

תכנון וניתוח אלגוריתמים

תרגיל 6

תרגילים על מטריצת

מסלולים





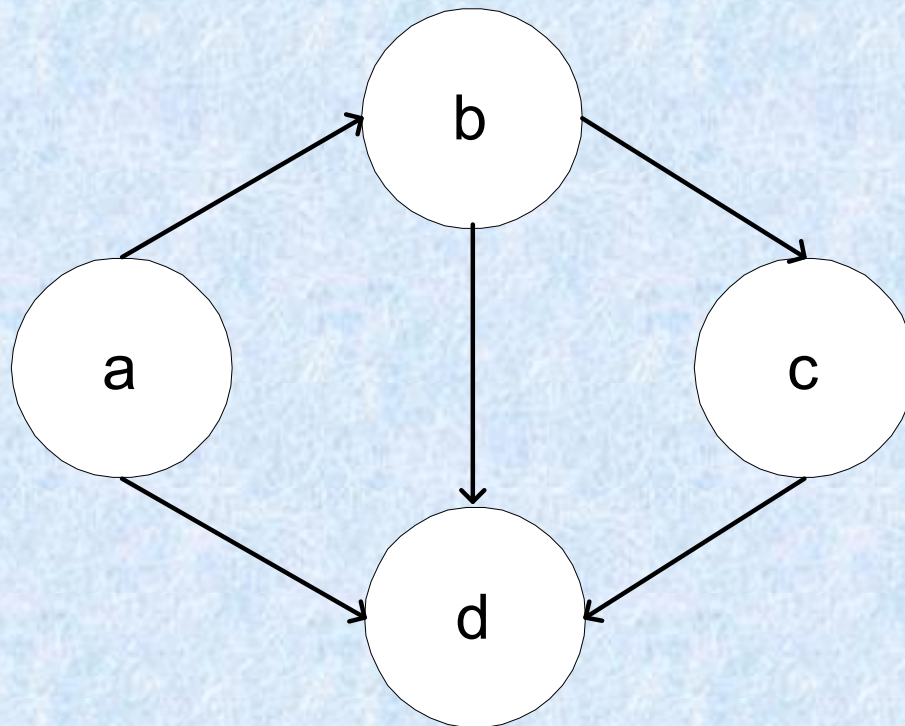
שאלה 1.1

מצא עבור הגרף הבא:

א. מטריצת הסמיכות.

ב. מטריצת המסלולים

תוך שימוש בחזקות
מטריצת הסמיכות.





שאלה 2.

להלן שיטה חדשה לחישוב מטריצת המסלולים.

בשיטה החדשה משתמשים בהגדרה הבאה:

$P_K[i][j]$ הוא בעל ערך "אמת" (TRUE) אם ורק

אם קיים מסלול מהקודקוד i לקודקוד j שאינו עובר

דרך קודקוד כלשהו שמספרו גבוה מ- k .

א. אם עבור i ו- j מסויימים $P_K[i][j]$ בעל ערך

TRUE האם גם $P_{K+1}[i][j]$ בעל ערך TRUE?



ב. נתון כי עבור i ו- j מסויימים $P_K[i][j]$ בעל ערך FALSE, כלומר לא קיים מסלול מ- i ל- j שאינו עובר דרך קודקוד כלשהו שמספרו גבוה מ- k .

אם קיים מסלול מ- i ל- j העובר דרך הקודקוד $k+1$, כלומר קיים מסלול מ- i ל- $k+1$ ומ- $k+1$ ל- j ומסלולים אלו אינם עוברים דרך הקודקודים שמספרם גבוה מ- k , במקרה זה מהו הערך של $P_{K+1}[i][j]$




ג. האם $P_o[i][j]$ שווה למטריצת הסמיכות שמייצגת את הגרף הנתון G ?

