# תכנון וניתוח אלגוריתמים
# הרצאה 11

***הגדרות ומושגי יסוד***

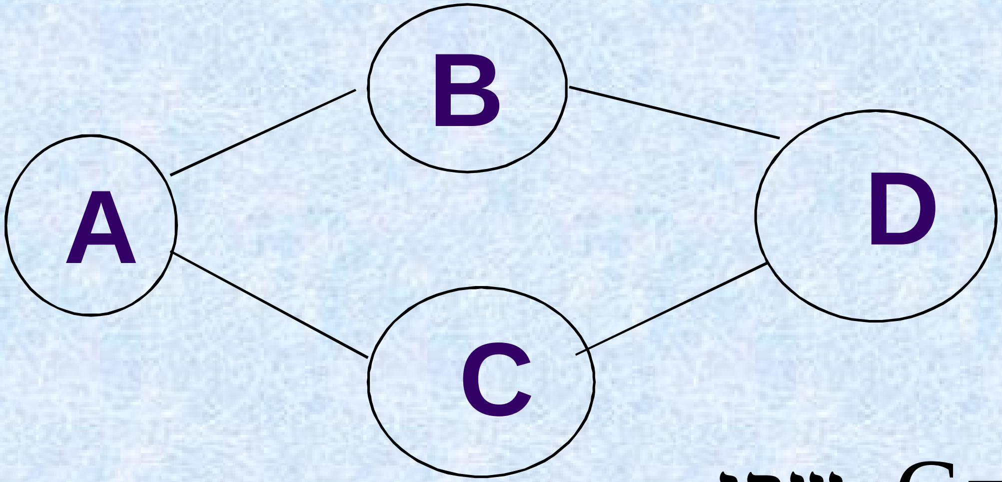
***בגרפים***

ד"ר ראובן חוטובלי

# הגדרות ומושגי יסוד בגרפים

- גרף (graph) מורכב מקבוצה סופית לא ריקה של קודקודים (vertices) ומקבוצת צלעות (edges).
- נהוג לסמן גרף כדלהלן: G=(V,E)
- כאשר G מציין גרף,
- V מציין את קבוצת הקודקודים
- E מציין את קבוצת הצלעות.

◆התרשים הבא :




◆מתאר גרף G=(V,E) שבו

◆V={A,B,C,D}

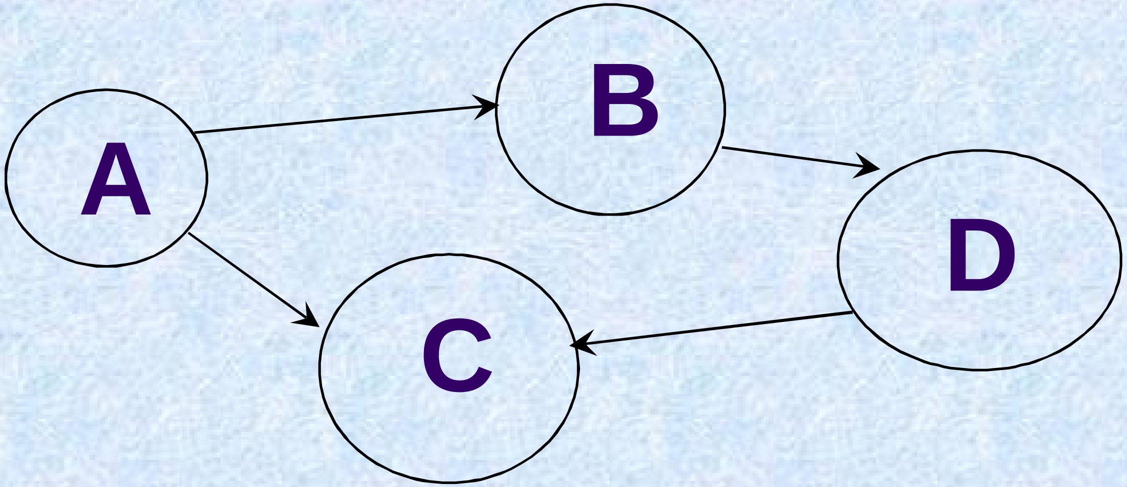
◆E={(A,B),(A,C),(B,D),(C,D)}

- * שים לב שכל קשת, הקו המקשר בין זוג הקודקודים בגרף, מצויינת על ידי זוג קודקודים.
- הזוג (A,B) מציין קשת המחברת את הקודקודים A ו- B.
- הזוג (A,C) מציין קשת המחברת את הקודקודים A ו- C.
- הזוג (B,D) מציין קשת המחברת את הקודקודים B ו- D.
- הזוג (C,D) מציין קשת המחברת את הקודקודים C ו- D.

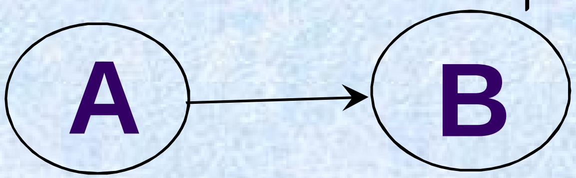
- שים לב שהזוגות אינם זוגות סדורים, כלומר במקום הזוג (A,B) יכולים לציין (B,A).
- עבור הגרף שבתרשים ניתן להגדיר את E כדלקמן:
- E={(B,A),(A,C),(B,D),(D,C)}
- אך ברור כי לא ניתן לשייך ל- E את הזוגות (A,B) וגם (B,A) כי זו אותה קשת ולפי הגדרת הקבוצה כל איבר מופיע בה רק פעם אחת בלבד.

- בנוסף נהוג לסמן גרף גם בצורה אחרת: $G=(N,A)$ כאשר
- $N$ מציין את קבוצת הצמתים (Nodes)
- $A$ מציין את קבוצת הקשתות(Arcs).
- אין הבדלים בין הסימונים.

- גרף מכוון - directed graph – הינו גרף שבו הקשתות מכוונות, המכונה גם קבוצה של זוגות סדורים.
- התרשימים הבאים מתארים שני גרפים מכוונים.
- גרף1:



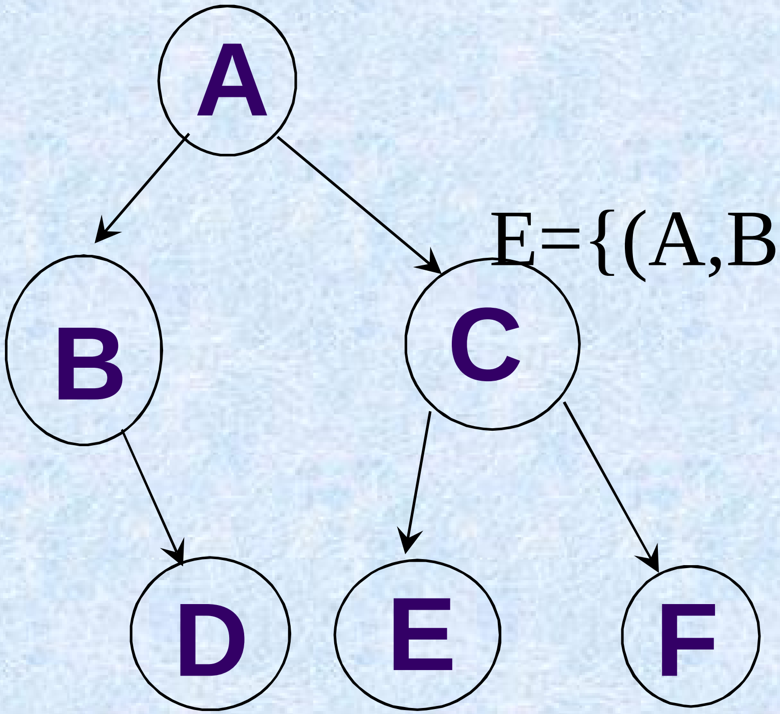
- G=(V,E) שבו
- V={A,B,C,D}
- E={(A,B),(A,C),(B,D),(D,C)}
- * שים לב לזוג סדור אשר מייצג קשת מכוונת BA.
- נתבונן בקשת:




- קשת זו יוצאת מקודקוד A ונכנסת לקודקוד B, ותצויין על ידי <u>זוג סדור</u> (A,B).

