

תכנון וניתוח אלגוריתמים

תרגיל 1

פרק 1 : פתרון תרגילים במודל
התכנון הליניארי



שאלה 1.8



שאלה 1.8

מפעל מייצר כיסאות-נוח בשני גדלים;

הכסאות עשויים עץ ובד.

כסא-נוח גדול צורך 5 ק"ג עץ ו-3 מטר בד

כסא-נוח קטן צורך 4 ק"ג עץ ו-2 מטר בד.

המפעל מרוויח על כל כסא-נוח גדול 4 ש"ח ועל כל

כסא-נוח קטן 3 ש"ח.

המשך שאלה 1.8



- ◆ ספק חומרי הגלם של המפעל מסוגל לספק 4000 ק"ג עץ ו-2500 מטר בד לחודש;
- ◆ משווק המוצרים אינו מוכן לרכוש בחודש יותר כסאות-נוח גדולים מאשר כסאות קטנים.
- ◆ מנהל הייצור של המפעל נדרש להחליט מהו מספר כסאות הנוח הקטנים ומהו מספר כסאות הנוח הגדולים שייצר המפעל בחודש.
- ◆ נסחו את הבעיה כבעיית תכנון ליניארי.



פתרון 1.8

נגדיר את משתני ההחלטה:

$X1$ מספר כסאות הנוח הגדולים לחודש

$X2$ מספר כסאות הנוח הקטנים לחודש

ניסוח הבעיה כבעיית תכנון ליניארי :



◆ **Maximize** $Z = 4X_1 + 3X_2$

◆ **כפוף לאילוצים :**

◆ **Subject to:**

◆ $5X_1 + 4X_2 \leq 4000$

◆ $3X_1 + 2X_2 \leq 2500$

◆ $X_1 \leq X_2$

◆ $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$

שאלה 1.9



שאלה 1.9 ♦

♦ ספקי האינטרנט מחוברים לרשת האינטרנט
העולמית באמצעות סיבים אופטיים משלושה
סוגים.

♦ כל סיב מסוגל להעביר מידע בנפח מסוים, ודורש
טיפול תקופתי בתדירות שונה.

♦ נתוני הסיבים מרוכזים בטבלה הבאה:

המשך שאלה 1.9



סוג הסיב	עלות הנחת סיב (מיליוני דולרים)	קצב העברת הנתונים (GB לשנייה)	זמן בין טיפולים תקופתיים (בחודשים)
אדום	5	10	אין צורך בטיפולים
כחול	9	15	2
צהוב	13	30	1

המשך שאלה 1.9



❖ משרד התקשורת נערך לתכנון הנחת סיבים אופטיים כדי לספק דרישות תקשורת עתידיות של לפחות 1000GB נתונים לשנייה.

❖ לפרויקט הוקצב סכום כספי לצורך הטיפולים התקופתיים המאפשר עד 10 טיפולים בחודש. המשרד נערך לחשב את העלות המינימלית הנדרשת להנחת הסיבים האופטיים.

❖ נסחו את הבעיה כבעיית תכנון ליניארי.



פתרון 1.9

נגדיר את משתני ההחלטה X_1, X_2, X_3 כמספר הסיבים האופטיים מכל סוג.

◆ **Minimize** $Z = 5X_1 + 9X_2 + 13X_3$



כפוף לאילוצים :

: Subject to



$$10X_1 + 15X_2 + 30X_3 \geq 1000$$



$$0.5X_2 + X_3 \leq 10$$




$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0$$


שאלה 1.10



1. יש להוסיף מכלאה שלישית לבעיית המכלאות (דוגמה 1.2) שצורתה תהיה ריבוע, והיקפה יהיה לכל היותר מחצית מהיקף המכלאה הריבועית הראשונה, אבל לא פחות מ-50 מטר.

א. קבעו את משתני ההחלטה; 

ב. הגדירו את פונקציית המטרה; 

ג. נסחו את האילוצים על משתני ההחלטה; 

ד. נסחו את אילוצי אי-השלילות. 

המשך שאלה 1.10



2. נניח כי באותה בעיה (דוגמה 1.2) מוצגת דרישה ששטח המכלאות יהיה מקסימלי ולא היקפן; האם אפשר לפתור את הבעיה בעזרת מודל תכנון ליניארי?



