

## CHAPITRE II

# ÉTUDE GLOBALE ÉLÉMENTAIRE DE QUELQUES CLASSES DE MORPHISMES

---

### Sommaire

- § 1. Morphismes affines.
- § 2. Spectres premiers homogènes.
- § 3. Spectre homogène d'un faisceau d'algèbres graduées.
- § 4. Fibrés projectifs. Faisceaux amples.
- § 5. Morphismes quasi-affines; morphismes quasi-projectifs; morphismes propres; morphismes projectifs.
- § 6. Morphismes entiers et morphismes finis.
- § 7. Critères valuatifs.
- § 8. Schémas éclatés; cônes projetants; fermeture projective.

Les diverses classes de morphismes étudiées dans ce chapitre le sont sans faire grand usage des méthodes cohomologiques; une étude plus poussée, utilisant ces dernières méthodes, en sera faite au chapitre III, où on utilisera surtout les §§ 2, 4 et 5 du chapitre II. Le § 8 peut être omis en première lecture : il donne quelques compléments au formalisme développé dans les §§ 1 à 3, se réduisant à des applications faciles de ce formalisme, et nous en ferons un usage moins constant que des autres résultats de ce chapitre.

### § 1. MORPHISMES AFFINES

La plupart des résultats de ce paragraphe sont les contreparties « globales » de ceux du chapitre I<sup>e</sup>, § 1; ils ne sont donc pas essentiellement nouveaux et fournissent simplement un langage commode pour la suite.

#### I. I. S-préschémas et $\mathcal{O}_S$ -Algèbres.

(I. I. 1) Soient  $S$  un préschéma,  $X$  un  $S$ -préschéma,  $f: X \rightarrow S$  son morphisme structural. On sait (0, 4.2.4) que l'image directe  $f_*(\mathcal{O}_X)$  est une  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre, que nous

noterons  $\mathcal{A}(X)$  lorsqu'il n'en résultera pas de confusion; si  $U$  est un ouvert de  $S$ , on a

$$\mathcal{A}(f^{-1}(U)) = \mathcal{A}(X)|_U.$$

De même, pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\mathcal{F}$  (resp. toute  $\mathcal{O}_X$ -Algèbre  $\mathcal{B}$ ), nous écrirons  $\mathcal{A}(\mathcal{F})$  (resp.  $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ ) l'image directe  $f_*(\mathcal{F})$  (resp.  $f_*(\mathcal{B})$ ) qui est un  $\mathcal{A}(X)$ -Module (resp. une  $\mathcal{A}(X)$ -Algèbre), et non seulement un  $\mathcal{O}_S$ -Module (resp.  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre).

**(1.1.2)** Soient  $Y$  un second  $S$ -préschéma,  $g : Y \rightarrow S$  son morphisme structural,  $h : X \rightarrow Y$  un  $S$ -morphisme; on a donc le diagramme commutatif

$$(1.1.2.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ f \searrow & \swarrow g & \\ S & & \end{array}$$

On a par définition  $h = (\psi, \theta)$ , où  $\theta : \mathcal{O}_Y \rightarrow h_*(\mathcal{O}_X) = \psi_*(\mathcal{O}_X)$  est un homomorphisme de faisceaux d'anneaux; on en déduit (0, 4.2.2) un homomorphisme de  $\mathcal{O}_S$ -Algèbres  $g_*(\theta) : g_*(\mathcal{O}_Y) \rightarrow g_*(h_*(\mathcal{O}_X)) = f_*(\mathcal{O}_X)$ , autrement dit, un homomorphisme de  $\mathcal{O}_S$ -Algèbres  $\mathcal{A}(Y) \rightarrow \mathcal{A}(X)$ , que nous noterons aussi  $\mathcal{A}(h)$ . Si  $h' : Y \rightarrow Z$  est un second  $S$ -morphisme, il est immédiat que  $\mathcal{A}(h' \circ h) = \mathcal{A}(h) \circ \mathcal{A}(h')$ . Nous avons donc défini un *foncteur contravariant*  $\mathcal{A}(X)$  sur la catégorie des  $S$ -préschémas, à valeurs dans la catégorie des  $\mathcal{O}_S$ -Algèbres.

Soient maintenant  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module,  $\mathcal{G}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -Module, et  $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  un  $h$ -morphisme, c'est-à-dire (0, 4.4.1) un homomorphisme de  $\mathcal{O}_Y$ -Modules  $\mathcal{G} \rightarrow h_*(\mathcal{F})$ . Alors  $g_*(u) : g_*(\mathcal{G}) \rightarrow g_*(h_*(\mathcal{F})) = f_*(\mathcal{F})$  est un homomorphisme  $\mathcal{A}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{F})$  de  $\mathcal{O}_S$ -Modules, que nous noterons  $\mathcal{A}(u)$ ; en outre, le couple  $(\mathcal{A}(h), \mathcal{A}(u))$  constitue un *di-homomorphisme* du  $\mathcal{A}(Y)$ -Module  $\mathcal{A}(\mathcal{G})$  dans le  $\mathcal{A}(X)$ -Module  $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ .

**(1.1.3)** Le préschéma  $S$  étant fixé, on peut considérer les couples  $(X, \mathcal{F})$ , où  $X$  est un  $S$ -préschéma et  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module, comme formant une *catégorie*, en définissant un *morphisme*  $(X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$  comme un couple  $(h, u)$ , où  $h : X \rightarrow Y$  est un  $S$ -morphisme et  $u : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  un  $h$ -morphisme. On peut alors dire que  $(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(\mathcal{F}))$  est un *foncteur contravariant* à valeurs dans la catégorie dont les objets sont les couples formés d'une  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre et d'un Module sur cette Algèbre, et les morphismes sont les di-homomorphismes.

## 1.2. Préschémas affines sur un préschéma.

**Définition (1.2.1).** — Soient  $X$  un  $S$ -préschéma,  $f : X \rightarrow S$  son morphisme structural. On dit que  $X$  est affine au-dessus de  $S$  s'il existe un recouvrement  $(S_\alpha)$  de  $S$  par des ouverts affines tels que, pour tout  $\alpha$ , le préschéma induit par  $X$  sur l'ensemble ouvert  $f^{-1}(S_\alpha)$  soit affine.

**Exemple (1.2.2).** — Tout sous-préschéma fermé de  $S$  est un  $S$ -préschéma affine au-dessus de  $S$  (I, 4.2.3 et 4.2.4).

**Remarque (1.2.3).** — Un préschéma  $X$  affine au-dessus de  $S$  n'est pas nécessairement un schéma affine, comme le montre l'exemple  $X = S$  (1.2.2). D'autre part, si un schéma affine  $X$  est un  $S$ -préschéma,  $X$  n'est pas nécessairement affine au-dessus

de  $S$  (voir (1.3.3)). Toutefois, rappelons que si  $S$  est un schéma, tout  $S$ -préschéma qui est un schéma affine est affine au-dessus de  $S$  (**I**, 5.5.10).

*Proposition (1.2.4).* — *Tout  $S$ -préschéma qui est affine au-dessus de  $S$  est séparé au-dessus de  $S$  (autrement dit, est un  $S$ -schéma).*

Cela résulte aussitôt de (**I**, 5.5.5) et (**I**, 5.5.8).

*Proposition (1.2.5).* — *Soient  $X$  un  $S$ -schéma affine au-dessus de  $S$ ,  $f : X \rightarrow S$  le morphisme structural. Pour tout ouvert  $U \subset S$ ,  $f^{-1}(U)$  est affine au-dessus de  $U$ .*

En vertu de la déf. (1.2.1), on est ramené au cas où  $S = \text{Spec}(A)$  et  $X = \text{Spec}(B)$  sont affines et alors  $f = (^{\varphi}, \widetilde{\varphi})$ , où  $\varphi : A \rightarrow B$  est un homomorphisme. Comme les  $D(g)$ , où  $g \in A$ , forment une base de  $S$ , on est ramené au cas où  $U = D(g)$ ; mais on sait alors que  $f^{-1}(U) = D(\varphi(g))$  (**I**, 1.2.2.2), d'où la proposition.

*Proposition (1.2.6).* — *Soient  $X$  un  $S$ -schéma affine au-dessus de  $S$ ,  $f : X \rightarrow S$  le morphisme structural. Pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ ,  $f_*(\mathcal{F})$  est un  $\mathcal{O}_S$ -Module quasi-cohérent.*

Compte tenu de (1.2.4), cela résulte de (**I**, 9.2.2, a)).

En particulier, la  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre  $\mathcal{A}(X) = f_*(\mathcal{O}_X)$  est quasi-cohérente.

*Proposition (1.2.7).* — *Soient  $X$  un  $S$ -schéma affine au-dessus de  $S$ . Pour tout  $S$ -préschéma  $Y$ , l'application  $h \mapsto \mathcal{A}(h)$  de l'ensemble  $\text{Hom}_S(Y, X)$  dans l'ensemble  $\text{Hom}(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y))$  (1.1.2) est bijective.*

Soient  $f : X \rightarrow S$ ,  $g : Y \rightarrow S$  les morphismes structuraux. Supposons d'abord  $S = \text{Spec}(A)$  et  $X = \text{Spec}(B)$  affines; il faut prouver que pour tout homomorphisme  $\omega : f_*(\mathcal{O}_X) \rightarrow g_*(\mathcal{O}_Y)$  de  $\mathcal{O}_S$ -Algèbres, il existe un  $S$ -morphisme  $h : Y \rightarrow X$  et un seul tel que  $\mathcal{A}(h) = \omega$ . Par définition, pour tout ouvert  $U \subset S$ ,  $\omega$  définit un homomorphisme  $\omega_U = \Gamma(U, \omega) : \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(g^{-1}(U), \mathcal{O}_Y)$  de  $\Gamma(U, \mathcal{O}_S)$ -algèbres. En particulier, pour  $U = S$ , cela donne un homomorphisme  $\varphi : \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$  de  $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ -algèbres, auquel correspond un  $S$ -morphisme  $h : Y \rightarrow X$  bien déterminé, puisque  $X$  est affine (**I**, 2.2.4). Reste à prouver que  $\mathcal{A}(h) = \omega$ , autrement dit, que pour tout ouvert  $U$  d'une base de  $S$ ,  $\omega_U$  coïncide avec l'homomorphisme d'algèbres  $\varphi_U$  correspondant au  $S$ -morphisme  $g^{-1}(U) \rightarrow f^{-1}(U)$  restriction de  $h$ . On peut se borner au cas où  $U = D(\lambda)$ , avec  $\lambda \in S$ ; alors, si  $f = (^{\varphi}, \widetilde{\varphi})$ , où  $\varphi : A \rightarrow B$  est un homomorphisme d'anneaux, on a  $f^{-1}(U) = D(\mu)$ , où  $\mu = \varphi(\lambda)$ , et  $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$  est l'anneau de fractions  $B_{\mu}$ ; or, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_{\mu} & \xrightarrow{\varphi_U} & \Gamma(g^{-1}(U), \mathcal{O}_Y) \end{array}$$

est commutatif, et il en est de même du diagramme analogue où  $\varphi_U$  est remplacé par  $\omega_U$ ; l'égalité  $\varphi_U = \omega_U$  résulte alors de la propriété universelle des anneaux de fractions (**0**, 1.2.4).

Passons au cas général, et soit  $(S_{\alpha})$  un recouvrement de  $S$  par des ouverts affines

tels que les  $f^{-1}(S_\alpha)$  soient affines. Alors tout homomorphisme  $\omega : \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(Y)$  de  $\mathcal{O}_S$ -Algèbres donne par restriction une famille d'homomorphismes

$$\omega_\alpha : \mathcal{A}(f^{-1}(S_\alpha)) \rightarrow \mathcal{A}(g^{-1}(S_\alpha))$$

de  $\mathcal{O}_{S_\alpha}$ -Algèbres, donc une famille de  $S_\alpha$ -morphismes  $h_\alpha : g^{-1}(S_\alpha) \rightarrow f^{-1}(S_\alpha)$  d'après ce qui précède. Tout revient à voir que pour tout ouvert affine  $U$  d'une base de  $S_\alpha \cap S_\beta$ , les restrictions de  $h_\alpha$  et de  $h_\beta$  à  $g^{-1}(U)$  coïncident, ce qui est évident, puisque, en vertu de ce qui précède, ces restrictions correspondent toutes deux à l'homomorphisme  $\mathcal{A}(X)|_U \rightarrow \mathcal{A}(Y)|_U$  restriction de  $\omega$ .

*Corollaire (1.2.8).* — Soient  $X, Y$  deux  $S$ -schémas qui sont affines au-dessus de  $S$ . Pour qu'un  $S$ -morphisme  $h : Y \rightarrow X$  soit un isomorphisme, il faut et il suffit que  $\mathcal{A}(h) : \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(Y)$  soit un isomorphisme.

Cela résulte aussitôt de (1.2.7) et du caractère fonctoriel de  $\mathcal{A}(X)$ .

### 1.3. Préschéma affine au-dessus de $S$ associé à une $\mathcal{O}_S$ -Algèbre.

*Proposition (1.3.1).* — Soit  $S$  un préschéma. Pour toute  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre quasi-cohérente  $\mathcal{B}$ , il existe un préschéma  $X$  affine au-dessus de  $S$ , défini à un  $S$ -isomorphisme unique près, tel que  $\mathcal{A}(X) = \mathcal{B}$ .

L'unicité résulte de (1.2.8); démontrons l'existence de  $X$ . Pour tout ouvert affine  $U \subset S$ , soit  $X_U$  le préschéma  $\text{Spec}(\Gamma(U, \mathcal{B}))$ ; comme  $\Gamma(U, \mathcal{B})$  est une  $\Gamma(U, \mathcal{O}_S)$ -algèbre,  $X_U$  est un  $S$ -préschéma (I, 1.6.1). En outre, comme  $\mathcal{B}$  est quasi-cohérente, la  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre  $\mathcal{A}(X_U)$  s'identifie canoniquement à  $\mathcal{B}|_U$  (I, 1.3.7, 1.3.13 et 1.6.3). Soit  $V$  un second ouvert affine de  $S$ , et soit  $X_{U,V}$  le préschéma induit par  $X_U$  sur  $f_U^{-1}(U \cap V)$ , en désignant par  $f_U$  le morphisme structural  $X_U \rightarrow S$ ;  $X_{U,V}$  et  $X_{V,U}$  sont affines sur  $U \cap V$  (1.2.5), et par définition  $\mathcal{A}(X_{U,V})$  et  $\mathcal{A}(X_{V,U})$  s'identifient canoniquement à  $\mathcal{B}|(U \cap V)$ . Il y a donc (1.2.8) un  $S$ -isomorphisme canonique  $\theta_{U,V} : X_{V,U} \rightarrow X_{U,V}$ ; en outre, si  $W$  est un troisième ouvert affine de  $S$ , et si  $\theta'_{U,V}, \theta'_{V,W}, \theta'_{U,W}$  sont les restrictions de  $\theta_{U,V}, \theta_{V,W}, \theta_{U,W}$  aux images réciproques de  $U \cap V \cap W$  dans  $X_V, X_W$  et  $X_W$  respectivement par les morphismes structuraux, on a  $\theta'_{U,V} \circ \theta'_{V,W} = \theta'_{U,W}$ . Il existe par suite un préschéma  $X$ , un recouvrement  $(T_U)$  de  $X$  par des ouverts affines, et pour chaque  $U$  un isomorphisme  $\varphi_U : X_U \rightarrow T_U$ , de sorte que  $\varphi_U$  applique  $f_U^{-1}(U \cap V)$  sur  $T_U \cap T_V$  et que l'on ait  $\theta_{U,V} = \varphi_U^{-1} \circ \varphi_V$  (I, 2.3.1). Le morphisme  $g_U = f_U \circ \varphi_U^{-1}$  fait de  $T_U$  un  $S$ -préschéma, et les morphismes  $g_U$  et  $g_V$  coïncident dans  $T_U \cap T_V$ , donc  $X$  est un  $S$ -préschéma. En outre, il est clair par définition que  $X$  est affine au-dessus de  $S$  et que  $\mathcal{A}(T_U) = \mathcal{B}|_U$ , donc  $\mathcal{A}(X) = \mathcal{B}$ .

On dit que le  $S$ -schéma  $X$  ainsi défini est associé à la  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre  $\mathcal{B}$  ou est le spectre de  $\mathcal{B}$ , et on le note  $\text{Spec}(\mathcal{B})$ .

*Corollaire (1.3.2).* — Soient  $X$  un préschéma affine au-dessus de  $S$ ,  $f : X \rightarrow S$  le morphisme structural. Pour tout ouvert affine  $U \subset S$ , le préschéma induit sur  $f^{-1}(U)$  est un schéma affine d'anneau  $\Gamma(U, \mathcal{A}(X))$ .

Comme on peut supposer  $X$  associé à une  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre en vertu de (1.2.6) et (1.3.1), le corollaire résulte de la construction de  $X$  décrite dans (1.3.1).

*Exemple (1.3.3).* — Soit  $S$  le plan affine sur un corps  $K$ , où le point  $o$  a été dédoublé (I, 5.5.11); avec les notations de (I, 5.5.11),  $S$  est réunion de deux ouverts affines  $Y_1, Y_2$ ; si  $f$  est l'immersion ouverte  $Y_1 \rightarrow S, f^{-1}(Y_2) = Y_1 \cap Y_2$  n'est pas un ouvert affine dans  $Y_1$  (*loc. cit.*), donc on a un exemple d'un schéma affine qui n'est pas affine au-dessus de  $S$ .

*Corollaire (1.3.4).* — Soit  $S$  un schéma affine; pour qu'un  $S$ -préschéma  $X$  soit affine au-dessus de  $S$ , il faut et il suffit que  $X$  soit un schéma affine.

*Corollaire (1.3.5).* — Soient  $X$  un préschéma affine au-dessus d'un préschéma  $S$ ,  $Y$  un  $X$ -préschéma. Pour que  $Y$  soit affine au-dessus de  $S$ , il faut et il suffit que  $Y$  soit affine au-dessus de  $X$ .

On est aussitôt ramené au cas où  $S$  est un schéma affine, et il en est alors de même de  $X$  (1.3.4); les deux conditions de l'énoncé expriment alors que  $Y$  est un schéma affine (1.3.4).

(1.3.6) Soit  $X$  un préschéma affine au-dessus de  $S$ . Pour définir un préschéma  $Y$  affine au-dessus de  $X$ , il revient au même, en vertu de (1.3.5), de se donner un préschéma  $Y$  affine au-dessus de  $S$ , et un  $S$ -morphisme  $g : Y \rightarrow X$ ; en d'autres termes (1.3.1 et 1.2.7), cela revient à se donner une  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre quasi-cohérente  $\mathcal{B}$  et un homomorphisme  $\mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{B}$  de  $\mathcal{O}_S$ -Algèbres (que l'on peut envisager comme définissant sur  $\mathcal{B}$  une structure de  $\mathcal{A}(X)$ -Algèbre). Si  $f : X \rightarrow S$  est le morphisme structural, on a alors  $\mathcal{B} = f_* g_*(\mathcal{O}_Y)$ .

*Corollaire (1.3.7).* — Soit  $X$  un préschéma affine au-dessus de  $S$ ; pour que  $X$  soit de type fini sur  $S$ , il faut et il suffit que la  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre quasi-cohérente  $\mathcal{A}(X)$  soit de type fini (I, 9.6.2).

Par définition (I, 9.6.2), on est ramené au cas où  $S$  est affine; alors  $X$  est un schéma affine (1.3.4), et si  $S = \text{Spec}(A)$ ,  $X = \text{Spec}(B)$ ,  $\mathcal{A}(X)$  est la  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre  $\widetilde{B}$ ; comme  $\Gamma(U, \widetilde{B}) = B$ , le corollaire résulte de (I, 9.6.2) et (I, 6.3.3).

*Corollaire (1.3.8).* — Soit  $X$  un préschéma affine au-dessus de  $S$ ; pour que  $X$  soit réduit, il faut et il suffit que la  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre quasi-cohérente  $\mathcal{A}(X)$  soit réduite (0, 4.1.4).

En effet, la question est évidemment locale sur  $S$ ; en vertu de (1.3.2), le corollaire résulte de (I, 5.1.1) et (I, 5.1.4).

#### 1.4. Faisceaux quasi-cohérents sur un préschéma affine au-dessus de $S$ .

*Proposition (1.4.1).* — Soient  $X$  un préschéma affine au-dessus de  $S$ ,  $Y$  un  $S$ -préschéma,  $\mathcal{F}$  (resp.  $\mathcal{G}$ ) un  $\mathcal{O}_X$ -Module (resp. un  $\mathcal{O}_Y$ -Module) quasi-cohérent. Alors l'application  $(h, u) \mapsto (\mathcal{A}(h), \mathcal{A}(u))$  de l'ensemble des morphismes  $(Y, \mathcal{G}) \rightarrow (X, \mathcal{F})$  dans l'ensemble des di-homomorphismes  $(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(\mathcal{F})) \rightarrow (\mathcal{A}(Y), \mathcal{A}(\mathcal{G}))$  (1.1.2 et 1.1.3) est bijective.

La démonstration suit exactement la même marche que celle de (1.2.7) en utilisant (I, 2.2.5) et (I, 2.2.4), et les détails en sont laissés au lecteur.

*Corollaire (1.4.2).* — Si, en outre des hypothèses de (1.4.1), on suppose  $Y$  affine au-dessus de  $S$ , alors, pour que  $(h, u)$  soit un isomorphisme, il faut et il suffit que  $(\mathcal{A}(h), \mathcal{A}(u))$  soit un di-isomorphisme.

*Proposition (I.4.3).* — Pour tout couple  $(\mathcal{B}, \mathcal{M})$  formé d'une  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre quasi-cohérente  $\mathcal{B}$  et d'un  $\mathcal{B}$ -Module  $\mathcal{M}$  quasi-cohérent (en tant que  $\mathcal{O}_S$ -Module ou en tant que  $\mathcal{B}$ -Module, ce qui revient au même (I, 9.6.1)), il existe un couple  $(X, \mathcal{F})$  formé d'un préschéma  $X$  affine au-dessus de  $S$  et d'un  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ , tels que  $\mathcal{A}(X) = \mathcal{B}$  et  $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \mathcal{M}$ ; en outre ce couple est déterminé à un isomorphisme unique près.

L'unicité résulte de (I.4.1) et (I.4.2); l'existence se démontre comme dans (I.3.1), et nous laissons encore les détails au lecteur. On note  $\widetilde{\mathcal{M}}$  le  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\mathcal{F}$ , et on dit qu'il est associé au  $\mathcal{B}$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{M}$ ; pour tout ouvert affine  $U \subset S$ ,  $\widetilde{\mathcal{M}}|_{p^{-1}(U)}$  (où  $p$  est le morphisme structural  $X \rightarrow S$ ) est canoniquement isomorphe à  $(\Gamma(U, \mathcal{M}))^\sim$ .

*Corollaire (I.4.4).* — Dans la catégorie des  $\mathcal{B}$ -Modules quasi-cohérents,  $\widetilde{\mathcal{M}}$  est un foncteur covariant additif exact en  $\mathcal{M}$ , qui commute aux limites inductives et aux sommes directes.

On est en effet aussitôt ramené au cas où  $S$  est affine, et le corollaire résulte alors de (I, I.3.5, I.3.9 et I.3.11).

*Corollaire (I.4.5).* — Sous les hypothèses de (I.4.3), pour que  $\widetilde{\mathcal{M}}$  soit un  $\mathcal{O}_X$ -Module de type fini, il faut et il suffit que  $\mathcal{M}$  soit un  $\mathcal{B}$ -Module de type fini.

On est aussitôt ramené au cas où  $S = \text{Spec}(A)$  est un schéma affine. Alors  $\mathcal{B} = \widetilde{B}$ , où  $B$  est une  $A$ -algèbre de type fini (I, 9.6.2), et  $\mathcal{M} = \widetilde{M}$ , où  $M$  est un  $B$ -module (I, I.3.13); sur le préschéma  $X$ ,  $\mathcal{O}_X$  est associé à l'anneau  $B$  et  $\widetilde{\mathcal{M}}$  au  $B$ -module  $M$ ; pour que  $\widetilde{\mathcal{M}}$  soit de type fini, il faut et il suffit donc que  $M$  soit de type fini (I, I.3.13), d'où notre assertion.

*Proposition (I.4.6).* — Soient  $Y$  un préschéma affine au-dessus de  $S$ ,  $X, X'$  deux préschémas affines au-dessus de  $Y$  (donc aussi au-dessus de  $S$  (I.3.5)). Soient  $\mathcal{B} = \mathcal{A}(Y)$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X)$ ,  $\mathcal{A}' = \mathcal{A}(X')$ . Alors  $X \times_Y X'$  est affine au-dessus de  $Y$  (donc aussi au-dessus de  $S$ ) et  $\mathcal{A}(X \times_Y X')$  s'identifie canoniquement à  $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{A}'$ .

En effet (I, 9.6.1)  $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{A}'$  est une  $\mathcal{B}$ -Algèbre quasi-cohérente, donc aussi une  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre quasi-cohérente (I, 9.6.1); soit  $Z$  le spectre de  $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{A}'$  (I.3.1). Les  $\mathcal{B}$ -homomorphismes canoniques  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{A}'$  et  $\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{A}'$  correspondent (I.2.7) à des  $Y$ -morphismes  $p : Z \rightarrow X$  et  $p' : Z \rightarrow X'$ . Pour voir que le triplet  $(Z, p, p')$  est un produit  $X \times_Y X'$ , on peut se borner au cas où  $S$  est un schéma affine d'anneau  $C$  (I, 3.2.6.4). Mais alors  $Y, X, X'$  sont des schémas affines (I.3.4) dont les anneaux  $B, A, A'$  sont des  $C$ -algèbres telles que  $\mathcal{B} = \widetilde{B}, \mathcal{A} = \widetilde{A}, \mathcal{A}' = \widetilde{A}'$ . On sait alors (I, I.3.13) que  $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{A}'$  s'identifie canoniquement à la  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre  $(A \otimes_B A')^\sim$ , donc l'anneau  $A(Z)$  s'identifie à  $A \otimes_B A'$  et les morphismes  $p, p'$  correspondent aux homomorphismes canoniques  $A \rightarrow A \otimes_B A', A' \rightarrow A \otimes_B A'$ . La proposition résulte alors de (I, 3.2.2).

*Corollaire (I.4.7).* — Soit  $\mathcal{F}$  (resp.  $\mathcal{F}'$ ) un  $\mathcal{O}_X$ -Module (resp. un  $\mathcal{O}_{X'}$ -Module) quasi-cohérent; alors  $\mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes_Y \mathcal{F}')$  s'identifie canoniquement à  $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{A}(Y)} \mathcal{A}(\mathcal{F}')$ .

On sait que  $\mathcal{F} \otimes_Y \mathcal{F}'$  est quasi-cohérent sur  $X \times_Y X'$  (I, 9.1.2). Soient  $g : Y \rightarrow S$ ,  $f : X \rightarrow Y, f' : X' \rightarrow Y$  les morphismes structuraux, de sorte que le morphisme structural

$h : Z \rightarrow S$  est égal à  $gofop$  et à  $gof'op'$ . On définit un homomorphisme canonique

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{A}(Y)} \mathcal{A}(\mathcal{F}') \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes_Y \mathcal{F}')$$

de la façon suivante : pour tout ouvert  $U \subset S$ , on a des homomorphismes canoniques  $\Gamma(f^{-1}(g^{-1}(U)), \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(h^{-1}(U), p^*(\mathcal{F}))$  et  $\Gamma(f'^{-1}(g^{-1}(U)), \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma(h^{-1}(U), p'^*(\mathcal{F}'))$  (0, 4.4.3), d'où on déduit un homomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \Gamma(f^{-1}(g^{-1}(U)), \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(g^{-1}(U), \mathcal{O}_Y)} \Gamma(f'^{-1}(g^{-1}(U)), \mathcal{F}') \rightarrow \\ \Gamma(h^{-1}(U), p^*(\mathcal{F})) \otimes_{\Gamma(h^{-1}(U), \mathcal{O}_Z)} \Gamma(h^{-1}(U), p'^*(\mathcal{F}')). \end{aligned}$$

Pour voir qu'on a bien là un isomorphisme de  $\mathcal{A}(Z)$ -Modules, on peut se borner au cas où  $S$  (et par suite  $X, X', Y, X \times_Y X'$ ) sont des schémas affines, et (avec les notations de (1.4.6)),  $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ ,  $\mathcal{F}' = \widetilde{M}'$ ,  $M$  (resp.  $M'$ ) étant un  $A$ -module (resp. un  $A'$ -module). Alors  $\mathcal{F} \otimes_Y \mathcal{F}'$  s'identifie au faisceau sur  $X \times_Y X'$  associé au  $(A \otimes_B A')$ -module  $M \otimes_B M'$  (I, 9.1.3) et le corollaire résulte de l'identification canonique des  $\mathcal{O}_S$ -Modules  $(M \otimes_B M')^\sim$  et  $\widetilde{M} \otimes_{\widetilde{B}} \widetilde{M}'$  (où  $M, M'$  et  $B$  sont considérés comme des  $C$ -modules) (I, 1.3.13 et 1.6.3).

Si on applique en particulier (1.4.7) au cas où  $X = Y$  et  $\mathcal{F}' = \mathcal{O}_{X'}$ , on voit que le  $\mathcal{A}'$ -Module  $\mathcal{A}(f'(\mathcal{F}))$  s'identifie à  $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}'$ .

**(1.4.8)** En particulier, lorsque  $X = X' = Y$  ( $X$  étant affine au-dessus de  $S$ ), on voit que si  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  sont deux  $\mathcal{O}_X$ -Modules quasi-cohérents, on a

$$(1.4.8.1) \quad \mathcal{A}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}) = \mathcal{A}(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{A}(X)} \mathcal{A}(\mathcal{G})$$

à un isomorphisme canonique près. Si de plus  $\mathcal{F}$  admet une présentation finie, il résulte de (I, 1.6.3 et 1.3.12) que

$$(1.4.8.2) \quad \mathcal{A}(\mathcal{H}\text{om}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})) = \mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{A}(X)}(\mathcal{A}(\mathcal{F}), \mathcal{A}(\mathcal{G}))$$

à un isomorphisme canonique près.

*Remarque (1.4.9).* — Si  $X, X'$  sont deux préschémas affines au-dessus de  $S$ , la somme  $X \sqcup X'$  est aussi affine au-dessus de  $S$ , la somme de deux schémas affines étant un schéma affine.

*Proposition (1.4.10).* — Soient  $S$  un préschéma,  $\mathcal{B}$  une  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre quasi-cohérente,  $X = \text{Spec}(\mathcal{B})$ . Pour tout faisceau quasi-cohérent d'idéaux  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{B}$ ,  $\widetilde{\mathcal{J}}$  est un faisceau quasi-cohérent d'idéaux de  $\mathcal{O}_X$ , et le sous-préschéma fermé  $Y$  de  $X$  défini par  $\widetilde{\mathcal{J}}$  est canoniquement isomorphe à  $\text{Spec}(\mathcal{B}/\mathcal{J})$ .

En effet, il résulte aussitôt de (I, 4.2.3) que  $Y$  est affine au-dessus de  $S$ ; en vertu de (1.3.1), on est donc ramené au cas où  $S$  est affine, et la proposition résulte alors aussitôt de (I, 4.1.2).

On peut encore exprimer le résultat de (1.4.10) en disant que si  $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$  est un homomorphisme surjectif de  $\mathcal{O}_S$ -Algèbres quasi-cohérentes,  $\mathcal{A}(h) : \text{Spec}(\mathcal{B}') \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{B})$  est une immersion fermée.

*Proposition (1.4.11).* — Soient  $S$  un préschéma,  $\mathcal{B}$  une  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre quasi-cohérente,  $X = \text{Spec}(\mathcal{B})$ . Pour tout Idéal quasi-cohérent  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{O}_S$ , on a (en désignant par  $f$  le morphisme structural  $X \rightarrow S$ ),  $f^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_X = (\mathcal{K}\mathcal{B})^\sim$  à un isomorphisme canonique près.

La question étant locale sur  $S$ , on est ramené au cas où  $S = \text{Spec}(A)$  est affine, et dans ce cas la proposition n'est autre que (I, 1.6.9).

### 1.5. Changement du préschéma de base.

*Proposition (1.5.1).* — Soit  $X$  un préschéma affine au-dessus de  $S$ . Pour toute extension  $g : S' \rightarrow S$  du préschéma de base,  $X' = X_{(S')} = X \times_S S'$  est affine au-dessus de  $S'$ .

Si  $f'$  est la projection  $X' \rightarrow S'$ , il suffit de prouver que  $f'^{-1}(U')$  est un ouvert affine pour tout ouvert affine  $U'$  de  $S'$  tel que  $g(U')$  soit contenu dans un ouvert affine  $U$  de  $S$  (1.2.1); on peut donc se limiter au cas où  $S$  et  $S'$  sont affines, et il suffit de prouver que  $X'$  est alors un schéma affine (1.3.4). Mais alors (1.3.4)  $X$  est un schéma affine, et si  $A$ ,  $A'$  et  $B$  sont les anneaux de  $S$ ,  $S'$  et  $X$  respectivement, on sait que  $X'$  est un schéma affine d'anneau  $A' \otimes_A B$  (I, 3.2.2).

*Corollaire (1.5.2).* — Sous les hypothèses de (1.5.1), soient  $f : X \rightarrow S$  le morphisme structural,  $f' : X' \rightarrow S'$ ,  $g' : X' \rightarrow X$  les projections, de sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ \downarrow & & \downarrow f' \\ S & \xleftarrow{g} & S' \end{array}$$

est commutatif. Pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ , il existe un isomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_{S'}$ -Modules

$$(1.5.2.1) \quad u : g^*(f_*(\mathcal{F})) \xrightarrow{\sim} f'_*(g'^*(\mathcal{F})).$$

En particulier, il existe un isomorphisme canonique de  $\mathcal{A}(X')$  sur  $g^*(\mathcal{A}(X))$ .

Pour définir  $u$ , il suffit de définir un homomorphisme

$$v : f_*(\mathcal{F}) \rightarrow g_*(f'_*(g'^*(\mathcal{F}))) = f_*(g'_*(g'^*(\mathcal{F})))$$

et de prendre  $u = v^\sharp$  (0, 4.4.3). Nous prendrons  $v = f_*(\rho)$ , où  $\rho$  est l'homomorphisme canonique  $\mathcal{F} \rightarrow g'_*(g'^*(\mathcal{F}))$  (0, 4.4.3). Pour prouver que  $u$  est un isomorphisme, on peut se borner au cas où  $S$  et  $S'$ , donc  $X$  et  $X'$ , sont affines; avec les notations de (1.5.1), on a alors  $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ , où  $M$  est un  $B$ -module. On constate alors aussitôt que  $g^*(f_*(\mathcal{F}))$  et  $f'_*(g'^*(\mathcal{F}))$  sont tous deux égaux au  $\mathcal{O}_{S'}$ -Module associé au  $A'$ -module  $A' \otimes_A M$  (où  $M$  est considéré comme  $A$ -module), et que  $u$  est l'homomorphisme associé à l'identité (I, 1.6.3, 1.6.5 et 1.6.7).

*Remarque (1.5.3).* — On se gardera de croire que (1.5.2) reste valable lorsque  $X$  n'est plus supposé affine au-dessus de  $S$ , même lorsque  $S' = \text{Spec}(\mathbf{k}(s))$  ( $s \in S$ ) et que  $S' \rightarrow S$  est le morphisme canonique (I, 2.4.5) — auquel cas  $X'$  n'est autre que la fibre  $f'^{-1}(s)$  (I, 3.6.2). En d'autres termes, lorsque  $X$  n'est pas affine au-dessus de  $S$ , l'opération

« image directe de faisceaux quasi-cohérents » ne permute pas à l’opération de « passage aux fibres ». Nous verrons cependant au chapitre III (III, 4.2.4) un résultat dans ce sens, de nature « asymptotique », valable pour les faisceaux *cohérents* sur  $X$  lorsque  $f$  est propre (5.4) et  $S$  noethérien.

*Corollaire (1.5.4).* — Pour tout préschéma  $X$  affine au-dessus de  $S$  et tout  $s \in S$ , la fibre  $f^{-1}(s)$  (où  $f$  désigne le morphisme structural  $X \rightarrow S$ ) est un schéma affine.

Il suffit d’appliquer (1.5.1) à  $S' = \text{Spec}(\kappa(s))$  et d’utiliser (1.3.4).

*Corollaire (1.5.5).* — Soient  $X$  un  $S$ -préschéma,  $S'$  un préschéma affine au-dessus de  $S$ ; alors  $X' = X_{(S')}$  est un préschéma affine au-dessus de  $X$ . En outre, si  $f : X \rightarrow S$  est le morphisme structural, il y a un isomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_X$ -Algèbres  $\mathcal{A}(X') \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{A}(S'))$ , et pour tout  $\mathcal{A}(S')$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{M}$ , un di-isomorphisme canonique  $f^*(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}(f^*(\widetilde{\mathcal{M}}))$ , en désignant par  $f' = f_{(S')}$  le morphisme structural  $X' \rightarrow S'$ .

Il suffit d’intervertir les rôles de  $X$  et de  $S'$  dans (1.5.1) et (1.5.2).

**(1.5.6)** Soient maintenant  $S, S'$  deux préschémas,  $q : S' \rightarrow S$  un morphisme,  $\mathcal{B}$  (resp.  $\mathcal{B}'$ ) une  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre (resp. une  $\mathcal{O}_{S'}$ -Algèbre) quasi-cohérente,  $u : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$  un  $q$ -morphisme (c’est-à-dire un homomorphisme  $\mathcal{B} \rightarrow q_*(\mathcal{B}')$  de  $\mathcal{O}_S$ -Algèbres). Si  $X = \text{Spec}(\mathcal{B})$ ,  $X' = \text{Spec}(\mathcal{B}')$ , on en déduit canoniquement un morphisme

$$v = \text{Spec}(u) : X' \rightarrow X$$

tel que le diagramme

$$(1.5.6.1) \quad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{v} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \xrightarrow{q} & S \end{array}$$

soit commutatif (les flèches verticales étant les morphismes structuraux). En effet, la donnée de  $u$  équivaut à celle d’un homomorphisme de  $\mathcal{O}_{S'}$ -Algèbres quasi-cohérentes  $u^\# : q^*(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}'$  (0, 4.4.3); elle définit donc canoniquement un  $S'$ -morphisme

$$w : \text{Spec}(\mathcal{B}') \rightarrow \text{Spec}(q^*(\mathcal{B}))$$

tel que  $\mathcal{A}(w) = u^\#$  (1.2.7). D’autre part, il résulte de (1.5.2) que  $\text{Spec}(q^*(\mathcal{B}))$  s’identifie canoniquement à  $X \times_S S'$ ; le morphisme  $v$  est le composé  $X' \xrightarrow{w} X \times_S S' \xrightarrow{p_1} X$  de  $w$  avec la première projection, et la commutativité de (1.5.6.1) résulte des définitions. Soient  $U$  (resp.  $U'$ ) un ouvert affine de  $S$  (resp.  $S'$ ) tels que  $q(U') \subset U$ ,  $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_S)$ ,  $A' = \Gamma(U', \mathcal{O}_{S'})$  leurs anneaux,  $B = \Gamma(U, \mathcal{B})$ ,  $B' = \Gamma(U', \mathcal{B}')$ ; la restriction de  $u$  en un  $(q|U')$ -morphisme :  $\mathcal{B}|U \rightarrow \mathcal{B}'|U'$  correspond à un di-homomorphisme d’algèbres  $B \rightarrow B'$ ; si  $V, V'$  sont les images réciproques de  $U, U'$  dans  $X, X'$  respectivement, par les morphismes structuraux, le morphisme  $V' \rightarrow V$ , restriction de  $v$ , correspond (I, 1.7.3) au di-homomorphisme précédent.

**(1.5.7)** Sous les mêmes hypothèses que dans (1.5.6), soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{B}$ -Module quasi-cohérent; il y a alors un isomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_X$ -Modules

$$(1.5.7.1) \quad v^*(\widetilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\sim} (q^*(\mathcal{M}) \otimes_{q^*(\mathcal{B})} \mathcal{B}') \sim$$

En effet, l'isomorphisme canonique (1.5.2.1) fournit un isomorphisme canonique de  $p_1^*(\widetilde{\mathcal{M}})$  sur le faisceau sur  $\text{Spec}(q^*(\mathcal{B}))$  associé au  $q^*(\mathcal{B})$ -Module  $q^*(\mathcal{M})$ , et il suffit ensuite d'appliquer (1.4.7).

### 1.6. Morphismes affines.

(1.6.1) Nous dirons qu'un morphisme  $f: X \rightarrow Y$  de préschémas est *affine* s'il définit  $X$  comme un préschéma affine au-dessus de  $Y$ . Les propriétés des préschémas affines au-dessus d'un autre se traduisent comme suit dans ce langage :

*Proposition (1.6.2). — (i) Une immersion fermée est affine.*

(ii) *Le composé de deux morphismes affines est affine.*

(iii) *Si  $f: X \rightarrow Y$  est un  $S$ -morphisme affine,  $f_{(S')}: X_{(S')} \rightarrow Y_{(S')}$  est affine pour toute extension  $S' \rightarrow S$  de la base.*

(iv) *Si  $f: X \rightarrow Y$  et  $f': X' \rightarrow Y'$  sont deux  $S$ -morphismes affines,*

$$f \times_S f': X \times_S X' \rightarrow Y \times_S Y'$$

*est affine.*

(v) *Si  $f: X \rightarrow Y$  et  $g: Y \rightarrow Z$  sont deux morphismes tels que  $gof$  soit affine et  $g$  séparé, alors  $f$  est affine.*

(vi) *Si  $f$  est affine, il en est de même de  $f_{\text{red}}$ .*

En vertu de (I, 5.5.12), il suffit de démontrer (i), (ii) et (iii). Or (i) n'est autre que l'exemple (1.2.2), et (ii) n'est autre que (1.3.5); enfin, (iii) découle de (1.5.1) puisque  $X_{(S')}$  s'identifie au produit  $X \times_Y Y_{(S')}$  (I, 3.3.11).

*Corollaire (1.6.3). — Si  $X$  est un schéma affine et  $Y$  un schéma, tout morphisme  $X \rightarrow Y$  est affine.*

*Proposition (1.6.4). — Soient  $Y$  un préschéma localement noethérien,  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini. Pour que  $f$  soit affine, il faut et il suffit que  $f_{\text{red}}$  le soit.*

Vu (1.6.2, (vi)), nous n'avons à démontrer que la suffisance de la condition. Il suffit de prouver que si  $Y$  est affine et noethérien,  $X$  est affine; or  $Y_{\text{red}}$  est alors affine, donc il en est de même de  $X_{\text{red}}$  par hypothèse. Or,  $X$  est noethérien, donc la conclusion résulte de (I, 6.1.7).

### 1.7. Fibré vectoriel associé à un faisceau de modules.

(1.7.1) Soient  $A$  un anneau,  $E$  un  $A$ -module. Rappelons qu'on appelle *algèbre symétrique* sur  $E$  et qu'on note  $\mathbf{S}(E)$  (ou  $\mathbf{S}_A(E)$ ) l'algèbre quotient de l'algèbre tensorielle  $\mathbf{T}(E)$  par l'idéal bilatère engendré par les éléments  $x \otimes y - y \otimes x$ , où  $x, y$  parcourrent  $E$ . L'algèbre  $\mathbf{S}(E)$  est caractérisée par la propriété universelle suivante : si  $\sigma$  est l'application canonique  $E \rightarrow \mathbf{S}(E)$  (obtenue par composition de  $E \rightarrow \mathbf{T}(E)$  et de l'application canonique  $\mathbf{T}(E) \rightarrow \mathbf{S}(E)$ ), toute application  $A$ -linéaire  $E \rightarrow B$ , où  $B$  est une  $A$ -algèbre *commutative*, se factorise de façon unique en  $E \xrightarrow{\sigma} \mathbf{S}(E) \xrightarrow{g} B$ , où  $g$  est un  $A$ -homomorphisme d'algèbres. On déduit aussitôt de cette caractérisation que pour deux  $A$ -modules  $E, F$ , on a

$$\mathbf{S}(E \oplus F) = \mathbf{S}(E) \otimes \mathbf{S}(F)$$

à un isomorphisme canonique près; en outre,  $\mathbf{S}(E)$  est un foncteur covariant en  $E$ , de la catégorie des  $A$ -modules dans celle des  $A$ -algèbres commutatives; enfin, la caractérisation précédente montre aussi que si  $E = \varinjlim E_\lambda$ , on a  $\mathbf{S}(E) = \varinjlim \mathbf{S}(E_\lambda)$  à un isomorphisme canonique près. Par abus de langage, un produit  $\sigma(x_1)\sigma(x_2)\dots\sigma(x_n)$ , où les  $x_i \in E$ , se note souvent  $x_1x_2\dots x_n$  si aucune confusion n'en résulte. L'algèbre  $\mathbf{S}(E)$  est *graduée*,  $\mathbf{S}_n(E)$  étant l'ensemble des combinaisons linéaires des produits de  $n$  éléments de  $E$  ( $n \geq 0$ ); l'algèbre  $\mathbf{S}(A)$  est canoniquement isomorphe à l'algèbre des polynômes  $A[T]$  à une indéterminée et l'algèbre  $\mathbf{S}(A^n)$  à l'algèbre des polynômes à  $n$  indéterminées  $A[T_1, \dots, T_n]$ .

(1.7.2) Soit  $\varphi$  un homomorphisme d'anneaux  $A \rightarrow B$ . Si  $F$  est un  $B$ -module, l'application canonique  $F \rightarrow \mathbf{S}(F)$  donne une application canonique  $F_{[\varphi]} \rightarrow \mathbf{S}(F)_{[\varphi]}$ , qui se factorise donc en  $F_{[\varphi]} \rightarrow \mathbf{S}(F_{[\varphi]}) \rightarrow \mathbf{S}(F)_{[\varphi]}$ ; l'homomorphisme canonique  $\mathbf{S}(F_{[\varphi]}) \rightarrow \mathbf{S}(F)_{[\varphi]}$  est surjectif, mais non nécessairement bijectif. Si  $E$  est un  $A$ -module, tout di-homomorphisme  $E \rightarrow F$  (c'est-à-dire tout  $A$ -homomorphisme  $E \rightarrow F_{[\varphi]}$ ) donne donc canoniquement un  $A$ -homomorphisme d'algèbres  $\mathbf{S}(E) \rightarrow \mathbf{S}(F_{[\varphi]}) \rightarrow \mathbf{S}(F)_{[\varphi]}$ , c'est-à-dire un di-homomorphisme d'algèbres  $\mathbf{S}(E) \rightarrow \mathbf{S}(F)$ .

Avec les mêmes notations, pour tout  $A$ -module  $E$ ,  $\mathbf{S}(E \otimes_A B)$  s'identifie canoniquement à l'algèbre  $\mathbf{S}(E) \otimes_A B$ ; cela résulte aussitôt de la propriété universelle de  $\mathbf{S}(E)$  (1.7.1).

(1.7.3) Soit  $R$  une partie multiplicative de l'anneau  $A$ ; appliquant (1.7.2) à l'anneau  $B = R^{-1}A$ , et se rappelant que  $R^{-1}E = E \otimes_A R^{-1}A$ , on voit que l'on a  $\mathbf{S}(R^{-1}E) = R^{-1}\mathbf{S}(E)$  à un isomorphisme canonique près. En outre, si  $R' \supset R$  est une seconde partie multiplicative de  $A$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R^{-1}E & \rightarrow & R'^{-1}E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{S}(R^{-1}E) & \longrightarrow & \mathbf{S}(R'^{-1}E) \end{array}$$

est commutatif.

(1.7.4) Soit maintenant  $(S, \mathcal{A})$  un espace ancré, et soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{A}$ -Module sur  $S$ . Si, à tout ouvert  $U \subset S$  on associe le  $\Gamma(U, \mathcal{A})$ -module  $\mathbf{S}(\Gamma(U, \mathcal{E}))$ , on définit (vu le caractère fonctoriel de  $\mathbf{S}(E)$  (1.7.2)) un préfaisceau d'algèbres; on dit que le faisceau associé, que l'on note  $\mathbf{S}(\mathcal{E})$  ou  $\mathbf{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$  est la  *$\mathcal{A}$ -Algèbre symétrique* du  $\mathcal{A}$ -Module  $\mathcal{E}$ . Il résulte aussitôt de (1.7.1) que  $\mathbf{S}(\mathcal{E})$  est solution d'un problème universel : tout homomorphisme de  $\mathcal{A}$ -Modules  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ , où  $\mathcal{B}$  est une  $\mathcal{A}$ -Algèbre, se factorise d'une seule manière en  $\mathcal{E} \rightarrow \mathbf{S}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{B}$ , la seconde flèche étant un homomorphisme de  $\mathcal{A}$ -Algèbres. Il y a donc correspondance biunivoque entre homomorphismes  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}$ -Modules et homomorphismes  $\mathbf{S}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}$ -Algèbres. En particulier, tout homomorphisme  $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  de  $\mathcal{A}$ -Modules définit un homomorphisme  $\mathbf{S}(u) : \mathbf{S}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{S}(\mathcal{F})$  de  $\mathcal{A}$ -Algèbres et  $\mathbf{S}(\mathcal{E})$  est donc un foncteur covariant en  $\mathcal{E}$ .

En vertu de (1.7.2) et de la permutabilité de  $\mathbf{S}$  avec les limites inductives, on a  $(\mathbf{S}(\mathcal{E}))_s = \mathbf{S}(\mathcal{E}_s)$  pour tout point  $s \in S$ . Si  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  sont deux  $\mathcal{A}$ -Modules,  $\mathbf{S}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{F})$  s'identifie canoniquement à  $\mathbf{S}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathbf{S}(\mathcal{F})$ , comme on le voit sur les préfaisceaux correspondants.

Notons aussi que  $\mathbf{S}(\mathcal{E})$  est une  $\mathcal{A}$ -Algèbre graduée, somme directe infinie des  $\mathbf{S}_n(\mathcal{E})$ , où le  $\mathcal{A}$ -Module  $\mathbf{S}_n(\mathcal{E})$  est le faisceau associé au préfaisceau  $U \rightarrow \mathbf{S}_n(\Gamma(U, \mathcal{E}))$ . Si on prend en particulier  $\mathcal{E} = \mathcal{A}$ , on voit que  $\mathbf{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$  s'identifie à  $\mathcal{A}[T] = \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[T]$  ( $T$  indéterminée,  $\mathbb{Z}$  étant considéré comme faisceau simple).

**(1.7.5)** Soient  $(T, \mathcal{B})$  un second espace annelé,  $f$  un morphisme  $(S, \mathcal{A}) \rightarrow (T, \mathcal{B})$ . Si  $\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{B}$ -Module,  $\mathbf{S}(f^*(\mathcal{F}))$  s'identifie canoniquement à  $f^*(\mathbf{S}(\mathcal{F}))$ ; en effet, si  $f = (\psi, 0)$ , on a par définition (0, 4.3.1)

$$\mathbf{S}(f^*(\mathcal{F})) = \mathbf{S}(\psi^*(\mathcal{F}) \otimes_{\psi^*(\mathcal{A})} \mathcal{A}) = \mathbf{S}(\psi^*(\mathcal{F})) \otimes_{\psi^*(\mathcal{A})} \mathcal{A}$$

(1.7.2); pour tout ouvert  $U$  de  $S$  et toute section  $h$  de  $\mathbf{S}(\psi^*(\mathcal{F}))$  au-dessus de  $U$ ,  $h$  coïncide, dans un voisinage  $V$  de chaque point  $s \in U$ , avec un élément de  $\mathbf{S}(\Gamma(V, \psi^*(\mathcal{F})))$ ; si on se reporte à la définition de  $\psi^*(\mathcal{F})$  (0, 3.7.1) et qu'on tient compte de ce que tout élément de  $\mathbf{S}(E)$  pour un module  $E$  est combinaison linéaire d'un nombre fini de produits d'éléments de  $E$ , on voit qu'il y a un voisinage  $W$  de  $\psi(s)$  dans  $T$ , une section  $h'$  de  $\mathbf{S}(\mathcal{F})$  au-dessus de  $W$  et un voisinage  $V' \subset V \cap \psi^{-1}(W)$  de  $s$  tels que  $h$  coïncide avec  $t \mapsto h'(\psi(t))$  au-dessus de  $V'$ ; d'où notre assertion.

**Proposition (1.7.6).** — Soient  $A$  un anneau,  $S = \text{Spec}(A)$  son spectre premier,  $\mathcal{E} = \widetilde{M}$  le  $\mathcal{O}_S$ -Module associé à un  $A$ -module  $M$ ; alors la  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre  $\mathbf{S}(\mathcal{E})$  est associée à la  $A$ -algèbre  $\mathbf{S}(M)$ .

En effet, pour tout  $f \in A$ ,  $\mathbf{S}(M_f) = (\mathbf{S}(M))_f$  (1.7.3) et la proposition résulte donc des définitions (I, 1.3.4).

**Corollaire (1.7.7).** — Si  $S$  est un préschéma,  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{O}_S$ -Module quasi-cohérent, la  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre  $\mathbf{S}(\mathcal{E})$  est quasi-cohérente. Si en outre  $\mathcal{E}$  est de type fini, chacun des  $\mathcal{O}_S$ -Modules  $\mathbf{S}_n(\mathcal{E})$  est de type fini.

La première assertion est conséquence immédiate de (1.7.6) et de (I, 1.4.1); la seconde résulte de ce que, si  $E$  est un  $A$ -module de type fini,  $\mathbf{S}_n(E)$  est un  $A$ -module de type fini; on applique alors (I, 1.3.13).

**Définition (1.7.8).** — Soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{O}_S$ -Module quasi-cohérent. On appelle fibré vectoriel sur  $S$  défini par  $\mathcal{E}$  et on note  $\mathbf{V}(\mathcal{E})$  le spectre (1.3.1) de la  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre quasi-cohérente  $\mathbf{S}(\mathcal{E})$ .

En vertu de (1.2.7), pour tout  $S$ -préschéma  $X$ , il y a correspondance biunivoque canonique entre les  $S$ -morphismes  $X \rightarrow \mathbf{V}(\mathcal{E})$  et les homomorphismes de  $\mathcal{O}_S$ -Algèbres  $\mathcal{E}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{A}(X)$ , donc aussi entre ces  $S$ -morphismes et les homomorphismes de  $\mathcal{O}_S$ -Modules  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}(X) = f_*(\mathcal{O}_X)$  (où  $f$  est le morphisme structural  $X \rightarrow S$ ). En particulier :

**(1.7.9)** Prenons pour  $X$  un sous-préschéma induit par  $S$  sur un ouvert  $U \subset S$ . Alors, les  $S$ -morphismes  $U \rightarrow \mathbf{V}(\mathcal{E})$  ne sont autres que les  $U$ -sections (I, 2.5.5) du  $U$ -préschéma induit par  $\mathbf{V}(\mathcal{E})$  sur l'ouvert  $p^{-1}(U)$  (où  $p$  est le morphisme structural  $\mathbf{V}(\mathcal{E}) \rightarrow S$ ). D'après ce qu'on vient de voir, ces  $U$ -sections correspondent biunivoquement aux homomorphismes de  $\mathcal{O}_S$ -Modules  $\mathcal{E} \rightarrow j_*(\mathcal{O}_S|_U)$  (où  $j$  est l'injection canonique  $U \rightarrow S$ ), ou,

ce qui revient au même (0, 4.4.3) aux  $(\mathcal{O}_S|U)$ -homomorphismes  $j^*(\mathcal{E}) = \mathcal{E}|U \rightarrow \mathcal{O}_S|U$ . En outre, il est immédiat qu'à la restriction à un ouvert  $U' \subset U$  d'un  $S$ -morphisme  $U \rightarrow \mathbf{V}(\mathcal{E})$  correspond la restriction à  $U'$  de l'homomorphisme correspondant  $\mathcal{E}|U \rightarrow \mathcal{O}_S|U$ . On en conclut que *le faisceau des germes de  $S$ -sections* de  $\mathbf{V}(\mathcal{E})$  s'identifie canoniquement au *dual*  $\check{\mathcal{E}}$  de  $\mathcal{E}$ .

En particulier, si on prend  $X = U = S$ , à l'homomorphisme *nul*  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_S$  correspond une  $S$ -section canonique de  $\mathbf{V}(\mathcal{E})$ , dite  *$S$ -section nulle* (cf. (8.3.3)).

(1.7.10) Prenons maintenant pour  $X$  le spectre  $\{\xi\}$  d'un corps  $K$ ; le morphisme structural  $f : X \rightarrow S$  correspond donc à un monomorphisme  $\mathbf{k}(s) \rightarrow K$ , où  $s = f(\xi)$  (I, 2.4.6); les  $S$ -morphismes  $\{\xi\} \rightarrow \mathbf{V}(\mathcal{E})$  ne sont donc autres que les *points géométriques de  $\mathbf{V}(\mathcal{E})$  à valeurs dans l'extension  $K$  de  $\mathbf{k}(s)$*  (I, 3.4.5), points qui sont localisés aux points de  $p^{-1}(s)$ . L'ensemble de ces points, qu'on peut encore appeler *la fibre géométrique rationnelle sur  $K$  de  $\mathbf{V}(\mathcal{E})$  au-dessus du point  $s$* , s'identifie d'après (1.7.8) à l'ensemble des homomorphismes de  $\mathcal{O}_S$ -Modules  $\mathcal{E} \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$ , où, ce qui revient au même (0, 4.4.3) à l'ensemble des homomorphismes de  $\mathcal{O}_X$ -Modules  $f^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{O}_X = K$ . Mais on a par définition (0, 4.3.1)  $f^*(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_s \otimes_{\mathcal{O}_S} K = \mathcal{E}^s \otimes_{\mathbf{k}(s)} K$ , en posant  $\mathcal{E}^s = \mathcal{E}_s / \mathfrak{m}_s \mathcal{E}_s$ ; la fibre géométrique de  $\mathbf{V}(\mathcal{E})$  rationnelle sur  $K$  au-dessus de  $s$  s'identifie donc au *dual* du  $K$ -espace vectoriel  $\mathcal{E}^s \otimes_{\mathbf{k}(s)} K$ ; si  $\mathcal{E}^s$  ou  $K$  est de dimension finie sur  $\mathbf{k}(s)$ , ce dual s'identifie aussi à  $(\mathcal{E}^s)^\vee \otimes_{\mathbf{k}(s)} K$ , en désignant par  $(\mathcal{E}^s)^\vee$  le dual du  $\mathbf{k}(s)$ -espace vectoriel  $\mathcal{E}^s$ .

*Proposition (1.7.11).* — (i)  $\mathbf{V}(\mathcal{E})$  est un foncteur contravariant en  $\mathcal{E}$  de la catégorie des  $\mathcal{O}_S$ -Modules quasi-cohérents dans la catégorie des  $S$ -schémas affines.

(ii) Si  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{O}_S$ -Module de type fini,  $\mathbf{V}(\mathcal{E})$  est de type fini sur  $S$ .

(iii) Si  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  sont deux  $\mathcal{O}_S$ -Modules quasi-cohérents,  $\mathbf{V}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{F})$  s'identifie canoniquement à  $\mathbf{V}(\mathcal{E}) \times_S \mathbf{V}(\mathcal{F})$ .

(iv) Soit  $g : S' \rightarrow S$  un morphisme; pour tout  $\mathcal{O}_S$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{E}$ ,  $\mathbf{V}(g^*(\mathcal{E}))$  s'identifie canoniquement à  $\mathbf{V}(\mathcal{E})_{(S')} = \mathbf{V}(\mathcal{E}) \times_S S'$ .

(v) A un homomorphisme surjectif  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  de  $\mathcal{O}_S$ -Modules quasi-cohérents correspond une immersion fermée  $\mathbf{V}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{V}(\mathcal{E})$ .

(i) est conséquence immédiate de (1.2.7), compte tenu de ce que tout homomorphisme de  $\mathcal{O}_S$ -Modules  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  définit canoniquement un homomorphisme de  $\mathcal{O}_S$ -Algèbres  $\mathbf{S}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{S}(\mathcal{F})$ . (ii) découle immédiatement des définitions (I, 6.3.1) et du fait que si  $E$  est un  $A$ -module de type fini,  $\mathbf{S}(E)$  est une  $A$ -algèbre de type fini. Pour démontrer (iii), il suffit de partir de l'isomorphisme canonique  $\mathbf{S}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathbf{S}(\mathcal{F})$  (1.7.4) et d'appliquer (1.4.6). De même, pour démontrer (iv), il suffit de partir de l'isomorphisme canonique  $\mathbf{S}(g^*(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} g^*(\mathbf{S}(\mathcal{E}))$  (1.7.5) et d'appliquer (1.5.2). Enfin, pour établir (v), il suffit de remarquer que si l'homomorphisme  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est surjectif, il en est de même de l'homomorphisme correspondant  $\mathbf{S}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{S}(\mathcal{F})$  de  $\mathcal{O}_S$ -Algèbres, et la conclusion résulte de (1.4.10).

(1.7.12) Prenons en particulier  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_S$ ; le préschéma  $\mathbf{V}(\mathcal{O}_S)$  est le  $S$ -schéma affine, spectre de la  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre  $\mathbf{S}(\mathcal{O}_S)$  qui s'identifie à la  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre  $\mathcal{O}_S[T] = \mathcal{O}_S \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[T]$

(T indéterminée); c'est évident lorsque  $S = \text{Spec}(\mathbf{Z})$ , en vertu de (1.7.6), et on passe de là au cas général en considérant le morphisme structural  $S \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z})$  et utilisant (1.7.11, (iv)). En raison de ce résultat, on pose encore  $\mathbf{V}(\mathcal{O}_S) = S[T]$ , et on a donc la formule

$$(1.7.12.1) \quad S[T] = S \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[T].$$

L'identification du faisceau des germes de  $S$ -sections de  $S[T]$  avec  $\mathcal{O}_S$ , déjà vue dans (I, 3.3.15), se retrouve ici dans un contexte plus général, comme cas particulier de (1.7.9).

(1.7.13) Pour tout  $S$ -préschéma  $X$ , on a vu (1.7.8) que  $\text{Hom}_S(X, S[T])$  s'identifie canoniquement à  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S, \mathcal{A}(X))$ , lequel est canoniquement isomorphe à  $\Gamma(S, \mathcal{A}(X))$ , et est par suite muni d'une structure d'anneau; en outre, à tout  $S$ -morphisme  $h : X \rightarrow Y$  correspond un morphisme  $\Gamma(\mathcal{A}(h)) : \Gamma(S, \mathcal{A}(Y)) \rightarrow \Gamma(S, \mathcal{A}(X))$  pour les structures d'anneau (1.1.2). Quand on munit  $\text{Hom}_S(X, S[T])$  de la structure d'anneau ainsi définie, on voit donc qu'on peut considérer  $\text{Hom}_S(X, S[T])$  comme un *foncteur contravariant* en  $X$ , de la catégorie des  $S$ -préschémas dans celle des anneaux. D'autre part,  $\text{Hom}_S(X, \mathbf{V}(\mathcal{E}))$  s'identifie de même à  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}, \mathcal{A}(X))$  (où  $\mathcal{A}(X)$  est considéré comme un  $\mathcal{O}_S$ -Module); on peut par suite le munir canoniquement d'une structure de *module* sur l'anneau  $\text{Hom}_S(X, S[T])$ , et on voit comme ci-dessus que le couple

$$(\text{Hom}_S(X, S[T]), \text{Hom}_S(X, \mathbf{V}(\mathcal{E})))$$

est un foncteur contravariant en  $X$ , à valeurs dans la catégorie dont les éléments sont les couples  $(A, M)$  formés d'un anneau  $A$  et d'un  $A$ -module  $M$ , les morphismes étant les di-homomorphismes.

Nous interpréterons ces faits en disant que  $S[T]$  est un  *$S$ -schéma d'anneaux* et que  $\mathbf{V}(\mathcal{E})$  est un  *$S$ -schéma de modules* sur le  $S$ -schéma d'anneaux  $S[T]$  (cf. chap. 0, § 8).

(1.7.14) Nous allons voir que la structure de  $S$ -schéma de modules définie sur le  $S$ -schéma  $\mathbf{V}(\mathcal{E})$  permet de reconstituer le  $\mathcal{O}_S$ -Module  $\mathcal{E}$  à un isomorphisme unique près : pour cela, nous allons montrer que  $\mathcal{E}$  est canoniquement isomorphe à un sous- $\mathcal{O}_S$ -Module de  $\mathbf{S}(\mathcal{E}) = \mathcal{A}(\mathbf{V}(\mathcal{E}))$ , défini au moyen de cette structure. En effet (1.7.4) l'ensemble  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathbf{S}(\mathcal{E}), \mathcal{A}(X))$  des homomorphismes de  $\mathcal{O}_S$ -Algèbres s'identifie canoniquement à  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}, \mathcal{A}(X))$ , ensemble d'homomorphismes de  $\mathcal{O}_S$ -Modules : si  $h, h'$  sont deux éléments de ce dernier ensemble,  $s_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) des sections de  $\mathcal{E}$  au-dessus d'un ouvert  $U \subset S$ ,  $t$  une section de  $\mathcal{A}(X)$  au-dessus de  $U$ , on a par définition

$$(h + h')(s_1 s_2 \dots s_n) = \prod_{i=1}^n (h(s_i) + h'(s_i))$$

et

$$(t \cdot h)(s_1 s_2 \dots s_n) = t^n \prod_{i=1}^n h(s_i).$$

Cela étant, si  $z$  est une section de  $\mathbf{S}(\mathcal{E})$  au-dessus de  $U$ ,  $h \rightarrow h(z)$  est une application de  $\text{Hom}_S(X, \mathbf{V}(\mathcal{E})) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathbf{S}(\mathcal{E}), \mathcal{A}(X))$  dans  $\Gamma(U, \mathcal{A}(X))$ . Nous allons

montrer que  $\mathcal{E}$  s'identifie au sous-Module de  $\mathbf{S}(\mathcal{E})$  tel que, pour tout ouvert  $U \subset S$ , toute section  $z$  de ce sous- $\mathcal{O}_S$ -Module au-dessus de  $U$  et tout  $S$ -préschéma  $X$ , l'application  $h \mapsto h(z)$  de  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{S|U}}(\mathbf{S}(\mathcal{E})|U, \mathcal{A}(X)|U)$  dans  $\Gamma(U, \mathcal{A}(X))$  soit un homomorphisme de  $\Gamma(U, \mathcal{A}(X))$ -modules.

Il est immédiat en effet que  $\mathcal{E}$  possède cette propriété; pour démontrer la réciproque, on peut se borner à prouver que lorsque  $S = \text{Spec}(A)$ ,  $\mathcal{E} = \widetilde{M}$ , une section  $z$  de  $\mathbf{S}(\mathcal{E})$  au-dessus de  $S$  qui (pour  $U = S$ ) possède la propriété énoncée ci-dessus, est nécessairement une section de  $\mathcal{E}$ ; on a alors  $z = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ , où  $z_n \in \mathbf{S}_n(M)$ , et il s'agit de prouver que  $z_n = 0$  pour  $n \neq 0$ . Posons  $B = \mathbf{S}(M)$  et prenons pour  $X$  le préschéma  $\text{Spec}(B[T])$ , où  $T$  est une indéterminée. L'ensemble  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathbf{S}(\mathcal{E}), \mathcal{A}(X))$  s'identifie à l'ensemble des homomorphismes d'anneaux  $h : B \rightarrow B[T]$  (I, 1.3.13), et d'après ce qu'on a vu plus haut, on a  $(T.h)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n h(z_n)$ : l'hypothèse sur  $z$  implique que l'on a  $\sum_{n=0}^{\infty} T^n h(z_n) = T \cdot \sum_{n=0}^{\infty} h(z_n)$  pour tout homomorphisme  $h$ . Si on prend en particulier pour  $h$  l'injection canonique, il vient  $\sum_{n=0}^{\infty} T^n z_n = T \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ , ce qui entraîne bien la conclusion  $z_n = 0$  pour  $n \neq 0$ .

*Proposition (1.7.15).* — Soit  $Y$  un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien, ou un schéma quasi-compact. Tout  $Y$ -schéma affine  $X$  de type fini sur  $Y$  est  $Y$ -isomorphe à un sous- $Y$ -schéma fermé d'un  $Y$ -schéma de la forme  $\mathbf{V}(\mathcal{E})$ , où  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent de type fini.

En effet, la  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre quasi-cohérente  $\mathcal{A}(X)$  est de type fini (1.3.7). Les hypothèses faites entraînent que  $\mathcal{A}(X)$  est engendrée par un sous- $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent de type fini  $\mathcal{E}$  (I, 9.6.5); par définition, cela entraîne que l'homomorphisme canonique  $\mathbf{S}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{A}(X)$  prolongeant canoniquement l'injection  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}(X)$  est surjectif; la conclusion résulte alors de (1.4.10).

## § 2. SPECTRES PREMIERS HOMOGÈNES

### 2.1. Généralités sur les anneaux et modules gradués.

*Notations (2.1.1).* — Étant donné un anneau  $S$  gradué en degrés positifs, nous désignerons par  $S_n$  la partie de  $S$  formée des éléments homogènes de degré  $n$  ( $n \geq 0$ ), par  $S_+$  la somme (directe) des  $S_n$  tels que  $n > 0$ ; on a  $1 \in S_0$ ,  $S_0$  est un sous-anneau de  $S$ ,  $S_+$  un idéal gradué de  $S$  et  $S$  est somme directe de  $S_0$  et de  $S_+$ . Si  $M$  est un module gradué sur  $S$  (à degrés positifs ou négatifs), on désignera de même par  $M_n$  le  $S_0$ -module formé des éléments homogènes de degré  $n$  de  $M$  (avec  $n \in \mathbf{Z}$ ).

Pour tout entier  $d > 0$ , on désigne par  $S^{(d)}$  la somme directe des  $S_{nd}$ ; en considérant les éléments de  $S_{nd}$  comme homogènes de degré  $n$ , les  $S_{nd}$  définissent sur  $S^{(d)}$  une structure d'anneau gradué.

Pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq d - 1$ , on désignera par  $M^{(d,k)}$  la somme directe

des  $M_{nd+k}$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ); c'est un  $S^{(d)}$ -module gradué, quand on considère les éléments de  $M_{nd+k}$  comme homogènes de degré  $n$ . On écrira  $M^{(d)}$  au lieu de  $M^{(d,0)}$ .

Avec les notations précédentes, pour tout entier  $n$  (positif ou négatif), nous désignerons par  $M(n)$  le  $S$ -module gradué défini par  $(M(n))_k = M_{n+k}$  pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ . En particulier,  $S(n)$  sera un  $S$ -module gradué tel que  $(S(n))_k = S_{n+k}$ , en convenant de poser  $S_n = 0$  pour  $n < 0$ . On dit qu'un  $S$ -module gradué  $M$  est *libre* s'il est isomorphe, en tant que module *gradué*, à une somme directe de modules de la forme  $S(n)$ ; comme  $S(n)$  est un  $S$ -module monogène, engendré par l'élément  $1$  de  $S$  considéré comme élément de degré  $-n$ , il revient au même de dire que  $M$  admet une *base* sur  $S$  formée d'éléments *homogènes*.

On dit qu'un  $S$ -module gradué  $M$  *admet une présentation finie* s'il existe une suite exacte  $P \rightarrow Q \rightarrow M \rightarrow 0$ , où  $P$  et  $Q$  sont des sommes directes finies de modules de la forme  $S(n)$  et les homomorphismes sont de degré  $0$  (cf. (2.1.2)).

**(2.1.2)** Soient  $M, N$  deux  $S$ -modules gradués; on définit sur  $M \otimes_S N$  une structure de  $S$ -module *gradué* de la façon suivante. Sur le produit tensoriel  $M \otimes_Z N$ , on peut définir une structure de  $\mathbf{Z}$ -module gradué (où  $\mathbf{Z}$  est gradué par  $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Z}_n = 0$  pour  $n \neq 0$ ) en posant  $(M \otimes_Z N)_q = \bigoplus_{m+n=q} M_m \otimes_Z N_n$  (comme  $M$  et  $N$  sont respectivement sommes directes des  $M_m$  et des  $N_n$ , on sait que l'on peut identifier canoniquement  $M \otimes_Z N$  à la somme directe de tous les  $M_m \otimes_Z N_n$ ). Cela étant, on a  $M \otimes_S N = (M \otimes_Z N)/P$ , où  $P$  est le sous- $\mathbf{Z}$ -module de  $M \otimes_Z N$  engendré par les éléments  $(xs) \otimes y - x \otimes (sy)$  pour  $x \in M, y \in N, s \in S$ ; il est clair que  $P$  est un sous- $\mathbf{Z}$ -module *gradué* de  $M \otimes_Z N$ , et on voit aussitôt qu'on obtient bien en passant au quotient une structure de  $S$ -module gradué sur  $M \otimes_S N$ .

Pour deux  $S$ -modules gradués  $M, N$ , rappelons qu'un homomorphisme  $u : M \rightarrow N$  de  $S$ -modules est dit *de degré k* si  $u(M_j) \subset N_{j+k}$  pour tout  $j \in \mathbf{Z}$ . Si  $H_n$  désigne l'ensemble de tous les homomorphismes de degré  $n$  de  $M$  dans  $N$ , on désigne par  $\text{Hom}_S(M, N)$  la *somme* (directe) des  $H_n$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) dans le  $S$ -module  $H$  de tous les homomorphismes (de  $S$ -module) de  $M$  dans  $N$ ; en général  $\text{Hom}_S(M, N)$  n'est pas égal à ce dernier. Toutefois, on a  $H = \text{Hom}_S(M, N)$  lorsque  $M$  est *de type fini*; on peut en effet supposer alors  $M$  engendré par un nombre fini d'éléments homogènes  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), et tout homomorphisme  $u \in H$  s'écrit d'une seule manière  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} u_k$ , où pour chaque  $k$ ,  $u_k(x_i)$  est égal au composant homogène de degré  $k + \deg(x_i)$  de  $u(x_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ), ce qui entraîne  $u_k = 0$  sauf pour un nombre fini d'indices; on a par définition  $u_k \in H_k$ , d'où la conclusion.

On dit que les éléments de degré  $0$  de  $\text{Hom}_S(M, N)$  sont des *homomorphismes de  $S$ -modules gradués*. Il est clair que  $S_m H_n \subset H_{m+n}$ , donc les  $H_n$  définissent sur  $\text{Hom}_S(M, N)$  une structure de  $S$ -module gradué.

Il résulte aussitôt de ces définitions que l'on a

$$(2.1.2.1) \quad M(m) \otimes_S N(n) = (M \otimes_S N)(m+n)$$

$$(2.1.2.2) \quad \text{Hom}_S(M(m), N(n)) = (\text{Hom}_S(M, N))(n-m)$$

pour deux  $S$ -modules gradués  $M, N$ .

Soient  $S, S'$  deux anneaux gradués; un homomorphisme d'anneaux gradués  $\varphi : S \rightarrow S'$  est un homomorphisme d'anneaux tel que  $\varphi(S_n) \subset S'_n$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$  (autrement dit,  $\varphi$  doit être un homomorphisme de degré 0 de  $\mathbf{Z}$ -modules gradués). La donnée d'un tel homomorphisme définit sur  $S'$  une structure de  $S$ -module gradué; muni de cette structure et de sa structure d'anneau gradué, on dit que  $S'$  est une  $S$ -algèbre graduée.

Si alors  $M$  est un  $S$ -module gradué, le produit tensoriel  $M \otimes_S S'$  de  $S$ -modules gradués est muni de façon naturelle d'une structure de  $S'$ -module gradué, la graduation étant celle définie plus haut.

**Lemme (2.1.3).** — Soit  $S$  un anneau gradué à degrés positifs. Pour qu'une partie  $E$  de  $S_+$  formée d'éléments homogènes engende  $S_+$  en tant que  $S$ -module, il faut et il suffit que  $E$  engende  $S$  en tant que  $S_0$ -algèbre.

La condition est évidemment suffisante; montrons qu'elle est nécessaire. Soit  $E_n$  (resp.  $E^n$ ) l'ensemble des éléments de  $E$  de degré égal à  $n$  (resp.  $\leq n$ ); il suffira de montrer, par récurrence sur  $n > 0$ , que  $S_n$  est le  $S_0$ -module engendré par les éléments de degré  $n$  qui sont des produits d'éléments de  $E^n$ . Or, cela est évident pour  $n = 1$  en vertu de l'hypothèse; cette dernière montre en outre que  $S_n = \sum_{p=0}^{n-1} S_p E_{n-p}$ , et le raisonnement par récurrence est alors immédiat.

**Corollaire (2.1.4).** — Pour que  $S_+$  soit un idéal de type fini, il faut et il suffit que  $S$  soit une  $S_0$ -algèbre de type fini.

On peut en effet toujours supposer qu'un système fini de générateurs de la  $S_0$ -algèbre  $S$  (resp. du  $S$ -idéal  $S_+$ ) est formé d'éléments homogènes, en remplaçant chacun des générateurs considérés par ses composants homogènes.

**Corollaire (2.1.5).** — Pour que  $S$  soit noethérien, il faut et il suffit que  $S_0$  soit noethérien et que  $S$  soit une  $S_0$ -algèbre de type fini.

La condition est évidemment suffisante; elle est nécessaire, puisque  $S_0$  est isomorphe à  $S/S_+$  et que  $S_+$  doit être un idéal de type fini (2.1.4).

**Lemme (2.1.6).** — Soit  $S$  un anneau gradué à degrés positifs, qui soit une  $S_0$ -algèbre de type fini. Soit  $M$  un  $S$ -module gradué de type fini. Alors :

(i) Les  $M_n$  sont des  $S_0$ -modules de type fini, et il existe un entier  $n_0$  tel que  $M_n = 0$  pour  $n \leq n_0$ .

(ii) Il existe un entier  $n_1$  et un entier  $h > 0$  tel que, pour tout entier  $n \geq n_1$ , on ait  $M_{n+h} = S_h M_n$ .

(iii) Pour tout couple d'entiers  $(d, k)$  tels que  $d > 0$ ,  $0 \leq k \leq d - 1$ ,  $M^{(d,k)}$  est un  $S^{(d)}$ -module de type fini.

(iv) Pour tout entier  $d > 0$ ,  $S^{(d)}$  est une  $S_0$ -algèbre de type fini.

(v) Il existe un entier  $h > 0$  tel que  $S_{mh} = (S_h)^m$  pour tout  $m > 0$ .

(vi) Pour tout entier  $n > 0$ , il existe un entier  $m_0$  tel que  $S_m \subset S_+^n$  pour tout  $m \geq m_0$ .

On peut supposer  $S$  engendré (en tant que  $S_0$ -algèbre) par des éléments homogènes  $f_i$ , de degré  $h_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ), et  $M$  engendré (en tant que  $S$ -module) par des éléments homogènes  $x_j$  de degré  $k_j$  ( $1 \leq j \leq s$ ). Il est clair que  $M_n$  est formé des combinaisons

linéaires, à coefficients dans  $S_0$ , des éléments  $f_1^{x_1} \dots f_r^{x_r} x_j$  tels que les  $\alpha_i$  soient des entiers  $\geq 0$  vérifiant  $k_j + \sum_i \alpha_i h_i = n$ ; pour chaque  $j$ , il n'y a qu'un nombre fini de systèmes  $(\alpha_i)$  vérifiant cette équation, puisque les  $h_i$  sont  $>0$ , d'où la première assertion de (i); la seconde est évidente. Soit d'autre part  $h$  le p.p.c.m. des  $h_i$  et posons  $g_i = f_i^{h/h_i}$  ( $1 \leq i \leq r$ ) de sorte que tous les  $g_i$  sont de degré  $h$ ; soient  $z_\mu$  les éléments de  $M$  de la forme  $f_1^{x_1} \dots f_r^{x_r} x_j$  avec  $0 \leq \alpha_i < h/h_i$  pour  $1 \leq i \leq r$ ; ces éléments sont en nombre fini, soit  $n_1$  le plus grand de leurs degrés. Il est clair que pour  $n \geq n_1$ , tout élément de  $M_{n+h}$  est combinaison linéaire des  $z_\mu$  dont les coefficients sont des monômes de degré  $>0$  par rapport aux  $g_i$ , donc on a  $M_{n+h} = S_h M_n$ , ce qui établit (ii). De la même manière, on voit (pour tout  $d > 0$ ) qu'un élément de  $M^{(d,k)}$  est combinaison linéaire, à coefficients dans  $S_0$ , d'éléments de la forme  $g^d f_1^{x_1} \dots f_r^{x_r} x_j$  avec  $0 \leq \alpha_i < d$ ,  $g$  étant un élément homogène de  $S$ ; d'où (iii); (iv) résulte alors de (iii) et du lemme (2.1.3), en prenant  $M = S_+$ , puisque  $(S_+)^{(d)} = (S^{(d)})$ . L'assertion de (v) se déduit de (ii) en prenant  $M = S$ . Enfin, pour un  $n$  donné, il n'y a qu'un nombre fini de systèmes  $(\alpha_i)$  tels que  $\alpha_i \geq 0$  et  $\sum_i \alpha_i < n$ , donc si  $m_0$  est la plus grande valeur de la somme  $\sum_i \alpha_i h_i$  pour ces systèmes, on a  $S_m \subset S_+^n$  pour  $m > m_0$ , ce qui prouve (vi).

*Corollaire (2.1.7).* — Si  $S$  est noethérien, il en est de même de  $S^{(d)}$  pour tout entier  $d > 0$ . Cela résulte de (2.1.5) et de (2.1.6, (iv)).

**(2.1.8)** Soit  $p$  un idéal premier gradué de l'anneau gradué  $S$ ;  $p$  est donc somme directe des sous-groupes  $p_n = p \cap S_n$ . Supposons que  $p$  ne contienne pas  $S_+$ . Alors, si  $f \in S_+$  n'appartient pas à  $p$ , la relation  $f^n x \in p$  est équivalente à  $x \in p$ ; en particulier, si  $f \in S_d$  ( $d > 0$ ), pour tout  $x \in S_{m-d}$ , la relation  $f^n x \in p_m$  équivaut à  $x \in p_{m-d}$ .

*Proposition (2.1.9).* — Soit  $n_0$  un entier  $>0$ ; pour tout  $n \geq n_0$ , soit  $p_n$  un sous-groupe de  $S_n$ . Pour qu'il existe un idéal premier gradué  $p$  de  $S$  ne contenant pas  $S_+$  et tel que  $p \cap S_n = p_n$  pour tout  $n \geq n_0$ , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

- 1°  $S_m p_n \subset p_{m+n}$  pour tout  $m \geq 0$  et tout  $n \geq n_0$ .
- 2° Pour  $m \geq n_0$ ,  $n \geq n_0$ ,  $f \in S_m$ ,  $g \in S_n$ , la relation  $fg \in p_{m+n}$  entraîne  $f \in p_m$  ou  $g \in p_n$ .
- 3°  $p_n \neq S_n$  pour un  $n \geq n_0$  au moins.

En outre l'idéal premier gradué  $p$  est alors unique.

Il est évident que les conditions 1° et 2° sont nécessaires. En outre, si  $p \supset S_+$ , il existe au moins un  $k > 0$  tel que  $p \cap S_k \neq S_k$ ; si  $f \in S_k$  n'appartient pas à  $p$ , la relation  $p \cap S_n = S_n$  entraîne  $p \cap S_{n-k} = S_{n-k}$  d'après (2.1.8); donc, si  $p \cap S_n = S_n$  à partir d'une certaine valeur de  $n$ , on aurait  $p \supset S_+$  contrairement à l'hypothèse, ce qui prouve que 3° est nécessaire. Inversement, supposons satisfaites les conditions 1°, 2° et 3°. Notons que, si pour un entier  $d \geq n_0$ ,  $f \in S_d$  n'appartient pas à  $p_d$ , alors, si  $p$  existe,  $p_m$ , pour  $m < n_0$ , est nécessairement égal à l'ensemble des  $x \in S_m$  tels que  $f^r x \in p_{m+r}$ , sauf pour un nombre fini de valeurs de  $r$ . Cela prouve déjà que si  $p$  existe, il est unique. Reste à montrer que si on définit les  $p_m$  pour  $m < n_0$  par la condition précédente,  $p = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$  est un idéal premier. Notons d'abord qu'en vertu de 2°, pour  $m \geq n_0$ ,  $p_m$  est aussi défini comme l'ensemble des  $x \in S_m$  tels que  $f^r x \in p_{m+r}$  sauf pour un nombre fini de valeurs de  $r$ . Cela

étant, si  $g \in S_m$ ,  $x \in p_n$ , on a  $f^r g x \in p_{m+n+rd}$  sauf pour un nombre fini de valeurs de  $r$ , donc  $gx \in p_{m+n}$ , ce qui prouve que  $p$  est un idéal de  $S$ . Pour établir que cet idéal est premier, autrement dit que l'anneau  $S/p$ , gradué par les sous-groupes  $S_n/p_n$ , est un anneau intègre, il suffit (en considérant les composants de plus haut degré de deux éléments de  $S/p$ ) de prouver que si  $x \in S_m$ ,  $y \in S_n$  sont tels que  $x \notin p_m$ ,  $y \notin p_n$ , alors  $xy \notin p_{m+n}$ . Sinon, pour  $r$  assez grand, on aurait  $f^{2r} xy \in p_{m+n+2rd}$ ; mais on a  $f^r y \notin p_{n+rd}$  pour tout  $r > 0$ ; il résulte alors de 2° que, sauf pour un nombre fini de valeurs de  $r$ , on a  $f^r x \in p_{m+rd}$ , et on en conclurait que  $x \in p_m$  contrairement à l'hypothèse.

(2.1.10) Nous dirons qu'une partie  $\mathfrak{J}$  de  $S_+$  est un *idéal de  $S_+$*  si c'est un idéal de  $S$ , et que  $\mathfrak{J}$  est un *idéal premier gradué de  $S_+$*  s'il est l'intersection de  $S_+$  et d'un idéal premier gradué de  $S$  ne contenant pas  $S_+$  (cet idéal premier est d'ailleurs unique d'après (2.1.9)). Si  $\mathfrak{J}$  est un idéal de  $S_+$ , la *racine de  $\mathfrak{J}$  dans  $S_+$*  est l'ensemble des éléments de  $S_+$  dont une puissance appartient à  $\mathfrak{J}$ , autrement dit c'est l'ensemble  $\mathbf{r}_+(\mathfrak{J}) = \mathbf{r}(\mathfrak{J}) \cap S_+$ ; en particulier, la racine de 0 dans  $S_+$  est encore appelée le *nilradical de  $S_+$*  et notée  $\mathfrak{N}_+$ : c'est donc l'ensemble des éléments nilpotents de  $S_+$ . Si  $\mathfrak{J}$  est un idéal *gradué* de  $S_+$ , sa racine  $\mathbf{r}_+(\mathfrak{J})$  est un idéal *gradué*: en passant à l'anneau quotient  $S/\mathfrak{J}$ , on peut se ramener au cas  $\mathfrak{J}=0$ , et tout revient à voir que si  $x = x_h + x_{h+1} + \dots + x_k$  est nilpotent, il en est de même des  $x_i \in S_i$  ( $1 \leq h \leq i \leq k$ ); on peut supposer  $x_k \neq 0$  et le composant de plus grand degré de  $x^n$  est alors  $x_k^n$ , donc  $x_k$  est nilpotent, et on raisonne alors par récurrence sur  $k$ . On dit que l'anneau gradué  $S$  est *essentiellement réduit* si  $\mathfrak{N}_+ = 0$ , autrement dit si  $S_+$  ne contient pas d'éléments nilpotents  $\neq 0$ .

(2.1.11) On notera que si, dans l'anneau gradué  $S$ , un élément  $x$  est diviseur de 0, il en est de même de son composant de plus haut degré. On dit qu'un anneau  $S$  est *essentiellement intègre* si l'anneau  $S_+$  (*sans élément unité*) ne contient pas de diviseur de 0 et est  $\neq 0$ ; il suffit pour cela qu'un élément homogène  $\neq 0$  dans  $S_+$  ne soit pas diviseur de 0 dans cet anneau. Il est clair que si  $p$  est un idéal premier gradué de  $S_+$ ,  $S/p$  est essentiellement intègre.

Soit  $S$  un anneau gradué essentiellement intègre, et soit  $x_0 \in S_0$ ; s'il existe alors un élément homogène  $f \neq 0$  de  $S_+$  tel que  $x_0 f = 0$ , on a  $x_0 S_+ = 0$ , car on a  $(x_0 g)f = (x_0 f)g = 0$  pour tout  $g \in S_+$ , et l'hypothèse entraîne donc  $x_0 g = 0$ . Pour que  $S$  soit intègre, il faut et il suffit donc que  $S_0$  soit intègre et que l'annulateur de  $S_+$  dans  $S_0$  soit réduit à 0.

## 2.2. Anneaux de fractions d'un anneau gradué.

(2.2.1) Soient  $S$  un anneau gradué, à degrés positifs,  $f$  un élément *homogène* de  $S$ , de degré  $d > 0$ ; alors l'anneau de fractions  $S' = S_f$  est gradué, en prenant pour  $S'_n$  l'ensemble des  $x/f^k$ , où  $x \in S_{n+kd}$  avec  $k \geq 0$  (on observera ici que  $n$  peut prendre des valeurs négatives arbitraires); nous désignerons le sous-anneau  $S'_0 = (S_f)_0$  de  $S'$  formé des éléments de degré 0 par la notation  $S_{(f)}$ .

Si  $f \in S_d$ , les monômes  $(f/1)^h$  dans  $S_f$  ( $h$  entier positif ou négatif) forment un *système libre* sur l'anneau  $S_{(f)}$ , et l'ensemble de leurs combinaisons linéaires n'est autre que

l'anneau  $(S^{(d)})_f$ , qui est donc *isomorphe* à  $S_{(f)}[T, T^{-1}] = S_{(f)} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[T, T^{-1}]$  (où  $T$  est une indéterminée). En effet, si on a une relation  $\sum_{h=-a}^b z_h(f/1)^h = 0$  avec  $z_h = x_h/f^m$ , où tous les  $x_h$  appartiennent à  $S_{md}$ , cette relation équivaut par définition à l'existence d'un  $k > -a$  tel que  $\sum_{h=-a}^b f^{h+k} x_h = 0$ , et comme les degrés des termes de cette somme sont distincts, on a  $f^{h+k} x_h = 0$  pour tout  $h$ , d'où  $z_h = 0$  pour tout  $h$ .

Si  $M$  est un  $S$ -module gradué,  $M' = M_f$  est un  $S_f$ -module gradué,  $M'_n$  étant l'ensemble des  $z/f^k$  avec  $z \in M_{n+kd}$  ( $k \geq 0$ ); on désigne par  $M_{(f)}$  l'ensemble des éléments homogènes de degré 0 de  $M'$ ; il est immédiat que  $M_{(f)}$  est un  $S_{(f)}$ -module et que l'on a  $(M^{(d)})_f = M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} (S^{(d)})_f$ .

**Lemme (2.2.2).** — Soient  $d, e$  deux entiers  $> 0$ ,  $f \in S_d$ ,  $g \in S_e$ . Il existe un isomorphisme canonique d'anneaux

$$S_{(fg)} \xrightarrow{\sim} (S_{(f)})_{g^d} / f^e;$$

si on identifie canoniquement ces deux anneaux, il existe un isomorphisme canonique de modules

$$M_{(fg)} \xrightarrow{\sim} (M_{(f)})_{g^d} / f^e.$$

En effet,  $fg$  divise  $f^e g^d$ , et ce dernier élément divise  $(fg)^{de}$ , donc les anneaux gradués  $S_{fg}$  et  $S_{f^e g^d}$  s'identifient canoniquement; d'autre part,  $S_{f^e g^d}$  s'identifie aussi à  $(S_{fe})_{g^d / 1}$  (0, 1.4.6), et comme  $f^e / 1$  est inversible dans  $S_{fe}$ ,  $S_{f^e g^d}$  s'identifie aussi à  $(S_{fe})_{g^d / f^e}$ . Or l'élément  $g^d / f^e$  est de degré 0 dans  $S_{fe}$ ; on en conclut aussitôt que le sous-anneau de  $(S_{fe})_{g^d / f^e}$  formé des éléments de degré 0 est  $(S_{(fg)})_{g^d / f^e}$ , et comme on a évidemment  $S_{(fg)} = S_{(f)}$ , cela démontre la première partie de la proposition; la seconde s'établit de même.

**(2.2.3)** Avec les hypothèses de (2.2.2), il est clair que l'homomorphisme canonique  $S_f \rightarrow S_{fg}$  (0, 1.4.1), qui transforme  $x/f^k$  en  $g^k x/(fg)^k$  est de degré 0, donc donne par restriction un *homomorphisme canonique*  $S_{(f)} \rightarrow S_{(fg)}$ , tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & S_{(f)} & \\ \swarrow & & \searrow \\ S_{(fg)} & \xrightarrow{\sim} & (S_{(f)})_{g^d / f^e} \end{array}$$

soit commutatif. On définit de même un homomorphisme canonique  $M_{(f)} \rightarrow M_{(fg)}$ .

**Lemme (2.2.4).** — Si  $f, g$  sont deux éléments homogènes de  $S_+$ , l'anneau  $S_{(fg)}$  est engendré par la réunion des images canoniques de  $S_{(f)}$  et  $S_{(g)}$ .

En vertu de (2.2.2), il suffit de voir que  $1/(g^d / f^e) = f^{d+e} / (fg)^d$  appartient à l'image canonique de  $S_{(g)}$  dans  $S_{(fg)}$ , ce qui est évident par définition.

**Proposition (2.2.5).** — Soit  $d$  un entier  $> 0$  et soit  $f \in S_d$ . Alors il existe un isomorphisme canonique d'anneaux  $S_{(f)} \xrightarrow{\sim} S^{(d)} / (f-1)S^{(d)}$ ; si on identifie ces deux anneaux par cet isomorphisme, il existe un isomorphisme canonique de modules  $M_{(f)} \xrightarrow{\sim} M^{(d)} / (f-1)M^{(d)}$ .

Le premier de ces isomorphismes se définit en faisant correspondre à  $x/f^n$ , où  $x \in S_{nd}$ , l'élément  $\bar{x}$ , classe de  $x$  mod.  $(f-1)S^{(d)}$ ; cette application est bien définie, car on a la congruence  $f^h x \equiv x$  (mod.  $(f-1)S^{(d)}$ ) pour tout  $x \in S^{(d)}$ , donc si  $f^h x = 0$  pour un  $h > 0$ ,

on a  $\bar{x} = 0$ . D'autre part, si  $x \in S_{nd}$  est tel que  $x = (f - 1)y$  avec  $y = y_{hd} + y_{(h+1)d} + \dots + y_{kd}$  avec  $y_{jd} \in S_{jd}$  et  $y_{hd} \neq 0$ , on a nécessairement  $h = n$  et  $x = -y_{hd}$ , ainsi que les relations  $y_{(j+1)d} = fy_{jd}$  pour  $h \leq j \leq k-1$ ,  $fy_{kd} = 0$ , ce qui donne finalement  $f^{k-n}x = 0$ ; à toute classe  $\bar{x}$  mod.  $(f - 1)S^{(d)}$  d'un élément  $x \in S_{nd}$ , on peut donc faire correspondre l'élément  $x/f^n$  de  $S_{(f)}$ , car la remarque qui précède montre que cette application est bien définie. Il est immédiat que les deux applications ainsi définies sont des homomorphismes d'anneaux, réciproques l'un de l'autre. On procède exactement de même pour  $M$ .

*Corollaire (2.2.6).* — Si  $S$  est noethérien, il en est de même de  $S_{(f)}$  pour tout  $f$  homogène de degré  $> 0$ .

Cela résulte aussitôt de (2.1.7) et (2.2.5).

**(2.2.7)** Soit  $T$  une partie multiplicative de  $S_+$  formée d'éléments *homogènes*;  $T_0 = T \cup \{1\}$  est alors une partie multiplicative de  $S$ ; comme les éléments de  $T_0$  sont homogènes, l'anneau  $T_0^{-1}S$  est encore gradué de façon évidente; on désignera par  $S_{(T)}$  le sous-anneau de  $T_0^{-1}S$  formé des éléments d'ordre 0, c'est-à-dire des éléments de la forme  $x/h$ , où  $h \in T$  et  $x$  est homogène de degré égal à celui de  $h$ . On sait (0, 1.4.5) que  $T_0^{-1}S$  s'identifie canoniquement à la limite inductive des anneaux  $S_f$ , où  $f$  parcourt  $T$  (pour les homomorphismes canoniques  $S_f \rightarrow S_{fg}$ ); comme cette identification respecte les degrés, elle identifie  $S_{(T)}$  à la *limite inductive* des  $S_{(f)}$  pour  $f \in T$ . Pour tout  $S$ -module gradué  $M$ , on définit de même le module  $M_{(T)}$  (sur l'anneau  $S_{(T)}$ ) formé des éléments de degré 0 de  $T_0^{-1}M$ , et on voit que ce module est limite inductive des  $M_{(f)}$  pour  $f \in T$ .

Si  $p$  est un idéal premier gradué de  $S_+$ , on désignera par  $S_{(p)}$  et  $M_{(p)}$  l'anneau  $S_{(T)}$  et le module  $M_{(T)}$  respectivement, où  $T$  est l'ensemble des éléments *homogènes* de  $S_+$  qui n'appartiennent pas à  $p$ .

### 2.3. Spectre premier homogène d'un anneau gradué.

**(2.3.1)** Étant donné un anneau gradué  $S$ , à degrés positifs, on appelle *spectre premier homogène* de  $S$  et on désigne par  $\text{Proj}(S)$  l'ensemble des idéaux premiers gradués de  $S_+$  (2.1.10), ou, ce qui revient au même, l'ensemble des idéaux premiers gradués de  $S$  ne contenant pas  $S_-$ ; nous allons définir une structure de *schéma* ayant  $\text{Proj}(S)$  comme ensemble de base.

**(2.3.2)** Pour toute partie  $E$  de  $S$ , soit  $V_+(E)$  l'ensemble des idéaux premiers gradués de  $S$  contenant  $E$  et ne contenant pas  $S_+$ ; c'est donc la partie  $V(E) \cap \text{Proj}(S)$  de  $\text{Spec}(S)$ . De (I, 1.1.2) on déduit donc :

$$(2.3.2.1) \quad V_+(0) = \text{Proj}(S), \quad V_+(S) = V_+(S_+) = \emptyset$$

$$(2.3.2.2) \quad V_+(\bigcup_\lambda E_\lambda) = \bigcap_\lambda V_+(E_\lambda)$$

$$(2.3.2.3) \quad V_+(EE') = V_+(E) \cup V_+(E').$$

On ne change pas  $V_+(E)$  en remplaçant  $E$  par l'idéal gradué engendré par  $E$ ; en outre, si  $\mathfrak{J}$  est un idéal gradué de  $S$ , on a

$$(2.3.2.4) \quad V_+(\mathfrak{J}) = V_+\left(\bigcup_{q \geq n} (\mathfrak{J} \cap S_q)\right)$$

pour tout  $n > 0$  : en effet, si  $\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S)$  contient les éléments homogènes de  $\mathfrak{J}$  de degré  $\geq n$ , comme par hypothèse il existe un élément homogène  $f \in S_d$  non contenu dans  $\mathfrak{p}$ , pour tout  $m \geq 0$  et tout  $x \in S_m \cap \mathfrak{J}$ , on a  $f'x \in \mathfrak{J} \cap S_{m+rd}$  sauf pour un nombre fini de valeurs de  $r$ , donc  $f'x \in \mathfrak{p} \cap S_{m+rd}$ , ce qui entraîne  $x \in \mathfrak{p} \cap S_m$  (2.1.9).

Enfin, on a, pour tout idéal gradué  $\mathfrak{J}$  de  $S$

$$(2.3.2.5) \quad V_+(\mathfrak{J}) = V_+(\mathfrak{r}_+(\mathfrak{J})).$$

(2.3.3) Par définition, les  $V_+(E)$  sont les parties fermées de  $X = \text{Proj}(S)$  pour la topologie induite par la topologie spectrale de  $\text{Spec}(S)$ , et qu'on appellera encore *topologie spectrale* sur  $X$ . On pose, pour tout  $f \in S$

$$(2.3.3.1) \quad D_+(f) = D(f) \cap \text{Proj}(S) = \text{Proj}(S) - V_+(f)$$

et on a par suite, pour deux éléments  $f, g$  de  $S$  (I, 1.1.9.1)

$$(2.3.3.2) \quad D_+(fg) = D_+(f) \cap D_+(g).$$

*Proposition (2.3.4).* — Lorsque  $f$  parcourt l'ensemble des éléments homogènes de  $S_+$ , les  $D_+(f)$  forment une base de la topologie de  $X = \text{Proj}(S)$ .

Il résulte en effet de (2.3.2.2) et (2.3.2.4) que toute partie fermée de  $X$  est intersection d'ensembles de la forme  $V_+(f)$ , où  $f$  est homogène de degré  $> 0$ .

(2.3.5) Soit  $f$  un élément homogène de  $S_+$ , de degré  $d > 0$ ; pour tout idéal premier gradué  $\mathfrak{p}$  de  $S$ , ne contenant pas  $f$ , on sait que l'ensemble des  $x/f^n$ , où  $x \in \mathfrak{p}$  et  $n \geq 0$ , est un idéal premier de l'anneau de fractions  $S_f$  (0, 1.2.6); sa trace sur  $S_{(f)}$  est donc un idéal premier de cet anneau, que nous désignerons par  $\psi_f(\mathfrak{p})$  : c'est l'ensemble des  $x/f^n$ , pour  $n \geq 0$ ,  $x \in \mathfrak{p} \cap S_{nd}$ . On a ainsi défini une application

$$\psi_f : D_+(f) \rightarrow \text{Spec}(S_{(f)});$$

en outre, si  $g \in S_+$  est un second élément homogène de  $S_+$ , on a un diagramme commutatif

$$(2.3.5.1) \quad \begin{array}{ccc} D_+(f) & \xrightarrow{\psi_f} & \text{Spec}(S_{(f)}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ D_+(fg) & \xrightarrow{\psi_{fg}} & \text{Spec}(S_{(fg)}) \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche est l'inclusion, et celle de droite est l'application  $\omega_{fg}$ , déduite de l'homomorphisme canonique  $\omega = \omega_{fg,f} : S_{(f)} \rightarrow S_{(fg)}$  (I, 1.2.1). En effet, si  $x/f^n \in \omega^{-1}(\psi_f(\mathfrak{p}))$ , où  $fg \notin \mathfrak{p}$ , on a par définition  $g^n x / (fg)^n \in \psi_{fg}(\mathfrak{p})$ , donc  $g^n x \in \mathfrak{p}$  et par suite  $x \in \mathfrak{p}$ , et la réciproque est évidente.

*Proposition (2.3.6).* — L'application  $\psi_f$  est un homéomorphisme de  $D_+(f)$  sur  $\text{Spec}(S_{(f)})$ .

En premier lieu,  $\psi_f$  est continue; car si  $h \in S_{nd}$  est tel que  $h/f^n \in \psi_f(\mathfrak{p})$ , on a par définition  $h \in \mathfrak{p}$  et réciproquement, donc  $\psi_f^{-1}(D(h/f^n)) = D_+(hf)$  et notre assertion résulte de la formule (2.3.3.2). En outre, les  $D_+(hf)$ , où  $h$  parcourt les ensembles  $S_{nd}$ , forment une base de la topologie de  $D_+(f)$ , en vertu de (2.3.4) et de la formule (2.3.3.2); ce

qui précède prouve donc, compte tenu de l'axiome  $(T_0)$  valable dans  $D_+(f)$  et dans  $\text{Spec}(S_{(f)})$ , que  $\psi_f$  est injective et que l'application réciproque  $\psi_f(D_+(f)) \rightarrow D_+(f)$  est continue. Enfin, pour voir que  $\psi_f$  est surjective, on remarque que, si  $q_0$  est un idéal premier de  $S_{(f)}$ , et si, pour tout  $n > 0$ , on désigne par  $p_n$  l'ensemble des  $x \in S_n$  tels que  $x^d/f^n \in q_0$ , les  $p_n$  vérifient les conditions de (2.1.9) : en effet, si  $x \in S_n$ ,  $y \in S_n$  sont tels que  $x^d/f^n \in q_0$  et  $y^d/f^n \in q_0$ , on a  $(x+y)^{2d}/f^{2n} \in q_0$ , d'où  $(x+y)^d/f^n \in q_0$  puisque  $q_0$  est premier ; cela prouve que les  $p_n$  sont des sous-groupes des  $S_n$ , et la vérification des autres conditions de (2.1.9) est immédiate, compte tenu de ce que  $q_0$  est premier. Si  $p$  est l'idéal premier gradué de  $S$  ainsi défini, on a bien  $\psi_f(p) = q_0$ , car si  $x \in S_{nd}$ , les relations  $x/f^n \in q_0$  et  $x^d/f^{nd} \in q_0$  sont équivalentes,  $q_0$  étant premier.

*Corollaire (2.3.7).* — Pour que  $D_+(f) = \emptyset$ , il faut et il suffit que  $f$  soit nilpotent.

En effet, pour que  $\text{Spec}(S_{(f)}) = \emptyset$ , il faut et il suffit que  $S_{(f)} = 0$ , ou encore que  $i = o$  dans  $S_f$ , ce qui signifie par définition que  $f$  est nilpotent.

*Corollaire (2.3.8).* — Soit  $E$  une partie de  $S_+$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a)  $V_+(E) = X = \text{Proj}(S)$ .
- b) Tout élément de  $E$  est nilpotent.
- c) Les composants homogènes de tout élément de  $E$  sont nilpotents.

Il est clair que c) entraîne b) et que b) entraîne a). Si  $\mathfrak{J}$  est l'idéal gradué de  $S$  engendré par  $E$ , la condition a) équivaut à  $V_+(\mathfrak{J}) = X$ ; *a fortiori*, a) entraîne que tout élément homogène  $f \in \mathfrak{J}$  est tel que  $V_+(f) = X$ , donc  $f$  est nilpotent en vertu de (2.3.7).

*Corollaire (2.3.9).* — Si  $\mathfrak{J}$  est un idéal gradué de  $S_+$ ,  $r_+(\mathfrak{J})$  est l'intersection des idéaux premiers gradués de  $S_+$  qui contiennent  $\mathfrak{J}$ .

En considérant l'anneau gradué  $S/\mathfrak{J}$ , on peut se ramener au cas où  $\mathfrak{J} = 0$ . Il faut prouver que si  $f \in S_+$  n'est pas nilpotent, il y a un idéal premier gradué de  $S$  ne contenant pas  $f$ ; or, un au moins des composants homogènes de  $f$  n'est pas nilpotent, et on peut donc supposer  $f$  homogène; l'assertion résulte alors de (2.3.7).

**(2.3.10)** Pour toute partie  $Y$  de  $X = \text{Proj}(S)$ , soit  $j_+(Y)$  l'ensemble des  $f \in S_+$  tels que  $Y \subset V_+(f)$ ; il revient au même de dire que  $j_+(Y) = j(Y) \cap S_+$ ;  $j_+(Y)$  est donc un idéal de  $S_+$ , égal à sa racine dans  $S_+$ .

*Proposition (2.3.11).* — (i) Pour toute partie  $E$  de  $S_+$ ,  $j_+(V_+(E))$  est la racine dans  $S_+$  de l'idéal gradué de  $S_+$  engendré par  $E$ .

(ii) Pour toute partie  $Y$  de  $X$ ,  $V_+(j_+(Y)) = \bar{Y}$ , adhérence de  $Y$  dans  $X$ .

(i) Si  $\mathfrak{J}$  est l'idéal gradué de  $S_+$  engendré par  $E$ , on a  $V_+(E) = V_+(\mathfrak{J})$  et l'assertion résulte alors de (2.3.9).

(ii) Comme  $V_+(\mathfrak{J}) = \bigcap_{f \in \mathfrak{J}} V_+(f)$ , la relation  $Y \subset V_+(\mathfrak{J})$  entraîne  $Y \subset V_+(f)$  pour tout  $f \in \mathfrak{J}$ , et par suite  $j_+(Y) \supset \mathfrak{J}$ , d'où  $V_+(j_+(Y)) \subset V_+(\mathfrak{J})$ , ce qui prouve (ii) par définition des ensembles fermés.

*Corollaire (2.3.12).* — Les parties fermées  $Y$  de  $X = \text{Proj}(S)$  et les idéaux gradués de  $S_+$  égaux à leur racine dans  $S_+$  se correspondent biunivoquement par les applications décroissantes  $Y \rightarrow j_+(Y)$ ,  $\mathfrak{J} \rightarrow V_+(\mathfrak{J})$ ; à la réunion  $Y_1 \cup Y_2$  de deux parties fermées de  $X$  correspond

$j_+(Y_1) \cap j_+(Y_2)$ , et à l'intersection d'une famille quelconque  $(Y_\lambda)$  de parties fermées correspond la racine dans  $S_+$  de la somme des  $j_+(Y_\lambda)$ .

*Corollaire (2.3.13).* — Soit  $\mathfrak{J}$  un idéal gradué dans  $S_+$ ; pour que  $V_+(\mathfrak{J}) = \emptyset$ , il faut et il suffit que tout élément de  $S_+$  ait une puissance dans  $\mathfrak{J}$ .

Ce dernier corollaire s'exprime aussi sous l'une des formes équivalentes :

*Corollaire (2.3.14).* — Soit  $(f_\alpha)$  une famille d'éléments homogènes de  $S_+$ . Pour que les  $D_+(f_\alpha)$  forment un recouvrement de  $X = \text{Proj}(S)$ , il faut et il suffit que tout élément de  $S_+$  ait une puissance dans l'idéal engendré par les  $f_\alpha$ .

*Corollaire (2.3.15).* — Soient  $(f_\alpha)$  une famille d'éléments homogènes de  $S_+$ ,  $f$  un élément de  $S_+$ . Les relations suivantes sont équivalentes : a)  $D_+(f) \subset \bigcup_\alpha D_+(f_\alpha)$ ; b)  $V_+(f) \supset \bigcap_\alpha V_+(f_\alpha)$ ; c) une puissance de  $f$  appartient à l'idéal engendré par les  $f_\alpha$ .

*Corollaire (2.3.16).* — Pour que  $X = \text{Proj}(S)$  soit vide, il faut et il suffit que tout élément de  $S_+$  soit nilpotent.

*Corollaire (2.3.17).* — Dans la correspondance biunivoque décrite dans (2.3.12), aux parties fermées irréductibles de  $X$  correspondent les idéaux gradués premiers dans  $S_+$ .

En effet, si  $Y = Y_1 \cup Y_2$ , où  $Y_1$  et  $Y_2$  sont fermés et distincts de  $Y$ , on a

$$j_+(Y) = j_+(Y_1) \cap j_+(Y_2)$$

les idéaux  $j_+(Y_1)$  et  $j_+(Y_2)$  étant distincts de  $j_+(Y)$ , donc  $j_+(Y)$  n'est pas premier. Inversement, si  $\mathfrak{J}$  est un idéal gradué non premier de  $S_+$ , il existe deux éléments  $f, g$  de  $S_+$  tels que  $f \notin \mathfrak{J}, g \notin \mathfrak{J}, fg \in \mathfrak{J}$ ; alors  $V_+(f) \supset V_+(\mathfrak{J}), V_+(g) \supset V_+(\mathfrak{J})$  mais  $V_+(\mathfrak{J}) \subset V_+(f) \cup V_+(g)$  par (2.3.2.3); on en conclut que  $V_+(\mathfrak{J})$  est réunion des ensembles fermés  $V_+(f) \cap V_+(\mathfrak{J})$  et  $V_+(g) \cap V_+(\mathfrak{J})$ , qui sont distincts de  $V_+(\mathfrak{J})$ .

#### 2.4. La structure de schéma sur $\text{Proj}(S)$ .

**(2.4.1)** Soient  $f, g$  deux éléments homogènes de  $S_+$ ; considérons les schémas affines  $Y_f = \text{Spec}(S_{(f)})$ ,  $Y_g = \text{Spec}(S_{(g)})$  et  $Y_{fg} = \text{Spec}(S_{(fg)})$ . En vertu de (2.2.2), le morphisme  $w_{fg,f} = (\omega_{fg,f}, \widetilde{\omega}_{fg,f})$  de  $Y_{fg}$  dans  $Y_f$ , correspondant à l'homomorphisme canonique  $\omega_{fg,f} : S_{(f)} \rightarrow S_{(fg)}$ , est une immersion ouverte (I, 1.3.6). Au moyen de l'homéomorphisme réciproque de  $\psi_f : D_+(f) \rightarrow Y_f$  (2.3.6), on peut transporter à  $D_+(f)$  la structure de schéma affine de  $Y_f$ ; en vertu de la commutativité du diagramme (2.3.5.1), le schéma affine  $D_+(fg)$  s'identifie ainsi au schéma induit sur l'ensemble ouvert  $D_+(fg)$  de l'espace sous-jacent au schéma affine  $D_+(f)$ . Il est clair alors (compte tenu de (2.3.4)) que  $X = \text{Proj}(S)$  est muni d'une unique structure de préschéma, dont la restriction à chaque  $D_+(f)$  est le schéma affine qui vient d'être défini. En outre :

*Proposition (2.4.2).* — Le préschéma  $\text{Proj}(S)$  est un schéma.

Il suffit (I, 5.5.6) de montrer que, quels que soient  $f, g$  homogènes dans  $S_+$ ,  $D_+(f) \cap D_+(g) = D_+(fg)$  est affine et que son anneau est engendré par les images canoniques des anneaux de  $D_+(f)$  et  $D_+(g)$ ; le premier point est évident par définition, et le second résulte de (2.2.4).

