# Abgabe - Übungsblatt [3]

Angewandte Mathematik: Stochastik

[Vincent Schönbach] [Yihao Wang]

10. Mai 2020

## Aufgabe 1

a) Beh.: $\mathcal{A} = 2^\Omega$ ist die kleinste solche $\sigma$-Algebra.

Bew.: Es ist nach Voraussetzung $G \subseteq \mathcal{A}$.
Sei nun $M \in 2^\Omega$ beliebig. Wir zeigen, dass $M$ auch in $\mathcal{A}$ ist und somit $\mathcal{A} = 2^\Omega$ gilt.
1. Fall: $M = \emptyset$ oder $M = \Omega$
Nach $\sigma$-Algebra-Def. ist $M \in \mathcal{A}$.
2. Fall: $M = \{a_1, ..., a_n\}$ mit $a_1, ..., a_n \in \Omega$.
Wir sehen, dass $M = \{a_1\} \cup ... \cup \{a_n\}$ und da $\{a_1\}, ..., \{a_n\} \in G \subseteq \mathcal{A}$, muss auch die Vereinigung, $M$, in $\mathcal{A}$ sein (nach $\sigma$-Algebra-Def.(c)).

$\square$

b) Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ mit $P(\{\omega\}) = p(\omega)\ \forall \omega \in \Omega$.
Für $\{a_1, ..., a_n\} \in \mathcal{A}$ muss nach $\sigma$-Additivität gelten:
$P(\{a_1, ..., a_n\}) = P(\{a_1\} \cup ... \cup \{a_n\}) = p(a_1) + ... + p(a_n)$
Außerdem muss gelten $P(\Omega) = 1$ und somit $P(\emptyset) = 0$.
Eindeutigkeit folgt aus Vorgabe und Anwendung der Definition vom Wahrscheinlichkeitsmaß.

c) W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit
$\Omega = [1 : 6]$,
$\mathcal{A} = 2^\Omega$,
$P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ mit
$P(\{i\}) = p(i)\ \forall i \in [1 : 6]$, Rest von P ergibt sich wieder aus $\sigma$-Additivität
$P(\{1, 2\}) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$
$P(\{1, 6\}) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10}$

## Aufgabe 2

Da $(\Omega, \mathcal{A}, P_1)$ W-Raum ist, ist $(\Omega, \mathcal{A})$ Messraum.
Bleibt zu zeigen, dass $P := \alpha \cdot P_1 + (1-\alpha) \cdot P_2$ W-Maß ist.

1. Es muss $P(\Omega) = 1$ gelten.

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \alpha \cdot P_1(\Omega) + (1-\alpha) \cdot P_2(\Omega) \\ &\overset{\mathrm{P_1,P_2 W\text{-}Maß}}{=} \alpha \cdot 1 + (1-\alpha) \cdot 1 \\ &= \alpha + 1 - \alpha \\ &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

2. Es muss die $\sigma$-Additivität gelten.
Seien $A_1, ... \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkte Ereignisse.

$$\begin{aligned} P(\bigsqcup_{i \geq 1} A_i) &= \alpha \cdot P_1(\bigsqcup_{i \geq 1} A_i) + (1-\alpha) \cdot P_2(\bigsqcup_{i \geq 1} A_i) \\ &\overset{\mathrm{P_1,P_2 W\text{-}Maß}}{=} \alpha \cdot \sum_{i \geq 1} P_1(A_i) + (1-\alpha) \cdot \sum_{i \geq 1} P_2(A_i) \\ &= \sum_{i \geq 1} (\alpha \cdot P_1(A_i) + (1-\alpha) \cdot P_2(A_i)) \\ &= \sum_{i \geq 1} P(A_i) \end{aligned} \tag{2}$$

$\square$

## Aufgabe 3

# Aufgabe 4

a) $\Omega = \{(w_1, ..., w_8) \mid w_i \in \{0,1\} \wedge \sum\limits_{i=1}^{8} w_i = 3\}$
$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$
$P(\Omega) = 1$ und $\forall w \in \Omega : P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$
(Rest von $P$ ergibt sich aus $\sigma$-Additivität.)

b) $A = \{(w_1, ..., w_8) \in \Omega \mid w_i = w_{i+1} = w_{i+2} = 1, i \in [1:6] \vee w_7 = w_8 = w_1 = 1 \vee w_8 = w_1 = w_2 = 1\}$

c) $|\Omega| = \binom{8}{3} = 56$
$|A| = 8$
$P(A) = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$