פתרון 1.10

1. נוסיף משתנה החלטה נוסף X_3 עבור צלע המכלאה הריבועית השלישית. עלינו להביא למקסימום את הפונקציה:

◆ **Maximize** $Z = 2pX_1 + 4X_2 + 4X_3$

◆ $2pX_1 + 4X_2 + 4X_3 \leq 500$

◆ $X_2 \geq 25$

◆ $4X_3 \geq 50$

◆ $2pX_1 \geq 200, \quad 4X_3 \leq \frac{1}{2}4X_2$



◆ $X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad X_3 \geq 0$



2. כיוון שהנוסחאות הגיאומטריות לחישוב שטח ריבוע ושטח עיגול הן :

ריבוע S $a^2 = \text{שטח הריבוע}$

מעגל S $\pi r^2 = \text{שטח העיגול}$

הרי בכדי לקבל שטח מקסימלי של מכלאות, פונקצית המטרה

$$Z = p X_1^2 + X_2^2 : \text{שתתקבל תהיה}$$

זוהי פונקציה לא ליניארית ולכן לא נוכל לפתור בעיה זו באמצעות תכנון ליניארי.

* שאלה 1.11



◆ שאלה 1.11 *

◆ יש למצוא את נקודת המינימום של פונקצית המטרה:

$$◆ \quad Z = X_1 + 2X_2 - 3X_3 - 7$$

◆ תחת האילוצים:

$$◆ \quad 1) \quad 2X_1 - 5X_2 - 3X_3 \geq 50$$

$$◆ \quad 2) \quad 5X_2 - 2X_3 \leq 10$$

$$◆ \quad 3) \quad X_1^2 \leq 4$$

המשך שאלה 1.11



◆ 4) $X_2 \geq 0$

◆ 5) $X_3 \geq 0$

◆ האם אפשר לפתור בעיה זו באמצעות שיטות
לפתרון בעיית תכנון ליניארי?
◆ נמקו.



◆ פתרון 1.11

◆ למרות שהאילוץ $X_1^2 \leq 4$ הוא בעל צורה של משוואה לא-ליניארית, ניתן לכתבו על-ידי פירוק לשתי משוואות ליניאריות :

◆ $X_1 \geq -2$

◆ $X_1 \leq 2$

◆ ולכן זהו ניסוח של בעיה המתאימה לפתרון באמצעות מודל תכנון ליניארי.

תרגיל 1.12



❖ בית-חרושת לשוקולד מייצר שני סוגי שוקולד – חלב ומריר.

❖ המחיר לצרכן של 100 גרם שוקולד חלב הוא 5 ₪, ושל 100 גרם שוקולד מריר 4 ₪.

❖ ההבדל בין שני סוגי השוקולד הוא כמויות המרכיבים של השוקולד:

❖ בכל 100 גרם שוקולד חלב ישנם 20 גרם פולי קקאו ו-80 גרם סוכר

המשך שאלה 1.12



❖ ואילו בכל 100 גרם שוקולד מריר נמצאים 35 גרם פולי קקאו ו- 65 גרם סוכר.

❖ למפעל אספקה יומית של 4 טון פולי קקאו ו-10 טון סוכר.

❖ טון פולי קקאו עולה 8000 ₪ וטון סוכר עולה 600 ₪.

המשך שאלה 1.12



מה צריכה להיות התפוקה היומית של המפעל
אם מטרתו היא להביא את הכנסותיו
למקסימום ?

מה צריכה להיות התפוקה היומית של המפעל
אם מטרתו היא להביא את רווחיו למקסימום ?



פתרון 1.12

$X1$ – מספר החפיסות (100 גרם) של שוקולד חלב.

$X2$ – מספר החפיסות (100 גרם) של שוקולד מריר.

מקסימום הכנסות :

Maximize $Z = 5X1 + 4X2$

כפוף לאילוצים :

Subject to

$20X1 + 35X2 \leq 4,000,000$

$80X1 + 65X2 \leq 10,000,000$

$X1 \geq 0$, $X2 \geq 0$

תרגיל 1.13



תרגיל 1.13 ♦

♦ חייט רכש 80 מ"ר בד כותנה, ו-120 מ"ר בד צמר. כדי לתפור מעיל לגבר זקוק החייט ל-1 מ"ר בד-כותנה, ו-3 מ"ר בד צמר.

♦ כדי לתפור מעיל לאישה זקוק החייט ל-2 מ"ר בד כותנה, ו-2 מ"ר בד צמר.

המשך שאלה 1.13



◆ המחיר של מעיל לגבר הוא \$30 והמחיר של מעיל לאישה הוא \$20.

◆ כמה מעילים, משני הסוגים, על החייט לתפור כדי להרוויח את הסכום המקסימלי ?



פתרון 1.13

$X1$ – מספר מעילי הגברים.

$X2$ – מספר מעילי הנשים.

◆ **Maximize** $Z = 30X1 + 20X2$

◆ **כפוף לאילוצים :**

: Subject to

◆ $X1 + 2X2 \leq 80$

◆ $3X1 + 2X2 \leq 120$

◆ $X1 \geq 0$, $X2 \geq 0$

תרגיל 1.14



תרגיל 1.14

יצרן משקאות מייצר שני סוגי משקאות : מיץ ומשקה קל.

