תכנון וניתוח אלגוריתמים

הרצאה 2

פרק 1.2: פתרון של בעיות תכנון לינארי

- בפרק הקודם למדנו מהי בעיית תכנון ליניארי וכיצד לנסחה בצורה מתמטית על-ידי שימוש בשלושת **מרכיבי מודל ההחלטה:**
- 1. משתני ההחלטה;
- 2. פונקצית המטרה;
- 3. אילוצים על משתני ההחלטה.

- כמו-כן, ראינו כי לצורך פתרון בעיות החלטה נהוג להשתמש במודלים מתמטיים המתאימים לבעיות החלטה מסוגים שונים;
- המודל שבו עוסק פרק זה הוא מודל התכנון הליניארי.
- בבעיות המתאימות למודל התכנון הליניארי ישנם **שני מאפיינים של מרכיבי מודל ההחלטה:**

- מציאת מינימום או מקסימום של פונקציית מטרה ליניארית;
- האילוצים על משתני ההחלטה מתוארים על-ידי משוואות (או אי-שיוויונים) ליניאריות המגדירות תחום חסום.
- בעיות שניסוחן המתמטי עונה על שני המאפיינים הללו הן בעיות הניתנות לפתרון באמצעות מודל התכנון הליניארי.

- בפרק זה נלמד שתי שיטות לפתרון בעיות החלטה על-פי מודל התכנון הליניארי:
- 1. השיטה הגרפית;
- 2. שיטת הסימפלקס (שיטה אלגברית).

- פתרון בשיטה גרפית מוגבל לבעיות שיש בהן משתנה החלטה אחד או שניים.

2.1 פתרון גרפי לבעיית תכנון ליניארי

- בבעיית תכנון ליניארי יש למצוא, בתחום הפתרונות האפשריים, את הנקודה בעלת הערך האופטימלי.
- ***<u>השלב הראשון</u>*** בפתרון גרפי של בעיית תכנון ליניארי הוא שרטוט תחום הפתרונות האפשרי.
- ***<u>השלב השני</u>*** הוא מציאת הפתרון האופטימלי.

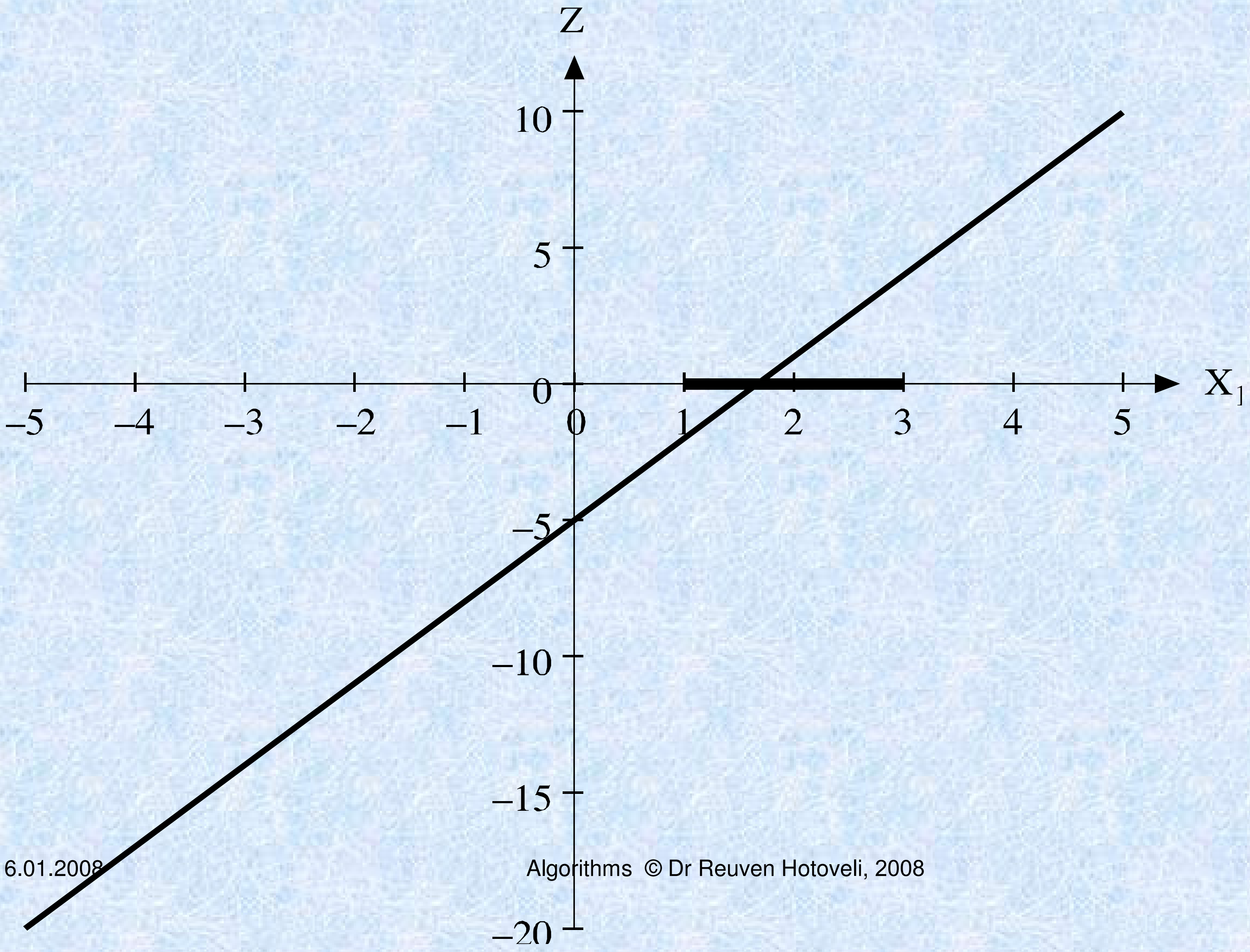
- מספר הנקודות בתחום הפתרונות האפשריים הוא בדרך-כלל אינסופי
- מציאת הנקודה בעלת הערך האופטימלי תלויה
- *במבנה תחום הפתרונות האפשריים
- *ובמבנה פונקצית המטרה.

דוגמה 2.1 – פתרון גרפי לבעיית תכנון ליניארי בעלת משתנה החלטה יחיד

- נתונה הבעיה הבאה:

- **Maximize** $Z = 3X_1 - 5$
- **Subject to:**
- 1) $X_1 \geq 1$
- 2) $X_1 \leq 3$

- באיור 2.1 מוצג התיאור הגרפי של הבעיה.


Z
10
5
0
–5
–10
–15
–20
X1
–5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5

- נמצא את הפתרון האופטימלי בשני שלבים:
- 1. הגדרת התחום האפשרי.
- 2. מציאת פתרון אופטימלי.
- **שלב ראשון – הגדרת התחום האפשרי**
- הקטע המודגש על ציר X_1 מתאר את תחום הפתרונות האפשריים הנתון על-ידי האילוצים על משתני ההחלטה.

- כלומר, הערכים של X_1 בתחום זה מקיימים את האילוצים של הבעיה.
- התחום האפשרי המתקבל במקרה זה הוא ***תחום חסום*** (תחום סופי).
- **שלב שני – מציאת הפתרון האופטימלי**
- באיור מופיע ישר המתאר את פונקציית המטרה $Z = 3X_1 - 5$.

