<u>שאלה 1:</u>
הצע אלגוריתם הבודק האם גרף לא מכוון G=(V, E) הוא עץ, כלומר – קשיר וחסר מעגלים, בזמן O(n).

<u>פתרון:</u>

<u>תאור האלגוריתם:</u>
1. נריץ את BFS*, המתואר להלן:

<u>*BFS*(G, s)*</u>

```
for each vertex  u ∈ V
    color[u] ← WHITE
    d[u] ← ∞
    π[u] ← NIL
color[s] ← GRAY
d[s] ← 0
Q ← {s}
while  ( Q ≠ ϕ )
    u ← head[Q]
    for each v ∈ Adj[u]
        if  ( color[v] = WHITE )
            color[v] ← GRAY
            d[v] ← d[u] + 1
            π[v] ← u
            Enqueue(Q, v)
        else
            if  ( color[v] = GRAY )
                return FALSE
    Dequeue(Q)
    color[u] ← BLACK
return TRUE
```

2. אם קיבלנו תשובה שלילית – הגרף אינו עץ, וסיימנו.
אחרת – נעבור על קבוצת הקדקודים:
אם קיימים קדקודים לבנים – אזי הגרף אינו עץ.
אחרת – הגרף הוא עץ.

<u>סיבוכיות:</u>
<u>א.</u> ננתח עבור גרף לא שאינו עץ:
אם הגרף אינו עץ, אזי קיים בו מעגל. אם מצאנו מעגל – נעצור את האלגוריתם.
מעגל הוא מסלול שחוזר על אחד מקדקודיו יותר מפעם אחת. $\Leftarrow$ $|E| \le |V|$ $\Leftarrow$
הסיבוכיות היא O(n).
<u>ב.</u> ננתח עבור גרף שהוא עץ:
ידוע שבעץ מתקיים: $|E| = |V| - 1$. $\Leftarrow$ הסיבוכיות היא O(n).
סה"כ: O(n).

נכונות:
נוכיח שהאלגוריתם מחזיר תשובה חיובית אס"ם הגרף הוא קשיר וחסר מעגלים:
<u>קשיר:</u>
<u>טענה:</u>
אם הגרף אינו קשיר – אזי בסיום סריקת BFS יחידה יהיו קדקודים לבנים.
<u>הוכחה:</u>
נובעת ישירות מנכונות BFS.

<u>חסר מעגלים:</u>
<u>טענה:</u>
אם במהלך סריקת BFS מגלים קודקוד אפור – אזי קודקוד זה (עם הקשת שגילתה אותו) סוגר מעגל.
<u>הוכחה:</u>
נובעת ישירות מנכונות BFS.

לכן – אם בוצעה סריקת BFS, והגרף הנסרק התגלה כחסר מעגלים וכקשיר – אזי ברור שהוא עץ.
אם הגרף בעל מעגלים – אזי האלגוריתם מחזיר תשובה שלילית (שורות 16-17 ב-BFS).
אם הגרף אינו קשיר – אזי האלגוריתם מחזיר תשובה שלילית (סעיף 2 של האלגוריתם).

■

<u>שאלה 2:</u>
הצע אלגוריתם המכוון גרף קשיר ולא מכוון כך שיהיה קשיר היטב בזמן לינארי. אם לא ניתן לכוון את הגרף באופן כזה – הודע כל כך.

<u>פתרון:</u>

<u>תאור האלגוריתם:</u>

1. נריץ על את אלגוריתם DFS על גרף G (מקודקוד שרירותי), ונקבל גרף G' מכוון.
2. נריץ על G' את אלגוריתם SCC.
3. אם קיימים יותר מרכיב קשיר היטב אחד – לא ניתן לכוון את הגרף באופן הנדרש.
   אחרת - G' מהווה את כיוון הקשתות הנדרש.

<u>סיבוכיות:</u>

1. DFS: $O(m + n)$.
2. SCC: $O(m + n)$.
3. בדיקה: $O(1)$.

סה"כ: $O(m + n)$, ומכיוון ש-G קשיר: $O(m)$.

<u>נכונות:</u>
ברור שגרף לא מכוון הוא קשיר אס"ם כל שני קדקודים שלו נמצאים על מעגל (לא בהכרח פשוט!!!) אחד לפחות.
ולפיכך ברור שניתן לכוון גרף לא מכוון כך שיהיה קשיר היטב אס"ם כל שני קודקודים נמצאים על מעגל (לא בהכרח פשוט!!!) אחד לפחות.
יהי G גרף לא מכוון, ויהי C מעגל כלשהו בגרף G.
<u>טענה:</u>
אם נכוון את קשתות G בכיוון הסריקה של DFS – נקבל גרף G' מכוון, ובו מעגל מכוון C'.
<u>הוכחה:</u>
נניח ש-C הוא מעגל בגרף לא מכוון.
נניח בשלילה שכיוון הקשתות על-ידי הרצת ה-DFS יצר גרף ללא מעגלים.
אזי ב-G', באותן הקשתות והקדקודים השייכות ל-C, קיימות לפחות 2 קשתות הנכנסות לקודקוד v כלשהו (אחרת היה מעגל).
$\Leftarrow$ אחת מהקשתות האלו אינה קשת עץ. כלומר היא קשת חוצה או קשת קדימה.
אבל הרצת DFS על גרף לא מכוון מניבה רק קשתות עץ או קשתות אחוריות, ולא קשתות חוצות או קשתות קדימה.
$\Leftarrow$ סתירה.
$\Leftarrow$ מעגל שהיה קיים בגרף הלא מכוון יישאר מעגל בגרף שכוון על-ידי ריצת DFS.

קיבלנו שאם ניתן לכוון את G כך שיהיה קשיר היטב, אזי כל שני קדקודים נמצאים על מעגל בגרף G'.
ולכן, אם ניתן לכוון את G כך שיהיה קשיר היטב, אז כיוון הקשתות שמתבצע על-ידי הרצת DFS הוא הכיוון שיתן את כיווני הקשתות הנדרשים.

■

<u>שאלה 3:</u>

נתון גרף לא מכוון $G=(V, E)$, סופי וקשיר. הצע אלגוריתם יעיל הבודק האם G הוא גרף דו-צדדי.

(לחלק את V ל-2 קבוצות V_1 ו-V_2 כך שאין קשת המחברת זוג קדקודים באותה הקבוצה)
(לצבוע את קדקודי הגרף ב-2 צבעים שונים, כך שאין קשת המחברת 2 קדקודים באותו הצבע)

<u>פתרון:</u>

<u>תאור האלגוריתם:</u>

נריץ את אלגוריתם Bi-Sided(G, s) המתואר להלן:

<u>Bi-Sided(G, s)</u>

```
1.   for each  v∈V
2.       color(u) ← WHITE
3.   color[s] ← BLUE
4.   Q ← {s}
5.   while  ( Q ≠ φ )
6.       u ← head[Q]
7.       for each v∈Adj[u]
8.           if  ( color[v] = color[u] )
9.               return  FALSE
10.          if  ( color[v] = WHITE )
11.              if  ( color[u] = BLUE )
12.                color[v] ← RED
13.              else
14.                color[v] ← BLUE
15.          Enqueue(Q, v)
16.      Dequeue(Q)
17.  return   TRUE
```

<u>סיבוכיות:</u>

1-2 $O(n)$.
3-4 $O(1)$.
5-17 $O(m)$.
18 $O(1)$.
סה"כ: $O(m + n)$.

<u>נכונות:</u>

<u>טענה:</u>

גרף הוא דו-צדדי אס"ם ניתן לסמן את כל קדקודי הגרף בצבעים כחול ואדום, כאשר צבעו של כל קודקוד שונה משל שכניו.

<u>הוכחה:</u>

<u>כיוון $\Leftarrow$:</u> נחלק את קדקודי הגרף ל-2 קבוצות משלימות, על-פי הצבע.

כיוון שכל קשת בגרף מחברת בין 2 קדקודים, ועל-פי ההנחה, צבעם שונה – הרי שכל קשת תעבור בין 2 קבוצות הקדקודים.
וזהו גרף דו-צדדי.

<u>כיוון $\Rightarrow$:</u> נניח שהגענו לקודקוד u מקודקוד v, וצבעם זהה.

ברור שקודקוד u הוא צאצא של קודקוד v. $\Leftarrow$ קיים מעגל באורך אי-זוגי בגרף.

צבעי הקדקודים על המסלול בין u ו-v יהיו כחול-אדום, לסירוגין, עד שנגיע לקודקוד v, ששייך לקבוצה הכחולה.

מקודקוד v קיימת קשת לקודקוד u. אבל קודקוד u שייך גם הוא לקבוצה הכחולה.
לכן לא ייתכן שהגרף הוא דו-צדדי.

