פרק 3 – בעיית התובלה

הערות והרחבות לספר הלימוד

בעיות תובלה בלתי מאוזנות

כדי לקבל פתרון אופטימלי כלשהו, צריכים להיות לבעיית התובלה פתרונות אפשריים. נפרט להלן את התכונות הדרושות לקיום פתרונות כאלה.

תנאי הכרחי ומספיק לקיום פתרון אפשרי כלשהו לבעיית התובלה מהסוג:

m – מקורות

n – יעדים

s_i – הייצור במקור i

d_j – הצריכה ביעד j

הוא:

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

לפי תנאי זה, סך כל ההיצע צריך להיות שווה לסך כל הביקוש, ולמעשה הדרישה היא שהמערכת תהיה מאוזנת. לעיתים קרובות בעיית התובלה אינה מאוזנת, וקיימות לכך שתי סיבות: ההיצע עולה על הביקוש, או הביקוש עולה על ההיצע. אפשר לפתור בעיות מסוג זה באמצעות השיטות שלמדנו, בתנאי שנהפוך אותן תחילה לבעיות תובלה מאוזנות.

כדי להשיג מטרה זו, נפעל כדלקמן:

1. אם ההיצע עולה על הביקוש, נוסיף לטבלת התובלה "יעד דמה" אשר יספוג את עודף ההיצע.
2. אם הביקוש עולה על ההיצע, נוסיף לטבלת התובלה "מקור דמה" אשר יספק את החסר.

דוגמה להיצע שעולה על הביקוש: כאשר מייצרים 1000 יחידות של מוצר מסוים וצורכים רק 800, נשארות במלאי 200 יחידות. במקרה כזה, כאשר נוצר עודף קיבולת של היצע, מוסיפים למערכת יעד דמה, כדי למלא את החסר ולהפוך את אי-השוויונים לשוויונים ולקיים את התנאים שנדרשו לפי האפשרויות. במקרה זה יש לקחת בחשבון את עלויות אחסון המלאי של היחידות שמגיעות אל המקור המדומה.

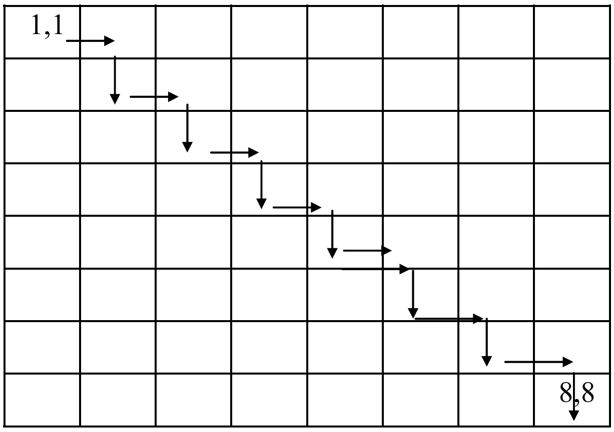
דוגמה לביקוש שעולה על ההיצע: לרשות חברת "מקורות" עומדים כמה מאגרי מים ועליה לחלק אותם לכל הישובים בישראל; כידוע כמות המים במאגרים נמוכה מהצריכה (לכן מפלס הכינרת הולך ויורד). במקרה המתואר יש לנו **עודף קיבולת ביקוש**, לכן ההתאמה הנדרשת כאן היא הוספת **מקור דמה** ש"יספק" את הביקוש העודף. היצע הדמה של מקור הדמה הזה יהיה ההפרש בין סך כל הביקושים לסך כל ההיצעים האמיתיים. עלויות ההובלה ממקור הדמה הן אפס.

פתרון בסיסי אפשרי התחלתי – שיטת ***הפינה הצפון מערבית***

שיטת ***הפינה הצפון מערבית*** מבטיחה כי כל בסיס יכיל $m + n - 1$ משתנים, שהרי בכל שלב אנו מוחקים שורה או עמודה, פרט לשלב האחרון שבו נמחקת השורה האחרונה ובמקביל לה גם העמודה האחרונה.

דרך נוספת לקביעת גודל הבסיס שיתקבל לפי שיטת ***הפינה הצפון מערבית***, היא הסתכלות על אוסף המשבצות שמשתניהם צורפו לבסיס, כעל מסלול של "חייל" במשחק השחמט. החייל יוצא ממשבצת (1.1) ומתקדם אל משבצת ($m = 8,\ n = 8$). לרשות החייל עומדות 7 תנועות "דרומה" ($m - 1$) ו-7 תנועות "מזרחה" ($n - 1$). אם נוסיף את המשבצת ההתחלתית (1,1), נקבל מסלול שאורכו:

$$15 = 1 + 7 + 7 = 1 + (8 - 1) + (8 - 1)$$



משתנה בסיסי מנוון – שיטת *הפינה הצפון מערבית*

בשיטת הסימפלקס ראינו שקיימים מצבי תיקו; באחד המקרים מצביע התיקו על משתנה מנוון. גם בשיטת ***הפינה הצפון מערבית*** קיים מצב של תיקו המצביע לעיתים על משתנה מנוון, אבל יש אפשרות להתחמק ממנו לעיתים, ולהגיע לפתרון בסיסי אפשרי התחלתי ולאחר מכן לפתרון אופטימלי ללא משתנה מנוון.

