26 יוני 2006

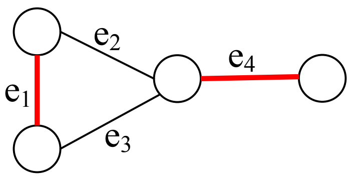
הרצאה 13 אלגוריתמים 1
(מבוסס על רשימות של רומן אוסטרירוב)

הגדרה
שידוך בגרף G=(V,E) היא קבוצת קשתות $M \subseteq E$ כך שבכל צומת $v \in V$ נוגעת לכל היותר קשת אחת ב-M. (צומת נקרא משודך אם נוגעת בו קשת).

- M נקרא שידוך מושלם (perfect matching) ב-G, אם כל צומת ב-G משודך (אם |V| אי-זוגי, לעתים מרשים צומת לא משודך אחד).
- M הוא שידוך <u>מקסימלי</u> אם הוא לא מוכל בשידוך גדול יותר. M הוא שידוך <u>מקסימום</u> אם לכל שידוך אחר M' מתקיים $|M'| \le |M|$.

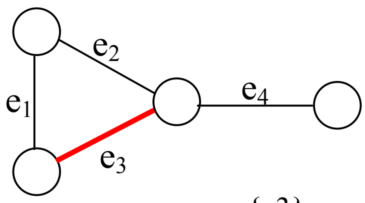
<u>דוגמה</u>

שידוך מקסימום (מושלם):



{e1,e4}

שידוך מקסימלי:



{e3}

תזכורת
גרף G=(V,E) הוא דו-צדדי אם $V = (L \cup R)$ כך ש- $L \cap R = \varnothing$ ולכל קשת $(u,v) \in E$ מתקיים $u \in L, v \in R$ או $u \in R, v \in L$.

שידוך מקסימום בגרף דו-צדדי

<u>בעיה:</u> בהנתן גרף דו-צדדי $G = (L \cup R, E)$ יש למצוא ב-G שידוך מקסימום.

<u>דוגמאות:</u>
1) במסיבה יש n בנים ו-n בנות, כל בת מדווחת ל-DJ עם מי מהבנים היא מוכנה לרקוד, וכל בן מדווח ל-DJ עם מי מהבנות הוא מוכן לרקוד. מטרת ה-DJ – כמה שיותר זוגות על רחבת הריקודים.
2) סטודנט מעוניין להירשם ל-n קורסים, לכל קורס יש רשימה של מועדי התרגולים. האם יש מערכת שבה הסטודנט יכול להירשם בקב' תרגול אחת בכל קורס, כך שיוכל להיות נוכח בכל ההרצאות והתרגולים?

<u>פתרון הדוגמאות בעזרת שידוך</u>
1) נבנה גרף L={בנות}, R={בנים}. $(u,v) \in E$ אמ"ם u מוכן לרקוד עם v ו-v מוכן לרקוד עם u. שידוך מושלם: |L|=|R| אם |M|=|L|.
2) L={קורסים}, R={מועדי תרגילים}, $(u,v) \in E$ $\leftrightarrow$ [יש תרגול בקורס u בזמן v, ואף אחת מההרצאות לא ניתנת בזמן v]. יש מערכת כמבוקש אמם בשידוך מקסימום כל הצמתים ב-L משודכים.

<u>אלגוריתם לשידוך מקסימום בגרף דו צדדי על ידי זרימת מקסימום</u>

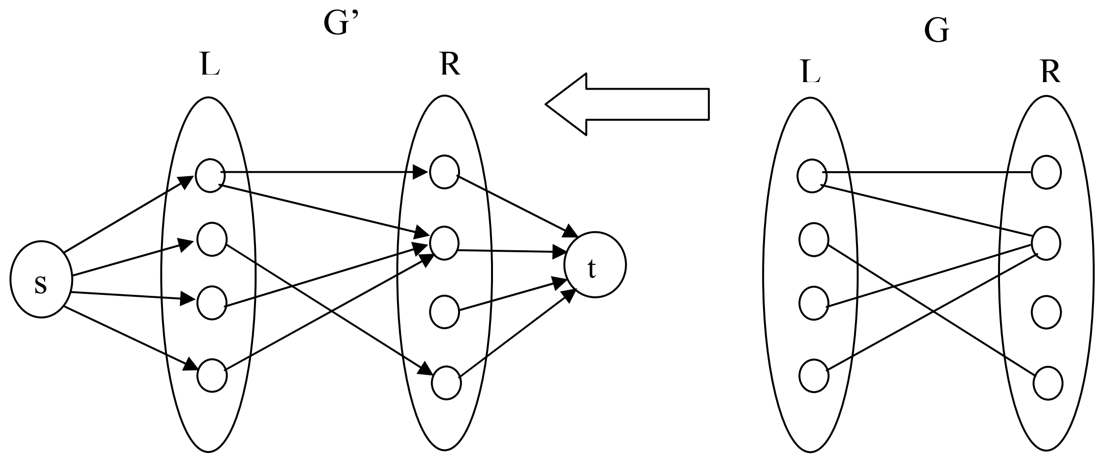
עבור הגרף הדו-צדדי $G=(L\cup R,E)$ נגדיר את רשת הזרימה $N=(G',s,t,c)$.

