תכנון וניתוח אלגוריתמים
הרצאה 4

פרק 1.4 : תיאור שיטת הסימפלקס

תיאור שיטת הסימפלקס

- אנו נדון בתיאור שיטת הסימפלקס לפיתרון בעיות מסוג

$$Max\{Z = \underline{C}\,\underline{X}\}$$

$$A\underline{x} \le \underline{b}$$

$$x \ge 0$$

- בהמשך נדון בבעיות מינימום ובכל המקרים החריגים האחרים.

תיאור שיטת הסימפלקס

- צעד1 : הצעד הראשון בשיטת הסימפלקס הוא להפוך את הבעיה מבעיה הכוללת אי-שוויונים לבעיה הכוללת שוויונים. בעיה הכוללת אילוצים המופיעים כשוויונים,תוך כדי יצירת בסיס אפשרי ראשוני.
- לשם כך אנו מוסיפים לכל אילוץ המופיע כאי-שוויון <u>משתנה חוסר</u> (Slack Variable).
- דהיינו אם בבעיה m אילוצים ו- n נעלמים, אנו מוסיפים m משתנים; משתנה לכל אילוץ.

תיאור שיטת הסימפלקס

- מחיר המשתנים בפונקצית המטרה הם אפס.
- אנו דורשים שמשתנים אלו, בדומה לשאר משתני הבעיה, יהיו אי-שליליים.
- פתרון אופטימלי לבעיה החדשה שיצרנו יהיה גם פיתרון אופטימלי לבעיה מקורית, היות ומחירי המשתנים שהוספנו הם אפס.

תיאור שיטת הסימפלקס

- לדוגמא,אם נתונה הבעיה:

$$\text{Max}\{Z = 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 2X_4\}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t}\quad & 2X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \le 20 \\ & X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 2X_4 \le 30 \\ & X_1 + X_2 + 5X_3 + 3X_4 \le 35 \\ & X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0 \end{aligned}$$

תיאור שיטת הסימפלקס

- אזי על-מנת להפוך אותה לבעיה עם שויונים נוסיף ל – 3 האילוצים "משתנה חוסר" אי-שליליים X_5, X_6, ו- X_7 , בהתאמה, ונקבל את הבעיה הבאה:

$$\text{Max}\{Z = 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 2X_4\}$$

s.t.

$$\begin{aligned} 2X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 &= 20 \\ X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 2X_4 + X_6 &= 30 \\ X_1 + X_2 + 5X_3 + 3X_4 + X_7 &= 35 \end{aligned}$$

$$X_i \ge 0 \qquad i = 1,2,\ldots\ldots,7$$

תיאור שיטת הסימפלקס

- בשלב זה ניתן למצוא פיתרון בסיסי אפשרי ראשוני לבעיה.
- פתרון בסיסי הוא פיתרון,שבו בדיוק (או לכל היותר) m משתנים בסיסיים מקבלים ערך חיובי (תחת הנחת אי-ניוון) ו- (n-m) משתנים מקבלים ערך אפס.

תיאור שיטת הסימפלקס

- בשיטת הסימפלקס הפיתרון הבסיסי הראשוני הנבחר הוא פיתרון הנותן ערך חיובי לכל משתני החוסר (שהם משתני בסיס)
- ערך אפס לכל המשתנים המקוריים,שאינם בבסיס הראשוני.

תיאור שיטת הסימפלקס

- ערך הניתן למשתני החוסר הוא בדיוק ערך האילוץ (b), כלומר, בדוגמה שלנו פיתרון בסיסי אפשרי ראשוני יהיה

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

$$x_5 = 20 \quad x_6 = 30 \quad x_7 = 35$$

- וערך פונקצית המטרה בפתרון הזה יהיה אפס.

