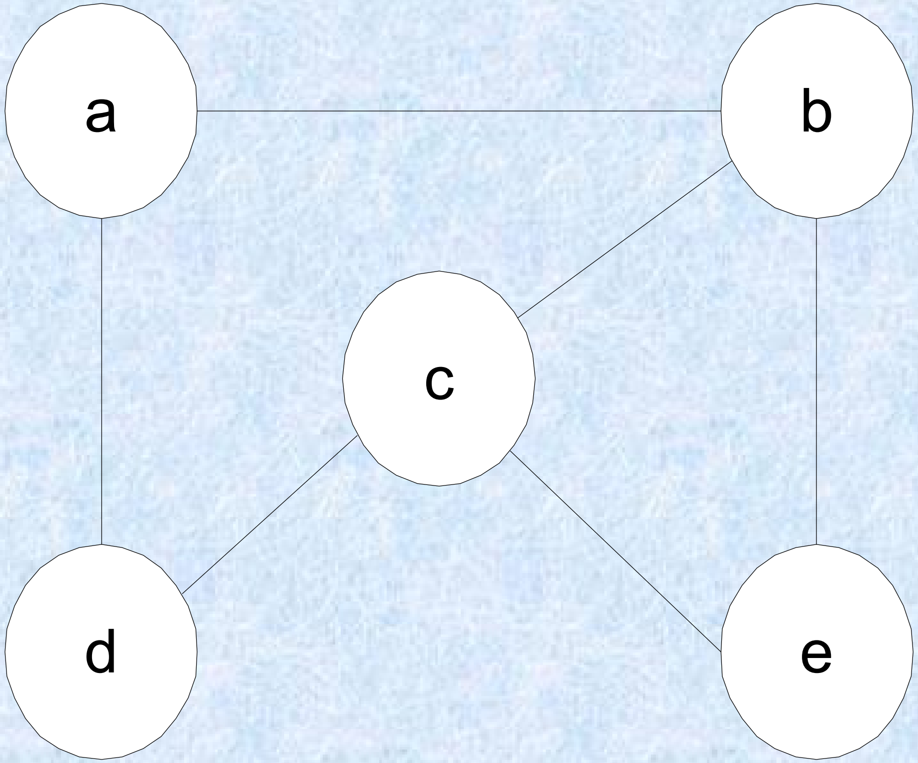
תכנון וניתוח אלגוריתמים
הרצאה 14

מטריצת מסלולים

סגור טרנזיטיבי

<u>מטריצת מסלולים</u>

- נתון גרף $G=(V,E)$
- הגרף מיוצג בעזרת מטריצת סמיכות, אין מידע על הקשתות (כלומר הגרף אינו משוקלל) **ונניח כי אורך כל קשת הוא אחד.**
- ברצוננו לדעת האם קיים מסלול כלשהו בין צמתי הגרף?
- נתבונן בגרף הבא :



- ומטריצת הסמיכות המייצגת אותה הינה:

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- 1 – מייצג את הערך הלוגי "אמת" (TRUE).
- 0 – מייצג את הערך הלוגי "שקר" (FALSE).
- $A[a,b]=1$ כלומר קיימת קשת (מסלול באורך 1) מ- a ל- b .
- $A[b,c]=1$ כלומר קיימת קשת (מסלול באורך 1) מ- b ל- c .

- נתבונן כעת בביטוי הבא: $A[a,b]\ and\ A[b,c]$.
- לביטוי ערך 1 (TRUE) **אם ורק אם** ל- $A[b,c]$ ערך 1 (TRUE) וגם ל- $A[a,b]$ ערך 1 (TRUE), כלומר קיימת קשת מ- a ל- b וגם קיימת קשת מ- b ל- c .
- כלומר: $a \xrightarrow{1} b \wedge b \xrightarrow{1} c$

- כלומר לביטוי $A[a,b]\ and\ A[b,c]$ ערך 1 (TRUE) ***אם ורק אם*** קיים מסלול באורך 2 מקודקוד a לקודקוד c העובר דרך קודקוד b

- באופן כללי ניתן להסיק שלביטוי הבא:

$$A[x,y]\ and\ A[y,z]$$

ערך 1 (TRUE) אם ורק אם קיים מסלול באורך 2 בדיוק מקודקוד x לקודקוד z העובר דרך קודקוד y .

