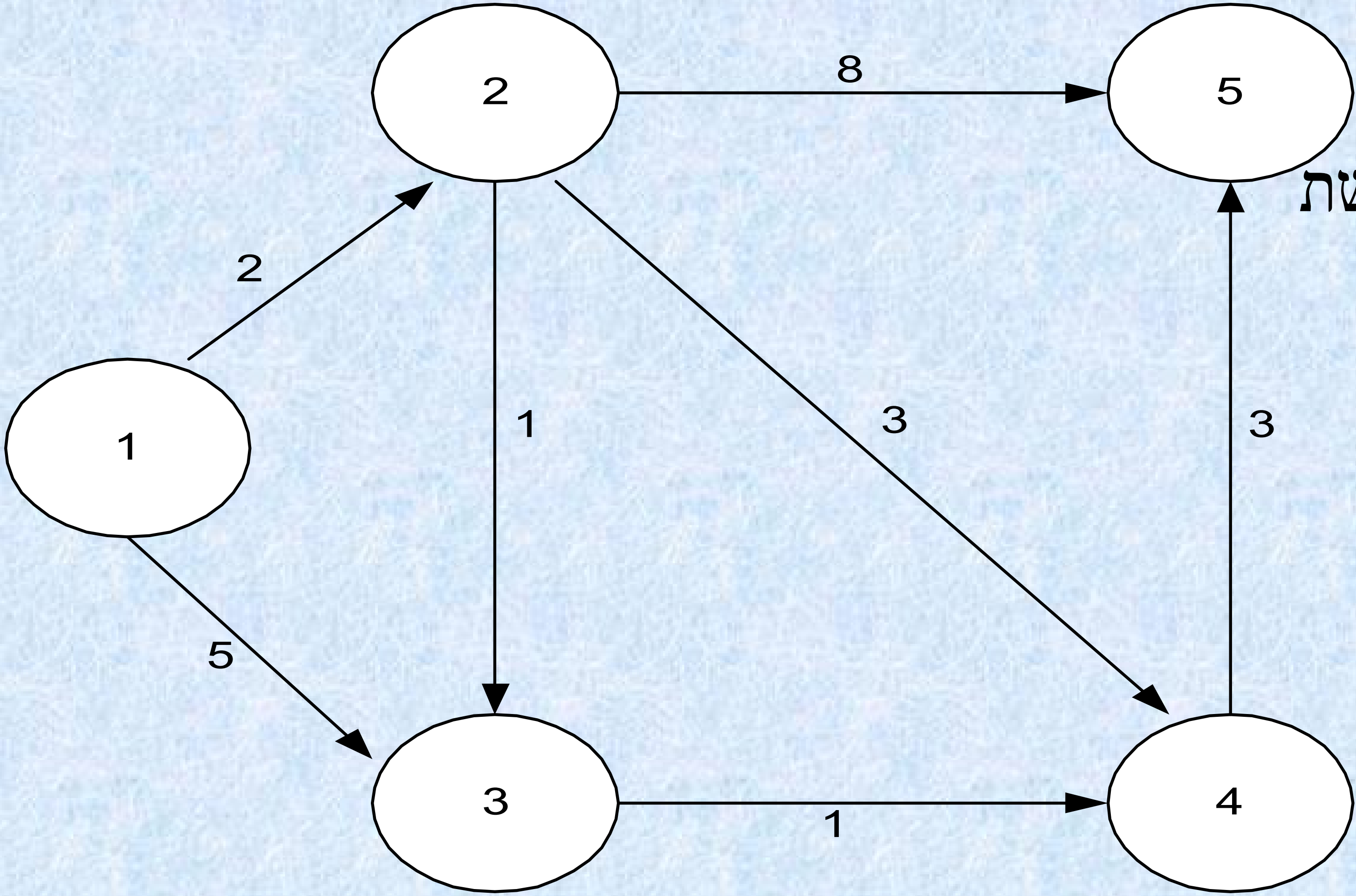
תכנון וניתוח אלגוריתמים

תרגיל 8

