



מערכות ספרתיות

4

- אופרטור אוניברסלי
- מימוש NAND ו NOR
- מפות קרנו
- שיטת האמפליקנטים
- משתני טבלה
- סיכונים סטטיים

ד"ר רון שמואלי

(c) Dr. Ron Shmueli

1

אוניברסליות של פונקציות בוליאניות

- **משפט:** סט של אופרטורים הוא אוניברסלי אם ורק אם, ניתן לבטא כל פונקציה בוליאנית במונחים של האופרטורים בסט.

- הסט האקסיומטי:

- לפי דמורגן: $x+y=(x'y')'$

- לפי דמורגן: $xy=(x'+y')'$

אוניברסליות של פונקציות בוליאניות (המשך)

- הפונקציה NOR:

– מימוש NOT

– מימוש OR

- הפונקציה NAND:

– מימוש NOT

– מימוש AND

בדיקת אוניברסליות של פונקציה כלשהיא.

- בבדיקת אוניברסליות - אסור שימוש בקבועים אלא אם נתון אחרת.
- כלל (חלש): במידה והצבנו את אותו משתנה בכל משתני האופרטור, וקיבלנו את המשלים למשתנה – אזי יש סיכוי שהאופרטור אוניברסלי. אחרת האופרטור אינו אוניברסלי. (הכלל תקף רק כאשר אסור שימוש בקבועים)



- דוגמא: נתון $f(xyz)=x'yz+xy'+y'z'$
האם f אופרטור אוניברסלי

- דוגמא: נתון $g(xyz)=x'yz+xy'+y'z'$
האם g אופרטור אוניברסלי
האם הסט $\{g,1\}$ אוניברסלי

2011

(c) Dr. Ron Shmueli

4

מימוש פונקציות לוגיות כלשהן בעזרת שערי NOR

- כדאי לצאת מ POS מינימלי – דוגמא:

מימוש פונקציות לוגיות כלשהן בעזרת שערי NAND

- כדאי לצאת מיצוג SOP מינימלי – דוגמא:

2011

(c) Dr. Ron Shmueli

5

דוגמא



• נתון האופרטור $f(xyz) = xy \oplus yz \oplus 1$

$$g(ab) = a \oplus b$$

- האם הסט $\{f, s\}$ אוניברסלי?
- ממש מינימלית בעזרת הסט $\{f, s\}$ את

שיטות לפישוט ומינימיזציה של פונקציות לוגיות

- פונקציה מינימלית ביחס לאילוצי תכנון:

- מינימום רכיבים ביחס למינימום שערים.
- אמינות הפונקציה הלוגית – סיכונים סטטיים.

Fan In –

Fan Out –

– פיזור הספק

– בקורס שלנו : פונקציה מינימלית = מינימום שערים
(אלא אם צויין אחרת)

2011

(c) Dr. Ron Shmueli

7

קריטריונים לפונקציה מינימלית

- הפונקציות הבאות זהות (בעלות אותה טבלת אמת)

$$f1(xyz) = x' y' z + x' yz + xyz' + xyz \dots\dots\dots$$

$$f2(xyz) = x' z + yz + xy \dots\dots\dots$$

$$f3(xyz) = x' z + xy \dots\dots\dots$$

$$f1 = f2 = f3$$

p	q

- נגדיר:

• P_f מספר אברי המכפלה (סכום) בביטוי SOP (POS) של f .

• q_f מספר הליטרלים בביטוי SOP (POS) של f .