■

שאלה 4:
נתון גרף קשיר, מכוון $G=(V, E)$, ותת קבוצה של צמתים $U \subseteq V$. הצע אלגוריתם הבודק בזמן $O(m)$ שכל מעגל ב-G עובר דרך לפחות קודקוד אחד מ-U.

פתרון:

תאור האלגוריתם:

1. נריץ DFS על G.
   אם לא נמצא קשת אחורית – אזי אין ב-G מעגלים כלל, לרבות כאלה העוברים דרך קדקודי תת הקבוצה U. לכן נחזיר תשובה "לא קיימים כלל מעגלים בגרף", ונסיים.
2. נבנה גרף $G'=(V', E')$, כאשר:
$$V' = V \setminus U$$
$$E' = \{ (u, v) \mid (u, v) \in E \wedge u, v \in V' \}$$
   אם G' הוא גרף ריק – נחזיר תשובה: "כל מעגל ב-G עובר דרך לפחות קודקוד אחד מ-U", ונסיים.
3. נריץ DFS על G'.
   אם נמצא קשת אחורה, אזי יש ב-G מעגל שלא עובר דרך קדקודי תת הקבוצה U.
   אחרת - כל המעגלים הקיימים ב-G (אם בכלל), עוברים דרך לפחות קודקוד אחד מתת הקבוצה U.

סיבוכיות:

1. DFS: $O(m + n)$.
2. בניית הגרף G': $O(m + n)$.
3. DFS: $O(m + n)$.

סה"כ: $O(m + n)$, ומשום שהגרף קשיר: $O(m)$.

נכונות:

נכונות סעיף 1 - ברור.
נכונות סעיף 2:
אם הגרף החדש ריק, אזי לא קיים מעגל שלא דובר דרך לפחות קודקוד אחד מ-U, ולכן התשובה שכל מעגל ב-G עובר דרך לפחות קודקוד אחד מ-U.
נכונות סעיף 3:
$G' \subseteq G$, על-פי בנייה, והוא אינו מכיל אף קודקוד השייך לתת הקבוצה U.
$\Leftarrow$ אם בגרף G' קיים מעגל, הרי זהו מעגל שלא עובר דרך אף-אחד מקדקודי תת הקבוצה U, ומעגל זה נמצא גם בגרף G.
על-פי משפט, בגרף G קיים מעגל $\Leftrightarrow$ הרצת DFS מוצאת קשת אחורה.
על-פי משפט זה אנו מזהים (בסעיפים 1 ו-3) אם קיים בגרף G או ב-G' מעגל.

■

<u>שאלה:5</u>

גרף מכוון $G=(V, E)$ נקרא קשיר למחצה אם עבור כל זוגות הקדקודים $u, v \in V$ מתקיים:

$v \rightsquigarrow u$, או $u \rightsquigarrow v$.

הצע אלגוריתם יעיל הקובע האם G קשיר למחצה.

<u>פתרון:</u>

<u>תאור האלגוריתם:</u>

1. נריץ SCC למציאת הרכיבים הקשירים היטב.
2. נצור גרף 'G של הרכיבים (ללא מעגלים), כך שכל רכיב ב-G הופך לקודקוד ב-'G.
3. נריץ TopSort על 'G, ונכניס את הקדקודים למחסנית לפי סדר עולה של f[u].
4. נתחיל מהקודקוד הראשון, ונבדוק האם קיימת קשת ממנו לקודקוד הבא.

אם קיימת קשת כזו – נעבור אל הקודקוד הבא, ונמשיך באותו האופן עבור הקדקודים הבאים.

אם קיימת קשת בין כל קודקוד i לקודקוד i+1, אזי הגרף קשיר למחצה.
אחרת – הגרף אינו קשיר למחצה.

<u>סיבוכיות:</u>

1. SCC: $O(m + n)$.
2. בניית 'G: $O(m + n)$.
3. TopSort: $O(m + n)$.
4. בדיקת קשתות וקדקודים: $O(m + n)$.

סה"כ: $O(m + n)$.

<u>נכונות:</u>

בגרף 'G שבנינו בסעיף 2, כל קודקוד מהווה רכיב קשיר היטב, כי SCC מאחד קדקודים שיש ביניהם מסלול לרכיב קשיר היטב (בפרט – כל רכיב קשיר היטב הוא רכיב קשיר למחצה).

נותר לבדוק האם עבור כל זוג של רכיבי קשירות x, y מתקיים: $x \rightsquigarrow y$, או $y \rightsquigarrow x$.
אבל זה נובע ישירות TopSort וביצוע הבדיקות המתוארות בסעיף 4.

■