantes pour les chapitres suivants sont celle de *morphisme plat de présentation finie* et celles de *morphisme lisse* et de *morphisme étale*, qui en sont des cas particuliers. Leur étude détaillée (jointe à celle de questions connexes) commence à proprement parler au § 11.

c) Les §§ 1 à 10 peuvent être considérés comme de nature préliminaire et développent trois types de techniques, utilisées non seulement dans les autres paragraphes du chapitre mais aussi bien entendu dans les chapitres suivants :

c 1) Aux §§ 1 à 4 sont envisagés divers aspects de la notion de *changement de base*, surtout en relation avec des conditions de *finitude* ou de *platitude*; on y amorce la technique de *descente* sous ses aspects les plus élémentaires (les questions d'« effectivité » liées à cette technique seront étudiées dans le chap. V).

c 2) Les §§ 5 à 7 sont centrés sur ce que l'on peut appeler des techniques *noethériennes*, les préschémas considérés étant toujours supposés localement noethériens, tandis qu'au contraire aucune condition de finitude n'est généralement imposée aux *morphismes*; cela tient essentiellement à ce que les notions de dimension et de profondeur ne sont guère maniables que pour les anneaux locaux noethériens. Rappelons que le § 7 constitue une théorie « fine » des anneaux locaux noethériens, assez peu utilisée dans la suite du chapitre.

c 3) Les §§ 8 à 10 donnent entre autres le moyen d'*éliminer les hypothèses noethériennes* sur les préschémas étudiés, en leur substituant des hypothèses convenables de *finitude* (la « présentation finie ») sur les *morphismes* considérés : l'avantage de cette substitution est que ces dernières hypothèses sont *stables par changement de base*, ce qui n'est pas le cas pour les hypothèses noethériennes sur les préschémas. La technique permettant ce passage repose, d'une part, sur l'utilisation de la notion de *limite projective* de préschémas, grâce à laquelle on peut ramener une question à la même question sous des hypothèses *noethériennes*; d'autre part, sur l'emploi systématique des *ensembles constructibles*, qui ont le double intérêt de se conserver par image réciproque (par un morphisme

quelconque) et par image directe (par un morphisme de présentation finie), et d'avoir des propriétés topologiques maniables dans les préschémas localement noethériens. Les mêmes techniques permettent même souvent de se ramener à des anneaux noethériens plus particuliers, par exemple les *Z-algèbres de type fini*, et c'est là que les propriétés des anneaux « excellents » (étudiées au § 7) interviennent de façon décisive. Indépendamment d'ailleurs de la question de l'élimination des hypothèses noethériennes, les techniques des §§ 8 à 10, de nature très élémentaire, sont d'usage constant dans presque toutes les applications.

§ 1. CONDITIONS DE FINITUDE RELATIVES ENSEMBLES CONSTRUCTIBLES DANS LES PRÉSCHÉMAS

Nous allons, dans ce paragraphe, reprendre, en les complétant, l'exposé des « conditions de finitude » pour un morphisme de préschémas $f: X \rightarrow Y$, donné dans (I, 6.3 et 6.6). Il y a essentiellement deux notions de « finitude » de nature *globale* sur X , celle de morphisme *quasi-compact* (définie dans (I, 6.6.1)) et celle de morphisme *quasi-séparé*; il y a d'autre part deux notions de « finitude » de nature *locale* sur X , celle de morphisme *localement de type fini* (définie dans (I, 6.6.2)) et celle de morphisme *localement de présentation finie*. En combinant ces notions locales aux notions globales précédentes, on obtient les notions de morphisme *de type fini* (définie dans (I, 6.3.1)) et de morphisme *de présentation finie*. Pour la commodité du lecteur, nous donnerons de nouveau, dans ce paragraphe, les principales propriétés énoncées dans (I, 6.3 et 6.6), en renvoyant bien entendu à ces numéros du chapitre I pour leurs démonstrations.

Aux n°s (1.8) et (1.9), nous complétons, dans le cadre des préschémas, et en faisant usage des notions de finitude précédentes, les résultats sur les ensembles constructibles donnés dans (0_{III}, § 9).

1.1. Morphismes quasi-compacts.

Définition (1.1.1). — On dit qu'un morphisme de préschémas $f: X \rightarrow Y$ est *quasi-compact* si l'application continue f de l'espace topologique X dans l'espace topologique Y est *quasi-compacte* (0_{III} , 9.1.1), autrement dit si l'image réciproque $f^{-1}(U)$ de tout ouvert *quasi-compact* U de Y est *quasi-compacte* (cf. (I, 6.6.1)).

Si \mathfrak{B} est une base de la topologie de Y formée d'ouverts affines, pour que f soit quasi-compact, il faut et il suffit que pour tout $V \in \mathfrak{B}$, $f^{-1}(V)$ soit *réunion finie d'ouverts affines*. Par exemple, si Y est affine et X quasi-compact, tout morphisme $f: X \rightarrow Y$ est quasi-compact (I, 6.6.1).

Si $f: X \rightarrow Y$ est un morphisme quasi-compact, il est clair que pour tout ouvert V de Y , la restriction de f à $f^{-1}(V)$ est un morphisme quasi-compact $f^{-1}(V) \rightarrow V$. Inversement, si (U_α) est un recouvrement ouvert de Y et $f: X \rightarrow Y$ un morphisme tel que les restrictions $f^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$ soient quasi-compactes, alors f est quasi-compact. Par

suite, si $f: X \rightarrow Y$ est un S -morphisme de S -préschémas, et s'il existe un recouvrement ouvert (S_λ) de S tel que les restrictions $g^{-1}(S_\lambda) \rightarrow h^{-1}(S_\lambda)$ de f (où g et h sont les morphismes structuraux) soient quasi-compactes, alors f est quasi-compact.

Proposition (I.1.2). — (i) *Une immersion $X \rightarrow Y$ est quasi-compacte si elle est fermée, ou si l'espace sous-jacent à Y est localement noethérien ou si l'espace sous-jacent à X est noethérien.*

(ii) *Le composé de deux morphismes quasi-compactes est quasi-compact.*

(iii) *Si $f: X \rightarrow Y$ est un S -morphisme quasi-compact, il en est de même de $f_{(S')}: X_{(S')} \rightarrow Y_{(S')}$ pour toute extension $g: S' \rightarrow S$ du préschéma de base.*

(iv) *Si $f: X \rightarrow X'$ et $g: Y \rightarrow Y'$ sont deux S -morphismes quasi-compactes,*

$$f \times_S g: X \times_S Y \rightarrow X' \times_S Y'$$

est quasi-compact.

(v) *Si le composé $g \circ f$ de deux morphismes $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ est quasi-compact, et si g est séparé, ou l'espace sous-jacent à X localement noethérien, f est quasi-compact.*

(vi) *Pour qu'un morphisme f soit quasi-compact, il faut et il suffit que f_{red} le soit.*

Pour la démonstration, voir (I, 6.6.4). On notera que l'assertion (vi) est aussi conséquence de la proposition plus générale :

Proposition (I.1.3). — *Soient $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ deux morphismes. Si $g \circ f$ est quasi-compact et f surjectif, g est quasi-compact.*

En effet, si V est un ouvert quasi-compact dans Z , $f^{-1}(g^{-1}(V))$ est quasi-compact par hypothèse, et l'on a $g^{-1}(V) = f(f^{-1}(g^{-1}(V)))$, puisque f est surjectif; donc $g^{-1}(V)$ est quasi-compact.

Corollaire (I.1.4). — *Soient $f: X \rightarrow Y, g: Y' \rightarrow Y$ deux morphismes, $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')}: X' \rightarrow Y'$; supposons g quasi-compact et surjectif (resp. surjectif). Alors, pour que f' soit quasi-compact (resp. dominant), il suffit que f' le soit.*

Si $g': X' \rightarrow X$ est la projection canonique, g' est un morphisme surjectif (I, 3.5.2), et l'on a $f \circ g' = g \circ f'$; si f' est quasi-compact (resp. dominant), il en est de même de $g \circ f'$ puisque g est quasi-compact (I.1.2) (resp. surjectif); comme $f \circ g'$ est quasi-compact (resp. dominant) et que g' est surjectif, on en déduit que f est quasi-compact (I.1.3) (resp. dominant).

Pour abréger, nous appellerons *point maximal* d'un préschéma X tout point générique d'une composante irréductible de X ; si $X = \text{Spec}(A)$ est affine, les points maximaux de X sont les *idéaux premiers minimaux* de A .

Proposition (I.1.5). — *Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme quasi-compact. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *f est dominant;*

b) *pour tout point maximal y de Y , on a $f^{-1}(y) \neq \emptyset$;*

c) *pour tout point maximal y de Y , $f^{-1}(y)$ contient un point maximal de X .*

L'équivalence de a) et c) a été démontrée dans (I, 6.6.5). Il est clair que c) entraîne b); d'autre part, si X' est une composante irréductible de X rencontrant $f^{-1}(y)$, $f(X')$ est irréductible et contient y , donc est contenu dans la composante irréduc-

tible $Y' = \overline{\{y\}}$ de Y (**0_I**, 2.1.6); si x est le point générique de X' , on a donc nécessairement $f(x) = y$ (**0_I**, 2.1.5); donc $b)$ entraîne $c)$.

Proposition (1.1.6). — Soient $f' : X' \rightarrow Y, f'' : X'' \rightarrow Y$ deux morphismes, X le préschéma somme $X' \amalg X'', f : X \rightarrow Y$ le morphisme égal à f' dans X' et à f'' dans X'' . Pour que f soit quasi-compact, il faut et il suffit que f' et f'' le soient.

Cela résulte aussitôt de la définition.

1.2. Morphismes quasi-séparés.

Définition (1.2.1). — Soient X, Y deux préschémas. On dit qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est quasi-séparé (ou que X est quasi-séparé sur Y) si le morphisme diagonal $\Delta_f = (\iota_X, \iota_X)_Y : X \rightarrow X \times_Y X$ est quasi-compact. On dit qu'un préschéma X est quasi-séparé s'il est quasi-séparé sur $\text{Spec}(\mathbf{Z})$.

Par définition, tout morphisme séparé est quasi-séparé, Δ_f étant une immersion fermée (**1.1.2**, (i)); un schéma X est un préschéma quasi-séparé, étant séparé sur $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ (**I**, 5.4.1).

Proposition (1.2.2). — (i) Tout monomorphisme de préschémas $f : X \rightarrow Y$ (en particulier toute immersion) est quasi-séparé.

(ii) Si $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ sont deux morphismes quasi-séparés, $g \circ f : X \rightarrow Z$ est quasi-séparé.

(iii) Soient X, Y deux S -préschémas, $f : X \rightarrow Y$ un S -morphisme quasi-séparé. Alors, pour tout changement de base $g : S' \rightarrow S$, le morphisme $f_{(S')} : X_{(S')} \rightarrow Y_{(S')}$ est quasi-séparé.

(iv) Si $f : X \rightarrow Y, f' : X' \rightarrow Y'$ sont deux S -morphismes quasi-séparés, alors

$$f \times_S f' : X \times_S X' \rightarrow Y \times_S Y'$$

est quasi-séparé.

(v) Si $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ sont deux morphismes tels que $g \circ f$ soit quasi-séparé, alors f est quasi-séparé.

(vi) Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme quasi-séparé, $f_{\text{red}} : X_{\text{red}} \rightarrow Y_{\text{red}}$ est quasi-séparé.

En vertu de (**I**, 5.5.12), il suffit de démontrer (i), (ii) et (iii).

L'assertion (i) est triviale, tout monomorphisme étant séparé (**I**, 5.5.1). Pour démontrer (iii), on se ramène aussitôt au cas où $Y = S$ (**I**, 3.3.11) et l'assertion résulte de ce que $\Delta_{f_{(S')}} = (\Delta_f)_{(S')}$ (**I**, 5.3.4) et de (**1.1.2**, (iii)). Pour démontrer (ii), considérons les projections p et q de $X \times_Y X$ sur X ; si $i = (p, q)_Z$, on sait que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y X & \xrightarrow{i} & X \times_Z X \\ \pi \downarrow & & \downarrow f \times_Z f \\ Y & \xrightarrow{\Delta_g} & Y \times_Z Y \end{array}$$

(où π est le morphisme structural) est commutatif et identifie $X \times_Y X$ au produit des $(Y \times_Z Y)$ -préschémas Y et $X \times_Z X$ (**I**, 5.3.5). Si g est quasi-séparé, Δ_g est quasi-compact,

donc il en est de même de i (I.1.2, (iii)); si de plus f est quasi-séparé, Δ_f est quasi-compact, donc il en est de même de $i \circ \Delta_f$ (I.1.2, (ii)) qui est égal à $\Delta_{g \circ f}$.

Corollaire (I.2.3). — (i) Soit X un préschéma quasi-séparé. Alors tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ est quasi-séparé.

(ii) Soit Y un préschéma quasi-séparé. Pour qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ soit quasi-séparé, il faut et il suffit que le préschéma X soit quasi-séparé.

Cela résulte aussitôt de (I.2.2, (ii) et (v)) appliqué à X , Y et $\text{Spec}(\mathbf{Z})$.

