תכנון וניתוח אלגוריתמים
הרצאה 11

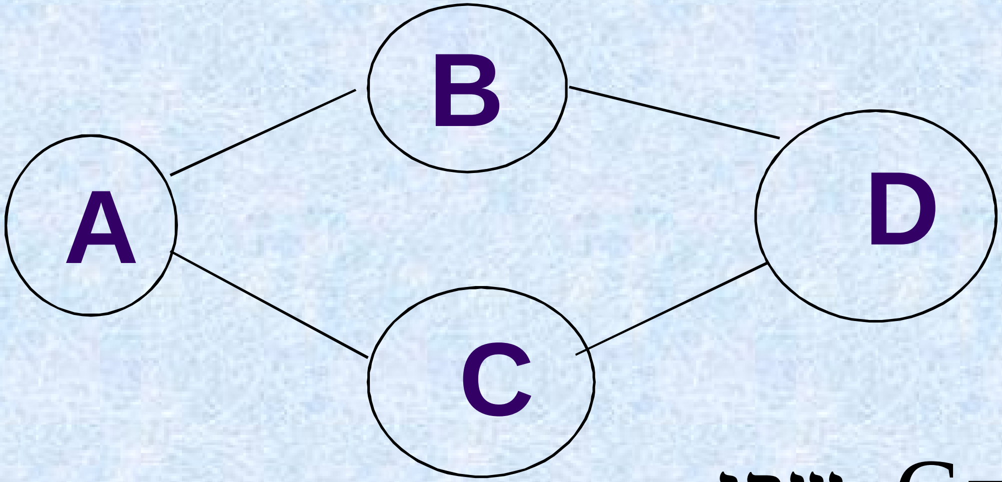
<u>הגדרות ומושגי יסוד</u>

<u>בגרפים</u>

<u>ד"ר ראובן חוטובלי</u>

הגדרות ומושגי יסוד בגרפים

- גרף (graph) מורכב מקבוצה סופית לא ריקה של קודקודים (vertices) ומקבוצת צלעות (edges).
- נהוג לסמן גרף כדלהלן: G=(V,E)
- כאשר G מציין גרף,
- V מציין את קבוצת הקודקודים
- E מציין את קבוצת הצלעות.



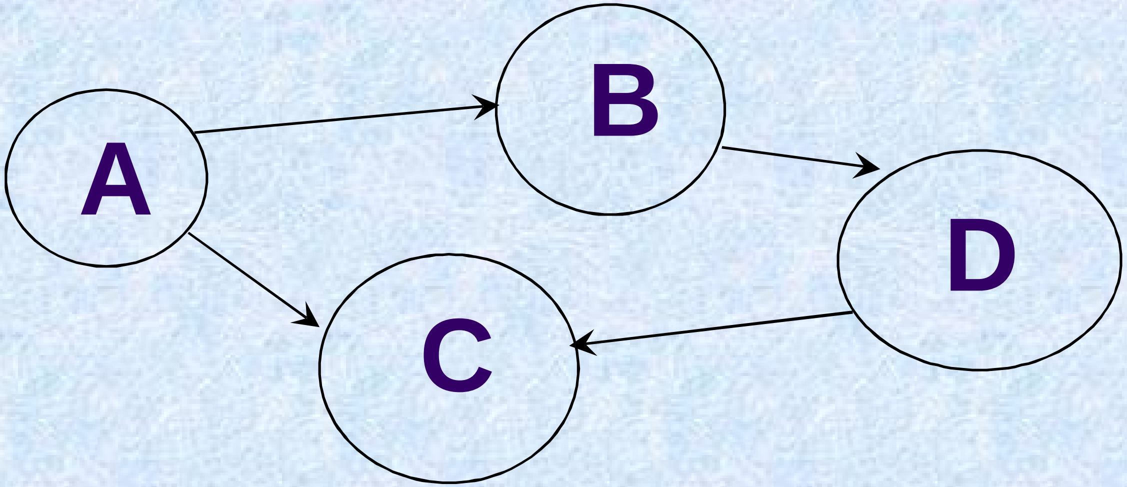
- התרשים הבא :
- מתאר גרף $G=(V,E)$ שבו
- $V=\{A,B,C,D\}$
- $E=\{(A,B),(A,C),(B,D),(C,D)\}$

- * שים לב שכל קשת, הקו המקשר בין זוג הקודקודים בגרף, מצויינת על ידי זוג קודקודים.
- הזוג (A,B) מציין קשת המחברת את הקודקודים A ו- B.
- הזוג (A,C) מציין קשת המחברת את הקודקודים A ו- C.
- הזוג (B,D) מציין קשת המחברת את הקודקודים B ו- D.
- הזוג (C,D) מציין קשת המחברת את הקודקודים C ו- D.

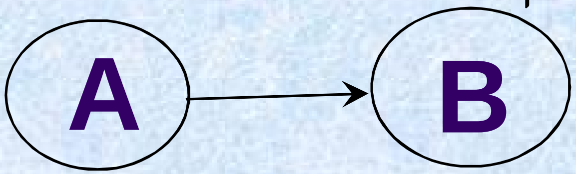
- שים לב שהזוגות אינם זוגות סדורים, כלומר במקום הזוג (A,B) יכולים לציין (B,A).
- עבור הגרף שבתרשים ניתן להגדיר את E כדלקמן:
- E={(B,A),(A,C),(B,D),(D,C)}
- אך ברור כי לא ניתן לשייך ל- E את הזוגות (A,B) וגם (B,A) כי זו אותה קשת ולפי הגדרת הקבוצה כל איבר מופיע בה רק פעם אחת בלבד.

- בנוסף נהוג לסמן גרף גם בצורה אחרת: G=(N,A) כאשר
- N מציין את קבוצת הצמתים (Nodes)
- A מציין את קבוצת הקשתות(Arcs).
- אין הבדלים בין הסימונים.

- <u>גרף מכוון</u> - directed graph – הינו גרף שבו הקשתות מכוונות, המכונה גם קבוצה של זוגות סדורים.
- התרשימים הבאים מתארים שני גרפים מכוונים.
- <u>גרף1</u>:



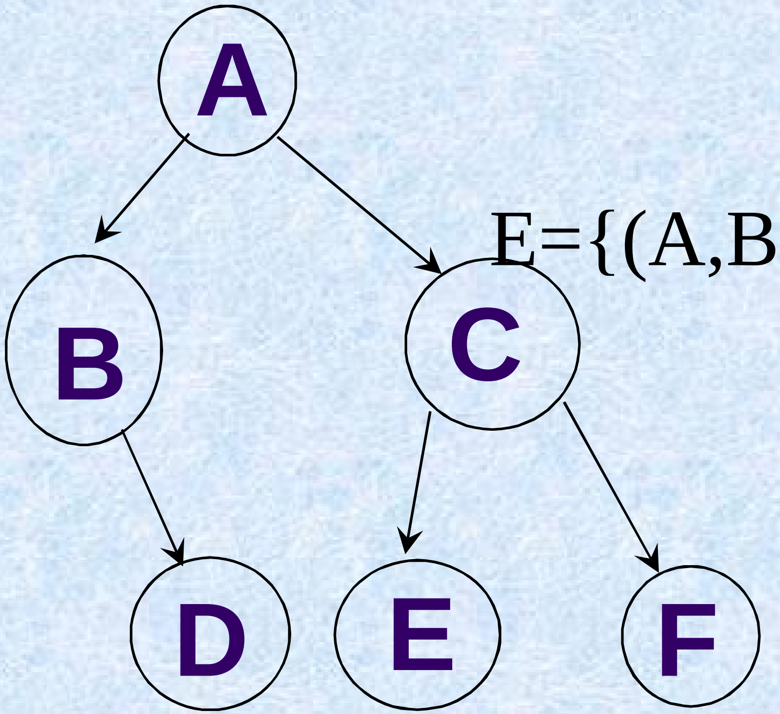
- G=(V,E) שבו
- V={A,B,C,D}
- E={(A,B),(A,C),(B,D),(D,C)}
- * שים לב לזוג סדור אשר מייצג קשת מכוונת.~~BA~~
- נתבונן בקשת:



- קשת זו יוצאת מקודקוד A ונכנסת לקודקוד B, ותצויין על ידי זוג סדור (A,B).