תרגילים על דייקסטרה

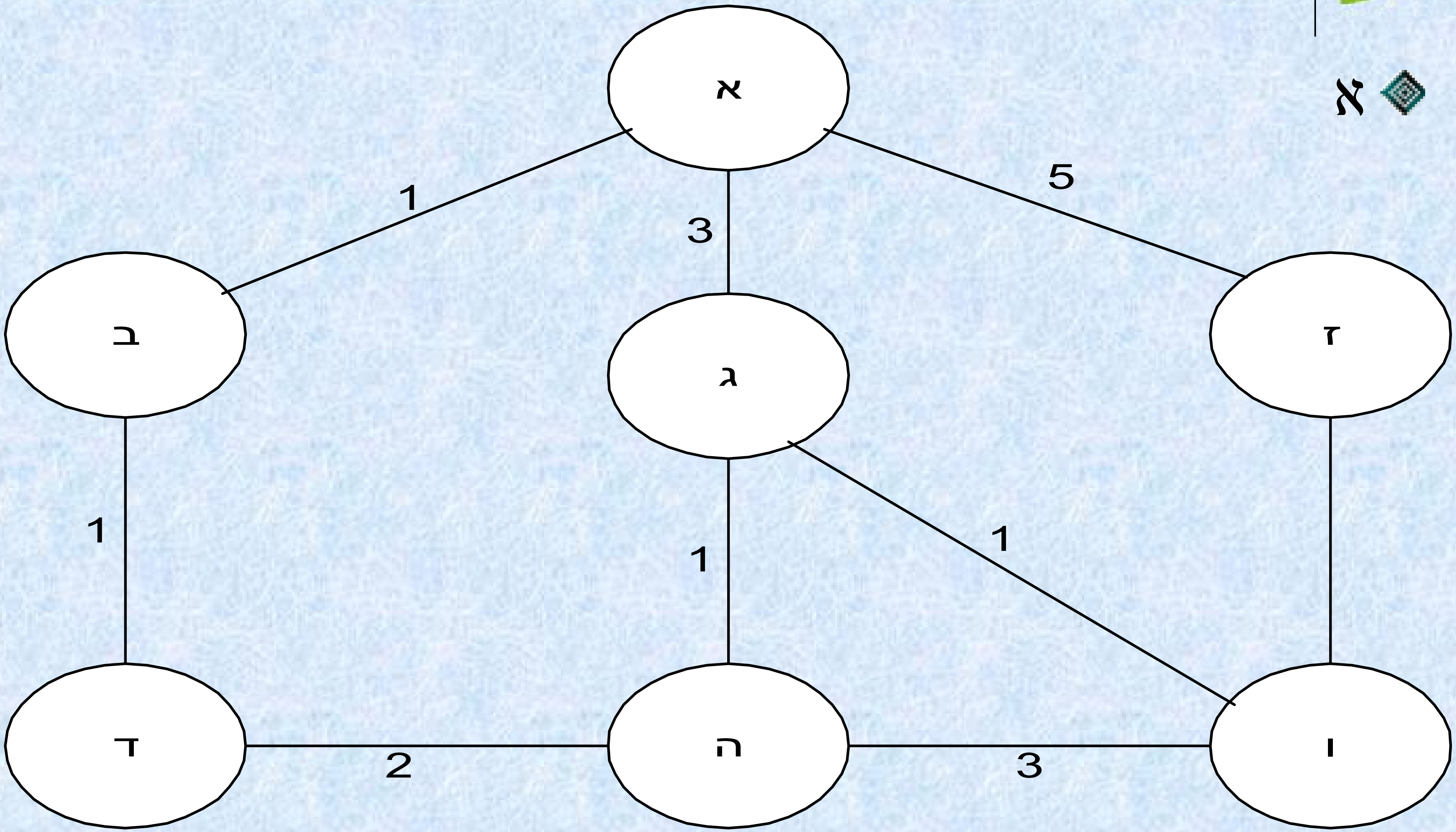
- .1
- נתונה הרשת הבאה:



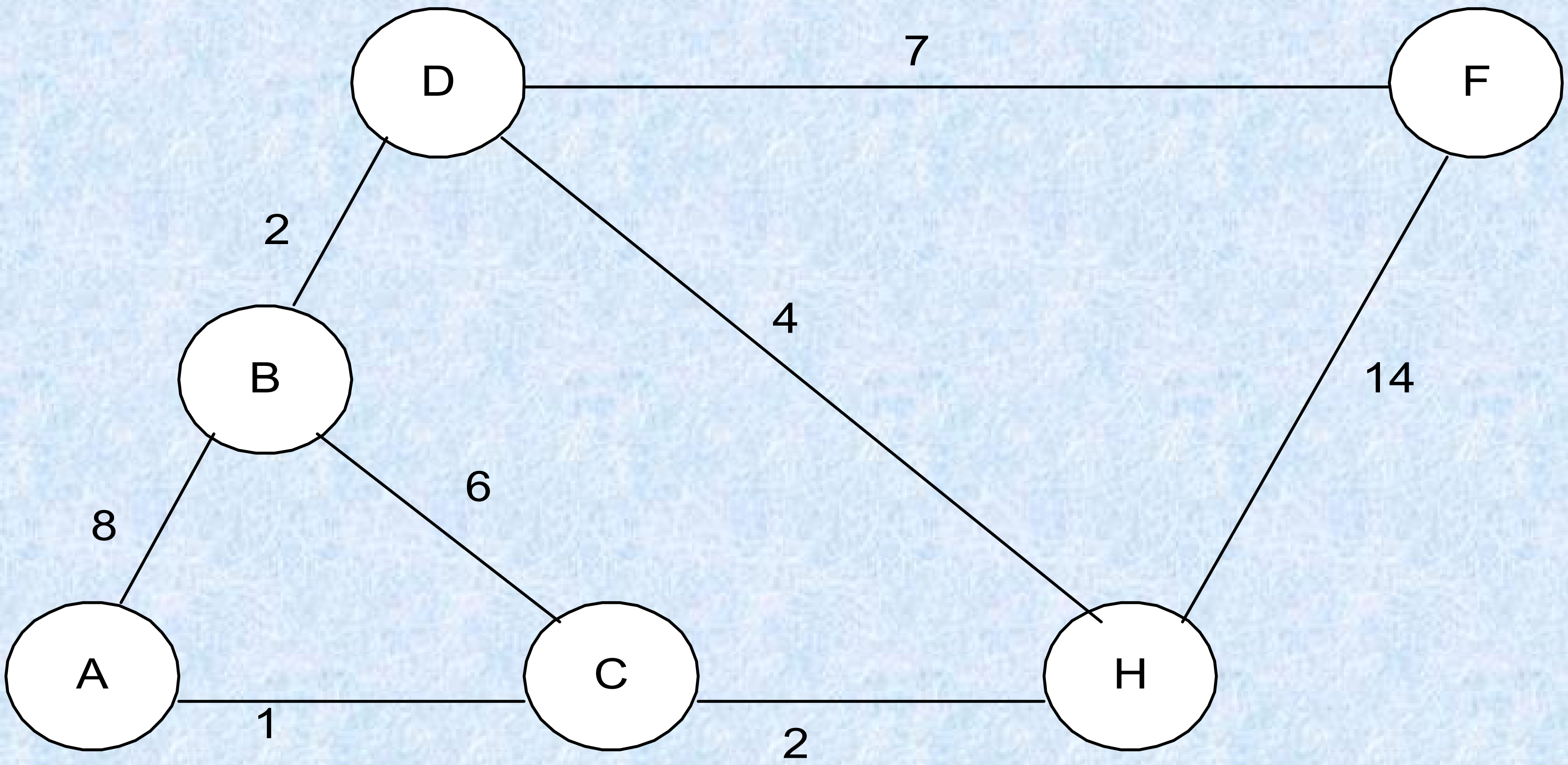
- הנח כי קודקוד מקור הוא "1".
- הרץ את האלגוריתם של דייקסטרה על הרשת הנתונה.
- מצא מסלול מינימלי מקודקוד מקור ליתר הקודקודים ברשת זו.
- צייר את עץ המסלולים הקצרים.

- 2.
- המספרים על הקשתות מבטאים את אורכי הקשתות.
- על הגרף הופעל האלגוריתם של Dijkstra למציאת מסילות קצרות ביותר מהקודקוד א' לכל היתר. האם סידרת הקדקודים הבאה מהווה מסלול מינימלי ?
- א – א,ב,ד,ג,ו,ה,ז ב – א,ב,ד,ג,ה,ו,ז
- ג – א,ב,ג,ז,ד,ה,ו