Proposition (I.2.4). — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme, $g : Y \rightarrow Z$ un morphisme quasi-séparé. Si $g \circ f$ est quasi-compact, il en est de même de f .

On sait que f est le morphisme composé $X \xrightarrow{\Gamma_f} X \times_Z Y \xrightarrow{\text{pr}_2} Y$ (I, 5.3.13); d'autre part, pr_2 s'identifie à $(g \circ f) \times_Z 1_Y$ (I, 3.3.4) et si $g \circ f$ est quasi-compact, il en est de même de pr_2 (I.1.2, (iv)). Enfin, on a le diagramme commutatif

$$(I.2.4.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Gamma_f} & X \times_Z Y \\ f \downarrow & & \downarrow t \times 1_Y \\ Y & \xrightarrow[\Delta_g]{} & Y \times_Z Y \end{array}$$

qui identifie X au produit des $(Y \times_Z Y)$ -préschémas Y et $X \times_Z Y$ (I, 5.3.7). Comme par hypothèse Δ_g est un morphisme quasi-compact, il en est de même de Γ_f (I.1.2, (iii)); la conclusion résulte donc de (I.1.2, (ii)).

Proposition (I.2.5). — Soient $f : X \rightarrow Y$, $g : Y' \rightarrow Y$ deux morphismes, $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')} : X' \rightarrow Y'$. Si g est quasi-compact et surjectif et f' quasi-séparé, alors f est quasi-séparé.

On a en effet $(X' \times_{Y'} X') = (X \times_Y X)_{(Y')}$ et $\Delta_{f'} = (\Delta_f)_{(Y')}$ (I, 5.3.4); comme la projection $X' \times_{Y'} X' \rightarrow X \times_Y X$ est quasi-compacte (I.1.2, (iii)) et surjective (I, 3.5.2), on peut, en vertu de (I, 3.3.11), appliquer (I.1.4), qui montre que puisque $\Delta_{f'}$ est un morphisme quasi-compact, il en est de même de Δ_f .

Proposition (I.2.6). — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme, (U_α) un recouvrement de Y par des ouverts tels que les préschémas induits U_α soient quasi-séparés. Pour que f soit quasi-séparé, il faut et il suffit que chacun des préschémas induits par X sur les ouverts $f^{-1}(U_\alpha)$ soit quasi-séparé.

L'image réciproque dans $X \times_Y X$ de U_α est $X_\alpha \times_{U_\alpha} X_\alpha$, en posant $X_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$, et la restriction $X_\alpha \rightarrow X_\alpha \times_{U_\alpha} X_\alpha$ de Δ_f n'est autre que Δ_{f_α} , en désignant par f_α la restriction $X_\alpha \rightarrow U_\alpha$ de f ; en vertu de la définition (I.2.1) et du caractère local de la notion de morphisme quasi-compact (I.1.1), pour que f soit quasi-séparé, il faut et il suffit que chacun des morphismes f_α le soit. Mais comme par hypothèse le morphisme $U_\alpha \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z})$ est quasi-séparé, il revient au même de dire que f_α est quasi-séparé ou que le composé $X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} U_\alpha \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z})$ l'est (I.2.2, (ii) et (v)), d'où la proposition.

Pour vérifier qu'un morphisme est quasi-séparé, on est donc ramené à donner des critères pour qu'un préschéma soit quasi-séparé :

Proposition (1.2.7). — Soient X un préschéma, (U_α) un recouvrement de X formé d'ouverts quasi-compacts. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) X est quasi-séparé.
- b) Pour tout ouvert quasi-compact U de X , l'immersion canonique $U \rightarrow X$ est quasi-compacte (autrement dit, U est rétrocompact dans X).
- b') L'intersection de deux ouverts quasi-compacts de X est quasi-compacte.
- c) Pour tout couple d'indices (α, β) , l'intersection $U_\alpha \cap U_\beta$ est quasi-compacte.

Les propriétés b) et b') sont trivialement équivalentes par définition d'un morphisme quasi-compact. Comme un ouvert quasi-compact est réunion finie d'ouverts affines, pour deux ouverts quasi-compacts U, V de X , $U \times_Z V$ est un ouvert quasi-compact de $X \times_Z X$ (I, 3.2.7), dont l'image réciproque par Δ_X est $U \cap V$, donc a) entraîne b'). Il est trivial que b') entraîne c); enfin, si c) est vérifiée, les $U_\alpha \times_Z U_\beta$ forment un recouvrement de $X \times_Z X$ par des ouverts quasi-compacts, et l'on sait que pour que le morphisme $\Delta_X : X \rightarrow X \times_Z X$ soit quasi-compact, il suffit que les images réciproques $U_\alpha \cap U_\beta$ des $U_\alpha \times_Z U_\beta$ par Δ_X soient quasi-compacts (I.1.1); donc c) entraîne a).

Corollaire (1.2.8). — Tout préschéma X dont l'espace sous-jacent est localement noethérien (par exemple un préschéma localement noethérien) est quasi-séparé; tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ est alors quasi-séparé.

Proposition (1.2.9). — Soient X', X'' deux préschémas, $X = X' \amalg X''$ leur somme, $f' : X' \rightarrow Y, f'' : X'' \rightarrow Y$ deux morphismes, $f : X \rightarrow Y$ le morphisme qui coïncide avec f' dans X' et avec f'' dans X'' . Pour que f soit quasi-séparé, il faut et il suffit que f' et f'' le soient.

En effet, $X \times_Y X$ est somme des quatre préschémas $X' \times_Y X', X' \times_Y X'', X'' \times_Y X'$ et $X'' \times_Y X''$, et Δ_f est le morphisme qui coïncide avec $\Delta_{f'}$ dans X' et avec $\Delta_{f''}$ dans X'' ; la proposition résulte donc aussitôt des définitions.

I.3. Morphismes localement de type fini.

(I.3.1) Rappelons que si A est un anneau, une A -algèbre (commutative) B est dite *de type fini* si elle est engendrée par un nombre fini d'éléments de B , ou, ce qui revient au même, si elle est isomorphe au quotient d'une algèbre de polynômes $A[T_1, \dots, T_n]$ par un idéal de cette algèbre. Il est clair que pour toute A -algèbre (commutative) A' , $B \otimes_A A'$ est alors une A' -algèbre de type fini. Si B est une A -algèbre de type fini et C une B -algèbre de type fini, C est une A -algèbre de type fini, car si C est un quotient de $B[T_1, \dots, T_n]$ et B un quotient de $A[S_1, \dots, S_m]$, $B[T_1, \dots, T_n] = B \otimes_A A[T_1, \dots, T_n]$ est un quotient de $A[S_1, \dots, S_m, T_1, \dots, T_n]$, donc il en est de même de C .

Définition (I.3.2). — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de préschémas, x un point de X , $y = f(x)$. On dit que f est de type fini en x s'il existe un voisinage ouvert affine V de y et un voisinage ouvert affine U de x tels que $f(U) \subset V$ et que l'anneau $A(U)$ soit une $A(V)$ -algèbre de type fini. On dit que f est localement de type fini s'il est de type fini en tout point de X .

Proposition (I.3.3). — Si Y est un préschéma localement noethérien et $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini, alors X est localement noethérien.

Pour la démonstration, voir (I, 6.3.7).

Proposition (I.3.4). — (i) Toute immersion locale est localement de type fini.

(ii) Si deux morphismes $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ sont localement de type fini, il en est de même de $g \circ f$.

(iii) Si $f: X \rightarrow Y$ est un S -morphisme localement de type fini, $f_{(S')}: X_{(S')} \rightarrow Y_{(S')}$ est localement de type fini pour toute extension $S' \rightarrow S$ du préschéma de base.

(iv) Si $f: X \rightarrow X'$ et $g: Y \rightarrow Y'$ sont deux S -morphismes localement de type fini, $f \times_S g$ est localement de type fini.

(v) Si le composé $g \circ f$ de deux morphismes est localement de type fini, f est localement de type fini.

(vi) Si un morphisme f est localement de type fini, il en est de même de f_{red} .

Pour la démonstration, voir (I, 6.6.6).

Corollaire (I.3.5). — Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini. Pour tout morphisme $Y' \rightarrow Y$ tel que Y' soit localement noethérien, $X \times_Y Y'$ est localement noethérien.

En effet, $f_{(Y')}: X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ est localement de type fini par (I.3.4, (iii)), et il suffit d'appliquer (I.3.3).

Proposition (I.3.6). — Soit $\varphi: A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Pour que le morphisme correspondant $f: \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ soit localement de type fini, il faut et il suffit que B soit une A -algèbre de type fini.

Pour la démonstration, voir (I, 6.3.3), en tenant compte de ce que f est quasi-compact et de (I, 6.6.3).

Proposition (I.3.7). — Pour qu'un morphisme localement de type fini $f: X \rightarrow Y$ soit surjectif, il faut et il suffit que, pour tout corps algébriquement clos Ω , l'application $X(\Omega) \rightarrow Y(\Omega)$ correspondant à f (I, 3.4.1) soit surjective.

Pour la démonstration, voir (I, 6.3.10).

(I.3.8) Soit A un anneau. On dit qu'une A -algèbre B est essentiellement de type fini si B est A -isomorphe à une A -algèbre de la forme $S^{-1}C$, où C est une A -algèbre de type fini et S une partie multiplicative de C .

Proposition (I.3.9). — (i) Si B est une A -algèbre essentiellement de type fini et C une B -algèbre essentiellement de type fini, alors C est une A -algèbre essentiellement de type fini.

(ii) Soient B une A -algèbre essentiellement de type fini, A' une A -algèbre ; alors $B' = B \otimes_A A'$ est une A' -algèbre essentiellement de type fini.

(i) Soient $B = S'^{-1}B'$ et $C = T'^{-1}C'$, où B' (resp. C') est une A -algèbre (resp. une B -algèbre) de type fini et S' (resp. T') une partie multiplicative de B' (resp. C') ; alors C' est de la forme $S'^{-1}C''$, où C'' est une B' -algèbre de type fini, donc C est aussi un anneau de fractions de C'' ; comme C'' est une A -algèbre de type fini, cela prouve notre assertion.

(ii) Si B est anneau de fractions d'une A -algèbre de type fini C , B' est un anneau de fractions de la A' -algèbre de type fini $C \otimes_A A'$, d'où (ii).

(1.3.10) Si B est une A -algèbre *locale* essentiellement de type fini, B est de la forme C_q , où C est une A -algèbre de type fini et q un idéal premier de C (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, prop. 11). Soit p l'image réciproque dans A de l'idéal q ; si l'on pose $S = A - p$, C_q est aussi un anneau local en un idéal premier de $S^{-1}C$; comme $S^{-1}C$ est une algèbre de type fini sur $A_p = S^{-1}A$, on voit que B est aussi une A_p -algèbre essentiellement de type fini, et en outre l'homomorphisme $A_p \rightarrow B$ est *local*.

Proposition (1.3.11). — *Si B est une A -algèbre locale essentiellement de type fini, B est A -isomorphe à une A -algèbre quotient d'une A -algèbre de la forme C_q , où C est une algèbre de polynômes $A[T_1, \dots, T_n]$ et q un idéal premier de C .*

En effet, par définition, B est isomorphe à C'_q , où C' est une A -algèbre de type fini et q' un idéal premier de C' ; mais $C' = C/b$, où $C = A[T_1, \dots, T_n]$ et b est un idéal de C ; donc $q' = q/b$, où q est un idéal premier de C , et C'_q est isomorphe à C_q/bC_q .

1.4. Morphismes localement de présentation finie.

(1.4.1) Étant donné un anneau A , nous dirons qu'une A -algèbre B (commutative) est de *présentation finie* si elle est isomorphe au quotient $A[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{a}$ d'une algèbre de polynômes sur A par un idéal de type fini \mathfrak{a} de $A[T_1, \dots, T_n]$. Pour toute A -algèbre (commutative) A' , $B \otimes_A A'$ est alors une A' -algèbre de présentation finie, étant isomorphe au quotient de $A'[T_1, \dots, T_n]$ par l'image canonique dans cet anneau de $\mathfrak{a} \otimes_A A'$, qui est évidemment un $A'[T_1, \dots, T_n]$ -module de type fini. Si B est une A -algèbre de présentation finie et C une B -algèbre de présentation finie, alors C est une A -algèbre de présentation finie. En effet, soient $B = A[S_1, \dots, S_m]/\mathfrak{a}$ et $C = B[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{b}$, où \mathfrak{a} (resp. \mathfrak{b}) est un idéal de type fini de $A[S_1, \dots, S_m]$ (resp. $B[T_1, \dots, T_n]$); l'anneau $B[T_1, \dots, T_n]$ est isomorphe à $A[S_1, \dots, S_m, T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{a}'$, où \mathfrak{a}' est l'image canonique de $\mathfrak{a} \otimes_A A[T_1, \dots, T_n]$, et est donc un idéal de type fini de $A[S_1, \dots, S_m, T_1, \dots, T_n]$; l'idéal \mathfrak{b} de $B[T_1, \dots, T_n]$ est de la forme $\mathfrak{b}'/\mathfrak{a}'$, où \mathfrak{b}' est un idéal de $A[S_1, \dots, S_m, T_1, \dots, T_n]$; comme \mathfrak{a}' et $\mathfrak{b}'/\mathfrak{a}'$ sont des modules de type fini sur $A[S_1, \dots, S_m, T_1, \dots, T_n]$, il en est de même de \mathfrak{b}' , et C , isomorphe à $A[S_1, \dots, S_m, T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{b}'$, est donc bien une A -algèbre de présentation finie. Notons enfin que si A est noethérien, il en est de même de $A[T_1, \dots, T_n]$, donc toute A -algèbre de type fini est alors de présentation finie.