לייצור ליטר אחד של מיץ הוא צריך 600 מיליליטר תמצית ו-400 מיליליטר מים.

לייצור ליטר אחד של משקה קל הוא משתמש ב-100 מיליליטר תמצית וב-900 מיליליטר מים.

המשך שאלה 1.14



❖ הרווח שלו ממכירת ליטר מיץ הוא 0.5 ₪
וממכירת ליטר משקה קל 0.1 ₪.

❖ הוא מקבל מדי יום 5000 ליטר תמצית ו- 10,000 ליטר מים.

❖ מה צריכה להיות תפוקתו היומית אם מטרתו הינה רווח מקסימלי ?



פתרון 1.14

$X1$ – מספר הליטרים של מיץ.

$X2$ – מספר הליטרים של משקה קל.

Maximize $Z = 0.5X1 + 0.1X2$

כפוף לאילוצים :

Subject to

$0.6X1 + 0.1X2 \leq 5,000$

$0.4X1 + 0.9X2 \leq 10,000$

$X1 \geq 0$, $X2 \geq 0$



תרגיל 1.15

תרגיל 1.15

במפעל לייצור כלי-רכב ניתן לייצר מכוניות
ומשאיות. במפעל 4 מחלקות :

הרכבת מנועים.

טיבוע מתכת.

הרכבת מכוניות.

הרכבת משאיות.

המשך שאלה 1.15



❖ במחלקה 1 (הרכבת מנועים) אפשר להרכיב מנועי מכוניות, ו/או מנועי משאיות כך גם במחלקה 2 (טיבוע מתכת).

❖ במחלקת הרכבת מכוניות אפשר להרכיב מכוניות בלבד, ובמחלקת הרכבת משאיות ניתן להרכיב משאיות בלבד.

❖ להלן הבלה המסכמת את כושר הייצור של המחלקות השונות.

המשך שאלה 1.15



כושד הייצור השנתי		המחלקה
משאיות בלבד	מכוניות בלבד	
16000	30000	הרכבת מנועים
35000	25000	טיבוע מתכת
----	20000	הרכבת מכוניות
15000	-----	הרכבת משאיות

המשך שאלה 1.15



❖ רווח המפעל ממכירת מכונית הוא \$3000
וממכירת משאית \$2500 .

❖ כמה מכוניות וכמה משאיות על המפעל לייצר כדי
שהרווח השנתי יהיה מקסימלי ?



פתרון 1.15

$X1$ – מספר המכוניות מיוצרות בשנה.

$X2$ – מספר המשאיות המיוצרות בשנה.

$1/30,000$ – חלק השנה הדרוש להרכבת מנוע למכונית.

$1/16,000$ – חלק השנה הדרוש להרכבת מנוע למשאית.

$1/25,000$ – חלק השנה הדרוש לטיבוע מתכת במכונית.

$1/35,000$ – חלק השנה הדרוש לטיבוע מתכת במשאית.



◆ **Maximize** $Z = 3000X_1 + 2500X_2$

כפוף לאילוצים :

◆ $\frac{1}{30,000} X_1 + \frac{1}{16,000} X_2 \leq 1$ אילוץ תחנת הרכבת מנוע

◆ $\frac{1}{25,000} X_1 + \frac{1}{35,000} X_2 \leq 1$ אילוץ תחנת טיבוע מתכת

$X_2 \leq 15,000$ אילוץ תחנת הרכבת משאיות ◆

$X_1 \leq 20,000$ אילוץ תחנת הרכבת מכוניות ◆

◆ $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$

תרגיל 1.18



תרגיל 1.18 ♦

חברת "אופני איכות" מייצרת שני סוגים של

אופניים :

אופני הרים. ♦

אופני כביש. ♦

פס ייצור האופניים עבור שני הסוגים כולל מעבר דרך

שתי תחנות עבודה :

המשך שאלה 1.18



◆ הרכבת כידון.

◆ הרכבת גלגלים.

◆ בתחנה 1, הרכבת כידון ניתן להרכיב כידון לזוג אופניים אחד בו-זמנית.

◆ הרכבת כידון לאופני הרים אורכת 2 שעות.

◆ הרכבת כידון לאופני כביש אורכת שעה אחת.

המשך שאלה 1.18



♦ בתחנה 2, הרכבת גלגלים ניתן להרכיב גלגלים לזוג אופניים אחד בו-זמנית.

♦ הרכבת גלגלים לאופני הרים אורכת שעה אחת.

♦ הרכבת גלגלים לאופני כביש אורכת 2 שעות.

♦ החברה עובדת 16 שעות ביום.

♦ הרווח של החברה על זוג אופני הרים הוא \$400 ועל זוג אופני כביש \$200.