- באופן כלליף
- **הקודקוד הראשון** בזוג הקודקודים הסדור מציין את מקור הקשת (מאיזה קודקוד יוצאת הקשת)
- **והקודקוד השני** בזוג הקודקודים הסדור מציין את היעד של הקשת (לאיזה קודקוד נכנסת הקשת).

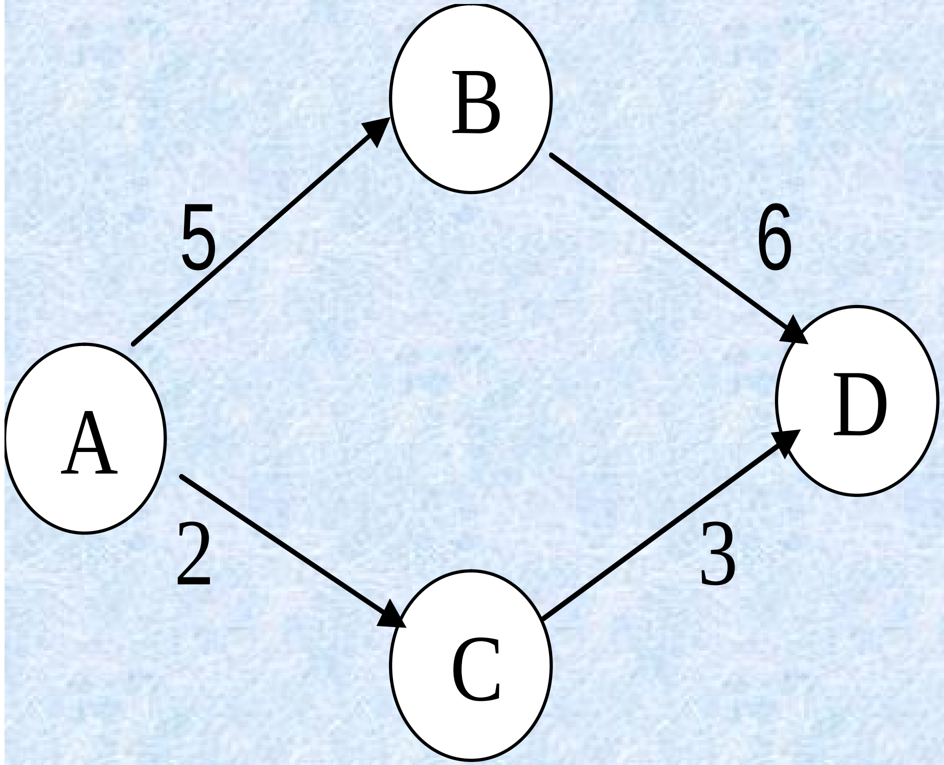
- גרף2: G=(V,E)
- V={A,B,C,D,E,F}
- E={(A,B),(A,C),(B,D),(C,E),(C,F)}




- * שים לב לכך שכל עץ הינו גרף, אך לא כל גרף הינו עץ.

- ***סימון:*** נתון גרף G=(V,E).
- מספר הצמתים בגרף מסומן כ- |V|
- ומספר הקשתות בגרף מסומן כ- |E|.
- ***רשת*** (network) הינה גרף (מכוון/לא מכוון) שבו לכל קשת מיוחס מספר/מספרים.
- המספר/ים המיוחס/ים לקשת נקרא <u>משקל</u>/ות הקשת(weight).
- רשת מכונה גם ***כגרף משוקלל*** (weight graph).

התרשים הבא מתאר רשת:

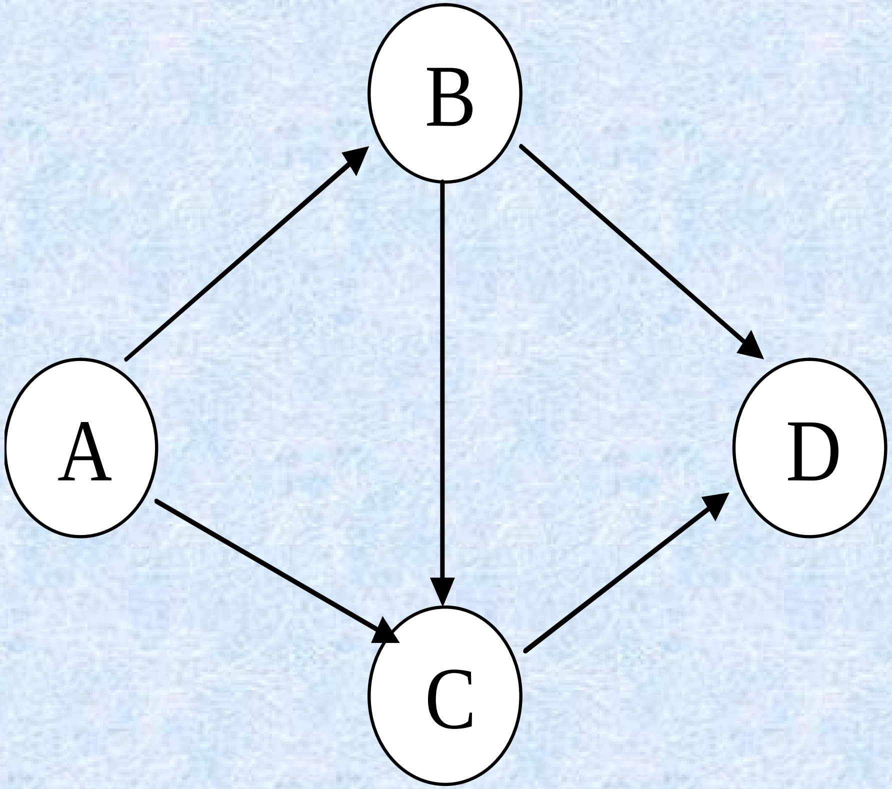


- לכל קשת מיוחסת מספר, אשר יכול לייצג מחיר, מרחק, מקסימום כמות הזרם שניתן להזרים מקודקוד אחד לקודקוד אחר וכ"ו.
- ***צומת a סמוך (או עוקב) (adjacent)*** לקודקוד b אם יש קשת לא מכוונת בין קודקוד a לקודקוד b או אם יש קשת מכוונת מקודקוד b לקודקוד a.

- בתרשים האחרון שראינו:
- קודקוד B סמוך לצומת A מאחר שיש קשת מכוונת מקודקוד A לקודקוד B.
- קודקוד C סמוך לצומת A מאחר שיש קשת מכוונת מקודקוד A לקודקוד C, וכ"ו.

- <u>דרגת הכניסה</u> (indegree) של קודקוד- מספר הקשתות הנכנסות לקודקוד.
- <u>דרגת היציאה</u> (outdegree) של קודקוד- מספר הקשתות היוצאות מקודקוד.
- <u>דרגה</u>(degree) של קודקוד- מספר הקשתות הנוגעות בו.