- באופן כלליף
- **הקודקוד הראשון** בזוג הקודקודים הסדור מציין את מקור הקשת (מאיזה קודקוד יוצאת הקשת)
- **והקודקוד השני** בזוג הקודקודים הסדור מציין את היעד של הקשת (לאיזה קודקוד נכנסת הקשת).

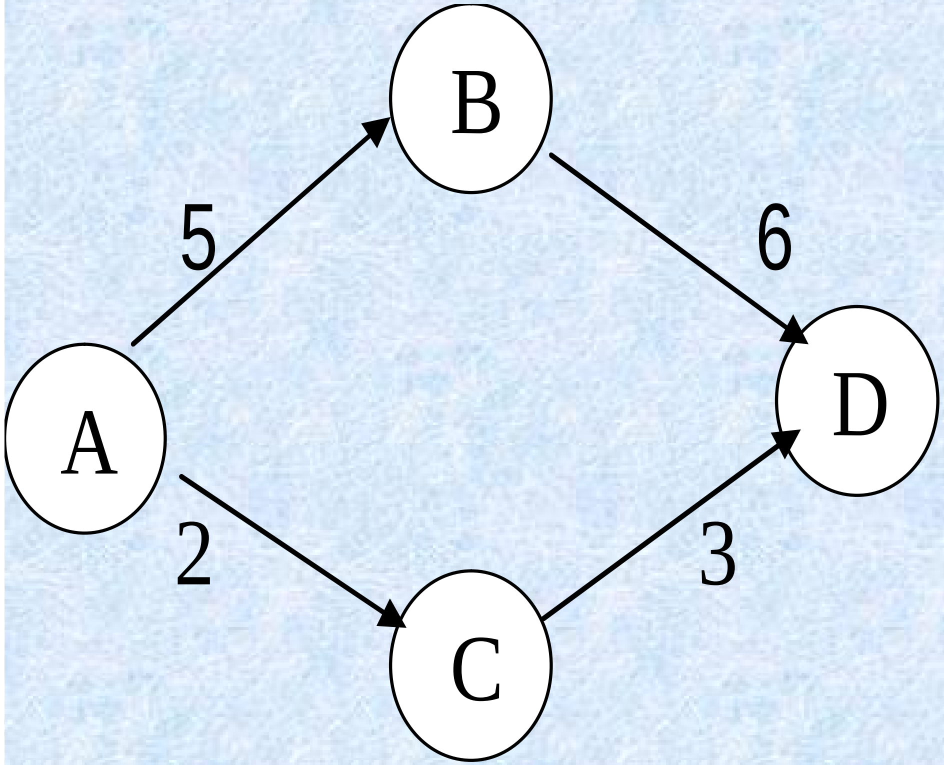
- גרף2: G=(V,E)
- V={A,B,C,D,E,F}
- E={(A,B),(A,C),(B,D),(C,E),(C,F)}



- * שים לב לכך שכל עץ הינו גרף, אך לא כל גרף הינו עץ.

- ***סימון:*** נתון גרף G=(V,E).
- מספר הצמתים בגרף מסומן כ- |V|
- ומספר הקשתות בגרף מסומן כ- |E|.
- ***רשת*** (network) הינה גרף (מכוון/לא מכוון) שבו לכל קשת מיוחס מספר/מספרים.
- המספר/ים המיוחס/ים לקשת נקרא <u>משקל</u>/ות הקשת(weight).
- רשת מכונה גם ***<u>כגרף משוקלל</u>*** (weight graph).

התרשים הבא מתאר רשת:

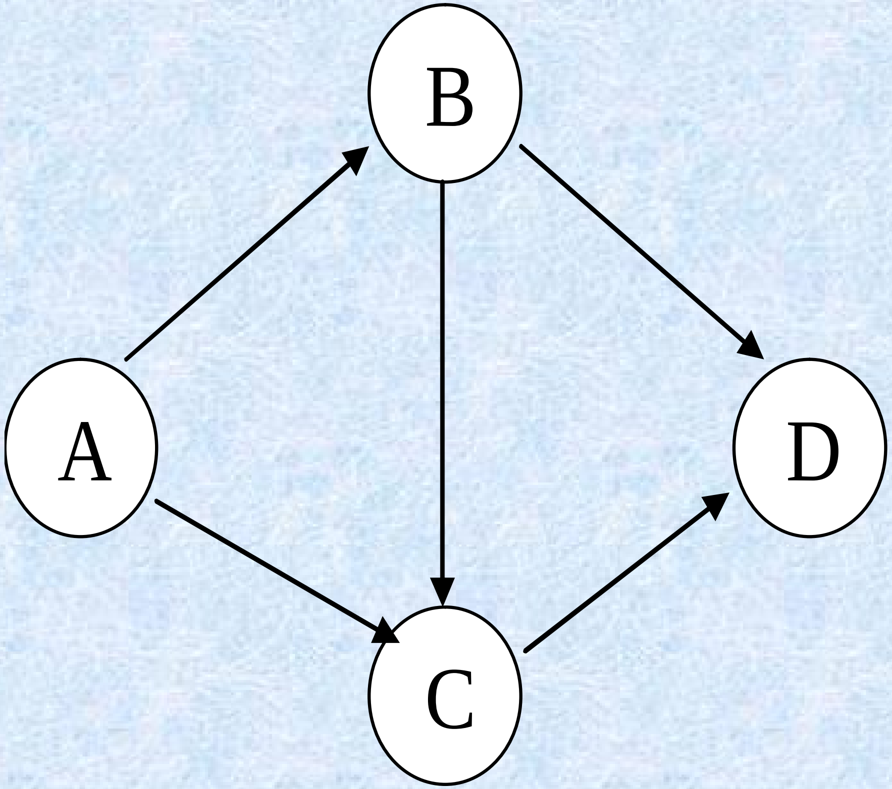


- לכל קשת מיוחסת מספר, אשר יכול לייצג מחיר, מרחק, מקסימום כמות הזרם שניתן להזרים מקודקוד אחד לקודקוד אחר וכ"ו.
- ***צומת a סמוך (או עוקב) (adjacent)*** לקודקוד b אם יש קשת לא מכוונת בין קודקוד a לקודקוד b או אם יש קשת מכוונת מקודקוד b לקודקוד a.

- בתרשים האחרון שראינו:
- קודקוד B סמוך לצומת A מאחר שיש קשת מכוונת מקודקוד A לקודקוד B.
- קודקוד C סמוך לצומת A מאחר שיש קשת מכוונת מקודקוד A לקודקוד C, וכ"ו.

- דרגת הכניסה (indegree) של קודקוד- מספר הקשתות הנכנסות לקודקוד.
- דרגת היציאה (outdegree) של קודקוד- מספר הקשתות היוצאות מקודקוד.
- דרגה(degree) של קודקוד- מספר הקשתות הנוגעות בו.