- עתה נתבונן בביטוי הבא:
- (A[a,b] and A[b,e]) OR (1 and 1) OR
- (A[a,c] and A[c,e]) OR (0 and 1) OR
- (A[a,d] and A[d,e]) (1 and 0) OR =1
- =1
- מתוך הביטוי קל לראות כי:

- אם נתבונן בגרף הנתון , רואים כי:
- יש מסלול באורך 2 מקודקוד a לקודקוד e העובר דרך קודקוד b .
- אין מסלול באורך 2 מקודקוד a לקודקוד e העובר דרך קודקוד c .
- אין מסלול באורך 2 מקודקוד a לקודקוד e העובר דרך קודקוד d .

- לביטוי הנתון ערך 1 (TRUE) אם ורק אם קיים מסלול באורך 2 מקודקוד a לקודקוד e דרך הקודקודים b או c או d .
- כלומר לביטוי הנתון ערך 1 (TRUE) אם ורק אם קיים מסלול באורך 2 מקודקוד a לקודקוד e דרך לפחות אחד מקודקודי הגרף.

א

- עתה נסתכל על אברי השורה a ועל אברי העמודה e ונכפיל את שני הוקטורים (כפל סקלרי).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ a & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \end{array}$$

א

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & (a \to a) & \wedge & (a \to e) & & (a \to b) & \wedge & (b \to e) & \\
 & 0 & \cdot & 0 & + & 1 & \cdot & 1 & + \\
 & (a \to c) & \wedge & (c \to e) & & (a \to d) & \wedge & (d \to e) & \\
= + & 0 & \cdot & 1 & + & 1 & \cdot & 0 & + \\
 & (a \to e) & \wedge & (e \to e) & & & & & \\
+ & 0 & \cdot & 0 & & = \ 1 & & &
\end{array}
$$

- מאחר והערכים שמופיעים במטריצה הם בוליאניים
- (TRUE=1 ו- FALSE=0) הכפל המספרי שקול לפעולה הלוגית AND והחיבור המספרי שקול לפעולה הלוגית OR .
- לאור האמור לעיל המכפלה הסקלרית של שני הוקטורים a ו e מחזירה ערך 1 (TRUE) ***אם ורק אם*** קיים מסלול באורך 2 מקודקוד a לקודקוד e דרך לפחות אחד מקודקודי הגרף.

- מסקנה זו נכונה לכל זוג וקטורים במטריצה.
- עתה נכפיל את המטריצה בעצמה ונקבל:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ e & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

- לאור מה שהראינו קודם בשביל הגרף הנתון G המיוצג על ידי המטריצה A , A^2 הינה מטריצת מסלולים באורך 2 מכל קודקוד בגרף לכל קודקוד אחר בגרף.
- מאחר ו- $A^2[a,c]=1$ אז קיים מסלול באורך 2 מקודקוד a ל c .
- $A^2[a,e]=1$ אז קיים מסלול באורך 2 מקודקוד a ל e .

- $A^2[a,d]=0$ אז לא קיים מסלול באורך 2 מקודקוד a לקודקוד d וכדומה.
- שים לב !
- מקודקוד a לקודקוד d קיים מסלול באורך 1
- בנוסף נתבונן על המסלולים מקודקוד a לקודקוד c.
- אין מסלול באורך 1, אך קיים מסלול באורך 2.

- מסקנה:
- לכל שורה i (וקטור i)במטריצה A ולכל עמודה j (וקטור j) במטריצה A, לכפל הסקלרי של i*j יש ערך 1 (TRUE) ***אם ורק אם*** קיים מסלול באורך 2 מקודקוד i לקודקוד j בגרף.
- מסקנה נוספת:
- A^2 הינה מטריצת מסלולים באורך 2 , בשביל הגרף הנתון, מכל קודקוד לכל קודקוד אחר בגרף.