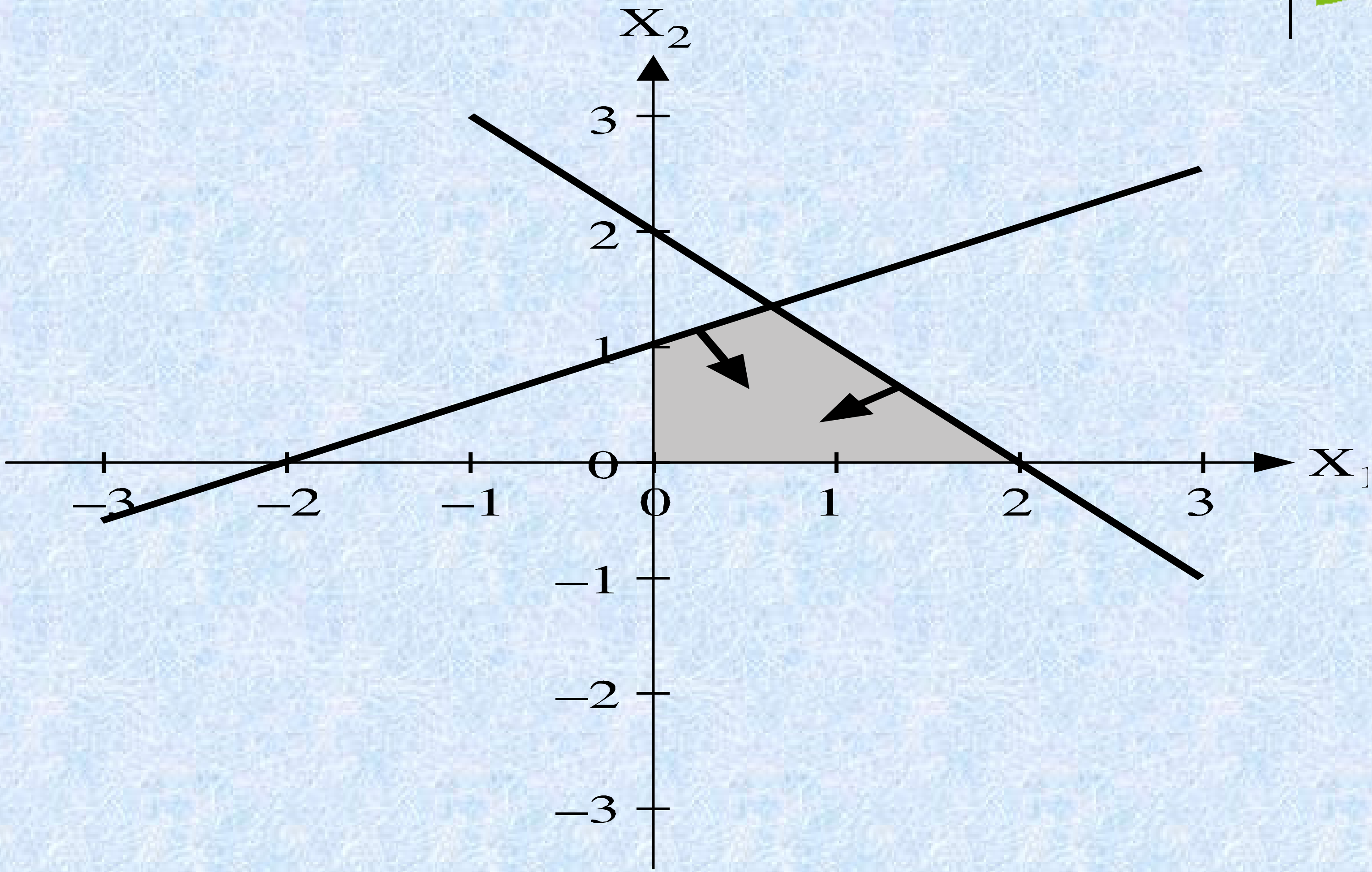
- עלינו למצוא את הנקודה בתחום $1 \leq X_1 \leq 3$ בו מקבלת פונקצית המטרה את ערכה המקסימלי.
- קל לראות כי נקודה זו היא הנקודה הימנית ביותר בתחום הפתרונות האפשריים, כלומר הנקודה $X_1 = 3$.
- קיבלנו **פתרון אופטימלי יחיד בקדקוד** התחום האפשרי (בקצה התחום האפשרי).

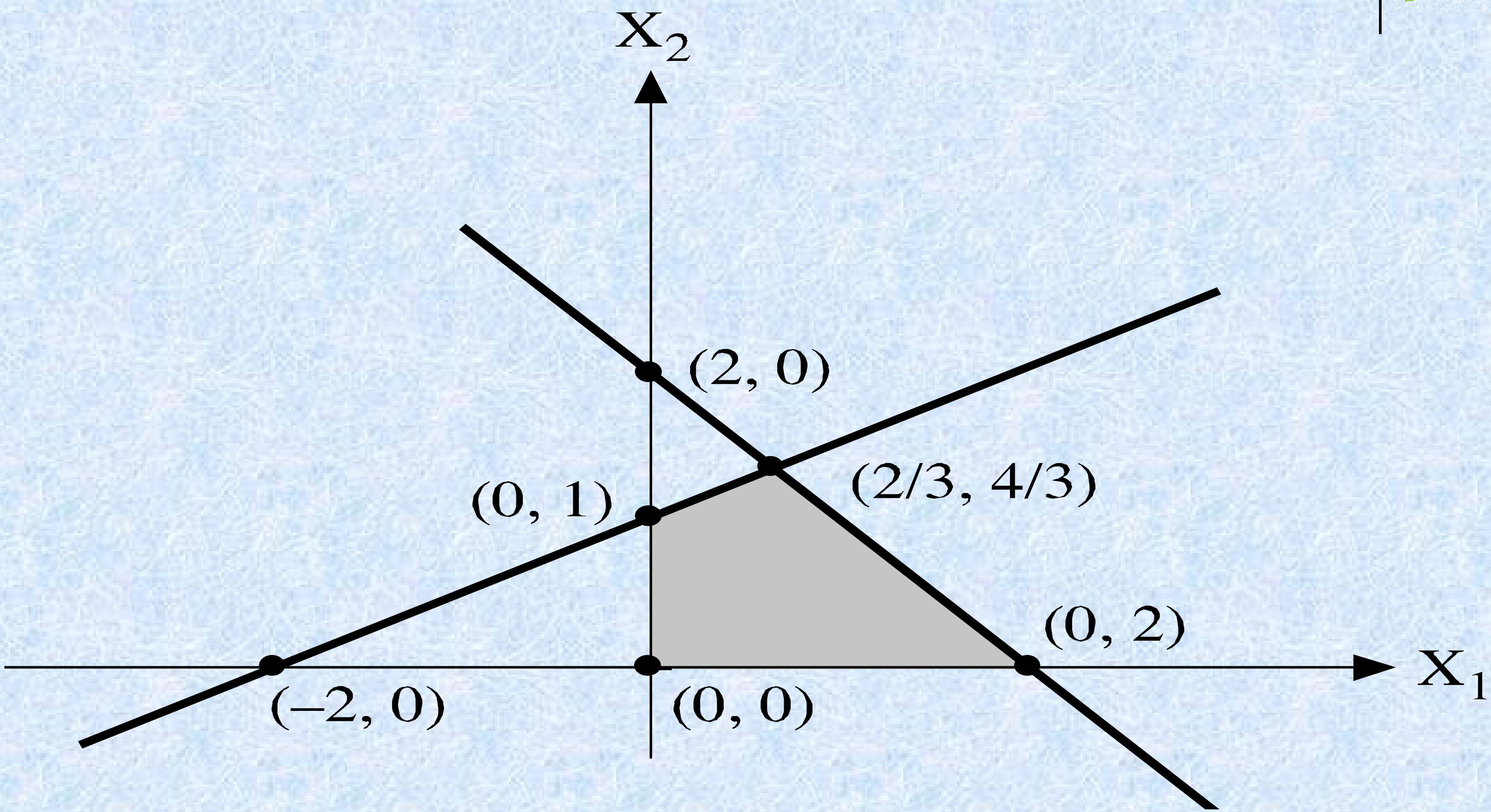
דוגמה 2.2 – פתרון גרפי לבעיית תכנון ליניארי בעלת שני משתני החלטה

- נתונה הבעיה הזו:

- **Maximize** $Z = 5X_1 + 3X_2 - 7$
- **Subject to:**
- $X_1 + X_2 \leq 2$
- $-X_1 + 2X_2 \leq 2$
- $X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$

שלב ראשון – הגדרת התחום האפשרי




X_2
(2, 0)
(2/3, 4/3)
(0, 1)
(0, 2)
X_1
(–2, 0)
(0, 0)

- בדוגמה זו מתקבל **תחום אפשרי חסום**.
- **שלב שני – מציאת הפתרון האופטימלי**
- אפשר להוכיח כי הפתרונות האופטימליים של בעיית תכנון ליניארי בשני משתנים, **בעלת תחום פתרונות אפשריים חסום ולא ריק**, נמצאים:
- * על קדקוד אחד או
- *על צלע המחברת שני קדקודים סמוכים של תחום הפתרונות האפשריים.

