תכנון וניתוח אלגוריתמים
הרצאה 7

פרק 1.7 : בעית b-ים שליליים

- במקרים רבים צדו הימני של האילוץ מופיע כמספר שלילי.
- זה יכול לנבוע הן מצורתו המקורית של האילוץ והן כתוצאה משינוי שבוצע באילוץ על מנת לשנות את כיוונו.
- למשל: $x_1 - 10x_2 \le -5 \quad \Leftrightarrow \quad -x_1 + 10x_2 \ge 5$
- הבעיה הנוצרת ע"י b-ים שליליים היא, שהוספת משתני חוסר אינה מאפשרת קבלת פתרון בסיסי אפשרי, היות ואחד או יותר ממשתני הבסיס במקרה זה יקבל ערך שלילי, מאחר וה-b המתאים לו שלילי.

דוגמא 1

- נתונה הבעיה הבאה:

$$\text{Min } \{Z = 8x_1 + 4x_2 + 6x_3\}$$

S.t.

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 2 \\ 5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 3 \\ 6x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \geq & 4 \end{array}$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, 3$$

דוגמא 1

- פתרון:
- שלב ראשון הוא הפיכת האי-שוויונים לשוויונים.
- לשם כך נחסיר מכל משוואה "משתנה עודף" המקביל ל"משתנה חוסר" באי-שוויונים עם $\leq$.
- מחיר "משתנה העודף" בפונקצית המטרה יהיה אפס.

דוגמא 1

- המערכת המתקבלת היא:

$$\text{Min}\ \{Z = 8x_1 + 4x_2 + 6x_3\}$$

S.t.

$$\begin{array}{lcccccccccccl}
2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & & & & & = & 2 \\
5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & - & x_5 & & & = & 3 \\
6x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & & & - & x_6 & = & 4
\end{array}$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, 6$$

דוגמא 1

- נעבוד על בעית המינימום בשיטת הסימפלקס, כאשר השינוי היחיד שיתבצע בתהליך הוא הקריטריון לאופטימליות (כפי שלמדנו).
- הבעיה במערכת המשוואות המתקבלת היא, שלא ניתן לזהות מייד פתרון בסיסי ראשוני.
- x_4, x_5, x_6 אינם יכולים להוות פתרון בסיסי ראשוני, המקבל את ערכי האילוצים, היות והם יהיו שליליים והפתרון לא יהיה אפשרי.

דוגמא 1

- על מנת להתגבר על בעיה זו נבנה פתרון בסיסי ראשוני באמצעות הוספת "משתנים מלאכותיים" – משתנה אחד לכל משוואה.
- גם ממשתנים אלו נדרוש אי-שליליות.

דוגמא 1

- מערכת האילוצים שתתקבל היא:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & & & & & + & y_1 & & & & & = & 2 \\
5x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & - & x_5 & & & & & + & y_2 & & & = & 3 \\
6x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & & & - & x_6 & & & & & + & y_3 & = & 4
\end{array}
$$

$$x_j \ge 0 \quad j = 1,2,\ldots,6 \qquad y_j \ge 0 \quad j = 1,2,3$$

שיטת ה-M הגדול
The Big M Method

- מערכת האילוצים שהתקבלה אינה זהה למערכת המקורית.
- כדי לקבל פתרון שיהיה זהה לפתרון הבעיה המקורית, עלינו לדרוש שבפתרון האופטימלי המשתנים המלאכותיים שהוספנו ישוו לאפס.
- נעשה זאת באופן הבא (***שיטת ה-M הגדול***):

שיטת ה-M הגדול
The Big M Method

- ניתן למשתנים המלאכותיים שהוספנו מחיר M בפונקצית המטרה, כאשר M הוא ערך גדול מאוד.
  - עבור בעית מקסימום, ניתן למשתנים המלאכותיים מחיר M–.
- במצב כזה, הערך האופטימלי של פונקצית המטרה מושג, כאשר ערכי המשתנים המלאכותיים יגיעו לאפס.
- אם זה לא קורה, הרי שאין פתרון אפשרי לבעיה.
- לאחר מתן המחירים הנ"ל, אנו ממשיכים בתהליך הסימפלקס הרגיל ומקבלים את הפתרון הדרוש.