נדגים אם-כן מהו מצב תיקו בשיטת ***הפינה הצפון מערבית*** וכיצד ניתן להיחלץ ממצב זה. כאשר אנו מצויים ב***פינה הצפון מערבית*** כלשהי, ייתכן שבלולאה מסוימת ההיצע שווה לביקוש, וייתכן מצב שבו הביקוש הוא אפס. זהו מצב של תיקו. במקרה זה נרשום כהקצאה את הערך המשותף, אולם נעביר קו מרוסק אחד בלבד לאורך השורה או העמודה, לפי רצוננו; אחרת – הבסיס יכיל פחות מ-$1 - m + n$ משתנים. עתה נמשיך את התהליך באופן רגיל, כאשר המשתנה הבסיסי הבא יהיה שווה ל-0, כלומר משתנה מנוון.

לדוגמה: נניח כי נתונה בעיית התובלה המוצגת בטבלה 3.1. ההקצאה הראשונה תהיה $x_{11} = 220$. הקצאה זו שווה בדיוק לביקוש בעמודה 1 (בכך מבטלים עמודה זו ולא בוחנים אותה עוד להקצאה נוספת).
איטרציה ראשונה זו משאירה היצע של 10 בשורה 1, כך שהבחירה הבאה של משתנה בסיסי היא: $x_{1,1+1} = x_{12}$. מאחר שההיצע בשורה 1 אינו גדול מהביקוש של 10 בעמודה 2, כל ההיצע מוקצה כעת, כלומר $x_{12} = 10$ ושורה זו מתבטלת כעת ואין מקצים ממנה עוד. (בחרנו לבטל את שורה 1 ולא את עמודה 2 מפני שכך הוגדר בתיאור ההליך הכללי לבניית פתרון בסיסי בצעד 3).

	חנויות המפעל			
	1	2	3	**היצע**
מפעלים 1				230
מפעלים 2				80
מפעלים 3				200
ביקוש	220	10	280	

טבלה 3.1

הבחירה הבאה היא אפוא $x_{1+1,2} = x_{22}$. כיוון שהביקוש הנותר בעמודה 2, שהוא 0, קטן מההיצע 80 שבשורה 2, אזי ההקצאה היא $x_{22} = 0$ ומבטלים את עמודה 2. נמשיך בדרך זו ונקבל לבסוף פתרון בסיסי ואפשרי, כפי שמתואר בטבלה 3.2.

	חנויות המפעל			
	1	2	3	**היצע**
מפעלים 1	220	10		~~230~~ ~~10~~
מפעלים 2		0	80	~~80~~
מפעלים 3			200	~~200~~
ביקוש	~~220~~	~~10~~	~~280~~ ~~200~~	

טבלה 3.2

אלגוריתמים נוספים למציאת פתרון בסיסי התחלתי

בסעיף 3.3.1 הכרנו את שיטת ***הפינה הצפון-מערבית*** למציאת פתרון בסיסי התחלתי. שיטה זו פשוטה עד מאוד, ובזה יתרונה. אולם שיטה זו אינה עושה כל שימוש בעלויות התובלה, לכן הפתרון הבסיסי המתקבל עשוי להיות רחוק מן הפתרון האופטימלי, ובהמשך יידרשו איטרציות רבות עד שנגיע לפתרון האופטימלי.

קיימות שתי שיטות נוספות למציאת פתרון בסיסי התחלתי, מורכבות מעט יותר; שתיהן משתמשות בעלויות התובלה ולכן משיגות פתרון התחלתי משופר.

שיטת המחיר המינימלי

בשיטה זו, בדומה לשיטה ***הצפון מערבית*** נבחר בכל שלב תא בטבלת הסימפלקס ונקבע את ערך ההקצאה בו כערך המינימלי מבין ההיצע בשורה והביקוש בעמודה. אולם בניגוד לשיטה שהכרנו, לא נבחר הפעם ב***פינה הצפון מערבית***. בכל שלב נבחר את המשתנה המתאים ליחידות שעלות הובלתן מינימלית; כך ננצל בצורה יעילה את ערוצי התובלה הזולים ונשיג פתרון בסיסי התחלתי טוב יותר.

נדגים את השיטה שתיארנו; נתבונן בטבלה 3.3 המציגה את בעיית התובלה בחברת "המלקק" המורחבת (ראו שאלה 3.2).

היצע	רמת-גן	באר-שבע	חיפה	תל-אביב		
	חנויות המפעל					
230,000	$\boxed{1}$	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	**ראש-העין**	**מפעלים**
550,000	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$	**קרית-גת**	
240,000	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	**מטולה**	
	200,000	**220,000**	**300,000**	**300,000**	**ביקוש**	

טבלה 3.3
נתוני בעיית התובלה של חברת "המלקק" המורחבת

העלות המינימלית בטבלה זו היא בשיעור 1, והיא מופיעה בתא (1,4). נבחר אפוא במשתנה x_{14}, ונקבע שערך ההקצאה הוא 200,000 (זהו הערך המינימלי מבין ההיצע, 230,000, והביקוש, 200,000), כך נקבל את טבלה 3.4.

היצע	רמת-גן	באר-שבע	חיפה	תל-אביב		
	חנויות המפעל					
~~230,000~~ 30,000	$\boxed{1}$ 200,000	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	**ראש-העין**	**מפעלים**
550,000	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$	**קרית-גת**	
240,000	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	**מטולה**	
	~~200,000~~	**220,000**	**300,000**	**300,000**	**ביקוש**	

טבלה 3.4
שיטת המחיר המינימלי – לולאה ראשונה

העלות המינימלית בטבלה זו היא עתה בשיעור 2, והיא מופיעה בשתי משבצות (1,1) ו- (2,3), נבחר באופן שרירותי את המשתנה x_{11}, ונקבע כי $x_{11} = 30,000$, הטבלה המתוקנת תֵּראה כך:

היצע	רמת-גן	באר-שבע	חיפה	תל-אביב		
	חנויות המפעל					
~~230,000~~ ~~30,000~~	$\boxed{1}$ **200,000**	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ **30,000**	**ראש-העין**	**מפעלים**
550,000	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$	**קרית-גת**	
240,000	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	**מטולה**	
	~~200,000~~	**220,000**	**300,000**	~~300,000~~ **270,000**	**ביקוש**	

טבלה 3.5
שיטת המחיר המינימלי – לולאה שנייה

בטבלה זו קיימת משבצת אחת (2,3) שבה רשום הערך 2, נקצה אפוא $x_{23} = 220{,}000$, ונקבל את טבלה 3.6.

היצע	רמת-גן	באר-שבע	חיפה	תל-אביב		
	חנויות המפעל					
~~230,000~~ ~~30,000~~	$\boxed{1}$ **200,000**	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ **30,000**	**ראש-העין**	**מפעלים**
~~550,000~~ **330,000**	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ **220,000**	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$	**קרית-גת**	
240,000	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	**מטולה**	
	~~200,000~~	~~220,000~~	**300,000**	~~300,000~~ **270,000**	**ביקוש**	

טבלה 3.6
שיטת המחיר המינימלי – לולאה שלישית

במשבצות שנותרו, העלות המינימלית היא בשיעור 3 והיא מופיעה במשבצות (2,1), (2,4) ו- (3,2). נבחר אם כן את x_{21} לבסיס ונקבע שערכו הוא 270,000, כך נקבל:

		חנויות המפעל				
		רמת-גן	**באר-שבע**	**חיפה**	**תל-אביב**	**היצע**
מפעלים	**ראש-העין**	$\boxed{1}$ **200,000**	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ **30,000**	~~**230,000**~~ ~~**30,000**~~
	קרית-גת	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ **220,000**	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$ **270,000**	~~**550,000**~~ ~~**330,000**~~ **60,000**
	מטולה	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	**240,000**
	ביקוש	~~**200,000**~~	~~**220,000**~~	**300,000**	~~**300,000**~~ ~~**270,000**~~	

טבלה 3.7
שיטת המחיר המינימלי – לולאה רביעית

בשלב הבא נקצה $x_{32} = 240,000$ ונקבל:

		חנויות המפעל				
		רמת-גן	**באר-שבע**	**חיפה**	**תל-אביב**	**היצע**
מפעלים	**ראש-העין**	$\boxed{1}$ **200,000**	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ **30,000**	~~**230,000**~~ ~~**30,000**~~
	קרית-גת	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ **220,000**	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$ **270,000**	~~**550,000**~~ ~~**330,000**~~ **60,000**
	מטולה	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$ **240,000**	$\boxed{4}$	~~**240,000**~~
	ביקוש	~~**200,000**~~	~~**220,000**~~	~~**300,000**~~ **60,000**	~~**300,000**~~ ~~**270,000**~~	

טבלה 3.8
שיטת המחיר המינימלי – לולאה חמישית

ובשלב האחרון נקצה $x_{22} = 60,000$ ונקבל:

		חנויות המפעל				
		רמת-גן	באר-שבע	חיפה	תל-אביב	היצע
מפעלים	ראש-העין	$\boxed{1}$ 200,000	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ 30,000	~~230,000~~ ~~30,000~~
	קרית-גת	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 220,000	$\boxed{5}$ 60,000	$\boxed{3}$ 270,000	~~550,000~~ ~~330,000~~ ~~60,000~~
	מטולה	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$ 240,000	$\boxed{4}$	~~240,000~~
	ביקוש	~~200,000~~	~~220,000~~	~~300,000~~ ~~60,000~~	~~300,000~~ ~~270,000~~	

טבלה 3.9
שיטת המחיר המינימלי – לולאה שישית

קיבלנו עתה פתרון בסיסי התחלתי הכולל את המשתנים:

$x_{11} = 30{,}000$, $x_{14} = 200{,}000$, $x_{21} = 270{,}000$, $x_{22} = 60{,}000$, $x_{23} = 220{,}000$, $x_{32} = 240{,}000$.

שאר המשתנים נמצאים מחוץ לבסיס וערכם הוא 0.

מחיר ההובלה עבור פתרון זה הוא:

$$Z = 2*30{,}000 + 1*200{,}000 + 3*270{,}000 + 5*60{,}000 + 2*220{,}000 + 3*240{,}000 = \mathbf{2{,}530{,}000}$$

נציג עתה את השגרה ***מצא בסיס התחלתי בשיטת המחיר המינימלי***.

שגרה זו מקבלת את הפרמטרים: m, n, $s[1..m]$ ו- $d[1..n]$ בדומה לשגרה ***מצא בסיס התחלתי בשיטה הצפון-מערבית***, וכן את המערך הדו-ממדי $x[1..m,1..n]$ המכיל את עלויות ההובלה השונות. השגרה יוצרת מערך דו-ממדי $x[1..m,1..n]$ עבור משתני ההקצאה.

להלן השגרה *מצא בסיס התחלתי בשיטת המחיר המינימלי*:

מצא בסיס התחלתי בשיטת המחיר המינימלי (m, n, s, d, c):

(1) free_columns ← {1,2,…,n},free_rows ← {1,2,…,m}

(2) בצע $m + n - 1$ פעמים את הקטע הבא:

(2.1) min_cost ← 99999

(2.2) עבור כל i ב- free_rows וכל j ב- free_columns בצע:

(2.2.1) אם min_cost > $c[i,j]$ בצע:

(2.2.1.1) min_cost ← $c[i,j]$

(2.2.1.2) c_indeX ← j,r_index ← i

(2.3) $x[r$_index,c_index]←min($s[r$_index],$d[c$_index])

(2.4) אם $s[r$_index]<$d[c$_index], בצע:

(2.4.1) $d[c$_index]←$d[c$_index]–$s[r$_index]

(2.4.2) free_rows←free_rows–{r_index}

(2.5) אחרת, בצע:

(2.5.1) $s[r$_index]←$s[r$_index] –$d[c$_index

(2.5.2) free_colunms←free_colunms–{c_index}

הסבר:

(1) הגדרת קבוצות השורות והעמודות הפנויות (שמהן אפשר לבחור משתני בסיס), ככלל השורות והעמודות.

(2) שלב איטרטיבי שבו נקבעת הקצאה של משתנה בסיס $x[r\_\text{index},c\_\text{index}]$ בכל אחת מ- $m+n-1$ הלולאות.

(2.1-2.3) מציאת המשתנה הפנוי שמתאימה לו עלות מינימלית, וצירופו לבסיס.

(2.4-2.5) עדכון ההיצעים, הביקושים וקבוצות השורות/עמודות הפנויים.

שיטת הקירוב של ווגל

נציג עתה שיטה המספקת בדרך כלל פתרון התחלתי טוב יותר משתי השיטות שהכרנו קודם (השיטה הצפון מערבית ושיטת המחיר המינימלי), כאשר לעיתים מדובר בפתרון האופטימלי עצמו או בפתרון קרוב לו.

בשיטת הקירוב של ווגל אנו מחשבים בכל שלב, עבור כל שורה (וכל עמודה) את ההפרש בין העלות הנמוכה ביותר בשורה (עמודה) לבין העלות הנמוכה שאחריה. עתה אנו בוחרים בשורה או עמודה שההפרש בה הוא הגבוה ביותר, ובשורה (עמודה) זו אנו מקצים, עבור המשתנה שמתאימה לו העלות המינימלית, את הערך הגבוה האפשרי (הערך הנמוך מבין ההיצע בשורה והביקוש בעמודה). לאחר מכן אנו מוחקים שורה (עמודה) זו מן הטבלה ומעדכנים את נתוני ההפרש בכל העמודות (שורות). תהליך זה נמשך עד שנותרת שורה או עמודה יחידה שלא נמחקה; עבור שורה זו אנו מחשבים את ערכיהם של משתני הבסיס בשיטת המחיר המינימלי.

לשם הדגמת השיטה נשוב לטבלה 3.3 ונצרף לה את נתוני ההפרשים בכל שורה ועמודה.

הפרש שורה	**היצע**	**חנויות המפעל** **רמת-גן**	**באר-שבע**	**חיפה**	**תל-אביב**		
1	**230,000**	1	5	4	2	**ראש-העין**	**מפעלים**
1	**550,000**	3	2	5	3	**קרית-גת**	
1	**240,000**	4	7	3	4	**מטולה**	
		200,000	**220,000**	**300,000**	**300,000**	**ביקוש**	
		2	**3**	**1**	**1**	**הפרש עמודה**	

טבלה 3.10
נתוני בעיית התובלה של חברת "המלקק" + הפרשים

ההפרש המקסימלי, 3, קיים בעמודה 3. בעמודה זו, המשתנה שמתאימה לו העלות המינימלית הוא x_{23}, לכן נקבע שערכו הוא 220,000, ונקבל את טבלה 3.11.

הפרש שורה	**היצע**	**רמת-גן**	**באר-שבע**	**חיפה**	**תל-אביב**		
		חנויות המפעל					
1	**230,000**	$\boxed{1}$	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	**ראש-העין**	**מפעלים**
1	~~**550,000**~~ **330,000**	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ **220,000**	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$	**קרית-גת**	
1	**240,000**	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	**מטולה**	
		200,000	~~**220,000**~~	**300,000**	**300,000**	**ביקוש**	
		2		**1**	**1**	**הפרש עמודה**	

טבלה 3.11
שיטת הקירוב של ווגל – לולאה ראשונה

עתה קיימת עמודה (4) שבה רשום ההפרש 2, לכן נקבע $x_{14} = 200{,}000$ כך נקבל:

הפרש שורה	**היצע**	**רמת-גן**	**באר-שבע**	**חיפה**	**תל-אביב**		
		חנויות המפעל					
1	~~**230,000**~~ **30,000**	$\boxed{1}$ **200,000**	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	**ראש-העין**	**מפעלים**
1	~~**550,000**~~ **330,000**	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ **220,000**	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$	**קרית-גת**	
1	**240,000**	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	**מטולה**	
		~~**200,000**~~	~~**220,000**~~	**300,000**	**300,000**	**ביקוש**	
				1	**1**	**הפרש עמודה**	

טבלה 3.12
שיטת הקירוב של ווגל – לולאה שנייה

בטבלה זו ההפרש המקסימלי, 1, קיים בשורות 1,2,3 ובעמודות 1,2. נבחר באופן שרירותי בשורה 1, ונקבע $x_{11} = 30{,}000$, כך נקבל:

הפרש שורה	היצע	חנויות המפעל					
		רמת-גן	באר-שבע	חיפה	תל-אביב		
	~~230,000~~ ~~30,000~~	$\boxed{1}$ 200,000	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ 30,000	ראש-העין	מפעלים
1	~~550,000~~ 330,000	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 220,000	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$	קרית-גת	
1	240,000	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	מטולה	
		~~200,000~~	~~220,000~~	300,000	~~300,000~~ 270,000	ביקוש	
				1	1	הפרש עמודה	

טבלה 3.13
שיטת הקירוב של ווגל – לולאה שלישית

כעת נותרו השורות 2,3 והעמודות 1,2 בכולן ההפרש הוא 1. נבחר באופן שרירותי בשורה 2, ונקבע $x_{21} = 270,000$, כך נקבל:

הפרש שורה	היצע	חנויות המפעל					
		רמת-גן	באר-שבע	חיפה	תל-אביב		
	~~230,000~~ ~~30,000~~	$\boxed{1}$ 200,000	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ 30,000	ראש-העין	מפעלים
1	~~550,000~~ ~~330,000~~ 60,000	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 220,000	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$ 270,000	קרית-גת	
1	240,000	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	מטולה	
		~~200,000~~	~~220,000~~	300,000	~~300,000~~ ~~270,000~~	ביקוש	
				1		הפרש עמודה	

טבלה 3.14
שיטת הקירוב של ווגל – לולאה רביעית

כעת נותרו השורות 2,3 והעמודה 2, בכולן ההפרש הוא 1. נבחר שוב באופן שרירותי בשורה 2, ונקבע $x_{22} = 30,000$, כך נקבל:

הפרש שורה	היצע	חנויות המפעל					
		רמת-גן	באר-שבע	חיפה	תל-אביב		
	~~230,000~~ ~~30,000~~	$\boxed{1}$ 200,000	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ 30,000	ראש-העין	מפעלים
	~~550,000~~ ~~330,000~~ ~~60,000~~	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 220,000	$\boxed{5}$ 60,000	$\boxed{3}$ 270,000	קרית-גת	
1	240,000	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	מטולה	
		~~200,000~~	~~220,000~~	~~300,000~~ 240,000	~~300,000~~ ~~270,000~~	ביקוש	
				1		הפרש עמודה	

טבלה 3.15
שיטת הקירוב של ווגל – לולאה חמישית

נותרה עתה שורה אחת בלבד, שורה 3, ועמודה אחת בלבד, עמודה 2. לפי שיטת המחיר המינימלי נקבע $x_{32} = 240{,}000$. הפתרון הבסיסי הוא אפוא:

הפרש שורה	היצע	חנויות המפעל					
		רמת-גן	באר-שבע	חיפה	תל-אביב		
	~~230,000~~ ~~30,000~~	$\boxed{1}$ 200,000	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$ 30,000	ראש-העין	מפעלים
	~~550,000~~ ~~330,000~~ ~~60,000~~	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$ 220,000	$\boxed{5}$ 60,000	$\boxed{3}$ 270,000	קרית-גת	
	~~240,000~~	$\boxed{4}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$ 240,000	$\boxed{4}$	מטולה	
		~~200,000~~	~~220,000~~	~~300,000~~ ~~240,000~~	~~300,000~~	ביקוש	
						הפרש עמודה	

טבלה 3.16
פתרון בסיסי התחלתי בשיטת ווגל

מחיר ההובלה עבור פתרון זה הוא:

$$Z = 2*30{,}000 + 1*200{,}000 + 3*270{,}000 + 5*60{,}000 + 2*220{,}000 + 3*240{,}000 = \mathbf{2{,}530{,}000}$$

קיבלנו במקרה זה בדיוק את הפתרון שהתקבל בשיטת המחיר המינימלי.

השלב האיטרטיבי בפתרון בעיית תובלה

לאחר שהשגנו פתרון בסיסי התחלתי, עלינו לבדוק אם פתרון זה הוא הפתרון האופטימלי המבוקש או שניתן לשפרו.

מבחן האופטימליות

כדי להציג את הפישוט המושג במבחן האופטימליות של שיטת הסימפלקס לתובלה, נתבונן תחילה בשורת האפס (משוואת פונקציית המטרה) המתקבלת לאחר הפיכת פונקציית המטרה לצורת מקסימום ולפני יישום שיטת הסימפלקס בבעיית התובלה:

אגף ימין	המקדם של		משוואה מספר	משתנה בסיסי
	X_{ij}	Z		
0	C_{ij}	-1	0	Z

טבלה 3.17
שורת אפס התחלתית בטבלת הסימפלקס, לפי שיטת הסימפלקס הכללית

כזכור, בכל איטרציה של שיטת הסימפלקס הכללית, בעת מעבר לפתרון בסיסי אפשרי אחר, יש לבצע כמה פעולות אלגבריות, המתבטאות בחיבור או חיסור של משוואות אחרות.

לאחר כל איטרציה נוספת, נקבל שורת אפס המוצגת בטבלה 3.18:

אגף ימין	המקדם של		מספר המשוואה	משתנה בסיסי
	X_{ij}	Z		
$-\sum_{i=1}^{m} s_i u_i - \sum_{j=1}^{n} d_j v_j$	$C_{ij} - U_i - V_i$	-1	0	Z

טבלה 3.18
השורה אפס בטבלת הסימפלקס, לאחר יישום שיטת הסימפלקס על בעיית התובלה

U_i – כפולות של השורה i המקורית ($i = 1...m$, m אילוצי ההיצע) שהוחסרו משורה 0 המקורית בכל האיטרציות של שיטת הסימפלקס שהובילו לטבלת הסימפלקס המקורית.

V_i – כפולות של השורה $m + j$ המקורית ($j = 1...n$, n אילוצי הביקוש) שהוחסרו משורה 0 המקורית בכל האיטרציות של שיטת הסימפלקס שהובילו לטבלת הסימפלקס המקורית.

משמעות האיבר ($C_{ij} - U_i - V_j$) היא שיעור השינוי ב-Y כאשר X_{ij} גדל.

אם-כן, את השורה אפס הנוכחית אפשר לחשב **בלי להשתמש באף שורה אחרת**, על-ידי חישוב הערכים הנוכחיים של U_i ו-V_j באופן ישיר, מפני שכל משתנה בסיסי הוא בעל מקדם אפס בשורה 0. הערכים הנוכחיים של U_i ו-V_j יתקבלו על-ידי פתירת מערכת המשוואות $C_{ij} - U_i - V_j = 0$ עבור כל i ו-j שעבורם X_{ij} הוא משתנה בסיסי. שכן, המקדמים של X_{ij} בשורה 0 הם בדיוק $C_{ij} - U_i - V_j$.

המסקנה החשובה היא שאפשר לבטל כמעט את כל טבלת הסימפלקס (ואת החישובים הכרוכים בה). פרט לנתוני הקלט (ערכי C_{ij}, s_i ו-d_j) המידע היחיד הדרוש לשיטת הסימפלקס לתובלה הוא הפתרון הבסיסי האפשרי הנוכחי, הערכים הנוכחיים של U_i ו-V_j והערכים של $(C_{ij} - U_i - V_j)$ עבור המשתנים הלא בסיסיים X_{ij}.

תרגילים

תרגיל 3.1

התפוקה היומית של שלוש מחצבות חצץ נתונה בטבלה 3.19 :

מחצבה	תפוקה יומית
א'	12 טון
ב'	14 טון
ג'	4 טון

טבלה 3.19

החצץ ישווק באמצעות שלושה מרכזי שיווק ; הערכת הביקוש היומי במרכזי השיווק השונים נתונה בטבלה 3.20 :

מרכז שיווק	הביקוש היומי
A	9 טון
B	10 טון
C	11 טון

טבלה 3.20

מחירי התובלה של טון חצץ מהמחצבות השונות, למרכזי השיווק השונים, מרוכזים בטבלה 3.21 :

מרכזי שיווק / מחצבות	*A*	*B*	*C*
א'	5	1	8
ב'	2	4	0
ג'	3	6	7

כמה טון חצץ יש לשלוח מדי יום מכל מחצבה, לכל מרכז שיווק, כדי שהוצאות ההובלה יהיו מינימליות?