- הגדרה:

– עבור פונקציות זהות, המינימלית שבינן היא זו המקיימת:

$$q_{f3} = \min(q_{f3} q_{f2} q_{f1}) \quad P_{f3} = \min(P_{f3} P_{f2} P_{f1})$$

מפות קרנו Karnough Map

- הצגה של טבלת אמת בעזרת מפה דו מימדית

– הרעיון המרכזי: $f(ab)=ab'+ab=a(b+b')=a$

– לדוגמא:

a	b	f	g
0	0	0	
0	1	0	
1	0	1	
1	1	1	

a	a'	a
b	0	1
b' 0	0	2
b 1	1	3

a	a'	a
b	0	1
b' 0		
b 1		

– מצא g מינימלי

– $g(ab)=a'b'+ab'$

2011

(c) Dr. Ron Shmueli

9

מפת קרנו בשלושה משתנים

		y			
		00	01	11	10
z	0	$x'y'z'$	$x'yz'$	xyz'	$xy'z'$
	1	$x'y'z$	$x'yz$	xyz	$xy'z$

• דוגמא: צמצם את הפונקציות:

$$f(xyz) = \sum(0,1,4,5) \quad .1$$

		y			
		00	01	11	10
z	0	0	2	6	4
	1	1	3	7	5

$$f(xyz) = \sum(0,1,2,4,5) \quad .2$$

		y			
		00	01	11	10
z	0				
	1				

2011

(c) Dr. Ron Shmueli

10

הטכניקה לשימוש במפת קרנו:

- במפת קרנו 2^n תאים.
- הקפת כל קבוצות ה-"1"-ים ("0") הכי גדולות שאפשר.
- גודל קבוצה בחזקות 2 (1,2,4,8).
- ההקפה בצורת מרובע פשוט.
- אסור שהקפה אחת תהיה תת קבוצה של הקפה אחרת.
- מפת קרנו היא ציקלית.
- הפונקציה המינימלית: בעלת המספר הקטן ביותר של הקפות הכי גדולות שאפשר.

דוגמאות

• צמצם את

$f(xyz)=\sum(0,1,2,3,6,7)$

xy \ z	00	01	11	10
0				
1				

$f(xyz)=\sum(0,1,3,4,6,7)$

הפונקציה המינימלית לא חייבת להיות יחידה

xy \ z	00	01	11	10
0				
1				

צמצום אותה פונקציה בעזרת אפסים

xy \ z	00	01	11	10
0				
1				

2011

(c) Dr. Ron Shmueli

12

מפת קרנו ב-4 משתנים

- סידור המפה
- דוגמאות

1. צמצום : $F(wxyz) = \prod(1, 4, 9, 12, 13)$
(בדיקת ה SOP או POS)

1. צמצום : $F(wxyz) = \sum(0, 2, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 14, 15)$
(בדיקת ה SOP או POS)

(c) Dr. Ron Shmueli

13

דוגמא

- תכנן מערכת המקבלת ספרת BCD אחת ומפיקה $Z=1$ אם הספרה מתחלקת ב 4 או 5 ללא שארית

	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

2011

(c) Dr. Ron Shmueli

14

de

bc

00

01

11

10

a = 1

00

10

11

10

00

01

11

10

a = 0

00

10

11

10

מפת קרנו 5 משתנים

דוגמא

צמצום

$$f(abcde) = \sum(0,5,8,9,13,14,15,17,21,24,30) + \sum_{\phi}(1,7,16,19,25,29,31)$$

abc	000	001	011	010	110	111	101	100
de								
00	0	4	12	8	24	28	20	16
01	1	5	13	9	25	29	21	17
11	3	7	15	11	27	31	23	19
10	2	6	14	10	26	30	22	18

2011

(c) Dr. Ron Shmueli

15

דוגמא

- מצא פונקציה $g(abcd)$ מינימלית אשר תגרום לפונקציה $h(abcd)$ הנתונה להיות דואלית לעצמה.