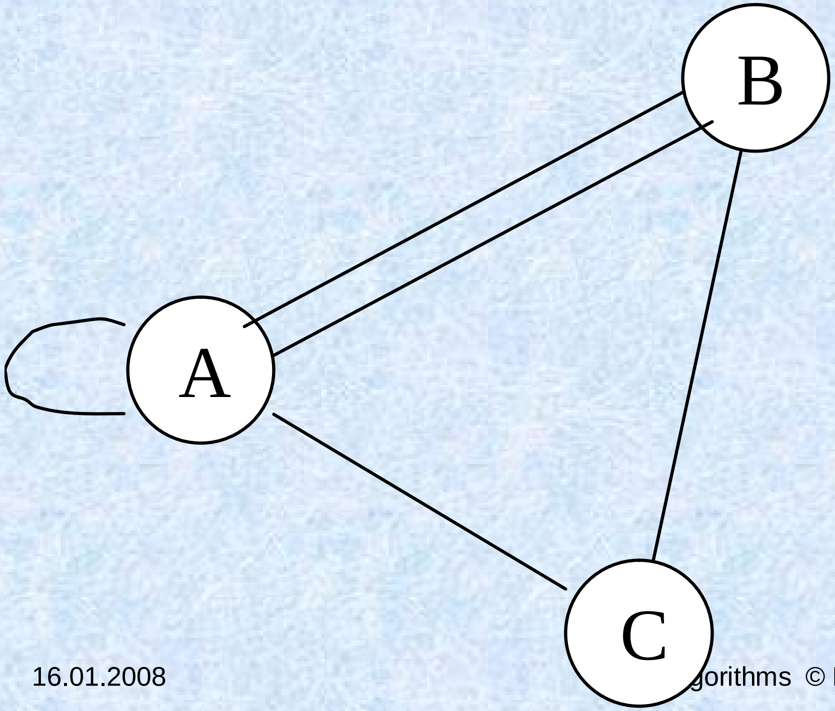
# בתרשים הבא:



- לדוגמא , ***בעבור הקודקוד D***
- הדרגה שלו 2,
- דרגת הכניסה שלו 2
- ודרגת היציאה הינה אפס.
- ***בעבור הקודקוד C***
- הדרגה שלו 3,
- דרגת הכניסה שלו 2 ודרגת היציאה שלו היא 1.

- <u>מולטי גרף</u>(multigraph) הינו גרף(מכוון/לא מכוון) בו אנו מרשים יותר מקשת אחת בין שני הקודקודים.
- <u>לולאה</u>(loop) הינה קשת מצומת כלשהו V לאותו צומת, כלומר קשת מהצורה(V,V) נקראת לולאה.
- <u>גרף פשוט</u>- (simple graph) הינו גרף ללא לולאות ושאינו מולטי גרף.

בתרשים הבא בין הקודקודים A ו- B יש יותר מקשת אחת, לכן הגרף נקרא מולטיגרף. כמו כן בגרף זה ישנה לולאה (A,A):

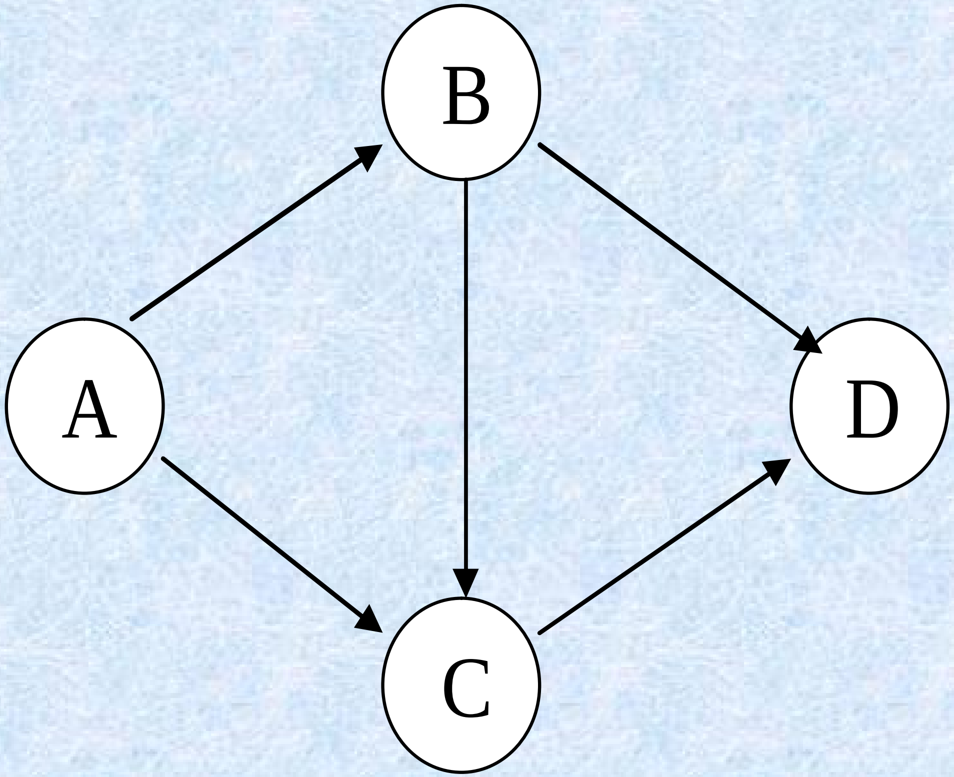


- **הערה:** מעתה נדבר על גרפים פשוטים, אלא אם יצויין במפורש אחרת!!
- ***מסלול(path)*** ***באורך k*** מקודקוד a לקודקוד b הינה סידרה של (k+1) קודקודים בגרף:

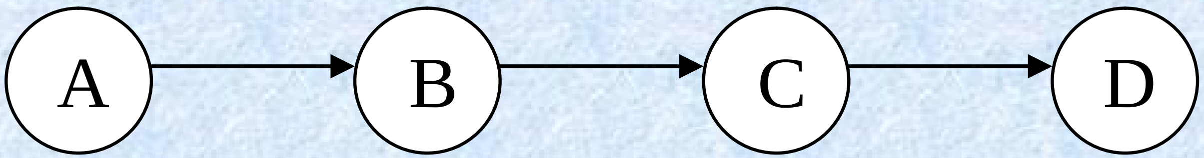
$$n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 \ldots\ldots n_i n_{i+1} \ldots\ldots n_k n_{k+1}$$

- כך שלכל $1 \le i \le k$ קודקוד $n_{i+1}$ סמוך לקודקוד $n_i$ בגרף ו- $n_1 = a$ , $n_{k+1} = b$ .