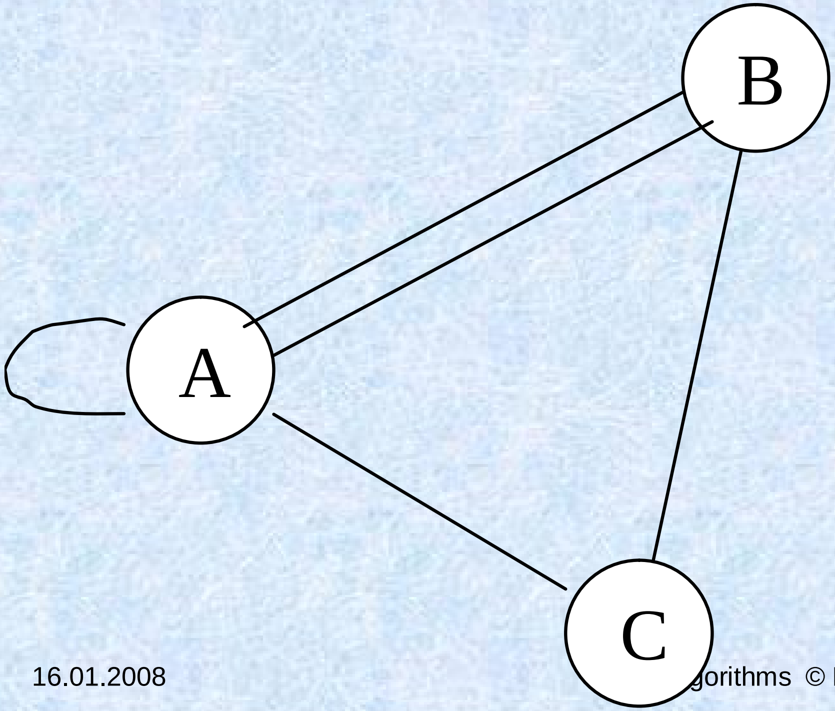
בתרשים הבא:



- לדוגמא , ***בעבור הקודקוד D***
- הדרגה שלו 2,
- דרגת הכניסה שלו 2
- ודרגת היציאה הינה אפס.
- ***בעבור הקודקוד C***
- הדרגה שלו 3,
- דרגת הכניסה שלו 2 ודרגת היציאה שלו היא 1.

- <u>מולטי גרף</u>(multigraph) הינו גרף(מכוון/לא מכוון) בו אנו מרשים יותר מקשת אחת בין שני הקודקודים.
- <u>לולאה</u>(loop) הינה קשת מצומת כלשהו V לאותו צומת, כלומר קשת מהצורה(V,V) נקראת לולאה.
- <u>גרף פשוט</u>- (simple graph) הינו גרף ללא לולאות ושאינו מולטי גרף.

- בתרשים הבא בין הקודקודים A ו- B יש יותר מקשת אחת, לכן הגרף נקרא מולטיגרף. כמו כן בגרף זה ישנה לולאה (A,A):



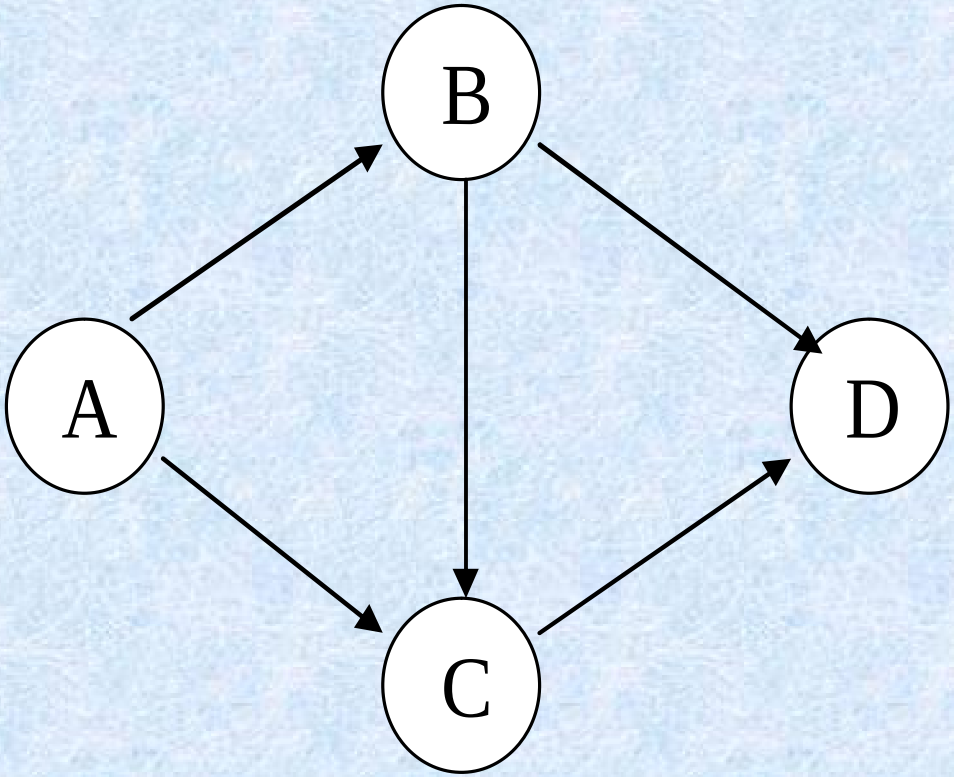
- **הערה:** מעתה נדבר על גרפים פשוטים, אלא אם יצויין במפורש אחרת!!

- ***מסלול(path)*** ***באורך k*** מקודקוד a לקודקוד b הינה סידרה של (k+1) קודקודים בגרף:

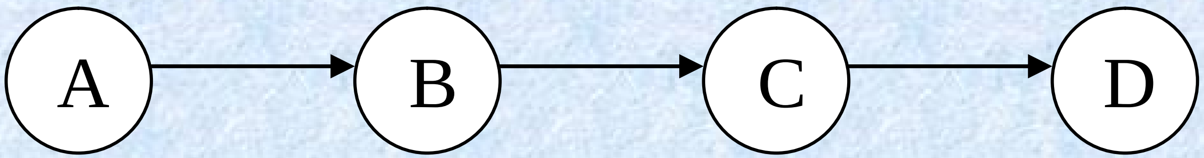
$$n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 \ldots\ldots n_i n_{i+1} \ldots\ldots n_k n_{k+1}$$

- כך שלכל $1 \le i \le k$ קודקוד n_{i+1} סמוך לקודקוד n_i בגרף ו- $n_1 = a$, $n_{k+1} = b$.

