Nombre: Yilder Rafael Epiayu Gonzalez   Fecha: día 15 mes 05 año 2025
Profesor: Andrés Marino Álvarez Meza   Materia:
Institución: Universidad Nacional de colombia   Curso: SyS   Nota:

1) Datos del ejercicio:

- Señal original:

$$X(t) = 20 \sin(7t - \pi/2) - 3\cos(5t) + 2\cos(10t)$$

- Rango de entrada:

$$V_{min} = -3{,}3\text{ V} \quad ; \quad V_{máx} = 5\text{ V}$$

- número de bits:

$$n = 5 \text{ bits}$$

- Niveles de cuantización:

$$N = 2^n = 2^5 = 32$$

- Se requieren al menos 2 periodos de la señal estudiada

Entonces

$$X(t) = 20\sin(7t - \pi/2) - 3\cos(5t) + 2\cos(10t)$$

Sea $20\sin(7t - \pi/2) = -20\cos(7t)$

$$X(t) = -20\cos(7t) - 3\cos(5t) + 2\cos(10t)$$

Encontramos el rango

$$R = V_{máx} - V_{mín} = 5 - (-3{,}3) = 8{,}3\text{ V}$$

$$\text{Rango} = 8{,}3\text{ V}$$

- Para el acondicionamiento hallamos el rango de la señal

$$X_{max} = 20 + 3 + 2 = 25$$

$$X_{min} = -20 - 3 - 2 = -25$$

Como necesitamos

$$X_{acond}(t) = mx + b$$

Luego

$$m = \frac{V_{max} - V_{min}}{X_{max} - X_{min}} = \frac{5 - (-3{,}3)}{25 - (-25)} = \frac{8{,}3}{50} = 0{,}166 \text{ V}$$

Para b tenemos

$b = -3,3 - 0,166(-25) = 0,85$

$X_{acond}(t) = 0,166 \cdot X(t) + 0,85$

- Cuantización C

Entonces

$V_c = \frac{8,3}{32-1} = 0,2677 \text{ V}$ $\therefore N = 2^5 = 32$

Para la simulación analisamos la señal

$X(t) = -20\cos(7t) - 3\cos(5t) + 2\cos(10t)$

$F_1 = \frac{7}{2\pi} = 1,114 \text{ Hz}$ $\therefore F = \frac{\omega}{2\pi}$

$F_2 = \frac{5}{2\pi} = 0,796 \text{ Hz}$

$F_3 = \frac{10}{2\pi} = 1,59 \text{ Hz}$

Para mostrar al menos dos periodos escogemos la F_2 ya que es la mas baja:

$T = \frac{1}{F_2} = \frac{1}{0,796 \text{ Hz}} = 1,26 \text{ s}$

Luego para dos periodos
$T = 2 \cdot 1,26 \text{ s} = 2,52 \text{ s}$

se escoge la F_2 ya que es la mas lenta

$F_1 \Rightarrow T_1 = \frac{1}{F_1} = 0,897 \text{ s}$

$F_2 \Rightarrow T_2 = \frac{1}{F_2} = 1,26 \text{ s}$

$F_3 \Rightarrow T_3 = \frac{1}{F_3} = 0,629$

Nota: Ver Cuaderno de Python

2) Datos del ejercicio:

Señal analógica

$$X(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(2000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$$

Frecuencia de muestreo dada

$$F_s = 5\,KHz = 5000\,Hz$$

Solución

Analizamos las frecuencias de la señal

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\omega_1 = 1000\pi \Rightarrow F_1 = \frac{1000\pi}{2\pi} = 500\,Hz$$

$$\omega_2 = 2000\pi \Rightarrow F_2 = \frac{2000\pi}{2\pi} = 1000\,Hz$$

$$\omega_3 = 11000\pi \Rightarrow F_3 = \frac{11000\pi}{2\pi} = 5500\,Hz$$

Escogemos la frecuencia mas alta y verificamos si es adecuada aplicando el teorema de Nyquist

$$f_s > 2 \cdot f_{max} = 2 \cdot 5500 = 11000\,Hz$$

Entonces la frecuencia dada $F_s = 5000\,Hz$ no cumple con el criterio de Nyquist, se producirá aliasing, por lo tanto se necesita un conversor mejor

Convertimos la señal a tiempo discreto. (conversor adecuado)

Escogemos $F_s = 12000\,Hz$, $T_s = \frac{1}{12000} = 8{,}33\,\mu s$

Teniendo esto procedemos a convertir la señal a tiempo discreto.

$$X[n] = x(nT_s)$$

Sustituyendo $t = nT_s$ en cada término

1) $3\cos(1000\pi t) = 3\cos(1000\pi n T_s) = 3\cos\left(1000\pi \cdot \frac{n}{12000}\right)$

$$= 3\cos\left(\frac{\pi n}{12}\right)$$

2) $5\sin(2000\pi t) = 5\sin(2000\pi n T_s) = 5\sin\left(\frac{2000\pi n}{12000}\right)$

$$= 5\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)$$

3) $10\cos(11000\pi t) = 10\cos(11000\pi n T_s) = 10\cos\left(\frac{11000\pi n}{12000}\right)$

$$= 10\cos\left(\frac{11\pi n}{12}\right)$$

Finalmente

$$X[n] = 3\cos\left(\frac{\pi n}{12}\right) + 5\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right) + 10\cos\left(\frac{11\pi n}{12}\right)$$

Esta sería la versión digital exacta de la señal analógica como fue muestrada correctamente ($F_s = 12000$ Hz) no se pierde información ni hay aliasing.

