עבודת בית 1: תכנון אלגוריתמים 2014

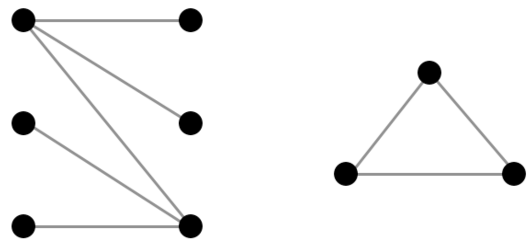
תאריך הגשה: 23.3.14

הנחיות

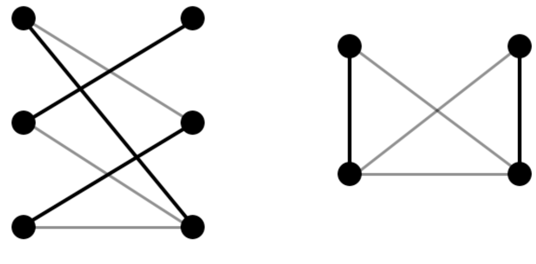
- כל עוד לא נאמר אחרת, בפתרון בעיה עליכם לספק:
  - אלגוריתם הפותר את הבעיה.
  - הוכחת נכונות.
  - ניתוח זמן ריצה.

הגדרות וסימונים

- **גרף מכוון** הוא זוג $G = (V, E)$ המורכב מקבוצת קודקודים V וקבוצת קשתות (צלעות) מכוונות E. קשת מכוונת היא זוג סדור של קודקודים. ב**גרף לא מכוון** קשת היא קבוצה של שני קודקודים (אין משמעות לסדר בינהם). בכל גרף, נאמר שקשת e **חלה** בקודקוד v, אם הקודקוד v הוא אחד משני הקודקודים בקשת e.
- **גרף דו-צדדי** הוא גרף לא מכוון $G = (V, E)$ בו קבוצת הקודקודים מחולקת לשתי קבוצות זרות R, L (ה"צדדים" של הגרף) כך שכל קשת ב-E מכילה קודקוד אחד בכל צד. כלומר, כל קשת מורכבת מקודקוד אחד ב-L וקודקוד אחד ב-R. אף קשת לא מכילה שני קודקודים באותו צד.
- **שידוך מושלם** בגרף לא מכוון $G = (V, E)$ הוא קבוצה של קשתות $M \subseteq E$ כך שבכל קודקוד $v \in V$ חלה בדיוק קשת אחת ב-M. שימו לב שלא תמיד קיימת קבוצה כזו, ואם קיים שידוך מושלם, הוא לא בהכרח יחיד. להלן כמה דוגמאות:



איור 1: בשני הגרפים הנ״ל אין שידוך מושלם.



איור 2: בשני הגרפים הנ״ל יש שידוך מושלם (הקשתות המודגשות). בשניהם הוא לא יחיד.

שאלה 1

נגדיר שתי בעיות:

1. **מסלולים זרים בקודקודים**
מופע לבעייה: גרף מכוון $G = (V, E)$ ושני קודקודים $s, t \in V$.
פיתרון לבעייה: מספר מקסימלי של מסלולים מ-s אל t ללא קודקודים משותפים פרט ל-s ו- t.

2. **מסלולים זרים בקשתות**
מופע לבעייה: גרף מכוון $G = (V, E)$ ושני קודקודים $s, t \in V$.
פיתרון לבעייה: מספר מקסימלי של מסלולים מ-s אל t ללא קשתות משותפות.

סימונים: לגרף $G = (V, E)$ נסמן: $|V| = n$ וכן $|E| = m$.

סעיף א תארו רדוקציה מבעיית המסלולים הזרים בקודקודים לבעיית המסלולים הזרים בקשתות, ללא ניתוח זמן ריצה.

סעיף ב תארו רדוקציה מבעיית המסלולים הזרים בקשתות לבעיית המסלולים הזרים בקודקודים, ללא ניתוח זמן ריצה.

הנחיה: בממיר הקלט, בנו גרף חדש בו הקודקודים הם הקשתות בגרף המקורי. מה יהיו הקשתות בגרף החדש? מה תעשו עם הקודקודים המקוריים s, t?

