תכנון וניתוח אלגוריתמים
הרצאה 8

<u>הבעיה הדואלית</u>

<u>The Dual problem</u>

הבעיה הדואלית

- לכל בעיית תכנות ליניארי קיימת בעיה הקשורה בה ונבנית ממנה, וזוהי ***הבעיה הדואלית***. ***הבעיה המקורית תיקרא הבעיה הפרימאלית.***
- ***נתונה הבעיה הפרימאלית הבאה:***

$$\mathrm{Max}\{Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n\}$$

- תחת האילוצים:

האילוצים:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n \le b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n \le b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n \le b_m$$

$$x_j \ge 0 \ldots\ldots (j = 1,2,\ldots,n)$$

- הבעיה הדואלית לבעיה פרימאלית זו מתקבלת כך:
- לכל אילוץ בבעיה הפרימאלית מתאימים משתנה דואלי y_i ו (i = 1, 2, … m).
- הבעיה הדואלית לבעיית מקסימום היא בעיית מינימום על סכום המשתנים הדואליים, שמחיריהם הם האילוצים המתאימים בבעיה הפרימאלית.

- מערכת האילוצים נבנית ממטריצה ~~הפוכה~~ של מטריצת מקדמי הבעיה הפרימאלית;
- האילוצים משנים את כיוונם וצידם הימני של האילוצים הופכים למחירי הבעיה הפרימאלית.
- דהיינו. הבעיה הדואלית לבעיה הנתונה היא :

$$\text{Min}\{V = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots b_m y_m\}$$

- תחת האילוצים:

$$a_{11}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots a_{m1}y_m \geq c_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots a_{m2}y_m \geq c_2$$

- .
- .

$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots a_{mn}y_m \geq c_n$$

$$y_i \geq 0 \qquad (i = 1,2,\ldots.m)$$

- אנו רואים, שמקדמי המשתנה הראשון בבעיה הפרימאלית, x_1, מהווים מקדמי האילוץ הראשון בדואלית, וכו'.
- בהצגה מטריציאלית הבעיות הנ"ל תראינה כך:
-

דואלית	פרימאלית
$Min\{v = \underline{Y}\underline{b}\}$	$Max\{Z = \underline{C}\,\underline{X}\}$
$Y^T A \geq C^T$	$A\underline{X} \leq b$
$\underline{Y} \geq 0$	$\underline{X} \geq 0$

דוגמה 1 נתונה הבעיה הפרימאלית הבאה:

$$Max\{Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4\}$$

תחת האילוצים: משתנים דואלים:

y_1	$5X_1$	$+$	$4X_2$	$+$	$3X_3$	$+$	$2X_4$	$\leq$	20
y_2	X_1	$+$	$2X_2$	$-$	X_3	$-$	X_4	$\leq$	10
y_3	$2X_1$	$-$	$3X_2$	$+$	$4X_3$	$-$	$2X_4$	$\leq$	15
y_4	X_1	$+$	X_2	$+$	X_3	$+$	X_4	$\leq$	8

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,3,4.$$

הבעיה הדואלית לבעיה זו הינה:

$$\text{Min}\{V = 20y_1 + 10y_2 + 15y_3 + 8y_4\}$$

תחת האילוצים:

$$\begin{array}{ccccccccc}
5y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & + & y_4 & \geq & 3 \\
4y_1 & + & 2y_2 & - & 3y_3 & + & y_4 & \geq & 2 \\
3y_1 & - & y_2 & + & 4y_3 & + & y_4 & \geq & 4 \\
2y_1 & - & y_2 & - & 2y_3 & + & y_4 & \geq & 1
\end{array}$$

$$y_j \geq 0 \qquad j = 1,2,3,4.$$

- הבעיה הדואלית מהווה כלי עזר חשוב, לפיתרון בעיות בתכנות ליניארי ולביצוע ניתוח רגישות עבור הפתרונות המתקבלים לבעיה.
- הבעיה הדואלית אינה מוגבלת לצורה הקלאסית של בעיית התכנות הליניארי;
- תמיד אפשר למצוא בעיה דואלית למערכת המורכבת *משוויונים*, ***אי-שוויונים***, משתנים ***אי-שליליים ומשתנים בלתי מוגבלים בסימן***.