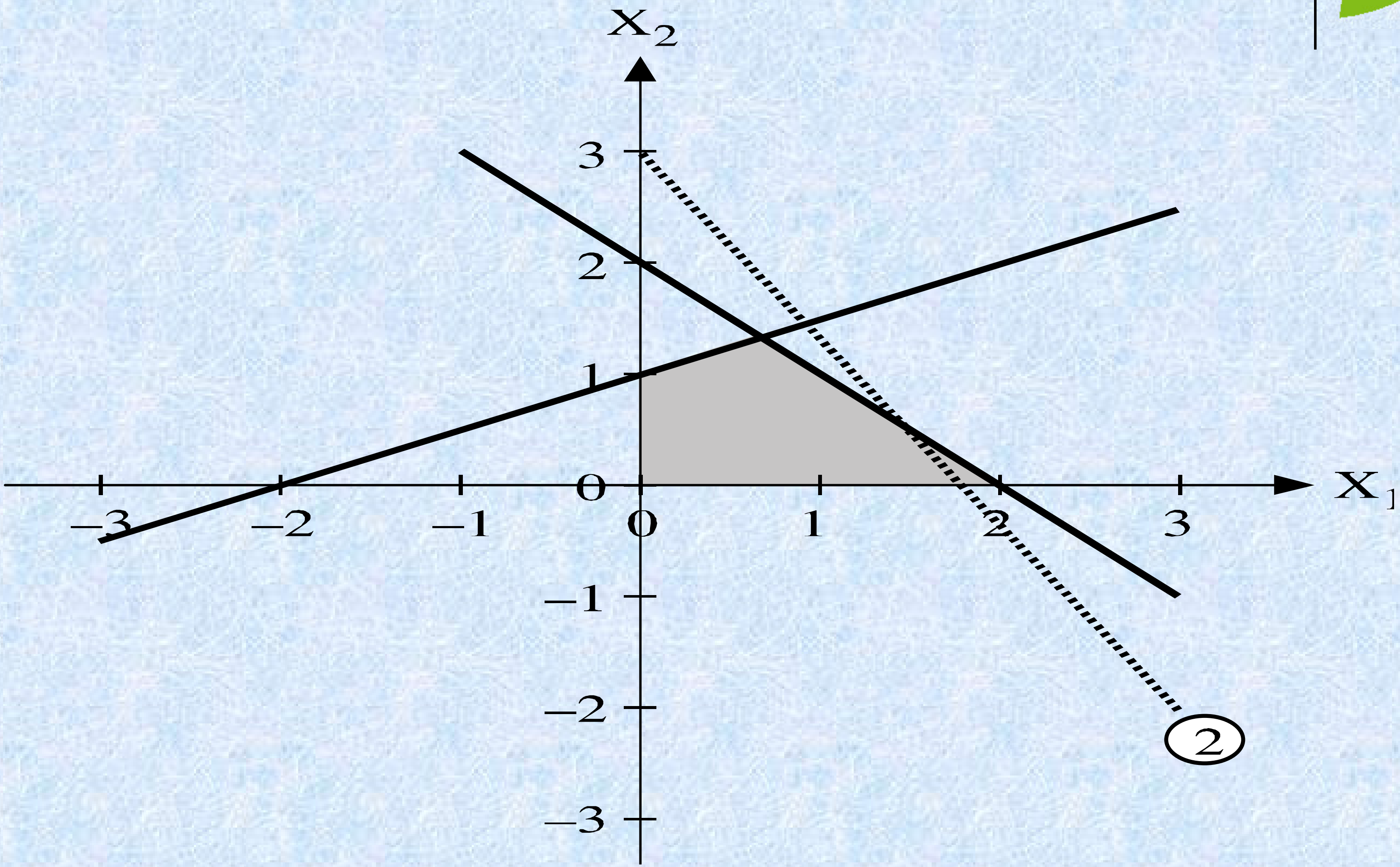
- נבדוק אם כן את ערכי פונקצית המטרה בכל הקדקודים של התחום האפשרי ונמצא היכן ערכה הוא הגבוה ביותר.
- התוצאות מרוכזות בטבלה להלן.

X_1	X_2	Z
0	0	-7
2	0	3
0	1	-4
$^2/_3$	$^4/_3$	$^1/_3$

- כלומר, הפתרון האופטימלי הוא $Z = 3$ והוא מתקבל בקדקוד $(X_1 = 2 , X_2 = 0)$.
- קיבלנו **<u>פתרון אופטימלי יחיד בקדקוד</u>**.
- **<u>דרך נוספת למציאת פתרון אופטימלי</u>**
- נשרטט את היטלי הגבהים של פונקצית המטרה.
- היטל גובה או קו גובה של פונקציה הוא אוסף כל הנקודות במישור שעבורן ערך פונקצית המטרה קבוע

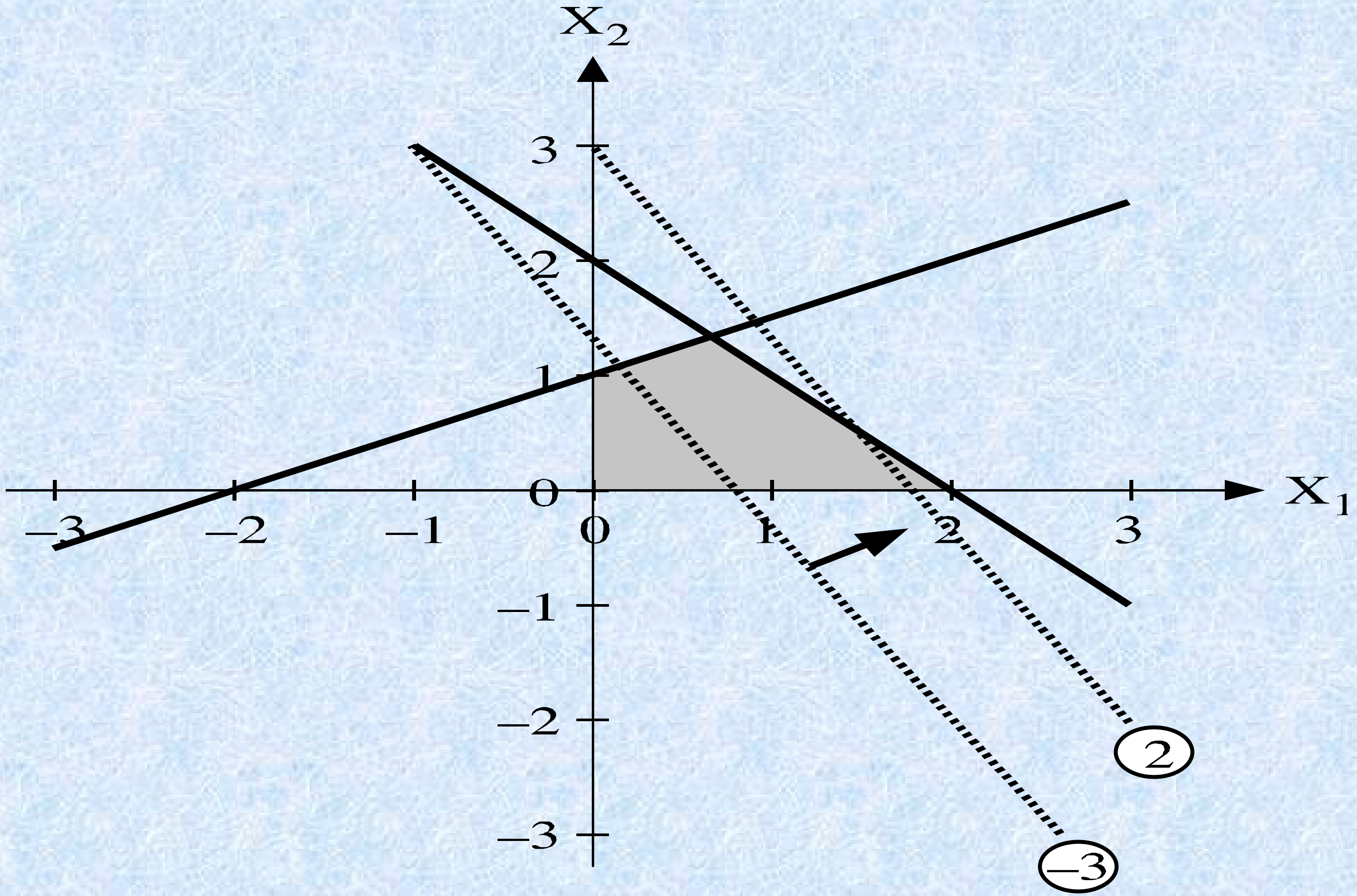
- המידע מתאר את ערך פונקצית המטרה (גובה פונקצית המטרה) במקומות שונים, בתוך תחום הפתרונות האפשריים.
- כדי להוסיף קווי גובה לתרשים שהתקבל עד כה (התחום האפשרי), נבחר קו גובה מסוים, למשל, קו גובה 2.
- קו זה יציין את כל נקודות המישור שעבורן ערך פונקצית המטרה הוא 2.

- עבור הגובה $Z = 2$: נקבל $2 = 5X_1 + 3X_2 - 7$
- כלומר:
$$X_2 = -\frac{5}{3}X_1 + 3$$
- עבור הגובה שבחרנו קיבלנו משוואת קו ישר, בעל שיפוע השווה ל- $-\frac{5}{3}$.
- עתה, כל שעלינו לעשות הוא לשרטט את קו הגובה המתואר על-ידי משוואת הקו הישר שקיבלנו על השרטוט הקיים.



x_2
3
2
1
0
−1
−2
−3
x_1
−3
−2
−1
0
1
2
3
2

- אם נרצה לשרטט קווי גובה נוספים, נוכל לשרטט ישרים נוספים **בעלי אותו שיפוע**, כלומר, קווים מקבילים לקו הקיים.
- באיור הבא הוספנו קו גובה המתאר את כל הנקודות עבורן ערך פונקצית המטרה הוא 3-.
- ערך קו הגובה מתקבל על-ידי הצבת זוג ערכים המייצג את אחת הנקודות על קו הגובה.