Définition (1.4.2). — *Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de préschémas, x un point de X , $y = f(x)$. On dit que f est de présentation finie en x s'il existe un voisinage ouvert affine V de y et un voisinage ouvert affine U de x tels que $f(U) \subset V$ et que l'anneau $A(U)$ soit une $A(V)$ -algèbre de présentation finie. On dit que f est localement de présentation finie s'il est de présentation finie en tout point de X .*

Si Y est localement noethérien, il revient au même de dire que f est localement de type fini ou localement de présentation finie.

Proposition (1.4.3). — (i) *Tout isomorphisme local est localement de présentation finie.*

(ii) *Si deux morphismes $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ sont localement de présentation finie, il en est de même de $g \circ f$.*

(iii) Si $f : X \rightarrow Y$ est un S -morphisme localement de présentation finie, $f_{(S')} : X_{(S')} \rightarrow Y_{(S')}$ est localement de présentation finie pour toute extension $S' \rightarrow S$ du préschéma de base.

(iv) Si $f : X \rightarrow X'$ et $g : Y \rightarrow Y'$ sont deux S -morphismes localement de présentation finie, $f \times_S g$ est localement de présentation finie.

(v) Si le composé $g \circ f$ de deux morphismes est localement de présentation finie et si g est localement de type fini, alors f est localement de présentation finie.

L'assertion (i) est triviale. Pour démontrer (iii), on peut se limiter au cas où $S = Y$ (**I**, 3.3.11); soient x' un point de $X_{(S')}$, s' et x ses projections sur S' et X respectivement, s la projection commune de s' et x sur S . Par hypothèse, il y a un voisinage ouvert affine V (resp. U) de s (resp. x) tels que l'image de U soit contenue dans V et que $A(U)$ soit une $A(V)$ -algèbre de présentation finie; soit V' un voisinage ouvert affine de s' dont l'image dans S soit contenue dans V ; alors $U \times_V V'$ est un voisinage ouvert affine de x' dont l'image dans S' est contenue dans V' et dont l'anneau $A(U) \otimes_{A(V)} A(V')$ est une $A(V')$ -algèbre de présentation finie (**I**.4.1).

Pour démontrer (ii), considérons un point $x \in X$, et soient $y = f(x)$, $z = g(f(x))$. Il y a par hypothèse un voisinage ouvert affine $W = \text{Spec}(C)$ (resp. $V = \text{Spec}(B)$) de z (resp. y) tels que $g(V) \subset W$ et que B soit une C -algèbre de présentation finie. D'autre part, il y a un voisinage ouvert affine $V' = \text{Spec}(B')$ (resp. $U = \text{Spec}(A)$) de y (resp. x) tels que $f(U) \subset V'$ et que A soit une B' -algèbre de présentation finie. Soit $s \in B$ tel que l'ouvert $D(s) = \text{Spec}(B_s)$ dans V soit un voisinage de y contenu dans V' , et soit $U' = f^{-1}(D(s)) \subset U$; on a $U' = \text{Spec}(A \otimes_{B'} B_s)$, et $A \otimes_{B'} B_s$ est une B_s -algèbre de présentation finie (**I**.4.1); d'autre part $B_s = B[T]/(1 - sT)$ est une B -algèbre de présentation finie par définition; par suite (**I**.4.1), $A \otimes_{B'} B_s$ est une C -algèbre de présentation finie, ce qui prouve (ii).

On sait que (iv) résulte de (i), (ii) et (iii) (**I**, 3.5.1). Pour prouver (v), considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Gamma_f} & X \times_Z Y \\ \downarrow & & \downarrow f \times 1 \\ Y & \xrightarrow[\Delta_g]{} & Y \times_Z Y \end{array}$$

qui identifie X au produit des $(Y \times_Z Y)$ -préschémas Y et $X \times_Z Y$ (**I**, 5.3.7, Δ_g étant le morphisme diagonal). Si l'on sait que Δ_g est localement de présentation finie, il en résultera par (iii) qu'il en est de même de Γ_f . D'autre part, on a la factorisation de f en $X \xrightarrow{\Gamma_f} X \times_Z Y \xrightarrow{p_2} Y$ (**I**, 5.3.13), où la projection p_2 est égale à $(g \circ f) \times_Z 1_Y$; comme $g \circ f$ est supposé localement de présentation finie, il en est de même de p_2 par (iv), et il résultera finalement de (ii) que f est aussi localement de présentation finie. On voit donc qu'on est ramené à démontrer le

Corollaire (I.4.3.1). — Soit $g : Y \rightarrow Z$ un morphisme localement de type fini; alors le morphisme diagonal $\Delta_g : Y \rightarrow Y \times_Z Y$ est localement de présentation finie.

On peut se borner au cas où $Z = \text{Spec}(A)$, $Y = \text{Spec}(B)$, B étant une A -algèbre de type fini; le morphisme Δ , correspond alors à l'*homomorphisme d'augmentation* $\delta : B \otimes_A B \rightarrow B$ tel que $\delta(x \otimes y) = xy$. Compte tenu de la définition (1.4.2), il suffit de montrer que le noyau \mathfrak{J} de δ est un idéal de type fini, ce qui résulte de (0, 20.4.4).

Proposition (1.4.4). — Soient A un anneau, B une A -algèbre, B' une algèbre de polynômes $A[T_1, \dots, T_n]$, $u : B' \rightarrow B$ un homomorphisme surjectif de A -algèbres. Pour que B soit une A -algèbre de présentation finie, il faut et il suffit que le noyau \mathfrak{J} de u soit un idéal de type fini de B' .

La condition est suffisante par définition (1.4.1). Pour voir qu'elle est nécessaire, remarquons que le morphisme $g : \text{Spec}(B') \rightarrow \text{Spec}(A)$ est localement de type fini; si B est une A -algèbre de présentation finie, le morphisme $f : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(B')$ correspondant à u est tel que $g \circ f : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ soit localement de présentation finie, donc il résulte de (1.4.3, (v)) que f est aussi localement de présentation finie. Or, pour démontrer que l'idéal \mathfrak{J} est de type fini, il suffit de prouver que $\widetilde{\mathfrak{J}}$ est un \widetilde{B}' -Module de type fini (II, 6.1.4.1). Revenant à la définition (1.4.2), on est finalement ramené à prouver le

Lemme (1.4.4.1). — Soient a un idéal d'un anneau C , s un élément de C , tel que C_s/a_s soit une C -algèbre de présentation finie; alors a_s est un idéal de type fini dans l'anneau C_s .

Par hypothèse, il existe une C -algèbre de polynômes $C' = C[T_1, \dots, T_n]$ et un C -homomorphisme surjectif $v : C' \rightarrow C_s/a_s$ dont le noyau b est de type fini. Soit $p : C_s \rightarrow C_s/a_s$ l'homomorphisme canonique; pour tout i , il y a un $t_i \in C$ tel que $p(t_i/s^k) = v(T_i)$ (on peut supposer que l'exposant k est le même pour tous les indices i). Considérons alors la C_s -algèbre $D = C_s[T_1, \dots, T_n]$, et l'homomorphisme de C_s -algèbres $w : D \rightarrow C_s$ tel que $w(T_i) = t_i/s^k$; w est évidemment surjectif, et il en est par suite de même de $v' = p \circ w : D \rightarrow C_s/a_s$. D'autre part, tout polynôme de D peut s'écrire P/s^m , où $P \in C' = C[T_1, \dots, T_n]$, et l'on a $v'(P/s^m) = (1/s^m)v(P)$; comme $1/s$ est inversible dans C_s , la relation $v'(P/s^m) = 0$ dans C_s/a_s équivaut à $v(P) = 0$, et par suite le noyau b' de v' est engendré par l'image canonique de b dans D , et *a fortiori* est de type fini dans l'anneau D . Mais $b' = v'^{-1}(0) = w^{-1}(p^{-1}(0)) = w^{-1}(a_s)$, et comme w est surjectif, $a_s = w(b')$, ce qui prouve que a_s est un idéal de type fini de C_s .

Corollaire (1.4.5). — Soient X, Y deux préschémas, $j : X \rightarrow Y$ une immersion, U un ouvert de Y tel que $j(X)$ soit fermé dans U , \mathcal{J} l'Idéal quasi-cohérent de \mathcal{O}_U qui définit le sous-préschéma fermé de Y associé à j . Pour que j soit localement de présentation finie, il faut et il suffit que \mathcal{J} soit un \mathcal{O}_U -Module de type fini.

Proposition (1.4.6). — Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Pour que le morphisme correspondant $f : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ soit localement de présentation finie, il faut et il suffit que B soit une A -algèbre de présentation finie.

La condition étant trivialement suffisante, il reste à prouver qu'elle est nécessaire. Si f est localement de présentation finie, il résulte déjà de (1.3.6) que B est une A -algèbre de type fini, donc il existe un homomorphisme surjectif $u : B' = A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow B$ de A -algèbres; il résulte de (1.4.3, (v)) que l'immersion $j : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(B')$ est loca-

lement de présentation finie; donc (1.4.5), si \mathfrak{J} est le noyau de u , le \widetilde{B}' -Module $\widetilde{\mathfrak{J}}$ est de type fini, et par suite (II, 6.1.4.1) \mathfrak{J} est un idéal de type fini.

Proposition (1.4.7). — Soit $\rho : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux faisant de B une A -algèbre finie. Pour que B soit une A -algèbre de présentation finie, il faut et il suffit que B soit un A -module de présentation finie.

Nous utiliserons le

Lemme (1.4.7.1). — Si B est une A -algèbre finie, il existe un A -homomorphisme surjectif d'algèbres $u : B' \rightarrow B$, où B' est une A -algèbre finie et de présentation finie qui est un A -module libre.

En effet, il y a un système fini $(a_i)_{1 \leq i \leq m}$ de générateurs de la A -algèbre B tel que chaque a_i vérifie une relation $F_i(a_i) = 0$, où $F_i \in A[X]$ est un polynôme unitaire de degré > 0 ; la A -algèbre quotient $B'_i = A[X]/(F_i)$ est donc libre de rang fini sur A ; soit c_i la classe de X dans B'_i . Il existe un A -homomorphisme d'algèbres $u_i : B'_i \rightarrow B$ tel que $u_i(c_i) = a_i$; il suffit alors de prendre pour B' le produit tensoriel $B'_1 \otimes_A B'_2 \otimes \dots \otimes_A B'_m$ et de considérer l'homomorphisme $u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_m : B' \rightarrow B$, qui est surjectif par construction. En outre, si $B'' = A[T_1, \dots, T_m]$ et si b'_i désigne l'image canonique de c_i dans B'' , le A -homomorphisme d'algèbres $v : B'' \rightarrow B'$ tel que $v(T_i) = b'_i$ ($i \leq m$) est surjectif, et son noyau b' est l'idéal de B'' engendré par les $F_i(T_i)$, donc de type fini; ceci prouve que B' est une A -algèbre de présentation finie.

Ce lemme étant démontré, gardons les mêmes notations, et soit $w = v \circ u : B'' \rightarrow B$. Si b (resp. a) est le noyau de w (resp. u), on a $a = v(b)$ puisque v est surjectif. Or (1.4.4), si B est une A -algèbre de présentation finie, b est un idéal de type fini de B'' , donc a est un idéal de type fini de B' , donc un A -module de type fini puisque B est une A -algèbre finie; comme B' est un A -module libre, B est un A -module de présentation finie. Inversement, si B' est un A -module de présentation finie, a est un A -module de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 2, no 8, lemme 9) et a fortiori un idéal de type fini de B' ; par suite, B est par définition une B' -algèbre de présentation finie, et comme B' est une A -algèbre de présentation finie, B est une A -algèbre de présentation finie.

1.5. Morphismes de type fini.

Proposition (1.5.1). — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme, (U_α) un recouvrement de Y formé d'ouverts affines. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) f est localement de type fini et quasi-compact.
- b) Pour tout α , $f^{-1}(U_\alpha)$ est réunion finie d'ouverts affines $V_{\alpha i}$ tels que chaque anneau $A(V_{\alpha i})$ soit une $A(U_\alpha)$ -algèbre de type fini.
- c) Pour tout ouvert affine U de Y , $f^{-1}(U)$ est réunion finie d'ouverts affines V_i tels que les anneaux $A(V_i)$ soient des $A(U)$ -algèbres de type fini.

Pour la démonstration, voir (I, 6.3.2 et 6.6.3).

Définition (1.5.2). — On dit qu'un morphisme f est de type fini s'il vérifie les conditions équivalentes de la proposition (1.5.1).

Proposition (I.5.3). — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini; si Y est noethérien, il en est de même de X .

Pour la démonstration, voir (I, 6.3.7).