- דוגמה נתונה הבעיה: $\text{Max}\{Z = x_1 + x_2 + x_3\}$
- תחת האילוצים:

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$$

$$x_1 - 2x_2 \le 3$$

$$2x_2 - x_3 \ge 4$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

- X_3 <u>אינו מוגבל בסימנו</u>

- נגדיר: $x_3 = x_3' - x_3''$ כאשר $x_3'' , x_3' \ge 0$ ונקבל:

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3' - 4x_3'' = 5$$

$$x_1 - 2x_2 \le 3$$

$$2x_2 - x_3' + x_3'' \ge 4$$

נפרק את השוויונים לשני אי-שוויונים: $x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3^{|}, 3^{||})$

$$(1)\quad x_1 - 3x_2 + 4x_3^{|} - 4x_3^{||} \geq 5$$

$$(2)\quad x_1 - 3x_2 + 4x_3^{|} - 4x_3^{||} \leq 5$$

$$(3)\quad x_1 - 2x_2 \leq 3$$

$$(4)\quad 2x_2 - x_3^{|} + x_3^{||} \geq 4$$

- נביא את הבעיה לצורה סטנדרטית על ידי הפיכת סימן באילוצים

(1) ו – (4) ונקבל : $Max\{Z = x_1 + x_2 + x_3^{|} - x_3^{||}\}$

- תחת אילוצים: משתנים דואלים:

$$
\begin{array}{ll}
y_1^{|} & -x_1 + 3x_2 - 4x_3^{|} + 4x_3^{||} \le -5 \\
y_1^{||} & x_1 - 3x_2 + 4x_3^{|} - 4x_3^{||} \le 5 \\
y_2 & x_1 - 2x_2 \le 3 \\
y_3 & -2x_2 + x_3^{|} - x_3^{||} \le -4
\end{array}
$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3^{|},3^{||})$$

- הבעיה הדואלית המתאימה לה :

$$\text{Min } \{V = -5y_1^{|} + 5y_1^{||} + 3y_2 - 4y_3\}$$

- תחת האילוצים:

$$-y_1^{|} + y_1^{||} + y_2 \geq 1$$

$$3y_1^{|} - 3y_1^{||} - 2y_2 - 2y_3 \geq 1$$

$$-4y_1^{|} + 4y_1^{||} + y_3 \geq 1$$

$$4y_1^{|} - 4y_1^{||} - y_3 \geq -1$$

$$y_1^{|}, y_1^{||}, y_2, y_3 \geq 0$$

◆ <u>תכונות הבעיה הדואלית</u>

◆ א. הבעיה הדואלית של הבעיה הדואלית היא הבעיה הפרימאלית.

◆ ב. בהנחה שקיימים פתרונות אפשריים סופיים לשתי בעיות,אזי קיים פיתרון אופטימאלי סופי לשתיהן והוא זהה,דהיינו:

◆ $\text{Min } V = V^* = Z^* = \text{Max } Z$

- ג. כל פיתרון בסיסי אפשרי בבעיה הפרימאלית נותן ערך לפונקצית המטרה, הנמוך יותר מכל ערך של פונקצית המטרה בבעיה הדואלית לגבי כל פיתרון אפשרי של הבעיה הדואלית.
- דהיינו, פיתרון בסיסי אפשרי של הבעיה הפרימאלית מהווה חסם תחתון לאופטימום של הדואלית ולהיפך.

- ד. אם לאחת הבעיות (הדואלית או הפרימאלית) פיתרון לא חסום, אזי לבעיה המשלימה אין פיתרון אפשרי.
- ה. שיטת הסימפלקס פותרת את שתי הבעיות - הפרימלית והדואלית יחד.
- ו. הערך האופטימאלי של המשתנה הדואלי ה - i-י שווה למקדם של המשתנה החוסר או העודף המתאים לאילוץ ה – i בטבלה הסופית.

דוגמה 3

- פרימאלית: $$\text{Max}\{Z = 20x_1 + 6x_2 + 8x_3\}$$
- תחת האילוצים

<u>משתנים דואליים</u>

$$\begin{array}{ll} y_1 & 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 160 \\ y_2 & 4x_1 + 3x_2 \le 100 \\ y_3 & 2x_1 + x_3 \le 50 \\ y_4 & x_3 \le 20 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

- הבעיה הדואלית המתאימה לה היא:

$$\text{Min}\{V = 160y_1 + 100y_2 + 50y_3 + 20y_4\}$$

- תחת האילוצים:

$$8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 20$$

$$2y_1 + 3y_2 \geq 6$$

$$3y_1 + y_3 + y_4 \geq 8$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

הבעיה הפרימאלית לאחר הוספת משתני החוסר נראית בצורה הבאה: $\text{Max}\{Z = 20x_1 + 6x_2 + 8x_3\}$

תחת האילוצים:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
8x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & & & & & & & = & 160 \\
4x_1 & + & 3x_2 & & & & & + & x_5 & & & & & = & 100 \\
2x_1 & & & + & x_3 & & & & & + & x_6 & & & = & 50 \\
 & & & & x_3 & & & & & & & + & x_7 & = & 20
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,\ldots\ldots,7$$

הטבלה הסופית בפתרון הבעיה הפרימאלית בשיטת הסימפלקס היא כדלקמן:

מחירים מקוריים	20	6	8	0	0	0	0	
משתנים בבסיס	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	b
x_1	1	0	0	3/16	- 1/8	0	-9/16	25/4
x_2	0	1	0	- 1/4	1/2	0	3/4	25
x_6	0	0	0	- 3/8	1/4	1	1/8	70/4
x_3	0	0	1	0	0	0	1	20
c_j	0	0	0	9/4	4/8	0	5/4	Z=435

