תכנון וניתוח אלגוריתמים

הרצאה 32

מסלולים קצרים לפי

בלמן פורד

Bellman – Ford

מציאת משקל המסלולים הקצרים ביותר מקודקוד מקור יחיד.

- נתון גרף $G=(V,E)$ ***מכוון*** עם פונקצית משקל $W:E \rightarrow R$.
- כלומר, לכל קשת מתאימים משקל ממשי.
- להלן מספר דרישות לצורך ביצוע האלגוריתם.
- הגרף G מיוצג בעזרת מטריצת סמיכות (a_{ij}),
- המוגדרת כדלקמן :

- a_{ij}=

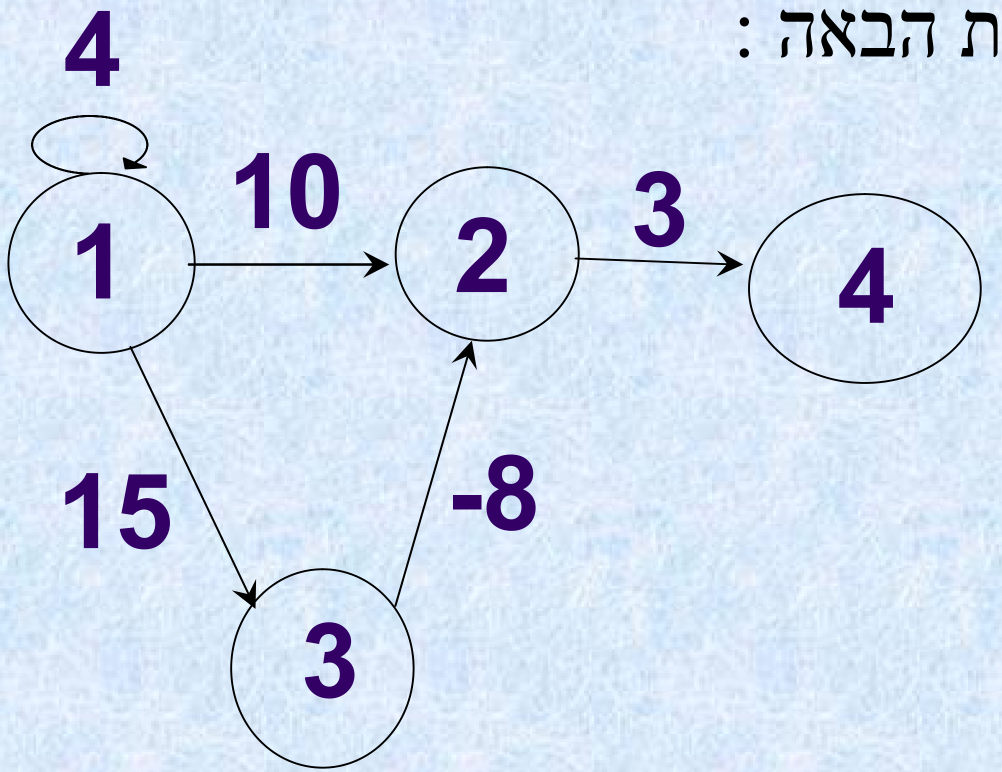
$$a_{ij}=\begin{cases} E_{ij} \text{ ((i,j) משקל על הקשת)} & \text{אם קיימת קשת מכוונת (i,j)} \\ 0 & \text{אם i=j} \\ \infty & \text{אחרת} \end{cases}$$

- ב. d[v] הוא משקל המסלול הקצר ביותר מקודקוד מקור 1 לקודקוד v .

- ג. המשקל על הקשת יכול להיות חיובי או שלילי
- בגרף אין מעגלים בעלי משקל שלילי.
- ד. עבור כל קודקוד v , נגדיר: $d^{(m)}[v]$ כמסלול הקצר ביותר מקודקוד מקור 1 לקודקוד v , <u>בהנחה שהמסלול מכיל לא יותר מ- m קשתות.</u>
- לכן $d^{(1)}[1] = 0$ ולכל צומת $j \neq 1$ $d^{(1)}[j] = a_{1j}$

- מאחר ש- a_{1j} מתאר את משקל המסלול המינימלי <u>הזמני</u> העובר דרך הקשת מקודקוד מקור 1 לקודקוד j.
- זו הערכה תחילית הכי טובה שאפשר לתת כאורך המסלול המינימלי מקודקוד מקור לכל קודקוד j .
- אם אין קשת מקודקוד מקור לקודקוד j אזי הערכה שתנתן ל $d[j]$ הינו ∞, שהוא= a_{1j} .

- לדוגמא עבור הרשת הבאה :



המיוצגת על ידי מטריצת סמיכות הבאה:

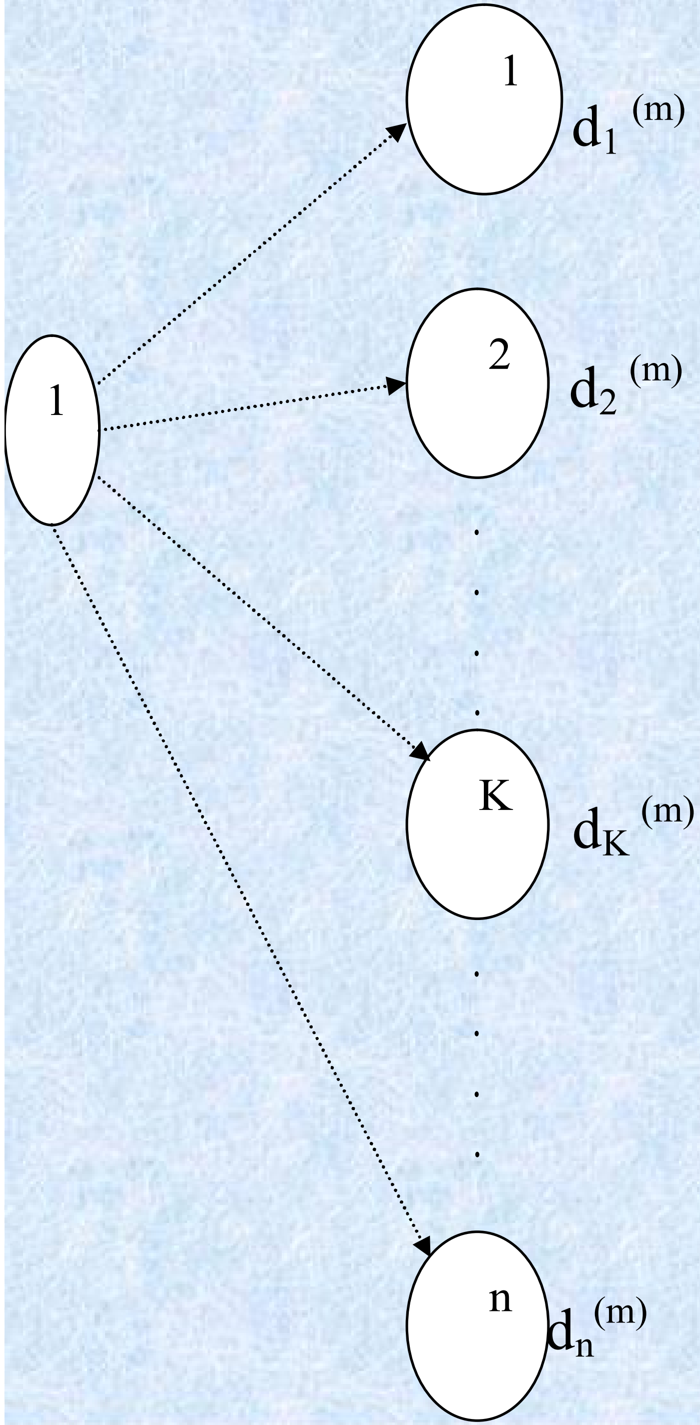
קודקוד יעד / קודקוד מקור	1	2	3	4
1	4	10	15	∞
2	∞	0	∞	3
3	∞	-8	0	∞
4	∞	∞	∞	0

- נקבל:

קודקוד V		1		2	3	4
$d^{(1)}[j]$		0		10	15	∞

- שים לב, למרות ש $a_{11}=4$, $d^{(1)}[\ 1]$ קיבל את הערך 0.

- נניח שמספר הקודקודים בגרף הינו $|v| = n$ והם ממוספרים באופן אקראי מאחד ועד n.
- נתבונן על כל המסלולים הקצרים ביותר האפשריים מקודקוד מקור 1 לכל קודקוד K, עבור $1 \leq K \leq n$ ו $K \neq j$.
- כל מסלול כזה מכיל לא יותר מ m – קשתות.



