### תכנון וניתוח אלגוריתמים הרצאה 7

# פתרון בעיות תכנון לינארי קנוניות

### דוגמא 1

:מונה הבעיה הבאה

Max  $\{Z = 20x_1 + 12x_2\}$ 

S.t.

$$2x_1$$

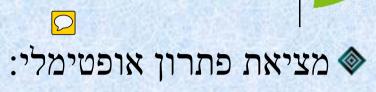
$$+4x_2$$

$$2x_1 + 4x_2$$
  
 $x_1 + 4x_2$ 

$$\leq$$
 8

$$\leq$$
 12

$$x_j \ge 0$$
  $j = 1, 2$ 



$X_1$	X <sub>2</sub>	Z	
0	0	0	
0	3	36	
2	2.5	70	
4	1.5	98	$\leftarrow$
4	0	80	

### פתרון הדוגמה לפי סימפלקס

- € פתרון:
- שלב ראשון הוא הפיכת האי-שוויונם לשוויונם. ♦
  - . "משתנה חוסר" ♦ לשם כך נוסיף מכל משוואה
- סחיר "משתנה החוסר" בפונקציית המטרה יהיה אפס. ♦

#### דוגמא 1

:איא המערכת המתקבלת היא

$$\mathbf{Min} \ \{Z = 20x_1 + 12x_2\}$$

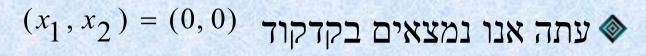
S.t.

$$2x_1 + s_1 = 8$$
  
 $2x_1 + 4x_2 + s_2 = 14$   
 $x_1 + 4x_2 + s_3 = 12$ 

$$x_j \ge 0$$
  $j = 1, 2$   
 $s_j \ge 0$   $j = 1, 2, 3$ 

### דוגמא 1

		$Z \mid$		$x_2$	   <sup>s</sup> 1	$\frac{1}{s}$	   s <sub>3</sub> 	         	       	b	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
	בסיכ						   		   		
	Z	1	-20	-12	0	0	0	     	   	0	
1	$S_1$	0	2	0	1	0	0			8	
2	$S_2$	0	2	4	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$	1	0	+ — — — - 	     !	14	
3	$S_3$	$\overline{0}$	1 1	4	0	$\begin{vmatrix} -0 \end{vmatrix}$	1 1	† — — — - 	   	12	
								<del>                                     </del>	   		



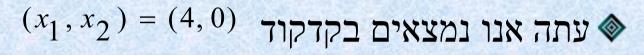
- (0, 0, 8, 14, 12) או הפתרון המורחב הוא: ◊
  - . ברור שהפתרון איננו אופטימלי.
  - $x_1$  ברור שהמשתנה הנכנס הוא:
    - עתה נמצא מי המשתנה היוצא: ♦

#### איטרציה ראשונה

	בסיכ	Z	<i>x</i> <sub>1</sub>	$x_2$	   s <sub>1</sub>	   s <sub>2</sub>	 	     	       	b	$\frac{b_i}{a_{ik}}$	
	Z	1	-20	-12	0	0	0		   	0		
1	$S_1$	0	2	0		0		       	       	8	$\frac{8}{2}$ = 4	<u></u>
2	$S_2$	0	2	4		1	0			14	$-\frac{2}{14} = 7$	
3	$S_3$	0	1	4		0	1 1			12	$\frac{12}{1} = 12$	
	X	יוצ			   		   	   	   			

### בתום האיטרציה הראשונה נקבל

		Z	x <sub>1</sub>	$x_2$	s <sub>1</sub>		   s <sub>3</sub>			  -  -  -	b	$\left  \frac{b_i}{a_{ik}} \right $
	בסיס											
	Z	1	0	-12	10	0	0				80	
1	$x_1$	0	1	0	0.5	0	0				4	
2	$S_2$	0	0	4	-1	1	0	— —	-	<b> </b> -	6	
3	$S_3$	0	0	4	-0.5	0	1	— — <del> </del>               	<b></b> -	<b> </b>   	8	
	N	יוצ										



(4, 0, 0, 6, 8) או הפתרון המורחב הוא:

. ברור שהפתרון איננו אופטימלי.

x 2 ברור שהמשתנה הנכנס הוא: •

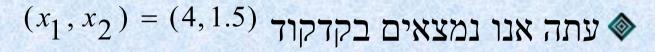
עתה נמצא מי המשתנה היוצא: ♦

#### איטרציה שניה

		Z		$x_2$	<i>s</i> 1		s <sub>3</sub>			b	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
0	בסי										
	Z	1	0	-12	10	0	0			80	
1	$x_1$	0	1	0	0.5	0	0			4	$\infty$
2	$S_2$	0	0	4	 1		0	— — -     		6	$\frac{6}{4}$ = 1.5
3	$S_3$	0	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$	4	-0.5	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$		— —		8	$\frac{8}{4} = 2$
	N	יוצ									

## בתום האיטרציה השניה נקבל

		$Z \mid Z \mid$	$\begin{vmatrix} x_1 \end{vmatrix}$		<i>s</i> 1	$s_2$			     	b	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
0	בסי								   		
	Z	1	0	0	7	3	0		     	98	
1	$x_1$	0	1	0	0.5	0	0			4	
2	$x_2$	0	0	1	-0.25	0.25	0	-	+ — — ·   	1.5	
3	$S_3$	$\begin{bmatrix} -0 \end{bmatrix}$	0	0	0.5	-1	1	-	   	2	
	N	יוצ							   		



- (4, 1.5, 0, 0, 2) או הפתרון המורחב הוא: ◊
  - . ברור שהפתרון הוא אופטימלי.
- . 98 ערכה של פונקציית המטרה בפתרון זה הוא

- בכל איטרציה של שיטת הסימפלקס עבור בעיות תכנון לינארי קנוניות, מתחת למשתני החוסר בשורות האילוצים מופיעה המטריצה  $B^{-1}$  כאשר B המעריצת הבסיס המתאימה לבסיס באיטרציה הנוכחית.
  - המטריצה B מורכבת מעמודות של טבלת הסימפלקס מורכבת איטרציה j, הראשונה ולא מעמודות טבלת הסימפלקס באיטרציה j>1. j>1 כאשר j>1. (נכונות לכך מאלגברה לינארית!)

#### סטריצת הבסיס המתאימה לבסיס של הטבלה האחרונה ♦

$$B = egin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
 היא:  $\{x_1, x_2, s_3\}$ 

$$\odot$$
 מטריצת הבסיס המתאימה לבסיס של הטבלה האחרונה  $\odot$   $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$   $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  המטריצה ההופכית של מטריצה זו היא נמצאת מתחת למשתני החוסר בשורות האילוצים.

#### ואכן:

$$x_{B} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0.25 & 0 \\ 0.5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix}$$