- דהיינו, הפיתרון האופטימאלי של הבעיה הפרימאלית הוא :

$$x_1^* = 25/4 \quad x_2^* = 25 \quad x_3^* = 20 \quad x_6^* = 70/4$$

$$x_4^* = x_5^* = x_7^* = 0 \qquad Z^* = 435$$

- הפיתרון האופטימאלי של הבעיה הדואלית מתקבל אף הוא מטבלה זו.
- **א**. ערך פונקציית המטרה זהה בשני הפתרונות האופטימאליים. ולכן :

$$\boxed{V^* = Z^* = 435}$$

- ב. ערכי המשתנים הדואליים שווים למקדמים C'_J של משתני החוסר.
- דהיינו, ערכו של המשתנה הדואלי Y_1 מתאים למקדם C'_J בטבלה האחרונה של משתנה החוסר, המתאים לאילוץ הראשון שהוא X_4 ולכן : $Y^*_1 = C'_4 = 9/4$
- ובצורה דומה:

$$y_1^* = 9/4;\ y_2^* = 4/8;\ y_3^* = 0;\ y_4^* = 5/4$$

מסקנות

- משתני הבסיס לפי הסדר הם: $\{x_1, x_2, x_6, x_3\}$ לכן:

$$\begin{array}{c} [x_1, x_2, x_6, x_3] \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c} [x_4, x_5, x_6, x_7] \\ \hline \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{9}{16} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מסקנות

לכן:

$$\underline{x_B}=\{x_1,x_2,x_6,x_3\}=B^{-1}\cdot\underline{b}=\begin{pmatrix}\frac{3}{16} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{9}{16}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4}\\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{8}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}160\\100\\50\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{25}{4}\\25\\\frac{70}{4}\\20\end{pmatrix}$$

מסקנות

- כידוע $\underline{x_B} = B^{-1} \cdot \underline{b}$
- אך $\underline{Y^T} = \underline{c_B} \cdot B^{-1}$
- בדוגמה שלנו:

$$\underline{c_B} = [c_1, c_2, c_6, c_3] = [20, 6, 0, 8]$$

המשך

◈ לכן:

$$\underline{Y^T} = [c_1, c_2, c_6, c_3] \cdot B^{-1} =$$

$$[20,6,0,8] \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{9}{16} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[\frac{9}{4}, \frac{1}{2}, 0, \frac{5}{4}\right]$$

- <u>החוק המשלים</u>
- <u>The Complementary Slackness Theory</u>
- החוק המשלים מציין קשר בין הבעיה הדואלית לפרימאלית.
- קשר זה מאפשר לנו מעבר מפיתרון אופטימאלי של בעיה אחת לפיתרון אופטימאלי של הבעיה השנייה.

החוק הקובע

- יהיו y^0, t^0, x^0 ו- s^0 פתרונות לבעיות הדואליות הבאות:

Min $\underline{y}\ \underline{b}$	Max $\underline{c}\ \underline{x}$
s.t	s.t
$y^t A - \underline{s} = \underline{c}$	$A\underline{x} + \underline{t} = \underline{b}$
$\underline{y}\ ,\ \underline{s} \geq 0$	$\underline{x}\ ,\underline{t} \geq 0$

כאשר x ו- y הם וקטורי המשתנים הפרימאליים והדואליים בהתאמה, והוקטורים $\underline{t}$ ו $\underline{s}$ - הם וקטורי משתני העודף והחוסר בהתאמה.

אז מתקיים:

$$y_i^0 \, t_i^0 = 0 \qquad i = 1,\ldots,m \quad \text{(א}$$

$$s_j^0 \, x_j^0 = 0 \qquad j = 1,\ldots,n \quad \text{(ב}$$

- כלומר, לכל אילוץ (בדואלית או בפרימאלית) קיים משתנה חוסר או עודף (Slack variable) ומשתנה דואלי מתאים והחוק קובע, שבאופטימום לכל אילוץ, או שמשתנה slack המתאים לו או שהמשתנה הדואלי המתאים לו שווה לאפס, או שניהם.
- במילים אחרות,

- אם בפתרון האופטימאלי של הבעיה הפרימאלית מתקיים אילוץ כשוויון, דהיינו משתנה העודף או החוסר שלו שווה לאפס,המשתנה הדואלי המתאים לו נמצא בבסיס בפתרון האופטימאלי של הבעיה הדואלית ויכול לקבל ערך חיובי או אפס.
- אם אילוץ מסוים מתקיים כאי-שוויון בפיתרון האופטימאלי של הבעיה הפרימאלית, המשתנה הדואלי המתאים לו מקבל ערך אפס ואינו נמצא בבסיס האופטימאלי של הבעיה הדואלית.