$$V'=L\cup R\cup\{s,t\}$$

$$E'=\{(s,v)\mid v\in L\}\cup\{(u,t)\mid u\in R\}\cup\underbrace{\{(u,v)\in E\mid u\in L,v\in R\}}_{\text{הקשתות המקוריות ב-G}}$$

לכל קשת $e'\in E'$ נגדיר $c(e')=1$.

<u>דוגמה:</u>



<u>הגדרה:</u>

f היא פונקציית זרימה בשלמים אם הזרימה על כל קשת היא מספר שלם.

<u>למה:</u>

יהיו G ו-N גרף דו-צדדי ורשת זרימה מתאימה (כפי שבנינו). אז אם M שידוך ב-G, קיימת ב-N זרימה בשלמים f כך ש- $|M|=|f|$. ולהיפך: אם f זרימה בשלמים ב-N, אז קיים ב-G שידוך M כך ש- $|M|=|f|$.

<u>הוכחה:</u>

א) נניח ש-M שידוך ב-G, אז נגדיר ב-N פונק' זרימה בשלמים באופן הבא:

אם $(u,v)\in M$ כך ש- $u\in L, v\in R$, אז:

$$f((s,u))=f((u,v))=f((v,t))=1$$

הזרימה על שאר הקשתות היא 0.

- נשמרים אילוצי הקיבול כי $c(e')=1$ לכל $e'\in E'$.
- מתקיים שימור הזרימה, כי המסלולים שהגדרנו זרים ביחס לצמתים (למעט s ו-t) – זה נובע מהעובדה ש-M שידוך, ולאורך כל מסלול שימור הזרימה מתקיים לפי הגדרת f.

לכן לכל צומת משודך $u \in L$ ערך הזרימה הנכנסת = ערך הזרימה היוצאת = 1, וכנ"ל לכל $v \in R$. היות ויצרנו M מסלולים זרים שעל כל אחד ערך הזרימה הוא 1, אז F=|M|.

ב) בהנתן פונ' הזרימה בשלמים f ב-N, נגדיר שידוך ב-G באופן הבא:

$$M = \{(u, v) \mid u \in L, v \in R, f(u, v) > 0\}$$

לכל צומת $u \in L$ יש בדיוק קשת נכנסת אחת שקיבולה 1. הזרימה הנכנסת ל-u היא לכל היותר 1. צריך להתקיים חוק שימור הזרימה, לכן סך כל הזרימה היוצאת מ-u היא גם לכל היותר 1. היות ו-f היא זרימה בשלמים, הזרימה היא בדיוק 1 ולכן קיים צומת יחיד $v \in R$ כך שהזרימה על (u,v) גדולה מ 0.

$\Leftarrow$ $u \in L$ משודך בדיוק לצומת אחד ב-M.

באופן דומה, נראה כי כל $v \in R$ משודך לצומת יחיד ב-L.

$\Leftarrow$ M הוא שידוך ב-G. נסתכל על החתך $\{s\} \cup L$, הזרימה העוברת דרכו היא בדיוק גודל בשידוך. לכן |M|=|f|.

ראינו בשעור קודם כי אם כל הקיבולים שלמים, אז כל אלגוריתם לזרימת מקסימום שמגדיל זרימה באמצעות מסלולי שיפור מוצא זרימת מקסימום שהיא זרימה בשלמים.

<u>מסקנה:</u>

ניתן לחשב שידוך מקסימום ב-G ע"י מציאת זרימת מקסימום ברשת N.

