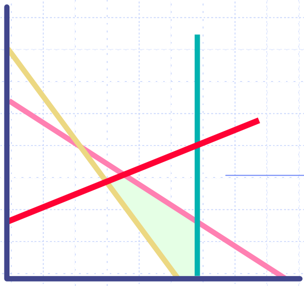
מבוא לחקר ביצועים

- נושא מספר 4 – בעיית ההשמה (The Assignment Problem)



מהי בעיית ההשמה

- יש להביא את העלות למינימום בבעיה בה יש לבצע השמה של n עבודות ל- n משאבים.
- כאשר כל משאב מבצע עבודה אחת ולכל עבודה מוקצה משאב אחד.

תוכן

- בעיית ההשמה – השמה של n עבודות ל- n משאבים
- מידול כבעיית LP
- אלגוריתם

בעיית ההשמה

- שלוש עבודות (א, ב, ג) להתקנת מזגנים מוצעות באותו שבוע לשלוש חברות שונות (1, 2, 3).
- מתקבלת הצעה לכל עבודה מכל חברה.
- לאיזו חברה יש לתת איזו עבודה, כאשר לחברה מותר לעשות רק עבודה אחת ויש להוריד את העלויות למינימום.

	חברה 1	חברה 2	חברה 3
א	53	96	37
ב	47	87	41
ג	60	92	36

בעיית ההשמה

גישה נאיבית

- יש רק 6 (3*2*1) פתרונות אפשריים לבעיה.
- נבדוק את כל הפתרונות ונבחר את הפתרון הטוב ביותר.

בעיית ההשמה

גישה נאיבית – פתרון 1

	חברה 1	חברה 2	חברה 3
א	53	96	37
ב	47	87	41
ג	60	92	36

TC = 53 + 87+ 36 = 176

בעיית ההשמה

גישה נאיבית – פתרון 2

	חברה 1	חברה 2	חברה 3
א	53	96	37
ב	47	87	41
ג	60	92	36

TC = 53 + 92+ 41 = 186

בעיית ההשמה

גישה נאיבית – פתרון 3

	חברה 1	חברה 2	חברה 3
א	53	96	37
ב	47	87	41
ג	60	92	36

TC = 47 + 96 + 36 = 179

בעיית ההשמה

גישה נאיבית – פתרון 4

	חברה 1	חברה 2	חברה 3
א	53	96	37
ב	47	87	41
ג	60	92	36

TC = 47 + 92 + 37 = 176

בעיית ההשמה

גישה נאיבית – פתרון 5

	חברה 1	חברה 2	חברה 3
א	53	96	37
ב	47	87	41
ג	60	92	36

TC = 47 + 96 + 41 = 197

בעיית ההשמה

גישה נאיבית – פתרון 6

	חברה 1	חברה 2	חברה 3
א	53	96	37
ב	47	87	41
ג	60	92	36

TC = 60 + 87 + 37 = 184

בעיית ההשמה

גישה נאיבית – השלמה

TC = 176

	1	2	3
א	53	96	37
ב	47	87	41
ג	60	92	36

TC = 186

	1	2	3
א	53	96	37
ב	47	87	41
ג	60	92	36

TC = 179

	1	2	3
א	53	96	37
ב	47	87	41
ג	60	92	36

TC = 176

	1	2	3
א	53	96	37
ב	47	87	41
ג	60	92	36

TC = 197

	1	2	3
א	53	96	37
ב	47	87	41
ג	60	92	36

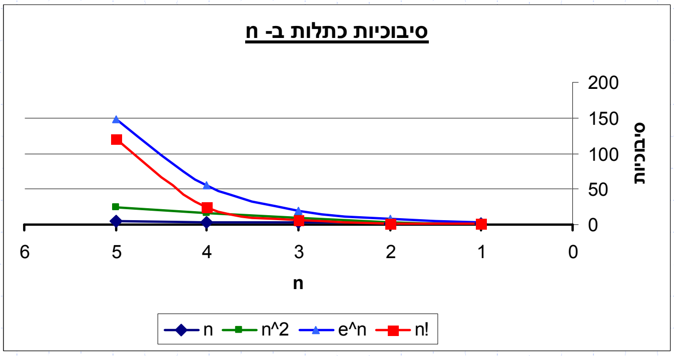
TC = 184

	1	2	3
א	53	96	37
ב	47	87	41
ג	60	92	36

בעיית ההשמה

חסרון של האלגוריתם הנאיבי

- כיצד זמן הריצה (הסיבוכיות) של האלגוריתם משתנה בהתאם לגודל הבעיה?
- תשובה $O(n!)$