# בתרשים הבא:



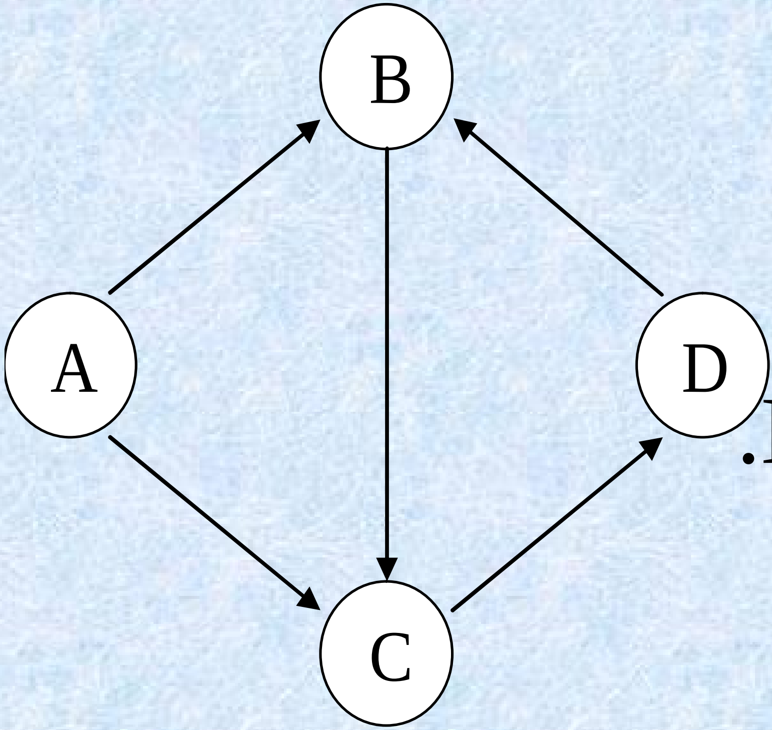
- קיים מסלול באורך 3 מקודקוד A לקודקוד D.
- מאחר שישנה בגרף סידרה של קודקודים באורך 4, A,B,C,D
- וישנה קשת מקודקוד A לקודקוד B
- וישנה קשת מקודקוד B לקודקוד C
- וישנה קשת מקודקוד C לקודקוד D.
- תיאור המסלול:



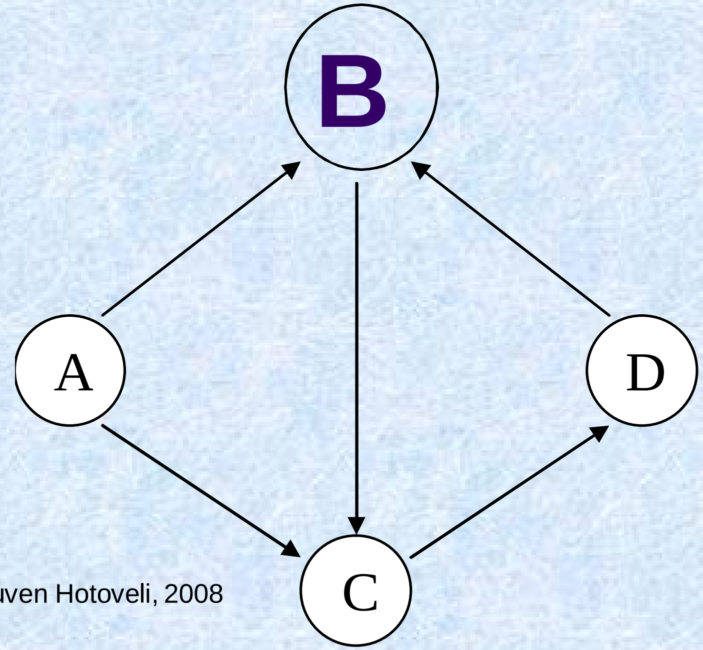
◈ <u>קודקוד נשיג</u>: קודקוד b יקרא נשיג (להשיג) מקודקוד a בגרף אם קיים מסלול באורך כלשהו בגרף מקודקוד a לקודקוד b.

◈ בתרשים האחרון, לדוגמא , קודקוד D נשיג מקודקוד A, מאחר שיש מסלול באורך 3 מקודקוד A לקודקוד D.

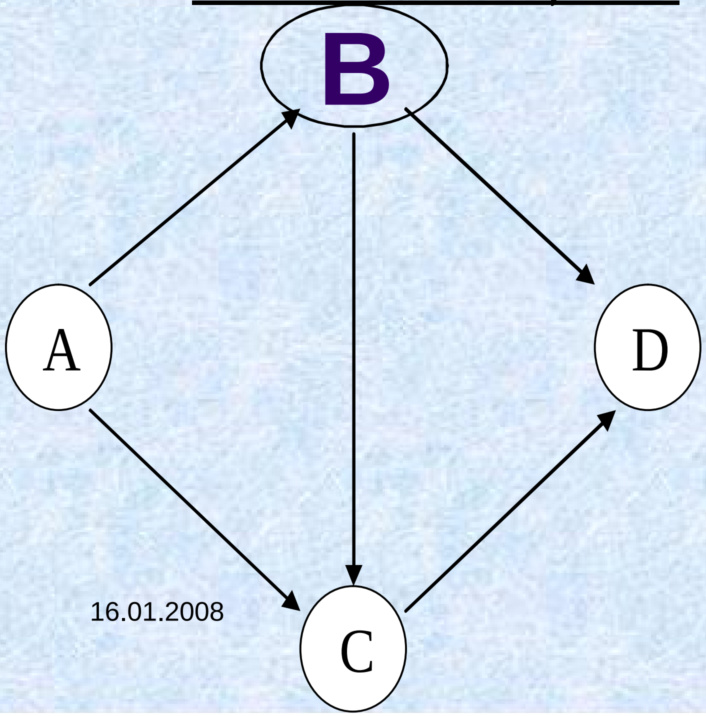
- מעגל(cycle)- מסלול בגרף מקודקוד כלשהו לעצמו.
- בתרשים הבא:
- יש מעגל מקודקוד B ל- B, והמסלול הינו: B →C→ D→B.



- גרף מעגלי(cycle graph)- הינו גרף שבו לפחות מעגל אחד, אחרת הגרף נקרא לא מעגלי(acycle).
- דוגמא לגרף מעגלי:




דוגמא לגרף לא מעגלי:

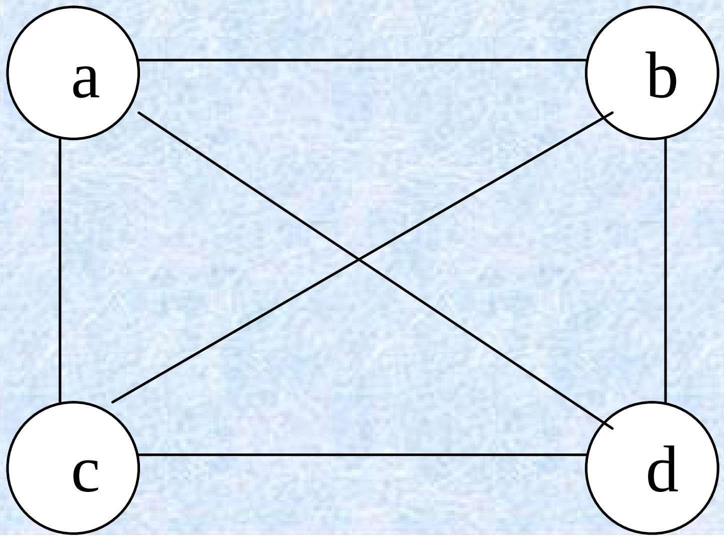


- <u>מסלול פשוט</u> (simple path) – הינו מסלול בו אף קשת של הגרף לא מופיעה יותר מפעם אחת.
- באופן אנלוגי כך ניתן להגדיר גם <u>מעגל פשוט</u>.
- **<u>הערה:</u>**
- מעתה נדבר על מסלולים (מעגלים) פשוטים, אלא אם יצויין במפורש אחרת!!!

- <u>גרף שלם(או מלא)</u> (Complete graph) – הינו גרף שבו כל קודקוד מחובר לשאר קודקודי הגרף.
- <u>סימון</u>:

גרף מלא שבו n קודקודים יסומן ב - $k_n$ .