Proposition (I.5.4). — (i) Soit $j : X \rightarrow Y$ un morphisme d'immersion. Si j est quasi-compact (ce qui est le cas si j est une immersion fermée, ou si l'espace sous-jacent à X est noethérien, ou si l'espace sous-jacent à Y est localement noethérien), j est de type fini.

(ii) Le composé de deux morphismes de type fini est de type fini.

(iii) Si $f : X \rightarrow Y$ est un S -morphisme de type fini, $f_{(S')} : X_{(S')} \rightarrow Y_{(S')}$ est de type fini pour toute extension $S' \rightarrow S$ du préschéma de base.

(iv) Si $f : X \rightarrow X'$ et $g : Y \rightarrow Y'$ sont deux S -morphismes de type fini, $f \times_S g$ est de type fini.

(v) Si le composé gof de deux morphismes est de type fini et si g est quasi-séparé ou si X est noethérien, f est de type fini.

(vi) Si un morphisme f est de type fini, il en est de même de f_{red} .

Cela résulte aussitôt (sauf le cas (v) où X est noethérien, démontré dans (I, 6.3.6)) des définitions et de (I.1.2), (I.2.4) et (I.3.4).

Corollaire (I.5.5). — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini. Pour tout morphisme $Y' \rightarrow Y$ tel que Y' soit noethérien, $X \times_Y Y'$ est noethérien.

Cela résulte de (I.5.4, (iii)) et de (I.5.3).

Corollaire (I.5.6). — Soit X un préschéma de type fini sur un préschéma localement noethérien S . Alors tout S -morphisme $f : X \rightarrow Y$ est de type fini.

Pour la démonstration, voir (I, 6.3.9).

Proposition (I.5.7). — Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Pour que le morphisme correspondant $f : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ soit de type fini, il faut et il suffit que φ fasse de B une A -algèbre de type fini.

Pour la démonstration, voir (I, 6.3.3).

I.6. Morphismes de présentation finie.

Définition (I.6.1). — Soient X, Y deux préschémas. On dit qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est de présentation finie s'il vérifie les trois conditions suivantes :

- (i) f est localement de présentation finie;
- (ii) f est quasi-compact (ce qui, lorsque (i) est vérifiée, équivaut à dire que f est de type fini (I.5.2));
- (iii) f est quasi-séparé.

On dit alors aussi que X est de présentation finie sur Y , ou un Y -préschéma de présentation finie.

La condition (iii) est automatiquement vérifiée si f est séparé, ou si X est localement noethérien (I.2.8); lorsque Y est localement noethérien, il revient au même de dire que f est de présentation finie ou que f est de type fini (cette dernière condition entraînant que X est localement noethérien (I.3.3)).

Proposition (1.6.2). — (i) *Toute immersion quasi-compacte et localement de présentation finie (en particulier toute immersion ouverte quasi-compacte) est de présentation finie.*

(ii) *Le composé de deux morphismes de présentation finie est de présentation finie.*

(iii) *Soient X, Y deux S -préschémas, $f: X \rightarrow Y$ un S -morphisme de présentation finie. Alors, pour tout morphisme $S' \rightarrow S$, le morphisme $f_{(S')}: X_{(S')} \rightarrow Y_{(S')}$ est de présentation finie.*

(iv) *Soient $f: X \rightarrow Y, f': X' \rightarrow Y'$ deux S -morphismes de présentation finie; alors $f \times_S f': X \times_S X' \rightarrow Y \times_S Y'$ est de présentation finie.*

(v) *Si le composé gof de deux morphismes est de présentation finie et si g est quasi-séparé et localement de présentation finie, f est de présentation finie.*

Cela résulte immédiatement de (1.1.2), (1.2.2), (1.2.4) et (1.4.3).

Il résulte en particulier de (1.6.2, (iii)) que si f est un morphisme de présentation finie et U un ouvert de Y , la restriction $f^{-1}(U) \rightarrow U$ de f est un morphisme de présentation finie. Inversement, soit (U_α) un recouvrement de Y par des ouverts affines, et supposons que les restrictions $f^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$ de f soient des morphismes de présentation finie; il en résulte alors que f est de présentation finie, car f est évidemment localement de présentation finie, quasi-compact en vertu de (1.1.1) et quasi-séparé en vertu de (1.2.6). On peut donc dire que la propriété pour un morphisme $f: X \rightarrow Y$ d'être de présentation finie est *locale sur Y* .

Si X est un préschéma quasi-séparé, tout morphisme $f: X \rightarrow Y$ est quasi-séparé (1.2.3). Donc, si f est quasi-compact et localement de présentation finie, f est alors de présentation finie.

En particulier :

Corollaire (1.6.3). — *Soit $\varphi: A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Pour que le morphisme correspondant $f: \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ soit de présentation finie, il faut et il suffit que φ fasse de B une A -algèbre de présentation finie.*

La nécessité de la condition résulte en effet de (1.4.6).

Remarque (1.6.4). — Dans la définition (1.6.1), la condition (iii) n'est pas conséquence des deux autres. Soit par exemple Y un schéma affine dont l'espace sous-jacent ne soit pas noethérien, et soit U un ouvert non quasi-compact dans Y . Soit X le préschéma obtenu en recollant deux préschémas Y_1, Y_2 isomorphes à Y le long des ouverts U_1, U_2 correspondant à U (0₁, 4.1.7), de sorte que X est réunion de deux ouverts isomorphes respectivement à Y_1 et Y_2 (et que nous identifions à ces derniers), avec $Y_1 \cap Y_2 = U$. En outre, il y a un morphisme $f: X \rightarrow Y$ qui coïncide dans Y_i avec l'isomorphisme donné $Y_i \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$). Il est clair que f vérifie la condition (i) de (1.6.1), étant un isomorphisme local; il vérifie aussi (ii), l'image réciproque d'un ouvert quasi-compact de Y étant la réunion de ses images dans Y_1 et Y_2 ; mais comme $Y_1 \cap Y_2$ n'est pas quasi-compact, f n'est pas quasi-séparé (1.2.7).

Proposition (1.6.5). — *Soient X', X'' deux préschémas, $X = X' \amalg X''$ leur somme, $f': X' \rightarrow Y, f'': X'' \rightarrow Y$ deux morphismes, $f: X \rightarrow Y$ le morphisme qui coïncide avec f' dans X' et avec f'' dans X'' . Pour que f soit de présentation finie, il faut et il suffit que f' et f'' le soient.*

Il suffit de montrer que pour que f possède une des trois propriétés de la définition

nition (1.6.1), il faut et il suffit que f' et f'' la possèdent; c'est évident pour la propriété d'être localement de présentation finie, qui est locale sur X ; pour la propriété d'être quasi-compact, cela a été vu en (1.1.6) et pour la propriété d'être quasi-séparé, en (1.2.9).

1.7. Améliorations de résultats antérieurs.

Nous allons donner dans ce numéro une liste de propositions démontrées dans les chapitres précédents, dont l'énoncé peut être amélioré à l'aide des nouvelles conditions de finitude introduites ci-dessus.

(1.7.1) Dans les énoncés de (I, 6.4.2, 6.4.3 et 6.4.9), on peut, au lieu de supposer que X et Y sont de type fini sur le corps K , supposer seulement qu'ils sont *localement de type fini* sur K ; pour (I, 6.4.2), il suffit d'observer que tout point d'un préschéma X qui est fermé dans tout ouvert affine de X est fermé dans X , et un schéma affine localement de type fini sur K est *ipso facto* de type fini (1.5.1). Pour (I, 6.4.9), on utilise (1.3.7) et (1.3.4, (v)).

(1.7.2) Dans (I, 6.5.1, (ii)), on peut au lieu de supposer que S est localement noethérien et Y de type fini sur S , supposer seulement que Y est *localement de présentation finie* sur S , comme le montre aussitôt la démonstration (en appliquant la définition (1.4.2)). De même dans (I, 6.5.4, (ii)) et (I, 6.5.5, (ii)) il suffit de supposer que f est un S -morphisme, Y étant *localement de présentation finie* sur S .

(1.7.3) Dans (I, 7.1.11), pour la deuxième assertion, au lieu de supposer S localement noethérien et Y de type fini sur S , on peut seulement supposer Y localement de présentation finie sur S (la démonstration dépendant de (I, 6.5.1, (ii)); de même dans (I, 7.1.12 à 7.1.15).

(1.7.4) Dans (I, 9.2.2), on peut remplacer les trois hypothèses par la seule hypothèse (entraînée par chacune des autres) que f est *quasi-compact et quasi-séparé*, en vertu de (1.2.6) et (1.2.7). On notera que dans (I, 9.2.1), l'hypothèse signifie exactement que f est quasi-compact et quasi-séparé.

(1.7.5) Dans (I, 9.3.1, 9.3.2 et 9.3.3), on peut remplacer les deux hypothèses sur X par l'hypothèse (moins forte) que X est un préschéma *quasi-compact et quasi-séparé*, la démonstration utilisant exactement ces deux propriétés (en vertu de (1.2.7)).

(1.7.6) Dans (I, 9.3.4 et 9.3.5), il suffit de supposer X quasi-compact, \mathcal{F} et \mathcal{J} quasi-cohérents et de type fini.

(1.7.7) Dans (I, 9.4.7), on peut affaiblir l'hypothèse $b)$ en supposant seulement X *quasi-séparé*, puisqu'il suffit seulement que l'immersion canonique $U \rightarrow X$ soit quasi-compacte (1.2.7). On peut faire la même modification dans (I, 9.4.8, 9.4.9 et 9.4.10).

(1.7.8) Dans (I, 9.5.1), les conditions indiquées entre parenthèses dans l'énoncé peuvent être remplacées par la condition que f soit quasi-compact et quasi-séparé.

(1.7.9) Dans (I, 9.6.5), on peut remplacer les hypothèses sur X par l'hypothèse moins forte que X est *quasi-compact et quasi-séparé*, comme le montre la démonstration,

qui n'utilise que (I, 9.4.7). Dans (I, 9.6.6), l'hypothèse « X est un schéma quasi-compact » peut être remplacée par « X est un préschéma quasi-compact et quasi-séparé ».

(I.7.10) Dans (II, 1.7.15), on peut supposer seulement que Y est quasi-compact et quasi-séparé, la démonstration n'utilisant que (I, 9.6.5).

(I.7.11) Dans la seconde assertion de (II, 3.4.5), on peut substituer aux deux hypothèses sur Y l'hypothèse plus faible que Y est quasi-compact et quasi-séparé. De même dans (II, 3.4.8).

(I.7.12) Dans (II, 3.8.5), on peut de même supposer seulement que Y est quasi-compact et quasi-séparé, cette hypothèse intervenant par (I, 9.4.7).

(I.7.13) Dans (II, 4.4.1, 4.4.6 et 4.4.7), il suffit de supposer que Y est *quasi-compact et quasi-séparé*, compte tenu de (1.2.3) dans la démonstration de (II, 4.4.7). De même, dans (II, 4.4.10.1), il suffit de supposer Z quasi-compact et quasi-séparé.

(I.7.14) Dans (II, 4.5.2) et (II, 4.5.5), il suffit de supposer X *quasi-compact et quasi-séparé*, cette hypothèse intervenant par (I, 9.3.1 et 9.3.2).

(I.7.15) Dans (II, 4.6.8), il suffit encore de supposer X *quasi-compact et quasi-séparé*, cette hypothèse intervenant par (I, 9.4.7).

(I.7.16) Dans (II, 5.1.2), il suffit de supposer que X est quasi-compact et quasi-séparé (l'hypothèse intervenant par (II, 4.5.2 et 4.5.5)). De même dans (II, 5.1.9), où on utilise (I, 9.6.5).

(I.7.17) Dans (II, 5.2.1), il suffit toujours de supposer X quasi-compact et quasi-séparé (l'hypothèse intervenant par (II, 4.5.2)).

(I.7.18) Dans (II, 5.2.2), il faut supposer f *quasi-compact* et X *quasi-séparé*; la démonstration actuelle est en effet insuffisante (avec les hypothèses faites), car du fait que pour tout \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent \mathcal{F} on a $R^1f_*(\mathcal{F})=0$, il ne s'ensuit pas nécessairement, pour un ouvert affine U de Y , que la même propriété soit valable pour les $(\mathcal{O}_X|f^{-1}(U))$ -Modules quasi-cohérents, si on ne sait pas qu'un tel Module est la *restriction* d'un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent (la même remarque s'appliquant aux conditions $b)$ et $c')$); lorsque f est quasi-compact et X quasi-séparé, ce prolongement est possible en vertu de (I, 9.4.7), modifié plus haut (I.7.7).

(I.7.19) Dans (II, 5.3.2), il suffit de supposer Y *quasi-compact et quasi-séparé* (ce qui intervient par (II, 4.4.6 et 4.4.7)). De même dans (II, 5.5.3, (ii)).

(I.7.20) Dans (III, 1.2.2, 1.2.3 et 1.2.4), on peut remplacer les deux hypothèses sur X par l'hypothèse moins forte que X est un préschéma *quasi-compact et quasi-séparé*, la démonstration n'utilisant que (I, 9.3.3).

