B - spline

2022 年 10 月 20 日

1 样条

定义 1.1 给定区间 $[a,b]$ 上的节点 $a=t_1<\cdots<t_N=b$, 称函数 $S(x)$ 是这些节点上的 n 次样条, 若
1. $S|_[t_i,t_{i+1}]$ 是次数 $\le n$ 的多项式, $\forall 0\le i\le N$
2. $S\in C^{n-1}[a,b]$

1 次样条就是这些节点上的分段折线.
那么在 $N+1$ 个节点上确定一个 n 次的样条函数 $S(x)$, 需要给出这些节点上多少个值呢? 在一个区间上定义一个 n 次多项式需要 $n+1$ 个值, $N+1$ 个节点构成了 N 个子区间, 因此要在这些子区间上定义 n 次多项式需要 $N(n+1)$ 个值. 而为了保证连接处的 C^{n-1} 的光滑性, 两个相邻的多项式在公共节点处需要保证 $k(0\le k\le n-1)$ 阶导数值相等, 即每两个相邻的多项式之间有 n 个值是相同的. 因此, 为了在 $N+1$ 个节点上确定一个 n 次的样条函数 $S(x)$ 需要

$$(n+1)N-n(N-1)=N+n$$

个值.

定义 1.2 固定 $x\in\mathbb{R}$ 和 $n\in\mathbb{N}$, 定义

$$(x-t)_+^n \triangleq \begin{cases}(x-t)^n & ,t\le x\\ 0 & ,t>x\end{cases}$$

设 $S(x)$ 是 n 次样条函数, 设 $S|_{[t_0,t_1]}=p_1(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, 设 $S|_{[t_1,t_2]}=p_2(x)$. 那么有 $p_2(x)=p_1(x)+a_{n-1}(x-t_1)_+^n(a_{n+1}\in\mathbb{R})$, 易见

$$p_1^{(r)}(t_1)=p_2^{(r)}(t_1),\quad \forall 0\le r\le n-1$$

因此 $S|_{[t_0,t_1]}=p_1(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+(x-t_1)_+^n$. 递归得到

$$S(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+\sum_{j=1}^{N-1}a_{n+j}(x-t_j)_+^n$$

这个式子有 $N+n$ 个未知参数, 正好与之前所推的需要 N+n 个条件对应. 从这个式子也可以看到

$$1,x,\cdots,x^n,(x-t_1)_+^n,\cdots,(x-t_{N-1})_+^n$$

组成了 n 次样条函数线性空间的一组基.

2 B-样条

首先将样条的定义扩展到 $\mathbb{R}$ 上, 即考虑 $\mathbb{R}$ 上的节点

$$\cdots < t_{-2} < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$$

定义 2.1 0 次 B 样条定义为

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1, & t_i < x \le t_{i+1} \\ 0, & else \end{cases}$$

n 次 B 样条递归地定义为

$$B_i^n(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+n} - t_i} B_i^{n-1}(x) + \frac{t_{i+n+1} - x}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} B_{i+1}^{n-1}(x) \tag{1}$$

从这个递归定义可以看出, 要定义一个 n 次 B 样条, 需要 n+2 个节点.

命题 2.1 *(非负性) 1.* $\mathrm{supp} B_i^n = [t_i, t_{i+n+1}]$
2. $B_i^n(x) > 0, x \in (t_i, t_{i+n+1})$

也就是说, 一个 n 次的 B 样条会“覆盖” $n+1$ 个子区间, 次数越高, ” 覆盖” 的范围越大.

命题 2.2 当 $n \ge 2$,

$$\frac{d}{dx} B_i'(x) = \frac{n}{t_{i+n} - t_i} B_i^{n-1}(x) - \frac{n}{t_{i+n+1} - t_{i+1}} B_{i+1}^{n-1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

对于 $n = 1$, 上式在 t_i, t_{i+1}, t_{i+2} 以外的地方成立, 因为这些点处的导数无定义.

