זרימה מקסימלית -

- רשתות זרימה
- שיטת פורד-פולקסון
- זיווג מקסימלי בגרף דו צדדי

כשם שניתן לייצג מפת דרכים באמצעות גרף מכוון כדי למצוא את המסלול הקצר ביותר מנקודה אחת לאחרת, ניתן גם לפרש גרף מכוון כרשת זרימה ולהשתמש בו כדי לענות על שאלות העוסקות בזרימת חומר.

נתאר לעצמנו חומר העובר דרך מערכת מקור, שם מיוצר החומר, לבור, שם הוא נצרך.

המקור מייצר את החומר בקצב קבוע והבור צורך את החומר באותו קצב.

אינטואיטיבית,"זרימת" החומר בכל נקודה במערכת היא הקצב שבו הומר נע.

ניתן להשתמש ברשתות זרימה כדי לייצג זרימת נוזל דרך צינורות, תנועת רכיבים לאורך קו ייצור, מעבר זרם דרך רשתות חשמל, מעבר מידע דרך רשתו תקשורת ועוד.

על כל קשת מכוונת ברשת זרימה ניתן לחשוב כעל מוליך של חומר. כל מוליך הוא בעל קיבול ידוע, הנתון על ידי הקצב המקסימלי שבו יכול חומר לזרום דרך מוליך.

הקודקודים הם נקודות הצטלבות של המוליכים, וחוץ מאשר במקור או בבור, חומר זורם דרכם אך אינו נאסף בהם.

במילים אחרות, הקצב שבו חומר נכנס לקודקוד חייב להיות שווה לקצב שבו החומר יוצא מהקודקוד.

תכונה זו נקראת "שימור הזרימה".

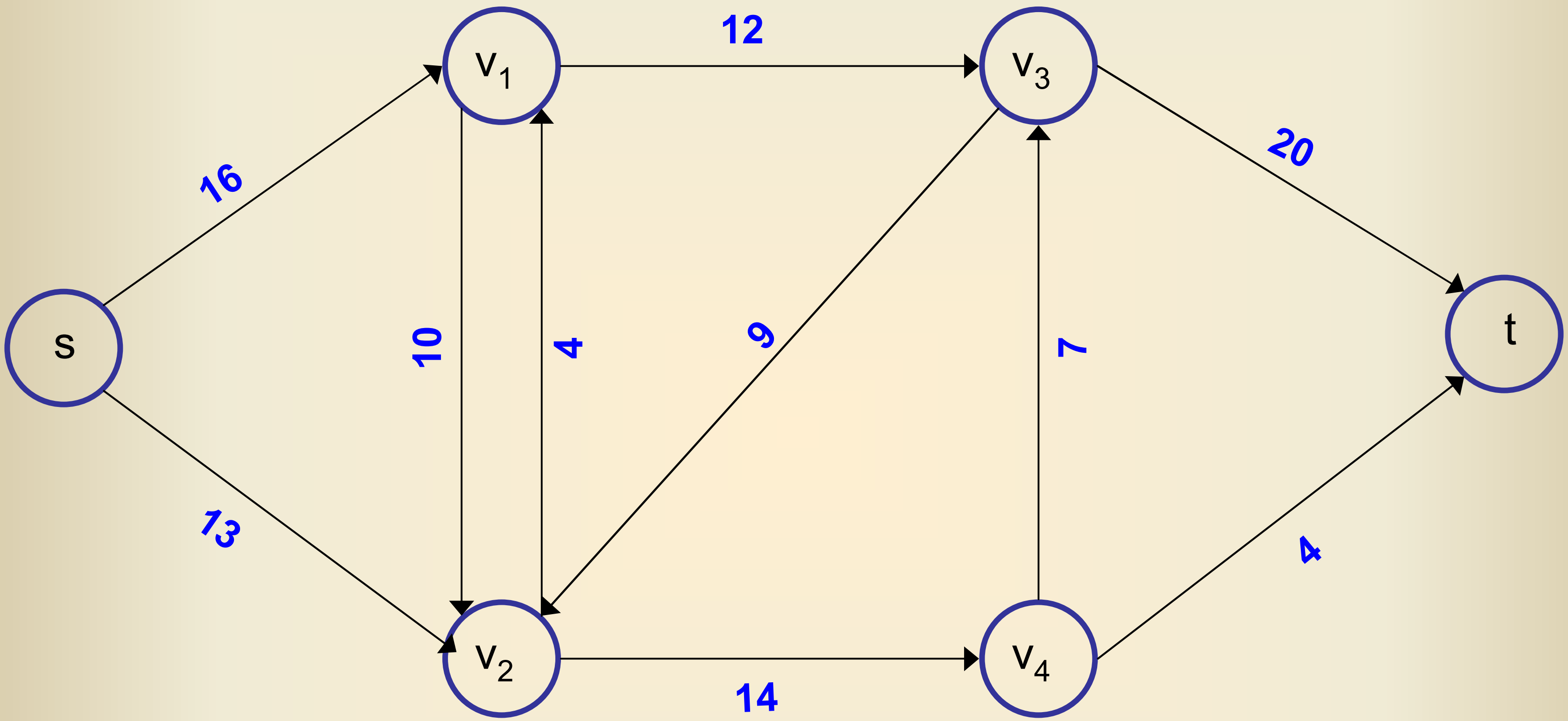
כאשר החומר הוא זרם חשמלי, זהו חוק הזרמים של קירכהוף (kirchhoff's Current Law).

בעיית הזרימה המקסימלית היא הבעיה הפשוטה ביותר הנוגעת לרשתות זרימה. היא שואלת, "מהו הקצב הגבוהה ביותר שבו ניתן להעביר חומר מן המקור אל הבור מבלי להפר שום אילוצי קיבול?". בהמשך הרצאה זו יוצגו שיטות לפתרון בעיית הזרימה המקסימלית.

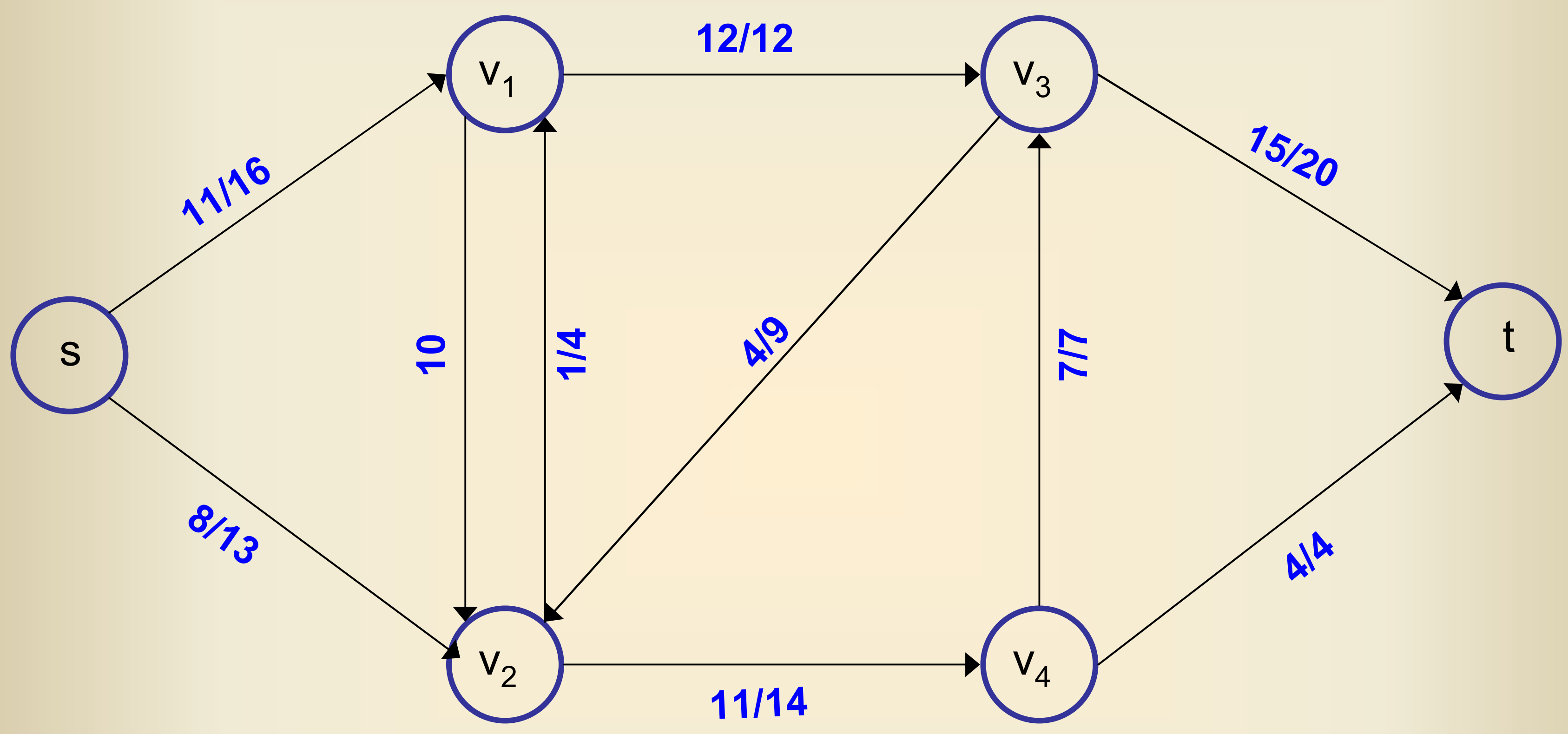
רשתות זרימה

רשת זרימה (flow network) $G=(V,E)$ היא גרף מכוון שבו כל קשת $(u,v)\in E$ היא בעלת קיבול (capacity) אי-שלילי $c(u,c)\neq 0$, אם $(u,v)\notin E$ אנו מניחים כי $c(u,v)=0$. ברשת זרימה קיימים שני קדקודים מיוחדים: מקור (source) s ובור t(sink).

מטעמי נוחות, אנו מניחים שכל קדקוד שוכן על מסלול כלשהו מן המקור אל הבור. כלומר, כל קדקוד $v \in V$ קיים מסלול $s \rightarrow v \rightarrow t$. הגרף קשיר אפוא, ו- $|E| \geq |V| - 1$ באיור 27.1 מובאת דוגמה לרשת זרימה.



(i) 27.1 איור



איור 27.1 (ii)

AFEKA המכללה האקדמית להנדסה בתל-אביב TEL-AVIV ACADEMIC COLLEGE OF ENGINEERING אפקה

איור 27.1 (i) רשת זרימה $G=(V,E)$ עבור בעיית ההובלה של חברת "דיסקית המזל". בית החרושת בוונקובר הוא המקור s , והמחסן בוויניפג הוא הבור t. משלוחי הדיסקיות עוברים דרך ערי ביניים, אולם מהעיר u לעיר v ניתן לשלוח רק c(u,v) תיבות ליום. ליד כל קשת רשום קיבולה.

(ii) זרימה f_f ב- G שערכה $|f|=19$. באיור מוצגות רק זרימות נטו חיוביות. אם $f(u,v)\rangle 0$, מופיע ליד הקשת (u,v) הרישום $f(u,v)/c(u,v)$. (הלוכסן מציין הפרדה בין הזרימה לבין הקיבול; הוא אינו מציין פעולת חילוק.) אם $f(u,v)\leq 0$ אזי ליד הקשת (u,v) רשום הקיבול בלבד.

עתה אנו ערוכים להגדרת זרימות פורמלית יותר. תהי $G=(V,E)$ רשת זרימה (עם פונקציית קיבול משתמעת c). יהי s מקור הרשת ויהי t הבור. זרימה (flow) ב- G היא פונקציה ממשית $f: v \times v \rightarrow R$ המקיימת את שלוש התכוות הבאות:

אילוצי קיבול (capacity constraints) :

לכל $u,v \in V$, $f(u,v) \le c(u,v)$.

סימטריה נגדית: (skew symmetry) :

לכל $u,v \in V$, $f(u,v) = -f(v,u)$.

שימור הזרימה (flow conservation) :

לכל $u \in V - \{s,t\}$ אנו דורשים כי: $\sum_{v \in V} f(u,v) = 0$

הגודל $f(u,v)$, שיכול להיות חיובי או שלילי, נקרא הזרימה נטו (net flow) מקדקוד u אל קדקוד v. הערך (value) של זרימה f מוגדר על-ידי:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(u,v) \quad (27.1)$$

דהיינו, הזרימה נטו הכוללת היוצאת מן המקור. (כאן, הסימון |·| מציין ערך של זרימה ולא ערך מוחלט או עוצמה.)

בבעיית הזרימה המקסימלית (maximum-flow problem) נתונה לנו רשת זרימה G עם מקור S ובור t, וברצוננו למצוא זרימה בעלת ערך מקסימלי מ- S אל t.

לפני שנראה דוגמה של בעיית הזרימה המקסימלית, הבה נחקור בקצרה את שלוש תכונות הזרימה. אילוצי הקיבול פירושם פשוט שהזרימה נטו מקדקוד אחד לאחר אסור לה שתעלה על הקיבול הנתון.

סימטריה נגדית פירושה שהזרימה נטו מקדקוד u אל קדקוד v שווה בערכה והפוכה בסימנה לזרימה נטו בכיוון ההפוך. כך, הזרימה נטו מקדקוד לעצמו היא 0, שכן לכל $u \in V$ מתקיים $f(u,u) = -f(u,u)$ ומכאן נובע כי $f(u,u) = 0$.

תכונת שימור הזרימה פירושה שהזרימה נטו הכוללת היוצאת מקדקוד שאינו המקור או הבור היא 0. על סמך הסימטריה הנגדית ניתן לנסח את תכונת שימור הזרימה גם באופן הבא:

$$\sum_{u \in V} f(u,v) = 0$$

עבור כל $v \in V - \{s,t\}$. דהיינו, הזרימה נטו הכוללת הנכנסת אל קדקוד היא 0.

עוד נשים לב כי לא תיתכן זרימה נטו בין u ל- v אם לא קיימת ביניהם קשת. אם $(u,v) \notin E$ וגם $(v,u \notin E)$, אזי $c(u,v) = c(v,u) = 0$.

מכאן, על פי אילוץ הקיבול, $f(u,v)\le 0$ וגם $f(v,u)\le 0$. אולם מכיוון שעל פי הסימטרי הנגדית, $f(u,v)=-f(v,u)$, אזי $f(u,v)=f(v,u)=0$. לכן, אם הזרימה נטו מקדקוד u אל קדקוד v שונה מאפס, הרי שמכך נובע כי $(u,v)\in E$ או $(v,u)\in E$ (או שניהם).

ההערה האחרונה שלנו הנוגעת לתכונותיהן של זרימות עוסקות בזרימות נטו חיוביות. הזרימה נטו החיובית (positive net flow) הנכנסת לקדקוד v מוגדרת על-ידי:

$$\sum_{\substack{u\in V \\ f(u,v)\rangle 0}} f(u,v) \qquad) \qquad (27.2$$

הזרימה נטו החיובית היוצאת מקדקוד מוגדרת באופן סימטרי. אחד הפירושים של תוכנת שימור הזרימה הוא, שהזרימה החיובית הנכנסת לקדקוד שאינו המקור או הבור חייבת להיות שווה לזרימה נטו החיובית היוצאת מקדקוד זה.

דוגמה לרשת זרימה

באמצעות רשת זרימה ניתן לבנות מודל לבעיית ההובלה המוצגת באיור 27.1 . חברת "דיסקית המזל" היא בעלת מפעל בוונקובר (המקור s), המייצר דיסקיות הוקי, ומחסן בוויניפג (הבור t), שבו מאוחסנות הדיסקיות.

חברת "דיסקית המזל" שוכרת מחברה אחרת מקום במשאיות, כדי להוביל את הדיסקיות מן המפעל אל המחסן. מאחר שהמשאיות נוסעות בנתיבים ידועים מראש בין ערים , ומאחר שהן בעלות קיבול מוגבל, חברת "דיסקית המזל" יכולה להוביל לכל היותר $c(u,v)$ תיבות ליום בין כל זוג ערים u ו- v,

לחברה אין שליטה על נתיבי הנסיעה ועל הקיבולים ולכן אינה יכולה לשנות את רשת הזרימה המוצגת באיור (i) 27.1.
מטרתה היא למצוא את המספר הגדול ביותר (p) של תיבות ליום שניתן להוביל, ואז לייצר דיסקיות בכמות זו, שכן אין טעם לייצר דיסקיות בכמות גדולה מזו שניתן להוביל למחסן.

הקצב שבו מובלות דיסקיות לאורך נתיב כלשהו הוא זרימה. הדיסקיות נפלטות מהמפעל בקצב של P תיבות ליום, ו- p תיבות חייבות להגיע למחסן בכל יום. החברה אינה מתעניינת בשאלה כמה זמן יארך מסעה של דיסקית נתונה מן המפעל אל המחסן;

דרישתה היחידה היא ש- p תיבות ייצאו מן המפעל ו- p תיבות ליום יגיעו למחסן. אילוצי הקיבול נתונים על-ידי ההגבלה שהזרימה $f(u,v)$ מעיר u לעיר v לא תעלה על $c(u,v)$ תיבות ליום. המצב יציב, הקצב שבו נכנסות הדיסקיות לעיר ביניים ברשת ההובלה חייב להיות שווה לקצב שבו הן יוצאות ממנה ;

אחרת, הדיסקיות יצטברו בעיר זו. הרשת מצייתת אפוא לחוק שימור הזרימה. לכן, זרימה מקסימלית ברשת קובעת את המספר המקסימלי p של תיבות ליום שניתן להוביל מן המפעל למחסן.

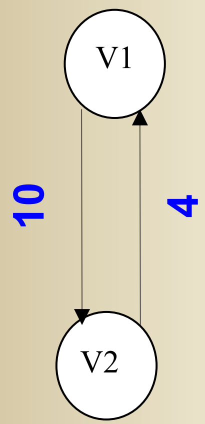
איור 27.1(ii) מראה זרימה אפשרית ברשת; הזרימה מיוצגת בדרך המתאימה באופן טבעי לייצוג משלוחים. עבור כל שני קדקודים u ו – v ברשת, הזרימה נטו $f(u,v)$ מייצגת משלוח של $f(u,v)$ תיבות ליום מ- u אל v. אם $f(u,v)$ שווה ל-0 או שלילי, אזי אין משלוח מ- u אל v.

לפיכך, באיור 27.1(ii) מוצגות רק קשתות בעלות זרימה נטו חיובית; ליד כל קשת כזאת רשומה הזרימה, לימינה לוכסן, ולימינו קיבול הקשת.

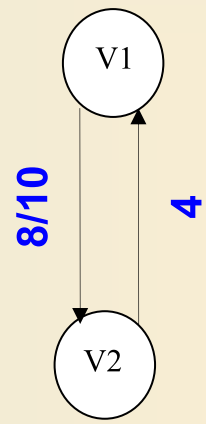
נוכל להיטיב להבין את הקשר בין זרימות נטו משלוחים אם נתמקד בהובלות בין שני קדקודים. באיור $27.2(i)$ מוצג התת-גרף המושרה על-ידי הקדקודים v_1 ו- v_2 מרשת הזרימה שבאיור 27.1. אם חברת דיסקית המזל מובילה 8 תיבות ליום מ- v_1 ל- v_2, התוצאה מוצגת באיור $27.2(ii)$:

הזרימה נטו מ- ν_1 ל- ν_2 היא 8 תיבות ליום. על פי הסימטריה הנגדית, אנו אומרים גם שהזרימה נטו בכיוון ההפוך, מ- ν_2 ל- ν_1, היא 8- תיבות ליום, למרות שאין כלל הובלת דיסקיות מ- ν_2 ל- ν_1.

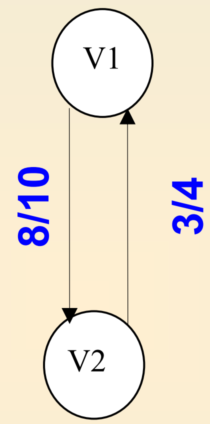
באופן כללי, הזרימה נטו מ- v_1-ל v_2 היא מספר התיבות ליום הנשלחות מ- v_1-ל v_2 פחות מספר התיבות ליום הנשלחות מ- v_2-ל v_1. המוסכמה שלנו באשר לייצוג זרימות נטו היא להציג זרימות נטו חיוביות בלבד, שכן אלה מצביעות על משלוחים בפועל. לכן, באיור מופיע רק 8 ללא ה- 8 – המקביל.



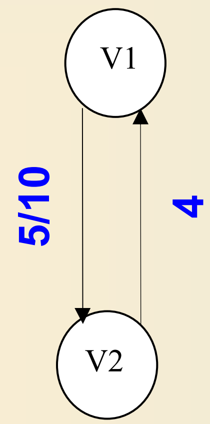
(i)



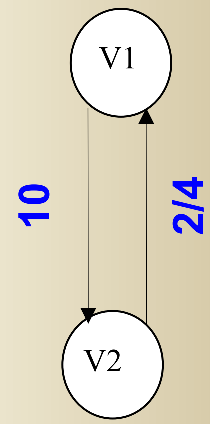
(ii)



(iii)



(iv)



(v)

איור 27.2 קיזוזים. (i) הקדקודים v_1 ו- v_2 שעבורם $c(v_1,v_2)=10$ ו- $c(v_2,v_1)=4$. (ii) הדרך שבה אנו מציינים את הזרימה נטו כאשר 8 תיבות נשלחות מ- v_1 ל- v_2. (iii) משלוח נוסף של 3 תיבות ליום מתבצע מ- v_2 ל- v_1.

(iv) על-ידי קיזוז הזרימות בכיוונים המנוגדים, ניתן לייצג את המצב ב-(iii) באמצעות זרימה נטו חיובית בכיוון אחד בלבד. (v) 7 תיבות נוספות ליום נשלחות מ- v_2 אל- v_1.

הבה נוסיף עתה משלוח, והפעם משלוח של 3 תיבות ליום מ- v_2 אל- v_1. ייצוג טבעי אחד של התוצאה מופיע באיור $27.2(iii)$. עתה המצב הוא שבין v_1 ו- v_2 מתבצעים משלוחים בשני הכיוונים. 8 תיבות ליום נשלחות מ- v_1 אל- v_2,

ו-3 תיבות נשלחות מ- v_2 אל- v_1. מהן הזרימות נטו בין שני הקדקודים? הזרימה נטו מ- v_1 אל- v_2 היא 8-3=5 תיבות ליום, והזרימה נטו מ- v_2 אל- v_1 היא 5- = 8-3 תיבות ליום.

התוצאה של מצב זה שקולה למצב המתואר באיור (iv) 27.2, שבו נשלחות 5 תיבות ליום מ- v_1 אל- v_2 ואין שום משלוחים מ- v_2 אל- v_1. למעשה, 3 התיבות ליום הנשלחות מ- v_2 אל- v_1 מקוזזות על-ידי 3 מתוך 8 התיבות ליום הנשלחות מ- v_1 אל- v_2.

בשני המצבים, הזרימה נטו מ- v_1 אל- v_2 היא 5 תיבות ליום, אבל ב-(iv), המשלוחים בפועל מתבצעים בכיוון אחד בלבד.

באופן כללי, קיזוז מאפשר לייצג משלוחים בין שתי ערים באמצעות זרימה נטו חיובית לאורך קשת אחת לכל היותר מבין שתי הקשתות בין הקדקודים המתאימים. אם הזרימה נטו מקדקוד אחד לאחר היא אפס או שלילית, אין צורך לבצע שום משלוח בכיוון זה.

כלומר, כל מצב שבו דיסקיות נשלחות בין שתי ערים בשני הכיוונים ניתן להמיר באמצעות קיזוז למצב שקול שבו דיסקיות נשלחות בכיוון אחד בלבד: כיוונה של הזרימה נטו החיובית. המרה כזו אינה מפרה אילוצי קיבול,

שכן אנו מצמצמים את המשלוחים בשני הכיוונים, ואילוצי שימור אינם מופרים, שכן הזרימה נטו בין שני קדקודים אינה משתנה.

נמשיך בדוגמה שלנו ונראה מה קורה אם שולחים עוד 7 תיבות ליום מ- v_2 אל- v_1.

באיור 27.2(v) מוצגת התוצאה תוך שימוש במוסכמה של ייצוג זרימות נטו חיוביות בלבד. הזרימה נטו מ- v_1 אל- v_2 הופכת להיות 2- = 5-7 , והזרימה נטו מ- v_2 אל- v_1 הופכת להיות 2 = 7-5 .

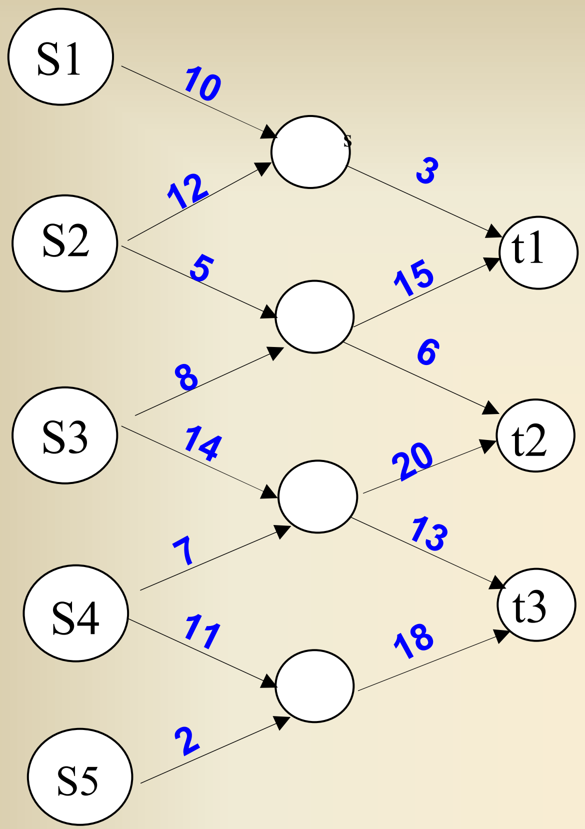
מאחר שהזרימה נטו מ- ν_2 אל- ν_1 היא חיובית, היא מייצגת משלוח של 2 תיבות ליום מ- ν_2 אל- ν_1. הזרימה נטו מ- ν_1 אל- ν_2 היא 2- תיבות ליום, ומאחר שזרימה נטו זו אינה חיובית, דיסקיות אינן מובלות כלל בכיוון זה.

לחלופין, 5 מבין 7 התיבות הנוספות ליום מ- v_2 אל- v_1 ניתן לראות כמקזזות את משלוח 5 התיבות ליום מ- v_1 אל- v_2, כך שהמשלוח בפועל מ- v_2 אל- v_1 הוא 2 תיבות ליום.

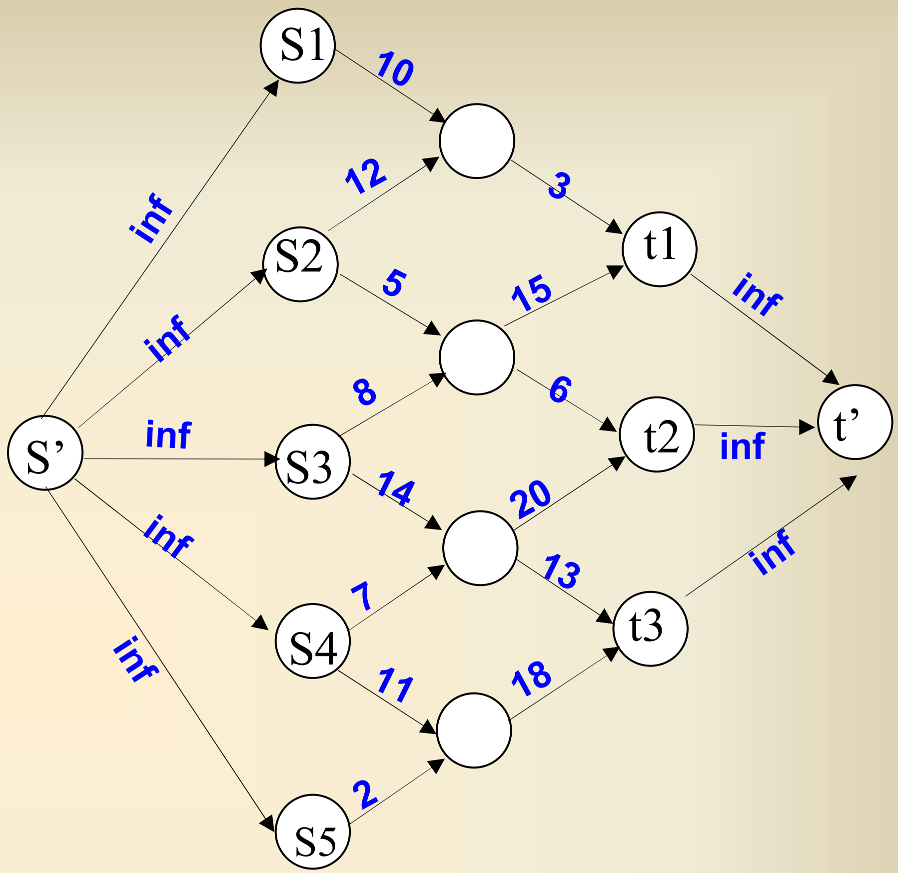
רשתות עם מקורות ובורות מרובים

בעיית הזרימה המקסימלית עשויה לכלול רשת בעלת מספר מקורות ובורות ולא רק מקור אחד ובור אחד. לדוגמה, ייתכן שלחברת "דיסקית המזל" יש קבוצה של m מפעלים $\{s_1, s_2 \cdots\cdots s_m\}$ וקבוצה של n מחסנים $\{t_1, t_2 \cdots\cdots t_n\}$,

כמתואר באיור $27.3(i)$. למרבה המזל, בעיה זו אינה קשה יותר מאשר הגרסה הפשוטה של בעיית הזרימה המקסימלית.


S1
S2
S3
S4
S5
10
12
5
8
14
7
11
2
3
15
6
20
13
18
t1
t2
t3

(i)


S'
inf
S1
S2
S3
S4
S5
10
12
5
8
14
7
11
2
3
15
6
20
13
18
t1
t2
t3
t'

(ii)

איור 27.3 המרת בעיה של זרימה מקסימלית ברשת מרובת מקורות ובורות לבעיה עם מקור יחיד ובור יחיד. (i) רשת זרימה עם חמישה מקורות $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ ושלושה בורות $T = \{t_1, t_2, t_3\}$.

(ii)רשת זרימה שקולה עם מקור יחיד ובור יחיד. אנו מוסיפים מקור על s' וקשת בעלת קיבול אינסופי מ- s' לכל אחד מהמקורות המרובים. אנו מוסיפים גם בור על t' וקשת בעלת קיבול אינסופי מכל אחד מן הבורות המרובים אל t'.

ניתן לעשות רדוקציה של בעיית הזרימה המקסימלית ברשת מרובת מקורות ובורות לבעיית הזרימה המקסימלית ברשת בעלת מקור יחיד ובור יחיד. איור 27.3 (ii) מדגים כיצד ניתן להפוך את הרשת מ- (i) לרשת זרימה רגילה בעלת מקור יחיד ובור יחיד.

אנו יוצרים מקור- על s (supersource) ומוסיפים קשת מכוונת (s, s_i) בעלת קיבול $c(s, s_i) = \infty$, עבור כל $i = 1,2,\ldots\ldots.m$. אנו יוצרים גם בור-על (supersink) חדש t, ומוסיפים קשת מכוונת (t_j, t) בעלת קיבול $c(t_j, t) = \infty$, עבור כל $j = 1,2,\ldots\ldots..n$.

אינטואיטיבית, כל זרימה ברשת שב-(i) מתאימה לזרימה ברשת שב-(ii), והיפך. המקור היחיד s פשוט מספק זרימה גדולה ככל הנדרש למקורות המרובים s_i, ובאותו אופן, הבור היחיד t קולט זרימה גדולה ככל שנדרש עבור הבורות המרובים s_i.

עבודה עם זרימות

בהמשך נעסוק בפונקציות אחדות (כגון f) המקבלות כארגומנטים שני קדקודים ברשת זרימה. בפרק זה נשתמש בסימון הסיכום המובלע (implicit summation notation), שבו כל אחד מהארגומנטים, או שניהם, יכולים להיות קבוצה של קדקודים,

ופירושו שהערך המסומן הוא הסכום של כל הדרכים האפשריות שבהן ניתן להחליף את הארגומנטים באיברים שלהם.

לדוגמה, אם X ו- Y הן קבוצות של קדקודים, אזי:

$$f(X,Y)=\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} f(x,y)$$

כדוגמה נוספת, את האילוץ של שימור הזרימה ניתן לבטא על-ידי התנאי $f(u,V)=0$ עבור כל $u \in V-\{s,t\}$. מטעמי נוחות נשמיט בדרך כלל בסימון הסכום המובלע את הצמודיים לסימון קבוצה שהיו צריכים להופיע בו.

לדוגמה, במשוואה $f(s,V)=f(s,V-s)$,
הביטוי $V-s$ פירושו הקבוצה $V-\{s\}$.

סימון הקבוצות במובלע מפשט לעתים קרובות את המשוואות העוסקות בזרימות. הלמה שלהלן, מציגה כמה מן הזהויות השכיחות ביותר שמופיעים בהן זרימות וסימוני קבוצות מובלעים.

למה 27.1

תהי $G=(V,E)$ רשת זרימה, ותהי f זרימה ב- G. אזי עבור $X \subseteq V$ מתקיים: $f(X,X)=0$

עבור $X,Y \subseteq V$ מתקיים : $f(x,y)=-f(Y,X)$

עבור $X,Y,Z \subseteq V$, כאשר $X \cap Y = \Phi$,

מתקיים: $f(X \cup Y,Z)=f(X,Z)+f(Y,Z)$

וכן, $f(Z,X \cup Y)=f(Z,X)+f(Z,Y)$

כדוגמה לעבודה עם סימון הסכום המובלע נוכיח שערכה של זרימה שווה לזרימה נטו הכוללת אל הבור; דהיינו: $|f| = f(V,t)$ (27.3)
אינטואיטיבית הדבר נכון, שכן על פי שימור הזרימה, כל הקדקודים חוץ מן המקור והבור הם בעלי זרימה נטו 0,

ולכן הבור הוא הקדקוד היחיד שיכולה
להיות לו זרימה נטו שונה מ-0 שתאזן את
הזרימה נטו השונה מ-0 של המקור.

ההוכחה הפורמלית שלנו היא כדלקמן:

$|f| = f(s,V)$ (על פי ההגדרה)

$= f(V,V) - f(V-s,V)$ (על פי למה 27.1)

$= f(V,V-s)$ (על פי למה 27.1)

$= f(V,t) + f(V,V-s-t)$ (על פי למה 27.1)

$= f(V,t)$ (על פי שימור הזרימה)

שיטת פורד פולקרסון

שיטת פורד פולקרסון הינה שיטה איטרטיבית המשמשת לפתרון בעיית הזרימה המקסימאלית.

מתחילים עם $f(u,v)=0$ עבור כל $u,v \in V$ (כלומר מתחילים עם זרימה התחלתית שערכה 0).

בכל איטרציה, מגדילים את ערך הזרימה ע"י מציאת "מסלול שיפור". ניתן להתייחס למציאת מסלולך ממקור S לבור T שלאורכו ניתן להוסיף זרימה נוספת. חוזרים על תהליך זה עד אשר לא ניתן לשפר עוד.

המשפט של זרימה מקסימלית חתך מינימלי יראה שהזרימה המתקבלת בסיומו של התהליך הינה מקסימלית.

לגרף G עם נק' התחלה s ונק' סיום t נבצע את השיטה כדלקמן :

1. נתחיל מ s ונאתחל את מונה הזרימה f באפס.
2. כל עוד קיים נתיב בו לא ביקרנו נבצע :
   a. נגדיל את f בערך של הנתיב
3. בסוף התהליך נחזיר f .

רשתות שיוריות

בהינתן רשת זרימה וזרימה הרשת השיורית מורכבת מקשתות שיכולות להכיל זרימה נטו נוספת.

נניח כי נתונה רשת זרימה $G=(V,E)$ עם מקור s ובור t.

תהי f זרימה ב G ונתבונן בזוג הקודקודים $u,v \in V$ הכמות הנוספת שניתן לדחוף מ u ל v מבלי לעבור את הקיבול $c(u,v)$ היא הקיבול השיורי (residual capacity) של u,v הנתון ע"י :

$$C_f(u,v)=c(u,v)-f(u,v)$$

לדוגמא :

אם $f(u,v)=11$ & $c(u,v)=16$ אזי ניתן לשלוח $C_f(u,v)=5$ יחידות זרימה נוספות לפני שחורגים מאילוצי הקיבול של הרשת.

כאשר הזרימה נטו $f(u,v)$ שלילית הקיבול השיורי $C_f(u,v)$ גדול מהקיבול $c(u,v)$.

לדוגמא :

אם $f(u,v)= -4$ & $c(u,v)=16$ אזי

הקיבול השיורי $C_f(u,v)=20$. נפרש מצב זה באופן הבא: קיימת זרימה נטו של 4 יחידות מ v ל u שאותה ניתן לקזז ע"י דחיפת זרימה נטו של 4 יחידות מ u ל v.

עתה נוכל לדחוף עוד 16 יחידות זרימה נוספות מ u ל v לפני שחורגים מאילוצי הקיבול של הרשת.

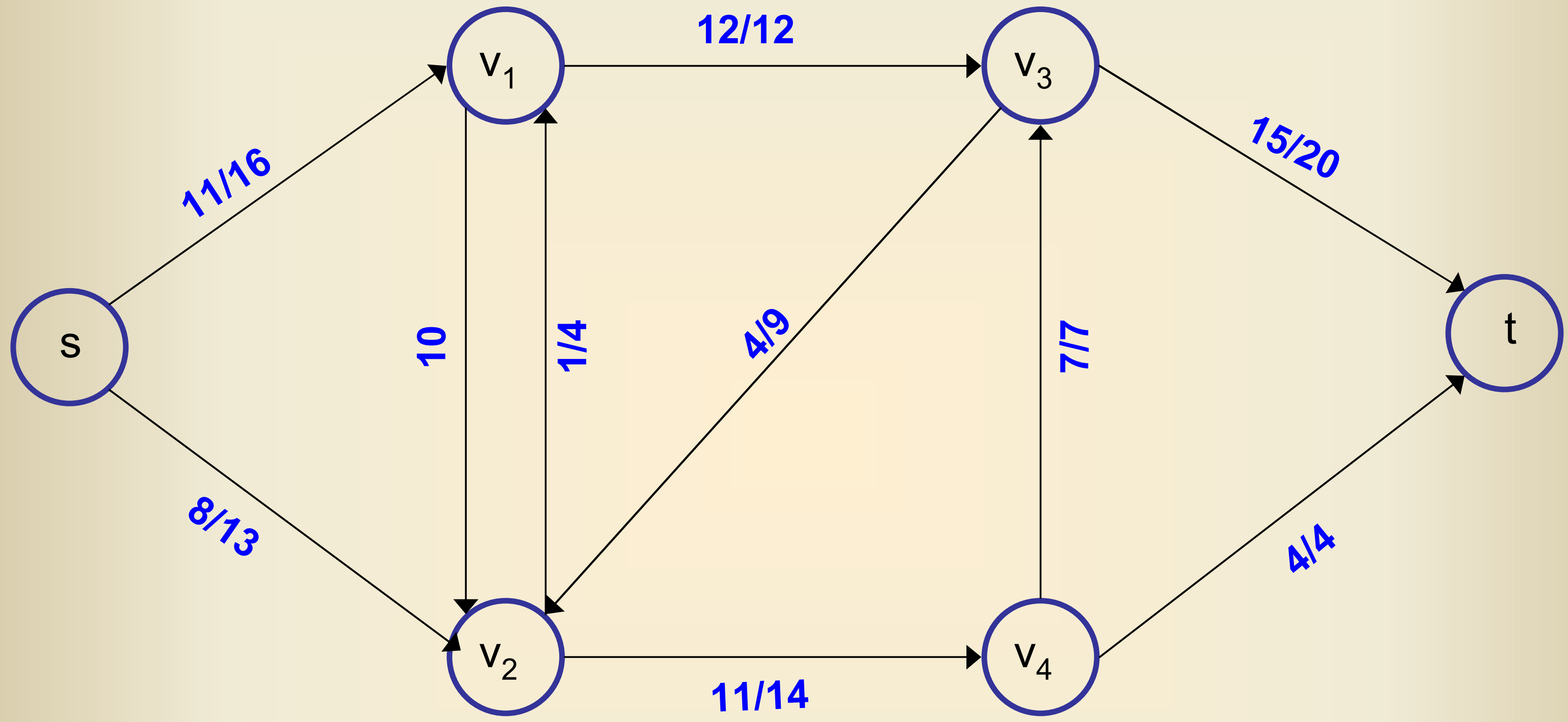
אם כן, כאשר מתחילים עם זרימה נטו של $f(u,v)=-4$, ניתן לדחוף 20 יחידות זרימה נוספות לפני שמגיעים לגבול הקיבול.

בהינתן רשת זרימה $G(V,E)$ וזרימה f,
הרשת השיורית של G המושרית על ידי f
היא $G_f=(V,E_f)$ כאשר :

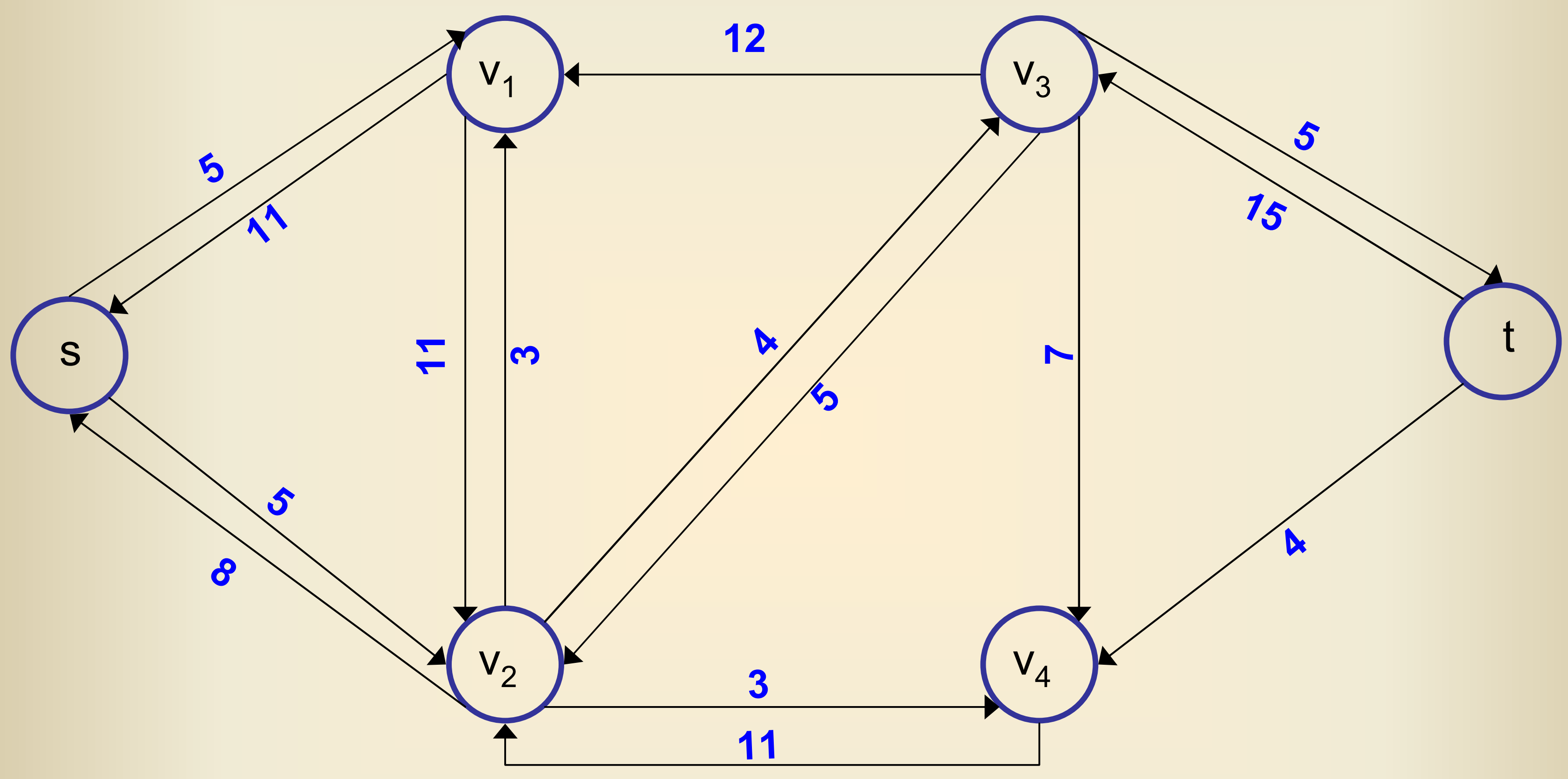
$$E_f=\{(u,v)\in V\times V : C_f(u,v)>0\}$$

דהיינו, דרך כל קשת שיורית ניתן להעביר
זרימה נטו חיובית.

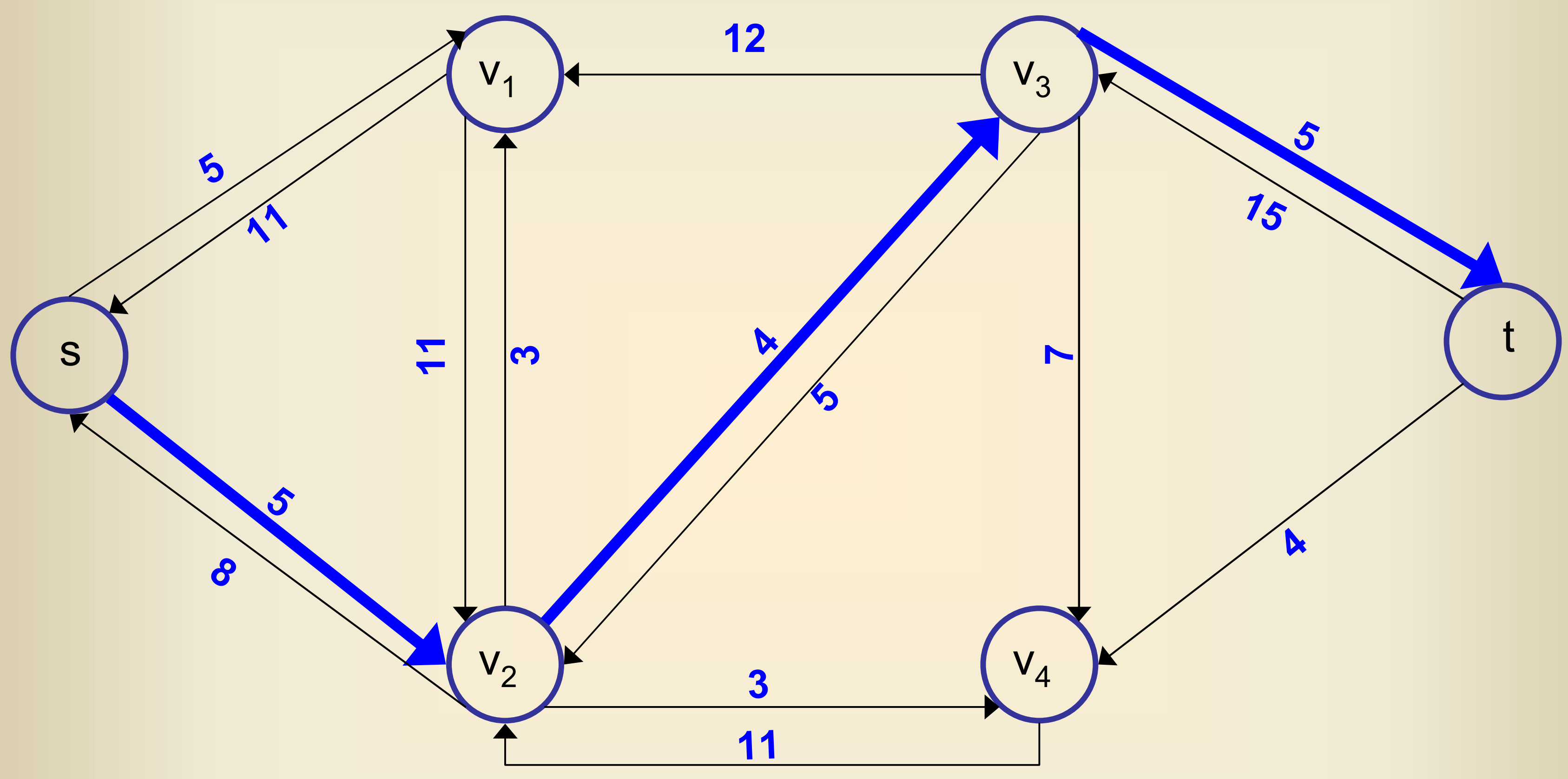
באיור 27.4(i) חוזרת ומופיעה רשת הזרימה G והזרימה f מאיור 27.1(ii), ובאיור 27.4(ii) מופיעה הרשת השיורית המתאימה G_f.



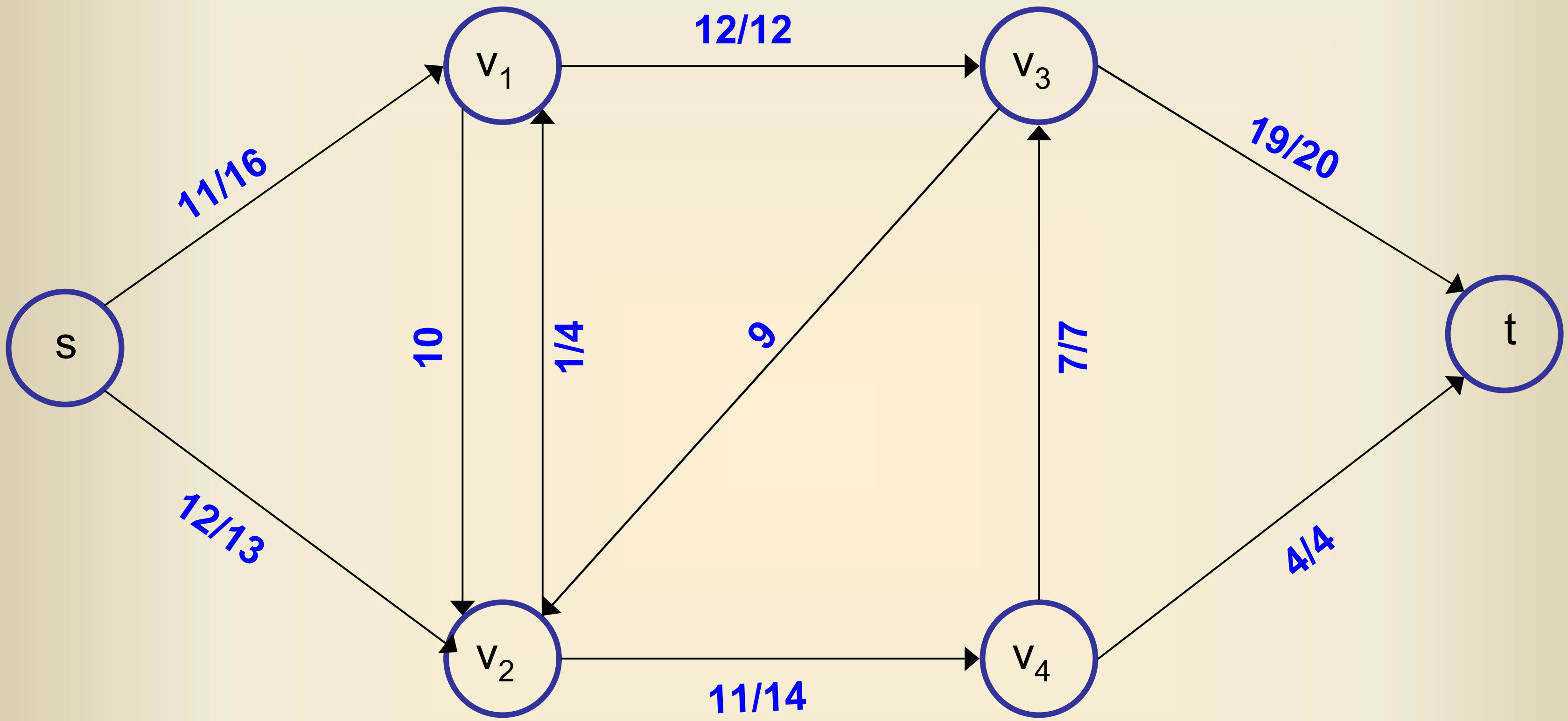
(i)



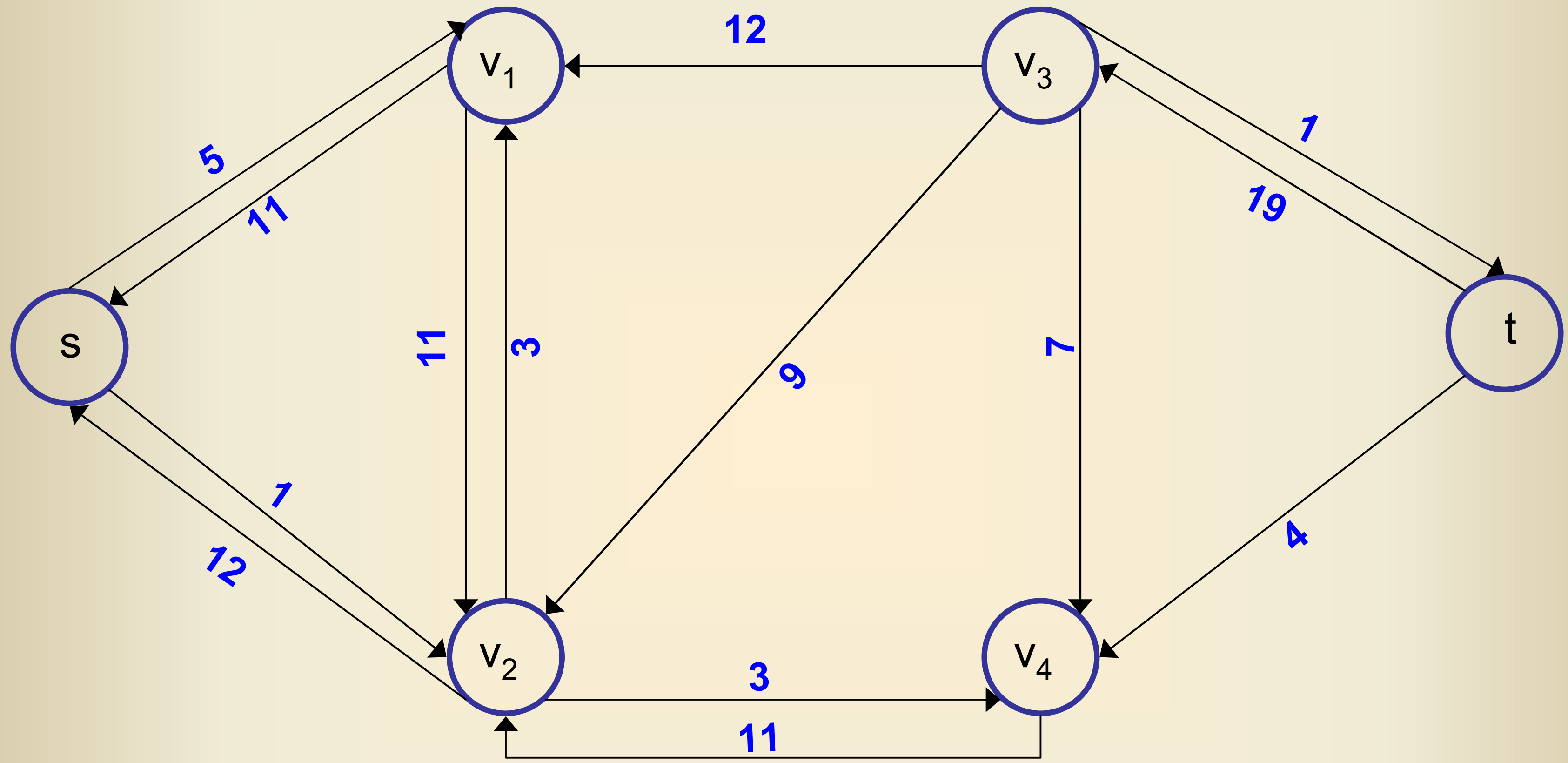
(ii)



(iii)



(iv)



s
v1
v2
v3
v4
t
5
11
1
12
11
3
12
9
7
3
11
1
19
4

איור 27.4

(i) רשת הזרימה G והזרימה f מאיור 27.1(ii).

(ii) הרשת השיורית G_f שבה מסלול השיפור p מוצלל.

(iii) הזרימה ב G המתקבלת על יד כך שמשפרים את המסלול p בקיבול השיורי שלו.

(iv) הרשת השיורית המושרית על ידי הזרימה ב (iii).

יש לשים לב כי (u,v) עשויה להיות קשת שיורית ב E_f גם אם אינה קשת ב E.
במילים אחרות, יתכן בהחלט מצב שבו $E_f \not\subset E$.

הרשת השיורית שבאיור 27.4(ii) כוללת כמה קשתות כאלה שאינן מופיעול ברשת הזרימה המקורית, כגון (v_1,s) ו – (v_2,v_3).
קשת (u,v) כזאת מופיעה ב G_f רק אם $(v,u)\in E$ וקיימת זרימה נטו חיובית מ v ל u.

מאחר שהזרימה נטו f(u,v) מ u ל v היא שלילית, $C_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$ חיובי, ולפיכך $(u,v) \in E$. מאחר שקשת (u,v) נמצאת ברשת המקורית, הרי שמתקבל החסם: $|E_f| \le 2|E|$.

נשים לב כי הרשת השיורית G_f היא עצמה רשת זרימה עם קיבולים הנתונים על ידי C_f. הלמה הבאה מראה את הקשר בין זרימה ברשת שיורית לבין זרימה ברשת המקורית.

למה 27.2

תהי $G=(V,E)$ רשת זרימה עם מקור s ובור t, ותהי f זרימה ב G.

תהי G_f הרשת השיורית המושרית ע"י f. ותהי f' זרימה ב G_f. אזי סכום הזרימות f+f' מוגדר ע"י המשוואה (27.4) הוא זרימה ב G שערכה $|f+f'|=|f|+|f'|$.

הוכחה :

עלינו להוכיח שסכום הזרימות מקיים סימטריה נגדית, את אילוצי הקיבול ואת שימור הזרימה. לגבי סימטריה נגדית נוכל לראות כי עבור כל $v,u \in V$ מתקיים :

$$
\begin{aligned}
(f+f')(u,v) &= f(u,v)+f'(u,v) \\
&= -f(v,u)-f(v,u) \\
&= -(f(v,u)+f'(v,u)) \\
&= -(f+f')(v,u)
\end{aligned}
$$

לגבי אילוצי הקיבול, נשים לב כי $f'(u,v) \le c_f(u,v)$ ועבור כל $u,v \in V$ נקבל :

$$(f+f')(u,v) = f(u,v) + f'(u,v)$$
$$\le f(u,v) + (c(u,v) - f(u,v))$$
$$= c(u,v)$$

לגבי שימור הזרימה, נשים לב כי עבור כל $u \in V - \{s,t\}$ מתקיים:

$$(f+f')(u,v) = f(u,v) + f'(u,v)$$
$$\le f(u,v) + (c(u,v) - f(u,v))$$
$$= c(u,v)$$

ולבסוף אנו מקבלים כי:

$$
\begin{aligned}
|f+f'| &= \sum_{v\in V}(f+f')(s,v) \\
&= \sum_{v\in V}\left(f(s,v)+f'(s,v)\right) \\
&= \sum_{v\in V} f(s,v)+\sum_{v\in V} f'(s,v) \\
&= |f|+|f'|
\end{aligned}
$$

מסלולי שיפור

בהינתן רשת זרימה $G=(V,E)$ וזרימה f,
מסלול שיפור p (augmenting path)
הוא מסלול פשוט מ s ל t ברשת השיורית
G_f.

על פי הגדרתה של רשת שיורית, דרך כל קשת (u,v) על מסלול שיפור ניתן להעביר מ u ל v זרימה נטו חיובית נוספת מסויימת מבלי להפר את אילוצי הקיבול על קשת זו.

המסלול המסומן באיור הקודם הוא מסלול השיפור.

אם נתייחס לרשת השיורית G_f שבאיור כאל רשת זרימה, הרי שאנו יכולים להעביר עד 4 יחידות נוספות של זרימה נטו דרך כל אחת מהקשתות על המסלול מבלי להפר אילוצי קיבול,

שכן הקיבול השיורי הקטן ביותר על המסלול זה הוא $C_f(v_2,v_3)=4$.
לכמות המקסימלית של זרימה נטו שניתן להעביר דרך קשתותיו של מסלול שיפור p קוראים הקיבול השיורי (residual capacity) והוא נתון ע"י:

$$C_f(p)=\min\{C_f(u,v) : p \ exist \ on \ (u,v)\}$$

למה 27.3

תהי $G=(V,E)$ רשת זרימה , תהי f זרימה ב G, ויהי p מסלול שיפור ב G_f

נגדיר פונקציה $f_p : V \times V \to R$ ע"י:

$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & If\,(u,v)\; exist\; on\; p \\ -c_f(p) & If\,(v,u)\; exist\; on\; p \\ 0 & Else \end{cases}$$

אזי, f_p היא זרימה ב G_f שערכה :

$$|f_p| = c_f(p) > 0$$

מסקנה

תהי G=(V,E) רשת זרימה , תהי f זרימה ב G, ויהי p מסלול שיפור ב G_f.

נגדיר את f_p כך: $f':V\times V \to R$ על ידי $f'=f+f_p$. אזי f' היא זרימה ב G

שערכה: $|f'|=|f|+|f_p|>|f|$

חתכים של רשתות זרימה

שיטת פורד פולקרסון חוזרת ומשפרת את הזרימה לאורך מסלולי השיפור עד למציאת זרימה מקסימללית.

המשפט זרימה מקסימלית חתך מינימלי שיוכח בהמשך מראה שזרימה הינה מקסימלית אם ורק אם הרשת השיורית שלה אינה מכילה שום מסלולי שיפור.

אולם בכדי להוכיח משפט זה עלינו לחקור תחילה את מושג החתך של רשת זרימה.

חתך (cut) של רשת זרימה $G=(V,E)$
הוא חלוקה של V לשתי קבוצות S ו $T=V-S$, כך ש $s \in S$ ו $t \in T$.

אם f היא זרימה, אזי הזרימה נטו (net) דרך החתך מוגדרת ע"י $f(S,T)$.

הקיבול (capacity) של החתך (S,T) הוא $c(S,T)$.

חתך מינימלי (minimum cut) של רשת הוא חתך שקיבולו מינימלי מבין כל החתכים של רשת הזרימה.

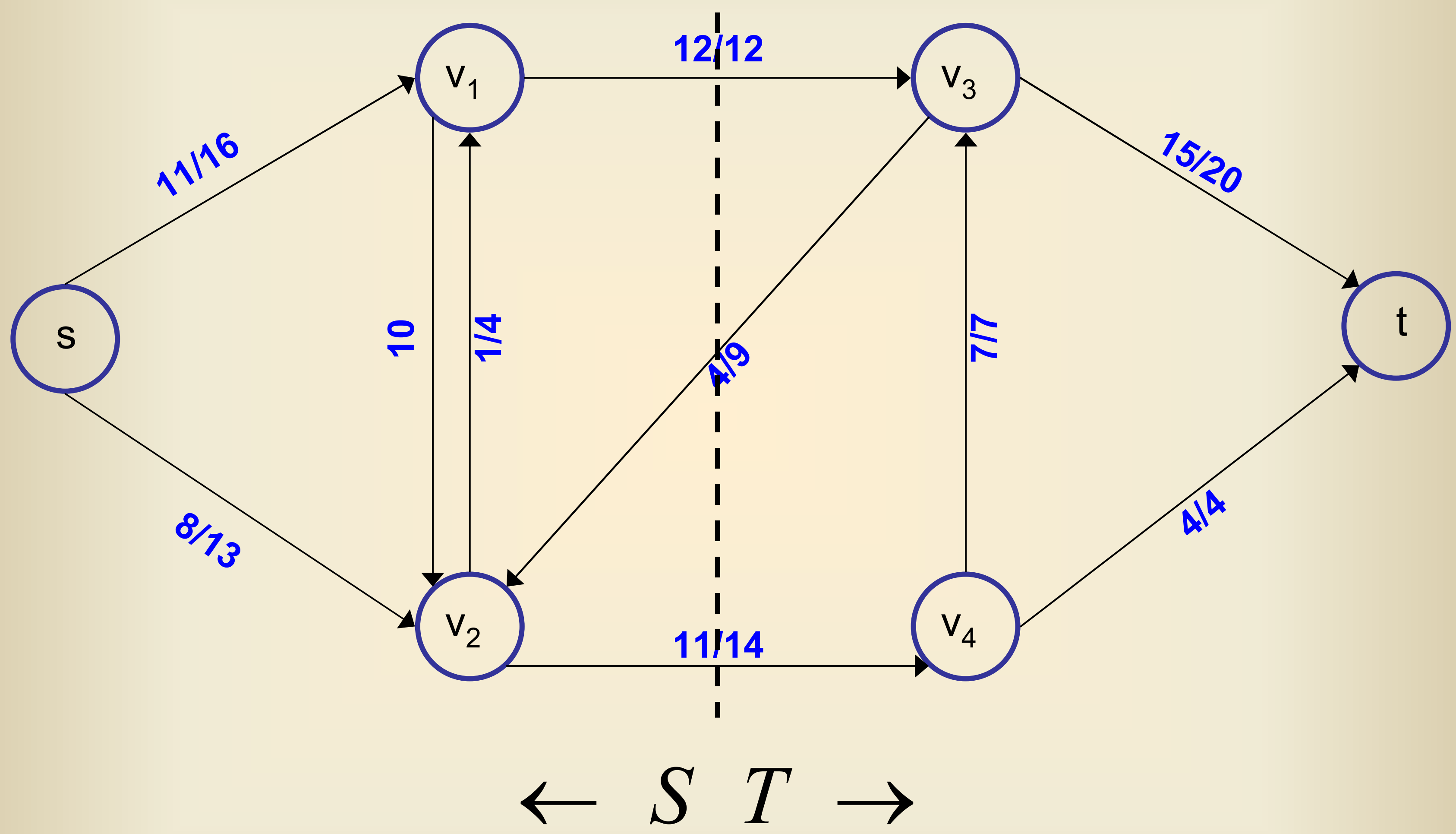
באיור 27.5 מוצג החתך $(\{s, v_1, v_2\}, \{v_3, v_4, t\})$ של רשת הזרימה מאיור 27.1(ii). הזרמה נטו דרך חתך זה היא:

$f(v_1, v_3) + f(v_2, v_3) + f(v_2, v_4) = 12 + (-4) + 11 = 19$.

וקיבול החתך הוא:

$c(v_1, v_3) + c(v_2, v_4) = 12 + 14 = 26$

נשים לב כי הזרימה נטו דרך חתך עשויה לכלול זרימות נטו שליליות בין הקודקודים, אולם קיבולו של חתך מורכב מערכים אי-שליליים בלבד.



AFEKA המכללה האקדמית להנדסה בתל-אביב TEL-AVIV ACADEMIC COLLEGE OF ENGINEERING אפקה

איור 27.5 חתך (S,T) של רשת הזרימה מאיור 27.1(ii), כאשר

$T = \{v_3, v_4, t\}$ & $S = \{s, v_1, v_2\}$.

הקודקודים השמאליים הם קודקודי S והקודקודים השמאליים הם קודקודי T.

הזרימה נטו דרך (S,T) היא f(S,T)=19 וקיבול החתך הוא c(S,T)=26.

למה 27.5

תהי f זרימה ברשת זרימה G עם מקור s ובור t, ויהי (S,T) חתך של G. אזי, הזרימה נטו דרך (S,T) היא f(S,T)=|f|.

הוכחה:

$$\begin{aligned} f(S,T) &= f(S,V) - f(S,S) \\ &= f(S,V) \\ &= f(s,V) + f(S-s,V) \\ &= f(s,V) \\ &= |f| \end{aligned}$$

מסקנה ישירה מלמה 27.5 – ערכה של זרימה שווה לזרימה נטו אל הבור.

מסקנה נוספת מראה כיצד ניתן להשתמש בקיבול החתכים כדי לחסום את ערכה של הזרימה.

מסקנה 27.6

ערכה של זרימה f כלשהי ברשת זרימה G חסום מלמעלה ע"י קיבולו של חתך כלשהו ב G.

הוכחה יהי (S,T) חתך כלשהו ב G ותהי f זרימה כלשהי, על פי למה 27.5 ואילוצי הקיבול :

$$
\begin{aligned}
|f| &= f(S,T) \\
&= \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v) \\
&\le \sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v) \\
&= c(S,T)
\end{aligned}
$$

משפט 27.7 – זרימה מקסימאלית חתך מינימאלי

אם f היא זרימה ברשת זרימה $G=(V,E)$ עם מקור s ובור t, אזי התנאים הבאים שקולים זה לזה:

1. אם f היא זרימה f היא זרימה מקסימלית ב G.
2. הרשת השיורית G_f אינה מכילה שום מסלולי שיפור.
3. קיים חתך (S,T) ב- G שעבורו

$$|f| = c(S,T)$$

הוכחה

$(2) \Leftarrow (1)$ נניח, בדרך השלילה, כי f היא זרימה מקסימלית ב G אבל G_f מכילה מסלול שיפור p. אזי על פי מסקנה (4) סכום הזרימות $f + f_p$, כאשר f_p נתונה ע"י משוואה (6), הוא זרימה ב- G שערכה גדול ממש מ- |f|, בסתירה להנחתנו ש- f היא זרימה מקסימלית.

$(2) \Leftarrow (3)$ נניח כי G_f אינה מכילה שום מסלול שיפור, דהיינו, כי G_f אינה מכילה שום מסלול מ s ל t. נגדיר :

S={$v \in V$: קיים מסלול מ s אל v ב G_f}

T=V-S

החלוקה (S,T) היא חתך: $s \in S$, באופן טריוויאלי, ו $t \notin S$ מכיוון שלא קיים ב G_f מסלול מ s ל t. עבור כל זוג קודקודים u ו v כך ש $u \in S$ ו $v \in T$, מתקיים f(u,v)=c(u,v) , שכן אחרת $(u,v) \in E_f$ ו-v שייך לקבוצה S. לכן עפ"י למה 27.5

$$|f| = f(S,T) = c(S,T)$$

$(3) \Leftarrow (1)$ עפ"י מסקנה (6), $|f| \le c(S,T)$ עבור כל החתכים (S,T). התנאי $|f| = c(S,T)$ גורר אפוא ש-f היא זרימה מקסימלית.

אלגוריתם פורד-פולקרסון הבסיסי

בכל איטרציה של שיטת פורד-פולקרסון אנו מוצאים מסלול שיפור כלשהו p ומגדילים את הזרימה f דרך p בקיבול השיורי $c_f(p)$.

המימוש המובא להלן מחשב את הזרימה המקסימלית בגרף $G(V,E)$ ע"י עדכון הזרימה נטו $f[U,V]$ בין כל שני קודקודים u ו-v המחוברים ע"י קשת.

אם u ו- v אינם מחוברים ע"י קשת באף אחד מהכיוונים, אנו מניחים כי $f[U,V]=0$. הקוד מניח שהקיבול מ u ל v נתון ע"י פונקציה קבועה בזמן $c(u,v)$, כאשר $c(u,v)=0$ אם $(u,v)\notin E$.

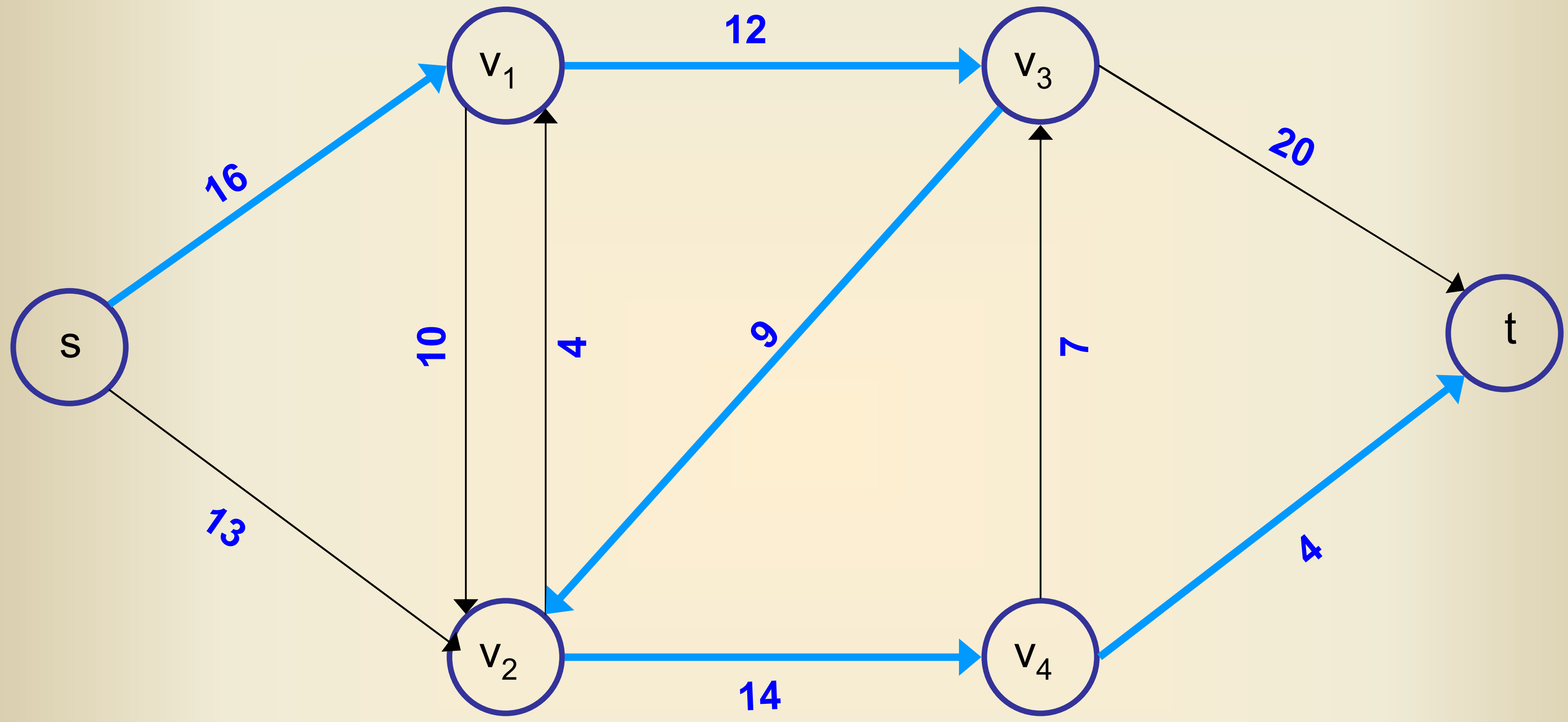
הקיבול השיורי $c_f(u,v)$ מחושב עפ"י נוסחא (27.5). הביטוי $c_f(p)$ המופיע בקוד הוא למעשה רק משתנה זמני מכיל את הקיבול השיורי של המסלול P.

$$Ford-Fulkerson(G,s,t)$$

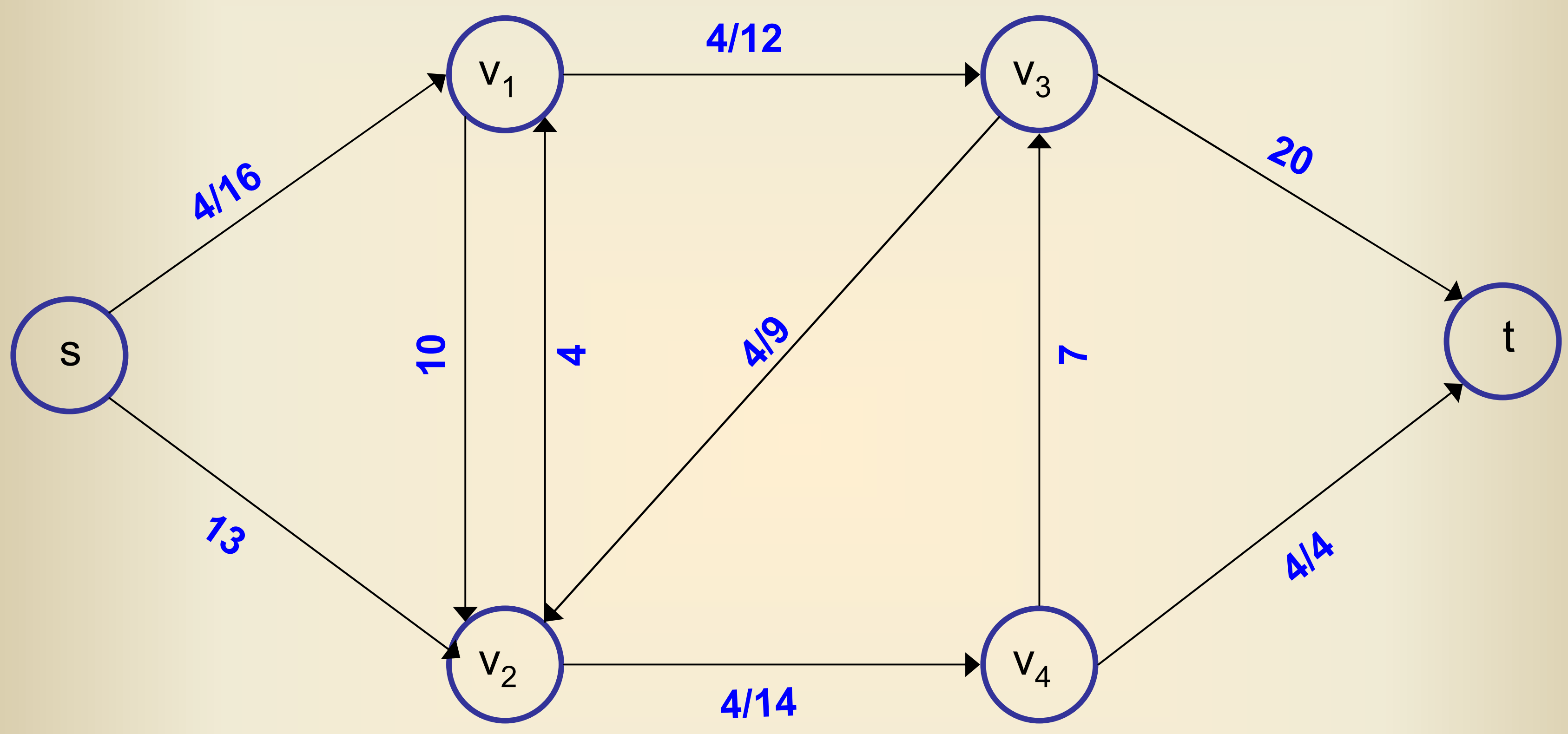
```
for each edge (u,v) ∈ E[G]
    do f[u,v] ← 0
       f[v,u] ← 0
while there exist a path p from s to t in the residual network G_f
    do c_f(p) ← min{c_f(u,v) : (u,v) is in p}
       for each edge (u,v) in p
           do f[u,v] ← f[u,v] + c_f(p)
              f[v,u] ← −f[u,v]
```

שורות 1-3 מאתחלות את הזרימה f לאפס.

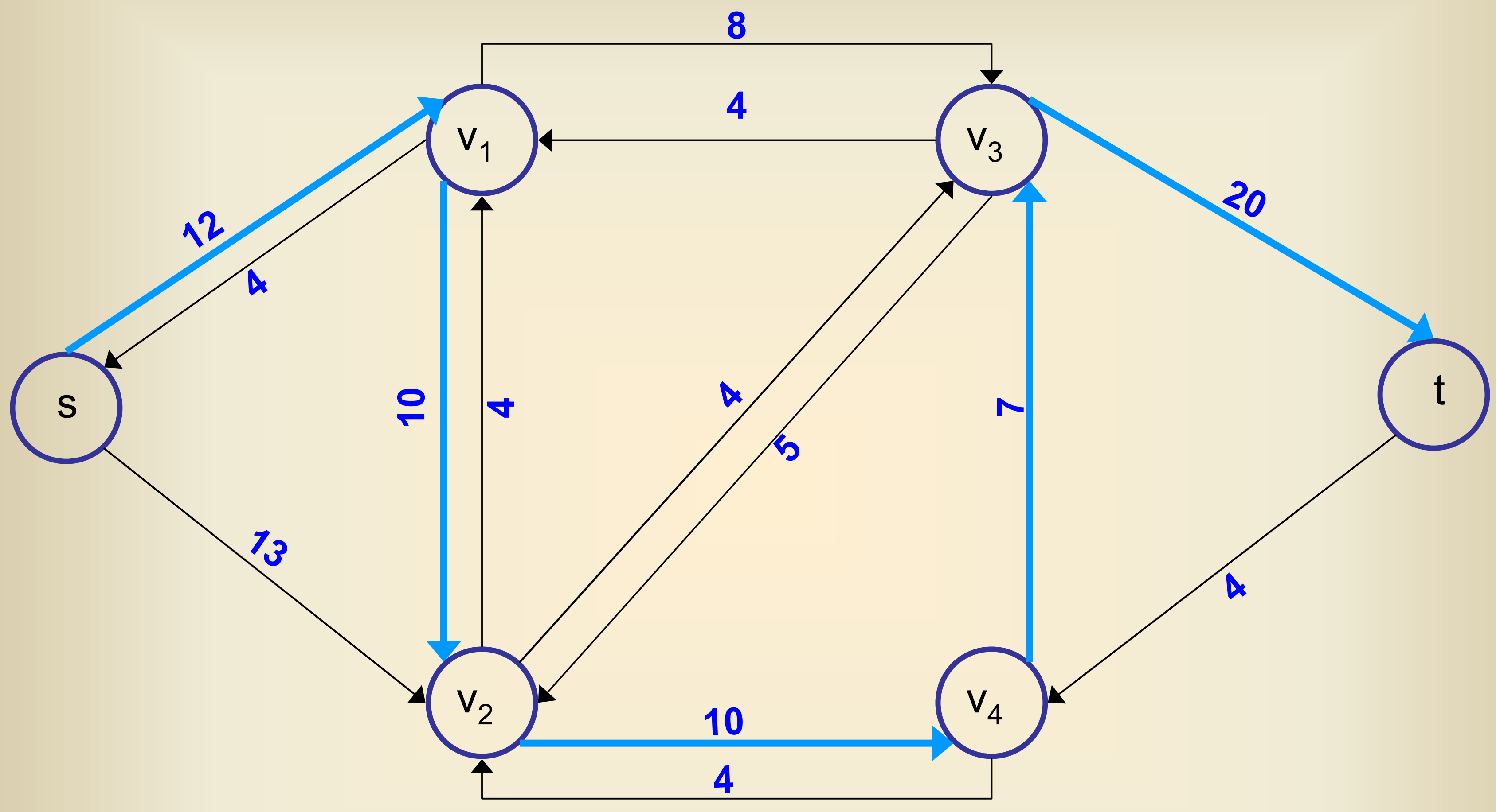
לולאת ה while בשורות 4-8 חוזרת ומוצאת ב- G_f מסלול שיפור p ומשפרת את הזרימה f דרך p בקיבול השיורי $c_f(p)$. כאשר לא קיימים עוד מסלולי שיפור, הזרימה f היא זרימה מקסימאלית.



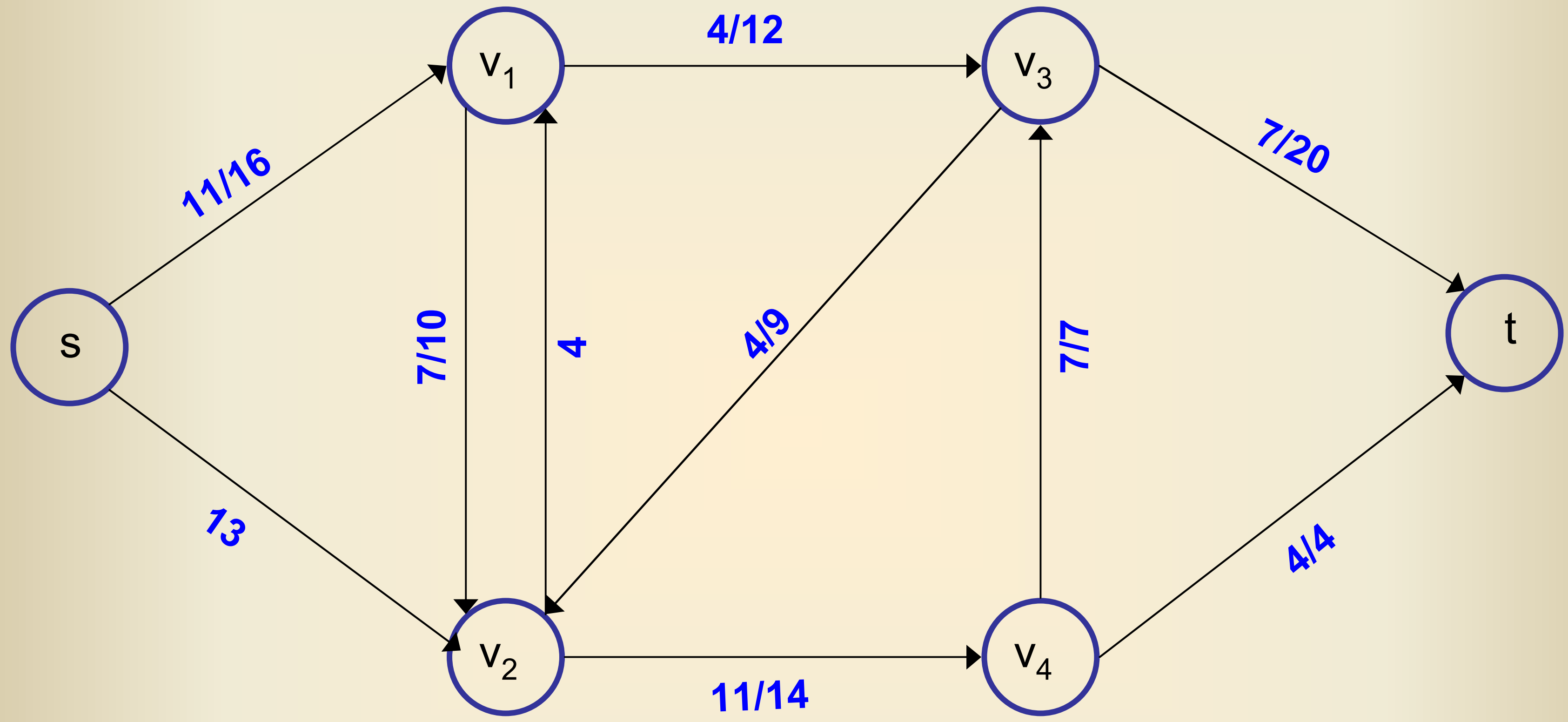
(i)



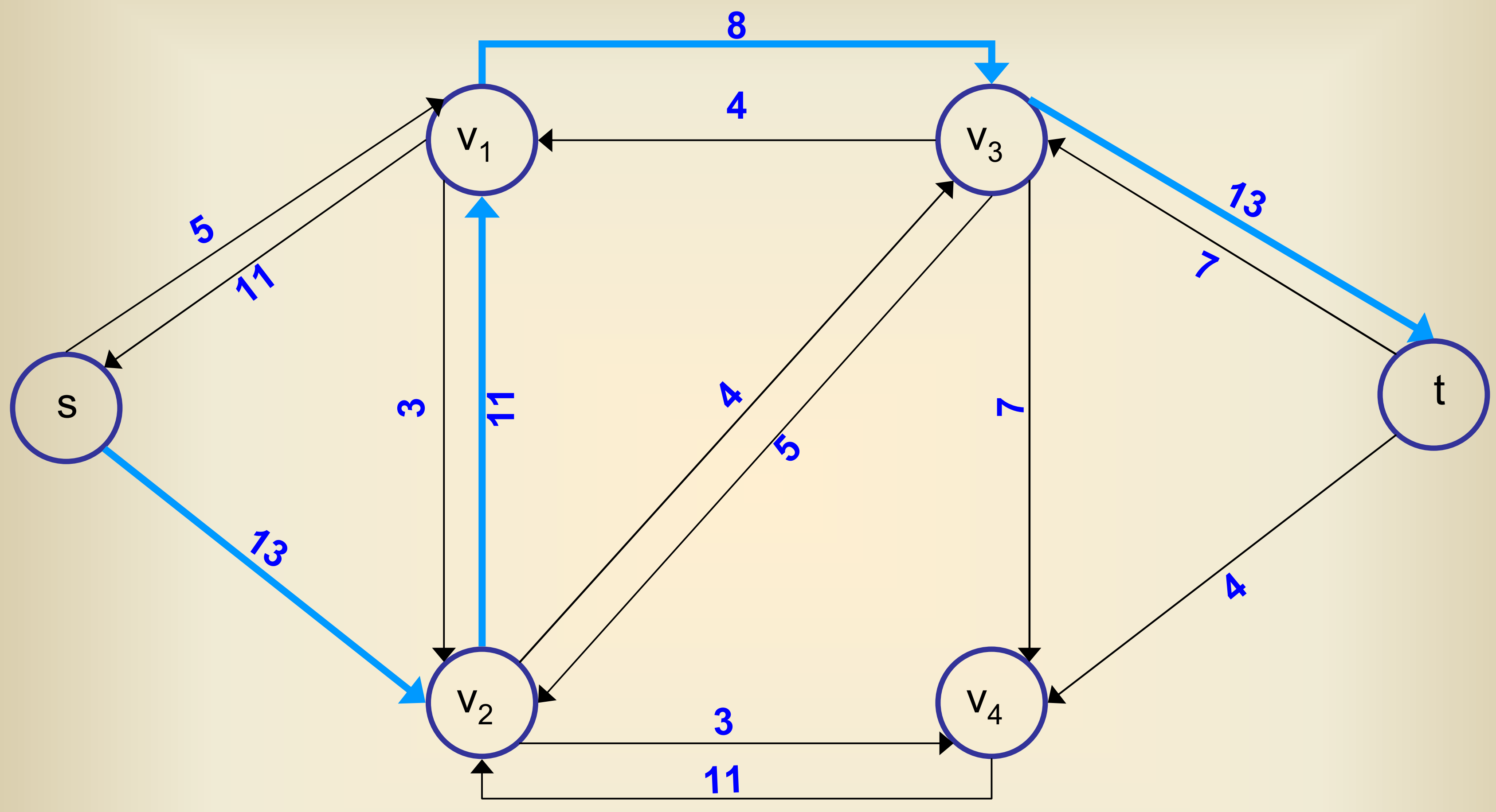
s
v1
v2
v3
v4
t
4/16
13
4/12
10
4
4/9
7
20
4/4
4/14



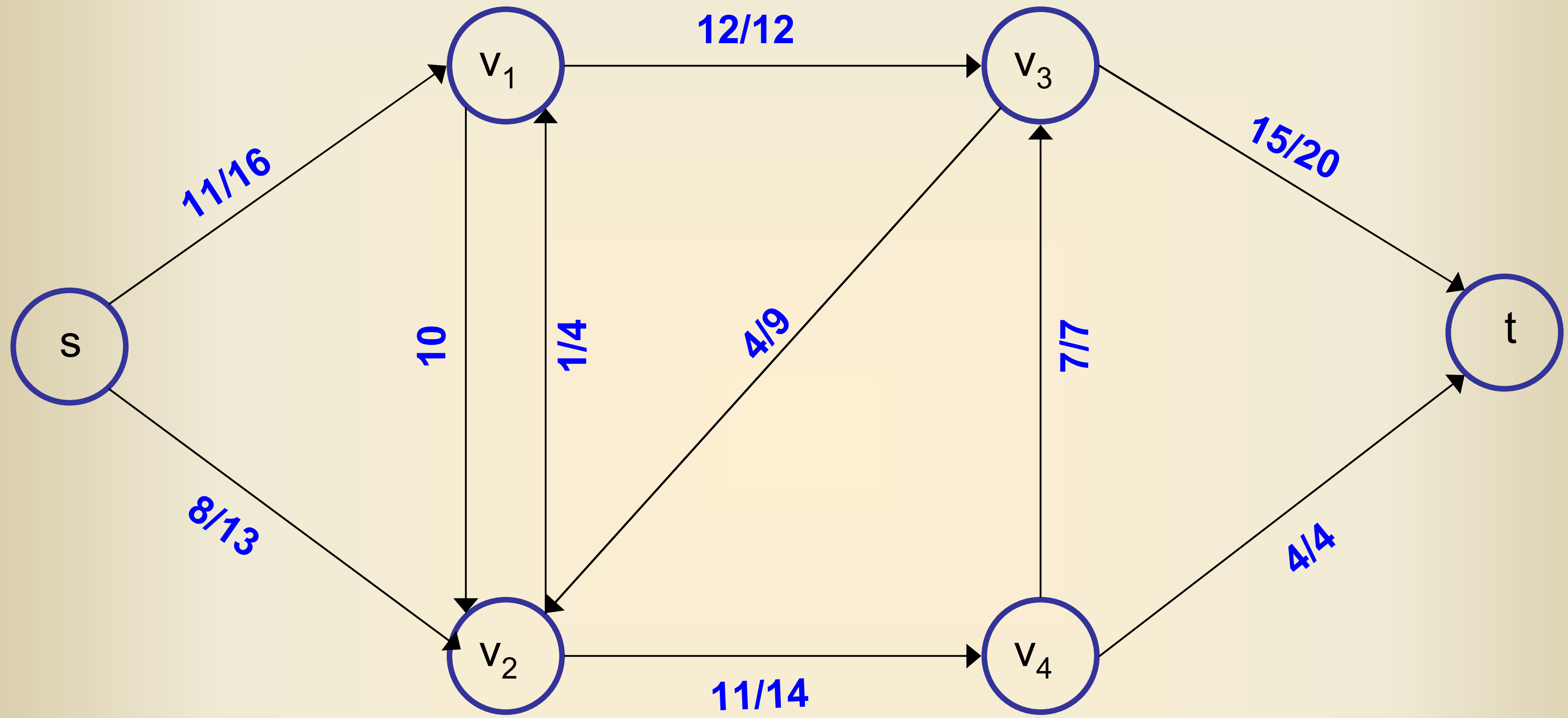
(ii)



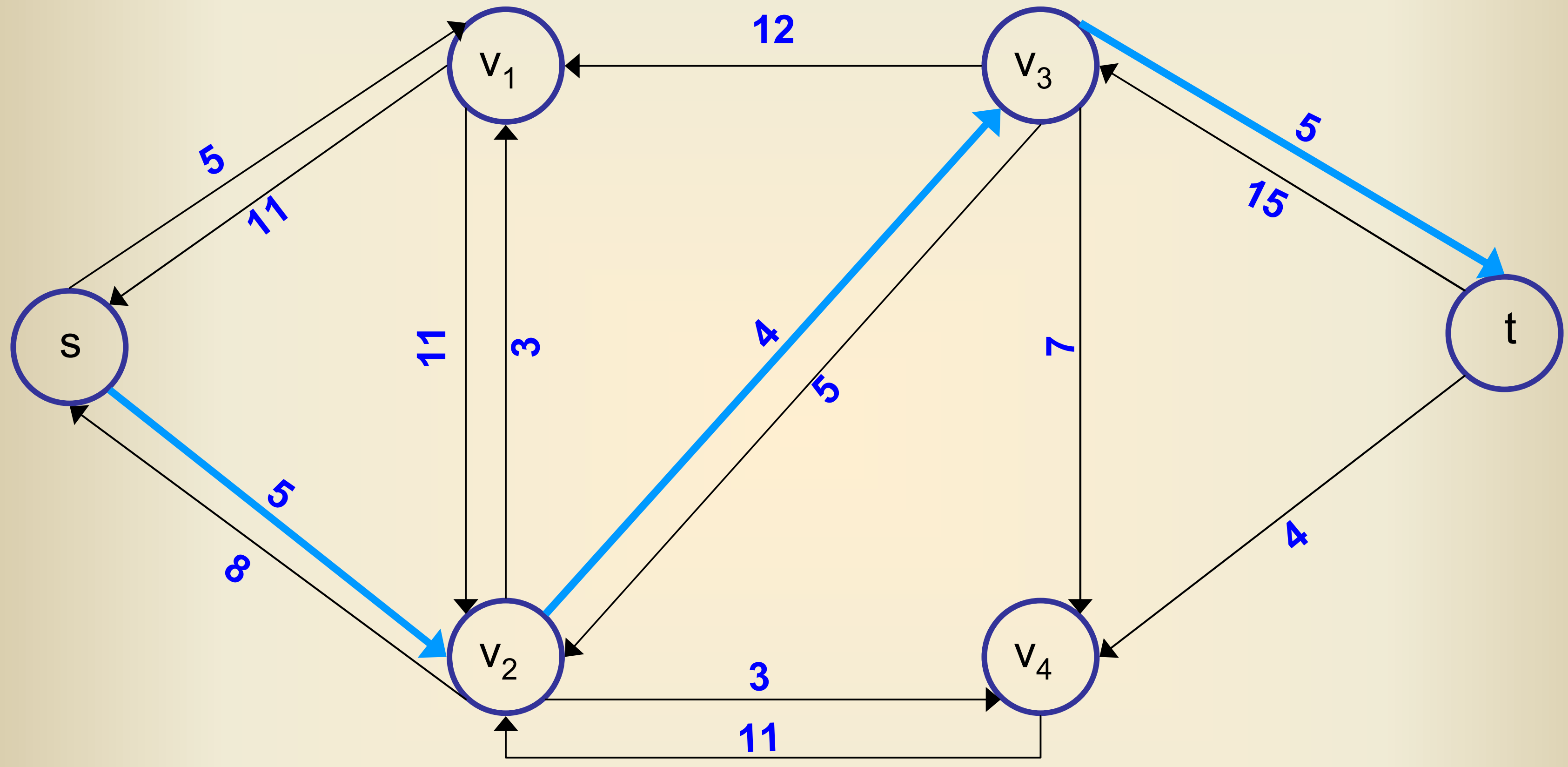
AFEKA המכללה האקדמית להנדסה בתל-אביב TEL-AVIV ACADEMIC COLLEGE OF ENGINEERING אפקה



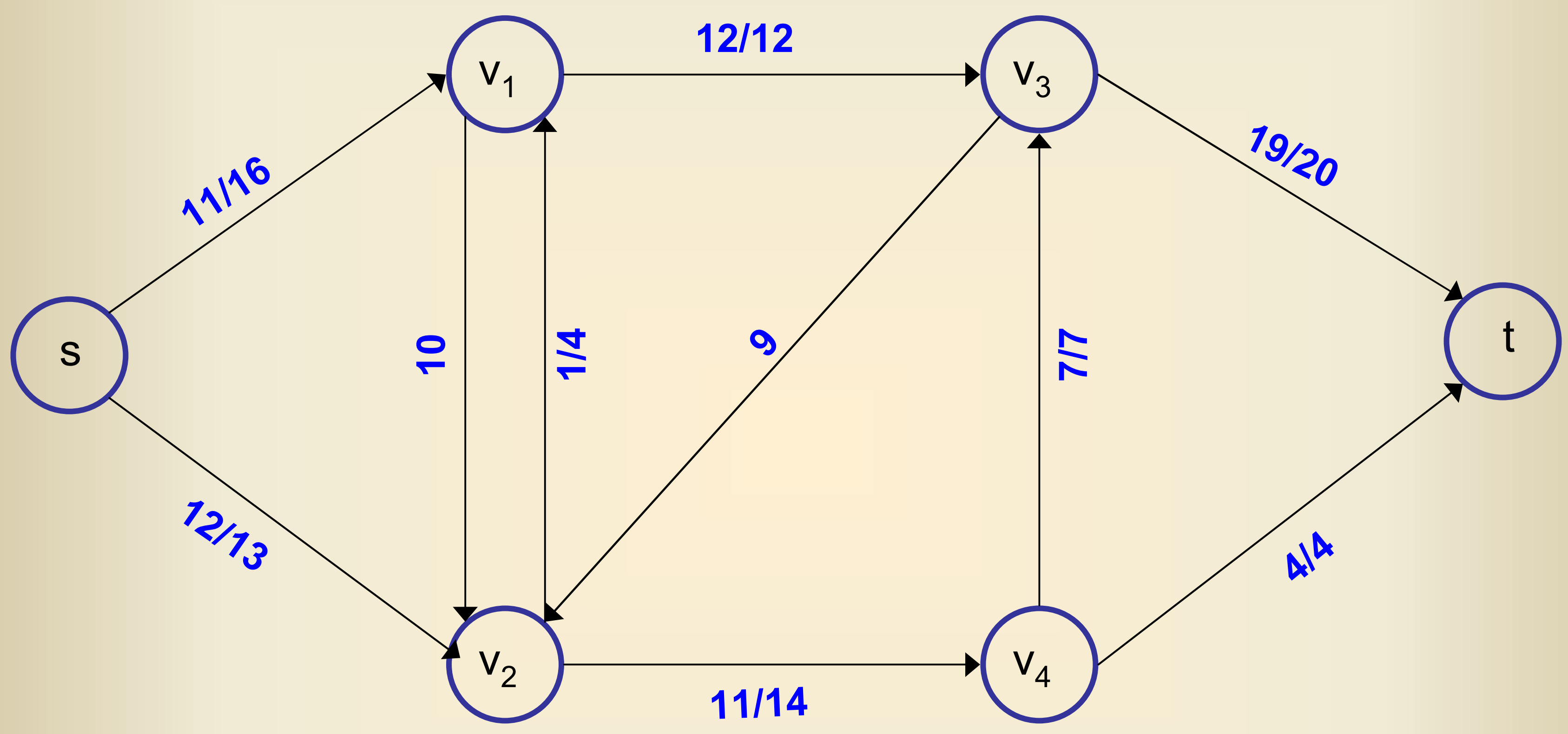
(iii)

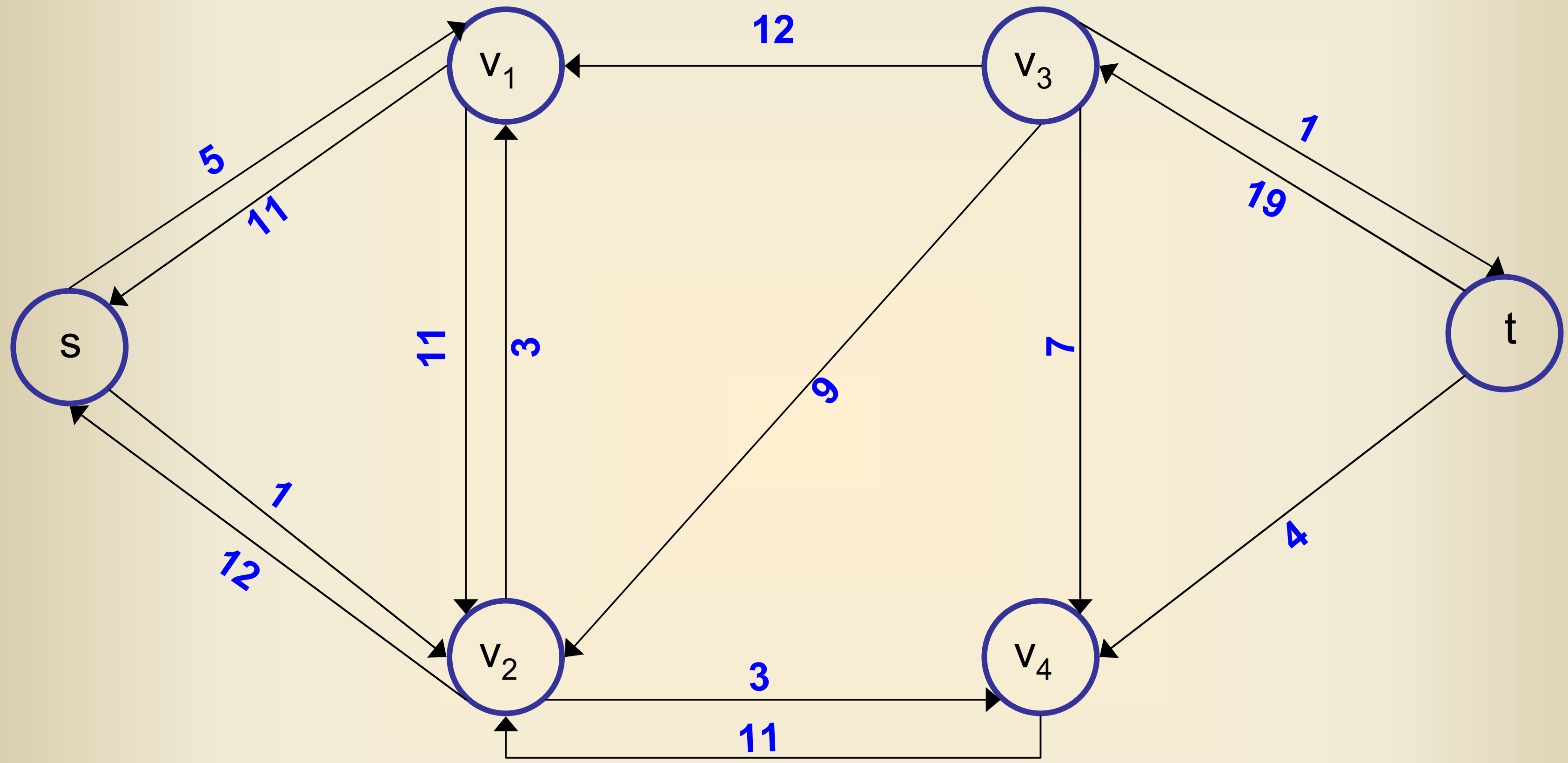


s
v1
v2
v3
v4
t
11/16
8/13
10
1/4
12/12
4/9
11/14
7/7
15/20
4/4



(iv)


s
v1
v2
v3
v4
t
11/16
12/13
10
1/4
12/12
9
7/7
11/14
19/20
4/4



(V)

איור 27.6 ביצוע אלגוריתם פורד-פולקרסון הבסיס.
(i)-(iv) איטרציות עוקבות של לולאת ה while. בכל חלק באיור מוצגת משמאל הרשת השיורית G_f משורה 4 עם מסלול שיפור p מוצלל.

בצד ימין מוצגת הזרימה החדשה f, המתקבלת מהוספת f_p ל f.
הרשת השיורית ב (i) היא רשת הקלט G.
(v) הרשת השיורית בעת הבדיקה באיטרציה האחרונה של לולאת ה while.
רשת זו אנה מכילה מסלולי שיפור, ולכן הזרימה f המוצגת ב (iv) היא זרמה מקסימלית.

ניתוח של פורד-פולקרסון

זמן הריצה של האלגוריתם תלוי באופן שבו נקבע מסלול השיפור בשורה 4 . בצורה הגרועה, האלגוריתם עלול שלא לעצור כלל, ערך הזרימה אמנם יגדל עם השיפורים העוקבים, אבל הוא עלול שלא להתכנס לערך הזרימה המקסימאלית.

אם מסלול השיפור נבחר באמצעות חיפוש לרוחב, האלגוריתם רץ בזמן פולינומינאלי. אולם בטרם נוכיח זאת, נראה כיצד מקבלים חסם פשוט עבור המקרה בו מסלול השיפור נבחר באופן שרירותי וכל ערכי הקיבול הם מספרים שלמים.

ברוב המקרים שבהם מתעוררת בעיית הזרימה המקסימאלית ביישומים מעשיים, ערכי הקיבול הם מספרים שלמים. אם ערכי הקיבול הם מספרים רציונאליים, אפשר להפוך את כולם למספרים שלמים באמצעות כיול (כלומר הכפלתם במספר גדול דיו).

בהנחות אלו, מימוש ישיר של פור-
פולקרסון רץ בזמן $O(E|f^*|)$ כאשר f^*
היא הזרימה המקסימאלית שמוצא
האלגוריתם.

הניתוח נעשה כך: שורות 1-3 רצות בזמן $O(E)$. לולאת ה- while בשורות 4-8 מבוצעת לכל היותר $|f^*|$ פעמים, שכן ערך הזרימה גדל ביחידה אחת לפחות בכל איטרציה.

את העבודה המתבצעת בלולאת ה while
ניתן לייעל באמצעות ניהול יעיל של מבנה
הנתונים המשמש למימוש הרשת G(V,E).
בהינתן זרימה f ב G, קבוצת הקשתות
ברשת השיורית G_f מורכבת מכל הקשתות
(u,v) ב G' שעבורן $c(u,v) - f[u,v] \neq 0$,

הזמן למציאת מסלול ברשת השיורית הוא אפוא $O(E')=O(E)$ אם משתמשים בחיפוש לעומק או בחיפוש לרוחב.

לכן כל איטרציה של while מתבצעת בזמן $O(E)$ וזמן הריצה הכולל הוא $O(E|f^*|)$.

כאשר ערכי הקיבול הם מספרים שלמים והערך האופטימלי של הזרימה קטן, זמן הריצה של אלגוריתם פורד-פולקרסון הוא טוב.

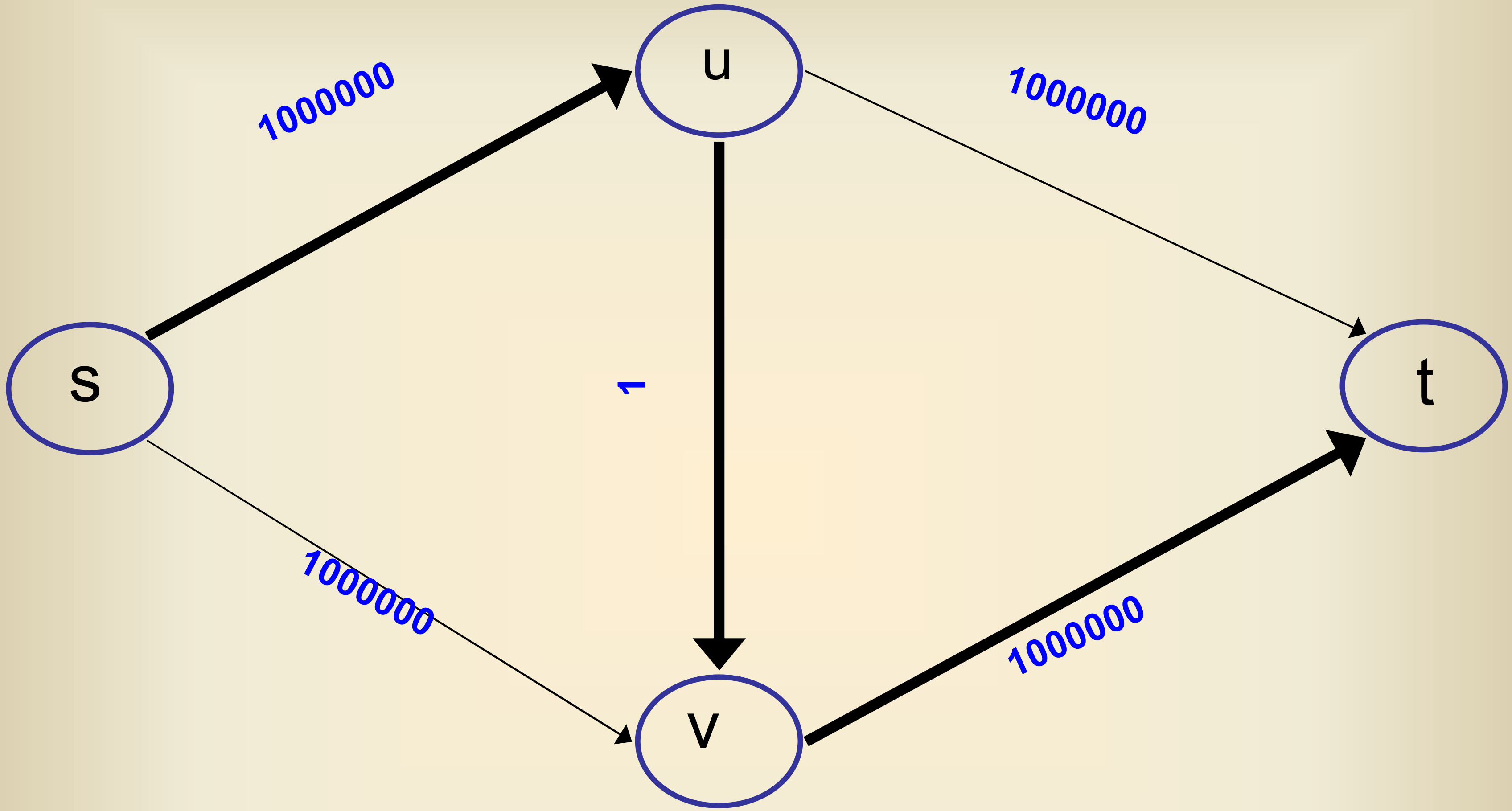
באיור שבעמוד הבא נציג מה עלול לקרות ברשת זרימה פשוטה שבה $|f^*|$ גדול.

ערכה של זרימה מקסימלית ברשת זו הוא .2,000,000
1,000,000 יחידות זרימה עוברות דרך המסלול $s \rightarrow u \rightarrow t$ וכמות זהה דרך המסלול $s \rightarrow v \rightarrow t$.

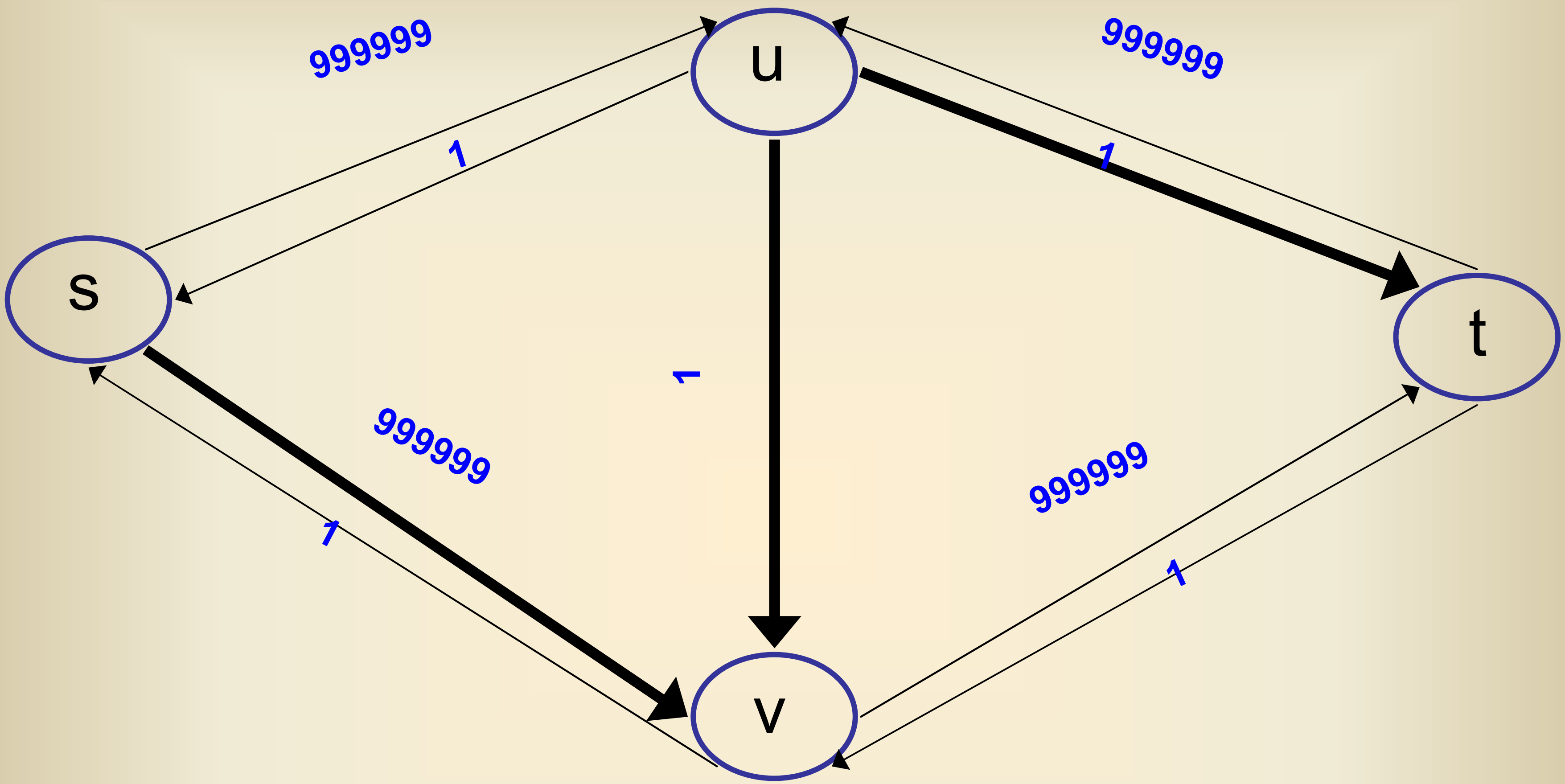
אם מסלול השיפור בראשון שמוצא
האלגוריתם הוא $s \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow t$ כמוצג
באיור הראשון, ערך הזרימה לאחר
איטרציה ראשונה הוא אחד.
הרשת השיורית המתקבלת מוצגת באיור
השני, כעת באיטרציה השניה נמצא מסלול
השיפור $s \rightarrow v \rightarrow u \rightarrow t$ ערכה של הזרימה
כעת הוא 2.

הרשת השיורית המתקבלת מוצגת באיור השלישי, ניתן להמשיך כך ולבחור את המסלול הראשון באיטרציות האי-זוגיות ואת מסלול השיפור השני באיטרציות הזוגיות.

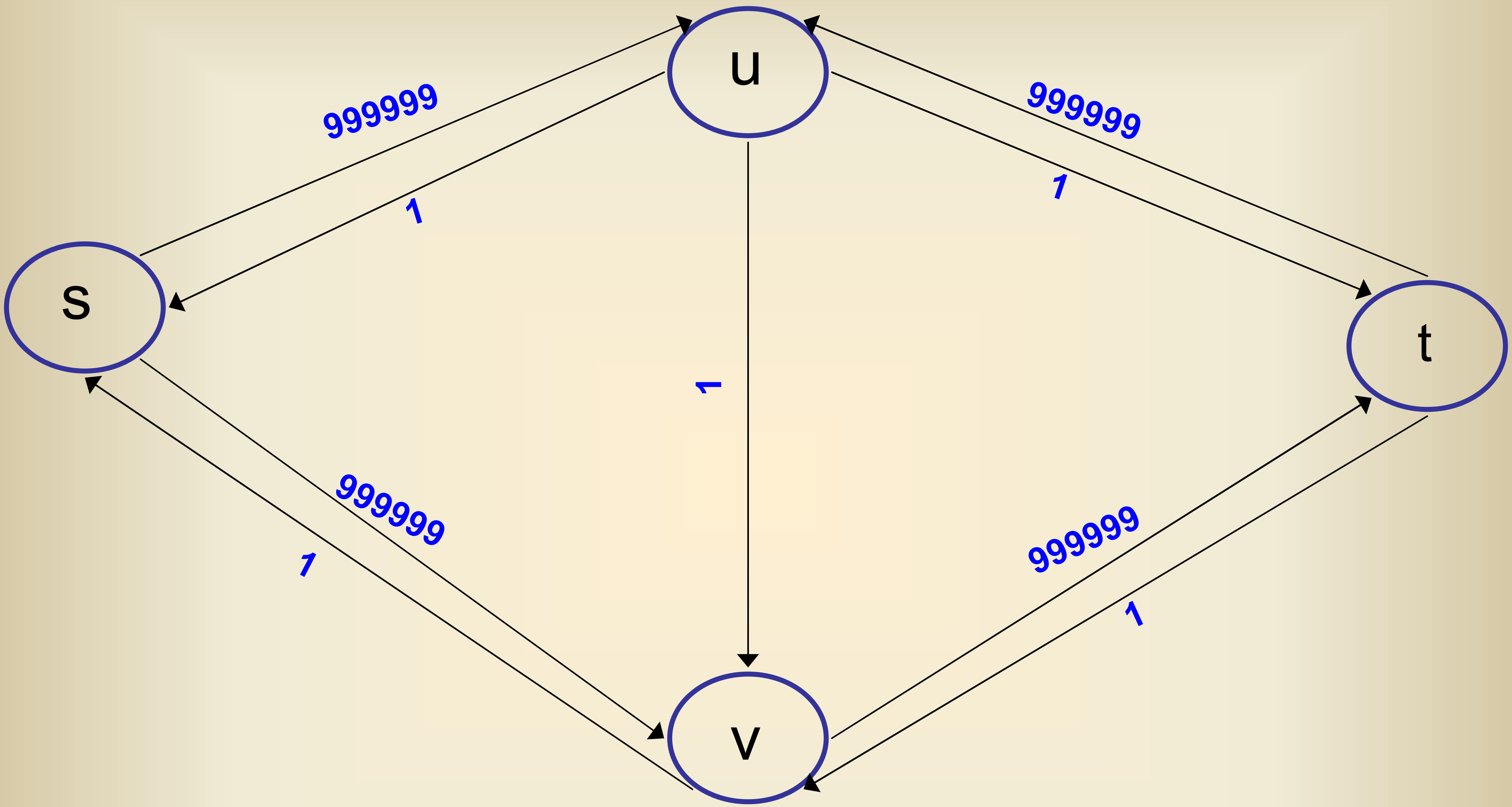
מספר האיטרציות הולל יגיע אז ל 2,000,000 וערך הזרימה יגדל באחת כל פעם.



(i)



(ii)



(iii)

איור 27.7 (i) רשת זרימה שעבורה Ford-Fulkerson עלול לרוץ בזמן $\Theta(E\,|f^*|)$, כאשר f^* היא זרימה מקסימלית שערכה, במקרה זה, $|f^*|=2{,}000{,}000$.

ברשת מסומן מסלול שיפור שקיבולו השיורי 1.

(ii) הרשת השיורית המתקבלת, ובה מסומן מסלול שיפור נוסף שקיבולו השיורי 1.

(iii) הרשת השיורית המתקבלת.

ניתן לשפר את החסם על זמן הריצה של האלגוריתם אם ממשים את חישוב מסלול השיפור p בשורה 4 באמצעות חיפוש לרוחב, כלומר, אם מסלול השיפור הוא מסלול קצר ביותר מ s ל t ברשת השיורית, כאשר אורכה (משקלה) של כל קשת הוא יחידה אחת.

מימוש זה של שיטת פורד-פולקרסון נקרא אלגוריתם אדמונדס-קארפ (Edmonds-Karp algorithm), נוכיח שזמן ריצתו של האלגוריתם הוא $O(VE^2)$.

הניתוח מתבסס על מרחקים אל הקודקודים ברשת השיורית G_f. הלמה הבאה משתמשת בסימון $\delta_f(u,v)$ לציון מרחק המסלול הקצר ביותר מ u אל v ב G_f, כאשר אורכה של כל קשת הוא יחידה אחת.

למה 27.8

אם מריצים את אלגוריתם אדמונס-קארפ
על רשת זרימה $G=(V,E)$ עם מקור s
ובור t, אזי עבור כל הקודקודים
$v \in V - \{s,t\}$, מרחק המסלול הקצר ביותר
$\delta_f(u,v)$ ברשת השיורית G_f גדל מונוטונית
עם כל שיפור של הזרימה.

הוכחה נניח בדרך השלילה כי עבור קודקוד מסויים $v \in V - \{s,t\}$, קיים שיפור של הזרימה הגורם ל $\delta_f(u,v)$ לקטון.

תהי f הזרימה ממש לפני השיפור, ותהי f' הזרימה מיד אחריו.

אזי, $\delta_f(s,v) < \delta_{f'}(s,v)$ בלי הגבלת הכלליות ניתן להניח כי $\delta_{f'}(s,u) \le \delta_{f'}(s,v)$ לכל הקודקודים $u \in V - \{s,t\}$ שעבורם מתקיים $\delta_f(s,u) < \delta_{f'}(s,u)$.

באופן שקל ניתן להניח כי לכל הקודקודים $u \in V - \{s,t\}$, מתקיים:

$$\delta_{f'}(s,u) < \delta_{f'}(s,v) \Rightarrow \delta_{f}(s,u) \le \delta_{f'}(s,u)$$

עתה, ניקח מסלול קצר P' ב $G_{f'}$ מן הצורה v→s~>u ונתבונן בקודקוד u, הקודם של v במסלול זה.

עפ"י מסקנה 25.2, בהכרח מתקיים $\delta_{f'}(s,u) = \delta_{f'}(s,v) - 1$, שכן (u,v) היא קשת על p'.

שהוא מסלול קצר ביותר מ s ל v, לכן עפ"י הנחתנו מתקיים:

$$\delta_f(s,u) \leq \delta_{f'}(s,u).$$

לאחר שקבענו כך את u ו v, נוכל להתבונן בזרימה נטו f מ u אל v לפני שיפור הזרימה G_f.

אם $c(u,v)>f[u,v]$, נקבל :

$$\begin{aligned}\delta_f(s,v) &\le \delta_f(s,u)+1\\ &\le \delta_{f'}(s,u)+1\\ &= \delta_{f'}(s,v)\end{aligned}$$

בסתירה להנחתנו ששיפור הזרימה מקטין את המרחק מ s ל v.

אם כן, בהכרח מתקיים $f[u,v]=c(u,v)$, ופירוש הדבר כי $(u,v)\notin E_f$. כעת, מסלול השיפור p שנבחר ב G_f כדי ליצור את $G_{f'}$ חייב להכיל את הקשת (u,v) בכיוון מ v ל u שכן $(u,v)\in E_{f'}$ ו $(u,v)\notin E_f$. כלומר, שיפור הזרימה דרך המסלול p גורם לדחיפת זרימה בחזרה דרך (u,v), ו v מופיע לפני u על p.

מאחר ש p הוא מסלול קצר ביותר מ s אל t, גם התת מסלולים שלו הם מסלולים קצרים ביותר (למה 25.1) ולכן אנו מקבלים מכאן: $\delta_f(s,u)=\delta_f(s,v)+1$

$$\begin{aligned}\delta_f(s,v) &= \delta_f(s,u)-1\\ &\le \delta_{f'}(s,u)-1\\ &= \delta_{f'}(s,v)-2\\ &< \delta_{f'}(s,v)\end{aligned}$$

בסתירה להנחתנו ההתחלתית.

המשפט חוסם את מספר האיטרציות של אלגוריתם אדמונדס-קארפ.

משפט 27.9

אם מריצים את אלגוריתם אדמונדס-קארפ על רשת זרימה $G=(V,E)$ עם מקור s ובור t. אזי המספר בכולל של שיפורי זרימה שמבצע האלגוריתם הוא לכל היותר $O(VE)$.

הוכחה קשת (u,v) ברשת שיורית G_f נקראת קשת **קריטית** במסלול שיפור P אם הקיבול השיורי p הוא הקיבול השיורי של (u,v) , דהיינו, אם $c_f(u,v) = c_f(p)$.

לאחר ששיפרנו זרימה דרך מסלול שיפור, כל קשת קריטית על המסלול נעלמת מן הרשת השיורית. יתר על כן, בכל מסלול שיפור חייבת להיות לפחות קשת קריטית אחת.

יהיו u ו v קודקודים ב V המחוברים ע"י קשת ב E. כמה פעמים יכולה (u,v) להיות קשת קריטית במהלך הרצה של אלגוריתם אדמונס-קארפ?

מאחר שמסלולי שיפור הם מסלולים קצרים ביותר, הרי שכאשר (u,v) היא קריטית בפעם הראשונה, מתקיים :

$$\delta_f(s,v) = \delta_f(s,u) + 1$$

מרגע ששופר הזרימה, הקשת (u,v) נעלמת מן הרשת השיורית.

היא אינה יכולה להופיע מאוחר יותר במסלול שיפור אחר אלא לאחר שהזרימה נטו מ u ל v קטנה, וזה קורה רק אם (v,u) מופיעה במסלול שיפור.

אם f היא הזרימה ב G כאשר

מתרחש מאורע זה, אזי :

$$\delta_{f'}(s,u) = \delta_{f'}(s,v) + 1$$

מאחר שעל פי למה 27.8 מתקיים

$\delta_f(s,v) \le \delta_{f'}(s,v)$ אנו מקבלים:

$$\begin{aligned}\delta_{f'}(s,u) &= \delta_{f'}(s,v)+1\\ &\geq \delta_f(s,v)+1\\ &= \delta_f(s,u)+2\end{aligned}$$

כתוצאה מכך, מהרגע שבו (u,v) הופכת להיות קריטית ועד לרגע הבא בו היא הופכת להיות קריטית,

מרחקו של u מהמקור גדל ב 2 לפחות.
במצב ההתחלתי מרחקו של u מהמקור הוא לפחות 0, ועד שהוא הופך להיות בלתי ניתן להגעה מהמקור,אם בכלל, מרחקו של u מהמקור הוא לכל היותר 2-|V|.

לפיכך, (u,v) יכולה להפוך להיות קריטית $O(V)$ פעמים לכל היותר.

מכיוון שבגרף השיורי ישנם $O(E)$ זוגות קודקודים שביניהם יכולה לעבור קשת,

המספר הכולל של קשתות קריטיות במהלך הרצה מלאה ל אלגוריתם אדמונדס-קארפ הוא $O(VE)$.

כל מסלול שיפור מכיל לפחות קשת קריטית אחת ומכאן טענת המשפט.

מכיוון שכל איטרציה של פורד-פולקרסון ניתנת למימוש בזמן $O(E)$ כאשר מוצאים את מסלול השיפור באמצעות חיפוש לרוחב, זמן הריצה הכולל של אלגוריתם אדמונדס-קארפ הוא $O(VE^2)$.

זיווג מקסימלי בגרף דו-צדדי

ישנן בעיות קומבינטוריות שניתן לנסחן בנקל כבעיות זרימה מקסימלית. בעיית הזרימה המקסימלית ברשת מרובת מקורות ובורות שהוצגה בסעיף 27.1 היא דוגמה אחת כזאת. קיימות בעיות קומבינטוריות אחרות אשר במסט ראשון נראה כאילו אין קשר בינן לבין רשתות זרימה,

, אולם למעשה ניתן לעשות רדוקציה שלהן לבעיות זרימה מקסימלית. בסעיף זה נציג בעיה אחת כזאת: מציאת זיווג מקסימלי בגרף דו-צדדי (ראה סעיף 5.1). בפתרון בעיה זו ננצל את תכונת הפתרון בשלמים שמספקת שיטת פורד-פולקרסון.

כמו כן נראה שבאמצעות שיטת פורד-פולקרסון ניתן לפתור את בעיית הזיווג המקסימלי בגרף דו-צדדי $G=(V,E)$ בזמן $O(VE)$.

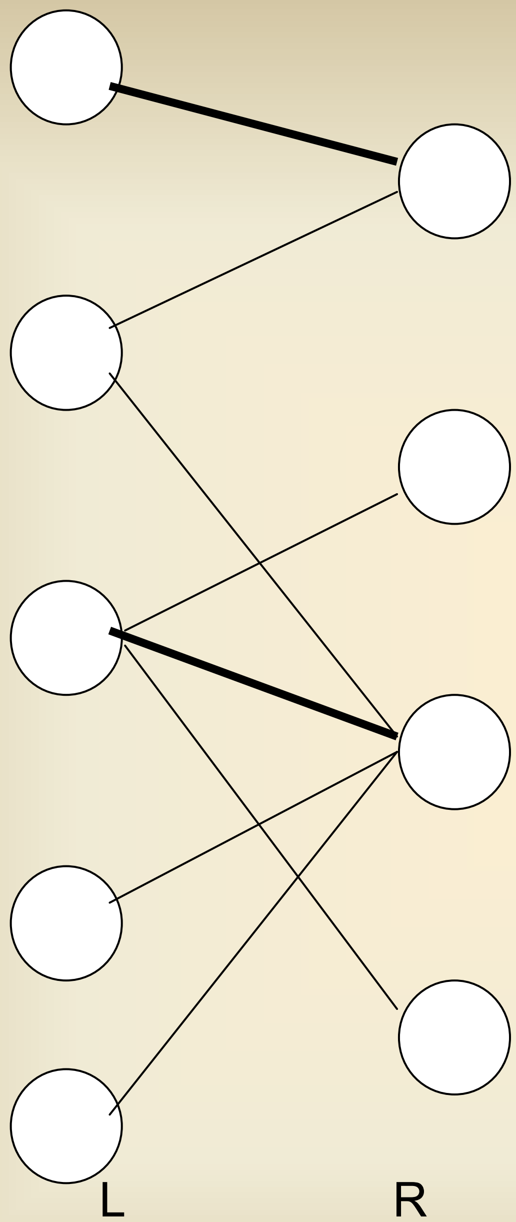
בעיית הזיווג המקסימלי בגרף דו-צדדי

בהינתן גרף בלתי –מכוון $G=(V,E)$, זיווג (matching) הוא תת קבוצה של קשתות $M \subseteq E$ כך שעבור כל קדקוד $v \in V$, קיימת ב- M לכל היותר קשת אחת הקשורה ל- v.

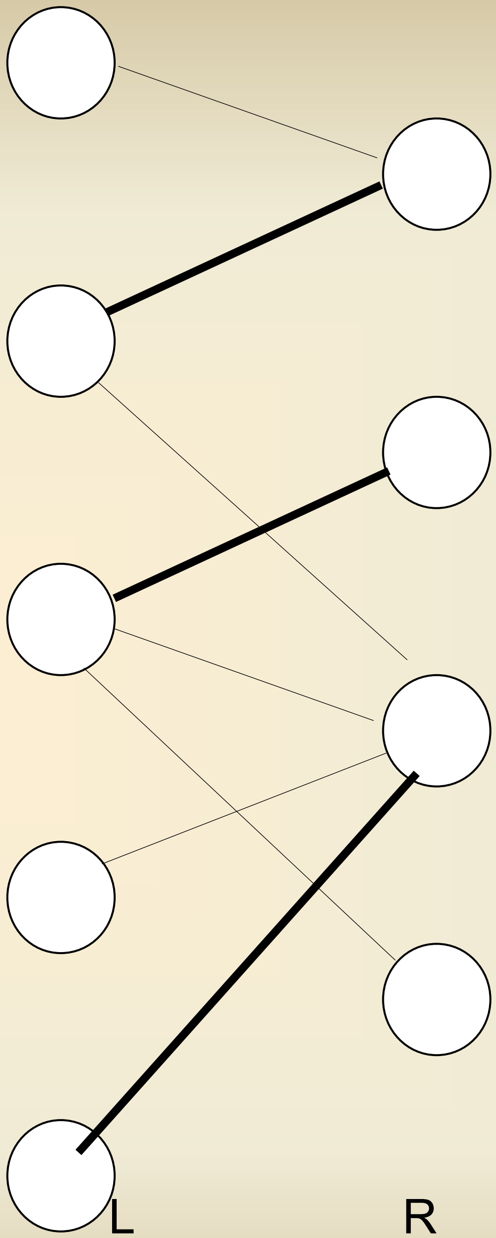
קדקוד $v \in V$ נקרא מזווג (matched) על-ידי זיווג M אם קיימת ב- M קשת הקשורה ל- v: אחרת, v הוא בלתי מזווג (unmatched) . זיווג מקסימלי (maximum matching) הוא זיווג בעל עוצמה מקסימלית,

, דהיינו, זיווג M המקיים $|M| \geq |M'|$ עבור כל זיווג אחר M'. בסעיף זה נתמקד במציאת זיווגים מקסימליים בגרפים דו-צדדיים. אנו מניחים כי קבוצת הקדקודים ניתנת לחלוקה לשתי קבוצות, $V = L \cup R$, כאשר L ו- R זרות וכל הקשתות ב- E עוברות בין L ל-R.

אנו מניחים עוד כי אין בגרף קדקודים מבודדים. איור 27.8 מדגים את רעיון הזיווג.



(i)



(ii)

איור 27.8 גרף דו-צדדי $G=(V,R)$ עם חלוקת קדקודים $V=L\cup R$. (i) זיווג שעוצמתו 2. (ii) זיווג מקסימלי שעוצמתו 3.

מציאת זיווג מקסימלי בגרף דו-צדדי היא בעיה שיש לה יישומים מעשיים רבים.

לדוגמה, ניתן לחשוב על זיווג בין קבוצה L של מכונות וקבוצה R של משימות שיש לבצע בו-זמנית. נוכחותה של קשת (u,v) ב-E פירושה שמכונה מסוימת $u \in L$ מסוגלת לבצע משימה מסוימת $v \in R$.

זיווג מקסימלי מספק עבודה למספר גדול ככל האפשר של מכונות.

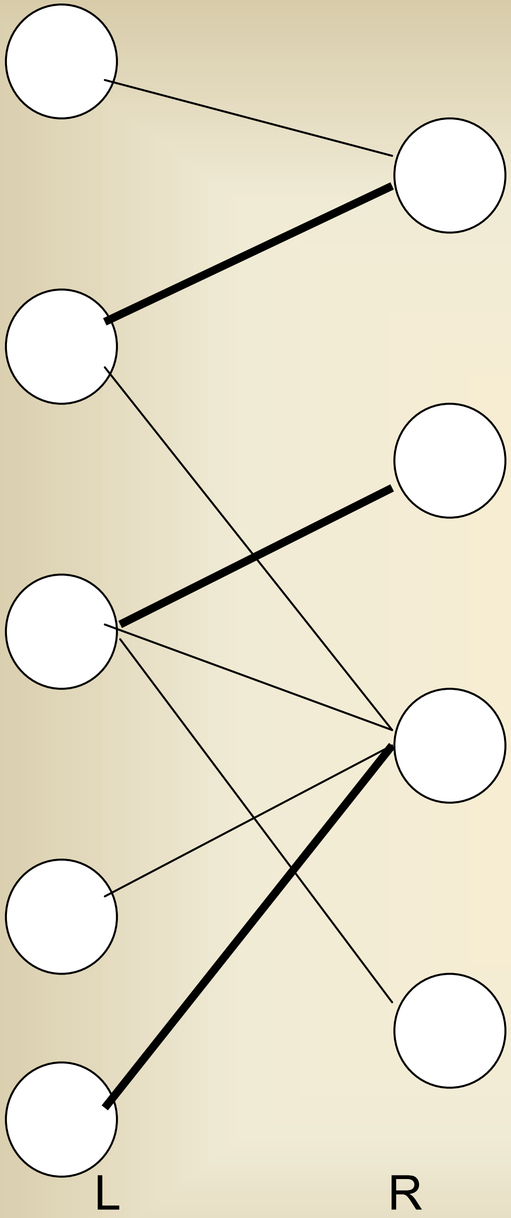
מציאת זיווג מקסימלי בגרף דו-צדדי

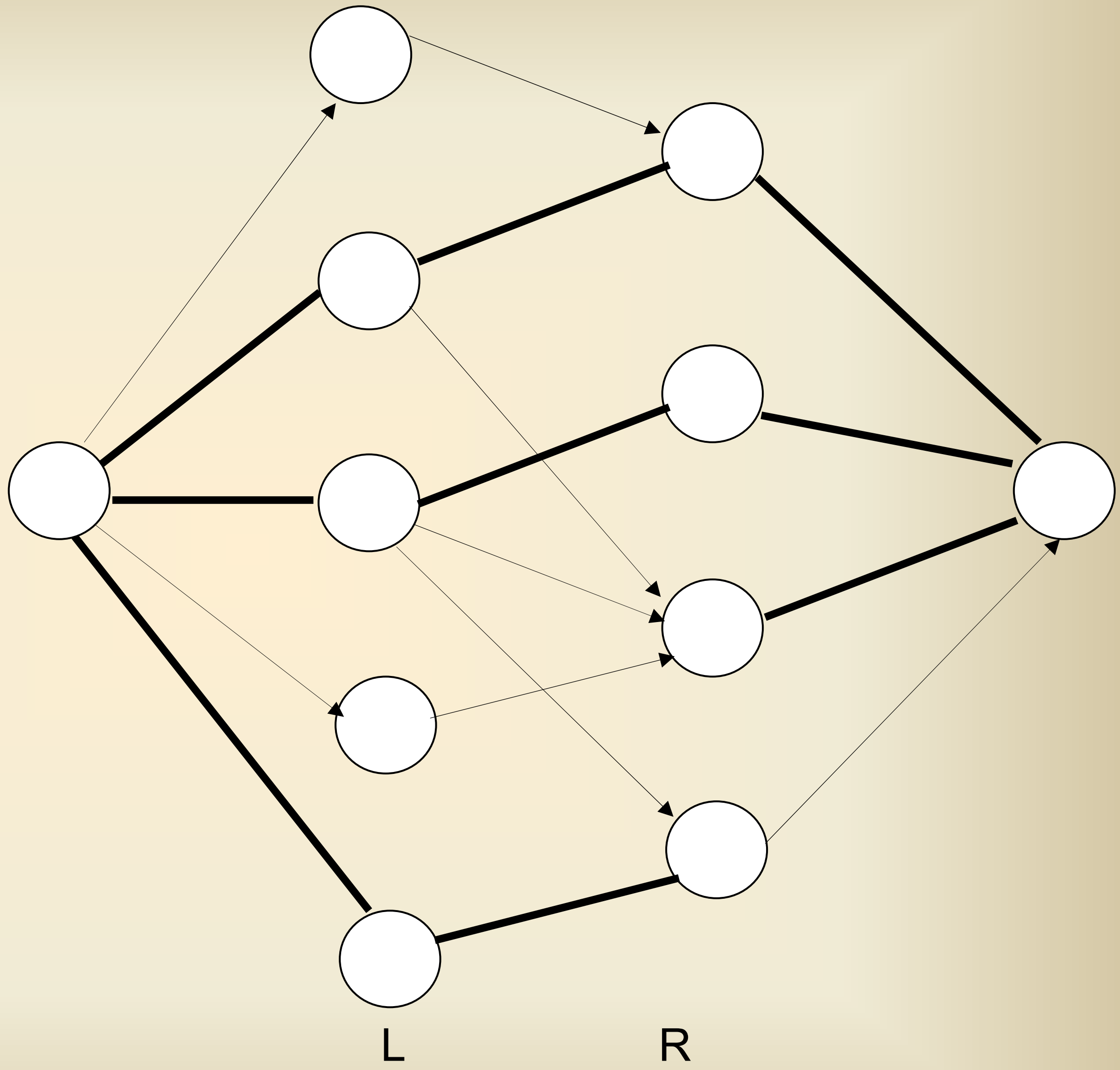
באמצעות שיטת פורד-פולקרסון ניתן למצוא זיווג מקסימלי בגרף דו-צדדי בלתי מכוון $G=(V,E)$ בזמן פולינומיאלי ב- $|V|$ וב- $|E|$. הרעיון הוא לבנות רשת זרימה אשר הזרימות בה מתאימות לזיווגים, כמתואר באיור 27.9.

נגדיר את רשת הזרימה המתאימה.
$G'=(V',E')$ עבור הגרף הדו-צדדי G באופן
הבא: יהיו המקור s והבור t קדקודים
חדשים שאינם שייכים ל- V, ותהי
$V'=V\cup\{s,t\}$: אם חלוקת הקדקודים של G
היא $V=L\cup R$, אזי קבוצת הקשתות
המכוונות G' היא:

$$
\begin{aligned}
E' = \{(s,u)\} &: u \in L \\
\cup \{(u,v) &: (u,v) \in E - \text{ו}, v \in R, u \in L\} \\
\cup \{(v,t) &: v \in R\}
\end{aligned}
$$

להשלמת הבנייה אנו מייחסים לכל קשת ב E' קיבול של יחידה אחת.


L
R
(i)


L
R
(ii)

איור 27.9 רשת הזרימה המתאימה לגרף דו-צדדי. (i) הגרף הדו-צדדי $G=(V,E)$ מאיור 27.8 עם חלוקת הקדקודים $V=L\cup R$. הקשתות המוצללות באיור מרכיבות זיווג מקסימלי. (ii) רשת הזרימה המתאימה . הקשתות המוצללות יכולה לעבור זרימה של 1,

ודרך כל הקשתות האחרות לא יכולה לעבור שום זרימה. הקשתות המוצללות מ-L אל R מתאימות לאלה המרכיבות זיווג מקסימלי בגרף הדו-צדדי.

המשפט הבא מראה שקיימת ישירה בין זיווג ב- G לבין זרימה ברשת הזרימה G' המתאימה ל- G. אנו אומרים שזרימה ברשת זרימה $G=(V,E)$ היא בעלת ערכים שלמים (integer valued) אם $f(u,v)$ שלם עבור כל $(u,v\in V\times V)$.

למה 27.10

יהי $G=(V,E)$ גרף דו-צדדי עם חלוקת קדקודים $V=L\cup R$, ותהי $G'=(V',E')$ רשת הזרימה המתאימה. אם M הוא זיווג ב- G, אזי קיימת ב- G' זרימה f בעלת ערכים שלמים שערכה $|f|=|M|$. ולהיפך, אם f היא זרימה בעלת ערכים שלמים ב- G', אזי קיים ב- G זיווג M שעוצמתו $|M|=|f|$.

הוכחה תחילה נראה שזיווג M ב-G מתאים לזרימה בעלת ערכים שלמים ב-G'. נגדיר f באופן הבא: אם $(u,v) \in M$, אזי $f(s,u) = f(u,v) = f(v,t) = 1$ ו- $f(u,s) = f(v,u) = f(t,v) = -1$. עבור כל הקשתות האחרות $(u,v) \in E'$, נגדיר $f(u,v) = 0$.

אינטואיטיבית, כל קשת $(u,v) \in M$ מתאימה ליחידת זרימה אחת ב- 'G העוברת במסלול $s \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow t$. יתירה מזו, המסלולים המושרים על ידי הקשתות ב- M הם זרים בקדקודיהם, פרט ל- s ול- t

כדי לוודא כי f אכן מקיימת את תכונת הסימטריה הנגדית, את אילוצי הקיבול ואת שימור הזרימה, עלינו רק לראות כי ניתן לקבל את f על ידי שיפור הזרימה לאורך כל אחד מן המסלולים האלה. הזרימה נטו דרך החתך $(\{L \cup \{s\}, R \cup \{t\}\})$ שווה ל- $|M|$, לכן, על פי למה 27.5, ערך הזרימה הוא $|f| = |M|$.

להוכחת הכיוון ההפוך, תהי f זרימה בעלת ערכים שלמים ב- 'G ויהי:

$$M = \{(u,v) : f(u,v) \rangle 0 - \text{ו}v \in R, u \in L\}$$

לכל קדקוד $u \in L$ יש רק קשת אחת הנכנסת אליו, הקשת (s,u) וקיבולה הוא 1. לכן, לכל $u \in L$ נכנסת לכל היותר יחידה אחת של זרימה נטו חיובית.

קודקוד אחד $v \in R$ כך ש- $f(u,v)=1$.
חיובית נכנסת אל u אם ורק אם קיים בדיוק
שלכל $u \in L$, יחידה אחת של זרימה נכנס
מכיוון ש- f היא בעלת ערכים שלמים, הרי,

לפיכך, מכל קדקוד $u \in L$ יוצאת לכל היותר קשת אחת הנושאת זרימה נטו חיובית. טיעון סימטרי תקף עבור כל $v \in R$.
הקבוצה M המוגדרת בטענת המשפט היא אפוא זיווג.

כדי לראות כי $|f|=|M|$, נשים לב לכך שעבור כל קדקוד מזווג $u \in L$, מתקיים $f(s,u)=1$, ועבור כל קשת $(u,v) \in E-M$, מתקיים $f(u,v)=0$. מכך, מלמה 27.1, מהסימטריה הנגדית ומן העובדה שלא קיימות קשתות מ- L אל- t, אנו מקבלים:

$$
\begin{aligned}
|M| &= f(L,R) \\
&= f(L,V') - f(L,L) - f(L,s) - f(L,t) \\
&= 0 - 0 + f(s,L) - 0 \\
&= f(s,V') \\
&= |f|
\end{aligned}
$$

אינטואיטיבית, זיווג מקסימלי בגרף דו-צדדי G מתאים לזרימה מקסימלית ברשת הזרימה המתאימה G'.

ניתן אפוא לחשב זיווג מקסימלי ב-G על ידי הרצת אלגוריתם זרימה מקסימלית על 'G. הבעיה היחידה בטיעון זה היא שאלגוריתם הזרימה המקסימלית עשוי להחזיר זרימה ב-'G המורכבת מכמויות שאינן ערכים שלמים. המשפט שלהלן מראה שאם משתמשים בשיטת פורד-פולקרסון, בעיה זו אינה יכולה להתעורר.

משפט 27.11 (משפט הפתרון בשלמים)

אם פונקציית הקיבול c מקבלת ערכים שלמים בלבד, אזי הזרימה המקסימלית f שיוצרת שיטת פורד- פולקרסון היא בעלת התכונה ש- $|f|$ נתון בערכים שלמים. יתירה מזו עבור הקדקודים u ו- v, הערך של $f(u,v)$ הוא שלם.

הוכחה ההוכחה היא באינדוקציה על מספר האיטרציות.

עתה אנו יכולים להוכיח את המסקנה הבאה ללמה 27.10.

מסקנה 27.12

עוצמתו של זיווג מקסימלי בגרף דו צדדי G שווה לערכה של זרימה מקסימלית ברשת הזרימה המתאימה G' .

הוכחה נשתמש במינוח מלמה 27.10.
נניח כי M הוא זיווג מקסימלי ב-G וכי הזרימה המתאימה f ב- 'G אינה מקסימלית.
אזי, קיימת ב- 'G זרימה מקסימלי 'f המקיימת $|f'|>|f|$ מכיוון שהקיבולים ב- 'G נתונים בערכים שלמים,

אם כן, בהינתן גרף בלתי-מכוון דו צדדי G, ניתן למצוא בו זיווג מקסימלי על ידי כך שיוצרים רשת זרימה 'G, מפעילים עליה שת שיטת פורד-פולקרסון למציאת זרימה מקסימלית בעלת ערכים שלמים, וממנה מקבלים ישירות זיווג מקסימלי M.

מכיוון שעוצמתו של זיווג כלשהו בגרף דו צדדי היא לכל היותר $\min(L,R)=0(V)$, ערכה של זרימה מקסימלית ב- G' הוא $0(V)$ לפיכך ניתן למצוא זיווג מקסימלי בגרף דו צדדי בזמן $0(VE)$.