דוגמה 4

- בדוגמה הקודמת ראינו, שאילוצים 1,2 ו-4 בבעיה הפרימאלית התקיימו כשוויון,היות ומשתני החוסר המתאימים להם x_4, x_5, x_7 קבלו ערך אפס בפתרון אופטימאלי.
- לכן המשתנים הדואליים המתאימים לאילוצים אלו, דהיינו y_1, y_2, ו- y_4 נמצאו בבסיס וקבלו ערך חיובי (הם חייבים להימצא בבסיס אולם ערכם יכול להיות אפס) בפיתרון האופטימאלי של הבעיה הדואלית:

$$y_1^* = 9/4 \;\; ; y_2^* = 4/8 \;\; ; \;\; y_4^* = 5/4$$

- לעומת זאת,האילוץ השלישי בבעיה הפרימאלית התקיים באופטימום כאי-שוויון, היות ומשתנה החוסר שלו x_6 קיבל ערך חיובי בפיתרון האופטימאלי $x_6^* = 70/4$.
- על כן המשתנה הדואלי המתאים לאילוץ השלישי, y_3, קיבל בפתרון האופטימאלי של הבעיה ערך אפס, $y_3^* = 0$ ולא היה בבסיס האופטימאלי.

דוגמה 5 נתונה בעיית התכנות הליניארי הבאה:

$$Max\{Z = -10x_1 + 24x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 25x_5\}$$

תחת האילוצים:

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 \le 19$$

$$-x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \le 57$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,\dots,5$$

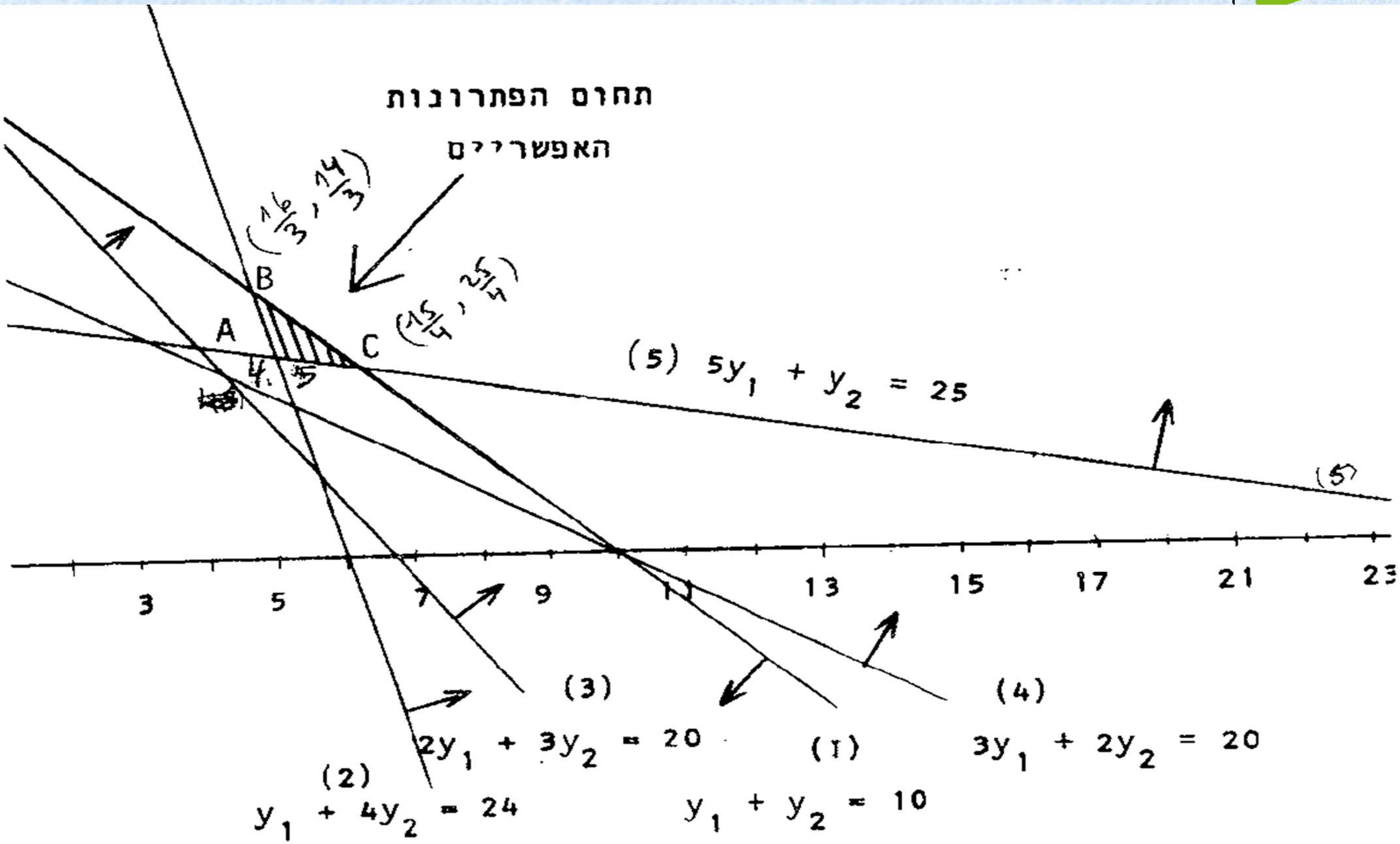
- יש לנסח את הבעיה הדואלית ולפתור את הבעיות הפרימאלית והדואלית.
- <u>פתרון</u>
- כאשר נתונה בעיה תכנות ליניארי עם הרבה משתנים ושני אילוצים,כדאי לעבור תמיד לבעיה הדואלית,כי בה יהיו שני משתנים בלבד.