Lorsqu'on parlera du spectre premier homogène  $\text{Proj}(S)$  comme d'un *schéma*, il s'agira toujours de la structure qui vient d'être définie.

*Exemple (2.4.3).* — Prenons  $S = K[T_1, T_2]$ ,  $K$  étant un corps,  $T_1, T_2$  deux indéterminées, et  $S$  étant gradué par le degré total. Il résulte de (2.3.14) que  $\text{Proj}(S)$  est réunion de  $D_+(T_1)$  et  $D_+(T_2)$ ; on voit aussitôt que ces schémas affines sont canoniquement isomorphes à  $K[T]$ , et que  $\text{Proj}(S)$  s'obtient par le recollement de ces deux schémas affines décrit dans (I, 2.3.2) (cf. (7.4.14)).

*Proposition (2.4.4).* — Soit  $S$  un anneau gradué à degrés positifs, et soit  $X$  le schéma  $\text{Proj}(S)$ .

(i) Si  $\mathfrak{N}_+$  est le nilradical de  $S_+$  (2.1.10), le schéma  $X_{\text{red}}$  est canoniquement isomorphe à  $\text{Proj}(S/\mathfrak{N}_+)$ ; en particulier, si  $S$  est essentiellement réduit,  $\text{Proj}(S)$  est réduit.

(ii) Supposons  $S$  essentiellement réduit. Alors, pour que  $X$  soit intègre, il faut et il suffit que  $S$  soit essentiellement intègre.

(i) Soit  $\bar{S}$  l'anneau gradué  $S/\mathfrak{N}_+$ , et désignons par  $x \mapsto \bar{x}$  l'homomorphisme canonique  $S \rightarrow \bar{S}$ , de degré 0. Pour tout  $f \in S_d$  ( $d > 0$ ), l'homomorphisme canonique  $S_f \rightarrow \bar{S}_{(f)}$  (0, 1.5.1) est surjectif et de degré 0, donc par restriction donne un homomorphisme surjectif  $S_{(f)} \rightarrow \bar{S}_{(\bar{f})}$ ; si on suppose  $f \notin \mathfrak{N}_+$ , on vérifie immédiatement que  $\bar{S}_{(\bar{f})}$  est réduit, et que le noyau de l'homomorphisme précédent est le nilradical de  $S_{(f)}$ , autrement dit  $\bar{S}_{(\bar{f})} = (S_{(f)})_{\text{red}}$ . A cet homomorphisme correspond donc une immersion fermée  $D_+(\bar{f}) \rightarrow D_+(f)$  qui identifie  $D_+(\bar{f})$  à  $(D_+(f))_{\text{red}}$  (I, 5.1.2), et est en particulier un homéomorphisme des espaces sous-jacents à ces deux schémas affines. En outre, si  $g \notin \mathfrak{N}_+$  est un second élément homogène de  $S_+$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S_{(f)} & \xrightarrow{\quad} & \bar{S}_{(\bar{f})} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{(fg)} & \xrightarrow{\quad} & \bar{S}_{(\bar{fg})} \end{array}$$

est commutatif; comme en outre les  $D_+(f)$ , pour  $f$  homogène de degré  $> 0$  et  $f \notin \mathfrak{N}_+$ , forment un recouvrement de  $X = \text{Proj}(S)$  (2.3.7), on voit que les morphismes  $D_+(\bar{f}) \rightarrow D_+(f)$  sont les restrictions d'une immersion fermée  $\text{Proj}(\bar{S}) \rightarrow \text{Proj}(S)$  qui est un homéomorphisme des espaces sous-jacents; d'où la conclusion (I, 5.1.2).

(ii) Supposons que  $S$  soit essentiellement intègre, autrement dit que (o) soit un idéal gradué premier de  $S_+$  distinct de  $S_+$ ; alors  $X$  est réduit en vertu de (i) et irréductible en vertu de (2.3.17). Inversement, supposons que  $S$  soit essentiellement réduit et  $X$  intègre; alors, pour  $f \neq 0$  homogène dans  $S_+$ , on a  $D_+(f) \neq \emptyset$  (2.3.7); l'hypothèse que  $X$  est irréductible entraîne que  $D_+(f) \cap D_+(g) \neq \emptyset$  pour  $f, g$  homogènes et  $\neq 0$  dans  $S_+$ ; donc  $fg \neq 0$  en vertu de (2.3.3.2), et on en conclut que  $S_+$  n'a pas de diviseurs de zéro, d'où la première assertion.

**(2.4.5)** Étant donné un anneau commutatif  $A$ , rappelons qu'on dit qu'un anneau gradué  $S$  est une *A-algèbre graduée* s'il est muni d'une structure de  $A$ -algèbre telle que chacun des sous-groupes  $S_n$  soit un  $A$ -module; il suffit d'ailleurs pour cela que  $S_0$  soit

une A-algèbre, autrement dit on définit sur  $S$  une structure de A-algèbre graduée en définissant une structure de A-algèbre sur  $S_0$ , et en posant, pour  $\alpha \in A$ ,  $x \in S_n$ ,  $\alpha \cdot x = (\alpha \cdot 1)x$ .

*Proposition (2.4.6).* — *Supposons que  $S$  soit une A-algèbre graduée. Alors sur  $X = \text{Proj}(S)$ , le faisceau structural  $\mathcal{O}_X$  est une A-Algèbre (A étant considéré comme faisceau simple sur X); en d'autres termes,  $X$  est un schéma au-dessus de  $\text{Spec}(A)$ .*

Il suffit de noter que pour tout  $f$  homogène dans  $S_+$ ,  $S_{(f)}$  est une algèbre sur A, et que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S_{(f)} & \xrightarrow{\quad} & S_{(fg)} \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & A & \end{array}$$

est commutatif, pour  $f, g$  homogènes dans  $S_+$ .

*Proposition (2.4.7).* — *Soit  $S$  un anneau gradué à degrés positifs.*

(i) *Pour tout entier  $d > 0$ , il existe un isomorphisme canonique du schéma  $\text{Proj}(S)$  sur le schéma  $\text{Proj}(S^{(d)})$ .*

(ii) *Soit  $S'$  l'anneau gradué tel que  $S'_0 = \mathbf{Z}$ ,  $S'_n = S_n$  (considéré comme  $\mathbf{Z}$ -module) pour  $n > 0$ . Il existe un isomorphisme canonique du schéma  $\text{Proj}(S)$  sur le schéma  $\text{Proj}(S')$ .*

(i) Montrons d'abord que l'application  $p \mapsto p \cap S^{(d)}$  est une bijection de l'ensemble  $\text{Proj}(S)$  sur  $\text{Proj}(S^{(d)})$ . En effet, supposons donné un idéal premier gradué  $p' \in \text{Proj}(S^{(d)})$ , et posons  $p_{ni} = p' \cap S_{nd}$  ( $n \geq 0$ ). Pour tout  $n > 0$ , non multiple de  $d$ , définissons  $p_n$  comme l'ensemble des  $x \in S_n$  tels que  $x^d \in p_{nd}$ ; si  $x \in p_n$ ,  $y \in p_n$ , on a  $(x+y)^{2d} \in p_{2nd}$ , donc  $(x+y)^d \in p_{nd}$  puisque  $p'$  est premier; il est immédiat que les  $p_n$  ainsi définis pour tout  $n \geq 0$  vérifient les conditions de (2.1.9), donc il existe un idéal premier unique  $p \in \text{Proj}(S)$  tel que  $p \cap S^{(d)} = p'$ . Comme pour tout  $f$  homogène dans  $S_+$ , on a  $V_+(f) = V_+(f^d)$  (2.3.2.3), on voit que la bijection précédente est un *homéomorphisme* d'espaces topologiques. Enfin, avec les mêmes notations,  $S_{(f)}$  et  $S_{(f^d)}$  s'identifient canoniquement (2.2.2), donc  $\text{Proj}(S)$  et  $\text{Proj}(S^{(d)})$  s'identifient canoniquement en tant que schémas.

(ii) Si, à tout  $p \in \text{Proj}(S)$  on fait correspondre l'unique idéal premier  $p' \in \text{Proj}(S')$  tel que  $p' \cap S_n = p \cap S_n$  pour tout  $n > 0$  (2.1.9), il est clair qu'on définit un homéomorphisme canonique  $\text{Proj}(S) \xrightarrow{\sim} \text{Proj}(S')$  des espaces sous-jacents, car  $V_+(f)$  est le même ensemble pour  $S$  et  $S'$  lorsque  $f$  est un élément homogène de  $S_+$ . Comme en outre  $S_{(f)} = S'_{(f)}$ ,  $\text{Proj}(S)$  et  $\text{Proj}(S')$  s'identifient en tant que schémas.

*Corollaire (2.4.8).* — *Si  $S$  est une A-algèbre graduée,  $S'_A$  la A-algèbre graduée telle que  $(S'_A)_0 = A$ ,  $(S'_A)_n = S_n$  pour  $n > 0$ , il existe un isomorphisme canonique de  $\text{Proj}(S)$  sur  $\text{Proj}(S'_A)$ .*

En effet, ces deux schémas sont isomorphes canoniquement à  $\text{Proj}(S')$ , avec les notations de (2.4.7, (ii)).

## 2.5. Faisceau associé à un module gradué.

(2.5.1) Soit  $M$  un  $S$ -module gradué. Pour tout  $f$  homogène dans  $S_+$ ,  $M_{(f)}$  est un  $S_{(f)}$ -module, et il lui correspond donc un faisceau quasi-cohérent associé  $(M_{(f)})^\sim$  sur le schéma affine  $\text{Spec}(S_{(f)})$ , identifié à  $D_+(f)$  (I, 1.3.4).

*Proposition (2.5.2).* — Il existe sur  $X = \text{Proj}(S)$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent et un seul  $\tilde{M}$  tel que pour tout  $f$  homogène dans  $S_+$ , on ait  $\Gamma(D_+(f), \tilde{M}) = M_{(f)}$ , l'homomorphisme de restriction  $\Gamma(D_+(f), \tilde{M}) \rightarrow \Gamma(D_+(fg), \tilde{M})$  pour  $f, g$  homogènes dans  $S_+$ , étant l'homomorphisme canonique  $M_{(f)} \rightarrow M_{(fg)}$  (2.2.3).

Supposons  $f \in S_d$ ,  $g \in S_e$ . Comme  $D_+(fg)$  s'identifie au spectre premier de  $(S_{(f)})_{g^d f^e}$  en vertu de (2.2.2), la restriction à  $D_+(fg)$  du faisceau  $(M_{(f)})^\sim$  sur  $D_+(f)$  s'identifie canoniquement au faisceau associé au module  $(M_{(f)})_{g^d f^e}(\mathbf{I}, 1.3.6)$ , donc aussi à  $(M_{(fg)})^\sim$  (2.2.2); on en conclut qu'il existe un isomorphisme canonique

$$\theta_{g,f} : (M_{(f)})^\sim | D_+(fg) \xrightarrow{\sim} (M_{(g)})^\sim | D_+(fg)$$

tel que, si  $h$  est un troisième élément homogène de  $S_+$ , on ait  $\theta_{f,h} = \theta_{f,g} \circ \theta_{g,h}$  dans  $D_+(fgh)$ . Par suite (0, 3.3.1) il existe sur  $X$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ , et pour chaque  $f$  homogène dans  $S_+$ , un isomorphisme  $\eta_f$  de  $\mathcal{F}|D_+(f)$  sur  $(M_{(f)})^\sim$  tels que  $\theta_{g,f} = \eta_g \circ \eta_f^{-1}$ . Si alors on considère le faisceau  $\mathcal{G}$  associé au préfaisceau (sur la base de la topologie de  $X$  formée des  $D_+(f)$ ) défini par  $D_+(f) \rightarrow M_{(f)}$ , avec les homomorphismes canoniques  $M_{(f)} \rightarrow M_{(fg)}$  comme homomorphismes de restriction, ce qui précède prouve que  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont isomorphes (compte tenu de (I, 1.3.7)); le faisceau  $\mathcal{G}$  sera désigné par  $\tilde{M}$  et vérifie bien les conditions de l'énoncé. On a en particulier  $\tilde{S} = \mathcal{O}_X$ .

*Définition (2.5.3).* — On dit que le  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\tilde{M}$  défini dans (2.5.2) est associé au  $S$ -module gradué  $M$ .

Rappelons que les  $S$ -modules gradués forment une catégorie lorsqu'on restreint les homomorphismes de modules gradués aux homomorphismes de degré 0. Avec cette convention :

*Proposition (2.5.4).* — Le foncteur  $\tilde{M}$  en  $M$  est un foncteur covariant additif exact, de la catégorie des  $S$ -modules gradués dans celle des  $\mathcal{O}_X$ -Modules quasi-cohérents, qui commute aux limites inductives et aux sommes directes.

En effet, ces propriétés étant locales, il suffit de les vérifier sur les faisceaux  $\tilde{M}|D_+(f) = (M_{(f)})^\sim$ ; or, le foncteur  $M_f$  en  $M$ , le foncteur  $N_0$  en  $N$  (dans la catégorie des  $S_f$ -modules gradués) et le foncteur  $\tilde{P}$  en  $P$  (dans la catégorie des  $S_{(f)}$ -modules) ont tous trois les propriétés d'exactitude et de permutabilité aux limites inductives et aux sommes directes (I, 1.3.5 et 1.3.9); d'où la proposition.

On notera  $\tilde{u}$  l'homomorphisme  $\tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$  correspondant à un homomorphisme de degré 0,  $u : M \rightarrow N$ . On déduit aussitôt de (2.5.4) que les résultats de (I, 1.3.9 et 1.3.10) sont encore valables pour les  $S$ -modules gradués et les homomorphismes de degré 0 (avec le sens donné ici à  $\tilde{M}$ ), les démonstrations étant purement formelles.

*Proposition (2.5.5).* — Pour tout  $p \in X = \text{Proj}(S)$ , on a  $\tilde{M}_p = M_{(p)}$ .

En effet, par définition  $\tilde{M}_p = \varinjlim \Gamma(D_+(f), \tilde{M})$ , où  $f$  parcourt l'ensemble des éléments homogènes de  $S_+$  tels que  $f \notin p$ ; comme  $\Gamma(D_+(f), \tilde{M}) = M_{(f)}$ , la proposition résulte de la définition de  $M_{(p)}$  (2.2.7).

En particulier, l'anneau local  $(\mathcal{O}_X)_p$  n'est autre que l'anneau  $S_{(p)}$ , ensemble des fractions  $x/f$ , où  $f$  est homogène dans  $S_+$  et  $x$  n'appartient pas à  $p$ , et  $x$  homogène est de même degré que  $f$ .

Plus particulièrement, si  $S$  est essentiellement intègre, de sorte que  $\text{Proj}(S) = X$  est intègre (2.4.4), et si  $\xi = (0)$  est le point générique de  $X$ , le corps des fonctions rationnelles  $R(X) = \mathcal{O}_\xi$ , est le corps formé des éléments  $fg^{-1}$ , où  $f$  et  $g$  sont homogènes de même degré dans  $S_+$  et  $g \neq 0$ .

**Proposition (2.5.6).** — *Si, pour tout  $z \in M$  et tout  $f$  homogène dans  $S_+$ , il existe une puissance de  $f$  annulant  $z$ , on a  $\widetilde{M} = 0$ . Cette condition suffisante est aussi nécessaire lorsque la  $S_0$ -algèbre  $S$  est engendrée par l'ensemble  $S_1$  des éléments homogènes de degré 1.*

En effet, la condition  $\widetilde{M} = 0$  équivaut à  $M_{(f)} = 0$  pour tout  $f$  homogène dans  $S_+$ . D'autre part, si  $f \in S_d$ , dire que  $M_{(f)} = 0$  signifie que pour tout  $z \in M$  homogène et de degré multiple de  $d$ , il y a une puissance  $f^n$  telle que  $f^n z = 0$ . Si  $M_{(f)} = 0$  pour tout  $f \in S_1$ , la condition de l'énoncé est donc vérifiée pour tout  $f \in S_1$ ; elle l'est a fortiori pour tout  $f$  homogène dans  $S_+$  lorsque  $S_1$  engendre  $S$ , puisque tout élément homogène de  $S_+$  est alors combinaison linéaire de produits d'éléments de  $S_1$ .

**Proposition (2.5.7).** — *Soient  $d$  un entier  $> 0$ ,  $f \in S_d$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , le  $(\mathcal{O}_X|D_+(f))$ -Module  $(S(nd))^\sim|D_+(f)$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{O}_X|D_+(f)$ .*

En effet, la multiplication par l'élément inversible  $(f/1)^n$  de  $S_f$  est une bijection de  $S_{(f)} = (S_f)_0$  sur  $(S_f)_{nd} = (S_f(nd))_0 = (S(nd))_{(f)} = S(nd)_{(f)}$ ; autrement dit, les  $S_{(f)}$ -modules  $S_{(f)}$  et  $S(nd)_{(f)}$  sont canoniquement isomorphes, d'où la proposition.

**Corollaire (2.5.8).** — *Sur l'ensemble ouvert  $U = \bigcup_{f \in S_d} D_+(f)$ , la restriction du  $\mathcal{O}_X$ -Module  $(S(nd))^\sim$  est un  $(\mathcal{O}_X|U)$ -Module inversible (**0**, 5.4.1).*

**Corollaire (2.5.9).** — *Si l'idéal  $S_+$  de  $S$  est engendré par l'ensemble  $S_1$  des éléments homogènes de degré 1, les  $\mathcal{O}_X$ -Modules  $(S(n))^\sim$  sont inversibles pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ .*

Il suffit de remarquer que  $X = \bigcup_{f \in S_1} D_+(f)$  en vertu de l'hypothèse (2.3.14) et d'appliquer (2.5.8) avec  $U = X$ .

**(2.5.10)** Nous poserons, dans toute la suite de ce paragraphe

$$(2.5.10.1) \quad \mathcal{O}_X(n) = (S(n))^\sim$$

pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , et pour toute partie ouverte  $U$  de  $X$  et tout  $(\mathcal{O}_X|U)$ -Module  $\mathcal{F}$

$$(2.5.10.2) \quad \mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X|U} (\mathcal{O}_X(n)|U)$$

pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ . Si l'idéal  $S_+$  est engendré par  $S_1$ , le foncteur  $\mathcal{F}(n)$  est exact en  $\mathcal{F}$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , car  $\mathcal{O}_X(n)$  est alors un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible.

**(2.5.11)** Soient  $M$  et  $N$  deux  $S$ -modules gradués. Pour tout  $f \in S_d$  ( $d > 0$ ) on définit un homomorphisme canonique fonctoriel de  $S_{(f)}$ -modules

$$(2.5.11.1) \quad \lambda_f : M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)} \rightarrow (M \otimes_S N)_{(f)}$$

en composant l'homomorphisme  $M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)} \rightarrow M_f \otimes_{S_f} N_f$  (provenant des injections  $M_{(f)} \rightarrow M_f$ ,  $N_{(f)} \rightarrow N_f$  et  $S_{(f)} \rightarrow S_f$ ) et l'isomorphisme canonique  $M_f \otimes_{S_f} N_f \xrightarrow{\sim} (M \otimes_S N)_f$  (**0**, I.3.4) et en notant que, par définition du produit tensoriel de deux modules gradués, ce dernier isomorphisme conserve les degrés; pour  $x \in M_{md}$ ,  $y \in N_{nd}$  ( $m \geq 0$ ,  $n \geq 0$ ), on a donc

$$\lambda_f((x/f^m) \otimes (y/f^n)) = (x \otimes y)/f^{m+n}.$$

Il résulte aussitôt de cette définition que si  $g \in S_\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ), le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)} & \xrightarrow{\lambda_f} & (M \otimes_S N)_{(f)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_{(fg)} \otimes_{S_{(fg)}} N_{(fg)} & \xrightarrow{\lambda_{fg}} & (M \otimes_S N)_{(fg)} \end{array}$$

(où la flèche verticale de droite est l'homomorphisme canonique et celle de gauche provient des homomorphismes canoniques) est commutatif. On déduit donc des  $\lambda$  un homomorphisme canonique fonctoriel de  $\mathcal{O}_X$ -Modules

$$(2.5.11.2) \quad \lambda : \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N} \rightarrow (M \otimes_S N)^\sim.$$

Considérons en particulier deux idéaux gradués  $\mathfrak{J}$ ,  $\mathfrak{K}$  de  $S$ ; comme  $\widetilde{\mathfrak{J}}$  et  $\widetilde{\mathfrak{K}}$  sont des faisceaux d'idéaux de  $\mathcal{O}_X$ , on a un homomorphisme canonique  $\widetilde{\mathfrak{J}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{\mathfrak{K}} \rightarrow \mathcal{O}_X$ ; le diagramme

$$(2.5.11.3) \quad \begin{array}{ccc} \widetilde{\mathfrak{J}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{\mathfrak{K}} & \xrightarrow{\lambda} & (\mathfrak{J} \otimes_S \mathfrak{K})^\sim \\ \searrow & \swarrow & \\ & \mathcal{O}_X & \end{array}$$

est alors commutatif. On se ramène en effet à le vérifier dans chaque ouvert  $D_+(f)$  ( $f$  homogène dans  $S_+$ ) et cela résulte aussitôt de la définition (2.5.11.1) de  $\lambda_f$  et de (**I**, I.3.13).

Notons enfin que si  $M$ ,  $N$ ,  $P$  sont trois  $S$ -modules gradués, le diagramme

$$(2.5.11.4) \quad \begin{array}{ccc} \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{P} & \xrightarrow{\lambda \otimes 1} & (M \otimes_S N)^\sim \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{P} \\ \downarrow 1 \otimes \lambda & & \downarrow \lambda \\ \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} (N \otimes_S P)^\sim & \xrightarrow{\lambda} & (M \otimes_S N \otimes_S P)^\sim \end{array}$$

est commutatif. Il suffit encore de le vérifier dans chaque  $D_+(f)$  et cela découle aussitôt des définitions et de (I, 1.3.13).

(2.5.12) Sous les hypothèses de (2.5.11), on définit un homomorphisme canonique fonctoriel de  $S_{(f)}$ -modules

$$(2.5.12.1) \quad \mu_f : (\text{Hom}_S(M, N))_{(f)} \rightarrow \text{Hom}_{S_{(f)}}(M_{(f)}, N_{(f)})$$

en faisant correspondre à  $u/f^n$ , où  $u$  est un homomorphisme de degré  $nd$ , l'homomorphisme  $M_{(f)} \rightarrow N_{(f)}$  qui transforme  $x/f^m$  ( $x \in M_{md}$ ) en  $u(x)/f^{m+n}$ . Pour  $g \in S_e$  ( $e > 0$ ), on a encore un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\text{Hom}_S(M, N))_{(f)} & \xrightarrow{\mu_f} & \text{Hom}_{S_{(f)}}(M_{(f)}, N_{(f)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\text{Hom}_S(M, N))_{(fg)} & \xrightarrow{\mu_{fg}} & \text{Hom}_{S_{(fg)}}(M_{(fg)}, N_{(fg)}) \end{array}$$

(la flèche de gauche étant l'homomorphisme canonique, celle de droite provenant des homomorphismes canoniques). On en conclut encore (compte tenu de (I, 1.3.8)) que les  $\mu_f$  définissent un homomorphisme canonique fonctoriel de  $\mathcal{O}_X$ -Modules

$$(2.5.12.2) \quad \mu : (\text{Hom}_S(M, N))^\sim \rightarrow \mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \tilde{N}).$$

*Proposition (2.5.13).* — Supposons l'idéal  $S_+$  engendré par  $S_1$ . Alors l'homomorphisme  $\lambda$  (2.5.11.2) est un isomorphisme; il en est de même de l'homomorphisme  $\mu$  (2.5.12.2) lorsque le  $S$ -module gradué  $M$  admet une présentation finie (2.1.1).

Comme  $X$  est réunion des  $D_+(f)$  pour  $f \in S_1$  (2.3.14), on est ramené à prouver que  $\lambda_f$  et  $\mu_f$  sont des isomorphismes, sous les hypothèses envisagées, lorsque  $f$  est homogène et de degré 1. Or, on définit alors une application  $\mathbf{Z}$ -bilinéaire  $M_m \times N_n \rightarrow M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)}$  en faisant correspondre à  $(x, y)$  l'élément  $(x/f^m) \otimes (y/f^n)$  (lorsque  $m < 0$ , nous écrivons  $x/f^m$  pour  $f^{-m}x/1$ ); ces applications définissent une application  $\mathbf{Z}$ -linéaire  $M \otimes_S N \rightarrow M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)}$ , et si  $s \in S_q$ , cette application transforme  $(sx) \otimes y$  en  $(s/f^q)((x/f^m) \otimes (y/f^n))$  (pour  $x \in M_m$ ,  $y \in N_n$ ). On en déduit donc un di-homomorphisme de modules  $\gamma_f : M \otimes_S N \rightarrow M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)}$ , relatif à l'homomorphisme canonique  $S \rightarrow S_{(f)}$  (transformant  $s \in S_q$  en  $s/f^q$ ). Supposons en outre que pour un élément  $\sum_i (x_i \otimes y_i)$  de  $M \otimes_S N$  ( $x_i, y_i$  homogènes de degrés respectifs  $m_i, n_i$ ) on ait  $f^r \sum_i (x_i \otimes y_i) = 0$ , autrement dit  $\sum_i (f^r x_i \otimes y_i) = 0$ . On en déduit en vertu de (0, 1.3.4) que l'on a  $\sum_i (f^r x_i/f^{m_i+r}) \otimes (y_i/f^{n_i}) = 0$ , c'est-à-dire  $\gamma_f(\sum_i (x_i \otimes y_i)) = 0$ . Par suite  $\gamma_f$  se factorise en  $M \otimes_S N \rightarrow (M \otimes_S N)_f \xrightarrow{\gamma'_f} M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)}$ ; si  $\lambda'_f$  est la restriction de  $\gamma'$

à  $(M \otimes_S N)_{(f)}$ , on vérifie aussitôt que  $\lambda_f$  et  $\lambda'_f$  sont des  $S_{(f)}$ -homomorphismes réciproques, d'où la première partie de la proposition.

Pour démontrer la seconde partie, supposons que  $M$  soit le conoyau d'un homomorphisme  $P \rightarrow Q$  de  $S$ -modules gradués,  $P$  et  $Q$  étant sommes directes d'un nombre fini de modules de la forme  $S(n)$ ; utilisant l'exactitude à gauche de  $\text{Hom}_S(L, N)$  en  $L$  et l'exactitude de  $M_{(f)}$  en  $M$ , on est aussitôt ramené à prouver que  $\mu_f$  est un isomorphisme lorsque  $M = S(n)$ . Or, pour tout  $z$  homogène dans  $N$ , soit  $u_z$  l'homomorphisme de  $S(n)$  dans  $N$  tel que  $u_z(1) = z$ ; on voit aussitôt que  $\eta : z \rightarrow u_z$  est un isomorphisme de degré 0 de  $N(-n)$  sur  $\text{Hom}_S(S(n), N)$ . Il lui correspond un isomorphisme

$$\eta_f : (N(-n))_{(f)} \rightarrow (\text{Hom}_S(S(n), N))_{(f)}.$$

D'autre part, soit  $\eta'_f$  l'isomorphisme  $N_{(f)} \rightarrow \text{Hom}_{S_{(f)}}(S(n)_{(f)}, N_{(f)})$  qui, à tout  $z' \in N_{(f)}$  fait correspondre l'homomorphisme  $v_{z'}$  tel que  $v_{z'}(s/f^k) = sz'/f^{n+k}$  (pour  $s \in S_{n+k} = (S(n))_k$ ). On constate aisément que l'application composée

$$(N(-n))_{(f)} \xrightarrow{\eta_f} (\text{Hom}_S(S(n), N))_{(f)} \xrightarrow{\mu_f} \text{Hom}_{S_{(f)}}(S(n)_{(f)}, N_{(f)}) \xrightarrow{\eta'_f} N_{(f)}$$

est l'isomorphisme  $z/f^h \rightarrow z/f^{h-n}$  de  $(N(-n))_{(f)}$  sur  $N_{(f)}$ , donc  $\mu_f$  est un isomorphisme.

Si l'idéal  $S_+$  est engendré par  $S_1$ , on déduit de (2.5.13) que pour tout idéal gradué  $\mathfrak{J}$  de  $S$  et tout  $S$ -module gradué  $M$ , on a

$$(2.5.13.1) \quad \widetilde{\mathfrak{J}} \cdot \widetilde{M} = (\mathfrak{J} \cdot M)^\sim$$

à un isomorphisme canonique près; cela résulte en effet de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathfrak{J}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{M} & \xrightarrow{\lambda} & (\mathfrak{J} \otimes_S M)^\sim \\ & \searrow & \swarrow \\ & \widetilde{M} & \end{array}$$

que l'on vérifie comme celle de (2.5.11.3).

*Corollaire (2.5.14). — Supposons  $S$  engendrée par  $S_1$ . Quels que soient  $m, n$  dans  $\mathbf{Z}$ , on a alors :*

$$(2.5.14.1) \quad \mathcal{O}_X(m) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) = \mathcal{O}_X(m+n)$$

$$(2.5.14.2) \quad \mathcal{O}_X(n) = (\mathcal{O}_X(1))^{\otimes n}$$

à des isomorphismes canoniques près.

La première formule résulte de (2.5.13) et de l'existence de l'isomorphisme canonique de degré 0,  $S(m) \otimes_S S(n) \xrightarrow{\sim} S(m+n)$ , qui, à l'élément  $1 \otimes 1$  (où le premier facteur 1 est dans  $(S(m))_{-m}$  et le second dans  $(S(n))_{-n}$ ) fait correspondre l'élément  $1 \in (S(m+n))_{-(m+n)}$ . Il suffit ensuite de démontrer la seconde formule pour  $n = -1$ , et en vertu de (2.5.13), cela revient à voir que  $\text{Hom}_S(S(1), S)$  est canoniquement isomorphe à  $S(-1)$ , vérification immédiate en remontant aux définitions (2.1.2) et en se souvenant que  $S(1)$  est un  $S$ -module monogène.

*Corollaire (2.5.15).* — Supposons  $S$  engendrée par  $S_1$ . Pour tout  $S$ -module gradué  $M$  et tout  $n \in \mathbf{Z}$ , on a

$$(2.5.15.1) \quad (M(n)) \sim = \widetilde{M}(n)$$

à un isomorphisme canonique près.

Cela résulte des définitions (2.5.10.2) et (2.5.10.1), de la prop. (2.5.13) et de l'existence d'un isomorphisme canonique  $M(n) \xrightarrow{\sim} M \otimes_S S(n)$  de degré 0 qui, à tout  $z \in (M(n))_h = M_{n+h}$ , fait correspondre  $z \otimes 1 \in M_{n+h} \otimes (S(n))_{-n} \subset (M \otimes_S S(n))_h$ .

(2.5.16) Désignons par  $S'$  l'anneau gradué tel que  $S'_0 = \mathbf{Z}$ ,  $S'_n = S_n$  pour  $n > 0$ . Alors, si  $f \in S_d$  ( $d > 0$ ), on a  $(S(n))_{(f)} = (S'(n))_{(f)}$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , car un élément de  $(S'(n))_{(f)}$  est de la forme  $x/f^k$  avec  $x \in S'_{n+kd}$  ( $k > 0$ ), et on peut toujours prendre  $k$  tel que  $n + kd \neq 0$ . Comme  $X = \text{Proj}(S)$  et  $X' = \text{Proj}(S')$  s'identifient canoniquement (2.4.7, (ii)), on voit que pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $\mathcal{O}_X(n)$  et  $\mathcal{O}_{X'}(n)$  sont images l'un de l'autre par l'identification précédente.

Notons d'autre part que pour tout  $d > 0$  et tout  $n \in \mathbf{Z}$ , on a

$$(S^{(d)}(n))_h = S_{(n+h)d} = (S(nd))_{hd}$$

pour  $f \in S_d$ , on a donc  $(S^{(d)}(n))_{(f)} = (S(nd))_{(f)}$ . On sait que les schémas  $X = \text{Proj}(S)$  et  $X^{(d)} = \text{Proj}(S^{(d)})$  s'identifient canoniquement (2.4.7, (i)); ce qui précède montre que si la  $S_0$ -algèbre  $S^{(d)}$  est engendrée par  $S_d$ ,  $\mathcal{O}_X(nd)$  et  $\mathcal{O}_{X^{(d)}}(n)$  sont images l'un de l'autre par cette identification, pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ .

*Proposition (2.5.17).* — Soit  $d$  un entier  $> 0$ , et soit  $U = \bigcup_{f \in S_d} D_+(f)$ . La restriction à  $U$  de l'homomorphisme canonique  $\mathcal{O}_X(nd) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-nd) \rightarrow \mathcal{O}_X$  est un isomorphisme pour tout entier  $n$ .

En vertu de (2.5.16), on peut se borner au cas où  $d = 1$ , et la conclusion résulte alors de la démonstration de (2.5.13).

## 2.6. $S$ -module gradué associé à un faisceau sur $\text{Proj}(S)$ .

On suppose dans tout ce numéro que l'idéal  $S_+$  de  $S$  est engendré par l'ensemble  $S_1$  des éléments homogènes de degré 1.

(2.6.1) Le  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\mathcal{O}_X(1)$  est alors *invertible* (2.5.9); on pose alors, pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\mathcal{F}$  (0, 5.4.6)

$$(2.6.1.1) \quad \Gamma_*(\mathcal{F}) = \Gamma_*(\mathcal{O}_X(1), \mathcal{F}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$$

compte tenu de (2.5.14.2). Rappelons (0, 5.4.6) que  $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$  est muni d'une structure d'*anneau gradué*, et  $\Gamma_*(\mathcal{F})$  d'une structure de *module gradué* sur  $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ .

Puisque  $\mathcal{O}_X(n)$  est localement libre,  $\Gamma_*(\mathcal{F})$  est un foncteur covariant additif *exact à gauche* en  $\mathcal{F}$ ; en particulier, si  $\mathcal{J}$  est un faisceau d'idéaux de  $\mathcal{O}_X$ ,  $\Gamma_*(\mathcal{J})$  s'identifie canoniquement à un *idéal gradué* de  $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ .

(2.6.2) Soit  $M$  un  $S$ -module gradué; pour tout  $f \in S_d$  ( $d > 0$ ),  $x \mapsto x/f$  est un homomorphisme de groupes abéliens  $M_0 \rightarrow M_{(f)}$ , et comme  $M_{(f)}$  s'identifie canoniquement à  $(M(f))_h$  (2.5.15.1), on a un homomorphisme de groupes abéliens  $M_0 \rightarrow (M(f))_h$ .

quement à  $\Gamma(D_+(f), \widetilde{M})$ , on obtient ainsi un homomorphisme de groupes abéliens  $\alpha'_0 : M_0 \rightarrow \Gamma(D_+(f), \widetilde{M})$ . Il est clair que, pour tout  $g \in S_e$  ( $e > 0$ ), le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \alpha'_0 \nearrow & \Gamma(D_+(f), \widetilde{M}) \\ M_0 & \downarrow & \\ & \alpha'_0 g \searrow & \Gamma(D_+(fg), \widetilde{M}) \end{array}$$

est commutatif; cela signifie que pour tout  $x \in M_0$ , les sections  $\alpha'_0(x)$  et  $\alpha'_0(gx)$  de  $M$  coïncident dans  $D_+(f) \cap D_+(g)$ , et par suite il existe une section unique  $\alpha_0(x) \in \Gamma(X, \widetilde{M})$  dont la restriction à chaque  $D_+(f)$  est  $\alpha'_0(x)$ . On a ainsi défini (sans utiliser l'hypothèse que  $S$  est engendrée par  $S_1$ ) un homomorphisme de groupes abéliens

$$(2.6.2.1) \quad \alpha_0 : M_0 \rightarrow \Gamma(X, \widetilde{M}).$$

Appliquant ce résultat au  $S$ -module gradué  $M(n)$  (pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ ), on obtient pour chaque  $n \in \mathbf{Z}$  un homomorphisme de groupes abéliens

$$(2.6.2.2) \quad \alpha_n : M_n = (M(n))_0 \rightarrow \Gamma(X, \widetilde{M}(n))$$

(compte tenu de (2.5.15)); d'où un homomorphisme fonctoriel (de degré 0) de groupes abéliens gradués

$$(2.6.2.3) \quad \alpha : M \rightarrow \Gamma_*(\widetilde{M})$$

(aussi noté  $\alpha_M$ ) qui, dans chaque  $M_n$ , coïncide avec  $\alpha_n$ .

Si on prend en particulier  $M = S$ , on vérifie aussitôt (compte tenu de la définition de la multiplication dans  $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$  (0, 5.4.6)) que  $\alpha : S \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$  est un homomorphisme d'anneaux gradués, et que pour tout  $S$ -module gradué  $M$ , (2.6.2.3) est un di-homomorphisme de modules gradués.

*Proposition (2.6.3).* — Pour tout  $f \in S_d$  ( $d > 0$ ),  $D_+(f)$  est identique à l'ensemble des  $p \in X$  où la section  $\alpha_d(f)$  de  $\mathcal{O}_X(d)$  ne s'annule pas (0, 5.5.2).

Comme  $X = \bigcup_{g \in S_1} D_+(g)$  par hypothèse, il suffit de vérifier que pour tout  $g \in S_1$ , l'ensemble des  $p \in D_+(g)$  où  $\alpha_d(f)$  ne s'annule pas est identique à  $D_+(fg)$ . Or, la restriction de  $\alpha_d(f)$  à  $D_+(g)$  est par définition la section correspondant à l'élément  $f/1$  de  $(S(d))_{(g)}$ ; par l'isomorphisme canonique  $(S(d))_{(g)} \xrightarrow{\sim} S_{(g)}$  (2.5.7), cette section de  $\mathcal{O}_X(d)$  au-dessus de  $D_+(g)$  s'identifie à la section de  $\mathcal{O}_X$  au-dessus de  $D_+(g)$  qui correspond à l'élément  $f/g^d$  de  $S_{(g)}$ ; dire que cette section s'annule en  $p \in D_+(g)$  signifie que  $f/g^d \in q$ , où  $q$  est l'idéal premier de  $S_{(g)}$  correspondant à  $p$  (2.3.6); par définition cela veut dire que  $f \in p$ , d'où la proposition.

*(2.6.4)* Soit maintenant  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$  module, et posons  $M = \Gamma_*(\mathcal{F})$ ; en vertu de l'existence de l'homomorphisme d'anneaux gradués  $\alpha : S \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ ,  $M$  peut être considéré comme un  $S$ -module gradué. Pour tout  $f \in S_d$  ( $d > 0$ ), il résulte de (2.6.3) que la restriction à  $D_+(f)$  de la section  $\alpha_d(f)$  de  $\mathcal{O}_X(d)$  est inversible; il en est donc de même de la restriction à  $D_+(f)$  de la section  $\alpha_d(f^n)$  de  $\mathcal{O}_X(nd)$ , pour tout  $n > 0$ . Soit alors  $z \in M_{nd} = \Gamma(X, \mathcal{F}(nd))$  ( $n > 0$ ); s'il existe un entier  $k \geq 0$  tel que la restriction à  $D_+(f)$  de  $f^k z$ , c'est-à-dire la

section  $(z|D_+(f))(\alpha_d(f^k)|D_+(f))$  de  $\mathcal{F}((n+k)d)$ , soit nulle, alors en raison de la remarque précédente, on a aussi  $z|D_+(f)=0$ . Cela montre que l'on définit un  $S_{(f)}$ -homomorphisme  $\beta_f : M_{(f)} \rightarrow \Gamma(D_+(f), \mathcal{F})$  en faisant correspondre à l'élément  $z/f^n$  la section  $(z|D_+(f))(\alpha_d(f^n)|D_+(f))^{-1}$  de  $\mathcal{F}$  au-dessus de  $D_+(f)$ . On vérifie en outre aussitôt que le diagramme

$$(2.6.4.1) \quad \begin{array}{ccc} M_{(f)} & \xrightarrow{\beta_f} & \Gamma(D_+(f), \mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_{(fg)} & \xrightarrow{\beta_{fg}} & \Gamma(D_+(fg), \mathcal{F}) \end{array}$$

est commutatif pour  $g \in S_e$  ( $e > 0$ ). Si on se rappelle que  $M_{(f)}$  s'identifie canoniquement à  $\Gamma(D_+(f), \widetilde{M})$  et que les  $D_+(f)$  forment une base de la topologie de  $X$  (2.3.4), on voit que les  $\beta_f$  proviennent d'un unique homomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_X$ -Modules

$$(2.6.4.2) \quad \beta : (\Gamma_*(\mathcal{F}))^\sim \rightarrow \mathcal{F}$$

(aussi noté  $\beta_{\mathcal{F}}$ ) qui est évidemment fonctoriel.

*Proposition (2.6.5).* — Soient  $M$  un  $S$ -module gradué,  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module; alors les homomorphismes composés

$$(2.6.5.1) \quad \widetilde{M} \xrightarrow{\alpha} (\Gamma_*(\widetilde{M}))^\sim \xrightarrow{\beta} \widetilde{M}$$

$$(2.6.5.2) \quad \Gamma_*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha} \Gamma_*((\Gamma_*(\mathcal{F}))^\sim) \xrightarrow{\Gamma_*(\beta)} \Gamma_*(\mathcal{F})$$

sont les isomorphismes identiques.

La vérification de (2.6.5.1) est locale : dans un ouvert  $D_+(f)$ , elle résulte aussitôt des définitions et de ce que  $\beta$ , appliqué à des faisceaux quasi-cohérents, est déterminé par son action sur les sections au-dessus de  $D_+(f)$  (I, 1.3.8). La vérification de (2.6.5.2) se fait pour chaque degré séparément : si on pose  $M = \Gamma_*(\mathcal{F})$ , on a  $M_n = \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$  et  $(\Gamma_*(\widetilde{M}))_n = \Gamma(X, \widetilde{M}(n)) = \Gamma(X, (M(n))^\sim)$ . Or, si  $f \in S_1$  et  $z \in M_n$ ,  $\alpha'_f(z)$  est l'élément  $z/1$  de  $(M(n))_{(f)}$ , égal à  $(f/1)^n(z/f^n)$ ; il lui correspond par  $\beta_f$  la section

$$((\alpha_1(f))^n | D_+(f))((z | D_+(f))((\alpha_1(f))^n | D_+(f))^{-1})$$

au-dessus de  $D_+(f)$ , c'est-à-dire la restriction de  $z$  à  $D_+(f)$ , ce qui vérifie (2.6.5.2).

## 2.7. Conditions de finitude.

*Proposition (2.7.1).* — (i) Si  $S$  est un anneau gradué noethérien,  $X = \text{Proj}(S)$  est un schéma noethérien.

(ii) Si  $S$  est une  $A$ -algèbre graduée de type fini,  $X = \text{Proj}(S)$  est un schéma de type fini au-dessus de  $Y = \text{Spec}(A)$ .

(i) Si  $S$  est noethérien, l'idéal  $S_+$  admet un système fini de générateurs homogènes  $f_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ), donc (2.3.14) l'espace sous-jacent  $X$  est réunion des  $D_+(f_i) = \text{Spec}(S_{(f_i)})$ , et tout revient à voir que chacun des  $S_{(f_i)}$  est noethérien, ce qui résulte de (2.2.6).

(ii) L'hypothèse entraîne que  $S_0$  est une  $A$ -algèbre de type fini et  $S$  une  $S_0$ -algèbre de type fini, donc  $S_+$  est un idéal de type fini (2.1.4). On est alors ramené, comme dans (i), à prouver que pour  $f \in S_d$ ,  $S_{(f)}$  est une  $A$ -algèbre de type fini. En vertu de (2.2.5), il suffit de montrer que  $S^{(d)}$  est une  $A$ -algèbre de type fini, ce qui résulte de (2.1.6).

**(2.7.2)** Nous considérerons dans ce qui suit les conditions de finitude suivantes pour un  $S$ -module gradué  $M$  :

(TF) *Il existe un entier  $n$  tel que le sous-module  $\bigoplus_{k \geq n} M_k$  soit un  $S$ -module de type fini.*

(TN) *Il existe un entier  $n$  tel que  $M_k = 0$  pour  $k \geq n$ .*

Si  $M$  vérifie (TN), on a  $M_{(f)} = 0$  pour tout  $f$  homogène dans  $S_+$ , donc  $\tilde{M} = 0$ .

Soient  $M, N$  deux  $S$ -modules gradués; on dit qu'un homomorphisme  $u : M \rightarrow N$  de degré 0 est (TN)-*injectif* (resp. (TN)-*surjectif*, (TN)-*bijectif*) s'il existe un entier  $n$  tel que  $u_k : M_k \rightarrow N_k$  soit injectif (resp. surjectif, bijectif) pour  $k \geq n$ . Dire que  $u$  est (TN)-*injectif* (resp. (TN)-*surjectif*) revient donc à dire que  $\text{Ker } u$  (resp.  $\text{Coker } u$ ) vérifie (TN). En vertu de (2.5.4), si  $u$  est (TN)-*injectif* (resp. (TN)-*surjectif*, (TN)-*bijectif*),  $\tilde{u}$  est injectif (resp. surjectif, bijectif); lorsque  $u$  est (TN)-*bijectif*, on dit encore que  $u$  est un (TN)-*isomorphisme*.

*Proposition (2.7.3).* — Soient  $S$  un anneau gradué tel que l'idéal  $S_+$  soit de type fini,  $M$  un  $S$ -module gradué.

(i) Si  $M$  vérifie la condition (TF), le  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\tilde{M}$  est de type fini.

(ii) Supposons que  $M$  vérifie (TF); pour que  $\tilde{M} = 0$ , il faut et il suffit que  $M$  vérifie (TN).

On vient de voir que la condition (TN) implique  $\tilde{M} = 0$ . Si  $M$  vérifie (TF), le sous-module gradué  $M' = \bigoplus_{k \geq n} M_k$  qui est par hypothèse de type fini, est tel que  $M/M'$  satisfasse à (TN); on a par suite  $(M/M')^\sim = 0$ , et l'exactitude du foncteur  $\tilde{M}$  (2.5.4) entraîne  $\tilde{M} = \tilde{M}'$ ; pour prouver que  $\tilde{M}$  est de type fini, on est donc ramené au cas où  $M$  est de type fini. La question étant locale, il suffit de prouver que  $M_{(f)}$  est un  $S_{(f)}$ -module de type fini (I, 1.3.9); mais  $M^{(d)}$  est un  $S^{(d)}$ -module de type fini (2.1.6, (iii)) et notre assertion résulte alors de (2.2.5).

Supposons maintenant que  $M$  vérifie (TF) et que  $\tilde{M} = 0$ ; alors, avec les mêmes notations que ci-dessus, on a  $\tilde{M}' = 0$ , et la condition (TN) pour  $M'$  est équivalente à la condition (TN) pour  $M$ , donc pour prouver que  $\tilde{M} = 0$  implique que  $M$  vérifie (TN), on peut encore se borner au cas où  $M$  est engendré par un nombre fini d'éléments homogènes  $x_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ); soit d'autre part  $(f_j)_{1 \leq j \leq q}$  un système de générateurs homogènes de l'idéal  $S_+$ . On a par hypothèse  $M_{(f_j)} = 0$  pour tout  $j$ , donc il existe un entier  $n$  tel que  $f_j^n x_i = 0$  quels que soient  $i$  et  $j$ . Soit  $n_j$  le degré de  $f_j$ , et soit  $m$  la plus grande valeur de  $\sum_i r_i n_j$  pour les systèmes d'entiers  $(r_j)$  en nombre fini tels que  $\sum_i r_i \leq nq$ ; il est clair alors

que si  $k > m$ , on a  $S_k x_i = 0$  pour tout  $i$ ; si  $h$  est le plus grand des degrés des  $x_i$ , on en conclut que  $M_h = 0$  pour  $k > h + m$ , ce qui termine la démonstration.

*Corollaire (2.7.4).* — Soit  $S$  un anneau gradué tel que l'idéal  $S_+$  soit de type fini; pour que  $X = \text{Proj}(S) = \emptyset$ , il faut et il suffit qu'il existe  $n$  tel que  $S_k = 0$  pour  $k \geq n$ .

La condition  $X = \emptyset$  est en effet équivalente à  $\mathcal{O}_X = \widetilde{S} = 0$ , et  $S$  est un  $S$ -module monogène.

*Théorème (2.7.5).* — On suppose que l'idéal  $S_+$  est engendré par un nombre fini d'éléments homogènes de degré 1; soit  $X = \text{Proj}(S)$ . Alors, pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ , l'homomorphisme canonique  $\beta : (\Gamma_*(\mathcal{F}))^\sim \rightarrow \mathcal{F}$  (2.6.4) est un isomorphisme.

En effet, si  $S_+$  est engendré par un nombre fini d'éléments  $f_i \in S_1$ ,  $X$  est réunion des sous-espaces  $\text{Spec}(S_{(f_i)})$  (2.3.6) qui sont quasi-compacts, donc est quasi-compact; en outre  $X$  est un schéma (2.4.2); d'après (I, 9.3.2), (2.5.14.2) et (2.6.3) on a, pour tout  $f \in S_d$  ( $d > 0$ ) un isomorphisme canonique  $(\Gamma_*(\mathcal{F}))_{(x_d(f))} \xrightarrow{\sim} \Gamma(D_+(f), \mathcal{F})$ ; d'ailleurs, par définition,  $(\Gamma_*(\mathcal{F}))_{(x_d(f))}$  (où  $\Gamma_*(\mathcal{F})$  est considéré comme  $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ -module) n'est autre que  $(\Gamma_*(\mathcal{F}))_{(f)}$  (où  $\Gamma_*(\mathcal{F})$  est considéré comme  $S$ -module); si on se reporte à la définition (I, 9.3.1) de l'isomorphisme canonique précédent, on voit qu'il coïncide avec l'homomorphisme  $\beta_f$ , d'où le théorème.

*Remarque (2.7.6).* — Si on suppose l'anneau gradué  $S$  noethérien, la condition de (2.7.5) est vérifiée *ipso facto* dès que l'on suppose l'idéal  $S_+$  engendré par l'ensemble  $S_1$  des éléments homogènes de degré 1.

*Corollaire (2.7.7).* — Sous les hypothèses de (2.7.5), tout  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$  est isomorphe à un  $\mathcal{O}_X$ -Module de la forme  $\widetilde{M}$ , où  $M$  est un  $S$ -module gradué.

*Corollaire (2.7.8).* — Sous les hypothèses de (2.7.5), tout  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent de type fini  $\mathcal{F}$  est isomorphe à un  $\mathcal{O}_X$ -Module de la forme  $\widetilde{N}$ , où  $N$  est un  $S$ -module gradué de type fini.

On peut supposer  $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ , où  $M$  est un  $S$ -module gradué (2.7.7). Soit  $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$  un système de générateurs homogènes de  $M$ ; pour toute partie finie  $H$  de  $L$ , soit  $M_H$  le sous-module gradué de  $M$  engendré par les  $f_\lambda$  tels que  $\lambda \in H$ ; il est clair que  $M$  est limite inductive de ses sous-modules  $M_H$ , donc  $\mathcal{F}$  est limite inductive de ses sous- $\mathcal{O}_X$ -Modules  $\widetilde{M}_H$  (2.5.4). Mais comme  $\mathcal{F}$  est de type fini et l'espace sous-jacent  $X$  quasi-compact, il résulte de (0, 5.2.3) que  $\mathcal{F} = \widetilde{M}_H$  pour une partie finie  $H$  de  $L$ .

*Corollaire (2.7.9).* — Sous les hypothèses de (2.7.5), soit  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent de type fini. Il existe alors un entier  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\mathcal{F}(n)$  soit isomorphe à un quotient d'un  $\mathcal{O}_X$ -Module de la forme  $\mathcal{O}_X^k$  ( $k > 0$  dépendant de  $n$ ), et par suite est engendré par un nombre fini de ses sections au-dessus de  $X$  (0, 5.1.1).

En vertu de (2.7.8), on peut supposer que  $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ , où  $M$  est quotient d'une somme directe finie de  $S$ -modules de la forme  $S(m_i)$ ; en vertu de (2.5.4) on peut donc se borner au cas où  $M = S(m)$ , donc  $\mathcal{F}(n) = (S(m+n))^\sim = \mathcal{O}_X(m+n)$  (2.5.15). Il suffira donc de démontrer le

**Lemme (2.7.9.1).** — *Sous les hypothèses de (2.7.5), pour tout  $n \geq 0$ , il existe un entier  $k$  (dépendant de  $n$ ) et un homomorphisme surjectif  $\mathcal{O}_X^k \rightarrow \mathcal{O}_X(n)$ .*

Il suffit en effet (2.7.2) de montrer que, pour un  $k$  convenable, il y a un homomorphisme (TN)-surjectif  $u$  de degré 0, du  $S$ -module gradué produit  $S^k$  dans  $S(n)$ . Or, on a  $(S(n))_0 = S_n$ , et par hypothèse  $S_h = S_1^h$  pour tout  $h > 0$ , donc  $SS_n = S_n + S_{n+1} + \dots$ . Comme  $S_n$  est un  $S_0$ -module de type fini (2.1.5 et 2.1.6, (i)), considérons un système de générateurs  $(a_i)_{1 \leq i \leq k}$  de ce module; l'homomorphisme  $u$  fera correspondre  $a_i$  au  $i$ -ème élément de la base canonique de  $S^k$  ( $1 \leq i \leq k$ ); comme  $\text{Coker } u$  s'identifie alors à  $(S(n))_{-n} + \dots + (S(n))_{-1}$ ,  $u$  répond bien à la question.

**Corollaire (2.7.10).** — *Sous les hypothèses de (2.7.5), soit  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent de type fini. Il existe un entier  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\mathcal{F}$  soit isomorphe à un quotient d'un  $\mathcal{O}_X$ -Module de la forme  $(\mathcal{O}_X(-n))^k$  ( $k$  dépendant de  $n$ ).*

**Proposition (2.7.11).** — *Supposons vérifiées les hypothèses de (2.7.5) et soit  $M$  un  $S$ -module gradué. Alors :*

(i) *L'homomorphisme canonique  $\tilde{\alpha} : \widetilde{M} \rightarrow (\Gamma_*(\widetilde{M}))^\sim$  est un isomorphisme.*

(ii) *Soit  $\mathcal{G}$  un sous- $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent de  $\widetilde{M}$ , et soit  $N$  le sous- $S$ -module gradué de  $M$ , image réciproque de  $\Gamma_*(\mathcal{G})$  par  $\alpha$ . Alors on a  $\widetilde{N} = \mathcal{G}$  ( $\widetilde{N}$  étant identifié, en vertu de (2.5.4), à un sous- $\mathcal{O}_X$ -Module de  $\widetilde{M}$ ).*

Comme  $\beta : (\Gamma_*(\widetilde{M}))^\sim \rightarrow \widetilde{M}$  est un isomorphisme en vertu de (2.7.5),  $\tilde{\alpha}$  est l'isomorphisme réciproque en vertu de (2.6.5.1), d'où (i). Soit  $P$  le sous-module gradué  $\alpha(M)$  de  $\Gamma_*(\widetilde{M})$ ; comme  $\widetilde{M}$  est un foncteur exact (2.5.4), l'image de  $\widetilde{M}$  par  $\tilde{\alpha}$  est égale à  $\widetilde{P}$ , donc, en vertu de (i),  $\widetilde{P} = (\Gamma_*(\widetilde{M}))^\sim$ . Posons  $Q = \Gamma_*(\mathcal{G}) \cap P$ ; en vertu de ce qui précède et de (2.5.4), on a  $\widetilde{Q} = (\Gamma_*(\mathcal{G}))^\sim$ , donc la restriction de  $\beta$  à  $\widetilde{Q}$  est un isomorphisme de ce  $\mathcal{O}_X$ -Module sur  $\mathcal{G}$  par (2.7.5). Mais par définition de  $N$  et (2.5.4), la restriction de l'isomorphisme  $\tilde{\alpha}$  à  $\widetilde{N}$  est un isomorphisme de  $\widetilde{N}$  sur  $\widetilde{Q}$ , d'où la conclusion par (2.6.5.1).

## 2.8. Comportements fonctoriels.

**(2.8.1)** Soient  $S, S'$  deux anneaux gradués à degrés positifs,  $\varphi : S' \rightarrow S$  un homomorphisme d'anneaux gradués. Nous désignerons par  $G(\varphi)$  la partie ouverte de  $X = \text{Proj}(S)$  complémentaire de  $V_+(\varphi(S'_+))$ , ou, ce qui revient au même, la réunion des  $D_+(\varphi(f'))$ , où  $f'$  parcourt l'ensemble des éléments homogènes de  $S'_+$ . La restriction à  $G(\varphi)$  de l'application continue  ${}^a\varphi$  de  $\text{Spec}(S)$  dans  $\text{Spec}(S')$  (I, 1.2.1) est donc une application continue de  $G(\varphi)$  dans  $\text{Proj}(S')$ , que nous noterons encore  ${}^a\varphi$  par abus de langage. Si  $f' \in S'_+$  est homogène, on a

$$(2.8.1.1) \quad {}^a\varphi^{-1}(D_+(f')) = D_+(\varphi(f'))$$

compte tenu du fait que  ${}^a\varphi$  applique  $G(\varphi)$  dans  $\text{Proj}(S')$  et de (I, 1.2.2.2). D'autre part, l'homomorphisme  $\varphi$  définit canoniquement (avec les mêmes notations) un homomorphisme d'anneaux gradués  $S'_+ \rightarrow S_+$ , d'où, par restriction aux éléments de degré 0,

un homomorphisme  $S'_{(f)} \rightarrow S_{(f)}$  que nous désignerons par  $\varphi_{(f)}$ ; il lui correspond (I, 1.6.1) un morphisme  $(^a\varphi_{(f)}, \widetilde{\varphi}_{(f)}) : \text{Spec}(S_{(f)}) \rightarrow \text{Spec}(S'_{(f)})$  de schémas affines. Si on identifie canoniquement  $\text{Spec}(S_{(f)})$  au schéma induit par  $\text{Proj}(S)$  sur  $D_+(f)$  (2.3.6), on a défini un morphisme  $\Phi_f : D_+(f) \rightarrow D_+(f')$  et  ${}^a\varphi_{(f)}$  s'identifie à la restriction de  ${}^a\varphi$  à  $D_+(f)$ . D'autre part, il est immédiat que si  $g'$  est un second élément homogène de  $S'_+$  et  $g = \varphi(g')$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} D_+(f) & \xrightarrow{\Phi_f} & D_+(f') \\ \uparrow & & \uparrow \\ D_+(fg) & \xrightarrow[\Phi_{fg}]{} & D_+(f'g') \end{array}$$

est commutatif, en raison de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} S'_{(f')} & \xrightarrow{\varphi_{(f')}} & S_{(f)} \\ \downarrow \omega_{f'g', f'} & & \downarrow \omega_{fg, f} \\ S'_{(f'g')} & \xrightarrow[\varphi_{(fg)}]{} & S_{(fg)} \end{array}$$

Compte tenu de la définition de  $G(\varphi)$  et de (2.3.3.2), on voit donc que :

*Proposition (2.8.2).* — *Étant donné un homomorphisme d'anneaux gradués  $\varphi : S' \rightarrow S$ , il existe un morphisme et un seul  $({}^a\varphi, \widetilde{\varphi})$  du préschéma induit  $G(\varphi)$  dans  $\text{Proj}(S')$  (dit associé à  $\varphi$  et noté  $\text{Proj}(\varphi)$ ), tel que pour tout élément homogène  $f' \in S'_+$ , la restriction de ce morphisme à  $D_+(\varphi(f'))$  coïncide avec le morphisme associé à l'homomorphisme  $S'_{(f')} \rightarrow S_{(\varphi(f'))}$  correspondant à  $\varphi$ .*

On notera qu'avec les notations précédentes, si  $f' \in S'_d$ , le diagramme

$$(2.8.2.1) \quad \begin{array}{ccc} S'_{(f')} & \xrightarrow{\varphi_{(f')}} & S_{(f)} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ S'^{(d)} / (f' - 1) S'^{(d)} & \rightarrow & S^{(d)} / (f - 1) S^{(d)} \end{array}$$

est commutatif (les flèches verticales étant les isomorphismes (2.2.5)).

*Corollaire (2.8.3).* — (i) *Le morphisme  $\text{Proj}(\varphi)$  est affine.*

(ii) *Si  $\text{Ker}(\varphi)$  est nilpotent (et en particulier si  $\varphi$  est injectif), le morphisme  $\text{Proj}(\varphi)$  est dominant.*

(i) est conséquence immédiate de (2.8.2) et de (2.8.1.1). D'autre part, si  $\text{Ker}(\varphi)$  est nilpotent, pour tout  $f'$  homogène dans  $S'_+$ , on vérifie aussitôt que  $\text{Ker}(\varphi_{(f')})$  (avec  $f = \varphi(f')$ ) est nilpotent, donc aussi  $\text{Ker}(\varphi_{(f)})$ ; la conclusion résulte donc de (2.8.2) et de (I, 1.2.7).

On notera qu'il y a en général des morphismes de  $\text{Proj}(S)$  dans  $\text{Proj}(S')$  qui ne sont pas affines, et ne proviennent donc pas d'homomorphismes d'anneaux gradués  $S' \rightarrow S$ ; un exemple est le morphisme structural  $\text{Proj}(S) \rightarrow \text{Spec}(A)$  quand  $A$  est un corps ( $\text{Spec}(A)$  étant identifié à  $\text{Proj}(A[T])$ ) (cf. 3.1.7)); cela résulte en effet de (I, 2.3.2).

(2.8.4) Soient  $S''$  un troisième anneau gradué à degrés positifs,  $\varphi' : S'' \rightarrow S'$  un homomorphisme d'anneaux gradués, et posons  $\varphi'' = \varphi \circ \varphi'$ . En raison de (2.8.1.1) et de la formule  ${}^a\varphi'' = {}^a(\varphi') \circ {}^a(\varphi)$  on vérifie aussitôt que l'on a  $G(\varphi'') \subset G(\varphi)$  et que, si  $\Phi, \Phi'$  et  $\Phi''$  sont les morphismes associés à  $\varphi, \varphi'$  et  $\varphi''$ , on a  $\Phi'' = \Phi' \circ (\Phi|G(\varphi''))$ .

(2.8.5) Supposons que  $S$  (resp.  $S'$ ) soit une  $A$ -algèbre graduée (resp. une  $A'$ -algèbre graduée), et soit  $\psi : A' \rightarrow A$  un homomorphisme d'anneaux tel que le diagramme

$$(2.8.5.1) \quad \begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\psi} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \xrightarrow[\varphi]{} & S \end{array}$$

soit commutatif. On peut alors considérer  $G(\varphi)$  et  $\text{Proj}(S')$  comme des schémas au-dessus de  $\text{Spec}(A)$  et  $\text{Spec}(A')$  respectivement; si  $\Phi$  et  $\Psi$  sont les morphismes associés respectivement à  $\varphi$  et  $\psi$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G(\varphi) & \xrightarrow{\Phi} & \text{Proj}(S') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(A) & \xrightarrow[\Psi]{} & \text{Spec}(A') \end{array}$$

est alors commutatif : il suffit en effet de le démontrer pour la restriction de  $\Phi$  à  $D_+(f)$ , où  $f = \varphi(f')$ ,  $f'$  homogène dans  $S'_+$ ; et alors cela résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\psi} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ S'_{(f')} & \xrightarrow[\varphi_{(f)}]{} & S_{(f)} \end{array}$$

(2.8.6) Soit maintenant  $M$  un  $S$ -module gradué, et considérons le  $S'$ -module  $M_{[\varphi]}$ , qui est évidemment gradué. Soit  $f'$  homogène dans  $S'_+$ , et soit  $f = \varphi(f')$ ; on sait (0, 1.5.2) qu'il y a un isomorphisme canonique  $(M_{[\varphi]})_{f'} \xrightarrow{\sim} (M_f)_{[\varphi(f)]}$ , et il est immédiat que cet isomorphisme conserve les degrés, donc il y a un isomorphisme canonique  $(M_{[\varphi]})_{(f')} \xrightarrow{\sim} (M_{(f)})_{[\varphi(f)]}$ . Il correspond canoniquement à cet isomorphisme un isomorphisme de faisceaux  $(M_{[\varphi]})^\sim|D_+(f') \xrightarrow{\sim} (\Phi_f)_*(\widetilde{M}|D_+(f))$  (2.5.2 et I, 1.6.3). En outre,

si  $g'$  est un second élément homogène de  $S'_+$  et  $g = \varphi(g')$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (M_{[\varphi]})(f') & \xrightarrow{\sim} & (M_{(f)})_{[\varphi(f)]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (M_{[\varphi]})(f'g') & \xrightarrow{\sim} & (M_{(fg)})_{[\varphi(fg)]} \end{array}$$

est commutatif, d'où on conclut aussitôt que l'isomorphisme

$$(M_{[\varphi]})^{\sim}|D_+(f'g') \xrightarrow{\sim} (\Phi_{fg})_*(\widetilde{M}|D_+(fg))$$

est la restriction à  $D_+(f'g')$  de l'isomorphisme  $(M_{[\varphi]})^{\sim}|D_+(f') \xrightarrow{\sim} (\Phi_f)_*(\widetilde{M}|D_+(f))$ . Comme  $\Phi_f$  est la restriction à  $D_+(f)$  du morphisme  $\Phi$ , on voit donc, compte tenu de (2.8.1.1), et en posant  $X' = \text{Proj}(S')$  :

*Proposition (2.8.7).* — *Il existe un isomorphisme canonique fonctoriel du  $\mathcal{O}_{X'}$ -Module  $(M_{[\varphi]})^{\sim}$  sur le  $\mathcal{O}_{X'}$ -Module  $\Phi_*(\widetilde{M}|G(\varphi))$ .*

On en déduit aussitôt une application canonique fonctorielle de l'ensemble des  $\varphi$ -morphismes  $M' \rightarrow M$  d'un  $S'$ -module gradué dans le  $S$ -module gradué  $M$ , dans l'ensemble des  $\Phi$ -morphismes  $\widetilde{M}' \rightarrow \widetilde{M}|G(\varphi)$ . Avec les notations de (2.8.4), si  $M''$  est un  $S''$ -module gradué, au composé d'un  $\varphi$ -morphisme  $M' \rightarrow M$  et d'un  $\varphi'$ -morphisme  $M'' \rightarrow M'$  correspond canoniquement le composé de  $\widetilde{M}'|G(\varphi') \rightarrow \widetilde{M}|G(\varphi'')$  et de  $\widetilde{M}'' \rightarrow \widetilde{M}'|G(\varphi')$ .

*Proposition (2.8.8).* — *Sous les hypothèses de (2.8.1), soit  $M'$  un  $S'$ -module gradué. Il existe un homomorphisme canonique fonctoriel  $v$  du  $(\mathcal{O}_X|G(\varphi))$ -Module  $\Phi^*(\widetilde{M}')$  dans le  $(\mathcal{O}_X|G(\varphi))$ -Module  $(M' \otimes_{S'} S)^{\sim}|G(\varphi)$ . Si l'idéal  $S'_+$  est engendré par  $S'_1$ ,  $v$  est un isomorphisme.*

En effet, pour  $f' \in S'_d$  ( $d > 0$ ), on définit un homomorphisme canonique fonctoriel de  $S_{(f)}$ -modules (où  $f = \varphi(f')$ )

$$(2.8.8.1) \quad v_f : M'_{(f')} \otimes_{S'_{(f')}} S_{(f)} \rightarrow (M' \otimes_{S'} S)_{(f)}$$

en composant l'homomorphisme  $M'_{(f')} \otimes_{S'_{(f')}} S_{(f)} \rightarrow M'_{(f')} \otimes_{S'_{(f')}} S_f$  et l'isomorphisme canonique  $M'_{(f')} \otimes_{S'_{(f')}} S_f \xrightarrow{\sim} (M' \otimes_{S'} S)_f$  (0, 1.5.4) et notant que ce dernier conserve les degrés. On vérifie aussitôt la compatibilité des  $v_f$  avec les opérateurs de restriction de  $D_+(f)$  à  $D_+(fg)$  (pour un second  $g' \in S'_+$  et  $g = \varphi(g')$ ), d'où la définition de l'homomorphisme

$$v : \Phi^*(\widetilde{M}') \rightarrow (M' \otimes_{S'} S)^{\sim}|G(\varphi)$$

compte tenu de (I, 1.6.5). Pour prouver la seconde assertion, il suffit de montrer que  $v_f$  est un isomorphisme pour tout  $f' \in S_1$ , puisque  $G(\varphi)$  est alors réunion des  $D_+(\varphi(f'))$ . On définit d'abord une application  $\mathbf{Z}$ -bilinéaire  $M'_m \times S_n \rightarrow M'_{(f')} \otimes_{S'_{(f')}} S_{(f)}$  en faisant correspondre à  $(x', s)$  l'élément  $(x'/f'^m) \otimes (s/f^n)$  (avec la convention que  $x'/f'^m$  est  $f'^{-m}x'/1$

lorsque  $m < 0$ ). On constate comme dans la démonstration de (2.5.13) que cette application donne naissance à un di-homomorphisme de modules

$$\eta_f : M' \otimes_{S'} S \rightarrow M'_{(f')} \otimes_{S_{(f')}} S_{(f)}.$$

En outre, si, pour  $r > 0$ , on a  $f' \sum_i (x'_i \otimes s_i) = 0$ , cela s'écrit aussi  $\sum_i (f'' x'_i \otimes s_i) = 0$ , d'où, par (0, 1.5.4),  $\sum_i (f'' x'_i / f'^{m_i + r}) \otimes (s_i / f^n i) = 0$ , c'est-à-dire  $\eta_f(\sum_i x'_i \otimes y_i) = 0$ , ce qui prouve que  $\eta_f$  se factorise en  $M' \otimes_{S'} S \rightarrow (M' \otimes_{S'} S)_f \xrightarrow{\eta'_f} M'_{(f')} \otimes_{S_{(f')}} S_{(f)}$ ; on vérifie enfin que  $\eta'_f$  et  $\nu_f$  sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

En particulier, il résulte de (2.1.2.1) que l'on a un homomorphisme canonique

$$(2.8.8.2) \quad \Phi^*(\mathcal{O}_{X'}(n)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(n) | G(\varphi)$$

pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ .

(2.8.9) Soient  $A, A'$  deux anneaux,  $\psi : A' \rightarrow A$  un homomorphisme d'anneaux, définissant un morphisme  $\Psi : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(A')$ . Soit  $S'$  une  $A'$ -algèbre graduée à degrés positifs, et posons  $S = S' \otimes_{A'} A$ , qui est de façon évidente une  $A$ -algèbre graduée par les  $S'_n \otimes_{A'} A$ ; l'application  $\varphi : S' \rightarrow S' \otimes_{A'} A$  est alors un homomorphisme d'anneaux gradués rendant commutatif le diagramme (2.8.5.1). Comme ici  $S_+$  est le  $A$ -module engendré par  $\varphi(S'_+)$ , on a  $G(\varphi) = \text{Proj}(S) = X$ ; d'où, en posant  $X' = \text{Proj}(S')$ , un diagramme commutatif

$$(2.8.9.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi} & X' \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ Y & \xrightarrow{\Psi} & Y' \end{array}$$

Soit maintenant  $M'$  un  $S'$ -module gradué, et posons  $M = M' \otimes_{A'} A = M' \otimes_{S'} S$ . Dans ces conditions :

*Proposition (2.8.10).* — *Le diagramme (2.8.9.1) identifie le schéma  $X$  au produit  $X' \times_Y Y'$ ; en outre, l'homomorphisme canonique  $\nu : \Phi^*(\widetilde{M}') \rightarrow \widetilde{M}$  (2.8.8) est un isomorphisme.*

La première assertion sera démontrée si l'on prouve que pour tout  $f'$  homogène dans  $S'_+$ , en posant  $f = \varphi(f')$ , les restrictions de  $\Phi$  et de  $\varphi$  à  $D_+(f)$  identifient ce schéma au produit  $D_+(f') \times_{Y'} Y$  (I, 3.2.6.2); autrement dit, il suffit (I, 3.2.2) de prouver que  $S_{(f)}$  s'identifie canoniquement à  $S'_{(f')} \otimes_{A'} A$ , ce qui est immédiat en vertu de l'existence de l'isomorphisme canonique  $S_f \xrightarrow{\sim} S'_{f'} \otimes_{A'} A$  conservant les degrés (0, 1.5.4). La seconde assertion résulte de ce que  $M'_{(f')} \otimes_{S_{(f')}} S_{(f)}$  s'identifie d'après ce qui précède à  $M'_{(f')} \otimes_{A'} A$ , et ce dernier à  $M_{(f)}$ , puisque  $M_f$  s'identifie canoniquement à  $M'_{f'} \otimes_{A'} A$  par un isomorphisme conservant les degrés.

*Corollaire (2.8.11).* — *Pour tout entier  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $\widetilde{M}(n)$  s'identifie à  $\Phi^*(\widetilde{M}'(n)) = \widetilde{M}'(n) \otimes_{Y'} \mathcal{O}_Y$ ; en particulier  $\mathcal{O}_X(n) = \Phi^*(\mathcal{O}_{X'}(n)) = \mathcal{O}_{X'}(n) \otimes_{Y'} \mathcal{O}_Y$ .*

Cela résulte de (2.8.10) et de (2.5.15).

(2.8.12) Sous les hypothèses de (2.8.9), pour  $f' \in S'_d$  ( $d > 0$ ) et  $f = \varphi(f')$ , le diagramme

$$(2.8.12.1)$$

$$\begin{array}{ccc} M'_{(f')} & \xrightarrow{\sim} & M'^{(d)} / (f' - 1)M'^{(d)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_{(f)} & \xrightarrow{\sim} & M^{(d)} / (f - 1)M^{(d)} \end{array}$$

(cf. (2.2.5)) est commutatif.

(2.8.13) Gardons les notations et hypothèses de (2.8.9), et soit  $\mathcal{F}'$  un  $\mathcal{O}_{X'}$ -Module; si on pose  $\mathcal{F} = \Phi^*(\mathcal{F}')$ , on a, pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $\mathcal{F}(n) = \Phi^*(\mathcal{F}'(n))$  en vertu de (2.8.11) et (0, 4.3.3). Par suite (0, 3.7.1), on a un homomorphisme canonique

$$\Gamma(\rho) : \Gamma(X', \mathcal{F}'(n)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$$

ce qui donne un di-homomorphisme canonique de modules gradués

$$\Gamma_*(\mathcal{F}') \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{F}).$$

Supposons l'idéal  $S_+$  engendré par  $S_1$ , et  $\mathcal{F}' = \tilde{M}'$ , donc  $\mathcal{F} = \tilde{M}$  avec  $M = M' \otimes_{A'} A$ . Si  $f'$  est homogène dans  $S'_+$  et  $f = \varphi(f')$ , on a vu que  $M_{(f)} = M'_{(f')} \otimes_{A'} A$ , et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M'_0 & \rightarrow & M'_{(f')} = \Gamma(D_+(f'), \tilde{M}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_0 & \rightarrow & M_{(f)} = \Gamma(D_+(f), \tilde{M}) \end{array}$$

est donc commutatif; on conclut aussitôt de cette remarque et de la définition de l'homomorphisme  $\alpha$  (2.6.2) que le diagramme

$$(2.8.13.1)$$

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{\alpha_{M'}} & \Gamma_*(\tilde{M}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\alpha_M} & \Gamma_*(\tilde{M}) \end{array}$$

est commutatif. De même, le diagramme

$$(2.8.13.2)$$

$$\begin{array}{ccc} (\Gamma_*(\mathcal{F}'))^\sim & \xrightarrow{\beta_{\mathcal{F}'}} & \mathcal{F}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\Gamma_*(\mathcal{F}))^\sim & \xrightarrow{\beta_{\mathcal{F}}} & \mathcal{F} \end{array}$$

est commutatif (la flèche verticale de droite étant le  $\Phi$ -morphisme canonique

$$\mathcal{F}' \rightarrow \Phi^*(\mathcal{F}') = \mathcal{F})$$

(2.8.14) Conservant toujours les hypothèses et notations de (2.8.9), soit  $N'$  un second  $S'$ -module gradué, et soit  $N = N' \otimes_{A'} A$ . Il est immédiat que les di-homomorphismes canoniques  $M' \rightarrow M, N' \rightarrow N$  donnent un di-homomorphisme  $M' \otimes_{S'} N' \rightarrow M \otimes_S N$  (relatif à l'homomorphisme canonique d'anneaux  $S' \rightarrow S$ ), et par suite aussi un  $S$ -homomorphisme de degré 0  $(M' \otimes_{S'} N') \otimes_{A'} A \rightarrow M \otimes_S N$ , auquel correspond (compte tenu de (2.8.10)) un homomorphisme de  $\mathcal{O}_X$ -Modules

$$(2.8.14.1) \quad \Phi^*((M' \otimes_{S'} N')^\sim) \rightarrow (M \otimes_S N)^\sim.$$

En outre, on vérifie aussitôt que le diagramme

$$(2.8.14.2) \quad \begin{array}{ccc} \Phi^*(\widetilde{M}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \widetilde{N}') & \xrightarrow{\sim} & \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N} = \Phi^*(\widetilde{M}') \otimes_{\mathcal{O}_X} \Phi^*(\widetilde{N}') \\ \Phi^*(\lambda) \downarrow & & \downarrow \lambda \\ \Phi^*((M' \otimes_{S'} N')^\sim) & \rightarrow & (M \otimes_S N)^\sim \end{array}$$

est commutatif, la première ligne étant l'isomorphisme canonique (0, 4.3.3). Si l'idéal  $S'_+$  est engendré par  $S'_1$ , il est clair que  $S_+$  est engendré par  $S_1$ , et les deux flèches verticales de (2.8.14.2) sont alors des isomorphismes (2.5.13); il en est donc de même de (2.8.14.1).

On a de même un di-homomorphisme canonique  $\text{Hom}_{S'}(M', N') \rightarrow \text{Hom}_S(M, N)$  en faisant correspondre à un homomorphisme  $u'$  de degré  $k$  l'homomorphisme  $u'^{\otimes 1}$ , qui est aussi de degré  $k$ ; on en déduit encore un  $S$ -homomorphisme de degré 0

$$(\text{Hom}_{S'}(M', N')) \otimes_{A'} A \rightarrow \text{Hom}_S(M, N)$$

d'où un homomorphisme de  $\mathcal{O}_X$ -Modules

$$(2.8.14.3) \quad \Phi^*((\text{Hom}_{S'}(M', N'))^\sim) \rightarrow (\text{Hom}_S(M, N))^\sim.$$

En outre, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Phi^*((\text{Hom}_{S'}(M', N'))^\sim) & \rightarrow & (\text{Hom}_S(M, N))^\sim \\ \Phi^*(\mu) \downarrow & & \downarrow \mu \\ \Phi^*(\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{O}_{X'}}(\widetilde{M}', \widetilde{N}')) & \longrightarrow & \mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \widetilde{N}) \end{array}$$

est commutatif (la seconde ligne horizontale étant l'homomorphisme canonique (0, 4.4.6)).

(2.8.15) Les notations et hypothèses étant celles de (2.8.1), il résulte de (2.4.7) que l'on ne change pas le morphisme  $\Phi$ , à des isomorphismes près, en remplaçant  $S_0$  et  $S'_0$  par  $\mathbf{Z}$  et  $\varphi_0$  par l'application identique, puis en remplaçant  $S$  et  $S'$  par  $S^{(d)}$  et  $S'^{(d)}$  respectivement ( $d > 0$ ) et  $\varphi$  par sa restriction  $\varphi^{(d)}$  à  $S^{(d)}$ .

## 2.9. Sous-schémas fermés d'un schéma $\text{Proj}(S)$ .

(2.9.1) Si  $\varphi : S \rightarrow S'$  est un homomorphisme d'anneaux gradués, on dit que  $\varphi$  est (TN)-surjectif (resp. (TN)-injectif, (TN)-bijectif) s'il existe un entier  $n$  tel que, pour  $k \geq n$ ,  $\varphi_k : S_k \rightarrow S'_k$  soit surjectif (resp. injectif, bijectif). Alors il résulte de (2.8.15) que l'étude de  $\Phi$  peut se ramener au cas où  $\varphi$  est surjectif (resp. injectif, bijectif). Au lieu de dire que  $\varphi$  est (TN)-bijectif, on dit aussi que c'est alors un (TN)-isomorphisme.

*Proposition (2.9.2).* — Soit  $S$  un anneau gradué à degrés positifs et soit  $X = \text{Proj}(S)$ .

(i) Si  $\varphi : S \rightarrow S'$  est un homomorphisme (TN)-surjectif d'anneaux gradués, le morphisme correspondant  $\Phi$  (2.8.1) est défini dans  $\text{Proj}(S')$  tout entier et est une immersion fermée de  $\text{Proj}(S')$  dans  $X$ . Si  $\mathfrak{J}$  est le noyau de  $\varphi$ , le sous-schéma fermé de  $X$  associé à  $\Phi$  est défini par le faisceau d'idéaux quasi-cohérent  $\widetilde{\mathfrak{J}}$  de  $\mathcal{O}_X$ .

(ii) Supposons en outre l'idéal  $S_+$  engendré par un nombre fini d'éléments homogènes de degré 1. Soit  $X'$  un sous-schéma fermé de  $X$ , défini par un faisceau quasi-cohérent d'idéaux  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{O}_X$ . Soit  $\mathfrak{J}$  l'idéal gradué de  $S$ , image réciproque de  $\Gamma_*(\mathcal{J})$  par l'homomorphisme canonique  $\alpha : S \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$  (2.6.2), et posons  $S' = S/\mathfrak{J}$ . Alors  $X'$  est le sous-schéma associé à l'immersion fermée  $\text{Proj}(S') \rightarrow X$  correspondant à l'homomorphisme canonique d'anneaux gradués  $S \rightarrow S'$ .

(i) On peut supposer  $\varphi$  surjectif (2.9.1). Comme par hypothèse  $\varphi(S_+)$  engendre  $S'_+$ , on a  $G(\varphi) = \text{Proj}(S')$ . D'autre part, la seconde assertion se vérifie localement sur  $X$ ; soit donc  $f$  un élément homogène de  $S_+$  et posons  $f' = \varphi(f)$ . Comme  $\varphi$  est un homomorphisme surjectif d'anneaux gradués, on vérifie aussitôt que  $\varphi_{(f')} : S_{(f')} \rightarrow S'_{(f')}$  est surjectif et que son noyau est  $\mathfrak{J}_{(f')}$ , ce qui achève de prouver (i) (I, 4.2.3).

(ii) En vertu de (i), on est ramené à vérifier que l'homomorphisme  $\widetilde{j} : \widetilde{\mathfrak{J}} \rightarrow \mathcal{O}_X$  déduit de l'injection canonique  $j : \mathfrak{J} \rightarrow S$  est un isomorphisme de  $\widetilde{\mathfrak{J}}$  sur  $\mathcal{J}$ , ce qui résulte de (2.7.11).

On notera que  $\mathfrak{J}$  est le plus grand des idéaux gradués  $\mathfrak{J}'$  de  $S$  tels que  $\widetilde{j}(\widetilde{\mathfrak{J}'}) = \mathcal{J}$ , car on vérifie immédiatement en remontant aux définitions (2.6.2) que cette relation implique  $\alpha(\mathfrak{J}') \subset \Gamma_*(\mathcal{J})$ .

*Corollaire (2.9.3).* — On suppose vérifiées les hypothèses de (2.9.2, (i)) et en outre que l'idéal  $S_+$  est engendré par  $S_1$ ; alors  $\Phi^*((S(n))^\sim)$  est canoniquement isomorphe à  $(S'(n))^\sim$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , et par suite  $\Phi^*(\mathcal{F}(n))$  à  $\Phi^*(\mathcal{F})(n)$  pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\mathcal{F}$ .

C'est un cas particulier de (2.8.8), compte tenu de (2.5.10.2).

*Corollaire (2.9.4).* — On suppose vérifiées les hypothèses de (2.9.2, (ii)). Pour que le sous-préschéma fermé  $X'$  de  $X$  soit intègre, il faut et il suffit que l'idéal gradué  $\mathfrak{J}$  soit premier dans  $S$ .

Comme  $X'$  est isomorphe à  $\text{Proj}(S/\mathcal{J})$ , la condition est suffisante en vertu de (2.4.4). Pour voir qu'elle est nécessaire, considérons la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ , qui donne une suite exacte

$$0 \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{J}) \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}).$$

Il suffit de prouver que si  $f \in S_m, g \in S_n$  sont tels que l'image dans  $\Gamma_*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})$  de  $\alpha_{n+m}(fg)$  est nulle, alors l'une des images de  $\alpha_m(f)$ ,  $\alpha_n(g)$  est nulle. Or, par définition, ces images sont des sections des  $(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})$ -Modules inversibles  $\mathcal{L} = (\mathcal{O}_X/\mathcal{J})(m)$  et  $\mathcal{L}' = (\mathcal{O}_X/\mathcal{J})(n)$  au-dessus du schéma intègre  $X'$ ; l'hypothèse entraîne que le produit de ces deux sections est nul dans  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$  ((2.9.3) et (2.5.14.1)), donc l'une d'elles est nulle en vertu de (I, 7.4.4).

*Corollaire (2.9.5).* — Soient  $A$  un anneau,  $M$  un  $A$ -module,  $S$  une  $A$ -algèbre graduée engendrée par l'ensemble  $S_1$  des éléments homogènes de degré 1,  $u : M \rightarrow S_1$  un homomorphisme surjectif de  $A$ -modules,  $\bar{u} : \mathbf{S}(M) \rightarrow S$  l'homomorphisme (de  $A$ -algèbres) de l'algèbre symétrique  $\mathbf{S}(M)$  de  $M$  dans  $S$  qui prolonge  $u$ . Le morphisme correspondant à  $\bar{u}$  est alors une immersion fermée de  $\text{Proj}(S)$  dans  $\text{Proj}(\mathbf{S}(M))$ .

En effet,  $\bar{u}$  est surjectif par hypothèse et il suffit d'appliquer (2.9.2).

### § 3. SPECTRE HOMOGÈNE D'UN FAISCEAU D'ALGÈBRES GRADUÉES

#### 3.1. Spectre homogène d'une $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente.

(3.1.1) Soient  $Y$  un préschéma,  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée,  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{S}$ -Module gradué. Si  $\mathcal{S}$  est quasi-cohérente, chacun de ses composants homogènes  $\mathcal{S}_n$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent, étant l'image de  $\mathcal{S}$  par un homomorphisme de  $\mathcal{S}$  dans lui-même (I, 1.3.8 et 1.3.9); de même, si  $\mathcal{M}$  est quasi-cohérent en tant que  $\mathcal{O}_Y$ -Module, ses composants homogènes  $\mathcal{M}_n$  le sont aussi, et réciproquement. Si  $d$  est un entier  $> 0$ , on désignera par  $\mathcal{S}^{(d)}$  la somme directe des  $\mathcal{O}_Y$ -Modules  $\mathcal{S}_{nd}$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ), qui est quasi-cohérente si  $\mathcal{S}$  l'est (I, 1.3.9); pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq d-1$ , on désignera par  $\mathcal{M}^{(d,k)}$  (ou  $\mathcal{M}^{(d)}$  pour  $k=0$ ) la somme directe des  $\mathcal{M}_{nd+k}$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) qui est un  $\mathcal{S}^{(d)}$ -Module gradué, quasi-cohérent lorsque  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{M}$  sont quasi-cohérents (I, 9.6.1). On notera  $\mathcal{M}(n)$  le  $\mathcal{S}$ -Module gradué tel que  $(\mathcal{M}(n))_k = \mathcal{M}_{n+k}$  pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ ; si  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{M}$  sont quasi-cohérents,  $\mathcal{M}(n)$  est un  $\mathcal{S}$ -Module gradué quasi-cohérent (I, 9.6.1).

Nous dirons que  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{S}$ -Module gradué de type fini (resp. qu'il admet une présentation finie) si pour tout  $y \in Y$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $y$  et des entiers  $n_i$  (resp. des entiers  $m_i$  et  $n_j$ ) tels qu'il y ait un homomorphisme surjectif de degré 0 :  $\bigoplus_{i=1}^r (\mathcal{S}(n_i)|U) \rightarrow \mathcal{M}|U$  (resp. que  $\mathcal{M}|U$  soit isomorphe au conoyau d'un homomorphisme de degré 0 :  $\bigoplus_{i=1}^r (\mathcal{S}(m_i)|U) \rightarrow \bigoplus_{j=1}^s (\mathcal{S}(n_j)|U)$ ).

Soient  $U$  un ouvert affine de  $Y$ ,  $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$  son anneau; par hypothèse, la  $(\mathcal{O}_Y|U)$ -Algèbre graduée  $\mathcal{S}|U$  est isomorphe à  $\widetilde{S}$ , où  $S = \Gamma(U, \mathcal{S})$  est une  $A$ -algèbre

graduée (**I**, 1.4.3); posons  $X_U = \text{Proj}(\Gamma(U, \mathcal{S}))$ . Soient  $U' \subset U$  un second ouvert affine de  $Y$ ,  $A'$  son anneau,  $j : U' \rightarrow U$  l'injection canonique, qui correspond à l'homomorphisme de restriction  $A \rightarrow A'$ ; on a  $\mathcal{S}|_{U'} = j^*(\mathcal{S}|_U)$ , et par suite  $S' = \Gamma(U', \mathcal{S})$  s'identifie canoniquement à  $S \otimes_A A'$  (**I**, 1.6.4). On en conclut (2.8.10) que  $X_{U'}$  s'identifie canoniquement à  $X_U \times_U U'$ , et par suite aussi à  $f_U^{-1}(U')$ , en désignant par  $f_U$  le morphisme structural  $X_U \rightarrow U$  (**I**, 4.4.1). Nous désignerons par  $\sigma_{U', U}$  l'isomorphisme canonique  $f_U^{-1}(U') \xrightarrow{\sim} X_{U'}$  ainsi défini, par  $\rho_{U', U}$  l'immersion ouverte  $X_{U'} \rightarrow X_U$  obtenue en composant  $\sigma_{U', U}^{-1}$  et l'injection canonique  $f_U^{-1}(U') \rightarrow X_{U'}$ . Il est immédiat que si  $U'' \subset U'$  est un troisième ouvert affine de  $Y$ , on a  $\rho_{U'', U} = \rho_{U', U} \circ \rho_{U', U''}$ .

*Proposition (3.1.2).* — *Soit  $Y$  un préschéma. Pour toute  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente  $\mathcal{S}$  à degrés positifs, il existe un préschéma  $X$  au-dessus de  $Y$ , et un seul à un  $Y$ -isomorphisme près, ayant la propriété suivante : si  $f$  est le morphisme structural  $X \rightarrow Y$ , pour tout ouvert affine  $U$  de  $Y$ , il existe un isomorphisme  $\eta_U$  du préschéma induit  $f^{-1}(U)$  sur  $X_U = \text{Proj}(\Gamma(U, \mathcal{S}))$  tel que, si  $V$  est un second ouvert affine de  $Y$  contenu dans  $U$ , le diagramme*

$$(3.1.2.1) \quad \begin{array}{ccc} f^{-1}(V) & \xrightarrow{\sim} & X_V \\ \downarrow & & \downarrow \rho_{V,U} \\ f^{-1}(U) & \xrightarrow[\eta_U]{} & X_U \end{array}$$

soit commutatif.

Pour deux ouverts affines  $U, V$  de  $Y$ , soit  $X_{U,V}$  le préschéma induit sur  $f_U^{-1}(U \cap V)$  par  $X_U$ ; nous allons définir un  $Y$ -isomorphisme  $\theta_{U,V} : X_{V,U} \xrightarrow{\sim} X_{U,V}$ . Pour cela, considérons un ouvert affine  $W \subset U \cap V$  : en composant les isomorphismes

$$f_U^{-1}(W) \xrightarrow{\sigma_{W,U}} X_W \xrightarrow{\sigma_{W,V}^{-1}} f_V^{-1}(W),$$

on obtient un isomorphisme  $\tau_W$ , et on vérifie aussitôt que si  $W' \subset W$  est un ouvert affine,  $\tau_W$  est la restriction à  $f_U^{-1}(W')$  de  $\tau_W$ ; les  $\tau_W$  sont donc bien les restrictions d'un  $Y$ -isomorphisme  $\theta_{V,U}$ . En outre, si  $U, V, W$  sont trois ouverts affines de  $Y$ ,  $\theta'_{U,V}, \theta'_{V,W}$  et  $\theta'_{U,W}$  les restrictions de  $\theta_{U,V}, \theta_{V,W}, \theta_{U,W}$  aux images réciproques de  $U \cap V \cap W$  dans  $X_V, X_W, X_U$  respectivement, il résulte des définitions précédentes que l'on a  $\theta'_{U,V} \circ \theta'_{V,W} = \theta'_{U,W}$ . L'existence de  $X$  vérifiant les propriétés énoncées résulte donc de (**I**, 2.3.1); son unicité à un  $Y$ -isomorphisme près est triviale, compte tenu de (3.1.2.1).

**(3.1.3)** Nous dirons que le préschéma  $X$  défini dans (3.1.2) est le *spectre homogène* de la  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente  $\mathcal{S}$  et nous le noterons  $\text{Proj}(\mathcal{S})$ . Il est immédiat que  $\text{Proj}(\mathcal{S})$  est séparé au-dessus de  $Y$  ((2.4.2) et (**I**, 5.5.5)); si  $\mathcal{S}$  est une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre de type fini (**I**, 9.6.2)  $\text{Proj}(\mathcal{S})$  est de type fini sur  $Y$  ((2.7.1, (ii)) et (**I**, 6.3.1)).

Si  $f$  est le morphisme structural  $X \rightarrow Y$ , il est immédiat que pour tout préschéma induit par  $Y$  sur un ouvert  $U$  de  $Y$ ,  $f^{-1}(U)$  s'identifie au spectre homogène  $\text{Proj}(\mathcal{S}|_U)$ .

*Proposition (3.1.4).* — *Soit  $f \in \Gamma(Y, \mathcal{S}_d)$  pour  $d > 0$ . Il existe une partie ouverte  $X_f$  de l'espace sous-jacent à  $X = \text{Proj}(\mathcal{S})$  ayant la propriété suivante : pour tout ouvert affine  $U$  de  $Y$ ,*

$X_f \cap \varphi^{-1}(U) = D_+(f|U)$  dans  $\varphi^{-1}(U)$  identifié à  $X_U = \text{Proj}(\Gamma(U, \mathcal{S}))$  ( $\varphi$  désignant le morphisme structural  $X \rightarrow Y$ ). En outre, le préschéma induit sur  $X_f$  est affine au-dessus de  $Y$  et est canoniquement isomorphe à  $\text{Spec}(\mathcal{S}^{(d)} / (f - 1)\mathcal{S}^{(d)})$  (1.3.1).

On a  $f|U \in \Gamma(U, \mathcal{S}_d) = (\Gamma(U, \mathcal{S}))_d$ . Si  $U, U'$  sont deux ouverts affines de  $Y$  tels que  $U' \subset U$ ,  $f|U'$  est l'image de  $f|U$  par l'homomorphisme de restriction

$$\Gamma(U, \mathcal{S}) \rightarrow \Gamma(U', \mathcal{S}),$$

donc  $D_+(f|U')$  est égal (avec les notations de (3.1.1)) au préschéma induit sur l'image réciproque  $\rho_{U,U'}^{-1}(D_+(f|U))$  dans  $X_{U'}$  (2.8.1); d'où la première assertion. En outre, le préschéma induit sur  $D_+(f|U)$  par  $X_U$  s'identifie canoniquement à  $\text{Spec}((\Gamma(U, \mathcal{S}))_{f|U})$ , ces identifications étant compatibles avec les homomorphismes de restriction (2.8.1); la seconde assertion résulte alors de (2.2.5) et de la commutativité du diagramme (2.8.2.1).

On dira encore que  $X_f$  (en tant qu'ouvert dans l'espace sous-jacent  $X$ ) est l'ensemble des  $x \in X$  où  $f$  ne s'annule pas.

*Corollaire (3.1.5). — Si  $f \in \Gamma(Y, \mathcal{S}_d)$ ,  $g \in \Gamma(Y, \mathcal{S}_e)$ , on a*

$$(3.1.5.1) \quad X_{fg} = X_f \cap X_g.$$

Il suffit en effet de considérer l'intersection des deux membres avec un ensemble  $\varphi^{-1}(U)$ , où  $U$  est un ouvert affine dans  $Y$ , et d'appliquer la formule (2.3.3.2).

*Corollaire (3.1.6). — Soit  $(f_\alpha)$  une famille de sections de  $\mathcal{S}$  au-dessus de  $Y$  telle que  $f_\alpha \in \Gamma(Y, \mathcal{S}_{d_\alpha})$ ; si le faisceau d'idéaux de  $\mathcal{S}$  engendré par cette famille (0, 5.1.1) contient tous les  $\mathcal{S}_n$  à partir d'un certain rang, l'espace sous-jacent  $X$  est réunion des  $X_{f_\alpha}$ .*

En effet, pour tout ouvert affine  $U$  de  $Y$ ,  $\varphi^{-1}(U)$  est réunion des  $X_{f_\alpha} \cap \varphi^{-1}(U)$  (2.3.14).

*Corollaire (3.1.7). — Soit  $\mathcal{A}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre quasi-cohérente; posons*

$$\mathcal{S} = \mathcal{A}[T] = \mathcal{A} \otimes \mathbf{Z}[T]$$

où  $T$  est une indéterminée ( $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{Z}[T]$  étant considérés comme faisceaux simples sur  $Y$ ). Alors  $X = \text{Proj}(\mathcal{S})$  s'identifie canoniquement à  $\text{Spec}(\mathcal{A})$ . En particulier,  $\text{Proj}(\mathcal{O}_Y[T])$  s'identifie à  $Y$ .

En appliquant (3.1.6) à l'unique section  $f \in \Gamma(Y, \mathcal{S})$  égale à  $T$  en chaque point de  $Y$ , on voit que  $X_f = X$ . En outre, on a ici  $d = 1$ , et  $\mathcal{S}^{(1)} / (f - 1)\mathcal{S}^{(1)} = \mathcal{S} / (f - 1)\mathcal{S}$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{A}$ , d'où le corollaire (1.2.2).

Soit  $g \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ ; si on prend  $\mathcal{S} = \mathcal{O}_Y[T]$ , on a donc  $g \in \Gamma(Y, \mathcal{S}_0)$ ; soit

$$h = gT \in \Gamma(Y, \mathcal{S}_1).$$

Si  $X = \text{Proj}(\mathcal{S})$ , l'identification canonique définie dans (3.1.7) identifie  $X_h$  à l'ensemble ouvert  $Y_g$  de  $Y$  (au sens de (0, 5.5.2)): en effet, on peut se borner au cas où  $Y = \text{Spec}(\mathcal{A})$  est affine, et tout se ramène alors (compte tenu de (2.2.5)) au fait que l'anneau de fractions  $A_g$  s'identifie canoniquement à  $A[T] / (gT - 1)A[T]$  (0, 1.2.3).

*Proposition (3.1.8). — Soit  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente à degrés positifs.*

(i) Pour tout  $d > 0$ , il existe un  $Y$ -isomorphisme canonique de  $\text{Proj}(\mathcal{S})$  sur  $\text{Proj}(\mathcal{S}^{(d)})$ .

(ii) Soit  $\mathcal{S}'$  la  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée somme directe de  $\mathcal{O}_Y$  et des  $\mathcal{S}_n$  ( $n \geq 0$ ); alors  $\text{Proj}(\mathcal{S}')$  et  $\text{Proj}(\mathcal{S})$  sont canoniquement  $Y$ -isomorphes.

(iii) Soit  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -Module inversible (0, 5.4.1) et soit  $\mathcal{S}_{(\mathcal{L})}$  la  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée somme directe des  $\mathcal{S}_d \otimes \mathcal{L}^{\otimes d}$  ( $d \geq 0$ ); alors  $\text{Proj}(\mathcal{S})$  et  $\text{Proj}(\mathcal{S}_{(\mathcal{L})})$  sont canoniquement  $Y$ -isomorphes.

Dans chacun des trois cas, il suffit de définir l'isomorphisme localement sur  $Y$ , la vérification des compatibilités avec les opérations de restriction d'un ouvert à un ouvert plus petit étant triviale. On peut donc supposer  $Y$  affine, et alors (i) résulte de (2.4.7), (i) et (ii) de (2.4.8). En ce qui concerne (iii), lorsqu'on suppose en outre  $\mathcal{L}$  isomorphe à  $\mathcal{O}_Y$  (ce qui est permis, la question étant locale sur  $Y$ ), l'isomorphie de  $\text{Proj}(\mathcal{S})$  et  $\text{Proj}(\mathcal{S}_{(\mathcal{L})})$  est évidente; pour définir un isomorphisme *canonique*, soient  $Y = \text{Spec}(A)$ ,  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ , où  $S$  est une  $A$ -algèbre graduée, et soit  $c$  un générateur du  $A$ -module libre  $L$  tel que  $\mathcal{L} = \widetilde{L}$ ; alors pour tout  $n > 0$ ,  $x_n \rightarrow x_n \otimes c^{\otimes n}$  est un  $A$ -isomorphisme de  $S_n$  sur  $S_n \otimes L^{\otimes n}$ , et ces  $A$ -isomorphismes définissent un  $A$ -isomorphisme d'algèbres graduées  $\varphi_c : S \rightarrow S_{(L)} = \bigoplus_{n \geq 0} S_n \otimes L^{\otimes n}$ . Soit alors  $f \in S_+$ , homogène de degré  $d$ ; pour tout  $x \in S_{nd}$ , on a  $(x \otimes c^{nd}) / (f \otimes c^d)^n = (x \otimes (\varepsilon c)^{nd}) / (f \otimes (\varepsilon c)^d)^n$  pour tout élément inversible  $\varepsilon \in A$ , ce qui montre que l'isomorphisme  $S_{(f)} \rightarrow (S_{(L)})_{(f \otimes c^d)}$  déduit de  $\varphi_c$  est *indépendant* du générateur  $c$  de  $L$  considéré et achève la démonstration.

**(3.1.9)** Rappelons (0, 4.1.3 et I, 1.3.14) que pour que la  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente  $\mathcal{S}$  soit engendrée par le  $\mathcal{O}_Y$ -Module  $\mathcal{S}_1$ , il faut et il suffit qu'il existe un recouvrement  $(U_\alpha)$  de  $Y$  par des ouverts affines tels que l'algèbre graduée  $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{S})$  sur  $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{S}_1)$  soit engendrée par l'ensemble  $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{S}_1)$  de ses éléments homogènes de degré 1. Pour tout ouvert  $V$  de  $Y$ ,  $\mathcal{S}|V$  est alors engendrée par le  $(\mathcal{O}_Y|V)$ -Module  $\mathcal{S}_1|V$ .

*Proposition (3.1.10).* — Supposons qu'il existe un recouvrement ouvert affine fini  $(U_i)$  de  $Y$  tel que chacune des algèbres graduées  $\Gamma(U_i, \mathcal{S})$  soit de type fini sur  $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_Y)$ . Alors il existe  $d > 0$  tel que  $\mathcal{S}^{(d)}$  soit engendrée par  $\mathcal{S}_d$ ,  $\mathcal{S}_d$  étant un  $\mathcal{O}_Y$ -Module de type fini.

En effet, il résulte de (2.1.6, (v)) que pour chaque  $i$ , il existe un entier  $m_i$  tel que  $\Gamma(U_i, \mathcal{S}_{nm_i}) = (\Gamma(U_i, \mathcal{S}_{m_i}))^n$  pour tout  $n > 0$ ; il suffit de prendre pour  $d$  un multiple commun des  $m_i$ , compte tenu de (2.1.6, (i)).

*Corollaire (3.1.11).* — Sous les hypothèses de (3.1.10),  $\text{Proj}(\mathcal{S})$  est  $Y$ -isomorphe à un spectre homogène  $\text{Proj}(\mathcal{S}')$ , où  $\mathcal{S}'$  est une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée engendrée par  $\mathcal{S}'_1$ ,  $\mathcal{S}'_1$  étant supposé être un  $\mathcal{O}_Y$ -Module de type fini.

Il suffit en effet de prendre  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}^{(d)}$ ,  $d$  étant déterminé par la propriété de (3.1.10), et d'appliquer (3.1.8, (i)).

**(3.1.12)** Si  $\mathcal{S}$  est une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente à degrés positifs, on sait (I, 5.1.1) que son nilradical  $\mathcal{N}$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent; nous dirons que  $\mathcal{N}_+ = \mathcal{N} \cap \mathcal{S}_+$  est le nilradical de  $\mathcal{S}_+$ ; c'est un  $\mathcal{S}_0$ -Module quasi-cohérent gradué, car on se ramène immédiatement au cas où  $Y$  est affine, et la proposition résulte alors de (2.1.10). Pour tout  $y \in Y$ ,  $(\mathcal{N}_+)_y$  est alors le nilradical de  $(\mathcal{S}_+)_y = (\mathcal{S}_y)_+$  (I, 5.1.1). On dit que la  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée  $\mathcal{S}$  est essentiellement réduite si  $\mathcal{N}_+ = 0$ , ce qui équivaut

à dire que  $\mathcal{S}_y$  est une  $\mathcal{O}_y$ -algèbre graduée essentiellement réduite pour tout  $y \in Y$ . Pour toute  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}/\mathcal{N}_+$  est essentiellement réduite.

Nous dirons que  $\mathcal{S}$  est *intègre* si  $\mathcal{S}_y$  est un anneau intègre pour tout  $y \in Y$  et si en outre  $(\mathcal{S}_y)_+ = (\mathcal{S}_+)_y \neq 0$  pour tout  $y \in Y$ .

*Proposition (3.1.13).* — Soit  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée à degrés positifs. Si  $X = \text{Proj}(\mathcal{S})$ , le  $Y$ -schéma  $X_{\text{red}}$  est canoniquement isomorphe à  $\text{Proj}(\mathcal{S}/\mathcal{N}_+)$ ; en particulier, si  $\mathcal{S}$  est essentiellement réduite,  $X$  est réduit.

Le fait que  $X' = \text{Proj}(\mathcal{S}/\mathcal{N}_+)$  est réduit découle immédiatement de (2.4.4, (i)), la propriété étant locale; en outre, pour tout ouvert affine  $U \subset Y$ ,  $\varphi'^{-1}(U)$  est égal à  $(\varphi^{-1}(U))_{\text{red}}$  (en désignant par  $\varphi$  et  $\varphi'$  les morphismes structuraux  $X \rightarrow Y$ ,  $X' \rightarrow Y$ ); on vérifie aussitôt que les  $U$ -morphismes canoniques  $\varphi'^{-1}(U) \rightarrow \varphi^{-1}(U)$  sont compatibles avec les opérations de restriction et définissent par suite une immersion fermée  $X' \rightarrow X$  qui est un homéomorphisme des espaces sous-jacents; d'où la conclusion (I, 5.1.2).

*Proposition (3.1.14).* — Soient  $Y$  un préschéma intègre,  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente telle que  $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_Y$ .

(i) Si  $\mathcal{S}$  est intègre (3.1.12), alors  $X = \text{Proj}(\mathcal{S})$  est intègre et le morphisme structural  $\varphi : X \rightarrow Y$  est dominant.

(ii) Supposons en outre que  $\mathcal{S}$  soit essentiellement réduite. Alors, inversement, si  $X$  est intègre et si  $\varphi$  est dominant,  $\mathcal{S}$  est intègre.

(i) Si  $(U_\alpha)$  est une base de  $Y$  formée d'ouverts affines non vides, il suffit de démontrer la proposition lorsque  $Y$  est remplacé par un des  $U_\alpha$  et  $\mathcal{S}$  par  $\mathcal{S}|_{U_\alpha}$ : en effet, il en résultera d'une part que les espaces sous-jacents  $\varphi^{-1}(U_\alpha)$  sont des ouverts irréductibles (donc non vides) de  $X$  tels que  $\varphi^{-1}(U_\alpha) \cap \varphi^{-1}(U_\beta) \neq \emptyset$  pour tout couple d'indices (puisque  $U_\alpha \cap U_\beta$  contient un  $U_\gamma$ ), donc que  $X$  est irréductible (0, 2.1.4); d'autre part  $X$  sera réduit, puisque c'est là une propriété locale, donc  $X$  sera bien intègre et  $\varphi(X)$  dense dans  $Y$ .

Supposons donc que  $Y = \text{Spec}(A)$  où  $A$  est intègre (I, 5.1.4) et  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ , où  $S$  est une  $A$ -algèbre graduée; l'hypothèse est que pour tout  $y \in Y$ ,  $\widetilde{S}_y = S_y$  est un anneau gradué intègre tel que  $(S_y)_+ \neq 0$ . Il suffit de prouver que  $S$  est un anneau *intègre*, car alors on aura  $S_+ \neq 0$  et on pourra appliquer (2.4.4, (ii)). Or, soient  $f, g$  deux éléments  $\neq 0$  de  $S$  et supposons que  $fg = 0$ ; pour tout  $y \in Y$  on aura donc  $(f/1)(g/1) = 0$  dans  $S_y$ , donc  $f/1 = 0$  ou  $g/1 = 0$  par hypothèse. Supposons par exemple  $f/1 = 0$  dans  $S_y$ ; cela signifie qu'il existe  $a \in A$  tel que  $a \notin j_y$  et  $af = 0$ ; on a alors pour tout  $z \in Y$ ,  $(a/1)(f/1) = 0$  dans l'anneau *intègre*  $S_z$ , et comme  $a/1 \neq 0$  (puisque  $A$  est intègre),  $f/1 = 0$ , ce qui implique  $f = 0$ .

(ii) La question étant locale sur  $Y$ , on peut encore supposer que  $Y = \text{Spec}(A)$ ,  $A$  étant intègre, et  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ . Par hypothèse, pour tout  $y \in Y$ ,  $(S_y)_+$  ne contient pas d'élément nilpotent  $\neq 0$ , et il en est de même de  $(S_0)_y = A_y$  par hypothèse; donc  $S_y$  est un anneau réduit pour tout  $y \in Y$ , et on en conclut d'abord que  $S$  lui-même est réduit (I, 5.1.1). L'hypothèse que  $X$  est intègre entraîne d'autre part que  $S$  est essentiellement intègre (2.4.4, (ii)), et tout revient alors à voir que l'annulateur  $\mathfrak{J}$  de  $S_+$  dans  $A = S_0$  est réduit

à 0 (2.1.11). Dans le cas contraire, on aurait  $(S_h)_+ = 0$  pour un  $h \neq 0$  dans  $\mathfrak{J}$ , donc (3.1.1)  $\varphi^{-1}(D(h)) = \emptyset$ , et  $\varphi(X)$  ne serait pas dense dans  $Y$  contrairement à l'hypothèse (puisque  $D(h) \neq \emptyset$ ,  $h$  n'étant pas nilpotent).

### 3.2. Faisceau sur $\text{Proj}(\mathcal{S})$ associé à un $\mathcal{S}$ -Module gradué.

(3.2.1) Soient  $Y$  un préschéma,  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente à degrés positifs,  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{S}$ -module gradué quasi-cohérent (sur  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  ou sur l'espace annelé  $(Y, \mathcal{S})$ ), ce qui revient au même (I, 9.6.1)). Avec les notations de (3.1.1), désignons par  $\widetilde{\mathcal{M}}_U$  le  $\mathcal{O}_{X_U}$ -Module quasi-cohérent  $(\Gamma(U, \mathcal{M}))^\sim$ ; pour  $U' \subset U$ ,  $\Gamma(U', \mathcal{M})$  s'identifie canoniquement à  $\Gamma(U, \mathcal{M}) \otimes_A A'$  (I, 1.6.4); donc on a  $\widetilde{\mathcal{M}}_{U'} = \rho_{U', U}^*(\widetilde{\mathcal{M}}_U)$  (2.8.11).

*Proposition (3.2.2).* — Il existe sur  $\text{Proj}(\mathcal{S}) = X$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent et un seul  $\widetilde{\mathcal{M}}$  tel que, pour tout ouvert affine  $U$  de  $Y$ , on ait  $\eta_U^*((\Gamma(U, \mathcal{M}))^\sim) = \widetilde{\mathcal{M}}|f^{-1}(U)$  (en désignant par  $\eta_U$  l'isomorphisme  $f^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} \text{Proj}(\Gamma(U, \mathcal{S}))$ , où  $f$  est le morphisme structural  $X \rightarrow Y$ ).

Comme  $\rho_{U', U}$  s'identifie au morphisme d'injection  $f^{-1}(U') \rightarrow f^{-1}(U)$  (3.1.2.1), la proposition résulte aussitôt de la relation  $\widetilde{\mathcal{M}}_{U'} = \rho_{U', U}^*(\widetilde{\mathcal{M}}_U)$  et du principe de recollement des faisceaux (0, 3.3.1).

On dit que  $\widetilde{\mathcal{M}}$  est le  $\mathcal{O}_X$ -Module associé au  $\mathcal{S}$ -Module gradué quasi-cohérent  $\mathcal{M}$ .

*Proposition (3.2.3).* — Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{S}$ -Module gradué quasi-cohérent, et soit  $f \in \Gamma(Y, \mathcal{S}_d)$  ( $d > 0$ ). Si  $\xi_f$  est l'isomorphisme canonique de  $X_f$  sur le  $Y$ -préschéma  $Z_f = \text{Spec}(\mathcal{S}^{(d)} / (f - 1)\mathcal{S}^{(d)})$  (3.1.4),  $(\xi_f)_*(\widetilde{\mathcal{M}}|X_f)$  est le  $\mathcal{O}_{Z_f}$ -Module  $(\mathcal{M}^{(d)} / (f - 1)\mathcal{M}^{(d)})^\sim$  (1.4.3).

