תכנון וניתוח אלגוריתמים
הרצאה 6

פרק 1.6 : משמעות שיטת הסימפלקס

- **שיטת הסימפלקס** (The Simplex Method) היא אלגוריתם לפתרון של בעיות תכנון ליניארי.
- השיטה מבוססת על הרעיון של סריקה יעילה של קדקודים בתחום הפתרונות האפשריים, עד למציאת הקדקוד בעל הערך האופטימלי, בהתאם להגדרת הבעיה.

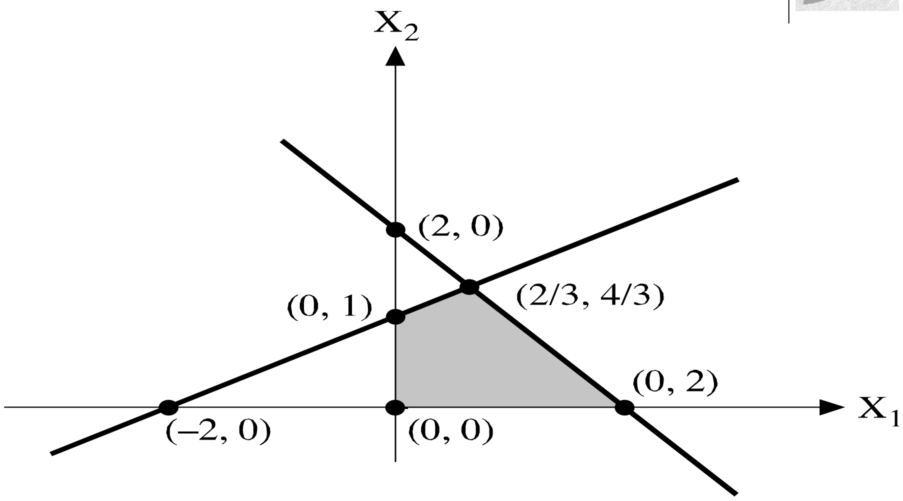
- כאשר הבעיה היא ***בעיית מקסימום***, שיטת הסימפלקס תמצא את הקדקוד בעל ***הערך המקסימלי*** עבור פונקצית המטרה.
- כאשר הבעיה היא ***בעיית מינימום***, שיטת הסימפלקס תמצא את הקדקוד בעל ***הערך המינימלי*** עבור פונקצית המטרה.

- שיטת הסימפלקס היא אלגוריתם שאינו מצריך בהכרח את סריקת כל הקדקודים, אלא יוצא מקדקוד כלשהו של תחום הפתרונות האפשריים, ומתקדם מקדקוד לקדקוד עד לקדקוד בעל הערך האופטימלי.
- השיטה נחשבת כיום לאחת השיטות היעילות לפתרון בעיות תכנון ליניארי מכל הגדלים.

- שיטת הסימפלקס היא למעשה אלגוריתם איטרטיבי המבצע סדרת פעולות החוזרות על עצמן
- בכל פעולה האלגוריתם מתקדם מפתרון אפשרי אחד לפתרון אפשרי אחר הנותן לפונקצית המטרה ערך טוב יותר בהתאם לדרישות הבעיה.
- שיטת הסימפלקס היא אלגוריתם אלגברי שבו כל איטרציה כרוכה בפתרון מערכת משוואות לשם קבלת פתרון חדש שייבחן במבחן האופטימליות.
- אולם לשיטה זו יש גם משמעות גיאומטרית.

דוגמה 2.6

- נתונה הבעיה הזו:
- **Maximize** $Z = 5X_1 + 3X_2 - 7$
- **Subject to:**
- $X_1 + X_2 \le 2$
- $-X_1 + 2X_2 \le 2$
- $X_1 \ge 0 \quad , \quad X_2 \ge 0$



- ארבעת ***קווי האילוצים ושש נקודות החיתוך*** שלהם מודגשים כי הם המפתח לניתוח הפתרון.
- נגדיר עתה את המונחים הבאים על-סמך הפתרון הגרפי מהסעיף הקודם:
- ***קדקוד (vertex)*** הוא נקודת חיתוך בין משוואות אילוצים.
- נקודות החיתוך הללו נקראות ***פתרונות הקדקודים*** של בעיית התכנון הליניארי.

