תכנון וניתוח אלגוריתמים
הרצאה 1

פרק 1 : מודל התכנון הליניארי

תכנון לינארי

- **תכנון ליניארי** (linear programming) נחשב על-ידי רבים כאחת ההתפתחויות החשובות בתחום המתמטיקה במאה העשרים.
- מהו טבעו של כלי זה, ולפתרונן של אילו בעיות הוא נועד?
- תשובה לשאלה זו תינתן במהלך הדוגמאות שתוצגנה בהמשך, אולם נקדים להן תיאור מילולי קצר.

- היישום הנפוץ ביותר של תכנון ליניארי הוא פתרון בעיות הכרוכות:
  - **בהקצאה** הטובה ביותר
  - חלוקה **אופטימלית** של **משאבים מוגבלים** בין פעילויות שונות **המתחרות** על אותם משאבים.

- תיאור זה מתאים למגוון רחב של מצבים, כגון :
  - הקצאת אמצעי ייצור למוצרים שונים
  - הקצאת משאבים לאומיים לצרכים מקומיים
  - תכנוני הסעות והובלות
  - תכנון חקלאי
  - תכנון טיפולים רפואיים ועוד.

- בתכנון ליניארי משתמשים במודל מתמטי כדי לתאר את הבעיה הנדונה.
- משמעות התואר **ליניארי** היא שכל הפונקציות המתמטיות, המופיעות במודל, חייבות להיות **פונקציות ליניאריות**.
- לעיתים משתמשים במונח **תכנות ליניארי** במקום **תכנון ליניארי**, אולם אין לראות בכך קשר לתכנות

- תכנון ליניארי עוסק **בתכנון פעילויות** שמביא לקבלת תוצאה אופטימלית – תוצאה המשיגה את המטרה המוגדרת (על-ידי המודל המתמטי) בצורה הטובה ביותר מבין החלופות האפשריות.
- הקצאת משאבים היא אמנם היישום הנפוץ ביותר של תכנון ליניארי, אך ללא ספק אין היא היישום היחיד.

- כל בעיה שניתן לתאר באמצעות מודל מתמטי, המתאים למבנה הכללי של מודל תכנון ליניארי, היא בעיית תכנון ליניארי.
- נפתח את הפרק הנוכחי בפיתוח דוגמה פשוטה האופיינית לבעיית תכנון ליניארי.
- דוגמה זו קטנה במידה המאפשרת לפתור אותה ישירות, בצורה גרפית.

1.1 דוגמה לבעיית תכנון ליניארי (תיאור מילולי)

- לאחר הצגת הפתרון הגרפי של הבעיה, נציג את הצורה הכללית של מודל תכנון ליניארי ואת ההנחות הבסיסיות שלו.
- ***<u>דוגמא</u>***
- *מפעל קטן לייצור גבינות מייצר שני סוגי גבינות: גבינה רגילה וגבינת שמנת.*

- חומרי הגלם העיקריים המשמשים לייצור שני סוגי גבינות אלה הם זהים: שמנת וחלב, אך כמות חומרי הגלם בכל סוג גבינה שונה
  - לייצור ק"ג אחד של גבינה רגילה דרושים 200 מיליליטר שמנת ו-800 מיליליטר חלב
  - ואילו לייצור ק"ג אחד של גבינת שמנת דרושים 300 מיליליטר שמנת ו-700 מיליליטר חלב.

- הרווח של המפעל ממכירת ק"ג אחד של גבינה רגילה הוא 2ש"ח, וממכירת ק"ג אחד של גבינת שמנת הוא 4ש"ח.
- אילו התאפשר הדבר, המפעל היה מייצר גבינה בכל כמות שהשוק דורש, אך מסיבות שונות יכול המפעל לרכוש בכל יום רק 180,000 מיליליטר שמנת ו-560,000 מיליליטר חלב.

- הבעיה העומדת בפני מנהל המפעל היא פשוטה: אילו כמויות של שני המוצרים עליו לייצר, בתנאים הנתונים, כדי שרווחיו יהיו הגבוהים ביותר האפשריים?
- הבה נתבונן היטב בבעיה שיש למנהל מפעל הגבינות.

- הוא צריך למצוא את הצירוף המתאים של כמויות הייצור של שני מוצריו, שיבטיח למפעל רווח מקסימלי.
- אבל תהליך הייצור כפוף למגבלות מסוימות – מגבלות חומרי הגלם שהוא יכול להשיג מדי יום.

1.2 ניסוח מתמטי של בעיית תכנון ליניארי

א. הגדרת משתני החלטה

- תחילה עלינו לבחור משתנים שייצגו את הכמויות שתיוצרנה מכל סוג גבינה.
- נסמן ב- X_1 את הכמות (בק"ג) של הגבינה הרגילה שתיוצר מדי יום
- ב-X_2 את הכמות (בק"ג) של גבינת השמנת שתיוצר מדי יום.

- X_1 ו- X_2 נקראים **משתני ההחלטה** של המודל.
- באמצעות המודל צריך מנהל המפעל להחליט אילו כמויות (X_1 ו-X_2) הוא צריך לייצר (כדי להגיע לרווח מקסימלי כפוף לאילוצים הנתונים).

ב. ניסוח פונקציית המטרה

- מנתוני הבעיה למדנו שהרווח מכל ק"ג גבינה רגילה הוא 2₪
- לכן, אם נייצר X_1 ק"ג גבינה רגילה ביום, נרוויח $2X_1$₪.
- באופן דומה, הרווח מייצור יומי של X_2 ק"ג גבינת שמנת יהיה $4X_2$₪.

- סך כל הרווח (ביום) של בעל המפעל משני סוגי הגבינות הוא $2X_1 + 4X_2$.
- נסמן ביטוי זה ב-Z, ונקבל:

$$(1) \quad Z = 2X_1 + 4X_2$$

- ביטוי זה הוא **פונקציית המטרה**.
- המטרה היא להביא למקסימום את הביטוי הזה

- המטרה היא להביא למקסימום את הביטוי הזה, כאשר על X_1 ו-X_2 חלים האילוצים בהתאם למגבלות חומרי הגלם שמנהל המפעל יכול להשיג מדי יום.

ג. ניסוח האילוצים

- נתבונן במגבלות במסגרתן פועל המפעל.

- נעבור לניסוח **האילוצים** החלים על X_1 ו- X_2 (כמויות הייצור).
- נתחיל באילוץ על הכמות המקסימלית של שמנת שניתן לרכוש יומיום.
- כדי לייצר X_1 ק"ג גבינה רגילה יש צורך ב- $200X_1$ מיליליטר שמנת, וכדי לייצר X_2 ק"ג גבינת שמנת יש צורך ב-$300X_2$ מיליליטר שמנת.

