תכנון וניתוח אלגוריתמים
תרגיל 1

פרק 1: פתרון תרגילים במודל התכנון הליניארי

שאלה 1.8

- **שאלה 1.8**
- מפעל מייצר כיסאות-נוח בשני גדלים;
- הכסאות עשויים עץ ובד.
- כסא-נוח גדול צורך 5 ק"ג עץ ו-3 מטר בד
- כסא-נוח קטן צורך 4 ק"ג עץ ו-2 מטר בד.
- המפעל מרוויח על כל כסא-נוח גדול 4 ש"ח ועל כל כסא-נוח קטן 3 ש"ח.

המשך שאלה 1.8

- ספק חומרי הגלם של המפעל מסוגל לספק 4000 ק"ג עץ ו-2500 מטר בד לחודש;
- משווק המוצרים אינו מוכן לרכוש בחודש יותר כסאות-נוח גדולים מאשר כסאות קטנים.
- מנהל הייצור של המפעל נדרש להחליט מהו מספר כסאות הנוח הקטנים ומהו מספר כסאות הנוח הגדולים שייצר המפעל בחודש.
- נסחו את הבעיה כבעיית תכנון ליניארי.

- **פתרון 1.8**
- נגדיר את משתני ההחלטה:
- $X1$ מספר כסאות הנוח הגדולים לחודש
- $X2$ מספר כסאות הנוח הקטנים לחודש
- ניסוח הבעיה כבעיית תכנון ליניארי :

- **Maximize** $Z = 4X1 + 3X2$
- **כפוף לאילוצים :**
- **Subject to:**
- $5X1 + 4X2 \leq 4000$
- $3X1 + 2X2 \leq 2500$
- $X1 \leq X2$
- $X1 \geq 0 \quad , \quad X2 \geq 0$

שאלה 1.9

- שאלה 1.9
- ספקי האינטרנט מחוברים לרשת האינטרנט העולמית באמצעות סיבים אופטיים משלושה סוגים.
- כל סיב מסוגל להעביר מידע בנפח מסוים, ודורש טיפול תקופתי בתדירות שונה.
- נתוני הסיבים מרוכזים בטבלה הבאה:

המשך שאלה 1.9

סוג הסיב	עלות הנחת סיב (מיליוני דולרים)	קצב העברת הנתונים (GB לשנייה)	זמן בין טיפולים תקופתיים (בחודשים)
אדום	5	10	אין צורך בטיפולים
כחול	9	15	2
צהוב	13	30	1

המשך שאלה 1.9

- משרד התקשורת נערך לתכנון הנחת סיבים אופטיים כדי לספק דרישות תקשורת עתידיות של לפחות 1000GB נתונים לשנייה.
- לפרויקט הוקצב סכום כספי לצורך הטיפולים התקופתיים המאפשר עד 10 טיפולים בחודש. המשרד נערך לחשב את העלות המינימלית הנדרשת להנחת הסיבים האופטיים.
- נסחו את הבעיה כבעיית תכנון ליניארי.

- **פתרון 1.9**
- נגדיר את משתני ההחלטה X1, X2, X3 כמספר הסיבים האופטיים מכל סוג.
- **Minimize** $Z = 5X1 + 9X2 + 13X3$
- **כפוף לאילוצים :**

: Subject to

- $10X1 + 15X2 + 30X3 \geq 1000$
  - $0.5X2 + X3 \leq 10$
- $X1 \geq 0 \quad , \quad X2 \geq 0 \quad , \quad X3 \geq 0$

שאלה 1.10

- 1. יש להוסיף מכלאה שלישית לבעיית המכלאות (דוגמה 1.2) שצורתה תהיה ריבוע, והיקפה יהיה לכל היותר מחצית מהיקף המכלאה הריבועית הראשונה, אבל לא פחות מ-50 מטר.
- א. קבעו את משתני ההחלטה;
- ב. הגדירו את פונקצית המטרה;
- ג. נסחו את האילוצים על משתני ההחלטה;
- ד. נסחו את אילוצי אי-השליליות.

המשך שאלה 1.10

- 2. נניח כי באותה בעיה (דוגמה 1.2) מוצגת דרישה ששטח המכלאות יהיה מקסימלי ולא היקפן; האם אפשר לפתור את הבעיה בעזרת מודל תכנון ליניארי?