- עתה נתבונן במטריצות A ו- A^2 . נסתכל על אברי השורה a במטריצה A^2 ועל אברי העמודה d במטריצה A ונכפיל את שני הוקטורים הבוליאניים (כפל סקלרי).

$$a\xrightarrow{2}a \quad a\xrightarrow{2}b \quad a\xrightarrow{2}c \quad a\xrightarrow{2}d \quad a\xrightarrow{2}e \qquad d$$ א

$$a\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{array}{cl}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} & \begin{array}{l}a\xrightarrow{1}d\\ b\xrightarrow{1}d\\ c\xrightarrow{1}d\\ d\xrightarrow{1}d\\ e\xrightarrow{1}d\end{array}\end{array} =$$

$$a\xrightarrow{2}a \;\; a\xrightarrow{1}d \qquad a\xrightarrow{2}a \;\; a\xrightarrow{1}d$$

$$= 1 \;*\; 1 \;+ 0*0 + \;1\;*\;1 \quad 0*0+1*0 = 1$$

- מתוך הביטוי קל לראות כי:
- קיים מסלול באורך 3 מקודקוד aלקודקוד d העובר דרך a
- לא קיים מסלול באורך 3 מקודקוד a לקודקוד d העובר דרך b
- קיים מסלול באורך 3 מקודקוד aלקודקוד d העובר דרך c
- לא קיים מסלול באורך 3 מקודקוד a לקודקוד d העובר דרך d או דרך e .

- מסקנה:
- לכל שורה i (וקטור i) במטריצה A^2 ולכל עמודה j (וקטור j) במטריצה A , לכפל הסקלרי i*j יש ערך 1 (TRUE) **אם ורק אם** קיים מסלול באורך 3 מקודקוד i לקודקוד j בגרף.
- מסקנה זו נכונה לכל זוג וקטורים במטריצות A^2 ו- A בהתאמה. עתה נכפיל את המטריצה A^2 במטריצה A ונקבל:

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

A^2 $\qquad$ A $\qquad$ A^3

ℵ

- A^3 - הינה מטריצת מסלולים באורך 3 בשביל הגרף הנתון מכל קודקוד לכל קודקוד אחר בגרף.
- באופן כללי:

$$A^m = A^{m-1} \cdot A$$

- כלומר אם אנו מעוניינים למצוא מטריצת מסלולים באורך m , קודם נחשב את מטריצת המסלולים באורך $m-1$ $\left(A^{m-1}\right)$ ונכפיל אותה בוליאנית במטריצת הסמיכות $\left(A\right)$.

- כלומר

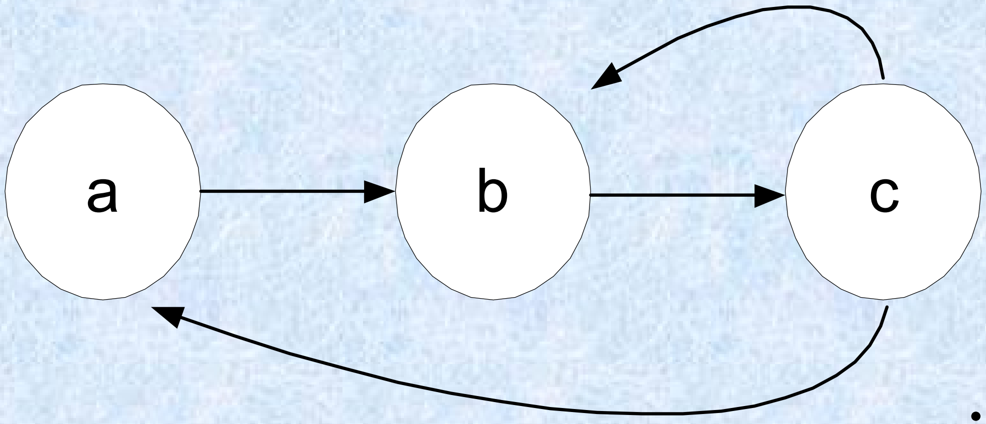
$$A^{4} = A^{3} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- כמו כן

$$A^5 = A^4 \cdot A$$

- קל לראות שגם A^5 הינה מטריצת אחדים.

