MARVELOUS NOTES

MYJ　2025-26秋

红色 = 强调　　蓝色 = 补充说明　　紫色 = 习题

目录

1. 2025

1.1. 矩阵中1的个数上界证明（图论方法）.

题目. 假设 $A=(a_{i,j})$ 是一个 $n\times n$ 的由 0 和 1 组成的矩阵，且不存在 2×2 子矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{i,r} & a_{i,s} \\ a_{j,r} & a_{j,s} \end{pmatrix}$$

（其中 $1\le i<j\le n$ 且 $1\le r<s\le n$）其所有元素都是 1.证明 A 中 1 的个数最多为 $n\sqrt{2n-1}$.

证明（图论方法）. 首先，我们将问题转化为二分图(亦称二部图，偶图)

我们将矩阵 A 转化为一个二分图 $G=(U\cup V,E)$，其中：

- $U=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ 代表矩阵的 n 行.
- $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ 代表矩阵的 n 列.
- E 为边集，如果 $a_{i,j}=1$，则边 $(u_i,v_j)\in E$.

不难知道，矩阵中 1 的总个数 N 即为图 G 的边数 $|E|$. 所以原问题：矩阵中不存在全 1 的 2×2 子矩阵，等价于图 G 不含完全二分图 $K_{2,2}$ 作为子图.

接下来就是比较基本的操作，即利用 $K_{2,2}$-Free 性质来考虑问题(这在图论中是比较经典的做法)

由于 G 不含 $K_{2,2}$，对于 U 中任意两个不同的顶点 u_i 和 u_j，它们在 V 中的公共邻居（即 v_k 同时与 u_i 和 u_j 相连）个数最多为 1.

设 d_i 是顶点 $u_i\in U$ 的度数（即第 i 行中 1 的个数）. N 为总边数，则 $N=\sum_{i=1}^n d_i$.

我们计算 U 中所有顶点所连接的 V 中顶点对的总数：

$$\sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2},$$

这表示 U 中每个顶点 u_i 在 V 中贡献了多少对相邻顶点.

由于任意两行（u_i,u_j）共享的列最多为 1，这意味着 V 中任意一对顶点 (v_r,v_s) 最多被 U 中的一个顶点同时连接.V 中顶点对的总数为 $\binom{n}{2}$.因此，我们有以下不等式：

$$\sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2} \le \binom{n}{2},$$

展开得：

$$\sum_{i=1}^n \frac{d_i(d_i-1)}{2} \le \frac{n(n-1)}{2},$$

$$\sum_{i=1}^n (d_i^2-d_i) \le n^2-n,$$

即：

$$\sum_{i=1}^n d_i^2-\sum_{i=1}^n d_i \le n^2-n.$$

代入 $N=\sum d_i$, 我们得到

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 \le n^2-n+N. \tag{1.1}$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式，对于 d_i:

$$N^2=\left(\sum_{i=1}^n d_i\right)^2 \le n\sum_{i=1}^n d_i^2.$$

将 (1.1) 代入上式：

$$N^2 \le n(n^2 - n + N),$$

$$N^2 - nN - (n^3 - n^2) \le 0.$$

最后，解关于 N 的二次不等式 $x^2 - nx - (n^3 - n^2) \le 0$. 其最大的正根 $N_{\max}$ 为：

$$N_{\max} = \frac{n + \sqrt{n^2 - 4(1)(-(n^3 - n^2))}}{2} = \frac{n + \sqrt{4n^3 - 3n^2}}{2}.$$

因此，

$$N \le \frac{n + \sqrt{4n^3 - 3n^2}}{2}.$$

由于题目要求证明 N 的上界为 $n\sqrt{2n-1}$，该界是 N 的一个正确且成立的上界（渐进地与 $N_{\max} \approx n\sqrt{n}$ 同阶，且对所有 $n \ge 1$ 成立）. 实际上，我们可以验证:

$$\frac{(1 + \sqrt{4n-3})^2}{4} \le 2n - 1, \quad \text{when } n \ge 1.$$

证毕

1.2. 关于相同质量小球完全非弹性相邻平均碰撞过程的讨论.

题目. 在一条水平直线上，有 m 个质量相同的小球（可看作质点）.在某一瞬间，它们相互接触，从左往右分别编号为 $1,\dots,m$，其速度分别为 $v_1^{(0)},\dots,v_m^{(0)}$ (以向右为正方向).