X2
X1
3
2
1
0
–1
–2
–3
–3
–2
–1
0
1
2
3
2
–3

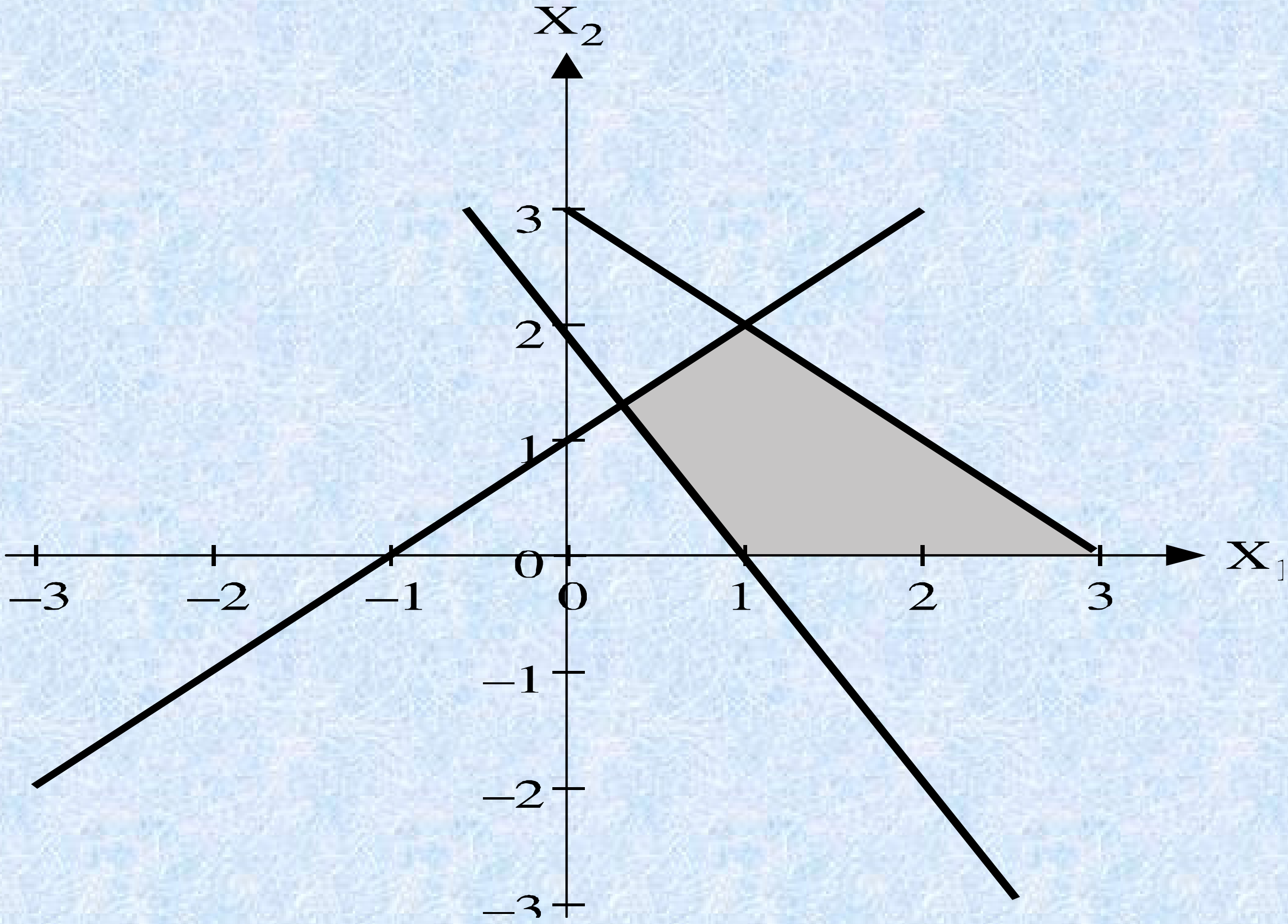
- החץ בחלק הימני-התחתון של האיור מתאר את כיוון העלייה של פונקציית המטרה.
- כעת נוכל לנתח את הפתרון של מודל התכנון הליניארי.
- התבוננו באיור: כדי למצוא את הנקודה שבה פונקציית המטרה מקבלת את הערך המקסימלי, יש להתקדם רחוק ככל האפשר בכיוון עליית פונקציית המטרה.

- אולם, עלינו לזכור כי כל ההתקדמות צריכה להיעשות בתוך תחום הפתרונות האפשריים, עד שנגיע לפינה של תחום הפתרונות האפשריים.
- בדוגמה זו הנקודה $(2,0)$. כלומר, הפתרון האופטימלי הוא $X_1=2$ ו-$X_2=0$.
- קיבלנו **פתרון אופטימלי יחיד בקדקוד.**

- **שאלה 2.2**
- נתון מודל התכנון הליניארי הזה:

- **Minimize** $Z = 5X_1 - X_2$
- **Subject to :**
- 1. $X_2 - X_1 \le 1$
- 2. $X_1 + X_2 \le 3$
- 3. $2X_1 + X_2 \ge 2$
- 4. $X_1 \ge 0$ 5. $X_2 \ge 0$

- א. מצאו את תחום הפתרונות האפשרי;
- ב. מצאו את הפתרון האופטימלי על-ידי חישוב ערכי פונקצית המטרה עבור כל הקדקודים בתחום האפשרי;
- ג. מצאו את הפתרון האופטימלי בשיטת היטלי הגבהים.
- **השלב הראשון – הגדרת התחום האפשרי:**



x2
3
2
1
0
x1
–3
–2
–1
0
1
2
3
–1
–2
–3

- באיור רואים כי האילוץ על הפתרון $X_2 \geq 0$ אינו תורם מידע לגבי תחום הפתרונות האפשריים משום שגם ללא התחשבות באילוץ הזה תחום הפתרונות האפשריים לא היה משתנה.
- אילוץ על הפתרון אשר אינו תורם מידע לגבי תחום הפתרונות האפשריים נקרא ***אילוץ עודף***
- קיבלנו איפוא **תחום אפשרי חסום.**

ב. השלב השני – מציאת הפתרון האופטימלי:

- בתחום האפשרי קיימים ארבעה קדקודים והם:
- $X_1 = 1 , X_2 = 0$ ובנקודה זו $Z = 5$
- $X_1 = 3 , X_2 = 0$ ובנקודה זו $Z = 15$
- $X_1 = 1, X_2 = 2$ ובנקודה זו $Z = 3$
- $X_1 = \frac{1}{3} , X_2 = \frac{4}{3}$ ובנקודה זו $Z = 1/3$

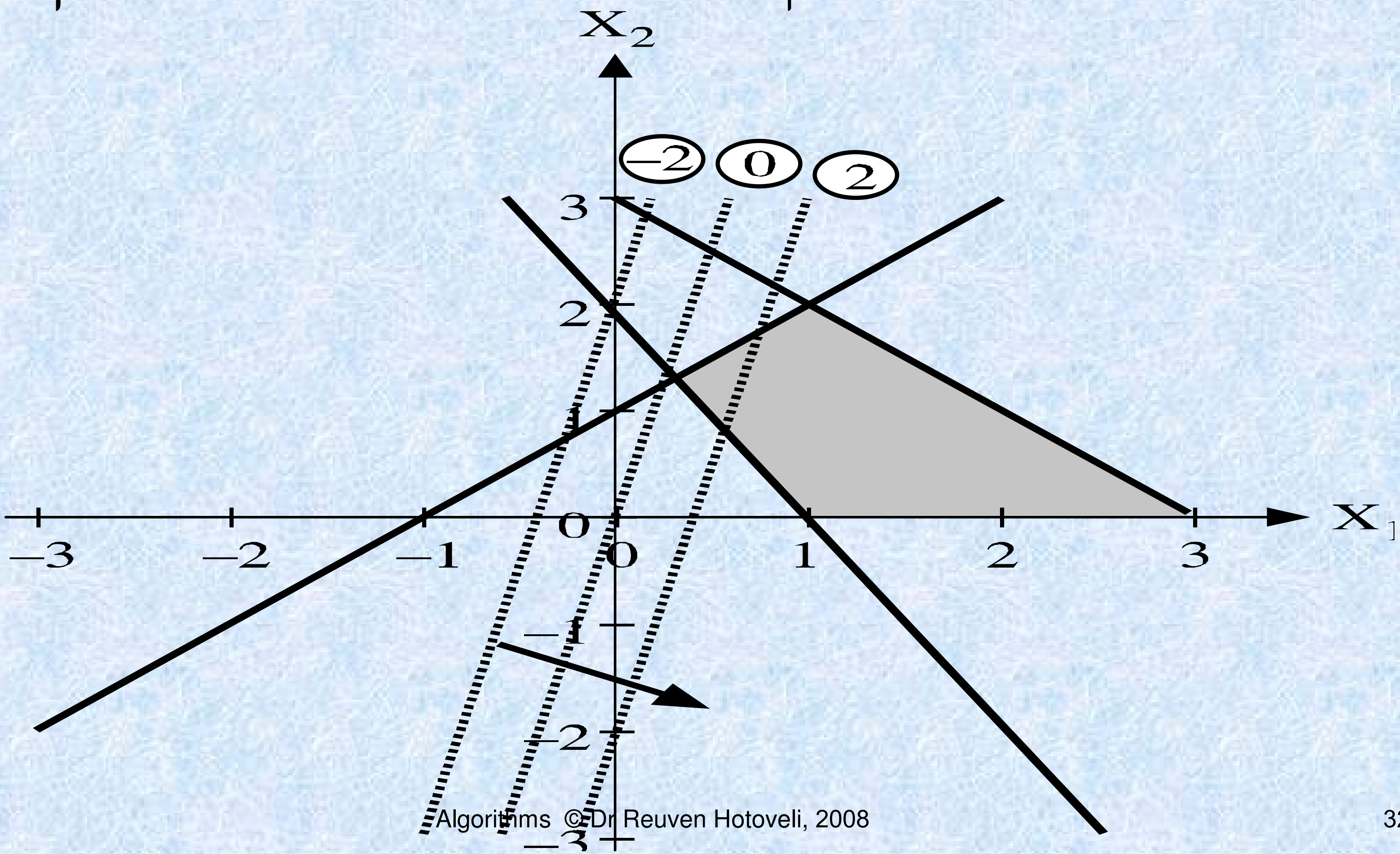
- כלומר, הפתרון האופטימלי הוא: Z=1/3 (בעיית מינימום) והוא מתקבל בקדקוד
$(X_1 = 1/3 \ , X_2 = 4/3)$.

