

Abgabe - Übungsblatt [8]

Angewandte Mathematik: Stochastik

[Vincent Schönbach]

[Yihao Wang]

14. Juni 2020

Aufgabe 1 Unabhängigkeit & Normalverteilung

Wenn die ZV X und Y unabhängig sind, z.zg: $P(X, Y) = P(X) \cdot P(Y)$

$$\begin{aligned} P(X, Y) &= \frac{1}{2\pi} \int \int_{X \times Y} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x_0} \left[\int_{-\infty}^{y_0} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dy \right] dx \end{aligned} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x_0} \left[\int_{-\infty}^{y_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \right] dx \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \cdot \int_{-\infty}^{y_0} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \int_X \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dx dy \cdot \frac{1}{2\pi} \int \int_Y \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dx dy \\ &= P(X) \cdot P(Y) \end{aligned}$$

□

Erklärung:

(1) Wir benutzen Satz von Fubini hier. $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$. Da die beide ZV sind, der untere Schrank ist negativ unendlich.

(2) Eigenschaft von Integral.

Aufgabe 2 Unabhängigkeitskriterium

“ \Rightarrow ”: $(Y_i)_{i \in [1:n]}$ ist unabhängig.

d.h. $P(Y_1 = \omega_1, \dots, Y_n = \omega_n) = P(Y_1) \cdot \dots \cdot P(Y_n) = \prod_{i=1}^n P(Y_i = \omega_i)$

“ \Leftarrow ” analog.

Aufgabe 3 Tutorium

a) Binomial-Verteilung.

b) $\Omega \rightarrow [0 : n]$

A: 2^Ω

P: $A \rightarrow [0, 1]$

$$P(i) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

c) $\hat{P} = \sum_{i=k+1}^n P(i)$

Bonusaufgabe 4

a) Geometrische Verteilung

b) $\hat{\Omega} = |\{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_1 = \dots = \omega_{n-1} = 1, \omega_n = 0, n \in \mathbb{N}_0\}|$ 1: stattgefunden
0: ausgefallen.

$$\hat{\Omega} = \mathbb{N}_0, \hat{A} = 2^{\hat{\Omega}}$$

$$\hat{P}(i) = (1 - \hat{p}) \cdot \hat{p}^i, \forall i \in \mathbb{N}_0$$

c) \hat{p} : das Tutorium findet statt.

$$P(\text{Aufgabe4.3}) = \hat{P}(5) + \hat{P}(6) = (1 - \hat{p}) \cdot (\hat{p}^5 + \hat{p}^6)$$