- הבעיה הדואלית שתתקבל תהיה, כאמור, בעיית תכנות ליניארי בעלת שני משתנים,הניתנת לפתרון גרפי קל יחסית.
- לאחר מכן,מפיתרון הבעיה הדואלית נעבור לפי החוק המשלים לפיתרון הבעיה הפרימאלית.
- הבעיה הדואלית לבעיה הנתונה היא:

- א $\text{Min}\{V = 19y_1 + 57y_2\}$
- תחת האילוצים:

$$
\begin{array}{llcccc}
(1) & -y_1 & - & y_2 & \geq & -10 \\
(2) & y_1 & + & 4y_2 & \geq & 24 \\
(3) & 2y_1 & + & 3y_2 & \geq & 20 \\
(4) & 3y_1 & + & 2y_2 & \geq & 20 \\
(5) & 5y_1 & + & y_2 & \geq & 25
\end{array}
$$

$$y_1, \quad y_2 \geq 0$$



תחום הפתרונות
האפשריים
B
A
C
(5) $5y_1 + y_2 = 25$
(3)
$2y_1 + 3y_2 = 20$
(1)
$y_1 + y_2 = 10$
(4)
$3y_1 + 2y_2 = 20$
(2)
$y_1 + 4y_2 = 24$
3
5
7
9
11
13
15
17
21
23

נקודה A: מפגש האילוצים (5) ו- (2)

$$5y_1 + y_2 = 25 \qquad y_1 + 4y_2 = 24$$

$$V = 19y_1 + 57y_2 = 361 \qquad y_1 = 4 \qquad y_2 = 5$$

נקודה B: מפגש האילוצים (2) ו- (1)

$$y_1 + 4y_2 = 24 \qquad y_1 + y_2 = 10$$

$$V = 367\frac{1}{3} \qquad y_1 = 16/3 \qquad y_2 = 14/3$$

נקודה C: מפגש האילוצים (5) ו- (1)

$$5y_1 + y_2 = 25 \qquad y_1 + y_2 = 10$$

$$y_1 = 15/4 \qquad y_2 = 25/4 \qquad V = 427.5$$

- האופטימום של הבעיה הדואלית מתקבל בנקודה A,מפגש האילוצים(5) ו-(2), והוא:

$$y_2^* = 5, \; y_1^* = 4, \; V^* = 361$$

- דהיינו,אילוצים (5) ו- (2) מתקיימים כשוויון באופטימום של הבעיה הדואלית ושאר האילוצים מתקיימים כאי-שוויון.
- על פי החוק המשלים בפתרון האופטימאלי של הבעיה הפרימאלית המשתנים x_2 ו- x_5 יהיו בבסיס האופטימלי ושאר המשתנים יקבלו ערך אפס.

- לכן ניתן לפתור את שני האילוצים של הבעיה הפרימאלית, המתקיימים כשוויון,היות והמשתנים הדואליים המתאימים להם y_1, y_2 מקבלים ערך חיובי ונמצאים בבסיס, לגבי x_2 ו- x_5 ושאר המשתנים הפרימאליים מקבלים אפס.
- מכאן נפתור:

$$x_2 + 5x_5 = 19$$

$$4x_2 + x_5 = 57$$

- לכן נקבל:

$$19x_5 = 19 \rightarrow x_5 = 1 \rightarrow x_2 = 14$$

- ומכאן, פתרון האופטימאלי של הבעיה הפרימאלית, שהתקבל בעזרת החוק המשלים, הוא:

$$Z^* = 361$$

$$x_2^* = 14 \quad x_5^* = 1$$

$$x_1^* = 0 \;;\; x_3^* = 0 \;;\; x_4^* = 0$$

בעיה קנונית

- <u>הגדרה:</u> בעיית תכנון ליניארי היא **<u>קנונית</u>** אם היא:
  - בעיית מקסימום תחת אילוצי קטן שווה
  - או
  - בעיית מינימום תחת אילוצי גדול שווה

  - ובכל מקרה אילוצי אי שליליות על כל המשתנים.
  - <u>הערה:</u> הבעיה הדואלית של הבעיה הקנונית היא גם בעיה קנונית.

