

Abgabe - Übungsblatt [1]

Angewandte Mathematik: Stochastik

[Vincent Schönbach] [Yihao Wang]

26. April 2020

Aufgabe 1

- a) Immer falsch. w ist Tupel und A ist Menge.
- b) Immer richtig. Menge selber gehört zu seiner eigenen Potenzmenge.
- c) Immer richtig. $w \in \Omega \Rightarrow \{w\} \in A$.
- d) Immer richtig. w ist Tupel.
- e) Immer falsch. w ist Tupel, nicht Menge.
- f) Immer falsch. Da w_i kein Tupel.
- g) Im Allgemeinen falsch.
- h) Immer richtig. A ist die Potenzmenge von Ω . Alle diese Elemente sind drin.

Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned} |N^M| &\stackrel{Def.}{=} |\{f Abb. | f : M \rightarrow N\}| \\ &= \text{Anzahl Moeglichkeiten} |M| \text{Elemente auf } |N| \text{Elemente abzubilden.} \\ &= |N|^{|M|} \end{aligned}$$

b) $|2^M| \stackrel{Def.}{=} |\{X | X \subseteq M\}|$

Für jede Teilmenge $X \subseteq M$ exsitiert genau eine Funktion mit:

$$\begin{aligned} f_x : M &\rightarrow \{0, 1\} \\ f_x(a) &= \begin{cases} 0, & \text{falls } a \notin X \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

Somit ist:

$$\begin{aligned} |2^M| &= |\{f Abb. | f : M \rightarrow \{0, 1\}\}| \\ &= |\{0, 1\}^M| \\ &= 2^{|M|} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Beweis mit vollständigen Induktion:

IA: $n = 0 \Rightarrow k = 0$

$$\begin{aligned} \binom{0}{0} &= |\{N \subset \{1, \dots, 0\} \mid |N| = 0\}| \text{ (NachDef.)} \\ &= 1 = \frac{0!}{0! \bullet (0-0)!} \end{aligned}$$

IS: $n \Rightarrow n+1$

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k} &= |\{N \subset \{1, \dots, n+1\} \mid |N| = k\}| \\ &= |\{N \subset \{1, \dots, n\} \mid |N| = k\}| \\ &\quad + |\{N \subset \{1, \dots, n+1\} \mid |N| = k \cap n+1\}| \\ &= \binom{n}{k} + |\{N \subset \{1, \dots, n\} \mid |N| = k-1\}| \\ &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \\ &\stackrel{IV}{=} \frac{n!}{k! \bullet (n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)! \bullet (n-k+1)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)! \bullet (n-k)!} \times \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) \\ &= \frac{n!}{(k-1)! \bullet (n-k)!} \times \frac{n-k+1+k}{k \bullet (n-k+1)} \\ &= \frac{(n+1)!}{k! \bullet ((n+1)-k)!} \end{aligned}$$

b) Die Reihenfolge von Kombination eindeutig:

$$\frac{1}{49 \times 48 \times \dots \times 44}$$

Die Reihenfolge ist egal:

$$\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816}$$

Aufgabe 4

a) Zähler: Die Wahrscheinlichkeit, die k-mal Kopf von n-mal zu erhalten.

Nenner: Alle Ergebnisse \Rightarrow n-mal fair werfen $(\frac{1}{2})^n$

b)

$$\frac{\binom{n}{1}}{2^n} = \frac{n}{2^n}$$