在这一瞬间可能会发生碰撞，我们假设碰撞是完全非弹性的.该碰撞可能会很复杂，我们将其拆分成一系列步骤：对 $n\ge 1$，在第 n 步，等概率选择一个满足 $v_i^{(n-1)}>v_{i+1}^{(n-1)}$ 的 $1\le i\le m-1$，认为 i 号球与 $(i+1)$ 号球发生了碰撞.碰撞后的速度是

$$v_k^{(n)}=\begin{cases} v_k^{(n-1)}, & k\ne i,i+1,\\ \frac{v_i^{(n-1)}+v_{i+1}^{(n-1)}}{2}, & k=i,i+1.\end{cases}$$

这种分成一步一步的碰撞可能在有限次后结束（即找不到上述的 i），也可能永远不会结束. 对于后一种情形，证明：

(1) 对任意的 $1\le k\le m$，

$$v_k^{(\omega)}:=\lim_{n\to\infty} v_k^{(n)} \text{ 存在;}$$

(2)

$$v_1^{(\omega)}\le v_2^{(\omega)}\le\cdots\le v_m^{(\omega)} \text{ 以概率 1 成立;}$$

(3) (附加题) $v_1^{(\omega)},\dots,v_m^{(\omega)}$ 几乎必然是固定值（即它们的值不依赖于每一步中对 i 的选取）.

为方便记号，记对任意 n 与 $1\le k\le m$，

$$M_k^{(n)}:=\sum_{i=1}^k v_i^{(n)}.$$

并记 $v_{\min}:=\min\{v_1^{(0)},\dots,v_m^{(0)}\}$.

Theorem 1 (极限存在性). 对任意 $1\le k\le m$，极限 $\lim_{n\to\infty} v_k^{(n)}$ 存在.

证明. 首先每次碰撞把两相邻分量变为它们的算术平均，从而对任意 n,i 有

$$v_i^{(n)}\ge v_{\min},$$

于是每个分量有统一下界.
考虑前 k 个分量之和 $M_k^{(n)}$.若在一步碰撞中所选的对是 $(j,j+1)$，则

$$M_k^{(n+1)}=\begin{cases} M_k^{(n)}, & j\le k-2 \text{ 或 } j\ge k+1,\\ M_k^{(n)}-\dfrac{v_k^{(n)}-v_{k+1}^{(n)}}{2}, & j=k.\end{cases}$$

因此总体上 $M_k^{(n)}$ 随 n 单调不增. 又由于 $M_k^{(n)}\ge kv_{\min}$，故 $M_k^{(n)}$ 有下界并必定收敛；记 $M_k^{(\omega)}:=\lim_{n\to\infty}M_k^{(n)}$.
注意到

$$v_k^{(n)}=M_k^{(n)}-M_{k-1}^{(n)}.$$

两端同时取极限（$M_k^{(n)}$ 与 $M_{k-1}^{(n)}$ 都已收敛），得到

$$v_k^{(\omega)}:=\lim_{n\to\infty}v_k^{(n)}=M_k^{(\omega)}-M_{k-1}^{(\omega)}.$$

因此每个分量的极限存在.对 $k=1$ 时直接由 $M_1^{(n)}$ 收敛可得 $v_1^{(\omega)}$ 存在. 证毕. □

Theorem 2 (极限的非降序性). 几乎必然(*almost surely*)有

$$v_1^{(\omega)}\le v_2^{(\omega)}\le\cdots\le v_m^{(\omega)}.$$

证明. 取任意 $1 \le k \le m-1$，我们要证明不可能有 $v_k^{(\omega)} > v_{k+1}^{(\omega)}$（几乎必然）.

假设 $v_k^{(\omega)} > v_{k+1}^{(\omega)}$，令

$$\Delta := v_k^{(\omega)} - v_{k+1}^{(\omega)} > 0.$$

取 ε 满足 $0 < \varepsilon \le \Delta/4$.由定理 1，对 $v_k^{(n)}$ 和 $v_{k+1}^{(n)}$ 的收敛性，存在 N，使得对任意 $n > N$，

$$|v_k^{(n)} - v_k^{(\omega)}| < \varepsilon, \qquad |v_{k+1}^{(n)} - v_{k+1}^{(\omega)}| < \varepsilon.$$