- עתה נתבונן בגרף הבא:



- מטריצת הסמיכות המתאימה לגרף זה הינה:

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

כאמור

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- $A[i,j]=1$ אם ורק אם קיים מסלול באורך 1 מקודקוד i לקודקוד j .
- כמו כן $A^2[i,j]=1$ אם ורק אם קיים מסלול באורך 2 בדיוק מקודקוד i לקודקוד j .
- אך $A[i,j]+A^2[i,j]=1$ אם ורק אם קיים מסלול באורך 1 בדיוק או שקיים מסלול באורך 2 בדיוק, כלומר האם קיים מסלול באורך 2 לכל היותר.

אם ברצוננו לדעת האם קיים מסלול **באורך של לכל היותר 2** בין שני קודקודים כלשהם בגרף אזי נמצא אותו בעזרת חיבור בוליאני של מטריצות.

$$A^{\leq 2} = A + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- בדומה לשאלה הקודמת אם ברצוננו לדעת האם קיים מסלול באורך 3 לכל היותר בין שני קודקודים בגרף אזי נמצא אותו בעזרת חיבור בוליאני של מטריצות:

$$A^{\leq 3} = A + A^2 + A^3$$

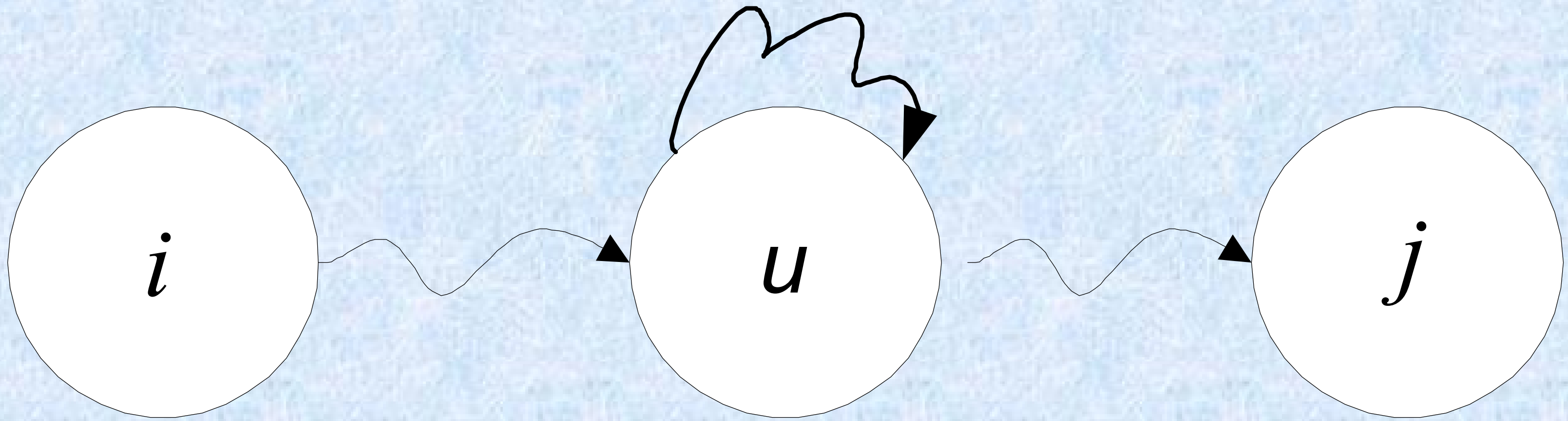
- כלומר קיים מסלול באורך 3 או פחות אם קיים מסלול באורך 1 או באורך 2 בדיוק או באורך 3 בדיוק.

- הערה:
- יתכן שיהיה מסלול באורך 1 וגם באורך 2 וגם באורך 3 בדיוק. מאחר והחיבור הוא בוליאני אזי $A^{\leq 3}[i, j] = 1$, כיוון שמעניין אותנו לדעת האם יש מסלול באורך של 3 או פחות.

- <u>טענה:</u>
- נתון גרף $G = (V, E)$ כאשר $|V| = n$ (n קודקודים בגרף). כל מסלול אפשרי מכל קודקוד לכל קודקוד בגרף הוא בעל אורך n לכל היותר.