מסלול מקודקוד מקור 1 לקודקוד 1
שעובר דרך לא יותר מ – m קשתות .

מסלול מקודקוד מקור 1 לקודקוד 2
שעובר דרך לא יותר מ – m קשתות.

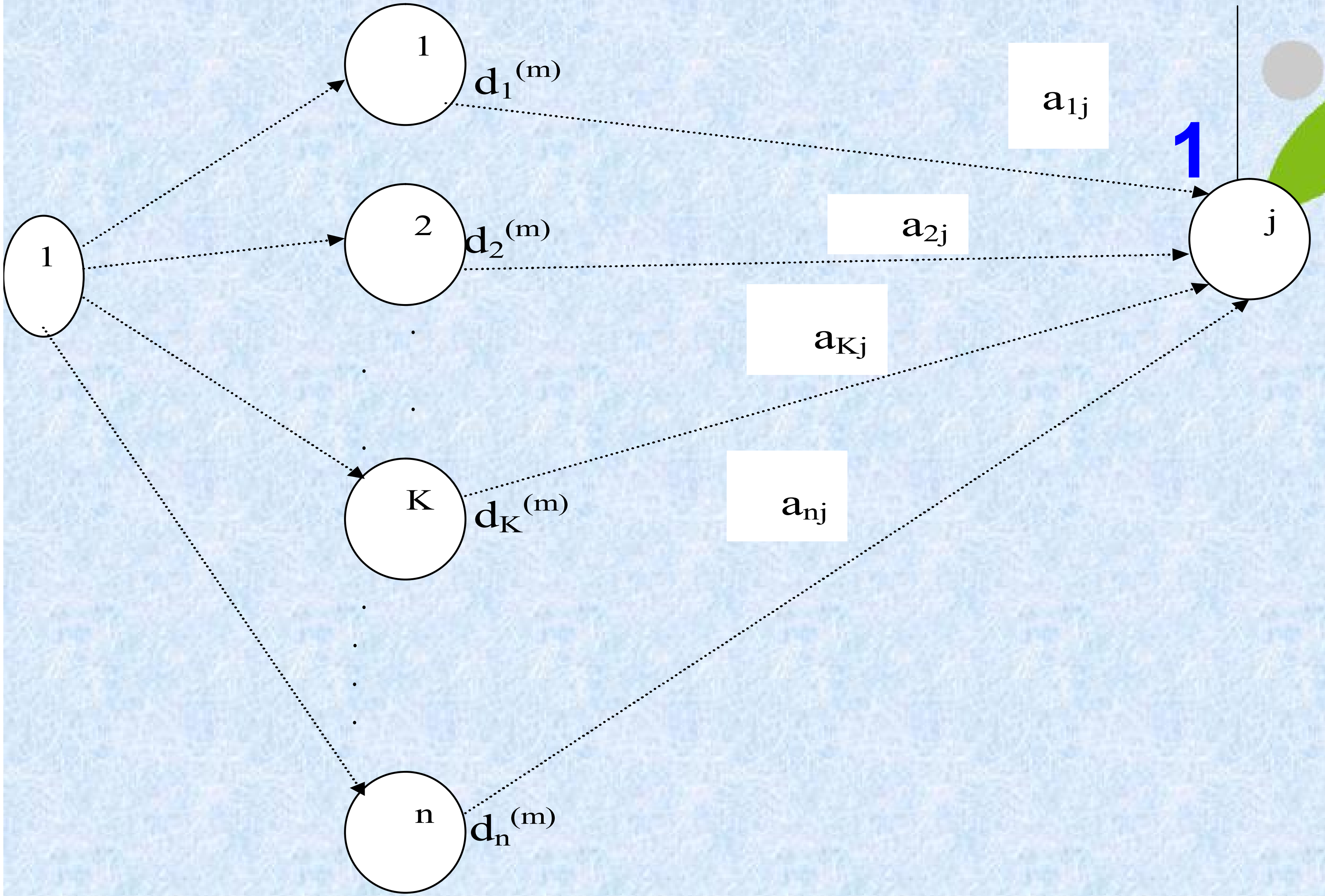
. . . .

מסלול מקודקוד מקור 1 לקודקוד K
שעובר דרך לא יותר מ – m קשתות.

. . . .

מסלול מקודקוד מקור 1 לקודקוד n
שעובר דרך לא יותר מ – m קשתות.

- כעת מכל קודקוד K, עבור $1 \le K \le n$ ו $K \ne j$, נתבונן על הקשת a_{kj} (אם הקשת לא קיימת אז במטריצת הסמיכות בכל מקרה מופיע ערך ∞, המציין שהקשת לא קיימת.)
- נקבל:


1
1
$d_1^{(m)}$
a_{1j}
1
j
2
$d_2^{(m)}$
a_{2j}
a_{Kj}
K
$d_K^{(m)}$
a_{nj}
n
$d_n^{(m)}$

- ובכן מה קיבלנו?
- - קיבלנו מסלול מקודקוד מקור 1 לקודקוד j העובר דרך הקודקוד 1 ובסך הכל המסלול הזה עובר דרך לא יותר מ- $(m+1)$ קשתות . משקל המסלול הוא: $d^{(m)}[1]+a_{1j}$
- - קיבלנו מסלול מקודקוד מקור 1 לקודקוד j העובר דרך הקודקוד 2 ובסך הכל המסלול הזה עובר דרך לא יותר מ- $(m+1)$ קשתות . משקל המסלול הוא: $d^{(m)}[2]+a_{2j}$

- קיבלנו מסלול מקודקוד מקור 1 לקודקוד j העובר דרך הקודקוד 3 ובסך הכל המסלול הזה עובר דרך לא יותר מ- $(m+1)$ קשתות . משקל המסלול הוא:

  $d^{(m)}[3]+a_{3j}$

- קיבלנו מסלול מקודקוד מקור 1 לקודקוד j העובר דרך הקודקוד K ובסך הכל המסלול הזה עובר דרך לא יותר מ- $(m+1)$ קשתות . משקל המסלול הוא:

  $d^{(m)}[K]+a_{Kj}$

- לכן הביטוי הבאף $\min_{K=1}^{n}\{ d^{(m)}[K]+ a_{Kj} \}$
- לכל $K \neq j$
- מתאר את משקל המסלול הקצר מקודקוד מקור 1 לקודקוד j , אשר מכיל לא יותר מ- (m+1) קשתות.
- אך יתכן שהביטוי $d^{(m)}[j]$, אשר מתאר את המשקל של המסלול הקצר מקודקוד מקור 1 לקודקוד j אשר מכיל לא יותר מ m –קשתות , בעל ערך יותר קטן מאשר המסלול שמכיל לכל היותר (m+1) קשתות.

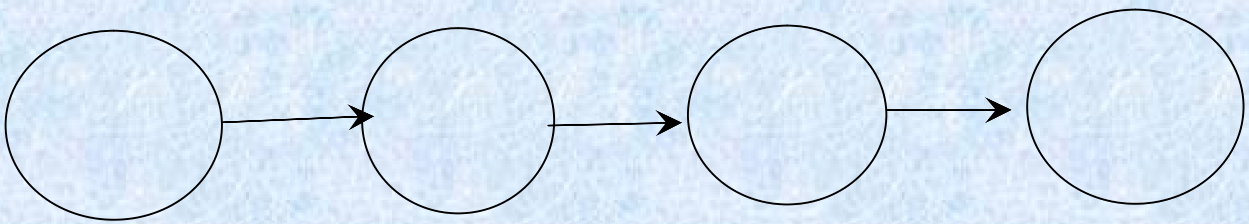
- אי לכך המסלול בעל המשקל הקטן ביותר מקודקוד מקור 1 לקודקוד j, אשר מכיל לא יותר מ- (m+1) קשתות מסומן כ $d_j^{(m+1)}$ ומוגדר כ:

$$d_j^{(m+1)} = \min\{d_j^{(m)}, \min_{k \neq j}\{d_k^{(m)} + a_{kj}\}\}$$

- והביטוי נכון לכל קודקוד j, כאשר $2 \leq j \leq n$.

- מאחר שהרשת לא מכילה מעגלים בעלי משקל שלילי אזי משקל המסלול הקצר ביותר מכל קודקוד v לעצמו (מסלול מעגלי) הינו אפס.
- לאור זאת אם בגרף יש n קודקודים אזי המסלול הפשוט , שהינו מסלול קצר, מכיל לא יותר מ- (n-1) קשתות.

