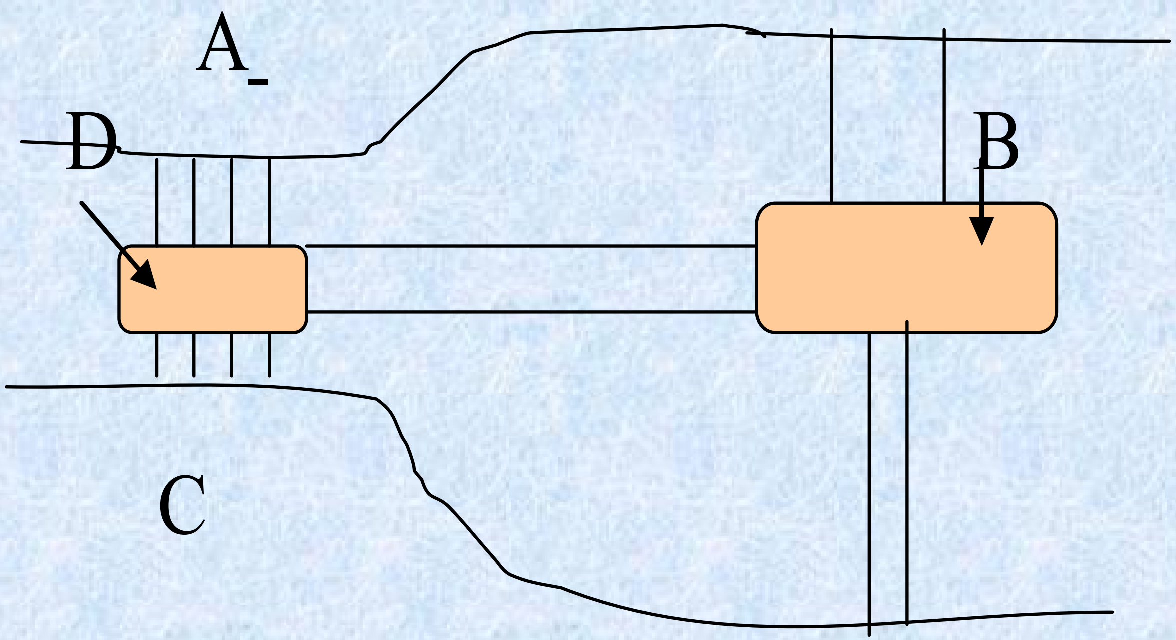
תכנון וניתוח אלגוריתמים

הרצאה 31

מסלולי אוילר

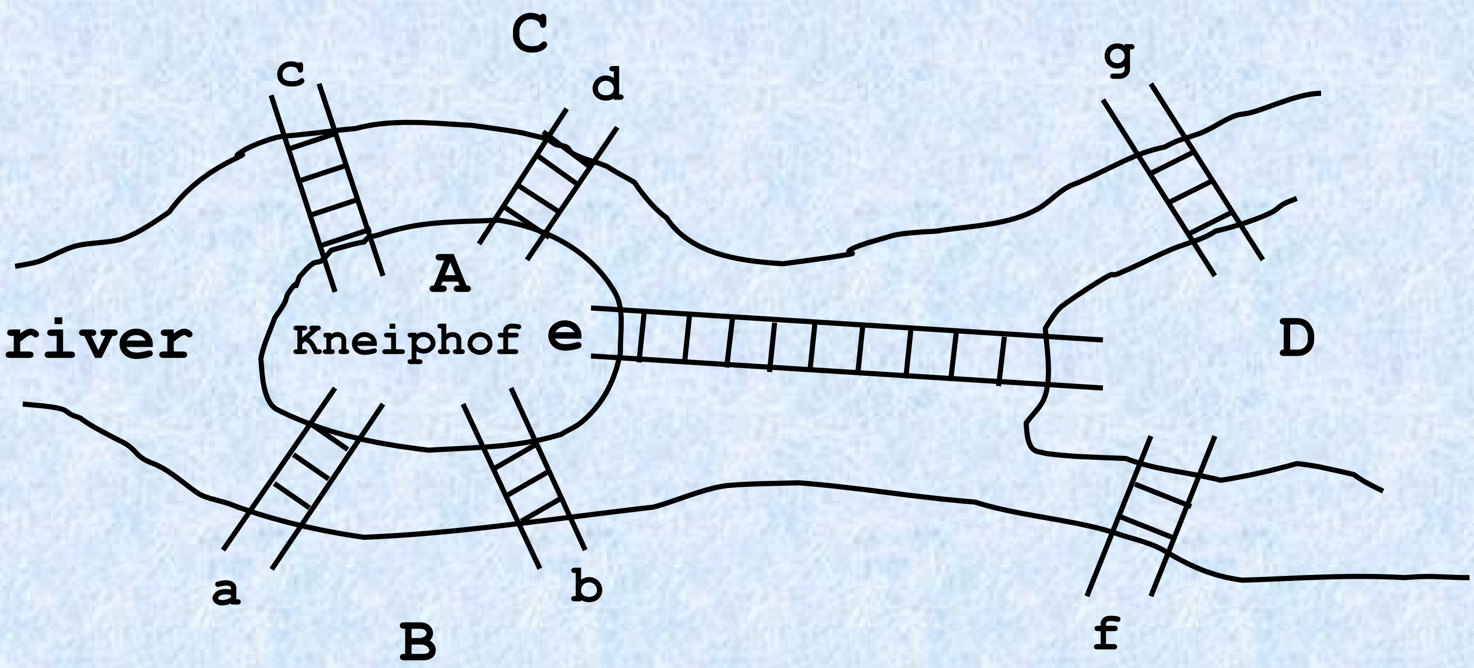
<u>מסלול ומעגל אוילר</u>

- אוילר היה מבין הראשונים שהבחין בתכונות גרף הניתנות ליישום ובזה הוא הבחין בבעיה שהתעוררה בזמנו - 1936.
- הבעיה הקרויה "גשר קוניגסברג" (konigsberg bridge problem) צמחה בעיר קוניגסברג דאז (כיום נקראת קלינינגרד בבריה"מ).
- עיר זו בנויה על שתי גדות נהר "פרגל" (Pergel) ועל שני איים בנהר.הגדות והאיים מחוברים ע"י שבעה גשרים כמתואר להלן:



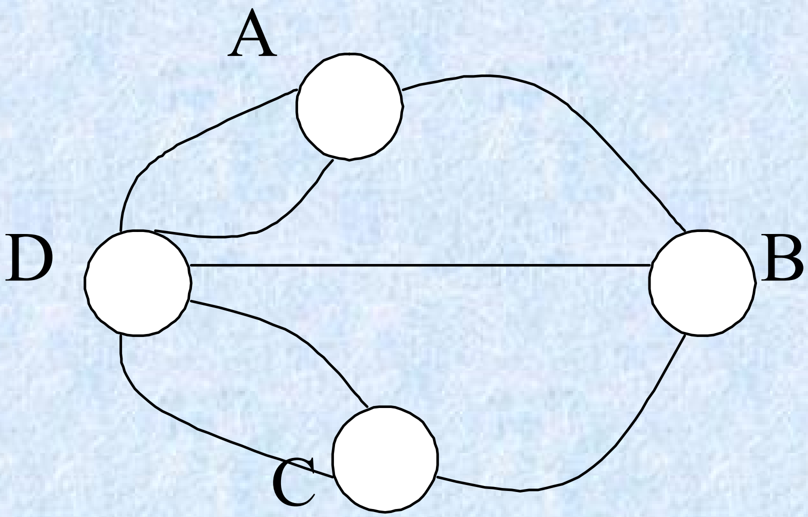
מפת קוניגסברג(קלינינגרד)

Koenigsberg bridge problem



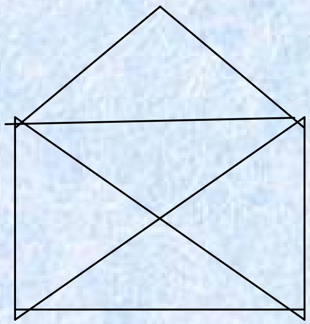
Is it possible to walk across all bridges exactly once from some land area and returning to the starting land area ?

- ניתן לתאר את **חלקי העיר** (אדמות) בעזרת **קודקודים** בגרף ואת **הגשרים** ניתן לציין בעזרת **קשתות** בגרף.
- לאור זאת להלן מפת העיר קוניגסברג כגרף:

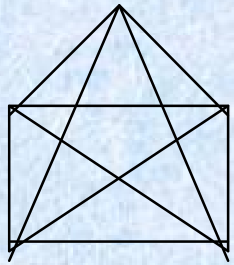


- כאמור הקודקודים מציינים אזורים בהם שוכנת העיר והקשתות הן הגשרים המחברים בין חלקי העיר.
- בין תושבי העיר שהיו מטיילים כל יום ראשון לאחר התפילה, התעוררה השאלה ,האם ייתכן שאדם יוצא מביתו לטייל יעבור על כל שבעת הגשרים ויחזור לביתו ,מבלי לעבור על אף אחד מהגשרים פעמיים ?
- בעיה זו מוכרת כ: konigsberg bridge problem

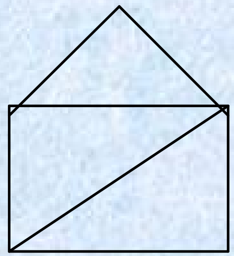
- אגב בעיה זו דומה לחידה שעסקנו בה בתור ילדים:בכמה **משיכות קולמוס** אפשר לצייר את G? או האם ניתן לצייר את התרשימים הבאים מבלי להרים אף פעם את העט מהדף, כלומר **במשיכת קולמוס אחת**?.



ב.



ג.



- את הבעיה פטר מתמטיקאי בשם אוילר (Leonahard Euler) .
- את תוצאות המחקר פרסם כאמור בשנת 1736 והיווה בסיס לתורת הגרפים.
- אוילר הסיק שהגרף אשר מציין את מפת העיר קוניגסברג אינו כולל מעגל אחד העובר דרך כל קשתות הגרף (גשרים)בדיוק פעם אחת ולכן לא ניתן לבצע את המעבר המבוקש.

- להלן הגדרות:
- <u>מסלול אוילר</u> הוא מסלול בגרף (מכוון/לא מכוון) העובר דרך <u>כל</u> קשת בגרף <u>בדיוק</u> פעם אחת.
- <u>מעגל אוילר</u> – הוא מעגל בגרף מכוון/לא מכוון העובר דרך <u>כל</u> קשת בגרף <u>בדיוק</u> פעם אחת.

- **משפט 1:**
- יהי גרף $G=(V,E)$ קשיר. אם כל דרגות קודקודיו זוגיות , אז קיים בגרף מעגל פשוט.

- **משפט 2 :**
- בגרף לא מכוון קיים מעגל אוילר אם ורק אם לכל קודקוד בגרף דרגה זוגית.

- <u>הוכחת משפט 1:</u>
- נתחיל לטייל בגרף מקודקוד כלשהו w כך שלא נעבור על אותה קשת יותר מפעם אחת.
- מאחר שעוברים בכל צלע מקסימום פעם אחת ומספר קשתות בגרף סופי אזי התהליך של הטיול מוכרח להסתיים תוך מספר סופי של צעדים.
- נתבונן על מסלול אפשרי כלשהו:

- א :

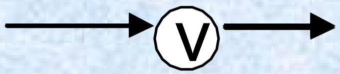
$V \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to V_4 \to X \to V_5 \to V_6$ **V**

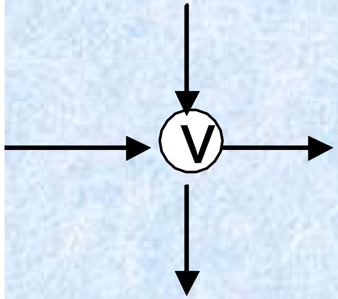
- לא יתכן כי אם התחלנו את הסריקה(טיול) בקודקוד v אזי הסריקה תיעצר בקודקוד אחר X כאשר $X \neq V$.
- נניח ש"כן" – בשלילה.

- לכן, לכל הקודקודים דרגה זוגית פרט ל x .
- כי: כל מעבר של המסלול ב-x תרם 2 לדרגתו (דרגת כניסה 1 ודרגת יציאה 1 , סה"כ 2) פרט לצעד האחרון שתרם 1 (דרגת כניסה 1 ושם נעצרנו- לא יוצאים).
- לכן דרגתו של x אי זוגית בסתירה להנחה של כל קודקוד זוגית.
- סופית קיבלנו מעגל המתחיל בקודקוד v ואף קשת במעגל לא נסרקה פעמיים,כלומר המעגל הינו מעגל פשוט.

- <u>הוכחת משפט 2:</u>
- (⇐)(תנאי מספיקות)
- נניח כי קיים בגרף G מעגל אוילר ויהי C מעגל כזה.
- נניח כי המעגל מתחיל מקודקוד כלשהו W .
- נסתכל על קודקוד V אשר שונה מ- W.
- כל מעבר של המסלול דרך קודקוד V תורמת 2 לדרגתו(1 בכניסה ו- 1 ביציאה), כמתואר באיור הבא :

- א





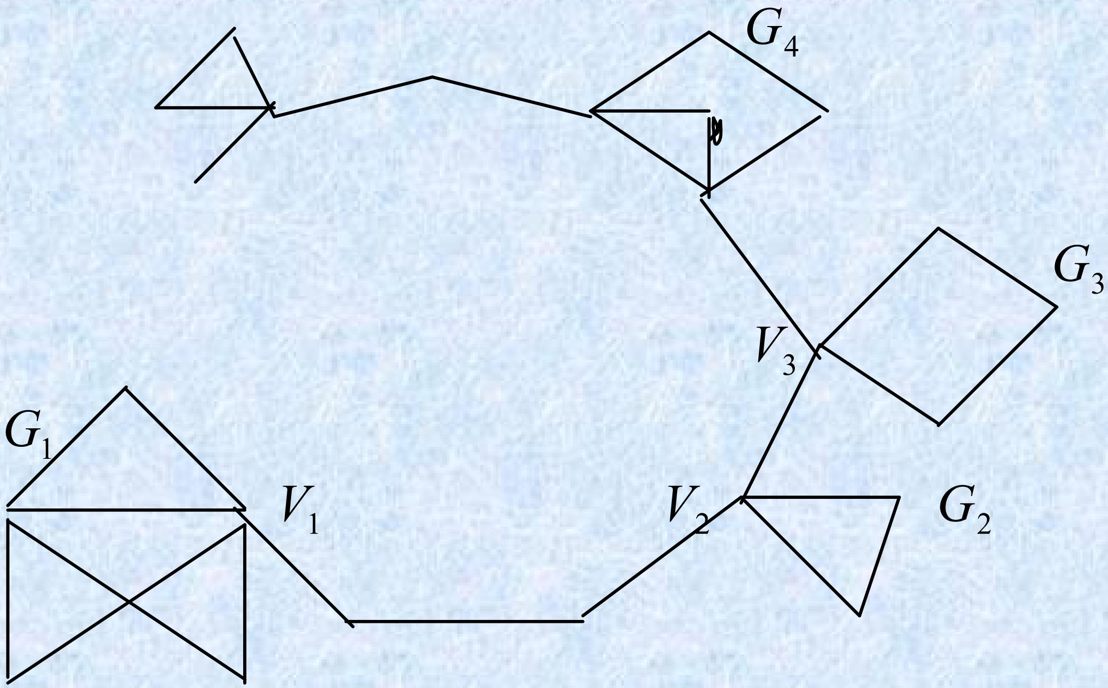
- אפילו קשת נוספת תעבור דרך הקודקוד V גם זו תתרום לדרגתו של v , 1 בכניסה ו- 1 ביציאה).
- לכן דרגתו של הקודקוד V, לכל קדקוד V בגרף השונה מקדקוד W (קודקוד תחילי של המסלול), הינו זוגי.

- נתון כי המסלול מעגלי.
- מאחר שיצאנו מ-W -לכן דרגת היציאה 1.
- בסוף חובה לחזור לקודקוד W-לכן דרגת הכניסה הינה 1.
- במידה והמעגל נאלץ לעבור דרך הקודקוד W k פעמים על מנת לסרוק k צלעות הנוגעות ל-W , אזי דרגתו של הקודקוד W הינה: $2K+1+1$. זהו מס' זוגי ***ומש"ל***.
- דרגת יציאה.
- דרגת כניסה.
- עבור כניסה ויציאה k פעמים בקודקוד w .

- ($\Longrightarrow$) (תנאי הכרחי)
- יהי גרף $G=(V,E)$ גרף קשיר שכל דרגות קודקודיו זוגיות.
- נוכיח את הטענה באינדוקציה על מספר קשתות $\left(|E|\right)$ בגרף
- <u>בסיס</u>: עבור $|E|=0$ הטענה טריבאלית.
- <u>הנחת האינדוקציה</u>: נניח נכונות הטענה עבור גרף בו $|E| < n$
- נוכיח את הטענה עבור $|E|=n$.
- לרשותינו גרף $G=(V,E)$ שהינו קשיר עם n קשתות ולכל קודקוד בגרף דרגה זוגית.

- לפי משפט 1קיים בגרף G מעגל ונכנה אותו בשם C .
- אם C מכיל את כל הצלעות אזי סיימנו.
- אחרת , מאחר שכל מעבר של המסילה בקודקוד כלשהו תורם 2 לדרגת אותו קודקוד ,אז **הגרף המתקבל** מהוצאת כל הצלעות השייכות למעגל C (נכנה אותו בשם G') הוא גם כן מקיים את התכונה שכל קודקודיו בעלי דרגה זוגית.
- הגרף G' לא בהכרח קשיר.

- נחלק את G' למרכזי קשירות $G_1, G_2, ...G_k$ ולכל $1 \le i \le k$
- .
-



- G_i קשיר ובעל פחות מ- n קשתות וכל קודקודיו בעלי דרגה זוגית.
- לכן לפי הנחת האינדוקציה יש ב- G_i מעגל אוילר לכל
- $1 \le i \le k$. יהיו
- C_1 מעגל אוילר של G_1
- C_2 מעגל אוילר של G_2
- ו- C_i מעגל אוילר של G_i לכל $1 \le i \le k$.

- לכל אחד מתתי הגרפים יש לפחות קודקוד אחד השייך למעגל C, אחרת G במקור לא היה קשיר.
- נבחר קודקודים $V_1, V_2, \ldots .V_k$ שונים זה מזה עבור תתי הגרפים $G_1, G_2, \ldots .G_k$ בהתאמה.
- נבנה עתה מעגל אוילר ל- G בצורה הבאה:
- נתחיל בקודקוד כלשהו במעגל C נגיד V_i השייך לסדרת הקודקודים $V_1, V_2, \ldots .V_k$.

- נעבור על המעגל C_i המתאים לקודקוד זה ונגיע חזרה לקודקוד V_i .
- נמשיך לקודקוד הבא נגיד V_j אשר נמצא גם כן על מעגל C.
- כאמור V_j שייך לסדרת הקודקודים $V_1, V_2, ...V_k$
- נעבור על המעגל C_j המתאים לקודקוד זה ונגיע חזרה לקודקוד V_j .

- נמשיך בדרך זו עד שנעבור על כל הקודקודים היוצרים מעגל C.
- בסוף התהליך עברנו על כל הקשתות בגרף ועל כל קשת פעם אחת בלבד .   מש"ל.

- <u>משפט 3:</u>
- בגרף קשיר לא מכוון קיים **<u>מסלול אוילר</u>** אם ורק אם יש בו 0 או 2 קודקודים בעלי דרגה אי זוגית.
- ניסוח אחר:
- בגרף קשיר קיים מסלול אוילר אם ורק אם לקודקוד המוצא והיעד (2 קודקודים) של המסלול יש דרגה אי זוגית ולכל שאר הקודקודים דרגה זוגית.

- <u>הוכחת משפט 3:</u>
- (⇐)הוכחה זהה לכיוון המקביל בהוכחת משפט 2.
- (⇒) נתון גרף G=(V,E) קשיר.אם בגרף אין אף קודקוד בעל דרגה אי זוגית (כלומר C קודקודים בעלי דרגה אי זוגית)אז לפי משפט 2 יש בו מעגל אוילר/מסלול אוילר .
- הבא נניח שב-G שני קודקודים בלבד בעלי דרגה אי זוגית, נסמנם ב- V ו-W .

- **אם** אין קשת (V,W) בגרף אזי נבנה גרף חדש

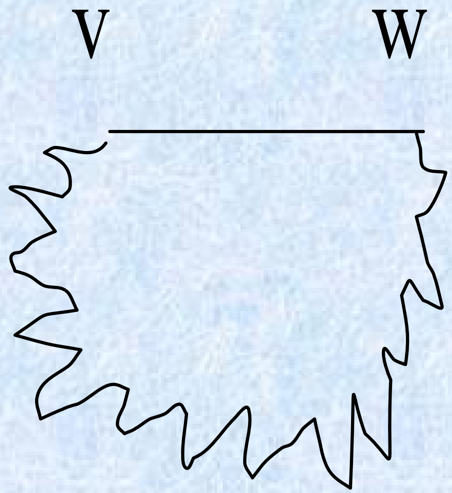
$$G' = \left(V, E \cup \{(v, w)\}\right)$$

- כלומר לגרף הישן G הוספנו קשת חדשה (V,W).
- **אחרת** $\left((v, w) \in E\right)$ נבנה גרף חדש

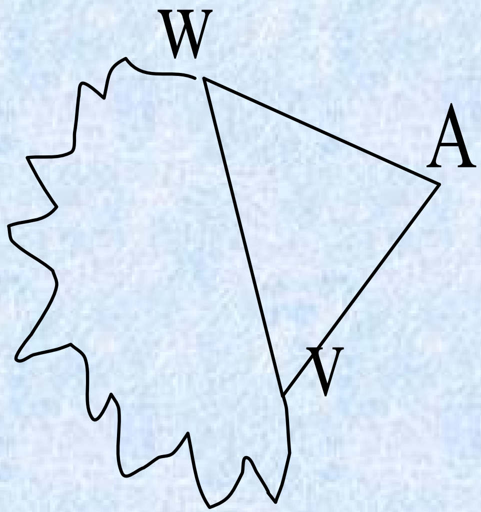
$$G'' = \left(V \cup \{a\}, E \cup \{(v, a), (a, w)\}\right)$$

- כלומר לגרף הישן G הוספנו קודקוד חדש a והוספנו קשתות (a,w) ו (v,a).

נקבל:



או



- בכל מקרה קיבלנו גרף של כל הקודקודים ב- G' או ב- G'' זוגיים.
- הוספנו לדרגה של- v 1 ו לדרגה של w 1, היתר נשארו ללא שינוי.
- היתר היו בעלי דרגה זוגית וגם יישארו בעלי דרגה זוגית.
- v ו- w היו בעלי דרגה אי זוגית. ועתה דרגותיהם גם זוגיות.

- לפי משפט 2 קיים ב- G' או ב- G'' מעגל אוילר C.
- מעגל זה מתחיל ומסתיים בקודקוד V .
- הקשת האחרונה שעברנו דרכה במעגל C הנה: (v,w) [או(a,w)].
- נבטל ב-C את הקשתות שהוספנו (v,w) או [(a,w) ו (v,a) והקודקוד a].
- לאחר הביטול נקבל מסלול חדש שהינו אוילריאני ב-G. מש"ל

- סופית ניתן לסכם:
- גרף קשיר לא מכוון הוא ***אוילריאני*** (כלומר יש בו מעגל אוילרי) אם ורק אם דרגות כל הצמתים זוגיות.
- גרף קשיר לא מכוון הוא ***חצי אוילריאני*** (כלומר יש בו ממסלול ולא מעגל אוילרי) אם ורק אם דרגות כל הצמתים זוגיות פרט לשניים(צומת התחלה וסיום) .

- **<u>גרף מכוון</u>** הינו גרף **<u>אוילריאני</u>** אם עבור כל קודקוד בגרף דרגת הכניסה שווה לדרגת היציאה.
- **<u>גרף מכוון</u>** הינו גרף **<u>חצי אוילריאני</u>** אם בעבור קודקוד מקור(התחלה) דרגת היציאה גדולה באחת מדרגת הכניסה ובעבור קודקוד היעד(סיום) דרגת הכניסה גדולה באחת מדרגת היציאה.
- עבור כל קודקוד אחר,דרגת הכניסה שווה לדרגת היציאה.

- סופית הטבלה הבאה מציינת תנאים הכרחיים ומספיקים לקיום מעגל אוילר או מסלול(שאינו מעגל)אוילר בגרף קשיר

סוג המסלול / סוג הגרף	מעגלי	מסלול שאינו מעגלי
לא מכוון	לכל הקודקודים בגרף דרגה זוגית	לכל הקודקודים, פרט לשניים, בגרף דרגה זוגית

סוג המסלול / סוג הגרף	מעגלי	מסלול שאינו מעגלי
מכוון	לכל קודקוד בגרף $v \in V$ $d_{in}(v) = d_{out}(v)$	עבור קודקוד מקור (s) קודקוד יעד (t) ועבור כל קודקוד v בגרף השונה מ-s ו-t מתקיים: $d_{in}(v) = d_{out}(v)$ $d_{out}(s) = d_{in}(s) + 1,$ $d_{out}(t) = d_{in}(t) - 1$

- $d_{in}(v)$ מציין דרגת הכניסה של הקודקוד V בגרף מכוון.
- $d_{out}(v)$ מציין דרגת היציאה של הקודקוד V בגרף מכוון.
- $d(v)$ מציין דרגתו של קודקוד של V בגרף מכוון/לא מכוון.

- <u>דרך למציאת לולאת/מסלול אוילר</u>
- להתחיל מקודקוד מסוים K (בעל דרגה אי זוגית,אם קיים קודקוד כזה בגרף) ולמחוק כל קשת לאחר שעוברים דרכה.
- כך ממשיכים ובכל פעם לאחר שעוברים דרך הקשת מוחקים אותה.
- צריך ליזכור שאסור לעבור על קשת שמחיקתה תיצור 2 גרפים מנותקים.
- הסריקה הזאת חייבת להסתיים בקודקוד אחר שדרגתו אי זוגית (אם קיים קודקוד כזה בכלל).

- יתכן שהתחלנו את הסריקה מקודקוד V (שדרגתו אי זוגית, אם קיים קודקוד כזה) וסיימנו את הסריקה בקודקוד W(גם כן בעל דרגה אי זוגית אם קיים קודקוד כזה),אך ייתכן שתוך כדי הסריקה לא עברנו דרך כל הקשתות שבגרף .
- מאחר שהגרף קשיר, חייב להיות קודקוד בגרף שממנו ניתן לסרוק ,לגלות ולעבור דרך הקשתות שעדיין לא נמחקו מהגרף.

- לאור זאת נצטרך לבדוק לאיזה קודקוד יש עדיין קשתות (שעדיין לא נמחקו) ונתחיל את ביצוע המשימה מקודקוד זה.
- את התת המסלול הזה(שחייב להיות מעגל) נוסיף למסלול הראשון.
- האלגוריתם יסתיים כאשר כל הקשתות בגרף נמחקו כלומר $E=\emptyset$.

- עתה נדגים את המצגת ה-2 של מסלולי אוילר

- אחרי שגילינו את הרעיון למציאת מעגל/מסלול אוילר עתה נגדיר את מבני הנתונים שבעזרתם נוכל לבצע את האלגוריתם למציאת מעגל או מסלול אוילר.
- ***מבני הנתונים:***
- 1. P - אשר אמורה להכיל מסלול / מעגל אוילר.

  בהתחלה P רשימה ריקה.
- 2. הגרף מיוצג באמצעות רשימות סמיכויות.

3. טבלת קודקודים- מערך שגודלו כמספר הקודקודים בגרף. כל תא במערך זה יקבל את הערך TRUE אם ביקרנו בקודקוד המיוצג ע"י התא ,ולא התא יקבל את הערך FALSE .

4. מערך N שגודלו כמספר הקודקודים בגרף. N(V) – הינו מצביע על הקשת האחרונה שעברנו דרכה ברשימת הקשתות של הקודקוד V.

- לדוגמא: נניח שבגרף כלשהו רשימת הקשתות הנוגעות לקודקוד V14 בגרף הינה:
- V14:→ e2 → e4 → e16→e17→ ||
- ונניח שבשלב מסוים של אלגוריתם תמונת המצב הינה:
- e2 ו- e4 קשתות שכבר עברנו דרכן.
- e16 ו- e17 קשתות שעדיין לא עברנו דרכן.

- לכן N(V14) יצביע לראש רשימת קשתות היוצאות מקודקוד V14 ושעדיין לא עברנו דרכן ותמונת רשימת הקשתות נוגעות לקודקוד V14בגרף תראה כך:
- V14:→e2 → e4 → e16→e17→||
- N(V14)
- 5. מערך E שגודלו כמספר הקודקודים בגרף. E(V) – הינו מצביע על הקשת שנמצאת במסלול ואשר נסרקה מקודקוד V .בהתחלה ערכו של E(V),לכל קודקוד V,לא מוגדר.

- 6. טבלת קשתות –מערך. בעבור כל קשת נשמור את שני הקודקודים המייצגים את הקשת.
- כמו כן נשמור מידע נוסף בעבור כל קשת אם ביקרנו בה או לא.
- 7. תור או מחסנית L.
- למחסנית L נצרף קודקודים שביקרנו בהם תוך כדי סריקה בגרף.
- מאחר שבהתחלה לא ביקרנו באף קודקוד של הגרף המחסנית תהיה ריקה.

* ***<u>להלן אלגוריתם</u>*** (פרוצדורה/שיגרה) אשר מקבל שני פרמטרים P ו- V, כאשר P מכילה סדרת הקשתות המהוות מסלול – המתחיל מקודקוד V.
* כאמור תפקידה של השגרה למצוא מסלול (לאו דווקא אוילרי).
* <u>להלן השגרה   Trace (V,P)</u>
* <u>v <---- V.</u>

- אם V מכיל צומת עדיין לא ביקרנו בו (כלומר "חדש") אז בצע:
  - בטבלת הקודקודים סמן את הקודקוד V כ"מבוקר" (" + ").
  - הכנס את הקודקוד V למחסנית L.
  - כל עוד N(V) מצביע על קשת ולא מצביע ל- NULL (סוף הרשימה) בצע:
    - אם N(V) מצביע לקשת "תפושה" אזי קדם את N(V), כלומר N(V) יצביע לקשת הבאה ברשימת הקשתות של הקודקוד V.
    - אחרת בצע:

- 3.1   N(V) ----> e   ("הקשת שבה מטפלים כעת").
  - הוסף את הקשת e לסוף הרשימה P.
  - אם E(V) לא מוגדר (כלומר עדיין לא עברנו דרך הקודקוד V בגרף) אזי בצע:
- E(V) יצביע למופע של הקשת e שברשימה <u>P</u>.
  - סמן את הקשת e – כ"תפושה".
  - מצא את הקודקוד של הקצה השני של הקשת e:

- e
- W ---------> V (מתוך טבלת הקשתות).
- אם W קודקוד "חדש" (כלומר עדיין לא ביקרנו בו).
- אזי בצע: סמן את הסטטוס שלו כ"ישן" ("+ ").
- הכנס אותו לתור L.
- W -----> V והתהליך חוזר חלילה.
- סוף השגרה (ומוחזר המסלול P).

- מאחר ומטרתנו למצוא "מסלול אוילרי " (חובה לעבור דרך כל הקשתות פעם אחת בלבד) ויתכן שעדיין לא מצאנו אותו .
- מה שנותר לעשות הוא לרוקן את התור L וכשמוציאים צומת X מהתור L , נבדוק אותו ונשאל האם עברנו דרך כל הקשתות הנוגעות בצומת הזה .
- אם התשובה תהיה שלילית אז נפעיל את השגרה TRACE למציאת מעגל (מדוע מעגל ?) מצומת זה .

- תהליך זה יתבצע עבור כל צומת Xשבתור L עד שהתור יתרוקן .
- יש לשים לב שתוך כדי הטיפול בתוך צומת X שיצא כעת מתור L יכולים להתווסף צמתים חדשים לתור L .
- כאמור התהליך יסתיים כאשר התור L יהיה ריק.

- <u>להלן אלגוריתם אשר מוצא מסלול אוילר תוך שימוש בשגרה TRACE – מצומת נתון a .</u>
- V → a .
- TRACE (v , p') ("הסריקה תסתיים בצומת a אם הדרגות של כל הצמתים זוגיות ,
- אחרת הסריקה תסתיים בצומת b כל שהוא בעל דרגה אי זוגית")

- כל עוד התור L לא ריק בצע:
  - הוצא את הצומת U מהתור L .
  - אתחול רשימה מקושרת חדשה 'P (בהתחלה ערך ריק = NULL). ('P תכיל סידרת הקשתות (המהוות המעגל) שעדיין לא ראינו אותן . נתחיל לסרוק אותן החל מהקדקוד U שיצאו כעת מהתור L .)
  - TRACE (U,P') . (נקבל את קשתות המעגל – יכול להיות גם מעגל ריק).
  - צרף את 'P ל P לפני – E(U) . (זאת כיוון שלפני ההגדרה E(U) מצביע על הקשת שממנה יצאנו בפעם הראשונה מהקדקוד U).
- סוף הלולאה.

- החזר את המסלול P.

- ***יעילות*** האלגוריתם למצוא את מעגל/מסלול אוילר:
קל לראות שהיא: $O(|E|)$. (חשוב! מדוע?)

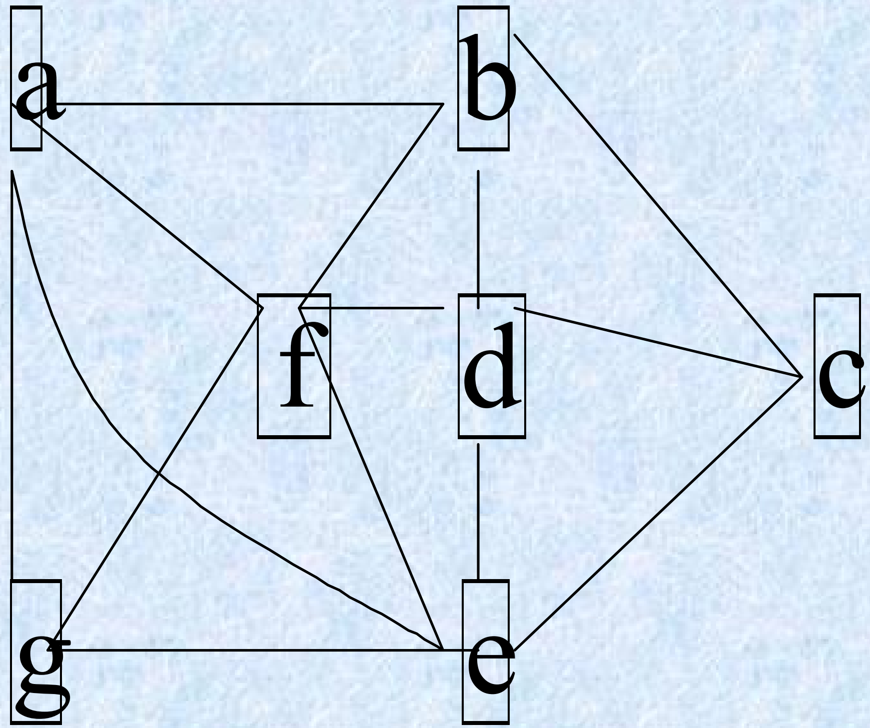
- משפט
- נתון G גרף ובו בדיוק 2k קודקודים מערכיות אי זוגית, ומספר טבעי $k>=1$.
- אפשר לצייר את G ב- k משיכות קולמוס ואי אפשר לצייר את G בפחות מ- k משיכות קולמוס.
- ההוכחה נשאר כתרגיל לקורא.

מסלול / מעגל המילטון - Hamiltonian circuit

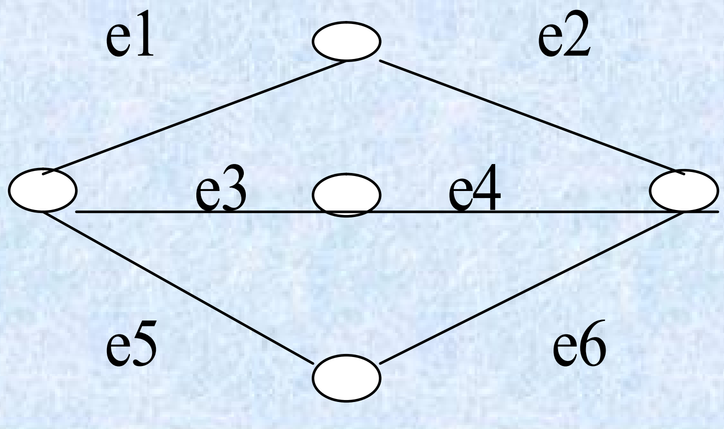
- מעגל (מסלול) המילטון מוגדר כמעגל (מסלול) פשוט העובר דרך כל קדקודי גרף נתון $G=(V,E)$.
  המעגל (מסלול) עובר רק פעם אחת בכל קדקוד ע"פ הגדרת המעגל (מסלול) פשוט .

דוגמא ניתן לראות

בגרף הבא :


a
b
f
d
c
g
e

- בגרף זה קיים מסלול המילטוני והוא : abcdefga
- יש לשים לב שבגרף זה לא קיים מסלול אוילר מאחר וישנם בגרף יותר משני צמתים בעלי דרגה אי זוגית .
- **דוגמא 2** – נתון הגרף הבא שבו **לא קיים** מסלול המילטוני אך **כן קיים** מסלול אוילרי והנו : e2 e1 e5 e6 e4 e3 .



- למרות שבעיית אפיון הגרפים המילטוניים מזכירה את זו של גרפים אוליריאנים :
- הבעיות הקשורות לגרפים המילטוניים הן בעלי סיבוכיות אקספוננציאליות ואינן פשוטות לפתרון.
- עד היום בעיית אפיון גרפים המילטוניים היא בעיה פתוחה.
- למעגל המילטון חשיבות רבה בתורת הרשתות . אחת הבעיות שבה משתמשים במעגל המילטוני הנה הסוכן הנוסע traveling sales problem או בקיצור tsp .

- הבעיה היא :
- נתונה קבוצת ערים והמרחקים בין שתי ערים .
- המטרה למצוא מסלול מעגל פשוט בעל אורך מינימלי העובר דרך כל קדקודי גרף נתון .
- המעגל עובר רק פעם אחת בכל עיר ע"פ הגדרת מעגל פשוט .

- מעגל המילטון הוא מעגל המכיל את כל הקודקודים, כל קודקוד פעם אחת בלבד.
- מסלול המילטון הוא מסלול המכיל את כל הקודקודים, כל קודקוד פעם אחת בלבד.
- גרף המכיל מעגל המילטון נקרא **גרף המילטוני**.
- גרף המכיל מסלול המילטון נקרא גרף **חצי המילטוני**.

- טענות:
- 1.בכל גרף שלם k_n , $n>=3$, קיים מעגל המילטון.
- 2. בגרף דו צדדי שלם $k_{m,n}$ יש מעגל המילטון **אם ורק אם** $m=n>=2$.
- 3. משפט דירק(Dirac) אם G גרף פשוט בעל $n>=3$ קודקודים והערכיות של כל קודקוד היא לפחות $n/2$ אז הגרף G המילטוני. לשים לב שהתנאי הוא ***<u>תנאי מספיק</u>*** ע"מ ש-G יהיה המילטוני אך אין הוא הכרחי.
- כי ישנם גרפים המילטוניים שאינם מקיימים את התנאי הזה.