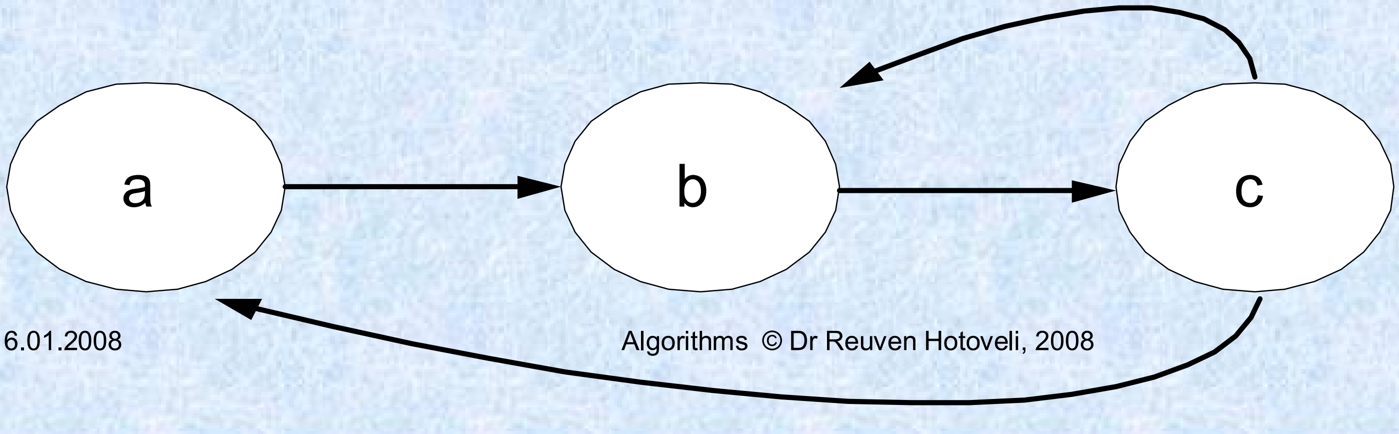
- אם קיים מסלול באורך m מקודקוד i לקודקוד j כאשר m>n אז תמיד נוכל למצוא מסלול אחר מקודקוד i לקודקוד j באורך של n לכל היותר. הכיצד?
- אם בגרף G, $|V| = n$ קודקודים ואורך המסלול מ-i ל-j הינו m ומתקיים m>n , אז לפחות קודקוד אחד u מופיע במסלול (שאורכו m) פעמיים.

- כלומר קיים מסלול מקודקוד i לקודקוד u בנוסף, קיים מסלול מעגלי מקודקוד u לקודקוד u וקיים מסלול מקודקוד u לקודקוד j כמתואר באיור הבא :



- אם נסיר את המסלול המעגלי מצומת u לצומת u אזי עדיין קיים מסלול מ-i ל-j .
- נחזור על תהליך זה עד שנגיע למסלול מ-i ל-j, כך שהמסלול יכיל כל צומת בגרף לכל היותר פעם אחת.
- לכן אורכו של המסלול מכל קודקוד I ולכל קודקוד j הינו לכל היותר n .

- <u>מסקנה:</u>
- כאשר ברצוננו לדעת האם קיים מסלול כלשהו בין קודקודים כלשהם בגרף, עלינו למצוא את $A^{\le n}$ כאשר, $A^{\le n} = A + A^2 + ... + A^n$
- בהמשך לגרף האחרון:



ראינו כי:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\quad A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\quad A^3=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

אם ברצוננו לדעת האם קיים מסלול מקודקוד כלשהו לכל קודקוד אחר בגרף נמצא את:

- א

$$A^{\le 3} = A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- כעת נכתוב אלגוריתם , אשר מקבל כפרמטר את מטריצת הסמיכות ויחשב את מטריצת המסלולים.

- קודם יש לכתוב שגרה בשם kefel אשר מקבלת שתי מטריצות a,b ומחשבת את המכפלה הבוליאנית שלהן לתוך מטריצה c.
- אחרי כן יש לכתוב שגרה בשם chibur אשר מקבלת שתי מטריצות a,b ומחשבת את החיבור הבוליאני שלהן לתוך המטריצה c.

- אחרי כן יש לכתוב שגרה בשם Hazev המציבה במטריצה b את המטריצה a . השגרה מקבלת כפרמטר את a ומחזירה את המטריצה b .
- עתה נסביר כיצד נוכל למצוא את המטריצה P , אשר תכיל את $A^{\le n}$.
- נתונה מטריצת סמיכות A .