- לדוגמא, עבור $n=4$ בגרף הבא:



- קל לראות כי המסלול הקצר יכול להכיל ***לכל היותר*** 3 קשתות.

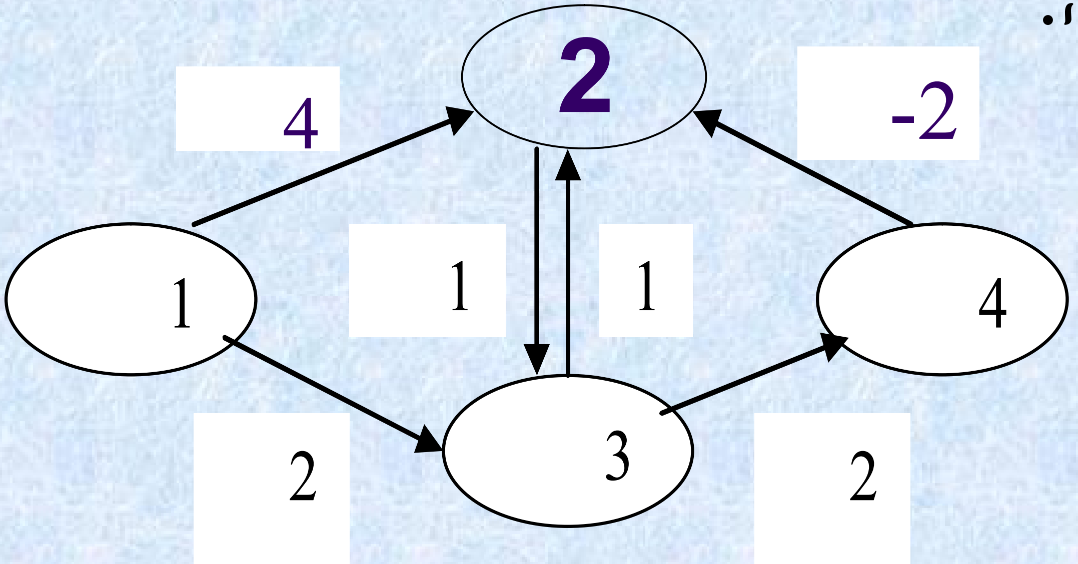
- מכאן נסיק כי : d_j - משקל המסלול הקצר ביותר מקודקוד מקור לקודקוד **j** הינו $d_j^{(n-1)}$, מאחר שאם בגרף $|V|=\mathbf{n}$ קודקודים אזי המסלול הקצר מקודקוד מקור לקודקוד **j** מכיל לכל היותר **(n-1)** קשתות .
- מכאן נסיק כי לכל קודקוד **j**: בעזרת $d_j^{(1)}$ נמצא את $d_j^{(2)}$, בעזרת $d_j^{(2)}$ נמצא את $d_j^{(3)}$ וכן הלאה עד שנגיע ל $d_j^{(n-1)}$.
- כעת נסכם את האלגוריתם של בלמן- פורד.

- צעד 1
- 1.1 $d^{(1)}[1] \leftarrow 0$
- 1.2 לכל קודקוד j , כאשר $j=2\ldots n$ בצע:
- $d^{(1)}[j] \leftarrow a[1][j]$
- 1.3 $Pa[1] \leftarrow nil$
- 1.4 לכל קודקוד j, כאשר $j=2\ldots n$ בצע:
- אם קיימת קשת $(1,j)$ אז בצע: $Pa[j] \leftarrow 1$
- אחרת בצע: $Pa[j] \leftarrow$ '__'

צעד 2

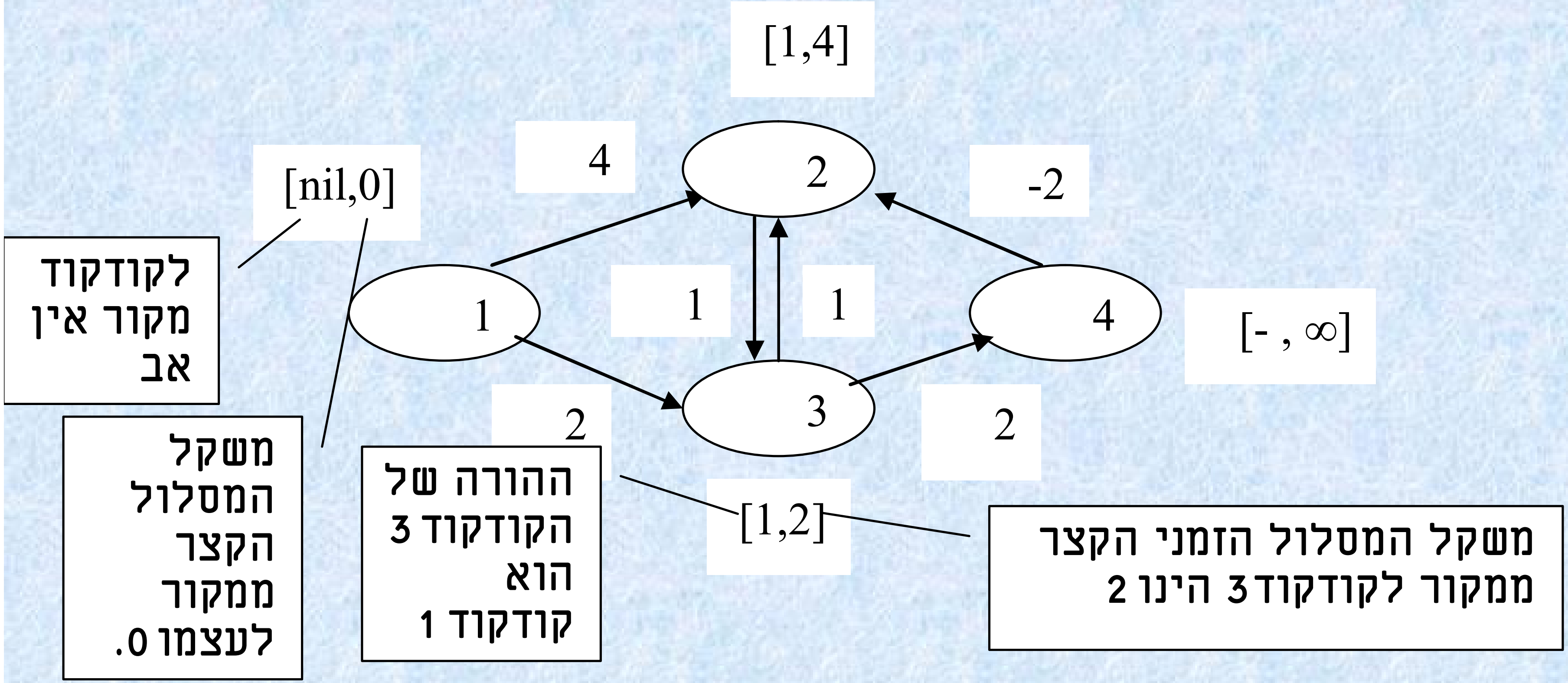
- 2.1 לכל $m=1\ldots n-2$ בצע:
- 2.1.1 לכל קודקוד j, כאשר $j=2\ldots n$ בצע:
- 2.1.1.1 לכל קודקוד K, כאשר $K\neq j$ וגם $K=2..n$ בצע:
- $temp \leftarrow \min\{d^{(m)}[K] + a[K][j]\}$
- 2.1.1.2 אם $temp< d^{(m)}[j]$ אז בצע:
- 2.1.1.2.1 $Pa[j] \leftarrow K$
- 2.1.1.2.2 $d^{(m+1)}[j] \leftarrow temp$
- אחרת בצע: $d^{(m+1)}[j] \leftarrow d^{(m)}[j]$

נדגים את ההרצה של האלגוריתם Bellman- Ford על הרשת הבאה:



- נניח שקודקוד מקור הינו קודקוד 1.
- בתהליך התיאור של האלגוריתם סמוך לכל קודקוד v של **הגרף המכוון** מופיעים שני מספרים :
- השמאלי מייצג את הקודקוד שהינו "הורה" (Pa[v]) של הקודקוד v.
- הימני מייצג את אורך המסלול הקצר ביותר מקודקוד מקור 1 לקודקוד v שהוא (d[v]).

