# 陶哲轩博客：Golden-Thompson 不等式

MYJ[*]

2025 年 9 月 4 日

**摘要**

本讲义基于陶哲轩博客文章 《The Golden-Thompson inequality》 的内容，详细分析了 Golden-Thompson 不等式的证明思路及其重要推论。讲义首先介绍了证明所依赖的核心工具——$p$-Schatten norm和非交换 Hölder 不等式，然后深入探讨了不等式的证明过程，并简要介绍了其在矩阵 Chernoff 不等式等非交换概率论中的应用。

## 1 Introduction：Golden-Thompson 不等式

Golden-Thompson 不等式，也称为迹不等式，是矩阵分析中的一个重要结果，它描述了两个非交换厄米特矩阵的指数和的迹与它们的指数的乘积的迹之间的关系。对于两个 $n \times n$ 的厄米特矩阵 $A$ 和 $B$，该不等式表述为：

$$\mathrm{tr}(e^{A+B}) \leq \mathrm{tr}(e^A e^B). \tag{1}$$

值得注意的是，这个不等式对任意两个厄米特矩阵 $A$ 和 $B$ 都成立，不需要它们满足交换性假设。当 $A$ 和 $B$ 交换时，指数函数有 $e^{A+B} = e^A e^B$，因此不等式退化为等式。该不等式在量子力学(似乎可使用量子力学方法证明)、统计力学以及非交换概率论中都有着重要的应用。

## 2 Core Instrument：$p$-Schatten norm

在证明 Golden-Thompson 不等式之前，我们需要引入一个关键的工具：$p$-Schatten norm。对于任意一个 $n \times n$ 矩阵 $A$，其 $p$-Schatten norm定义为：

$$\|A\|_p := \left(\mathrm{tr}((A^*A)^{p/2})\right)^{1/p},$$

其中 $p \geq 1$。特别地，当 $p = 2$ 时，$p$-Schatten norm就是 Frobenius norm：

$$\|A\|_2 := (\mathrm{tr}(A^*A))^{1/2}.$$

Frobenius norm是矩阵空间上的一个 Hilbert 空间范数，它由 Frobenius 内积 $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$ 导出。根据 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有：

$$|\mathrm{tr}(A_1A_2)| \leq \|A_1\|_2\|A_2\|_2,$$

这在 $p = 2$ 的情况下是成立的。

[*]It is impossible to be a mathmatician without being a poet in soul.

## 3 非交换 Hölder 不等式

这是 Golden-Thompson 不等式证明中的一个重要引理。

对于 $p_1,\ldots,p_k > 0$ 且 $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i}=\frac{1}{p}$，对于 $k$ 个矩阵 $A_1,\ldots,A_k$，有:

$$\|\mathrm{tr}(A_1\cdots A_k)\|_p \le \|A_1\|_{p_1}\cdots\|A_k\|_{p_k}.$$

陶哲轩的博客文章中给出了一个特殊情况的迭代证明，即当 $p$ 是 2 的幂次时。对于 $p=2,4,8,\ldots$，我们可以通过归纳法证明非交换 Hölder 不等式：

$$|\mathrm{tr}(A_1A_2\cdots A_p)| \le \|A_1\|_p\|A_2\|_p\cdots\|A_p\|_p. \tag{2}$$

证明思路：

1. 基准情况 $p=2$：这就是 Frobenius norm下的 Cauchy-Schwarz 不等式，即 $|\mathrm{tr}(A_1A_2)| \le \|A_1\|_2\|A_2\|_2$.

