תכנון וניתוח אלגוריתמים
הרצאה 7

פתרון בעיות תכנון ליניארי קנוניות

דוגמא 1

- נתונה הבעיה הבאה:

$$\text{Max } \{Z = 20x_1 + 12x_2\}$$

S.t.

$$\begin{array}{lllll} 2x_1 & & & \leq & 8 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & \leq & 14 \\ x_1 & + & 4x_2 & \leq & 12 \end{array}$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2$$

מציאת פתרון אופטימלי:

x_1	x_2	Z	
0	0	0	
0	3	36	
2	2.5	70	
4	1.5	98	$\Leftarrow$
4	0	80	

פתרון הדוגמה לפי סימפלקס

- פתרון:
- שלב ראשון הוא הפיכת האי-שוויונים לשוויונים.
- לשם כך נוסיף מכל משוואה "משתנה חוסר" .
- מחיר "משתנה החוסר" בפונקציית המטרה יהיה אפס.

דוגמא 1

- המערכת המתקבלת היא:

$$\cancel{\text{Min}}\ \{Z = 20x_1 + 12x_2\}$$

S.t.

$$
\begin{array}{lllllllll}
2x_1 & & & + & s_1 & & & = & 8 \\
2x_1 & + & 4x_2 & & & + & s_2 & = & 14 \\
x_1 & + & 4x_2 & & & & + \; s_3 & = & 12
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2$$

$$s_j \geq 0 \qquad j = 1,2,3$$

דוגמא 1

		z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3			b	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
	בסיס										
	Z	1	–20	–12	0	0	0			0	
1	s_1	0	2	0	1	0	0			8	
2	s_2	0	2	4	0	1	0			14	
3	s_3	0	1	4	0	0	1			12	

- עתה אנו נמצאים בקדקוד $(x_1, x_2) = (0, 0)$
- או הפתרון המורחב הוא: $(0, 0, 8, 14, 12)$
- ברור שהפתרון איננו אופטימלי.
- ברור שהמשתנה הנכנס הוא: x_1
- עתה נמצא מי המשתנה היוצא:

איטרציה ראשונה

	בסיס	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3			b	$\frac{b_i}{a_{ik}}$	
	Z	1	–20	–12	0	0	0			0		
1	s_1	0	2	0	1	0	0			8	$\frac{8}{2}=4$	$\Leftarrow$
2	s_2	0	2	4	0	1	0			14	$\frac{14}{2}=7$	
3	s_3	0	1	4	0	0	1			12	$\frac{12}{1}=12$	
	יוצא		$\Uparrow$									

בתום האיטרציה הראשונה נקבל

		Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3				b	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
	בסיס											
	Z	1	0	–12	10	0	0				80	
1	x_1	0	1	0	0.5	0	0				4	
2	s_2	0	0	4	–1	1	0				6	
3	s_3	0	0	4	–0.5	0	1				8	
	יוצא											

- עתה אנו נמצאים בקדקוד $(x_1, x_2) = (4, 0)$
- או הפתרון המורחב הוא: $(4, 0, 0, 6, 8)$
- ברור שהפתרון איננו אופטימלי.
- ברור שהמשתנה הנכנס הוא: x_2
- עתה נמצא מי המשתנה היוצא:

איטרציה שניה

		z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3			b	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
	בסיס										
	Z	1	0	-12	10	0	0			80	
1	x_1	0	1	0	0.5	0	0			4	∞
2	s_2	0	0	4	-1	1	0			6	$\frac{6}{4}=1.5$
3	s_3	0	0	4	-0.5	0	1			8	$\frac{8}{4}=2$
	יוצא										

בתום האיטרציה השניה נקבל

		Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3				b	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
בסיס												
	Z	1	0	0	7	3	0				98	
1	x_1	0	1	0	0.5	0	0				4	
2	x_2	0	0	1	–0.25	0.25	0				1.5	
3	s_3	0	0	0	0.5	–1	1				2	
	יוצא											

- עתה אנו נמצאים בקדקוד $(x_1, x_2) = (4, 1.5)$
- או הפתרון המורחב הוא: $(4, 1.5, 0, 0, 2)$
- ברור שהפתרון הוא אופטימלי.
- ערכה של פונקציית המטרה בפתרון זה הוא 98 .

- בכל איטרציה של שיטת הסימפלקס עבור בעיות תכנון לינארי קנוניות, מתחת למשתני החוסר בשורות האילוצים מופיעה המטריצה B^{-1} כאשר B היא מטריצת הבסיס המתאימה לבסיס באיטרציה הנוכחית.
- המטריצה B מורכבת מעמודות של טבלת הסימפלקס הראשונה ולא מעמודות טבלת הסימפלקס באיטרציה j , כאשר j>1 . (נכונות לכך מאלגברה לינארית!)

מטריצת הבסיס המתאימה לבסיס של הטבלה האחרונה

$\{x_1, x_2, s_3\}$ היא:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה ההופכית של מטריצה זו היא:

והיא נמצאת מתחת למשתני החוסר

בשורות האילוצים.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ואכן:

$$x_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix}$$