6.10 מסלולים קצרים ביותר בין כל הזוגות

עד כה הכרנו שיטות למציאת מסלולים קצרים ביותר מקודקוד מקור יחיד. עתה נכיר שיטות למציאת מסלולים קצרים ביותר בין כל זוגות הקודקודים בגרף. עתה נציג אלגוריתמים שונים הפותרים את הבעיה של מסלולים קצרים בין כל הזוגות של קודקודי הגרף.

אלגוריתם של דייקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר בין כל הזוגות.

בפרק הקודם הכרנו אלגוריתם של דיקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר מקודקוד מקור יחיד. עתה נפעיל את אותו אלגוריתם – דיקסטרה n פעמים כאשר $n=|V|$, ובהפעלה ה- i –ית קודקוד מקור יחיד יהיה קודקוד i עבור $1\leq i \leq n$.

נתון גרף $G=(V,E)$ וכל המשקלות של הקשתות הם אי שליליים.

נניח שבגרף $n=|V|$ קודקודים וממוספרים באופן אקראי מ 1– עד n , והגרף G מיוצג בעזרת מטריצת סמיכות כדלהלן :

$$a_{ij} = \begin{cases} E_{ij} & \text{(משקל שעל הקשת } (i,j)\text{)} \quad \text{אם קיימת קשת } (i,j) \\ 0 & i=j \\ \infty & \text{אחרת} \end{cases}$$

$d[i][v]$ – מציין אורך המסלול הקצר ביותר מקודקוד מקור i לקודקוד v.

ברור כי $d[i][i]$ שווה לאפס לכל $1\leq i \leq n$, כי כל המשקלות של הקשתות הם אי שליליים ובפרט אם ישנם מעגלים בגרף אז אורכי המסלולים המהווים מעגל הם גם כן אי שליליים, לכן אורך המסלול הקצר ביותר מקודקוד מקור i לעצמו הוא 0.

כמו כן $d[i][j]= a_{ij}$ מאחר ש-a_{ij} מתאר את אורך המסלול המינימלי הזמני מקודקוד מקור i לקודקוד j.

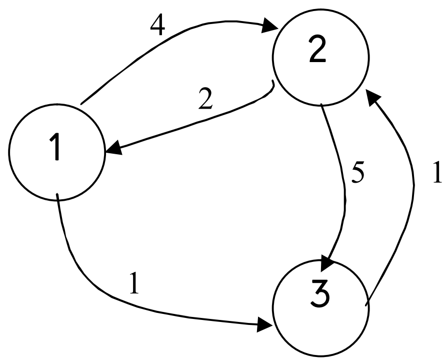
זו הערכה תחילית הכי טובה שאפשר לתת כאורך המסלול המינימלי מקודקוד מקור i לכל לקודקוד j .

כמו כן אם אין קשת מקודקוד מקור i לקודקוד j אזי הערכה שתנתן ל $d[i][j]$ הינה ∞ , המופיע גם כן במטריצה ב – a_{ij} .

לסיכום, האלגוריתם המבוקש הינו :

1. לכל קודקוד i , עבור $i=1,...n$, בצע : $d[i][i]=0$.
2. לכל קודקוד i , עבור $i=1,...n$, בצע :
   2.1 לכל קודקוד j , עבור $j=1...n$
   בצע : אם $i\neq j$ אז $d[i][j]= a_{ij}$.
3. לכל קודקוד מקור i , עבור $i=1..n$
   בצע : קרא לשיגרה <u>דיקסטרה (G,i,d)</u> .

השיגרה דיקסטרה מוצאת מסלולים קצרים מקודקוד מקור i ליתר הקודקודים.
עבור הגרף הבא :



<u>באיטרציה ראשונה</u> קודקוד מקור הינו קודקוד 1.
עתה נפעיל את האלגוריתם – דיקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר מקודקוד מקור 1 ליתר הקודקודים ואז נקבל :

קודקוד j	1	2	3
$d[1][j]$	0	2	1

(בדוק !)

<u>באיטרציה שניה</u> קודקוד מקור הינו קודקוד 2.
עתה נפעיל את האלגוריתם – דיקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר מקודקוד מקור 2 ליתר הקודקודים ואז נקבל :

קודקוד j	1	2	3
d[2][j]	2	0	3

(בדוק!)

<u>באיטרציה שלישית</u> קודקוד מקור הינו קודקוד 3.
עתה נפעיל את האלגוריתם – דיקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר מקודקוד מקור 3 ליתר הקודקודים ואז נקבל :

קודקוד j	1	2	3
d[3][j]	3	1	0

(בדוק!)

סופית, קיבלנו מטריצת המסלולים הקצרים בין כל הזוגות והיא:

d=

	1	**2**	**3**
1	0	2	1
2	2	0	3
3	3	1	0

דאז ראינו כי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם – דיקסטרה , הפותר את בעיית המסלולים הקצרים ביותר מקודקוד מקור <u>יחיד</u> , היא $O(|V|^2)$. לכן סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הנדון היא $O(|V|^3)$, כי:

צעד 1: דורש זמן $O(|V|)$

צעד 2: דורש זמן $O(|V|^2)$

צעד 3: דורש זמן $O(|V|^3)=O(|V|\cdot|V|^2)$

וסיבוכיות זמן הריצה הכללית הינה:

$O(|V|) + O(|V|^2) + O(|V|^3)$
לכן סופית, סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הנדון היא $O(|V|^3)$.

<u>אלגוריתם של בלמן פורד-</u> למציאת מסלולים קצרים ביותר בין כל הזוגות

ניתן לפתור בעיית מסלולים קצרים בין כל הזוגות על ידי הרצת אלגוריתם בלמן-פורד עבור מסלולים קצרים ממקור יחיד n פעמים כאשר $n=|V|$, פעם אחת עבור כל אחד מן הקודקודים כמקור. כלומר אם קודקודי הגרף ממוספרים באופן מקרי מ- 1 עד n אז באיטרציה ראשונה קובעים כקודקוד מקור את הקודקוד 1 ובאמצעות האלגוריתם בלמן-פורד נמצא מסלולים קצרים ביותר מקודקוד מקור 1 ליתר קודקודי הגרף.
באיטרציה שניה קובעים כקודקוד מקור את הקודקוד 2 ובאמצעות האלגוריתם בלמן-פורד נמצא מסלולים קצרים ביותר מקודקוד מקור 2 ליתר קודקודי הגרף וכך הלאה , ובאיטרציה אחרונה , איטרציה ה- n ית קובעים כקודקוד מקור את הקודקוד n ובאמצעות האלגוריתם בלמן-פורד נמצא מסלולים קצרים ביותר מקודקוד מקור n ליתר קודקודי הגרף.
סופית, כך נמצא מסלולים קצרים ביותר בין כל הזוגות .
כזכור ,בניגוד לאלגוריתם של דיקסטרה , באלגוריתם של בלמן-פורד מרשים משקלות קשתות שליליים, אך אסור שברשת יהיו מעגליים שליליים.
בפרק הקודם ראינו כי סיבוכיות זמן ריצה של האלגוריתם בלמן-פורד , למציאת מסלולים קצרים ביותר ממקור יחיד, היא $O(|V|^3)$ או תוך שימוש במבני נתונים – מערך של רשימות סמיכות הסיבוכיות היא $O(|V|\cdot|E|)$.
אלגוריתם של בלמן-פורד , למציאת מסלולים קצרים ביותר בין כל הזוגות, מריץ את האלגוריתם של בלמן-פורד , למציאת מסלולים קצרים ביותר ממקור יחיד, $|V|$ פעמים (פעם אחת מכל אחד מן הקודקודים).

לכן סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם בלמן-פורד למציאת מסלולים קצרים ביותר בין כל הזוגות היא $O(|V|^4)$ או $O(|V|^2\cdot|E|)$ תוך שימוש במבני נתונים מסוים לייצוג הגרף.
עתה נראה אלגוריתם של פלויד- וורשל שפותר את הבעיה – מציאת מסלולים קצרים ביותר בין כל הזוגות, תחת אותם אילוצים כמו של בלמן-פורד, בסיבוכיות זמן ריצה $O(|V|^3)$.

<u>אלגוריתם של פלויד- וורשל (Floyd- Warshall) למציאת מסלולים קצרים בין כל הזוגות</u>

נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ עם פונקציית משקל $W:E\rightarrow R$. כלומר, לכל קשת מתאימים משקל . להלן מספר דרישות לצורך ביצוע האלגוריתם:

I. הגרף G מיוצג בעזרת מטריצת סמיכות (a_{ij}), אשר מוגדרת באופן הבא:

$$a_{ij}=\begin{cases} E_{ij} & \text{(משקל שעל הקשת (i,j)) אם קיימת קשת מכוונת (i,j)} \\ 0 & i=j \\ \infty & \text{אחרת} \end{cases}$$

II. המשקל על הקשת יכול להיות חיובי או שלילי , אולם הוא אינו מכיל מעגלים בעלי משקל שלילי .

III. נגדיר: d_{ij} – משקל המסלול הקצר ביותר מקודקוד i אל קודקוד j .

ד. כמו כן נגדיר $d_{ij}^{(m)}$ - משקל המסלול הקצר ביותר מקודקוד i
אל קודקוד j כאשר כל קודקודי הביניים במסלול זה שייכים לקבוצה $\{1,2,\ldots,m-1\}$. כלומר המסלול הזה לא יעבור דרך הקודקודים , כקודקודי ביניים , שמספרם מ- m עד n .
קל לראות כי $d_{ij}^{(1)}=a_{ij}$ כי: $d_{ij}^{(1)}$ הינו משקל המסלול הקצר ביותר מקודקוד i אל קודקוד j אשר כל קודקודי

הביניים בו היא קבוצה ריקה , כלומר המסלול הזה לא יעבור דרך הקודקודים שמספרם מ- 1 עד n. אולם כל הקודקודים ממוספרים מ- 1 עד n ולכן:
מחד $d_{ij}^{(1)}$ הינו משקל המסלול הקצר מקודקוד i אל קודקוד j , כך שהמסלול אינו עובר דרך אף קודקוד של הגרף .
ומאידך a_{ij} מתאר את משקל המסלול הקצר <u>הזמני</u> כאשר מסלול זה אינו עובר דרך אף קודקוד כקודקודי ביניים .
כלומר המסלול המינימלי הזמני מכיל רק קשת ישירה (אם היא קימת בכלל) מקודקוד i אל קודקוד j והמשקל שעל קשת זו רשומה במטריצה ב a_{ij} .
אם הקשת (i,j) לא קיימת אז ל-$d_{ij}^{(1)}$ ניתן את הערכה הגרועה ביותר שהיא ∞ ול a_{ij} גם כן מוצב ערך זה .
נניח שמספר הקודקודים בגרף הינו |V|=n והם ממוספרים באופן מקרי מ- 1 עד n.
עתה נתבונן על כל המסלולים הקצרים ביותר מקודקוד i לקודקוד j

- בהתחלה במסלול הזה אין קודקודי ביניים . אם קיימת קשת מ- i ל- j אזי משקל המסלול המינימלי מ- i ל- j יהיה המספר שרשום בצד קשת זו , אחרת ערכו ∞ .

<u>באיטרציה ראשונה-</u> נרשה שהמסלול יעבור דרך הקודקוד1.
עתה נתבונן על הביטוי הבא : $d_{ij}^{(2)}$- שהינו משקל המסלול הקצר ביותר מקודקוד i אל קודקוד j כך שהמסלול הזה <u>לא יעבור</u> דרך הקודקודים שמספרם מ2- עד n. כלומר המסלול הזה <u>רשאי</u> לעבור דרך קודקודי הביניים השייכים לקבוצה {1} . יתכן שהמסלול הזה יעבור דרך הקודקוד 1 ואז המסלול יראה כך:

$$i \rightarrow 1 \rightarrow j$$

או שהמסלול הזה לא יעבור דרך הקודקוד 1 ואז המסלול יראה כך:

$$i \rightarrow j$$

כזכור $d_{ij}^{(1)}$ מתאר את משקל המסלול $i \rightarrow j$.
ו $d_{i1}^{(1)} + d_{1j}^{(1)}$ מתאר את משקל המסלול $i \rightarrow 1 \rightarrow j$.
עתה נותר לבצע את הבדיקה הבאה :
אם $d_{ij}^{(1)} < d_{i1}^{(1)} + d_{1j}^{(1)}$
אז בצע: $d_{ij}^{(2)} \leftarrow d_{ij}^{(1)}$
אחרת בצע : $d_{ij}^{(2)} \leftarrow d_{i1}^{(1)} + d_{1j}^{(1)}$

לסיכום האיטרציה הראשונה:

$$d_{ij}^{(2)} = \min\{ d_{ij}^{(1)}, d_{i1}^{(1)} + d_{1j}^{(1)} \}$$

<u>באיטרציה שניה-</u> נרשה שהמסלול יעבור דרך הקודקוד 2 .
עתה נתבונן על הביטוי הבא : $d_{ij}^{(3)}$- שהינו משקל המסלול הקצר ביותר מקודקוד i אל קודקוד j כך שהמסלול הזה <u>לא יעבור</u> דרך הקודקודים שמספרם מ3- עד n. כלומר המסלול הזה <u>רשאי</u> לעבור דרך קודקודי הביניים השייכים לקבוצה {1,2} . יתכן שהמסלול הזה יעבור דרך הקודקוד 2 ואז המסלול יראה כך:

$$i \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{1} j$$

או שהמסלול הזה לא יעבור דרך הקודקוד 1 ואז המסלול יראה כך:

$$i \xrightarrow{1} j$$

המספר הרשום בצד המסלולים מ- i אל – 2, או מ- 2 אל - j או מ- i אל j מציינים שמסלולים אלו רשאים לעבור דרך הקודקוד 1 .

כזכור $d_{ij}^{(2)}$ מתאר את משקל המסלול :

$$i \xrightarrow{1} j$$

ו $d_{i2}^{(2)}+ d_{2j}^{(2)}$ מתאר את משקל המסלול

$$i \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{1} j$$

וכל המסלולים האלו <u>רשאים</u> לעבור דרך קודקוד 1.
עתה נותר לבצע את הבדיקה הבאה :
אם $d_{ij}^{(2)} < d_{i2}^{(2)}+ d_{2j}^{(2)}$
אז בצע: $d_{ij}^{(3)} \leftarrow d_{ij}^{(2)}$
אחרת בצע : $d_{ij}^{(3)} \leftarrow d_{i2}^{(2)}+ d_{2j}^{(2)}$

לסיכום האיטרציה השניה:
$d_{ij}^{(3)} = \min\{ d_{ij}^{(2)}, d_{i2}^{(2)}+ d_{2j}^{(2)}\}$

<u>באיטרציה שלישית-</u> נרשה שהמסלול יעבור דרך הקודקוד 3 . עתה נתבונן על הביטוי הבא : $d_{ij}^{(4)}$- שהינו משקל המסלול הקצר ביותר מקודקוד i אל קודקוד j כך שהמסלול הזה <u>לא יעבור</u> דרך הקודקודים שמספרם מ-4 עד n. כלומר המסלול הזה <u>רשאי</u> לעבור דרך קודקודי הביניים השייכים לקבוצה {1,2,3} . יתכן שהמסלול הזה יעבור דרך הקודקוד 3 ואז המסלול יראה כך:

$$i \xrightarrow{1..2} 3 \xrightarrow{1..2} j$$

או שהמסלול הזה לא יעבור דרך הקודקוד 3 ואז המסלול יראה כך:

$$i \xrightarrow{1..2} j$$

תחום המספרים הרשומים בצד המסלולים מ- i אל – 3, או מ- 3 אל - j או מ- i אל j מציינים שמסלולים אלו רשאים לעבור דרך הקודקודים שהם תת קבוצה של {1,2} .

<u>בשלב הראשון</u> נתאר את כל המסלולים שאינם עוברים דרך הקודקוד 3.

אם התת קבוצה היא קבוצה ריקה אז המסלול הוא $i \rightarrow j$,

אם התת קבוצה היא {1} אזי המסלול הוא $i \rightarrow 1 \rightarrow j$,

אם התת קבוצה היא {2} אזי המסלול הוא $i \rightarrow 2 \rightarrow j$,

ואם התת קבוצה היא {1,2} אז המסלול יראה כך:

$i \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow j$

או $i \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow j$

כל המסלולים האלו נכללים בביטוי $d_{ij}^{(3)}$ כך שהמסלול אינו עובר דרך הקודקוד 3.

<u>ובשלב השני</u> נתאר את כל המסלולים העוברים דרך קודקוד 3.

1. אם במסלול $i \xrightarrow{1..2} 3$ התת קבוצה של {1,2} היא קבוצה ריקה אז:

אם במסלול $3 \xrightarrow{1..2} j$ התת קבוצה של {1,2} היא:

א. קבוצה ריקה אז נקבל:	$\boxed{i \rightarrow 3} \rightarrow j$
ב. $\{1\}$ אז נקבל :	$\boxed{i \rightarrow 3} \rightarrow 1 \rightarrow j$
ג. $\{2\}$ אז נקבל :	$\boxed{i \rightarrow 3} \rightarrow 2 \rightarrow j$
ד. $\{1,2\}$ אז נקבל :	$\boxed{i \rightarrow 3} \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow j$
או	$\boxed{i \rightarrow 3} \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow j$

2. אם במסלול $3 \xrightarrow{1..2} i$ התת קבוצה של $\{1,2\}$ הוא $\{1\}$ אז:

אם במסלול $j \xrightarrow{1..2} 3$ התת קבוצה של $\{1,2\}$ היא:

א. קבוצה ריקה אז נקבל:	$\boxed{i \rightarrow 1 \rightarrow 3} \rightarrow j$
ב. $\{1\}$ אז נקבל :	$\boxed{i \rightarrow 1 \rightarrow 3} \rightarrow 1 \rightarrow j$
ג. $\{2\}$ אז נקבל :	$\boxed{i \rightarrow 1 \rightarrow 3} \rightarrow 2 \rightarrow j$
ד. $\{1,2\}$ אז נקבל :	$\boxed{i \rightarrow 1 \rightarrow 3} \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow j$
או	$\boxed{i \rightarrow 1 \rightarrow 3} \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow j$

3. אם במסלול $3 \xrightarrow{1..2} i$ התת קבוצה של $\{1,2\}$ הוא $\{2\}$ אז:

אם במסלול $j \xrightarrow{1..2} 3$ התת קבוצה של $\{1,2\}$ היא:

א. קבוצה ריקה אז נקבל: $i \to 2 \to 3 \to j$

ב. $\{1\}$ אז נקבל : $i \to 2 \to 3 \to 1 \to j$

ג. $\{2\}$ אז נקבל : $i \to 2 \to 3 \to 2 \to j$

ד. $\{1,2\}$ אז נקבל : $i \to 2 \to 3 \to 1 \to 2 \to j$

או $i \to 2 \to 3 \to 2 \to 1 \to j$

4. אם במסלול $i \xrightarrow{1..2} 3$ התת קבוצה של {1,2} היא {1,2}

<u>מקרה 1:</u>

הקבוצה מסודרת היא $\xrightarrow{12}$ אז:

אם במסלול $3 \xrightarrow{1..2} j$ התת קבוצה של {1,2} היא:

א. קבוצה ריקה אז נקבל: $i \to 1 \to 2 \to 3 \to j$

ב. $\{1\}$ אז נקבל : $i \to 1 \to 2 \to 3 \to 1 \to j$

ג. $\{2\}$ אז נקבל : $i \to 1 \to 2 \to 3 \to 2 \to j$

ד. $\{1,2\}$ אז נקבל : $i \to 1 \to 2 \to 3 \to 1 \to 2 \to j$

או $i \to 1 \to 2 \to 3 \to 2 \to 1 \to j$

<u>מקרה 2:</u>

הקבוצה מסודרת היא $\xrightarrow[1\,..\,2]{21}$ אז:

אם במסלול $3 \dashrightarrow j$ התת קבוצה של $\{1,2\}$ היא:

א. קבוצה ריקה אז נקבל: $i \to 2 \to 1 \to 3 \to 3 \to j$

ב. $\{1\}$ אז נקבל : $i \to 2 \to 1 \to 3 \to 3 \to 1 \to j$

ג. $\{2\}$ אז נקבל : $i \to 2 \to 1 \to 3 \to 3 \to 2 \to j$

ד. $\{1,2\}$ אז נקבל : $i \to 2 \to 1 \to 3 \to 3 \to 1 \to 2 \to j$

או $i \to 2 \to 1 \to 3 \to 3 \to 2 \to 1 \to j$

כל המסלולים האלו ,שתוארו בשלב השני וכולם עוברים דרך הקודקוד 3 ,נכללים בביטוי:

$$d_{i3}^{(3)} + d_{3j}^{(3)}$$

כאשר $d_{i3}^{(3)}$ מתאר את המסלולים $3 \dashrightarrow i$ שאינם עוברים דרך הקודקוד 3 והם רשאים לעבור דרך הקודקודים שהם תת קבוצה של {1,2} .

ו $d_{3j}^{(3)}$ מתאר את המסלולים $j \dashrightarrow 3$ אינם עוברים דרך הקודקוד 3 והם רשאים לעבור דרך הקודקודים שהם תת קבוצה של {1,2} .

עתה ניתן לבצע את הבדיקה הבאה :

אם $d_{ij}^{(3)} < d_{i3}^{(3)} + d_{3j}^{(3)}$

אז בצע: $d_{ij}^{(4)} \leftarrow d_{ij}^{(3)}$

אחרת בצע : $d_{ij}^{(4)} \leftarrow d_{i3}^{(3)} + d_{3j}^{(3)}$

לסיכום האיטרציה השלישית:

$$d_{ij}^{(4)} = \min\{ d_{ij}^{(3)}, d_{i3}^{(3)} + d_{3j}^{(3)}\}$$

כך ממשיכים לבצע את האיטרציות.

<u>באיטרציה ה- m -ית</u>

נרשה שהמסלול מ- i אל j יעבור דרך הקודקוד m. נתבונן על הביטוי הבא :

$$d_{ij}^{(m+1)}$$

שהינו משקל המסלול הקצר ביותר מקודקוד i אל קודקוד j כך המסלול הזה לא יעבור דרך הקודקודים , כקודקודי ביניים , שמספרם מ- (m+1) עד n.

כלומר המסלול הזה רשאי לעבור דרך קודקודי הביניים השייכים לקבוצה {1,2,….,m}.

יתכן שמסלול זה יעבור דרך הקודקוד m ואז המסלול יראה כך:

$$i \xrightarrow{1\,.\,.\,(m-1)} m \xrightarrow{1\,.\,.\,(m-1)} j$$

או שהמסלול הזה לא יעבור דרך הקודקוד m ואז המסלול יראה כך:

$$i \xrightarrow{1\,.\,.\,(m-1)} j$$

תחום המספרים הרשומים בצד המסלול מ-i אל m או מ-m אל j או מ-i אל j מציינים

שמסלולים אלו רשאים לעבור דרך הקודקודים שהם תת קבוצה של{1,2,3,4,...,(m-1)}.

הביטוי $d_{ij}^{(m)}$ מתאר את כל המסלולים מהצורה :

$$i \xrightarrow{1\,.\,.\,(m-1)} j \ ,$$

הביטוי $d_{im}^{(m)}$ מתאר את כל המסלולים מהצורה :

$$i \xrightarrow{1\,.\,.\,(m-1)} m \ ,$$

והביטוי $d_{mj}^{(m)}$ מתאר את כל המסלולים מהצורה :

$$m \xrightarrow{1\,.\,.\,(m-1)} j$$

לכן, לאור האמור לעיל נותר לבצע את הבדיקה הבאה:

אם

$$d_{ij}^{(m)} < d_{im}^{(m)} + d_{mj}^{(m)}$$

אז בצע:

$$d_{ij}^{(m+1)} \longleftarrow d_{ij}^{(m)}$$

אחרת בצע:

$$d_{ij}^{(m+1)} \longleftarrow d_{im}^{(m)} + d_{mj}^{(m)}$$

15

לסיכום האיטרציה ה-m-ית:

$$d_{ij}^{(m+1)} = \min \{ d_{ij}^{(m)} , d_{im}^{(m)} + d_{mj}^{(m)} \}$$

סיכום סופי:

$$d_{ij}^{(1)} = a_{ij}$$

$$d_{ij}^{(m+1)} = \min \{ d_{ij}^{(m)} , d_{im}^{(m)} + d_{mj}^{(m)} \}$$

כאמור בגרף $n = |V|$ קודקודים והם ממוספרים באופן מקרי מ-1 עד n . עד כה ביצענו מספר איטרציות ובכל איטרציה ניסינו לשפר את משקל המסלול המינימלי מקודקוד i אל קודקוד j כדלקמן:

בהתחלה – המסלול מ-i אל j לא היה רשאי לעבור דרך אף קודקוד של הגרף;

באיטרציה ראשונה:

המסלול הזה היה רשאי לעבור דרך הקודקוד 1 ובדקנו את האפשרות האם חל שיפור במשקל המסלול הנדון, אשר עובר דרך הקודקוד 1.

כמו כן קבענו את ערכו של $d_{ij}^{(2)}$

באיטרציה שניה:

המסלול הזה היה רשאי לעבור דרך הקודקוד 2 ובדקנו את האפשרות האם חל שיפור במשקל המסלול הנדון, אשר עובר דרך הקודקוד 2.

כמו כן קבענו את ערכו של $d_{ij}^{(3)}$

באיטרציה שלישית:

המסלול הזה היה רשאי לעבור דרך הקודקוד 3 ובדקנו את האפשרות האם חל שפור במשקל המסלול הנדון, אשר עובר דרך הקודקוד 3.

כמו כן קבענו את ערכו של $d_{ij}^{(4)}$

לכן מאחר ובגרף מור בגרף $n = |V|$ קודקודים והם ממוספרים באופן מקרי מ-1 עד n אז

באיטרציה האחרונה צריך לבדוק האם המסלול הזה יעבור דרך הקודקוד n. נבדוק את האפשרות האם יחול שיפור במשקל המסלול מ-i אל j אשר יעבור דרך הקודקוד n.

כמו כן קבענו את ערכו של $d_{ij}^{(n+1)}$ שפירושו משקל המסלול מקודקוד i אל קודקוד j אשר כל קודקודי הביניים בו שייכים לקבוצה $\{1,2,3,\ldots,n\}$.

לכן נקבע כי:

$$d_{ij} = d_{ij}^{(n+1)}$$

סיכום סופי:

1.
$$d_{ij}^{(1)} = a_{ij}$$

2. עבור m מ-1 עדn בצע:

$$d_{ij}^{(m+1)} = \min \{ d_{ij}^{(m)} , d_{im}^{(m)} + d_{mj}^{(m)} \}$$

3. סוף הלולאה.

4. קבע
$$d_{ij} = d_{ij}^{(n+1)}$$

ההגדרות הרקורסיביות הרשומות בסיכום סופי נכונות לכל זוג קודקודים i ו j .

<u>יעילות האלגוריתם של פלויד-וורשל</u>

נתון גרף G=(V,E) כאשר, $n=|V|$

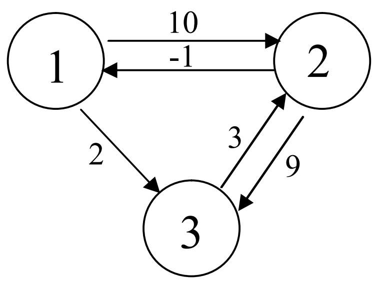
<u>צעד 1</u> : נדרש זמן $O(n^2)$ כיוון שבשלב זה מעתיקים מטריצה אחת לאחרת.

<u>צעד 2</u> : בצעד זה מבוצעות 3 לולאות מקוננות, לכן בצעד זה נדרש זמן $O(n^3)$.

<u>בצעד 4</u> נדרש זמן $O(n^2)$, כיוון שבשלב זה מעתיקים מטריצה אחת לאחרת.

לסיכום: האלגוריתם רץ איפוא בזמן $O(n^3)$, לעומת האלגוריתם של בלמן-פורד, באותם תנאים, הרץ בזמן $O(n^4)$.

נדגים את ההרצה של האלגוריתם Floyd-Warshall על הרשת הבאה:



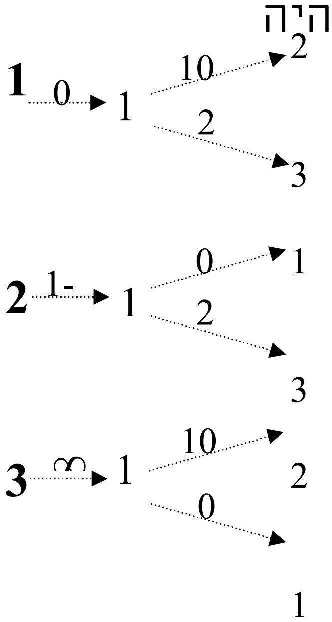
כאמור הגרף מיוצג על ידי מטריצת הסמיכות הבאה:

$$a = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 10 & 2 \\ -1 & 0 & 9 \\ \infty & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

שים לב: $a_{31} = \infty$ מכיוון שלא קיימת הקשת (3,1).
בהתחלה: נקבע מסלולים קצרים ביותר שהם זמניים בין כל הזוגות של קודקודים על ידי:

$$d^{(1)} = a = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 2 \\ -1 & 0 & 9 \\ \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>באיטרציה ראשונה:</u> בודקים את האפשרות שהמסלולים בין כל הזוגות יעברו דרך הקודקוד 1. אז נקבל:



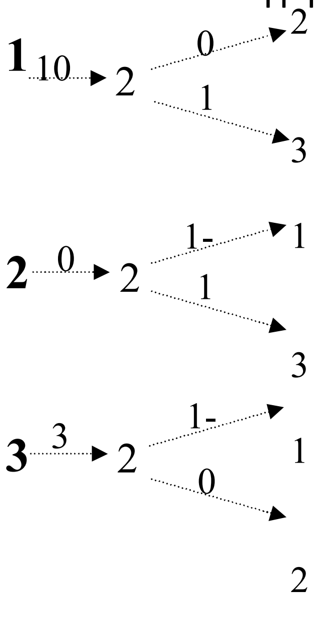
משקל המסלול שיהיה	משקל המסלול כעת	משקל המסלול שהיה
10	10	10
2	2	2
1-	1-	1-
1	1	9
3	∞	3
∞	∞	∞

לכן נקבל:

$$d^{(2)} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 10 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ \infty & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

שים לב! שיפרנו רק מסלול אחד מ- 2 אל 3.

<u>באיטרציה שניה:</u> בודקים את האפשרות שהמסלולים בין כל הזוגות יעברו דרך הקודקוד 2. אז נקבל:



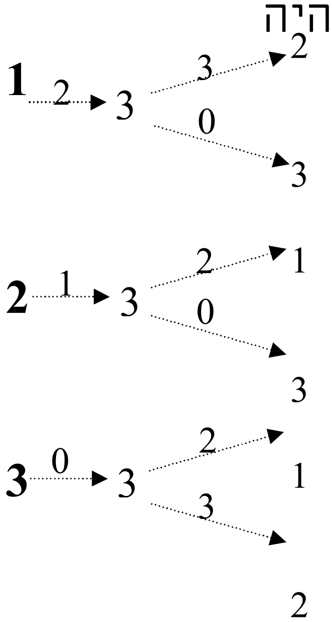
משקל המסלול שהיה	משקל המסלול כעת	משקל המסלול שיהיה
10	10	10
2	11	2
1-	1-	1-
1	1	1
∞	2	2
3	3	3

לכן נקבל:

$$d^{(3)} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 10 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

שים לב! בשלב זה שיפרנו רק מסלול אחד בלבד מ- 3 אל 1.

<u>באיטרציה שלישית:</u> בודקים את האפשרות שהמסלולים בין כל הזוגות יעברו דרך הקודקוד 3. אז נקבל:



משקל המסלול שהיה	משקל המסלול כעת	משקל המסלול שיהיה
10	5	5
2	2	2
-1	3	-1
1	1	1
2	2	2
3	3	3

לכן נקבל:

$$d^{(4)} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

שים לב: בשלב זה שיפרנו מסלול אחד בלבד מ- 1 אל 2.

בשלב זה הרצת האלגוריתם הסתיים ולהלן מטריצה d – המציינת משקל המסלול הקצר ביותר בין כל זוגות הקודקודים.

$$d = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{3}{c}{\multirow{3}{*}{$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$}} \\ 2 & & & \\ 3 & & & \end{array}$$

<u>הערות:</u>

1. באלגוריתם של פלויד וורשל ניתן לגלות אם בגרף המכוון קיים מעגל שלילי על פי התנאי הבא:
ברשת קיים מעגל בעל משקל שלילי אם ורק אם $d_{ii}^{(m)} < 0$ עבור i כלשהו מ- 1 עד n ועבור m כלשהו מ- 1 עד n. (חשוב מדוע!).

2. אם ברשת אין מעגל בעל משקל שלילי אז בעזרת האלגוריתם של פלויד וורשל ניתן למצוא את המעגל בעל המשקל הקטן ביותר לפי הביטוי הבא:

$$\min_{i=1}^{n}\{d_{ii}^{(n+1)}\}$$