(I.7.21) Dans (III, 1.4.10 à 1.4.14), on peut remplacer « *séparé* » par « *quasi-séparé* », cette hypothèse servant uniquement à pouvoir appliquer (I, 9.2.2) (voir ci-dessus (I.7.4)). De même, dans (III, 1.4.15), il suffit de supposer que le morphisme u est *quasi-séparé et quasi-compact*.

(I.7.22) Dans (III, 2.1.3), on peut encore remplacer les hypothèses par l'hypothèse moins forte que X est un préschéma quasi-compact et quasi-séparé, le raisonnement étant le même que dans (III, 1.2.2).

1.8. Morphismes de présentation finie et ensembles constructibles.

(1.8.1) Soit X un préschéma; on sait que tout ouvert quasi-compact dans X est réunion finie d'ouverts affines, et réciproquement. Pour qu'un ouvert U de X soit rétrocompact dans X (0_{III} , 9.1.1), il faut et il suffit donc que pour tout ouvert affine V de X , $U \cap V$ soit quasi-compact. Lorsque X est quasi-séparé (1.2.1), tout ouvert quasi-compact dans X est rétrocompact dans X (1.2.7), donc toute partie localement constructible de X est rétrocompacte dans X (0_{III} , 9.1.13); si de plus X est quasi-compact, il y a identité entre parties constructibles et parties localement constructibles dans X (0_{III} , 9.1.12), et entre parties ouvertes constructibles et parties ouvertes quasi-compactes (0_{III} , 9.1.5).

Proposition (1.8.2). — *Soient X, Y deux préschémas, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme. Pour toute partie constructible (resp. localement constructible) Z de Y , $f^{-1}(Z)$ est une partie constructible (resp. localement constructible) de X .*

Supposons Z localement constructible; pour tout $x \in X$, il y aura un voisinage ouvert affine V de $f(x)$ tel que $Z \cap V$ soit constructible dans V ; si la proposition est démontrée pour les parties constructibles, $f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(V)$ sera constructible dans $f^{-1}(V)$, donc $f^{-1}(Z)$ sera localement constructible. Il suffit par suite de considérer le cas où Z est constructible, et compte tenu de (0_{III} , 9.1.3), on est ramené au cas où Z est ouvert et rétrocompact dans Y , autrement dit tel que l'injection canonique $Z \rightarrow Y$ soit un morphisme quasi-compact; il suffit alors de voir que $f^{-1}(Z)$ est rétrocompact dans X , autrement dit tel que l'injection canonique $f^{-1}(Z) \rightarrow X$ soit un morphisme quasi-compact; mais cela résulte de (1.1.2, (iii)), puisque $f^{-1}(Z) = Z \times_Y X$ (**I**, 4.4.1).

Lemme (1.8.3). — *Soient X un préschéma quasi-compact et quasi-séparé, Z une partie constructible de X . Il existe alors un schéma affine X' et un morphisme de présentation finie $f: X' \rightarrow X$ tels que $f(X') = Z$.*

Comme X est quasi-compact, il est réunion finie d'ouverts affines X_i ($i \in I$), et comme X est quasi-séparé, il résulte de (1.2.7) que chacune des immersions canoniques $g_i: X_i \rightarrow X$ est de présentation finie; on en conclut que si $f_i: X'_i \rightarrow X_i$ est un morphisme de présentation finie, il en est de même de $g_i \circ f_i: X'_i \rightarrow X$ (1.6.2), et si X' est le préschéma somme des X'_i , le morphisme $h: X' \rightarrow X$ qui coïncide avec $g_i \circ f_i$ dans chaque X'_i est lui aussi de présentation finie (1.6.5). Comme $Z \cap X_i$ est constructible dans X_i (0_{III} , 9.1.8), on voit qu'on est ramené à prouver le lemme lorsque X_i est affine d'anneau A . Comme Z est alors réunion finie d'ensembles de la forme $U \cap V$, où U et V sont des ouverts quasi-compacts (0_{III} , 9.1.3), on voit, en considérant encore une somme convenable de préschémas, qu'on peut se ramener au cas où $Z = U \cap V$; comme d'ailleurs U est réunion finie d'ouverts affines, on peut même se borner au cas où U est affine. Comme V est quasi-compact, il est réunion finie d'ouverts de la forme X_{f_i} , où $f_i \in A$; soit \mathfrak{J} l'idéal de A engendré par les f_i , et soit Z' le sous-schéma fermé affine de X qu'il définit (et qui est par construction de présentation finie sur X); on a par définition $V = \bigcap Z'$, donc $U \cap V = U \cap Z'$. Considérons le schéma affine $X' = Z' \times_X U$

et soit $f: X' \rightarrow X$ le morphisme structural; on vient de voir que l'immersion canonique $Z' \rightarrow X$ est de présentation finie, et il en est de même de l'immersion ouverte $U \rightarrow X$, qui est quasi-compacte puisque U et X sont affines; on conclut donc de (1.6.2, (iv)) que f est de présentation finie, et l'on a $f(X') = Z' \cap U$ (**I**, 3.4.8), ce qui achève la démonstration.

Théorème (1.8.4) (Chevalley). — *Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de présentation finie. Pour toute partie localement constructible Z de X , $f(Z)$ est localement constructible dans Y .*

Soient $y \in Y$ et V un voisinage ouvert affine de y ; comme f est quasi-compact et quasi-séparé, il en est de même de sa restriction $f^{-1}(V) \rightarrow V$, donc $f^{-1}(V)$ est un préschéma quasi-compact et quasi-séparé (1.2.3); comme $Z \cap f^{-1}(V)$ est constructible dans $f^{-1}(V)$ (1.8.1), on voit qu'on peut se borner au cas où Y est affine et Z constructible; X est alors quasi-compact et quasi-séparé, donc (1.8.3), il existe un morphisme de présentation finie $g: X' \rightarrow X$ tel que $Z = g(X')$; comme $f \circ g$ est de présentation finie, on voit qu'on est ramené au cas où $Z = X$; autrement dit, il suffira de prouver le

Lemme (1.8.4.1). — *Soient Y un schéma affine, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme quasi-compact et localement de présentation finie; alors $f(X)$ est une partie constructible de Y .*

Comme X est quasi-compact, il est réunion finie d'ouverts affines; on peut donc se borner au cas où $Y = \text{Spec}(A)$, $X = \text{Spec}(B)$, B étant une A -algèbre de présentation finie (1.4.6). Or, on a le

Lemme (1.8.4.2). — *Soient A_0 un anneau, $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ un système inductif de A_0 -algèbres, $A = \varinjlim A_\lambda$; si B est une A -algèbre de présentation finie, il existe un λ et une A_λ -algèbre de présentation finie B_λ tels que B soit isomorphe à $B_\lambda \otimes_{A_\lambda} A$.*

Par hypothèse, B est isomorphe à une algèbre de la forme $A[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{J}$, où les T_i sont des indéterminées et \mathfrak{J} un idéal de type fini; soit (F_j) ($1 \leq j \leq m$) un système de générateurs de \mathfrak{J} . Soit $\varphi_\lambda: A_\lambda \rightarrow A$ l'homomorphisme canonique. Comme L est filtrant, il existe λ tel que chacun des coefficients de chacun des polynômes F_j soit l'image par φ_λ d'un élément de A_λ . Autrement dit, il existe un système de polynômes $(F_{j\lambda})_{1 \leq j \leq m}$ de $A_\lambda[T_1, \dots, T_n]$ tels que $F_j = \varphi_\lambda(F_{j\lambda})$ pour $1 \leq j \leq m$. Si \mathfrak{J}_λ est l'idéal de $A_\lambda[T_1, \dots, T_n]$ engendré par les $F_{j\lambda}$, \mathfrak{J} est l'image de $\mathfrak{J}_\lambda \otimes_{A_\lambda} A$ dans $A[T_1, \dots, T_n] = A_\lambda[T_1, \dots, T_n] \otimes_{A_\lambda} A$; l'anneau $B_\lambda = A_\lambda[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{J}_\lambda$ répond à la question.

On appliquera ici ce lemme en considérant A comme limite inductive de ses sous- \mathbf{Z} -algèbres de type fini. On voit donc qu'il existe une telle sous- \mathbf{Z} -algèbre A_0 de A , et une A_0 -algèbre de présentation finie B_0 telles que B soit isomorphe à $B_0 \otimes_{A_0} A$; posons $X_0 = \text{Spec}(B_0)$, $Y_0 = \text{Spec}(A_0)$, de sorte que l'on a $X = X_0 \times_{Y_0} Y$, f étant la projection $X \rightarrow Y$; soient $f_0: X_0 \rightarrow Y_0$, $g_0: Y \rightarrow Y_0$ les morphismes structuraux; il résulte de (**I**, 3.4.8) que l'on a $f(X) = g_0^{-1}(f_0(X_0))$; compte tenu de (1.8.2), il suffit donc de montrer que $f_0(X_0)$ est constructible. Autrement dit, on est finalement ramené à démontrer le

Corollaire (1.8.5). — *Soient Y un préschéma noethérien, $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini. Pour toute partie constructible Z de X , $f(Z)$ est une partie constructible de Y .*

On se ramène comme ci-dessus à prouver que $f(X)$ est constructible. Appliquons le critère (**0_{III}**, 9.2.3) : il faut prouver que pour toute partie fermée irréductible T de Y , $T \cap f(X) = f(f^{-1}(T))$ est rare dans T ou contient un ouvert non vide de T ; en prenant un sous-préschéma de Y ayant T pour espace sous-jacent (**I**, 5.2.1) et en considérant son image réciproque par f , on voit finalement (compte tenu de (1.5.4, (iii))) qu'on est ramené à prouver que si l'on suppose Y irréductible et f dominant, $f(X)$ contient un ouvert non vide de Y . On peut en outre supposer Y affine; alors X est réunion finie d'ouverts affines V_i , et comme $f(X)$ est dense dans Y , il en est de même d'un au moins des $f(V_i)$. On peut donc aussi supposer X affine; si (X_j) est la famille (finie) des composantes irréductibles de X , on voit comme ci-dessus qu'un au moins des $f(X_j)$ est dense dans Y ; on peut donc supposer X irréductible. Enfin, en remplaçant f par f_{red} (1.5.4, (vi)) on peut supposer X et Y intègres. Alors $X = \text{Spec}(B)$, $Y = \text{Spec}(A)$, où A est un anneau intègre noethérien, B une A -algèbre intègre de type fini contenant A (**I**, 1.2.7). Il suffit de montrer qu'il existe $g \in A$ tel que, pour tout $y \in D(g)$ (c'est-à-dire tel que $g \notin \mathfrak{j}_y$) l'idéal \mathfrak{j}_y soit l'intersection de A et d'un idéal premier de B , car cela montrera que $D(g) \subset f(X)$. Finalement il suffit de prouver le

Lemme (1.8.5.1). — Soient A un anneau intègre, B une A -algèbre intègre de type fini. Il existe $g \in A$ tel que tout homomorphisme de A dans un corps algébriquement clos Ω , non nul en g , se prolonge en un homomorphisme de B dans Ω .

Or c'est là un résultat classique d'algèbre commutative (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 3, n° 1, cor. 3 du th. 1).

Corollaire (1.8.6). — Soient Y un préschéma irréductible, η son point générique, $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini. Si $f^{-1}(\eta)$ n'est pas vide, il existe un voisinage ouvert U de η dans Y tel que $f^{-1}(y)$ soit non vide pour tout $y \in U$. Si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -Module quasi-cohérent de type fini, et si $\mathcal{F}_\eta = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathbf{k}(\eta)$ n'est pas nul, alors il existe un voisinage ouvert U' de η dans Y tel que $\mathcal{F}_y = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathbf{k}(y)$ ne soit pas nul pour tout $y \in U'$.

Si p_y est la projection canonique de la fibre $f^{-1}(y) = X \times_Y \text{Spec}(\mathbf{k}(y))$ dans X , on a $\mathcal{F}_y = p_y^*(\mathcal{F})$, donc $\text{Supp}(\mathcal{F}_y) = p_y^{-1}(\text{Supp}(\mathcal{F})) = \text{Supp}(\mathcal{F}) \cap f^{-1}(y)$ en vertu de (**I**, 9.1.13.1) et (**I**, 3.6.1), puisque \mathcal{F} est de type fini; en outre $\text{Supp}(\mathcal{F})$ est fermé dans X (**0_I**, 5.2.2), et si Z est un sous-préschéma fermé de X ayant pour espace sous-jacent $\text{Supp}(\mathcal{F})$ (**I**, 5.2.1), et j l'immersion canonique $Z \rightarrow X$, $f \circ j$ est localement de type fini (1.3.4); cela prouve que la première assertion entraîne la seconde. Pour prouver la première assertion, remarquons d'abord que l'on peut supposer X et Y réduits (1.3.4, (vi)), autrement dit Y intègre. Soit ξ un point de $f^{-1}(\eta)$; on peut remplacer X et Y par des voisinages ouverts affines de ξ et η respectivement, et par suite supposer que $X = \text{Spec}(B)$, $Y = \text{Spec}(A)$, B étant une A -algèbre de type fini. En outre, si Z est le sous-préschéma fermé réduit de X ayant $\{\xi\}$ pour ensemble sous-jacent (**I**, 5.2.1), on peut, comme ci-dessus, remplacer X par Z , autrement dit supposer B intègre (**I**, 5.1.4). Comme le morphisme f est alors dominant, l'homomorphisme correspondant $\varphi : A \rightarrow B$ est injectif (**I**, 1.2.7); donc le corollaire résulte finalement du lemme (1.8.5.1).