קיבלנו **<u>פתרון אופטימלי יחיד בקדקוד</u>.**

- **ג. מציאת הפתרון האופטימלי בשיטת היטלי הגבהים** – נשרטט את היטלי הגבהים של פונקצית המטרה: עבור הגובה Z = 0: $0 = -X_2 + 5X_1$

- כלומר: $X_2 = 5X_1$

- והוספת ההיטלים של קווי הגובה 2 ו- 2-לאיור תיתן:



- החץ בתחתית האיור מתאר את כיוון העלייה של פונקציית המטרה
- ניתן לראות זאת גם על-ידי הגבהים של ההיטלים השונים – גובה ההיטל גדל ככל שמתקדמים ימינה בכיוון החיובי של הציר X_1.
- על-פי ההיטלים, ניתן לזהות שהערך של פונקציית המטרה עולה כאשר נעים בכיוון החיובי של הציר X_1.

- ניתוח הפתרון: במודל התכנון הליניארי הנתון נדרשנו למצוא את נקודת המינימום של פונקצית המטרה
- **הפתרון הוא הנקודה הקיצונית ביותר של תחום הפתרונות האפשריים בכיוון הירידה של פונקצית המטרה.**
- כלומר, הפתרון האופטימלי הוא: $Z=1/3$ והוא מתקבל בקדקוד $(X_1 = 1/3 , X_2 = 4/3)$.
- קיבלנו **<u>פתרון אופטימלי יחיד בקדקוד</u>**.

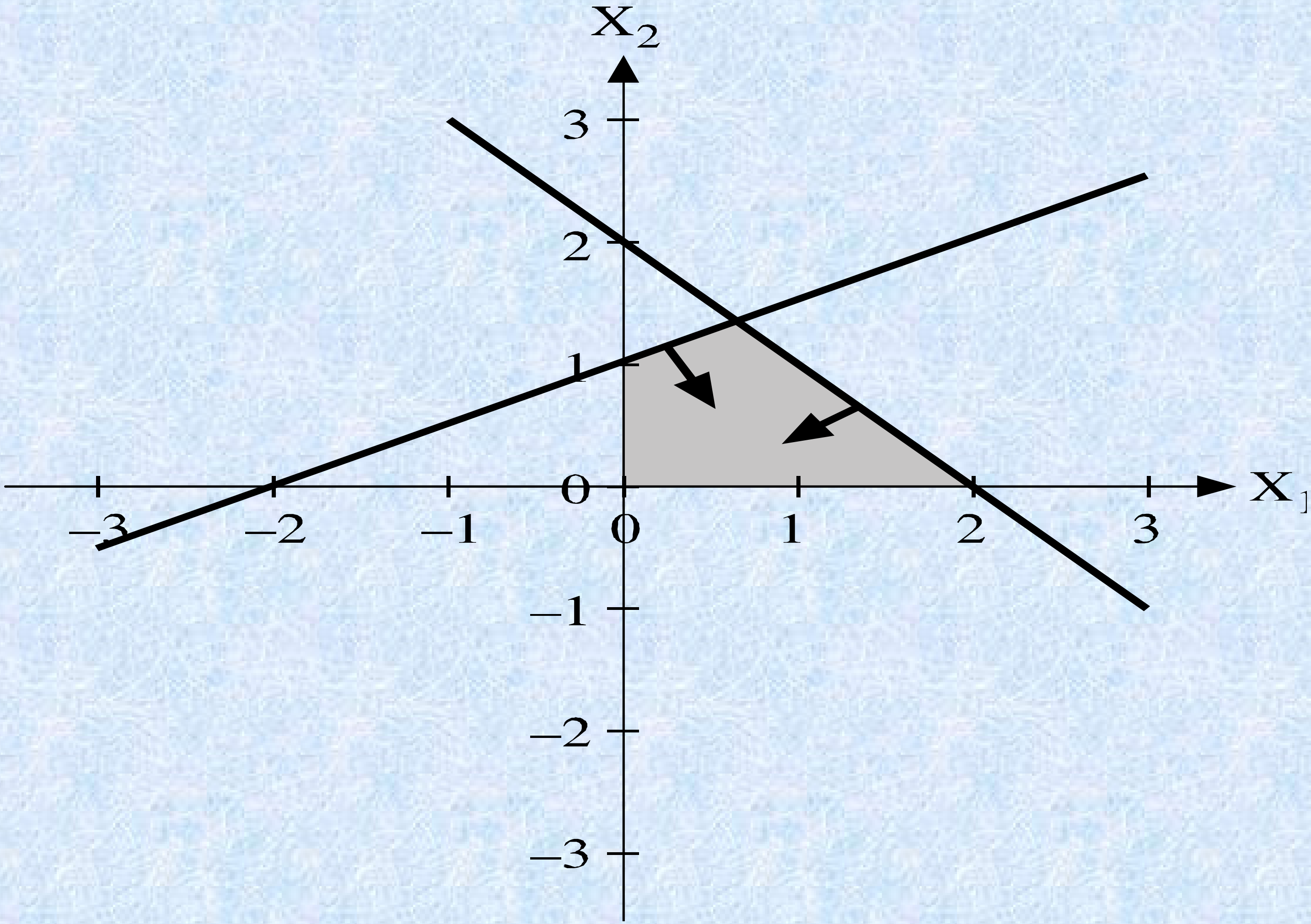
- בדוגמה שראינו, תחום הפתרונות האפשריים היה בעל צורת **מצולע חסום**, והתקבל **פתרון אופטימלי יחיד בקדקוד**.
- נראה כי קיימים מקרים שבהם תחום הפתרונות חסום, והפתרון האופטימלי נמצא על צלע שלמה (הכוללת שני קדקודים) של תחום הפתרונות האפשריים.
- כלומר, הפתרון האופטימלי הוא מרובה (*קיים מספר* ***אינסופי של פתרונות אופטימליים***).

מס' אינסופי של פתרונות אופטימליים

- **דוגמה 2.3** – פתרון גרפי לבעיית תכנון ליניארי בעלת פתרונות אופטימליים מרובים

- **Maximize** $Z=2X_1+2X_2$
- **Subject to :**
- 1. $X_1 + X_2 \le 2$
- 2. $-X_1 + 2X_2 \le 2$
- 3. $X_1 \ge 0$
- 4. $X_2 \ge 0$

שלב ראשון – הגדרת התחום האפשרי



שלב שני – מציאת הפתרון האופטימלי

X_1	X_2	Z
0	0	0
2	0	4
0	1	2
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	4

- ניתוח התוצאה שקיבלנו: בשני קדקודים ערכה של פונקציית המטרה מקסימלי.
- במקרה זה קיימים **פתרונות מרובים** למודל התכנון הליניארי, שערכם הוא Z=4 והם מתקבלים על הצלע בין הקדקודים $(X_1 = 2\ \ ,X_2 = 0)$ ו- $(X_1 = 2/3\ \ ,X_2 = 4/3)$.
- **שימו לב,** מקדמי פונקציית המטרה והמקדמים של האילוץ הראשון נבדלים זה מזה ביחס של 1:2 (הגרף של פונקציית המטרה מקביל לגרף של האילוץ הראשון, כלומר בעלי אותו שיפוע).

