מערכות ספרתיות
2

- אלגברה בוליאנית
- אקסיומות וכללים
- דואליות
- דהמורגן

ד"ר רון שמואלי

Boolean Algebra — אלגברה בוליאנית

- ב- 1854 המתמטיקאי George Boole הציג אלגברה לטיפול פונקציונלי בלוגיקה. על שמו Boolean Algebra.

- ב- 1904 Edward Vermilye Huntington הגדיר סדרה של כללים ואקסיומות לתיאור האלגברה

- ב- 1938 Claude Shannon הראה בעבודת ה Master כיצד למפות אלגברה בולאנית לאלגברה דו ערכית ולמעגלים לוגיים

אלגברה של קבוצות – הגדרות

- **<u>אלגברה:</u>** אוסף של אלמנטים, אופרטורים, אקסיומות וכללים
- **<u>אופרטור</u>** – המוגדר על קבוצת איברים S הוא כלל המתאים איבר יחיד לכל זוג איברים ב S.
- **<u>קבוצה סגורה:</u>**
קבוצה S סגורה ביחס לאופרטור, אם לכל זוג אברים ב S האופרטור מגדיר איבר יחיד שגם הוא בתוך S.

דוגמא: קבוצת המספרים הטבעיים $N=\{1,2,3.....\}$
האם סגורה ביחס לחיבור ?
האם סגורה ביחס לחיסור?

2011 (c) Dr. Ron Shmueli 3

הגדרה אקסיומטית של אלגברה בוליאנית לפי הכללים של Huntington

- **אלגברה בולאנית**: מיבנה אלגברי המוגדר על קבוצת איברים {B}, בצרוף שני אופרטורים + (OR) ו- • (AND). כך שהכללים הבאים מתקיימים:

1. הקבוצה B סגורה ביחס לאופרטורים + ו- •.
2. a קיים איבר יחידה ביחס ל + המסומן ב – 0. $x+0=0+x=x$
   b קיים איבר יחידה ביחס ל • המסומן ב – 1. $x\cdot 1=1\cdot x=x$
3. a מתקיים חוק החילוף ביחס ל + $x+y=y+x$
   b מתקיים חוק החילוף ביחס ל • $x\cdot y=y\cdot x$
4. a האופרטור • הוא פילוגי ביחס ל + $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$
   b האופרטור + הוא פילוגי ביחס ל • $x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)$
5. לכל איבר $x \in B$ קיים איבר $\overline{x} \in B$ המקיים:
   a $x+x'=1$
   b $x\cdot x'=0$
6. קיימים לפחות שני אברים $x, y \in B$ כך ש $x \neq y$

2011 (c) Dr. Ron Shmueli 4

אלגברה בוליאנית דו ערכית

- כדי להגדירה צריך להראות:
  - את אברי הקבוצה B
  - את כללי ההפעלה של האופרטורים הבינאריים + , •.
  - להראות שקבוצת האברים B והאופרטורים מקיימים את כללי Huntington.

(להראות את קיום הכללים)

דוגמא

x + (y·z)=(x+y)·(x+z)

xyz	yz	x+yz	x+y	x+z	(x+y)·(x+z)
000					
001					
010					
011					
100					
101					
110					
111					

זהויות בסיסיות באלגברת מיתוג

1A) $x(y+z)=xy+xz$	1B) $x+yz=(x+y)(x+z)$
2A) $x+x=x$	2B) $xx=x$
3A) $x+xy=x$	3B) $x(x+y)=x$
4A) $x+x'=1$	4B) $xx'=0$
5A) $x+0=x$	5B) $x \cdot 1=x$
6A) $x+1=1$	6B) $x \cdot 0=0$
7A) $y(x+y')=xy$	7B) $xy'+y=x+y$
8A) $(x+y)(x+y')=x$	8B) $xy+xy'=x$
9A) $(x+y)(x'+z)(y+z)=(x+y)(x'+z)$	9B) $xy+x'z+yz=xy+x'z$ $xy+x'z+wyz=xy+x'z$

- המשפטים המסומנים ב B דואלים למשפטים המסומנים ב A

הוכחת הכללים הבאים:

1. X+X=X
2. XX=X
3. X+1=1
4. $X \cdot 0=0$
5. $X''=X$

דוגמאות (ללמד קודם דמורגן)+ דואליות

1. הוכח את משפט הקונצנזוס $xy+x'z+wyz=xy+x'z$
2. הוכח את הזהות : $(x+y)[x'(y'+z')]'+x'y'+x'z'=1$
3. צמצם את הביטוי: $T=xy'+(x'+y)z$
4. מצא וצמצם את המשלים של f $f=x+yz+x'y'$

2011 (c) Dr. Ron Shmueli 8

פונקציה דואלית

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^D = x_1 x_2 \ldots x_n$$
$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^D = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

הגדרה פורמלית של
פונקציה דואלית

$$[f(x_1, x_2, \ldots, x_n, +, \cdot, 0, 1)]^D =$$
$$= [f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \cdot, +, 1, 0)]$$

- הטכניקה למעבר לדואלית:
- הצורך:
- דוגמא: מצא את הדואלית של: f=(x'+y)(xz+yz')
מצא מתוכה את הפונקציה המשלימה:

2011 (c) Dr. Ron Shmueli 9

- **דוגמא:** מצא את הדואלית של f=xy+xz+yz

- פונקציה דואלית לעצמה
  משפחה של פונקציות המקיימות : $f = f^D$

דוגמא

נתון $x+y=x+z$ האם y שווה ל- z ??

אסור: 1. להוסיף/להכפיל איבר לא ידוע בשני צידי משוואה.
2. להעביר אגפים.

מותר: 1. לעשות משלים ו/או דואליות לשני צידי משוואה.

קדימות אופרטורים:

OR AND NOT ()

נמוך ← גבוהה

משפט דה מורגן

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)' = x_1'x_2'\ldots x_n'$$
$$(x_1x_2\ldots x_n)' = x_1'+x_2'+\ldots+x_n'$$

- <u>משפט דה-מורגן המורחב</u>

$$[f(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n,+,\cdot,0,1)]' =$$
$$= [f(x_1',x_2',\ldots,x_n',\cdot,+,1,0)]$$

2011 (c) Dr. Ron Shmueli 12

הוכחת משפט דמורגן

- $(x+y)'=x'y'$ → דואליות ← $(xy)'=x'+y'$

צריך להוכיח ש $x'y'$ הוא המשלים של $x+y$