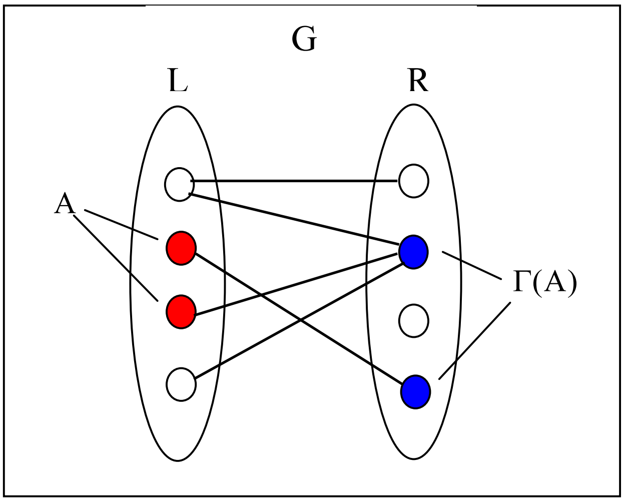
<u>סיבוכיות:</u>

גודל שידוך מקסימום הוא לכל היותר $\min\{|L|,|R|\}=O(|V|)$.

לכן יהיה צורך ב-$O(|V|)$ איטרציות בהפעלת פורד פלקרסון (למשל), כי בכל איטרציה משפרים את הזרימה ב-1 לפחות. סיבוכיות כל איטרציה של $O(|E|)$. ולכן הסיבוכיות הכוללת - $O(|V|\cdot|E|)$.

<u>משפט Hall</u>

בהנתן גרף דו-צדדי $G = (L \cup R, E)$ וקב' צמתים $A \subseteq L$, נסמן $\Gamma(A)$ את קב' הצמתים ב-R שיש להם שכן אחד או יותר ב-A.



<u>משפט הול</u>

בגרף דו-צדדי $G = (L \cup R, E)$ שבו |L|=|R| יש שידוך מושלם אמ"ם לכל $A \subseteq L$, $|A| \le |\Gamma(A)|$.

<u>הסבר</u>
נקרא גם "משפט החתונה". לא קיים שידוך מלא לבנות אמ"ם קיימת קבוצת בנות שגדולה מסה"כ הבנים שיוכלו לרקוד עם הבנות בקבוצה.

<u>הוכחה</u>

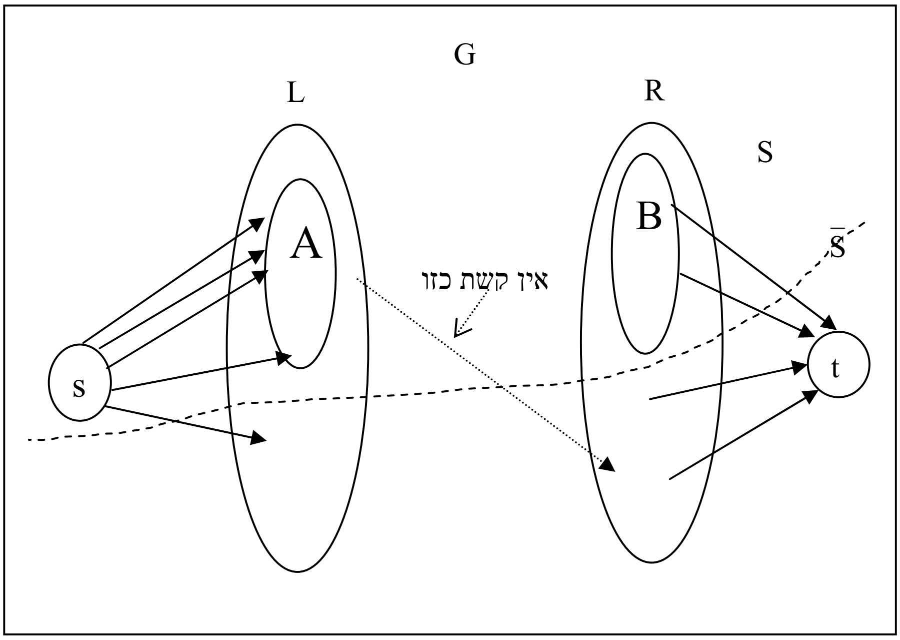
(i) נניח שב-G שידוך מושלם, דהיינו לכל צומת $u \in L$ קיים בן זוג $v \in R$ (והזוגות זרים). לכן לכל קב' $A \subseteq L$ מתקיים:

$$|A| = |\{v \in R \mid v \textit{ is matching to } u \in L\}| \le |\Gamma(A)|$$

(ii) נתון כי לכל קב' $A \subseteq L$ מתקיים $|A| \le |\Gamma(A)|$. נראה שקיים שידוך מושלם ב-G. נבנה רשת N בדומה לרשת למציאת שידוך מקסימום למעט ההבדל הבא: עבור קשתות e'=(u,v) כך ש- $u \in L, v \in R$ נגדיר $c(e') = \infty$.

