Dijkstra's Algorithm

תרגול מיוחד

תרגיל 1

- נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, $w: E \rightarrow \{0,1,2\}$, $s \in V$.
  מצאי מסלולים קצרים ביותר מ-s.

הרעיון

- נריץ את האלגוריתם של Dijkstra וננצל את העובדה שהמשקולות הם רק 0, 1, ו-2 כדי לממש את תור העדיפויות בצורה יעילה יותר.
- תזכורת: זמן הריצה של Dijkstra הוא O(|V|+|V|*extract_min + |E|*update).

אורך המסלולים הוא $O(|V|)$

- כיוון שהמשקולות אי-שליליים, המסלולים הקצרים ביותר חייבים להיות פשוטים.
- מכיוון שמסלול פשוט מכיל לכל היותר 1 - |V| קשתות, ומשקל מקסימלי של קשת הוא 3, הערך d של כל צומת הוא מספר שלם בין 0 ל-3|V| (או אינסוף).
- לשם פשטות, נחליף את הסימון $d = \infty$ בסימון $d=3|V|+1$, ונחליפו בחזרה כאשר האלגוריתם יסתיים.

רדוקציה לקורס "מבני נתונים"

- כלומר, עלינו לממש ADT בעל ממשק דומה לזה של ערימה (heap), כאשר נתון שהמפתחות הם אי-שליליים עד 3|V|+1.
- מימוש ה-ADT יהיה בעזרת מערך בגודל 3|V|+2 (עם אינדקסים בין 0 ל-3V+1).
- במקום ה- i במערך – רשימה מקושרת דו-כיוונית של מצביעים אל הקודקודים v עבורם d[v]=i.
- מצביעים הדדיים בין כל קודקוד בגרף והערך המתאים לו ברשימה המקושרת.

מימוש ה-ADT

- update(v, new_d)– נמחוק את המצביע לקודקוד v מהרשימה המתאימה במערך. נכניס אותו בראש הרשימה המתאימה ל-new_d. זמן: O(1).
- extract_min – נמצא את האיבר הראשון במערך שאינו מכיל רשימה ריקה.
- כיוון שכל קריאה ל- extract_min מחזירה ערך גדול או שווה לקריאה הקודמת, אין צורך לבצע את הסריקה כל פעם מתחילת המערך בזמן (O(|V|).

זמן extract_min

- הסריקה בקריאה ל-extract_min תמשיך מהמקום בו הופסקה הסריקה הקודמת.
- זאת בעזרת משתנה שיכיל את האינדקס בו הופסקה הסריקה האחרונה.
- משתנה זה יאותחל ל-0.
- אמנם זמן הריצה בקריאה אחת הוא מס' התאים שנסרקו, כלומר O(V), אך מכיוון שכל תא נסרק פעם אחת בכל האלגוריתם, זהו גם זמן הריצה של כל |V| הקריאות ל-extract_min.

זמן ריצה כולל

$$O(|V|+|V|*extract\_min + |E|*update) = O(|V|+|E|)$$

תרגיל 3

- נתון גרף מכוון $G=(V, E)$, $w:E\rightarrow R+$, $s,t\in V$ וכל קשת צבועה באדום או כחול. יש למצוא אורך מק"ב מ-s ל-t מבין המסלולים בעלי מס' זוגי של קשתות אדומות.

תשובה

- לשם נוחות, עבור צומת $v \in V$ נסמן $v_0=(v,0)$ ו- $v_1=(v,1)$.
- נגדיר $G'=(V', E')$ כדלהלן:
- $V'=\{v0, v1 \mid v \in V\}$, ו-
- $E'=\{(u_0, v_0), (u_1, v_1) \mid (u,v) \in E$ כחולה$\}$.
$\cup\{(u_0, v_1), (u_1, v_0) \mid (u,v) \in E$ אדומה$\}$

אלגוריתם+הוכחה

- <u>האלגוריתם:</u> הרץ Dijkstra על G’מ-s0. החזר את אורך המק"ב מ-s0 ל-t0.
- <u>הוכחת נכונות:</u> מההגדרות נובע שקיים מסלול בין s_0 ל- t_0 אמם קיים מסלול מ-s ל- t באותו אורך ובעל מס' אדומות זוגי.
- לכן מק"ב כלשהו מ-s_0 ל- t_0 הוא בעל אותו אורך של מק"ב מבין המסלולים בעלי מס' זוגי של קשתות אדומות מ-s ל-t.