דוגמא 1

- במקרה שלנו פונקציית המטרה תהיה:

$$\text{Min}\ \{Z = 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 + My_1 + My_2 + My_3\}$$

- הפתרון הבסיסי הראשוני הוא:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

$$y_1 = y_2 = y_3 = M$$

$$Z = 9M$$

דוגמא 1

- אין זה פתרון אפשרי לבעיה המקורית!
- רק בשלב שבו כל ה-y-ים יצאו מהבסיס ויקבלו ערך אפס, נקבל פתרון בסיסי אפשרי לבעיה המקורית.
- כעת, נציג את הבעיה שהתחלנו לפתור בטבלה, ונריץ את הסימפלקס:

דוגמא 1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3		
מחירים		8	4	6	0	0	0	M	M	M		
	בסיס	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$	$\bar{a}_7$	$\bar{a}_8$	$\bar{a}_9$	$\bar{b}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
1	y_1	2	1	3	-1	0	0	1	0	0	2	
2	y_2	5	1	2	0	-1	0	0	1	0	3	
3	y_3	6	3	-1	0	0	-1	0	0	1	4	
	$C_j^{\vert}$										$9M$	$=Z$

- נחשב את C'_j-ים:

דוגמא 1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3		
	מחירים	8	4	6	0	0	0	M	M	M		
	בסיס	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$	$\bar{a}_7$	$\bar{a}_8$	$\bar{a}_9$	$\bar{b}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
1	y_1	2	1	3	-1	0	0	1	0	0	2	
2	y_2	5	1	2	0	-1	0	0	1	0	3	
3	y_3	6	3	-1	0	0	-1	0	0	1	4	
	C'_j	$13M-8$	$5M-4$	$4M-6$	$-M$	$-M$	$-M$	0	0	0	$9M$	$=Z$

- הפתרון אינו אופטימלי, כי ישנם C'_j-ים חיוביים (עבור x_1, x_2, x_3), והמקסימלי מתקבל עבור x_1, לכן זהו המועמד הבא לבסיס.

דוגמא 1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3		
מחירים		8	4	6	0	0	0	M	M	M		
	בסיס	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$	$\bar{a}_7$	$\bar{a}_8$	$\bar{a}_9$	$\bar{b}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
1	y_1	2	1	3	-1	0	0	1	0	0	2	1
2	y_2	5	1	2	0	-1	0	0	1	0	3	$\frac{3}{5}$
3	y_3	6	3	-1	0	0	-1	0	0	1	4	$\frac{2}{3}$
	$C_j^{\mid}$	$13M-8$	$5M-4$	$4M-6$	$-M$	$-M$	$-M$	0	0	0	$9M$	$=Z$

- מהחישוב של הערכים b_i/a_{ik} מתקבל כי המשתנה שיעזוב את הבסיס הוא y_2. נבצע את ההתמרה לפי ציר ההתמרה 5,ותתקבל הטבלה:

דוגמא 1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3		
מחירים		8	4	6	0	0	0	M	M	M		
	בסיס	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$	$\bar{a}_7$	$\bar{a}_8$	$\bar{a}_9$	$\bar{b}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
1	y_1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{11}{5}$	-1	$\frac{2}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	
2	x_1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	
3	y_3	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{17}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	-1	0	$-\frac{6}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	
	$C_j^{\vert}$	0	$\frac{12}{5}M-\frac{12}{5}$	$-\frac{6}{5}M-\frac{14}{5}$	$-M$	$\frac{8}{5}M-\frac{8}{5}$	$-M$	0	$-\frac{13}{5}M+\frac{8}{5}$	0	$\frac{6}{5}M+\frac{24}{5}$	$=Z$

- עדיין הפתרון לא אופטימלי, כי קיימים C'_j-ים חיוביים. המקסימלי בינהם מתקבל עבור x_2.

דוגמא 1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3		
מחירים		8	4	6	0	0	0	M	M	M		
	בסיס	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$	$\bar{a}_7$	$\bar{a}_8$	$\bar{a}_9$	$\bar{b}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
1	y_1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{11}{5}$	-1	$\frac{2}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{3}$
2	x_1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	3
3	y_3	0	$\frac{9}{5}$	$-\frac{17}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	-1	0	$-\frac{6}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{9}$
	$C_j^{\vert}$	0	$\frac{12}{5}M-\frac{12}{5}$	$-\frac{6}{5}M-\frac{14}{5}$	$-M$	$\frac{8}{5}M-\frac{8}{5}$	$-M$	0	$-\frac{13}{5}M+\frac{8}{5}$	0	$\frac{6}{5}M+\frac{24}{5}$	$=Z$

- המשתנה היוצא מהבסיס הוא y_3. ציר ההתמרה הוא 9/5.