בתרשים הבא:

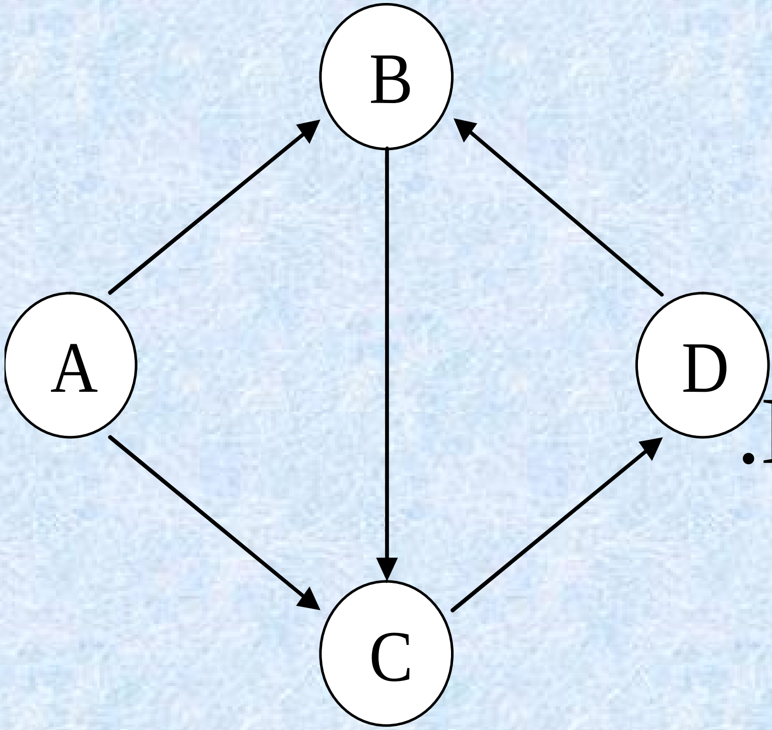


- קיים מסלול באורך 3 מקודקוד A לקודקוד D.
- מאחר שישנה בגרף סידרה של קודקודים באורך 4, A,B,C,D
- וישנה קשת מקודקוד A לקודקוד B
- וישנה קשת מקודקוד B לקודקוד C
- וישנה קשת מקודקוד C לקודקוד D.
- תיאור המסלול:



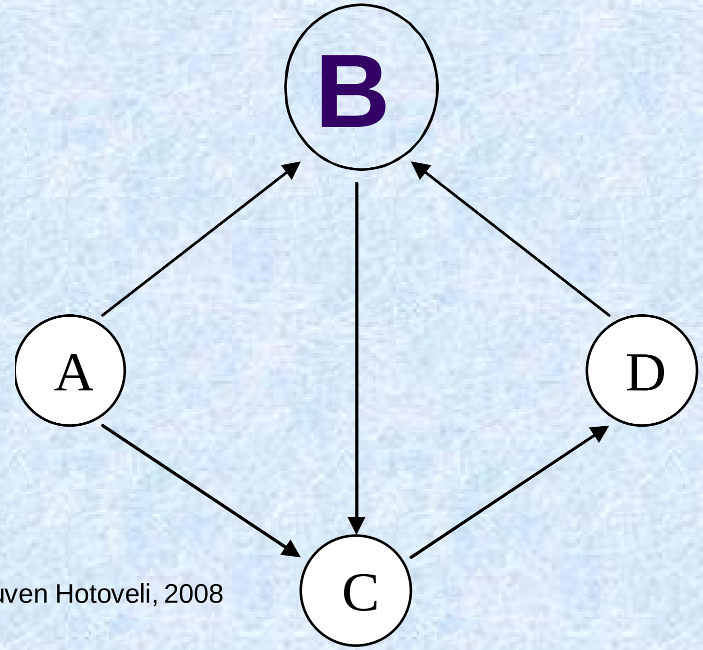
- קודקוד נשיג: קודקוד b יקרא נשיג (להשיג) מקודקוד a בגרף אם קיים מסלול באורך כלשהו בגרף מקודקוד a לקודקוד b.
- בתרשים האחרון, לדוגמא , קודקוד D נשיג מקודקוד A, מאחר שיש מסלול באורך 3 מקודקוד A לקודקוד D.

- מעגל(cycle)- מסלול בגרף מקודקוד כלשהו לעצמו.
- בתרשים הבא:
- יש מעגל מקודקוד B ל- B,
והמסלול הינו: B→D →C→ B.

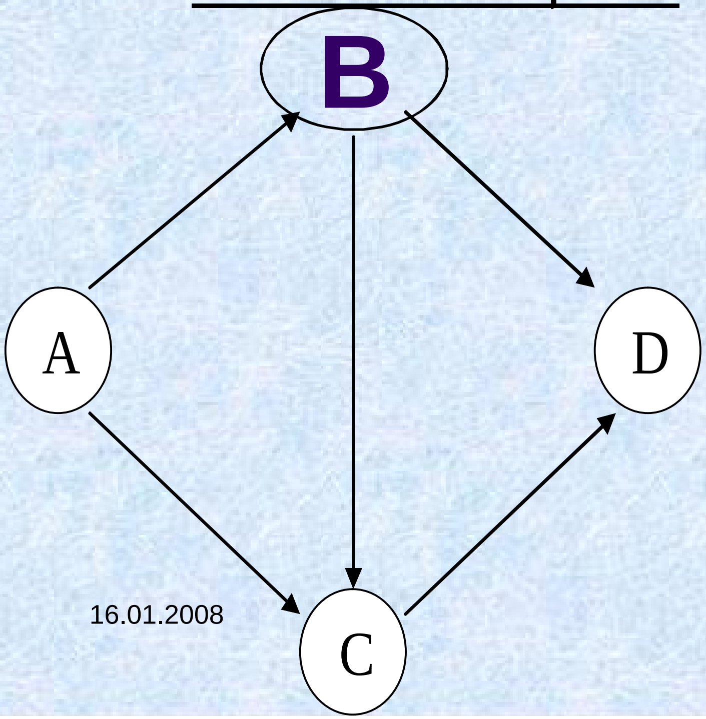


- <u>גרף מעגלי</u>(cycle graph)- הינו גרף שבו לפחות מעגל אחד, אחרת הגרף נקרא <u>לא מעגלי</u>(acycle).

- דוגמא <u>לגרף מעגלי</u>:



דוגמא <u>לגרף לא מעגלי</u>:

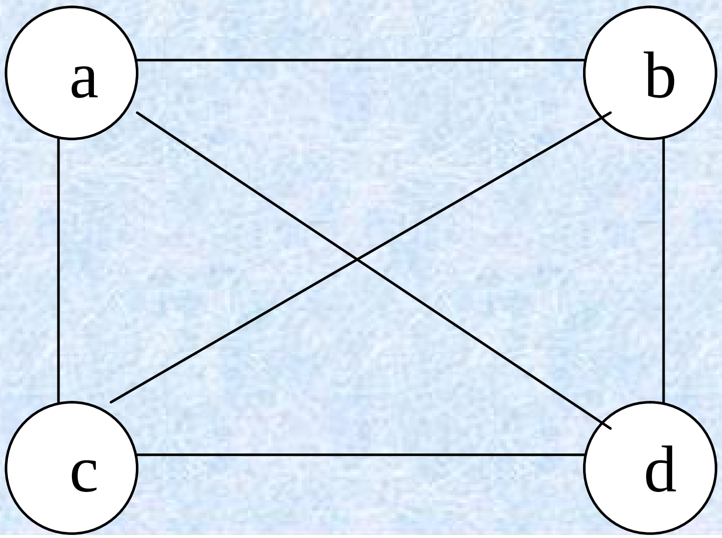


- <u>מסלול פשוט</u> (simple path) – הינו מסלול בו אף קשת של הגרף לא מופיעה יותר מפעם אחת.
- באופן אנלוגי כך ניתן להגדיר גם <u>מעגל פשוט</u>.
- **<u>הערה:</u>**
- מעתה נדבר על מסלולים (מעגלים) פשוטים, אלא אם יצויין במפורש אחרת!!!

- **גרף שלם(או מלא)** (Complete graph) – הינו גרף שבו כל קודקוד מחובר לשאר קודקודי הגרף.
- סימון:

גרף מלא שבו n קודקודים יסומן ב - k_n .