- לפיכך, כמות השמנת הכוללת לה נזדקק לצורך הייצור שלנו תהיה :

$$(2) \quad 200X_1 + 300X_2$$

- כזכור, כמות השמנת המיוצגת על-ידי משוואה (2) מוגבלת ל-180,000 מיליליטר.
- לפיכך חייב להתקיים אי-השוויון הזה:

$$(3) \quad 200X_1 + 300X_2 \leq 180{,}000$$

- באופן דומה, דרושים $800X_1$ מיליליטר חלב כדי לייצר X_1 ק"ג גבינה רגילה, ו-$700X_2$ מיליליטר חלב כדי לייצר X_2 ק"ג גבינת שמנת.
- לפיכך, כמות החלב הכוללת לה נזדקק תהיה:

$$(4) \quad 800X_1 + 700X_2$$

- בגלל מגבלת כמות החלב העומדת לרשותנו, חייב להתקיים אי-השוויון הזה:

$$(5) \quad 800X_1 + 700X_2 \leq 560{,}000$$

ד. **אילוצי אי-שליליות**

- ברור לנו כי לא נייצר כמויות שליליות של מוצר כלשהו. כלומר, חייבים להתקיים אי-השוויונים האלה:

$$(6) \quad X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$$

- אי-שוויונים אלה נקראים **אילוצי אי-שליליות.**

- לפיכך, הבעיה היא למצוא את הערכים של X_1 ו-X_2 שיקיימו :

Maximize $Z = 2X_1 + 4X_2$

- **כפוף לאילוצים:**

Subject to:

$$200X_1 + 300X_2 \leq 180{,}000$$

$$800X_1 + 700X_2 \leq 560{,}000$$

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$$

- זוהי דוגמה אופיינית לבעיית תכנון ליניארי.
- לעיתים קרובות נוח יותר לרכז את כל נתוני הבעיה בטבלה אחת. במקרה שלפנינו הטבלה תיראה כך:

	הגבלה	גבינת שמנת X_2 ק"ג	גבינה רגילה X_1 ק"ג
רווח (ש"ח לק"ג)	–	4	2
שמנת (מיליליטר)	180,000	300	200
חלב (מיליליטר)	560,000	700	800

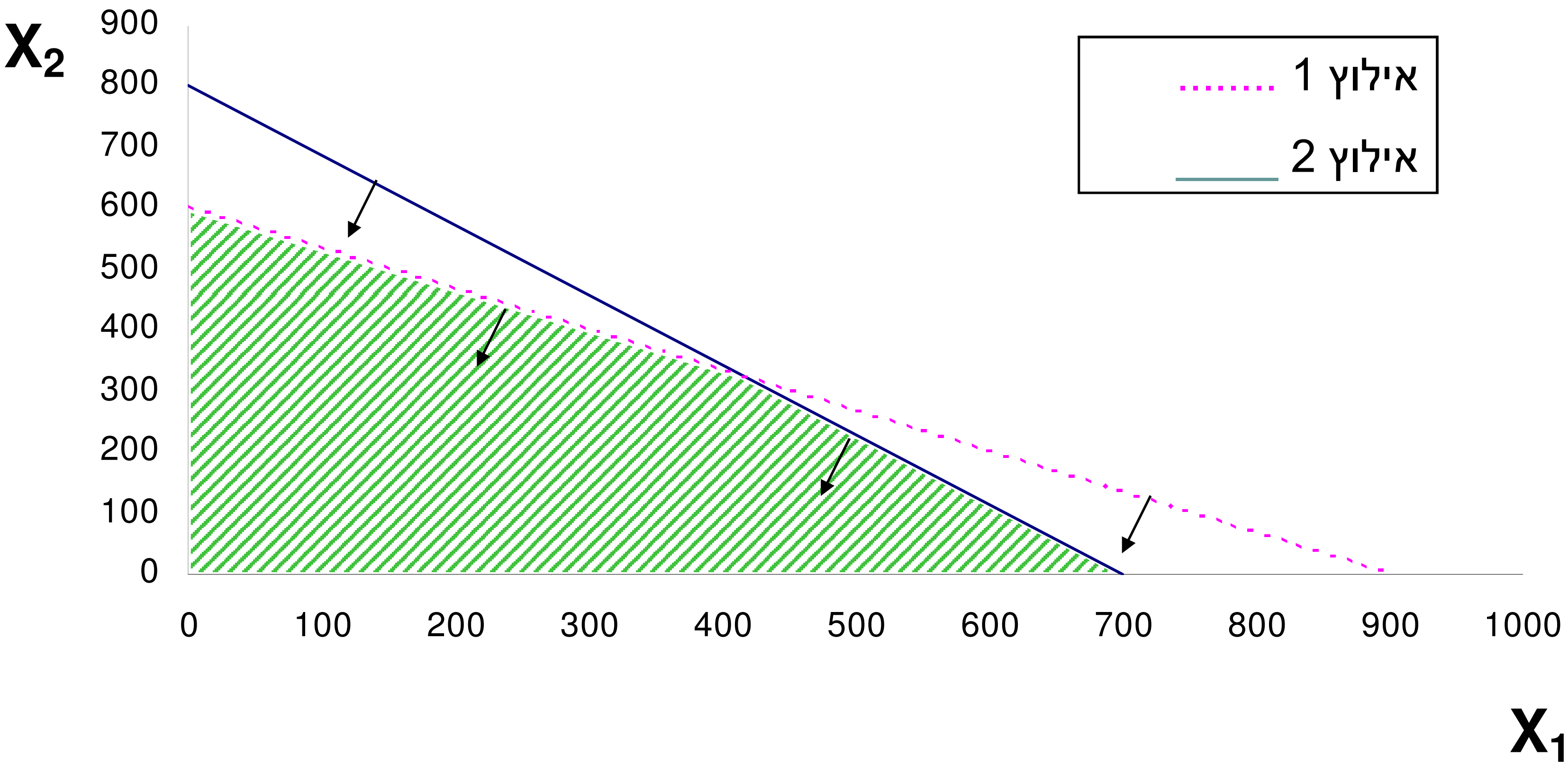
- קיימים ערכים רבים של X_1 ו- X_2 **המקיימים את האילוצים (פתרונות אפשריים).**
- הנה דוגמה לפתרון אפשרי לבעיה, כלומר פתרון המקיים את האילוצים: $X_1 = 300$ ו-$X_2 = 400$.
- אם נציב את הערכים של (X_1, X_2) באילוצים השונים, נראה שהם מתקיימים.

- באילוץ על השמנת נקבל:
- 200* **300**+300***400** = 180,000≤ 180,000
- באילוץ על החלב נקבל:
- 800***300**+700***400=** 520,000≤ 560,000
- אם נציב את הערכים $X_1= 300$ ו- $X_2= 400$ בפונקצית המטרה $(Z = 2X_1 + 4X_2)$ נקבל $Z = 2200$.

- פתרון אפשרי זה אינו אופטימלי, כי קיימים פתרונות אפשריים טובים יותר.
- לדוגמה, פתרון אפשרי טוב יותר יהיה $X_1 = 150$ ו-$X_2 = 500$ (בדקו שפתרון זה מקיים את האילוצים).
- ערך פונקצית המטרה במקרה זה יהיה $Z = 2300$. (בדקו!)

כדי לתאר את **תחום הפתרונות האפשריים** נוח מאד להיעזר באיור גרפי (ראו את האיור בשקופית הבאה).

תיאור התחום האפשרי



- תחום הפתרונות האפשריים לבעיה הוא האזור המקוווקו שחסום על-ידי שני הישרים שמייצגים את האילוצים.
- לכל אילוץ מוצמד חץ המראה את הכיוון האפשרי לפתרונות שמציב האילוץ.
- אפשר להוכיח שהמקסימום של פונקצית המטרה מתקבל בנקודה שבה $X_1=0$ ו- $X_2 = 600$.

- הערך המקסימלי של פונקצית המטרה הוא $Z = 2400$.
- כלומר, הרווח המקסימלי של בעל מפעל הגבינות יתקבל אם הוא ייצר 600 ק"ג גבינת שמנת בלבד (ולא ייצר בכלל גבינה רגילה).
- בכל נקודה אחרת בתחום הפתרונות האפשריים מתקבל ערך נמוך יותר של פונקצית המטרה.

- הבעיה שהצגנו היא דוגמה לבעיית החלטה.
- בבעיה מסוג זה יש לבחור משתני החלטה
  - שיקיימו את כל האילוצים,
  - ויביאו לאופטימום את פונקצית המטרה
- כלומר, יש לבחור פתרון אפשרי אופטימלי.

- בתכנון ליניארי כל קבוצת ערכים של משתני החלטה תיקרא **פתרון**, גם אם אינה עונה על אילוצי הבעיה.
- בתכנון ליניארי אנו מבחינים בין סוגים שונים של פתרונות, כמפורט להלן.
- **פתרון אפשרי** (Feasible Solution) הוא פתרון המקיים את כל אילוצי הבעיה.

- הפתרון **האפשרי** שהוצג באיור שבשקופית 28 הוא $X_1 = 150$ ו- $X_2 = 500$.
- ואילו $X_1 = 0$ ו-$X_2 = 800$ הוא פתרון **שאינו אפשרי**.
- אוסף כל הפתרונות האפשריים נקרא **התחום האפשרי או תחום הפתרונות האפשרי**.
- באיור שבשקופית 28 התחום האפשרי הוא התחום המקווקו.

- **פתרון אופטימלי** (Optimal Solution) הוא פתרון אפשרי הנותן את הערך הטוב ביותר לפונקצית המטרה.
- כלומר, **פתרון אופטימלי** נותן את הערך הקטן ביותר עבור בעיית מינימום, או את הערך הגדול ביותר עבור בעיית מקסימום.

- בדוגמה שראינו, הפתרון האופטימלי התקבל בקודקוד של התחום האפשרי.
- תופעה זו של פתרון אופטימלי בקודקוד אינה מקרית, והיא נובעת מהסיבה הזו:
- כאשר יש למצוא נקודת מינימום או מקסימום של פונקציית מטרה <u>ליניארית</u>, ככל שנתקדם בכיוון העלייה של הפונקציה או בכיוון הירידה שלה, נקבל פתרון טוב יותר.

- תחום הפתרונות האפשריים מגביל את התקדמותנו בכיוון העלייה או הירידה, לכן ברור שנשאף להתקדם אל הנקודה האחרונה האפשרית, הנמצאת כמובן על שפת התחום האפשרי.

- הפתרונות האופטימליים, של בעיית תכנון ליניארי, שתחום הפתרונות האפשריים שלה חסום ולא ריק, נמצאים על קדקוד אחד או על כמה קדקודים סמוכים, הנמצאים על אותה צלע של תחום הפתרונות האפשריים.

1.3 מרכיבי מודל התכנון הליניארי

- בעיית תכנון ליניארי טיפוסית כוללת שלושה מרכיבים עיקריים:
  - משתני החלטה;
  - פונקציית המטרה (של משתני ההחלטה);
  - אילוצים (על משתני ההחלטה).

- **באופן כללי:** כאשר נעסוק בבעיות חישוב **רווח,** אלה תהיינה בעיות שפונקצית המטרה שלהן היא מקסימום, ואילו כאשר נעסוק בבעיות **חישוב הוצאות** אלה תהיינה בעיות שפונקצית המטרה שלהן תהיה מינימום.

- **אילוצים**
- האילוצים על משתני ההחלטה הם **עובדות המונעות ממקבל ההחלטה לבחור פתרונות מסוימים.**
- אילוצים אלה עלולים להיות מגבלות על כמות אמצעי הייצור, כמו: חומרי-גלם, זמן ותקציב (בדוגמה שלנו – מגבלות על כמויות השמנת והחלב שניתן להשיג).

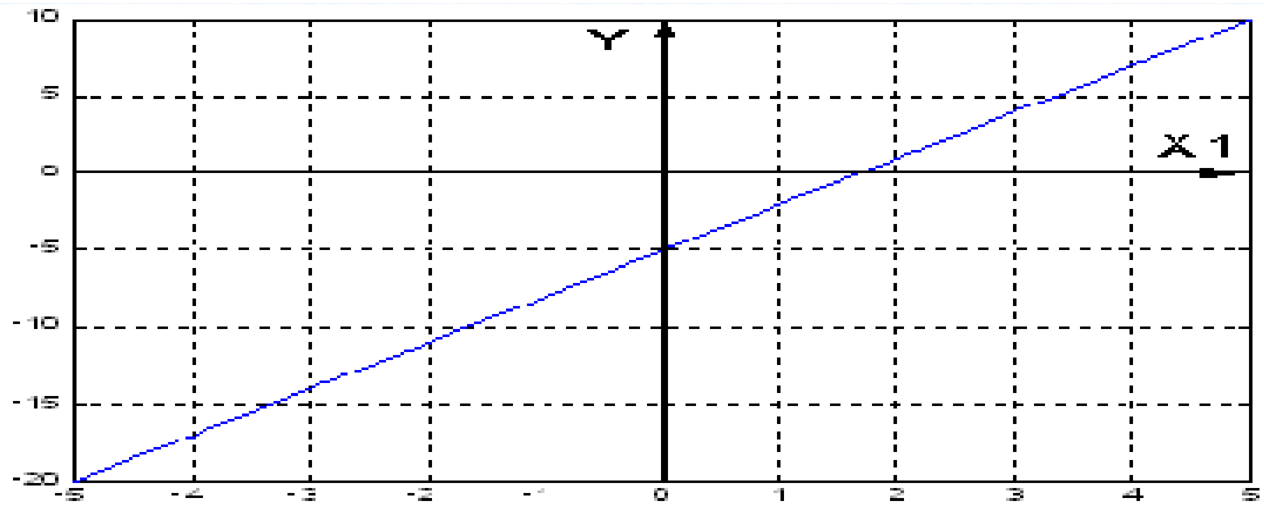
1.4 ההנחות עליהן מבוסס מודל התכנון הליניארי

- המאפיינים המתמטיים של מרכיבי מודל התכנון הליניארי הם:
  - פונקצית מטרה ליניארית;
  - הפתרון כולל מציאת **מינימום** או **מקסימום** של פונקצית המטרה;
  - האילוצים על משתני ההחלטה הם משוואות ליניאריות.

1.4.1 פונקצית מטרה ליניארית

- להלן כמה דוגמאות לפונקציות ליניאריות:
- $$Z = 3X_1 + 2X_2 + 5$$
- $$Z = 5X_1 - 3X_2 - 7$$
- משתני הפונקציות (X_1 ו-X_2) הם בחזקת 1
- מבנה הפונקציה הוא סכום של משתני הפונקציה, מוכפלים בקבוע (שיכול להיות גם שלילי) ועוד קבוע חופשי (שגם הוא יכול להיות שלילי).

כאשר פונקצית המטרה היא בעלת משתנה יחיד, תיאורה הגרפי הוא פשוט. באיור 1.3 מתוארת הפונקציה הליניארית: $Z = 3X_1 - 6$



1.4.2 מציאת מינימום או מקסימום של פונקציית המטרה

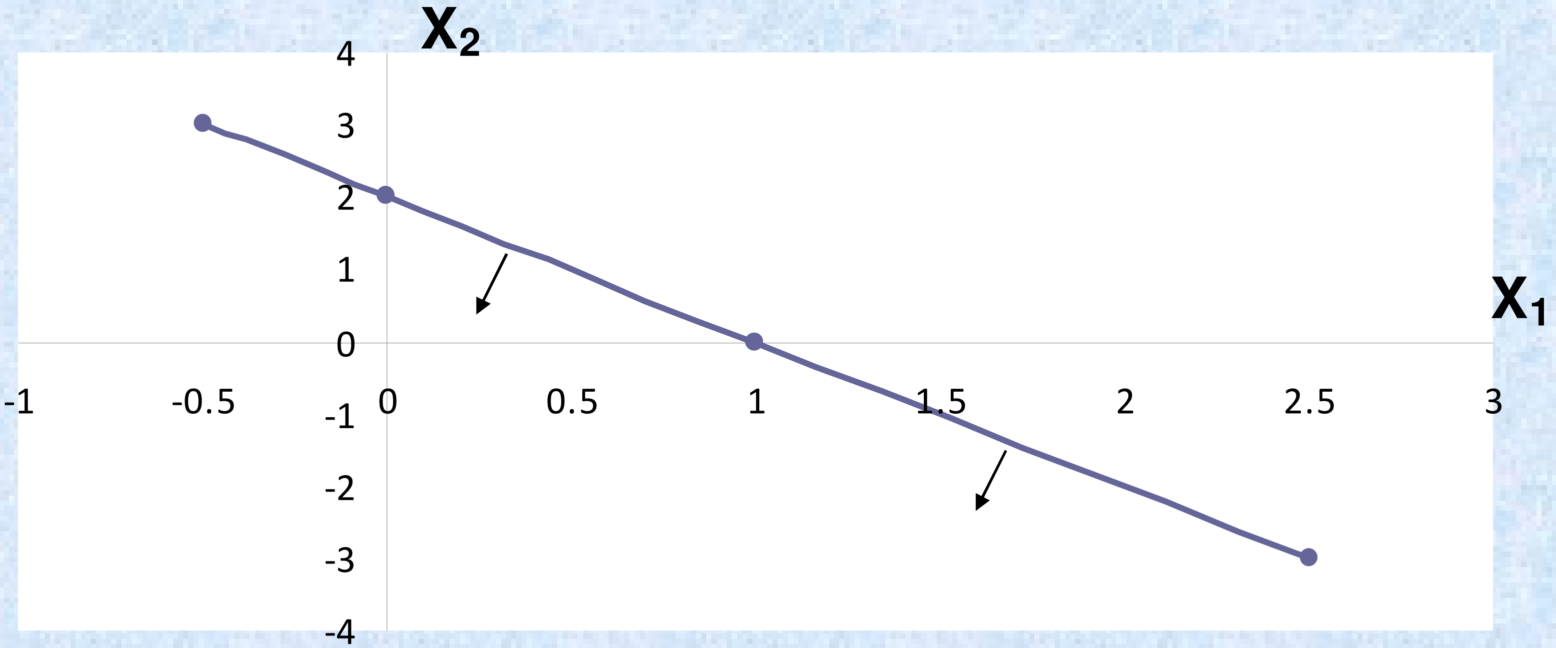
- מודל התכנון הליניארי מתאים לבעיות בהן צריך למצוא מינימום או מקסימום של פונקציית המטרה.
- נתבונן בגרף הפונקציה הליניארית באיור 1.3.
- נניח כי נדרשנו למצוא נקודת מינימום של פונקציית המטרה, כפוף לאילוץ $X_1 \geq 3$.
- במקרה זה, נקודת המינימום של פונקציית המטרה תהיה כמובן בנקודה $X_1 = 3$. (התוכלו להסביר מדוע?)

1.4.3 האילוצים על משתני ההחלטה הם ליניאריים

- כאשר יש כמה אילוצים על משתני ההחלטה, תחום הפתרונות האפשריים הוא חיתוך התחומים המתקבלים מכל אילוץ כזה
- או, לשון אחרת, אוסף הנקודות המופיעות בתחומים האפשריים של **כל האילוצים**.
- ניקח לדוגמה את המשוואה הליניארית: $2X_1+X_2-2 \leq 0$
- איור 1.4 מתאר את האילוץ על הפתרון הנתון על-ידי משוואה זו:

התחום האפשרי של האילוץ

$2X_1+X_2-2\leq 0$



- הישר המתאר את האילוץ הוא אוסף הנקודות במישור, המקיימות $2X_1 + X_2 - 2 = 0$.
קו ישר זה מחלק את המישור לשני חלקים
- בצד אחד נמצאות כל הנקודות עבורן

$$2X_1 + X_2 - 2 < 0$$

- ובצד שני נמצאות כל הנקודות עבורן

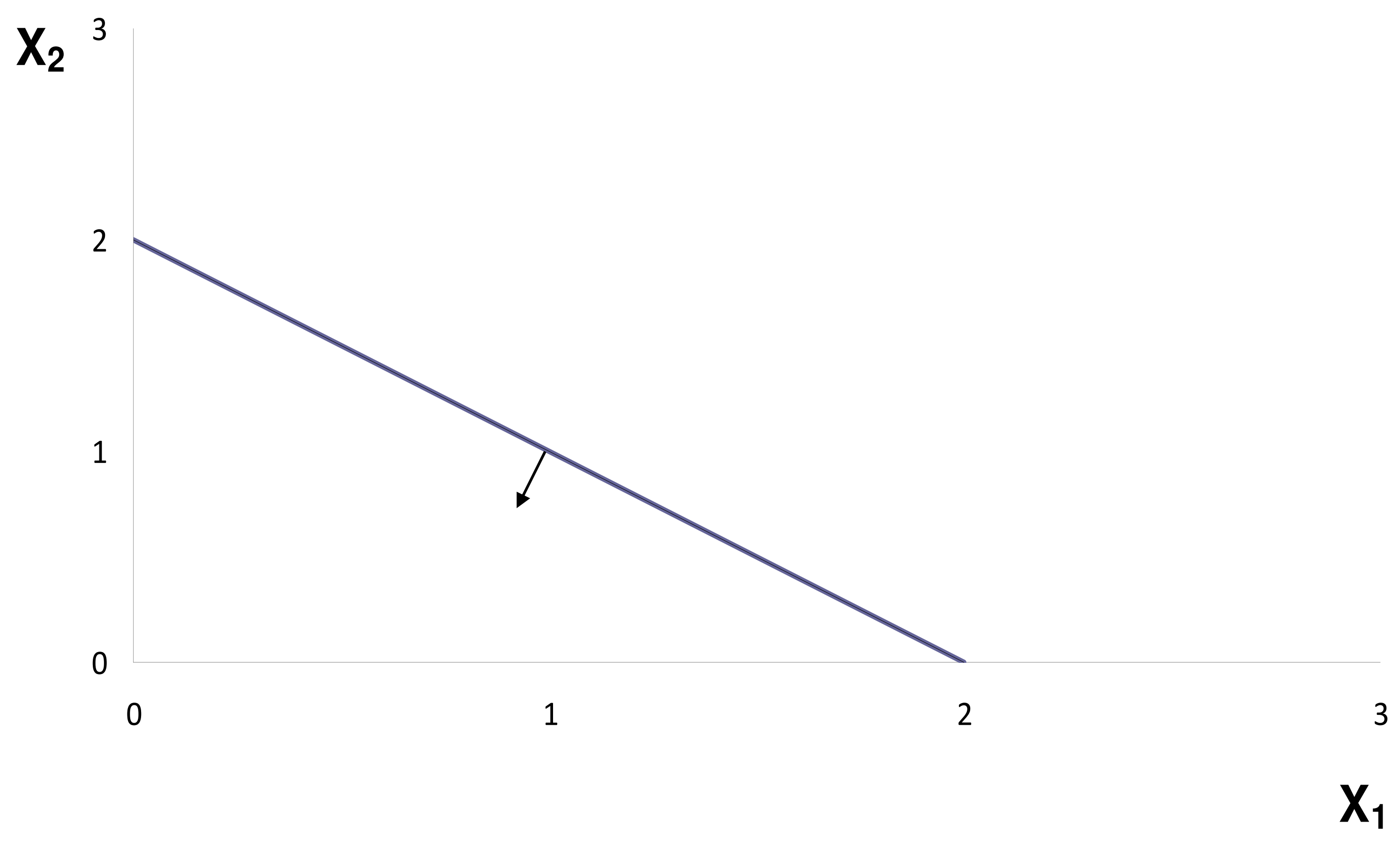
$$2X_1 + X_2 - 2 > 0.$$

- נשאלת השאלה:
  - איזה חלק מהמישור הוא תחום הפתרונות האפשריים?
- שיטה פשוטה לבחירת התחום האפשרי היא:
  - נבדוק את הנקודה (0,0) . נקבל את הביטוי $0\leq 2$ שהוא כמובן ביטוי אמת.
  - לכן, הנקודה (0,0) נמצאת בתחום הפתרונות האפשריים
- החץ המופיע באיור מראה את כיוון התחום האפשרי של אילוץ זה.
- סימן השוויון במשוואה הוא כולל גם את הקו הישר עצמו.

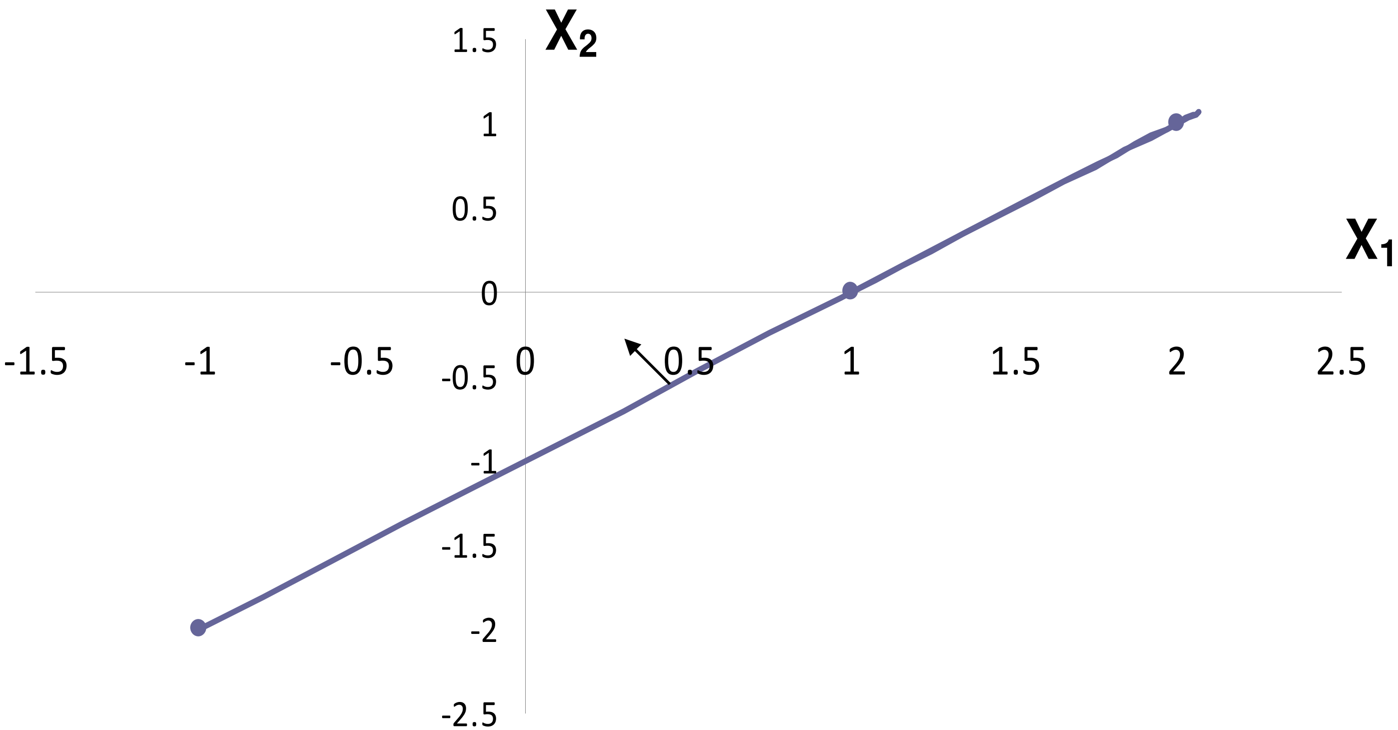
* ***<u>תחום הפתרונות האפשריים נקבע על-ידי כמה אילוצים ליניאריים</u>***
* התחום האפשרי הוא התחום המשותף לכל האילוצים על הפתרון. נניח לדוגמה, כי בבעיית החלטה מסוימת נתונים האילוצים האלה:

1. $X_2 + X_1 \leq 2$
2. $X_1 - X_2 \leq 1$
3. $X_1 \geq 0$
4. $X_2 \geq 0$

- ארבע המשוואות מייצגות את האילוצים על משתני ההחלטה.
- הן יוצרות ארבעה קווים ישרים
- כל אחד מהם מחלק את המישור לשני חלקים.
- חלק אחד הוא תחום הפתרונות האפשריים, והחלק השני הוא תחום הפתרונות שנפסלו על-ידי האילוץ.

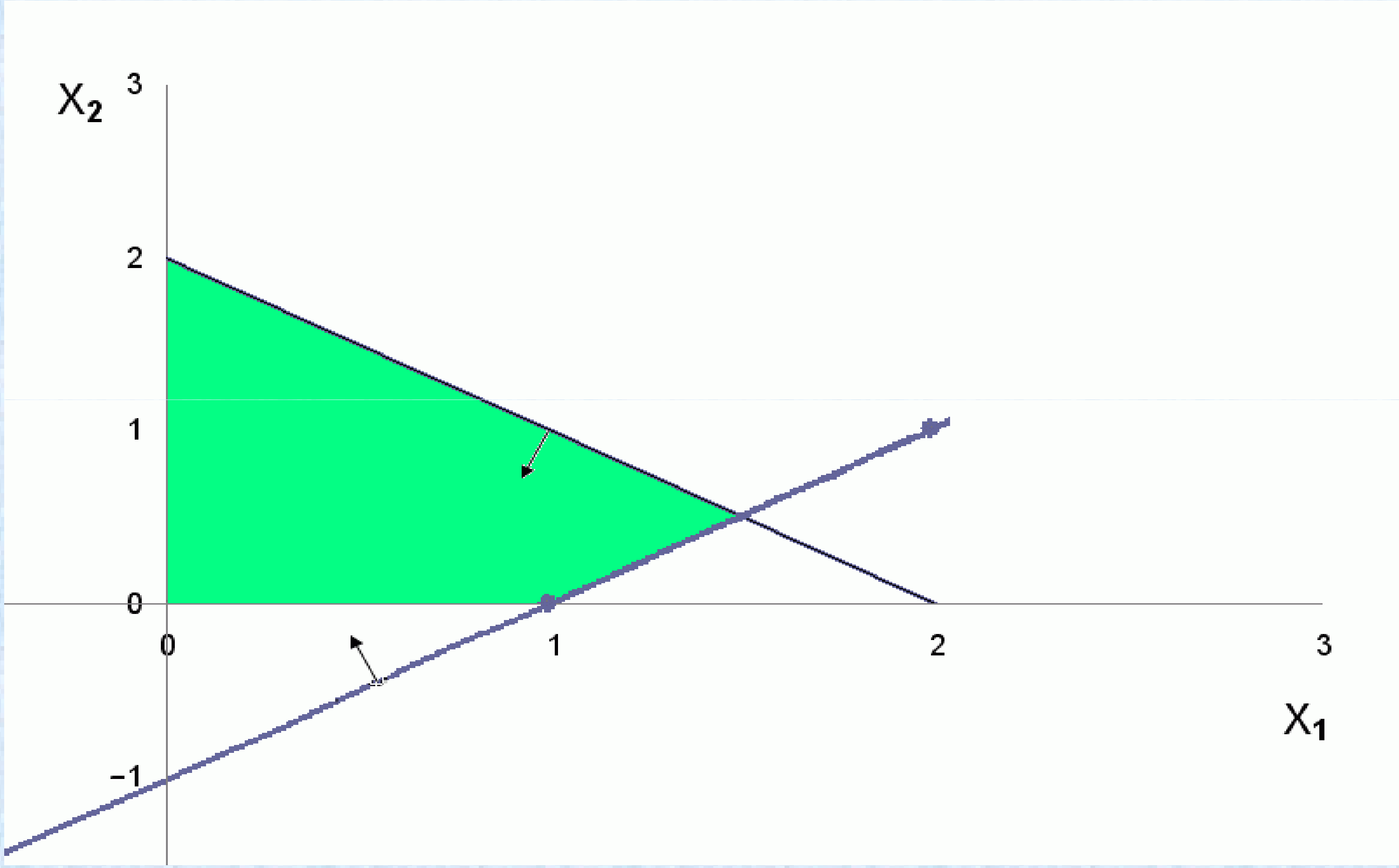


$$X_2+X_1\leq 2$$



$X_1 - X_2 \leq 1$

תחום הפתרונות האפשריים המוגדר ע"י 4 האי-שוויונות



- קיבלנו תחום סגור .
- התחום הסגור מכיל בתוכו את כל הנקודות שמציינות פתרונות אפשריים לבעיית ההחלטה.
- מתוך תחום זה יש לבחור את הנקודה בעלת הערך הטוב ביותר על-פי פונקצית המטרה הנתונה בבעיה.
- הפתרון של בעיית תכנון ליניארי מתחלק אם-כן לשני שלבים :

1. הגדרת התחום האפשרי (קבוצת כל הפתרונות האפשריים);
2. בחירת פתרון אופטימלי (בחירת הפתרון האפשרי הטוב ביותר).

1.5 דוגמאות לניסוח בעיות תכנון ליניארי

דוגמה 1.1 תכנון חקלאי

- חקלאי מגדל לאורך שנים מלפפונים ועגבניות בשדה ששטחו 30 דונם.
- השנה, לקראת הסתיו עליו להחליט כמה דונם יקצה לעגבניות וכמה יקצה למלפפונים.
- להלן ניתוח של גידוליו בשנים האחרונות:

סוג הגידול	תפוקה לדונם(טון)	רווח לטון (שקל)	צריכת מים (בקוב לדונם
עגבניות	3	1500	18
מלפפונים	4	600	10

- עקב הבצורת בשנים האחרונות הוקצבה לחקלאי, לתקופת הגידול הנוכחית, מכסת מים של 450 קוב;
- האחראי על השיווק במושב דורש להקצות לפחות 1 דונם לגידול המלפפונים על כל 3 דונם לגידול עגבניות.
- נסחו את הבעיה כבעיית תכנון ליניארי.
- **פתרון 1.1**

1. קביעת משתני החלטה

- החקלאי צריך להחליט כמה דונם יקצה לכל אחד משני הגידולים, לפיכך משתני ההחלטה שנבחר יהיו כמספר הדונמים המוקצים לכל גידול. נגדיר:
- X_1 – מספר הדונמים המוקצים לעגבניות;
- X_2 – מספר הדונמים המוקצים למלפפונים.

2. הגדרת פונקצית המטרה

- **פונקצית המטרה** היא הפונקציה המחשבת את שיעור הרווח של החקלאי:

$$Z = 3 \cdot 1500X_1 + 4 \cdot 600X_2$$

- **פונקצית המטרה** כופלת את התפוקה לדונם ברווח לטון במספר הדונמים המוקצים לכל גידול שהם **משתני ההחלטה**.

- ***3. קביעת האילוצים***
- ההחלטה כפופה כמובן לכמה **אילוצים על משתני ההחלטה**. לפי תיאור הבעיה קיימים שלושה אילוצים:
- א. מגבלת **מכסת המים**
- $$18X_1 \ +10X_2 \leq 450$$
- ב. **סך-כל השטח** העומד לרשות החקלאי
- $$X_1 + X_2 \leq 30$$

- ג.   מגבלת שיווק על היחס בין כמות העגבניות לכמות המלפפונים.
- משקל המלפפונים צריך להיות גדול משליש משקל העגבניות לשיווק, או בניסוח מתמטי:

$$X_2 \ge \frac{X_1}{3}$$

$$X_2 - \frac{X_1}{3} \ge 0$$

- ***4. הוספת אילוצי אי-שליליות***
- במקרים רבים קיימות **מגבלות פתרון** הנובעות מתוך המציאות עצמה אך אינן כתובות במפורש בתיאור הבעיה.
- לשם איתורן יש להפעיל את השכל הישר ואת הניסיון;
- התעלמות מהן עלולה להביא לפתרונות שגויים.

- בדוגמה שלפנינו קיימת מגבלה נוספת, הנובעת מאופי משתני ההחלטה.
- משתני ההחלטה הם מספר הדונמים שהוקצו לכל גידול, לכן הם חייבים להיות מספרים אי-שליליים.
- משום כך יש להוסיף את אילוצי אי-השליליות:

- $X_1 \geq 0$
- $X_2 \geq 0$

ריכוז

- אם נרכז את כל המרכיבים המתמטיים של הבעיה, נקבל:
- **Maximize** $Z = 3 \cdot 1500 \cdot X_1 + 4 \cdot 600 \cdot X_2$
- כפוף לאילוצים :

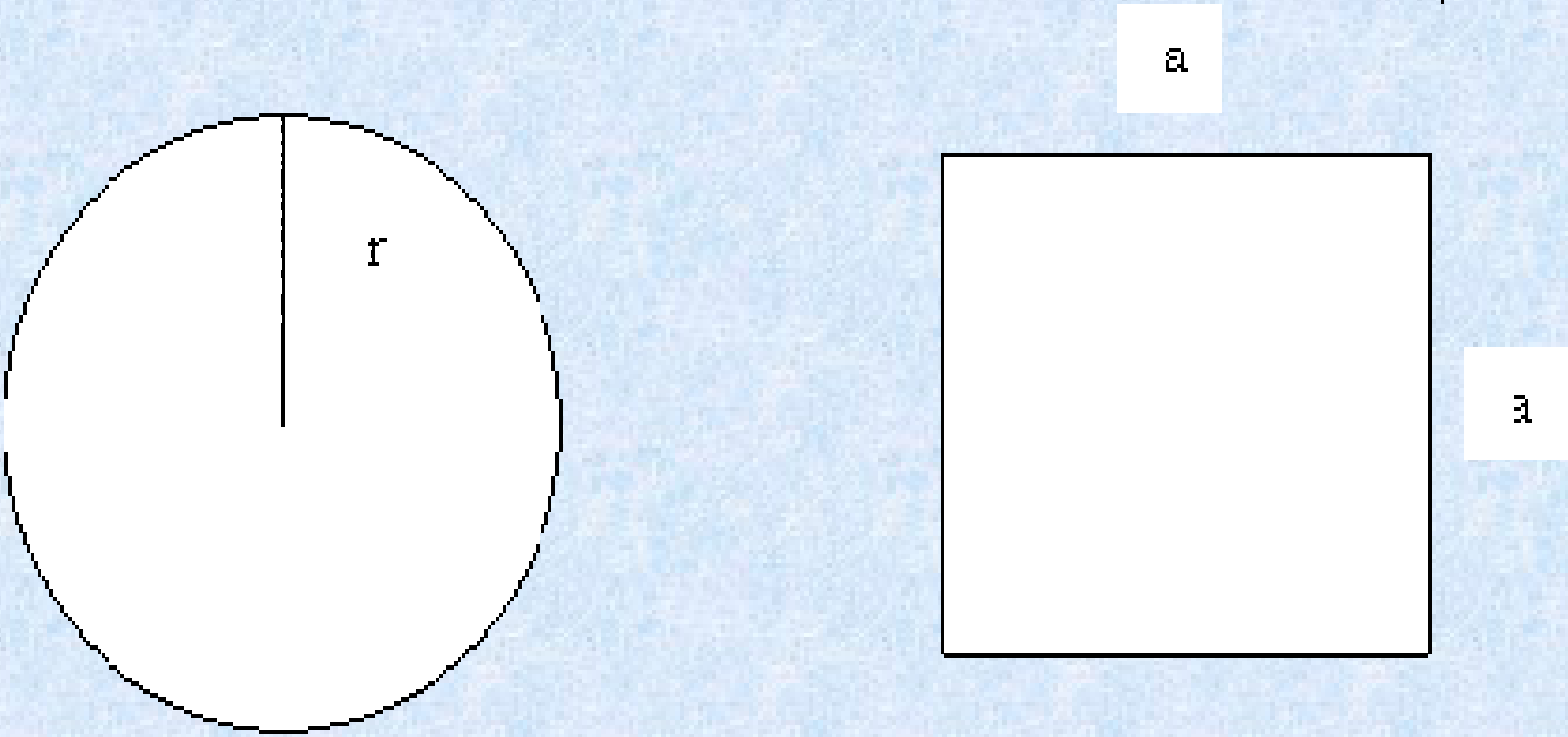
Subject to:

- $18X_1 + 10X_2 \le 450$
- $X_1 + X_2 \le 30$ $\qquad X_2 - \frac{X_1}{3} \ge 0$
- $X_1 \ge 0, \quad X_2 \ge 0$

דוגמה 1.2

- **דוגמה 1.2** בעיית המכלאות
- בחוות הסוסים בקיבוץ החליטו לבנות שתי מכלאות מגודרות.
- האחת ריבועית לצורך אימוני רכיבה
- השניה מעגלית לצורך אילוף הסוסים (ראו איור 1.7).
- מכלאת אימוני הרכיבה (הריבועית) חייבת להיות בעלת צלע העולה על 25 מטר (לצורך מסלול האימונים);

- היקפה של המכלאה המעגלית חייב לעלות על 200 מטר (לצורכי האילוף).
- כל אחת מהמכלאות חייבת להיות מוקפת בגדר.
- לצורך הקמת המכלאות הוקצה תקציב שיאפשר הקמת גדר באורך כולל של 500 מטר;
- יש להחליט כיצד ניתן לבנות את המכלאות כך שהיקפן הכולל יהיה מקסימלי.


r
a
a

- ***1. קביעת משתני ההחלטה***
- בבעיה זו **משתני ההחלטה** אינם נתונים בצורה מפורשת, וכל שהוגדר הוא שיש לתכנן את בניית המכלאות.
- עלינו להגדיר את **משתני ההחלטה** כך שפתרון אפשרי באמצעותם יצביע על מבנה המכלאות מצד אחד, ויהיה ניתן לנסח את הבעיה בצורה מתמטית מצד שני.

- משום כך נבחר להגדיר את **משתני ההחלטה** באופן הזה:
- X_1 – רדיוס המכלאה המעגלית
- X_2 – צלע המכלאה הריבועית
- ***2. הגדרת פונקצית המטרה***
- הגדרת פונקצית המטרה דורשת ידע נוסף – במקרה זה ידע בגיאומטריה.

- כידוע, משוואות ההיקף של ריבוע ומעגל, הן :
- $L = 4a$ היקף הריבוע
- $L = 2\pi r$ היקף העיגול
- כיוון שעלינו למצוא פתרון שבו ההיקף הכולל של המכלאות יהיה מקסימלי, נקבע את **פונקצית המטרה** כך שתבטא את השטח הכולל של המכלאות:
- $Z = 2\pi X_1 + 4X_2$

3. קביעת האילוצים על משתני ההחלטה

- האילוצים על משתני ההחלטה, המשפיעים על הפתרון האופטימלי, נתונים במקרה זה באופן מפורש:

- אורך הגדר המקיפה את המכלאות $2\pi X_1 + 4X_2 \le 500$
- צלע הריבוע $X_2 \ge 25$
- היקף העיגול $2\pi X_1 \ge 200$

4. הוספת אילוצי אי-שליליות

- כמו בבעיית החקלאי, גם כאן היקף המכלאות חייב להיות אי-שלילי, לכן נוסיף את אילוצי אי-השליליות:

- $X_1 \geq 0$
- $X_2 \geq 0$

דוגמה 1.3 בעיית המכס

- דוגמה 1.3 **בעיית המכס**
- מפעל טקסטיל בדרום מייצר חולצות, מכנסיים ומעילים לייצוא.
- המפעל משלם מכס על שיווק המוצרים בחו"ל לפי סוג הפריט:

הפריט	המכס
חולצה	10 ₪
מכנסיים	15 ₪
מעיל	20 ₪

- העברת המוצרים נעשית במכולות;
- נפח ההעמסה של כל מכולה מוגבל.
- כל מכולה יכולה להכיל 1000 חולצות או 500 מכנסיים או 200 מעילים.
- כל מכולה יכולה להכיל כמובן גם צירופים שונים של חולצות, מכנסיים ומעילים.

- המשווק בחו"ל מעוניין לקבל מכולת פריטים אשר מכילה לפחות 100 פריטים מכל סוג
- אך מספר החולצות חייב להיות שווה למספר זוגות המכנסיים או קטן ממנו.
- המשווק קונה מכולה מלאה במחיר קבוע, ללא קשר להרכב המוצרים במכולה, ובלבד שיעמוד בדרישותיו.
- מהו ההרכב האופטימלי למכולה?

- **פתרון 1.3**
- ***1. קביעת משתני ההחלטה***
- נגדיר את **משתני ההחלטה** כמספר הפריטים מכל סוג המועמסים למכולה:
  - X_1– מספר החולצות במכולה
  - X_2– מספר זוגות המכנסיים במכולה
  - X_3– מספר המעילים במכולה

2. הגדרת פונקציית המטרה

- כדי להגדיר את פונקציית המטרה נרכז את נתוני הבעיה בטבלה:

פריט	מכס לפריט (שקלים)	הנפח החלקי של הפריט מתוך הנפח הכולל של המכולה
חולצות	10	1/1000
מכנסיים	15	1/500
מעילים	20	1/200

- כיוון שהרווח של המפעל אינו תלוי בהרכב המוצרים, ההרכב האופטימלי של המוצרים הוא זה שיחייב את המפעל במכס הנמוך ביותר.
- משום כך נקבע את **פונקצית המטרה** כך שתבטא את המכס הכולל שישולם על-פי הרכב הפריטים במכולה:
- $$Z = 10X_1 + 15X_2 + 20X_3$$

- בניגוד לדוגמאות הקודמות, אנו דורשים במקרה זה שהערך שהפונקציה מפיקה עבור פתרון אופטימלי יהיה מינימלי.
- ***3. קביעת האילוצים על משתני ההחלטה***
- האילוצים על משתני ההחלטה שלפנינו מבוססים על נפח הפריטים הכולל ועל דרישות השיווק; ננסח אותם בצורה זו:

- $$\frac{1}{1000}X_1 + \frac{1}{500}X_2 + \frac{1}{200}X_1 = 1$$
- $X_1 \geq 100$
- $X_2 \geq 100$
- $X_3 \geq 100$
  - $X_1 \leq X_2$ ($X_1 - X_2 \leq 0$ או)

- ***4. הוספת אילוצי אי-שליליות***
- בבעיה זו אין צורך להגביל את מספר הפריטים;
- אין חשש שנקבל כתוצאה מספר שלילי מפני שמגבלה זו מיושמת כבר במגבלת מספר הפריטים (לפחות 100 מכל סוג).
- עם זאת, יש בבעיה זו מגבלה שעלולה להתנגש עם הפתרון המתמטי הטהור של הבעיה: העובדה שמספר הפריטים מכל סוג חייב להיות מספר שלם.

- במציאות אי אפשר לשווק מספר לא שלם של פריטי לבוש, ואילו הפתרון המתמטי עלול לתת מספר כזה.
- בהמשך נלמד כיצד מתמודדים עם בעיה זו.
- בבעיה שלנו X_1, X_2, X_3 integers