- **פתרון 1.10**
- 1. נוסיף משתנה החלטה נוסף $X3$ עבור צלע המכלאה הריבועית השלישית. עלינו להביא למקסימום את הפונקציה:
- **Maximize** $Z = 2p\,X1 + 4X2 + 4X3$
- $2pX1 + 4X2 + 4X3 \le 500$
- $X2 \ge 25$
- $4X3 \ge 50$
- $2pX1 \ge 200$, $4X_3 \le \frac{1}{2}4X_2$
-
- $X1 \ge 0$, $X2 \ge 0$, $X3 \ge 0$

- 2. כיוון שהנוסחאות הגיאומטריות לחישוב שטח ריבוע ושטח עיגול הן :
- Sריבוע   שטח הריבוע$=a^2$
- Sמעגל   שטח העיגול$=\pi r^2$
- הרי בכדי לקבל שטח מקסימלי של מכלאות, פונקצית המטרה שתתקבל תהיה : $Z = p X_1^2 + X_2^2$
- זוהי פונקציה לא ליניארית ולכן לא נוכל לפתור בעיה זו באמצעות תכנון ליניארי.

שאלה 1.11 *

- **שאלה 1.11 ***
- יש למצוא את נקודת המינימום של פונקצית המטרה:
- $Z = X_1 + 2X_2 - 3X_3 - 7$
- תחת האילוצים:
- 1) $2X_1 - 5X_2 - 3X_3 \geq 50$
- 2) $5X_2 - 2X_3 \leq 10$
- 3) $X_1^2 \leq 4$

המשך שאלה 1.11

- 4) $X_2 \geq 0$
- 5) $X_3 \geq 0$

- האם אפשר לפתור בעיה זו באמצעות שיטות לפתרון בעיית תכנון ליניארי?
- נמקו.

- **פתרון 1.11**
- למרות שהאילוץ $X_1^2 \le 4$ הוא בעל צורה של משוואה לא-ליניארית, ניתן לכתבו על-ידי פירוק לשתי משוואות ליניאריות :
- $X1 \ge -2$
- $X1 \le 2$
- ולכן זהו ניסוח של בעיה המתאימה לפתרון באמצעות מודל תכנון ליניארי.

תרגיל 1.12

- בית-חרושת לשוקולד מייצר שני סוגי שוקולד – חלב ומריר.
- המחיר לצרכן של 100 גרם שוקולד חלב הוא 5 ₪ , ושל 100 גרם שוקולד מריר 4 ₪.
- ההבדל בין שני סוגי השוקולד הוא כמויות המרכיבים של השוקולד:
- בכל 100 גרם שוקולד חלב ישנם 20 גרם פולי קקאו ו- 80 גרם סוכר

המשך שאלה 1.12

- ואילו בכל 100 גרם שוקולד מריר נמצאים 35 גרם פולי קקאו ו- 65 גרם סוכר.
- למפעל אספקה יומית של 4 טון פולי קקאו ו-10 טון סוכר.
- טון פולי קקאו עולה 8000 ₪ וטון סוכר עולה 600 ₪.

המשך שאלה 1.12

- מה צריכה להיות התפוקה היומית של המפעל אם מטרתו היא להביא את הכנסותיו למקסימום ?
- מה צריכה להיות התפוקה היומית של המפעל אם מטרתו היא להביא את רווחיו למקסימום ?

- **פתרון 1.12**
- $X1$ – מספר החפיסות (100 גרם) של שוקולד חלב.
- $X2$ – מספר החפיסות (100 גרם) של שוקולד מריר.
- מקסימום הכנסות :
- **Maximize** $Z = 5X1 + 4X2$
- **כפוף לאילוצים :**

Subject to :

- $20X1 + 35X2 \le 4{,}000{,}000$
- $80X1 + 65X2 \le 10{,}000{,}000$
- $X1 \ge 0 \quad , \quad X2 \ge 0$

תרגיל 1.13

- תרגיל 1.13
- חייט רכש 80 מ"ר בד כותנה, ו-120 מ"ר בד צמר. כדי לתפור מעיל לגבר זקוק החייט ל-1 מ"ר בד-כותנה, ו-3 מ"ר בד צמר.
- כדי לתפור מעיל לאישה זקוק החייט ל-2 מ"ר בד כותנה, ו-2 מ"ר בד צמר.

המשך שאלה 1.13

- המחיר של מעיל לגבר הוא 30$ והמחיר של מעיל לאישה הוא 20$.
- כמה מעילים, משני הסוגים, על החייט לתפור כדי להרוויח את הסכום המקסימלי ?

- **פתרון 1.13**
- $X1$ – מספר מעילי הגברים.
- $X2$ – מספר מעילי הנשים.
- **Maximize** $Z = 30X1 + 20X2$
- **כפוף לאילוצים :**

Subject to :

- $X1 + 2X2 \le 80$
- $3X1 + 2X2 \le 120$
- $X1 \ge 0 \quad , \quad X2 \ge 0$

תרגיל 1.14

- **תרגיל 1.14**
- יצרן משקאות מייצר שני סוגי משקאות : מיץ ומשקה קל.
- לייצור ליטר אחד של מיץ הוא צריך 600 מיליליטר תמצית ו-400 מיליליטר מים.
- לייצור ליטר אחד של משקה קל הוא משתמש ב- 100 מיליליטר תמצית וב- 900 מיליליטר מים.

