Voronoi and Delaunay

2022 年 5 月 1 日

1 记号

1. $\mathcal{P} = \{\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n\} \subset \mathbb{R}^d$

   $\mathcal{P}$ 中的元素称为 site，$\mathcal{P}$ 称为 sites. d 是维数, 将会在后面频繁用到.

2. $\mathbf{V}(\boldsymbol{p}_i) \triangleq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_d : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}_i\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}_j\|, \forall j \neq i\}$

   称为 $\boldsymbol{p}_i$ 的 Voronoi 区域 (Voronoi region/cell)

2 Voronoi diagram

$\mathcal{P}$ 的 Voronoi 图是它的 Voronoi 区域的集合 $\{V(\boldsymbol{p_i}) : 1 \leq i \leq n\}$。当 $d = 2$ 时，如下图所示。
概念：

1. 与两个 site 等距的点的集合，称为 bisector（二维中是两点的垂直平分线）。

2. 称点集 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ 是非退化的，若任意 $k(1 \leq k \leq d)$(感觉书上这里不应该是 d 应该是 d+1, 还是说三点共线是可以出现的) 个点的仿射壳 [1] 同胚 (homeomorphism) 于 $\mathbb{R}^{k-1}$，且不存在 $d+2$ 个点共球。

   例：点集 $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^3$ 非退化指 $\mathcal{P}$ 中任意三点不能共线 (但可以四点共面) 且任意五点不能共球 ($\mathbb{R}^3$ 中任意不共面的 4 点可以确定一个球)。

其他的构造方式：

1. $\boldsymbol{p}_i$ 的 Voronoi 区域也可以定义为以与 $\boldsymbol{p}_i$ 有关的所有 bisector 为界的闭半空间的交。

性质：

1. $\mathcal{P}$ 的 Voronoi 图是 $\mathbb{R}_d$ 的一个划分。

2. 任一的 bisector 构成 $\mathbb{R}_d$ 的仿射子空间（二维中是直线，三维中是平面）

3. 任一 Voronoi 区域是凸的（$\leftarrow$ 半空间是凸的，凸集的交仍是凸集）

4. 当 site 在 $\mathcal{P}$ 的凸包的边界时，它的 Voronoi 区域是无界的。

5. Voronoi 图有不同维度的元素。二维情形下，一个 k 维的元素是 $3-k$ 个的 Voronoi cell 的交: $k=0$ 为一个 Voronoi 顶点，$k=1$ 为一条 Voronoi 边，$k=2$ 为一个 Voronoi cell。

6. 一个 Voronoi 顶点一般与三个 site 等距，一条 Voronoi 边与两个 site 等距。

3 Delaunay Triangulation

$\mathcal{P}$ 的 Delaunay 三角化是单纯复形 (simplicial complex), 它的一个 k-simplex(单纯形) 由 $k+1$ 个交是非空的 Voronoi cell 对应的 $\mathcal{P}$ 的点构成.
性质:

1. $\mathcal{P}$ 的 Delaunay 三角化包含了 $\mathcal{P}$ 的凸包.
2. 给定 $\mathcal{P}$ 的一个三角化 $\mathcal{T}$, 若 $\mathcal{T}$ 中任何一个 d-simplex 的外接球都不包含 $\mathcal{P}$ 的任一点, 则 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{P}$ 的 Delaunay 三角化.
3. 由 $\mathcal{P}$ 中顶点构成的任一 k-simplex, 如果存在某个球面使这些顶点共球, 且该球不包含 $\mathcal{P}$ 中任意一个点, 则该 k-simplex 使 $\mathcal{P}$ 的 Delaunay 三角化的一个元素 (点线面等).
4. 在二维中, $\mathcal{P}$ 的 Delaunay 三角化是 $\mathcal{P}$ 的所有三角化中**最大化最小角度**的三角化. 这一性质正是 Delaunay 三角化在网格生成中有优势的原因, 因为小的角会在一些算法 (如有限元) 中产生数值问题.

补充知识

仿射壳 (affine hull)
集合 S 在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中的仿射壳是包含 S 的最小仿射集。

$$\mathrm{aff}(S) = \{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i | k > 0, x_i \in S, \alpha_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1\} \tag{1}$$

单纯形 (simplex)
一个简单的理解是: 0-simplex 是一个点, 1-simlpex 是一条线段, 2-simplex 是一个三角形, 3-simplex 是一个四面体, 以此类推. 前面的数字可以理解为维数 k, k-simplex 就是 k 维欧式空间中可以确定一个球 (外接球) 的图形. 单纯复形 (simplicial complex) 则可以理解为由多个单纯形以某种” 简单” 的方式组成.