Proposition (1.8.7). — Soient S un préschéma, $g : X \rightarrow S$, $h : Y \rightarrow S$ deux morphismes de présentation finie, $f : X \rightarrow Y$ un S -morphisme. Pour tout $s \in S$, posons $X_s = g^{-1}(s) = X \times_S \text{Spec}(\kappa(s))$, $Y_s = h^{-1}(s) = Y \times_S \text{Spec}(\kappa(s))$, $f_s = f \times_{\text{Spec}(S)} : X_s \rightarrow Y_s$. Alors l'ensemble des $s \in S$ tels que f_s soit surjectif (resp. radiciel) est localement constructible.

Soit E l'ensemble des $s \in S$ tels que f_s soit surjectif; l'ensemble $S - E$ est égal à $h(Y - f(X))$; or f est de présentation finie (1.6.2, (v)) donc $f(X)$ est localement constructible dans Y (1.8.4); comme h est de présentation finie, $h(Y - f(X))$ est localement constructible dans S , donc aussi E .

Pour montrer que l'ensemble E' des $s \in S$ tels que f_s soit radiciel est localement constructible, nous utiliserons le

Lemme (1.8.7.1). — Soient U, V deux préschémas; pour qu'un morphisme $f : U \rightarrow V$ soit radiciel, il faut et il suffit que le morphisme diagonal $\Delta_f : U \rightarrow U \times_V U$ soit surjectif. Par suite, tout morphisme radiciel est séparé.

En effet, Δ_f étant une immersion (I, 5.3.9), est un morphisme localement de type fini (1.3.4); dire que Δ_f est surjectif signifie donc que pour tout corps algébriquement clos K , l'application correspondante $U(K) \rightarrow (U \times_V U)(K) = U(K) \times_{V(K)} U(K)$ est surjective (1.3.7 et I, 3.4.2.1); mais par définition d'un produit fibré d'ensembles, cela signifie que l'application $U(K) \rightarrow V(K)$ correspondant à f est injective, et cela équivaut à dire que f est radiciel (I, 3.5.5).

Cela étant, Δ_{f_s} se déduit de $\Delta_f : X \rightarrow X \times_Y X$ par le changement de base $\text{Spec}(\kappa(s)) \rightarrow S$ (I, 5.3.4). Comme f est de présentation finie, il en est de même du morphisme structural $X \times_Y X \rightarrow Y$ (1.6.2, (iv)), donc aussi de Δ_f (1.6.2, (v)); il suffit donc d'appliquer la première partie de la proposition à Δ_f , en utilisant le lemme (1.8.7.1).

1.9. Ensembles pro-constructibles et ind-constructibles.

Lemme (1.9.1). — Soit $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ un système inductif d'anneaux dont l'ensemble d'indices I est filtrant à droite, et soit $A = \varinjlim A_\alpha$. Pour que $A = 0$, il faut et il suffit qu'il existe un indice γ tel que $A_\gamma = 0$ (et l'on a alors $A_\beta = 0$ pour tout $\beta \geq \gamma$).

En effet, pour tout $\alpha \in I$, l'homomorphisme canonique $\varphi_\alpha : A_\alpha \rightarrow A$ transforme l'élément unité en élément unité; dire que $A = 0$ signifie que $\varphi_\alpha(1) = 0$, ou encore $\varphi_\alpha(1) = \varphi_\alpha(0)$; on sait que cela équivaut à dire qu'il existe un indice $\gamma \geq \alpha$ tel que l'homomorphisme $\varphi_{\gamma\alpha} : A_\alpha \rightarrow A_\gamma$ soit tel que $\varphi_{\gamma\alpha}(1) = \varphi_{\gamma\alpha}(0)$, et cette dernière relation équivaut à $A_\gamma = 0$, d'où le lemme.

Proposition (1.9.2). — Soient B un anneau, $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ un système inductif de B -algèbres dont l'ensemble d'indices I est filtrant à droite, et soit $A = \varinjlim A_\alpha$; posons $Y = \text{Spec}(B)$, $X_\alpha = \text{Spec}(A_\alpha)$, $X = \text{Spec}(A)$, et soient $u : X \rightarrow Y$, $u_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y$ les morphismes correspondant aux homomorphismes structuraux $B \rightarrow A$, $B \rightarrow A_\alpha$. Alors :

(i) Pour que $X = \emptyset$, il faut et il suffit qu'il existe un $\gamma \in I$ tel que $X_\gamma = \emptyset$, et l'on a alors $X_\alpha = \emptyset$ pour $\alpha \geq \gamma$.

(ii) *On a*

$$(1.9.2.1) \quad u(X) = \bigcap_{\alpha \in I} u_\alpha(X_\alpha).$$

L'assertion (i) n'est autre que la traduction de (1.9.1). Pour démontrer (ii), notons que, puisque u se factorise en $X \rightarrow X_\alpha \xrightarrow{u_\alpha} Y$, le premier membre de (1.9.2.1) est contenu dans le second. Inversement, soit $y \in Y - u(X)$; on a $u^{-1}(y) = \emptyset$, et $u^{-1}(y)$ est l'espace sous-jacent au $\mathbf{k}(y)$ -préschéma $\text{Spec}(A \otimes_B \mathbf{k}(y))$; comme dans la catégorie des B -modules le foncteur $\lim \rightarrow$ commute au produit tensoriel, $A \otimes_B \mathbf{k}(y)$ est limite inductive du système inductif d'anneaux $A_\alpha \otimes_B \mathbf{k}(y)$; le lemme (1.9.1) montre qu'il existe α tel que $A_\alpha \otimes_B \mathbf{k}(y) = 0$, c'est-à-dire $u_\alpha^{-1}(y) = \emptyset$, donc $y \notin u_\alpha(X_\alpha)$. C.Q.F.D.

Proposition (1.9.3). — Soient X un préschéma quasi-compact et quasi-séparé, E une partie de X , $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ un recouvrement ouvert affine de X , et pour tout $\alpha \in I$, posons $E_\alpha = E \cap X_\alpha$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) Il existe un morphisme quasi-compact $f: X' \rightarrow X$ tel que $E = f(X')$.
- a') Pour tout α , il existe un morphisme quasi-compact $f_\alpha: X'_\alpha \rightarrow X_\alpha$ tel que $E_\alpha = f_\alpha(X'_\alpha)$.
- a'') Pour tout α , il existe un schéma affine X'_α et un morphisme $f_\alpha: X'_\alpha \rightarrow X_\alpha$ tel que $f_\alpha(X'_\alpha) = E_\alpha$.

b) E est intersection de parties constructibles de X .

b') $F = X - E$ est réunion de parties constructibles de X .

Il est clair que b) et b') sont équivalentes. La condition a) entraîne a') en prenant pour X'_α le préschéma induit sur l'ouvert $f^{-1}(X_\alpha)$ de X' et pour f_α la restriction de f . Pour voir que a') entraîne a''), il suffit de remarquer que X'_α est réunion d'ouverts affines $X''_{\alpha\lambda}$ ($\lambda \in L$); soit X''_α le préschéma somme des $X''_{\alpha\lambda}$ ($\lambda \in L$), qui est un schéma affine; si $g_\alpha: X''_\alpha \rightarrow X'_\alpha$ est le morphisme coïncidant avec l'identité dans chacun des $X''_{\alpha\lambda}$, il est clair que si l'on pose $f'_\alpha = f_\alpha \circ g_\alpha$, on a $E_\alpha = f'_\alpha(X''_\alpha)$ puisque g_α est surjectif. Pour montrer que a'') entraîne a), notons qu'il y a une partie finie J de I telle que les X_α d'indices $\alpha \in J$ recouvrent X ; soit X' le préschéma somme des X'_α pour $\alpha \in J$, et soit $f: X' \rightarrow X$ le morphisme coïncidant avec $j_\alpha \circ f_\alpha$ pour tout $\alpha \in J$, où $j_\alpha: X_\alpha \rightarrow X$ est l'injection canonique. Comme E est réunion des $E \cap X_\alpha$ pour $\alpha \in J$, on a bien $E = f(X')$ et il reste à voir que f est un morphisme quasi-compact; mais l'hypothèse que X est quasi-séparé entraîne que j_α est quasi-compact (1.2.7), donc il en est de même de $j_\alpha \circ f_\alpha$ (1.1.1 et 1.1.2) et finalement de f (1.1.6).

Reste donc à prouver l'équivalence de a'') et de b). Prouvons en premier lieu que a'') entraîne b) : considérons une partie finie J de I telle que les X_α pour $\alpha \in J$ recouvrent X ; il suffira de montrer que, pour tout $\alpha \in J$, E_α est intersection de parties constructibles $F_{\alpha\lambda}$ de X_α ($\lambda \in L_\alpha$); en effet, tout $F_{\alpha\lambda}$ est aussi une partie constructible de X en vertu de (0_{III}, 9.1.8, (ii)), car l'hypothèse que X est quasi-séparé entraîne que tout X_α est rétrocompact dans X (1.2.7); E étant réunion des E_α pour $\alpha \in J$, est intersection des réunions (finies) $\bigcup_{\alpha \in J} F_{\alpha, \lambda(\alpha)}$, pour tous les choix des $\lambda(\alpha) \in L_\alpha$; ces réunions étant constructibles dans X , cela établit notre assertion. On peut donc se borner au cas

où $X = \text{Spec}(A)$ et où $E = f(X')$, où $X' = \text{Spec}(A')$ est affine, $f: X' \rightarrow X$ un morphisme correspondant à un homomorphisme d'anneaux $A \rightarrow A'$. Notons maintenant que A' est limite inductive de la famille (A'_λ) de ses sous- A -algèbres de type fini, ordonnée par inclusion; si $X'_\lambda = \text{Spec}(A'_\lambda)$, f se factorise en $X' \xrightarrow{\quad} X'_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} X$ et il résulte de (1.9.2, (ii)) que l'on a $f(X') = \bigcap_\lambda f_\lambda(X'_\lambda)$; si l'on démontre que $f_\lambda(X'_\lambda)$ est intersection de parties constructibles de X , il en sera de même de $f(X')$. On peut donc se borner au cas où A' est une A -algèbre de type fini. Or, on a le lemme suivant :

Lemme (1.9.3.1). — Soient A un anneau, A' une A -algèbre de type fini. Alors A' est A -isomorphe à une limite inductive filtrante $\varinjlim A''_\mu$ où les A''_μ sont des A -algèbres de présentation finie (1.4.1).

En effet, on peut écrire $A' = B/\mathfrak{J}$, avec $B = A[T_1, \dots, T_n]$ et \mathfrak{J} un idéal de B . Mais \mathfrak{J} est limite inductive des idéaux de type fini \mathfrak{J}'_μ de B , contenus dans \mathfrak{J} , ordonnés par inclusion; comme dans la catégorie des B -modules le foncteur \varinjlim est exact, on en conclut que $A' = \varinjlim B/\mathfrak{J}'_\mu$ à un A -isomorphisme près.

Le même raisonnement que ci-dessus permet alors de se ramener au cas où A' est une A -algèbre de présentation finie; mais alors $f(X')$ est constructible dans X en vertu du théorème de Chevalley (1.8.5), ce qui prouve *b*).

Démontrons enfin que *b*) entraîne *a''*). Si E est intersection d'une famille $(G_\lambda)_{\lambda \in L}$ de parties constructibles de X , chaque E_α est intersection des $G_\lambda \cap X_\alpha$, qui sont constructibles dans X_α (0_{III}, 9.1.8, (i)), donc on est ramené au cas où $X = \text{Spec}(A)$ est affine.

On sait alors (1.8.3) que pour tout $\lambda \in L$ il existe un morphisme $f_\lambda: X'_\lambda \rightarrow X$, où $X'_\lambda = \text{Spec}(A'_\lambda)$ est affine, tel que $f_\lambda(X'_\lambda) = G_\lambda$. Il suffit donc de prouver le lemme suivant :

Lemme (1.9.3.2). — Soient $(A'_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille de A -algèbres, $X = \text{Spec}(A)$, $X'_\lambda = \text{Spec}(A'_\lambda)$, et soit $f_\lambda: X'_\lambda \rightarrow X$ le morphisme structural. Pour toute partie finie J de L , posons $A'_J = \bigotimes_{\lambda \in J} A'_\lambda$ (produit tensoriel de A -algèbres), $X'_J = \text{Spec}(A'_J)$, et soit $f_J: X'_J \rightarrow X$ le morphisme structural. On a alors $f_J(X'_J) = \bigcap_{\lambda \in J} f_\lambda(X'_\lambda)$. Si $A' = \varinjlim A'_J$, J parcourant l'ensemble filtrant des parties finies de L , $X' = \text{Spec}(A')$, et si $f: X' \rightarrow X$ est le morphisme structural, on a $f(X') = \bigcap_{\lambda \in L} f_\lambda(X'_\lambda)$.

La première assertion résulte de (I, 3.4.7); la deuxième résulte de (1.9.2, (ii)), qui donne la relation $f(X') = \bigcap_J f_J(X'_J)$.

