

Abgabe - Übungsblatt [2]

Angewandte Mathematik: Stochastik

[Vincent Schönbach] [Yihao Wang]

2. Mai 2020

Aufgabe 1

- a) Ein System M von Teilmengen von Ω heißt σ -Algebra über Ω , wenn gilt:
 $\Omega \in M$, aber es ist nicht der Fall.
- b) $\{\emptyset, \Omega, \{r, g\}, \{b\}, \{r, g, b\}, \{r, g, a\}, \{b, a\}, \{a\}\}$

Ergebnis	Wahrscheinlichkeit P
\emptyset	0
Ω	1
$\{r, g\}$	3/8
c) $\{b\}$	1/4
$\{r, g, b\}$	5/8
$\{r, g, a\}$	3/4
$\{b, a\}$	5/8
$\{a\}$	3/8

Aufgabe 2

- a) $\Omega_7 = [1 : 6]^7 = \{(\omega_1, \dots, \omega_7) \mid \forall i : \omega_i \in [1 : 6]\}$
- b) $A = \{(\omega_1, \dots, \omega_7) \in \Omega \mid \forall j \in [1 : 6], \exists i \in [1 : 7] : \omega_i = j\}$
 $B = \{(\omega_1, \dots, \omega_7) \in \Omega \mid \sum_{i=1}^7 \omega_i \mod 2 = 0\}$
- c) $|\Omega| = 6^7$
 $|A| = 6! \times \binom{7}{1} \times 6$ Begründung: Man wählt zunächst einen freien Platz von 7 Plätze, und in diesen Platz gibt es 6 möglich Würfeln. 6 Fakultät bedeutet, der Rest darf jede Zahl genau ein mal erscheinen, und die Reihenfolge davon ist auch wichtig.
 $|B| = \frac{6^7}{2}$ Begründung: gerade+gerade = gerade, nicht gerade + nicht gerade = gerade. Die sind genau Hälfte der Fälle.

#gerade	#nicht gerade	Ergebnis
0	7	gerade
1	6	nicht gerade
2	5	gerade
3	4	nicht gerade
4	3	gerade
5	2	nicht gerade
6	1	gerade
7	0	nicht gerade

Aufgabe 3

z.zg: $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i \geq 1} \mathcal{A}_i \in \mathcal{A}$

Bew : Sei $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots \in \mathcal{A}$

$\stackrel{Def(b)}{\Rightarrow} \mathcal{A}_1^c, \mathcal{A}_2^c, \dots \in \mathcal{A}$

$\stackrel{Def(c)}{\Rightarrow} \bigcup_{i \geq 1} \mathcal{A}_i^c \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow (\bigcap_{i \geq 1} \mathcal{A}_i)^c \in \mathcal{A} \text{ (De - Morgansche Gesetz)}$

$\stackrel{Def(b)}{\Rightarrow} \bigcap_{i \geq 1} \mathcal{A}_i \in \mathcal{A} \quad \square$

Aufgabe 4

IA: $n = 0$

$$P(\mathcal{A}_1) - 0 \leq P(\mathcal{A}_1)$$

IS: $n \rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n+1} P(\mathcal{A}_i) - \sum_{i < j} P(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j) \\
&= \sum_{i=1}^n P(\mathcal{A}_i) - \sum_{i < j} P(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j) + P(\mathcal{A}_{n+1}) - \sum_{i < n+1} P(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_{n+1}) \\
&\stackrel{IV}{\leq} P\left(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_i\right) + P(\mathcal{A}_{n+1}) - \sum_{i < n+1} P(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_{n+1}) \\
&\stackrel{1.4(4)}{\leq} \sum_{i=1}^n P(\mathcal{A}_i) + P(\mathcal{A}_{n+1}) - P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} \mathcal{A}_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} P(\mathcal{A}_i) - P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} \mathcal{A}_i\right) \\
&\stackrel{1.4(2)}{\leq} P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathcal{A}_i\right) \quad \square
\end{aligned}$$