La question étant locale sur  $Y$ , on est aussitôt ramené à (2.2.5), compte tenu de la commutativité du diagramme (2.8.12.1).

*Proposition (3.2.4).* — Le  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\widetilde{\mathcal{M}}$  est un foncteur covariant additif exact en  $\mathcal{M}$ , de la catégorie des  $\mathcal{S}$ -Modules gradués quasi-cohérents dans celle des  $\mathcal{O}_X$ -Modules quasi-cohérents, qui commute aux limites inductives et aux sommes directes.

La question étant locale sur  $Y$ , se ramène à (I, 1.3.11 et 1.3.9) et à (2.5.4).

En particulier, si  $\mathcal{N}$  est un sous- $\mathcal{S}$ -Module gradué quasi-cohérent de  $\mathcal{M}$ ,  $\widetilde{\mathcal{N}}$  s'identifie canoniquement à un sous- $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent de  $\widetilde{\mathcal{M}}$ ; plus particulièrement, pour tout faisceau gradué quasi-cohérent  $\mathcal{J}$  d'idéaux de  $\mathcal{S}$ ,  $\widetilde{\mathcal{J}}$  est un faisceau quasi-cohérent d'idéaux de  $\mathcal{O}_X$ .

Si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{S}$ -Module gradué quasi-cohérent et  $\mathcal{I}$  un faisceau quasi-cohérent d'idéaux de  $\mathcal{O}_Y$ ,  $\mathcal{I}\mathcal{M}$  est un sous- $\mathcal{S}$ -Module gradué quasi-cohérent de  $\mathcal{M}$  et on a

$$(3.2.4.1) \quad (\mathcal{I}\mathcal{M})^\sim = \mathcal{I}.\widetilde{\mathcal{M}}$$

(le second membre ayant le sens défini en (0, 4.3.5)). Il suffit en effet de vérifier cette formule lorsque  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine,  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ , où  $S$  est une  $A$ -algèbre graduée,  $\mathcal{M} = \widetilde{M}$ ,

où  $M$  est un  $S$ -module gradué, et  $\mathcal{I} = \widetilde{\mathfrak{J}}$ , où  $\mathfrak{J}$  est un idéal de  $A$ . Pour tout  $f$  homogène de  $S_+$ , la restriction à  $D_+(f) = \text{Spec}(S_{(f)})$  du premier membre de (3.2.4.1) est associée à  $(\mathfrak{J}M)_{(f)} = \mathfrak{J}_+ M_{(f)}$ , et il en est de même de la restriction du second membre, vu (I, 1.3.13 et 1.6.9).

*Proposition (3.2.5).* — Soit  $f \in \Gamma(Y, \mathcal{S}_d)$  ( $d > 0$ ). Sur l'ensemble ouvert  $X_f$ , le  $(\mathcal{O}_X|X_f)$ -Module  $(\mathcal{S}(nd))^\sim|X_f$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{O}_X|X_f$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . En particulier, si la  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre  $\mathcal{S}$  est engendrée par  $\mathcal{S}_1$  (3.1.9), les  $\mathcal{O}_X$ -Modules  $(\mathcal{S}(n))^\sim$  sont inversibles pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

En effet, pour tout ouvert affine  $U$  de  $Y$ , on a défini dans (2.5.7) un isomorphisme canonique de  $(\mathcal{S}(nd))^\sim|(X_f \cap \varphi^{-1}(U))$  sur  $\mathcal{O}_X|(X_f \cap \varphi^{-1}(U))$ , compte tenu de (3.1.4) (où  $\varphi$  est le morphisme structural  $X \rightarrow Y$ ); il est immédiat de vérifier que ces isomorphismes sont compatibles avec la restriction de  $U$  à un ouvert affine  $U' \subset U$ , d'où la première assertion. Pour établir la seconde, il suffit de remarquer que si  $\mathcal{S}$  est engendrée par  $\mathcal{S}_1$ , il y a un recouvrement  $(U_\alpha)$  de  $Y$  par des ouverts affines tels que  $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{S})$  soit engendrée par  $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{S}_1) = \Gamma(U_\alpha, \mathcal{S}_1)$ ; on est alors ramené à appliquer le résultat de (2.5.9), la propriété d'être inversible étant locale.

On posera encore, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$(3.2.5.1) \quad \mathcal{O}_X(n) = (\mathcal{S}(n))^\sim$$

et pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\mathcal{F}$

$$(3.2.5.2) \quad \mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n).$$

Il résulte aussitôt de ces définitions que pour tout ouvert  $U$  de  $Y$ , on a

$$((\mathcal{S}|U)(n))^\sim = \mathcal{O}_X(n)|f^{-1}(U)$$

$f$  étant le morphisme structural  $X \rightarrow Y$ .

*Proposition (3.2.6).* — Soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux  $\mathcal{S}$ -Modules gradués quasi-cohérents, il existe un homomorphisme canonique fonctoriel (en  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$ )

$$(3.2.6.1) \quad \lambda : \widetilde{\mathcal{M}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{\mathcal{N}} \rightarrow (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{S}} \mathcal{N})^\sim$$

et un homomorphisme canonique fonctoriel (en  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$ )

$$(3.2.6.2) \quad \mu : (\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{S}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}))^\sim \rightarrow \mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mathcal{N}}).$$

En outre, si  $\mathcal{S}$  est engendrée par  $\mathcal{S}_1$  (3.1.9),  $\lambda$  est un isomorphisme; si de plus  $\mathcal{M}$  admet une présentation finie (3.1.1),  $\mu$  est un isomorphisme.

Les isomorphismes  $\lambda$  et  $\mu$  ont été définis dans (2.5.11.2) et (2.5.12.2) lorsque  $Y$  est affine; ces définitions étant locales se transportent aussitôt au cas général considéré ici, compte tenu de (2.8.14).

*Corollaire (3.2.7).* — Si  $\mathcal{S}$  est engendrée par  $\mathcal{S}_1$ , on a, quels que soient  $m, n$  dans  $\mathbb{Z}$ ,

$$(3.2.7.1) \quad \mathcal{O}_X(m) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) = \mathcal{O}_X(m+n)$$

$$(3.2.7.2) \quad \mathcal{O}_X(n) = (\mathcal{O}_X(1))^{\otimes n}$$

à des isomorphismes canoniques près.

*Corollaire (3.2.8).* — Supposons  $\mathcal{S}$  engendrée par  $\mathcal{S}_1$ . Pour tout  $\mathcal{S}$ -Module gradué  $\mathcal{M}$  et tout  $n \in \mathbf{Z}$ , on a

$$(3.2.8.1) \quad (\mathcal{M}(n))^\sim = \widetilde{\mathcal{M}}(n)$$

à un isomorphisme canonique près.

Cela résulte des propriétés correspondantes pour  $Y$  affine (2.5.14 et 2.5.15) ainsi que de (2.8.11).

*Remarques (3.2.9).* — (i) Si  $\mathcal{S} = \mathcal{A}[T]$ ,  $\mathcal{A}$  étant une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre quasi-cohérente (3.1.7), on vérifie immédiatement que tous les  $\mathcal{O}_X$ -Modules inversibles  $\mathcal{O}_X(n)$  sont canoniquement isomorphes à  $\mathcal{O}_X$ .

En outre, soit  $\mathcal{N}$  un  $\mathcal{A}$ -Module quasi-cohérent, et posons  $\mathcal{M} = \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}[T]$ . Il résulte alors de (3.2.3) et de (3.1.7) que dans l'identification canonique de  $X = \text{Proj}(\mathcal{A}[T])$  et de  $X' = \text{Spec}(\mathcal{A})$ , le  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\widetilde{\mathcal{M}}$  s'identifie au  $\mathcal{O}_{X'}$ -Module  $\widetilde{\mathcal{N}}$  associé à  $\mathcal{N}$  (au sens de (1.4.3)).

(ii) Soit  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quelconque,  $\mathcal{S}'$  la  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée telle que  $\mathcal{S}'_0 = \mathcal{O}_Y$ ,  $\mathcal{S}'_n = \mathcal{S}_n$  pour tout  $n > 0$ ; l'isomorphisme canonique de  $X = \text{Proj}(\mathcal{S})$  sur  $X' = \text{Proj}(\mathcal{S}')$  (3.1.8, (ii)) identifie  $\mathcal{O}_X(n)$  et  $\mathcal{O}_{X'}(n)$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ : cela résulte de la même proposition pour le cas affine (2.5.16) et du fait que ces identifications, pour les ouverts affines de  $Y$ , commutent avec les opérations de restriction. De même, soit  $X^{(d)} = \text{Proj}(\mathcal{S}^{(d)})$ ; l'isomorphisme canonique de  $X$  sur  $X^{(d)}$  (3.1.8, (i)) identifie  $\mathcal{O}_X(nd)$  et  $\mathcal{O}_{X^{(d)}}(n)$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ .

*Proposition (3.2.10).* — Soient  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -Module inversible,  $g$  l'isomorphisme canonique  $X_{(\mathcal{L})} = \text{Proj}(\mathcal{S}_{(\mathcal{L})}) \rightarrow X = \text{Proj}(\mathcal{S})$  (3.1.8, (iii)). Pour tout entier  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $g_*(\mathcal{O}_{X_{(\mathcal{L})}}(n))$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{O}_X(n) \otimes_Y \mathcal{L}^{\otimes n}$ .

Supposons d'abord  $Y$  affine, d'anneau  $A$ , et  $\mathcal{L} = \widetilde{L}$ , où  $L$  est un  $A$ -module libre monogène. Avec les notations de la démonstration de (3.1.8, (iii)) on définit, pour  $f \in S_d$ , un isomorphisme de  $(S(n))_{(f)} \otimes_A L^{\otimes n}$  sur  $(S_{(L)}(n))_{(f \otimes c^d)}$  en faisant correspondre à  $(x/f^k) \otimes c^n$ , où  $x \in S_{kd+n}$  l'élément  $(x \otimes c^{n+kd}) / (f \otimes c^d)^k$ ; il est immédiat que cet isomorphisme est indépendant du générateur  $c$  choisi pour  $L$ ; en outre, les isomorphismes ainsi définis pour chaque  $f \in S_+$  sont compatibles avec les opérations de restriction  $D_+(f) \rightarrow D_+(fg)$ . Enfin, dans le cas général, on voit sans peine en revenant aux définitions (3.1.1) que les isomorphismes ainsi définis pour chaque ouvert affine  $U$  de  $Y$  sont compatibles avec le passage de  $U$  à un ouvert affine  $U' \subset U$ .

### 3.3. $\mathcal{S}$ -Module gradué associé à un faisceau sur $\text{Proj}(\mathcal{S})$ .

On suppose dans tout ce numéro que la  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée  $\mathcal{S}$  est engendrée par  $\mathcal{S}_1$  (3.1.9). Rappelons qu'en raison de (3.1.8, (i)), cette restriction n'est pas essentielle, moyennant les conditions de finitude (3.1.10).

(3.3.1) Soit  $p$  le morphisme structural  $X = \text{Proj}(\mathcal{S}) \rightarrow Y$ . Pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\mathcal{F}$ , nous poserons

$$(3.3.1.1) \quad \Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} p_*(\mathcal{F}(n))$$

et en particulier

$$(3.3.1.2) \quad \Gamma_*(\mathcal{O}_X) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} p_*(\mathcal{O}_X(n)).$$

On sait (0, 4.2.2) qu'il existe un homomorphisme canonique

$$p_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} p_*(\mathcal{G}) \rightarrow p_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})$$

pour deux  $\mathcal{O}_X$ -Modules  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$ ; on déduit donc de (3.2.7.1) que  $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$  est muni d'une structure de  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée, et (3.2.5.2) définit de même sur  $\Gamma_*(\mathcal{F})$  une structure de Module gradué sur  $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ .

En vertu de (3.2.5), et de l'exactitude à gauche du foncteur  $p_*$  (0, 4.2.1),  $\Gamma_*(\mathcal{F})$  est un foncteur covariant additif et *exact à gauche* en  $\mathcal{F}$  dans la catégorie des  $\mathcal{O}_X$ -Modules, à valeurs dans la catégorie des  $\mathcal{O}_Y$ -Modules gradués (où les morphismes sont les homomorphismes de degré 0). En particulier, si  $\mathcal{J}$  est un faisceau d'idéaux dans  $\mathcal{O}_X$ ,  $\Gamma_*(\mathcal{J})$  s'identifie à un faisceau gradué d'idéaux de  $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ .

(3.3.2) Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{S}$ -Module gradué quasi-cohérent. Pour tout ouvert affine  $U$  de  $Y$ , on a défini en (2.6.2) un homomorphisme de groupes abéliens

$$\alpha_{0,U} : \Gamma(U, \mathcal{M}_0) \rightarrow \Gamma(p^{-1}(U), \widetilde{\mathcal{M}}).$$

Il est immédiat que ces homomorphismes commutent aux opérations de restriction (2.8.13.1) et définissent donc (sans utiliser l'hypothèse que  $\mathcal{S}$  est engendrée par  $\mathcal{S}_1$ ) un homomorphisme de faisceaux de groupes abéliens

$$(3.3.2.1) \quad \alpha_0 : \mathcal{M}_0 \rightarrow p_*(\widetilde{\mathcal{M}}).$$

Appliquant ce résultat à chacun des  $\mathcal{M}_n = (\mathcal{M}(n))_0$ , et tenant compte de (3.2.8.1), on définit un homomorphisme de faisceaux de groupes abéliens

$$(3.3.2.2) \quad \alpha_n : \mathcal{M}_n \rightarrow p_*(\widetilde{\mathcal{M}}(n)) \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{Z},$$

d'où un homomorphisme fonctoriel (de degré 0) de faisceaux gradués de groupes abéliens

$$(3.3.2.3) \quad \alpha : \mathcal{M} \rightarrow \Gamma_*(\widetilde{\mathcal{M}})$$

(aussi noté  $\alpha_{\mathcal{M}}$ ).

En prenant en particulier  $\mathcal{M} = \mathcal{S}$ , on vérifie que  $\alpha : \mathcal{S} \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$  est un homomorphisme de  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbres graduées et que (3.3.2.3) est un di-homomorphisme de Modules gradués, relatif à cet homomorphisme d'Algèbres graduées.

Remarquons encore qu'à chacun des  $\alpha_n$  il correspond (0, 4.4.3) un homomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_X$ -Modules

$$(3.3.2.4) \quad \alpha_n^* : p^*(\mathcal{M}_n) \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}(n).$$

On vérifie sans peine que cet homomorphisme n'est autre que celui qui correspond fonctoriellement (3.2.4) à l'homomorphisme canonique (de degré 0) de  $\mathcal{O}_Y$ -Modules gradués

$$(3.3.2.5) \quad \mathcal{M}_n \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}(n)$$

où la graduation du second membre provient naturellement de celle de  $\mathcal{S}$ . On peut en effet se borner au cas où  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine,  $\mathcal{M} = \widetilde{M}$  et  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ , la  $A$ -algèbre graduée  $S$  étant engendrée par  $S_1$ , de sorte que lorsque  $f$  parcourt  $S_1$ , les  $D_+(f)$  forment un recouvrement de  $X$ . Revenant aux définitions (2.6.2) on voit alors, compte tenu de (I, 1.6.7), que la restriction à  $D_+(f)$  de l'homomorphisme (3.3.2.4) correspond (I, 1.3.8) à l'homomorphisme de  $S_{(f)}$ -modules  $M_n \otimes_A S_{(f)} \rightarrow (S(n))_{(f)}$  qui, à  $x \otimes 1$  ( $x \in M_n$ ) fait correspondre  $x/1$ ; cela démontre notre assertion.

*Proposition (3.3.3).* — Pour toute section  $f \in \Gamma(Y, \mathcal{S}_d)$  ( $d > 0$ ),  $X_f$  est identique à l'ensemble des points de  $X$  où  $\alpha_d(f)$  (considérée comme section de  $\mathcal{O}_X(d)$ ) ne s'annule pas (0, 5.5.2).

$(\alpha_d(f))$  est une section de  $p_*(\mathcal{O}_X(d))$  au-dessus de  $Y$ , mais par définition une telle section est aussi une section de  $\mathcal{O}_X(d)$  au-dessus de  $X$  (0, 4.2.1). La définition de  $X_f$  (3.1.4) ramène au cas où  $Y$  est affine, qui a été traité dans (2.6.3).

(3.3.4) Nous supposerons désormais, outre l'hypothèse du début de ce numéro, que pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ , les  $p_*(\mathcal{F}(n))$  sont quasi-cohérents sur  $Y$ , et par suite  $\Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} p_*(\mathcal{F}(n))$  est aussi un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent (I, 1.4.1 et 1.3.9); cette circonstance se produira toujours en particulier si  $X$  est de type fini sur  $Y$  (I, 9.2.2). On en conclut que  $(\Gamma_*(\mathcal{F}))^\sim$  est défini et est un  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent. Pour tout ouvert affine  $U$  de  $Y$ , on a ((I, 1.3.9) et (2.5.4))

$$\begin{aligned} (\Gamma(U, \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} p_*(\mathcal{F}(n))))^\sim &= \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} (\Gamma(U, p_*(\mathcal{F}(n))))^\sim = \\ &= \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} (\Gamma(p^{-1}(U), \mathcal{F}(n)))^\sim = (\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \Gamma(p^{-1}(U), \mathcal{F}(n)))^\sim = \\ &= (\Gamma_*(\mathcal{F}|p^{-1}(U)))^\sim \end{aligned}$$

et par suite (2.6.4) on a un homomorphisme canonique

$$\beta_U : (\Gamma(U, \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} p_*(\mathcal{F}(n))))^\sim \rightarrow \mathcal{F}|p^{-1}(U).$$

En outre, la commutativité de (2.8.13.2) montre que ces homomorphismes commutent avec les opérations de restriction sur  $Y$ ; on en déduit donc un homomorphisme canonique fonctoriel

$$(3.3.4.1) \quad \beta : (\Gamma_*(\mathcal{F}))^\sim \rightarrow \mathcal{F}$$

(aussi noté  $\beta_{\mathcal{F}}$ ) pour les  $\mathcal{O}_X$ -Modules quasi-cohérents.

*Proposition (3.3.5).* — Soient  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{S}$ -Module gradué quasi-cohérent,  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent; les homomorphismes composés

$$(3.3.5.1) \quad \widetilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{\tilde{\alpha}} (\Gamma_*(\widetilde{\mathcal{M}}))^\sim \xrightarrow{\beta} \widetilde{\mathcal{M}}$$

$$(3.3.5.2) \quad \Gamma_*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha} \Gamma_*((\Gamma_*(\mathcal{F}))^\sim) \xrightarrow{\Gamma_*(\beta)} \Gamma_*(\mathcal{F})$$

sont les isomorphismes identiques.

La question est en effet locale sur  $Y$ , et on est ramené à (2.6.5).

### 3.4. Conditions de finitude.

*Proposition (3.4.1).* — Soient  $Y$  un préschéma,  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre quasi-cohérente engendrée par  $\mathcal{S}_1$  (3.1.9); on suppose en outre  $\mathcal{S}_1$  de type fini. Alors  $X = \text{Proj}(\mathcal{S})$  est de type fini au-dessus de  $Y$ .

En effet, la question étant locale sur  $Y$ , on peut supposer  $Y$  affine d'anneau  $A$ ; on a alors  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ , où  $S = \Gamma(Y, \mathcal{S})$ , et par hypothèse  $S$  est une  $A$ -algèbre engendrée par  $S_1 = \Gamma(Y, \mathcal{S}_1)$ , où on peut en outre supposer que  $S_1$  est un  $A$ -module de type fini (I, 1.3.9 et 1.3.12). Par suite  $S$  est une  $A$ -algèbre graduée de type fini, et on est ramené à (2.7.1, (ii)).

(3.4.2) Soit  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente; pour un  $\mathcal{S}$ -Module gradué quasi-cohérent  $\mathcal{M}$ , nous considérerons les conditions de finitude suivantes :

(TF) Il existe un entier  $n$  tel que le  $\mathcal{S}$ -Module  $\bigoplus_{k \geq n} \mathcal{M}_k$  soit de type fini.

(TN) Il existe un entier  $n$  tel que  $\mathcal{M}_k = 0$  pour  $k \geq n$ .

Si  $\mathcal{M}$  vérifie (TN), on a  $\widetilde{\mathcal{M}} = 0$ , la question étant locale sur  $Y$  (2.7.2).

Soient  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  deux  $\mathcal{S}$ -Modules gradués quasi-cohérents; on dit qu'un homomorphisme  $u : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  de degré 0 est (TN)-injectif (resp. (TN)-surjectif, (TN)-bijectif) s'il existe un entier  $n$  tel que  $u_k : \mathcal{M}_k \rightarrow \mathcal{N}_k$  soit injectif (resp. surjectif, bijectif) pour  $k \geq n$ ; alors  $\widetilde{u} : \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{N}}$  est injectif (resp. surjectif, bijectif) en vertu de (2.7.2), la question étant locale sur  $Y$ , et compte tenu de (I, 1.3.9); lorsque  $u$  est (TN)-bijectif, on dit aussi que  $u$  est un (TN)-isomorphisme.

*Proposition (3.4.3).* — Soient  $Y$  un préschéma,  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente engendrée par  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_1$  étant supposé de type fini. Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{S}$ -Module gradué quasi-cohérent.

(i) Si  $\mathcal{M}$  vérifie la condition (TF),  $\widetilde{\mathcal{M}}$  est de type fini.

(ii) Supposons que  $\mathcal{M}$  vérifie (TF); pour que  $\widetilde{\mathcal{M}} = 0$ , il faut et il suffit que  $\mathcal{M}$  vérifie (TN).

Les questions étant locales sur  $Y$ , on est ramené au cas où  $Y$  est affine d'anneau  $A$ ,  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ , où  $S$  est une  $A$ -algèbre graduée telle que l'idéal  $S_+$  soit de type fini,  $\mathcal{M} = \widetilde{M}$  où  $M$  est un  $S$ -module gradué; la proposition résulte alors de (2.7.3).

*Théorème (3.4.4).* — Soient  $Y$  un préschéma,  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente engendrée par  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_1$  étant supposé de type fini; soit  $X = \text{Proj}(\mathcal{S})$ . Pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ , l'homomorphisme canonique  $\beta$  (3.3.4) est un isomorphisme.

Notons d'abord que  $\beta$  est défini en vertu de (3.4.1). Pour voir que  $\beta$  est un isomorphisme, on est ramené au cas où  $Y$  est affine d'anneau  $A$ ,  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ , où  $S$  est une  $A$ -algèbre graduée engendrée par  $S_1$  et  $S_1$  est un  $A$ -module de type fini. Il suffit alors d'appliquer (2.7.5).

*Corollaire (3.4.5).* — Sous les hypothèses de (3.4.4), tout  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$  est isomorphe à un  $\mathcal{O}_X$ -Module de la forme  $\widetilde{\mathcal{M}}$ , où  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{S}$ -Module gradué quasi-cohérent. Si en outre  $\mathcal{F}$  est de type fini, et si on suppose que  $Y$  est un schéma quasi-compact, ou que l'espace sous-jacent à  $Y$  est noethérien, on peut supposer  $\mathcal{M}$  de type fini.

La première assertion résulte aussitôt de (3.4.4) en prenant  $\mathcal{M} = \Gamma_*(\mathcal{F})$ . Pour établir la seconde, il suffira d'établir que  $\mathcal{M}$  est limite inductive de ses sous- $\mathcal{S}$ -Modules gradués de type fini  $\mathcal{N}_\lambda$ : en effet, il en résultera que  $\widetilde{\mathcal{M}}$  est limite inductive des  $\widetilde{\mathcal{N}}_\lambda$  (3.2.4), donc  $\mathcal{F}$  est limite inductive des  $\beta(\widetilde{\mathcal{N}}_\lambda)$ ; comme  $Y$  est quasi-compact ((3.4.1) et (I, 6.3.1)) et que  $\mathcal{F}$  est de type fini,  $\mathcal{F}$  sera nécessairement égal à un des  $\beta(\widetilde{\mathcal{N}}_\lambda)$  (0, 5.2.3).

Pour définir les  $\mathcal{N}_\lambda$  ayant  $\mathcal{M}$  pour limite inductive, il suffit de considérer pour chaque  $n \in \mathbb{Z}$  le  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{M}_n$ , qui est limite inductive de ses sous- $\mathcal{O}_Y$ -Modules  $\mathcal{M}_n^{(\mu_n)}$  de type fini, en raison des hypothèses sur  $Y$  (I, 9.4.9); il est immédiat que  $\mathcal{P}_{\mu_n} = \mathcal{S} \cdot \mathcal{M}_n^{(\mu_n)}$  est un  $\mathcal{S}$ -Module gradué de type fini, et on vérifie aussitôt qu'en prenant pour  $\mathcal{N}_\lambda$  les sommes finies de  $\mathcal{S}$ -Modules de la forme  $\mathcal{P}_{\mu_n}$ , on répond bien à la question.

*Corollaire (3.4.6).* — *Supposons vérifiées les hypothèses de (3.4.4), et en outre que l'espace sous-jacent  $Y$  soit quasi-compact; soit  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent de type fini. Il existe  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ , l'homomorphisme canonique  $\sigma : p^*(p_*(\mathcal{F}(n))) \rightarrow \mathcal{F}(n)$  (0, 4.4.3) soit surjectif.*

En effet, pour tout  $y \in Y$ , soit  $U$  un voisinage ouvert affine de  $y$  dans  $Y$ . Il existe un entier  $n_0(U)$  tel que, pour  $n \geq n_0(U)$ ,  $\mathcal{F}(n)|_{p^{-1}(U)}$  soit engendré par un nombre fini de ses sections au-dessus de  $p^{-1}(U)$  (2.7.9); mais ces dernières sont images canoniques de sections de  $p^*(p_*(\mathcal{F}(n)))$  au-dessus de  $p^{-1}(U)$  (0, 3.7.1 et 4.4.3), donc  $\mathcal{F}(n)|_{p^{-1}(U)}$  est égal à l'image canonique de  $p^*(p_*(\mathcal{F}(n)))|_{p^{-1}(U)}$ . Enfin, comme  $Y$  est quasi-compact, il existe un recouvrement fini de  $Y$  par des ouverts affines  $U_i$ , et en prenant pour  $n_0$  le plus grand des  $n_0(U_i)$ , on achève la démonstration.

*Remarques (3.4.7).* — Si  $p = (\psi, \theta) : X \rightarrow Y$  est un morphisme d'espaces annelés et  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module, le fait que l'homomorphisme canonique  $\sigma : p^*(p_*(\mathcal{F})) \rightarrow \mathcal{F}$  soit surjectif s'explique de la façon suivante (0, 4.4.1) : pour tout  $x \in X$  et toute section  $s$  de  $\mathcal{F}$  au-dessus d'un voisinage ouvert  $V$  de  $x$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $p(x)$  dans  $Y$ , un nombre fini de sections  $t_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) de  $\mathcal{F}$  au-dessus de  $p^{-1}(U)$ , un voisinage  $W \subset V \cap p^{-1}(U)$  de  $x$  et des sections  $a_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) de  $\mathcal{O}_X$  au-dessus de  $W$  telles que

$$s|W = \sum_i a_i \cdot (t_i|W).$$

Lorsque  $Y$  est un schéma affine et  $p_*(\mathcal{F})$  quasi-cohérent, cette condition équivaut au fait que  $\mathcal{F}$  est engendré par ses sections au-dessus de  $X$  (0, 5.5.1) : en effet, si  $Y = \text{Spec}(A)$ , on peut supposer que  $U = D(f)$  avec  $f \in A$ ; il existe un entier  $n > 0$  et des sections  $s_i$  de  $\mathcal{F}$  au-dessus de  $X$  telles que  $t_i$  soit la restriction à  $p^{-1}(U)$  de  $s_i g^n$ , avec  $g = \theta(f)$  (en appliquant (I, 1.4.1) à  $p_*(\mathcal{F})$ ); comme  $g$  est inversible au-dessus de  $p^{-1}(U)$ , on a donc

$$s|W = \sum_i b_i \cdot (s_i|W)$$

avec  $b_i = a_i(g|W)^{-n}$ , d'où notre assertion. Lorsque  $Y$  est affine, le corollaire (3.4.6) redonne donc (2.7.9).

On en conclut que lorsque  $Y$  est un préschéma quelconque, les trois conditions

suivantes, pour un  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$  tel que  $p_*(\mathcal{F})$  soit *quasi-cohérent*, sont équivalentes :

- a) *L'homomorphisme canonique  $\sigma : p^*(p_*(\mathcal{F})) \rightarrow \mathcal{F}$  est surjectif.*
- b) *Il existe un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{G}$  et un homomorphisme surjectif  $p^*(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{F}$ .*
- c) *Pour tout ouvert affine  $U$  de  $Y$ ,  $\mathcal{F}|_{p^{-1}(U)}$  est engendré par ses sections au-dessus de  $p^{-1}(U)$ .*

On vient en effet de prouver l'équivalence de a) et c). D'autre part, il est clair que a) entraîne b),  $p_*(\mathcal{F})$  étant par hypothèse quasi-cohérent. Inversement, tout homomorphisme  $u : p^*(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{F}$  se factorise en  $p^*(\mathcal{G}) \rightarrow p^*(p_*(\mathcal{F})) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{F}$  (0, 3.5.4.4), donc si  $u$  est surjectif il en est de même de  $\sigma$ , ce qui prouve que b) entraîne a).

**Corollaire (3.4.8).** — *Supposons vérifiées les hypothèses de (3.4.4) et supposons en outre que  $Y$  soit un schéma quasi-compact ou que l'espace sous-jacent à  $Y$  soit noethérien. Soit  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent de type fini; il existe alors un entier  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$   $\mathcal{F}$  soit isomorphe à un quotient d'un  $\mathcal{O}_X$ -Module de la forme  $(p^*(\mathcal{G}))(-n)$  où  $\mathcal{G}$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent de type fini (dépendant de  $n$ ).*

Comme le morphisme structural  $X \rightarrow Y$  est séparé et de type fini,  $p_*(\mathcal{F}(n))$  est quasi-cohérent (I, 9.2.2, b)), donc limite inductive de ses sous- $\mathcal{O}_Y$ -Modules quasi-cohérents de type fini, en vertu de l'hypothèse sur  $Y$  (I, 9.4.9). On en déduit par (3.4.6), (0, 4.3.2) et (0, 5.2.3) que  $\mathcal{F}(n)$  est l'image canonique d'un  $\mathcal{O}_X$ -Module de la forme  $p^*(\mathcal{G})$ , où  $\mathcal{G}$  est un sous- $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent de type fini de  $p_*(\mathcal{F}(n))$ ; le corollaire résulte alors de (3.2.5.2) et (3.2.7.1).

### 3.5. Comportements fonctoriels.

**(3.5.1)** Soient  $Y$  un préschéma,  $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$  deux  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbres graduées quasi-cohérentes à degrés positifs; posons  $X = \text{Proj}(\mathcal{S}), X' = \text{Proj}(\mathcal{S}')$ , et soient  $p, p'$  les morphismes structuraux de  $X$  et  $X'$  dans  $Y$ . Soit  $\varphi : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -homomorphisme d'Algèbres graduées. Pour tout ouvert affine  $U$  de  $Y$ , posons  $S_U = \Gamma(U, \mathcal{S}), S'_U = \Gamma(U, \mathcal{S}')$ ; l'homomorphisme  $\varphi$  définit un homomorphisme  $\varphi_U : S'_U \rightarrow S_U$  de  $A_U$ -algèbres graduées, en posant  $A_U = \Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ . Il lui correspond dans  $p^{-1}(U)$  un ensemble ouvert  $G(\varphi_U)$  et un morphisme  $\Phi_U : G(\varphi_U) \rightarrow p'^{-1}(U)$  (2.8.1). En outre, si  $V \subset U$  est un ouvert affine, le diagramme

$$(3.5.1.1) \quad \begin{array}{ccc} S'_U & \xrightarrow{\varphi_U} & S_U \\ \downarrow & & \downarrow \\ S'_V & \xrightarrow{\varphi_V} & S_V \end{array}$$

est commutatif, et on vérifie aussitôt, à partir des définitions (2.8.1), que l'on a

$$G(\varphi_V) = G(\varphi_U) \cap p^{-1}(V)$$

et que  $\Phi_V$  est la restriction de  $\Phi_U$  à  $G(\varphi_V)$ . On a ainsi défini une partie ouverte  $G(\varphi)$  de  $X$  telle que  $G(\varphi) \cap p^{-1}(U) = G(\varphi_U)$  pour tout ouvert affine  $U \subset Y$ , et un  $Y$ -morphisme

*affine*  $\Phi : G(\varphi) \rightarrow X'$ , qui est dit *associé* à  $\varphi$  et que nous noterons  $\text{Proj}(\varphi)$ . Lorsque, pour tout  $y \in Y$ , il y a un voisinage affine  $U$  de  $y$  tel que le  $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ -module  $\Gamma(U, \mathcal{S}_+)$  soit engendré par  $\varphi(\Gamma(U, \mathcal{S}'_+))$ , on a  $G(\varphi_U) = p^{-1}(U)$ , et par suite  $G(\varphi) = X$ .

*Proposition (3.5.2).* — (i) Si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{S}$ -Module gradué quasi-cohérent, il existe un isomorphisme canonique fonctoriel du  $\mathcal{O}_X$ -Module  $(\mathcal{M}_{[n]})^\sim$  sur le  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\Phi^*(\widetilde{\mathcal{M}}|G(\varphi))$ .

(ii) Si  $\mathcal{M}'$  est un  $\mathcal{S}'$ -Module gradué quasi-cohérent, il existe un homomorphisme canonique fonctoriel  $\nu$  du  $(\mathcal{O}_X|G(\varphi))$ -Module  $\Phi^*(\widetilde{\mathcal{M}'})$  dans le  $(\mathcal{O}_X|G(\varphi))$ -Module  $(\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{S}'} \mathcal{S})^\sim|G(\varphi)$ . Si  $\mathcal{S}'$  est engendrée par  $\mathcal{S}'_1$ ,  $\nu$  est un isomorphisme.

Les homomorphismes considérés ont en effet déjà été définis lorsque  $Y$  est affine (2.8.7 et 2.8.8), et dans le cas général il suffit de vérifier qu'ils sont compatibles avec les opérations de restriction d'un ouvert affine de  $Y$  à un ouvert plus petit, ce qui résulte aussitôt de la commutativité de (3.5.1.1).

En particulier, pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , on a un homomorphisme canonique

$$(3.5.2.1) \quad \Phi^*(\mathcal{O}_{X'}(n)) \rightarrow \mathcal{O}_X(n)|G(\varphi).$$

*Proposition (3.5.3).* — Soient  $Y, Y'$  deux préschémas,  $\psi : Y' \rightarrow Y$  un morphisme,  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente, et posons  $\mathcal{S}' = \psi^*(\mathcal{S})$ . Alors le  $Y'$ -schéma  $X' = \text{Proj}(\mathcal{S}')$  s'identifie canoniquement à  $\text{Proj}(\mathcal{S}) \times_Y Y'$ . En outre, si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{S}$ -Module gradué quasi-cohérent, le  $\mathcal{O}_X$ -Module  $(\psi^*(\mathcal{M}))^\sim$  s'identifie à  $\widetilde{\mathcal{M}} \otimes_Y \mathcal{O}_Y$ .

Notons en premier lieu que  $\psi^*(\mathcal{S})$  et  $\psi^*(\mathcal{M})$  sont des  $\mathcal{O}_Y$ -Modules quasi-cohérents ainsi que leurs composants homogènes (0, 5.1.4). Soient  $U$  un ouvert affine de  $Y$ ,  $U' \subset \psi^{-1}(U)$  un ouvert affine de  $Y'$ ,  $A, A'$  les anneaux de  $U$  et  $U'$  respectivement; on a alors  $\mathcal{S}|U = \widetilde{S}$ , où  $S$  est une  $A$ -algèbre graduée, et  $\mathcal{S}'|U'$  s'identifie à  $(S \otimes_A A')^\sim$  (I, 1.6.5); la première assertion résulte alors de (2.8.10) et de (I, 3.2.6.2), car on vérifie aussitôt que la projection  $\text{Proj}(\mathcal{S}'|U') \rightarrow \text{Proj}(\mathcal{S}|U)$  définie par l'identification précédente est compatible avec les opérations de restrictions sur  $U$  et  $U'$  et définit donc bien un morphisme  $\text{Proj}(\mathcal{S}') \rightarrow \text{Proj}(\mathcal{S})$ . Soient maintenant

$$q : \text{Proj}(\mathcal{S}) \rightarrow Y, \quad q' : \text{Proj}(\mathcal{S}') \rightarrow Y'$$

les morphismes structuraux;  $q'^{-1}(U')$  s'identifie alors à  $q^{-1}(U) \times_U U'$ , et les deux faisceaux  $(\psi^*(\mathcal{M}))^\sim|q'^{-1}(U')$  et  $(\widetilde{\mathcal{M}} \otimes_Y \mathcal{O}_Y)|q'^{-1}(U')$  s'identifient alors canoniquement tous deux à  $(M \otimes_A A')^\sim$ , où on a posé  $M = \Gamma(U, \mathcal{M})$ , en vertu de (2.8.10) et (I, 1.6.5); d'où la seconde assertion, car on vérifie encore de façon immédiate la compatibilité des identifications précédentes avec les opérations de restriction.

*Corollaire (3.5.4).* — Avec les notations de (3.5.3),  $\mathcal{O}_{X'}(n)$  s'identifie canoniquement à  $\mathcal{O}_X(n) \otimes_Y \mathcal{O}_Y$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$  (avec  $X = \text{Proj}(\mathcal{S})$ ).

En effet, avec les notations de (3.5.3), il est clair que  $\psi^*(\mathcal{S}(n)) = \mathcal{S}'(n)$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ .

(3.5.5) Gardant les notations précédentes, désignons par  $\Psi$  la projection canonique  $X' \rightarrow X$ , et posons  $\mathcal{M}' = \psi^*(\mathcal{M})$ ; nous supposerons en outre que  $\mathcal{S}$  est engendrée par  $\mathcal{S}_1$

et que  $X$  est de type fini sur  $Y$ ; il en résulte alors que  $\mathcal{S}'$  est engendrée par  $\mathcal{S}'_1$  (comme on le voit en se ramenant au cas où  $Y$  et  $Y'$  sont affines) et que  $X'$  est de type fini sur  $Y'$  (**I**, 6.3.4). Soit  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module et posons  $\mathcal{F}' = \Psi^*(\mathcal{F})$ ; il résulte alors de (3.5.4) et de (0, 4.3.3) que l'on a  $\mathcal{F}'(n) = \Psi^*(\mathcal{F}(n))$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ . On définit en outre un  $\Psi$ -homomorphisme canonique  $\theta_n : q_*(\mathcal{F}(n)) \rightarrow q'_*(\mathcal{F}'(n))$  de la façon suivante : vu la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\Psi} & X' \\ q \downarrow & & \downarrow q' \\ Y & \xleftarrow{\psi} & Y' \end{array}$$

il s'agit de définir un homomorphisme  $q_*(\mathcal{F}(n)) \rightarrow \psi(q'_*(\Psi^*(\mathcal{F}(n)))) = q_*(\Psi^*(\Psi^*(\mathcal{F}(n))))$ , et il suffit de prendre l'homomorphisme  $\theta_n = q_*(\rho_n)$ , où  $\rho_n$  est l'homomorphisme canonique  $\mathcal{F}(n) \rightarrow \Psi^*(\Psi^*(\mathcal{F}(n)))$  (0, 4.4.3). Il est immédiat que pour tout ouvert affine  $U$  de  $Y$  et tout ouvert affine  $U'$  de  $Y'$  tel que  $U' \subset \psi^{-1}(U)$ , l'homomorphisme  $\theta_n$  donne pour les sections l'homomorphisme canonique (0, 3.7.2)  $\Gamma(q^{-1}(U), \mathcal{F}(n)) \rightarrow \Gamma(q'^{-1}(U'), \mathcal{F}'(n))$ . La commutativité de (2.8.13.2) montre alors que si  $\mathcal{F}$  est quasi-cohérent, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{F}' \\ \beta_{\mathcal{F}} \uparrow & & \uparrow \beta_{\mathcal{F}'} \\ (\Gamma_*(\mathcal{F}))^\sim & \xrightarrow{\tilde{\theta}} & (\Gamma_*(\mathcal{F}'))^\sim \end{array}$$

est commutatif (la flèche horizontale du haut étant le  $\Psi$ -morphisme canonique  $\mathcal{F} \rightarrow \Psi^*(\mathcal{F})$ ).

De même, la commutativité de (2.8.13.1) montre que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_*(\widetilde{\mathcal{M}}) & \xrightarrow{\theta} & \Gamma_*(\widetilde{\mathcal{M}'}) \\ \alpha_{\mathcal{M}} \uparrow & & \uparrow \alpha_{\mathcal{M}'} \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{M}' \end{array}$$

est commutatif (la flèche horizontale du bas étant le  $\psi$ -morphisme canonique  $\mathcal{M} \rightarrow \psi^*(\mathcal{M})$ ).

(3.5.6) Considérons maintenant deux préschémas  $Y, Y'$ , un morphisme  $g : Y' \rightarrow Y$ , une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre (resp.  $\mathcal{O}_{Y'}$ -Algèbre) graduée quasi-cohérente  $\mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{S}'$ ) et un  $g$ -morphisme d'Algèbres graduées  $u : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ , c'est-à-dire un  $\mathcal{O}_Y$ -homomorphisme d'Algèbres graduées  $\mathcal{S} \rightarrow g_*(\mathcal{S}')$ ; on sait d'ailleurs qu'il revient au même de se donner un  $\mathcal{O}_Y$ -homomorphisme d'Algèbres graduées  $u^\sharp : g^*(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{S}'$ . On déduit alors canoniquement de  $u^\sharp$  un  $Y'$ -morphisme  $W = \text{Proj}(u^\sharp) : G(u^\sharp) \rightarrow \text{Proj}(g^*(\mathcal{S}))$  où  $G(u^\sharp)$  est un ouvert de  $X' = \text{Proj}(\mathcal{S}')$  (3.5.1). D'autre part,  $X'' = \text{Proj}(g^*(\mathcal{S}))$  s'identifie

canoniquement à  $X \times_Y Y'$ , en posant  $X = \text{Proj}(\mathcal{S})$  (3.5.3); composant avec  $\text{Proj}(u^\#)$  la première projection  $p : X \times_Y Y' \rightarrow X$ , on obtient donc un morphisme  $v : G(u^\#) \rightarrow X$ , que nous désignerons par  $\text{Proj}(u)$ , et qui est tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G(u^\#) & \xrightarrow{v} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \xrightarrow{\vartheta} & Y \end{array}$$

soit commutatif.

En outre, pour tout  $\mathcal{O}_Y$ -Module gradué quasi-cohérent  $\mathcal{M}$ , on a un  $v$ -morphisme canonique

$$(3.5.6.1) \quad v : \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow (g^*(\mathcal{M}) \otimes_{g^*(\mathcal{S})} \mathcal{S}') \xrightarrow{\sim} |G(u^\#)|.$$

En effet,  $v^\#$  s'obtient en composant les homomorphismes

$$v^*(\widetilde{\mathcal{M}}) = w^*(p^*(\widetilde{\mathcal{M}})) \rightarrow w^*((g^*(\mathcal{M}))^\sim) \rightarrow (g^*(\mathcal{M}) \otimes_{g^*(\mathcal{S})} \mathcal{S}')^\sim \xrightarrow{\sim} |G(u^\#)|$$

où la première flèche provient de l'isomorphisme (3.5.3) et la seconde est l'homomorphisme (3.5.2, (i)); lorsque  $\mathcal{S}$  est engendrée par  $\mathcal{S}_1$ , il résulte de (3.5.2) que  $v^\#$  est un *isomorphisme*.

Comme cas particulier de (3.5.6.1), on a, pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , un  $v$ -morphisme canonique

$$(3.5.6.2) \quad v : \mathcal{O}_X(n) \rightarrow \mathcal{O}_{X'}(n) | G(u^\#).$$

### 3.6. Sous-préschémas fermés d'un préschéma $\text{Proj}(\mathcal{S})$ .

(3.6.1) Soient  $Y$  un préschéma,  $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  un homomorphisme de  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbres graduées quasi-cohérentes, de degré  $o$ . On dit que  $\varphi$  est **(TN)-surjectif** (resp. **(TN)-injectif**, **(TN)-bijectif**) s'il existe  $n$  tel que, pour  $k \geq n$ ,  $\varphi_k : \mathcal{S}_k \rightarrow \mathcal{S}'_k$  soit surjectif (resp. injectif, bijectif). Lorsqu'il en est ainsi on ramène l'étude du morphisme  $\Phi : \text{Proj}(\mathcal{S}') \rightarrow \text{Proj}(\mathcal{S})$  correspondant au cas où  $\varphi$  est *surjectif* (resp. *injectif*, *bijectif*). Cela se démontre comme dans (2.9.1) (qui en est le cas particulier correspondant à  $Y$  affine) en utilisant (3.1.8). Au lieu de dire que  $\varphi$  est **(TN)-bijectif**, on dit aussi que c'est alors un **(TN)-isomorphisme**.

*Proposition (3.6.2).* — Soient  $Y$  un préschéma,  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente, et soit  $X = \text{Proj}(\mathcal{S})$ .

(i) Si  $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  est un homomorphisme **(TN)-surjectif** de  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbres graduées, le morphisme correspondant  $\Phi = \text{Proj}(\varphi)$  (3.5.1) est défini dans  $\text{Proj}(\mathcal{S}')$  tout entier et est une immersion fermée de  $\text{Proj}(\mathcal{S}')$  dans  $X$ . Si  $\mathcal{J}$  est le noyau de  $\varphi$ , le sous-préschéma fermé de  $X$  associé à  $\Phi$  est défini par le faisceau d'idéaux quasi-cohérent  $\widetilde{\mathcal{J}}$  de  $\mathcal{O}_X$ .

(ii) Supposons en outre  $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_Y$ ,  $\mathcal{S}$  engendrée par  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_1$  de type fini. Soit  $X'$  un sous-préschéma fermé de  $X = \text{Proj}(\mathcal{S})$ , défini par un faisceau quasi-cohérent  $\mathcal{I}$  d'idéaux de  $\mathcal{O}_X$ . Soit  $\mathcal{J}$

le faisceau gradué quasi-cohérent d'idéaux de  $\mathcal{S}$ , image réciproque de  $\Gamma_{\bullet}(\mathcal{I})$  par l'homomorphisme canonique  $\alpha : \mathcal{S} \rightarrow \Gamma_{\bullet}(\mathcal{O}_X)$  (3.3.2), et posons  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}/\mathcal{J}$ . Alors  $X'$  est le sous-préschéma associé (I, 4.2.1) à l'immersion fermée  $\text{Proj}(\mathcal{S}') \rightarrow X$  correspondant à l'homomorphisme canonique  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$  de  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbres graduées.

(i) On peut supposer  $\varphi$  surjectif (3.6.1). Alors, pour tout ouvert affine  $U$  de  $Y$ ,  $\Gamma(U, \mathcal{S}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{S}')$  est surjectif (I, 1.3.9), donc (3.5.1) on a  $G(\varphi) = X$ . On est immédiatement ramené à démontrer la proposition lorsque  $Y$  est affine, et alors elle découle de (2.9.2, (i)).

(ii) On est ramené à prouver que l'homomorphisme  $\widetilde{\mathcal{J}} \rightarrow \mathcal{O}_X$  déduit de l'injection canonique  $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{S}$ , est un isomorphisme de  $\widetilde{\mathcal{J}}$  sur  $\mathcal{I}$ ; comme la question est locale sur  $Y$ , on peut supposer  $Y$  affine d'anneau  $A$ , ce qui entraîne  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ , où  $S$  est une  $A$ -algèbre graduée engendrée par  $S_1$ ,  $S_1$  étant de type fini sur  $A$ . Il suffit alors d'appliquer (2.9.2, (ii)).

*Corollaire (3.6.3).* — Sous les conditions de (3.6.2, (i)), et en supposant de plus  $\mathcal{S}$  engendrée par  $\mathcal{S}_1$ ,  $\Phi^*(\mathcal{O}_X(n))$  s'identifie canoniquement à  $\mathcal{O}_X(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

On a défini un tel isomorphisme canonique lorsque  $Y$  est affine (2.9.3); dans le cas général, il suffit de vérifier que les isomorphismes ainsi définis pour chaque ouvert affine  $U$  de  $Y$  sont compatibles avec le passage de  $U$  à un ouvert affine  $U' \subset U$ , ce qui est immédiat.

*Corollaire (3.6.4).* — Soient  $Y$  un préschéma,  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente engendrée par  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent,  $u$  un  $\mathcal{O}_Y$ -homomorphisme surjectif  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}_1$ ,  $\bar{u} : \mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{S}$  l'homomorphisme de  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbres graduées prolongeant  $u$  (I.7.4). Le morphisme correspondant à  $\bar{u}$  est alors une immersion fermée de  $\text{Proj}(\mathcal{S})$  dans  $\text{Proj}(\mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{M}))$ .

En effet,  $\bar{u}$  est surjectif par hypothèse et on applique (3.6.1, (i)).

### 3.7. Morphismes d'un préschéma dans un spectre homogène.

(3.7.1) Soient  $q : X \rightarrow Y$  un morphisme de préschémas,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible,  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente à degrés positifs;  $q^*(\mathcal{S})$  est alors une  $\mathcal{O}_X$ -Algèbre graduée quasi-cohérente à degrés positifs. Considérons la  $\mathcal{O}_X$ -Algèbre graduée quasi-cohérente  $\mathcal{S}' = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$ , et supposons donné un  $\mathcal{O}_X$ -homomorphisme d'Algèbres graduées

$$\psi : q^*(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{S}' = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$$

ce qui revient d'ailleurs à se donner un  $q$ -morphisme d'Algèbres graduées

$$\psi^* : \mathcal{S} \rightarrow q_*(\mathcal{S}').$$

On sait que  $\text{Proj}(\mathcal{S}')$  s'identifie canoniquement à  $X$  (3.1.7 et 3.1.8, (iii)); on déduit canoniquement de  $\psi$  un ensemble ouvert  $G(\psi)$  de  $X$  et un  $Y$ -morphisme

$$(3.7.1.1) \quad r_{\mathcal{L}, \psi} : G(\psi) \rightarrow \text{Proj}(\mathcal{S}) = P$$

que nous appellerons le morphisme *associé à  $\mathcal{L}$  et à  $\psi$* ; rappelons (3.5.6) que ce morphisme s'obtient en composant avec la première projection  $\pi : \text{Proj}(q^*(\mathcal{S})) = P \times_Y X \rightarrow P$  le Y-morphisme

$$\tau = \text{Proj}(\psi) : G(\psi) \rightarrow \text{Proj}(q^*(\mathcal{S})).$$

**(3.7.2)** Explicitons  $r = r_{\mathcal{L}, \psi}$  lorsque  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine, et par suite  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ , où  $S$  est une A-algèbre graduée à degrés positifs. Supposons d'abord que  $X = \text{Spec}(B)$  soit aussi affine et que l'on ait  $\mathcal{L} = \widetilde{L}$ , où  $L$  est un  $B$ -module libre de rang 1. On a alors  $q^*(\mathcal{S}) = (S \otimes_A B) \sim (\mathbf{I}, 1.6.5)$ ; si  $c$  est un générateur de  $L$ ,  $\psi_n : q^*(\mathcal{S}_n) \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes n}$  correspond à un homomorphisme  $w_n : s \otimes b \rightarrow bv_n(s)c^{\otimes n}$  de  $S_n \otimes_A B$  dans  $L^{\otimes n}$ , où  $v_n : S_n \rightarrow B$  est un homomorphisme de  $A$ -modules, les  $v_n$  constituant un homomorphisme d'algèbres  $S \rightarrow B$ . Soit  $f \in S_d$  ( $d > 0$ ) et posons  $g = v_d(f)$ ; on a  $\pi^{-1}(D_+(f)) = D_+(f \otimes 1)$  en vertu de (2.8.10) et de l'identification de  $D_+(f)$  à  $\text{Spec}(S_{(f)})$  (2.3.6); d'autre part, la formule (2.8.1.1) montre (compte tenu de l'identification canonique de  $X$  et de  $\text{Proj}(\mathcal{S})$ ) que

$$\tau^{-1}(D_+(f \otimes 1)) = D(g)$$

d'où

$$(3.7.2.1) \quad r^{-1}(D_+(f)) = D(g).$$

En outre, le morphisme  $\tau = \text{Proj}(\psi)$ , restreint à  $D(g)$ , correspond à l'homomorphisme qui applique  $(s \otimes 1)/(f \otimes 1)^n$  (pour  $s \in S_{nd}$ ) sur  $v_{nd}(s)/g^n$  (2.8.1), et la projection  $\pi$ , restreinte à  $D_+(f \otimes 1)$ , correspond à l'homomorphisme  $s/f^n \rightarrow (s \otimes 1)/(f \otimes 1)^n$ ; on en conclut que  $r$ , restreint à  $D(g)$ , correspond à l'homomorphisme de A-algèbres  $\omega : S_{(f)} \rightarrow B_g$  tel que  $\omega(s/f^n) = v_{nd}(s)/g^n$  pour  $s \in S_{nd}$  ( $n > 0$ ). Passant au cas où  $X$  est quelconque (Y étant toujours affine), on obtient donc, compte tenu de (2.8.1) :

*Proposition (3.7.3). — Si  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine et  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ , où  $S$  est une A-algèbre graduée, pour tout  $f \in S_d = \Gamma(Y, \mathcal{S}_d)$ , on a*

$$(3.7.3.1) \quad r_{\mathcal{L}, \psi}^{-1}(D_+(f)) = X_{\psi^b(f)} \quad (\text{où } \psi^b(f) \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes d}))$$

*et la restriction  $X_{\psi^b(f)} \rightarrow D_+(f) = \text{Spec}(S_{(f)})$  de  $r_{\mathcal{L}, \psi}$  correspond (I, 2.2.4) à l'homomorphisme d'algèbres*

$$(3.7.3.2) \quad \psi^b_{(f)} : S_{(f)} \rightarrow \Gamma(X_{\psi^b(f)}, \mathcal{O}_X)$$

*tel que, pour  $s \in S_{nd} = \Gamma(Y, \mathcal{S}_{nd})$*

$$(3.7.3.3) \quad \psi^b_{(f)}(s/f^n) = (\psi^b(s) | X_{\psi^b(f)})(\psi^b(f) | X_{\psi^b(f)})^{-n}.$$

Nous dirons que  $r_{\mathcal{L}, \psi}$  est *partout défini* si l'on a  $G(\psi) = X$ . Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit évidemment que  $G(\psi) \cap q^{-1}(U) = q^{-1}(U)$  pour tout ouvert affine  $U \subset Y$ ; autrement dit, la question est *locale* sur  $Y$ . Si  $Y$  est affine,  $G(\psi)$  est réunion des  $r^{-1}(D_+(f))$  pour  $f$  homogène dans  $S_+$  (2.8.1); en vertu de (3.7.3.1), les  $X_{\psi^b(f)}$  doivent donc former un *recouvrement* de  $X$ , autrement dit :

*Corollaire (3.7.4). — Sous les hypothèses de (3.7.3), pour que  $r_{\mathcal{L}, \psi}$  soit partout défini, il faut et il suffit que pour tout  $x \in X$ , il existe un entier  $n > 0$  et une section  $s$  de  $\mathcal{S}_n$  au-dessus de  $Y$  telle que si on pose  $t = \psi^b(s) \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ , on ait  $t(x) \neq 0$ .*

On notera que cette condition est toujours vérifiée si  $\psi$  est **(TN)-surjectif**.

De même, la question de savoir si  $r_{\mathcal{L},\psi}$  est *dominant* est locale sur  $Y$ , et l'on a :

*Corollaire (3.7.5).* — *Sous les hypothèses de (3.7.3), pour que  $r_{\mathcal{L},\psi}$  soit dominant, il faut et il suffit que, pour tout entier  $n > 0$ , toute section  $s \in S_n$  telle que  $\psi^b(s) \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$  soit localement nilpotente, soit elle-même nilpotente.*

On doit en effet exprimer que  $r_{\mathcal{L},\psi}^{-1}(D_+(s))$  n'est vide que si  $D_+(s)$  est vide, et le corollaire résulte donc de (3.7.3.1) et de (2.3.7).

*Proposition (3.7.6).* — *Soient  $q : X \rightarrow Y$  un morphisme,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible,  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}'$  deux  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbres graduées quasi-cohérentes,  $u : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$  un homomorphisme d'Algèbres graduées,  $\psi : q^*(\mathcal{S}) \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$  un homomorphisme d'Algèbres graduées,  $\psi' = \psi \circ q^*(u)$  l'homomorphisme composé. Si  $r_{\mathcal{L},\psi}$  est partout défini, il en est de même de  $r_{\mathcal{L},\psi}$ ; si  $u$  est **(TN)-surjectif** et si  $r_{\mathcal{L},\psi}$  est dominant, il en est de même de  $r_{\mathcal{L},\psi}$ ; inversement, si  $u$  est **(TN)-injectif** et si  $r_{\mathcal{L},\psi}$  est dominant,  $r_{\mathcal{L},\psi}$  est dominant.*

On a en effet  $G(\psi') \subset G(\psi)$  (2.8.4), d'où la première assertion; si  $u$  est **(TN)-surjectif**,  $\text{Proj}(u) : \text{Proj}(S) \rightarrow \text{Proj}(S')$  est partout défini et est une immersion fermée; comme  $r_{\mathcal{L},\psi}$  est composé de  $\text{Proj}(u)$  et de la restriction de  $r_{\mathcal{L},\psi}$  à  $G(\psi')$ , on en conclut que si  $r_{\mathcal{L},\psi}$  est dominant, il en est de même de  $r_{\mathcal{L},\psi}$ . Enfin, si  $u$  est **(TN)-injectif**, on sait que  $\text{Proj}(u)$  est un morphisme dominant de  $G(u)$  dans  $\text{Proj}(S')$  (2.8.3); comme  $G(\psi')$  est l'image réciproque de  $G(u)$  par  $r_{\mathcal{L},\psi}$ , on voit que si  $r_{\mathcal{L},\psi}$  est dominant, il en est de même de  $r_{\mathcal{L},\psi}$ .

*Proposition (3.7.7).* — *Soient  $Y$  un préschéma quasi-compact,  $q : X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-compact,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible,  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente, limite inductive filtrante d'un système inductif  $(\mathcal{S}^\lambda)$  de  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbres quasi-cohérentes. Soient  $\varphi_\lambda : \mathcal{S}^\lambda \rightarrow \mathcal{S}$  l'homomorphisme canonique,  $\psi : q^*(\mathcal{S}) \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$  un homomorphisme d'Algèbres graduées, et posons  $\psi_\lambda = \psi \circ q^*(\varphi_\lambda)$ . Pour que  $r_{\mathcal{L},\psi}$  soit partout défini, il faut et il suffit qu'il existe un  $\lambda$  tel que  $r_{\mathcal{L},\psi_\lambda}$  soit partout défini;  $r_{\mathcal{L},\psi_\mu}$  est alors partout défini pour  $\mu \geq \lambda$ .*

La condition est suffisante en vertu de (3.7.6). Inversement, supposons  $r_{\mathcal{L},\psi}$  partout défini; on peut se ramener au cas où  $Y$  est affine, car si pour tout ouvert affine  $U \subset Y$ , il existe  $\lambda(U)$  tel que la restriction de  $r_{\mathcal{L},\psi_\lambda(U)}$  à  $q^{-1}(U)$  soit partout définie, il suffira ( $Y$  étant quasi-compact) de recouvrir  $Y$  par un nombre fini d'ouverts affines  $U_i$ , et de prendre  $\lambda \geq \lambda(U_i)$  pour tous les indices  $i$ , en vertu de (3.7.6). Si  $Y$  est affine, l'hypothèse entraîne que pour tout  $x \in X$ , il y a une section  $s^{(x)}$  d'un  $S_n$  telle que, si on pose  $t^{(x)} = \psi^b(s^{(x)})$ , on ait  $t^{(x)}(x) \neq 0$  ( $t^{(x)}$  étant considérée comme section de  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  au-dessus de  $X$ ), ce qui entraîne  $t^{(x)}(z) \neq 0$  pour tout  $z$  dans un voisinage  $V(x)$  de  $x$ . Couvrons  $X$  par un nombre fini de  $V(x_i)$  et soient  $s^{(i)}$  les sections correspondantes de  $S$ ; il existe alors un  $\lambda$  tel que les  $s^{(i)}$  soient toutes de la forme  $\varphi_\lambda(s_\lambda^{(i)})$ , avec  $s_\lambda^{(i)} \in S^\lambda$  pour tous les  $i$ ; il résulte donc de (3.7.4) que  $r_{\mathcal{L},\psi_\lambda}$  est partout défini. La dernière assertion est conséquence triviale de (3.7.6).

*Corollaire (3.7.8).* — *Sous les hypothèses de (3.7.7), si les  $r_{\mathcal{L},\psi_\lambda}$  sont dominants, il en est de même de  $r_{\mathcal{L},\psi}$ ; la réciproque est vraie lorsque les  $\varphi_\lambda$  sont injectifs.*

La seconde assertion est un cas particulier de (3.7.6); d'autre part, pour montrer que  $r_{\mathcal{L}, \psi}$  est dominant, on peut se borner au cas où  $Y$  est affine; si  $s \in S$  est telle que  $\psi^b(s)$  soit localement nilpotente, comme on peut écrire  $s = \varphi_\lambda(s_\lambda)$  pour un  $\lambda$  au moins, on conclut de l'hypothèse et de (3.7.5) que  $s_\lambda$  est nilpotente, donc il en est de même de  $s$ , et le critère de (3.7.5) s'applique.

*Remarques (3.7.9).* — (i) Avec les notations de (3.7.1) et en tenant compte de (3.2.10), on a, pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , un homomorphisme canonique

$$(3.7.9.1) \quad \theta : r_{\mathcal{L}, \psi}^*(\mathcal{O}_P(n)) \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes n}$$

défini de façon générale dans (3.5.6.2). On voit aussitôt que sous les conditions de (3.7.3), la restriction de cet homomorphisme à  $X_{\psi^b(f)}$  s'explique comme faisant correspondre à  $s/f^k$  ( $s \in S_{n+ka}$ ) l'élément  $(\psi^b(s)|X_{\psi^b(f)})(\psi^b(f)|X_{\psi^b(f)})^{-k}$ .

(ii) Soit  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent, et supposons que  $q$  soit quasi-compact et séparé, de sorte que pour tout  $n \geq 0$ ,  $q_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$  soit un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent (I, 9.2.2). Soit  $\mathcal{M}' = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ , qui est un  $\mathcal{S}'$ -Module gradué quasi-cohérent, et considérons son image  $\mathcal{M} = q_*(\mathcal{M}') = \bigoplus_{n \geq 0} q_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$  (qui est un  $\mathcal{S}$ -Module quasi-cohérent, au moyen de l'homomorphisme  $\psi^b$ ). Nous allons voir qu'il y a un homomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_X$ -Modules

$$(3.7.9.2) \quad \xi : r_{\mathcal{L}, \psi}^*(\widetilde{\mathcal{M}}) \rightarrow \mathcal{F}|G(\psi).$$

En effet, on a défini (3.5.6.1) un homomorphisme canonique

$$(3.7.9.3) \quad r_{\mathcal{L}, \psi}^*(\widetilde{\mathcal{M}}) \rightarrow (q^*(\mathcal{M}) \otimes_{q^*(\mathcal{S})} \mathcal{S}') \sim |G(\psi),$$

où le second membre est considéré comme un faisceau quasi-cohérent sur  $\text{Proj}(\mathcal{S}')$ . D'autre part, on a un homomorphisme canonique

$$(3.7.9.4) \quad q^*(q_*(\mathcal{M}')) \otimes_{q^*(\mathcal{S})} \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{M}'$$

pour tout  $\mathcal{S}'$ -Module gradué quasi-cohérent  $\mathcal{M}'$ : pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , toute section  $t'$  de  $q^*(q_*(\mathcal{M}'))$  au-dessus de  $U$  et toute section  $b'$  de  $\mathcal{S}'_k$  au-dessus de  $U$ , on fait correspondre à  $t' \otimes b'$  la section  $b'\sigma(t')$  de  $\mathcal{M}'_{h+k}$ , où  $\sigma(t')$  est la section de  $\mathcal{M}'_h$  au-dessus de  $U$  qui correspond canoniquement (0, 4.4.3) à  $t'$ . On en conclut un homomorphisme canonique

$$(3.7.9.5) \quad (q^*(q_*(\mathcal{M}')) \otimes_{q^*(\mathcal{S})} \mathcal{S}') \sim |G(\psi) \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}|G(\psi)$$

et comme finalement  $\widetilde{\mathcal{M}}$  s'identifie canoniquement à  $\mathcal{F}$  (3.2.9, (i)), on obtient bien l'homomorphisme canonique cherché.

Sous les conditions de (3.7.3), la restriction de cet homomorphisme à  $X_{\psi^b(f)}$  s'explique de la façon suivante: étant donnée une section  $t_{nd}$  de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes nd}$  au-dessus de  $X$ , si  $t'_{nd}$  est la section  $t_{nd}$  considérée comme section de  $q_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$  au-dessus de  $Y$ , à l'élément  $t'_{nd}/f^n$  il correspond la section  $(t_{nd}|X_{\psi^b(f)})(\psi^b(f)|X_{\psi^b(f)})^{-n}$  de  $\mathcal{F}$  au-dessus de  $X_{\psi^b(f)}$ .

### 3.8. Critères d'immersion dans un spectre homogène.

(3.8.1) Avec les notations de (3.7.1), la question de savoir si  $r_{\varphi,\psi}$  est une immersion (resp. une immersion ouverte, une immersion fermée) est évidemment *locale sur Y*.

*Proposition (3.8.2).* — *Sous les hypothèses de (3.7.3), pour que  $r_{\varphi,\psi}$  soit partout définie et soit une immersion, il faut et il suffit qu'il existe une famille de sections  $s_\alpha \in S_{n_\alpha}$  ( $n_\alpha > 0$ ) telle que, si on pose  $f_\alpha = \psi^\flat(s_\alpha)$ , les conditions suivantes soient vérifiées :*

(i) *Les  $X_{f_\alpha}$  forment un recouvrement de X.*

(ii) *Les  $X_{f_\alpha}$  sont des ouverts affines.*

(iii) *Pour tout  $\alpha$  et tout  $t \in \Gamma(X_{f_\alpha}, \mathcal{O}_X)$ , il existe un entier  $m > 0$  et un  $s \in S_{mn_\alpha}$  tels que  $t = (\psi^\flat(s)|X_{f_\alpha})(f_\alpha|X_{f_\alpha})^{-m}$ .*

*Pour que  $r_{\varphi,\psi}$  soit partout définie et soit une immersion ouverte, il faut et il suffit qu'il existe une famille  $(s_\alpha)$  vérifiant les conditions (i), (ii), (iii) et :*

(iv) *Pour tout  $n > 0$  et tout  $s \in S_{nn_\alpha}$  tel que  $\psi^\flat(s)|X_{f_\alpha} = 0$ , il existe un entier  $k > 0$  tel que  $s_\alpha^k s = 0$ .*

*Pour que  $r_{\varphi,\psi}$  soit partout définie et soit une immersion fermée, il faut et il suffit qu'il existe une famille  $(s_\alpha)$  vérifiant (i), (ii), (iii) et :*

(v) *Les  $D_+(s_\alpha)$  forment un recouvrement de  $P = \text{Proj}(S)$ .*

En effet, pour que  $r$  soit une immersion (resp. une immersion fermée), il faut et il suffit qu'il existe un recouvrement de  $r(G(\psi))$  (resp. de  $P$ ) par des  $D_+(s_\alpha)$  tel que si on pose  $V_\alpha = r^{-1}(D_+(s_\alpha))$ , la restriction de  $r$  à  $U_\alpha$  soit une immersion fermée de  $V_\alpha$  dans  $D_+(s_\alpha)$  (I, 4.2.4). La condition (i) exprime à la fois que  $r$  est partout définie et que les  $D_+(s_\alpha)$  recouvrent  $r(X)$ , d'après (3.7.3.1); comme  $D_+(s_\alpha)$  est affine, les conditions (ii) et (iii) expriment que la restriction de  $r$  à  $X_{f_\alpha}$  est une immersion fermée dans  $D_+(s_\alpha)$ , d'après (I, 4.2.3); enfin, comme (iii) et (iv) expriment que  $\psi^\flat(s_\alpha)$  est bijective (notation de (3.7.3.2)), (ii), (iii) et (iv) expriment que la restriction de  $r$  à  $X_{f_\alpha}$  est un isomorphisme sur  $D_+(s_\alpha)$  pour tout  $\alpha$ , donc (i), (ii), (iii) et (iv) expriment que  $r$  est une immersion ouverte.

*Corollaire (3.8.3).* — *Sous les hypothèses de (3.7.6), si  $r_{\varphi,\psi}$  est partout définie et est une immersion, il en est de même de  $r_{\varphi,\psi}$ . Si on suppose en outre que  $u$  est (TN)-surjectif et si  $r_{\varphi,\psi}$  est une immersion ouverte (resp. fermée), il en est de même de  $r_{\varphi,\psi}$ .*

En effet, d'après (3.8.2), il y a une famille de  $s'_\alpha \in S'_{n_\alpha}$  telle que si on pose  $f'_\alpha = \psi'^\flat(s'_\alpha)$ , les conditions (i), (ii), (iii) soient vérifiées. Or, si on pose  $s_\alpha = u(s'_\alpha)$ , on a aussi  $f_\alpha = \psi^\flat(s_\alpha)$ , et si on a  $t = (\psi'^\flat(s')|X_{f'_\alpha})(f'_\alpha|X_{f'_\alpha})^{-m}$ , on a aussi  $t = (\psi^\flat(s)|X_{f_\alpha})(f_\alpha|X_{f_\alpha})^{-m}$  en posant  $s = u(s')$ , d'où la première assertion. La seconde résulte aussitôt de ce que  $\text{Proj}(u)$  est une immersion fermée.

*Proposition (3.8.4).* — *Supposons vérifiées les hypothèses de (3.7.7) et en outre que  $q : X \rightarrow Y$  soit un morphisme de type fini. Alors, pour que  $r_{\varphi,\psi}$  soit partout définie et soit une immersion, il faut et il suffit qu'il existe  $\lambda$  tel que  $r_{\varphi,\psi_\lambda}$  soit partout définie et soit une immersion et dans ce cas  $r_{\varphi,\psi_\mu}$  est partout définie et est une immersion pour  $\mu \geq \lambda$ .*

Compte tenu de (3.8.3), il suffit de démontrer que si  $r_{\mathcal{L}, \psi}$  est partout définie et est une immersion, il en est de même de  $r_{\mathcal{L}, \varphi_\lambda}$  pour un  $\lambda$  au moins. Par le même raisonnement que dans (3.7.7), utilisant la quasi-compacité de  $Y$ , on se ramène d'abord au cas où  $Y$  est affine. Comme  $X$  est quasi-compact, (3.8.2) montre l'existence d'une famille finie  $(s_i)$  d'éléments de  $S$  ( $s_i \in S_{n_i}$ ) ayant les propriétés (i), (ii) et (iii). Le morphisme  $X_{f_i} \rightarrow Y$  (où  $f_i = \psi^b(s_i)$ ) est de type fini : en effet, c'est un morphisme de schémas affines, donc il est quasi-compact (I, 6.6.1), et localement de type fini puisque  $q$  est de type fini (I, 6.3.2), et la conclusion résulte de (I, 6.6.3). L'anneau  $B_i$  de  $X_{f_i}$  est par suite une  $A$ -algèbre de type fini (I, 6.3.3) ; soit  $(t_{ij})$  une famille de générateurs de cette algèbre. Il y a par hypothèse des éléments  $s'_{ij} \in S_{m_{ij} n_i}$  tels que

$$t_{ij} = (\psi^b(s'_{ij}) | X_{f_i})(\psi^b(s_i) | X_{f_i})^{-m_{ij}}.$$

Il y a par hypothèse un  $\lambda$  et des éléments  $s_{i\lambda} \in S_{n_i}^\lambda$ ,  $s'_{ij\lambda} \in S_{m_{ij} n_i}^\lambda$  dont les images par  $\varphi_\lambda$  sont respectivement  $s_i$  et  $s'_{ij}$  ; il est clair que  $r_{\mathcal{L}, \varphi_\lambda}$  vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) de (3.8.2).

*Proposition (3.8.5).* — Soient  $Y$  un schéma quasi-compact, ou un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien,  $q : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible,  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente,  $\psi : q^*(\mathcal{S}) \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$  un homomorphisme d'Algèbres graduées. Pour que  $r_{\mathcal{L}, \psi}$  soit partout défini et soit une immersion, il faut et il suffit qu'il existe un entier  $n > 0$  et un sous- $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent de type fini  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{S}_n^1$ , tels que :

a) l'homomorphisme  $\psi_n \circ q^*(j_n) : q^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes n}$  (où  $j_n : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$  est l'injection canonique) soit surjectif ;

b) si on désigne par  $\mathcal{S}'$  la sous- $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre (graduée) de  $\mathcal{S}$  engendrée par  $\mathcal{E}$ , par  $\psi'$  l'homomorphisme  $\psi \circ q^*(j')$  ( $j'$  injection de  $\mathcal{S}'$  dans  $\mathcal{S}$ ),  $r_{\mathcal{L}, \psi}$  soit partout défini et soit une immersion.

Lorsqu'il en est ainsi, tout sous- $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{E}'$  de  $\mathcal{S}_n^1$ , contenant  $\mathcal{E}$ , possède la même propriété, et il en est de même de l'image de  $\bigotimes^k \mathcal{E}$  dans  $\mathcal{S}_{kn}^1$  pour tout  $k > 0$ .

La suffisance de la condition et les deux dernières assertions sont des cas particuliers de (3.8.3), compte tenu de l'isomorphie canonique entre  $\text{Proj}(\mathcal{S})$  et  $\text{Proj}(\mathcal{S}^{(k)})$  (3.1.8).

Soit  $(U_i)$  un recouvrement ouvert fini de  $Y$  par des ouverts affines et posons  $A_i = A(U_i)$ . Comme  $q^{-1}(U_i)$  est compact, l'hypothèse que  $r_{\mathcal{L}, \psi}$  est une immersion partout définie et (3.8.2) entraînent l'existence d'une famille finie  $(s_{ij})$  d'éléments de  $S^{(i)} = \Gamma(U_i, \mathcal{S})$  ( $s_{ij} \in S_{n_{ij}}^{(i)}$ ) ayant les propriétés (i), (ii), (iii). On voit comme dans la démonstration de (3.8.4) que le morphisme  $X_{f_{ij}} \rightarrow U_i$  (où  $f_{ij} = \psi^b(s_{ij})$ ) est de type fini, et l'anneau  $B_{ij}$  de  $X_{f_{ij}}$  est par suite une  $A_i$ -algèbre de type fini, ayant un système de générateurs de la forme  $(\psi^b(t_{ijk}) | X_{f_{ij}})(f_{ij} | X_{f_{ij}})^{-m_{ijk}}$ , où  $t_{ijk} \in S_{m_{ijk} n_{ij}}^{(i)}$ . Soit  $n$  un multiple commun des  $m_{ijk} n_{ij}$  ; remplaçant (pour chaque  $(i, j, k)$ )  $s_{ij}$  par une puissance  $s_{ij}^p$  telle que  $p m_{ijk} n_{ij} = n$ , et multipliant  $t_{ijk}$  par  $s_{ij}^{p-m_{ijk}}$ , on peut supposer que pour chaque  $i$  tous les  $s_{ij}$  et  $t_{ijk}$  appartiennent à  $S_n^{(i)}$  et que  $m_{ijk} = 1$ . Soit  $E_i$  le sous- $A_i$ -Module de  $S^{(i)}$  engendré par ces éléments (pour  $i$  fixé). Il existe un sous- $\mathcal{O}_Y$ -Module cohérent de type

fini  $\mathcal{E}_i$  de  $\mathcal{S}_n$  tel que  $\mathcal{E}_i|_{U_i} = (E_i)^\sim$  (I, 9.4.7). Il est clair que le sous- $\mathcal{O}_Y$ -Module  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{S}_n$ , somme des  $\mathcal{E}_i$ , répond à la question (chaque section  $f_{ij}$  étant telle que pour tout  $x \in X_{ij}$ , il y a un voisinage affine  $V \subset X_{ij}$  de  $x$  tel que  $f|V$  soit une base de  $\Gamma(V, \mathcal{L}^{\otimes n})$ .

## § 4. FIBRÉS PROJECTIFS. FAISCEAUX AMPLES

### 4.1. Définition des fibrés projectifs.

**Définition (4.1.1).** — Soient  $Y$  un préschéma,  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent,  $\mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E})$  la  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre symétrique de  $\mathcal{E}$  (1.7.4) qui est quasi-cohérente (1.7.7). On appelle fibré projectif sur  $Y$  défini par  $\mathcal{E}$  et on note  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  le  $Y$ -schéma  $P = \text{Proj}(\mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E}))$ . Le  $\mathcal{O}_P$ -Module  $\mathcal{O}_P(1)$  est appelé le faisceau fondamental sur  $P$ .

Lorsque  $Y$  est affine d'anneau  $A$ , on a  $\mathcal{E} = \widetilde{E}$ , où  $E$  est un  $A$ -module, et on écrit alors  $\mathbf{P}(E)$  au lieu de  $\mathbf{P}(\widetilde{E})$ .

Lorsque l'on prend  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_Y^n$ , on écrit  $\mathbf{P}_Y^{n-1}$  au lieu de  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ ; si de plus  $Y$  est affine d'anneau  $A$ , on écrit aussi  $\mathbf{P}_A^{n-1}$  au lieu de  $\mathbf{P}_Y^{n-1}$ . Comme  $\mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y)$  s'identifie canoniquement à  $\mathcal{O}_Y[T]$  (1.7.4),  $\mathbf{P}_Y^0$  s'identifie canoniquement à  $Y$  (3.1.7); l'exemple (2.4.3) n'est autre que  $\mathbf{P}_K^1$ .

**(4.1.2)** Soient  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  deux  $\mathcal{O}_Y$ -Modules quasi-cohérents;  $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -homomorphisme; il lui correspond canoniquement un homomorphisme  $\mathbf{S}(u) : \mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F})$  de  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbres graduées (1.7.4). Si  $u$  est *surjectif*, il en est de même de  $\mathbf{S}(u)$ , et par suite (3.6.2, (i)),  $\text{Proj}(\mathbf{S}(u))$  est une *immersion fermée*  $\mathbf{P}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E})$ , que nous noterons  $\mathbf{P}(u)$ . On peut donc dire que  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  est un *foncteur contravariant* en  $\mathcal{E}$ , à condition de ne prendre pour morphismes des  $\mathcal{O}_Y$ -Modules quasi-cohérents que les homomorphismes *surjectifs*.

En supposant toujours  $u$  surjectif et posant  $P = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ ,  $Q = \mathbf{P}(\mathcal{F})$  et  $j = \mathbf{P}(u)$ , on a, à un isomorphisme près,

$$(4.1.2.1) \quad j^*(\mathcal{O}_P(n)) = \mathcal{O}_Q(n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{Z}$$

comme il résulte de (3.6.3).

**(4.1.3)** Soit maintenant  $\psi : Y' \rightarrow Y$  un morphisme, et soit  $\mathcal{E}' = \psi^*(\mathcal{E})$ ; on a alors  $\mathbf{S}_{\mathcal{O}_{Y'}}(\mathcal{E}') = \psi^*(\mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E}))$  (1.7.5); par suite (3.5.3), on a

$$(4.1.3.1) \quad \mathbf{P}(\psi^*(\mathcal{E})) = \mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_Y Y'$$

à un isomorphisme canonique près; en outre, on a évidemment

$$\psi^*((\mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E}))(n)) = (\mathbf{S}_{\mathcal{O}_{Y'}}(\mathcal{E}'))(n)$$

pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , donc, en posant  $P = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ ,  $P' = \mathbf{P}(\mathcal{E}')$ , on a (3.5.4), à un isomorphisme près,

$$(4.1.3.2) \quad \mathcal{O}_{P'}(n) = \mathcal{O}_P(n) \otimes_Y \mathcal{O}_{Y'} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{Z}.$$

*Proposition (4.1.4).* — Soit  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -Module inversible. Pour tout  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{E}$ , il existe un  $Y$ -isomorphisme canonique  $i_{\mathcal{L}} : \mathbf{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L})$ ; en outre, si l'on pose  $P = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ ,  $Q = \mathbf{P}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L})$ ,  $i_{\mathcal{L}}(\mathcal{O}_Q(n))$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{O}_P(n) \otimes_Y \mathcal{L}^{\otimes n}$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ .

Remarquons d'abord que si  $A$  est un anneau,  $E$  un  $A$ -module,  $L$  un  $A$ -module monogène libre, on définit canoniquement un homomorphisme de  $A$ -modules

$$\mathbf{S}_n(E \otimes L) \rightarrow \mathbf{S}_n(E) \otimes L^{\otimes n}$$

en faisant correspondre à  $(x_1 \otimes y_1) \dots (x_n \otimes y_n)$  l'élément

$$(x_1 x_2 \dots x_n) \otimes (y_1 \otimes y_2 \otimes \dots \otimes y_n) \quad (x_i \in E, y_i \in L \text{ pour } 1 \leq i \leq n);$$

on vérifie immédiatement (en se ramenant au cas où  $L = A$ ) que cet homomorphisme est en fait un isomorphisme. On en conclut un isomorphisme canonique de  $A$ -algèbres graduées  $\mathbf{S}_A(E \otimes L) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n \geq 0} \mathbf{S}_n(E) \otimes L^{\otimes n}$ . En revenant aux conditions de (4.1.4), les remarques précédentes permettent de définir un isomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbres graduées

$$(4.1.4.1) \quad \mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n \geq 0} \mathbf{S}_n(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L}^{\otimes n}$$

en définissant cet isomorphisme comme un isomorphisme de préschéaux et tenant compte de (1.7.4), (I, 1.3.9) et (I, 1.3.12). La proposition résulte alors de (3.1.8, (iii)) et (3.2.10).

(4.1.5) Avec les hypothèses de (4.1.1), posons  $P = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ , et désignons par  $p$  le morphisme structural  $P \rightarrow Y$ . Comme on a par définition  $\mathcal{E} = (\mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E}))_1$ , on a un homomorphisme canonique  $\alpha_1 : \mathcal{E} \rightarrow p_*(\mathcal{O}_P(1))$  (3.3.2.2) et par suite aussi (0, 4.4.3) un homomorphisme canonique

$$(4.1.5.1) \quad \alpha_1^\sharp : p^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{O}_P(1).$$

*Proposition (4.1.6).* — L'homomorphisme canonique (4.1.5.1) est surjectif.

En effet, on a vu dans (3.3.2) que  $\alpha_1^\sharp$  correspond fonctoriellement à l'homomorphisme canonique  $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E}) \rightarrow (\mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E}))(1)$ ; comme par définition  $\mathcal{E}$  engendre  $\mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E})$ , cet homomorphisme est surjectif, d'où la conclusion en vertu de (3.2.4).

## 4.2. Morphismes d'un préschéma dans un fibré projectif.

(4.2.1) Gardant les notations de (4.1.5), soient  $X$  un  $Y$ -préschéma,  $q : X \rightarrow Y$  le morphisme structural, et soit  $r : X \rightarrow P$  un  $Y$ -morphisme, de sorte que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} P & \xleftarrow{r} & X \\ p \downarrow & \swarrow q & \\ Y & & \end{array}$$

Comme le foncteur  $r^*$  est exact à droite (0, 4.3.1), on déduit de l'homomorphisme (4.1.5.1), qui est surjectif (4.1.6) un homomorphisme surjectif

$$r^*(\alpha_I^\sharp) : r^*(p^*(\mathcal{E})) \rightarrow r^*(\mathcal{O}_P(I)).$$

Mais  $r^*(p^*(\mathcal{E})) = q^*(\mathcal{E})$ , et  $r^*(\mathcal{O}_P(I))$  est localement isomorphe à  $r^*(\mathcal{O}_P) = \mathcal{O}_X$ , autrement dit c'est un faisceau *inversible*  $\mathcal{L}$ , sur  $\mathcal{O}_X$ , et on a ainsi défini à partir de  $r$  un  $\mathcal{O}_X$ -homomorphisme canonique *surjectif*

$$(4.2.1.1) \quad \varphi_r : q^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}_r.$$

Lorsque  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine, et  $\mathcal{E} = \widetilde{E}$  on explicite encore cet homomorphisme de la façon suivante : étant donné  $f \in E$ , il résulte d'abord de (2.6.3) que l'on a

$$(4.2.1.2) \quad r^{-1}(D_+(f)) = X_{\varphi_r(f)}.$$

D'autre part, soit  $V$  un ouvert affine de  $X$  contenu dans  $r^{-1}(D_+(f))$ , et soit  $B$  son anneau, qui est une  $A$ -algèbre ; posons  $S = S_A(E)$  ; la restriction de  $r$  à  $V$  correspond à un  $A$ -homomorphisme  $\omega : S_{(f)} \rightarrow B$ , on a  $q^*(\mathcal{E})|V = (E \otimes_A B)^\sim$  et  $\mathcal{L}_r|V = \widetilde{L}_r$ , où  $L_r = (S(I))_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} B_{[\omega]}$  (I, 1.6.5). La restriction de  $\varphi_r$  à  $q^*(\mathcal{E})|V$  correspond au  $B$ -homomorphisme  $u : E \otimes_A B \rightarrow L_r$ , qui transforme  $x \otimes 1$  en  $(x/1) \otimes f = (f/1) \otimes \omega(x/f)$ . L'extension canonique de  $\varphi_r$  en un homomorphisme de  $\mathcal{O}_X$ -Algèbres

$$\psi_r : q^*(S(\mathcal{E})) = S(q^*(\mathcal{E})) \rightarrow S(\mathcal{L}_r) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}_r^{\otimes n}$$

est donc telle que la restriction de  $\psi_r$  à  $q^*(S_n(\mathcal{E}))|V$  correspond à l'homomorphisme  $S_n(\mathcal{E} \otimes_A B) = S_n(E) \otimes_A B \rightarrow L_r^{\otimes n}$  qui transforme  $s \otimes 1$  en  $(f/1)^{\otimes n} \otimes \omega(s/f^n)$ .

(4.2.2) Inversement, supposons donnés un morphisme  $q : X \rightarrow Y$ , un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible  $\mathcal{L}$  et un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{E}$  ; à un homomorphisme  $\varphi : q^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}$  correspond canoniquement un homomorphisme de  $\mathcal{O}_X$ -Algèbres quasi-cohérentes

$$\psi : S(q^*(\mathcal{E})) = q^*(S(\mathcal{E})) \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$$

et par suite (3.7.1) un  $Y$ -morphisme  $r_{\mathcal{L}, \psi} : G(\psi) \rightarrow \text{Proj}(S(\mathcal{E})) = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ , que nous noterons  $r_{\mathcal{L}, \varphi}$ . Si  $\varphi$  est *surjectif*, il en est de même de  $\psi$ , donc (3.7.4)  $r_{\mathcal{L}, \varphi}$  est *partout défini*. En outre, avec les notations de (4.2.1) et (4.2.2) :

*Proposition (4.2.3).* — Étant donnés un morphisme  $q : X \rightarrow Y$  et un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{E}$ , les applications  $r \mapsto (\mathcal{L}_r, \varphi_r)$  et  $(\mathcal{L}, \varphi) \mapsto r_{\mathcal{L}, \varphi}$  mettent en correspondance biunivoque l'ensemble des  $Y$ -morphismes  $r : X \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E})$  et l'ensemble des classes d'équivalence des couples  $(\mathcal{L}, \varphi)$  formés d'un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible  $\mathcal{L}$  et d'un homomorphisme surjectif  $\varphi : q^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}$ , deux couples  $(\mathcal{L}, \varphi)$ ,  $(\mathcal{L}', \varphi')$  étant équivalents s'il existe un  $\mathcal{O}_X$ -isomorphisme  $\tau : \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'$  tel que  $\varphi' = \tau \circ \varphi$ .

Partons d'abord d'un  $Y$ -morphisme  $r : X \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E})$ , formons  $\mathcal{L}_r$  et  $\varphi_r$  (4.2.1), puis  $r' = r_{\mathcal{L}, \varphi_r}$  ; il résulte aussitôt de (4.2.1) et de (3.7.2) que les morphismes  $r$  et  $r'$  sont identiques (en prenant pour générateur de  $\mathcal{L}_r$ , l'élément  $(f/1) \otimes 1$  pour définir les homomorphismes  $v_n$  de (3.7.2)). Inversement, partons d'un couple  $(\mathcal{L}, \varphi)$  et formons

$r'' = r_{\mathcal{L}, \varphi}$ , puis  $\mathcal{L}_{r''}$  et  $\varphi_{r''}$ ; montrons qu'il y a un isomorphisme canonique  $\tau : \mathcal{L}_{r''} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$  tel que  $\varphi = \tau \circ \varphi_{r''}$ ; pour le définir on peut se placer dans le cas où  $Y = \text{Spec}(A)$  et  $X = \text{Spec}(B)$  sont affines, et (avec les notations de (4.2.1) et de (3.7.2)) faire correspondre à tout élément  $(x/1) \otimes 1$  de  $L_{r''}$  (avec  $x \in E$ ) l'élément  $v_1(x)c$  de  $L$ . On vérifie aussitôt que  $\tau$  ne dépend pas du générateur choisi  $c$  de  $L$ ; comme  $v_1$  est par hypothèse surjectif, pour prouver que  $\tau$  est un isomorphisme, il suffit de voir que si  $x/1 = 0$  dans  $(S(1))_{(f)}$ , on a  $v_1(x)/1 = 0$  dans  $B_g$ ; mais la première relation signifie que  $f^n x = 0$  dans  $S_{n+1}(E)$  pour un certain  $n$ , et on en déduit que  $v_{n+1}(f^n x) = g^n v_1(x) = 0$  dans  $B$ , d'où la conclusion. Enfin, il est immédiat que pour deux couples équivalents  $(\mathcal{L}, \varphi)$ ,  $(\mathcal{L}', \varphi')$ , on a  $r_{\mathcal{L}, \varphi} = r_{\mathcal{L}', \varphi'}$ .

En particulier, pour  $X = Y$ :

**Théorème (4.2.4).** — *L'ensemble des Y-sections de  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  est en correspondance biunivoque canonique avec l'ensemble des sous- $\mathcal{O}_Y$ -Modules quasi-cohérents  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{E}$  tels que  $\mathcal{E}/\mathcal{F}$  soit inversible.*

On notera que cette propriété correspond à la définition classique de l'« espace projectif » comme ensemble des hyperplans d'un espace vectoriel (le cas classique correspondant à  $Y = \text{Spec}(K)$ , où  $K$  est un corps, et  $\mathcal{E} = \widetilde{E}$ ,  $E$  étant un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie; les  $\mathcal{F}$  ayant la propriété énoncée dans (4.2.4) correspondent alors aux hyperplans de  $E$ , et on sait d'autre part que les Y-sections de  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  sont alors les *points de  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  rationnels sur  $K$*  (I, 3.4.5)).

**Remarque (4.2.5).** — Comme il y a correspondance biunivoque canonique entre Y-morphismes de  $X$  dans  $P$  et leurs morphismes graphes, X-sections de  $P \times_Y X$  (I, 3.3.14), on voit qu'inversement (4.2.3) peut se déduire de (4.2.4). Désignons par  $\text{Hyp}_Y(X, \mathcal{E})$  l'ensemble des sous- $\mathcal{O}_X$ -Modules quasi-cohérents  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{E} \otimes_Y \mathcal{O}_X = q^*(\mathcal{E})$  tels que  $q^*(\mathcal{E})/\mathcal{F}$  soit un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible. Si  $g : X' \rightarrow X$  est un Y-morphisme, il résulte du fait que  $g^*$  est exact à droite que l'on a  $g^*(q^*(\mathcal{E})/\mathcal{F}) = g^*(q^*(\mathcal{E}))/g^*(\mathcal{F})$ , donc que ce dernier faisceau est inversible, et par suite  $\text{Hyp}_Y(X, \mathcal{E})$  est un *foncteur contravariant* dans la catégorie des Y-préschémas. On peut alors interpréter le th. (4.2.4) comme définissant un *isomorphisme canonique* des foncteurs  $\text{Hom}_Y(X, \mathbf{P}(\mathcal{E}))$  et  $\text{Hyp}_Y(X, \mathcal{E})$  contravariants en  $X$  variable dans la catégorie des Y-préschémas. Ceci fournit aussi une caractérisation du fibré projectif  $P = \mathbf{P}(\mathcal{E})$  par la *propriété universelle* suivante, plus proche de l'intuition géométrique que les constructions des §§ 2 et 3 : pour tout morphisme  $q : X \rightarrow Y$  et tout  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible  $\mathcal{L}$ , quotient de  $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ , il existe un Y-morphisme unique  $r : X \rightarrow P$  tel que  $\mathcal{L} = r^*(\mathcal{O}_P(1))$ .

On verra plus tard comment on peut de la même manière définir, entre autres, les schémas « grassmanniennes ».

**Corollaire (4.2.6).** — *Supposons que tout  $\mathcal{O}_Y$ -Module inversible soit trivial (I, 2.4.8). Soit  $V$  le groupe  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_Y)$ , considéré comme module sur l'anneau  $A = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ , et soit  $V^*$  le sous-ensemble de  $V$  formé des homomorphismes surjectifs. Alors l'ensemble des Y-sections de  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  s'identifie canoniquement à  $V^*/A^*$ , où  $A^*$  est le groupe des unités de  $A$ .*

En particulier :

1<sup>o</sup> Le corollaire (4.2.6) s'applique lorsque  $Y$  est un *schéma local* (**I**, 2.4.8). Soient  $Y$  un préschéma quelconque,  $y$  un point de  $Y$ ,  $Y' = \text{Spec}(\mathbf{k}(y))$ ; la fibre  $p^{-1}(y)$  de  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  est, en vertu de (4.1.3.1), identifiée à  $\mathbf{P}(\mathcal{E}^y)$ , où  $\mathcal{E}^y = \mathcal{E}_y \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathbf{k}(y) = \mathcal{E}_y / \mathfrak{m}_y \mathcal{E}_y$  est considéré comme espace vectoriel sur  $\mathbf{k}(y)$ . Plus généralement, si  $K$  est une extension de  $\mathbf{k}(y)$ ,  $p^{-1}(y) \otimes_{\mathbf{k}(y)} K$  s'identifie à  $\mathbf{P}(\mathcal{E}^y \otimes_{\mathbf{k}(y)} K)$ . Le cor. (4.2.6) montre donc que l'ensemble des *points géométriques de  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  à valeurs dans l'extension  $K$  de  $\mathbf{k}(y)$*  (**I**, 3.4.5), que l'on peut encore appeler *fibre géométrique rationnelle sur  $K$  de  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  au-dessus du point  $y$* , s'identifie à l'*espace projectif associé au dual* du  $K$ -espace vectoriel  $\mathcal{E}^y \otimes_{\mathbf{k}(y)} K$ .

2<sup>o</sup> Supposons que  $Y$  soit affine d'anneau  $A$ , et en outre que tout  $\mathcal{O}_Y$ -Module inversible soit trivial; prenons en outre  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_Y^n$ ; alors, dans (4.2.6),  $V$  s'identifie à  $A^n$  (**I**, 1.3.8),  $V^*$  à l'ensemble des systèmes  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  d'éléments de  $A$  engendrant l'idéal  $A$ ; deux tels systèmes définissent la même  $Y$ -section de  $\mathbf{P}_Y^{n-1} = \mathbf{P}_A^{n-1}$ , autrement dit *le même point de  $\mathbf{P}_A^{n-1}$  à valeurs dans  $A$  si et seulement si l'un se déduit de l'autre par multiplication par un élément inversible de  $A$* .

Ces propriétés justifient la terminologie de « fibré projectif » pour  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ . On notera que la définition que nous obtenons ainsi de l'*espace projectif* est en fait *duale* de la définition classique; cela nous est imposé par la nécessité de pouvoir définir  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  pour un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{E}$ , non nécessairement localement libre.

*Remarque (4.2.7).* — Nous verrons au chapitre V que si  $Y$  est localement noethérien et connexe, et si  $\mathcal{E}$  est localement libre, alors, en posant  $P = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ , tout  $\mathcal{O}_P$ -Module inversible  $\mathcal{L}$  est isomorphe à un  $\mathcal{O}_P$ -Module de la forme  $\mathcal{L}' \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_P(m)$ , où  $\mathcal{L}'$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -Module inversible, bien déterminé à un isomorphisme près, et  $m$  un entier bien déterminé. En d'autres termes,  $H^1(P, \mathcal{O}_P^*)$  est isomorphe à  $\mathbf{Z} \times H^1(Y, \mathcal{O}_Y^*)$  (**0**, 5.4.7). Nous verrons aussi (**III**, 2.1.14, compte tenu de (**0**, 5.4.10)) que  $p_*(\mathcal{L}^{\otimes m}) = 0$  si  $m < 0$  et que  $p_*(\mathcal{L}^{\otimes m})$  est isomorphe à  $\mathcal{L}' \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E}))_m$  si  $m \geq 0$ . Si  $\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent, tout  $Y$ -morphisme  $\mathbf{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{F})$  est donc déterminé par la donnée d'un  $\mathcal{O}_Y$ -Module inversible  $\mathcal{L}'$ , d'un entier  $m \geq 0$  et d'un  $\mathcal{O}_Y$ -homomorphisme  $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}' \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E}))_m$ , tel que l'homomorphisme correspondant  $\psi^\sharp$  de  $\mathcal{O}_{P(\mathcal{F})}$ -Modules soit surjectif. Nous verrons aussi que si le  $Y$ -morphisme considéré est un isomorphisme, alors  $m = 1$  et  $\mathcal{F}$  est isomorphe à  $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L}'$  (réciproque de (4.1.4)). Ceci permettra de déterminer le faisceau des germes d'automorphismes de  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  comme quotient du faisceau de groupes  $\mathcal{A}ut(\mathcal{E})$  (localement isomorphe à  $\mathbf{GL}(n, \mathcal{O}_Y)$  si  $\mathcal{E}$  est de rang  $n$ ) par  $\mathcal{O}_Y^*$ .

**(4.2.8)** Conservant les notations de (4.2.1), soit  $u : X' \rightarrow X$  un morphisme; si le  $Y$ -morphisme  $r : X \rightarrow P$  correspond à l'homomorphisme  $\varphi : q^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}$ , le  $Y$ -morphisme  $rou$  correspond à  $u^*(\varphi) : u^*(q^*(\mathcal{E})) \rightarrow u^*(\mathcal{L})$ , comme il résulte aussitôt des définitions.

**(4.2.9)** Soient  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  deux  $\mathcal{O}_Y$ -Modules quasi-cohérents,  $v : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  un homomorphisme surjectif,  $j = \mathbf{P}(v)$  l'immersion fermée correspondante  $\mathbf{P}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E})$  (4.1.2). Si le  $Y$ -morphisme  $r : X \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{F})$  correspond à l'homomorphisme  $\varphi : q^*(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{L}$ , le

Y-morphisme  $j \circ r$  correspond à  $q^*(\mathcal{E}) \xrightarrow{q^*(v)} q^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{L}$ ; cela résulte encore de la définition donnée en (4.2.1).

(4.2.10) Soit  $\psi : Y' \rightarrow Y$  un morphisme, et posons  $\mathcal{E}' = \psi^*(\mathcal{E})$ . Si le Y-morphisme  $r : X \rightarrow P$  correspond à l'homomorphisme  $\varphi : q^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}$ , le Y'-morphisme

$$r_{(Y')} : X_{(Y')} \rightarrow P' = \mathbf{P}(\mathcal{E}')$$

correspond à  $\varphi_{(Y')} : q_{(Y')}^*(\mathcal{E}') = q^*(\mathcal{E}) \otimes_Y \mathcal{O}_{Y'} \rightarrow \mathcal{L} \otimes_Y \mathcal{O}_{Y'}$ . En effet, en vertu de (4.1.3.1), on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} Y' & \xleftarrow{p_{(Y')}} & P' = P_{(Y')} & \xleftarrow{r_{(Y')}} & X_{(Y')} \\ \downarrow & & \downarrow u & & \downarrow v \\ Y & \xleftarrow[p]{} & P & \xleftarrow[r]{} & X \end{array}$$

D'après (4.1.3.2), on a

$$(r_{(Y')})^*(\mathcal{O}_{P'}(1)) = (r_{(Y')})^*(u^*(\mathcal{O}_P(1))) = v^*(r^*(\mathcal{O}_P(1))) = v^*(\mathcal{L}) = \mathcal{L} \otimes_Y \mathcal{O}_Y$$

d'autre part,  $u^*(\alpha_1^\sharp)$  n'est autre que l'homomorphisme canonique  $\alpha_1^\sharp : (p_{(Y')})^*(\mathcal{E}') \rightarrow \mathcal{O}_{P'}(1)$ ; cela se voit en explicitant les homomorphismes canoniques  $\alpha_i^\sharp$  dans  $P$  et  $P'$  comme dans (4.1.6). D'où notre assertion.

### 4.3. Le morphisme de Segre.

(4.3.1) Soient  $Y$  un préschéma,  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  deux  $\mathcal{O}_Y$ -Modules quasi-cohérents; posons  $P_1 = \mathbf{P}(\mathcal{E}), P_2 = \mathbf{P}(\mathcal{F})$ , et désignons par  $p_1 : P_1 \rightarrow Y, p_2 : P_2 \rightarrow Y$  les morphismes structuraux. Soit  $Q = P_1 \times_Y P_2$ , et soient  $q_1 : Q \rightarrow P_1, q_2 : Q \rightarrow P_2$  les projections canoniques; le  $\mathcal{O}_Q$ -Module  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{P_1}(1) \otimes_Y \mathcal{O}_{P_2}(1) = q_1^*(\mathcal{O}_{P_1}(1)) \otimes_{\mathcal{O}_Q} q_2^*(\mathcal{O}_{P_2}(1))$  est inversible comme produit tensoriel de deux  $\mathcal{O}_Q$ -Modules inversibles (0, 5.4.4). D'autre part, si  $r = p_1 \circ q_1 = p_2 \circ q_2$  est le morphisme structural  $Q \rightarrow Y$ , on a  $r^*(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F}) = q_1^*(p_1^*(\mathcal{E})) \otimes_{\mathcal{O}_Q} q_2^*(p_2^*(\mathcal{F}))$  (0, 4.3.3); les homomorphismes canoniques surjectifs (4.1.5.1) :  $p_1^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{O}_{P_1}(1), p_2^*(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{O}_{P_2}(1)$  donnent donc, par produit tensoriel, un homomorphisme canonique

$$(4.3.1.1) \quad s : r^*(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{L}$$

évidemment surjectif; on en déduit donc (4.2.2) un morphisme canonique, dit *morphisme de Segre* :

$$(4.3.1.2) \quad \varsigma : \mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_Y \mathbf{P}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F}).$$

Explicitons le morphisme  $\varsigma$  lorsque  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine,  $\mathcal{E} = \widetilde{E}, \mathcal{F} = \widetilde{F}$ ,  $E$  et  $F$  étant deux  $A$ -modules, d'où  $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F} = (E \otimes_A F) \sim (\mathbf{I}, 1.3.12)$ ; posons  $R = \mathbf{S}_A(E)$ ,  $S = \mathbf{S}_A(F)$ ,  $T = \mathbf{S}_A(E \otimes_A F)$ ; soient  $f \in E, g \in F$ , et considérons l'ouvert affine

$$D_+(f) \times_Y D_+(g) = \text{Spec}(B)$$

de  $Q$ , où  $B = R_{(f)} \otimes_A S_{(g)}$ ; la restriction de  $\mathcal{L}$  à cet ouvert affine est  $\widetilde{L}$ , où

$$L = (R(I))_{(f)} \otimes_A (S(I))_{(g)}$$

et l'élément  $c = (f/I) \otimes (g/I)$  est un générateur de  $L$  considéré comme  $B$ -module libre (2.5.7). L'homomorphisme (4.3.1.1) correspond à l'homomorphisme

$$(x \otimes y) \otimes b \rightarrow b((x/I) \otimes (y/I))$$

de  $(E \otimes_A F) \otimes_A B$  dans  $L$ . Avec les notations de (3.7.2), on a donc  $v_1(x \otimes y) = (x/f) \otimes (y/g)$ ; la restriction de  $\varsigma$  à  $D_+(f) \times_Y D_+(g)$  est un morphisme de ce schéma affine dans  $D_+(f \otimes g)$ , correspondant à l'homomorphisme d'anneaux  $\omega : T_{(f \otimes g)} \rightarrow R_{(f)} \otimes_A S_{(g)}$  tel que

$$(4.3.1.3) \quad \omega((x \otimes y)/(f \otimes g)) = (x/f) \otimes (y/g)$$

pour  $x \in E$  et  $y \in F$ .

(4.3.2) Il résulte de (4.2.3) que l'on a un isomorphisme canonique

$$(4.3.2.1) \quad \tau : \varsigma^*(\mathcal{O}_P(I)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{P_1}(I) \otimes_Y \mathcal{O}_{P_2}(I)$$

où on a posé  $P = P(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F})$ . Montrons que, pour  $x \in \Gamma(Y, \mathcal{E})$  et  $y \in \Gamma(Y, \mathcal{F})$ , on a

$$(4.3.2.2) \quad \tau(\alpha_1(x \otimes y)) = \alpha_1(x) \otimes \alpha_1(y).$$

En effet, on est ramené au cas où  $Y$  est affine, et on a alors, avec les notations de (4.3.1) et de (2.6.2),  $\alpha_1^{f \otimes g}(x \otimes y) = (x \otimes y)/I$  dans  $(T(I))_{(f \otimes g)}$ ,  $\alpha_1^f(x) = x/I$  dans  $(R(I))_{(f)}$  et  $\alpha_1^g(y) = y/I$  dans  $(S(I))_{(g)}$ . La définition de  $\tau$  donnée dans (4.2.3) et le calcul de  $v_1$  fait dans (4.3.1) prouvent alors aussitôt (4.3.2.2). On en déduit la formule

$$(4.3.2.3) \quad \varsigma^{-1}(P_{x \otimes y}) = (P_1)_x \times_Y (P_2)_y$$

avec les notations de (3.1.4). En effet, compte tenu de (3.3.3), la formule (4.3.2.2) ramène (en revenant au cas affine, à l'aide de (I, 3.2.7 et 3.2.3)) à prouver le lemme suivant :

*Lemme (4.3.2.4).* — Soient  $B, B'$  deux  $A$ -algèbres, et soient  $Y = \text{Spec}(A)$ ,  $Z = \text{Spec}(B)$ ,  $Z' = \text{Spec}(B')$ ; quels que soient  $t \in B$ ,  $t' \in B'$ , on a  $D(t \otimes t') = D(t) \times_Y D(t')$ .

En effet, si  $p : Z \times_Y Z' \rightarrow Z$  et  $p' : Z \times_Y Z' \rightarrow Z'$  sont les projections canoniques, il résulte de (I, 1.2.2.2) que l'on a  $p^{-1}(D(t)) = D(t \otimes 1)$  et  $p'^{-1}(D(t')) = D(1 \otimes t')$ ; la conclusion résulte de (I, 3.2.7) et (I, 1.1.9.1), puisque  $(t \otimes 1)(1 \otimes t') = t \otimes t'$ .

*Proposition (4.3.3).* — Le morphisme de Segre est une immersion fermée.

En effet, la question étant locale sur  $Y$ , on est ramené au cas où  $Y$  est affine. Avec les notations de (4.3.1) et (4.3.2), les  $D_+(f \otimes g)$  forment alors une base de la topologie de  $P$ , puisque les  $f \otimes g$  engendrent  $T$  lorsque  $f$  parcourt  $E$  et  $g$  parcourt  $F$ . D'autre part, on a en vertu de (4.3.2.3)  $\varsigma^{-1}(D_+(f \otimes g)) = D_+(f) \times_Y D_+(g)$ . Il suffit donc (I, 4.2.4) de prouver que la restriction de  $\varsigma$  à  $D_+(f) \times_Y D_+(g)$  est une immersion fermée dans  $D_+(f \otimes g)$ . Or, avec les mêmes notations, la formule (4.3.1.3) montre que  $\omega$  est *surjectif*, ce qui termine la démonstration.

(4.3.4) Le morphisme de Segre est *fonctoriel* en  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$ , lorsqu'on restreint les

homomorphismes de  $\mathcal{O}_Y$ -Modules quasi-cohérents aux homomorphismes *surjectifs*. Il faut en effet montrer que si  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -homomorphisme surjectif, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(\mathcal{E}') \times \mathbf{P}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{j \times 1} & \mathbf{P}(\mathcal{E}) \times \mathbf{P}(\mathcal{F}) \\ \downarrow \varsigma & & \downarrow \varsigma \\ \mathbf{P}(\mathcal{E}' \otimes \mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathbf{P}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) \end{array}$$

est commutatif,  $j$  désignant l'immersion fermée canonique  $\mathbf{P}(\mathcal{E}') \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E})$ . Posons  $P'_1 = \mathbf{P}(\mathcal{E}')$  et gardons par ailleurs les notations de (4.3.1);  $j \times 1$  est une immersion fermée (I, 4.3.1) et on a, à des isomorphismes près,

$$(j \times 1)^*(\mathcal{O}_{P_1}(1) \otimes \mathcal{O}_{P_2}(1)) = j^*(\mathcal{O}_{P_1}(1)) \otimes \mathcal{O}_{P_2}(1) = \mathcal{O}_{P'_1}(1) \otimes \mathcal{O}_{P_2}(1)$$

en vertu de (4.1.2.1) et de (I, 9.1.5); notre assertion résulte donc de (4.2.8) et (4.2.9).

(4.3.5) Avec les notations de (4.3.1), soit  $\psi : Y' \rightarrow Y$  un morphisme, et posons  $\mathcal{E}' = \psi^*(\mathcal{E})$ ,  $\mathcal{F}' = \psi^*(\mathcal{F})$ ; alors le morphisme de Segre  $\mathbf{P}(\mathcal{E}') \times \mathbf{P}(\mathcal{F}') \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E}' \otimes \mathcal{F}')$  s'identifie à  $\varsigma_{(Y')}$ . En effet, gardant les notations de (4.3.1), posons par ailleurs  $P'_1 = \mathbf{P}(\mathcal{E}')$ ,  $P'_2 = \mathbf{P}(\mathcal{F}')$ ; on sait (4.1.3.1) que  $P'_i$  s'identifie à  $(P_i)_{(Y')}$  ( $i = 1, 2$ ), donc le morphisme structural  $P'_1 \times P'_2 \rightarrow Y'$  s'identifie à  $r_{(Y')}$ . D'autre part,  $\mathcal{E}' \otimes \mathcal{F}'$  s'identifie à  $\psi^*(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ , donc  $\mathbf{P}(\mathcal{E}' \otimes \mathcal{F}')$  s'identifie à  $(\mathbf{P}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}))_{(Y')}$  (4.1.3.1). Enfin,  $\mathcal{O}_{P'_1}(1) \otimes_{Y'} \mathcal{O}_{P'_2}(1) = \mathcal{L}'$  s'identifie à  $\mathcal{L} \otimes_Y \mathcal{O}_Y$  en vertu de (4.1.3.2) et de (I, 9.1.11). L'homomorphisme canonique  $(r_{(Y')})^*(\mathcal{E}' \otimes \mathcal{F}') \rightarrow \mathcal{L}'$  s'identifie alors à  $s_{(Y')}$ , et notre assertion résulte de (4.2.10).

*Remarque (4.3.6).* — Le préschéma *somme* de  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  et  $\mathbf{P}(\mathcal{F})$  est de même canoniquement isomorphe à un *sous-préschéma fermé* de  $\mathbf{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{F})$ . En effet, les homomorphismes surjectifs  $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  correspondent à des immersions fermées  $\mathbf{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{F})$ ,  $\mathbf{P}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{F})$ ; tout revient à voir que les espaces sous-jacents des sous-préschémas fermés de  $\mathbf{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{F})$  ainsi obtenus sont sans point commun. La question étant locale sur  $Y$ , on peut adopter les notations de (4.3.1); or  $\mathbf{S}_n(E)$  et  $\mathbf{S}_n(F)$  s'identifient à des sous-modules de  $\mathbf{S}_n(E \oplus F)$  d'intersection réduite à 0; et si  $p$  est un idéal premier gradué de  $\mathbf{S}(E)$  tel que  $p \cap \mathbf{S}_n(E) \neq \mathbf{S}_n(E)$  pour tout  $n \geq 0$ , il lui correspond dans  $\mathbf{S}(E \oplus F)$  un idéal premier gradué dont la trace sur  $\mathbf{S}_n(E)$  est  $p \cap \mathbf{S}_n(E)$ , mais qui contient  $\mathbf{S}_+(F)$ , comme on le voit aussitôt; deux points de  $\text{Proj}(\mathbf{S}(E))$  et  $\text{Proj}(\mathbf{S}(F))$  respectivement ne peuvent donc avoir même image dans  $\text{Proj}(\mathbf{S}(E \oplus F))$ .

