תכנון וניתוח אלגוריתמים
הרצאה 3

פרק 1.3 : מבוא לשיטת הסימפלקס

<u>מבוא לשיטת הסימפלקס</u>

- פתרון גרפי שהכרנו עד כה מתאים לבעיות בתכנות ליניארי הכוללות שני משתנים.
- שיטה זו מוגבלת,מאחר שרוב הבעיות בתכנות ליניארי כוללות יותר משני משתנים.
- בסעיף זה נציג את "שיטת הסימפלקס" להתרת בעיית התכנות הליניארי.
- לשיטה זו מספר מאפיינים חשובים:

א.השיטה היא אנליטית (חישובית),ולכן הפעלתה אינה תלויה במספר משתני בעיה.

ב.השיטה היא איטרטיבית; פירוש הדבר שעל פי רוב,יש לחזור פעמים רבות על תהליך חישוב מסוים כדי להשיג את הפתרון.

ג.השיטה היא מדויקת ; כלומר משיגים את הפתרון המדויק של הבעיה (בתנאי שקיים פתרון זה).

ד.השיטה דורשת שימוש בפעולות חשבון פשוטות בלבד (חיבור ,חיסור, כפל וחילוק),דבר המאפשר למחשב את השיטה בקלות יחסית.

- מן הראוי לציין, ששיטת הסימפלקס נתגלתה ע"י המתמטיקאי האמריקאי ג'ורג' דנציג, בשנת 1947. כאשר עבד על פרויקט מסוים מטעם חיל האוויר של ארה"ב.

- נציין עוד ,ששיטת הסימפלקס מבוססת על שיטת הגאוס –ג'ורדן להתרת מערכות של משוואות ליניאריות.
- נציג כעת את שיטת הסימפלקס ,כאשר יש "למקסם" (כלומר:להביא למקסימום)את פונקצית המטרה
- וכל אילוצי הבעיה הם שוויונים. (בסעיפים הבאים נרחיב את השיטה גם למקרים אחרים).

- נפתור, לדוגמא,את הבעיה הבאה:

$$\max \quad z = -x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 7x_4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 8$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 13x_4 = 20$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

◈ ראשית,נהפוך את פונקצית המטרה למשוואה לינארית רגילה,ונצרף אותה לאילוצי הבעיה.

$$z + x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0 \quad (E_1)$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 8 \quad (E_2)$$

$$5x_1 + x_2 - 4x_3 + 13x_4 = 20 \quad (E_3)$$

◈ ע"פ, שיטת הסימפלקס יש למצוא תחילה פתרון בסיסי למערכת, המקיים את שתי הדרישות הבאות:

א. Z יופיע בקבוצת המשתנים הבסיסיים .

ב. הפתרון הבסיסי הזה יבטיח ערכים אי שליליים ליתר משתנים (בסיסיים ולא-בסיסיים כאחד).

- ננסה אפוא למצוא פתרון בסיסי התחלתי כאשר המשתנים הבסיסיים הם: Z, X_2 ו- X_1 .
- המשתנה Z נבחר כבסיסי עפ"י הדרישה א'
- X_2 ו X_1 נבחרו באופן שרירותי.
- כדי למצוא את הפתרון הבסיסי הזה,יש ללכסן את המערכת ביחס למשתנים הבסיסיים,כלומר ביחס X_1, X_2 ו Z :

- אם נבצע את הלכסון, תוך מס' צעדים תוכלו להאמין שנקבל:

$$z \quad + 8x_3 - 24x_4 = -28$$

$$x_1 \quad -\frac{3}{4}x_3 + 2x_4 = 3$$

$$x_2 \quad -\frac{1}{4}x_3 + 3x_4 = 5$$

◆הפתרון הבסיסי ההתחלתי הוא אפוא:

- $Z = -28$
- $X_1 = 3$
- $X_2 = 5$
- $X_3 = 0$
- $X_4 = 0$

- מאחר שמטרת הבעיה היא למצוא את הערך המקסימאלי של Z, ננסה להשיגה ע"י הגדלת ערכו הנוכחי.
- פירוש הדבר הוא,מציאת פתרון בסיסי חדש(הכולל אף הוא את Z כמשתנה בסיסי), כך שערכו של Z יהיה גדול מערכו הנוכחי.
- כדי לבדוק אם אכן אפשר למצוא פתרון כזה, נבודד את Z מהמשוואה הראשונה של המערכת.

כתוצאה מתקבל:

- $Z= -8X_3 +24X_4-28$
- X_3, X_4 הם משתנים לא בסיסיים, וכעת ערכם שווה לאפס.
- הגדלת ערכו שלX_4, תגרום להגדלת ערכו של Z , מאחר שהמקדם של X_4(בשוויון הנ"ל)הוא חיובי.
- לעומת זאת,הגדלת ערכו של X_3,תגרום להקטנת ערכו של Z, מאחר שהמקדם שלו שלילי.