- ניתן לראות כי הלמה והמשפט שהוכחנו ביחס לשידוך מקסימום מתקיימים. ובפרט גודל שידוך המקסימום ב-G שווה לערך זרימת מקסימום ברשת N.
$\Leftarrow$ מספיק להראות שערך זרימת המקסימום הוא |L|.

- נניח בשלילה כי ערך זרימת המקסימום F*<|L|, נראה כי מתקבלת סתירה.
יהי $(S, \bar{S})$ חתך מינימום ב-N. לכן $F^* = C(S, \bar{S})$, ממשפט max-flow min-cut, נגדיר $A = L \cap S$, $B = R \cap S$. אם $A = \Phi$ אז גודל החתך ≥|L|, לכן ניתן להניח $A \neq \Phi$.



- אם $v \in \Gamma(A)$ אז $v \in B$, אחרת קיימת קשת מ-L ל-R שחוצה את החתך, ולכן $C(S, \bar{S}) = \infty$, בסתירה להיותו חתך מינימום, כי יש אחר: $(\{s\}, V \setminus \{s\})$ שקיבולו שווה |L|<∞.

- מכאן נובע ש- $\Gamma(A) \subseteq B$, לכן $|A| \le |\Gamma(A)| \le |B|$, וסה"כ:

$$F^* = C(S,\bar{S}) = |L \setminus A| + |B| \ge |L \setminus A| + |A| = |L|$$

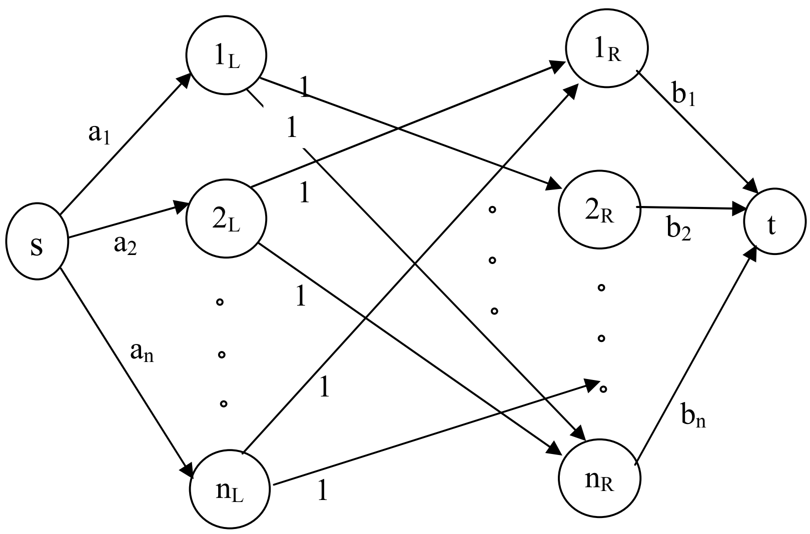
סתירה לכך ש-$F^*<|L|$. לכן $|L|=F^*$. מ.ש.ל.

<u>על וקטורים ורשתות זרימה</u>

- נתונים שני וקטורים של שלמים חיוביים $(a_1,\ldots,a_n)$, $(b_1,\ldots,b_n)$ כך ש- $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = C$.

הצע אלגוריתם הבודק האם קיים גרף מכוון פשוט בעל n צמתים ללא לולאות עצמיות שבו דרגות היציאה הם $(a_1,\ldots,a_n)$, ודרגות כניסה הם$(b_1,\ldots,b_n)$. a_i ו b_i דרגות כניסה ויציאה של צומת i.

נגדיר את רשת הזרימה הבאה (יש קשת מכוונת $(i_L \to j_R)$ עם קיבולת 1 אםם $i \ne j$):



נמצא את זרימת המקסימום f. בכל קשת $(i_L \to j_R)$ הזרימה היא 0 או 1.

<u>טענה:</u> קיים גרף G המקיים התנאים אםם חוזק הזרימה הוא C.

רעיון ההוכחה: חוזק הזרימה הוא C אםם כל הקשתות שיוצאות מ s (וכל הקשתות שנכנסות ל t) הן רוויות.

קשת $(i \to j)$ נמצאת בגרף G אםם $f(i_L \to j_R) > 0$.