המשך שאלה 1.14

- הרווח שלו ממכירת ליטר מיץ הוא 0.5 ש"ח וממכירת ליטר משקה קל 0.1 ש"ח.
- הוא מקבל מדי יום 5000 ליטר תמצית ו- 10,000 ליטר מים.
- מה צריכה להיות תפוקתו היומית אם מטרתו הינה רווח מקסימלי ?

- **פתרון 1.14**
- $X1$ – מספר הליטרים של מיץ.
- $X2$ – מספר הליטרים של משקה קל.
- **Maximize** $Z = 0.5X1 + 0.1X2$
- **כפוף לאילוצים :**

Subject to :

- $0.6X1 + 0.1X2 \le 5{,}000$
- $0.4X1 + 0.9X2 \le 10{,}000$
- $X1 \ge 0 \quad , \quad X2 \ge 0$

תרגיל 1.15

- **תרגיל 1.15**
- במפעל לייצור כלי-רכב ניתן לייצר מכוניות ומשאיות. במפעל 4 מחלקות :
- הרכבת מנועים.
- טיבוע מתכת.
- הרכבת מכוניות.
- הרכבת משאיות.

המשך שאלה 1.15

- במחלקה 1 (הרכבת מנועים) אפשר להרכיב מנועי מכוניות, ו/או מנועי משאיות כך גם במחלקה 2 (טיבוע מתכת).
- במחלקת הרכבת מכוניות אפשר להרכיב מכוניות בלבד, ובמחלקת הרכבת משאיות ניתן להרכיב משאיות בלבד.
- להלן הבלה המסכמת את כושר הייצור של המחלקות השונות.

המשך שאלה 1.15

- א

המחלקה	כושר הייצור השנתי	
	מכוניות בלבד	משאיות בלבד
הרכבת מנועים	30000	16000
טיבוע מתכת	25000	35000
הרכבת מכוניות	20000	----
הרכבת משאיות	-----	15000

המשך שאלה 1.15

- רווח המפעל ממכירת מכונית הוא $3000 וממכירת משאית $2500 .
- כמה מכוניות וכמה משאיות על המפעל לייצר כדי שהרווח השנתי יהיה מקסימלי ?

- **פתרון 1.15**
- $X1$ –- מספר המכוניות מיוצרות בשנה.
- $X2$ –- מספר המשאיות המיוצרות בשנה.
- 1/30,000 – חלק השנה הדרוש להרכבת מנוע למכונית.
- 1/16,000– חלק השנה הדרוש להרכבת מנוע למשאית.
- 1/25,000 – חלק השנה הדרוש לטיבוע מתכת במכונית.
- 1/35,000– חלק השנה הדרוש לטיבוע מתכת במשאית.

- **Maximize** $Z = 3000X1 + 2500X2$
- **כפוף לאילוצים :**
- אילוץ תחנת הרכבת מנוע $\frac{1}{30,000}X_1 + \frac{1}{16,000}X_2 \le 1$
- אילוץ תחנת טיבוע מתכת $\frac{1}{25,000}X_1 + \frac{1}{35,000}X_2 \le 1$
- אילוץ תחנת הרכבת משאיות $X2 \le 15,000$
- אילוץ תחנת הרכבת מכוניות $X1 \le 20,000$
- $X1 \ge 0 \quad , \quad X2 \ge 0$

תרגיל 1.18

- תרגיל 1.18
- חברת "אופני איכות" מייצרת שני סוגים של אופניים :
  - אופני הרים.
  - אופני כביש.
- פס ייצור האופניים עבור שני הסוגים כולל מעבר דרך שתי תחנות עבודה :

המשך שאלה 1.18

- **הרכבת כידון.**
- **הרכבת גלגלים.**
- בתחנה 1, הרכבת כידון ניתן להרכיב כידון לזוג אופניים אחד בו-זמנית.
- הרכבת כידון לאופני הרים אורכת 2 שעות.
- הרכבת כידון לאופני כביש אורכת שעה אחת.

המשך שאלה 1.18

- בתחנה 2, הרכבת גלגלים ניתן להרכיב גלגלים לזוג אופניים אחד בו-זמנית.
- הרכבת גלגלים לאופני הרים אורכת שעה אחת.
- הרכבת גלגלים לאופני כביש אורכת 2 שעות.
- החברה עובדת 16 שעות ביום.
- הרווח של החברה על זוג אופני הרים הוא $400 ועל זוג אופני כביש $200.