דוגמא ל- K_4

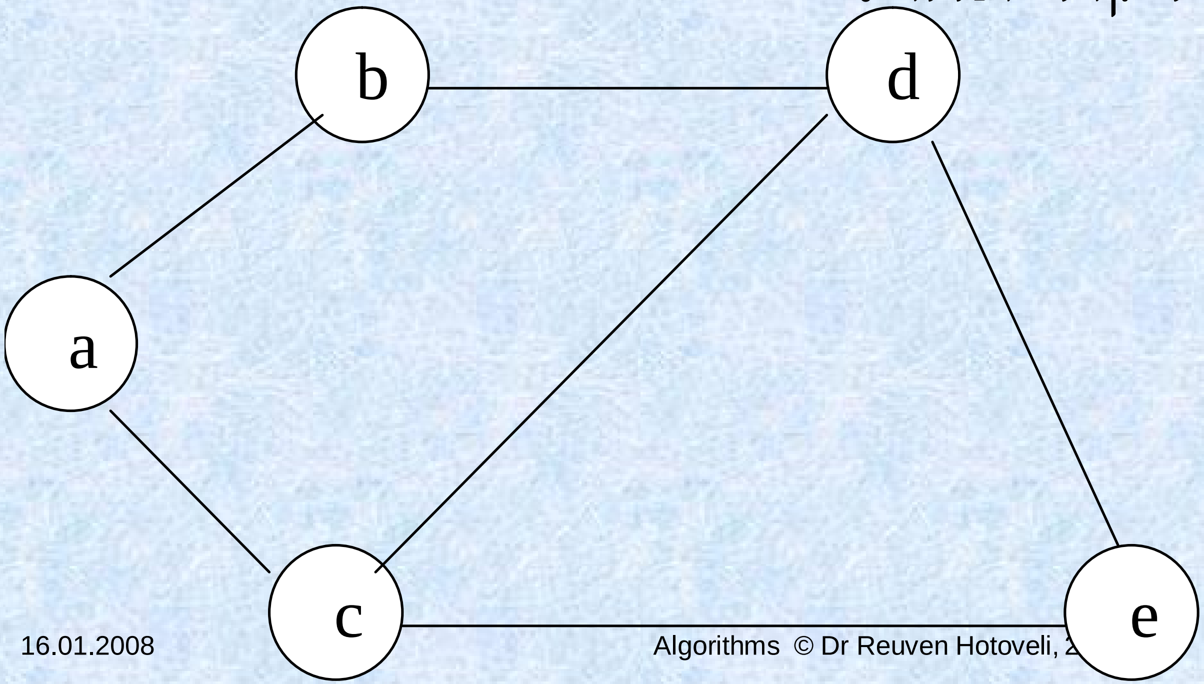


- רכיב קשיר (Connected Complete) – זוהי קבוצה מקסימלית של קודקודים בגרף לא מכוון שבה יש מסלול פשוט בין כל שני קודקודים בגרף.

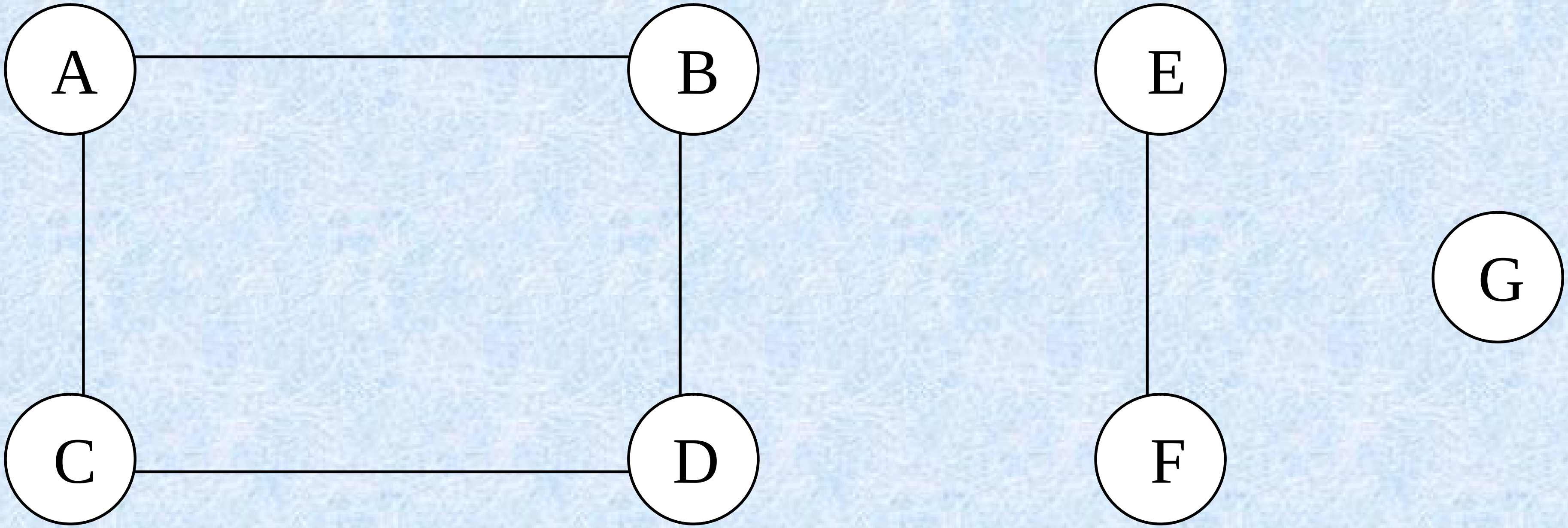
  קודקוד בודד ללא שכנים יקרא גם כן רכיב קשיר.

- גרף קשיר (Connected graph) – מכונה גם כ"גרף מחובר" הינו גרף לא מכוון בעל רכיב קשיר אחד בלבד, כלומר קיים מסלול פשוט בין כל שני קודקודים בגרף.

- דוגמא 1: דוגמא זאת מתארת גרף שבו רכיב קשיר אחד {a,b,c,d,e} מאחר ומכל קודקוד קיים מסלול לכל קודקוד אחר.



דוגמא 2:תרשים זה מתאר גרף שבו 3 רכיבים קשירים.

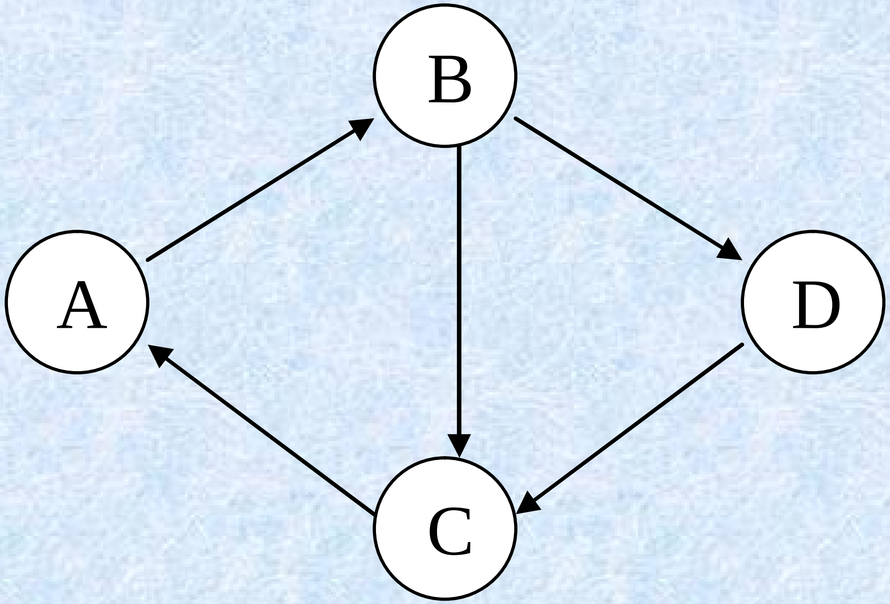


- רכיב קשיר אחד הינו קבוצה מקסימלית של קודקודים בגרף והיא: {A,B,C,D}, מאחר שבקבוצה זו יש מסלול פשוט בין כל שני קודקודים בגרף.
- לקבוצה זו לא ניתן לצרף אף אחד מהקודקודים E,F,G מאחר שלדוגמא אין מסלול מקודקוד A ל- E או ל- F או ל- G.