- מאחר שפתרונות קדקוד יכולים להיות אפשריים או לא אפשריים, נגדיר:
- ***קדקוד אפשרי*** (feasible vertex) הוא קדקוד שמהווה פתרון אפשרי לבעיית התכנון הליניארי.
- ארבעה משש הקדקודים באיור האחרון נמצאים בתחום האפשרי. לדוגמה (0,1) הוא קדקוד אפשרי.
- ***הפתרון האופטימלי*** יימצא באחד (או בשניים) מארבעת פתרונות הקדקוד שבתחום האפשרי:

- ***קדקוד אופטימלי*** (optimal vertex) הוא קדקוד שמהווה פתרון אופטימלי לבעיית התכנון הליניארי.
- שלוש תכונות היסוד של שיטת הסימפלקס מסוכמות להלן:
- **1א.** אם לבעיה יש פתרון אופטימלי יחיד, אזי הוא חייב להיות פתרון קדקוד אפשרי.

- **1ב**. אם לבעיה פתרונות אופטימליים רבים, אז לפחות שניים מהם חייבים להיות פתרונות אפשריים סמוכים (קדקודים הנמצאים על אותה צלע).
- **2.**מספר הקדקודים האפשריים הוא סופי.
- **3.**אם לפתרון קדקוד אפשרי אין פתרונות קדקוד אפשריים סמוכים שהם טובים ממנו , אזי אין כלל פתרון אחר טוב ממנו;
- כלומר פתרון הקדקוד האפשרי במקרה זה הוא אופטימלי**.**

- **תכונה 2** נובעת מן העובדה, כי, ככלל, כאשר לפנינו בעיה בעלת m אילוצים על משתני ההחלטה ו-n משתני החלטה, אזי מספר פתרונות הקדקוד הוא:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

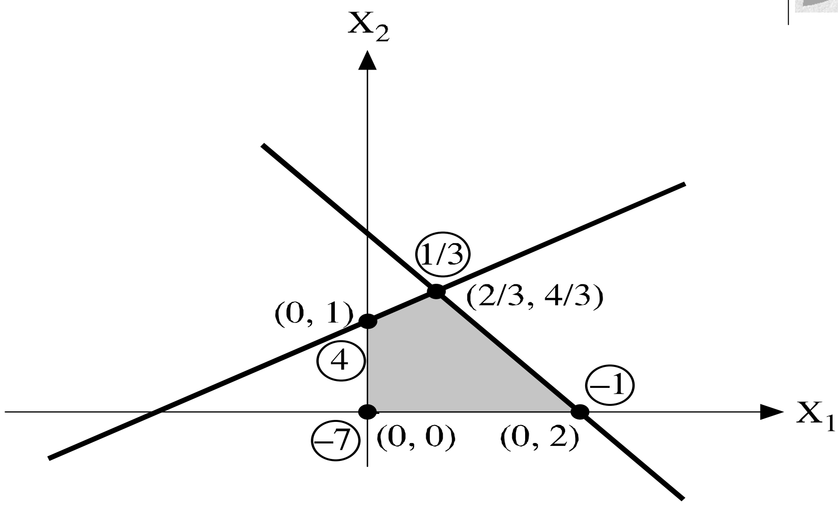
שהוא מספר סופי.
- **מסקנות:** לפי תכונה 1, מספיק לחפש את הפתרון האופטימלי **רק** בין פתרונות הקדקוד האפשריים;
- לפי תכונה 2 – מספרם סופי.
- תכונה 3 מהווה **מבחן אופטימליות** נוח.

- שיטת הסימפלקס משתמשת בשלוש התכונות הללו.
- השיטה מתקדמת באופן איטרטיבי מהפתרון האפשרי הנוכחי לפתרון אפשרי סמוך טוב ממנו, עד שלא ניתן למצוא פתרון קדקוד אפשרי סמוך טוב יותר.
- ניתן אפוא לתאר את השיטה כדלקמן:

עקרונות שיטת הסימפלקס

- ***1.שלב האתחול*** : מצא קדקוד אפשרי;
- ***2.השלב האיטרטיבי:*** (חזור על שלב זה כל עוד לא מתקיים תנאי האופטימליות);
- ***2.1מבחן אופטימליות*** : הקדקוד האפשרי הנוכחי הוא אופטימלי, אם אין פתרון קדקוד אפשרי סמוך טוב יותר;
- 2.2 אם הקדקוד הנוכחי אינו אופטימלי**,** עבור לקדקוד אפשרי סמוך טוב יותר.

