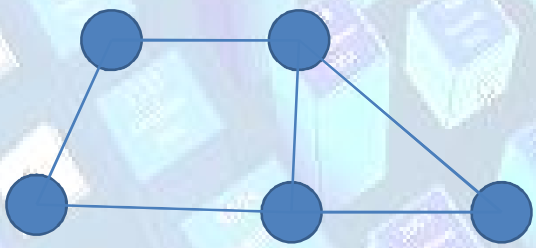
משפטים להוכחה בגרפים דו-צדדיים

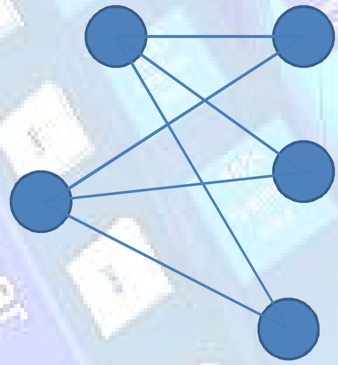
הגדרות - חזרה

- גרף קשיר – גרף לא מכוון, שבו קיים מסלול פשוט בין כל שני קודקודים בגרף.



הגדרות - חזרה

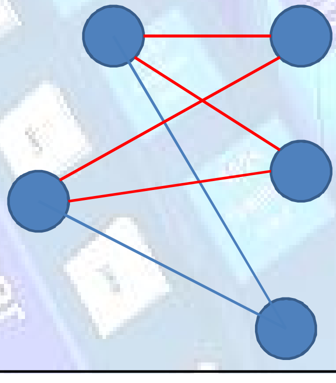
- גרף דו-צדדי – גרף שבו קבוצת הצמתים מתחלקת לשתי קבוצות זרות, ואם $x1,x2$ שייכים לאותה הקבוצה אזי אין בינהם קשת. הקשתות קיימות רק בין הקבוצות השונות



- מעגל – מסלול בגרף מקדודקוד כלשהוא לעצמו

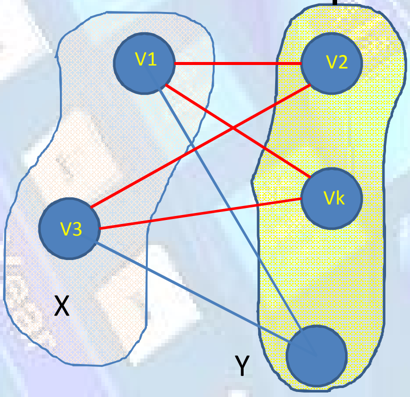
המטרה

- נתון G גרף דו-צדיד וקשיר
- צ"ל G אינו מכיל מעגל באורך אי-זוגי



הוכחה

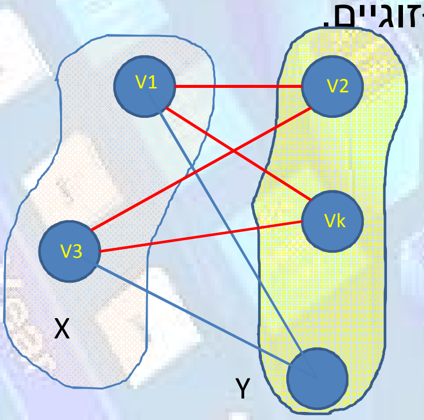
- G גרף דו-צדדי לכן ניתן לחלק את קדקודיו לשתי קבוצות זרות X ו- Y כך שכל צלע ב-G מחברת קודקוד מ-X עם קודקוד מ-Y ואין צלעות אחרות ב-G.
- יהי C מעגל ב-G ובו K קודקודים, נתאר את C כך:
  C=(V1,V2,V3….,Vk,V1)