בעיית ההשמה

חסרון של האלגוריתם הנאיבי

n	log(n)	n	n^2	e^n	n!
1	0.00000	1	1	2.7	1
2	0.30103	2	4	7.4	2
3	0.47712	3	9	20.1	6
4	0.60206	4	16	54.6	24
5	0.69897	5	25	148.4	120
6	0.77815	6	36	403.4	720
7	0.84510	7	49	1096.6	5040
8	0.90309	8	64	2981.0	40320
9	0.95424	9	81	8103.1	362880
10	1.00000	10	100	22026.5	3628800
11	1.04139	11	121	59874.1	39916800
12	1.07918	12	144	162754.8	479001600
13	1.11394	13	169	442413.4	6227020800
14	1.14613	14	196	1202604.3	87178291200
15	1.17609	15	225	3269017.4	1.30767E+12

בעיית ההשמה

מידול מתמטי (תכנון ליניארי) לבעיית ההשמה

- נתונה מטריצת העלויות Cost בה ידוע מה ההצעה של חברה i (1, 2, 3) עבור עבודה j (א-A, ב-B, ג-C).
- בפתרון רק ערך אחד בכל עמודה יקבל 1 ורק ערך אחד בכל שורה יקבל את הערך 1.
- פונקצית המטרה היא להביא את העלויות למינימום.

בעיית ההשמה

מידול מתמטי (תכנון ליניארי) לבעיית ההשמה

$$Minimize \quad Z = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \forall i = 1 \ldots n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \forall j = 1 \ldots n$$

$$x_{ij} = 0,1 \qquad \forall i = 1 \ldots n, j = 1 \ldots n$$

בעיית ההשמה

מידול מתמטי (תכנון ליניארי) לבעיית ההשמה

$$Minimize \quad Cost = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = c_{A1}x_{A1} + c_{A2}x_{A2} + c_{A3}x_{A3} +$$

$$+ c_{B1}x_{B1} + c_{B2}x_{B2} + c_{B3}x_{B3} + c_{C1}x_{C1} + c_{C2}x_{C2} + c_{C3}x_{C3}$$

$s.t.$

$$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} = 1$$
$$x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} = 1$$
$$x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} = 1$$
$$x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} = 1$$
$$x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} = 1$$
$$x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} = 1$$
$$x_{A1}, x_{A2}, x_{A3} \quad Binary$$

בעיית ההשמה

מידול מתמטי (תכנון ליניארי) לבעיית ההשמה

$$Minimize \quad Cost = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = 53x_{A1} + 96x_{A2} + 37x_{A3} +$$

$$+ 47x_{B1} + 87x_{B2} + 41x_{B3} + 60x_{C1} + 92x_{C2} + 36x_{C3}$$

$s.t.$

$$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} = 1$$
$$x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} = 1$$
$$x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} = 1$$
$$x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} = 1$$
$$x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} = 1$$
$$x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} = 1$$
$$x_{A1}, x_{A2}, x_{A3} \quad Binary$$

בעיית ההשמה

מטריצה עלות אידיאלית

- כל המשתנים חיוביים.
- יש אפס לפחות בכל עמודה ובכל שורה.
- העלות המינימאלית במקרה זה שווה לאפס.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

The Hungarian Algorithm – האלגוריתם ההונגרי

- עלינו למצוא דרך להגיע למטריצת עלות מהסוג שהוצגה בשקף הקודם
- משם הפתרון יהיה פשוט

	חברה 1	חברה 2	חברה 3
א	53	96	37
ב	47	87	41
ג	60	92	36

Harold Kuhn, 1955; James Munkres, 1957

The Hungarian Algorithm – האלגוריתם ההונגרי

תובנות חשובות

- נתונה מטריצת עלות C ונניח מטריצת עלות C' שאנו בונים אותה מ- C ע"י הוספת מספר קבוע (או הפחתה) לכל תא בשורה.
- לכן לכל השמה, העלות הכוללת שונה בין שתי המטריצות ע"פ אותו קבוע.
- ההשמה האופטימאלית לא השתנתה במעבר בין שתי המטריצות (עדיין כל חברה צריכה לבצע פרויקט אחד וכל פרויקט צריך להתבצע ע"י חברה אחת).
- אותו הדבר נכון גם לגבי העמודות.
- נשתמש ברעיון זה בפיתוח אלגוריתם יעיל לפתרון בעיית ההשמה.

	חברה 1	חברה 2	חברה 3
א	53	96	37
ב	47	87	41
ג	60	92	36

Harold Kuhn, 1955; James Munkres, 1957

The Hungarian Algorithm – האלגוריתם ההונגרי

במטריצת עלות הנתונה

$$\begin{bmatrix} 53 & 96 & 37 \\ 47 & 87 & 41 \\ 60 & 92 & 36 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 16 & 59 & 0 \\ 6 & 46 & 0 \\ 24 & 56 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 10 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

עדיין אין כאן השמה של אפסים שניתן לבחור – ראו שזה אכן המצב בשקפים הבאים.