__הרחבה__ אפשר להוכיח כי הנקודה $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ שייכת לצלע

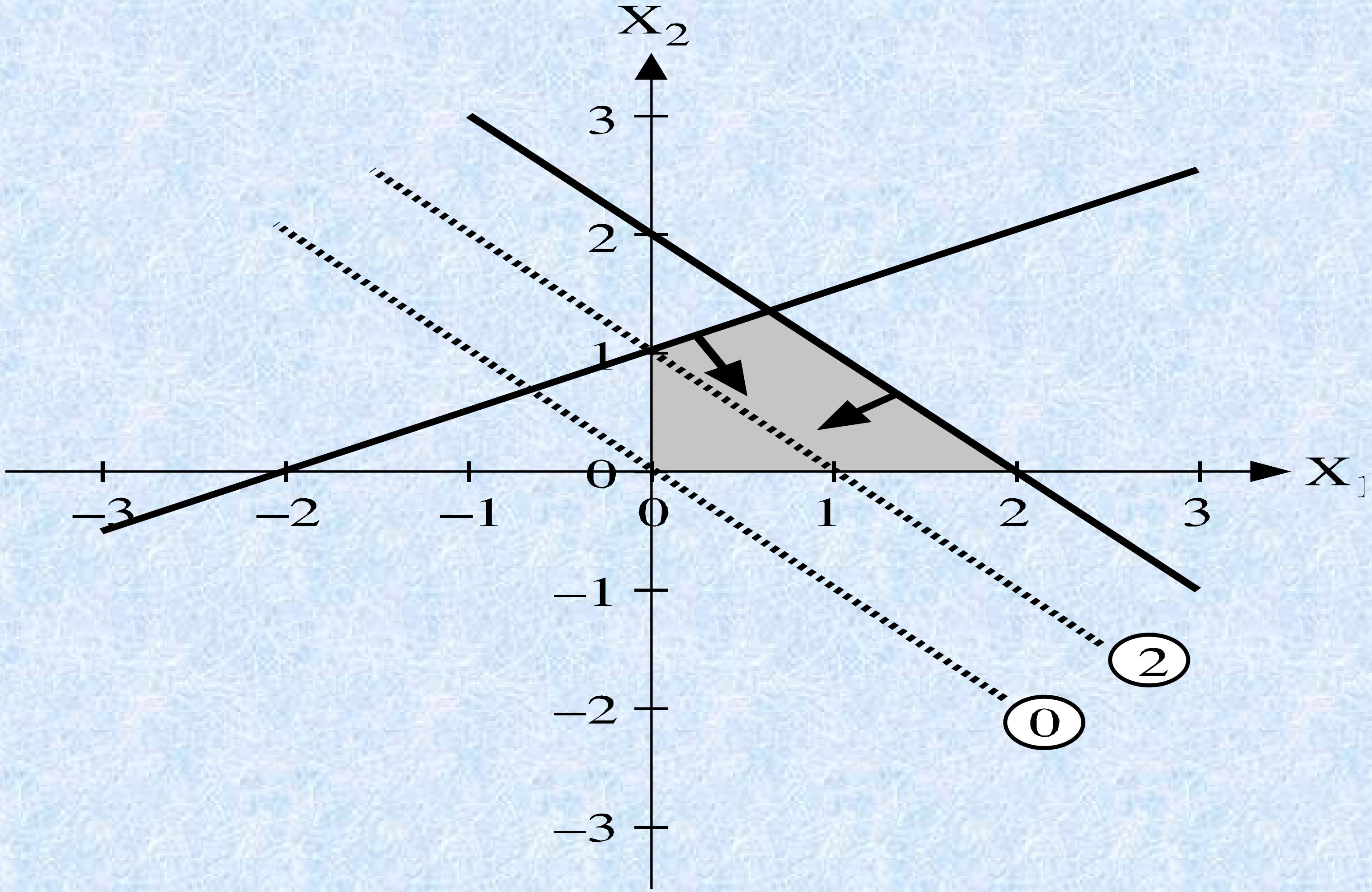
שבין הקדקודים $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

אם

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

- עבור $0 \le a \le 1$.

- מצא את הפתרון האופטימלי עבור הדוגמה 2.3 בשיטת היטלי הגובה.
- נשרטט את היטלי הגבהים של פונקצית המטרה:
- נבחר את הגובה 0. עבור הגובה $Z = 0$:
- $0 = 2X_2 + 2X_1$ כלומר $X_2 = - X1$
- הוספת ההיטלים של קווי הגובה 0, ו-2 לאיור תיתן:



X2
3
2
1
0
X1
−3
−2
−1
0
1
2
3
−1
−2
−3
2
0

- שימו לב כי היטלי קווי הגובה מקבילים לקו התוחם את תחום הפתרונות האפשריים מימין.
- כיוון שהפתרון האופטימלי הוא נקודת המקסימום של פונקצית המטרה, הפתרון הוא הנקודה הקיצונית ביותר של תחום הפתרונות האפשריים בכיוון העלייה של פונקצית המטרה (המסומן בחץ).

- נשים לב כי היטלי קווי הגובה של פונקצית המטרה מקבילים לישר המתאר את האילוץ על הפתרון $X_1 + X_2 \le 2$
- על כן גם קו זה הוא אחד מהיטלי הגובה של פונקצית המטרה.
- כל הנקודות הנמצאות על הקו הישר המתאר את האילוץ על הפתרון $X_1 + X_2 \le 2$ הן נקודות אשר בהן פונקצית המטרה מקבלת את הערך $Y = 4$

- לא ניתן למצוא שום נקודה בתחום הפתרונות האפשריים אשר מעליה פונקציית המטרה מקבלת ערך גדול יותר.
- במקרה זה קיימים פתרונות מרובים למודל התכנון הליניארי, וניתן לייצגם על-ידי משוואת הקו הישר: $2X_1 + 2X_2 = 4$
- אולם, משוואה זו מתארת קו-ישר אינסופי, ואילו הפתרונות האופטימליים הם הנקודות הנמצאות בתחום הפתרונות האפשריים בלבד.
- כלומר קטע סופי של הקו הישר התחום על-ידי שני הקדקודים $(X_1 = 2,\ X_2 = 0)$ ו- $(X_1 = 2/3,\ X_2 = 4/3)$

הערה:

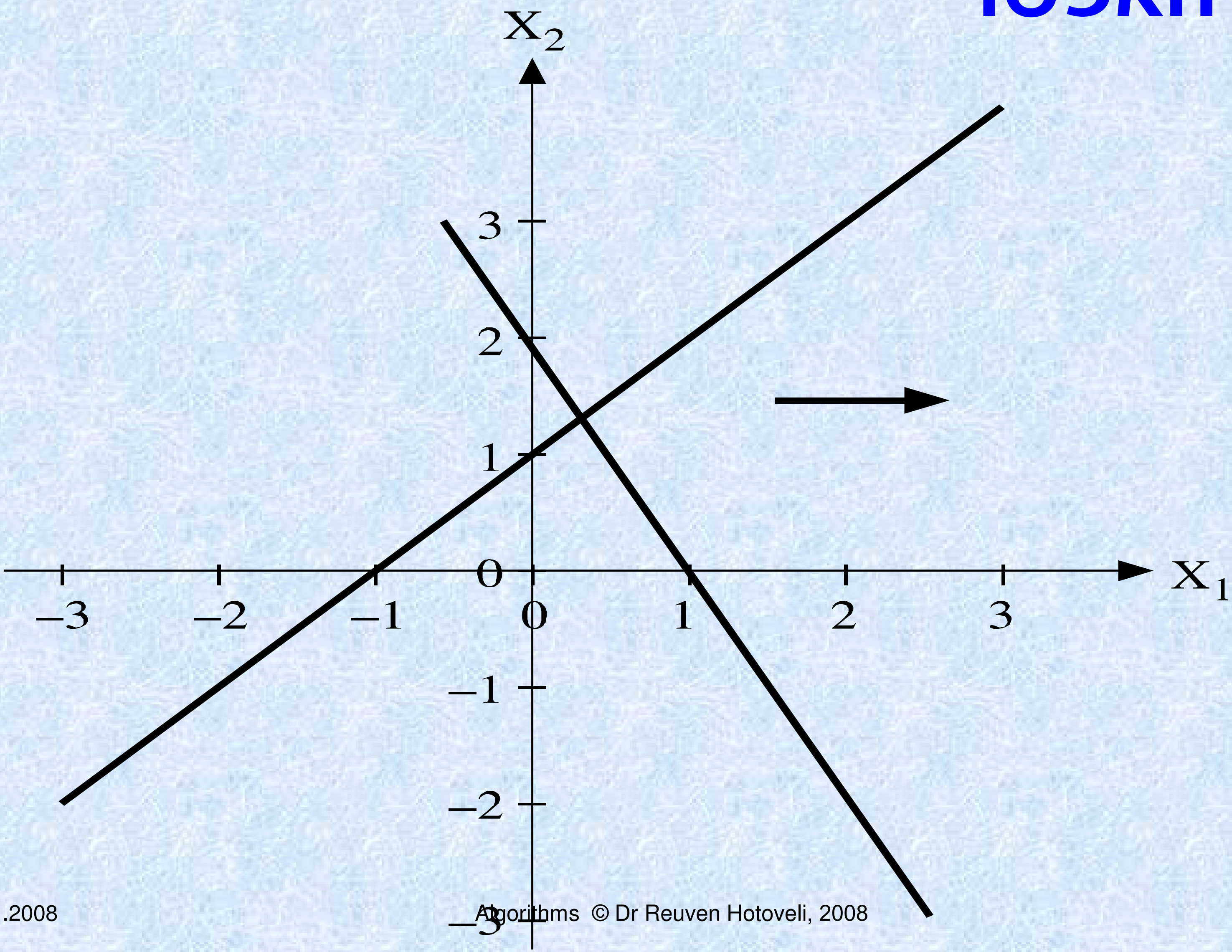
- שני קווים ישרים הם מקבילים, אם היחס בין מקדמי המשתנים בשתי המשוואות המתארות אותן הוא זהה. כלומר. עבור משוואת הקווים הישרים שלהלן:
- $AX_1 + BX_2 = C$
- $DX_1 + EX_2 = F$
- התנאי המספיק וההכרחי להיותם מקבילים הוא: $\dfrac{A}{D} = \dfrac{B}{E}$
-

- **מסקנה:**
- כאשר היטלי הגובה של פונקצית המטרה מקבילים לקו הישר המתאר את האילוץ על הפתרון בכיוון עלייה או בכיוון ירידה של פונקצית המטרה (בהתאם לדרישה), כל הנקודות הנמצאות על אותו קו ישר, ובתחום הפתרונות האפשריים, הם פתרונות אופטימליים לבעיית ההחלטה.