דוגמא 1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3		
מחירים		8	4	6	0	0	0	M	M	M		
	בסיס	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$	$\bar{a}_7$	$\bar{a}_8$	$\bar{a}_9$	$\bar{b}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
1	y_1	0	0	$\frac{10}{3}$	-1	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	
2	x_1	1	0	$\frac{7}{9}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$	
3	x_2	0	1	$-\frac{17}{9}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{9}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	
	C'_j	0	0	$\frac{10}{3}M-\frac{22}{3}$	$-M$	0	$\frac{1}{3}M-\frac{4}{3}$	0	$-M$	$-\frac{4}{3}M+\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}M+\frac{16}{3}$	$=Z$

- עדיין הפתרון לא אופטימלי, כי קיימים C'_j-ים חיוביים. המקסימלי בינהם מתקבל עבור x_3.

דוגמא 1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3		
מחירים		8	4	6	0	0	0	M	M	M		
	בסיס	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$	$\bar{a}_7$	$\bar{a}_8$	$\bar{a}_9$	$\bar{b}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
1	y_1	0	0	$\frac{10}{3}$	-1	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$
2	x_1	1	0	$\frac{7}{9}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{7}$
3	x_2	0	1	$-\frac{17}{9}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{9}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	
	$C_j^{\vert}$	0	0	$\frac{10}{3}M-\frac{22}{3}$	$-M$	0	$\frac{1}{3}M-\frac{4}{3}$	0	$-M$	$-\frac{4}{3}M+\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}M+\frac{16}{3}$	$=Z$

- המשתנה היוצא מהבסיס הוא y_1. ציר ההתמרה הוא 10/3.

דוגמא 1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	הפתרון	
	מחירים	8	4	6	0	0	0	M	M	M		
	בסיס	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$	$\bar{a}_7$	$\bar{a}_8$	$\bar{a}_9$	$\bar{b}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
1	x_3	0	0	1	$-\frac{3}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	
2	x_1	1	0	0	$\frac{7}{30}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{30}$	$-\frac{7}{30}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{2}{5}$	
3	x_2	0	1	0	$-\frac{17}{30}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{11}{30}$	$\frac{17}{30}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{3}{5}$	
	C'_j	0	0	0	$-\frac{11}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	$-M+\frac{11}{5}$	$-M$	$-M+\frac{3}{5}$	$\frac{34}{5}$	$=Z$

- הפעם זהו פתרון אופטימלי, כי לא נותרו C'_j-ים חיוביים.

דוגמא 1

- הפתרון האופטימלי שקיבלנו הוא: $x_3^* = \frac{1}{5}$ $\quad x_2^* = \frac{3}{5}$ $\quad \frac{\cancel{3}}{\cancel{5}} x_1^* = \frac{2}{5}$
(המשתנים הבסיסיים).
- כל שאר המשתנים (הלא בסיסיים) הינם 0.
- ערך פונקציית המטרה הוא $Z^* = \frac{34}{5}$
- הפתרון מורכב כולו מכל המשתנים המקוריים, וכל משתני העודף שווים לאפס, כלומר האילוצים "מנוצלים" במלואם.
- ברור שהמשתנים המלאכותיים אינם מופיעים בפתרון האופטימלי, כי אחרת זה לא היה פתרון חוקי.

מסקנות

- משתני הבסיס לפי הסדר הם: $\{x_3, x_1, x_2\}$ לכן:

$$\begin{array}{c} [x_3, x_1, x_2] \\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} [y_1, y_2, y_3] \\ B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{7}{30} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{30} \\ \frac{17}{30} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{30} \end{pmatrix} \end{array}$$

מסקנות

- לכן:

$$\underline{x_B} = B^{-1}\cdot \underline{b} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{7}{30} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{30} \\ \frac{17}{30} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

סיכום השימוש בשיטת ה-M הגדול לפתרון בעיות עם b-ים שליליים

עבור בעית מקסימיזציה:

1. הפוך כל מרכיבי b לאי-שליליים, על ידי הכפלת אי-שוויונים בהם b-ים שליליים ב- -1.
2. עבור אילוצים המופיעים כשוויון, הוסף משתנה מלאכותי עם מקדם $+1$.
3. עבור אי-שוויונים שהיו הפוכים בכיוונם, הוסף משתנה עודף עם מקדם -1 ומשתנה מלאכותי עם מקדם $+1$.
4. הוסף כל משתנה מלאכותי (בעל מקדם $+1$) לפונקציית המטרה עם מחיר $-M$, כאשר M מספר חיובי גדול מאוד.

