Abgabe - Übungsblatt [2]

Angewandte Mathematik: Stochastik

[Vincent Schönbach] [Yihao Wang]

2. Mai 2020

Aufgabe 1

a) Ein System M von Teilmengen von Ω heißt $\sigma-$ Algebra über Ω, wenn gilt: $\Omega \in M$, aber es ist nicht der Fall.

b) $\{\emptyset, \Omega, \{r, g\}, \{b\}, \{r, g, b\}, \{r, g, a\}, \{b, a\}, \{a\}\}$

c)

Ererignis	**Wahrscheinlichkeit P**
$\emptyset$	0
Ω	1
$\{r, g\}$	3/8
$\{b\}$	1/4
$\{r, g, b\}$	5/8
$\{r, g, a\}$	3/4
$\{b, a\}$	5/8
$\{a\}$	3/8

Aufgabe 2

a) $\Omega_7 = [1:6]^7 = \{(\omega_1, \ldots, \omega_7) \mid \forall i : \omega_i \in [1:6]\}$

b) $A = \{(\omega_1, \ldots, \omega_7) \in \Omega \mid \forall j \in [1:6], \exists i \in [1:7] : \omega_i = j\}$
$B = \{(\omega_1, \ldots, \omega_7) \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{7} \omega_i \quad mod \quad 2 = 0\}$

c) $|\Omega| = 6^7$
$|A| = 6! \times \binom{7}{1} \times 6$ Begründung: Man wählt zunächst einen freien Platz von 7 Plätze, und in diesen Platz gibt es 6 möglich Würfeln. 6 Fakultät bedeutet, der Rest darf jede Zahl genau ein mal erscheinen, und die Reihenfolge davon ist auch wichtig.
$|B| = \frac{6^7}{2}$ Begründung: gerade+gerade = gerade, nicht gerade + nicht gerade = gerade. Die sind genau Hälfte der Fälle.

#gerade	#nicht gerade	Ergebnis
0	7	gerade
1	6	nicht gerade
2	5	gerade
3	4	nicht gerade
4	3	gerade
5	2	nicht gerade
6	1	gerade
7	0	nicht gerade

Aufgabe 3

z.zg: $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap\limits_{i\geq 1} \mathcal{A}_i \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}
&Bew: Sei \quad \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots \in \mathcal{A} \\
&\overset{Def(b)}{\Rightarrow} \mathcal{A}_1^c, \mathcal{A}_2^c, \ldots \in \mathcal{A} \\
&\overset{Def(c)}{\Rightarrow} \bigcup_{i\geq 1} \mathcal{A}_i^c \in \mathcal{A} \\
&\Rightarrow (\bigcap_{i\geq 1} \mathcal{A}_i)^c \in \mathcal{A}(De-morgansche\ Gesetz) \\
&\overset{Def(b)}{\Rightarrow} \bigcap_{i\geq 1} \mathcal{A}_i \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

IA: $\quad n = 0$

$$P(\mathcal{A}_1) - 0 \leq P(\mathcal{A}_1)$$

IS: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n+1} P(\mathcal{A}_i) - \sum_{i<j} P(\mathcal{A}_i \bigcap \mathcal{A}_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(\mathcal{A}_i) - \sum_{i<j} P(\mathcal{A}_i \bigcap \mathcal{A}_j) + P(\mathcal{A}_{n+1}) - \sum_{i<n+1} \mathcal{A}_i \bigcap \mathcal{A}_{n+1} \\
&\overset{IV}{\leq} P(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i) + P(\mathcal{A}_{n+1}) - \sum_{i<n+1} \mathcal{A}_i \bigcap \mathcal{A}_{n+1} \\
&\overset{1.4(4)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} P(\mathcal{A}_i) + P(\mathcal{A}_{n+1}) - P(\bigcap_{i=1}^{n+1} \mathcal{A}_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n+1} P(\mathcal{A}_i) - P(\bigcap_{i=1}^{n+1} \mathcal{A}_i) \\
&\overset{1.4(2)}{\leq} P(\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{A}_i)
\end{aligned}$$