בעיה קנונית

- עבור בעיית תכנון ליניארי של מקסימום
  - אילוץ קטן או שווה הוא **קנוני**
  - אילוץ גדול או שווה הוא **אנטי** קנוני
  - אילוץ שוויון הוא **ניטראלי**
- עבור בעיית תכנון ליניארי של מינימום
  - אילוץ קטן או שווה הוא **אנטי** קנוני
  - אילוץ גדול או שווה הוא **קנוני**
  - אילוץ שוויון הוא **ניטראלי**

בעיה קנונית

- עבור בעיית תכנון ליניארי של מקסימום וגם של מינימום משתנה הוא:
  - **קנוני** - אם הוא מוגדר להיות אי שלילי.
  - **אנטי קנוני** - אם הוא מוגדר להיות אי חיובי.
  - **ניטראלי** - אם הוא חופשי.

בעיה קנונית

- א.

$$\text{Max } \{Z = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3\}$$

S.t.

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & & & - & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \quad is \quad free$

$x_3 \leq 0$

- אילוץ 1 קנוני
- אילוץ 2 ניטראלי
- אילוץ 3 אנטי קנוני
- משתנה x_1 קנוני
- משתנה x_2 ניטראלי
- משתנה x_3 אנטי קנוני

בעיה קנונית

- ב.

$$\text{Min } \{Z = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3\}$$

S.t.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & & & - & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \quad is \quad free$

$x_3 \leq 0$

- אילוץ 1 אנטי קנוני
- אילוץ 2 ניטראלי
- אילוץ 3 קנוני
- משתנה x_1 קנוני
- משתנה x_2 ניטראלי
- משתנה x_3 אנטי קנוני

דוגמה 1 - מעבר מפרימלי לדואלי

- הבעיה הפרימלית

$$\max\{Z = 10x_1 + 6x_2\}$$

$s.t.$

$$\begin{aligned}
&(1) \quad x_1 + 5x_2 \le 7 \quad \leftarrow y_1 \\
&(2) -x_1 + 2x_2 \le 1 \quad \leftarrow y_2 \\
&(3) \quad 3x_1 - x_2 \le 5 \quad \leftarrow y_3 \\
&(4) \quad x_1 \ge 0 \quad \leftarrow y_1 - y_2 + 3y_3 \ge 10 \\
&(5) \quad x_2 \ge 0 \quad \leftarrow 5y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 6
\end{aligned}$$

- הבעיה הדואלית הינה:

$$\min\{V = 7y_1 + y_2 + 5y_3\}$$

$s.t.$

$$\begin{aligned}
&(1) \quad y_1 - y_2 + 3y_3 \ge 10 \\
&(2) \quad 5y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 6 \\
&(3) \quad y_1 \ge 0 \\
&(4) \quad y_2 \ge 0 \\
&(5) \quad y_3 \ge 0
\end{aligned}$$

דוגמה 2 - מעבר מפרימלי אנטי קנונית לדואלי בגלל אילוץ גדול שווה

- הבעיה הפרימלית אנטי קנונית

$$\max\{Z = 10x_1 + 6x_2\}$$

$$s.t.$$

$$(1)\quad x_1 + 5x_2 \ge 7$$

$$(2)\ -x_1 + 2x_2 \le 1$$

$$(3)\quad 3x_1 - x_2 \le 5$$

$$(4)\quad x_1 \ge 0$$

$$(5)\quad x_2 \ge 0$$

- הצגת הבעיה הפרימלית כקנונית

$$\max\{Z = 10x_1 + 6x_2\}$$

$$s.t.$$

$$(1)\ -x_1 - 5x_2 \le -7 \quad \leftarrow y_1$$

$$(2)\ -x_1 + 2x_2 \le 1 \quad \leftarrow y_2$$

$$(3)\quad 3x_1 - x_2 \le 5 \quad \leftarrow y_3$$

$$(4)\quad x_1 \ge 0$$

$$(5)\quad x_2 \ge 0$$

המשך דוגמה 2

- הבעיה הדואלית הינה:

$$\min\{V = -7y_1 + y_2 + 5y_3\}$$

$$s.t.$$

$$(1)\quad -y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 10$$

$$(2)\quad -5y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 6$$

$$(3)\quad y_1 \geq 0$$

$$(4)\quad y_2 \geq 0$$

$$(5)\quad y_3 \geq 0$$

- עתה נציב $y_1' = -y_1$ ונקבל:

$$\min\{V = 7y_1' + y_2 + 5y_3\}$$

$$s.t.$$

$$(1)\quad y_1' - y_2 + 3y_3 \geq 10$$

$$(2)\quad 5y_1' + 2y_2 - y_3 \geq 6$$

$$(3)\quad y_1' \leq 0$$

$$(4)\quad y_2 \geq 0$$

$$(5)\quad y_3 \geq 0$$

סיכום - מעבר מפרימלי לדואלי

- הבעיה הפרימלית אנטי קנונית

$$\max\{Z = 10x_1 + 6x_2\}$$

$s.t.$

$$(1)\quad x_1 + 5x_2 \geq 7 \quad \leftarrow y_1'$$

$$(2) -x_1 + 2x_2 \leq 1 \quad \leftarrow y_2$$

$$(3)\quad 3x_1 - x_2 \leq 5 \quad \leftarrow y_3$$

$$(4)\quad x_1 \geq 0$$

$$(5)\quad x_2 \geq 0$$

- הבעיה הדואלית הינה:

$$\min\{V = 7y_1' + y_2 + 5y_3\}$$

$s.t.$

$$(1)\quad y_1' - y_2 + 3y_3 \geq 10$$

$$(2)\quad 5y_1' + 2y_2 - y_3 \geq 6$$

$$(3)\quad y_1' \leq 0$$

$$(4)\quad y_2 \geq 0$$

$$(5)\quad y_3 \geq 0$$

מעבר מפרימלי לדואלי

- מסקנה: המשתנה הדואלי המתאים לאילוץ האנטי קנוני הוא משתנה אנטי קנוני.

דוגמה 3 - מעבר מפרימלי אנטי קנונית לדואלי בגלל אילוץ שוויון

- הבעיה הפרימלית אנטי קנונית

$$\max\{Z = 10x_1 + 6x_2\}$$

$$s.t.$$

$$(1)\quad x_1 + 5x_2 = 7$$

$$(2)\; -x_1 + 2x_2 \le 1$$

$$(3)\quad 3x_1 - x_2 \le 5$$

$$(4)\quad x_1 \ge 0$$

$$(5)\quad x_2 \ge 0$$

- הצגת הבעיה הפרימלית כקנונית

$$\max\{Z = 10x_1 + 6x_2\}$$

$$s.t.$$

$$(1)\quad x_1 + 5x_2 \le 7 \quad \leftarrow y_1^+$$

$$(2)\quad -x_1 - 5x_2 \le -7 \quad \leftarrow y_1^-$$

$$(3)\; -x_1 + 2x_2 \le 1 \quad \leftarrow y_2$$

$$(4)\quad 3x_1 - x_2 \le 5 \quad \leftarrow y_3$$

$$(5)\quad x_1 \ge 0$$

$$(6)\quad x_2 \ge 0$$

המשך דוגמה 3

- הבעיה הפרימלית הקנונית

$$\max\{Z = 10x_1 + 6x_2\}$$

$s.t.$

$$(1)\quad x_1 + 5x_2 \le 7 \quad \leftarrow y_1^+$$

$$(2)\quad -x_1 - 5x_2 \le -7 \quad \leftarrow y_1^-$$

$$(3)\quad -x_1 + 2x_2 \le 1 \quad \leftarrow y_2$$

$$(4)\quad 3x_1 - x_2 \le 5 \quad \leftarrow y_3$$

$$(5)\quad x_1 \ge 0$$

$$(6)\quad x_2 \ge 0$$

- הבעיה הדואלית הינה:

$$\min\{V = 7y_1^+ - 7y_1^- + y_2 + 5y_3\}$$

$s.t.$

$$(1)\quad y_1^+ - y_1^- - y_2 + 3y_3 \ge 10$$

$$(2)\quad 5y_1^+ - 5y_1^- + 2y_2 - y_3 \ge 6$$

$$y_1^+ \ge 0 \quad y_1^- \ge 0$$

$$y_2 \ge 0 \quad y_3 \ge 0$$

המשך דוגמה 3

- הבעיה הדואלית הינה:

$$\min\{V = 7y_1^+ - 7y_1^- + y_2 + 5y_3\}$$

$s.t.$

$$(1)\quad y_1^+ - y_1^- - y_2 + 3y_3 \ge 10$$

$$(2)\; 5y_1^+ - 5y_1^- + 2y_2 - y_3 \ge 6$$

$$y_1^+ \ge 0 \quad y_1^- \ge 0$$

$$y_2 \ge 0 \quad y_3 \ge 0$$

- עתה נציב $y_1 = y_1^+ - y_1^-$ ונקבל:

$$\min\{V = 7y_1 + y_2 + 5y_3\}$$

$s.t.$

$$(1)\quad y_1 - y_2 + 3y_3 \ge 10$$

$$(2)\; 5y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 6$$

$$y_1 \;\; is \;\; free, \quad y_2 \ge 0 \quad y_3 \ge 0$$

סיכום - מעבר מפרימלי לדואלי

- הבעיה הפרימלית

$$\max\{Z = 10x_1 + 6x_2\}$$

$$s.t.$$

$$(1)\quad x_1 + 5x_2 = 7$$

$$(2)\ -x_1 + 2x_2 \le 1$$

$$(3)\quad 3x_1 - x_2 \le 5$$

$$(4)\quad x_1 \ge 0$$

$$(5)\quad x_2 \ge 0$$

- הבעיה הדואלית הינה:

$$\min\{V = 7y_1 + y_2 + 5y_3\}$$

$$s.t.$$

$$(1)\quad y_1 - y_2 + 3y_3 \ge 10$$

$$(2)\ 5y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 6$$

$$y_1 \ \ is \ \ free, \quad y_2 \ge 0 \quad y_3 \ge 0$$

מעבר מפרימלי לדואלי

- מסקנה: המשתנה הדואלי המתאים לאילוץ ניטראלי הוא משתנה ניטראלי .