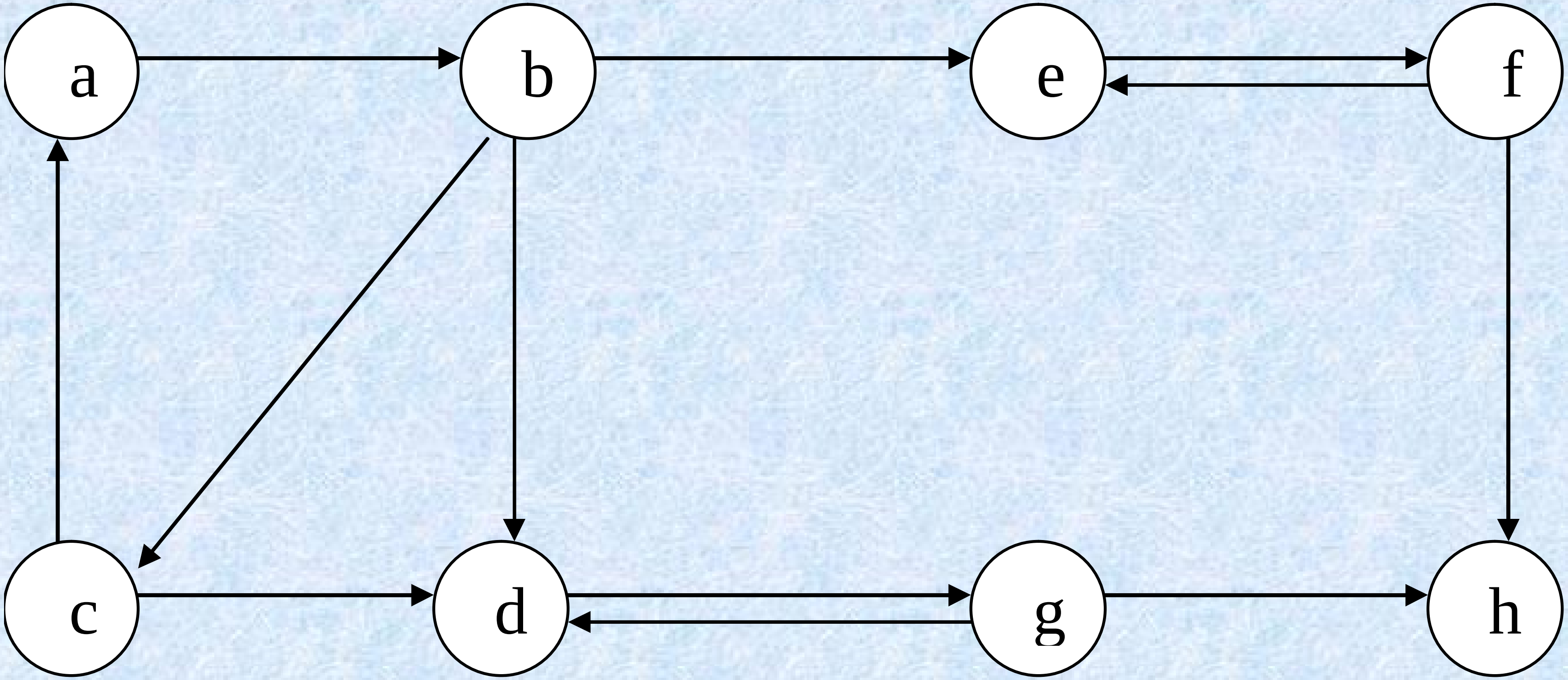
- רכיב קשיר שני הינו קבוצה מקסימלית של קודקודים בגרף והיא: {E,F},
- ורכיב קשיר שלישי הינו: {G}, כיוון שעל פי ההגדרה קודקוד בודד יכול להיקרא גם כן רכיב קשיר , בתנאי שקבוצה זו הינה מקסימלית, כלומר בלתי אפשרי להוסיף לקבוצה זו עוד צמתים בגרף כך שבקבוצה החדשה שתתקבל יהיה קיים מסלול בין כל שני קודקודים בקבוצה.
- סופית, בתרשים ישנם 3 רכיבים קשירים.

- **<u>גרף קשיר</u>** (Connected graph) – מכונה גם כ"גרף מחובר" הינו גרף לא מכוון בעל רכיב קשיר אחד בלבד, כלומר קיים מסלול פשוט בין כל שני קודקודים בגרף.
- <u>רכיב קשיר מכוון בחוזקה (רק"ח)</u> (Strongly Connected directed graph)
- הינה קבוצה מקסימלית של קודקודים בגרף מכוון שבו יש מסלול פשוט <u>ומכוון</u> בין כל שני קודקודים בגרף.
- קודקוד בודד ללא שכנים יקרא גם רכיב קשיר מכוון בחוזקה

התרשים הבא מתאר גרף קשיר מכוון בחוזקה, מאחר שיש מסלול מכוון מכל קודקוד לכל קודקוד אחר בגרף.



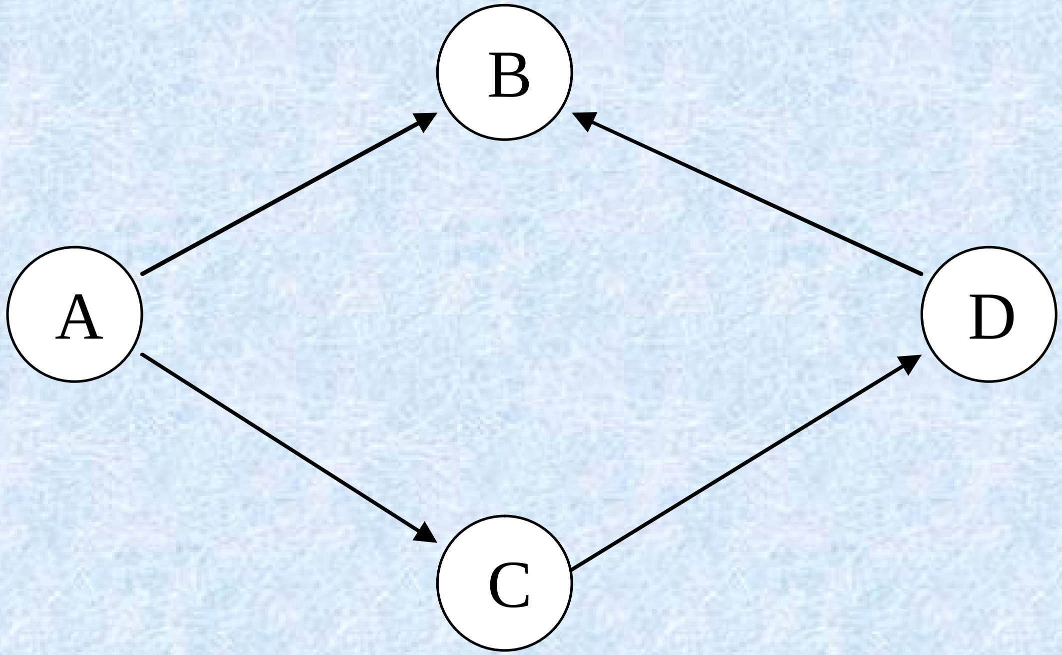
התרשים הבא מתאר גרף מכוון שבו 4 רכיבי קשירות חזקה.