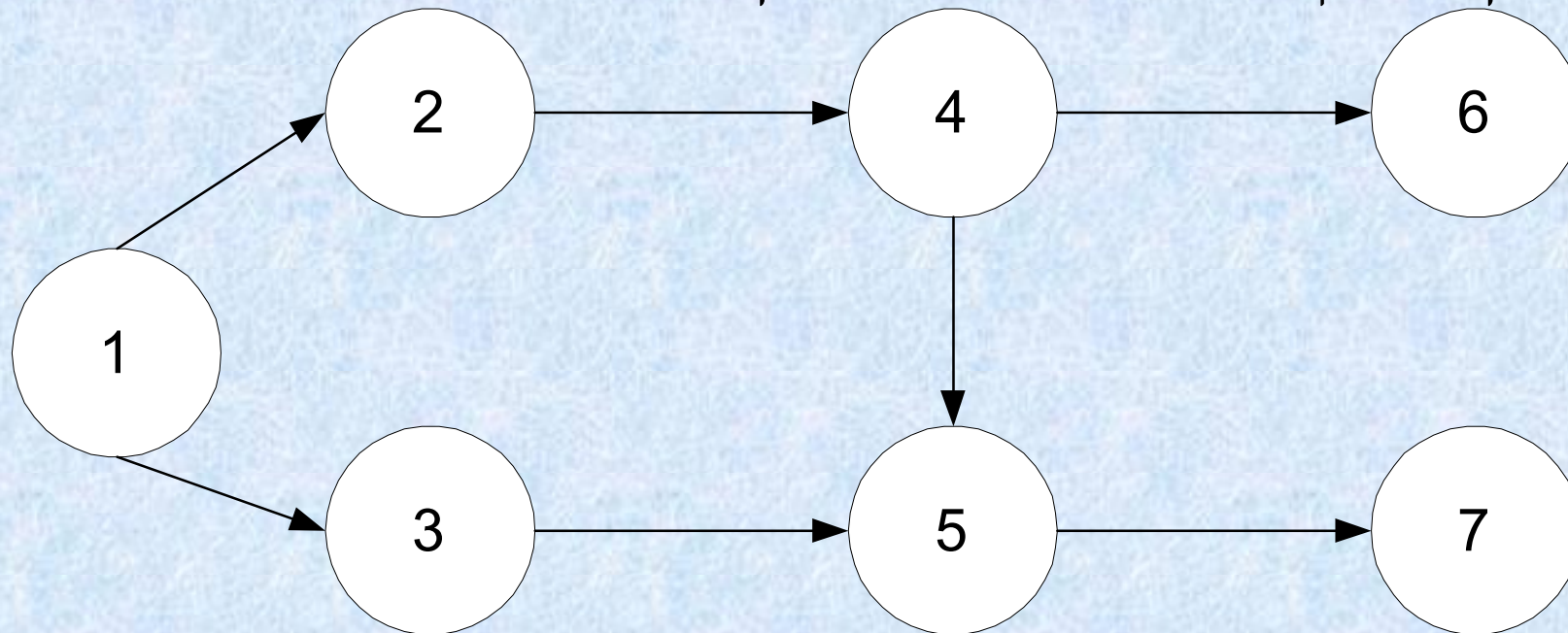
ד. כתוב אלגוריתם בעל סיבוכיות זמן ריצה $O([V]^3)$ לקבלת מטריצת המסלולים.

ה. כתוב פונקציה / שגרה בשפה עילית לחישוב מטריצת המסלולים, כך שסיבוכיות זמן הריצה של השיגרה הינה: $O([V]^3)$.



שאלה 3.

ניתן לחלק מטלה מסויימת לכמה תתי מטלות, כך למשל 
ניתן לחלק מטלה מסויימת באופן הבא:





❖ החיצים מתארים את סדר הקדימות בין תתי המטלות.
למשל,

❖ תת מטלה 1 צריכה להיות קודמת לתתי מטלות 2 ו-3,

❖ תת מטלה 2 צריכה להיות קודמת לתת מטלה 4,

❖ תת מטלה 3 צריכה להיות קודמת לתת מטלה 5,

❖ תת מטלה 4 צריכה להיות קודמת לתתי מטלות 5 ו-6,

❖ ותת מטלה 5 צריכה להיות קודמת לתת מטלה 7.



❖ המטרה לסיים את ביצוע כל תתי המטלות מהר ככל האפשר.