לאחר צעד 1 של האלגוריתם תמונת הרשת הינה:



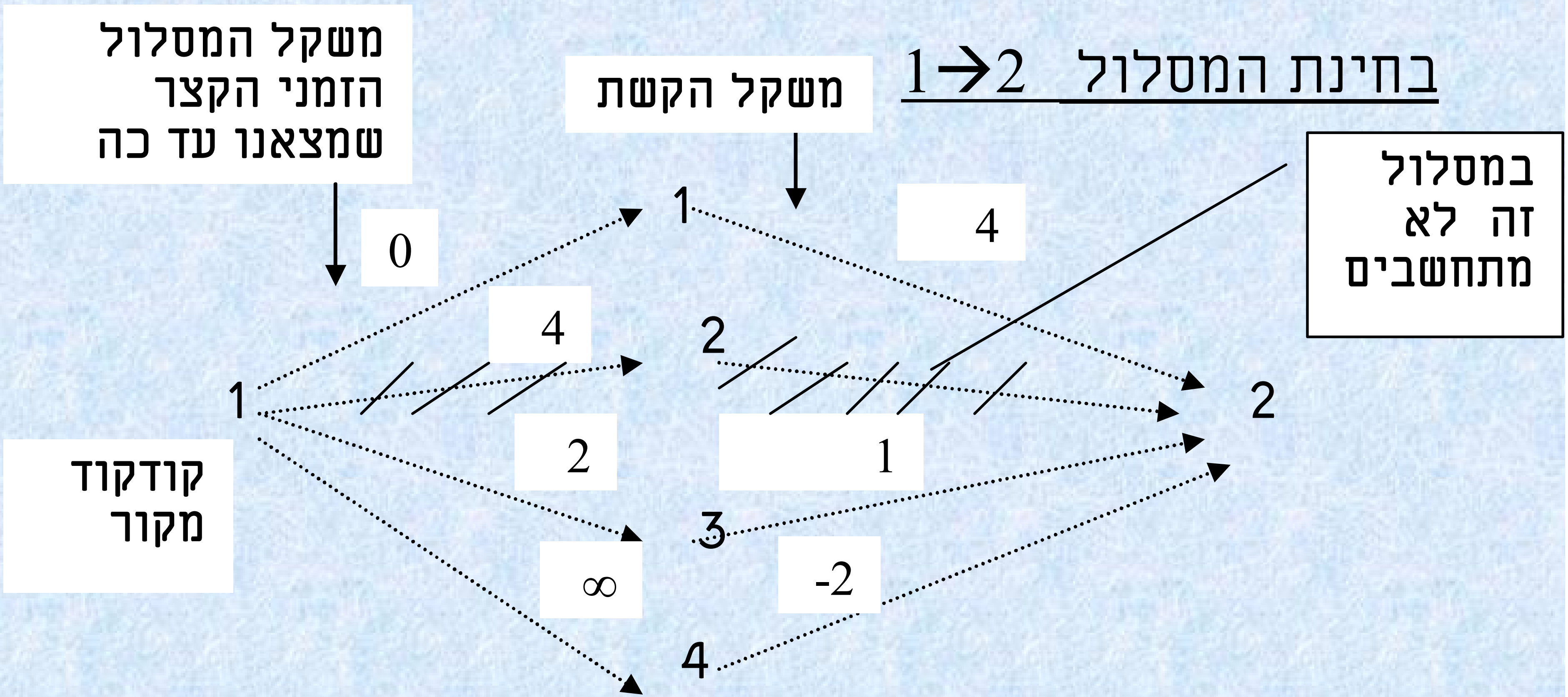
לכן מתקבל:

קודקוד v	1	2	3	4
d[v]	0	4	2	∞

- מאחר וברשת זו מספר הקודקודים הוא $|V|=n=4$,
אז הלולאה המרכזית (2.1) תתבצע פעמיים בלבד.
- פעם אחת כאשר $m=1$ ופעם שניה כאשר $m=2$.

איטרציה ראשונה: (m=1)

בחינת המסלול 1→2

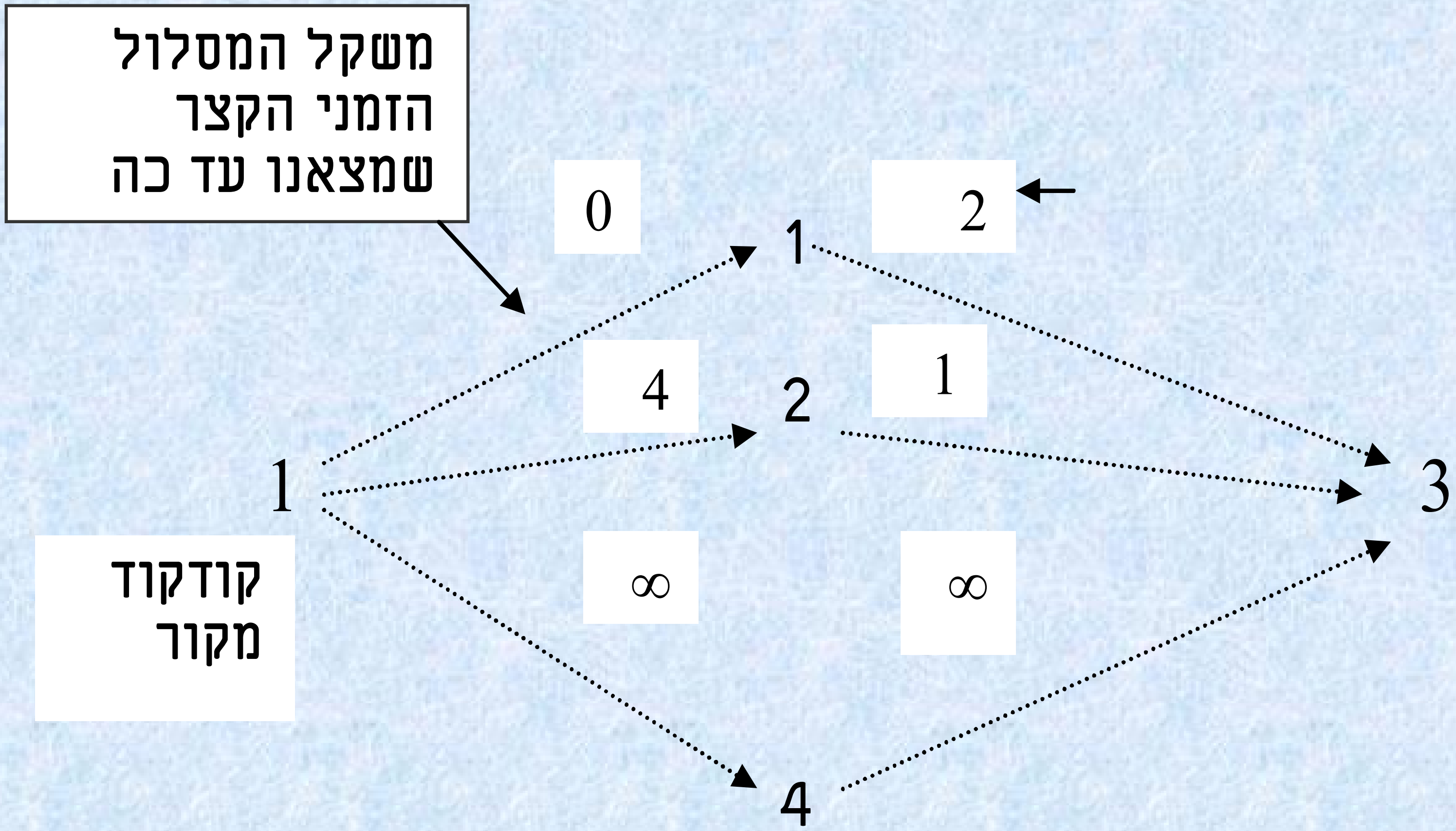


- משקל המסלול מ- 1 ל- 2 דרך קודקוד 1 הוא: 4
- משקל המסלול מ- 1 ל- 2 דרך קודקוד 3 הוא: 3
- משקל המסלול מ- 1 ל- 2 דרך קודקוד 4 הוא: ∞
- אך $\min\{4,3,\infty\}=3$
- ולכן $\min\{d[2]\equiv 4,3\}=3$

- כלומר קיים מסלול מקודקוד מקור 1 לקודקוד 2 העובר דרך קודקוד 3 .
- אורכו של המסלול הוא 3 והוא עובר דרך לא יותר מ- 2 קשתות.
- אי לכך נצמיד לקודקוד 2 תג [3 ,3]
-
- משקל המסלול המינימלי "ההורה"