- הרכיבים
- {d,g} {e,f} {h} {a,b,c}
- <u>גרף דו-צדדי</u> – (bipartite graph) הינו גרף שבו קבוצת הצמתים מתחלקת לשתי קבוצות זרות $V=V_1 \cup V_2$, כך ש: V_1 ו - V_2 קבוצות זרות באופן שאם $x, y \in V_1$ או $x, y \in V_2$ אז לא קיימת קשת בין x ו- y.
נהוג לסמן גרף דו-צדדי על ידי $G=(V_1, V_2, E)$.

התרשים הבא מתאר גרף דו-צדדי:

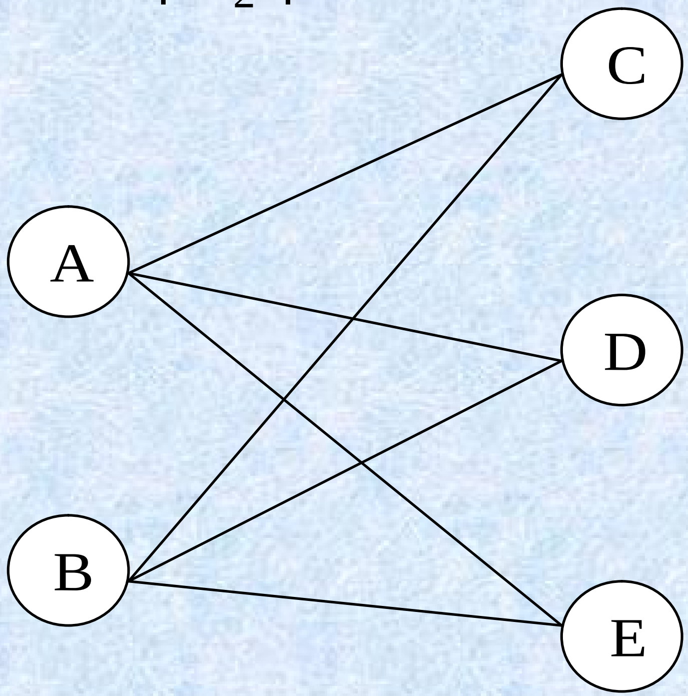
בגרף זה $V_1 = \{A, D\}$ ו- $V_2 = \{B, C\}$



- קשתות בגרף זה יוצאות מקודקוד כלשהו השייך ל – V_1 אל קודקוד אחר השייך ל – V_2 או להיפך.
- אין קשתות מקודקוד אחד השייך ל - V_1 לקודקוד אחר השייך ל - V_1. כנ"ל לגבי V_2.
- ***הערה:*** גרף דו צדדי יכול להיות גרף מכוון או גרף לא מכוון.

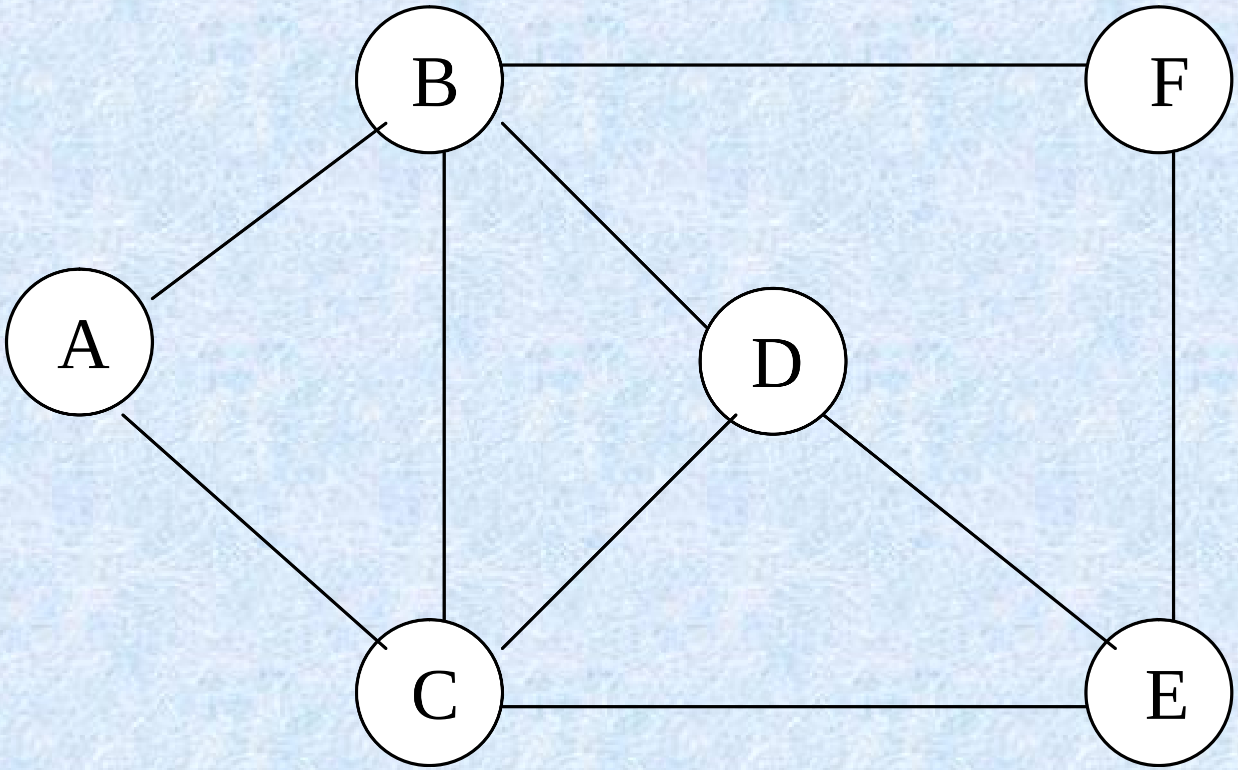
- **גרף דו-צדדי מלא** – הינו גרף דו-צדדי $G=(V_1,V_2,E)$ בו לכל $x \in V_1$ ולכל $y \in V_2$ קיימת קשת $(x,y) \in E$.
- גרף זה יסומן על ידי K_{nm} כאשר $|V_2|=m$ ו-$|V_1|=n$
- התרשים הבא

מתאר את K_{23} :

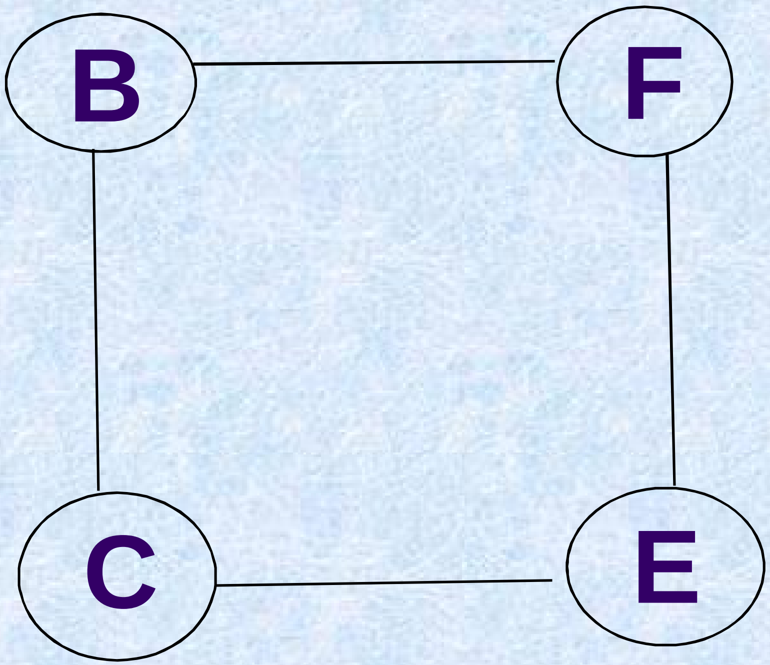


- בגרף זה: $V_1 = \{A, B\}$ ו – $V_2 = \{C, D, E\}$
- מקודקוד A ישנה קשת לכל קודקוד אחר השייך ל- V_2 ומכל קודקוד השייך ל - V_2 ישנה קשת לקודקודA.
- מקודקוד B ישנה קשת בינו לבין כל קודקוד אחר השייך ל - V_2 .
- ***תת גרף*** (Sub-graph) של G=(V,E) הינו גרף G=(V’,E’) כך ש V’⊆ V ו E’ ⊆ E.