- מתברר אפוא שכדי להגדיל את ערכו של Z, יש להגדיל את X_4 ככל האפשר.
- אך כאן מתעוררת השאלה הבאה: הניתן להגדיל את X_4 ככל שנרצה או שמא,יש גבול לדבר?
- כדי להשיב לשאלה זו,עלינו לחקור את אילוצי הבעיה. האילוץ הראשון, שצורתו הנוכחית
- $$x_1 - \frac{3}{4}x_3 + 2x_4 = 3$$

- מן האילוץ הראשון נבודד את X_1, ונשמיט את X_3(וזאת מכיוון שערכו בפתרון הבסיסי הנוכחי הוא אפס,וראינו שלא כדאי לשנות ערך זה,כי הדבר יביא בהכרח **להקטנת** ערכו של Z).
- מתקבל אפוא השוויון:

$$x_1 = 3 - 2x_4$$

- עקרונית מותר להעניק ל- X_4 כל ערך אשר אינו גורם לכך שהביטוי האלגברי $3 - 2x_4$ יקבל ערך שלילי.
- שאם לא כן, יהיה גם X_1 שלילי,וזה נוגד את אילוצי הבעיה. לפיכך, האי-שוויון: $3 - 2x_4 \geq 0$ חייב להתקיים!

◈אפשר להיווכח בקלות שפתרון האי-שוויון הזה הוא $x_4 \le \frac{3}{2}$

◈לכן האילוץ הראשון של הבעיה מאפשר הגדלת X_4 עד $\frac{3}{2}$ לכל היותר .

(שים לב! קיבלנו : האיבר החופשי מחולק במקדם <u>החיובי</u> של X_4).

◈באופן דומה נחקור גם את האילוץ השני:

$$x_2 - \frac{1}{4}x_3 + 3x_4 = 5$$

◈בגלל סיבות שהוזכרו לעיל, נשמיט גם הפעם את האיבר הכולל את X_3,ולאחר מכן נבודד את X_2;

◈כתוצאה מתקבל השוויון: $x_2 = 5 - 3x_4$

- הפעם מותר להעניק ל- X_4 כל ערך שאינו גורם לכך שהביטוי האלגברי $5-3x_4$ יהיה שלילי.
- לפיכך, האי-שוויון $5-3x_4 \geq 0$ חייב להתקיים!
- אפשר לבדוק בקלות שפתרון האי-שוויון הזה הינו: $x_4 \leq \frac{5}{3}$ לכן,האילוץ השני של הבעיה מאפשר הגדלת X_4 עד $\frac{5}{3}$.

- מתוך שני הגבולות הללו של X_4
- $x_4 \leq \frac{5}{3}$ ו- $x_4 \leq \frac{3}{2}$
- נבחר בהכרח בזה שערכו נמוך (כלומר: $\frac{3}{2}$).
- אם לא כן, יקבל לפחות אחד ממשתני הבעיה ערך שלילי ,וזה נוגד,כידוע ,את אילוצי הבעיה.
- שים לב! לוקחים $\min(3/2\ ,5/3)=3/2$

- נגדיל אפוא את X_4 עד 3/2 ;
- זה יגרום לכך שערכו של X_1 יהיה אפס(תוכל לבדוק את הדבר ע"י הצבת $x_4 = \frac{3}{2}$
- בשוויון: $x_1 = 3 - 2x_4$).
- לפיכך,המשתנה X_1 יעזוב את קבוצת המשתנים הבסיסיים ו- X_4 יבוא במקומו.

- נבנה אפוא פתרון בסיסי חדש למערכת המשוואות הליניאריות הנ"ל,ובו:
- המשתנים הבסיסיים יהיו: Z, X_2 ו- X_4,ואילו המשתנים הלא-בסיסיים יהיו X_1 ו- X_3.
- לשם כך,נלכסן את המערכת ביחס למשתנים הבסיסיים הללו .

לאחר פעולות הלכסון, X_4 יופיע במשוואה השנייה בלבד,כי משוואה זו קבעה,למעשה את ערכו כמשתנה בסיסי. לאחר ביצוע $(E_2 = \frac{1}{2} E_2$

נקבל:

$$z + 12X_1 \qquad -X_3 \qquad = 8 \qquad (E_1 = E_1 + 24E_2)$$

$$\frac{1}{2}X_1 \qquad -\frac{3}{8}X_3 + X_4 = \frac{3}{2} \qquad (E_2)$$

$$-\frac{3}{2}X_1 + \qquad X_2 + \frac{7}{8}X_3 \qquad = \frac{1}{2} \qquad (E_3 = E_3 - 3E_2)$$

הפתרון הבסיסי המתאים לצורה הנוכחית של המערכת הוא:

- $Z = 8$
- $X_1 = 0$
- $X_2 = 1/2$
- $X_3 = 0$
- $X_4 = 3/2$

- מתברר שפתרון זה טוב מקודמו,מאחר שרכו הנוכחי של Z גדול בפתרון הביסי ההתחלתי.
- הבה נבדוק אם אפשר לשפר גם את הפתרון הזה,כלומר להגדיל את ערכו של Z.
- לשם כך נבודד שוב את משתנה הזה מהמשוואה הראשונה של המערכת:

$$Z = -12X_1 + X_3 + 8$$

- אם נתבונן באגף השני של השוויון הזה,יתברר שכדי להגדיל את ערכו של Z,יש להגדיל את X_3 בלבד,ולא כדאי להגדיל את X_1 (התוכל להסביר מדוע?)
- עקב כך,עלינו לבדו עד איזה גבול מותר להגדיל את X_3.
- כדי להשיב לשאלה זו,נחקור שוב את אילוצי הבעיה

- מן האילוץ הראשון: $\frac{1}{2}X_1 - \frac{3}{8}X_3 + X_4 = \frac{3}{2}$
- נבודד את X_4 ונשמיט X_2 ; כתוצאה נקבל:

$$X_4 = \frac{3}{2} + \frac{3}{8}X_3$$

- כאמור האי-שוויון: $\frac{3}{2} + \frac{3}{8}X_3 \ge 0$ חייב להתקיים!

- קל להיווכח ש- $X_3 \ge -4$ הוא הפתרון לאי-שוויון זה.
- תוצאה זו קובעת ,למעשה, גבול תחתון ל- X_3(ולא גבול עליון, כפי שאירע במקרים הקודמים).
- לפיכך,האילוץ הראשון מאפשר הגדלת X_3 בלי הגבלה.

- באופן דומה נחקור גם את האילוץ השני:

$$-\frac{3}{2}x_1 + x_2 + \frac{7}{8}x_3 = \frac{1}{2}$$

- הפעם נבודד את X_2(ונשמיט,כמובן,את X_1) ; לפיכך:
- $$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{7}{8}x_3$$

- כאמור האי-שוויון: $\frac{1}{2} - \frac{7}{8}x_3 \ge 0$ חייב להתקיים.
- מאחר שפתרון האי-שוויון הזה הוא: $x_3 \le \frac{4}{7}$ (בדוק!), מתברר שמותר להגדיל את ערכו של X_3 עד $\frac{4}{7}$.
- כאשר $x_3 = \frac{4}{7}$ הרי ש- $X_2=0$ (מדוע?)

- כדי לשפר את פתרון הבעיה ,נבנה פתרון בסיסי חדש,ובו יהיה X_3 משתנה בסיסי (יחד עם z ו- X_4) במקום X_2,העוזב את הבסיס.
- לשם כך,יש ללכסן את המערכת ביחס למשתנים בסיסיים X_3, z, ו- X_4.
- לאחר פעולת הלכסון, X_3 יופיע במשוואה השלישית בלבד.

- כי משוואה זו קבעה למעשה את ערכו כמשתנה בסיסי.
- לאחר ביצוע $(E_3 = \frac{8}{7} E_3)$ נקבל:

$$z + \frac{72}{7}X_1 + \frac{8}{7}x_2 = \frac{60}{7} \qquad (E_1 = E_1 + E_3)$$

$$-\frac{1}{7}X_1 + \frac{3}{7}X_2 + x_4 = \frac{12}{7} \qquad (E_2 = E_2 + \frac{3}{8}E_3)$$

$$-\frac{12}{7}X_1 + \frac{8}{7}X_2 + X_3 = \frac{4}{7} \qquad (E_3)$$

הפתרון הבסיסי המתאים לצורה זו של המערכת היא:

$$Z = \frac{60}{7} = 8\frac{4}{7}$$

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = 0$$

$$X_3 = \frac{4}{7}$$

$$X_4 = \frac{12}{7}$$

- גם פתרון(בסיסי)זה הוא שיפור בהשוואה לפתרון הבסיסי הקודם, מאחר שהערך הנוכחי של Z גדול מערכו הקודם.
- האם אפשר לשפר עוד את ערכו של Z? כדי לענות לשאלה זו,נבודד שוב את Z במשוואה הראשונה של המערכת.
- כתוצאה מכך מתקבל: $Z = -\frac{72}{7}X_1 - \frac{8}{7}X_2 + \frac{60}{7}$

- מאחר שמקדמי X_1 ו- X_2 שליליים,הרי כל שינוי (חיובי) בערכם של משתנים אלה **יפחית** את ערכו של Z.
- לכן עדיף להשאיר משתנים אלה ברמתם הנוכחית (כלומר אפס),ולא לשנותם.
- לפיכך,אין שום אפשרות לשפר את ערכו של Z, ועלינו להסיק שהפתרון הבסיסי האחרון שמצאנו הוא <u>הפתרון האופטימאלי</u> לבעיה הנתונה.