- א
- באיטרציה-0 —
- באיטרציה 1: 1

P	Mat	$temp$	i
A		A	
$A+A^2$	A^2	A^2	1

$$Mat \leftarrow temp * A$$

$$P \leftarrow P + Mat$$

$$temp \leftarrow Mat$$

- א
- באיטרציה-1
- באיטרציה 2: 2

P	Mat	$temp$	i
$A+A^2$	A^2	A^2	
$\sum_{i=1}^{3} A^i$	A^3	A^3	

$$Mat \leftarrow temp * A$$

$$P \leftarrow P + Mat$$

$$temp \leftarrow Mat$$

P	Mat	$temp$	i
$\sum_{i=1}^{3} A^i$		A^3	
$\sum_{i=1}^{4} A^i$	A^4	A^4	

- א
- באיטרציה-2
- באיטרציה 3: 3

$$Mat \leftarrow temp * A$$

$$P \leftarrow P + Mat$$

$$temp \leftarrow Mat$$

$P \qquad Mat \qquad temp \qquad i$

- א
- באיטרציה n-1 : n-1

A^n

$\sum_{i=1}^{n} A^i$

$Mat \leftarrow temp * A$

$P \leftarrow P + Mat$

$A^n \quad temp \leftarrow Mat$

- שים לב! בתום האיטרציה ה K-ית ,
- המטריצה temp תכיל מטריצת מסלולים באורך k+1 בדיוק.
- המטריצה Mat תכיל מטריצת מסלולים באורך k+1 בדיוק.
- המטריצה P תכיל מטריצת מסלולים באורך k+1 לכל היותר.

- להלן השגרה בשם maslul המקבלת את המטריצה A ומחשבת ומחזירה את $A^{\leq n}$ לתוך משתנה P .

```
void maslul (matrix  A , matrix  P)
{
  matrix temp, Mat ;
   Hazev ( A , temp) ;  /* temp ← A */
   Hazev (A,P) ;          /* p ←A       */
```

```
for (   i=1 ; i<=n-1 ; i++)
  { kefel (temp , A , Mat) ;
    Chibur (P , Mat , P) ;
    Hazev (Mat , temp) ;
  }
}
```

- בספרות מטריצת המסלולים מכונה גם כסגור טרנזיטיבי.
- ***<u>יעילות למציאת מטריצת מסלולים</u>***
- אם בגרף n קודקודים אזי במטריצת הסמיכות n*n איברים.
- פעולת Hazev מבצעת השמה של מטריצה אחת בשניה, לכן סיבוכיות זמן הריצה של שגרה זו היא $O\left(n^2\right)$

- פעולת kefel מבצעת מכפלה של שתי מטריצות וסיבוכיות זמן הריצה של פעולה זו הינה: $O\left(n^3\right)$.
- פעולת chibur מבצעת חיבור של שתי מטריצות וסיבוכיות זמן הריצה של פעולה זו הינה: $O\left(n^2\right)$.
- <u>פעולה</u> <u>סדר גודל של זמן ריצה</u>
- $temp \Leftarrow A$ (מחוץ ללולאה) $O\left(n^2\right)$
  $P \Leftarrow A\left(Hazev\right)$ $+ O\left(n^2\right)$
  $+$

- לולאת for אשר מתבצעת O(n) פעמים מכילה את:

kefel שסיבוכיותה: $O\left(n^{3}\right)$

chibur שסיבוכיותה: $O\left(n^{2}\right)$

Hazev שסיבוכיותה: $O\left(n^{2}\right)$

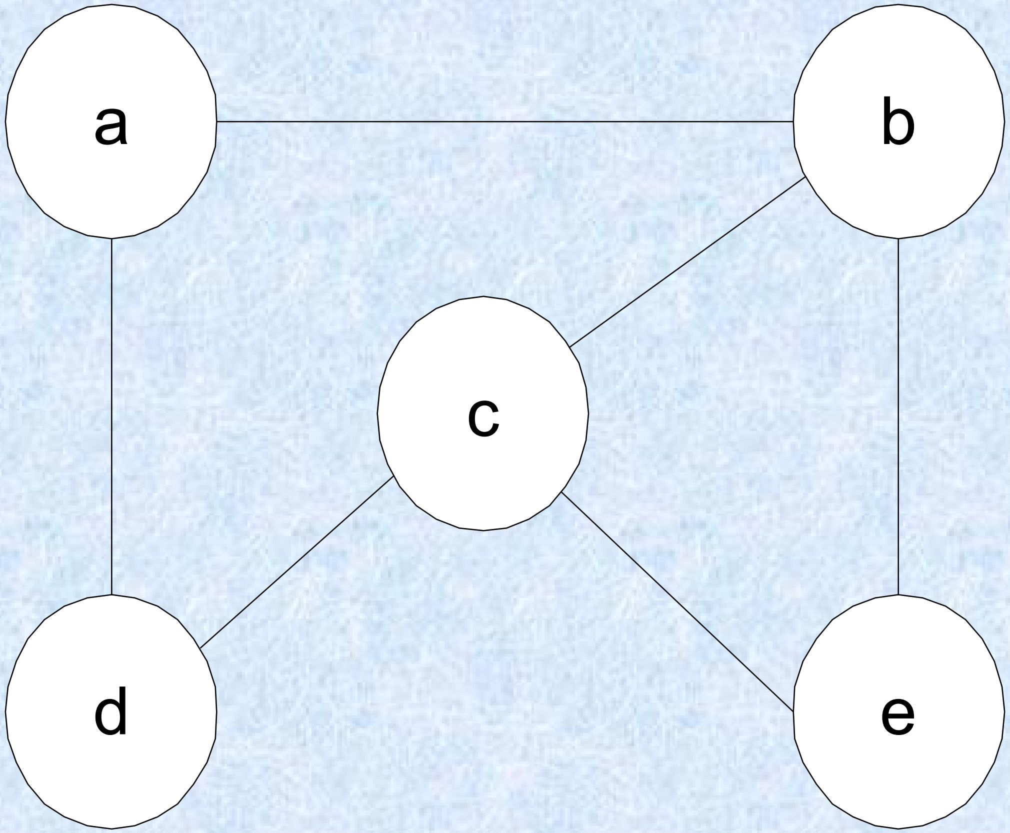
סופית סדר גודל של זמן ריצה הינו:

$$O\left(n^{2}\right)+O\left(n^{2}\right)+O\left(n\right)\left[O\left(n^{3}\right)+O\left(n^{2}\right)+O\left(n^{2}\right)\right]=$$

$$=O\left(n^{2}\right)+O\left(n^{4}\right)+O\left(n^{3}\right)+O\left(n^{3}\right)\longrightarrow O\left(n^{4}\right)$$

מציאת מספר מסלולים מכל קודקוד לכל קודקוד בגרף

- עתה ברצוננו לדעת את מספר המסלולים האפשריים מקודקוד לקודקוד בגרף לכל **i** ו-**j** .
- בשלב זה נסתכל על מטריצת סמיכות כאל מטריצה של מספרים ולא כמטריצה בוליאנית.
- נתבונן על הגרף הבא:



- הגרף מיוצג

באמצעות המטריצה-A

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

נכפיל את המטריצה בעצמה ונקבל:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

להבהרת הכפל נתבונן על השורה של $\underline{a}$
במטריצה אחת ועל העמודה $\underline{c}$ במטריצה השניה.
נכפיל את שני הוקטורים במכפלה סקלרית ונקבל:

$$a\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} & b & & d & \end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} c \\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ b\\ \\ d\\ \\ \end{array} = 0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1+0\cdot1=2$$

משמעות הכפל שקיימים שני מסלולים באורך 2 מ- a ל- c והמסלולים הם:

$$(a,b) \qquad (b,c)$$

$$and$$

$$(a,d) \qquad (d,c)$$

- אם נתבונן במטריצה A^2 , ניווכח שקיימים 3 מסלולים באורך 2 מקודקוד c לעצמו, כלומר

$$A^2\left[c,c\right]=3$$

- המסלולים הם:

$$(b,c) \qquad (c,b)$$

$$(d,c) \qquad (c,d)$$

$$(e,c) \qquad (c,e)$$

לו היינו מחשבים את A^4 היינו מקבלים (בדוק!)