#### 4.4. Immersions dans les fibrés projectifs. Faisceaux très amples.

*Proposition (4.4.1).* — Soient  $Y$  un schéma quasi-compact, ou un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien,  $q : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible.

(i) Soient  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente à degrés positifs,  $\psi : q^*(\mathcal{S}) \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$  un homomorphisme d'Algèbres graduées. Pour que  $r_{\mathcal{L}, \psi}$  soit partout défini et soit une immersion, il faut et

il suffit qu'il existe un entier  $n \geq 0$ , un sous- $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent de type fini  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{S}_n$ , tels que l'homomorphisme  $\psi' = \psi_n \circ q^*(j) : q^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes n} = \mathcal{L}'$  ( $j$  étant l'injection  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}_n$ ) soit surjectif et que le morphisme  $r_{\mathcal{L}', \psi'} : X \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E})$  soit une immersion.

(ii) Soient  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent,  $\varphi : q^*(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{L}$  un homomorphisme surjectif. Pour que le morphisme  $r_{\mathcal{L}, \varphi}$  soit une immersion  $X \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{F})$ , il faut et il suffit qu'il existe un sous- $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent de type fini  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{F}$  tel que l'homomorphisme  $\varphi' = \varphi \circ q(j) : q^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}$  (où  $j : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est l'injection canonique) soit surjectif et que  $r_{\mathcal{L}, \varphi} : X \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E})$  soit une immersion.

(i) Le fait que  $r_{\mathcal{L}, \psi}$  soit partout défini et soit une immersion équivaut d'après (3.8.5) à l'existence de  $n \geq 0$  et de  $\mathcal{E}$  tels que, si  $\mathcal{S}'$  est la sous-algèbre de  $\mathcal{S}$  engendrée par  $\mathcal{E}$ , l'homomorphisme  $q^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes n}$  soit surjectif et que  $r_{\mathcal{L}, \psi} : X \rightarrow \mathrm{Proj}(\mathcal{S}')$  soit partout défini et soit une immersion. On a d'autre part un homomorphisme canonique surjectif  $\mathbf{S}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{S}'$  auquel correspond une immersion fermée  $\mathrm{Proj}(\mathcal{S}') \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E})$  (3.6.2); d'où la conclusion.

(ii) Comme  $\mathcal{F}$  est limite inductive de ses sous-Modules quasi-cohérents de type fini  $\mathcal{E}_\lambda$  (I, 9.4.9),  $\mathbf{S}(\mathcal{F})$  est limite inductive des  $\mathbf{S}(\mathcal{E}_\lambda)$ ; la conclusion résulte alors de (3.8.4), en observant que, dans la démonstration de (3.8.4), on peut prendre tous les  $n_i$  égaux à 1 : en effet ( $Y$  étant supposé affine), si  $r = r_{\mathcal{L}, \psi}$  est une immersion,  $r(X)$  est un sous-espace quasi-compact de  $\mathbf{P}(\mathcal{F})$  que l'on peut recouvrir par un nombre fini d'ouverts de  $\mathbf{P}(\mathcal{F})$  de la forme  $D_+(f)$  avec  $f \in F$ , tels que  $D_+(f) \cap r(X)$  soit fermé.

*Définition (4.4.2).* — Soient  $Y$  un préschéma,  $q : X \rightarrow Y$  un morphisme. On dit qu'un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible  $\mathcal{L}$  est très ample pour  $q$  (ou très ample pour  $Y$ , ou simplement très ample si aucune confusion n'en résulte) s'il existe un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{E}$  et une  $Y$ -immersion  $i$  de  $X$  dans  $P = \mathbf{P}(\mathcal{E})$  tels que  $\mathcal{L}$  soit isomorphe à  $i^*(\mathcal{O}_P(1))$ .

Il revient au même (4.2.3) de dire qu'il existe un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{E}$  et un homomorphisme surjectif  $\varphi : q^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}$  tels que  $r_{\mathcal{L}, \varphi} : X \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E})$  soit une immersion.

On notera que l'existence d'un  $\mathcal{O}_X$ -Module très ample relativement à  $Y$  implique que  $q$  est séparé ((3.1.3) et (I, 5.5.1, (i) et (ii))).

*Corollaire (4.4.3).* — Supposons qu'il existe une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente  $\mathcal{S}$  engendrée par  $\mathcal{S}_1$ , et une  $Y$ -immersion  $i : X \rightarrow P = \mathrm{Proj}(\mathcal{S})$  telle que  $\mathcal{L}$  soit isomorphe à  $i^*(\mathcal{O}_P(1))$ ; alors  $\mathcal{L}$  est très ample relativement à  $q$ .

En effet, si  $\mathcal{F} = \mathcal{S}_1$ , l'homomorphisme canonique  $\mathbf{S}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{S}$  est surjectif, donc, en composant l'immersion fermée correspondante  $\mathrm{Proj}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{F})$  (3.6.2) et l'immersion  $i$ , on obtient une immersion  $j : X \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{F}) = P'$  telle que  $\mathcal{L}$  soit isomorphe à  $j^*(\mathcal{O}_{P'}(1))$  (3.6.3).

*Proposition (4.4.4).* — Soient  $q : X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-compact,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a)  $\mathcal{L}$  est très ample relativement à  $q$ .

b)  $q_*(\mathcal{L})$  est quasi-cohérent, l'homomorphisme canonique  $\sigma : q^*(q_*(\mathcal{L})) \rightarrow \mathcal{L}$  est surjectif, et le morphisme  $r_{\mathcal{L}, \sigma} : X \rightarrow \mathbf{P}(q_*(\mathcal{L}))$  est une immersion.

Comme  $q$  est quasi-compact, on sait que  $q_*(\mathcal{L})$  est quasi-cohérent si  $q$  est séparé (I, 9.2.2).

On sait (3.4.7) que l'existence d'un homomorphisme surjectif  $\varphi : q^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}$  ( $\mathcal{E}$  étant un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent) entraîne que  $\sigma$  est surjectif; en outre, à la factorisation  $q^*(\mathcal{E}) \rightarrow q^*(q_*(\mathcal{L})) \xrightarrow{\circ} \mathcal{L}$  de  $\varphi$  correspond canoniquement une factorisation

$$q^*(\mathbf{S}(\mathcal{E})) \rightarrow q^*(\mathbf{S}(q_*(\mathcal{L}))) \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$$

donc (3.8.3) l'hypothèse que  $r_{\mathcal{L}, \varphi}$  est une immersion entraîne qu'il en est de même de  $j = r_{\mathcal{L}, \sigma}$ ; en outre (4.2.4),  $\mathcal{L}$  est isomorphe à  $j^*(\mathcal{O}_{P'}(1))$  en posant  $P' = \mathbf{P}(q_*(\mathcal{L}))$ . On voit donc que a) et b) sont équivalents.

*Corollaire (4.4.5).* — *Supposons  $q$  quasi-compact. Pour que  $\mathcal{L}$  soit très ample relativement à  $Y$ , il faut et il suffit qu'il existe un recouvrement ouvert  $(U_\alpha)$  de  $Y$  tel que  $\mathcal{L}|_{q^{-1}(U_\alpha)}$  soit très ample relativement à  $U_\alpha$  pour tout  $\alpha$ .*

En effet, la condition b) de (4.4.4) est locale sur  $Y$ .

*Proposition (4.4.6).* — *Soient  $Y$  un schéma quasi-compact, ou un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien,  $q : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible. Les conditions a) et b) de (4.4.4) sont alors équivalentes aux suivantes :*

a') *Il existe un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent de type fini  $\mathcal{E}$  et un homomorphisme surjectif  $\varphi : q^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{L}$  tel que  $r_{\mathcal{L}, \varphi}$  soit une immersion.*

b') *Il existe un sous- $\mathcal{O}_Y$ -Module cohérent de type fini  $\mathcal{E}$  de  $q_*(\mathcal{L})$  ayant les propriétés énoncées dans a').*

Il est clair que a') ou b') implique a); d'autre part a) implique a') en vertu de (4.4.1) et de même b) implique b').

*Corollaire (4.4.7).* — *Supposons que  $Y$  soit un schéma quasi-compact ou un préschéma noethérien. Si  $\mathcal{L}$  est très ample pour  $q$ , il existe une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente  $\mathcal{S}$ , telle que  $\mathcal{S}_1$  soit de type fini et engendre  $\mathcal{S}$ , et une  $Y$ -immersion ouverte dominante  $i : X \rightarrow P = \text{Proj}(\mathcal{S})$  telle que  $\mathcal{L}$  soit isomorphe à  $i^*(\mathcal{O}_P(1))$ .*

En effet, la condition b') de (4.4.6) est vérifiée; le morphisme structural  $p : \mathbf{P}(\mathcal{E}) = P' \rightarrow Y$  est alors séparé et de type fini (3.1.3), donc  $P'$  est un schéma quasi-compact (resp. un préschéma noethérien) si  $Y$  est un schéma quasi-compact (resp. un préschéma noethérien). Soit  $Z$  l'adhérence (I, 9.5.11) du sous-préschéma  $X'$  de  $P'$  associé à l'immersion  $j = r_{\mathcal{L}, \varphi}$  de  $X$  dans  $P'$ ; il est clair que  $j$  se factorise en l'injection canonique  $Z \rightarrow P'$  et en une immersion ouverte dominante  $i : X \rightarrow Z$ . Mais  $Z$  s'identifie à un préschéma  $\text{Proj}(\mathcal{S})$ , où  $\mathcal{S}$  est une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quotient de  $\mathbf{S}(\mathcal{E})$  par un faisceau quasi-cohérent gradué d'idéaux (3.6.2), et il est clair que  $\mathcal{S}_1$  est de type fini et engendre  $\mathcal{S}$ ; en outre  $\mathcal{O}_Z(1)$  est l'image réciproque de  $\mathcal{O}_{P'}(1)$  par l'injection canonique (3.6.3), donc  $\mathcal{L} = i^*(\mathcal{O}_Z(1))$ .

*Proposition (4.4.8).* — *Soient  $q : X \rightarrow Y$  un morphisme,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module très ample relativement à  $q$ ,  $\mathcal{L}'$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible tel qu'il existe un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{E}'$  et un homomorphisme surjectif  $q^*(\mathcal{E}') \rightarrow \mathcal{L}'$ . Alors  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}'$  est très ample relativement à  $q$ .*

En effet, l'hypothèse entraîne l'existence d'un  $Y$ -morphisme  $r' : X \rightarrow P' = \mathbf{P}(\mathcal{E}')$  tel que  $\mathcal{L}' = r'^*(\mathcal{O}_{P'}(1))$  (4.2.1). Il y a par hypothèse un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{E}$  et une

Y-immersion  $r : X \rightarrow P = \mathbf{P}(\mathcal{E})$  telle que  $\mathcal{L} = r^*(\mathcal{O}_P(1))$ . Posons  $Q = \mathbf{P}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}')$  et considérons le morphisme de Segre  $\varsigma : P \times_Y P' \rightarrow Q$  (4.3.1). Comme  $r$  est une immersion, il en est de même de  $(r, r')_Y : X \rightarrow P \times_Y P'$  (**I**, 5.3.14); mais  $\varsigma$  étant une immersion (4.3.3), il en est de même de  $r'' : X \xrightarrow{(r, r')} P \times_Y P' \xrightarrow{\varsigma} Q$ . D'autre part (4.3.2.1),  $\varsigma^*(\mathcal{O}_Q(1))$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_P(1) \otimes_{\mathcal{O}_{P'}} \mathcal{O}_P(1)$ , donc (**I**, 9.1.4),  $r''^*(\mathcal{O}_Q(1))$  est isomorphe à  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ , ce qui démontre la proposition.

*Corollaire (4.4.9).* — Soit  $q : X \rightarrow Y$  un morphisme.

(i) Soient  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible,  $\mathcal{K}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -Module inversible. Pour que  $\mathcal{L}$  soit très ample relativement à  $q$ , il faut et il suffit que  $\mathcal{L} \otimes q^*(\mathcal{K})$  le soit.

(ii) Si  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  sont deux  $\mathcal{O}_X$ -Modules très amples relativement à  $q$ , il en est de même de  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ ; en particulier  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  est très ample relativement à  $q$  pour tout  $n > 0$ .

(ii) est conséquence immédiate de (4.4.8), ainsi que la nécessité de la condition (i); d'autre part, si  $\mathcal{L} \otimes q^*(\mathcal{K})$  est très ample, il en est de même de  $(\mathcal{L} \otimes q^*(\mathcal{K})) \otimes q^*(\mathcal{K}^{-1})$  d'après ce qui précède, et ce dernier  $\mathcal{O}_X$ -Module est isomorphe à  $\mathcal{L}$  (**0**, 5.4.3 et 5.4.5).

*Proposition (4.4.10).* — (i) Pour tout préschéma  $Y$ , tout  $\mathcal{O}_Y$ -Module inversible  $\mathcal{L}$  est très ample relativement au morphisme identique  $1_Y$ .

(i bis) Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme,  $j : X' \rightarrow X$  une immersion. Si  $\mathcal{L}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -Module très ample relativement à  $f$ ,  $j^*(\mathcal{L})$  est très ample relativement à  $f \circ j$ .

(ii) Soient  $Z$  un préschéma quasi-compact,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini,  $g : Y \rightarrow Z$  un morphisme quasi-compact,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module très ample relativement à  $f$ ,  $\mathcal{K}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -Module très ample relativement à  $g$ . Alors il existe un entier  $n_0 > 0$  tel que  $\mathcal{L} \otimes f^*(\mathcal{K}^{\otimes n})$  soit très ample relativement à  $g \circ f$  pour tout  $n \geq n_0$ .

(iii) Soient  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y' \rightarrow Y$  deux morphismes, et posons  $X' = X_{(Y')}$ . Si  $\mathcal{L}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -Module très ample relativement à  $f$ ,  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'}$  est un  $\mathcal{O}_{X'}$ -Module très ample relativement à  $f_{(Y')}$ .

(iv) Soient  $f_i : X_i \rightarrow Y_i$  ( $i = 1, 2$ ) deux S-morphismes. Si  $\mathcal{L}_i$  est un  $\mathcal{O}_{X_i}$ -Module très ample relativement à  $f_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $\mathcal{L}_1 \otimes_S \mathcal{L}_2$  est très ample relativement à  $f_1 \times_S f_2$ .

(v) Soient  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  deux morphismes. Si un  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\mathcal{L}$  est très ample relativement à  $g \circ f$ , alors  $\mathcal{L}$  est très ample relativement à  $f$ .

(vi) Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme,  $j$  l'injection canonique  $X_{\text{red}} \rightarrow X$ . Si  $\mathcal{L}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -Module très ample relativement à  $f$ , alors  $j^*(\mathcal{L})$  est très ample relativement à  $f_{\text{red}}$ .

La propriété (i bis) découle aussitôt de la définition (4.4.2) et il est immédiat que (vi) se déduit formellement de (i bis) et de (v) par un raisonnement calqué sur celui de (**I**, 5.5.12), que nous laissons au lecteur. Pour démontrer (v), considérons, comme dans (**I**, 5.5.12), la factorisation  $X \xrightarrow{\Gamma_f} X \times_Z Y \xrightarrow{p_2} Y$ , en notant que  $p_2 = (g \circ f) \times 1_Y$ . Il résulte de l'hypothèse et de (i) et (iv) que  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_Y$  est très ample pour  $p_2$ ; d'autre part, on a  $\mathcal{L} = \Gamma_f^*(\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_Y)$  (**I**, 9.1.4), et  $\Gamma_f$  est une immersion (**I**, 5.3.11); on peut donc appliquer (i bis).

Pour prouver (i), on applique la définition (4.4.2) avec  $\mathcal{E} = \mathcal{L}$ , en notant qu'alors  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  s'identifie à  $Y$  (4.1.4).

Démontrons (iii). Il existe un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{E}$  et une  $Y$ -immersion  $i : X \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E}) = P$  telle que  $\mathcal{L} = i^*(\mathcal{O}_P(1))$ ; alors, si on pose  $\mathcal{E}' = g^*(\mathcal{E})$ ,  $\mathcal{E}'$  est un  $\mathcal{O}_{Y'}$ -Module quasi-cohérent et on a  $P' = \mathbf{P}(\mathcal{E}') = P_{(Y')}$  (4.1.3.1),  $i_{(Y')}$  est une immersion de  $X_{(Y')}$  dans  $P'$  (I, 4.3.2) et  $\mathcal{L}'$  est isomorphe à  $(i_{(Y')})^*(\mathcal{O}_{P'}(1))$  (4.2.10).

Pour prouver (iv), remarquons qu'il y a par hypothèse une  $Y_i$ -immersion  $r_i : X_i \rightarrow P_i = \mathbf{P}(\mathcal{E}_i)$ , où  $\mathcal{E}_i$  est un  $\mathcal{O}_{Y_i}$ -Module quasi-cohérent, et  $\mathcal{L}_i = r_i^*(\mathcal{O}_{P_i}(1))$  ( $i = 1, 2$ );  $r_1 \times_S r_2$  est une  $S$ -immersion de  $X_1 \times_S X_2$  dans  $P_1 \times_S P_2$  (I, 4.3.1) et l'image réciproque de  $\mathcal{O}_{P_1}(1) \otimes_S \mathcal{O}_{P_2}(1)$  par cette immersion est  $\mathcal{L}_1 \otimes_S \mathcal{L}_2$ . D'autre part, posons  $T = Y_1 \times_S Y_2$ , et soient  $p_1, p_2$  les projections de  $T$  dans  $Y_1, Y_2$  respectivement. Si on pose  $P'_i = \mathbf{P}(p_i^*(\mathcal{E}_i))$  ( $i = 1, 2$ ), on a par (4.1.3.1),  $P'_i = P_i \times_{Y_i} T$  d'où

$$P'_1 \times_T P'_2 = (P_1 \times_{Y_1} T) \times_T (P_2 \times_{Y_2} T) = P_1 \times_{Y_1} (T \times_{Y_1} P_2) = P_1 \times_{Y_1} (Y_1 \times_S P_2) = P_1 \times_S P_2$$

à un isomorphisme canonique près. De même, on a  $\mathcal{O}_{P_i}(1) = \mathcal{O}_{P_i}(1) \otimes_{Y_i} \mathcal{O}_T$  (4.1.3.2), et un calcul analogue (basé notamment sur (I, 9.1.9.1 et 9.1.2)) montre que dans l'identification précédente,  $\mathcal{O}_{P_i}(1) \otimes_T \mathcal{O}_{P_i}(1)$  s'identifie à  $\mathcal{O}_{P_i}(1) \otimes_S \mathcal{O}_{P_i}(1)$ . On peut donc considérer  $r_1 \times_S r_2$  comme une  $T$ -immersion de  $X_1 \times_S X_2$  dans  $P'_1 \times_T P'_2$ , l'image réciproque de  $\mathcal{O}_{P_1}(1) \otimes_T \mathcal{O}_{P_2}(1)$  par cette immersion étant  $\mathcal{L}_1 \otimes_S \mathcal{L}_2$ . On termine alors le raisonnement comme dans (4.4.8) en utilisant le morphisme de Segre.

Il reste à démontrer (ii). On peut d'abord se restreindre au cas où  $Z$  est un schéma affine, car en général il y a un recouvrement fini  $(U_i)$  de  $Z$  par des ouverts affines; si la proposition est démontrée pour  $\mathcal{K}|g^{-1}(U_i)$ ,  $\mathcal{L}|f^{-1}(g^{-1}(U_i))$  et un entier  $n_i$ , il suffira de prendre pour  $n_0$  le plus grand des  $n_i$  pour démontrer la proposition pour  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{L}$  (4.4.5). L'hypothèse implique que  $f$  et  $g$  sont des morphismes séparés, donc  $X$  et  $Y$  sont des schémas quasi-compacts.

Il y a une immersion  $r : X \rightarrow P = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ , où  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent de type fini et  $\mathcal{L} = r^*(\mathcal{O}_P(1))$ , en vertu de (4.4.6). Nous allons voir qu'il existe un  $\mathcal{O}_P$ -Module  $\mathcal{M}$  très ample relativement au morphisme composé  $P \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Z$ , tel que  $\mathcal{O}_P(1)$  soit isomorphe à  $\mathcal{M} \otimes_Y \mathcal{K}^{\otimes(-m)}$  pour un entier  $m$ . Pour  $n \geq m+1$ ,  $\mathcal{O}_P(1) \otimes_Y \mathcal{K}^{\otimes n}$  sera donc très ample pour  $Z$  en vertu de l'hypothèse et de (iv) appliquée aux morphismes  $h : P \rightarrow Y$  et  $1_Y$ ; comme  $r$  est une immersion et que  $\mathcal{L} \otimes f^*(\mathcal{K}^{\otimes n}) = r^*(\mathcal{O}_P(1) \otimes_Y \mathcal{K}^{\otimes n})$ , la conclusion résultera de (i bis). Pour établir notre assertion sur  $\mathcal{O}_P(1)$ , nous utiliserons le lemme suivant :

**Lemme (4.4.10.1).** — Soient  $Z$  un schéma quasi-compact ou un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien,  $g : Y \rightarrow Z$  un morphisme quasi-compact,  $\mathcal{K}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -Module inversible très ample pour  $g$ ,  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent de type fini. Il existe alors un entier  $m_0$  tel que, pour tout  $m \geq m_0$ ,  $\mathcal{E}$  soit isomorphe à un quotient d'un  $\mathcal{O}_Y$ -Module de la forme  $g^*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{K}^{\otimes(-m)}$ , où  $\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{O}_Z$ -Module quasi-cohérent de type fini (dépendant de  $m$ ).

Ce lemme sera démontré en (4.5.10.1); le lecteur pourra vérifier que (4.4.10) n'est utilisé nulle part dans le n° 4.5.

Ce lemme étant admis, il existe une immersion fermée  $j_1$  de  $P$  dans

$$P_1 = \mathbf{P}(g^*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{K}^{\otimes(-m)})$$

telle que  $\mathcal{O}_P(1)$  soit isomorphe à  $j_1^*(\mathcal{O}_{P_1}(1))$  (4.1.2). D'autre part, il existe un isomorphisme de  $P_1$  sur  $P_2 = \mathbf{P}(g^*(\mathcal{F}))$ , identifiant  $\mathcal{O}_{P_1}(1)$  à  $\mathcal{O}_{P_2}(1) \otimes_Y \mathcal{K}^{\otimes(-m)}$  (4.1.4); on a donc une immersion fermée  $j_2 : P \rightarrow P_2$  telle que  $\mathcal{O}_P(1)$  soit isomorphe à  $j_2^*(\mathcal{O}_{P_2}(1)) \otimes_Y \mathcal{K}^{\otimes(-m)}$ . Enfin,  $P_2$  s'identifie à  $P_3 \times_Z Y$ , où  $P_3 = \mathbf{P}(\mathcal{F})$ , et  $\mathcal{O}_{P_2}(1)$  à  $\mathcal{O}_{P_3}(1) \otimes_Z \mathcal{O}_Y$  (4.1.3). Par définition,  $\mathcal{O}_{P_3}(1)$  est très ample pour  $Z$ ; comme il en est de même de  $\mathcal{K}$ , on conclut de (iv) que  $\mathcal{O}_{P_3}(1) \otimes_Y \mathcal{K}$  est très ample pour  $Z$ ; il en est de même de  $\mathcal{M} = j_2^*(\mathcal{O}_{P_2}(1) \otimes_Y \mathcal{K})$  en vertu de (i bis), et  $\mathcal{O}_P(1)$  est isomorphe à  $\mathcal{M} \otimes_Y \mathcal{K}^{\otimes(-m-1)}$ , ce qui achève la démonstration.

*Proposition (4.4.11).* — Soient  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f' : X' \rightarrow Y$  deux morphismes,  $X''$  le préschéma somme  $X \amalg X'$ ,  $f''$  le morphisme  $X'' \rightarrow Y$  qui coïncide avec  $f$  (resp.  $f'$ ) dans  $X$  (resp.  $X'$ ). Soit  $\mathcal{L}$  (resp.  $\mathcal{L}'$ ) un  $\mathcal{O}_X$ -Module (resp. un  $\mathcal{O}_{X'}$ -Module) inversible, et soit  $\mathcal{L}''$  le  $\mathcal{O}_{X''}$ -Module inversible qui coïncide avec  $\mathcal{L}$  dans  $X$  et avec  $\mathcal{L}'$  dans  $X'$ . Pour que  $\mathcal{L}''$  soit très ample relativement à  $f''$ , il faut et il suffit que  $\mathcal{L}$  soit très ample relativement à  $f$  et  $\mathcal{L}'$  très ample relativement à  $f'$ .

On est aussitôt ramené au cas où  $Y$  est affine. Si  $\mathcal{L}''$  est très ample il en est de même de  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  en vertu de (4.4.10, (i bis)). Inversement, si  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  sont très amples, il résulte aussitôt de la définition (4.4.2) et de (4.3.6) que  $\mathcal{L}''$  est très ample.

#### 4.5. Faisceaux amples.

(4.5.1) Étant donnés un préschéma  $X$  et un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible  $\mathcal{L}$ , nous poserons, pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\mathcal{F}$  (lorsque aucune confusion ne sera possible sur  $\mathcal{L}$ ),  $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes n}$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ); nous poserons d'autre part  $S = \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$  (sous-anneau gradué de l'anneau  $\Gamma_*(\mathcal{L})$  défini dans (0, 5.4.6)). Si on considère  $X$  comme un  $\mathbf{Z}$ -préschéma et qu'on désigne par  $p$  le morphisme structural  $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{Z})$ , il y a correspondance biunivoque entre les homomorphismes  $p^*(\tilde{S}) \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$  de  $\mathcal{O}_X$ -Algèbres graduées et les endomorphismes de l'anneau gradué  $S$  (I, 2.2.5); l'homomorphisme  $\varepsilon : p^*(\tilde{S}) \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$  qui correspond ainsi à l'automorphisme identique de  $S$  sera dit *canonique*. Il lui correspond (3.7.1) un morphisme  $G(\varepsilon) : \text{Proj}(S) \rightarrow \text{Proj}(\tilde{S})$  qui sera aussi dit *canonique*.

*Théorème (4.5.2).* — Soient  $X$  un schéma quasi-compact ou un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible,  $S$  l'anneau gradué  $\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Lorsque  $f$  parcourt l'ensemble des éléments homogènes de  $S_+$ , les  $X_f$  forment une base de la topologie de  $X$ .

a') Lorsque  $f$  parcourt l'ensemble des éléments homogènes de  $S_+$ , ceux des  $X_f$  qui sont affines forment un recouvrement de  $X$ .

b) Le morphisme canonique  $G(\varepsilon) : \text{Proj}(S) \rightarrow \text{Proj}(\tilde{S})$  (4.5.1) est partout défini et est une immersion ouverte dominante.

b') Le morphisme canonique  $G(\varepsilon) \rightarrow \text{Proj}(S)$  est partout défini et est un homéomorphisme de l'espace sous-jacent à  $X$  sur un sous-espace de  $\text{Proj}(S)$ .

c) Pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ , si on désigne par  $\mathcal{F}_n$  le sous- $\mathcal{O}_X$ -Module de  $\mathcal{F}(n)$  engendré par les sections de  $\mathcal{F}(n)$  au-dessus de  $X$ , alors  $\mathcal{F}$  est la somme des sous- $\mathcal{O}_X$ -Modules  $\mathcal{F}_n(-n)$ , pour les entiers  $n > 0$ .

c') La propriété c) a lieu pour tout faisceau quasi-cohérent d'idéaux de  $\mathcal{O}_X$ .

En outre, si  $(f_x)$  est une famille d'éléments homogènes de  $S_+$  telle que les  $X_{f_x}$  soient affines, alors la restriction à  $\bigcup_{\alpha} X_{f_x}$  du morphisme canonique  $X \rightarrow \text{Proj}(S)$  est un isomorphisme de  $\bigcup_{\alpha} X_{f_x}$  sur  $\bigcup_{\alpha} (\text{Proj}(S))_{f_x}$ .

Il est clair que b) implique b'), et b') implique a) en vertu de la formule (3.7.3.1) (tenant compte de ce que  $\epsilon^b$  est l'identité). La condition a) implique a'), car tout  $x \in X$  a un voisinage affine  $U$  tel que  $\mathcal{L}|U$  soit isomorphe à  $\mathcal{O}_X|U$ ; si  $f \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$  est telle que  $x \in X_f \subset U$ ,  $X_f$  est aussi l'ensemble des  $x' \in U$  tels que  $(f|U)(x') \neq 0$ , et c'est par suite un ouvert affine (I, 1.3.6). Pour prouver que a') entraîne b), il suffit de prouver la dernière assertion de l'énoncé, et de vérifier de plus que si  $X = \bigcup_{\alpha} X_{f_x}$ , la condition (iv) de (3.8.2) est satisfaite. Ce dernier point résulte aussitôt de (I, 9.3.1, (i)). Quant à la dernière assertion de (4.5.2), comme  $X_{f_x}$  est l'image réciproque de  $(\text{Proj}(S))_{f_x}$  par  $G(\varepsilon) \rightarrow \text{Proj}(S)$ , il suffit d'appliquer (I, 9.3.2). Donc a), a'), b), b') sont équivalentes.

Pour montrer que a') entraîne c), notons que si  $X_f$  est affine (avec  $f \in S_k$ ),  $\mathcal{F}|X_f$  est engendré par ses sections au-dessus de  $X_f$  (I, 1.3.9); d'autre part (I, 9.3.1, (ii)) une telle section  $s$  est de la forme  $(t|X_f) \otimes (f|X_f)^{-m}$  où  $t \in \Gamma(X, \mathcal{F}(km))$ ; par définition,  $t$  est aussi une section de  $\mathcal{F}_{km}$ , donc  $s$  est bien une section de  $\mathcal{F}_{km}(-km)$  au-dessus de  $X_f$ , ce qui prouve c). Il est clair que c) implique c'), et il reste à montrer que c') entraîne a). Or, soit  $U$  un voisinage ouvert de  $x \in X$ , et soit  $\mathcal{J}$  un faisceau d'idéaux quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_X$  définissant un sous-préschéma fermé de  $X$  ayant  $X - U$  comme espace sous-jacent (I, 5.2.1). L'hypothèse c') entraîne qu'il existe un entier  $n > 0$  et une section  $f$  de  $\mathcal{J}(n)$  au-dessus de  $X$  telle que  $f(x) \neq 0$ . Mais on a évidemment  $f \in S_n$ , et  $x \in X_f \subset U$ , ce qui prouve a).

Lorsque  $X$  est un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien, les conditions équivalentes de (4.5.2) impliquent que  $X$  est un schéma, puisqu'il est isomorphe à un sous-préschéma du schéma  $S = \text{Proj}(A)$  en vertu de (4.5.2, b)).

**Définition (4.5.3).** — On dit qu'un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible  $\mathcal{L}$  est ample si  $X$  est un schéma quasi-compact et si les conditions équivalentes de (4.5.2) sont vérifiées.

Il résulte évidemment du critère (4.5.2, a)) que si  $\mathcal{L}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -Module ample, alors, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $\mathcal{L}|U$  est un  $(\mathcal{O}_X|U)$ -Module ample.

Il résulte de la démonstration de (4.5.2) que les  $X_f$  affines forment déjà une base de la topologie de  $X$ . De plus :

**Corollaire (4.5.4).** — Soit  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module ample. Pour tout sous-espace fini  $Z$  de  $X$  et tout voisinage  $U$  de  $Z$ , il existe un entier  $n$  et un  $f \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$  tels que  $X_f$  soit un voisinage affine de  $Z$  contenu dans  $U$ .

En vertu de (4.5.2, b)), on peut se borner à prouver que pour toute partie finie  $Z'$  de  $\text{Proj}(S)$  et tout voisinage ouvert  $U$  de  $Z'$ , il existe un élément homogène  $f \in S_+$  tel que  $Z \subset (\text{Proj}(S))_f \subset U$  (2.4.1). Or, par définition, l'ensemble fermé  $Y$ , complémentaire de  $U$  dans  $\text{Proj}(S)$ , est de la forme  $V_+(\mathfrak{J})$ , où  $\mathfrak{J}$  est un idéal gradué de  $S$ , ne contenant pas  $S_+$  (2.3.2); d'autre part, les points de  $Z'$  sont par définition des idéaux premiers gradués  $p_i$  de  $S_+$  ne contenant pas  $\mathfrak{J}$  (2.3.1). Il existe donc un élément  $f \in \mathfrak{J}$  n'appartenant à aucun des  $p_i$  (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 1, n° 1, prop. 2), et comme les  $p_i$  sont gradués, le raisonnement fait *loc. cit.* montre qu'on peut même supposer  $f$  homogène; cet élément répond alors à la question.

*Proposition (4.5.5).* — *Supposons que  $X$  soit un schéma quasi-compact, ou un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien. Les conditions a) à c') de (4.5.2) sont aussi équivalentes aux suivantes :*

- d) Pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$  de type fini, il existe un entier  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\mathcal{F}(n)$  soit engendré par ses sections au-dessus de  $X$ .
- d') Pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$  de type fini, il existe deux entiers  $n > 0$ ,  $k > 0$  tels que  $\mathcal{F}$  soit isomorphe à un quotient du  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\mathcal{L}^{\otimes(-n)} \otimes \mathcal{O}_X^k$ .
- d'') La propriété d') a lieu pour tout faisceau d'idéaux quasi-cohérent de type fini de  $\mathcal{O}_X$ .

Comme  $X$  est quasi-compact, si un  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent de type fini  $\mathcal{F}$  est tel que  $\mathcal{F}(n)$  (qui est de type fini) est engendré par ses sections au-dessus de  $X$ ,  $\mathcal{F}(n)$  est alors engendré par un nombre fini de ces sections (0, 5.2.3), donc d) implique d') et il est clair que d') implique d''). Comme tout  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{G}$  est limite inductive de ses sous- $\mathcal{O}_X$ -Modules de type fini (I, 9.4.9), pour vérifier la condition c') de (4.5.2), il suffit de le faire pour un faisceau quasi-cohérent d'idéaux de  $\mathcal{O}_X$  qui est de type fini, et d'') entraîne donc c'). Reste à voir que si  $\mathcal{L}$  est ample la propriété d) est vérifiée. Considérons un recouvrement fini de  $X$  par des  $X_{f_i}$  ( $f_i \in S_{n_i}$ ) qu'on peut supposer affines; en remplaçant les  $f_i$  par des puissances convenables (ce qui ne change pas les  $X_{f_i}$ ), on peut supposer tous les  $n_i$  égaux à un même entier  $m$ . Le faisceau  $\mathcal{F}|_{X_{f_i}}$ , étant de type fini par hypothèse, est engendré par un nombre fini de ses sections  $h_{ij}$  au-dessus de  $X_{f_i}$  (I, 1.3.13); il existe donc un entier  $k_0$  tel que la section  $h_{ij} \otimes f_i^{\otimes k_0}$  se prolonge en une section de  $\mathcal{F}(k_0)$  au-dessus de  $X$  pour tout couple  $(i, j)$  (I, 9.3.1). A fortiori les  $h_{ij} \otimes f_i^{\otimes k}$  se prolongent en sections de  $\mathcal{F}(km)$  au-dessus de  $X$  pour tout  $k \geq k_0$ , et pour ces valeurs de  $k$ ,  $\mathcal{F}(km)$  est donc engendré par ses sections au-dessus de  $X$ . Pour tout  $p$  tel que  $0 < p < m$ ,  $\mathcal{F}(p)$  est aussi de type fini, donc il y a un entier  $k_p$  tel que  $\mathcal{F}(p)(km) = \mathcal{F}(p + km)$  soit engendré par ses sections au-dessus de  $X$  pour  $k \geq k_p$ . Prenant  $n_0$  plus grand que tous les  $k_p m$ , on en conclut que  $\mathcal{F}(n)$  est engendré par ses sections au-dessus de  $X$  pour tout  $n \geq n_0$ , car un tel  $n$  s'écrit  $n = km + p$  avec  $k \geq k_p$  et  $0 \leq p < m$ .

*Proposition (4.5.6).* — *Soient  $X$  un schéma quasi-compact,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible.*

- (i) *Soit  $n$  un entier  $> 0$ . Pour que  $\mathcal{L}$  soit ample, il faut et il suffit que  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  soit ample.*
- (ii) *Soit  $\mathcal{L}'$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible tel que, pour tout  $x \in X$ , il existe un entier  $n > 0$*

et une section  $s'$  de  $\mathcal{L}'^{\otimes n}$  au-dessus de  $X$  tels que  $s'(x) \neq 0$ . Alors, si  $\mathcal{L}$  est ample, il en est de même de  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ .

La propriété (i) est conséquence évidente du critère a) de (4.5.2) puisque  $X_{f^{\otimes n}} = X_f$ . D'autre part, si  $\mathcal{L}$  est ample, pour tout  $x \in X$  et tout voisinage  $U$  de  $x$ , il existe  $m > 0$  et  $f \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes m})$  tel que  $x \in X_f \subset U$  (4.5.2, a)); si  $f' \in \Gamma(X, \mathcal{L}'^{\otimes n})$  est tel que  $f'(x) \neq 0$ , on aura  $s(x) \neq 0$  pour  $s = f^{\otimes n} \otimes f'^{\otimes m} \in \Gamma(X, (\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}')^{\otimes mn})$ , donc  $x \in X_s \subset X_f \subset U$ , ce qui prouve que  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$  est ample (4.5.2, a)).

*Corollaire (4.5.7).* — Le produit tensoriel de deux  $\mathcal{O}_X$ -Modules amples est ample.

*Corollaire (4.5.8).* — Soient  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module ample,  $\mathcal{L}'$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible; il existe alors un entier  $n_0 > 0$  tel que  $\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{L}'$  soit ample et engendré par ses sections au-dessus de  $X$  pour  $n \geq n_0$ .

En effet, il résulte de (4.5.5) qu'il existe un entier  $m_0$  tel que  $\mathcal{L}^{\otimes m} \otimes \mathcal{L}'$  soit engendré par ses sections au-dessus de  $X$  pour  $m \geq m_0$ ; d'après (4.5.6) on peut donc prendre  $n_0 = m_0 + 1$ .

*Remarque (4.5.9).* — Soit  $P = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$  le groupe des classes de  $\mathcal{O}_X$ -Modules inversibles (0, 5.4.7), et soit  $P^+$  la partie de  $P$  formée des classes de faisceaux amples. Supposons que  $P^+$  soit non vide. Alors il résulte de (4.5.7) et (4.5.8) que l'on a

$$P^+ + P^+ \subset P^+ \quad \text{et} \quad P^+ - P^+ = P$$

autrement dit  $P^+ \cup \{0\}$  est l'ensemble des éléments *positifs* dans  $P$  pour une structure de *préordre* sur  $P$  compatible avec sa structure de groupe, et qui est même *archimédienne* en vertu de (4.5.8). C'est pourquoi on dit parfois « faisceau positif » au lieu de faisceau ample et « faisceau négatif » pour l'inverse d'un tel faisceau (terminologie que nous ne suivrons pas).

*Proposition (4.5.10).* — Soient  $Y$  un schéma affine,  $q : X \rightarrow Y$  un morphisme séparé quasi-compact,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible.

(i) Si  $\mathcal{L}$  est très ample relativement à  $q$ , alors  $\mathcal{L}$  est ample.

(ii) Supposons en outre que le morphisme  $q$  soit de type fini. Alors, pour que  $\mathcal{L}$  soit ample, il faut et il suffit qu'il possède l'une des propriétés équivalentes suivantes :

e) Il existe  $n_0 > 0$  tel que pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  soit très ample relativement à  $q$ .

e') Il existe  $n > 0$  tel que  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  soit très ample relativement à  $q$ .

La première assertion résulte de la définition (4.4.2) d'un  $\mathcal{O}_X$ -Module très ample : si  $A$  est l'anneau de  $Y$ , il y a un  $A$ -module  $E$  et un homomorphisme surjectif

$$\psi : q^*((\mathbf{S}(E))^\sim) \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$$

tel que  $i = r_{\mathcal{L}, \psi}$  soit une immersion partout définie  $X \rightarrow P = P(\widetilde{E})$  et que l'on ait  $\mathcal{L} = i^*(\mathcal{O}_P(1))$ ; comme les  $D_+(f)$  pour  $f$  homogène dans  $(\mathbf{S}(E))_+$  forment une base de la topologie de  $P$ , et que  $i^{-1}(D_+(f)) = X_{\psi(f)}$  par (3.7.3.1), on voit que la condition a) de (4.5.2) est vérifiée, donc  $\mathcal{L}$  est ample.

Prouvons maintenant que si  $q$  est de type fini et si  $\mathcal{L}$  est ample, il vérifie la condition e). En premier lieu, il résulte du critère b) de (4.5.2) et de (4.4.1, (i)) qu'il existe

un entier  $k_0 > 0$  tel que  $\mathcal{L}^{\otimes k_0}$  soit très ample relativement à  $q$ . D'autre part, en vertu de (4.5.5), il existe un entier  $m_0$  tel que, pour  $m \geq m_0$ ,  $\mathcal{L}^{\otimes m}$  soit engendré par ses sections au-dessus de  $X$ . Posons  $n_0 = k_0 + m_0$ ; si  $n \geq n_0$ , on peut écrire  $n = k_0 + m$  avec  $m \geq m_0$ , d'où  $\mathcal{L}^{\otimes n} = \mathcal{L}^{\otimes k_0} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}$ . Comme  $\mathcal{L}^{\otimes m}$  est engendré par ses sections au-dessus de  $X$ , il résulte du critère (4.4.8) et de (3.4.7) que  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  est très ample relativement à  $q$ . Enfin, il est clair que  $e)$  entraîne  $e')$ , et  $e')$  implique que  $\mathcal{L}$  est ample en vertu de (i) et de (4.5.6, (i)).

**(4.5.10.1)** *Démonstration du lemme (4.4.10.1).* — Posons  $\mathcal{E}(n) = \mathcal{E} \otimes \mathcal{K}^{\otimes n}$ ; comme  $g$  est séparé (4.4.2), le raisonnement de (3.4.8) s'applique et ramène à voir que l'homomorphisme canonique  $g^*(g_*(\mathcal{E}(n)) \rightarrow \mathcal{E}(n))$  est surjectif pour  $n$  assez grand. En outre, comme  $Z$  est quasi-compact, le raisonnement de (3.4.6) ramène à prouver la proposition dans le cas où  $Z$  est affine. Or,  $\mathcal{K}$  est alors ample en vertu de (4.5.10, (i)), et la conclusion résulte de (4.5.5,  $d'$ )).

**Corollaire (4.5.11).** — Soient  $Y$  un schéma affine,  $q : X \rightarrow Y$  un morphisme séparé de type fini,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module ample,  $\mathcal{L}'$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible. Il existe un entier  $n_0$  tel que, pour  $n \geq n_0$ ,  $\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{L}'$  soit très ample relativement à  $q$ .

En effet, il existe  $m_0$  tel que pour  $m \geq m_0$ ,  $\mathcal{L}^{\otimes m} \otimes \mathcal{L}'$  soit engendré par ses sections au-dessus de  $X$  (4.5.8); d'autre part, il existe  $k_0$  tel que  $\mathcal{L}^{\otimes k}$  soit très ample relativement à  $q$  pour  $k \geq k_0$ . Par suite  $\mathcal{L}^{\otimes(k+m_0)} \otimes \mathcal{L}'$  est très ample pour  $k \geq k_0$  ((4.4.8) et (3.4.7)).

**Remarque (4.5.12).** — On ignore si l'hypothèse qu'un  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\mathcal{L}$  est tel que  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  soit très ample (relativement à  $q$ ) entraîne la même conclusion pour  $\mathcal{L}^{\otimes(n+1)}$ .

**Proposition (4.5.13).** — Soient  $X$  un préschéma quasi-compact,  $Z$  un sous-préschéma fermé de  $X$  défini par un faisceau quasi-cohérent nilpotent  $\mathcal{J}$  d'idéaux de  $\mathcal{O}_X$ ,  $j$  l'injection canonique  $Z \rightarrow X$ . Pour qu'un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible  $\mathcal{L}$  soit ample, il faut et il suffit que  $\mathcal{L}' = j^*(\mathcal{L})$  soit un  $\mathcal{O}_Z$ -Module ample.

La condition est nécessaire. En effet, pour toute section  $f$  de  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  au-dessus de  $X$ , soit  $f'$  son image canonique  $f \otimes 1$ , section de  $\mathcal{L}'^{\otimes n} = \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X / \mathcal{J})$  au-dessus de l'espace  $Z$  (qui est identique à  $X$ ); il est clair que  $X_f = Z_{f'}$ , donc le critère a) de (4.5.2) montre que  $\mathcal{L}'$  est ample.

Pour voir que la condition est suffisante, notons d'abord qu'on peut se ramener au cas où  $\mathcal{J}^2 = 0$ , en considérant la suite (finie) des préschémas  $X_k = (X, \mathcal{O}_X / \mathcal{J}^{k+1})$  dont chacun est sous-préschéma fermé du suivant, défini par un faisceau d'idéaux de carré nul. D'ailleurs  $X$  est un schéma puisque  $X_{\text{red}}$  l'est par hypothèse (4.5.3 et I, 5.5.1). Le critère a) de (4.5.2) montre qu'il suffira de prouver le

**Lemme (4.5.13.1).** — Sous les hypothèses de (4.5.13), supposons de plus  $\mathcal{J}$  de carré nul;  $\mathcal{L}$  étant un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible, soit  $g$  une section de  $\mathcal{L}'^{\otimes n}$  au-dessus de  $Z$  telle que  $Z_g$  soit affine. Alors il existe un entier  $m > 0$  tel que  $g^{\otimes m}$  soit l'image canonique d'une section  $f$  de  $\mathcal{L}^{\otimes nm}$  au-dessus de  $X$ .

On a la suite exacte de  $\mathcal{O}_X$ -Modules

$$0 \rightarrow \mathcal{J}(n) \rightarrow \mathcal{O}_X(n) = \mathcal{L}^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{O}_Z(n) = \mathcal{L}'^{\otimes n} \rightarrow 0$$

puisque  $\mathcal{F}(n)$  est un foncteur exact en  $\mathcal{F}$ ; d'où la suite exacte de cohomologie

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{J}(n)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}'^{\otimes n}) \xrightarrow{\partial} H^1(X, \mathcal{J}(n))$$

qui associe en particulier à  $g$  un élément  $\partial g \in H^1(X, \mathcal{J}(n))$ .

Notons que puisque  $\mathcal{J}^2 = 0$ ,  $\mathcal{J}$  peut être considéré comme un  $\mathcal{O}_Z$ -Module quasi-cohérent et l'on a, pour tout  $k$ ,  $\mathcal{L}'^{\otimes k} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{J}(n) = \mathcal{J}(n+k)$ ; pour toute section  $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}'^{\otimes k})$  la multiplication tensorielle par  $s$  est donc un homomorphisme  $\mathcal{J}(n) \rightarrow \mathcal{J}(n+k)$  de  $\mathcal{O}_Z$ -Modules, qui donne par suite un homomorphisme  $H^i(X, \mathcal{J}(n)) \xrightarrow{s} H^i(X, \mathcal{J}(n+k))$  de groupes de cohomologie.

Cela étant, nous allons voir que l'on a

$$(4.5.13.2) \quad g^{\otimes m} \otimes \partial g = 0$$

pour un  $m > 0$  assez grand. En effet,  $Z_g$  est un ouvert affine de  $Z$  et on a donc  $H^1(Z_g, \mathcal{J}(n)) = 0$  quand  $\mathcal{J}(n)$  est considéré comme un  $\mathcal{O}_Z$ -Module (I, 5.1.9.2). En particulier, si on pose  $g' = g|_{Z_g}$ , et si on considère son image par l'application  $\partial : \Gamma(Z_g, \mathcal{L}'^{\otimes n}) \rightarrow H^1(Z_g, \mathcal{J}(n))$ , on a  $\partial g' = 0$ . Pour expliciter cette relation, observons qu'en dimension 1 la cohomologie d'un faisceau de groupes abéliens est la même que sa cohomologie de Čech (G, II, 5.9); pour former  $\partial g$ , il faut donc considérer un recouvrement ouvert  $(U_\alpha)$  assez fin de  $X$ , que l'on peut supposer fini et formé d'ouverts affines, prendre pour chaque  $\alpha$  une section  $g_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{L}^{\otimes n})$  dont l'image canonique dans  $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{L}'^{\otimes n})$  est  $g|_{U_\alpha}$ , et considérer la classe du cocycle  $(g_{\alpha|\beta} - g_{\beta|\alpha})$ ,  $g_{\alpha|\beta}$  étant la restriction de  $g_\alpha$  à  $U_\alpha \cap U_\beta$  (ce cocycle étant à valeurs dans  $\mathcal{J}(n)$ ). On peut en outre supposer que  $\partial g'$  est calculé de la même manière à l'aide du recouvrement formé des  $U_\alpha \cap Z_g$  et des restrictions  $g_\alpha|_{(U_\alpha \cap Z_g)}$  (en remplaçant au besoin  $(U_\alpha)$  par un recouvrement plus fin); la relation  $\partial g' = 0$  signifie alors qu'il existe pour chaque  $\alpha$  une section  $h_\alpha \in \Gamma(U_\alpha \cap Z_g, \mathcal{J}(n))$  telle que  $(g_{\alpha|\beta} - g_{\beta|\alpha})|_{(U_\alpha \cap U_\beta \cap Z_g)} = h_{\alpha|\beta} - h_{\beta|\alpha}$  en désignant par  $h_{\alpha|\beta}$  la restriction de  $h_\alpha$  à  $U_\alpha \cap U_\beta \cap Z_g$  (G, II, 5.11). Cela étant, il y a un entier  $m > 0$  tel que  $g^{\otimes m} \otimes h_\alpha$  soit la restriction à  $U_\alpha \cap Z_g$  d'une section  $t_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{J}(n+nm))$  pour tout  $\alpha$  (I, 9.3.1); on a donc  $g^{\otimes m} \otimes (g_{\alpha|\beta} - g_{\beta|\alpha}) = t_{\alpha|\beta} - t_{\beta|\alpha}$  pour tout couple d'indices, ce qui prouve (4.5.13.2).

Remarquons d'autre part que si  $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_Z(p))$ ,  $t \in \Gamma(X, \mathcal{O}_Z(q))$ , on a, dans le groupe  $H^1(X, \mathcal{J}(p+q))$

$$(4.5.13.3) \quad \partial(s \otimes t) = (\partial s) \otimes t + s \otimes (\partial t).$$

En effet, on peut encore, pour calculer les deux membres, considérer un recouvrement ouvert  $(U_\alpha)$  de  $X$ , pour chaque  $\alpha$  une section  $s_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_X(p))$  (resp.  $t_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_X(q))$ ) dont l'image canonique dans  $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_Z(p))$  (resp.  $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_Z(q))$ ) soit  $s|_{U_\alpha}$  (resp.  $t|_{U_\alpha}$ ); la relation (4.5.13.3) résulte alors des relations

$$(s_{\alpha|\beta} \otimes t_{\alpha|\beta}) - (s_{\beta|\alpha} \otimes t_{\beta|\alpha}) = (s_{\alpha|\beta} - s_{\beta|\alpha}) \otimes t_{\alpha|\beta} + s_{\beta|\alpha} \otimes (t_{\alpha|\beta} - t_{\beta|\alpha})$$

avec les mêmes notations que ci-dessus. Par récurrence sur  $k$ , on a donc

$$(4.5.13.4) \quad \partial(g^{\otimes k}) = (kg^{\otimes (k-1)}) \otimes (\partial g)$$

et on conclut de (4.5.13.2) et (4.5.13.4) que l'on a  $\partial(g^{\otimes(m+1)}) = 0$ ;  $g^{\otimes(m+1)}$  est donc l'image canonique d'une section  $f$  de  $\mathcal{L}^{\otimes n(m+1)}$  au-dessus de  $X$ , ce qui achève de démontrer (4.5.13).

*Corollaire (4.5.14).* — Soient  $X$  un schéma noethérien,  $j$  l'injection canonique  $X_{\text{red}} \rightarrow X$ . Pour qu'un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible  $\mathcal{L}$  soit ample, il faut et il suffit que  $j^*(\mathcal{L})$  soit un  $\mathcal{O}_{X_{\text{red}}}$ -Module ample.

Cela résulte de (I, 6.1.6).

#### 4.6. Faisceaux relativement amples.

*Définition (4.6.1).* — Soient  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-compact,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible. On dit que  $\mathcal{L}$  est ample relativement à  $f$ , ou relativement à  $Y$ , ou  $f$ -ample, ou  $Y$ -ample (ou même *ample* si aucune confusion n'en résulte avec la notion définie dans (4.5.3)) s'il existe un recouvrement  $(U_\alpha)$  de  $Y$  formé d'ouverts affines tel que si on pose  $X_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ ,  $\mathcal{L}|_{X_\alpha}$  soit un  $\mathcal{O}_{X_\alpha}$ -Module ample pour tout  $\alpha$ .

L'existence d'un  $\mathcal{O}_X$ -Module  $f$ -ample entraîne que  $f$  est nécessairement séparé ((4.5.3) et (I, 5.5.5)).

*Proposition (4.6.2).* — Soit  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-compact,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible. Si  $\mathcal{L}$  est très ample relativement à  $f$ , il est ample relativement à  $f$ .

Cela résulte du caractère local (sur  $Y$ ) de la notion de faisceau très ample (4.4.5), de la définition (4.6.1) et du critère (4.5.10, (i)).

*Proposition (4.6.3).* — Soient  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-compact,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible, et soit  $\mathcal{S}$  la  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée  $\bigoplus_{n \geq 0} f_*(\mathcal{L}^{\otimes n})$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

a)  $\mathcal{L}$  est  $f$ -ample.

b)  $\mathcal{S}$  est quasi-cohérente et l'homomorphisme canonique  $\sigma: f^*(\mathcal{S}) \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$  (0, 4.4.3) est tel que le  $Y$ -morphisme  $r_{\mathcal{L}, \sigma}: G(\sigma) \rightarrow \text{Proj}(\mathcal{S}) = P$  soit partout défini et soit une immersion ouverte dominante.

b') Le morphisme  $f$  est séparé, le  $Y$ -morphisme  $r_{\mathcal{L}, \sigma}$  est partout défini et est un homéomorphisme de l'espace sous-jacent à  $X$  sur un sous-espace de  $\text{Proj}(\mathcal{S})$ .

En outre, lorsqu'il en est ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , l'homomorphisme canonique

$$(4.6.3.1) \quad r_{\mathcal{L}, \sigma}^*(\mathcal{O}_P(n)) \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes n}$$

défini dans (3.7.9.1), est un isomorphisme.

Enfin, pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ , si l'on pose  $\mathcal{M} = \bigoplus_{n \geq 0} f_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ , l'homomorphisme canonique

$$(4.6.3.2) \quad r_{\mathcal{L}, \sigma}^*(\widetilde{\mathcal{M}}) \rightarrow \mathcal{F}$$

défini dans (3.7.9.2), est un isomorphisme.

On a remarqué que a) implique que  $f$  est séparé, donc  $\mathcal{S}$  est quasi-cohérente (I, 9.2.2, a)). Comme le fait que  $r_{\mathcal{L}, \sigma}$  soit une immersion partout définie est de caractère local sur  $Y$ , pour prouver que a) entraîne b), on peut supposer  $Y$  affine et  $\mathcal{L}$  ample;

l'assertion résulte alors de (4.5.2, b)). Il est clair que b) entraîne b') ; enfin, pour prouver que b') entraîne a), il suffit de considérer un recouvrement de Y par des ouverts affines  $U_\alpha$  et d'appliquer le critère (4.5.2, b')) à chaque faisceau  $\mathcal{L}|f^{-1}(U_\alpha)$ .

Pour les deux dernières assertions, on utilise le fait que  $\sigma^b$  est ici l'identité, et l'explicitation des homomorphismes (3.7.9.1) et (3.7.9.2) ; il en résulte aussitôt que (4.6.3.1) est un isomorphisme. Quant à (4.6.3.2), on peut se ramener au cas où Y est affine, donc  $\mathcal{L}$  ample ; il est clair que l'homomorphisme (4.6.3.2) est injectif, et le critère (4.5.2, c)) montre qu'il est surjectif, d'où la conclusion.

*Corollaire (4.6.4).* — Soit  $(U_\alpha)$  un recouvrement ouvert de Y. Pour que  $\mathcal{L}$  soit ample relativement à Y, il faut et il suffit que  $\mathcal{L}|f^{-1}(U_\alpha)$  soit ample relativement à  $U_\alpha$  pour tout  $\alpha$ .

La condition b) est en effet locale sur Y.

*Corollaire (4.6.5).* — Soit  $\mathcal{K}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -Module inversible. Pour que  $\mathcal{L}$  soit Y-ample, il faut et il suffit que  $\mathcal{L} \otimes f^*(\mathcal{K})$  le soit.

C'est une conséquence évidente de (4.6.4) en prenant les  $U_\alpha$  tels que  $\mathcal{K}|U_\alpha$  soit isomorphe à  $\mathcal{O}_Y|U_\alpha$  pour tout  $\alpha$ .

*Corollaire (4.6.6).* — Supposons Y affine; pour que  $\mathcal{L}$  soit Y-ample, il faut et il suffit que  $\mathcal{L}$  soit ample.

C'est une conséquence immédiate de la définition (4.6.1), et des critères (4.6.3, b)) et (4.5.2, b)), car ici  $\text{Proj}(\mathcal{S}) = \text{Proj}(\Gamma(Y, \mathcal{S}))$  par définition.

*Corollaire (4.6.7).* — Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-compact. Supposons qu'il existe un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{E}$  et un Y-morphisme  $g : X \rightarrow P = \mathbf{P}(\mathcal{E})$  qui soit un homéomorphisme de l'espace sous-jacent à X sur un sous-espace de P; alors  $\mathcal{L} = g^*(\mathcal{O}_{P(1)})$  est Y-ample.

On peut en effet supposer Y affine; le corollaire résulte alors du critère (4.5.2, a)), de la formule (3.7.3.1) et de (4.2.3).

*Proposition (4.6.8).* — Soient X un schéma quasi-compact ou un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme séparé quasi-compact. Pour qu'un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible  $\mathcal{L}$  soit  $f$ -ample, il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée :

c) Pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$  de type fini, il existe un entier  $n_0 > 0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ , l'homomorphisme canonique  $\sigma : f^*(f_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})) \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$  soit surjectif.

c') Pour tout faisceau d'idéaux quasi-cohérent de type fini  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{O}_X$ , il existe un entier  $n > 0$  tel que l'homomorphisme canonique  $\sigma : f^*(f_*(\mathcal{J} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})) \rightarrow \mathcal{J} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$  soit surjectif.

Comme X est quasi-compact, il en est de même de  $f(X)$  et il existe donc un recouvrement fini  $(U_i)$  de  $f(X)$  par des ouverts affines de Y. Pour démontrer la condition c) lorsque  $\mathcal{L}$  est  $f$ -ample, on peut remplacer Y par les  $U_i$  et X par les  $f^{-1}(U_i)$ , car si on obtient pour chaque  $i$  un entier  $n_i$  tel que c) ait lieu (pour  $U_i, f^{-1}(U_i)$  et  $\mathcal{L}|f^{-1}(U_i)$ ) dès que  $n \geq n_i$ , il suffira de prendre pour  $n_0$  le plus grand des  $n_i$  pour obtenir c) pour Y, X et  $\mathcal{L}$ . Or lorsque Y est affine, la condition c) découle de (4.5.5, d)), compte tenu de (4.6.6). Il est trivial que c) entraîne c'). Enfin, pour prouver que c') implique que  $\mathcal{L}$  est  $f$ -ample, on peut encore se borner au cas où Y est affine : en effet, tout faisceau d'idéaux quasi-cohérent de type fini  $\mathcal{J}_i$  de  $\mathcal{O}_X|f^{-1}(U_i)$  est la restriction d'un faisceau cohérent d'idéaux de type fini de  $\mathcal{O}_X$  (I, 9.4.7) et l'hypothèse c') entraîne que

$\mathcal{J}_i \otimes (\mathcal{L}^{\otimes n} | f^{-1}(U_i))$  est engendré par ses sections (compte tenu de (I, 9.2.2) et de (3.4.7)); il suffit donc d'appliquer le critère (4.5.5, d'')).

*Proposition (4.6.9).* — Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-compact,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible.

(i) Soit  $n$  un entier  $> 0$ . Pour que  $\mathcal{L}$  soit  $f$ -ample, il faut et il suffit que  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  soit  $f$ -ample.

(ii) Soit  $\mathcal{L}'$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible, et supposons qu'il existe un entier  $n > 0$  tel que l'homomorphisme canonique  $\sigma : f^*(f_*(\mathcal{L}'^{\otimes n})) \rightarrow \mathcal{L}'^{\otimes n}$  soit surjectif. Alors, si  $\mathcal{L}$  est  $f$ -ample, il en est de même de  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ .

On se ramène en effet aussitôt au cas où  $Y$  est affine, et la proposition est alors conséquence immédiate de (4.5.6).

*Corollaire (4.6.10).* — Le produit tensoriel de deux  $\mathcal{O}_X$ -Modules  $f$ -amples est  $f$ -ample.

*Proposition (4.6.11).* — Soient  $Y$  un préschéma quasi-compact,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible. Pour que  $\mathcal{L}$  soit  $f$ -ample, il faut et il suffit qu'il possède une des propriétés équivalentes suivantes :

d) Il existe  $n_0 > 0$  tel que, pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  soit très ample relativement à  $f$ .

d') Il existe  $n > 0$  tel que  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  soit très ample relativement à  $f$ .

Si  $\mathcal{L}$  est ample relativement à  $f$ , il y a un recouvrement fini  $(U_i)$  de  $Y$  par des ouverts affines tel que les  $\mathcal{L}|f^{-1}(U_i)$  soient amples. On en conclut (4.5.10) qu'il existe un entier  $n_0$  tel que  $\mathcal{L}^{\otimes n}|f^{-1}(U_i)$  soit très ample relativement à  $f^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$  pour tout  $n \geq n_0$  et tout  $i$ , donc  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  est très ample relativement à  $f$  (4.4.5). Inversement, d') entraîne déjà que  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  est  $f$ -ample (4.6.2), donc il en est de même de  $\mathcal{L}$  (4.6.9, (i)).

*Corollaire (4.6.12).* — Soient  $Y$  un préschéma quasi-compact,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini,  $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$  deux  $\mathcal{O}_X$ -Modules inversibles. Si  $\mathcal{L}$  est  $f$ -ample, il existe  $n_0$  tel que  $\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{L}'$  soit très ample relativement à  $f$  pour tout  $n \geq n_0$ .

On raisonne comme dans (4.6.11) en utilisant un recouvrement ouvert affine fini de  $Y$  et (4.5.11).

*Proposition (4.6.13).* — (i) Pour tout préschéma  $Y$ , tout  $\mathcal{O}_Y$ -Module inversible  $\mathcal{L}$  est ample relativement au morphisme identique  $1_Y$ .

(i bis) Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-compact,  $j : X' \rightarrow X$  un morphisme quasi-compact qui est un homéomorphisme de l'espace sous-jacent à  $X'$  sur un sous-espace de  $X$ . Si  $\mathcal{L}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -Module ample relativement à  $f$ ,  $j^*(\mathcal{L})$  est ample relativement à  $f \circ j$ .

(ii) Soient  $Z$  un préschéma quasi-compact,  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  deux morphismes quasi-compacts,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module ample relativement à  $f$ ,  $\mathcal{K}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -Module ample relativement à  $g$ . Alors il existe un entier  $n_0 > 0$  tel que  $\mathcal{L} \otimes f^*(\mathcal{K}^{\otimes n})$  soit ample relativement à  $g \circ f$  pour tout  $n \geq n_0$ .

(iii) Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-compact,  $g : Y' \rightarrow Y$  un morphisme, et posons  $X' = X_{(Y')}$ . Si  $\mathcal{L}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -Module ample relativement à  $f$ ,  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'}$  est un  $\mathcal{O}_{X'}$ -Module ample relativement à  $f_{(Y')}$ .

(iv) Soient  $f_i : X_i \rightarrow Y_i$  ( $i = 1, 2$ ) deux S-morphismes quasi-compacts. Si  $\mathcal{L}_i$  est un  $\mathcal{O}_{X_i}$ -Module ample relativement à  $f_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $\mathcal{L}_1 \otimes_S \mathcal{L}_2$  est ample relativement à  $f_1 \times_S f_2$ .

(v) Soient  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  deux morphismes tels que  $g \circ f$  soit quasi-compact. Si un

$\mathcal{O}_X$ -Module  $\mathcal{L}$  est ample relativement à  $gof$ , et si  $g$  est séparé ou l'espace sous-jacent à  $X$  localement noethérien, alors  $\mathcal{L}$  est ample relativement à  $f$ .

(vi) Soient  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-compact,  $j$  l'injection canonique  $X_{\text{red}} \rightarrow X$ . Si  $\mathcal{L}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -Module ample relativement à  $f$ , alors  $j^*(\mathcal{L})$  est ample relativement à  $f_{\text{red}}$ .

Notons d'abord que (v) et (vi) se dérivent de (i), (i bis) et (iv) par le même raisonnement que dans (4.4.10), en utilisant (4.6.4) au lieu de (4.4.5); nous laissons le détail du raisonnement au lecteur. L'assertion (i) est trivialement conséquence de (4.4.10), (i) et (4.6.2). Pour démontrer (i bis), (iii) et (iv), nous utiliserons le lemme suivant :

**Lemme (4.6.13.1).** — (i) Soient  $u: Z \rightarrow S$  un morphisme,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_S$ -Module inversible,  $s$  une section de  $\mathcal{L}$  au-dessus de  $S$ ,  $s'$  la section de  $u^*(\mathcal{L}) = \mathcal{L}'$  au-dessus de  $Z$  qui lui correspond canoniquement. On a alors  $Z_{s'} = u^{-1}(S_s)$ .

(ii) Soient  $Z, Z'$  deux  $S$ -préschémas,  $p, p'$  les projections de  $T = Z \times_S Z'$ ,  $\mathcal{L}$  (resp.  $\mathcal{L}'$ ) un  $\mathcal{O}_Z$ -Module (resp. un  $\mathcal{O}_{Z'}$ -Module) inversible,  $t$  (resp.  $t'$ ) une section de  $\mathcal{L}$  (resp.  $\mathcal{L}'$ ) au-dessus de  $Z$  (resp.  $Z'$ ),  $s$  (resp.  $s'$ ) la section de  $p^*(\mathcal{L})$  (resp.  $p'^*(\mathcal{L}')$ ) au-dessus de  $Z \times_S Z'$  qui lui correspond. Alors on a  $T_{s \otimes s'} = Z_t \times_S Z'_{t'}$ .

Il résulte des définitions que l'on peut se ramener au cas où tous les préschémas considérés sont affines. En outre, dans (i), on peut supposer  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_S$ ; l'assertion (i) résulte alors aussitôt de (I, 1.2.2.2). De même, dans (ii), on peut se limiter au cas où  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_Z$ ,  $\mathcal{L}' = \mathcal{O}_{Z'}$ , et alors l'assertion se réduit au lemme (4.3.2.4).

Démontrons alors (i bis). On peut supposer  $Y$  affine (4.6.4), donc  $\mathcal{L}$  ample (4.6.6); lorsque  $s$  parcourt l'ensemble réunion des  $\Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$  ( $n > 0$ ), les  $X_s$  forment une base de la topologie de  $X$  (4.5.2, a)), donc par hypothèse les  $j^{-1}(X_s)$  forment une base de la topologie de  $X'$ ; on conclut donc par le lemme (4.6.13.1, (i)) et par (4.5.2, a)) que  $j^*(\mathcal{L})$  est ample.

Démontrons ensuite (iii). On peut de nouveau supposer  $Y$  et  $Y'$  affines (4.6.4), d'où il résulte que la projection  $h: X' \rightarrow X$  est affine (1.5.5). Comme  $\mathcal{L}$  est ample (4.6.6), lorsque  $s$  parcourt l'ensemble des sections des  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  ( $n > 0$ ) au-dessus de  $X$  telles que  $X_s$  soit affine, les  $X_s$  recouvrent  $X$  (4.5.2, a')), donc les  $h^{-1}(X_s)$  sont affines (1.2.5) et recouvrent  $X'$ ; il résulte donc encore du lemme (4.6.13.1, (i)) et de (4.5.2, a')) que  $\mathcal{L}'$  est ample, le morphisme  $f_{(Y')}$  étant quasi-compact (I, 6.6.4, (iii)).

Pour prouver (iv), notons d'abord que  $f_1 \times_S f_2$  est quasi-compact (I, 6.6.4, (iv)). On peut en outre supposer  $S, Y_1$  et  $Y_2$  affines ((4.6.4) et (I, 3.2.7)), donc  $\mathcal{L}_i$  ample ( $i = 1, 2$ ) (4.6.6). Les ouverts  $(X_1)_{s_1} \times_S (X_2)_{s_2}$  forment un recouvrement de  $X_1 \times_S X_2$  lorsque  $s_i$  parcourt les sections des  $\mathcal{L}_i^{\otimes n_i}$  telles que  $(X_i)_{s_i}$  soit affine (4.5.2, a')). D'ailleurs, en remplaçant  $s_1$  et  $s_2$  par des puissances convenables, ce qui ne change pas les  $(X_i)_{s_i}$ , on peut toujours supposer  $n_1 = n_2$ . On déduit alors de (4.6.13.1, (ii)) et de (4.5.2, a')) que  $\mathcal{L}_1 \otimes_S \mathcal{L}_2$  est ample, d'où l'assertion, puisque  $Y_1 \times_S Y_2$  est affine (4.6.6).

Reste à prouver (ii). Par le même raisonnement que dans (4.4.10), mais utilisant ici (4.6.4), on peut se borner au cas où  $Z$  est affine. Comme  $\mathcal{K}$  est alors ample, et  $Y$  quasi-compact, il existe un nombre fini de sections  $s_i \in \Gamma(Y, \mathcal{K}^{\otimes k_i})$  telles que les  $Y_{s_i}$

soient *affines* et recouvrent  $Y$  (4.5.2,  $a'$ )); remplaçant les  $s_i$  par des puissances convenables, on peut en outre supposer tous les  $k_i$  égaux à un même entier  $k$ . Soient  $s'_i$  les sections de  $f^*(\mathcal{K}^{\otimes k})$  au-dessus de  $X$  correspondant canoniquement aux  $s_i$ , de sorte que les  $X_{s'_i} = f^{-1}(Y_{s_i})$  (4.6.1.13, (i)) recouvrent  $X$ . Comme  $\mathcal{L}|_{X_{s'_i}}$  est ample (4.6.4 et 4.6.6), il existe pour chaque  $i$  des sections en nombre fini  $t_{ij} \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n_{ij}})$  tels que les  $X_{t_{ij}}$  soient affines, contenus dans  $X_{s'_i}$  et recouvrent  $X_{s'_i}$  (4.5.2,  $a'$ )); on peut d'ailleurs supposer tous les  $n_{ij}$  égaux à un même nombre  $n$ . Cela étant,  $X$  est séparé et quasi-compact, donc il existe un entier  $m > 0$ , et pour tout  $(i, j)$  une section

$$u_{ij} \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes_X f^*(\mathcal{K}^{\otimes mk}))$$

telles que  $t_{ij} \otimes s'_i^{\otimes m}$  soit la restriction à  $X_{s'_i}$  de  $u_{ij}$  (I, 9.3.1); en outre on a  $X_{u_{ij}} = X_{t_{ij}}$ , donc les  $X_{u_{ij}}$  sont affines et recouvrent  $X$ . On peut d'ailleurs supposer que  $m$  est de la forme  $nr$ ; si on pose  $n_0 = rk$ , on voit donc (4.5.2,  $a'$ ) que  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\mathcal{K}^{\otimes n_0})$  est ample. En outre, il existe  $h_0 > 0$  tel que  $\mathcal{K}^{\otimes h}$  soit engendré par ses sections au-dessus de  $Y$  dès que  $h \geq h_0$  (4.5.5); *a fortiori*,  $f^*(\mathcal{K}^{\otimes h})$  est engendré par ses sections au-dessus de  $X$  pour  $h \geq h_0$ , par définition des images réciproques (0, 3.7.1 et 4.4.1). On en conclut que  $\mathcal{L} \otimes f^*(\mathcal{K}^{\otimes n_0 + h})$  est ample dès que  $h \geq h_0$  (4.5.6), ce qui achève la démonstration.

*Remarque (4.6.14).* — Sous les conditions de (ii), on se gardera de croire que  $\mathcal{L} \otimes f^*(\mathcal{K})$  soit ample pour  $g \circ f$ ; en effet, comme  $\mathcal{L} \otimes f^*(\mathcal{K}^{-1})$  est aussi ample pour  $f$  (4.6.5), on en conclurait que  $\mathcal{L}$  serait ample pour  $g \circ f$ ; prenant en particulier pour  $g$  le morphisme identique, tout  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible serait ample pour  $f$ , ce qui n'est pas le cas en général (voir (5.1.6), (5.3.4, (i)) et (5.3.1)).

*Proposition (4.6.15).* — Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-compact,  $\mathcal{J}$  un faisceau quasi-cohérent d'idéaux localement nilpotent de  $\mathcal{O}_X$ ,  $Z$  le sous-préschéma fermé de  $X$  défini par  $\mathcal{J}$ ,  $j : Z \rightarrow X$  l'injection canonique. Pour qu'un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible  $\mathcal{L}$  soit ample pour  $f$ , il faut et il suffit que  $j^*(\mathcal{L})$  soit ample pour  $f \circ j$ .

En effet, la question étant locale sur  $Y$  (4.6.4), on peut supposer  $Y$  affine;  $X$  étant alors quasi-compact, on peut supposer  $\mathcal{J}$  nilpotent. Compte tenu de (4.6.6), la proposition n'est autre alors que (4.5.13).

*Corollaire (4.6.16).* — Soient  $X$  un préschéma localement noethérien,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-compact. Pour qu'un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible  $\mathcal{L}$  soit ample pour  $f$ , il faut et il suffit que son image réciproque  $\mathcal{L}'$  par l'injection canonique  $X_{\text{red}} \rightarrow X$  soit ample pour  $f_{\text{red}}$ .

On a déjà vu que la condition est nécessaire (4.6.13, (vi)); inversement, si elle est remplie, on peut se borner, pour prouver que  $\mathcal{L}$  est ample pour  $f$ , au cas où  $Y$  est affine (4.6.4); alors  $Y_{\text{red}}$  est aussi affine, donc  $\mathcal{L}'$  est ample (4.6.6), et il en est de même de  $\mathcal{L}$  en vertu de (4.5.13), puisque alors  $X$  est noethérien et  $X_{\text{red}}$  un sous-préschéma fermé de  $X$  défini par un faisceau quasi-cohérent nilpotent d'idéaux (I, 6.1.6).

*Proposition (4.6.17).* — Les notations et hypothèses étant celles de (4.4.11), pour que  $\mathcal{L}''$  soit ample relativement à  $f''$ , il faut et il suffit que  $\mathcal{L}$  soit ample relativement à  $f$  et  $\mathcal{L}'$  ample relativement à  $f'$ .

La nécessité de la condition résulte de (4.6.13, (i bis)). Pour voir que la condition est suffisante, on peut se borner au cas où  $Y$  est affine, et alors le fait que  $\mathcal{L}''$  est ample résulte du critère (4.5.2, a)) appliqué à  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{L}'$  et  $\mathcal{L}''$ , en observant qu'une section de  $\mathcal{L}$  au-dessus de  $X$  se prolonge (par o) en une section de  $\mathcal{L}''$  au-dessus de  $X''$ .

*Proposition (4.6.18).* — *Soient  $Y$  un préschéma quasi-compact,  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente de type fini,  $X = \text{Proj}(\mathcal{S})$ ,  $f : X \rightarrow Y$  le morphisme structural. Alors  $f$  est de type fini, et il existe un entier  $d > 0$  tel que  $\mathcal{O}_X(d)$  soit inversible et  $f$ -ample.*

En vertu de (3.1.10), il existe un entier  $d > 0$  tel que  $\mathcal{S}^{(d)}$  soit engendrée par  $\mathcal{S}_d$ . On sait que, dans l'isomorphisme canonique entre  $X$  et  $X^{(d)} = \text{Proj}(\mathcal{S}^{(d)})$ ,  $\mathcal{O}_X(d)$  s'identifie à  $\mathcal{O}_{X^{(d)}}(1)$  (3.2.9, (ii)). On voit donc qu'on est ramené au cas où  $\mathcal{S}$  est engendrée par  $\mathcal{S}_1$ ; la proposition résulte alors de (4.4.3) et (4.6.2) (compte tenu de ce que  $f$  est un morphisme de type fini (3.4.1)).

## § 5. MORPHISMES QUASI-AFFINES ; MORPHISMES QUASI-PROJECTIFS MORPHISMES PROPRES ; MORPHISMES PROJECTIFS

### 5.1. Morphismes quasi-affines.

*Définition (5.1.1).* — *On appelle schéma quasi-affine un schéma isomorphe à un sous-schéma induit sur un ouvert quasi-compact d'un schéma affine. On dit qu'un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  est quasi-affine, ou encore que  $X$  (considéré comme  $Y$ -préschéma au moyen de  $f$ ) est un  $Y$ -schéma quasi-affine, s'il existe un recouvrement  $(U_\alpha)$  de  $Y$  par des ouverts affines tels que les  $f^{-1}(U_\alpha)$  soient des schémas quasi-affines.*

Il est clair qu'un morphisme quasi-affine est séparé (I, 5.5.5 et 5.5.8) et quasi-compact (I, 6.6.1); tout morphisme affine est évidemment quasi-affine.

Rappelons que pour tout préschéma  $X$ , si on pose  $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ , l'homomorphisme identique  $A \rightarrow A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  définit un morphisme  $X \rightarrow \text{Spec}(A)$  dit *canonique* (I, 2.2.4); ce n'est autre d'ailleurs que le morphisme canonique défini dans (4.5.1) pour le cas particulier où  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ , si on se souvient que  $\text{Proj}(A[T])$  s'identifie canoniquement à  $\text{Spec}(A)$  (3.1.7).

*Proposition (5.1.2).* — *Soient  $X$  un schéma quasi-compact ou un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien,  $A$  l'anneau  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a)  $X$  est un schéma quasi-affine.
- b) Le morphisme canonique  $u : X \rightarrow \text{Spec}(A)$  est une immersion ouverte.
- b') Le morphisme canonique  $u : X \rightarrow \text{Spec}(A)$  est un homéomorphisme de  $X$  sur un sous-espace de l'espace sous-jacent à  $\text{Spec}(A)$ .
- c) Le  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\mathcal{O}_X$  est très ample relativement à  $u$  (4.4.2).
- c') Le  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\mathcal{O}_X$  est ample (4.5.1).
- d) Lorsque  $f$  parcourt  $A$ , les  $X_f$  forment une base de la topologie de  $X$ .
- d') Lorsque  $f$  parcourt  $A$ , ceux des  $X_f$  qui sont affines forment un recouvrement de  $X$ .

- e) *Tout  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent est engendré par ses sections au-dessus de  $X$ .*
- e') *Tout faisceau quasi-cohérent d'idéaux de type fini de  $\mathcal{O}_X$  est engendré par ses sections au-dessus de  $X$ .*

Il est clair que b) entraîne a), et a) entraîne c) en vertu du critère b) de (4.4.4) appliqué au morphisme identique (compte tenu de la remarque précédant l'énoncé); d'autre part c) entraîne c') (4.5.10, (i)), et c'), b) et b') sont équivalents par (4.5.2, critères b) et b')). Enfin c') équivaut à chacun des critères d), d'), e), e') en vertu de (4.5.2, critères a), a'), c)) et (4.5.5, critère d'')).

On observera en outre qu'avec les notations précédentes, ceux des  $X_i$  qui sont affines forment une base de la topologie de  $X$ , et que le morphisme canonique  $u$  est dominant (4.5.2).

*Corollaire (5.1.3).* — *Soit  $X$  un préschéma quasi-compact. S'il existe un morphisme  $v : X \rightarrow Y$  de  $X$  dans un schéma affine  $Y$ , qui soit un homéomorphisme de  $X$  sur un sous-espace ouvert de  $Y$ , alors  $X$  est quasi-affine.*

En effet, il existe une famille  $(g_x)$  de sections de  $\mathcal{O}_Y$  au-dessus de  $Y$  telles que les  $D(g_x)$  forment une base de la topologie de  $v(X)$ ; si  $v = (\psi, 0)$  et si l'on pose  $f_x = \theta(g_x)$ , on a  $X_{f_x} = \psi^{-1}(D(g_x))$  (I, 2.2.4.1), donc les  $X_{f_x}$  forment une base de la topologie de  $X$ , et le critère d) de (5.1.2) est vérifié.

*Corollaire (5.1.4).* — *Si  $X$  est un schéma quasi-affine, tout  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible est très ample (relativement au morphisme canonique) et a fortiori ample.*

En effet un tel Module  $\mathcal{L}$  est engendré par ses sections au-dessus de  $X$  (5.1.2, e)), donc  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X = \mathcal{L}$  est très ample (4.4.8).

*Corollaire (5.1.5).* — *Soit  $X$  un préschéma quasi-compact. S'il existe un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible  $\mathcal{L}$  tel que  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}^{-1}$  soient amples,  $X$  est un schéma quasi-affine.*

En effet,  $\mathcal{O}_X = \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1}$  est alors ample (4.5.7).

*Proposition (5.1.6).* — *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-compact. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a)  *$f$  est quasi-affine.*
- b) *La  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre  $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{A}(X)$  est quasi-cohérente et le morphisme canonique  $X \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{A}(X))$  correspondant à l'homomorphisme identique  $\mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(X)$  (1.2.7) est une immersion ouverte.*
- b') *La  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre  $\mathcal{A}(X)$  est quasi-cohérente et le morphisme canonique  $X \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{A}(X))$  est un homéomorphisme de  $X$  sur un sous-espace de  $\text{Spec}(\mathcal{A}(X))$ .*
- c) *Le  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\mathcal{O}_X$  est très ample pour  $f$ .*
- c') *Le  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\mathcal{O}_X$  est ample pour  $f$ .*
- d) *Le morphisme  $f$  est séparé, et pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ , l'homomorphisme canonique  $\sigma : f^*(f_*(\mathcal{F})) \rightarrow \mathcal{F}$  (0, 4.4.3) est surjectif.*

*En outre, lorsque  $f$  est quasi-affine, tout  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible  $\mathcal{L}$  est très ample relativement à  $f$ .*

L'équivalence de a) et c') résulte du caractère local sur  $Y$  de la  $f$ -amplitude (4.6.4), de la définition (5.1.1) et du critère (5.1.2, c')). Les autres propriétés sont locales sur  $Y$

et résultent donc aussitôt de (5.1.2) et (5.1.4), compte tenu de ce que  $f_*(\mathcal{F})$  est quasi-cohérent lorsque  $f$  est séparé (**I**, 9.2.2, *a*)).

*Corollaire (5.1.7).* — Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-affine. Pour tout ouvert  $U$  de  $Y$ , la restriction  $f^{-1}(U) \rightarrow U$  de  $f$  est quasi-affine.

*Corollaire (5.1.8).* — Soient  $Y$  un schéma affine,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-compact. Pour que  $f$  soit quasi-affine, il faut et il suffit que  $X$  soit un schéma quasi-affine.

C'est une conséquence immédiate de (5.1.6) et (4.6.6).

*Corollaire (5.1.9).* — Soient  $Y$  un schéma quasi-compact ou un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini. Si  $f$  est quasi-affine, il existe une sous- $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre quasi-cohérente  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}(X) = f_*(\mathcal{O}_X)$ , de type fini (**I**, 9.6.2), telle que le morphisme  $X \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{B})$  correspondant à l'injection canonique  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}(X)$  (1.2.7) soit une immersion. En outre, toute sous- $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre quasi-cohérente de type fini  $\mathcal{B}'$  de  $\mathcal{A}(X)$ , contenant  $\mathcal{B}$ , possède la même propriété.

En effet,  $\mathcal{A}(X)$  est limite inductive de ses sous- $\mathcal{O}_Y$ -Algèbres quasi-cohérentes de type fini (**I**, 9.6.5); le résultat est alors un cas particulier de (3.8.4), compte tenu de l'identification de  $\text{Spec}(\mathcal{A}(X))$  et de  $\text{Proj}(\mathcal{A}(X)[T])$  (3.1.7).

*Proposition (5.1.10).* — (i) Un morphisme quasi-compact  $X \rightarrow Y$  qui est un homéomorphisme de l'espace sous-jacent à  $X$  sur un sous-espace de l'espace sous-jacent à  $Y$  (en particulier une immersion fermée) est quasi-affine.

(ii) Le composé de deux morphismes quasi-affines est quasi-affine.

(iii) Si  $f : X \rightarrow Y$  est un  $S$ -morphisme quasi-affine,  $f_{(S')} : X_{(S')} \rightarrow Y_{(S')}$  est un morphisme quasi-affine pour toute extension  $S' \rightarrow S$  du préschéma de base.

(iv) Si  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : X' \rightarrow Y'$  sont deux  $S$ -morphismes quasi-affines,  $f \times_S g$  est quasi-affine.

(v) Si  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  sont deux morphismes tels que  $g \circ f$  soit quasi-affine, et si  $g$  est séparé ou l'espace sous-jacent à  $X$  localement noethérien,  $f$  est quasi-affine.

(vi) Si  $f$  est un morphisme quasi-affine, il en est de même de  $f_{\text{red}}$ .

Compte tenu du critère (5.1.6, *c'*)), (i), (iii), (iv), (v) et (vi) découlent aussitôt de (4.6.13), (i bis), (iii), (iv), (v) et (vi) respectivement. Pour démontrer (ii), on peut se borner au cas où  $Z$  est affine, et alors l'assertion résulte directement de (4.6.13), (ii)), appliquée à  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$  et  $\mathcal{K} = \mathcal{O}_Y$ .

*Remarque (5.1.11).* — Soient  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  deux morphismes tels que  $X \times_Z Y$  soit localement noethérien. Alors l'immersion graphique  $\Gamma_f : X \rightarrow X \times_Z Y$  est quasi-affine, étant quasi-compacte (**I**, 6.3.5), et (**I**, 5.5.12) montre que, dans (v), la conclusion reste valable si on supprime l'hypothèse que  $g$  est séparé.

*Proposition (5.1.12).* — Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-compact,  $g : X' \rightarrow X$  un morphisme quasi-affine. Si  $\mathcal{L}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -Module ample pour  $f$ ,  $g^*(\mathcal{L})$  est un  $\mathcal{O}_{X'}$ -Module ample pour  $f \circ g$ .

En effet, comme  $\mathcal{O}_{X'}$  est très ample pour  $g$ , et que la question est locale sur  $Y$  (4.6.4), il résulte de (4.6.13), (ii)) qu'il existe (pour  $Y$  affine) un entier  $n$  tel que

$$g^*(\mathcal{L}^{\otimes n}) = (g^*(\mathcal{L}))^{\otimes n}$$

soit ample pour  $f \circ g$ , donc  $g^*(\mathcal{L})$  est ample pour  $f \circ g$  (4.6.9).

### 5.2. Le critère de Serre.

**Théorème (5.2.1)** (critère de Serre). — Soit  $X$  un schéma quasi-compact ou un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a)  $X$  est un schéma affine.

b) Il existe une famille d'éléments  $f_\alpha \in A := \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  tels que les  $X_{f_\alpha}$  soient affines et que l'idéal engendré par les  $f_\alpha$  dans  $A$  soit égal à  $A$ .

c) Le foncteur  $\Gamma(X, \mathcal{F})$  est exact en  $\mathcal{F}$  dans la catégorie des  $\mathcal{O}_X$ -Modules quasi-cohérents, autrement dit, si

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

est une suite exacte de  $\mathcal{O}_X$ -Modules quasi-cohérents, la suite

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}'') \rightarrow 0$$

est exacte.

c') La propriété c) a lieu pour toute suite exacte  $(*)$  de  $\mathcal{O}_X$ -Modules quasi-cohérents telle que  $\mathcal{F}$  soit isomorphe à un sous- $\mathcal{O}_X$ -Module d'un produit fini  $\mathcal{O}_X^n$ .

d)  $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$  pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ .

d')  $H^1(X, \mathcal{J}) = 0$  pour tout faisceau quasi-cohérent d'idéaux  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{O}_X$ .

Il est évident que a) implique b); b) implique d'autre part que les  $X_{f_\alpha}$  recouvrent  $X$ , puisque par hypothèse la section  $1$  est combinaison linéaire des  $f_\alpha$  et que les  $D(f_\alpha)$  recouvrent alors  $\text{Spec}(A)$ . La dernière assertion de (4.5.2) implique donc que  $X \rightarrow \text{Spec}(A)$  est un isomorphisme.

On sait que a) implique c) (I, 1.3.11), et c) entraîne trivialement c'). Prouvons que c') implique b). Tout d'abord, c') entraîne que, pour tout point fermé  $x \in X$  et tout voisinage ouvert  $U$  de  $x$ , il existe  $f \in A$  tel que  $x \in X_f \subset X - U$ . Soit en effet  $\mathcal{J}$  (resp.  $\mathcal{J}'$ ) le faisceau quasi-cohérent d'idéaux de  $\mathcal{O}_X$  définissant le sous-préschéma fermé réduit de  $X$  ayant pour espace sous-jacent  $X - U$  (resp.  $(X - U) \cup \{x\}$ ) (I, 5.2.1); il est clair que l'on a  $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$  et que  $\mathcal{J}'' = \mathcal{J}/\mathcal{J}'$  est un  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent ayant pour support  $\{x\}$  et tel que  $\mathcal{J}''_x = k(x)$ . L'hypothèse c') appliquée à la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{J}' \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}'' \rightarrow 0$  montre que  $\Gamma(X, \mathcal{J}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{J}'')$  est surjectif. La section de  $\mathcal{J}''$  dont le germe en  $x$  est  $1_x$  est donc l'image d'une section  $f \in \Gamma(X, \mathcal{J}) \subset \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ , et on a par définition  $f(x) = 1_x$  et  $f(y) = 0$  dans  $X - U$ , ce qui établit notre assertion. D'ailleurs, si  $U$  est affine, il en est de même de  $X_f$  (I, 1.3.6), donc la réunion des  $X_f$  qui sont affines ( $f \in A$ ) est un ensemble ouvert  $Z$  contenant tous les points fermés de  $X$ ; comme  $X$  est un espace de Kolmogoroff quasi-compact, on a nécessairement  $Z = X$  (0, 2.1.3). Puisque  $X$  est quasi-compact, il y a un nombre fini d'éléments  $f_i \in A$  ( $1 \leq i \leq n$ ) tels que les  $X_{f_i}$  soient affines et recouvrent  $X$ . Considérons alors l'homomorphisme  $\mathcal{O}_X^n \rightarrow \mathcal{O}_X$  défini par les sections  $f_i$  (0, 5.1.1); comme, pour tout  $x \in X$ , un au moins des  $(f_i)_x$  est inversible, cet homomorphisme est surjectif, et on a donc une suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{O}_X^n \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$ , où  $\mathcal{R}$  est un sous- $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_X$ . Il résulte alors

de  $c'$ ) que l'homomorphisme correspondant  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X^n) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  est surjectif, ce qui démontre  $b$ ).

Enfin,  $a$ ) implique  $d$ ) (**I**, 5.1.9.2) et  $d$ ) implique trivialement  $d'$ ). Reste à montrer que  $d')$  entraîne  $c'$ ). Or, si  $\mathcal{F}'$  est un sous- $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_X^n$ , la filtration  $0 \subset \mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_X^2 \subset \dots \subset \mathcal{O}_X^n$  définit sur  $\mathcal{F}'$  une filtration formée des  $\mathcal{F}'_k = \mathcal{F}' \cap \mathcal{O}_X^k$  ( $0 \leq k \leq n$ ), qui sont des  $\mathcal{O}_X$ -Modules quasi-cohérents (**I**, 4.1.1), et  $\mathcal{F}'_{k+1}/\mathcal{F}'_k$  est isomorphe à un sous- $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_X^{k+1}/\mathcal{O}_X^k = \mathcal{O}_X$ , c'est-à-dire à un faisceau quasi-cohérent d'idéaux de  $\mathcal{O}_X$ . L'hypothèse  $d')$  entraîne donc  $H^1(X, \mathcal{F}'_{k+1}/\mathcal{F}'_k) = 0$ ; la suite exacte de cohomologie  $H^1(X, \mathcal{F}') \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}'_{k+1}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}'_{k+1}/\mathcal{F}'_k) = 0$  permet alors de prouver par récurrence sur  $k$  que  $H^1(X, \mathcal{F}') = 0$  pour tout  $k$ . C.Q.F.D.

*Remarque (5.2.1.1).* — Lorsque  $X$  est un préschéma noethérien, on peut dans l'énoncé de  $c'$ ) et de  $d'$ ), remplacer « quasi-cohérent » par « cohérent ». En effet, dans la démonstration du fait que  $c')$  entraîne  $b$ ),  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{J}'$  sont alors des faisceaux cohérents d'idéaux, et, d'autre part, tout sous-Module quasi-cohérent d'un Module cohérent est cohérent (**I**, 6.1.1); d'où la conclusion.

*Corollaire (5.2.2).* — Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme séparé quasi-compact. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a)  $f$  est un morphisme affine.
- b) Le foncteur  $f_*$  est exact dans la catégorie des  $\mathcal{O}_X$ -Modules quasi-cohérents.
- c) Pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ , on a  $R^1f_*(\mathcal{F}) = 0$ .
- c') Pour tout faisceau d'idéaux quasi-cohérent  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{O}_X$ , on a  $R^1f_*(\mathcal{J}) = 0$ .

Toutes ces conditions étant locales sur  $Y$ , par définition du foncteur  $R^1f_*$  (**T**, 3.7.3), on peut supposer que  $Y$  est affine. Si  $f$  est affine,  $X$  est alors affine et la propriété  $b$ ) n'est autre que (**I**, 1.6.4). Inversement, montrons que  $b$ ) implique  $a$ ) : pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ ,  $f_*(\mathcal{F})$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent (**I**, 9.2.2, a)). Par hypothèse le foncteur  $f_*(\mathcal{F})$  est exact en  $\mathcal{F}$ , et le foncteur  $\Gamma(Y, \mathcal{G})$  est exact en  $\mathcal{G}$  (dans la catégorie des  $\mathcal{O}_Y$ -Modules quasi-cohérents) puisque  $Y$  est affine (**I**, 1.3.11); donc  $\Gamma(Y, f_*(\mathcal{F})) = \Gamma(X, \mathcal{F})$  est exact en  $\mathcal{F}$ , ce qui prouve notre assertion en vertu de (5.2.1, c)).

Si  $f$  est affine,  $f^{-1}(U)$  est affine pour tout ouvert affine  $U$  de  $Y$  (1.3.2), donc  $H^1(f^{-1}(U), \mathcal{F}) = 0$  (5.2.1, d)), ce qui par définition entraîne  $R^1f_*(\mathcal{F}) = 0$ . Supposons enfin vérifiée la condition  $c')$ ; la suite exacte des termes de bas degré dans la suite spectrale de Leray (**G**, II, 4.17.1 et **I**, 4.5.1) donne en particulier la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(Y, f_*(\mathcal{J})) \rightarrow H^1(X, \mathcal{J}) \rightarrow H^0(Y, R^1f_*(\mathcal{J})).$$

Comme  $Y$  est affine et  $f_*(\mathcal{J})$  quasi-cohérent (**I**, 9.2.2, a)), on a  $H^1(Y, f_*(\mathcal{J})) = 0$  (5.2.1); l'hypothèse  $c')$  entraîne donc  $H^1(X, \mathcal{J}) = 0$ , et on conclut par (5.2.1) que  $X$  est un schéma affine.

*Corollaire (5.2.3).* — Si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme affine, alors, pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ , l'homomorphisme canonique  $H^1(Y, f_*(\mathcal{F})) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F})$  est bijectif.

En effet, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(Y, f_*(\mathcal{F})) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(Y, R^1 f_*(\mathcal{F}))$$

des termes de bas degré de la suite spectrale de Leray, et la conclusion résulte de (5.2.2).

*Remarque (5.2.4).* — Au chapitre III, § 1, nous prouverons que si  $X$  est affine, on a  $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$  pour tout  $i > 0$  et tout  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ .

### 5.3. Morphismes quasi-projectifs.

*Définition (5.3.1).* — On dit qu'un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  est quasi-projectif, ou que  $X$  (considéré comme  $Y$ -préschéma au moyen de  $f$ ) est quasi-projectif sur  $Y$ , ou que  $X$  est un  $Y$ -schéma quasi-projectif, si  $f$  est de type fini et s'il existe un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible qui est  $f$ -ample.

On notera que cette notion n'est pas locale sur  $Y$  : les contre-exemples de Nagata [26] et de Hironaka montrent que, même si  $X$  et  $Y$  sont des schémas algébriques non singuliers sur un corps algébriquement clos, tout point de  $Y$  peut avoir un voisinage affine  $U$  tel que  $f^{-1}(U)$  soit quasi-projectif sur  $U$ , sans que  $f$  soit quasi-projectif.

On notera qu'un morphisme quasi-projectif est nécessairement séparé (4.6.1). Lorsque  $Y$  est quasi-compact, il revient au même de dire que  $f$  est quasi-projectif ou que  $f$  est de type fini et qu'il existe un  $\mathcal{O}_X$ -Module très ample relativement à  $f$  (4.6.2 et 4.6.11). De plus :

*Proposition (5.3.2).* — Soit  $Y$  un schéma quasi-compact ou un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien, et soit  $X$  un  $Y$ -préschéma. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a)  $X$  est un  $Y$ -schéma quasi-projectif.

b)  $X$  est de type fini sur  $Y$ , et il existe un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent de type fini  $\mathcal{E}$  tel que  $X$  soit  $Y$ -isomorphe à un sous-préschéma de  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ .

c)  $X$  est de type fini sur  $Y$ , et il existe une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente  $\mathcal{S}$  telle que  $\mathcal{S}_1$  soit de type fini et engendre  $\mathcal{S}$ , et que  $X$  soit  $Y$ -isomorphe à un sous-préschéma induit sur un ouvert partout dense de  $\text{Proj}(\mathcal{S})$ .

Cela résulte aussitôt de la remarque précédente et de (4.4.3), (4.4.6) et (4.4.7).

On notera que lorsque  $Y$  est un préschéma noethérien, on peut, dans les conditions b) et c) de (5.3.2), supprimer l'hypothèse que  $X$  est de type fini sur  $Y$ , qui est alors automatiquement vérifiée (I, 6.3.5).

*Corollaire (5.3.3).* — Soit  $Y$  un schéma quasi-compact tel qu'il existe un  $\mathcal{O}_Y$ -Module ample  $\mathcal{L}$  (4.5.3). Pour qu'un  $Y$ -schéma  $X$  soit quasi-projectif, il faut et il suffit qu'il soit de type fini sur  $Y$  et isomorphe à un sous- $Y$ -schéma d'un fibré projectif de la forme  $\mathbf{P}_Y^r$ .

En effet, si  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent de type fini,  $\mathcal{E}$  est isomorphe à un quotient d'un  $\mathcal{O}_Y$ -Module  $\mathcal{L}^{\otimes (-n)} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y^k$  (4.5.5), donc  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  est isomorphe à un sous-schéma fermé de  $\mathbf{P}_Y^{k-1}$  (4.1.2 et 4.1.4).

*Proposition (5.3.4).* — (i) Un morphisme quasi-affine de type fini (et en particulier une immersion quasi-compacte, ou un morphisme affine de type fini) est quasi-projectif.

(ii) Si  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  sont quasi-projectifs et si  $Z$  est quasi-compact,  $g \circ f$  est quasi-projectif.

(iii) Si  $f : X \rightarrow Y$  est un  $S$ -morphisme quasi-projectif,  $f_{(S')} : X_{(S')} \rightarrow Y_{(S')}$  est quasi-projectif pour toute extension  $S' \rightarrow S$  du préschéma de base.

(iv) Si  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : X' \rightarrow Y'$  sont deux  $S$ -morphismes quasi-projectifs,  $f \times_S g$  est quasi-projectif.

(v) Si  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  sont deux morphismes tels que  $g \circ f$  soit quasi-projectif, et si  $g$  est séparé ou  $X$  localement noethérien, alors  $f$  est quasi-projectif.

(vi) Si  $f$  est un morphisme quasi-projectif, il en est de même de  $f_{\text{red}}$ .

(i) résulte de (5.1.6) et (5.1.10, (i)). Les autres assertions sont des conséquences immédiates de la définition (5.3.1), des propriétés des morphismes de type fini (I, 6.3.4) et de (4.6.13).

*Remarque (5.3.5).* — On notera qu'il peut se faire que  $f_{\text{red}}$  soit quasi-projectif sans que  $f$  le soit, même en supposant que  $Y$  est le spectre d'une algèbre de rang fini sur  $\mathbf{C}$  et que  $f$  est propre.

*Corollaire (5.3.6).* — Si  $X$  et  $X'$  sont deux  $Y$ -schémas quasi-projectifs  $X \sqcup X'$  est un  $Y$ -schéma quasi-projectif.

Cela résulte de (4.6.18).

#### 5.4. Morphismes propres et morphismes universellement fermés.

*Définition (5.4.1).* — On dit qu'un morphisme de préschémas  $f : X \rightarrow Y$  est propre s'il vérifie les deux conditions suivantes :

a)  $f$  est séparé et de type fini.

b) Pour tout préschéma  $Y'$  et tout morphisme  $Y' \rightarrow Y$  la projection  $f_{(Y')} : X \times_Y Y' \rightarrow Y'$  est un morphisme fermé (I, 2.2.6).

Lorsqu'il en est ainsi, on dit aussi que  $X$  (considéré comme  $Y$ -préschéma de morphisme structural  $f$ ) est propre au-dessus de  $Y$ .

Il est immédiat que les conditions a) et b) sont locales sur  $Y$ . Pour vérifier que l'image d'une partie fermée  $Z$  de  $X \times_Y Y'$  par la projection  $q : X \times_Y Y' \rightarrow Y'$  est fermée dans  $Y'$ , il suffit de voir que  $q(Z) \cap U'$  est fermé dans  $U'$  pour tout ouvert affine  $U'$  de  $Y'$ ; comme  $q(Z) \cap U' = q(Z \cap q^{-1}(U'))$  et que  $q^{-1}(U')$  s'identifie à  $X \times_Y U'$  (I, 4.4.1), on voit que pour vérifier la condition b) de la déf. (5.4.1), on peut se limiter au cas où  $Y'$  est un schéma affine. On verra plus loin (5.6.3) que si  $Y$  est localement noethérien, on peut même se borner à vérifier b) lorsque  $Y'$  est de type fini sur  $Y$ .

Il est clair que tout morphisme propre est fermé.

*Proposition (5.4.2).* — (i) Une immersion fermée est un morphisme propre.

(ii) Le composé de deux morphismes propres est propre.

(iii) Si  $X$ ,  $Y$  sont des  $S$ -préschémas,  $f : X \rightarrow Y$  un  $S$ -morphisme propre, alors

$$f_{(S')} : X_{(S')} \rightarrow Y_{(S')}$$

est propre pour toute extension  $S' \rightarrow S$  du préschéma de base.

(iv) Si  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : X' \rightarrow Y'$  sont deux  $S$ -morphismes propres, le  $S$ -morphisme  $f \times_S g : X \times_S Y \rightarrow X' \times_S Y'$  est propre.

Il suffit de démontrer (i), (ii) et (iii) (**I**, 3.5.1). Dans chacun de ces trois cas, la vérification de la condition *a*) de (5.4.1) découle de résultats antérieurs (**I**, 5.5.1 et 6.3.4); reste à vérifier la condition *b*). C'est immédiat dans le cas (i), car si  $X \rightarrow Y$  est une immersion fermée, il en est de même de  $X \times_Y Y' \rightarrow Y \times_Y Y' = Y'$  (**I**, 4.3.2 et 3.3.3). Pour démontrer (ii), considérons deux morphismes propres  $X \rightarrow Y$ ,  $Y \rightarrow Z$ , et un morphisme  $Z' \rightarrow Z$ . On peut écrire  $X \times_Z Z' = X \times_Y (Y \times_Z Z')$  (**I**, 3.3.9.1), et par suite la projection  $X \times_Z Z' \rightarrow Z'$  se factorise en  $X \times_Y (Y \times_Z Z') \rightarrow Y \times_Z Z' \rightarrow Z'$ . Compte tenu de la remarque du début, (ii) résulte donc de ce que le composé de deux morphismes fermés est fermé. Enfin, pour tout morphisme  $S' \rightarrow S$ ,  $X_{(S')} \times_Y Y_{(S')}$  s'identifie à  $X \times_Y Y_{(S')}$  (**I**, 3.3.11); pour tout morphisme  $Z \rightarrow Y_{(S')}$ , on peut écrire

$$X_{(S')} \times_{Y_{(S')}} Z = (X \times_Y Y_{(S')}) \times_{Y_{(S')}} Z = X \times_Y Z;$$

$X \times_Y Z \rightarrow Z$  est fermé par hypothèse, donc cela prouve (iii).

*Corollaire (5.4.3).* — Soient  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  deux morphismes tels que  $gof$  soit propre.

(i) Si  $g$  est séparé,  $f$  est propre.

(ii) Si  $g$  est séparé et de type fini et si  $f$  est surjectif,  $g$  est propre.

(i) découle de (5.4.2) par le procédé général (**I**, 5.5.12). Pour démontrer (ii), il n'y a à vérifier que la condition *b*) de la déf. (5.4.1). Pour tout morphisme  $Z' \rightarrow Z$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Z' & \xrightarrow{f \times 1_{Z'}} & Y \times_Z Z' \\ p \searrow & & \downarrow p' \\ & & Z' \end{array}$$

(où  $p$  et  $p'$  sont les projections) est commutatif (**I**, 3.2.1); en outre,  $f \times 1_{Z'}$  est surjectif puisqu'il en est ainsi de  $f$  (**I**, 3.5.2), et  $p$  est un morphisme fermé par hypothèse. Toute partie fermée  $F$  de  $Y \times_Z Z'$  est alors l'image par  $f \times 1_{Z'}$  d'une partie fermée  $E$  de  $X \times_Z Z'$ , donc  $p'(F) = p(E)$  est fermé dans  $Z'$  par hypothèse, d'où le corollaire.

*Corollaire (5.4.4).* — Si  $X$  est un préschéma propre au-dessus de  $Y$ , et  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre quasi-cohérente, tout  $Y$ -morphisme  $f : X \rightarrow \text{Proj}(\mathcal{S})$  est propre (et a fortiori fermé).

En effet, le morphisme structural  $p : \text{Proj}(\mathcal{S}) \rightarrow Y$  est séparé, et  $pof$  est propre par hypothèse.

*Corollaire (5.4.5).* — Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme séparé de type fini. Soient  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  (resp.  $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ ) une famille finie de sous-préschémas fermés de  $X$  (resp.  $Y$ ),  $j_i$  (resp.  $h_i$ ) l'injection canonique  $X_i \rightarrow X$  (resp.  $Y_i \rightarrow Y$ ). Supposons que l'espace sous-jacent  $X$  soit réunion des  $X_i$ , et que pour tout  $i$ , il y ait un morphisme  $f_i : X_i \rightarrow Y_i$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{f_i} & Y_i \\ j_i \downarrow & & \downarrow h_i \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

soit commutatif. Alors, pour que  $f$  soit propre, il faut et il suffit que chacun des  $f_i$  le soit.

Si  $f$  est propre, il en est de même de  $f \circ j_i$ , puisque  $j_i$  est une immersion fermée (5.4.2); comme  $h_i$  est une immersion fermée, donc un morphisme séparé,  $f_i$  est propre par (5.4.3). Supposons inversement que chacun des  $f_i$  soit propre, et considérons le préschéma  $Z$  somme des  $X_i$ ; soit  $u$  le morphisme  $Z \rightarrow X$  qui se réduit à  $j_i$  dans chacun des  $X_i$ . La restriction de  $f \circ u$  à chaque  $X_i$  est égale à  $f \circ j_i = h_i \circ f_i$ , donc est propre puisqu'il en est ainsi de  $h_i$  et de  $f_i$  (5.4.2); il résulte alors aussitôt de la déf. (5.4.1) que  $u$  est propre. Mais comme  $u$  est surjectif par hypothèse, on conclut que  $f$  est propre par (5.4.3).

*Corollaire (5.4.6).* — Soit  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme séparé et de type fini; pour que  $f$  soit propre, il faut et il suffit que  $f_{\text{red}}: X_{\text{red}} \rightarrow Y_{\text{red}}$  le soit.

C'est un cas particulier de (5.4.5) avec  $n=1$ ,  $X_1=X_{\text{red}}$  et  $Y_1=Y_{\text{red}}$  (**I**, 5.1.5).

**(5.4.7)** Si  $X$  et  $Y$  sont des préschémas noethériens et  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme séparé de type fini, on peut, pour vérifier que  $f$  est propre, se ramener à le faire pour des morphismes dominants de préschémas intègres. En effet, soient  $X_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) les composantes irréductibles en nombre fini de  $X$  et considérons pour chaque  $i$  l'unique sous-préschéma fermé réduit de  $X$  ayant  $X_i$  pour espace sous-jacent, que nous désignerons encore par  $X_i$  (**I**, 5.2.1). Soit d'autre part  $Y_i$  l'unique sous-préschéma fermé réduit de  $Y$  ayant  $f(X_i)$  pour espace sous-jacent. Si  $g_i$  (resp.  $h_i$ ) est le morphisme d'injection  $X_i \rightarrow X$  (resp.  $Y_i \rightarrow Y$ ), on en conclut que  $f \circ g_i = h_i \circ f_i$ , où  $f_i$  est un morphisme dominant  $X_i \rightarrow Y_i$  (**I**, 5.2.2); on est alors dans les conditions d'application de (5.4.5), et pour que  $f$  soit propre, il faut et il suffit que les  $f_i$  le soient.

*Corollaire (5.4.8).* — Soient  $X$ ,  $Y$  des  $S$ -préschémas séparés de type fini sur  $S$ , et soit  $f: X \rightarrow Y$  un  $S$ -morphisme. Pour que  $f$  soit propre, il faut et il suffit que, pour tout  $S$ -préschéma  $S'$ , le morphisme  $f \times_{S'}: X \times_S S' \rightarrow Y \times_S S'$  soit fermé.

Notons d'abord que si  $g: X \rightarrow S$  et  $h: Y \rightarrow S$  sont les morphismes structuraux, on a par définition  $g = h \circ f$ , donc  $f$  est séparé et de type fini (**I**, 5.5.1 et 6.3.4). Si  $f$  est propre, il en est de même de  $f \times_{S'}: X \times_S S' \rightarrow Y \times_S S'$  (5.4.2); *a fortiori*,  $f \times_{S'}: X \times_S S' \rightarrow Y \times_S S'$  est fermé. Inversement, supposons vérifiée la condition de l'énoncé et soit  $Y'$  un  $Y$ -préschéma;  $Y'$  peut aussi être considéré comme un  $S$ -préschéma, et comme  $Y \rightarrow S$  est séparé,  $X \times_Y Y'$  s'identifie à un sous-préschéma fermé de  $X \times_S Y'$  (**I**, 5.4.2). Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Y' & \xrightarrow{f \times 1_{Y'}} & Y \times_Y Y' = Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times_S Y' & \xrightarrow{f \times 1_{S'}} & Y \times_S Y' \end{array}$$

les flèches verticales sont des immersions fermées; il en résulte aussitôt que si  $f \times_{S'}: X \times_S S' \rightarrow Y \times_S S'$  est un morphisme fermé, il en est de même de  $f \times_{Y'}: X \times_Y Y' \rightarrow Y \times_Y Y'$ .

*Remarque (5.4.9).* — Nous dirons qu'un morphisme  $f: X \rightarrow Y$  est universellement fermé s'il satisfait à la condition b) de la définition (5.4.1). Le lecteur observera que

dans les propositions (5.4.2) à (5.4.8), on peut partout remplacer « propre » par « universellement fermé » sans modifier la validité des résultats (et dans les hypothèses de (5.4.3), (5.4.5), (5.4.6) et (5.4.8), on peut omettre les conditions de finitude).

(5.4.10) Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini. Nous dirons qu'une partie fermée  $Z$  de  $X$  est *propre sur Y* (ou *Y-propre*, ou *propre pour f*) si la restriction de  $f$  à un sous-préschéma fermé de  $X$ , d'espace sous-jacent  $Z$  (**I**, 5.2.1), est *propre*. Comme cette restriction est alors séparée, il résulte de (5.4.6) et (**I**, 5.5.1, (vi)) que la propriété précédente *ne dépend pas* du sous-préschéma fermé de  $X$  ayant  $Z$  pour espace sous-jacent. Si  $g : X' \rightarrow X$  est un morphisme *propre*,  $g^{-1}(Z)$  est une partie *propre* de  $X'$  : si  $T$  est un sous-préschéma de  $X$  ayant pour espace sous-jacent  $Z$ , il suffit en effet de remarquer que la restriction de  $g$  au sous-préschéma fermé  $g^{-1}(T)$  de  $X'$  est un morphisme propre  $g^{-1}(T) \rightarrow T$  par (5.4.2, (iii)), et d'appliquer ensuite (5.4.2, (ii)). D'autre part, si  $X''$  est un *Y-schéma* de type fini et  $u : X \rightarrow X''$  un *Y-morphisme*,  $u(Z)$  est une partie *propre* de  $X''$ ; en effet, prenons pour  $T$  le sous-préschéma fermé réduit de  $X$  ayant  $Z$  pour espace sous-jacent; la restriction de  $f$  à  $T$  étant *propre*, il en est de même de la restriction de  $u$  à  $T$  (5.4.3, (i)), donc  $u(Z)$  est fermé dans  $X''$ ; soit  $T''$  un sous-préschéma fermé de  $X''$  ayant  $u(Z)$  pour espace sous-jacent (**I**, 5.2.1), de sorte que  $u|_T$  se factorise en

$$T \xrightarrow{v} T'' \xrightarrow{j} X''$$

où  $j$  est l'injection canonique (**I**, 5.2.2), et  $v$  est donc *propre* et *surjectif* (5.4.5); si  $g$  est la restriction à  $T''$  du morphisme structural  $X'' \rightarrow Y$ ,  $g$  est *séparé* et de type fini, et on a  $f|_T = g \circ v$ ; il résulte donc de (5.4.3, (ii)) que  $g$  est *propre*, d'où notre assertion.