❖ בכל יחידת זמן נתון ניתן לבצע מספר בלתי מוגבל של תתי מטלות.

❖ המטרה שהמטלה כולה תושלם בזמן הקצר ביותר.

❖ נתון גרף מכוון לא מעגלי המייצג את סדר הקדימות בין תתי המטלות.

❖ נניח שכל תת מטלה ניתן לבצע ביחידת זמן אחת.



- א. מאחר שהגרף אינו מכיל מעגל, האם חייב להיות
לפחות קודקוד אחד ב- שאין לו קודקוד קודם ? נמק.
- ב. בתרשים הנתון מהי תת המטלה שאין לה תת מטלה
קודמת?
- ג. איזו תת מטלה ניתן לבצע ביחידת זמן הראשונה?
- ד. ברגע שתת מטלה '1' תושלם הצע ביצוע פעולות כך
שלאחר ביצוע הפעולות הנ"ל יתקבל גרף חדש שבו תתי
המטלות 2 ו-3 מיוצגות בעזרת קודקודים שאין להם
קודקודים קודמים.



- ה. אילו תתי מטלות ניתן לבצע ביחידת זמן השניה? ◆
- ו. איזו תת מטלה ניתן לבצע ביחידת זמן השלישית? ◆
- ז. אילו תתי מטלות ניתן לבצע ביחידת זמן הרביעית? ◆
- ח. איזו תת מטלה ניתן לבצע ביחידת זמן החמישית? ◆
- ט. לאור האמור לעיל כתוב אלגוריתם מילולי בעברית ◆
- מובנית לפתרון הבעיה הנתונה. ◆
- י. מה הקלט חייב לכלול? ◆



- ◆ יא. נניח שמספר התת מטלות לא ידוע.
- ◆ באיזה ייצוג של גרף תשתמש? נמק.
- ◆ כיצד אפשר לקבוע בכל צעד של האלגוריתם לאיזה קודקוד אין קודקוד קודם?
- ◆ כיצד אפשר לקבוע אילו תתי מטלות ניתן לבצע באותה יחידת זמן?
- ◆ איזה מידע יש לשמור בכל צומת בגרף?



- ❖ לאור האמור לעיל כתוב אלגוריתם הקובע אילו תת מטלות ניתן לבצע בעת ובעונה אחת בכל יחידת זמן.
- ❖ יב. האם יתכן שגרף זה, המתאר את סדר הקדימות בין תתי המטלות, יכיל מעגל? נמק את תשובתך.
- ❖ יג. כיצד ניתן לגלות, בעזרת האלגוריתם שהצעת בסעיף הקודם, אם הגרף מכיל מעגל?







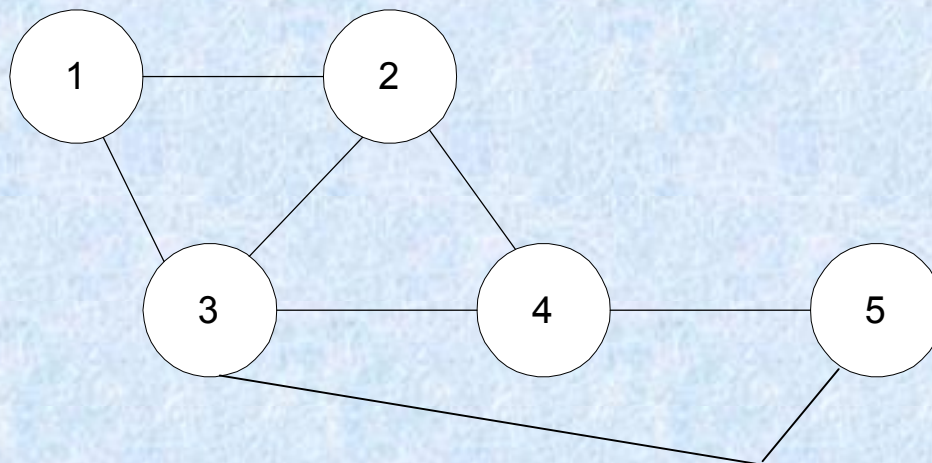
יד. כתוב תכנית בשפה עילית אשר קולטת זוגות
סדורים של תתי המטלות, כאשר התת מטלה הראשונה
בזוג סדור זה צריכה להתבצע לפני התת מטלה השניה
בזוג סדור זה.