דוגמא ל- $K_4$

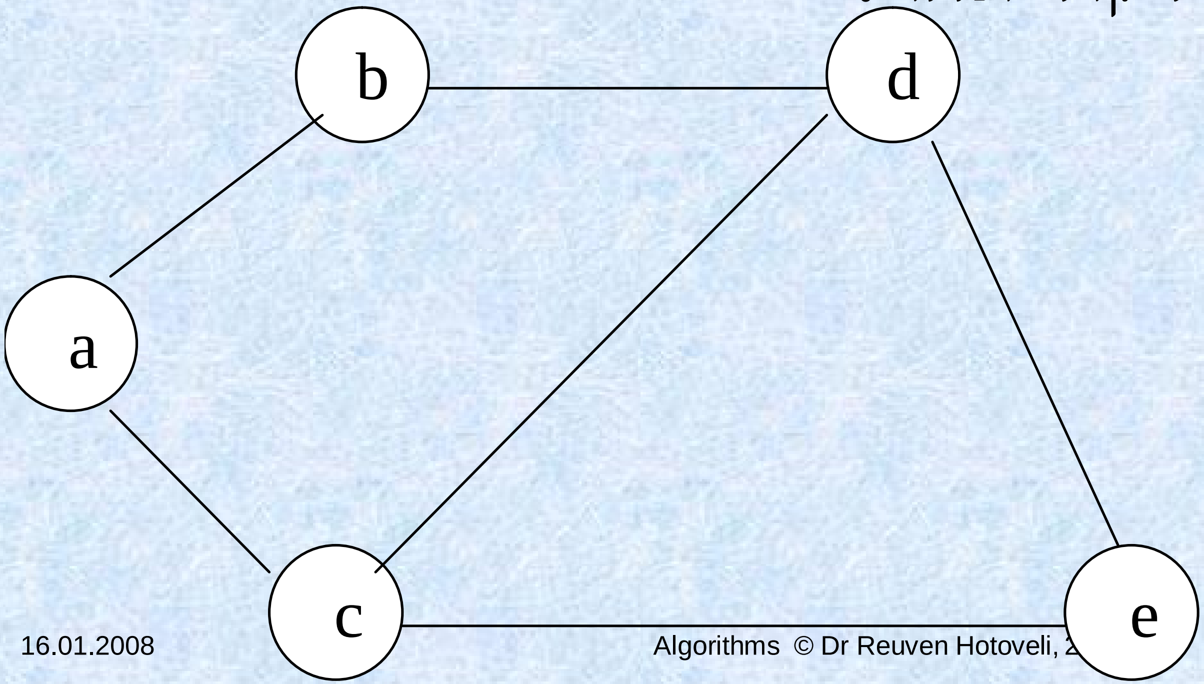


- <u>רכיב קשיר</u>(Connected Complete) – זוהי קבוצה מקסימלית של קודקודים בגרף לא מכוון שבה יש מסלול פשוט בין כל שני קודקודים בגרף.

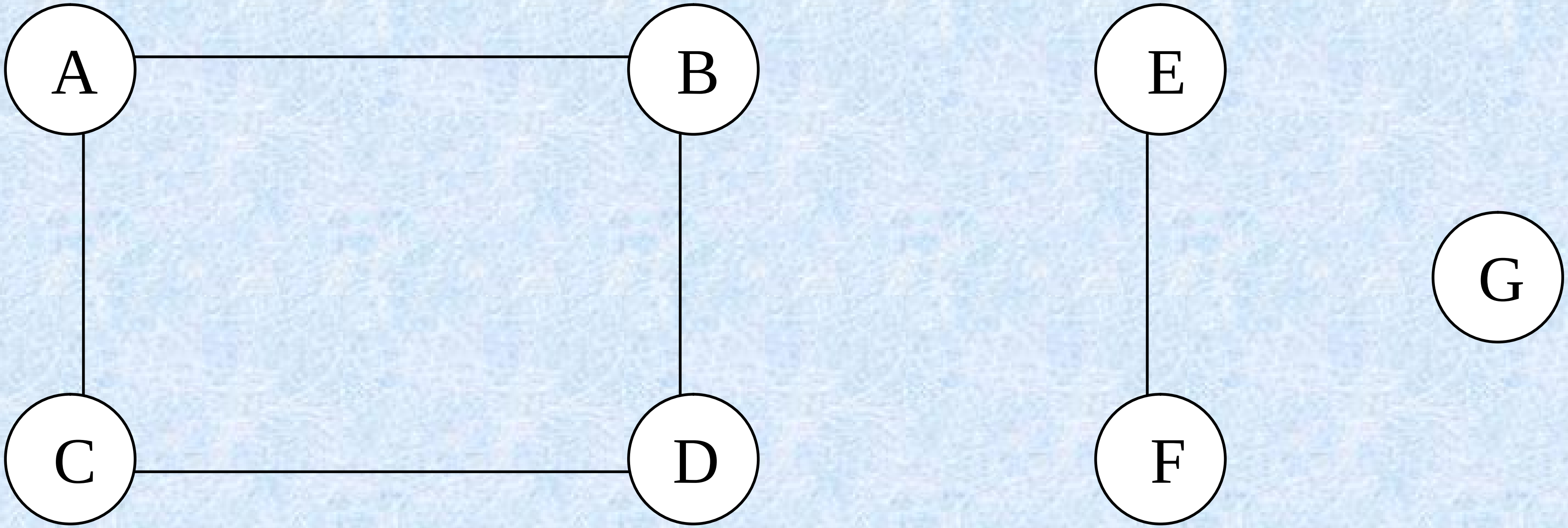
קודקוד בודד ללא שכנים יקרא גם כן רכיב קשיר.

- <u>גרף קשיר</u>(Connected graph) – מכונה גם כ"גרף מחובר" הינו גרף לא מכוון בעל רכיב קשיר אחד בלבד, כלומר קיים מסלול פשוט בין כל שני קודקודים בגרף.

דוגמא 1: דוגמא זאת מתארת גרף שבו רכיב קשיר אחד {a,b,c,d,e} מאחר ומכל קודקוד קיים מסלול לכל קודקוד אחר.



דוגמא 2:תרשים זה מתאר גרף שבו 3 רכיבים קשירים.

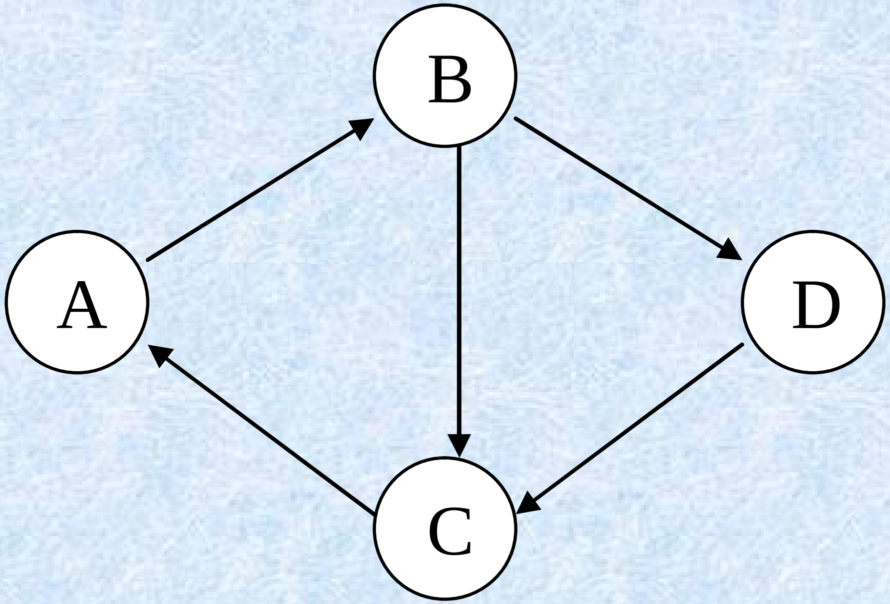


- רכיב קשיר אחד הינו קבוצה מקסימלית של קודקודים בגרף והיא: {A,B,C,D}, מאחר שבקבוצה זו יש מסלול פשוט בין כל שני קודקודים בגרף.
- לקבוצה זו לא ניתן לצרף אף אחד מהקודקודים E,F,G מאחר שלדוגמא אין מסלול מקודקוד A ל- E או ל- F או ל- G.