פתרון 3.1 (שלבים ראשונים)

נגדיר את המשתנים :

Xij – מס׳ הטונות שיש לשלוח ממחצבה i (ג׳ , ב׳ , א׳ = i) למרכז שיווק j ($j = A , B , C ,D$)

פונקציית המטרה :

$$\min Z = 5x_{11} + x_{12} + 8x_{13} + 2x_{21} + 4x_{22} + 3x_{31} + 6x_{32} + 7x_{33}$$

אילוצי היצע :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 12$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 14$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 4$$

אילוצי ביקוש :

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 9$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 10$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 11$$

אילוצי אי-שליליות :

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1,2,3 \quad ; \quad j = 1,2,3$$

כל ההקצאות הן גדלים אי-שליליים.

מציאת פתרון התחלתי

נשתמש בשיטה ***הצפון-מערבית*** :

היצע	C	B	A	הפינה הצפון מערבית
		מרכזי שיווק		
~~12~~ 3			9	א׳
14				ב׳ **מחצבות**
4				ג׳
	11	10	~~9~~	ביקוש

טבלה 3.26
השיטה הצפון מערבית – לולאה ראשונה

	מרכזי שיווק			
הפינה הצפון מערבית	A	B	C	היצע
א'	9	3		~~12~~ ~~3~~
ב' **מחצבות**				14
ג'				4
ביקוש	~~9~~	~~10~~ 7	11	

טבלה 3.27
השיטה הצפון מערבית – לולאה שנייה

	מרכזי שיווק			
הפינה הצפון מערבית	A	B	C	היצע
א'	9	3		~~12~~ ~~3~~
ב' **מחצבות**		7		~~14~~ 7
ג'				4
ביקוש	~~9~~	~~10~~ ~~7~~	11	

טבלה 3.28
השיטה הצפון מערבית – לולאה שלישית

	מרכזי שיווק			
הפינה הצפון מערבית	A	B	C	היצע
א'	9	3		~~12~~ ~~3~~
ב' **מחצבות**		7	7	~~14~~ ~~7~~
ג'				4
ביקוש	~~9~~	~~10~~ ~~7~~	~~11~~ 4	

טבלה 3.29
השיטה הצפון מערבית – לולאה רביעית

	מרכזי שיווק			
הפינה הצפון מערבית	A	B	C	היצע
א'	9	3		~~12~~ ~~3~~
ב' **מחצבות**		7	7	~~14~~ ~~7~~
ג'			4	~~4~~
ביקוש	~~9~~	~~10~~ ~~7~~	~~11~~ ~~4~~	

טבלה 3.30
השיטה הצפון מערבית – לולאה חמישית ואחרונה

קיבלנו פתרון בסיסי התחלתי. פתרון זה כולל את המשתנים:

$$x_{11} = 9, x_{12} = 3, x_{22} = 7, x_{23} = 7, x_{33} = 4$$

נציג פתרון זה בטבלת הסימפלקס לתובלה:

		יעדים			**היצע**	U_i
		1	**2**	**3**		
	1	$\boxed{5}$ 9	$\boxed{1}$ 3	$\boxed{8}$	12	
מקורות	**2**	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$ 7	$\boxed{0}$ 7	14	
	3	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$ 4	4	
	ביקוש	9	10	11		$Z = 104$
	V_j					

טבלה 3.31
טבלת סימפלקס לתובלה ההתחלתית (לפני קבלת הערכים) ($Cij - Ui - Vj$)

המשוואות המתאימות למשתנים הבסיסיים בפתרון ההתחלתי שלנו:

x_{11} : $U_1 + V_1 = 5$ בחירת $U_1 = 0$ $\Leftarrow$ $V_1 = 5$

x_{12} : $U_1 + V_2 = 1$ בחירת $U_1 = 0$ $\Leftarrow$ $V_2 = 1$

x_{22} : $U_2 + V_2 = 4$ ידוע ש- $V_2 = 1$ $\Leftarrow$ $U_2 = 3$

x_{23} : $U_2 + V_3 = 0$ ידוע ש- $U_2 = 3$ $\Leftarrow$ $V_3 = -3$

x_{33} : $U_3 + V_3 = 7$ ידוע ש- $V_3 = -3$ $\Leftarrow$ $U_3 = 10$

בוחרים $U_1 = 0$ (במקרה זה מספר ההקצאות המקסימלי הוא 2) ואז פותרים את המשוואות בזו אחר זו, ומקבלים את ערכי המשתנים, כפי שהם רשומים משמאל למשוואות.

בעזרת U_i ו-V_j ניתן לבדוק אם הפתרון הנוכחי הוא אופטימלי. ואם לא, יש צורך להמשיך באיטרציות נוספות.

תרגיל 3.2

חברה להשכרת רכב בארה״ב צריכה לבצע חלוקה מחודשת של צי הרכב שלה, כדי לתקן מצבים בהם נוצר מחסור בכלי רכב להשכרה בסניפים השונים. במצב הנוכחי יש לחברה כלי רכב רבים מדי בשני סניפים: בסניף בניו-יורק (10 מכוניות עודפות) ובסניף בשיקגו (12 מכוניות עודפות), בעוד שבשלושה סניפים חסרים כלי רכב: בסניף בפיטסבורג חסרות 6 מכוניות, בסניף בלוס אנגלס חסרות 9 מכוניות ובסניף במיאמי חסרות 7 מכוניות.

העלות של העברת המכוניות בין הערים השונות מתוארת בטבלה 3.22:

	פיטסבורג	לוס-אנג׳לס	מיאמי
ניו-יורק	50	250	100
שיקגו	25	200	125

טבלה 3.22

כיצד תבוצע ההעברה הדרושה בעלות המינימלית?

תרגיל 3.3

חברה מייצרת מוצר יחיד. לרשות החברה שלושה מפעלים, והיא מוכרת לארבעה לקוחות. בחודשים הקרובים ייצרו שלושת המפעלים 6, 8 ו-4 יחידות, בהתאמה. החברה התחייבה למכור 4 יחידות ללקוח 1, 6 יחידות ללקוח 2, ולפחות 2 יחידות ללקוח 3. לקוחות 3 ו- 4 מעוניינים לקנות כמה שאפשר מעודפי המוצר. הרווח הנקי המתקבל מהובלת יחידת מוצר, ממפעל i ללקוח j, נתון בטבלה 3.23:

		לקוח 1	לקוח 2	לקוח 3	לקוח 4
מפעל	1	8	7	5	2
	2	5	2	1	3
	3	6	4	3	5

טבלה 3.23

ההנהלה מעוניינת לדעת כמה יחידות כדאי לה למכור ללקוחות 3 ו-4, וכמה יחידות היא צריכה להוביל מכל מפעל, לכל לקוח, כדי שהרווח יהיה מקסימלי.

א. נסחו את הבעיה ***כבעיית תובלה***, על-ידי בניית טבלת עלויות מתאימה וטבלת ביקושים מתאימה.

ב. התחילו ***בשיטה הצפון מערבית***, והשתמשו ***בשיטת הסימפלקס לתובלה*** כדי לפתור את הבעיה שנוסחה בסעיף א.

תרגיל 3.4

תאגיד של ארבעה מפעלים המייצרים סוכר, משווק את המוצר באמצעות חמישה מרכזי שיווק. בטבלה 3.24 רשומה התפוקה השבועית של כל מפעל (בטונות), ועלויות התובלה (בשקלים לק״מ) מכל מפעל לכל מרכז שיווק.

		מרכז שיווק						
		1	2	3	4	5		
מפעל	1	7	0	6	3	2	25	היצע
	2	9	3	5		8	40	
	3	8	4	4	4	5	60	
	4	2	3	4	9	6	15	
		25	25	40	30	20		
		ביקוש						

טבלה 3.24

פירוש המשבצת הריקה: לא ניתן להוביל סוכר ממפעל מס׳ 2 למרכז שיווק מס׳ 4 (סיבות אפשריות לדבר: אין כביש או מסילת ברזל המקשרים בין שתי הנקודות הללו). מטרת התאגיד היא לארגן את מערכת התובלה כך שסך-כל עלות התובלה תהיה מינימלית.

כיצד ניתן ליישם את אלגוריתם התובלה בבעיה זו?

תרגיל 3.5

בחברה המתקנת מוצרי חשמל קיימות ארבע דרגות הסמכה לטכנאים: א׳, ב׳, ג׳ ו-ד׳.

בחברה זו מועסקים 10 טכנאים בדרגת הסמכה א׳, 15 טכנאים בדרגת הסמכה ב׳, 20 טכנאים בדרגת הסמכה ג׳ ו-25 טכנאים בדרגת הסמכה ד׳.

התקלות שחברה זו מתקנת ממוינות ל-5 דרגות קושי. באופן ממוצע מספר התקלות בשבוע הוא:

10 תקלות בדרגת קושי 1; 15 תקלות בדרגת קושי 2; 30 תקלות בדרגת קושי 3; 5 תקלות בדרגת קושי 4; 10 תקלות בדרגת קושי 5.

כל טכנאי מסוגל לתקן את כל סוגי התקלות (בכל דרגות הקושי) למעט טכנאי בדרגת הסמכה א, שאינו מוסמך לבצע תיקון של תקלה בדרגת קושי 5.

בטבלה 3.25 רשומים התעריפים שהמפעל משלם עבור תיקון תקלות שונות; התעריפים נקבעו לשעת עבודה והם ממוינים לפי סוג הטכנאי:

דרגת קושי של תקלה

דרגת הסמכה של טכנאי

	1	2	3	4	5
א	4	5	6	8	
ב	6	7	10	13	15
ג	8	10	14	16	20
ד	10	14	18	20	26

טבלה 5.23

כיצד יש להקצות את הטכנאים למשימות התיקון השבועיות כדי שעלות העבודה תהיה מינימלית?