- העקרונות הללו מבטאים את מהות שיטת הסימפלקס.
- כדי לממש את השלבים שתוארו בדוגמה 2.6 לעיל, נעשים הצעדים המתוארים להלן:
- כדי להקל על המעקב אחר השלבים, נציג באיור הבא את התחום האפשרי של הבעיה בדוגמה 2.6, בתוספת ערך פונקצית המטרה בקדקודים האפשריים (המסומנים בעיגול).



- **1. שלב האתחול :** הנקודה (0,0) היא פתרון התחלתי אפשרי;
- **איטרציה ראשונה2.1:** מבחן האופטימליות אינו מתקיים עבור (0,0) כיוון שקדקוד (0,2) מהווה פתרון טוב יותר;
- **2.2:** עבור מ- (0,0) ל- (0,2);
- **איטרציה שנייה 2.1:** מבחן האופטימליות אינו מתקיים עבור (0,2); כיוון שקדקוד (2/3,4/3) פתרון טוב יותר;
- **2.2:** עבור מ- (0,2) ל- (2/3,4/3).

- **איטרציה שלישית2.1:** מבחן האופטימליות אינו מתקיים עבור (2/3,4/3);
- **2.2:** עבור מ- (2/3,4/3) ל- (0,1).
- **איטרציה רביעית 2.1:** <u>עצור !</u> מבחן האופטימליות מתקיים;
- פתרונות הקדקוד (0,0) ו- (2/3,4/3) אינם טובים מ- (0,1), לכן עצור.
- ***<u>(0,1) הוא הפתרון האופטימלי.</u>***

2.2.1 האלגברה של שיטת הסימפלקס

- בהליך אלגברי, נוח יותר לדון באילוצי שוויון מאשר באילוצי אי-שוויון.
- לפיכך, ***השלב הראשון*** בפתרון בשיטת הסימפלקס הוא להמיר את האילוצים , הנתונים כ**אי-שוויונות**, באילוצי שוויון שקולים.
- אילוצי האי-שליליות יכולים להישאר בצורתם המקורית, שכן האלגוריתם מתייחס אליהם רק בעקיפין.

- המרה זו מתבצעת על-ידי הוספת **משתני סרק** (slack variables)**.**
- על מנת להדגים זאת, נתבונן באילוץ הפונקציונלי הראשון בדוגמה שלנו :
- $X_1 + X_2 \le 2$
- משתנה הסרק לאילוץ זה הוא : $X_3 = 2 - X_1 - X_2$
- לכן נקבל : $X_1 + X_2 + X_3 = 2$

- האילוץ המקורי $X_1 + X_2 \le 2$ מתקיים רק כאשר $X_3 \ge 0$.
- לכן האילוץ $X_1 + X_2 \le 2$ **שקול** למערכת האילוצים:
- $X_1 + X_2 + X_3 = 2$
- $X_3 \ge 0$
- נשתמש אפוא במערכת זו כתחליף לאילוץ המקורי.

- הוספת משתני סרק לכל יתר האילוצים הפונקציונליים במודל התכנון הליניארי המקורי של הדוגמה תיתן את המודל **השקול** שלהלן:
- **Maximum** $Z = 5X_1 + 3X_2 - 7$
- **Subject to:**
- 1) $X_1 + X2 + X_3 = 2$
- 2) $-X_1 + 2X_2 + X_4 = 2$
- $X_1 \ge 0 \quad X_2 \ge 0 \quad X_3 \ge 0 \quad X_4 \ge 0$

- המודל הזה שקול אמנם למודל המקורי, אך צורתו הנוכחית נוחה יותר לטיפול אלגברי ולזיהוי של פתרונות הקדקוד האפשריים.
- צורה זו נקראת **הצורה המורחבת** augmented (form) של הבעיה, מאחר שהצורה המקורית הורחבה על-ידי משתנים נוספים, המאפשרים את יישום שיטת הסימפלקס בדרך אלגברית.

- ***<u>פתרון מורחב</u>*** (augmented solution)הוא פתרון של הצורה המורחבת של הבעיה.
- הפתרון הזה כולל את ערכי המשתנים המקוריים של הבעיה וגם את הערכים המתאימים למשתני הסרק.
- לדוגמה, הפתרון המורחב של (2,0) בדוגמה שראינו הוא (2,0,0,4), המכיל גם את הערכים המתאימים למשתני הסרק, $X_3 = 0$, $X_4 = 4$, נוסף על ערכי המשתנים המקוריים, $X_1 = 2$ ו-$X_2 = 0$.