$$A^4 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 9 & 3 & 11 & 1 & 6 \\ 3 & 15 & 7 & 11 & 8 \\ 11 & 7 & 15 & 3 & 8 \\ 1 & 11 & 3 & 9 & 6 \\ 6 & 8 & 8 & 6 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

- רואים מיד כי $A^4[d,e]=6$, כלומר קיימים 6 מסלולים באורך 4 מקודקוד d לקודקוד e ואלו הם:

$$(d,a)\quad(a,d)\quad(d,c)\quad(c,e)$$

$$(d,c)\quad(c,d)\quad(d,c)\quad(c,e)$$

$$(d,a)\quad(a,b)\quad(b,c)\quad(c,e)$$

$$(d,c)\quad(c,e)\quad(e,c)\quad(c,e)$$

$$(d,c)\quad(c,e)\quad(e,b)\quad(b,e)$$

$$(d,c)\quad(c,b)\quad(b,c)\quad(c,e)$$

משפט:

אם מטריצת סמיכות המייצג גרף פשוט אזי $A^n\left[i\,,\,j\right]$ מציין מספר המסלולים באורך n מקודקוד i לקודקוד j.

הוכחה:

נוכיח את המשפט באינדוקציה מתימטית על n .

- **בסיס**: אם n=1 אזי A^1 אכן שווה ל- A ו- $A[i,j]$ מציין את מספר המסלולים באורך 1 מקודקוד i לקודקוד j . מאחר והגרף פשוט ברור כי:

$$A[i,j]=\begin{cases}0 & (i,j)\ \text{אם לא קיימת קשת} \\ 1 & (i,j)\ \text{אם קיימת קשת}\end{cases}$$

- לכן המשפט מתקיים עבור n=1 .

- <u>הנחת האינדוקציה</u>: נניח את נכונות הטענה עבור n.
- <u>צ"ל</u>: נוכיח את הנכונות של המשפט עבור n+1 .
- כזכור: $A^{n+1} = A^n \cdot A$
- נתבונן על השורה ה- i במטריצה A^n ובעמודה ה-k במטריצה A . תוצאת המכפלה הסקלרית של שני הוקטורים הנ"ל הינה:

- אברי העמודה ה-k של A

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 \ldots s_j \ldots s_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_j \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix}$$

אברי השורה
ה-i של A^n

- נקבל:

$$s_1t_1 + s_2t_2 + \ldots + s_jt_j + \ldots + s_mt_m = A^{n+1}[i,k]$$

- על סמך הנחת האינדוקציה, s_j מציין את מספר המסלולים באורך n מקודקוד i לקודקוד j וידוע כי

$$t_j = \begin{cases} 0 & (j,k) \text{ אם לא קיימת קשת} \\ 1 & (j,k) \text{ אם קיימת קשת} \end{cases}$$

- אם $t_j = 0$ אזי $s_j t_j = 0$
- אם $t_j = 1$ אזי $s_j t_j = s_j$ $\quad i \sim\sim j \to k$
- כאמור s_j מציין את מספר המסלולים באורך n מקודקוד i לקודקוד j . אם קיימת קשת (j,k) (כלומר $t_j = 1$) אזי $s_j t_j$ מציין את מספר המסלולים באורך n+1 מקודקוד i לקודקוד k .

- הסכום מעל כל j , יתן את כל המסלולים באורך n+1 מקודקוד i לקודקוד k דרך כל צומת אפשרי j $\left(j=1...n\right)$.
- המטריצה A^{n+1} מייצגת את מספר המסלולים באורך n+1 מכל קודקוד i לכל קודקוד j .

- עד כה ראינו כיצד למצוא מטריצת מסלולים הקובעת אם קיים מסלול בין שני קודקודים כלשהם בגרף.
- כמו כן ראינו כיצד ניתן למצוא מספר המסלולים האפשריים באורך מסוים מכל קודקוד לכל קודקוד בגרף.
- עד כה לא ראינו כיצד למצוא את המסלול עצמו.
- נשאיר את הבעיה הזו כתרגיל לקורא.