Il résulte en particulier de ces remarques que si  $Z$  est une partie *Y-propre* de  $X$ , alors :

1° Pour tout sous-préschéma fermé  $X'$  de  $X$ ,  $Z \cap X'$  est une partie *Y-propre* de  $X'$ .

2° Si  $X$  est un sous-préschéma d'un *Y-schéma* de type fini  $X''$ ,  $Z$  est aussi une partie *Y-propre* de  $X''$  (et en particulier est *fermée dans X''*).

## 5.5. Morphismes projectifs.

*Proposition (5.5.1).* — Soit  $X$  un *Y-préschéma*. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a)  $X$  est *Y-isomorphe* à un sous-préschéma fermé d'un fibré projectif  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ , où  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent de type fini.

b) Il existe une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente  $\mathcal{S}$ , telle que  $\mathcal{S}_1$  soit de type fini et engendrée  $\mathcal{S}$ , et que  $X$  soit *Y-isomorphe* à  $\text{Proj}(\mathcal{S})$ .

La condition a) entraîne b) en vertu de (3.6.2, (ii)) : si  $\mathcal{J}$  est un faisceau gradué quasi-cohérent d'idéaux de  $\mathbf{S}(\mathcal{E})$ , la  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente  $\mathcal{S} = \mathbf{S}(\mathcal{E})/\mathcal{J}$  est engendrée par  $\mathcal{S}_1$  et ce dernier, image canonique de  $\mathcal{E}$ , est un  $\mathcal{O}_Y$ -Module de type fini. La condition b) implique a) en vertu de (3.6.2) appliquée au cas où  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}_1$  est l'application identique.

**Définition (5.5.2).** — On dit qu'un  $Y$ -préschéma  $X$  est projectif sur  $Y$  ou est un  $Y$ -schéma projectif s'il vérifie les conditions équivalentes a) et b) de (5.5.1). On dit qu'un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  est projectif s'il fait de  $X$  un  $Y$ -schéma projectif.

Il est clair que si  $f : X \rightarrow Y$  est projectif, il existe un  $\mathcal{O}_X$ -Module très ample relativement à  $f$  (4.4.2).

**Théorème (5.5.3).** — (i) Tout morphisme projectif est quasi-projectif et propre.

(ii) Inversement, soit  $Y$  un schéma quasi-compact ou un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien; alors tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$  qui est quasi-projectif et propre est projectif.

(i) Il est clair que si  $f : X \rightarrow Y$  est projectif, il est de type fini et quasi-projectif (donc en particulier séparé); d'autre part, il résulte aussitôt de (5.5.1, b)) et de (3.5.3) que si  $f$  est projectif, il en est de même de  $f \times_{Y \text{I} Y} : X \times_Y Y' \rightarrow Y'$  pour tout morphisme  $Y' \rightarrow Y$ . Pour montrer que  $f$  est universellement fermé, tout revient donc à prouver qu'un morphisme projectif  $f$  est fermé. La question étant locale sur  $Y$ , on peut supposer que  $Y = \text{Spec}(A)$ , donc (5.5.1)  $X = \text{Proj}(S)$ , où  $S$  est une  $A$ -algèbre graduée engendrée par un nombre fini d'éléments de  $S_1$ . Pour tout  $y \in Y$ , la fibre  $f^{-1}(y)$  s'identifie à  $\text{Proj}(S) \times_Y \text{Spec}(k(y))$  (I, 3.6.1), donc à  $\text{Proj}(S \otimes_A k(y))$  (2.8.10); par suite,  $f^{-1}(y)$  est vide si et seulement si  $S \otimes_A k(y)$  vérifie la condition (TN) (2.7.4), autrement dit  $S_n \otimes_A k(y) = 0$  pour  $n$  assez grand. Mais comme  $(S_n)_y$  est un  $\mathcal{O}_y$ -module de type fini, la condition précédente signifie que  $(S_n)_y = 0$  pour  $n$  assez grand, en vertu du lemme de Nakayama. Si  $a_n$  est l'annulateur dans  $A$  du  $A$ -module  $S_n$ , la condition précédente signifie encore que  $a_n \subset j_y$  pour  $n$  assez grand (0, 1.7.4). Or, comme  $S_n S_1 = S_{n+1}$  par hypothèse, on a  $a_n \subset a_{n+1}$ , et si  $a$  est la réunion des  $a_n$ , on voit donc que  $f(X) = V(a)$ , ce qui prouve que  $f(X)$  est fermé dans  $Y$ . Si maintenant  $X'$  est une partie fermée quelconque de  $X$ , il existe un sous-préschéma fermé de  $X$  ayant  $X'$  pour espace sous-jacent (I, 5.2.1) et il est clair (5.5.1, a)) que le morphisme  $X' \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$  est projectif, donc  $f(X')$  est fermé dans  $Y$ .

(ii) L'hypothèse sur  $Y$  et le fait que  $f$  est quasi-projectif entraînent l'existence d'un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent de type fini  $\mathcal{E}$  et d'une  $Y$ -immersion  $j : X \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E})$  (5.3.2). Mais comme  $f$  est propre,  $j$  est fermée par (5.4.4), donc  $f$  est projectif.

**Remarques (5.5.4).** — (i) Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme tel que : 1<sup>o</sup>  $f$  soit propre; 2<sup>o</sup> il existe un  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\mathcal{L}$  très ample relativement à  $f$ ; 3<sup>o</sup> le  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{E} = f_*(\mathcal{L})$  soit de type fini. Alors  $f$  est un morphisme projectif : en effet (4.4.4), il y a alors une  $Y$ -immersion  $r : X \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E})$ , et comme  $f$  est propre,  $r$  est une immersion fermée (5.4.4). On verra au chapitre III, § 3, que lorsque  $Y$  est localement noethérien, la condition 3<sup>o</sup> ci-dessus est une conséquence des deux autres, donc les conditions 1<sup>o</sup> et 2<sup>o</sup> caractérisent dans ce cas les morphismes projectifs et si  $Y$  est quasi-compact, on peut remplacer la condition 2<sup>o</sup> par l'hypothèse de l'existence d'un  $\mathcal{O}_X$ -Module ample pour  $f$  (4.6.11).

(ii) Soit  $Y$  un schéma quasi-compact tel qu'il existe un  $\mathcal{O}_Y$ -Module ample. Pour qu'un  $Y$ -schéma  $X$  soit projectif, il faut et il suffit qu'il soit  $Y$ -isomorphe à un sous- $Y$ -schéma fermé d'un fibré projectif de la forme  $\mathbf{P}_Y^r$ . La condition est évidemment suffisante.

Inversement, si  $X$  est projectif sur  $Y$ , il est quasi-projectif, donc il existe une  $Y$ -immersion  $j$  de  $X$  dans un  $\mathbf{P}_Y^r$  (5.3.3) qui est fermée par (5.4.4) et (5.5.3).

(iii) Le raisonnement de (5.5.3) montre que pour tout préschéma  $Y$ , et tout entier  $r \geq 0$ , le morphisme structural  $\mathbf{P}_Y^r \rightarrow Y$  est surjectif, car si on pose  $\mathcal{S} = \mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y^{r+1})$ , on a évidemment  $\mathcal{S}_y = \mathbf{S}_{k(y)}((k(y))^{r+1})$  (1.7.3), donc  $(\mathcal{S}_n)_y \neq 0$  pour tout  $y \in Y$  et tout  $n \geq 0$ .

(iv) Il résulte des exemples de Nagata [26] qu'il y a des morphismes propres qui ne sont pas quasi-projectifs.

*Proposition (5.5.5).* — (i) Une immersion fermée est un morphisme projectif.

(ii) Si  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  sont des morphismes projectifs, et si  $Z$  est un schéma quasi-compact ou un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien,  $gof$  est projectif.

(iii) Si  $f : X \rightarrow Y$  est un  $S$ -morphisme projectif,  $f_{(S')} : X_{(S')} \rightarrow Y_{(S')}$  est projectif pour toute extension  $S' \rightarrow S$  du préschéma de base.

(iv) Si  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : X' \rightarrow Y'$  sont des  $S$ -morphismes projectifs, il en est de même de  $f \times_S g$ .

(v) Si  $gof$  est un morphisme projectif et si  $g$  est séparé,  $f$  est projectif.

(vi) Si  $f$  est projectif, il en est de même de  $f_{\text{red}}$ .

(i) résulte aussitôt de (3.1.7). Il faut ici démontrer (iii) et (iv) séparément, à cause de la restriction introduite sur  $Z$  dans (ii) (cf. (I, 3.5.1)). Pour prouver (iii), on se ramène au cas où  $S = Y$  (I, 3.3.11) et l'assertion résulte alors aussitôt de (5.5.1, b)) et de (3.5.3). Pour démontrer (iv), on est aussitôt ramené au cas où  $X = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ ,  $X' = \mathbf{P}(\mathcal{E}')$ ,  $\mathcal{E}$  (resp.  $\mathcal{E}'$ ) étant un  $\mathcal{O}_Y$ -Module (resp. un  $\mathcal{O}_{Y'}$ -Module) quasi-cohérent de type fini. Soient  $p, p'$  les projections canoniques de  $T = Y \times_S Y'$  dans  $Y$  et  $Y'$  respectivement; d'après (4.1.3.1), on a  $\mathbf{P}(p^*(\mathcal{E})) = \mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_Y T$ ,  $\mathbf{P}(p'^*(\mathcal{E}')) = \mathbf{P}(\mathcal{E}') \times_{Y'} T$ ; d'où

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(p^*(\mathcal{E})) \times_T \mathbf{P}(p'^*(\mathcal{E}')) &= (\mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_Y T) \times_T (T \times_{Y'} \mathbf{P}(\mathcal{E}')) = \\ &= \mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_Y (T \times_{Y'} \mathbf{P}(\mathcal{E}')) = \mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_S \mathbf{P}(\mathcal{E}') \end{aligned}$$

en remplaçant  $T$  par  $Y \times_S Y'$  et utilisant (I, 3.3.9.1). Or,  $p^*(\mathcal{E})$  et  $p'^*(\mathcal{E}')$  sont de type fini sur  $T$  (0, 5.2.4), donc il en est de même de  $p^*(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_T} p'^*(\mathcal{E}')$ ; comme

$$\mathbf{P}(p^*(\mathcal{E})) \times_T \mathbf{P}(p'^*(\mathcal{E}'))$$

s'identifie à un sous-préschéma fermé de  $\mathbf{P}(p^*(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_T} p'^*(\mathcal{E}'))$  (4.3.3), cela achève de prouver (iv). Pour obtenir (v) et (vi), on peut appliquer (I, 5.5.13), car tout sous-préschéma fermé d'un  $Y$ -schéma projectif est un  $Y$ -schéma projectif par (5.5.1, a)).

Il reste à prouver (ii); en vertu de l'hypothèse sur  $Z$ , cela résulte de (5.5.3), de (5.3.4, (ii)) et (5.4.2, (ii)).

*Proposition (5.5.6).* — Si  $X$  et  $X'$  sont deux  $Y$ -schémas projectifs,  $X \sqcup X'$  est un  $Y$ -schéma projectif.

C'est une conséquence évidente de (5.5.2) et (4.3.6).

*Proposition (5.5.7).* — Soient  $X$  un  $Y$ -schéma projectif,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module  $Y$ -ample; pour toute section  $f$  de  $\mathcal{L}$  au-dessus de  $X$ ,  $X_f$  est affine sur  $Y$ .

La question étant locale sur  $Y$ , on peut supposer  $Y = \text{Spec}(A)$ ; en outre  $X_f \otimes_{\mathcal{L}} = X_f$ , donc en remplaçant  $\mathcal{L}$  par un  $\mathcal{L}' \otimes_{\mathcal{L}}$  convenable, on peut supposer  $\mathcal{L}$  très ample pour le morphisme structural  $q : X \rightarrow Y$  (4.6.11). L'homomorphisme canonique  $\sigma : q^*(q_*(\mathcal{L})) \rightarrow \mathcal{L}$  est donc surjectif et le morphisme correspondant

$$r = r_{\mathcal{L}, \sigma} : X \rightarrow P = \mathbf{P}(q_*(\mathcal{L}))$$

une immersion telle que  $\mathcal{L} = r^*(\mathcal{O}_P(1))$  (4.4.4); en outre, comme  $X$  est propre sur  $Y$ , l'immersion  $r$  est fermée (5.4.4). Par ailleurs, on a par définition  $f \in \Gamma(Y, q_*(\mathcal{L}))$  et  $\sigma^b$  est l'identité de  $q_*(\mathcal{L})$ ; il résulte alors de la formule (3.7.3.1) que l'on a  $X_f = r^{-1}(D_+(f))$ ;  $X_f$  est par suite un sous-préschéma fermé du schéma affine  $D_+(f)$  et est donc bien un schéma affine.

Lorsqu'on prend en particulier  $Y = X$ , on obtient (compte tenu de (4.6.13, (i))) le corollaire suivant, dont la démonstration directe est d'ailleurs immédiate :

*Corollaire (5.5.8).* — Soient  $X$  un préschéma,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible. Pour toute section  $f$  de  $\mathcal{L}$  au-dessus de  $X$ ,  $X_f$  est affine sur  $X$  (et par suite un schéma affine lorsque  $X$  est un schéma affine).

## 5.6. Le lemme de Chow.

*Théorème (5.6.1)* (lemme de Chow). — Soient  $S$  un préschéma,  $X$  un  $S$ -schéma de type fini. On suppose vérifiée l'une des hypothèses suivantes :

- a)  $S$  est noethérien.
- b)  $S$  est un schéma quasi-compact, et  $X$  a un nombre fini de composantes irréductibles.

Dans ces conditions :

(i) Il existe un  $S$ -schéma  $X'$  quasi-projectif sur  $S$  et un  $S$ -morphisme  $f : X' \rightarrow X$ , projectif et surjectif.

(ii) On peut prendre  $X'$  et  $f$  tels qu'il existe un ouvert  $U \subset X$  pour lequel  $U' = f^{-1}(U)$  soit dense dans  $X'$  et la restriction de  $f$  à  $U'$  un isomorphisme  $U' \xrightarrow{\sim} U$ .

(iii) Si  $X$  est réduit (resp. irréductible, intègre), on peut supposer  $X'$  réduit (resp. irréductible, intègre).

La démonstration se fait en plusieurs étapes.

A) On peut d'abord se ramener au cas où  $X$  est irréductible. En effet, dans l'hypothèse a),  $X$  est noethérien, donc, dans les deux hypothèses, les composantes irréductibles  $X_i$  de  $X$  sont en nombre fini. Si le théorème est démontré pour chacun des sous-préschémas fermés réduits de  $X$  ayant les  $X_i$  pour espaces sous-jacents, et si  $X'_i$  et  $f_i : X'_i \rightarrow X_i$  sont le préschéma et le morphisme correspondant à  $X_i$ , le préschéma  $X'$  somme des  $X'_i$ , et le morphisme  $f : X' \rightarrow X$  dont la restriction à chaque  $X'_i$  est  $j_i \circ f_i$  ( $j_i$  injection canonique  $X_i \rightarrow X$ ), répondront à la question. Il est immédiat en effet que  $X'$  est réduit si les  $X'_i$  le sont; d'autre part on satisfait à (ii) en prenant pour  $U$  la réunion des ensembles  $U_i \cap C(\bigcup_{j \neq i} X_j)$ . Enfin, comme les  $X'_i$  sont quasi-projectifs sur  $S$ , il en est de même de  $X'$

(5.3.6); de même, les morphismes  $X'_i \rightarrow X$  sont projectifs par (5.5.5, (i) et (ii)), donc  $f$  est projectif (5.5.6), et est évidemment surjectif par définition.

B) Supposons maintenant  $X$  irréductible. Comme le morphisme structural  $r : X \rightarrow S$  est de type fini, il y a un recouvrement fini  $(S_i)$  de  $S$  par des ouverts affines, et pour chaque  $i$  un recouvrement fini  $(T_{ij})$  de  $r^{-1}(S_i)$  par des ouverts affines, le morphisme  $T_{ij} \rightarrow S_i$  étant affine et de type fini, donc quasi-projectif (5.3.4, (i)); comme dans chacune des hypothèses  $a), b)$ , l'immersion  $S_i \rightarrow S$  est quasi-compacte, c'est un morphisme quasi-projectif (5.3.4, (i)), donc la restriction de  $r$  à  $T_{ij}$  est un morphisme quasi-projectif (5.3.4, (ii)). Désignons les  $T_{ij}$  par  $U_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ). Il existe, pour chaque indice  $k$  une immersion ouverte  $\varphi_k : U_k \rightarrow P_k$ , où  $P_k$  est projectif sur  $S$  (5.3.2 et 5.5.2). Soit  $U = \bigcap_k U_k$ ; comme  $X$  est irréductible et les  $U_k$  non vides,  $U$  est non vide, et par suite partout dense dans  $X$ ; les restrictions à  $U$  des  $\varphi_k$  définissent un morphisme

$$\varphi : U \rightarrow P = P_1 \times_S P_2 \times \dots \times_S P_n$$

de sorte que les diagrammes

$$(5.6.1.1) \quad \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & P \\ i_k \downarrow & & \downarrow p_k \\ U_k & \xrightarrow{\varphi_k} & P_k \end{array}$$

soient commutatifs,  $j_k$  étant l'injection canonique  $U \rightarrow U_k$  et  $p_k$  la projection canonique  $P \rightarrow P_k$ . Si  $j$  est l'injection canonique  $U \rightarrow X$ , le morphisme  $\psi = (j, \varphi)_S : U \rightarrow X \times_S P$  est une *immersion* (I, 5.3.14). Dans l'hypothèse  $a)$ ,  $X \times_S P$  est localement noethérien ((3.4.1) et (I, 6.3.7 et 6.3.8)); dans l'hypothèse  $b)$ ,  $X \times_S P$  est un schéma quasi-compact (I, 5.5.1 et 6.6.4); dans les deux cas l'*adhérence*  $X'$  dans  $X \times_S P$  du sous-préschéma  $Z$  associé à  $\psi$  (et dont  $\psi(U)$  est l'espace sous-jacent) existe, et  $\psi$  se factorise en

$$(5.6.1.2) \quad \psi : U \xrightarrow{\psi'} X' \xrightarrow{h} X \times_S P$$

où  $\psi'$  est une *immersion ouverte* et  $h$  une *immersion fermée* (I, 9.5.10). Soient  $q_1 : X \times_S P \rightarrow X$  et  $q_2 : X \times_S P \rightarrow P$  les projections canoniques; nous poserons

$$(5.6.1.3) \quad f : X' \xrightarrow{h} X \times_S P \xrightarrow{q_1} X$$

$$(5.6.1.4) \quad g : X' \xrightarrow{h} X \times_S P \xrightarrow{q_2} P.$$

Nous allons voir que  $X'$  et  $f$  répondent à la question.

C) Montrons d'abord que  $f$  est *projectif* et *surjectif*, et que la restriction de  $f$  à  $U' = f^{-1}(U)$  est un *isomorphisme* de  $U'$  sur  $U$ . Comme les  $P_k$  sont projectifs sur  $S$ , il en est de même de  $P$  (5.5.5, (iv)), donc  $X \times_S P$  est projectif sur  $X$  (5.5.5, (iii)), et il en est de même de  $X'$  qui est un sous-préschéma fermé de  $X \times_S P$ . D'autre part, on a  $f \circ \psi' = q_1 \circ (h \circ \psi') = q_1 \circ \psi = j$ , donc  $f(X')$  contient l'ensemble ouvert partout dense  $U$  de  $X$ ; mais  $f$  est un morphisme *fermé* (5.5.3), donc  $f(X') = X$ . Notons maintenant que  $q_1^{-1}(U) = U \times_S P$  est induit sur un ouvert de  $X \times_S P$ , et par définition le préschéma  $U' = h^{-1}(U \times_S P)$  est induit par  $X'$  sur l'ouvert  $U'$ ; c'est par suite l'*adhérence par*

*rapport à  $U \times_S P$*  du préschéma  $Z$  (**I**, 9.5.8). Or l'immersion  $\psi$  se factorise en  $U \xrightarrow{\Gamma_\psi} U \times_S P \xrightarrow{j \times 1} X \times_S P$ , et comme  $P$  est séparé sur  $S$ , le morphisme graphe  $\Gamma_\psi$  est une immersion fermée (**I**, 5.4.3), donc  $Z$  est un sous-préschéma fermé de  $U \times_S P$ , d'où on conclut que  $U' = Z$ . Comme d'ailleurs  $\psi$  est une immersion, la restriction de  $f$  à  $U'$  est un isomorphisme sur  $U$ , réciproque de  $\psi'$ ; enfin, par définition de  $X'$ ,  $U'$  est dense dans  $X'$ .

D) Prouvons maintenant que  $g$  est une *immersion*, ce qui établira que  $X'$  est *quasi-projectif* sur  $S$ , puisque  $P$  est projectif sur  $S$ . Posons

$$\begin{aligned} V_k &= \varphi_k(U_k) && (\text{ouvert de } P_k) \\ W_k &= p_k^{-1}(V_k) && (\text{ouvert de } P) \\ U'_k &= f^{-1}(U_k) \\ U''_k &= g^{-1}(W_k) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\text{ouverts de } X') \end{array} \right.$$

Il est clair que les  $U'_k$  forment un recouvrement ouvert de  $X'$ ; nous allons d'abord voir qu'il en est de même des  $U''_k$ , en prouvant que  $U'_k \subset U''_k$ . Il suffira pour cela de montrer que le diagramme

$$(5.6.1.5) \quad \begin{array}{ccc} U'_k & \xrightarrow{g|_{U'_k}} & P \\ \downarrow f|_{U'_k} & & \downarrow p_k \\ U_k & \xrightarrow{\varphi_k} & P_k \end{array}$$

est commutatif. Or le préschéma  $U'_k = h^{-1}(U_k \times_S P)$  est induit par  $X'$  sur l'ouvert  $U'_k$ , et est donc l'adhérence de  $Z = U' \subset U'_k$  par rapport à  $U'_k$  (**I**, 9.5.8). Pour montrer la commutativité du diagramme (5.6.1.5), il suffit donc, puisque  $P_k$  est un  $S$ -schéma, de montrer qu'en composant ce diagramme avec l'injection canonique  $U' \rightarrow U'_k$  (ou, ce qui revient au même en vertu de l'isomorphisme de  $U'$  et  $U$ , avec  $\psi$ ), on obtient un diagramme commutatif (**I**, 9.5.6). Mais par définition le diagramme que l'on obtient alors n'est autre que (5.6.1.1), d'où notre assertion.

Les  $W_k$  forment donc un recouvrement ouvert de  $g(X')$ ; pour prouver que  $g$  est une immersion, il suffit de voir que chacune des restrictions  $g|_{U''_k}$  est une immersion dans  $W_k$  (**I**, 4.2.4). Pour cela, considérons le morphisme  $u_k : W_k \xrightarrow{p_k} V_k \xrightarrow{\varphi_k^{-1}} U_k \rightarrow X$ ; comme  $X$  est séparé sur  $S$ , le morphisme graphe  $\Gamma_{u_k} : W_k \rightarrow X \times_S W_k$  est une immersion fermée (**I**, 5.4.3), donc le graphe  $T_k = \Gamma_{u_k}(W_k)$  est un sous-préschéma fermé de  $X \times_S W_k$ ; si nous montrons que ce sous-préschéma majore  $U'$ , il majorera aussi le sous-préschéma induit par  $X'$  sur l'ouvert  $X''_k$  de  $X'$ , par (**I**, 9.5.8). Comme la restriction de  $q_2$  à  $T_k$  est un isomorphisme sur  $W_k$ , la restriction de  $g$  à  $X''_k$  sera une immersion dans  $W_k$ , et notre assertion sera démontrée. Soit  $v_k$  l'injection canonique  $U' \rightarrow X \times_S W_k$ ; nous devons montrer qu'il existe un morphisme  $w_k : U' \rightarrow W_k$  tel que  $v_k = \Gamma_{u_k} \circ w_k$ . Par définition du produit, il suffit de prouver que  $q_1 \circ v_k = u_k \circ q_2 \circ v_k$  (**I**, 3.2.1), ou, en composant à droite

avec l'isomorphisme  $\psi' : U \rightarrow U'$ , que  $q_1 \circ \psi = u_k \circ q_2 \circ \psi$ . Mais comme  $q_1 \circ \psi = j$ ,  $q_2 \circ \psi = \varphi$ , notre assertion résulte de la commutativité du diagramme (5.6.1.1), compte tenu de la définition de  $u_k$ .

E) Il est clair que comme  $U$ , et par suite  $U'$ , est irréductible, il en est de même de  $X'$  dans la construction précédente, et le morphisme  $f$  est donc *birationnel* (**I**, 2.2.9). Si en outre  $X$  est réduit, il en est de même de  $U'$ , donc  $X'$  est réduit (**I**, 9.5.9). Cela achève la démonstration.

*Corollaire (5.6.2).* — *On suppose vérifiée l'une des hypothèses a), b) de (5.6.1). Pour que  $X$  soit propre sur  $S$ , il faut et il suffit qu'il existe un schéma  $X'$  projectif sur  $S$  et un  $S$ -morphisme surjectif  $f : X' \rightarrow X$  (qui est alors projectif par (5.5.5, (v))). Lorsqu'il en est ainsi, on peut en outre choisir  $f$  de sorte qu'il existe un ouvert dense  $U$  de  $X$  tel que la restriction de  $f$  à  $f^{-1}(U)$  soit un isomorphisme  $f^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$  et que  $f^{-1}(U)$  soit dense dans  $X'$ . Si en outre  $X$  est irréductible (resp. réduit) on peut supposer qu'il en est de même de  $X'$ ; lorsque  $X$  et  $X'$  sont irréductibles,  $f$  est un morphisme birationnel.*

La condition est suffisante en vertu de (5.5.3) et (5.4.3, (ii)). Elle est nécessaire, car avec les notations de (5.6.1), si  $X$  est propre sur  $S$ ,  $X'$  est propre sur  $S$ , car il est projectif sur  $X$ , donc propre sur  $X$  (5.5.3), et notre assertion résulte de (5.4.2, (ii)); en outre, comme  $X'$  est quasi-projectif sur  $S$ , il est projectif sur  $S$  en vertu de (5.5.3).

*Corollaire (5.6.3).* — *Soient  $S$  un préschéma localement noethérien,  $X$  un  $S$ -schéma de type fini sur  $S$ ,  $f_0 : X \rightarrow S$  son morphisme structural. Pour que  $X$  soit propre sur  $S$ , il faut et il suffit que pour tout morphisme de type fini  $S' \rightarrow S$ ,  $(f_0)_{(S')} : X_{(S')} \rightarrow S'$  soit un morphisme fermé. Il suffit même que cette condition soit vérifiée pour tout  $S$ -préschéma de la forme  $S' = S \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n]$  ( $T_i$  indéterminées).*

La condition étant évidemment nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. La question étant locale sur  $S$  et  $S'$  (5.4.1), on peut supposer  $S$  et  $S'$  affines et noethériens. En vertu du lemme de Chow, il existe un  $S$ -schéma projectif  $P$ , une immersion  $j : X' \rightarrow P$  et un morphisme projectif et surjectif  $f : X' \rightarrow X$ , tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{f} & X' \\ f_0 \downarrow & & \downarrow j \\ S & \xleftarrow[r]{} & P \end{array}$$

soit commutatif. Comme  $P$  est de type fini sur  $S$ , la première hypothèse entraîne que la projection  $q_2 : X \times_S P \rightarrow P$  est un morphisme fermé. Mais l'immersion  $j$  est composée de  $q_2$  et du morphisme  $f \times_1$  de  $X' \times_S P$  dans  $X \times_S P$ ; or  $f$ , étant projectif, est propre (5.5.3), donc  $f \times_1$  est fermé. On en conclut que  $j$  est une immersion fermée, et par suite est propre (5.4.2, (i)). En outre le morphisme structural  $r : P \rightarrow S$  est projectif, donc propre (5.5.3), donc  $f_0 \circ f = r \circ j$  est propre (5.4.2, (ii)); finalement, comme  $f$  est surjectif,  $f_0$  est propre en vertu de (5.4.3).

Pour prouver la proposition en utilisant seulement la seconde hypothèse, il suffit de montrer qu'elle entraîne la première. Or, si  $S'$  est affine et de type fini sur  $S = \text{Spec}(A)$ ,

on a  $S' = \text{Spec}(A[c_1, \dots, c_n])$  (I, 6.3.3), et  $S'$  est donc isomorphe à un sous-préschéma fermé de  $S'' = \text{Spec}(A[T_1, \dots, T_n])$  ( $T_i$  indéterminées). Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X \times_S S' & \xrightarrow{i_X \times j} & X \times_S S'' \\ \downarrow (f_0)_{(S')} & & \downarrow (f_0)_{(S'')} \\ S' & \xrightarrow{j} & S'' \end{array}$$

$j$  et  $i_X \times j$  sont des immersions fermées (I, 4.3.1) et  $(f_0)_{(S')}$  est fermé par hypothèse; il en est donc de même de  $(f_0)_{(S'')}$ .

## § 6. MORPHISMES ENTIERS ET MORPHISMES FINIS

### 6.1. Préschémas entiers sur un autre.

*Définition (6.1.1).* — Soient  $X$  un  $S$ -préschéma,  $f: X \rightarrow S$  son morphisme structural. On dit que  $X$  est entier au-dessus de  $S$ , ou que  $f$  est un morphisme entier, s'il existe un recouvrement  $(S_\alpha)$  de  $S$  par des ouverts affines tels que, pour tout  $\alpha$ , le préschéma induit  $f^{-1}(S_\alpha)$  soit un schéma affine, dont l'anneau  $B_\alpha$  est une algèbre entière sur l'anneau  $A_\alpha$  de  $S_\alpha$ . On dit que  $X$  est fini au-dessus de  $S$ , ou que  $f$  est un morphisme fini si  $X$  est entier sur  $S$  et de type fini sur  $S$ .

Lorsque  $S$  est affine d'anneau  $A$ , on dira aussi « entier (resp. fini) sur  $A$  » au lieu de « entier (resp. fini) sur  $S$  ».

*(6.1.2)* Il est clair que si  $X$  est entier au-dessus de  $S$ , il est *affine* au-dessus de  $S$ . Pour qu'un préschéma  $X$  affine au-dessus de  $S$  soit entier (resp. fini) au-dessus de  $S$ , il faut et il suffit que la  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre quasi-cohérente associée  $\mathcal{A}(X)$  soit telle qu'il existe un recouvrement  $(S_\alpha)$  de  $S$  par des ouverts affines ayant la propriété que pour tout  $\alpha$ ,  $\Gamma(S_\alpha, \mathcal{A}(X))$  est une algèbre entière (resp. entière et de type fini) sur  $\Gamma(S_\alpha, \mathcal{O}_S)$ . Une  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre quasi-cohérente ayant cette propriété est dite *entière* (resp. *finie*) sur  $\mathcal{O}_S$ . Se donner un préschéma entier (resp. fini) au-dessus de  $S$  revient donc (1.3.1) à se donner une  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre quasi-cohérente entière (resp. finie) sur  $\mathcal{O}_S$ . On notera qu'une  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre quasi-cohérente  $\mathcal{B}$  est finie si et seulement si c'est un  $\mathcal{O}_S$ -Module de type fini (I, 1.3.9); il revient au même de dire que  $\mathcal{B}$  est une  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre entière et de type fini, car une algèbre entière et de type fini sur un anneau  $A$  est un  $A$ -module de type fini.

*Proposition (6.1.3).* — Soit  $S$  un préschéma localement noethérien. Pour qu'un préschéma  $X$  affine au-dessus de  $S$  soit fini au-dessus de  $S$ , il faut et il suffit que la  $\mathcal{O}_S$ -Algèbre  $\mathcal{A}(X)$  soit cohérente.

Compte tenu de la remarque précédente, cela revient à remarquer que si  $S$  est localement noethérien, les  $\mathcal{O}_S$ -Modules quasi-cohérents de type fini ne sont autres que les  $\mathcal{O}_S$ -Modules cohérents (I, 1.5.1).

*Proposition (6.1.4).* — Soient  $X$  un préschéma entier (resp. fini) au-dessus de  $S$ ,  $f: X \rightarrow S$  le morphisme structural. Alors, pour tout ouvert affine  $U \subset S$ , d'anneau  $A, f^{-1}(U)$  est un schéma affine dont l'anneau  $B$  est une algèbre entière (resp. finie) sur  $A$ .

Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

*Lemme (6.1.4.1). — Soient A un anneau, M un A-module,  $(g_i)_{1 \leq i \leq m}$  un système fini d'éléments de A tels que les  $D(g_i)$  ( $1 \leq i \leq m$ ) recouvrent  $\text{Spec}(A)$ . Si, pour tout i,  $M_{g_i}$  est un  $A_{g_i}$ -module de type fini, alors M est un A-module de type fini.*

On peut en effet supposer que  $M_{g_i}$  admet un système de générateurs fini  $(m_{ij}/g_i^n)$  avec  $m_{ij} \in M$ , n étant le même pour tous les indices i. Montrons que les  $m_{ij}$  forment un système de générateurs de M. Soit  $M'$  le sous-A-module de M engendré par ces éléments, et soit  $m$  un élément de M. Par hypothèse, pour chaque i, il existe des  $a_{ij} \in A$  et un entier  $p$  (indépendant de i) tels que, dans  $M_{g_i}$ ,  $m/1 = (\sum_j a_{ij} m_{ij})/g_i^p$ ; cela entraîne qu'il existe un entier  $r \geq p$  tel que, pour tout i, on ait  $g_i^r m \in M'$ . Or, comme les  $D(g_i^r) = D(g_i)$  recouvrent  $\text{Spec}(A)$ , l'idéal de A engendré par les  $g_i^r$  est égal à A, autrement dit il existe des éléments  $a_i \in A$  tels que  $\sum_i a_i g_i^r = 1$ ; par suite  $m = (\sum_i a_i g_i^r)m \in M'$ , d'où le lemme.

Cela étant, on sait déjà (1.3.2) que  $f^{-1}(U)$  est affine. Si  $\varphi$  est l'homomorphisme  $A \rightarrow B$  correspondant à  $f$ , il existe un recouvrement fini de  $U$  par des ouverts  $D(g_i)$  ( $g_i \in A$ ) tels que, si  $h_i = \varphi(g_i)$ ,  $B_{h_i}$  soit une algèbre entière (resp. entière finie) sur  $A_{g_i}$ . En effet, il y a un recouvrement de  $U$  par des ouverts affines  $V_\alpha \subset U$  tels que si  $A_\alpha = A(V_\alpha)$ ,  $B_\alpha = A(f^{-1}(V_\alpha))$  soit une algèbre entière (resp. finie) sur  $A_\alpha$ . Tout  $x \in U$  appartient à un  $V_\alpha$ , donc il existe  $g \in A$  tel que  $x \in D(g) \subset V_\alpha$ ; si  $g_\alpha$  est l'image de  $g$  dans  $A_\alpha$ , on a  $A(D(g)) = A_g = (A_\alpha)_{g_\alpha}$ ; soit  $h = \varphi(g)$ , et soit  $h_\alpha$  l'image de  $g_\alpha$  dans  $B_\alpha$ ; on a

$$A(D(h)) = B_h = (B_\alpha)_{h_\alpha}$$

et comme  $B_\alpha$  est entière (resp. finie) sur  $A_\alpha$ ,  $(B_\alpha)_{h_\alpha}$  est entière (resp. finie) sur  $(A_\alpha)_{g_\alpha}$ . Il suffit maintenant d'utiliser le fait que  $U$  est quasi-compact pour obtenir le recouvrement cherché.

Si on suppose d'abord que les  $B_{h_i}$  sont entières finies sur les  $A_{g_i}$ , comme, en tant que  $A_{g_i}$ -module,  $B_{h_i}$  s'écrit aussi  $B_{g_i}$ , le lemme (6.1.4.1) montre que dans ce cas B est un A-module de type fini.

Supposons seulement maintenant chaque  $B_{h_i}$  entière sur  $A_{g_i}$ ; soit  $b \in B$ , et soit C la sous-A-algèbre de B engendrée par b. Pour tout i,  $C_{h_i}$  est l'algèbre sur  $A_{g_i}$  engendrée par  $b/1$  dans  $B_{h_i}$ ; il résulte de l'hypothèse que chaque  $C_{h_i}$  est un  $A_{g_i}$ -module de type fini, donc (6.1.4.1) C est un A-module de type fini, ce qui prouve que B est entière sur A.

*Proposition (6.1.5). — (i) Une immersion fermée est finie (et a fortiori entière).*

*(ii) Le composé de deux morphismes finis (resp. entiers) est fini (resp. entier).*

*(iii) Si  $f : X \rightarrow Y$  est un S-morphisme fini (resp. entier)  $f_{(S')} : X_{(S')} \rightarrow Y_{(S')}$  est fini (resp. entier) pour toute extension  $S' \rightarrow S$  de la base.*

*(iv) Si  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : X' \rightarrow Y'$  sont deux S-morphismes finis (resp. entiers), il en est de même de  $f \times_S g : X \times_S Y \rightarrow X' \times_S Y'$ .*

*(v) Si  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  sont deux morphismes tels que  $g \circ f$  soit fini (resp. entier) et g séparé, alors f est fini (resp. entier).*

*(vi) Si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme fini (resp. entier), il en est de même de  $f_{\text{red}}$ .*

En vertu de (**I**, 5.5.12), il suffit de démontrer (i), (ii) et (iii). Pour prouver qu'une immersion fermée  $X \rightarrow S$  est finie, on peut se borner au cas où  $S = \text{Spec}(A)$ , et tout revient alors à remarquer qu'un anneau quotient  $A/\mathfrak{J}$  est un  $A$ -module monogène. Pour prouver que le composé de deux morphismes finis (resp. entiers)  $X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z$  est fini (resp. entier), on peut encore supposer  $Z$  (et par suite  $X, Y$  (1.3.4)) affines, et alors l'assertion équivaut à dire que si  $B$  est une  $A$ -algèbre finie (resp. entière) et  $C$  une  $B$ -algèbre finie (resp. entière), alors  $C$  est une  $A$ -algèbre finie (resp. entière), ce qui est immédiat. Enfin, pour démontrer (iii), on peut se borner au cas où  $S = Y$ , puisque  $X_{(S')} \simeq X \times_Y Y_{(S')}$  (**I**, 3.3.11); on peut en outre supposer que  $S = \text{Spec}(A)$ ,  $S' = \text{Spec}(A')$ ; alors  $X$  est affine d'anneau  $B$  (1.3.4),  $X_{(S')}$  affine d'anneau  $A' \otimes_A B$ , et il suffit de remarquer que si  $B$  est une  $A$ -algèbre finie (resp. entière),  $A' \otimes_A B$  est une  $A'$ -algèbre finie (resp. entière).

Notons aussi que si  $X$  et  $Y$  sont deux  $S$ -préschémas qui sont finis (resp. entiers) au-dessus de  $S$ , leur *somme*  $X \sqcup Y$  est un préschéma fini (resp. entier) au-dessus de  $S$ , car cela revient à voir que si  $B$  et  $C$  sont deux  $A$ -algèbres finies (resp. entières) sur  $A$ , il en est de même de  $B \times C$ .

*Corollaire (6.1.6).* — *Si  $X$  est un préschéma entier (resp. fini) au-dessus de  $S$ , alors, pour tout ouvert  $U \subset S$ ,  $f^{-1}(U)$  est entier (resp. fini) au-dessus de  $U$ .*

C'est un cas particulier de (6.1.5, (iii)).

*Corollaire (6.1.7).* — *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme fini. Alors, pour tout  $y \in Y$ , la fibre  $f^{-1}(y)$  est un schéma algébrique fini sur  $\mathbf{k}(y)$ , et a fortiori son espace sous-jacent est discret et fini.*

En effet, en tant que  $\mathbf{k}(y)$ -préschéma,  $f^{-1}(y)$  est identifié à  $X \times_Y \text{Spec}(\mathbf{k}(y))$  (**I**, 3.6.1), qui est fini au-dessus de  $\text{Spec}(\mathbf{k}(y))$  (6.1.5, (iii)); c'est donc un schéma affine dont l'anneau est une algèbre de rang fini sur  $\mathbf{k}(y)$  (6.1.4). La proposition résulte alors de (**I**, 6.4.4).

*Corollaire (6.1.8).* — *Soient  $X, S$  deux préschémas intègres,  $f : X \rightarrow S$  un morphisme dominant. Si  $f$  est entier (resp. fini), le corps  $R(X)$  des fonctions rationnelles sur  $X$  est algébrique (resp. algébrique de degré fini) sur le corps  $R(S)$  des fonctions rationnelles sur  $S$ .*

En effet, soit  $s$  le point générique de  $S$ ; le  $\mathbf{k}(s)$ -préschéma  $f^{-1}(s)$  est entier (resp. fini) au-dessus de  $\text{Spec}(\mathbf{k}(s))$  (6.1.5, (iii)), et contient par hypothèse le point générique  $x$  de  $X$ ; l'anneau local de  $x$  dans  $f^{-1}(s)$  étant égal à  $\mathbf{k}(x)$  (**I**, 3.6.5) est un anneau local d'une algèbre entière (resp. finie) sur  $\mathbf{k}(s)$  (6.1.4), d'où le corollaire.

*Remarque (6.1.9).* — L'hypothèse que  $g$  est séparé est essentielle pour la validité de (6.1.5, (v)) : en effet, si  $Y$  n'est pas séparé sur  $Z$ , l'identité  $i_Y$  est le morphisme composé  $Y \xrightarrow{\Delta_Y} Y \times_Z Y \xrightarrow{p_1} Y$ , mais  $\Delta_Y$  n'est pas un morphisme entier, comme il résulte de (6.1.10) :

*Proposition (6.1.10).* — *Tout morphisme entier est universellement fermé.*

Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme entier; en vertu de (6.1.5, (iii)), il suffit de montrer que  $f$  est fermé. Soit  $Z$  une partie fermée de  $X$ ; il existe un sous-préschéma de  $X$  ayant

pour espace sous-jacent  $Z$  (**I**, 5.2.1), et il résulte donc de (6.1.5, (i) et (ii)) qu'on peut se borner à prouver que  $f(X)$  est fermé dans  $Y$ . En vertu de (6.1.5, (vi)), on peut supposer  $X$  et  $Y$  réduits; en outre, si  $T$  est le sous-préschéma fermé réduit de  $Y$  ayant pour espace sous-jacent  $\overline{f(X)}$  (**I**, 5.2.1), on sait que  $f$  se factorise en  $X \rightarrow T \xrightarrow{j} Y$ , où  $j$  est le morphisme d'Injection (**I**, 5.2.2), et comme  $j$  est séparé (**I**, 5.5.1, (i)), il résulte de (6.1.5, (v)) que  $g$  est un morphisme entier. On peut donc supposer que  $f(X)$  est dense dans  $Y$ . Enfin, la question étant locale sur  $Y$ , on peut se borner au cas où  $Y = \text{Spec}(A)$ . Alors  $X = \text{Spec}(B)$ , où  $B$  est une  $A$ -algèbre entière sur  $A$  (6.1.4); en outre  $A$  est réduit (**I**, 5.1.4) et l'hypothèse que  $f(X)$  est dense dans  $Y$  entraîne que l'homomorphisme  $\varphi : A \rightarrow B$  correspondant à  $f$  est injectif (**I**, 1.2.7). Dire que dans ces conditions  $f(X) = Y$  signifie que tout idéal premier de  $A$  est la trace sur  $A$  d'un idéal premier de  $B$ , ce qui n'est autre que le premier théorème de Cohen-Seidenberg ([13], t. I, p. 257, th. 3).

*Corollaire (6.1.11).* — *Tout morphisme fini  $f : X \rightarrow Y$  est projectif.*

En effet, comme  $f$  est affine,  $\mathcal{O}_X$  est un  $\mathcal{O}_X$ -Module très ample relativement à  $f$  (5.1.2); en outre  $f_*(\mathcal{O}_X)$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent de type fini (6.1.2); enfin  $f$  est séparé, de type fini et universellement fermé (6.1.10), et on est donc dans les conditions d'applications du critère (5.5.4, (i)).

*Proposition (6.1.12).* — *Soient  $f : X' \rightarrow X$  un morphisme fini, et soit  $\mathcal{B} = f_*(\mathcal{O}_{X'})$  (qui est une  $\mathcal{O}_X$ -Algèbre quasi-cohérente et un  $\mathcal{O}_X$ -Module de type fini). Soit  $\mathcal{F}'$  un  $\mathcal{O}_{X'}$ -Module quasi-cohérent; pour que  $\mathcal{F}'$  soit localement libre, de rang  $r$ , il faut et il suffit que  $f_*(\mathcal{F}')$  soit un  $\mathcal{B}$ -Module localement libre de rang  $r$ .*

Il est clair que si  $f_*(\mathcal{F}')|U$  est isomorphe à  $\mathcal{B}|U$  ( $U$  ouvert de  $X$ ),  $\mathcal{F}'|f^{-1}(U)$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_{X'}^r|f^{-1}(U)$  (1.4.2). Inversement, supposons que  $\mathcal{F}'$  soit localement libre de rang  $r$  et montrons que  $f_*(\mathcal{F}')$  est localement isomorphe à  $\mathcal{B}$  en tant que  $\mathcal{B}$ -Module. Soit  $x$  un point de  $X$ ; lorsque  $U$  parcourt un système fondamental de voisinages affines de  $x$ ,  $f^{-1}(U)$  parcourt un système fondamental de voisinages affines (1.2.5) de l'ensemble fini  $f^{-1}(x)$ , puisque  $f$  est fermé (6.1.10). La proposition résulte alors du lemme suivant :

*Lemme (6.1.12.1).* — *Soient  $Y$  un préschéma,  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -Module localement libre de rang  $r$ ,  $Z$  une partie finie de  $Y$  contenue dans un ouvert affine  $V$ . Il existe alors un voisinage  $U \subset V$  de  $Z$  tel que  $\mathcal{E}|U$  soit isomorphe à  $\mathcal{O}_Y^r|U$ .*

On peut évidemment supposer  $Y$  affine; pour tout  $z_i \in Z$ , il existe dans l'adhérence  $\overline{\{z_i\}}$  au moins un point fermé  $z'_i$  (0, 2.1.3); si  $Z'$  est l'ensemble des  $z'_i$ , tout voisinage de  $Z'$  est un voisinage de  $Z$ , et on peut donc supposer  $Z$  fermé dans  $Y$  et discret. Considérons le sous-préschéma fermé réduit de  $Y$  ayant  $Z$  pour espace sous-jacent (**I**, 5.2.1) et soit  $j : Z \rightarrow Y$  l'injection canonique;  $j^*(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \otimes_Y \mathcal{O}_Z$  est localement libre de rang  $r$  sur le schéma discret  $Z$ , et par suite est isomorphe à  $\mathcal{O}_Z^r$ ; autrement dit il existe  $r$  sections  $s_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) de  $\mathcal{E} \otimes_Y \mathcal{O}_Z$  au-dessus de  $Z$  telles que l'homomorphisme  $\mathcal{O}_Z^r \rightarrow \mathcal{E} \otimes_Y \mathcal{O}_Z$  défini par ces sections soit bijectif. Mais  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine,  $Z$  est défini par un idéal  $\mathfrak{J}$  de  $A$  et on a  $\mathcal{E} = \widetilde{M}$ , où  $M$  est un  $A$ -module; les  $s_i$  sont des éléments

de  $M \otimes_A (A/J)$  et sont donc images de  $r$  éléments  $t_i \in M = \Gamma(Y, \mathcal{O})$ . Pour tout  $z_j \in Z$  il y a alors un voisinage  $V_j$  de  $z_j$  tel que les restrictions des  $t_i$  à  $V_j$  définissent un isomorphisme  $\mathcal{O}_Y^r|V_j \rightarrow \mathcal{E}|V_j$  (0, 5.5.4); le voisinage  $U$  réunion des  $V_j$  répond donc à la question.

*Proposition (6.1.13).* — Soient  $g : X' \rightarrow Y$  un morphisme entier de préschémas,  $Y$  un préschéma normal localement intègre,  $f$  une application rationnelle de  $Y$  dans  $X'$  telle que  $gof$  soit une application rationnelle partout définie (I, 7.2.1); alors  $f$  est partout définie.

Si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux morphismes (d'ouverts denses de  $Y$  dans  $X'$ ) de la classe  $f$ , il est clair que  $gof_1$  et  $gof_2$  sont des morphismes équivalents, ce qui justifie la notation  $gof$  pour leur classe d'équivalence. On rappelle aussi que lorsqu'on suppose en outre que  $Y$  est localement noethérien, l'hypothèse que  $Y$  est normal entraîne déjà que  $Y$  est localement intègre (I, 6.1.13).

Pour démontrer (6.1.13), notons d'abord que la question est locale sur  $Y$  et on peut par suite supposer qu'il existe dans la classe de  $gof$  un morphisme  $h : Y \rightarrow X$ . Considérons l'image réciproque  $Y' = X'_{(h)} = X_{(Y)}$ , et notons que le morphisme  $g' = g_{(Y)} : Y' \rightarrow Y$  est entier (6.1.5, (iii)). Vu la correspondance entre applications rationnelles de  $Y$  dans  $X'$  et  $Y$ -sections rationnelles de  $Y'$  (I, 7.1.2), on voit qu'on est ramené à prouver le cas particulier de (6.1.13) où  $X = Y$ , autrement dit le

*Corollaire (6.1.14).* — Soient  $X$  un préschéma normal localement intègre,  $g : X' \rightarrow X$  un morphisme entier,  $f$  une  $X$ -section rationnelle de  $X'$ . Alors  $f$  est partout définie.

La question étant locale sur  $X$ , on peut supposer  $X$  intègre, et  $f$  s'identifie alors à un morphisme d'un ouvert  $U$  de  $X$  dans  $X'$  (I, 7.2.2) qui est une  $U$ -section de  $g^{-1}(U)$ . Comme  $g$  est séparé,  $f$  est une immersion fermée de  $U$  dans  $g^{-1}(U)$  (I, 5.4.6); soit  $Z$  le sous-préschéma fermé de  $g^{-1}(U)$  associé à  $f$  (I, 4.2.1), qui est isomorphe à  $U$ , donc intègre; soit  $X_1$  le sous-préschéma réduit de  $X'$  ayant pour espace sous-jacent l'adhérence  $\bar{Z}$  de  $Z$  dans  $X'$  (I, 5.2.1);  $Z$  est alors un sous-préschéma induit sur un ouvert de  $X_1$  (I, 5.2.3) et comme il est irréductible, il en est de même de  $X_1$ , qui est par suite intègre. Le morphisme  $f$  peut alors être considéré comme une  $X$ -section rationnelle de  $X_1$ ; comme la restriction de  $g$  à  $X_1$  est un morphisme entier (6.1.5, (i) et (ii)), on est finalement ramené à prouver (6.1.14) dans le cas particulier où  $X' = X_1$ , autrement dit, le

*Corollaire (6.1.15).* — Soient  $X$  un préschéma intègre normal,  $X'$  un préschéma intègre,  $g : X' \rightarrow X$  un morphisme entier. S'il existe une  $X$ -section rationnelle  $f$  de  $X'$ ,  $g$  est un isomorphisme.

La question étant locale sur  $X$ , on peut supposer  $X$  affine d'anneau intègre  $A$ , et alors  $X'$  est affine d'anneau  $A'$  entier sur  $A$  (6.1.4) et intègre; en outre, le raisonnement de (6.1.14) montre qu'il y a un ouvert dense dans  $X$  isomorphe à un ouvert dense de  $X'$ , donc  $A$  et  $A'$  ont même corps de fractions. D'autre part, en vertu de (I, 8.2.1.1) et de l'hypothèse que les  $\mathcal{O}_x$  sont intégralement clos, l'anneau  $A$  est intégralement clos, donc  $A' = A$ , ce qui achève la démonstration de (6.1.13).

## 6.2. Morphismes quasi-finis.

*Proposition (6.2.1).* — Soient  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme localement de type fini,  $x$  un point de  $X$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) *Le point  $x$  est isolé dans sa fibre  $f^{-1}(f(x))$ .*
- b) *L'anneau  $\mathcal{O}_x$  est un  $\mathcal{O}_{f(x)}$ -module quasi-fini (0, 7.4.1).*

La question étant évidemment locale sur  $X$  et sur  $Y$ , on peut supposer  $X = \text{Spec}(A)$  et  $Y = \text{Spec}(B)$  affines,  $A$  étant une  $B$ -algèbre de type fini (I, 6.3.3). En outre, on peut remplacer  $X$  par  $X \times_Y \text{Spec}(\mathcal{O}_{f(x)})$  sans changer la fibre  $f^{-1}(f(x))$  ni l'anneau local  $\mathcal{O}_x$  (I, 3.6.5); on peut donc supposer que  $B$  est un anneau local (égal à  $\mathcal{O}_{f(x)}$ ); si  $\mathfrak{n}$  est l'idéal maximal de  $B$ ,  $f^{-1}(f(x))$  est alors un schéma affine d'anneau  $A/\mathfrak{n}A$ , de type fini sur  $\mathbf{k}(f(x)) = B/\mathfrak{n}$  (I, 6.4.11). Cela étant, si a) est vérifiée, on peut en outre supposer que  $f^{-1}(f(x))$  est réduite au point  $x$ ; donc  $A/\mathfrak{n}A$  est de rang fini sur  $B/\mathfrak{n}$  (I, 6.4.4), autrement dit  $A$  est un  $B$ -module quasi-fini. Inversement, s'il en est ainsi,  $f^{-1}(f(x))$  est un schéma affine artinien, donc discret (I, 6.4.4); par suite  $x$  est isolé dans sa fibre, et cela montre que b) entraîne a).

*Corollaire (6.2.2).* — Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) *Tout point  $x \in X$  est isolé dans sa fibre  $f^{-1}(f(x))$  (autrement dit le sous-espace  $f^{-1}(f(x))$  est discret).*
- b) *Pour tout  $x \in X$ , le préschéma  $f^{-1}(f(x))$  est un  $\mathbf{k}(f(x))$ -préschéma fini.*
- c) *Pour tout  $x \in X$ , l'anneau  $\mathcal{O}_x$  est un  $\mathcal{O}_{f(x)}$ -module quasi-fini.*

L'équivalence de a) et c) résulte de (6.2.1). D'autre part, comme  $f^{-1}(f(x))$  est un  $\mathbf{k}(f(x))$ -préschéma algébrique (I, 6.4.11), l'équivalence de a) et b) résulte de (I, 6.4.4).

*Définition (6.2.3).* — Lorsque  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme de type fini vérifiant les conditions équivalentes de (6.2.2), on dit que  $f$  est quasi-fini, ou que  $X$  est quasi-fini sur  $Y$ .

Il est clair que tout morphisme fini est quasi-fini (6.1.8).

*Proposition (6.2.4).* — (i) Une immersion  $X \rightarrow Y$ , qui est fermée, ou telle que  $X$  soit noethérien, est un morphisme quasi-fini.

(ii) Si  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  sont des morphismes quasi-finis,  $gof$  est quasi-fini.

(iii) Si  $X$  et  $Y$  sont des  $S$ -préschémas,  $f : X \rightarrow Y$  un  $S$ -morphisme quasi-fini, alors  $f_{(S')} : X_{(S')} \rightarrow Y_{(S')}$  est quasi-fini pour toute extension  $g : S' \rightarrow S$  de la base.

(iv) Si  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : X' \rightarrow Y'$  sont deux  $S$ -morphismes quasi-finis,

$$f \times_S g : X \times_S Y \rightarrow X' \times_S Y'$$

est quasi-fini.

(v) Soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  deux morphismes tels que  $gof$  soit quasi-fini; alors, si en outre  $g$  est séparé, ou  $X$  noethérien, ou  $X \times_Z Y$  localement noethérien,  $f$  est quasi-fini.

(vi) Si  $f$  est quasi-fini, il en est de même de  $f_{\text{red}}$ .

Si  $f : X \rightarrow Y$  est une immersion, toute fibre est réduite à un point, et l'assertion (i) résulte donc de (I, 6.3.4 (i) et 6.3.5). Pour prouver (ii), on remarque d'abord que  $h = gof$  est de type fini (I, 6.3.4 (ii)); en outre, si  $z = h(x)$  et  $y = f(x)$ ,  $y$  est isolé dans  $g^{-1}(z)$ , donc il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $y$  dans  $Y$  ne rencontrant aucun point de  $g^{-1}(z)$  distinct de  $y$ ;  $f^{-1}(V)$  est donc un voisinage ouvert de  $x$  ne rencontrant aucun

des  $f^{-1}(y')$ , où  $y' \neq y$  est dans  $g^{-1}(z)$ ; comme  $x$  est isolé dans  $f^{-1}(y)$ , il est isolé dans  $h^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z))$ . Pour prouver (iii), on peut se limiter au cas où  $Y = S$  (**I**, 3.3.11); on remarque encore que tout d'abord  $f' = f|_{S'}$  est de type fini (**I**, 6.3.4, (iii)); d'autre part, si  $x' \in X' = X_{(S')}$  et si on pose  $y' = f'(x')$  et  $y = g(y')$ ,  $f'^{-1}(y')$  s'identifie à  $f^{-1}(y) \otimes_{k(y)} k(y')$  (**I**, 3.6.5); comme  $f^{-1}(y)$  est de rang fini sur  $k(y)$  par hypothèse,  $f'^{-1}(y')$  est de rang fini sur  $k(y')$ , donc discret. Les assertions (iv), (v), (vi) se déduisent de (i), (ii), (iii) par la méthode générale (**I**, 5.5.12), sauf lorsque les hypothèses dans (v) sont autres que l'hypothèse «  $g$  séparé »; pour traiter ce cas, on remarque d'abord que si  $x$  est isolé dans  $f^{-1}(g^{-1}(g(f(x))))$ , il l'est *a fortiori* dans  $f^{-1}(f(x))$ ; le fait que  $f$  est de type fini résulte alors de (**I**, 6.3.6).

*Proposition (6.2.5).* — Soient  $A$  un anneau local noethérien complet,  $X$  un  $A$ -schéma localement de type fini,  $x$  un point de  $X$  au-dessus du point fermé  $y$  de  $Y = \text{Spec}(A)$ , et supposons  $x$  isolé dans sa fibre  $f^{-1}(y)$  ( $f$  étant le morphisme structural  $X \rightarrow Y$ ). Alors  $\mathcal{O}_x$  est un  $A$ -module de type fini et  $X$  est  $Y$ -isomorphe à la somme (**I**, 3.1) de  $X' = \text{Spec}(\mathcal{O}_x)$  (qui est un  $Y$ -schéma fini) et d'un  $A$ -schéma  $X''$ .

Il résulte de (6.2.1) que  $\mathcal{O}_x$  est un  $A$ -module quasi-fini. Comme  $\mathcal{O}_x$  est noethérien (**I**, 6.3.7) et l'homomorphisme  $A \rightarrow \mathcal{O}_x$  local, l'hypothèse que  $A$  est *complet* entraîne que  $\mathcal{O}_x$  est un  $A$ -module de type fini (**0**, 7.4.3). Soit  $X' = \text{Spec}(\mathcal{O}_x)$  le schéma local de  $X$  au point  $x$  (**I**, 2.4.1), et soit  $g : X' \rightarrow X$  le morphisme canonique. Comme le composé  $X' \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$  est fini (6.1.1) et que  $f$  est séparé,  $g$  est fini (6.1.5, (v)), donc  $g(X')$  est fermé dans  $X$  (6.1.10); d'autre part, comme  $g$  est de type fini,  $g$  est un isomorphisme local au point fermé  $x'$  de  $X'$  en vertu de la définition de  $g$  et de (**I**, 6.5.4); mais comme  $X'$  est le seul voisinage ouvert de  $x'$ , cela signifie que  $g$  est une immersion ouverte, donc  $g(X')$  est aussi ouvert dans  $X$ , ce qui achève la démonstration.

*Corollaire (6.2.6).* — Soient  $A$  un anneau local noethérien complet,  $Y = \text{Spec}(A)$ ,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme séparé et quasi-fini. Alors  $X$  est  $Y$ -isomorphe à une somme  $X' \sqcup X''$ , où  $X'$  est un  $Y$ -schéma fini et  $X''$  un  $Y$ -schéma quasi-fini tel que, si  $y$  est le point fermé de  $Y$ ,  $X'' \cap f^{-1}(y) = \emptyset$ .

En effet, la fibre  $f^{-1}(y)$  est finie et discrète par hypothèse, et le corollaire résulte donc, par récurrence sur le nombre de points de cette fibre, de (6.2.5).

*Remarque (6.2.7).* — Au chapitre V, nous verrons que si  $Y$  est localement noethérien, un morphisme quasi-fini séparé  $X \rightarrow Y$  est nécessairement quasi-affine.

### 6.3. Fermeture intégrale d'un préschéma.

*Proposition (6.3.1).* — Soient  $(X, \mathcal{A})$  un espace annelé,  $\mathcal{B}$  une  $\mathcal{A}$ -Algèbre (commutative),  $f$  une section de  $\mathcal{B}$  au-dessus de  $X$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) Le sous- $\mathcal{A}$ -Module de  $\mathcal{B}$  engendré par les  $f^n$  pour  $n \geq 0$  (**0**, 5.1.1) est de type fini.
- b) Il existe une sous- $\mathcal{A}$ -Algèbre  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{B}$ , qui est un  $\mathcal{A}$ -Module de type fini, telle que  $f \in \Gamma(X, \mathcal{C})$ .
- c) Pour tout  $x \in X$ ,  $f_x$  est entier sur la fibre  $\mathcal{A}_x$ .

Comme le sous- $\mathcal{A}$ -Module de  $\mathcal{B}$  engendré par les  $f^n$  est une  $\mathcal{A}$ -Algèbre, il est clair que  $a)$  entraîne  $b)$ . D'autre part,  $b)$  implique que pour tout  $x \in X$ , le  $\mathcal{A}_x$ -module  $\mathcal{C}_x$  est de type fini, ce qui entraîne que tout élément de l'algèbre  $\mathcal{C}_x$ , et en particulier  $f_x$ , est entier sur  $\mathcal{A}_x$ . Enfin, si pour un  $x \in X$ , on a une relation de la forme

$$f_x^n + (a_1)_x f_x^{n-1} + \dots + (a_n)_x = 0$$

les  $a_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) étant des sections de  $\mathcal{A}$  au-dessus d'un voisinage ouvert  $U$  de  $x$ , la section  $f^n|_U + a_1 \cdot f^{n-1}|_U + \dots + a_n$  est nulle au-dessus d'un voisinage  $V \subset U$  de  $x$ , d'où résulte aussitôt que tous les  $f^k|_V$  ( $k \geq 0$ ) sont combinaisons linéaires à coefficients dans  $\Gamma(V, \mathcal{A})$  des  $f^j|_V$  pour  $0 \leq j \leq n-1$ ; on en conclut que  $c)$  entraîne  $a)$ .

Lorsque les conditions équivalentes de (6.3.1) sont remplies on dit que la section  $f$  est *entière sur  $\mathcal{A}$* .

*Corollaire (6.3.2).* -- *Sous les hypothèses de (6.3.1), il existe un sous- $\mathcal{A}$ -Module (unique)  $\mathcal{A}'$  de  $\mathcal{B}$  tel que pour tout  $x \in X$ ,  $\mathcal{A}'_x$  soit l'ensemble des germes  $f_x \in \mathcal{B}_x$  qui sont entiers sur  $\mathcal{A}_x$ . Pour tout ouvert  $U \subset X$ , les sections de  $\mathcal{A}'$  au-dessus de  $U$  sont les sections  $f \in \Gamma(U, \mathcal{B})$  qui sont entières sur  $\mathcal{A}|_U$ .*

L'existence de  $\mathcal{A}'$  est immédiate, en prenant pour  $\Gamma(U, \mathcal{A}')$  l'ensemble des  $f \in \Gamma(U, \mathcal{B})$  tels que  $f_x$  soit entier sur  $\mathcal{A}_x$  pour tout  $x \in U$ . La seconde assertion résulte aussitôt de (6.3.1).

Il est clair que  $\mathcal{A}'$  est une sous- $\mathcal{A}$ -Algèbre de  $\mathcal{B}$ ; on dit que c'est la *fermeture intégrale de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{B}$* .

(6.3.3) Soient  $(X, \mathcal{A})$ ,  $(Y, \mathcal{B})$  deux espaces annelés,

$$g = (\psi, 0) : X \rightarrow Y$$

un morphisme. Soit  $\mathcal{C}$  (resp.  $\mathcal{D}$ ) une  $\mathcal{A}$ -Algèbre (resp. une  $\mathcal{B}$ -Algèbre) et soit

$$u : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$$

un  $g$ -morphisme (0, 4.4.1). Alors, si  $\mathcal{A}'$  (resp.  $\mathcal{B}'$ ) est la fermeture intégrale de  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{B}$ ) dans  $\mathcal{C}$  (resp.  $\mathcal{D}$ ), la *restriction* de  $u$  à  $\mathcal{B}'$  est un  $g$ -morphisme

$$u' : \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{A}'.$$

En effet, si  $j$  est l'injection canonique  $\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{D}$ , il suffit de montrer que

$$v = u' \circ g^*(j) : g^*(\mathcal{B}') \rightarrow \mathcal{C}'$$

applique  $g^*(\mathcal{B}')$  dans  $\mathcal{A}'$ . Or, un élément de  $(g^*(\mathcal{B}'))_x = \mathcal{B}'_{\psi(x)} \otimes_{\mathcal{A}_{\psi(x)}} \mathcal{A}_x$  est entier sur  $\mathcal{A}_x$  par définition de  $\mathcal{B}'$ , donc il en est de même de son image par  $v_x$ , ce qui établit notre assertion.

*Proposition (6.3.4).* — *Soient  $X$  un préschéma,  $\mathcal{A}$  une  $\mathcal{O}_X$ -Algèbre quasi-cohérente. La fermeture intégrale  $\mathcal{O}'_X$  de  $\mathcal{O}_X$  dans  $\mathcal{A}$  est alors une  $\mathcal{O}_X$ -Algèbre quasi-cohérente, et pour tout ouvert affine  $U$  de  $X$ ,  $\Gamma(U, \mathcal{O}'_X)$  est la fermeture intégrale de  $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$  dans  $\Gamma(U, \mathcal{A})$ .*

On peut se borner au cas où  $X = \text{Spec}(B)$  est affine et  $\mathcal{A} = \widetilde{A}$ ,  $A$  étant une

$B$ -algèbre; soit  $B'$  la fermeture intégrale de  $B$  dans  $A$ . Tout revient à voir que pour tout  $x \in X$ , un élément de  $A_x$ , entier sur  $B_x$ , appartient nécessairement à  $B'_x$ , ce qui résulte du fait que, pour un anneau commutatif  $C$ , les opérations de fermeture intégrale dans une  $C$ -algèbre et de passage à un anneau de fractions (pour une partie multiplicative de  $C$ ) commutent ([13], t. I, p. 261 et 257).

Le  $X$ -schéma  $X' = \text{Spec}(\mathcal{O}'_X)$  est alors appelé la *fermeture intégrale de  $X$  relativement à  $\mathcal{A}$*  (ou *relativement à  $\text{Spec}(\mathcal{A})$* ); il est clair que  $X'$  est *entier* sur  $X$  (6.1.2).

On déduit aussitôt de (6.3.4) que si  $f : X' \rightarrow X$  est le morphisme structural, alors, pour tout ouvert  $U$  de  $X$ ,  $f^{-1}(U)$  est la *fermeture intégrale du préschéma induit par  $X$  sur  $U$ , relativement à  $\mathcal{A}|U$* .

(6.3.5) Soient  $X, Y$  deux préschémas,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme,  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{B}$ ) une  $\mathcal{O}_X$ -Algèbre (resp. une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre) quasi-cohérente, et soit  $u : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  un  $f$ -morphisme. On a vu (6.3.3) qu'on en déduit un  $f$ -morphisme  $u' : \mathcal{O}'_Y \rightarrow \mathcal{O}'_X$ , où  $\mathcal{O}'_X$  (resp.  $\mathcal{O}'_Y$ ) est la fermeture intégrale de  $\mathcal{O}_X$  (resp.  $\mathcal{O}_Y$ ) dans  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{B}$ ). Par suite, si  $X'$  (resp.  $Y'$ ) est la fermeture intégrale de  $X$  (resp.  $Y$ ) relativement à  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{B}$ ), on déduit canoniquement de  $u$  un morphisme  $f' = \text{Spec}(u') : X' \rightarrow Y'$  (1.5.6) rendant commutatif le diagramme

$$(6.3.5.1) \quad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

(6.3.6) Supposons que  $X$  n'ait qu'un nombre fini de composantes irréductibles  $X_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ), de points génériques  $\xi_i$ , et considérons en particulier la fermeture intégrale de  $X$  relativement à une  $\mathcal{R}(X)$ -Algèbre  $\mathcal{A}$  quasi-cohérente (en tant que  $\mathcal{O}_X$ -Algèbre ou en tant que  $\mathcal{R}(X)$ -Algèbre, ce qui revient au même). On sait (I, 7.3.5) que  $\mathcal{A}$  est composée directe de  $r$   $\mathcal{O}_X$ -Algèbres quasi-cohérentes  $\mathcal{A}_i$ , le support de  $\mathcal{A}_i$  étant contenu dans  $X_i$ , et le faisceau induit par  $\mathcal{A}_i$  sur  $X_i$  étant un faisceau simple dont la fibre  $A_i$  est une algèbre sur  $\mathcal{O}_{\xi_i}$ . Il est clair alors (6.3.4) que la fermeture intégrale  $\mathcal{O}'_X$  de  $\mathcal{O}_X$  dans  $\mathcal{A}$  est *composée directe* des fermetures intégrales  $\mathcal{O}_X^{(i)}$  de  $\mathcal{O}_X$  dans chacune des  $\mathcal{A}_i$ , et par suite la fermeture intégrale  $X' = \text{Spec}(\mathcal{O}'_X)$  de  $X$  relativement à  $\mathcal{A}$  est un  $X$ -schéma *somme* des  $\text{Spec}(\mathcal{O}_X^{(i)}) = X'_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ).

Supposons en outre que la  $\mathcal{O}_X$ -Algèbre  $\mathcal{A}$  soit *réduite*, ou, ce qui revient au même, que chacune des algèbres  $A_i$  soit réduite, et puisse par suite être considérée comme une algèbre sur le corps  $k(\xi_i)$  (égal au corps des fonctions rationnelles du sous-préschéma réduit de  $X$  ayant  $X_i$  pour espace sous-jacent); alors (1.3.8) chacun des  $X'_i$  est un  $X$ -schéma *réduit* et  $X'$  est aussi la fermeture intégrale de  $X_{\text{red}}$ . Supposons de plus que chacune des algèbres  $A_i$  soit *composée directe d'un nombre fini de corps*  $K_{ij}$  ( $1 \leq j \leq s_i$ ); si  $\mathcal{K}_{ij}$  est la sous-Algèbre de  $\mathcal{A}_i$  correspondant à  $K_{ij}$ , il est clair que  $\mathcal{O}_X^{(i)}$  est *composée directe* des fermetures intégrales  $\mathcal{O}_X^{(ij)}$  de  $\mathcal{O}_X$  dans chacune des  $\mathcal{K}_{ij}$ . Par suite,  $X'_i$  est alors *somme* des  $X$ -schémas  $X'_{ij} = \text{Spec}(\mathcal{O}_X^{(ij)})$  ( $1 \leq j \leq s_i$ ). En outre, sous ces hypothèses et avec ces notations :

*Proposition (6.3.7).* — Chacun des  $X'_{ij}$  est un  $X$ -préschéma intègre et normal, et son corps des fonctions rationnelles  $R(X'_{ij})$  s'identifie canoniquement à la fermeture algébrique  $K'_{ij}$  de  $k(\xi_i)$  dans  $K_{ij}$ .

En vertu de ce qui précède, on peut supposer  $X$  intègre, donc  $r=1$ , et  $s_1=1$ , de sorte que l'unique algèbre  $A_1$  est un corps  $K$ ; soit  $\xi$  le point générique de  $X$ , et soit  $f: X' \rightarrow X$  le morphisme structural. Pour tout ouvert affine non vide  $U$  de  $X$ ,  $f^{-1}(U)$  s'identifie au spectre de la fermeture intégrale  $B'_U$  dans le corps  $K$  de l'anneau intègre  $B_U = \Gamma(Y, \mathcal{O}_X)$  (6.3.4); comme l'anneau  $B'_U$  est intègre et intégralement clos, il en est de même des anneaux locaux des points de son spectre, donc  $f^{-1}(U)$  est par définition un schéma intègre et normal ((0, 4.1.4) et (I, 5.1.4)). En outre, comme  $(0)$  est le seul idéal premier de  $B'_U$  au-dessus de l'idéal premier  $(0)$  de  $B_U$  ([13], t. I, p. 259),  $f^{-1}(\xi)$  se réduit à un seul point  $\xi'$ , et  $k(\xi')$  est le corps des fractions  $K'$  de  $B'_U$ , qui n'est autre que la fermeture algébrique de  $k(\xi)$  dans  $K$ . Enfin,  $X'$  est irréductible, car lorsque  $U$  parcourt l'ensemble des ouverts affines non vides de  $X$ , les  $f^{-1}(U)$  constituent un recouvrement ouvert de  $X'$  formé d'ouverts irréductibles; en outre l'intersection  $f^{-1}(U \cap V)$  de deux de ces ouverts contient  $\xi'$ , donc n'est pas vide, et on conclut par (0, 2.1.4).

*Corollaire (6.3.8).* — Soit  $X$  un préschéma réduit n'ayant qu'un nombre fini de composantes irréductibles  $X_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ), et soit  $\xi_i$  le point générique de  $X_i$ . La fermeture intégrale  $X'$  de  $X$  relativement à  $\mathcal{R}(X)$  est somme de  $r$   $X$ -schémas  $X'_i$  qui sont intègres et normaux. Si  $f: X' \rightarrow X$  est le morphisme structural,  $f^{-1}(\xi_i)$  se réduit au point générique  $\xi'_i$  de  $X'_i$  et on a  $k(\xi'_i) = k(\xi_i)$ , autrement dit  $f$  est birationnel.

On dit dans ce cas que  $X'$  est le *normalisé* du préschéma réduit  $X$ ; on notera que  $f$ , étant birationnel et entier, est *surjectif* (6.1.10). Pour que l'on ait alors  $X' = X$ , il faut et il suffit que  $X$  soit *normal*. Lorsque  $X$  est un préschéma intègre, il résulte de (6.3.8) que son normalisé  $X'$  est intègre.

**(6.3.9)** Soient  $X, Y$  deux préschémas intègres,  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme dominant,  $L = R(X)$ ,  $K = R(Y)$  les corps des fonctions rationnelles de  $X$  et  $Y$ ; il correspond canoniquement à  $f$  une injection  $K \rightarrow L$ , et lorsqu'on identifie  $K$  (resp.  $L$ ) au faisceau simple  $\mathcal{R}(Y)$  (resp.  $\mathcal{R}(X)$ ), cette injection est un  $f$ -morphisme. Soit  $K_1$  (resp.  $L_1$ ) une extension de  $K$  (resp.  $L$ ) et supposons donné un monomorphisme  $K_1 \rightarrow L_1$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K_1 & \longrightarrow & L_1 \\ \uparrow & & \uparrow \\ K & \longrightarrow & L \end{array}$$

soit commutatif; si  $K_1$  (resp.  $L_1$ ) est considéré comme faisceau simple sur  $Y$  (resp.  $X$ ), donc comme une  $\mathcal{R}(Y)$ -Algèbre (resp. une  $\mathcal{R}(X)$ -Algèbre), cela signifie que  $K_1 \rightarrow L_1$  est un  $f$ -morphisme. Cela étant, si  $X'$  (resp.  $Y'$ ) est la fermeture intégrale de  $X$  (resp.  $Y$ ) relativement à  $L_1$  (resp.  $K_1$ ),  $X'$  (resp.  $Y'$ ) est un préschéma intègre et normal (6.3.6) dont le corps des fonctions rationnelles s'identifie canoniquement à la fermeture algé-

brique  $L'$  (resp.  $K'$ ) de  $L$  (resp.  $K$ ) dans  $L_1$  (resp.  $K_1$ ), et il existe un morphisme canonique (nécessairement dominant)  $f' : X' \rightarrow Y'$  rendant commutatif le diagramme (6.3.5.1).

Le cas le plus important est celui où on prend  $L_1 = L$ ,  $K_1$  étant donc une extension de  $K$  contenue dans  $L$ , et où on suppose  $X$  intègre et *normal*, donc  $X' = X$ . Ce qui précède montre alors que lorsque  $X$  est normal, et que  $Y'$  est la fermeture intégrale de  $Y$  relative à un corps  $K_1 \subset L = R(X)$ , tout morphisme dominant  $f : X \rightarrow Y$  se factorise en

$$f : X \xrightarrow{f'} Y' \rightarrow Y$$

où  $f'$  est dominant; d'ailleurs, lorsque le monomorphisme  $K_1 \rightarrow L$  est donné,  $f'$  est nécessairement unique, comme on le voit en se ramenant au cas où  $X$  et  $Y$  sont affines. On voit donc que pour la donnée de  $Y$ ,  $L$  et d'un  $K$ -monomorphisme  $K_1 \rightarrow L$ , la fermeture intégrale  $Y'$  de  $Y$  relativement à  $K_1$  est solution d'un *problème universel*.

*Remarque (6.3.10).* — Reprenons les hypothèses de (6.3.6), en supposant de plus que chacune des algèbres  $A_i$  soit de *rang fini* sur  $k(\xi_i)$  (ce qui entraîne que  $A_i$  est composée directe d'un nombre fini de corps); on peut affirmer dans certains cas que le morphisme structural  $X' \rightarrow X$  est non seulement entier, mais même *fini*. Bornons-nous au cas où  $X$  est *réduit*; la question étant locale sur  $X$ , on peut en outre supposer que  $X$  est affine d'anneau  $C$ , et que  $C$  n'a qu'un nombre fini d'idéaux minimaux  $p_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) tels que les  $C_i = C/p_i$  soient intègres;  $X'$  sera alors fini sur  $X$  si la fermeture intégrale de chaque  $C_i$  dans toute extension de degré fini de son corps des fractions est un *C-module de type fini* (6.3.4). On sait que cette condition est toujours vérifiée lorsque  $C$  est une *algèbre de type fini sur un corps* ([13], t. I, p. 267, th. 9), ou *sur  $\mathbf{Z}$*  [9, I, p. 93, th. 3], ou *sur un anneau local noethérien complet* ([25], p. 298). On en conclut que  $X' \rightarrow X$  sera un morphisme fini lorsque  $X$  est un schéma de *type fini* sur un corps, ou sur  $\mathbf{Z}$ , ou sur un anneau local noethérien complet.

#### 6.4. Déterminant d'un endomorphisme de $\mathcal{O}_X$ -Module.

(6.4.1) Soient  $A$  un anneau (commutatif),  $E$  un  $A$ -module libre de rang  $n$ ,  $u$  un endomorphisme de  $E$ ; rappelons que pour définir le *polynôme caractéristique* de  $u$ , on considère l'endomorphisme  $u \otimes 1$  du  $A[T]$ -module libre de rang  $n$ ,  $E \otimes_A A[T]$  ( $T$  indéterminée), et on pose

$$(6.4.1.1) \quad P(u, T) = \det(T \cdot I - (u \otimes 1))$$

( $I$  automorphisme identique de  $E \otimes_A A[T]$ ). On a

$$(6.4.1.2) \quad P(u, T) = T^n - \sigma_1(u)T^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n(u)$$

où  $\sigma_i(u)$  est un élément de  $A$ , égal à un polynôme homogène de degré  $i$  (à coefficients entiers) par rapport aux éléments de la matrice de  $u$  relative à une base quelconque de  $E$ ; on dit que les  $\sigma_i(u)$  sont les *fonctions symétriques élémentaires* de  $u$ , et on a en particulier  $\sigma_1(u) = \text{Tr } u$  et  $\sigma_n(u) = \det u$ . Rappelons qu'en vertu du th. de Hamilton-Cayley, on a

$$(6.4.1.3) \quad P(u, u) = u^n - \sigma_1(u)u^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n(u) = 0$$

ce qui s'écrit aussi

$$(6.4.1.4) \quad (\det u) \cdot \mathbf{1}_E = u Q(u)$$

( $\mathbf{1}_E$  automorphisme identique de  $E$ ), avec

$$(6.4.1.5) \quad Q(u) = (-1)^{n+1}(u^{n-1} - \sigma_1(u)u^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}(u)).$$

Soit  $\varphi : A \rightarrow B$  un homomorphisme d'anneaux, faisant de  $B$  une  $A$ -algèbre; considérons le  $B$ -module  $E_{(B)} = E \otimes_A B$  qui est libre de rang  $n$ , et l'extension  $u \otimes 1$  de  $u$  à un endomorphisme de  $E_{(B)}$ ; il est immédiat que l'on a  $\sigma_i(u \otimes 1) = \varphi(\sigma_i(u))$  pour tout indice  $i$ .

(6.4.2) Supposons maintenant que  $A$  soit un anneau *intègre*, de corps des fractions  $K$ , et  $E$  un  $A$ -module de *type fini* (mais non nécessairement libre). Soit  $n$  le *rang* de  $E$ , c'est-à-dire le rang du  $K$ -module libre  $E \otimes_A K$ ; à tout endomorphisme  $u$  de  $E$  correspond canoniquement l'endomorphisme  $u \otimes 1$  de  $E \otimes_A K$ ; par abus de langage, on appelle encore *polynôme caractéristique* de  $u$  et on note  $P(u, T)$  le polynôme  $P(u \otimes 1, T)$ , dont les coefficients  $\sigma_i(u \otimes 1)$  (qui appartiennent à  $K$ ) seront encore notés  $\sigma_i(u)$  et appelés les *fonctions symétriques élémentaires de  $u$* ; en particulier  $\det u = \det(u \otimes 1)$  par définition. Avec ces notations, les formules (6.4.1.3) à (6.4.1.5) ont un sens et sont encore valables, lorsque l'on interprète  $u^i$  comme l'homomorphisme  $E \rightarrow E \otimes_A K$  composé de l'endomorphisme  $u^i \otimes 1 = (u \otimes 1)^i$  de  $E \otimes_A K$  et de l'homomorphisme canonique  $x \mapsto x \otimes 1$ .

Si  $F$  est le sous-module de torsion de  $E$ , et si  $E_0 = E/F$ , on a  $u(F) \subset F$ , donc, par passage aux quotients,  $u$  donne un endomorphisme  $u_0$  de  $E_0$ ; en outre  $E \otimes_A K$  s'identifie à  $E_0 \otimes_A K$  et  $u \otimes 1$  à  $u_0 \otimes 1$ , donc  $\sigma_i(u) = \sigma_i(u_0)$  pour  $1 \leq i \leq n$ .

Lorsque  $E$  est *sans torsion*,  $E$  s'identifie canoniquement à un sous- $A$ -module de  $E \otimes_A K$ , et la relation  $u \otimes 1 = 0$  est équivalente à  $u = 0$ . Lorsque  $E$  est un  $A$ -module libre, les deux définitions des  $\sigma_i(u)$  données dans (6.4.1) et (6.4.2) coïncident d'après ce qui précède, ce qui justifie les notations adoptées.

On notera aussi que lorsque  $E$  est un *module de torsion*, autrement dit  $E_0 = \{0\}$ , l'algèbre extérieure de  $E_0$  est réduite à  $K$  et le déterminant de l'unique endomorphisme  $u_0$  de  $E_0$  est égal à 1.

*Proposition (6.4.3).* — Soient  $A$  un anneau intègre,  $E$  un  $A$ -module de type fini,  $u$  un endomorphisme de  $E$ ; alors les fonctions symétriques élémentaires  $\sigma_i(u)$  de  $u$  (et en particulier  $\det u$ ) sont des éléments de  $K$  entiers sur  $A$ .

Soit  $A'$  la clôture intégrale de  $A$ ; comme  $A'[T]$  est un anneau intégralement clos ([24], p. 99), c'est la clôture intégrale de  $A[T]$  dans son corps des fractions  $K(T)$ . Remplaçant  $u$  par  $T \cdot \mathbf{1} - u \otimes 1$  et  $A$  par  $A[T]$ , on voit qu'on est ramené à prouver que  $\det u$  est entier sur  $A$ . Si  $n$  est le rang de  $E$ , on a  $\det u = \det(\wedge^n u)$  et  $(\wedge^n u) \otimes 1 = \wedge^n(u \otimes 1)$ , donc on peut supposer  $n = 1$ . Mais alors l'application  $u \mapsto \det u$  est un homomorphisme du  $A$ -module  $\text{Hom}_A(E, E)$  dans  $K$ ; comme  $E$  est de type fini,  $\text{Hom}_A(E, E)$  est isomorphe à un sous-module du  $A$ -module de type fini  $E^n$  (si  $E$  admet un système de  $n$  générateurs), donc les éléments  $\det u$  appartiennent à un sous- $A$ -module de  $K$  de type fini, et sont par suite entiers sur  $A$ .

*Corollaire (6.4.4).* — *Sous les hypothèses de (6.4.3), si on suppose en outre A normal, les  $\sigma_i(u)$  (en particulier  $\text{Tr } u$  et  $\det u$ ) appartiennent à A.*

*Proposition (6.4.5).* — *Soient A un anneau intègre, E un A-module de type fini, de rang n, u un endomorphisme de E tel que les  $\sigma_i(u)$  appartiennent à A. Pour que u soit un automorphisme de E, il est nécessaire que  $\det u$  soit inversible dans A; cette condition est suffisante lorsque E est sans torsion.*

La condition est suffisante, car l'hypothèse et les formules (6.4.1.4) et (6.4.1.5) (valables dans E, et non seulement dans  $E \otimes_A K$ , puisque E est sans torsion) prouvent que  $(\det u)^{-1}Q(u)$  est l'inverse de u.

La condition est nécessaire, car si u est inversible, il résulte de (6.4.3) que  $\det(u^{-1})$  appartient à la clôture intégrale  $A'$  de A dans son corps des fractions K et est évidemment inverse de  $\det u$  dans  $A'$ . Notre assertion résulte alors du :

*Lemme (6.4.5.1).* — *Soit A un sous-anneau d'un anneau  $A'$  tel que  $A'$  soit entier sur A. Si un élément  $x \in A$  est inversible dans  $A'$ , il est aussi inversible dans A.*

Dans le cas contraire, x appartiendrait à un idéal maximal  $m$  de A et il résulte du premier th. de Cohen-Seidenberg ([13], t. I, p. 257, th. 3) qu'il y aurait un idéal maximal  $m'$  de  $A'$  tel que  $m = m' \cap A$ ; on aurait donc  $x \in m'$ , ce qui est absurde.

*Corollaire (6.4.6).* — *Soient A un anneau intègre et intégralement clos, E un A-module de type fini sans torsion, u un endomorphisme de E. Pour que u soit un automorphisme de E, il faut et il suffit que  $\det u$  soit inversible dans A.*

Cela résulte de (6.4.4) et (6.4.5).

*Remarque (6.4.7).* — Nous aurons besoin plus loin d'une généralisation des résultats précédents. Considérons un anneau noethérien réduit A; soient  $p_\alpha$  ( $1 \leq \alpha \leq r$ ) ses idéaux minimaux,  $K_\alpha$  le corps des fractions de l'anneau intègre  $A/p_\alpha$ , K l'anneau total des fractions de A, composé direct des corps  $K_\alpha$ . Soit E un A-module de type fini, et supposons que  $E \otimes_A K$  soit un K-module libre de rang n (ce qui ici n'est plus conséquence des autres hypothèses); il revient au même de dire que tous les  $K_\alpha$ -espaces vectoriels  $E \otimes_A K_\alpha = E_\alpha$  ont même dimension n; si alors u est un endomorphisme de E, on pose encore  $P(u, T) = P(u \otimes 1, T)$  et  $\sigma_j(u) = \sigma_j(u \otimes 1)$ , et en particulier  $\det u = \det(u \otimes 1)$ ; les  $\sigma_j(u)$  sont donc des éléments de K. Il est immédiat que  $E \otimes_A K$  est somme directe des  $E_\alpha$  et que ces derniers sont stables par  $u \otimes 1$ ; la restriction de  $u \otimes 1$  à  $E_\alpha$  n'est autre d'ailleurs que l'extension  $u_\alpha$  de u à ce  $K_\alpha$ -espace vectoriel; on en conclut que  $\sigma_j(u)$  est l'élément de K dont les composantes dans les  $K_\alpha$  sont les  $\sigma_j(u_\alpha)$ . Comme la fermeture intégrale de A dans K est composée directe des fermetures intégrales de A dans les  $K_\alpha$ , les  $\sigma_j(u)$  sont entiers sur A.

*Lemme (6.4.7.1).* — *La sous-A-algèbre de K engendrée par tous les éléments  $\sigma_j(u)$  ( $1 \leq j \leq n$ ) lorsque u parcourt  $\text{Hom}_A(E, E)$ , est un A-module de type fini.*

Il suffit de démontrer que la sous-A[T]-algèbre de K[T] engendrée par les  $P(u, T)$  est un A[T]-module de type fini, car si les  $F_i(T)$  ( $1 \leq i \leq m$ ) forment un système de générateurs de ce A[T]-module, les coefficients des  $F_i(T)$  sont entiers sur A, donc engendrent une A-algèbre qui est un A-module de type fini ([13], t. I, p. 255, th. 1). On peut donc

remplacer  $A$  par  $A[T]$  (qui est noethérien) et  $E$  par  $E \otimes_A A[T] = E'$  qui est tel que  $E' \otimes_{A[T]} K[T] = E \otimes_A K[T]$  soit un  $K[T]$ -module libre de rang  $n$ . Revenant aux notations initiales, on voit donc qu'il suffit de prouver que le  $A$ -module engendré par les éléments  $\det u$ , où  $u$  parcourt  $\text{Hom}_A(E, E)$ , est de type fini; *a fortiori* (puisque tout sous-module d'un  $A$ -module de type fini est de type fini) il suffit de prouver que lorsque  $v$  parcourt l'ensemble des endomorphismes de  $\wedge^n E$ , le  $A$ -module engendré par les  $\det v$  est de type fini; autrement dit, on est encore ramené au cas où  $n=1$ . Mais alors la proposition résulte de ce que  $\text{Hom}_A(E, E)$  est un  $A$ -module de type fini et de ce que  $v \mapsto \det v$  est un homomorphisme de ce  $A$ -module dans  $K$ .

Soit  $F$  le noyau de l'homomorphisme canonique  $E \rightarrow E \otimes_A K$  et soit  $E_0 = E/F$ ; on voit comme ci-dessus que  $E \otimes_A K$  s'identifie à  $E_0 \otimes_A K$ , que  $u(F) \subset F$ , et que si  $u_0$  est l'endomorphisme de  $E_0$  déduit de  $u$  par passage aux quotients,  $u \otimes 1$  s'identifie à  $u_0 \otimes 1$ , et  $\sigma_j(u) = \sigma_j(u_0)$  pour tout  $j$ . Si l'on a  $F=0$ , les formules (6.4.1.3) et (6.4.1.5) ont un sens et sont valables lorsque  $E$  est identifié à un sous-module de  $E \otimes_A K$  et les  $u^j$  à des homomorphismes  $E \rightarrow E \otimes_A K$ ; par suite, la prop. (6.4.5) s'étend aussi à ce cas, avec sa démonstration.

**(6.4.8)** Soient  $(X, \mathcal{A})$  un espace annelé,  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{A}$ -Module localement libre (de rang fini),  $u$  un endomorphisme de  $\mathcal{E}$ . Il y a par hypothèse une base  $\mathfrak{B}$  de la topologie de  $X$  telle que pour tout  $V \in \mathfrak{B}$ ,  $\mathcal{E}|V$  soit isomorphe à  $\mathcal{A}^n|V$  (pour un  $n$  pouvant varier avec  $V$ ). Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathcal{E}$ ; pour tout  $V \in \mathfrak{B}$ ,  $u_V$  est donc un endomorphisme du  $\Gamma(V, \mathcal{A})$ -module  $\Gamma(V, \mathcal{E})$ , qui est libre par hypothèse; le déterminant  $\det u_V$  est donc défini et appartient à  $\Gamma(V, \mathcal{A})$ . En outre, si  $e_1, \dots, e_n$  forment une base de  $\Gamma(V, \mathcal{E})$ , leurs restrictions à tout ouvert  $W \subset V$  forment une base de  $\Gamma(W, \mathcal{E})$  sur  $\Gamma(W, \mathcal{A})$ , donc  $\det u_W$  est la restriction de  $\det u_V$  à  $W$ . Il existe donc une section et une seule de  $\mathcal{A}$  au-dessus de  $X$ , que nous noterons  $\det u$  et appellerons le *déterminant* de  $u$ , telle que la restriction de  $\det u$  à tout  $V \in \mathfrak{B}$  soit  $\det u_V$ . Il est clair que pour tout  $x \in X$ , on a  $(\det u)_x = \det u_x$ ; pour deux endomorphismes  $u, v$  de  $\mathcal{E}$ , on a

$$(6.4.8.1) \quad \det(u \circ v) = (\det u)(\det v)$$

ainsi que

$$(6.4.8.2) \quad \det(\iota_{\mathcal{E}}) = \iota_{\mathcal{A}}$$

et, si le rang de  $\mathcal{E}$  est constant (ce qui sera le cas (0, 5.4.1) pour  $X$  connexe) et égal à  $n$

$$(6.4.8.3) \quad \det(s \cdot u) = s^n \det u$$

pour tout  $s \in \Gamma(X, \mathcal{A})$  (on notera que  $\det(0) = 0_{\mathcal{A}}$  si  $n \geq 1$ , mais  $\det(0) = \iota_{\mathcal{A}}$  pour  $n=0$ ). En outre, pour que  $u$  soit un *automorphisme* de  $\mathcal{E}$ , il faut et il suffit que  $\det u$  soit *inversible* dans  $\Gamma(X, \mathcal{A})$ .

Si le rang de  $\mathcal{E}$  est constant, on peut définir de la même manière les fonctions symétriques élémentaires  $\sigma_j(u)$ , qui sont des éléments de  $\Gamma(X, \mathcal{A})$ ; on a encore les relations (6.4.1.3) à (6.4.1.5).

On a ainsi défini un homomorphisme  $\det : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{A})$  de monoïdes multiplicatifs; si on note que  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \Gamma(X, \mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}))$  par définition, on voit qu'on peut dans cette définition remplacer  $X$  par un ouvert quelconque  $U$  de  $X$ , ce qui définit immédiatement un homomorphisme  $\det : \mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{A}$  de faisceaux de monoïdes multiplicatifs. Lorsque  $\mathcal{E}$  a un rang constant, on définit de même des homomorphismes  $\sigma_i : \mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{A}$  de faisceaux d'ensembles; pour  $i=1$ , l'homomorphisme  $\sigma_1 = \text{Tr}$  est un homomorphisme de  $\mathcal{A}$ -Modules.

Soit  $(Y, \mathcal{B})$  un second espace annelé, et soit  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$  un morphisme d'espaces annelés; si  $\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{B}$ -Module localement libre,  $f^*(\mathcal{F})$  est un  $\mathcal{A}$ -Module localement libre (qui a même rang que  $\mathcal{F}$  si ce dernier est de rang constant) (0, 5.4.5). Pour tout endomorphisme  $v$  de  $\mathcal{F}$ ,  $f^*(v)$  est un endomorphisme de  $f^*(\mathcal{F})$ , et il résulte aussitôt des définitions que  $\det f^*(v)$  est la section de  $\mathcal{A} = f^*(\mathcal{B})$  au-dessus de  $X$  qui correspond canoniquement à  $\det v \in \Gamma(Y, \mathcal{B})$ . On peut encore dire que l'homomorphisme  $f^*(\det) : f^*(\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}, \mathcal{F})) \rightarrow f^*(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$  est le composé

$$f^*(\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}, \mathcal{F})) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{A}}(f^*(\mathcal{F}), f^*(\mathcal{F})) \xrightarrow{\det} \mathcal{A}$$

(0, 4.4.6). On a des résultats analogues pour les  $\sigma_i$ .

(6.4.9) Supposons maintenant que  $X$  soit un *préschéma localement intègre*, de sorte que le faisceau  $\mathcal{R}(X)$  des fonctions rationnelles sur  $X$  est un faisceau de corps localement simple (I, 7.3.4), quasi-cohérent en tant que  $\mathcal{O}_X$ -Module. Si  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent de type fini,  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X)$  est alors un  $\mathcal{R}(X)$ -Module localement libre (I, 7.3.6); pour tout endomorphisme  $u$  de  $\mathcal{E}$ ,  $u \otimes 1_{\mathcal{R}(X)}$  est alors un endomorphisme de  $\mathcal{E}'$ , et  $\det(u \otimes 1)$  une section de  $\mathcal{R}(X)$  au-dessus de  $X$ , que l'on appelle encore *déterminant* de  $u$  et que l'on note encore  $\det u$ . Il résulte de (6.4.3) que  $\det u$  est une section de la *fermeture intégrale* de  $\mathcal{O}_X$  dans  $\mathcal{R}(X)$  (6.3.2); si en outre  $X$  est *normal*,  $\det u$  est donc une *section de  $\mathcal{O}_X$*  au-dessus de  $X$ , et si on suppose de plus que  $\mathcal{E}$  est *sans torsion*, pour que  $u$  soit un automorphisme de  $\mathcal{E}$ , il faut et il suffit que  $\det u$  soit *inversible* en vertu de (6.4.6). Les formules (6.4.8.1) à (6.4.8.3) sont encore valables; de l'homomorphisme  $u \rightarrow \det u$ , appliqué aux modules de sections de  $\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ , on déduit un homomorphisme de faisceaux  $\det : \mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{R}(X)$ , qui prend ses valeurs dans  $\mathcal{O}_X$  quand  $X$  est normal. On a des définitions et résultats analogues pour les autres fonctions symétriques élémentaires  $\sigma_j(u)$ , lorsque  $\mathcal{E}'$  est de *rang constant*; si de plus  $X$  est *normal*, les  $\sigma_j(u)$  sont des *sections de  $\mathcal{O}_X$*  au-dessus de  $X$ .

Enfin, soient  $X, Y$  deux préschémas intègres, et soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme dominant. On sait qu'il existe alors un homomorphisme canonique  $f^*(\mathcal{R}(Y)) \rightarrow \mathcal{R}(X)$  (I, 7.3.8 (1)), d'où résulte, pour tout  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent de type fini  $\mathcal{F}$ , un homomorphisme canonique  $\theta : f^*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{R}(Y)) \rightarrow f^*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X)$ . Si  $v$  est un endo-

(1) Voir *Errata et Addenda*, liste 1.

morphisme de  $\mathcal{F}$ ,  $f^*(v \otimes 1_{\mathcal{R}(Y)})$  est un endomorphisme de  $f^*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{R}(Y))$ , et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 f^*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{R}(Y)) & \xrightarrow{f^*(v \otimes 1)} & f^*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{R}(Y)) \\
 \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\
 f^*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X) & \xrightarrow{f^*(v) \otimes 1} & f^*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X)
 \end{array}$$

On en conclut aisément que  $\det f^*(v)$  est l'image canonique, par l'homomorphisme  $f^*(\mathcal{R}(Y)) \rightarrow \mathcal{R}(X)$ , de la section  $\det v$  de  $\mathcal{R}(Y)$ ; on est en effet aussitôt ramené au cas où  $X = \text{Spec}(A)$  et  $Y = \text{Spec}(B)$  sont affines,  $A$  et  $B$  étant des anneaux intègres de corps de fractions respectifs  $K$  et  $L$ , l'homomorphisme  $B \rightarrow A$  étant injectif et s'étendant donc en un monomorphisme  $L \rightarrow K$ ; si  $\mathcal{F} = \tilde{M}$ , où  $M$  est un  $B$ -module de type fini, le rang sur  $L$  de  $M \otimes_B L$  est égal à celui de  $(M \otimes_B A) \otimes_A K$  sur  $K$ , et  $\det((u \otimes 1) \otimes 1)$  est l'image dans  $K$  de  $\det(u \otimes 1)$  pour tout endomorphisme  $u$  de  $M$ , d'où la conclusion.

**(6.4.10)** Supposons enfin que  $X$  soit un *préschéma localement noethérien réduit*, de sorte que le faisceau  $\mathcal{R}(X)$  des fonctions rationnelles sur  $X$  est encore un  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent (I, 7.3.4); soit d'autre part  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module cohérent tel que  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X)$  soit *localement libre* (de rang fini). En vertu de (6.4.7), si  $\mathcal{E}'$  est de rang constant, on peut, pour tout endomorphisme  $u$  de  $\mathcal{E}$ , définir les  $\sigma_j(u)$ , qui sont des sections de  $\mathcal{R}(X)$  au-dessus de  $X$ . Lorsqu'on ne suppose plus  $\mathcal{E}'$  de rang constant, on peut encore définir l'homomorphisme  $\det : \mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{R}(X)$ .

## 6.5. Norme d'un faisceau inversible.

**(6.5.1)** Soit  $(X, \mathcal{A})$  un espace annelé et soit  $\mathcal{B}$  une  $\mathcal{A}$ -Algèbre (commutative). Le  $\mathcal{A}$ -Module  $\mathcal{B}$  s'identifie canoniquement à un sous- $\mathcal{A}$ -Module de  $\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ , une section  $f$  de  $\mathcal{B}$  au-dessus d'un ouvert  $U$  de  $X$  s'identifiant à la multiplication par cette section. Si  $(X, \mathcal{A})$  et  $\mathcal{B}$  vérifient l'une des conditions énumérées dans (6.4.8), (6.4.9) ou (6.4.10), on peut donc définir  $\det(f)$  (et dans certains cas les  $\sigma_j(f)$ ) qui sont des sections de  $\mathcal{A}$  ou de  $\mathcal{R}(X)$  au-dessus de  $U$ , que nous appellerons la *norme* de  $f$  (resp. les *fonctions symétriques élémentaires* de  $f$ ) et noterons  $N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}(f)$ . Nous allons supposer vérifiée l'une des conditions suivantes :

(I)  $\mathcal{B}$  est un  $\mathcal{A}$ -Module localement libre (de rang fini).

(II)  $(X, \mathcal{A})$  est un *préschéma localement noethérien réduit*,  $\mathcal{B}$  est un  $\mathcal{A}$ -Module cohérent tel que  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{R}(X)$  soit un  $\mathcal{R}(X)$ -Module localement libre, et pour toute section  $f \in \Gamma(U, \mathcal{B})$  au-dessus d'un ouvert  $U \subset X$ ,  $N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}(f)$  est une section de  $\mathcal{A}$  au-dessus de  $U$ .

On notera que cette dernière condition est automatiquement vérifiée lorsque le préschéma localement noethérien  $X$  est *normal* (6.4.9).

D'autre part, l'hypothèse que  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{R}(X)$  soit localement libre peut encore s'exprimer de la façon suivante : désignons par  $X_\alpha$  les sous-préschémas fermés réduits de  $X$  ayant pour espaces sous-jacents les composantes irréductibles de  $X$  (I, 5.2.1), qui sont donc des préschémas intègres localement noethériens. Tout  $x \in X$  appartient à un nombre fini des sous-espaces  $X_\alpha$ ; d'autre part,  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{R}(X_\alpha)$  est un  $\mathcal{R}(X_\alpha)$ -Module localement libre de rang constant  $k_\alpha$  (I, 7.3.6); dire que  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{R}(X)$  est un  $\mathcal{R}(X)$ -Module localement libre signifie que, pour tout  $x \in X$ , les rangs  $k_\alpha$  correspondant aux indices tels que  $x \in X_\alpha$  sont égaux. La question est en effet locale, et on est ramené au cas  $X = \text{Spec}(C)$ , où  $C$  est un anneau noethérien réduit, et  $\mathcal{B} = \widetilde{D}$ , où  $D$  est une  $C$ -algèbre qui est un  $C$ -module de type fini; si  $p_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) sont les idéaux premiers minimaux de  $C$ , l'anneau total des fractions  $L$  de  $C$  est composé direct des corps des fractions  $K_i$  des anneaux intègres  $C/p_i$ , et  $D \otimes_C L$  est somme directe des  $D \otimes_C K_i$ , d'où la conclusion.

Il est clair que sous les hypothèses (I) ou (II), on définit ainsi un *homomorphisme de faisceaux de monoïdes multiplicatifs*  $N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ , aussi noté  $N$  si aucune confusion n'en résulte, et appelé l'*homomorphisme norme*. Pour deux sections  $f, g$  de  $\mathcal{B}$  au-dessus d'un même ouvert  $U$ , on a donc

$$(6.5.1.1) \quad N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}(fg) = N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}(f)N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}(g)$$

pour les sections correspondantes de  $\mathcal{A}$  au-dessus de  $U$ ;

$$(6.5.1.2) \quad N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}(1_{\mathcal{B}}) = 1_{\mathcal{A}};$$

enfin, pour toute section  $s$  de  $\mathcal{A}$  au-dessus de  $U$

$$(6.5.1.3) \quad N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}(s \cdot 1_{\mathcal{B}}) = s^n$$

si le rang de  $\mathcal{B}$  est constant et égal à  $n$  (pour  $s = o_{\mathcal{A}}$ , cette formule donne  $N(o_{\mathcal{B}}) = o_{\mathcal{A}}$  si  $n \geq 1$ ,  $N(o_{\mathcal{B}}) = N(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{A}}$  si  $n = 0$ ).

Dans l'hypothèse (I), pour que  $f \in \Gamma(U, \mathcal{B})$  soit inversible, il faut et il suffit que  $N(f) \in \Gamma(U, \mathcal{A})$  le soit. Dans l'hypothèse (II), cette condition est nécessaire; elle est suffisante (par (6.4.7)) lorsqu'on suppose que  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{R}(X)$  est *injectif* et que l'hypothèse plus restrictive suivante est vérifiée :

(II bis) ( $X, \mathcal{A}$ ) est un préschéma localement noethérien réduit,  $\mathcal{B}$  est un  $\mathcal{A}$ -Module cohérent tel que  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{R}(X)$  soit un  $\mathcal{R}(X)$ -Module localement libre, et pour toute section  $f \in \Gamma(U, \mathcal{B})$  au-dessus d'un ouvert tel que  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{R}(X)|_U$  soit de rang constant  $n$  sur  $\mathcal{R}(X)|_U$ , les  $\sigma_j(f)$  ( $1 \leq j \leq n$ ) sont des sections de  $\mathcal{A}$  au-dessus de  $U$ .

(On notera encore que cette condition est vérifiée lorsque  $X$  est *normal*.)

(6.5.2) Supposons vérifiée une des hypothèses (I), (II) de (6.5.1), et soit  $\mathcal{L}'$  un  $\mathcal{B}$ -Module inversible. Nous allons lui associer canoniquement (à un isomorphisme unique près) un  $\mathcal{A}$ -Module inversible  $\mathcal{L}$  de la façon suivante. Désignons par  $\mathcal{A}^*$  (resp.  $\mathcal{B}^*$ ) le sous-faisceau de  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{B}$ ) tel que  $\Gamma(U, \mathcal{A}^*)$  (resp.  $\Gamma(U, \mathcal{B}^*)$ ) soit l'ensemble des

éléments inversibles de  $\Gamma(U, \mathcal{A})$  (resp.  $\Gamma(U, \mathcal{B})$ ) pour tout ouvert  $U \subset X$ ; ce sont des faisceaux de groupes multiplicatifs, et  $N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$ , restreint à  $\mathcal{B}^*$ , est un *homomorphisme*  $\mathcal{B}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$  de faisceaux de groupes (6.5.1). Soit  $\mathfrak{L}$  l'ensemble des couples  $(U_\lambda, \eta_\lambda)$ , ayant la propriété suivante :  $U_\lambda$  est un ouvert de  $X$  et  $\eta_\lambda$  est un isomorphisme :  $\mathcal{L}'|_{U_\lambda} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}|_{U_\lambda}$  de  $(B|_{U_\lambda})$ -Modules. Par hypothèse, les  $U_\lambda$  forment un recouvrement de  $X$ ; pour deux indices quelconques  $\lambda, \mu$ , on pose  $\omega_{\lambda\mu} = (\eta_\lambda|_{U_\lambda \cap U_\mu}) \circ (\eta_\mu|_{U_\lambda \cap U_\mu})^{-1}$ , automorphisme de  $\mathcal{B}|_{U_\lambda \cap U_\mu}$ , qui s'identifie canoniquement à une section de  $\mathcal{B}^*$  au-dessus de  $U_\lambda \cap U_\mu$  et  $(\omega_{\lambda\mu})$  est un 1-cocycle du recouvrement  $\mathfrak{U} = (U_\lambda)$  à valeurs dans  $\mathcal{B}^*$  (0, 5.4.7). Le fait que  $N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} : \mathcal{B}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$  est un homomorphisme entraîne alors que  $(N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \omega_{\lambda\mu})$  est un 1-cocycle de  $\mathfrak{U}$  à valeurs dans  $\mathcal{A}^*$ , et il lui correspond donc (à un isomorphisme unique près) un  $\mathcal{A}$ -Module inversible  $\mathcal{L}$  (0, 5.4.7) que nous désignerons par  $N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}(\mathcal{L}')$  et appellerons la *norme* du  $\mathcal{B}$ -Module inversible  $\mathcal{L}'$ .

Soit  $\mathfrak{M}$  une partie de  $\mathfrak{L}$  telle que les  $U_\lambda$  correspondants forment encore un recouvrement de  $X$ , et soit  $\mathfrak{V}$  ce recouvrement; la restriction du cocycle  $(\omega_{\lambda\mu})$  à  $\mathfrak{V}$  définit un 1-cocycle  $(N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \omega_{\lambda\mu})$  de  $\mathfrak{V}$  à valeurs dans  $\mathcal{A}^*$ , restriction du 1-cocycle  $(N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \omega_{\lambda\mu})$  de  $\mathfrak{U}$ ; il est clair qu'il y a un isomorphisme canonique du  $\mathcal{A}$ -Module inversible défini par ce 1-cocycle de  $\mathfrak{V}$  sur  $N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}(\mathcal{L}')$ , ce qui permet de définir ce  $\mathcal{A}$ -Module inversible par un sous-recouvrement quelconque de  $\mathfrak{U}$ . Cette possibilité montre aussitôt que, si  $\mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2$  sont deux  $\mathcal{B}$ -Modules inversibles, on a, en vertu de (6.5.1.1) et (6.5.1.2),

$$(6.5.2.1) \quad N(\mathcal{L}'_1 \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{L}'_2) = N(\mathcal{L}'_1) \otimes_{\mathcal{A}} N(\mathcal{L}'_2)$$

et

$$(6.5.2.2) \quad N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$$

ainsi que

$$(6.5.2.3) \quad N(\mathcal{L}'^{-1}) = (N(\mathcal{L}'))^{-1}$$

à des isomorphismes canoniques près. En outre il résulte de (6.5.1.3) que si  $\mathcal{L}$  est un  $\mathcal{A}$ -Module inversible et si  $\mathcal{B}$  est de rang constant  $n$  sur  $\mathcal{A}$  dans le cas (I) (resp.  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{R}(X)$  de rang constant  $n$  sur  $\mathcal{R}(X)$  dans le cas (II)), on a, à un isomorphisme canonique près

$$(6.5.2.4) \quad N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}(\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) = \mathcal{L}^{\otimes n}.$$

(6.5.3) Montrons maintenant que  $N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}(\mathcal{L}')$  est un *foncteur* covariant dans la catégorie des  $\mathcal{B}$ -Modules inversibles. Soit en effet  $h' : \mathcal{L}'_1 \rightarrow \mathcal{L}'_2$  un homomorphisme de  $\mathcal{B}$ -Modules inversibles, et soit  $\mathfrak{V} = (U_\lambda)$  un recouvrement ouvert de  $X$  tel que pour tout  $\lambda$ , on ait des  $(\mathcal{B}|_{U_\lambda})$ -isomorphismes  $\eta_\lambda^{(1)} : \mathcal{L}'_1|_{U_\lambda} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}|_{U_\lambda}$  et  $\eta_\lambda^{(2)} : \mathcal{L}'_2|_{U_\lambda} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}|_{U_\lambda}$ ; il y a donc pour chaque  $\lambda$  un endomorphisme  $h'_\lambda$  de  $\mathcal{B}|_{U_\lambda}$  tel que  $h'_\lambda \circ \eta_\lambda^{(1)} = \eta_\lambda^{(2)} \circ (h'|_{U_\lambda})$ , et on peut évidemment identifier  $h'_\lambda$  à une section de  $\mathcal{B}$  au-dessus de  $U_\lambda$  (0, 5.1.1). Donc, pour tout couple  $(\lambda, \mu)$  d'indices, les restrictions à  $U_\lambda \cap U_\mu$  de  $(\eta_\lambda^{(2)})^{-1} \circ h'_\lambda \circ \eta_\lambda^{(1)}$  et de  $(\eta_\mu^{(2)})^{-1} \circ h'_\mu \circ \eta_\mu^{(1)}$  coïncident. On en déduit pour les 1-cocycles  $(\omega_{\lambda\mu}^{(1)})$  et  $(\omega_{\lambda\mu}^{(2)})$  à valeurs dans  $\mathcal{B}^*$  correspondant à  $\mathcal{L}'_1$  et  $\mathcal{L}'_2$ , la relation

$$\omega_{\lambda\mu}^{(2)} h'_\mu = h'_\lambda \omega_{\lambda\mu}^{(1)}.$$

Si on pose  $h_\lambda = N(h'_\lambda)$ , on aura donc les relations analogues

$$N(\omega_{\lambda\mu}^{(2)})h_\mu = h_\lambda N(\omega_{\lambda\mu}^{(1)})$$

et par suite les  $h_\lambda$  définissent un homomorphisme  $N(\mathcal{L}'_1) \rightarrow N(\mathcal{L}'_2)$  que nous désignerons par  $N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}(h')$  ou  $N(h')$ . Dans l'hypothèse (I), pour que  $h'$  soit un *isomorphisme*, il faut et il suffit (puisque l'on s'agit d'une question locale) que  $N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}(h')$  le soit. Dans l'hypothèse (II), cette condition est encore nécessaire; elle est suffisante si l'hypothèse (II bis) est vérifiée et si  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{R}(X)$  est injectif.