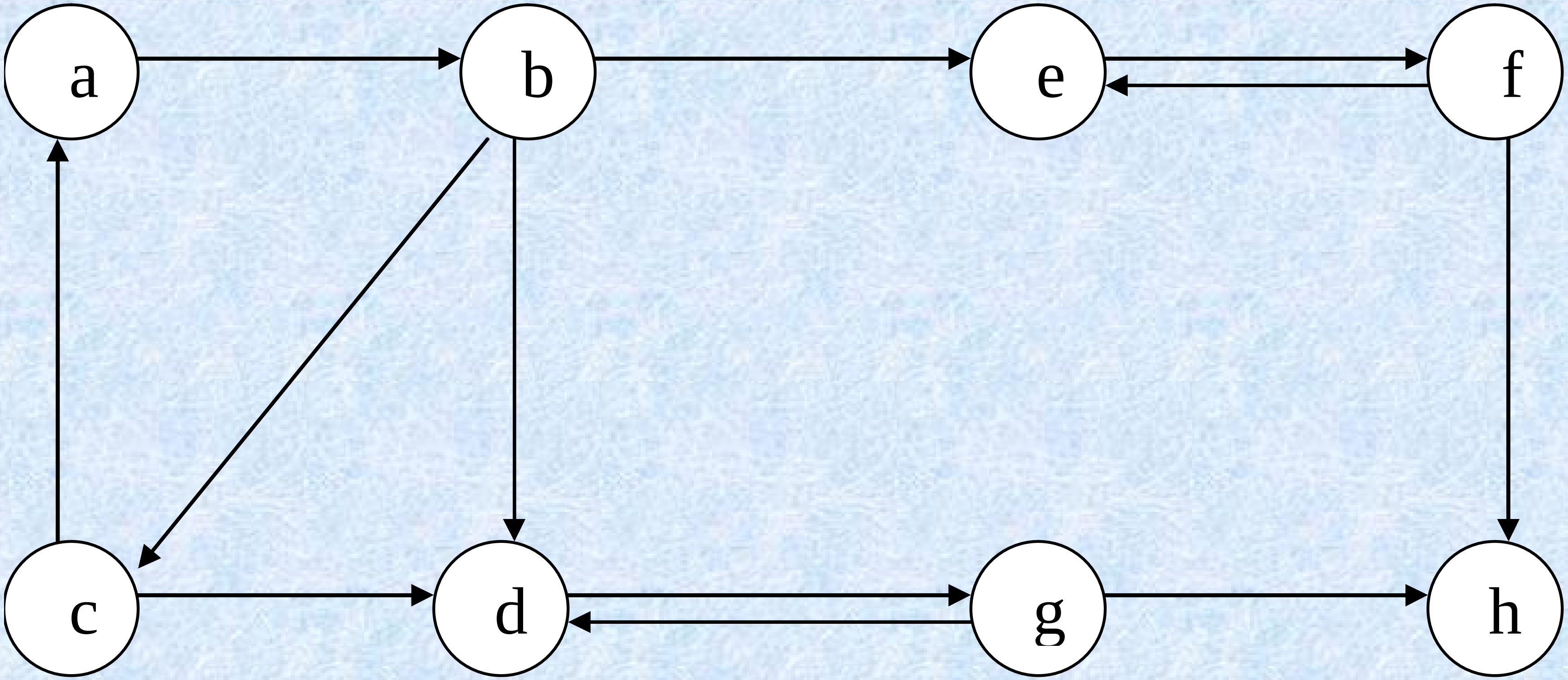
- רכיב קשיר שני הינו קבוצה מקסימלית של קודקודים בגרף והיא: {E,F},
- ורכיב קשיר שלישי הינו: {G}, כיוון שעל פי ההגדרה קודקוד בודד יכול להיקרא גם כן רכיב קשיר , בתנאי שקבוצה זו הינה מקסימלית, כלומר בלתי אפשרי להוסיף לקבוצה זו עוד צמתים בגרף כך שבקבוצה החדשה שתתקבל יהיה קיים מסלול בין כל שני קודקודים בקבוצה.
- סופית, בתרשים ישנם 3 רכיבים קשירים.

- <u>גרף קשיר</u> (Connected graph) – מכונה גם כ"גרף מחובר" הינו גרף לא מכוון בעל רכיב קשיר אחד בלבד, כלומר קיים מסלול פשוט בין כל שני קודקודים בגרף.
- <u>רכיב קשיר מכוון בחוזקה (רק"ח)</u> (Strongly Connected directed graph)
- הינה קבוצה מקסימלית של קודקודים בגרף מכוון שבו יש מסלול פשוט <u>ומכוון</u> בין כל שני קודקודים בגרף.
- קודקוד בודד ללא שכנים יקרא גם רכיב קשיר מכוון בחוזקה

- התרשים הבא מתאר גרף קשיר מכוון בחוזקה, מאחר שיש מסלול מכוון מכל קודקוד לכל קודקוד אחר בגרף.

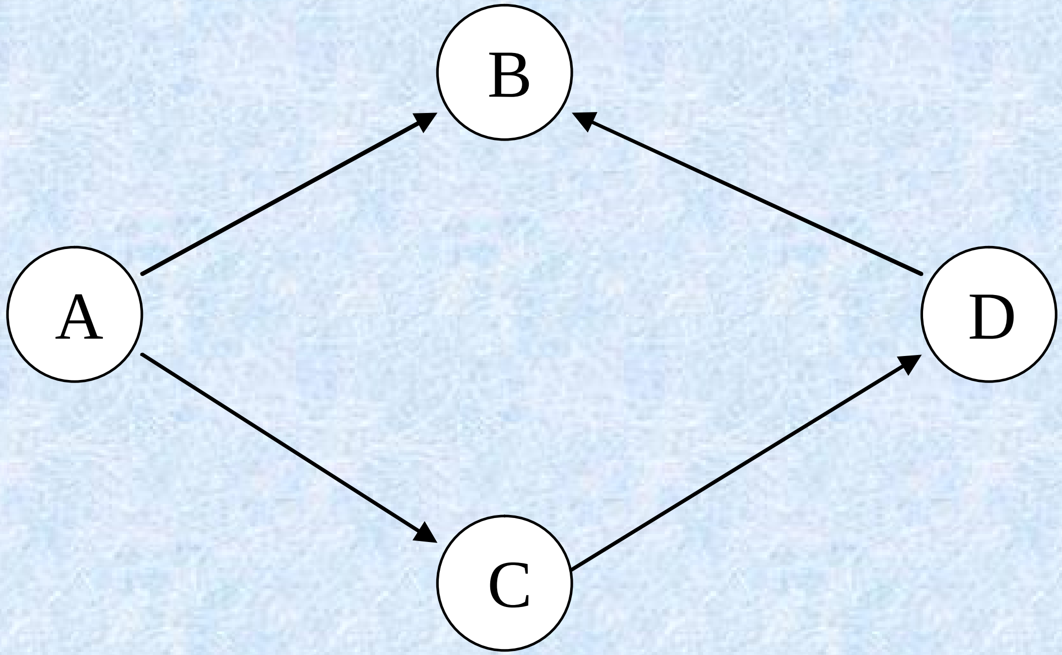


- התרשים הבא מתאר גרף מכוון שבו 4 רכיבי קשירות חזקה.