<u>בחינת המסלול 1→3</u>

<u>1</u>



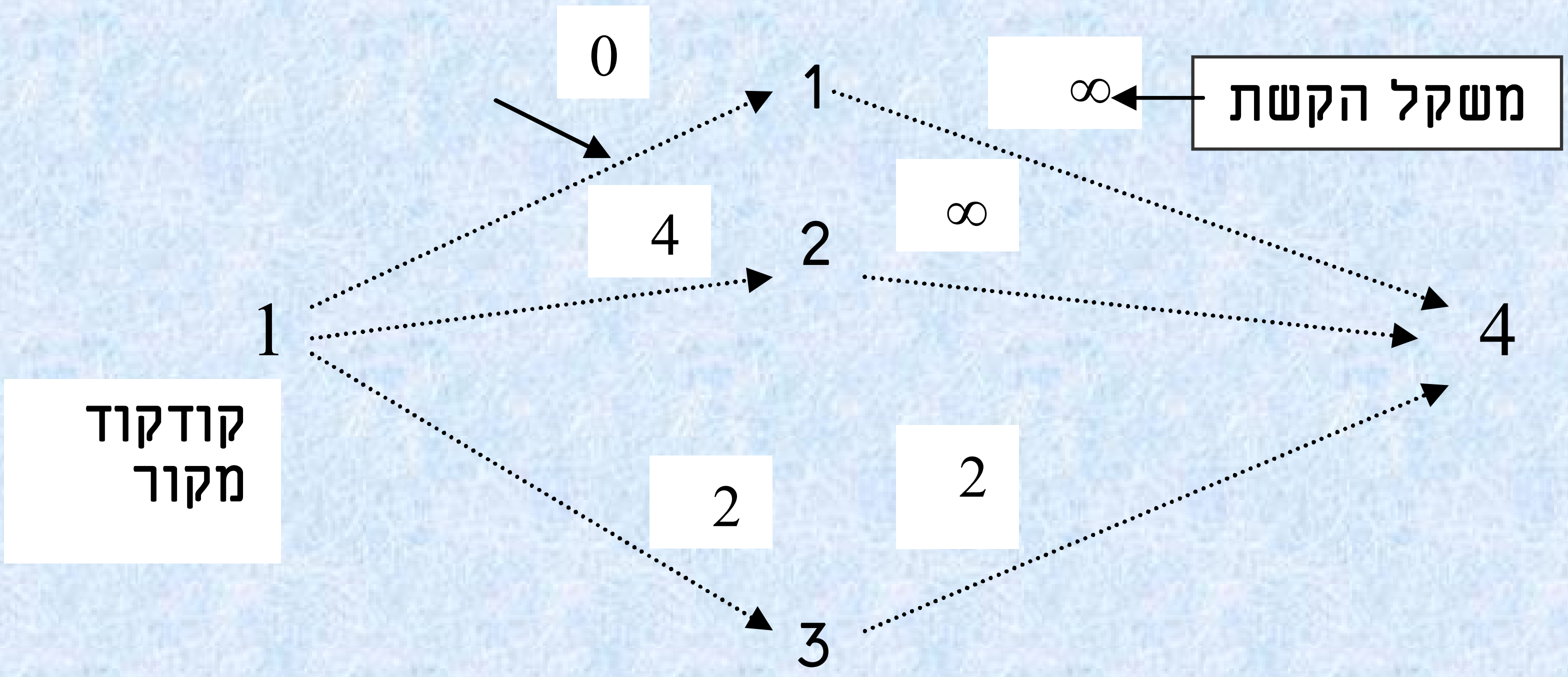
- משקל המסלול מ- 1 ל- 3 דרך קודקוד 1 הוא: 2
- משקל המסלול מ- 1 ל- 3 דרך קודקוד 2 הוא: 5
  משקל המסלול מ- 1 ל- 3 דרך קודקוד 4 הוא: ∞
- קל לראות כי:
- $\min\{2,5,\infty\}=2$ כלומר משיגים את המינימום דרך קודקוד 1.
- אך $\min\{d[3]\equiv 2, 2\}=2$

- כלומר קיים מסלול מקודקוד מקור 1 לקודקוד 3 העובר דרך קודקוד 1 .
- אורכו של המסלול הוא 2 , כך שהמסלול עובר דרך לא יותר מ- 2 קשתות.
- אי לכך נצמיד לקודקוד 3 תג [1,2].
-

אורך המסלול המינימלי ה"הורה"

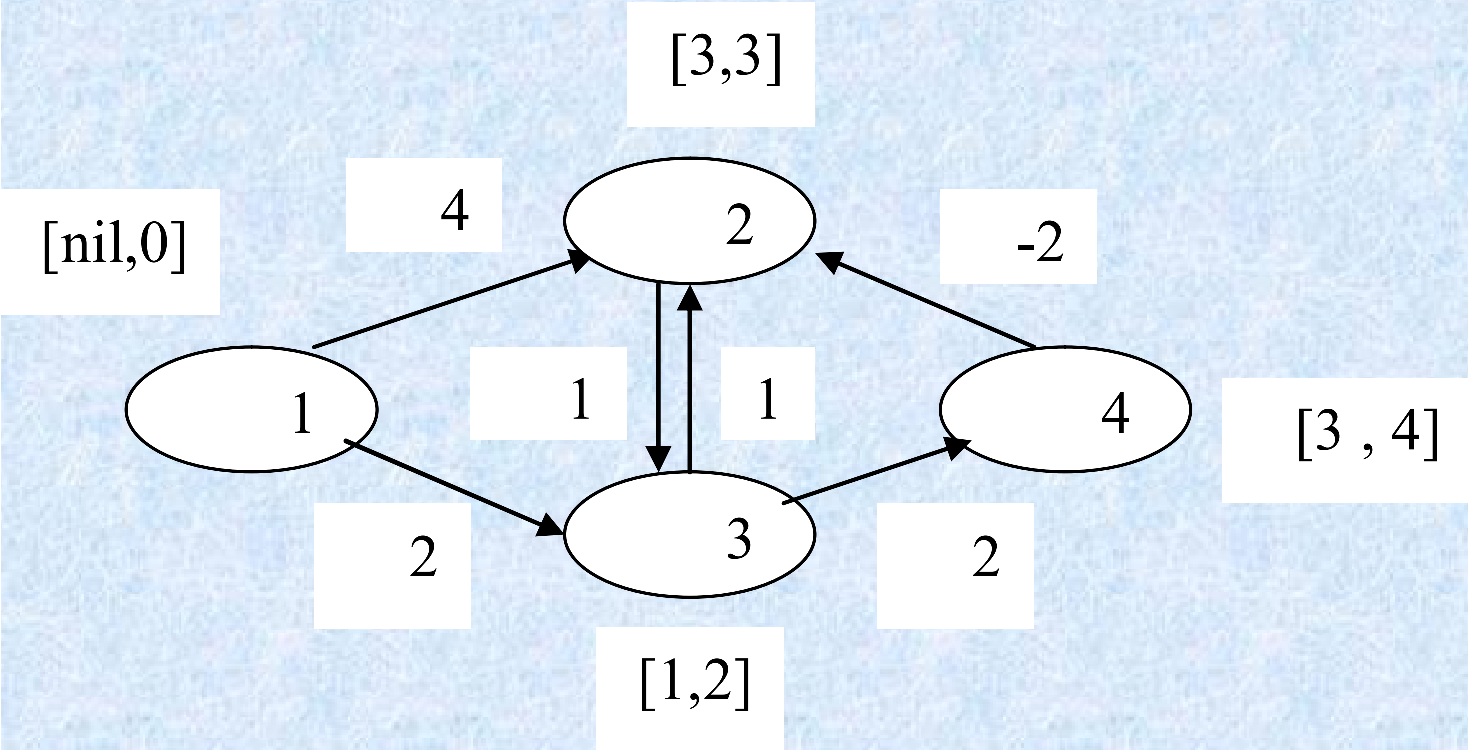
- אגב, במקרה זה לא קיימת הקשת (1,1). לכן המסלול מ- 1 ל- 3 עובר דרך קשת אחת והיא (1,3).

בחינת המסלול 4 ⟵ 1



- משקל המסלול מ- 1 ל- 4 דרך קודקוד 1 הוא: ∞
- משקל המסלול מ- 1 ל- 4 דרך קודקוד 2 הוא: ∞
- משקל המסלול מ- 1 ל- 4 דרך קודקוד 4 הוא: 4
- קל לראות כי: $\min\{\infty,\infty,4\}=4$
- כלומר משיגים את המינימום דרך קודקוד 3.
- אך $\min\{d[4]\equiv\infty,4\}=4$, כלומר קיים מסלול מקודקוד מקור 1 לקודקוד 4 העובר דרך קודקוד 3 ואורכו 4, כך שהמסלול עובר דרך לא יותר מ- 2 קשתות.