Prenons en particulier  $\mathcal{L}'_1 = \mathcal{B}$ ; les homomorphismes  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}'$  s'identifient alors (0, 5.1.1) aux sections de  $\mathcal{L}'$  au-dessus de  $X$ , d'où une application canonique

$$N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} : \Gamma(X, \mathcal{L}') \rightarrow \Gamma(X, N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}(\mathcal{L}')).$$

Il résulte encore de (6.5.1.1) que si  $f'_1 \in \Gamma(X, \mathcal{L}'_1), f'_2 \in \Gamma(X, \mathcal{L}'_2)$ , on a

$$(6.5.3.1) \quad N(f'_1 \otimes f'_2) = N(f'_1) \otimes N(f'_2).$$

Pour tout  $\mathcal{A}$ -Module inversible  $\mathcal{L}$  et toute section  $f \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ , on a, compte tenu de (6.5.2.4)

$$(6.5.3.2) \quad N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}(f \otimes 1_{\mathcal{B}}) = f^{\otimes n}$$

lorsque  $\mathcal{B}$  est de rang constant  $n$  dans l'hypothèse (I) (resp. lorsque  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{R}(X)$  est de rang constant  $n$  dans l'hypothèse (II)). Enfin, pour que l'homomorphisme  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}'$  correspondant à une section  $f'$  de  $\mathcal{L}'$  au-dessus de  $X$  soit un isomorphisme, il faut et il suffit que  $f'_x$  soit une base de  $\mathcal{L}'_x$  pour tout  $x \in X$ ; dans l'hypothèse (I), cette condition équivaut donc à dire que  $(N(f'))_x$  est une base de  $(N(\mathcal{L}'))_x$  pour tout  $x$ ; dans l'hypothèse (II), cette condition est encore nécessaire, et elle est suffisante lorsque  $\mathcal{B}$  vérifie (II bis) et que  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{R}(X)$  est injectif.

(6.5.4) Soient  $(X, \mathcal{A}), (X', \mathcal{A}')$  deux espaces annelés,

$$f : X' \rightarrow X$$

un morphisme,  $\mathcal{B}$  une  $\mathcal{A}$ -Algèbre,  $\mathcal{B}' = f^*(\mathcal{B})$  la  $\mathcal{A}'$ -Algèbre image réciproque. On suppose vérifiée l'une des hypothèses suivantes :

1°  $\mathcal{B}$  vérifie l'hypothèse (I) de (6.5.1).

2°  $(X, \mathcal{A})$  et  $\mathcal{B}$  vérifient l'hypothèse (II) de (6.5.1),  $(X', \mathcal{A}')$  est un préschéma localement noethérien réduit, et si l'on désigne par  $X_\alpha$  et  $X'_\beta$  les sous-préschémas fermés réduits respectifs de  $X$  et  $X'$  ayant pour espaces sous-jacents les composantes irréductibles de ces espaces, la restriction de  $f$  à chaque  $X'_\beta$  est un morphisme dominant de  $X'_\beta$  dans un  $X_\alpha$ .

Sous ces conditions,  $\mathcal{B}'$  vérifie respectivement l'hypothèse (I) ou l'hypothèse (II) de (6.5.1); la première assertion est immédiate. Pour établir la seconde, il suffit de voir que pour tout  $x' \in X'$ , les rangs des  $\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{R}(X'_\beta)$  pour les  $\beta$  tels que  $x' \in X'_\beta$  sont les mêmes. Or, si la restriction de  $f$  à  $X'_\beta$  est un morphisme dominant dans  $X_\alpha$ , le rang de  $\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{R}(X'_\beta)$  est égal à celui de  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X_\alpha)$  (on le voit aussitôt en se ramenant au

cas affine comme dans (6.4.9)), d'où notre assertion en vertu de l'hypothèse (II) et de (6.5.1).

Cela étant, il résulte de (6.4.8), (6.4.9) et (6.4.10) que si  $s$  est une section de  $\mathcal{B}$  au-dessus d'un ouvert  $U \subset X$ ,  $s'$  la section correspondante de  $\mathcal{B}'$  au-dessus de  $f^{-1}(U)$ ,  $N_{\mathcal{B}', \mathcal{A}'}(s')$  est la section de  $\mathcal{A}'$  au-dessus de  $f^{-1}(U)$  qui correspond à la section  $N_{\mathcal{B}, \mathcal{A}}(s)$  de  $\mathcal{A}$  au-dessus de  $U$ .

Si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{B}$ -Module inversible, on déduit de ce qui précède que si  $\mathcal{M}' = f^*(\mathcal{M})$  (qui est un  $\mathcal{B}'$ -Module inversible), on a  $N_{\mathcal{B}', \mathcal{A}'}(\mathcal{M}') = f^*(N_{\mathcal{B}, \mathcal{A}}(\mathcal{M}))$  à un isomorphisme canonique près.

(6.5.5) Supposons désormais que  $(X, \mathcal{A})$  soit un *préschéma*. La donnée d'une  $\mathcal{A}$ -Algèbre quasi-cohérente  $\mathcal{B}$ , qui est un  $\mathcal{A}$ -Module de type fini équivaut alors, comme on sait, à celle d'un morphisme fini  $g : X' \rightarrow X$  tel que  $g_*(\mathcal{O}_{X'}) = \mathcal{B}$ , défini à un  $X$ -isomorphisme près (6.1.2 et 1.3.1). En outre, se donner un  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}'$  équivaut à se donner un  $\mathcal{B}$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}$  tel que  $g_*(\mathcal{F}') = \mathcal{F}$  (1.4.3), et pour que  $\mathcal{F}'$  soit inversible, il faut et il suffit que  $\mathcal{F}$  le soit (6.1.12). Pour traduire les résultats précédents en termes du morphisme fini  $g$ , il faudra donc supposer, soit que  $g_*(\mathcal{O}_{X'})$  est un  $\mathcal{O}_X$ -Module localement libre (de type fini), soit que  $(X, \mathcal{O}_X)$  et  $g_*(\mathcal{O}_{X'})$  vérifient l'hypothèse (II). Pour tout  $\mathcal{O}_{X'}$ -Module inversible  $\mathcal{L}'$ , on posera alors

$$(6.5.5.1) \quad N_{X'/X}(\mathcal{L}') = N_{g_*(\mathcal{O}_{X'})/\mathcal{O}_X}(g_*(\mathcal{L}'))$$

et on dira que c'est la *norme* (relative à  $g$ ) de  $\mathcal{L}'$ . De même, si  $h' : \mathcal{L}'_1 \rightarrow \mathcal{L}'_2$  est un homomorphisme de  $\mathcal{O}_{X'}$ -Modules inversibles, on posera

$$(6.5.5.2) \quad N_{X'/X}(h') = N_{g_*(\mathcal{O}_{X'})/\mathcal{O}_X}(g_*(h')) : N_{X'/X}(\mathcal{L}'_1) \rightarrow N_{X'/X}(\mathcal{L}'_2).$$

En particulier, pour  $\mathcal{L}'_1 = \mathcal{O}_{X'}$ , on obtient ainsi une application canonique

$$(6.5.5.3) \quad N_{X'/X} : \Gamma(X', \mathcal{L}') \rightarrow \Gamma(X, N_{X'/X}(\mathcal{L}')).$$

Nous laisserons au lecteur la plupart de ces traductions, et nous bornerons à expliciter les suivantes :

*Proposition (6.5.6).* — Soit  $g : X' \rightarrow X$  un morphisme fini, et supposons, soit que  $g_*(\mathcal{O}_{X'})$  est un  $\mathcal{O}_X$ -Module localement libre, soit que  $(X, \mathcal{O}_X)$  et  $g_*(\mathcal{O}_{X'})$  vérifient (II bis) (ce qui sera le cas en particulier lorsque  $X$  est localement noethérien et normal). Pour qu'un homomorphisme  $h' : \mathcal{L}'_1 \rightarrow \mathcal{L}'_2$  de  $\mathcal{O}_{X'}$ -Modules inversibles soit un isomorphisme, il faut et il suffit, dans la première hypothèse, que  $N_{X'/X}(h')$  soit un isomorphisme; dans la seconde hypothèse, cette condition est encore nécessaire, et elle est suffisante lorsque l'homomorphisme  $g_*(\mathcal{O}_{X'}) \rightarrow g_*(\mathcal{O}_{X'}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X)$  est injectif.

On notera qu'on utilise ici le fait que, pour que  $g_*(h')$  soit un isomorphisme, il faut et il suffit que  $h'$  en soit un (1.4.2).

*Corollaire (6.5.7).* — Soit  $g : X' \rightarrow X$  un morphisme fini, et supposons, soit que  $g_*(\mathcal{O}_{X'})$  est un  $\mathcal{O}_X$ -Module localement libre, soit que  $(X, \mathcal{O}_X)$  et  $g_*(\mathcal{O}_{X'})$  vérifient (II bis) et que  $g_*(\mathcal{O}_{X'}) \rightarrow g_*(\mathcal{O}_{X'}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X)$  est injectif. Soient  $\mathcal{L}'$  un  $\mathcal{O}_{X'}$ -Module inversible,  $f'$  une section de  $\mathcal{L}'$  au-dessus de  $X'$ ,  $f = N_{X'/X}(f')$  la section de  $\mathcal{L} = N_{X'/X}(\mathcal{L}')$  au-dessus de  $X$  qui

*lui correspond (6.5.5.1). Alors on a  $g(X' - X'_f) = X - X_f$  et  $X_f$  est le plus grand ouvert U de X tel que  $g^{-1}(U) \subset X'_f$ .*

En effet,  $g(X' - X'_f)$  est fermé dans X (6.1.10); il suffit donc de prouver la dernière assertion. Or la relation  $U \subset X_f$  équivaut au fait que l'homomorphisme  $\mathcal{O}_X|U \rightarrow \mathcal{L}|U$  défini par  $f|U$  est un isomorphisme. En vertu de (6.5.6), cela équivaut à dire que l'homomorphisme  $\mathcal{O}_{X'}|g^{-1}(U) \rightarrow \mathcal{L}'|g^{-1}(U)$  défini par  $f'|g^{-1}(U)$  est un isomorphisme, c'est-à-dire à la relation  $g^{-1}(U) \subset X'_f$ .

**Proposition (6.5.8).** — *Soient  $g : X' \rightarrow X$  un morphisme fini,  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme; soient  $Y' = X'_{(Y)}$ ,  $g' = g_{(Y)}$ ,  $f' = f_{(X')}$  de sorte que l'on a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xleftarrow{f'} & Y' \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ X & \xleftarrow{f} & Y \end{array}$$

*On suppose, soit que  $g_*(\mathcal{O}_{X'})$  est localement libre, soit que  $(X, \mathcal{O}_X)$  et  $g_*(\mathcal{O}_{X'})$  vérifient (II), que Y est un préschéma localement noethérien réduit, et que la restriction de f à toute composante irréductible de Y est un morphisme dominant dans une composante irréductible de X. Alors, pour tout  $\mathcal{O}_{X'}$ -Module inversible  $\mathcal{L}'$ , on a*

$$N_{Y/X}(f'^*(\mathcal{L}')) = f^*(N_{X'/X}(\mathcal{L}'))$$

*à un isomorphisme canonique près.*

Notons que l'on a  $f^*(g_*(\mathcal{L}')) = g'_*(f'^*(\mathcal{L}'))$  en vertu de (1.5.2), et en particulier  $g'_*(\mathcal{O}_Y) = f^*(g_*(\mathcal{O}_{X'}))$ ; si  $g_*(\mathcal{O}_{X'})$  est localement libre, il en est donc de même de  $g'_*(\mathcal{O}_Y)$ . La conclusion résulte alors des définitions et de (6.5.4).

**Remarque (6.5.9).** — Nous généraliserons ultérieurement la notion de norme développée ci-dessus, et la mettrons en relation avec la notion d'image directe d'un diviseur.

## 6.6. Application : critères d'amplitude.

**Proposition (6.6.1).** — *Soient Y un préschéma,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-compact,  $g : X' \rightarrow X$  un morphisme fini et surjectif. On suppose, soit que  $g_*(\mathcal{O}_{X'})$  est un  $\mathcal{O}_X$ -Module localement libre, soit que  $(X, \mathcal{O}_X)$  et  $g_*(\mathcal{O}_{X'})$  vérifient (II bis). Alors, pour tout  $\mathcal{O}_{X'}$ -Module inversible  $\mathcal{L}'$ , ample pour  $f \circ g$ ,  $N_{X'/X}(\mathcal{L}') = \mathcal{L}$  est ample pour f.*

On peut supposer Y affine (4.6.4), et alors, en vertu de (4.6.6), l'énoncé est équivalent au

**Corollaire (6.6.2).** — *Soient X un préschéma quasi-compact,  $g : X' \rightarrow X$  un morphisme fini surjectif, tel que  $g_*(\mathcal{O}_X)$  soit un  $\mathcal{O}_X$ -Module localement libre, ou que  $(X, \mathcal{O}_X)$  et  $g_*(\mathcal{O}_{X'})$  vérifient (II bis). Alors, pour tout  $\mathcal{O}_{X'}$ -Module ample  $\mathcal{L}'$ ,  $\mathcal{L} = N_{X'/X}(\mathcal{L}')$  est ample.*

Dans la seconde hypothèse, on peut supposer en outre que l'homomorphisme canonique  $g_*(\mathcal{O}_{X'}) \rightarrow g_*(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X)$  est injectif. En effet, dans le cas contraire, soit  $\mathcal{T}$

le noyau de cet homomorphisme, qui est un Idéal cohérent de  $g_*(\mathcal{O}_{X'}) = \mathcal{B}$  (**I**, 6.1.1), et posons  $X'' = \text{Spec}(\mathcal{B}/\mathcal{T})$ ; on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X'' & \xrightarrow{h} & X' \\ g' \searrow & \swarrow g & \\ & X & \end{array}$$

où  $h$  est une immersion fermée (1.4.10). En outre, on sait que le support de  $\mathcal{T}$  est un ensemble fermé (**0**, 5.2.2) rare dans  $X$  (**I**, 7.4.6), d'où on conclut que pour le point générique  $x$  d'une composante irréductible de  $X$ , il y a un voisinage ouvert affine  $U$  de  $x$  tel que  $\mathcal{B}|U = (\mathcal{B}/\mathcal{T})|U$ . Comme  $g$  est par hypothèse surjectif, on en conclut que  $x \in g'(X'')$ ;  $g'$  est donc dominant, et étant un morphisme fini, il est *surjectif* (6.1.10); on a par définition  $g'_*(\mathcal{O}_{X''}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X) = (\mathcal{B}/\mathcal{T}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X) = g_*(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X)$ , donc  $(X, \mathcal{O}_X)$  et  $g'_*(\mathcal{O}_{X''})$  vérifient (II bis), et en outre  $g'_*(\mathcal{O}_{X''}) \rightarrow g'_*(\mathcal{O}_{X''}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X)$  est injectif. Enfin,  $h^*(\mathcal{L}') = \mathcal{L}''$  est un  $\mathcal{O}_{X''}$ -Module ample (4.6.13, (i bis)), et on a  $N_{X''/X}(\mathcal{L}'') = N_{X'/X}(\mathcal{L}')$ . En effet, pour définir ces deux  $\mathcal{O}_X$ -Modules inversibles on peut utiliser un même recouvrement ouvert affine  $(U_\lambda)$  de  $X$  tel que les restrictions de  $g_*(\mathcal{L}')$  et  $g'_*(\mathcal{L}'')$  à  $U_\lambda$  soient respectivement isomorphes à  $\mathcal{B}|U_\lambda$  et  $(\mathcal{B}/\mathcal{T})|U_\lambda$ . On voit aussitôt qu'à tout isomorphisme  $\eta_\lambda : g_*(\mathcal{L}')|U_\lambda \rightarrow \mathcal{B}|U_\lambda$  correspond canoniquement un isomorphisme

$$\eta'_\lambda : g'_*(\mathcal{L}'')|U_\lambda \rightarrow (\mathcal{B}/\mathcal{T})|U_\lambda$$

de sorte que, si  $(\omega_{\lambda\mu})$  et  $(\omega'_{\lambda\mu})$  sont les 1-cocycles correspondant aux systèmes d'isomorphismes  $(\eta_\lambda)$  et  $(\eta'_\lambda)$  (6.5.2),  $\omega'_{\lambda\mu}$  soit l'image canonique dans  $\Gamma(U_\lambda \cap U_\mu, \mathcal{B}/\mathcal{T})$  de  $\omega_{\lambda\mu} \in \Gamma(U_\lambda \cap U_\mu, \mathcal{B})$ . En vertu de la définition de  $\mathcal{T}$ , on en conclut que

$$N_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \omega_{\lambda\mu} = N_{(\mathcal{B}/\mathcal{T})/\mathcal{A}} \omega'_{\lambda\mu}$$

(avec  $\mathcal{A} = \mathcal{O}_X$ ), d'où l'égalité énoncée.

Supposons donc l'homomorphisme  $g_*(\mathcal{O}_X) \rightarrow g_*(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X)$  injectif lorsqu'on est dans l'hypothèse (II bis). Il suffit de prouver que lorsque  $f$  parcourt les sections de  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  ( $n > 0$ ) au-dessus de  $X$ , les  $X_f$  forment une base de la topologie de  $X$  (4.5.2). Or, soit  $x \in X$ , et soit  $U$  un voisinage quelconque de  $x$ ; comme  $g^{-1}(x)$  est fini (6.1.7) et que  $\mathcal{L}'$  est ample, il existe un entier  $n > 0$  et une section  $f'$  de  $\mathcal{L}'^{\otimes n}$  au-dessus de  $X'$ , tels que  $X_{f'}$  soit un voisinage de  $g^{-1}(x)$  contenu dans  $g^{-1}(U)$  (4.5.4). Comme

$$\mathcal{L}^{\otimes n} = N_{X'/X}(\mathcal{L}'^{\otimes n})$$

il suffit de prendre  $f = N_{X'/X}(f')$ ; en effet, alors  $X - X_f = g(X' - X'_{f'})$  (6.5.7), donc  $x \in X_f \subset U$ .

*Corollaire (6.6.3).* — *Sous les hypothèses de (6.6.1), pour qu'un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible  $\mathcal{L}$  soit ample pour  $f$ , il faut et il suffit que  $\mathcal{L}' = g^*(\mathcal{L})$  soit ample pour  $f \circ g$ .*

La condition est nécessaire, puisque  $g$  est affine (5.1.12). Pour démontrer que la condition est suffisante, on peut supposer  $Y$  affine (4.6.4), donc  $X$  et  $X'$  quasi-compacts et  $\mathcal{L}'$  ample (4.6.6), et il faut montrer que  $\mathcal{L}$  est ample. Or, l'ensemble des points

$x \in X$  au voisinage desquels  $g_*(\mathcal{O}_X)$  (resp.  $g_*(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X)$ ) a un rang donné  $n$  dans la première (resp. la seconde) hypothèse, est à la fois ouvert et fermé dans  $X$ , donc  $X$  est le préschéma somme d'un nombre fini de ces ouverts, et on peut par suite supposer qu'il est égal à l'un d'eux (4.6.17). Mais on a alors  $N_{X/X}(\mathcal{L}') = \mathcal{L}'^{\otimes n}$ , donc  $\mathcal{L}'^{\otimes n}$  est ample en vertu de (6.6.2), et il en est donc de même de  $\mathcal{L}$  (4.5.6).

**Corollaire (6.6.4).** — *Supposons vérifiées les hypothèses de (6.6.1) et supposons en outre que  $f : X \rightarrow Y$  soit de type fini. Alors, pour que  $f$  soit quasi-projectif, il faut et il suffit que  $f \circ g$  le soit. Si on suppose de plus que  $Y$  est un schéma quasi-compact ou un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien, alors, pour que  $f$  soit projectif, il faut et il suffit que  $f \circ g$  le soit.*

L'hypothèse entraîne que  $f \circ g$  est de type fini. Compte tenu de la définition des morphismes quasi-projectifs (5.3.1), la première assertion résulte de (6.6.1) et (6.6.3). Compte tenu de ce résultat et de (5.5.3, (ii)), il reste à prouver que lorsque  $f$  est supposé quasi-projectif, pour que  $f$  soit propre, il faut et il suffit que  $f \circ g$  le soit. Or  $f$  est alors séparé (5.3.1) et de type fini; comme  $g$  est surjectif, notre assertion résulte de (5.4.2, (ii)) et (5.4.3, (ii)).

En particulier :

**Corollaire (6.6.5).** — *Soient  $X$  un préschéma de type fini sur un corps  $K$ ,  $K'$  une extension de degré fini de  $K$ . Pour que  $X$  soit projectif (resp. quasi-projectif) sur  $K$ , il faut et il suffit que  $X' = X \otimes_K K'$  soit projectif (resp. quasi-projectif) sur  $K'$ .*

La condition est en effet nécessaire (5.3.4, (iii) et 5.5.5, (iii)). Inversement, supposons-la vérifiée, et soit  $g : X' \rightarrow X$  la projection canonique. Il est clair que  $g$  est un morphisme fini (6.1.5, (iii)) et surjectif (I, 3.5.2, (ii)). En outre,  $g_*(\mathcal{O}_X)$  est un  $\mathcal{O}_X$ -Module localement libre, étant isomorphe à  $\mathcal{O}_X \otimes_K K'$  (1.5.2). Il résulte alors de l'hypothèse et de (6.1.11) et (5.5.5, (ii)) que  $X'$  est projectif (resp. quasi-projectif) sur  $K$ ; on déduit alors de (6.6.4) que  $X$  est projectif (resp. quasi-projectif) sur  $K$ .

Au chapitre V, nous montrerons que l'énoncé (6.6.5) reste valable lorsque  $K'$  est une extension quelconque de  $K$ .

La fin de ce numéro est consacrée à la démonstration du critère (6.6.11), qui est un raffinement assez technique de (6.6.1); elle peut être omise en première lecture.

**Lemme (6.6.6).** — *Soient  $X$  un préschéma noethérien réduit,  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module cohérent tel que  $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X)$  soit un  $\mathcal{R}(X)$ -Module localement libre de rang constant  $n$ . Il existe alors un préschéma noethérien réduit  $Z$  et un morphisme fini birationnel  $h : Z \rightarrow X$  ayant la propriété suivante : les morphismes de faisceaux d'ensembles  $\sigma_i : \mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{R}(X)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) (cf. (6.4.10)) appliquent  $\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$  dans la  $\mathcal{O}_X$ -Algèbre cohérente  $h_*(\mathcal{O}_Z)$ .*

Considérons en effet un ouvert affine  $U$  de  $X$ , d'anneau  $A(U) = A$ ; soit  $E = \Gamma(U, \mathcal{E})$ , et soit  $C_U$  la sous-algèbre de  $R(U)$  engendrée par les  $\sigma_i(u)$  lorsque  $u$  parcourt  $\text{Hom}_A(E, E)$ ; on a vu (6.4.7.1) que cette  $A$ -algèbre est de rang fini. En outre, il est clair que la formation des algèbres  $C_U$  commute avec les opérations de restriction d'un ouvert affine  $U$  à un ouvert affine  $U' \subset U$ . On a donc défini ainsi une sous- $\mathcal{O}_X$ -Algèbre finie  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{R}(X)$  telle que  $\Gamma(U, \mathcal{C}) = C_U$  pour tout ouvert affine  $U$  de  $X$ . On

prendra  $Z = \text{Spec}(\mathcal{C})$ , et pour  $h$  le morphisme structural, qui est donc fini (6.1.2); comme  $\mathcal{C}$  est réduite,  $Z$  est un préschéma noethérien réduit (1.3.8). Enfin, l'anneau total des fractions de  $C_U$  est  $R(U)$  par définition, et comme  $C_U$  est contenu dans la fermeture intérieure de  $A(U)$  dans  $R(U)$ , il y a correspondance biunivoque entre idéaux premiers minimaux de  $A(U)$  et idéaux premiers minimaux de  $C_U$  ([13], t. I, p. 259), ce qui prouve que  $h$  est birationnel et achève la démonstration.

*Corollaire (6.6.7).* — *Sous les hypothèses de (6.6.6), soit  $W$  un ouvert de  $X$  tel que, pour tout  $x \in W$ , ou bien  $X$  est normal au point  $x$ , ou bien  $\mathcal{E}_x$  est un  $\mathcal{O}_x$ -Module libre. Alors on peut supposer  $h$  défini de sorte que la restriction de  $h$  à  $h^{-1}(W)$  soit un isomorphisme de  $h^{-1}(W)$  sur  $W$ .*

En effet, l'une ou l'autre hypothèse entraîne que si  $U \subset W$  est un ouvert affine, on a, avec les notations de (6.6.6),  $(\sigma_i(u))_x \in A_x$  pour tout  $x \in U$  (6.4.3), donc  $\sigma_i(u) \in A$ , et la conclusion résulte de la définition de  $h$  donnée dans (6.6.6).

**(6.6.8)** Soient  $X$  un préschéma noethérien réduit,  $g : X' \rightarrow X$  un morphisme fini surjectif, de sorte que  $\mathcal{B} = g_*(\mathcal{O}_{X'})$  est une  $\mathcal{O}_X$ -Algèbre cohérente; supposons en outre que  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X)$  soit un  $\mathcal{R}(X)$ -Module localement libre de rang constant  $n$ . On peut alors appliquer le lemme (6.6.6) en prenant  $\mathcal{E} = \mathcal{B}$ , d'où, avec les notations de (6.6.6), un homomorphisme de faisceaux de monoïdes multiplicatifs  $\sigma_n : \mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{B}, \mathcal{B}) \rightarrow h_*(\mathcal{O}_Z)$ , et en composant cet homomorphisme avec l'homomorphisme canonique  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$  (6.5.1), on obtient donc un homomorphisme de faisceaux de monoïdes multiplicatifs :

$$(6.6.8.1) \quad N' : \mathcal{B} = g_*(\mathcal{O}_{X'}) \rightarrow h_*(\mathcal{O}_Z) = \mathcal{C}$$

Cela étant, pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible  $\mathcal{L}'$ ,  $g_*(\mathcal{L}')$  est un  $\mathcal{B}$ -Module inversible (6.1.12), et la méthode de (6.5.2) permet d'associer fonctoriellement à  $\mathcal{L}'$  un  $\mathcal{C}$ -Module inversible que nous noterons  $N'(g_*(\mathcal{L}'))$ .

*Lemme (6.6.9).* — *Soient  $X$  un préschéma noethérien réduit,  $g : X' \rightarrow X$  un morphisme fini surjectif tel que  $g_*(\mathcal{O}_{X'}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X)$  soit un  $\mathcal{R}(X)$ -Module localement libre de rang constant. Il existe alors un préschéma noethérien réduit  $Z$  et un morphisme fini birationnel  $h : Z \rightarrow X$  ayant la propriété suivante : pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module ample  $\mathcal{L}'$ , le  $\mathcal{O}_Z$ -Module inversible  $\mathcal{M}$  tel que  $h_*(\mathcal{M}) = N'(g_*(\mathcal{L}'))$  (notations de (6.6.8)) est ample.*

Supposons d'abord que l'homomorphisme  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X)$  soit injectif. Définissons  $Z$  et  $h$  comme dans (6.6.6) (avec  $\mathcal{E} = g_*(\mathcal{O}_{X'})$ ). Soit  $z \in Z$ ; il faut montrer qu'il existe un entier  $m > 0$  et une section  $t$  de  $\mathcal{M}^{\otimes m}$  au-dessus de  $Z$  telle que  $Z_t$  soit un ouvert affine contenant  $z$  (4.5.2). Soient  $x = h(z)$ ,  $U$  un ouvert affine de  $X$  contenant  $x$ ;  $h^{-1}(U)$  est alors un voisinage ouvert affine de  $z$ , et il suffira de trouver  $t$  tel que  $z \in Z_t \subset h^{-1}(U)$ , car  $Z_t$  sera alors nécessairement affine (5.5.8). Il existe par hypothèse un entier  $n > 0$  et une section  $s'$  de  $\mathcal{L}'^{\otimes n}$  au-dessus de  $X'$  telle que l'on ait

$$(6.6.9.1) \quad g^{-1}(x) \subset X'_s \subset g^{-1}(U)$$

en vertu de (4.5.4). Par définition,  $s'$  est aussi une section de  $g_*(\mathcal{L}')$  au-dessus de  $X$ , et il lui correspond comme dans (6.5.2) une section  $s = N'(s')$  de  $N'(g_*(\mathcal{L}'))$  au-dessus

de  $X$ . Nous allons voir que si  $t$  est la section  $s$  considérée comme section de  $\mathcal{M}$  au-dessus de  $Z$ ,  $t$  répond à la question. Posons en effet

$$(6.6.9.2) \quad V = X - g(X' - X'_s)$$

qui est un ouvert de  $X$  contenant  $x$  et contenu dans  $U$ , en vertu de (6.6.9.1) et (6.1.10). Nous allons montrer que l'on a

$$(6.6.9.3) \quad h^{-1}(V) \subset Z_t \subset h^{-1}(U),$$

ce qui achèvera la démonstration. Il revient au même de dire que l'ensemble  $T$  des  $y \in X$  tels que  $s_y$  soit inversible, contient  $V$  et est contenu dans  $U$ . Pour cela, considérons d'abord un ouvert affine  $W$  contenu dans  $V$ ;  $g^{-1}(W)$  est ouvert affine dans  $X'$  et en vertu de (6.6.9.2),  $s_{y'}'$  est inversible pour tout  $y' \in g^{-1}(W)$ ; en vertu des hypothèses sur  $X$  et  $\mathcal{B}$ , on peut appliquer les résultats de (6.4.7) et on voit que si  $y = g(y')$ ,  $s_y$  est inversible, autrement dit  $V \subset T$ . D'autre part, il résulte aussi de (6.4.7) que, inversement, si  $s_y$  est inversible, il en est de même de  $s_{y'}'$ , ce qui implique  $y' \in g^{-1}(U)$  par (6.6.9.1) et par suite  $y \in U$ , d'où  $T \subset U$  dans ce cas.

On passe de là au cas général par le même raisonnement que dans (6.6.2), remplaçant  $X'$  par  $X''$  tel que  $g'_*(\mathcal{O}_{X''}) \rightarrow g'_*(\mathcal{O}_{X''}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X)$  soit injectif, et  $\mathcal{L}'$  par un  $\mathcal{O}_{X''}$ -Module ample  $\mathcal{L}''$  tel que  $N'(g'_*(\mathcal{L}')) = N'(g'_*(\mathcal{L}''))$ . Le lemme (6.6.9) est donc démontré dans tous les cas (avec un choix convenable de  $h$ ).

*Corollaire (6.6.10).* — Supposons vérifiées les hypothèses de (6.6.9); pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible  $\mathcal{L}$  tel que  $g^*(\mathcal{L})$  soit ample,  $h^*(\mathcal{L})$  est ample.

En effet, si on pose  $\mathcal{L}' = g^*(\mathcal{L})$ , on a alors  $g'_*(\mathcal{L}') = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}$  (0, 5.4.10), donc

$$N'(g'_*(\mathcal{L}')) = (\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{C})^{\otimes n}$$

(par le même raisonnement que pour (6.5.2.4)). On en conclut que l'on a  $\mathcal{M} = (h^*(\mathcal{L}))^{\otimes n}$ , et comme  $\mathcal{M}$  est ample, il en est de même de  $h^*(\mathcal{L})$  (4.5.6).

*Proposition (6.6.11).* — Soient  $Y$  un schéma affine,  $X$  un préschéma noethérien réduit,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-compact,  $g : X' \rightarrow X$  un morphisme fini surjectif. Soit  $W$  une partie ouverte de  $X$  telle que, pour tout  $x \in W$ , ou bien  $X$  est normal au point  $x$ , ou bien il existe un voisinage ouvert  $T \subset W$  de  $x$  tel que  $(g_*(\mathcal{O}_X))|T$  soit un  $(\mathcal{O}_X|T)$ -Module localement libre. Il existe alors un  $Y$ -préschéma réduit  $Z$  et un  $Y$ -morphisme fini et birationnel  $h : Z \rightarrow X$  tel que la restriction de  $h$  à  $h^{-1}(W)$  soit un isomorphisme  $h^{-1}(W) \xrightarrow{\sim} W$  et qui possède la propriété suivante : pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible  $\mathcal{L}$  tel que  $g^*(\mathcal{L})$  soit ample relativement à  $f \circ g$ ,  $h^*(\mathcal{L})$  est ample relativement à  $f \circ h$ .

Comme  $Y$  est affine,  $g^*(\mathcal{L})$  est ample, et il s'agit alors de prouver que pour un choix convenable de  $h$ ,  $h^*(\mathcal{L})$  est ample (4.6.6). Nous allons voir qu'on peut remplacer  $g$  par un morphisme fini surjectif  $g' : X'' \rightarrow X$  tel que  $g'^*(\mathcal{L})$  soit ample et que  $g'_*(\mathcal{O}_{X''}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X)$  soit un  $\mathcal{R}(X)$ -Module localement libre de rang constant; on sera alors ramené aux conditions de (6.6.10) et la proposition sera démontrée.

Pour cela, soit  $\mathcal{B} = g_*(\mathcal{O}_X)$ ; désignons par  $X_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) les sous-préschémas fermés réduits de  $X$  qui ont pour espaces sous-jacents les composantes irréductibles de  $X$  (I, 5.2.1); ils sont intègres par hypothèse. Soient  $X'_i$  le sous-préschéma fermé

$g^{-1}(X_i)$  de  $X'$ ,  $g_i : X'_i \rightarrow X_i$  le morphisme  $g$  restreint à  $X'_i$ , qui est fini (6.1.5, (iii)) et surjectif; soit  $k_i$  le *rang* de la  $\mathcal{O}_{X_i}$ -Algèbre  $\mathcal{B}_i = (g_i)_*(\mathcal{O}_{X_i})$ . Comme  $\mathcal{B}_i \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{R}(X_i)$  est un préfaisceau constant (**I**, 7.3.5), le rang  $k_i$  est aussi le rang de la  $(\mathcal{O}_X|U)$ -Algèbre  $\mathcal{B}|U$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$  ne rencontrant que la *seule* composante irréductible  $X_i$ . Si  $T$  est un ensemble ouvert dans  $X$  tel que  $\mathcal{B}|T$  soit isomorphe à  $\mathcal{O}_X^m|T$ , il résulte de la remarque précédente que les nombres  $k_i$  sont égaux à  $m$  pour tous les indices  $i$  tels que  $T \cap X_i \neq \emptyset$ . Soit alors  $U$  l'ouvert de  $X$  formé des points au voisinage desquels  $\mathcal{B}$  est un  $\mathcal{O}_X$ -Module localement libre, et soient  $U_j$  ( $1 \leq j \leq s$ ) ses composantes connexes, qui sont ouvertes dans  $X$  et en nombre fini (puisque  $U$  est noethérien); désignons par  $V_j$  le sous-préschéma fermé de  $X'$ , *adhérence* du sous-préschéma induit sur l'ouvert  $g^{-1}(U_j)$  (**I**, 9.5.11). D'après ce qui précède, pour tous les indices  $i$  tels que  $X_i \cap U_j \neq \emptyset$ , les rangs  $k_i$  sont tous égaux à un même entier  $m_j$ ; on notera d'ailleurs qu'un même  $X_i$  ne peut rencontrer deux  $U_j$  d'indices distincts. Soient  $i_\lambda$  les indices  $i$  tels que  $X_i \cap U = \emptyset$ . Considérons le produit  $k$  de tous les  $k_i$ , posons  $n_i = k/k_i$ , et soit  $X''$  le préschéma défini comme suit. Pour chaque  $j$  ( $1 \leq j \leq s$ ), on considère  $k/m_j$  préschémas isomorphes à  $V_j$ , et pour chaque  $\lambda$ ,  $k/k_{i_\lambda} = n_{i_\lambda}$  préschémas isomorphes à  $X'_{i_\lambda}$ ;  $X''$  est la *somme* de tous ces préschémas. On définit un morphisme  $g'' : X'' \rightarrow X'$ , se réduisant à l'injection canonique dans chacun des sommandes de  $X''$ ; il est clair que  $g''$  est un morphisme fini dominant, donc surjectif (puisque un morphisme fini est fermé (6.1.10)); posons  $g' = g \circ g''$ , qui est un morphisme fini surjectif  $X'' \rightarrow X$ ; on a  $g'^*(\mathcal{L}) = g''^*(g^*(\mathcal{L}))$ , donc  $g^*(\mathcal{L})$  est un  $\mathcal{O}_{X''}$ -Module ample (5.1.12). Il est clair alors que pour ce nouveau préschéma  $X''$ , les rangs définis comme les  $k_i$  pour  $X'$  sont tous égaux à  $k$ ; compte tenu de (**I**, 7.3.3), on en conclut aussitôt que pour tout ouvert affine  $T$  de  $X$ ,  $(g'_*(\mathcal{O}_{X''})) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}(X)|T$  est un  $(\mathcal{R}(X)|T)$ -Module isomorphe à  $(\mathcal{R}(X)|T)^k$ .

*Corollaire (6.6.12).* — *Si, dans l'énoncé de (6.6.11), on a  $W = X$ , alors pour qu'un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible  $\mathcal{L}$  soit ample relativement à  $f$ , il faut et il suffit que  $g^*(\mathcal{L})$  soit ample relativement à  $f \circ g$ .*

*Remarque (6.6.13).* — Au chapitre III, nous verrons que si  $Y$  est noethérien,  $f$  de type fini, et si la restriction de  $f$  au sous-préschéma fermé réduit de  $X$  ayant  $X - W$  pour espace sous-jacent est *propre*, alors la conclusion de (6.6.12) est encore valable. Mais nous donnerons au chapitre V des exemples de schémas algébriques  $X$  sur un corps  $K$  (le morphisme structural  $X \rightarrow \text{Spec}(K)$  n'étant pas propre) dont le normalisé  $X'$  est quasi-affine, mais qui n'est pas quasi-affine (de sorte que  $\mathcal{O}_X$  n'est pas ample, bien que  $\mathcal{O}_{X'}$  le soit (5.1.2) et que le morphisme  $X' \rightarrow X$  soit fini surjectif (6.3.10)). Nous allons voir au numéro suivant que cette circonstance ne peut se produire lorsqu'on remplace « quasi-affine » par « affine ».

## 6.7. Le théorème de Chevalley.

Nous allons établir (à l'aide du critère de Serre (5.2.1)) le théorème suivant, qui a été démontré par C. Chevalley par d'autres méthodes, dans le cas des schémas algébriques.

*Théorème (6.7.1).* — Soient  $X$  un schéma affine,  $Y$  un préschéma noethérien,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme fini surjectif. Alors  $Y$  est un schéma affine.

Il est clair que  $f_{\text{red}} : X_{\text{red}} \rightarrow Y_{\text{red}}$  est fini (6.1.5, (vi)); comme  $X_{\text{red}}$  est un schéma affine, et qu'il revient au même de dire que  $Y$  est affine ou que  $Y_{\text{red}}$  est affine, puisque  $Y$  est noethérien (I, 6.1.7), on voit qu'on peut supposer  $Y$  réduit. Pour toute partie fermée  $Y'$  de  $Y$ , il y a alors un seul sous-préschéma réduit de  $Y$  ayant  $Y'$  comme espace sous-jacent (I, 5.1.2); son image réciproque  $f^{-1}(Y')$ , canoniquement isomorphe à  $X \times_Y Y'$  (I, 4.4.1), est affine comme sous-préschéma fermé de  $X$ , et la restriction de  $f$  à  $f^{-1}(Y')$ , qui s'identifie à  $f \times_{Y^1} Y'$ , est un morphisme fini surjectif (6.1.5, (iii)). En vertu du principe de récurrence noethérienne (0, 2.2.2), on peut donc (compte tenu de (I, 6.1.7)) se ramener à démontrer le théorème sous l'hypothèse que pour toute partie fermée  $Y' \neq Y$ , tout sous-préschéma fermé de  $Y$  ayant  $Y'$  pour espace sous-jacent est affine. On en conclut que, pour tout  $\mathcal{O}_Y$ -Module cohérent  $\mathcal{F}$  dont le support (fermé)  $Z$  est distinct de  $Y$ , on a  $H^1(Y, \mathcal{F}) = 0$ . En effet, il existe un sous-préschéma fermé  $Y'$  de  $Y$  ayant  $Z$  pour espace sous-jacent et tel que, si  $j : Y' \rightarrow Y$  est l'injection canonique, on ait  $\mathcal{F} = j_*(j^*(\mathcal{F}))$  (I, 9.3.5); par suite (5.2.3),  $H^1(Y, \mathcal{F}) = H^1(Y', j^*(\mathcal{F})) = 0$  d'après (I, 5.1.9.2).

Supposons d'abord que  $Y$  ne soit pas irréductible, et soient  $Y'$  une composante irréductible de  $Y$ , et  $Y'' = Y - Y'$ ; on désignera encore par  $Y'$  le sous-préschéma fermé réduit de  $Y$  ayant  $Y'$  pour espace sous-jacent, et par  $j$  l'injection canonique  $Y' \rightarrow Y$ . Soit  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -Module cohérent, et considérons l'homomorphisme canonique

$$\rho : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}' = j_*(j^*(\mathcal{F}))$$

(0, 4.4.3);  $\mathcal{F}'$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -Module cohérent en vertu de (0, 5.3.10) et (0, 5.3.12), car on a  $j_*(\mathcal{O}_{Y'}) = \mathcal{O}_Y/\mathcal{J}$ , en désignant par  $\mathcal{J}$  le faisceau d'idéaux de  $\mathcal{O}_Y$  définissant le sous-préschéma  $Y'$ . Par suite  $\mathcal{G} = \text{Ker } \rho$  et  $\mathcal{K} = \text{Im } \rho$  sont aussi des  $\mathcal{O}_Y$ -Modules cohérents (0, 5.3.4); or par définition la fibre  $\mathcal{F}'_y$  de  $\mathcal{F}'$  au point générique  $y$  de  $Y'$  est égale à  $\mathcal{F}_y$ , car  $y$  est intérieur à  $Y'$  et on a donc  $\mathcal{J}_y = 0$ , puisque  $Y$  est réduit. On en conclut que  $y$  n'est pas contenu dans le support (fermé) de  $\mathcal{G}$ ; par ailleurs, le support de  $\mathcal{F}'$  (et *a fortiori* celui de  $\mathcal{K}$ ) est contenu dans  $Y'$ ; autrement dit les supports de  $\mathcal{G}$  et de  $\mathcal{K}$  sont distincts de  $Y$ . On en déduit que  $H^1(Y, \mathcal{G}) = H^1(Y, \mathcal{K}) = 0$ , et la suite exacte de cohomologie appliquée à la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow 0$  montre que  $H^1(Y, \mathcal{F}) = 0$ . On conclut alors par le critère de Serre (5.2.1).

Supposons donc  $Y$  irréductible, et par suite *intègre*. On peut aussi supposer que  $X$  est *intègre*: en effet, si on désigne par  $X_i$  les sous-préschémas fermés réduits de  $X$  ayant pour espaces sous-jacents les composantes irréductibles de  $X$  (I, 5.2.1) et par  $g_i$  la restriction de  $g$  à  $X_i$ , un des  $g_i$  au moins est dominant, et comme c'est un morphisme fini (6.1.5), il est surjectif (6.1.10); comme d'autre part  $X_i$  est un schéma affine, on voit qu'on peut remplacer  $X$  par  $X_i$  dans l'énoncé.

*Lemme (6.7.1.1).* — Soient  $X, Y$  deux préschémas intègres noethériens,  $x$  (resp.  $y$ ) le point générique de  $X$  (resp.  $Y$ ),  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme fini surjectif. Soit  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible tel qu'il existe un voisinage ouvert affine  $U$  de  $y$  et une section  $g \in \Gamma(X, \mathcal{L})$  pour lesquels

$x \in X_y \subset f^{-1}(U)$ . Alors il existe deux entiers  $m > 0$ ,  $n > 0$ , un homomorphisme  $u : \mathcal{O}_Y^m \rightarrow f_*(\mathcal{L}^{\otimes n})$  et un voisinage ouvert  $V$  de  $y$  tels que la restriction  $u|V$  soit un isomorphisme de  $\mathcal{O}_Y^m|V$  sur  $f_*(\mathcal{L}^{\otimes n})|V$ .

Soient  $C$  l'anneau (intègre) de  $U$ ,  $k = \mathcal{O}_y$  son corps des fractions : comme  $f$  est fini,  $U' = f^{-1}(U)$  est affine (1.3.2) ; soit  $D$  son anneau (intègre) de corps des fractions  $K = \mathcal{O}_x$  ; par hypothèse  $D$  est un  $C$ -module de type fini (6.1.4), donc  $K$  est une extension de rang fini de  $k$ . La fibre  $f^{-1}(y) = X \times_Y \text{Spec}(k(y)) = X \times_Y \text{Spec}(\mathcal{O}_y)$  s'identifie à  $\text{Spec}(K)$  (I, 3.6.6) ; soient  $s_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) des éléments de  $D$  formant une base de  $K$  sur  $k$ . Il existe  $n > 0$  tel que les sections  $(s_i|X_y)g^{\otimes n}$  de  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  au-dessus de  $X_y$  se prolongent en sections  $b_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) de  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  au-dessus de  $X$  (I, 9.3.1). Les  $b_i$  sont aussi par définition des sections de  $f_*(\mathcal{L}^{\otimes n})$  au-dessus de  $Y$  et définissent donc un homomorphisme  $u : \mathcal{O}_Y^m \rightarrow f_*(\mathcal{L}^{\otimes n})$  (0, 5.1.1) ; nous allons voir que  $u$  répond à la question. On a  $\mathcal{L}^{\otimes n}|U' = \tilde{M}$ , où  $M$  est un  $D$ -module de type fini, donc si  $\varphi$  est l'injection  $C \rightarrow D$  correspondant au morphisme  $f^{-1}(U) \rightarrow U$  restriction de  $f$ ,  $M_{[\varphi]}$  est un  $C$ -module de type fini ; par suite

$$f_*(\mathcal{L}^{\otimes n})|U = (M_{[\varphi]})^\sim$$

(I, 1.6.3) est cohérent et comme  $U$  est un ouvert affine quelconque de  $Y$ ,  $f_*(\mathcal{L}^{\otimes n})$  est cohérent ; en outre  $u|U = \theta$ , où  $\theta$  est un  $C$ -homomorphisme  $C^m \rightarrow M_{[\varphi]}$ , et  $u_y = \theta_y$  est l'homomorphisme  $\theta \otimes 1 : K^m = C^m \otimes K \rightarrow M_{[\varphi]} \otimes K$  ; or ce dernier est par définition un isomorphisme, car les  $(b_i)_x$  forment une base de  $M_{[\varphi]} \otimes K$  sur  $k$ ,  $g_x$  étant par hypothèse un générateur de  $(\mathcal{L}^{\otimes n})_x$ . On en conclut que les supports des  $\mathcal{O}_Y$ -Modules  $\text{Ker } u$  et  $\text{Coker } u$  ne contiennent pas  $y$  ; comme ces  $\mathcal{O}_Y$ -Modules sont cohérents (0, 5.3.3), leurs supports sont fermés (0, 5.2.2), d'où le lemme.

Cela étant, les hypothèses du lemme (6.7.1.1) sont remplies dans le cas que nous considérons en prenant  $\mathcal{A} = \mathcal{O}_X$ , puisque  $X$  est affine (I, 1.1.10) ; nous poserons  $\mathcal{A} = \mathcal{O}_Y$ ,  $\mathcal{B} = f_*(\mathcal{O}_X)$ . En vertu du critère de Serre (5.2.1.1), il suffit de prouver que pour tout  $\mathcal{O}_Y$ -Module cohérent  $\mathcal{F}$ , on a  $H^1(Y, \mathcal{F}) = 0$  ; il suffit même de le prouver lorsque  $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_Y$ , ce qui entraîne que  $\mathcal{F}$  est sans torsion puisque  $Y$  est intègre ; en fait nous allons montrer que  $H^1(Y, \mathcal{F}) = 0$  pour tout  $\mathcal{O}_Y$ -Module cohérent sans torsion  $\mathcal{F}$ . Or, l'homomorphisme  $u : \mathcal{A}^m \rightarrow \mathcal{B}$  définit un homomorphisme

$$v : \mathcal{G} = \mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^m, \mathcal{F}) = \mathcal{F}^m.$$

Montrons d'abord que  $v$  est injectif : par hypothèse  $\mathcal{F} = \text{Coker } u$  a un support ne rencontrant pas  $V$ , donc est un  $\mathcal{O}_Y$ -Module de torsion (I, 7.4.6) ; la suite exacte

$$\mathcal{A}^m \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

donne, par exactitude à gauche du foncteur  $\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{A}}$ , la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{v} \mathcal{F}^m.$$

Mais comme  $\mathcal{F}$  est sans torsion, on a  $\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = 0$  (0, 5.2.6), d'où notre assertion. On a donc la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}^m \rightarrow \text{Coker } v \rightarrow 0$$

où  $\mathcal{G}$  et  $\text{Coker } v$  sont des  $\mathcal{O}_Y$ -Modules cohérents (0, 5.3.4 et 5.3.5); en vertu de la suite exacte de cohomologie, il suffira de montrer que  $H^1(Y, \mathcal{G}) = H^1(Y, \text{Coker } v) = 0$  pour en déduire  $H^1(Y, \mathcal{F}^m) = (H^1(Y, \mathcal{F}))^m = 0$ , et par suite  $H^1(Y, \mathcal{F}) = 0$ . Or la restriction  $v|V$  est un isomorphisme, donc le support de  $\text{Coker } v$  est distinct de  $Y$ , d'où  $H^1(Y, \text{Coker } v) = 0$  par l'hypothèse du début. D'autre part,  $\mathcal{G}$  est un  $\mathcal{B}$ -Module cohérent (I, 9.6.4); comme  $X$  est affine au-dessus de  $Y$ , il existe un  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{K}$  tel que  $\mathcal{G}$  soit isomorphe à  $f_*(\mathcal{K})$  (I.4.3); comme  $X$  est affine, on a  $H^1(X, \mathcal{K}) = 0$  (I, 5.1.9.2), donc aussi  $H^1(Y, \mathcal{G}) = 0$  par (5.2.3), ce qui achève la démonstration du théorème (6.7.1).

*Corollaire (6.7.2).* — Soient  $X$  un préschéma noethérien,  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  un recouvrement fini de l'espace  $X$  formé d'ensembles fermés. Pour que  $X$  soit affine, il faut et il suffit que pour chaque  $i$ , il existe un sous-préschéma fermé de  $X$ , ayant  $X_i$  pour espace sous-jacent et qui soit affine.

En effet, s'il en est ainsi, soit  $X'$  le schéma somme des  $X_i$ ; il est clair que  $X'$  est affine, et on définit un morphisme surjectif  $f: X' \rightarrow X$  en prenant pour restriction de  $f$  à  $X_i$  l'injection canonique. Tout revient à vérifier que  $f$  est fini, en vertu de (6.7.1), et cela a été vu en (6.1.5).

*Corollaire (6.7.3).* — Pour qu'un préschéma noethérien  $X$  soit affine il faut et il suffit que les sous-préschémas fermés réduits ayant pour espaces sous-jacents les composantes irréductibles de  $X$  soient affines.

## § 7. CRITÈRES VALUATIFS

Nous donnons dans ce paragraphe des critères valuatifs de séparation et de propreté pour un morphisme, c'est-à-dire des critères qui font intervenir un schéma auxiliaire variable de la forme  $\text{Spec}(A)$ , où  $A$  est un anneau de valuation. Moyennant des hypothèses « noethériennes » convenables, on peut dans ces critères se restreindre au cas où  $A$  est un anneau de valuation discrète. Ce sera sans doute le seul cas que nous aurons à appliquer par la suite, et nous n'avons introduit les anneaux de valuation quelconques, dans le cas général, que pour faire le lien avec des développements classiques.

### 7.1. Rappels sur les anneaux de valuation.

(7.1.1) Parmi les diverses propriétés équivalentes qui caractérisent les anneaux de valuation, nous utiliserons la suivante : un anneau  $A$  est dit *anneau de valuation* si c'est un anneau intègre qui n'est pas un corps, et si, dans l'ensemble des anneaux locaux contenus dans le corps des fractions  $K$  de  $A$  et distincts de  $K$ ,  $A$  est maximal pour la relation de domination (I, 8.1.1). Rappelons qu'un anneau de valuation est intégralement clos. Si  $A$  est un anneau de valuation,  $A_p$  est aussi un anneau de valuation pour tout idéal premier  $p \neq 0$  de  $A$ .

(7.1.2) Soient  $K$  un corps,  $A$  un sous-anneau local de  $K$  qui n'est pas un corps;

il existe alors un anneau de valuation ayant  $K$  pour corps des fractions et qui domine  $A$  ([1], p. 1-07, lemme 2).

D'autre part, soient  $B$  un anneau de valuation,  $k$  son corps des restes,  $K$  son corps des fractions,  $L$  une extension de  $k$ . Alors il existe un anneau de valuation *complet*  $C$  qui domine  $B$  et dont le corps des restes est  $L$ . En effet,  $L$  est extension algébrique d'une extension transcendante pure  $L' = k(T_\mu)_{\mu \in M}$ ; on sait qu'on peut prolonger la valuation de  $K$  correspondant à  $B$  à une valuation de  $K' = K(T_\mu)_{\mu \in M}$  de sorte que  $L'$  soit le corps des restes de cette valuation ([24], p. 98); remplaçant  $B$  par le complété de l'anneau de cette valuation prolongée, on voit qu'on peut se limiter au cas où  $B$  est complet et  $L$  est une clôture algébrique de  $k$ . Si  $\bar{K}$  est une clôture algébrique de  $K$ , on peut alors prolonger à  $\bar{K}$  la valuation qui définit  $B$ , et le corps des restes correspondant est une clôture algébrique de  $k$ , comme on le voit en relevant dans  $\bar{K}$  les coefficients d'un polynôme unitaire de  $k[T]$ . On est donc finalement ramené au cas où  $L = k$  et il suffit alors de prendre pour  $C$  le complété de  $B$  pour répondre à la question.

(7.1.3) Soient  $K$  un corps,  $A$  un sous-anneau de  $K$ ; la fermeture intégrale  $A'$  de  $A$  dans  $K$  est l'intersection des anneaux de valuation contenant  $A$  et ayant  $K$  pour corps des fractions ([11], p. 51, th. 2). La proposition (7.1.2) s'exprime sous la forme géométrique équivalente :

*Proposition (7.1.4).* — *Soient  $Y$  un préschéma,  $p : X \rightarrow Y$  un morphisme,  $x$  un point de  $X$ ,  $y = p(x)$ ,  $y' \neq y$  une spécialisation (0, 2.1.2) de  $y$ . Il existe alors un schéma local  $Y'$ , spectre d'un anneau de valuation, et un morphisme séparé  $f : Y' \rightarrow Y$  tel que, si  $a$  désigne l'unique point fermé de  $Y'$  et  $b$  le point générique de  $Y'$ , on ait  $f(a) = y'$  et  $f(b) = y$ . On peut en outre supposer vérifiée l'une des deux propriétés additionnelles suivantes :*

- (i)  $Y'$  est le spectre d'un anneau de valuation complet dont le corps des restes est algébriquement clos, et il existe un  $k(y)$ -homomorphisme  $k(x) \rightarrow k(b)$ .
- (ii) Il existe un  $k(y)$ -isomorphisme  $k(x) \xrightarrow{\sim} k(b)$ .

Soit  $Y_1$  le sous-préschéma fermé réduit de  $Y$  ayant  $\overline{\{y\}}$  comme espace sous-jacent (I, 5.2.1), et soit  $X_1$  le sous-préschéma fermé image réciproque  $p^{-1}(Y_1)$ ; comme  $y' \in \overline{\{y\}}$  par hypothèse et que  $k(x)$  est le même dans  $X$  et dans  $X_1$ , on peut supposer  $Y$  intègre, de point générique  $y$ ;  $\mathcal{O}_{y'}$  est alors un anneau local intègre qui n'est pas un corps, et dont le corps des fractions est  $\mathcal{O}_y = k(y)$ , et  $k(x)$  est une extension de  $k(y)$ . Pour réaliser les conditions  $f(a) = y'$  et  $f(b) = y$  ainsi que la condition additionnelle (i) (resp. (ii)), on prendra  $Y' = \text{Spec}(A')$ , où  $A'$  est un anneau de valuation dominant  $\mathcal{O}_{y'}$  et qui est complet et a un corps des restes algébriquement clos extension de  $k(x)$  (resp. un anneau de valuation  $A'$  dominant  $\mathcal{O}_{y'}$  et dont  $k(x)$  est le corps des fractions); l'existence de  $A'$  est garantie par (7.1.2).

(7.1.5) Rappelons qu'un anneau local  $A$  est dit *de dimension 1* s'il existe un idéal premier distinct de l'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , et si tout idéal premier de  $A$  distinct de  $\mathfrak{m}$  est un idéal premier *minimal*; lorsque  $A$  est *intègre*, il revient au même de dire que  $\mathfrak{m}$  et  $(0)$  sont les seuls idéaux premiers et  $\mathfrak{m} \neq (0)$ ; autrement dit,  $Y = \text{Spec}(A)$  est réduit à deux

points  $a, b : a$  est l'unique point fermé, on a  $j_a = \mathfrak{m}$  et  $\kappa(a) = k$  est le *corps résiduel*  $k = A/\mathfrak{m}$ ;  $b$  est le *point générique* de  $Y$ ,  $j_b = (0)$ , l'ensemble  $\{b\}$  étant l'unique ensemble ouvert de  $Y$  distinct de  $\emptyset$  et de  $Y$  (ensemble ouvert qui est donc *partout dense*), et  $\kappa(b) = K$  est le *corps des fractions* de  $A$ .

(7.1.6) Pour un anneau local  $A$ , noethérien et de dimension 1, on sait que les conditions suivantes sont équivalentes ([1], p. 2-08 et 17-01) : *a*)  $A$  est normal; *b*)  $A$  est régulier; *c*)  $A$  est un anneau de valuation; en outre,  $A$  est alors un *anneau de valuation discrète*. Les prop. (7.1.2) et (7.1.3) ont alors les analogues suivants pour les anneaux de valuation discrète :

*Proposition (7.1.7).* — Soient  $A$  un anneau local intègre noethérien qui n'est pas un corps,  $K$  son *corps des fractions*,  $L$  une extension de type fini de  $K$ ; il existe alors un anneau de valuation discrète ayant  $L$  pour *corps des fractions* et dominant  $A$ .

Supposons d'abord  $L = K$ . Soient  $\mathfrak{m}$  l'idéal maximal de  $A$ ,  $(x_1, \dots, x_n)$  un système de générateurs non nuls de  $\mathfrak{m}$ ,  $B$  le sous-anneau  $A[x_2/x_1, \dots, x_n/x_1]$  de  $K$ , qui est noethérien. Il est immédiat que l'idéal  $\mathfrak{m}B$  de  $B$  est identique à l'idéal principal  $x_1B$ ; si  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier minimal de  $x_1B$ , on sait que  $\mathfrak{p}$  est de rang 1 ([13], t. I, p. 277); autrement dit  $B_{\mathfrak{p}}$  est un anneau local noethérien de dimension 1; il est clair que  $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} \cap A$  est un idéal de  $A$  contenant  $\mathfrak{m}$  et ne contenant pas 1, donc égal à  $\mathfrak{m}$ , et par suite  $B_{\mathfrak{p}}$  domine  $A$  ([I, 8.1.1]). Il résulte du th. de Krull-Akizuki ([25], p. 293) que la clôture intégrale  $C$  de  $B_{\mathfrak{p}}$  est un anneau noethérien (bien que  $C$  ne soit pas nécessairement un  $B_{\mathfrak{p}}$ -module de type fini); si  $\mathfrak{n}$  est un idéal maximal de  $C$ ,  $C_{\mathfrak{n}}$  est un anneau local noethérien normal de dimension 1 ([25], p. 295), donc un anneau de valuation discrète, qui domine  $B_{\mathfrak{p}}$  et *a fortiori*  $A$ .

Si maintenant  $L$  est une extension de type fini de  $K$ , on peut, d'après ce qui précède, se limiter au cas où  $A$  est déjà un anneau de valuation discrète. Soit  $w$  une valuation de  $K$  associée à  $A$ ; il existe une valuation discrète  $w'$  de  $L$  qui prolonge  $w$ : on se ramène en effet par récurrence sur le nombre de générateurs de  $L$  au cas où  $L = K(\alpha)$ , et alors la proposition est classique ([24], p. 106).

*Corollaire (7.1.8).* — Soient  $A$  un anneau intègre noethérien,  $K$  son *corps des fractions*,  $L$  une extension de type fini de  $K$ . Alors la fermeture intégrale de  $A$  dans  $L$  est l'intersection des anneaux de valuation discrète ayant  $L$  pour *corps des fractions* et contenant  $A$ .

En effet, un tel anneau de valuation discrète, étant normal, contient *a fortiori* tout élément de  $L$  entier sur  $A$ . Il suffit donc de prouver que si  $x \in L$  n'est pas entier sur  $A$ , il existe un anneau de valuation discrète  $C$  ayant  $L$  pour *corps des fractions*, contenant  $A$  et ne contenant pas  $x$ . L'hypothèse sur  $x$  signifie en effet que l'on a  $x \notin B = A[1/x]$ , autrement dit  $1/x$  n'est pas inversible dans l'anneau noethérien  $B$ . Il y a donc un idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $B$  contenant  $1/x$ . L'anneau local intègre  $B_{\mathfrak{p}}$  est noethérien et contenu dans  $L$ , qui est une extension de type fini du corps des fractions de  $B_{\mathfrak{p}}$  (ce dernier contenant  $K$ ). En vertu de (7.1.7), il y a donc un anneau de valuation discrète  $C$ , dominant  $B_{\mathfrak{p}}$  et ayant  $L$  pour *corps des fractions*; comme  $1/x \in \mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$  appartient à l'idéal maximal de  $C$ , on a  $x \notin C$ , ce qui conclut la démonstration.

La forme géométrique de (7.1.7) est la suivante :

*Proposition (7.1.9).* — Soient  $Y$  un préschéma localement noethérien,  $p : X \rightarrow Y$  un morphisme localement de type fini,  $x$  un point de  $X$ ,  $y = p(x)$ ,  $y' \neq y$  une spécialisation de  $y$ . Il existe alors un schéma local  $Y'$ , spectre d'un anneau de valuation discrète, un morphisme séparé  $f : Y' \rightarrow Y$  et une  $Y$ -application rationnelle  $g$  de  $Y'$  dans  $X$ , tels que, si  $a$  désigne le point fermé de  $Y'$  et  $b$  son point générique, on ait  $f(a) = y'$ ,  $f(b) = y$ ,  $g(b) = x$ , et que dans le diagramme commutatif

$$(7.1.9.1) \quad \begin{array}{ccc} & k(x) & \\ \gamma \swarrow & & \uparrow \pi \\ k(b) & \xleftarrow{\varphi} & k(y) \end{array}$$

(où  $\pi$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma$  sont les homomorphismes correspondant respectivement à  $p$ ,  $f$  et  $g$ ),  $\gamma$  soit une bijection.

Comme dans (7.1.4), on peut se ramener au cas où  $Y$  est intègre de point générique  $y$  (compte tenu de (I, 6.3.4, (iv))) et comme la question est locale sur  $X$  et  $Y$ , on peut supposer  $p$  de type fini; on est alors dans la situation de (7.1.4), avec la propriété supplémentaire que  $k(x)$  est une extension de type fini de  $k(y)$  (I, 6.4.11) et que  $\mathcal{O}_{y'}$  est noethérien; cela permet d'appliquer (7.1.7) et de prendre  $Y' = \text{Spec}(A')$ , où  $A'$  est un anneau de valuation discrète dominant  $\mathcal{O}_y$  et dont  $k(x)$  est le corps des fractions. On a donc ainsi défini un diagramme commutatif (7.1.9.1), où  $\gamma$  est une bijection, et  $\pi$  et  $\varphi$  correspondent aux morphismes  $p$  et  $f$ . En outre, comme  $X$  et  $Y$  sont localement noethériens (I, 6.6.2) et que  $Y'$  est intègre, il y a une  $Y$ -application rationnelle  $g$  et une seule de  $Y'$  dans  $X$  à laquelle correspond l'isomorphisme  $\gamma$  (I, 7.1.15), ce qui achève la démonstration.

## 7.2. Critère valuatif de séparation.

*Proposition (7.2.1).* — Soient  $X$ ,  $Y$  deux préschémas,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-compact. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) Le morphisme  $f$  est fermé.

b) Pour tout  $x \in X$  et toute spécialisation  $y'$  de  $y = f(x)$ , distincte de  $y$ , il existe une spécialisation  $x'$  de  $x$  telle que  $f(x') = x$ .

La condition b) exprime que  $f(\bar{x}) = \bar{y}$  et est donc conséquence de a). Pour montrer que b) entraîne a), considérons une partie fermée  $X'$  de l'espace sous-jacent  $X$ ; soit  $Y' = \overline{f(X')}$  et montrons que  $Y' = f(X')$ . Considérons les sous-préschémas fermés réduits de  $X$  et  $Y$  respectivement ayant pour espaces sous-jacents  $X'$  et  $Y'$  (I, 5.2.1); il y a alors un morphisme  $f' : X' \rightarrow Y'$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

soit commutatif (I, 5.2.2), et comme  $f$  est quasi-compact, il en est de même de  $f'$ . On est donc ramené à prouver que si  $f$  est un morphisme quasi-compact et dominant, alors la

condition  $b$ ) implique que  $f(X) = Y$ . Or, soit  $y'$  un point de  $Y$  et soit  $y$  le point générique d'une composante irréductible de  $Y$  contenant  $y'$ ; en vertu de  $b$ ), il suffit de montrer que  $f^{-1}(y)$  n'est pas vide. Mais on sait que cette propriété est conséquence du fait que  $f$  est dominant et quasi-compact (**I**, 6.6.5).

*Corollaire (7.2.2).* — Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme d'immersion quasi-compact. Pour que l'espace sous-jacent  $X$  soit fermé dans  $Y$ , il faut et il suffit qu'il contienne toute spécialisation (dans  $Y$ ) de chacun de ses points.

*Proposition (7.2.3).* — Soient  $Y$  un préschéma (resp. un préschéma localement noethérien),  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme (resp. un morphisme localement de type fini). Les conditions suivantes sont équivalentes :

a)  $f$  est séparé.

b) Le morphisme diagonal  $X \rightarrow X \times_Y X$  est quasi-compact, et pour tout  $Y$ -préschéma de la forme  $Y' = \text{Spec}(A)$ , où  $A$  est un anneau de valuation (resp. un anneau de valuation discrète), deux  $Y'$ -morphismes de  $Y'$  dans  $X$  qui coïncident au point générique de  $Y'$  sont égaux.

c) Le morphisme diagonal  $X \rightarrow X \times_Y X$  est quasi-compact, et pour tout  $Y$ -préschéma de la forme  $Y' = \text{Spec}(A)$ , où  $A$  est un anneau de valuation (resp. un anneau de valuation discrète), deux  $Y'$ -sections de  $X' = X_{(Y')}$  qui coïncident au point générique de  $Y'$  sont égales.

L'équivalence de  $b$ ) et de  $c$ ) résulte de la correspondance biunivoque entre  $Y$ -morphismes de  $Y'$  dans  $X$  et  $Y'$ -sections de  $X'$  (**I**, 3.3.14). Si  $X$  est séparé sur  $Y$ , la condition  $b$ ) est vérifiée en vertu de (**I**, 7.2.2.1), puisque  $Y'$  est intègre. Il reste à prouver que  $b$ ) entraîne que le morphisme diagonal  $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$  est fermé, et il revient au même de montrer qu'il vérifie le critère de (7.2.2). Or, soit  $z$  un point de la diagonale  $\Delta(X)$ ,  $z' \neq z$  une spécialisation de  $z$  dans  $X \times_Y X$ . Il existe alors (7.1.4) un anneau de valuation  $A$  et un morphisme  $f$  de  $Y' = \text{Spec}(A)$  dans  $X \times_Y X$ , qui applique le point fermé  $a$  de  $Y'$  sur  $z'$  et le point générique  $b$  de  $Y'$  sur  $z$ ; ce morphisme fait de  $Y'$  un  $(X \times_Y X)$ -préschéma, et  $a$  fortiori un  $Y$ -préschéma. Si on compose avec  $f$  les deux projections de  $X \times_Y X$ , on obtient deux  $Y$ -morphismes  $g_1, g_2$  de  $Y'$  dans  $X$ , qui par hypothèse coïncident au point  $b$ ; ils sont donc égaux à un même morphisme  $g$ , ce qui signifie (**I**, 5.3.1) que  $f$  se factorise en  $f = \Delta \circ g$ , et par suite  $z' \in \Delta(X)$ . Lorsqu'on suppose  $Y$  localement noethérien et  $f$  localement de type fini,  $X \times_Y X$  est localement noethérien (**I**, 6.6.7); on peut alors reprendre le raisonnement précédent en y supposant que  $A$  est un anneau de valuation discrète, en vertu de (7.1.9).

*Remarques (7.2.4).* — (i) L'hypothèse que le morphisme  $\Delta$  est quasi-compact est toujours vérifiée lorsque  $Y$  est localement noethérien et  $f$  localement de type fini, car  $X \times_Y X$  est alors localement noethérien (**I**, 6.6.4, (i)). Dans le cas général, elle signifie aussi que pour tout recouvrement  $(U_\alpha)$  de  $X$  par des ouverts affines, les ensembles  $U_\alpha \cap U_\beta$  sont quasi-compacts.

(ii) Pour que  $f$  soit séparé, il suffit que la condition  $b$ ) ou la condition  $c$ ) soit vérifiée pour un anneau de valuation  $A$  qui est complet et dont le corps des restes est algébriquement clos; cela résulte en effet de la démonstration de (7.2.3) et de (7.1.4).

### 7.3. Critère valuatif de propreté.

*Proposition (7.3.1).* — Soient  $A$  un anneau de valuation,  $Y = \text{Spec}(A)$ ,  $b$  le point générique de  $Y$ ,  $X$  un schéma intègre,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme fermé tel que  $f^{-1}(b)$  se réduise à un point  $x$  et que l'homomorphisme correspondant  $\mathbf{k}(b) \rightarrow \mathbf{k}(x)$  soit bijectif. Alors  $f$  est un isomorphisme.

Comme  $f$  est fermé et dominant, on a  $f(X) = Y$ ; il suffit (I, 4.2.2) de prouver que pour tout  $y' \neq b$  dans  $Y$ , il existe *un seul* point  $x'$  tel que  $f(x') = y'$  et que l'homomorphisme correspondant  $\mathcal{O}_{y'} \rightarrow \mathcal{O}_{x'}$  soit bijectif, car  $f$  sera alors un homéomorphisme. Or, si  $f(x') = y'$ ,  $\mathcal{O}_{x'}$  est un anneau local contenu dans  $K = \mathbf{k}(x) = \mathbf{k}(b)$  et dominant  $\mathcal{O}_{y'}$ ; ce dernier est l'anneau local  $A_{y'}$ , donc est un anneau de valuation (7.1.1) ayant  $K$  pour corps des fractions. Par ailleurs on a  $\mathcal{O}_{x'} \neq K$  puisque  $x'$  n'est pas le point générique de  $X$  (0, 2.1.3); on en conclut que  $\mathcal{O}_{x'} = \mathcal{O}_{y'}$ . Comme  $X$  est un schéma intègre, la relation  $\mathcal{O}_{x'} = \mathcal{O}_{x''}$  entraîne  $x' = x''$  (I, 8.2.2), ce qui achève la démonstration.

**(7.3.2)** Soient  $A$  un anneau de valuation,  $Y = \text{Spec}(A)$ ,  $b$  le point générique de  $Y$ , de sorte que  $\mathcal{O}_b = \mathbf{k}(b)$  est égal à  $K$ , corps des fractions de  $A$ ; soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme. On sait (I, 7.1.4) que les *Y-sections rationnelles* de  $X$  sont en correspondance biunivoque avec les *germes* de  $Y$ -sections (définies dans des voisinages de  $b$ ) au point  $b$ , d'où une application canonique

$$(7.3.2.1) \quad \Gamma_{\text{rat}}(X/Y) \rightarrow \Gamma(f^{-1}(b)/\text{Spec}(K))$$

les éléments de  $\Gamma(f^{-1}(b)/\text{Spec}(K))$  s'identifiant d'ailleurs, par définition (I, 3.4.5) aux *points de  $f^{-1}(b) = X \otimes_A K$  rationnels sur  $K$* . Lorsque  $f$  est séparé, il résulte de (I, 5.4.7) que l'application (7.3.2.1) est *injective*, puisque  $Y$  est un schéma intègre.

Composant (7.3.2.1) avec l'application canonique  $\Gamma(X/Y) \rightarrow \Gamma_{\text{rat}}(X/Y)$  (I, 7.1.2), on obtient une application canonique

$$(7.3.2.2) \quad \Gamma(X/Y) \rightarrow \Gamma(f^{-1}(b)/\text{Spec}(K)).$$

Lorsque  $f$  est séparé, cette application est encore *injective* (I, 5.4.7).

*Proposition (7.3.3).* — Soient  $A$  un anneau de valuation de corps des fractions  $K$ ,  $Y = \text{Spec}(A)$ ,  $b$  le point générique de  $Y$ ,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme séparé et fermé. Alors l'application canonique (7.3.2.2) est bijective (ce qui revient à dire qu'elle est *surjective* et entraîne que les  $Y$ -sections rationnelles de  $X$  sont *partout définies*).

Soit donc  $x$  un point de  $f^{-1}(b)$ , *rationnel sur  $K$* . Comme  $f$  est séparé, il en est de même du morphisme  $f^{-1}(b) \rightarrow \text{Spec}(K)$  correspondant à  $f$  (I, 5.5.1, (iv)), et toute section de  $f^{-1}(b)$  étant une immersion fermée (I, 5.4.6),  $\{x\}$  est fermé dans  $f^{-1}(b)$ . Considérons le sous-préschéma fermé réduit  $X'$  de  $X$  ayant pour espace sous-jacent l'adhérence  $\overline{\{x\}}$  de  $\{x\}$  dans  $X$ . Il est clair que la restriction de  $f$  à  $X'$  vérifie les hypothèses de (7.3.1), donc est un *isomorphisme* de  $X'$  sur  $Y$ , dont l'isomorphisme réciproque est la  $Y$ -section de  $X$  cherchée.

**(7.3.4)** Pour énoncer les deux résultats suivants, nous nous servirons d'une terminologie qui sera justifiée et discutée dans le chapitre IV : si  $F$  est une partie

d'un préschéma  $Y$ , on appelle *codimension* de  $F$  dans  $Y$  et on note  $\text{codim}_Y F$  la borne inférieure des entiers  $\dim(\mathcal{O}_z)$ , où  $z$  parcourt  $F$ .

*Corollaire (7.3.5).* — Soient  $Y$  un préschéma localement noethérien réduit,  $N$  l'ensemble des points  $y \in Y$  où  $Y$  n'est pas régulier (0, 4.1.4); on suppose que  $\text{codim}_Y N \geq 2$ . Soit  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme de type fini, séparé et fermé et soit  $g$  une  $Y$ -section rationnelle de  $X$ ; si  $Y'$  est l'ensemble des points de  $Y$  où  $g$  n'est pas définie (ensemble qui est fermé (I, 7.2.1)) on a  $\text{codim}_Y Y' \geq 2$ .

Il suffit de prouver que  $g$  est définie en tout point  $z \in Y$  tel que  $\dim \mathcal{O}_z \leq 1$ . Si  $\dim \mathcal{O}_z = 0$ ,  $z$  est point générique d'une composante irréductible de  $Y$  (I, 1.1.14), donc appartient à tout ouvert partout dense de  $Y$ , et en particulier au domaine de définition de  $g$ . Supposons donc que  $\dim \mathcal{O}_z = 1$ ;  $\mathcal{O}_z$  est alors par hypothèse un anneau local noethérien régulier, donc (7.1.6) un anneau de valuation discrète. Soit  $Z = \text{Spec}(\mathcal{O}_z)$ ; comme  $U = Y - Y'$  est partout dense,  $U \cap Z$  n'est pas vide (I, 2.4.2); soit  $g'$  l'application rationnelle de  $Z$  dans  $X$  induite par  $g$  (I, 7.2.8); il suffit de montrer que  $g'$  est un morphisme (I, 7.2.9). Or,  $g'$  peut être considérée comme une  $Z$ -section rationnelle du  $Z$ -préschéma  $f^{-1}(Z) = X \times_Y Z$ ; il est clair que le morphisme  $f^{-1}(Z) \rightarrow Z$  correspondant à  $f$  est fermé, et il résulte de (I, 5.5.1, (i)) qu'il est séparé; on conclut alors de (7.3.3) que  $g'$  est partout définie; comme  $Z$  est réduit et  $X$  séparé sur  $Y$ ,  $g'$  est un morphisme (I, 7.2.2).

*Corollaire (7.3.6).* — Soient  $S$  un préschéma localement noethérien,  $X$  et  $Y$  deux  $S$ -préschémas; on suppose  $Y$  réduit, et en outre que l'ensemble  $N$  des points  $y \in Y$  où  $Y$  n'est pas régulier soit tel que  $\text{codim}_Y N \geq 2$ ; on suppose enfin que le morphisme structural  $X \rightarrow S$  soit propre. Soit  $f$  une  $S$ -application rationnelle de  $Y$  dans  $X$  et soit  $Y'$  l'ensemble des points de  $Y$  où  $f$  n'est pas définie; alors on a  $\text{codim}_Y Y' \geq 2$ .

On sait (I, 7.1.2) qu'on peut identifier les  $S$ -applications rationnelles de  $Y$  dans  $X$  aux  $Y$ -sections rationnelles de  $X \times_S Y$ ; comme le morphisme structural  $X \times_S Y \rightarrow Y$  est fermé (5.4.1), on peut appliquer (7.3.5), d'où le corollaire.

*Remarque (7.3.7).* — Les hypothèses faites sur  $Y$  dans (7.3.5) et (7.3.6) seront en particulier réalisées lorsque  $Y$  est normal (0, 4.1.4), en vertu de (7.1.6).

Nous pouvons caractériser les morphismes universellement fermés (resp. propres) par une réciproque de (7.3.3) :

*Théorème (7.3.8).* — Soient  $Y$  un préschéma (resp. un préschéma localement noethérien),  $f: X \rightarrow Y$  un morphisme quasi-compact séparé (resp. de type fini). Les conditions suivantes sont équivalentes :

a)  $f$  est universellement fermé (resp. propre).

b) Pour tout  $Y$ -schéma de la forme  $Y' = \text{Spec}(A)$ , où  $A$  est un anneau de valuation (resp. un anneau de valuation discrète) de corps des fractions  $K$ , l'application canonique

$$\text{Hom}_Y(Y', X) \rightarrow \text{Hom}_Y(\text{Spec}(K), X)$$

correspondant à l'injection canonique  $A \rightarrow K$ , est surjective (resp. bijective).

c) Pour tout  $Y$ -schéma de la forme  $Y' = \text{Spec}(A)$ , où  $A$  est un anneau de valuation (resp. un anneau de valuation discrète) l'application canonique (7.3.2.2) relative au  $Y'$ -préschéma  $X_{(Y')}$  est surjective (resp. bijective).

L'équivalence de b) et c) résulte aussitôt de (I, 3.3.14); a) implique c), car a) entraîne, dans l'une ou l'autre hypothèse, que  $f_{(Y')}$  est séparé (I, 5.5.1, (iv)) et fermé, et il suffit d'appliquer (7.3.3). Reste à prouver que b) entraîne a). Plaçons-nous d'abord dans le cas où  $Y$  est quelconque,  $f$  séparé et quasi-compact. Si la condition b) est vérifiée par  $f$ , elle l'est aussi par  $f_{(Y'')} : X_{(Y'')} \rightarrow Y''$ , où  $Y''$  est un  $Y$ -préschéma quelconque, en vertu de l'équivalence de b) et c), et du fait que  $X_{(Y'')} \times_{Y''} Y' = X \times_Y Y'$  pour tout morphisme  $Y' \rightarrow Y''$  (I, 3.3.9.1); comme en outre  $f_{(Y'')}$  est séparé et quasi-compact quand  $f$  l'est (I, 5.5.1, (iv) et 6.6.4, (iii)), on est ramené à prouver que b) entraîne que  $f$  est fermé. Pour cela, il suffit de vérifier la condition b) de (7.2.1). Soient donc  $x \in X$ ,  $y'$  une spécialisation de  $y = f(x)$ , distincte de  $y$ ; en vertu de (7.1.4), il y a un schéma  $Y'$ , spectre d'un anneau de valuation, et un morphisme séparé  $g : Y' \rightarrow Y$  tels que, si  $a$  désigne le point fermé et  $b$  le point générique de  $Y'$ , on ait  $g(a) = y'$ ,  $g(b) = y$ , et qu'il existe un  $\kappa(y)$ -homomorphisme  $\kappa(x) \rightarrow \kappa(b)$ . Ce dernier correspond canoniquement à un  $Y$ -morphisme  $\text{Spec}(\kappa(b)) \rightarrow X$  (I, 2.4.6), et il résulte donc de b) qu'il existe un  $Y$ -morphisme  $h : Y' \rightarrow X$  auquel correspond le morphisme précédent. On a alors  $h(b) = x$ ; si l'on pose  $h(a) = x'$ ,  $x'$  est spécialisation de  $x$ , et l'on a  $f(x') = f(h(a)) = g(a) = y'$ .

Si maintenant  $Y$  est localement noethérien et  $f$  de type fini, l'hypothèse b) entraîne d'abord que  $f$  est séparé, en vertu de (7.2.3), le morphisme diagonal  $X \rightarrow X \times_Y X$  étant quasi-compact (7.2.4). En outre, pour vérifier que  $f$  est propre, il suffit de montrer que  $f_{(Y'')} : X_{(Y'')} \rightarrow Y''$  est fermé pour tout  $Y$ -préschéma  $Y''$  de type fini, compte tenu de (5.6.3). Comme alors  $Y''$  est localement noethérien, on peut reprendre le raisonnement fait dans le premier cas en prenant pour  $Y'$  un spectre d'anneau de valuation discrète, et en appliquant (7.1.9) au lieu de (7.1.4).

*Remarques (7.3.9).* — (i) Lorsque  $Y$  est un préschéma quelconque et  $f$  un morphisme séparé, pour que  $f$  soit universellement fermé, il suffit que la condition b) ou la condition c) soit vérifiée pour les anneaux de valuation  $A$  complets et dont le corps des restes est algébriquement clos; cela résulte en effet de la démonstration et de (7.1.4).

(ii) On déduit du critère c) de (7.3.8) une nouvelle démonstration du fait qu'un morphisme projectif  $X \rightarrow Y$  est fermé (5.5.3), plus proche des méthodes classiques. On peut en effet supposer  $Y$  affine, et par suite  $X$  identifié à un sous-préschéma fermé d'un fibré projectif  $\mathbf{P}_Y^n$  (5.3.3); pour prouver que  $X \rightarrow Y$  est fermé, il suffit de vérifier qu'il en est ainsi du morphisme structural  $\mathbf{P}_Y^n \rightarrow Y$ , et le critère c) de (7.3.8), joint à (4.1.3.1), prouve qu'on est ramené à démontrer le fait suivant : si  $Y$  est le spectre d'un anneau de valuation  $A$ , de corps des fractions  $K$ , tout point de  $\mathbf{P}_Y^n$  à valeurs dans  $K$  provient (par restriction au point générique de  $Y$ ) d'un point de  $\mathbf{P}_Y^n$  à valeurs dans  $A$ . Or, tout  $\mathcal{O}_Y$ -Module inversible est trivial (I, 2.4.8); donc, il résulte de (4.2.6) qu'un point de  $\mathbf{P}_Y^n$  à valeurs dans  $K$  s'identifie à une classe d'éléments  $(\zeta c_0, \zeta c_1, \dots, \zeta c_n)$  de  $K$ , où  $\zeta \neq 0$  et les  $c$  sont des éléments non tous nuls de  $K$ . Or, en multipliant les  $c_i$  par un élément de  $A$  de

valuation convenable, on peut supposer que les  $c_i$  appartiennent tous à  $A$ , et que l'un au moins est inversible. Mais alors (4.2.6), le système  $(c_0, \dots, c_n)$  définit aussi un point de  $\mathbf{P}_Y^n$  à valeurs dans  $A$ , ce qui démontre notre assertion.

(iii) Les critères (7.2.3) et (7.3.8) sont surtout commodes quand on considère la donnée d'un  $Y$ -préschéma  $X$  comme équivalente à la donnée du foncteur

$$X(Y') = \text{Hom}_Y(Y', X)$$

en un  $Y$ -préschéma  $Y'$ ; ces critères nous permettront par exemple de prouver que sous certaines conditions les « schémas de Picard » sont propres.

*Corollaire (7.3.10).* — Soient  $Y$  un schéma intègre (resp. un schéma intègre localement noethérien),  $X$  un schéma intègre,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme dominant.

(i) Si  $f$  est quasi-compact et universellement fermé, tout anneau de valuation dont le corps des fractions est le corps  $R(X)$  des fonctions rationnelles sur  $X$ , et qui domine un anneau local de  $Y$ , domine aussi un anneau local de  $X$ .

(ii) Inversement, supposons que  $f$  soit de type fini, et que la propriété énoncée dans (i) soit vérifiée par tout anneau de valuation (resp. tout anneau de valuation discrète) ayant  $R(X)$  pour corps des fractions. Alors  $f$  est propre.

Notons d'abord que les hypothèses impliquent dans tous les cas que  $f$  est séparé (I, 5.5.9).

(i) Soient  $K = R(Y)$ ,  $L = R(X)$ ,  $y$  un point de  $Y$ ,  $A$  un anneau de valuation ayant  $L$  pour corps des fractions et dominant  $\mathcal{O}_y$ ; l'injection  $\mathcal{O}_y \rightarrow A$  définit donc un morphisme  $h$  de  $Y' = \text{Spec}(A)$  dans  $Y$  (I, 2.4.4) tel que  $h(a) = y$ , en désignant par  $a$  le point fermé de  $Y'$ ; en outre, si  $\eta$  est le point générique de  $Y$ , qui est aussi celui de  $\text{Spec}(\mathcal{O}_y)$ , on a  $h(b) = \eta$ , en désignant par  $b$  le point générique de  $Y'$  (puisque  $K \subset L$  par hypothèse). Si  $\xi$  est le point générique de  $X$ , on a  $\kappa(\xi) = \kappa(b) = L$  par hypothèse, d'où un  $Y$ -morphisme  $g : \text{Spec}(L) \rightarrow X$  tel que  $g(b) = \xi$ ; en vertu de (7.3.8),  $g$  provient d'un  $Y$ -morphisme  $g' : Y' \rightarrow X$ . Si  $x = g'(a)$ , il est clair que  $A$  domine  $\mathcal{O}_x$ .

(ii) La question étant locale sur  $Y$ , on peut toujours supposer que  $Y$  est affine (resp. affine et noethérien). Comme  $f$  est de type fini, on peut appliquer dans les deux cas le lemme de Chow (5.6.1). Il y a donc un morphisme projectif  $p : P \rightarrow Y$ , un morphisme d'immersion  $j : X' \rightarrow P$  et un morphisme projectif, surjectif et birationnel  $g : X' \rightarrow X$  ( $X'$  étant intègre) tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P & \xleftarrow{j} & X' \\ p \downarrow & & \downarrow g \\ Y & \xleftarrow{i} & X \end{array}$$

soit commutatif. Il suffit de prouver que  $j$  est une immersion fermée, car alors  $f \circ g = p \circ j$  sera un morphisme projectif, donc propre, et comme  $g$  est surjectif,  $f$  sera aussi propre (5.4.3). Soit  $Z$  le sous-préschéma fermé réduit de  $P$  ayant  $\overline{j(X')}$  comme espace sous-jacent (I, 5.2.1); comme  $X'$  est intègre,  $j$  se factorise en  $i \circ h$ , où  $i : Z \rightarrow P$  est l'injection canonique,  $h : X' \rightarrow Z$  une immersion ouverte dominante (I, 5.2.3), et  $Z$  est intègre;

en outre  $Z$  est projectif sur  $Y$ , et on voit qu'on peut se borner au cas où  $P$  est *intègre* et  $j$  dominant et birationnel, et tout revient à voir que  $j$  est *surjectif*. Or, soit  $z \in P$ ;  $\mathcal{O}_z$  est un anneau local intègre (resp. intègre et noethérien) dont le corps des fractions est

$$L = R(P) = R(X') = R(X).$$

On peut se borner au cas où  $z$  n'est pas le point générique de  $P$ . Il y a par suite (7.1.2 et 7.1.7) un anneau de valuation (resp. un anneau de valuation discrète)  $A$ , ayant  $L$  pour corps des fractions et dominant  $\mathcal{O}_z$ . *A fortiori*,  $A$  domine  $\mathcal{O}_y$ , en posant  $y = p(z)$ , et par hypothèse il y a donc un  $x \in X$  tel que  $A$  domine  $\mathcal{O}_x$ . Comme  $g$  est propre, la première partie de la démonstration prouve que  $A$  domine aussi un  $\mathcal{O}_{x'}$ , pour un  $x' \in X'$ ; il s'ensuit que  $\mathcal{O}_z$  et  $\mathcal{O}_{j(x')} = \mathcal{O}_{x'}$  sont apparentés (I, 8.1.4), et comme  $P$  est un schéma, cela entraîne  $z = j(x')$  (I, 8.2.2) et achève la démonstration.

*Corollaire (7.3.11).* — Soient  $X, Y$  deux schémas intègres,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme dominant, quasi-compact et universellement fermé. Supposons en outre  $Y$  affine d'anneau (intègre)  $B$ . Alors  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  est canoniquement isomorphe à un sous-anneau de la fermeture intégrale de  $B$  dans  $R(X)$ .

En effet (I, 8.2.1.1),  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  s'identifie à l'intersection des  $\mathcal{O}_x$  pour  $x \in X$ ; en vertu de (7.3.10), de (7.1.2) et (7.1.3),  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  est par suite contenu dans l'intersection des anneaux de valuation contenant  $B$  et ayant  $R(X)$  pour corps des fractions; la conclusion résulte alors de (7.1.3).

*Remarques (7.3.12).* — Sous les hypothèses de (7.3.11), et lorsqu'on suppose que  $R(X)$  est une extension de type fini de  $R(Y)$ , on pourra dans de nombreux cas conclure que  $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  est un module de type fini sur l'anneau  $B = \Gamma(Y, \mathcal{O}_X)$ . Ce sera le cas par exemple lorsque  $B$  est une algèbre de type fini sur un corps, car on sait alors que la fermeture intégrale de  $B$  dans une extension de type fini de son corps des fractions est un  $B$ -module de type fini ([13], t. I, p. 267, th. 9); la conclusion résulte alors de (7.3.11) et du fait que  $B$  est noethérien.

En particulier, un schéma  $X$  propre et affine sur un corps  $K$  est fini. En effet, en vertu de (1.6.4), (5.4.6) et (I, 6.4.4, c)), on peut se borner au cas où  $X$  est réduit. En outre, il suffira de prouver que chacun des sous-préschémas fermés de  $X$  ayant pour espace sous-jacent une composante irréductible de  $X$  (en nombre fini) est fini sur  $K$ , si bien que (tenant compte de (5.4.5)) on est finalement ramené au cas où  $X$  est intègre. Mais alors le résultat découle des remarques faites ci-dessus.

Au chapitre III, nous retrouverons cette dernière proposition par d'autres méthodes et comme conséquence de résultats plus généraux, montrant que si  $f : X \rightarrow Y$  est propre et  $Y$  localement noethérien,  $f_*(\mathcal{F})$  est cohérent pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module cohérent  $\mathcal{F}$  (III, 4.4.2).

Notons enfin que le critère (7.3.10) est pris comme *définition* des morphismes propres en Géométrie algébrique classique. Nous ne l'avons mentionné que pour cette raison, le critère (7.3.8) semblant plus maniable dans toutes les applications à notre connaissance.

#### 7.4. Courbes algébriques et corps de fonctions de dimension 1.

Le but de ce numéro est de montrer comment se formule en langage des schémas la notion classique de courbe algébrique (telle qu'elle est exposée par exemple dans le livre de C. Chevalley [23]). Dans tout le numéro, *on désigne par  $k$  un corps, tous les schémas considérés sont des  $k$ -schémas de type fini, et tous les morphismes des  $k$ -morphismes.*

*Proposition (7.4.1).* — Soit  $X$  un préschéma de type fini sur  $k$  (donc noethérien); soient  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) les points génériques des composantes irréductibles  $X_i$  de  $X$ , et soit  $K_i = k(x_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) Chacun des  $K_i$  est une extension de  $k$  dont le degré de transcendance est égal à 1.
- b) Pour tout point fermé  $x$  de  $X$ , l'anneau local  $\mathcal{O}_x$  est de dimension 1 (7.1.5).
- c) Les parties fermées irréductibles de  $X$  distinctes des  $X_i$  sont les points fermés de  $X$ .

Comme  $X$  est quasi-compact, toute partie fermée irréductible  $F$  de  $X$  contient un point fermé (0, 2.1.3). En vertu de (I, 2.4.2), il y a correspondance biunivoque entre les idéaux premiers de  $\mathcal{O}_x$  et les parties fermées irréductibles de  $X$  contenant  $x$  (I, 1.1.14); l'équivalence de b) et c) en découle aussitôt. D'autre part, si  $p_\alpha$  ( $1 \leq \alpha \leq r$ ) sont les idéaux premiers minimaux de l'anneau local noethérien  $\mathcal{O}_x$ , les anneaux locaux  $\mathcal{O}_x/p_\alpha$  sont intègres, et ont pour corps des fractions ceux des  $K_i$  tels que  $x \in X_i$ . En outre, on sait ([1], p. 4-06, th. 2) que la dimension d'une  $k$ -algèbre locale intègre de type fini est égale au degré de transcendance sur  $k$  de son corps des fractions. Enfin, la dimension de  $\mathcal{O}_x$  est borne supérieure des dimensions des  $\mathcal{O}_x/p_\alpha$ ; or, la condition a) implique que ces dimensions sont égales à 1, donc a) implique b); inversement, si  $\mathcal{O}_x$  est de dimension 1, aucun des  $p_\alpha$  ne peut être égal à l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_x$ , sans quoi  $\mathcal{O}_x$  serait de dimension 0; donc chacun des  $\mathcal{O}_x/p_\alpha$  est de dimension 1, ce qui montre que b) entraîne a).

On notera que sous les conditions de (7.4.1), l'ensemble  $X$  est *vide* ou *infini*, comme il résulte aussitôt de (I, 6.4.4).

*Définition (7.4.2).* — On appelle courbe algébrique sur  $k$  un schéma algébrique non vide sur  $k$  vérifiant les conditions de (7.4.1).

Dans le langage de la dimension, qui sera introduit au chapitre IV, cela s'exprimera en disant qu'une courbe algébrique sur  $k$  est un  $k$ -schéma algébrique non vide dont toutes les composantes irréductibles sont de dimension 1.

On notera que si  $X$  est une courbe algébrique sur  $k$ , les sous-préschémas fermés réduits  $X_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) de  $X$  ayant pour espaces sous-jacents les composantes irréductibles de  $X$  sont des courbes algébriques sur  $k$ .

*Corollaire (7.4.3).* — Soit  $X$  une courbe algébrique irréductible. Le seul point non fermé de  $X$  est son point générique. Les parties fermées de  $X$  distinctes de  $X$  sont les ensembles finis de points fermés; ce sont aussi les seules parties de  $X$  qui ne soient pas partout denses.

Si un point  $x \in X$  n'est pas fermé, son adhérence dans  $X$  est une partie fermée irréductible de  $X$ , donc nécessairement  $X$  tout entier en vertu de (7.4.1), et par suite  $x$  est le point générique de  $X$ . Une partie fermée  $F$  de  $X$ , distincte de  $X$ , ne peut contenir

le point générique de  $X$ , donc tous ses points sont fermés (dans  $X$  et *a fortiori* dans  $F$ ) ; en considérant le sous-préschéma fermé réduit de  $X$  ayant  $F$  pour espace sous-jacent (**I**, 5.2.1), il résulte donc de (**I**, 6.2.2) que  $F$  est fini et discret. L'adhérence dans  $X$  d'une partie infinie de  $X$  est donc nécessairement égale à  $X$ .

Lorsque  $X$  est une courbe algébrique quelconque, en appliquant (7.4.3) aux composantes irréductibles de  $X$ , on voit que les seuls points non fermés de  $X$  sont les points génériques de ces composantes.

*Corollaire (7.4.4).* — Soient  $X$  et  $Y$  deux courbes algébriques irréductibles sur  $k$ ,  $f : X \rightarrow Y$  un  $k$ -morphisme. Pour que  $f$  soit dominant, il faut et il suffit que  $f^{-1}(y)$  soit fini pour tout  $y \in Y$ .

En effet, si  $f$  n'est pas dominant,  $f(X)$  est nécessairement une partie *finie* de  $Y$  en vertu de (7.4.3), donc il n'est pas possible que  $f^{-1}(y)$  soit fini pour tout point de  $Y$ , sinon  $X$  serait fini, ce qui est absurde (7.4.1). Inversement, si  $f$  est dominant, pour tout  $y \in Y$  distinct du point générique  $\eta$  de  $Y$ ,  $f^{-1}(y)$  est fermé dans  $X$  puisque  $\{y\}$  est fermé dans  $Y$  (7.4.3) ; d'autre part, par hypothèse,  $f^{-1}(y)$  ne contient pas le point générique  $\xi$  de  $X$ , donc est fini en vertu de (7.4.3). Enfin, pour voir que lorsque  $f$  est dominant,  $f^{-1}(\eta)$  est fini, on note que la fibre  $f^{-1}(\eta)$  est un schéma irréductible de type fini sur  $k(\eta)$ , et de point générique  $\xi$  (**I**, 6.3.9 et 6.4.11). Comme  $k(\xi)$  et  $k(\eta)$  sont des extensions de type fini de  $k$ , de même degré de transcendance 1,  $k(\xi)$  est nécessairement une extension de degré fini de  $k(\eta)$ , donc  $\xi$  est fermé dans  $f^{-1}(\eta)$  (**I**, 6.4.2), et  $f^{-1}(\eta)$  est par suite réduit au point  $\xi$ .

Nous verrons au chapitre III qu'un morphisme *propre*  $f : X \rightarrow Y$  de préschémas noethériens, tel que  $f^{-1}(y)$  soit fini pour tout  $y \in Y$ , est nécessairement *fini* ; il s'ensuivra donc de (7.4.4) qu'un morphisme dominant propre d'une courbe algébrique irréductible dans une courbe algébrique est *fini*.

*Corollaire (7.4.5).* — Soit  $X$  une courbe algébrique sur  $k$ . Pour que  $X$  soit régulière, il faut et il suffit que  $X$  soit normale, ou encore que les anneaux locaux de ses points fermés soient des anneaux de valuation discrète.

Cela résulte aussitôt de la condition b) de (7.4.1) et de (7.1.6).

*Corollaire (7.4.6).* — Soient  $X$  une courbe algébrique réduite,  $\mathcal{A}$  une  $\mathcal{R}(X)$ -Algèbre cohérente réduite; alors la fermeture intégrale  $X'$  de  $X$  relativement à  $\mathcal{A}$  (6.3.4) est une courbe algébrique normale, et le morphisme canonique  $X' \rightarrow X$  est fini.

Le fait que  $X' \rightarrow X$  soit fini résulte de (6.3.10) ;  $X'$  est donc un  $k$ -schéma algébrique ; en outre, si  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sont les points génériques des composantes irréductibles de  $X$ ,  $x'_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) ceux des composantes irréductibles de  $X'$ , chacun des  $k(x'_j)$  est extension algébrique finie de l'un des  $k(x_i)$  (6.3.6), donc a un degré de transcendance 1 sur  $k$ .  $X'$  est donc bien une courbe algébrique sur  $k$ , et en outre on sait que  $X'$  est somme d'un nombre fini de schémas intègres et normaux (6.3.6 et 6.3.7).

(7.4.7) On dit qu'une courbe algébrique  $X$  sur  $k$  est *complète* si elle est *propre* sur  $k$ .

*Corollaire (7.4.8).* — Pour qu'une courbe algébrique réduite  $X$  sur  $k$  soit complète, il faut et il suffit que sa normalisée  $X'$  le soit.

En effet, le morphisme canonique  $f : X' \rightarrow X$  est alors fini (7.4.6), donc propre (6.1.11) et surjectif (6.3.8); si  $g : X \rightarrow \text{Spec}(k)$  est le morphisme structural,  $g$  et  $gof$  sont donc propres simultanément, comme il résulte de (5.4.2, (ii)) et (5.4.3, (ii)),  $g$  étant séparé par hypothèse.

*Proposition (7.4.9).* — *Soient  $X$  une courbe algébrique normale sur  $k$ ,  $Y$  un  $k$ -schéma algébrique propre sur  $k$ . Toute  $k$ -application rationnelle de  $X$  dans  $Y$  est alors partout définie, autrement dit est un morphisme.*

En effet, il résulte de (7.3.7) qu'aux points  $x \in X$  où une telle application n'est pas définie, la dimension de  $\mathcal{O}_x$  devrait être  $\geq 2$ , donc l'ensemble de ces points est vide; la dernière assertion provient de (I, 7.2.3).

*Corollaire (7.4.10).* — *Une courbe algébrique normale sur  $k$  est quasi-projective sur  $k$ .*

Comme  $X$  est somme d'un nombre fini de courbes algébriques intègres et normales (6.3.8), on peut se borner au cas où  $X$  est intègre (5.3.6). Comme  $X$  est quasi-compact, il est recouvert par un nombre fini d'ouverts affines  $U_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), et comme chacun de ces derniers est de type fini sur  $k$ , il existe un entier  $n_i$  et une  $k$ -immersion  $f_i : U_i \rightarrow \mathbf{P}_k^{n_i}$  (5.3.3 et 5.3.4, (i)). Comme  $U_i$  est dense dans  $X$ , il résulte de (7.4.9) que  $f_i$  se prolonge en un  $k$ -morphisme  $g_i : X \rightarrow \mathbf{P}_k^{n_i}$ , d'où un  $k$ -morphisme  $g = (g_1, \dots, g_n)_k$  de  $X$  dans le produit  $P$  des  $\mathbf{P}_k^{n_i}$  sur  $k$ . En outre, pour chaque indice  $i$ , comme la restriction de  $g_i$  à  $U_i$  est une immersion, il en est de même de la restriction de  $g$  à  $U_i$  (I, 5.3.14). Comme les  $U_i$  recouvrent  $X$  et que  $g$  est séparé (I, 5.5.1, (v)),  $g$  est une immersion de  $X$  dans  $P$  (I, 8.2.8). Comme le morphisme de Segre (4.3.3) fournit une immersion de  $P$  dans un  $\mathbf{P}_k^N$ , cela achève de prouver que  $X$  est quasi-projectif.

*Corollaire (7.4.11).* — *Une courbe algébrique normale  $X$  est isomorphe au schéma induit sur un ouvert partout dense d'une courbe algébrique normale et complète  $\hat{X}$ , déterminée à un isomorphisme unique près.*

Si  $X_1, X_2$  sont deux courbes normales et complètes, il résulte aussitôt de (7.4.9) que tout isomorphisme d'un ouvert  $U_1$  dense dans  $X_1$ , sur un ouvert  $U_2$  dense dans  $X_2$ , se prolonge de façon unique en un isomorphisme de  $X_1$  sur  $X_2$ ; d'où l'assertion d'unicité. Pour prouver l'existence de  $\hat{X}$ , il suffit de remarquer que l'on peut considérer  $X$  comme un sous-schéma d'un fibré projectif  $\mathbf{P}_k^n$  (7.4.10). Soit  $\bar{X}$  l'adhérence de  $X$  dans  $\mathbf{P}_k^n$  (I, 9.5.11); comme  $X$  est induit par  $\bar{X}$  sur un ouvert dense dans  $\bar{X}$  (I, 9.5.10), les points génériques  $x_i$  des composantes irréductibles de  $X$  sont aussi ceux des composantes irréductibles de  $\bar{X}$ , et les  $k(x_i)$  sont les mêmes pour ces deux schémas, donc (7.4.1)  $\bar{X}$  est une courbe algébrique sur  $k$ , qui est réduite (I, 9.5.9) et projective sur  $k$  (5.5.1), donc complète (5.5.3). Prenons alors pour  $\hat{X}$  la *normalisée* de  $\bar{X}$ , qui est encore complète (7.4.8); en outre, si  $h : \hat{X} \rightarrow \bar{X}$  est le morphisme canonique, la restriction de  $h$  à  $h^{-1}(X)$  est un isomorphisme sur  $X$  puisque  $X$  est normale (6.3.4), et comme  $h^{-1}(X)$  contient les points génériques des composantes irréductibles de  $\hat{X}$  (6.3.8), il est dense dans  $\hat{X}$ , ce qui achève la démonstration.

*Remarque (7.4.12).* — Nous montrerons au chapitre V que la conclusion de (7.4.10) est encore valable sans supposer la courbe normale (ni même réduite); nous montrerons aussi que pour qu'une courbe algébrique (réduite ou non) soit affine, il faut et il suffit que ses composantes irréductibles (réduites) ne soient pas complètes.

*Corollaire (7.4.13).* — Soient  $X$  une courbe normale irréductible de corps  $R(X) = K$ ,  $Y$  une courbe intègre complète de corps  $L = R(Y)$ . Il y a une correspondance biunivoque canonique entre les  $k$ -morphismes dominants  $X \rightarrow Y$  et les  $k$ -monomorphismes  $L \rightarrow K$ .

En vertu de (7.4.9), les  $k$ -applications rationnelles de  $X$  dans  $Y$  s'identifient aux  $k$ -morphismes  $u : X \rightarrow Y$ . Les morphismes  $u$  dominants étant caractérisés par le fait que  $u(x) = y$  (en désignant par  $x$  et  $y$  les points génériques respectifs de  $X$  et de  $Y$ ), le corollaire résulte de ces remarques et de (I, 7.1.13).

(7.4.14) On peut préciser le résultat de (7.4.13) lorsqu'on prend pour  $Y$  la droite projective  $\mathbf{P}_k^1 = \text{Proj}(k[T_0, T])$ ,  $T_0$  et  $T$  étant deux indéterminées. C'est bien là un schéma intègre (2.4.4), et le schéma induit sur l'ouvert  $D_+(T_0)$  de  $Y$  est isomorphe à  $\text{Spec}(k[T])$  (2.3.6), donc le point générique de  $Y$  est l'idéal  $(0)$  de  $k[T]$  et son corps de fonctions rationnelles  $k(T)$ , ce qui montre que  $Y$  est une courbe algébrique complète sur  $k$ . En outre, le seul idéal premier gradué de  $S = k[T_0, T]$  contenant  $T_0$  et distinct de  $S_+$  est l'idéal principal  $(T_0)$ , donc le complémentaire de  $D_+(T_0)$  dans  $Y = \mathbf{P}_k^1$  est réduit à un point fermé, dit « point à l'infini » que nous noterons  $\infty$  (pour une étude générale des rapports entre fibrés vectoriels et fibrés projectifs, voir 8.4). Avec ces notations :

*Corollaire (7.4.15).* — Soit  $X$  une courbe normale irréductible de corps  $R(X) = K$ . Il existe une application bijective canonique de  $K$  sur l'ensemble des morphismes  $u$  de  $X$  dans  $\mathbf{P}_k^1$ , distincts du morphisme constant de valeur  $\infty$ . Pour que  $u$  soit dominant, il faut et il suffit que l'élément correspondant de  $K$  soit transcendant sur  $k$ .

Cet énoncé résulte immédiatement de (7.4.9) et du

*Lemme (7.4.15.1).* — Soit  $X$  un préschéma intègre sur  $k$ , et soit  $K = R(X)$  son corps des fonctions rationnelles. Il existe une application bijective canonique de l'ensemble  $K$  sur l'ensemble des applications rationnelles  $u$  de  $X$  dans  $\mathbf{P}_k^1$ , distinctes du morphisme constant de valeur  $\infty$ . Pour qu'une telle application rationnelle soit dominante, il faut et il suffit que l'élément correspondant de  $K$  soit transcendant sur  $k$ .

Tout d'abord, les applications rationnelles de  $X$  dans  $\mathbf{P}_k^1$  correspondent biunivoquement aux points de  $\mathbf{P}_k^1$  à valeurs dans l'extension  $K$  de  $k$  (I, 7.1.12). Si un tel point est localisé (I, 3.4.5) au point générique de  $\mathbf{P}_k^1$ , l'application rationnelle correspondante est évidemment dominante. Dans le cas contraire, comme tout point de  $\mathbf{P}_k^1$  distinct du point générique est fermé (7.4.3), l'image du domaine de définition  $U$  de  $u$  par l'unique morphisme  $U \rightarrow \mathbf{P}_k^1$  de la classe  $u$  (I, 7.2.2), est réduite à un point fermé  $y$  de  $\mathbf{P}_k^1$ , et ce morphisme (qui n'est pas nécessairement partout défini dans  $X$ ) n'est donc pas dominant; par abus de langage, on dit alors que l'application rationnelle  $u$  est « constante, de valeur  $y$  ». Il reste à mettre en correspondance biunivoque les points de  $\mathbf{P}_k^1$  à valeurs dans  $K$ , de localité (I, 3.4.5) distincte de  $\infty$ , et les éléments de  $K$ , et à vérifier que la localité d'un tel point est le point générique de  $\mathbf{P}_k^1$  si et seulement s'il correspond à un

élément transcendant sur  $k$ . Or, cette vérification est immédiate sur (4.2.6, exemple 1°).

*Corollaire (7.4.16). — Soient  $X, Y$  deux courbes algébriques sur  $k$ , normales, complètes et irréductibles; soient  $K = R(X)$ ,  $L = R(Y)$  leurs corps. Il existe une correspondance biunivoque canonique entre l'ensemble des  $k$ -isomorphismes  $X \xrightarrow{\sim} Y$  et l'ensemble des  $k$ -isomorphismes  $L \xrightarrow{\sim} K$ .*

C'est une conséquence évidente de (7.4.13).

(7.4.17) Le corollaire (7.4.16) montre qu'une courbe algébrique sur  $k$ , normale, complète et irréductible, est déterminée par son corps de fonctions rationnelles  $K$  à un isomorphisme unique près; par définition,  $K$  est une extension de type fini de  $k$ , de degré de transcendance 1 (ce qu'on appelle classiquement un *corps de fonctions algébriques d'une variable*). De plus :

*Proposition (7.4.18). — Pour toute extension  $K$  de  $k$ , de type fini et de degré de transcendance 1, il existe une courbe algébrique normale, complète et irréductible  $X$  telle que  $R(X) = K$  (déterminée à isomorphisme unique près). L'ensemble des anneaux locaux de  $X$  s'identifie (I, 8.2.1) à l'ensemble formé de  $K$  et des anneaux de valuation contenant  $k$  et ayant  $K$  comme corps des fractions.*

En effet,  $K$  est une extension de degré fini d'une extension transcendante pure  $k(T)$  de  $k$ , qui s'identifie, comme on l'a vu, au corps des fonctions rationnelles de la droite projective  $Y = \mathbf{P}_k^1$ . Soit  $X$  la fermeture intégrale de  $Y$  relativement à  $K$  (6.3.4);  $X$  est une courbe algébrique normale de corps  $K$  (6.3.7), et elle est complète puisque le morphisme  $X \rightarrow Y$  est fini (7.4.6). Les anneaux locaux  $\mathcal{O}_x$  de  $X$  sont : le corps  $K$  lorsque  $x$  est le point générique; si  $x$  est distinct du point générique,  $\mathcal{O}_x$  est un anneau de valuation discrète contenant  $k$  et ayant  $K$  comme corps des fractions (7.4.5). Inversement, soit  $A$  un tel anneau; comme le morphisme  $X \rightarrow \text{Spec}(k)$  est propre et que  $A$  domine  $k$ , il domine un anneau local  $\mathcal{O}_x$  de  $X$  (7.3.10); ce dernier étant un anneau de valuation ayant  $K$  comme corps des fractions, est donc nécessairement égal à  $A$ .