סעיף ג אם קיים אלגוריתם הפותר את בעיית המסלולים הזרים בקשתות בזמן $O(n + m)$ האם זה אומר שיש אלגוריתם הפותר את בעיית המסלולים הזרים בקודקודים בזמן $O(n + m)$? (ספקו הסבר מפורט. במידה ותשובתכם היא "כן", ספקו ניתוח זמן ריצה לאלגוריתם.)

סעיף ד אם קיים אלגוריתם הפותר את בעיית המסלולים הזרים בקודקודים בזמן $O(n + m)$ האם זה אומר שיש אלגוריתם הפותר את בעיית המסלולים הזרים בקשתות בזמן $O(n + m)$? (ספקו הסבר מפורט. במידה ותשובתכם היא "כן", ספקו ניתוח זמן ריצה לאלגוריתם.)

שאלה 2

נגדיר שתי בעיות:

- **בעיית השידוכים**
מופע לבעייה: גרף דו-צדדי $G = (V, E)$ עם צדדים R, L באותו גודל $|R| = |L|$.
פיתרון לבעייה: שידוך מושלם $M \subseteq E$ אם קיים כזה (ראו הגדרה לעיל), או תשובה שלילית אם לא קיים.

- **בעיית התמורות**
מופע לבעייה: סדרה של n קבוצות מספרים, $S_1, S_2, \ldots, S_n \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.
פתרון לבעייה: פונקציה חד-חד-ערכית ועל $p : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ שמקיימת

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : p(i) \in S_i ,$$

או תשובה שלילית אם אין פונקציה כזו.

למשל עבור הקבוצות $S_1 = \{1\}$ $S_2 = \{2, 3\}$ $S_3 = \{1, 2\}$ יתכן מיפוי p כזה:
$p(1) = 1$ $p(2) = 3$ $p(3) = 2$. לעומת זאת פונקציית הזהות אינה פתרון, כי $3 \notin S_3$.

הראו רדוקציה מבעיית השידוכים לבעיית התמורות. יש להוכיח נכונות (כלומר, שאלגוריתם מבוסס הרדוקציה שתיארתם מחזיר תשובה נכונה). אין צורך לנתח זמן ריצה.

שאלה 3

למורה רוחמה יש $2k$ סרגלים ו-k ילדים בכיתה. היום הילדים מכינים כרטיסי ברכה לפורים. כל ילד מקבל שני סרגלים, וגוזר מלבן לפי אותם מימדים. כלומר, אם ילד מקבל סרגל אחד באורך a וסרגל נוסף באורך b, הוא גוזר מלבן בגודל a על b עם שטח ab. מכיוון שרוחמה מלמדת בבית ספר אקולוגי, היא רוצה לבזבז כמה שפחות נייר. כמות הנייר המבוזבז שווה לסכום שטחי המלבנים (כלומר, הסכום $\sum_{i\ \text{תלמידה}} a_i b_i$). בהינתן אורכי הסרגלים $l_1, l_2, \ldots, l_{2k}$, עזרו לרוחמה לחלק סרגלים לתלמידים כך שישתמשו בשטח מינימלי של נייר.

<u>מופע לבעייה</u>: סדרה של אורכים (מספרים טבעיים) $l_1, l_2, ..., l_{2k}$.

<u>פתרון לבעייה</u>: חלוקה של האורכים לזוגות $(l_{i_{1,1}}, l_{i_{1,2}}), (l_{i_{2,1}}, l_{i_{2,2}}), \ldots, (l_{i_{k,1}}, l_{i_{k,2}})$ כך שסכום המכפלות $\sum_{j=1}^{k} l_{i_{j,1}} l_{i_{j,2}}$ מינימלי.

- תארו אלגוריתם חמדן אשר יעזור לרוחמה לחלק את הסרגלים בזוגות באופן כזה שימזער את כלל השטח של המלבנים שנגזרו. על האלגוריתם לרוץ בזמן $O(k \log k)$. יש להוכיח את נכונות האלגוריתם אך ורק *באמצעות הסכימה להוכחת נכונות אלגוריתם חמדן שראינו בכיתה.*

לדוגמא: נניח שאורכי הסרגלים הם: $6, 3, 8, 5, 3, 9$. אז סידור אופטימלי יהיה: $(6, 5), (3, 9), (8, 3)$.