Cada valor de $X[n]$ representa el valor de la señal en un instante de tiempo $t = \frac{n}{F_s}$

3) Datos del ejercicio

Señal 1:

$$X_1(t) = A\cos(\omega_0 t), \text{ donde } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Señal 2:

$$X_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{T}{4} \\ -1 & \text{si } \frac{T}{4} \leq t < \frac{3T}{4} \\ 1 & \text{si } \frac{3T}{4} \leq t < T \end{cases}$$

Fórmula para hallar la distancia media entre dos señales

$$d(X_1, X_2) = \bar{P}_{X_1 - X_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |X_1(t) - X_2(t)|^2 \, dt$$

Solución: Hallar la distancia media entre $X_1(t)$ y $X_2(t)$

Como $X_2(t)$ es por tramos nos queda

$$d(X_1, X_2) = \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/4} (A\cos(\omega_0 t) - 1)^2 \, dt + \int_{T/4}^{3T/4} (A\cos(\omega_0 t) + 1)^2 \, dt + \int_{3T/4}^{T} (A\cos(\omega_0 t) - 1)^2 \, dt\right]$$

Institución Curso Nota

A continuación calculamos cada integral:

Recordemos que:

$$|A\cos(w_0t) \pm 1|^2 = A^2\cos^2(w_0t) \pm 2A\cos(w_0t) + 1$$

Entonces,

Observando notamos que los tramos 1 y 3 son simétricos

Sean I_1, I_2 e I_3 las integrales 1, 2, 3 respectivamente

$$I_1 = \int_0^{T/4} (A\cos(w_0t) - 1)^2\,dt$$

$$I_2 = \int_{T/4}^{3T/4} (A\cos(w_0t) + 1)^2\,dt$$

$$I_3 = \int_{3T/4}^{T} (A\cos(w_0t) - 1)^2\,dt$$

Entonces

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{T}(I_1 + I_2 + I_3)$$

Luego para I_1:

$$I_1 = \int_0^{T/4} (A^2\cos^2(w_0t) - 2A\cos(w_0t) + 1)\,dt$$

Usamos $\cos^2(w_0t) = \dfrac{1 + \cos(2w_0t)}{2}$

$$I_1 = \int_0^{T/4} \left[A^2\frac{1 + \cos(2w_0t)}{2} - 2A\cos(w_0t) + 1\right] dt$$

$$I_1 = \frac{A^2}{2}\int_0^{T/4} 1\,dt + \frac{A^2}{2}\int_0^{T/4} \cos(2w_0t)\,dt - 2A\int_0^{T/4} \cos(w_0t)\,dt + \int_0^{T/4} 1\,dt$$

Evaluando

$$\int_0^{T/4} 1\,dt = \frac{T}{4}$$

$$\int_0^{T/4} \cos(2\omega_0 t)\,dt = \left.\frac{\sin(2\omega_0 t)}{2\omega_0}\right|_0^{T/4} = \frac{\sin(\pi)}{2\omega_0} - 0 = 0$$

$$\int_0^{T/4} \cos(\omega_0 t)\,dt = \left.\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}\right|_0^{T/4} = \frac{\sin(\pi/2)}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0}$$

Sustituyendo

$$I_1 = \frac{A^2}{2} \cdot \frac{T}{4} + 0 - 2A \cdot \frac{1}{\omega_0} + \frac{T}{4} = \frac{A^2 T}{8} - \frac{2A}{\omega_0} + \frac{T}{4}$$

integral 2 (I_2), de Forma análoga

$$I_2 = \int_{T/4}^{3T/4} \left[\frac{A^2}{2}\left(1 + \cos(2\omega_0 t)\right) + 2A\cos(\omega_0 t) + 1\right] dt$$

- $$\frac{A^2}{2}\int_{T/4}^{3T/4} 1\,dt = \frac{A^2}{2} \cdot \frac{T}{2} = \frac{A^2 T}{4}$$

- $$\int_{T/4}^{3T/4} \cos(2\omega_0 t)\,dt = \left.\frac{\sin(2\omega_0 t)}{2\omega_0}\right|_{T/4}^{3T/4} = \frac{\sin(3\pi) - \sin(\pi)}{2\omega_0} = 0$$