命题 2.3 *(unity)*

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} B_i^n(x) = 1, \quad \forall n \ge 0$$

证明命题2.3需要用到以下两个命题:

命题 2.4 *(Marsden's Identity)* $\forall n \ge 0$,

$$(t - x)^n = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (t - t_{i+1}) \cdots (t - t_{i+n}) B_i^n(x)$$

命题 2.5

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} x^r = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sigma_r (t_{i+1}, \cdots, t_{i+n}) B_i^n(x), \quad \forall n \ge r \ge 0$$

其中 $\sigma_r(x_1, \cdots, x_n)$ 表示不重复地取 $\{x_i\}$ 中的 r 个相乘, 再将所有这样的项相加. 例如 $\sigma_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

命题2.3就是命题2.5中 $r = 0$ 的情形.

命题 2.6 对于任意一个节点 t_j, $\forall n \ge 1$

$$(t_j - x)_+^n = \sum_{i=\infty}^{j-n-1} (t_j - t_{i+1}) \cdots (t_j - t_{i+n}) B_i^n(x)$$

定理 2.1 *对于给定节点 $a = t_1 < \cdots < t_N = b$, $n \geq 0$, n 次的 B 样条 $\{B_i^n(x)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 n 次样条空间的一组基, 因此 $\{B_i^n(x)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 也称为 B 样条基函数.*

证明: $n = 0$ 时显然成立.
由第1节知,

$$1, x, \cdots, x^n, (x - t_1)_+^n, \cdots, (x - t_{N-1})_+^n \tag{2}$$

是 n 次样条空间的一组基.
易知

$$(t_i - x)_+^n = (t_i - x)^n + (-1)^{n+1}(x - t_i)_+^n, \quad \forall n \geq 1$$

因此我们可以把 $(x - t_i)_+^n$ 用 $(t_i - x)_+^n$ 代替. 由命题2.5和命题2.6知, (2) 可以由 $\{B_i^n(x)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 线性表示. 又因为 $\{B_i^n(x)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是线性无关的, 因此 $\{B_i^n(x)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 n 次样条空间的一组基.

3 均匀 B 样条基函数

如果相邻节点之间是等距的, 那么称以上定义的 B 样条为均匀 B 样条. 不妨设 $t_i = i$.
均匀 B 样条具有以下性质:

命题 3.1 *(平移性) $B_i^n(x) = B_{i+1}^n(x+1), \quad \forall -\infty < x < \infty$*

命题 3.2 *(对称性) $B_i^n(x)$ 关于它的支撑集 $\mathrm{supp} B_i^n = [i, i+n+1]$ 的中心对称*

$$B_i^n(x) = B_i^n(2i + n + 1 - x) \quad \forall -\infty < x < \infty$$

均匀 B 样条可以直接写出节点处的值:

定理 3.1 *对于节点 $t_i = i$ 的均匀 B 样条, 有*

$$B_0^n(j) = \begin{cases} \frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{j-1}(-1)^r \begin{pmatrix} n+1 \\ r \end{pmatrix} (j-r)^n, & 1 \leq j \leq n \\ 0, & \text{else} \end{cases}, \forall j \in \mathbb{Z}$$

4 De Boor's algorithm

定义 4.1 *k 次的 B 样条曲线定义为*

$$C(t) = \sum_i P_i B_i^k(t)$$

其中 P_i 是控制点, t 是参数, $B_i^k(t)$ 是节点向量为 t_i 的 B 样条基函数.

这里的 P_i 是 n 维空间中的一组点, $C(t)$ 是 n 维空间中的一条参数曲线. 当 $n = 3$ 时, 就是在 CAD 软件中见到的 B 样条曲线, 控制点就是在 CAD 软件中由用户指定的点.
设 $\hat{t} \in [t_j, t_{j+1})$, 下面计算 $C(\hat{t}) = \sum_i P_i B_i^k(\hat{t})$.