2. 归纳步骤：假设当 $p$ 是 2 的幂次时，不等式 (2) 成立。现在考虑 $2p$ 的情况。我们将 $A_1\cdots A_{2p}$ 分成两组：$(A_1\cdots A_p)$ 和 $(A_{p+1}\cdots A_{2p})$。

   $$|\mathrm{tr}(A_1\cdots A_{2p})| = |\mathrm{tr}((A_1\cdots A_p)(A_{p+1}\cdots A_{2p}))|.$$

   根据 $p=2$ 的情况 (Cauchy-Schwarz 不等式)，我们有：

   $$|\mathrm{tr}(A_1\cdots A_{2p})| \le \|A_1\cdots A_p\|_2\|A_{p+1}\cdots A_{2p}\|_2.$$

   然后，根据 $p$-Schatten norm的性质 $\|AB\|_p \le \|A\|_{2p}\|B\|_{2p}$，以及非交换 Hölder 不等式，我们可以迭代下去，最终得到：

   $$\begin{aligned}|\mathrm{tr}(A_1\cdots A_{2p})| &\le \|A_1\|_{2p}\cdots\|A_p\|_{2p}\cdot\|A_{p+1}\|_{2p}\cdots\|A_{2p}\|_{2p}\\ &= \|A_1\|_{2p}\cdots\|A_{2p}\|_{2p}.\end{aligned}$$

这证明了当 $p$ 是 2 的幂次时，非交换 Hölder 不等式成立。对于一般的 $p\ge 1$，可以通过张量积方法来证明(细节见陶哲轩的博客)

## 4 Golden-Thompson 不等式的证明核心

证明 Golden-Thompson 不等式需要运用 $p$-Schatten norm和非交换 Hölder 不等式。证明思路可以总结为以下步骤：

1. 利用非交换 Hölder 不等式：对于两个厄米特矩阵 $A,B$，我们考虑矩阵 $e^{A/p}$ 和 $e^{B/p}$. 根据非交换 Hölder 不等式 (2)，将 $A_i$ 都取为 $e^{A/p}$ 和 $e^{B/p}$ 的交替序列，例如 $p$ 是偶数时：

$$\mathrm{tr}((e^{A/p}e^{B/p})^p) = \mathrm{tr}(e^{A/p}e^{B/p}\cdots e^{A/p}e^{B/p})$$

$$\le \|e^{A/p}\|_p\|e^{B/p}\|_p\cdots\|e^{A/p}\|_p\|e^{B/p}\|_p = (\|e^{A/p}\|_p\|e^{B/p}\|_p)^p.$$

注意到对于厄米特矩阵 $X$ 和 $p$-Schatten norm，有 $\|e^X\|_p = (\mathrm{tr}(e^{pX}))^{1/p}$. 因此，上式变为：

$$\mathrm{tr}((e^{A/p}e^{B/p})^p) \leq (\mathrm{tr}(e^A))^{p/p}(\mathrm{tr}(e^B))^{p/p} = \mathrm{tr}(e^A)\mathrm{tr}(e^B).$$

根据迹的循环性质，我们有 $\mathrm{tr}((e^{A/p}e^{B/p})^p) = \mathrm{tr}(e^Ae^B\dots)$. 这是一个关键步骤，但陶哲轩的博客中使用了更精妙的迭代方法。

2. 更精妙的迭代证明：陶哲轩的博客中，利用迹的循环性质 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$，我们可以推导出：

$$\mathrm{tr}((AB)^p) \leq \mathrm{tr}(A^pB^p). \tag{3}$$

这个不等式可以通过迭代非交换 Hölder 不等式得到。现在，用 $A$ 替换为 $e^{A/p}$，用 $B$ 替换为 $e^{B/p}$，得到：

$$\mathrm{tr}((e^{A/p}e^{B/p})^p) \leq \mathrm{tr}((e^{A/p})^p(e^{B/p})^p) = \mathrm{tr}(e^Ae^B).$$

上式右侧正是 Golden-Thompson 不等式右侧。

3. 取极限：现在我们只需要证明 $\mathrm{tr}(e^{A+B}) \leq \lim_{p\to\infty}\mathrm{tr}((e^{A/p}e^{B/p})^p)$. 根据 Trotter-Kato 公式，我们有：

