Abgabe - Übungsblatt [8]

Angewandte Mathematik: Stochastik

[Vincent Schönbach] [Yihao Wang]

14. Juni 2020

Aufgabe 1 Unabhänigkeit & Normalverteilung

Wenn die ZV X und Y unabhängig sind, z.zg: $P(X,Y) = P(X) \cdot P(Y)$

$$\begin{aligned}
P(X,Y) &= \frac{1}{2\pi} \int\int_{X\times Y} exp(-\frac{x^2+y^2}{2})dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x_0} \left[\int_{-\infty}^{y_0} exp(-\frac{x^2+y^2}{2})dy \right] dx \qquad (1) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x_0} \left[\int_{-\infty}^{y_0} exp(-\frac{x^2}{2}) \cdot exp(-\frac{y^2}{2})dy \right] dx \qquad (2) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x_0} exp(-\frac{x^2}{2})dx \cdot \int_{-\infty}^{y_0} exp(-\frac{y^2}{2})dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\int_{X} exp(-\frac{x^2+y^2}{2})dxdy \cdot \frac{1}{2\pi} \int\int_{Y} exp(-\frac{x^2+y^2}{2})dxdy \\
&= P(X) \cdot P(Y)
\end{aligned}$$

$\square$

Erklärung:
(1) Wir benutzen Satz von Fubini hier. $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$. Da die beide ZV sind, der untere Schrank ist negativ unendlich.
(2) Eigenschaft von Integral.

Aufgabe 2 Unabhänigkeitskriterium

"$\Rightarrow$":$(Y_i)_{i\in[1:n]}$ ist unabhängig.
d.h. $P(Y_1 = \omega_1, \ldots, Y_n = \omega_n) = P(Y_1) \cdot \ldots \cdot P(Y_n) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i = \omega_i)$
"$\Leftarrow$" analog.

Aufgabe 3 Tutorium

a) Binomial-Verteilung.

b) $\Omega \to [0 : n]$
A: 2^{Ω}
P: $A \to [0, 1]$
P(i) $= \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$

c) $\hat{P} = \sum_{i=k+1}^{n} P(i)$

Bonusaufgabe 4

a) Geometrische Verteilung

b) $\hat{\Omega} = |\{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \mid \omega_1 = \ldots = \omega_{n-1} = 1, \omega_n = 0, n \in \mathbb{N}_0\}|$ 1: stattgefunden
0: ausgefallen.
$\hat{\Omega} = \mathbb{N}_0$, $\hat{A} = 2^{\hat{\Omega}}$
$\hat{P}(i) = (1 - \hat{p}) \cdot \hat{p}^i$, $\forall i \in \mathbb{N}_0$

c) $\hat{p}$: das Tutorium findet statt.
$\hat{P}(5) + \hat{P}(6) = (1 - \hat{p}) \cdot (\hat{p}^5 + \hat{p}^6)$