א

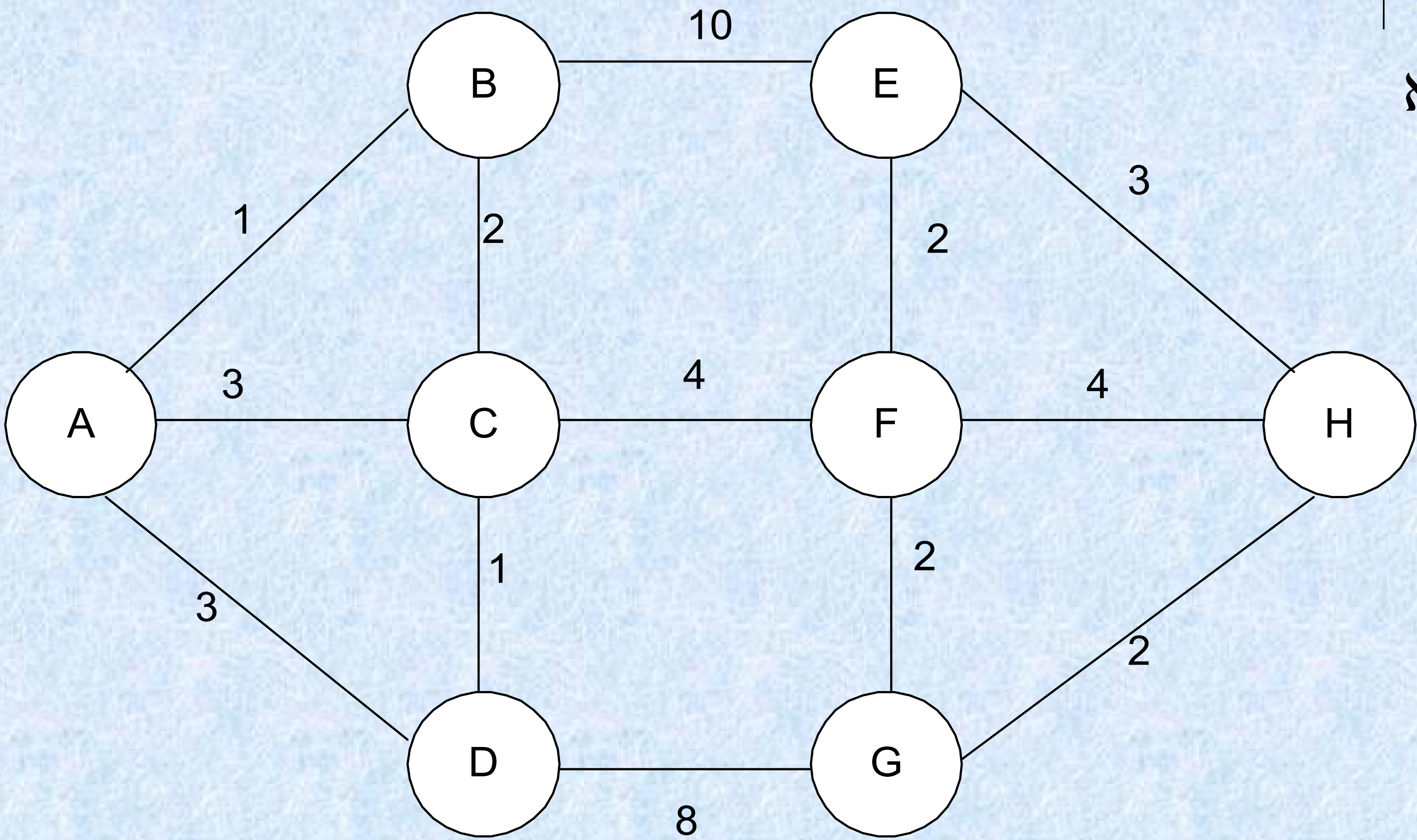


- 3. גרף G מוגדר ע"י $G=(V,E)$ כאשר V מבטא קבוצות צמתים בגרף, ו E – מבטא קבוצת קשתות בגרף.
- פונקצית המשקל $W : E \rightarrow R^{+}$ קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף G.
- א. לפניך רשת שבעבורה מצא את המסלולים הקצרים ביותר מן הקודקוד A לכל אחד מן הקודקודים האחרים ברשת הנתונה.
- תאר את המסלולים האלה בצורת עץ, באופן סכמתי.