*Remarques (7.4.19). — Il résulte de (7.4.16) et (7.4.18) que la donnée d'une courbe algébrique sur  $k$ , normale, complète et irréductible, est essentiellement équivalente à la donnée d'une extension  $K$  de  $k$ , de type fini et de degré de transcendance 1. On notera que si  $k'$  est une extension du corps de base  $k$ ,  $X \otimes_k k'$  sera encore une courbe algébrique complète sur  $k'$  (5.4.2, (iii)), mais en général elle ne sera ni réduite ni irréductible. Elle le sera cependant si  $K$  est une extension séparable de  $k$  et si  $k$  est algébriquement fermé dans  $K$  (ce qui s'exprime, dans une terminologie classique que nous ne suivrons pas, en disant que  $K$  est une « extension régulière » de  $k$ ). Mais même dans ce cas, il peut se faire que  $X \otimes_k k'$  ne soit pas normale. Le lecteur trouvera des détails sur ces questions dans le chapitre IV.*

## § 8. SCHÉMAS ÉCLATÉS; CONES PROJETANTS FERMETURE PROJECTIVE

### 8.1. Préschémas éclatés.

(8.1.1) Soient  $Y$  un préschéma, et pour tout entier  $n \geq 0$ , soit  $\mathcal{I}_n$  un Idéal quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_Y$ ; on suppose vérifiées les conditions suivantes :

$$(8.1.1.1) \quad \mathcal{I}_0 = \mathcal{O}_Y, \quad \mathcal{I}_n \subset \mathcal{I}_m \quad \text{pour } m \leq n$$

$$(8.1.1.2) \quad \mathcal{I}_m \mathcal{I}_n \subset \mathcal{I}_{m+n} \quad \text{quels que soient } m, n.$$

On notera que ces hypothèses entraînent

$$(8.1.1.3) \quad \mathcal{I}_1^n \subset \mathcal{I}_n.$$

Posons

$$(8.1.1.4) \quad \mathcal{S} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}_n.$$

Il résulte de (8.1.1.1) et (8.1.1.2) que  $\mathcal{S}$  est une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente, et définit donc un  $Y$ -schéma  $X = \text{Proj}(\mathcal{S})$ . Si  $\mathcal{J}$  est un Idéal *inversible* de  $\mathcal{O}_Y$ ,  $\mathcal{I}_n \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{J}^{\otimes n}$  s'identifie canoniquement à  $\mathcal{I}_n \mathcal{J}^n$ . Si on remplace donc les  $\mathcal{I}_n$  par les  $\mathcal{I}_n \mathcal{J}^n$ , ce qui remplace  $\mathcal{S}$  par une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre quasi-cohérente  $\mathcal{S}_{(\mathcal{J})}$ ,  $X_{(\mathcal{J})} = \text{Proj}(\mathcal{S}_{(\mathcal{J})})$  est canoniquement isomorphe à  $X$  (3.1.8).

(8.1.2) Supposons  $Y$  *localement intègre*, de sorte que le faisceau  $\mathcal{R}(Y)$  des fonctions rationnelles est une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre quasi-cohérente (I, 7.3.7). Nous dirons qu'un sous- $\mathcal{O}_Y$ -Module  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{R}(Y)$  est un *Idéal fractionnaire* de  $\mathcal{R}(Y)$  s'il est de type fini (0, 5.2.1). Supposons donné, pour tout  $n \geq 0$ , un Idéal fractionnaire quasi-cohérent  $\mathcal{I}_n$  de  $\mathcal{R}(Y)$ , tel que  $\mathcal{I}_0 = \mathcal{O}_Y$ , et que la condition (8.1.1.2) soit vérifiée (mais non nécessairement la seconde condition (8.1.1.1)); on peut encore alors définir par la formule (8.1.1.4) une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente, et le  $Y$ -schéma correspondant  $X = \text{Proj}(\mathcal{S})$ ; on aura encore un isomorphisme canonique de  $X$  sur  $X_{(\mathcal{J})}$  pour tout Idéal fractionnaire *inversible*  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{R}(Y)$ .

**Définition (8.1.3).** — Soit  $Y$  un préschéma (resp. un préschéma localement intègre), et soit  $\mathcal{I}$  un Idéal quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_Y$  (resp. un Idéal fractionnaire quasi-cohérent de  $\mathcal{R}(Y)$ ). On dit que le  $Y$ -schéma  $X = \text{Proj}\left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n\right)$  est obtenu en faisant éclater l'Idéal  $\mathcal{I}$ , ou est le préschéma éclaté de  $Y$  relativement à  $\mathcal{I}$ . Lorsque  $\mathcal{I}$  est un Idéal quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_Y$  et  $Y'$  le sous-préschéma fermé de  $Y$  défini par  $\mathcal{I}$ , on dit aussi que  $X$  est le  $Y$ -schéma obtenu en faisant éclater  $Y'$ .

Par définition,  $\mathcal{S} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n$  est alors engendrée par  $\mathcal{S}_1 = \mathcal{I}$ ; si  $\mathcal{I}$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -Module de type fini,  $X$  est donc projectif sur  $Y$  (5.5.2). Sans hypothèse sur  $\mathcal{I}$ , le  $\mathcal{O}_X$ -Module  $\mathcal{O}_X(1)$  est *inversible* (3.2.5) et très ample en vertu de (4.4.3) pour le morphisme structural  $X \rightarrow Y$ .

On notera que si  $f : X \rightarrow Y$  est le morphisme structural, la restriction de  $f$  à  $f^{-1}(Y - Y')$  est un *isomorphisme* sur  $Y - Y'$  lorsque  $\mathcal{I}$  est un Idéal de  $\mathcal{O}_Y$  et  $Y'$  le sous-préschéma fermé qu'il définit : en effet, la question étant locale sur  $Y$ , il suffit de supposer  $\mathcal{I} = \mathcal{O}_Y$ , et notre assertion résulte de (3.1.7).

Lorsqu'on remplace  $\mathcal{I}$  par  $\mathcal{I}^d$  ( $d > 0$ ), le  $Y$ -schéma éclaté  $X$  est remplacé par un  $Y$ -schéma canoniquement *isomorphe*  $X'$  (8.1.1); de même, pour tout Idéal (resp. Idéal fractionnaire) *inversible*  $\mathcal{J}$ , le préschéma éclaté  $X_{(\mathcal{J})}$  relativement à l'Idéal  $\mathcal{I}\mathcal{J}$  est canoniquement isomorphe à  $X$  (8.1.1).

En particulier, lorsque  $\mathcal{I}$  est un Idéal (resp. un Idéal fractionnaire) *inversible*, le  $Y$ -schéma obtenu en faisant éclater  $\mathcal{I}$  est *isomorphe* à  $Y$  (3.1.7).

**Proposition (8.1.4).** — Soit  $Y$  un préschéma intègre.

(i) Pour toute suite  $(\mathcal{I}_n)$  d'Idéaux fractionnaires quasi-cohérents de  $\mathcal{R}(Y)$  vérifiant (8.1.1.2)

et tels que  $\mathcal{I}_0 = \mathcal{O}_Y$ , le Y-schéma  $X = \text{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}_n)$  est intègre et le morphisme structural  $f : X \rightarrow Y$  dominant.

(ii) Soit  $\mathcal{I}$  un Idéal fractionnaire quasi-cohérent de  $\mathcal{R}(Y)$ , et soit  $X$  le Y-schéma éclaté de  $Y$  relativement à  $\mathcal{I}$ . Si  $\mathcal{I} \neq 0$ , le morphisme structural  $f : X \rightarrow Y$  est alors birationnel et surjectif.

(i) résulte de ce que  $\mathcal{S} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}_n$  est une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre intègre (3.1.12 et 3.1.14) puisque pour tout  $y \in Y$ ,  $\mathcal{O}_y$  est un anneau intègre (I, 5.1.4).

(ii) D'après (i),  $X$  est intègre; si en outre,  $x$  et  $y$  sont les points génériques de  $X$  et  $Y$ , on a  $f(x) = y$ , et il faut prouver que  $\kappa(x)$  est de rang 1 sur  $\kappa(y)$ . Or  $x$  est aussi le point générique de la fibre  $f^{-1}(y)$ ; si  $\psi$  est le morphisme canonique  $Z \rightarrow Y$ , où  $Z = \text{Spec}(\kappa(y))$ , le préschéma  $f^{-1}(y)$  s'identifie à  $\text{Proj}(\mathcal{S}')$ , où  $\mathcal{S}' = \psi^*(\mathcal{S})$  (3.5.3). Mais il est clair que  $\mathcal{S}' = \bigoplus_{n \geq 0} (\mathcal{I}_y)^n$ , et comme  $\mathcal{I}$  est un Idéal fractionnaire quasi-cohérent non nul de  $\mathcal{R}(Y)$ ,  $\mathcal{I}_y \neq 0$  (I, 7.3.6), d'où  $\mathcal{I}_y = \kappa(y)$ ;  $\text{Proj}(\mathcal{S}')$  s'identifie donc à  $\text{Spec}(\kappa(y))$  (3.1.7), d'où la conclusion.

Nous démontrerons une *réciproque* de (8.1.4) dans (III, 2.3.8).

**(8.1.5)** Revenons à la situation et aux notations de (8.1.1). Par définition, les homomorphismes d'injection  $\mathcal{I}_{n+1} \rightarrow \mathcal{I}_n$  (8.1.1.1) définissent pour chaque  $k \in \mathbf{Z}$  un homomorphisme injectif de degré 0 de  $\mathcal{S}$ -Modules gradués

$$(8.1.5.1) \quad u_k : \mathcal{S}_+(k+1) \rightarrow \mathcal{S}(k);$$

comme  $\mathcal{S}_+(k+1)$  et  $\mathcal{S}(k+1)$  sont canoniquement (TN)-isomorphes, il correspond canoniquement à  $u_k$  un homomorphisme injectif de  $\mathcal{O}_X$ -Modules (3.4.2) :

$$(8.1.5.2) \quad \widetilde{u}_k : \mathcal{O}_X(k+1) \rightarrow \mathcal{O}_X(k).$$

Rappelons d'autre part (3.2.6) que l'on a défini des homomorphismes canoniques

$$(8.1.5.3) \quad \lambda : \mathcal{O}_X(h) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(k) \rightarrow \mathcal{O}_X(h+k)$$

et comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(h) \otimes_{\mathcal{S}} \mathcal{S}(k) \otimes_{\mathcal{S}} \mathcal{S}(l) & \rightarrow & \mathcal{S}(h+k) \otimes_{\mathcal{S}} \mathcal{S}(l) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}(h) \otimes_{\mathcal{S}} \mathcal{S}(k+l) & \rightarrow & \mathcal{S}(h+k+l) \end{array}$$

est commutatif, il résulte de la fonctorialité des  $\lambda$  (3.2.6) que les homomorphismes (8.1.5.3) définissent sur

$$(8.1.5.4) \quad \mathcal{S}_X = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_X(n)$$

une structure de  $\mathcal{O}_X$ -Algèbre graduée quasi-cohérente. En outre, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(h) \otimes_{\mathcal{S}} \mathcal{S}_+(k+1) & \rightarrow & \mathcal{S}_+(h+k+1) \\ \downarrow 1 \otimes u_k & & \downarrow u_{k+h} \\ \mathcal{S}(h) \otimes_{\mathcal{S}} \mathcal{S}(k) & \longrightarrow & \mathcal{S}(h+k) \end{array}$$

est commutatif; la fonctorialité des  $\lambda$  montre alors que l'on a un diagramme commutatif

$$(8.1.5.5) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(h) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(k+1) & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{O}_X(h+k+1) \\ \downarrow 1 \otimes \tilde{u}_k & & \downarrow \tilde{u}_{k+h} \\ \mathcal{O}_X(h) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(k) & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{O}_X(h+k) \end{array}$$

les flèches horizontales étant les homomorphismes canoniques. On peut donc dire que les  $\tilde{u}_k$  définissent un *homomorphisme injectif* (de degré 0) de  $\mathcal{S}_X$ -Modules gradués

$$(8.1.5.6) \quad \tilde{u}: \mathcal{S}_X(1) \rightarrow \mathcal{S}_X.$$

(8.1.6) Gardant les notations de (8.1.5), remarquons maintenant que, pour  $n \geq 0$ , l'homomorphisme composé  $\tilde{v}_n = \tilde{u}_{n-1} \circ \tilde{u}_{n-2} \circ \dots \circ \tilde{u}_0$  est un homomorphisme *injectif*  $\mathcal{O}_X(n) \rightarrow \mathcal{O}_X$ ; nous désignerons par  $\mathcal{I}_{n,X}$  son image, qui est donc un Idéal quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_X$ , *isomorphe* à  $\mathcal{O}_X(n)$ . En outre, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(m) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{O}_X(m+n) \\ \downarrow \tilde{v}_m \otimes \tilde{v}_n & & \downarrow \tilde{v}_{m+n} \\ \mathcal{O}_X & \xrightarrow[\text{id}]{} & \mathcal{O}_X \end{array}$$

est commutatif pour  $m \geq 0, n \geq 0$ . On en conclut les inclusions suivantes

$$(8.1.6.1) \quad \mathcal{I}_{0,X} = \mathcal{O}_X, \quad \mathcal{I}_{n,X} \subset \mathcal{I}_{m,X} \quad \text{pour } 0 \leq m \leq n$$

$$(8.1.6.2) \quad \mathcal{I}_{m,X} \mathcal{I}_{n,X} \subset \mathcal{I}_{m+n,X} \quad \text{pour } m \geq 0, n \geq 0.$$

*Proposition (8.1.7).* — Soient  $Y$  un préschéma,  $\mathcal{I}$  un Idéal quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_Y$ ,  $X = \text{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n)$  le  $Y$ -schéma obtenu en faisant éclater  $\mathcal{I}$ . On a alors, pour tout  $n > 0$ , un isomorphisme canonique

$$(8.1.7.1) \quad \mathcal{O}_X(n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}^n \mathcal{O}_X = \mathcal{I}_{n,X}$$

(cf. (0, 4.3.5)), et par suite  $\mathcal{I}^n \mathcal{O}_X$  est un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible très ample si  $n > 0$ .

La dernière assertion est immédiate, puisque  $\mathcal{O}_X(1)$  est inversible (3.2.5) et très ample pour  $Y$  par définition (4.4.3 et 4.4.9). D'autre part, par définition, l'image de  $v_n$  n'est autre que  $\mathcal{I}^n \mathcal{S}$ , et (8.1.7.1) résulte donc de l'exactitude du foncteur  $\widetilde{\mathcal{M}}$  (3.2.4) et de la formule (3.2.4.1).

*Corollaire (8.1.8).* — Sous les hypothèses de (8.1.7), si  $f: X \rightarrow Y$  est le morphisme structural et  $Y'$  le sous-préschéma fermé de  $Y$  défini par  $\mathcal{I}$ , le sous-préschéma fermé  $X' = f^{-1}(Y')$  de  $X$  est défini par  $\mathcal{I}\mathcal{O}_X$  (isomorphe canoniquement à  $\mathcal{O}_X(1)$ ), d'où une suite exacte canonique

$$(8.1.8.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_X(1) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{X'} \rightarrow 0$$

Cela résulte de (8.1.7.1) et de (I, 4.4.5).

**(8.1.9)** Sous les hypothèses de (8.1.7), on peut préciser la structure des  $\mathcal{I}_{n,X}$ . Remarquons en effet que l'homomorphisme

$$\widetilde{u}_{-1}: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X(-1)$$

correspond canoniquement à une section  $s$  de  $\mathcal{O}_X(-1)$  au-dessus de  $X$ , que nous appellerons la *section canonique* (relative à  $\mathcal{I}$ ) (0, 5.1.1). D'autre part, dans le diagramme (8.1.5.5), les flèches horizontales sont des isomorphismes (3.2.7); en remplaçant dans ce diagramme  $h$  par  $k$  et  $k$  par  $-1$ , on obtient  $\widetilde{u}_k = i_k \otimes \widetilde{u}_{-1}$  ( $i_h$  désignant l'identité de  $\mathcal{O}_X(h)$ ), autrement dit l'homomorphisme  $\widetilde{u}_k$  n'est autre que la *multiplication tensorielle par la section canonique*  $s$  (pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ ). L'homomorphisme  $\widetilde{u}$  (8.1.5.6) s'interprète donc aussi de la même manière.

Par suite, pour tout  $n \geq 0$ , l'homomorphisme  $\widetilde{u}_n: \mathcal{O}_X(n) \rightarrow \mathcal{O}_X$  n'est autre que la multiplication tensorielle par  $s^{\otimes n}$ ; on en déduit :

*Corollaire (8.1.10).* — Avec les notations de (8.1.8), l'espace sous-jacent à  $X'$  est l'ensemble des  $x \in X$  tels que  $s(x) = 0$ ,  $s$  désignant la section canonique de  $\mathcal{O}_X(-1)$ .

En effet, si  $c_x$  est un générateur de la fibre  $(\mathcal{O}_X(1))_x$  en un point  $x$ ,  $s_x \otimes c_x$  s'identifie canoniquement à un générateur de la fibre de  $\mathcal{I}_{1,X}$  au point  $x$ , et est donc inversible si et seulement si l'on a  $s_x \notin \mathfrak{m}_x(\mathcal{O}_X(-1))_x$ , autrement dit  $s(x) \neq 0$ .

*Proposition (8.1.11).* — Soient  $Y$  un préschéma intègre,  $\mathcal{I}$  un Idéal fractionnaire quasi-cohérent de  $\mathcal{R}(Y)$ ,  $X$  le  $Y$ -schéma obtenu en faisant éclater  $\mathcal{I}$ . Alors  $\mathcal{I}\mathcal{O}_X$  est un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible très ample pour  $Y$ .

La question étant locale sur  $Y$  (4.4.5), on peut se borner au cas où  $Y = \text{Spec}(A)$ , où  $A$  est un anneau intègre de corps des fractions  $K$  et  $\mathcal{I} = \widetilde{\mathfrak{J}}$ ,  $\mathfrak{J}$  étant un idéal fractionnaire de  $K$ ; il existe par suite un élément  $a \neq 0$  de  $A$  tel que  $a\mathfrak{J} \subset A$ . Posons  $S = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{J}^n$ ; l'application  $x \mapsto ax$  est un  $A$ -isomorphisme de  $\mathfrak{J}^{n+1} = (S(1))_x$  sur  $a\mathfrak{J}^{n+1} = a\mathfrak{J}S_x \subset \mathfrak{J}^n = S_n$ ,

donc définit un (TN)-isomorphisme de degré 0 de S-modules gradués  $S_+(1) \rightarrow a\mathfrak{J}S$ . Par ailleurs  $x \mapsto a^{-1}x$  est un isomorphisme de degré 0 de S-modules gradués  $a\mathfrak{J}S \xrightarrow{\sim} \mathfrak{J}S$ . On obtient donc ainsi par composition (3.2.4) un isomorphisme de  $\mathcal{O}_X$ -Modules  $\mathcal{O}_X(1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}\mathcal{O}_X$ , et comme S est engendrée par  $S_1 = \mathfrak{J}$ ,  $\mathcal{O}_X(1)$  est inversible (3.2.5) et très ample (4.4.3 et 4.4.9), d'où notre assertion.

### 8.2. Résultats préliminaires sur la localisation dans les anneaux gradués.

(8.2.1) Soit S un anneau gradué, où nous ne supposons pas pour le moment les degrés positifs. On posera

$$(8.2.1.1) \quad S^{\geq} = \bigoplus_{n \geq 0} S_n, \quad S^{\leq} = \bigoplus_{n \leq 0} S_n$$

qui sont des sous-anneaux gradués de S, à degrés respectivement tous positifs et tous négatifs. Si  $f$  est un élément homogène de degré  $d$  (positif ou négatif) de S, l'anneau des fractions  $S_f = S'$  est encore muni d'une structure d'anneau gradué, en prenant pour  $S'_n$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) l'ensemble des  $x/f^k$ , où  $x \in S_{n+kd}$  ( $k \geq 0$ ); on posera encore  $S_{(f)} = S'_0$ , et on écrira  $S_f^{\geq}$  et  $S_f^{\leq}$  pour  $S'^{\geq}$  et  $S'^{\leq}$  respectivement. Si  $d > 0$ , on a

$$(8.2.1.2) \quad (S^{\geq})_f = S_f$$

puisque, si  $x \in S_{n+kd}$ , avec  $n + kd < 0$ , on peut écrire  $x/f^k = xf^h/f^{h+k}$  et que  $n + (h + k)d > 0$  pour  $h$  assez grand et  $> 0$ . On en conclut par définition que

$$(8.2.1.3) \quad (S^{\geq})_{(f)} = (S_f^{\geq})_0 = S_{(f)}.$$

Si M est un S-module gradué, on posera de même

$$(8.2.1.4) \quad M^{\geq} = \bigoplus_{n \geq 0} M_n, \quad M^{\leq} = \bigoplus_{n \leq 0} M_n$$

qui sont respectivement un  $S^{\geq}$ -module gradué et un  $S^{\leq}$ -module gradué et ont pour intersection le  $S_0$ -module  $M_0$ . Si  $f \in S_d$ , on définit encore  $M_f$  comme  $S_f$ -module gradué en prenant comme éléments de degré  $n$  les  $z/f^k$ , où  $z \in M_{n+kd}$  ( $k \geq 0$ ); on désignera par  $M_{(f)}$  l'ensemble des éléments de degré 0 de  $M_f$ , qui est un  $S_{(f)}$ -module, et on écrira  $M_f^{\geq}$  et  $M_f^{\leq}$  au lieu de  $(M_f)^{\geq}$  et  $(M_f)^{\leq}$  respectivement. Si  $d > 0$ , on voit comme ci-dessus que

$$(8.2.1.5) \quad (M^{\geq})_f = M_f$$

et

$$(8.2.1.6) \quad (M^{\geq})_{(f)} = (M_f^{\geq})_0 = M_{(f)}.$$

(8.2.2) Soit  $\mathbf{z}$  une indéterminée, que nous nommerons *variable d'homogénéisation*. Si S est un anneau gradué (à degrés positifs ou négatifs), l'algèbre de polynômes <sup>(1)</sup>

$$(8.2.2.1) \quad \widehat{S} = S[\mathbf{z}]$$

---

<sup>(1)</sup> Il ne saurait ici y avoir de confusion avec l'usage de la notation  $\widehat{S}$  pour désigner le séparé complété d'un anneau.

est une S-algèbre graduée, quand on prend pour degré de  $f\mathbf{z}^n$  ( $n \geq 0$ ) où  $f$  est homogène,

$$(8.2.2.2) \quad \deg(f\mathbf{z}^n) = n + \deg f.$$

*Lemme (8.2.3).* — (i) *On a des isomorphismes canoniques d'anneaux (non gradués)*

$$(8.2.3.1) \quad \widehat{\mathbf{S}}_{(\mathbf{z})} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbf{S}} / (\mathbf{z} - 1) \widehat{\mathbf{S}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}$$

(ii) *On a un isomorphisme canonique d'anneaux (non gradués)*

$$(8.2.3.2) \quad \widehat{\mathbf{S}}_{(f)} \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}_f^{\leq}$$

pour tout  $f \in \mathbf{S}_d$ , avec  $d > 0$ .

Le premier des isomorphismes de (8.2.3.1) a été défini dans (2.2.5) et le second est trivial; l'isomorphisme  $\widehat{\mathbf{S}}_{(\mathbf{z})} \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}$  ainsi défini fait donc correspondre à  $x\mathbf{z}^n/\mathbf{z}^{n+k}$ , où  $\deg(x) = k$  ( $k \geq -n$ ) l'élément  $x$ . L'homomorphisme (8.2.3.2) fait correspondre à  $x\mathbf{z}^n/f^k$ , où  $\deg(x) = kd - n$ , l'élément  $x/f^k$ , de degré  $-n$  dans  $\mathbf{S}_f^{\leq}$ , et il est encore évident qu'on a bien ici un isomorphisme.

**(8.2.4)** Soit  $M$  un  $S$ -module gradué. Il est clair que le  $S$ -module

$$(8.2.4.1) \quad \widehat{M} = M \otimes_S \widehat{\mathbf{S}} = M \otimes_S S[\mathbf{z}]$$

est somme directe des  $S$ -modules  $M \otimes_S S\mathbf{z}^n$ , donc des groupes abéliens  $M_k \otimes_S S\mathbf{z}^n$  ( $k \in \mathbf{Z}, n \geq 0$ ); on définit sur  $\widehat{M}$  une structure de  $\widehat{\mathbf{S}}$ -module gradué en prenant

$$(8.2.4.2) \quad \deg(x \otimes \mathbf{z}^n) = n + \deg x$$

pour tout  $x$  homogène dans  $M$ . Nous laissons au lecteur le soin de démontrer l'analogie de (8.2.3) :

*Lemme (8.2.5).* — (i) *On a un di-isomorphisme canonique de modules (non gradués)*

$$(8.2.5.1) \quad \widehat{M}_{(\mathbf{z})} \xrightarrow{\sim} M.$$

(ii) *Pour tout  $f \in \mathbf{S}_d$  ( $d > 0$ ), on a un di-isomorphisme de modules (non gradués)*

$$(8.2.5.2) \quad \widehat{M}_{(f)} \xrightarrow{\sim} M_f^{\leq}.$$

**(8.2.6)** Soit  $S$  un anneau gradué à degrés *positifs*, et considérons dans  $S$  la suite décroissante d'idéaux gradués

$$(8.2.6.1) \quad S_{[n]} = \bigoplus_{m \geq n} S_m \quad (n \geq 0)$$

(en particulier on a  $S_{[0]} = S$ ,  $S_{[1]} = S_+$ ). Comme il est clair que  $S_{[m]} S_{[n]} \subset S_{[m+n]}$ , on peut définir un *anneau gradué*  $S^\natural$  en prenant

$$(8.2.6.2) \quad S^\natural = \bigoplus_{n \geq 0} S_n^\natural \quad \text{avec} \quad S_n^\natural = S_{[n]}.$$

$S_0^\natural$  est donc l'anneau  $S$  considéré comme anneau *non gradué*, et  $S^\natural$  est par suite une  $S_0^\natural$ -algèbre. Pour tout élément homogène  $f \in \mathbf{S}_d$  ( $d > 0$ ), nous désignerons par  $f^\natural$  l'élément  $f$  considéré comme appartenant à  $S_{[d]} = S_d^\natural$ . Avec ces notations :

*Lemme (8.2.7). — Soient  $S$  un anneau gradué à degrés positifs,  $f$  un élément homogène de  $S_d$  ( $d > 0$ ). On a des isomorphismes canoniques d'anneaux*

$$(8.2.7.1) \quad S_f \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} S(n)_{(f)}$$

$$(8.2.7.2) \quad (S_f^{\geq})_{/1} \xrightarrow{\sim} S_f$$

$$(8.2.7.3) \quad S_{(f^k)}^{\natural} \xrightarrow{\sim} S_f^{\geq}$$

*dont les deux premiers sont des isomorphismes d'anneaux gradués.*

Il est immédiat par définition que l'on a  $(S_f)_n = (S(n)_f)_0$ , d'où l'isomorphisme (8.2.7.1), qui n'est autre que l'identité. D'autre part, comme  $f/1$  est inversible dans  $S_f$ , il y a un isomorphisme canonique  $S_f \xrightarrow{\sim} (S_f^{\geq})_{/1} = (S_f)_{/1}$  en vertu de (8.2.1.2) appliqué à  $S_f$ ; l'isomorphisme réciproque est par définition l'isomorphisme (8.2.7.2). Enfin, si  $x = \sum_{m \geq n} y_m$  est un élément de  $S_{[n]}$ , avec  $n = kd$ , on fait correspondre à l'élément  $x/(f^k)^k$  l'élément  $\sum_m y_m/f^k$  de  $S_f^{\geq}$ , et on vérifie aussitôt que cela définit un isomorphisme (8.2.7.3).

**(8.2.8)** Si  $M$  est un  $S$ -module gradué, on pose de même pour tout  $n \in \mathbf{Z}$

$$(8.2.8.1) \quad M_{[n]} = \bigoplus_{m \geq n} M_m$$

et comme  $S_{[m]} M_{[n]} \subset M_{[m+n]}$  ( $m \geq 0$ ), on peut définir un  $S^{\natural}$ -module gradué  $M^{\natural}$  en prenant

$$(8.2.8.2) \quad M^{\natural} = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} M_n^{\natural}, \quad \text{avec} \quad M_n^{\natural} = M_{[n]}.$$

Nous laissons encore au lecteur la démonstration du :

*Lemme (8.2.9). — Avec les notations de (8.2.7) et (8.2.8), on a les di-isomorphismes canoniques de modules*

$$(8.2.9.1) \quad M_f \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} M(n)_{(f)}$$

$$(8.2.9.2) \quad (M_f^{\geq})_{/1} \xrightarrow{\sim} M_f$$

$$(8.2.9.3) \quad M_{(f^k)}^{\natural} \xrightarrow{\sim} M_f^{\geq}$$

*dont les deux premiers sont des di-isomorphismes de modules gradués.*

*Lemme (8.2.10). — Soit  $S$  un anneau gradué à degrés positifs.*

(i) Pour que  $S^{\natural}$  soit une  $S_0^{\natural}$ -algèbre de type fini (resp. noethérienne) il faut et il suffit que  $S$  soit une  $S_0$ -algèbre de type fini (resp. noethérienne).

(ii) Pour que  $S_{n+1}^{\natural} = S_1^{\natural} S_n^{\natural}$  pour  $n \geq n_0$ , il faut et il suffit que  $S_{n+1} = S_1 S_n$  pour  $n \geq n_0$ .

(iii) Pour que  $S_n^{\natural} = S_1^{\natural n}$  pour  $n \geq n_0$ , il faut et il suffit que  $S_n = S_1^n$  pour  $n \geq n_0$ .

(iv) Si  $(f_{\alpha})$  est un ensemble d'éléments homogènes de  $S_+$  telle que  $S_+$  soit la racine dans  $S_+$  de l'idéal de  $S_+$  engendré par les  $f_{\alpha}$ , alors  $S_+^{\natural}$  est la racine dans  $S_+^{\natural}$  de l'idéal de  $S_+^{\natural}$  engendré par les  $f_{\alpha}^{\natural}$ .

(i) Si  $S^{\natural}$  est une  $S_0^{\natural}$ -algèbre de type fini,  $S_+ = S_1^{\natural}$  est un module de type fini sur  $S = S_0^{\natural}$  par (2.1.6, (i)), donc  $S$  est une  $S_0$ -algèbre de type fini (2.1.4); si  $S^{\natural}$  est un anneau noethérien, il en est de même de  $S_0^{\natural} = S$  (2.1.5). Inversement, si  $S$  est une  $S_0$ -algèbre

de type fini, on sait (2.1.6, (ii)) qu'il existe  $h > 0$  et  $m_0 > 0$  tels que  $S_{n+h} = S_h S_n$  pour  $n \geq m_0$ ; on peut évidemment supposer  $m_0 \geq h$ . En outre, les  $S_m$  sont des  $S_0$ -modules de type fini (2.1.6, (i)). Cela étant, si  $n \geq m_0 + h$ , on a  $S_n^{\natural} = S_h S_{n-h}^{\natural} = S_h^{\natural} S_{n-h}^{\sharp}$ ; et si  $m < m_0 + h$ , on a, en posant  $E = S_{m_0} + \dots + S_{m_0+h-1}$ ,  $S_m^{\natural} = S_m + \dots + S_{m_0+h-1} + S_h E + S_h^2 E + \dots$ . Pour  $1 \leq m \leq m_0$ , soit  $G_m$  la réunion de systèmes finis de générateurs des  $S_0$ -modules  $S_i$  pour  $m \leq i \leq m_0 + h - 1$ , considérée comme partie de  $S_{[m]}$ . Pour  $m_0 + 1 \leq m \leq m_0 + h - 1$ , soit de même  $G_m$  la réunion de systèmes finis de générateurs des  $S_0$ -modules  $S_i$  pour  $m \leq i \leq m_0 + h - 1$  et de  $S_h E$ , considérée comme partie de  $S_{[m]}$ . Il est clair que l'on a  $S_m^{\natural} = S_0^{\natural} G_m$  pour  $1 \leq m \leq m_0 + h - 1$ , et par suite la réunion  $G$  des  $G_m$  pour  $1 \leq m \leq m_0 + h - 1$  est un système de générateurs de la  $S_0^{\natural}$ -algèbre  $S^{\natural}$ . On en conclut que si  $S = S_0^{\natural}$  est un anneau noethérien, il en est de même de  $S^{\natural}$ .

(ii) Il est clair que si  $S_{n+1} = S_1 S_n$  pour  $n \geq n_0$ , on a  $S_{n+1}^{\natural} = S_1 S_n^{\natural}$ , et *a fortiori*  $S_{n+1}^{\sharp} = S_1^{\sharp} S_n^{\sharp}$  pour  $n \geq n_0$ . Inversement, cette dernière relation s'écrit

$$S_{n+1} + S_{n+2} + \dots = (S_1 + S_2 + \dots)(S_n + S_{n+1} + \dots)$$

et la comparaison des termes de degré  $n+1$  (dans  $S$ ) aux deux membres donne  $S_{n+1} = S_1 S_n$ .

(iii) Si  $S_n = S_1^n$  pour  $n \geq n_0$ , on a  $S_n^{\natural} = S_1^n + S_1^{n+1} + \dots$ ; comme  $S_1^{\natural}$  contient  $S_1 + S_1^2 + \dots$ , on a  $S_n^{\natural} \subset S_1^{\natural n}$ , et par suite  $S_n^{\natural} = S_1^{\natural n}$  pour  $n \geq n_0$ . Inversement, les seuls termes de  $S_1^{\natural n} = (S_1 + S_2 + \dots)^n$  qui soient de degré  $n$  dans  $S$  sont ceux de  $S_1^n$ ; la relation  $S_n^{\natural} = S_1^{\natural n}$  implique donc  $S_n = S_1^n$ .

(iv) Il suffit de prouver que si un élément  $g \in S_{k+h}$  est considéré comme un élément de  $S_k^{\natural}$  ( $k > 0$ ,  $h \geq 0$ ), alors il existe un entier  $n > 0$  tel que dans  $S_{kn}^{\natural}$ ,  $g^n$  soit combinaison linéaire des  $f_{\alpha}^{\natural}$  à coefficients dans  $S^{\natural}$ . Par hypothèse, il y a un entier  $m_0$  tel que pour  $m \geq m_0$ , on ait, dans  $S$ ,  $g^m = \sum_{\alpha} c_{\alpha m} f_{\alpha}$ , les indices  $\alpha$  figurant dans cette formule étant *indépendants de m*; en outre, on peut évidemment supposer les  $c_{\alpha m}$  homogènes, avec

$$\deg(c_{\alpha m}) = m(k+h) - \deg f_{\alpha}$$

dans  $S$ . Prenons alors  $m_0$  assez grand pour que l'on ait  $km_0 > \deg f_{\alpha}$  pour tous les  $f_{\alpha}$  qui figurent dans  $g^{m_0}$ ; pour tout  $\alpha$ , soit  $c'_{\alpha m}$  l'élément  $c_{\alpha m}$  considéré comme de degré  $km - \deg(f_{\alpha})$  dans  $S^{\natural}$ ; on a alors, dans  $S^{\natural}$ ,  $g^{m_0} = \sum_{\alpha} c'_{\alpha m_0} f_{\alpha}^{\natural}$ , ce qui termine la démonstration.

**(8.2.11)** Considérons la  $S_0$ -algèbre graduée

$$(8.2.11.1) \quad S^{\natural} \otimes_S S_0 = S^{\natural}/S_+ S^{\natural} = \bigoplus_{n \geq 0} S_{[n]}/S_+ S_{[n]}.$$

Comme  $S_n$  est un  $S_0$ -module quotient de  $S_{[n]}/S_+ S_{[n]}$ , on a un homomorphisme canonique de  $S_0$ -algèbres graduées

$$(8.2.11.2) \quad S^{\natural} \otimes_S S_0 \rightarrow S$$

qui est évidemment *surjectif*, et correspond par suite (2.9.2) à une *immersion fermée* canonique

$$(8.2.11.3) \quad \text{Proj}(S) \rightarrow \text{Proj}(S^{\natural} \otimes_S S_0)$$

*Proposition (8.2.12).* — *Le morphisme canonique (8.2.11.3) est bijectif. Pour que l'homomorphisme (8.2.11.2) soit (TN)-bijectif, il faut et il suffit qu'il existe  $n_0$  tel que  $S_{n+1} = S_1 S_n$  pour  $n \geq n_0$ . Si cette dernière condition est vérifiée, (8.2.11.3) est un isomorphisme; la réciproque est vraie lorsque  $S$  est noethérien.*

Pour démontrer la première assertion, il suffit (2.8.3) de prouver que le noyau  $\mathfrak{J}$  de l'homomorphisme (8.2.11.2) est formé d'éléments nilpotents. Or si  $f \in S_{[n]}$  est un élément dont la classe mod.  $S_+ S_{[n]}$  appartient à ce noyau, cela signifie que  $f \in S_{[n+1]}$ ; l'élément  $f^{n+1}$ , considéré comme appartenant à  $S_{[n(n+1)]}$ , appartient alors à  $S_+ S_{[n(n+1)]}$ , puisqu'il s'écrit  $f.f^n$ ; donc la classe de  $f^{n+1}$  mod.  $S_+ S_{[n(n+1)]}$  est nulle, ce qui prouve notre assertion. Comme l'hypothèse  $S_{n+1} = S_1 S_n$  pour  $n \geq n_0$  équivaut à  $S_{n+1}^\sharp = S_1^\sharp S_n^\sharp$  pour  $n \geq n_0$  (8.2.10, (ii)), cette hypothèse équivaut par définition au fait que (8.2.11.2) est (TN)-injectif, donc (TN)-bijectif, et alors (8.2.11.3) est un isomorphisme en vertu de (2.9.1). Inversement, si (8.2.11.3) est un isomorphisme, le faisceau  $\widetilde{\mathfrak{J}}$  sur  $\text{Proj}(S^\sharp \otimes_S S_0)$  est nul (2.9.2, (i)); comme  $S^\sharp \otimes_S S_0$  est noethérien comme quotient de  $S^\sharp$  (8.2.10, (i)), on conclut de (2.7.3) que  $\mathfrak{J}$  vérifie la condition (TN), donc  $S_{n+1}^\sharp = S_1^\sharp S_n^\sharp$  pour  $n \geq n_0$ , et cela achève la démonstration en vertu de (8.2.10, (ii)).

**(8.2.13)** Considérons maintenant les injections canoniques  $(S_+)^n \rightarrow S_{[n]}$ , qui définissent un homomorphisme injectif de degré 0 d'anneaux gradués

$$(8.2.13.1) \quad \bigoplus_{n \geq 0} (S_+)^n \rightarrow S^\sharp.$$

*Proposition (8.2.14).* — *Pour que l'homomorphisme (8.2.13.1) soit un (TN)-isomorphisme, il faut et il suffit qu'il existe  $n_0$  tel que  $S_n = S_1^n$  pour tout  $n \geq n_0$ . Lorsqu'il en est ainsi, le morphisme correspondant à (8.2.13.1) est partout défini et est un isomorphisme*

$$\text{Proj}(S^\sharp) \rightarrow \text{Proj}\left(\bigoplus_{n \geq 0} (S_+)^n\right);$$

*la réciproque est vraie lorsque  $S$  est noethérien.*

Les deux premières assertions sont évidentes, vu (8.2.10, (iii)) et (2.9.1). La troisième résultera de (8.2.10, (i) et (iii)) et du lemme suivant :

*Lemme (8.2.14.1).* — *Soit  $T$  un anneau gradué en degrés positifs qui est une  $T_0$ -algèbre de type fini. Si le morphisme correspondant à l'homomorphisme injectif  $\bigoplus_{n \geq 0} T_1^n \rightarrow T$  est partout défini et est un isomorphisme  $\text{Proj}(T) \rightarrow \text{Proj}\left(\bigoplus_{n \geq 0} T_1^n\right)$ , il existe  $n_0$  tel que  $T_n = T_1^n$  pour  $n \geq n_0$ .*

En effet, soient  $g_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) des générateurs du  $T_0$ -module  $T_1$ . L'hypothèse entraîne d'abord que les  $D_+(g_i)$  recouvrent  $\text{Proj}(T)$  (2.8.1). Soit  $(h_j)_{1 \leq j \leq s}$  un système d'éléments homogènes de  $T_+$ , avec  $\deg(h_j) = n_j$ , qui forment avec les  $g_i$  un système de générateurs de l'idéal  $T_+$ , ou (ce qui revient au même (2.1.3)) un système de générateurs de  $T$  en tant que  $T_0$ -algèbre; si on pose  $T' = \bigoplus_{n \geq 0} T_1^n$ , l'élément  $h_j/g_i^{n_j}$  de l'anneau  $T_{(g_i)}$  doit par hypothèse appartenir au sous-anneau  $T'_{(g_i)}$ , donc il existe un entier  $k$  tel que  $T_1^k h_j \subset T_1^{k+n_j}$  pour tout  $j$ . On en conclut par récurrence sur  $r$  que  $T_1^k h_j \subset T'$  pour tout  $r \geq 1$ , et par définition des  $h_j$ , on a donc  $T_1^k T \subset T'$ . Il y a d'autre part pour tout  $j$  un entier  $m_j$  tel que  $h_j^{m_j}$  appartienne à l'idéal de  $T$  engendré par les  $g_i$  (2.3.14), donc  $h_j^{m_j} \in T_1 T$ , et

$h_j^{m,k} \in T_1^k T \subset T'$ . Il y a par suite un entier  $m_0 \geq k$  tel que  $h_j^m \in T_1^{mn_j}$  pour  $m \geq m_0$ . Cela étant, si  $q$  est le plus grand des entiers  $n_j$ , le nombre  $n_0 = qsm_0 + k$  répond à la question. En effet, un élément de  $S_n$ , pour  $n \geq n_0$ , est somme de monômes appartenant à  $T_1^\alpha u$ , où  $u$  est un produit de puissances des  $h_j$ ; si  $\alpha \geq k$ , il résulte de ce qui précède que  $T_1^\alpha u \subset T_1^n$ ; dans le cas contraire, un des exposants des  $h_j$  est  $\geq m_0$ , donc  $u \in T_1^\beta v$ , où  $\beta \geq k$  et  $v$  est encore un produit de puissances des  $h_j$ ; on est alors ramené au cas précédent, et on voit finalement que  $T_1^\alpha u \subset T_1^n$  dans tous les cas.

*Remarque (8.2.15).* — La condition  $S_n = S_1^n$  pour  $n \geq n_0$  entraîne évidemment  $S_{n+1} = S_1 S_n$  pour  $n \geq n_0$ , mais la réciproque est inexacte, même quand on suppose  $S$  noethérien. Par exemple, soient  $K$  un corps,  $A = K[\mathbf{x}]$ ,  $B = K[\mathbf{y}]/\mathbf{y}^2 K[\mathbf{y}]$ , où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont deux indéterminées,  $\mathbf{x}$  étant prise de degré 1 et  $\mathbf{y}$  de degré 2, et soit  $S = A \otimes_K B$ , de sorte que  $S$  est une algèbre graduée sur  $K$  ayant une base formée des éléments 1,  $\mathbf{x}^n$  ( $n \geq 1$ ) et  $\mathbf{x}^n \mathbf{y}$  ( $n \geq 0$ ). Il est immédiat que  $S_{n+1} = S_1 S_n$  pour  $n \geq 2$ , mais  $S_1^n = K \mathbf{x}^n$  tandis que  $S_n = K \mathbf{x}^n + K \mathbf{x}^{n-2} \mathbf{y}$  pour  $n \geq 2$ .

### 8.3. Cônes projetants.

(8.3.1) Soit  $Y$  un préschéma; dans tout ce numéro, il ne sera question que de  $Y$ -préschémas et de  $Y$ -morphismes. Soit  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre quasi-cohérente graduée à degrés positifs; nous supposerons en outre que l'on a  $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_Y$ . Conformément aux notations introduites en (8.2.2), nous poserons

$$(8.3.1.1) \quad \hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}[\mathbf{z}] = \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y[\mathbf{z}]$$

que l'on considère comme  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée à degrés positifs en définissant les degrés par la formule (8.2.2.2), de sorte que pour tout ouvert affine  $U$  de  $Y$ , on a

$$\Gamma(U, \hat{\mathcal{S}}) = (\Gamma(U, \mathcal{S}))[\mathbf{z}].$$

Dans ce qui suit, nous poserons

$$(8.3.1.2) \quad X = \text{Proj}(\mathcal{S}), \quad C = \text{Spec}(\mathcal{S}), \quad \hat{C} = \text{Proj}(\hat{\mathcal{S}})$$

(où dans la définition de  $C$ ,  $\mathcal{S}$  est considérée comme  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre non graduée), et nous dirons que  $C$  (resp.  $\hat{C}$ ) est le *cône affine* (resp. *cône projectif*) défini par  $\mathcal{S}$ ; on dira aussi « *cône* » au lieu de « *cône affine* ». Par abus de langage, nous dirons encore que  $C$  (resp.  $\hat{C}$ ) est le *cône projetant affine de  $X$*  (resp. le *cône projetant projectif de  $X$* ), étant sous-entendu que le préschéma  $X$  est donné sous la forme  $\text{Proj}(\mathcal{S})$ ; enfin, nous dirons que  $\hat{C}$  est la *fermeture projective* de  $C$  (étant entendu que la donnée de  $\mathcal{S}$  figure dans la structure de  $C$ ).

*Proposition (8.3.2).* — *Il existe des  $Y$ -morphismes canoniques*

$$(8.3.2.1) \quad Y \xrightarrow{\epsilon} C \xrightarrow{i} \hat{C}$$

$$(8.3.2.2) \quad X \xrightarrow{j} \hat{C}$$

telles que  $\varepsilon$  et  $j$  soient des immersions fermées, et  $i$  un morphisme affine, qui est une immersion ouverte dominante, pour laquelle

$$(8.3.2.3) \quad i(C) = \hat{C} - j(X);$$

en outre  $\hat{C}$  est le plus petit sous-préschéma fermé de  $\hat{C}$  majorant  $i(C)$ .

Pour définir  $i$ , on considère l'ouvert de  $\hat{C}$ ,

$$(8.3.2.4) \quad \hat{C}_z = \text{Spec}(\hat{\mathcal{S}} / (\mathbf{z} - 1)\hat{\mathcal{S}})$$

(3.1.4),  $\mathbf{z}$  s'identifiant canoniquement à une section de  $\hat{\mathcal{S}}$  au-dessus de  $Y$ . L'isomorphisme  $i : C \xrightarrow{\sim} \hat{C}_z$  correspond alors à l'isomorphisme canonique (8.2.3.1)

$$\hat{\mathcal{S}} / (\mathbf{z} - 1)\hat{\mathcal{S}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}.$$

Le morphisme  $\varepsilon$  correspond à l'homomorphisme d'augmentation  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_Y$  ayant pour noyau  $\mathcal{S}_+$  (1.2.7) et comme ce dernier est surjectif,  $\varepsilon$  est une immersion fermée (1.4.10). Enfin,  $j$  correspond de même (3.5.1) à l'homomorphisme surjectif de degré 0,  $\hat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ , qui se réduit à l'identité dans  $\mathcal{S}$  et est nul dans  $\mathbf{z}\hat{\mathcal{S}}$ , qui est son noyau;  $j$  est partout défini et est une immersion fermée en vertu de (3.6.2).

Pour démontrer les autres assertions de (8.3.2), on peut évidemment se borner au cas où  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine,  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ , où  $S$  est une  $A$ -algèbre graduée, d'où  $\hat{\mathcal{S}} = (\hat{S})^\sim$ ; les éléments homogènes  $f$  de  $S_+$  s'identifient alors à des sections de  $\hat{\mathcal{S}}$  au-dessus de  $Y$ , et l'ouvert de  $\hat{C}$  noté  $D_+(f)$  dans (2.3.3) s'écrit aussi  $\hat{C}_f$  (3.1.4); de même l'ouvert de  $C$  noté  $D(f)$  dans (I, 1.1.1) s'écrit aussi  $C_f$  (0, 5.5.2). Cela étant, il résulte de (2.3.14) et de la définition de  $\hat{S}$  que dans le cas présent, les ouverts  $\hat{C}_z = i(C)$  et  $\hat{C}_f$  ( $f$  homogène dans  $S_+$ ) constituent un *recouvrement* de  $\hat{C}$ . En outre, on a, avec ces notations,

$$(8.3.2.5) \quad i^{-1}(\hat{C}_f) = C_f;$$

en effet,  $\hat{C}_f \cap i(C) = \hat{C}_f \cap \hat{C}_z = \hat{C}_{fz} = \text{Spec}(\hat{S}_{(fz)})$ . Or, si  $d = \deg(f)$ ,  $\hat{S}_{(fz)}$  est canoniquement isomorphe à  $(\hat{S}_{(z)})_{f/z^d}$  (2.2.2), et il résulte de la définition de l'isomorphisme (8.2.3.1) que l'image de  $(\hat{S}_{(z)})_{f/z^d}$  par l'isomorphisme correspondant des anneaux de fractions est exactement  $S_f$ . Comme  $C_f = \text{Spec}(S_f)$ , cela prouve (8.3.2.5) et montre en même temps que le morphisme  $i$  est affine; en outre, la restriction de  $i$  à  $C_f$ , considérée comme morphisme dans  $\hat{C}_f$ , correspond (I, 1.7.3) à l'homomorphisme canonique  $\hat{S}_{(f)} \rightarrow \hat{S}_{(fz)}$  et en vertu de ce qui précède et de (8.2.3.2), on peut énoncer le résultat suivant :

**(8.3.2.6)** Si  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine, et  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ , alors, pour tout  $f$  homogène dans  $S_+$ ,  $\hat{C}_f$  s'identifie canoniquement à  $\text{Spec}(S_f^\leq)$ , et le morphisme  $C_f \rightarrow \hat{C}_f$  restriction de  $i$  correspond alors à l'injection canonique  $S_f^\leq \rightarrow S_f$ .

Notons maintenant que (pour  $Y$  affine) le complémentaire de  $\hat{C}_z$  dans  $\hat{C} = \text{Proj}(\hat{S})$

est, par définition, l'ensemble des idéaux premiers gradués de  $\hat{S}$  contenant  $\mathbf{z}$ , c'est-à-dire  $j(X)$  par définition de  $j$ , ce qui démontre (8.3.2.3).

Pour prouver enfin la dernière assertion de (8.3.2), on peut toujours supposer  $Y$  affine. Avec les notations précédentes, remarquons que dans l'anneau  $\hat{S}$ ,  $\mathbf{z}$  n'est pas diviseur de  $o$ ; comme  $i(C) = \hat{C}$ , il suffira de prouver le

*Lemme (8.3.2.7).* — Soient  $T$  un anneau gradué à degrés positifs,  $Z = \text{Proj}(T)$ ,  $g$  un élément homogène de  $T$  de degré  $d > 0$ . Si  $g$  n'est pas diviseur de  $o$  dans  $T$ ,  $Z$  est le plus petit sous-préschéma fermé de  $Z$  qui majore  $Z_g = D_+(g)$ .

En vertu de (I, 4.1.9) la question est locale sur  $Z$ ; pour tout élément homogène  $h \in T_e$  ( $e > 0$ ), il suffit donc de prouver que  $Z_h$  est le plus petit sous-préschéma fermé de  $Z_h$  qui majore  $Z_{gh}$ ; il résulte des définitions et de (I, 4.3.2) que cette condition équivaut au fait que l'homomorphisme canonique  $T_{(h)} \rightarrow T_{(gh)}$  est injectif. Or cet homomorphisme s'identifie à l'homomorphisme canonique  $T_{(h)} \rightarrow (T_{(h)})_{g^e/h^d}$  (2.2.3). Mais comme  $g^e$  n'est pas diviseur de  $o$  dans  $T$ ,  $g^e/h^d$  ne l'est pas dans  $T_h$  (ni *a fortiori* dans  $T_{(h)}$ ), car la relation  $(g^e/h^d)(t/h^m) = o$  avec  $t \in T$  et  $m > 0$  entraîne l'existence d'un  $n > 0$  tel que  $h^n g^e t = o$ , d'où  $h^n t = o$ , et par suite  $t/h^m = o$  dans  $T_h$ . Cela achève donc la démonstration (0, 1.2.2).

**(8.3.3)** On identifiera souvent le cône affine  $C$  au sous-préschéma induit par le cône projectif  $\hat{C}$  sur l'ouvert  $i(C)$ , au moyen de l'immersion ouverte  $i$ . Le sous-préschéma fermé de  $C$ , associé à l'immersion fermée  $\varepsilon$ , est appelé le *préschéma des sommets* de  $C$ ; on dit aussi que  $\varepsilon$ , qui est une  $Y$ -section de  $C$ , est la *section sommet* ou la *section nulle* de  $C$ ; on peut identifier  $Y$  au préschéma des sommets de  $C$  au moyen de  $\varepsilon$ . D'ailleurs  $i \circ \varepsilon$  est une  $Y$ -section de  $\hat{C}$ , donc aussi une immersion fermée (I, 5.4.6), correspondant à l'homomorphisme canonique surjectif de degré  $o$ ,  $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}[\mathbf{z}] \rightarrow \mathcal{O}_Y[\mathbf{z}]$  (cf. (3.1.7)), de noyau  $\mathcal{S}_+[\mathbf{z}] = \mathcal{S}_+ \hat{\mathcal{S}}$ ; le sous-préschéma de  $\hat{C}$  associé à cette immersion fermée est encore appelé le *préschéma des sommets* de  $\hat{C}$ , et  $i \circ \varepsilon$  la *section sommet* de  $\hat{C}$ ; il peut s'identifier par  $i \circ \varepsilon$  à  $Y$ . Enfin, le sous-préschéma fermé de  $\hat{C}$  associé à  $j$  est appelé le *lieu à l'infini* de  $\hat{C}$ , et peut être identifié à  $X$  au moyen de  $j$ .

**(8.3.4)** Les sous-préschémas de  $C$  (resp.  $\hat{C}$ ) induits respectivement sur les *ouverts*

$$(8.3.4.1) \quad E = C - \varepsilon(Y), \quad \hat{E} = \hat{C} - i(\varepsilon(Y))$$

sont appelés respectivement (par abus de langage) le *cône affine époiné* et le *cône projectif époiné* définis par  $\mathcal{S}$ ; on notera qu'en dépit de cette terminologie,  $E$  n'est pas nécessairement *affine* sur  $Y$ , ni  $\hat{E}$  projectif sur  $Y$  (cf. (8.4.3)). Lorsqu'on identifie  $C$  à  $i(C)$ , on a donc pour les espaces sous-jacents

$$(8.3.4.2) \quad C \cup \hat{E} = \hat{C}, \quad C \cap \hat{E} = E$$

de sorte que  $\hat{C}$  peut être considéré comme obtenu par *recollement* des sous-préschémas ouverts  $C$  et  $\hat{E}$ ; en outre, en vertu de (8.3.2.3),

$$(8.3.4.3) \quad E = \hat{E} - j(X).$$

Lorsque  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine, on a, avec les notations de (8.3.2)

$$(8.3.4.4) \quad E = \bigcup C_f, \quad \hat{E} = \bigcup \hat{C}_f, \quad C_f = C \cap \hat{C}_f$$

$f$  parcourant l'ensemble des éléments homogènes de  $S_+$  (ou seulement une partie  $M$  de cet ensemble engendrant un idéal de  $S_+$  dont la racine dans  $S_+$  est  $S_+$  lui-même, autrement dit, telle que les  $X_f$  pour  $f \in M$  recouvrent  $X$  (2.3.14)). Le recollement de  $C$  et de  $\hat{C}_f$  le long de  $C_f$  est alors déterminé par des morphismes d'injection  $C_f \rightarrow C$ ,  $C_f \rightarrow \hat{C}_f$ , qui, ainsi qu'on l'a vu (8.3.2.6) correspondent respectivement aux homomorphismes canoniques  $S \rightarrow S_f$ ,  $S_f^{\leq} \rightarrow S_f$ .

*Proposition (8.3.5).* — Avec les notations de (8.3.1) et (8.3.4), le morphisme associé (3.5.1) à l'injection canonique  $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}[\mathbf{z}]$  est un morphisme affine surjectif (dit rétraction canonique)

$$(8.3.5.1) \quad p : \hat{E} \rightarrow X$$

tel que l'on ait

$$(8.3.5.2) \quad p \circ j = i_X.$$

Pour démontrer la proposition, on peut se borner au cas où  $Y$  est affine. Compte tenu de l'expression (8.3.4.4) de  $\hat{E}$ , le fait que le domaine de définition  $G(\varphi)$  de  $p$  est égal à  $\hat{E}$  résultera de la première des assertions suivantes :

(8.3.5.3) Si  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine, et  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ , on a, pour tout  $f \in S_+$  homogène

$$(8.3.5.4) \quad p^{-1}(X_f) = \hat{C}_f$$

et la restriction de  $p$  à  $\hat{C}_f = \text{Spec}(S_f^{\leq})$ , considérée comme morphisme de  $\hat{C}_f$  dans  $X_f$ , correspond à l'injection canonique  $S_{(f)} \rightarrow S_f^{\leq}$ . Si de plus  $f \in S_1$ ,  $\hat{C}_f$  est isomorphe à  $X_f \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[T]$  ( $T$  indéterminée).

En effet, la formule (8.3.5.4) n'est qu'un cas particulier de (2.8.1.1) et la seconde assertion n'est autre que la définition de  $\text{Proj}(\varphi)$  lorsque  $Y$  est affine (2.8.1). Alors la formule (8.3.5.2) et le fait que  $p$  est surjectif résultent de ce que le composé  $\mathcal{S} \rightarrow \hat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$  des homomorphismes canoniques est l'identité dans  $\mathcal{S}$ . Enfin, la dernière assertion de (8.3.5.3) provient de ce que  $S_f^{\leq}$  est isomorphe à  $S_{(f)}[T]$  lorsque  $f \in S_1$  (2.2.1).

*Corollaire (8.3.6).* — La restriction

$$(8.3.6.1) \quad \pi : E \rightarrow X$$

de  $p$  à  $E$  est un morphisme affine surjectif. Si  $Y$  est affine et  $f$  homogène dans  $S_+$ , on a

$$(8.3.6.2) \quad \pi^{-1}(X_f) = C_f$$

et la restriction de  $\pi$  à  $C_f$  correspond à l'injection canonique  $S_{(f)} \rightarrow S_f$ . Si en outre  $f \in S_1$ ,  $C_f$  est isomorphe à  $X_f \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[T, T^{-1}]$  ( $T$  indéterminée).

La formule (8.3.6.2) résulte aussitôt de (8.3.5.3) et (8.3.2.5), et démontre la surjectivité de  $\pi$ ; on a vu par ailleurs que l'immersion  $i$ , restreinte à  $C_f$ , correspondait

à l'injection  $S_f \hookrightarrow S_f$  (8.3.2). Enfin, la dernière assertion est conséquence de ce que pour  $f \in S_1$ ,  $S_f$  est isomorphe à  $S_{(f)}[T, T^{-1}]$  (2.2.1).

*Remarque (8.3.7).* — Lorsque  $Y$  est affine, les éléments de l'espace sous-jacent à  $E$  sont les idéaux premiers  $\mathfrak{p}$  (non nécessairement gradués) de  $S$  ne contenant pas  $S_+$ , en vertu de la définition de l'immersion  $\epsilon$  (8.3.2). Pour un tel idéal  $\mathfrak{p}$ , les  $\mathfrak{p} \cap S_n$  vérifient de façon évidente les conditions de (2.1.9), donc il existe un seul idéal premier *gradué*  $\mathfrak{q}$  de  $S$  tel que  $\mathfrak{q} \cap S_n = \mathfrak{p} \cap S_n$  pour tout  $n$ ; l'application  $\pi : E \rightarrow X$  des espaces sous-jacents s'interprète alors grâce à la relation

$$(8.3.7.1) \quad \pi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}.$$

En effet, pour vérifier cette relation, il suffit de considérer un  $f$  homogène dans  $S_+$  tel que  $\mathfrak{p} \in D(f)$ , et d'observer que  $\mathfrak{q}_{(f)}$  est l'image réciproque de  $\mathfrak{p}_f$  par l'injection  $S_{(f)} \rightarrow S_f$ .

*Corollaire (8.3.8).* — Si  $\mathcal{S}$  est engendrée par  $S_1$ , les morphismes  $p$  et  $\pi$  sont de type fini; pour tout  $x \in X$ , la fibre  $p^{-1}(x)$  est isomorphe à  $\text{Spec}(\mathbf{k}(x)[T])$  et la fibre  $\pi^{-1}(x)$  est isomorphe à  $\text{Spec}(\mathbf{k}(x)[T, T^{-1}])$ .

Cela résulte aussitôt de (8.3.5) et (8.3.6) en observant que, lorsque  $Y$  est affine et  $S$  engendrée par  $S_1$ , les  $X_f$ , pour  $f \in S_1$ , forment un recouvrement de  $X$  (2.3.14).

*Remarque (8.3.9).* — Le cône éponté affine correspondant à la  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée  $\mathcal{O}_Y[T]$  ( $T$  indéterminée) s'identifie à  $G_m = \text{Spec}(\mathcal{O}_Y[T, T^{-1}])$ , puisqu'il n'est autre que  $C_T$ , comme on l'a vu dans (8.3.2) (voir (8.4.4) pour un résultat plus général). Ce préschéma est canoniquement muni d'une structure de « *Y-schéma en groupes commutatif* ». Il s'agit là d'une notion qui sera développée en détail plus tard, et que l'on peut ici résumer rapidement comme suit. Un *Y-schéma en groupes* est un *Y-schéma*  $G$ , muni de deux *Y-morphismes*  $p : G \times_Y G \rightarrow G$  et  $s : G \rightarrow G$  qui satisfont aux conditions formellement analogues aux axiomes de la loi de composition et de l'application de symétrie dans un groupe : le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{p \times 1} & G \times G \\ \downarrow 1 \times p & & \downarrow p \\ G \times G & \xrightarrow[p]{} & G \end{array}$$

doit être commutatif (« *associativité* ») et l'on doit avoir une condition qui correspond dans les groupes au fait que les applications

$$(x, y) \rightarrow (x, x^{-1}, y) \rightarrow (x, x^{-1}y) \rightarrow x(x^{-1}y)$$

et

$$(x, y) \rightarrow (x, x^{-1}, y) \rightarrow (x, yx^{-1}) \rightarrow (yx^{-1})x$$

doivent toutes deux se réduire à  $(x, y) \rightarrow y$ ; la suite de morphismes correspondant par exemple à la première application composée est

$$G \times G \xrightarrow{(1, s) \times 1} G \times G \times G \xrightarrow{1 \times p} G \times G \xrightarrow{p} G$$

et le lecteur écrira de même la seconde suite.

Il est immédiat (**I**, 3.4.3) que la donnée d'une structure de  $Y$ -schéma en groupes sur un  $Y$ -schéma  $G$  équivaut à la donnée, pour *tout*  $Y$ -préschéma  $Z$ , d'une structure de *groupe* sur l'ensemble  $\text{Hom}_Y(Z, G)$ , ces structures devant être telles que pour tout  $Y$ -morphisme  $Z \rightarrow Z'$ , l'application correspondante  $\text{Hom}_Y(Z', G) \rightarrow \text{Hom}_Y(Z, G)$  soit un homomorphisme de groupes. Dans le cas particulier de  $G_m$  que nous considérons ici,  $\text{Hom}_Y(Z, G)$  s'identifie à l'ensemble des  $Z$ -sections de  $Z \times_Y G_m$  (**I**, 3.3.14), donc à l'ensemble des  $Z$ -sections de  $\text{Spec}(\mathcal{O}_Z[T, T^{-1}])$ ; finalement, le même raisonnement que dans (**I**, 3.3.15) montre que cet ensemble s'identifie canoniquement à l'ensemble des éléments *inversibles* de l'anneau  $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ , et la structure de groupe sur cet ensemble est la structure provenant de la multiplication dans l'anneau  $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ . Le lecteur pourra vérifier que les morphismes  $p$  et  $s$  considérés plus haut sont obtenus de la façon suivante : ils correspondent d'après (1.2.7) et (1.4.6) à des homomorphismes de  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbres

$$\pi : \mathcal{O}_Y[T, T^{-1}] \rightarrow \mathcal{O}_Y[T, T^{-1}, T', T'^{-1}]$$

$$\sigma : \mathcal{O}_Y[T, T^{-1}] \rightarrow \mathcal{O}_Y[T, T^{-1}]$$

et sont entièrement définis par les données de  $\pi(T) = TT'$  et  $\sigma(T) = T^{-1}$ .

Cela étant,  $G_m$  peut être considéré comme un « *domaine d'opérateurs universel* » pour tout *cône affine*  $C = \text{Spec}(\mathcal{S})$ , où  $\mathcal{S}$  est une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente à degrés positifs. Cela signifie qu'on peut définir canoniquement un  $Y$ -morphisme  $G_m \times_Y C \rightarrow C$  qui a les propriétés formelles d'une loi externe d'un ensemble muni d'un groupe d'opérateurs; ou encore, comme ci-dessus pour les schémas en groupes, on se donne pour tout  $Y$ -préschéma  $Z$  une loi externe sur  $\text{Hom}_Y(Z, C)$ , ayant le groupe  $\text{Hom}_Y(Z, G_m)$  comme ensemble d'opérateurs, avec les axiomes usuels des ensembles munis d'un groupe d'opérateurs, et une condition de compatibilité avec les  $Y$ -morphismes  $Z \rightarrow Z'$ . Dans le cas présent, le morphisme  $G_m \times_Y C \rightarrow C$  est défini par la donnée de l'homomorphisme de  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbres  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y[T, T^{-1}] = \mathcal{S}[T, T^{-1}]$  qui, à toute section  $s_n \in \Gamma(U, \mathcal{S}_n)$  ( $U$  ouvert de  $Y$ ) fait correspondre la section  $s_n T^n \in \Gamma(U, \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y[T, T^{-1}])$ .

Inversement, supposons donnée une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre quasi-cohérente  $\mathcal{S}$  non graduée *a priori*, et, sur  $C = \text{Spec}(\mathcal{S})$ , une structure de «  $Y$ -schéma en ensembles munis de groupes d'opérateurs » ayant pour domaine d'opérateurs le  $Y$ -schéma en groupes  $G_m$ ; alors on en déduit canoniquement une *graduation* de  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre sur  $\mathcal{S}$ . En effet, la donnée d'un  $Y$ -morphisme  $G_m \times_Y C \rightarrow C$  équivaut à celle d'un homomorphisme de  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbres  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}[T, T^{-1}]$ , qui s'écrira donc  $\psi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n T^n$ , où les  $\psi_n : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  sont des homomorphismes de  $\mathcal{O}_Y$ -Modules (avec  $\psi_n(s) = 0$  sauf pour un nombre fini d'indices pour toute section  $s \in \Gamma(U, \mathcal{S})$ ,  $U$  ouvert dans  $Y$ ). On peut alors vérifier que les axiomes des ensembles munis d'un groupe d'opérateurs entraînent que les  $\psi_n(\mathcal{S}) = \mathcal{S}_n$  définissent une graduation (à degrés positifs ou négatifs) de  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre sur  $\mathcal{S}$ , les  $\psi_n$  étant les projecteurs correspondants. On a ainsi une notion de structure de « *cône affine* » sur tout  $Y$ -schéma affine, définie de façon « géométrique » sans appel à une graduation préalable.

Nous ne développerons pas davantage ce point de vue ici et laissons au lecteur le soin de formuler de façon précise les définitions et résultats qui correspondent aux indications précédentes.

#### 8.4. Fermeture projective d'un fibré vectoriel.

(8.4.1) Soient  $Y$  un préschéma,  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent. Si on prend pour  $\mathcal{S}$  la  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée  $\mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E})$ , la définition (8.3.1.1) montre que  $\hat{\mathcal{S}}$  s'identifie à  $\mathbf{S}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_Y)$ . Le cône affine  $\text{Spec}(\mathcal{S})$  défini par  $\mathcal{S}$  étant alors par définition  $\mathbf{V}(\mathcal{E})$ , et  $\text{Proj}(\mathcal{S})$  étant par définition  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ , on voit donc que :

*Proposition (8.4.2).* — *La fermeture projective d'un fibré vectoriel  $\mathbf{V}(\mathcal{E})$  sur  $Y$  est canoniquement isomorphe à  $\mathbf{P}(\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_Y)$ , et le lieu à l'infini de cette dernière est canoniquement isomorphe à  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ .*

*Remarque (8.4.3).* — Prenons par exemple  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_Y^r$  avec  $r \geq 2$ ; alors les cônes épointés  $E$ ,  $\hat{E}$  définis par  $\mathcal{S}$  ne sont ni affines ni projectifs sur  $Y$  si  $Y \neq \emptyset$ . La seconde assertion est immédiate, car  $\hat{C} = \mathbf{P}(\mathcal{O}_Y^{r+1})$  est projectif sur  $Y$  et les espaces sous-jacents à  $E$  et  $\hat{E}$  sont des ouverts non fermés dans  $\hat{C}$ , donc les immersions canoniques  $E \rightarrow \hat{C}$  et  $\hat{E} \rightarrow \hat{C}$  ne sont pas projectives (5.5.3), et on conclut par (5.5.5, (v)). D'autre part, supposant  $Y = \text{Spec}(A)$  affine et par exemple  $r = 2$ , on a  $C = \text{Spec}(A[T_1, T_2])$  et  $E$  est alors le préschéma induit par  $C$  sur l'ouvert  $D(T_1) \cup D(T_2)$ ; or nous avons vu que ce dernier n'est pas affine (I, 5.5.11); *a fortiori*  $\hat{E}$  ne peut être affine, puisque  $E$  est l'ouvert où ne s'annule pas la section  $\mathbf{z}$  au-dessus de  $\hat{E}$  (8.3.2).

Toutefois :

*Proposition (8.4.4).* — *Si  $\mathcal{L}$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -Module inversible, on a des isomorphismes canoniques pour les cônes épointés  $E$  et  $\hat{E}$  correspondants à  $C = \mathbf{V}(\mathcal{L})$ ,*

$$(8.4.4.1) \quad \text{Spec}\left(\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{L}^{\otimes n}\right) \xrightarrow{\sim} E$$

$$(8.4.4.2) \quad \mathbf{V}(\mathcal{L}^{-1}) \xrightarrow{\sim} \hat{E}.$$

*En outre, il existe un isomorphisme canonique de la fermeture projective de  $\mathbf{V}(\mathcal{L})$  sur celle de  $\mathbf{V}(\mathcal{L}^{-1})$ , transformant la section nulle (resp. le lieu à l'infini) de la première en le lieu à l'infini (resp. la section nulle) de la seconde.*

On a ici  $\mathcal{S} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$ ; l'injection canonique

$$\mathcal{S} \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{L}^{\otimes n}$$

définit un morphisme dominant canonique

$$(8.4.4.3) \quad \text{Spec}\left(\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{L}^{\otimes n}\right) \rightarrow \mathbf{V}(\mathcal{L}) = \text{Spec}\left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}\right)$$

et il suffit de prouver que ce morphisme est un isomorphisme du schéma  $\text{Spec}\left(\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{L}^{\otimes n}\right)$  sur  $E$ . La question étant locale sur  $Y$ , on peut supposer que  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine

et  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_Y$ , donc  $\mathcal{S} = (A[T])^\sim$  et  $\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{L}^{\otimes n} = (A[T, T^{-1}])^\sim$ . Or  $A[T, T^{-1}]$  est l'anneau de fractions  $A[T]_T$  de  $A[T]$ , donc (8.4.4.3) identifie le premier membre au préschéma induit par  $C = \mathbf{V}(\mathcal{L})$  sur l'ouvert  $D(T)$ ; le complémentaire  $V(T)$  de cet ouvert dans  $C$  est l'espace sous-jacent au sous-préschéma fermé de  $C$  défini par l'idéal  $TA[T]$ , c'est-à-dire la section nulle de  $C$ , donc  $E = D(T)$ .

L'isomorphisme (8.4.4.2) sera d'autre part conséquence de la dernière assertion,  $\mathbf{V}(\mathcal{L}^{-1})$  étant le complémentaire du lieu à l'infini de sa fermeture projective et  $\hat{E}$  le complémentaire de la section nulle de la fermeture projective de  $C = \mathbf{V}(\mathcal{L})$ . Or, ces fermetures projectives sont respectivement  $\mathbf{P}(\mathcal{L}^{-1} \oplus \mathcal{O}_Y)$  et  $\mathbf{P}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_Y)$ ; mais on peut écrire  $\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_Y = \mathcal{L} \otimes (\mathcal{L}^{-1} \oplus \mathcal{O}_Y)$ . L'existence de l'isomorphisme canonique cherché résulte alors de (4.1.4), et tout revient à voir que cet isomorphisme échange sections nulles et lieux à l'infini. On peut pour cela se borner au cas où  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine,  $L = Ac$ ,  $L^{-1} = Ac'$ , l'isomorphisme canonique  $L \otimes L^{-1} \rightarrow A$  faisant correspondre à  $c \otimes c'$  l'élément  $1$  de  $A$ . Alors  $\mathbf{S}(L \oplus A)$  est produit tensoriel de  $A[\mathbf{z}]$  et de  $\bigoplus_{n \geq 0} Ac^{\otimes n}$ ,  $\mathbf{S}(L^{-1} \oplus A)$  produit tensoriel de  $A[\mathbf{z}]$  et de  $\bigoplus_{n \geq 0} Ac'^{\otimes n}$ , et l'isomorphisme défini dans (4.1.4) fait correspondre à  $\mathbf{z}^h \otimes c'^{\otimes(n-h)}$  l'élément  $\mathbf{z}^{n-h} \otimes c^{\otimes h}$ . Or, dans  $\mathbf{P}(\mathcal{L}^{-1} \oplus \mathcal{O}_Y)$ , le lieu à l'infini est l'ensemble des points où s'annule la section  $\mathbf{z}$  et la section nulle est l'ensemble des points où s'annule la section  $c'$ ; comme on a des définitions analogues pour  $\mathbf{P}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_Y)$ , notre conclusion résulte aussitôt de l'explicitation qui précède.

### 8.5. Comportements fonctoriels.

(8.5.1) Soient  $Y, Y'$  deux préschémas,  $q : Y' \rightarrow Y$  un morphisme,  $\mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{S}'$ ) une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre (resp. une  $\mathcal{O}_{Y'}$ -Algèbre) graduée quasi-cohérente à degrés *positifs*. Considérons un  $q$ -morphisme d'Algèbres graduées

$$(8.5.1.1) \quad \varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'.$$

On sait (1.5.6) qu'il lui correspond canoniquement un morphisme

$$\Phi = \text{Spec}(\varphi) : \text{Spec}(\mathcal{S}') \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{S})$$

tel que le diagramme

$$(8.5.1.2) \quad \begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{\Phi} & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

où on a posé  $C = \text{Spec}(\mathcal{S})$ ,  $C' = \text{Spec}(\mathcal{S}')$ , soit commutatif. Supposons en outre que  $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_Y$ ,  $\mathcal{S}'_0 = \mathcal{O}_{Y'}$ ; soient  $\varepsilon : Y \rightarrow C$  et  $\varepsilon' : Y' \rightarrow C'$  les immersions canoniques (8.3.2); on a alors un diagramme commutatif

$$(8.5.1.3) \quad \begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{q} & Y \\ \varepsilon' \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ C' & \xrightarrow{\Phi} & C \end{array}$$

qui correspond au diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{S}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_Y & \rightarrow & \mathcal{O}_{Y'} \end{array}$$

où les flèches verticales sont les homomorphismes d'augmentation, et dont la commutativité résulte de l'hypothèse que  $\varphi$  est supposé être un homomorphisme d'Algèbres graduées.

*Proposition (8.5.2).* — Si  $E$  (resp.  $E'$ ) est le cône épointé affine défini par  $\mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{S}'$ ), on a  $\Phi^{-1}(E) \subset E'$ ; si en outre  $\text{Proj}(\varphi) : G(\varphi) \rightarrow \text{Proj}(\mathcal{S})$  est partout défini (autrement dit si  $G(\varphi) = \text{Proj}(\mathcal{S}')$ ), alors on a  $\Phi^{-1}(E) = E'$ , et réciproquement.

La première assertion résulte de la commutativité de (8.5.1.3). Pour démontrer la seconde, on peut se borner au cas où  $Y = \text{Spec}(A)$  et  $Y' = \text{Spec}(A')$  sont affines,  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ ,  $\mathcal{S}' = \widetilde{S}'$ . Pour tout  $f$  homogène dans  $S_+$ , si on pose  $f' = \varphi(f)$ , on a  $\Phi^{-1}(C_f) = C'_{f'}$  (I, 2.2.4.1); dire que  $G(\varphi) = \text{Proj}(S')$  signifie que dans  $S'_+$  la racine de l'idéal engendré par les  $f' = \varphi(f)$  est  $S'_+$  lui-même ((2.8.1) et (2.3.14)), et cela équivaut encore à dire que les  $C'_{f'}$  recouvrent  $E'$  (8.3.4.4).

(8.5.3) Le  $q$ -morphisme  $\varphi$  se prolonge canoniquement en un  $q$ -morphisme d'Algèbres graduées

$$(8.5.3.1) \quad \hat{\varphi} : \hat{\mathcal{S}} \rightarrow \hat{\mathcal{S}'}$$

en posant  $\hat{\varphi}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$ . On en déduit par suite un morphisme

$$\hat{\Phi} = \text{Proj}(\hat{\varphi}) : G(\hat{\varphi}) \rightarrow \hat{C} = \text{Proj}(\hat{\mathcal{S}})$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G(\hat{\varphi}) & \xrightarrow{\hat{\Phi}} & \hat{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

soit commutatif (3.5.6). Il résulte aussitôt des définitions que si on désigne par  $i : C \rightarrow \hat{C}$  et  $i' : C' \rightarrow \hat{C}'$  les immersions ouvertes canoniques (8.3.2), on a  $i'(C') \subset G(\hat{\varphi})$  et le diagramme

$$(8.5.3.2) \quad \begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{\Phi} & C \\ i' \downarrow & & \downarrow i \\ G(\hat{\varphi}) & \xrightarrow{\hat{\Phi}} & \hat{C} \end{array}$$

est commutatif. Enfin, si on pose  $X = \text{Proj}(\mathcal{S})$ ,  $X' = \text{Proj}(\mathcal{S}')$ , et si  $j : X \rightarrow \hat{C}$ ,  $j' : X' \rightarrow \hat{C}'$  sont les immersions fermées canoniques (8.3.2), il résulte encore des définitions de ces immersions que l'on a  $j'(G(\varphi)) \subset G(\hat{\varphi})$  et que le diagramme

$$(8.5.3.3) \quad \begin{array}{ccc} G(\varphi) & \xrightarrow{\text{Proj}(\varphi)} & X \\ i' \downarrow & & \downarrow i \\ G(\hat{\varphi}) & \xrightarrow{\hat{\Phi}} & \hat{C} \end{array}$$

est commutatif.

*Proposition (8.5.4).* — Si  $\hat{E}$  (resp.  $\hat{E}'$ ) est le cône épointé projectif défini par  $\mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{S}'$ ), on a  $\hat{\Phi}^{-1}(\hat{E}) \subset \hat{E}'$ ; en outre, si  $p : \hat{E} \rightarrow X$  et  $p' : \hat{E}' \rightarrow X'$  sont les rétractions canoniques, on a  $p'(\hat{\Phi}^{-1}(\hat{E})) \subset G(\hat{\varphi})$ , et le diagramme

$$(8.5.4.1) \quad \begin{array}{ccc} \hat{\Phi}^{-1}(\hat{E}) & \xrightarrow{\hat{\Phi}} & \hat{E} \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ G(\varphi) & \xrightarrow{\text{Proj}(\varphi)} & X \end{array}$$

est commutatif. Si  $\text{Proj}(\varphi)$  est partout défini, il en est de même de  $\hat{\Phi}$ , et on a  $\hat{\Phi}^{-1}(\hat{E}) = \hat{E}'$ .

La première assertion résulte de la commutativité des diagrammes (8.5.1.3) et (8.5.3.2), et les deux suivantes de la définition des rétractions canoniques (8.3.5) et de la définition de  $\hat{\varphi}$ . D'autre part, pour voir que  $\hat{\Phi}$  est partout défini lorsqu'il en est ainsi de  $\text{Proj}(\varphi)$ , on peut se borner à considérer le cas où  $Y = \text{Spec}(A)$  et  $Y' = \text{Spec}(A')$  sont affines,  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ ,  $\mathcal{S}' = \widetilde{S}'$ ; l'hypothèse est que lorsque  $f$  parcourt l'ensemble des éléments homogènes de  $S_+$ , l'idéal engendré dans  $S'_+$  par les  $\varphi(f)$  a pour racine dans  $S'_+$  l'idéal  $S'_+$  lui-même; on en conclut aussitôt que la racine dans  $(S'[z])_+$  de l'idéal engendré par  $z$  et les  $\varphi(f)$  est  $(S'[z])_+$  lui-même, d'où notre assertion; cela prouve en même temps que  $\hat{E}'$  est réunion des  $\hat{C}'_{\varphi(f)}$ , donc égal à  $\hat{\Phi}^{-1}(\hat{E})$ .

*Corollaire (8.5.5).* — Lorsque  $\text{Proj}(\varphi)$  est partout défini, l'image réciproque par  $\hat{\Phi}$  de l'espace sous-jacent au lieu à l'infini (resp. au préschéma des sommets) de  $\hat{C}'$  est l'espace sous-jacent au lieu à l'infini (resp. au préschéma des sommets) de  $\hat{C}$ .

Cela résulte aussitôt de (8.5.4) et (8.5.2), compte tenu des relations (8.3.4.1) et (8.3.4.2).

## 8.6. Un isomorphisme canonique pour les cônes épointés.

**(8.6.1)** Soient  $Y$  un préschéma,  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente à degrés positifs *telle que*  $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_Y$ ,  $X$  le  $Y$ -schéma  $\text{Proj}(\mathcal{S})$ . Nous allons appliquer les résultats de (8.5) au cas où on prend  $Y' = X$ ,  $q : X \rightarrow Y$  étant le morphisme structural; soit

$$(8.6.1.1) \quad \mathcal{S}_X = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_X(n)$$

qui est une  $\mathcal{O}_X$ -Algèbre graduée quasi-cohérente, la multiplication y étant définie au moyen des homomorphismes canoniques (3.2.6.1)

$$\mathcal{O}_X(m) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) \rightarrow \mathcal{O}_X(m+n)$$

dont l'associativité est garantie par le diagramme commutatif (2.5.11.4). Prenons pour  $\mathcal{S}'$  la sous- $\mathcal{O}_X$ -Algèbre graduée quasi-cohérente  $\mathcal{S}_X^{\geqslant} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathcal{O}_X(n)$  de  $\mathcal{S}_X$ , à degrés positifs.

Enfin, nous considérerons le  $q$ -morphisme canonique

$$(8.6.1.2) \quad \alpha : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_X^{\geqslant}$$

défini dans (3.3.2.3) comme un homomorphisme  $\mathcal{S} \rightarrow q_*(\mathcal{S}_X)$ , mais qui applique évidemment  $\mathcal{S}$  dans  $q_*(\mathcal{S}_X^{\geqslant})$ . Nous poserons

$$(8.6.1.3) \quad C_X = \text{Spec}(\mathcal{S}_X^{\geqslant}), \quad \hat{C}_X = \text{Proj}(\mathcal{S}_X^{\geqslant}[\mathbf{z}]), \quad X' = \text{Proj}(\mathcal{S}_X^{\geqslant})$$

et nous désignerons par  $E_X$  et  $\hat{E}_X$  le cône épointé affine et le cône épointé projectif correspondants; on notera  $\varepsilon_X : X \rightarrow C_X$ ,  $i_X : C \rightarrow \hat{C}_X$ ,  $j_X : X' \rightarrow \hat{C}_X$ ,  $p_X : \hat{E}_X \rightarrow X'$ ,  $\pi_X : E_X \rightarrow X'$  les morphismes canoniques définis dans (8.3).

*Proposition (8.6.2).* — *Le morphisme structural  $u : X' \rightarrow X$  est un isomorphisme, et le morphisme  $\text{Proj}(\alpha)$  est partout défini et identique à  $u$ . Le morphisme  $\text{Proj}(\hat{\alpha}) : \hat{C}_X \rightarrow \hat{C}$  est partout défini, et ses restrictions à  $\hat{E}_X$  et  $E_X$  sont des isomorphismes sur  $\hat{E}$  et  $E$  respectivement. Enfin, lorsqu'on identifie  $X'$  et  $X$  au moyen de  $u$ , les morphismes  $p_X$  et  $\pi_X$  s'identifient aux morphismes structuraux des  $X$ -préschémas  $\hat{E}_X$  et  $E_X$ .*

On peut évidemment se borner au cas où  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine et  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ ; alors  $X$  est réunion des ouverts affines  $X_f$ , où  $f$  parcourt l'ensemble des éléments homogènes de  $S_+$ , l'anneau de  $X_f$  étant  $S_{(f)}$ . Il résulte en outre de (8.2.7.1) que l'on a

$$(8.6.2.1) \quad \Gamma(X_f, \mathcal{S}_X^{\geqslant}) = S_f^{\geqslant}.$$

On a donc  $u^{-1}(X_f) = \text{Proj}(S_f^{\geqslant})$ . Mais si  $f \in S_d$  ( $d > 0$ ),  $\text{Proj}(S_f^{\geqslant})$  est canoniquement isomorphe à  $\text{Proj}((S_f^{\geqslant})^{(d)})$  (2.4.7), et d'autre part  $(S_f^{\geqslant})^{(d)} = (S^{(d)})_f^{\geqslant}$  s'identifie à  $S_{(f)}[T]$  (2.2.1) par l'application  $T \mapsto f_1$ ; on en conclut (3.1.7) que le morphisme structural  $u^{-1}(X_f) \rightarrow X_f$  est un isomorphisme, d'où la première assertion. Pour démontrer la seconde, remarquons que la restriction  $u^{-1}(X_f) \cap G(\alpha) \rightarrow X = \text{Proj}(S)$  de  $\text{Proj}(\alpha)$  correspond à l'application canonique  $x \mapsto x_1$  de  $S$  dans  $S_f^{\geqslant}$  (2.6.2); on en déduit tout d'abord que  $G(\alpha) = X'$ , puis, en tenant compte de ce que  $u^{-1}(X_f) = (u^{-1}(X_f))_{f_1}$ , il résulte de (2.8.1.1) que l'image de  $u^{-1}(X_f)$  par  $\text{Proj}(\alpha)$  est contenue dans  $X_f$ , et la restriction de  $\text{Proj}(\alpha)$  à  $u^{-1}(X_f)$ , considérée comme morphisme dans  $X_f = \text{Spec}(S_{(f)})$ , est bien identique à celle de  $u$ . Enfin, la formule (8.3.5.4), appliquée à  $p_X$  au lieu de  $p$ , montre que  $p_X^{-1}(u^{-1}(X_f)) = \text{Spec}((S_f^{\geqslant})_{f_1}^{\leqslant})$ , et cet ouvert est, d'après (8.5.4.1), l'image réciproque par  $\text{Proj}(\hat{\alpha})$  de  $p^{-1}(X_f) = \text{Spec}(S_f^{\leqslant})$  (8.3.5.3). Compte tenu de (8.2.3.2), la restriction de  $\text{Proj}(\hat{\alpha})$  à  $p_X^{-1}(u^{-1}(X_f))$  correspond à l'isomorphisme réciproque de (8.2.7.2), restreint à  $S_f^{\leqslant}$ , d'où le troisième point; la dernière assertion est évidente par définition.

On notera aussi qu'il résulte du diagramme commutatif (8.5.3.2) que *la restriction à  $C_X$  de  $\text{Proj}(\hat{\alpha})$  n'est autre que le morphisme  $\text{Spec}(\alpha)$ .*

*Corollaire (8.6.3).* — *Considérés comme  $X$ -schémas,  $\hat{E}_X$  est canoniquement isomorphe à  $\text{Spec}(\mathcal{S}_X^{\leq})$ , et  $E_X$  à  $\text{Spec}(\mathcal{S}_X)$ .*

Comme on sait que les morphismes  $p_X$  et  $\pi_X$  sont affines (8.3.5 et 8.3.6), il suffit (vu (1.3.1)) de vérifier le corollaire lorsque  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine et  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ . La première assertion résulte de l'existence de l'isomorphisme canonique (8.2.7.2)  $(S_f^{\geq})_{/1} \xrightarrow{\sim} S_f^{\leq}$  et du fait que ces isomorphismes sont compatibles avec le passage de  $f$  à  $fg$  ( $f$  et  $g$  homogènes dans  $S_+$ ). De même, la formule (8.3.6.2), appliquée à  $\pi_X$  au lieu de  $\pi$ , montre que  $\pi_X^{-1}(u^{-1}(X_f)) = \text{Spec}((S_f^{\geq})_{/1})$  pour  $f$  homogène dans  $S_+$ , et la seconde assertion découle de l'existence de l'isomorphisme canonique (8.2.7.2)  $(S_f^{\geq})_{/1} \xrightarrow{\sim} S_f$ .

On peut ainsi dire que  $\hat{C}_X$ , considéré comme  $X$ -schéma, s'obtient par *recollement* des deux  $X$ -schémas affines sur  $X$ ,  $C_X = \text{Spec}(\mathcal{S}_X^{\geq})$  et  $\hat{E}_X = \text{Spec}(\mathcal{S}_X^{\leq})$ , dont l'intersection est l'ouvert  $E_X = \text{Spec}(\mathcal{S}_X)$ .

*Corollaire (8.6.4).* — *Supposons que  $\mathcal{O}_X(1)$  soit un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible et que  $\mathcal{S}_X$  soit isomorphe à  $\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} (\mathcal{O}_X(1))^{\otimes n}$  (ce qui sera en particulier le cas si  $\mathcal{S}$  est engendrée par  $\mathcal{S}_1$  (3.2.5 et 3.2.7)). Alors le cône projectif éponté  $\hat{E}$  s'identifie au fibré vectoriel de rang un  $\mathbf{V}(\mathcal{O}_X(-1))$  sur  $X$ , et le cône affine éponté  $E$  au sous-préschéma de ce fibré vectoriel induit sur le complémentaire de la section nulle. Avec cette identification, la rétraction canonique  $\hat{E} \rightarrow X$  s'identifie au morphisme structural du  $X$ -schéma  $\mathbf{V}(\mathcal{O}_X(-1))$ . Enfin, il existe un  $Y$ -morphisme canonique  $\mathbf{V}(\mathcal{O}_X(1)) \rightarrow C$ , dont la restriction au complémentaire de la section nulle de  $\mathbf{V}(\mathcal{O}_X(1))$  est un isomorphisme de ce complémentaire sur le cône affine éponté  $E$ .*

En effet, si on pose  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$ ,  $\mathcal{S}_X^{\geq}$  est alors identique à  $\mathbf{S}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L})$ , donc  $\hat{E}_X$  s'identifie canoniquement à  $\mathbf{V}(\mathcal{L}^{-1})$  en vertu de (8.6.3) et  $C_X$  à  $\mathbf{V}(\mathcal{L})$ . Le morphisme  $\mathbf{V}(\mathcal{L}) \rightarrow C$  est la restriction de  $\text{Proj}(\hat{\alpha})$ , et les assertions du corollaire sont donc des cas particuliers de (8.6.2).

On notera que l'image réciproque par le morphisme  $\mathbf{V}(\mathcal{O}_X(1)) \rightarrow C$  de l'espace sous-jacent au préschéma des sommets de  $C$  est l'espace sous-jacent à la section nulle de  $\mathbf{V}(\mathcal{O}_X(1))$  (8.5.5); mais en général les sous-préschémas correspondants de  $C$  et de  $\mathbf{V}(\mathcal{O}_X(1))$  ne sont pas isomorphes. Cette question va être étudiée ci-dessous.

## 8.7. Éclatement de cônes projetants.

**(8.7.1)** Sous les conditions de (8.6.1), on a, en posant  $r = \text{Proj}(\hat{\alpha})$ , un diagramme commutatif

$$(8.7.1.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_X \circ \varepsilon_X} & \hat{C}_X \\ q \downarrow & & \downarrow r \\ Y & \xrightarrow{i \circ \varepsilon} & \hat{C} \end{array}$$

en vertu de (8.5.1.3) et (8.5.3.2); en outre, la restriction de  $r$  au complémentaire  $\hat{C}_X - i_X(\varepsilon_X(X))$  de la section nulle est un *isomorphisme* sur le complémentaire  $\hat{C} - i(\varepsilon(Y))$  de la section nulle en vertu de (8.6.2). Si on suppose pour simplifier  $Y$  affine,  $\mathcal{S}$  de type fini et engendré par  $\mathcal{S}_1$ ,  $X$  est projectif sur  $Y$  et  $\hat{C}_X$  projectif sur  $X$  (5.5.1), donc  $\hat{C}_X$  est projectif sur  $Y$  (5.5.5, (ii)), et *a fortiori* sur  $\hat{C}$  (5.5.5, (v)). On a ainsi un  $Y$ -morphisme projectif  $r : \hat{C}_X \rightarrow \hat{C}$  (dont la restriction à  $C_X$  est un  $Y$ -morphisme projectif  $C_X \rightarrow C$ ) qui *contracte*  $X$  dans  $Y$  et induit un *isomorphisme* quand on le restreint aux *complémentaires de  $X$  et de  $Y$* . On a donc une relation entre  $C_X$  et  $C$ , analogue à celle qui a lieu entre un préschéma éclaté et son préschéma de départ (8.1.3). Nous allons effectivement montrer qu'on peut identifier  $C_X$  au spectre homogène d'une  $\mathcal{O}_C$ -Algèbre graduée.

(8.7.2) Gardant les notations de (8.6.1), considérons pour chaque  $n \geq 0$ , l'Idéal quasi-cohérent

$$(8.7.2.1) \quad \mathcal{S}_{[n]} = \bigoplus_{m \geq n} \mathcal{S}_m$$

de la  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée  $\mathcal{S}$ . Il est clair que l'on a

$$(8.7.2.2) \quad \mathcal{S}_{[0]} = \mathcal{S}, \quad \mathcal{S}_{[n]} \subset \mathcal{S}_{[m]} \quad \text{pour } m \leq n$$

$$(8.7.2.3) \quad \mathcal{S}_{[n]} \mathcal{S}_{[m]} \subset \mathcal{S}_{[m+n]}.$$

Considérons le  $\mathcal{O}_C$ -Module associé à  $\mathcal{S}_{[n]}$ , qui est un Idéal quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_C = \widetilde{\mathcal{S}}$  (1.4.4)

$$(8.7.2.4) \quad \mathcal{I}_n = (\mathcal{S}_{[n]})^\sim$$

On déduit alors de (8.7.2.2) et (8.7.2.3), utilisant (1.4.4) et (1.4.8.1), les formules analogues

$$(8.7.2.5) \quad \mathcal{I}_0 = \mathcal{O}_C, \quad \mathcal{I}_n \subset \mathcal{I}_m \quad \text{pour } m \leq n$$

$$(8.7.2.6) \quad \mathcal{I}_n \mathcal{I}_m \subset \mathcal{I}_{n+m}.$$

On est donc dans les conditions de (8.1.1), ce qui conduit à introduire la  $\mathcal{O}_C$ -Algèbre graduée quasi-cohérente

$$(8.7.2.7) \quad \mathcal{S}^\natural = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}_n = \left( \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_{[n]} \right)^\sim.$$

*Proposition (8.7.3).* — *Il existe un  $C$ -isomorphisme canonique*

$$(8.7.3.1) \quad h : C_X \xrightarrow{\sim} \text{Proj}(\mathcal{S}^\natural).$$

Supposons d'abord  $Y = \text{Spec}(A)$  affine, d'où  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ , où  $S$  est une  $A$ -algèbre graduée à degrés positifs et  $C = \text{Spec}(S)$ . La définition (8.2.7.4) montre que l'on a alors, avec les notations de (8.2.6),  $\mathcal{S}^\natural = (S^\natural)^\sim$ . Pour définir (8.7.3.1), considérons un élément homogène  $f \in S_d$  ( $d > 0$ ) et l'élément correspondant  $f^\natural \in S^\natural$  (8.2.6); le  $S$ -isomorphisme (8.2.7.3) définit donc un  $C$ -isomorphisme

$$(8.7.3.2) \quad \text{Spec}(S^\natural) \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(S_{(f^\natural)}^\natural).$$

Mais avec les notations de (8.6.2), si  $v : C_X \rightarrow X$  est le morphisme structural, il résulte de (8.6.2.1) que l'on a  $v^{-1}(X_f) = \text{Spec}(S_f^\geq)$ . On a d'autre part  $\text{Spec}(S_{(f)}^\natural) = D_+(f^\natural)$ , si bien que (8.7.3.2) définit un isomorphisme  $v^{-1}(X_f) \rightarrow D_+(f^\natural)$ . En outre, si  $g \in S_\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ), le diagramme

$$\begin{array}{ccc} v^{-1}(X_{fg}) & \xrightarrow{\sim} & D_+(f^\natural g^\natural) \\ \downarrow & & \downarrow \\ v^{-1}(X_f) & \xrightarrow{\sim} & D_+(f^\natural) \end{array}$$

est commutatif, comme il résulte aussitôt de la définition de l'isomorphisme (8.2.7.3). Enfin par définition  $S_+$  est engendré par les  $f$  homogènes, donc il résulte de (8.2.10, (iv)) et de (2.3.14) que les  $D_+(f^\natural)$  forment un recouvrement de  $\text{Proj}(S^\natural)$  et les  $v^{-1}(X_f)$  un recouvrement de  $C_X$ , puisque les  $X_f$  forment un recouvrement de  $X$ ; cela achève donc de définir dans ce cas l'isomorphisme (8.7.3.1).

Pour démontrer (8.7.3) dans le cas général, il suffit de voir que si  $U, U'$  sont deux ouverts affines de  $Y$  tels que  $U' \subset U$ , d'anneaux  $A$  et  $A'$ , et si on pose  $\mathcal{S}|U = \widetilde{S}$ ,  $\mathcal{S}|U' = \widetilde{S}'$ , le diagramme

$$(8.7.3.3) \quad \begin{array}{ccc} C_{U'} & \rightarrow & \text{Proj}(S'^\natural) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_U & \rightarrow & \text{Proj}(S^\natural) \end{array}$$

est commutatif. Mais  $S'$  s'identifie canoniquement à  $S \otimes_A A'$ , donc  $S'^\natural$  à

$$S^\natural \otimes_S S' = S^\natural \otimes_A A';$$

on a donc  $\text{Proj}(S'^\natural) = \text{Proj}(S^\natural) \times_U U'$  (2.8.10); de même, si  $X = \text{Proj}(S)$ ,  $X' = \text{Proj}(S')$ , on a  $X' = X \times_U U'$  et  $\mathcal{S}_{X'} = \mathcal{S}_X \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_{U'}$  (3.5.4), autrement dit  $\mathcal{S}_{X'} = j^*(\mathcal{S}_X)$ , où  $j$  est la projection  $X' \rightarrow X$ . On a par suite (1.5.2)  $C_{U'} = C_U \times_X X' = C_U \times_U U'$ , et la commutativité de (8.7.3.3) est alors immédiate.

*Remarques (8.7.4).* — (i) La fin du raisonnement de (8.7.3) se généralise aussitôt de la façon suivante. Soient  $g : Y' \rightarrow Y$  un morphisme,  $\mathcal{S}' = g^*(\mathcal{S})$ ,  $X' = \text{Proj}(\mathcal{S}')$ ; on a alors un diagramme commutatif

$$(8.7.4.i) \quad \begin{array}{ccc} C_{X'} & \rightarrow & \text{Proj}(\mathcal{S}'^\natural) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_X & \rightarrow & \text{Proj}(\mathcal{S}^\natural) \end{array}$$

D'autre part, soit  $\varphi : \mathcal{S}'' \rightarrow \mathcal{S}$  un homomorphisme de  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbres graduées, tel que si on pose  $X'' = \text{Proj}(\mathcal{S}'')$ ,  $u = \text{Proj}(\varphi) : X \rightarrow X''$  soit partout défini; on a d'autre part

un  $Y$ -morphisme  $v : C \rightarrow C''$  (avec  $C'' = \text{Spec}(\mathcal{S}'')$ ) tel que  $\mathcal{A}(v) = \varphi$ , et comme  $\varphi$  est un homomorphisme d'Algèbres graduées, on déduit de  $\varphi$  un  $v$ -morphisme d'Algèbres graduées  $\psi : \mathcal{S}''^\natural \rightarrow \mathcal{S}^\natural$  (1.4.1). En outre, il résulte aisément de (8.2.10, (iv)) et de l'hypothèse sur  $\varphi$ , que  $\text{Proj}(\psi)$  est partout défini. Enfin, compte tenu de (3.5.6.1), on a un  $u$ -morphisme canonique  $\mathcal{S}_{X''} \rightarrow \mathcal{S}_X$ , d'où (1.5.6) un morphisme  $w : C_{X''} \rightarrow C_X$ . Cela étant, le diagramme

$$(8.7.4.2) \quad \begin{array}{ccc} C_{X''} & \xrightarrow{\sim} & \text{Proj}(\mathcal{S}^\natural) \\ w \downarrow & & \downarrow \text{Proj}(\psi) \\ C_X & \xrightarrow{\sim} & \text{Proj}(\mathcal{S}^\natural) \end{array}$$

est commutatif, comme on le vérifie aussitôt en se ramenant au cas où  $Y$  est affine.

(ii) Notons qu'en vertu de (8.7.2.5) et (8.7.2.6), on a  $\mathcal{I}_1^m \subset \mathcal{I}_m \subset \mathcal{I}_1$  pour tout  $m > 0$ . Or, par définition,  $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{S}_+)^{\sim}$ , donc  $\mathcal{I}_1$  définit dans  $C$  le sous-préschéma fermé  $\varepsilon(Y)$  ((1.4.10) et (8.3.2)); on en conclut que pour tout  $m > 0$ , *le support de  $\mathcal{O}_C/\mathcal{I}_m$  est contenu dans l'espace sous-jacent au préschéma des sommets  $\varepsilon(Y)$* ; dans l'image réciproque du cône éponté affine  $E$ , le morphisme structural  $\text{Proj}(\mathcal{S}^\natural) \rightarrow C$  se réduit donc à un *isomorphisme* (comme il résulte d'ailleurs de (8.7.3) et (8.7.1)). En outre, identifiant canoniquement  $C$  à un ouvert de  $\hat{C}$  (8.3.3), on peut évidemment prolonger les Idéaux  $\mathcal{I}_m$  de  $\mathcal{O}_C$  en des Idéaux  $\hat{\mathcal{I}}_m$  de  $\mathcal{O}_{\hat{C}}$ , par la condition de coïncider avec  $\mathcal{O}_{\hat{C}}$  dans l'ouvert  $\hat{E}$  de  $\hat{C}$ . Si on pose  $\mathcal{T} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}_m$ , qui est une  $\mathcal{O}_{\hat{C}}$ -Algèbre graduée quasi-cohérente, on peut prolonger l'isomorphisme (8.7.3.1) en un  $\hat{C}$ -isomorphisme

$$(8.7.4.3) \quad \hat{C}_X \xrightarrow{\sim} \text{Proj}(\mathcal{T}).$$

En effet, au-dessus de  $\hat{E}$ , il résulte de ce qui précède que  $\text{Proj}(\mathcal{T})$  s'identifie canoniquement à  $\hat{E}$ , et on définit donc l'isomorphisme (8.7.4.3) au-dessus de  $\hat{E}$  en lui imposant de coïncider avec l'isomorphisme canonique  $\hat{E}_X \rightarrow \hat{E}$  (8.6.2); il est clair qu'alors cet isomorphisme et (8.7.3.1) coïncident au-dessus de  $\hat{E}$ .

*Corollaire (8.7.5).* — *Supposons qu'il existe  $n_0 > 0$  tel que*

$$(8.7.5.1) \quad \mathcal{S}_{n+1} = \mathcal{S}_1 \mathcal{S}_n \quad \text{pour } n \geq n_0.$$

*Alors le sous-préschéma des sommets de  $C_X$  (isomorphe à  $X$ ) est l'image réciproque par le morphisme canonique  $r : C_X \rightarrow C$  du sous-préschéma des sommets de  $C$  (isomorphe à  $Y$ ). Inversement, si cette propriété a lieu et si on suppose de plus  $Y$  noethérien et  $\mathcal{S}$  de type fini, il existe  $n_0 > 0$  tel que l'on ait (8.7.5.1).*

La première assertion étant locale sur  $Y$ , on peut pour l'établir supposer  $Y = \text{Spec}(A)$  affine, et  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ , où  $S$  est une  $A$ -algèbre graduée à degrés positifs. Elle résulte alors de (8.2.12), car on a  $\text{Proj}(S^\natural \otimes_S S_0) = C_X \times_C \varepsilon(Y)$  (en vertu de l'identification (8.7.3.1)), c'est-à-dire que ce préschéma est l'image réciproque de  $\varepsilon(Y)$  dans  $C_X$  (I, 4.4.1). La réciproque résulte aussi de (8.2.12) lorsque  $Y$  est affine noethérien et  $S$  de type fini.

Si  $Y$  est noethérien (non nécessairement affine) et  $\mathcal{S}$  de type fini, il y a un recouvrement fini de  $Y$  par des ouverts affines noethériens  $U_i$ , et on déduit alors de ce qui précède que pour tout  $i$ , il y a un entier  $n_i$  tel que  $\mathcal{S}_{n+1}|U_i = (\mathcal{S}_1|U_i)(\mathcal{S}_n|U_i)$  dès que  $n \geq n_i$ ; le plus grand des  $n_i$  vérifie donc (8.7.5.1).

(8.7.6) Considérons maintenant le  $C$ -préschéma  $Z$  obtenu en faisant *éclater* dans le cône affine  $C$  le *sous-préschéma des sommets*  $\varepsilon(Y)$ ; par définition (8.1.3) c'est donc le préschéma  $\text{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_+^n)$ ; l'injection canonique

$$(8.7.6.1) \quad \iota : \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}_+^n \rightarrow \mathcal{S}^\natural$$

définit (grâce à l'identification (8.7.3)) un  $C$ -morphisme dominant canonique

$$(8.7.6.2) \quad G(\iota) \rightarrow Z$$

où  $G(\iota)$  est un ouvert de  $C_X$  (3.5.1); on notera qu'on peut avoir  $G(\iota) \neq C_X$ , comme le montre l'exemple où  $Y = \text{Spec}(K)$ ,  $K$  étant un corps,  $S = \widetilde{\mathcal{S}}$  avec  $S = K[y]$ , où  $y$  est une indéterminée de degré 2; si  $R_n$  désigne l'ensemble  $(S_+)^n$ , considéré comme partie de  $S_{[n]} = S_n^\natural$ ,  $S_+^\natural$  n'est pas la racine dans  $S_+^\natural$  de l'idéal engendré par la réunion des  $R_n$  (cf. (2.3.14)).

*Corollaire (8.7.7). — Supposons qu'il existe  $n_0 > 0$  tel que*

$$(8.7.7.1) \quad \mathcal{S}_n = \mathcal{S}_1^n \quad \text{pour } n \geq n_0.$$

*Alors le morphisme canonique (8.7.6.2) est partout défini et est un isomorphisme  $C_X \xrightarrow{\sim} Z$ . Inversement, si cette propriété a lieu et si on suppose de plus  $Y$  noethérien et  $\mathcal{S}$  de type fini, il existe  $n_0$  tel que l'on ait (8.7.7.1).*

En effet, la première assertion est locale sur  $Y$ , et découle donc de (8.2.14); il en est de même de la réciproque, en raisonnant comme dans (8.7.5).

*Remarque (8.7.8). —* Comme la condition (8.7.7.1) implique (8.7.5.1), on voit que lorsqu'elle est vérifiée, non seulement  $C_X$  s'identifie au préschéma obtenu en faisant éclater le sommet (identifié à  $Y$ ) du cône affine  $C$ , mais encore le sommet (identifié à  $X$ ) de  $C_X$  s'identifie au sous-préschéma fermé image réciproque du sommet  $Y$  de  $C$ . En outre, l'hypothèse (8.7.7.1) implique que sur  $X = \text{Proj}(\mathcal{S})$ , les  $\mathcal{O}_X$ -Modules  $\mathcal{O}_X(n)$  sont inversibles (3.2.5 et 3.2.9) et que l'on a  $\mathcal{O}_X(n) = \mathcal{L}^{\otimes n}$  avec  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$  (3.2.7 et 3.2.9); par définition (8.6.1.1),  $C_X$  est donc le fibré vectoriel  $V(\mathcal{L})$  sur  $X$ , et son sommet la *section nulle* de ce fibré vectoriel.

## 8.8. Faisceaux amples et contractions.

(8.8.1) Soient  $Y$  un préschéma,  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme séparé et quasi-compact,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible *ample* relativement à  $f$ . Considérons la  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée à degrés positifs

$$(8.8.1.1) \quad \mathcal{S} = \mathcal{O}_Y \bigoplus_{n \geq 1} f_*(\mathcal{L}^{\otimes n})$$

qui est quasi-cohérente (I, 9.2.2, a)). On a un homomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_X$ -Algèbres graduées

$$(8.8.1.2) \quad \tau : f^*(\mathcal{S}) \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$$

qui, pour les degrés  $\geq 1$ , coïncide avec l'homomorphisme canonique  $\sigma : f^*(f_*(\mathcal{L}^{\otimes n})) \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes n}$  (0, 4.4.3), et pour le degré 0 est l'identité. L'hypothèse que  $\mathcal{L}$  est  $f$ -ample entraîne alors (4.6.3 et 3.6.1) que le  $Y$ -morphisme correspondant

$$(8.8.1.3) \quad r = r_{\mathcal{L}, \tau} : X \rightarrow P = \text{Proj}(\mathcal{S})$$

est partout défini et est une *immersion ouverte dominante*, et que l'on a

$$(8.8.1.4) \quad r^*(\mathcal{O}_P(n)) = \mathcal{L}^{\otimes n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{Z}.$$

*Proposition (8.8.2).* — Soit  $C = \text{Spec}(\mathcal{S})$  le cône affine défini par  $\mathcal{S}$ ; si  $\mathcal{L}$  est  $f$ -ample, il existe un  $Y$ -morphisme canonique

$$(8.8.2.1) \quad g : V = \mathbf{V}(\mathcal{L}) \rightarrow C$$

tel que le diagramme

$$(8.8.2.2)$$

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{j} & V(\mathcal{L}) & \xrightarrow{\pi} & X \\ \downarrow \iota & & \downarrow g & & \downarrow \iota \\ Y & \xrightarrow{\epsilon} & C & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array}$$

soit commutatif,  $\psi$  et  $\pi$  étant les morphismes structuraux,  $j$  et  $\epsilon$  les immersions canoniques appliquant respectivement  $X$  et  $Y$  sur la section nulle de  $\mathbf{V}(\mathcal{L})$  et le préschéma des sommets de  $C$ . En outre, la restriction de  $g$  à  $\mathbf{V}(\mathcal{L}) - j(X)$  est une immersion ouverte

$$(8.8.2.3) \quad \mathbf{V}(\mathcal{L}) - j(X) \rightarrow E = C - \epsilon(Y)$$

dans le cône éponté affine  $E$  correspondant à  $\mathcal{S}$ .

Avec les notations de (8.8.1), soient  $\mathcal{S}_P^\geq = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_P(n)$ , et  $C_P = \text{Spec}(\mathcal{S}_P^\geq)$ . On sait (8.6.2) qu'on a un morphisme canonique  $h = \text{Spec}(\alpha) : C_P \rightarrow C$  tel que le diagramme

$$(8.8.2.4)$$

$$\begin{array}{ccc} C_P & \rightarrow & P \\ h \downarrow & & \downarrow p \\ C & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array}$$

soit commutatif; en outre, si  $\epsilon_P : P \rightarrow C_P$  est l'immersion canonique, le diagramme

$$(8.8.2.5)$$

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\epsilon_P} & C_P \\ p \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{\epsilon} & C \end{array}$$

est commutatif (8.7.1.1), et enfin, la restriction de  $h$  au cône éponté affine  $E_P$  est un *isomorphisme*  $E_P \xrightarrow{\sim} E$  (8.6.2). D'autre part, il résulte de (8.8.1.4) que l'on a

$$r^*(\mathcal{S}_P^\geq) = \mathbf{S}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L})$$

et par suite on a un  $P$ -morphisme canonique  $q : \mathbf{V}(\mathcal{L}) \rightarrow C_P$ , le diagramme commutatif

$$(8.8.2.6) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{V}(\mathcal{L}) & \xrightarrow{\pi} & X \\ q \downarrow & & \downarrow r \\ C_P & \longrightarrow & P \end{array}$$

identifiant  $\mathbf{V}(\mathcal{L})$  au produit  $C_P \times_P X$  (1.5.2); comme  $r$  est une immersion ouverte, il en est donc de même de  $q$  (I, 4.3.2). En outre, la restriction de  $q$  à  $\mathbf{V}(\mathcal{L}) - j(X)$  applique ce préschéma dans  $E_P$  par (8.5.2), et le diagramme

$$(8.8.2.7) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & \mathbf{V}(\mathcal{L}) \\ r \downarrow & & \downarrow q \\ P & \xrightarrow{\epsilon_P} & C_P \end{array}$$

est commutatif (cas particulier de (8.5.1.3)). Les assertions de (8.8.2) résultent aussitôt de ces faits, en prenant pour  $g$  le morphisme composé  $hq$ .