Définition (1.9.4). — Soit X un espace topologique. On dit qu'une partie E de X est pro-constructible (resp. ind-constructible) dans X si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que $E \cap U$ soit intersection (resp. réunion) de parties localement constructibles de U .

Tenant compte de (1.2.7) et de (0_{III}, 9.1.8 et 9.1.12), les conditions équivalentes de la proposition (1.9.3) s'expriment donc en disant que E est pro-constructible dans X , les ensembles localement constructibles dans X étant identiques aux ensembles constructibles dans X sous les hypothèses de (1.9.3).

Proposition (1.9.5). — Soit X un préschéma.

(i) Pour qu'une partie E de X soit pro-constructible, il faut et il suffit que $X - E$ soit ind-constructible.

(ii) Toute réunion finie et toute intersection de parties pro-constructibles de X sont pro-constructibles. Toute intersection finie et toute réunion de parties ind-constructibles de X sont ind-constructibles.

(iii) Toute intersection (resp. réunion) de parties localement constructibles de X est pro-constructible (resp. ind-constructible). Inversement, si X est quasi-compact et quasi-séparé, toute partie pro-constructible (resp. ind-constructible) de X est intersection (resp. réunion) de parties constructibles de X .

(iv) Soit (U_α) un recouvrement ouvert de X . Pour qu'une partie E de X soit pro-constructible (resp. ind-constructible) dans X , il faut et il suffit que pour tout α , $E \cap U_\alpha$ soit pro-constructible (resp. ind-constructible) dans U_α .

(v) Toute partie pro-constructible E de X est rétrocompacte dans X . Pour qu'une partie localement fermée E de X soit rétrocompacte dans X , il faut et il suffit qu'elle soit pro-constructible dans X .

(vi) Soit $f: X' \rightarrow X$ un morphisme de préschémas; pour toute partie pro-constructible (resp. ind-constructible) E de X , $f^{-1}(E)$ est pro-constructible (resp. ind-constructible) dans X' .

(vii) Soit $f: X' \rightarrow X$ un morphisme quasi-compact; pour toute partie pro-constructible E' de X' , $f(E')$ est pro-constructible dans X ; en particulier $f(X')$ est pro-constructible dans X .

(viii) Soit $f: X' \rightarrow X$ un morphisme localement de présentation finie; pour toute partie ind-constructible E' de X' , $f(E')$ est ind-constructible dans X ; en particulier $f(X')$ est ind-constructible dans X .

(ix) Supposons que X soit quasi-compact et quasi-séparé; alors, pour qu'une partie E de X soit pro-constructible, il faut et il suffit qu'il existe un schéma affine X' et un morphisme (nécessairement quasi-compact) $f: X' \rightarrow X$ tels que $E = f(X')$.

Les propriétés (i), (ii), (iv) et la première assertion de (iii) résultent de la définition (1.9.4) et sont valables pour un espace topologique quelconque, en utilisant la distributivité mutuelle de l'intersection et de la réunion et le fait que si T est localement constructible dans X , $T \cap U$ est localement constructible dans U pour tout ouvert U de X . Si X est quasi-compact et quasi-séparé et E est pro-constructible dans X , il y a un recouvrement fini (U_i) de X formé d'ouverts affines tels que $E \cap U_i$ soit intersection de parties constructibles $M_{i\lambda}$ de U_i ($\lambda \in L_i$); les $M_{i\lambda}$ sont aussi constructibles dans X en vertu de (1.2.7) et (0_{III}, 9.1.8, (ii)) et E est intersection des réunions finies $\bigcup_i M_{i,\lambda(i)}$ (où $\lambda(i) \in L_i$ pour tout i), qui sont des parties constructibles dans X ; cela démontre la seconde assertion de (iii). L'assertion (ix) résulte de (iii) et de (1.9.3). Pour démontrer la première assertion de (v), on peut se limiter au cas où X est affine, et prouver alors que E est quasi-compact (0_{III}, 9.1.1); mais comme X est alors quasi-séparé, il existe en vertu de (ix) un morphisme quasi-compact $f: X' \rightarrow X$ tel que $E = f(X')$; comme X' est quasi-compact, il en est de même de son image E par une application continue.

Pour prouver (vi), on peut se borner, en vertu de (iv), au cas où X est affine; la conclusion résulte alors de (iii) et de (1.8.2).

De même, pour démontrer (vii), on peut se borner au cas où X est affine; alors X' est réunion finie d'ouverts affines X'_i et $f(E')$ est réunion des $f(E' \cap X'_i)$, si bien qu'on peut aussi supposer que X' est affine, en vertu de (ii); mais alors $E' = g(X'')$, où $g : X'' \rightarrow X'$ est un morphisme quasi-compact, en vertu de (ix), et l'on a $f(E') = f(g(X''))$, donc $f(E')$ est pro-constructible puisque gof est quasi-compact.

On déduit de (vii) la démonstration de la seconde assertion de (v) : en effet, soit E une partie localement fermée et rétrocompacte dans X , et considérons un sous-préschéma de X ayant E pour espace sous-jacent (I, 5.2.1); l'injection canonique $j : E \rightarrow X$ est alors par hypothèse un morphisme quasi-compact, et il résulte de (vii) que $E = j(E)$ est pro-constructible dans X .

Enfin, pour prouver (viii), on peut encore supposer X affine; en outre, si (X'_α) est un recouvrement ouvert affine de X' tel que $E' \cap X'_\alpha$ soit réunion de parties constructibles de X'_α ((iii) et (iv)), $f(E')$ est réunion des $f(E' \cap X'_\alpha)$ et, en vertu du théorème de Chevalley (I.8.4), chacune des $f(E' \cap X'_\alpha)$ est réunion de parties constructibles de X , d'où la conclusion.

Exemples (I.9.6). — Toute partie *finie* d'un préschéma X est pro-constructible : en effet, il suffit de considérer les parties $\{x\}$ réduites à un seul point (I.9.5, (ii)) et $\{x\}$ est l'image de $\text{Spec}(\mathbf{k}(x))$ par le morphisme canonique $\text{Spec}(\mathbf{k}(x)) \rightarrow X$, qui est quasi-compact; d'où la conclusion par (I.9.5, (vii)). Par contre, une partie $\{x\}$ réduite à un point n'est pas nécessairement ind-constructible; par exemple, soit A un anneau noethérien intègre ayant une infinité d'idéaux maximaux, et soit x le point générique de $X = \text{Spec}(A)$; si $\{x\}$ était ind-constructible dans X , il serait constructible en vertu de (I.9.5, (iii)) et par suite contiendrait un ouvert non vide de X (0_{III}, 9.2.2); mais cela contredit l'hypothèse que A possède une infinité d'idéaux maximaux, en vertu du théorème d'Artin-Tate (0, 16.3.3).

Toute partie *fermée* Y d'un préschéma X est pro-constructible, par (I.9.5, (v)). Toute partie ouverte de X est donc ind-constructible, mais une partie ouverte U de X n'est pro-constructible que si elle est *rétrocompacte*, en vertu encore de (I.9.5, (v)).

Enfin, si X est un préschéma *noethérien*, donc quasi-séparé (I.2.8), il résulte de (I.9.5, (iii)) et de (0_{III}, 9.1.7) que les parties ind-constructibles de X sont les *réunions de parties localement fermées de X* .

Théorème (I.9.7). — Soient X un préschéma quasi-compact, E une partie ind-constructible de X , $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille de parties pro-constructibles de X telle que $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \subset E$; alors il existe une partie finie J de L telle que $\bigcap_{\lambda \in J} F_\lambda \subset E$.

Notons que les ensembles $F = X - E$ et $F \cap F_\lambda$ sont pro-constructibles, donc on est ramené au

Corollaire (I.9.8). — Soient X un préschéma quasi-compact, $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille de parties pro-constructibles de X dont l'intersection est vide; alors il existe une sous-famille finie $(F_\lambda)_{\lambda \in J}$ dont l'intersection est vide.

Recouvrant X par un nombre fini d'ouverts affines, et utilisant (I.9.5, (iv)), on est ramené au cas où X est affine; en vertu de (I.9.5, (ix)), on a $F_\lambda = f_\lambda(X'_\lambda)$,

où $X'_\lambda = \text{Spec}(A'_\lambda)$ est affine, et f_λ est un morphisme $X'_\lambda \rightarrow X$; alors, avec les notations de (1.9.3.2), on a par hypothèse $f(X') = \emptyset$, donc $X' = \emptyset$; mais cela entraîne par (1.9.2, (i)) qu'il existe une partie finie J de L telle que $X'_J = \emptyset$, donc $f_J(X'_J) = \bigcap_{\lambda \in J} F_\lambda = \emptyset$.

Corollaire (1.9.9). — Soient X un préschéma quasi-compact, F une partie pro-constructible de X , $(E_\lambda)_{\lambda \in L}$ une famille de parties ind-constructibles de X telle que $F \subset \bigcup_{\lambda \in L} E_\lambda$; alors il existe une partie finie J de L telle que $F \subset \bigcup_{\lambda \in J} E_\lambda$. En particulier, de tout recouvrement de X par des parties ind-constructibles, on peut extraire un recouvrement fini de X .

Cela résulte de (1.9.7) par passage aux complémentaires.

Proposition (1.9.10). — Soit X un préschéma. Pour qu'une partie E de X soit ind-constructible, il est nécessaire que, pour tout $x \in X$, l'intersection $E \cap \overline{\{x\}}$ soit un voisinage de x dans $\overline{\{x\}}$. Si X est localement noethérien, cette condition est suffisante.

Supposons E ind-constructible, et soit Y l'intersection de $\overline{\{x\}}$ et d'un ouvert affine dans X , contenant x ; il y a donc un sous-préschéma de X ayant Y pour espace sous-jacent (I, 5.2.1), et si $j : Y \rightarrow X$ est l'injection canonique, $E \cap Y = j^{-1}(E)$ est ind-constructible dans Y (1.9.5, (vi)). Comme Y est quasi-compact et séparé, $E \cap Y$ est donc réunion de parties constructibles de Y (1.9.5, (iii)); par suite, il y a deux ouverts U, V dans Y tels que $x \in U \cap V \subset E \cap Y$ (0_{III}, 9.1.3). Mais comme x est point générique de l'espace irréductible Y , V est nécessairement vide et l'on a $U \subset E \cap Y$.

Supposons maintenant X localement noethérien, et soit E une partie de X vérifiant la condition de l'énoncé. En vertu de la définition (1.9.4), on peut se borner au cas où X est noethérien. Alors, pour tout $x \in E$, $E \cap \overline{\{x\}}$ contient une partie non vide de la forme $U \cap \overline{\{x\}}$, où U est ouvert dans X ; cela montre que E est réunion de parties localement fermées de X , donc est ind-constructible (1.9.6).

Proposition (1.9.11). — Soient X un préschéma, E une partie de X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) E est localement constructible.
- b) E est ind-constructible et pro-constructible.
- c) E et $X - E$ sont pro-constructibles.
- d) E et $X - E$ sont ind-constructibles.

Il suffit évidemment de prouver que d) entraîne a), et on peut se borner au cas où X est affine. Alors (1.9.5, (iii)), E (resp. $X - E$) est réunion d'une famille (E_λ) (resp. E'_{μ_j}) de parties constructibles de X ; comme les E_λ et les E'_{μ_j} forment un recouvrement de X , il résulte de (1.9.9) qu'il y a des indices en nombre fini λ_i, μ_j tels que les E_{λ_i} et les E'_{μ_j} forment un recouvrement de X ; cela implique que E est réunion des E_{λ_i} , donc est constructible.

Corollaire (1.9.12). — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme surjectif, qui est, soit quasi-compact, soit localement de présentation finie. Pour qu'une partie E de Y soit localement constructible (resp. pro-constructible, resp. ind-constructible), il faut et il suffit que $f^{-1}(E)$ le soit dans X .

On sait que la condition est nécessaire ((1.8.2) et (1.9.5, (vi))); pour montrer qu'elle est suffisante, on est ramené au cas où X est affine, en vertu de (1.9.5, (iv)); en outre, en vertu de (1.9.11), on peut se borner au cas où $f^{-1}(E)$ est pro-constructible, ou au cas où $f^{-1}(E)$ est ind-constructible. Si f est surjectif et quasi-compact, et $f^{-1}(E)$ pro-constructible, il résulte de (1.9.5, (vii)) que $E = f(f^{-1}(E))$ est pro-constructible. Si f est surjectif et localement de présentation finie, et $f^{-1}(E)$ ind-constructible, $E = f(f^{-1}(E))$ est ind-constructible par (1.9.5, (viii)), ce qui achève la démonstration.

(1.9.13) Soient X un préschéma, \mathcal{T} sa topologie; il résulte de (1.9.5, (i) et (ii)) que les parties ind-constructibles (resp. pro-constructibles) de X sont les parties ouvertes (resp. fermées) pour une topologie sur X , appelée *topologie constructible* et que nous noterons $\mathcal{T}^{\text{cons}}$; nous désignerons par X^{cons} l'ensemble X muni de la topologie $\mathcal{T}^{\text{cons}}$.

Proposition (1.9.14). — Soient X un préschéma, \mathcal{T} sa topologie, $\mathcal{T}^{\text{cons}}$ la topologie constructible sur X .