D
F
7
2
4
B
14
6
8
A
C
H
1
2

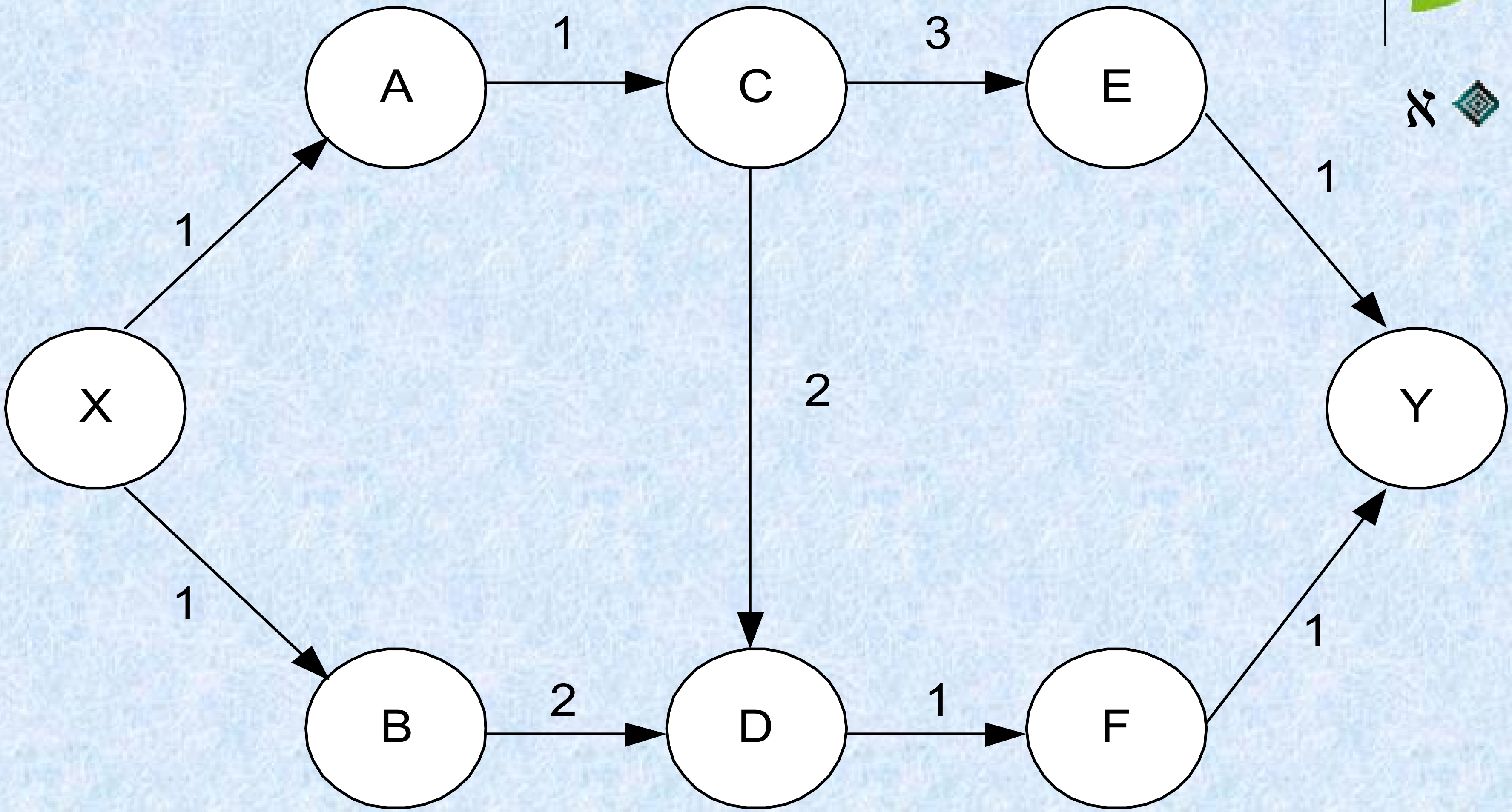
- ב. כל קשת בגרף G צבועה בכחול או באדום. X ו Yהם קודקודים בגרף
- כתוב אלגוריתם מילולי, קצר ויעיל, בעברית מובנת, למציאת אורך המסלול הקצר ביותר מ- X ל- Y ,
- כאשר חלקו הראשון של המסלול יהיה מורכב מקשתות
- **אדומות בלבד** וחלקו השני יהיה מורכב מקשתות **כחולות בלבד.**
- **שים לב** : כל אחד משני החלקים יכול להיות ריק.

- 4. גרף G מוגדר ע"י G=(V,E) כאשר V מבטא קבוצות צמתים בגרף, ו E – מבטא קבוצת קשתות בגרף.
- פונקצית המשקל $W : E \rightarrow R^{+}$ קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף G.
- א. לפניך רשת שבעבורה מצא את המסלולים הקצרים ביותר מן הקודקוד A לכל אחד מן הקודקודים האחרים ברשת הנתונה.
- תאר את המסלולים האלה בצורת עץ, באופן סכמתי.


10
B
E
1
2
2
3
3
4
4
A
C
F
H
1
2
3
2
D
G
8

- ב. יהיו Z,Y,X קודקודים בגרף.
- כתוב אלגוריתם מילולי, קצר ויעיל בעברית מובנית, אשר מחזיר את תשובה "אמת" (true) אם כל המסלולים הקצרים ביותר מ- X ל- Y עוברים דרך Z, אחרת הוא מחזיר את התשובה "שקר" (false).