*Remarque (8.8.3).* — Supposons en outre que  $Y$  soit un préschéma noethérien et  $f$  un morphisme *propre*. Comme  $r$  est alors *propre* (5.4.4), donc fermé, et que c'est une immersion ouverte dominante,  $r$  est nécessairement un *isomorphisme*  $X \xrightarrow{\sim} P$ . On verra en outre au chapitre III (III, 2.3.5.1), que  $\mathcal{S}$  est alors nécessairement une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre de type fini. Alors il en résulte que  $\mathcal{S}^\sharp$  est une  $\mathcal{O}_Y^\sharp$ -Algèbre de type fini (8.2.10, (i) et 8.7.2.7); comme  $C_P$  est  $C$ -isomorphe à  $\text{Proj}(\mathcal{S}^\sharp)$  (8.7.3), on voit que le morphisme  $h : C_P \rightarrow C$  est *projectif*; comme le morphisme  $r$  est un isomorphisme, il en est de même de  $q : \mathbf{V}(\mathcal{L}) \rightarrow C_P$ , et on en conclut que le morphisme  $g : \mathbf{V}(\mathcal{L}) \rightarrow C$  est *projectif*. En outre, comme la restriction de  $h$  à  $E_P$  est un isomorphisme sur  $E$  et que  $q$  est un isomorphisme, la restriction (8.8.2.3) de  $g$  est un *isomorphisme*  $\mathbf{V}(\mathcal{L}) - j(X) \xrightarrow{\sim} E$ .

Si on suppose de plus que  $L$  est très ample pour  $f$ , on verra aussi au chapitre III (III, 2.3.5.1), qu'il existe un entier  $n_0 > 0$  tel que  $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_1^n$  pour  $n \geq n_0$ . On en conclura par (8.7.7) que  $\mathbf{V}(\mathcal{L})$  s'identifie au préschéma  $Z$  obtenu en faisant éclater dans le cône affine  $C$  le sous-préschéma des sommets (identifié à  $Y$ ), et que la section nulle de  $\mathbf{V}(\mathcal{L})$  (identifiée à  $Y$ ) est l'image réciproque du sous-préschéma des sommets  $Y$  de  $C$ .

Une partie des résultats précédents peut en fait s'établir sans hypothèse noethérienne :

*Corollaire (8.8.4).* — Soient  $Y$  un préschéma (resp. un schéma quasi-compact),  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme propre,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible ample pour  $f$ . Alors le morphisme (8.8.2.1) est propre (resp. projectif) et sa restriction (8.8.2.3) est un isomorphisme.

Pour prouver que  $g$  est propre, on peut se ramener au cas où  $Y$  est affine, et il suffit donc de considérer le cas où  $Y$  est un schéma quasi-compact. Le même raisonnement que dans (8.8.3) montre d'abord que  $r$  est un isomorphisme  $X \xrightarrow{\sim} P$ ; par suite  $q$  est aussi un isomorphisme, et comme la restriction de  $h$  à  $E_P$  est un isomorphisme  $E_P \xrightarrow{\sim} E$ , on voit déjà que (8.8.2.3) est un isomorphisme. Reste à prouver que  $g$  est *projectif*.

Comme  $f$  est de type fini par hypothèse, on peut appliquer (3.8.5) à l'homomor-

morphisme  $\tau$  de (8.8.1.2) : il y a par suite un entier  $d > 0$ , un sous- $\mathcal{O}_Y$ -Module quasi-cohérent de type fini  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{S}_d$  tel que si  $\mathcal{S}'$  est la sous- $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre de  $\mathcal{S}$  engendrée par  $\mathcal{E}$  et  $\tau' = \tau \circ q^*(\varphi)$  ( $\varphi$  injection canonique  $\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$ ),  $r' = r_{\mathcal{S}, \tau'}$  soit une immersion

$$X \rightarrow P' = \text{Proj}(\mathcal{S}').$$

En outre, comme  $\varphi$  est injectif,  $r'$  est aussi une *immersion dominante* (3.7.6); le même raisonnement que pour  $r$  montre donc que  $r'$  est une *immersion fermée surjective*; comme  $r'$  se factorise en  $X \xrightarrow{\quad} \text{Proj}(\mathcal{S}) \xrightarrow{\Phi} \text{Proj}(\mathcal{S}')$ , où  $\Phi = \text{Proj}(\varphi)$ , on en conclut que  $\Phi$  est aussi une *immersion fermée surjective*. Mais cela entraîne que  $\Phi$  est un *isomorphisme*; en effet, on peut se ramener au cas où  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine,  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ ,  $\mathcal{S}' = \widetilde{S}'$ , où  $S$  est une  $A$ -algèbre graduée,  $S'$  une sous-algèbre graduée de  $S$ . Pour tout élément homogène  $t \in S'$ ,  $S'_{(t)}$  est alors un sous-anneau de  $S_{(t)}$ ; si on revient à la définition de  $\text{Proj}(\varphi)$  (2.8.1), on voit qu'on est ramené à prouver que si  $B'$  est un sous-anneau d'un anneau  $B$ , et si le morphisme  $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(B')$  correspondant à l'injection canonique  $B' \rightarrow B$  est une immersion fermée, ce morphisme est nécessairement un *isomorphisme*; mais cela résulte de (I, 4.2.3). On a en outre  $\Phi^*(\mathcal{O}_{P'}(n)) = \mathcal{O}_P(n)$  (3.5.2, (ii) et 3.5.4), donc  $r^*(\mathcal{O}_{P'}(n))$  est isomorphe à  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  (4.6.3). Posons  $\mathcal{S}'' = \mathcal{S}'^{(d)}$ , de sorte (3.1.8, (i)) que  $X$  s'identifie canoniquement à  $P'' = \text{Proj}(\mathcal{S}'')$  et  $\mathcal{L}'' = \mathcal{L}^{\otimes d}$  à  $\mathcal{O}_{P''}(1)$  (3.2.9, (ii)).

Cela étant, si  $C'' = \text{Spec}(\mathcal{S}'')$ ,  $\mathcal{S}_{P''}^{\geq 0} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_{P''}(n)$  s'identifie à  $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}''^{\otimes n}$  donc  $C_{P''} = \text{Spec}(\mathcal{S}_{P''}^{\geq 0})$  à  $\mathbf{V}(\mathcal{L}'')$ ; on sait d'autre part (8.7.3) que  $C_{P''}$  est  $C''$ -isomorphe à  $\text{Proj}(\mathcal{S}'^{\geq 0})$ ; par définition de  $\mathcal{S}''$ ,  $\mathcal{S}''^{\geq 0}$  est engendré par  $\mathcal{S}_1''^{\geq 0}$  et  $\mathcal{S}_1''^{\geq 0}$  est de type fini sur  $\mathcal{S}_0''^{\geq 0} = \mathcal{S}''$  (8.2.10, (i) et (iii)), donc  $\text{Proj}(\mathcal{S}'^{\geq 0})$  est *projectif* sur  $C''$  (5.5.1). Considérons alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V}(\mathcal{L}) & \xrightarrow{g} & \text{Spec}(\mathcal{S}) = C \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ \mathbf{V}(\mathcal{L}'') & \xrightarrow{g''} & \text{Spec}(\mathcal{S}'') = C'' \end{array}$$

(8.8.4.1)

où  $g$  et  $g''$  correspondent par (1.5.6) aux  $f$ -morphismes canoniques

$$\mathcal{S} \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}'' \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}''^{\otimes n}$$

(3.3.2.3) (voir (8.8.5) ci-dessous),  $v$  au morphisme d'inclusion  $\mathcal{S}'' \rightarrow \mathcal{S}$ , et  $u$  au morphisme d'inclusion  $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes nd} \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$ ; il est immédiat (3.3.2) que ce diagramme est commutatif. Nous venons de voir que  $g''$  est un morphisme projectif; d'autre part,  $u$  est un morphisme *fini*. En effet, la question étant locale sur  $X$ , on peut supposer que  $X$  est affine d'anneau  $A$  et que  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ ; tout revient alors à remarquer que l'anneau  $A[T]$  est un module de type fini sur son sous-anneau  $A[T^d]$  ( $T$  indéterminée). Comme  $Y$  est un schéma quasi-compact, et que  $C''$  est affine sur  $Y$ ,  $C''$  est aussi un schéma quasi-compact,

et par suite  $g''$  ou est un morphisme projectif (5.5.5, (ii)); par la commutativité de (8.8.4.1), il en est de même de  $v \circ g$ , et comme  $v$  est affine, donc séparé, on en conclut finalement que  $g$  est projectif (5.5.5, (v)).

(8.8.5) Reprenons la situation de (8.8.1). Nous allons voir qu'on peut donner du morphisme  $g : V(\mathcal{L}) \rightarrow C$  une autre définition valable pour tout  $\mathcal{O}_X$ -module inversible  $\mathcal{L}$  (non nécessairement ample). Pour cela, considérons le  $f$ -morphisme

$$(8.8.5.1) \quad \tau^b : \mathcal{S} \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$$

correspondant au morphisme  $\tau$  de (8.8.1.2). On en déduit (1.5.6) un morphisme  $g' : V \rightarrow C$  tel que, si  $\pi : V \rightarrow X$  et  $\psi : C \rightarrow Y$  sont les morphismes structuraux, les diagrammes

$$(8.8.5.2) \quad \begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\pi} & V \\ f \downarrow & & \downarrow g' \\ Y & \xleftarrow{\psi} & C \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & V \\ f \downarrow & & \downarrow g' \\ Y & \xrightarrow{\epsilon} & C \end{array}$$

soient commutatifs (8.5.1.2 et 8.5.1.3). Nous allons montrer que (si l'on suppose  $\mathcal{L}$  ample pour  $f$ ) les morphismes  $g$  et  $g'$  sont identiques.

En effet, la question est locale sur  $Y$ , et on peut donc supposer que  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine, et (en raison de (8.8.1.3)) identifier  $X$  à un ouvert de  $P = \text{Proj}(S)$ , où  $S = A \oplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ ; on déduit alors de (8.8.1.4) que  $\Gamma(X, \mathcal{O}_P(n)) = \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ . Tenant compte de la définition de  $h = \text{Spec}(\alpha)$ , où  $\alpha$  est le  $p$ -morphisme canonique  $\widetilde{S} \rightarrow \mathcal{S}_P^{\geq 0}$  (8.6.1.2), il faut vérifier que la restriction à  $X$  de  $\alpha^* : p^*(\widetilde{S}) \rightarrow \mathcal{S}_P^{\geq 0}$  est identique à  $\tau$ . Compte tenu de (0, 4.4.3), on est ramené à voir que si on compose l'homomorphisme canonique  $\alpha_n : S_n \rightarrow \Gamma(P, \mathcal{O}_P(n))$  avec l'homomorphisme de restriction  $\Gamma(P, \mathcal{O}_P(n)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_P(n)) = \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ , on obtient l'identité pour tout  $n > 0$ ; or, cela résulte aussitôt de la définition de l'algèbre  $S$  et de celle de  $\alpha_n$  (2.6.2).

*Proposition (8.8.6).* — Supposons (avec les notations de (8.8.5)) que si l'on pose  $f = (f_0, \lambda)$ , l'homomorphisme  $\lambda : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* (\mathcal{O}_X)$  soit bijectif; alors :

- (i) Si on pose  $g = (g_0, \mu)$ ,  $\mu : \mathcal{O}_C \rightarrow g_* (\mathcal{O}_V)$  est un isomorphisme.
- (ii) Si  $X$  est intègre (resp. localement intègre et normal),  $C$  est intègre (resp. normal).

En effet, le  $f$ -morphisme  $\tau^b$  est alors un isomorphisme

$$\tau^b : \mathcal{S} = \psi_* (\mathcal{O}_C) \rightarrow f_* (\pi_* (\mathcal{O}_V)) = \psi_* (g_* (\mathcal{O}_V))$$

et le  $Y$ -morphisme  $g$  peut être considéré comme celui pour lequel l'homomorphisme  $\mathcal{A}(g)$  (1.1.2) est égal à  $\tau^b$ . Pour voir que  $\mu$  est un isomorphisme de  $\mathcal{O}_C$ -Modules, il suffit (1.4.2) de voir que  $\mathcal{A}(\mu) : \psi_* (\mathcal{O}_C) \rightarrow \psi_* (g_* (\mathcal{O}_V))$  est un isomorphisme. Mais par définition (1.1.2), on a  $\mathcal{A}(\mu) = \mathcal{A}(g)$ , d'où la conclusion de (i).

Pour prouver (ii), on peut se ramener au cas où  $Y$  est affine, donc  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ , avec

$S = \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ ; l'hypothèse que  $X$  est intègre entraîne que l'anneau  $S$  est intègre (**I**, 7.4.4), donc il en est de même de  $C$  (**I**, 5.1.4). Pour démontrer que  $C$  est normal, nous utiliserons le lemme suivant :

*Lemme (8.8.6.1).* — *Soit  $Z$  un préschéma intègre normal. Alors l'anneau  $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$  est intègre et intégralement clos.*

En effet, il résulte de (**I**, 8.2.1.1) que  $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$  est l'intersection, dans le corps des fonctions rationnelles  $R(Z)$ , des anneaux intégralement clos  $\mathcal{O}_z$  pour  $z \in Z$ .

Cela étant, montrons d'abord que  $V$  est *localement intègre et normal*; on peut pour cela se borner au cas où  $X = \text{Spec}(A)$  est affine, d'anneau  $A$  intègre et intégralement clos (6.3.8), et où  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ . Comme alors  $V = \text{Spec}(A[T])$  et que  $A[T]$  est intègre et intégralement clos ([24], p. 99), cela établit notre assertion. D'autre part, pour tout ouvert affine  $U$  de  $C$ ,  $g^{-1}(U)$  est quasi-compact puisque le morphisme  $g$  est quasi-compact; puisque  $V$  est localement intègre, les composantes connexes de  $g^{-1}(U)$  sont des préschémas intègres ouverts dans  $g^{-1}(U)$ , donc en nombre fini, et comme  $V$  est normal, ces préschémas sont normaux (6.3.8). Alors  $\Gamma(U, \mathcal{O}_V)$ , qui est égal à  $\Gamma(g^{-1}(U), \mathcal{O}_V)$  en vertu de (i), est composé direct d'un nombre fini d'anneaux intègres et intégralement clos (8.8.6.1), ce qui montre que  $C$  est normal (6.3.4).

### 8.9. Le critère d'amplitude de Grauert : énoncé.

Nous nous proposons de montrer que les propriétés démontrées dans (8.8.2) caractérisent les  $\mathcal{O}_X$ -Modules amples pour  $f$ , et de façon précise, de démontrer le critère suivant :

*Théorème (8.9.1)* (critère de Grauert). — *Soient  $Y$  un préschéma,  $p : X \rightarrow Y$  un morphisme séparé et quasi-compact,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible. Pour que  $\mathcal{L}$  soit ample relativement à  $p$ , il faut et il suffit qu'il existe un  $Y$ -préschéma  $C$ , une  $Y$ -section  $\epsilon : Y \rightarrow C$  de  $C$ , et un  $Y$ -morphisme  $q : \mathbf{V}(\mathcal{L}) \rightarrow C$ , ayant les propriétés suivantes :*

(i) *Le diagramme*

$$(8.9.1.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & \mathbf{V}(\mathcal{L}) \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ Y & \xrightarrow{\epsilon} & C \end{array}$$

où  $j$  est la section nulle du fibré vectoriel  $\mathbf{V}(\mathcal{L})$ , est commutatif.

(ii) *La restriction de  $q$  à  $\mathbf{V}(\mathcal{L}) - j(X)$  est une immersion ouverte quasi-compacte*

$$\mathbf{V}(\mathcal{L}) - j(X) \rightarrow C$$

dont l'image ne rencontre pas  $\epsilon(Y)$ .

On notera que si  $C$  est séparé sur  $Y$ , on peut, dans la condition (ii), supprimer l'hypothèse que l'immersion ouverte est quasi-compacte; pour voir en effet que cette dernière propriété est conséquence des autres conditions, on peut se borner au cas où  $Y$  est affine, et l'assertion découle alors de (**I**, 5.5.1, (i) et 5.5.10). On peut aussi supprimer

la même hypothèse lorsque l'on suppose  $X$  noethérien, car alors  $V$  est aussi noethérien et l'assertion découle cette fois de (I, 6.3.5).

*Corollaire (8.9.2). — Si le morphisme  $p : X \rightarrow Y$  est propre, on peut dans l'énoncé de (8.9.1), supposer  $q$  propre, et remplacer « immersion ouverte » par « isomorphisme ».*

De façon imagée, on peut dire (lorsque  $p : X \rightarrow Y$  est *propre*) que  $\mathcal{L}$  est *ample relativement à p* si et seulement si on peut « contracter » la section nulle du fibré vectoriel  $\mathbf{V}(\mathcal{L})$  en le préschéma de base  $Y$ . Un cas particulier important est celui où  $Y$  est le spectre d'un corps, et où l'opération de « contraction » consiste donc à contracter la section nulle de  $\mathbf{V}(\mathcal{L})$  en un seul point.

(8.9.3) La nécessité des conditions de (8.9.1) et le corollaire (8.9.2) découlent aussitôt de (8.8.2) et (8.8.4).

Pour démontrer la suffisance de (8.9.1), nous considérerons une situation un peu plus générale. Pour cela, posons (avec les notations de (8.8.2))

$$\mathcal{S}' = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$$

et

$$V = \mathbf{V}(\mathcal{L}) = \text{Spec}(\mathcal{S}').$$

Le sous-préschéma fermé  $j(X)$ , section nulle de  $\mathbf{V}(\mathcal{L})$ , est défini par le faisceau quasi-cohérent d'idéaux  $\mathcal{J} = (\mathcal{S}'_+)^{\sim}$  de  $\mathcal{O}_V$  (1.4.10). Ce  $\mathcal{O}_V$ -Module est *inversible*, car la question est locale sur  $X$ , et cela revient à remarquer que l'idéal  $TA[T]$  dans un anneau de polynômes  $A[T]$  est un  $A[T]$ -module libre monogène. En outre, il est immédiat (toujours parce que la question est locale sur  $X$ ) que

$$\mathcal{L} = j^*(\mathcal{J})$$

et

$$j_*(\mathcal{L}) = \mathcal{J}/\mathcal{J}^2.$$

D'autre part, si

$$\pi : \mathbf{V}(\mathcal{L}) \rightarrow X$$

est le morphisme structural, on a  $\pi_*(\mathcal{J}) = \mathcal{S}'_+$  et  $\pi_*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2) = \mathcal{L}$ ; on a donc deux homomorphismes canoniques  $\mathcal{L} \rightarrow \pi_*(\mathcal{J}) \rightarrow \mathcal{L}$ , le premier étant l'injection canonique  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{S}'_+$ , le second la projection canonique de  $\mathcal{S}'_+$  sur  $\mathcal{S}'_1 = \mathcal{L}$ , et leur composé est l'identité. On peut d'ailleurs plonger canoniquement  $\pi_*(\mathcal{J}) = \mathcal{S}'_+ = \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{L}^{\otimes n}$  dans le produit  $\prod_{n \geq 1} \mathcal{L}^{\otimes n} = \varprojlim_n \pi_*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+1})$  (puisque  $\pi_*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+1}) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus \mathcal{L}^{\otimes n}$ ), et on a donc encore deux homomorphismes canoniques

$$(8.9.3.1) \quad \mathcal{L} \rightarrow \varprojlim \pi_*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+1}) \rightarrow \mathcal{L}$$

dont le composé est l'identité.

Cela étant, la généralisation de (8.9.1) que nous allons prouver est la suivante :

*Proposition (8.9.4). — Soient  $Y$  un préschéma,  $V$  un  $Y$ -préschéma,  $X$  un sous-préschéma fermé de  $V$ , défini par un Idéal  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{O}_V$ , qui est un  $\mathcal{O}_V$ -Module inversible; si  $j : X \rightarrow V$  est*

l'injection canonique, on pose  $\mathcal{L} = j^*(\mathcal{J}) = \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{O}_X$ , de sorte que  $j_*(\mathcal{L}) = \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ . On suppose que le morphisme structural  $p : X \rightarrow Y$  est séparé et quasi-compact, et que les conditions suivantes sont remplies :

(i) Il existe un  $Y$ -morphisme de type fini  $\pi : V \rightarrow X$  tel que  $\pi \circ j = i_X$ , et par suite  $\pi_*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2) = \mathcal{L}$ .

(ii) Il existe un homomorphisme de  $\mathcal{O}_X$ -Modules  $\varphi : \mathcal{L} \rightarrow \lim_{\leftarrow} \pi_*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+1})$  tel que le composé

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\varphi} \lim_{\leftarrow} \pi_*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+1}) \xrightarrow{\alpha} \pi_*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2) = \mathcal{L}$$

(où  $\alpha$  est l'homomorphisme canonique) soit l'identité.

(iii) Il existe un  $Y$ -préschéma  $C$ , une  $Y$ -section  $\varepsilon$  de  $C$  et un  $Y$ -morphisme  $q : V \rightarrow C$  tels que le diagramme

$$(8.9.4.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & V \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ Y & \xrightarrow{\varepsilon} & C \end{array}$$

soit commutatif.

(iv) La restriction de  $q$  à  $W = V - j(X)$  est une immersion ouverte quasi-compacte dans  $C$ , dont l'image ne rencontre pas  $\varepsilon(Y)$ .

Dans ces conditions,  $\mathcal{L}$  est ample relativement à  $p$ .

### 8.10. Le critère d'amplitude de Grauert : démonstration.

**Lemme (8.10.1).** — Soient  $\pi : V \rightarrow X$  un morphisme,  $j : X \rightarrow V$  une  $X$ -section de  $V$  qui soit une immersion fermée,  $\mathcal{J}$  l'Idéal quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_V$  définissant le sous-préschéma fermé de  $V$  associé à  $j$ .

(i) Pour tout  $n \geq 0$ ,  $\pi_*(\mathcal{O}_V/\mathcal{J}^{n+1})$  et  $\pi_*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+1})$  sont des  $\mathcal{O}_X$ -Modules quasi-cohérents, et on a  $\pi_*(\mathcal{O}_V/\mathcal{J}) = \mathcal{O}_X$ ,  $\pi_*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2) = j^*(\mathcal{J})$ .

(ii) Si  $X = \{\xi\} = \text{Spec}(k)$ , où  $k$  est un corps,  $\lim_{\leftarrow} \pi_*(\mathcal{O}_V/\mathcal{J}^{n+1})$  est isomorphe au séparé complété de l'anneau local  $\mathcal{O}_{j(\xi)}$  pour la topologie  $\mathfrak{m}_{j(\xi)}$ -préadique.

(iii) Supposons que  $\mathcal{J}$  soit un  $\mathcal{O}_V$ -Module inversible (ce qui entraîne que

$$\mathcal{L} = j^*(\mathcal{J}) = \pi_*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$$

est un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible) et qu'il existe un homomorphisme  $\varphi : \mathcal{L} \rightarrow \lim_{\leftarrow} \pi_*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+1})$  tel que le composé  $\mathcal{L} \xrightarrow{\varphi} \lim_{\leftarrow} \pi_*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+1}) \xrightarrow{\alpha} \pi_*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$  ( $\alpha$  homomorphisme canonique) soit l'identité. Si on pose  $\mathcal{S} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$ , on déduit alors canoniquement de  $\varphi$  un isomorphisme de  $\mathcal{O}_X$ -Algèbres du complété  $\hat{\mathcal{S}}$  de  $\mathcal{S}$  relatif à sa filtration canonique (complété qui est isomorphe au produit  $\prod \mathcal{L}^{\otimes n}$ ) sur  $\lim_{\leftarrow} \pi_*(\mathcal{O}_V/\mathcal{J}^{n+1})$ .

Notons en premier lieu que le support du  $\mathcal{O}_V$ -Module  $\mathcal{O}_V/\mathcal{J}^{n+1}$  est  $j(X)$  et celui de  $\mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+1}$  est contenu dans  $j(X)$ . Dans le cas (ii),  $j(X)$  est un point fermé  $j(\xi)$  de  $V$ ,

et par définition  $\pi_*(\mathcal{O}_V/\mathcal{J}^{n+1})$  est la fibre de  $\mathcal{O}_V/\mathcal{J}^{n+1}$  au point  $j(\xi)$ , c'est-à-dire, en posant  $C = \mathcal{O}_{j(\xi)}$  et en désignant par  $\mathfrak{m}$  l'idéal maximal de  $C$ , le  $C$ -module  $C/\mathfrak{m}^{n+1}$ ; l'assertion (ii) est alors évidente.

Pour démontrer (i), notons que la question est locale sur  $X$ ; on peut donc se restreindre au cas où  $X$  est affine. Soit  $U$  un ouvert affine dans  $V$ ;  $j(X) \cap U$  est un ouvert affine dans  $j(X)$ , donc  $U_0 = \pi(j(X) \cap U)$ , qui lui est isomorphe, un ouvert affine dans  $X$ ; pour tout ouvert affine  $W_0 \subset U_0$  dans  $X$ ,  $W = \pi^{-1}(W_0) \cap U$  est un ouvert affine dans  $V$ , puisque  $X$  est un schéma (I, 5.5.10); en particulier  $U' = U \cap \pi^{-1}(U_0)$  est un ouvert affine dans  $V$  et on a évidemment  $\pi(U') = U_0$  et  $j(U_0) = j(X) \cap U$ . Cela étant, par définition  $\Gamma(W_0, \pi_*(\mathcal{O}_V/\mathcal{J}^{n+1})) = \Gamma(\pi^{-1}(W_0), \mathcal{O}_V/\mathcal{J}^{n+1})$ ; mais comme tout point de  $\pi^{-1}(W_0)$  n'appartenant pas à  $j(W_0)$  a un voisinage ouvert dans  $\pi^{-1}(W_0)$  ne rencontrant pas  $j(X)$  et dans lequel  $\mathcal{O}_V/\mathcal{J}^{n+1}$  est donc nul, il est clair que les sections de  $\mathcal{O}_V/\mathcal{J}^{n+1}$  au-dessus de  $\pi^{-1}(W_0)$  et au-dessus de  $W$  se correspondent biunivoquement. Autrement dit, si  $\pi'$  est la restriction de  $\pi$  à  $U'$ , les  $(\mathcal{O}_X|U_0)$ -Modules  $\pi_*(\mathcal{O}_V/\mathcal{J}^{n+1})|U_0$  et  $\pi'_*((\mathcal{O}_V/\mathcal{J}^{n+1})|U')$  sont identiques. Comme  $U'$  et  $U_0$  sont affines et que les  $U_0$  recouvrent  $X$ , on en conclut (I, 1.6.3) que  $\pi_*(\mathcal{O}_V/\mathcal{J}^{n+1})$  est quasi-cohérent, et la démonstration est identique pour  $\pi_*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^{n+1})$ .

Pour démontrer enfin (iii), notons que  $\mathcal{S}$  n'est autre que  $\mathbf{S}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L})$ ; on déduit donc canoniquement de  $\varphi$  un homomorphisme de  $\mathcal{O}_X$ -Algèbres  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \varprojlim \pi_*(\mathcal{O}_V/\mathcal{J}^{n+1})$  (1.7.4); en outre, cet homomorphisme applique  $\mathcal{L}^{\otimes n}$  dans  $\varprojlim_m \pi_*(\mathcal{J}^n/\mathcal{J}^{n+1})$ , donc est continu pour les topologies considérées, et se prolonge bien par suite en un homomorphisme  $\hat{\psi} : \mathcal{S} \rightarrow \varprojlim \pi_*(\mathcal{O}_V/\mathcal{J}^{n+1})$ . Pour voir qu'il s'agit d'un isomorphisme, on peut, comme dans la démonstration de (i), se réduire au cas où  $X = \text{Spec}(A)$  et  $V = \text{Spec}(B)$  sont affines, avec  $\mathcal{J} = \tilde{\mathcal{J}}$ , où  $\tilde{\mathcal{J}}$  est un idéal de  $B$ ; il correspond à  $\pi$  une injection  $A \rightarrow B$ , identifiant  $A$  à un sous-anneau de  $B$  supplémentaire de  $\tilde{\mathcal{J}}$ , et  $\mathcal{L}$  (resp.  $\pi_*(\mathcal{O}_V/\mathcal{J}^{n+1})$ ) est le  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent associé au  $A$ -module  $L = \tilde{\mathcal{J}}/\tilde{\mathcal{J}}^2$  (resp.  $B/\tilde{\mathcal{J}}^{n+1}$ ). Comme  $\mathcal{J}$  est un  $\mathcal{O}_V$ -Module *inversible*, on peut en outre supposer que  $\tilde{\mathcal{J}} = Bt$ , où  $t$  est non diviseur de  $0$  dans  $B$ . De la relation  $B = A \oplus Bt$  on déduit alors, pour tout  $n > 0$ ,

$$B = A \oplus At \oplus At^2 \oplus \dots \oplus At^n \oplus Bt^{n+1}$$

donc on a un  $A$ -isomorphisme canonique de l'anneau de séries formelles  $A[[T]]$  sur  $C = \varprojlim B/\tilde{\mathcal{J}}^{n+1}$  faisant correspondre  $t$  à  $T$ . D'autre part, on a  $L = A\bar{t}$ , où  $\bar{t}$  est la classe de  $t$  mod.  $Bt^2$ , et l'homomorphisme  $\varphi$  applique par hypothèse  $\bar{t}$  sur un élément  $t' \in C$  congru à  $t$  mod.  $Ct^2$ . On en déduit par récurrence sur  $n$  que

$$A \oplus At' \oplus \dots \oplus At'^n \oplus Ct^{n+1} = A \oplus At \oplus \dots \oplus At^n \oplus Ct^{n+1}$$

ce qui prouve que l'homomorphisme  $\hat{\psi}$  correspond bien à un isomorphisme de  $\prod_{n \geq 0} L^{\otimes n}$  sur  $C$ .

*Lemme (8.10.2).* — *Sous les hypothèses de (8.10.1), soit  $g : X' \rightarrow X$  un morphisme,*

soit  $V' = V \times_X X'$ , et soient  $\pi' : V' \rightarrow X'$ ,  $g' : V' \rightarrow V$  les projections canoniques, de sorte qu'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{g'} & V' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ X & \xleftarrow[g]{} & X' \end{array}$$

Alors  $j' = j \times_{X'} \iota_{X'}$  est une  $X'$ -section de  $V'$  qui est une immersion fermée, et  $\mathcal{J}' = g'^*(\mathcal{J})\mathcal{O}_{V'}$  est l'Idéal quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_{V'}$  définissant le sous-préschéma fermé de  $V'$  associé à  $j'$ . En outre, on a  $\pi'_*(\mathcal{O}_{V'})/\mathcal{J}'^{n+1} = g^*(\pi_*(\mathcal{O}_V)/\mathcal{J}^{n+1})$ . Enfin,  $\mathcal{J}'$  est un  $\mathcal{O}_{V'}$ -Module canoniquement isomorphe à  $g^*(\mathcal{J})$  et est en particulier inversible si  $\mathcal{J}$  est un  $\mathcal{O}_V$ -Module inversible.

Le fait que  $j'$  est une immersion fermée découle de (I, 4.3.1), et c'est une  $X'$ -section de  $V'$  par fonctorialité de l'extension du préschéma de base. En outre, si  $Z$  (resp.  $Z'$ ) est le sous-préschéma fermé de  $V$  (resp.  $V'$ ) associé à  $j$  (resp.  $j'$ ), on a  $Z' = g'^{-1}(Z)$  (I, 4.3.1), et la seconde assertion résulte alors de (I, 4.4.5). Pour démontrer les autres assertions, on voit comme dans (8.10.1) qu'on peut se ramener au cas où  $X$ ,  $V$  et  $X'$  (donc aussi  $V'$ ) sont affines; gardons les notations de la démonstration de (8.10.1) et soit  $X' = \text{Spec}(A')$ . On a alors  $V' = \text{Spec}(B')$  où  $B' = B \otimes_A A'$ , et  $\mathcal{J}' = \widetilde{\mathfrak{J}}$ , avec  $\mathfrak{J}' = \text{Im}(\mathfrak{J} \otimes_A A')$ . On a donc  $B'/\mathfrak{J}'^{n+1} = (B/\mathfrak{J}^{n+1}) \otimes_A A'$ ; en outre, comme  $\mathfrak{J}$  est facteur direct (en tant que  $A$ -module) de  $B$ ,  $\mathfrak{J} \otimes_A A'$  est facteur direct (en tant que  $A'$ -module) de  $B'$ , donc s'identifie canoniquement à  $\mathfrak{J}'$ .

**Corollaire (8.10.3).** — Supposons vérifiées les hypothèses de (8.10.1) et supposons en outre que  $\pi$  soit de type fini et que  $\mathcal{J}$  soit un  $\mathcal{O}_V$ -Module inversible. Alors, pour tout  $x \in X$ , l'anneau local au point  $j(x)$  de la fibre  $\pi^{-1}(x)$  est un anneau régulier (donc intègre) de dimension 1, dont le complété est isomorphe à l'anneau de séries formelles  $\mathbf{k}(x)[[T]]$  ( $T$  indéterminée); en outre il n'existe qu'une seule composante irréductible de  $\pi^{-1}(x)$  contenant  $j(x)$ .

Comme  $\pi^{-1}(x) = V \times_X \text{Spec}(\mathbf{k}(x))$ , on est ramené par (8.10.2) au cas où  $X$  est le spectre d'un corps  $K$ . Comme  $\pi$  est de type fini (I, 6.3.4, (iv)),  $\mathcal{O}_{j(x)}$  est alors un anneau local noethérien, donc séparé pour la topologie  $\mathfrak{m}_{j(x)}$ -préadique (0, 7.3.5); il résulte de (8.10.1, (ii) et (iii)) que le complété de cet anneau est isomorphe à  $K[[T]]$ , et par suite  $\mathcal{O}_{j(x)}$  est régulier et de dimension 1 ([1], p. 17-01, th. 1); enfin, puisque  $\mathcal{O}_{j(x)}$  est intègre,  $j(x)$  n'appartient qu'à une seule des composantes irréductibles (en nombre fini) de  $V$  (I, 5.1.4).

**Corollaire (8.10.4).** — Supposons vérifiées les hypothèses de (8.10.1) et en outre supposons que  $\mathcal{J}$  soit un  $\mathcal{O}_V$ -Module inversible. Soit  $W = V - j(X)$ ; pour tout Idéal quasi-cohérent  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{O}_X$ , posons  $\mathcal{K}_V = \pi^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_V$  et  $\mathcal{K}_W = \mathcal{K}_V|W$ . Alors  $\mathcal{K}_V$  est le plus grand Idéal quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_V$  dont la restriction à  $W$  soit  $\mathcal{K}_W$ .

En effet, on voit comme dans (8.10.1) que la question est locale sur  $X$  et sur  $V$ ; on peut donc garder les notations de la démonstration de (8.10.1), avec  $\mathfrak{J} = Bt$ , où  $t$  n'est pas diviseur de 0 dans  $B$ . En outre, on a  $W = \text{Spec}(B_t)$  et  $\mathcal{K} = \widetilde{\mathfrak{R}}$ , où  $\mathfrak{R}$  est un idéal de  $A$ ; d'où  $\pi^*(\mathcal{K})\mathcal{O}_V = (\mathfrak{R}.B)^\sim$  (I, 1.6.9),  $\mathcal{K}_W = (\mathfrak{R}.B_t)^\sim$ , et le plus grand idéal

de  $B$  dont l'image canonique dans  $B_t$  soit  $\mathfrak{K}.B_t$  est l'image réciproque de  $\mathfrak{K}.B_t$ , c'est-à-dire l'ensemble des  $s \in B$  tels que pour un entier  $n > 0$ , on ait  $t^n s \in \mathfrak{K}.B$ . Il faut montrer que cette dernière relation entraîne  $s \in \mathfrak{K}.B$ , ou encore que l'image canonique de  $t$  n'est pas diviseur de  $o$  dans  $B/\mathfrak{K}B = (A/\mathfrak{K}) \otimes_A B$ , ce qui résulte de (8.10.2) appliqué à  $X' = \text{Spec}(A/\mathfrak{K})$ .

*Corollaire (8.10.5).* — *Supposons vérifiées les hypothèses de (8.10.3); soient  $W = V - j(X)$ ,  $x$  un point de  $X$ ,  $\mathcal{K}$  un Idéal quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_X$ ,  $z$  le point générique de la composante irréductible de  $\pi^{-1}(x)$  contenant  $j(x)$  (8.10.3).*

(i) *Soit  $g$  une section de  $\mathcal{O}_V$  au-dessus de  $V$  telle que  $g|W$  soit une section de  $\mathcal{K}_W$  au-dessus de  $W$  (notations de (8.10.4)). Alors  $g$  est une section de  $\mathcal{K}_V$ ; si de plus  $g(z) \neq o$ , et si, pour tout entier  $m > 0$ , on désigne par  $g_m^x$  le germe au point  $x$  de l'image canonique  $g_m$  de  $g$  dans  $\Gamma(X, \pi_*(\mathcal{O}_V/\mathcal{J}^{m+1}))$ , alors il existe un entier  $m > 0$  tel que l'image de  $g_m^x$  dans*

$$(\pi_*(\mathcal{O}_V/\mathcal{J}^{m+1}))_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathbf{k}(x)$$

*soit  $\neq o$ .*

(ii) *Supposons en outre que les conditions de (8.10.1, (iii)) soient remplies. Alors, s'il existe une section  $g$  de  $\mathcal{K}_V$  au-dessus de  $V$  telle que  $g(z) \neq o$ , il existe un entier  $n \geq 0$  et une section  $f$  de  $\mathcal{K}.\mathcal{L}^{\otimes n} = \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n} \subset \mathcal{L}^{\otimes n}$  telle que  $f(x) \neq o$ . Si  $g$  est une section de  $\mathcal{J}$ , on peut prendre  $n > 0$ .*

(i) Comme l'Idéal de  $\mathcal{O}_W$  engendré par  $g|W$  est contenu dans  $\mathcal{K}_W$  par hypothèse, l'Idéal de  $\mathcal{O}_V$  engendré par  $g$  est contenu dans  $\mathcal{K}_V$  par (8.10.4), autrement dit  $g$  est une section de  $\mathcal{K}_V$ . Pour démontrer la seconde assertion de (i), on peut encore supposer  $X$  et  $V$  affines et conserver les notations de (8.10.1); la fibre  $\pi^{-1}(x)$  est alors affine d'anneau  $B' = B \otimes_A \mathbf{k}(x)$ , et il existe dans  $B'$  un élément  $t'$  non diviseur de  $o$  tel que  $B' = \mathbf{k}(x) \oplus B't'$ . Comme  $j(x)$  est une spécialisation de  $z$  et que  $g(z) \neq o$ , on a nécessairement  $g_{(j)x} \neq o$ . Mais  $\mathcal{O}_{j(x)}$  est un anneau local séparé (8.10.3), qui se plonge donc dans son complété, et l'image de  $g$  dans ce complété n'est par suite pas nulle. Or, ce complété est isomorphe à  $\varprojlim_n (B'/B't'^{n+1})$  (8.10.3); si  $g' = g \otimes_{\mathbf{k}(x)} B'$ , il existe donc un entier  $m$  tel que  $g' \notin B't'^{m+1}$ , ou encore l'image  $g'_m$  de  $g'$  dans  $B'/B't'^{m+1}$  n'est pas nulle. Mais comme  $g'_m$  n'est autre que l'image de  $g_m^x$ , notre assertion est démontrée.

(ii) En vertu de (8.10.1, (iii))  $\pi_*(\mathcal{O}_V/\mathcal{J}^{m+1})$  est isomorphe à la somme directe des  $\mathcal{L}^{\otimes k}$  pour  $0 \leq k \leq m$ ; désignons par  $f_k$  la section de  $\mathcal{L}^{\otimes k}$  au-dessus de  $X$ , composante de l'élément de  $\bigoplus_{k=0}^m \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes k})$  qui correspond à  $g_m$  par cet isomorphisme. Choisissant  $m$  comme dans (i), il y a donc un indice  $k$  tel que  $f_k(x) \neq o$  d'après (i). Pour voir que  $f_k$  est une section de  $\mathcal{K}\mathcal{L}^{\otimes k}$ , il suffit de considérer comme ci-dessus le cas où  $X$  et  $V$  sont affines, et cela résulte aussitôt alors de ce que  $g \in \mathfrak{K}.B$  (notations de (8.10.4)). La dernière assertion résulte de ce que l'hypothèse  $g \in \Gamma(V, \mathcal{J})$  entraîne  $f_0 = o$ .

**(8.10.6)** *Démonstration de (8.9.4).* — La question est locale sur  $Y$  (4.6.4); comme  $\varepsilon$  est une  $Y$ -section, on peut donc remplacer  $C$  par un voisinage ouvert affine  $U$  d'un point de  $\varepsilon(Y)$  tel que  $\varepsilon(Y) \cap U$  soit fermé dans  $U$ . Autrement dit, on peut supposer  $C$  affine, et  $Y$  sous-préschéma fermé de  $C$  (donc affine) défini par un faisceau quasi-

cohérent  $\mathcal{I}$  d'idéaux de  $\mathcal{O}_C$ . Comme  $p$  est séparé et quasi-compact,  $X$  est alors un schéma quasi-compact, et on est ramené à prouver que  $\mathcal{L}$  est *ample* (4.6.4). En vertu du critère (4.5.2, a)), on doit donc prouver qui ce suit : pour tout Idéal quasi-cohérent  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{O}_X$  et tout point  $x \in X$  n'appartenant pas au support de  $\mathcal{O}_X/\mathcal{K}$ , il existe un entier  $n > 0$  et une section  $f$  de  $\mathcal{K} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$  au-dessus de  $X$  telle que  $f(x) \neq 0$ .

Pour cela, posons

$$\mathcal{K}_V = \pi^*(\mathcal{K}) \mathcal{O}_V$$

et

$$\mathcal{K}_W = \mathcal{K}_V|W, \text{ où } W = V - j(X);$$

comme la restriction de  $q$  à  $W$  est une immersion quasi-compacte dans  $C$ , il résulte de (I, 9.4.2) que  $\mathcal{K}_W$  est la restriction à  $W$  d'un Idéal quasi-cohérent  $\mathcal{K}'_V$  de  $\mathcal{O}_V$ , de la forme

$$\mathcal{K}'_V = q^*(\mathcal{K}_C) \mathcal{O}_V$$

où  $\mathcal{K}_C$  est un Idéal quasi-cohérent de  $\mathcal{O}_C$ . En outre, comme par hypothèse  $q^{-1}(Y) \subset j(X)$  et que  $Y$  est défini par l'Idéal  $\mathcal{I}$ , la restriction à  $W$  de  $q^*(\mathcal{I}) \mathcal{O}_V$  est identique à celle de  $\mathcal{O}_V$ , donc  $\mathcal{K}_W$  est aussi la restriction à  $W$  de  $q^*(\mathcal{I}\mathcal{K}_C) \mathcal{O}_V$ , et l'on peut donc supposer que l'on a  $\mathcal{K}_C \subset \mathcal{I}$ , d'où

$$(8.10.6.1) \quad \mathcal{K}'_V \subset q^*(\mathcal{I}) \mathcal{O}_V \subset \mathcal{I}$$

compte tenu de (I, 4.4.6) et de la commutativité de (8.9.4.1). En outre, on déduit de (8.10.4) que l'on a

$$(8.10.6.2) \quad \mathcal{K}'_V \subset \mathcal{K}_V.$$

Cela étant, il résulte de (8.10.3) que  $j(x)$  appartient à une seule composante irréductible de  $\pi^{-1}(x)$ ; soit  $z$  le point générique de cette composante, et posons  $z' = q(z)$ . En vertu de (8.10.5), la démonstration sera achevée (compte tenu de (8.10.6.1) et (8.10.6.2)) si nous prouvons l'existence d'une section  $g$  de  $\mathcal{K}'_V$  au-dessus de  $V$  telle que  $g(z) \neq 0$ . Or, par hypothèse,  $\mathcal{K}$  a une restriction égale à celle de  $\mathcal{O}_X$  dans un voisinage ouvert de  $x$ ; d'autre part, il résulte de (8.10.3) que l'on a  $z \neq j(x)$ , donc  $z \in W$ , et par suite  $(\mathcal{K}_W)_z = \mathcal{O}_{V,z}$ , d'où par définition  $(\mathcal{K}_C)_{z'} = \mathcal{O}_{C,z'}$ . Puisque  $C$  est affine, il y a donc une section  $g'$  de  $\mathcal{K}_C$  au-dessus de  $C$  telle que  $g'(z') \neq 0$ , et en prenant pour  $g$  la section de  $\mathcal{K}'_V$  correspondant canoniquement à  $g'$ , on a bien  $g(z) \neq 0$ , ce qui achève la démonstration.

*Remarque (8.10.7).* — Nous ignorons si, dans l'énoncé de (8.9.4), la condition (ii) est ou non superflue. En tout cas, la conclusion ne subsiste plus si l'on ne suppose pas l'existence d'un  $Y$ -morphisme  $\pi : V \rightarrow X$  tel que  $\pi \circ j = i_X$ ; indiquons brièvement comment on peut en effet former un contre-exemple, dont les détails ne pourront être développés que plus tard. On prend  $Y = \text{Spec}(k)$  où  $k$  est un corps,  $C = \text{Spec}(A)$ , où  $A = k[T_1, T_2]$ , la  $Y$ -section  $\varepsilon$  correspondant à l'homomorphisme d'augmentation  $A \rightarrow k$ . On désigne par  $C'$  le schéma déduit de  $C$  par éclatement du point fermé  $a = \varepsilon(Y)$  de  $C$ ; si  $D$  est l'image réciproque de  $a$  dans  $C'$ , on considère dans  $D$  un point fermé  $b$ ,

et on désigne par  $V$  le schéma déduit de  $C'$  par éclatement de  $b$ ;  $X$  est le sous-préschéma fermé de  $V$ , image réciproque de  $a$  par le morphisme structural  $q : V \rightarrow C$ . On montre que  $X$  est réunion de deux composantes irréductibles  $X_1, X_2$ , où  $X_1$  est l'image réciproque de  $b$  dans  $V$ . Il est immédiat que l'Idéal  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{O}_V$  qui définit  $X$  est encore inversible, mais on prouve que  $j^*(\mathcal{J}) = \mathcal{L}$  ( $j$  injection canonique  $X \rightarrow V$ ) n'est pas ample, par la considération du « degré » de l'image réciproque de  $\mathcal{L}$  sur  $X_1$ , qui devrait être  $> 0$  si  $\mathcal{L}$  était ample, et qu'on montre (par un calcul élémentaire d'intersections) être égal à 0.

### 8.11. Unicité des contractions.

*Lemme (8.11.1).* — Soient  $U, V$  deux préschémas,  $h = (h_0, \lambda) : U \rightarrow V$  un morphisme surjectif. On suppose que :

1°  $\lambda : \mathcal{O}_V \rightarrow h_*(\mathcal{O}_U) = (h_0)_*(\mathcal{O}_U)$  est un isomorphisme.

2° L'espace sous-jacent à  $V$  s'identifie à l'espace quotient de l'espace sous-jacent à  $U$  par la relation  $R : h_0(x) = h_0(y)$  (condition toujours vérifiée lorsque le morphisme  $h$  est ouvert, ou fermé, ou *a fortiori* lorsque  $h$  est propre).

Alors, pour tout préschéma  $W$ , l'application

$$(8.11.1.1) \quad \text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(U, W)$$

qui, à tout morphisme  $v = (v_0, v)$  de  $V$  dans  $W$ , fait correspondre le morphisme  $u = v \circ h = (u_0, \mu)$ , est une bijection de  $\text{Hom}(V, W)$  sur l'ensemble des  $u$  tels que  $u_0$  soit constante sur toute fibre  $h_0^{-1}(x)$ .

Il est clair que si  $u = v \circ h$ , donc  $u_0 = v_0 \circ h_0$ ,  $u_0$  est constante sur tout ensemble  $h_0^{-1}(x)$ . Inversement, si  $u$  a cette propriété, montrons qu'il existe un  $v \in \text{Hom}(V, W)$  et un seul tel que  $u = v \circ h$ . L'existence et l'unicité de l'application continue  $v_0 : V \rightarrow W$  telle que  $u_0 = v_0 \circ h_0$  résultent de l'hypothèse, puisque  $h_0$  s'identifie à l'application canonique de  $U$  sur  $U/R$ . On peut d'autre part, en remplaçant au besoin  $V$  par un préschéma isomorphe, supposer que  $\lambda$  est l'identité; par hypothèse,  $\mu$  est alors un homomorphisme  $\mu : \mathcal{O}_W \rightarrow (u_0)_*(\mathcal{O}_U) = (v_0)_*((h_0)_*(\mathcal{O}_U))$  tel que l'homomorphisme correspondant  $\mu_x^\# : u_0^*(\mathcal{O}_W) \rightarrow \mathcal{O}_U$  soit local sur chaque fibre. Comme  $(v_0)_*((h_0)_*(\mathcal{O}_U)) = (v_0)_*(\mathcal{O}_V)$ , on doit nécessairement avoir  $v = \mu$ , et tout revient à voir que l'homomorphisme correspondant  $v_x^\# : v_0^*(\mathcal{O}_W) \rightarrow \mathcal{O}_V$  est local sur chaque fibre. Or, tout  $y \in V$  est de la forme  $h_0(x)$  pour un  $x \in U$ ; posons  $z = v_0(y) = u_0(x)$ . Alors (0, 3.5.5) l'homomorphisme  $\mu_x^\#$  se factorise en

$$\mu_x^\# : \mathcal{O}_z \xrightarrow{v_y^\#} \mathcal{O}_y \xrightarrow{\lambda_x^\#} \mathcal{O}_x.$$

Par hypothèse  $\lambda_x^\#$  et  $\mu_x^\#$  sont des homomorphismes locaux; donc  $\lambda_x^\#$  transforme tout élément inversible de  $\mathcal{O}_y$  en un élément inversible de  $\mathcal{O}_x$ ; si  $v_y^\#$  transformait un élément non inversible de  $\mathcal{O}_z$  en un élément inversible de  $\mathcal{O}_y$ ,  $\mu_x^\#$  transformeraient cet élément de  $\mathcal{O}_z$  en un élément inversible de  $\mathcal{O}_x$ , contrairement à l'hypothèse, d'où le lemme.

*Corollaire (8.11.2).* — Soient  $U$  un préschéma intègre,  $V$  un préschéma normal; alors tout morphisme  $h : U \rightarrow V$  qui est universellement fermé, birationnel et radiciel est un isomorphisme.

Si  $h = (h_0, \lambda)$ , il résulte des hypothèses que  $h_0$  est injectif et fermé, et que  $h_0(U)$

est dense dans  $V$ , donc  $h_0$  est un *homéomorphisme* de  $U$  sur  $V$ . Pour démontrer le corollaire, il suffira de voir que  $\lambda : \mathcal{O}_V \rightarrow (h_0)_*(\mathcal{O}_U)$  est un isomorphisme : on pourra appliquer alors (8.11.1) qui prouvera que l'application (8.11.1.1) est bijective (les fibres  $h_0^{-1}(x)$  étant chacune réduite à un seul point); donc  $h$  sera un isomorphisme. La question étant évidemment locale sur  $V$ , on peut supposer que  $V = \text{Spec}(A)$  est affine d'anneau intègre et intégralement clos (8.8.6.1);  $h$  correspond alors (I, 2.2.4) à un homomorphisme  $\varphi : A \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$  et tout revient à voir que  $\varphi$  est un isomorphisme. Or, si  $K$  est le corps des fractions de  $A$ ,  $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$  a pour hypothèse  $K$  pour corps des fractions et  $A$  est un sous-anneau de  $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ ,  $\varphi$  étant l'injection canonique (I, 8.2.7). Comme le morphisme  $h$  vérifie les hypothèses de (7.3.11),  $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$  est un sous-anneau de la fermeture intégrale de  $A$  dans  $K$ , donc est identique à  $A$  par hypothèse.

*Remarque (8.11.3).* — On verra au chapitre III (III, 4.4.11) que lorsque  $V$  est un préschéma *localement noethérien*, tout morphisme  $h : U \rightarrow V$  qui est propre et quasi-fini (en particulier tout morphisme vérifiant les hypothèses de (8.11.2)) est nécessairement *fini*. La conclusion de (8.11.2) résulte donc dans ce cas de (6.1.15).

**(8.11.4)** Nous allons maintenant voir que, dans le critère de Grauert (8.9.1), on peut souvent affirmer que le préschéma  $C$  et la « contraction »  $q$  sont déterminés de façon *essentiellement unique*.

*Lemme (8.11.5).* — Soient  $Y$  un préschéma,  $p : X \rightarrow Y$  un morphisme propre,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible  $p$ -ample,  $C$  un  $Y$ -préschéma,  $\varepsilon : Y \rightarrow C$  une  $Y$ -section,  $q : V = \mathbf{V}(\mathcal{L}) \rightarrow C$  un  $Y$ -morphisme, tels que le diagramme (8.9.1.1) soit commutatif. On suppose en outre que, si  $p = (p_0, \theta)$ ,  $\theta : \mathcal{O}_Y \rightarrow p_*(\mathcal{O}_X)$  est un isomorphisme. Soient alors  $\mathcal{S}' = \bigoplus_{n \geq 0} p_*(\mathcal{L}^{\otimes n})$ ,  $C' = \text{Spec}(\mathcal{S}')$ , et  $q' : \mathbf{V}(\mathcal{L}) \rightarrow C'$  le  $Y$ -morphisme canonique (8.8.5). Il existe un  $Y$ -morphisme  $u : C' \rightarrow C$  et un seul tel que  $q = u \circ q'$ .

L'hypothèse sur  $\theta$  entraîne en particulier que  $p$  est surjectif; comme en vertu de (8.8.4) la restriction de  $q'$  à  $\mathbf{V}(\mathcal{L}) - j(X)$  est un *isomorphisme* sur  $C' - \varepsilon'(Y)$  ( $\varepsilon'$  étant la section sommet de  $C'$ ), il résulte de (8.8.4) que  $q'$  est *propre* et *surjectif*; en outre, en vertu de (8.8.6), si on pose  $q' = (q'_0, \tau)$ ,  $\tau : \mathcal{O}_{C'} \rightarrow q'_*(\mathcal{O}_V)$  est un isomorphisme. On est donc dans les conditions d'application du lemme (8.11.1), et le lemme sera démontré si l'on prouve que  $q$  est constant sur toute fibre  $q'^{-1}(z')$ , où  $z' \in C'$ . Or, la condition est trivialement vérifiée pour  $z' \notin \varepsilon'(Y)$ . D'autre part, si  $z' \in \varepsilon'(Y)$ , il existe un  $y \in Y$  et un seul tel que  $z' = \varepsilon'(y)$ , et en vertu de la commutativité de (8.8.5.2) et le fait que  $q'$  applique  $\mathbf{V}(\mathcal{L}) - j(X)$  dans  $C' - \varepsilon'(Y)$ ,  $q'^{-1}(z') = j(p^{-1}(y))$ ; la commutativité du diagramme (8.9.1.1) établit donc notre assertion.

*Corollaire (8.11.6).* — Sous les hypothèses de (8.11.5), supposons outre que  $q$  soit propre et que la restriction de  $q$  à  $\mathbf{V}(\mathcal{L}) - j(X)$  soit un isomorphisme sur  $C - \varepsilon(Y)$ . Alors le morphisme  $u$  est universellement fermé, surjectif et radiciel, et sa restriction à  $C' - \varepsilon'(Y)$  est un isomorphisme sur  $C - \varepsilon(Y)$ .

Comme  $q'$  est un isomorphisme de  $\mathbf{V}(\mathcal{L}) - j(X)$  sur  $C' - \varepsilon'(Y)$  (8.8.4), la dernière assertion résulte aussitôt de  $q = u \circ q'$ . En outre, la commutativité des dia-

grammes (8.8.5.2) et (8.9.1.1) montre que la restriction de  $u$  au sous-préschéma fermé  $\epsilon'(Y)$  de  $C'$  est un isomorphisme sur le sous-préschéma fermé  $\epsilon(Y)$  de  $C$ , d'où résulte aussitôt que pour tout  $z' \in \epsilon'(Y)$ , si  $z = u(z')$ ,  $u$  définit un isomorphisme de  $k(z)$  sur  $k(z')$ . Ces remarques prouvent que  $u$  est bijectif et radiciel; en outre, si  $\psi$  et  $\psi'$  sont les morphismes structuraux  $C \rightarrow Y$ ,  $C' \rightarrow Y$ , on a  $\psi' = \psi \circ u$  et comme  $\psi'$  est séparé (1.2.4), il en est de même de  $u$  (I, 5.5.1, (v)). On a vu d'autre part dans la démonstration du lemme (8.11.5) que  $q'$  est surjectif; comme  $q = u \circ q'$  est propre, on conclut finalement de (5.4.3) et (5.4.9) que  $u$  est universellement fermé.

*Proposition (8.11.7).* — Soient  $Y$  un préschéma,  $X$  un préschéma intègre,  $p : X \rightarrow Y$  un morphisme propre,  $\mathcal{L}$  un  $\mathcal{O}_X$ -Module inversible  $p$ -ample,  $C$  un  $Y$ -préschéma normal,  $\epsilon : Y \rightarrow C$  une  $Y$ -section,  $q : V = \mathbf{V}(\mathcal{L}) \rightarrow C$  un  $Y$ -morphisme, tels que le diagramme (8.9.1.1) soit commutatif. On suppose en outre que, si  $p = (p_0, \theta)$ ,  $\theta : \mathcal{O}_Y \rightarrow p_*(\mathcal{O}_X)$  soit un isomorphisme. Soient alors  $\mathcal{S}' = \bigoplus_{n \geq 0} p_*(\mathcal{L}^{\otimes n})$ ,  $C' = \text{Spec}(\mathcal{S}')$ , et  $q' : \mathbf{V}(\mathcal{L}) \rightarrow C'$  le  $Y$ -morphisme canonique (8.8.5). Alors l'unique  $Y$ -morphisme  $u : C' \rightarrow C$  tel que  $q = u \circ q'$  est un isomorphisme.

Il résulte de (8.8.6) que  $C'$  est intègre; comme  $u$  est un homéomorphisme des espaces sous-jacents  $C' \rightarrow C$  ( $u$  étant bijectif et fermé d'après (8.11.6)),  $C$  est irréductible, donc intègre, et puisque la restriction de  $u$  à un ouvert non vide de  $C'$  est un isomorphisme sur un ouvert de  $C$ ,  $u$  est birationnel. Puisque  $C$  est supposé normal, il suffit d'appliquer (8.11.2) pour obtenir la conclusion.

*Remarques (8.11.8).* — (i) Notons que l'hypothèse que  $C$  est normal implique qu'il en est de même de  $X$ . En effet,  $C' = \text{Spec}(\mathcal{S}')$  est alors normal, étant isomorphe à  $C$ , et intègre en vertu de (8.8.6); on en conclut que  $\text{Proj}(\mathcal{S}')$  est *normal*. En effet, la question est locale sur  $Y$ ; si  $Y$  est affine,  $\mathcal{S}' = \widetilde{S}'$ , l'anneau  $S' = \Gamma(C', \mathcal{S}')$  est intègre et intégralement clos (8.8.6.1), donc, pour tout élément homogène  $f \in S'_+$ , l'anneau gradué  $S'_f$  est intègre et intégralement clos ([13], t. I, p. 257 et 261), et par suite aussi l'anneau  $S'_{(f)}$  de ses termes de degré 0, car l'intersection de  $S'_f$  et du corps des fractions de  $S'_{(f)}$  est égale à  $S'_{(f)}$ ; ce qui prouve notre assertion (6.3.4). Enfin, comme  $X$  est isomorphe à un sous-préschéma ouvert de  $\text{Proj}(\mathcal{S}')$  (8.8.1),  $X$  est bien normal. On peut donc exprimer la prop. (8.11.7) sous la forme suivante : Si  $X$  est intègre et normal,  $p = (p_0, \theta) : X \rightarrow Y$  un morphisme propre tel que  $\theta : \mathcal{O}_Y \rightarrow p_*(\mathcal{O}_X)$  soit un isomorphisme, alors, pour tout  $\mathcal{O}_X$ -Module  $p$ -ample  $\mathcal{L}$ , il existe une façon et une seule de contracter la section nulle de  $V = \mathbf{V}(\mathcal{L})$  de façon à obtenir un  $Y$ -schéma normal  $C$  et un  $Y$ -morphisme propre  $q : V \rightarrow C$ .

(ii) Lorsque  $p$  est propre, l'hypothèse  $p_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$  peut être considérée comme une hypothèse auxiliaire, ne constituant pas une vraie restriction de la généralité du résultat. En effet, si elle n'est pas vérifiée, il suffit de remplacer  $Y$  par le  $Y$ -schéma  $Y' = \text{Spec}(p_*(\mathcal{O}_X))$  et de considérer  $X$  comme un  $Y'$ -schéma. Nous reviendrons sur cette méthode générale au chapitre III, § 4.

## 8.12. Faisceaux quasi-cohérents sur les cônes projectifs.

**(8.12.1)** Reprenons les hypothèses et notations de (8.3.1). Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{S}$ -Module gradué quasi-cohérent; pour éviter toute confusion, nous désignerons par  $\widetilde{\mathcal{M}}$  le  $\mathcal{O}_C$ -Module

quasi-cohérent associé à  $\mathcal{M}$  (1.4.3) lorsque  $\mathcal{M}$  est considéré comme  $\mathcal{S}$ -Module *non gradué*, et par  $\text{Proj}_0(\mathcal{M})$  le  $\mathcal{O}_X$ -Module quasi-cohérent associé à  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M}$  étant cette fois considéré comme  $\mathcal{S}$ -Module gradué (autrement dit le  $\mathcal{O}_X$ -Module noté  $\widetilde{\mathcal{M}}$  dans (3.2.2)). Nous poserons de plus

$$(8.12.1.1) \quad \mathcal{M}_X = \text{Proj}(\mathcal{M}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \text{Proj}_0(\mathcal{M}(n));$$

la  $\mathcal{O}_X$ -Algèbre graduée quasi-cohérente  $\mathcal{S}_X$  étant définie par (8.6.1.1),  $\text{Proj}(\mathcal{M})$  est muni d'une structure de  $\mathcal{S}_X$ -Module gradué (*quasi-cohérent*), au moyen des homomorphismes canoniques (3.2.6.1)

$$(8.12.1.2) \quad \mathcal{O}_X(m) \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{Proj}_0(\mathcal{M}(n)) \rightarrow \text{Proj}_0(\mathcal{S}(m) \otimes_{\mathcal{S}} \mathcal{M}(n)) \rightarrow \text{Proj}_0(\mathcal{M}(m+n))$$

la vérification des axiomes des Modules se faisant à l'aide du diagramme commutatif (2.5.11.4).

Si  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine,  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$  et  $\mathcal{M} = \widetilde{M}$ , où  $S$  est une  $A$ -algèbre graduée et  $M$  un  $S$ -module gradué, alors, pour tout élément homogène  $f \in S_+$ , on a

$$(8.12.1.3) \quad \Gamma(X_f, \text{Proj}(\widetilde{M})) = M_f$$

en vertu des définitions et de (8.2.9.1).

Considérons maintenant le  $\hat{\mathcal{P}}$ -Module gradué quasi-cohérent

$$(8.12.1.4) \quad \hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{S}} \hat{\mathcal{P}}$$

( $\hat{\mathcal{P}}$  étant défini par (8.3.1.1)); on en déduit un  $\mathcal{O}_{\widehat{C}}$ -Module gradué quasi-cohérent  $\text{Proj}_0(\hat{\mathcal{M}})$ , que nous noterons aussi

$$(8.12.1.5) \quad \mathcal{M}^{\square} = \text{Proj}_0(\hat{\mathcal{M}}).$$

Il est clair (3.2.4) que  $\mathcal{M}^{\square}$  est un foncteur additif *exact* en  $\mathcal{M}$ , commutant aux sommes directes et aux limites inductives.

*Proposition (8.12.2).* — *Avec les notations de (8.3.2), on a des isomorphismes canoniques fonctoriels*

$$(8.12.2.1) \quad i^*(\mathcal{M}^{\square}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{M}}, \quad j^*(\mathcal{M}^{\square}) \xrightarrow{\sim} \text{Proj}_0(\mathcal{M}).$$

En effet,  $i^*(\mathcal{M}^{\square})$  s'identifie canoniquement à  $(\hat{\mathcal{M}}/(z-1)\hat{\mathcal{M}})^\sim$  sur  $\text{Spec}(\hat{\mathcal{P}}/(z-1)\hat{\mathcal{P}})$  en vertu de (3.2.3); le premier des isomorphismes canoniques (8.12.2.1) se déduit alors aussitôt (1.4.1) de l'isomorphisme canonique  $\hat{\mathcal{M}}/(z-1)\hat{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$ . D'autre part, l'immersion canonique  $j : X \rightarrow \widehat{C}$  correspond à l'homomorphisme canonique  $\hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{S}$  de noyau  $z\hat{\mathcal{P}}$  (8.3.2); le second homomorphisme (8.12.2.1) est le cas particulier de l'homomorphisme canonique (3.5.2, (ii)), du fait que l'on a ici  $\hat{\mathcal{M}} \otimes_{\mathcal{S}} \mathcal{S} = \mathcal{M}$ ; pour vérifier que c'est un isomorphisme, on peut se borner au cas où  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine,  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ ,  $\mathcal{M} = \widetilde{M}$ ; en se reportant à (2.8.8), la vérification que pour tout  $f$  homogène dans  $S_+$ , l'homomorphisme précédent, restreint à  $X_f$ , se réduit à un isomorphisme, est alors immédiate.

Par abus de langage, on dira encore, en raison de l'existence du premier isomorphisme (8.12.2.1), que  $\mathcal{M}^\square$  est la *fermeture projective* du  $\mathcal{O}_C$ -Module  $\widetilde{\mathcal{M}}$  (étant entendu que dans la donnée du  $\mathcal{O}_C$ -Module  $\widetilde{\mathcal{M}}$  figure la graduation du  $\mathcal{S}$ -Module  $\mathcal{M}$ ).

(8.12.3) Avec les notations de (8.3.5), on a un homomorphisme canonique fonctoriel

$$(8.12.3.1) \quad p^*(\mathcal{P}roj_0(\mathcal{M})) \rightarrow \mathcal{M}^\square|_{\widehat{\mathcal{E}}}.$$

En effet, c'est un cas particulier de l'homomorphisme  $v^\#$  défini de façon générale dans (3.5.6). Si  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine,  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ ,  $\mathcal{M} = \widetilde{M}$ , on voit, en se reportant à (2.8.8), que la restriction de (8.12.3.1) à  $p^{-1}(X_f) = \widehat{C}_f$  (pour un  $f$  homogène dans  $S_+$ ) correspond à l'homomorphisme canonique

$$(8.12.3.2) \quad M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} S_f^\leq \rightarrow M_f^\leq$$

compte tenu de (8.2.3.2) et (8.2.5.2).

(8.12.4) Plaçons-nous dans les hypothèses de (8.5.1), dont nous conservons les notations. Il résulte de (1.5.6) que pour tout  $\mathcal{S}$ -Module gradué quasi-cohérent  $\mathcal{M}$ , on a d'une part un isomorphisme canonique

$$(8.12.4.1) \quad \Phi^*(\widetilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\sim} (q^*(\mathcal{M}) \otimes_{q^*(\mathcal{S})} \mathcal{S}') \sim$$

de  $\mathcal{O}_C$ -Modules; et d'autre part (3.5.6) entraîne l'existence d'un  $\text{Proj}(\varphi)$ -morphisme canonique

$$(8.12.4.2) \quad \mathcal{P}roj_0 \mathcal{M} \rightarrow (\mathcal{P}roj_0(q^*(\mathcal{M}) \otimes_{q^*(\mathcal{S})} \mathcal{S}'))|_{G(\varphi)}$$

et aussi d'un  $\widehat{\Phi}$ -morphisme canonique

$$(8.12.4.3) \quad \mathcal{P}roj_0 \widehat{\mathcal{M}} \rightarrow (\mathcal{P}roj_0(q^*(\widehat{\mathcal{M}}) \otimes_{q^*(\widehat{\mathcal{S}})} \widehat{\mathcal{S}}'))|_{G(\widehat{\varphi})}.$$

(8.12.5) Considérons maintenant la situation de (8.6.1), avec les mêmes notations; on prend donc dans ce qui précède  $Y' = X$ , le morphisme  $q : X \rightarrow Y$  étant le morphisme structural, et  $\varphi$  est le  $q$ -morphisme canonique (8.6.1.2). On a alors un isomorphisme canonique

$$(8.12.5.1) \quad q^*(\mathcal{M}) \otimes_{q^*(\mathcal{S})} \mathcal{S}_X^\geq \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_X^\geq$$

en posant  $\mathcal{M}_X^\geq = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{P}roj_0(\mathcal{M}(n))$ . On peut en effet se borner au cas où  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine,  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$  et  $\mathcal{M} = \widetilde{M}$ , et définir l'isomorphisme (8.12.5.1) dans chacun des ouverts affines  $X_f$  ( $f$  homogène dans  $S_+$ ), en vérifiant la compatibilité avec le passage à un multiple homogène de  $f$ . Or, la restriction à  $X_f$  du premier membre de (8.12.5.1) est  $\widetilde{M}' = ((M \otimes_A S_{(f)}) \otimes_{S \otimes_A S_{(f)}} S_f^\geq) \sim$  par (8.6.2.1); comme on a un isomorphisme canonique de  $M \otimes_A S_{(f)}$  sur  $M \otimes_S (S \otimes_A S_{(f)})$ , on en déduit un isomorphisme de  $\widetilde{M}'$  sur  $(M \otimes_S S_f^\geq) \sim$ , et ce dernier est canoniquement isomorphe par (8.2.9.1) à la restriction à  $X_f$  du second membre de (8.12.5.1), et satisfait aux conditions de compatibilité requises.

Remplaçant  $\mathcal{M}$  par  $\hat{\mathcal{M}}$ ,  $\mathcal{S}$  par  $\hat{\mathcal{S}}$  et  $\mathcal{S}_X$  par  $(\mathcal{S}_X^{\geq})^\wedge$  dans le raisonnement précédent, on a de même un isomorphisme canonique

$$(8.12.5.2) \quad q^*(\hat{\mathcal{M}}) \otimes_{q^*(\hat{\mathcal{P}})} (\mathcal{S}_X^{\geq})^\wedge \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}_X^{\geq})^\wedge.$$

Si l'on se souvient (8.6.2) que le morphisme structural  $u : \text{Proj}(\mathcal{S}_X^{\geq}) \rightarrow X$  est un isomorphisme, on déduit d'abord de ce qui précède que l'on a un  $u$ -isomorphisme canonique

$$(8.12.5.3) \quad \text{Proj}_0 \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \text{Proj}_0 (\mathcal{M}_X^{\geq})$$

comme cas particulier de (8.12.4.2). On constate en effet, avec les notations de la démonstration de (8.6.2), que cela revient à voir que l'homomorphisme canonique  $M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} (S_f^{\geq})^{(d)} \rightarrow (M_f^{\geq})^{(d)}$  est un isomorphisme lorsque  $f \in S_d$ , ce qui est immédiat.

En second lieu, l'isomorphisme (8.12.5.2) permet, en appliquant cette fois (8.12.4.3) au morphisme canonique  $r = \text{Proj}(\hat{\alpha}) : \hat{C}_X \rightarrow \hat{C}$ , d'obtenir un  $r$ -morphisme canonique

$$(8.12.5.4) \quad \mathcal{M}^\square \rightarrow (\mathcal{M}_X^{\geq})^\square.$$

Rappelons maintenant (8.6.2) que les restrictions de  $r$  aux cônes épontés  $\hat{E}_X$  et  $E_X$  sont des *isomorphismes* sur  $\hat{E}$  et  $E$  respectivement. En outre :

*Proposition (8.12.6).* — *Les restrictions à  $\hat{E}_X$  et à  $E_X$  du  $r$ -morphisme canonique (8.12.5.4) sont des isomorphismes*

$$(8.12.6.1) \quad \mathcal{M}^\square|_{\hat{E}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}_X^{\geq})^\square|_{\hat{E}_X}$$

$$(8.12.6.2) \quad \mathcal{M}^\sim|_E \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}_X^{\geq})^\sim|_{E_X}.$$

On se ramène au cas où  $Y$  est affine comme dans la démonstration de (8.6.2); avec les notations de cette dernière, et en se ramenant aux définitions (2.8.8), on doit montrer que l'homomorphisme canonique

$$\hat{M}_{(f)} \otimes_{\hat{S}_{(f)}} (S_f^{\geq})_{(f/1)}^\wedge \rightarrow (M_f \otimes_S S_f^{\geq})_{(f/1)}^\wedge$$

est un isomorphisme; mais en vertu de (8.2.3.2) et (8.2.5.2), le premier membre s'identifie canoniquement à  $M_f^{\leq} \otimes_{S_f^{\leq}} (S_f^{\geq})_{(f/1)}^{\leq}$ , donc à  $M_f^{\leq}$  en vertu de (8.2.7.2), et le second à  $(M_f^{\geq})_{(f/1)}^{\leq}$ , donc aussi à  $M_f^{\leq}$  en vertu de (8.2.9.2), d'où la conclusion en ce qui concerne (8.12.6.1); la formule (8.12.6.2) résulte alors de (8.12.6.1) et de (8.12.2.1).

*Corollaire (8.12.7).* — *Avec les identifications de (8.6.3), la restriction de  $(\mathcal{M}_X^{\geq})^\square$  à  $\hat{E}_X$  s'identifie à  $(\mathcal{M}_X^{\leq})^\sim$  et la restriction de  $(\mathcal{M}_X^{\geq})^\square$  à  $E_X$  s'identifie à  $\widetilde{\mathcal{M}}_X$ .*

On est en effet ramené au cas affine, et cela résulte de l'identification de  $(M_f^{\geq})_{(f/1)}^{\leq}$  à  $M_f^{\leq}$  et de  $(M_f^{\geq})_{(f/1)}^{\leq}$  à  $M_f$  (8.2.9.2).

*Proposition (8.12.8).* — *Sous les hypothèses de (8.6.4), l'homomorphisme canonique (8.12.3.1) est un isomorphisme.*

Compte tenu du fait que  $\text{Proj}(\mathcal{S}_X^{\geq}) \rightarrow X$  est un isomorphisme (8.6.2) et des

isomorphismes (8.12.5.4) et (8.12.6.1), on est ramené à démontrer la proposition correspondante pour l'homomorphisme canonique  $p_X^*(\text{Proj}_0(\mathcal{M}_X^\geq)) \rightarrow (\mathcal{M}_X^\geq)^\square|_{E_X}$ , autrement dit, on est ramené au cas où  $\mathcal{S}_1$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -Module inversible et où  $\mathcal{S}$  est engendrée par  $\mathcal{S}_1$ . Avec les notations de (8.12.3), on a alors, pour un  $f \in S_1$ ,  $S_f^\leq = S_{(f)}[1/f]$  et l'homomorphisme canonique  $M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} S_f^\leq \rightarrow M_f^\leq$  est un isomorphisme par définition de  $M_f^\leq$ .

(8.12.9) Considérons maintenant les  $\mathcal{S}$ -Modules quasi-cohérents

$$\mathcal{M}_{[n]} = \bigoplus_{m \geq n} \mathcal{M}_m$$

et (avec les notations de (8.7.2)) le  $\mathcal{S}^\natural$ -Module gradué quasi-cohérent

$$(8.12.9.1) \quad \mathcal{M}^\natural = \left( \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{M}_{[n]} \right)^\sim.$$

On a vu (8.7.3) qu'il existe un  $C$ -isomorphisme canonique  $h : C_X \xrightarrow{\sim} \text{Proj}(\mathcal{S}^\natural)$ . En outre :

*Proposition (8.12.10). — Il existe un  $h$ -isomorphisme canonique*

$$(8.12.10.1) \quad \text{Proj}_0(\mathcal{M}^\natural) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{M}}_X.$$

On raisonne comme dans (8.7.3), en utilisant cette fois l'existence du di-isomorphisme (8.2.9.3) au lieu de (8.2.7.3). Nous laissons les détails au lecteur.

### 8.13. Fermetures projectives de sous-faisceaux et de sous-schémas fermés.

(8.13.1) Les hypothèses et notations étant celles de (8.12.1), considérons un sous- $\mathcal{S}$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{M}$ , non nécessairement gradué. On peut donc considérer le  $\mathcal{O}_C$ -Module quasi-cohérent  $\widetilde{\mathcal{N}}$  associé à  $\mathcal{N}$ , qui est un sous- $\mathcal{O}_C$ -Module de  $\widetilde{\mathcal{M}}$ . On a vu d'autre part (8.12.2.1) que  $\widetilde{\mathcal{M}}$  s'identifie à la restriction de  $\mathcal{M}^\square$  à  $C$ . Comme l'injection canonique  $i : C \rightarrow \widehat{C}$  est un morphisme affine (8.3.2), et *a fortiori* quasi-compact, le *prolongement canonique*  $(\widetilde{\mathcal{N}})^-$ , plus grand sous- $\mathcal{O}_{\widehat{C}}$ -Module contenu dans  $\mathcal{M}^\square$  et induisant  $\widetilde{\mathcal{N}}$  sur  $C$ , est un  $\mathcal{O}_{\widehat{C}}$ -Module quasi-cohérent (I, 9.4.2). Nous allons en donner une description explicite à l'aide d'un  $\widehat{\mathcal{P}}$ -Module gradué.

(8.13.2) Pour cela, considérons, pour tout entier  $n \geq 0$ , l'homomorphisme  $\bigoplus_{i \leq n} \mathcal{M}_i \rightarrow \mathcal{M}$  qui, pour tout ouvert  $U$  de  $Y$ , fait correspondre à la famille

$$(s_i) \in \bigoplus_{i \leq n} \Gamma(U, \mathcal{M}_i)$$

la section  $\sum_i s_i \in \Gamma(U, \mathcal{M})$ . Désignons par  $\mathcal{N}'_n$  l'image réciproque de  $\mathcal{N}$  par cet homomorphisme, qui est un sous- $\mathcal{S}$ -Module quasi-cohérent de  $\bigoplus_{i \leq n} \mathcal{M}_i$ . Considérons maintenant l'homomorphisme  $\bigoplus_{i \leq n} \mathcal{M}_i \rightarrow \widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}[\mathbf{z}]$  qui fait correspondre à  $(s_i)$  la section  $\sum_i s_i \mathbf{z}^{n-i} \in \Gamma(U, \widehat{\mathcal{M}}_n)$ , et soit  $\mathcal{N}'_n$  l'image de  $\mathcal{N}'_n$  par cet homomorphisme; on vérifie aussitôt que  $\widetilde{\mathcal{N}} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{N}'_n$  est un sous- $\widehat{\mathcal{P}}$ -Module gradué (quasi-cohérent) de  $\widehat{\mathcal{M}}$ ; on dit que  $\widetilde{\mathcal{N}}$  est déduit de  $\mathcal{N}$  par *homogénéisation*, à l'aide de la « variable homogénisante »  $\mathbf{z}$ . On notera

que si  $\mathcal{N}$  est déjà un sous- $\mathcal{S}$ -Module gradué de  $\mathcal{M}$ , alors  $\widetilde{\mathcal{N}}$  s'identifie à la somme directe des composantes  $\widehat{\mathcal{N}}_n$  de degré  $n \geq 0$  dans  $\widehat{\mathcal{N}} = \mathcal{N}[\mathbf{z}]$ .

*Proposition (8.13.3).* — *Le  $\mathcal{O}_{\widehat{C}}$ -Module  $\mathcal{P}roj_0(\widetilde{\mathcal{N}})$  est le prolongement canonique  $(\widetilde{\mathcal{N}})^-$  de  $\widetilde{\mathcal{N}}$  à  $\widehat{C}$ .*

La question est locale sur  $Y$  et  $\widehat{C}$  en vertu de la définition du prolongement canonique (I, 9.4.1). On peut donc déjà supposer que  $Y = \text{Spec}(A)$  est affine, avec  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ ,  $\mathcal{M} = \widetilde{M}$  et  $\mathcal{N} = \widetilde{N}$ , où  $N$  est un sous- $S$ -module non nécessairement gradué de  $M$ . En outre (8.3.2.6)  $\widehat{C}$  est réunion des ouverts affines  $\widehat{C}_i = C$  et  $\widehat{C}_i = \text{Spec}(S_i^{\leq})$  ( $f$  homogène dans  $S_+$ ). Il suffira donc de montrer que : 1° la restriction de  $\mathcal{P}roj_0(\widetilde{\mathcal{N}})$  à  $C$  est  $\widetilde{\mathcal{N}}$ ; 2° la restriction de  $\mathcal{P}roj_0(\widetilde{\mathcal{N}})$  à chaque  $\widehat{C}_i$  est le prolongement canonique de la restriction de  $\mathcal{N}$  à  $C \cap \widehat{C}_i = \text{Spec}(S_i)$  (8.3.2.6). Pour le premier point, notons que  $\mathcal{P}roj_0(\widetilde{\mathcal{N}})|C$  s'identifie à  $(\widetilde{N}_{(z)})^\sim$  (8.3.2.4); or  $\widetilde{N}_{(z)}$  s'identifie canoniquement (2.2.5) à l'image de  $\widetilde{N}$  dans  $\widehat{M}/(\mathbf{z}-1)\widehat{M}$ , et par l'isomorphisme canonique de ce dernier sur  $M$  (8.2.5), cette image s'identifie à  $N$ , en vertu de la définition de  $\widetilde{N}$  donnée dans (8.13.2).

Pour prouver le second point, notons que l'injection  $i : C \cap \widehat{C}_i \rightarrow \widehat{C}$  correspond à l'injection canonique  $S_i^{\leq} \rightarrow S_i$  (8.3.2.6); d'autre part, on a  $\Gamma(\widehat{C}_i, \mathcal{M}^-) = M_i^{\leq}$ ,  $\Gamma(\widehat{C}_i, i_*(\widetilde{\mathcal{N}})) = N_i$  et (par (8.12.2.1))  $\Gamma(\widehat{C}_i, i_*(i^*(\mathcal{M}^-))) = M_i$ . Compte tenu de (I, 9.4.2), on est donc ramené à montrer que  $\widetilde{N}_{(y)} \subset \widehat{M}_{(y)} = M_i^{\leq}$  s'identifie canoniquement à l'image réciproque de  $N_i$  par l'injection canonique  $M_i^{\leq} \rightarrow M_i$ . En effet, soit  $d = \deg(f) > 0$ , et supposons qu'un élément  $(\sum_{k \leq md} x_k)/f^m$  de  $M_i$  (avec  $x_k \in M_k$ ) soit de la forme  $y/f^m$  avec  $y \in N$ . En multipliant  $y$  et les  $x_k$  par un même  $f^h$  convenable, on peut déjà supposer que  $\sum_{k \leq md} x_k = y$ . Mais dans l'identification (8.2.5.2),  $(\sum_{k \leq md} x_k)/f^m$  correspond à  $\sum_{k \leq md} x_k \mathbf{z}^{md-k}/f^m$ , et cet élément appartient bien à  $\widetilde{N}_{(y)}$ , puisque  $\sum_{k \leq md} x_k \in N$ ; la réciproque est évidente.

*Remarques (8.13.4).* — (i) Le cas d'application le plus important de (8.13.3) est celui où  $\mathcal{M} = \mathcal{S}$ ,  $\widetilde{\mathcal{N}}$  étant donc un faisceau quasi-cohérent arbitraire d'idéaux  $\mathcal{J}$  de  $\mathcal{O}_C$  (1.4.3), correspondant biunivoquement à un sous-préschéma fermé  $Z$  de  $C$ . Alors le prolongement canonique  $\widetilde{\mathcal{J}}$  de  $\mathcal{J}$  est le faisceau quasi-cohérent d'idéaux de  $\mathcal{O}_{\widehat{C}}$  qui définit l'adhérence  $\overline{Z}$  de  $Z$  dans  $\widehat{C}$  (I, 9.5.10); la prop. (8.13.3) donne un moyen canonique de définir  $\overline{Z}$  à l'aide d'un Idéal gradué dans  $\widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}[\mathbf{z}]$ .

(ii) Supposons pour simplifier que  $Y$  soit affine, et gardons les notations de la démonstration de (8.13.3). Pour tout  $x \in N$  non nul, soit  $d(x)$  le plus grand des degrés des composantes homogènes  $x_i$  de  $x$  dans  $M$ ;  $\widetilde{N}$  est par définition le sous-module de  $\widehat{M}$  formé de 0 et des éléments de la forme  $h(x, k) = \mathbf{z}^k \sum_{i \leq d(x)} x_i \mathbf{z}^{d(x)-i}$  ( $k$  entier  $\geq 0$ ); il est donc engendré, en tant que module sur  $\widehat{S} = S[\mathbf{z}]$ , par les éléments de la forme

$$h(x, 0) = \sum_{i \leq d(x)} x_i \mathbf{z}^{d(x)-i}.$$

On dit que  $h(x, o)$  est déduit de  $x$  par *homogénéisation* à l'aide de la « variable homogénisante »  $z$ . Mais comme  $h(x, o)$  ne dépend pas additivement de  $x$  (ni *a fortiori*  $S$ -linéairement), *on se gardera de croire* (même lorsque  $M = S$ ) que les  $h(x, o)$  parcourrent un *système de générateurs* du  $\hat{S}$ -module gradué  $\bar{N}$  lorsqu'on fait parcourir à  $x$  un *système de générateurs* du  $S$ -module  $N$ . Il en est cependant bien ainsi dans le cas (seul considéré dans la géométrie algébrique élémentaire) où  $N$  est un  $S$ -module *libre monogène*, car si  $t$  est une base de  $N$ ,  $h(t, o)$  engendre le  $\hat{S}$ -module  $\bar{N}$ .

#### 8.14. Compléments sur les faisceaux associés aux $\mathcal{S}$ -Modules gradués.

(8.14.1) Soient  $Y$  un préschéma,  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente à degrés positifs,  $X = \text{Proj}(\mathcal{S})$ ,  $q : X \rightarrow Y$  le morphisme structural (défini en vertu de (3.1.3)). Conservons les notations de (8.12.1), de sorte que nous avons défini un foncteur  $\mathcal{M}_X = \mathcal{P}\text{roj}(\mathcal{M})$  en  $\mathcal{M}$ , de la catégorie des  $\mathcal{S}$ -Modules gradués quasi-cohérents dans celle des  $\mathcal{S}_X$ -Modules gradués quasi-cohérents; il est clair en outre (3.2.4) que c'est un foncteur *additif exact*, commutant aux limites inductives.

Notons en outre qu'il résulte aussitôt de la définition (8.12.1.1) que l'on a

$$(8.14.1.1) \quad \mathcal{P}\text{roj}(\mathcal{M}(n)) = (\mathcal{P}\text{roj}(\mathcal{M}))(n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{Z}.$$

(8.14.2) Nous allons d'abord étendre aux  $\mathcal{S}_X$ -Modules de la forme  $\mathcal{P}\text{roj}(\mathcal{M})$  les homomorphismes canoniques  $\lambda$  et  $\mu$  définis dans (3.2.6). Pour cela, notons que, quels que soient  $m \in \mathbf{Z}$  et  $n \in \mathbf{Z}$ , on a, en vertu de (2.1.2.1), un homomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_X$ -Modules

$$(8.14.2.1) \quad \lambda_{mn} : \mathcal{P}\text{roj}_0(\mathcal{M}(m)) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}\text{roj}_0(\mathcal{N}(n)) \rightarrow \mathcal{P}\text{roj}_0((\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{S}} \mathcal{N})(m+n))$$

et de même, en vertu de (2.1.2.2), un homomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_X$ -Modules

$$(8.14.2.2) \quad \mu_{mn} : \mathcal{P}\text{roj}_0((\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{S}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}))(n-m)) \rightarrow \mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}\text{roj}_0(\mathcal{M}(m)), \mathcal{P}\text{roj}_0(\mathcal{N}(n)))$$

quels que soient les  $\mathcal{S}$ -Modules gradués quasi-cohérents  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ . On en déduit un homomorphisme

$$\mu_k : \mathcal{P}\text{roj}_0((\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{S}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}))(k)) \rightarrow (\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}\text{roj}(\mathcal{M}), \mathcal{P}\text{roj}(\mathcal{N})))_k$$

obtenu en faisant correspondre à tout  $u \in \Gamma(U, \mathcal{P}\text{roj}_0((\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{S}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}))(k)))$  l'homomorphisme  $\mu_k(u)$ , de degré  $k$ , de  $\mathbf{Z}$ -modules gradués  $\Gamma(U, \mathcal{P}\text{roj}(\mathcal{M})) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{P}\text{roj}(\mathcal{N}))$  ( $U$  ouvert de  $X$ ) qui dans chaque  $\Gamma(U, \mathcal{P}\text{roj}_0(\mathcal{M}(m)))$  coïncide avec  $\mu_{m, m+k}(u)$ ; en outre, en revenant à la définition des  $\mu_{mn}$  (2.5.12.1), on voit aussitôt que  $\mu_k(u)$  est en fait un homomorphisme de degré  $k$  de  $\Gamma(U, \mathcal{S}_X)$ -modules gradués, et en outre que les  $\mu_k$  définissent un homomorphisme de  $\mathcal{S}_X$ -Modules gradués

$$(8.14.2.3) \quad \mathcal{P}\text{roj}(\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{S}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})) \rightarrow \mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{S}_X}(\mathcal{P}\text{roj}(\mathcal{M}), \mathcal{P}\text{roj}(\mathcal{N})).$$

De même, compte tenu du diagramme d'associativité (2.5.11.4), les homomorphismes (8.14.2.1) donnent un homomorphisme de  $\mathcal{S}_X$ -Modules gradués

$$(8.14.2.4) \quad \lambda : \mathcal{P}\text{roj}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{S}_X} \mathcal{P}\text{roj}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{P}\text{roj}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{S}} \mathcal{N}).$$

*Proposition (8.14.3).* — *L'homomorphisme (8.14.2.4) est bijectif; il en est de même de (8.14.2.3) lorsque le  $\mathcal{S}$ -Module gradué  $\mathcal{M}$  admet une présentation finie (3.1.1).*

La question est évidemment locale sur  $X$  et sur  $Y$ ; on peut donc supposer  $Y = \text{Spec}(A)$  affine,  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ ,  $\mathcal{M} = \widetilde{M}$ ,  $\mathcal{N} = \widetilde{N}$ , où  $S$  est une  $A$ -algèbre graduée à degrés positifs,  $M$  et  $N$  deux  $S$ -modules gradués. Si  $f$  est un élément homogène de  $S_+$ , les homomorphismes (8.14.2.1) et (8.14.2.2), restreints à l'ouvert affine  $D_+(f)$ , correspondent aux homomorphismes canoniques (2.5.11.1) et (2.5.12.1) :

$$\begin{aligned} M(m)_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N(n)_{(f)} &\rightarrow (M \otimes_S N)(m+n)_{(f)} \\ (\text{Hom}_S(M, N))(n-m)_{(f)} &\rightarrow \text{Hom}_{S_{(f)}}(M(m)_{(f)}, N(n)_{(f)}). \end{aligned}$$

Si on se reporte aux définitions de ces homomorphismes, on voit donc (compte tenu de (8.2.9.1)) que la restriction de (8.14.2.4) à  $D_+(f)$  correspond à l'homomorphisme canonique

$$M_f \otimes_{S_f} N_f \rightarrow (M \otimes_S N)_f$$

défini dans (0, 1.3.4), et on sait que ce dernier est un isomorphisme. De même, la restriction de (8.14.2.3) à  $D_+(f)$  correspond à l'homomorphisme canonique (0, 1.3.5)

$$(\text{Hom}_S(M, N))_f \rightarrow \text{Hom}_{S_f}(M_f, N_f)$$

compte tenu de ce que,  $M$  étant de type fini, le module  $\text{Hom}_S(M, N)$ , somme directe des sous-groupes formés des homomorphismes *homogènes* de  $S$ -modules (2.1.2), coïncide avec l'ensemble de *tous* les homomorphismes  $M \rightarrow N$  de  $S$ -modules. L'hypothèse que  $M$  admet une présentation finie entraîne alors (0, 1.3.5) que l'homomorphisme canonique considéré est bien un isomorphisme.

*Proposition (8.14.4).* — *Si  $U$  est un ouvert quasi-compact de  $X$ , il existe un entier  $d$  tel que pour tout entier  $n$  multiple de  $d$ ,  $\mathcal{O}_X(n)|U$  soit inversible, son inverse étant  $\mathcal{O}_X(-n)|U$ .*

Comme  $q(U)$  est quasi-compact, il est recouvert par un nombre fini d'ouverts affines  $V_i$ , donc tout  $x \in U$  est contenu dans un ouvert affine de la forme  $D_+(f)$ , où  $f$  est un élément homogène de degré  $> 0$  de l'un des anneaux  $\Gamma(V_i, \mathcal{S})$ . Comme  $U$  est quasi-compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de tels ouverts  $D_+(f_i)$ ; soit  $d$  un multiple commun des degrés des  $f_i$ . Le nombre  $d$  répond à la question en vertu de (2.5.17).

**(8.14.5)** Avec les hypothèses et notations de (8.14.1), on a défini dans (3.3.2) des homomorphismes canoniques de  $\mathcal{O}_Y$ -Modules

$$(8.14.5.1) \quad \alpha_n : \mathcal{M}_n \rightarrow q_*(\text{Proj}_0(\mathcal{M}(n))). \quad (n \in \mathbf{Z})$$

Généralisant les notations de (3.3.1), nous poserons, pour tout  $\mathcal{S}_X$ -Module gradué  $\mathcal{F}$

$$(8.14.5.2) \quad \Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} q_*(\mathcal{F}_n).$$

En particulier,  $\Gamma_*(\mathcal{S}_X) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} q_*(\mathcal{O}_X(n))$  est la  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée notée  $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$  dans (3.3.1.2); il est clair que  $\Gamma_*(\mathcal{F})$  est une  $\Gamma_*(\mathcal{S}_X)$ -Algèbre graduée (0, 4.2.2). Lorsque

dans les homomorphismes (8.14.5.1), on prend  $\mathcal{M} = \mathcal{S}$ , on obtient l'homomorphisme de  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbres graduées

$$(8.14.5.3) \quad \alpha : \mathcal{S} \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{S}_X)$$

déjà défini dans (3.3.2), et qui fait donc de  $\Gamma_*(\mathcal{F})$  un  $\mathcal{S}$ -Module gradué; les homomorphismes (8.14.5.1) définissent alors un homomorphisme (de degré 0) de  $\mathcal{S}$ -Modules gradués

$$(8.14.5.4) \quad \alpha : \mathcal{M} \rightarrow \Gamma_*(\text{Proj}(\mathcal{M})).$$

(8.14.6) En général, pour un  $\mathcal{S}_X$ -Module gradué quasi-cohérent  $\mathcal{F}$ , il n'est pas certain que le  $\mathcal{S}$ -Module gradué  $\Gamma_*(\mathcal{F})$  soit nécessairement quasi-cohérent. Considérons un ouvert  $X'$  de  $X$  tel que la restriction  $q' : X' \rightarrow Y$  de  $q$  à  $X'$  soit un morphisme *quasi-compact*. Comme  $q'$  est en outre séparé,  $q'_*(\mathcal{F})$  est alors un  $\mathcal{O}_{X'}$ -Module quasi-cohérent pour tout  $\mathcal{O}_{X'}$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{F}'$  (I, 9.2.2, b)). Nous poserons

$$(8.14.6.1) \quad \mathcal{S}_{X'} = \mathcal{S}_X|_{X'} = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_X(n)|_{X'}$$

et, pour tout  $\mathcal{S}_{X'}$ -Module gradué  $\mathcal{F}'$ ,

$$(8.14.6.2) \quad \Gamma'_*(\mathcal{F}') = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} q'_*(\mathcal{F}'_n).$$

La remarque précédente montre alors que si  $\mathcal{F}'$  est un  $\mathcal{S}_{X'}$ -Module quasi-cohérent,  $\Gamma'_*(\mathcal{F}')$  est un  $\mathcal{S}$ -Module gradué *quasi-cohérent* (I, 9.6.1).

On notera d'ailleurs que l'injection canonique  $j : X' \rightarrow X$  est *quasi-compacte* puisque  $q = q \circ j$  l'est et que  $q$  est séparé (I, 6.6.4, (v)). Par suite  $\mathcal{F} = j_*(\mathcal{F}')$  est un  $\mathcal{S}_X$ -Module gradué quasi-cohérent pour tout  $\mathcal{S}_{X'}$ -Module gradué quasi-cohérent  $\mathcal{F}'$ , et il résulte des définitions précédentes que l'on a

$$(8.14.6.3) \quad \Gamma'_*(\mathcal{F}') = \Gamma_*(\mathcal{F}).$$

Avec les mêmes hypothèses sur  $X'$ , pour tout  $\mathcal{S}$ -Module gradué quasi-cohérent  $\mathcal{M}$ , nous poserons

$$(8.14.6.4) \quad \text{Proj}'(\mathcal{M}) = \text{Proj}(\mathcal{M})|_{X'}$$

qui est un  $\mathcal{S}_{X'}$ -Module gradué quasi-cohérent. L'homomorphisme canonique

$$\text{Proj}(\mathcal{M}) \rightarrow j_*(\text{Proj}'(\mathcal{M}))$$

(0, 4.4.3) donne donc un homomorphisme canonique  $\Gamma_*(\text{Proj}(\mathcal{M})) \rightarrow \Gamma'_*(\text{Proj}'(\mathcal{M}))$  de  $\mathcal{S}$ -Modules gradués, et par suite, en le composant avec (8.14.5.4), on obtient un homomorphisme canonique fonctoriel (de degré 0) de  $\mathcal{S}$ -Modules gradués quasi-cohérents

$$(8.14.6.5) \quad \alpha' : \mathcal{M} \rightarrow \Gamma'_*(\text{Proj}'(\mathcal{M})).$$

(8.14.7) Conservons sur  $X'$  les hypothèses de (8.14.6), et soit  $\mathcal{F}'$  un  $\mathcal{S}_{X'}$ -Module gradué quasi-cohérent, de sorte que  $\text{Proj}'(\Gamma'_*(\mathcal{F}'))$  est aussi un  $\mathcal{S}_{X'}$ -Module gradué quasi-

*cohérent.* Nous allons définir un homomorphisme canonique fonctoriel (de degré 0) de  $\mathcal{S}_{X'}$ -Modules gradués

$$(8.14.7.1) \quad \beta' : \mathcal{P}roj'(\Gamma'_*(\mathcal{F}')) \rightarrow \mathcal{F}'.$$

Supposons d'abord  $Y = \text{Spec}(A)$  affine,  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ , où  $S$  est une  $A$ -algèbre graduée à degrés positifs; alors  $\Gamma'_*(\mathcal{F}') = \widetilde{M}$ , où  $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Gamma(X', \mathcal{F}'_n)$  est un  $S$ -module gradué. Soit  $f \in S_d$  tel que  $D_+(f) \subset X'$ ; par définition (2.6.2),  $\alpha_d(f)$  restreinte à  $D_+(f)$ , est la section de  $\mathcal{O}_X(d)$  au-dessus de  $D_+(f)$  correspondant à l'élément  $f/1$  de  $(S(d))_{(f)}$  et est par suite inversible; il en est donc de même de  $\alpha_d(f^n)$  pour tout  $n > 0$ . On en conclut aussitôt que l'on définit un  $S_f$ -homomorphisme (de degré 0) de modules gradués  $\beta_f : M_f \rightarrow \Gamma(D_+(f), \mathcal{F}')$  en faisant correspondre à tout élément  $z/f^n \in M_f$  (où  $z \in M$ ), la section  $(z|D_+(f))(\alpha_d(f^n)|D_+(f))^{-1}$  de  $\mathcal{F}'$  au-dessus de  $D_+(f)$ . En outre, on a un diagramme commutatif correspondant à (2.6.4.1), d'où la définition de  $\beta'$  dans ce cas. Pour passer au cas général, il faut considérer une  $A$ -algèbre  $A'$ , la  $A'$ -algèbre graduée  $S' = S \otimes_A A'$ , et utiliser un diagramme commutatif analogue à (2.8.13.2); nous laissons les détails aux lecteurs.

*Proposition (8.14.8).* — Si  $X'$  est un ouvert de  $X = \text{Proj}(\mathcal{S})$  tel que  $q' : X' \rightarrow Y$  soit quasi-compact, l'homomorphisme  $\beta'$  défini dans (8.14.7) est bijectif.

On peut évidemment se restreindre au cas où  $Y$  est affine et tout revient à prouver (avec les notations de (8.14.7)) que l'homomorphisme  $\beta_f : M_f \rightarrow \Gamma(D_+(f), \mathcal{F}')$  est un isomorphisme. Or, lorsqu'on remplace  $f$  par une de ses puissances, on ne change pas  $D_+(f)$  ni  $\beta_f$ ; comme  $X'$  est quasi-compact par hypothèse, on peut donc toujours supposer, en vertu de (8.14.4), que le faisceau  $\mathcal{O}_X(d)$  est inversible. Comme  $X'$  est un schéma (puisque  $q'$  est séparé), la proposition n'est autre alors que (I, 9.3.1).

*Corollaire (8.14.9).* — Sous les hypothèses de (8.14.8), tout  $\mathcal{S}_{X'}$ -Module gradué quasi-cohérent  $\mathcal{F}'$  est isomorphe à un  $\mathcal{S}_X$ -Module gradué de la forme  $\mathcal{P}roj'(\mathcal{M})$ , où  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{S}$ -Module gradué quasi-cohérent. Si en outre  $\mathcal{F}'$  est de type fini, et si on suppose que  $Y$  est un schéma quasi-compact ou un préschéma dont l'espace sous-jacent est noethérien, on peut supposer  $\mathcal{M}$  de type fini.

La démonstration à partir de (8.14.8) suit exactement la marche de celle de (3.4.5) à partir de (3.4.4), et nous en laissons les détails au lecteur.

*Proposition (8.14.10).* — Sous les hypothèses de (8.14.7), soient  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{S}$ -Module gradué quasi-cohérent,  $\mathcal{F}'$  un  $\mathcal{S}_{X'}$ -Module gradué quasi-cohérent; les homomorphismes composés

$$(8.14.10.1) \quad \mathcal{P}roj'(\mathcal{M}) \xrightarrow{\mathcal{P}roj'(\alpha')} \mathcal{P}roj'(\Gamma'_*(\mathcal{P}roj'(\mathcal{M}))) \xrightarrow{\beta'} \mathcal{P}roj'(\mathcal{M})$$

$$(8.14.10.2) \quad \Gamma'_*(\mathcal{F}') \xrightarrow{\alpha'} \Gamma'_*(\mathcal{P}roj'(\Gamma'_*(\mathcal{F}'))) \xrightarrow{\Gamma'_*(\beta')} \Gamma'_*(\mathcal{F}')$$

sont les isomorphismes identiques.

La question est locale sur  $Y$  et la vérification se fait comme dans (2.6.5); nous en laissons les détails au lecteur.

*Remarque (8.14.11).* — Au chapitre III (III, 2.3.1), nous verrons que lorsque  $Y$  est localement noethérien et  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente de type fini (auquel cas

on peut prendre  $X' = X$ ), alors l'homomorphisme  $\alpha$  (8.14.5.4) est **(TN)-bijectif** pour tout  $\mathcal{S}$ -Module gradué quasi-cohérent  $\mathcal{M}$  vérifiant la condition **(TF)**.

*Remarque (8.14.12).* — La situation décrite dans (8.14.4) est un cas particulier de la suivante. Soient  $X$  un espace annelé,  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_X$ -Algèbre graduée (à degrés positifs et négatifs); supposons qu'il existe un entier  $d > 0$  tel que  $\mathcal{S}_d$  et  $\mathcal{S}_{-d}$  soient *inversibles*, l'homomorphisme canonique

$$(8.14.12.1) \quad \mathcal{S}_d \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{S}_{-d} \rightarrow \mathcal{O}_X$$

étant un *isomorphisme* (de sorte que  $\mathcal{S}_{-d}$  s'identifie à  $\mathcal{S}_d^{-1}$ ). On dit alors que la  $\mathcal{O}_X$ -Algèbre graduée  $\mathcal{S}$  est *périodique de période d*. Cette dénomination provient de la propriété suivante : *sous les hypothèses précédentes, pour tout  $\mathcal{S}$ -Module gradué  $\mathcal{F}$ , l'homomorphisme canonique*

$$(8.14.12.2) \quad \mathcal{S}_d \otimes \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_{n+d}$$

*est un isomorphisme pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ .* En effet, la question est locale sur  $X$  et on peut donc supposer que  $\mathcal{S}_d$  possède une section *inversible*  $s$  au-dessus de  $X$ , son inverse  $s'$  étant une section de  $\mathcal{S}_{-d}$ . L'homomorphisme  $\mathcal{F}_{n+d} \rightarrow \mathcal{S}_d \otimes \mathcal{F}_n$  qui, à toute section  $z \in \Gamma(U, \mathcal{F}_{n+d})$  fait correspondre la section  $(s|U) \otimes (s'|U)z$  de  $\mathcal{S}_d \otimes \mathcal{F}_n$  sur  $U$ , est alors réciproque de (8.14.12.2), d'où notre assertion. On en déduit pour tout  $k \in \mathbf{Z}$  un isomorphisme canonique

$$(\mathcal{S}_d)^{\otimes k} \otimes \mathcal{F}_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{n+kd}.$$

Par suite, un  $\mathcal{S}$ -Module gradué  $\mathcal{F}$  est connu lorsqu'on connaît les  $\mathcal{S}_0$ -Modules  $\mathcal{F}_i$  ( $0 \leq i \leq d-1$ ) et les homomorphismes canoniques

$$\mathcal{S}_i \otimes \mathcal{F}_j \rightarrow \mathcal{F}_{i+j} \quad \text{pour } 0 \leq i, j \leq d-1$$

(en posant  $\mathcal{F}_{i+j} = \mathcal{S}_d \otimes_{\mathcal{S}_0} \mathcal{F}_{i+j-d}$  lorsque  $i+j \geq d$ ). Bien entendu, pour que ces homomorphismes définissent bien une structure de  $\mathcal{S}$ -Module sur la somme directe des  $(\mathcal{S}_d)^{\otimes k} \otimes \mathcal{F}_i$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ,  $0 \leq i \leq d-1$ ), ils doivent satisfaire à des conditions d'associativité que nous n'expliciterons pas.

Dans le cas où  $d=1$  (qui est celui considéré dans (3.3)) on peut donc dire que la catégorie des  $\mathcal{S}$ -Modules gradués (resp. quasi-cohérents si  $X$  est un préschéma et  $\mathcal{S}$  est quasi-cohérente) est *équivalente* à la catégorie des  $\mathcal{S}_0$ -Modules quelconques (resp. quasi-cohérents); c'est dans ce sens qu'on peut considérer les développements de ce numéro comme généralisant ceux du § 3. En outre, on voit que, sous des conditions de finitude convenables, les résultats de ce numéro ( joints à (8.14.11)) ramènent dans une certaine mesure l'étude des Algèbres graduées quasi-cohérentes sur un préschéma, et des Modules gradués « mod. **(TN)** » sur de telles Algèbres, à l'étude du cas particulier où les Algèbres considérées sont *périodiques* (et où la condition **(TN)** pour  $\mathcal{M}$  (3.4.2) implique donc  $\mathcal{M}=0$ ).

*Remarque (8.14.13).* — Sous les hypothèses de (8.14.1), soit  $d$  un entier  $> 0$ ; on a défini un  $Y$ -isomorphisme canonique  $h$  de  $X$  sur  $X^{(d)} = \text{Proj}(\mathcal{S}^{(d)})$  (3.1.8). Pour tout

$\mathcal{S}$ -Module gradué quasi-cohérent  $\mathcal{M}$  et tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq d-1$ , on a aussi un  $h$ -isomorphisme canonique (avec les notations de (3.1.1))

$$(8.14.13.1) \quad (\mathcal{P}roj(\mathcal{M}))^{(d,k)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}roj(\mathcal{M}^{(d,k)}).$$

Supposons d'abord  $Y = \text{Spec}(A)$  affine,  $\mathcal{S} = \widetilde{S}$ ,  $\mathcal{M} = \widetilde{M}$ , où  $S$  est une  $A$ -algèbre graduée à degrés positifs et  $M$  un  $S$ -module gradué. On sait que pour tout  $f \in S_e$  ( $e > 0$ )  $h$  applique  $D_+(f)$  sur  $D_+(f^d)$  et correspond à l'isomorphisme canonique  $S_{(f^d)} \xrightarrow{\sim} S_{(f)}$  (2.2.2). La restriction de (8.14.13.1) à  $D_+(f^d)$  correspond alors au di-isomorphisme canonique  $M_{f^d} \xrightarrow{\sim} M_f$ , restreint aux éléments de  $M_{f^d}$  de degré congru à  $k$  (mod.  $d$ ). Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que ces isomorphismes sont compatibles avec le passage de  $f$  à un de ses multiples homogènes  $fg$ , puis qu'on a une compatibilité analogue avec le passage de  $S$  à une  $A'$ -algèbre graduée  $S' = S \otimes_A A'$ , lorsque  $A'$  est une  $A$ -algèbre. En particulier, on a ainsi un  $h$ -isomorphisme

$$(8.14.13.2) \quad (\mathcal{S}^{(d)})_{X^{(d)}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{S}_X)^{(d)}$$

qui respecte les structures multiplicatives des deux membres, et grâce auquel (8.14.13.1) devient un  $h$ -di-isomorphisme d'un  $(\mathcal{S}^{(d)})_{X^{(d)}}$ -Module gradué sur un  $(\mathcal{S}_X)^{(d)}$ -Module gradué. De même, on a un  $h$ -isomorphisme

$$(8.14.13.3) \quad \mathcal{P}roj_0(\mathcal{S}^{(d,k)}(n)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(nd+k)$$

qui complète le résultat de (3.2.9, (ii)).

On déduit immédiatement de l'isomorphisme (8.14.13.1) un isomorphisme de  $\mathcal{S}^{(d)}$ -Modules gradués

$$(8.14.13.4) \quad \Gamma_*^{(d)}(\mathcal{P}roj(\mathcal{M}^{(d,k)})) \xrightarrow{\sim} \Gamma_*((\mathcal{P}roj(\mathcal{M}))^{(d,k)})$$

où  $\Gamma_*^{(d)}$  correspond au morphisme structural  $q^{(d)} : X^{(d)} \rightarrow Y$ ; il est immédiat de vérifier que l'homomorphisme canonique  $\alpha$  (8.14.5.4) et l'homomorphisme analogue  $\alpha^{(d)}$  pour  $X^{(d)}$  rendent commutatif le diagramme

$$(8.14.13.5) \quad \begin{array}{ccc} & \mathcal{M}^{(d,k)} & \\ \alpha^{(d)} \swarrow & & \searrow \alpha \\ \Gamma_*^{(d)}(\mathcal{P}roj(\mathcal{M}^{(d,k)})) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma_*((\mathcal{P}roj(\mathcal{M}))^{(d,k)}) \end{array}$$

la vérification se faisant en supposant  $Y$  affine, et calculant les restrictions des images par  $\alpha^{(d)}$  et  $\alpha$  d'un même élément de  $M^{(d,k)}$  aux ouverts  $D_+(f^d)$  et  $D_+(f)$  (avec les mêmes notations que ci-dessus).

*Proposition (8.14.14).* — Soient  $Y$  un préschéma quasi-compact,  $\mathcal{S}$  une  $\mathcal{O}_Y$ -Algèbre graduée quasi-cohérente de type fini,  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{S}$ -Module gradué quasi-cohérent vérifiant la condition (TF); soit  $X = \text{Proj}(\mathcal{S})$ . Alors  $\mathcal{S}_X$  est une  $\mathcal{O}_X$ -Algèbre graduée périodique (8.14.12), et il existe une

période  $d$  de  $\mathcal{S}_X$  telle que les  $(\text{Proj}(\mathcal{M}))^{(d,k)}$  ( $0 \leq k \leq d-1$ ) soient des  $(\mathcal{S}_X)^{(d)}$ -Modules de type fini.

En effet, (3.1.10) prouve qu'il existe  $d$  tel que  $\mathcal{S}^{(d)}$  soit engendrée par  $\mathcal{S}_d = (\mathcal{S}^{(d)})_1$ , ce dernier étant un  $\mathcal{S}_0$ -Module de type fini. Pour démontrer la première assertion, on peut donc, en vertu de (8.14.13.2), se borner au cas où  $d=1$ , et alors la proposition résulte de (3.2.7). En outre, compte tenu de (8.14.13.1), la seconde assertion est conséquence de (2.1.6 (iii)) et de (3.4.3).

---

## BIBLIOGRAPHIE (*suite*)

- [23] C. CHEVALLEY, Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, *Math. Surveys*, n° 6, Amer. Math. Soc., New York, 1951.
  - [24] P. JAFFARD, *Les systèmes d'idéaux*, Paris (Dunod), 1960.
  - [25] M. NAGATA, On the derived normal rings of Noetherian integral domains, *Mem. Coll. Sci. Kyoto*, sér. A, t. XXIX (1955), p. 293-303.
  - [26] M. NAGATA, Existence theorems for non projective complete algebraic varieties, *Ill. J. Math.*, t. II (1958), p. 490-498.
-