- בתום האיטרציה הראשונה תמונת המצב הינה:

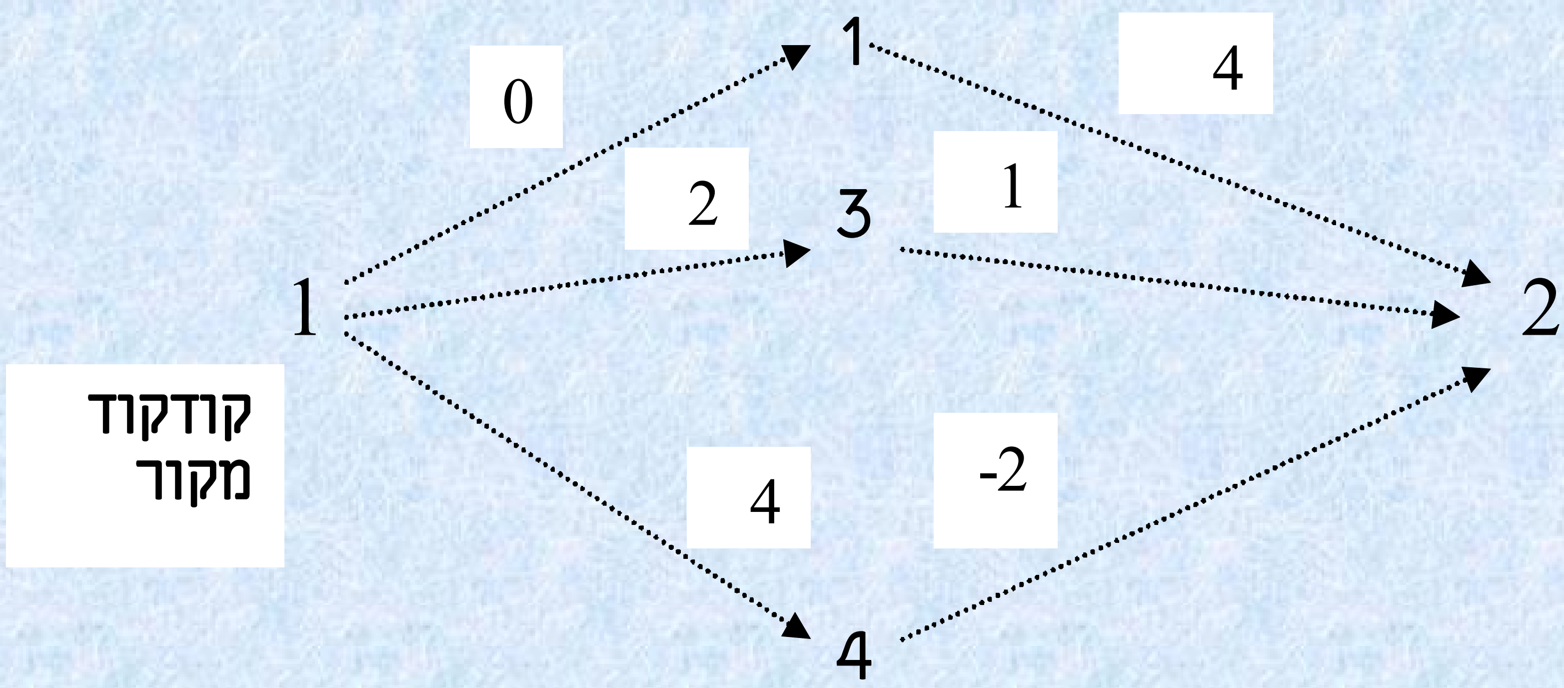


- שים לב לשינויים שחלים בתגים הסמוכים לקודקודי הגרף.
- לסיכום האיטרציה הראשונה , להלן אורכי המסלולים הקצרים מקודקוד מקור (1) לכל קודקוד אחר (V):

קודקוד v	1	2	3	4
$d^{(2)}[v]$	0	3	2	4

- <u>איטרציה שניה</u> (m=2)
- באיטרציה זו לכל קודקוד v נמצא את משקל המסלול הזמני הקצר מקודקוד מקור 1 לכל קודקוד v בגרף, כך שהמסלול עובר דרך לא יותר מ- 3(m+1≡) קשתות.

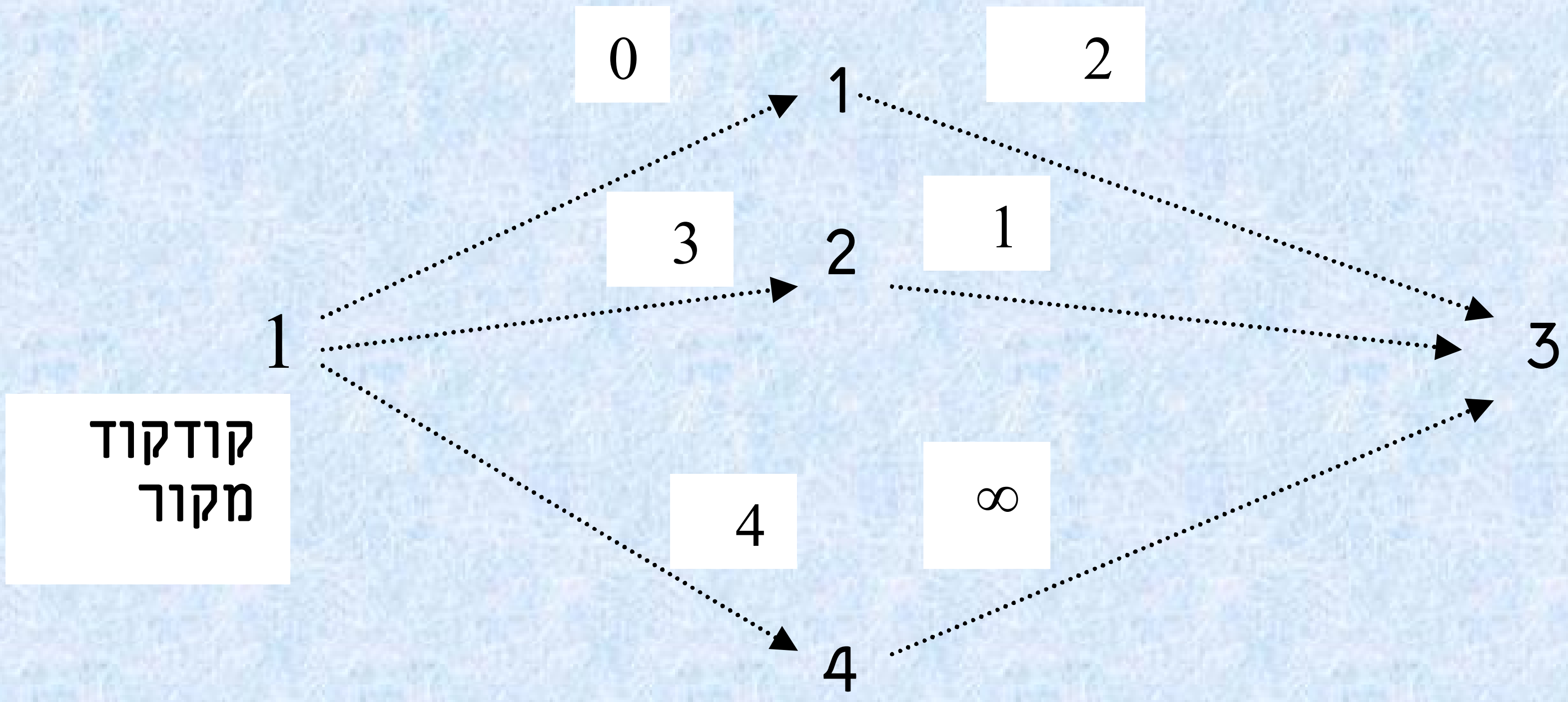
בחינת המסלול 1→2



- משקל המסלול מ- 1 ל- 2 דרך קודקוד 1 הוא: 4
- משקל המסלול מ- 1 ל- 2 דרך קודקוד 3 הוא: 3
- משקל המסלול מ- 1 ל- 2 דרך קודקוד 4 הוא: 2
- קל לראות כי: $\min\{4,3,2\}=2$
- כלומר משיגים את המינימום דרך קודקוד 4 .
- אך $\min\{d[2]\equiv 3,2\}=2$