- **פתרון בסיסי** (basic solution) הוא פתרון קדקוד מורחב.
- לדוגמה, נתבונן בפתרון הקדקוד הלא אפשרי (0,2).
- הרחבתו באמצעות הערכים המתאימים למשתני הסרק, $X_3 = 0$, $X_4 = -2$, תיתן את הפתרון הבסיסי (0 , 2 , 0 , -2).
- מאחר שפתרונות קדקוד (ולפיכך גם פתרונות בסיסיים) יכולים להיות או אפשריים או לא אפשריים, נגדיר:

- ***פתרון בסיסי אפשרי*** (basic feasible solution) הוא פתרון קדקוד אפשרי **מורחב**.
- לפיכך, פתרון הקדקוד האפשרי (0,1) בדוגמה שראינו, שקול לפתרון הבסיסי האפשרי (0,1,1,0) בצורה המורחבת של הבעיה.

- **פתרון בסיסי ופתרון בסיסי אפשרי** הם מונחים מרכזיים בתכנון ליניארי, ולכן יש להבהיר את תכונותיהם האלגבריות.
- בצורה המורחבת של הבעיה, מספר המשתנים (4) גדול ב-2 ממספר המשוואות (2) של האילוצים הפונקציונליים.
- פירושו של דבר, שבפתרון המערכת קיימות שתי **דרגות חופש** (degrees of freedom) .

- כלומר ניתן לקבוע ***ערך שרירותי*** כלשהו לכל שניים מבין המשתנים, ולפתור את שתי המשוואות בשני המשתנים שנותרו.
- שיטת הסימפלקס קובעת את ***הערך השרירותי כאפס***.
- המשתנים שערכם נקבע לאפס נקראים **משתנים לא-בסיסיים** (nonbasic variables).

- המשתנים האחרים נקראים **משתנים בסיסיים** **.**(basic variables)
- הפתרון שמתקבל נקרא **פתרון בסיסי**.
- אם כל המשתנים הבסיסיים הם אי-שליליים (כלומר מקיימים גם את אילוצי האי-שליליות), אזי הפתרון נקרא **פתרון בסיסי אפשרי**.

- שני פתרונות בסיסיים אפשריים הם **סמוכים** אם כל משתניהם הלא-בסיסיים זהים מלבד משתנה אחד.
- פירושו של דבר, שניתן לעבור מפתרון בסיסי אפשרי נוכחי לפתרון בסיסי אפשרי סמוך לו על-ידי הפיכה של משתנה לא-בסיסי אחד למשתנה בסיסי ושל משתנה בסיסי אחד למשתנה לא בסיסי.

- מעבר מהפתרון (0,0,2,2) לפתרון (0,1,1,0) כרוך בהפיכת המשתנה הלא-בסיסי X_2 למשתנה בסיסי, ובהפיכת המשתנה הבסיסי X_4 למשתנה לא-בסיסי.
- מספר **המשתנים הלא-בסיסיים** בפתרון בסיסי הוא כמספר **דרגות החופש** במערכת המשוואות, ומס' **המשתנים הבסיסיים** הוא כמספר **האילוצים הפונקציונליים**.

2.2.2 השלבים של שיטת הסימפלקס

- עד-כה עסקנו במהותה של שיטת הסימפלקס ולא פירטנו את דרך ביצועם של שלביה השונים.
- **בשלב האתחול** – כיצד נבחר את הפתרון הבסיסי האפשרי ההתחלתי?
- **בשלב האיטרטיבי:**
- ***מבחן האופטימליות*** – כיצד מחליטים שלפתרון בסיסי אפשרי נוכחי אין פתרון בסיסי אפשרי סמוך טוב יותר?

חיפוש אחר פתרון בסיסי אפשרי טוב יותר :

- כיצד נבחר את כיוון התנועה לגבי הפתרונות הסמוכים? (איזה משתנה לא-בסיסי ייבחר למשתנה בסיסי?)
- איזה משתנה בסיסי הופך ללא-בסיסי?
- כיצד מזהים את הפתרון הבסיסי החדש?
- אלה השאלות שנעסוק בהן בסעיף הזה בעזרת הדוגמה שלהלן:

- **דוגמה 2.7** – פתרון אלגברי של שיטת הסימפלקס
- **Maximum** $Z = 5X_1 + 3X_2 - 7$
- **Subject to:**
- 1) $X_1 + X2 + X_3 = 2$
- 2) $-X_1 + 2X_2 + X_4 = 2$
- $X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0 \quad X_3 \geq 0 \quad X_4 \geq 0$
- נפתור אותה בדרך אלגברית.

