תכנון וניתוח אלגוריתמים
הרצאה 9

בעיית טרנספורטציה

בעיית תובלה(טרנספורטציה)

- לתכנון הליניארי יישומים רבים.
- בפרק זה נרחיב את אופקינו בנושא באמצעות דיון על סוג חשוב של בעיית תכנון ליניארי, **בעיית התובלה**.
- לבעיית התובלה יש מספר מאפיינים חשובים.
- הראשון הוא, שבעיה זו מתעוררת לעתים קרובות בהקשרים מגוונים.

- כמו-כן, בעיות התובלה כרוכות במספר גדול של אילוצים ומשתנים, לכן חישוב בשיטת הסימפלקס ידרוש מאמץ חישובי גדול מאד.
- אבל המבנה המיוחד של בעיית התובלה מאפשר לפתח גירסה מקוצרת של שיטת הסימפלקס (המותאמת לבעיות תובלה) שמצליחה להשיג חיסכון דרמטי במספר החישובים הנדרשים.

3.1 הצגת הבעיה

- ***גלידות אביב*** היא חברה מוכרת וידועה ליצור גלידות ושלגונים.
- עם השנים התרחבה החברה ולרשותה עומדים שני מפעלים ליצור גלידות.
- המפעלים ממוקמים בראש-העין, ובקרית-גת.
- את הגלידות מתוצרת ***גלידות אביב*** ניתן להשיג רק בשלוש חנויות המפעל של החברה.

- החנויות נמצאות בת"א, בחיפה ובבאר-שבע.
- מדי שבוע יוצאים מובילים ומעבירים את הגלידות מהמפעלים לחנויות המפעל, ושם רוכשים אותם הצרכנים להנאתם.
- **בשנים עברו** התנהלה התובלה מהמפעלים לחנויות **ללא תכנון מיוחד**, אולם עתה, **כשהיקף הפעילות גדל** ביקש מנכ"ל החברה ממנהל מחלקת ההפצה **להציע תכנון יעיל של התובלה.**

- מטרת המנכ"ל -העלות הכוללת של **מחיר ההובלה** בכל שבוע תהיה **מינימלית**.
- מנהל מחלקת ההפצה, אסף את הנתונים האלה:
- 1. כמויות חבילות הגלידה שמייצר כל מפעל בשבוע.
- 2. כמויות חבילות הגלידה שיש לספק לכל חנות-מפעל בשבוע.

- 3. עלות ההובלה של חבילת גלידה מכל מפעל לכל חנות מפעל (עלות זו תלויה כמובן במרחק הנסיעה, בחברת ההובלה שעובדת עם המפעל ובגורמים נוספים).
- את התוצאות ריכז מנהל המחלקה בטבלאות הבאות:
- 1. תוצרת שבועית של המפעלים (בחבילות גלידה):

סה"כ	קרית-גת	ראש-העין	מפעל
780,000	550,000	230,000	**יצור שבועי**

2. צריכה שבועית של חנויות המפעל (בחבילות גלידה):

סה"כ	באר-שבע	חיפה	תל-אביב	חנויות
780,000	220,000	260,000	300,000	**צריכה שבועית**

שימו לב

סך כל הביקוש (הצריכה השבועית) **שווה** לסך כל היצע (התוצרת השבועית).

3. עלות הובלה של חבילת גלידה בשקלים:

מפעל / חנות	תל-אביב	חיפה	באר-שבע
ראש-העין	2	4	5
קרית-גת	3	5	2

◈שאלה 3.1

- א. איזו בעיה תתעורר אם הצריכה השבועית בחנות המפעל בתל-אביב תהיה 330,000 חבילות גלידה ולא 300,000 ?
- ב. אילו בעיות נוספות עלולות להתעורר אם יהיה שינוי בכמויות הייצור השבועיות של המפעלים ?

פתרון 3.1

- א. אם הצריכה השבועית של חנות המפעל בתל-אביב תגדל ל- 330חבילות גלידה הרי ***כמות הייצור השבועית של המפעלים***, שהיא 780 ארגזי קירור ***לא תספק את דרישות הצריכה השבועית של חנויות המפעל*** שתהיה 810 חבילות גלידה.

- ב. כמויות הייצור השבועיות של המפעלים יכולות לגדול או לקטון.
- אם **כמות הייצור** השבועית הכללית של המפעלים **תגדל** הרי ***יהיה עודף של גלידה*** שלא יצרך על-ידי חנויות המפעל.
- אם **תקטן** כמות זו הרי שוב כמו בסעיף א' ניתקל **בחוסר של גלידה**, המפעלים לא ייצרו את הכמות הנצרכת על-ידי חנויות המפעל.

מבנה בעיית התובלה

- הבעיה הנתונה, היא בעיית תובלה קלאסית.
- בכל בעיה שכזו קיימת ***קבוצת מקורות*** המייצרת **מוצר יחיד** וכן ***קבוצת יעדים*** הדורשת את אותו מוצר.
- **לכל מקור** כמות יצור אופיינית, כלומר ***היצע*** המאפיין את המקור
- **לכל יעד** כמות ***ביקוש*** אופיינית.

- ***הובלת*** יחידת מוצר ממקור מסוים ליעד מסוים ***כרוכה בעלות*** נתונה.
- המטרה לתכנן את התובלה.
- במילים אחרות להחליט כמה יחידות מוצר יועברו מכל מקור לכל יעד על פי אילוצי היצור והצריכה, כך ***שנספק את כל הביקוש במחיר הובלה כולל מינימלי.***

- **מילון מונחים**
- לפניכם מרכיבי בעיית התובלה ובצמוד להם המושגים התואמים מן הבעיה הייחודית שהכרנו. בעיית התובלה של חברת ***גלידות אביב*** .
- **נתוני הבעיה:**
- 1. **<u>מקורות</u>** – שני המפעים.
- 2. **<u>יעדים</u>** – שלוש חנויות המפעל.

- 3. **<u>היצע</u>** – התוצרת השבועית של כל מפעל.
- 4. **<u>ביקוש</u>** – הצריכה השבועית של כל חנות.
- 5. **<u>עלויות</u>** – מחירי הובלת חבילת גלידה מכל מקור לכל יעד.

◆ **משתני החלטה:**

◆ 6. **<u>הקצאות</u> – מספר חבילות (אלפי גלידות), שהוחלט להעבירן מכל מקור לכל יעד.**

◆ **פונקצית מטרה:**

◆ **7. <u>מחיר התובלה</u>** – סך כל עלויות התובלה של ההקצאות מהמקורות אל היעדים (שאנו מעוניינים כי יקבלו ערך מינימלי).

◆ניתן לרכז את נתוני הבעיה בטבלה אחת.

		תל-אביב	חיפה	באר-שבע	היצע
מפעלים	ראש-העין	2	4	5	230,000
	קרית-גת	3	5	2	550,000
	ביקוש	300,000	260,000	220,000	

- נתבונן עתה בתוכנית התובלה הנוכחית בחברה. ניתן לרשום את ההקצאות של מערכת זו בטבלה באופן הבא:
- **טבלה 3.2** מערכת התובלה הנוכחית בחברת ה"מלקק"

		תל-אביב	חיפה	באר-שבע	היצע
מפעלים	ראש-העין	2 160,000	4	5 70,000	**230,000**
	קרית-גת	3 140,000	5 260,000	2 150,000	**550,000**
	ביקוש	**300,000**	**260,000**	**220,000**	

- בטבלה זו תא ריק פירושו שאין כלל הובלה ממפעל מסוים (מקור) לחנות מסוימת (יעד). כמו לדוגמה במקרה זה אין הובלה מהמפעל בראש-העין לחנות המפעל בחיפה.
- כדי לקבל את מחיר ההובלה על-פי תוכנית תובלה זו נכפיל בכל תא את ההקצאה בעלות הובלת יחידה ונסכם את המתקבל בכל התאים.

- כך נקבל ש**מחיר ההובלה** הכולל הוא:
- 160,000*2 + 70,000*5 + 140,000*3 + 260,000*5 + 150,000*2

  = 2,690,000 שקלים
- מחיר ההובלה הוא אפוא 2,690,000₪, כיצד נוכל לבדוק שזהו **הפתרון האופטימלי**?

- עלינו לבדוק האם קיימת תוכנית תובלה אחרת זולה יותר, במידה ולא קיימת תוכנית תובלה אחרת זולה יותר הרי זהו הפתרון האופטימלי.
- **שאלה 3.3**
- חשבו את מחיר ההובלה עבור הפתרון המתואר בטבלה הבאה :

		תל-אביב	חיפה	באר-שבע	היצע
מפעלים	ראש-העין	2 230,000	4	5	**230,000**
	קרית-גת	3 70,000	5 260,000	2 220,000	**550,000**
	ביקוש	**300,000**	**260,000**	**220,000**	

פתרון 3.3

- 230,000*2 + 70,000*3 + 260,000*5

  + 220,000*2 = שקלים 2,410,000

  בפתרון השאלה נוכחנו כי ישנם פתרונות תובלה זולים יותר ולכן הפתרון שהוצע בטבלה 3.2 אינו האופטימלי.

- נחזור שוב אל מנהל המחלקה, הוא אוסף את כל הנתונים הרלוונטים, וכל שנותר לו הוא לקבוע את כמויות חבילות הגלידה שיש להוביל מכל מפעל לכל חנות - בכפוף לאילוצי ההיצע והביקוש מתוך כוונה להשיג עלות תובלה אופטימלית.
- בסעיף הבא נראה כי בעיה זו מתאימה למודל התכונן הליניארי שהכרנו בפרקים קודמים.

- מכאן שנמצא ברשותנו אלגוריתם אפשרי לפתרון הבעיה.
- בסעיפים הבאים נראה כיצד ניתן להתאים את שיטת הסימפלקס לאלגוריתם עבור פתרון בעיות תובלה.
- עתה נראה את הניסוח הפורמלי בעבור בעיית התובלה

הצגת בעיית התובלה כבעיית תכנון ליניארי

- **3.2.1 מודל מתמטי לבעיית התובלה**
- בסעיף זה נציג מודל מתמטי לבעיית התובלה בדומה לכל בעיית תכנון ליניארי.
- לצורך הצגת המודל נשתמש בסימונים הבאים:
- m – מספר המקורות
- n – מספר היעדים

- s_i – היצע המקור i $(i = 1,2, 3, …. m)$
- d_j – ביקוש ביעד j $(j = 1,2, 3,…. n)$
- C_{ik} –עלות העברת יחידה אחת ממקור i ליעד j
- x_{ij} –הקצאה, מס' היחידות המובלות ממקור i ליעד j
- נתבונן שוב בטבלה 3.1 שהוצגה בסעיף הקודם והכילה את נתוני בעיית התובלה של חברת ה"מלקק" , ונוסיף לה את סימני המודל המתמטי:

◈ **טבלה 3.3** מודל התכנון הליניארי המתאים לבעיית חברת ***גלידות אביב***

		$j=1$ תל-אביב	$j=2$ חיפה	$j=3$ באר-שבע	היצע
m=2 מפעלים	ראש-העין $i=1$	2	4	5	s_1=230,000
	קרית-גת $i=2$	3	5	2	s_2=550,000
	ביקוש	d_1=300,000	d_2=260,000	d_3=220,000	

- נציג כעת במשוואות את מודל התכנון הליניארי המתאים לבעיית חברת ***גלידות אביב*** :
- **I. אילוצי היצע**
- סך כל ההקצאות ממפעל 1 (ראש העין) לחנויות המפעל 1,2,3 הוא – 230,000 חבילות גלידה :
- $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 230{,}000$
- סך כל ההקצאות ממפעל 2 (קרית-גת) לחנויות המפעל 1,2,3 הוא – 550,000 חבילות גלידה :
- $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 550{,}000$

ניתן לייצג את אילוצי ההיצע בכתיבה אלגברית בנוסח מקוצר. למשל:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = \sum_{j=1}^{3} x_{1j} = 230,000$$

II. אילוצי ביקוש

סך כל הביקוש לחבילות גלידה בחנות מפעל 1 שבתל-אביב הוא – 300,000 חבילות גלידה :

- כלומר,
$$x_{11}+x_{21}=\sum_{i=1}^{2}x_{i1}=300,000$$
- סך כל הביקוש לחבילות גלידה בחנות מפעל 2 שבחיפה הוא – 260,000חבילות גלידה:
- $$x_{12}+x_{22}=\sum_{i=1}^{2}x_{i2}=260,000$$
- סך כל הביקוש לחבילות גלידה בחנות מפעל 3 שבבאר-שבע הוא – 220,000 חבילות גלידה:

כלומר: $x_{13} + x_{23} = \sum_{i=1}^{2} x_{i3} = 220,000$

III. אילוצי אי-שליליות

$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2; \quad j = 1,2,3$

ההקצאות כולן הן גדלים אי-שליליים.

IV. מחיר ההובלה (פונקצית המטרה)

$$Z = 2x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + 3x_{21} + 5x_{22} + 2x_{23} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

- כזכור, אנו מעוניינים לקבל ערך מינימלי של עלות הובלת ההקצאות.

ניסוח המודל המתמטי עבור בעיית תובלה כללית.

- (1) $Z = \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$
- **subject to:**
- (2) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_I \qquad i = 1, 2, \ldots, m$
- (3) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$
- (4) $x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \ldots m \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, n$

- הסבר: במודל זה שורה (1) מציגה את פונקציית המטרה, שהיא מחיר התובלה, לו אנו מחפשים ערך מינימלי.
- מחיר זה מורכב מסך כל עלות הובלת ההקצאות, כאשר הגודל $c_{ij}x_{ij}$ מבטא את עלות הובלת x_{ij} יחידות ממקור i ליעד j (הכמות שמובילים כפול עלות הובלת יחידה אחת).

3.2.2 מספר האילוצים הבלתי תלויים

- לכל אחד מ-m המקורות יש אילוץ היצע מתאים,
- ולכל אחד מ-n היעדים יש אילוץ ביקוש מתאים.
- כלומר בבעיית תובלה מופיעים $m + n$ אילוצי היצע וביקוש.
- **שאלה 3.8**
- מהו מספר המקורות, מספר היעדים ומספר האילוצים בבעיית התובלה של חברת ***גלידות אביב***? האם התוצאה תואמת ל- $m + n$ אילוצים?

פתרון 3.8

- בדוגמת חברת ***גלידות אביב*** קיימים $3 + 2 = 5$ אילוצים.
- ואכן מספר המקורות + מספר היעדים שווה למספר האילוצים .
- כמו כן, כפי שהזכרנו בסעיף 3.1 הצגת בעיית התובלה, נדרוש כי **סכום היצעים** של כל המקורות $\sum_{i=1}^{m} s_i$

יהיה **שווה לסכום הביקושים** של כל היעדים $\sum_{j=1}^{m} d_j$

$\sum_{j=1}^{m} d_j$

- בדוגמת חברת ***גלידות אביב***)

- 230,000+550,000=
300,000+260,000+220,000
= 780,000

- דרישה זו $\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{m} d_j$ הופכת אילוץ אחד למיותר

כיוון שהוא נובע מהאילוצים האחרים.

- חשבו והסבירו מדוע הדרישה $\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{m} d_j$ הופכת אילוץ אחד למיותר ונובע מהאילוצים האחרים ?
- כאשר ידועה כבר יכולת הייצור (היצע) של כל המקורות והדרישה בכל היעדים (הביקוש) למעט אחד, הרי בהנחה שהביקוש שווה להיצע נקבעה כבר הדרישה ביעד האחרון ואין צורך להוסיף אילוץ.

- בדוגמת חברת ***גלידות אביב*** למשל ברור כי הדרישה בחנות המפעל 3 בבאר-שבע כבר נקבעת לאחר שידוע סה"כ היצע (780,000) וידועות הדרישות בשתי חנויות המפעל האחרות:
- $x_{13} + x_{23} = 780{,}000 -$
  $-(300{,}000 + 260{,}000) = 220{,}000$

- באותו אופן כאשר ידועה כבר הדרישה בכל היעדים ויכולת הייצור בכל המקורות למעט אחד, הרי בהנחה שהביקוש שווה להיצע נקבעה כבר הייצור במקור האחרון ואין צורך להוסיף אילוץ. לדוגמה :
- $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 780{,}000 - (230{,}000) = 550{,}000$

- מכאן, שמספר האילוצים האמיתי (האילוצים הבלתי-תלויים, ז"א שאינם נובעים מן האילוצים האחרים) הוא למעשה $m + n - 1$.
- שיטת הסימפלקס, שהכרנו בפרק הקודם מבטיחה לנו כי מתוך mn משתני ההקצאה (x_{ij}) רק $m + n – 1$ יקבלו (אולי) ערך חיובי, כאשר שאר המשתנים, שמספרם $mn - m - n + 1$ ערכם בפתרון האופטימלי יהיה – 0.

מעבר מפתרון לא בסיסי לפתרון בסיסי

- בדוגמה הבאה נראה כיצד ניתן לעבור מפתרון ***לא-בסיסי*** (בו מספר המשתנים בעלי ערך חיובי גדול מ-$m + n - 1$) ***לפתרון בסיסי***, בו ערך פונקצית המטרה קטן יותר (או שווה).

- **מעבר מפתרון לא בסיסי לפתרון בסיסי**
- מערכת התובלה הנוכחית בחברת ***גלידות אביב*** המוצגת בטבלה 3.4 מתארת פתרון לא בסיסי שהרי מספר המשתנים שערכם שונה מאפס בפתרון זה הוא (x11 ,x13 ,x21 ,x22, x23) 5.
- זאת כאשר פתרון בסיסי אמור להכיל 4 משתנים בלבד ($m + n - 1 = 2 + 3 - 1 = 4$).

- **טבלה 3.4** מערכת התובלה הנוכחית בחברת *גלידות* ***אביב*** -פתרון לא-בסיסי.

	1 **תל-אביב**	2 **חיפה**	3 **באר-שבע**	**היצע**
רא 1	2 160,000	4	5 70,000	**230,000**
קר 2	3 140,000	5 260,000	2 150,000	**550,000**
ביק	**300,000**	**260,000**	**220,000**	

- נראה עתה כי מכל פתרון לא בסיסי אפשר להסיר משתנה
- זאת אומרת לקבוע את ערכו לאפס, ובכך לשפר (או לכל הפחות לא "לקלקל") את הפתרון.
- ולכן הפתרון האופטימלי חייב להיות פתרון בסיסי המכיל $m + n - 1$ משתנים בלבד.

- כאשר הפתרון לא בסיסי ומכיל יותר

מ- 1 - $m + n$ משתנים הרי, שבהכרח הטבלה של
בעיית התובלה המתארת פתרון לא-בסיסי המכילה
לפחות קבוצה אחת של ארבעה משתנים גדולים מ-
0, היוצרים מעגל (ניתן לחבר את התאים בהם הם
נמצאים בקווים ישרים : אנכיים או אופקיים)
באופן, המתואר בטבלה 3.4 באמצעות הקו
המקווקו.

- נניח עתה כי אנו מגדילים את ערכם של המשתנים $x11$ ו-$x23$, שייקראו "משתנים מקבלים" ביחידה אחת, ואת ערכם של x21 ו-x13, שיקראו "משתנים תורמים", מקטינים ביחידה.
- **שאלה 3.10**
- א. שרטטו את הטבלה התובלה של חברת ***גלידות אביב*** לאחר שינויים אלו.

- ב. האם הפתרון החדש שנקבל שומר על אילוצי ההיצע והביקוש ? מדוע ?

- ג. אילו בחרנו להגדיל את המשתנים $x11$ ו-$x13$ ולהקטין את המשתנים $x21$ ו- $x23$האם הפתרון שהיינו מקבלים היה שומר על אילוצי ההיצע והביקוש?

פתרון 3.10

		1 תל-אביב	2 חיפה	3 באר-שבע	היצע
מפעלים	ראש-העין 1	2 161,000	4	5 69,000	**230,000**
	קרית-גת 2	3 139,000	5 260,000	2 151,000	**550,000**
	ביקוש	**300,000**	**260,000**	**220,000**	

- ב. הפתרון החדש שומר על אילוצי ההיצע כיון שבאותה שורה הוספנו יחידה אחת אך גם החסרנו יחידה אחת.
- הפתרון החדש שומר על אילוצי הביקוש כיון שבאותה עמודה הוספנו יחידה אחת אך גם החסרנו יחידה אחת.
- ג.   במקרה זה הפתרון החדש לא היה שומר על אילוצי ההיצע כיון שההיצע ממפעל 1
היה גדל בשתי יחידות וההיצע ממפעל 2 היה קטן בשתי יחידות. אילוצי הביקוש היו נשמרים.

- אם-כן לאחר שינויים אלו אנו מקבלים פתרון חדש השומר על אילוצי ההיצע והביקוש.
- פונקציית המטרה משתנה בשיעור הזה:
- $DZ = c_{11}x_{11} - c_{13}x_{13} + c_{23}x_{23} - c_{21}x_{21}$
- **שאלה 3.11**
- מהן האפשרויות שיתכנו עבור השינוי – DZ? בכל אחת מהאפשרויות, הסבירו האם קיבלנו פתרון טוב יותר מהקודם או לא ?

- יתכנו שתי אפשרויות עבור גודלו של השינוי: $Dz <= 0$ או $Dz > 0$
- עבור האפשרות הראשונה הרי ששיפרנו או לא "קלקלנו" את פונקצית המטרה, כיוון שאם ההפרש שלילי הרי העלות של התובלה קטנה ביחס לפתרון הקודם
- הפרש 0 פירושו שעלות התובלה לא השתנתה.
- אולם עבור האפשרות השנייה $Dz > 0$, הגדלנו את מחיר התובלה ו"קלקלנו" את הפתרון.

- במקרה ש- DZ חיובי, כלומר הגדלנו את ערכה של פונקצית המטרה ולכן קיבלנו פתרון פחות טוב מהקודם, נחליף את תפקידי המשתנים: $x21$ ו-$x13$ יהיו המשתנים המקבלים ולהם נוסיף יחידה, בעוד ש- $x11$ ו-$x23$ יהיו המשתנים התורמים ומהם נגרע יחידה. כך נשיג $DZ < 0$ גם עבור אפשרות זו.

- לפנינו אפוא תהליך איטרטיבי המשפר (או לא "מקלקל") את הפתרון ומבוסס על הגדלת ערכם של זוג משתנים והקטנת ערכם של זוג אחר.
- נפעיל תהליך זה פעם אחר פעם עד שאחד המשתנים יקבל את הערך אפס.
- כלומר הקטנו את מספר המשתנים הבסיסיים בפתרון תוך כדי שיפור פונקצית המטרה.

- ניתן להוכיח כי כאשר נגיע לפתרון עם $m + n - 1$ משתנים בסיסיים התהליך יעצר, כיוון שבכל פתרון אפשרי לבעיה עם $m + n - 1$ משתנים בסיסיים אין מעגל.
- **שאלה 3.12**
- א. כמה פעמים אפשר לבצע תהליך איטרטיבי זה?

- ב. בטבלה הבאה מפורטים נתוני בעיית תובלה מסויימת ופתרון לא בסיסי (4 משתנים בסיסיים במקום 3)
- הביאו את הפתרון לפתרון בסיסי. כלומר, הראו כיצד ניתן לוותר על אחד המשתנים (על-ידי הבאתו לערך אפס) באמצעות התהליך האיטרטיבי לעיל.

	יעד 1	יעד 2	היצע
מקור 1	$\boxed{2}$ 16	$\boxed{3}$ 10	26
מקור 2	$\boxed{5}$ 2	$\boxed{3}$ 8	10
ביקוש	**18**	18	

- ערך פונקציית המטרה עבור הפתרון הנוכחי הוא:
$Z = 96$. **פתרון 3.12**

- א. מספר הפעמים בהן נפעיל את התהליך שווה למשתנה התורם בעל הערך הנמוך יותר

- ברור כי אי אפשר להפעיל תהליך זה ללא סוף שהרי משתני ההחלטה אינם יכולים לקבל ערכים שליליים.

- בסיום הפעולה האחרונה מקבל משתנה זה ערך – 0. ומספר משתני הפתרון השונים מ-0 קטן כצפוי באחד.
- ב. איטרציה ראשונה: נגדיל את ערכם של המשתנים x_{11} ו- x_{22} ביחידה אחת, ואת ערכם של x_{12} ו-x_{21}, נקטין ביחידה.
- נקבל את הטבלה הבאה:

	יעד 1	יעד 2	היצע
מקור 1	2 17	3 9	26
מקור 2	5 1	3 9	10
ביקוש	**18**	18	

- מתקבל ערך פונקציית המטרה שהוא $Z = 93$.
- ערך זה קטן מערך פונקציית המטרה עבור הפתרון הקודם , לכן הוא מהווה פתרון טוב יותר.
- נמשיך אם-כן לאיטרציה הבאה: נגדיל שוב את ערכם של המשתנים $x11$ ו- $x22$, ביחידה אחת, ואת ערכם של $x12$ ו-$x21$, נקטין ביחידה. נקבל את הטבלה הבאה :

	יעד 1	יעד 2	היצע
מקור 1	$\boxed{2}$ 18	$\boxed{3}$ 8	26
מקור 2	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{3}$ 10	10
ביקוש	**18**	18	

- קיבלנו פתרון בסיסי (בן שלושה משתנים שונים מאפס) טוב יותר מהפתרון הלא בסיסי. ערך פונקציית המטרה עבור פתרון זה הוא : $Z = 90$.
- (הסבירו מדוע פונקצית המטרה ירדה ב-3 בכל איטרציה).

3.3 שיטת סימפלקס מקוצרת לבעיית התובלה

- בעיית התובלה כמו כל בעיית תכנון ליניארי אחרת, ניתנת לפתרון בשיטת הסימפלקס.
- אולם מכיוון שלבעיה תבנית ייחודית, אפשר להגיע אל הפתרון ביתר קלות.
- בסעיף זה נציג גרסה משופרת של שיטת הסימפלקס המתאימה לבעיית התובלה.
- השיטה המשופרת מבוססת על השלבים הבסיסיים של שיטת הסימפלקס.

- 1. צעד האתחול יש למצוא פתרון בסיסי אפשרי התחלתי.
- 2. שלב האיטרטיבי:
- א. מבחן האופטימליות דרושים ידיעת משוואת פונקצית המטרה הנוכחית, (שמתקבלת על-ידי החסרת כפולה מסוימת של שורה אחרת משורת אפס באיטרציה הקודמת). אם קיימים מקדמים שליליים למשתנים הלא-בסיסיים בפונקצית המטרה, אזי הפתרון הנוכחי אינו אופטימלי, **יש לעבור לפתרון בסיסי אחר**. אחרת, סיום.

- ב. המעבר לפתרון בסיסי אחר מורכב משלושת הצעדים הבאים :
- i. ב<u>בחירת המשתנה הנכנס לבסיס</u> יש למצוא את המשתנה שהמקדם שלו בפונקצית המטרה הנוכחית הוא השלילי ביותר.
- ii. <u>בקביעת המשתנה היוצא מהבסיס</u> יש לזהות את המשתנה הבסיסי הראשון שמתאפס עקב הגידול במשתנה הנכנס לבסיס.

- iii. <u>בקביעת הפתרון הבסיסי האפשרי החדש</u>

יש למצוא פתרון זה על-ידי החסרת כפולות מסוימות של שורה אחת מיתר השורות בטבלת הסימפלקס הנוכחית.

- ג. חזור למבחן האופטימליות.
- בסעיפים הבאים נתאר כיצד ניתן לבצע כל שלב, בצורה פשוטה יחסית (לשיטה האלגרית של הסימפלקס).

3.3.1 שלב האתחול (מציאת פתרון בסיסי אפשרי)

- נציג תחילה שיטה פשוטה למציאת פתרון בסיסי התחלי (המכיל $m + n - 1$ משתנים) העונים על האילוצים.
- שיטה זו נקראת "**שיטת הפינה הצפון-מערבית**".
- שיטת הפינה הצפון-מערבית היא שיטה פשוטה ליצירת פתרון בסיסי אפשרי התחלתי.
- שיטה זו פשוטה עד מאד, ובזה יתרונה.

- אולם מכיוון שהשיטה אינה עושה כל שימוש בעלויות התובלה הפתרון הבסיסי המתקבל עשוי להיות רחוק מן הפתרון האופטימלי, כך שבהמשך ידרשו איטרציות נוספות עד להגעה לפתרון האופטימלי.
- קיימות שיטות נוספות למציאת פתרון בסיסי התחלתי הנקראות:

- **"שיטת המחיר המינימלי"**
- ו**"שיטת הקירוב של ווגל"**
- שיטות אלו משיגות פתרון התחלתי משופר (ז"א מחיר תובלה זול יותר) ביחס לשיטת "הפינה הצפון-מערבית" אך עדין אינו אופטימלי.
- לא נציג שיטות אלו במסגרת קורס זה.

- ההליך לבניית פתרון בסיסי אפשרי התחלתי בוחר את $m + n - 1$ המשתנים בזה אחר זה.
- לאחר כל בחירה, נותנים למשתנה שנבחר ערך שיקיים אילוץ אחד נוסף (ועל-ידי כך מבטלים את אילוץ השורה או העמודה, כך שלא נבחן אותן עוד בקשר להקצאות).
- לאחר $m + n - 1$ בחירות, יש בידינו פתרון בסיסי שלם שנבנה בצורה כזאת כך שיקיים את כל האילוצים.

- כדי להכיר וללמוד את השיטה נשוב אל טבלה 3.1 המציגה את בעיית התובלה בחברת ***גלידות אביב*** (ללא העלויות c_{ij}), בעזרת טבלה ריקה (ללא הקצאות).

הפינה הצפון-מערבית	1	2	3	היצע
מפעלים 1				230,000
2				550,000
ביקוש	300,000	260,000	220,000	

נקבל את הטבלה הבאה:

הפינה הצפון-מערבית	1	2	3	היצע
מפעלים 1	230,000			~~230,000~~
2				550,000
ביקוש	~~300,000~~ 70,000	260,000	220,000	

- קיבלנו עתה טבלה ריקה מצומצמת יותר (ללא שורה1), אשר "המשבצת הצפון-מערבית" שלה היא $x21$.
- בעמודה המתאימה לתא זה הביקוש (המתוקן) הוא 70,000 ובשורה המתאימה לתא זה ההיצע הוא .550,000
- לכן, ההקצאה המקסימלית לתא זה היא .70,000
- הקצאה זאת כוללת את כל הביקוש (שנותר) ביעד 1, ו-70,000 מתוך ההיצע של מקור 2. נעדכן את הנתונים.

נקבל את הטבלה הבאה:

הפינה הצפון-מערבית	1	2	3	היצע
מפעלים 1	230,000			~~230,000~~
2	70,000			~~550,000~~ 480,000
ביקוש	~~300,000~~ ~~70,000~~	260,000	220,000	

השיטה ה"צפון-מערבית" – לולאה שלישית

הפינה הצפון-מערבית	1	2	3	היצע
מפעלים 1	230,000			~~230,000~~
2	70,000	260,000		~~550,000~~ 220,000
ביקוש	~~300,000~~ ~~70,000~~	~~260,000~~	220,000	

- עתה הגענו לשלב האחרון שבו הטבלה מכילה רק משבצת פנויה אחת.
- היצע במקור 2 שווה לביקוש אצל יעד 3 שהוא 220,000. ולכן $x23 = 220,000$. וקיבלנו פתרון בסיסי אפשרי.

הפתרון הבסיסי המתקבל בשיטה ה"צפון-מערבית"

הפינה הצפון-מערבית	1	2	3	היצע
מפעלים 1	230,000			~~230,000~~
2	70,000	260,000	220,000	~~550,000~~ ~~220,000~~
ביקוש	~~300,000~~ ~~70,000~~	~~260,000~~	~~220,000~~	

- קיבלנו פתרון בסיסי אפשרי (התחלתי).
- פתרון זה כולל את המשתנים:
- $x11 = 230{,}000, \quad x21 = 70{,}000,$
- $x22 = 260{,}000, \quad x23 = 220{,}000$
- כאשר מחוץ לבסיס נמצאים המשתנים:

$x12, x13$ שערכם הוא – 0.

- פתרון זה עונה על כל אילוצי ההיצע, הביקוש והאי-שליליות

- מחיר התובלה עבורו הוא:

- $Z = 2*230{,}000 + 3*70{,}000 + 5*260{,}000 + 2*220{,}000 =$ 2,410,000 ש"ח

- הבסיס מכיל 4 משתנים וזאת בהתאם לקביעה כי כל בסיס יכיל $m + n - 1$ משתנים (בדוגמה $2 + 3 - 1 = 4$).
- שיטת "הפינה הצפון-מערבית" מבטיחה גודל זה, שהרי בכל שלב אנו מוחקים שורה או עמודה, פרט לשלב האחרון בו נמחקות במקביל השורה והעמודה האחרונים.

שאלה 3.14

- מצאו פתרון בסיסי אפשרי התחלתי בשיטת הפינה הצפון-מערבית לבעיית התובלה הבאה:

הפינה הצפון-מערבית		יעדים 1	2	3	4	היצע
מקורות	1					230
	2					150
	3					540
ביקוש		220	80	280	340	

	חנויות המפעל				
	1	**2**	**3**	**4**	**היצע**
מפעלים 1	220	10			~~230~~ ~~10~~
2		70	80		~~150~~ ~~80~~
3			200	340	~~540~~ ~~340~~
ביקוש	~~220~~	~~80~~ ~~70~~	~~280~~ ~~200~~	~~340~~	

שאלה 3.15

- נתונה הטבלה הבאה:

	חנויות המפעל			היצע
	1	2	3	
מפעלים 1				230
מפעלים 2				80
מפעלים 3				200
ביקוש	220	10	280	

- ההקצאה הראשונה תהיה $x_{11} = 220$ **והקצאה זו שווה בדיוק לביקוש בעמודה 1** (ובכך מבטלים עמודה זו ולא בוחנים אותה עוד להקצאה נוספת).
- איטרציה ראשונה זו משאירה היצע של 10 בשורה 1, כך שהבחירה הבאה של משתנה בסיסי היא: $x_{1,1+1} = x_{12}$.
- מאחר שההיצע בשורה 1 איננו גדול מהביקוש של 10 בעמודה 2, כל ההיצע מוקצה כעת, כלומר $x_{12} = 10$

- ושורה זו מתבטלת כעת ואין מקצים ממנה עוד.
- הבחירה הבאה היא אפוא $x_{1+1,2} = x_{22}$
- מאחר שהביקוש הנותר בעמודה 2, שהוא 0, קטן מההיצע 80 שבשורה 2, אזי ההקצאה היא $x_{22} = 0$ ומבטלים את עמודה 2.
- נמשיך בדרך זו ונקבל לבסוף פתרון שלם שהוא בסיסי אפשרי והתחלתי, כפי שמתואר בטבלה הבאה :

		חנויות המפעל		היצע
	1	**2**	**3**	
1	220	10	–	~~230~~ ~~10~~
מפעלים 2	–	0	80	~~80~~
3	–		200	~~200~~
ביקוש	~~220~~	~~10~~	~~280~~ ~~200~~	

- בדוגמה זו ראינו כי כמו בשיטת הסימפלקס גם בשיטת "הפינה הצפון-מערבית" קיים מצב זה של תיקון שלעיתים מצביע על משתנה מנוון
- כמו-כן ראינו במהלך פתרון הדוגמה, כיצד ניתן להיחלץ ממצב זה.
- לסיכום אופן החילוץ: כאשר אנו מצויים בפינה "צפון-מערבית" כלשהי , יתכן מצב בו בלולאה מסוימת, ההיצע שווה לביקוש (או כאשר הביקוש הוא אפס).

- זהו מצב של תיקו. במקרה זה נרשום כהקצאה את הערך המשותף, אולם נעביר קו מרוסק אחד בלבד לאורך השורה או העמודה לפי רצוננו, שהרי אחרת הבסיס יכיל פחות מ- $m + n - 1$ משתנים.
- עתה נמשיך את התהליך באופן רגיל, כאשר המשתנה הבסיסי הבא יהיה שווה ל- 0 כלומר משתנה מנוון.

- **סיכום הליך כללי לבניית פתרון בסיסי אפשרי (התחלי) בשיטה הצפון-מערבית:**
- **1. התחלה:** בתחילה , כל התאים בטבלת הסימפלקס מועמדים לספק משתנה בסיסי (הקצאה).
- **2. צעד 1 :** מבין אותם תאים שעדין באים בחשבון , בחרו את התא הצפון-מערבי.

- **3. צעד 2 :** הקצו את הכמות המקסימלית לתא הנבחר (הצפון מערבי). כמות זו היא המינימום בין היצע והביקוש הנותרים המתאימים לתא זה.
- **4. צעד 3 :** בטלו את השורה או העמודה (לפי השארית הקטנה ביותר של ההיצע או של הביקוש שתא זה שייך לכן.

- **5. צעד 4 :** אם נשארה שורה אחת בלבד או עמודה אחת בלבד, אזי ההליך נשלם על-ידי בחירת כל המשתנים הנותרים (כלומר, אותם משתנים שלא נבחרו עד כה להיות בסיסיים וגם לא בוטלו כאשר בוטלה שורה או עמודה שלהם), השייכים לעמודה זו או לשורה זו, להיות משתנים בסיסיים עם ההקצאה האפשרית היחידה שנותרה.
- אחרת חזרו לצעד 1.

- **אלגוריתם ל"שיטה הצפון-מערבית"**
- נסיים סעיף זה בהצגת השגרה "**מצא בסיס התחלתי בשיטה הצפון-מערבית**",
- שגרה זו מקבלת כקלט את הפרמטרים האלה:
- m – מספר מקורות.
- n – מספר יעדים

- $s[1..m]$ –מערך ההיצעים של המקורות.
- $d[1..n]$ –מערך הביקושים של היעדים.
- השגרה יוצרת מערך דו-ממדי $x[1..m, 1..n]$ עבור משתני ההקצאה.
- ***<u>השגרה "מצא בסיס התחלתי בשיטה הצפון-מערבית"</u>***
- נתון מערך $x[i,j]$, יש להניח כי ערכי המערך x אותחלו באפסים.

מצא בסיס התחלתי בשיטה הצפון-מערבית (m, n, s, d):

- (1) $j \leftarrow 1$; $i \leftarrow 1$
- (2) בצע $m + n - 1$ פעמים את הקטע הבא:
- (2.1) $x[i,j] \leftarrow \min(s[i],d[j])$
- (2.2) אם $s[i] < d[j]$ בצע:
- (2.2.1) $d[j] \leftarrow d[j] - s[i]$
- (2.2.2) $i \leftarrow i + 1$
- (2.3) אחרת, בצע:
- (2.3.1) $s[i] \leftarrow s[i] - d[j]$
- (2.3.2) $j \leftarrow j + 1$

- **שאלה 3.16**
- מהי סיבוכיות האלגוריתם של השגרה למציאת בסיס אפשרי התחלתי בשיטת "הפינה הצפון-מערבית" המתוארת למעלה ?
- **פתרון**
- **סיבוכיות:** $O(m + n)$

3.3.2 השלב האיטרטיבי

- לאחר שמצאנו פתרון בסיסי התחלתי עלינו לבדוק אם פתרון זה הוא הפתרון האופטימלי המבוקש או שניתן לשפרו.

- ***א. מבחן האופטימליות***

- מטרת מבחן האופטימליות היא לבדוק אם אין בחירה שונה של משתנים בסיסיים המשפרת את פונקצית המטרה.

- שיפור פונקצית המטרה במקרה של בעית תובלה מתבטא בהקטנת ערכה של פונקצית המטרה.
- ***כדי לבדוק את ערכה של פונקצית המטרה נבצע את הצעדים הבאים:***
- **נאפס את מחיריהם של כל המשתנים הבסיסיים** באופן שיוצג בהמשך.
- **נחשב** מחדש את **המחירים** של **המשתנים הלא-בסיסיים**

- אם לאחד מהמשתנים הלא-בסיסיים יהיה מחיר שלילי הרי אותו משתנה לא בסיסי יכול להקטין את פונקצית המטרה ובכך לשפר אותה, **כלומר במקרה זה הפתרון הנוכחי אינו אופטימלי.**
- **דרך בדיקה זו היא תקינה כיוון ששינוי מחיר בשורה (בעמודה) אינו משנה את הפתרון האופטימלי (כל שכן את הפתרון האפשרי) אלא רק את ערכה של פונקצית המטרה.**

- לדוגמה , נניח כי נתונה בעיית התובלה בעלת הנתונים המתוארים בטבלה 3.10 (המחירים נקובים באלפי שקלים):

היצע	1	תנויות (יעדים) 2	
200	2	5	1
100	3	2	מפעלים (מקורות) 2
	80	220	ביקוש

שאלה 3.17

- א. כמה משתנים יש בפתרון בסיסי לבעייה המתוארת בטבלה 3.10 ?
- ב. כמה פתרונות בסיסיים אפשריים קיימים לבעייה בטבלה 3.10?
- ג. מהו הפתרון האופטימלי ?
- ד.מהו ערך פונקצית המטרה של הפתרון האופטימלי?

פתרון 3.17

- א. מספר המשתנים בפתרון בסיסי הוא 3 .

$$m + n - 1 = 2 + 2 - 1 = 3$$

- ב. הפתרונות הבסיסיים האפשריים הם :

$$x11 = 120 \quad , \quad x12 = 80 \quad , \quad x21 = 100$$

או

$$x11 = 200 \quad , \quad x21 = 20 \; , \quad x22 = 80$$

- ג. הפתרון האופטימלי במקרה זה ינתן על-ידי המשתנים הבסיסיים הבאים:

$$x11 = 120 \quad , \quad x12 = 80 \quad , \quad x21 = 100$$

- ד. ערך פונקצית המטרה האופטימלי שיתקבל יהיה:

$$5*120 + 2*80 + 2*100 = 960$$

- אם נשנה את המחירים בעמודה 1 על-ידי הפחתת יחידה (אלף שקל)מכל מחיר נקבל את המצב המתואר בטבלה 3.11:

	חנויות		
מפעלים	1	2	היצע
1	2	4	200
2	3	1	100
ביקוש	80	220	

- בלי לבדוק שהעלות של כל פתרון אפשרי תקטן ב-220 אלף שקל (בכל פתרון אפשרי מובילים לחנות 220,000 יחידות, והמחיר קטן ביחידה).
- ולכן הפתרון האופטימלי נשאר זהה:
- $x21 = 100$, $x12 = 80$, $x11 = 120$
- והשינוי הוא בערך פונקצית המטרה בלבד:
- $4 * 120 + 2 * 80 + 1*100 = 740$
- שקטנה כמובן ב-220 אלף שקל מהערך הקודם.

- **שאלה 3.18**
- שנו את המחירים **בשורה 2** של טבלה 3.10 על-ידי הוספת שתי יחידות לכל תא בשורה זו
- בדקו האם משתנה הפתרון הבסיסי האופטימלי?
- אם הפתרון האופטימלי אינו משתנה האם יש שינוי בפונקצית המטרה?

פתרון ◈

		1	2	היצע
מפע	1	5	2	200
לים	2	4	5	100
ביקוש		220	80	

- גם במקרה של שינוי מחירים **בשורה** כמו **בעמודה** הפתרון האופטימלי נשאר זהה:
- $x21 = 100$, $x12 = 80$, $x11 = 120$
- השינוי הוא בערך פונקצית המטרה בלבד:
- $5 * 120 + 2 * 80 + 4*100 = 1,160$
- הערך גדל ב-200, כיוון שעלות ההובלה לכל יחידת מוצר שיוצאת מהמפעל (סה"כ 200 יחידות) גדל ב-2.

- **מסקנה:** נוכל לשנות את המחירים (בסכום קבוע) **בכל שורה** או **בכל עמודה** ולראות כי הרכב המשתנים הבסיסיים בפתרון הבסיסי האופטימלי נשאר אותו דבר, השינוי הוא בפונקצית המטרה בלבד.
- כפי שראינו בשיטת הסימפלקס כדי לבדוק אופטימליות יש 'לאפס' את מחירי המשתנים הבסיסיים מפונקצית המטרה.

- איפוס מחירי המשתנים הבסיסיים בבעיות תובלה יבוצע כך:
- הפחתת הערך u_i(ערך קבוע המתאים לצורך איפוס מחירי המשתנים הבסיסיים, אופן חישוב ערך זה יוסבר בהמשך) מכל המחירים בשורה i .
- וגם הפחתת הערך v_j מכל המחירים בעמודה j באופן שיתקבל $c_{ij} - u_i - v_j = 0$ עבור כל משתנה בסיסי.

- את ערכי u_i ו- v_j נקבל על-ידי פתירת מערכת המשוואות $c_{ij} - u_i - v_j = 0$ עבור כל i ו- j שעבורם x_{ij} הוא משתנה בסיסי.
- עבור כל משתנה לא-בסיסי נחשב את המחיר החדש c_{ij} על ידי הפחתת u_i של השורה בה הוא נמצא והפחתת v_j של העמודה בה הוא נמצא.

- כלומר נחשב עבור כל משתנה לא בסיסי את ערך הביטוי $c_{ij} - u_i - v_j$
- אם ימצא משתנה לא בסיסי שערך זה, כלומר מחירו החדש שלילי הרי יש להוסיפו כמשתנה בסיסי לפתרון ולהוציא משתנה אחר במקומו והפתרון הנוכחי אינו אופטימלי.

- **המסקנה** היא שהמידע היחיד הדרוש לשיטת הסימפלקס לתובלה פרט לנתוני הקלט (ערכי c_{ij}, s_i ו-d_j) הוא הפתרון הבסיסי האפשרי הנוכחי, הערכים הנוכחיים של u_i ו-v_j והערכים של $c_{ij} - u_i - v_j$ עבור המשתנים הלא בסיסיים x_{ij}.

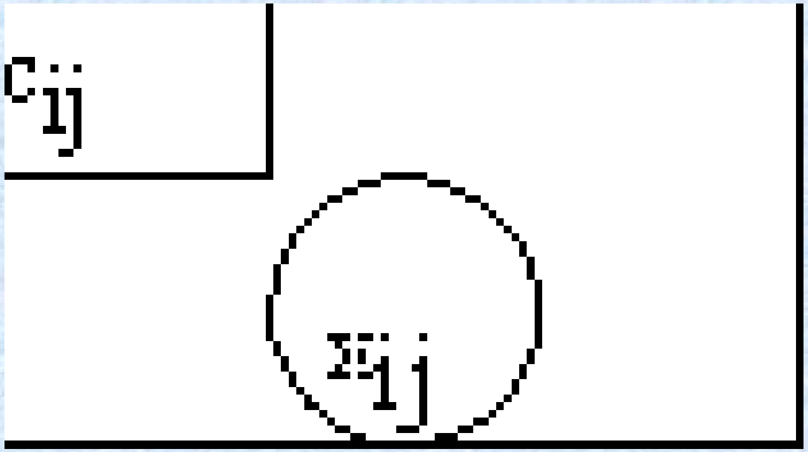
- בזמן פתירת בעיה בחישוב ידני, נוח לרשום את המידע הזה בכל איטרציה **בטבלת הסימפלקס לתובלה** כמתואר בטבלה 3.12 בשקופית הבאה:
- כזכור הפתרון הבסיסי ההתחלתי (אותו קיבלנו בשיטה "הצפון-מערבית") הוא:
- $x_{11} = 230{,}000, \quad x_{21} = 70{,}000,$
- $x_{22} = 260{,}000, \quad x_{23} = 220{,}000$

		יעדים				ui
		1	**2**	**3**		
מקורות	1	2 (230,000)	4	5	230,000	
	2	3 (70,000)	5 (260,000)	2 (220,000)	550,000	
ביקוש		300,000	260,000	220,000		Z=2,410,000
	v_j					

א

- כאשר מחוץ לבסיס נמצאים המשתנים: $x_{12},\ x_{13}$
וערכם הוא – 0.

- שימו לב, בטבלה 3.12 הקפנו בעיגול כל x_{ij}
שהוא משתנה בסיסי (כלומר שונה מאפס):



◈ ***<u>מבחן האופטימליות לבעיית התובלה:</u>***

◈ **פתרון בסיסי אפשרי הוא אופטימלי אם ורק אם $(c_{ij} - u_i - v_j) \geq 0$ לכל (i, j) שעבורם x_{ij} הוא משתנה לא-בסיסי.**

◈ כלומר, המחירים חייבים להיות אי-שליליים.

◈ לכן, החישובים היחידים הנדרשים על-ידי מבחן האופטימליות הם מציאת ערכי u_i ו-v_j ***<u>עבור הפתרון הבסיסי האפשרי הנוכחי .</u>***

- לאחר מכן חישוב $(c_{ij} - u_{\mathrm{i}} - v_j)$ מאחר ש- $(c_{ij} - u_i - v_j)$ נדרש להיות אפס עבור כל x_{ij} שהוא משתנה בסיסי.
- הרי ש- u_i ו- v_{j} מקיימים את מערכת המשוואות:

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

לכל (i,j) כך ש- x_{ij} הוא משתנה בסיסי.

- עבור x_{21} : $u_2 + v_1 = \; = 3 \; c_{21}$
- עבור x_{22} : $u_2 + v_2 = \; = 5 \; c_{22}$
- עבור x_{23} : $u_2 + v_3 = \; = 2 \; c_{23}$
- עבור x_{11} : $u_1 + v_1 = \; = 2 \; c_{11}$
- קיימים $(m + n - 1)$ משתנים בסיסיים, ולכן יש לנו $(m + n - 1)$ משוואות.

- מאחר שמספר המשתנים (ה-u_i וה-v_j) הוא $(m + n)$, אפשר לתת **ערך שרירותי** לאחד המשתנים בלי להפר את המשוואות.
- הכלל שנאמץ הוא לתת את הערך אפס לאותו u_i שמספר המופעים שלו במשוואות הוא הגדול ביותר – כלומר שיש לו את מספר ההקצאות הגדול ביותר בשורה ועמודה שלו.

- בדוגמא ל- u_2 מספר המופעים הגדול ביותר ולכן נבחר $u_2 = 0$.
- פותרים את המשוואות בזו אחר זו, ומקבלים את ערכי המשתנים:
- $u_1 = -1 \quad v_1 = 3 \quad v_2 = 5 \quad v_3 = 2$
- עתה נוסיף למידע בטבלה 3.12 את הערך $c_{ij} - u_i - v_j$ בתאים של משתנה לא-בסיסי:

◈ נקבל:

c_{ij}	
	$c_{ij} - u_i - v_j$

◈ שימו לב שההבחנה בין ערכי x_{ij} לערכי $(c_{ij} - u_i - v_j)$ בטבלאות אלה נעשית על-ידי כך שמקיפים בעיגול את x_{ij}, אך לא את הביטוי $(c_{ij} - u_i - v_j)$.

- לאחר שנקבל את כל ערכי u_i ו- v_j נרשום אותם במקומם בטבלה ובנוסף נחשב ונמלא את ערכי $(c_{ij} - u_i - v_j)$ <u>***עבור כל משתנה x_{ij} שאינו בסיסי***</u> (כלומר, עבור כל תא שאין לו הקצאה מוקפת במעגל):
- $c_{12} - u_1 - v_2 = 4 + 1 - 5 = 0$
- $c_{13} - u_1 - v_3 = 5 + 1 - 2 = 4$

◈ ונקבל את הטבלה הבאה:

		יעדים				u_i
		1	**2**	**3**		
	1	2 230,000	4 **0**	5 **4**	230,000	**-1**
מקורות	2	3 70,000	5 260,000	2 220,000	550,000	**0**
ביקוש		300,000	260,000	220,000		Z=2,410,000
v_j		**3**	**5**	**2**		

- כעת אנו במצב המאפשר ליישם את מבחן האופטימליות על-ידי בדיקת ערכי $(c_{ij} - u_i - v_j)$ הנתונים בטבלה.
- הואיל ו-2 ערכים אלה הם **אי-שליליים** הרי **שהפתרון הבסיסי האפשרי הנוכחי הוא אופטימלי**.

- בדרך כלל, לא נגיע אל הפתרון האופטימלי כבר בצעד הראשון
- לכן בכדי להכיר את האלגוריתם השלם לפתרון בעיות תובלה נבחן את מבחן האופטימליות עבור פתרון בסיסי התחלתי אחר שאינו אופטימלי.
- באופן זה נראה כיצד האלגוריתם לפתרון בעיות תובלה מביא אותנו אל הפתרון האופטימלי.
- תיאורו של הפתרון הבסיסי האחר מופיע בטבלה זו

א

		יעדים			היצע	u_i
		1	**2**	**3**		
מקורות	1	$\boxed{2}$ 10,000	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$ 220,000	230,000	
	2	$\boxed{3}$ 290,000	$\boxed{5}$ 260,000	$\boxed{2}$	550,000	
	ביקוש	300,000	260,000	220,000		Z=3,290,000
	v_j					

- ניתן להבחין כי פתרון זה פחות טוב מהקודם כיון שערך פונקצית המטרה Z גבוה יותר.
- כלומר, פתרון זה מציע תובלה בעלות גבוהה יותר מאשר עלות התובלה לפי הפתרון הקודם.
- נתבונן אם-כן, במשוואות המתאימות למשתנים הבסיסיים בפתרון הבסיסי המופיע בטבלה זו.
- המשוואות המתאימות בפתרון ההתחלתי החדש:

- x_{11} : $c_{11} = 2 = u_1 + v_1$ בחירת $u_1 = 0 \Leftarrow v_1 = 2$

  x_{13}: $c_{13} = 5 = u_1 + v_3$ בחירת $u_1 = 0 \Leftarrow v_3 = 5$
- x_{21}: $c_{21} = 3 = u_2 + v_1$ ידוע ש- $v_1 = 2 \Leftarrow u_2 = 1$
- x_{22} : $c_{22} = 5 = u_2 + v_2$ ידוע ש- $u_2 = 1 \Leftarrow v_2 = 4$
- ניתן לבחור $u1 = 0$ כיוון של- u_1 ול- u_2 מספר הקצאות זהה.

- עתה נחשב את ערכי $(c_{ij} - u_i - v_j)$ עבור כל משתנה x_{ij} שאינו בסיסי:
- $c_{12} - u_1 - v_2 = 4 - 0 - 4 = 0$
- $c_{23} - u_2 - v_3 = 2 - 1 - 5 = -4$
- ונקבל את טבלה 3.15 שהיא טבלת הסימפלקס לתובלה ההתחלתית השלמה עבור הפתרון ההתחלתי החדש:

		יעדים			היצע	u_i א
		1	**2**	**3**		
	1	$\boxed{2}$ 10,000	$\boxed{4}$ **0**	$\boxed{5}$ 220,000	230,000	0
מקורות	2	$\boxed{3}$ 290,000	$\boxed{5}$ 260,000	$\boxed{2}$ **- 4**	550,000	**1**
ביקוש		300,000	260,000	220,000		Z=3,290,000
v_j		2	4	5		

- כיוון ש-$c_{23} - u_2 - v_3 = -4 < 0$ הרי שהפתרון הבסיסי הנוכחי אינו אופטימלי.
- יש אם-כן למצוא פתרון טוב יותר.

ב. מציאת המשתנה הנכנס לבסיס

- $(c_{ij} - u_i - v_j)$ מציין את שיעור השינוי בפונקצית המטרה עם הגידול במשתנה הלא בסיסי x_{ij}.
- לכן, הערך של $(c_{ij} - u_i - v_j)$ השייך למשתנה הנכנס לבסיס צריך להיות **שלילי** כדי להקטין את סך כל העלות Z.
- לכן המועמד לכניסה לבסיס בטבלה 3.15 הוא: x_{23}.

- אם היו מספר מועמדים מבין המשתנים הלא בסיסיים היינו בוחרים את אותו משתנה בעל ערך **שלילי גדול ביותר** של $(c_{ij} - u_i - v_j)$ כמשתנה הנכנס לבסיס.
- אם כן במקרה שלנו יבחר $x23$ **כמשתנה הנכנס לבסיס** .

ג. מציאת המשתנה היוצא מהבסיס

- הגדלת המשתנה הנכנס מאפס פותחת תגובת שרשרת של שינויים במשתנים הבסיסיים (הקצאות) האחרים, כדי להמשיך ולקיים את אילוצי ההיצע והביקוש.
- המשתנה הבסיסי הראשון שמתאפס הוא **המשתנה היוצא מהבסיס.**

- המשתנה הנכנס לבסיס, x_{23}, יוצר מעגל ביחד עם חלק מהמשתנים הבסיסיים (במקרה שלנו x_{23}, x_{21}, x_{13}, x_{11} – ראה טבלה 3.16) תגובת שרשרת.

- **טבלה 3.16** תגובת השרשרת הנגרמת בעקבות הגדלת המשתנה הנכנס לבסיס x_{23}

		יעדים			היצע	u_i א
		1	2	3		
מקורות	1	2 Å 10,000	4 0	5 y 220,000	230,000	0
	2	3 y 290,000	5 260,000	2 Å - 4	550,000	**1**
ביקוש		300,000	260,000	220,000		Z=3,290,000
v_j		2	4	5		

- לפי תנאי האופטימליות, הכנסתו של x_{23} לפתרון הבסיסי החדש – תשפר את הפתרון האופטימלי.
- אם ***נגדיל את*** $\boldsymbol{x_{23}}$ ביחידה (שינוי זה יסומן ב-(+)) בתא המתאים (2,3)), עלינו ***להקטין את*** $\boldsymbol{x_{13}}$ ***ואת*** $\boldsymbol{x_{21}}$ ביחידה, ***ולהגדיל את*** $\boldsymbol{x_{11}}$ ביחידה – בכדי לשמור על קיום אילוצי הביקוש וההיצע.
- שינויים אלה מסומנים ב-(+) או ב-(-) בהתאמה בתאים המתאימים).

- התוצאה היא שהתאים (1,1) ו-(2,3) הופכים **לתאים** מקבלים כל אחד מהם מקבל תוספת הקצאה מאחד **התאים התורמים** (1,3) ו-(2,1).
- תאים אלו מסומנים בטבלה 3.16 על ידי סימני + ו- -.
- כל תא תורם מקטין את ההקצאה שלו בדיוק באותו ערך שבו גדל המשתנה הנכנס לבסיס (ותאים מקבלים אחרים).

- לכן, התא התורם שיש בו ההקצאה הקטנה ביותר, תא (1,3) במקרה שלנו , יגיע ראשון להקצאה אפס כאשר המשתנה הנכנס לבסיס, x_{23}, גדל.
- כלומר מקבלים ש- x_{13} הוא **המשתנה היוצא מהבסיס.**
- **באופן כללי, ישנה רק תגובת שרשרת אחת**

- לאחר זיהוי תגובת השרשרת, התא התורם בעל ההקצאה **הקטנה ביותר** מספק אוטומטית את המשתנה היוצא מהבסיס.
- במקרה שיש יותר מתא תורם אחד עם הקצאה מינימלית, בוחרים אחד מהם באופן שרירותי כתא בעל המשתנה היוצא מהבסיס.

ד. זיהוי הפתרון הבסיסי האפשרי החדש

- זיהוי הפתרון הבסיסי החדש מתבצע פשוט על-ידי הוספת ערך המשתנה היוצא מהבסיס (לפני כל שינוי שהוא) להקצאות בכל תא מקבל, והחסרת **אותו ערך** מההקצאות בכל אחד מהתאים התורמים.
- המשתנה היוצא מהבסיס x_{23} הוא 220,000, כך נקבל את השינויים המתוארים בטבלה 3.17.

א

		יעדים			היצע	u_i
		1	2	3		
מקורות	1	$\boxed{2}$ 230,000	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	230,000	
	2	$\boxed{3}$ 70,000	$\boxed{5}$ 260,000	$\boxed{2}$ 220,000	550,000	
ביקוש		300,000	260,000	220,000		Z=2,410,000
v_j						

מאחר ש- $x_{23} = 0$ איננו משתנה בסיסי בפתרון החדש, אין מציינים את ערכו בטבלה החדשה.

הפתרון הבסיסי המופיע בטבלה 3.17 הוא הפתרון האופטימלי כפי שהראינו בתחילת סעיף זה בטבלה 3.12. לכן אין צורך לבצע את האיטרציה השניה.

העלות הכוללת משתנה בשיעור :

$$Z = 220{,}000(c_{23} - u_2 - v_3) =$$
$$= 220{,}000(-4) \quad = \; -880{,}000$$

שאלה 3.19

- להלן פתרון בסיסי אפשרי לבעיית תובלה שנתוניה מצויים בטבלה הבאה:

		יעדים				היצע	u_i
		1	2	3	4		
מקורו	1	$\boxed{5}$ 220	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	230	
	2	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$ 70	$\boxed{5}$ 80	$\boxed{3}$	150	
	3	$\boxed{7}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 200	$\boxed{3}$ 340	540	
ביקוש		220	80	280	340		Z= 3350
v_j							

- א. אם הפתרון הבסיסי הנוכחי אופטימלי?
- ב. המשיכו את האיטרציות הדרושות בשיטת הסימפלקס לתובלה, עד שתגיעו לפתרון האופטימלי.
- כדי להחליט האם הפתרון הבסיסי הנוכחי אופטימלי נמצא את ערכי u_i ו- v_j עבור פתרון זה.
- המשוואות המתאימות למשתנים הבסיסיים בפתרון ההתחלתי שלנו :

- $x11$: $u1 + v1 = 5$ בחירת $u1 = 0$ $\Leftarrow$ $v1 = 5$

- $x12$: $u1 + v2 = 2$ $\Leftarrow$ $v2 = 2$
- $x22$: $u2 + v2 = 3$ ידוע ש- $v2 = 2$ $\Leftarrow$ $u2 = 1$
- $x23$: $u2 + v3 = 5$ ידוע ש- $u2 = 1$ $\Leftarrow$ $v3 = 4$
- $x33$: $u3 + v3 = 3$ ידוע ש- $v3 = 4$ $\Leftarrow$ $u3 = -1$
- $x34$: $u3 + v4 = 3$ ידוע ש- $u3 = -1$ $\Leftarrow$ $v4 = 4$

איטרציה ראשונה: טבלת סימפלקס לתובלה ההתחלתית השלמה

א

	יעדים				היצע	u_i
	1	2	3	4		
1	5 / 220	2 / 10	4 / 0	2 / -2	230	0
מקורות 2	2 / -4	3 / 70	5 / 80	3 / -2	150	1
3	7 / 3	4 / 3	3 / 200	3 / 340	540	-1
ביקוש	220	80	280	340		Z= 3350
v_j	5	2	4	4		

- נבדוק את האופטימליות על-ידי בדיקת ערכי ($cij - ui - vj$) הנתונים בטבלה שלמעלה.
- הואיל ו-3 מערכים אלה הם שליליים:
- $c14 - u1 - v4 = -2$
- $c21 - u2 - v1 = -4$
- $c24 - u2 - v4 = -2$
- הרי שהפתרון הבסיסי האפשרי הנוכחי אינו אופטימלי. עלינו אם-כן למצוא פתרון בסיסי טוב יותר.

- **<u>איטרציה ראשונה</u>**: מציאת משתנה הנכנס לבסיס
- נבחר את אותו משתנה בעל ערך **שלילי גדול ביותר** של $(c_{ij} - u_i - v_j)$ **כמשתנה הנכנס לבסיס**, שהוא במקרה שלנו x_{21}.
- **<u>איטרציה ראשונה</u>**: מציאת משתנה היוצא מהבסיס
- ***המשתנה הנכנס לבסיס***, x_{21}, יוצר תגובת שרשרת *אותה רואים* בטבלה הבאה :

	1	2	3	4	היצע	u_i
	יעדים					א
מקורו 1	5 y 220	2 Å 10	4 0	2 -2	230	0
2	2 Å -4	3 y 70	5 80	3 -2	150	1
m	7 3	4 3	3 200	3 340	540	-1
ביקוש	220	80	280	340		Z= 3350
v_j	5	2	4	4		

- התוצאה נטו היא שהתאים (1,2) ו-(2,1) הופכים **לתאים מקבלים** כל אחד מהם מקבל תוספת הקצאה מאחד **התאים התורמים** (1,1)ו-(2,2).
- תאים אלו מסומנים בטבלה שלמעלה, על ידי סימני (+) ו- (-).
- לכן, **המשתנה היוצא מהבסיס הוא** $x22$ כי יש בו ההקצאה הקטנה ביותר.

לתובלה המראה את השינויים בפתרון הבסיסי האפשרי לאחר האיטרציה הראשונה

		£§£¬				£°¬	u_i
		1	2	3	4		
	1	5 y 150	2 Å 80	4	2	230	
´²¨±	2	2 Å 70	3 y	5 80	3	150	
	m	7	4	3 200	3 340	540	
³‹±£		220	80	280	340		Z =3070
	v_j						

המשוואות המתאימות למשתנים הבסיסיים בפתרון זה :

- $x11$: $u1 + v1 = 5$ בחירת $u1 = 0$ $\Leftarrow$ $v1 = 5$
- $x12$: $u1 + v2 = 2$ $\Leftarrow$ $v2 = 2$
- $x21$: $u2 + v1 = 2$ ידוע ש- $v1 = 5$ $\Leftarrow$ $u2 = -3$
- $x23$: $u2 + v3 = 5$ ידוע ש- $u2 = -3$ $\Leftarrow$ $v3 = 8$
- $x33$: $u3 + v3 = 3$ ידוע ש- $v3 = 8$ $\Leftarrow$ $u3 = -5$
- $x34$: $u3 + v4 = 3$ ידוע ש- $u3 = -5$ $\Leftarrow$ $v4 = 8$

◈ לכן נקבל:

	יעדים 1	2	3	4	היצע	u_i
מקורות 1	5 y 150	2 80	4 -4	2 Å -6	230	0
2	2 Å 70	3 4	5 y 80	3 -2	150	-3
m	7 7	4 7	3 Å 200	3 y 340	540	-5
ביקוש	220	80	280	340		Z= 2620
v_j	5	2	8	8		

- ***המשתנה הנכנס לבסיס*** יהיה המשתנה הלא-בסיסי x_{14} בעל הערך **השלילי הגדול ביותר** ל-$(-6) = (c_{ij} - u_i - v_j)$.
- ***המשתנה היוצא מהבסיס*** יהיה המשתנה הבסיסי x_{23} שהוא המשתנה הבסיסי בעל הערך **הקטן ביותר** מבין התאים התורמים.
- הפתרון החדש מתואר בטבלה הבאה:

	יעדים				היצע	u_i
	1	**2**	**3**	**4**		
1	$\boxed{5}$ 70	$\boxed{2}$ 80	$\boxed{4}$ 2	$\boxed{2}$ 80	230	0
מקורות **2**	$\boxed{2}$ 150	$\boxed{3}$ 4	$\boxed{5}$ 6	$\boxed{3}$ 4	150	-3
m	$\boxed{7}$ 1	$\boxed{4}$ 1	$\boxed{3}$ 280	$\boxed{3}$ 260	540	1
ביקוש	220	80	280	340		Z= 2590
v_j	5	2	2	2		

איטרציה שנייה:

- המשוואות המתאימות למשתנים הבסיסיים בפתרון זה:
- :$x11$ $u1 + v1 = 5$ בחירת $u1 = 0$ $\Leftarrow$ $v1 = 5$
- :$x12$ $u1 + v2 = 2$ $\Leftarrow$ $v2 = 2$
- :$x14$ $u1 + v4 = 2$ $\Leftarrow$ $v4 = 2$
- :$x21$ $u2 + v1 = 2$ ידוע ש- $v1 = 5$ $\Leftarrow$ $u2 = -3$
- :$x34$ $u3 + v4 = 3$ ידוע ש- $v4 = 2$ $\Leftarrow$ $u3 = 1$
- :$x33$ $u3 + v3 = 3$ ידוע ש- $u3 = 1$ לכן $v3 = 2$

- ניתן לראות כי ערכי $(c_{ij} - u_i - v_j)$ חיוביים עבור כל המשתנים הלא-בסיסיים לכן זהו הפתרון האופטימלי וערכיו הם:
- $x11 = 70, \quad x12 = 80, \quad x14 = 80, \quad x21 = 150, \quad x33 = 280, \quad x34 = 260$
- ערך Z פונקצית המטרה עבור פתרון זה הוא:
- $70 * 5 + 80 * 2 + 80 * 2 + 150 * 2 + 280 * 3 + 260 * 3 = 2590$

- 2590ש"ח זהו המחיר האפשרי הזול ביותר בבעיית התובלה שבתרגיל זה.
- ***<u>סיכום – שיטת הסימפלקס לתובלה</u>***
- לסיכום נציג טבלה המכילה תצורה כללית של טבלת הסימפלקס לתובלה, ואת שיטת הפתרון של בעיית תובלה בעזרת הסימפלקס בעזרת אלגוריתם בשפה מבנית.

טבלה 3.18 תצורה כללית של טבלת הסימפלקס לתובלה

מקורות	יעדים				היצע	u_i
	1	2	…	n		
1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	s_1	
2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	s_2	
:	:	:	:	:	:	
m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	s_m	
ביקוש	d1	d2	…	dn		Z =
v_j						

- (1) **שלב אתחול:** בנה פתרון בסיסי אפשרי התחלתי לפי השיטה "הצפון-מערבית"
- (2) **שלב איטרטיבי :**
- (2.1) ***מבחן האופטימליות:*** *מצא את ערכי* u_i *ו-*v_j *על-ידי בחירת השורה בעלת המספר הגדול ביותר של ההקצאות וקביעת* u_i *לאפס עבור שורה זאת, ואז פתור את מערכת המשוואות* $c_{ij} = u_i + v_j$ *עבור כל* (i,j) *שעבורם* x_{ij} *הוא* ***משתנה בסיסי.***

אם $(c_{ij} = u_i + v_j) \geq 0$ לכל (i,j) שעבורם x_{ij} הוא משתנה **לא-בסיסי**, אזי הפתרון הנוכחי הוא הפתרון האופטימלי, ולכן **עצור**. אחרת, עבור לשלב 2.2.

(2.2) **קבע את המשתנה הנכנס לבסיס :** בחר את המשתנה הלא-בסיסי x_{ij} בעל הערך **השלילי הגדול ביותר** ל-$(c_{ij} = u_i + v_j)$.

- (2.3)**קבע את המשתנה היוצא מהבסיס :** זהה את תגובת השרשרת הנדרשת כדי לקיים את האילוצים כאשר המשתנה הנכנס גדל בערכו. מבין התאים התורמים, בחר את המשתנה הבסיסי בעל הערך **הקטן ביותר.**
- (2.4)**קבע את הפתרון הבסיסי האפשרי החדש :** הוסף את ערך המשתנה היוצא להקצאה של כל תא מקבל. החסר ערך זה מההקצאה של כל תא תורם.
- (2.5)חזור לשלב 2.1