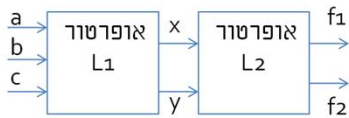
$h(abcd)=a'bc+acd+bd+g(abcd)$

	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

דוגמא



- נתון המעגל והפונקציות
 $f_1 = ab + b'c' = x'$
 $f_2 = a'(bc' + b'c) = xy'$
מצא את $x(abc)$ ו $y(abc)$ המינימליות

	00	01	11	10
0				
1				

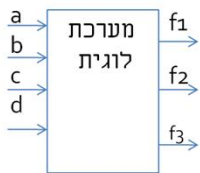
	00	01	11	10
0				
1				

	00	01	11	10
0				
1				

	00	01	11	10
0				
1				

	00	01	11	10
0				
1	(c) Dr. Ron Shmueli			

מימוש מינמלי של מערכת לוגית מרובת יציאות



• נתונות:

- $f_1(abcd)=\sum(0,1,4,5,8,12)$
- $f_2(abcd)=\sum(1, 5,10,14)$
- $f_3(abcd)=\sum(0, 2,4,6,10,14)$

• ממש מינימלית

	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

2011

	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

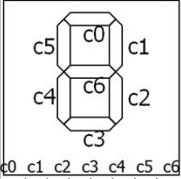
(c) Dr. Ron Shmueli

	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

18

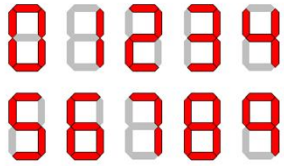
BCD to 7-segment display controller

- Input is a 4 bit bcd digit (A, B, C, D)
- Output is the control signals for the display (7 outputs Co – C6)



BCD to 7-segment control signal decoder

A B C D



	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

(c) Dr. Ron Shmueli

A	B	C	D	C0	C1	C2	C3	C4	C5	C6
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	–	–	–	–	–	–	–
1	1	1	1	–	–	–	–	–	–	–

מפות קרנו עם משתני מפה

- מאפשר לתאר פונקציה של יותר מ n משתנים בעזרת מפת קרנו של n משתנים.

- לדוגמא

נתונה $f(x,y,A,B)$ ע"י מפת קרנו הבאה:

1. פתרון בוליאני (לא מינימלי)

x	0	1
y		
0	B	1
1	0	A'

2. פתרון מינימלי – הרחבת מפת קרנו.

x	y	f
0	0	B
0	1	0
1	0	1
1	1	A'

	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

2011

(c) Dr. Ron Shmueli

20

דוגמא

x	y	F
0	0	A
0	1	C
1	0	B'
1	1	Φ

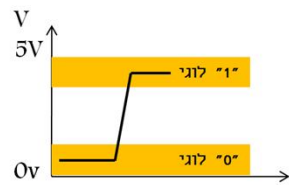
- נתונה הפונקציה F ע"י טבלת אמת
כמו כן נתון $C = A \text{ xor } B$
- תן SOP קנוני ל $F(x,y,A,B)$
- תן SOP מינימלי ל $F(x,y,A,B)$

	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

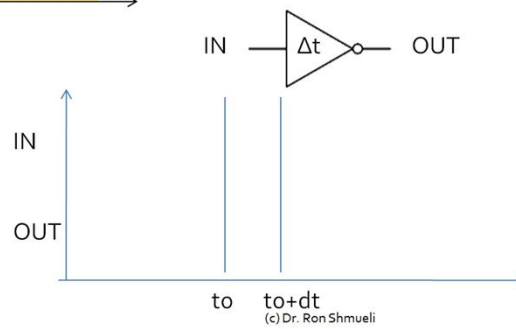
סיכונים סטטיים פוטנציאליים במערכות לוגיות

Hazards in combinational logic

- לכל רכיב אלקטרוני יש זמן תגובה מרגע קבלת שינוי במבוא ועד לקבלת תגובה במוצא.