- (i) La topologie $\mathcal{T}^{\text{cons}}$ est plus fine que \mathcal{T} .
- (ii) Les parties localement constructibles de X sont identiques aux parties à la fois ouvertes et fermées de l'espace X^{cons} .
- (iii) Pour tout morphisme $f: X \rightarrow Y$, l'application sous-jacente de X^{cons} dans Y^{cons} est continue; on la note f^{cons} .
- (iv) Si le morphisme $f: X \rightarrow Y$ est quasi-compact, f^{cons} est une application fermée; en particulier, si f est quasi-compact et bijectif, f^{cons} est un homéomorphisme.
- (v) Si un morphisme $f: X \rightarrow Y$ est localement de présentation finie, f^{cons} est une application ouverte; en particulier, si f est bijectif et localement de présentation finie, f^{cons} est un homéomorphisme.
- (vi) Pour tout ouvert U de X , la topologie induite par $\mathcal{T}^{\text{cons}}$ sur U est identique à la topologie de U^{cons} .

En effet, (i) résulte de ce que tout ouvert pour \mathcal{T} est un ouvert pour $\mathcal{T}^{\text{cons}}$ (1.9.6), et (ii) est une traduction de (1.9.11); (iii), (iv) et (v) traduisent respectivement (1.9.5), (vi), (vii) et (viii). Enfin pour démontrer (vi), il suffit de remarquer que l'injection canonique $j: U \rightarrow X$ est localement de présentation finie (1.4.3), donc $j^{\text{cons}}: U^{\text{cons}} \rightarrow X^{\text{cons}}$ est une application continue ouverte.

Proposition (1.9.15). — Soit X un préschéma.

- (i) Pour que X^{cons} soit quasi-compact, il faut et il suffit que X soit quasi-compact.
- (ii) Pour que X^{cons} soit séparé, il faut et il suffit que X soit quasi-séparé, et alors X^{cons} est localement compact et totalement discontinu.
- (iii) Pour que X^{cons} soit compact, il faut et il suffit que X soit quasi-compact et quasi-séparé.
- (iv) Tout point de X admet, pour la topologie $\mathcal{T}^{\text{cons}}$, un voisinage ouvert et compact.
- (v) Pour qu'un morphisme $f: X \rightarrow Y$ soit quasi-compact, il faut et il suffit que l'application continue $f^{\text{cons}}: X^{\text{cons}} \rightarrow Y^{\text{cons}}$ soit propre.

(i) Comme $\mathcal{T}^{\text{cons}}$ est plus fine que \mathcal{T} , il est clair que si X^{cons} est quasi-compact, il en est de même de X ; la réciproque résulte de (1.9.9).

(ii) Supposons X quasi-séparé, et montrons que X^{cons} est totalement discontinu : en effet, si x, y sont deux points distincts de X et si par exemple $x \notin \overline{\{y\}}$, il existe un

voisinage ouvert affine U de X ne contenant pas y ; comme X est quasi-séparé, U est rétrocompact dans X (1.2.7), donc U et $X - U$ sont localement constructibles dans X , et par suite ouverts dans X^{cons} en vertu de (1.9.11), d'où notre assertion. Comme sur tout ouvert affine U de X , la topologie induite par $\mathcal{T}^{\text{cons}}$ est celle de U^{cons} en vertu de (1.9.14, (vi)), il résulte de ce qui précède que X^{cons} est localement compact, puisque U est ouvert dans X^{cons} et que U^{cons} est compact. Reste à prouver que si X^{cons} est séparé, alors X est quasi-séparé; considérons en effet un ouvert affine U de X ; la topologie induite sur U par $\mathcal{T}^{\text{cons}}$ est celle de U^{cons} (1.9.14, (vi)), donc U est compact pour cette topologie induite, puisque U^{cons} est compact par la première partie du raisonnement. Si V est un second ouvert affine dans X , $U \cap V$ est donc une partie compacte de l'espace séparé X^{cons} , étant intersection de deux parties compactes de cet espace; comme la topologie induite par $\mathcal{T}^{\text{cons}}$ sur $U \cap V$ est celle de $(U \cap V)^{\text{cons}}$ (1.9.14, (vi)) et que l'application identique $(U \cap V)^{\text{cons}} \rightarrow U \cap V$ est continue, on en conclut que $U \cap V$ est quasi-compact pour la topologie induite par \mathcal{T} ; X est par suite quasi-séparé en vertu de (1.2.7).

(iii) est un corollaire immédiat de (i) et (ii).

(iv) Pour tout $x \in X$, un voisinage ouvert affine U de x pour \mathcal{T} est aussi un voisinage de x pour $\mathcal{T}^{\text{cons}}$ et il est compact en vertu de (iii) et de (1.9.14, (vi)), la topologie induite sur U par $\mathcal{T}^{\text{cons}}$ étant identique à celle de U^{cons} .

(v) Supposons f quasi-compact; alors on sait déjà (1.9.14, (iv)) que f^{cons} est une application fermée. Soit d'autre part y un point de Y , et posons

$$Z = f^{-1}(y) = X \times_Y \text{Spec}(\mathbf{k}(y));$$

Z est quasi-compact (1.1.2, (iii)) et comme le morphisme canonique $p : Z \rightarrow X$ est injectif, il résulte de (i) et de ce que l'application p^{cons} est continue, que la topologie induite sur $f^{-1}(y)$ par celle de X^{cons} fait de $f^{-1}(y)$ un espace quasi-compact. Cela prouve que f^{cons} est une application propre (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. Ier, 3^e éd., § 10, n° 2, th. 1). Inversement, supposons que l'application continue f^{cons} soit propre, et soit V un ouvert quasi-compact de Y ; si $h : V \rightarrow Y$ est l'injection canonique, $h^{\text{cons}} : V^{\text{cons}} \rightarrow Y^{\text{cons}}$ est continue et injective et V^{cons} est quasi-compact par (i), donc la topologie induite sur V par celle de Y^{cons} fait de V un espace quasi-compact. L'hypothèse que f^{cons} est propre entraîne alors que la topologie induite sur $f^{-1}(V)$ par celle de X^{cons} fait de $f^{-1}(V)$ un espace quasi-compact (*loc. cit.*, prop. 6), donc $f^{-1}(V)$ est aussi un sous-espace quasi-compact de X , ce qui montre que le morphisme f est quasi-compact.

(1.9.16) Nous montrerons plus tard comment on peut, pour tout préschéma X , munir l'espace X^{cons} d'un faisceau d'anneaux qui en fait un préschéma dont les anneaux locaux sont tous des corps, identiques aux corps résiduels aux points de X . De tels préschémas s'introduisent par exemple de façon naturelle dans la traduction, en langage des schémas, des constructions de Néron [32] dans sa théorie de la réduction des variétés abéliennes.

1.10. Application aux morphismes ouverts.

Théorème (1.10.1). — Soient X un préschéma, E une partie ind-constructible de X (1.9.4), x un point de X . Pour que x soit intérieur à E , il faut et il suffit que toute générisation $(\mathbf{0}_1, 2.1.2)$ x' de x appartienne à E , autrement dit (I, 2.4.2) que l'on ait $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \subset E$.

La condition est évidemment nécessaire, tout voisinage de x contenant les générations de x . Pour voir qu'elle est suffisante, on peut évidemment se borner au cas où $X = \text{Spec}(A)$ est affine, x étant un idéal premier \mathfrak{p} de A . On sait alors (1.9.5, (ix)) qu'il existe un schéma affine $X' = \text{Spec}(A')$ et un morphisme $f : X' \rightarrow X$ tels que $f(X') = X - E$. Posons $Y = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ et $Y' = X' \times_X Y$; l'hypothèse signifie (en vertu de (I, 3.6.5)) que l'on a $Y' = \emptyset$, autrement dit $A' \otimes_A A_{\mathfrak{p}} = 0$. Comme $A_{\mathfrak{p}} = \varinjlim A_t$, où t parcourt $A - \mathfrak{p}$ ($\mathbf{0}_1, 1.4.5$), on a $\varinjlim A'_t = 0$, le foncteur \varinjlim commutant au produit tensoriel. Par suite (1.9.1), il existe un $t \in A - \mathfrak{p}$ tel que $A'_t = 0$, et $D(t)$ est alors un voisinage ouvert de x dans X contenu dans E .

Corollaire (1.10.2). — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de présentation finie, et soit $y \in Y$. Pour que y soit intérieur à $f(X)$ il faut et il suffit que toute générisation y' de y appartienne à $f(X)$.

On sait en effet (1.9.5, (viii)) que $f(X)$ est ind-constructible dans Y et il suffit d'appliquer (1.10.1).

Nous dirons qu'une application continue $f : X \rightarrow Y$ est ouverte en un point $x \in X$ si l'image par f de tout voisinage de x dans X est un voisinage de $f(x)$ dans Y .

Proposition (1.10.3). — Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme, x un point de X , $y = f(x)$. Considérons les conditions suivantes :

- a) f est ouvert au point x .
- b) Pour toute générisation y' de y , il existe une générisation x' de x telle que $f(x') = y'$.
- b') L'image par f de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ est $\text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$.
- c) Pour toute partie fermée irréductible Y' de Y contenant y , il existe une composante irréductible de $X' = f^{-1}(Y')$ contenant x et dominant Y' .

Alors on a les implications $a) \Rightarrow b) \Leftrightarrow b' \Rightarrow c)$. Si en outre f est localement de présentation finie, les quatre conditions sont équivalentes.

Par définition d'une générisation, l'image par f de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ est toujours contenue dans $\text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$, donc $b)$ et $b')$ sont équivalentes. Il est immédiat que $c)$ entraîne $b)$, car si y' est une générisation de y , $Y' = \overline{\{y'\}}$ est une partie irréductible de Y contenant y ; si x' est le point générique d'une composante irréductible de $f^{-1}(Y')$ qui contient x et domine Y' , on a $f(x') = y'$ ($\mathbf{0}_1, 2.1.5$) et x' est une générisation de x . Inversement, $b)$ entraîne $c)$: en effet, soit y' le point générique de Y' et soit x' une générisation de x telle que $f(x') = y'$; soit Z' une composante irréductible de $f^{-1}(Y')$ contenant x' (donc x); comme $f(x')$ est déjà dense dans Y' , il en est ainsi a fortiori de $f(Z')$.

Pour voir que $a)$ entraîne $b')$, on peut évidemment se borner au cas où $X = \text{Spec}(B)$ et $Y = \text{Spec}(A)$ sont affines, x étant un idéal premier \mathfrak{q} de B , de sorte que $\mathcal{O}_{X,x} = B_{\mathfrak{q}} = \varinjlim B_t$,

où t parcourt $B - q$. On a, par suite (1.9.2), $f(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})) = \bigcap_i f(\text{Spec}(B_i)) = \bigcap_i f(D(t))$, et par hypothèse, pour tout $t \in B - q$, y est intérieur à $f(D(t))$, donc $f(D(t))$ contient $\text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$; d'où $\text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y}) \subset f(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}))$, ce qui établit notre assertion. Enfin, lorsque f est localement de présentation finie, b) implique a) en vertu de (1.10.2) appliqué à la restriction $U \rightarrow Y$ de f à un voisinage ouvert arbitraire U de x .

Corollaire (1.10.4). — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme. Considérons les conditions suivantes :

- a) f est ouvert.
- b) Pour tout $x \in X$ et toute généralisation y' de $y = f(x)$, il existe une généralisation x' de x telle que $f(x') = y'$.
- b') Pour tout $x \in X$, l'image par f de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ est $\text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,f(x)})$.
- c) Pour toute partie fermée irréductible Y' de Y , toute composante irréductible de $f^{-1}(Y')$ domine Y' .

Alors on a les implications $a) \Rightarrow b) \Leftrightarrow b' \Leftrightarrow c)$. Si en outre f est localement de présentation finie, les quatre conditions sont équivalentes.

Dire que f est ouvert signifie que f est ouvert en tout point $x \in X$, donc les implications $a) \Rightarrow b) \Leftrightarrow b'$ résultent des implications analogues dans (1.10.3), ainsi que l'implication $b) \Rightarrow a)$ lorsque f est localement de présentation finie. L'implication $c) \Rightarrow b$ résulte aussi de l'implication analogue dans (1.10.3); prouvons enfin que $b)$ entraîne $c)$. En effet, soit x' le point générique d'une composante irréductible de $f^{-1}(Y')$, et montrons que $y' = f(x')$ est le point générique de Y' . Soit y'' une généralisation de y' ; il existe par hypothèse une généralisation x'' de x' telle que $f(x'') = y''$, et comme $x'' \in f^{-1}(Y')$, on a nécessairement $x'' = x'$, donc $y'' = y'$, ce qui achève la démonstration.

(A suivre.)

BIBLIOGRAPHIE (*suite*)

- [30] M. NAGATA, Local rings, *Interscience Tracts*, 13 (1962), Interscience, New York.
 - [31] M. NAGATA, A Jacobian criterion of simple points, *Ill. Journ. of Math.*, 1 (1957), p. 427-432.
 - [32] A. NÉRON, Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux, *Publ. Inst. Hautes Études Sci.*, n° 21 (1964).
-