- $$2A\int_{T/4}^{3T/4} \cos(\omega_0 t)\,dt = \left.\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}\right|_{T/4}^{3T/4} = \frac{1}{\omega_0}\left[\sin(3\pi/2) - \sin(\pi/2)\right]$$

$$= \frac{1}{\omega_0}(-1-1) = \frac{-2}{\omega_0}(2A) = \frac{-4A}{\omega_0}$$

$$I_2 = \frac{A^2 T}{4} - \frac{4A}{\omega_0} + \frac{T}{2}$$

$I_3 = I_1$ (Por simetría)

Por último

$$d(X_1, X_2) = I_1 + I_2 + I_3$$

Términos con $A^2 T$

$$\frac{A^2 T}{8} + \frac{A^2 T}{4} + \frac{A^2 T}{8} = \frac{A^2 T}{2}$$

Términos con $-A/\omega_0$

$$-\frac{2A}{\omega_0} - \frac{4A}{\omega_0} - \frac{2A}{\omega_0} = -\frac{8A}{\omega_0}$$

Términos con T

$$\frac{T}{4} + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} = T$$

Resumen de las integrales

$$I_1 = \frac{A^2 T}{8} - \frac{2A}{\omega_0} + \frac{T}{4}$$

$$I_2 = \frac{A^2 T}{4} - \frac{4A}{\omega_0} + \frac{T}{2}$$

$$I_3 = \frac{A^2 T}{8} - \frac{2A}{\omega_0} + \frac{T}{4}$$

Por lo tanto:

$$d(X_1, X_2) = \frac{1}{T}\left[\frac{A^2 T}{2} - \frac{8A}{\omega_0} + T\right]$$

En términos de π

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{1}{\omega_0} = \frac{T}{2\pi}$$

$$\frac{8A}{\omega_0} = 8A \cdot \frac{T}{2\pi} = \frac{4AT}{\pi}$$

Entonces

$$d(X_1, X_2) = \frac{1}{T}\left[\frac{A^2 T}{2} - \frac{4AT}{\pi} + T\right]$$

$$d(X_1, X_2) = \frac{A^2}{2} - \frac{4A}{\pi} + 1$$

4) Datos del ejercicio:

- $x(t)$ es una señal definida en el intervalo $[t_i, t_f]$
- Queremos calcular la serie de Fourier exponencial de $x(t)$, pero utilizando su segunda derivada $x''(t)$.
- Fórmula para los coeficientes C_n, que debemos demostrar

$$C_n = \frac{1}{(t_f - t_i) n^2 \omega_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- Obtener los coeficientes a_n y b_n de la serie trigonometrica a partir de $x''(t)$.
- Hacer el analisis del espectro.

Solución

La serie exponencial de Fourier de una función periódica $x(t)$ con periodo T se escribe como:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

y sus coeficientes se calculan como

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_i}^{t_f} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Donde $T = t_f - t_i$ (porque estamos en un intervalo)

Deducimos la fórmula de C_n usando $x''(t)$ (trasladar de $x(t)$ a $x''(t)$)

$u = x(t) \Rightarrow du = x'(t)\, dt$

$dv = e^{-jn\omega_0 t} dt \Rightarrow v = \dfrac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}$

Entonces

$$\int_{t_i}^{t_f} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \left. \frac{x(t) e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \right|_{t_i}^{t_f} + \frac{1}{jn\omega_0} \int_{t_i}^{t_f} x'(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Luego

$u = x'(t) \Rightarrow du = x''(t)\, dt$

$dv = e^{-jn\omega_0 t} dt \Rightarrow v = \dfrac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}$

Institución Curso Nota

Entonces

$$\int_{t_i}^{t_F} x'(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \left.\frac{x'(t)\, e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\right|_{t_i}^{t_F} + \frac{1}{jn\omega_0} \int_{t_i}^{t_F} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

Ahora, sustituyendo en C_n

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_i}^{t_F} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$C_n = \frac{1}{T} \Bigg[\cancel{\left.\frac{x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\right|_{t_i}^{t_F} + \left.\frac{x'(t)\, e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\right|_{t_i}^{t_F}} + \frac{1}{(jn\omega_0)^2} \int_{t_i}^{t_F} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \Bigg]$$

$\rightarrow 0$

Entonces Como $T = (t_F - t_i)$

$$C_n = \frac{1}{T(jn\omega_0)^2} \int_{t_i}^{t_F} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{Tn^2\omega_0^2} \int_{t_i}^{t_F} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

- Obtener los Coeficientes a_n y b_n de la serie trigonometrica de Fourier a partir de $x''(t)$.

Serie trigonometrica de Fourier

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

Relación entre C_n y a_n, b_n

$$\left. a_n = 2\Re\{C_n\},\ n > 0 \right\} a_n = \text{parte rea de } C_n$$

$$\left. b_n = -2\Im\{C_n\},\ n > 0 \right\} b_n = \text{parte imaginaria de } C_n$$

Entonces podemos decir que

$$a_n = \frac{2}{T n^2 \omega_0^2} \Re \left\{ \int_{t_i}^{t_F} x''(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right\}$$

$$b_n = \frac{-2}{T n^2 \omega_0^2} \Im \left\{ \int_{t_i}^{t_F} x''(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right\}$$