

# תכנון וניתוח אלגוריתמים

## הרצאה 7

---

פרק 1.7 : תרגול בעית  $b$ -ים  
שליליים





# דוגמא 1



נתונה הבעיה הבאה: 

$$\text{Max } \{Z = -2x_1 - x_2\}$$

S.t.

$$3x_1 + 4x_2 = 12$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 6$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2$$





תחום הפתרונות האפשריים הינו קטע בין זוג הקדקודים  
האלה:


$x_1$	$x_2$	$z$	
3	$\frac{3}{4}$	$-6\frac{3}{4}$	
1.6	1.8	-5	$\Leftarrow$



# פתרון הדוגמה לפי סימפלקס



פתרון: 

שלב ראשון הוא הפיכת האי-שוויונים לשוויונים. 



# דוגמא 1



המערכת המתקבלת היא: 

$$\text{Max } \{Z = -2x_1 - x_2 - My_1 - My_3\}$$

S.t.

$$3x_1 + 4x_2 + y_1 = 12$$

$$-x_1 + 2x_2 + s_2 = 2$$

$$x_1 + 4x_2 - s_3 + y_3 = 6$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2 \quad s_j \geq 0 \quad j = 2, 3$$

$$y_j \geq 0 \quad j = 1, 3$$

# דוגמא 1



		$x_1$	$x_2$	$y_1$	$s_2$	$y_3$	$s_3$			$\bar{b}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
	<b>בסיס</b>	-2	-1	$-M$	0	$-M$	0	<b>מחירים</b>			
	$Z$	2	1	$M$	0	$M$	0			$0=Z$	
1	$y_1$	3	4	1	0	0	0			12	
2	$s_2$	-1	2	0	1	0	0			2	
3	$y_3$	1	4	0	0	1	-1			6	





❖ לאחר איפוס מקדמי משתני הבסיס בשורת פונקציית המטרה  
על ידי הפעולה שלהלן:

$$R_1 \leftarrow R_1 - MR_2 - MR_4$$

❖ נקבל:

# דוגמא 1



		$x_1$	$x_2$	$y_1$	$s_2$	$y_3$	$s_3$			$\bar{b}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
בסיס		-2	-1	$-M$	0	$-M$	$M$	מחירים			
	$Z$	$-4M+2$	$-8M+1$	0	0	0	$M$			$-18M=Z$	
1	$y_1$	3	4	1	0	0	0			12	
2	$s_2$	-1	2	0	1	0	0			2	
3	$y_3$	1	4	0	0	1	-1			6	





◆ עתה אנו נמצאים בקדקוד  $(x_1, x_2) = (0, 0)$

◆ ברור שהפתרון איננו אופטימלי.

◆ ברור שהמשתנה הנכנס הוא:  $x_2$

◆ עתה נמצא מי המשתנה היוצא:

	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$s_2$	$y_3$	$s_3$				$\bar{b}$	$\frac{b}{a}$
$z_1$	-2	-1	$-M$	0	$-M$	0					
$Z$	$-4M+2$	$-8M+1$	0	0	0	$M$				$-18M=Z$	
$v_1$	3	4	1	0	0	0				12	$\frac{12}{4}$
$s_2$	-1	2	0	1	0	0				2	$\frac{2}{2}$
$v_3$	1	4	0	0	1	-1				6	$\frac{6}{4}$



# 1 אמה



01

		$x_1$	$x_2$	$y_1$	$s_2$	$y_3$	$s_3$				$\bar{b}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
		-2	-1	-M	0	-M	0					
	Z	-8M+2.5	0	0	4M-0.5	0	M				-10M-1=Z	
1	$y_1$	5	0	1	-2	0	0				8	
2	$x_2$	-0.5	1	0	0.5	0	0				1	
3	$y_3$	3	0	0	-2	1	-1				2	



◆ עתה אנו נמצאים בקדקוד  $(x_1, x_2) = (0, 1)$

◆ ברור שהפתרון איננו אופטימלי.

◆ ברור שהמשתנה הנכנס הוא:  $x_1$

◆ עתה נמצא מי המשתנה היוצא:





	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$s_2$	$y_3$	$s_3$				$\bar{b}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
on	-2	-1	$-M$	0	$-M$	0					
Z	$-8M+2.5$	0	0	$4M-0.5$	0	$M$				$-10M-1=Z$	
$y_1$	5	0	1	-2	0	0				8	$\frac{8}{5}=1.$
$x_2$	-0.5	1	0	0.5	0	0				1	-
$y_3$	3	0	0	-2	1	-1				2	$\frac{2}{3}$







◆ עתה אנו נמצאים בקדקוד  $(x_1, x_2) = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$

◆ ברור שהפתרון איננו אופטימלי.

◆ ברור שהמשתנה הנכנס הוא:  $s_3$


◆ עתה נמצא מי המשתנה היוצא: קל לראות שהוא:  $y_1$

◆ עתה נקבל:







עֵתָה נִקְבֵּל: 

# דוגמה 1



		$x_1$	$x_2$	$y_1$	$s_2$	$y_3$	$s_3$			$\bar{b}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
		-2	-1	$-M$	0	$-M$	0				
	$Z$	0	0	$M-0.5$	0.5	$M$	0			$-5=Z$	
1	$s_3$	0	0	0.6	0.8	-1	1			28	
2	$x_2$	0	1	0.1	0.3	0	0			1.8	
3	$x_1$	1	0	0.2	-0.4	0	0			1.6	



# מסקנות



משתני הבסיס לפי הסדר הם:  $\{s_3, x_2, x_1\}$

לכן:

$$B = \begin{array}{c} [s_3, x_2, x_1] \\ \left( \begin{array}{ccc} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{array} \right) \end{array} \quad B^{-1} = \begin{array}{c} [y_1, s_2, y_3] \\ \left( \begin{array}{ccc} 0.6 & 0.8 & -1 \\ 0.1 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & -0.4 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$



# מסקנות



לכן: 

$$\underline{x}_B = B^{-1} \cdot \underline{b} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & -1 \\ 0.1 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & -0.4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.8 \\ 1.8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$





❖ וזהו פתרון אופטימלי לבעיה המקורית (אותו מצאנו גם כאשר פתרנו בשיטה גרפית).