- **שלב האתחול**
- שיטת הסימפלקס יכולה להתחיל בפתרון בסיסי אפשרי כלשהו.
- כדאי לבחור פתרון נוח שבו משתני **הסרק** הם המשתנים **הבסיסיים**.
- בחירה זו נוחה כיוון שהפתרון הזה מהווה את **נקודת הראשית** (כל המשתנים המקוריים שווים אפס). הבחירה היא $(X_1, X_2) = (0,0)$.

- לכן, ***__מקבלים פתרון בסיסי אפשרי התחלתי__*** שבו
- *כל המשתנים המקוריים הם לא-בסיסיים
- *ומשתני הסרק הם המשתנים הבסיסיים.
- בחירה זו מוצגת להלן בדוגמה שלנו, והמשתנים הבסיסיים מודגשים.
- 1) $X_1 + X2 + \boldsymbol{X_3} = 2$
- 2) $-X_1 + 2X_2 + \boldsymbol{X_4} = 2$

- מאחר שהמשתנים הלא-בסיסיים שווים אפס, אפשר לקרוא את הפתרון באופן הזה:
- $X_3 = 2$, $X_4 = 2$, ושאר המשתנים שווים אפס.
- כלומר **פתרון בסיסי אפשרי התחלתי הוא** (0,0,2,2).
- ***<u>השלב האיטרטיבי</u>***
- ראשית, יש להפעיל את מבחן האופטימליות על הפתרון הנוכחי :

- ***<u>1. מבחן האופטימליות</u>***
- מבחן האופטימליות הוא מבחן בוליאני.
- מבחן המחזיר אחת משתי תשובות אפשריות:

  true (אמת) או false(שקר).
- התשובה true מתקבלת כאשר הפתרון שהגענו אליו הוא הפתרון האופטימלי

- כלומר הפתרון אשר הצבתו בפונקציית המטרה תיתן את הערך הטוב ביותר.
- התשובה false מתקבלת כאשר הפתרון שהגענו אליו אינו הפתרון האופטימלי ועלינו לחפש פתרון טוב יותר לבעיית החלטה.
- עתה יש לקבוע אם הפתרון הבסיסי האפשרי הנוכחי הוא אופטימלי או לא?

- יש להשתמש במשוואת פונקצית המטרה המבוטאת במונחי המשתנים הלא-בסיסיים הנוכחיים:
- $Z = 5X_1 + 3X_2 - 7$
- הגדלת ערכו של כל אחד מן המשתנים הלא-בסיסיים הללו מאפס תגדיל את הערך של פונקצית המטרה (המשתנים הבסיסיים אינם מופיעים במשוואה זו).

◈ הגדלת הערך תגרום גם לתזוזה לעבר אחד משני הפתרונות הבסיסיים האפשריים **הסמוכים**.

◈ מאחר של- X_1 ול-X_2 יש מקדמים חיוביים, הגדלה של כל אחד מהם תוביל לפתרון בסיסי סמוך טוב יותר מהנוכחי ומכאן שהפתרון הנוכחי אינו אופטימלי !

◈ ככלל, הפתרון הבסיסי האפשרי הנוכחי הוא אופטימלי ***אם ורק אם*** לכל המשתנים הלא-בסיסיים יש מקדמים **אי-חיוביים** בצורה הנוכחית של פונקצית המטרה.

◈ במהלך האיטרציות של הסימפלקס פונקצית המטרה משנה את צורתה.

◈ במבחן האופטימליות יש להשתמש בצורה הנוכחית של פונקצית המטרה ולא בצורתה המקורית.

- הצורה הנוכחית מכילה את כל **המשתנים הלא-בסיסיים, ואף לא אחד מן המשתנים הבסיסיים**.
- ***<u>2. חיפוש אחר פתרון בסיסי אפשרי טוב יותר</u>***
- בכל אחת מהאיטרציות שיטת הסימפלקס מתקדמת מהפתרון הבסיסי האפשרי הנוכחי לפתרון בסיסי אפשרי **סמוך** טוב יותר.