פתרון גרפי של בעיית תכנון ליניארי בעלת תחום אפשרי לא-חסום

- **דוגמה 2.4** – פתרון גרפי של בעיית תכנון ליניארי בעלת תחום אפשרי לא-חסום . נתונה הבעיה הזאת:
- **Minimize** $Z = 5X_1 - X_2$
- **Subject to:**
- 1) $X_2 - X_1 \le 1$
- 2) $2X_1 + X_2 \ge 2$
- 3) $X_1 \ge 0$
- 4) $X_2 \ge 0$

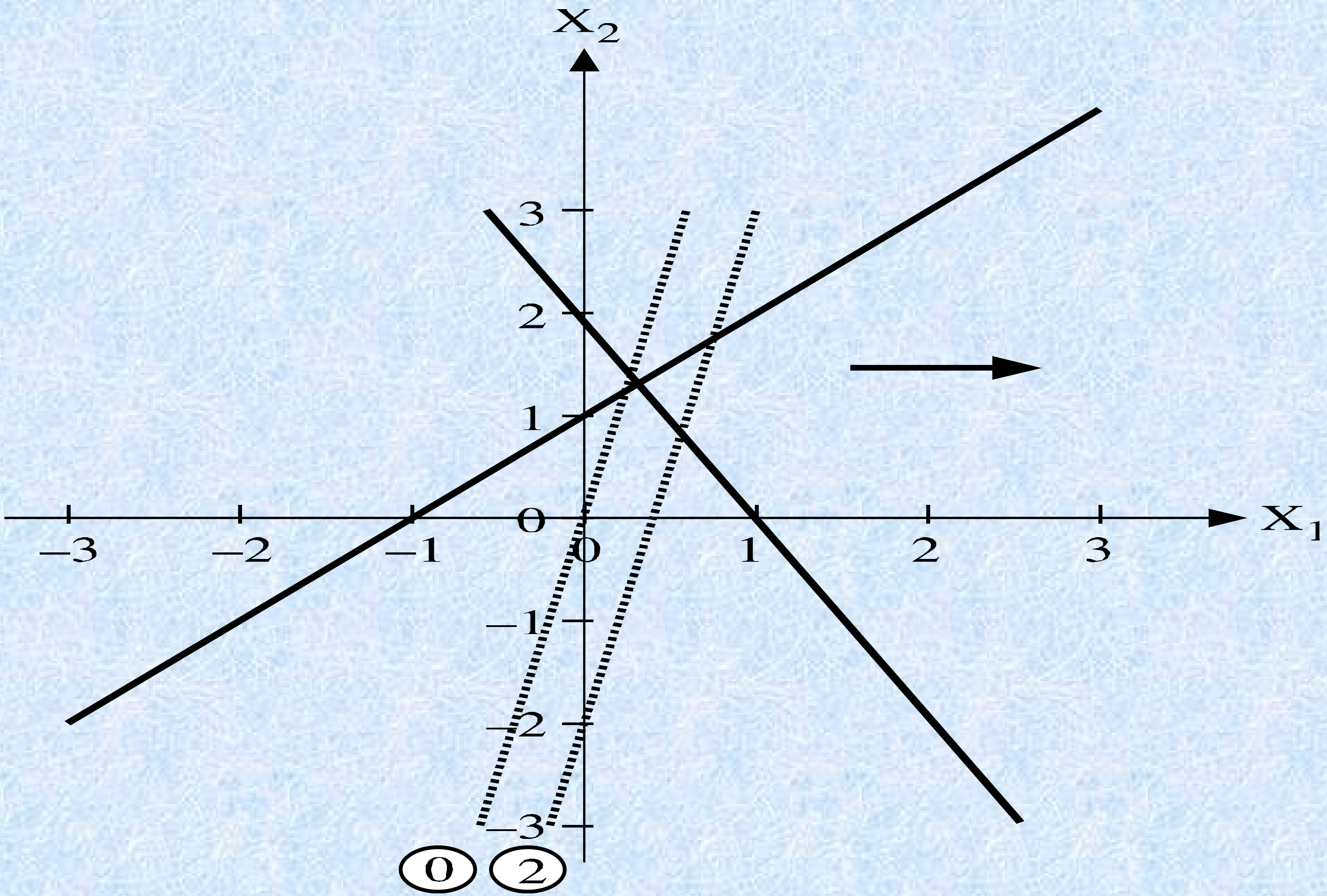
שלב ראשון – הגדרת התחום האפשרי



- בדוגמה זו תחום הפתרונות האפשריים המתקבל מהאילוצים על משתני ההחלטה אינו תחום חסום
- כי כל הנקודות בכיוון החץ המופיע באיור מקיימות את האילוצים.
- תחום זה נמשך לאינסוף (כפוף לאילוצים על משתני ההחלטה $X_2 - X_1 \le 1$ ו-$X_1 \ge 0$).

- תחום פתרונות אפשריים כזה נקרא **תחום לא חסום**
- לכאורה לפנינו משימה בלתי אפשרית – איתור פתרון אופטימלי בתחום אשר אינו חסום מכל צדדיו.
- ***שלב שני – מציאת הפתרון האופטימלי***
- במקרה של תחום לא חסום, אין טעם לבדוק את הקדקודים כיוון שייתכן כי הפתרון ימצא באינסוף (בחלק הפתוח של התחום) ולא בקדקודים.

- לפיכך, נשתמש בשיטת היטלי הגבהים:
- נשרטט את היטלי הגבהים של פונקציית המטרה:
- נבחר את הגובה 0. עבור הגובה $Z = 0$:
- $0 = -X_2 + 5X_1$
- $X_2 = 5X_1$
- לאחר שנוסיף את ההיטל של קו הגובה 2 לאיור 2.7, נקבל :



x_2
3
2
1
0
−1
−2
−3
x_1
−3
−2
−1
0
1
2
3
0
2

- הבעיה היא בעיית מינימום.
- אם נתקדם בכיוון הירידה של פונקצית המטרה, נקבל שנקודת הפתרון האופטימלי נמצאת בחלקו השמאלי של תחום הפתרונות האפשריים.
- כלומר בנקודת החיתוך של האילוצים על משתני ההחלטה (פתרון יחיד בקדקוד):
- $X_1 - X_2 \leq 1$
- $2X_1 + X_2 \geq 2$

- שהיא הנקודה: $X_1 = \frac{1}{3}$ $X_2 = \frac{4}{3}$
- **שינוי הבעיה**
- מהו הפתרון האופטימלי לבעיית ההחלטה שהובאה לעיל, אם פונקצית המטרה היא :
- $\text{Maximize } Z = -X_2 + 5X_1$ במקום
  $\text{Minimize } Z = -X_2 + 5X_1$?

- לפי כיוון העלייה של פונקציית המטרה, נקודת הפתרון נמצאת על הציר X_1 בכיוון האינסוף.
- כיוון שתחום הפתרונות האפשריים אינו חסום בכיוון הזה, הפתרון האופטימלי הוא הנקודה $(\infty,0)$, כאשר ∞ מסמן אינסוף, כלומר מתקבל ***פתרון לא חסום***.
- הפתרון הזה אינו מעשי בבעיות החלטה מציאותיות.

- **מסקנה**
- כאשר האילוצים על משתני ההחלטה יוצרים תחום לא חסום, כלומר תחום הפתרונות האפשריים חסום מצד אחד (במקרה שלנו חסום מצדו השמאלי התחתון) אך אינו חסום מצדו השני, קיימות שלוש אפשרויות פתרון.
- האחת, **פתרון יחיד בקדקוד** – הפתרון נמצא בצד החסום והוא אחת הנקודות על הקווים הישרים המתארים את האילוצים על משתני ההחלטה.