סיכום השימוש בשיטת ה-M הגדול לפתרון בעיות עם b-ים שליליים

5. לכל אי-שוויון בכיוון הנכון, הוסף משתנה חוסר עם מקדם +1.
6. פתור את הבעיה בשיטת הסימפלקס.
7. לבעיה המקורית קיים פתרון אפשרי, רק אם המשתנים המלאכותיים עם מקדם M– בפונקצית המטרה אינם בבסיס האופטימלי.

עבור בעית מינימום יש לתת למשתנים המלאכותיים מחיר M+ בפונקצית המטרה.

דוגמא 2

- נוכיח שלבעיה הבאה אין פתרון אפשרי.

$$\text{Max } \{Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3\}$$

S.t.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 10x_2 & + & 5x_3 & \leq & 15 \\ 33x_1 & - & 10x_2 & + & 9x_3 & \leq & 33 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 4 \end{array}$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, 3$$

דוגמא 2

- נפתור את הבעיה בשיטת ה-M הגדול.
- נוסיף משתני חוסר x_4, x_5 לשני האילוצים הראשונים, ומשתנה עודף x_6 ומשתנה מלאכותי y_1 לאילוץ השלישי:

$$\text{Max } \{Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - My_1\}$$

S.t.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcl}
3x_1 & + & 10x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & & & & & & & = & 15 \\
33x_1 & - & 10x_2 & + & 9x_3 & & & + & x_5 & & & & & = & 33 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & - & x_6 & + & y_1 & = & 4
\end{array}$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, 6 \qquad y_1 \ge 0$$

דוגמא 2 – הרצת הסימפלקס

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1		
מחירים		2	3	5	0	0	0	$-M$		
	בסיס	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$	$\bar{a}_7$	$\bar{b}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
1	x_4	3	10	5	1	0	0	0	15	$\frac{3}{2}$
2	x_5	33	-10	9	0	1	0	0	33	
3	y_1	1	2	1	0	0	-1	1	4	2
	$C_j^{\vert}$	$-M-2$	$-2M-3$	$-M-5$	0	0	M	0	$-4M$	$=Z$

- המשתנה הנכנס הוא x_2, המשתנה היוצא הוא x_4. ציר ההתמרה הוא 10.

דוגמא 2 – הרצת הסימפלקס

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1		
מחירים		2	3	5	0	0	0	$-M$		
	בסיס	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$	$\bar{a}_7$	$\bar{b}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
1	x_2	$\frac{3}{10}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0	$\frac{3}{2}$	5
2	x_5	36	0	14	1	1	0	0	48	$\frac{4}{3}$
3	y_1	$\frac{2}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	-1	1	1	$\frac{5}{2}$
	$C_j^{\mid}$	$-\frac{2}{5}M-\frac{11}{10}$	0	$-\frac{7}{2}$	$\frac{1}{5}M+\frac{3}{10}$	0	M	0	$-M+\frac{9}{2}$	$=Z$

- המשתנה הנכנס הוא x_1, המשתנה היוצא הוא x_5. ציר ההתמרה הוא 36.

דוגמא 2 – הרצת הסימפלקס

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1		
מחירים		2	3	5	0	0	0	$-M$		
	בסיס	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$	$\bar{a}_7$	$\bar{b}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
1	x_2	0	1	$\frac{23}{60}$	$\frac{11}{120}$	$-\frac{1}{120}$	0	0	$\frac{11}{10}$	
2	x_1	1	0	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{4}{3}$	
3	y_1	0	0	$-\frac{7}{45}$	$-\frac{19}{90}$	$-\frac{1}{90}$	-1	1	$\frac{7}{15}$	
	$C_j^{\vert}$	0	0	$\frac{7}{45}M-\frac{553}{180}$	$\frac{19}{90}M+\frac{119}{360}$	$\frac{1}{90}M+\frac{11}{360}$	M	0	$-\frac{7}{15}M+\frac{179}{30}$	$=Z$

- לכאורה, הגענו לפתרון אופטימלי, כי כל ה-$C`_j$-ים אי-שליליים. אולם <u>המשתנה המלאכותי y_1 עדיין בבסיס</u>, לכן ערכו בפתרון שקיבלנו שונה מאפס. מכאן, **אין פתרון אפשרי למערכת**.