因为 $B_i^k(t)$ 的支集是 $[t_i, t_{i+k+1}]$, 所以对 $\hat{t}$ 有贡献的只有 $B_i^k(t), j-k \le i \le j$, 那么

$$\begin{aligned}
C(\hat{t}) &= \sum_{i=j-k}^{j} P_i B_i^k(\hat{t}) \\
&= \sum_{i=j-k}^{j} P_i \left(\frac{\hat{t}-t_i}{t_{i+k}-t_i} B_i^{k-1}(\hat{t}) + \frac{t_{i+k+1}-\hat{t}}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(\hat{t}) \right) \\
&= \sum_{i=j-k}^{j} P_i \frac{\hat{t}-t_i}{t_{i+k}-t_i} B_i^{k-1}(\hat{t}) + \sum_{i=j-k}^{j} P_i \frac{t_{i+k+1}-x}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(\hat{t}) \\
&= \sum_{i=j-k}^{j} P_i \frac{\hat{t}-t_i}{t_{i+k}-t_i} B_i^{k-1}(\hat{t}) + \sum_{i=j-k+1}^{j+1} P_{i-1} \frac{t_{i+k}-\hat{t}}{t_{i+k}-t_i} B_i^{k-1}(\hat{t}) \\
&= \sum_{i=j-k}^{j} P_i \frac{\hat{t}-t_i}{t_{i+k}-t_i} B_i^{k-1}(\hat{t}) + \sum_{i=j-k}^{j} P_{i-1} \frac{t_{i+k}-\hat{t}}{t_{i+k}-t_i} B_i^{k-1}(\hat{t}) \\
&= \sum_{i=j-k}^{j} \left(\frac{\hat{t}-t_i}{t_{i+k}-t_i} P_i + \frac{t_{i+k}-\hat{t}}{t_{i+k}-t_i} P_{i-1} \right) B_i^{k-1}(\hat{t})
\end{aligned}$$

令

$$P_i^{[1]}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} P_i + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_i} P_{i-1}$$

那么 $C(\hat{t})$ 可以写成

$$C(\hat{t}) = \sum_{i=j-k}^{j} P_i^{[1]}(\hat{t}) B_i^{k-1}(\hat{t})$$

把 $P_i^{[1]}$ 看作一个新的控制点, 可以继续按照以上方式展开, 得到

$$C(\hat{t}) = \sum_{i=j-k}^{j} P_i^{[r]}(\hat{t}) B_i^{k-r}(\hat{t})$$

其中,

$$P_i^{[r]}(t) = \begin{cases} P_i, & r = 0 \\ \dfrac{t-t_i}{t_{i+k-r+1}-t_i} P_i^{[r-1]}(t) + \dfrac{t_{i+k-r+1}-t}{t_{i+k-r+1}-t_i} P_{i-1}^{[r-1]}(t), & r > 0 \end{cases}$$

当 $r = k$ 时, 有

$$C(\hat{t}) = \sum_{i=j-k}^{j} P_i^{[k]} B_i^0(\hat{t})$$

又由 $B_i^0(t)$ 的定义得,

$$C(\hat{t}) = P_j^{[k]}(\hat{t})$$

不难发现, $P_i^{[r]}(t)$ 实际上是 $P_i^{[r-1]}(t)$ 和 $P_{i-1}^{[r-1]}(t)$ 的凸组合.
计算 $C(\hat{t})$ 的递推关系如下图所示:

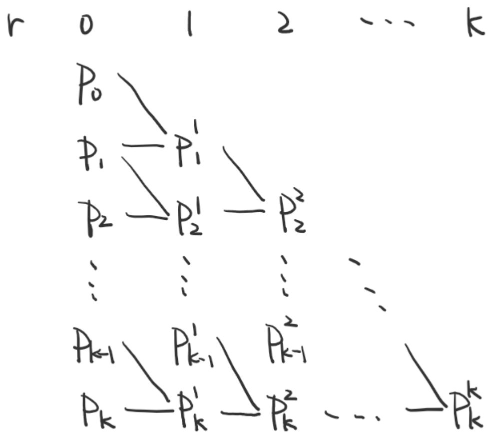

图 1: De Boor 算法递推示意图