- תנועה זו כרוכה ב*<u>הפיכת</u>* משתנה לא-בסיסי אחד למשתנה בסיסי, שנקרא **<u>המשתנה הנכנס לבסיס</u>** (entering basic variable).
- בו-זמנית ב**<u>הפיכת</u>** משתנה בסיסי אחד למשתנה לא-בסיסי, שנקרא **<u>המשתנה היוצא מהבסיס</u>** (leaving basic variable).
- לאחר מכן בזיהוי הפתרון האפשרי הבסיסי החדש שמתקבל.

<u>מהו הקריטריון לבחירת המשתנה הנכנס לבסיס?</u>

- המשתנים המועמדים להיכנס לבסיס הם כל אחד מ- n המשתנים הלא-בסיסיים הנוכחיים.
- ערכו של המשתנה שייבחר לבסיס ישתנה מאפס לערך חיובי כלשהו
- ערכם של יתר המשתנים הלא-בסיסיים יישאר אפס.

- מאחר שהפתרון הבסיסי האפשרי הבא אמור להיות טוב מאשר הפתרון הנוכחי (כלומר, ערך ה-Z שלו אמור להיות גדול יותר), השינוי ב-Z, כתוצאה מהגדלת ערך המשתנה הנכנס, צריך להיות חיובי.

- אם נבטא את פונקצית המטרה Z באמצעות המשתנים הלא-בסיסיים בלבד, המקדם של כל משתנה הוא שיעור הגידול של Z עם הגדלת אותו משתנה.
- המשתנה בעל המקדם החיובי הגדול ביותר במשוואת פונקצית המטרה הוא **שיגדיל** את Z **בשיעור ההתחלתי הגדול ביותר**, ולכן הוא שייבחר למשתנה הנכנס לבסיס.

- בדוגמה שלנו, שני המשתנים המועמדים להיכנס לבסיס הם שני המשתנים הלא-בסיסיים X_1 ו-X_2.
- מאחר שפונקצית המטרה מבוטאת רק באמצעות שני המשתנים האלה, ניתן להתייחס אליה כפי שהיא:
- $Z = 5X_1 + 3X_2 - 7$
- מאחר שלשני המשתנים יש מקדמים חיוביים, הגדלת כל אחד מהם תגדיל את Z.

- אולם כל הגדלה של X_1 ביחידה אחת תגדיל את Z בשיעור של 5.
- ואילו כל הגדלה של X_2 ביחידה אחת תגדיל את Z בשיעור של 3.
- כיוון ש- $5 > 3$, ייבחר X_1 להיות **המשתנה הנכנס לבסיס**.
- לפיכך ערכו של X_1 יהיה עתה גדול מאפס, בעוד ערכו של X_2 יישאר אפס.

- ***כיצד נבחר המשתנה היוצא מהבסיס?***
- אם נתעלם לרגע ממשתני הסרק, אזי הגדלת X_1, תוך כדי שמירת ערכו של X_2 כאפס, משפיעה על שאר המשתנים;
- אם ניתן להגדיל את כל האחרים, הפתרון לא חסום.
- אחרת, הערך של לפחות אחד ממשתני הבסיס יֵרד עד שיגיע לאפס, ואז המשתנה הזה יֵצא מהבסיס ויהפוך למשתנה לא-בסיסי.

- בדוגמה שלנו, הגדלת X_1, תוך כדי שמירת X_2 בערך אפס, פירושה תזוזה על ציר X_1 ימינה.
- באיור 2.11 מגיעים אל הפתרון האפשרי הסמוך (0,2) כאשר נעצרים בקו האילוץ: - $X_1 + 2X_2 = 2$.
- בדוגמה שלנו, המשתנה המועמד לצאת מהבסיס הוא אחד המשתנים הבסיסיים X_3, X_4.

- החישובים לבחירת המשתנה שֶיֵּצא מהבסיס מתוארים בטבלה 2.1.
- מאחר ש-X_2 הוא משתנה לא-בסיסי, ערכו בעמודה האמצעית של טבלה 2.1 הוא אפס.
- מכאן ניתן לקבל כמצוין בעמודה הימנית, כי:
- 1. X_3 קטן כאשר X_1 גדל והוא מתאפס כאשר $X_1 = 2$.

