简单估计的三角代换法

Question(2025·10·7)

证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{X_{n+1}} - \sqrt{X_n}}{\sqrt{(1+X_{n+1})(1+X_n)}}$$

收敛，其中 $X_n \uparrow$ 且 $X_n > 0$.

除了常规的放缩方法，遇到这种奇怪的问题，我们考虑一种常用方法，即分组拆分法·*Splitting the Summation*.

很遗憾，似乎会有不等号方向的问题，笔者并没有过多尝试。

这里给出一个有趣的三角代换方法，如有不妥之处，请及时指出，谢谢~

记 $y_n = \sqrt{X_n}$. 由于 X_n 单调递增且 $X_n > 0$，因此 y_n 单调递增且 $y_n > 0$. 令 $y_n = \tan \theta_n$. 由于 y_n 递增且 $y_n > 0$，我们选取 $\theta_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ 且 θ_n 递增. 原级数的第 n 项 a_n 为：

$$a_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{\sqrt{(1+y_{n+1}^2)(1+y_n^2)}},$$

利用三角恒等式 $\sqrt{1+\tan^2\theta} = \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ （注意到 θ 的范围保

证了此处符号不变）进行代换,我们得到

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{\tan\theta_{n+1} - \tan\theta_n}{\sec\theta_{n+1}\sec\theta_n} \\
&= \frac{\frac{\sin\theta_{n+1}}{\cos\theta_{n+1}} - \frac{\sin\theta_n}{\cos\theta_n}}{\frac{1}{\cos\theta_{n+1}\cos\theta_n}} \\
&= \sin\theta_{n+1}\cos\theta_n - \cos\theta_{n+1}\sin\theta_n.
\end{aligned}
$$

根据三角函数的差角公式，我们得到：

$$
a_n = \sin(\theta_{n+1} - \theta_n),
$$

考虑级数的部分和 S_N:

$$
S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} \sin(\theta_{n+1} - \theta_n)
$$

由于 $\theta_{n+1} - \theta_n > 0$，且对一切 $x > 0$ 有 $\sin x < x$，故：

$$
S_N < \sum_{n=1}^{N} (\theta_{n+1} - \theta_n)
$$

求和结果为：

$$
S_N < (\theta_2 - \theta_1) + (\theta_3 - \theta_2) + \cdots + (\theta_{N+1} - \theta_N) = \theta_{N+1} - \theta_1
$$

由于 $\theta_{N+1} = \arctan y_{N+1}$ 且 $\theta_n \in (0, \frac{\pi}{2})$，故 $\theta_{N+1} < \frac{\pi}{2}$。 因此，部分和 S_N 有上界：

$$
S_N < \frac{\pi}{2} - \theta_1
$$

由于 $a_n > 0$，数列 $\{S_N\}$ 是一个**单调递增**数列· 根据**单调收敛定理**:有界单调递增的数列收敛，故原级数收敛·

西元二零二五年十月

提笔于中国南京江宁区东南大学九龙湖校区 斋内