- תאור בדיאגרמת זמנים

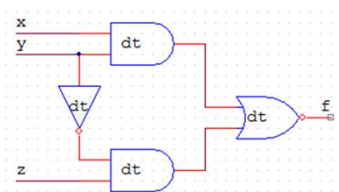


2011

(c) Dr. Ron Shmueli

22

דוגמא לסיכון סטטי פוטנציאלי מסוג 1



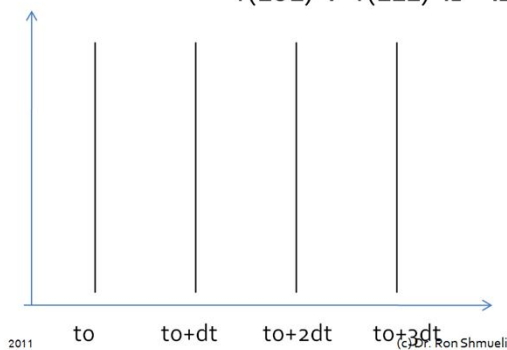
• הפונקציה $f(xyz) = y'z + xy$:

• נניח שלכל שער השהייה של Δt

1. נבחן את המוצא עבור הכניסות הבאות

2. $f(101) =$ $f(111) =$

3. נבחן את ההתנהגות במעבר מ $f(111)$ ל $f(101)$

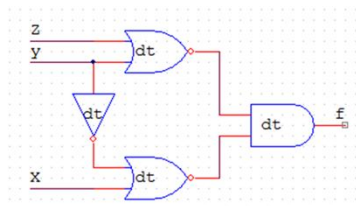


זיהוי הסיכון במפת קרנו

	00	01	11	10
0				
1				

23

דוגמא לסיכון סטטי פוטנציאלי מסוג 0



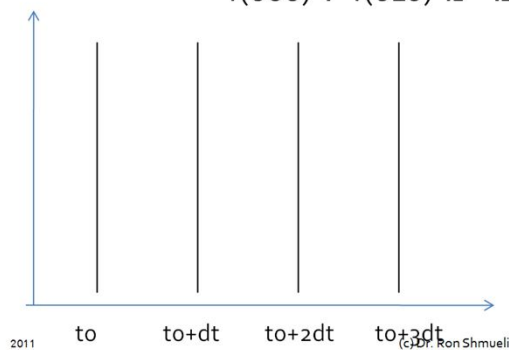
• הפונקציה : $f(xyz) = (y' + x)(y + z)$

• נניח שלכל שער השהייה של Δt

1. נבחן את המוצא עבור הכניסות הבאות

2. $f(000) =$ $f(010) =$

3. נבחן את ההתנהגות במעבר מ $f(010)$ ל $f(000)$



זיהוי הסיכון במפת קרנו

	00	01	11	10
0				
1				

2011

(c) Dr. Ron Shmueli

24

סיכון סטטי פוטנציאלי מסוג 1

- בסיכון זה מוצא המעגל יורד רגעית מ 1 ל 0
- נגרם בגלל מימוש SOP מינימלי של פונקציה
- קורה בנקודת ההשקה של אימפליקנטים.
- המשתנה הגורם לסיכון אינו קבוע בנקודת ההשקה.
- תיקון הסיכון ע"י הוספת אמפליקנט בנקודת ההשקה.

סיכון סטטי פוטנציאלי מסוג 0

- בסיכון זה מוצא המעגל עולה רגעית מ 0 ל 1
- נגרם בגלל מימוש POS מינימלי של פונקציה
- קורה בנקודת ההשקה של אימפליקנטים.
- המשתנה הגורם לסיכון אינו קבוע בנקודת ההשקה.
- תיקון הסיכון ע"י הוספת אמפליקנט בנקודת ההשקה.
- נק השקה עם don't care לא מהווה סיכון !! מדוע?

2011

(c) Dr. Ron Shmueli

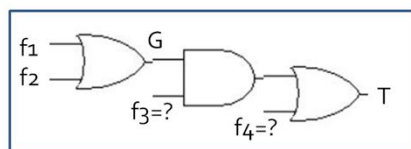
25

דוגמא

• נתונה הפונקציה $f(wxyz) = y'w' + x'y + xzw$

- סמן סיכונים במפת קרנו
- איזה משתנים גורמים לסיכונים
- תקן את הסיכונים

	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10



דוגמא

• במעגל המתואר

- הפונקציה f_1 מומשה ע"י $f_1 = (w+z)(w'+x'+z)(x'+y'+z)$
- הפונקציה f_2 מומשה ע"י $f_2 = wyz' + w'xy + zx$
- איזה משתנים גורמים לסיכונים סטטיים ב G ?
- מצא f_3 ו f_4 מינימליות כך ש T תהיה שווה ל G ללא סיכונים.