טבלה 2.1 חישובים לבחירת המשתנה הראשון שיֵצא מהבסיס

משתני בסיס	משוואה	חסם עליון על X_1
X_3	$X_3=2-X_1-X_2$	$X_1 \le 2$ (מינימום)
X_4	$X_4=2+X_1-2X_2$	$X_1 \ge -2$ לא מוגבל

- .2 X_4 גדל ויישאר אי-שלילי כל עוד X_1 גדול מ-- (2).
- כיוון שאנו מגדילים את X_1 בכיוון ימין, כלומר יותר מאפס, X_4 אינו מגביל את הגדלת X_1.
- בעמודה הימנית של טבלה 2.1 רשומים אפוא הערכים הגבוהים ביותר האפשריים עבור X_1, כך שכל אחד מהמשתנים הבסיסיים המתאימים בעמודה השמאלית יישאר אי-שלילי.

- מאחר שהחסם העליון הקטן ביותר מתקבל עבור המשוואה שבה מופיע X_3 (הוא משתנה הסרק לאילוץ $X_1 + X_2 \le 2$), המשתנה היוצא מהבסיס יהיה X_3, ובפתרון הבסיסי האפשרי הבא נקבל: $X_3 = 0$ (משתנה לא-בסיסי) ו-$X_1 = 2$ (משתנה בסיסי).
- כדי להתכונן לאיטרציה הבאה, שיטת הסימפלקס ממירה את מערכת המשוואות הנתונה **לצורה הקנונית**.
- יש להמשיך בביצוע האיטרציות עד שמתקבל פתרון אופטימלי, או עד שמזהים שהפתרון לא חסום.

2.2.3 סיכום שיטת הסימפלקס

- **<u>א. שלב האתחול (בחירת פתרון בסיסי התחלתי)</u>**
- הוסף משתני סרק.
- בחר את כל המשתנים המקוריים כמשתנים הלא-בסיסיים (כלומר אפס אותם).
- בחר את משתני הסרק או המשתנים המלאכותיים כמשתנים הבסיסיים (ולכן הם שווים לערכים הנמצאים באגף ימין).

- **ב. השלב האיטרטיבי**
- **<u>1. מבחן האופטימליות</u>**
- כדי לקבוע אם הפתרון הנוכחי אופטימלי, בדוק אם קיים משתנה לא-בסיסי שהגדלתו תגדיל את ערך פונקצית המטרה Z.
- ניתן לעשות זאת על-ידי בדיקת הסימן של מקדמיהם של כל המשתנים הלא-בסיסיים בפונקצית המטרה.
- אם כל המקדמים שליליים, אזי הפתרון הנוכחי אופטימלי, ויש לעצור. אחרת, יש לחזור לשלב האיטרטיבי.

- **<u>2. מציאת פתרון בסיסי אפשרי חדש</u>**
- 2.1: קבע מהו **המשתנה הנכנס לבסיס**:
- בחר את המשתנה הלא-בסיסי, שהגדלת ערכו תגדיל את Zבשיעור הרב ביותר.
- לשם כך, השתמש במשוואת פונקצית המטרה הנוכחית, שבה מבוטא Z באמצעות המשתנים הלא-בסיסיים בלבד.
- בחר את המשתנה הלא-בסיסי בעל **המקדם החיובי הגדול ביותר**.

- 2.2: קבע מהו **<u>המשתנה היוצא מהבסיס</u>**:
- בחר את המשתנה הבסיסי שמתאפס ראשון כתוצאה מהגדלת ערכו של המשתנה הנכנס לבסיס.
- מאחר שכל אחד מהמשתנים הבסיסיים מופיע רק במשוואה אחת, קל לבדוק מתי יתאפס המשתנה הבסיסי הנדון כתוצאה מהגדלת ערכו של המשתנה הנכנס לבסיס.

- לאחר מכן, יש למצוא את המשוואה שבה מתקבל הערך **הקטן ביותר** של החסם העליון.
- המשתנה הבסיסי המופיע באותה משוואה הוא המשתנה היוצא מהבסיס.

◈2.3: חישוב **הפתרון הבסיסי האפשרי החדש**:

◈באמצעות הבאת מערכת המשוואות לצורה קנונית, פתור את מערכת המשוואות הנוכחית עבור המשתנים הבסיסיים ועבור Z, המבוטא במונחים של המשתנים הלא-בסיסיים.

◈יש לקבוע את הפתרון הבסיסי החדש .והתהליך חוזר חלילה.