Harold Kuhn, 1955; James Munkres, 1957

The Hungarian Algorithm – האלגוריתם ההונגרי

עדיין אין כאן השמה של אפסים שניתן לבחור

$$\begin{bmatrix} 10 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Harold Kuhn, 1955; James Munkres, 1957

מבוא לחקר ביצועים 23

The Hungarian Algorithm – האלגוריתם ההונגרי

עדיין אין כאן השמה של אפסים שניתן לבחור

$$\begin{bmatrix} 10 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Harold Kuhn, 1955; James Munkres, 1957

מבוא לחקר ביצועים 24

The Hungarian Algorithm – האלגוריתם ההונגרי

עדיין אין כאן השמה של אפסים שניתן לבחור

$$\begin{bmatrix} 10 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Harold Kuhn, 1955; James Munkres, 1957

The Hungarian Algorithm – האלגוריתם ההונגרי

עדיין אין כאן השמה של אפסים שניתן לבחור

$$\begin{bmatrix} 10 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

נחסיר בכל שורה ועמודה את המספר
המינימאלי שנשאר במטריצה שהוא 10.

Harold Kuhn, 1955; James Munkres, 1957

The Hungarian Algorithm – האלגוריתם ההונגרי

עדיין אין כאן השמה של אפסים שניתן לבחור

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

נוסיף 10 לעמודה האחרונה כדי שלא יהיו מספרים שליליים.

Harold Kuhn, 1955; James Munkres, 1957

The Hungarian Algorithm – האלגוריתם ההונגרי

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Harold Kuhn, 1955; James Munkres, 1957

The Hungarian Algorithm – האלגוריתם ההונגרי

פתרונות

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Harold Kuhn, 1955; James Munkres, 1957

The Hungarian Algorithm – האלגוריתם ההונגרי

פתרונות

TC = 176

	1	2	3
A	53	96	37
B	47	87	41
C	60	92	36

TC = 186

	1	2	3
A	53	96	37
B	47	87	41
C	60	92	36

TC = 179

	1	2	3
A	53	96	37
B	47	87	41
C	60	92	36

TC = 176

	1	2	3
A	53	96	37
B	47	87	41
C	60	92	36

TC = 197

	1	2	3
A	53	96	37
B	47	87	41
C	60	92	36

TC = 184

	1	2	3
A	53	96	37
B	47	87	41
C	60	92	36

Harold Kuhn, 1955; James Munkres, 1957

The Hungarian Algorithm – האלגוריתם ההונגרי

1. מצא/י את המספר הנמוך ביותר בכל שורה והחסר אותו מהשורה.
2. מצא/י את המספר הנמוך ביותר בכל עמודה והחסר אותו מהעמודה.

התקבלה מטריצה לא-שלילית.

מספר הצעדים הנדרש לפתור את בעיית ההשמה ע"פ אלגוריתם זה היא מסדר גודל של n^3

כלומר, שהסיבוכיות של הבעיה היא $O(n^3)$

Harold Kuhn, 1955; James Munkres, 1957

מבוא לחקר ביצועים 31

The Hungarian Algorithm – האלגוריתם ההונגרי

3. ע"י שימוש בקווים המסמנים את כל התאים עם אפסים. מספר הקווים שעושים בהם שימוש צריך להיות מינימאלי (בכל מקרה, קטן שווה למספר השורות/ עמודות).

אם ניתן לעשות זאת בצורה מינימאלית ע"י n קווים (n מספר השורות או העמודות), סימן שקיימת השמה של אפסים.

$$\begin{bmatrix} 10 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Harold Kuhn, 1955; James Munkres, 1957

מבוא לחקר ביצועים 32

The Hungarian Algorithm – האלגוריתם ההונגרי

4. קבע מהו המספר הקטן ביותר שאינו מכוסה ע"י קו (10). הוסף את המספר בכל נקודת הצטלבות (כדי שלא יהיו מספרים שליליים) והחסר אותו מכל מיקום שאינו מכוסה ע"י קו.

$$\begin{bmatrix} 10 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Harold Kuhn, 1955; James Munkres, 1957

מבוא לחקר ביצועים 33

The Hungarian Algorithm – האלגוריתם ההונגרי

5. חזור על צעד 3.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 8 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Harold Kuhn, 1955; James Munkres, 1957

מבוא לחקר ביצועים 34

The Hungarian Algorithm – האלגוריתם ההונגרי

3. ע״י שימוש בקווים המסמנים את כל האפסים אנו רואים שניתן להשתמש בשלושה קווים ומכאן שיש השמה של אפסים.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 8 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Harold Kuhn, 1955; James Munkres, 1957