$$e^{A+B} = \lim_{p\to\infty}(e^{A/p}e^{B/p})^p.$$

由于迹函数 tr 是连续的，我们可以将极限移到迹里面，得到：

$$\mathrm{tr}(e^{A+B}) = \lim_{p\to\infty}\mathrm{tr}((e^{A/p}e^{B/p})^p).$$

结合第二步的结果，我们就得到了 Golden-Thompson 不等式：

$$\mathrm{tr}(e^{A+B}) \leq \mathrm{tr}(e^Ae^B).$$

## 5 重要推论与 Duhamel 公式

Tao的博客中提及了一个非常重要的推论：

**推论 5.1.** *令 $A, B$ 是厄米特矩阵。如果 $e^A \leq e^B$（即 $e^B - e^A$ 是半正定的），则 $A \leq B$.*

这个推论证明起来非常巧妙。陶哲轩的博客中给出了一个基于 Duhamel 公式的证明。Duhamel 公式：

$$\frac{d}{dt}e^{A(t)} = \int_0^1 e^{(1-s)A(t)}\left(\frac{dA(t)}{dt}\right)e^{sA(t)}ds,$$

其中 $A(t)$ 是关于实参数 $t$ 的厄米特矩阵。
证明思路大致如下：

- 定义一个矩阵函数 $A(t) := \log(e^A + t(e^B - e^A))$.
- 我们希望证明 $A(1) \geq A(0)$，即 $A + t(B-A)|_{t=1} \geq A + t(B-A)|_{t=0}$.
- 根据 Duhamel 公式，我们可以计算 $\frac{d}{dt}e^{-A(t)}\frac{d}{dt}e^{A(t)}$.
- 通过一系列计算，可以证明 $\frac{dA(t)}{dt}$ 是半正定的。
- 因为 $\frac{dA(t)}{dt} \geq 0$，所以 $A(1) - A(0) = \int_0^1 \frac{dA(t)}{dt}dt \geq 0$，即 $A(1) \geq A(0)$.
- 将 $t = 1$ 和 $t = 0$ 代入 $A(t)$ 的定义，即可得到 $\log(e^B) \geq \log(e^A)$，即 $B \geq A$.

## 6 扩展与应用：矩阵 Chernoff 不等式

Golden-Thompson 不等式在非交换概率论中有着重要的应用。例如，它可以用来证明矩阵版本的 Chernoff 不等式。对于一系列独立同分布 (i.i.d) 的厄米特随机矩阵 $X_1, \ldots, X_N$，如果它们满足一定的条件，则矩阵 Chernoff 不等式给出它们和的算子范数的一个界限：

$$P(\|X_1 + \cdots + X_N\|_{\mathrm{op}} \geq \lambda\sigma) \leq n \exp(-\lambda^2/4).$$

这个证明同样依赖于 Golden-Thompson 不等式以及指数函数的性质。其核心思路是利用迹的性质，将矩阵的指数函数从算子范数推广到迹的范畴，从而应用 Golden-Thompson 不等式将和的指数拆分成乘积的指数。

由此可知，Golden-Thompson 不等式是一个强大而优美的结论，它揭示了矩阵指数函数在非交换情况下的重要性质。

## 7 使用展示

此处仅做部分选取，或许仍有些许遗漏。

```
1.\documentclass[UTF8, a4paper, 11pt]{article}
2.\usepackage{ctex}
3.\usepackage{amsmath, amssymb, amsthm}
4,5.\usepackage{hyperref}          \usepackage{mathpazo}
6,7.\usepackage{geometry}          \usepackage{color}
8.\geometry{a4paper, left=2.5cm, right=2.5cm, top=2.5cm, bottom=2.5cm}
9.\newtheorem{theorem}{定理}[section]
10.\newtheorem{lemma}{引理}[section]
11.\newtheorem{corollary}{推论}[section]
12.\newtheorem{remark}{注}[section]
13.\begin{document}          \end{document}
14.\title{\textbf{陶哲轩博客：Golden-Thompson 不等式}}
15-17.\author{MYJ}          \date{\today}       \maketitle
18.\begin{abstract}
\end{abstract}
19.\section{}
20.\begin{equation}
\end{equation}
21-23.\label{} \quad  \eqref{}
24.\href{[A](A)}{xxx}
25.\begin{itemize}     \item    \end{itemize}
26.\begin{enumerate}    \item      \end{enumerate}
27.\textcolor{red}{}
28.\begin{corollary}    \end{corollary}
```