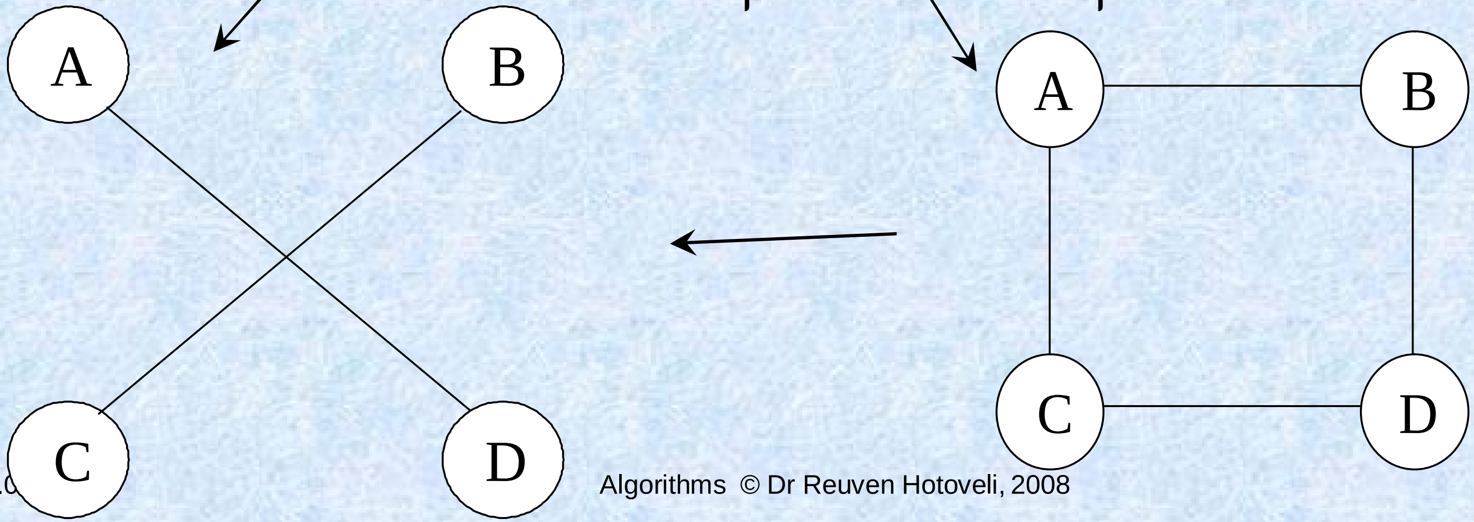
◆ בהינתן הגרף הבא:



התרשים הבא מתאר תת-גרף של הגרף הנתון:

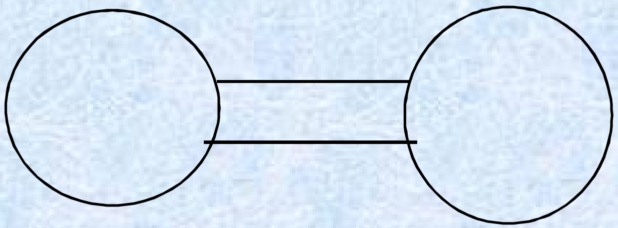


- **גרף משלים**: נתון גרף פשוט G=(V,E), חסר לולאות וצלעות מרובות. גרף משלים של G מסומן כ- $\overline{G}$ ומוגדר כדלהלן: $\overline{G}=(V,\overline{E})$, כאשר $\overline{E}$ הינה אוסף הצלעות החסרות ב-G בין כל שני קודקודים כלשהם בגרף.
- דוגמא : עבור הגרף הבא: הגרף המשלים הינו:

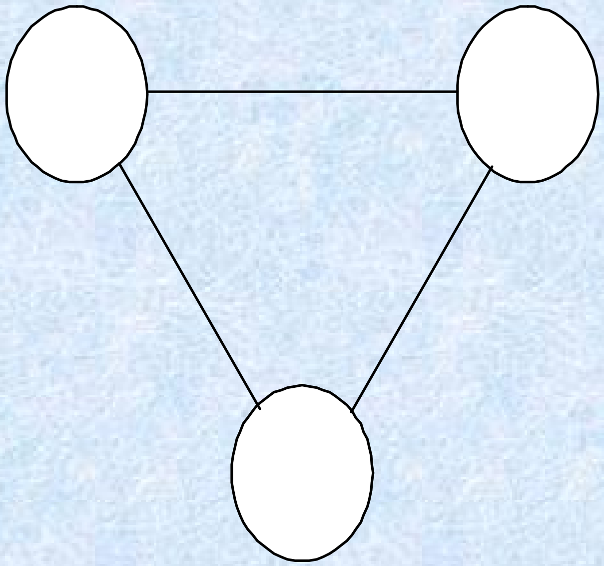


- **משפט** נתון גרף קשיר לא מכוון G=(V,E).
אם $|V|=n$ ו- $|E|\geq n$ אזי בגרף יש מעגל.
- הוכחה באינדוקציה על n
- **בסיס:** עבור n=2

אכן בגרף יש מעגל



- עבור n=3



- אכן בגרף יש מעגל

- <u>צעד משלים</u>: נניח נכונות הטענה עבור $k<n$.
- ונוכיח עבור $k=n$.
- כעת יהי גרף G עם **n** קודקודים ובו **n** קשתות לפחות.
- כעת **נניח בשלילה** שבגרף G אין מעגל. לכן, ב – G חייב שיהיה קודקוד שהינו עלה (ממנו אין יציאה).

- אם נסיר מגרף G את העלה (קודקוד) x אזי נקבל גרף חדש 'G שבו n-1 קודקודים ולפחות n-1 קשתות.
- לכן, בהמשך להנחת האינדוקציה בגרף 'G יש מעגל
- אך 'G הינו תת גרף של G
- כלומר אם בגרף 'G יש מעגל אזי גם בגרף G יש מעגל בסתירה להנחה שבגרף G אין מעגל.
- לכן, הנחתנו (בגרף G אין מעגל) אינה נכונה והמסקנה היא שבגרף G יש מעגל. ***מש"ל***

* ***משפט*** התנאים הבאים שקולים:
* א. הגרף G הינו עץ
* ב. G קשיר ובעל n-1 קשתות
* ג. G חסר מעגלים ובעל n-1 קשתות

משפט

- בכל גרף פשוט G=(V,E) מתקיים $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$
כאשר d(v) מציין דרגתו של צומת v בגרף.
- *נימוק*: כל צלע בגרף G מחברת בדיוק שני קודקודים,
כלומר כל צלע יוצאת בדיוק משני קודקודים.

לכן, כל צלע ב G – נמנית בדיוק פעמיים בחישוב
הדרגה של הקודקודים.

נבהיר את המשפט בעזרת הגרף הבא: