תכנון וניתוח אלגוריתמים
הרצאה 5

פרק 1.5: בעיית מינימום ופתרונות מרובים

- נתונה בעיה התכנות הלינארי הבאה :

$$\mathrm{Min}\{Z = 2X_1 + 7X_2 - 2X_3\}$$

s.t.

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \le 1$$

$$-4X_1 - 2X_2 + 3X_3 \le 2$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

לאחר הוספת משתני חוסר תראה הבעיה כדלהלן :

$$\text{Min}\{Z = 2X_1 + 7X_2 - 2X_3\}$$

s.t.

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 \qquad\quad &= 1 \\ -4X_1 - 2X_2 + 3X_3 \qquad + X_5 &= 2 \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

נפתור:

המשתנים בבסיס	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{b}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
x_4	1	2	1	1	0	1	1/1
x_5	-4	-2	3	0	1	2	2/3
C'_j	-2	-7	2			Z=0	

משתנה נכנס

◈ נק

המשתנים בבסיס	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{b}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
x_4	7/3	8/3	0	1	-1/3	1/3	1/7
x_3	-4/3	-2/3	1	0	1/3	2/3	
$C_j^{\prime}$	2/3	-17/3			-2/3	Z=-4/3	

משתנה יוצא

משתנה נכנס

◈ נקבל

המשתנים בבסיס	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{b}$
x_1	1	8/7	0	3/7	-1/7	1/7
x_3	0	6/7	1	4/7	1/4	6/7
$C_j^{\prime}$		-45/7		-2/7	-4/7	Z=-10/7

◈ היות וכל $C^{|}_{j}$ שליליים הרי שאנו בפיתרון האופטימלי, והוא :

$$Z^{*} = -10/7$$

$$X_1^{*} = 1/7 \; ; \; X_2^{*} = 0 \; ; \; X_3^{*} = 6/7 \; ; \; X_4^{*} = 0 \; ; \; X_5^{*} = 0$$

◈ אם נפתור אותה בעיה כבעיית מקסימום,דהיינו :

$$\text{Max } \{Z = 2X_1 + 7X_2 - 2X_3\}$$

s.t.

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 1$$

$$-4X_1 - 2X_2 + 3X_3 \leq 2$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

משתנים בבסיס	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{b}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
x_4	1	2	1	1	0	1	1/2
x_5	-4	-2	3	0	1	2	-
C'_j	-2	-7	2			Z = 0	

משתנה יוצא

משתנה נכנס

בפיתרון בעיית <u>מקסימום</u> הקריטריון לאופטימום הוא, שכל $C'_j \geq 0$

ומכאן, שאין אנו נמצאים בפיתרון האופטימלי.

נכניס את X_2 לבסיס ונוציא את X_4 ונקבל :

▪

◈ י

משתנים בבסיס	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{b}$
x_2	1/2	1	1/2	1/2	0	1/2
x_5	-3	0	4	1	1	3
C'_j	3/2		11/2	7/2		Z = 7/2

◈ היות וכל ה - C'_j - ים חיוביים, הרי שאנו בפיתרון האופטימלי והוא:

$$Z^* = 7/2$$

$$X_1^* = 0\ ;\ X_2^* = 1/2\ ;\ X_3^* = 0\ ;\ X_4^* = 0;\ X_5^* = 3$$

פיתרונות מרובים

- שיטת הסימפלקס עוצרת ברגע שהיא מוצאת פיתרון אופטימלי ראשון.
- אולם יתכן ולבעיה קיימים מספר פתרונות אופטימליים.
- אנו נזהה מקרים כאלו, אם בטבלה אחרונה, שבה מצאנו את הפתרון האופטימלי, המקדם של המשתנה לא –בסיסי מסוים בפונקצית המטרה C'_j שווה אפס, דהיינו הכנסתו לפתרון לא תשנה את ערך פונקצית המטרה.

- במקרים אלו ניתן למצוא פיתרון אופטימלי נוסף על ידי הכנסת המשתנה הלא – בסיסי לבסיס והוצאת המשתנה המתאים, בהתאם לקריטריון ההוצאה הרגיל.
- במידה וקיימים שניים או יותר פתרונות אופטימליים לבעיה, קיימים לה אינסוף פתרונות.

- היות וכל קומבינציה ליניארית של שני פתרונות מהווה גם היא פיתרון אופטימלי לבעיה, אם כי לא בהכרח פיתרון בסיסי.

- דוגמה :
- נתונה בעיית התכנות הליניארי הבאה :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Min}\{14X_1 + 4X_2 - 14X_3\} \\
&\text{s.t.} \\
&\quad X_1 + 2X_2 + X_3 \le 1 \\
&-4X_1 - 2X_2 + 3X_3 \le 2 \\
&\quad X_1,\ X_2, X_3 \ge 0
\end{aligned}$$

◈ פתרונה האופטימלי מתקבל בטבלה הבאה :

משתנים בבסיס	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{b}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
x_1	1	8/7	0	3/7	-1/7	1/7	1/8
x_3	0	6/7	1	4/7	1/7	6/7	1
C'_j		0		-2	-4	$Z^* = -10$	

משתנה יוצא

משתנה נכנס

◈ רואים כי:

$$X_1^* = 1/7, X_2^* = 0, X_3^* = 6/7, X_4^* = 0, X_5^* = 0 \quad Z^* = -10$$

◈ אנו רואים, כי המקדם C'_2 בפיתרון האופטימלי שווה לאפס, ומכאן שניתן להכניס את X_2 לבסיס, והפתרון ישאר אופטימלי, כלומר ערך פונקצית המטרה לא ישתנה.

◈ נכניס את X_2 לבסיס ונוציא את X_1 לפי קריטריון ההוצאה, ונקבל :

◈ י

משתנים בבסיס	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{b}$
x_2	7/8	1	0	3/8	-1/8	1/8
x_3	-3/4	0	1	1/4	1/4	3/4
C'_j	0	-2	-4			$Z=-10$

- מכאן שקיבלנו שני פתרונות בסיסיים והם :

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1/7	0	6/7	0	0
0	1/8	3/4	0	0

- כל קומבינציה ליניארית שלהם מהווה אף היא פיתרון אופטימלי .