The Hungarian Algorithm – האלגוריתם ההונגרי

3. ע״י שימוש בקווים המסמנים את כל האפסים אנו רואים שניתן להשתמש בשלושה קווים ומכאן שיש השמה של אפסים.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 8 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Harold Kuhn, 1955; James Munkres, 1957

The Hungarian Algorithm – האלגוריתם ההונגרי

3. ע״י שימוש בקווים המסמנים את כל האפסים אנו רואים שניתן להשתמש בשלושה קווים ומכאן שיש השמה של אפסים.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 8 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Harold Kuhn, 1955; James Munkres, 1957

The Hungarian Algorithm – האלגוריתם ההונגרי

פתרונות

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Harold Kuhn, 1955; James Munkres, 1957

דוגמא

לימוזינה		לקוח 1	לקוח 2	לקוח 3	לקוח 4
	א	9	7.5	7.5	8
	ב	3.5	8.5	5.5	6.5
	ג	12.5	9.5	9.0	10.5
	ד	4.5	11.0	9.5	11.5

- חברת המספקת שירותי לימוזינה מקבלת ארבע שיחות מארבע לקוחות בו-זמנית.
- ארבע לימוזינות זמינות במיקומים הרחוקים במרחק שונה מהלקוחות (טבלת המרחקים מצורפת).
- איזו לימוזינה תשלח לאיזה לקוח על מנת להביא למינימום את סה"כ המרחק שיעברו כל הלימוזינות.

דוגמא

נשנה למטריצה בשלמים

$$\begin{bmatrix} 9 & 7.5 & 7.5 & 8 \\ 3.5 & 8.5 & 5.5 & 6.5 \\ 12.5 & 9.5 & 9 & 10.5 \\ 4.5 & 10 & 9.5 & 11.5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 90 & 75 & 75 & 80 \\ 35 & 85 & 55 & 65 \\ 125 & 95 & 90 & 105 \\ 45 & 10 & 95 & 115 \end{bmatrix}$$

דוגמא

נשנה למטריצה בשלמים לא-שלילית

$$\begin{bmatrix} 90 & 75 & 75 & 80 \\ 35 & 85 & 55 & 65 \\ 125 & 95 & 90 & 105 \\ 45 & 10 & 95 & 115 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 50 & 20 & 30 \\ 35 & 5 & 0 & 15 \\ 0 & 65 & 50 & 70 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 25 \\ 25 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 65 & 50 & 65 \end{bmatrix}$$

מבוא לחקר ביצועים 41

דוגמא

כיסוי ע"י קווים

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 25 \\ 25 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 65 & 50 & 65 \end{bmatrix}$$

מבוא לחקר ביצועים 42

דוגמא

מציאת הערך הקטן ביותר הלא מכוסה

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 20 & 25 \\ 25 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 65 & 50 & 65 \end{bmatrix}$$

דוגמא

חיסור והוספה

$$\begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 5 \\ 45 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 45 & 30 & 45 \end{bmatrix}$$

דוגמא

כיסוי ע"י קווים

$$\begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 5 \\ 45 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 45 & 30 & 45 \end{bmatrix}$$

דוגמא

מציאת הערך הקטן ביותר הלא מכוסה

$$\begin{bmatrix} 35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 5 \\ 45 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 45 & 30 & 45 \end{bmatrix}$$

דוגמא

חיסור והוספה

$$\begin{bmatrix} 40 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 45 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 40 & 30 & 40 \end{bmatrix}$$

דוגמא

כיסוי ע"י קווים

$$\begin{bmatrix} 40 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 45 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 40 & 30 & 40 \end{bmatrix}$$

דוגמא

פתרונות

$$
\begin{bmatrix} 40 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 45 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 40 & 30 & 40 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 40 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 45 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 40 & 30 & 40 \end{bmatrix}
$$

דוגמא

פתרונות

$$
\begin{bmatrix} 9 & 7.5 & 7.5 & 8 \\ 3.5 & 8.5 & 5.5 & 6.5 \\ 12.5 & 9.5 & 9 & 10.5 \\ 4.5 & 10 & 9.5 & 11.5 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 9 & 7.5 & 7.5 & 8 \\ 3.5 & 8.5 & 5.5 & 6.5 \\ 12.5 & 9.5 & 9 & 10.5 \\ 4.5 & 10 & 9.5 & 11.5 \end{bmatrix}
$$

TC = 27.5

דוגמאות נוספות

בספר מודלים דטרמיניסטיים בחקר ביצועים

כרך א', עמודים 284-293, חברת "התיקונים" וחברת "המוצר הטוב"