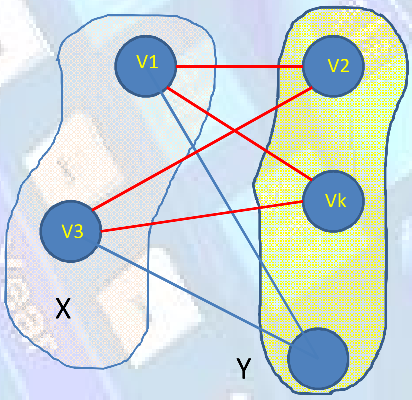
- V1 – שייך או ל- X או ל- Y. נניח כי V1 שייך ל-X.
  הקשת (V1,V2) היא קשת בגרף דו-צדדי ולכן V2 שייך לקבוצה Y
- כך הלאה לגבי יתר הקודקודים. נקבל חלוקה של הקודקודים הזוגיים והאי –זוגיים.
  X=(V1,V3,V5…)
  Y=(V2,V4,V6…)
- הקודקוד V1 מחובר מצד אחד ל-V2 ומצד שני ל-Vk

⇓

Vk שייל לקבוצה Y כלומר K מס' זוגי במעגל.



- במעגל C יש K קודקודים, כלומר המעגל C מכיל מס' זוגי של קודקודים.
- מאחר ובמעגל מס' הקשתות שווה למספר הקודקודים נקבל כי C מעגל באורך זוגי.

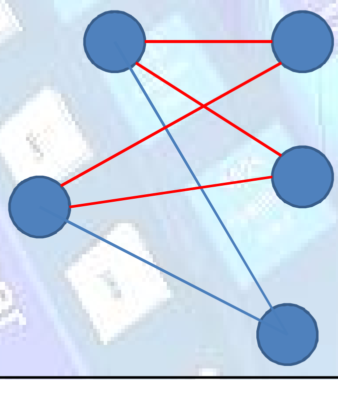


מ.ש.ל.

מטרה שנייה

- נתון G גרף קשיר שאינו מכיל מעגל באורך אי-זוגי
- צ"ל G גרף דו-צדדי.

שקול להוכיח כי:
אפשר לחלק את קודקודי G לשתי קבוצות זרות X ו- Y כך שכל קודקוד ב-G שייך או ל-X או ל- Y וכל קשת ב-G מחברת קודקוד מ- X עם קודקוד מ- Y.



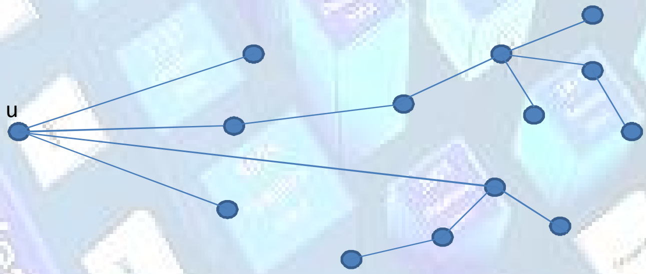
הוכחה

- נבחר קודקוד כלשהוא ב-G ונסמנו ב- u.
- הגרף קשיר ולכן ניתן למצוא מסלול המחבר בין כל הקודקודים לקודקוד u.

- אם קיים יותר ממסלול אחד נבחר בקצר ביותר.

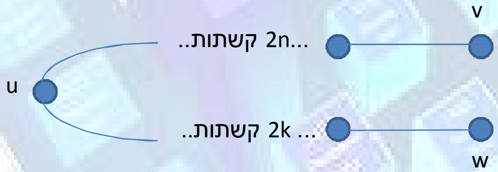
- לכל מסילה יש אורך זוגי או אי-זוגי.
- נחלק את קודקודי G לשתי קבוצות כך:
  - (x קודקוד ב-G שמרחקו מ-u הוא מס' זוגי של קשתות:X)=X
  - (y קודקוד ב-G שמרחקו מ-u הוא מס' אי-זוגי של קשתות:Y)=Y

לאן שייך u? u שייך ל- X כיוון שמרחקו מעצמו הוא אפס – זוגי.



