Abgabe - Übungsblatt [1]

Angewandte Mathematik: Stochastik

[Vincent Schönbach] [Yihao Wang]

26. April 2020

Aufgabe 1

a) Immer falsch. w ist Tupel und keine Menge.

b) Immer richtig. Menge selber gehört zu seiner eigenen Potenzmenge.

c) Immer richtig. $w \in \Omega \Rightarrow \{w\} \in A$.

d) Immer richtig. w ist Tupel.

e) Immer falsch. w ist Tupel, nicht Menge.

f) Immer falsch. Da w_i kein Tupel.

g) Im Allgemeinen falsch. $w_m \in \{1, ..., n\}$.

h) Immer richtig. A ist die Potenzmenge von Ω. Alle diese Elemente sind drin.

Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned} |N^M| &\overset{Def.}{=} |\{f Abb. \mid f : M \to N\}| \\ &= \text{Anzahl Möglichkeiten } |M| \text{ Elemente auf } |N| \text{ Elemente abzubilden} \\ &= |N|^{|M|} \end{aligned}$$

b) $|2^M| \overset{Def.}{=} |\{X \mid X \subseteq M\}|$

Für jede Teilmenge $X \subseteq M$ existiert genau eine Funktion mit:

$$f_x : M \to \{0, 1\}$$

$$f_x(a) = \begin{cases} 0, falls & a \notin X \\ 1, sonst \end{cases}$$

Somit ist:

$$\begin{aligned} |2^M| &= |\{f Abb. \mid f : M \to \{0, 1\}\}| \\ &= |\{0, 1\}^M| \\ &= 2^{|M|} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Beweis mit vollständigen Induktion:

IA: $n = 0 \Rightarrow k = 0$

$$\begin{aligned}\binom{0}{0} &= |\{N \subset \{1,\ldots,0\} \mid |N| = 0\}|(NachDef.)\\ &= 1 = \frac{0!}{0! \bullet (0-0)!}\end{aligned}$$

$IS: n \Rightarrow n+1$

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k} &= |\{N \subset \{1,\ldots,n+1\} \mid |N| = k\}|\\ &= |\{N \subset \{1,\ldots,n\} \mid |N| = k\}|\\ &+ |\{N \subset \{1,\ldots,n+1\} \mid |N| = k \wedge n+1\}|\\ &= \binom{n}{k} + |\{N \subset \{1,\ldots,n\} \mid |N| = k-1\}|\\ &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\\ &\overset{IV}{=} \frac{n!}{k! \bullet (n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)! \bullet (n-k+1)!}\\ &= \frac{n!}{(k-1)! \bullet (n-k)!} \times (\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1})\\ &= \frac{n!}{(k-1)! \bullet (n-k)!} \times \frac{n-k+1+k}{k \bullet (n-k+1)}\\ &= \frac{(n+1)!}{k! \bullet ((n+1)-k)!}\end{aligned}$$

b) Die Reihenfolge von Kombination eindeutig:

$$\frac{1}{49 \times 48 \times \ldots \times 44}$$

Die Reihenfolge ist egal:

$$\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816}$$

Aufgabe 4

a) Zähler: Anzahl Möglichkeiten, genau k-mal Kopf von n-mal Werfen zu erhalten.

Nenner: Anzahl aller Möglichkeiten $\Rightarrow$ n-mal fair werfen $(\frac{1}{2})^n$.

b)

$$\frac{\binom{n}{1}}{2^n} = \frac{n}{2^n}$$