המשך שאלה 1.18

- מה מספר זוגות אופני ההרים ומספר זוגות אופני הכביש שעל חברת "אופני איכות" לייצר ביום בכדי להגיע לרווח מקסימלי ?
- **פתרון 1.18**
- $X1$ – מספר זוגות אופני ההרים שיש לייצר ביום.
- $X2$ – מספר זוגות אופני כביש שיש לייצר ביום.

- **Maximize** $Z = 400X1 + 200X2$
- **כפוף לאילוצים :**

: Subject to

- אילוץ תחנת הרכבת כידון $2X1 + X2 \le 16$
- אילוץ תחנת הרכבת גלגלים $X1 + 2X2 \le 16$
- $X1 \ge 0 \quad , \quad X2 \ge 0$

תרגיל 1.21

- תרגיל 1.21
- במטוס מטען שלושה תאי אחסון למטענים : קדמי, אמצעי ואחורי. לתאים השונים מגבלות הן בנפח והן במשקל, כמוצג בטבלה הבאה :

תא אחסון	נפח מותר (מ"ק)	משקל מותר (טון)
קדמי	7000	14
אמצעי	10000	20
אחורי	4000	8

המשך שאלה 1.21

- כדי לשמור על יציבות המטוס, משקל המטען המועמס בכל אחד מהתאים צריך
- א. להתאים למשקל המותר בו.
- ב. לקראת הטיסה הבאה אפשריים ארבעה סוגי מטענים, שנתוניהם מפורטים בטבלה הבאה:

המשך שאלה 1.21

מטען מספר	נפח (מ"ק לטון)	משקל (טון)	רווח (₪ לטון)
1	500	20	320
2	700	16	400
3	600	25	360
4	400	13	290

המשך שאלה 1.21

- אפשר להעביר כל חלק רצוי מכל אחד מהמטענים.
- המטרה היא לקבוע איזה חלק להעביר מכל אחד מהמטענים ובאיזה תא אחסון למקמו, כך שהרווח הכולל מהטיסה יהיה מקסימלי.

- **פתרון 1.21**
- $X11$ - מספר טונות ממטען מספר 1 שהועברו בתא קדמי.
- $X21$ - מספר טונות ממטען מספר 2 שהועברו בתא קדמי.
- $X31$ - מספר טונות ממטען מספר 3 שהועברו בתא קדמי.
- $X41$ - מספר טונות ממטען מספר 4 שהועברו בתא קדמי.
- $X12$ - מספר טונות ממטען מספר 1 שהועברו בתא אמצעי.
- $X22$ - מספר טונות ממטען מספר 2 שהועברו בתא אמצעי.

- X_{32} - מספר טונות ממטען מספר 3 שהועברו בתא אמצעי.
- X_{42} - מספר טונות ממטען מספר 4 שהועברו בתא אמצעי.
- X_{13} - מספר טונות ממטען מספר 1 שהועברו בתא אחורי.
- X_{23} - מספר טונות ממטען מספר 2 שהועברו בתא אחורי.
- X_{33} - מספר טונות ממטען מספר 3 שהועברו בתא אחורי.
- X_{43} - מספר טונות ממטען מספר 4 שהועברו בתא אחורי.

- **Maximize** $Z = 320(X11 + X12 + X13) + 400(X21 + X22 + X23) + 360(X31 + X32 + X33) + 290(X41 + X42 + X43)$

- **כפוף לאילוצים :**

Subject to :

- <u>מגבלות משקל</u>:
- בתא קדמי $X11 + X21 + X31 + X41 \le 14$
- בתא אמצעי $X12 + X22 + X32 + X42 \le 20$
- בתא אחורי $X13 + X23 + X33 + X43 \le 8$

- <u>מגבלות נפח:</u>
- בתא קדמי
- $500X11 + 700X21 + 600X31 + 400X41 \leq 7{,}000$
- בתא אמצעי
- $500X12 + 700X22 + 600X32 + 400X42 \leq 10{,}000$
- בתא אחורי
- $500X13 + 700X23 + 600X33 + 400X43 \leq 4{,}000$

- מגבלות משקל של כל מטען:
- מטען 1 $$X11 + X12 + X13 \le 20$$
- מטען 2 $$X21 + X22 + X23 \le 16$$
- מטען 3 $$X31 + X32 + X33 \le 25$$
- מטען 4 $$X41 + X42 + X43 \le 13$$
- אילוצי אי-שליליות:
- $$Xij \ge 0 \quad i = 1\ldots4 \quad j = 1..3$$