תיאור שיטת הסימפלקס

- בהמשך הפתרון תמיד יופיעו המשתנים הבסיסיים במשוואות, כך שמקדמיהם יוצרים את מטריצות היחידה,דהיינו המשתנה הבסיסי יופיע באילוץ אחד בלבד עם מקדם 1 ובשאר האילוצים עם מקדם אפס.
- לכל אילוץ יותאם משתנה בסיסי אחד ובהכרח הערך שיהיה רשום בצד ימין של האילוץ יהיה ערך המשתנה הבסיסי המתאים לאילוץ זה.

תיאור שיטת הסימפלקס

- <u>צעד 2</u> : <u>מבחן האופטימליות</u>. עם קבלת פתרון בסיסי אפשרי, שיטת הסימפלקס בודקת, האם פתרון זה אופטימלי.
- הבדיקה לאופטימליות מבוססת על הרעיון הבא: האם קיים משתנה שאינו בסיסי, אשר ערכו בשלב זה אפס, ושכדאי לנו לתת לו ערך חיובי,ועל ידי כך לשפר את פונקצית מטרה?

תיאור שיטת הסימפלקס

- מבחן זה נעשה על ידי בדיקת השינוי בפונקצית המטרה לכל יחידה של משתנה לא בסיסי.
- אם השינוי חיובי,אזי עלינו לבחור את המשתנה **הלא בסיסי**, שיתן לנו שיפור מקסימלי, ולהחליט איזה משתנה **בסיסי יצא מהבסיס**, דהיינו ערכו יתאפס. זאת על מנת לשמור על תכונות הפתרון הבסיסי האפשרי,הכולל בדיוק m משתנים.

תיאור שיטת הסימפלקס

- מבחן האופטימליות כולל את חישוב הגודל:

$$Z_J - C_J = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} C_{B_i} - C_J$$

- עבור כל משתנה לא בסיסי, כאשר:
- C_j - מחירו של משתנה הלא בסיסי בפונקצית המטרה. זוהי,למעשה, התוספת לפונקצית המטרה מכל יחידה של משתנה הלא בסיסי X_j .

תיאור שיטת הסימפלקס

- C_{B_i} - מחירו של המשתנה הבסיסי ה- i בפונקצית המטרה.

a_{ij} - המקדם של המשתנה הלא בסיסי j במשוואת האילוץ ה- i המתאים למשתנה הבסיסי X_i.

תיאור שיטת הסימפלקס

- הגודל $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} C_{B_i}$ מייצג את מידת הפחתתה של פונקצית המטרה הנובע מזה,שנכניס את המשתנה הלא בסיסי לבסיס ונתאים את מקדמי המשתנים כך, שמקדם המשתנה הזה יהיה 1 באחד האילוצים ואפס בשאר האילוצים.

תיאור שיטת הסימפלקס

- הגודל $Z_j - C_j$ מציין את **<u>סה"כ ההפחתה בפונקצית המטרה</u>**, עקב הכנסת יחידה אחת מהמשתנה הלא בסיסי X_j לבסיס.
- אם ערך זה הוא שלילי, אזי ברור שהכנסת המשתנה הנדון לפונקצית המטרה תגדיל את ערכה.
- אך אם הוא חיובי לא כדאי לנו להכניסו לבסיס.

תיאור שיטת הסימפלקס

- אם הגודל $Z_j - C_j$, שיסומן C'_j ,
אי שלילי עבור כל המשתנים הלא בסיסיים,
אנו בפתרון האופטימלי ולא כדאי לנו לשנות
את הבסיס הנוכחי.

16.01.2008 Algorithms © Dr Reuven Hotoveli, 2008 17

תיאור שיטת הסימפלקס

- אם עבור אחד או יותר מהמשתנים הלא בסיסיים הגודל הזה שלילי, הרי שנבחר את אותו משתנה לא בסיסי k המקיים $C'_k = \mathrm{Min}\{C'_j\}$.
- דהיינו, שלו ה- C'_k השלילי ביותר, ונכניס אותו לבסיס על מנת לקבל שיפור מקסימלי.
- אם קיימים שני משתנים אי בסיסיים, שלהם אותו ערך של C'_k , נבחר אחד מהם שרירותית.

