① $F\{x(t)\,\text{Sen}(\omega_c t)\} = ?$

- $\text{Sen}(\omega_c t) = \dfrac{e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}}{2j}$
- $F\{x(t)\,e^{\pm j\omega_c t}\} = X(\omega \mp \omega_c)$

1. Sustituir

$$F\{x(t)\,\text{sen}(\omega_c t)\} = F\left\{x(t)\left(\frac{e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}}{2j}\right)\right\}$$

2. Aplicar propiedad de linealidad

$$= \frac{1}{2j}\left[F\{x(t)\,e^{j\omega_c t}\} - F\{x(t)\,e^{-j\omega_c t}\}\right.$$

3. Aplicar $F\{x(t)\,e^{\pm j\omega_c t}\} = X(\omega \mp \omega_c)$

Para el primer término:

$$F\{x(t)\,e^{j\omega_c t}\} = X(\omega - \omega_c)$$

Para el segundo termino:

$$F\{x(t)\,e^{-j\omega_c t}\} = X(\omega - (-\omega_c)) = X(\omega + \omega_c)$$

4. Resultado Final

$$F\{x(t)\,\text{sen}(\omega_c t)\} = \frac{1}{2j}\left[X(\omega - \omega_c) - X(\omega + \omega_c)\right]$$

② $x(t) = u(t)$

$$H(s) = \frac{3}{s^2+4s+7}$$

$y(t) = ?$

1. $y(t) \to Y(s)$

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{3}{s^2+4s+7} \cdot \frac{1}{s}$$

2. Para llevarlo al dominio del tiempo ($Y(t)$) usamos Fracciones parciales

$$Y(s) = \frac{3}{s(s^2+4s+7)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+7}$$

3. Calcular los coeficientes A, B y C

$$A = s\left.\frac{3}{s(s^2+4s+7)}\right|_{s=0} = \left.\frac{3}{s^2+4s+7}\right|_{s=0} = \frac{3}{7}$$

Para B y C (Mutiplicamos toda la ecuación por el denominador común $s(s^2+4s+7)$:

$$3 = A(s^2+4s+7) + (Bs+C)s$$

Sustituimos A

$$3 = \frac{3}{7}s^2 + \frac{12}{7}s + 3 + Bs^2 + Cs$$

Agrupamos

$$0 \cdot s^2 + 0 \cdot s + 3 = \left(\frac{3}{7} + B\right)s^2 + \left(\frac{12}{7} + C\right)s + 3$$

Igualando y despejando

Para s^2: $0 = \frac{3}{7} + B \Rightarrow \boxed{B = -\frac{3}{7}}$

Para s: $0 = \frac{12}{7} + C \Rightarrow \boxed{C = -\frac{12}{7}}$

4. Reorganizar $Y(s)$ para la transformada inversa

$$Y(s) = \frac{3/7}{s} - \frac{3/7\, s + 12/7}{s^2+4s+7} = \frac{3}{7}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{3}{7}\left(\frac{s+4}{s^2+4s+7}\right)$$

Completamos el cuadrado en el denominador del segundo término

$$s^2+4s+7 = (s^2+4s+4)+3 = (s+2)^2 + (\sqrt{3})^2$$

Ajustamos tambien el numerador para que contenga el término $(s+2)$:

$$s+4 = (s+2)+2$$

Reescribimos la Fracción

$$\frac{s+4}{(s+2)^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{s+2}{(s+2)^2+(\sqrt{3})^2} + \frac{2}{(s+2)^2+(\sqrt{3})^2}$$

Para que el segundo término se parezca a trF del seno $\left(\frac{b}{(s+a)^2+b^2}\right)$ multiplicamos y dividimos por $b=\sqrt{3}$

$$\frac{2}{(s+2)^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{(s+2)^2+(\sqrt{3})^2}$$

5. Calcular la trF. inversa de Laplace

Expresión Final

$$Y(s) = \frac{3}{7}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{3}{7}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2+(\sqrt{3})^2}\right) - \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{(s+2)^2+(\sqrt{3})^2}\right)$$

Aplicando L^{-1} término a término

- $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = u(t)$

- $L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+(\sqrt{3})^2}\right\} = e^{-2t}\cos(\sqrt{3}t)\,u(t)$

- $L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}}{(s+2)^2+(\sqrt{3})^2}\right\} = e^{-2t}\sin(\sqrt{3}t)\,u(t)$

Solución $(y(t))$

$$\boxed{y(t) = \left[\frac{3}{7} - \frac{3}{7}e^{-2t}\cos(\sqrt{3}t) - \frac{6}{7\sqrt{3}}e^{-2t}\sin(\sqrt{3}t)\right]u(t)}$$