התכנית תדפיס את מס' יחידות הזמן המינימלי שבו
ניתן לבצע את המטלה ובכל יחידת הזמן היא תדפיס
את תת/תתי מטלה/ות שצריכות להתבצע.



שאלה 4.

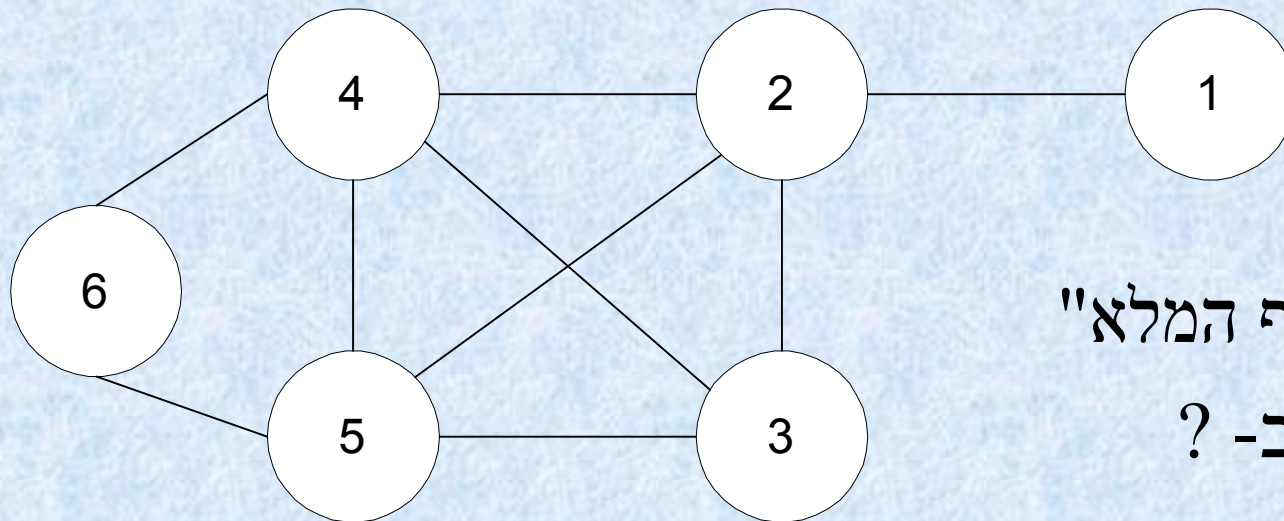
- עבור גרף G נגדיר קבוצה A המכילה N קודקודים מתוך G 
- כ"תת גרף מלא" מגודל N , אם לכל זוג קודקודים, I, J 
- הנמצאים בקבוצה A , יש בגרף צלע (I, J) . 
- דוגמה: נתון גרף G : 





כל קבוצה מבין הקבוצות: $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{3, 4, 5\}$ מהווה "תת גרף מלא" מגודל 3 של , אך לא קיים ב-G "תת גרף מלא" מגודל 4.

א. נתון הגרף הבא:



מהו "תת הגרף המלא" הגדול ביותר ב- ?



- ב. כתוב אלגוריתם המקבל כקלט את גרף G וקבוצת קודקודים A , ובודק אם A הוא "תת גרף מלא" של G .
הנח שהגרף G מיוצג על-ידי מטריצת שכנויות M , שבה
 $M(I, J) = 1$ אם קיימת צלע בין I ל- J ו- $M(I, J) = 0$
אם לאו, וכן שקבוצת הקודקודים A מיוצגת על-ידי מערך.
- ג. כתוב אלגוריתם המקבל כקלט את הגרף G , ובודק אם G
מכיל "תת גרף מלא" מגודל 3. ניתן להשתמש באלגוריתם
שכתבת בסעיף ב'.