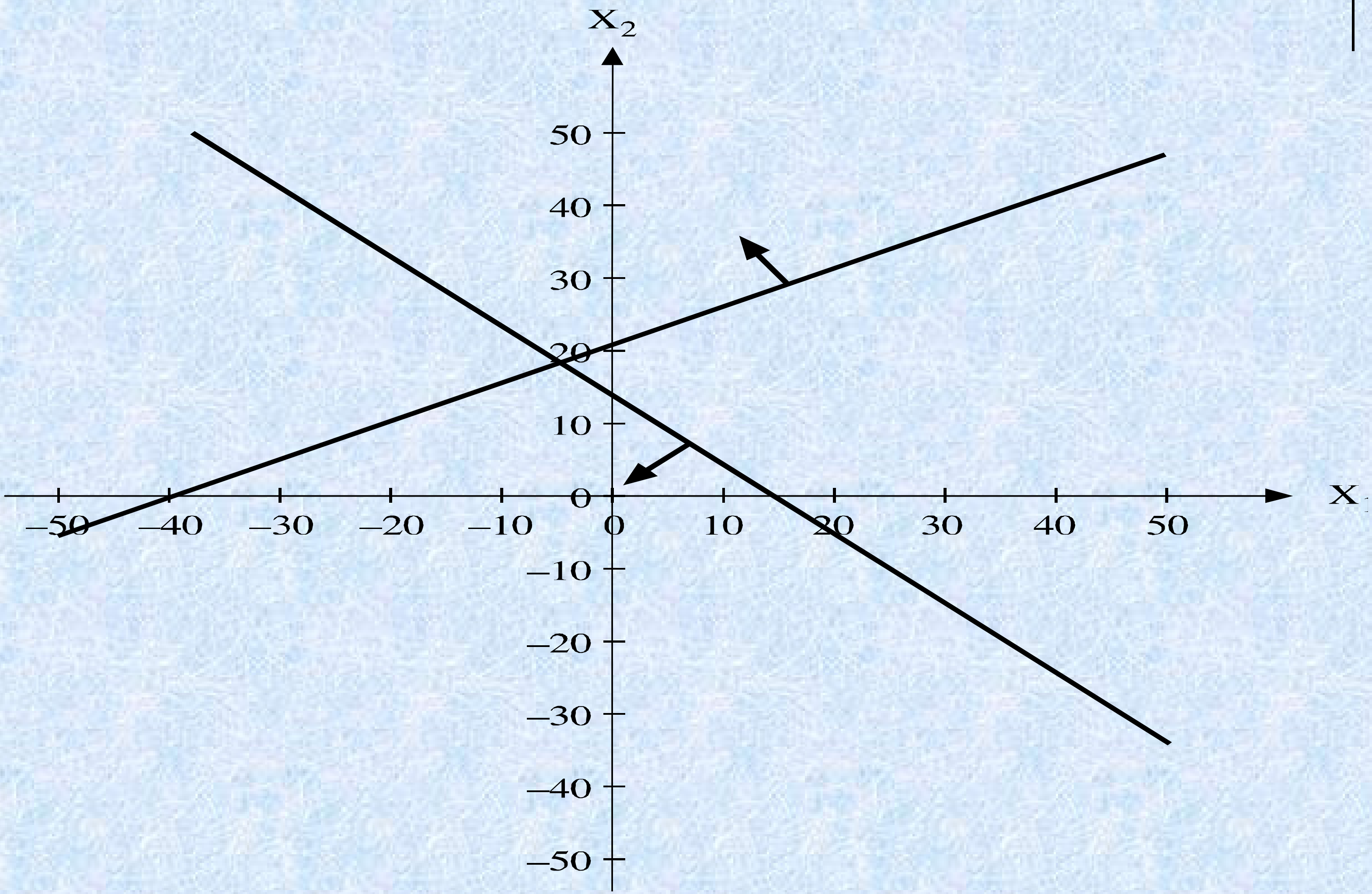
- האפשרות השנייה – הפתרון נמצא בצד הלא חסום, ואז מתקבל **פתרון לא חסום**.
- האפשרות השלישית היא **אינסוף פתרונות או פתרונות מרובים לאורך צלע** של התחום האפשרי.

בעיית תכנון ליניארי בעלת תחום אפשרי ריק

- **דוגמה 2.5** – פתרון גרפי של בעיית תכנון ליניארי בעלת תחום אפשרי ריק. נתונה הבעיה שלהלן:

- **Minimize** $Z = 2X_2 + 4X_1 + 50$
- **Subject to:**
- 1) $-X_1 + 2X_2 \geq 40$
- 2) $X_1 + X_2 \leq 15$
- 3) $X1 \geq 0$
- 4) $X_2 \geq 0$

שלב ראשון – הגדרת התחום האפשרי



- החיתוך של התחומים המוגדרים על-ידי כל משוואות האילוצים על משתני ההחלטה הוא **קבוצה ריקה** (התחום האפשרי ריק).
- כלומר, אין ל- X_1 ו- X_2 ערכים שמקיימים את כל האילוצים, ולכן ***<u>אין פתרון לבעיית התכנון הליניארי</u>***.

- **מסקנה**
- במקרה שבו תחום הפתרונות האפשריים הוא תחום ריק, אין צורך להמשיך בשלב השני של פתרון הבעיה (מציאת הפתרון האופטימלי), משום שממילא לא ניתן להציב בפונקצית המטרה שום נקודה כמועמדת להיות הפתרון האופטימלי. במקרה זה נאמר כי אין פתרון לבעיית ההחלטה.

- בבעיות מציאותיות, האילוצים על משתני ההחלטה נגזרים מהאילוצים על המערכת אשר לה אנו מחפשים את הפתרון האופטימלי.
- כאשר האילוצים על משתני ההחלטה אינם מאפשרים מציאת פתרון כלשהו לבעיית ההחלטה, מוחזרים הנתונים לגורם מקבל ההחלטות

- כדי שישנה את האילוצים על משתני ההחלטה על-ידי הגדרת מערכת בעלת אילוצים אחרים.
- כך לדוגמה, בבעיית ייצור :
- ניתן לחפש ספקים נוספים אשר לא יגבילו את כמות חומרי הגלם,
- או לרכוש מכונות חדשות אשר יאפשרו ייצור כמות רבה יותר של מוצרים.

סיכום הפתרון הגרפי של בעיית תכנון ליניארית **בעלת שני משתני החלטה**

- נסכם את שלבי הפתרון הגרפי :
- 1. **הגדרת התחום האפשרי**: שרטוט תחום הפתרונות האפשריים על-פי האילוצים על משתני ההחלטה;
- 2. **מציאת הפתרון האופטימלי** בעזרת חישוב ערך פונקצית המטרה בקדקודים, או בעזרת שרטוט פונקצית המטרה.

- סוגים של תחומי פתרונות אפשריים:
  - תחום סופי וחסום;
  - תחום לא חסום;
  - תחום ריק.
- סוגים של פתרונות אופטימליים:
  - פתרון יחיד בקדקוד;
  - פתרון מרובה על צלע של התחום האפשרי;
  - פתרון לא קיים.

- אם תחום הפתרונות האפשריים סופי וחסום, ייתכנו שני סוגים של פתרונות אופטימליים:
  - פתרון יחיד בקדקוד .
  - פתרון מרובה על צלע של התחום האפשרי .

אם תחום הפתרונות האפשרי ריק, אזי לא קיים פתרון אפשרי ולכן אין פתרון אופטימלי. (דוגמה 2.5).

- אם תחום הפתרונות האפשריים אינו חסום, ייתכנו שלושה סוגים של פתרונות אופטימליים:
  - פתרון יחיד בקדקוד (דוגמה 2.4).
  - פתרון לא חסום (דוגמה 2.4).
  - פתרון מרובה על צלע (חסומה) של התחום האפשרי (כמו בדוגמה 2.3 אך התחום האפשרי לא חסום).

- יתרונותיו של הפתרון הגרפי נעוצים בפשטות המתמטית היחסית.
- חיסרון- הפתרון הגרפי מוגבל למודל תכנון ליניארי בעל שני משתני החלטה בלבד.
- לפתרון בעיות בעלות מספר רב יותר של משתני החלטה, משתמשים בשיטות מתמטיות, דוגמת שיטת הסימפלקס, שעליה נעמוד בהמשך.

- הפתרונות האופטימליים של בעיית החלטה בעלת תחום פתרונות אפשריים חסום ולא ריק נמצאים על קדקוד אחד, או על המשטח בין מספר קדקודים סמוכים, של תחום הפתרונות האפשריים.
- בניסוח המסקנה לא כללנו את המקרה שבו תחום הפתרונות האפשריים אינו חסום בכיוון הפתרון האופטימלי, משום שהפתרונות של הבעיות האלו אינם מעשיים (לפחות אחד ממשתני ההחלטה מקבל ערך אינסופי).

- נשים לב כי אם הפתרון האופטימלי נמצא על קדקוד יחיד של תחום הפתרונות האפשריים, אזי מדובר על פתרון יחיד לבעיית התכנון הליניארי.
- בעוד שבמקרה שבו מספר קדקודים מהווים את הפתרון האופטימלי, אזי קיימים פתרונות אופטימליים רבים.