16.01.2008 Algorithms © Dr Reuven Hotoveli, 2008 18

תיאור שיטת הסימפלקס

- על מנת לקבל פיתרון בסיסי אפשרי חדש, הכולל את המשתנה הלא בסיסי שבחרנו להכניס לבסיס, עלינו לקבוע שני דברים:
- איזה משתנה בסיסי יעזוב את הבסיס על מנת לשמור בדיוק על m משתנים בסיסיים.
- מהו הערך שיקבל המשתנה הלא בסיסי,ההופך לבסיסי, בפתרון הבסיסי האפשרי החדש.
- תשובות לשאלות אלו נכללות בצעד 3 של התהליך.

תיאור שיטת הסימפלקס

- צעד 3 : קביעת המשתנה היוצא. הכנסת המשתנה הלא בסיסי X_j לבסיס.
- כלומר מתן ערך חיובי למשתנה X_j , גוררת בהכרח שינוי בערכם של המשתנים הבסיסיים.
- אנו דורשים, שהכנסת משתנה לא בסיסי לבסיס תגרור הוצאת משתנה בסיסי אחד בלבד מהבסיס, על מנת לשמור על m משתנים בסיסיים בדיוק.

תיאור שיטת הסימפלקס

- מאידך, אנו דורשים שכל המשתנים-בסיסיים ולא בסיסיים – יהיו אי שליליים.
- על כן המשתנה הבסיסי שיצא מהבסיס יהיה אותו משתנה שיתאפס לראשונה על ידי הגדלת ערכו של המשתנה הלא בסיסי.
- עתה יש לזהות את המשתנה הבסיסי היוצא.

תיאור שיטת הסימפלקס

- לצורך זה נחשב לכל משתנה בסיסי את הגודל שיש לתת למשתנה הלא בסיסי, על מנת שהמשתנה ~~הלא~~ בסיסי הנדון יתאפס.
- כדי להסביר את שיטת החישוב, נדון בבעיה דמיונית עם אילוץ אחד בלבד.

$$X_1 + 3X_2 - 4X_3 + 2X_4 = 10$$

תיאור שיטת הסימפלקס

- $X_1 + 3X_2 - 4X_3 + 2X_4 = 10$
- X_1 - הוא המשתנה הבסיסי המתאים לאילוץ זה. מקדמו באילוץ 1 וערכו בפיתרון הבסיסי האפשרי הנוכחי 10.
- נניח שאנו רוצים להכניס את X_4 לבסיס, דהיינו רוצים לתת ל - X_4, שהוא משתנה לא בסיסי, ערך חיובי. מתן ערך חיובי ל-X_4 יגרור שינוי בערכו של X_1

תיאור שיטת הסימפלקס

- בשלב זה ערכי X_4, X_3, X_2 שאינם משתנים בסיסיים, הם אפס.
- ערכו החדש של X_1 יהיה $X_1 = 10 - 2X_4$
- הערך המקסימלי שניתן לתת ל - X_4, כך ש- X_1 ישאר אי שלילי, הוא 5.
- כל ערך שניתן ל - X_4 מעל 5 יהפוך את X_1 לשלילי ובכך את הפתרון לבלתי אפשרי.

תיאור שיטת הסימפלקס

- מכאן, שבחירת המשתנה היוצא כוללת חישוב הערך b_i / a_{ik} עבור כל אילוץ.
- דהיינו חישוב היחס שבין b_i , ערכו של המשתנה ה – i בבסיס, לבין a_{ik} המקדם של המשתנה הלא-בסיסי X_K אשר בחרנו להכניס לבסיס, במשוואת האילוץ ה- i .
- בדוגמא שלנו הערך הנ"ל הוא 10/2=5 .

תיאור שיטת הסימפלקס

- אנו נבחר את אותו משתנה בסיסי r , המקיים :

$$\frac{b_r}{a_{rk}} = \text{Min}\,\{\frac{b_i}{a_{ik}}\}$$

- כמשתנה היוצא, מאחר וזהו הערך המקסימלי שניתן לתת למשתנה הנכנס ועדיין לשמור על אפשרויות הפתרון.

X_1

תיאור שיטת הסימפלקס

- יש לציין, שאם המקדם של המשתנה הלא-בסיסי במשוואת המשתנה הבסיסי הנבדקת שלילי, אזי מתן ערך חיובי למשתנה הלא בסיסי לא יגרור לעולם איפוס המשתנה הבסיסי.
- לדוגמה, לו היינו שוקלים מתן ערך חיובי ל- X_3 במשוואת דלעיל, ערכו החדש של X_1 היה $X_1 = 10 + 4X_3$ והוא לא היה מתאפס לעולם.

תיאור שיטת הסימפלקס

- לכן קריטריון ההוצאה הוא : הוצא את המשתנה הבסיסי אשר לגביו מתקיים:

$$\frac{b_r}{a_{rk}} = \mathrm{Min}\{\frac{b_i}{a_{ik}}\} \qquad \underline{\underline{a_{ik} > 0}}$$

- במקרה ***שקיים יותר ממשתנה בסיסי אחד***, שעבורו מתקבל המינימום הנ"ל נבחר את אחד המשתנים באופן שרירותי.

תיאור שיטת הסימפלקס

- צעד 4 : קבלת הפתרון הבסיסי האפשרי החדש.
- לאחר שנקבעו המשתנה היוצא מהבסיס והמשתנה הנכנס לבסיס, יש לפתור את המערכת המשוואות לקבלת הפתרון הבסיסי האפשרי החדש.
- פתרון מערכת המשוואות פירושו, להפוך את המקדם של המשתנה הנכנס במשוואת המשתנה היוצא ל – 1 ובשאר המשוואות לאפס.

תיאור שיטת הסימפלקס

- ניתן לעשות זאת על ידי משחק פשוט לפי כללי האלגברה במשוואות, תוך שינוי המקדמים האחרים בהתאם.
- בעזרת כללים ניתן לקבל, באופן מיידי, את מערכת המשוואות החדשה, בה ***מקדמי הבסיס יוצרים את מטריצת היחידה*** ושאר המקדמים מוסבים בהתאם.
- התהליך יקרא התמרה ליניארית וכלליו הם :

תיאור שיטת הסימפלקס

- מקדמו של המשתנה הנכנס לבסיס במשוואת המשתנה היוצא מהבסיס יקרא ציר ההתמרה, ויסומן a_{rk}.
- את מקדמי משוואת המשתנה היוצא נחלק בציר ההתמרה. כך נקבל מקדם 1 למשתנה הנכנס.
- יהיה a_{ij} מקדם כלשהו במערכת המשוואות הנ"ל, אזי ההתמרה של היא:

תיאור שיטת הסימפלקס

- היא:

$$a_{ij}' = a_{ij} - \frac{a_{ik} \cdot a_{rj}}{a_{rk}}$$

- דהיינו, a_{ij} - החדש שווה למקדם a_{ij} , פחות המכפלה של המקדמים בשורה המתאימה של ציר ההתמרה, ובעמודה המתאימה של ציר ההתמרה, חלקי ציר ההתמרה.
- בדוגמה להלן יפורט התהליך.

תיאור שיטת הסימפלקס

- התמרה דומה תיעשה, גם לגבי וקטור האילוצים וקטור המקדמים בפונקצית המטרה.
- וכך נקבל את הפתרון הבסיסי החדש ואת הגדלים $C'_j = Z_j - C_j$ החדשים לבדיקת האופטימליות.

דוגמא1

- הבעיה הנתונה היא :

$$\mathrm{Max}\{Z = 20X_1 + 60X_2 + 8X_3\}$$

- תחת האילוצים:

$$\begin{aligned} 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\le 160 \\ 4x_1 + 3x_2 &\le 100 \\ 2x_1 \qquad x_3 &\le 50 \\ x_3 &\le 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

- <u>צעד 1</u> :
- הפיכת אי-השוויונים לשוויונים.
- לשם כך נוסיף <u>משתני חוסר</u> לכל אחד מהאילוצים,
והם x_4 , x_5 , x_6 , ו- x_7 בהתאמה,
ומחיריהם בפונקצית המטרה הם אפס.
- מערכת המשוואות המתקבלת היא:

- א $$\mathrm{Max}\{Z = 20x_1 + 6x_2 + 8x_3\}$$
- תחת האילוצים:

$$\begin{array}{llllll}
8x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 & & & & & =160 \\
4x_1 + 3x_2 & & x_5 & & & =100 \\
2x_1 & x_3 & & +x_6 & & =50 \\
 & x_3 & & & +x_7 & =20 \\
 & x_i \geq 0 & i = 1,\ldots\ldots\ldots,7 & & &
\end{array}$$

ממערכת משוואות זו ניתן לקבל מייד את ***הפתרון הבסיסי האפשרי*** הראשוני, שהוא :

$x_1=0 \quad x_2=0 \quad x_3=0 \quad x_4=160 \quad x_5=100 \quad x_6=50 \quad x_7=20$

- משתני הבסיס משתנים לא בסיסיים
- Z=0 הוא ערך פונקצית המטרה לפיתרון זה.

- נשים לב לכך, שהבסיס כולל בדיוק 4 משתנים:
  - כמספר האילוצים בבעיה הנתונה
- מקדמי המשתנים הבסיסיים יוצרים את מטריצת היחידה I_4 במטריצת המקדמים של הבעיה.
- כדי לאפשר עבודה נוחה, נהוג לפתור את בעיות הסימפלקס, כשהן משורטטות בטבלה במבנה הבא :

ציר ההתמרה

מחירים מקוריים	20	6	8	0	0	0	0	פתרון נוכחי	
המשתנים בבסיס	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{a}_6$	$\underline{a}_7$	$\underline{b}$	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
x_4	8	2	3	1	0	0	0	160	$\frac{160}{8}=20$
x_5	4	3	0	0	1	0	0	100	$\frac{100}{4}=25$
x_6	2	0	1	0	0	1	0	50	$\frac{50}{2}=25$
x_7	0	0	1	0	0	0	1	20	$\frac{20}{0}=\infty$
$C_j^{\prime}=Z_j-C_j$	-20	-6	-8	0	0	0	0	Z=0	

משתנה נכנס

- בחירת ***המשתנה הנכנס*** – אנו נרצה להכניס לבסיס את המשתנה הלא בסיסי, שיש לו ערך $C^{\prime}_j$ מינימלי.
- בדוגמה שלנו זהו X_1 , כאשר $C_1=-20$ ולכן X_1 נבחר כמשתנה הנכנס.

- <u>לבחירת המשתנה היוצא:</u>
- נחשב בעמודה האחרונה של הטבלה את היחס b_i/a_{i1}
- נבחר את המשתנה היוצא כזה, שהערך הנ"ל עבורו מינימלי.(ראה חישוב בטבלה).
- הערך המינימלי שמתקבל הוא $b_1/a_{11} = 20$ ולכן x_4 שבשורתו התקבל המינימום נבחר כמשתנה היוצא.

- המקדם של המשתנה הנכנס במשוואת המשתנה היוצא, דהיינו $a_{11} = 8$, יקרא <u>ציר ההתמרה.</u>
- חישוב הפתרון הבסיסי החדש יעשה בצורה שתוארה לעיל, ולשם כך נבנה טבלה חדשה, בתכונת זהה, בה יצוינו כל המקדמים בפיתרון החדש.

מחירים מקוריים	20	6	8	0	0	0	0	פתרון נוכחי	
המשתנים בבסיס	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{a}_6$	$\underline{a}_7$	$\underline{b}$	$\frac{b_i}{a_{i2}}$
x_1	1	1/4	3/8	1/8	0	0	0	20	$\frac{20}{1/4}=80$
x_5	0	2	-3/2	-1/2	1	0	0	20	$\frac{20}{2}=10$
x_6	0	-1/2	1/4	-1/4	0	1	0	10	-
x_7	0	0	1	0	0	0	1	20	$\frac{20}{0}=\infty$
$C'_j=Z_j-C_j$	0	-1	-4/8	20/8	0	0	0	Z=400	

שתנה יוצא
x

משתנה
נכנס x_5

x_1

◈ <u>קבלת הפתרון החדש</u>

◈ המשתנים הבסיסיים בשלב זה הם X_1, X_5, X_6 , X_7 , דהיינו X_1 החליף את X_4.

◈ ציר ההתמרה הוא 8.

◈ את המקדמים בשורה ראשונה, נחלקה ב – 8 ונקבל את המקדמים שבשורה הראשונה בטבלה השנייה. מקדמו של X_1 הוא בדיוק 1.

1. על מנת לקבל את שאר המקדמים ננקוט בכלל:

$$a_{ij}' = a_{ij} - \frac{a_{ik} \cdot a_{rj}}{a_{rk}}$$

2. לדוגמא:

$$a_{22}' = a_{22} - \frac{a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11}}$$

$$a_{22}' = 3 - \frac{4 \cdot 2}{8} = 3 - 1 = 2$$

- נחשב את:

$$a_{34}' = a_{34} - \frac{a_{31} \cdot a_{14}}{a_{11}}$$

$$a_{34}' = 0 - \frac{2 \cdot 1}{8} = -1/4$$

$$a_{43}' = a_{43} - \frac{a_{41} \cdot a_{13}}{a_{11}}$$

$$a_{43}' = 1 - \frac{0 \cdot 3}{8} = 1$$

- בצורה זו מחושבים כל המקדמים בטבלה השנייה.
- הערה : בעמודתו של המשתנה שנכנס X_1 כל המקדמים שווים לאפס, פרט ל – 1 בשורה הראשונה, כי הוא משתנה בסיסי.
- חישוב דומה נעשה לגבי ערך הפיתרון החדש. דהיינו, הוקטור $\underline{b}$ לגביו ננקוט באותם כללים.

- בשורה הראשונה, שורת המשתנה היוצא, $b_1 = \frac{160}{8} = 20$ דהיינו, ערכו הקודם חלקי ציר ההתמרה.
- בשאר השורות ננקוט על פי אותם כללים, כמו לגבי שאר המקדמים.
- דהיינו:

- א

$$b'_4 = b_4 - \frac{a_{41} \cdot b_1}{a_{11}} \qquad b'_3 = b_3 - \frac{a_{31} \cdot b_1}{a_{11}} \qquad b'_2 = b_2 - \frac{a_{21} \cdot b_1}{a_{11}}$$

$$b'_4 = 20 - \frac{0 \cdot 160}{8} = 20 \qquad b'_3 = 50 - \frac{2 \cdot 160}{8} = 10 \qquad b'_2 = 100 - \frac{4 \cdot 160}{8} = 20$$

- חישוב דומה לחישובים שעשינו עד כה נעשה לגבי ערך פונקצית המטרה :

$$Z' = Z - \frac{C_1 \cdot b_1}{a_{11}} \rightarrow Z' = 0 - \frac{-20 \cdot 160}{8} = \underline{\underline{400}}$$

◈ הפתרון בשלב זה : $Z = 400$

$X_1 = 20 \qquad X_5 = 20 \qquad X_6 = 10 \qquad X_7 = 20$

$X_2 = X_3 = X_4 = 0$

◈ חישוב דומה נבצע לגבי $C_j^{'}$, דהיינו

$$C_j^{'} = C_j^{'} - \frac{C_1 \cdot a_{ij}}{a_{11}}$$

◈ לדוגמא

$$C_2^{|} = -6 - \frac{-20 \cdot 2}{8} = -6 + 5 = -1$$

$$C_3^{|} = -8 - \frac{-20 \cdot 3}{8} = -8 + 7\frac{4}{8} = -\frac{4}{8}$$

$$C_4^{|} = 0 - \frac{-20 \cdot 1}{8} = +\frac{20}{8}$$

$$C_5^{|} = 0 - \frac{-20 \cdot 0}{8} = 0$$

◈אנו רואים שאין אנו נמצאים באופטימום, היות וקיימים $C_j^{'}$ -ים שליליים ולכן נעבור לבחירת המשתנה הנכנס והמשתנה היוצא.

◈***בחירת המשתנה הנכנס*** – המשתנה בעל ערך $C_j^{'}$ מינימלי הוא x_2 אשר עבורו $C_2^{'} = -1$ ולכן x_2 הוא המשתנה הנכנס.

1. בחירת המשתנה היוצא נעשית באמצעות חישוב הערכים b_i/a_{i2} והערך המינימלי המתקבל הוא 10 עבור x_5 שנבחר כמשתנה היוצא.
2. נשים לב, כי לא חישבנו את הגודל b_3/a_{32}, היות ו- $a_{32} = -1/2$ דהיינו שלילי, וציינו כבר שאנו מחשבים את b_i/a_{ik} רק עבור $a_{ik} > 0$

1. מכאן שציר ההתמרה הוא $a_{22} = 2$.

- הטבלה החדשה מתקבלת בדומה לדרך שתוארה לעיל, והתוצאות הן :

מחירים מקור	20	6	8	0	0	0	0		
המשתנים בבסיס	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	b	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
x_1	1	0	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{35}{2}$	$\frac{35/2}{9/16} = \frac{280}{9}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	10	-
x_6	0	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	1	0	15	-
x_7	0	0	1	0	0	0	1	20	20/1 =20
$= Z_j - C_j$	0	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{4}{8}$	0	0	Z=410	

משתנה נכנס x_5

◈ בטבלה החדשה קיבלנו פיתרון חדש שהוא:

$$X_1 = 35/2; X_2 = 10; X_6 = 15; X_7 = 20$$

$$X_3 = X_4 = X_5 = 0$$

$$Z = 410$$

◈ הבדיקה לאופטימליות מראה, שאחד ה-C'_j-ים, במקרה זה C'_3 , שווה 5/4-.

◈ דהיינו מספר שלילי, כלומר כדאי להכניס את X_3 לבסיס וכך נקבל פיתרון משופר.

◈ אין אנו נמצאים בפיתרון אופטימלי,ולכן נבחר את המשתנה הנכנס X_3 ואת המשתנה היוצא X_7 ונשתמש בציר ההתמרה 1 לקבלת פיתרון חדש,המובא בטבלה להלן :

המשתנים בבסיס	$\underline{a}_1$	$\underline{a}_2$	$\underline{a}_3$	$\underline{a}_4$	$\underline{a}_5$	$\underline{a}_6$	$\underline{a}_7$	$\underline{b}$
מחירים מקומיים	20	6	8	0	0	0	0	
x_1	1	0	0	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{9}{16}$	$\frac{25}{4}$
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	25
x_6	0	0	0	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{70}{4}$
x_3	0	0	1	0	0	0	1	20
$C^{\prime}_j$	0	0	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{4}{8}$	0	$\frac{5}{4}$	Z = 435

- בפיתרון הבסיסי האפשרי שהתקבל כל $C^{i}_{j} = Z_j - C_j \geq 0$
ולכן זהו הפיתרון האופטימלי שהוא :

$$X_1^* = \frac{25}{4} \;;\; X_2^* = 25 \;;\; X_3^* = 20$$

$$X_6^* = \frac{70}{4} \qquad X_4^* = X_5^* = X_7^* = 0 \quad Z^* = 435$$