Abgabe - Übungsblatt [9]

Angewandte Mathematik: Stochastik

[Vincent Schönbach] [Yihao Wang]

21. Juni 2020

Aufgabe 1

a)

Gewinn	1	-9	-1
P	$\frac{25}{26}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$

$E_p(Gewinn) = 1 \times \frac{25}{36} - 9 \times \frac{1}{36} - 1 \times \frac{10}{36} = \frac{1}{6}$

b) Wahrscheinlichkeitsverteilung:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$

Bei 6 kann das Wappen entweder erscheinen oder nicht erscheinen, deswegen $\frac{1}{64} \times 2$.
$E_p(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{16} + 5 \times \frac{1}{32} + 6 \times \frac{1}{32} = 1.96875$

Aufgabe 2

$$
\begin{aligned}
E_p(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} && (1)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} && (2)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{(k-1)!} && (3)\\
&= \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!} && (4)\\
&= \lambda && (5)
\end{aligned}
$$

□

Erklärung:

(1) Nach Formel $E_p(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega)$

(2) Für k=0, ist das Ergebnis 0, wir können direkt mit 1 anfangen.

(3) kurze Umformung.

(4) wir nehmen ein λ raus. Und wir haben hier wieder eine Possionsverteilung.

(5) Die Summe von Possion-Verteilung ist 1.

$$
\begin{aligned}
E_p(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}\\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!}\\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1+1) \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!}\\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1) \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\\
&= \lambda e^{-\lambda} \cdot (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1) \cdot \lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!})\\
&= \lambda e^{-\lambda} \cdot (\lambda \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}) \qquad i = k-1\\
&= \lambda e^{-\lambda} \cdot (\lambda \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}) \qquad j = k-2\\
&= \lambda(\lambda + 1)
\end{aligned}
$$

Erklärung: Tja, wir glauben der Beweis ist schon ausführlich genug und erklärt sich selbst. Nur k-1+1 ist ein bisschen Tricky in dem Beweis. Nun benutzen wir den Hinweis der Aufgabe.

$$
\begin{aligned}
V_p(X) &= E_p(X^2) - E_p(X)^2 \\
&= \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
E_p(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} \\
&= p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (1-p)^{n-1} \\
&= p \cdot \frac{1}{(1-(1-p))^2} \qquad (6) \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

□

Erklärung: Die Hauptidee ist nicht so unterschiedlich wie A2, wir benutzen die Formel von Erwartungswert direkt. Und natürlich den Hinweis der Aufgabe.

$$\begin{aligned}
E_p(X^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} \\
&= p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot (1-p)^{n-1} \\
&= p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (n+1-1) \cdot n \cdot (1-p)^{n-1} \\
&= p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot n \cdot (1-p)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (1-p)^{n-1} \\
&= p \cdot (\frac{2}{(1-(1-p))^3} - \frac{1}{(1-(1-p))^2}) \\
&= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_p(X) &= E_p(X^2) - E_p(X)^2 \\
&= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4

a) Die ZV, die die Zahl der Würfe bis die i-te verschiedene Zahl geworfen beschreibt, da passt genau die geometrische Verteilung.
$X_1 = 1$
$P(X = i) = (\frac{5}{6}) \times (1 - \frac{5}{6})^{(i-1)}$
Der Erwartungswert von geometrische-Verteilung ist $\frac{1}{p}$(von A3). Wir zeigen hier mit einem Beispiel, für die 2-te verschiedene Zahl, die Wahrscheinlichkeit davon ist:
$P(n) = \frac{5}{6} \times (1 - \frac{5}{6})^{n-1} \Rightarrow E_p(2) = \frac{1}{p} = \frac{6}{5}$
sonst ist analog, der Erwartungswert folgt:
$1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \ldots + 6 = 14.7$

b) direkt das Ergebnis von A3 nutzen
$V(X) = \frac{1-\frac{4}{6}}{\frac{4}{6}^2} = \frac{3}{4} = 0.75$

Ps: Hi Matthias. Ich(Yihao) muss noch mal vorstellen. Wir glauben, dass wir dieses Blatt gut gemacht haben. Schau mal, welche ich vorstellen soll. danke!