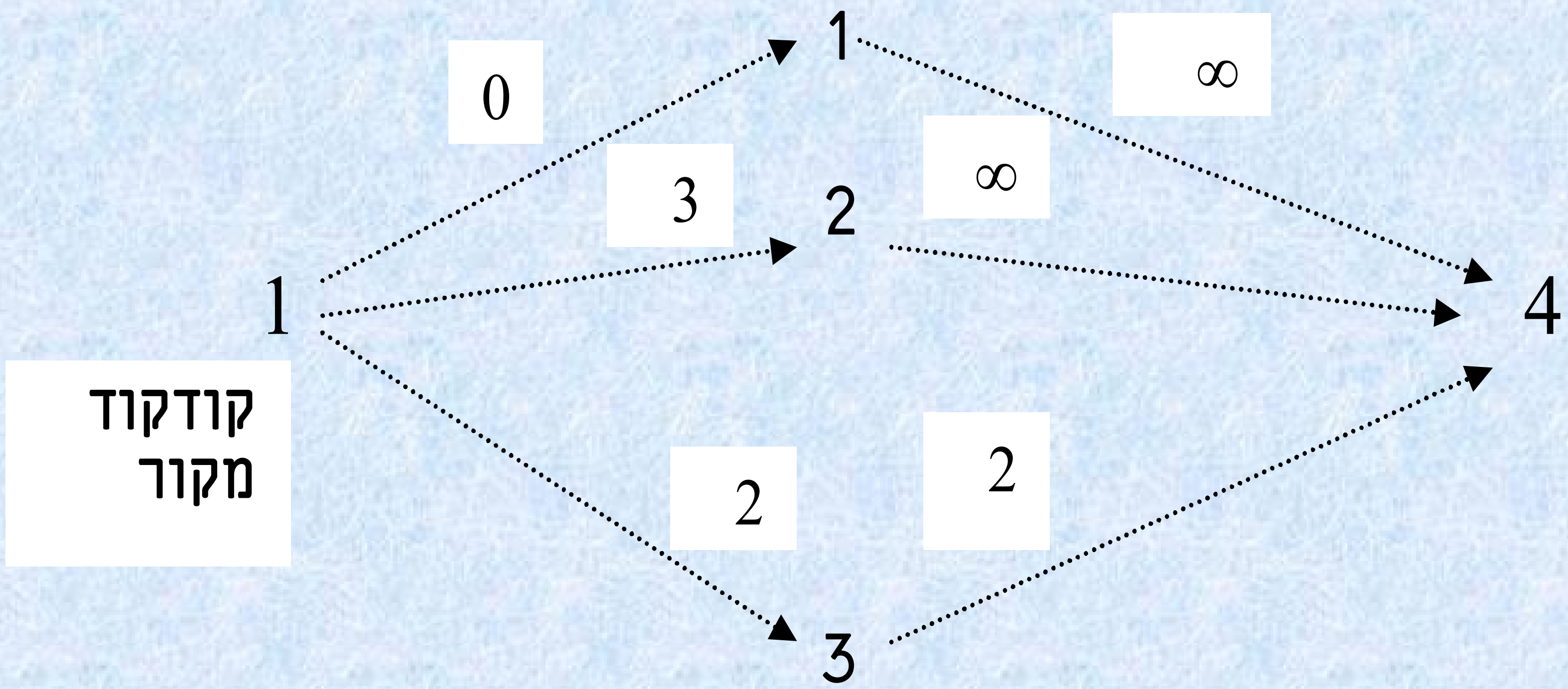
- כלומר קיים מסלול מקודקוד מקור 1 לקודקוד 2 העובר דרך קודקוד 4 .
- אורכו של המסלול הוא 2 , כך שהמסלול עובר דרך לא יותר מ- 3 קשתות .
- אי לכך נצמיד לקודקוד 2 תג : [4 ,2]
-
- אורך המסלול המינימלי "ההורה"

בחינת המסלול $1 \longrightarrow 3$



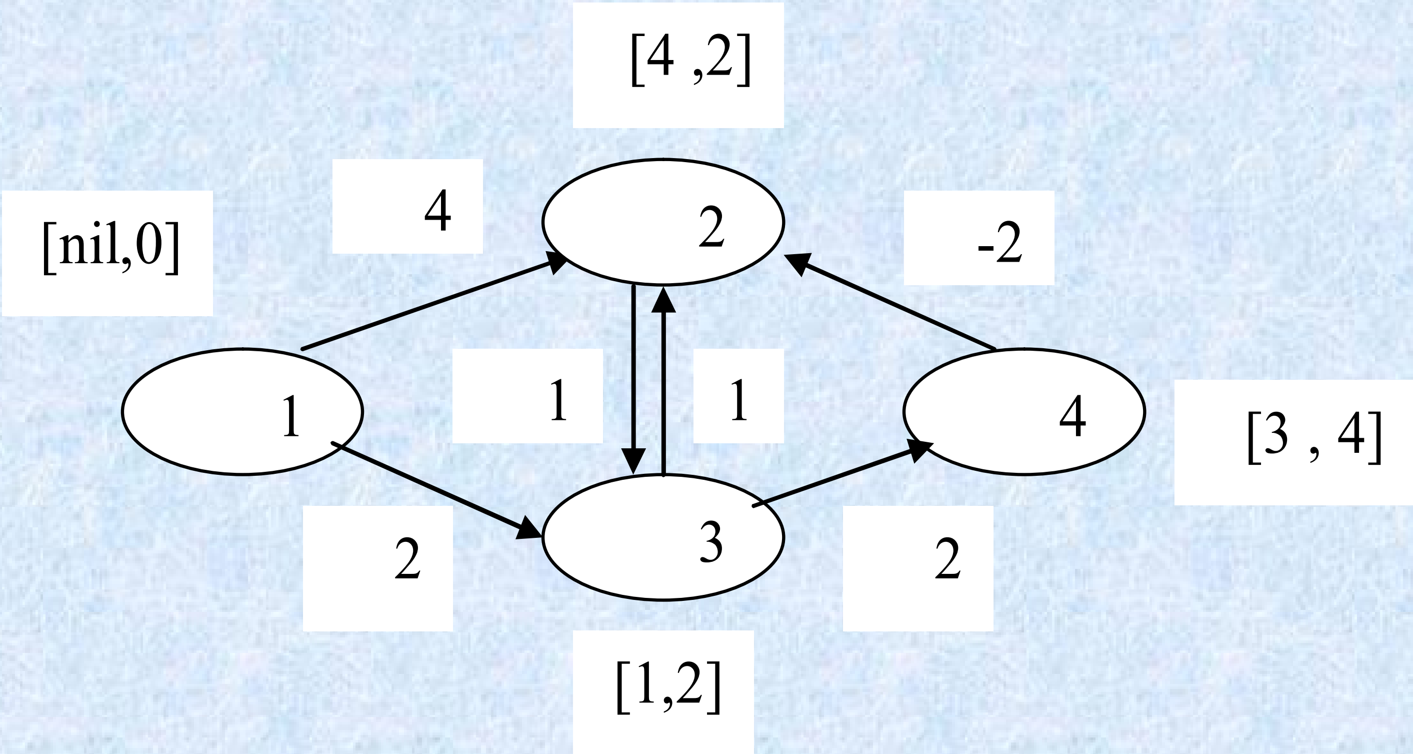
- משקל המסלול מ- 1 ל- 3 דרך קודקוד 1 הוא: 2
- משקל המסלול מ- 1 ל- 3 דרך קודקוד 2 הוא: 4
- משקל המסלול מ- 1 ל- 3 דרך קודקוד 4 הוא: ∞
- קל לראות כי: $\min\{2,4,\infty\}=2$
- כלומר משיגים את המינימום דרך קדקוד 1.
- אך $\min\{d[3]\equiv 2,2\}=2$
- כלומר אין שיפור באורך המסלול הקצר, משקל המסלול הקצר העובר דרך לכל היותר 3 קשתות הוא לא יותר קטן מאשר המסלול הקצר העובר דרך לכל היותר 2 קשתות.

בחינת המסלול $1 \longrightarrow 4$



- משקל המסלול מ- 1 ל- 4 דרך קודקוד 1 הוא: ∞
- משקל המסלול מ- 1 ל- 4 דרך קודקוד 2 הוא: ∞
- משקל המסלול מ- 1 ל- 4 דרך קודקוד 3 הוא: 4
- קל לראות כי: $\min\{\infty,\infty,4\}=4$
- כלומר משיגים את המינימום דרך הקודקוד 3.
- אך $\min\{d[4]=4,4\}=4$ והתג שעל הקודקוד 4 לא השתנה.

