Parcial 2 - Transformada de Fourier y Laplace

Señales y Sistemas 2025 - 1

Profesor: Andrés Marino Álvarez Meza

Estudiante: Yilder Rafael Epiayu Gonzalez

Pregunta 1: Función de transferencia en lazo abierto del sistema masa - resorte - amortiguador.

1- Ecuación de Movimiento

- Partiendo de $\sum F = ma$, luego identificamos las fuerzas

F_E: Fuerza externa

$F_S = -Ky(t)$ } Del resorte

$F_C = -C\dot{y}(t)$ } del amortiguador

- Ahora como sabemos que la aceleración a es la segunda derivada de la posición, entonces $a = \ddot{y}(t)$

- La ecuación nos queda

$$F_E(t) - Ky(t) - C\dot{y}(t) = m\ddot{y}(t)$$

- Ordenando

$$m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = F_E(t)$$

2- Aplicar la transformada de Laplace:

$$L\{\ddot{y}(t)\} = s^2 Y(s)$$

$$L\{\dot{y}(t)\} = sY(s)$$

$$L\{y(t)\} = Y(s)$$

Reemplazando

$$m(s^2 Y(s)) + C(sY(s)) + K(Y(s)) = F_E(s)$$

3- Hallar la Función de transferencia $G(s)$

(Es la relación entre la salida $Y(s)$ y la entradra $F_E(s)$)

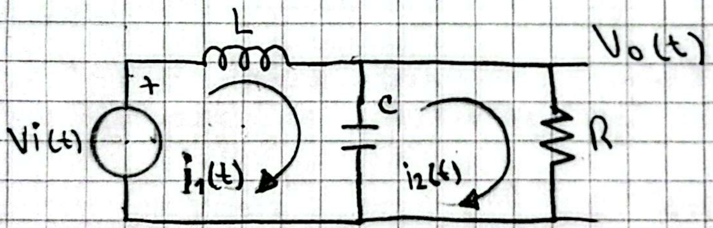
- Factorizamos $Y(s)$

$$(Y(s))(ms^2 + cs + k) = F_E(s)$$

- Función de transferencia en lazo abierto

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F_E(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

Sistema eléctrico Equivalente



El objetivo es analizar el circuito eléctrico y encontrar su equivalencia con el sistema mecánico

1- Ecuaciones del circuito (Leyes de Kirchoff)

Malla 1:

$$V_i(s) = sL\,I_1(s) + \frac{1}{sc}(I_1(s) - I_2(s))$$

Malla 2:

$$R\,I_2(s) + \frac{1}{sc}(I_2(s) - I_1(s)) = 0$$

$$V_o(t) = R\,I_2(s)$$

2- Resolver el sistema de ecuaciones

El objetivo es encontrar una sola ecuación que relacione $Vi(s)$ con $Vo(s)$.

- Despejar $I_1(s)$ de la Malla 2

$$\frac{1}{sC} I_1(s) = \left(R + \frac{1}{sC}\right) I_2(s) \Rightarrow I_1(s) = (1 + sCR) I_2(s)$$

- Sustituir $I_1(s)$ en la malla 1 y simplificar

$$Vi(s) = sL(1 + sCR) I_2(s) + \frac{1}{sC}\left((1 + sCR) I_2(s) - I_2(s)\right)$$

$$Vi(s) = (sL + s^2 LCR) I_2(s) + R \cdot I_2(s) = (s^2 LCR + sL + R) I_2(s)$$

- Sustituimos $I_2(s)$ usando $Vo(s) = R I_2(s) \Rightarrow I_2(s) = \frac{Vo(s)}{R}$ para eliminar la corriente de la ecuación

$$Vi(s) = (s^2 LCR + sL + R) \frac{Vo(s)}{R}$$

3- Despejar la Función de transferencia $H(s)$

$$H(s) = \frac{Vo(s)}{Vi(s)} = \frac{R}{s^2 LCR + sL + R}$$

Por último encontramos el sistema equivalente.

- Primero normalizamos ambas funcione de tranferencias encontradas

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \Rightarrow G(s) = \frac{1/k}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{c}{k}s + 1}$$

$$H(s) = \frac{R}{s^2 LCR + sL + R} \Rightarrow H(s) = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

Ahora si podemos realizar la comparación directa

$$s^2: \frac{m}{K} \longleftrightarrow LC$$

$$s: \frac{c}{K} \longleftrightarrow \frac{L}{R}$$

Numerador: $\frac{1}{K} \longleftrightarrow 1$

De esta comparación deducimos que para que la equivalencia sea directa, se debe cumplir $K=1$, esto simplifica la analogía

Masa (m) $\Longrightarrow$ LC

Amortiguamiento $\Longrightarrow$ $\frac{L}{R}$

Cte. resorte (K) $\Longrightarrow$ 1