- הרכיבים
- {d,g} {e,f} {h} {a,b,c}
- גרף דו-צדדי – (bipartite graph) הינו גרף שבו קבוצת הצמתים מתחלקת לשתי קבוצות זרות $V=V_1\cup V_2$ כך ש: $V_1$ ו - $V_2$ קבוצות זרות באופן שאם $x,y\in V_1$ או $x,y\in V_2$ אז לא קיימת קשת בין x ו- y.
נהוג לסמן גרף דו-צדדי על ידי $G=(V_1,V_2,E)$.

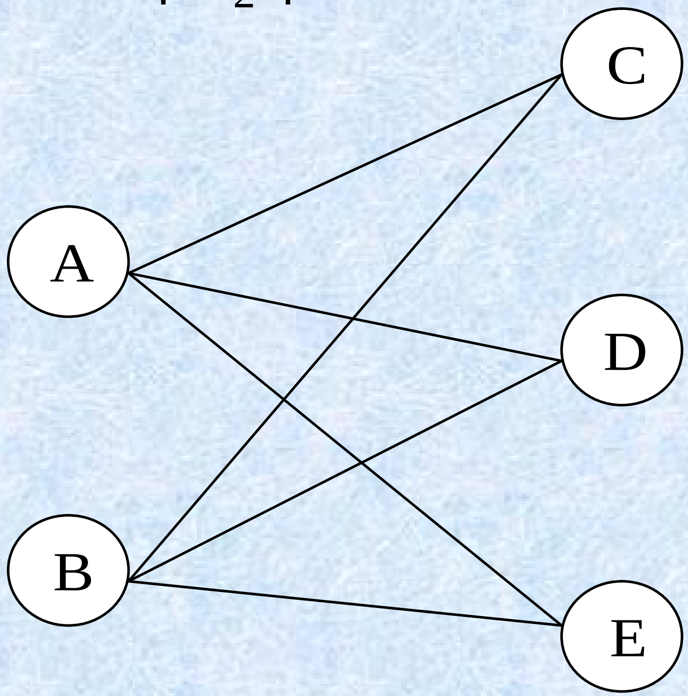
- התרשים הבא מתאר גרף דו-צדדי:
- בגרף זה $V_1 = \{A, D\}$ ו- $V_2 = \{B, C\}$



- קשתות בגרף זה יוצאות מקודקוד כלשהו השייך ל – $V_1$ אל קודקוד אחר השייך ל – $V_2$ או להיפך.
- אין קשתות מקודקוד אחד השייך ל - $V_1$ לקודקוד אחר השייך ל - $V_1$. כנ"ל לגבי $V_2$.
- ***הערה:*** גרף דו צדדי יכול להיות גרף מכוון או גרף לא מכוון.

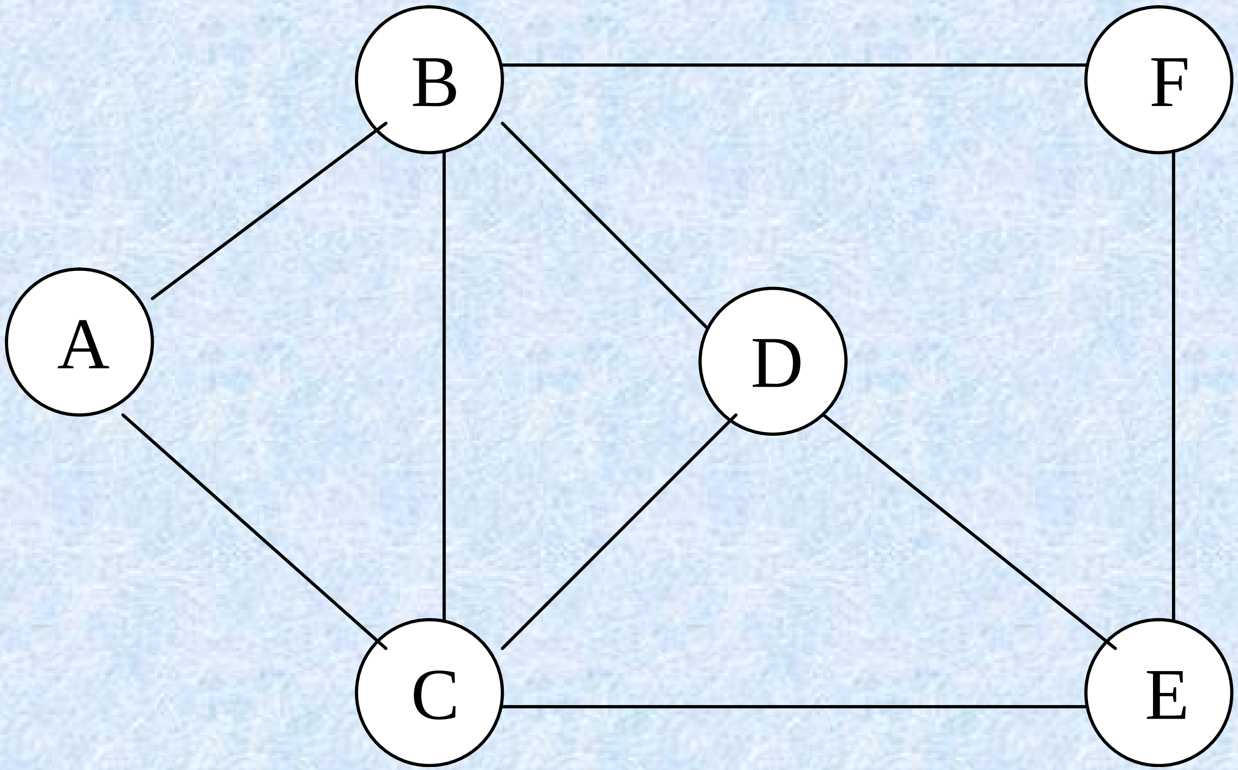
- **<u>*גרף דו-צדדי מלא*</u>** – הינו גרף דו-צדדי $G=(V_1,V_2,E)$ בו לכל $x \in V_1$ ולכל $y \in V_2$ קיימת קשת $(x,y) \in E$.
- גרף זה יסומן על ידי $K_{nm}$ כאשר $|V_1|=n$ ו- $|V_2|=m$
- התרשים הבא

מתאר את $K_{23}$ :