דוגמה 4 - מעבר מפרימלי אנטי קנונית לדואלי בגלל משתנה אי חיובי

- הבעיה הפרימלית אנטי קנונית

$$\max\{Z = 10x_1 + 6x_2\}$$

$s.t.$

$$(1)\quad x_1 + 5x_2 \le 7$$

$$(2)\ -x_1 + 2x_2 \le 1$$

$$(3)\quad 3x_1 - x_2 \le 5$$

$$(4)\quad x_1 \le 0$$

$$(5)\quad x_2 \ge 0$$

- עתה נציב $x_1^{'} = -x_1$ ונקבל:

$$\max\{Z = -10x_1^{'} + 6x_2\}$$

$s.t.$

$$(1)\ -x_1^{'} + 5x_2 \le 7 \quad \leftarrow y_1$$

$$(2)\quad x_1^{'} + 2x_2 \le 1 \quad \leftarrow y_2$$

$$(3)\ -3x_1^{'} - x_2 \le 5 \quad \leftarrow y_3$$

$$(5)\quad x_1^{'} \ge 0$$

$$(6)\quad x_2 \ge 0$$

המשך דוגמה 4

- הבעיה הפרימלית הקנונית

$$\max\{Z = -10x_1' + 6x_2\}$$

$s.t.$

$$(1)\quad -x_1' + 5x_2 \le 7 \qquad \leftarrow y_1$$

$$(2)\quad x_1' + 2x_2 \le 1 \qquad \leftarrow y_2$$

$$(3)\quad -3x_1' - x_2 \le 5 \qquad \leftarrow y_3$$

$$(5)\quad x_1' \ge 0$$

$$(6)\quad x_2 \ge 0$$

- הבעיה הדואלית הינה:

$$\min\{V = 7y_1 + y_2 + 5y_3\}$$

$s.t.$

$$(1)\, -y_1 + y_2 - 3y_3 \ge -10$$

$$(2)\, 5y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 6$$

$$y_1 \ge 0 \quad y_2 \ge 0 \quad y_3 \ge 0$$

המשך דוגמה 4

- הבעיה הדואלית הינה:

$$\min\{V = 7y_1 + y_2 + 5y_3\}$$
$$s.t.$$
$$(1) -y_1 + y_2 - 3y_3 \ge -10$$
$$(2)\ 5y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 6$$
$$y_1 \ge 0 \quad y_2 \ge 0 \quad y_3 \ge 0$$

- נכפול את האילוץ ה-1 ב- (-1) :

$$\min\{V = 7y_1 + y_2 + 5y_3\}$$
$$s.t.$$
$$(1)\quad y_1 - y_2 + 3y_3 \le 10$$
$$(2)\ 5y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 6$$
$$y_1 \ge 0 \quad y_2 \ge 0 \quad y_3 \ge 0$$

סיכום - מעבר מפרימלי לדואלי

- הבעיה הפרימלית

$$\max\{Z = 10x_1 + 6x_2\}$$

$$s.t.$$

$$(1)\quad x_1 + 5x_2 \le 7$$

$$(2)\; -x_1 + 2x_2 \le 1$$

$$(3)\quad 3x_1 - x_2 \le 5$$

$$(4)\quad x_1 \le 0$$

$$(5)\quad x_2 \ge 0$$

- הבעיה הדואלית הינה:

$$\min\{V = 7y_1 + y_2 + 5y_3\}$$

$$s.t.$$

$$(1)\quad y_1 - y_2 + 3y_3 \le 10$$

$$(2)\; 5y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 6$$

$$y_1 \ge 0 \quad y_2 \ge 0 \quad y_3 \ge 0$$

מעבר מפרימלי לדואלי

- מסקנה: משתנה אנטי קנוני בבעיה הפרימלית מתאים לאילוץ אנטי קנוני בבעיה הדואלית .

דוגמה 5 - מעבר מפרימלי, בה משתנה לא מאולץ סימן, לדואלי

- הבעיה הפרימלית היא:

$$\max\{Z = 10x_1 + 6x_2\}$$

$s.t.$

(1) $x_1 + 5x_2 \le 7$

(2) $-x_1 + 2x_2 \le 1$

(3) $3x_1 - x_2 \le 5$

(4) x_1 *is free*

(5) $x_2 \ge 0$

- הבעיה הדואלית הינה:

$$\min\{V = 7y_1 + y_2 + 5y_3\}$$

$s.t.$

(1) $y_1 - y_2 + 3y_3 = 10$

(2) $5y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 6$

$y_1 \ge 0 \quad y_2 \ge 0 \quad y_3 \ge 0$

מסקנה ממשפט הדואליות החלש

- אם קיימים פתרונות אפשריים לבעיה הפרימאלית והבעיה הדואלית שערכי פונקציות המטרה שלהם זהים, אזי שני הפתרונות הם אופטימאליים לבעיותיהם.