המשך שאלה 1.18



מה מספר זוגות אופני ההרים ומספר זוגות אופני הכביש שעל חברת "אופני איכות" לייצר ביום בכדי להגיע לרווח מקסימלי ?

פתרון 1.18

$X1$ – מספר זוגות אופני ההרים שיש לייצר ביום.

$X2$ – מספר זוגות אופני כביש שיש לייצר ביום.



◆ **Maximize** $Z = 400X_1 + 200X_2$



כפוף לאילוצים :

: Subject to

$$2X_1 + X_2 \leq 16$$

אילוץ תחנת הרכבת כידון



$$X_1 + 2X_2 \leq 16$$

אילוץ תחנת הרכבת גלגלים



$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0$$

תרגיל 1.21



תרגיל 1.21

במטוס מטען שלושה תאי אחסון למטענים : קדמי, אמצעי ואחורי. לתאים השונים מגבלות הן בנפח והן במשקל, כמוצג בטבלה הבאה :

משקל מותר (טון)	נפח מותר (מ"ק)	תא אחסון
14	7000	קדמי
20	10000	אמצעי
8	4000	אחורי

המשך שאלה 1.21



❖ כדי לשמור על יציבות המטוס, משקל המטען

המועמס בכל אחד מהתאים צריך

❖ א. להתאים למשקל המותר בו.

❖ ב. לקרוא את הטיסה הבאה אפשריים ארבעה סוגי

מטענים, שנתוניהם מפורטים בטבלה הבאה:

המשך שאלה 1.21



מטען מספר	נפח (מ"קלטון)	משקל (טון)	רווח (נהלטון)
1	500	20	320
2	700	16	400
3	600	25	360
4	400	13	290

המשך שאלה 1.21



אפשר להעביר כל חלק רצוי מכל אחד מהמטענים.

המטרה היא לקבוע איזה חלק להעביר מכל אחד מהמטענים ובאיזה תא אחסון למקמו, כך שהרווח הכולל מהטיסה יהיה מקסימלי.



פתרון 1.21

- ◆ $X11$ - מספר טונות ממשען מספר 1 שהועברו בתא קדמי.
- ◆ $X21$ - מספר טונות ממשען מספר 2 שהועברו בתא קדמי.
- ◆ $X31$ - מספר טונות ממשען מספר 3 שהועברו בתא קדמי.
- ◆ $X41$ - מספר טונות ממשען מספר 4 שהועברו בתא קדמי.
- ◆ $X12$ - מספר טונות ממשען מספר 1 שהועברו בתא אמצעי.
- ◆ $X22$ - מספר טונות ממשען מספר 2 שהועברו בתא אמצעי.



- ◆ X32 - מספר טונות ממשען מספר 3 שהועברו בתא אמצעי.
- ◆ X42 - מספר טונות ממשען מספר 4 שהועברו בתא אמצעי.
- ◆ X13 - מספר טונות ממשען מספר 1 שהועברו בתא אחורי.
- ◆ X23 - מספר טונות ממשען מספר 2 שהועברו בתא אחורי.
- ◆ X33 - מספר טונות ממשען מספר 3 שהועברו בתא אחורי.
- ◆ X43 - מספר טונות ממשען מספר 4 שהועברו בתא אחורי.



◆ **Maximize** $Z = 320(X_{11} + X_{12} + X_{13}) +$
 $400(X_{21} + X_{22} + X_{23}) +$
 $360(X_{31} + X_{32} + X_{33}) +$
 $290(X_{41} + X_{42} + X_{43})$

◆ **כפוף לאילוצים :**

: Subject to



מגבלות משקל: ◆

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} \leq 14 \quad \text{בתא קדמי} \quad \blacklozenge$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} \leq 20 \quad \text{בתא אמצעי} \quad \blacklozenge$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} \leq 8 \quad \text{בתא אחורי} \quad \blacklozenge$$



מגבלות נפח: ◆

בתא קדמי ◆

$$500X_{11} + 700X_{21} + 600X_{31} + 400X_{41} \leq 7,000$$
 ◆

בתא אמצעי ◆

$$500X_{12} + 700X_{22} + 600X_{32} + 400X_{42} \leq 10,000$$
 ◆

בתא אחורי ◆

$$500X_{13} + 700X_{23} + 600X_{33} + 400X_{43} \leq 4,000$$
 ◆



מגבלות משקל של כל מטען: ◆

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 20 \quad \text{מטען 1} \quad \blacklozenge$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 16 \quad \text{מטען 2} \quad \blacklozenge$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 25 \quad \text{מטען 3} \quad \blacklozenge$$

$$X_{41} + X_{42} + X_{43} \leq 13 \quad \text{מטען 4} \quad \blacklozenge$$

אילוצי אי-שליליות: ◆

$$\blacklozenge \quad X_{ij} \geq 0 \quad i = 1..4 \quad j = 1..3$$