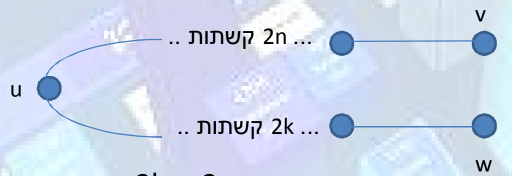
- כל קודקוד ב-G שייך ל- X או ל- Y. לכן ברור ששתי הקבוצות זרות. כלומר $X \cap Y = \Phi$.
- נותר להוכיח כי אין שני קודקודים ב-X או ב- Y המחוברים בינהם בקשת.
- נבחר כעת 2 קודקודים כלשהם w,v מאותה קבוצה (נניח שזו קבוצה X)

- נתבונן על המסלולים מ- w,v ל- u. (הקצרים ביותר)
  – אפשרות א' ל- v,w אין קודקודים משותפים מלבד u.



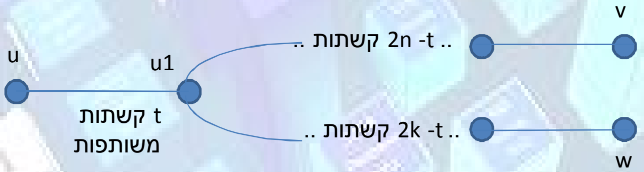
יהי P המסלול מ- v ל- u
יהי Q המסלול מ- w ל- u

יהי P המסלול מ- v ל- u
יהי Q המסלול מ- w ל- u

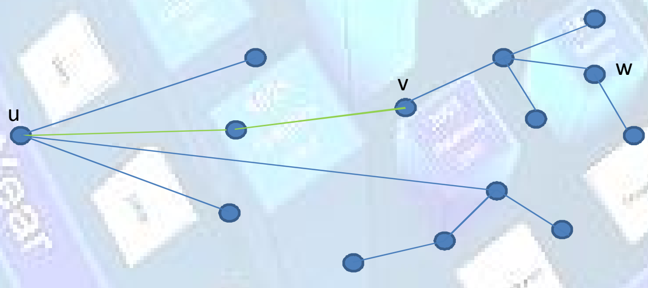


- P ו- Q הם מסלולים באורך זוגי נסמן את אורכם ב- 2n ו- 2k בהתאמה.
- גם אורך המסלול המחבר בין v ל- w הוא זוגי כי מתקיים: 2n+2k=2(n+k) – מס' זוגי.
- אם היתה קיימת קשת בין v ל- w היא שייכת גם לקבוצה X ואז מתקבל מעגל שארכו 2(n+k)+1 קשתות בסתירה לנתון שאין ב- G מעגל אי-זוגי.

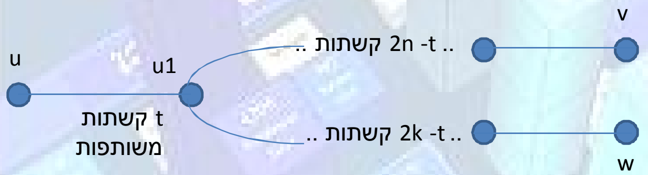
- נתבונן על המסלולים מ- w,v ל- u. (הקצרים ביותר)
  – אפשרות ב' ל- v,w יש קודקודים משותפים מלבד u.



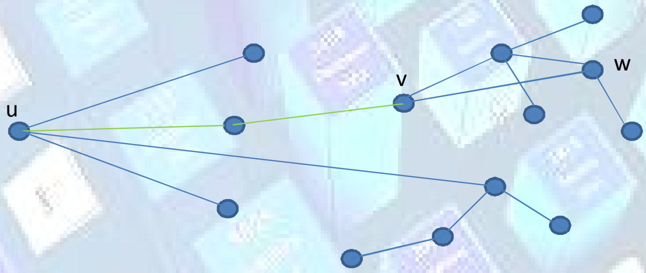
יהי P1 המסלול מ- v ל- u1
יהי Q1 המסלול מ- w ל- u1



יהי P1 המסלול מ- v ל- u1
יהי Q1 המסלול מ- w ל- u1



- אורך P1 הוא 2n-t קשתות ואורך Q1 הוא 2k-t קשתות.



- אורך המסלול מ- v ל- w: (2n-t)+(2k-t)=2(n+k-t) – זוגי
- ושוב לא ייתכן שקשת בין v ל- w קיימת שכן תיצור מעגל באורך אי- זוגי בסתירה לנתון

מ.ש.ל