- 5. גרף G מוגדר ע"י G=(V,E) כאשר V מבטא קבוצות צמתים בגרף, ו E – מבטא קבוצת קשתות בגרף.
- פונקצית המשקל $W : E \rightarrow R^{+}$ קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף G.
- א. לפניך רשת. מצא את כל המסלולים הקצרים ביותר מן הקודקוד X לקודקוד Y ברשת הנתונה.
- תאר כל מסלול כזה בנפרד באופן סכמתי, בצורת רשימה לינארית מקושרת .


A
C
E
X
Y
B
D
F
1
1
1
1
3
2
2
2
1
1

- ב. יהי S קודקוד בגרף.
- נסמן לכל מסלול P מקודקוד S לקודקוד a :
- W (P) כמשקל המסלול (כלומר את סכום משקלי הקשתות של מסלול P).
- L(P) כאורך המסלול (כלומר את מספר הקשתות במסלול P).
- כתוב אלגוריתם מילולי קצר ויעיל, בעברית מובנית, המוצא לכל קודקוד a את הערך המינימלי האפשרי של

$$W(P) + L(P).$$

- .6
- יהי $G=(V,E)$ **גרף מכוון.**
- פונקצית המשקל $W : E \to R$ קובעת משקל שלם , W(e) , המקיים $1 \le W(e) \le 50$ לכל קשת e בגרף .
- יהי $s \in V$ קודקוד נתון בגרף.
- א. נסמן - $|V|$ מספר הקודקודים בגרף.
- - $|E|$ מספר הקשתות בגרף.

- כתוב אלגוריתם מילולי קצר ויעיל, בעברית מובנית, בעל סיבוכיות זמן $0(|V|+|E|)$ אשר מוצא לכל צומת $v \in V-\{s\}$ את **משקל** המסלול **הקל** ביותר מ- s ל- v .
- ב. הראה כי סיבוכיות הזמן של האלגוריתם שהצעת היא הסיבוכיות הנדרשת , $0(|V|+|E|)$
.

- 7. נתון גרף G=(V,E) . פונקצית המשקל $W : E \to R^+$ קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף G .
- א. כתוב אלגוריתם יעיל הקובע אם קשת מסויימת e נמצאת על כל המסלולים הקצרים ביותר מקודקוד מקור s לקודקוד יעד t .
- ב. נתח את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהיצעת בסעיף הקודם .

- 8. נתון גרף $G=(V,E)$.פונקצית המשקל $W : E \rightarrow R^{+}$ קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף G. כל קשת בגרף צבועה באדום או בלבן. נתונים שני קודקודים s ו t בגרף G.
- א. כתוב אלגוריתם יעיל אשר מוצא מבין המסלולים הקצרים ביותר בין s ל - t (ביחס למשקולות שעל הקשתות) את זה שמספר הקשתות האדומות מינימלי.
- ב. נתח את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעת בסעיף א'.

- 9. נתון גרף לא מכוון עם משקולות חיוביים על הקשתות. חלק מהקשתות אדומות וחלקן האחר כחולות ונתון קודקוד s .
- א. תאר אלגוריתם **יעיל** המוצא את המסלול המינימלי בעלת מספר זוגי של קשתות אדומות מ-s אל כל קדוקד אחר בגרף.
- ב. נתח את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעת בסעיף א' .

.10

- רשת תקשורת מתוארת ע"י גרף מכוון שבו כל קשת מייצגת ערוץ תקשורת .
- לכל קשת (u,v) יש "משקל" $r(u,v)$ שהינו מספר בין 0 ל- 1 המתאר את האמינות(reliability)של הערוץ (למעשה זו ההסתברות שהוא יעבוד).

- בהנחה שמתקיימת אי-תלות הסתברותית בין המאורעות, ההסתברות שמסלול כלשהו יעבוד היא מכפלת ההסתברויות על קשתותיו.
- עליכם למצוא אלגוריתם יעיל שמקבל גרף כזה וזוג קדקודים (s,t) ומוצא מסלול אמין ביותר מ- s ל- t.
- (הערה: כדאי להפריד בין הצגת האלגוריתם להוכחת הנכונות. האלגוריתם אמור להיות קל מאוד להצגה, גם אם הוכחת נכונותו דורשת מאמץ מסוים).