- בתום האיטרציה השניה תמונת המצב הינה:



- שים לב ! השינוי חל בתג של הקודקוד 2 בלבד .
- לסיכום האיטרציה השנייה , להלן אורכי המסלולים הקצרים מקודקוד מקור (1) לכל קודקוד אחר (v):

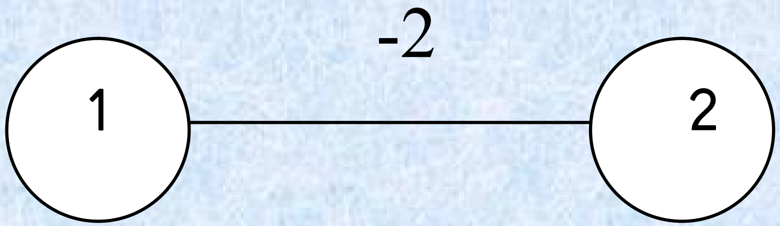
קודקוד v	1	2	3	4
$d^{(3)}[v]$	0	2	2	4

- כאמור מאחר שמספר הקודקודים $|V| = n = 4$ אז המסלול הקצר מקודקוד מקור (1) לקודקוד v, לכל $v \neq 1$, הינו $d[v]$ והוא שווה ל $d^{(3)}[v] = d^{(n-1)}[v]$.
- לסיכום, להלן אורכי המסלולים הקצרים מקודקוד מקור (1) לכל קודקוד v בגרף :

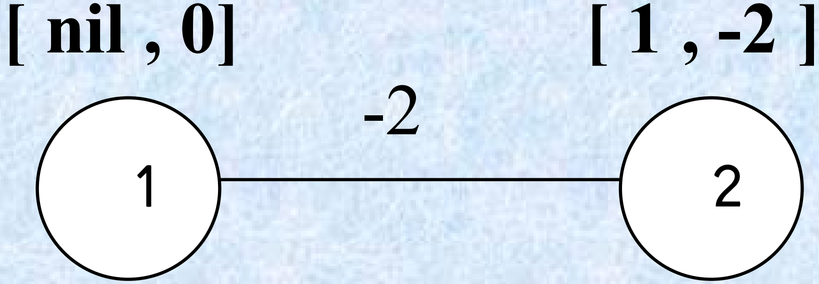
קודקוד v	1	2	3	4
משקל המסלול הקצר	0	2	2	4

- מסלולים אלו לא ניתנים לשיפור ולכן הם נקראים מסלולים אופטימליים.
- כאמור בעזרת המערך Pa ניתן לקבוע מהו המסלול עצמו, למשל עבור המסלול $1 \rightsquigarrow 2$ המסלול הינו (מהסוף להתחלה) קודם קודקוד 2, "ההורה" של קודקוד 2 הינו קודקוד 4, "ההורה" של קודקוד 4 הינו קודקוד 3 ; "ההורה" של קודקוד 3 הינו קודקוד 1 ולקודקוד 1 אין "הורה" כיוון שהוא המקור.
- לכן המסלול הינו $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$.

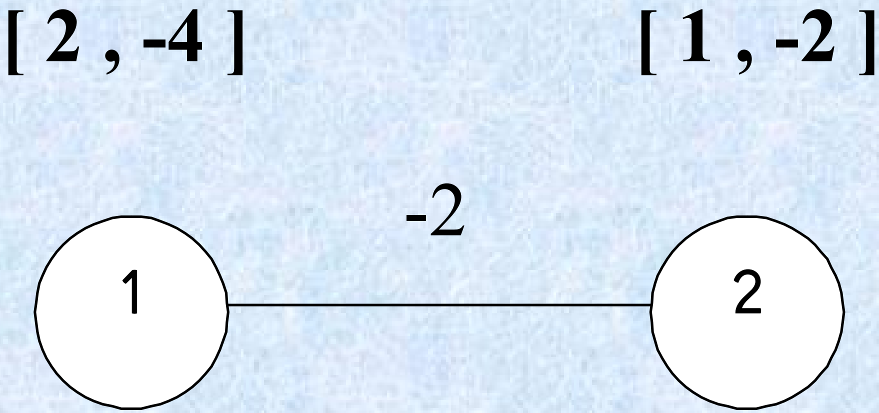
- הערה חשובה ! אלגוריתם של בלמן – פורד פועל כהלכה בתנאי שהגרף מכוון .
- נראה זאת בדרך השלילה : נניח שניתן להריץ אלגוריתם בלמן – פורד על גרף לא מכוון.
- ניקח את הגרף הבא :



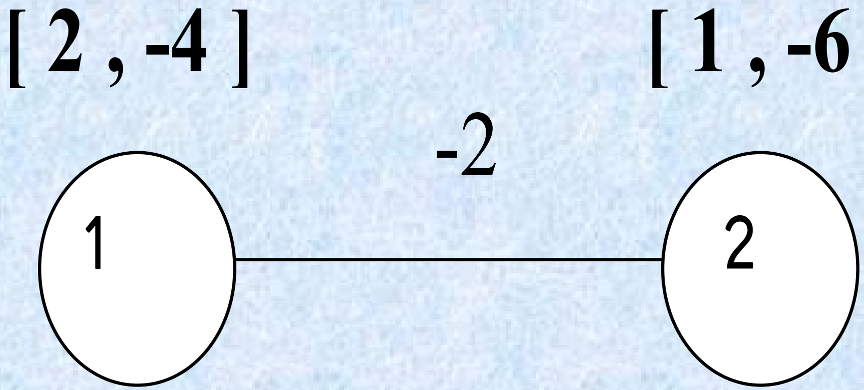
- תמונת המצב בהתחלה היא :



- אחר כך נקבל את התמונה הבאה :



- אחר כך נקבל את התמונה הבאה :



וכן הלאה.

- כך אפשר להמשיך ללא סוף הלוך וחזור על הקשת השלילית והאלגוריתם נתקע בלולאה אינסופית. לכן נקבע שהאלגוריתם לא יפעל על גרף לא מכוון.

- יעילות האלגוריתם של בלמן – פורד
- נתון גרף $G = (V,E)$
- צעד 1 דורש זמן $O(|V|)$.
- צעד 2 דורש זמן $O(|V|^3)$.
- עקב 3 הלולאות המקוננות הבאות :
- for m → $O(|V|)$
- for j → $O(|V|)$
- for k → $O(|V|)$

- ***טענה***: נתון גרף מכוון $G = (V,E)$ עם פונקצית משקל $W : E \rightarrow R$ נריץ על גרף זה אלגוריתם של בלמן – פורד.
- כאמור אורך המסלול הקצר של צומת כלשהו v בגרף הינו $d[v]$ והוא שווה ל – $d^{(n-1)}[v]$.
- הרשת מכילה מעגל שלילי אם ורק אם $d^{(n)}[v] < d^{(n-1)}[v]$ עבור קודקוד כלשהו v בגרף.

ניסוח אחר של האלגוריתם בלמן פורד

- האלגוריתם מחזיר ערך בוליאני המציין אם קיים או לא קיים בגרף מעגל בעל משקל שלילי שניתן להגיע אליו מן המקור.
- אם קיים מעגל כזה האלגוריתם מודיע שלא קיים פתרון לבעיה.
- אם לא קיים מעגל כזה האלגוריתם יוצר את המסלולים הקצרים ביותר ואת משקליהם.

המשך הניסוח

- Bellman-Ford(G,w,s)
- 1. INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G,s)
- 2. for i ← 1 to |V|-1 do
-         for each edge $(u,v) \in E$
            do Relax(u,v,w)
- 3. for each edge $(u,v) \in E$ do
-         if d[v] > d[u] + w(u,v)
-             then return FALSE
- 4. return TRUE

ניסוח אחר של האלגוריתם

- INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G,s)
- 1. for each vertex $v \in V$ do
- 1.1 $d[v] \leftarrow \infty$
- 1.2 $\pi[v] \leftarrow NIL$
- 2. $d[s] \leftarrow 0$
- כאשר $\pi[v]$ הוא קודקוד "קודם" של v .

המשך ניסוח חדש

- טכניקת ההקלה (relaxation) :

- RELAX(u,v,w)
- 1. if d[v] > d[u] + w(u,v) then
- 1.1 d[v] ← d[u] + w(u,v)
- 1.2 $\pi[v] \leftarrow u$

- משפט 3 בודק אם קיים מעגל בעל משקל שלילי ומחזיר את הערך הבוליאני המתאים.
- קל לראות שסיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם היא: $O(VE)$.