

# Abgabe - Übungsblatt [9]

Angewandte Mathematik: Stochastik

[Vincent Schönbach]

[Yihao Wang]

20. Juni 2020

## Aufgabe 1

a)

Gewinn	1	-9	-1
P	$\frac{25}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$

$$E_p(\text{Gewinn}) = 1 \times \frac{25}{36} - 9 \times \frac{1}{36} - 1 \times \frac{10}{36} = \frac{1}{6}$$

b) Wahrscheinlichkeitsverteilung:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$

Bei 6 kann das Wappen entweder erscheint oder nicht erscheint, deswegen  $\frac{1}{64} \times 2$ .

$$E_p(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{16} + 5 \times \frac{1}{32} + 6 \times \frac{1}{32} = 1.96875$$

## Aufgabe 2

$$E_p(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \quad (1)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \quad (2)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{(k-1)!} \quad (3)$$

$$= \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!} \quad (4)$$

$$= \lambda \quad (5)$$

□

Erklärung:

- (1) Nach Formel  $E_p(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega)$
- (2) Für  $k=0$ , ist das Ergebnis 0, wir können direkt mit 1 anfangen.
- (3) kurze Umformung.
- (4) wir nehmen ein  $\lambda$  raus. Und wir haben hier wieder eine Posionsverteilung.
- (5) Die Summe von Posion-Verteilung ist 1.

$$\begin{aligned} E_p(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1+1) \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1) \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \cdot \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1) \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) \\ &= \lambda e^{-\lambda} \cdot \left( \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \right) \quad i = k-1 \\ &= \lambda e^{-\lambda} \cdot \left( \lambda \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \right) \quad j = k-2 \\ &= \lambda(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Erklärung: Tja, wir glauben der Beweis schon ausführlich genug ist und erklärt selbst. Nur  $k-1+1$  ist bisschen Tricky in den Beweis. Nun benutzen wir den Hinweis der Aufgabe.

$$\begin{aligned}V_p(X) &= E_p(X^2) - E_p(X)^2 \\&= \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda\end{aligned}$$

□

### Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
 E_p(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} \\
 &= p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (1-p)^{n-1} \\
 &= p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} \\
 &= \frac{1}{p}
 \end{aligned} \tag{6}$$

□

Erklärung: Die haupte Idee ist nicht so unterschied wie A2, wir benutzen die Formel von Erwartungswert direkt. Und natürlich den Hinweis der Aufgabe.

$$\begin{aligned}
 E_p(X^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} \\
 &= p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot (1-p)^{n-1} \\
 &= p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (n+1-1) \cdot n \cdot (1-p)^{n-1} \\
 &= p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot n \cdot (1-p)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (1-p)^{n-1} \\
 &= p \cdot \left( \frac{2}{(1-(1-p))^3} - \frac{1}{(1-(1-p))^2} \right) \\
 &= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_p(X) &= E_p(X^2) - E_p(X)^2 \\
 &= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\
 &= \frac{1-p}{p^2}
 \end{aligned}$$

□

## Aufgabe 4

- a) Die ZV, die die Zahl der Würfe bis die i-te verschiedene Zahl geworfen ist, passt genau die geometrische Verteilung.

$$X_1 = 1$$

$$P(X = i) = \left(\frac{5}{6}\right) \times \left(1 - \frac{5}{6}\right)^{(i-1)}$$

Die Erwartungswert von geometrische-Verteilung ist  $\frac{1}{p}$  (von A3). Wir zeigen hier mit einem Beispiel, für die 2-te verschiedene Zahl, die Wahrscheinlichkeit davon ist:

$$P(n) = \frac{5}{6} \times \left(1 - \frac{5}{6}\right)^{n-1} \Rightarrow E_p(2) = \frac{1}{p} = \frac{6}{5}$$

sonst ist analog, der Erwartungswert folgt:

$$1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \dots + 6 = 14.7$$

- b) direkt das Ergebnis von A3 nutzen

$$V(X) = \frac{1 - \frac{4}{6}}{\frac{4}{6}^2} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Ps: Hi Matthias. Ich(Yihao) muss noch mal vorstellen. Wir glauben, dass dieses Blatt haben wir gut gemacht. Schau mal, welche ich vorstellen soll. danke!