	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

2011

(c) Dr. Ron Shmueli

27

שיטת האפמליקנטים של Quin McCluskey לצמצום

	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

• הגדרות

- **אימפליקנט (Implicant)**
 p הוא מכפלה (או סכום) של ליטרלים f פונקציה, אם p שייך ל f – אזי p נקרא אימפליקנט של f .
 • לדוגמא: $f=xw+yz$ $p=wxy'$
 $p+f=$
 $pf=$

- **אימפליקנט ראשי (Prime Implicant) PI**
 p הוא אימפליקנט ראשי של f אם p שייך ל f , ומחיקה של אחד הליטרלים מ p תיצור מכפלה חדשה שאינה שייכת ל f .

- **אימפליקנט ראשי הכרחי (Essential Prime EPI – Implicant)**
 f יקרא אימפליקנט ראשי הכרחי אם הוא מכסה לפחות מינטרם (מקסטרם) אחד של f , שלא מכוסה ע"י אימפליקנט ראשי אחר.

- לדבר על EPI הכולל don't care

(c) Dr. Ron Shmueli

28

$F(w, x, y, z) = \sum (1, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15)$ נתון

צמצום בשיטת Quine-McCluskey

סידור מינורמיים לפי מס' 1

מס' 1"	מס'	w	x	y	z	
1	m1	1	0	0	0	x
	m4	4	0	1	0	x
	m8	8	1	0	0	x
2	m6	6	0	1	1	x
	m9	9	1	0	1	x
	m10	10	1	0	1	x
3	m7	7	0	1	1	x
	m11	11	1	0	1	x
4	m15	15	1	1	1	x

חיפוש זוגות

	w	x	y	z	PI	
1	1,9	---	0	0	1	$x'y'z$
	4,6	0	1	---	0	$w'xz'$
	8,9	1	0	0	---	x
	8,10	1	0	---	0	x
2	6,7	0	1	1	---	$w'xy$
	9,11	1	0	---	1	x
	10,11	1	0	1	---	x
3	7,15	---	1	1	1	xyz
	11,15	1	---	1	1	wyz

חיפוש רביעיות

	w	x	y	z	PI	
	8,9,10,11	1	0	---	---	wx'
	8,10,9,11	1	0	---	---	wx'

בחירת מספר מינימלי של PI's

	1	4	6	7	8	9	10	11	15
EPI	$x'y'z$	⊗				x			
EPI	$w'xz'$		⊗	x					
	$w'xy$			x	x				
	xyz				x				x
	wyz							x	x
EPI	wx'					⊗	⊗	x	

2011

$F = x'y'z + w'xz' + w'xy + xyz + wx'$

$F(w, x, y, z) = \sum (1, 4, 6, 8) + \sum_d (7, 9, 10, 11, 15)$

	1	4	6	8	
$x'y'z$	⊗				
$w'xz'$		⊗	x		
$w'xy$			x		
xyz					
wyz					
wx'				⊗	

x x x

$F = x'y'z + w'xz' + wx'$

29

דוגמא

- נתונה פונקציה $f(abcd)$ ע"י טבלת ה-PI שלה.
- מצא את $f(abcd)$ האפשריות ?

	1	2	6	11
P1	X	X	X	
P2	X			X
P3	X			

	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

דוגמא

	2	3	5	12	13	mj	mk
P1=b'c	X	X					X
P12	X					X	
P13=ab				X	X		
P14			X		X		
P15				X		X	
P16							X

- נתונה טבלת PI של הפונקציה
- $f(abcd)$ עם נעלמים
- השלם את הטבלה נמק בקצרה
- סדר מציאת נעלמים
- תו ביטוי SOP קנוני ומינימלי ל f

	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10