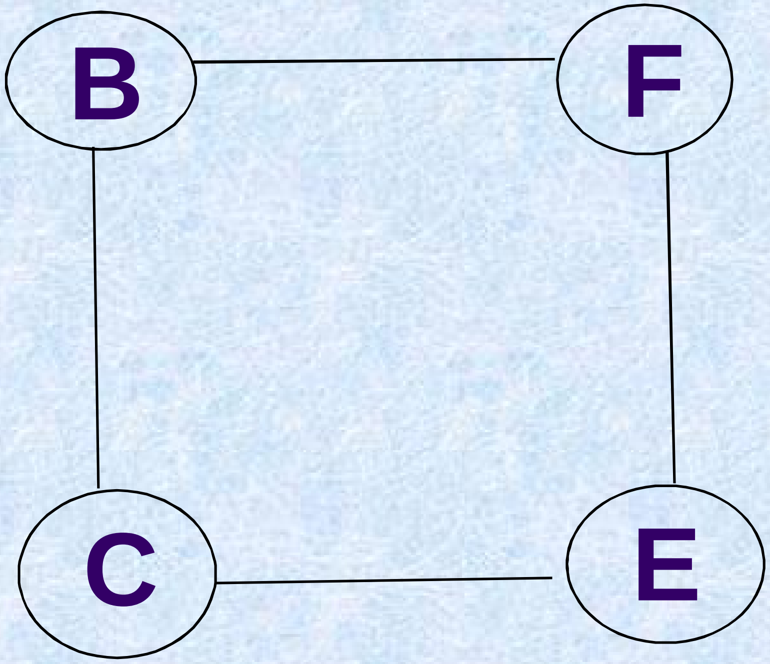


- בגרף זה: $V_1=\{A,B\}$ ו – $V_2=\{C,D,E\}$
- מקודקוד A ישנה קשת לכל קודקוד אחר השייך ל- $V_2$ ומכל קודקוד השייך ל - $V_2$ ישנה קשת לקודקודA.
- מקודקוד B ישנה קשת בינו לבין כל קודקוד אחר השייך ל - $V_2$ .
- ***תת גרף*** (Sub-graph) של G=(V,E) הינו גרף G=(V',E') כך ש V'⊆V ו E' ⊆ E.

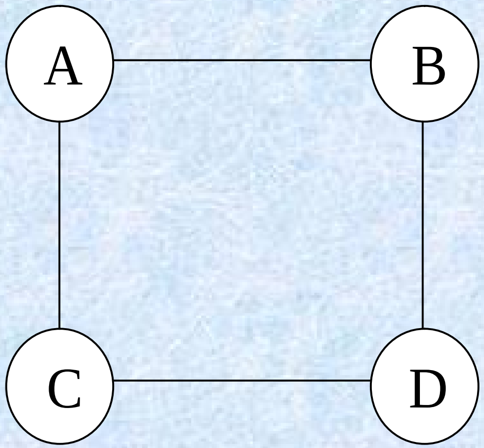
בהינתן הגרף הבא:

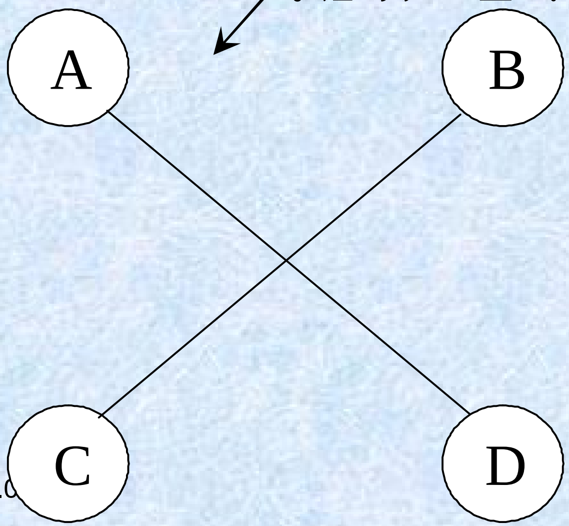


התרשים הבא מתאר תת-גרף של הגרף הנתון:



- **גרף משלים**: נתון גרף פשוט G=(V,E), חסר לולאות וצלעות מרובות. גרף משלים של G מסומן כ- $\overline{G}$ ומוגדר כדלהלן: $\overline{G}=(V,\overline{E})$ , כאשר $\overline{E}$ הינה אוסף הצלעות החסרות ב-G בין כל שני קודקודים כלשהם בגרף.
- דוגמא : עבור הגרף הבא: הגרף המשלים הינו:



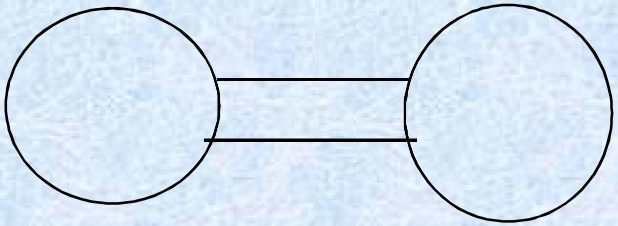



- <u>***משפט***</u> נתון גרף קשיר לא מכוון G=(V,E).

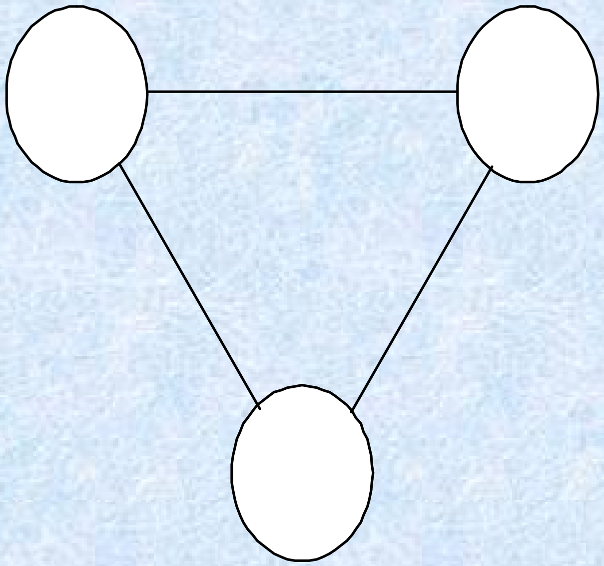
אם $|V|=n$ ו- $|E|\geq n$ אזי בגרף יש מעגל.

- הוכחה באינדוקציה על n
- <u>בסיס</u>: עבור n=2

אכן בגרף יש מעגל



עבור n=3



אכן בגרף יש מעגל

- <u>צעד משלים</u>: נניח נכונות הטענה עבור $k<n$.
- ונוכיח עבור $k=n$.
- כעת יהי גרף $G$ עם $n$ קודקודים ובו $n$ קשתות לפחות.
- כעת **נניח בשלילה** שבגרף $G$ אין מעגל. לכן, ב – $G$ חייב שיהיה קודקוד שהינו עלה (ממנו אין יציאה).

- אם נסיר מגרף G את העלה (קודקוד) x אזי נקבל גרף חדש G’ שבו n-1 קודקודים ולפחות n-1 קשתות.
- לכן, בהמשך להנחת האינדוקציה בגרף G’ יש מעגל
- אך G’ הינו תת גרף של G
- כלומר אם בגרף G’ יש מעגל אזי גם בגרף G יש מעגל בסתירה להנחה שבגרף G אין מעגל.
- לכן, הנחתנו (בגרף G אין מעגל) אינה נכונה והמסקנה היא שבגרף G יש מעגל. ***מש"ל***

- ***משפט*** התנאים הבאים שקולים:
- א. הגרף G הינו עץ
- ב. G קשיר ובעל n-1 קשתות
- ג. G חסר מעגלים ובעל n-1 קשתות

**משפט**

- בכל גרף פשוט $G=(V,E)$ מתקיים $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$
כאשר $d(v)$ מציין דרגתו של צומת v בגרף.

- *נימוק*: כל צלע בגרף G מחברת בדיוק שני קודקודים,
כלומר כל צלע יוצאת בדיוק משני קודקודים.

לכן, כל צלע ב G – נמנית בדיוק פעמיים בחישוב
הדרגה של הקודקודים.

- נבהיר את המשפט בעזרת הגרף הבא: