



תרגיל 2 להגשה בתכנון וניתוח אלגוריתמים (קורס מס' 10120)
מרצים: ד"ר ראובן חוטובלי ד"ר אנדרי דולגין

תאריך הגשה: 10.5.2016. העבודה בזוגות. עליכם למלא את הטבלה בקובץ WORD המצורף לתרגיל ולהגיש את הקובץ עם הטבלה בלבד.

התיאור המובא להלן מתייחס לשאלות 1 עד 4 כולל.

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון ופשוט. להלן נתון אלגוריתם יעיל למציאת קבוצת צמתים מינימלית $Z \subseteq V$ כך שלכל $v \in V$ קיים $z \in Z$ ממנו ישנו מסלול מכוון ל- v .

תאור האלגוריתם:

1. נריץ על G את האלגוריתם (1) _____.
2. נבנה את (2) _____ ונסמנו ב- G^{SCC} .
3. לכל צומת C ב- G^{SCC} אשר (3) _____ נבחר צומת $c \in C$ ונכניסו ל- Z .

באלגוריתם הנ"ל חסרים שלושה ביטויים המסומנים במספרים בסוגריים עגולים. התשובות הנכונות עבור כל אחד מהביטויים החסרים מופיעות בשאלות הבאות:

שאלה 1

התשובה הנכונה עבור ביטוי (1) לעיל היא:

- א. DFS.
- ב. BFS.
- ג. מיון טופולוגי.
- ד. למציאת הרק"חים.

שאלה 2

התשובה הנכונה עבור ביטוי (2) לעיל היא:

- א. עץ/יער פורש DFS.
- ב. עץ/יער פורש BFS.
- ג. סידור צמתים לפי מיון טופולוגי.
- ד. גרף על.

שאלה 3

התשובה הנכונה עבור ביטוי (3) לעיל היא :

- א. דרגת הכניסה שלו שווה ל-0.
- ב. דרגת היציאה שלו שווה ל-0.
- ג. שייך למעגל מכוון.
- ד. הינו רק"ח.

שאלה 4

סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הנתון (יש לבחור ערך הדוק ביותר) :

- א. $O(|V| + |E|)$
- ב. $O(|V| \cdot |E|)$
- ג. $O(|V| \log |V| + |E|)$
- ד. $O(|V|^2)$

התיאור המובא להלן מתייחס לשאלות 5 עד 10 כולל.

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון. להלן נתון אלגוריתם יעיל אשר בהינתן זוג צמתים $s, t \in V$ מוצא קבוצה $K \subseteq E$ של כל הקשתות דרכן עובר לפחות מסלול קצר ביותר אחד מ- s ל- t .

תאור האלגוריתם :

1. נריץ על G את האלגוריתם (1) _____ החל מצומת (2) _____.
2. נבנה גרף $G' = (V', E')$ כאשר (3) _____.
3. נריץ על G' את האלגוריתם DFS החל מצומת (4) _____ תוך סימון זמני עזיבה לצמתים $f(v)$.
4. נחזיר את הקבוצה (5) _____.

באלגוריתם הנ"ל חסרים חמישה ביטויים המסומנים במספרים בסוגריים עגולים. התשובות הנכונות עבור כל אחד מהביטויים החסרים מופיעות בשאלות הבאות :

שאלה 5

התשובה הנכונה עבור ביטוי (1) לעיל היא :

- א. DFS
- ב. BFS
- ג. Dijkstra
- ד. Bellman-Ford

שאלה 6

התשובה הנכונה עבור ביטוי (2) לעיל היא :

- א. s .
- ב. t .
- ג. כלשהו.
- ד. בעל דרגת כניסה מקסימלית.

שאלה 7

התשובה הנכונה עבור ביטוי (3) לעיל היא :

- א. $V' = V \setminus \{s, t\}, E' = E$.
- ב. $V' = V, E' = \{(u, v) \mid (v, u) \in E\}$.
- ג. $V' = V \setminus \{s, t\}, E' = \{(u, v) \mid (v, u) \in E\}$.
- ד. $V' = V, E' = \{(u, v) \mid (v, u) \in E \wedge d(u) = d(v) + 1\}$.

שאלה 8

התשובה הנכונה עבור ביטוי (4) לעיל היא :

- א. s .
- ב. t .
- ג. כלשהו.
- ד. בעל דרגת כניסה מקסימלית.

שאלה 9

התשובה הנכונה עבור ביטוי (5) לעיל היא :

- א. $K = \{(u, v) \in E \mid f(u), f(v) \geq f(t)\}$.
- ב. $K = \{(u, v) \in E \mid f(u), f(v) \leq f(t)\}$.
- ג. $K = \{(u, v) \in E \mid f(u), f(v) \leq f(s)\}$.
- ד. $K = \{(u, v) \in E \mid f(u), f(v) \geq f(s)\}$.

שאלה 10

סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הנתון (יש לבחור ערך הדוק ביותר) :

- א. $O(|V| + |E|)$.
- ב. $O(|V| \cdot |E|)$.
- ג. $O(|V| \log |V| + |E|)$.
- ד. $O(|V|^2)$.

התיאור המובא להלן מתייחס לשאלות 11 עד 17 כולל.

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון וקשיר בחוזקה. להלן נתון אלגוריתם יעיל אשר בהנתן קבוצת צמתים $Z \subseteq V$ מחזיר TRUE אם כל מעגל פשוט ב- G עובר דרך לפחות צומת אחד מ- Z , ו- FALSE – אחרת. אם אין מעגלים מכוונים ב- G , יוחזר גם NO_CIRCLE.

תאור האלגוריתם :

1. נריץ על G את האלגוריתם (1) _____.
2. אם (2) _____ נחזיר תשובה TRUE, NO_CIRCLE.
3. נבנה גרף $G' = (V', E')$ כאשר (3) _____.
4. נריץ על G' את האלגוריתם (4) _____.
5. אם (2) _____ נחזיר תשובה (5) _____.
6. אחרת נחזיר (6) _____.

באלגוריתם הנ"ל חסרים שישה ביטויים המסומנים במספרים בסוגריים עגולים. התשובות הנכונות עבור כל אחד מהביטויים החסרים מופיעות בשאלות הבאות :

שאלה 11

התשובה הנכונה עבור ביטוי (1) לעיל היא :

- א. DFS
- ב. BFS
- ג. Euler
- ד. למציאת הרק"חים.

שאלה 12

התשובה הנכונה עבור ביטוי (2) לעיל היא :

- א. נמצאה קשת קדמית.
- ב. נמצאה קשת אחורית.
- ג. לא נמצאה קשת קדמית.
- ד. לא נמצאה קשת אחורית.

שאלה 13

התשובה הנכונה עבור ביטוי (3) לעיל היא :

- א. $V' = V \setminus Z, E' = \{(u, v) \mid (v, u) \in E \wedge v, u \in V'\}$
- ב. $V' = V, E' = \{(u, v) \mid (v, u) \in E \wedge v, u \in V'\}$
- ג. $V' = V \setminus Z, E' = \{(u, v) \mid (u, v) \in E \wedge u, v \in V'\}$
- ד. $V' = V, E' = \{(u, v) \mid (u, v) \in E \wedge u, v \in V'\}$

שאלה 14

התשובה הנכונה עבור ביטוי (4) לעיל היא :

- א. DFS
- ב. BFS
- ג. Euler
- ד. למציאת הרק"חים.

שאלה 15

התשובה הנכונה עבור ביטוי (5) לעיל היא :

- א. TRUE.
- ב. FALSE.
- ג. TRUE, NO_CIRCLE.
- ד. FALSE, NO_CIRCLE.

שאלה 16

התשובה הנכונה עבור ביטוי (6) לעיל היא :

- א. TRUE.
- ב. FALSE.
- ג. TRUE, NO_CIRCLE.
- ד. FALSE, NO_CIRCLE.

שאלה 17

סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הנתון (יש לבחור ערך הדוק ביותר) :

- א. $O(|V| + |E|)$.
- ב. $O(|V| \cdot |E|)$.
- ג. $O(|V| \log |V| + |E|)$.
- ד. $O(|V|^2)$.

התיאור המובא להלן מתייחס לשאלות 18 עד 23 כולל.

יהי $G = (V, E)$ גרף **מכוון** עם פונקציית משקל על הקשתות $w: E \rightarrow \mathbb{R}^+$. להלן נתון אלגוריתם **יעיל** אשר בהנתן זוג צמתים $s, t \in V$, מוצא משקל של מסלול קל ביותר מבין המסלולים בעלי אורך (מספר קשתות) אי-זוגי מ- s ל- t .

תאור האלגוריתם :

1. נבנה גרף $G' = (V', E')$ כאשר V' מוגדר (1) _____ ו- E' מוגדר (2) _____.
2. נגדיר פונקציית משקל w' לקשתות בגרף החדש G' : (3) _____.
3. נריץ על G' את האלגוריתם (4) _____ החל מצומת (5) _____.
4. נחזיר את הערך $d(t_1)$.

באלגוריתם הנ"ל חסרים **חמישה** ביטויים המסומנים במספרים בסוגריים עגולים. התשובות הנכונות עבור כל אחד מהביטויים החסרים מופיעות בשאלות הבאות :

שאלה 18

התשובה הנכונה עבור ביטוי (1) לעיל היא :

- א. $V' = V \setminus \{s, t\}$.
- ב. $V' = V$.
- ג. $V' = \{v_0, v_1 \mid v \in V\}$.
- ד. $V' = \{v, v' \mid v \in V\}$.

שאלה 19

התשובה הנכונה עבור ביטוי (2) לעיל היא :

- א. $E' = E$
- ב. $E' = \{(u, v) \mid (v, u) \in E\}$
- ג. $E' = \{(u_0, v_0), (u_1, v_1) \mid (u, v) \in E\}$
- ד. $E' = \{(u_0, v_1), (u_1, v_0) \mid (u, v) \in E\}$

שאלה 20

התשובה הנכונה עבור ביטוי (3) לעיל היא :

- א. $w'(u, v) = w(u, v) + 1$
- ב. $w'(u, v) = w(v, u)$
- ג. $w'(u_0, v_0) = w(u, v), w'(u_1, v_1) = 1$
- ד. $w'(u_0, v_1) = w'(u_1, v_0) = w(u, v)$

שאלה 21

התשובה הנכונה עבור ביטוי (4) לעיל היא :

- א. DFS
- ב. BFS
- ג. Dijkstra
- ד. Bellman-Ford

שאלה 22

התשובה הנכונה עבור ביטוי (5) לעיל היא :

- א. s
- ב. s_0
- ג. s_1
- ד. כלשהו.

שאלה 23

סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הנתון (יש לבחור ערך הדוק ביותר) :

- א. $O(|V| + |E|)$
- ב. $O(|V| \cdot |E|)$
- ג. $O(|V| \log |V| + |E|)$
- ד. $O(|V|^2)$

התיאור המובא להלן מתייחס לשאלות 24 עד 28 כולל.

יהי $G=(V, E)$ גרף מכוון. תהי $u \in V$ צומת כלשהי בגרף. לפניך אלגוריתם יעיל המדפיס את אורך המעגל האי זוגי הקצר ביותר ש- u משתתף בו. אם לא קיים מעגל כזה—יש להודיע על כך.

האלגוריתם

צעד 1: בהינתן $G=(V, E)$ נבנה גרף חדש $G^*=(V^*, E^*)$ באופן הבא :

$$V^* = V \cup V' \quad V' = \{v' \mid v \in V\}$$

$$E^* = \{ \text{_____}(1) \text{_____} \mid (u \rightarrow v) \in E \}$$

צעד 2: נריץ על G^* את אלגוריתם _____(2) החל מקודקוד u , _____(3).

צעד 3:

אם האלגוריתם _____(2) הסתיים ולא הגענו ל- _____(4), נודיע שלא קיים מעגל כנדרש.

באלגוריתם הנ"ל חסרים **ארבעה** ביטויים המסומנים במספרים בין סוגריים עגולים. התשובות הנכונות עבור כל אחד מהביטויים החסרים מופיעות בשאלות הבאות :

שאלה 24

התשובה הנכונה עבור ביטוי (1) לעיל היא :

א. $(u \rightarrow v'), (u' \rightarrow v)$

ב. $(u' \rightarrow v')$

ג. $(v \rightarrow u')$

ד. $(u \rightarrow v'), (v' \rightarrow u)$

שאלה 25

התשובה הנכונה עבור ביטוי (2) לעיל היא :

א. DFS

ב. BFS

ג. מיון טופולוגי

ד. למצוא את הסגור הטרנזיטיבי

שאלה 26

התשובה הנכונה עבור ביטוי (3) לעיל היא :

א. ונחזיר בכל מקרה את $d[u]$, ונסיים .

ב. ותוך כדי הריצה אם נגיע ל- u , אזי נחזיר את $d[u]$, ונסיים .

ג. ותוך כדי הריצה אם נגיע ל- u' , אזי נחזיר את $d[u']$, ונסיים .

ד. ונחזיר בכל מקרה את $d[u']$, ונסיים .

שאלה 27

התשובה הנכונה עבור ביטוי (4) לעיל היא :

א. לשכן כלשהו של u

ב. לשכן כלשהו של u'

ג. u

ד. u'

שאלה 28

סבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הנתון הינה:

א. $O(|V| |E|)$

ב. $O(|V|^2 |E|)$

ג. $O(|V|^2)$

ד. $O(|V| + |E|)$

התיאור המובא להלן מתייחס לשאלות 29 עד 39 (כולל)

נתון גרף $G=(V, E)$ סופי מכוון עם פונקציית משקל $w: E \rightarrow \{0,1,2,3,4,5\}$. הקשתות צבועות בשני צבעים: **אדום** ו**שחור**. נתון צומת התחלה s וצומת נוסף t .

נגדיר: מסלול "אדום שחור" מ- s ל- t הוא מסלול מ- s ל- t המורכב ממסלול $s \rightsquigarrow x$, שמכיל רק קשתות אדומות, ומסלול $x \rightsquigarrow t$, שמכיל רק קשתות שחורות. (המסלולים $s \rightsquigarrow x$, או $x \rightsquigarrow t$ יכולים להיות ריקים).

לפניך אלגוריתם יעיל המוצא את משקל המסלול "אדום שחור" הקל ביותר מ- s ל- t .

האלגוריתם:

סימון: R מסמל את הצבע האדום ו- B מסמל את הצבע השחור.

צעד 1: בהינתן $G=(V, E)$ נבנה גרף חדש $G^*=(V^*, E^*)$ באופן הבא:

$$V^* = V \cup V'$$

$$V' = \{v' \mid v \in V\}$$

$$w1: E^* \rightarrow \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$E' = \{(u, v) \mid (u \rightarrow v) \in E \wedge color(u \rightarrow v) \text{ is } R\}$$

$$\forall e \in E' \quad w1(e) = w(e)$$

$$E'' = \{ \text{_____ (1) _____} \mid (u \rightarrow v) \in E \wedge color(u \rightarrow v) \text{ is } B \}$$

$$\forall e \in E'' \quad w1(e) = w(e)$$

$$E''' = \{ \text{_____ (2) _____} \mid (v \rightarrow u) \in E \text{ and } color(v \rightarrow u) \text{ is } R \} \cup$$

$$\{ \text{_____ (3) _____} \mid (u \rightarrow a) \in E \text{ and } color(u \rightarrow a) \text{ is } B \}$$

$$\forall e \in E''' \quad w1(e) = \text{_____ (4) _____}$$

$$E^* = E' \cup E'' \cup E'''$$

צעד 2: נריץ את האלגוריתם _____ (5) על הגרף G^* מקדקוד s .

צעד 3: נחזיר כתשובה את: _____ (6) (ונסמן ב- P את המסלול המתאים), כי:

- אם _____ (7) אזי המסלול P שנמצא צבוע כולו באדום.

- אם _____ (8) אזי

אם _____ (9) אזי המסלול P צבוע כולו בשחור.

אם _____ (10) אזי מסלול מ- s ל- t המורכב ממסלול $s \rightsquigarrow x$, שמכיל רק

קשתות אדומות, ומסלול $x \rightsquigarrow t$, שמכיל רק קשתות שחורות. (המסלולים $s \rightsquigarrow x$,

ו- $x \rightsquigarrow t$ אינם ריקים).

באלגוריתם הנ"ל חסרים עשרה ביטויים המסומנים במספרים בין סוגריים עגולים. התשובות הנכונות עבור כל אחד מהביטויים החסרים מופיעות בשאלות הבאות :

שאלה 29

התשובה הנכונה עבור ביטוי (1) לעיל היא :

א. $(u \rightarrow v)$

ב. $(u \rightarrow v')$

ג. $(u' \rightarrow v)$

ד. $(u' \rightarrow v')$

שאלה 30

התשובה הנכונה עבור ביטוי (2) לעיל היא :

א. $(u' \rightarrow v)$

ב. $(u \rightarrow v')$

ג. $(u \rightarrow u')$

ד. $(v' \rightarrow v)$

שאלה 31

התשובה הנכונה עבור ביטוי (3) לעיל היא :

א. $(u' \rightarrow a)$

ב. $(u \rightarrow u')$

ג. $(u \rightarrow a')$

ד. $(a' \rightarrow a)$

שאלה 32

התשובה הנכונה עבור ביטוי (4) לעיל היא :

א. 0

ב. 1

ג. $w(e)$

ד. $wl(e) = w(e) / 2$

שאלה 33

התשובה הנכונה עבור ביטוי (5) לעיל היא :

א. DAG-SHORTEST-PATHS

ב. דייקסטרה משופר .

ג. Bellman-Ford

ד. מיון טופולוגי

שאלה 34

התשובה הנכונה עבור ביטוי (6) לעיל היא :

א. $d[t]$ בהכרח.

ב. $d[t']$ בהכרח.

ג. $\min \{d[t], d[t']\}$ בהכרח.

ד. $\frac{d[t] + d[t']}{2}$ בהכרח.

שאלה 35

התשובה הנכונה עבור ביטוי (7) לעיל היא :

א. $(s, s') \in P$

ב. $(s, s') \notin P$

ג. $d[t'] < d[t]$

ד. $d[t] \leq d[t']$

שאלה 36

התשובה הנכונה עבור ביטוי (8) לעיל היא :

א. $(s, s') \in P$

ב. $(s, s') \notin P$

ג. $d[t'] < d[t]$

ד. $d[t] \leq d[t']$

שאלה 37

התשובה הנכונה עבור ביטוי (9) לעיל היא :

א. $(s, s') \in P$

ב. $(s, s') \notin P$

ג. $d[t']$ הוא המינימלי

ד. $d[t]$ הוא המינימלי

שאלה 38

התשובה הנכונה עבור ביטוי (10) לעיל היא :

א. $(s, s') \in P$

ב. $(s, s') \notin P$

ג. $d[t']$ הוא המינימלי

ד. $d[t]$ הוא המינימלי

שאלה 39

סבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הנתון הינה :

א. $O(|V| |E|)$

ב. $O(|V|^2 |E|)$

ג. $O(|V| + |E|)$

ד. $O(|V|^2)$ בהכרח.

שאלה 40

הגדרה: גרף לא מכוון נקרא **מעגל** אם הוא קשיר ודרגת כל צומת היא 2 בדיוק.

הגדרה: גרף לא מכוון נקרא שרוך אם הוא קשיר ודרגת כל צומת היא 2 פרט לשני צמתים שדרגתם 1.

סטודנט A טוען: בהינתן $G=(V,E)$ גרף מעגל, קיימת הרצת DFS שעץ ה-DFS המתקבל ממנה הוא שרוך.

סטודנט B טוען: בהינתן $G=(V,E)$ גרף לא מכוון מלא בן N צמתים, $N>3$, קיימת הרצת DFS

שעץ ה-DFS המתקבל ממנה הוא עץ בו דרגת השורש (הצומת הראשון שנשרק) היא 2 בדיוק. מי צודק?

א. שניהם צודקים

ב. A לא צודק ו-B צודק

ג. שניהם לא צודקים

ד. A צודק ו-B לא צודק

בהצלחה!