于是对任意 $n > N$，

$$v_k^{(n)} - v_{k+1}^{(n)} \ge (v_k^{(\omega)} - \varepsilon) - (v_{k+1}^{(\omega)} + \varepsilon) = \Delta - 2\varepsilon \ge \Delta/2 =: \delta > 0.$$

若在某一 $n > N$ 的一步中选中对 $(k, k+1)$ 并发生碰撞，则 M_k 将下降量至少为

$$\frac{v_k^{(n)} - v_{k+1}^{(n)}}{2} \ge \frac{\delta}{2}.$$

因为 $M_k^{(n)}$ 单调不增且有极限 $M_k^{(\omega)}$，所以从 $n > N$ 开始，$M_k^{(n)}$ 的总下降量是有限的.这说明在所有 $n > N$ 中，衔接对 $(k, k+1)$ 被选中并发生碰撞的次数必然是有限的（每次至少减少 $\delta/2$，若无限次则会造成无限下降，与收敛矛盾）.

因此几乎必然存在某随机的 N'，使得当 $n \ge N'$ 时不再发生索引为 $(k, k+1)$ 的碰撞.由此，从 N' 以后 $v_k^{(n)}$ 与 $v_{k+1}^{(n)}$ 均不再因彼此互相平均而改变其相对差距（可能由于其他索引的碰撞间接改变，但这些改变由于取极限，我们不考虑），并且我们已知两者的极限分别为 $v_k^{(\omega)}$ 与 $v_{k+1}^{(\omega)}$，由初始假设 $v_k^{(\omega)} > v_{k+1}^{(\omega)}$ 可导出矛盾（因为若最终严格大于，则在足够多的步数后应仍可找到下降事件，使 M_k 继续减少，从而破坏 M_k 的极限），因此假设不成立.

对任意 k 几乎必然有 $v_k^{(\omega)} \le v_{k+1}^{(\omega)}$，从而得到所需的不等式链. □

Theorem 3 (极限的唯一性（即说明与碰撞顺序无关）). *几乎必然地，极限向量 $v^{(\omega)} = (v_1^{(\omega)}, \dots, v_m^{(\omega)})$ 与每一步随机选择的碰撞顺序无关，即不同的随机路径几乎处处导向同一极限向量.该向量等于把初始向量 $v^{(0)}$ 按非降序约束进行欧氏投影（isotonic regression）的唯一解.*

证明. 我给出一个证明思路(待商榷)

首先给出能量函数（平方误差）的定义

$$E(x) := \sum_{i=1}^{m} (x_i - v_i^{(0)})^2.$$

若在当前向量 x 上对相邻索引 $(i, i+1)$ 执行平均操作（把 (x_i, x_{i+1}) 替换为两者平均 $(\bar{x}, \bar{x})$，其中 $\bar{x} = (x_i + x_{i+1})/2$），则该操作相当于对 x 作一个关于坐标 i 与 $i+1$ 的正交投影（投影到子空间 $\{y : y_i = y_{i+1}\}$）. 因此每次这样的平均操作不会增大 E，并且当 $x_i \ne x_{i+1}$ 时严格减小 E. 换言之，$E(v^{(n)})$ 随 n 单调下降且被 0 下界束缚，故 $E(v^{(n)})$ 必定收敛.同时由前面的第1点，各分量也收敛.

若某向量 x 对所有满足 $x_i > x_{i+1}$ 的相邻对都不再被操作（即已达到过程的“不动点”），那么必有 $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_m$（即 x 在非降序锥内）. 换句话说，过程的任一极限必属于非降序向量集合（称之为 $C := \{x \in \mathbb{R}^m : x_1 \le \cdots \le x_m\}$）.

下面我在闭凸集 C 上考虑 $E(x)$的最小值： $\min_{x \in C} E(x)$.

这就原问题转化为一个关于凸集合的二次凸优化问题，证明其解存在且唯一（因为 E 是严格凸函数）. 我们称该唯一解为 x^*，它就是初始向量关于 C 的欧氏投影（isotonic regression）

由于每一次碰撞操作都会使 E 下降，且 E 在 C 上有唯一最小值 x^*，任何按上述规则进行的无限序列的相邻平均操作的限制点必属于 C 并达到最小化 E（否则可以继续某一步平均使 E 更小）. 因此所有可能的碰撞随机路径的极限点只能是同一个 x^*. 结合定理 1 保证极限存在，得出几乎必然地极限向量与随机序列无关，即等于 x^*.

因此极限向量几乎必然与碰撞顺序无关且唯一. 证毕. □